

复变函数论

复变函数：若在复数平面上存在一个点集 E ，对于 E 中的每一点 z ，按照一定的规律，有一个或多个复数值 w 与之相对应，则说在点集 E 上定义了一个复变函数，记作： $w = f(z)$ ，点集 E 叫作函数的定义域

令： $w = f(z) = u + iv$ ，并将 $z = x + iy$ 代入，则有：

$$\left. \begin{array}{l} z = x + iy \\ w = f(z) = u + iv \end{array} \right\} \Rightarrow w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

初等复变函数：

指数函数： $e^z = e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$

三角函数： $\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz})$, $\tan z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\cot z = \frac{\cos z}{\sin z}$

1) 因为 $\sin(z + 2\pi) = \sin z$, $\cos(z + 2\pi) = \cos z$ ，所以 $\sin z$, $\cos z$ 具有实周期 2π

2) $\sin z$, $\cos z$ 为无界函数。

3) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cos z_2 \mp \sin z_1 \sin z_2$

$$\sin(\pm z_2) = \sin z_1 \cos z_2 \pm \cos z_1 \sin z_2 \quad \sin^2 z + \cos^2 z = 1$$

双曲线函数： $shz = \frac{1}{2}(e^z - e^{-z})$, $chz = \frac{1}{2}(e^z + e^{-z})$, $thz = \frac{shz}{chz}$

对数函数： $w = u + iv = Lnz = \ln|z| + iArgz$

幂函数： $z^\alpha = e^{\alpha Lnz} = e^{\alpha \ln|z|} e^{i\alpha Argz}$ (α 为复常数)

一般指数函数： $\alpha^z = e^{z Lna} = e^{z \ln|a|} e^{zi Arga}$ (α 为复常数)

复变函数的导数： 设函数 $w = f(z)$ 是在区域 E 上定义的单值函数，对于 E 上的某点 z ，如

果极限 $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$ 存在，则称函数 $w = f(z)$ 在点 z 处可导，此极限叫作

函数 $w = f(z)$ 在点 z 处的导数，表示为：

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{df(z)}{dz} = f'(z)$$

复变函数可导的充要条件： 复变函数 $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 可导的充要条件是偏导数

$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial u(x,y)}{\partial y}, \frac{\partial v(x,y)}{\partial x}, \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}$ 存在、连续，并且满足柯西-黎曼条件，即：

$$\frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial v(x,y)}{\partial y}, \quad \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = -\frac{\partial v(x,y)}{\partial x}$$

解析函数(全纯函数, 正则函数): 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点及其邻域内处处可导，那么称 $f(z)$ 在 z_0 点解析。如果 $f(z)$ 在区域 E 内每一点都解析，那么称 $f(z)$ 在 E 内解析，或称 $f(z)$ 为 E 内的一个解析函数。

注: $f(z)$ 在某点 z_0 解析 \Rightarrow 在该点可导 \Rightarrow 该点连续 \Rightarrow 该点有极限

区域解析 \Leftrightarrow 区域可导，即解析函数是函数在一个区域上的性质，而不是在一些孤立点上的性质。解析函数在定义域内的和、差、积、商（分母不为零）仍然为解析函数。

● 设给定二元调和函数 $u(x,y)$ ，作为解析函数 $f(z) = u + iv$ 的实部，由柯西-黎曼条件可求出相应的虚部，进而确定这个解析函数。

设二元函数 $v(x,y)$ 的全微分式为： $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy$

考虑柯西-黎曼条件可得： $dv = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$

$v(x,y)$ 的三种计算方法：

(1) **曲线积分法:** 全微分的线积分与路径无关，可选取特殊路径积分，使积分容易求出

(2) **凑全微分显式法:** 把 $dv = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy$ 凑成全微分的显式，求出 $v(x,y)$ 。

(3) **不定积分法**

例题. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部 $u(x,y) = x^2 - y^2$ ，求虚部和这个解析函数

容易验证 $u(x,y) = x^2 - y^2$ 为调和函数： $\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial y^2} = 2 - 2 = 0$

由柯西-黎曼条件可得： $\frac{\partial v(x,y)}{\partial x} = -\frac{\partial u(x,y)}{\partial y} = 2y$ $\frac{\partial v(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} = 2x$

所以有： $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 2ydx + 2xdy$

(1) 曲线积分法：

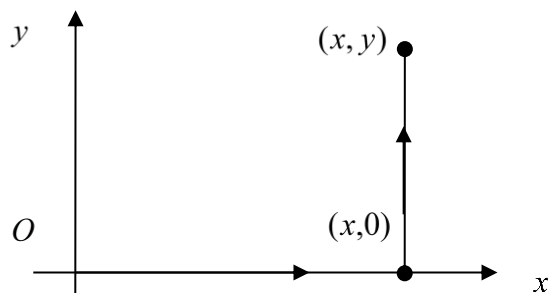


图 1

取如图 1 所示的积分路径，可求出积分

$$v = \int_{(0,0)}^{(x,0)} 2ydx + 2xdy + \int_{(x,0)}^{(x,y)} 2ydx + 2xdy + C = \int_{(x,0)}^{(x,y)} 2ydx + 2xdy + C = 2xy + C$$

其中 C 为积分常数。

(2) 凑全微分显式法: $dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = 2ydx + 2xdy = d(2xy)$

所以有: $v = 2xy + C$

(3) 不定积分法: $\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2x, \quad \frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2y$

把 x 视为参数, $\frac{\partial v(x, y)}{\partial y} = 2x$ 对 y 积分可得: $v = \int 2xdy + \varphi(x) = 2xy + \varphi(x)$

对 $v = 2xy + \varphi(x)$ 求偏导数 $\frac{\partial}{\partial x} v = 2y + \varphi'(x)$

与 $\frac{\partial v(x, y)}{\partial x} = 2y$ 向比较可得: $\varphi'(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = C$

所以由 $v = \int 2xdy + \varphi(x) = 2xy + \varphi(x)$ 可得: $v = 2xy + C$

所以有: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y) = (x^2 - y^2) + i(2xy + C) = z^2 + iC$

可把 $x = \frac{z + z^*}{2}, y = \frac{z - z^*}{2i}$ 代入上式求出

复变函数积分:复变函数的积分归结为两个实变函数的曲线积分:

$$\int_l f(z)dz = \int_l [u(x, y) + iv(x, y)](dx + idy) = \int_l u(x, y)dx - v(x, y)dy + i \int_l v(x, y)dx + u(x, y)dy$$

若曲线 l 由参数方程 $x = x(t), y = y(t), t_1 \leq t \leq t_2$ 给出

则有 $dz = dx + idy = z'(t)dt = x'(t)dt + iy'(t)dt$, 可得积分的计算公式

$$\begin{aligned}
 \int_l f(z)dz &= \int_l [u(x, y) + iv(x, y)](dx + idy) = \int_{t_1}^{t_2} \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}z'(t)dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \{u[x(t), y(t)] + iv[x(t), y(t)]\}[x'(t) + iy'(t)]dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_2} \{u[x(t), y(t)]x'(t) - v[x(t), y(t)]y'(t)\}dt + i \int_{t_1}^{t_2} \{v[x(t), y(t)]x'(t) + u[x(t), y(t)]y'(t)\}dt
 \end{aligned}$$

高阶导数公式

设 $f(z)$ 在区域 E 内是解析的，在闭区域 \bar{E} 上是连续的， l 为 \bar{E} 的边界，对于区域 E 内的任一点 z ， $f(z)$ 可以求导任意多次，第 n 阶导数可表示为：

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{i2\pi} \oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$$

上式可看作在柯西公式 $f(z) = \frac{1}{i2\pi} \oint_l \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta$ 对 z 求 n 次导，其中等式右边在积分号内对

$\frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ 关于 z 求 n 次导。

幂级数：
$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = c_0 + c_1 (z - z_0) + \cdots c_n (z - z_0)^n + \cdots$$

其中：系数 c_n 和固定点 z_0 都是复常数， z 是一个复变量

幂级数收敛半径的比值判别法（达朗贝尔判别法）：
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|c_n|}{|c_{n+1}|} = R$$

幂级数收敛半径的根式判别法（柯西判别法）：
$$R = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} \right]^{-1}$$

奇点法： 幂级数中心 z_0 到最近奇点的距离即为收敛圆的半径 R

收敛圆： $|z - z_0| = R$

泰勒级数：定理： 设函数 $f(z)$ 在区域 E 上是解析的， z_0 为区域 E 内任一点，在区域 E 内的圆 $C: |z - z_0| < R$ 中， $f(z)$ 可以展开为泰勒级数：

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) (z - z_0)^n$$

泰勒级数的收敛半径 R 为 z_0 到区域 E 的边界的最短距离

将函数展开为泰勒级数的方法

1. 直接计算系数 $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ ： **例题.** 以 $z_0 = 0$ 为中心，将 $f(z) = e^z$ 展开为泰勒级数。

解: $f(z) = e^z$ 的各阶导数为 $f^{(n)}(z) = e^z$, $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0 = 0) = \frac{1}{n!} e^z \Big|_{z=z_0=0} = \frac{1}{n!}$

$$\text{所以: } e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

2. 换元法: 例题. 试分别以 $z_0 = 0$ 及 $z_0 = 1$ 为中心将函数 $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ 展开成 Taylor 级数,

并指出其收敛半径.

解: 利用级数 $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$ 来展开 $f(z)$

$$\text{以 } z_0 = 0 \text{ 为中心, 则有: } f(z) = \frac{z-1}{z+1} = \frac{z+1-2}{z+1} = 1 - \frac{2}{1-(-z)} = 1 - 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-z)^n, \quad |z| < 1$$

$f(z)$ 的奇点是 $z = -1$, 从中心 $z_0 = 0$ 到 $z = -1$ 的距离为 1, 所以收敛半径 $R = 1$.

3. 在收敛圆内逐项求导法(求积分法)

例题. 以 $z_0 = 0$ 为中心, 将函数 $f(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$ 展开为 Taylor 级数

解: 已知 $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$, $|z| < 1$, 等式左边对 z 求导, 右边对 z 逐项求导可得:

$$\left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) z^n, \quad |z| < 1$$

洛朗定理: 若函数 $f(z)$ 在环形区域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内解析, 则 $f(z)$ 可在环形区域内任一点

z 展开为罗朗级数, 其形式为: $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$

其中展开系数为: $c_n = \frac{1}{i2\pi} \oint_l \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta$

积分路径 l 为环形区域内绕 z_0 的任一简单闭合曲线。

罗朗级数中 $f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 称为展开式的正则部分, $f_2(z) = \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n (z - z_0)^n$ 称为主要部

分。罗朗级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 在环形区域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内绝对且一致收敛

罗朗级数展开方法举例

例题. 将函数 $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ 在以 $z_0 = 0$ 为中心的环形区域 $0 < |z| < \infty$ 内展开为罗朗级数。

解: $f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \frac{1}{z^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{n-2}}{n!}$

在上式中令 $n-2=l$, 再把 l 写成 n 可得: $f(z) = \frac{e^z}{z^2} = \sum_{n=-2}^{\infty} \frac{z^n}{(n+2)!}$

例题. 已知函数 $f(z) = \frac{1}{z^2-1}$, 以 $z_0=1$ 为中心将函数 $f(z)$ 展开成罗朗级数

解: 已知 $f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+1}$

上式中的第二项 $-\frac{1}{2} \frac{1}{z+1}$ 有一个奇点 $z=-1$, 所以在 $z_0=1$ 为圆心的圆周 $|z-1|<2$ 内,

$-\frac{1}{2} \frac{1}{z+1}$ 可以展开为泰勒级数: $-\frac{1}{2} \frac{1}{z-1+2} = -\frac{1}{4} \frac{1}{1-\frac{z-1}{2}} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{2}\right)^n$

所以有: $f(z) = \frac{1}{z^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{z+1} = \frac{1}{2} \frac{1}{z-1} - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2^{n+2}} (z-1)^n, \quad 0 < |z-1| < 2$

孤立奇点: 若函数 $f(z)$ 在 $z=z_0$ 不可导(或无定义), 而在 z_0 的任意小邻域内除 z_0 外处处可导, 则称点 $z=z_0$ 是 $f(z)$ 的一个孤立奇点。

孤立奇点的分类及其判定

(1) **可去奇点:** 若极限 $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 存在, 则称 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点。

(2) **极点.**

零点: 不恒为零的解析函数 $f(z)$ 如果能表示成 $f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z)$

其中 m 为正整数, $\varphi(z)$ 在点 z_0 点解析, 且 $\varphi(z_0) \neq 0$, 那么 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点。

零点判定定理: 如果函数 $f(z)$ 在 z_0 点解析, 那么 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶零点 \Leftrightarrow

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

例如: $z=1$ 为 $f(z) = z^3 - 1$ 的一阶零点

极点: 如果函数 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 邻域内的罗朗级数中的主要部分为有限项

$$f(z) = \sum_{n=-m}^{\infty} c_n (z-z_0)^n = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_n(z-z_0)^n + \cdots$$

则称 z_0 为函数 $f(z)$ 的 m 阶极点。上式也可表示为 $f(z) = \frac{P(z)}{(z-z_0)^m}$, 其中

$$P(z) = c_{-m} + c_{-(m-1)}(z - z_0) + \cdots + c_{-1}(z - z_0)^{m-1} + c_0(z - z_0)^m + \cdots$$

对于 $P(z)$ ，有 $P(z_0) \neq 0$ 且为 z_0 邻域内的解析函数

(3)本性奇点：函数 $f(z)$ 在其孤立奇点 z_0 邻域内的罗朗级数中的主要部分有无限项

留数概念(Residue)：

若点 z_0 是函数 $f(z)$ 的一个孤立奇点，函数 $f(z)$ 在环形区域 $0 < |z - z_0| < R$ 内解析，则在此环形区域内， $f(z)$ 可展开成罗朗级数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n = \cdots + c_{-n} (z - z_0)^{-n} + \cdots + c_{-1} (z - z_0)^{-1} + c_0 + c_1 (z - z_0)^1 + \cdots + c_n (z - z_0)^n + \cdots$$

罗朗级数 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 的 $(z - z_0)^{-1}$ 项的系数 $c_{-1} = \frac{1}{i2\pi} \oint_C f(z) dz$ 叫作函数 $f(z)$ 在 z_0 点的留数（或残数），记作 $\text{Res}[f(z), z_0]$ 。

留数定理：设函数 $f(z)$ 在简单闭合曲线 C 所围区域 E 内除有限个孤立奇点 z_1, z_2, \cdots, z_n 外处处解析，在闭区域 \bar{E} 上除 z_1, z_2, \cdots, z_n 外连续，则有：

$$\oint_C f(z) dz = i2\pi \sum_{k=1}^n \text{Res}[f(z), z_k]$$

其中沿曲线 C 的积分方向为逆时针方向。

留数的计算

(1) 若 z_0 为 $f(z)$ 的可去奇点， z_0 为中心的罗朗级数中不含负幂次项，则： $\text{Res}[f(z), z_0] = 0$

(2). 若点 z_0 为 $f(z)$ 的一阶极点： $\text{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)]$

若函数 $f(z)$ 可以表示为 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 的特殊形式，其中函数 $P(z)$ 和 $Q(z)$ 都在 z_0 点解析，点

z_0 为 $Q(z)$ 的一阶零点 ($Q(z_0) = 0$)，且 $P(z_0) \neq 0$ ，点 z_0 必为 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ 的一阶极点，则有

$$\text{公式：} \text{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} [(z - z_0)f(z)] = \lim_{z \rightarrow z_0} \left[\frac{P(z)}{\frac{Q(z) - Q(z_0)}{z - z_0}} \right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

(3). 若 z_0 为 $f(z)$ 的 m 阶极点，则函数 $f(z)$ 在环形区域 $0 < |z - z_0| < R$ 内的罗朗级数展开式

$$\text{为：} f(z) = \frac{c_{-m}}{(z - z_0)^m} + \frac{c_{-m+1}}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z - z_0)} + c_0 + c_1(z - z_0) + \cdots$$

可容易得到计算 $f(z)$ 在点 z_0 的留数的公式：

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

(4). 若 z_0 为 $f(z)$ 的本性奇点，求留数采用罗朗级数展开法或直接计算围道积分。

● 复数形式的傅里叶级数：
$$S(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i \frac{k\pi x}{l}}, \quad c_k = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l f(x) e^{-i \frac{k\pi x}{l}} dx,$$

对于复数形式的傅里叶级数，尽管 $f(x)$ 是实变函数，但其傅立叶系数 c_k 却可能是复数。

容易证明：在区间 $[-l, l]$ 上的函数系 $\{e^{i \frac{k\pi x}{l}} : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 有如下性质：

$$\int_{-l}^l e^{i \frac{k\pi x}{l}} (e^{i \frac{m\pi x}{l}})^* dx = \int_{-l}^l e^{i \frac{k\pi x}{l}} e^{-i \frac{m\pi x}{l}} dx = \begin{cases} 0 & k \neq m \\ 2l & k = m \end{cases}$$

δ 函数： 如果一个函数在 $x \in (-\infty, \infty)$ 上满足下列条件：

$$(1) \quad \delta(x - x_0) = \begin{cases} 0, & x \neq x_0 \\ \infty, & x = x_0 \end{cases}$$

$$(2) \quad \int_a^b \delta(x - x_0) dx = \begin{cases} 0, & (a, b \text{ 都} < x_0, \text{ 或都} > x_0) \\ 1, & (a < x_0 < b) \end{cases}$$

这样的函数 $\delta(x - x_0)$ 称为 δ 函数。

δ 函数等价的泛函定义： 若对于任意一个定义在 $(-\infty, \infty)$ 上的连续函数 $f(x)$ 总有：

$$f(x_0) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - x_0) f(x) dx$$

数理方程

分离变量法解题的一般步骤

- (1) 代入试探解 $u(x, t) = X(x)T(t)$ ，将偏微分方程的定解问题通过分离变量转化为常微分方程的定解问题。
- (2) 依据齐次边界条件，确定本征值 $\lambda = \lambda_n$ 和本征函数 $X_n(x)$ 。
- (3) 求解关于 $T(t)$ 的常微分方程的通解 $T_n(t)$ ，把得到的通解与本征函数相乘得到本征解 $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t)$ ，这时本征解 $u_n(x, t)$ 中还包含着任意常数。
- (4) 利用叠加原理，求出定解问题的解 $u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t)$ 。
- (5) 应用本征函数的正交性以及初始条件确定任意常数。

例题：求细杆的导热问题，杆长为 l ，两端保持为摄氏零度，初始温度分布为：

$$u|_{t=0} = \frac{x(l-x)}{l^2}。$$

解：本题的定解问题为：

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ u(x, t)|_{x=0} = 0, \quad u(x, t)|_{x=l} = 0, & (t > 0) \\ u(x, t)|_{t=0} = \frac{x(l-x)}{l^2}, & (0 < x < l) \end{cases}$$

应用分离变量法，设 $u(x, t) = X(x)T(t)$ ，代入到泛定方程和边界条件可得：

$$\textcircled{1} \quad \begin{cases} X''(x) + \lambda X(x) = 0 \\ X(0) = 0, X(l) = 0 \end{cases}$$

$$\textcircled{2} \quad T'(t) + \lambda a^2 T(t) = 0$$

① 式的本征值 $\lambda = \lambda_n = (\frac{n\pi}{l})^2$ ， $(n = 0, 1, 2, \dots)$ ，本征解为 $X_n(x) = A_n \sin \frac{n\pi}{l} x$

② 式的解为： $T_n(t) = B_n e^{-\frac{n\pi a}{l} t}$

则本题的本征解为 $u_n(x, t) = X_n(x)T_n(t) = C_n e^{-\frac{n\pi a}{l} t} \sin \frac{n\pi}{l} x$

其中待定常数 $C_n = A_n B_n$ 。

本题的解 $u(x, t)$ 表示为本征解 $u_n(x, t)$ 的线性叠加：

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-\frac{n\pi a}{l} t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

代入初始条件可得： $u(x, 0) = \frac{x(l-x)}{l^2} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi}{l} x$

$$\text{展开系数为：} C_n = \frac{2}{l} \int_0^l \frac{x(l-x)}{l^2} \sin \frac{n\pi}{l} x dx \Rightarrow \begin{cases} C_{2k+2} = 0 \\ C_{2k+1} = \frac{8}{\pi^3 (2k+1)^3} \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

所以问题的解为： $u(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{8}{\pi^3 (2k+1)^3} \sin \frac{(2k+1)\pi}{l} x e^{-\frac{(2k+1)^2 \pi^2 a^2}{l^2} t}$

用本征函数展开法求解非齐次方程

●齐次边界条件和零初始条件（齐次定解条件）下的非齐次方程的定解问题

例. 设有如下定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x, t), & (0 < x < l, t > 0) \\ V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0 & (t > 0) \\ V|_{t=0} = \frac{\partial V}{\partial t}|_{t=0} = 0, & (0 < x < l) \end{cases}$$

则用本征函数展开法求解的步骤如下:

第一步. 求解相应齐次边界条件的齐次方程的本征解

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0 & (t > 0) \end{cases}$$

由分离变量法 (参考例 1) 可得本征解系 $\left\{ X_n(x) = \sin \frac{n\pi}{l} x, (n = 1, 2, \dots) \right\}$

第二步. 设非齐次方程的本征解为 $V_n(x, t) = T_n(t)X_n(x) = T_n(t)\sin \frac{n\pi}{l} x$, 非齐次方程的解可表示为本征解的线性叠加:

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

第三步. 把非齐次方程中的自由项用本征解系 $\left\{ \sin \frac{n\pi}{l} x, (n = 1, 2, \dots) \right\}$ 展开

$$f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

其中展开系数 $f_n(t)$ 由本征解 $\sin \frac{n\pi}{l} x$ 的正交性求出如下

$$f_n(t) = \frac{2}{l} \int_0^l f(x, t) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

第四步. 把非齐次方程的解 $V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$ 和 $f(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$ 代入到定解

问题中的泛定方程可得:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} &= a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x, t) \Rightarrow \\ \sum_{n=1}^{\infty} T_n''(t) \sin \frac{n\pi}{l} x &= \sum_{n=1}^{\infty} -a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x \end{aligned}$$

考虑到本征解 $\sin \frac{n\pi}{l} x$ 的正交性，由上式可得：

$$T_n''(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t)$$

同理，把非齐次方程的解 $V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$ 代入到初始条件可得：

$$\begin{aligned} V|_{t=0} = \frac{\partial V}{\partial t}|_{t=0} = 0 &\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} T_n(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = \sum_{n=1}^{\infty} T_n'(0) \sin \frac{n\pi}{l} x = 0 \\ &\Rightarrow T_n(0) = T_n'(0) = 0 \end{aligned}$$

则可得关于 $T_n(t)$ 的定解问题：

$$\begin{cases} T_n''(t) + a^2 \left(\frac{n\pi}{l}\right)^2 T_n(t) = f_n(t) \\ T_n(0) = T_n'(0) = 0 \end{cases}$$

上式可由拉普拉斯变换来求解，所得的解如下：

$$T_n(t) = f_n(t) * \frac{l}{an\pi} \sin \frac{an\pi}{l} t = \frac{l}{an\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l} (t - \tau) d\tau$$

第五步. 把 $T_n(t)$ 代入 $V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} V_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) \sin \frac{n\pi}{l} x$ 得到非齐次方程的定解问题的解为：

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{l}{an\pi} \int_0^t f_n(\tau) \sin \frac{an\pi}{l} (t - \tau) d\tau \right] \sin \frac{n\pi}{l} x$$

由上面的推导可知解满足泛定方程，齐次边界条件和零初始条件。

对于齐次边界条件和非零初始条件的非齐次方程的定解问题的求解，可由叠加定理化为齐次边界条件和非零初始条件的齐次方程，以及齐次边界条件和零初始条件的非齐次方程的定解问题的线性叠加。

例. 已知如下的齐次边界条件和非零初始条件的非齐次方程的定解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + f(x, t), & (0 < x < l, t > 0) \\ U|_{x=0} = U|_{x=l} = 0 & (t > 0) \\ U|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial U}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), & (0 < x < l) \end{cases}$$

令 $U(x, t) = V(x, t) + W(x, t)$ ，由叠加定理可得如下两个关于 $V(x, t)$ 和 $W(x, t)$ 的定解问题：

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + f(x, t), & (0 < x < l, t > 0) \\ V|_{x=0} = V|_{x=l} = 0 & (t > 0) \\ V|_{t=0} = \frac{\partial V}{\partial t}|_{t=0} = 0, & (0 < x < l) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 W}{\partial x^2}, & (0 < x < l, t > 0) \\ W|_{x=0} = W|_{x=l} = 0 & (t > 0) \\ W|_{t=0} = \varphi(x), \frac{\partial W}{\partial t}|_{t=0} = \psi(x), & (0 < x < l) \end{cases}$$

关于 $V(x, t)$ 和 $W(x, t)$ 的定解问题的线性叠加即为原来的定解问题。它们的求解可用前面介绍的特征函数展开法以及分离变量法求解。

二阶线性常微分方程的标准形式为：

$$\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + p(x) \frac{dy(x)}{dx} + q(x)y(x) = 0$$

例如：勒让德方程：

$$(1-x^2) \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - 2x \frac{d\Theta}{dx} + n(n+1)\Theta = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 \Theta}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{d\Theta}{dx} + \frac{n(n+1)}{(1-x^2)} \Theta = 0$$

例如：贝塞尔方程：

$$x^2 y''(x) + xy'(x) + (x^2 - n^2)y(x) = 0$$

$$\Rightarrow y''(x) + \frac{1}{x} y'(x) + \frac{x^2 - n^2}{x^2} y(x) = 0$$

二阶线性常微分方程中的函数 $y(x)$ ， $p(x)$ 和 $q(x)$ 在某个区间 $[a, b]$ 内为实函数，而对方程级数解法的讨论需要在复数 z 平面上进行。

不失一般性，我们讨论复变函数 $w(z)$ 的二阶线性常微分方程

$$\frac{d^2 w(z)}{dz^2} + p(z) \frac{dw(z)}{dz} + q(z)w(z) = 0 \quad (1)$$

在满足初始条件 $w(z_0) = C_0$ ， $w'(z_0) = C_1$ 下的级数解，其中 C_0 ， C_1 为任意给定的复常数。

施图姆—刘维尔(SL)本征值问题

施图姆—刘维尔(SL)型方程：形式为 $\frac{d}{dx}[p(x)\frac{dy}{dx}] - q(x)y + \lambda\rho(x)y = 0, (a \leq x \leq b)$ 的二阶常微分方程称为施图姆—刘维尔(SL)型方程，其中： $p(x)$ 为核函数， $\rho(x)$ 为权函数， λ 为分离变量过程中引入的参数。

注：一般的二阶常微分方程 $y'' + a(x)y' + b(x)y + \lambda c(x)y = 0$ ，乘上函数 $e^{\int a(x)dx}$ 就可以化成施图姆—刘维尔(SL)型方程：

$$\frac{d}{dx}[e^{\int a(x)dx} y'] + [b(x)e^{\int a(x)dx} y + \lambda[c(x)e^{\int a(x)dx} y] = 0$$

施图姆—刘维尔(SL)本征值问题：在一定的边界条件下，求解施图姆—刘维尔(SL)型方程的 λ 值(本征值)以及相应的非零解(本征函数)。

如：在施图姆—刘维尔(SL)方程中：

(1) 取 $p(x) = 1 - x^2$ ， $q(x) = 0$ ， $\rho(x) = 1$ ，两边界点 $a = -1$ ， $b = 1$ ，以及自然边界条件 $y(-1)$ 和 $y(1)$ 为有限值，则可构成如下的勒让德方程本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}] + \lambda y = 0 \Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + \lambda y = 0 \\ \text{自然边界条件: } y(-1)\text{有限, } y(1)\text{有限} \end{cases}$$

(2) 取 $p(x) = 1 - x^2$ ， $q(x) = \frac{m^2}{1-x^2}$ ， $\rho(x) = 1$ ，两边界点 $a = -1$ ， $b = 1$ ，以及自然边界条件 $y(-1)$ 和 $y(1)$ 为有限值，则可构成如下的连带勒让德方程本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[(1-x^2)\frac{dy}{dx}] - \frac{m^2}{1-x^2}y + \lambda y = 0 \Rightarrow (1-x^2)\frac{d^2 y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + (\lambda - \frac{m^2}{1-x^2})y = 0 \\ \text{自然边界条件: } y(-1)\text{有限, } y(1)\text{有限} \end{cases}$$

(3) 取 $p(x) = x$ ， $q(x) = \frac{n^2}{x}$ ， $\rho(x) = x$ ，两边界点 $a = 0$ ， $b = R$ ，以及边界条件 $y(0)$ 有限， $y(R) = 0$ ，则可构成如下的贝塞尔方程本征值问题

$$\begin{cases} \frac{d}{dx}[x\frac{dy}{dx}] - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0 \Rightarrow x\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - \frac{n^2}{x}y + \lambda xy = 0 \\ y(0)\text{有限, } y(R) = 0 \end{cases}$$

方程的常点：如果方程(1)的系数函数 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在选定的 z_0 点的邻域内都是解析的，则称点 z_0 为方程(1)的常点。

● 方程常点邻域内的级数解：

定理：如果 $p(z)$ 和 $q(z)$ 在圆 $|z - z_0| < R$ 内是单值解析的，则方程(1)在这圆内存在唯一的解析解 $w(z)$ 满足初始条件 $w(z_0) = C_0$ ， $w'(z_0) = C_1$ ，其中 C_0 ， C_1 为任意给定的复常数。

既然方程(1)在常点 z_0 的邻域 $|z - z_0| < R$ 内存在唯一的解析解 $w(z)$ ，则 $w(z)$ 可表示为此邻域

上的泰勒级数： $w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ ， $(|z - z_0| < R)$

其中系数 $a_0, a_1, \dots, a_2, \dots$ 待定。

例如：勒让德方程 $\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2} \frac{dy}{dx} + \frac{n(n+1)}{1-x^2} y = 0$

其中 $p(x) = -\frac{2x}{1-x^2}$ ， $q(x) = \frac{n(n+1)}{1-x^2}$ ， 则 $x=0$ 为其常点， 根据常点邻域内级数解的定理，

勒让德方程在 $x=0$ 的邻域内具有泰勒级数形式的解 $y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$ 。

● 勒让德(Legendre)方程的导出

勒让德方程来源于在球坐标系下用分离变量法求解偏微分方程。

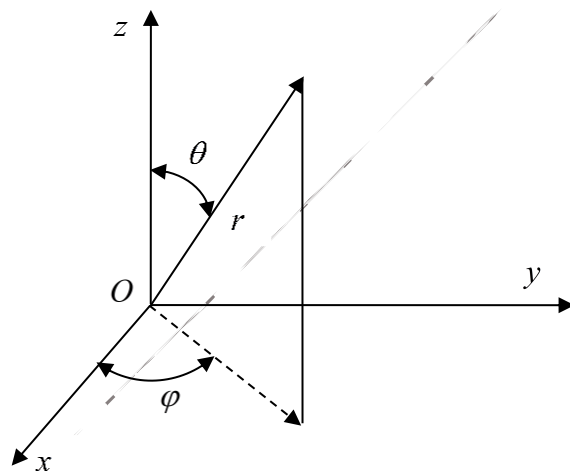


图 8-1

如图 8-1 为球坐标系的示意图，球坐标与直角坐标的关系为：

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta$$

三维拉普拉斯方程在球坐标系下的表达式为：

$$\nabla^2 u = 0 \Rightarrow \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = 0$$

应用分离变量法求解，令 $u(r, \theta, \varphi) = R(r)\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$ ，代入方程可得：

$$\Theta\Phi \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + R\Phi \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + R\Theta \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0$$

用 $\frac{r^2}{R\Theta\Phi}$ 乘以上式可得：

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$$

等式左端只与 r 有关，右端只与 θ, φ 有关，要使等式成立只有左右两端都等于一个常数，令这一常数为 $n(n+1)$ ，则可得：

$$\textcircled{1} \quad \frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) = n(n+1) \Rightarrow r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0$$

$$\textcircled{2} \quad -\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) - \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = n(n+1)$$

$$\Rightarrow \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + n(n+1) \sin^2 \theta = -\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2}$$

其中①式为欧拉型方程，令 $r = e^t$ ，参考第七章例 4 可得其通解解为：

$$R(r) = A_1 r^n + A_2 r^{-(n+1)}$$

②式中等式左端只与 θ 有关，右端只与 φ 有关，由周期性条件 $\Phi(\varphi + 2\pi) = \Phi(\varphi)$ 可令等式两端都等于常数 $m^2 (m = 0, 1, 2, \dots)$ ，则可得：

$$-\frac{1}{\Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} = m^2 \Rightarrow \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + m^2 \Phi = 0 \Rightarrow \Phi(\varphi) = B_1 \cos m\varphi + B_2 \sin m\varphi$$

$$\textcircled{3} \quad \frac{\sin \theta}{\Theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + n(n+1) \sin^2 \theta = m^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + [n(n+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta}] \Theta = 0$$

上式③称为 n 阶连带勒让德方程。

在③式中作变量替换，令 $x = \cos \theta$ ，有 $|x| \leq 1$ ，令 $\Theta(\theta) = y(x)$ ，则可得：

$$\frac{d\Theta}{d\theta} = \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\theta} = -\sin \theta \frac{dy}{dx}$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) = \frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{dx} (-\sin^2 \theta \frac{dy}{dx}) \frac{dx}{d\theta} = \frac{d}{dx} [(1-x^2) \frac{dy}{dx}]$$

则③式的 n 阶连带勒让德方程可化为：

$$\frac{d}{dx} [(1-x^2) \frac{dy}{dx}] + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}] y = 0$$

亦即：
$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + [n(n+1) - \frac{m^2}{1-x^2}]y = 0$$

其值为有限的解是连带勒让德多项式 $P_n^m(x)$ 。

当 $m=0$ 时，在这种条件下 $u(r, \theta, \varphi)$ 与 φ 无关，则 n 阶连带勒让德方程可进一步简化为勒让德方程：

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0$$

总结：球坐标系中三维拉普拉斯方程的解为：

$$\begin{aligned} u(r, \theta, \varphi) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} R(r) \Theta(\theta) \Phi(\varphi) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (A_{n,m} r^n + B_{n,m} r^{-(n+1)}) P_n^m(\cos \theta) \cos m\varphi + \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=m}^{\infty} (C_{n,m} r^n + D_{n,m} r^{-(n+1)}) P_n^m(\cos \theta) \sin m\varphi \end{aligned}$$

● 勒让德方程和自然边界条件构成的本征值问题

在球坐标系中分离变量已得勒让德方程：

$$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2} - 2x\frac{dy}{dx} + n(n+1)y = 0 \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{2x}{1-x^2}\frac{dy}{dx} + \frac{n(n+1)}{1-x^2}y = 0$$

勒让德方程的解在边界 $x = +1, -1$ 为有限值的自然边界条件

勒让德多项式的微分表示（罗德里格斯公式）：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

勒让德多项式为勒让德方程 $(1-x^2)\frac{d^2\Theta}{dx^2} - 2x\frac{d\Theta}{dx} + n(n+1)\Theta = 0$ 满足自然边界条件，即

在两端点 $x = \pm 1$ 处为有限值的本征解。

勒让德多项式的积分表示（拉普拉斯积分）：由复变函数中解析函数的高阶导数公式，可把勒让德多项式的微分式表示为如下的围道积分：

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n = \frac{1}{i2\pi} \frac{1}{2^n} \oint_C \frac{(z^2 - 1)^n}{(z - x)^{n+1}} dz$$

其中 C 为复数 z 平面上围绕 $z = x$ 的任一闭合围道。

勒让德多项式的母函数（生成函数）公式：

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n, \quad |x| \leq 1, |z| < 1$$

函数 $\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}}$ 称为勒让德多项式 $P_n(x)$ 的母函数。

勒让德多项式的正交性: 作为 SL 本征值问题的正交关系的例子, 勒让德多项式在区间 $[-1,1]$ 上满足如下正交关系:

$$\int_{-1}^1 P_n(x)P_m(x)dx = 0, \quad m \neq n, \quad \int_{-1}^1 P_n(x)P_n(x)dx = N_n^2 = \frac{2}{2n+1}$$

把 x 变回到变量 $x = \cos \theta$, 则可得正交关系:

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta)P_m(\cos \theta) \sin \theta d\theta = 0, \quad m \neq n$$

$$\int_0^\pi P_n(\cos \theta)P_n(\cos \theta) \sin \theta d\theta = N_n^2 = \frac{2}{2n+1}$$

傅里叶—勒让德级数

定理: 若任意函数 $f(x)$ 在区间 $[-1,1]$ 内分段光滑, 则 $f(x)$ 可展开为傅里叶—勒让德级数:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

其中展开系数: $a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(x)P_n(x)dx$

当 x 为 $f(x)$ 的连续点时, 则级数收敛于 $f(x)$; 当 x 为 $f(x)$ 的间断点时, 则级数收敛于

$$\frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)].$$

例题. 求半径为 $r=1$ 的球外静电势分布。已知球外静电势 u 满足拉普拉斯方程, 设 u 只是 r, θ 的函数。已知定解问题为:

$$\begin{cases} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) = 0 \\ u|_{r=1} = \cos \theta \end{cases}$$

解: 应用分离变量法, 设 $u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, 代入泛定方程可得:

$$\frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) = 0 \Rightarrow \frac{1}{R} \frac{d}{dr} (r^2 \frac{dR}{dr}) = -\frac{1}{\sin \theta} \frac{1}{\Theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) = n(n+1)$$

所以可得: ① $r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + 2r \frac{dR}{dr} - n(n+1)R = 0$

② $\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + n(n+1)\Theta = 0$

其中①式为欧拉型方程, 其通解为: $R_n(r) = A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}$; ②式为勒让德方程, 其在两

个端点为有限值，即 $|\Theta(\cos 0)| = |\Theta(1)| < \infty$ ， $|\Theta(\cos \pi)| = |\Theta(-1)| < \infty$ 的本征解为勒让德多项式 $\Theta_n(\theta) = P_n(\cos \theta)$ 。

本例题的本征解可表示为： $u_n(r, \theta) = [A_n r^n + B_n r^{-(n+1)}] P_n(\cos \theta)$

通常选取无穷远处为零电势点，即 $\lim_{r \rightarrow \infty} u_n(r, \theta) = 0$ ，所以应当取 $A_n = 0$

本例题的解可表示为本征解的线性叠加：

$$u(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(r, \theta) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{1}{r^{n+1}} P_n(\cos \theta)$$

其中展开系数 B_n 可由边界条件 $u|_{r=1} = \cos^2 \theta$ 确定。代入边界条件 $u|_{r=1} = \cos^2 \theta$ 可得：

$$u(r, \theta)|_{r=1} = \cos^2 \theta = \sum_{n=0}^{\infty} B_n P_n(\cos \theta)$$

应用比较系数法可得：

$$\cos^2 \theta = B_0 P_0(\cos \theta) + B_1 P_1(\cos \theta) + B_2 P_2(\cos \theta) = B_0 + B_1 \cos \theta + B_2 \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1)$$

$$\Rightarrow B_0 = \frac{1}{3}, B_1 = 0, B_2 = \frac{2}{3}$$

$$\text{本例题的解为: } u(r, \theta) = \frac{1}{3} \frac{1}{r} + \frac{2}{3} \frac{1}{r^3} \frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta - 1) = \frac{1}{3r} + \frac{1}{r^3} (\cos^2 \theta - \frac{1}{3})$$