14.3 多元函数的极值

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 求函数 $z=x^2-x(y+3)+y^2$ 的极值.

解: 先求出 z 的一阶偏导数和二阶偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x-y-3,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-x+2y.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=2,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-1.$$

令 $z_x=0$ 和 $z_y=0$, 求出唯一的稳定点为: $P_0(x_0,y_0)=(2,1)$. 在 P_0 点

$$\boldsymbol{H}_f(P_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2\end{pmatrix}.$$

注意到 $A=C=2>0$ 在 $B=-1$, 而 H=det $\boldsymbol{H}_f(P_0)=3>0$, , 因此 (2, 1) 是 f 的极小值点, 极小值是 $f(2,1)=-3$. □

例 2 讨论函数 $z=x^3-3xy^2$ 的极值.

解: 先求出一阶偏导数和二阶偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2-3y^2,\qquad \frac{\partial z}{\partial y}=-6xy.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=-6x,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=-6y.$$

令 $z_x=0$ 和 $z_y=0$, 求出唯一的稳定点为: $P_0(x_0,y_0)=O(0,0)$. 在 P_0 点

$$\boldsymbol{H}_z(P_0)=\begin{pmatrix} z_{xx}(P_0) & z_{xy}(P_0) \\ z_{yx}(P_0) & z_{yy}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

因此用极值的充分性条件无法判断是否取得极值. 但是如果考虑过原点的一条直线 $y=x$, 沿此直线函数变为 $f(x,x)=-2x^3$. 显然在零点附近, 函数 $f(x,x)=-2x^3$ 是变号的, 因此不能取得极值. 这个曲面称为 “猴鞍面”. □

例 3 求函数 $f(x,y)=x^2+y^2-x\mathrm{e}^{-y^2}$ 的最小值.

解: 函数 $f(x,y)=x^2+y^2-x\mathrm{e}^{-y^2}$ 的定义域显然是 $\mathbb{R}^2$. 先求出稳定点:

$$\frac{\partial f}{\partial x}=2x-\mathrm{e}^{-y^2},\qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2y+2xy\mathrm{e}^{-y^2},$$

令 $f_x(x,y)=0$ 在 $f_y(x,y)=0$, 可以求得该函数的唯一稳定点为

$$P_0(x_0,y_0)=\big(\frac{1}{2},0\big).$$

又当 $\|P(x,y)\|=\sqrt{x^2+y^2}\to\infty$ 时,

$$f(x,y)\to+\infty.$$

因此, 函数 $f(x,y)$ 一定能取得最小值, 现在稳定点唯一, 故该稳定点 $(1/2,0)$ 是函数 $f(x,y)$ 的最小值点, 且最小值为

$$f(x_0,y_0)=f\big(\frac{1}{2},0\big)=-\frac{1}{4}.$$

□

例 4 *设 a 是一个正数, 求三个正数, 使其和为最小, 其积为 a.*

解: 设所欲求的三个数分别为 x 在 y 和 z. 由所给的条件, 有 $xyz=a$. 因此要求最小值的目标函数是

$$u=x+y+z=x+y+\frac{a}{xy}\qquad x>0,\quad y>0.$$

先求偏导数:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=1-\frac{a}{x^2y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=1-\frac{a}{xy^2}.$$

令 $u_x=0,u_y=0$, 则有:

$$x^2y=a=xy^2.$$

由此得 $x=y=\sqrt[3]{a}$, 即目标函数 u 在所讨论的区域 (第一象限) 中唯一的稳定点为 $(x_0,y_0)=(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})$. 对于现在的问题, 目标函数显然有一个下界为零, 又当 $x\to0$ 或 $y\to0$ 时, 或当 $x\to+\infty$ 或 $x\to+\infty$ 时, 均有 $u\to+\infty$. 因此此问题一定有最小值. 又因为目标函数 U 在第一象限是可微的, 只有一个稳定点, 所以该稳定点一定是最小值点. 此时 $z_0=a/x_0y_0=\sqrt[3]{a}$, 即所欲求的三个数是

$$x=y=z=\sqrt[3]{a}.$$

三数之和的最小值是

$$u(\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a},\sqrt[3]{a})=3\sqrt[3]{a}.$$

□

思考题

1. 用极值的充分条件所判断得出的极值一定是严格的极值, 为什么?

解: 因为 H 是严格大于零的, 若 $A>0$, 于是得到

$$m=A+C-\sqrt{(A+C)^2-4H}>0$$

所以 $\triangle f>0$, 是严格成立的, 即在 P_0 的领域 $B_\epsilon(P_0)$ 中

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)>0.$$

在 $B_\epsilon(P_0)$ 中 $f(x,y) > f(x_0,y_0)$, 恒成立, 所以 $f(P_0)$ 是严格极大值. 同理当 $A<0$ 时, 有

$$M = A + C + \sqrt{(A+C)^2 - 4H} < 0$$

所以 $\triangle f < 0$, 是严格成立的, 即在 P_0 的领域 $B_\epsilon(P_0)$ 中

$$f(x,y) - f(x_0,y_0) < 0.$$

在 $B_\epsilon(P_0)$ 中 $f(x,y) < f(x_0,y_0)$, 恒成立, 所以 $f(P_0)$ 是严格极小值.

□

2. 非极值的稳定点附近, 曲面具有怎样的形状?

解: 例如: 函数 $z = xy$, 先求出一阶偏导数和二阶偏导数:

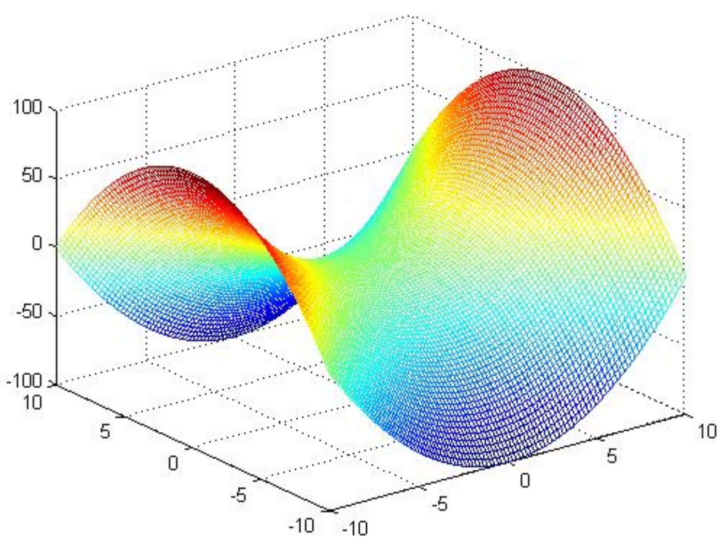
$$\frac{\partial z}{\partial x} = y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 1, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0.$$

令 $z_x = 0$ 和 $z_y = 0$, 求出唯一的稳定点为: $P_0(x_0,y_0) = (0,0)$. 在 P_0 点

$$\boldsymbol{H}_z(P_0) = \begin{pmatrix} z_{xx}(P_0) & z_{xy}(P_0) \\ z_{yx}(P_0) & z_{yy}(P_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

H=det $\boldsymbol{H}_f(P_0) = -1 < 0$, 所以 $(0,0)$ 点不是极值点. □



,

3. 二元可微函数的稳定点是曲面上具有水平切平面的点吗?

解: 不是. 例如: 非极值的稳定点 □

4. 为什么一元连续函数的性质 “若开区间内只有唯一的极值点则其必是最值点” 不能推广到二元函数的情形?

解: 极值相对于局部. 最值相对于整个定义域.

例如: $y = x^3 + 2x^2 + x$ 它的定义域是 $(—\infty, +\infty)$. 它存在极值, 但没有最值. □

习题

1. 求下列二元函数的极值.

(1) $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 4x - 2y + 4$;

(2) $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy$;

(3) $f(x,y) = x^3y + xy^3 - xy$;

(4) $z = (x^2 + y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$.

解: (1) 先求出 f 的一阶偏导数和二阶偏导数:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x + y - 4, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 2y - 2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 1.$$

令 $f_x = 0$ 和 $f_y = 0$, 求出唯一的稳定点为: $P_0(x_0, y_0) = (2, 0)$.

在 P_0 点处, 有

$$\boldsymbol{H}_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

注意到 $A = C = 2 > 0$, $B = 1$, 而 H=det $\boldsymbol{H}_f(P_0) = 3 > 0$, , 因此 (2, 0) 是 f 的极小值点, 极小值是 $f(2,1) = 0$.

(2) 先求出 f 的一阶偏导数和二阶偏导数:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 - 3x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3.$$

令 $z_x = 0$ 和 $z_y = 0$, 求出稳定点为: $P_0(x_0, y_0) = (2, 1), P_1(x_1, y_1) = (1, 1)$.

在 P_0 点处, 有

$$\boldsymbol{H}_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 H=det $\boldsymbol{H}_f(P_0) = -9\ 0$, , 因此 (0, 0) 不是 f 的极值点.

在 P_1 点处, 有

$$\boldsymbol{H}_f(P_1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_1) & f_{xy}(P_1) \\ f_{yx}(P_1) & f_{yy}(P_1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

注意到 $A = C = 6 > 0$, $B = -3$, 而 H=det $\boldsymbol{H}_f(P_1) = 27 > 0$, , 因此 (1, 1) 是 f 的极小值点, 极小值是 $f(1,1) = -1$.

(3) 先求出 f 的一阶偏导数和二阶偏导数:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2y + y^3 - y, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2 + x^3 - x.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6xy, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3x^2 + 3y^2 - 1.$$

令 $f_x = 0$ 和 $f_y = 0$, 有

$$\begin{cases} y(3x^2 + y^2 - 1) = 0 \\ x(3y^2 + x^2 - 1) = 0 \end{cases} \tag{1}$$

由方程（1)可得

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ 3y^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{3}$$

$$\begin{cases} y = 0 \\ 3y^2 + x^2 - 1 = 0 \end{cases} \tag{4}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \tag{5}$$

解方程（3)可得

$$\begin{cases} x^2 = \frac{1}{2} \\ y^2 = \frac{1}{2} \end{cases}$$

解方程（4)可得

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 = 1 \end{cases}$$

解方程（5)可得

$$\begin{cases} x^2 = 1 \\ y = 0 \end{cases}$$

于是 f 稳定点为:

$$P_0(x_0, y_0) = (0, 0), P_1(x_1, y_1) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), P_2(x_2, y_2) = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}),$$

$$P_3(x_3, y_3) = (\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}), P_4(x_4, y_4) = (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}),$$

$$P_5(x_5, y_5) = (1, 0), P_6(x_6, y_6) = (-1, 0), P_7(x_7, y_7) = (0, 1), P_8(x_8, y_8) = (0, -1).$$

在 P_0 点处, 有

$$\boldsymbol{H}_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0) \\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 H=det $\boldsymbol{H}_f(P_0) = -1 < 0,$, 因此 $(0, 0)$ 不是 f 的极值点. 在 P_1, P_2 点处, 有

$$\boldsymbol{H}_f(P_1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_1) & f_{xy}(P_1) \\ f_{yx}(P_1) & f_{yy}(P_1) \end{pmatrix} = \boldsymbol{H}_f(P_2) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_2) & f_{xy}(P_2) \\ f_{yx}(P_2) & f_{yy}(P_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

注意到 $A = C = \dfrac{3}{2} > 0$, $B = \dfrac{1}{2}$, 而 H=det $\boldsymbol{H}_f(P_1) = \boldsymbol{H}_f(P_2) = 2 > 0$,

因此 $(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}), (-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2})$ 是 f 的极小值点, 极小值是 $f(\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}) = f(-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}) = -\dfrac{1}{8}$.

在 P_3, P_4 点处, 有

$$\boldsymbol{H}_f(P_3) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_3) & f_{xy}(P_3) \\ f_{yx}(P_3) & f_{yy}(P_3) \end{pmatrix} = \boldsymbol{H}_f(P_4) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_4) & f_{xy}(P_4) \\ f_{yx}(P_4) & f_{yy}(P_4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

注意到 $A = C = -\dfrac{3}{2} < 0$, $B = \dfrac{1}{2}$, 而 H=det $\boldsymbol{H}_f(P_3) = \boldsymbol{H}_f(P_4) = 2 > 0$,

因此 $(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}), (-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2})$ 是 f 的极大值点, 极大值是 $f(\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{2}) = f(-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}) = \dfrac{1}{8}$.

在 P_5, P_6 点处, 有

$$\boldsymbol{H}_f(P_5) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_5) & f_{xy}(P_5) \\ f_{yx}(P_5) & f_{yy}(P_5) \end{pmatrix} = \boldsymbol{H}_f(P_6) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_6) & f_{xy}(P_6) \\ f_{yx}(P_6) & f_{yy}(P_6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 H=det $\boldsymbol{H}_f(P_5) = \boldsymbol{H}_f(P_6) = -4 < 0$, 因此 $(1, 0), (-1, 0)$ 不是 f 的极值点.

在 P_7, P_8 点处, 有

$$\boldsymbol{H}_f(P_7) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_7) & f_{xy}(P_7) \\ f_{yx}(P_7) & f_{yy}(P_7) \end{pmatrix} = \boldsymbol{H}_f(P_8) = \begin{pmatrix} f_{xx}(P_8) & f_{xy}(P_8) \\ f_{yx}(P_8) & f_{yy}(P_8) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

注意到 H=det $\boldsymbol{H}_f(P_7) = \boldsymbol{H}_f(P_8) = -4 < 0$,

因此 $(0, 1), (0, -1)$ 不是 f 的极值点.

(4) 先求出 z 的一阶偏导数和二阶偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} &= 2x\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} + \left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) \\ &= (2x - 2x^3 - 2xy^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial y} &= 2y\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} + \left(x^2+y^2\right)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2y) \\ &= (2y - 2y^3 - 2yx^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= (2 - 6x^2 - 2y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} + (2x - 2x^3 - 2xy^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)} \cdot (-2x) \\ &= (2 - 10x^2 - 2y^2 + 4x^4 + 4x^2y^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= (2-6y^2-2x^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}+(2y-2y^3-2yx^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\cdot(-2y)\\ &= (2-10y^2-2x^2+4y^4+4y^2x^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=(4x^3y-8xy+4xy^3)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}.$$

令 $z_x=0$ 和 $z_y=0$, 得

$$\begin{cases}(2x-2x^3-2xy^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}=0\\(2y-2y^3-2yx^2)\mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}=0\end{cases}\tag{6}$$

化简 (6) 得

$$\begin{cases}x(1-x^2-y^2)=0\\y(1-x^2-y^2)=0\end{cases}\tag{7}$$

解方程 (7)

求出稳定点为: $P_0(x_0,y_0)=(0,0),\{P(x,y)|x^2+y^2\}$.

在 P_0 点处, 有

$$\boldsymbol{H}_f(P_0)=\begin{pmatrix}z_{xx}(P_0)&z_{xy}(P_0)\\z_{yx}(P_0)&z_{yy}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&0\\0&2\end{pmatrix}.$$

注意到 $A=C=2>0$ 在 $B=0$, 而 H=det $\boldsymbol{H}_z(P_0)=4>0$, , 因此 (0, 0) 是 z 的极小值点, 极小值是 $z(0,0)=0$.

在 $\{P(x,y)|x^2+y^2\}$ 曲线上, 有

$$\boldsymbol{H}_z(P)=\begin{pmatrix}z_{xx}(P)&z_{xy}(P)\\z_{yx}(P)&z_{yy}(P)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4x^2\mathrm{e}^{-1}&-4xy\mathrm{e}^{-1}\\-4xy\mathrm{e}^{-1}&-4y^2\mathrm{e}^{-1}\end{pmatrix}.$$

注意到 $A=C=-4x^2\mathrm{e}^{-1}<0$ 在 $B=-4xy\mathrm{e}^{-1}$, 而

$$H=\det\boldsymbol{H}_f(P)=32x^2y^2\mathrm{e}^{-1}>0,$$

因此 $\{P(x,y)|x^2+y^2\}$ 是 z 的极大值点, 极大值是 $z=\mathrm{e}^{-1}$.

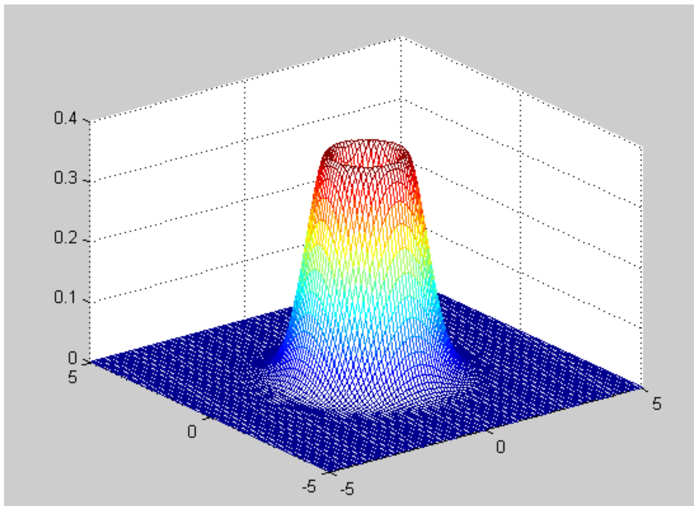
□

2. 设 $f(x,y)=(y-x^2)(y-3x^2)$. 证明: (1) 函数 $f(x,y)$ 在原点无极值; (2) 沿过原点的任意直线, 函数 $f(x,y)$ 均在原点取得极值.

解: (1) (i) 当 $y=0$ 时, $f(x,y)=3x^4\triangleq g_1(x)$, 则

$$g_1'(x)=12x^3,\quad g_1^{"}=36x^2.$$

令 $g_1'(x)=0$, 解得 $x=0$. 又因为 $g_1^{"}=36x^2>0$, 所以 $x=0$ 是 $g_(x)$ 的极小值点. 进一步可得 $x=0$ 点是当 $y=0$ 时, $f(x)$ 的极小值点.



,

图 1: 1.4.4

(ii) 当 $y=2x^2$ 时, $f(x,y)=-x^4 \triangleq g_2(x)$, 则

$$g_2'(x)=-4x^3, \quad g_2^{"}=-12x^2.$$

令 $g_2'(x)=0$, 解得 $x=0$. 又因为 $g_2^{"}=-12x^2<0$, 所以 $x=0$ 是 $g_2(x)$ 的极大值点. 进一步可得 $x=0$ 是当 $y=2x^2$ 时, $f(x)$ 的极大值点. 综上所述: 函数 $f(x,y)$ 在原点无极值.

(2) 设过原点的任意直线为 $y=kx$,

(i) 当 $k=0$ 即 $y=0$ 时, 由上面 (1)(i) 可知, 函数 $f(x,y)$ 均在原点取得极小值.

(ii) 当 $k\neq 0$ 时, $f(x,y)=(kx-x^2)(kx-3x^2)\triangleq h(x)$, 则

$$h'(x)=(k-2x)(kx-3x^2)+(kx-x^2)(k-6x),$$

$$h^{"}(x)=2(k^2-16kx+16x^2).$$

因为 $h'(0)=0$, 所以 $x=0$ 是 $h(x)$ 的稳定点, 又由 $h''(0)=2k^2>0$, 所以 $x=0$ 是 $h_(x)$ 的极小值点.

因此沿过原点的任意直线, 函数 $f(x,y)$ 均在原点取得极小值.

□

3. 求函数在指定范围内的最大值与最小值:

(1) $z=xy$ 在 $\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$;

(2) $z=x^2+xy-y^2$ 在 $\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$.

解: (1) (i) 先求出 z 的稳定点

$$\frac{\partial z}{\partial x}=y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x,$$

令 $z_x=0, z_y=0$, 可求得 z 的唯一稳定点 $P_0(x_0,y_0)=(0,0)$, 且有

$$z(0,0)=0.$$

(ii) 求函数 $z=xy$ 在边界 $x^2+y^2=4$ 处的最值. 不妨设 $x=2\cos\theta, y=2\sin\theta(0\leqslant\theta<2\pi)$, 于是得到

$$z=4\cos\theta\sin\theta=2\sin 2\theta.$$

① 当 $\sin 2\theta=1$ 时, 即 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 或 $\theta=\frac{5\pi}{4}$ 时, 有 $z_{\max}=2$, 此时的点的坐标为 $(\sqrt{2},\sqrt{2})$ 或 $(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

② 当 $\sin 2\theta=-1$ 时, 即 $\theta=\frac{3\pi}{4}$ 或 $\theta=\frac{7\pi}{4}$ 时, 有 $z_{\min}=-2$, 此时的点的坐标为 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$ 或 $(\sqrt{2},-\sqrt{2})$.

综上: $z=xy$ 在 $\{(x,y)|x^2+y^2\le 4\}$ 中的最大值是 $z_{\max}=z(\sqrt{2},\sqrt{2})=z(-\sqrt{2},-\sqrt{2})=2$, 最小值是 $z_{\min}=z(\sqrt{2},-\sqrt{2})=z(\sqrt{2},-\sqrt{2})=-2$.

(2) 先求出 z 的稳定点

$$\frac{\partial z}{\partial x}=2x+y,\quad \frac{\partial z}{\partial y}=x-2y,$$

令 $z_x=0, z_y=0$, 可求得 z 的唯一稳定点 $P_0(x_0,y_0)=(0,0)$, 且有

$$z(0,0)=0.$$

(ii) 记 $D=\{(x,y)||x|+|y|\le 1\}$, 求函数 $z=x^2+xy-y^2$ 在 D 的边界上的最值.

因为 D 的边界为

$$\Gamma_1: x+y=1(x\geqslant 0,y\geqslant 0),\qquad \Gamma_2: x-y=1(x\geqslant 0,y\leqslant 0),$$

$$\Gamma_3: -x+y=1(x\leqslant 0,y\geqslant 0),\qquad \Gamma_4: -x-y=1(x\leqslant 0,y\leqslant 0),$$

① 在 Γ_1 上, $y=1-x$, 于是有

$$z(x,1-x)=x^2+x(1-x)-(1-x)^2=-x^2+3x-1\triangleq g(x).$$

在区间 $x\in[0,1]$ 上, 因为 $g'(x)=2x+3>0$, 所以在边界 Γ_1 上,

$$z_{\max}=g_{\max}=g(1)=1.$$

$$z_{\min}=g_{\min}=g(0)=-1.$$

② 在 Γ_2 上, $y=x-1$, 于是有

$$z(x,x-1)=x^2+x(x-1)-(x-1)^2=x^2+2x-1\triangleq h(x).$$

在区间 $x\in[0,1]$ 上, 因为 $h'(x)=2x+2>0$, 所以在边界 Γ_2 上,

$$z_{\max}=h_{\max}=h(1)=1.$$

$$z_{\min}=h_{\min}=h(0)=-1.$$

③ 在 Γ_3 上, $y=x+1$, 于是有

$$z(x,x+1)=x^2+x(x+1)-(x+1)^2=x^2-x-1\triangleq f(x).$$

在区间 $x\in[-1,0]$ 上, 因为 $h'(x)=2x-1<0$, 所以在边界 Γ_3 上,

$$z_{\max}=f_{\max}=f(-1)=1.$$

$$z_{\min}=f_{\min}=f(0)=-1.$$

④ 在 Γ_4 上, $y=-x-1$, 于是有

$$z(x,-x-1)=x^2+x(-x-1)-(-x-1)^2=-x^2-3x-1\triangleq p(x).$$

在区间 $x\in[-1,0]$ 上, 因为 $p'(x)=-2x-3>0$, 所以在边界 Γ_4 上,

$$z_{\max}=p_{\max}=p(-1)=1.$$

$$z_{\min}=p_{\min}=p(0)=-1.$$

综上: $z=x^2+xy-y^2$ 在 $\{(x,y)||x|+|y|\leq 1\}$ 中的
最大值是 $z_{\max}=z(1,0)=z(-1,-0)=1$,
最小值是 $z_{\min}=z(0,1)=z(0,-1)=-1$.

□

---

4. 求三角形, 使得其三个角的正弦之积取得最大值.

解: 解法一: 设 $\triangle ABC$ 的三个角的正弦之积 S, 则

$$S=\sin A\sin B\sin C,\qquad (\text{且满足}\sin A>0,\sin B>0,\sin C>0)$$

由算术平均值不等式 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 均为正数,

$$x_1\cdot x_2\cdot\cdots\cdot x_n\leqslant\left(\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}\right)^n,$$

等号成立当且仅当 $x_1=x_2=\cdots=x_n$, 可得:

$$S=\sin A\sin B\sin C\leqslant\left(\frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)^3,$$

当 $\sin A=\sin B=\sin C$ 时, 等号成立.

即当 $A=B=C$ 时, S 取到最大值.

解法二: 设 $\triangle ABC$ 的三个角的正弦之积 S, 则

$$S=\sin A\sin B\sin(\pi-A-B)C, \qquad (\text{且满足}\sin A>0,\sin B>0)$$

于是有

$$S(A,B)=\sin A\sin B\sin(A+B)$$

求 S 的稳定点, 首先先求一阶偏导和二阶偏导,

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial A} &= \cos A\sin B\sin(A+B)+\sin A\sin B\cos(A+B)\\ &= \sin B(\cos A\sin(A+B)+\sin A\cos(A+B))\\ &= \sin B\sin(2A+B).\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial S}{\partial B} &= \cos B\sin A\sin(A+B)+\sin B\sin A\cos(A+B)\\ &= \sin A(\cos B\sin(A+B)+\sin B\cos(A+B))\\ &= \sin A\sin(A+2B).\end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 S}{\partial A^2}=\sin B\cos(2A+B)\cdot 2,$$
$$\frac{\partial^2 S}{\partial B^2}=\sin A\cos(2B+A)\cdot 2,$$
$$\frac{\partial^2 S}{\partial A\partial B}=\cos B\sin(2A+B)+\sin B\cos(2A+B).$$

令 $S_A=0,S_B=0$, 可得到:

$$\begin{cases}\sin B\sin(2A+B)=0\\ \sin A\sin(A+2B)=0\end{cases}$$

解这个方程组, 因为 $\sin A\neq 0,\sin B\neq 0$, 于是有

$$\begin{cases}\sin(2A+B)=0\\ \sin(A+2B)=0\end{cases}$$

解得 $A=\frac{\pi}{3},B=\frac{\pi}{3}$. 得到 S 的唯一稳定点 $P_0(A_0,B_0)=(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{3})$. 在 P_0 点处, 有

$$\boldsymbol{H}_S(P_0)=\begin{pmatrix}S_{AA}(P_0) & S_{AB}(P_0)\\ S_{BA}(P_0) & S_{BB}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\sqrt{3} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\sqrt{3}\end{pmatrix}.$$

注意到 $A=C=-\sqrt{3}<0$, 而 H=det $\boldsymbol{H}_S(P_0)=\dfrac{9}{4}>0,$, 因此 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3})$ 是 S 的极大值点, 极大值是 $S((\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3}))=\dfrac{3\sqrt{3}}{8}$.

因为 S 的只有一个极大值点 $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{3})$.

当 $A=B=C=\frac{\pi}{3}$ 时, S 取到最大值. □

5. 求周长为 $2p$ 而面积最大的三角形.

解: 设三角形三边长分别为 $x, y, 2p-x-y$ 及面积为 S, 则记

$$f(x,y)=S^2=p(p-x)(p-y)(p-(2p-x-y))=p(p-x)(p-y)(x+y-p).$$

于是将所求的问题转化为: 求函数 $f(x,y)$ 在区间 $D=\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant p, 0\leqslant y\leqslant p, p\leqslant x+y\leqslant 2p\}$ 上的最大值.

先求 $f(x,y)$ 的一阶偏导数和二阶偏导数:

$$f_x=p(p-y)(2p-2x-y),$$

$$f_y=p(p-x)(2p-2y-x).$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=-2p(p-y),$$
$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=-2p(p-x),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} &= p\cdot(-1)(2p-2x-y)+p(p-y)\cdot(-1)\\ &= -p(2p-2x-y+p-y)\\ &= -p(3p-2x-2y).\end{aligned}$$

令 $f_x=0, f_y=0$, 求得唯一的稳定点 $P_0(x_0,y_0)=(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3})$, 且有 $f(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3})=\frac{p^4}{27}$. 在 P_0 点处, 有

$$\boldsymbol{H}_f(P_0)=\begin{pmatrix} f_{xx}(P_0) & f_{xy}(P_0)\\ f_{yx}(P_0) & f_{yy}(P_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -\frac{2p^2}{3} & -\frac{p^2}{3}\\ -\frac{p^2}{3} & -\frac{2p^2}{3}\end{pmatrix}.$$

注意到 $A=C=-\frac{2p}{3}<0$, 而 H=det $\boldsymbol{H}_f(P_0)=\frac{p^2}{3}>0$, 因此 $(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3})$ 是 f 的极大值点.

因为 f 的只有一个极大值点 $(\frac{2p}{3},\frac{2p}{3})$.

综上有: 当三角形的三条边均为 $\frac{2p}{3}$ 时, 三角形面积取到最大值. □

6. 证明: 在圆的所有外切三角形中, 以正三角形的面积为最小.

证明. 设圆的半径为 r, 圆的外切三角形为 $\triangle ABC$, 其边长分别记为 $AB=x, BC=y, AC=z$, 则三角形的面积为:

$$S=\frac{r}{2}(x+y+z)$$

由均值不等式可得

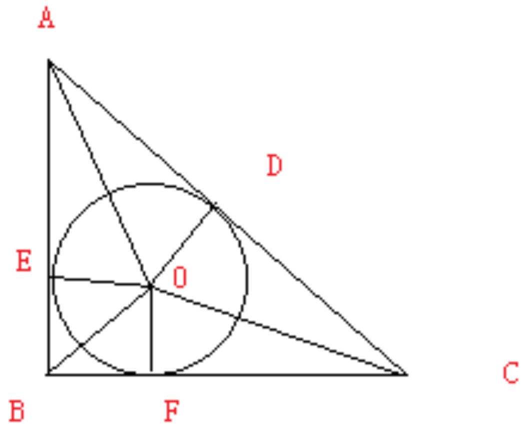
$$S=\frac{r}{2}(x+y+z)\geqslant\frac{r}{2}\cdot 3\sqrt[3]{xyz},$$

当且仅当 $x=y=z$ 等号成立.

于是有三角形的面积 S 在 $x=y=z$ 时取到最小值.

所以, 在圆的所有外切三角形中, 以正三角形的面积为最小 ∎

7. 证明: 函数 $z=x^3-4x^2+2xy-y^2$ 在区域 $D=[-5,5]\times[-1,1]$ 的内部有唯一的极大值点, 却不能在 D 的内部达到最大值.



,

证明. (1) 先求出 z 的一阶偏导数和二阶偏导数:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 3x^2 - 8x + 2y, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = 2x - 2y.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 6x - 8, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -2,$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -2.$$

令 $z_x = 0$ 和 $z_y = 0$, 得 z 在区域 D 内部唯一稳定点 $P_0(x_0, y_0) = (0, 0)$.

在 P_0 点处, 有

$$\boldsymbol{H}_z(P_0) = \begin{pmatrix} z_{xx}(P_0) & z_{xy}(P_0) \\ z_{yx}(P_0) & z_{yy}(P_0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

注意到 $A = C = -8 < 0$, 而 H=det $\boldsymbol{H}_z(P_0) = 12 > 0$, 因此 $(0,0)$ 是 z 的极大值点, 极大值为 $z(0,0) = 0$

(2) 再求 z 在区域 $D = [-5,5] \times [-1,1]$ 的边界上的最大值. 区域 $D = [-5,5] \times [-1,1]$ 的边界分别为

$$\Gamma_1 : \{(x,y)|x = -5, y \in [-1,1]\}, \quad \Gamma_2 : \{(x,y)|x = 5, y \in [-1,1]\},$$

$$\Gamma_3 : \{(x,y)|y = -1, x \in [-5,5]\}, \quad \Gamma_4 : \{(x,y)|y = 1, x \in [-5,5]\}.$$

(i) 在 Γ_1 上 $z = -y^2 - 10y - 225 = -(y+5)^2 - 200$, 所以此时 z 的最大值在 $y = -1$ 时取到, 即

$$z(-5,1) = -(-1+5)^2 - 200 = -216.$$

(ii) 在 Γ_2 上 $z = -y^2 + 10y + 25 = -(y-5)^2 + 50$, 所以此时 z 的最大值在 $y = 1$ 时取到, 即

$$z(5,1) = -(1-5)^2 + 50 = 34.$$

(iii) 在 Γ_3 上 $z = x^3 - 4x^2 - 2x - 1$,

$$z' = 3x^2 - 8x - 2, z^{"} = 6x - 8.$$

令 $z' = 0$, 解得 $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{22}}{3}, x_2 = \frac{4+\sqrt{22}}{3}$, 而

$$z^{"}(\frac{4-\sqrt{22}}{3}, -1) = 6\frac{4-\sqrt{22}}{3} - 8 = -2\sqrt{22} < 0,$$

$$z^{"}(\frac{4+\sqrt{22}}{3}, -1) = 6\frac{4+\sqrt{22}}{3} - 8 = 2\sqrt{22} > 0,$$

所以 z 在 x_1 取到极大值.

$$z(\frac{4-\sqrt{22}}{3}, -1) = \frac{127 - 28\sqrt{22}}{9} < 34.$$

$$z(5, -1) = -14.$$

(iv) 在 Γ_4 上 $z = x^3 - 4x^2 + 2x - 1$,

$$z' = 3x^2 - 8x + 2, z^{"} = 6x - 8.$$

令 $z' = 0$, 解得 $x_1 = \dfrac{4-\sqrt{10}}{3}, x_2 = \frac{4+\sqrt{10}}{3}$, 而

$$z^{"}(\frac{4-\sqrt{10}}{3}, 1) = 6\frac{4-\sqrt{10}}{3} - 8 = -2\sqrt{10} < 0,$$

$$z^{"}(\frac{4+\sqrt{10}}{3}, 1) = 6\frac{4+\sqrt{10}}{3} - 8 = 2\sqrt{10} > 0,$$

所以 z 在 x_1 取到极大值.

$$z(\frac{4-\sqrt{10}}{3}, -1) = \frac{-83 + 20\sqrt{10}}{27} < 0.$$

$$z(5, 1) = 34.$$

综上所述: z 的最大值在点 $(5, 1)$ 取到, 而点 $(5, 1)$ 不在 D 的内部.

所以: 函数 $z = x^3 - 4x^2 + 2xy - y^2$ 在区域 $D = [-5, 5] \times [-1, 1]$ 的内部有唯一的极大值点, 却不能在 D 的内部达到最大值. ∎

8. 给出定理1 第 (2) 部分的详细证明.

定理 1 (极值的充分条件) *设函数 $z = f(x, y)$ 在 $P_0(x_0, y_0)$ 点的某邻域 $U(P_0)$ 内具有二阶连续偏导数, 又 P_0 是 f 的一个稳定点. 则*

(1) 当 $H > 0$ 时, 如果 $A > 0$ (或 $C > 0$), 函数 f 在 P_0 取得极小值; 如果 $A < 0$ (或 $C < 0$), 函数 f 在 P_0 取得极大值;

(2) 当 $H < 0$ 时, 函数 f 在 P_0 不能取得极值.

证明. (2)(反证法) 假设函数 f 在 P_0 能取得极值 (不妨设取到极大值), 则沿任何过 P_0 的直线 $x = x_0 + t\triangle x, y = y_0 + t\triangle y, f(x_0 + t\triangle x, y_0 + t\triangle y) = \varphi(t)$ 在 $t = 0$ 亦取极大值, 故有 $\varphi^{"} \leqslant 0$, 而

$$\varphi'(t) = f_x \triangle x + f_y \triangle y,$$

$$\varphi^{"}(t) = f_{xx}\triangle x^2 + 2f_{xy}\triangle x\triangle y + f_{yy}\triangle y^2.$$

$$\varphi^{"}(0) = (\triangle x, \triangle y)H_f(P_0)(\triangle x, \triangle y)^T.$$

这里表明 $H_f(P_0)$ 必须是负半定的. 同理, 若 f 在 P_0 取极小值, 则将推出 $H_f(P_0)$ 必须是正半定德. 即, 当 f 在 P_0 能取得极值时, $H_f(P_0)$ 必须是负半定或正半定的矩阵, 这与条件 $H < 0$ 矛盾. 结论得证. ▮