

上册目录

俄譯本出版者的話	5
序	6
第一章 最簡單的曲綫和曲面	1
§ 1. 平面曲綫	1
§ 2. 柱面、錐面、圓錐曲綫以及它們的回轉曲面	7
§ 3. 二阶曲面	12
§ 4. 橢球面与共焦二阶曲面的繩綫作图	19
第一章 附录	25
1. 圓錐曲綫的垂足点作图	25
2. 圓錐曲綫的准綫	27
3. 双曲面的能动細杆模型	30
第二章 正則点系	33
§ 5. 平面点格	33
§ 6. 在数論中的平面点格	39
§ 7. 三維和三維以上的点格	47
§ 8. 作为正則点系的結晶体	54
§ 9. 正則点系和不連續运动群	58
§ 10. 平面运动及其合成; 平面不連續运动群的分类	61
§ 11. 有无穷大基本区域的平面不連續运动群	66
§ 12. 平面运动的結晶体群, 正則点系和指針系。以合同区域組成的平面 結構	72
§ 13. 空間結晶体类及运动群。鏡面对称群和点系	83
§ 14. 正多面体	91
第三章 投影构形	96
§ 15. 平面构形导言	97
§ 16. 构形(7 ₃)和构形(8 ₃)	100
§ 17. 构形(9 ₃)	104
§ 18. 透視画法, 无穷远元素和平面上的对偶原理	114
§ 19. 无穷远元素和空間的对偶原理。德沙格定理和德沙格构形(10 ₃)	122

§ 20. 巴斯加定理和德沙格定理的比較	120
§ 21. 空間构形导言	134
§ 22. 雷耶构形	135
§ 23. 三維和四維空間的正多面体及其投影	144
§ 24. 几何学的枚举法	161
§ 25. 施累弗利双六构形	167

第一章 最簡單的曲綫和曲面

§1. 平面曲綫

最簡單的曲面是平面。最簡單的曲綫是平面曲綫；平面曲綫当中最簡單的是直綫。直綫可以定义为兩点間最短的路程，也可以定义为二平面的交綫，或者旋轉的軸。

直綫之外最簡單的曲綫要算圓。即使象这样簡單的图形，也能够对它作出繁多而深入的研究，以致可写成專书。我們給圓下这样的定义：它是曲綫，曲綫上的各点与一已知点的距离相等。我們通常用众所共知的繩綫作法或圓規作法来作圓。从这种作法显然可知：圓是閉合的曲綫，到处是凸

的。因此通过圓周上任一点可作一条定直綫（切綫），使唯有这一点（切点）才是直綫与圓共同的，同时直綫上其余所有的点都在圓外（图1）。切点 B 上的半徑 MB 必为从圓心 M 到切綫 t 的最短路程，因为 t 上除 B 外的所有点都在圓外，因此这

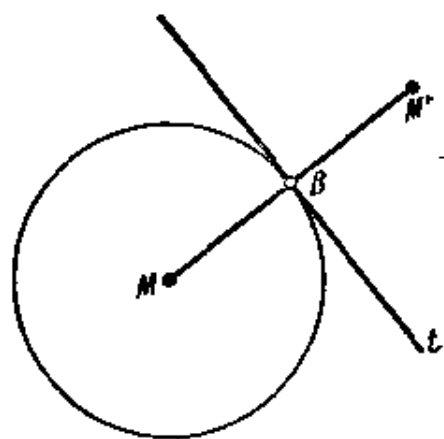


图 1

些点跟 M 的距离应較切点跟 M 的距离为远。由此可以推出，圓的半徑 MB 垂直于半徑上的切綫。要証明这句话，我們作圓心 M 对于切綫 t 的反射点，即从 M 作切綫 t 的垂綫，延长一倍到 M' ；这 M' 叫做 M 的象点。現在因为 MB 是从 M 到 t 的最短路程，又因为对称关系，得知 $M'B$ 是从 M' 到 t 的最短路程。因此綫路

MBM' 一定是 M 和 M' 两点间的最短路程,所以在点 B 处不会弯折,也就是说, MB 的确垂直于 t 。

从圆的作法很自然地会想起一种推广情形。我们知道在用绳索作圆时,须将闭合的绳索套在一个固定的点(圆心)上,并且在画圆的过程中时时将绳索拉紧。现在假如将此绳索套在两个固定的点上,则得出与圆类似的曲线。这种曲线叫做椭圆,两个定点叫做椭圆的焦点。由绳索作图法可知,椭圆是具有下列性质的曲线:曲线上任一点到二已知点的距离之和是一常量。如果让二点重合,则得到椭圆的极限情形,即圆。椭圆也有几个简单的性质,跟上面列举的圆的各种性质相当:它是闭合的曲线,到处是凸的,在椭圆上任一点均可作其切线,切线上每一点除切点外均在椭圆之外。与圆半径相当的,是连接椭圆上一点和二焦点的二线段。这二线段叫做椭圆的焦半径。与圆的切线必垂直过切点的半径这件事相当的,是椭圆的切线同过切点的二焦半径作成等角。依图 2 上的记

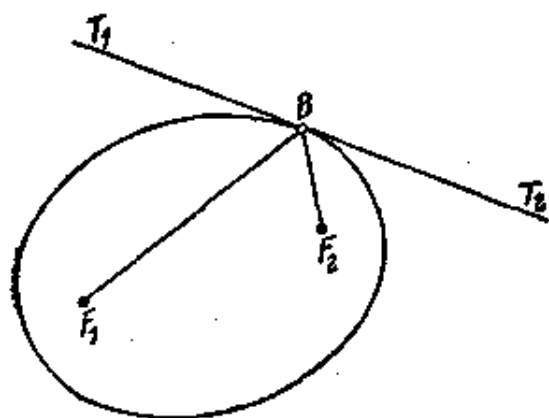


图 2

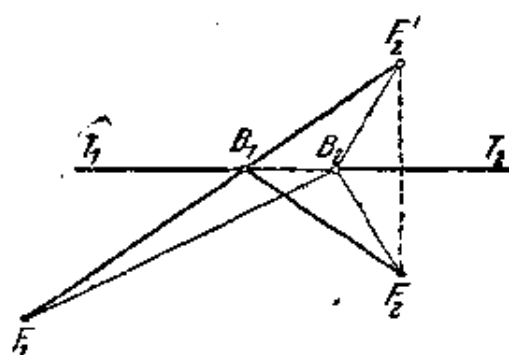


图 3

法,这句断语可写成 $\angle F_1BT_1 = \angle F_2BT_2$ 。证明如下:作 F_2 对于切线的反射点 F_2' (图 3)。同切线交于 B_1 的线段 F_1F_2' 是 F_1 和 F_2' 两点间最短的路径。因为,设 B_2 是切线上任意另外一点,那么线段 $F_1B_2F_2 = F_1B_2F_2'$ 必大于 $F_1B_1F_2 = F_1B_1F_2'$ 。另一方面, F_1 和 F_2 两点间最短的并且与切线相交的路径是由过切点 B 的二焦半径

組成的。这是由于切綫上任何其他的点都在橢圓之外，从而从二焦点到这样一点的距离之和必定大于从二焦点到橢圓上 B 点的距离之和。所以 B 同 B_1 重合。因为 F_2 和 F'_2 对于直綫 T_1T_2 对称，而且 $\angle F_1B_1T_1$ 和 $\angle F'_2B_1T_2$ 成对頂角，因此我們的断語得証。

橢圓切綫的这种性質在光学上获得应用，焦点和焦半徑二名詞也是从这里来的。这是說，假如置光源于橢圓鏡面的一个焦点处，其反射綫必将聚集于另一焦点。

另外有一种曲綫，它的作法虽不如橢圓那样容易，但原理同样简单。这种曲綫上的任一点到二定点距离之差为一常数。这曲綫名为双曲綫，二定点名为双曲綫的焦点。这样，对曲綫上任一点 B 或 B' (图 4)，关系式 $F_1B - F_2B = \text{常数 } a$ 或 $F_2B' - F_1B' = a$ 应该成立。据此，双曲綫由两个分支組成。直观上显然，双曲綫到处是凸的，并且經過曲綫上任一点都可作一切綫。以后我們还要証明(參看第 9 頁上脚注 2)：切綫上除去切点外，同曲綫再沒有公共点。仿照橢圓的情形，可以証明，双曲綫的切綫平分过切点的二焦半徑的夹角(图 6)。

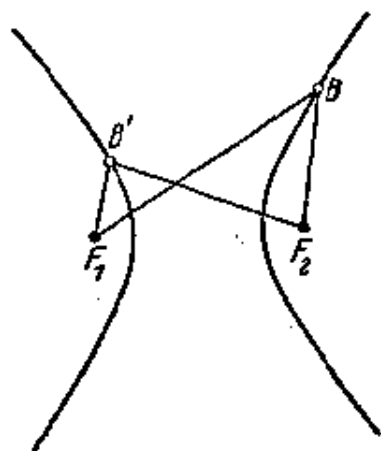


图 4

运用极限过程，可以从橢圓得出另外一种曲綫——抛物綫(图 5)。为了达到这个目的，先固定一个焦点，比如說 F_1 ，再固定同此焦点最近的頂点 S (所謂橢圓的頂点，是說橢圓与两焦点連綫的交点)。現在我們来考虑，假如第二个焦点 F_2 在 SF_1 的延長綫上移动，离 F_1 越来越远，橢圓将如何变化。我們說这些橢圓趋近于一极限曲綫，这极限曲綫就是抛物綫。从这个极限过程我們可导出抛物綫的一个简单定义。闡述如下：

假如橢圓的焦距 F_1F_2 充分地大，而在繩綫作图中鉛笔始終貼

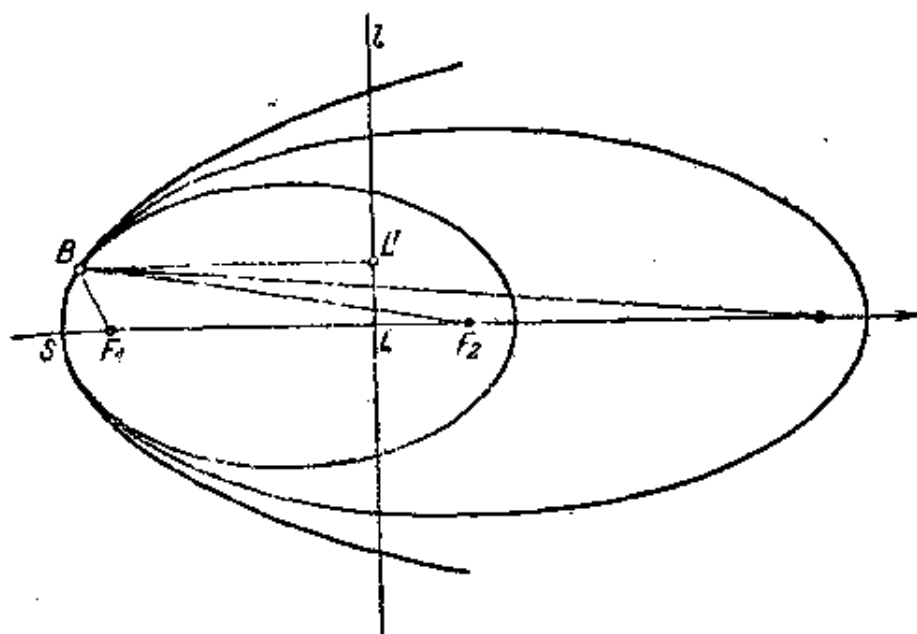


图 5

紧绳线走动，一直走到顶点 S 的邻近，则由 F_2 引出的绳线几乎平行于 SF_2 (图 5)。过 F_1F_2 上任一点 L 作直线 F_1F_2 的垂线 l ，则有下面的近似的等式成立：

$$F_1B + BF_2 = F_1B + BL' + LF_2 = \text{常数}$$

(其中的 L' 是从 B 到 l 的垂线的垂足)。如用一个新的常数去代替

$$\text{“常数} - LF_2\text{”},$$

便得到

$$F_1B + BL' = \text{常数}$$

(因为就一个定曲线来说， LF_2 是常数)。距离 F_1F_2 越大，上式越正确，因之在极限的情形下，上式就严格地成立了。这样，我们说，抛物线是这样的曲线，从曲线上任一点到一定点及一定直线的距离之和是一常数。换句话说，从抛物线上任一点到一定点的距离，等于从这点到一条定直线的距离。这条定直线是这样得到的：在 S 的和 l 不同的一侧，与 S 的距离等于 SF_1 的某处作 l 的平行线；这条直线叫做抛物线的准线。

設有一道平行于 SE_1 的光綫, 落在拋物形鏡面上, 則反射綫將聚于 F_1 ; 这是从上述极限过程中推导出来的另一結果。

上面我們講的橢圓“族”有一个共同的頂点和一个共同的离頂点最近的焦点。現在讓我們看一下有两个共同焦点的橢圓族。“共焦点”的橢圓族“簡單而无空隙地”复盖平面, 这是說, 对于平面上任意一点, 族中恰有一条曲綫通过它。这是因为二焦点到已知点距离之和是一个定值, 所以已知点就在以此定值为和的橢圓上^①。

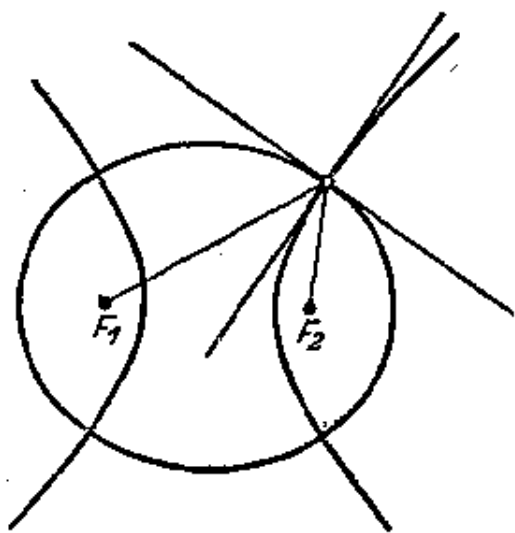


图 6

現在我們再将与上述橢圓族共焦点的双曲綫族也加进来研究。这种双曲綫族也是簡單而无空隙地复盖平面^②。这样一来, 对于平面上任一点, 恰好有共焦点的橢圓族和双曲綫族中各一条曲綫通过它 (图 6)。在任一已知点 (二焦点例外), 对过这点的橢圓和双曲綫分別所作的二切綫必平分通过这点的二焦半徑所作的角及其补角, 因此这二切綫相互垂直。

由此可知, 共焦点的橢圓族和双曲綫族形成“正交曲綫族”(两族曲綫, 如果一族中的每条曲綫与另一族中的每一曲綫直交时, 称为正交曲綫族; 二曲綫的交角, 按定义为在其交点处二切綫所成的角)。为了获得正交曲綫族的整个面貌, 我們从 F_1F_2 的垂直平分綫开始, 来看看双曲綫族。这些双曲綫越来越扁平, 最后变为綫段

① 連接二焦点的綫段是退化的橢圓。在此橢圓上任一点, 距二焦点距离之和等于二焦点間的距离。

② 連接二焦点的直綫, 但去掉焦点之間的部分, 是退化的双曲綫。連接二焦点的綫段的垂直平分綫也是退化的双曲綫。在后面的情形中, 距离之差是常数零。

F_1F_2 的延长线——一对射线。如此平面完全被复盖了。现在我们

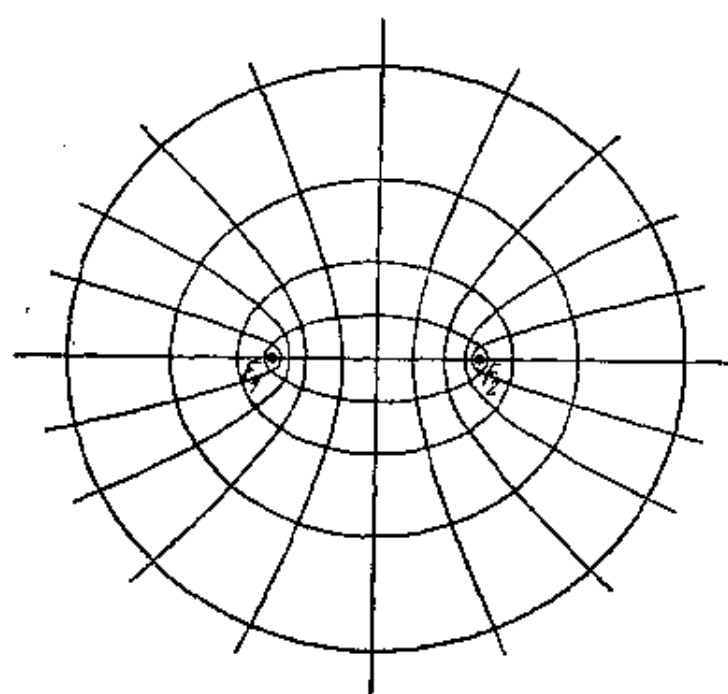


图 7

們再跳到綫段 F_1F_2 上去。这一綫段逐漸膨脹，起初是扁平的橢圓，而當它的大小無限擴張時，形狀越來越象圓。這樣，平面第二次被复盖了。

正交曲线族另一个非常简单的例子是同心圆组和通过公共圆心的诸直线。这样的图形可以由上例用

极限过程得到，即当二焦点趋近以至重合时。这时椭圆都变为圆，双曲线都变为成对的直线。

地图上的等高线和最大坡度线，也是正交曲线族的一个例子。

最后，让我们再讲一种用绳线作出的正交曲线族。把一根绳线缠绕在一个凸的曲线上，比如说圆。现在要找出一面将绳线拉紧一面打开时绳线端点所描绘的曲线（图 8）。如此得出的曲线叫做圆的“渐伸线”，它绕着圆走，一圈比一圈宽，亦即它是一条螺线。由上面的作图法显然可知，螺线垂直于由其

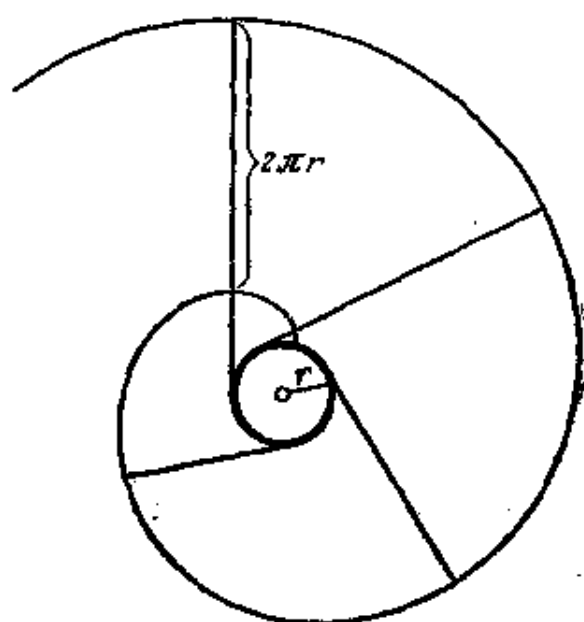


图 8

上任一点所作的圓的一條切綫。螺綫的其他各圈也跟這條切綫直交。由相鄰二圈截出的切綫綫段，其長一定，等於母圓的圓周長。

我們可以由圓周上不同的點開始打開繩索而作出同一圓的任意多個其他的漸伸綫。也可以只將漸伸綫族中的一條曲綫繞圓心旋轉而得到漸伸綫族的全部曲綫。漸伸綫族簡單而無空隙地復蓋平面，但圓內的點除外。漸伸綫族正交於圓的兩族半切綫之一。

對於其他任何直綫族，它的正交曲綫族也都是漸伸綫。它們的母綫（上例是圓）就是已知直綫族的包絡。我們將在微分幾何（第四章）和運動學（第五章）中再回顧這一現象。

§ 2. 柱面、錐面、圓錐曲綫以及它們的回轉曲面

最簡單的彎曲的面是柱面。柱面可以由最簡單的曲綫——直綫和圓——用下法得出：沿一圓周移動垂直於圓面的直綫。得出柱面的另一種方法是：將一直綫繞着和它平行的軸回轉。由此可見，圓柱面是一種回轉曲面。回轉曲面是曲面中很重要的一類。在日常生活常常碰到它，例如杯子、瓶子等等。這種曲面都具有這樣的特征：它們可由一平面曲綫繞同一平面上的一軸回轉而產生。

一個垂直於柱面軸的平面，同柱面交於一圓。與軸斜交的平面同圓柱面的截綫，給人的直觀感覺好象是一個橢圓。現在我們來證明，這曲綫的確是橢圓。為了證明，我們取一個大小恰够放入柱面內的球，推動之，使與截面剛好接觸（圖 9）。另取一球，同法，放在截面的它側。這兩個球與柱面切於二圓，與截面切於兩點 F_1 和 F_2 。將截面與柱面的交綫上任一點 B 同 F_1

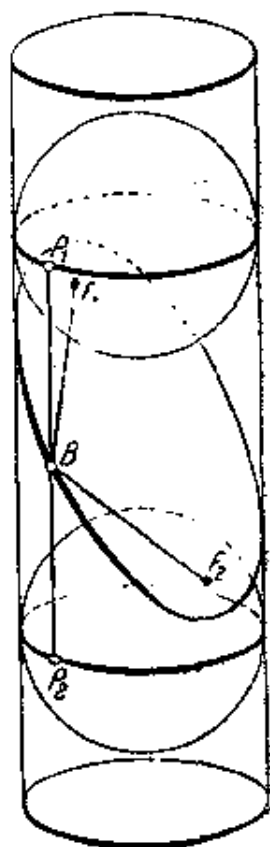


圖 9

和 F_2 连接起来。考虑柱面上经过 B 的母线，它与球和柱面的交线交于 P_1, P_2 两点。 BF_1 和 BP_1 是一个球的两条通过 B 的切线。所有这样的切线线段都相等，这可以从球有旋转对称性立即知道。因此而有 $BF_1 = BP_1$ ，同理 $BF_2 = BP_2$ 。从此得出

$$BF_1 + BF_2 = BP_1 + BP_2 = P_1P_2。$$

但是由于图形有旋转对称性，距离 P_1P_2 与曲线上所选择的 B 点的位置无关，因此截线上的所有点到 F_1 和 F_2 的距离之和都相等；这就是说，这曲线是以 F_1 和 F_2 为焦点的椭圆。

上述事实还可以表述成投影定理：假如光线从垂直于圆所在的平面射进来，则圆在斜面（对圆所在的平面来说）上的投影是椭圆。

仅次于圆柱面的最简单的回转曲面是圆锥面。圆锥面由回转一直线而得，但回转轴与该直线相交。因此，从一定点到一定圆的所有切线形成一圆锥面，又从一圆的轴（译者注：即通过圆心且垂直于该圆所在的平面的直线）上一点作到该圆的所有投射线也形成一圆锥面。

垂直于锥面轴的平面与锥面交于一圆；截面稍倾斜，交线便成为椭圆。这可以借助于二辅助球来证明，证法同圆柱面的情形完全一样。

截面越倾向锥面轴，椭圆越扁长，截面与锥面的母线一开始平行，交线就不再是有界的闭合曲线。用前面用过的极限过程的办法（参看图 5），可以证明交线是抛物线。

如果截面更倾向锥面轴，那末截面同两支锥面都相交（以前只是同一支相交）。它们的交线看来好象是双曲线的样子（图 10）。为了证明它的确是双曲线，我们在两支锥面内各放进一球，使刚好与锥面和截面相接触。（这时二球居于截面的同侧，与此相反，在椭圆的情形下，二球居于截面的异侧。）仿照第 7 页的证明，就有

(图 10):

$$BF_1 = BP_1,$$

$$BF_2 = BP_2,$$

$$BF_2 - BF_1 = BP_2 - BP_1 = P_1P_2 = \text{常数}.$$

到現在为止我們知道了,任一不含錐面頂点的平面与錐面的交綫可以是橢圓,也可以是拋物綫或双曲綫^①。这样來說,这三种曲綫有一种內在的联系。因为这个原故,我們总称之为圓錐曲綫^②。除了上述的三种“常态”圓錐曲綫之外,还有几种“非常态”圓錐曲綫,这是当截面通过錐面的頂点,或者当錐面退化为柱面时得到的。

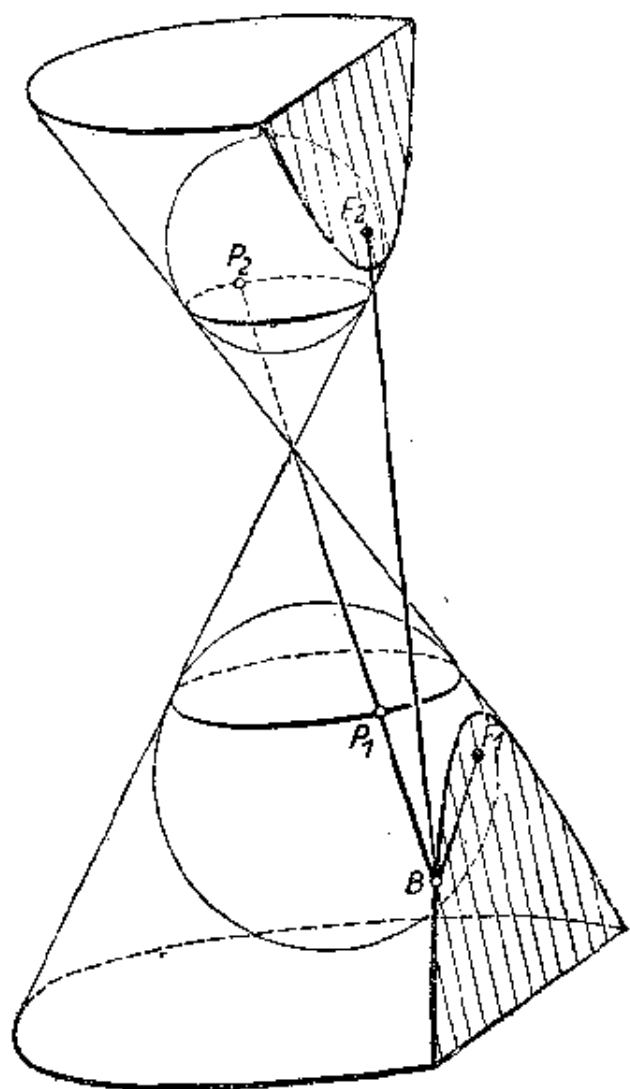


图 10

这样一来,一点、“算两次”的一直綫、二相交直綫、二平行綫、空的平面,都可看作是退化的圓錐曲綫。圓錐曲綫也叫做二阶曲綫,因为在笛卡儿坐标中,圓錐曲綫用二次方程表示。曲綫是二阶的特性不能直接由直观形象表达。但由此特性可得出一个完全直观的推論:二阶曲綫不能与直綫交于两个以上的点。不过除了圓

① 圓可以看作橢圓的極限情形。

② 因此,如果光綫从圓的軸上一点出发,則圓在任一平面上的影子是圓錐曲綫。可以用实例說明,其中也包括双曲綫在內,例如公路被汽車前面的灯发出的錐形光綫所照亮的部分,就是双曲綫一支的內部。因为双曲綫的任何切綫都可以看作是圓的切綫的投影,可知双曲綫的切綫只在切点上与曲綫有公共点,这就是在第3頁上提到过的。

圆锥曲线之外,还有其他的一些曲线,也具有这种性质。

在本章附录里我们将讨论圆锥曲线的垂足点作法和准线的性质这两个几何事项。象焦点作图法一样,它们也是一切非退化曲线的特征。

我们已经知道柱面和锥面是由回转直线生成的。由此自然会想到把圆锥曲线回转生成回转曲面。让我们选取圆锥曲线的一个对称轴作为旋转轴,曲线经过半转之后只是把曲线在轴的两侧部分互相掉换,所以只能得出一个曲面。但是若选择其他位置的回转轴,得到的图形就复杂得多了。

因为椭圆有两个对称轴,所以可得出两种不同的回转曲面。依照椭圆是绕着长轴回转的或绕着短轴回转的,分别得出长回转椭球面(图 11)或扁回转椭球面(图 12)。鸡蛋的表面近似长回转椭球面,地球的表面是大家所熟悉的扁回转椭球面。

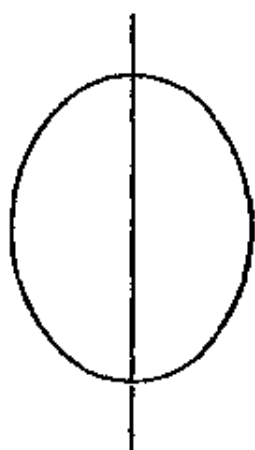


图 11

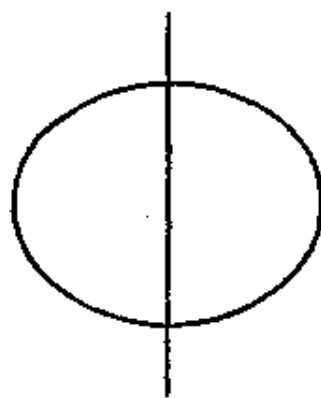


图 12

让椭圆的长轴和短轴长度之差变成零,便得到两种回转椭球面之间的过渡情形。此时椭圆变成了圆,回转椭球面变成了球面。因为圆对于它的任一直径对称,所以球面可用无穷多的回转方式产生。这种性质正是球面的特征。球面是仅有的可用一种以上的回转方式产生的曲面。

抛物线只有一个对称轴,因此只能产生一种回转曲面,这就是

回轉拋物面(图 13)。

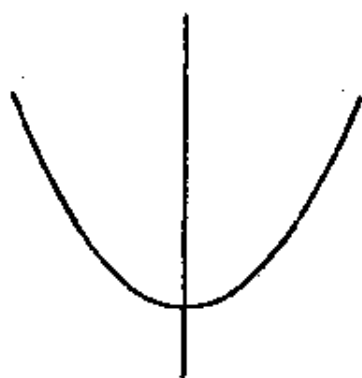


图 13

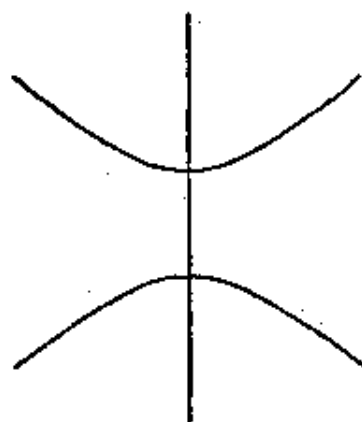


图 14

另一方面，双曲綫产生两种不同的回轉曲面。依照双曲綫或是繞着焦点的連綫回轉的，或是繞着这条綫段的中垂綫回轉的，分別得出双叶回轉双曲面(图 14) 或单叶回轉双曲面(图 15)。这里

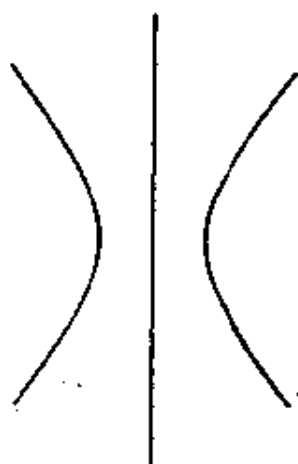


图 15

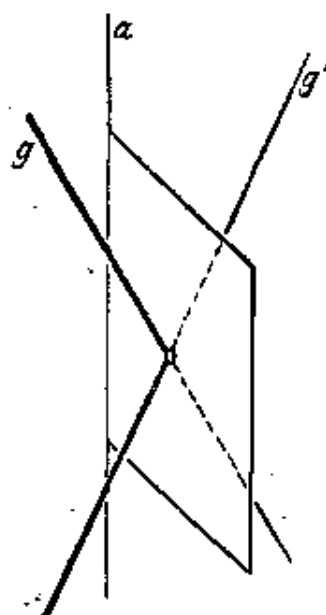


图 16

有一件令人惊奇的事情：在单叶回轉双曲面上有无穷多的直綫。事实上，这种曲面也可以用一条直綫圍繞与此直綫相敲斜的另一直綫回轉而产生（以前我們只談过圍繞与母綫同平面的軸回轉而产生的曲面）。这件事只能用解析方法証明。但是用直觀可以看

出,单叶回轉双曲面的作图可以有两种方式。事实上,假如我們

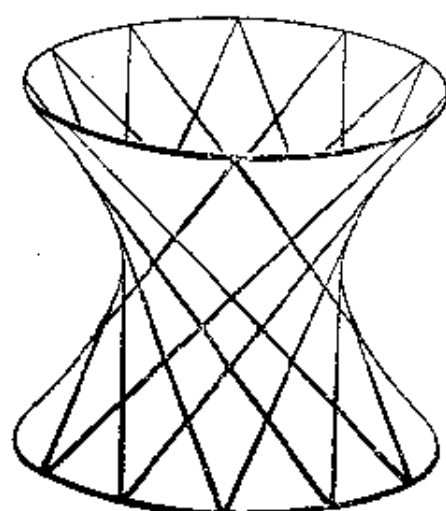


图 17

取一条直线 g' 同原来的母线 g 对于通过轴 a 的平面对称 (图 16), 那末新的直线 g' 经过回轉之后, 也象 g 一样, 产生同一曲面。这样, 在单叶回轉双曲面上含有两族直线, 每族直线都复盖曲面, 并且这两族直线是这样配置的: 一族的每一直线与另一族的每一直线相交 (或平行), 但同族的任二直线相互倾斜 (图 17)。

§ 3. 二阶曲面

由回轉圓錐曲线产生的若干曲面, 是一种更广泛的所谓二阶曲面 (这是由于解析上的理由) 的特殊类型。二阶曲面是在笛卡儿空间坐标中满足二次方程的曲面。用解析方法容易証明, 二阶曲面有下列性质: 任一平面与一个二阶曲面交于圆锥曲线 (包括常态的和非常态的); 此外, 由一定点到一个二阶曲面的所有切线形成一錐面, 此錐面同任一平面的交线是一圆锥曲线。还有, 此錐面与曲面相切, 其各切点也形成一圆锥曲线。二阶曲面是同时具有这几种性质的唯一曲面^①。下面我们讨论二阶曲面的几种不同类型。

把圆柱面推广, 得到椭圆柱面。椭圆柱面系由沿一椭圆移动一直线, 使直线常垂直于曲线的平面而得。用相同的办法, 从抛物线和双曲线可得到抛物柱面和双曲柱面 (图 18, 19)。

^① 从所说的第一个性质可以推出, 一直线如果不是整个线段在曲面上, 则此直线不能同该曲面交于两个以上的点。不过除了二阶曲面之外, 也还有其他的曲面具有这种性质的, 例如正方体的表面就是。

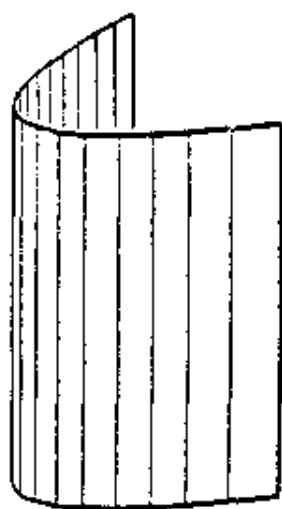


图 18

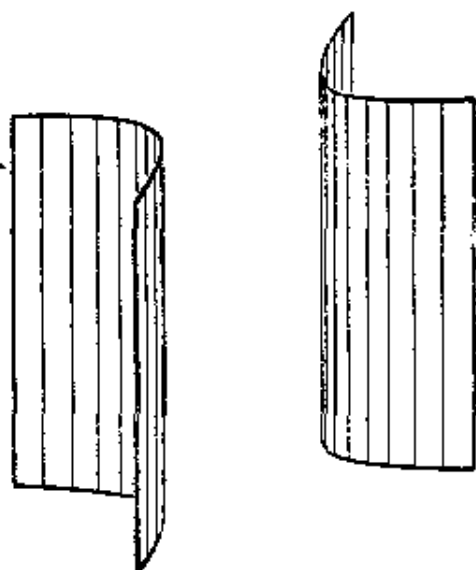


图 19

圓錐面相应的推广是一般的二阶錐面。二阶錐面由連接一常态圓錐曲綫上的各点与曲綫平面外一点的諸直綫做成。應該注意,跟柱面的情形不同,不能从椭圆、拋物綫、双曲綫得出三种不同的錐面。我們知道,一个动平面同一个定錐面的交綫是三种类型的圓錐曲綫,但对于柱面情形并不是这样。

用一种所謂伸縮变形法从相当的回轉曲面可得到一般的錐面和椭圆柱面。方法是这样:把通过旋轉軸的某一平面上的所有点固定,让空間其余的所有点朝着或背着这个平面移动,这些点在移动前后到平面的距离成一定比。可以証明,經過这样的变换,圓变成椭圆(或圓),直綫变成直綫,平面变成平面^①,二阶曲綫和二阶曲面分別变成二阶曲綫和二阶曲面。

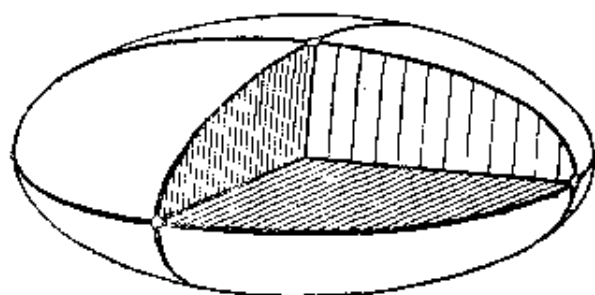


图 20

回轉椭球面(长的或扁的)經過伸縮变形,得到一般

① 施伸縮变形于平面上的图形,得到的图形与用平行投影投射到斜平面上的相局。

的椭球面。回轉椭球面对于通过其軸的任一平面对称,但一般的椭球面只有三个对称平面。这三个对称平面相互垂直。它們的交綫被曲面截出的三个不等的綫段,分別叫做长軸、中軸和短軸(图 20)。用伸縮法可以把一般椭球面变回成一个扁的或长的回轉椭球面,只須令长軸和中軸相等或者令中軸和短軸相等即可。

在波浪冲刷之下的海岸上常露出三軸椭球(即一般的椭球)状的石头。任何形状的石頭,在海水經常冲刷磨損下,漸漸变成类似椭球的形状。这种現象的数学探討,包含許多概率論上的問題。

单叶双曲面、双叶双曲面和椭圆抛物面,是可用伸縮变形法于回轉双曲面和回轉抛物面得出的最一般的曲面。两种类型的双曲面各有三个对称平面,椭圆抛物面有两个对称平面。

因为伸縮变形法仍将直綫变为直綫,所以一般的单叶双曲面有与单叶回轉双曲面相同的性質,即它包含两族直綫。直綫的配置也如同单叶回轉双曲面,即一族的每一直綫与另一族的每一直綫相交,但同一族的二直綫不相交,它們相互敲斜。

由此得出单叶双曲面的如下作法:在一族中任意取三条直綫(图 21)。因为这三条直綫的每两条相互敲斜,因此通过一条直綫

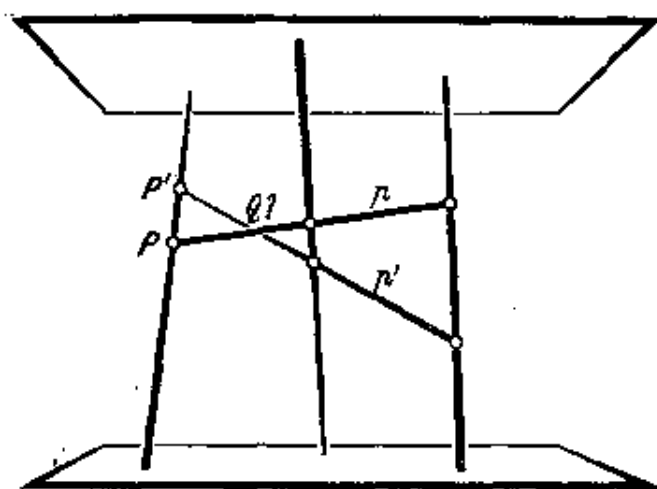


图 21

上的任一点 P 能作而且只能作一条与其他二直綫同时相交的直綫 p , 这条直綫也就是这样的二平面的交綫: 一个平面通过 P 和第二条直綫, 一个平面通过 P 和第三条直綫。 p 与双曲面有了三个公共点, 所以它必定完全在这个曲面上, 因为一直綫与作为二次曲面的双曲

以它必定完全在这个曲面上, 因为一直綫与作为二次曲面的双曲

面不能有两个以上的交点。现在让 P 在第一条直线上走过, 则相当的直线 p 走过曲面上不属于第一条直线的那一族所有直线的位置。如果从第二族中选取任意三条直线, 用相同的方法又可得到第一族的所有直线, 当然这一族也包括开始的那三条直线在内。这个作法表明, 所有同一族的任意二直线必相互斜交; 因为假若 P 和 p' (图 21) 交于一点 Q , 原来的三条直线就将落在同一平面 $PP'Q$ 上, 但这是跟假设不合的。

由此可见, 三条斜交直线常决定一单叶双曲面, 除非它们同时平行于一平面 (但不互相平行)。在这样的情况下, 三直线决定一个不可以从回转曲面得到的新的二阶曲面; 它叫做双曲抛物面; 它叫做双曲抛物面, 形状大致象个马鞍子 (图 22)。它有两个互相垂直的对称平面, 各与曲面相交成抛物线。它有两族直线, 象我们在起初作图时的三条直线一

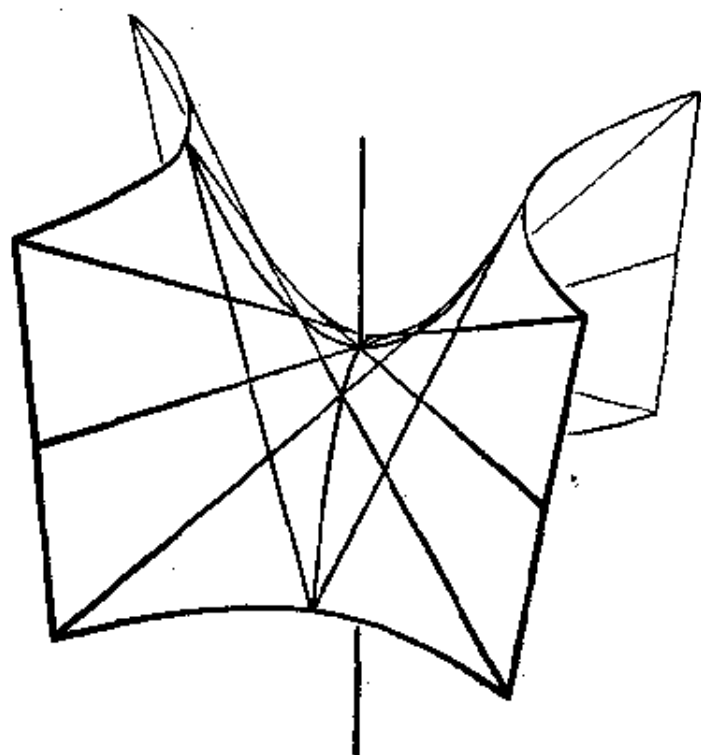


图 22

样, 每一族直线平行于一个定平面。直观上可以看出, 一平面不能与双曲抛物面交于椭圆, 因为任一平面与这个曲面的交线延伸至无穷远。由于这种理由, 可知双曲抛物面不能用伸缩变形法从回转曲面得到; 因为在任一回转曲面上都不能不有圆, 而圆经过伸缩变形以后变成了椭圆。

从此我们得到了产生曲面的一个新的原则: 沿空间某一特定

的路綫移动直綫。这样产生的曲面叫做直紋曲面。由此可見九种二阶曲面中有六种是直紋的,它們是三种柱面,一种錐面,一种单叶双曲面,一种双曲抛物面。最后的两种有一个共同的特点:通过曲面上任意一点,这种动直綫不止一条。有这个特点的直紋曲面,只有上述两种曲面和平面。

其余的三种二阶曲面是椭球面、椭圆抛物面和双叶双曲面。它們都不含有直綫,因为它們向两个相反方向无限扩展的时候,不能不中断。

单叶双曲面和双曲抛物面上的两族直綫有一个奇特的性質,說明如下。設想这两种曲面上的直綫是用剛性材料做成的。把它們在相交的地方綁扎起来,使得这些直綫只能繞交点轉动而不能滑动。或許有人以为如此固定就会使整个的构架固定。其实不然,这个构架仍然可以活动的(图 23a, b)。为了大致看出能变形的单叶双曲面的变动情况,我們先把与这曲面交于椭圆的对称平

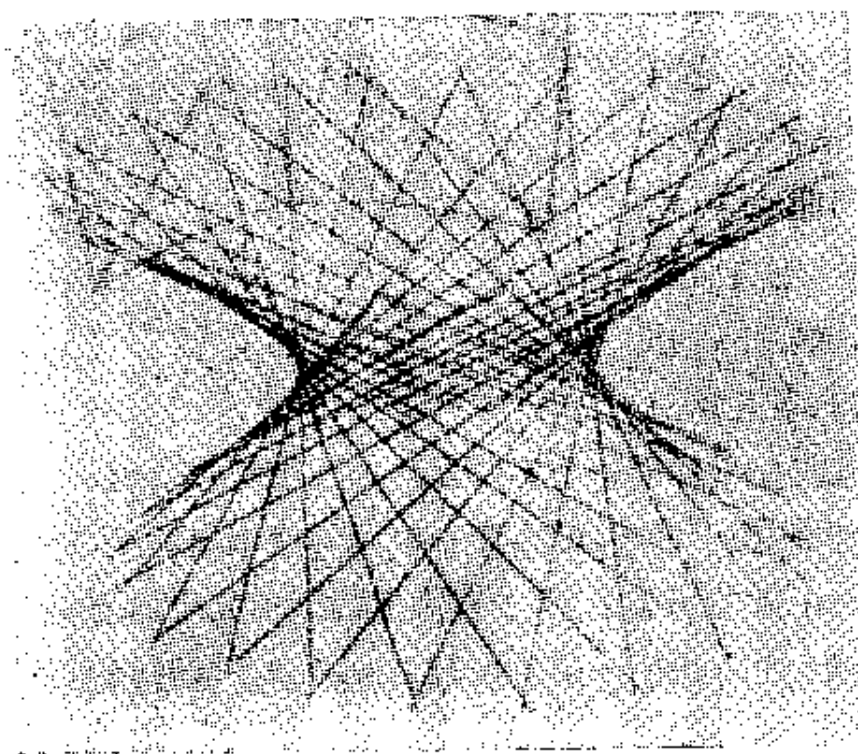


图 28 a

面固定在水平位置上,然后改变构形的形状,但使对称平面永远保持对称平面。因为单叶双曲面和双曲抛物面是通过曲面上任一点有二直线的仅有的两种曲面(平面除外),所以经过变形之后,单叶双曲面和杆模型不是仍旧保持单叶双曲面形状,就是变为双曲抛物面。可以证明,后面的情形不成立。我们把构架逐渐边收拢边提高,使这些细杆越来越接近对称平面的垂线。这样,曲面的弯曲程度逐渐减小。与此同时,在对称平面上的诸椭圆成为§1中所讲的逐渐细长的共焦椭圆族。在极限的情形下,构架叠合而为铅直平面,而且诸细杆在这个平面上切于一个双曲线,在水平面上的椭圆现在变为重合的线段。同样,我们也可以把构架作相反方向运动,使细杆逐渐倾斜,以至于接近水平平面。在这个过程中曲面颈部的廓线益趋明显。在极限的情况下,构架与水平平面重合,同时诸细杆在这个平面上包络一个椭圆。在本章的一个附录里我们还要给出细杆模型能动性的解析证明。

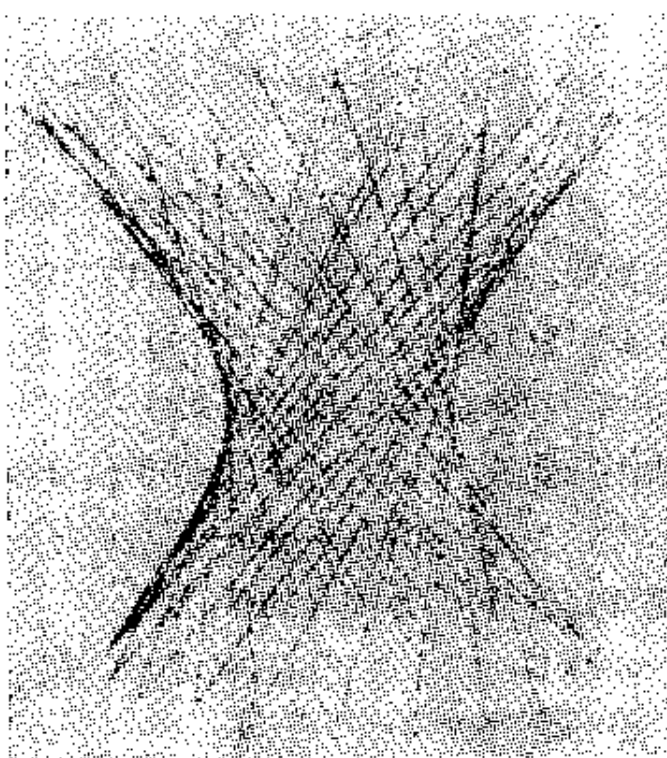


图 23b

双曲抛物面也有相仿的现象:构架经常保持抛物面的形状,但在两种极限情形下,曲面叠合在一平面上,而诸直线包络一个抛物线。

二阶曲面还可以用另一种观点来分成两种类型。双曲圆柱面、抛物圆柱面和双曲抛物面,这三种曲面与任一平面的交线不是圆;

因为交线是向无穷远扩展的。另一方面,在其他的六种曲面上有无穷多的圆。因为这个原故,这六种与上述三种不同,它们都包含回转曲面作为特例。

以三轴椭球面为例,证明确有圆形交线存在(图 24)。通过中

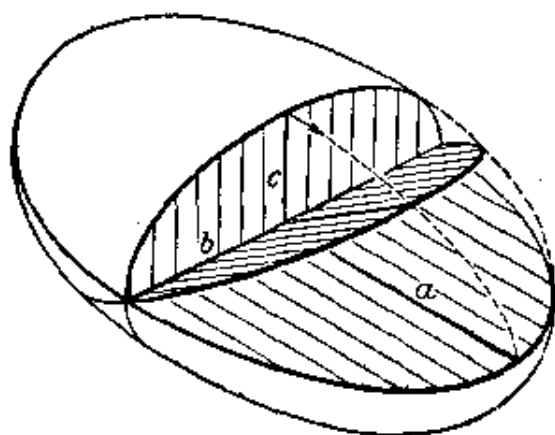


图 24

轴 b 的任一平面与椭球面交于椭圆,椭圆的一根轴是常值,等于 b 。现在将通过 b 和椭圆短轴 c 的平面绕 b 转动,一直转到与通过 b 和长轴 a 的平面重合为止。在转动的时候,截面上椭圆的第二根轴起初小于 b ,最后大

于 b 。因此在中間的某处必有同 b 相等的时候,从此可知,这时的交线是圆。由于椭球面有对称性,因此对称于平面 (b, c) ,必另有一平面,与曲面交于圆。我们还可以证明,任一平行于圆形截面的平面,都与椭球面交于圆。从此可以推知,在任何三轴椭球面上有两个平行圆族(图 25, a, b)。对于回转椭球面,两族圆相重合。

对于与任一平面相交成一闭合曲线的其他二阶曲面,均可仿照椭球面的情形,作同样的探讨。

单叶双曲面上关于直线的定理,对于上述的交线是两个圆族



(a)



(b)

图 25

的情形也成立。我們把所有的圓在它們相交的地方綁扎好，使它們只能轉動而不許滑動，如此得出一個非剛性的、能動的构架(圖 25, a 和 25, b 表示用厚紙做的幾個盤子，留出適當的縫口，互相穿插着。讀者可看出，這個模型跟我們上面講的沒有根本的區別)。能動圓盤模型經過變動以後，所得的兩族曲面與能動細杆模型有所不同：在圓盤模型的對稱平面上的圓錐曲綫並不是共焦族的。舉例來說，三軸橢球面的能動圓盤截面模型總可以改變為球形，因此曲面在任一對稱平面上的交綫是圓，但共焦族的橢圓卻永遠不能改變為圓。能動圓盤模型經過變形，可以疊合在一起，成為一平面，這和能動細杆模型一樣。

雖然兩種模型有很大的區別，但是它們通過一種過渡情形互相聯系着。這指的是能動細杆雙曲拋物面模型，它也可以看作是圓盤模型的一種極限情形（即當圓的半徑變作無窮大時），換句話說，此時的圓變作了直綫。如果註一族單葉雙曲面趨近於雙曲拋物面的形狀，那末單葉雙曲面上的圓和直綫都變成了雙曲拋物面上的直綫。

§ 4. 橢球面与共焦二阶曲面的繩綫作图

因為空間的二階曲面相當於平面的圓錐曲綫。於是發生這樣的問題：能不能把橢圓的繩綫作圖法應用到二階曲面上去呢？關於橢球面的繩綫作圖問題，已為斯陶德 (Staudé) 在 1882 年解決。這種作圖法是：先裝配好有一個橢圓和一個雙曲綫的固定架子，雙曲綫的平面垂直於橢圓的平面，並通過其長軸。以橢圓的焦點 F_1 和 F_2 為雙曲綫的頂點，以橢圓的頂點 S_1 和 S_2 為雙曲綫的焦點。後面的兩個條件唯一地確定了雙曲綫，如果橢圓已經給出的話。

現在把繩綫的一端縛在橢圓的一個頂點處，這個頂點比如說是 S_1 。然後把它從離 S_1 較近的雙曲綫的一支的後面繞過來，再

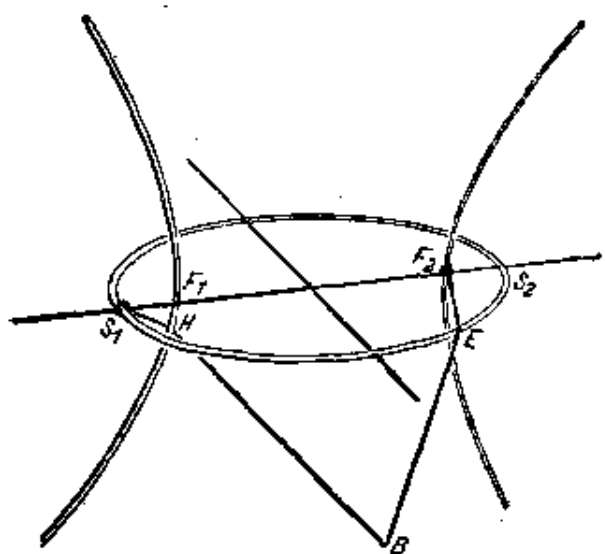


图 26

从椭圆的前面绕过去，将另一端缚定于 F_2 。将椭圆和双曲线之间的这段绳线在 B 点拉紧，整个的绳线就成为折线 S_1HBEF_2 的样子。其中的一段 BHS_1 是从 B 经过双曲线上一点到 S_1 的最短路程，同样， BEF_2 也有相同的性质。

现在移动点 B ，在移动的过程中时时拉紧绳线，则点 B 的轨迹是椭球面。如绳线的缚法象图 26 所表示，点 B 将描出曲面的前下部，而为全曲面的四分之一。其余四分之三的制作，须将 S_1 和 F_2 之间的绳线用别种方法绕过椭圆和双曲线^①。

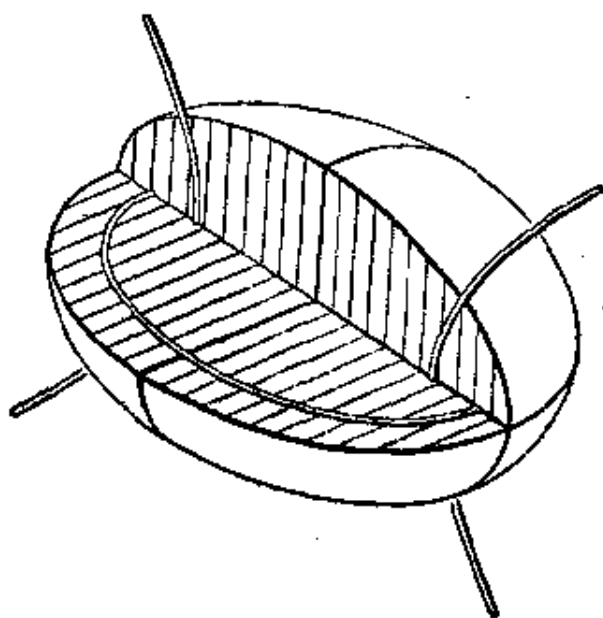


图 27

在椭球面的作图中，两个圆锥曲线所做成的构架跟椭圆的焦点

作用相同。正因为这个原故，上述构架就叫做椭球面的焦点曲线（焦椭圆和焦双曲线）。一般地我们说，两个圆锥曲线是二阶曲面的焦点曲线，如果这二曲线的平面是曲面的对称平面，而且二平面

^① 绳线的二端可以不缚在 S_1 和 F_2 上而缚在椭圆和双曲线的任何别的点上。唯一的要求是须使二定点间的绳线能拉得紧，就象上文说的一样。

与曲面相交所成的圆锥曲线与这二曲线共焦点。因为交线不是椭圆就是双曲线,所以要考虑四种情形。两条交线都是椭圆,得到一个椭球面(图 27);两条交线都是双曲线,得到一个双叶双曲面(图 28);曲面与焦双曲线的平面交于双曲线,与焦椭圆的平面交

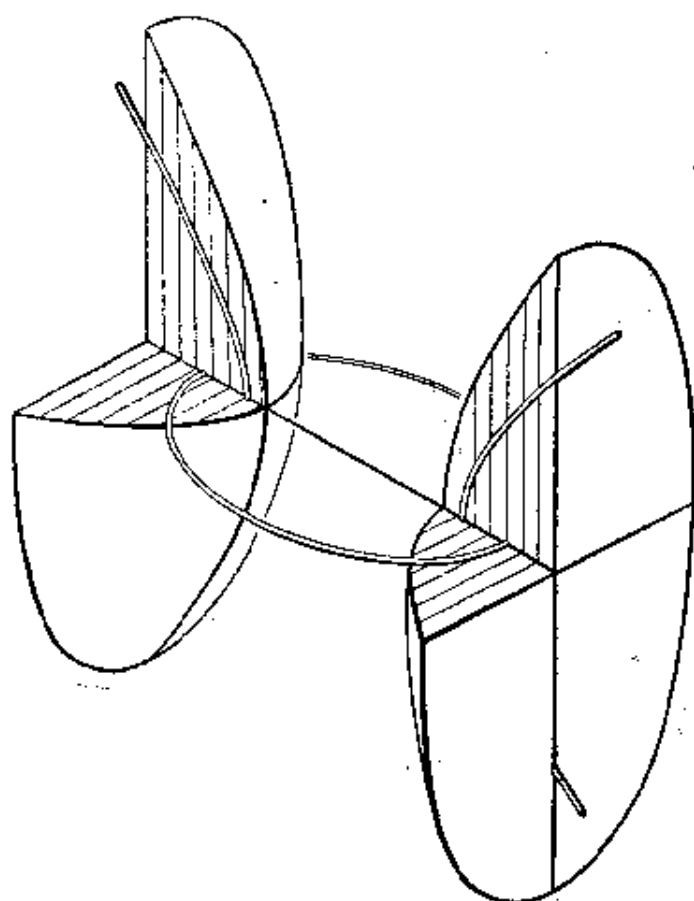


图 28

于椭圆,得到一个单叶双曲面(图 29)。第四种情形——曲面与焦双曲线的平面交于椭圆,与焦椭圆的平面交于双曲线——须除掉。因为这时椭圆和双曲线必与直线 F_1F_2 (图 30) 交于四个不同的点 E_1, E_2, H_1, H_2 , 这样焦双曲线的平面将与曲面有一个公共的椭圆和两个不在此椭圆上的公共点 H_1, H_2 , 这与二阶曲面的定义矛盾。

如以长度不等的绳线来作椭球面,但焦点曲线是固定的,就得出“共焦”椭球面(即各椭球面的焦点曲线相同)。共焦椭球面简单

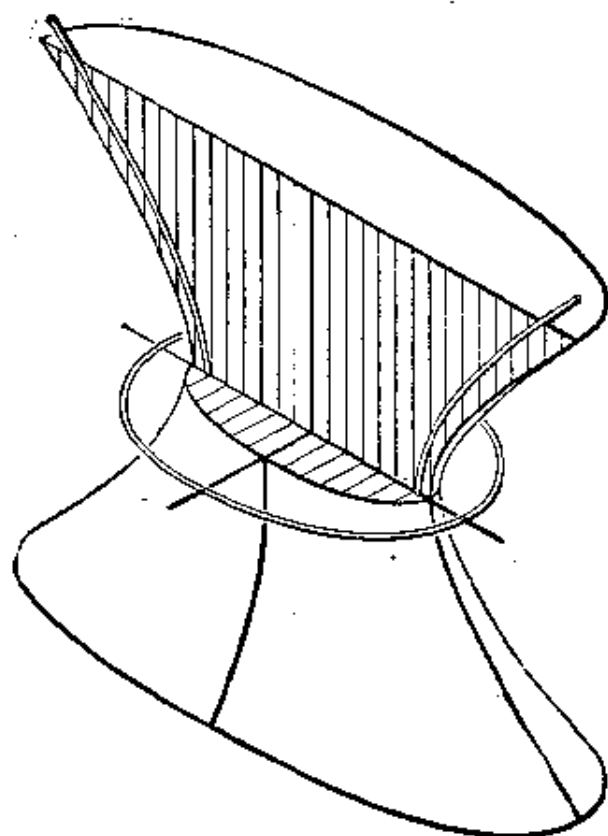


图 29

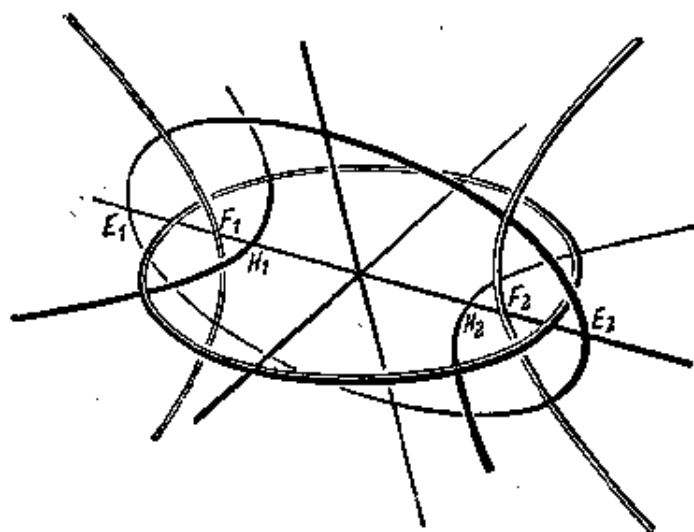


图 30

而无空隙地填满空间。有相同的焦点曲线的双叶双曲面族或单叶双曲面族也简单而无空隙地填满空间。这样说来，通过空间的每一点，可以有一椭球面、一单叶双曲面和一双叶双曲面（图 31）。正象平面上的共焦圆锥曲线的情形，空间的共焦二阶曲面相互正交，

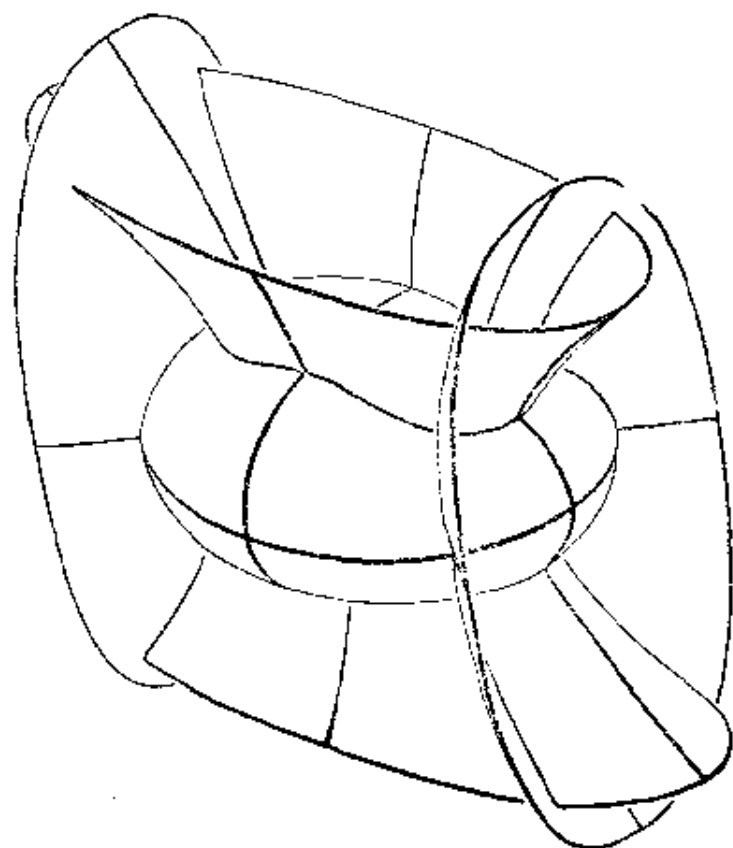


图 87

也就是說,过空間任一点所作的三个曲面的切平面相互垂直^①。象这样的三个相互垂直的曲面族——其中最重要的是共焦二阶曲面族——在数学和物理学的許多研究中甚为有用。这类曲面的解析表示导致“橢圓坐标”,它可以应用到多种問題,特别是天文学上去。

讓我們順着一定的次序来观察共焦族的各种二阶曲面,以便了解这种曲面的全部情况。先从椭球面族中碩大而近于球面的那些曲面开始,然后让长軸逐漸縮短。因为曲面在三根軸的方向上受的压缩不等,所以当过程繼續进行时,曲面越来越扁平而不再象球形了。終于达到作为椭球面极限情形的双重复盖的焦橢圓的内部平面。从这里一下子跳到橢圓的外部平面去,这部分平面仍当作是双重复盖的,如此它就可以作为扁平的单叶双曲面的极限情

① 焦点曲綫上的点例外;此时三个平面之中有两个是不定的。参看下节。

形。从这种极限情形开始,来看单叶双曲面族。曲面逐渐陡峭,且从两方趋近于焦双曲线所在的平面;与此同时,在双曲面颈部的平面上的椭圆——它们组成一个共焦族——越变越狭窄,终于变成小得不能再小,这就是说,变成了双重的线段。这样,单叶双曲面收缩成为介于两支焦双曲线之间的双重复盖的平面长条^①。现在再跳到焦双曲线的另一面去,但仍旧把它当作双重复盖的,这就有了扁平的双叶双曲面的极限情形。让这个双曲面的两腔逐渐膨胀,则它将由两方趋近于这样一个平面:它通过二焦点曲线的中心,并且垂直于二曲线所在的平面。在极限位置时我们就得到这个双重复盖的平面。至此,我们看完了共焦曲面族的所有曲面的情况,并且看到各族曲面如何简单而无空隙地填满空间。

焦点曲线之间的关系以及焦点曲线同它们所产生的二阶曲面之间的关系还可利用另一种性质来刻画。如果我们从焦双曲线上任一点沿着它的切线方向来观看焦椭圆,这时的焦椭圆就好象是圆,圆心在视线上。因此焦双曲线是通过焦椭圆的这种圆锥面顶点的轨迹:圆锥面的旋转轴在圆锥面的顶点处切于焦双曲线。此外,由跟已知焦点曲线共焦点的椭球面的外面焦双曲线上任一点所作的椭球面的切线,作成一圆锥面,锥面的轴即上面所说的轴。一般地,有这样的定理:由共焦族的任一曲面外焦点曲线上一点看这曲面,如果视线与焦点曲线相切的话,曲面就象是圆,圆心在视线上(但是曲面和切圆锥面的切点一般地不是形成圆,而可以是任何的圆锥曲线,其中也包括双曲线)^②。

除了焦点曲线之外,自然我们也想到要研究共焦族中两不

① 虽然这一族双曲面,包括平面上的极限位置,就是前面讲过的能动杆状模型所描写的。

② 下面所讲的是共焦族的另一种性质,它包括方才所讲的性质作为极限情形:如果从空间的任意一点 P 作共焦族中任一曲面(不包围 P)的切圆锥面,则这个锥面的对称平面永远是通过 P 点的族中三曲面在 P 点的切平面。

同类的曲面的交线。这类曲线有一种很简单的微分几何性质，以后会看到的 (§ 28)。这类曲线是我们第一次知道的不在一平面上曲线的例子。容易看出，由两个任意二阶曲面交出的曲线，它和任何平面的交点最多只有四个，除非曲线与平面有一个弧完全相同。事实上，平面和这两个曲面交于两个圆锥曲线；其次，可以用解析方法证明（直观上是显然的），两个不相重合的或没有一条共同直线的圆锥曲线，最多只有四个交点 (§ 24)。

和交点的这一性质有关系的是：由于解析的理由，这种曲线叫做四阶曲线。（ n 阶曲线也有相仿的性质：曲线与任一平面最多交于 n 点，或有一弧相同。）除此之外，也还有不是由两个二阶曲面相交而成的四阶曲线^①。至于高维的空间曲线如不借用解析方法很难掌握，此处只好避而不谈。

第一章 附录

1. 圆锥曲线的垂足点作图

设已给一曲线 K 和一点 F_1 (图 32)。从 F_1 作 K 的所有切线 t 的垂线。这些垂线的垂足描出一新的曲线 k ，它叫做曲线 K 对于点 F_1 的垂足曲线。反过来，设已给 F_1 和 k ，也可以求出 K 。方法是这样的：连接 F_1 和 k 上的任一点，从这一点作连线的垂线 t 。诸直线 t 的包络即是曲线 K 。第二类的作图我们叫做垂足点作图，并且说 K 是由 k 上的垂足点作图（对于 F_1 而言）产生的。由于 F_1 的选

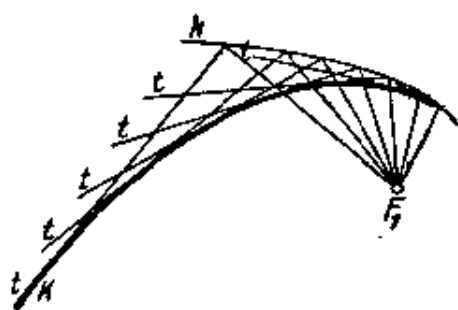


图 32

① 对于任何两个二阶曲面的交线，用解析法可以证明：通过这交线有无穷多的其他二阶曲面，其中也包括四个锥面，锥面之中某几个可以重合或退化为柱面。

擇不同，同一曲线 k 上的垂足点作图，可得出多种不同的曲线 K 来。

以下我們証明：圓上和直綫上的垂足点作图永远产生圓錐曲线。如果 F_1 在以 M 为圓心的圓內，得到一椭圆； F_1 是一个焦点，另一个焦点 F_2 是 F_1 对于 M 的反射点。如果 F_1 在圓外，得到一双曲线；一个焦点仍然是 F_1 ，另一个焦点仍然是 F_1 对于 M 的反射点。假定不是圓而是直綫 g ，則得到一抛物綫；焦点是 F_1 ，准綫 h 与 g 平行，并且 F_1 和 h 在 g 的不同側，跟 g 的距离相等。

首先我們証明对于椭圆的情形（图 33）。过 F_1 作任意一直綫，設与圓交于 C 和 C' 。在此直綫上取二点 F, F' ，使 $F_1C = CF$ ，

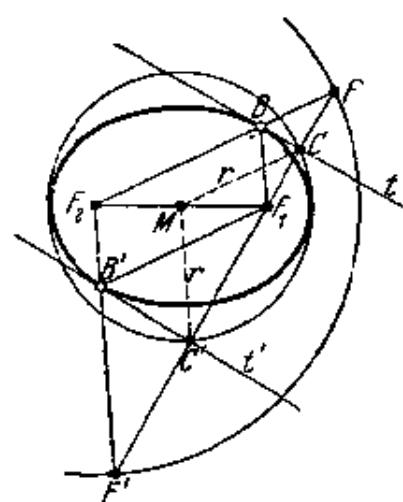


图 33

然后过 C 和 C' 作直綫 CC' 的垂綫 t 和 t' 。設 F_2 是断言中的点，則 M 应是綫段 F_1F_2 的中点。設 F_2F 与 t 交于 B ， F_2F' 与 t' 交于 B' 。那么就有 $F_1B = FB$ ，因之 $F_1B + BF_2 = FF_2$ 。但是因为 M 和 C 分別是綫段 F_1F_2 和 F_1F' 的中点，所以 $FF_2 = 2CM$ 。設 r 代表圓的半徑，就有关系式 $BF_1 + BF_2 = 2r$ 。可

見点 B 在以 F_1 和 F_2 为焦点、以 $2r$ 为长軸的椭圆上。剩下的只要証明 t 在点 B 切于椭圆就行了。从第 2 頁上証明过的椭圆切綫与二焦点半徑作成等角的性質，知道这是对的；因为根据我們的作图，有 $\angle CBF_1 = \angle CBF$ 。利用点 B', C', F' ，同样可証明直綫 t' 也是椭圆的切綫。

对于双曲线情形的証明，可参看图 34。这幅图不同于图 33 的地方，在于 F_1 取在圓外。在这种情形下，点 B 和 B' 各描繪双曲线的一个分支；因为 $F_1F_2 = 2r = BF_2 - BF_1$ 和 $F'F_2 = 2r = B'F_1 - B'F_2$ 。

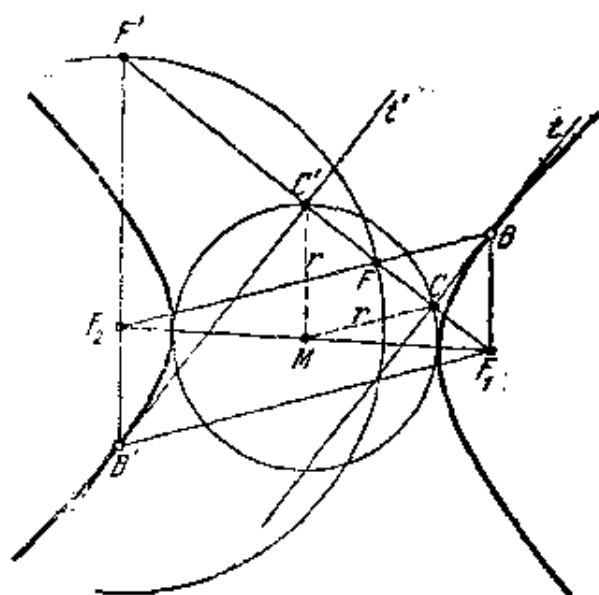


图 34

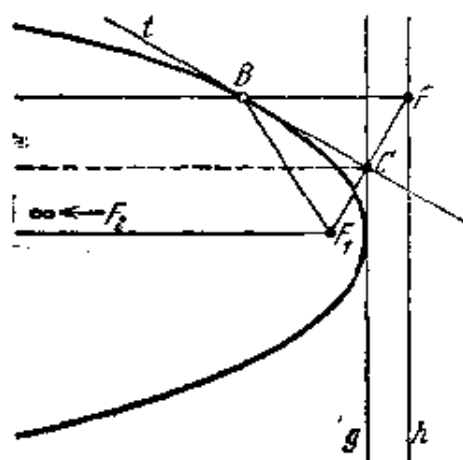


图 35

对于抛物线的情形,证明须稍加修改。若点 C 和 F 以及直线 t 的作图仍与上述相同(图 35),则须从 F 作 g 的垂线。设此垂线交 t 于 B , 则 $BF_1 = BF$ 。但是 F 描绘直线 h , 这由作图可以知道①。所以 B 实际描绘一抛物线; 以 F_1 为焦点, 以 h 为准线。至于 t 是在点 B 的切线, 乃由于 t 是 $\angle FBF_1$ 的平分线的原故②。

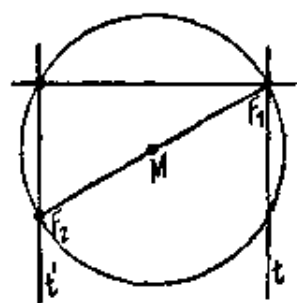


图 36

假如点 F_1 在圆周上(图 36), 则 t 和 t' 围绕点 F_1 和 F_2 旋转, 所以在这种情形下得到一对直线束。如果把二阶曲线看作由切线产生的, 这就是二阶曲线的一个自然得出的退化情形。

2. 圆锥曲线的准线

以前我们曾经给抛物线下过这样的定义: 所有到一定点 F (焦

① 在椭圆和抛物线的垂足点作图中, F 描绘一圆, 圆心在 F_2 , 半径等于原圆的二倍, 因为 $FF_2 = 2CM$ 。其次, 从 $FF_1 = 2CF_1$ 可知 F_1 是二圆的相似中心。

② 当然我们也可以使用极限过程从图 33 推到图 35, 正如第 3 页上的从椭圆推到抛物线一样。

点)的距离等于到一定直线 g (准线) 的距离的点的轨迹。与此相仿,也可以给椭圆和双曲线下定义。我们欲求所有到一定点 F 的距离与到一定直线的距离之比是一常数 v 的点的轨迹。当 $v=1$ 时,得到的是抛物线。现在证明当 $v<1$ 时,所求的曲线是椭圆; $v>1$ 时,是双曲线。在每种情况下, F 是各个圆锥曲线的焦点。反之,对任一椭圆或者任一双曲线,可找到二直线 g_1, g_2 , 使得曲线上任一点到 F_1 和 g_1 (或者到 F_2 和 g_2) 的距离之比是一常数。

证明时参看图 37。设有一圆锥同一平面 e 交于一椭圆 k , 我们就证明对这个椭圆的情形的断言。同图 10 一样,用一辅助球,

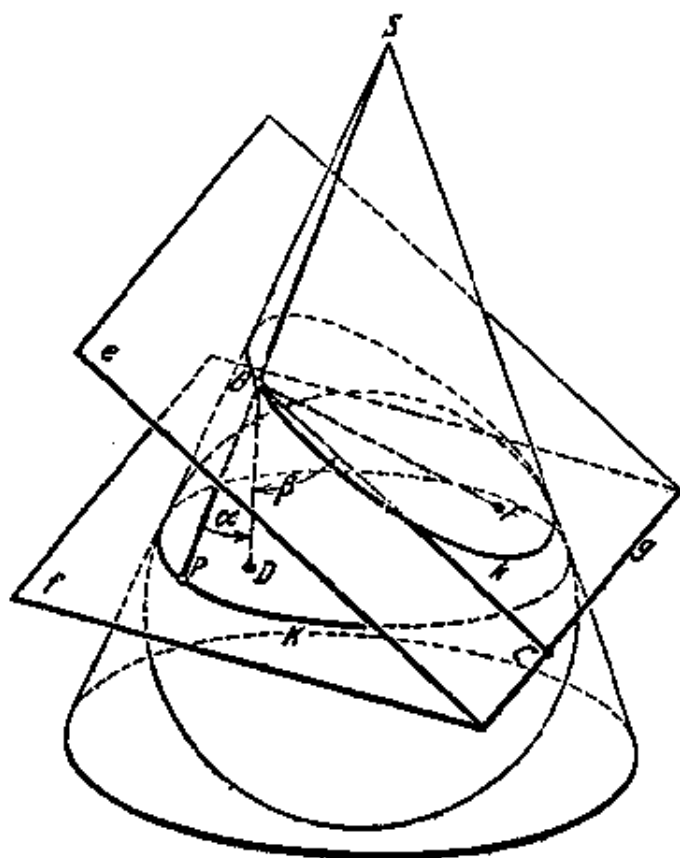


图 37

使与锥面切于圆 K , 与平面切于点 F 。那末我们知道 F 是 k 的一个焦点。其次, 设 f 是包含 K 的平面, g 是 e 和 f 的交线。从椭圆上任一点 B 作 g 的垂线 BC 和 f 的垂线 BD 。连接 B 和 F ,

B 和錐面的頂點 S ; 設 BS 交 K 于 P 。为簡便起見, 命 $\angle DBP = \alpha$, $\angle DBC = \beta$ 。就有 $BC = \frac{BD}{\cos \beta}$, $BP = \frac{BD}{\cos \alpha}$, 又 $BF = BP$, 因为这两个綫段是从一点 B 到同一球的切綫綫段。

由此可知

$$\frac{BF}{BC} = \frac{BP}{BC} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}.$$

但角 α 和 β 与点 B 的选择无关, 因为 α 等于錐面張角的一半, β 等于平面 e 对于錐面軸的傾斜角。令 $\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} = v$, 这就証实了对椭圆的情形, 我們的断言正确。与此同时, 我們还順便得出了准綫 g 的一种空間作图法。

如果 e 不与錐面交于椭圆而交于双曲綫 h (图 38), 証明同前。不过在第一种情形下 $\alpha < \beta$, 在第二种情形下 $\alpha > \beta$ 。所以就椭圆 k 來說, $v < 1$, 就双曲綫 h 來說, $v > 1$ 。

到現在为止, 我們只是証明了对給定的椭圆和双曲綫准綫存在。我們还需要反过来問: 已知数 v , 点 F 和直綫 g , 其曲綫为何? 很明显, 所求的曲綫的形状仅依賴数 v 的值而定。另一方面, 我們可以这样調整作图,

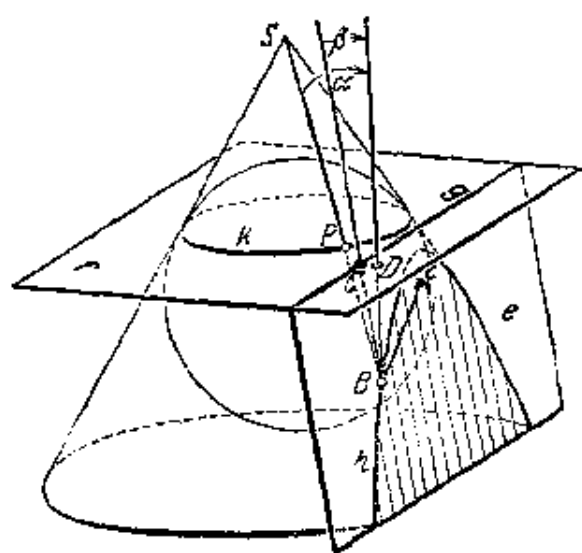


图 38

註角 α 和 β , 因而数 v , 取任意的值。由此可知, 我們的作图产生所求曲綫的一切可能的形式, 因而所求曲綫其实就是一圓錐曲綫。

当 $\alpha = \beta$ 时, 也就是当 $v = 1$ 时 (記号仍同前), 我們又回到原来的抛物綫的定义。但是假如 e 同錐面交于圓, 作图便不可能, 因为在这种情形下, 而且只有在这种情形下, 平面 e 和 f 不相交而平

行。每一个非退化的不同于圓的圓錐曲綫，都可以看作是圓錐截出的曲綫，因此都适用我們的作图法。因此准綫的性質是除圓外一切非退化圓錐曲綫所共有的。

附帶地說一說，圓錐曲綫的希腊名字是根据曲綫对于准綫的关系而来的。这是說，对于橢圓 v 不足 1 ($\epsilon\lambda\lambda\epsilon\acute{\iota}\pi\epsilon\nu$)，对于双曲綫超过 1 ($\upsilon\pi\epsilon\rho\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\nu$)，对于抛物綫正好是 1 ($\pi\alpha\rho\alpha\beta\acute{\alpha}\lambda\lambda\epsilon\nu$)。

3. 双曲面的能动細杆模型

現在我們来証明第 17 頁上那句断言：单叶双曲面的細杆模型是能动的。(在証明中假定已經知道空間解析几何中若干知識。)同时还要証明，当构形变形时，它歷經一个单叶双曲面族。

設 x_1, x_2, x_3 和 y_1, y_2, y_3 分別是点 P 和 Q 的笛卡儿空間坐标。考虑共焦点二阶曲面：

$$\frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \frac{x_3^2}{a_3 - \lambda} = \sum_{i=1}^3 \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = 1. \quad (1)$$

讓我們选择 λ 的值，使 (1) 代表一个单叶双曲面。 P 假定是这曲面上的一点，正如 (1) 式所示。假定 Q 和 P 同在曲面的某一直綫上。这个要求跟以下二方程等价：

$$\sum_{i=1}^3 \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} = 1, \quad (2)$$

$$\sum_{i=1}^3 \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} = 1. \quad (3)$$

因为綫段 PQ 的中点 M 一定也在曲面上。 M 的坐标为 $\frac{1}{2}(x_i + y_i)$ 。所以我們应有

$$\sum \frac{1}{4} \frac{(x_i + y_i)^2}{a_i - \lambda} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \sum \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} = 1,$$

而这是同 (3) 式等价的。反之，假如直綫 PQ 同曲面有三点 $P, Q,$

M 相同, 也就是满足 (1), (2), (3) 的话, 这条直线就完全在这曲面上。

让我们来计算距离 $PQ=r$ 。这里有

$$\begin{aligned} r^2 &= \sum_{i=1}^3 (x_i - y_i)^2 = \sum x_i^2 + \sum y_i^2 - 2 \sum x_i y_i = \\ &= \sum (a_i - \lambda) \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} + \sum (a_i - \lambda) \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} - \\ &\quad - 2 \sum (a_i - \lambda) \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} = \\ &= \sum a_i \left[\frac{x_i^2}{a_i - \lambda} + \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} - 2 \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} \right] - \\ &\quad - \lambda \left[\sum \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} + \sum \frac{y_i^2}{a_i - \lambda} - 2 \sum \frac{x_i y_i}{a_i - \lambda} \right]. \end{aligned}$$

由于须满足方程 (1), (2), (3), 最后一个方括弧里的式子消去了。因此得到

$$r^2 = \sum a_i \frac{(x_i - y_i)^2}{a_i - \lambda}. \quad (4)$$

现在假定在 (1) 式内将 λ 换成另一值 λ' , 从而得出另一单叶双曲面。这只有当而且仅当对于每个 i , $a_i - \lambda$ 的符号与 $a_i - \lambda'$ 的相同时才能作到。因此公式

$$x'_i = x_i \sqrt{\frac{a_i - \lambda'}{a_i - \lambda}} \quad (i=1, 2, 3) \quad (5)$$

决定一实的仿射变换。很明显, (5) 把曲面 (1) 变换到同 (1) 共焦点的另一个单叶双曲面。命这个双曲面为 (1')。设 $P'(x'_i)$ 和 $Q'(y'_i)$ 是在变换 (5) 之下 P 和 Q 的象, 则直线 $P'Q'$ 完全在 (1') 上, 因为它是 PQ 的象。至此我们只要再证明距离 $P'Q'=r'$ 仍旧等于 PQ , 也就是 $r'=r$, 即可证明我们的断言。对于 r' , 我们有与 (4) 相仿的公式:

$$r'^2 = \sum a_i \frac{(x'_i - y'_i)^2}{a_i - \lambda'} \quad (4')$$

由(5)得

$$\frac{(x'_i - y'_i)^2}{a_i - \lambda'} = \frac{(x_i - y_i)^2}{a_i - \lambda} \quad (i=1, 2, 3),$$

由于(4)和(4'), 可知 $r = r'$ 确实是对的。

如果我們固定 λ , 让 λ' 变动, (5) 表示細杆模型在对称軸固定的条件下变动时, 模型的点所走过的路綫。經過簡單的計算, 可以知道, 这些曲綫乃是同(1)共焦点的橢球面和双叶双曲面的交綫。

第二章 正則点系

在这一章里我們預备用新的观点研究空間的度量性質。直到現在为止,我們只研究了一些曲綫和曲面,也就是只接触到一些連續图形,但現在我們要轉而建立由离散的几何元素做成的系統。这样的系統也时常在其他数学分支里遇到,尤其是在数論和函数論以及結晶学中^①。

§ 5. 平面点格

由离散的部分組成的最簡單的图形是平面正方形点格^②(图 39)。要得到这样的点格,我們在平面上画出面积为一单位的正方形的四个頂点,把正方形沿其一边的一个方向移出一边之长,画出所得的两个新頂点。設想这样的步骤可以在一个方向上和它的相反方向上无止境地繼續进行,这样我們在平面上就得到了由距离相等的两列点所組成的长条。把长条在跟它垂直的方向上移出一边之长,画出得到的新頂点。假定这个步骤又可以在两个方向

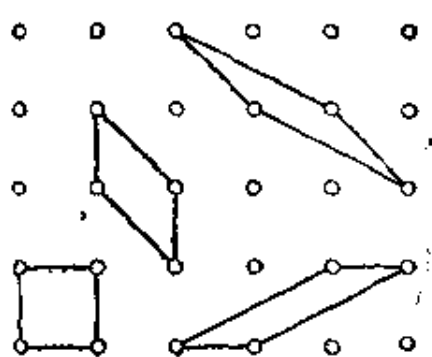


图 39

① 下面讲結晶学的几节中不总是用普通結晶学上的术语。在簡單的几何的探討的範圍內,我們也常用簡明的名詞——著者注。

讀者如欲更詳細地了解几何結晶学,建議去参考 Б. Делоне, Н. Падуров, А. Александров 著 “Математические основы структурного анализа кристаллов”, ГИИ, 1934—俄譯本編者注。

② “点格”是指由点組成的“格子”,下頁中的“格子点”是指点格中的任意点——中譯者注。

上无止境地進行。这样就作出了全部的正方形点格。正方形点格还可以定义为在平面笛卡儿坐标系中整数坐标点的集合。

当然，由一个点格的四个頂点不仅可以組成正方形也可以組成其他图形，例如平行四边形。容易知道，由平行四边形出发得到的点格与由正方形出发得到的相同，只要这平行四边形不以格子点为頂点，而它的内部和边上不含任何其他格子点就行了（否則的話，用这种办法得出的点不能包括格子点的全体）。今試取任意的这样一个平行四边形来考察。可以看出，它的面积等于原来正方形的面积（图 39）。关于这句话的严格証明，将在第 36 頁上給出。

尽管如此简单的点格，却可以引起重要的数学研究，其中最早的是高斯（Gauss）的研究。高斯企图在半徑等于 r 的圓面中找出格子点的数目 $f(r)$ ；这里圓心是一格子点，而 r 是一整数。高斯凭实验找出对于許多 r 值的 $f(r)$ 值来，有如：

$$\begin{aligned} r=10, & \quad f(r)=317, \\ r=20, & \quad f(r)=1257, \\ r=30, & \quad f(r)=2321, \\ r=100, & \quad f(r)=31417, \\ r=200, & \quad f(r)=125629, \\ r=300, & \quad f(r)=282637. \end{aligned}$$

高斯研究函数 $f(r)$ 的目的，原想借这个結果来計算 π 的近似值。每个基本正方形的面积，按假設都等于一个单位，因此 $f(r)$ 就等于被左下頂点在圓面之内或边上的所有正方形复盖着的面积 F （图 40）。这样說来， $f(r)$ 与圓面面积 πr^2 之差不超过与圓面相交的（包括計算进去的或未計算的）正方形面积的总和 $A(r)$ ：

$$\begin{aligned} |f(r) - \pi r^2| &\leq A(r), \\ \left| \frac{f(r)}{r^2} - \pi \right| &\leq \frac{A(r)}{r^2}. \end{aligned}$$

要求 $A(r)$ 的估值是不难的。单位正方形的两点間最大距离是 $\sqrt{2}$ ，所以所有跟圆相交的正方形都落在一个圆环內，环的宽度为 $2\sqrt{2}$ ，而夹在半徑为 $r + \sqrt{2}$ 和 $r - \sqrt{2}$ 的二圆之間。圆环的面积是

$$B(r) = [(r + \sqrt{2})^2 - (r - \sqrt{2})^2] \pi = 4\sqrt{2} \pi r。$$

但 $A(r) < B(r)$ ，所以

$$\left| \frac{f(r)}{r^2} - \pi \right| < \frac{4\sqrt{2} \pi}{r}。$$

由此再运用极限过程，就得到我們所要找的公式：

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{r^2} = \pi。 \quad (1)$$

現在把高斯求得的 $f(r)$ 之值代入上式，得出下列 π 的近似值 ($\pi = 3.14159 \dots$)：

$$r=10, \quad \frac{f(r)}{r^2} = 3.17,$$

$$r=20, \quad \frac{f(r)}{r^2} = 3.1425,$$

$$r=30, \quad \frac{f(r)}{r^2} = 3.134,$$

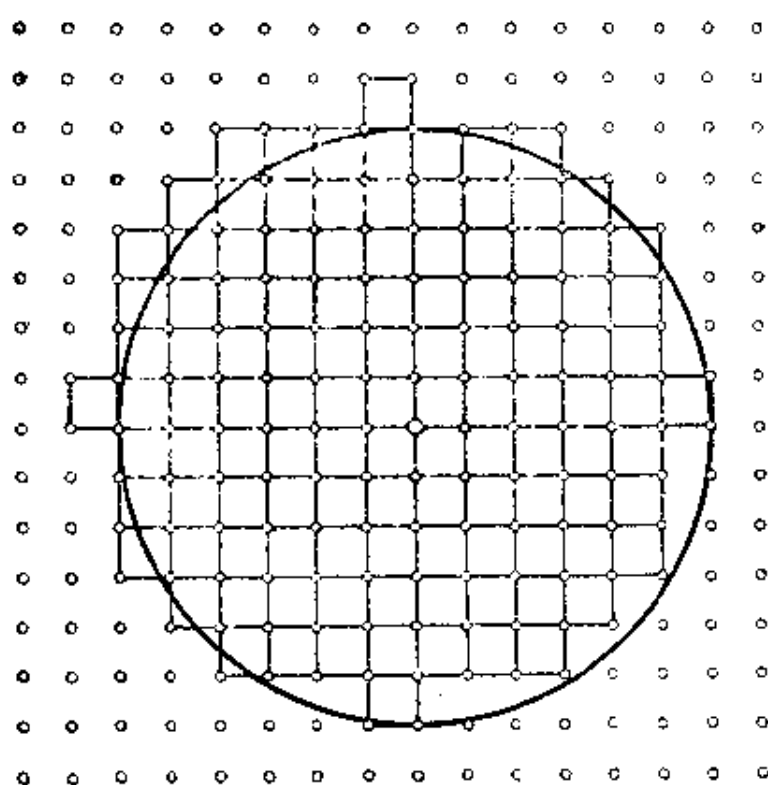


图 40

$$r=100, \quad \frac{f(r)}{r^2} = 3.1417,$$

$$r=200, \quad \frac{f(r)}{r^2} = 3.140725,$$

$$r=300, \quad \frac{f(r)}{r^2} = 3.14107.$$

公式(1)的另一个应用是証明在第34頁上提到的那一句話：凡能产生正方形点格的任一平行四边形，它的面积都等于1。为了証明，我們設想圓域內的每一格子点都是一基本平行四边形的一頂点，并約定所有这些頂点在平行四边形相同的位置上。讓我們把平行四边形复盖着的面积 F 跟圓面的面积比較一下。这里也发生由半徑 $r+c$ 和 $r-c$ 所作成的圓环面积 $B(r)$ 产生的微小誤差，其中 c 是一基本平行四边形的两点間的最大距离而与 r 无关。假定基本平行四边形的面积为 a ，則面积 F 等于 $a \cdot f(r)$ 。从此得出公式

$$|af(r) - r^2\pi| < B(r) = 4rc\pi,$$

于是
$$\left| \frac{af(r)}{r^2} - \pi \right| < \frac{4c\pi}{r},$$

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{r^2} = \frac{\pi}{a}.$$

我們已經証明过

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \frac{f(r)}{r^2} = \pi,$$

据此①，我們的断言 $a=1$ 得証。

現在我們轉来研究一般的“单位点格”，这是說，根据由单位正方形产生正方形点格的方法，由面积等于一单位的任意平行四边形产生的点格。这里也是一样，不同的平行四边形可以产生相同

① 在这个証明中，也可以不必是圓，而是任何的一块平面，只要这块平面边上被复盖的那一部分对整个的这块平面來說，是任意地狹窄就行了。

的点格,但是这些平行四边形的面积必定等于一单位。証法如同正方形点格的情形。

对任意这样一个单位点格来说,二格子点間最短的距离 c 是一个特征值。单位点格的 c 可以随意小,这只要考虑由 c 和 $\frac{1}{c}$ 为边的矩形产生的点格就明白了。但是另一方面, c 显然不能龐大无边,否則点格就不是单位点格了。因此 c 必有一上界。今試决定这个上界。

从任一单位点格中任意选取距离为最短(比如說,最短距离是 c)的两点(图 41)。通过这两点作一直线 g 。按照点格的定义,在这条直线上应有无穷多的、間隔为 c 的其他点。在平行于 g 且与 g 的距离为 $\frac{1}{c}$ 的直线 h 上也应有无穷多的格子点,但在二平行线 g 和 h 之間的区域内不应包含任何格子点。以上两项事实都是从所討論的点格是单位点格推出来的。以 c 为半径、以 g 上的所有的格子点为圆心作圆,全部的圆将复盖着一平面长条,这长条的边界是一些圆弧。长条内部的任一点至少同一个格子点的距离小于 c ,所以按照 c 的定义,这点不是格子点。因此 $\frac{1}{c}$ 必大于或等于长条边界綫到 g 的最短距离。这个距离显然是以 c 为边的等边三角形的高。于是就有

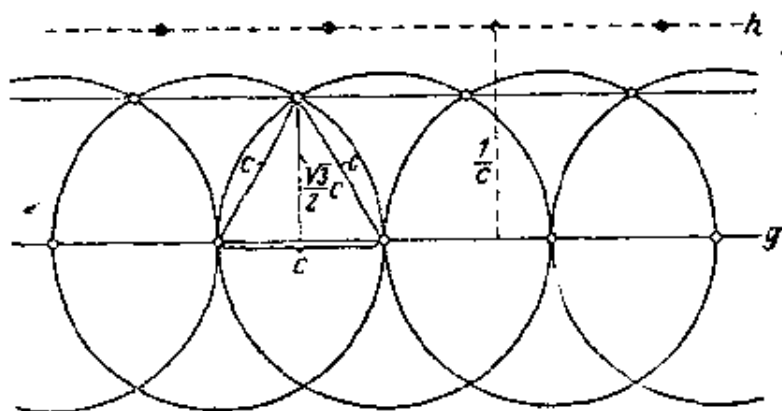


图 41

$$\frac{1}{c} \geq \frac{c}{2} \sqrt{3},$$

$$c \leq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ 就是所求的 c 的上界。而且确实也有一个点格达到这个极值, 因为, 从图 41 上看出, 这样的点格可以用由两个等边三角形拼成的平行四边形产生出来。

单位点格经过膨胀或收缩后可以得到随意大小的点格。设 a^2 是某个点格的基本平行四边形的面积, C 是两个格子点间的最短距离, 那么应有

$$C \leq a \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}},$$

等号当且仅当点格是由等边三角形组成的时候才成立。所以, 对一给定的最短距离, 这样的点格含有最小的基本平行四边形。但是, 我们在第 36 页上看过, 大的图形的面积近似地等于在那个区域里格子点数乘以基本平行四边形的面积, 所以, 在具有给定的最短距离的一切点格中, 等边三角形点格 (在给定的大区域里) 含有最多的点。

若以每一格子点为圆心, 以两个格子点间的最短距离之半为半径作圆, 则得到一组彼此相切但没有复盖现象的圆。这样作出来的圆组称为 (正则的) 圆形格子式堆积。我们说一种圆形格子式堆积较另一种为紧密, 如果前一种堆积能在相当大的已知区域内放进较多的圆。据此得知, 等边三角形点格产生最紧密的圆形格子式堆积 (图 42)。

作为圆形格子式堆积的密度的度量, 我们取包含在已知区域内各圆的总面积除以这个区域的面积。对于充分大的区域来说这个值显然近似等于一个圆的面积除以基本平行四边形的面积。等

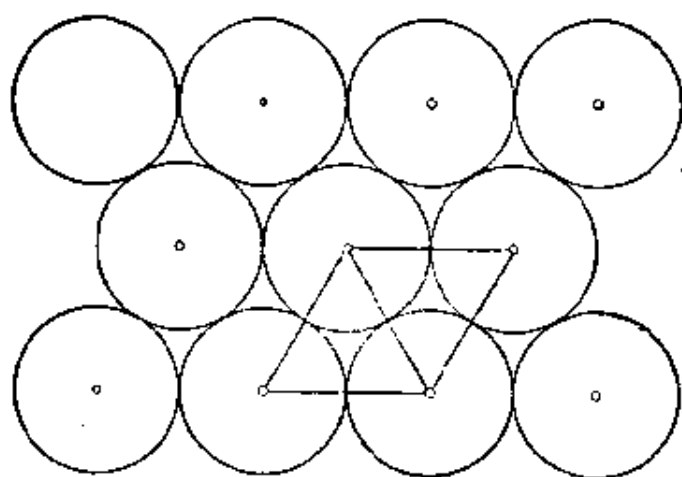


图 42

边三角形点格给出密度的最大值：

$$D = \frac{1}{2\sqrt{3}} \pi = 0.289\pi.$$

§ 6. 在数論中的平面点格

点格在许多数论问题中有用处。下面我们举几个例子。为避免叙述烦冗起见，在这一节里要预先假定比本书其他地方较多一些的数学知识。

1. 莱布尼兹级数： $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ 。如同 §5 中讲的，假定 $f(r)$ 代表在以 r 为半径、以一格子点为圆心的圆内，平面正方形单位点格的点的个数。我们把圆心作为笛卡儿坐标的原点，并把格子点配以整数坐标。这样 $f(r)$ 便是适合 $x^2 + y^2 \leq r^2$ 的所有整数偶 x, y 的个数。因为 $x^2 + y^2$ 总表示整数 n 。因此可以如此去求 $f(r)$ ：对每一整数 $n \leq r^2$ ，找出能以二整数平方之和表示它的方法的个数，把所有这些分解法的个数相加。在数论中有这样一个定理：一整数 n 表示为二整数平方之和的方法的个数，等于 n 的具有 $4k+1$ 和 $4k+3$ 形式的因子的个数之差的四倍。但在这种表法中，如 $n = a^2 + b^2$, $n = b^2 + a^2$, $n = (-a)^2 + b^2$ 等等须认为是不同

的分解式,因为它們对应不同的格子点。这样說来,每种分解式可以导出八种的分解式来(但如 $a = \pm b$, $a = 0$, $b = 0$ 是例外)。作为本定理的例子,我們来看 $n = 65$ 这个数。这个数共有四个因子: 1, 5, 13, 65。所有这些因子都可以写成 $4k+1$ 的形式,但是 $4k+3$ 形式的却一个也沒有。因此所求的差是 4, 因此根据我們的定理, 65 这个数可以写成 16 种二数平方之和。(換句話說,以原点为中心、以 $\sqrt{65}$ 为半徑的圓周通过 16 个格子点。)实际上, $65 = 1^2 + 8^2$, $65 = 4^2 + 7^2$, 每个式子又可以写成 8 种形式。

根据这个定理,对于每个正整数 $n \leq r^2$, 从形为 $4k+1$ 的因子个数减去形为 $4k+3$ 的因子的个数,再将各差相加,則得出 $\frac{1}{4}(f(r)-1)$ 。不过,如果把加减的次序作适当的变更,尙可以簡化許多。这是說,从所有的 $n \leq r^2$ 中形为 $4k+1$ 的因子数之和减去所有的形为 $4k+3$ 的因子数之和。要决定第一个和,把形为 $4k+1$ 的各数按大小次序写成 1, 5, 9, 13..., 所有大于 r^2 的数一概不計。每个这样的数累加几次不超过 r^2 , 在計算因子时,它就應該計算几次。因此, 1 应有 $[r^2]$ 次, 5 有 $\left[\frac{r^2}{5}\right]$ 次,这里的 $[a]$ 一般表示不超过 a 的最大整数。所以我們所求的 $4k+1$ 形式的因子总数是 $[r^2] + \left[\frac{r^2}{5}\right] + \left[\frac{r^2}{9}\right] + \dots$ 。由符号 $[a]$ 的定义,这个級数只要方括弧中的分母一超过分子就中断了。对于 $4k+3$ 形式的因子也可以同样地处理,从而得出这种因子总数为

$$\left[\frac{r^2}{3}\right] + \left[\frac{r^2}{7}\right] + \left[\frac{r^2}{11}\right] + \dots$$

我們还要从第一个和中减去第二个和。因为这两个和的項数都是有限的,所以級数的次序可以随意变更。如用下法,則在过渡到极限 $r \rightarrow \infty$ 时较为方便。我們把得出的結果写成下面的形式:

$$\frac{1}{4}(f(r)-1)=[r^2]-\left[\frac{r^2}{3}\right]+\left[\frac{r^2}{5}\right]-\left[\frac{r^2}{7}\right]+\left[\frac{r^2}{9}\right]-\left[\frac{r^2}{11}\right]+\cdots。$$

为了要弄清楚这个級数甚么时候中断,我們姑且假定 r 是奇数。这样級数一共有 $\frac{r^2+1}{2}$ 項。这个和中的符号加減相間,同时絕對值不增加。因此如果在 $\left[\frac{r^2}{r}\right]=[r]=r$ 這項处就中断了,由此所产生的誤差最多等于最后的一項 r , 所以我們可以把这个誤差写作 δr , 这里的 δ 是一真分数。如果我們要把留下的 $\frac{1}{2}(r+1)$ 項的方括弧去掉,結果每項的誤差都小于 1, 所以总的誤差又可以写作 $\delta' r$, 而 δ' 是一真分数。于是我們有

$$\frac{1}{4}(f(r)-1)=r^2-\frac{r^2}{3}+\frac{r^2}{5}-\frac{r^2}{7}+\cdots\pm r\pm\delta r\pm\delta' r,$$

各項除以 r^2 后,得

$$\frac{1}{4}\left(\frac{f(r)}{r^2}-\frac{1}{r^2}\right)=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots\pm\frac{1}{r}\pm\frac{\delta+\delta'}{r}。$$

让 r 无限增加(取所有的奇数值),則 $\frac{f(r)}{r^2}$ 趋近于 π , 这是我們在 § 5 中証明过的。这样我們就导出了萊布尼茲級数:

$$\frac{1}{4}\pi=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots。$$

2. 二次形式的最小值。命

$$f(m, n)=am^2+2bmn+cn^2$$

是以实数 a, b, c 为系数且行列式 $D=ac-b^2=1$ 的二次形式。在这种情形下 a 不能等于零。今不妨假定 $a>0$ 。如所周知, 滿足这些条件的 $f(m, n)$ 是正定的, 也就是說, 对于所有的实数偶 m, n , 除去 $m=n=0$ 之外, $f(m, n)$ 是正的。以下我們要証明: 不管如何选择系数 a, b, c , 只要它們适合条件 $ac-b^2=1$ 且 $a>0$, 总有两个不全为零的整数 m, n , 使 $f(m, n)\leq\frac{2}{\sqrt{3}}$ 成立。

这句断語可以从我們以前討論过的在单位点格中两点間的最小距离得知。利用条件 $D=1$, 再用通常的配方法, $f(m, n)$ 可写成

$$f(m, n) = \left(\sqrt{a} m + \frac{b}{\sqrt{a}} n \right)^2 + \left(\sqrt{\frac{1}{a}} n \right)^2。$$

現在考虑平面笛卡儿坐标系中坐标为

$$x = \sqrt{a} m + \frac{b}{\sqrt{a}} n,$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{a}} n$$

的点, 这里的 m 和 n 取所有的整数值。根据解析几何的初等定理知道这些点应该作成单位点格。因为它们可以从正方形单位点格 $x=m, y=n$ 经过行列式等于 1 的平面仿射变换

$$x = \sqrt{a} \xi + \frac{b}{\sqrt{a}} \eta,$$

$$y = \sqrt{\frac{1}{a}} \eta$$

而得。但是現在 $f(m, n) = x^2 + y^2$; 所以当 m 和 n 取所有的整数值时, $\sqrt{f(m, n)}$ 表示从原点到相当的格子点的距离。按照前面讲过的定理, 点格有一点 P , 可使这个距离不超过 $\sqrt{\frac{2}{3}}$ 。由此对 P 的二整数坐标 m, n 来说, 我們就有

$$f(m, n) \leq \frac{2}{3},$$

这就是要证明的。

这个結果可以用来解决通过有理数来逼近实数的问题。設 α 是任一实数; 我們考虑形式

$$f(m, n) = \left(\frac{\alpha n - m}{\varepsilon} \right)^2 + \varepsilon^2 n^2 = \frac{1}{\varepsilon^2} m^2 - 2 \frac{\alpha}{\varepsilon^2} m n + \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 \right) n^2。$$

这个形式的行列式是

$$D = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{\alpha^2}{\varepsilon^2} + \varepsilon^2 \right) - \frac{\alpha^2}{\varepsilon^4} = 1,$$

这里的 ε 是任意正数。根据我們方才証明的結果, 常可以找到二数 m, n , 使适合不等式

$$\left(\frac{\alpha n - m}{\varepsilon} \right)^2 + \varepsilon^2 n^2 \leq \frac{2}{\sqrt{3}},$$

从这里显然可得二不等式

$$\left| \frac{\alpha n - m}{\varepsilon} \right| \leq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}, \quad |\varepsilon n| \leq \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

从这里又得①

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|n|} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}, \quad |n| \leq \frac{1}{\varepsilon} \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}.$$

如果 α 不是有理数, 第一个不等式的左边必不等于零。所以假如給定的 ε 的值越来越小, 則必得无穷多的这样的数偶 m, n ; 因为此时 $\left| \alpha - \frac{m}{n} \right|$ 必无限减少。用这种方法我們得到与无理数 α 随意逼近的有理数 $\frac{m}{n}$ 。另一方面, 借用第二不等式可以消去 ε , 从而得到

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{n^2},$$

这样一来, 我們有了一个近似分数的序列, 其近似的程度与分母的平方成正比例。这种近似值的分母不需要很大而近似程度就相当高。

3. 明科夫斯基定理 明科夫斯基建立了一个关于点格的定理, 这个定理虽然很简单, 可是能够解决数論上許多用別的方法难以解决的問題。为了容易明白起見, 这里我們不講定理的一般形式, 而只討論一个特殊的情形, 这种情形不但非常容易表述, 而且

① 对于充分小的 ε , 是許可用 n 除的, 因为, 如果 n 等于零, 不等式 $|\alpha n - m| \leq \varepsilon \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$ 就不成立了。

从方法上說,已包含了主要的一切。这个定理說:

如果以边为 2 的正方形复盖着平面上任一已知单位点格,且使正方形的中心与一格子点重合,那末在这个正方形的内部或边上还有一个格子点。

要証明这一定理,設想在点格平面上划定了任意一个大的区域,譬如說是以大的 r 为半径以一个格子点为圆心的圓的内部和圓周。对于在这个区域中的每一格子点都以这点为中心作一个以 s 为边的正方形(图 43)。現在要求不管选择 r 多么大,也沒有两个正方形是复盖着的,在这个要求之下,来估計一下边 s 的长。依照我們从前讲过的記号,在所說的区域内有 $f(r)$ 个格子点,因为正方形不得互相复盖,所以它們的总面积为 $s^2 f(r)$ 。另一方面,这些正方形都落在較大的半径为 $r+2s$ 的同心圓內,因此我們得到下面的不等式:

$$s^2 f(r) \leq \pi (r+2s)^2$$

或

$$s^2 \leq \frac{\pi r^2}{f(r)} \left(1 + \frac{2s}{r}\right)^2.$$

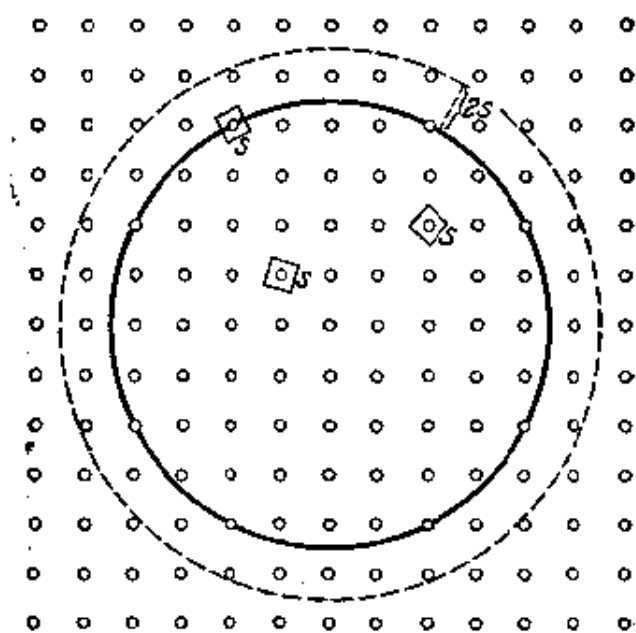


图 43

如果將 s 固定, 讓 r 无限增加, 由前面的 $f(r)$ 的討論, 知道不等式的右方趋近于 1。所以我們得出 s 的条件是

$$s \leq 1.$$

因为二正方形只可能有复盖或不复盖两种情形, 由此可知, 对于任意正数 ε , 不管它多么小, 如果从边长为 $1+\varepsilon$ 的正方形出发, 必然得到复盖的正方形。直到現在, 我們並沒有假定正方形的相互位置, 因此我們可以把正方形繞其中心作任何角度的轉动。讓我們假定所有的正方形都平行地放着。今取出以 A 和 B 为中心的两个互相复盖的正方形 a, b 来看(按照題設, A, B 即是格子点), 則綫段 AB 的中点 M 必落在这两个正方形的内部(图 44)。

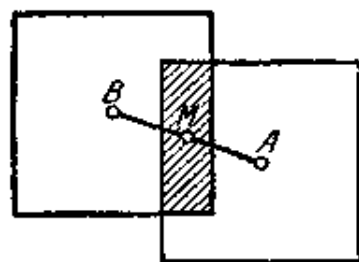


图 44

为了簡明起見, 今后凡是遇到二格子点連綫的中点, 例如 M 我們一概用点格的“平分点”一詞代表。現在我們可以推出这样的結論: 以一格子点为中心且以 $1+\varepsilon$ 为边长的任一正方形 a , 一定包含一平分点。因为如以所有别的格子点为中心作一些正方形与 a 全等且同方向, 則必有某些地方复盖起来, 又因为所有的正方形在这个图形上都有相同資格, 所以 a 自己也必部分地被另一正方形 b 复盖着, 因此 a 必包含一平分点, 如同图 44 中的点 M 。現在我們可以用反証法来完成定理的証明。假如以一格子点 A 为中心以 2 为边的正方形的内部或边上再沒有另外的格子点, 那么我們可以把这个正方形在保持边的方向和中心的位置的条件下稍微地扩大一下, 使得扩大后的正方形 a' 的一边为 $2(1+\varepsilon)$, 也不包含其他的格子点。另外一方面, 我們把这个正方形也在保持边的方向和中心的条件下收縮到原边的一半, 就得到以 A 为中心以 $1+\varepsilon$ 为边的正方形 a , 这个正方形, 剛才証明过必包含一平分点 M 。这就是个矛盾; 因为延长 AM 一倍到 B , 則 B 必是一格子点, 而且从 a 和

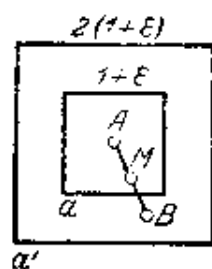


图 45

a' 的相互位置来看, 可知这个格子点必在 a' 之内 (图 45)。

明科夫斯基定理的一个有效应用是处理上一节我們曾經講过的用有理数逼近实数的问题。我們的方法和上节十分相似, 可是得到更好的結果。借用已知的无理数 α , 我們作点格, 格子点的笛卡儿坐标为:

$$x = \frac{\alpha n - m}{\varepsilon}, \quad y = \varepsilon n,$$

其中的 m 和 n 取所有的整数值, ε 是任意的正数。象以前一样, 可以知道这个点格是单位点格。图 46 表示点格中的一个基本平行四边形, 假定 $0 < \alpha < 1$ 。我們作一正方形, 以 2 为边, 中心在原点, 且使其边平行于坐标轴。应用明科夫斯基定理, 这个正方形必包含另一格子点。这个格子点由不全等于零的某二整数 m 和 n 决定。另一方面, 在正方形的内部和边上的点的坐标都满足不等式 $|x| \leq 1, |y| \leq 1$ 。因此 m, n 应满足下面的两个不等式:

$$\left| \frac{\alpha n - m}{\varepsilon} \right| \leq 1, \quad |\varepsilon n| \leq 1,$$

或
$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{\varepsilon}{|n|}, \quad |n| \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

这就得出逼近 α 到随意准确程度的另一分数 $\frac{m}{n}$ 的序列。消去 ε ,

得
$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{1}{n^2}.$$

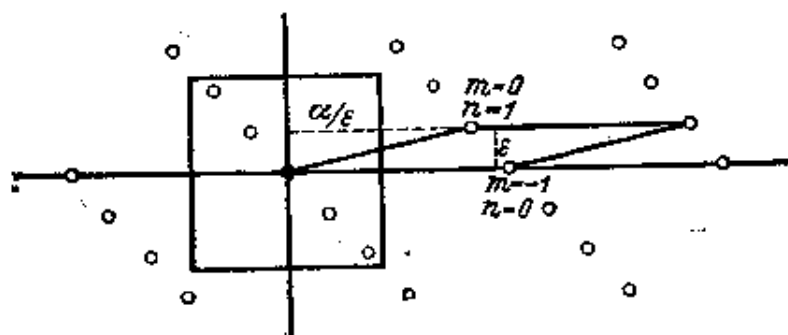


图 46

由此可見,明科夫斯基定理証明了有逼近 α 的分数序列存在,它比在上一节作出的分数序数更好,那里我們不过得到了近似式

$$\left| \alpha - \frac{m}{n} \right| \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{1}{n^2},$$

这个結果比較弱,因为 $\frac{2}{\sqrt{3}} > 1$ 。

当然这一节所講的方法不仅可以应用于平面,也可以应用于任意維数的空間,因而可以得到許多更为一般的数論上的結果。

§ 7. 三維和三維以上的点格

在三維空間中从一平行六面体开始可得出空間的点格,作法和在二維空間中从一平行四边形开始以得出平面点格相类似。在空間,同一个点格也可用不同形狀的平行六面体产生,但是它們的体积必定相等。其次,每个平行六面体的八个頂点必須是八个格子点,在平行六面体的內部和面上不許再有格子点。我們把由体积为一单位的平行六面体产生出来的点格叫做单位点格。

跟平面上的理由相同,空間单位点格两点間最短的距离也沒有下界,但确有一上界。决定上界的方法也和平面点格一样,因此这里就不重复了。就这一方面來說,正四面体在空間的作用相当于三角形在平面上的作用。不过,平面上基本平行四边形由两个等边三角形拼成,而相当的空間的基本平行六面体(正菱面体),由两个正四面体和一个正八面体拼成(参看第 50 頁图 49)①。这个平行六面体的体积是 $\frac{c^3}{\sqrt{2}}$, 其中的 c 代表正四面体的一个棱长。因为我們要求这个体积等于一单位,从 $\frac{c^3}{\sqrt{2}} = 1$, 得 $c = \sqrt[3]{2}$ 。于是我們得出这样的一个結果:在空間的单位点格中,距一个格子点为

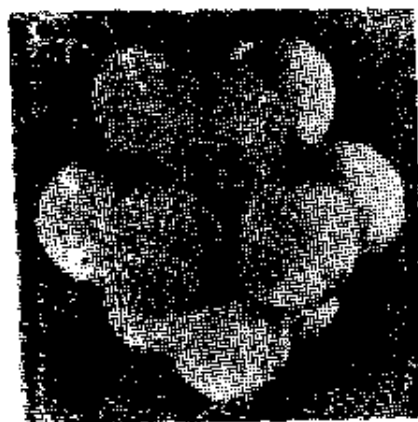
① 平面上最緊密的圓形堆积問題可化归用全等等边三角形无空隙地填滿平面的問題。似乎由此可以推想,空間中的类似問題可化归用全等正四面体无空隙地填滿空間的問題。然而可以証明,空間决不能用全等正四面体填滿。

$\frac{\sqrt{2}}{2}$ 的地方,至少还有一个格子点。

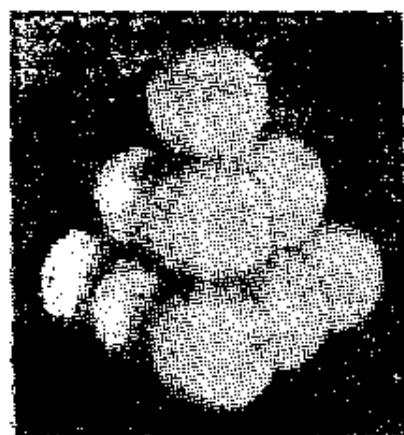
也象平面的情形一样,用上述結果还可解决最紧密的格子式球形堆积問題,这样的堆积只要球心組成菱面体点格就可实现。假定球的半径是 1, 正四面体的棱长是 2, 則基本菱面体的体积等于

$$\frac{2^3}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}。$$

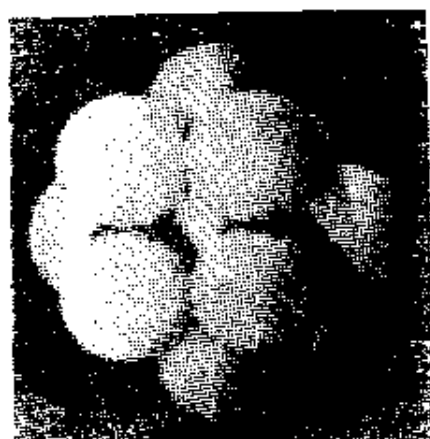
因而在体积为 J 的空間区域内, 近似地含有 $\frac{J}{4\sqrt{2}}$ 个格子点, 也就是包含这样多的单位球。跟平面的情形一样, J 越大, 上式越准确。



(a)



(b)



(c)

图 47

讓我們再进一步来研究球形堆积。为此, 我們設想有多个单位球組成的一个平面层, 在这平面层中各球心作成的点格与平面最紧密的圓形堆积相当。这样显然也就得到平面层的最紧密的球形堆积。讓我們再取同样的第二层, 放在第一层上。試問应如何放法, 才能使这两层位于相距尽可能小的两个平行平面之間? 为此, 必須使第二层的球填到第一层的空隙处, 但是这样并不能填满各个空隙, 而必須交錯地留下空隙 (參看第 39 頁图 42)。若用同一方式在这两层之上再放上第三层, 这个規則还不能唯一地决定三层球的相互位置。我們可以把第三层球这样放到第二层所留下的空隙之上, 使得第一、三两层对于第二层

对称(图 47, a)。也可以把第三层球放到上述排列留下的空隙处(图 47, b, c);这样,从第一层挪到第二层或者从第二层挪到第三层要经过同样的平移。在这种情形下,在两个方向上重复同样的平移,将产生菱面体的球形格子式堆积。由此可見,虽然在平面上可用唯一的圆形堆积得到理想的最大的密度,但在空間,同样的問題却得出两种完全不同的球形排列^①。各球心不一定在整个空間都組成有規則的图形,因为把一层挪到另一层可用两种方法的任何一种。但有一特点是所有排列方法所共有的:每个球恰好跟十二个球相接触,其中的六个球和它在同一层,另外的六个分在上、下两个邻层里,每层里有三个。

四維和五維的最緊密的球形格子式堆积問題已有結論,非常奇怪的是,可以証明,相当于三角形或菱面体的点格的高維空間点格,不再产生最緊密的球形堆积。現將結果作成下表:

	两点間的最短距离 σ	堆 积 密 度
平 面	$\sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}=1.075$	$0.289\pi=0.907$
平 常 空 間	$\sqrt[3]{2}=1.122$	$\frac{\sqrt{2}}{8} \times \frac{4}{3} \pi=0.740$
四 維 空 間	$\sqrt[4]{2}=1.189$	$\frac{\pi^2}{16}=0.617$
五 維 空 間	$\sqrt[5]{2}=1.074$	$\frac{\sqrt{2}}{60} \pi^2=0.465$

(在四維空間里单位球的体积等于 $\frac{\pi^2}{2}$, 在五維空間里等于 $\frac{8\pi^2}{15}$ 。)

除了最大密度的堆积以外,还有許多其他有趣的正則堆积。例如,有一种所謂立方体球形堆积,堆积的单位球的球心是棱长为 2 的立方体产生的格子点。在这里每个球恰与六个邻球相切,因此可以想到,这种堆积的密度比每个球与 12 个邻球相切的菱面体格

^① 这两种堆积方式事实上在自然界都存在。第一种見于鎂的六面体晶体,第二种見于面心立方晶体。參看 § 8。

子式堆积的密度要小得多。要証明这句话,我們把立方体点格挪动,使每一立方体恰好包含一个球。棱长为2的立方体体积等于8,因此包含在体积等于 $8x$ 的一个大区域内的球数近似地等于 x 。由于单位球的体积等于 $\frac{4}{3}\pi$,所以立方体堆积的密度是

$$D = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} \pi = \frac{\pi}{6} = 0.524。$$

我們自然会联想到与最紧密堆积問題相反的,在空間各球互相支撑,使相对位置得以保持不动的条件下寻求最稀松的正則的球形堆积問題。这时,每个球必須至少与四个邻球相切,这四个球的球心既不能在一个平面上,也不能在一个半球上。假如不然,一个球就不能被其邻球托住。可能有人会想到,最稀松的堆积应该是每个球恰好跟四个球相切,而且四个球心形成正四面体的四个頂点。下面我們先用这样子的排列作一个点組,然后再研究如此所得的球形堆积究竟是不是最稀松的。

今将立方体各面上的中心点也加入立方体点格中。如此所得的点組也作成点格(面心立方体点格),因为这一組点可以从平行六

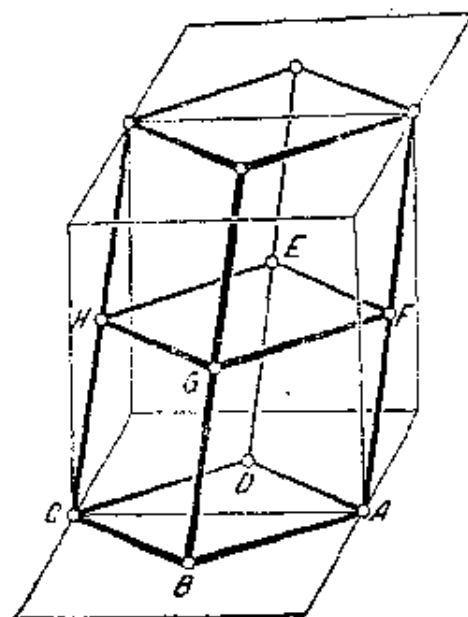


图 48

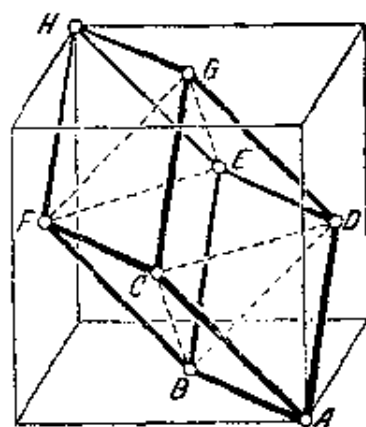
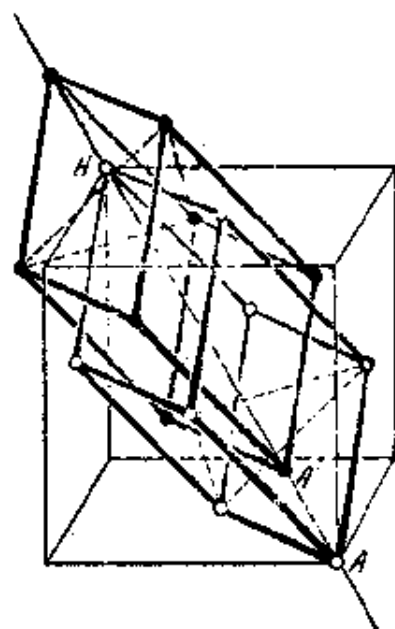


图 49

面體 $ABCDEFGH$ (圖 48 和 49) 用平移法產生。(這兩張圖也說明前面講過的一件事實: 同一點格可以由截然不同的多種基本體產生。) 從圖 49 上可以看出, 這種點格給出最緊密的球形堆積。因為, 在平面 ABD 上, 平行四邊形 $ABDE$ 定出等邊三角形點格; 包含格子點的最近的平行平面是 $CEFG$, 在這個平面上的點格同平面 ABD 上的格子點作成一些正四面體, 例如 $ABCD$ 。

讓我們在這個點格 K 之外再加上跟它合同的另一個點格 L , L 是這樣得到的: 沿立方體對角綫 AH 的方向移動 K , 移動的距離等於 $\frac{1}{4} AH$ (圖 50)。我們說, L 和 K 上的點一起, 作成所求的“四面體”球形堆積的球心, 而且球的半徑等於 $\frac{1}{2} AA'$, 其中的 A' 是從 A 移來的 L 上的點。因為, 根據作圖, A' 顯然同圖 49 中所標出的 A, B, C, D 四點的距離相等, 所以以 A' 為球心的球恰好同以四面體 $ABCD$ 的四頂點為球心的四個球相切。由於對稱的原故, 相當的說法也適用於 L 上的一切的球。再有, 這個結果也適用於球心在 K 上的所有的球 (例如图 50 上的 H 點), 因為 K 和 L 的相對位置相同, 所不同的只是平移的方向而已。圖 51 和 52 表明四面體的球心排列的狀況。圖中鄰球的球心用直綫連接^①。

現在我們來計算四面體堆積的密度。每一立方體顯然占有點格 L 的四個



○ 點格 K 的點

● 點格 L 的點

圖 50

① 在這種堆積里球心的軌迹不是點格; 因為在這軌迹中, 不包含比方說 A'' 這一點, 而 A'' 是在圖 50 上延長 AA' 使 $A'A'' = AA'$ 而得到的; 假使構形是點格, 則由於它包含 A 和 A' , 也應該包含了 A'' 了。這種作圖稱為點系。點系比點格具有更一般的對稱性。它的定義將於 § 9 給出。

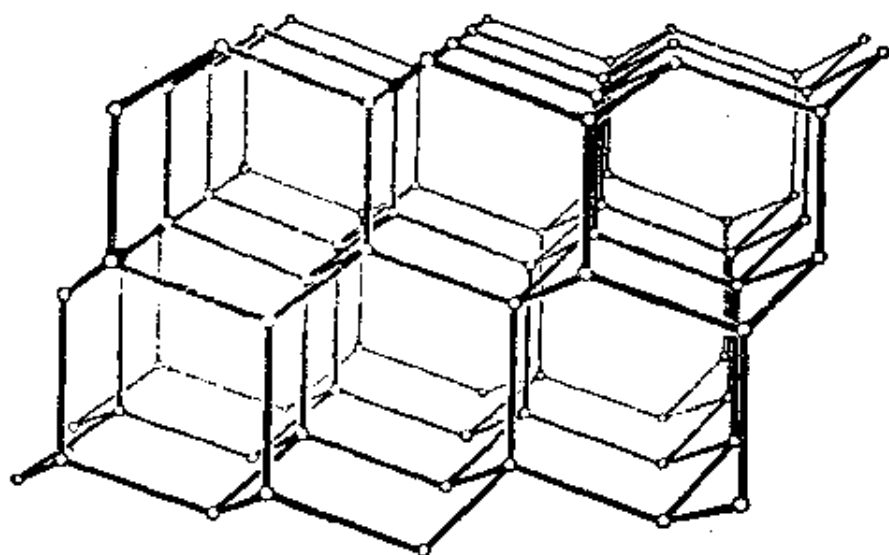


图 51

球, 因为把 K 平移到 L 后, E, F, G, H 四点 (图 49) 和以这四点

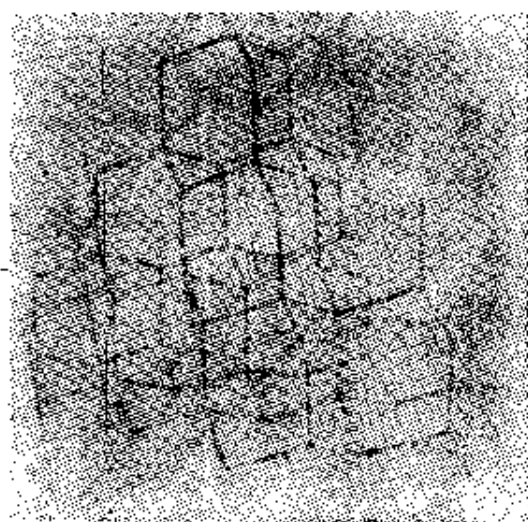


图 52

为球心的四个球完全移出于立方体之外, 但以 A, B, C, D 四点为球心的四个球则移入立方体之内。因为 K 的密度同 L 的一样, 所以每一立方体恰好占有堆积的八个球。跟以前一样, 命各球的半径 $\frac{1}{2} AA'$ 等于一单位, 并设立方体的一棱长为 a , 它的对角线长为 b , 则

$$b = 4AA' = 8 = a\sqrt{3}。$$

由此立得立方体的体积是 $a^3 = \frac{8^3}{3\sqrt{3}}$ 。跟以前的论证相同所求的密度 D 是

$$D = \frac{8}{a^3} \times \frac{4}{3} \pi = \frac{\sqrt{3}}{16} \pi = 0.340$$

我們現在證明[仿照 H. 希斯(Heesch)和 F. 拉費斯(Laves)^①]四面體球形堆積還不是最稀松的形式,只要經過簡單的變形,就可以產生比這更稀松的形式,其中每一球仍與其他四球相切,而且所有的球都處於平等的地位。必須指出,跟同一球相切的四球的球心,此處不是正四面體的頂點,而是另一種以等邊三角形為底、以等腰三角形為側面的四面體的頂點。

為了作出這個堆積,我們從四面體堆積的一個球 K 出發,作半徑相等的小球 k_1, k_2, k_3, k_4 , 使它們內切於 K , 而切點正好是 K 同四面體堆積的鄰球相切的切點。因為這四個切點是一個正四面體的頂點,所以四小球的球心也是如此。經過適當地選擇四小球的半徑,可使它們每兩個都相切,因此每一小球都與其他三個相切。對於四面體堆積中的其他各球也可以如此作。這樣, k_1 不僅同 K 內部的 k_2, k_3, k_4 相切,也同 K 外部的另一小球,比方說 k_5 相切,切點就是 k_1 內切於 K 的切點;因為在這一點上, K 同四面體堆積的一球 K' 相切,並且也就在這同一點上, K' 在它的內部同我們叫它做 k_5 的小球相切。當然 k_1 的這個性質也同樣適用於作圖中的其他的相等的球。這樣一來,在這些球所成的堆積中,每一球的确被其鄰球支撐着。如果要把如此得出的堆積的密度 d 同四面體堆積的密度 D 作一比較,顯然只要把 k_1 到 k_4 體積之和同 K 的體積作一比較就行了。假定 k_1 的半徑是 r , K 的半徑是 R , 則

$$\frac{d}{D} = \frac{4 \times \frac{4}{3} \pi r^3}{\frac{4}{3} \pi R^3} = 4 \cdot \frac{r^3}{R^3}.$$

從我們的作法甚易推知

$$R = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1 \right) r,$$

^① 參看 Zeitschrift für Kristallographie, 卷 82, 第 10 頁, 圖 7。

因此
$$d = \left(\sqrt{\frac{3}{2}} + 1 \right)^3 D = 0.3633 D,$$

可知这种堆积比四面体的还要稀松得多。下面的表给出我們討論过的四种球形堆积的特征常数。

最紧密的堆积	$D = \frac{\sqrt{2}}{8} \times \frac{4}{3} \pi = 0.740$	$\left. \begin{array}{l} \text{每个球与其他的} \\ \left. \begin{array}{l} 12 \\ 6 \\ 4 \\ 4 \end{array} \right\} \text{个球相切} \end{array} \right\}$
立方体堆积	$D = \frac{1}{8} \times \frac{4}{3} \pi = 0.523$	
四面体堆积	$D = \frac{3\sqrt{3}}{64} \times \frac{4}{3} \pi = 0.340$	
最稀松(?)的堆积	$D = 0.123$	

假如我們不要求圓和球的排列是規則的,而代之以較弱的要求,例如只要求在充分大的平面(空間)区域内放上尽可能多的大小相同的圓(球)。关于平面上的情形,已經証出凡适合这个新的条件的圓必須是格子式的。至于三維和三維以上空間的情形,問題迄今尚未解决。

§8. 作为正則点系的結晶体

不連續的正則点組理論最重要的应用是在結晶学上。由于結晶体具有規則的外形和沿一定方向的可裂性,人們推測,如把結晶体中单个的原子或分子当作点来看,則这些原子或分子作成一個图形,它可以用合同于自己的方式,无限延伸以至填滿整个的空間。凡用这样的延伸法产生的图形都叫点系。以后我們还要把这个概念弄得更为精确一些,而且証明,点系只有有限种实质上不同的类型。这里有两个問題发生:一部分属于数学,一部分属于物理学。第一个問題是对于每一类的結晶体找出相当的点系类型,第二个問題是用适当的点系的几何性质来解釋各种不同結晶体的

物理性态。

首先企图用上项办法获得結晶体构造上一定观点的要上溯到布腊魏斯(Bravais, 1848)^①。但一直等到1913年劳埃(Laue)利用X射线对結晶体作衍射实验以后,这才牢固地奠定了布腊魏斯理论的基础。劳埃用实验方法不仅证实了結晶体的格子构造的存在,并且确定了它们的精确构造。

最粗糙的原子构造的想象,自然是假定原子由有“手”的质点組成,手的数目与原子价相等。在这样的模型里我們假定代表原子价的手尽可能对称地排列于空間,除非有特殊的理由认为对称性已被破坏了。当几个原子結合起来而为分子的时候,我們設想不同的原子的两支手拉在一起。

举几个例子来看看。氢(H),氧(O),氮(N),碳(C),它们的原子价分别为1, 2, 3, 4。因此我們可以假想这些用质点表示的原子,分别有1, 2, 3, 4支手(图53)。对于H, O, N来说,对称性要求它们的手排在一个平面上。由于同一理由,可以假想碳原

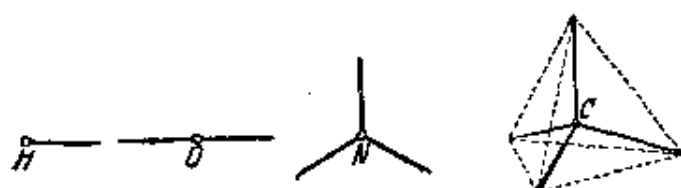


图 53

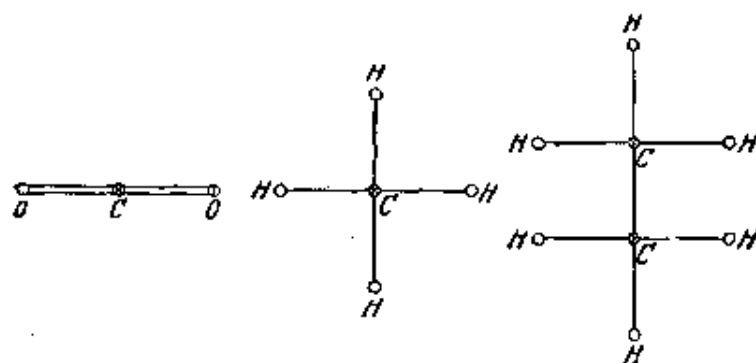


图 54

^① 結晶体构造的数学理论是俄国的学者 E. C. 費多罗夫(Федоров)在1891年創立的——俄譯本編者注。

子的四支手以原子为中心,向一个正四面体的顶点伸出。

作为分子的例子,我們看一下二氧化碳(CO_2),甲烷(CH_4)和乙烷(C_2H_6)。图 54 代表原子如何相連的一种大概表示法(“构造式”),而不考虑原子在空間的实际排列。

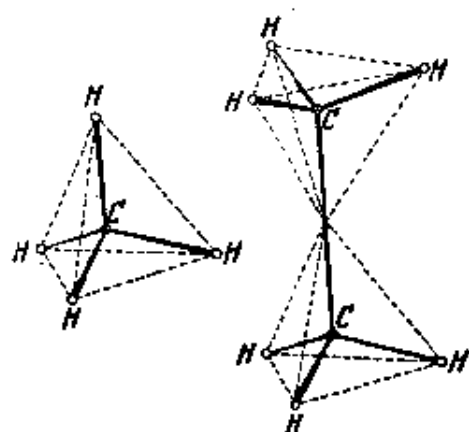


图 55

甲烷和乙烷分子在空間的可能的排列形式,根据万特霍夫(Van t'Hoff 1874)最近研究的結果,可能象图 55 中那样。在乙烷的模型里,我們可以設想两个碳原子的連綫是能够作相对旋轉的两个四面体的軸。

現在有这样的問題发生:整个的結晶体是否象分子那样,由多个原子結成而生成的呢?要問这样的結構是否可能,先看看最簡單的情形,即只由单一元素組成的結晶体如何。以金剛石为例。大家知道,金剛石是純碳組成的。这样,問題就成为如何把千千万万的有四支手的碳原子质点尽可能对称地排列,并使每一质点都与另外的四个质点手手相連。这样的結構是否可能,純粹是一个几何的問題。实际上这样的結構是存在的。原子的排列正象四面体堆积中球心那样。因为根据 §7 所講的构造,每个点的四个邻点恰好作成正四面体的四个頂点,而原来的那一点是正四面体的中心(參看第 51 到第 52 頁图 50 到 52)。根据两位布喇开(Bragg)最近測量的結果,我們純用几何方法得到的这个模型,正是由原子构成金剛石結晶体的模型。在同一測量結果中还发现,二相邻质点的距离是 1.53×10^{-8} 厘米^①。

除了金剛石外,还有另一种只含碳原子的結晶体,就是石墨。

① 硫化鋅(ZnS)的結晶体也有与四面体球形堆积对应的原子构造。在这里鋅原子和硫原子分別組成象我們在第 51 頁上图 50 所画的两个点格,它們合起来就成为所說的四面体点系。

测量的結果发现,石墨碳原子四支手的排列不是对称的,甚至手长也不相等。一支长达 3.41×10^{-8} 厘米,其他三支手仅有 1.45×10^{-8} 厘米。后面的三支手差不多在一平面上。实验尚不能告诉我们这三支手离一平面有多大的偏差,但为了今后讨论方便起见,只要假定它们恰好在一平面上就够了。有了这项假定,我们可以把石墨的构造描述如下:

在一平面上作正六边形组,使每一原子在一顶点上(图 56)。

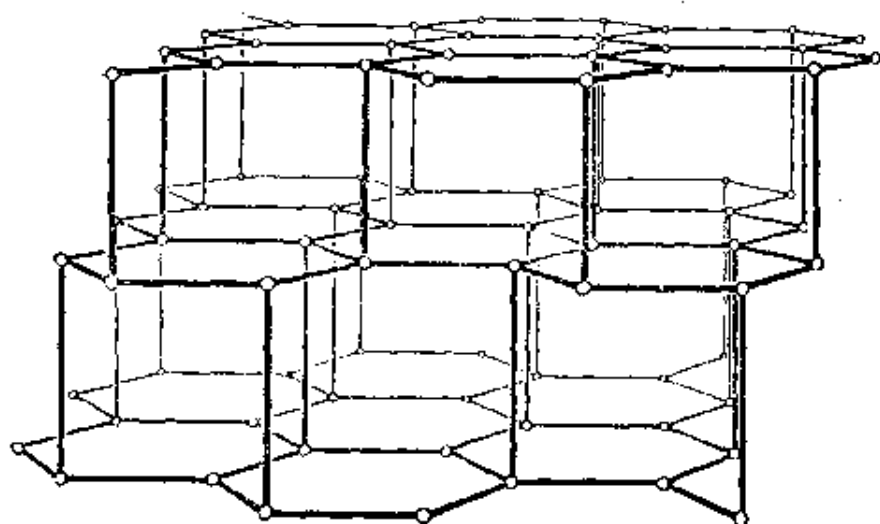


图 56

这样,每一原子用去了三个原子价。要使平面上面的一层跟下面的一层衔接起来,必须交错地把原子处于自由状态的第四支手(每个原子恰好有一支)与上下层的原子拉在一起。由此得知,实际上三层是合同的,而且中层的各个原子质点交错相间地在上层一质点的正下方和下层一质点的正上方。用同样的办法可将构架向各方无限延伸。

刚才建立起来的金刚石和石墨的两种点系可以解释两种结晶体之间某些物理性态上的差别,例如石墨较比金刚石的可裂性和可压缩性就大得多。至于要想解释其他的差别,困难还有不少。

由几种不同的原子组成的结晶体我们举食盐 (NaCl) 作例子。

食盐的結晶体是立方体格子,它的頂点由氯(Cl)和鈉(Na)的原子相間地填滿(图 57)。相邻二格子点的距离是 2×10^{-3} 厘米,因而

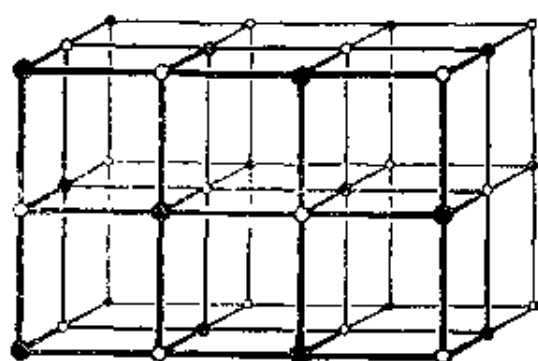


图 57

比石墨中碳原子的短手长,比长手短。在食盐的結晶体中每一格子点有六个相邻的质点。但因为鈉和氯的原子都是一价的,所以这种結晶体的原子排列不遵循上面所講的原子价的理論。一般的情形也是如此,

作成結晶体的原子的价跟构架中一质点的相邻质点的个数之間没有什么直接的关系。不过就金剛石來說,原子价与相邻质点数相同,这乃是一例外。

值得特別注意的是,在食盐格子中不能特別划分出一对与其分子(NaCl)对应的质点。換句話說,格子是由这两种原子直接組成的。与此相反,对于某些結晶体,可以相当清楚地划分出它的分子,或者由多个原子結合成的集团。例如在大理石(CaCO_3)的格子中,大理石的原子集团碳酸根 CO_3 的空間排列就清晰地显示出这个根是不可分割的整体。

金剛石是四面体球形堆积的例子。此外,有大量的作成“面心立方体”点格的結晶体,这样的点格相当于相邻两层的相对位置永远相同的最紧密的球形堆积(第 48 頁的图 47, b, c)。对于另外一种最紧密的球形堆积,其中各层交錯地填滿兩組不同的空隙(第 48 頁图 47, a),鎂是一个例子。这种排列的方法称为“六角形最紧密的球形堆积”。

§ 9. 正則点系和不連續运动群

結晶学的研究引起要解决物体(例如原子)的所有可能的有規

則排列这个純几何的問題。因为对于許多目的來說,可以把物体抽象地看作点,所以就把这样的排列法称为正則点系。按照前面的討論,我們用下面的三个性質来規定正則点系:

1. 平面或空間的正則点系包含无穷多的点,而且平面上包含在一圓內的点数或空間中包含在一球內的点数分別按半徑的平方或立方而增加,以至无穷。

2. 在任一有限区域内,一正則点系只包含有限个数的点。

3. 在一正則点系中,每一点对于其余的点而言的位置和另一点的相同。

前两个規定性質用不着加以解釋。第三个性質可以如此解釋:將正則点系中的某一定点与系中其他的所有点用直綫連結,对于任一第二定点也这样作。那末第三个規定就是說,用两种方式得出來的綫段图是合同的,也就是經過平面或空間的一定的运动,一个图形可以搬到另一图形上去。这样一来,一个人如果站在系中的某一个定点上,他不能用任何的量法去定出他究竟在系中的哪一点,因为所有点都处于相同的地位。不过要滿足第三項要求,不一定把系中的諸点連成綫,只要求經過平面或空間的某种运动能够把系中的任一点搬到系中的其他任一点,使得点系中的一点所占的地位在运动后被另一点所代替,而且反过来也对。这样的运动叫做保持点系不变的运动,也叫做点系的迭合运动。利用这个概念,可以把前面規定的第三个正則点系的性質改写为:

3. 正則点系的任一点經過系中的某种迭合运动,能够搬到系中的其他任一点。

从这个定义可知我們从前所規定的平面上或空間中由平行四边行或平行六面体产生的点格都是正則点系。由于存在着不是点格的点系,比如金剛石的結構,所以引进新的正則点系以推广点格概念,是有理由的。

現在我們求出所有各种不同的正則点系来。下面將証明、只須在点格外再补充以象金剛石那样的构造,即由多个交錯挪动的、合同的而且在平行位置的点格組成的图形就够了。驟然看来,似乎由上述三个条件规定的正則点系的概念是这样的一般,以致不可能对点系作出一个完全的几何分类。其实不然,这样的分类确实可以作出;这是根据对点系的迭合运动的研究。

一点系的迭合运动的全体有两个特性,这两个特性可使点系的研究簡化不少。第一,两个相繼的迭合运动的结果是一迭合运动;第二,点系中任一迭合运动的逆运动是另一迭合运动。在数学上,凡适合这两个条件的任何变换的集合叫做变换群。为了計算上方便起見,我們把每一变换标以字母,如 a , b 等等。 a 在前 b 在后的相繼运动用 ab 代表。跟 a 相反的运动用 a^{-1} 代表,并叫做 a 的逆运动。把規定群的两种性质結合起来,得出 aa^{-1} 形式的变换。这个运算显然保留所有的点不动,但为方便計,也把它算作变换中的一种特別情形,称为恒等变换或恒等,用字母 e 代表。 e 在变换中的作用跟 1 在数字乘法中的作用相等,即 $ae = ea = a$ 永远成立。

假如点系中任一点在这系中作所有的迭合运动,則依照規定正則点系的第三个性質,从这点可得出系中所有的其他各点。另一方面,从迭合运动的定义又可知道,点系中沒有一个点可以变换到不属于本系中的另一点。否則运动就不会使点系不变。一般地說,二点在一已知变换群之下称为等价的,如果其中的一点可由其他一点經過属于該群的一个变换得到。由此可知,正則点系是由在迭合变换群之下与一已知点等价的所有点組成的。于是,根据正則点系的第二个性質,即知在任一有限区域内,一正則点系只有有限个等价点。一个变换群,若是在任一有限的区域内,对于这个变换群來說只有有限个点与一已知点等价,这样的变换群,叫做不

連續群。这样說来,一点系的迭合运动必作成一不連續群。或許有人認為,可能有不属于系中的一点,它在有限区域内,与无穷多的点等价。但是,直观上容易看出,也不难严格証明,如果是这样的话,在一有限区域内将有无穷多的点与一正則点系中的一点等价,这就引出矛盾。

因此一正則点系的所有的迭合运动群要在平面和空間的不連續运动群中去找,从而所有的正則点系要在不連續的运动群中跟某一点等价的点組中去找。这种办法似乎很迂回,其实这种方法正可以使点系的研究大为簡化。因为,可以証明,在平面上或空間里实质上只有有限个不同的不連續群。

如果我們研究一下在这有限的几种不同类型的群里与一已知点等价的点組,可知規定点系的第二个和第三个性質永远适合。但是有一些群,它們产生的点組不适合第一个性質;所以我們必須把这样的群除掉。其余的群,而且只有这样的群,才产生正則点系。凡是可以导出正則点系的不連續的运动群統叫做結晶体运动群,这是因为在結晶学上这一类的群特別重要。

下一节我們將講講如何建立不連續群,但只講平面的情形;至于空間的情形,因为牽涉面太广,非本书所能談及。即使是講平面的不連續运动群,也相当复杂。虽然如此,我們还要詳細地研究一番,因为这种研究的方法,对于空間也是很典型的。

§ 10. 平面运动及其合成;平面不連續运动群的分类

平面到平面自身的映象,如果最后的位置可由初始的位置經過連續运动得到,这里的平面認為是一个剛体,而且平面上一切点所走的路綫还在平面自身上,則称为平面运动。不过,下面我們講平面运动时,只問起迄位置而不問过程中实际走过的路綫是什么。当然,可以有种种不同的路綫,甚至有时离开了平面,或者中途变

形而最后又恢复原状了。唯一的要求是过程的可能性,即要求存在如本节开头所说的那样一个过程。我们的第一个问题是:对于每一给定的平面运动,找出最简单的可能的过程的形式。

最简单的平面运动是平行运动或称平移。平移时平面上各点在同一方向上移出同一距离,每一直线平移后仍与原直线平行。

另一个众所周知的平面运动是绕某一点作一定角度的旋转。在这里每一直线旋转了同一角度^①,而且除去转动中心外,平面上没有不动的点。

除了恒等运动外,任一平面运动最多有一个不动点。因为假如有两点不动,那末除恒等运动不计外,只有一种可以由刚体运动得到的平面到自己的变换,就是平面绕二定点的连线旋转 180° 。这种运动不包括在上述的那类运动之内。它不能用上述的那类过程得到,因为它将顺时针方向旋转的圆变为反时针方向旋转的圆;我们知道,根据连续性概念,平面运动是不能掉转方向的。从这里的讨论,可知一平面运动完全由两点的起迄位置决定。因为假如有两种平面运动将两个点变换成相同的另外两点,它们的差别只能是一个保留两点不动的平面运动,换句话说,它们并无区别。

任一平面运动可单由平移或单由转动产生,此事可使运动的讨论异常简化。为了证明这句话,设想有一已知的平面运动 b 。 b 为恒等的显易情形除开不谈,我们可以选取一点 A ,设 A 变到另一点 A' 。设 B 是线段 AA' 的中点,则 B 或者不动,或者变到另一点 B' 。对于前一种情形(图58),断言



图 58

无疑是对的。因为,在这种情形下,我们可以断定已知的运动 b 是绕 B 旋转

^① 对于通过旋转中心的直线来说,这很显然。对于其他位置的直线,从下述事实可以推知:必有通过转动中心与这一直线平行的直线,和任一运动变平行线为平行线。

一角 α 的运动 b' 。这个运动把点 A 和 B 搬到跟 b 相同的象点 A' 和 B' 。因为我們知道平面运动完全由两点和它們的象点来决定, 所以 b' 一定与 b 相重合。假若 B 变到另一点 B' , 那我們还要区别 B' 在直綫 AA' 上的特殊情形与 AA' 和 BB' 在不同直綫上的一般情形。在第一种情形下, B' 是唯一决定的。因为, A, B 之間的距离在运动 b 中不变, 又因由作图知道 $AB = A'B$, 所以必有 $A'B' = A'B$ 。有了这个条件, 再加上条件 $B' \neq B$, 就确知 B' 是唯一决定的了 (图 59)。据此我們就可以断定 b 是 A 到 A' 的平移, 因为这个平移也把 B 搬到已知的象点 B' 。現在只消探討最后一种情形了。通过点

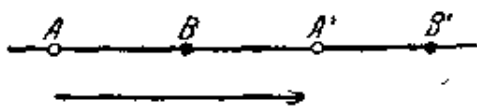


图 59

B 作 AB 的垂綫, 过 B' 作 $A'B'$ 的垂綫 (图 60)。根据假設和作图,

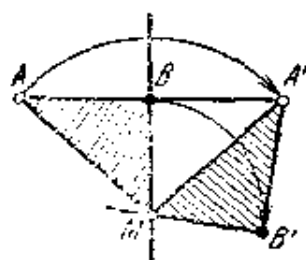


图 60

这两条垂綫既不平行又不重合, 所以它們相交于一点 M 。我們断言: b 就是把 A 搬到 A' 的繞点 M 的轉动。要証明这件事必須証明这个轉动也把 B 搬到 B' ; 这可以从三角形 AMB 合同于三角形 $A'MB'$ 推知。三角形 $AMB \cong A'MB'$, 因为, 在 B 点上的二直角相等, 二腰相等。此外三角形 $A'B'M \cong A'BM$, 因为在 B 和 B' 处的直角相等, 斜边 $A'M$ 相同, 又因为我們上面講过 $A'B' = AB = A'B$ 。

如果把平移当作圍繞一无穷远点作中心而轉出一 0° 角的話, 那么我們的結果在形式上还可以簡化不少。这样的解釋容易从直观上証实。如果我們設想有一系列的轉动, 轉角无限减小, 轉动的中心在一定的方向上趋于无穷远点, 那么就可以把它們如此排列, 使得这些轉动与一預先給定的平移的差別越来越小, 至少在一定的有限区域内是如此。

应用这种观念, 可知任何平面运动都可以看作是經過某一定

角的轉動；如為平移，則轉角等於零。這樣說來，兩個繼續轉動的結果必可用經過某一定角的轉動來代替。在這方面，有一個關於轉角和的簡單定理：

經過角 α 的轉動與角 β 的轉動的合成必定是經過角 $\alpha+\beta$ 的轉動。

事實上，我們在開始時就提過，轉角可以用任意選定的直線的方向的變化來度量。在上述新的約定下，這個定理對於平移來說也是對的，因為平移保持方向不變。由此便知定理是顯然的。從這個定理，可以推知以二不同點為中心、大小相等、方向相反的二轉動永遠產生一平移。因為，合成運動的角是零，但它又不可能是恒等變換，因為這兩個轉動的中心沒有一個是不動的。

有了上述的準備，我們便可以來談平面上的不連續運動群。現在可以用很簡單的方法把它們分類。只須說明，有什麼樣的平移，以及如有轉動，轉動的角度和中心是什麼。可以看出，以先研究平移為最方便。因此分作兩種情形：

I. 群中所有的平移方向都平行。

II. 群中有不平行方向的两个平移。

第 I 種情形也包括沒有平移的群。

要想把每種類型的群再詳細分類，我們引進轉動。即分做：(1) 不包含轉動的群和 (2) 包含轉動的群。

一個群除去可以通過找出它的轉動和平移來識別外，還可以通過一種簡單的幾何圖形，即基本區域來識別。所謂群的基本區域，是指不含有一對等價點的任一連通區域，但它不能再行擴充而不失掉這種性質。基本區域不僅在運動群中很重要，就是在所有的不連續群中也很重要。在一般的情形下，要找出一個已給群的基本區域並不是一個簡單的問題，即使去證明某一類群的基本區域是否存在也頗不容易。不過對於平面運動的不連續群來說，却

不难作出它的基本区域来。可以証明, 第 I 种情形的每个基本区域扩充到无穷远, 但第 II 种情形的基本区域則永远是有限的。

在未讲平面运动的基本区域以前, 我們先讲今后时常用到的在一个群里的轉动和平移的某些重要关系, 当作两个引理。

引理 1. 如果在一个群里有圍繞一点 P 轉过 α 角的轉动, 而且 Q 与 P 等价, 則在这个群里还包含繞点 Q 轉过同一角 α 的轉动。

証明 由假設, 这个群里必有一运动 b , 使 P 迁移到 Q ; 还有一轉动 d , 繞 P 轉动 α 角。应用上一节所規定的符号, 考虑运动 $b^{-1}db$, 由于群的两个公理, 可知 $b^{-1}db$ 也必属于这个群。这个运动将是作 α 角的轉动。因为, 假設用 β 代表 b 轉动的角, 則根据轉角的加法定理, 可知 $b^{-1}db$ 的轉角是 $-\beta + \alpha + \beta = \alpha$ 。轉动的中心必为 Q , 因为 Q 經過 b^{-1} 到 P , d 保留 P 不动, P 經過 b 又回到 Q 。

引理 2. 如果一个群包含一个轉过 α 角的轉动和一个平移 t , 它也必包含一个平移 t' , 它的大小与 t 的大小相等, 方向与 t 的方向作成 α 角。

証明 命 d 是群里以 α 为轉角的轉动, 其中心为 A 。設 A 經過 t 变到 B , B 經過 d 变到 C (图 61)。則 t' 就是 $d^{-1}td$ 。事实上, 这个运动必为群中的一元素, 而且必为一平移, 因为按照加法定理, 它的轉角等于零。下面只剩下証明 A 挪到 C 了。事实上, d^{-1} 保留 A 不动, A 經過 t 变到 B , B 經過 d 变到 C 。

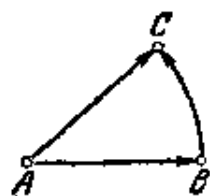


图 61

从这个引理可推出一个結論: 在第 I 类的群里除了一般地包含平移以外, 只能包含經過 π 角的轉动, 而无其他的轉动。假如有其他的轉动的話, 那么一个方向的平移的存在势将引起另一个不平行的方向的平移的存在。

§ 11. 有无穷大基本区域的平面不連續运动群

我們先讲最简单的第 I 类的群。先取不包含轉动的子类型 I, 1。从任一点 A 开始(图 62)。因为在 A 的有限距离内只有有限个跟 A 等价的点,那末在这些点里必有一个距 A 最近的点 A_1 。距

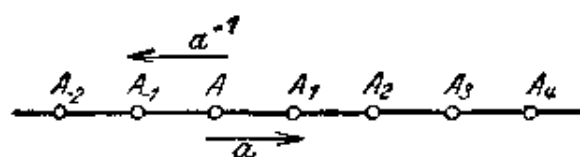


图 62

A 最近的点可能不止一个,不过这里只要取一个就够了。把 A 搬到 A_1 而属于群的运动 α 必是一平移,因为

根据假设,群里没有轉动。延长线段 AA_1 等于原长到 A_2 , 则 A_2 也必与 A 等价,因为 A 经过平移 $\alpha\alpha$ 达到 A_2 。同样道理,在直线 AA_1 上还有其他与 A 等价的点 A_3, A_4, \dots , 它们彼此间的距离相等,并且是由多次将 α 作用于 A 而得到的。同样在直线 AA_1 上 A 的两侧也有无穷多的跟 A 等价的点 A_{-1}, A_{-2}, \dots , 它们是由一次或多次将 α^{-1} 作用于 A 而得到的。现在我们断言,这样就把跟 A 等价的所有点完全取尽了。因为根据假设,所有的平移都平行于 AA_1 , 所以所有跟 A 等价的点都在直线 AA_1 上。假定有一个点 A' 不是这个“刻度”里的一个分点,则 A' 将为

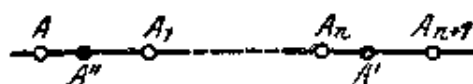


图 63

某一线段 $A_n A_{n+1}$ 的内点(图 63)。这样一来距离 $A_n A'$ 就要小于 AA_1 。

但是在群里有一平移将 A_n 迁到 A , 同时也就将 A' 迁到跟 A 的距离小于 AA_1 的另一点 A'' 。这就与 A_1 的最初取法矛盾,因为 A_1 原是距 A 最近的、跟 A 等价的点。

通过上面的探讨,我們已經完全解决了 I, 1 类型的群;因为,我們已經找到了跟一已知点等价的所有点,从而也就可以这样地描述出现在群里的一切运动;这些运动便是应用一次或多次的平移 α 和 α^{-1} 。由此得知所有类型 I, 1 的群实质上都是等价的。

要想作一基本区域,这很简单,可以从一条不平行于 AA_1 的直线,譬如从 AA_1 的垂线开始,经过平移 a ,这条直线变为它的平行线,二平行线间的长条区域显然就是一个基本区域^①(图 64)。

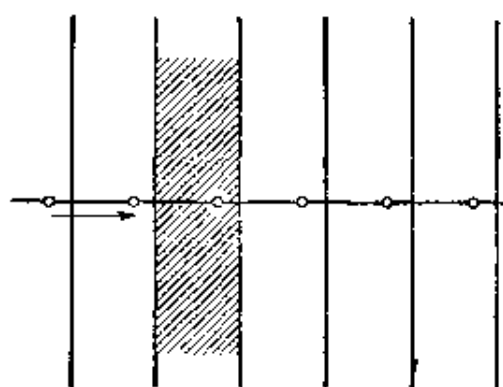


图 64

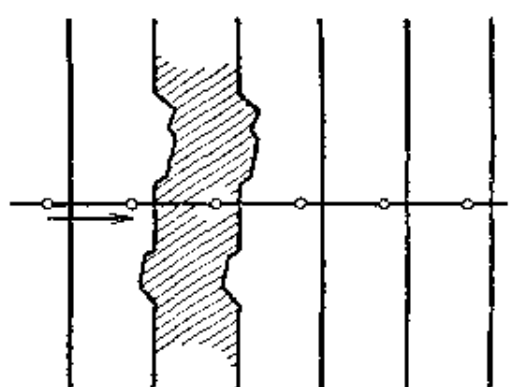


图 65

事实上,在基本区域内部不能有两个等价的点。另一方面,因为区域边界上的两条直线是等价的,所以如果在长条之外再补加一块上去,就会使扩充后的区域含有一对等价点。不过,我们还可以随意改变基本区域的形状,而不破坏基本区域的性质,这只要在长条的一面添上一块,另一面去掉跟它等价的一块就行了(图 65)。基本区域的这种变形方法不但对于我们今后要研究的其他的群适用,即对于所有的变换群也都适用。在各种可能的基本区域中,我们时常选择最简单的一个。

如果把平移 a 作用于整个的基本区域,结果就产生合同的相邻长条。屡用此法,就可将整个的平面用群里的基本区域简单而无遗漏地盖满。一般可以证明,对于任何不連續变换群,总可以将它的基本区域无重迭地连接起来,而且中间不留空隙。不过它们不一定能将平面盖满的,在本书最后一章中将会看到这样的例子 (§ 36 最末一段)。

^① 两条边界线之一,比如说左边的一条,必须看作是属于基本区域的,但另外一条不能算进去,否则或者基本区域包含两个等价点,或者它还不足以作成完全的基本区域。

群 I, 1 不产生正則点系, 这是因为跟一定点等价的各点仅作成一直线上的点列, 同正則点系所规定的第一个要求不合。

尽管如此, 这种群对于正則点系的研究不是完全没有意义的。这是說, 如果我们考虑包含在任意的、不管如何复杂的不連續运动群里的所有平移的集合, 而这些平移是平行于群里某一确定的平移的, 則这样的平移的集合也作成一個群, 因为群的两个公理都滿足。凡是包含在一个群內的群都叫做包含它的群的子群。任何不連續群的子群显然也是不連續的。由此得出这样的結論: 我們所选择的平移的集合, 做成一个 I, 1 类型的群, 因此它有上述結構, 而不論母群的构造为何。这个結論和类似的結論我們以后要时常用到。

現在我們来討論 I, 2 中的群, 它含有轉动但不含方向不平行的两个平移。这里我們必須区别这种群包含平移或者不包含平移两种情形。讓我們从較简单的情形开始——用 I, 2, α 表示沒有平移的群。我們断言: 所有这样的轉动必有共同的轉动中心。証明如下: 假定有两个轉动 a, b , 各以不同的两点 A, B 作轉动中心, 那么群所包含的运动 $a^{-1}b^{-1}ab$, 由于轉角的加法定理, 只能是平移或者是恒等。設 B' 是 B 在 a 的作用下的象(图 66), 則 B' 与 B 不能重合, 因为我們假設 B 与 A 不同, 而且在轉动时除了轉动中心不动外沒有不动的点。因此假如 B'' 是



图 66

B' 在 b 的作用下的象, 則 B'' 也与 B' 不同。但是很容易看出, B' 經過 $a^{-1}b^{-1}ab$ 正好搬到 B'' 。所以 $a^{-1}b^{-1}ab$ 不是恒等, 而是一平移, 这就跟群中沒有平移的假設矛盾。

設 A 是群中的轉动中心 (只有一个), 設 Q 是任何其他的点。則所有与 Q 等价的点都在一圓周上, 此圓的圓心为 A , 并且通过 Q 。因为群是不連續的, 所以只能有有限个与 Q 等价的点, 又因为群中

圍繞 A 的任何轉动把一个等价点变换到另一个等价点, 所以这些点必定等距地排列在一圓周上(图 67)。設 Q_1 是与 Q 的两相邻等价点之一, 并設等价点(包含 Q) 的总数为 n , 則 $\angle QAQ_1$ 是群中最小的轉角, 因此这个轉角的值必須等于 $\frac{2\pi}{n}$ 。群中所有的运动都是圍繞 A 經過正或負的 $\frac{2\pi}{n}$ 的倍角的轉动, 而且仅有有限个几何上不同的轉动。类型 I, 2, α 的分析到此完毕。适合于这种类型的一个基本区域是一个角区域, 角的顶点为 A , 大小等于 $\frac{2\pi}{n}$ (图 68)。基本区域也是无限大的, 而且这个群不能产生正則点系, 因为每一点只有有限个等价点, 不适合第 59 頁上所規定的第一个条件。

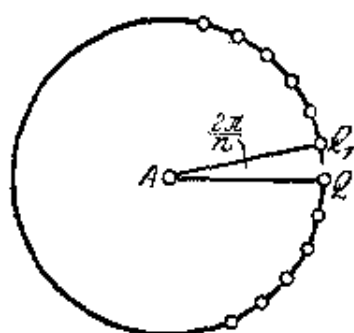


图 67

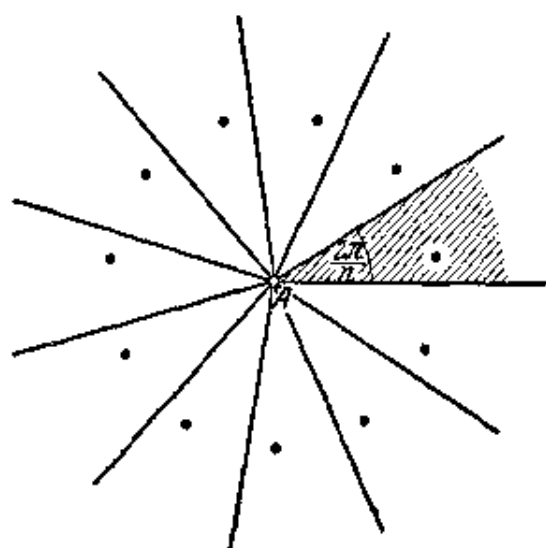


图 68

这个群跟上面所講的平行群一样, 对于研究其他不連續平面运动群有重要意义。任何一个不連續运动群如果包含以 A 为轉动中心的一个轉动, 則在这群中所有以 A 为轉动中心的轉动的集合是一个不連續子群, 因而必为 I, 2, α 类型的。由此可知, 所有的轉动的轉角必是呈 $\frac{2\pi}{n}$ 形角的倍数。这样我們可以拿整数 n 作为点 A 的特征值, 并稱 A 为 n 次轉动中心。

在类型 I 的群里只剩下 I, 2, β 尚未解决, 在这个群里有一轉动 d 和一平移 t , 其他所有的平移都同 t 平行。根据第 65 頁上的

引理 2, d 的轉角必为 π , 因此按照剛才引入的術語, 在这群中只有二次轉动中心。設 A_1 是这样的一个点 (图 69)。群中所有的平移必然作成类型 I, 1 的群。讓我們考虑在这个子群的运动之下同 A_1 等价的点列 A_1, A_2, \dots 。根据引理 1 (第 65 頁), 所有这些点都是二次轉动中心。我們說, 除了这些点之外, 綫段 $A_n A_{n+1}$ 的中点 B_1, B_2, \dots 也都是二次轉动中心。因为, 設 t 是把 A_1 搬到 A_2 的平移, 再設 a_2 是圍繞 A_2 經過一个 π 角的轉动, 則 ta_2 把一对点 $A_1 A_2$ 搬到一对点 $A_2 A_1$; 因为 t 把 $A_1 A_2$ 搬到 $A_2 A_3$, a_2 把 $A_2 A_3$ 搬到 $A_3 A_1$ 。因为圍繞 B_1 轉动 π 角也把 $A_1 A_2$ 迁移到 $A_2 A_1$, 因此 ta_2 与这个轉动是等同的, 所以 B_1 就是二次轉动中心。同理, 由 B_1 产生的点列, 即一切的 B_n , 也都是二次轉动中心。但是, 除 A_n 和 B_n 諸点之外, 再沒有其他的轉动中心了。事实上, 假如 A 是 A_n 中的一个点, 而 C 是群中不同于 A 的任意一个轉动中心 (图 70), 則 C 必是二

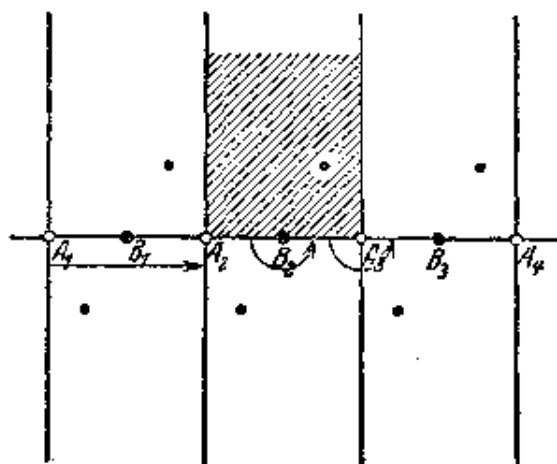


图 69

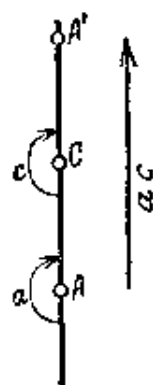


图 70

次轉动中心。設 c 是繞 C 經過 π 角的轉动, a 是繞 A 經過 π 角的轉动。考虑运动 ac 。設 A' 是 A 在 c 之下的象, 則 C 是 AA' 的中点, 因此运动 ac 也把 A 迁到 A' 。但依据轉角的加法定理, ac 是一平移, 因此 A' 是在群中的平移之下 A 的象点之一, 換句話說 A' 是 A_1, A_2, \dots 諸点之一; 由于 C 是 AA' 的中点, 所以必定是 A_n 或 B_n

之一。

群 $I, 2, \beta$ 的分析至此完毕。在图 69 上表出两种的轉动中心和一个基本区域。应该注意, 没有一个 A_n 可以同 一个 B_n 等价, 因为在群的每一轉动和平移下, 两种点都只在自己的点列内活动。

在图 69 上也表出了几个不是轉动中心的等价点, 这些等价点作锯齿状排列。因为这些点局限在有限宽度的长条内, 它們在半徑为 r 的圓內的数目只能按照半徑的一次幂来增加, 所以它們不滿足我們前面講过的正則点系的第一个要求。同前面講过的两种类型的群一样, 类型 $I, 2, \beta$ 的群, 它們的基本区域也是无穷大的。

群里不是轉动中心的任何等价点組可以想象作两列合同而且平行的刻度。仿此, 比較复杂的群可以导致合同而且平行的点格。很明显, 与一点等价的几个不同的刻度或者点格的存在都要以轉动的存在为条件。事实上, 在上述情形下, 群里的每一轉动把一系列刻度变到另一列刻度, 只有包含轉动中心的那一列是例外。

因为一个点是各向对称的, 不适于用来表示轉动, 所以要表示在轉动之下与某一图形等价的一切图形, 显然不宜用点而要用另外的简单的图形。各向不是对称的最简单的图形是“指針”, 即帶有方向的点。图 71, a 和 b 表示 $I, 2, \beta$ 的群中的等价的指針。依照指針的起点是一个一般的点或者是一个轉动中心, 得出两种不同类型的图形。从第一种情形可以特別看出用指針方法表示的优越性: 不同两列

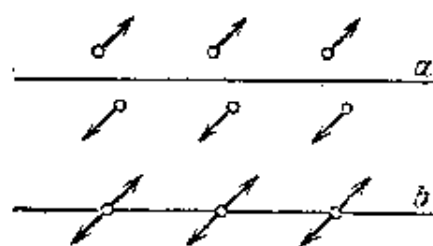


图 71

的刻度用方向相反的指針标明, 同一列中的指針的方向則都相同。

§ 12. 平面运动的結晶体群, 正則点系和指針系。

以合同区域組成的平面結構^①

这一节我們来研究类型 II 的群, 在这种群里包含两个不平方向的平移。类型 II 的群与类型 I 的群不同的地方, 在于前者永远产生正則点系, 因此, 若按照第 61 頁的說法, 可以称它們为結晶体群。类型 II 的群的基本区域都是有限的, 这与它們必然产生正則点系的性質有关。研究这种群时我們首先又碰到平面格子, 因为我們前面曾經說过, 等价的点組或指針組永远做成一个格子或由多个合同而且平行的格子組成的图形。

在第 64 頁上我們說过类型 II 的群也分两类。現在先研究比較簡單的、群里包含两个不平行的平移而沒有轉动的子类 II₁。今証明, 在这种情形下与一点等价的各点常作成一平面点格。

为了証明, 我們从任一点 P 出发, 并且从群里选出这样的一个平移 t , 使 P 移到与 P 最近的一个等价点 Q (图 72)。如此則

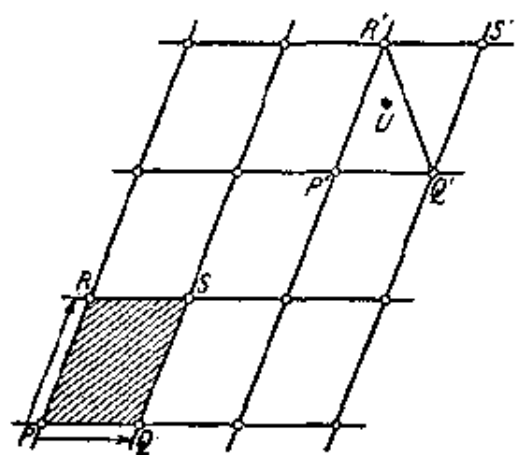


图 72

与 t 平行的平移在直綫 PQ 上产生一系列与 P 等价的刻度。由假設, 还有与 PQ 不平行的平移。所以还有不在 PQ 上与 P 等价的另外的点; 讓我們选取与 P 最近的这样的一点 R , 并設 t' 是群中把 P 移到 R 的平移。那么我們总有 $PR \geq PQ$ 。如果 S 是 Q 在 t' 之下的象点, 則 $PQRS$ 是一平行四边

① 这里所講的理論是 E. C. 費多罗夫的, 參看他的 Симметрия правильных систем фигур, Записки Минералогического общества 第二集, 第 XXVIII 期, 1891 — 俄譯本編者注。

形。很明显, 所有由这个平行四边形产生出来的格子点都等价, 因为每一点可以由 P 先施以平移 t (或 t^{-1}), 再施以 t' (或 t'^{-1}) 各若干次而得到。另一方面, 我們断言, 这个格子完全包括了所有与 P 等价的点, 也就是說, 群中所有的平移都可以由結合 t 和 t' 得出。假如不然, 群中将包含一平移 u , 这 u 平移 P 到不属于这个格子的一点 U 。那末格子中就有与 $PQRS$ 合同而且包含 U 的某一平行四边形 $P'Q'R'S'$ (图 72)。于是二三角形 $P'Q'R'$ 和 $S'Q'R'$ 中必有一个, 比如說第一个, 包含 U 。这样群就有一平移使 $P' \rightarrow U$, 因为这个平移是 $P' \rightarrow P$ 和 u 結合的結果。但是这就导出矛盾, 理由如下: 我們知道 $PR \geq PQ$, 所以頂点 R' 是三角形 $P'Q'R'$ 中离 P' 最远的点。所以 $P' \rightarrow U$ 这个平移将比把 P 移到 R 的平移为短, 也就是比把 P' 移到 R' 的平移为短。因此平移 $P' \rightarrow U$ 将平行于 t , 而 U 應該在綫段 $P'Q'$ 上。可是这样一来平移 $P' \rightarrow U$ 將較 t 更短, 这跟 t 为群里最短的平移那种选法矛盾。假如 U 在三角形 $S'Q'R'$ 內, 証法相同, 在这种情形下只須以平移 $S' \rightarrow U$ 来代替 $P' \rightarrow U$, 便得到象上面所說的矛盾。

現在我們已經証明了, 在类型 II, 1 的群中运动之下, 所有等价点常作成一個点格。如果这种群的运动不是施用于点而是施用于指針, 那么就得到由平行的指針組成的格子 (图 73)。

下面說到最后一种类型 II, 2 的群, 在这种群里除了平移之外还有轉动。这种情形可以引用方才得到的結果。因为, 类型 II, 2 的群也象类型 II, 1 的一样, 它包括两个不同方向的平移, 因而类型 II, 2 群的所有

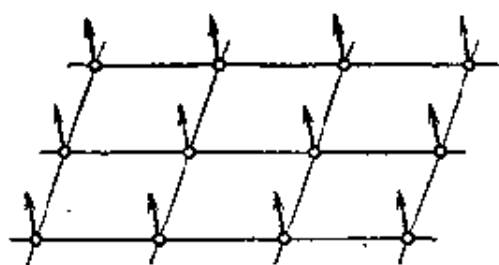


图 73

所有平移必定作成类型 II, 1 的子群。所以在类型 II, 2 中与任一点 P 等价的諸点, 如只考虑从 P 經平移得到的, 則它們作成一個格

子。群中所有轉动,或者把格子变到自己,或者把格子中的某一点变到不属于格子的一点 Q 。但是經過群中的平移, Q 产生另一个格子,它与 P 产生的合同而且平行,同时新格子的所有点既跟 Q 等价,也跟 P 等价。这个过程显然可以重复下去,一直到跟 P 等价的点用完为止。但用这种方法只能得到有限个不同的格子,否則群便不是不連續的了。由此可見,类型 II, 2 中只有数目相对地不大的几个群,同时这几个群对应的点系总是由平行而且合同的格子組成的。

我們按照群里的轉角的大小把类型 II, 2 分类。所有的轉角必須作 $\frac{2\pi}{n}$ 的形状,这里的 n 是一个整数,因为以群中的某一点为

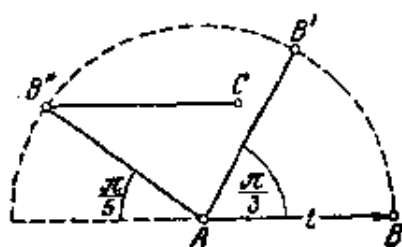


图 74

轉动中心的轉动作成一个 I, 2, α 类型的不連續子群。現在我們証明, n 的值除 1 外只能取 2, 3, 4, 6 四个值。为了証明,我們在群里选取一个最短的平移 t , 設 A 是群里的 n 次轉动中心

(图 74), 并設 A 經過 t 移到 B 。設繞 A 轉动了 $\frac{2\pi}{n}$ 后, B 移到某一点 B' 。根据第 65 頁上引理 2 得知群里也包含把 A 搬到 B' 的一个平移 t' 。运动 $t^{-1}t'$ 显然把 B 搬到 B' 。从轉角的加法定理, 知 $t^{-1}t'$ 是一平移。因为我們选择 t 是最短的平移, 因此 $BB' \geq AB$ 。所以 $\angle BAB' = \frac{2\pi}{n} \geq \frac{\pi}{3}$, 于是 $n \leq 6$ 。下面只要証明 $n=5$ 时不成立就好了。証明用反証法。假定 A 是五次轉动中心(图 74)。設繞 A 經過轉角 $2 \times \frac{2\pi}{5}$ 的轉动把 B 搬到 B'' 。这样, 群里将包含把 A 搬到 B'' 的一个平移 t'' 。但是因为平移 $t''t$ 显然把 A 移到如图所画的 C 处, 又因为距离 AC 比 AB 为短, 所以群里就将包含比 t 更短的平移, 这跟 t 是群里最短的平移矛盾。

至此我們知道, 类型 II, 2 的群只能包含 2, 3, 4, 6 次的轉动中心。設 φ 是这样一個群的最小的轉角, 那么就得到下列四种情形:

$$\text{II}, 2, \alpha: \quad \varphi = \pi,$$

$$\text{II}, 2, \beta: \quad \varphi = \frac{2\pi}{3},$$

$$\text{II}, 2, \gamma: \quad \varphi = \frac{\pi}{2},$$

$$\text{II}, 2, \delta: \quad \varphi = \frac{\pi}{3}.$$

下面将要看到, 每种情形恰恰对应一个群。

II, 2, α . 在这一群里至少有一个二次轉动中心 A 。群里的平移子群把 A 变到一个格子中的各点, 因此所有这些点都与 A 等价, 而且是二次轉动中心。設 $ABCD$ 是格子中的一个母平行四边形 (图 75)。現在可以应用前面討論 I, 2, β 类的群时的推理 (第 69 頁)。同样可以得出, 每两个格子点所連接的綫段的中点也是二次轉动中心; 反之, 每个二次轉动中心也是这样綫段的中点。考虑 AB 的中点 Q , AC 的中点 P , BC 与 AD 的中点 T 。在这几个中点里沒有两个是等价的。又, 方才說过, 这几个中点都是二次轉动中心, 因而由

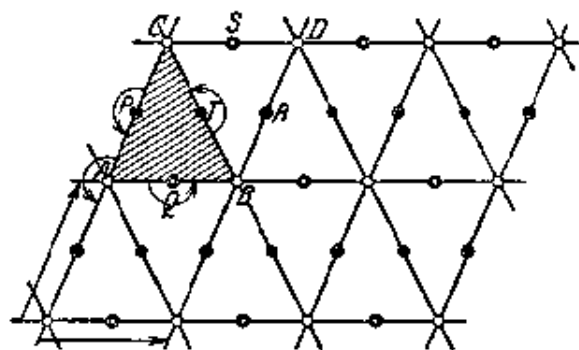


图 75

它們产生的点格和原来的点格一起作成群中的所有的二次轉动中心。这样說来, 一共有四种不同的轉动中心。繞这些点的轉动和保留点格 $ABCD$ 不变的平移是群中所有可能的变换。因为我們假定除掉二次轉动中心外, 再沒有別的轉动中心了。显然可以取三角形 ABC 作基本区域。

图 76 和 77 都表示等价指针组成的图形,所不同的是,在图 76 中,指针的起点是一般点,在图 77 中指针的起点是转动中心。在前一种情况下,是两个互相交错的格子,它们的区别在于指针的方向相反。在后一种情况下,两个格子重合为一,因为对于每一个转动中心各有两个指针。如果所说的不是指针,而是点,则每一个图形表示一个正则点系。但在这时图 77 的指针组和图 72 的一般

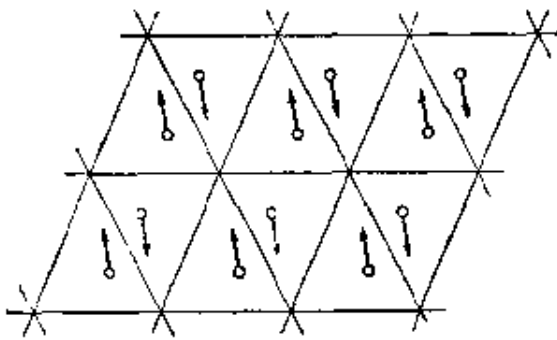


图 76

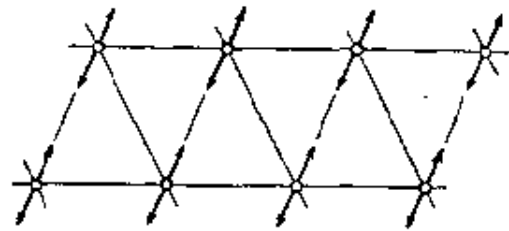


图 77

的平面点格就没有什么区别了。如果我们反过来欲求属于一般点格的迭合运动群,则得到的不是 $\Pi, 1$, 而是 $\Pi, 2, \alpha$, 因为图 76 的平行四边形 $ABCD$ 可以任意选取,同时这个平行四边形产生的格子在群的运动之下总要变到自己。在这里如用指针来代替点能够把不同的情形区分得更清楚一些。

$\Pi, 2, \beta$ 。按照题中的假设, $\frac{2\pi}{3}$ 是群里最小的转角。现在我们断言:除了转角 $\pm \frac{2\pi}{3}$ 之外,再没有别的转角。假如不是这样,只有 π 是别种可能的转角。但是由于转角的加法定理,知道经

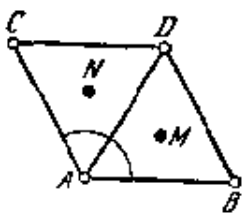


图 78

过 π 角的转动再加上经过 $-\frac{2\pi}{3}$ 角的转动,将得出 $\frac{\pi}{3}$ 角的转动,这种转动是不可能在这个群里出现的。这样说来,群里确实只有三次转动中心。

设 A 是一个三次转动中心(图 78),并设 $A \rightarrow B$ 是群里最短的

平移。如果 B 繞 A 轉了 $\frac{2\pi}{3}$ 时后到 C , 則根据引理 2, 平移 $A \rightarrow C$ 也属于这个群。对应平移子群的点格可以由平行四边形 $ABCD$ 产生, 因为由于作图, 平行四边形內再沒有其他的格子点。对角綫 AD 分 $ABCD$ 为二个等边三角形。因此群的平移必定产生相当于最紧密圓形堆积的点格, 这种点格不象类型 II, 2, α 中的那样可以任意选取 (相仿地, 在下面的两种类型里我們会看到, 由平移产生的点格也必須是一种特殊的形式)。把 $AB \rightarrow AC$ 的轉动 d 和 $A \rightarrow B$ 的平移 t 結合起来的 dt 把 AB 搬到 BD (图 78)。因此, 运动 dt 必是这样的一个轉动 d' , 轉动中心 M 是三角形 ABD 的中点, 轉角为 $\frac{2\pi}{3}$ 。由此可見, M 是群的一个三次轉动中心。其次, $d'' = td'$ 把 AC 經過 BD 搬到 DA , 所以 d'' 是繞三角形 ACD 的中心 N 經過 $\frac{2\pi}{3}$ 的轉动。由此可見, N 也是群的一个三次轉动中心。跟 A 一样, M 和 N 也产生点格, 点格的所有点都是三次轉动中心。現在我們証明, 由 A, M, N 产生的点格包括了一切可能的轉动中心。要証明这句话, 只要証明两个三次轉动中心 E, F 間的距离不小于 AM 即可。很明显, 运动 $d^{-1}d'$ 是平移 t , 还有, 圍繞 E, F 作相等而相反的轉动, 其結果也是一平移, 而且移出的大小对于距离 EF 的比等于平移 t 的大小对于距离 AM 的比。因为按照假設, 群里的平移不得短于 t , 因此 EF 也就不得短于 AM 。于是我們确实証明了在群里除了 A, M, N 所产生的三組点格外, 再沒有其他的轉动中心。因为繞中心 A 的轉动把这三組点格中的每一組变到自己而不是把这三組中的一組变到另一組, 所以 A, M, N 不是等价的点。因而类

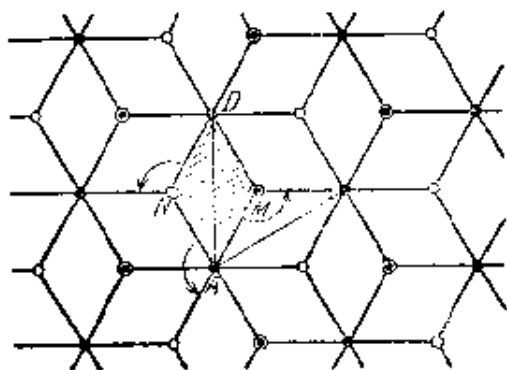


图 79

型 II, 2, β 的群有三种不同的轉动中心 (图 79)。可以看出, 每一組的点都是簡單复盖平面的正六边形組的中心, 而且其他两种轉动中心交錯地落在六边形的頂点上。因此我們得到用一定的方式相互迭置着的三組正則六边形。附带說說, 这个图形可以解釋为石墨构形 (第 57 頁图 56) 的三个相邻层的正投影。

在图 79 中, 菱形 $AMND$ 被选作一个基本区域^①。在这張图上也指出了产生平移点格的那两个平移。

起点不是轉动中心的等价指針系組成三組錯綜排列的格子, 各以指針的一定方向来識別 (图 80)。这三組格子的母平行四边形的沒有画出来, 免得把图形弄得太乱了。

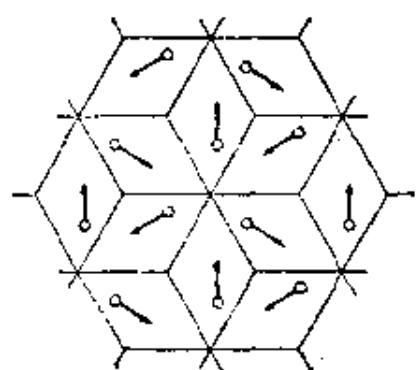


图 80

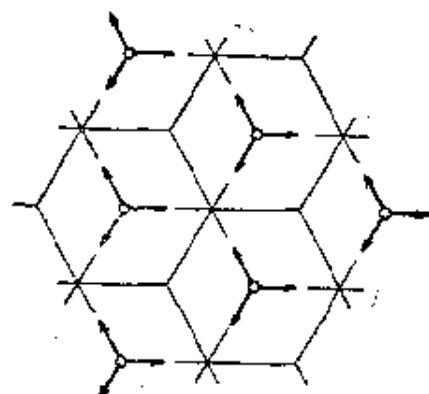


图 81

如果指針的起点是轉动中心, 三組点格重合而为一, 因为每一点必須帶有三个指針。

II, 2, γ 。在这个群里最小的轉角是 $\frac{\pi}{2}$ 。这样就有二次和四次轉动中心。再沒有別种轉动中心了。因为假如有的話, 应用加法定理, 結合 $\frac{2\pi}{3}$ 的轉动和 π 的轉动, 便得出 $\frac{\pi}{3}$ 的轉动, 这跟我們假設不能有比 $\frac{\pi}{2}$ 再小的轉动矛盾。

以下討論的步驟, 与上面的情形相同。設 A 是任意的一个四

① 这种毗連的菱形組常見于蜂房的构造。

次轉动中心, $A \rightarrow B$ 是群里一个最短的平移 (图 82)。如果把 B 繞 A 轉过 $\frac{\pi}{2}$ 到 C , 則平移 $A \rightarrow C$ 也在这个群里。所以群的平移点格可由正方形 $ABCD$ 产生, 因为这个正方形的四顶点是格子点, 而此正方形不包含其他的格子点。因此同上面的情形一样, 平移格子不能任意选取, 而必須有一种特别的对称的形式。如果我們在平移之外, 再加上轉角为 π 的而非 $\frac{\pi}{2}$ 的轉动, 則得一子群, 这个

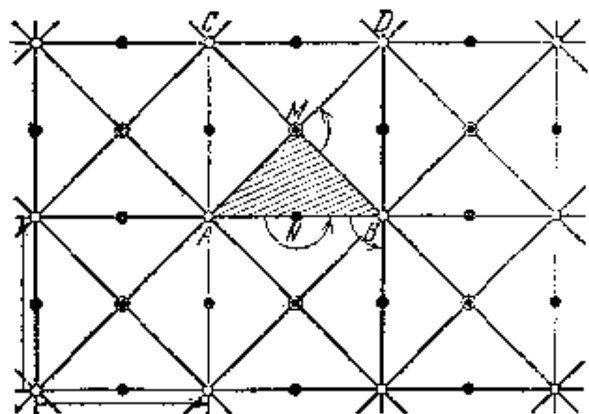


图 82

子群必为 $\Pi, 2, \alpha$ 类型的。正方形的中心点, 例如 M , 边的中点, 例如 N , 以及正方形的四顶点, 一同作成子群的全部轉动中心。这些点必定包括了全群的二次中心和四次中心, 因为这些中心都是經過 π 角的轉动中心, 而这样的中心必然作为二次轉动中心而出現在子群中。設 d 是轉动 $AB \rightarrow AC$, t 是平移 $A \rightarrow B$, 則 $d' = dt$ 当然把 AB 迁到 BD , 因而是繞 M 經過 $\frac{\pi}{2}$ 的轉动。所以所有正方形的心不仅是二次的轉动中心, 也是四次的轉动中心。現在我們可以仿照上面情形的同样理由, 断定再沒有別的四次轉动中心了。事实上, $d^{-1}d'$ 即是群里最短的平移 t ; 因此两个四次轉动中心的距离不能小于 AM , 所以除了由 A 和 M 产生的两种的格子点外, 再沒有別的四次轉动中心。因为我們考虑过的每一运动都将这两个格子变到自己, 而不是彼此轉变, A 和 M 不能等价。另一方面, 可以看到, 所有的二次轉动中心都是等价的。这样說来, 有一种二次轉动中心, 組成交錯排列的两个正方形格子, 有两种四次轉动中心, 每种組成一个正方形格子。三角形 AMB 可以选作一个基本

区域。

一般的点的指针系是由四个正方形格子组成的,每一个由一定的指针方向来识别(图 83)。

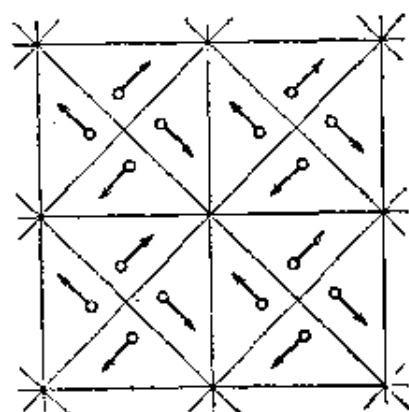


图 83

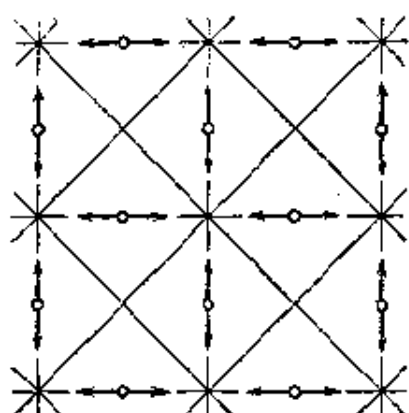


图 84

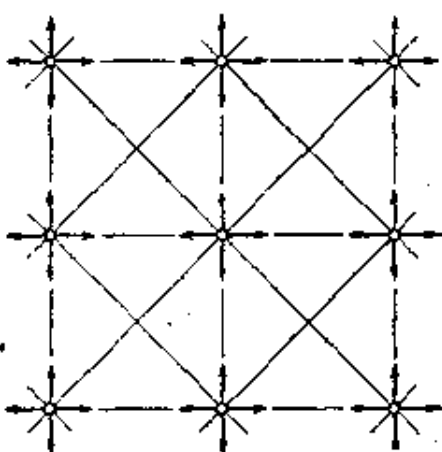


图 85

一个二次的转动中心产生两个格子,其指针的方向不同(图 84)。一个四次转动中心产生唯一的格子(图 85)。如果箭头象图 85 那样地两两相对,则图形可以解释作平面上同类的四价原子的正则排列。

II, 2, δ 。在这种情形下,转动种类最多。因为这里既然有六次转动中心,所以二次和三次的也可能出现。但是四次的是不许可的。因为,如果群里包含 $\frac{\pi}{2}$ 和 $\frac{\pi}{3}$ 的转动,当然也包含 $\frac{\pi}{6}$ 的转动,但是这种转角不可能在任何平面晶体运动群里出现。

设 A 是群里的一个六次转动中心(图 86)。首先我们考虑由平移和经过 $\frac{2\pi}{3}$ 角的转动组成的子群。

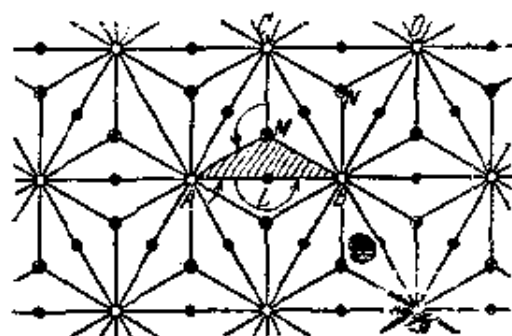


图 86

这个子群的构造我們在 II, 2, β 里已經見过了。我們知道 A 是子群里的三次轉动中心。这个子群的平移格子是等边三角形形状的, 而且不仅三角形的頂点, 比如 A, B, C 是三次轉动中心, 还有三角形的中心, 比如 M , 也是三次轉动中心。因为子群里已經包括了母群里的所有平移, 所以母群里的平移格子与子群里的相同。但是在母群里, A 是六次的, 而不是三次的轉动中心, 所以由 A 产生的所有的格子点也必是六次轉动中心。假如群里还有其他的六次轉动中心, 它們只能是某些三角形的中心, 因为所有的六次轉动中心必定已經在子群里作为三次轉动中心考虑过了。因为繞 A 轉动 $\frac{\pi}{3}$ 和繞 C 轉动 $-\frac{2\pi}{3}$, 結果是平移 $A \rightarrow B$, 又因为群里沒有比这更小的平移, 因此两个六次轉动中心的距离不得小于 AC , 所以除了由 A 点产生的格子点外, 不存在其他的六次轉动中心。这样說来, 三角形的中心仅是三次轉动中心。群里再沒有別的三次轉动中心, 因为所有的三次轉动中心都已在子群里考虑过了。跟 II, 2, β 的情形不同, 所有的三次轉动中心都等价。比如点 M , 可以繞 B 轉动到 N 。

要想找出所有的二次中心, 我們用相同的办法: 考虑由平移和經過 π 角的轉动組成的子群。由情形 II, 2, α 的討論可知, 格子的各个基本平行四边形的頂点、它們的中心、各边的中点, 亦即所有等边三角形各边的中点, 都是經過 π 角的轉动中心。三角形的頂点已經作为六次轉动中心用过了。因此只剩下作为二次轉动中心的三角形各边的中点。我們知道它們是等价的。这样說来, 二次、三次、六次轉动中心各有一种。 AMB 是群的一个基本区域。

一般位置的指針系是由六个彼此交錯的格子組成的, 每个格子的指針各有一定的方向。在图 87 中, 每一个格子由三个一組的平行指針表示, 各組指針的起点是一等边三角形的頂点。如果从一个二次轉动中心出发(图 88), 則格子两两重合, 成为三个格子。这

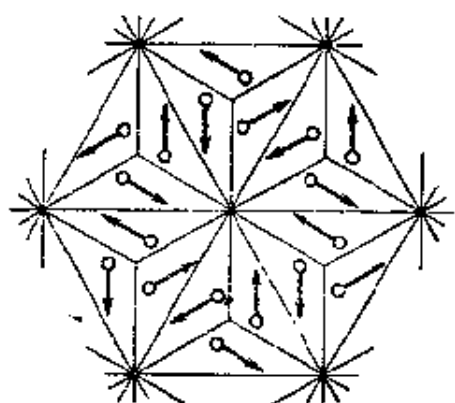


图 87

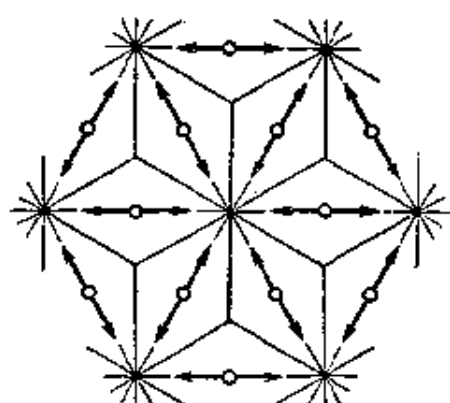


图 88

种图形代表平面上一类六价和一类二价的两类原子相结合的可能的正則排列。把所有的指针轉过 $\frac{\pi}{2}$, 得到二价和三价原子結合的排列。三次轉动中心产生的指针系由两个格子組成(图 89)。若指针的方向如图所示, 那末, 图形表示三价和六价的原子排列。六次

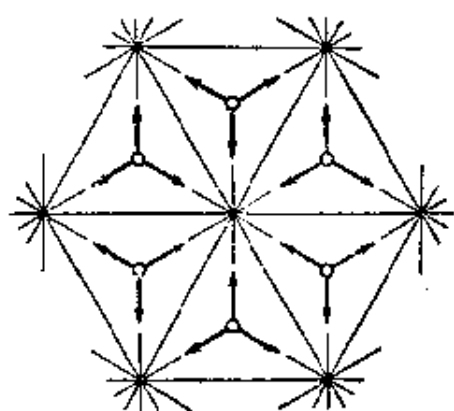


图 89

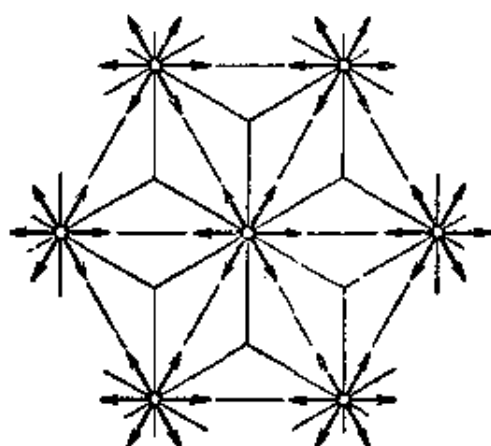


图 90

轉动中心产生的指针系只做成一个格子(图 90)。若指针的方向如图所示, 图形可以解釋作同类的六价原子在一平面上的正則排列。

到此为止, 我們已經完全解决了 §9 中所提出的問題。我們已經造出了平面上所有可能的結晶体运动群, 从而知道这样的群只有五种。最一般的正則点系和指针系是应用这些群于一般位置的

点而得到的。事实上,对于复杂的群來說是由轉动中心組成的点系,如以简单的群作基础,可以化为一般位置的点系。与此相反,以轉动中心为起点的指針系产生新的构形。

解决了上述問題,同时也就解决了另一有关問題,即求出用各种不同的方式把平面分成合同的有限的片段,使适合条件:整个构造在一个迭合运动之下不变,并且总有一个迭合运动使任一已給片段搬到任一别的片段。这些迭合运动的群必是不連續的,因此必是結晶体群,因为在一圓内片段的数目按半徑的平方增加到无穷。所以只有两种可能性,或者除去恒等运动外沒有迭合运动保持一个片段不变,在这种情形下,这个片段就是一个基本区域;或者有一些片段它們在一个迭合运动之下不变。在这种情形下,这一类的一切运动作成一個不連續的子群;而且显然这个子群不含任何平移,因而是由繞一固定点的多个轉动組成的(因此这个子群的类型应为 $I, 2, \alpha$)。在这种情形下,各个片段具有中心对称性,而且都是由許多基本区域組成的。由合同的正六边形或者正方形拼成的平面是这种情形的例子。这种排列方式常用来拼砌花磚地板。

另外一个比較难的“拼磚”問題是:要找用合同的有限的磚鋪滿平面的可能結構,但不要求这結構有迭合运动。

§ 13. 空間結晶体类及运动群。鏡面对称群和点系

在空間,也象在平面上一样,只有有限个結晶体运动群,但在数量上空間的比平面的多得多。要想决定空間有哪些群,我們也象以前一样,先用几何方法来鉴别个别的运动。在空間,也可以用比較简单的运动来代替复杂的运动。首先可以証明,空間保留一定点不动的任何运动也保留通过这一点的一条直綫上所有点不动,因而它就是以这条直綫为軸的經過一定角的轉动。空間的运

动也可以是一个不动点也沒有的,譬如平移就是一例。

可以証明,空間任意的运动可以看作是一定的轉动和沿轉动軸的一定的平移二者合成的运动;单独的轉动或平移也可以看作是这样两部分合成的运动,不过有一个部分是恒等罢了。如果我們把一般运动中的平移和轉动看作是同时进行并且都是匀速的,則得一螺旋状的推进轉动。正因为这个原故,空間的一般运动也叫做螺旋运动,轉动和平移是它的极限情形。此外,跟平面平移的情形一样,平移可看作圍繞无穷远点經過零角的轉动,这样能使問題簡單化。

空間两个螺旋运动的合成运动沒有象平面上那样簡單而一般的轉角加法定理。但是也有两个对于特殊情形成立的定理,足够研究空間結晶体之用:第一,两个平移的合成还是一平移;第二,旋轉軸平行和轉角相等的二螺旋运动只相差一个平移。这里所說的螺旋运动的轉角是指螺旋运动所包含那个轉动的轉角。

根据上述第一个定理,可知空間的平移运动群必作成一子群。同平面上的一样,这个子群的结构决定空間不連續运动群是否为結晶体群,即是否产生空間正則点系。因为,如果群的所有平移都与一个定平面平行,群里必有无穷大的基本区域,因此不产生正則点系。另一方面,如果平移群包含三个平移,而三个平移的方向不都与一个定平面平行,則它是一結晶体群。在这种情形下,平移子群里与一点 P 等价的諸点,必作成一個空間格子。如果除此之外,群里还有一个螺旋运动,把 P 移到不是格子点的另一点 Q ,則平移子群把 Q 移到与 P 和 Q 等价的另一个幅点格。由于群是不連續的,所以用这种办法得到的格子数目总归有限,也象在平面上一样,这个限制使我們能够逐一檢查所有可能的情形。并且我們能看到,空間的正則点系都是由有限个合同的、交錯而平行排列的格子組成的。以前曾經看到过这样的一个例子,这就是在四面体

堆積中的球心系。

由上述第二定理(即關於具有平行軸的二螺旋運動)可以得出將一個非平移群里的運動加以分類的一個重要的幾何辦法。為此,我們在空間任取一點 M 。對群里每一螺旋運動,通過 M 作一直線 a_0 平行於它的軸 a 。這樣一來,對於群里繞軸 a 的任何螺旋運動 s ,總有繞軸 a_0 的轉動 s_0 和它對應,它們的轉角相同。因此 s 和 s_0 只能相差一平移。用這種方法可使群 G 里任何非平移運動都有保留點 M 不動的另一運動和它對應。要使對應完全,再讓恒等變換對應 G 里的所有平移。這樣,群 G 就對應保留點 M 不動的運動組 G_M 。我們斷言, G_M 是一群。為了證明,設 s_0 和 t_0 分別是与 G 里螺旋運動 s 和 t 對應的 G_M 里的轉動。根據具有平行軸的螺旋運動定理可知 $s_0 t_0$ 不是別的,正是 G_M 里和 st 對應的轉動。於是運動組 G_M 事實上滿足下面的群的两个公理:如果它包含轉動 s_0 和 t_0 ,它也包含 $s_0 t_0$ 和 s^{-1} 。

群 G_M 的結構不能唯一地決定 G ,也就是說,它沒有告訴我們群 G 里平移的任何東西。比如,單獨由平移組成的一切群 G 對應僅由恒等變換組成的同一個群 G_M 。因此 G_M 代表相差只是一些平移的一組群。我們把可以化歸同一個群 G_M 的所有空間運動群稱為空間運動群的一個類。如果這類包含一結晶體群,則它叫做結晶體類。這個概念對於應用結晶學和空間群的幾何分類都很重要。因為,首先作出一切可能的結晶體類,然後在每一類中找出它所包含的群,總要容易得多。

因為 G_M 的所有運動都保留 M 不動,它們也應該把以 M 為中心的球面變到它自己,因此 G_M 可以看作球面上的運動群。有一個定理說,若 G 是不連續群, G_M 也一定是不連續群。應用這個定理,可使我們的討論簡化不少。 G 的不連續性和 G_M 的不連續性有完全不同的意義,所以這個定理並不是自明的。不過如果是

結晶体群,就容易由相当的平移格子着手証明。这一証明姑从略。

根据上面的結果,可知要想找出空間运动群的所有的結晶体类,只須討論球面上的不連續运动群即可。这里还有一种簡化的办法。正象在平面上一样,空間的結晶体运动群除了轉角为 π , $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{3}$ 的倍角的轉动外,沒有其他的轉动。从这个結論得知,正象在平面上只有二次、三次、四次和六次轉动中心一样,空間的結晶体运动群只有二次、三次、四次和六次的軸(用相仿的術語)。这个結果对于結晶体类的群 G_M 也一定成立。根据这个限制,只能有十一类的結晶体。逐一列举如下:

首先,我們看在 G_M 中只有一根軸,而且是 n 次軸的情形。这样的結晶体类在結晶学中称为 C_n 。 C_n 共有五个(图 91):

1. C_1 (恒等, 平移群类),
2. C_2 ,
3. C_3 ,
4. C_4 ,
5. C_6 。

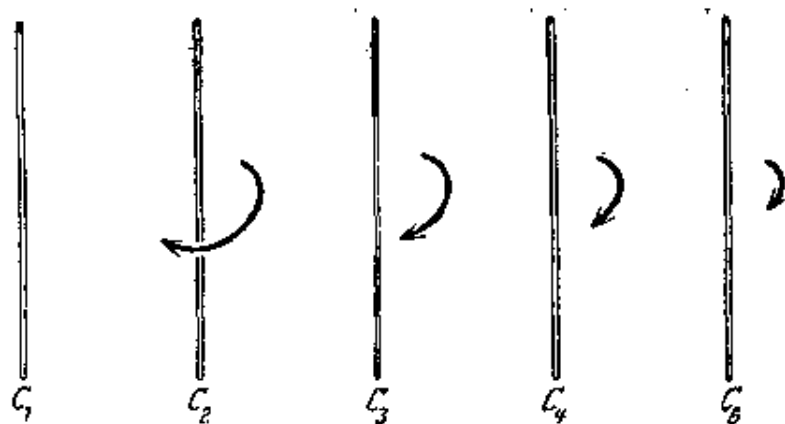


图 91

現在假定有多个軸,其中最多有一个是大于二次的軸。我們指定这个 n 次軸 ($n > 2$) 为“主軸”,二次軸为“副軸”。那么容易从群的公理推出恰好有 n 个副軸,这 n 个副軸都与主軸垂直,而且彼

此作成等角。其對應的群和類用 D_n 標明 (二面的群或類); 一共有四類:

6. D_2 (3 個等價軸),
7. D_3 ,
8. D_4 ,
9. D_6 .

其次, 容易看出, 在 $n=3$ 的情形下所有的副軸都等價, 但在其餘的情形下, 這些軸交錯地屬於兩類等價軸里。

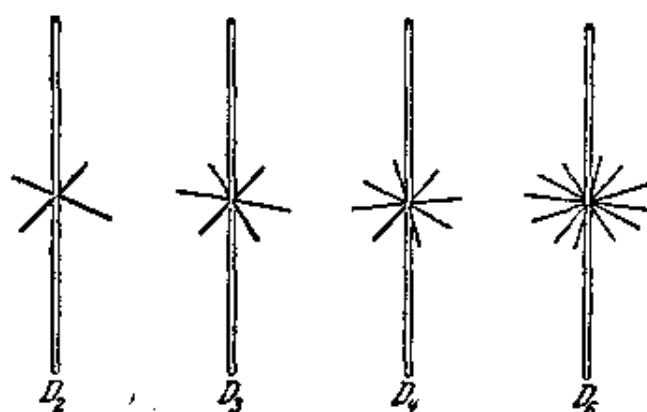


圖 92

還留下一種可能情形, 就是大於二次的軸可能不止一個。在這種情形下, 詳細地研究後可以證明, 在球面上的諸等價點必是正四面體的頂點 (T) 或是正八面體的頂點 (O)。從這兩個多面體的對稱性自然就得出各軸的排列情形。連接球心和各頂點、各棱的頂點、各面的中心就得到所有的軸。因此, 四面體產生類:

10. T (圖 93)。

連接球心和正四面體的一個頂點的直綫必過對面的中心。因為對面是等邊三角形, 而每個頂點處有三個面相交, 所以我們得到四個三次軸。其次, 我們將六個棱的中點和球的中心連以直綫, 則得到三條直綫, 而不是六條。因為各棱的中點是成對地在一直徑上。因為四面體能夠以這幾根直綫為軸轉動使與自己重合, 它們

必定是二次轴。这样类 T 里有三个二次轴，并且这些轴相互垂直。

要想作出球面上的一个基本区域，我们先从和正四面体的一个面对应的球面三角形开始。因为这样的三角形可绕三次轴使与自己重合，所以它不是一个基本区域。但是显然这个三角形可以分成三个基本区域(图 93)。

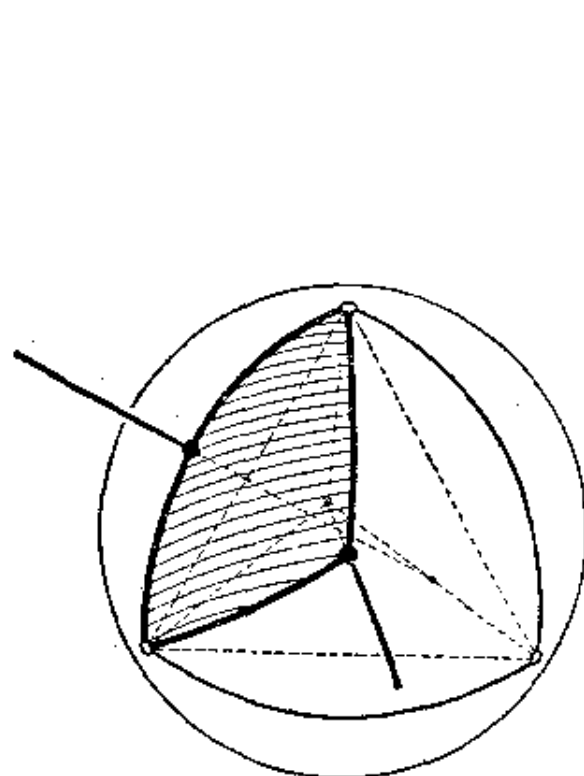


图 93

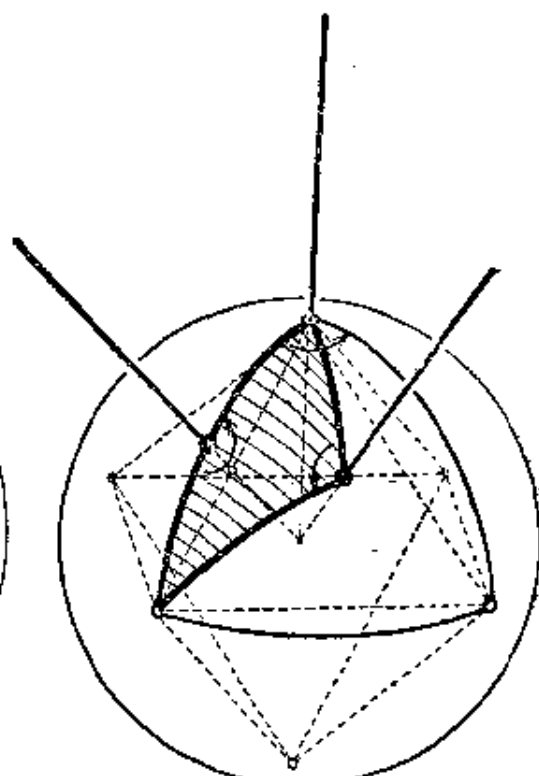


图 94

最后一类：

11. O (图 94)

的研究方法与前同。八面体的六个顶点两两连成一直径，每个顶点处有四个面相遇，因此我们得到三个四次轴。相仿地，八面体的八个面两两相对，而且每个面都是等边三角形，因此它们产生四个三次轴。最后，八面体有十二个棱，它们也是两两相对，所以类 O 里有六个二次轴。至于基本区域可以取和八面体一个面对应的球面三角形的三分之一(图 94)。

从上面作出的十一类可导出 65 个空间的结晶体运动群。这

樣看來，只因有了類的區分，才使如此繁多的群的研究大為簡化。本來也可以把類的概念同樣用到平面上的結晶運動群中去。這就得到在圓周上不連續的運動群，其中包括恆等運動和轉角為 π ， $\frac{2\pi}{3}$ ， $\frac{\pi}{2}$ ， $\frac{\pi}{3}$ 的轉動。因此一共只有五類，每類只有一個結晶體運動群。因此，把平面結晶體運動群分成類的辦法沒有什麼好處。

同平面的情形一樣，空間的結晶體運動群產生正則點系，而且它們也可聯系這個問題：試把空間剖分成合同的有限的片段，這些片段中的任意一個可在選合運動下與其他任一片段重合。這個問題直到現在還沒有解決。

為了結晶化學上的用途，不僅要考慮點系，也要考慮指針系，這才方便。不過在空間，一個點只帶一個指針是不夠的，因為圖形還可以繞着指針轉動。要想得到有完全確定的定向的圖形，須使一點帶不同長度和不同方向兩個指針才行。

把存在於自然界的不同結晶體的結構和所有用幾何方法作出的指針系加以比較，得到驚人的結果。自然用盡了用幾何方法作出的一切儲備還不夠，還存在大量的結晶體結構，不屬於正則點系概念的範圍內，雖然所有的元素也都是等價的。原因是這樣：我們規定正則點系時用來表明所有點都等價的第三個性質是說，系中的任何點可以通過選合運動搬到系中的任何另一點。若在選合變換之外再允許鏡面反射，還可以導出更一般的點系的概念。所謂鏡面反射，在平面上是對於一直線來講的，在空間是對於一平面來講的。這兩個更一般的變換也保持距離和角都不變，不過把左右的部分對調了一下，還有空間的鏡面反射不能由連續運動產生。如果選合變換一語系指包括保持距離和角不變的所有空間變換，那麼選合變換的不連續群作成的集合，不僅包括不連續運動群，也包括許多別的群。這些更一般的群也已經完全確定出來。任何一群所包括的真運動（也就是沒有鏡面反射的變換）必作成一

子群,这个事实可使群的討論簡化。这种子群的类型可以用从前講过的办法来决定。将平面或空間的結晶体运动群分成类的办法也可以扩充到包含鏡面反射的群。象具有平行軸和相等轉角的二螺旋运动一样,对于平行平面或平行直綫的二鏡面反射也只要一平移。现在把用这种办法得到的群和类的数目写成下表:

	平 面		空 間	
	結晶体群	結晶体类	結晶体群	結晶体类
运动.....	5	5	65	11
加入鏡面反射.....	12	5	165	21
共計.....	17	10	230	32

唯有加入鏡面反射之后才能完全概括自然界中存在的各式各样結晶体构造。

至于說到指針系,無論在平面上或在空間都須各加一指針;因为在平面上一个指針在对于它的直綫上所作的鏡面反射下不变,同样,在空間里由两个不等长的指針构成的图形在对于二指針的平面所作的鏡面反射下也不变。因此在空間我們必須使用帶有不全在一平面上的三个不等长的指針的点子。

如不用几何方法,也可以用代数方法去找迭合变换的不連續群。在平面的情形下,这种方法导致复数之間值得注意的关系;在空間就要用到超复数系。

把現在的討論推广到高維空間里去是一个很有趣的問題。关于高維球在迭合变换下的不連續群已經得到一些結果,因为在任意空間关于正多面体的类似情形已經知道了。这些高維的图形我們在下一章还要講一下。另外比伯巴哈 (Bieberbach) 曾經証明,对任意的 n , 仅有有限个 n 維結晶体群,而且每个这样的群包含 n 个綫性无关的平移。

§ 14. 正多面体

在建立結晶体的种类时曾經引出了正四面体和正八面体。現在要給一般的正多面体下个定义,并且还要找出在正四面体和正八面体之外还有哪些可能的正多面体。

我們对正多面体有如下要求:它的所有的頂点、棱、和面都各自等价。此外,还要求所有的面都是正多边形。

首先,我們知道,适合上述二条件的正多边形沒有陷入的頂点或棱。因为,显然不可能所有的頂点都是陷入的,假如有任何陷入的頂点,則并不是所有的頂点都等价;对于棱也是一样。由此可見,每一頂点上的平面角之和永远小于 2π 。因为不然的話,若不是交于一个頂点的所有的面將落在同一平面上,就是以頂点为端点的某些棱將陷入。其次,因为一頂点上至少要有三个多边形相遇,又因为所說是正多面体,所以所有的多边形的內角都相等,每一角小于 $\frac{2\pi}{3}$ 。再其次,因为正六边形的每一內角剛好等于 $\frac{2\pi}{3}$,而正 n 边形的內角随边数增多而加大,所以正多面体的面只可能是三边、四边、五边的正多边形。因为正四边形(也就是正方形)的角是直角,所以不能有三个以上的正方形遇于一点,而不使各角之和等于 2π 或大于 2π 。同理,不能有三个以上的五边形遇于正多面体的一頂点。因为多面体的形状完全取决于一頂点上的面数和一面上的頂点数,所以最多有一个由正方形圍成的正多面体,最多有一个由正五边形圍成的正多面体。另一方面,一个頂点只可以有三个、四个、五个等边三角形相遇,因为假如有六个,那么在这一个頂点上各角之和就等于 2π 。因此以等边三角形作面可作成三种不同的正多面体。总起来說,一共得到五种可能的正多面体。这五种可能的正多面体事实上都存在。它們老早就为柏拉图所知道。在他的哲学中,他把它們放在很重要的地位,因此有“柏拉图

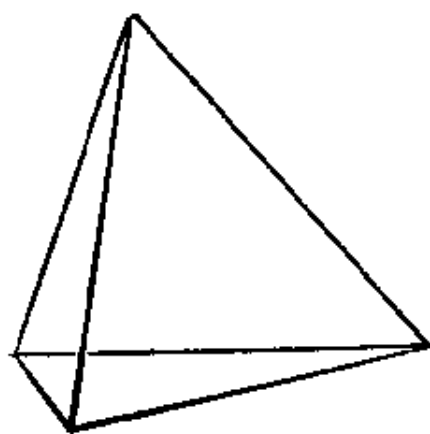


图 95

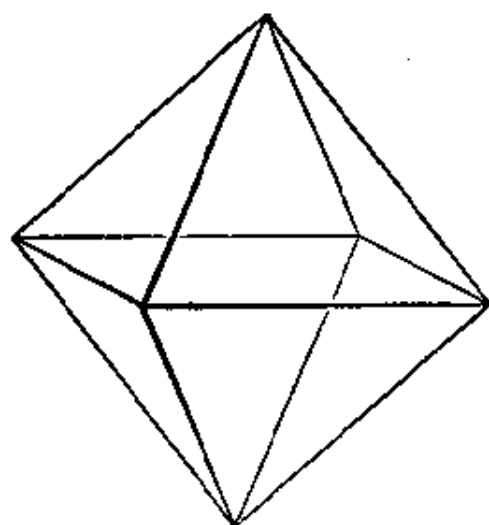


图 96

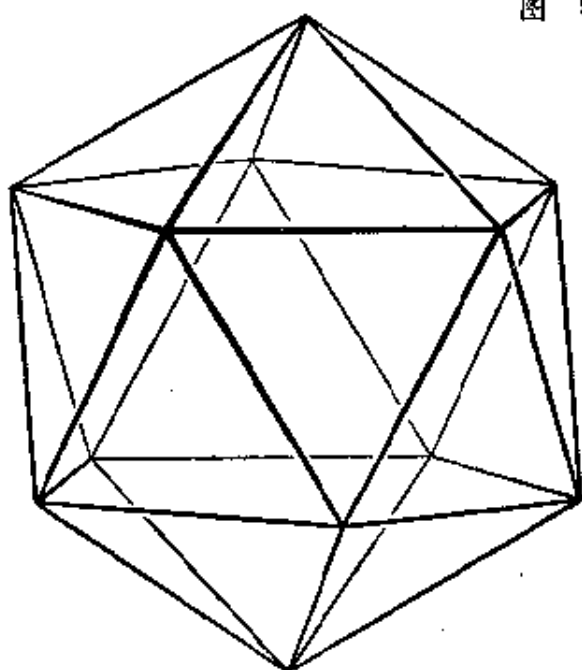


图 97

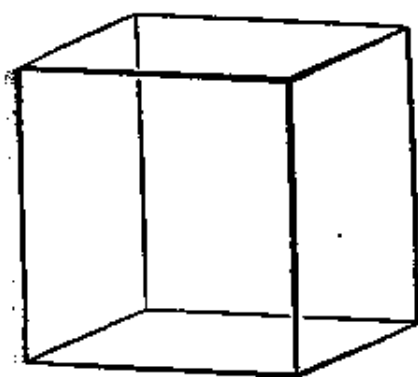


图 98

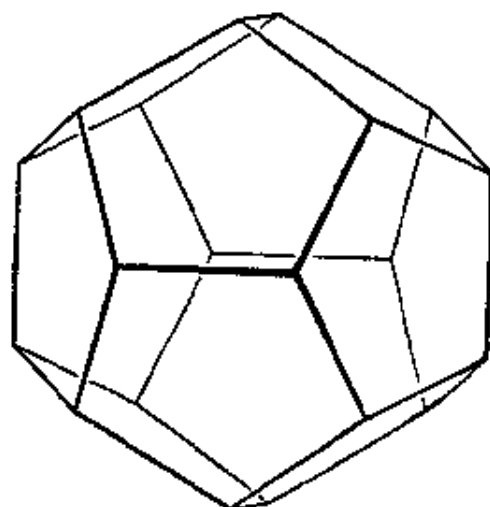


图 99

体”之名。下面的表给出五种正多面体的最重要的数据。图 95—99 是五种多面体的平行投影。

多 面 体 名 称	各面的形状	个 数			
		顶点	棱	面	遇于一顶点的面
正四面体 (图 95)	三角形	4	6	4	3
正八面体 (图 96)	三角形	6	12	8	4
正二十面体 (图 97)	三角形	12	30	20	5
立方体(正六面体) (图 98)	正方形	8	12	6	3
十二面体 (图 99)	五边形	20	30	12	3

所有正多面体跟球的关系正象我们上一节讲过的四面体和八面体的一样,它们都可内接于球,而且每个多面体都产生球面的不连续运动群,其中各顶点作成一组等价点。如果我们通过多面体的每个顶点作球的切平面,这些切平面必围成一个新的多面体,在群的运动之下也重合于自己。我们可以期望新造出的多面体也是正多面体,而且这种作法建立了五种多面体的两两对应关系。如果作图是对于八面体进行的,实际上就得到一个正多面体,即立方体。图 100 上表明这两个多面体的相互位置。这样一来,群 O 可以用八面体来定,也可以用立方体来定。从表中可以看出这两个多面体有这样的关系:一多面体的顶点数等于另一多面体的面数,两个多面体都有相同的棱数。还有,一多面体的一顶点上的面数等于另一多面体一面上的顶点数。据此八面体也可以外接于立方体(图 101)。

从表上可看出十二面体和二十面体也有相仿的关系。因此这

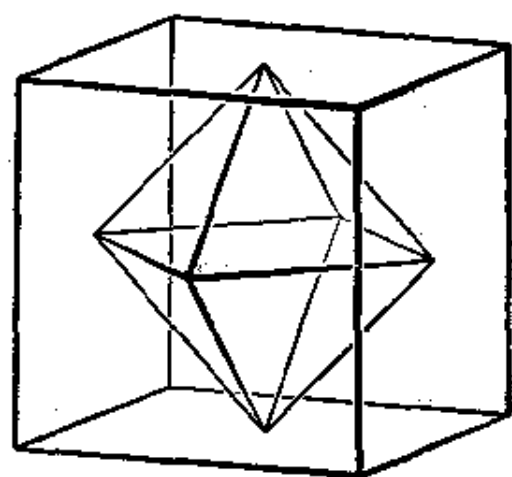


图 100

两个图形产生同一的群,通常叫做二十面体群。从結晶学的观点不能发现这个群,因为五这个数字在这里起作用,然而在結晶体类

里是不能有五次軸的。

如果作图是对于四面体进行的,不产生不同形状的图形,只产生另一个正四面体。

在下一章我們要介紹空間的对偶原理。对偶原理供給我們更一般的方法来建立一个图形的点、直綫、平面同另一个图形的面、直綫、点的对应关系。根据这一原

理,立方体同八面体“对偶”,十二面体同二十面体对偶,四面体同自己“对偶”。

再进一步研究,可以发现四面体群是八面体群的子群。与此相仿,我們已經知道某些平面不連續运动群是另外一些群的子群。从 T 群和 O 群之間的关系可得出下列直觀的推論:正四面体可內接于立方体,使正四面体的頂点是立方体的頂点,正四面体的棱是立方体面上的对綫。正四面体可有两种方式內接于立方体(图 102)。

同样也可以証明,八面体群是二十面体群的子群。据此可知,立方体可內接于十二面体,理由如同正四面体可內接

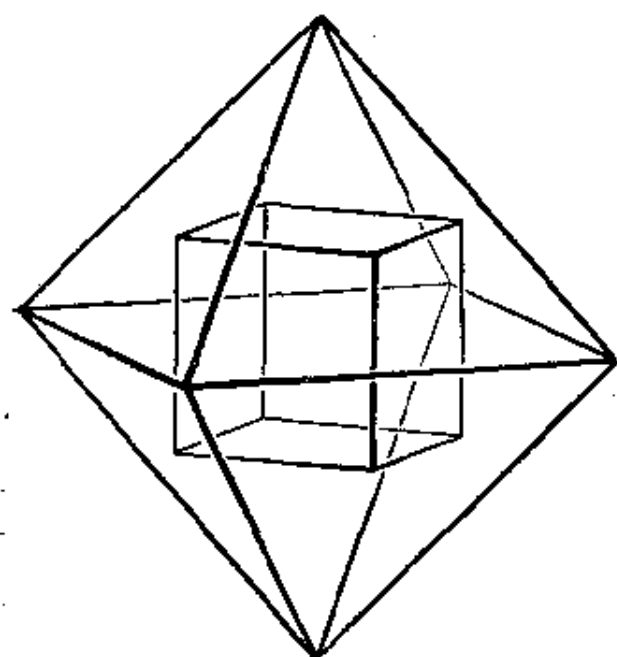


图 101

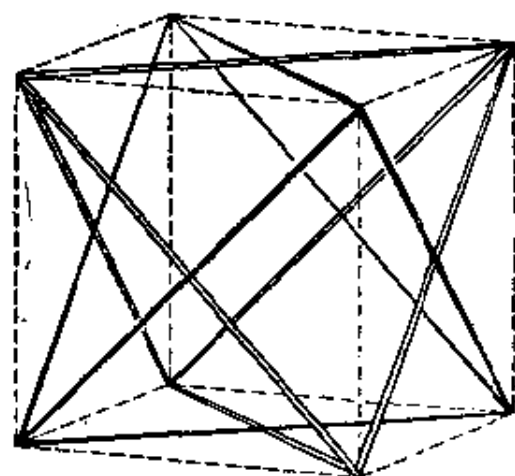


图 102

于立方体 (图 103)。仔细推究, 我们会发现在每一个十二面体里有五个这种的立方体。在十二面体的每一面上有每一立方体的一个棱, 在十二面体的每一顶点处有两个立方体相遇。

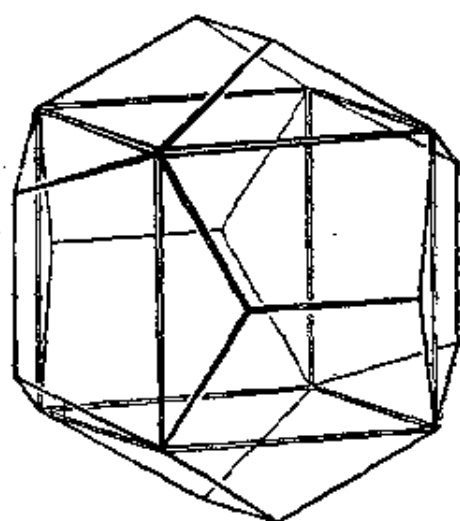


图 103

第三章 投影构形

在这一章里我们将要研究一些不用距离和角的度量或比较，也能够表述和证明的几何事实。也许有人以为不用距离和角的度量便得不出图形的重要性质，只能得出不明确的论断。其实不然。事实上，长期以来，几何学中仅仅研究度量关系。而象这一章所要讨论的一类问题，只有在对透视画法的原理进行了科学的研究之后才能提出来，例如把一平面图形从一点投影到另一平面上去，距离和角就有所变更，甚至平行线可能变为非平行线；然而，图形的某些基本性质必然仍旧未改，否则我们就不会认为投影图是原图的真正表象了。

如此通过投影的过程可得出新的理论，这种理论因其起源而有投影几何之名。自十九世纪以来，投影几何在几何研究中占着中心的地位。引进齐次坐标以后，投影几何的定理可化为代数方程，正象笛卡儿坐标之于度量几何的定理一样。不过投影解析几何比起度量解析几何来，显著地更为对称和更为一般，所以，假如我们想反过来用几何方法去解释高等的代数关系，就常把这些关系变为齐次式，并把变数解释为齐次坐标，因为如用笛卡儿坐标系里的度量解释将会是太不明显了。此外，可以认为度量几何是投影几何的特例。

投影几何的基本图形是点、直线、平面。投影几何的基本结果是关于三者之间最简单的可能的关系，即结合（也称关联）关系。结合关系有三种：点在直线上，点在平面上，直线在平面上。显然这三句话可以换成意义相同的另外三句话：直线通过点，平面通过

点, 平面通过直线。引进结合概念之后, 便可以把两种形式的说法改成对称的一种形式: 直线与点结合, 平面与点结合, 平面与直线结合。

跟结合有关的定理是投影几何中特别重要的定理。不过, 今后我们还要用到不能从结合概念推出来的另外两个基本概念。第一, 必须区别一直线上四点的两种不同的排列法; 第二, 必须用連續概念, 这个概念把一直线上的所有点同实数全体联系起来。投影几何的基本概念至此完备了。

下面我们将要研究投影几何学中最富于启发性的部分——构形。这种研究还可以揭示各式各样其他的几何问题。可以在这里提一提, 从前有一个时期, 竟把构形视为全部几何中最重要的分支^①。

§ 15. 平面构形导言

平面构形是由平面上 p 个点 g 条直线合成的一组, 组中每一点与相同数目的直线 (γ 条) 相结合, 而且组中的每一直线与相同数目的点 (π 个) 相结合。这样的构形我们用符号 (p, g, π, γ) 表示。 p, g, π, γ 四数不能任意选取。因为, 按照我们的要求, 组中总共有 γp 条直线通过这 p 个点。但是由于每条直线通过 π 个点, 因而它被计算了 π 次, 所以直线的条数 g 等于 $\frac{\gamma p}{\pi}$ 。由此可知, 对于每一构形, 关系式

$$p\gamma = g\pi$$

^① 关于构形的详细叙述可以参考 F. Levi 著 *Geometrische Konfigurationen* (Leipzig, 1929)——著者注。

构形理论新近又有属于代数方面的进一步发展。关于这方面的文献可参考 B. И. Аргунев 的论文: *Конфигурационные постулаты в проективных Плоскостях и их алгебраические эквиваленты*, Вестник Московск. Ун-та, №1, 1948——俄译本编者注。

常成立。

一点和通过这一点的一条直线，形成最简单的构形，它的符号是 (1_11_1) 。比这个构形稍微复杂一点的是三角形 (3_23_2) 。我们在平面上画四条直线，其中没有两条是平行的、也没有三条是共点的。这四条直线定出六个交点 A, B, C, D, E, F (图 104)。如此得到熟悉的完全四边形，它是构形 (6_24_3) 。等式 $6 \cdot 2 = 3 \cdot 4$ 证实了我们一般的公式。这种构形与上面讲的两种简单构形不同：不是构形中所有点的连线都是该构形的直线。同样，在一般的情况下，构形中的直线与直线的交点，也不一定属于该构形。

要想得到在图 104 中的所有各点的连线，还须作三条对角线 AD, BE, CF 。由此又得到三个新点，它们是对角线三角形的顶点 P, Q, R 。可能有人以为，继续连新线和继续加入新交点于此构形，到后来必可得到象三角形一样的构形，即此构形的任二点的连线还是此构形的直线，此构形的任二直线的交点还是此构形的点。但是可以证明，除三角形以外，根本没有象这样的构形存在。

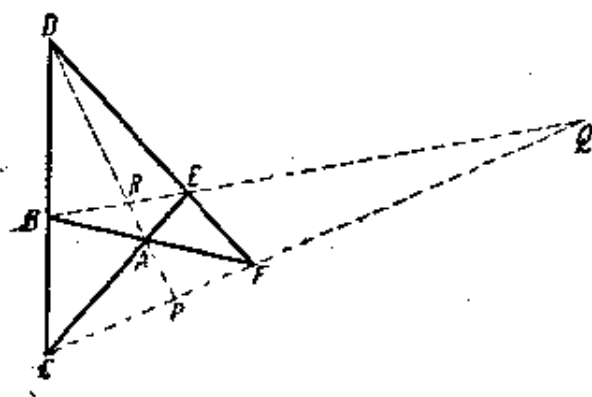


图 104

假定我们从一个四边形出发，无限制地连直线，再把所得的新交点加进来，那么甚至可以证明，最后在平面上每一点的任意邻域内总有象这样的一些交点存在。用这种方法得出来的图形叫做默比斯 (Möbius) 网。这种网可用来规定投影坐标。

为了今后应用起见，我们回忆一下，四边形对于作调和点的意义。一直线上的四点 C, P, F, Q 叫做调和点 (或者说 Q 叫做对 C, P, F 的第四调和点)，如果可作一四边形，而这几个点是由如图 104 中的结合关系决定出来的话。投影几何中有一个简单的基

§ 16. 构形 (7_3) 和构形 (8_3)

欲建立构形 (p_γ) , 当以下法为最简便: 把 p 个点用号码 1 到 p 标出, 同样, 把 p 条直线用号码 (1) 到 (p) 标出。然后作一个有 $p\gamma$ 个点的长方形表, 表内每一列中排着一直线上的 γ 个点; 这样, 对应 p 条直线一共有 p 个列。

据此, 我们得出构形 (7_3) 的表:

$$\begin{array}{c}
 \overbrace{(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)}^p \\
 \gamma \left\{ \begin{array}{ccccccc}
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
 \end{array} \right.
 \end{array}$$

在填这张表时, 必须满足下列三个条件: 第一, 每列的数字都不相同, 不然在一直线上的点数将少于三; 第二, 不许有两列有两个相同的数字, 否则所决定的二直线将重合; 第三, 每个数字一共出现三次, 因为在每一点处有三直线通过。一个表如果可以在几何上实现的话, 这三个条件都是必要的。另一方面, 它们不是充足的, 下面就可以举一些例子。为了一个表能在几何上实现还要进行某些不能直接化归简单算术的几何上或代数上的探讨。但是假如一个表确实代表一个构形的话, 那末我们可以把这张表作几种变换, 而不影响构形的实质, 这指的是, 任一系列中数字的上下次序可以调换; 列与列本身的次序也可以调换, 因为这不过是将直线重新编号而已; 最后, 各点可以随便编号。因为这些变换并不影响构形, 所以我们今后认为所有只相差这几种变换的表是等同的。

从这个观点出发, 我们可以造出一种而且只有一种 (7_3) 的表。先把第一条直线上的三点写作 1, 2, 3。这样通过点 1 的另外两条直线不能再包含 2 和 3 了。把第二条直线上的两个点写作 4,

5, 第三条上的写作 6, 7。于是所有出现的点都编上了号; 这张表到现在为止填写到:

1	1	1
2	4	6
3	5	7

在后面的几列里, 2 和 3 两数必须各出现两次, 而且须在不同的列里出现, 所以第一行可写成:

1	1	1	2	2	3	3
2	4	6
3	5	7

数字 1, 2, 3 用完了, 只有 4, 5, 6, 7 可作填充剩下的八个空位之用。数字 4 还须出现两次; 因为它不得在一个数字底下出现两次, 那末它的位置可以这样安排:

2	2	3	3
4	.	4	.
.	.	.	.

所有其他可能的排列实质上同这一个没有什么区别。再有, 5 也必须出现两次, 但不能再在 4 的底下。因此可以这样放:

2	2	3	3
4	5	4	5
.	.	.	.

其余的四个空位中的前两个必须填上 6 和 7, 因为所有别的数字都用完了, 而且在两个 2 的底下不能填上同一个数字。6 和 7 对调, 不会引起实质上的变化, 所以我们可以写

4	5	4	5
6	7	.	.

最后的两个空位只好先后各以 7, 6 填充了, 所以对于构形(7₉) 实

实际上只能得出一种表：

(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7)

1 1 1 2 2 3 3

2 4 6 4 5 4 5

3 5 7 6 7 7 6

前面我們說過，這張表的存在并不就意味着确有一个构形(7₃)存在。恰恰在这个例子里可以証明构形不存在。这可以用解析几何的方法；找出表中直綫的方程組，当可看出，其中包含矛盾。也可以用图解法說明这个构形的不可能。为此，首先作表中的直綫(1)和(2) (图 106)，按照表上的規定，命它們的交点为1。在直綫(1)上任取二点2和3，在直綫(2)上任取二点4和5。然后作由两对点24和35决定的直綫(4)和(7)，根据我們的表，此二直綫的交点为6。同样，两对点25和34决定直綫(5)和(6)，而(5)，(6)的交点为7。至此构形的所有点都被决定下来。然而我們发现，最后的也是尚未提到的直綫(3)上的三点1, 6, 7現在不在一直綫上了，这样一来，直綫(1)和(7)又决定一个另外的交点6'出来。也許有人以为这是由于最初2, 3, 4, 5等点位置选择得不适当的原故。其实不然，我們認得出这个图形正是图 104 的調和作图的翻版。因而6'是对3, 5, 6三点的第四調和点，所以根据投影几何

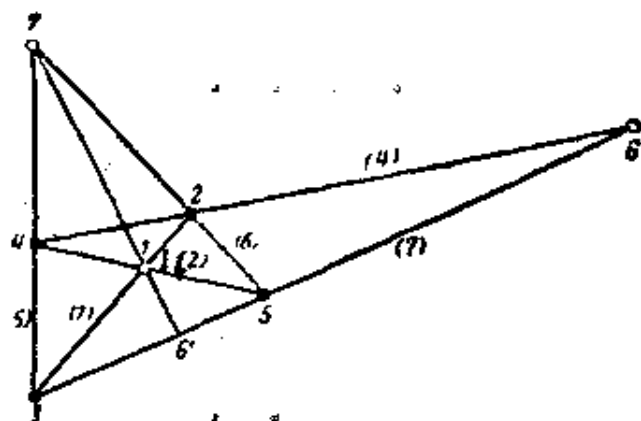


图 106

的初等定理, 6' 不能同这三点中的任一个重合。

现在再来谈构形(8₃)。用同以前一样的方法可以证明, 在这里实质上也只能得出一种表来:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
1	1	1	2	2	3	3	4
2	4	6	3	7	4	5	5
5	8	7	6	8	7	8	6

这个构形可以解释为两个同时相互内接又相互外接的四边形 1234 和 5678 (图 107)。这是说, 直线(12)通过点 5, (23) 通过点 6, (34) 通过点 7, (41) 通过点 8; 同时还有边(56), (67), (78), (85) 分别通过点 4, 1, 2, 3。显然象这样的构形是画不出来的。这个表如用解析方法处理, 可导出这样的方程组, 它不象构形(7₉) 那样包含矛盾, 可是只有复数解而无任何实数解。

虽然如此, 这一构形在几何上并不是没有意义的, 它在没有二重点的三阶平面曲线理论中很重要。这类的曲线一共有九个拐点, 不过其中最多有三个是实的。其次, 可以用代数方法证明, 连接任意两个拐点的直线必通过第三个拐点。其次, 没有四个拐点能在一一直线上, 因为一个三阶曲线不能交一直线于三个

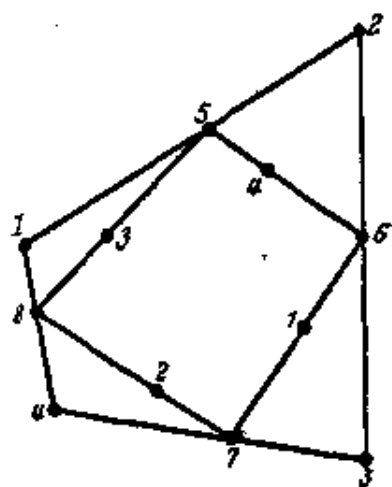


图 107

以上的点。连接诸拐点的直线作成一构形, 此时 $p=9$, $\pi=3$ 。而且, $\gamma=4$; 因为如果取出一个拐点, 则其余的八个拐点必成对地同这个拐点在一一直线上, 因此通过每一点实际上有四条直线。由公式 $g = \frac{p\gamma}{\pi}$, 得 g 等于 12。所以这一构形呈(9₄12₃)的形状。如果要求出这一种构形的表, 而不考虑无关紧要的变换, 也只有一种可能:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
1	1	1	2	2	3	3	4	1	2	5	6
2	4	6	3	7	4	5	5	3	4	7	8
5	8	7	6	8	7	8	6	9	9	9	9

把这个构形中的点 9 和通过它的四条直线 (9), (10), (11), (12) 去掉, 剩下的刚好是我们 (8_3) 的表。完全同样, 构形 (8_3) 可以如此得出: 去掉九个点中任意其他一个及通过此点的四条直线, 因为我们知道, 构形 (9_{12_3}) 的所有点都处于平等地位。

§ 17. 构形 (9_3)

我们知道, 在 $p=7$ 和 $p=8$ 两种情况下每种只得出一个构形表, 而且已经证明这两张表的构形不存在。但是, $p=9$ 的情况可得出三种实质上不同的表, 而且所有这三种都可借用实的点和直线来实现。

这三个构形中最重要的一个, 也可说是几何中最重要的构形, 是所谓布朗香-巴斯加构形 (Brianchon-Pascal configuration)。为简便起见, 我们引用符号 $(9_3)_1$ 代表它。至于 (9_3) 中的其他两个构形, 则用 $(9_3)_2$ 和 $(9_3)_3$ 代表。

构形 $(9_3)_1$ 的表可以写作:

(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)
1	1	1	2	2	3	3	4	5
2	4	6	4	7	6	5	6	7
3	5	7	8	9	8	9	9	8

要想画出这样的构形, 我们先任意取二点例如 8 和 9 (图 108), 通过 8 作任意三条直线 (4), (6), (9), 通过 9 作任意三条直线 (5), (7), (8)。所得的九个交点中, 有六个属于本构形。按照上表, 把这些点标作 2, 3, 4, 5, 6, 7。这六个点决定了其余三直

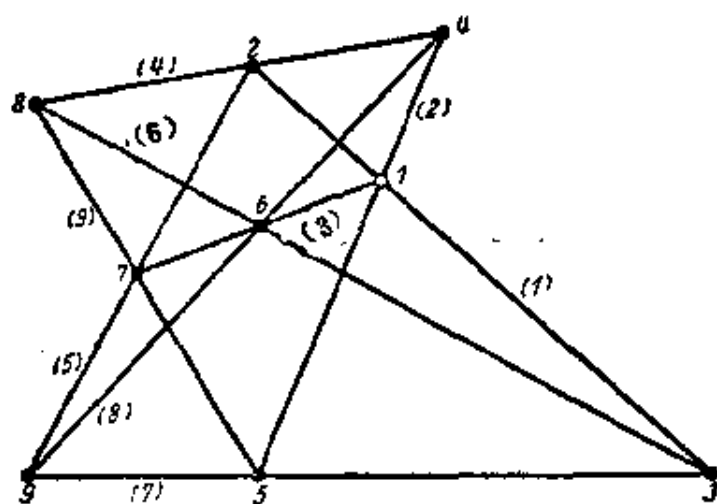


图 108

线(1), (2), (3)的位置。首先通过 2 和 3 作直线(1), 通过 4 和 5 作直线(2)。直线(1), (2)的交点, 查表应标作 1。还有, 尚未提到的由点 6 和 7 决定的直线(3)。这条直线, 按表中的要求, 应该通过 1。我们发现这种结合性是自动成立的, 不论 8 和 9 二点以及通过这二点的直线如何选择。

这一奇妙的现象的几何根据蕴藏在即将研究的布朗香定理中。

让我们从单叶双曲面说起。在第一章中我们曾经讲过, 在这种曲面上有两族直线, 其中一族的任一直线同另一族的任一直线相交, 但同族的二直线不相交。现在我们从一族中取出三直线(图 109 中用双线画的), 从另一族中也取出三直线(用黑线画的)。这六条直线形成空间的六边形 $ABCDEF$ 。为了得到这个图形, 我们先从第一族的一条直线上自 A 走到 B 。通过点 B 有第二族的一条定直线, 沿这条直线走到 C 。自 C 沿第一族的一条直线前进到另一点 D , 再自 D 沿第二族的一条直线走到 E 。最后沿第一族

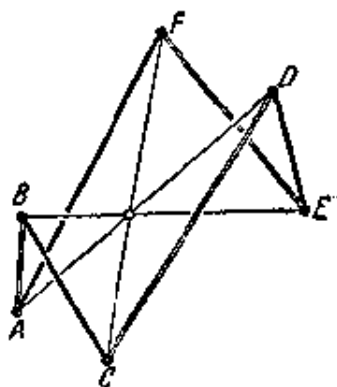


图 109

的一条直线走到一点 F , 而 F 是这条直线与通过 A 的第二族直线的交点。这样, 六边形的诸边交错地属于第一族和第二族。

现在我们要证明这个六边形的三条对角线 AD , BE , CF 交于一点。先说 AD 和 BE 。因为六边形的二边 AB 和 DE 属于曲面上不同的直线族, 它们必相交。因此四点 A, B, D, E 在一个平面上, 从而可知 AD 和 BE 必相交。用完全相同的方法可以证明, 其余两对对角线也都相交。但两两相交的三条直线或者在一平面上, 或者共过一点, 二者必居其一。假定六边形 $ABCDEF$ 的三条对角线在一平面上, 那末这六边形本身也将在这个平面上, 因此, 它们的任何两边必相交; 这是不可能的, 因为举例来说, AB 和 CD 既然是同一族的直线, 就不可能相交。由此可见, 三条对角线实际上共过一点。

从这个空间的几何定理可推出平面几何的布朗香定理。为此, 我们从一点 P 出发来观看单叶双曲面, 此处的 P 点先假定不在此曲面上。从这点所见的双曲面的边缘呈圆锥曲线形, 可以是双曲线(图 110), 也可以是椭圆(图 111)。边缘一侧的区域是空的, 但是另一侧则出现双重复盖的形状。图中所见的两层是沿着作成边缘的圆锥曲线而连在一起的。在曲线上的直线, 一部分可见, 一部

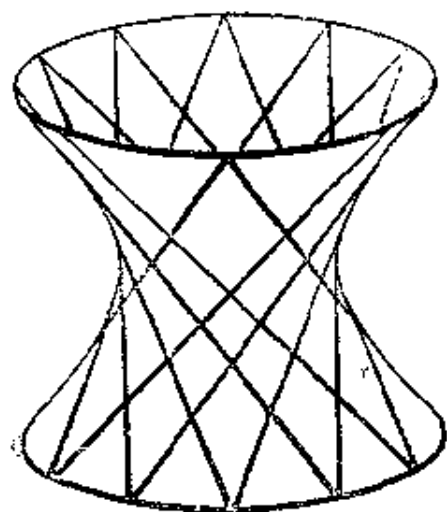


图 110

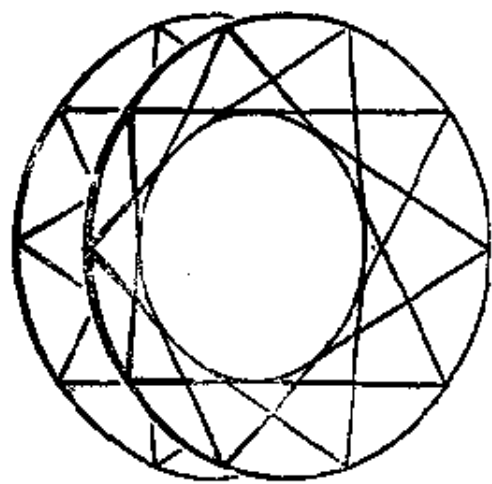


图 111

分被遮盖。所以这些直线从一层穿过另一层时必和边缘相遇。另一方面,这些直线不能与此曲线相交,因为它的一侧是空的。所以这些直线必须是边缘的切线。因此我们的空间六边形变成了平面六边形,它的各边成为圆锥曲线的切线;由此得出平面几何上的定理:

外接于一圆锥曲线的六边形的三条对角线相交于一点。

到此为止,我们仅对于作为单叶双曲面的边缘的圆锥曲线证明了定理,即首先是对于某些双曲线和椭圆把定理加以证明。但是圆锥曲线也可以是抛物线。事实上,产生边缘的视线,形成曲面的以 P 为顶点的切锥面,所以是二阶锥面(参看第 12 页)。如果我们把象平面这样放置,使得它同这个锥面的母线平行,则曲面在这个平面上的象是一抛物线;因为边缘是锥面与象平面的交线,所以在这种情况下圆锥曲线是一抛物线(参看第 12, 13, 8 页)。

我们转到视点 P (投影中心)在曲面上的情形。这时曲面上通过 P 的二直线看起来成了两点,但曲面上其他的直线仍然是直线。因为一族中的每一直线跟另一族中通过 P 的那一条直线相交,第一族的直线看起来成了一线束,线束的顶点是其他一族中通过 P 的直线 g 的象。同样,第二族的直线也成了一线束。两个线束的顶点不同,因为它们各自是通过 P 的二相异直线的象。

据此,由空间六边形定理得到下面的推论:

一个平面六边形,如果它的诸边交错地通过二定点,则三个对角线共过一点。

关于三种圆锥曲线(或退化为一对点的圆锥曲线)的六条切线定理是布朗香发现的,所以叫做布朗香定理。三个对角线的交点,叫做布朗香点。

借助于上述的空间作图,事实上还没有完全证明布朗香定理。因为可能有的布朗香六边形不是从我们讨论过的空间六边形用投

影法得来的。然而确可証明，凡滿足布朗香假設的任何平面六边形，都可以用上述的空間六边形得出。

剛才所說的布朗香定理跟构形 $(9_3)_1$ 有密切关系，而且解釋了为什么 $(9_3)_1$ 的作图中最后一个結合条件自然滿足。事实上，按照图 112 和图 108 上的記法，可知 2, 4, 6, 8, 5, 7 各点作成一個諸边交替通过 8 和 9 两点的六边形。直綫 (1), (2), (3) 是六边形的对綫，因此 (3) 必过 (1) 和 (2) 的交点 1，而且 1 就是六边形的布朗香点。

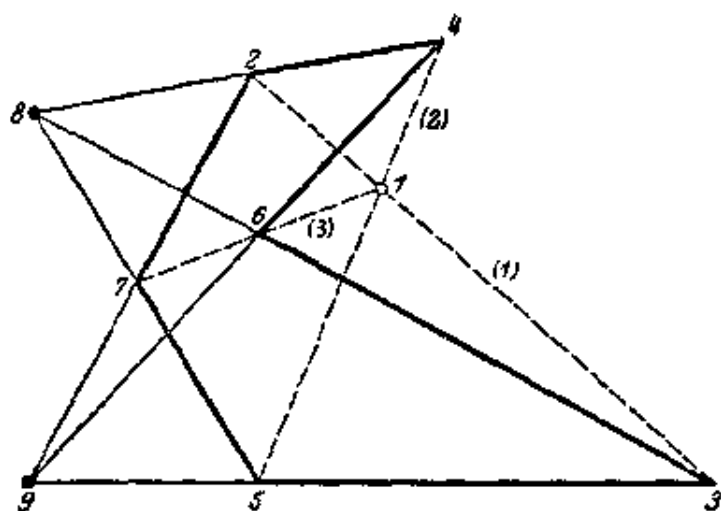


图 112

在我們的作图中，构形 $(9_3)_1$ 各点的地位不是平等的。2, 4, 6, 8, 5, 7 諸点作成六边形，8 和 9 是各有三边通过的两点，1 是布朗香点。这里各点的不对称状态不是由于构形的本性，而是由于我們任意选择的結果。其实也可以把 8 或 9 当作布朗香点；这只要看一看点 8 就够了（见图 113），因为从图 112 上可看出，8 和 9 的地位完全平等。同样，也可以选择 2, 4, 6, 8, 5, 7 中任一点当作布朗香点，因为这几个点都处于平等地位，所以只要証明对点 2 成立即可（见图 114）。

因为有这种內在的对称性， $(9_3)_1$ 就称为正則构形。恰恰象在：

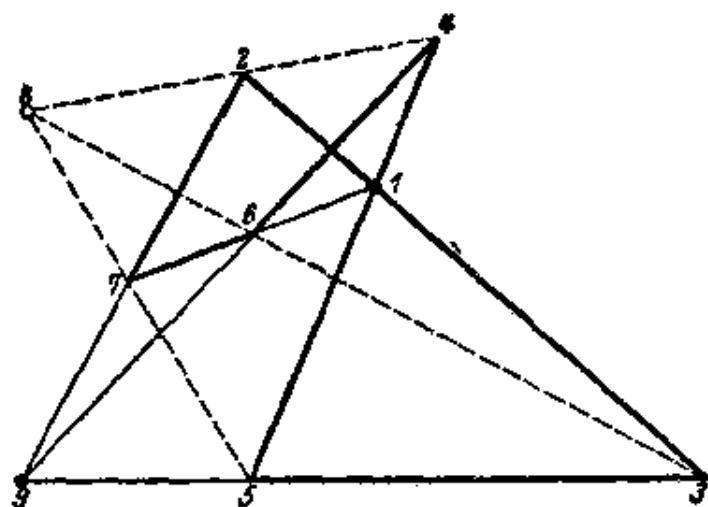


图 113

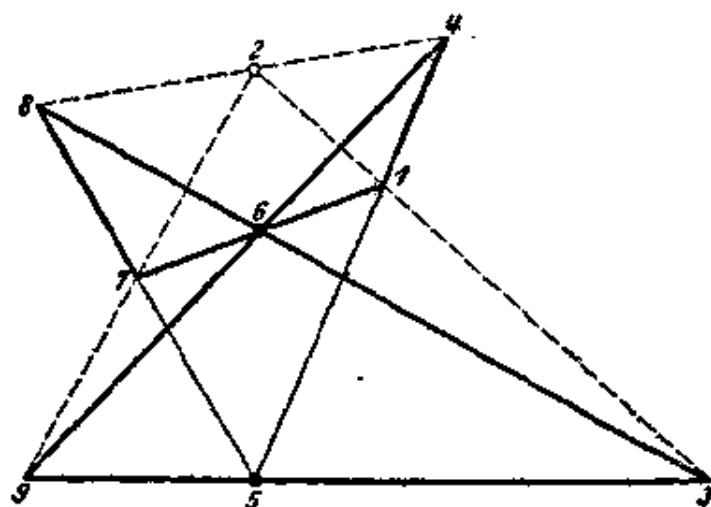


图 114

点系和多面体的研究情形,从构形在自身上的某种变换(即所谓自同构),得到正则的概念。自同构的作用相当于点系和多面体中的迭合变换。如果我们如此交换点和直线,使交换后的构形既没有旧的结合性丢掉,也没有新的结合性加进来,则该变换即是这个构形的一个自同构。不难证明,这些自同构作成一群。我们说,一个构形称为正则的,如果这个群是“可迁的”,也就是说,构形包含足够的变换,使得构形中的任一点,能通过一个自同构转换到构形中的另一点。

要研究构形的自同构，只要抽象地研究构形的表就够了。用这种方法，可以证明，构形 (7_3) 和 (8_3) 的表是正则的。同样，构形 (9_412_3) （第 103 页）的表也是正则的。

现在我们转来看 (9_3) 的另外两种构形。这两种构形分别如图 115 和 116 所示。要知道 (9_3) 的三种构形的区别何在，可以这样去

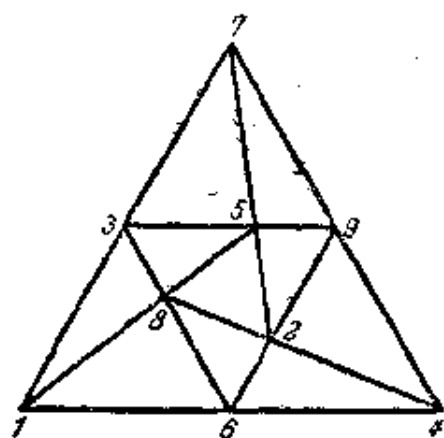


图 115

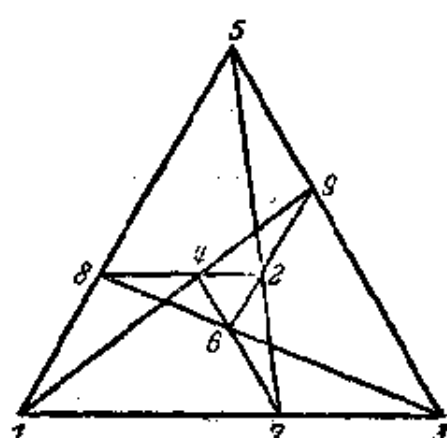


图 116

想：因为在构形 (p_3) 中的每一点恰好同其他六个点以构形的直线相连，所以在 $p=9$ 的情况下，对构形中的每一点应有另外的两个点同这个点不相连。例如，在 $(9_3)_1$ 中，点 8 和 9 同 1 不相连。也没有直线连结 8 和 9，所以 189 形成一个非连通点的三角形。同理，256 和 347 也各形成一个非连通点的三角形（图 117）。把同

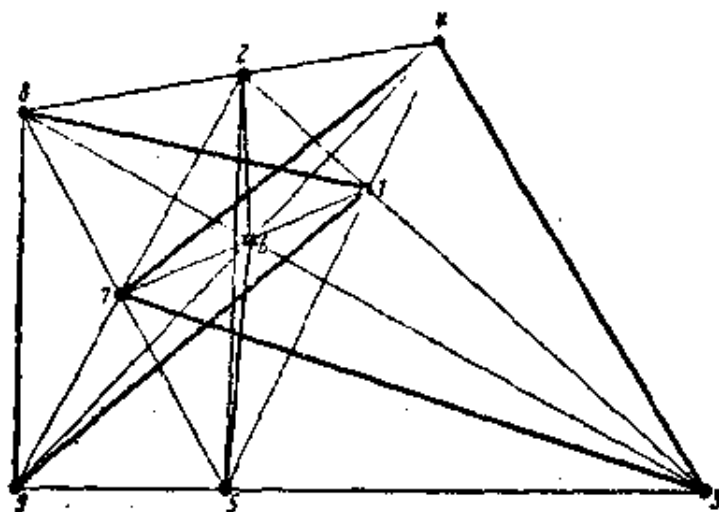


图 117

样的办法应用于 $(9_3)_2$ 和 $(9_3)_3$, 即把非连通的诸点用线段连接以作成多边形, 则在 $(9_3)_2$ 的情况下得一个九边形(图 118), 在 $(9_3)_3$ 的情况下得一个六边形和一个三角形(图 119)。由此可知, 第一, 图 108, 115 和 116 三张图实质上是不同的构形, 不仅是点的位置不同而已。第二, 我们可以断定, $(9_3)_3$ 不是正则的。因为显然自同构只能变换六边形的各点到六边形的各点, 而不能变换到三角形的各点。与此相反, $(9_3)_2$ 的非连通点的有规则的排列, 使我们猜想此构形是正则的; 进一步的研究, 可以证实这句话是对的。

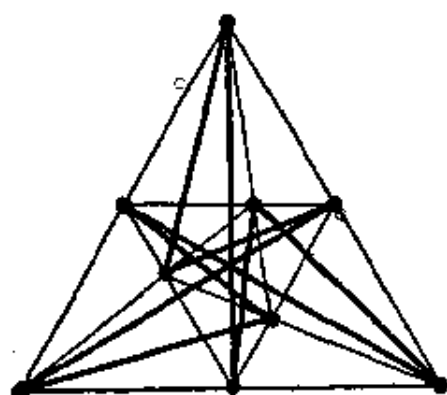


图 118

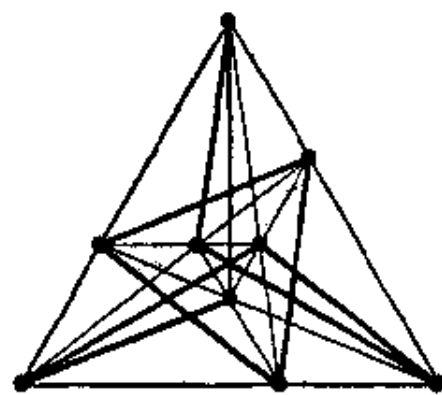


图 119

步步仿照作 $(9_3)_1$ 的方法, 可以作出 (9_3) 的另外两个构形。这时便会发现, 在这两种情况下最后的结合条件不再是自然满足的, 只有在前面的步骤中作好了特别的准备后方能满足。这就解释了为什么 $(9_3)_2$ 和 $(9_3)_3$ 不如 $(9_3)_1$ 那样有原则上的意义。前两种不能给出投影几何的一般定理。图 120 是表示不能作出 $(9_3)_2$ 的最

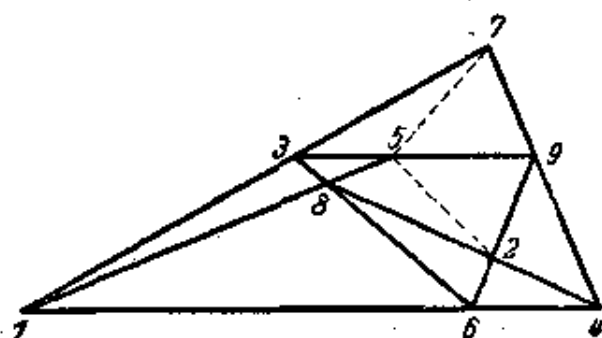


图 120

后一条直线的例子。

不过,使 $(9_3)_3$ 的作图成为可能的必需的辅助作图具有其特殊的性质:只须用一根直尺就可完成。这样, $(9_3)_1$ 和 $(9_3)_3$ 都可只用一根直尺作出^①。解析上,这表示构形的所有元素可以由陆续解一线性方程组来定,其中每一方程的系数是前面几个方程所决定的构形的特征量的有理函数。当然直线的方程总是线性的。但是为了要得出一个构形的方程组,组中某些方程的系数就须从其他若干方程用消元法去计算,因为某些直线是前面已经作出的一些直线固定下来的。一般地,这种消元法常产生高次方程。在 (8_3) 的情形下就是如此,不然我们就不会得出复元素。与此相反,可证明构形 (9_3) 的所有的辅助方程都是线性的。因此三种构形都可在实平面上作出,而且只需一根直尺即可。

构形 (9_3) 中元素的排列可以用好多种方法去解释。例如每种构形都可以当作由三个三角形组成,第一个内接于第二个,第二个内接于第三个,第三个又内接于第一个^②。

这样的三角形组例如图 121 中的 157, 239 和 468; 图 122 中的 258, 369 和 147; 图 123 中的 147, 258 和 369。同样, (8_3) 可以解释作一对相互内外接的四边形(第 103 页图 107)。 (9_3) 的三个构形都可以解释作内外接于自己的九边形。这样的九边形如图 124 中的 2361594872, 图 125 中的 1627384951 和图 126 中的 1473695281。在构形 $(9_3)_1$ 中还可以运用适当的自同构求出许多

① 为了作出 $(9_3)_2$, 须要定出直线和二阶曲线的交点。这个作图不能仅用直尺实现——俄译者注。

② 这里所说的“内接”是指广义的内接。例如在图 121 上, 三角形 468 称为内接于三角形 157, 因为 4 在直线 15 上, 6 在直线 17 上, 8 在直线 75 上, 虽然 4 和 8 不在线段 15 和 75 上而在其延长线上。同样,“外接”也指广义的。三角形 A 叫做“外接”于三角形 B, 如果 B “内接”于 A。内外接三角形这一段注释也适用于下面就要谈到的一般多边形——英译者注。

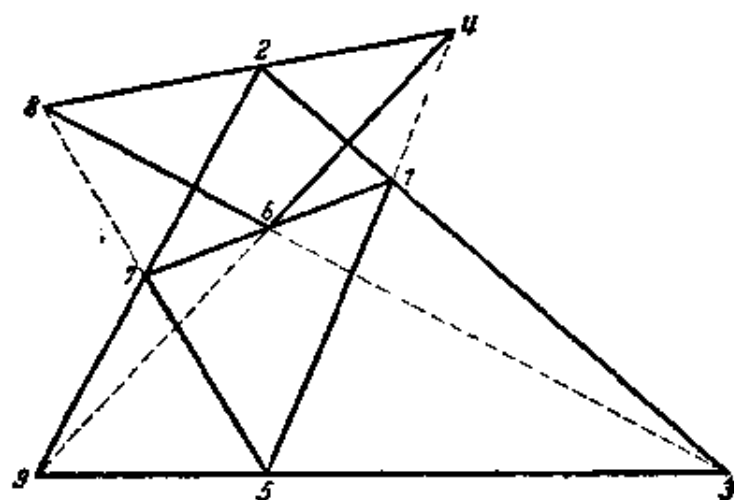


图 121

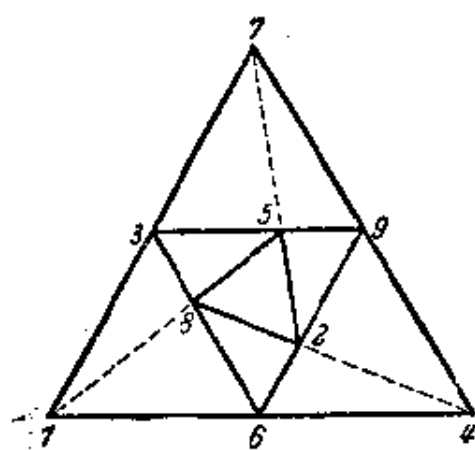


图 122

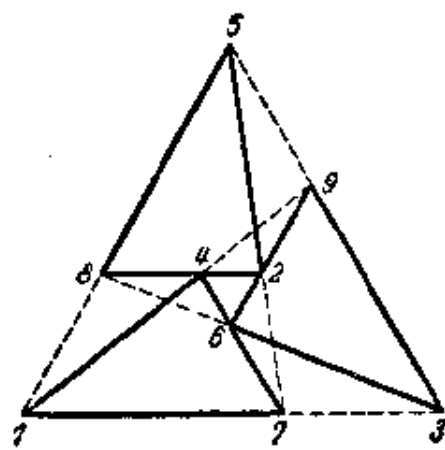


图 123

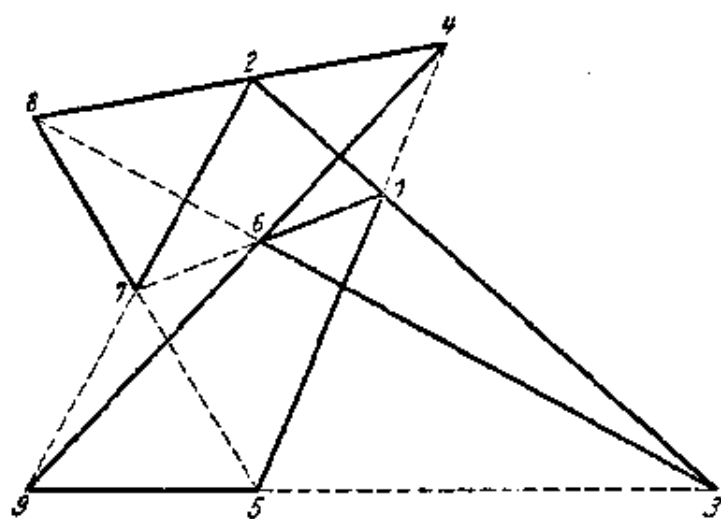


图 124

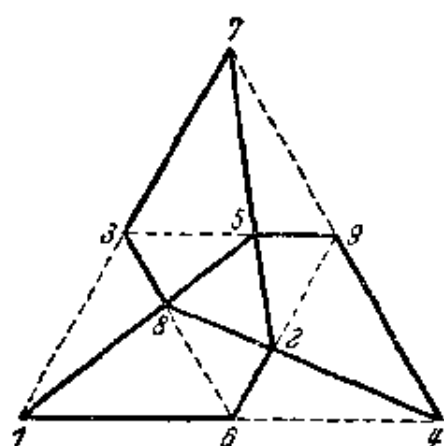


图 125

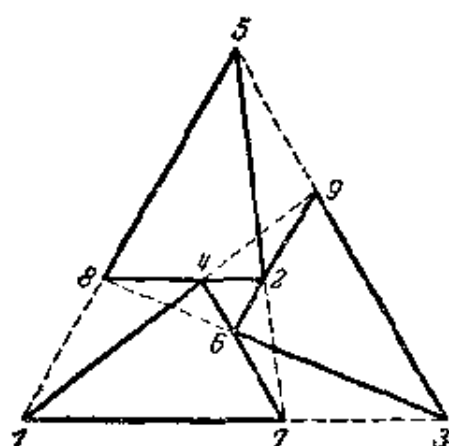


图 126

其他有同样性质的九边形。

内外接于自己的 p 边多边形的作图，必然导致构形 (p_3) 的作图。因为多边形的每一边除通过它所连接的两个顶点之外，还通过多边形的另外一个顶点，同样，每个顶点必在多边形的三边上。在这一句论断里唯一必需的假定是多边形的所有边和角处于平等的地位。倘若不作如此假定，多边形的一边将通过额外的两个或两个以上的顶点，那么多边形的某一个其他的边就不含有顶点。

(7_3) 和 (8_3) 也可以解释作这种类型的 p 边多边形。依构形表的记法，七边形 12457361 和八边形 126534871 都是内外接于自己的多边形。

要了解构形的另外的重要性质，必须研究对偶原理。正是这个原理，使投影几何具有特别的明晰性和对称性。对偶原理可以从推证布朗香定理的过程中所用的投影方法直观地推导出来。

§ 18. 透视画法，无穷远元素和平面上的对偶原理

如果我们把水平平面上的风景画在直立平板上(图 127)，则在水平平面上的象有一条界直线 h ——水平线。在水平平面上不与直立平板平行的两条平行线，它们的象是交于水平线上的两条直线。在透视画法理论里这样的交点叫做平行线的没影点。

这样, 我們知道, 用中心投影得来的平行綫的象, 一般不平行。还可以知道, 这种映象法也不是一对一的。象板水平綫上的各点不代表原来平面上的任何点。反过来, 在平面上也有一些沒有象的点, 这些点便是在观察者 R 的正下方且与象板平行的直綫 f 上的各点(图 127)。

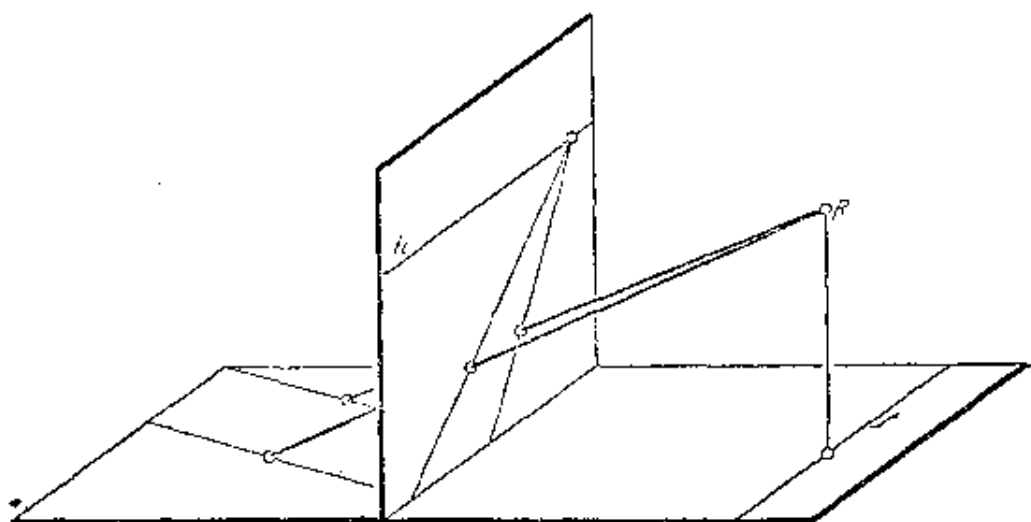


图 127

假若把平面上的每一点换成通过該点的直綫, 就可以更简单地描述上述現象。比方說, 如果把平面 e 上的每一点 P (图 128) 换成直綫 $AP=p$, 其中 A 是观察者眼睛所在的地方, 那么 P 在任意放置的平板 t 上的象是 t 与直綫 p 的交点 P' 。这样一来, P 一經給出, 映象就被确定了。假定 P 在 e 上描繪一曲綫, 則 p 画出

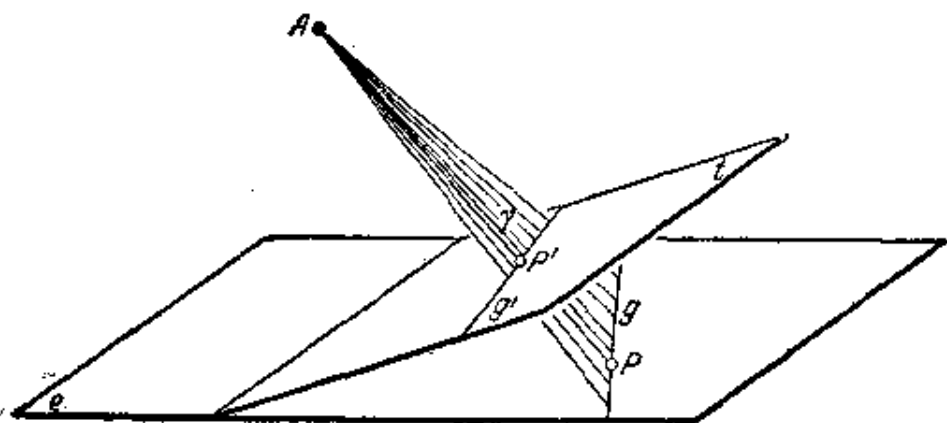


图 128

以 A 为顶点的锥面。曲线在 t 上的象是锥面和 t 的交线。特别地,若 P 在 e 上划过一直线 g , 则锥面就变成包含 A 和 g 的平面 γ 。这样,在 e 上的点换作通过 A 的直线,而 e 上的直线将产生通过 A 的平面。直线 g 在 t 上的象是 γ 和 t 的交线,也就是另一直线 g' 。直线永远变换成直线是中心透视画法的最重要的性质。

上面我们的是将透视映象表为互逆的两步变换的结果。第一步将平面上的点(P)和直线(g)换成通过 A 的直线(p)和平面(γ),第二步将通过 A 的直线和平面换成另一平面(t)上的点(P')和直线(g')。因为这两步相互对称,所以只须考虑第一步即可。

变换 $e \rightarrow A$ 只有在给定的方向上是完全确定的,而在与此相反的方向 $A \rightarrow e$ 上,就不是如此。通过 A 而且平行于 e 的直线,在映象中有特殊的地位,它不对应 e 上的任何一点。但通过 A 的其他任一直线,总对应 e 上的一个确定的点,此即直线与 e 的交点。通过 A 同 e 平行的诸平行线 p_u 布满了通过 A 而且平行于 e 的平面 γ_u (图 129)。 γ_u 在通过 A 的一切平面中也是映象 $A \rightarrow e$ 的特殊情形。因为通过 A 的其他每一平面都对应 e 上的一个确定的直线,即该平面同 e 的交线;但没有与 γ_u 对应的直线,因为 γ_u 同 e 不相交。

这些例外情形最好能在概念上予以消除,办法是假想在平面 e 上加入一些额外的“无穷远”点 P_u 。这些点约定为在映象 $A \rightarrow e$ 之下诸射线 p_u 的象。这些点的集合,就认为是平面 γ_u 的象。为了使这一平面比起其他通过 A 的平面来没有什么特殊,我们必须把 γ_u 的象叫做一直线。于是我们就说平面 e 上的无穷远点构成所谓 e 上的“无穷远直线” g_u ①。平面 e 经过如此补充之后,很明显,从 e 上的点和直线到通过 A 的直线和平面的映象便完全确定而

① “无穷远”一词由这样的事实得来:从人的眼睛到 e 上一点引视线,当此点在一一定的方向上无限远离时,此视线趋近于直线 p_u 中的某一条。

且是一对一的。

用中心透視法将 e 投射到另一平面上, 馬上可以看出上述定义便利之处。对于平面 t , 也象平面 e 一样, 补充以該平面上无穷远直綫上的无穷远点。不过, 除非 e 同 t 平行, 在映象 $A \rightarrow t$ 之下和 t 上的无穷远直綫 l_u 对应的平面不是 γ_u , 而是另一平面 λ 。 λ 同 e 交于一直綫 l 。这样看来, 在透視映象 $e \rightarrow t$ 之下, 第二个平面上的无穷远直綫上的点和第一个平面上的普通点相当。只有引入无穷远点, 才能在中心透視投射之下, 使一平面上的点和直綫与另一平面上的点和直綫成为一对一的映象。在这种映象里, 无穷远点同普通点处于平等地位。

现在来看看究竟如何扩充点和直綫的結合概念以适应新加入的无穷远元素。和前面一样, 仍旧从映象 $e \rightarrow A$ 开始。我們知道, e 上的一个普通点 P 和普通直綫 g 称为結合的, 当且仅当跟它們对应的 p 和 γ 是結合的。把这个推广到 e 上的任意点和任意直綫上去, 就成为, 一个无穷远点 P_u 和一条直綫 g 称为結合的, 如果射綫 p_u 同 γ 結合。这个定义当 γ 同 γ_u 重合时, 也就是說, 当 g 是 e 上的无穷远直綫时, 沒有告訴我們什么新的东西; 但当 g 是一条普通的直綫, 則 γ 与 γ_u 交于一条定直綫 p_u 。由此可見, 每一通常的直綫恰有一个无穷远点, 即該直綫同 g_u 的交点。如果 g' 同 g 平行, 那么这就是說, 包含 g' 的平面 γ' 通过 p_u (图 129)。因此我們可以說, 当且仅当二直綫有相同的无穷远点, 二直綫才是平行的。这也就是尋常所說的“平行綫相交于无穷远点”的意思, 这句话如不加解釋本是沒有意义的。从这里我們还明白了在本章开始所提

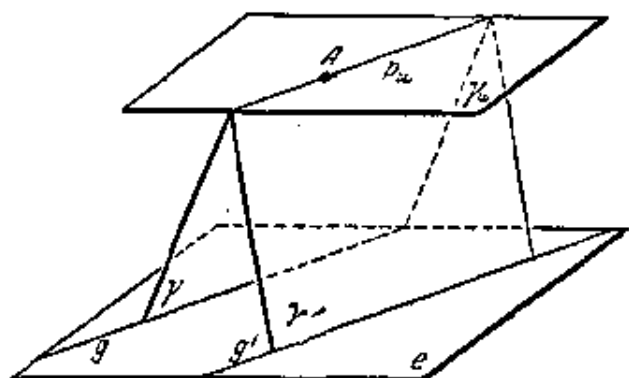


图 129

到的二平行綫在水平綫上出現交点的理由。

下面我們举圓錐曲綫为例, 來說明引入无穷远元素后几何概念如何簡化了。我們在第一章中証明过, 圓錐曲綫可以作为平面与圓錐面的交綫, 所以它們都可以看作圓的透視象。按照沒有投射綫或有一条射綫或两条射綫平行于象平面, 便分別得出橢圓或拋物綫或双曲綫。这句话也可以这样說: 圓錐曲綫是一橢圓或是一拋物綫或是一双曲綫, 按該曲綫与无穷远直綫不相交或是交于一点或两点而定。作中心投影于另一平面上, 則圓錐曲綫变为另一圓錐曲綫, 它或者与水平綫不相交, 或者相切, 或者交于两点, 三者必居其一。究竟象是哪一种的圓錐曲綫, 須看象平面的位置如何。

在其他例子中, 中心投影也是从特殊图形得到一般图形的重要工具。例如, 完全四边形(第 98 頁)可以从图 130 上的簡單图形得到。

可是无穷远元素的重要性主要还在于: 引用了无穷远元素就

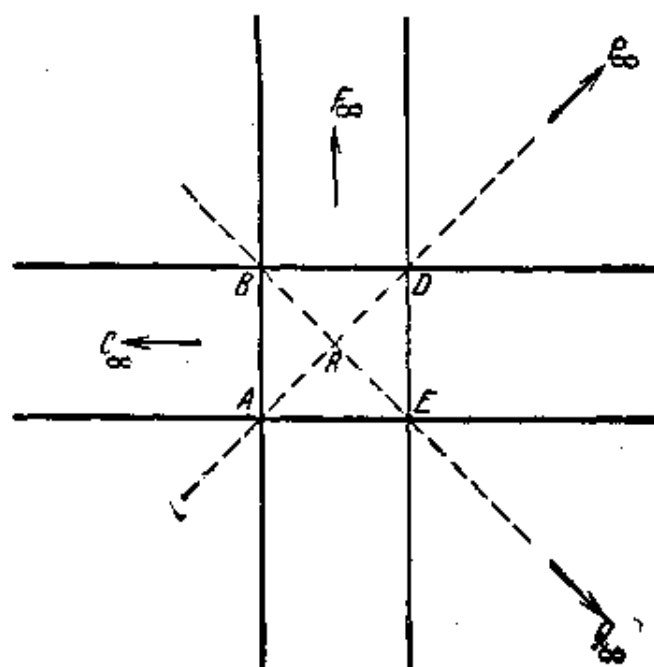


图 130

能改变并大大简化平面几何的公理基础。如果只限于平面上的有限点, 点和直线的结合关系适合下面两个公理:

1. 二不同点决定一条直线, 此二点与此直线结合。
2. 二不同点只决定一条直线, 此二点与此直线结合。

从第二个公理可知, 在一平面上的二直线或者有一交点或者没有交点。因为, 假定它们有两个或两个以上的交点, 则二直线将合而为一。

二直线没有交点的情形由欧几里得平行公理保证并解释之:

假设在一平面上有任一直线 a 和与 a 结合的任一点 A , 则在該平面上通过 A 有一且只有一直线 b 不与 a 相交。直线 b 叫做通过 A 的 a 的平行线。

如果现在在普通点之外再加入无穷远直线, 使平面扩充为“投影平面”, 则上面的三个公理可用下面的两个来代替:

1. 二不同点决定一条且只一条直线。
2. 二不同直线决定一个且只一个点。

这两个公理确立点和直线的结合关系。无穷远点和无穷远直线在这里跟其他的点和直线并无区别。如果我们希望以具体的结构来表示投影平面, 使点和直线的平等地位得以直观地看出来的话, 我们可以回头去看通过一定点的直线把和平面把, 同时把直线当作“点”看, 平面当作“直线”看。在这个模型里, 上述二公理的真实性容易证实。

在这一对公理中如将“直线”和“点”二词对调, 公理的形式仍旧不变。进一步研究, 可知平面投影几何的其余公理, 在二词互换之后, 公理系统的内容也不变。因此这二词在从这些公理推出来的一切定理中必然都可交换位置。点和直线的这种可交换性称为投影平面的对偶原理。依照这个原理, 每一定理应有其对偶对应的另外一个定理, 每一图形应有其对偶对应的另外一个图形。在对

偶关系之下,曲綫上各点对应这样的直綫的集合,它們一般地是包絡另外一个曲綫的切綫。更进一步研究,可知跟一圓錐曲綫上各点成对偶对应的直綫族,永远包絡某一圓錐曲綫。

根据对偶原理,可以从布朗香定理推导出一系列的其他定理,这些定理因为是巴斯加发现的,所以叫做巴斯加定理。为了清楚地显示出这两組定理的对偶关系,現以对照方式写出。

布 朗 香 定 理

1, 2, 3. 設有由切于一圓錐曲綫的六条直綫作成的六边形(六边形外接于一圓錐曲綫)。則三組对頂点的連綫共点。

4. 設已知六条直綫中,三条与点 A 結合,另三条与点 B 結合。取六个交点,使它們和适当的連綫作成一六边形,而六边形的边交替通过 A 和 B 。則对頂点的連綫共点(六边形的布朗香点)。

巴 斯 加 定 理

1, 2, 3. 設有由在一圓錐曲綫上的六个点作成的六边形(六边形內接于一圓錐曲綫)。則三組对边的交点共綫。

4. 設已知六个点中,三个与直綫 a 結合,另三个与直綫 b 結合。取六条連綫,使它們和适当的交点作成一六边形,而六边形的頂点交替在 a 和 b 上。則对边的交点共綫(六边形的巴斯加綫)。

显然与最末一个巴斯加定理对应的图形一定是构形 $(\theta_3)_1$ 的对偶图形。一般地,构形 $(p_\gamma g_\pi)$ 的对偶图形是另一构形,其类型为 $(g_\pi p_\gamma)$ 。我們曾用符号 (p_γ) 表示过的那些特殊构形,而且只有这样的构形才有同类型的对偶构形。可能有人想到,巴斯加定理的构形[也就是 $(\theta_3)_1$ 的对偶构形]可能是 (θ_3) 的其他二构形之一。但是,可以証明,巴斯加定理也是用符号 $(\theta_3)_1$ 代表的(图 131)。这就是为什么我們从前把这一构形叫做布朗香-巴斯加构形的原故。这样說来, $(\theta_3)_1$ 是“对偶不变的”(自对偶)。正象布朗香点可以随意选择一样,我們也可以随意选择构形的任何直綫作为巴斯

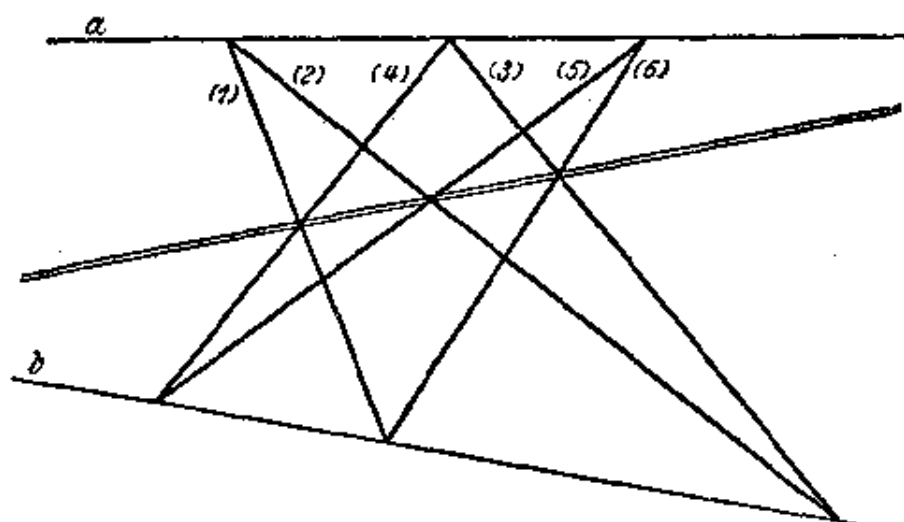


图 131

加綫。

应用无穷远元素我們可以导出上述巴斯加定理的一种特别情形, 这种特别情形如不借助于新概念, 似乎与原定理毫不相干。这是說: 將巴斯加綫移到无穷远, 就得到下面的定理(图 132): 如果六边形的頂点相間地在二直綫上, 而且如果有兩对对边分別平行, 則第三对对边也必平行。

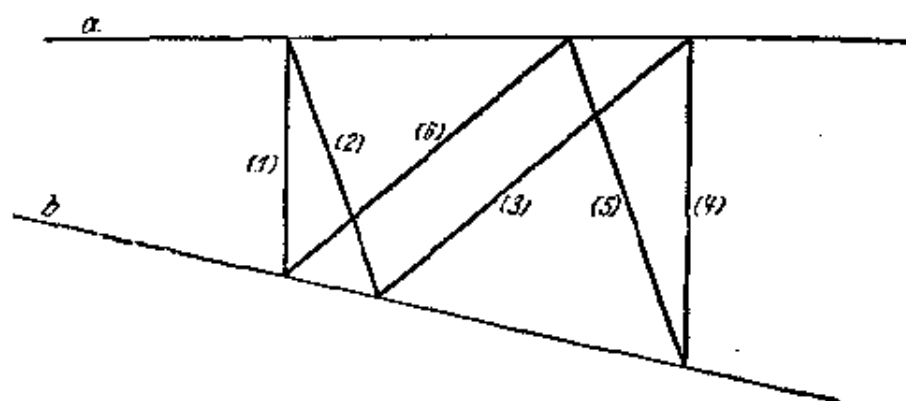


图 132

这个巴斯加定理的特别情形叫做巴巴斯(Pappus)定理。

既然知道了 $(\theta_3)_1$ 是对偶不变的, 就容易知道 $(\theta_3)_2$ 和 $(\theta_3)_3$ 也是对偶不变的。因为, 如果不然, 則应用对偶原理于构形 $(\theta_3)_2$, 它的唯一可能的对偶构形就是 $(\theta_3)_3$ 。但是因为 $(\theta_3)_2$ 是正则的, 而

$(9_3)_3$ 不是, 由此可見此二构形不能互为对偶。

現在我們来談构形 (10_3) 。要想了解这类构形中最重要的一個, 即德沙格 (Desargues) 构形, 必須將引进的平面向无穷远元素和对偶原理推广到空間里去。

§ 19. 无穷远元素和空間的对偶原理。

德沙格定理和德沙格构形 (10_3)

上一节我們讲了由空間的投影得到投影平面的概念。投影几何在空間中添加无穷远元素, 將空間变为“投影空間”。投影空間在許多方面显得更简单些。但是現在我們所用的办法不是直观的, 而是完全抽象的。首先, 我們根据以前讲过的原理, 在普通空間的所有平面上引进无穷远元素。于是自然就会想到, 假定一切无穷远点和无穷远直綫都在一平面上, 即所謂空間的无穷远平面上。无穷远平面具有与普通空間的平面相同的性質, 这是說: 任何普通平面与无穷远平面交于一直綫, 即普通平面上的无穷远直綫; 任何普通直綫与无穷远平面只有一公共无穷远点, 好象一普通直綫与不含此直綫的普通平面只有一公共点一样。此外, 二平面当且仅当有相同的无穷远直綫时才平行^①。

有了这个观点, 空間几何中的許多現象皆可化簡。比如, 平行投影可以看作中心投影的特殊情形, 此时投影中心是一无穷远点。再比如, 单叶双曲面和双曲抛物面的区别可以这样描写: 单叶双曲面与无穷远平面交于一非退化的圓錐曲綫, 双曲抛物面則与无穷远平面交于曲面的一对母綫。这种区别与在第 15 頁上所說的是一回事, 在那里是說, 三条斜直綫在双曲抛物面上而不在单叶双曲面上, 当且仅当它們平行于一个定平面的时候。事实上, 这

^① 因为二平面平行的性質和它們有公共的无穷远直綫的性質, 都等价于对一平面上的每一直綫可在另一平面上作一平行綫的性質。

就是說,三条直綫和同一条无穷远直綫相交,因此这无穷远直綫必在該曲面上,因为曲面与这无穷远直綫已有三个交点。

在投影空間里,显然應該把所有的平面都看成投影平面,唯有这样,平面的对偶原理才能对所有平面都成立。虽然如此,作为一整体的空間也有与平面不同的对偶原理。

为了获得空間的对偶原理,我們也要象在平面上的情形那样,列出一組公理表,以决定投影空間中点、直綫和平面的結合关系,同时不区别普通元素与无穷远元素。这些公理可以写成:

1. 二平面决定一条且只一条直綫;不过同一直綫的三平面决定一个且只一个点。
2. 二相交直綫决定一个且只一个点,决定一个且只一个平面。
3. 二点决定一条且只一条直綫;不在一直綫上的三点决定一个且只一个平面。

若将点和平面二名詞对調,这組公理仍旧不变(这时第一个公理同第三个公理对調,第二个不变)。空間投影几何中的其余公理通过这样的对調也仍旧不变。这样,点和平面互成对偶,直綫自成对偶。曲面上所有点与另一曲面上的所有切平面互成对偶。空間的二阶曲面自成对偶,这种情形正好与平面的圓錐曲綫的情形类似。

最簡單的同时也是最重要的空間投影几何定理乃是所謂德沙格定理。德沙格定理这样說(图 133):

設給定了空間两三角形 ABC 和 $A'B'C'$, 这两三角形如此配置,使它們相当的頂点的連綫通过一点 O 。則三对相当边交于三点 R, S, T , 而且这三个交点在一直綫上。

定理的第一部分不难証明:根据空間第二公理,二相交直綫 AA' 和 BB' 决定一平面。直綫 AB 和 $A'B'$ 当然在这个平面上,所

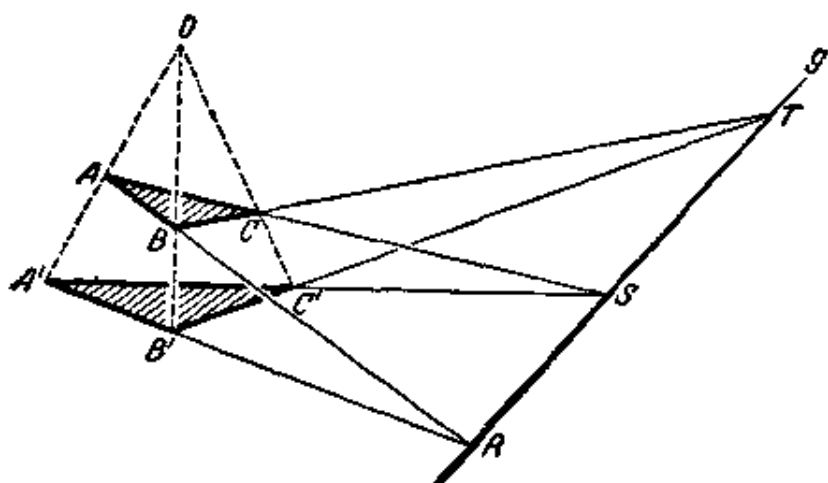


图 133

以根据平面的结合公理，这二直线有一交点 R (R 可以是普通点，也可以是无穷远点)。另外二交点 S 和 T 的存在，证明相仿。

定理的第二部分在两三角形不共面的情形下也极易证明。此时两三角形所在的二平面决定一直线——普通的或无穷远的——（根据空间第一公理）。两三角形的每对相当边中之一在一平面上，另一边在另一平面上。因为我们已经知道每对相当边交于一点，所以这一点一定在这二平面的交线上。这就证明了德沙格定理的一般情形。

非常重要的倒是两三角形共面的特殊情形。对这种情形的证明可以应用如同证明布朗香定理一样的方法，即把空间图形投影到平面上。我们只须证明，每一平面德沙格图形是一空间德沙格图形的投影就行了。为了这个目的，将平面德沙格图形的所有点和直线与图形平面外一点 S 联结起来（图 134）。经过直线 AO 作一平面交 BS 于不同于 S 的一点 B_0 ，引直线 OB_0 。直线 OB_0 和 $B'S$ 在一平面上，因而有一交点 B'_0 。现在，三角形 AB_0C 和 $A'B'_0C'$ 作成一空间德沙格图形，因为联结相当顶点的直线通过 O 。把这两三角形的二平面的交线由 S 投射到原来的平面上，便得到原来三角形 ABC 和 $A'B'C'$ 三对相当边的交点所在的直线。德沙格定理证明完毕。

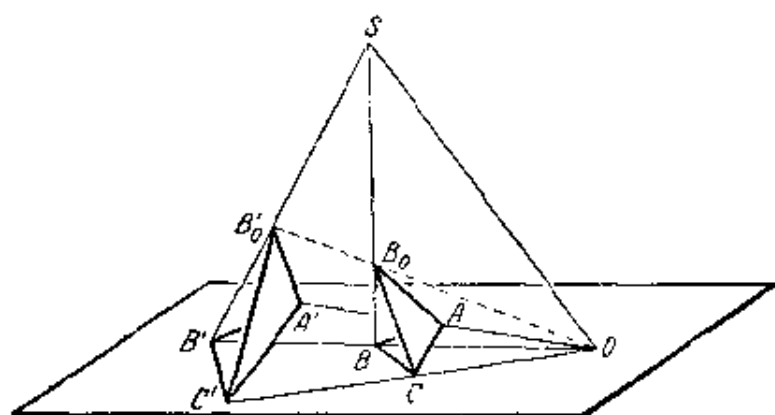


图 134

由平面对偶原理和空間对偶原理都可以导出德沙格定理有趣的推論。首先容易知道,德沙格定理的逆命题也对,即从德沙格直綫(包含两三角形三对相当边的交点)的存在可推出德沙格点(三对相当顶点的連綫都通过它)的存在。在两三角形共面的情况下,德沙格定理逆命题其实也就是应用平面对偶原理于德沙格定理所得的結果。为了說明这一点,今将二定理对照写出如下:

設給定了三对点 AA', BB', CC' , 而且三对点的連綫共点, 則三对直綫 AB 和 $A'B'$, BC 和 $B'C'$, CA 和 $C'A'$ 的交点共綫。

設給定了三对直綫 aa', bb', cc' , 而且三对直綫的交点共綫, 則三对点 (ab) 和 $(a'b')$, (bc) 和 $(b'c')$, (ca) 和 $(c'a')$ 的連綫共点。

現在我們来考察由两个共面的德沙格三角形的顶点和边, 連同三对相当顶点的連綫, 三对相当边的交点, 德沙格点 O 和德沙格綫 g 所組成的图形(图 135)。数一数, 就知道这个图形是(10₃)型的构形, 它叫做德沙格构形。它与巴斯加构形有相同的性質, 就是当图形順序作出时最后的結合关系自然滿足。其次, 德沙格构形也象巴斯加构形一样, 是自对偶的。这因为构形既代表德沙格定理又代表它的逆定理, 而后者恰是前者的对偶。

下面我們来看看, 应用空間对偶原理于空間德沙格定理的情

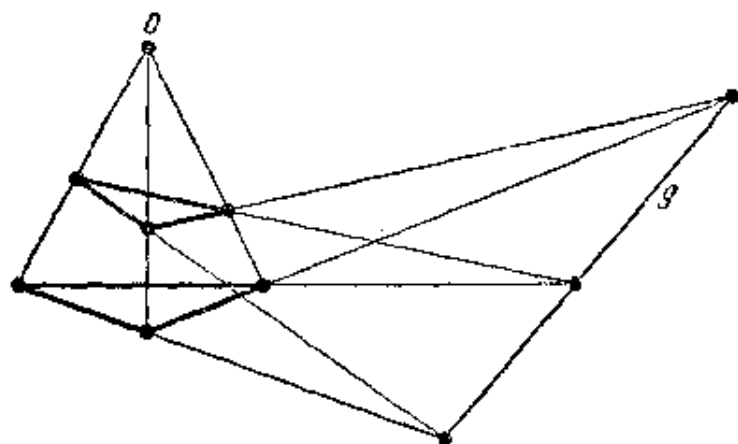


图 135

形。有下列对照的条文：

設給定了三对点 AA' , BB' , CC' , 而且三对点的連線共点。則三对直綫 AB 和 $A'B'$, BC 和 $B'C'$, CA 和 $C'A'$ 决定的三交点共綫。

設給定了三对平面 $\alpha\alpha'$, $\beta\beta'$, $\gamma\gamma'$, 而且三对平面的交綫共面。則三对直綫 $(\alpha\beta)$ 和 $(\alpha'\beta')$, $(\beta\gamma)$ 和 $(\beta'\gamma')$, $(\gamma\alpha)$ 和 $(\gamma'\alpha')$ 决定的三平面共綫。

图 136 說明右面的定理。在这个定理中两三角形代以由平面 α, β, γ 和 α', β', γ' 作成的两三面角。与平面的情形相当, 我們現在考虑由二德沙格三面形, 連同由三对对应棱决定的平面, 三对对应面的交綫, “德沙格平面”(图 136 中的 $\alpha\alpha', \beta\beta', \gamma\gamma'$) 和“德沙格綫”(图中的 VW) 組成的图形。

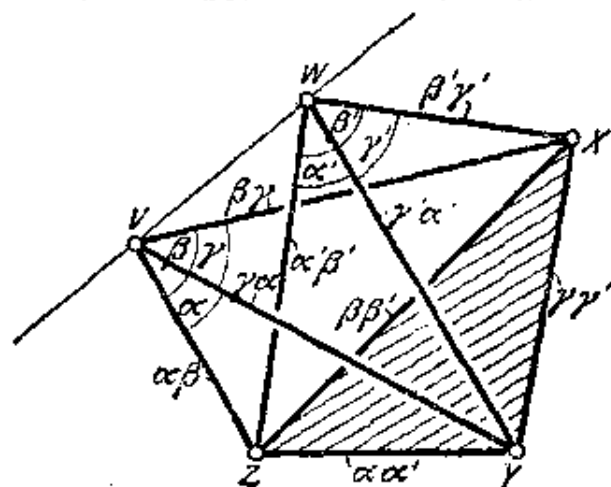


图 136

这个空間的图形与任一不包含 V, W, X, Y, Z 各点的平面的交綫是平面德沙格构形, 因为德沙格三面形与平面交于德沙格三角形。空間图形的平面和直綫对应于平面

构形的直线和点。但是,空间图形有一个内在的对称性,未在平面图形中得到反映:空间图形是由五点 V, W, X, Y, Z 所决定的所有的连线及平面作成的,并且五点所处的地位完全平等。反过来,每一空间完全五点形都可以变为空间德沙格图形,只要任意选择其中的两点作为德沙格三面形的顶点^①。由于空间图形所有直线和所有平面的地位平等,所以平面德沙格构形的点和直线也是如此。这就证明了德沙格构形是正则的,因而在构形中德沙格点或德沙格直线可以任意选择^②。

现在我们把德沙格构形表为互作内外接的两个五边形。为了这个目的,第一步要看在构形中是否可找出一个五边形,使五边形的顶点和边是构形的元素,而且没有三个相继的顶点在一直线上。这个问题如果回到空间的五点形上去,就可简化许多。平面多边形的顶点对应空间五点形的棱。由于平面多边形每两个相继的顶点必在构形的一直线上,所以对应的棱必在一平面上,因此一定相交。要使三个相继的顶点不在一直线上,只须避免对应的棱在一平面上;而这种情形当且仅当三个相继的棱作成三角形的時候发生。若按任何次序走过空间五点形的顶点 V, W, X, Y, Z , 比方说,就按方才写的次序,则得到我们所要求的闭棱折线,它给出我们所要求的平面构形的一个五边形。但是空间五点形的棱还有没有用过的,它们作成另一个同类的空间多边形。因为,空间五

① 这里,只要求五点是一般位置的情形,也就是其中没有四个点共面的,因此也就没有三个点是共线的。

② 空间的完全 n 点形,指连接空间处于一般位置的 n 个点的直线和平面所组成的图形。也象 $n=5$ 那样,对于任意的 n , 完全 n 点形由不通过此形任何顶点的平面截出来的图形是一构形。这样的构形是正则的。它们的类型为 $p = \frac{n(n-1)}{2}$, $\gamma = n-2$, $g = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$, $\pi = 3$ 。由此可知,当 $p = g$ 时只得出一种特殊类型的构形,即 $n=5$ 的情形。其他正则的构形可以在高维空间里用处在一般位置的 n 个点得到。这些构形都叫做“多面的”。

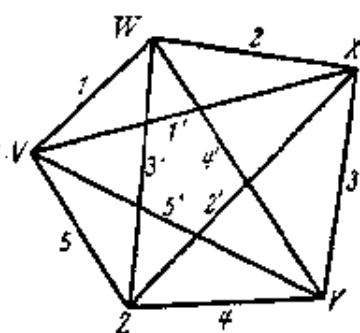


图 137a

边形每一顶点一共与四个棱相结合，其中的两个已在第一次的路綫中用过，所以通过空間五边形的每一顶点有两个未用过的棱。第二个棱折綫对应构形的第二个五边形。稍加思索，可知第二个五边形必内接于第一个五边形。由于对

称关系，第一个也内接于第二个。在图 137 a, b 上表示空間体系和两个平面五边形的关系。

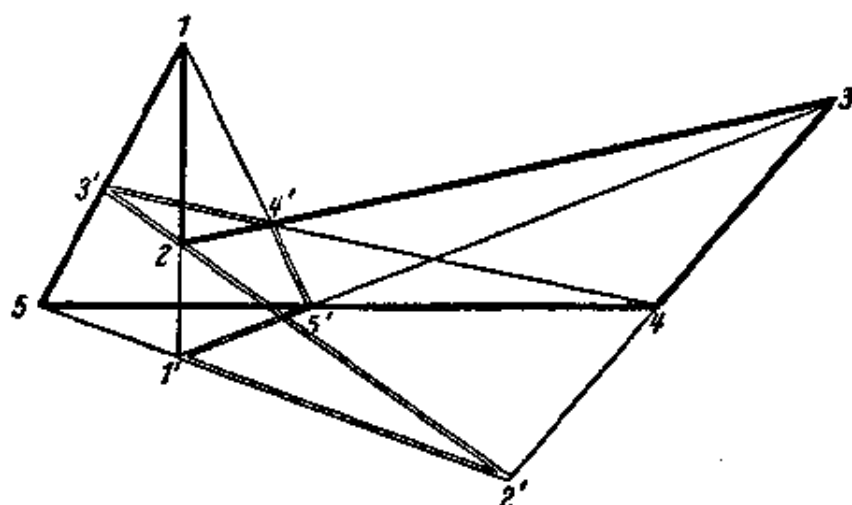


图 137b

我們也可以在空間五边形中找出和平面构形中的五边形对应的其他类型的五棱体系。图 138 是一例。但是可以验证，不能把其他五个棱作輪換排列，使任意两个連續的棱有一公共点，而且沒有三个連續的棱作成一三角形。因此起初給出的作图已經竭尽了一切可能的情形。因为顶点的每种排列对应于图形的一个自同构，又因为空間五边形之分为两个閉棱折綫完全由第一次路綫的頂点次序决定，所以我們知道，若不計自同构，德沙格构形只能分成

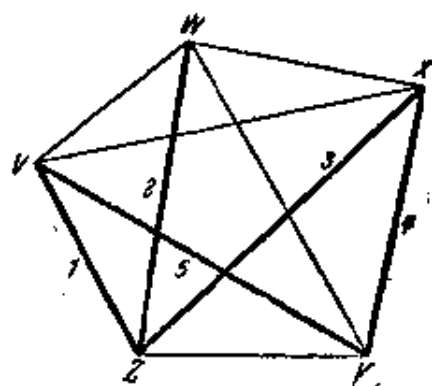


图 138

一种相互内接的两个五边形。

是否德沙格构形可以看作内外接于自己的十边形呢,而且有多少种这样的十边形呢?这个问题也可以用相同的方法解决。不难证实,对应这样十边形的空间棱折线的排列一定有如图 139 的形状。因此,

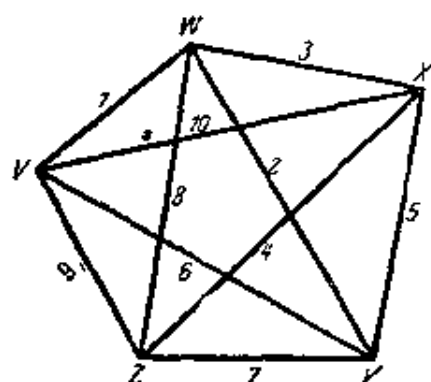


图 139

必有一种方法将德沙格构形解释为内外接于自己的十边形;而且除自同构不计外,只有一种方法(图 140)。从图 140 可以发现一种规律:如果我们沿着十边形的各边依次从点 1 走到点 2, 从点 2 走到点 3 等等,那么每边上要漏掉一个顶点,而所漏掉的顶点的号码作成一個序列,序列中相邻二号码交错地相差 1 和 3 (例如在边 23 上漏掉 5, 34 边上漏掉 8, 45 边上漏掉 7, 56 边上漏掉 10, 等等)。在这空间体系中还可以发现这种十边形的另一种性质,就是十边形的各边交错属于两个相互内接五边形的边。

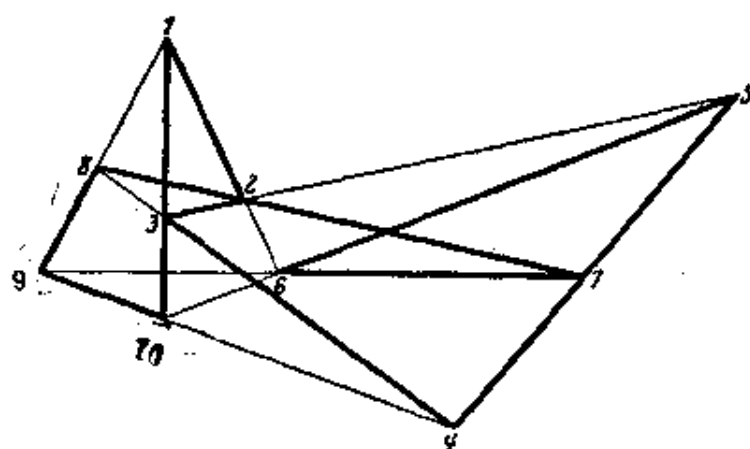


图 140

德沙格构形不是构形 (10_3) 中的唯一构形,此外还有其他九种可能的表,其中有一个既不能在实平面上实现,也不能在复数平面上实现,因为构形的方程组不相容,这一点跟 (7_3) 的表的性质相

同。与此相反, (10_3) 的其余八个构形却与构形 (9_3) 相仿, 即都可以用直尺作出。但是跟德沙格构形又有不同, 它們最后的結合条件不是自然满足的。由此可知这八个构形不能表示一个几何定理, 因而不象德沙格构形那样重要。图 141 表示八个构形之一。如各点順次

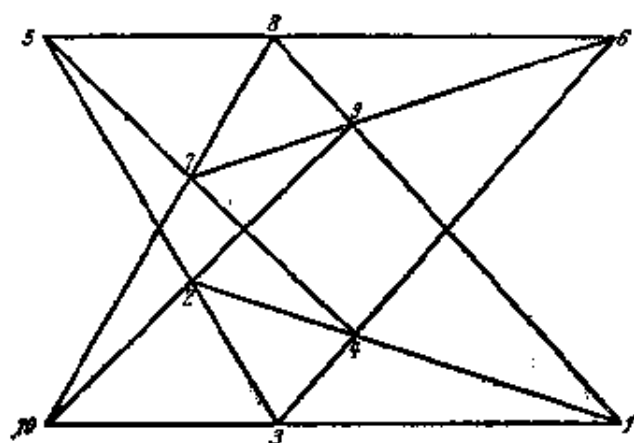


图 141

如图所示, 則这一构形也可以表为相互内外接于自己的十边形, 不过这里两个相邻的漏掉的頂点的号码的差总是 1。在这样安排时, 所有的頂点都处于平等地位, 同时边可以和頂点互換。由此可见, 这个构形是正則的, 同时也是自对偶的。

§ 20. 巴斯加定理和德沙格定理的比較

前面我們看到了最后一个巴斯加定理和德沙格定理有許多相似的地方。这两个定理都是借用空間图形的投影来証明。这两个定理都产生构形, 而且是十分相象的构形: 它們都是正則的, 自对偶的, 都能只用直尺作出, 最后的結合条件是自然满足的, 都可以表为内外接于自己的多边形。

虽然如此, 这两个定理也还有原則上的区别。我們用以証明德沙格定理的空間图形, 只要根据空間的結合公理而不須假定其他另外的公理即可作出。然而布朗香-巴斯加构形却是另一回事, 它是由考察二阶曲面得来的。驟然看来, 似乎証明的核心不过是考虑空間六边形的点、直綫和平面之間的結合关系, 但經仔細研究, 就可知道这样的空間六边形的作图实質上等于作一个二阶直紋曲面, 这种作图的可能性不能单靠結合公理証明。

在第一章里，我們曾以度量为依据引进二阶曲綫和二阶曲面。或許有人因此便揣測巴斯加定理不依靠长度和角的比較便不能証明。但是二阶曲綫和二阶直紋曲面也可以不用度量方法而只用投影方法产生。这种方法，可使已知直綫上的点如此映射成其他任一直綫上的点：在第一直綫上的任意已知三点可搬到第二直綫上的任意已知三点，而且第一直綫上的調和点变为第二直綫上的調和点。这样我們就說，第一直綫投影映射到第二直綫上。这种映象的作图只需要平面和空間的結合公理就够了。但是要想根据二已知条件——調和点变为調和点而且某三点的映象可以任意給定——来証明对于直綫上的所有的点，映象是唯一决定的，这些公理就不够了。为了这个目的，我們須用一个下面就要表述的連續公理。不过投影的唯一性在上述意义下一經証明，則最一般的二阶直紋曲面就可規定为一条动直綫扫过的曲面，而此直綫是連結形成投影关系的两条固定的斜直綫上的相当点。从投影映象的唯一性可知还有第二族直綫也在如此規定的曲面上。如果成投影关系的二直綫不是斜的而是相交的，則連結相当点的直綫在一平面上移动并包絡一个二阶曲綫。投影几何学上一切重要的二阶曲綫的性質都可以根据这个定义推导出来。

要完全了解連續觀念，須要用两个性質不同的公理。但为了証明投影映象的唯一性，只要用其中一个公理，即阿基米德公理就够了。阿基米德公理的算术說法是这样：設 a 和 A 是任意二正数，不管 a 有多小， A 有多大，把 a 跟自己相加，加到充分多次，則在有限次步驟以后，总可以使其和大于 A ：

$$a + a + a + \cdots + a > A。$$

这个公理是拿一个长度去度量另一个长度所必需的条件，因此这样形式的公理組成度量几何基础的重要部分。我們也可以不用度量概念，而把公理表述为：設給定二平行直綫(图 142)，又設 O 和

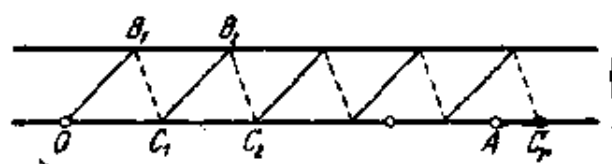


图 142

A 是其中一直线上的二点。在另一直线上任取一点 B_1 ，连 O, B_1 成一直线。通过 B_1 与第一直线上的 O 和 A 之间的一点 C_1 引直线。通过 C_1 作 OB_1 的平行线，设与第二直线交于 B_2 。过 B_2 作直线 B_1C_1 的平行线，设与第一直线交于 C_2 。如此继续作 OB_1 和 B_1C_1 的平行线。阿基米德公理说，经过有限次步骤以后，在直线 OA 上总可达到不在 O 和 A 之间的一点 C_r 。在阿基米德公理的这种表达方式中，已经用到在一直线上一点介于其他二点之间的概念。要想把这一类的叙述讲得更精确些，还需要另一组公理，即次序公理。这一组公理我们不讲了。与此相反，平行概念只是用来使公理的叙述简明和易于了解。但对投影几何的目的来说，那只要能够作出象图 143 那样的图形就够了。这张图是由图 142 用中

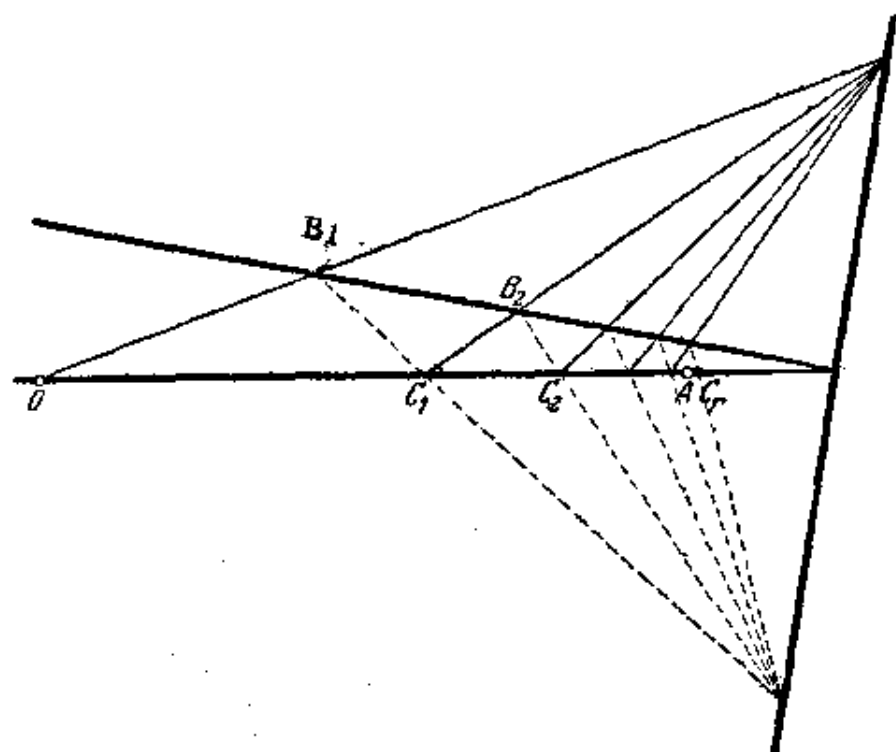


图 143

心投影法投到另一平面上而来的。

平面和空間的結合公理，与次序公理和阿基米德公理一起就足够証明給定三对对应点时投影映象的唯一性。但証明冗长而煩瑣。从平面投影映象的唯一性可以証明最后一个巴斯加和布朗香定理（証明不借用任何的空間作图）。

在空間內德沙格定理可以只用結合公理証明。但是如不借用空間作图而証明平面的定理，即使在結合公理之外再加上阿基米德公理和次序公理，也还不够。不过，如不用阿基米德公理而用平面結合公理、次序公理和合同公理，也可以証明。

如果去掉空間結合公理，則对于最后一个巴斯加定理的影响同德沙格定理一样。因此在証明时只須用平面的結合公理、次序公理和合同公理。但是只根据平面公理而不用空間公理，也可以看出这两个定理有很大的区别。巴斯加定理不能应用平面結合公理和平面德沙格定理証明，但是德沙格定理却可以根据平面結合公理和巴斯加定理証明。我們以下試就德沙格綫是平面上的无穷远綫这一特別情形加以証明。也跟阿基米德公理的叙述一样，加上这个假設不过是使証明簡短些和容易了解罢了。因此我們作下列的假設：

設有三直綫 AA' , BB' , CC' 通过点 O 。又設 $AB \parallel A'B'$, $AC \parallel A'C'$ 。应用最后一个巴斯加定理証明 $BC \parallel B'C'$ 。

为了証明，通过 A 作 OB 的平行綫，設与 $A'C'$ 交于 L ，与 OC 交于 M 。再設直綫 LB' 与直綫 AB 交于 N 。应用巴斯加定理于此图形三次，每次都用其特殊形式，即在第 121 頁上所說的巴巴斯定理。首先我們看， $ONALA'B'$ 是一巴斯加六边形，因为六个点交錯在二直綫上。由假設， $NA \parallel A'B'$ ，由作图 $AL \parallel B'O$ 。所以根据巴巴斯定理，六边形的第三对对边也必平行，即 $ON \parallel AC$ 。其次我們再看巴斯加六边形 $ONMACB$ 。在这里有 $ON \parallel AC$ ，这

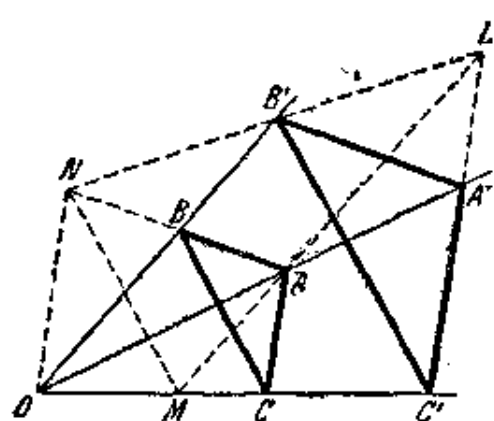


图 144

是上面証明过的, 又由假设, $MA \parallel BO$ 。因此根据巴巴斯定理, $NM \parallel CB$ 。最后我們看巴斯加六边形 $ONMLC'B'$ 。在这里有 $ON \parallel LC'$, $ML \parallel B'O$, 一如上述, 可知 $NM \parallel C'B'$ 。因为我們在前面的步骤中曾經証明过 $NM \parallel CB$, 从此得知断言 $BC \parallel B'C'$ 正确。

任何只涉及平面上交点的定理都可以从德沙格定理和巴斯加定理导出。因为方才我們証明过, 德沙格定理是巴斯加定理的一个推論, 所以可以这样說, 巴斯加定理是平面上最重要的交点定理, 从而构形 $(9_3)_1$ 代表平面几何中最重要的图形。

§ 21. 空間构形导言

构形的概念可以从平面推广到空間。一个空間构形, 是指一組点和平面, 其中的每一点与同数的平面相結合, 每一平面与同数的点相結合。合乎这种規定的一个最簡單的构形由空間德沙格定理給出。在这里我們仍旧沿用相当的平面构形的十个点作为空間构形的点, 至于构形的平面我們用两个三角形的平面与包含德沙格点和两个三角形相当边的三个平面。这样說来, 每一点上有三个平面通过, 每一平面上有六个点。与平面构形的理由相同, 空間构形四特征值适合方程 $5 \times 6 = 10 \times 3$ 。

除由点和平面組成的空間构形外, 我們也可以考虑由点和直綫組成的构形, 如同平面构形那样, 构形中的每一点与同数的直綫相結合, 每一直綫与同数的点相結合。这两种不同的观点常可应用于同一图形。比如, 剛才說过的空間德沙格图形即产生由点和直綫組成的空間构形, 而这一空間构形实质上是与平面德沙格构

形等同的。同样，許多比較更复杂的点和平面的构形也常产生点和直綫的构形，但直綫是平面的某些交綫，点是原构形的点。反之，点和直綫的构形也常可变为点和平面的构形，只要补充以由原构形的直綫决定的几个平面即可。

也象平面的情形那样，讓我們先談点数和平面数相等的构形，也就是先談由 p 个点和 p 个平面組成的构形。假如每个点与 n 个平面相結合，則跟平面上的理由相同，每个平面也应与 n 个点相結合。我們用 (p_n) 代表这类的构形。

如果不打算討論无关紧要的情形， n 至少必須是 4。当 $p \leq 7$ 时，构形 (p_4) 不存在。当 $p=8$ 时，可以作出五种不同的表，这五种表都能用几何方法实现。 (8_4) 中的一个构形，所謂默必斯构形，在几何上甚为重要；因为最后的結合条件自然滿足，所以这个构形表示一个几何定理。这个构形是由相互作内外接的两个四面体构成的。

构形越复杂，可能性的数目也越大，因之也就不易掌握全貌。例如，已經知道在 (9_4) 中至少有 26 种可用几何方法实现的构形。因此，我們只預备討論特別重要的而且在其他数学領域里占着一定地位的两种空間构形。其一是雷耶 (Reye) 构形，其二是施累弗利 (Schläfli) 双六构形。

§ 22. 雷耶构形

雷耶构形由十二个点和十二个平面組成。这个构形代表投影几何的一个定理，因此最后的結合条件是自然滿足的，而不論点和平面的配置如何。但为了便于直观想象，我們姑且把这个构形中的各点排成一种特殊的对称形式。

取一立方体，以立方体的这十二个点作为构形中的点：八个頂点，立方体的中心点，三个各由四条平行棱相交所成的无穷远点。

这样的无穷远点共有三个(图 145)。以立方体的这十二个平面作为构形中的平面:立方体的六个面,通过每对对棱的六个对角面。这样产生的图形,在每一平面上有六个点,这六个点是:立方体每一面上的四个顶点和该面上的两个无穷远点;每一对角面上的四个顶点和该平面上的一个无穷远点和立方体的一个中心点。另一方面,每一点有六个平面通过:通过立方体中心点有六个对角面;通过每一顶点有三个面和三个对角面,通过每一无穷远点有四个面和两个对角面。因此,的确作出了一个由点和平面组成的构形,它的符号应该是 (12_8) 。

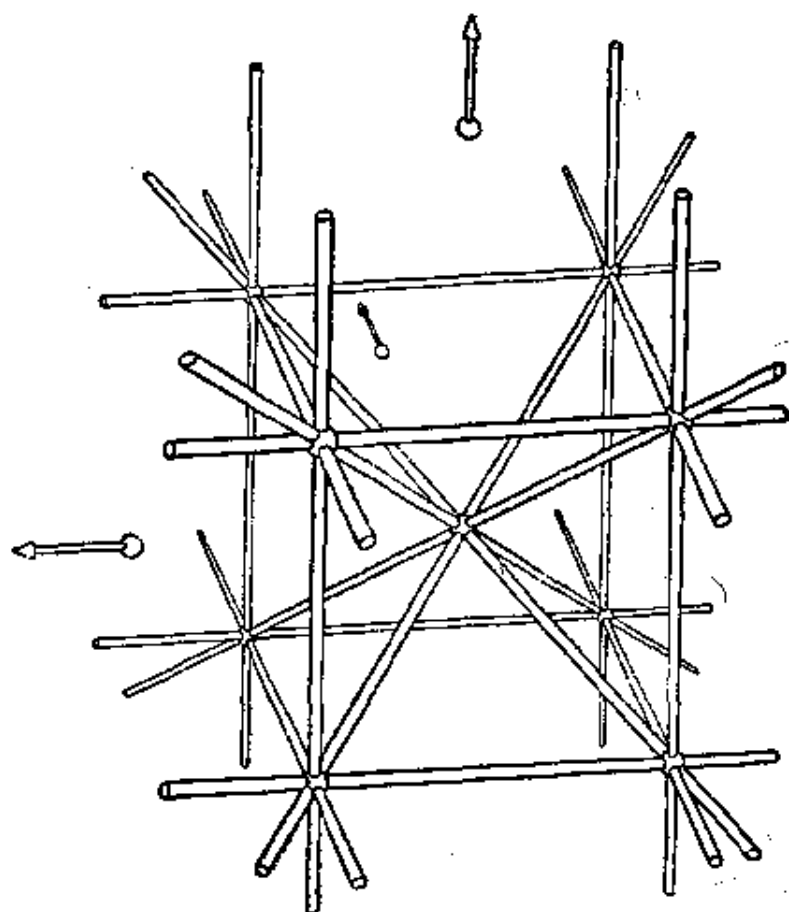


图 145

上面的图形也可以解释为点和直线的构形。为此,我们选出平面的几条交线,即立方体的十二个棱和四个对角线。每一直线上有三个点,即每一棱上有两个顶点和一个无穷远点;每一对角线

上有两个顶点和立方体的中心。其次,通过每一点有四条直线,即通过每一顶点的有三个棱和一个对角线;通过立方体中心的有四个对角线;通过每一无穷远点的有四个棱。由此可见,雷耶构形中的点和直线作成是一个 $(12_4, 16_3)$ 型的构形。

再有,只要数一数,即可知道,通过每一直线有三个平面,每一平面上有四条直线,每一平面上的四条直线和六个点作成是一个完全四边形。

雷耶构形常见于许多与几何发生关系的体系中,例如下面就要讨论的四球的相似中心体系。

大家知道,二圆或二球的相似中心是指二点,这二点内外分二圆或二球连心线段之比等于二半径之比;分点在连心线段上的叫相似内心,在延长线上的叫相似外心。如果所说的是二圆的情形,而且每圆在另外一圆之外,则相似内心是二圆内公切线的交点,相似外心是二圆外公切线的交点(图 146)。以连心线为轴将图形回轉,得到二球的相似中心和切线的类似性质(不过也有不同的地方:二球还有许多公切线不通过相似中心)。我们分别用 (ik) 和 $(ik)'$ 代表二圆或二球 i 和 k 的相似外心和内心。

现在设想有三个圆或三个球 1, 2, 3。它们各有三个相似内心

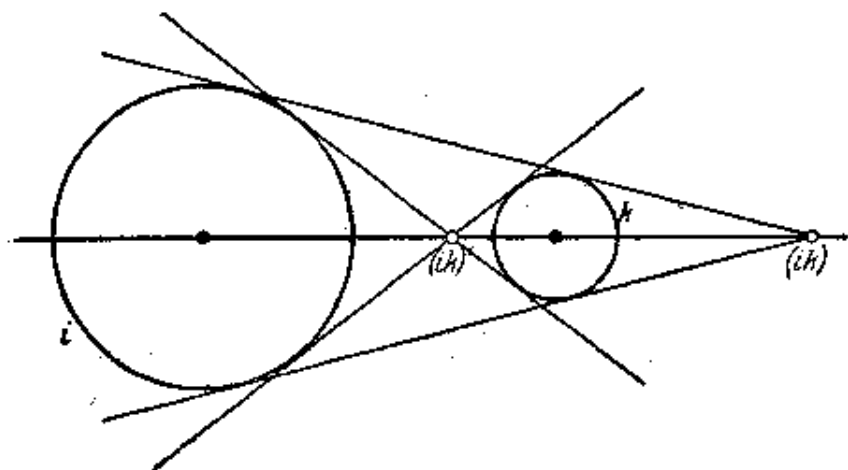


图 146

和三个相似外心，所以一共有六个相似中心。假定三圆或三球的中心不共线而作成是一个三角形，那末就没有两个相似中心能重合，而且六个相似中心也不能共线。根据蒙日 (Monge) 定理，三个相似外心 (12), (23), (31) 必共线，而且每二圆 (球) 的相似外心同另外两对圆 (球) 的两个相似内心共线，例如 (31), (12)' 和 (23)'^① (图 147)。由此可知，所有的相似中心在四条直线上，这四条直线叫做 1, 2, 3 的相似轴。蒙日定理可以概括叙述如下：六个相似中心和四条相似轴组成完全四边形的六个点和四条直线，其中的圆 (球) 心 1, 2, 3 是对边三角形的顶点。今后我们将用 (123) 表示包含三个相似外心的相似轴线，(1'23) 表示通过 (23), (12)' 和 (13)' 的相似轴，等等。

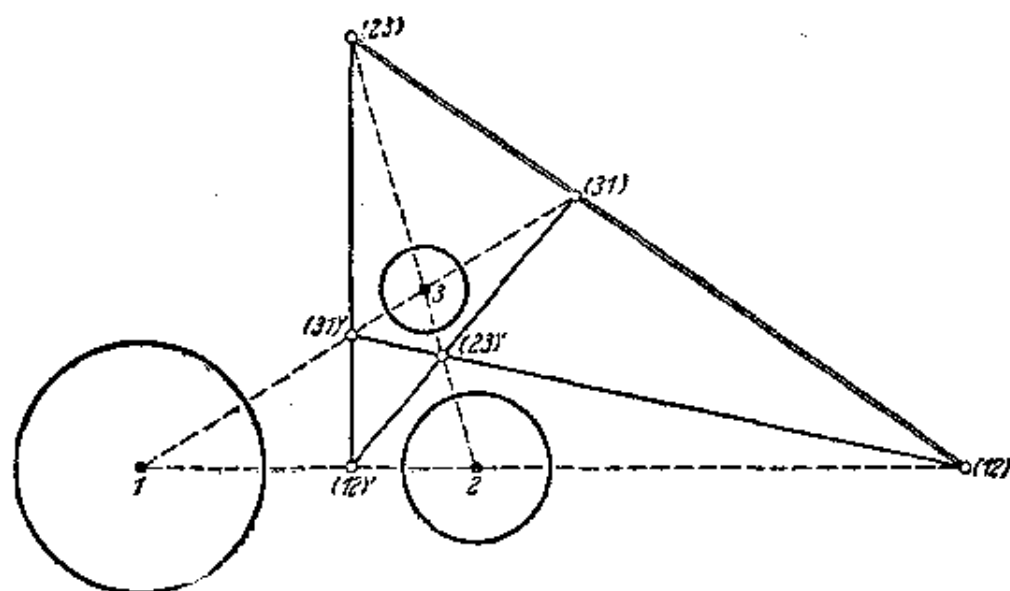


图 147

有了以上的准备，我们进入四个球的讨论。今假定四球 1, 2,

① 证明 设圆 1, 2, 3 的半径分别为 r_1, r_2, r_3 。则三个相似外心将三圆心作成的三角形的边分成比 $-\frac{r_1}{r_2}$; $-\frac{r_2}{r_3}$; $-\frac{r_3}{r_1}$ 。三个比之积是 -1 。因此按梅奈劳斯 (Menelaus) 定理，三外心在一直线上。假如把两个相似外心换作相当的相似内心，则有二比变了符号。因此，三比之积还是等于 -1 ，这就是说，我们又得到了三个共线点。

3, 4 的球心不完全在一平面上, 因之, 沒有三个球心是在一直线上的(參看图 148)。我們断言: 四球的所有相似中心和相似軸組成雷耶构形的点和直綫。因为从四个球 1, 2, 3, 4 中每次取一对, 有六种不同的取法, 又因为每一对有一个相似外心和一个相似內心, 所以一共有十二个相似中心。其次, 相似軸的确数是 16。因为从四个球中每次取三个, 共有四种取法, 而每三个球有四个不同的相似軸, 例如 (123) , $(1'23)$, $(12'3)$, $(123')$ 。还有, 每个軸与三个点相結合, 例如 (123) 与 (12) , (23) , (13) 相結合。每个点与四个軸相結合, 例如 (12) 与 (123) , $(123')$, (124) , $(124')$ 相結合, $(12)'$ 与 $(1'23)$, $(12'3)$, $(1'24)$, $(12'4)$ 相結合。

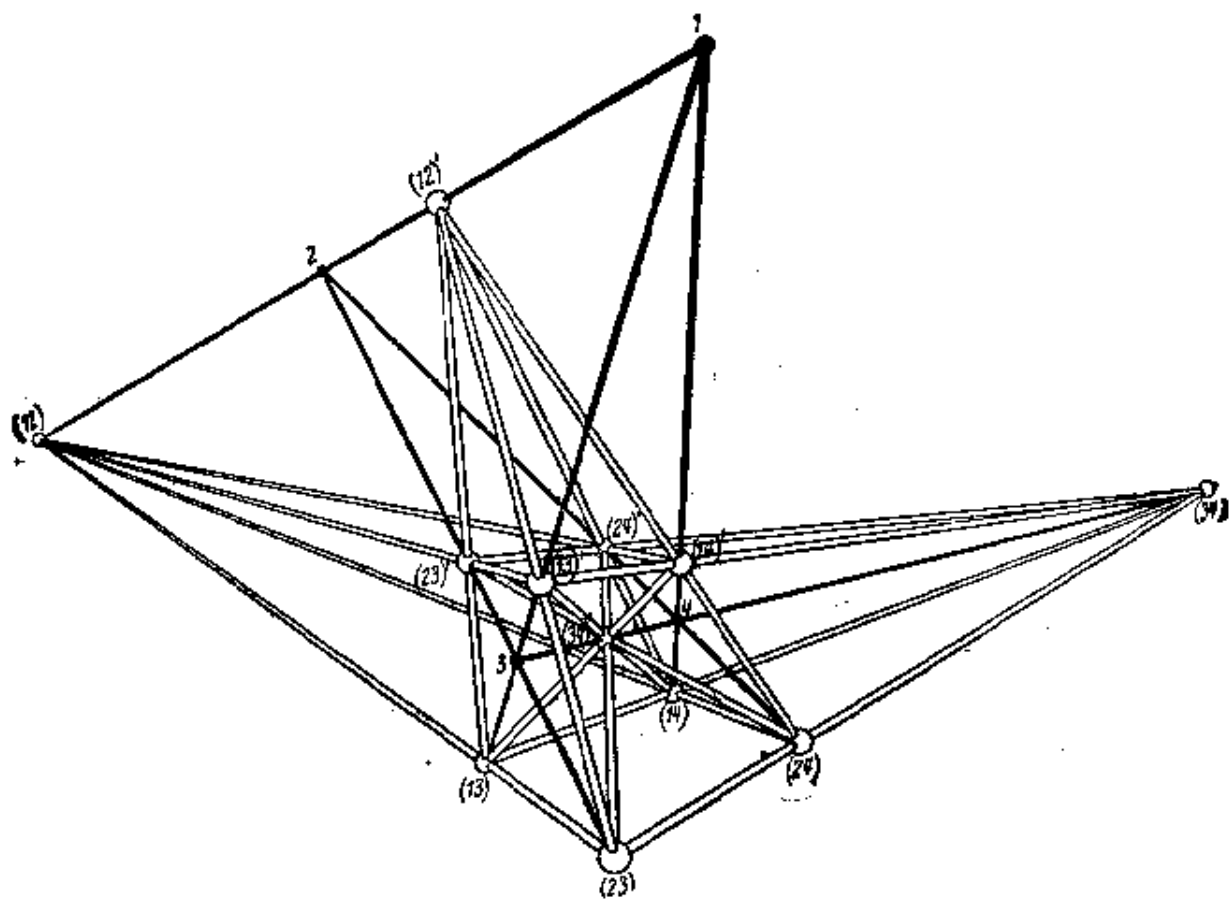


图 148

这样說来, 相似中心和相似軸事实上作成一构形 $(12_4 16_8)$ 。要証明这个构形与雷耶构形等同, 还必须找出十二个适当的平面来。

首先取四个平面,每一平面包括三个球心。在任一如此的平面上,点和軸作成一完全四边形,正如雷耶构形的情形。要找出其余八个这样的平面,只要取交于构形中的一点二相似軸所决定的其他平面就成。但这样的两个軸必須属于不同的三数组,因为任意同一三数组的二軸,例如 (123) 和 $(1'23)$,乃是包含三个球心的平面[在本例中是 (123)],因此沒有得到新的平面。讓我們从只包含两个相似外心的軸,例如从 (123) 和 (124) 开始。它們决定一平面,此平面包含 (12) 。除此之外,这一平面还包含两个軸上的其他四点,即 (13) , (23) , (14) 和 (24) 。但点 (23) 和 (24) 也在 (234) 上,而此軸还包含另外一个相似外心 (34) 。因此所有的六个相似外心都在我們上面所說的那个平面上。这个平面还包含其他的“外”軸 (134) 和 (234) ,因此,这个平面实际上与六个点和四条直綫相結合。現在我們来看不同的三数组的两个相交的軸,一个是“外”軸,一个是“內”軸的情形。因为这两个軸的交点必然是外心,而且所有的数字作用相等,我們可以取二軸 (123) 和 $(124')$ 作代表。这二軸除了交点 (12) 外,还包含 (13) , (23) , $(14)'$ 和 $(24)'$ 諸点。跟上面的道理相同,可知軸 $(134')$ 和 $(234')$ 和点 $(34)'$ 也在平面 (123) 和 $(124')$ 上。因此,由球4和其他三球决定的三个相似內心与由球1, 2, 3决定的三个相似外心在一平面上。这样的平面應該有四个。剩下还有两个相交的相似內軸的情形未考虑。固然上面所說的平面包含三个两两相交的內軸,但是交点常是相似內心,对于交点是相似外心的情形还未解决。現在我們就讲例如交于一个相似外心 (12) 的二內軸 $(123')$ 和 $(124')$ 。除了交点以外,这两个軸所决定的平面也包含 $(13)'$, $(23)'$, $(14)'$ 和 $(24)'$ 四点。因此此平面还包含二軸 $(1'34)$, $(2'34)$ 和点 (34) 。这样說来,在此平面上有四个相似內軸,并且与四面体1234的一对对棱1, 2和3, 4交于相似外心,与其余的棱交于相似內心。这样的平面有三个,因为一个四面体

有三对对棱。合起来,我們一共得到了 $1+4+3=8$ 个平面。

为清楚起见,我們列出两张表,分别表明点和平面的结合关系与点和直线的结合关系。四面体的四个面用 I, II, III, IV 标明,其中 I 是对着点 1 的面。把包含六个相似外心的平面記作 e_a , 包含三相似外心和三相似内心的四平面分別記作 e_1, e_2, e_3, e_4 。最后,把包含四面体一对对棱的其他三个平面記作 $(12, 34), (13, 24), (14, 23)$ 。为簡便起见,点和直线的括号一律省略了。

	平 面											
	I	II	III	IV	e_a	e_1	e_2	e_3	e_4	(12, 34)	(13, 34)	(14, 23)
点	23	13	12	12	12	23	13	12	12	12	13	14
	24	14	14	13	13	24	14	14	13	34	24	23
	34	34	24	23	14	34	34	24	23	13'	12'	12'
	23'	13'	12'	12'	23	12'	12'	13'	14'	14'	14'	13'
	24'	14'	14'	13'	24	13'	23'	23'	24'	23'	23'	24'
	34'	34'	24'	23'	34	14'	24'	34'	34'	24'	34'	34'
直線	234	134	124	123	123	234	134	124	123	123'	12'3	1'23
	2'34	1'34	1'24	1'23	124	1'23	12'3	123'	124'	124'	1'24	12'4
	23'4	13'4	12'4	12'3	134	1'24	12'4	13'4	134'	1'34	134'	13'4
	234'	134'	124'	123'	234	1'34	2'34	23'4	234'	2'34	23'4	234'

构形画在图 148 上^①。这个构形与图 145 的等同,这个事实如果把 $(12), (12)'$ 和 (34) 在三个相互垂直的方向上移向无穷远,就可看得清楚。这时三点变为图 145 上构形的无穷远点。八个点 $(13), (14), (23), (24), (13)', (14)', (23)', (24)'$ 变为立方体的顶点, $(34)'$ 变为立方体的中心。但点 1 和 2 也变成了无穷远点。要想找出图 145 中的四个球,必須加入极限情形以推广相似中心的定义。首先,二等圆(球)的相似中心应该定义为連心綫上的无

① 假如把图 148 看做平面图形,它表示由共面四圆的相似中心和相似轴组成的构形 $(12, 16_3)$ 。圆心仍为 1, 2, 3, 4, 半径大小可以选择得同空间的情形一样。

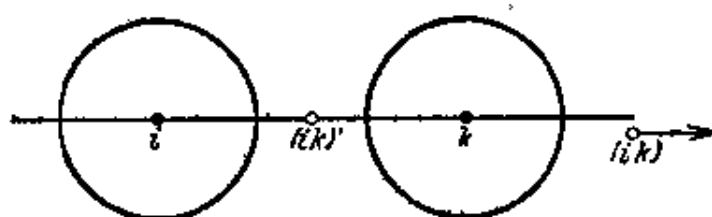


图 149

穷远点(图 149)。其次,一球 k 和一平面 e 的二相似中心(图 150)应该定义为球 k 中垂直于 e 的直径上的二端点 (ke) 和 $(ke)'$ 。因为,如果把 e 代以切 e 于 P 的一组圆 K , 而 P 是直径延长与 e 的交点,那么可以看出,当 K 的半径增加到无穷大的时候, k 和 K 的相似中心趋于 (ke) 和 $(ke)'$ 。最后,我们考虑二平面 e 和 f 交于一直线 g 的情形(图 151)。在这种情况下二相似中心必须规定为在垂直于 g 的方向上且在 e 和 f 作成的二角的平分线上的无穷远点。这个定义同样可用极限过程来验证:把 g 代以二合同球的交圆,但此二球在 g 上一定点分别切于 e 和 f , 然后再让球的半径增大到无穷大。

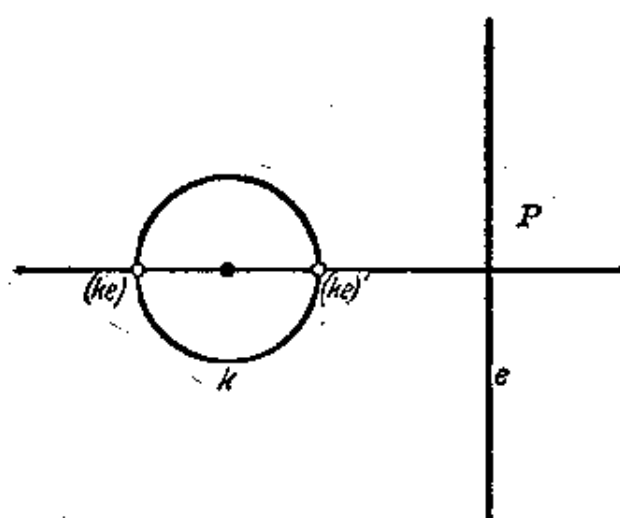


图 150

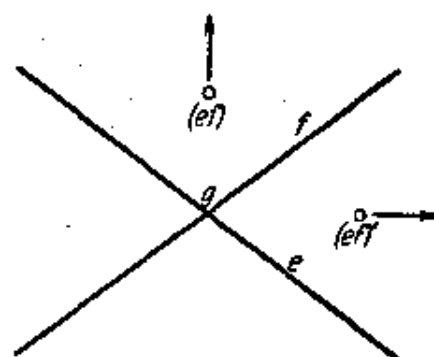


图 151

有了以上的几个定义,就可以把原来的雷耶构形当作一个相似中心体系来解释。假定球 3 和球 4 的中心分别是图 145 上立方

体的前面的面和后面的面的中心。假定二球半径相等，而且如此选择半径，使每个球通过所属面的四个顶点。假定 1 和 2 是分别垂直于上述二面的二对角线的任二平面。则构形中的诸点是 1, 2, 3, 4 的相似中心，其排列的情形如图 148。

除了这个极限情形之外，我们可以考虑以四等球——球心为正四面体的顶点——为基础的构形。在这里相似外心必为四面体六条棱上的无穷远点，因此无穷远平面必属于此构形，应用以前的记号，这个平面应该写作 e_0 。相似内心是各棱的中点，它们作成正八面体的六个顶点（图 152）。八面体的所有平面属于此构形，也就是四面体的四个面 I, II, III, IV 以及按以前的记号用 e_1, e_2, e_3, e_4 表示的平面。至于构形的其他三个平面则是八面体的三个对称平面。构形的直线是四面体的面上的四条无穷远直线（相似外轴）和八面体的十二个棱（相似内轴）。

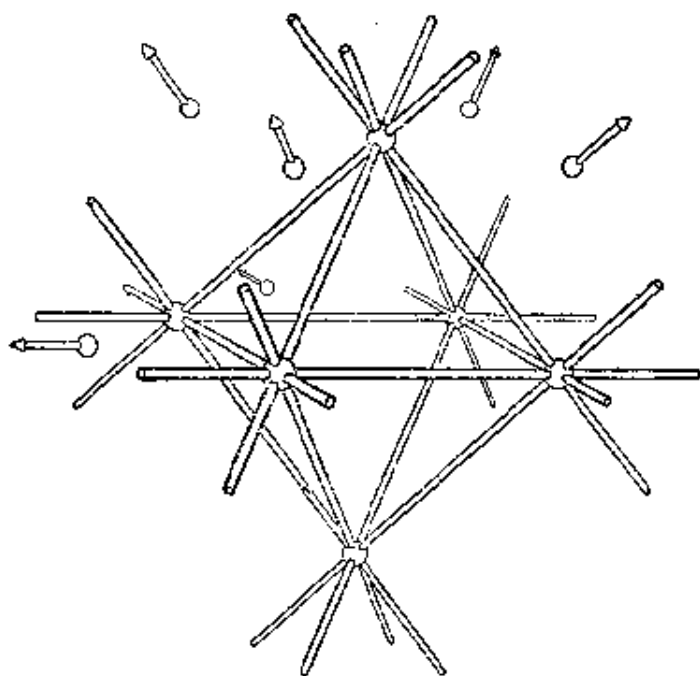


图 152

在第二章中我们曾经指出立方体和八面体的相互关系。依照 § 19 所讲的，我们可以说立方体和八面体成对偶对应。同样还可

以更一般地証明，图 152 的点和平面与图 145 的平面和点成对偶对应；立方体的顶点和面分別对应八面体的面和頂点，立方体的中心和通过中心的六个平面分別对应图 152 的无穷远平面和无穷远平面上的六个点，立方体的三个无穷远点对应八面体的三个对称平面^①。由此可見，点和面的雷耶构形是自对偶的。自然，从立方体和八面体得出的两个互成对偶的雷耶构形从外表来看似乎不相同，但对于投影几何的目的來說，所有的雷耶构形都应该視為等同的^②。

我們指出，雷耶构形也象一些平面构形一样，有另一个重要的对称性質，这是說，我們將証明这个构形是正則的。从上面的討論看不出这一点，因为各平面对于相似中心体系來說属于四种不同的类型，而且在作出构形时，無論是借助于立方体或借助于八面体，各点和各平面都起不同的作用。在下一节里，我們將用一种能显示所有元素都起着相同作用的方法来作雷耶构形。要想达到这个目的，需要进一步研究三維和四維空間的多面体。因为正如三維空間图形可以投影到平面一样，四維空間图形也可以投影到三維空間，其中的一个图形經過适当的投影之后，便可得出雷耶构形。

§ 23. 三維和四維空間的正多面体及其投影

在第二章里我們列举了三維空間的五种正多面体。在这些多面体里，正四面体的情形与其他正多面体不同。因为正四面体是自对偶，而其余的四种正多面体則是两两相互对偶：八面体与立方体对偶，十二面体与二十面体对偶。正四面体的这种特点可能

① 这种对应是从对于內接于立方体的球作配极变换得到的。

② 如果从空間的任一投影坐标系出发，則可得出一种八面体的投影推广。六个坐标轴上的单位点和这六个轴与单位平面的六个交点总是雷耶构形中的点。

和它跟其餘的正多面體相區分的第二種現象有關。這是說，那四種正多面體可以稱為“中心對稱”多面體，因為它們的頂點、棱、面都成對地對於中心對稱。例如，連接立方體的一頂點和中心的直線必過另一頂點。但在另一方面，正四面體對於其中心並不對稱，因為連接正四面體的一頂點和中心的直線，和此正四面體交於其底面的中心。

仿照第二章末的相應的論述，可證明在四維空間里也存在有限個正則的形體，其數為 6^①。這樣的形體除了包含點、棱和面以外，自然還包含三維空間的片段作為邊界。正象在三維空間中要求正多面體的面是正多邊形一樣，在四維空間中要求形體的三維邊界是正多面體。這樣的形體叫做“胞腔”，如果它被 n 個多面體包圍，叫做 n -胞腔。現將四維空間正則形體的重要數據列成下表：

四維空間

	邊界多面體的 個數和類型	頂點個數	對偶性
1. 5-胞腔……	5 個四面體	5	自對偶
2. 8-胞腔……	8 個立方體	16	} 互為對偶
3. 16-胞腔……	16 個四面體	8	
4. 24-胞腔……	24 個八面體	24	自對偶
5. 120-胞腔……	120 個十二面體	600	} 互為對偶
6. 600-胞腔……	600 個四面體	120	

最後的對偶性一欄不難從表中推出來。因為在四維空間中，

① 讀者可以參考 H. de Vries 的 “Die Vierte Dimension, 萊比錫和柏林, 1926 版——著者注。

也可以參考 H. S. M. Coxeter 的 Regular Polytopes (1947) 和 H. P. Manning 的 Geometry of Four Dimensions, 1914——英譯者注。

還可以參考 В. И. Стрингхем 的 Правильные Фигуры в n -мерном Пространстве, Успехи математических наук, вып. X, 1944——俄譯本編者注。

点与三維空間对偶,直綫与平面对偶。

从上表可知,5-胞腔与四面体相似,而8-胞腔,16-胞腔,120-胞腔,600-胞腔分别与立方体、八面体、十二面体、二十面体相似。24-胞腔居于特殊的地位;它不但是自对偶的,而且是中心对称的。但另一个自对偶的5-胞腔,与三維正四面体有相同之点:它不是中心对称的。

对于高維空間类似的研究已經有了結果。这里的情形却是非常簡單而且很有規律,因为高維空間只有三种正則形体。現將重要的数据列成下表:

n 維空間 $n \geq 5$

	$n-1$ 維边界胞腔 的个数和类型	頂点个数	对 偶 性
1. $(n+1)$ -胞腔.....	$n+1$ 个 n -胞腔	$n+1$	自 对 偶
2. $2n$ -胞腔.....	$2n$ 个 $(2n-2)$ -胞腔	2^n	} 互为对偶
3. 2^n -胞腔.....	2^n 个 n -胞腔	$2n$	

在三維空間里与上列三种类型的形体相当的是四面体、立方体和八面体($n+1=4$, $2n=6$, $2^n=8$)。在四維空間里,則是5-胞腔,8-胞腔,16-胞腔。这样看来,三維空間里的十二面体和二十面体,四維空間里的24-胞腔,120-胞腔,600-胞腔,在高維空間中都沒有对应的类型。

現在我們来考虑正則的形体在比它的維数少一的空间里的投影。从正多面体到平面上的投影开始。因投影中心的选择不同,投影也有所不同。在第92頁上图95到图99用的是平行投影,也就是說,投影中心在无穷远点。这种投影法的优点在于把平行綫变为平行綫。但也有缺点,就是往往使部分的面与面重合起来。这样的缺点可以克服,只須移动投影中心使它和一个面十分靠近。为

了保持对称起見，我們把投影中心移到这个面在中心处的垂綫上（与垂足非常靠近），并选定这一个面作为象平面。这样就可得出图 153 到图 157 的五种正多面体的投影。当我们揭开一个面，并从开出的洞口向多面体内部窺視的时候，就可看到这样的图象。

投影中心如果放在多面体的边界上，則通过这个中心的各面就好象是直綫，因而投影成为极不对称的形状。

把投影中心移到多面体的内部，所成的象将产生巨大的变化。此时的象不論象平面如何放置都要伸展到无穷远。这是因为通过投影中心的每一平面都与多面体相交，特别地，对于通过投影中心

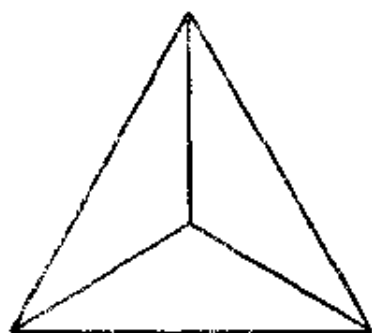


图 153 四面体

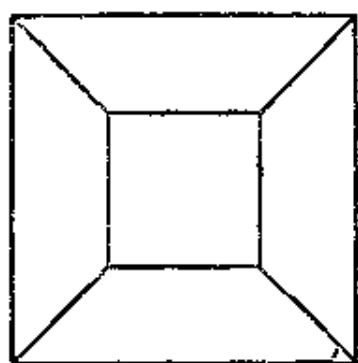


图 154 立方体

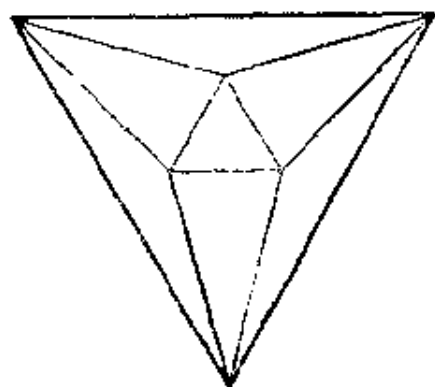


图 155 八面体

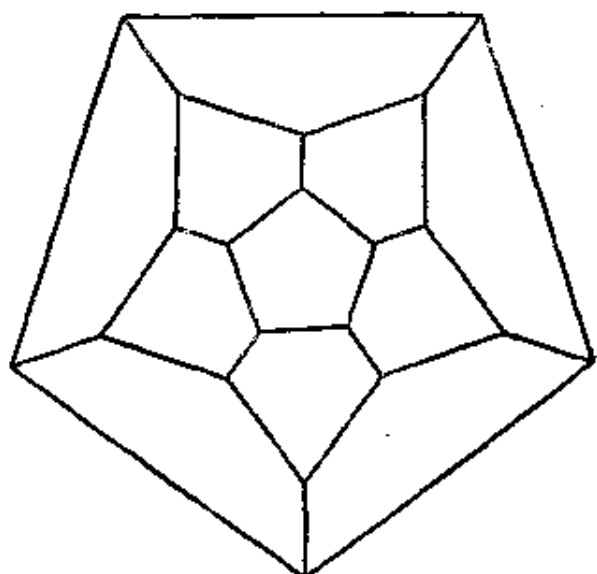


图 156 十二面体

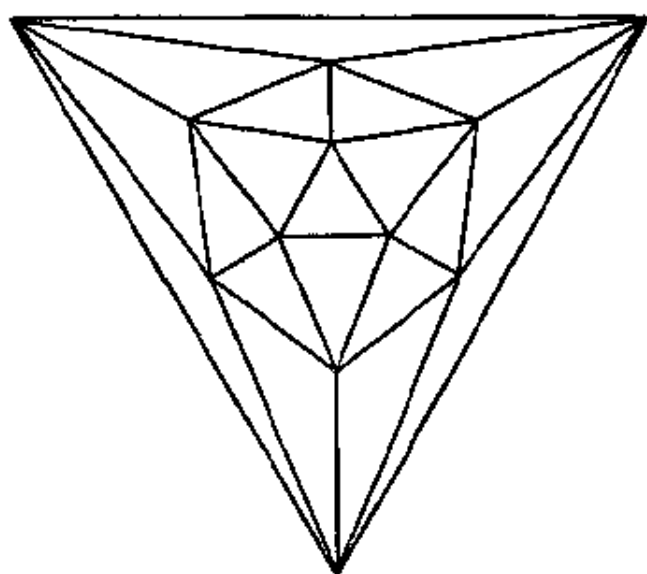


图 157 二十面体

而且与象平面平行的平面也应该如此，因此在象平面上产生无穷远点投影(参看第 116 页)。然而，在投影中心是多面体中心的特别情况下出现一种在几何上有意义的现象。因为，在这种情况下，而且只有在这种情况下，通过中心的射线把是中心对称的。在第 119 页上我们讲过綫把可以看作投影平面的一种模型，在这个模型里把中的直綫要看作“点”，平面要看作“直綫”。这样一来，我们从正多面体推出投影平面的正则剖分。但是只有在中心对称的多面体的情况下这种剖分才简单地复盖投影平面；就四面体来说，对应于每条通过中心的直綫与多面体的面的两个交点的，是两个不同的象点，所以投影平面被复盖两次。但对于其他正多面体来说，每一对对径元素在投影平面上只产生一个剖分元素。假如我们考虑綫把与平面的交点，也就是说，考虑本来意义的投影，那就不能保持完全的对称。不过，若如此选择象平面，使它通过多面体的一个顶点并且在此顶点处垂直于连接顶点到中心的直綫(对于八面体的情形，参看图 158)，可得出十分简单的象。图 159 到图 163 表示用这种方法作出来的五个投影。在各图上扩展到无穷远的一

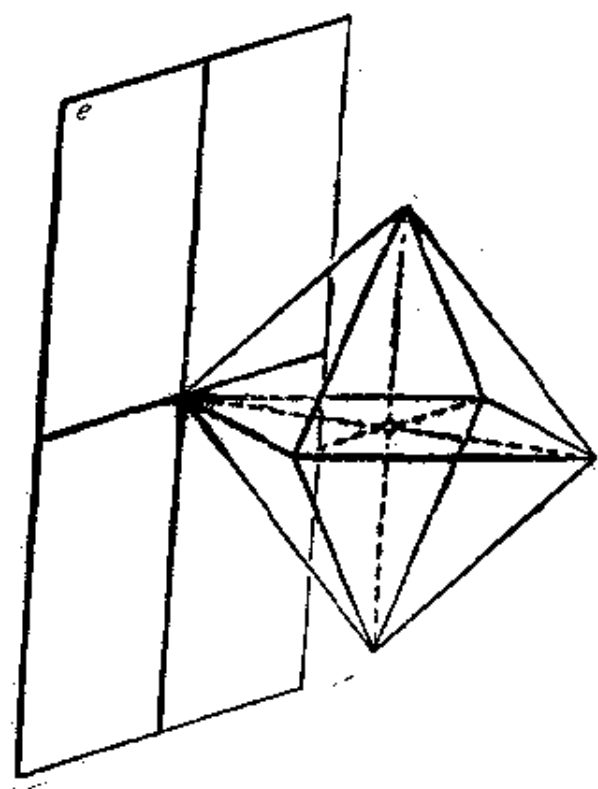


图 158

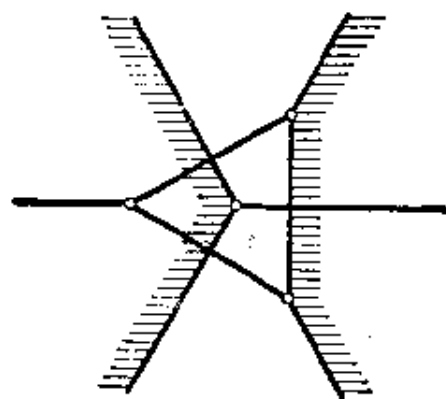


图 159 四面体

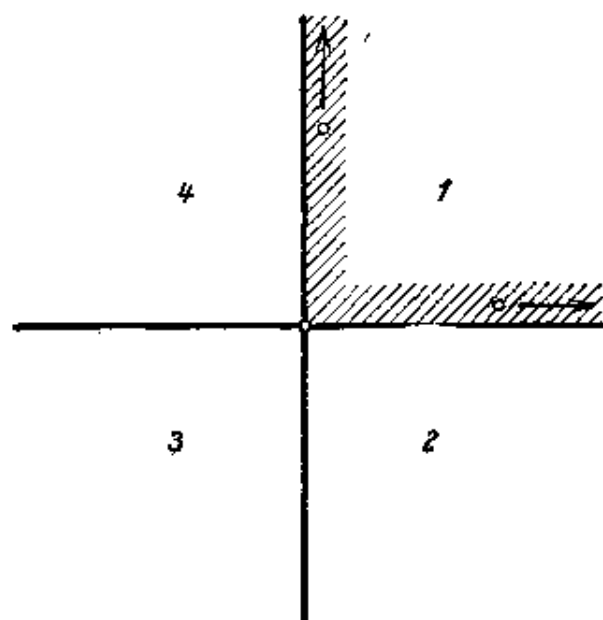


图 160 八面体

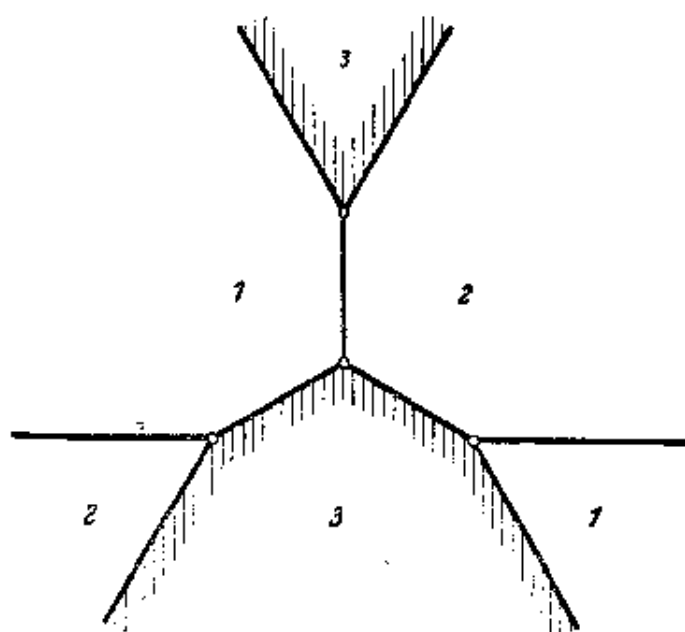


图 161 立方体

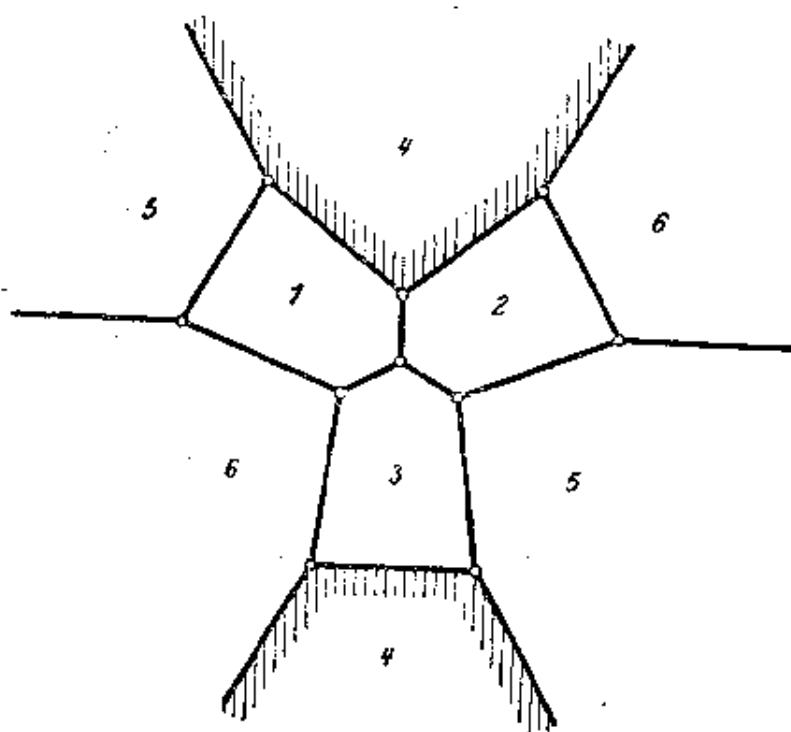


图 162 十二面体

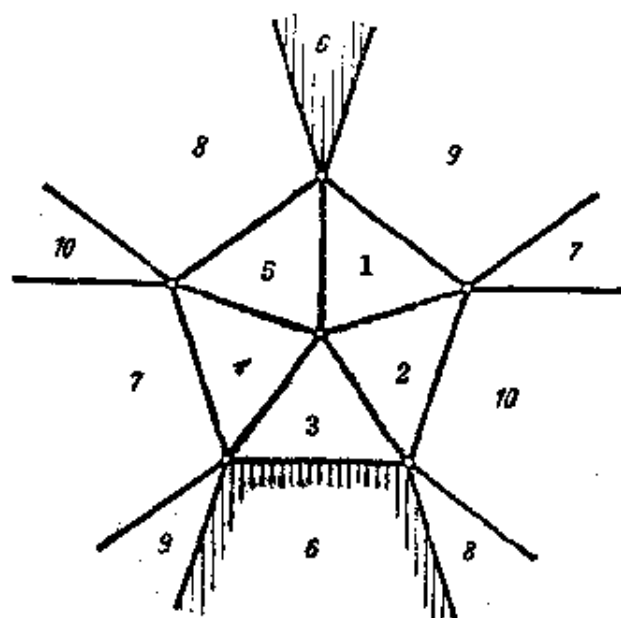


图 163 二十面體

个区域都用阴影标出。在四面体的投影中，象平面被复盖两次。至于其他图形，在象平面上的每一多边形恰好表示多面体的两个对徑面。

假如拿对称的多面体的一个面当作象平面(图 164 是立方体的情形)，則得到另外一組简单的图形(对于四面体來說，得不到新的图形)。各多面体的投影如图 165 到图 168 所示^①。

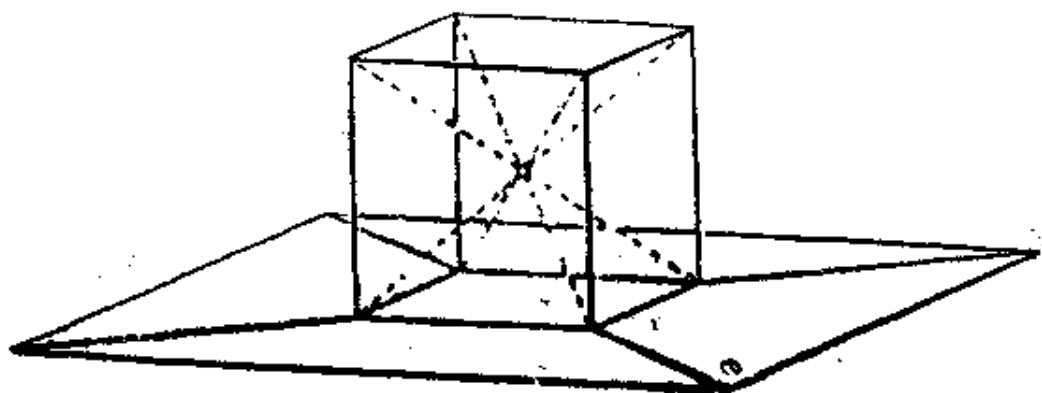


图 164

① 用这种方法得出的八面体的投影等于用投影坐标系将平面剖分为四个三角形

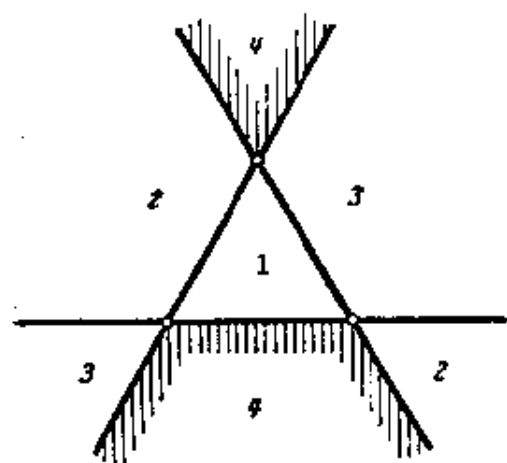


图 165 八面体

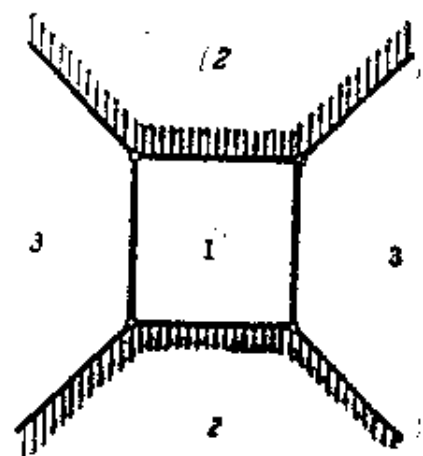


图 166 立方体

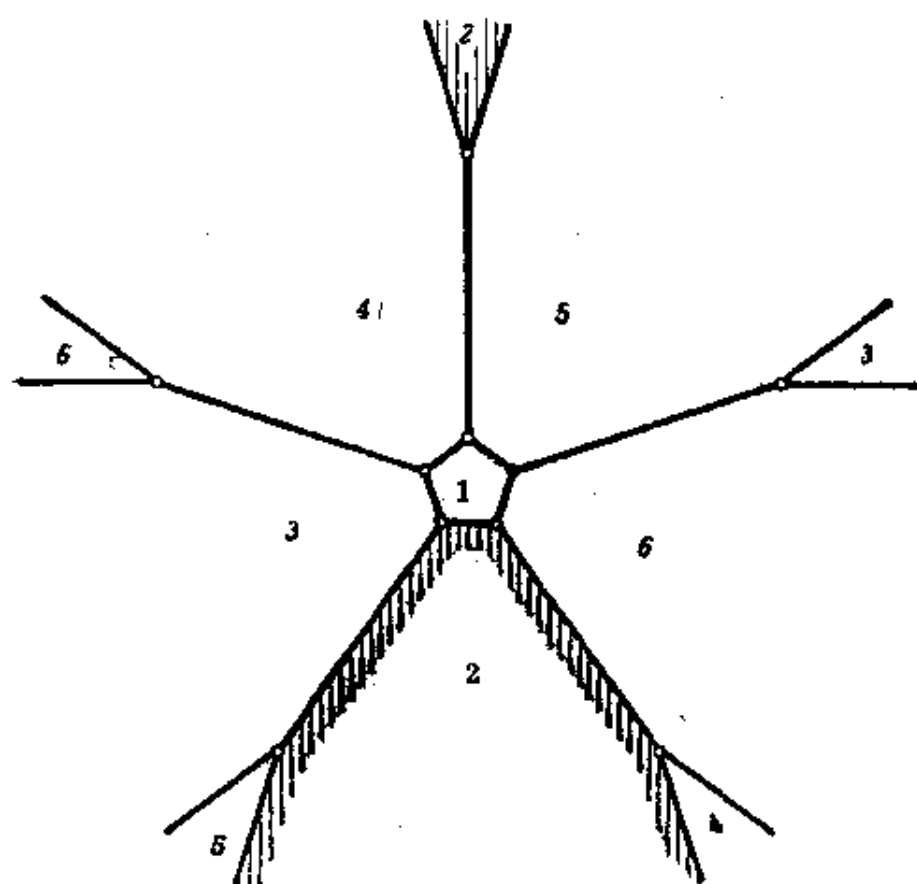


图 167 十二面体

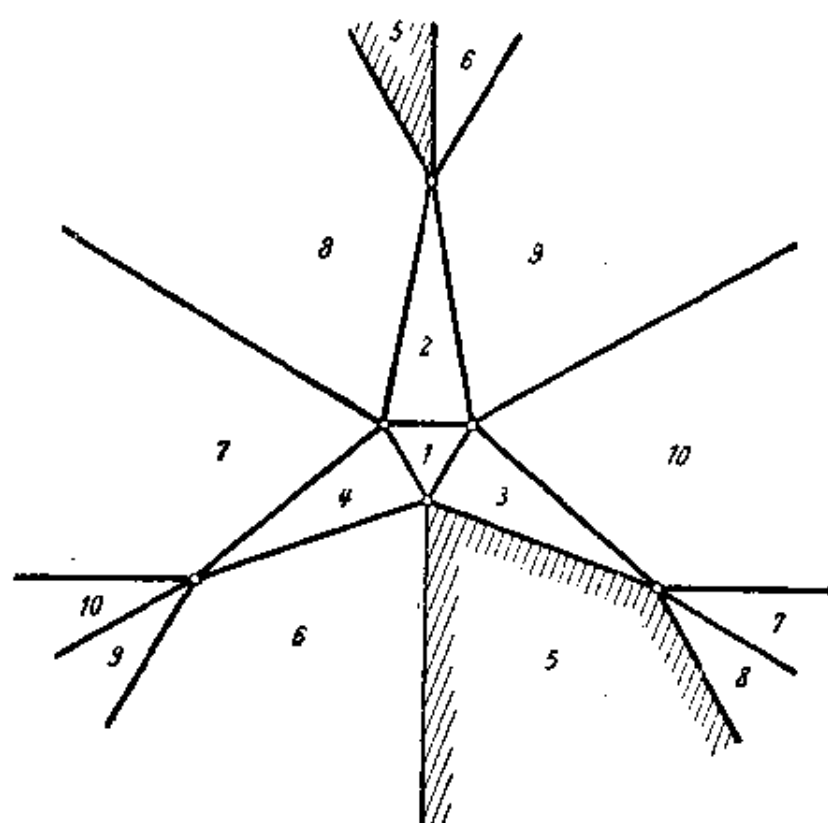


圖 168 二十面體

我們可以運用類似的投影辦法，通過三維空間的圖形去描寫四維空間的胞腔。平行投影的方法在這裡已不適用，因為這種方法把胞腔的邊界多面體表示成部分重疊的、相交的三維空間的多面體。另一方面，利用得出圖 153 到 157 上的同樣辦法可以得出四維胞腔的明顯圖象。這時胞腔的邊界多面體被這樣的一組空間多面體表示，其中有一個占著特殊地位，而且被其餘的簡單而無遺漏地填滿。如果把这些模型再投影到平面上來，就得到象圖 169—172 上那樣的投影。仔細觀察，可以看出圖 172 上的大八面體是由 23 個小八面體（有四個形狀）填滿，所以一共有 24 個八面體。至於 120-胞腔和 600-胞腔的圖形就太複雜而不容易看清了。

如果把投影中心移到胞腔中心的位置上來，結果將得出投影空間的正則剖分。我們不能如同用綫把表示投影平面那樣得出對稱的投影空間模型，因為這裡涉及四維圖形。因此必須選擇一個特

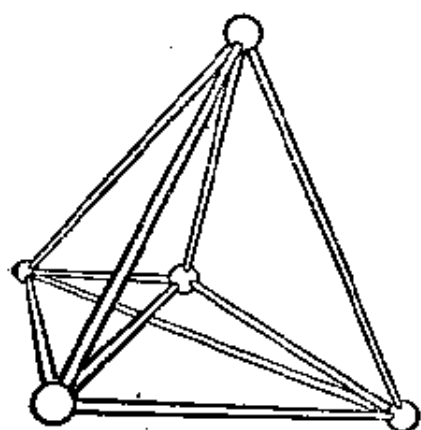


图 169 5-胞腔

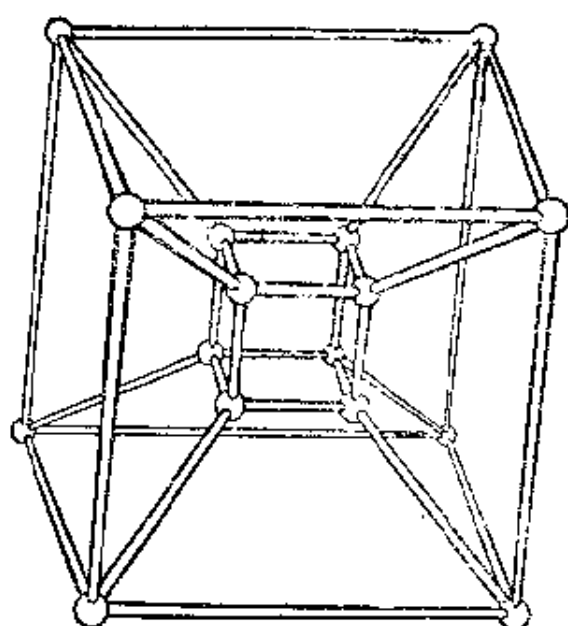


图 170 8-胞腔

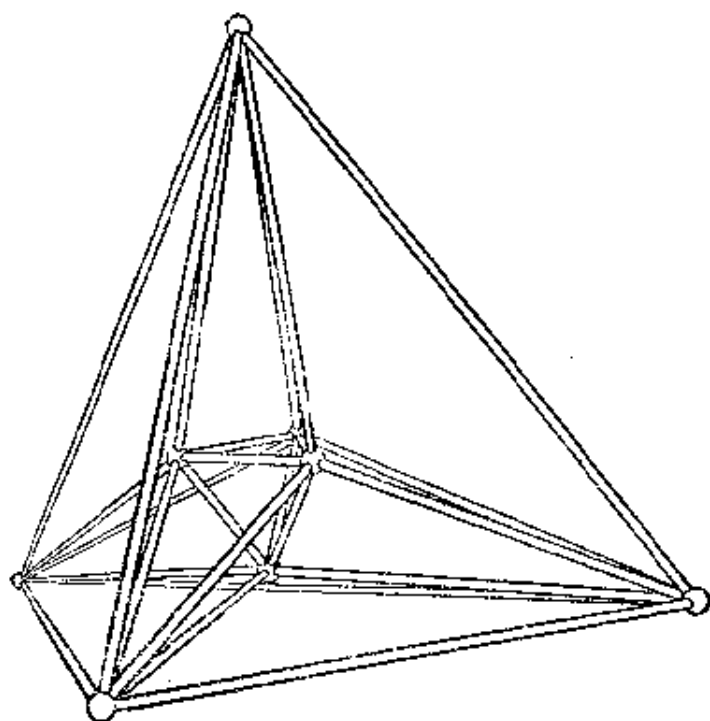


图 171 16-胞腔

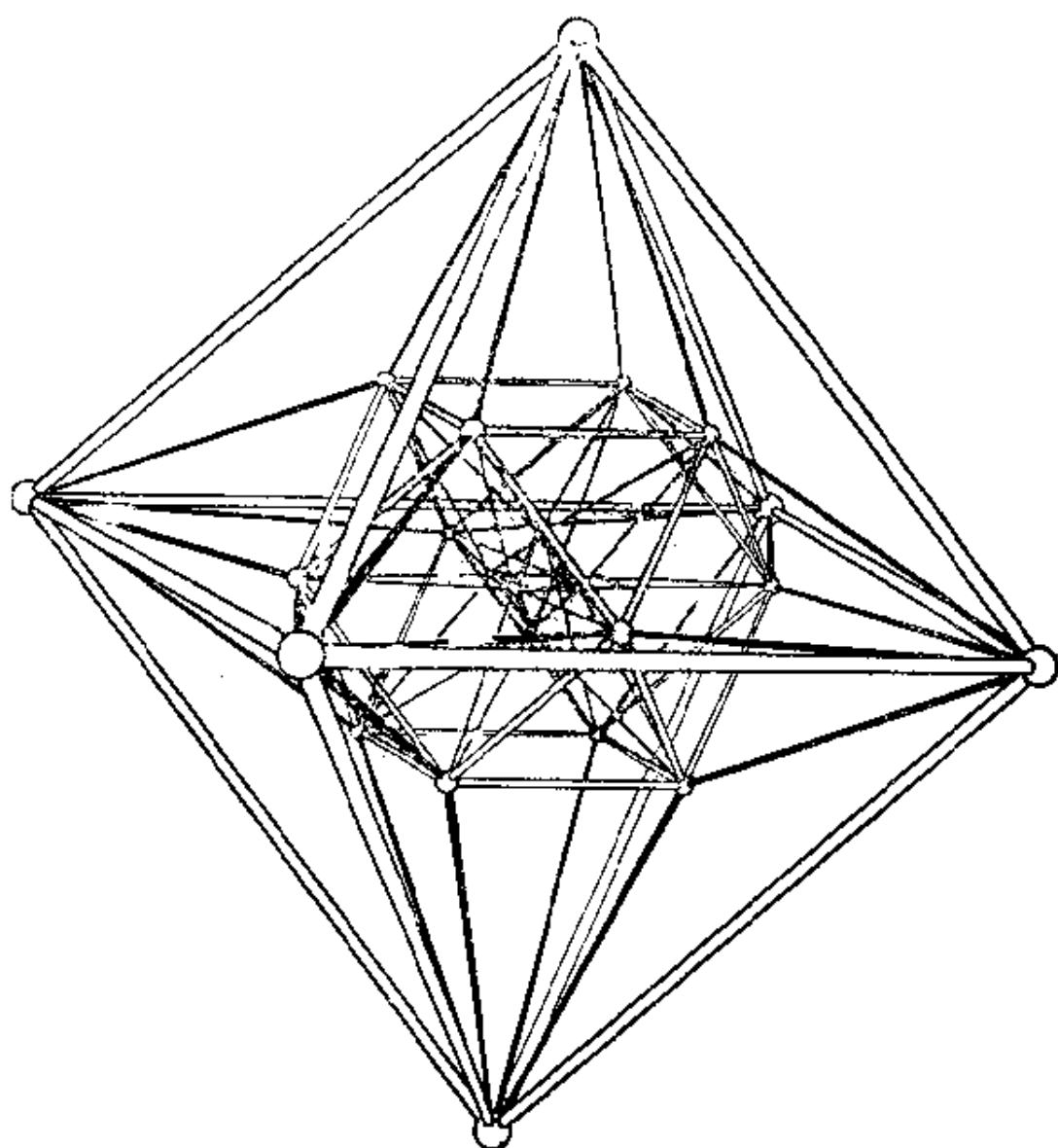


图 172 24-胞腔

別的二維空間作象空間，並且一定要丟掉一部分對稱性。但是為了多少保留一部分對稱性，我們仿照上面講過的三維空間中取象平面那樣來取象空間：就是，或者類似圖 164 那樣的辦法，選擇一個邊界空間作為象空間，或者類似圖 158 上那樣的辦法，選擇通過胞腔的一個頂點的空間作為象空間。在第一种情形下，選定的邊界空間不會變形，因為它自己就在象空間中；在第二種情形下，投影圖對於所選擇的頂點對稱，而這頂點的象還是它自己。下面我

們先看一下用这两种方法得来的 16-胞腔和 8-胞腔的象 (图 173 和 174) ①。

此时空間分別被剖分为八部分和四部分, 每一部分相当于胞腔的两个对徑边界多面体。先說 16-胞腔。在图 173a 中, 延伸到无穷远的部分空間有两种不同的形式。其中的四个区域各有一个完全在空間的有限部分内的面 (比如 1, 2, 3)。从这个面开始它們通过无穷远平面而延伸到对頂点 (例如 2)。另一方面, 另外三个区域各有一对有限长的对棱 (例如 1, 2 和 3, 4), 但所有的边界面都延伸到无穷远。在图 173b 中, 无穷远平面本身是一边界面。我們注意, 由 16-胞腔的表示可导出空間的普通的剖分法, 亦即在投影或笛卡儿坐标系下空間的八个卦限。

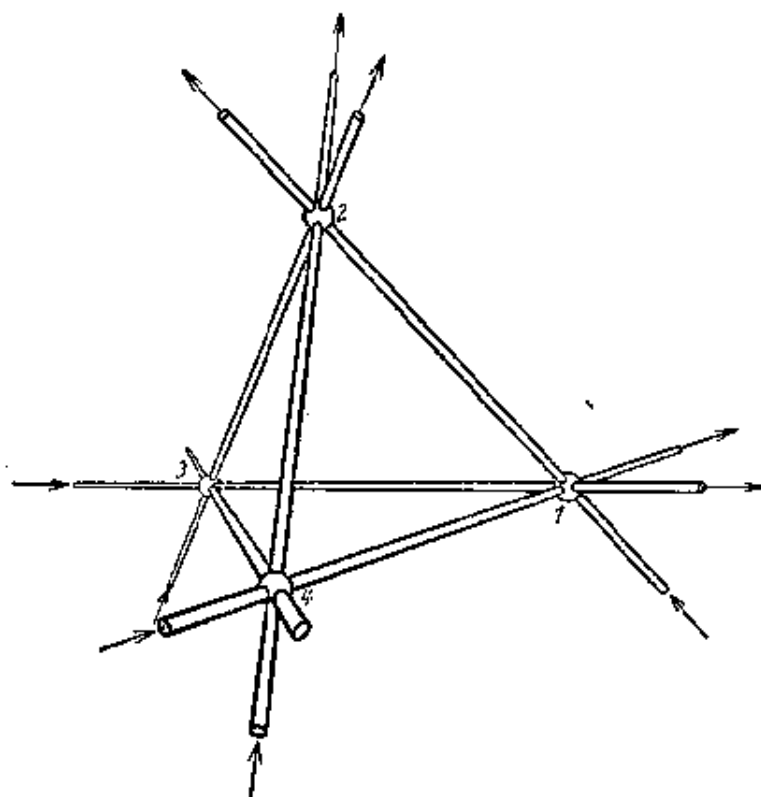


图 173a 16-胞腔

① 这种投影方法对 5-胞腔不适用, 因为这样的胞腔不是中心对称的。

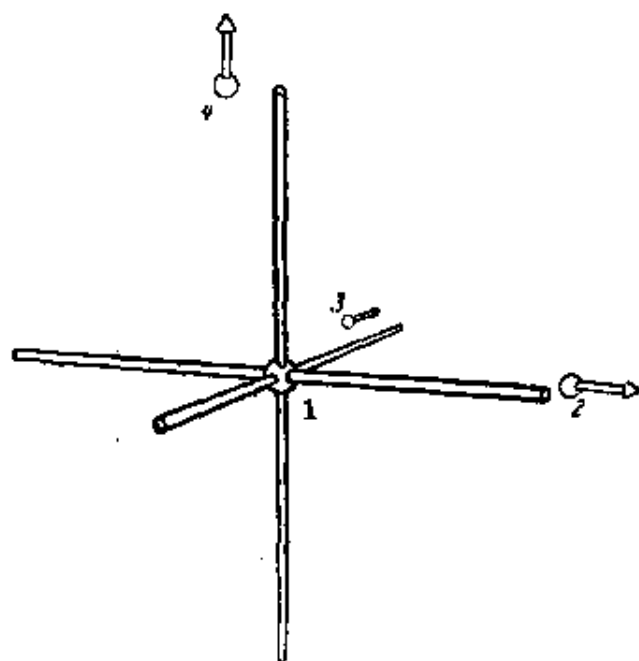


图 173b 16-胞腔

再說 8-胞腔的情形。在图 174a 中，延伸到无穷远的三个区域有同一形式。在图 174b 中，用箭头标出与图 174a 那一有限的立方体区域对应的各棱；这个区域还包括通过点 1 的各个有限的棱，但棱 1, 6 除外。

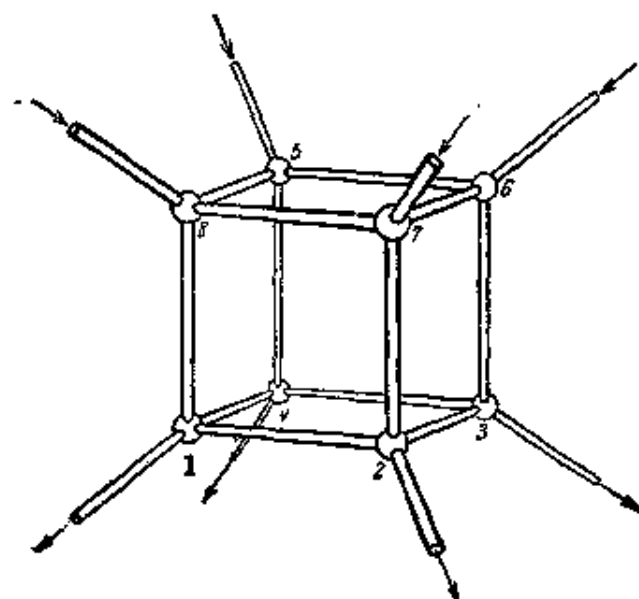


图 174a 8-胞腔

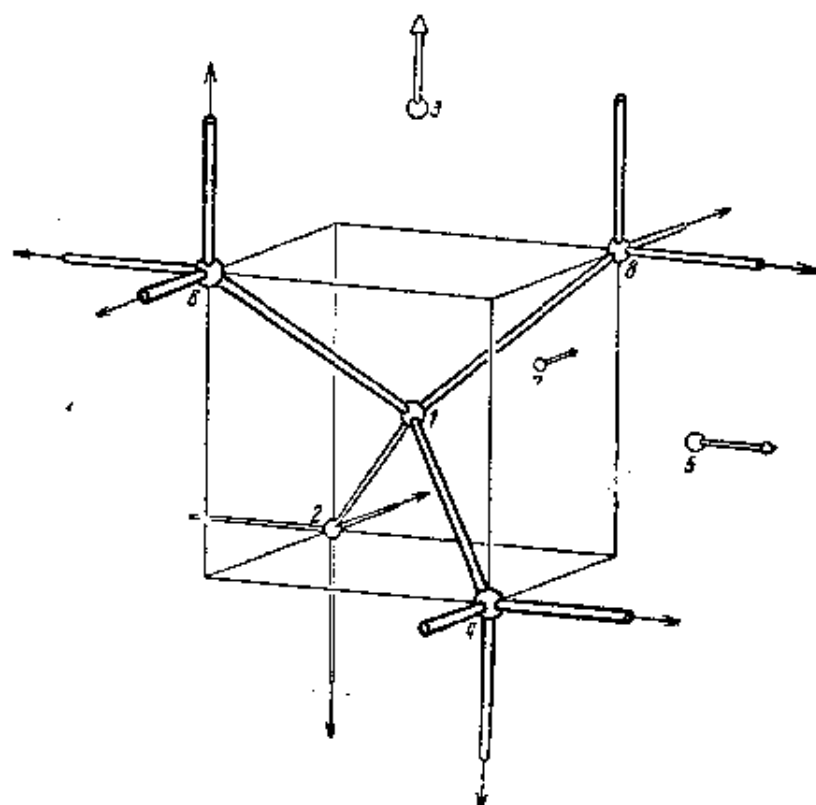


图 174b 8-胞腔

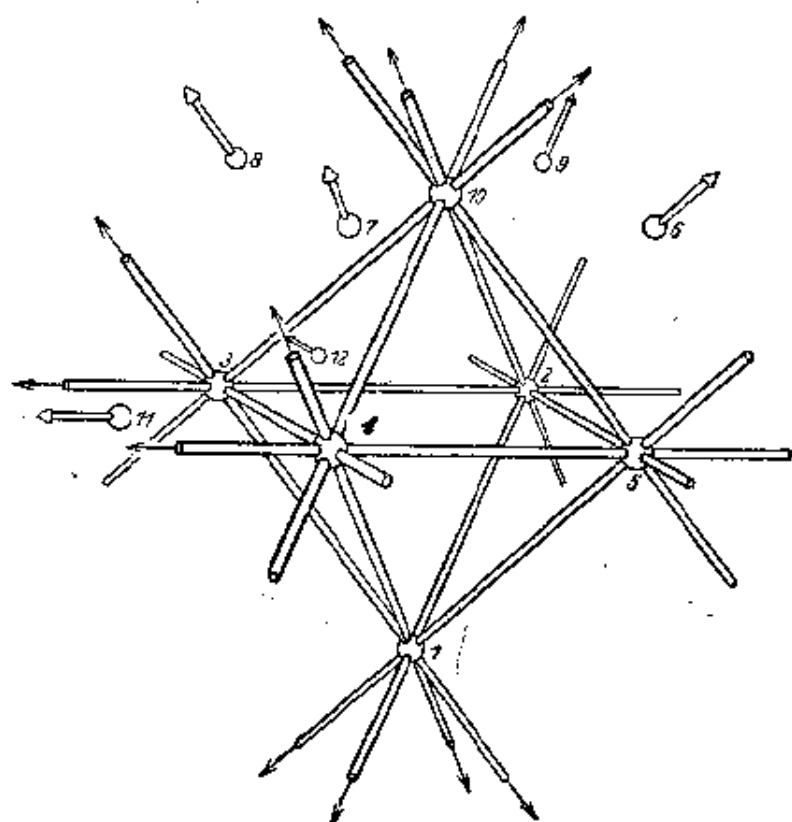


图 175

我們再應用上述兩種投影方法於 24-胞腔。圖形如圖 175 和圖 176 所示。這樣，我們得到把空間剖分為十二個八面體的一種方法。除如圖 175 上當中的一個八面體外，所有其餘的八面體都延伸到無窮遠。可以看到，圖 175 和圖 176 重新給出在上一節我們討

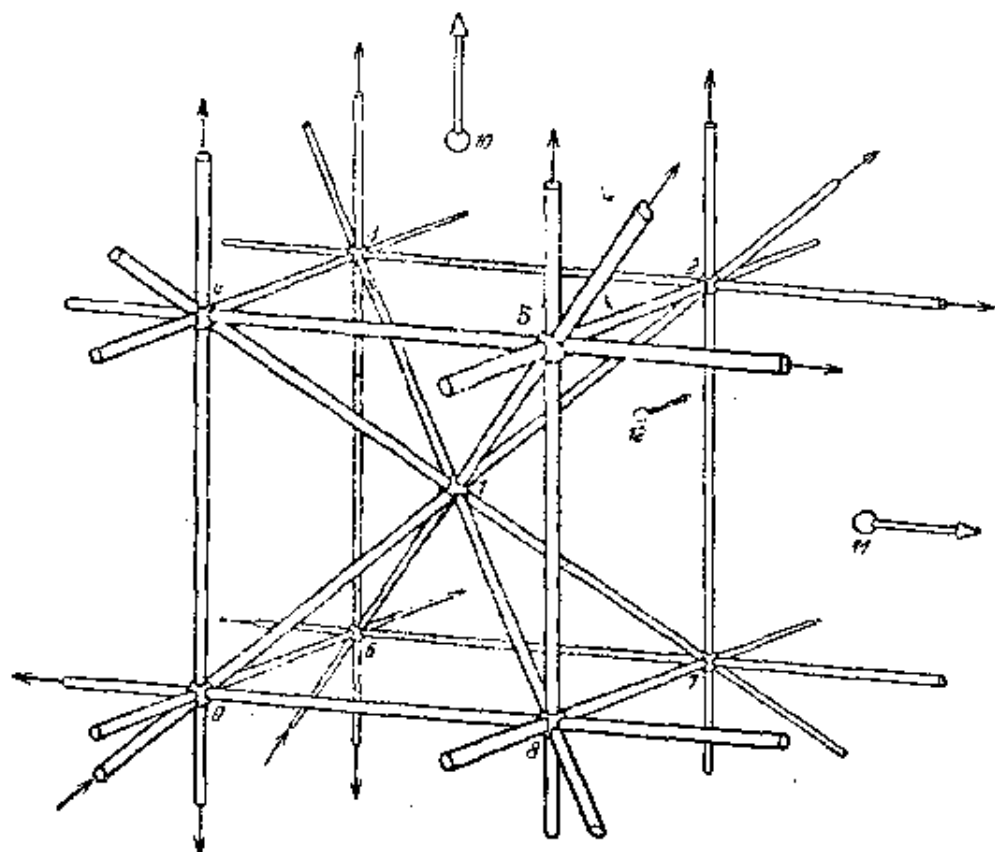


圖 176

論過的雷耶構形的兩種對稱形式^①。從圖 175 上的有限八面體可以看到構形的各平面既是十二個八面體的邊界平面又是它們的對稱平面。再進一步研究，可以發現其中的基本原理：一個完全四邊形劃分投影平面為三個四邊形和四個三角形（在圖 177 中，四邊形是 1, 2, 3；三角形是 I, II, III, IV）。在雷耶構形中的直線也是

^① 那里我們曾經看過，二圖形可以由對於一個球的配極變換互相轉化。現在又看到了二圖形是同一四維圖形的投影，每個圖形可以用移動三維象空間的方法變到另一個。

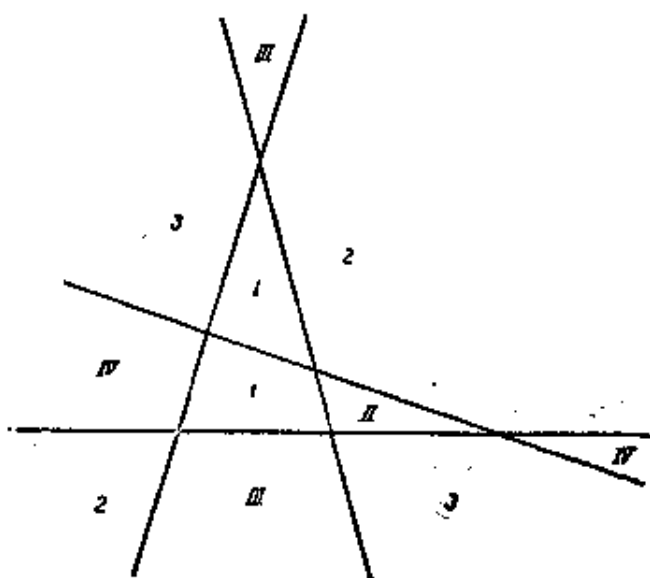


图 177

这样划分每个平面的，又因为八面体的面是三角形，面对称平面交八面体于四边形，由此可知，构形的每一平面是三个八面体的对称平面和 2×4 个八面体的公共边界面，但跟十二个八面体中的一个不相交。例如，在图 175 上，

无穷远平面是构形的一个平面，但八面体中有一个位于空间的有限部位^①。

图 176 比图 175 简单，因为在图 176 中只有两种不同类型的八面体（六个八面体与八面体 1, 2, 3, 4, 5, 10 合同，其余的六个与 2, 5, 6, 9, 10, 11 合同），可是在图 175 中有三种不同类型的八面体。一个八面体是正则的，另外的三个以无穷远平面作为对称平面（例如 1, 6, 7, 8, 9, 10），其余八个以无穷远平面作为边界面（例如 3, 4, 7, 8, 10, 11）。

① 八面体有三个通过中心且与八面体交于正方形的对称平面，与此相当，24-胞腔有十二个三维对称空间，这些对称空间通过胞腔的中心且与胞腔交于立方-八面体（立方-八面体如图 178 所示；在图 172 中也可看出有一个立方-八面体）。在我们所研究的投影中对称空间的投影，和通过中心的任何空间的一样，是一个平面。这些平面显然是雷耶构形中的平面。立方-八面体的三对对径正方形和四对对径等边三角形相当于雷耶构形中每一平面上的三个四边形和四个三角形。

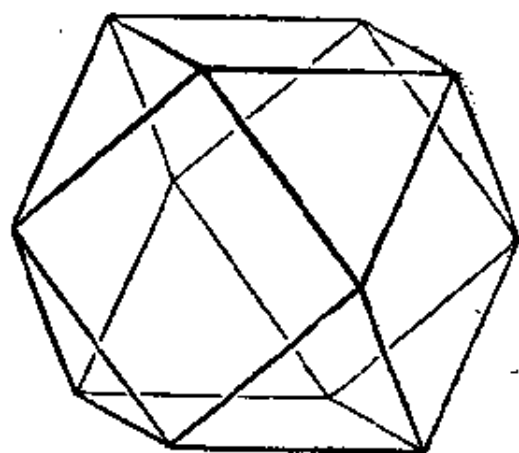


图 178

从构形的这种作法立刻得到上一节最后一段所作的断言：雷耶构形是正则的。

上面的讨论使我们想起把 n 维正则胞腔投射到维数最低的空间——即直线——上去。让我们研究一下，如何把 n 维立方体用垂直平行投影的方法投射到一个主对角线上去。这样的对角线的端点 A 和 B 投射到自己。命立方体其他顶点在 AB 上的象点从离 A 最近的一个象点起算，依次为 C_1, C_2, \dots 。从 A 出发的立方体的棱有 n 个，这 n 个棱跟 AB 作成相同的角度，因此这 n 个棱的端点都要投射到 AB 的 C_1 点上来。其次，立方体的每一个棱平行于通过 A 的一个棱，因此两邻点间的距离 $C_k C_{k+1}$ 永远等于 AC_1 ，所以是一常数。这样一来，主对角线被分为相等的线段。可以证明，恰好有 n 个这样的线段，而且 C_k 是 $\binom{n}{k}$ 个顶点的象，这里的 k 是 1 与 $n-1$ 之间的数，而 $\binom{n}{k}$ 是大家熟知的二项式系数的符号。因为，以 C_k 为象的顶点包括所有那些可以用 k 个但不能用少于 k 个立方体的棱与 A 相连的顶点，而且仅仅包括那些顶点，于是，由计算可知恰恰有 $\binom{n}{k}$ 个这样的顶点。就正方形和通常的（三维的）立方体来说，上述事实可以立刻证实。

§ 24. 几何学的枚举法

我们最后要研究的一种三维构形是施累弗利双六构形。由于研究这种构形而引出几何学上的一个特殊的方法——所谓枚举几何学。让我们先讲讲这种方法，因为一方面我们不愿意在讲双六构形时打断话头，一方面也因为枚举法本身很有趣味。

在平面上有无穷多的直线和无穷多的圆。为了描写平面上所有直线的繁多的程度，首先在平面上选好一个笛卡儿坐标系。这样一直线一般地就由直线与二坐标轴交出的截距（计其大小和符号）完全决定。因而除了下面就要说的一种情形外，在解析上一直

綫总用两个数来决定。同一个坐标轴平行的那些直綫，也可以用这种方法决定，即命无穷大作为它的一个截距。然而，通过原点的所有直綫，也只有这些直綫，不能以截距决定；这样的直綫，它們在二軸上的截距都相同，即零。

我們說，不通过原点的諸直綫，形成一个二参数族；这是說，族中的任一直綫以二数(族的“参数”)决定，而且参数的連續变化引起所决定的直綫的連續变化直綫。按照这个定义，則通过原点的諸直綫形成一个单参数族，因为这些直綫只用它們与一軸的交角即可决定。粗略一点說，我們往往設想一个含两个参数的族在加进一个单参数族后(可以連續地加入第一族內)，增大得不十分显著。在这种意义下，我們可以說在平面上的所有直綫的集合也是一个含两个参数的族。下面我們將看到建立这种观点的好处。

平面上的諸直綫，也可以用其他种种方法决定。例如用它与任一定直綫所成的角和它所通过的一点。因为須有两个坐标才能决定平面上一点，因此用这种方法描写直綫須有三个参数。不过，用来决定直綫的那一点可以在直綫上任意挑选，而且在一直綫上的所有点显然形成一个单参数族。如用两点定一直綫，也可以看到类似的現象。在这种情形下需要四个参数，但那个含二参数的点偶族只决定同一直綫。因而，为了求出参数的正确数目，必須在后面的例子里减去两个参数，或者在前面的例子里减去一个参数。这样就象用第一种方法决定时一样，平面上的直綫形成一个二参数族。这种方法在这里只是提一下，其实它可以用解析法精确地表述，同时还可以証明，一个图形参数的个数与参数的选法无关。借用符号 ∞ ，可以把这一类的叙述写得簡短些。我們說，一平面上有 ∞^2 条直綫，一直綫上有 ∞^1 个点，有 ∞^2 个点偶。这种枚举法有类似于一个数的幂被另一个幂去除的运算：要知道在一平面上直綫的准确“个数” ∞^2 ，我們只須把平面上的点偶的“个数” ∞^4

“除”以一直线上的点偶的“个数” ∞^2 。

让我们按照这个方法在平面上求出所有圆的繁多的程度。一个圆由其圆心和半径决定，亦即由三数决定。反过来，每个圆只对应一个这样的三数组。因此平面上含有 ∞^3 个圆。因为在平面上所有直线作成的族只有两个参数，而每一直线可以看作圆的极限情形，所以所有的圆和直线共同作成的族同样也有三个参数。这里所说的跟这事实一致：通过平面上的任意三点可作一圆或一直线。事实上，平面上有 ∞^3 个三点组，而同一曲线可由 ∞^3 个三点组决定。同样可以证明，在任意一个 n 参数平面曲线族中，总有一根曲线通过平面上任意给定的 n 个点，但是通过 $n+1$ 个任意的点的曲线，一般就不能从族中找出来。不过这句话必须将族中的极限情形也加进族中去，才能成立；这就好象要使圆和三点组一一对应，只有把作为圆的极限情形的直线也看做圆才有可能。如欲严格证明这些叙述，必须用解析和代数的方法，特别地，除了实元素之外，还须考虑虚元素。

让我们应用这种方法求出所有圆锥曲线的“个数”。一椭圆由二焦点(四个参数)和椭圆上一点到二焦点距离之常数和决定，就是说，由五个参数决定，而且每个椭圆只有一组这样的五个数。因此在一平面上共有 ∞^5 个椭圆。同理，可以证明在一平面上共有 ∞^5 个双曲线。椭圆也可由二轴之长和椭圆的中心以及长轴的方向来决定。一共也是五个参数。由此可知，一平面上所有的抛物线所成的族共有四个参数。因为根据第3页上的作图，知道运用极限过程可以从椭圆得到抛物线，在那里一个单参数椭圆族永远决定唯一的抛物线，而每个椭圆属于有限多的族即两个这样的族。

令椭圆的二轴长相等，就得到圆。在这里容易得出错误的结论，以为二轴等长，就应该有四个参数，因此在一平面上应该有 ∞^4

个圆,而不是我們已算出过的 ∞^3 个圆。要解释这个矛盾,只要注意二轴等长并不需要知道二轴的方向,因为一圆的任意一对垂直直径都可以当作椭圆的二轴的极限情形看待。

根据上面的讨论,还不能断定通过平面上任意五个点一定能作一椭圆。至少须在椭圆之外再加上椭圆的极限情形——即抛物线和圆——这个定理才可能是对的。而事实上,还应该加上双曲线。平面上所有的圆锥曲线的总体,也就是双曲线、抛物线、椭圆、圆、一对直线和一对重合的直线的集合,在枚举几何的意义下做成唯一族。按照以前讲过的,这个族应该有五个参数,因为每一种圆锥曲线属于含五个参数或少于五个参数的一定的族中。就所有的圆锥曲线的总体来说,的确有这样的定理成立:通过平面上任意五个点必有一个圆锥曲线。更仔细地研究,但这已不属于枚举几何的范围,可以知道,一个圆锥曲线由五个点唯一决定,如果五个点中任何四个都不在一直线上的话。若例外情形成立,显然圆锥曲线不是唯一决定的。因为通过一直线 g 上的四点和一个第五点 P ,可以引 ∞^1 个直线偶 g, h , 其中的 h 是通过 P 的任一直线,因此就有 ∞^1 个特别形式的圆锥曲线。倘若点 P 也在直线 g 上,则甚至可以引 ∞^2 个直线偶,因为这时直线 h 可以完全任意选择。

现在我们把枚举法应用到空间的图形。一平面在一定的空间坐标系中可由平面的三个截距决定,因此我们知道,在空间里一共有 ∞^3 个平面。但通过原点的平面是例外,此时平面只作成含两个参数的族。应用枚举法可以验证初等几何学中这一定理:通过空间任意三点必有一平面。事实上,在空间里有 ∞^3 个三点组,在每一平面上有 ∞^6 个三点组,因此空间三点组决定“ ∞^3/∞^6 ”个,即 ∞^3 个平面。

如果用二点来决定一直线,可知空间一共有 ∞^4 条直线,这是因为空间有 ∞^6 个点偶,一直线上有 ∞^2 个点偶。

一个球可由球心和半径决定。由此可知空间一共有 ∞^4 个球。如将作为极限情形的平面也加进来，则可用枚举法来验证这一个熟悉的定理：通过空间任意四点常可作一球或一平面。正象圆锥曲线的情形，球的决定不是唯一的，虽然当而且只当四点不在一直线上时它是唯一的。关于一般的情形，也有类似的限制。如果一个 n 参数曲面族规定得十分齐全（比如说，象平面上整个的圆锥曲线族那样而不是象椭圆族那样），那么通过空间的 n 个点总有族中的一个曲面。曲面不一定由 n 个点唯一决定。但是，对于“一般的位置”的 n 个点，这是说，假如这 n 个点不适合某种与所给曲面族有关的几何关系，曲面总是唯一决定的。

三条斜交的直线决定一个二阶直纹曲面。空间包含 $\infty^{4-3} = \infty^1$ 个三直线组。但因为在直纹二阶曲面上的每条直线是某一个单参数族中的一条，所以 ∞^3 个三直线组决定同一曲面。因此一共有 ∞^9 个二阶直纹曲面。

同理，一共有 ∞^9 个三轴椭球。因为已知三轴椭球的中心（三个参数），三轴之长（三个参数），长轴的方向（两个参数），和短轴在通过中心且垂直于长轴的平面上的方向（一个参数），则能作一椭球，而且只能作一椭球。

根据解析上的研究结果，我们知道一共有 ∞^9 个二阶曲面。对于这一族来说，有这样的定理：通过空间的任意九个点必有这个族的一个曲面。要使九个点决定的二阶曲面是唯一的，也就是说，要使各点的位置对曲面族来说是足够一般的，必须要求诸点不在一个四阶的空间曲线上（这曲线是一对二阶曲面的交线）；因为容易理解，在这样曲线上随便多少个点都不能唯一决定一个二阶曲面。

现在我们来表明下列事实是可信服的，即：在任一二阶曲面上有无穷多的直线。为此，我们从一个容易由二阶曲面的解析定义

推出的事实出发,这是指与一曲面交于三点的直线必全在这曲面上。显然在一二阶曲面上有 ∞^6 个三点组(在任一其他的曲面上也是如此)。现在选择那些共线的三点组。从枚举几何可推出有 ∞^4 个这样的三点组,就是说减少了两个参数。因为,为了表示三点中的一点与其他二点连线的结合关系必须有两个解析式。并且有一个一般定理:如果我们从一族元素中只选择适合一组 n 个独立关系的元素,则族中的参数减少了 n 个(所谓 n 个独立关系是说它们不得以个数少于 n 的等价的关系来代替)。因此在任意已给二阶曲面上应该有 ∞^4 个共线的三点组。前面曾经指出过,通过这样的三点组的直线应该完全在曲面上。但在一直线上有 ∞^3 个三点组,所以在二阶曲面上的所有共线三点组必在曲面上的 ∞^1 条直线上。在椭球面上,在椭圆抛物面上,在双叶双曲面上,这些直线是虚的。

末了,我们讲一点关于三阶曲面的事项,因为三阶曲面对于下一节要讲的施累弗利双六构形的性质有密切关系。在解析上,一个三阶曲面在笛卡儿坐标系之下用三次方程来描写。我们知道,包含三个未知数的一般三次方程有二十个系数,这些系数由其所属曲面决定,但可差一公因子。因此可知共有 ∞^{19} 个三阶曲面,而且通过空间任意选出的十九个点必有这样的一个曲面。不过这里必须把某些退化情形也包括到三阶曲面族内,例如把二阶曲面和平面一起看作是三阶曲面。

一般地说,一直线与一个三阶曲面交于三点;如果交于四点,则直线必完全在曲面上。这容易从曲面的方程为三次方程而推知。下面我们要用枚举法表明最一般的三阶曲面只能包含有限条直线。在任一曲面上有 ∞^8 个四点组。要保证这样的四点组在一直线上,须有四个条件——要使第三第四两点在通过前二点的直线上,各须两个条件。因此在一般的三阶曲面上共有 ∞^4 个共

綫的四点組。包括这样的四点組的任一直綫必完全在曲面上,并且包含 ∞^4 个其他的这样的四点組。因此如果在一曲面上有无穷多的直綫存在,則在該曲面上将会出現比 ∞^4 更多的共綫的四点組。

在三阶曲面中也有大量的直綫曲面。这样,这些曲面包含 ∞^5 或更多的共綫四点組。据此三阶的直綫曲面方程應該具有这样特殊的性質:这个方程和四点共綫的四个条件一起可以用較少的等价方程組来代替。可以証明,只有三阶方程的二十个系数适合某特殊关系时,这样的简化才有可能。从这里可看出,一般的三阶曲面至多包含有限条直綫这句话是对的^①。

仿照上述枚举法可以証明,高于三阶的曲面一般不再包含直綫。

§ 25. 施累弗利双六构形

我們先看几个关于空間直綫可能位置的简单的情形。三条不共面的直綫 a, b, c 决定一个双曲面 H 。一般地,一条任意的第四条直綫 d 与 H 交于两点,虽然也可能它与 H 相切或者在 H 上。在一般的情形下, d 和 H 的每一交点必在这样的一条直綫上,这条直綫在 H 上,但不属于 a, b, c 所在的族,因此必与 a, b, c 相交。反之,每条跟 a, b, c 和 d 相交的直綫必在 H 上,因而必通过 d 和 H 的一个交点。这样看来,在一般情况下与已知四条直綫相交的直綫有两条,而且不多于两条。在 d 和 H 相切的情形,則只有一条直綫(重合的)与 a, b, c, d 相交。另一方面,如果有两条以上直綫与 a, b, c, d 相交,則 d 必在 H 上,因而有无穷多条直綫与 a, b, c, d 相交。在这种情形下,我們說,这四条直綫处于双曲面位置。

^① 例如,在曲面 $xyz=1$ 上就没有一条通过曲面上有限点的直綫。

現在我們來作施累弗利双六构形。从任意一条直綫 1 开始。作三条相互斜交的直綫与 1 相交, 这三条直綫我們叫做 $2'$, $3'$, $4'$ (图 179), 其理由由下文自然明白。其次, 再作另一直綫 $5'$ 与 1 相交, 使 $5'$ 对于 $2'$, $3'$, $4'$ 有最一般的位置: $5'$ 与 $2'$, $3'$, $4'$ 的每一个都不相交, 而且除了 1 之外还恰有一直綫与 $2'$, $3'$, $4'$ 和 $5'$ 相交, 命此直綫为 6。最后过直綫 1 上一点作一直綫 $6'$ 使它既与 6 不相交, 也与 $2'$, $3'$, $4'$, $5'$ 不相交。而且还要如此选择 $6'$, 使四直綫組 $2', 3', 4', 6'$; $2', 3', 5', 6'$; $2', 4', 5', 6'$; $3', 4', 5', 6'$ 有最一般的位置。如此除了 1 外恰有一条与 $2', 3', 4', 6'$ 相交的直綫, 即 $5'$ 。直綫 4, 3, 2 的决定方法与此相仿 (例如 4 是与 1 不同, 并与 $2', 3', 5', 6'$ 相交的直綫, 等等)。这样就得到如图 179 (示意图) 表示的結合体系。由于直綫 $2', 3', 4', 5', 6'$ 的选择, 容易看出, 再沒有别的結合关系了。現在我們来看直綫 2, 3, 4, 5。今証明这四条直綫不能处于双曲面位置。假如它們处于双曲面位置, 那么与其中三条相交的任一直綫也必与第四条相交, 特別地, 从我們的示意图来看, 这話也必适用于直綫 $2', 3', 4', 5'$ 中的每一条。于是上面所說的四条直綫也将处于双曲面位置, 这跟我們的作图矛盾。所以最多有两条与 2, 3, 4, 5 相交的直綫。但按照我們的作图, 2, 3, 4, 5 都与 $6'$ 相交。今命 $1'$ 表示与 2, 3, 4, 5 相交的

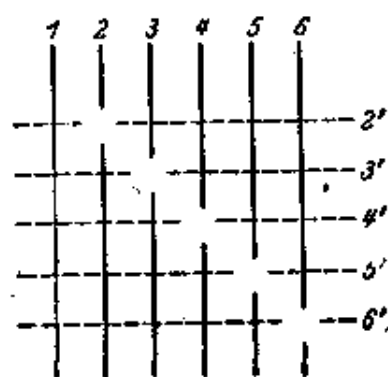


图 179

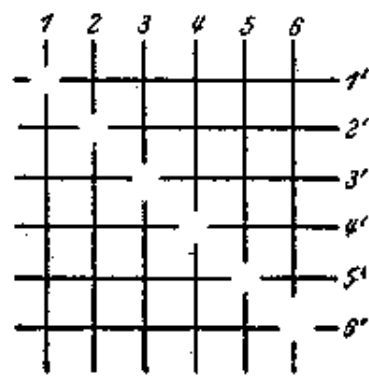


图 180

第二条直线；我們說， $1'$ 与 $6'$ 不重合，而与 6 相交。在証明这句话（下面即將証明）以前，我們可以把示意图 179 扩充成图 180 那样。最后这个示意图代表双六构形。立刻可以看出，我們所講的正是由点和直线組成的正則构形，其符号为 $(30_2, 12_5)$ 。从一个立方体的六个面上每六个一組的直线当中适当地挑选一直线，可作出特別清楚而又对称的双六构形。排列的情形从图 181 上看是一目了然的（再参看第 94 頁图 102）。

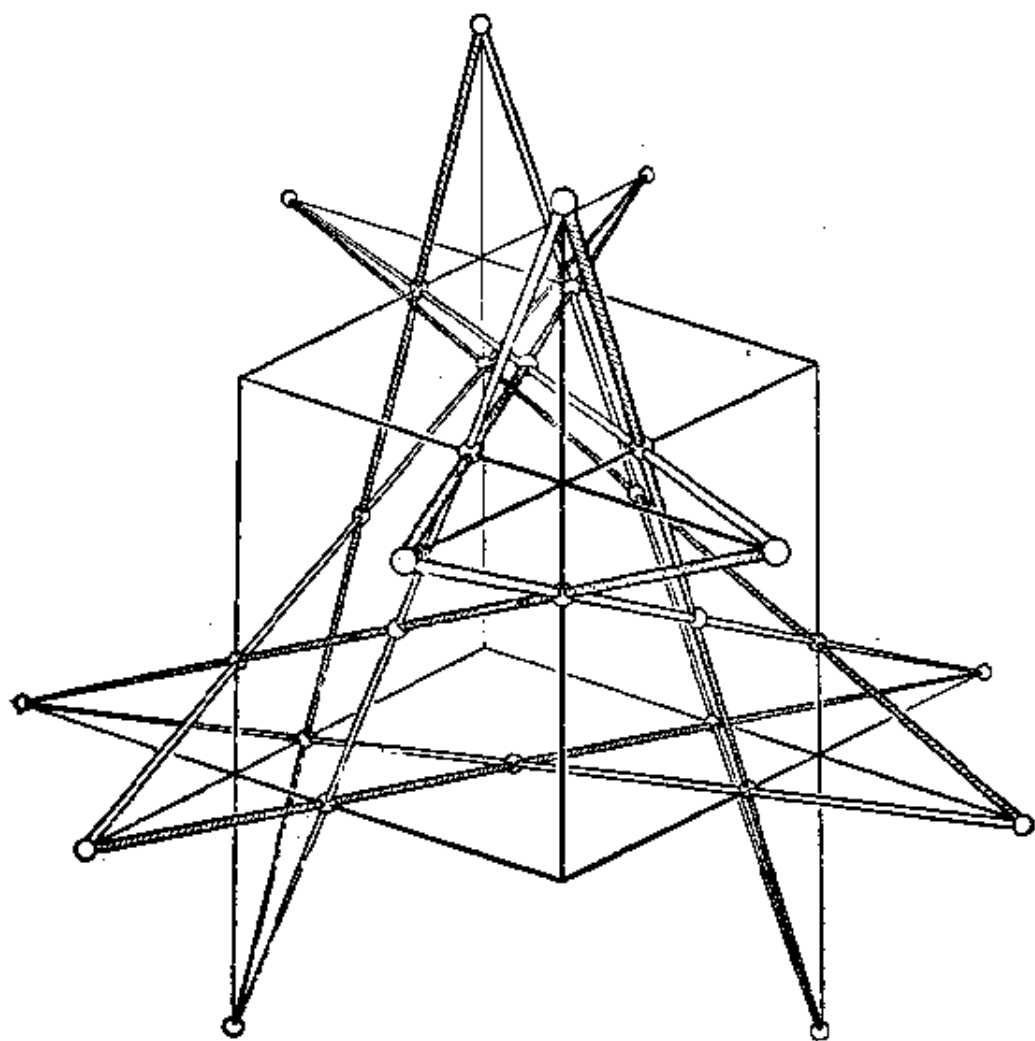


图 181

現在我們証明方才所說的断語：必有一条不同于 $6'$ ，但与 $2, 3, 4, 5$ 相交的直线 $1'$ ，而且 $1'$ 与 6 相交。姑假定第一部分已經

証明，以此为根据来証明 $1'$ 与 6 相交。为此，我們在直綫 1 上选出四点，在直綫 $2'$ 到 $6'$ 上各选出三点，如此一共选出十九个点。不过須注意这些直綫的交点不要与选出的这十九点相重合。从上节的論断我們知道，这十九个点决定一个三阶曲面 F_3 。因为 F_3 与直綫 1 已經有四点相同，所以一定包含这条直綫。其次， F_3 与直綫 $2'$ 到 $6'$ 各有四点相同，这四点原先选好的三点和跟这三点不同的直綫与 1 的交点。由此看来，曲面 F_3 也包含直綫 $2'$ 到 $6'$ 。由此又可以推出， F_3 也包含直綫 2 到 6 ，因为每条直綫与曲面上的四条直綫相交。最后，由于同样理由， F_3 也包含 $1'$ 。今若假定 $1'$ 与 6 不相交，我們考虑同 $5'$ 一样与 $2, 3, 4, 6$ 相交的直綫 g 。也象作 $1'$ 时一样，暂时除掉 g 与 $5'$ 重合的情形。 g 不能与 $1'$ 重合，因为我們假定 $1'$ 与 6 不相交。由于 g 与 F_3 上的四条直綫相交，即与 $2, 3, 4, 6$ 相交，所以 g 本身也在 F_3 上。根据我們的作图，直綫 $g, 1', 5', 6'$ 都与 $2, 3, 4$ 相交，因而这四条直綫处于双曲面位置。于是对应的双曲面的全部必为 F_3 的一部分；这可以直接从这件事推知：与 $g, 1', 5', 6'$ 相交的任一直綫必在 F_3 上，而所有的这样的直綫盖满双曲面。

現在容易用代数方法証明：一个包含二阶曲面全部的三阶曲面必然由二阶曲面和一平面組成。这是說，如果 $G=0$ 和 $H=0$ 分别是三阶曲面和二阶曲面的方程，則三次多項式 G 总可以被二次多項式 H 整除，而这只有当 G 是 H 和一綫性式的乘积时才有可能。但是如果說由十九点决定的曲面 F_3 一定是这一类的一个退化情形，便要得出矛盾。因为，直綫 $2', 3', 4', 5', 6'$ 中沒有四条处于双曲面位置，因此至多有三条落在属于 F_3 的双曲面上。于是至少有两条落在組成 F_3 的另一个部分的平面上，所以这两条直綫将有一交点，这跟我們的作图发生矛盾。

如果我們考虑前面除掉不算的 $1'(2345)$ 同 $6'$ 重合或者 $g(2346)$

同 $5'$ 重合的情形, 証明仍然无大更动。在这种情形下也可以断定由 2, 3, 4 决定的双曲面必为 F_3 的一部分。但是要証明从一般的情形推出这种情形的极限过程, 就非用代数方法不可。

我們在証明双六构形的最后結合关系(1'6)时, 曾引用过一个有趣的事实: 永远有包含双六构形的一个三阶曲面 F_3 。不难把也在 F_3 上的另外几条直綫补充到这个构形上去。比方說, 考虑由相交二直綫 1 和 $2'$ 决定的平面和由 $1'$ 和 2 决定的平面, 并命(12)代表这二平面的交綫。那末(12)与完全在 F_3 上的四直綫 1, $1'$, 2, $2'$ 相交; 因此(12)也在 F_3 上。对于双六构形有和(12)一样的关系的一共有十五条直綫, 因此这十五条直綫都在 F_3 上。因为从 1 到 6 六个数字里每次取两个应有 15 种不同的取法。由此我們得知在 F_3 上一共有 $2 \times 6 + 15 = 27$ 条直綫。

在我們得到的这种扩大的构形上的直綫当中还存在别的結合关系。事实上可以証明, 那些用两个数目表示的直綫所成的直綫偶, 如果它們的記号中的两个数目都不相同, 那么它們一定相交, 而且也只有这些直綫偶, 才有交点。証明可以根据如同証明 $1'$ 和 6 相交时所用的概念。以下我們只給出証明的梗概。由于对称的关系, 只須証明(12)与(34)相交即可。为此, 我們考虑三条直綫 1, 2, (34), 并注意这三条直綫是同 $3'$ 和 $4'$ 相交的。假定(12)与(34)不相交, 則必有一直綫 a 与四直綫 1, 2, $1'$, (34) 相交, 而且还有一直綫 b 与 1, 2, $2'$, (34) 相交。 b 必与 a 不同, 因为假如它們表示同一直綫, 它們将与四直綫 1, 2, $1'$, $2'$ 相交, 因而必与(12)重合, 这样(12)势将与(34)相交, 这与方才假定(12)与(34)不相交矛盾。同样, a 和 b 必与 $3'$, $4'$ 不同。因为, 假如比方 a 与 $3'$ 重合, 則 $3'$ 也将与 $1'$ 相交, 这跟我們的作图矛盾。因此 a 和 b , 也象 $3'$ 和 $4'$ 一样, 都在 F_3 上。又因为这四条直綫都与三直綫 1, 2, (34) 相交, 所以四直綫处于双曲面位置。但是我們已經証明过, F^3

不能包含一組处于双曲面位置的四直綫。由此可見(12)必与(34)相交。同理,(12)也与(35),(36),(45),(46)和(56)相交。因为(12)还与1, 2, 1', 2'相交,可見(12)以及其他用二不同数字表示的任一直綫,都与扩大的构形的十条直綫相交。这句话对于双六构形本身上的直綫也是对的。例如,1与2'到6'的五条直綫相交,也与(12),(13),(14),(15),(16)五条直綫相交。这样說来,由 F_3 上27条直綫及其交点組成的构形,其符号应为 $(135_2 27_{10})$ 。恰有135个点这件事是由关系式 $135 \times 2 = 27 \times 10$ 得来的。除此之外,还可証明构形是正則的。因而可以从这个构形用許多种不同的方法选取双六构形。如果加进构形中相交直綫所决定的各平面,我們便可以利用結合关系表格来驗證每个这样的平面必包含构形的第三条直綫。这个結果可以用下述简单的代数論点来解釋。任一平面必与 F_3 交于一条三阶的曲綫。如果平面包含构形中的两条直綫,这条三阶曲綫也应该包含这两条直綫,由此应用代数方法可以証明曲綫必由此二直綫和第三条直綫組成。不难算出,二十七条直綫中的每一条有五个这样的平面通过,而且一共有四十五个这样的平面。由此得知此构形不是自对偶的,虽然建立在二直綫的对偶不变的結合关系上的双六构形是自对偶的。双六构形容易加以补充使成为上面作出的构形的对偶构形。为此,我們必須另以直綫組 $[ik]$ 来代替直綫組 (ik) ,其中例如[12]通过1与2'的交点和1'与2的交点。这样得到的构形,其符号应为 $(45_3 27_5)$ 。

讓我們回到有二十七条直綫的原来的构形上去。我們应用枚举法显示,在任意一个三阶曲面 F_3 上必有这样的一个构形 K 。在这里,也如同其他枚举几何的論証中一样, K 的一部分是虛的或退化的情形也要計入。証明从計算所有的双六构形所成的族繁多的程度开始。按照我們的作图法,直綫1的选择是完全任意的,这

就有了四个参数。直线 1 与直线 2' 到 6' 的交点依赖于另外五个参数；1 与 2' 到 6' 的交点既定，则 2' 到 6' 诸直线各可取 ∞^2 个位置，这就有了十个参数。因为直线 1, 2', 3', 4', 5', 6' 唯一地决定双六构形，所以一共有 ∞^{10} 个双六构形 ($19 = 4 + 5 + 10$)。构形 K 族也有这样多的参数。因为，每一个这种类型的构形决定于其中的一个双六构形，而且在任一构形 K 里显然只有有限个数的双六构形。但是我们已经给出了通过任意给定的 K 作 F_3 的方法，因此可知，用这种方法作出的曲面 F_3 族或者包含 ∞^{10} 个曲面，或者还要少些，如果是少些的话，那末在 F_3 上至少有 ∞^1 个构形 K ，也就是 F_3 必须是三阶的直纹曲面。但是可以证明，三阶直纹曲面的个数少于 ∞^{18} ；因此，所作出的 F_3 至少应该包含 ∞^2 个双六构形。由于我们已经证明 F_3 不包含双曲面，又因为高于二阶的任一直纹曲面只能包含一个直线族，这样的 F_3 不可能含有 ∞^3 个双六构形。因此，在一般的情况下曲面不能是直纹曲面，可见我们的作图至少包括了 ∞^{19} 个曲面。另一方面，在上一节我们曾经讲过，只有 ∞^{19} 个三阶曲面。据此，再考虑到图形的代数性质，每一个三阶曲面包含构形 K 的断言的正确性就可以严格地加以论证。