16.4 三重积分的概念

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 计算三重积分

$$I = \iiint\limits_V \frac{xy}{\sqrt{z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 是由锥面 $(\frac{z}{c})^2 = (\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2$, 坐标面 $x = 0, y = 0$ 以及平面 $z = c > 0$ 所围成的立体 $(x > 0, y > 0, a > 0, b > 0)$.

解法 1 (穿针法) 将 V 向 xy 平面投影为 (参见图??中第一卦限部分)

$$D = \left\{(x, y)\middle|\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\right\}.$$

所以

$$\begin{aligned} I &= \iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{c\sqrt{(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2}}^{c} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} \\ &= \int_0^a x\mathrm{d}x \int_0^{b\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2}} y\mathrm{d}y \int_{c\sqrt{(\frac{x}{a})^2+(\frac{y}{b})^2}}^{c} \frac{\mathrm{d}z}{\sqrt{z}} \\ &= \frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}. \end{aligned}$$

□

解法 2 (切片法) 因为 V 恰好夹在两个平面 $z = 0$ 和 $z = c$ 之间, 所以

$$I = \int_0^c \mathrm{d}z \int\int D_z \frac{xy}{\sqrt{z}} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_z 是 V 被平面 $z = 0$ 和 $z = c$ 之间的任何一平行平面所切的截面, 即切片 (参见图??中第一卦限部分). 显然, 对任意固定的 $z : 0 \le z \le c$, 有

$$D_z = \left\{(x, y)\middle|\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 \le \left(\frac{z}{c}\right)^2, x \ge 0, y \ge 0\right\}$$

为四分之一椭圆, 所以

$$I = \int_0^c \mathrm{d}z \int_0^{\frac{b}{c}z} y\mathrm{d}y \int_0^{a\sqrt{(\frac{z}{c})^2-(\frac{y}{b})^2}} \frac{x}{\sqrt{z}}\mathrm{d}x = \frac{1}{36}a^2b^2\sqrt{c}.$$

□

例 2 计算

$$\int\int\int V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2},$$

其中 V 为由平面 $x=1$ 在 $x=2$ 在 $z=0$ 在 $y=x$ 与 $z=y$ 所围的区域 (图**??**).

解法 1 (穿针法) 本题的积分区域 V 在 xy 平面上的投影为 $D=\{(x,y)\mid 0\le y\le x, 1\le x\le 2\}$, 且下底为 $z=0$, 上底为 $z=y$. 所以, 用穿针法比较方便, 于是

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{x^2+y^2} &= \int_1^2\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y\frac{\mathrm{d}z}{x^2+y^2}\\ &= \int_1^2\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)\Big|_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x=\int_1^2\frac{1}{2}\ln 2\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

□

解法 2 (切片法) 区域 V 恰好夹在 $z=0$ 与 $z=2$ 之间. 在 $z=0$ 与 $z=1$ 之间的平行平面与 V 相截, 其切片是四边形, 用 $z=1$ 与 $z=2$ 之间的平行平面去截 V, 其切片是三角形. 可见计算会比较复杂. 由读者自己完成. □

例 3 求

$$I=\iiint\limits_V\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V 是椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1.$$

解: 本题采用切片法和穿针法均可, 注意到

$$I=\iiint\limits_V\frac{x^2}{a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_V\frac{y^2}{b^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint\limits_V\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=I_1+I_2+I_3$$

只需求出

$$I_3=\iiint\limits_V\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

即可.

用切片法, 有

$$I_3=\iiint\limits_V\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\int_{-c}^{c}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}z\int\int D_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_z 是椭圆域切片:

$$D_z=\left\{(x,y)\Big|\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1-\frac{z^2}{c^2}\right\},$$

即

$$D_z=\left\{(x,y)\Big|\frac{x^2}{a^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}+\frac{y^2}{b^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)}\le 1\right\}.$$

它的面积为

$$\pi\left(a\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)\cdot\left(b\sqrt{1-\frac{z^2}{c^2}}\right)=\pi ab\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right).$$

于是

$$I_3=\int_{-c}^{c}\frac{\pi ab}{c^2}z^2\left(1-\frac{z^2}{c^2}\right)\mathrm{d}z=\frac{4}{15}\pi abc.$$

同理可得 $I_1=\frac{4}{15}\pi abc, I_2=\frac{4}{15}\pi abc$. 所以

$$I=I_2+I_2+I_3=\frac{4}{5}\pi abc.$$

如果用穿针法求 I_3, 则有

$$I_3=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{-c\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2}}^{c\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2}}\frac{z^2}{c^2}\mathrm{d}z,$$

其中 D 是 V 在 xy 平面的投影

$$D=\left\{(x,y)\middle|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\},$$

于是

$$I_3=\frac{1}{3c^2}\iint\limits_D z^3\Big|_{-c\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2}}^{c\sqrt{1-(\frac{x}{a})^2-(\frac{y}{b})^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

然后, 对剩下的二重积分用广义极坐标变换进行计算可得

$$I_3=\frac{4}{15}\pi abc.$$

所以在 $I=\frac{4}{5}\pi abc$. □

例 4 求 $I=\iiint_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $V=\{(x,y,z)|\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1, y\geq 0\}$.

解: 根据积分区域的特点, 采取广义球坐标变换

$$T:\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta, & 0\leq r\leq 1,\\ y = br\sin\varphi\sin\theta, & 0\leq\varphi\leq\pi,\\ z = cr\cos\varphi, & 0\leq\theta\leq\pi.\end{cases}$$

则 $J=abcr^2\sin\varphi$. 所以

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int\int\int V' ab^2cr^3\sin^2\varphi\sin\theta drd\varphi d\theta\\ &= \int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^\pi\sin^2\varphi d\varphi\int_0^1 ab^2cr^3dr\\ &= \frac{\pi ab^2c}{2}\int_0^\pi\sin^2\varphi d\varphi=\frac{\pi ab^2c}{4}.\end{aligned}$$

□

思考题

1. 列出三重积分的性质.

解: **性质 1 (线性性质)** 设 $f(x,y,z)$ 和 $g(x,y\ z)$ 都是区域 $V\subset\mathbb{R}^3$ 上的可积函数, 在 k 为常数, 则 $kf(x,y,z)$, $f(x,y,z)\pm g(x,y,z)$ 均在 D 上可积, 而且有以下等式成立

$$\iiint\limits_V kf(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = k\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

$$\iiint\limits_V [f(x,y,z)\pm g(x,y,z)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \pm \iint \iiint\limits_V g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

性质 2 (积分区域的可加性) 设 $f(x,y,z)$ 在区域 V_1 和 V_2 上都可积, 且 V_1 与 V_2 无公共内点, 那么在 $f(x,y,z)$, $V_1\cup V_2$ 上也可积, 且

$$\iiint\limits_{V_1\cup V_2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_{V_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iiint_{V_2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

性质 3 (单调性) 设 $f(x,y,z)$ 与 $g(x,y,z)$ 在区域 V 上可积, 如果 $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$ 在 $(x,y,z)\in V$, 则

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \le \iiint\limits_V g(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

由此可见, 如果可积函数 $f(x,y,z)\ge 0$, 则 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ge 0$, 而且, 当 $f(x,y,z)\ge 0$ 时, 如果 $V_1\subset V$, 则 $\iiint\limits_{V_1} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \le \iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

性质 4 若 $f(x,y,z)$ 在区域 V 上可积, 则 $|f(x,y,z)|$ 在 V 上也可积, 且

$$\left|\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right| \le \iiint\limits_V |f(x,y,z)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

性质 5 (积分中值定理) 设 $f(x,y,z)$, 有界闭区域 V 上连续, 则存在 $(\xi,\eta,\zeta)\in V$, 使得

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = f(\xi,\eta,\zeta)|V|,$$

其中 $|V|$ 是积分区域 V 的面积.

□

2. 三维空间中有界闭区域 V 上的黎曼可积函数一定是有界函数, 试证明之.

解: 利用反证法, 证明类似于课本第 147 页习题 16.1 中第一题 □

3. 试举出有界闭区域 V 上的有界函数不是黎曼可积的例子.

解: 设 $V=[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$, 可证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y,z)\text{为 } V \text{ 内有理点 (即 } x,y,z \text{ 皆为有理数)},\\ 0, & (x,y,z)\text{为 } V \text{ 内非有理点}\end{cases}$$

在 V 上不可积. (二维的例子见课本第 145 页例 1) □

习题

1. 计算下列积分.

(1) $\iiint\limits_V \sin x\cos^2 y\tan z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $V=[0,3]\times[0,\pi/2]\times[0,\pi/4]$;

(2) $\iiint\limits_V (x^2-y+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $V=[-3,3]\times[0,2]\times[-4,1]$;

(3) $\iiint\limits_V z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是由曲面 $z=xy$ 与平面 $z=0,x=-1,x=1,y=2,y=3$ 所围成;

(4) $\iiint\limits_V (1+x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面围成的.

(5) $\iiint\limits_V xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是由曲面 $z=xy,z=0,x=1$ 及 $x=y$ 围成的;

(6) $\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是由曲面 $x^2+y^2=z^2$ 与 $z=2$ 为界面的区域;

解: (1) 解法一: 记

$$D=[0,\pi/2]\times[0,\pi/4],$$

由定理 16.4.1, 得

$$\begin{aligned}
\iiint\limits_V \sin x\cos^2 y\tan z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^3\mathrm{d}x\iint\limits_D \sin x\cos^2 y\tan z\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\
&= \int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}y\int_0^{\pi/4}\sin x\cos^2 y\tan z\mathrm{d}z\\
&= \int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2}\left(-\sin x\cos^2 y\ln(\cos z)\right)\Big|_{z=0}^{z=\pi/4}\mathrm{d}y\\
&= \int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2}\left(-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\sin x\cos^2 y\right)\mathrm{d}y\\
&= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/2}\mathrm{d}y\int_0^3\left(\sin x\cos^2 y\right)\mathrm{d}x\\
&= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\int_0^{\pi/2}\left(\cos^2 y\right)\left(-\cos x\right)|_0^3\mathrm{d}y\\
&= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 3-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2 y\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\cos^2 y\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2y+1}{2}\mathrm{d}y\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin 2y}{2}+y\right)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi}{4},
\end{aligned}$$

综上, 有

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V \sin x\cos^2 y\tan z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= -\ln\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos 3-1)\int_0^{\pi/2}\cos^2 y\mathrm{d}y\\ &= \frac{\pi}{8}(1-\cos 3)\ln 2.\end{aligned}$$

解法二:

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V \sin x\cos^2 y\tan z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^3\sin x\mathrm{d}x\int_0^{\pi/2}\cos^2 y\mathrm{d}y\int_0^{\pi/4}\tan z\mathrm{d}z\\ &= (-\cos x)\Big|_0^3\cdot\left(\frac{1}{2}(y+\sin y\cos y)\right)\Big|_0^{\pi/2}\cdot(-\ln(\cos z))|_0^{\pi/4}\\ &= (1-\cos 3)\cdot\frac{\pi}{4}\cdot\left(-\ln\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ &= \frac{\pi}{8}(1-\cos 3)\ln 2.\end{aligned}$$

(2) 记

$$D=[0,2]\times[-4,1],$$

由定理 16.4.1, 得

$$\begin{aligned}\iiint\limits_V (x^2-y+2z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_{-3}^3\mathrm{d}x\iint\limits_D (x^2-y+2z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \int_{-3}^3\mathrm{d}x\int_0^2\mathrm{d}y\int_{-4}^1(x^2-y+2z)\mathrm{d}z\\ &= 5\int_{-3}^3\mathrm{d}x\int_0^2(x^2-y-3)\mathrm{d}y\\ &= 10\int_{-3}^3(x^2-4)\mathrm{d}x\\ &= -60.\end{aligned}$$

(3) 将积分区域 V 在 xy 平面上的投影分为 D_1 和 D_1 两部分:

(i) 当 V 在 xy 平面上的投影为 $D_1:=\{(x,y)|-1\le x\le 0, 2\le y\le 3\}$ 时, 上底为 $z=0$, 下底为 $z=xy$;

(ii) 当 V 在 xy 平面上的投影为 $D_2:=\{(x,y)|0\le x\le 1, 2\le y\le 3\}$ 时, 上底为 $z=xy$, 下底为 $z=0$;

于是由“穿针法”, 得

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_{V} z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_{D_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{xy}^{0} z\mathrm{d}z + \iint\limits_{D_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{0}^{xy} z\mathrm{d}z \\
&= \int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{2}^{3}\mathrm{d}y\int_{xy}^{0} z\mathrm{d}z + \int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{2}^{3}\mathrm{d}y\int_{0}^{xy} z\mathrm{d}z \\
&= \int_{-1}^{0}\mathrm{d}x\int_{2}^{3}(-xy)\mathrm{d}y + \int_{0}^{1}\mathrm{d}x\int_{2}^{3}(-xy)\mathrm{d}y \\
&= -\frac{19}{6}\int_{-1}^{0} x^2\mathrm{d}x + \frac{19}{6}\int_{0}^{1} x^2\mathrm{d}x \\
&= -\frac{19}{18}x^3\Big|_{x=-1}^{x=0} + \frac{19}{18}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= -\frac{19}{18} + \frac{19}{18} = 0
\end{aligned}
$$

(4) 积分区域 V 如图 (1) 所示:

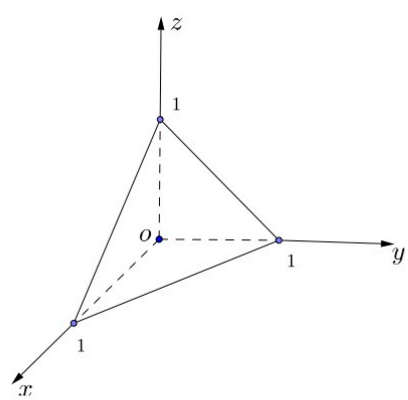

图 (1)

本题采用穿针法和切片法均可:

解法一: 穿针法

注意到, 积分区域 V 在 xy 平面上的投影为 $D := \{(x,y)\Big|\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1-x\}$, 并且上底为 $z = 1-x-y$, 下底为 $z = 0$, 所以用“穿针法”, 有

$$
\begin{aligned}
\iiint\limits_V (1+x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(1+x+y+z)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{1-x-y}(1+x+y+z)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left((1+x+y)z+\frac{1}{2}z^2\right)\Big|_{z=0}^{z=1-x-y}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}y^2-xy-x-y\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(\frac{3}{2}y-\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{6}y^3-x\frac{1}{2}y^2-xy-\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(\frac{5}{6}+\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{2}x^2-\frac{3}{2}x\right)\mathrm{d}x \\
&= \left(\frac{5}{6}x+\frac{1}{24}x^4+\frac{1}{6}x^3-\frac{3}{4}x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=1} \\
&= \frac{7}{24}.
\end{aligned}
$$

解法二: 切片法 (x, y 和 z 位置对称)

因为 V 恰好夹在两个平面 $x=0$ 和 $x=1$ 之间, 所以

$$
I=\int_0^1 \mathrm{d}x\iint\limits_{D_x}(1+x+y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z,
$$

其中 D_x (如图 1 阴影部分所示) 是 V 被平面 $x=0$ 和 $x=1$ 之间的任何一平行平面所切的截面, 显然, 对任意固定的 $x: 0\le x\le 1$, 有

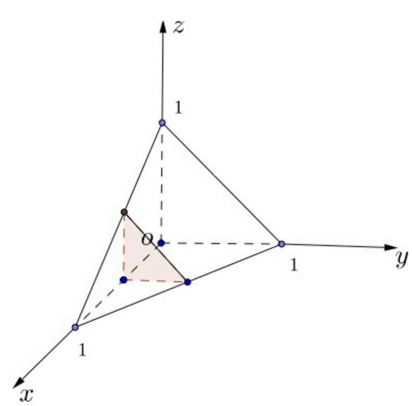

图 1: D_x 的示意图

$$
D_x=\left\{(y,z)\Big|0\le y\le 1-x, 0\le z\le 1-x-y\right\}
$$

所以用"切片法", 有

$$\iiint\limits_V (1+x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}x \iint\limits_{D_x}(1+x+y+z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x}\mathrm{d}y \int_0^{1-x-y}(1+x+y+z)\mathrm{d}z$$
$$= \frac{7}{24}.$$

(5) 积分区域 V 在 xy 平面上的投影为 $D := \{(x,y)\Big| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le x\}$, 并且上底为 $z = xy$, 下底为 $z = 0$, 所以用"穿针法", 有

$$\iiint\limits_V xy^2z^3\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^{xy} xy^2z^3\mathrm{d}z$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \left(\frac{1}{4}xy^2z^4\right)\Big|_{z=0}^{z=xy}\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \frac{1}{4}xy^2(xy)^4\mathrm{d}y$$
$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{28}x^5y^7\right)\Big|_{y=0}^{y=x}\mathrm{d}x$$
$$= \left(\frac{1}{364}x^{13}\right)\Big|_{x=0}^{x=1}$$
$$= \frac{1}{364}.$$

(6)

积分区域 V 如图 (3) 所示:

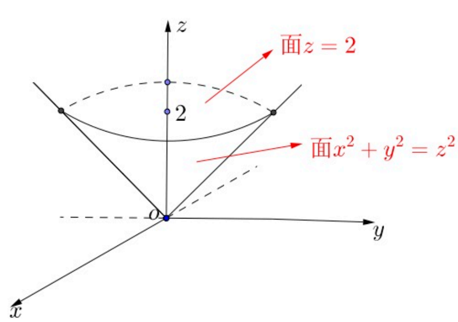

图 (3)

注意到, 积分区域 V 在 xy 平面上的投影为 $D := \{(x,y)\Big|\ 0 \le x^2+y^2 \le 4\}$, 并且上底为 $z = 2$, 下底为 $z = \sqrt{x^2+y^2}$, 所以用"穿针法", 有

$$\iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2+y^2)\mathrm{d}z,$$

采用坐标代换, 令

$$T: \begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \le r \le 2, \\ y = r\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi, \\ z = z, & r \le z \le 2. \end{cases}$$

则 $J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$, 所以

$$\begin{aligned} \iiint\limits_V (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2+y^2)\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 \mathrm{d}r \int_r^2 r^2 \cdot r\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^2 (2-r)r^3 \mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{5}r^5\right)\Big|_{r=0}^{r=2} \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{8}{5}\mathrm{d}\theta = \frac{16}{5}\pi. \end{aligned}$$

□

2. 试将下列累次积分改为先对 x 后对 y 再对 z, 以及先对 y 后对 z 再对 x 的累次积分.

(1) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x,y,z)\mathrm{d}z$;

(2) $\displaystyle\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^1 f(x,y,z)\mathrm{d}z$.

解: (1) 积分区域为

$$V := \{(x,y,z)\big| 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1-x, 0 \le z \le x+y\}.$$

首先, 将累次积分改为先对 x 后对 y 再对 z.

积分区域 V 在 yz 平面上的投影 (如图 2 所示) $D_{yz} := \{(y,z)|0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1\} = D'_{yz} \cup D''_{yz}$, 其中 $D'_{yz} := \{(y,z)|0 \le y \le z, 0 \le z \le 1\}$ 和 $D''_{yz} := \{(y,z)|z \le y \le 1, 0 \le z \le 1\}$

注意到当 $(y,z) \in D'_{yz}$ 时, V 的上底为: $x+y=1$, 下底为: $x+y=z$; 当 $(y,z) \in D''_{yz}$ 时, V 的上底为: $x+y=1$, 下底为: $x=0$; 从而有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x,y,z)\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^z \mathrm{d}y \int_{z-y}^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x \\ &\quad + \int_0^1 \mathrm{d}z \int_z^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} f(x,y,z)\mathrm{d}x; \end{aligned}$$

其次, 将累次积分改为先对 y 后对 z 再对 x 的累次积分.

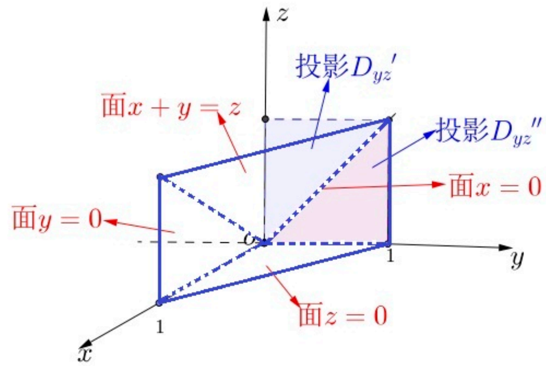

图 2: D_{yz} 的示意图

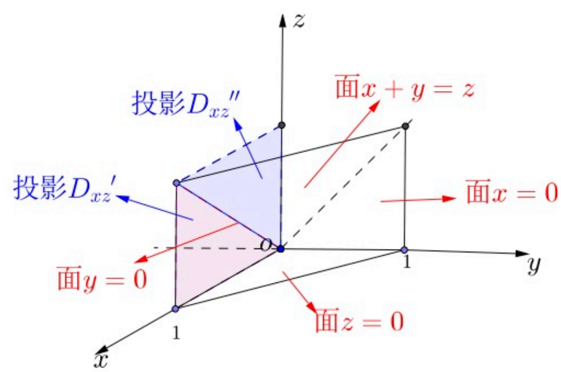

图 3: D_{xz} 的示意图

积分区域 V 在 xz 平面上的投影 (如图 3 所示) $D_{xz} := \{(x,z)|0 \le x \le 1, 0 \le z \le 1\} = D'_{xz} \cup D''_{xz}$, 其中 $D'_{xz} := \{(x,z)|0 \le z \le x, 0 \le x \le 1\}$ 和 $D''_{xz} := \{(x,z)|x \le z \le 1, 0 \le x \le 1\}$.

注意到当 $(x,z) \in D'_{xz}$ 时, V 的上底为: $x+y=1$, 下底为: $y=0$; 当 $(x,z) \in D''_{xz}$ 时, V 的上底为 $x+y=1$, 下底为 $x+y=z$; 因此有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \mathrm{d}y \int_0^{x+y} f(x,y,z)\mathrm{d}z &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}z \int_0^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_0^1 \mathrm{d}x \int_x^1 \mathrm{d}z \int_{z-x}^{1-x} f(x,y,z)\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

(2) 积分区域

$$V := \{(x,y,z)\Big| -1 \le x \le 1, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}, \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 1\}.$$

首先, 将累次积分改为先对 x 后对 y 再对 z.

注意到, 积分区域 V 在 yz 平面上的投影 (如图 4 所示) $D_{yz} := \{(y,z)|-z \le y \le z, 0 \le z \le 1\}$, 并且后面为: $x = -\sqrt{z^2-y^2}$, 前面为: $x = \sqrt{z^2-y^2}$; 从而, 有

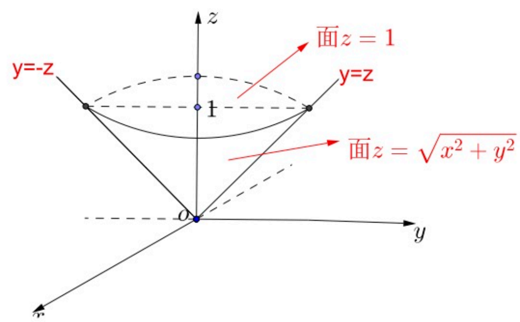

图 4: D_{xz} 的示意图

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z \quad = \quad \int_{0}^{1}\mathrm{d}z\int_{-z}^{z}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{z^2-y^2}}^{\sqrt{z^2-y^2}}f(x,y,z)\mathrm{d}x;$$

其次, 将累次积分改为先对 y 后对 z 再对 x 的累次积分.

积分区域 V 在 xz 平面上的投影 (如图 5 所示) $D_{xz} := \{(x,z)||x| \le z \le 1, -1 \le x \le 1\}$, 并且左面为: $y = -\sqrt{z^2-x^2}$, 右面为: $y = \sqrt{z^2-x^2}$; 从而, 有

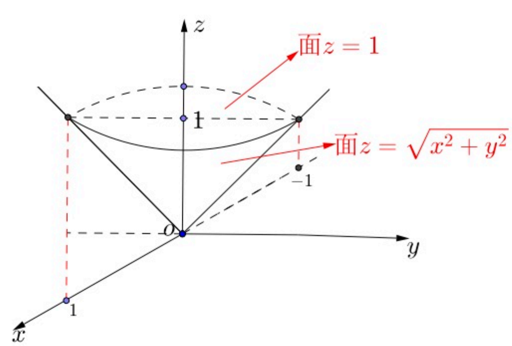

图 5: D_{xz} 的示意图

所以,

$$\int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}f(x,y,z)\mathrm{d}z \quad = \quad \int_{-1}^{1}\mathrm{d}x\int_{|x|}^{1}\mathrm{d}z\int_{-\sqrt{z^2-x^2}}^{\sqrt{z^2-x^2}}f(x,y,z)\mathrm{d}y.$$

□

3. 利用适当的坐标变换, 计算下列积分:

(1) $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是由 $x^2+y^2=z^2, z=1$ 所围成的区域;

(2) $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是由 $x^2+y^2+z^2=z$ 所围成的区域;

(3) $I = \iiint\limits_V \sqrt{1-\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是由椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$;

(4) $I = \iiint\limits_V (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $V=\{(x,y,z)|x^2+y^2+z^2\le 2az\}, a>0$.

解: (1)

注意到, 积分区域 V 在 xy 平面上的投影 (如图 6 所示): 为 $D_{xy} := \{(x,y)\Big|x^2+y^2=1\}$, 并且上底为 $z=1$, 下底为 $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

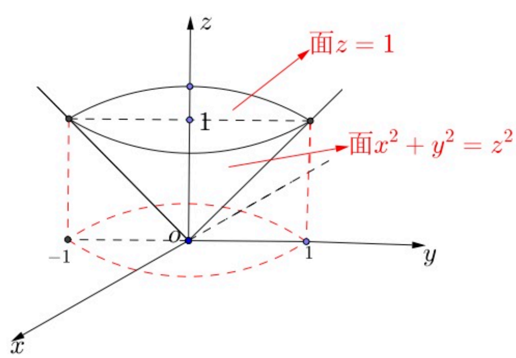

图 6: D_{xy} 的示意图

所以用“穿针法”, 有

$$\iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1}\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z,$$

采用坐标代换, 令

$$T:\begin{cases} x = r\cos\theta, & 0\le r\le 1, \\ y = r\sin\theta, & 0\le\theta\le 2\pi, \\ z = z, & r\le z\le 1. \end{cases}$$

则

$$J = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r,$$

从而有

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{1} \sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \mathrm{d}r \int_r^1 r\cdot r\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 r^2(1-r)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{4}r^4\right)\Big|_{r=0}^{r=1}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} \frac{1}{12}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{6}.
\end{aligned}
$$

(2) 引入球坐标变换:

$$
T:\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}
$$

则球面方程 $x^2+y^2+z^2=z$ 可表示为: $r=\cos\varphi$, 因此变换后的积分区域为:

$$
V' := \left\{(r,\varphi,\theta)\Big|0\le r\le\cos\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le\theta\le 2\pi\right\},
$$

且 $J=r^2\sin\varphi$,

所以

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint\limits_V \sqrt{x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\cos\varphi} r\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{1}{20}\cos^5\varphi\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{1}{20}\mathrm{d}\theta = \frac{\pi}{10}.
\end{aligned}
$$

(3) 采取广义球坐标变换

$$
T:\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta, & 0\le r\le 1, \\ y = br\sin\varphi\sin\theta, & 0\le\varphi\le\pi, \\ z = cr\cos\varphi, & 0\le\theta\le 2\pi. \end{cases}
$$

则 $J=abcr^2\sin\varphi$.

所以

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_V \sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r \\
&= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}r^2\mathrm{d}r \\
&= 4\pi abc\int_0^1\sqrt{1-r^2}r^2\mathrm{d}r \quad (\text{令} r=\sin t) \\
&= 4\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 t\sin^2 t\mathrm{d}t \\
&= \pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2t\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\pi abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4t)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{2}\pi abc\left(t-\frac{1}{4}\sin 4t\right)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{1}{4}\pi^2 abc.
\end{aligned}
$$

(4) 引入球坐标变换:

$$
T:\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, \\ z = r\cos\varphi, \end{cases}
$$

则球面方程 $x^2+y^2+z^2=2az$ 可表示为: $r=2a\cos\varphi$, 因此变换后的积分区域为:

$$
V' := \left\{(r,\varphi,\theta)\Big|0\le r\le 2a\cos\varphi, 0\le\varphi\le\frac{\pi}{2}, 0\le\theta\le 2\pi\right\},
$$

且 $J=r^2\sin\varphi$,

所以

$$
\begin{aligned}
I &= \iiint_V (x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}\frac{1}{r}\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi}r\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2a^2\cos^2\varphi\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi}\left(-\frac{2}{3}a^2\cos^3\varphi\right)\Big|_{\varphi=0}^{\varphi=\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{2}{3}a^2\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\pi a^2.
\end{aligned}
$$

□

4. 设 $f(x,y,z)$ 连续, 试证明:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y,z)\mathrm{d}z = \int_0^1 \mathrm{d}z \int_z^1 \mathrm{d}y \int_y^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

证明. 积分区域 V 在 yz 平面上的投影有 (见图 7)

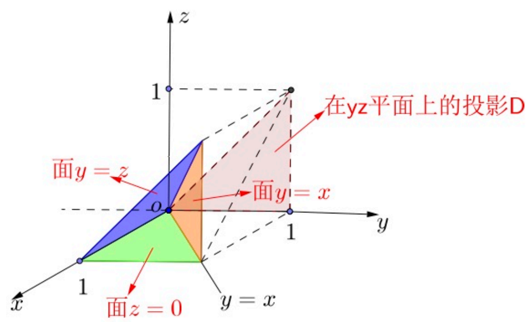

图 7: V 和 D_{yz} 的示意图

$$D_{yz} := \left\{(y,z)\Big|0 \le z \le 1, z \le y \le 1\right\},$$

并且下底为: $y=x$, 上底为: $x=1$, 又 $f(x,y,z)$ 连续, 故有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^y f(x,y,z)\mathrm{d}z &= \iint\limits_D \mathrm{d}y\mathrm{d}z \int_y^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_z^1 \mathrm{d}y \int_y^1 f(x,y,z)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

∎

5. 求有下列曲面所围立体的体积:

(1) V 由曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=x+y$ 围成;

(2) V 由平面 $y=0, z=0, 3x+y=6, 3x+2y=12$ 和 $x+y+z=6$ 围成.

解: (1) 联立两个曲面方程, 得交线为:

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2},$$

因此积分区域 V 在平面 xy 上的投影为:

$$D := \left\{(x,y)\Big| \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y-\frac{1}{2}\right)^2 \le \frac{1}{2}\right\},$$

且注意到 $x^2+y^2 > x+y$, 于是曲面 $z=x^2+y^2$ 与 $z=x+y$ 围成立体的体积为:

$$V = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_{x+y}^{x^2+y^2} 1 \cdot \mathrm{d}z = \iint\limits_D (x^2+y^2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

采用极坐标变换:

$$T: \begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \le r \le \frac{\sqrt{2}}{2}, \\ y = r\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi. \end{cases}$$

则 $J(r,\theta) = r$, 从而有

$$\begin{aligned} V &= \iint\limits_D (x^2+y^2-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} (r^2 - r\cos\theta - r\sin\theta) r\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{3}r^3\cos\theta - \frac{1}{3}r^3\sin\theta\right)\Big|_{r=0}^{r=\frac{\sqrt{2}}{2}} \mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{16} - \frac{\sqrt{2}}{12}\cos\theta - \frac{\sqrt{2}}{12}\sin\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \left(\frac{1}{16}\theta - \frac{\sqrt{2}}{12}\sin\theta + \frac{\sqrt{2}}{12}\cos\theta\right)\Big|_0^{2\pi} = \frac{\pi}{8}. \end{aligned}$$

(2) 积分区域 V 如图 **??** 所示,

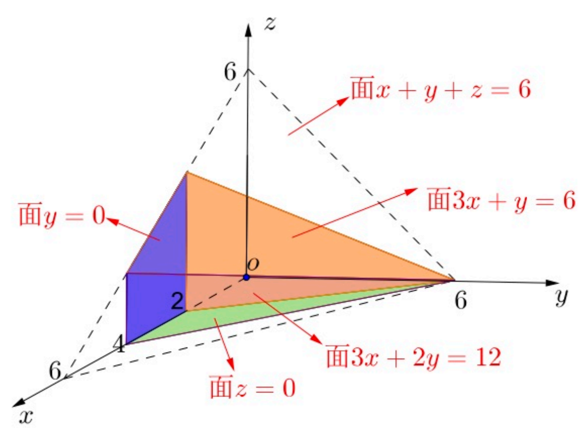

图 8: V 和 D_{xy} 的示意图

积分区域 V 在平面 xy 上的投影如图 **??** 所示为:

$$D := \left\{(x,y)\Big| 0 \le y \le 6, 2 - \frac{y}{3} \le x \le 4 - \frac{2}{3}y\right\},$$

于是, 平面 $y=0, z=0, 3x+y=6, 3x+2y=12$ 和 $x+y+z=6$ 围成立体的体积为:

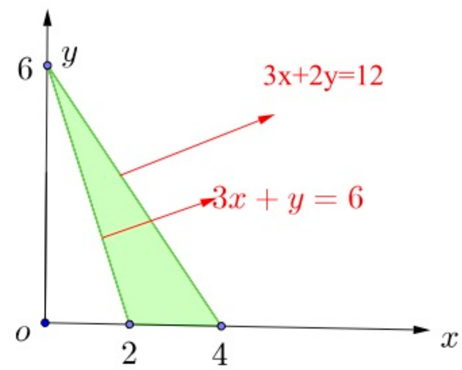

图 9: D_{xy} 的示意图

$$
\begin{aligned}
V &= \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y \int_0^{6-x-y} 1\cdot \mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_D (6-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^6 \mathrm{d}y \int_{2-\frac{y}{3}}^{4-\frac{2}{3}y} (6-x-y)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^6 \left((6-y)x - \frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{x=2-\frac{y}{3}}^{x=4-\frac{2}{3}y} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^6 \left(\frac{1}{6}y^2 - 2y + 6\right)\mathrm{d}y \\
&= \left(\frac{1}{18}y^3 - y^2 + 6y\right)\Big|_0^6 = 12.
\end{aligned}
$$

□

---

6. 计算下列积分,

(1) $I = \iiint\limits_V \mathrm{e}^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 $V = \left\{(x,y,z)\ \Big|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1\right\}$;

(2) $I = \iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是由 6 个平面

$$a_1x+b_1y+c_1z=\pm d_1,\quad a_2x+b_2y+c_2z=\pm d_2,\quad a_3x+b_3y+c_3z=\pm d_3$$

所围成的区域. 其中 $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \ne 0$.

解: (1) 根据积分区域的特点, 采取广义球坐标变换

$$T:\begin{cases} x = ar\sin\varphi\cos\theta, & 0\le r\le 1,\\ y = br\sin\varphi\sin\theta, & 0\le\varphi\le\pi,\\ z = cr\cos\varphi, & 0\le\theta\le 2\pi.\end{cases}$$

则 $J = abcr^2\sin\varphi$.

所以

$$\begin{aligned} I &= \iiint\limits_V e^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 \mathrm{e}^r\cdot abcr^2\sin\varphi\mathrm{d}r\\ &= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1\mathrm{e}^r r^2\mathrm{d}r\\ &= 4abc\pi\int_0^1\mathrm{e}^r r^2\mathrm{d}r\\ &= 4abc\pi(\mathrm{e}^r r^2-2r\mathrm{e}^r-\mathrm{e}^r)\Big|_0^1\\ &= 4abc\pi(\mathrm{e}-2).\end{aligned}$$

(2) 记 $\triangle = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1\\ a_2 & b_2 & c_2\\ a_3 & b_3 & c_3\end{vmatrix}\neq 0$,

做变量变换, 令

$$T:\begin{cases} u = a_1x+b_1y+c_1z,\\ v = a_2x+b_2y+c_2z,\\ w = a_3x+b_3y+c_3z,\end{cases}$$

则

$$J=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}\right| = \frac{1}{\left|\frac{\partial(u,v,w)}{\partial(x,y,z)}\right|} = \frac{1}{|\triangle|}\neq 0,$$

且积分区域 V 变为 $V' := [-d_1,d_1]\times[-d_2,d_2]\times[-d_3,d_3]$, 故所求体积为:

$$\begin{aligned} V &= \iiint\limits_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \iiint\limits_{V'}\frac{1}{|\triangle|}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\\ &= \int_{-d_1}^{d_1}\mathrm{d}u\int_{-d_2}^{d_2}\mathrm{d}v\int_{-d_3}^{d_3}\frac{1}{|\triangle|}\mathrm{d}w\\ &= \frac{8}{|\triangle|}d_1d_2d_3.\end{aligned}$$

□

7. 已知 $f(x,y,z)$ 可微, $F(t) = \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$. 求 $F'(t)$.

解: 引入球坐标变换:

$$T:\begin{cases} x &= r\sin\varphi\cos\theta, & 0\le r\le t,\\ y &= r\sin\varphi\sin\theta, & 0\le\varphi\le\pi,\\ z &= r\cos\varphi, & 0\le\theta\le 2\pi. \end{cases}$$

则

$$\begin{aligned} F(t) &= \iiint\limits_{x^2+y^2+z^2\le t^2} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r \\ &= \iint\limits_D \mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\int_0^t f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r, \end{aligned}$$

其中 $D := \left\{(\theta,\varphi)\Big|0\le\theta\le 2\pi, 0\le\varphi\le\pi\right\}$.

记 $G(\theta,\varphi,t)\triangleq\int_0^t f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\mathrm{d}r$,

则 $F(t)=\iint\limits_D G(\theta,\varphi,t)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$,

因为 $f(x,y,z)$ 可微, 即 $f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)$ 可微, 从而 $G(\theta,\varphi,t)$ 连续且可微, 且 $G_t(\theta,\varphi,t)$ 连续,

故有:

$$\begin{aligned} F'(t) &\overset{(1)}{=} \iint\limits_D \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G(\theta,\varphi,t)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \iint\limits_D \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\int_0^t f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\cdot r^2\sin\varphi\right)\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= \iint\limits_D f(t\sin\varphi\cos\theta, t\sin\varphi\sin\theta, t\cos\varphi)\cdot t^2\sin\varphi\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi \\ &= t^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} f(t\sin\varphi\cos\theta, t\sin\varphi\sin\theta, t\cos\varphi)\cdot t^2\sin\varphi\mathrm{d}\varphi. \end{aligned}$$

上式中的 (1) 之所以成立, 是因为以下结论成立:

设函数 $f(x,y,t)$ 和 $f_t(x,y,t)$ 在矩形区域 $R=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ 上连续, 则含参变量积分

$$F(t)=\iint\limits_D f(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad (x,y)\in D=[a,b]\times[c,d], t\in[e,f]$$

在 $[e,f]$ 上也可微, 且

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F(t)=\iint\limits_D \frac{\partial}{\partial t}f(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad t\in[e,f].$$

证明. 任意取定 $t \in [e,f]$, 对于 $t+\Delta t \in [e,f]$, $F(t)$ 的增量为

$$F(t+\Delta t)-F(t)=\iint\limits_D [f(x,y,t+\Delta t)-f(x,y,t)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

注意到 $f_t(x,y,t)$ 在矩形区域 $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$ 上存在, 根据一元函数的中值定理, 存在 $0<\theta<1$, 使得

$$f(x,y,t+\Delta t)-f(x,y,t)=f_t(x,y,t+\theta\Delta t)\Delta t.$$

代入到上一等式中并且在两端除以 Δt, 可以得到

$$\frac{F(t+\Delta t)-F(t)}{\Delta t}=\iint\limits_D f_t(x,y,t+\theta\Delta t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

进而可得

$$\begin{aligned}&\left|\frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t}-\iint\limits_D f_t(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\ &=\left|\iint\limits_D f_t(x,y,t+\theta\Delta t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_D f_t(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\\ &\leq \iint\limits_D |f_t(x,y,t+\theta\Delta t)-f_t(x,y,t)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

由所设 $f_t(x,y,t)$ 在 V 上连续, 故一致连续, 从而对于任意的 $\epsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 使得只要 $(x,y,t),(x,y,t+\theta\Delta t)\in R$ 且 $|\Delta t|<\delta$, 就成立

$$|f_t(x,y,t+\theta\Delta t)-f_t(x,y,t)|<\epsilon.$$

因此当 $|\Delta t|<\Delta$ 时, 利用积分的绝对值不等式和单调性, 可以得到

$$\left|\frac{I(t+\Delta t)-I(t)}{\Delta t}-\iint\limits_D f_t(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|<\epsilon(b-a).$$

即 $F'(t)$ 存在且 $F'(t)=\iint\limits_D f_t(x,y,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$. ∎

□