《概率与统计》内容总结与习题：古典概率

课本例题、习题分类：

1. 事件的关系与运算：§1.3例1-2；习题一1.1, 1.2
2. 古典概型：§1.4例1-4；习题一1.4-1.9
3. 几何概型：§1.4例5；习题一1.10-1.12
4. 加法定理：§1.5例1-2；习题一1.13-1.20
5. 条件概率、乘法法则：§1.6例1-2；习题一1.21-1.23
6. 全概率公式、贝叶斯公式：§1.7例1-5；习题一1.25-1.29
7. 事件的独立性：§1.8例1-4；习题一1.30-1.35
8. 独立实验序列：§1.9例1-4；习题一1.36-1.40

以下课本上没有详细讲、课堂上补充的内容也属于本课程的考察范围：

定义 1 (**事件σ代数**). 由样本空间Ω的某些子集组成的集族$\mathscr{F}$，如果满足：

1. $\Omega \in \mathscr{F}$；

2. 对逆封闭：若$A \in \mathscr{F}$，则$\overline{A} \in \mathscr{F}$；

3. 对可列并封闭：对任意集列$\{A_n \in \mathscr{F}\}_{n\geq 1}$，有$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$，

则称$\mathscr{F}$为Ω上的事件σ代数，$\mathscr{F}$中的集合称为随机事件，简称事件。

定义 2 (**概率的公理化定义**). 设$\mathscr{F}$是样本空间Ω上的事件σ代数。若函数$P : \mathscr{F} \to \mathbb{R}$满足以下条件

1. 非负性：对任意$A \in \mathscr{F}$，均有$P(A) \geq 0$；

2. 规范性：$P(\Omega) = 1$；

3. 可列可加性：若事件序列$\{A_n\}_{n\geq 1}$两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n),$$

则称$P(\cdot)$为$\mathscr{F}$上的概率测度，$P(A)$称为事件A的概率。

定义 3 (**概率空间**Probability space). 以下三部分

1. 样本空间Ω；

2. Ω上的事件σ代数$\mathscr{F}$；

3. $\mathscr{F}$上的概率测度$P(\cdot)$

组成的三元组$(\Omega, \mathscr{F}, P)$称为概率空间。

补充习题（本部分习题未涵盖本章的全部主要内容，仅为课本例题、习题的补充）：

1. 判断以下论述是否正确并说明理由：

   (1) 概率为零的事件是不可能事件；

   (2) 概率为一的事件必然发生；

   (3) 事件A与B都有正概率，且$AB = \varnothing$，则A与B有可能相互独立；

2. 选择题

   (1) 设A, B, C为三个事件，则事件“A, B, C中恰有两个发生”可表示为

   (A) $AB + BC + CA$;　　(B) $AB\overline{C} + \overline{A}BC + A\overline{B}C$;

   (C) $A + B + C$;　　(D) $\overline{ABC}$.

(2) A与B是两个随机事件，若$AB=\varnothing$，则称这两个随机事件是

(A) 对立; (B) 独立; (C) 互斥; (D) 相容.

(3) 以事件A表示“产品甲畅销而产品乙滞销”，则其对立事件$\overline{A}$为

(A) “甲畅销而乙滞销”; (B) “甲滞销且乙滞销”;

(C) “甲畅销或乙滞销”; (D) “甲滞销或乙畅销”.

(4) 设A与B为任意二事件，则与$A+B=B$<u>不等价</u>的是

(A) $A\subset B$; (B) $\overline{B}\subset\overline{A}$; (C) $A\overline{B}=\varnothing$; (D) $\overline{A}B=\varnothing$.

(5) 设A与B为任意两个不相容事件，且均有正概率，则必有

(A) 事件$\overline{A}$与$\overline{B}$互不相容; (B) 事件$\overline{A}$与$\overline{B}$相容;

(C) $P(A\overline{B})=P(\overline{B})$; (D) $P(A+\overline{B})=P(\overline{B})$.

(6) 将一枚均匀硬币独立地重复掷三次，则恰好出现两次正面的概率为

(A) 0.125; (B) 0.250; (C) 0.375; (D) 0.500.

(7) 设A与B互为对立事件，则下列各式<u>不成立</u>的是

(A) $P(\overline{A}\ \overline{B})=0$; (B) $P(AB)=0$; (C) $P(A+B)=1$; (D) $P(B|A)=1$.

(8) 设A,B,C为任意三个事件，且$AB\subset C$，则$P(C)$

(A) 等于$P(A-B)$; (B) 不大于$P(A)-P(B)$;

(C) 等于$P(AB)$; (D) 不小于$P(A)-P(\overline{B})$.

(9) 对任意二事件A与B，$P(A-B)=$

(A) $P(A)-P(B)$; (B) $P(A)+P(\overline{B})-P(AB)$;

(C) $P(A)-P(AB)$; (D) $P(A)-P(B)+P(\overline{A}B)$.

(10) 设$B \subset A$，则

(A) $P(\overline{AB}) = 1 - P(A)$;　　(B) $P(A|\overline{B}) = P(A)$;

(C) $P(\overline{B} - \overline{A}) = P(\overline{B}) - P(\overline{A})$;　　(D) $P(B|A) = P(B)$.

(11) 袋中有5个球：3个白球，2个黑球。每次取1个，无放回地抽取3次，则第3次抽到白球的概率为

(A) $\frac{3}{5}$;　　(B) $\frac{5}{8}$;　　(C) $\frac{2}{4}$;　　(D) $\frac{3}{10}$.

(12) 设$P(AB) = 0$，则

(A) $P(A) = 0$或$P(B) = 0$;　　(B) 事件A与B互不相容;

(C) $P(A - B) = P(A)$;　　(D) 事件A与B相互独立.

(13) 将一枚硬币独立地掷两次，设$A_1 =$“第一次出现正面”，$A_2 =$“第二次出现正面”，$A_3 =$“正、反各出现一次”，$A_4 =$“出现两次正面”，则

(A) A_1, A_2, A_3相互独立;　　(B) A_2, A_3, A_4相互独立;

(C) A_1, A_2, A_3两两独立;　　(D) A_2, A_3, A_4两两独立.

(14) 对任意事件A与B，有

(A) 若$AB \neq \varnothing$，则A与B一定独立;

(B) 若$AB \neq \varnothing$，则A与B有可能独立;

(C) 若$AB = \varnothing$，则A与B一定独立;

(D) 若$AB = \varnothing$，则A与B一定不独立.