序　言

为中譯本而作

1936—40年間我在沙拉托夫大学与莫斯科大学教过这份講义，此后为了几次出版曾修訂多次（第一版是1939年出版）。在这些修訂工作中，A. M. 巴拉班諾夫(Парабанов)、A. Д. 米希奇斯(Мышкис)及O. A. 阿列依尼克(Олейник)給了我很大的帮助。

在这講义及在以后为了出版的修訂工作中，我力求选擇常微分方程論中的最主要的与最基本的部分。

O. A. 阿列依尼克及A. Д. 米希奇斯編輯了習題安排在本書之中。这往往是一些比較难解的習題，因此讀者如果不能很容易地解决这类習題，也无須乎惶惑不安。这类習題大大地扩大了本書的基本內容。

我極重視，我的書被譯成偉大的中國人民的語言，如果这書对于优秀的中国青年起作用的話，我是很高兴的。

И. 彼得罗夫斯基

1953年4月2日于莫斯科

第一版序言

这个講义我曾在1936—1937学年度在沙拉托夫国立大学和在莫斯科国立大学講授过（在莫斯科国立大学講授时曾稍加修改）。我不想叙述尽可能多的能用于各种特殊类型微分方程的积分方法；用俄文写的教程中已經有了充分完备地叙述了这些方法

的教程。我也不打算叙述常微分方程理論的各部分，在整个理論中我只选擇了几个題目，而力求把它們叙述得尽可能地完全而且严格，如同現在大多数数学学科中所叙述的一样。我沒有假定我的学生知道分析函数的理論，所以对于学習本書所必須有的关于这个理論的知識，我或者是加以解釋，或者是确切地指出在那里可以找到它們。

我应該感謝巴拉班諾夫(А. Н. Барабанов)，因为他的笔記是叙述前 21 节的基础。并应感謝斯捷帕諾夫(В. В. Степанов)、加里別尔(С. А. Гальперн)及米希奇斯(А. Д. Мышкис)，因为他們审查了我的全部稿子，并作了一系列宝貴的指示。

依·彼得罗夫斯基

一九三九年

第四版序言

当准备这版本时，阿列依尼克与米希奇斯給我很大的帮助。特别是米希奇斯在这版本中添写了有关却潑雷金定理的一节。阿列依尼克与米希奇斯增添了一些新習題。同以前一样，这些習題大多数都不是簡單的練習。这些習題的大部分扩充了本書的基本內容，可用于課程作业。

依·彼得罗夫斯基

目　录

第二部分 常微分方程組

第一部分　含一个未知函数的一阶微分方程式

第一章　一般概念

§1. 定义　例題

一自变数 x，和它的函数 y 以及这个函数的导函数 $y', y'', \cdots, y^{(n)}$ 間的形状如下的关系式：

$$F(x, y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0,$$

叫做 n 阶常微分方程式。設用一个 x 的函数 $\varphi(x)$ 代替上式中的 y，用 $\varphi'(x)$ 代 y'，…，用 $\varphi^{(n)}(x)$ 代 $y^{(n)}$，若上式变成一个恒等式，則函数 $y=\varphi(x)$ 叫做这微分方程式的解。如不特别声明，本書中所考虑的数量仅取实数（有限）值，而所考虑的函数都是單值的。

可見在常微分方程式中，未知函数仅是一个自变数的函数。与这相反，在偏微分方程式中的未知函数，則是几个自变数的函数。以后凡說到微分方程式，如非特别申明，都指常微分方程式而言。

許多自然科学問題都可引到常微分方程式。現在用下面两个例題来說明这一事实。

例 1. 設一点沿 Ox 軸运动，其速度 $f(t)$ 为已知。設 $f(t)$ 是連續的有界函数，此外并假定当 $t=t_0$ 时，这点之横坐标为 x_0。試求該点运动的規律，这就是說，求該点之横坐标与时間的函数关系。

这一問題能化到求微分方程式

$$\frac{dx}{dt}=f(t)$$

中当 $t=t_0$ 时的值变为 x_0 的那个解。由积分学就知道这解可用公式

$$x(t)=x_0+\int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau$$

得出。

例 2. 已知鐳的分解的速率与剩余的鐳的質量成正比例。設已知剩余的鐳在 t_0 时为 R_0 克，試求在任何时間 t 鐳的質量。

用 $c(c>0)$ 表比例常数，則上述問題可变成求微分方程式

$$\frac{dR}{dt}=-cR$$

的一个解，这解当 $t=t_0$ 时的值等于 R_0。这样的解就是函数

$$R=R_0e^{-c(t-t_0)}.$$

由上面两个例題知道，許多个函数能同时滿足同一个微分方程式。所以要确定这未知函数，不但要先知道它所滿足的微分方程式，还应該預先指定当自变数取一个定值时，未知函数所取之值（开始值）。以上两个例題中，开始值都唯一地决定了微分方程式的解。

微分方程式理論的基本問題是：求已給微分方程式的所有的解，并且研究这些解的性質。求一个微分方程式的解，叫做积分这个微分方程式。

§ 2. 几何解釋　問題的推广

我們現在来研究下列形狀的微分方程式：

$$y'=f(x, y), \tag{1}$$

这里 $f(x, y)$ 是确定于 (x, y) 平面某一个区域 G[1] 上的函数。对这区域上任一点，方程式(1)規定其解的圖綫在这点的切綫斜率。設在 G 的每一点 (x, y) 用一綫段表示由 $f(x, y)$ 的値所定出的切綫方向[2]，則得一方向場；而前述求微分方程式的解的問題，卽可叙述为：求一曲綫 $y=\varphi(x)$，使这曲綫在每一点都有由方程(1)規定的切綫[我們也時常这样說：这曲綫的方向由方程(1)規定]。

从几何观点来看，問題这样提法，有下列几个不够自然的情况：

1）要求曲綫在区域 G 的任一点 (x, y) 之斜率等于 $f(x, y)$，因而我們須将平行于 Oy 軸的方向除外。

2）我們只考慮 x 的單値函数的圖綫。因此我們不考慮与一垂直于 x 軸的直綫有两个或两个以上的交点的曲綫。

所以我們将稍为推广上述問題的提法，就是：我們准許这方向場中在某些点的方向可以平行于 Oy 軸。在这些点上，以 Ox 軸为标准的斜率虽无意义，但可采用以 Oy 軸为标准的斜率。因此，除微分方程式(1)外，我們同时还考慮方程式

$$\frac{dx}{dy}=f_1(x, y), \tag{1'}$$

当 $f(x, y)\neq 0$ 时，这里的 $f_1(x, y)=\dfrac{1}{f(x, y)}$；若第一方程式无意义，而第二个方程式有意义，我們就用第二个方程式。在这里我們将假定：在 G 的每一点上这两个函数 f 与 f_1 中至少有一个是有

---

[1] 区域 G 是指具有下列两个性質的非空点集：(1) G 之任一点都是 G 的內点，卽此点有一鄰域完全屬于 G；(2) 点集 G 是連通的，卽 G 之任意两点都可用有限条完全屬于 G 的直綫段所組成的折綫連接起来。

所謂一区域的界点，就是这区域中的点的不屬于这区域的極限点。所有的界点合稱叫这区域的边界。

一区域 G 連同它的边界叫做閉区域 $\bar{G}$（又名閉包）。

[2] 我們不区別一綫段的两个方向。

意义的；在而且仅在 f 无意义的点上，方有 $f_1=0$，在而且仅在 f_1 无意义的点上，方有 $f=0$。于是我們可将积分微分方程式(1)及(1′)的問題改述如下：在区域 G 内求所有的曲綫[①]，使曲綫上任何一点的方向，都由方程式(1)或(1′)[②] 所規定。这些曲綫叫做方程式(1)与(1′)的积分曲綫，也就是由(1)及(1′)規定的方向場的积分曲綫。显然方程(1)的解的圖綫都是方程式(1) 及 (1′) 的积分曲綫，但并非方程(1)、(1′)所有的积分曲綫，都是方程(1) 的解的圖綫。以后如已明白指出：

$$f(x, y)=\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

则与方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x, y)}{N(x, y)} \tag{2}$$

在一起的方程式

$$\frac{dx}{dy}=\frac{N(x, y)}{M(x, y)}=f_1(x, y) \tag{2'}$$

将不再写出。

有时我們把这样的方程写为关于 x 与 y 比較对称的形状如下：

$$M dx-N dy=0. \tag{3}$$

在两个函数 $M(x, y)$与 $N(x, y)$ 都有意义而且两个函数中至

① 当 t 在某一区間(a, b) 内取各值时，由方程 $x=\varphi(t)$，$y=\psi(t)$ 所定出的点(x, y)的集合叫做曲綫；这里的 a 可为 $-\infty$，b 也可为 $+\infty$。我們更假定 $\varphi(t)$与 $\psi(t)$ 都有連續导函数，且恒有 $\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)>0$。如此，則此曲綫上一点 $x_0=\varphi(t_0)$，$y_0=\psi(t_0)$ 附近的一段若不能看作以 x 为自变数的連續可微的函数 $y=y(x)$的圖綫，就可看作以 y 为自变数的連續可微的函数 $x=x(y)$ 的圖綫。因为假定 $\psi'(t_0)$ 与 $\varphi'(t_0)$ 不会都等于0，編使 $\varphi'(t_0)\neq 0$，于是由于 $\varphi'(t)$ 的連續性，$\varphi'(t)$ 在某一区間 $[t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon]$ 内必保持一定的符号。所以对 t 的这些值必可自 $x=\varphi(t)$ 單值的解出 t，設由此得 $t=\lambda(x)$，把它代 $y=\psi(t)$，即得 $y=\psi[\lambda(x)]$，这就是説 y 是 x 的函数。

在这曲綫概念的定义中，我們不但預先假定了方程的解的可微性，而且假定了它的連續可微性。在本書中只考虑这样的解。

② 有时方向場內不仅只在 G 的内部給定，也在其边界的某一部分或全部边界上給定，这时积分曲綫則不仅經过 G 的内部，也經过它的边界的某些部分了。

少有一个不等于零的区域上，方程(3)的方向場是确定的。

例 1. 方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x} \qquad (4)$$

除原点以外，处处規定了方向場。这方向場如圖 1 所示。任一如此定出的方向都經过坐标原点。显然，对任何一数 k，函数

$$y=kx \qquad (5)$$

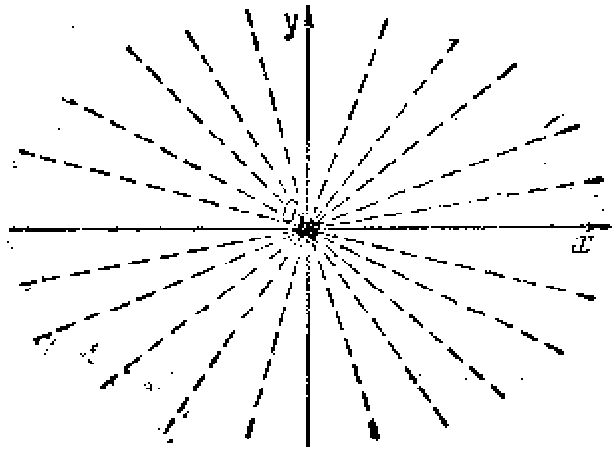

圖 1

都是方程式(4)的解。这方程式所有的积分曲綫都可用关系式

$$ax+by=0 \qquad (6)$$

表出，此处 a, b 是两个不同时为 0 的任意常数。Oy 軸是其积分曲綫，但不是解的圖綫。

因方程式(4)在坐标原点不能規定方向場，所以直綫(5)与(6)上应当将原点去掉才是积分曲綫。所以更正确的說，方程(4)的积分曲綫不是那些經过原点的整条直綫，而是那些从原点出發的"半直綫"(原点不計算在半直綫之內)。

例 2. 方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y} \qquad (7)$$

除原点外，处处規定了方向場，如圖 2 所示。方程式(4) 及 (7)在同一点(x, y)上所規定的两方向互相垂直。显然，一切以坐标原点为圆心的圓都是方程(7)的积分曲綫。而函数

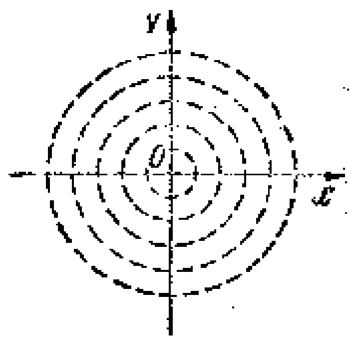

圖 2

$$\left.\begin{array}{l} y=+\sqrt{R^2-x^2} \\ y=-\sqrt{R^2-x^2} \end{array}\right\}(-R<x<+R)$$

及

都是方程(7)的解。

现在规定下列几个名詞的定义：

1．为簡便計，有时用"經过点(x_0, y_0)的解"这一句話来代替"經过点(x_0, y_0)的解的圖綫"。

2．若适当地选擇一个函数$\varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n)$中的常数$C_1, C_2, \cdots, C_n$，能使它变成已給微分方程式的圖綫在区域$G$內的任一个解，則这函数叫做这微分方程式在区域$G$的通解。

3．方程$\Phi(x, y)=0$的圖綫若是微分方程式(1)、(1′)的积分曲綫，則$\Phi(x, y)=0$叫做微分方程(1)、(1′)的一个积分。

4．若适当地选擇常数$C_1, C_2, \cdots, C_n$之值代入方程

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n)=0$$

后，能自这方程$\Phi=0$得到已給的微分方程的在区域G內任一积分曲綫，則$\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n)=0$叫做这微分方程在区域$G$內的通积分①。

例如，在例題1中，(5)式是方程式(4)在除去Oy軸的整个(x, y)平面上的通解，而(6)式是这方程式在除去坐标原点的整个(x, y)平面上的通积分。同样在例題2中，函数

$$y=+\sqrt{R^2-x^2}$$

是在整个的半平面$y>0$內的通解；而

$$x^2+y^2=R^2 \tag{8}$$

是这微分方程式把坐标原点除外的整个(x, y)平面內的通积分。方程式(4)除了积分曲綫(6)以外，沒有其他积分曲綫，而方程(7)除了积分曲綫(8)外，亦沒有其他积分曲綫。这一事实将于§5中証明之。

① 在数学文献中还有关于通解和通积分概念的別的定义。

习 題

1. 平面上何种区域沒有边界?

2. 繪出下列方程式的积分曲綫:

а) $\frac{dy}{dx}=\frac{xy}{|xy|}$, б) $\frac{dy}{dx}=\frac{|x+y|}{x+y}$, в) $\frac{dy}{dx}=-\frac{x+|x|}{y+|y|}$,

г) $\frac{dy}{dx}=\begin{cases}0 \text{ 当 } y\neq x \text{ 时},\\ 1 \text{ 当 } y=x \text{ 时},\end{cases}$ д) $\frac{dy}{dx}=\begin{cases}1 \text{ 当 } y\neq x \text{ 时},\\ 0 \text{ 当 } y=x \text{ 时}.\end{cases}$

并指出这些方程在什么区域上能定出方向場。

3. 設給有曲綫 $x=\varphi(t)$, $y=\psi(t)$, $a<t<b$, 而 $\varphi(t)$及 $\psi(t)$滿足第 4 頁脚注 1 中的条件。設 $a<a'<b'<b$, 求証:

а) 可以把閉区間 $a'\leqslant t\leqslant b'$分成有限个互相連接的区間,使这曲綫对应于每一个这样的区間内的一段是一个有連續导数的單值函数 $y=y(x)$的圖綫,或者是同样性質的函数 $x=x(y)$的圖綫。

б) 有这样的常数 $\varepsilon>0$, 使对于所有的 $t'(a'\leqslant t'\leqslant b')$, 这曲綫对应于 $t'\leqslant t\leqslant t'+\varepsilon$ 的一段不会自己相交。

в) 曲綫上对应于 $t=t_1$, $t=t_2(a'\leqslant t_1<t_2\leqslant b')$ 之点为端点的一段弧長与 t_2-t_1 的比值为有界并大于某一定正数。

4. 是否下列两个要求是互相无关的:

а) 方向場中沒有平行于 Oy 軸的方向;

б) 所有的积分曲綫是 x 的函数的圖綫。

5. 試求显然包含着方程 (1) 的解的所有的極大点与極小点(也可能包含其他点)的軌迹方程。

設函数 $f(x, y)$ 是可微的, 試求显然包含着方程式(1)的解的拐点的軌迹方程。

6. 若在区域的定义中不用折綫段而改用曲綫段,或只用不与自身相交的曲綫段,求証区域这样的定义同原来的定义是一样的。

7. 曲綫通常由方程式 $f(x, y)=0$ 給定。設函数 f 在整个 (x, y) 平面上确定而且連續地可微，又設

$$[f(x, y)]^2+[f'_x(x, y)]^2+[f'_y(x, y)]^2>0, \qquad (*)$$

而点集 $f(x, y)=0$ 是非空的。試証：这点集是有限条或可数条彼此无公共点的曲綫組成的，而 (x, y) 平面的每一有限部分只与这些曲綫中的有限条的曲綫相交。同时，这些曲綫中的每一条或者是閉的，或者是自身不相交而两端趋于无穷的曲綫。

倘使条件 (*) 不滿足，則点集 $f(x, y)=0$ 是怎样的？若函数 $f(x, y)$ 只在某一区域 G 上确定，則这个命題将有怎样的变化？

第二章　最簡單的微分方程式

§ 3. 形狀如 $\frac{dy}{dx}=f(x)$ 的方程式

第一种情形　設 $f(x)$ 在 $a<x<b$ 时連續。我們知道这微分方程式的一个解是函数

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$$

[x_0 及 x 都在区間 (a, b) 內]；而其他任意一个解与这解仅相差一个常数。即其一切积分曲綫都可以由一积分曲綫平行于 Oy 軸移动而得。其通解是如下的函数：

$$y(x)=\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi+C.$$

在条形区域 $a<x<b$ 內給了一点 (x_0, y_0)，經过这点必有一积分曲綫，常数 C 也可唯一地决定：$C=y_0$。即經过条形区域 $a<x<b$

內任一点(x_0, y_0)必有而且仅有一积分曲綫，它就是

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

第二种情形 設当$x\to c(a<c<b)$时，$f(x)\to\infty$，但$f(x)$在区間(a, b)內其他各点都連續。$x=c$处的方向場由方程$\frac{dx}{dy}=0$規定。

此时，愈靠近直綫$x=c$时，方向場愈来愈陡。不过在开区域$a<x<c$及$c<x<b$內，情况和第一种情形一样。例如，点(x_0, y_0)若在条形区域$a<x<c$內，則过这点有一条而且只有一条积分曲綫在这長条內，其方程是

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi.$$

若积分$\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$当$x\to c-0$时收斂，則这曲綫当$x\to c-0$时必趋于直綫$x=c$上某一定点(圖3)。

反之，若积分$\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi$發散，則当$x\to c-0$时曲綫$y=y(x)$漸近地趋于直綫$x=c$(圖4)。

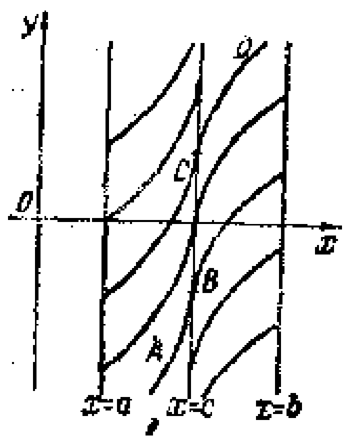

圖 3

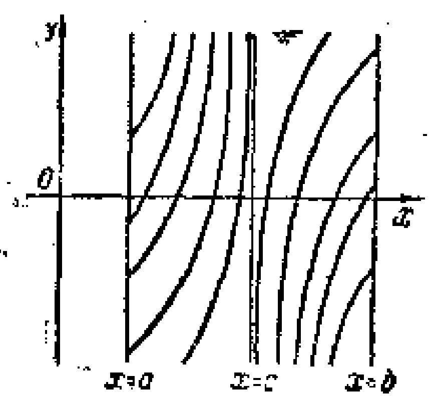

圖 4

在長条 $c<x<b$ 内积分曲綫的形状亦可类似地討論。圖 3 及圖 4 繪出了两种可能的情形。但繪出圖 3 时，我們更假定了：当 $x\to c-0$ 时，积分

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi, \quad a<x_0<c \tag{9}$$

收斂，且 $x\to c+0$ 时积分

$$\int_{x_0}^{x} f(\xi)d\xi, \quad c<x_0<b \tag{10}$$

也收斂，而且假定当 $x\to c$ 时 $f(x)\to+\infty$。繪出圖 4 时則假定积分(9)、(10)当 $x\to c-0$ 及 $x\to c+0$ 时都發散。

直綫 $x=c$ 也是积分曲綫。

現在我們来看在条形区域 $a<x<b$ 內所有的积分曲綫。若积分(9)、(10)当 $x\to c$ 时收斂，則过一定点 $A(x_0, y_0)$，必有无穷条积分曲綫。因为，若 $a<x_0<c$，則如圖 3 中所画出的 $ABCD$ 的任意一条曲綫都是积分曲綫。

若当 $x\to c\pm0$ 时，积分(9)、(10)收斂，而

$$\lim_{x\to c+0} f(x)=+\infty, \qquad \lim_{x\to c-0} f(x)=-\infty,$$

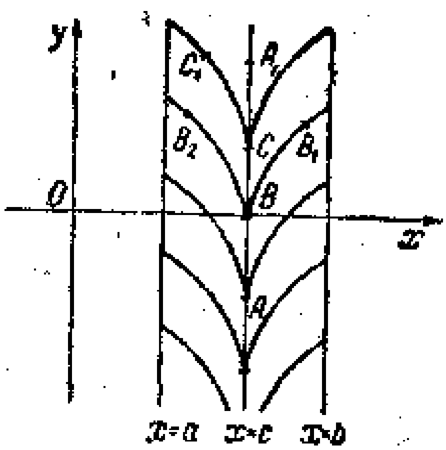

圖 3a

則积分曲綫的形状可用圖 3a 表示。此时过直綫 $x=c$ 上條一点 A 有无穷条积分曲綫，例如，圖 3a 中的 AA_1, ABB_1, $ACC_1\cdots$等。經过条形区域 $a<x<c$ 或 $c<x<b$ 的内部任一定点，例如，經过 B_1，此时則仅有一条积分曲綫 B_1BA 經过。象曲綫 B_1BB_2 因在 B 点有一尖点（излом），

據第 4 頁脚注 1，我們并不把它看作积分曲綫。

积分(9)与(10)若都發散，則过条形区域 $a<x<b$ 內每一点有一条且仅有一条积分曲綫。

(9)、(10)两积分中仅有一积分收斂的情形，留請讀者自行討論。

習 題

1. 若 $f(x)=\dfrac{1}{\varphi(x)}$，$\varphi(c)=0$ 而 $\varphi'(c)$ 存在时，哪种情形可能出現？此处假定 $\varphi(x)$ 处处連續并且当 $x\neq c$ 时 $\varphi(x)\neq 0$。

2. 繪出下列方程式的积分曲綫的性态的圖形：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt[3]{\sin x}},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{\sqrt[3]{\sin^2 x}},\quad \frac{dy}{dx}=e^{\frac{1}{x}},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1}{1+e^{\frac{1}{x}}},$$

$$\frac{dy}{dx}=e^{\frac{1}{x}}\sin\frac{1}{x},\quad \frac{dy}{dx}=x^a\sin\frac{1}{x}$$（分别对不同的 a 来討論）。

特别要繪出这些积分曲綫当 $x\to 0$ 时的性态的圖形。

3. 若函数 $f(x)$ 是不連續的，則方程 $y'=f(x)$ 可以有在整个 x 軸上存在的解么？

§4. 形狀如 $\dfrac{dy}{dx}=f(y)$ 的方程式

实际上，这一方程与前节中所討論的方程的区别，只是 x 和 y 互換了。設 $f(y)$ 在区間 $a<y<b$ 內連續，且恒不等于 0，則此方程可改写为 $\dfrac{dx}{dy}=\dfrac{1}{f(y)}$。由此易知：其一，在条形区域 $a<y<b$ 內任一定点 (x_0, y_0) 只有唯一的积分曲綫

$$x=x_0+\int_{y_0}^{y}\frac{d\eta}{f(\eta)};$$

其二，所有的积分曲綫都可用平行于 Ox 軸的移动由一条积分曲綫得出。

現在仍設 $f(y)$ 連續，幷設在 (a, b) 中只有一点 $y=c$ 使 $f(y)=0$，則

1）若当 $y\to c\pm0$ 时，$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{d\eta}{f(\eta)}$ 發散，則在直綫 $y=a$ 与 $y=b$ 間条形区域内任一点，有唯一的一条积分曲綫經过。直綫 $y=c$ 本身亦为一积分曲綫，且是所有的积分曲綫的漸近綫；

2）若当 $y\to c\pm0$ 时，$\int\limits_{y_0}^{y}\frac{d\eta}{f(\eta)}$ 收斂，且当 y 經过 $y=c$ 时，$f(y)$ 不变号，則过条形区域 $a<y<b$ 内任一定点，必有无穷条积分曲綫；

3）若当 $y\to c\pm0$ 时 $\int\limits_{y_0}^{y}\frac{d\eta}{f(\eta)}$ 收斂，且当 y 經过 $y=c$ 时，$f(y)$ 变号，則过直綫 $y=c$ 上任一点有无穷条积分曲綫，而在条形区域 $a<y<c$ 或 $c<y<b$ 内任一点，有唯一的一条积分曲綫經过。

以上結論均可由 §3 推出。若将圖 4, 3, 3a 中坐标軸 Ox, Oy 互换，即順次得到本节中三种情形的几何圖形。

習　題

1. 若 $f'(c)$ 存在时，哪种情形可能出现？

2. 給出下列方程式的积分曲綫的性态的圖形：

$$\frac{dy}{dx}=|y|^{\frac{1}{2}},\quad \frac{dy}{dx}=\sin y,\quad \frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\frac{1}{y}.$$

3. 設 $f(y)$ 連續，$f(c)=0$，而且无論与 $y=c$ 多么近，在 $y<c$ 及 $y>c$ 处都可找到 y 的值使 $f(y)>0$，也可找到 y 的值使 $f(y)<0$。求証經过任一点 $x=x_0$, $y=c$ 方程式 $y'=f(y)$ 有唯一的解 $y\equiv c$。

4．試証方程式 $y'=f(y)$所有的解都是單調的。

5．設 $f(y)$ 当 $a<y<b$ 时是連續的，又設对于方程式 $y'=f(y)$的某一个解 $y=\varphi(x)$有：当 $x\to+\infty$ 时，$\varphi(x)\to c\ (a<c<b)$。試証 $y\equiv c$ 亦是一个解。

6．設 $f(y)$当 $y_0<y<\infty$ 时是連續而且是正的。試求方程式 $y'=f(y)$的解有漸近綫的充要条件。考慮 $f(y)=\dfrac{P(y)}{Q(y)}$ 的特殊情况，此处 P 与 Q 是多項式。

7．試举出这样的一个方程式$y'=f(y)$的例子，它的右端$f(y)$是連續的，在它的解中可以找到具有下述性質的两个解：这两个解对所有的 x 值都是确定的而且是單調遞增的，同时它們的圖綫有唯一的公共点。

§5. 可分离变数的微分方程

形状如
$$\frac{dy}{dx}=f_1(x)f_2(y) \tag{11}$$
的微分方程，叫做可分离变数的微分方程。

定理　設当 $a<x<b$，$c<y<d$ 时，函数 $f_1(x)$及 $f_2(y)$都連續，且 $f_2(y)$恒不等于 0，則經过長方形 Q：
$$a<x<b,\quad c<y<d$$
上任一定点(x_0, y_0)，方程(11)有而且仅有一解。

証　先暫时假定滿足方程(11)的解 $\varphi(x)$存在，且此解当 $x=x_0$ 时其值为 y_0。于是恒等式
$$\frac{d\varphi(x)}{dx}=f_1(x)f_2(\varphi(x))$$
成立；因 $f_2(y)\neq 0$，故此恒等式可改写成
$$\frac{d\varphi(x)}{f_2(\varphi(x))}=f_1(x)dx.$$
將此式两端对 x 从 x_0 到 x 积分，即得

$$\int_{\varphi(x_0)=y_0}^{\varphi(x)} \frac{d\varphi(\xi)}{f_2(\varphi(\xi))}=\int_{x_0}^{x} f_1(\xi)d\xi.$$

今以 $F_2(y)$ 表示$\frac{1}{f_2(y)}$的任一原函数，而以 $F_1(x)$表 $f_1(x)$的任一原函数，則上式可改写成:

$$F_2(\varphi(x))-F_2(y_0)=F_1(x)-F_1(x_0). \tag{12}$$

因 $F_2'(y)=\frac{1}{f_2(y)}\neq 0$, $F_2(y)$ 是一單調函数，故（12）式可对 $\varphi(x)$單値地解出:

$$\phi(x)=F_2^{-1}[F_2(y_0)+F_1(x)-F_1(x_0)], \tag{13}$$

此处 F_2^{-1} 表 F_2 的反函数。

可見，若假定方程式(11) 具有当 $x=x_0$ 时 $y=y_0$ 这样的一个解存在，那末我們就可把这解化到(13)式的形式。因(13)式右端所含函数都由已知方程与开始条件确定的，所以知，这样的解是唯一的。

另一方面，也容易証实(13)式所确定的函数 $\varphi(x)$(在 x_0 点的某一邻域)是方程(11)当 $x=x_0$ 时，$y=y_0$ 的一个解。事实上，若把等式(12)对 x 微分，即得

$$\frac{dF_2(\varphi(x))}{d\varphi(x)}\varphi'(x)=F_1'(x),$$

故有

$$\frac{1}{f_2(\varphi(x))}\varphi'(x)=f_1(x).$$

由此知，$\varphi(x)$ 滿足方程（11）。又因 $\varphi(x_0)=F_2^{-1}[F_2(y_0)]=y_0$, 所以亦滿足开始条件。

最后須注意：若 $f_2(y)$在某一点 $y=y_1$ 等于 0, 則解的唯一性可能不成立。这与积分

$$\int_{y_0}^{y} \frac{d\eta}{f_2(\eta)} \tag{14}$$

当 $y\to y_1$ 时是收斂还是發散有关系。若(14)收斂，則長方形 Q 中的某些点必有无数条积分曲綫經过；而所有这些积分曲綫都与直綫 $y=y_1$ 相切[在这直綫上 $f_2(y)=0$]；若积分(14) 当 $y\to y_1\pm 0$ 时是發散的話，則过一定点 (x_0, y_0) 的解是唯一的(什么理由？請讀者自己說明)[1]。当然，在这时我們假定了 $f_1(x)$ 不恒等于0。若 $f_1(x)\equiv 0$，則过 Q 的任一点都有且仅有一条积分曲綫。

習 題

1. 繪出下列方程式的积分曲綫的性态的圖形：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\sin x}{\sin y},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sin y}{\sin x},\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{\frac{x}{y}},$$

$$\frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{\frac{y}{x}},\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{\frac{\sin x}{\sin y}},\quad \frac{dy}{dx}=\sqrt[3]{\frac{\sin y}{\sin x}}.$$

2. 試討論方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(y)}{\varphi(x)},$$

式中函数 $f(y)$ 与 $\varphi(x)$ 对于它們的变数的所有非負値，都是确定而且連續；$\varphi(0)=f(0)=0$。

a) 設在区域 $G(0<x<\infty,\ 0<y<\infty)$ 内 $\varphi(x)f(y)<0$，按照当 $x\to 0$ 及 $y\to 0$ 时，积分

$$\int_0^1\frac{dy}{f(y)},\quad \int_1^\infty\frac{dy}{f(y)},\quad \int_0^1\frac{dx}{\varphi(x)},\quad \int_1^\infty\frac{dx}{\varphi(x)}$$

的收斂性或發散性来研究这个微分方程的积分曲綫的性态。

б) 設在区域 $G\ (0<x<\infty, 0<y<\infty)$ 内，$\varphi(x)f(y)>0$，求證：

---

① 只当某一积分曲綫 $y=\varphi(x)$ 与积分直綫 $y=y_1$ 相切于 Q 的某一内点 (x_1, y_1) 时，唯一性方不成立。但若积分(14)当 $y\to y_1$ 为發散时，积分曲綫 $y=\varphi(x)$ 及 $y=y_1$ 永不相遇。蓋否則令 $x\to x_1$，則(12)式之左端将 $\to\infty$ 而右端却以一有限数值为極限。

所有經过 G 内的点的积分曲綫，当依 x 減小的方向延拓时，无限接近坐标原点。若更假定 $\varphi'(0)\neq 0$, $f'(0)\neq 0$，而 $\varphi''(t)$ 与 $f''(t)$ 在某区間 $0\leqslant t<\varepsilon$ 連續，則每一积分曲綫均沿一定方向趋近于坐标原点。若 $\varphi'(0)\neq f'(0)$，則它們在 $x=0$ 处与一个坐标軸相切（哪一个？）。若 $\varphi'(0)=f'(0)$，則积分曲綫沿着所有各个方向趋近于坐标原点（象直綫 $y=kx$ 那样）。

在上述的假定下，对于方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\varphi(x)}{f(y)}\quad 与\quad \frac{dy}{dx}=\varphi(x)f(y)$$

作同样的討論。

3. 設函数 $\varphi(x)$ 与 $f(y)$ 在 $a<x<b$, $c<y<d$ 是連續的而且是正的；又設这两个函数在它們的定义区間的端点上或者都趋于零，或者都趋于无穷大。試討論方程式 $y'=\varphi(x)f(y)$ 的积分曲綫在長方形 $a<x<b$, $c<y<d$ 内所有的分布情况。根据所得結論，对于方程式 $y'=\dfrac{P(x)Q(y)}{R(x)S(y)}$ 的积分曲綫的分布作出詳細的研究（此处的 P, Q, R, S 是多項式）。

§6. 齐次微分方程

形状如

$$\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{15}$$

的微分方程，叫做**齐次微分方程**。

若 $f(u)$ 在 $a<u<b$ 上确定，則 $f\left(\dfrac{y}{x}\right)$ 将在两个角内确定，而这两个角是滿足 $a<\dfrac{y}{x}<b$ 不等式的点 (x, y) 所組成的。讓我們以 G 表示这两角所构成的区域。

定理　設函数 $f(u)$ 在 $a<u<b$ 上連續，且在这区間上，$f(u)\neq u$ 恒成立。則过 G 上任意一点 (x_0, y_0)，方程(15)有一条而且只

有一条积分曲綫。

証 令 $y=ux$，則方程(15)可改写成:

$$xu'+u=f(u).$$

由此即得可分离变数的微分方程

$$\frac{du}{dx}=\frac{f(u)-u}{x},\tag{16}$$

引用前节定理，本定理即可得証。

由方程(16)可得 $\displaystyle\int\frac{dx}{x}=\int\frac{du}{f(u)-u}$

因之
$$\ln|x|=\Phi\left(\frac{y}{x}\right)+C,\tag{17}$$

其中 $\Phi(u)$ 为 $\dfrac{1}{f(u)-u}$ 的某一原函数。从公式(17)易知，在我們所作的假定下齐次微分方程所有的积分曲綫彼此相似，而以坐标原点为相似中心。事实上，如适当地选擇常数 C_1，而以 C_1x, C_1y 代 x, y，則曲綫

$$\ln|x|=\Phi\left(\frac{y}{x}\right)$$

变为曲綫族(17)中的任一曲綫。

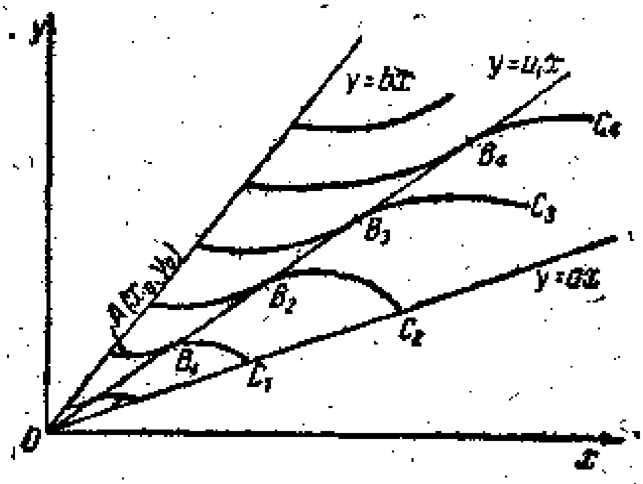

图 5

$f(u)\equiv u$ 这个例外情形即§2中例1，現不再討論。倘使在 $u_1, u_2, \cdots, u_n$ 諸点上，$f(u)=u$，則可能有許多积分条曲綫經过 G 内某些点 (x_0, y_0)，例如，若当 $u\to u_1$ 时，

积分
$$\int_a^u\frac{d\xi}{f(\xi)-\xi}$$

收斂，則必有无数条积分曲綫經过定点(x_0, y_0)。

在圖 5 中簡略地繪出了在这情况下的积分曲綫可能的形状。例如，过 A 点即有积分曲綫 AB_1C_1, $AB_1B_2C_2$, $AB_1B_3C_3$, $\cdots$ 等經过，它們都与直綫 $y=u_1x$ 相切。

習　題

1. 繪下列方程式积分曲綫的性态圖形：

$$\frac{dy}{dx}=e^{\frac{x}{y}},\quad \frac{dy}{dx}=e^{\frac{y}{x}},\quad \frac{dy}{dx}=\operatorname{tg}\frac{y}{x}.$$

2. 求証：若一方程的所有积分曲綫都彼此相似，而以坐标原点为相似中心，則此方程式为齐次方程。

3. 設函数 $f(u)$在 $0\leqslant u<u_0$ 是連續的，而 $f(0)=0$, $f(u)>u$ $(0<u<u_0)$。試研究方程式 (15)的积分曲綫在扇形 $0\leqslant\frac{y}{x}\leqslant\frac{u_0}{2}$ $(x>0)$內所有的分布情况。根据所得之結論，詳細地研究这方程式 $\frac{dy}{dx}=\frac{P(\sin\varphi,\ \cos\varphi)}{Q(\sin\varphi,\ \cos\varphi)}$ 的积分曲綫分布(此处的 P 与 Q 是两个变数的多項式，而 φ 是極角)。

4. 在适当的假定下，試求方程式 $\frac{dy}{dx}=f\left(\frac{ax+by+c}{a_1x+b_1y+c_1}\right)$ 的通解，并說明它的积分曲綫的性态的圖形。

§7. 綫性微分方程

形状如

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x) \tag{18}$$

的微分方程，叫做一阶綫性微分方程。

定理　設函数 $a(x)$与 $b(x)$在区間 $a<x<b$ 內連續，又設(x_0, y_0)是在直綫 $x=a$ 与 $x=b$ 間的条形区域內的一点。則經过这点$(x_0,\ y_0)$有一条而且只有一条方程(18)的积分曲綫，它对于区間

(a, b)内所有的 x 都是确定的。

証 先来解决較簡單的情况，即齐次綫性微分方程的情况：

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y. \tag{19}$$

在方程(18)中若 $b(x)\equiv 0$，即得(19)。而(19)是一可分离变数的微分方程。因当 $y\to 0$ 时，$\int_c^y \frac{d\eta}{\eta}$ 为發散，故(19)有唯一的解經过定点(x_0, y_0)。我們易知，这解是按照如下的公式得出的：

$$y(x)=y_0 e^{\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}.$$

現在仍来研究方程(18)。我們引用所謂变动常数法（метод вариации постоянных），即我們来求(18)的一切形状如

$$y(x)=z e^{\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi} \tag{20}$$

的解，此处 z 不是前面的常数 y_0 而已換为某一个 x 的函数了。經簡單計算后即可証明，(20)式为方程(18)之解的必要而且充分的件，是 $z(x)$ 可微分而且滿足方程

$$\frac{dz}{dx}=b(x)e^{-\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}.$$

为了使 $y(x_0)=y_0$，必充的条件显然是 $z(x_0)=y_0$。因此由上式即得

$$z(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} b(s)e^{-\int_{x_0}^{s} a(\xi)d\xi} ds.$$

函数

$$y=z(x)e^{\int_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi}=y_0e^{\int_{x_0}^{x}a(\xi)d\xi}+\int_{x_0}^{x}b(s)e^{\int_{s}^{x}a(\xi)d\xi}ds$$

是方程(18)的当 $x=x_0$ 时成为 y_0 的唯一解。

習　題

1. 求証:方程式 $\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x)y^n$

(白諾利 Bernoulli 方程)当 $n\neq 1$ 时,可用变换 $z=y^k$ (其中 k 为适当选定的常数)化成含 z 的綫性方程式(当 n 非整数时,假定 $y>0$)。又問当 $n=1$ 时,如何解白諾利方程?

2. (О. А. Олейник)。設在閉区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 給有三个連續函数 $p(x)$, $q(x)$ 与 $r(x)$, 又設

$$p(a)=p(b)=0,\ p(x)>0\ (a<x<b);$$

$$q(x)>0\ (a\leqslant x\leqslant b);$$

$$\int_{a}^{a+\varepsilon}\frac{dx}{p(x)}=\int_{b-\varepsilon}^{b}\frac{dx}{p(x)}=+\infty\ (0<\varepsilon<b-a).$$

求証: 方程式

$$p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x),$$

在区間 $a<x<b$ 上存在的所有的解,当 $x\to b$ 时,趋于 $\frac{r(b)}{q(b)}$。在这些解中有一个解当 $x\to a$ 时趋于 $\frac{r(a)}{q(a)}$;而其他的解当 $x\to a$ 时趋于 $+\infty$ 或 $-\infty$。

§8. 全微分方程

在§2中曾經說过,将微分方程写成如下的形式:

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 \tag{21}$$

往往更方便些[此方程中的 N 与方程(3)中的 N 符号相反]。如果这方程左端恰是变数 x, y 的一个函数的全微分，则方程(21)称全微分方程。

假定 $M(x, y)$ 与 $N(x, y)$ 都有連續一阶导函数，則自分析学知，若 M, N 的定义区域 G 为單連通的，这就是說，若位于 G 內任一不自己相交的封閉折綫的內部所有的点也都屬于 G 时，方程(21)的左端是一全微分的必要而且充分的条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}. \tag{22}$$

关于这种微分方程，有下列定理：

定理　設在一長方形 Q:

$$a<x<b, \quad c<y<d$$

內，函数 $M(x,y)$, $N(x,y)$ 及其一阶导函数都是連續的，且条件(22)在 Q 內到处成立，而 N 在 Q 內处处不等于 0。

則經过長方形 Q 內每一点 (x_0, y_0)，方程(21)有一条而且只有一条积分曲綫。①

証　方才已說过，此时在長方形 Q 內必有一个函数 $z(x,y)$，其全微分等于方程(21)的左端(N 不变号在这里是不重要的)。但因 $N\neq0$，故方程(21)可以改写为如下的等价的形式：

$$M(x, y)+N(x, y)y'=0,$$

再考虑到

$$M=\frac{\partial z}{\partial x}, \quad N=\frac{\partial z}{\partial y},$$

所以又可写为：

$$\frac{dz(x, y(x))}{dx}=0.$$

---

① 在对于 M, N 所作之假設下，从方程(21)可知 $\frac{dx}{dy}$ 在長方形 Q 內恒不等于 0，故方程(21)的一切在 Q 內的积分曲綫都是 x 的函数之圖綫。

当而且只当

$$z(x, y(x)) \equiv C(C=\text{常数}) \tag{23}$$

时，函数 $y(x)$ 方能是方程(21)的解。若 $C \neq z(x_0, y_0)$，則經过 (x_0, y_0) 点的曲綫不能滿足(23)式(何故?)。若 $C=z(x_0, y_0)$，則据隐函数定理自(23)式可以定出一条經过 (x_0, y_0) 点的曲綫，而且只可以定出一条。这样，同时証明了由公式

$$z(x, y)=z(x_0, y_0) \tag{24}$$

可以定出所求的解。

例 設方向場由方程 $d\left(\frac{x^2+y^2}{2}\right) \equiv x dx+y dy=0$ 确定，而 G 是在两个正方形間的一个区域，这两个正方形的中心都在坐标原点，其边与坐标軸平行，边長分别是 2 与 4。

因为在 Ox 軸上，$N(x, y)$ 等于零，所以不可以立刻把剛才証明的定理应用于整个区域 G 上，但可以把本定理分别应用于下列四个長方形：

$$\begin{aligned}
&Q_1: && -2<x<2, && 1<y<2, \\
&Q_2: && -2<x<2, && -2<y<-1, \\
&Q_3: && 1<x<2, && -2<y<2, \\
&Q_4: && -2<x<-1, && -2<y<2.
\end{aligned}$$

但在最后两种情形，应用上述定理时，須将其中 M 与 N 的作用互换。总結各种情形之結果卽得：經过 G 中任意一点，这方程必有一条且仅有一条积分曲綫。这些曲綫或者是以原点为圓心且过这点的一圓，或者是这圓的一部分。

習 題

1. 在剛才討論的例題中的区域內

$$\frac{x dx+y dy}{x^2+y^2}$$

是否为某函数的全微分？

2. 对于
$$\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2}$$
試回答同样的問題。

3. 設方程式(21)的系数M与N在單联通区域G內确定，而且是連續可微的；又設M与N在这区域內滿足条件(22)。求証：若方程(21)有一閉积分曲綫，則在这曲綫內部至少可以找到这样的一点(x_0, y_0)，使$M(x_0, y_0) = N(x_0, y_0) = 0$.

§9. 积分因式

讓我們来考慮在某一單連通区域內給定的方程(21)。若它是全微分方程，則自数学分析教程知道，积分两次可以求出等式(24)中的函数$z(x, y)$。反之，若恒等式(22)不成立，有时利用一个积分因式$\mu(x, y)$，就容易把微分方程(21)化为全微分方程。所謂积分因式$\mu(x, y)$是一个x, y的函数，它与方程(21)相乘后，使方程变成一个全微分方程。

設$M(x, y)$, $N(x, y)$及$\mu(x, y)$都有連續导函数，則积分因式$\mu(x, y)$必滿足条件
$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x},$$
或者写成展开式：
$$M\frac{\partial\mu}{\partial y} - N\frac{\partial\mu}{\partial x} = \mu\left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right). \tag{25}$$

这式是一个一阶綫性偏微分方程。只要知道方程(25)的任何一个特解①，方程(21)的左端就可化成全微分；一般說，方程(25)可以有无穷个特解(参看附录)。所以，一个常微分方程具有无穷个

① 方程(25)的恒等于0的零解，显然是不値得注意的。

积分因式。

設方程(21)有一积分因式 $\mu(x, y)$, 与它相乘后，方程(21)之左端变成了某一函数 $z(x, y)$之全微分。令 $f(z)$ 是 z 的任一連續函数，$F(z)$是 $f(z)$之任一原函数。因为

$$\mu f(z)(M dx+N dy)=f(z)dz=dF(z),$$

所以易知: $$\mu f(z(x, y))$$

亦是方程(21)之积分因式。

下列定理，在某种程度上是上述事实的逆定理。

定理 設方程(21)中，$M(x, y)$及$N(x, y)$在長方形Q上連續，且$N(x, y)$在Q上处处不等于0。設此方程(21)有两个在Q上处处連續而恒不等于0的积分因式$\mu_1(x,y)$及$\mu_2(x,y)$,所以它們在Q上符号不变。設以$z_1(x, y)$, $z_2(x, y)$表示与其相对应之二函数，使

$$dz_1=\mu_1(M dx+N dy), \tag{26}$$

$$dz_2=\mu_2(M dx+N dy). \tag{27}$$

則在長方形Q内任一点(x_0, y_0)可定出一个邻域，在此邻域内，分式 μ_2/μ_1 只是 z_1 的函数。

附注 1. 自然可以用 μ_1/μ_2 来代替本定理中的 μ_2/μ_1。由于 z_1, z_2之对称性，这两个比値都是z_2的函数。

証 1. 先将証:若$(\bar{x}, \bar{y})$为Q内任一定点，則两曲綫

$$z_1(x, y)=z_1(\bar{x}, \bar{y}), \tag{28}$$

$$z_2(x, y)=z_2(\bar{x}, \bar{y}) \tag{29}$$

的經过$(\bar{x}, \bar{y})$点的在Q内的一段互相重合。

因 $\mu_1(x, y)$, $\mu_2(x, y)$在Q内处处不等于0，故自(26)、(27)两式推得

$$dz_2=\frac{\mu_2}{\mu_1}dz_1; \tag{30}$$

所以由(30)推得 dz_1, dz_2 只能同时为0。現考虑曲綫(28)的在Q

內且含$(\bar{x},\bar{y})$点的一段，当点(x,y)沿它运动时則$dz_1=0$。据(30)式知沿这一段曲綫上必有$dz_2=0$。于是$z_2(x,y)$在这一段曲綫上之値等于在$(\bar{x},\bar{y})$之値，故曲綫(28)这一段必屬于曲綫(29)。同理可証曲綫(29)的在Q內且过$(\bar{x},\bar{y})$点的一段，必屬于曲綫(28)。

圖 6

此处必須注意，若曲綫(28)与(29)在Q內的部分由数段組成，則不一定这两曲綫的每一段都互相重合；例如圖 6 中，曲綫

$$z_1(x,y)=z_1(x_0,y_0)$$

可能包含AB与A_1B_1两段，但曲綫

$$z_2(x,y)=z_2(x_0,y_0)$$

却含有AB与A_2B_2两段。

2. 在長方形Q內任取一条平行于y軸而且包含$K(x_0,y_0)$点在內的綫段CD(圖 6)。以G表示在圖 6 中的区域$C'C''D'D''$，其边界$C'C''$与$D'D''$是曲綫(28)的曲綫段(当点$(\bar{x},\bar{y})$与C点或D点重合时得到的)，而边界$C'D'$与$C''D''$是平行于直綫CD而且同CD足够近的二綫段。区域G在圖 6 中划有双重細綫条。当点$(\bar{x},\bar{y})$取直綫段CD的所有的內点而变动时，区域G被曲綫族(28)的那些曲綫段所遮盖。

今将証μ_2/μ_1在区域內只是z_1之函数。为了証此，利用恒等式：

$$\frac{\partial z_1}{\partial y}=\mu_1 N.$$

根据假定,N与μ_1在Q上处处不等于0,故知$\frac{\partial z_1}{\partial y}$在$Q$内亦不等于0,因此在$G$内的曲綫族(28)中不同的各曲綫上,$z_1$所取的値亦不同。因之指定$z_1$之値即完全决定$G$内曲綫族(28)中的一条曲綫。但这一条曲綫同时又是曲綫族(29)中的一条曲綫,而$z_2(x,y)$在这曲綫上所取之値为一常数。故$z_2(x, y)$在G上只是$z_1(x,y)$的函数。設

$$z_2(x, y)=\varphi(z_1(x, y)).$$

由上式得
$$dz_2=\varphi'(z_1)dz_1; \tag{31}$$
$\varphi'(z_1)$的存在,是从

$$\varphi(z_1)=z_2(x, y(x, z_1))$$

看出的,这里的$y(x,z_1)$是从关系式$z_1=z_1(x,y)$定出的隐函数;在在里,导数$\frac{\partial z_2}{\partial y}$与$\frac{\partial z_1}{\partial y}$存在而且連續,且$\frac{\partial z_1}{\partial y}\neq 0$,所以$\frac{\partial y}{\partial z_1}$亦存在,因而自上式知$\varphi'(z_1)$亦必存在。

将等式(31)与等式(30)比較,则得

$$\frac{\mu_2}{\mu_1}=\varphi'(z_1). \tag{32}$$

所以,比値$\frac{\mu_2}{\mu_1}$事实上只是z_1的函数。

附注1. 若$\varphi'(z_1)$是z_1的單调函数,则可以把z_1作为x, y的函数,从(32)式定出。

附注2. 比値$\frac{\mu_2}{\mu_1}$不但在区域G是z_1的函数,而且在較大的区域内,也是z_1的函数。所謂較大的区域是指:当(x,y)点沿綫段CD的所有内点而变动时,在長方形Q的边界上終止的那些曲綫段(28)所遮盖的区域。在圖6中这区域用水平細綫条标明。当作練習請讀者自己証明(同时应証明:所遮盖的点集确乎是一个区域)。同时,圖6也直观地指出:在整个長方形Q内,z_2可能不是z_1的函数。事实上,虽然z_1在直綫段AB与A_1B_1上取同一的値,可是z_2在AB

与 A_1B_1 上可能取不同的值。

附注 3. 設函数 $z_1(x,y)$, $z_2(x,y)$ 在長方形 Q 上都有連續一阶偏导函数，且 $\frac{\partial z_1}{\partial y}$ 处处不等于 0，但函数行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial z_1}{\partial x} & \frac{\partial z_1}{\partial y} \\ \frac{\partial z_2}{\partial x} & \frac{\partial z_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 0,$$

則在長方形 Q 內任一点 (x_0, y_0) 的充分小的邻域內，z_2 是 z_1 的函数。

事实上，由假設，上述行列式中第一行的元素与第二行的元素成正比。故

$$dz_2 = \frac{\frac{\partial z_2}{\partial y}}{\frac{\partial z_1}{\partial y}} dz_1,$$

于是仍然可以应用以前的推理。圖 6 亦表示 z_2 在整个長方形中可能不是 z_1 的函数的情况。

一阶常微分方程的求解的初等方法至此巳講完。他种微分方程的初等解法請參看斯捷帕諾夫(В. В. Степанов)所著之教本以及肯杰尔(Н. М. Гюнтер)和庫兹明(Р. О. Кузьмин)的著名的習題集。

这些方法基本是将其他各种微分方程化成我們已經解决了的各种类型。

習 題

1. 試求如下形状的綫性方程

$$dy - [a(x)y + b(x)]\,dx = 0$$

的积分因子。

2. 設 $M(x,y)$ 与 $N(x,y)$ 在長方形 Q 內是二次連續可微，而且 $N \neq 0$。則方程 (21) 在 Q 上有連續可微的只含一变数 x 的积分因

子 $\mu(x)\neq 0$ 存在之充分必要条件是：在 G 内

$$N\left(\frac{\partial^2 N}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 M}{\partial y^2}\right)=\frac{\partial N}{\partial y}\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right).$$

第三章　通　論

能用初等方法求解的微分方程并不很多。刘微(Liouville)早就証明过李嘉弟（Riccati）型的微分方程 $\frac{dy}{dx}=a_2(x)y^2+a_1(x)y+$ $+a_0(x)$的求解不能化为求积分，① 就是：不能像 §3—8 一样由对一些已知函数作有限次的初等运算及对这些函数取积分而求其解。所以对許多类型的微分方程都可以应用的近似求解法是很有意义的。但在求一微分方程的近似解之前，我們必須先証实这微分方程的解一定存在；这就是說，必須先証明将被我們逐漸近似地計算出的那个解一定存在。本章开端将專討論这些“存在定理”。同时在这些定理的証明中，也常常指出“解的近似求法”（例如 §§10、14、15、18）。

§10. 欧拉(Euler)折綫

設給有微分方程

$$y'=f(x, y). \tag{1}$$

函数 $f(x, y)$的定义区域，叫它做 G。我們已經知道，方程式(1)在 G 内規定了积分曲綫应該有的方向場。

在区域 G 内任取一点(x_0, y_0)（即圖 7 中的点 O），过(x_0, y_0)点作一斜率为 $f(x_0, y_0)$的直綫。在这直綫上又取 G 内的另一点(x_1, y_1)（即圖 7 中的点 1）。过(x_1, y_1)又作一斜率为 $f(x_1, y_1)$的直綫。

① Journal de mathématiques pures et appliquées 第六卷，(1841)。

然后在这綫上又取 G 内的一点 (x_2, y_2)(即圖 7 中的点 2)，过 (x_2, y_2) 作一斜率为 $f(x_2, y_2)$ 的直綫。然后在这綫上又取一点 (x_3, y_3)；其余类推。这里我們假定：$x_0 < x_1 < x_2 \cdots$（在 x_0 点之左同样可作出圖中之 $-1, -2, -3$ 等点)。所得之折綫叫作"欧拉折綫"。自然我們希望，当欧拉折綫的每一段联綫足够短时，从这欧拉折綫能知道微分方程(1)的經过 (x_0, y_0) 点的积分曲綫的大概形状；而且当联綫的長度遞減时，欧拉折綫将接近这积分曲綫；当然在这里先应假定这样的积分曲綫是存在的。事实上，以后(§12)将証明：当 $f(x, y)$ 在区域 G 上連續时，可以选出一个这样的欧拉折綫序列，使它收斂于积分曲綫。然而，一般說来，积分曲綫不是唯一的，换言之，經过相同的一点可以有几条不同的积分曲綫。拉夫倫捷耶夫(M. A. Лаврентьев)曾举出其形状如(1)式的微分方程，虽然其中的 $f(x, y)$ 是連續的，可是在区域 G 内的每一点的邻域内，經过这一点的积分曲綫不是一条而至少有两条。① 为了使經过一点 (x_0, y_0) 的积分曲綫只有一条，必须对函数 $f(x, y)$ 添加一些假定。

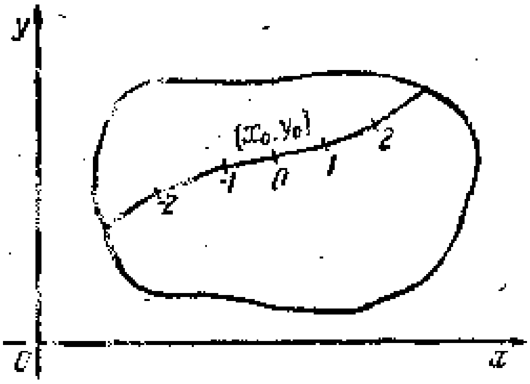

圖 7

我們現在要講微分方程(1)的經过点 (x_0, y_0) 的积分曲綫的存在定理，其証明以阿尔最拉(Arzela)定理为基础，这个証明基本上是屬于裴雅乐(Peano)的。每一条这种曲綫显然是微分方程(1)的某个解的圖綫。

① Sur une équation différentielle du premier ordre. Math. Zeitschrift, 卷 23(1925)，第 197—209 頁。

習 題

設函数 $f(x, y)$ 在条形区域

$$a \leqslant x \leqslant a', \quad -\infty < y < \infty \quad (a < a')$$

上給定，連續并有界。求証：方程(1)所有經过点 (a, b) 的欧拉折綫，遮蓋了集合 E，此集合以一向下凸的曲綫 $y=\varphi_1(x)$, $a \leqslant x \leqslant a'$ 为上界，又以一向上凸的曲綫 $y=\varphi_2(x)$, $a \leqslant x \leqslant a'$ 为下界，并且右边以直綫 $x=a'$ 为界。同时

$$\varphi_1(a)=\varphi_2(a)=b, \quad \varphi_1'(a)=\varphi_2'(a)=f(a, b);$$

在每一点 x 上，$\varphi_1(x)$ 的右导数及左导数不小于 $f(x, \varphi_1(x))$，而 $\varphi_2(x)$ 的右导数及左导数都不大于 $f(x, \varphi_2(x))$。曲綫 $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$ 本身可以部分地或全部地屬于集合 E。

§11. 阿尔最拉(Arzela)定理

設在区間 (a, b)[①] 上給有一个函数族 $\{f(x)\}$，它由无穷个在这区間上的一致有界及同等連續的函数所組成。于是从这函数族中可以选出一个在这区間上一致收斂的无穷"函数序列"。

函数族 $\{f(x)\}$ 在 (a, b) 上一致有界的意义是：有一个常数 M 存在，当 x 为区間 (a, b) 中任一数，而 $f(x)$ 为 $\{f(x)\}$ 中任一函数时，都有 $|f(x)| < M$。

函数族 $\{f(x)\}$ 在 (a, b) 上同等連續的意义是：給定 $\varepsilon > 0$ 必能找到一个仅与 ε 有关之正数 η，而当 (a, b) 中任意两点 x'', x' 满足不等式

$$|x'' - x'| < \eta$$

时，函数族 $\{f(x)\}$ 中任一函数 $f(x)$ 在該两点之值都滿足

① (a, b) 是开区間还是閉区間是沒有关系的。

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

証[①] 由假定，$\{f(x)\}$在(a,b)上一致有界，所以这些函数$f(x)$的圖綫都在以$2M$及$b-a$为边界的一个長方形$ABCD$內（圖8）。

作无穷序列

$$\varepsilon_1=\frac{M}{2^{\alpha+1}},\quad \varepsilon_2=\frac{M}{2^{\alpha+2}},\cdots,\quad \varepsilon_k=\frac{M}{2^{\alpha+k}},\cdots,$$

此处α为$\geqslant 0$之整数，由假定，$\{f(x)\}$在$[a,b]$上同等連續，对于每一数ε_k定出与它相对应的$\eta_k=\eta(\varepsilon_k)$。

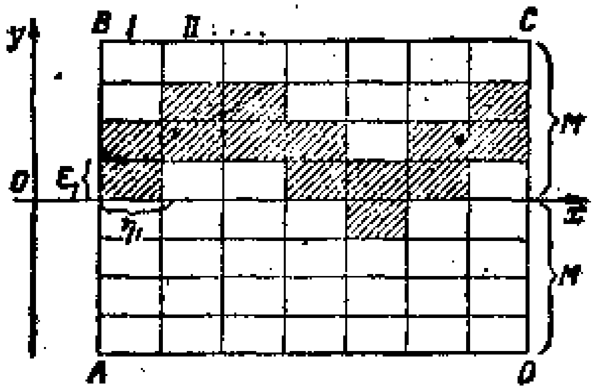

圖 8

將長方形$ABCD$的边AB分为$2^{\alpha+1}$个長度为ε_1的綫段。又分底边AD为若干等分，使每一等分的綫段的長度$\leqslant\eta_1$，过AB，CD上所得諸分点作若干条直綫平行于坐标軸。于是整个長方形$ABCD$被分为許多小長方形。以罗馬数字I，II，… 表示圖中由这些小長方形組成的平行于y軸的長条。

因为当$|x''-x'|<\eta_1$时，必有

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon_1,$$

故函数族$\{f(x)\}$中每一函数$f(x)$之圖綫不能經过同一長条中二个以上相邻的小長方形。特别是在長条I中將是这样。但長条I中相邻的各对長方形，个数有限。所以在長条I中至少有一对小長方形在其上有曲綫族$\{f(x)\}$中的无限个函数圖綫經过。設它就是圖8中划了斜綫的一对小長方形（令圖中$\alpha=1$）。現在只考慮圖

① 这証法是Л. А. Люстерник 告訴作者的。

綫在長条 I 中仅經过对划了斜綫的小長方形的那些函数。我們已知这些函数的个数是无限的。很容易看出，这些函数的圖綫在長条 II 中最多能經过四个(相邻的)小長方形，而每一个这样的函数的圖綫又只能經过其中两个相邻的小長方形。

所以，在長条 II 中必有两个这样的相邻小長方形存在，在其上有原来所給函数族的无限个函数的圖綫經过，并且这些圖綫在長条 I 中只是經过那一对划有斜綫的小長方形上的。我們把長条 II 中的这一对小長方形也划上了斜綫。照这样討論下去，可找到一个寬度为 $2\varepsilon_1$，而在区間 (a, b) 上的一个区域 s_1(这区域在圖中划有斜綫条)，而在这 s_1 上有这函数族 $\{f(x)\}$ 中的无穷个的圖綫經过。任取这些函数中的一个，以 $f_1^*(x)$ 表之；而以 $\{f_1(x)\}$ 表其余的这些函数所成之函数族。

用同样方法来处理这函数族 $\{f_1(x)\}$，但不用 ε_1，而改用 ε_2，不用 η_1 而改用 η_2，即得一含于 s_1 内而寬度为 $2\varepsilon_2$ 的区域 s_2，而 $\{f_1(x)\}$ 中有无穷个函数的圖綫完全包含在 s_2 内。任取这些函数中的一个，以 $f_2^*(x)$ 表示它，而以 $\{f_2(x)\}$ 表示其余的那些函数所成之函数族。这样繼續討論下去，可得无穷函数序列

$$f_1^*(x), f_2^*(x), \cdots$$

自 $f_k^*(x)$ 开始，所有那些函数的圖形都在寬度为 $\frac{M}{2^{k+\alpha-1}}$ 的一个条形内。所以，这函数序列一致收斂，这就是需要証的。

習　題

1. 举例証明：在阿尔最拉定理中一致有界及同等連續的条件都是重要的；如果不要这两个条件中的某一个，則結論可以不成立。

2. 叙述并証明关于含多个自变数的函数的阿尔最拉定理。

3. 若在阿尔最拉定理中設函数族在一无穷区間上确定，問阿

尔最拉定理是否仍正确?

4. 求証:在阿尔最拉定理中可用函数族只在一点上有界的假定来代替函数族在全区間上一致有界的假定。

§12. 用裴雅乐(Peano)法証明微分方程 $y'=f(x,y)$ 的解存在

定理 在微分方程

$$y'=f(x,y) \tag{1}$$

中,設函数 $f(x,y)$ 在一区域 G 上連續,并且有界。設 (x_0,y_0) 为 G 的任一內点,則方程(1)至少有一条积分曲綫經过 (x_0,y_0) 点。

証 設 $|f(x,y)|<M$.

过区域 G 的一点 (x_0,y_0),作斜率为 M 及 $-M$ 的两直綫。又作二直綫 $x=a$, $x=b$ $(a<x_0<b)$,平行 Oy 軸,使所得的两个以 (x_0,y_0) 为公共頂点的等腰三角形全部包含在区域 G 內(圖 9)。

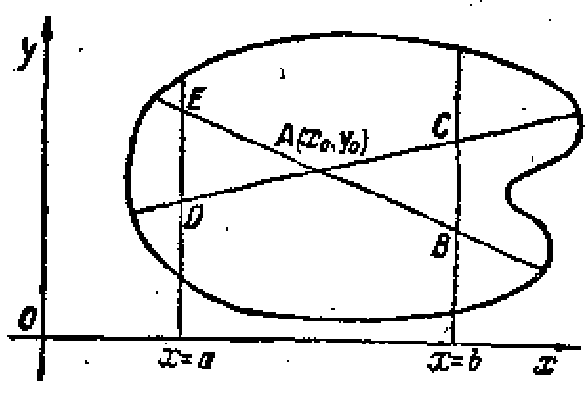

圖 9

現在用 §10 中所述方法,作出經过 (x_0,y_0) 点的歐拉折綫的无穷序列

$$L_1, L_2, \cdots, L_k, \cdots,$$

且使当 $k\to\infty$ 时,折綫 L_k 中最長的綫段之長度 $\to 0$。每一 L_k 与平行 Oy 軸的直綫只交于一点,所以它是 x 的某一連續函数的圖綫。設 L_k 为函数 $\varphi_k(x)$ 的圖綫。函数

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_k(x), \cdots \tag{33}$$

具有下面三个性質:

1）它們都在同一有限閉区間$[a, b]$①上确定。事实上，只有当L_k在区間$[a, b]$上某处超出了G时，$\varphi_k(x)$才能不确定。但这一定不可能，因为欧拉折綫的每一綫段的斜率的絕对值不大于M，所以欧拉折綫不能經过BE或DC而超出$\triangle ABC$，$\triangle ADE$之外，也就不会超出区域G。

2）函数$\varphi_k(x)$的圖綫都包含在两个三角形ABC及ADE內，所以它們一致有界。

3）估計下列的差式的絕对值：

$$\varphi_k(x'')-\varphi_k(x')=\int_{x'}^{x''}\varphi_k'(x)dx,$$

則有
$$|\varphi_k(x'')-\varphi_k(x')|\leqslant M|x''-x'|.$$
所以函数族(33)在$[a, b]$上同等連續。

据阿尔最拉定理，自函数序列(33)中可以选出在閉区間$[a, b]$上一致收斂的一函数序列

$$\varphi^{(1)}(x),\ \varphi^{(2)}(x),\ \cdots,\ \varphi^{(k)}(x),\ \cdots,$$

其極限以$\varphi(x)$②表示。

显然，$\varphi(x)$滿足开始条件$\varphi(x_0)=y_0$。

現在我們来証明，$\varphi(x)$在(x_0, b)內滿足方程(1)［在区間(a, x_0)上的情形可采用类似的討論］。为了証明，在区間(x_0, b)內任取一点x'，欲証$\varphi'(x')=f(x', \varphi(x'))$，只須証明，对于任給的正的$\epsilon$若$|x''-x'|$充分小时，則不等式

$$\left|\frac{\varphi(x'')-\varphi(x')}{x''-x'}-f(x',\varphi(x'))\right|\leqslant\varepsilon \tag{34}$$

① 我們用方括弧表示閉区間，而用圓括弧表示开区間。

② 注意，此極限亦为$[a, b]$上之連續函数。

成立即可。但当 $k\to\infty$ 时 $\varphi^{(k)}(x')\to\varphi(x')$ 而 $\varphi^{(k)}(x'')\to\varphi(x'')$，所以要証(34)式，只須証当 $|x''-x'|$ 足够小时，那末对于足够大的 k，将有

$$\left|\frac{\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')}{x''-x'}-f(x',\varphi(x'))\right|\leqslant\varepsilon.$$

因为 $f(x,y)$ 在区域 G 内連續，故任意給定 $\varepsilon>0$，必可找得一 $\eta>0$，只要在 G 内的点 (x,y) 能滿足

$$|x-x'|<2\eta,\ |y-y'|<4M\eta,$$

則有

$$f(x',y')-\varepsilon<f(x,y)<f(x',y')+\varepsilon\quad(y'=\varphi(x')).①$$

所有滿足不等式 $|x-x'|<2\eta$，$|y-y'|<4M\eta$ 的 G 内的点 (x,y) 全体构成(当 η 足够小时)一長方形 Q(圖 10)。現取足够大的常数 K，使当 $k>K$ 时，在全区間 $[a,b]$ 上都有

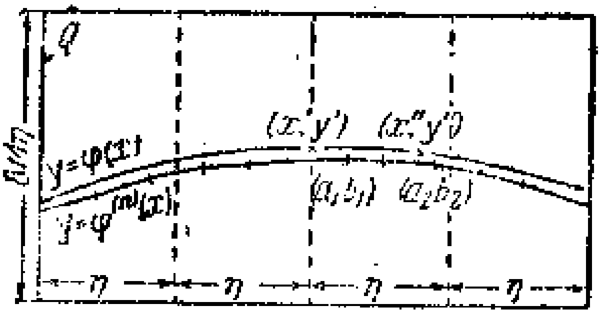

圖　10

$$|\varphi(x)-\varphi^{(k)}(x)|<M\eta,$$

且 L_k 的每一綫段之長度都小于 η。則当 $k>K$ 时一切欧拉折綫 $y=\varphi^{(k)}(x)$ 在区間 $|x-x'|<2\eta$ 上的一些折綫段都完全包含在 Q 内。

从另一方面看来

$$\varphi^{(k)}(x'')-\varphi^{(k)}(x')=\int_{x'}^{x''}\frac{d\varphi^{(k)}(x)}{dx}dx.$$

根据以前的討論，这里的

$$\frac{d\varphi^{(k)}(x)}{dx}$$

---

① 不要把此处的 y' 与导数混淆。

当 $|x''-x'|<\eta$[①] 时必介于 $f(x', y')-\varepsilon$ 及 $f(x', y')+\varepsilon$ 之間。

若 $x''>x'$ 则

$$\{f(x', y')-\varepsilon\}(x''-x')<\varphi^{(h)}(x'')-\varphi^{(h)}(x')<$$
$$<\{f(x', y')+\varepsilon\}(x''-x'),$$

这就是所要証明的。

附注 1. 对于区間 (x_0, b) 及 $x'=x_0$ 进行同前面一样的討論，即可証 $\varphi(x)$ 在 $x=x_0$ 时之"右"导数，即

$$\lim_{\substack{x''\to x_0\\ x''>x_0}}\frac{\varphi(x'')-\varphi(x_0)}{x''-x_0}$$

等于 $f(x_0, \varphi(x_0))$.

对于 (x_0, b) 及 $x'=b$，同样可証当 $x=b$ 时，$\varphi(x)$ 之"左"导数即

$$\lim_{\substack{x''\to b\\ x''<b}}\frac{\varphi(x'')-\varphi(b)}{x''-b}$$

等于 $f(b, \varphi(b))$.

对于 $[a, x_0]$ 的端点亦可得相似的結論。

附注 2. 由上面的討論，我們所作出的当 $x=x_0$ 时等于 y_0 的函数 $\varphi(x)$，仅在閉区間 $[a, b]$ 上滿足微分方程 (1)。考虑作出的这一段曲綫 $y=\varphi(x)$ 的一个端点，例如右端点。由于这段曲綫的作法，这个端点位于 G 的內部，視此端点为前面討論中的 (x_0, y_0)，向右作欧拉折綫，則仍可再用前面討論而得这一段积分曲綫之延綫，把这延綫的右端点替代前面討論中的 (x_0, y_0)，向右再作欧拉折綫，同前面一样討論下去。如果区域 G 有界，这样可得到一积分

① 在取方長形 Q 时，我們用不等式 $|x-x'|<2\eta$，而不是簡單地用 $|x-x'|<\eta$，是为了能估計欧拉折綫最左的一段的斜率。虽然我們取的欧拉折綫都令它在直綫 $x=x'-\eta$ 与 $x=x'+\eta$ 之間，可是最左的欧拉折綫的开始点，可能不在二直綫 $x=x'\pm\eta$ 之間的条形区域內，但当折綫段充分小时，必在二直綫 $x=x'-2\eta$ 与 $x=x'+2\eta$ 之間的条形区域內。

曲綫，它能任意接近 G 之边界。事实上，若在所求得的一連串形如 ABC 或 ADE 之三角形中，有无穷个三角形，其腰大于一定数 $\varepsilon>0$，这样将得到方程(1)的在 Ox 軸上的任意長的区間上都确定的积分曲綫，由于 G 为有界，此事不能成立。所以这些形如 ABC 或 ADE 的三角形的边必能与 G 之边界任意接近[1]。

附注 3. 若假定 $f(x, y)$ 仅在 G 内連續，本定理仍有效，因为任何这样的函数 f 在含在 G 内的任何閉区域 G' 上必是有界的。由此出發，讀者極容易把附注 2 的結論推广到 G 为无界的情形，推广的結果叙述如下：若在閉区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上給定了一个解，則必有一个区間 $a'<x<b'$ $(a'<a,\ b<b')$ 存在，在这区間 (a', b') 上必存在着这样的一个解，它在閉区間 $[a, b]$ 上与原来的那个解相同，而且下列的三种情况中至少有一种情况能成立：

或者 $b'=\infty$，

或者是，当 $b'>x$ 而 $x\to b'$ 时，将有 $|y(x)|\to+\infty$[2]，

或者是，当 $b'>x$ 而 $x\to b'$ 时，自 $(x, y(x))$ 点到 G 的边界的最短距离将趋于零。

当 $x\to a'$ 时亦有类似的情况。

習 題

1. 試詳細地証明附注 2 中的結論。

(提示：作等腰三角形时，每次取其边長等于自这三角形的頂点到区域 G 的边界的最短距离的一半；試証所得的頂点序列，收斂于区域 G 边界的某一定点。)

試詳細地証明附注 3 中的結論。

---

① 参看習題 1 及提示——譯者注。

② $|y(x)|\to+\infty$ 应作 $\limsup\limits_{x\to b'}|y(x)|=+\infty$。参看 Сансоне, Обыкновенные дифференциальные уравнания，卷二，1954年，第 8 章(78頁)之証明。——譯者注。

2．設区域 G 是長条 $a<x<a'$，而 f 在 G 上連續且有界。方程式(1)也許有几条积分曲綫經过这区域的某一点(x_0, y_0)，則这方程式有两条积分曲綫 $y=\varphi_1(x)$, $y=\varphi_2(x)$[即孟德耳(Montel)所謂最大解与最小解]，且 $\varphi_1(x_0)=\varphi_2(x_0)=y_0$, $\varphi_2(x)\leqslant\varphi_1(x)$, $a<x<$ $<a'$，并且長条 G 介于曲綫 $y=\varphi_1(x)$ 与 $y=\varphi_2(x)$的那一部分完全被經过(x_0, y_0)的积分曲綫所充滿，而在这部分之外則沒有一条經过这点的积分曲綫。

3．試用下列方法証明方程式的解存在[别朗(Perron)方法]。任一連續可微[①]的函数 $y=\varphi(x)$ 滿足条件

$$\varphi(x_0)=y_0,\ \varphi'(x)>f(x, \varphi(x)),\ x_0\leqslant x\leqslant b$$

时就叫做区間(x_0, b)上的上函数(верхняя функция)(参看圖 9)。求証：(甲)上函数存在；(乙)所有上函数的下界是方程(1)的經过(x_0, y_0)的积分曲綫[此即(1)的最大解，参看習題 2]。同理可以定义下函数(нижняя функция)而取其上界。又在 $x<x_0$ 时，亦可同样进行。

4．設在区域 G 上給定两个有界函数 $f(x, y)$ 与 $F(x, y)$，且处处有

$$F(x, y)\geqslant f(x, y).$$

假定函数 $F(x, y)$上半連續[②](полунепрерывна сверху)，而 $f(x, y)$ 下半連續。則經过区域 G 中任一点(x_0, y_0)至少有一曲綫 $y=\varphi(x)$，在这曲綫上任一点当 $\Delta x\to 0$ 时，比值

$$\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}$$

---

① 即有連續导数。

② 所謂 $F(x, y)$ 是上半連續，就是說 $F(x, y)=\limsup\limits_{\substack{t\to x\\ s\to y}} F(t, s)$；所謂 $f(x, y)$ 是下半連續，就是說 $f(x, y)=\liminf\limits_{\substack{t\to x\\ s\to y}} f(t, s)$。

所有的極限值都介于 $F(x, y)$ 与 $f(x, y)$ 之間。一般說来，經过每一点 (x_0, y_0) 可有很多条这种曲綫，且其中有在習題 2 中所述的那种意义下的最大曲綫与最小曲綫。

§13. 阿斯古德 (Osgood) 关于解的唯一性的定理

定理 設当 $0<u\leqslant a$ 时，$\varphi(u)>0$ 而且連續，当 $\varepsilon\to 0$ 时，$\int_\varepsilon^a \frac{du}{\varphi(u)}\to\infty$，若对于在区域 G 內的任意两点 (x, y_1) 与 (x, y_2)，函数 $f(x, y)$ 恒滿足条件

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)|\leqslant\varphi(|y_2-y_1|), \tag{35}$$

則方程式(1)最多有一条积分曲綫經过 G 內一点 (x_0, y_0)。

若 K 为一正数，則

$$Ku,\ Ku|\ln u|,\ Ku|\ln u|\cdot\ln|\ln u|,$$
$$Ku|\ln u|\cdot\ln|\ln u|\cdot\ln\ln|\ln u|,$$

等等都是具有定理中所述性質的特殊的 $\varphi(u)$.

用唯一性定理时，我們时常取 $\varphi(u)\equiv Ku$。条件(35)在此时可改写为：

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)|\leqslant K|y_2-y_1|. \tag{36}$$

条件(36)叫做对 y 的李卜希茨 (Lipschitz) 条件。特别，若 G 是对 y 的凸区域[①]，如果函数 $f(x, y)$ 的对 y 的偏导数在 G 內有界，則 $f(x,y)$ 必滿足条件(36)；事实上，用拉格朗日 (Lagrange) 定理，即得

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)|=$$
$$=|f'_y(x, y_1+\theta(y_2-y_1))||y_2-y_1|\leqslant K|y_2-y_1|,$$

这里 K 是 $|f'_y(x, y)|$ 在 G 上的上界。

---

① 設对于区域 G 內任意两点 A, B，只要綫段 AB 平行于 y 軸，綫段 AB 即全部包含在 G 內时，則 G 叫做对 y 的凸区域。

証 設方程(1)有两个不同的解 $y_1(x)$, $y_2(x)$ 同时满足条件

$$y_1(x_0)=y_2(x_0)=y_0.$$

这里我們将假設 $x_0=0$; 因倘使不如此，则以 $x+x_0$ 代 x 即可变成这种情形。令

$$y_2(x)-y_1(x)=z(x).$$

因 $y_2(x)\neq y_1(x)$, 故可找到一个能使 $z(x_1)\neq 0$ 的 x_1. 我們又可假設 $z(x_1)>0$; 因为倘使不如此，我們只要改令 $z(x)=y_1(x)-y_2(x)$ 而不令其等于 $y_2(x)-y_1(x)$, 即可变成此种情形。同时也可假定 $x_1>0$, 而不损害一般性; 因若不如此, 以 $-x$ 代 x 即可变成这种情形。其次应注意, 当 $|y_2-y_1|>0$ 时, 则有

$$\frac{dz}{dx}=\frac{d(y_2-y_1)}{dx}=f(x,y_2)-f(x,y_1)\leqslant$$
$$\leqslant\varphi(|y_2-y_1|)<2\varphi(|y_2-y_1|). \qquad (37)$$

設 $y(x)$ 为方程 $$\frac{dy}{dx}=2\varphi(y)$$

的当 $x=x_1$ 时取值 $z(x_1)=z_1$ 的一个解, 这样的解的确存在而且是唯一的 (参看 §4)。这解的圖綫漸近地接近于負 Ox 軸但不与 Ox 軸相交(圖 11)。

$z(x)$ 与 $y(x)$ 两曲綫相交于点(x_1, z_1)。由不等式

$$z'(x_1)<2\varphi(z_1)=2\varphi(y(x_1))=y'(x_1)$$

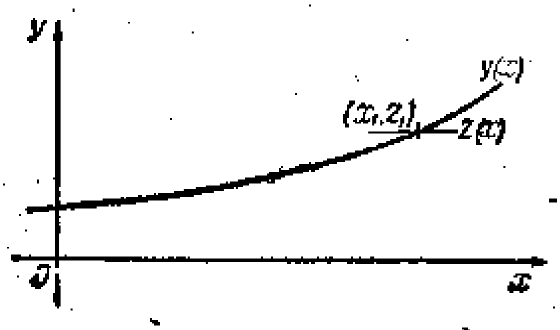

圖 11

直接推出, 必有 $\varepsilon>0$ 的这样的一个区間 $(x_1-\varepsilon, x_1)$, 在其上恒有

$$z(x)>y(x).$$

但对于所有满足 $0<\varepsilon\leqslant x_1$ 的 ε, 上面的不等式都成立。如果說不是这样, 对于这些使不等式如立的 ε 取其尽可能大的值 ε_1, 立刻产生矛盾。事实上, 令 $x_1-\varepsilon_1=x_2>0$, 则在 x_2 之右的 x 有

$$z(x)>y(x).$$

但
$$z(x_2)=y(x_2),$$

故
$$z'(x_2)\geqslant y'(x_2)=2\varphi(y(x_2))=2\varphi(z(x_2)).$$

然而另一方面，因 $z(x_2)=y(x_2)>0$，用推得(37)式的同样的推理，即得

$$z'(x_2)<2\varphi(z(x_2)),$$

这式与上式矛盾。因之，当 $0<x<x_1$ 时，必有

$$z(x)>y(x).$$

由于 $z(x)$ 及 $y(x)$ 之連續性，

$$z(0)\geqslant y(0)>0,$$

与原假定 $z(0)=0$ 不合。于是定理得証。

習 題

1. 若 $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)=0$，則滿足条件(35)的函数 $f(x, y)$ 对 y 而言必須是常数，如果区域 G 对 y 而言是凸域的話。特別是，若 $\varphi(u)=u^p$, $p>0$ 时将是如此。

2. 若 $\varphi(u)$ 之圖綫向上凸，則 $\int\limits_0^\varepsilon \frac{du}{\varphi(u)}$ 發散，不仅是本节中定理成立的充分条件，而且也是必要条件。

3. 若 $\varphi(0)=0$, $\varphi'(0)$ 存在而且不等于零，則 $\int\limits_0^\varepsilon \frac{du}{\varphi(u)}=\infty$，即函数 $\varphi(u)$ 滿足本节定理的条件。

4. 在本节定理中令 $\varphi(u)$ 为函数 Ku, $Ku|\ln u|$, …等等，我們就漸漸減弱了对函数 $f(x, y)$ 的限制，也就是說得到了較强的定理。求証在这种定理中不可能得到"最强"的定理。換言之，求証：若 $\varphi(u)$ 滿足定理叙述中的上述条件，則总有函数 $\varphi_1(u)$ 滿足同一条件，而且

$$\frac{\varphi_1(u)}{\varphi(u)}\xrightarrow[u\to 0]{}\infty.$$

5. 在分析学中熟知：若在某区域 G 上确定的函数 $f(x,y)$ 虽对其每一变数 x 或 y 而言都連續，也可以不是 (x,y) 的連續函数。求証：若 $f(x,y)$ 对 x 連續且滿足条件(35)而 $\varphi(u)\xrightarrow[u\to 0]{}0$，則 $f(x,y)$是 (x,y) 在区域 G 上的連續函数。并問上述命题当函数在一正方形及其边界，或在一圓及其边界，或在一三角形及其边界上确定时是否成立？

6. 設 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在区域 G 內連續，求証：圖綫經过区域 G 內的一点的解有唯一性。倘使只假定这偏导数存在，本命題仍成立否？

7. 設 $f(x,y)$ 在区域 G 連續。点 (x_0,y_0) 在区域 G 內。設在某区間 $[x_0,b)$ 上給有三个函数 $y(x)$, $z(x)$, $u(x)$ 且

$$y(x_0)=z(x_0)=u(x_0)=y_0.$$

設在区間 $[x_0,b)$ 上处处有

$$y'(x)=f(x,y),\ z'(x)>f(x,z),\ u'(x)\geqslant f(x,u).$$

則当 $x>x_0$ 时都有 $z(x)>y(x)$。若更假定在每一点 $y(x)$ 是方程(1)的唯一的解，則在 $x>x_0$ 时，处处有

$$u(x)\geqslant y(x).$$

倘使不假定在每一点 $y(x)$ 都是方程(1)的唯一的解时，能否仍証明上述关系？

8. 設方程式(1)的右端連續，又設 $y=Y(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ 是方程式 (1) 在开始条件 $x=x_0$, $Y(x_0)=y_0$ 下的最大解，又假定这曲綫 $y=Y(x)$完全在 G 內。又設 $Y_n(x)$是方程式(1)在开始条件 $x=x_n$, $Y_n(x_n)=y_n$ 下的最大解，而且 $y_n\geqslant Y(x_n)$, $x_n\xrightarrow[n\to\infty]{}x_0$, $y_n\xrightarrow[n\to\infty]{}y_0$。則当 n 足够大时，$Y_n(x)$ 将在整个閉区間 $[a,b]$ 上存在，而当 $n\to\infty$ 时，$Y_n(x)$ 在这区間上将一致地收斂于 $Y(x)$(参看 § 12 的習題2)。

9. 設 $y_n(x)$ 是方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)+\varphi_n(x, y)$$

滿足开始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解，这里 $\varphi_n(x, y)>0$ 而 $\varphi_n(x, y)$ 在 G 内之值的上界当 $n\to\infty$ 时趋于 0，点 $(x_0, y_0)\in G$，$f(x, y)$ 及 $\varphi_n(x, y)$ 都連續。設 $y=Y(x)$ 象習題 8 中一样定义，則 $y_n(x)$ 当 $n\to\infty$ 时在閉区間 $[x_0, b]$ 上一致收斂于 $Y(x)$。

§14. 关于歐拉折綫的补充說明

定理 設方程(1)右端的函数 $f(x, y)$ 連續，且过点 (x_0, y_0) 仅有唯一的解 $\varphi(x)$。則自 (x_0, y_0) 出發之任一欧拉折綫序列(更确切地說，其圖形是欧拉折綫的函数序列)，当折綫的最長綫段的長度趋于 0 时，此函数序列在 §12 中所述的閉区間 $[a, b]$ 上一致收斂于这唯一的解 $\varphi(x)$。

証 欲証明这一定理，显然只須証明：任意給定 $\varepsilon>0$，这欧拉折綫序列中仅有有限条当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时不完全包含在 $y=\varphi(x)+\varepsilon$ 及 $y=\varphi(x)-\varepsilon$ 之間。此一結論易由归謬法証明之。盖若不如此，我們就有經过 (x_0, y_0) 的欧拉折綫的无穷序列，这些欧拉折綫当其标数增加时联綫之最長綫段的長度趋于 0，且这序列中的欧拉折綫沒有一条当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时是完全包含在 $y=\varphi(x)\pm\varepsilon$ 之間的。引用 §12 中的討論于这些欧拉折綫，則我們将得到欧拉折綫的序列，它一致地收斂于一条經过 (x_0, y_0) 点的积分曲綫，因为这积分曲綫并非全部在 $y=\varphi(x)\pm\varepsilon$ 之間，所以它与曲綫 $\varphi(x)$ 是不同的。但因我們已假定这方程(1)仅有唯一的积分曲綫 $\varphi(x)$ 經过 (x_0, y_0) 点，所以这是不可能的。

習 題

1. 試举例說明存在这样的右端連續的方程式(1)及其經过

(x_0, y_0)点的欧拉折綫序列：当这折綫的联綫段的最大長度趋于零时，由这些折綫表出的函数序列除了在 $x=x_0$ 点外，在其他的 x 点上都不收斂。

2. 試举出右端連續的方程式(1)的这样一个例子，它的自任意一定点开始的欧拉折綫序列，当联綫段的最大長度趋于零时，其極限都存在而且是唯一的；可是經过这区域 G 的某些点的积分曲綫不只一条。

所以有这样的可能性，是由于下述原因：一般說，并非方程式(1)的經过(x_0, y_0)点的每一个解，都可以作为自这点开始的欧拉折綫序列的極限而得到的。

§15. 逐次逼近法

定理　設函数 $f(x, y)$ 在 (x, y) 平面上一閉区域 $\overline{G}$ 上是有界的，且对 x 連續，而且滿足对 y 的李卜希茨条件

$$|f(x, y_2)-f(x, y_1)| \leqslant K|y_2-y_1|.①$$

則对于 G 之任一內点(x_0, y_0)必可在 Ox 軸上定出含 x_0 于其內部的一个閉区間$[a, b]$，在这区間上，微分方程(1)有一个当 $x=x_0$ 时等于 y_0 的唯一的解。②

首先注意，若事先假定这样的解存在，則将恒等式

---

① 若在一区域 G 內函数 f 关于 x 为連續而且滿足对 y 的李卜希茨条件，則 f 在 G 上为(x, y)的連續函数。急因

$$f(x_2, y_2)-f(x_1, y_1)=\{f(x_2, y_2)-f(x_2, y_1)\}+\{f(x_2, y_1)-f(x_1, y_1)\},$$

而由李卜希茨条件上式右端第一項之絕对值 $\leqslant K|y_2-y_1|$，故只要 (x_2, y_2) 与 (x_1, y_1)足够近时，即可以使之任意小。上式右端第二項之絕对值也可以使它任意小，因为 $f(x, y)$ 是在(x_1, y_1)对 x 連續的。

② 因为在一开区域 G 內任一点(x_0, y_0)都可定出一含(x_0, y_0)于其內部且完全包含在 G 內的閉域 G^*，故本定理中的閉区域 $\overline{G}$ 可以一开区域代替而定理仍正确。这兒用閉区域的緣故只是为了証明§16时的方便(参看§16之注1)。函数 f 在 $\overline{G}$ 上有界的条件也只是为了証明时的方便；若无此条件，本定理亦能成立。

$$y'(\xi)=f(\xi,y(\xi))$$

从x_0到x取积分，即得

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,y(\xi))d\xi. \tag{38}$$

因$y(\xi)$是可微函数，所以它是連續的，所以上式的被积函数也是ξ的連續函数。

形如(38)的关系式，其中未知函数$y(\xi)$在积分号下出現，叫做积分方程。

于是方程(1)的任意一个当$x=x_0$时其值为y_0之解必滿足积分方程(38)。反之，积分方程(38)之一切連續解$y(x)$也都滿足微分方程(1)及开始条件$y(x_0)=y_0$。将方程(38)两端对x微分，即易証明任一滿足方程(38)的連續函数[④]亦必滿足微分方程(1)。从下面的理由易知微分在此是合法的，蓋以(38)之一个解代其中之y，則所得恒等式右端有对于x之导数，故左端的函数即$y(x)$亦有导数。

所以我們不必証明，微分方程(1)在某一閉区間$[a,b]$上必有而且仅有一个当$x=x_0$时其值为y_0的解存在，但将証明积分方程(38)在这区間上有一个且仅有一个連續解。

令M为$|f(x,y)|$在$\overline{G}$上的値的上界。过点(x_0,y_0)作斜率为$+M$及$-M$的两直綫DC及BE。再作与Oy軸平行的两直綫ED及CB，使其与DC及BE所成两个等腰三角形完全包含在$\overline{G}$内(圖9)。設直綫ED之方程为$x=a$，而直綫CB之方程为$x=b$。以后我們将添加a,b二数足够接近于x_0这样的条件。

現取在閉区間$[a,b]$上确定的任一連續函数$\varphi_0(x)$，只要其圖

④ 此处只談到积分方程(38)的連續解，是为了避免积分不連續函数时所产生之困难。

綫不超出区域 $\bar{G}$ 之外。将 $\varphi_0(x)$ 代入(38)式之右端，則右端将是某一在 $[a, b]$ 上完全确定的 x 的函数；設以 $\varphi_1(x)$ 表之：

$$\varphi_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi))d\xi.$$

显然，$\varphi_1(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上确定且为連續，而当 $x=x_0$ 时其值为 y_0。我們易証：$\varphi_1(x)$ 之圖綫当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时，不超出三角形 EAD 与 ABC 之外。要証此，只須注意

$$|f(\xi, \varphi_0(\xi))|\leqslant M,$$

所以
$$|\varphi_1(x)-y_0|\leqslant M|x-x_0|.$$

再令
$$\varphi_2(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi))d\xi.$$

由上述 $\varphi_1(x)$ 之性質，上式右端的积分必存在。而函数 $\varphi_2(x)$ 亦在 $[a, b]$ 上确定，且具有上述 $\varphi_1(x)$ 的諸性質。于是可作下列諸函数：

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_3(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_2(\xi))d\xi,\\
\varphi_4(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_3(\xi))d\xi,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\varphi_n(x)&=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi))d\xi.
\end{aligned}\right\}\tag{39}$$

这个作函数 $\varphi_n(x)$ 的方法，叫做逐次逼近法，① 可繼續任意多次。于是我們卽得一无穷函数序列：

$$\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots \tag{40}$$

今将証：这函数序列在閉区間 $[a, b]$ 上一致收斂，且以(38)之

① 逐次逼近法是毕嘉尔提出的。这方法已証明可用来解决很多数学問題。

一連續解为極限。事实上，因为 $\varphi_n(x)$ 可写成

$$\varphi_n(x)=\varphi_1(x)+\{\varphi_2(x)-\varphi_1(x)\}+\{\varphi_3(x)-\varphi_2(x)\}+\cdots+$$
$$+\{\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)\},$$

故欲証函数序列(40)一致收斂，只須証明如下的无穷級数：

$$\varphi_1+(\varphi_2-\varphi_1)+(\varphi_3-\varphi_2)+\cdots+(\varphi_n-\varphi_{n-1})+\cdots \qquad (41)$$

一致收斂卽可。

为此，讓我們来估計 $\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)$，利用李卜希茨不等式，可以写为

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\{f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\}d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|\,d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant K\max_{a\leqslant\xi\leqslant b}|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|(b-a). \qquad (42)$$

所以，若 c 是能使 $|\varphi_1(x)|\leqslant c$，$|\varphi_2(x)|\leqslant c$ 成立的一个常数，而且若令 $K(b-a)=m$，則級数(41)中每一項之絕对値将不超过級数

$$c+2c+2cm+2cm^2+2cm^3+\cdots$$

中之对应項。但若 $m<1$，此級数将收斂。設区間 (a, b) 这样小使 $K(b-a)=m<1$，則級数(41)一致收斂，且其和 $\varphi(x)$ 是在閉区間 $[a, b]$ 上的連續函数，且其圖綫不超出三角形 EAD 与 ABC 之外。故积分 $\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))d\xi$ 亦有意义。因为

$$\left|\int_{x_0}^{x}\{f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))\}d\xi\right|\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|d\xi\right|,$$

故当 $n\to\infty$ 时，不仅在等式(39)的左端可以取極限，而且在其右端亦可取極限，所以函数 $\varphi(x)$ 滿足方程(38)。

今以归謬法証明，这积分方程(38)在閉区間$[a, b]$上仅有唯一的連續的(因而是有界的)解。設(38)有两个这样的解$\varphi(x)$与$\psi(x)$，則

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))d\xi,$$

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi))d\xi.$$

由此得

$$|\psi(x)-\varphi(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}\{f(\xi, \psi(\xi))-f(\xi, \varphi(\xi))\}d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant K(b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\psi(x)-\varphi(x)|,$$

于是

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\psi(x)-\varphi(x)|\leqslant K(b-a)\max_{a\leqslant x\leqslant b}|\psi(x)-\varphi(x)|.$$

但因$K(b-a)<1$，故上式仅于$\max|\psi(x)-\varphi(x)|=0$时成立，即$\psi(x)$与$\varphi(x)$恒等。

附注 1. 作函数序列(40)时，函数$\varphi_0(x)$可任意选定，只須$\varphi_0(x)$是連續的且其圖綫不超出$\overline{G}$之外，函数序列(40)在閉区間$[a, b]$上都有相同之極限。因为上面已証明不論我們用哪个函数$\varphi_0(x)$，此函数序列必趋向于方程(38)之連續的有界的解；但我們剛才又証明过这样的解是唯一的。

附注 2. §12 末的附注中所講的在此亦成立。

附注 3. 若将$\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)$絕对值的上界估計得更准确些，則級数(41)不仅只在閉区間$[a, b]$上收斂。事实上，設$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|$在某一区間上的上界等于$N$，于是我們得到一个与不等式(42)类似的不等式如下·

$$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,\varphi_0(\xi))]d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi_1(\xi)-\varphi_0(\xi)|d\xi\right|\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}N\,dx\right|=\frac{|x-x_0|}{1}NK;$$

$$|\varphi_3(x)-\varphi_2(x)|\leqslant K\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi_2(\xi)-\varphi_1(\xi)|d\xi\right|=\frac{(x-x_0)^2}{2}NK^2.$$

一般說，如果 $\varphi_1(x),\cdots,\varphi_n(x)$ 的圖綫在任一区間 $A<x<B$ 上不超出 $\overline{G}$ 外，則在这区間 (A, B) 上將有

$$|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)|\leqslant\frac{|x-x_0|^n}{n!}NK^n. \tag{43}$$

級数

$$\frac{|x-x_0|}{1}NK+\frac{|x-x_0|^2}{2!}NK^2+\cdots+\frac{|x-x_0|^n}{n!}NK^n+\cdots$$

对所有的 $|x-x_0|$ 值都是收斂的。所以在 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$ 都存在的任一有限的区間上，級数(41)亦是一致收斂的。特別是，前面所提出的条件 $K(b-a)<1$ 是不必要的。若設 $|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|$ 有界，則函数 f 的有界性条件亦是不必要的（若考慮的是閉区間，則 $|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|$ 之有界性条件亦可删去，因这条件自动地滿足）。

用关系式

$$\varphi(x)=\varphi_m(x)+[\varphi_{m+1}(x)-\varphi_m(x)]+[\varphi_{m+2}(x)-\varphi_{m+1}(x)]+\cdots$$

并用(43)式的估計，則得

$$|\varphi(x)-\varphi_m(x)|\leqslant$$

$$\leqslant NK^m|x-x_0|^m\left[\frac{1}{m!}+K\frac{|x-x_0|}{(m+1)!}+K^2\frac{|x-x_0|^2}{(m+2)!}+\cdots\right].$$

这不等式使我們能估計第 m 次近似解与尚未知道的准确解間之偏差。

習 題

1. 設 $f(x, y)$ 是 k 次連續可微，則 $\varphi_{k+1}(x), \varphi_{k+2}(x), \cdots$ 都具有連續的$(k+1)$阶导数；而且 $\varphi_n(x)$ 的 j 阶导数$(j\leqslant k+1)$所成的序列，即

$$\varphi_{k+1}^{(j)}, \varphi_{k+2}^{(j)}, \varphi_{k+3}^{(j)}, \cdots$$

在所有的 $\varphi_n(x)$ 都存在的有限区間上，必一致收斂于 $\varphi(x)$ 的对应阶的导数 $\varphi^{(j)}(x)$。

2. 設
$$|\varphi_1(x)-\varphi_0(x)|\leqslant c|x-x_0|^d$$
$$(a\leqslant x\leqslant b,\ a\leqslant x_0\leqslant b;\ c>0;\ d\geqslant 0).$$
則有
$$|\varphi(x)-\varphi_1(x)|\leqslant$$
$$\leqslant c|x-x_0|^{d+1}\left[\frac{K}{d+1}+\frac{K^2}{(d+1)(d+2)}+\cdots\right](a\leqslant x\leqslant b),$$
这里只須假定滿足这个不等式的任一函数 $\varphi(x)$ 的圖綫落在 $\overline{G}$ 内。如果$(n+1)$次近似解与 n 次近似解相差甚微，則这不等式使我們可以肯定，把这个$(n+1)$次近似解作为准确的解，誤差也是很小。

3. 已給开始条件 $y(0)=0$ 和方程式 $y'=x^2+y^2$，試証：当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时，估計式

$$\left|y-\left(\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7\right)\right|\leqslant 0.0015x^8$$

是正确的。

提示：应用上題的結果，在閉区域 $0\leqslant x\leqslant 1$, $|y|\leqslant N$ 上（N 是适当选擇之正数）来考慮这微分方程，并取 $\varphi_0(x)=\frac{1}{3}x^3$。

§16. 压縮映象原理

前节所述的逐次逼近法，不仅用于証明微分方程解的存在定理，亦可用于分析学中許多其他問題。因此研究这方法适用时所

需的尽可能宽大的条件是頗饒兴趣的。弄明白了这些条件，那么，在每一特别情形，不必重新将整个方法再做一遍，而只須驗証这方法的适用条件能满足就可以。

压縮映象原理 設一非空函数族$\{\varphi\}$之每一函数都在同一集合（不論什么集合）$\mathfrak{M}$上确定，且具有下列性質：

1）每一函数φ都在$\mathfrak{M}$上有界（此上界M_φ可与φ有关）

$$|\varphi|\leqslant M_\varphi.$$

2）这族中一致收斂的任何函数序列之極限亦是这族中的函数。

3）在此函数族$\{\varphi\}$上，确定一运算子$A(\varphi)$，这运算子将这族的任一函数变为这族中的一函数。

4）有一满足不等式$0\leqslant m<1$的常数m存在，使函数族$\{\varphi\}$中的任意二个函数φ_1, φ_2都满足条件

$$|A(\varphi_2)-A(\varphi_1)|\leqslant m\sup|\varphi_2-\varphi_1|,$$

此处$\sup|\varphi_2-\varphi_1|$是指$|\varphi_2-\varphi_1|$在集合$\mathfrak{M}$上的最小上界。

則方程

$$\varphi=A(\varphi) \tag{44}$$

在这函数族中有一个解，而且仅有一个解。

在証明上述定理以前，我們先举出它的几个用处。

例 1. 現在首先說明如何利用压縮映象原理来証明积分方程(38)的連續解的存在及其唯一性，換言之，如何利用它来証明微分方程(1)的当$x=x_0$时其値为y_0的解的存在及其唯一性。

令集合$\mathfrak{M}$为前节所述的閉区間$a\leqslant x\leqslant b$，令$\{\varphi\}$为圖綫包含在閉区域$\overline{G}$内而且介于$x=a, x=b$两直綫（圖 9）之間的所有的連續函数所組成的函数族。这些函数显然满足压縮映象原理的第1，2两条件[①]。

---

① 此处用閉区域$\overline{G}$的緣故，仅仅只是为了要满足第二条件。

再令　　$$A(\varphi)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))\,d\xi,$$

在上节里就已經知道，如果区間 $[a, b]$ 够小的話，运算子 A 就滿足第 3，4 两条件。于是据压縮映象原理，积分方程（38）在函数族 $\{\varphi\}$ 中有一解而且仅有一解；因之当 $a\leqslant x\leqslant b$ 时仅有唯一的一个連續解。

例 2. 設积分方程

$$\varphi(x)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi$$

中的 $f(x)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上連續，函数 $K(x,\xi)$（叫做积分方程的核）在 $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant\xi\leqslant b$ 上連續，則当 λ 充分小时（λ 是一常数），此积分方程在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有一个而且仅有一个連續解 $\varphi(x)$。

为了利用压縮映象原理，令集合 $\mathfrak{M}$ 为閉区間 $[a, b]$，令函数族 $\{\varphi\}$ 为所有的在 $[a, b]$ 上連續的函数。显然，$\{\varphi\}$ 滿足定理中第 1，2 两条件。規定这运算子 A 为

$$A(\varphi)=f(x)+\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\,d\xi.$$

这运算子显然滿足第 3 条件。若令 M 为 $|K(x,\xi)|$ 在正方形 $a\leqslant x\leqslant b$, $a\leqslant\xi\leqslant b$ 上的上界，則有

$$|A(\varphi_2)-A(\varphi_1)|=\left|\lambda\int_a^b K(x,\xi)\{\varphi_2(\xi)-\varphi_1(\xi)\}\,d\xi\right|\leqslant$$
$$\leqslant|\lambda|M\max_{a\leqslant\xi\leqslant b}|\varphi_2(\xi)-\varphi_1(\xi)|(b-a).$$

若 $|\lambda|$ 小到能使 $(b-a)|\lambda|M<1$，則第 4 个条件也被滿足。

根据定理知，积分方程在 $[a, b]$ 上有一連續解，而且仅有一連續解。

例 3. 設 $f(x)$ 在 $-\infty<x<+\infty$ 上确定，且滿足常数 $K<1$ 的李卜希茨条件，則方程式

$$x=f(x)$$

有唯一的解。

为了用压縮映象原理，令集合 $\mathfrak{M}$ 仅含一点，則所有的函数在 $\mathfrak{M}$ 上也只取一値，于是函数族 $\{\varphi\}$ 由一切实数所組成。所以显然压縮映象原理的条件 1, 2 都滿足。令运算子 A 为函数 f，由假設 $f(x)$ 对一切实数 x 都确定，因之此运算子将任一实数变为另一实数，而条件 3 又被滿足。又因

$$|f(x_2)-f(x_1)|\leqslant K|x_2-x_1|,$$

故条件 4 也被滿足。根据本定理知，$x=f(x)$ 有一解且仅有一解。

例 4. 隐函数定理 設函数 $f(x, y)$ 在長条

$$a\leqslant x\leqslant b, \quad -\infty<y<+\infty$$

上确定。設 $f(x, y)$ 对 x 連續，而且在長条上处处有对 y 的有界偏导数 $f'_y(x, y)$，設后者恒大于某一常数 $m>0$，

則方程式
$$f(x, y)=0 \tag{45}$$
在閉区間 $[a, b]$ 上必有、且只有一連續解 $y(x)$。

为了用压縮映象原理，令集合 $\mathfrak{M}$ 为閉区間 $[a, b]$，族 $\{\varphi\}$ 为在 $[a, b]$ 上确定的所有的連續函数。显然，压縮映象原理的条件 1, 2 能滿足。其次令

$$A(\varphi)\equiv\varphi-\frac{1}{M}f(x, \varphi),$$

式中 M 是 $f'y(x, y)$ 的上界。这运算子显然滿足条件 3。另一方面，因

$$|A(\varphi_2)-A(\varphi_1)|=\left|\varphi_2-\frac{1}{M}f(x, \varphi_2)-\left\{\varphi_1-\frac{1}{M}f(x, \varphi_1)\right\}\right|=$$

$$=\left|\{\varphi_2-\varphi_1\}-\frac{1}{M}f'_y(x, \varphi_1+\theta(\varphi_2-\varphi_1))\{\varphi_2-\varphi_1\}\right|\leqslant$$

$$\leqslant|\varphi_2-\varphi_1|\left(1-\frac{m}{M}\right),$$

但 $0<\frac{m}{M}<1$, 故 $0<1-\frac{m}{M}<1$, 因而条件 4 亦满足。据定理，知

$$\varphi=\varphi-\frac{1}{M}f(x,\varphi)$$

即方程(45)在 $[a, b]$ 上有一而且仅有一連續解。

压縮映象原理之証明　自所給的函数族 $\{\varphi\}$ 中任取一函数 φ_0, 作出函数

$$\varphi_1=A(\varphi_0).$$

φ_1 叫做方程(44)的“第一近似解”。据运算子的性質 3, φ_1 必屬于 $\{\varphi\}$ 中，故可由 φ_1 作(44)的“第二近似解”

$$\varphi_2=A(\varphi_1).$$

函数 φ_2 也必屬于函数族 $\{\varphi\}$。因之这一手續可以无限制地繼續做下去。这样，得无穷个函数所成之序列

$$\varphi_0,\ \varphi_1,\ \varphi_2,\ \cdots,\ \varphi_n,\ \cdots, \tag{46}$$

其中当 $n\geqslant 1$ 时有　　$\varphi_n=A(\varphi_{n-1})$.

今将証函数序列(46)在 $\mathfrak{M}$ 上一致收斂，为此，考慮如下的級数：

$$\varphi_0+(\varphi_1-\varphi_0)+(\varphi_2-\varphi_1)+\cdots \tag{47}$$

(參看 § 15)。由性質 1, 可設

$$|\varphi_0|\leqslant M_0,\quad |\varphi_1|\leqslant M_1,$$

則　　$$|\varphi_1-\varphi_0|\leqslant M_0+M_1=M.$$

应用运算子 $A(\varphi)$ 的性質 4, 則得

$$|\varphi_{n+1}-\varphi_n|=|A(\varphi_n)-A(\varphi_{n-1})|\leqslant m\sup|\varphi_n-\varphi_{n-1}|,$$

故級数(47)之任一項之絕对值都不超过收斂的正項級数

$$M_0+M+Mm+Mm^2+\cdots+Mm^n+\cdots$$

中之对应項。

因函数序列(46)的每一項都是級数(47)的一个部分和，所以

序列(46)一致收斂于某一連續函数 φ。由性質 2，这極限 φ 亦必属于函数族 $\{\varphi\}$ 中。因而运算子 $A(\varphi)$ 有意义。

其次，我們应注意：

$$|A(\varphi)-A(\varphi_{n-1})|\leqslant m\sup|\varphi-\varphi_{n-1}|.$$

但因当 $n\to\infty$ 时 $|\varphi-\varphi_{n-1}|$ 一致地趋于 0，故 $A(\varphi_{n-1})$ 也一致收斂于 $A(\varphi)$。把等式 $\varphi_n=A(\varphi_{n-1})$ 的两端取 $n\to\infty$ 时的極限，則得

$$\varphi=A(\varphi).$$

倘使方程(44)在族 $\{\varphi\}$ 中有二个解 φ_1 与 φ_2，則有

$$|\varphi_2-\varphi_1|=|A(\varphi_2)-A(\varphi_1)|\leqslant m\sup|\varphi_2-\varphi_1|.$$

因之
$$\sup|\varphi_2-\varphi_1|\leqslant m\sup|\varphi_2-\varphi_1|,$$

但 $m<1$，故上式仅于 $\varphi_2\equiv\varphi_1$ 时方能成立。因之(44)只有一个解，而定理完全証明。

習　題

1. 求証，条件 1 可以用下述的比較弱的条件来代替：$\mathfrak{M}$ 中的任意两个函数的差都是有界的。

2. 試举例說明，本节的定理中的四个条件每一个都是重要的。并証明，不可以令 $m=1$。

§17. 压縮映象原理的几何解釋

把函数族 $\{\varphi\}$ 中的函数当作一集合 Φ 中的点，而以 $\sup|\varphi_2-\varphi_1|$ 作为两"点" φ_2 与 φ_1 間之"距离"。則条件 2 可解釋为：点集 Φ 中任一无穷的也属于 Φ；也就是說，Φ 是一閉集。条件 3 就是运算子 A 将 Φ 中任一"点" φ 变为 Φ 中另一"点" φ^*。最后，条件 4 是：若运算子 A 把"点" φ_1 变成"点" φ_1^*，"点" φ_2 变成"点" φ_2^*，則 φ_1^*，φ_2^* 两点間之"距离"不大于 φ_1 与 φ_2 两"点"間之"距离"的 m 倍($m<1$)。而在函数族 $\{\varphi\}$ 中求(44)的解，就是求点集 Φ 中在运算

子 A 作用下的不动"点"。

这样的点必然存在，自几何方面看，甚为显然。因若設 Φ 为有界集合，即其"点"間之"距离"有一最小上界。此上界叫做点集 Φ 的直徑。令此直徑为 d。用曲綫 l 为边界的閉区域(圖 12)表示点集 Φ。此点集 Φ 中所有的点經过运算子 A 变成的点組成一点集 Φ_1，由条件 3，Φ_1 必完全包含在 Φ 內。設 Φ_1 之边界为曲綫 l_1。由条件 4，Φ_1 之直徑不大于 md。又在 Φ_1 上实施运算子 A，得一点集 Φ_2。因在 Φ 上实施运算子 A 得 Φ_1，而 Φ_1 为 Φ 的一部分，故在 Φ_1 上实施 A 仅能得屬于 Φ_1 之"点"，故 Φ_2 全部包含在 Φ_1 內。由条件 4，Φ_2 之直徑不大于 m^2d。設其边界为曲綫 l_2。繼續这一手續，可得一串閉点集序列

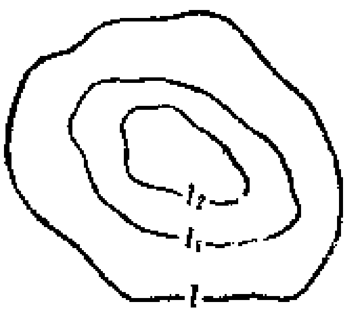

圖 12

$$\Phi,\ \Phi_1,\ \Phi_2,\ \cdots,\ \Phi_n,\ \cdots,$$

其中每一点集完全包含在前一点集內，而点集的直徑趋于零。故这一点集序列的公共部分仅含一点，这点显然在运算子 A 作用下不动。

在运算子 A 作用下 Φ 中不能有两"点"不动，因为如有两点不动，則經运算子 A 后其距离将不变，但这与条件 4 矛盾。

習 題

1. 設 F 为 n 維空間的有界閉集合，而运算子 φ 把它映射它自己，而且当 $A \neq B$ 时恒有

$$\rho[\varphi(A),\ \varphi(B)] < \rho[A,\ B]. \qquad (*)$$

这里 $\rho[A, B]$ 是 A, B 两点間的距离。求証：在这运算子作用下恰有一点不动。对于非封閉的有界集合，这事实是否仍旧成立？又对于无界閉集合是否成立？

2. 求証:若以不等式

$$\rho[\varphi(A),\varphi(B)]\leqslant m\rho[A,B],\quad 0\leqslant m<1$$

来代替不等式(*)，則不动点存在定理对于任一閉集合都成立(即使此集合无界也成立)。此时，对于非封閉有界集合是否仍成立?

3. 設以不等式

$$\rho[\varphi(A),\varphi(B)]\leqslant\rho[A,B] \qquad (**)$$

代替不等式(*)。求証:不动点存在定理当F为一直綫段或等腰直角三角形的边綫时成立；而当F为一圓周时不成立。若ρ为沿边綫量出的最短距离，則定理对于等腰直角三角形的边綫也不成立。

本定理在这样的假定下，对于任一有界的凸閉集亦成立(为了証明，必須考慮一个輔助的相似变换)。試举出这样的一个有界閉集，对于它可以有一个滿足不等式(**)的映射，这映射沒有不动点而且不能化为一个运动;这样的点集可能是一个圓周么?

4. 設$\varphi(x)$是一个在閉区間$a\leqslant x\leqslant b$上确定的連續函数，又設$a\leqslant\varphi(x)\leqslant b$。在这条件下証明:可以找到一个値$x_0$ $(a\leqslant x_0<b)$使$\varphi(x_0)=x_0$。

这定理可以改述如下:当閉区間連續地映射入自己时，至少有一个不动点存在。对于n維的球($n\geqslant 2$)，亦有类似的定理。

5. 設函数$f(x,y)(-\infty<x<\infty,\ -\infty<y<\infty)$是連續的，而且滿足对$y$的李卜希茨条件；又設对于某一个正数$T$，$f(x+T,y)\equiv f(x,y)$；但对于某两个数$y_1$与$y_2$，$f(x,y_1)f(x,y_2)<0(-\infty<x<\infty)$。借助于習題4，試証方程式(1)此时至少有一个以$T$为周期的周期解。用这定理于方程式$y'=a(x)y+b(x)$，此处的$a(x)$与$b(x)$是連續的且以$T$为周期的周期函数，而$a(x)\neq 0$(O. A. Олейник)。

§18. 关于具有正则右端的微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的哥西(Cauchy)定理

設函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的一邻域內为正則的，則微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{48}$$

有一个，而且仅有一个能滿足开始条件 $y(x_0)=y_0$ 而且在 x_0 点的邻域內为正則的解。(哥西定理)

若函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在一点 $(x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$ 之一邻区 $|x_i-x_i^0|<r(i=1,2,\cdots,n)$ 內可展成

$$(x_1-x_1^0),(x_2-x_2^0),\cdots,(x_n-x_n^0)$$

的冪級数，則 F 称为在此邻域內的 $x_1,x_2\cdots x_n$ 的正則函数。

此时，函数及其自变数不但可取实数値，且可取复数値。将正則函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 之展式逐項对复变数 x_k 求导数，得一冪級数，此冪級数所定出之函数称为正則函数 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 对于 x_k 的偏导数。这一級数的收斂半徑至少与 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的展式的收斂半徑相同(参看菲赫金哥尔茨著微积分学教程第二卷第三分册)。若 $F(x_1,x_2\cdots,x_n)$ 及 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 仅取实値，則导数的定义与通常的一样。通常的关于函数的和、积及函数的函数等的求导数法則此时仍成立。在本节所考虑的数値是否仅取实数値，还是也可以取复数値，在討論时反正都是一样的。

哥西定理的証明，在历史上是形状如 $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ 的一般的微分方程的当 $x=x_0$ 时其値为 y_0 的解的存在及唯一性的第一个証明。因为 $f(x,y)$ 是正則函数的假定未免太不自然，所以我們不能只以这个証明为滿足。許多从物理問題中引出的微分方程，其右端的函数 $f(x,y)$ 并不是正則函数。

柯西定理的証明 首先，我們可假定 $x_0=y_0=0$ 而不影响普遍性，因为在一般情形，只要令 $x-x_0=x^*$, $y-y_0=y^*$ 就可变成这样。

現在暫且承認，方程(48)有一当 $x=0$ 时其值为 0 的正規解，設以

$$y=C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots$$

表示它。

显然 $C_0=y(0)=0$, 将这級数替代方程(48)中的 y, 得一含 x 的恒等式。微分所得的恒等式一次，两次，三次，…，則得一系列含 x 的恒等式。比較这些恒等式两端在 $x=y=0$ 的值，就可逐步算出系数 C_i:

$$\left.\begin{aligned}
C_1&=y'(0)=f(0,0),\\
2!C_2&=y''(0)=f_x(0,0)+f_y(0,0)y'(0)=f_x(0,0)+\\
&\qquad+f_y(0,0)C_1,\\
3!C_3&=y'''(0)=f_{xx}(0,0)+2f_{xy}(0,0)y'(0)+\\
&\qquad+f_{yy}(0,0)y'^2(0)+f_y(0,0)y''(0)=\\
&=f_{xx}(0,0)+2f_{xy}(0,0)C_1+f_{yy}(0,0)C_1^2+\\
&\qquad+2!f_y(0,0)C_2
\end{aligned}\right\}(49)$$

等等。

由上式看出，系数 C_i 單值地确定，所以方程(48)至多有一个当 $x=0$ 时其值为 0 的正則解。此外，为了以后的証明，必須指出，解 $y(x)$ 的冪級数展式中的系数 C_i 可用函数 $f(x, y)$ 的冪級数展式中的系数及 $C_1, C_2, \cdots, C_{i-1}$ 表出，并且在这个表示式中我們只用到加法和乘法。

为了証明方程(48)的解存在，用(49)所确定的 C_i 作为系数，作出一个冪級数

$$C_1x+C_2x^2+C_3x^3+\cdots, \tag{I}$$

若此級数收斂，它显然就是所求的解(此級数将用罗馬字 I 表示)。

事实上，用这級数代方程(48)中之y，并把右端按x展成幂級数[①]，則两端中x的同次項的系数必然相等。为了証明級数(I)收斂，作輔助方程

$$\frac{dz}{dx}=F(x,z) \tag{50}$$

其右端也是在(0, 0)的邻域內的正則函数，并且由$F(x,z)$展成的幂級数，其系数都是正数而且不小于$f(x,y)$的展式中对应項的系数的絕对值。方程(50)叫做方程(48)的强方程，而函数$F(x,z)$叫做$f(x,y)$的强函数。例如若$f(x,y)$在(0, 0)的邻域

$$|x|<r,\quad |y|<r$$

內是正則的，則可以令

$$F(x,z)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r'}\right)\left(1-\frac{z}{r'}\right)},$$

这里$0<r'<r$，而M是一个正的常数(参看[②]菲赫金哥尔茨著微积分学教程第二卷第二分册，453—454，高等教育出版社，1958年)。

---

① 此处我們利用了将級数代入級数的定理(例如参閱菲赫金哥尔茨："微积分学教程"第二卷第二分册，438—440頁，高等教育出版社，1958年)。

② 設M是$|f(x,y)|$在$|x|<r'$，$|y|<r'$的上界。

对于已学过多元复变函数理論初步的讀者来說，函数

$$F(x,z)=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r'}\right)\left(1-\frac{z}{r'}\right)}=\sum_{j,k}^{\infty}\frac{M}{r'^{j+k}}x^jz^k$$

是函数

$$f(x,y)=\sum_{j,k}^{\infty}a_{jk}x^jy^k$$

的强函数的証明可以簡单地写出如下：根据多元复变函数的寇西定理有

$$a_{jk}=\frac{1}{(2\pi i)^2}\int\int_{\substack{|x|<r'\\|y|<r'}}\frac{f(x,y)}{x^{j+1}y^{k+1}}\,dx\,dy.$$

由上式推出

$$|a_{jk}|\leqslant\frac{M}{r'^{j+k}}.$$

这就証明了F是f的强函数。——譯者注。

如果我們能得到方程(50)的当 $x=0$ 时等于零的一个正則解 $z(x)$，即可推得这級数(I)在 $z(x)$ 的冪級数的收斂域内亦是收斂的。事实上，正和我們在前面討論的冪級数(I)的情况相类似，$z(x)$的冪級数的 i 次冪的系数 C_i^* 是由 $F(x,z)$ 的冪級数系数及 $C_1^*, C_2^*, \cdots, C_{i-1}^*$ 且仅用加法与乘法的运算而算出的。由(49)式易知

$$C_1^* \geqslant |C_1|;$$

用数学归納法，可以自 $i-1$ 变为 i，故得

$$C_i^* \geqslant |C_i|.$$

显然在作出 $z(x)$ 时，只須考虑 x 的实数值。若 x 是实数，則方程

$$\frac{dz}{dx}=\frac{M}{\left(1-\frac{x}{r'}\right)\left(1-\frac{z}{r'}\right)},$$

容易用分离变数法积分出来：

$$\int_0^z\left(1-\frac{u}{r'}\right)du=\int_0^x\frac{M\,d\xi}{\left(1-\frac{\xi}{r'}\right)}.$$

所以
$$z-\frac{z^2}{2r'}=-r'M\ln\left(1-\frac{x}{r'}\right).$$

这个二次方程有一个解

$$z(x)=r'-r'\sqrt{1+2M\ln\left(1-\frac{x}{r'}\right)},$$

并且这解当 $x=0$ 时取值为 0，而当

$$|x|<r'\left(1-e^{-\frac{1}{2M}}\right)$$

时，是 x 的正則函数。

因之，証明了形式上地对 $y(x)$ 作出的級数当 $|x|$ 够小时收斂的断言。它的和就是微分方程(48)的正則解。

推論 設当 x, y 取实値而在一区域 G 上变化时方程(1)的右端 $f(x, y)$ 是正則的[①]，且 $f(x, y)$ 亦取实値，則此方程的实解必是正則的。事实上，因 $f(x, y)$ 在区域 G 上是正則的，則 G 內任意一点 (x_0, y_0) 必有在 G 內的一个邻域，$f(x, y)$ 在此邻域內滿足对 y 的李卜希茨条件。在此邻域內（或較小的邻域）当 $x=x_0$ 时，其値为 y_0 的解是唯一的，所以它和剛才所作出来的正則解重合。

附注 若方程(48)的右端对 y 来說是綫性的，則对于这方程的解的存在区域可以給出比一般情形更好的估計。事实上，設方程之形状如 (18)，而 $a(x)$ 及 $b(x)$ 当 $|x|<r$ 时为 x 的正則函数，則可取方程

$$\frac{dz}{dx}=\frac{M}{1-\frac{x}{r'}}(z+1), \qquad (0<r'<r)$$

作为强方程，这里的 $(z+1)$ 的系数是 $a(x)$ 及 $b(x)$ 的公共的强函数，这个方程有一个解

$$z=\left(1-\frac{x}{r'}\right)^{-Mr'}-1,$$

它在 $|x|<r'$ 为正則的，且当 $x=0$ 时其値为 0。

所以，象以前在一般情形所証的一样，我們也能証明綫性方程有一个解，在 $|x|>r$ 时是正則的，而且当 $x=0$ 时其値为 0。

習 題

試求方程 $y'=e^{xy}$ 的 $y(0)=0$ 的解的按 x 冪展开的冪級数的开始四項。估計其剩余項及收斂半徑之上界、下界。

[①] 函数若在一区域 G 的每一点的一邻域內是正則的，則称此函数在区域 G 上是正則的。

§19. 微分方程解的可微分次数[④]

定理 設 $f(x, y)$ 具有对 x 的及对 y 的 p 阶（$p \geqslant 0$）連續偏导函数，則方程(1)的每一解必有 $p+1$ 阶連續导函数。（一函数的 0 阶导函数就是这函数本身。）

証 設 $y(x)$ 为微分方程(1)的一个解。則有恒等式

$$y'(x) \equiv f(x, y(x)). \tag{51}$$

既然 $y(x)$ 滿足方程(1)，則 $y(x)$ 处处都有对 x 的导数，所以 $y(x)$ 是連續的。但 $f(x, y)$ 是 x, y 的連續函数，所以 $f(x, y(x))$ 也是对 x 連續的，因之由(51)知 $y'(x)$ 也是連續的。

如果 $p \geqslant 1$，則 $f(x, y(x))$ 的对 x 导函数必是連續的，所以由(51)知 $y(x)$ 也有連續的二阶导函数 $y''(x)$。把(51)对 x 微分，即得

$$y''(x) = f'_x(x, y(x)) + f'_y(x, y(x))y'(x).$$

同理，若 $p \geqslant 2$，由上式可知 $y(x)$ 必有連續的三阶导函数；其余类推。

習 題

試举这样的方程(1)的例子，其右端 $f(x, y)$ 是連續但不可微的，而所有的解都是解析的。

§20. 解对于开始値的和对于方程右端的依賴性

一直到現在，我們先把某一点 (x_0, y_0) 固定，再研究經过这点的微分方程的解。倘使 x_0 与 y_0 变动，則这个解亦变动。現發生一应用时頗重要的問題：当 x_0, y_0 变动时，解是怎样变动的。正如

---

④ 原文是 О степени гладкости решений 直譯应作解的平滑次数——譯者注。

阿达馬(Hadamard)指出，此問題有首要的意义。实际上若任何一物理問題能化为求一微分方程的滿足某开始条件的解，則此开始条件通常是由实驗求得，实驗时測量不能保証絕对准确。倘使測量 y_0 时甚至不很大的誤差也会引起微分方程的解的巨大的变化，依 $x=x_0$ 时取值 y_0 的条件求得的解在实用上就沒有价值。

对上面所講的还应該添加一些补充說明：用微分方程来研究自然現象时，我們将作一些"理想化"，这"理想化"使我們能从自然現象中选取其最重要的方面。例如，在§1，例2中我們沒有考慮物質的分子构造等等。所以微分方程及其开始条件只能近似地描述自然現象。如果近似程度已經超过将这現象理想化时所考慮的准确程度，則我們可有同等权利說，一切彼此足够接近的方程与开始条件都被滿足了；例如，在§1例2中，若几个开始数据在数值上彼此相差不超过一个鈾原子的重量时，則我們可以有同等权利認为它們都应被滿足。所以，为了保証，应用所給的微分方程来研究所考慮的自然現象是合理的，則这些近似的方程在这样的近似的开始条件下的解也应該是彼此很接近的(在理想化的范圍內彼此是沒有区别的)。

我們将証：在某些假定下，微分方程的解将連續地依賴于这方程本身及其开始值。

定理　設在区域 G 上給有一个連續而且有界的函数 $f(x, y)$，并設微分方程式

$$y' = f(x, y) \tag{1}$$

只有一个解經过区域 G 的每一內点 (x_0, y_0)。則方程式(1)的解将連續地依賴于方程式(1)的右端 $f(x, y)$ 及点 (x_0, y_0)[①]。說得更明

① 在§22中解对开始值的連續依賴性将在較强的假定下証明而不引用現在叙述的定理的証明。讀者可以略去下面的証明。

确些：設方程式(1)的經过(x_0, y_0)点的解$y_0(x)$在閉区間$[\alpha, \beta]$ $(\alpha<x_0<\beta)$上确定。于是对于任意一个$\varepsilon>0$，必可找到一个$\delta>0$，使得在条件

$$|\bar{x}_0-x_0|<\delta,\ |\bar{y}_0-y_0|<\delta,\ |\bar{f}(x, y)-f(x, y)|<\delta\ (\text{在 } G \text{ 內})$$

$[\bar{f}(x, y)$是在G內給定的連續函数$]$

下，方程式

$$y'=\bar{f}(x, y) \tag{52}$$

的經过$(\bar{x}_0, \bar{y}_0)$点的解$\bar{y}_0(x)$在閉区間$[\alpha, \beta]$上存在，而且在这区間上与$y_0(x)$相差少于ε。

証　設这結論不正确。于是可以找到一个$\varepsilon_0>0$，并找到方程式

$$y'=\bar{f}_k(x, y)$$

的开始条件为$y_k(x_k)=y_k$的解的序列$\{y_k(x)\}$，此处

$$x_k\to x_0,\ y_k\to y_0,\ \sup|f_k-f|\to 0,\qquad (\text{当 } k\to\infty \text{ 时})$$

但当这些解在整个区間$[\alpha, \beta]$上开拓时，不等式

$$|y_k(x)-y_0(x)|<\varepsilon_0 \tag{53}$$

不能恒成立。

設M是大于$|f(x, y)|$在区域G內的最小上界的任意一个正数。讓我們考虑完全在G內的一个長方形：

$$|x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant Ma.$$

于是对于足够大的k，函数$y_0(x)$与$y_k(x)$在整个閉区間$|x-x_0|\leqslant a$上都是确定的（何故？）

我們来証：对于任一个正的ε，如果k取得足够大，則在整个区間$|x-x_0|\leqslant a$上将有

$$|y_k(x)-y_0(x)|<\varepsilon.$$

事实上，倘使認为这結論不正确。于是有这样一个正的ε，及这样的无穷数列$k_1<k_2<\cdots$，使得不等式

$$|y_{k_i}(\bar{x}_i)-y_0(\bar{x}_i)|\geqslant\varepsilon \tag{54}$$

对于所有的 $i\geqslant 1$，并对于区間 $|x-x_0|\leqslant a$ 中某一个 $\bar{x}_i$ 成立。

函数列 $y_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 是同等連續的，因指标 k 足够大时，每一个 $y_k(x)$ 的导数的絕对值处处不超过这数值 M，故对于这样的 k 将有

$$|y_k(x'')-y_k(x')|<M|x''-x'|.$$

所以由函数列 $y_{k_i}(x)$ 中可以选出在区間 $|x-x_0|\leqslant a$ 上一致收斂的子序列 $y_1^*(x),\ y_2^*(x),\ \cdots,\ y_k^*(x),\ \cdots$。用和 § 12 中相仿的推理，可推得这子序列收斂于方程(1)經过 (x_0, y_0) 点的解。因为我們已假定这样的解是唯一的，所以子序列收斂于这个解 $y_0(x)$。可是，子序列 $y_k^*(x)$ 在区間 $|x-x_0|\leqslant a$ 上一致收斂于 $y_0(x)$ 是与不等式(54)矛盾的。可見(54)的假定将引起矛盾。

这样，我們已証明：如果 k 足够大时，則 $|y_k(x)-y_0(x)|$ 在区間 $|x-x_0|\leqslant a$ 上的值可以变成任意小。

現在作出一个完全在区域 G 内的長方形 Q_1

$$|x-x_0'|\leqslant a_1,\quad |y-y_0'|\leqslant Ma_1;$$

式中

$$x_0'=x_0\pm a,\quad y_0'=y_0(x_0').$$

根据前面的証明，如果 k 足够大时，可以使 $(x_0', y_k(x_0'))$ 点任意地接近于 (x_0', y_0') 点。所以在区間 $|x-x_0'|\leqslant a_1$ 上采用和以前在区間 $|x-x_0|\leqslant a$ 上对于这些解 $y_0(x)$ 与 $y_k(x)$ 所作的完全一样的推理，可得結論：对于任何一个正的 ε，如果 k 是足够大时，則在区間 $|x-x_0'|\leqslant a_1$ 上将有

$$|y_k(x)-y_0(x)|<\varepsilon.$$

設 $[\alpha,\beta]$ 是这样一个区間，使积分曲綫 $y=y_0(x)$ 在这区間 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 上是严格地在区域 G 的内部的。再作一个完全在区域 G 内的足够小的長方形 Q_k：

$$|x-x_0^{(k)}|\leqslant a_k,\ |y-y_0^{(k)}|\leqslant Ma_k,$$

式中 $x_0^{(k)}=x_0^{(k-1)}\pm a_{k-1}$; $y_0^{(k)}=y_0(x_0^{(k)})$.

对于 Q_k 再作和以前对于 Q_1 所作的完全一样的推理，可証：对于所有足够大的 k，不等式(53)在閉区間 $[\alpha,\beta]$ 上都滿足。

为了証明，只要用有限个的長方形。(何故？)然而証得的事实是与本証明开始时所作的假定互相矛盾的。因此証明了本定理。

附注 倘使函数 $f(x,y)$ 在区域 G 內为連續及有界，且經过此区域某一內点 (x_0,y_0)，方程(1)之解 $y(x)$ 是唯一的，則此方程(52)的所有經过点 $(\bar{x}_0,\bar{y}_0)$ 的解当 $\bar{x}_0\to x_0$, $\bar{y}_0\to y_0$ 及 $\sup|\bar{f}-f|\to 0$ 时一致收斂于这个解 $y(x)$。事实上，在証明本定理时，我們也只用到"經 (x_0,y_0) 点的解是唯一的"的假定。

有时不但須知道方程的解是否是开始值的連續函数，且須証明解对开始值的导数亦存在。

为此，首先請注意下之事实。設开始值为：当 $x=x_0$ 时，$y=y_0$，而微分方程

$$y'=f(x,y) \tag{1}$$

經过 (x_0,y_0) 之解，以 $y(x,x_0,y_0)$ 表示。引入一个新函数 z 及一个新自变数 t 如下：

令 $$z=y(x,x_0,y_0)-y_0,$$

又令 $$t=x-x_0.$$

如此，开始值 $x=x_0$, $y=y_0$ 对应于新开始值 $t=0$, $z=0$。函数 z 写为

$$z=y(t+x_0,x_0,y_0)-y_0.$$

而微分方程(1)变换为如下的方程：

$$\frac{dz}{dt}=f(t+x_0,z+y_0). \tag{55}$$

于是，研究微分方程(1)之解对开始值之依賴性已化为：研究微分方程(55)的解对方程右端所含参变数的依賴性。榜卡来

(Poincaré) 曾研究此問題。当解决这問題时，我們将根据阿达馬(Hadamard)引理，这引理在下节即将証明。

習　題

1. 考慮方程

$$y'(x)=y(x-h),$$

这里 h 是常数，(当 $h>0$ 时这样的方程叫做具有推迟变量的微分方程)。考慮这方程对于所有实数 x 都确定的解。容易看出：若在任一長度为 h 的区間上已知一解，則可以处处确定它。求証：若 $h>0$，則于任意的 $A>0$，$\varepsilon>0$，可找出这样的 $\delta>0$，使得：若当 $-h<x<0$ 时 $|y(x)|<\delta$，則当 $0\leqslant x\leqslant A$ 时，$|y(x)|<\varepsilon$。

又若 $h<0$，則对于任意的 $A>0$，必有解的序列 $y_n(x)$ 当 $-\infty<x<0$ 时一致收斂到 0，且其任何阶的导数也都如此。可是当 $0<x<A$ 时，$\sup|y_n(x)|\xrightarrow[n\to\infty]{}\infty$。証明最后一結論时可用形如 $y=e^{\alpha x}\sin\beta x$ 的函数作为解，这里 α 及 β 都是适当选擇的常数。

2. 設在閉区間 $[a,b]$ 上給有一个連續函数族，而且在条形区域 $a\leqslant x\leqslant b$，$-\infty<y<\infty$ 的每一点 A，有而且只有这函数族中一个函数 $f_A(x)$ 的圖綫通过。求証：当 A 为定点而 $A'\to A$ 时[A'是这条形区域內的(动)点]，在閉区間 $[a,b]$ 上，$f_{A'}(x)$ 将一致地趋于 $f_A(x)$。試述当函数族的函数的圖綫充滿某一区域时的类似命題。粗淺地說，这个性質是，从函数族的存在与唯一性就可以推出它对于开始値之連續依賴性，至于所考慮的函数族是否是一个微分方程的解是不重要的。

§21. 阿达馬(Hadamard)引理

引理　設 G 是 $(x_1,\cdots,x_n;z_1,\cdots,z_m)$ 空間的一区域，而且对于

$x_1, \cdots, x_n$ 而言是凸区域。[1] 又設 $F(x_1, \cdots, x_n; z_1, \cdots, z_m)$ 在 G 内有对 $x_1, \cdots, x_n$ 的 0 阶，一阶，二阶，…，p 阶連續偏导数（$p>0$）。[2] 則必能找到这样 n 个函数：

$$\varphi_i(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n; z_1, \cdots, z_m) \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

这些函数都有对 $x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n$ 的連續 $p-1$ 阶偏导数，且使下面的等式成立：

$$F(y_1, \cdots, y_n; z_1, \cdots, z_m) - F(x_1, \cdots, x_n; z_1, \cdots, z_m) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(x_1, \cdots, x_n; y_1, \cdots, y_n; z_1, \cdots, z_m)(y_i - x_i). \quad (56)$$

証[3] 因为我們假定这区域 G 对于 $x_1, \cdots, x_n$ 是凸区域，所以可以由下列显然的等式：

$$F(y_1, \cdots, y_n; z_1, \cdots, z_m) - F(x_1, \cdots, x_n; z_1, \cdots, z_m) =$$

$$= \int_0^1 F_t'(x_1 + t[y_1 - x_1], \cdots, x_n + t[y_n - x_n]; z_1, \cdots, z_m)\,dt,$$

来証明本定理。現用 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 分别表示这函数 F 对于

$$x_1 + t[y_1 - x_1], x_2 + t[y_2 - x_2], \cdots, x_n + t[y_n - x_n]$$

的偏导数。把 F_t' 用 $F_1, F_2, \cdots, F_n$ 表出，

即得

$$F(y_1, \cdots, y_n; z_1, \cdots, z_m) - F(x_1, \cdots, x_n; z_1, \cdots z_m) =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (y_i - x_i) \int_0^1 F_i(x_1 + t[y_1 - x_1], \cdots, x_n +$$

$$+ t[y_n - x_n]; z_1, \cdots, z_m)\,dt.$$

---

[1] 这就是說：G 内两点 $(x_1^*, \cdots, x_n^*; z_1, \cdots z_m)$ 与 $(x_1^{**}, \cdots x_n^{**}; z_1, \cdots z_m)$ 所联的直綫段必在 G 内。

[2] 所謂 0 阶导数是指函数本身。

[3] 这証明是 M. A. Крейнсс 的。

这等式右端的那些积分显然可取作阿达馬引理中的 φ_i，它們具有本引理所要求之性質。

習　　題

1. 阿达馬引理中所証的函数 F 的表示式中的 φ_i 是唯一的么？

2. 設函数 F 的增量表示为(56)的形式，其中函数 φ_i 具有对 $x_1, \cdots, x_n, y_1, \cdots, y_n$ 的自一阶到 k 阶 $(k\geqslant 0)$ 的連續导函数，則函数 $F(x_1, \cdots, x_n, z_1, \cdots, z_m)$ 在 G 内将有对 $x_1, \cdots, x_n$ 的自一阶到 $(k+1)$ 阶的連續导函数。这一命題在某种程度上是阿达馬引理的逆定理。

§ 22. 关于解对参变数的依賴性的定理

設給有微分方程：

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n). \tag{57}$$

設 $\overline{G}_{xy}$ 是在 (x, y) 平面上的一閉区域。用 $\tilde{G}$ 表示这样的点 $(x, y, \mu, \cdots, \mu_n)$ 的点集，此处

a) 点 (x, y) 都屬于 $\overline{G}_{xy}$；

b) $|\mu_i|<\mu_i^0$, $(i=1, 2, \cdots, n)$, μ_i^0 是正的常数。

于是有下面的定理：

定理

1) 設 $f(x, y, \mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n)$ 在 $\tilde{G}$ 上对所有的变数都是連續而且有界的，并滿足对于 y 的李卜希茨条件

$$|f(x, y_2, \mu_1, \cdots, \mu_n)-f(x, y_1, \mu_1, \cdots, \mu_n)|\leqslant K|y_2-y_1|$$

(此处 K 是与 x, y, μ 都无关系的常数)，則对于 $\overline{G}_{xy}$ 的任一內点 (x_0, y_0)，必能在 Ox 軸上定出包含 x_0 在其内部的一个这样的閉区間 $[a, b]$ 在这閉区間上微分方程(57)的經过 (x_0, y_0) 点的解，是

x 与所有的 $\mu_1, \cdots, \mu_n$ 的連續函数。

2) 設 f, 同它的对于 y 与所有的 μ 的一阶，二阶，…，p 阶偏导数，对所有的变数 $x, y, \mu_1, \cdots, \mu_n$ 而言，在 $\tilde{G}$ 內是連續的而且有界的，则当 x 屬于前述的閉区間 $[a, b]$ 內而且 $|\mu_i|<\mu_i^0$ 时 $(i=1, 2, \cdots, n)$，解 $y(x, \mu_1, \cdots, \mu_n)$ 必有对参变数 μ 的偏导数，一直到 p 阶 $(p\geqslant 1)$，而且这些偏导数都是 $x, \mu_1, \cdots, \mu_n$ 的連續函数。

証本定理 1)、2) 时，我們假定方程右端只含一参变数 μ 如下：

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y, \mu). \tag{58}$$

一般情形(即含数个参变数的情形)也可类似地証明。

証 1. 用"逐次逼近法"求方程 (58) 当 $x=x_0$ 时取值 y_0 的一个解。这些逼近解的形状如下：

$$\varphi_1(x, \mu)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi), \mu)\, d\xi,$$

$$\varphi_2(x, \mu)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_1(\xi, \mu), \mu)\, d\xi$$

等等。

易知，当 x 在 § 15 所說的閉区間 $[a, b]$ 內变化，而且 $|\mu|<\mu_0$ 时，一切的 $\varphi_i(x, \mu)$ 是 x 与 μ 的連續函数。用和 § 15 同样的推理，可証：当 x 在一个含 x_0 点的閉区間 $[a, b]$ 上变化而且 $|\mu|<\mu_0$ 时，序列 $\varphi_i(x, \mu)$ 对于 x, μ 是一致收斂。所以，其極限函数 $\varphi(x, \mu)$，即經过点 (x_0, y_0) 的唯一的解，当 $a\leqslant x\leqslant b$ 及 $|\mu|<\mu_0$ 时，必是 x 及 μ 的連續函数。

証 2. 在本定理第 2 段中，若假定 f 有对于 y 与 μ 的一阶連續导数，则解 $\varphi(x, \mu)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 及 $|\mu|<\mu_0$ 时，必有对于 μ 的一阶連續偏导数。現証之如下：

設 $\varphi(x,\mu)$ 是方程(58)当 $x=x_0$ 时，取值 y_0 的解，又設 $\varphi(x,\mu+\Delta\mu)$ 是方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\mu+\Delta\mu) \tag{59}$$

的当 $x=x_0$ 时，取值 y_0 的解。

把二解分别代入方程(58)与(59)，将所得的两个恒等式相减，即得：

$$\frac{d[\varphi(x,\mu+\Delta\mu)-\varphi(x,\mu)]}{dx}=$$

$$=f(x,\varphi(x,\mu+\Delta\mu),\mu+\Delta\mu)-f(x,\varphi(x,\mu),\mu).$$

对上式右端应用阿达馬引理，并令 $\varphi(x,\mu+\Delta\mu)-\varphi(x,\mu)=$ $=\Delta\varphi$，把上式改写如下：

$$\frac{d}{dx}(\Delta\varphi)=\Delta\varphi\Phi_1+\Delta\mu\Phi_2,$$

此处 Φ_1 与 Φ_2 是 x, $\varphi(x,\mu)$, $\varphi(x,\mu+\Delta\mu)$, μ 与 $\mu+\Delta\mu$ 的連續函数，所以根据本定理第一部分的結果，知道它們是 x 与 $\Delta\mu$ 的連續函数(此处認为 μ 是固定的)。以 $\Delta\mu$ 除上面末一个的等式；現为了确定 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$，我們有下面的綫性方程：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\right)=\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}\Phi_1+\Phi_2. \tag{60}$$

到目前为止，仅当 $\Delta\mu\neq0$ 时，$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ 之值方能确定。現規定当 $\Delta\mu=0$ 时，它的意义如下：若 $\Delta\mu=0$, $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ 規定为方程(60)当 $x=$ $=x_0$ 时，其値为 0 的解。方程(60)之右端是变数 x 与 $\Delta\mu$ 之連續函数(x 与 $\Delta\mu$ 含在 Φ_1 与 Φ_2 内)，且对 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ 的偏导数有界。后一句話是由于：前节(§21)已証明 Φ_1 是 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 之积分，可是 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 又是有界函数。此外，当 $x=x_0$ 时对一切 $\Delta\mu$ 之值，$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}=0$。所以自本定理 1) 段知：当 $|\Delta\mu|$ 充分小时，方程(60)的解 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ 对于 $\Delta\mu$ 是

連續的。所以当 $\Delta\mu\to 0$ 时，$\frac{\Delta\varphi}{\Delta\mu}$ 必趋向确定的極限。这就是說，$\varphi(x,\mu)$ 对于 μ 的导数是存在的。

此外，旣然当 $\Delta\mu\to 0$ 时，

$$\Phi_1\to\frac{\partial f}{\partial\varphi},\quad \Phi_2\to\frac{\partial f}{\partial\mu},$$

所以偏导数 $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ 能滿足下列的微分方程：

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right)=\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\cdot\frac{\partial f}{\partial\varphi}+\frac{\partial f}{\partial\mu},\tag{61}$$

幷且滿足开始条件

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}\right|_{x=x_0}=0.$$

把本定理第一段的結果，应用到方程(61)上，就知道，$\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ 对于变数 x 与 μ 都是連續的。

証 3. 若現在假定 f 有对 y 与 μ 的連續导数，一直到 p 阶($p\geqslant 2$)，那么把前段 2) 对方程(58)所采用的推理，应用到方程(61)上，幷以 $\frac{\partial\varphi}{\partial\mu}$ 替代前段中的 φ，極易推得：$\frac{\partial^2\varphi}{\partial\mu^2}$ 存在而且对于 x 与 μ 是連續的。这样繼續地推下去，就証得本定理。

附注 1. 与 § 20 类似，我們可以証明：不仅对于閉区間 $[a, b]$ 內的 x 值，而且对于較大的区間，即解在区域 $\overline{G}_{xy}$ 內部时的整个区間上的 x 值。方程式(57)的解是 $\mu_1, \mu_2, \cdots, \mu_n$ 的連續函数，而且对这些参变数能求导数。

附注 2. 若我們已知 $\mu=\mu_0$ 时的某一个解，則在 $\mu=\mu_0$ 及 (x, y) 处之对参变数之导数(x, y 的値由已知的解的方程联系着)，可以用积分法求出，而无須求出其他的解。实际上，在这样的假定下，这导数可以由系数已知的綫性方程(61)求得。

推論 若把剛才就方程(58)証明之定理，应用到 § 20 的方程(55)上，即得下面的結果：

設方程式
$$\frac{dy}{dx}=f(x, y) \tag{1}$$
之右端 $f(x, y)$ 有对于 x 与 y 的連續偏导数，一直到 p 阶，則方程(1)当 $x=x_0$ 时取值 y_0 之解：$y=y(x, x_0, y_0)$ 必有对 x_0 及 y_0 的連續偏导数，亦一直到 p 阶($p\geqslant 1$)。

習　　題

1. 給定方程式 $y'=\sin(xy)$ 及开始条件 $x_0=0$, $y_0=0$。利用方程(61)对任一个 x 求 $\frac{\partial y}{\partial x_0}$ 及 $\frac{\partial y}{\partial y_0}$。

2. 給定方程 $y'=x^2+y^2$。开始条件为 $x_0=0$, $y_0=0$。求当 $x=1$ 时 $\frac{\partial y}{\partial y_0}$ 之値准确至 0.0001。計算 $y(x)$ 时可以用逐次逼近法。

3. 設方程式(1)中的 f 連續地可微，試証：
$$\frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial x_0}=-f(x_0, y_0)e^{\int_{x_0}^{x} f'_y(t, y(t))dt},$$
$$\frac{\partial y(x, x_0, y_0)}{\partial y_0}=e^{\int_{x_0}^{x} f'_y(t, y(t))dt}.$$

4. 設方程(21)中的 M 及 N 連續地可微，而 $M^2(x_0, y_0)+N^2(x_0, y_0)\neq 0$, (x_0, y_0) 是区域 G 内一点。則在 (x_0, y_0) 的某鄰域内，方程(21)有連續的积分因式。

5. 設函数 $f(x, y)$ 連續，而且在 $a\leqslant x\leqslant b$, $-\infty<y<\infty$ 滿足对 y 的李卜希茨条件；又設当 $y<F(x)$ 时 $f(x, y)>0$，而当 $y>F(x)$ 时 $f(x, y)<0$(此处的 $F(x)$ 是在閉区間 $[a, b]$ 上的某一連續函数)。若 $a<x_0<b$, $y_0>F(x_0)$，于是当 $\mu>0$ 时，方程式
$$\mu\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$
的在开始条件 $y(x_0)=y_0$ 下的解 $y(x, \mu)$ 連續地依賴于 (x, μ) 且在

閉区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上确定。試証

$$y(x,\mu)\underset{\mu\to 0}{\longrightarrow}+\infty\ (a\leqslant x<x_0),\quad y(x,\mu)\underset{\mu\to 0}{\longrightarrow}F(x)\ (x_0<x\leqslant b)\quad (\mu>0).$$

后一个关系式在任一閉区間 $[c, b](x_0<c<b)$ 上对 x 一致地滿足。

可見，导数的因子 μ 有小变化时，方程式的解的性态是同右端含小参数的方程式 (1) 的解的性态有本質上的区别。上述的結論是吉洪諾夫(A. Н. Тихонов)的一般定理之特殊情况 [参看 Матем. сборник. 22(1948) 与 27(1950)]。

§23. 奇点

定义 設我們在区域 G 上考察微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y),\quad \frac{dx}{dy}=f_1(x, y) \qquad (1), (1')$$

(参看 §2)。又設一点 P 在区域 G 的內部，或在其边界上，若方程 (1)、(1′) 在边界上也确定的話。

1) 如果能定出 P 点的这样的邻域 A,① 使在 A 內 $f(x, y)$ 对 x 連續，而且 $f(x, y)$ 具有对 y 的有界偏导数；或者在这邻域 A 內 $f_1(x, y)$ 对 y 連續，并具有对 x 的有界偏导数，則 P 点就叫做方程 (1)、(1′) 的正常点。在正常点的邻域 A 內任一点，有一条而且仅有一条积分曲綫通过。②

2) 区域 G 的所有的非正常点及在 G 的边界上所有的点，都叫做奇点。

3) 如果 P 点沒有这样的邻域 A, 能使 A 內每一点有一条而且

① 此处所謂 P 点的邻域是指 P 点的整个邻域，并不仅指 P 点的邻域的屬于 G 的那一部分。以 P 点为圆心的充分小的圆，就是这样的邻域。

② 为了使正常点具有这性質（即該点邻域內任一点有一条而且仅有一条积分曲綫通过），当然我們也可以采用比在 P 点的邻域內具有有界的导数要弱些的条件，譬如說，采用在邻域內滿足李卜希茨条件也就够了。可是作者只想給出这样的正常点的定义，使我們容易找到它。

仅有一条积分曲線通过，而且 $f(x, y)$ 及 $f_1(x, y)$ 两函数中至少有一个在 A 內是連續的，这样的 P 点，就叫做本質奇点。于是首先可知边界上所有的点都是方程 (1)、(1′) 的本質奇点。可是除此以外还有其他的奇点与本質奇点。現举数例如下：

1．在 Ox 軸上所有的点都是方程

$$\left.\begin{array}{l} \text{当 } |y|>0 \text{ 时，} \dfrac{dy}{dx}=y\ln|y|, \\ \text{当 } \quad y=0 \text{ 时，} \dfrac{dy}{dx}=0 \end{array}\right\} \tag{62}$$

的奇点，但不是本質奇点。

2．坐标原点是方程(4)与方程(7)的本質奇点。

孤立奇点(就是在它的充分小邻域內沒有其他奇点的奇点)在应用中最常見于形状如下的方程式：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x, y)}{N(x, y)},$$

此处的 $M(x, y)$ 与 $N(x, y)$ 都具有对 x 与 y 的高阶連續偏导数。显而易見，如果在所考虑的区域的內点上，$M(x, y)\neq 0$ 或者 $N(x, y)\neq 0$，則所有这样的內点一定都是正常点。現在讓我們来研究任意一个滿足 $M(x_0, y_0)=0$, $N(x_0, y_0)=0$ 的內点 (x_0, y_0)。为了書写簡便起見，我們不妨假定 $x_0=0$, $y_0=0$。于是把 $M(x, y)$ 与 $N(x, y)$ 按 x, y 冪展开，但二次項以上不詳細写出，所以在原点邻近得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M'_x(0, 0)x+M'_y(0, 0)y+O(x^2+y^2)^{①}}{N'_x(0, 0)x+N'_y(0, 0)y+O(x^2+y^2)}. \tag{63}$$

这方程在 $x=0, y=0$ 处，不能规定 $\dfrac{dy}{dx}$ 之值。可是若

$$\begin{vmatrix} M'_x(0, 0), & M'_y(0, 0) \\ N'_x(0, 0), & N'_y(0, 0) \end{vmatrix}\neq 0,$$

① $O(x^2+y^2)$ 表示与 x^2+y^2 的比値为有界的一个量。

那么不管我們在坐标原点規定了$\frac{dy}{dx}$甚么样的值，原点仍是$\frac{dy}{dx}$的不連續点，所以原点是这微分方程的奇点。

別朗(O. Perron)曾証明：①倘使方程

$$\begin{vmatrix} \lambda-M'_x(0,0), & -M'_y(0,0) \\ -N'_x(0,0), & \lambda-N'_y(0,0) \end{vmatrix}=0$$

的二根的实数部分都不是零，那么在孤立奇点(即本例中的原点)附近，其积分曲綫的性态特征，不会受(63)式中分子分母所含的$O(x^2+y^2)$諸項影响。所以为了研究它的性态，应先研究方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}, \quad \begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix}\neq 0 \tag{64}$$

的积分曲綫在原点附近的情形。

可以証明：用非奇异的綫性变换

$$\left.\begin{aligned} x&=k_{11}\xi+k_{12}\eta, \\ y&=k_{21}\xi+k_{22}\eta, \end{aligned}\right\}$$

(此处k_{ij}是实数)，能把上面的方程化为下列三种形式之一：

$$\left.\begin{aligned} &1)\quad \frac{d\eta}{d\xi}=k\frac{\eta}{\xi}, \ (k\neq 0) \\ &2)\quad \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+\eta}{\xi}, \\ &3)\quad \frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\xi+k\eta}{k\xi+\eta} \end{aligned}\right\} \tag{65}$$

(参看后面的§50)。

現在詳細討論这三种情形。首先应注意下面的事实：若Ox与Oy軸互相垂直，那么一般地說，$O\xi$与$O\eta$二軸不見得仍互相垂直。可是为了画圖簡便起見，我們把$O\xi$与$O\eta$在圖中畫得互相垂直。

第一种情形 方程的通积分是$a\eta+|b\xi|^k=0$。这情形的积

① Math. Zeitschrift 卷15(1922)及卷16(1923)。并参看印在Успехов Математических Наук 第IX期(1941)中的Бендиксон及Фроммер的文章。

分曲綫的性态簡略地用圖 13、14 与 1 来表示。

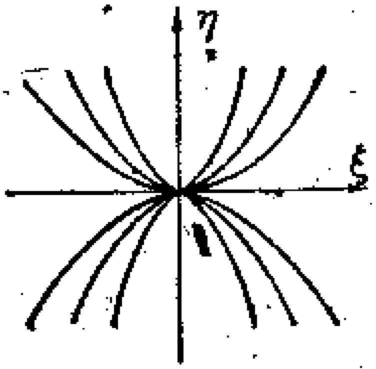

圖 13

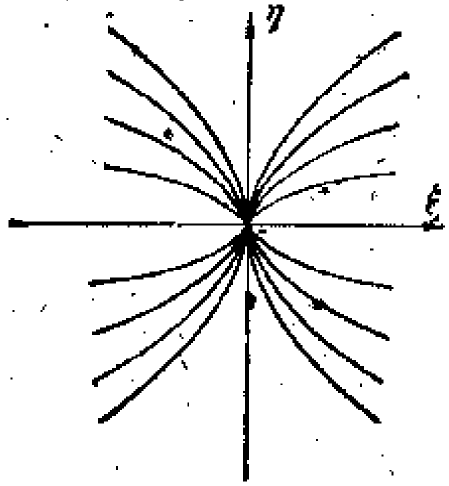

圖 14

圖 13 是表示 $k>1$ 的情形。在这情形下，所有的积分曲綫都与 $O\xi$ 軸相切于 O 点，只有 $O\eta$ 軸的两条半軸是例外。$O\xi$ 与 $O\eta$ 二軸本身亦是积分曲綫，当然应該去掉 O 点，因为方程(65_1)在 O 点不能确定任何方向。

$k=1$ 的情形，已在第一章研究过(圖 1)。

在 $0<k<1$ 的情形(圖 14)，所有的积分曲綫都与 $O\eta$ 軸相切，仅有 $O\xi$ 軸的两半軸是例外。

在 $k>0$ 的各种情形下，所有的积分曲綫都沿一定的方向趋向 O 点；就是說，积分曲綫在 O 点有定切綫。一般地說，若任一积分曲綫只要有与 O 点充分接近的点，它就能沿一定方向任意地接近 O 点，則 O 点就叫做結点。可見当 $k>0$ 时，O 点是方程(65_1)的积分曲綫的結点。

当 $k<0$ 时，积分曲綫 $\eta|\xi|^{-k}=c$ 可以圖 15 表示。在此情形时，仅有四条积分曲綫(即 $O\xi$ 的两条半軸，与 $O\eta$ 的两条半軸)能任意地接近 O 点。其他的积分曲綫，当充分接近 O 点后，便开始离开 O 点。这样的点叫做鞍点(седло)，这正是地圖上两山之間山路等高綫的形状。

第二种情形　通积分的方程是 $b\eta=\xi(a+b\ln|\xi|)$(圖 16)。

一切积分曲綫都与 $O\eta$ 軸在 O 点相切。坐标軸中仅 $O\eta$ 軸是积分曲綫。与第一种情形 $k>0$ 的情形一样，这样情形的 O 点亦是結点。

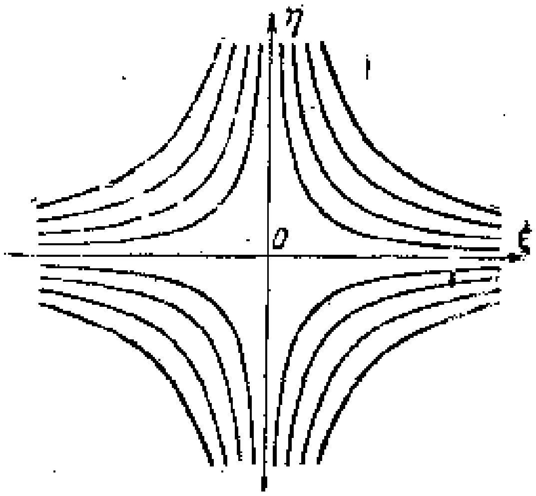

圖 15

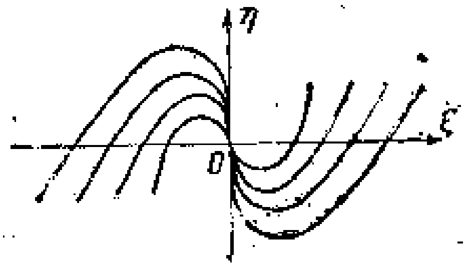

圖 16

第三种情形 若把方程(65_3)化为極坐标后，極易积分。令

$$\xi=\rho\cos\varphi,$$

$$\eta=\rho\sin\varphi,$$

經計算后得
$$\frac{d\rho}{d\varphi}=k\rho.$$

所以
$$\rho=ce^{k\varphi}.$$

如 $k>0$，一切积分曲綫，当 $\varphi\to-\infty$ 时，繞 O 点无穷次而趋向 O 点(圖 17)。若 $k<0$，那末当 $\varphi\to+\infty$ 时，亦有同样的情形。在这些情形，O 点叫做焦点。如果 $k=0$ 时，方程(65_3)的积分曲綫是以原点为圓心的圓族。一般地說，若在 O 点邻域内，完全布滿了封閉的积分曲綫，这些曲綫都含 O 点于內部，那么 O 点就叫做中心点。倘使在方程(63)式中分子分母中都添加高次項，那么中心点亦易轉变为焦点；

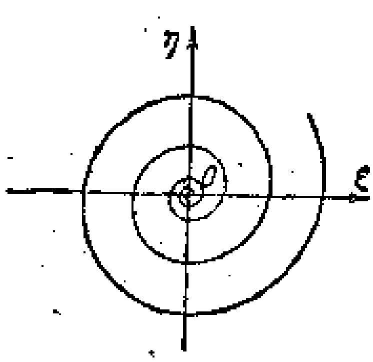

圖 17

所以在这种情形下，积分曲綫的在 O 点附近的性态不能仅由一次項决定。此后在 § 50 中我們将知道，只有当行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda-b, & -a \\ -d, & \lambda-c \end{vmatrix}=0$$

的根 λ 的实数部分等于 0 时，k 方能等于 0；在上述其他情形根的实数部分都不会等于 0。

本节关于奇点的分类，是屬于彭加来(Poincaré)。

習　題

1. 討論下列方程式的积分曲綫在奇点附近的性态：

$$y'=\frac{y}{x^2};\quad y'=\frac{x}{y^2};\quad y'=\frac{x^2}{y^2};\quad y'=\frac{y^2}{x^2},$$

$y'=x^m y^n$（m, n 是正整数）。

2. 討論方程式

$$y'=\left(\sin\frac{1}{x}\right)^{\pm 1}\left(\sin\frac{1}{y}\right)^{\pm 1}$$

的积分曲綫的性态（四种情况）。

3. 設

$$\begin{vmatrix} a, & b \\ c, & d \end{vmatrix}=0,$$

則方程式(64)的积分曲綫是怎样分布的？

4. 試举出这样的本質奇点的一个例子，在这点的某一邻域内，只有唯一的一条积分曲綫通过每一点①。

5. 若方程式(64)对于所有的仿射变换都变为自己，則 a, b, c, d 应該是怎样？若对于所有的旋轉呢？

§24. 奇曲綫

定义　1. 若曲綫上所有的点，都是方程(1)、(1′)的奇点，則

① 换言之，在奇点的任何邻域上，$f(x, y)$ 及 $f_1(x, y)$ 須是不連續的，但在奇点邻近須有唯一性——譯者注。

这曲綫就叫做奇曲綫。

2. 若曲綫上所有的点，都是方程(1)、(1′)的本質奇点，則这曲綫叫做本質奇曲綫。

3. 若一奇曲綫或本質奇曲綫，同时又是方程(1)、(1′)的积分曲綫，則它就叫做奇积分曲綫或本質奇积分曲綫。

例 1. 在方程式

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f(y)}{\varphi(x)}$$

中，假定 $f(y)$ 与 $\varphi(x)$ 都是連續函数，它們的值假定永远比某一正的常数大，并假定 $f(y)$ 与 $\varphi(x)$ 在任何区間內都无“有界的导函数”，則直綫

$$y=C$$

对于这方程而論，是奇曲綫，但不是本質奇曲綫，也不是积分曲綫(参看 § 5)。

例 2. 設 $f(x, y)$ 是拉夫倫捷耶夫(M. A. Лаврентьев)所造之函数(参看 § 10)，則对方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x, y)$$

而言，一切不是积分曲綫的曲綫，都是本質奇曲綫，但不是奇积分曲綫。

例 3. 对于方程(62)

$$\frac{dy}{dx}=y\ln|y|, \text{（当 } y\neq 0 \text{ 时）}$$

$$\frac{dy}{dx}=0 \qquad \text{（当 } y=0 \text{ 时）}$$

而言，Ox 軸是奇积分曲綫，但不是本質奇积分曲綫。

例 4. 但对于方程

$$\frac{dy}{dx}=y\ln^2|y|, \text{（当 } y\neq 0 \text{ 时）}$$

$$\frac{dy}{dx}=0 \qquad (\text{当 } y=0 \text{ 时})$$

而言，Ox 軸是本質奇积分曲綫。

若一曲綫是区域 G 的边界上的一部分，在这部分上，函数 $f(x, y)$ 与 $f_1(x, y)$ 中的一个之值仍能确定，那么这样曲綫是方程(1)、(1′)的本質奇曲綫。倘使方程(1)、(1′)在 G 的边界上仍能确定，則这些曲綫同时有可能是积分曲綫。

§ 25. 积分曲綫族的全局性态

有时下面的事很重要；就是在能确定方向場的全部区域內，从"全局"着眼，制出积分曲綫之性态的簡圖，但无須注意所用尺寸的大小。在圖 13—17 中，我們已作出积分曲綫在孤立奇点的邻域的性态的这种簡圖。倘使在确定 $f(x, y)$ 的單連区域內的每一点，都是微分方程 $\frac{dy}{dx}=f(x, y)$ 的正常点，那么它的积分曲綫族，可以簡略地用一群平行直綫段表示。因为在此情形下，区域內任一点都仅有一条积分曲綫經过，并且任何两条积分曲綫都不会相交。

形状如(1)与(1′)的較一般的方程可能除此以外还有奇点与奇曲綫，它的积分曲綫族的构造可能相当地复杂①。微分方程理論中，最基本問題之一，就是这样的問題：用尽可能簡單的方法，作出所給的微分方程在其全部定义区域內的积分曲綫族的性态的簡圖，換一句話說，自全局着眼，研究这方程的积分曲綫的性态。此問題現在尙未解决。甚至对于方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{M(x, y)}{N(x, y)}$$

[此处 $M(x, y)$ 与 $N(x, y)$ 都是高于 2 次的多項式]，这問題也未

---

① 參看 I. Bendixson, О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. Успехи математических наук, выпуск IX, стр. 191, 1941 年。

解决。現在講一講与这問題有关的所謂"極限环綫"("предельный цикл")。

先举一个例，考察微分方程

$$\frac{d\rho}{d\varphi}=\rho-1, \tag{66}$$

此处 ρ 与 φ 是(x, y)平面的極坐标①。其通解是

$$\rho=1+Ce^{\varphi} \quad (\text{此处 } C \text{ 是任意常数})。$$

倘使 $C<O$，为了使 ρ 不取負値起見，必須令 φ 取不大于 $-\ln|C|$ 之値。其积分曲綫族包含下列三种曲綫(圖 18)：

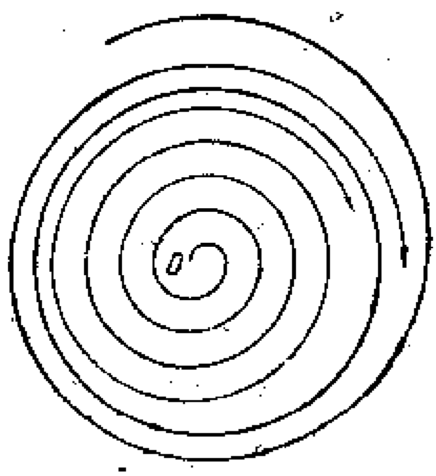

圖 18

1) 圓 $\rho=1(C=0)$，

2) 自坐标原点 O 出發之螺綫，当 $\varphi\to-\infty$ 时，这螺綫自圓之內部漸漸趋向于圓 $\rho=1$，$(C<0)$。

3) 无穷的螺綫，当 $\varphi\to-\infty$ 时，它自圓的外部漸趋向于圓 $\rho=1$，$(C>0)$。

圓 $\rho=1$ 叫做这方程的極限环綫。一般地說：封閉积分曲綫 L 叫做極限环綫，倘使封閉积分曲綫 L 能含在这样的区域內，这区域的每一点都是方程的正常点，而且这区域完全被漸近于 L 的积分曲綫所布滿。求極限环綫在物理学上是極重要的事，可惜到現在尙未發現一般求法。

請注意，圓 $\rho=1$ 上任何一点都是方程(66)的正常点。若化極坐标到直角坐标可以証实此事。可見，極限环綫上的任一点的

① 方程(66)若化为直角坐标，就变成下列形式：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{(x+y)\sqrt{x^2+y^2}-y}{(x-y)\sqrt{x^2+y^2}-x}.$$

小邻域与任一其他的非奇点的小邻域是毫无区别的。

習 題

1. 求証，区域 G 上的方向場可能被形如(2)及(2′)之方程所表示，其中 M, N 連續而不同时为 0 的必要而且充分的条件是，在区域 G 上每一点可以作一單位矢量与方向場重合，而且这矢量連續地依賴于方向場中的点。本来，方向場中每一点处的方向我們用一直綫段表出，而这綫段的两个方向对我們并无区别。但这里每一点都要选定这两方向之一，而这个方向又要是連續地依賴于方向場的点。試举一个在平面上两同心圓間确定的連續方向場不被方程(2)及(2′)所表示的例，这里 M, N 連續而不同时为 0。

2. 举在平面环形区域的方向場的例，它在这整个环形上不能被方程 (21) 所表示，这里 M, N 連續且不同时为 0，但是它却是在整个环形上連續的。这里象往常一样，方向場在每一点由一直綫段給定，而不区别此綫段的两个方向。当我們在这里說方向場在环形上連續，是指这綫段是連續地变化。能否在平面的單連通区域上举出类似的例子？

圖 19

3. 方程 (2) 及 (2′) 的积分曲綫由圖 19 表示。求証若 M 及 N 連續，它們在綫段 AB 上各处必須为 0。

4. 求証，只有偶数条或无穷条的积分曲綫进入方程(2)及(2′)的孤立奇异点。若任一进入这奇点的积分曲綫是繞这点的无穷螺綫，則所有其余的进入这奇点的积分曲綫，都也是繞这点的无穷螺綫。可否恰有两个这种螺綫进入孤立奇异点？

5. 画出方程

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+x^2+y^2-1$$

在全平面上的积分曲綫的形态的簡圖。求証，原点是它的焦点，而

$$x^2+y^2=1$$

是它的極限环綫。

提示：将这个方程的积分曲綫的傾角与方程式

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$$

的积分曲綫在同一点的傾角相比較。

6. 画出方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y-x}+(y-x)^2+(x-1)^2+\frac{2}{3}(x-1)^3-\frac{1}{3}$$

在全平面上的积分曲綫的形态的簡圖。求証，它有两个奇点，即鞍点(0, 0)与焦点(1, 1)。

提示：将这方程积分曲綫的傾角与方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x^2}{y-x}$$

的积分曲綫在同一点的傾角作比較。后一个方程極易积分。

7. 若封閉积分曲綫 L 上各点都是正常点，又可包在不包含其他封閉积分曲綫的区域內，則 L 是極限环綫。

8. 若在某封閉积分曲綫 L 上无本質奇点，且有两积分曲綫，其一自 L 內部漸近于 L，其一自 L 外部漸近于 L，則 L 是極限环綫。

9. 試举一封閉积分曲綫 L 的例，使 L 无奇点且不是極限环綫，此外，L 沒有充滿着封閉积分曲綫的邻域。

10. 若有連續轉动切綫的封閉曲綫 L 的內部及 L 上都沒有本質奇点，則方向場在 L 上各点至少有两次与 L 的切綫方向重合，至少有两次与 L 的法綫方向重合。特別由此可得本迪克孙（Bendix-

8 .m) 的一个定理：在封閉积分曲綫內至少有一方向場的本質奇点。

11. 試証，方程式 $y'=x^2-y^2$ 的每一条积分曲綫至少有一个拐点，而且至少与直綫 $y=x$ 相交一次。

提示：利用 §2 第5題。

§26. 导数未解出的微分方程

方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-1=0 \tag{67}$$

是导数未解出的方程的例。

容易看出，方程(67)是与方程

$$\frac{dy}{dx}=+1 \tag{68_1}$$

和

$$\frac{dy}{dx}=-1 \tag{68_2}$$

等价。

这第一个方程(68_1)的方向場与 Ox 軸成 45° 角；但第二个方程(68_2)的方向場与 Ox 成 135° 角。方程 (67) 的方向場，是由(68_1)的方向場与(68_2)的方向場合并得到的。在(x, y)平面每一点，有一条而且仅有一条方程 (68_1) 的积分曲綫(即是与 Ox 成軸 45° 角度的直綫)經过；也有一条而且仅有一条方程(68_2)的积分曲綫(即是与 Ox 軸成 135° 角度的直綫) 經过。可見，在(x, y)平面每一点，必有方程 (67) 的二条而且仅有二条积分曲綫經过

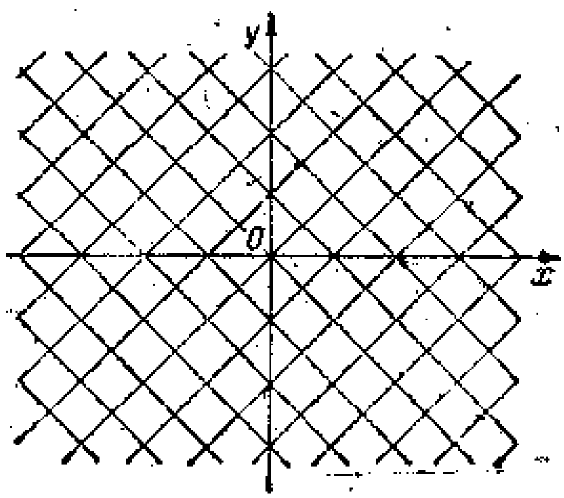

圖 30

(圖 20)[1]。

可以証明如下的一般定理：

定理 設有方程式

$$F(x, y, y')=0, \tag{69}$$

此处 $F(x, y, y')$ 假定具有下列三性質：

1) 函数 $F(x, y, y')$ 在 (x, y, y') 空間的一有界閉区域 $\overline{G}$ 上确定而且連續。

2) 对于 (x, y) 平面上某一定点 (x_0, y_0)，这方程(69)有 m 个而且仅有 m 个对 y' 的不同的解（此处 m 是一有限数）。令这 m 个解是：$b_1, b_2, \cdots, b_m$ $(m>0)$。

3) 点 (x_0, y_0, b_i)，$i=1, 2, \cdots, m$ 中的每一个都在区域 G 内，而且函数 $F(x, y, y')$ 在这种点的某一邻域 R_i 内[2]都有对 y 与 y' 的連續导函数，而对 y' 的导函数的絕对値在 R_i 内处处比某一正的常数大。

則在 (x, y) 平面上必有 (x_0, y_0) 点这样的邻域 $\mathfrak{U}$ 存在，在这邻域內每一点必有方程(69)的 m 个而且仅有 m 个解經过。

証 由假設并据隐函数定理，知对每一点 (x_0, y_0, b_i) 在空間 (x, y, y') 内必有这样的邻域 R_i 存在，在邻域 R_i 内，方程(69)有一解而且仅有一个解，其形式如下：

$$y'=f_i(x, y), \quad i=1, 2, \cdots m; \tag{70}$$

函数 $f_i(x, y)$ 对 x 連續，且有对 y 的导函数，等于

[1] 在分析学中証明，若一函数 $\Phi(x)$ 在某区間 (a, b) 上处处有导数，等于 $\varphi(x)$，設 $\varphi(x)$ 在 x_1 与 x_2 二点 $(a<x_1<x_2<b)$ 取函数値 y_1 与 y_2，則函数 $\varphi(x)$ 必在区間 (x_1, x_2) 上取介于 y_1 与 y_2 之間的一切値。由此定理，知不可能有这样函数 $y(x)$ 存在，它对 x 的任一値都有导数，而导数仅能取二値 ± 1，即它的导数在某些点等于 $+1$，在另一些点上又会等于 -1。参看菲赫金哥尔茨著，微积分学教程，第一卷第一分册，203 頁，高等教育出版社，1957 年。

[2] 邻域 R_i 指点 (x_0, y_0, b_i) 在空間 (x, y, y') 中的整个邻域而言。

$$-\frac{F'_y(x, y, f_i)}{F'_{f_i}(x, y, f_i)}$$

由于对F的假設，我們知上面的分式的值是有界的。所有的邻域R_i ($i=1, 2, \cdots, m$)可以想象为这样形状的圓柱形，它們的母綫与Oy'軸平行，它們的底在(x, y)平面上的投影是(x, y)平面上点(x_0, y_0)的同一个邻域$\mathfrak{U}$(圖 21，是按照$m=2$的情形画的)。我們能把邻域$\mathfrak{U}$取得这样的小，使得不管在$\mathfrak{U}$之上或$\mathfrak{U}$之下，曲面(69)沒有一点(x, y, y')会不屬于(70)中的任一曲面。事实上，倘使会有这样的点，它必在圓柱R_i的外部($i=1, 2, \cdots, m$)。所以若对于任意小的$\mathfrak{U}$，会有这样的点，

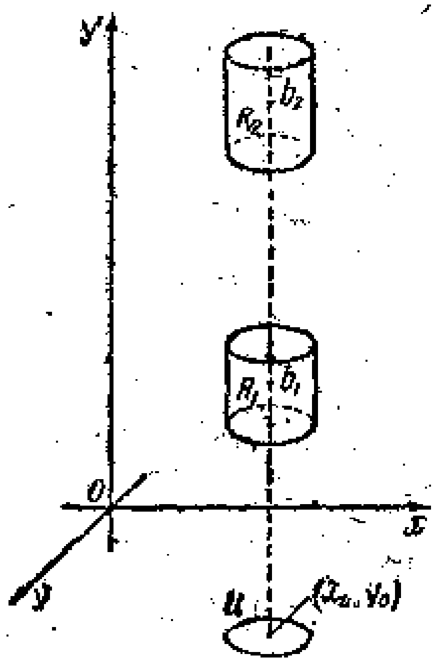

圖 21

那么由于$\overline{G}$的有界性及封閉性与$F(x, y, y')$的連續性，这些点必在直綫

$$x=x_0, \quad y=y_0$$

上，但在一切圓柱形R_i之外；这就是說，$F(x_0, y_0, y')=0$有多于m个对y'的解，与假設矛盾。

所以我們已証，在对$F(x, y, y')$所作的假設下，在平面(x, y)上点(x_0, y_0)必有这样的邻域$\mathfrak{U}$，在这邻域内，方程(69)有m个而且仅有m个对y'的不同的解(70)。此处的$f_i(x, y)$是对x連續的，而且有对于y的有界的导数。所以对于$\mathfrak{U}$的每一点P，(70)中每一个方程必有一条而且仅有一条在$\mathfrak{U}$内的积分曲綫經过P点。因为一切y'_i之值在邻域$\mathfrak{U}$内是彼此不同的，所以这m条积分曲綫亦互相不同，而且互不相切。由此可見，方程(69)有m条而

且仅有 m 条积分曲綫經过区域 $\mathfrak{U}$ 的每一点。(証畢。)

显然，由方程(69)所規定的方向場的任一个方向，都不会与 Oy 軸平行。所以，这方程任何一积分曲綫都不会有与 Oy 平行的切綫。为了不把与 Oy 平行的方向除外起見，我們就采取与考慮已将导数解出的方程式时相类似的办法如下：

我們有时除了考察方程

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right)=0 \tag{71}$$

之外，还同时考察方程

$$F_1\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right)=0 \tag{71'}$$

此处 $F_1\left(x, y, \frac{dx}{dy}\right)$ 要选擇得使方程(71)与(71')不会互相矛盾。有时把二个方程(71)与(71')合并写为用微分表示出的一个方程更方便些(参看下面的例 1)。此处与以前完全一样(参看 §2)，我們除考慮方程(69)的解外，还要考慮微分方程式(71)与(71')的积分曲綫。

定义　設函数 $F(x, y, y')$ 之值在空間 (x, y, y') 的一区域 $G_{xyy'}$ 內或其一部分边界上是确定的。或設函数 $F_1(x, y, x')$ 之值在空間 (x, y, x') 的一区域 $G_{xyx'}$ 內或一部分边界上是确定的。

設 G_{xy} 是平面 (x, y) 上的区域，其中方向能由方程(71)、(71')确定。又設 $P(x_0, y_0)$ 是区域 G_{xy} 內或其边界上的一点。

1) 若 P 点能滿足下列三条件(a, b, c, 或 a', b, c)，于是 P 点就叫做方程(71)、(71')的正常点：

条件 a)　令 $\overline{\mathfrak{U}}_{xy}$ 是点 $P(x_0, y_0)$ 在 (x, y) 平面上的閉邻域，令 $\overline{G}^*_{xyy'}$ 是使函数 $F(x, y, y')$ 能确定而在 (x, y) 平面上投影又

条件 a')　令 $\overline{\mathfrak{U}}_{xy}$ 是点 $P(x_0, y_0)$ 在 (x, y) 平面上的一閉邻域，又令 $\overline{G}^*_{xyx'}$ 是使函数 $F_1(x, y, x')$ 能确定而在 (x, y) 平面上的投

不会超出邻域 $\overline{\mathrm{U}}_{xy}$ 的点 (x, y, y') 所成的点集。现在的条件是：点 $P(x_0, y_0)$ 应有这样的閉邻域 $\overline{\mathrm{U}}_{xy}$，能使点集 $\overline{G}^*_{xyy'}$ 构成一有界的閉区域，而且使函数 $F(x, y, y')$ 在这点集上是連續的。为了使点集 $\overline{G}^*_{xyy'}$ 不会因 y' 能取任意大之值而变成无界，我們作下面規定：令 h 为一正的常数，設它不等于方程 $F(x_0, y_0, y')=0$ 所有的根。若从方程(71)定出的 y' 之絕对值小于 h 时，而且仅当它小于 h 时，方采用方程(71)。倘使定出的 $|y'|>h$，就不要。①

影又不会超出邻域 $\overline{\mathrm{U}}_{xy}$ 的点 (x, y, x') 所成的点集。現在的条件是：点 $P(x_0, y_0)$ 应有这样的閉邻域 $\overline{\mathrm{U}}_{xy}$，能使点集 $\overline{G}^*_{xyx'}$ 构成一有界的閉区域，而且使函数 $F_1(x, y, x')$ 在这点集上是連續的，为了使点集不会因 x' 能取任意大而变成无界，我們作下面規定：令 h 是如左規定之常数。只当从(71′)定出的 $|x'| \leqslant \frac{1}{h}$ 时方采用方程(71′)

条件 b) 由方程(71)与(71′)定出的在 $P(x_0, y_0)$ 点的积分曲綫的方向的个数是有限的。

条件 c) 对于自方程(71)定出的每一方向，函数 $F(x, y, y')$ 在 (x_0, y_0) 点上，能满足剛才証明的定理中的条件 3。

条件 c') 对于自方程(71′)定出的每一方向，函数 $F_1(x, y, x')$ 能满足和剛才証明的定理类似的定理（把其中 x 与 y，y' 与 x' 互相調換）中的条件 3。

2) 倘使上面条件不能都滿足，則 P 点就叫做方程(71)、(71′)的奇点。

① 因 $y'=\frac{1}{x'}$，所以若由方程(71)所定出之 y' 如不能满足条件 a)，則由方程(71′)定出之 x' 必满足条件 a)，二者必居其一——譯者注。

3）倘使对一点 $P(x_0, y_0)$不能在 (x, y) 平面上找到这样的邻域 U，使通过邻域 U 的每一点的积分曲綫的个数都是有限的，而且都与自方程（71）、（71′）定出的在 P 点的方向的个数相同，則 P 点就叫方程(71)与(71′)的本質奇点。这里积分曲綫是指右端連續的方程(1)和(1′)的积分綫族的全体。

4）借前面的这些定义之助，我們可以給出奇曲綫与本質奇曲綫、奇积分曲綫与本質奇积分曲綫的定义，正如在§24中，借奇点与本質奇点概念之助，給出了奇曲綫、本質奇曲綫的定义一样。

§23与§24中关于奇点、本質奇点、奇曲綫与奇积分曲綫的例，現在仍适用。此外，我們再研究下面二例：

例 1.
$$y'^2(1-x^2)-x^2=0, \tag{72_1}$$
$$(1-x^2)-x^2x'^2=0, \tag{72_2}$$

或写成比較对称的形

$$(1-x^2)dy^2-x^2dx^2=0.$$

方程(72)仅在条形区域 $|x|\leqslant 1$ 上定出方向場。方程(72_1)的左端在这条形区域內到处連續，并有对 y 与 y' 的連續的导函数。它的对 y' 的导函数等于

$$2y'(1-x^2).$$

由此可見，仅当 1) $x=\pm1$, 与 2) $y'=0$ 时，对 y' 的导函数方程等于0。由方程(72_1)，我們知 $y'=0$ 的情形仅在直綫 $x=0$ 方能發生。(72_2)式左端对 x' 的导函数亦只有在这些直綫上方能等于0。所以，方程(72)有三条奇曲綫，即：

$$x=+1, \quad x=-1, \quad x=0.$$

因为直綫 $x=\pm1$ 是由方程定出方向的区域的边界，所以 $x=\pm1$ 必是本質奇曲綫。自方程(72_2)易知它們同时又是积分曲綫。

現将証：直綫 $x=0$ 亦是本質奇曲綫，但不是积分曲綫。首先

請注意次一事实：自方程(72)得

$$\frac{dy}{dx}=\pm\frac{x}{\sqrt{1-x^2}},$$

由此知道方程(72)的积分曲綫是圓心在 Oy 軸上而半徑等于 1 的圓族。这些圓都与直綫 $x=\pm1$ 相切。

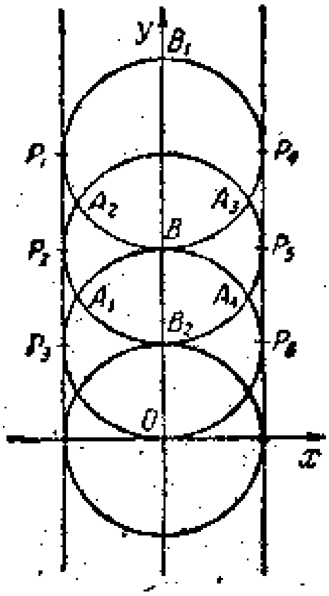

圖 22

現在易知直綫 $x=0$ 是奇曲綫。事实上，在这直綫上，自方程(72_1)求出的 y' 仅有一值，即等于 0，自方程(72_2)求不到 x' 的值。可是在 Oy 軸上任何一点 B，都不能找到这样邻域，使邻域的每一点，都有一条而且仅有一条积分曲綫經过。事实上，在 B 点显然就有四条位于邻域内的积分曲綫經过，即是：A_1BA_4，A_2BA_3，A_2BA_4，A_1BA_3(圖 22)。所以 Oy 軸是本質奇曲綫。至于它不是积分曲綫是显而易見的。对条形区域 $-1<x<1$ 内不在 Oy 軸上的任何点，必有这样的邻域，在这邻域内的每一点必有二条而且仅有二条积分曲綫通过。

請注意：除了上面指出的积分曲綫外，这方程尚有形状如 $P_1B_1P_4P_5B_2P_2P_1$ 及 $P_1B_1P_4BP_3OP_6BP_1$ 等的积分曲綫。

例 2. 克来洛(Clairaut)方程 形状如下的方程：

$$F(x, y, y')\equiv y-xy'-f(y')=0, \tag{73}$$

叫做克来洛方程。

假定 $f(y')$ 在閉区間 $a\leqslant y'\leqslant b$ 上是确定的。設 $f(y')$ 同它的一阶与二阶导函数在这閉区間上都是連續的，并且 $f''(y')$ 不变号[譬如說 $f''(y')$ 是負的]。

在这些条件下，不論 x, y 取怎样的值，方程(73)对 y' 解出之

根，不会多于二个（請讀者自己說明理由）。所以易知所有的点(x_0, y_0)只要滿足下列二条件，就是方程(73)的正常点：

条件 1) $y'=a$ 与 $y'=b$ 都不能滿足方程

$$y_0-x_0y'-f(y')=0. \tag{74}$$

但在区間(a, b)内，至少有一 y' 之値，能滿足这方程。

条件 2) $F'_{y'}(x_0, y_0, y')=-x_0-f'(y')\neq 0,$

此处 y' 是方程(74)之一根。

不能滿足条件 2)的所有的点，构成一曲綫。若把 y' 当作参数，并用 p 表示它，則这曲綫可写为下面的形式：

$$y=xp+f(p), \quad x=-f'(p); \tag{75}$$

即

$$y=-f'(p)p+f(p), \quad x=-f'(p). \tag{76}$$

这两个方程式确定 y 为 x 的函数理由是：因为 $f''(p)$ 不变号，所以自第二个方程式可以解出 p，并把解出的 p 之值，代入第一个方程式，就把 y 表成 x 的函数了。易証这曲綫(76)是积分曲綫。事实上，自方程(76)可以求得下列二式：

$$dy=[-f''(p)p-f'(p)+f'(p)]dp=-pf''(p)dp,$$

$$dx=-f''(p)dp.$$

由此知

$$\frac{dy}{dx}=p.$$

所以曲綫(76)，也就是曲綫(75)，滿足方程(73)。

因为 $\frac{dy}{dx}=p$，当 p 之値增加时，$\frac{dy}{dx}$ 亦增加。倘使 $f''(p)<0$，則自方程(76)可証明 $\frac{dx}{dp}>0$。所以曲綫(76)是向下凸的［在圖23中，曲綫(76)用曲綫 AQB 繪出］。

易証：对于任一常数 $c(a\leqslant c\leqslant b)$，直綫

$$y=cx+f(c) \tag{76'}$$

是积分曲綫。显然，这些直綫与曲綫(76)相切。其切点是

$$y=-f'(c)c+f(c),\quad x=-f'(c).$$

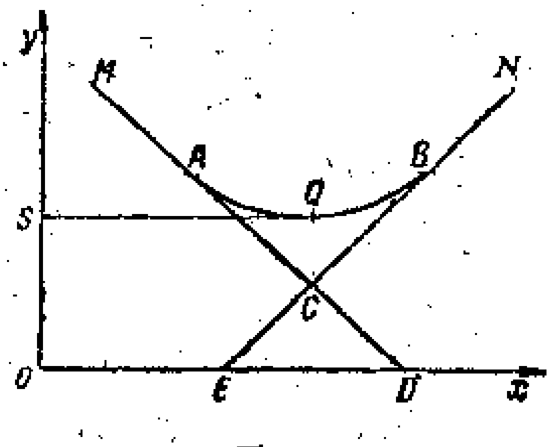

图 23

反之，曲綫(76)的所有的切綫都有(76′)的形状。(何故?)

因此，方程(74)具有 y' 的根的个数，与經 (x_0, y_0) 点向曲綫弧 AQB 所能作的切綫条数相同。

在曲綫(76)的端点 A 与 B，作二切綫 $MACD$ 与 $NBCE$，这二切綫与曲綫(76)把整个 (x, y) 平面分为下面的五个区域：

$$MACE,\ NBCD,\ AQBCA,\ ECD,\ MAQBN.$$

在 $MACE$ 及 $NBCD$ 角度内的任意一点，有一条而且仅有一条与曲綫弧 AB 相切的切綫經过。因此对于这些点，方程(74)仅有一个对 y' 解出之根，而且此根必与 a 与 b 不同，所以这些点是方程(73)的正常点。这就是說，对于每一个这种点必能定出一邻域，使在邻域内任一点，必有这方程的积分曲綫經过，經过的曲綫的条数与方程对 y' 解出之根的个数一样，就是只有一条。此唯一的积分曲綫就是自这点向曲綫弧 AB 所引的切綫。同样在区域 $AQBCA$ 内的每一点亦必是方程(73)的正常点。对于这些点必可找到这样的邻域，使在这邻域内每一点，必有二条而且仅有二条积分曲綫通过；此二条积分曲綫就是自此邻域的点向 $\breve{AB}$ 所引的二条切綫綫段。經区域 $MAQBN$ 与 ECD 的每一內点，不会有(73)的积分曲綫經过。所以这些点不属于我們前面的"奇点"与"正常点"的分类中。

在 (x, y) 平面上使方程(73)有对 y' 的根的所有的点中，只有直綫 $MACD$, $NBCE$ 上的点不能滿足本例的条件 1(93 頁)，仅有曲綫 AQB 不能滿足条件 2. 这些綫必是奇曲綫。易知这些綫不但是

奇曲綫，而且是方程（73）的本質奇积分曲綫。

最末应注意，除了以上已說到的积分曲綫外，方程(73)还有形状如 $SQBN$ 的积分曲綫；它們是由弧 AB 的一段与弧 AB 的二切綫段組成的。

習　題

1. 下列方程的积分曲綫之形状如何？

$$\sin y' = 0,\ \sin y' = x.$$

2. 考虑方程

$$F(x, y') = 0.$$

若曲綫 $F(x, z) = 0$ 当 $x = x_0$, $z = z_0$ 時有垂直的切綫，而不跨过曲綫，則此方程經过任一点 (x_0, y) 的积分曲綫在該处有歧点。在这个意义下，曲綫 $F(x, z) = 0$ 的極大点对应于什么？歧点呢？自交点呢？垂直漸近綫呢？討論方程式

$$(x^2 + y'^2)^2 = a^2(x^2 - y'^2),$$

$$x(1 + y'^6) = y'^4.$$

3. 試解克来洛方程式 $y - xy' - y' = 0$。为什么这积分曲綫族的分布与圖 23 中的分布不一样呢？

4. 設 $f''(t)$ 在 $a \leqslant t \leqslant b$ 上等于零有限次，試研究方程式(73)的解族。

5. 求方程組

$$\left.\begin{aligned} &y = f(t), \\ &\frac{dy}{dx} = \varphi(t) \end{aligned}\right\} (t \text{ 是参变数})$$

的解的一个方法如下：把第一个方程式微分，由此得

$$x = \int \frac{f'(t)}{\varphi(t)}\,dt + C;$$

这个等式与关系式 $y=f(t)$ 共同地給出了所求的解族的参变数表示。試述使这方法成立的充分条件。

§ 27. 包絡綫

假定已知微分方程(69)的积分曲綫族是:

$$F(x, y, C)=0, \tag{77}$$

这曲綫族这样地遮盖了(x, y)平面的一閉区域 $\overline{G}$, 使在区域內每一点至少有这曲綫族的一条曲綫經过。現在想找 $\overline{G}$內的这样一条曲綫 L, 使 L 的每一点都与族(77)中的某一曲綫相切,并且曲綫 L 的每一段都与曲綫族(77)中的无穷多条的曲綫相切[①]。这样的曲綫 L 就叫做曲綫族(77)的包絡綫。显而易見，积分曲綫族的包絡綫本身亦是方程(69)的积分曲綫，因为包絡綫在它的每一点上必与一积分曲綫相切，所以有方向場的方向。关于函数 $F(x, y, C)$ 我們必須添加下述的假設:$F(x, y, C)$对所有的变数都有連續导数。此后又将添加其他的假設,此等假設的文字都用波紋綫标出。

假定所求的包絡綫是存在的。既然包絡綫在每一点 (x, y)上必与一积分曲綫 L_C 相切 [符号 C 是表示从方程 (77)得到这积分曲綫的方程式时，参数 C 所取之值], 所以包絡綫上的点的坐标必滿足这方程 $F(x, y, C(x, y))=0$, 此处 C 不再当作常数,而是切点(x, y)的函数。現暫时仅研究包絡綫 L 的一綫段，在这綫段上 y 是 x 的可微函数(x 是 y 的可微函数的情形，亦可以类似地討論)。于是可以把面的方程中的 C 当作仅含 x 的函数，并把它写为下面的形式:

$$F(x, y, C(x))=0. \tag{78}$$

現假定 $C(x)$是可微的,在所考虑 x 值的任一区間上都不等于

---

① 族(77)中与不同的 C 对应的曲綫假定是不同的曲綫。

一个常数，并且为已知。于是从方程(78)来求满足方程的函数 y 的导数 y' 之值。把(78)式对于 x 微分，把 y 看作 x 的函数，即得

$$F'_x+F'_y y'+F'_C\cdot C'_x=0.$$

自另一方面看，若对曲綫族(77)的經过(x,y)点的一条积分曲綫 L_C，求 y'，即得

$$F'_x+F'_y y'=0.$$

設 $F'_y\neq0$，則自上式必可定出 y'。为了两个方程中所定出的 y' 之值一样，[換一句話說，为了使包絡綫(78)与曲綫(77)在这点有公共的切綫]，其必要条件是 $F'_C\cdot C'_x=0$。这乘积既为0，其乘数中至少有一等于0。倘使說在某一区間上有 $C'_x=0$，那么 C 就是常数，这与假定不合。所以在包絡綫上必有

$$F'_C=0. \tag{79}$$

易知其逆亦眞，即：設对 $F(x,y,C)$ 所作假定与前相同，又設自(78)与(79)可以定出 x 的可微的函数 $y(x)$ 与 $C(x)$，若所定出的 $C(x)$ 在任何区間上不是常数，則定出的 $y=y(x)$ 必是曲綫族(77)的包絡綫。

附注 1. 因为問題提出时，x 与 y 之地位完全平等，所以在解决問題时，可以对調 x 与 y 的地位。

附注 2. 一阶微分方程的积分曲綫族的包絡綫，必是这方程的本質奇曲綫，因为从包絡綫的一点，沿着它的切綫方向，至少有两条积分曲綫經过。

例 1. 在整个(x,y)平面上，給有下列的曲綫族：

$$F(x,y,C)\equiv y-(x+C)^3=0. \tag{80}$$

这曲綫族由立方抛物綫組成，这些立方抛物綫都可由 $y=x^3$ 平行于 Ox 軸移动而得到。

令 F'_C 等于0，即得 $-3(x+C)^2=0$。由此得 $C=-x$。代入曲綫族的方程(80)，就得 $y=0$，它显然是这曲綫族(80)的包絡綫(圖

24)。

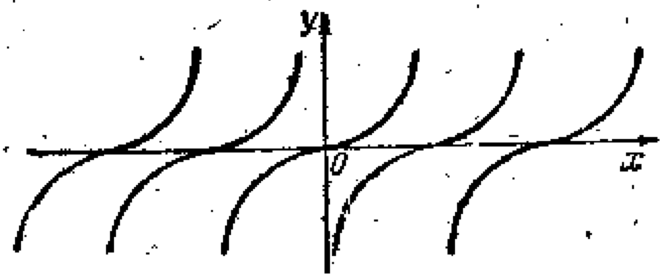

圖 24

附注 倘使我們把曲綫族的方程改写为

$$F(x, y, C)=y^{\frac{1}{3}}-(x+C)=0,$$

則得 $F'_C=-1$，用这方法就求不到包絡綫，虽然包絡綫事实上是存在的，这因为当 $y=0$ 时，F'_y 不存在，而前面的方法是假定 F'_y 存在而且 $\neq 0$ 的。

例 2. 在整个平面(x, y)上給有曲綫族

$$F(x, y, C)\equiv y^5-(x+C)^3=0. \qquad (81)$$

令 $F'_C=0$，即得 $-3(x+C)^2=0$，由此得 $C=-x$。代入(81)式，得 $y=0$。

但易看出，$y=0$(即 Ox 軸)不是族(81)的包絡綫(圖 25)。所以如此，是因当 $y=0$ 时，$F'_y=5y^4=0$。

例 3. 圓族

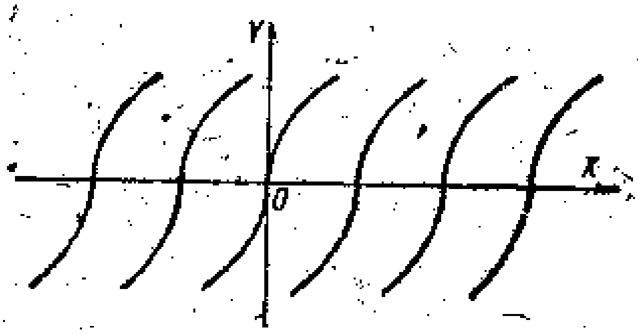

圖 25

$$F(x, y, C)\equiv x^2+(y+C)^2-1=0 \qquad (82)$$

分布于二直綫 $x=\pm 1$ 間的区域內。令 $F'_C(x, y, C)=2(y+C)$等于

零。由此得 $C=-y$。代 C 入方程(82)中，便得 $x=\pm 1$。这两条直綫 $x=\pm 1$ 都是曲綫族(82)的包絡綫(參看圖 22)。

例 4. 方程式

$$y-C^3x^2+2C^2x-C=0$$

中的 C 若不等于 0，就能把方程改写为：

$$y-C^3\left(x-\frac{1}{C}\right)^2=0.$$

这方程确定了一拋物綫族，这些拋物綫的軸与 Oy 軸平行，而頂点都在 Ox 軸上。虽然 Ox 軸屬于这曲綫族(因为令 $C=0$，得 $y=0$)，可是 Ox 軸显然同时亦是这族的包絡綫。

習 題

用一般方法求出例 4 的包絡綫；包含在这包絡綫中的双曲綫有怎样的几何意义?

第二部分　常微分方程組

第四章　通論

§28. 化任意方程組为一阶方程組

設有方程組：

$$\Phi_i\left(x, y_1, \frac{dy_1}{dx}, \cdots, \frac{d^{m_1}y_1}{dx^{m_1}}, \cdots; \ y_n, \cdots, \frac{d^{m_n}y_n}{dx^{m_n}}\right)=0, \qquad (83)$$

$$i=1, \cdots, n.$$

在这方程組的每一方程中含有：自变数 x, x 的 n 个未知函数 $y_1, y_2, \cdots, y_n$, 及其对 x 的导函数；而所含 y_i 的导函数的最高阶是 m_i。

为了把这方程組化为一阶的方程組，令 $y_i=y_i^{(0)}$, 又令

$$\frac{dy_i^{(k)}}{dx}=y_i^{(k+1)}, \ k=0, 1, \cdots, m_i-2. \qquad (84)$$

于是方程組(83)可以改写为：

$$\Phi_i\left(x, y_1^{(0)}, y_1^{(1)}, \cdots, y_1^{(m_1-1)}, \frac{dy_1^{(m_1-1)}}{dx}; \cdots;\right.$$

$$\left. y_n^{(0)}, y_n^{(1)}, \cdots, y_n^{(m_n-1)}, \frac{dy_n^{(m_n-1)}}{dx}\right)=0, \qquad (85)$$

$$i=1, \cdots, n.$$

可見，若有 n 个函数 $y_i(x)$, $(i=1, \cdots, n)$ 能滿足方程組 (83), 我們能自 $y_i(x)$ 得到一組函数 $y_i^{(k)}(x)$, 能滿足(84)与(85)共同构成的一阶微分方程組。反过来說，若我們有一組函数 $y_i^{(k)}(x)$, 能滿足方程組 (84) 与(85), 亦易証明，其中的函数 $y_i^{(0)}(x)$ $(i=1, \cdots, n)$ 亦滿足方程組(83)。实則令方程組(84)中的 k, 按次等于

$0, 1, \cdots m_i-2$, 就得:

$$y_i^{(k+1)}=\frac{d^{(k+1)}y_i^{(0)}}{dx^{(k+1)}}.$$

所以方程組(85)与方程組(83)等价。

此后本書主要研究的是:已按导函数解出的一阶的微分方程組。

習 題

求証:从一阶微分方程組

$$f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')=0, \quad i=1, 2, \cdots, n,$$

逐次取导数,并消去多余的变数,"一般說来"可以化成一个含一个未知函数的 n 阶微分方程式,而解这个方程式后可以不需要再积分,就求得其他的未知函数。"一般說来"的意思是:我們假定了可能解出一切所需的有限方程組(即不是微分方程組),若这些方程的个数与其未知函数个数相等的話。这里假定要用到的函数 f_i 的各阶导函数都存在。

§29. 几何意义·定义

設有方程組

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n), \quad i=1, 2, \cdots, n, \tag{86}$$

此处函数 $f_i(x, y_1, \cdots, y_n)$ 在 $(x, y_1, \cdots, y_n)$ 空間的某一区域 G 内确定。滿足方程組(86)的函数組

$$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x) \tag{87}$$

叫做方程組(86)的解。方程

$$y_i=y_i(x), \quad i=1, 2, \cdots, n, \tag{88}$$

在 $(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 空間內定出一曲綫,叫做方程組(86)的积分曲

我們时常用:积分曲綫(88)"經过"$(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)$点,或解

(87)"經过"点$(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)$的説法来代替$y_i(x_0)=y_i^0$, $(i=1, 2, \cdots, n)$的説法。

函数組$y_i(x)$当$x=x_0$时能滿足方程組(86)的几何意义如下：积分曲綫(88)在$(x_0, y_1(x_0), \cdots, y_n(x_0))$点的切綫，就是直綫$L$:

$$\frac{y_i-y_i(x_0)}{x-x_0}=f_i(x_0, y_1(x_0), \cdots, y_n(x_0));$$

此处x与y_i是表示在直綫L上的点的"流动坐标"。所以，方程組(86)的求解問題又可以自几何說明其意义如下：

在$(x, y_1, \cdots, y_n)$空間的一区域G內規定了"方向場"，就是說，在这区域內每一点都指定了一方向，正如在本書第一部分对一个微分方程式所做的一样，我們把这些方向用經过这些点的小綫段来表示(我們不区别这綫段两端所指的两方向)。求方程組(86)的积分曲綫，就是找这样的曲綫，使这曲綫在每一点的切綫都有上述規定的方向。

如果我們在函数組$y_i=y_i(x, C_1, C_2, \cdots, C_m)$, $i=1, 2, \cdots, n$, 中适当地选擇一些常数$C_1, C_2, \cdots, C_m$, 自这函数組就能得到方程組(86)在区域G內的任意一个解，則这函数組就叫做方程組(86)在区域G內的通解。最常見的情形是$m=n$。

倘使方向場是由方程組(86)規定的話，那么所規定的任一方向，不能在"与平面$x=0$平行"的平面內。这限制时常覚得太不自然。我們不妨考慮无上述限制的方向場，并求一些曲綫，使曲綫上的每一点的切綫方向，都与在这点的方向場的方向重合，这样的曲綫叫做这方向場的积分曲綫。一般来說，这些积分曲綫的方程不一定能写为按$y_i(i=1,2,\cdots,n)$解出的方程(88)的形式，因为垂直于Ox軸的平面可能与积分曲綫相交数次，甚至包含了整段的积分曲綫段。若假定沿这些曲綫x与y_i是某一参变数t的相当平滑的函数，例如說x与y_i及其对参变数t的导函数都是t的連續函数，

則这些曲綫(或者說方向場也是一样)的微分方程可以用 t 写出。此处参变数 t 可以取为这曲綫的弧長，或者令它等于自积分曲綫上一定点到动点$(x, y_1, \cdots, y_n)$所需的时間；在曲綫每分段上，也可以取坐标 x 与 y_i 中某一个为参变数。用参变数 t 表出的方程是：

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy_i}{dt}=f_i^*(x, y, \cdots, y_n)p(t, x, y_1, \cdots, y_n)\\&\qquad\qquad\qquad (i=1, 2, \cdots, n),\\&\frac{dx}{dt}=f^*(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)p(t, x, y_1, \cdots, y_n).\end{aligned}\right\} \tag{89}$$

此处 $p(t, x, y_1, \cdots, y_n)$ 必須处处不等于 0；而函数 f_i^* 与 f^* 不能在一点$(x_1, y_1, \cdots, y_n)$同时都等于 0。由方程(89)所規定的在$(x, y_1, y_2 \cdots, y_n)$空間的方向場也可以由下列方程：

$$\frac{dy_1}{f_1^*(x, y_1, \cdots, y_n)}=\cdots=\frac{dy_n}{f_n^*(x, y_1, \cdots, y_n)}=\frac{dx}{f^*(x, y_1, \cdots, y_n)} \tag{90}$$

規定。

若 $f_k^*(x, y_1, \cdots, y_n)$ 在某一区域 G 内不等于 0，則自这些方程可以解出 $\frac{dy_i}{dy_k}(i=1, \cdots, k-1, k+1, \cdots, n)$与 $\frac{dx}{dy_k}$；就是說，此处可以把 y_k 当做参变数。若函数 $f^*(x, y_1, \cdots, y_n)$ 在区域 G 内到处都不等于零，則方程組(90)亦可按 $\frac{dy_i}{dx}$ 解出；此处 x 起了参变数的作用。

如果方程組

$$\Phi_i(x, y_1, \cdots, y_n)=0, \quad i=1, 2, \cdots, n,$$

定出的曲綫就是微分方程組(90)的积分曲綫，則方程組 $\Phi_i(x, y_1, \cdots, y_n)=0, (i=1, \cdots, n)$就叫做方程組(90)的积分。

如果在方程組

$$\Phi_i(x, y_1, \cdots, y_n, C_1, \cdots, C_m)=0 \quad i=1, 2, \cdots n$$

內，适当地选擇常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$，能自上面的方程組得到微分

方程組(90)經过区域G內的任一积分曲綫，則

$$\Phi_i(x, y_1, \cdots, y_n, C_1, \cdots C_n)=0 \qquad i=1, 2, \cdots n$$

叫做方程組(90)在区域G的通积分。

因为形如(89)的方程組仅是形如(86)的方程組的特殊情形（前者与后者的区別，仅在多了一个未知函数），所以我們以后只須研究形如(86)的方程組。对于这方程組有許多与本書第三章中的定理完全类似的定理，而这些定理也可用在第三章中所用的方法証明。因此我們不拟重新詳細地証它。我們将只証明阿斯古德定理与压縮映象原理；其他定理仅叙述一下，但不証明。

習　題

1. 求作含两个未知函数y, z的形如(86)的一阶微分方程組，使其积分曲綫都是以Ox为軸，以h为螺距的右旋螺綫。如何可以把这問題推广到更多个变数的情形？

2. 若限制方程(90)中諸分母均連續且不同时为0，問区域G上一方向場能用这样的方程表示的必充的条件是怎样的？在怎样的区域內所有連續方向場都可以表示为这样的形式？

§30. 基本定理的敘述

存在定理(裴雅乐 Peano)　設函数$f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$在$(x, y_1, \cdots, y_n)$空間的某一区域$G$內是連續的，則在这区域的每一內点至少有一条方程組(86)的积分曲綫通过。

为了証明这定理，与§10中的办法一样，首先作欧拉折綫，再利用阿尔最拉定理求極限。

唯一性定理(阿斯古德 Osgood)　設函数$f_i(x, y_1, \cdots, y_n)$在区域G內滿足下列諸不等式：

$$|f_i(x, y_1^{**}, \cdots, y_n^{**})-f_i(x, y_1^*, \cdots, y_n^*)|\leqslant$$

$$\leqslant\varphi\left(\sum_{\nu=1}^{n}|y_{\nu}^{**}-y_{\nu}^{*}|\right),\quad (i=1,2,\cdots,n), \tag{91}$$

此处 $\varphi(u)$ 是具有下列二性質的連續函数：

性質 1) 当 $u>0$ 时，$\varphi(u)$ 亦取正值；

$$2)\ \int_{\varepsilon}^{c}\frac{du}{\varphi(u)}\underset{\varepsilon\to+0}{\to}\infty,\ (c>0).$$

于是在区域 G 的任一内点，微分方程組(86)至多有一条积分曲綫經过。

特别可取 $\varphi(u)\equiv Ku$（此处 K 是某正常数），于是不等式(91)变为下面的形式：

$$|f_i(x,y_1^{**},\cdots,y_n^{**})-f_i(x,y_1^{*},\cdots,y_n^{*})|\leqslant K\sum_{\nu=1}^{n}|y_{\nu}^{**}-y_{\nu}^{*}|.$$

这条件就叫做对于 $y_1,\ \cdots,\ y_n$ 的李卜希茨条件。倘使假定这条件成立，并且假定 f_i 对一切变数都連續，則解的存在定理与唯一性定理都可用“逐步逼近法”証明（参看 § 31—32）。

唯一性定理的証明，在方程組的情形是比一个方程式的情形复杂些，所以我們将詳細講述这証明。

証 我們仍用“归謬法”証它。假定方程組(86)有这样的两个解：

$$y_1^{*}(x),\ y_2^{*}(x),\ \cdots,\ y_n^{*}(x);$$

$$y_1^{**}(x),\ y_2^{**}(x),\ \cdots,\ y_n^{**}(x)$$

存在，而且滿足条件 $y_i^{*}(x_0)=y_i^{**}(x_0)$，　$i=1,2,\cdots,n$.

因为我們假定这两个解是不一样的，所以必能找到这样的 x_1，能使

$$\sum_{i=1}^{n}|y_i^{**}(x_1)-y_i^{*}(x_1)|>0.$$

我們不妨假定 $x_1>x_0$，这样不会限制一般性。因为倘使不如此，用 $-x$ 替代 x 就可以化为这种情形。

虽然 $y_i^*(x)$ 与 $y_i^{**}(x)$ 到处都有导数，其差 $y_i^{**}(x)-y_i^*(x)$ 因而亦必到处有导数，可是差的絕对值在某些点上可能沒有导数。在任一点 x 上，若是

$$y_i^{**}(x)-y_i^*(x)=0, \text{ 而 } \frac{d}{dx}[y_i^{**}(x)-y_i^*(x)]\neq 0,$$

則 $|y_i^{**}(x)-y_i^*(x)|$ 在此点必无导数。

所以不用 $|y_i^{**}(x)-y_i^*(x)|$ 的导数，而改用所謂"右导数"与"左导数"如下：

定义　比值的極限 $\lim\limits_{h>0,\ h\to 0}\dfrac{z(x+h)-z(x)}{h}$ 叫做 $z(x)$ 的右导数，以記号 $D_{右}z(x)$ 表示，

当 h 只經过負值而趋向于 0 时，这比值的極限叫做 $z(x)$ 的左导数，以 $D_{左}z(x)$ 表示它。

倘使我們无須区别左导数与右导数的时候，我們可以把 D 下面的"右"，"左"略去，簡写为 D。易知当 $z(x)$ 有导数时，則 $D_{左}|z(x)|$ 与 $D_{右}|z(x)|$ 亦必存在，且有 $|D_{右}|z(x)||=|D_{左}|z(x)||=|z'(x)|$。下文我們把上式簡写为：

$$|D|z(x)||=|z'(x)|.$$

注意上述的一切，自恒等式

$$\frac{dy_i^*(x)}{dx}=f_i(x, y_1^*(x), \cdots, y_n^*(x)),$$

$$\frac{dy_i^{**}(x)}{dx}=f_i(x, y_1^{**}(x), \cdots, y_n^{**}(x)),\quad i=1, 2, \cdots, n,$$

并根据不等式(91)，得

$$\left|D|y_i^{**}(x)-y_i^*(x)|\right|=|f_i(x, y_1^{**}(x), \cdots, y_n^{**}(x))-$$

$$-f_i(x, y_1^*(x), \cdots, y_n^*(x))|\leqslant$$

$$\leqslant \varphi\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu^{**}(x)-y_\nu^{*}(x)|\Big).$$

由此得

$$\Big|D\sum_{i=1}^{n}|y_i^{**}(x)-y_i^{*}(x)|\Big|\leqslant n\varphi\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu^{**}(x)-y_\nu^{*}(x)|\Big)<$$

$$<(n+1)\varphi\Big(\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu^{**}(x)-y_\nu^{*}(x)|\Big). \tag{92}$$

上式的最末一个不等号<，仅当 $\sum_{\nu=1}^{n}|y_\nu^{**}(x)-y_\nu^{*}(x)|>0$ 方能成立。但由于前面的假定，特别当 $x=x_1$ 时，此不等式能成立。

令 $\sum_{i=1}^{n}|y_i^{**}(x)-y_i^{*}(x)|=z(x)$，且令 $z(x_1)=z_1$。

作出方程式 $$\frac{dy}{dx}=(n+1)\varphi(y)$$

的当 $x=x_1$ 时 $y=z_1$ 的解的圖綫。这样的解必存在而且是唯一的（§4）。其圖綫漸近地趋近 Ox 負軸，而且不与 Ox 負軸相交。$z(x)$ 与 $y(x)$ 两曲綫在 (x_1, z_1) 点相交。自不等式

$$|D_{左}z(x_1)|<(n+1)\varphi(z_1)=(n+1)\varphi(y(x_1))=y'(x_1)$$

直接推得：必有这样的区間 $(x_1-\varepsilon, x_1)$，$\varepsilon>0$ 存在，在这区間上有

$$z(x)>y(x).$$

但我們又可以証明：只要 $\varepsilon>0$ 而不比 (x_1-x_0) 大，則不等式 $z(x)>y(x)$ 对所有的 ε 都能成立。因为倘使不如此，我們取 ε 之最大值 ε' 就将遇到矛盾。事实上，若令 $x=x_1-\varepsilon'=x_2>x_0$。一方面因在 x_2 之右的各点上都有 $z(x)>y(x)$，且因 $z(x_2)=y(x_2)$，所以我們得：

$$D_{右}z(x_2)\geqslant y'(x_2)=(n+1)\varphi(y(x_2))=(n+1)\varphi(z(x_2)).$$

另一方面，因 $z(x_2)>0$, 故从不等式(92)推得

$$Dz(x_2)<(n+1)\varphi(z(x_2)),$$

这式与前面的不等式矛盾。所以，对于所有大于 x_0 但小于 x_1 的 x, 必有

$$z(x)\geqslant y(x)>0,$$

特别是 $z(x_0)>0$, 这与原假設矛盾。(証畢。)

对高阶方程組的推論 設有一方程組（已按每个未知函数的最高阶的导函数解出）:

$$\frac{d^{m_i}y_i}{dx^{m_i}}=f_i\left(x, y_1, \cdots, \frac{d^{m_1-1}y_1}{dx^{m_1-1}}, \cdots, y_n, \cdots, \frac{d^{m_n-1}y_n}{dx^{m_n-1}}\right), \qquad (93)$$

$$i=1, 2, \cdots, n.$$

假定函数 f_i 在点

$$\left(x_0, y_1^0, \cdots, \left(\frac{d^{m_1-1}y_1}{dx^{m_1-1}}\right)^0, \cdots, y_n^0, \cdots, \left(\frac{d^{m_n-1}y_n}{dx^{m_n-1}}\right)^0\right)$$

的某一邻域内是連續的，并且在此邻域内能滿足对从第二个变数开始的所有的变数的"李卜希茨"条件，則在某一含 x_0 的区間 (a, b) 上，必有一組而且仅有一組函数

$$y_1(x), \cdots, y_n(x),$$

能滿足方程組(93)，而这組函数与它的导函数在 $x=x_0$ 点取下列各値

$$y_1^0, \cdots, \left(\frac{d^{m_1-1}y_1}{dx^{m_1-1}}\right)^0, \cdots, y_n^0 \cdots, \left(\frac{d^{m_n-1}y_n}{dx^{m_n-1}}\right)^0.$$

利用 § 28 的結果，这推論能直接自"裴雅乐"与"阿斯古德"二定理推出。在区間 (a, b) 上所得的解，同 § 12 中所做的一样可以向两端开拓。

柯西 (Cauchy) 定理 設 $f_i(x, y_1, \cdots, y_n)$ 在区域 G 内，对一切的变数都是正則的，則經过区域 G 任一内点，有一組而且仅有一組

方程組(86)的对 x 为正則的解(即这解是由正則函数构成的)。

推論 設方程組(86)的右端函数 f_i 对它的一切的变数都是正則的，且假設变数取实数值时，f_i 亦取实数值，則方程組(86)的实数解亦是正則的。

解的可微性的定理 假設函数 $f_i(x, y_1, \cdots, y_n)$ 具有对于 x 与 y_k 的連續导函数，一直到 p 阶 $(p\geqslant 0)$，則方程組(86)的所有的解必有对 x 的連續导函数，一直到 $(p+1)$ 阶。

解对参变数的連續依从性的定理 設有含参变数的方程組：

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, \cdots, y_n, \mu_1, \cdots, \mu_m), \quad i=1, 2, \cdots, n, \tag{94}$$

假定当点 $(x, y_1, \cdots, y_n)$ 是在区域 G 內，而且当 $|\mu_k|<C, k=1, 2, \cdots, m$ 时(此处 C 是大于 0 的常数)，函数 f_i 与它对 y_i 及对 μ_k 的偏导函数一直到 p 阶 $(p\geqslant 1)$，对一切变数都是連續而且有界的。

于是对于区域 G 的任一內点 $(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$ 必能定出一含 x_0 于內部的区間 (a, b)，在这区間上，对所有被考虑的 μ_k，方程組(94)有一組而且仅有一組具有下述性質的解：

$$y_i=\varphi_i(x, \mu_1, \cdots, \mu_m), \quad i=1, \cdots, n$$

这解都有对一切 μ_k 的連續导函数，一直到 p 阶，而且当 $x=x_0$ 时，y_i 依次等于 $y_i^0 (i=1, \cdots, n)$。

若函数 f_i 滿足对 y_i 的李卜希茨条件(常数 k 与 μ 无关)，則本定理当 $p=0$ 时亦必真确。

推論 設(86)之右端有对 y_i 与 x 的 p 阶連續导函数，則方程組(86)的当 $x=x_0$ 时 y_i 依次等于 y_i^0 的解 $y_i(x, x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$ 必有对 x_0 与 y_i^0 的 p 阶連續导函数 $(p\geqslant 1)$。

若函数 f_i 是这样的函数，能使經过点 $(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$ 之解是唯一的，則上面的結論对于 $p=0$ 亦仍成立(請比較 §20 的定理及定理后的附注)。

習 題

1. 試詳細地証明裴雅乐定理、葛西定理、解对于参变数及开始条件的連續依賴性定理。試述对于高阶方程組的推論。推广§§ 14、20 及§ 12 中附注 3 的結果于方程組。

2. 試証§ 20, 習題 2 中的命題不能推广到 n 維($n\geqslant 3$)空間的曲綫,但可以推广到形状如 $y=f(x_1, \cdots, x_{n-1})$的曲面。

3. 設方程組(86)右端連續,又設这方程組的在一定开始条件下的所有的解在閉区間 $a\leqslant x\leqslant b$ ($a\leqslant x_0\leqslant b$) 上开拓时仍在区域 G 内。試証:如果开始条件变动足够小时,則变动的解亦能在整个閉区間$[a, b]$上开拓,而且在这区間上与滿足原来开始条件的那些解中的某一个解一致地相差任意小。

4. (Kneser)。試証:在習題 3 的条件下,平面 $x=c$($a\leqslant c\leqslant b$)与积分曲綫束(即滿足已給开始条件的所有积分曲綫全体)的交集是非空有界閉連通集(所謂"連通的"是指不能表示为两个不交的非空閉集之和)。

提示:考慮这平面 $x=c$ 与滿足已給的开始条件而且具有同一个数的联綫段的所有欧拉折綫[这些欧拉折綫是对于右端近似于(86)的方程組而作出的]。

試举出当 $n=2$ 时的一些例子,使上述的交集是:a) 一圓,б) 一圓周。

5. 将§ 12 的習題 4 推广到方程組(86)的情况。試述几何意义(方向錐場,而且是特殊形状的方向錐場,代替了方向場)。将特殊形状的錐推广到任意的凸錐。推广前面二題的結果于这样形式的方程組。

6. 試举出使含有无穷个未知函数的无穷方程組

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x, y_1, y_2, \cdots) \quad (i=1, 2, \cdots)$$

的解存在且有唯一性的充分条件。

§31. 运算方程組的压縮映象原理

定理 設給有非空的"曲綫"族 S，这族中的每一"曲綫" φ 都由在同一的集合 $\mathfrak{M}$ 上确定的 n 个函数：

$$(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$$

所描繪。

假定曲綫 φ 具有下列性質：

1) 每个函数 φ_i 都是有界的(即 $|\varphi_i|<$ 一常数，这常数可能随 φ_i 而不同)，

2) 屬于 S 的曲綫 φ 的一致收斂的序列的極限，也是屬于 S 的一曲綫。

所謂曲綫序列 $\varphi^{(k)}=(\varphi_1^{(k)}, \varphi_2^{(k)}, \cdots, \varphi_n^{(k)})$, $k=1, 2, \cdots$, 一致收斂于曲綫 $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$，其意义是这序列中每一函数序列 $\varphi_i^{(k)}$, $(i=1, \cdots, n)$，当 $k\to\infty$ 时一致收斂于函数 φ_i。

3) 对于这曲綫族 S，規定了一运算子 A，它把 S 中的每一曲綫 $\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 轉变为这族 S 中的曲綫 $A\varphi=(A_1\varphi, \cdots, A_n\varphi)$。

4) 对于 S 中的任意二曲綫 $\varphi^*=(\varphi_1^*, \cdots, \varphi_n^*)$ 与 $\varphi^{**}=(\varphi_1^{**}, \cdots, \varphi_n^{**})$，下列的不等式成立：

$$\sum_{i=1}^{n} \sup|A_i\varphi^*-A_i\varphi^{**}|\leqslant m \sum_{i=1}^{n} \sup|\varphi_i^*-\varphi_i^{**}|①,$$

此处 m 是一个常数，而且 $0\leqslant m<1$。

則曲綫族 S 中必有一条而且仅有一条这样曲綫

$$\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n), \text{能使 } \varphi=A\varphi;$$

① Sup(原文作 borne sup)是最小上界的符号——譯者注。

或者拆开来写成:

$$\varphi_i = A_i\varphi_i,\quad i=1, 2, \cdots, n. \tag{95}$$

証　在 S 中任选一曲綫:

$$\varphi^0=(\varphi_1^0, \varphi_2^0, \cdots, \varphi_n^0).$$

对它作运算 A, 令　　$\varphi^{(1)}=A\varphi^0$.

根据假設中的性質 3, $\varphi^{(1)}\in S$①, 所以对于所謂(95)的"第一逼近"解

$$\varphi^{(1)}=(\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \cdots, \varphi_n^{(1)})$$

又可作运算 A。由此即得"第二逼近"解:

$$\varphi^{(2)}=A\varphi^{(1)}.$$

又根据性質 3, 曲綫 $\varphi^{(2)}\in S$。这样的手續显然能繼續无穷次。这样我們得一无穷函数組序列:

$$\varphi^{(0)}=(\varphi_1^{(0)}, \varphi_2^{(0)}, \cdots, \varphi_n^{(0)}),$$
$$\varphi^{(1)}=(\varphi_1^{(1)}, \varphi_2^{(1)}, \cdots, \varphi_n^{(1)}),$$
$$\varphi^{(2)}=(\varphi_1^{(2)}, \varphi_2^{(2)}, \cdots, \varphi_n^{(2)}),$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

現將証,当 $k\to\infty$ 时,曲綫序列 $\varphi^{(k)}$ 在集合 $\mathfrak{M}$ 上是一致收斂的。为了証此,只須証明(参看 § 15)对每一 i 級数

$$\varphi_i^{(0)}+(\varphi_i^{(1)}-\varphi_i^{(0)})+(\varphi_i^{(2)}-\varphi_i^{(1)})+\cdots \tag{96}$$

在集合 $\mathfrak{M}$ 上一致收斂。設

$$|\varphi_i^0|\leqslant M_i^{(0)},\ |\varphi_i^{(1)}|\leqslant M_i^{(1)}$$

(性質 1),則得

$$|\varphi_i^{(1)}-\varphi_i^{(0)}|\leqslant M_i^{(1)}+M_i^{(0)}=M_i.$$

利用性質 4, 对于一切 $k\geqslant 1$, 可得

---

① 符号 $\varphi\in S$ 是指 φ 属于族 S。

$$\sum_{i=1}^{n}\sup|\varphi_i^{(k+1)}-\varphi_i^{k}|=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\sup|A_i\varphi^{(k)}-A_i\varphi^{(k-1)}|\leqslant m\sum_{\nu=1}^{n}\sup|\varphi_\nu^{(k)}-\varphi_\nu^{(k-1)}|.$$

如令$M=\sum_{i=1}^{n}M_i$，則級数(96)的每項，其絕对值不能比正項級数

$$M+\bar{M}+mM+m^2M+m^3M+\cdots$$

的对应項为大。

又因我們假定 $m<1$，所以上面的級数是收斂的，所以級数(96)，对于 $i=1, 2, \cdots, n$，在集合 $\mathfrak{M}$ 上亦必一致收斂，可見序列 $\varphi_i^{(k)}(i=1, 2, \cdots, n)$在这集合上亦必一致收斂。

令
$$\lim_{k\to\infty}\varphi_i^{(k)}=\varphi_i,\quad i=1, 2, \cdots, n.$$

根据性質 2 知

$$\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)\in S.$$

因而运算子 $A\varphi$ 必有意义。現将証：

$$A_i\varphi=\varphi_i,\quad i=1, 2, \cdots, n.$$

为了証此，請注意，根据性質 4 我們有：

$$|A_i\varphi^{(k)}-A_i\varphi|\leqslant m\sum_{i=1}^{n}\sup|\varphi_i^{(k)}-\varphi_i|.$$

又因当 $k\to\infty$ 时，$\varphi_i^{(k)}$ 一致收斂于 φ_i，所以，知 $A_i\varphi^{(k)}$ 必收斂于 $A_i\varphi$，現把等式

$$\varphi_i^{(k+1)}=A_i\varphi^{(k)}\quad i=1, 2, \cdots, n$$

的两端，都取 $k\to\infty$ 时的極限，即得：

$$\varphi_i=A_i\varphi,\quad i=1, 2, \cdots, n.$$

即 φ 能滿足方程(95)。

現将証，只有一个这样的函数組 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$，能滿足方程組(95)，又使 $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)\in S$。事实上，假定有两个这样的解：

第一个解：$\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \phi_n)$；

第二个解：$\psi=(\psi_1, \psi_2, \cdots, \psi_n)$.

于是有等式　　$\varphi_i=A_i\varphi,\quad i=1, 2, \cdots, n;$

$$\psi_i=A_i\psi,\quad i=1, 2, \cdots, n.$$

把两式对应項相減，再根据性質 4 就得：

$$\sum_{i=1}^{n}\sup|\varphi_i-\psi_i|=\sum_{i=1}^{n}\sup|A_i\varphi-A_i\psi|\leqslant m\sum_{i=1}^{n}\sup|\varphi_i-\psi_i|.$$

因而 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\sup|\varphi_i-\psi_i|\leqslant m\sum_{i=1}^{n}\sup|\varphi_i-\psi_i|.$

又因 $m<1$，所以上式仅当

$$\sum_{i=1}^{n}\sup|\varphi_i-\psi_i|=0$$

方能成立。故　　$\varphi_i\equiv\psi_i,\quad i=1, 2, \cdots, n.$

附注　本定理亦同样可用几何解釋，正如 § 17 中 $n=1$ 时所做一样。不过 § 17 中的"点"，要理解为本节的"曲綫"φ，而两"点"$\varphi=(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)$ 与 $\psi=(\psi_1, \cdots, \psi_n)$的距离，要理解为：

$$\sum_{i=1}^{n}\sup|\varphi_i-\psi_i|.$$

習　題

試証：性質 4 可以推广如下：

$$F(\sup|A_1\varphi^*-A_1\varphi^{**}|, \cdots, \sup|A_n\varphi^*-A_n\varphi^{**}|)\leqslant$$
$$\leqslant mF(\sup|\varphi_1^*-\varphi_1^{**}|, \cdots, \sup|\varphi_n^*-\varphi_n^{**}|),$$

此处 $F(t_1, \cdots, t_n)$ 是一次的齐次函数，它当 $t_1 \geqslant 0, \cdots, t_n \geqslant 0$ 时是确定的、連續的而且是非負的，仅在坐标原点方等于零。

§32. 压縮映象原理对于微分方程組的应用

定理　設函数 $f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)(i=1, 2, \cdots, n)$ 在 $(x, y_1, \cdots, y_n)$ 空間的一閉区域 $\overline{G}$ 內是有界，对 x 連續，并且满足对所有 y_k 的李卜希茨条件。于是对于 $\overline{G}$ 的任一內点 $(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$ 必可定出一个含 x_0 点于內部的閉区間 $[a, b]$，在这区間上，方程組(86)有唯一的解經过这一点 $(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$。

証　1. 先应注意：若事先假定这样的解存在，那么将下面的恒等式

$$\frac{dy_i(\xi)}{d\xi}=f_i(\xi, y_1(\xi), \cdots, y_n(\xi)), \quad i=1, 2, \cdots, n$$

自 x_0 至 x 积分[1]，即得：

$$y_i(x)=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(\xi, y_1(\xi), \cdots, y_n(\xi))d\xi. \quad i=1, 2, \cdots, n \quad (97)$$

可見，方程組(86)經过定点 $(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$ 的所有的解亦必满足积分方程組(97)。

反过来說，假定有 n 个連續[2]的函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$，能满足积分方程組(97)，那么把这些函数代入(97)式中每一式的两端，并且把所得的恒等式每一个的两端都微分[3]，即得函数 $y_i(x)$ 满足微分方程組(86)的結論。另一方面，如果 $y_i(x)$ 能满足积分方程組(97)，則显然有

$$y_i(x_0)=y_i^0, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

---

① 能积分的理由与 §15 中理由类似。

② 此处我們說到“連續解”，只为了避免以后积分不連續函数的困难。

③ 能微分的理由与 §15 中理由类似。

所以我們用不着直接証明本定理的結論，而只須証明：在閉区間$[a, b]$上，积分方程組(97)有一个而且仅有一个連續解。

2. 为了証明这結論，我們将用"压縮映象原理"。就是，我們将假定函数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots \varphi_n$ 确定于閉区間 $a\leqslant x\leqslant b$ $(a<x_0<b)$上，并假定它們具有下列二性質：

1) 所有的 φ_i 都是連續的；

2) 曲綫 $\varphi=(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n)$;

$$y_i=\varphi_i(x),\quad i=1, 2, \cdots, n,\qquad a\leqslant x\leqslant b$$

不超出确定这些函数 $f_i(i=1, 2, \cdots, n)$ 的某一閉区域 $\overline{G}$。

于是易知压縮映象原理中第一、第二条件已滿足。$\overline{G}$ 之所以必須是閉区域，是为了滿足条件 2。

再令

$$A_i\varphi=y_i^0+\int_{x_0}^{x} f_i(\xi, \varphi_1(\xi), \cdots, \varphi_n(\xi))d\xi,\quad i=1, 2, \cdots, n \qquad (98)$$

現將証：倘使区間$[a, b]$取得充分小，这样规定的运算子 A 必滿足条件 3。

令 M 是 $f_i(x, y_1, y_2, \cdots, y_n)$, $(i=1, 2, \cdots, n)$ 在$\overline{G}$ 内的"上界"，过$(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$点作 $2n$ 个平面

$$y_i-y_i^0=\pm M(x-x_0),\quad i=1, 2, \cdots, n \qquad (99)$$

又另作二平面 $\quad x=a, x=b,\quad (a<x_0<b)$

使这二平面与(99)的 $2n$ 个平面共同构成两个棱錐体 P_1 与 P_2，其公共頂点是$(x_0, y_1^0, \cdots, y_n^0)$，而且使它們完全在 $\overline{G}$ 內。以后我們还要添加 a, b 二数充分接近 x_0 点的假定。現取在$[a, b]$上連續的任意 n 个函数：

$$\varphi_1^{(0)}(x),\ \varphi_2^{(0)}(x), \cdots, \varphi_n^{(0)}(x), \qquad (100)$$

只須假定这曲綫

$$\varphi_i=\varphi_i^{(0)}(x),\ \ i=1,2,\cdots,n,\ \ a\leqslant x\leqslant b,$$

完全在 $\overline{G}$ 内的。把(100)的函数代入方程組(97)之右端后，这右端变成了在区間$[a,b]$上完全确定的 x 的連續函数。令

$$\varphi_i^{(1)}(x)=y_i^0+\int_{x_0}^{x}f_i(\xi,\varphi_1^{(0)}(\xi),\cdots,\varphi_n^{0}(\xi))d\xi,\ \ i=1,2,\cdots,n$$

显然，这些函数仍在閉区間$[a,b]$上确定，而且

$$\varphi_i^{(1)}(x_0)=y_i^0.$$

我們又将証明这曲綫

$$y_i=\varphi_i^{(1)}(x),\quad i=1,2,\cdots,n,\quad a\leqslant x\leqslant b,$$

不会超出这二个棱錐体外，因而不能超出 $\overline{G}$ 外。其証明如下：

因 $$|f_i(x,\varphi_1^{(0)}(x),\cdots,\varphi_n^{(0)}(x))|\leqslant M,$$

所以 $$|\varphi_i^{(1)}(x)-y_i^{(0)}|\leqslant M\,|x-x_0|,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

最后将証：若假定 f_i 滿足对 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的李卜希茨条件，而且假定区間$[a,b]$充分小，那么由等式(98)所定出的运算子 $A\varphi$ 也滿足压縮映象原理中之条件 4。其証明如下：

$$\left|\left(y_i^0+\int_{x_0}^{x}f_i(\xi,\varphi_1^{**}(\xi),\cdots,\varphi_n^{**}(\xi))d\xi\right)-\right.$$

$$\left.-\left(y_i^0+\int_{x_0}^{x}f_i(\xi,\varphi_1^{*}(\xi),\cdots,\varphi_n^{*}(\xi))d\xi\right)\right|=$$

$$=\left|\int_{x_0}^{x}[f_i(\xi,\varphi_1^{**}(\xi),\cdots,\varphi_n^{**}(\xi))-\right.$$

$$\left.-f_i(\xi,\varphi_1^{*}(\xi),\cdots,\varphi_n^{*}(\xi))]d\xi\right|\leqslant\left|\int_{x_0}^{x}K[|\varphi_1^{**}(\xi)-\right.$$

$$\left.-\varphi_1^{*}(\xi)|+\cdots+|\varphi_n^{**}(\xi)-\varphi_n^{*}(\xi)|]d\xi\right|\leqslant$$

$$\leqslant K(b-a)\sum_{\nu=1}^{n}\max|\varphi_\nu^{**}-\varphi_\nu^{*}|=\frac{m}{n}\sum_{\nu=1}^{n}\max|\varphi_\nu^{**}-\varphi_\nu^{*}|,$$

式中
$$m=K(b-a)n.$$
可見，只要 $b-a$ 充分小，則 $m<1$。（証畢。）

在 § 12 末的附注現在仍有效。

与 § 15 的附注 3 类似，極易証明，这“逼近序列”不但在上述的所选出的区間 $[a, b]$ 上一致收斂，而且在所有的 φ_i 都存在的任一有限区間上亦一致收斂。

与本書第三章中討論一个方程式时做法不一样，我們不拟研究微分方程組的奇点、奇曲綫及奇曲面，而在下章将專研究綫性方程組。

第五章 綫性微分方程組通論

§ 33. 定义 · 自微分方程組的一般理論导出的推論

倘使微分方程組对所含的未知函数及其导函数是一次的，則此微分方程組就叫做綫性微分方程組。前章已証明，含高阶导数的任何方程組都可化为仅含一阶导数的方程組；所以本章主要地只研究“一阶的方程組”。同时我們只討論，按导数解出的方程組。这样的方程組的一般形式如下：

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_j+f_i(x), \quad i,=1,2,\cdots n. \tag{101}$$

有时我們将采用下面的簡写：

$$L_i(y)\equiv\frac{dy_i}{dx}-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)y_j.$$

于是方程組(101)可以簡写为:

$$L_i(y)=f_i(x),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

本章中如无特別声明，都是假定 $a_{ij}(x)$ 与 $f_i(x)$ 在某一区間 $a<x<b$ 上是連續的。此区間的一端或兩端可以无界。这样的方程組右端对所有的 y_i 的导数在区間 (a,b) 內的任意一閉区間 $[a_1, b_1]$ 上一定是有界的，因此李卜希茲条件在 $[a_1, b_1]$ 上必是滿足的。所以根據 § 31—32 已証定理，直接推得：

在 $(x, y_1, \cdots, y_n)$ 空間的条形区域 $a<x<b$ 內任意一点 $(x_0, y_1^0, y_2^0 \cdots y_n^0)$，有一条而且只有一条方程組(101)的积分曲綫通过。

实际上，对于任意的有限的 a 与 b，此定理可直接应用到每一个如下的区域($n+1$ 維空間的平行多面体):

$$a+\varepsilon \leqslant x \leqslant b-\varepsilon,\quad -M \leqslant y_i \leqslant M,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

此处 ε 是任意小的正数，而 M 是任意大的正数。由此直接推出，本定理对整个的条形区域 $a<x<b$ 亦成立。

方程組(101)的每一个解都可以在整个区間 (a, b) 上开拓。事实上，将 § 15 中的附注 3 (文句須稍加修改，使其适用于方程組)，用于区間 (a, b) 內的任一閉区間 $[a_1, b_1]$，就推出这結論。所以，构成方程(101)的解的函数組

$$y_1(x), \cdots, y_n(x)$$

只当 $x \to a$ 或 $x \to b$ 时，方可以无限增大。

經过点 $(x_0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_n^0)(a<x_0<b)$ 的解的可能的增大率，可以估計如下。用記号:

$$F(x)=\int_{x_0}^{x} \max\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}(t)|+\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}(t)|+1\right)dt;$$

式中被积函数在 (a, b) 上是連續的，因为它等于有限个連續函数之最大值。所以，

$$\left(e^{-F(x)}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)'=e^{-F(x)}\left(-F'(x)\sum_{i=1}^{n}y_i^2+2\sum_{i=1}^{n}y_iy_i'\right).\quad(102)$$

但利用不等式 $2|\alpha\beta|\leqslant\alpha^2+\beta^2$，可得：

$$\left|2\sum_{i=1}^{n}y_iy_i'\right|=\left|2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j+2\sum_{i=1}^{n}y_if_i\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(|a_{ij}|y_i^2+|a_{ij}|y_j^2)+\sum_{i=1}^{n}(y_i^2+f_i^2)=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|+\sum_{j=1}^{n}|a_{ji}|+1\right)y_i^2+\sum_{i=1}^{n}f_i^2\leqslant$$

$$\leqslant F'(x)\sum_{i=1}^{n}y_i^2+\sum_{i=1}^{n}f_i^2.$$

因而由(102)推得

$$\left(e^{-F(x)}\sum_{i=1}^{n}y_i^2\right)'\leqslant e^{-F(x)}\sum_{i=1}^{n}f_i^2.$$

积分这不等式，則得当 $x_0\leqslant x<b$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}y_i^2(x)\leqslant e^{F(x)}\left[\sum_{i=1}^{n}(y_i^0)^2+\int_{x_0}^{x}e^{-F(s)}\sum_{i=1}^{n}f_i^2(s)ds\right].$$

相仿地可得当 $x<x_0$ 时的估計。

定义 当方程組(94)中之 $f_i(x)\equiv0$，則方程組(101)就叫做齐次方程組；若 $f_i(x)$ 并不恒等于 0，則(101)叫做非齐次方程組。

習 題

若所有的 $a_{ij}(x)$ 及 $f_i(x)$ 都可展成馬克老臨(Maclaurin)級数，而它們的收斂半徑都不小于 $R>0$，則方程組(101)的所有的解

亦可以展成馬氏級数，而其收斂半徑也不小于R。这命題也可以象§18附注中証明与这类似的命題那样証明，对所有的$a_{ij}(x)$，$f_i(x)$，应选取同一的强函数。

§34. 一阶齐次組的基本定理

設有齐次綫性微分方程組的m个解如下：

$$\left.\begin{array}{l} y_1^{(1)}(x),\ y_2^{(1)}(x),\ \cdots,\ y_n^{(1)}(x),\ [\text{第一个解，以后簡写成 } y^{(1)}(x)] \\ y_1^{(2)}(x),\ y_2^{(2)}(x),\ \cdots,\ y_n^{(2)}(x),\ [\text{第二个解，簡写成 } y^{(2)}(x)] \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(m)}(x),\ y_2^{(m)}(x),\ \cdots,\ y_n^{(m)}(x),\ [\text{第 } m \text{ 个解，簡写为 } y^{(m)}(x)] \end{array}\right\} \quad (103)$$

設$C_1, C_2, \cdots, C_m$是常数，則下列的函数：

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y_1^{(k)}(x),\ \sum_{k=1}^{m} C_k y_2^{(k)}(x)\cdots,\ \sum_{k=1}^{m} C_k y_n^{(k)}(x),$$

叫做这m个解的綫性組合。特別是，当一切的$C_k=1$时，它就是諸解之和；若$C_1=1$, $C_2=-1$而且$m=2$时，它就是二解$y^{(1)}(x)$，与$y^{(2)}(x)$之差。

定理 1. 齐次綫性方程組的解的綫性組合，亦是这方程組的解。

証 設齐次綫性方程組

$$L_i(y) \equiv \frac{dy_i}{dx} - \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j = 0, \quad i=1, 2, \cdots, n, \qquad (104)$$

有m个解(103)。以$\sum\limits_{k=1}^{m} C_k y_i^{(k)}(x)$替代上式中的$y_i$，即得

$$L_i\Big(\sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x)\Big) \equiv \sum_{k=1}^{m} C_k L_i(y^{(k)}(x)), \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

根据假設，函数組(103)的每一行，都是方程組(104)的解，即对于一切的 k，

$$L_i(y^{(k)}(x))\equiv 0,$$

所以，

$$L_i\left(\sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x)\right)\equiv 0,$$

这就是所要証的。

定义　若有这样的不是都等于零的常数 $C_1, C_2, \cdots C_m$ 存在，能使下面的恒等式：

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y_i^{(k)}(x)\equiv 0 \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

对每一个 i 都能成立，則 m 組函数(103)就叫做互相綫性相关。

行列式

$$\begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \cdots, y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x), y_2^{(2)}(x), \cdots, y_n^{(2)}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n)}(x), y_2^{(n)}(x), \cdots, y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}$$

叫做函数組

$$\left.\begin{array}{l} y_1^{(1)}(x), y_2^{(1)}(x), \cdots, y_n^{(1)}(x) \\ y_1^{(2)}(x), y_2^{(2)}(x), \cdots, y_n^{(2)}(x) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_1^{(n)}(x), y_2^{(n)}(x), \cdots, y_n^{(n)}(x) \end{array}\right\} \qquad (105)$$

的隆斯基(Wronski)行列式。

此后我們将采用記号 $W(x)$ 表示隆斯基行列式。

定理 2.　假定函数組(105)为綫性相关，則它的隆斯基行列式必恒等于零。

本定理可从代数学中熟知的定理直接推出。

定理 3.　假定函数組(105)的每一行都是方程組(104)的解，

并且假定这函数組的隆斯基行列式至少在 $x=x_0$ 一点等于零，則函数組(105)必綫性相关。

証 假定 $W(x_0)=0$，則下列的以 C_i 为未知数的綫性齐次代数方程組：

$$C_1y_1^{(1)}(x_0)+C_2y_1^{(2)}(x_0)+\cdots+C_ny_1^{(n)}(x_0)=0;$$
$$C_1y_2^{(1)}(x_0)+C_2y_2^{(2)}(x_0)+\cdots+C_ny_2^{(n)}(x_0)=0;$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$C_1y_n^{(1)}(x_0)+C_2y_n^{(2)}(x_0)+\cdots+C_ny_n^{(n)}(x_0)=0.$$

至少有一組非零解，就是說，$C_1, C_2, \cdots, C_n$ 不全等于零的解。設这样的解为

$$C_1^*, C_2^*, \cdots, C_n^*.$$

于是造出 n 个函数如下：

$$y_i^*(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k^*y_i^{(k)}(x),\ i=1, 2, \cdots, n.$$

据定理 1，此等函数 $y_i^*(x)$ 满足方程組(104)，且当 $x=x_0$ 时，一切的 $y_i^*(x)$ 都等于零。但根据"解的唯一性"定理，满足方程組(104)而当 $x=x_0$ 时都等于零的函数組是唯一的；它显然就是恒等于零的 n 个函数。所以我們証明了我們所需要証的，即

$$\sum_{k=1}^{n}C_k^*y_i^{(k)}(x)\equiv 0,\quad 当\ i=1, 2, \cdots, n\ 时.$$

推論 若函数組(105)的每一行都是方程組(104)的解；若这些解所造成的隆斯基行列式在 $x=x_0$ 一点等于 0，則行列式必恒等于 0。

証 倘使这行列式在一点等于 0，則根据剛才所証的定理，(105)諸解必綫性相关，又根据定理 2，知道它們的隆斯基行列式必恒等于 0。

附注 若函数組(105)不是連續系数的方程組(104)之解組，則对它不能作出类似于定理3的結論。例如，函数組

$$x,\ 0$$

$$x^2,\ 0$$

之隆斯基行列式虽恒等于0，可是它們仍是綫性无关的。

定义 方程組(104)的 n 个綫性无关的解，叫做方程組(104)的基本解組。

定理 4. "基本解組"必存在。

証 取 n^2 个这样的数 $b_i^{(k)}$，使它們所造成的行列式

$$\begin{vmatrix} b_1^{(1)}, b_2^{(1)}, \cdots, b_n^{(1)} \\ b_1^{(2)}, b_2^{(2)}, \cdots, b_n^{(2)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ b_1^{(n)}, b_2^{(n)}, \cdots, b_n^{(n)} \end{vmatrix} \neq 0.$$

这样的 $b_i^{(k)}$ 是一定可以找到的，例如說：

当 $i \neq k$ 时， 令 $b_i^{(k)}=0$,

当 $i=k$ 时， 令 $k_i^{(k)}=1$,

則上面的行列式就不会等于0了。現造出方程組(104)之解組(103)(此处 $m=n$)，使它滿足下列条件：

$$y_i^{(k)}(x_0)=b_i^{(k)}, \qquad i, k=1, 2, \cdots, n,$$

此处 x_0 是在区間(a, b)内任一数。所以这解組的隆斯基行列式当 $x=x_0$ 时其値必不等于0。据定理2，这解組必綫性无关。

定理 5. 若函数組(105)是由方程組(104)的 n 个綫性无关的解构成的，則方程組(104)的任意一个解都是这些解的綫性組合，其中的系数为适当的常数，也就是說，任意解 y 必能表成下列的形状：

$$y_i(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k y_i^{(k)}(x), \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

利用"通解"及"基本解組"的定义，定理 5 还可改述如下：

綫性齐次微分方程組的通解，是基本解組的以任意常数为系数的綫性組合。

定理 5 的証明 取方程組(104)的任意一个解：

$$y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x).$$

当 x 等于定值 x_0 时，設这些函数依次取下列之值：

$$y_1^0,\ y_2^0,\ \cdots,\ y_n^0.$$

現造出以 $C_1, C_2, \cdots, C_n$ 为未知数的代数方程組：

$$y_i^0=\sum_{k=1}^{n}C_k y_i^{(k)}(x_0),\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{106}$$

既然函数組(105)是 n 个綫性无关的解构成的，据前定理，它們的隆斯基行列式不会等于 0。特别当 $x=x_0$ 时，行列式不等于 0。所以代数方程組(106)必能按 $C_1, C_2, \cdots C_n$ 解出。令所得之解是下列的数：

$$C_1^*,\ C_2^*,\ \cdots,\ C_n^*.$$

于是造出 n 个函数：

$$y_i^*(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k^* y_i^{(k)}(x),\quad i=1,2,\cdots,n.$$

据定理 1，这些函数必滿足方程(104)。但另一方面，当 $x=x_0$ 时，这些函数所取之值，与函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 所取之值是一样的。因此，据"解的唯一性"定理知道 $y_i(x)\equiv y_i^*(x)$, $(i=1,2,\cdots,n)$ 卽

$$y_i(x)\equiv\sum_{k=1}^{n}C_k^* y_i^{(k)}(x),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

这就是我們所須証的。

習 題

1. 試求方程組

$$xy_1' = 2y_1 - y_2, \quad xy_2' = 2y_1 - y_2$$

的所有的解。求証：若开始条件給在 $x_0 \neq 0$ 处，則这解在整个 x 軸上存在而且是唯一的；如果給在 $x_0 = 0$，則只当 $2y_1^0 - y_2^0 = 0$ 时，其解存在，但在这情况下不是唯一的。求証：任意的两个綫性无关的解的隆斯基行列式之値等于 $Cx\ (C \neq 0)$。这里的隆斯基行列式仅在 $x=0$ 一点上等于零的情况，与定理 3 的推論不矛盾么？

2. 求方程組

$$xy_1' = y_1 - 2y_2, \quad xy_2' = y_1 - 2y_2$$

的解。求証：当而且只当 $y_1^0 = 2y_2^0$ 时，开始条件所确定的解方可以在整个 x 軸上存在，而且这样的解总是唯一的。

3. 試求方程組

$$y_i' = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(x) y_j \quad (i = 1, \cdots, n)$$

的基本解組及其隆斯基行列式［此处所有的函数 $a_{ij}(x)$ 在区間 (a, b) 上都是連續的］。

§ 35. 隆斯基行列式的表达式

設函数組(105)是齐次綫性方程組(104)的 n 个解，則其隆斯基行列式 W 在 x 点之値，与它在 x_0 点之値間，有下列的关系①

$$W(x) = W(x_0) e^{\int_{x_0}^{x} [a_{11}(\xi) + a_{22}(\xi) + \cdots a_{nn}(\xi)] d\xi} \tag{107}$$

① 阿貝尔(Abel)于 1827 年就二阶方程式的情形得到此定理，而刘徽(Liouville)与奥斯特洛格拉达斯基(M. B. Остроградский)于 1838 年得到定理的一般情形。

証　据行列式求导数的規則得:

$$W'(x)=\begin{vmatrix}\frac{dy_1^{(1)}}{dx}, & y_2^{(1)}, & \cdots, & y_n^{(1)}\\ \frac{dy_1^{(2)}}{dx}, & y_2^{(2)}, & \cdots, & y_n^{(2)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ \frac{dy_1^{(n)}}{dx}, & y_2^{(n)}, & \cdots, & y_n^{(n)}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}y_1^{(1)}, & \frac{dy_2^{(1)}}{dx}, & \cdots, & y_n^{(1)}\\ y_1^{(2)}, & \frac{dy_2^{(2)}}{dx}, & \cdots, & y_n^{(2)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{(n)}, & \frac{dy_2^{(n)}}{dx}, & \cdots, & y_n^{(n)}\end{vmatrix}+\cdots$$

$$\cdots+\begin{vmatrix}y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \cdots, & \frac{dy_n^{(1)}}{dx}\\ y_1^{(2)}, & y_2^{(2)}, & \cdots, & \frac{dy_n^{(2)}}{dx}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \cdots, & \frac{dy_n^{(n)}}{dx}\end{vmatrix}.$$

利用方程組(104),用 $y_1^{(k)}, y_2^{(k)}, \cdots, y_n^{(k)}$ 表出 $\frac{dy_i^{(k)}}{dx}$ $(i, k=1, 2, \cdots, n)$,将所得表达式代入上式右端。再利用行列式的特性,即任意一列的元素,如加上了与其他一列的元素成比例的数量,則行列式之值不变,由此得:

$$W'(x)=\begin{vmatrix}a_{11}y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \cdots, & y_n^{(1)}\\ a_{11}y_1^{(2)}, & y_2^{(2)}, & \cdots, & y_n^{(2)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{11}y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \cdots, & y_n^{(n)}\end{vmatrix}+\cdots+\begin{vmatrix}y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \cdots, & a_{nn}y_n^{(1)}\\ y_1^{(2)}, & y_2^{(2)}, & \cdots, & a_{nn}y_n^{(2)}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \cdots, & a_{nn}y_n^{(n)}\end{vmatrix},$$

即
$$W'(x)=\sum_{i=1}^{n}a_{ii}(x)W(x),$$

积分这微分方程后,即得(107)式。

推論　自公式(107)亦可得到前面講过的結論:由方程組(104)的解組(105)所造成的隆斯基行列式,若在一点其値等于0,則其値必恒等于0。

§36. 据已給的基本解組造出齐次綫性微分方程組

首先应注意：并非 n^2 个任何具有連續一阶导数的函数組 $y_i^{(k)}(x)$，都是系数連續的方程組（104）的基本解組。根据定理 3 知，它們的行列式必須恒不等于 0。現將証明：倘使假定 $y_i^{(k)}$ 与它的导数都是連續的話，則它們行列式恒不等于 0 的条件不但是必要条件同时也是充分条件。

証 讓我們造出 n 个以 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 为未知函数的齐次綫性微分方程組如下：

$$\begin{vmatrix} y_1, & y_2, & \cdots, & y_n, & \dfrac{dy_i}{dx} \\ y_1^{(1)}, & y_2^{(1)}, & \cdots, & y_n^{(1)}, & \dfrac{dy_i^{(1)}}{dx} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)}, & y_2^{(n)}, & \cdots, & y_n^{(n)}, & \dfrac{dy_i^{(n)}}{dx} \end{vmatrix} = 0, \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

显而易見，(105)各行的函数必滿足上面的方程組。又据假定，(105)式所写成的行列式之値决不等于零，所以上面的微分方程組必可按

$$\frac{dy_i}{dx} \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

解出。

所得之方程組，就是以函数 $y_i^{(k)}$ 为基本解組的方程組。

現在再証：有已給基本解組的而形状如(104)的方程組只有一組。因为据 §34 定理 5 知，这样方程組的任一个解，都由它的基本解組确定的。既然确定了方程組（104）的所有的积分曲綫，因而确定了与方程組对应的方向場，方向場又單値地給出了方程組(104)的右端的值，而綫性式的系数是由它的值單値地确定的，所以，这方程組也就是完全被确定。

習 題

設給有一連續可微的函数組(103)，而 $m<n$。求証，这函数組可以添加一些新函数而扩充为某一連續系数的方程組（104)的基本解組(105)的充要条件是，矩陣(103)的秩在区間(a,b)的每一点上都等于 m。

提示：先在区間(a,b)内任一点的鄰域內造出所求的方程組(104)。

§37. 对于 n 阶微分方程式之推論

根据在§28所說的，我們知道齐次綫性微分方程式

$$\frac{d^ny}{dx^n}=a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy}{dx}+$$
$$+a_0(x)y \tag{108}$$

是与下列的齐次綫性方程組：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy_0}{dx}&=y_1,\\
\frac{dy_1}{dx}&=y_2,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy_{n-2}}{dx}&=y_{n-1},\\
\frac{dy_{n-1}}{dx}&=a_0(x)y_0+a_1(x)y_1\cdots+a_{n-1}(x)y_{n-1}
\end{aligned}\right\} \tag{109}$$

等价的，此处以 y_0 表示 y，以 y_k 表示 y 的 k 阶的导数。

1．由§33的定理，能得到下面的結論：假定在区間 $a<x<b$ 上，系数 $a_i(x)$ 都是連續的，那么对于这区間內的任一点 x_0，及任意一組数 $y_0^0, y_1^0, y_2^0, \cdots, y_{n-1}^0$，微分方程式(108)必有一个而且仅有一个这样的解，这解当 $x=x_0$ 时其 i 阶导数$(i=0,1,2,\cdots,n-1)$之

値为 y_i^0。这解在整个区間 (a, b) 上都存在。

2. 易知：若 m 个函数 $y^{(1)}(x)$, $y^{(2)}(x)$, $\cdots$, $y^{(m)}(x)$ 是方程式 (108) 的 m 个解，則它的以常数为系数的任一綫性組合

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x) \tag{110}$$

亦滿足方程 (108)。

3. 其次請注意下面的事实：

設有方程組 (109) 的 m 个解：

$$y_0^{(k)}(x), y_1^{(k)}(x), \cdots, y_{n-1}^{(k)}(x); \quad k=1, 2, \cdots, m.$$

若有这样的不全等于 0 的 m 个常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 存在，能使对于区間 (a, b) 上的所有 x，恒等式：

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y_0^{(k)}(x) \equiv 0 \tag{111}$$

都能滿足，則下面的諸恒等式：

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y_j^{(k)}(x) \equiv 0, \quad j=1, 2, \cdots, n-1$$

亦必成立。

所以，若有这样的 m 个常数 $C_1, C_2, \cdots, C_m$（这些常数中至少要有一个不等于 0），能使下面的恒等式成立：

$$\sum_{k=1}^{m} C_k y^{(k)}(x) \equiv 0,$$

則我們就說方程組 (108) 的这 m 个解 $y^{(1)}(x)$, $y^{(2)}(x)$, $\cdots$, $y^{(m)}(x)$ 是綫性相关。

4. 請注意，$y_i(x)$ 是 $y(x)$ 的第 i 阶的导数，所以方程組 (109) 的隆斯基行列式可以写为：

$$\begin{vmatrix} y^{(1)}, & \dfrac{dy^{(1)}}{dx}, & \cdots, & \dfrac{d^{(n-1)}y^{(1)}}{dx^{n-1}} \\ y^{(2)}, & \dfrac{dy^{(2)}}{dx}, & \cdots, & \dfrac{d^{(n-1)}y^{(2)}}{dx^{n-1}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{(n)}, & \dfrac{dy^{(n)}}{dx}, & \cdots, & \dfrac{d^{(n-1)}y^{(n)}}{dx^{n-1}} \end{vmatrix}. \tag{112}$$

如果"方程(108)的解的線性組合"是指形状如(110)的和，而且把行列式(112)叫做方程式(108)的隆斯基行列式，那么§34中的定理2, 3, 4, 5与定理3的推論对方程式(108)仍成立。

5．在方程組（109）右端的主对角綫上，仅有一系数其值可能不等于零，它就是系数 a_{n-1}，所以§35的公式（107）現作下列的形式：

$$W(x)=W(x_0)e^{\int_{x_0}^{x} a_{n-1}(\xi)d\xi}$$

附注　倘使不假定 $y_1(x), y_2(x), \cdots y_n(x)$ 滿足系数連續的方程（108），則它們的隆斯基行列式(112)縱使恒等于0，仍不能說，$y_1(x), y(x), \cdots y_n(x)$ 是綫性相关，卽对于它們不一定存在着系数 C_i 不全等于0的恒等式(111)，这一事实由下例証明：

$$y_1(x)=x^2,\ y_2(x)=x|x|,\quad (-1\leqslant x\leqslant 1)$$

虽然它們的隆斯基行列式恒等于零，但極易看出这些函数仍是綫性无关的。

習　題

1．若令 $y_{i+1}^{(k)}(x)=\dfrac{d^i y^{(k)}}{dx^i}$，$\begin{matrix} i=0, 1, 2, \cdots, n-1, \\ k=1, 2, 3, \cdots, n. \end{matrix}$

求証：在§36所作的方程組，与一个 n 阶的方程式等价。

2．設 $a<a_1<b_1<b$，又假定方程(108)的解 $y(x)$ 在区間$[a_1, b_1]$上有无穷个"零点"。求証，在区間(a, b)上，$y(x)\equiv 0$.

3．解方程式 $y''+xy=0$

并展 y 为馬克老临級数。求証，这級数收斂，比較 § 33 的習題 2.

4．設在区間(a, b)上給定的解析函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 的行列式(112)恒等于零，則这些函数是綫性有关的。

5．(Г. К. Энгелис)。設在区間 (a, b)上給有 n 次連續可微而綫性无关的函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x)$ $(m\leqslant n)$。求証，为了能存在連續系数的方程式(108)，以所給 m 个函数为其特解之充要条件是：矩陣 $\left\|\dfrac{d^k y_j}{dx^k}\right\|$ $(0\leqslant k\leqslant n-1, 1\leqslant j\leqslant m)$的秩在区間$(a, b)$的每一点都等于 m（参看 §36 中的習題）。

§ 38. 綫性齐次微分方程式的降阶

設有方程式(108)，其系数 $a_i(x)$在区間(a, b)上都是連續的。假定已知它的 m 个綫性无关的解如下：

$$y^{(1)}(x), y^{(2)}(x), \cdots, y^{(m)}(x). \tag{113}$$

設 x_0 是区間(a, b)內一点，在这点 $y^{(1)}(x)\neq 0$。既然 $y^{(1)}(x)$是連續的，所以必有在区間(a, b)內而又包含 x_0 于其內部的区間(a_1, b_1)，在这(a_1, b_1)上

$$|y^{(1)}(x)|>0.$$

在方程式(108)中对未知函数作变換：

$$y(x)=y^{(1)}(x)z(x).$$

容易知道，$z(x)$必滿足下列方程式：

$$\frac{d^n z}{dx^n}=a^*_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+a^*_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}+\cdots+$$

$$+a^*_1(x)\frac{dz}{dx}+a^*_0(x)z. \tag{114}$$

此处系数 $a_i^*(x)$ 在区間 (a_1, b_1) 上必是連續的。因为 $y_1(x)$ 滿足方程式 (108)，所以函数 $z(x)\equiv 1$ 亦滿足上面的方程式，由此知

$$a_0^*(x)\equiv 0.$$

現令

$$\frac{dz}{dx}=y^*.$$

于是 y^* 必滿足系数連續的$(n-1)$阶的綫性齐次方程式:

$$\frac{d^{(n-1)}y^*}{dx^{n-1}}=a_{n-1}^*(x)\frac{d^{(n-2)}y^*}{dx^{n-2}}+a_{n-2}^*(x)\frac{d^{(n-3)}y^*}{dx^{n-3}}+$$

$$+\cdots+a_1^*(x)y^*. \tag{114}$$

函数

$$y_i^*(x)=\frac{d}{dx}\left(\frac{y^{(i+1)}(x)}{y^{(1)}(x)}\right),\quad i=1,2,\cdots,m-1, \tag{115}$$

在区間(a_1, b_1)上必滿足方程式(114)。

現將証(115)的$(m-1)$个函数是綫性无关的，假設有这样的$(m-1)$个常数 $C_1, C_2, \cdots, C_{m-1}$，其中至少有一个不等于 0，能使下列的恒等式:

$$\sum_{i=1}^{m-1}C_i\frac{d}{dx}\left(\frac{y^{(i+1)}(x)}{y^{(1)}(x)}\right)\equiv 0,$$

在区間(a_1, b_1)上成立。于是在这区間上必有:

$$\sum_{i=1}^{m-1}C_iy^{(i+1)}(x)+Cy^{(1)}(x)\equiv 0,$$

此处 C 是一个新常数。因之，(113)諸函数在区間(a_1, b_1)上必綫性相关。根据 § 34 定理 2、3 推得这些函数在整个区間(a,b)上必亦綫性相关。可是这与原来假定諸 $y_i(x)$在(a, b)上是綫性无关矛盾。

有了方程(114)的$(m-1)$个綫性无关的解，我們可以把剛才处

理方程(108)①的方法，用来处理这方程式(114)。于是在(a_1, b_1)的内部一区間(a_2, b_2)上，必可找到某一个$(m-2)$阶的方程式。这样討論下去，我們最后在某一区間(a_m, b_m)上得到一个$(n-m)$阶的綫性齐次微分方程式。

習　題

1. 求証：在本节条件下，任一区間$(\bar{a}, \bar{b})$，(这里$a<\bar{a}<\bar{b}<b$)可分为有限个开区間，使在每一个这种区間上方程式的阶降为$(n-m)$阶。

2. 已知方程式

$$(2x-3x^3)y''+4y'+6xy=0$$

的一个解是x的多項式，求其通解。

§39. 二阶齐次綫性方程式的解的零点

在这一节中我們将考慮如下的方程：

$$y''+a(x)y'+b(x)y=0, \tag{116}$$

幷設$a(x)$, $a'(x)$, $b(x)$都連續而且有界。我們将討論一个在应用上很重要的問題；即这方程的解的零点怎样分布的問題。令：

$$y(x)=z(x)e^{-\frac{1}{2}\int_{x_0}^{x}a(t)dt},$$

方程式(116)就变成

$$z''+B(x)\cdot z=0, \tag{117}$$

这里

$$B=-\frac{a^2}{4}-\frac{a'}{2}+b,$$

---

① 根据"解的唯一性定理"知道，若系数連續的方程式(108)的解及它的一直到$(n-1)$阶的导数在一点都等于零，則它必恒等于零。所以(114)的任何一个函数都不会在一个"分区間"上恒等于零，同理(115)亦都如此。

因而 B 也是連續而且有界。

由于 $a(x)$ 有界，$y(x)$ 与 $z(x)$ 只能同时为 0。

下述的斯篤模(Sturm)定理是一个基本的定理。設給定两个方程式

$$z_1''(x)+B_1(x)\cdot z_1(x)=0,\quad z_2''(x)+B_2(x)\cdot z_2(x)=0,$$

而 $B_1(x)$ 及 $B_2(x)$ 在整个閉区間 $a\leqslant x\leqslant b$ 上連續且恒有

$$B_2(x)\geqslant B_1(x), \tag{118}$$

則在第一个方程的不恒等于 0 的解 $z_1(x)$ 的两个相邻①的零点 x_1, x_2 之間，第二个方程式的任何一个不同时在 $x=x_1$, $x=x_2$ 为 0 的解至少有一个零点。說得簡短些，就是第二个方程的解不比第一个方程的解振动得少。

証 把两个要比較的解 $z_1(x)$, $z_2(x)$ 分别代入相应的方程式，再以 $z_2(x)$ 乘所得的第一个恒等式，以 $z_1(x)$ 乘所得的第二个恒等式，再从所得的第一个恒等式减去第二个就得到

$$z_1''(x)z_2(x)-z_1(x)z_2''(x)=[B_2(x)-\\-B_1(x)]z_1(x)z_2(x). \tag{119}$$

因为
$$z_1''(x)z_2(x)-z_1(x)z_2''(x)=$$
$$=[z_1'(x)z_2(x)-z_1(x)z_2'(x)]_x',$$

則自 x_1 到 x_2 积分恒等式(119)并用条件

$$z_1(x_1)=z_1(x_2)=0,$$

就有
$$z_1'(x_2)z_2(x_2)-z_1'(x_1)z_2(x_1)=$$
$$=\int_{x_1}^{x_2}[B_2(x)-B_1(x)]z_1(x)z_2(x)dx. \tag{120}$$

① 不难証明，若 $z_1(x)$ 在閉区間 $[a,b]$ 上有无窮个零点的話，則在 $[a,b]$ 上一定有一点使 $z_1(x)$ 及 $z_1'(x)$ 同时都等于 0，因之就有 $z_1(x)\equiv 0$。参看 §37 之習題 2。

因为我們假定 x_1, x_2 是 $z_1(x)$ 的两个相邻的零点，所以在 x_2 与 x_1 之間函数 $z_1(x)$ 的符号不变。因为 $z_1(x)$ 是齐次綫性方程的解，所以 $-z_1(x)$ 也是这个方程的解，因之，我們可以假定 $z_1(x)$ 在 x_1 与 x_2 之間都是正的而不影响普遍性。因为 $z_1'(x_1)$, $z_1'(x_2)$ 都不能为 0 [否則 $z_1(x)$ 恒等于 0]，而且 $z_1(x)$ 在区域 (x_1, x_2) 內是正的，所以 $z_1'(x_1)>0$ 而 $z_1'(x_2)<0$，根据(118)

$$B_1(x)-B_2(x)\leqslant 0.$$

假使定理不成立，則将有一个解 $z_2(x)$ 在开区間 (x_1, x_2) 上恒不等于 0，并至少在其一端点上亦不为 0。我們又可設 $z_2(x)$ 在这个区間上处处不为負，而不影响証明的普遍性。但此时等式(120)的左边是負的，而其右边則不是負的。可見，倘使假定本定理不正确将引起矛盾。

推論 1. 在任何一有限区間 (a, b) 上，若方程式(117)中的函数 $E(x)\leqslant 0$，这方程式的任何一个解在 (a, b) 上最多能等于 0 一次。

实际上，若这方程有一个解 $z(x)$ 在 $x=x_1$ 及 $x=x_2$, $(a<x_1<x_2<$ $<b)$ 上等于 0，則由剛才証明的定理，方程 $z''(x)=0$ 的任何一个解都至少在閉区間 $[x_1, x_2]$ 上要等于 0 一次，这显然是不可能的。

2. 若 x_1, x_2 是方程(116)的任意一个解的两个相邻零点，这方程其余的解，若与这解之比值不为常数，則它在区間 (x_1, x_2) 上恰有一个零点。

要証明这个事实只須引用斯篤模定理，而令其中的 $B_1(x)\equiv$ $\equiv B_2(x)$。

習　題

1. 将貝塞耳(Bessel)方程式

$$z''+\left(1-\frac{n^2-\frac{1}{4}}{x^2}\right)z=0$$

的解与 $y''+y=0$ 或 $y''+(1+\varepsilon^2)y=0$ 的解相比較，求証：当 $0\leqslant n<\frac{1}{2}$ 时 $z(x)$（$\not\equiv 0$）两相邻零点之距离小于 π，而当 x 充分大时这距离与 π 任意接近。当 $n>\frac{1}{2}$ 时，$z(x)$ 的零点是怎样分布的？

2．求証：当 x 无限增大时，

$$y''+xy=0$$

任何一个解的相邻零点互相无限靠近。

3．求証：倘使在区間 (x_1, x_2) 內的一点上，关系式（118）取 $>$ 号[①] 又設

$$z_1(x_2)=z_1(x_1)=z_2(x_1)=0,$$

則 $z_2(x)$ 的在 x_1 后的第一个根是在 x_2 之左。

4．設不等式（118）成立，而且 $z_1(x_1)=z_2(x_1)=0$，$z_1'(x_1)\geqslant z_2'(x_1)>0$。求証：自 x_1 到 $z_2(x)$ 在 x_1 后的第一个根所成的区間上，$z_1(x)\geqslant z_2(x)$；如果沒有这样的根，則对于所有 $x\geqslant x_1$ 的值，这不等式都成立。

提示：先假定 $z_1'(x_1)>z_2'(x_1)>0$。

§40. 一阶非齐次綫性方程組

定理 設函数 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x)$ 是非齐次微分方程組（101）的任一特解，則此方程組所有的解都作如下的形状：

$$y_i(x)=v_i(x)+\varphi_i(x), \quad i=1, 2, \cdots, n,$$

此处 $v_i(x)$ 是齐次方程組（104）的一个解。反过来說，一切这样形状的函数組 $y_i(x)$ 亦必滿足非齐次微分方程組（101）。

証 由 $L_i(v)\equiv L_i(y)-L_i(\varphi)=f_i(x)-f_i(x)=0$ 就得正命題。逆命題也可类似地証明。

推論 非齐次綫性方程組的任何一个解，都作如下的形式

① 在区間其他的点上，（118）取“=”号或取 $>$ 号均可——譯者注。

$$y_i=\varphi_i(x)+\sum_k C_k y_i^{(k)},\quad i,k=1,2,\cdots,n,$$

此处 $y_i^{(k)}$ 是对应的齐次方程組的基本解組，而 C_k 是常数，其值由解 $y_i(i=1,2,\cdots n)$唯一的決定。反之，对于任意常数 $C_1, C_2, \cdots C_n$，函数 $y_i+\sum_k C_k y_i^{(k)}$ 亦滿足非齐次微分方程組 (101)。

此推論还可比較簡短地叙述如下：非齐次綫性方程組的通解是这非齐次組的一个特解与对应的齐次方程組的通解之和。这就是說，求非齐次綫性方程組的通解的問題，若对应的齐次方程組的基本解組是已知的話，就变成求这非齐次綫性方程組的一个特解的問題了。求特解这个問題，与一阶綫性方程式的情形一样(参看§7)，我們将采用所謂变动常数法：

变动常数法 設方程組(104)的基本解組 $y_i^{(k)}(x)$ 为已知。令

$$y_i(x)=\sum_{k=1}^{n} C_k(x)y_i^{(k)}(x),\quad i=1,2,\cdots,n,\tag{121}$$

此处 $C_k(x)$不一定是常数，而是 x 的可微的函数。为了使 $y_i(x)$是方程組(101)之解，把(121)式的 $y_i(x)$ 替代(101)中的 y_i，即得

$$\sum_k C_k'(x)y_i^{(k)}(x)+\sum_k C_k(x)y_i^{(k)\prime}(x)-$$

$$-\sum_j\sum_k a_{ij}(x)C_k(x)y_j^{(k)}(x)=\sum_k C_k' y_i^{(k)}(x)+$$

$$+\sum_k C_k(x)\Big[y_i^{(k)\prime}(x)-\sum_j a_{ij}(x)y_j^{(k)}(x)\Big]=$$

$$=\sum_k C_k' y_i^{(k)}=f_i(x),\qquad i=1,2,\cdots,n.$$

方程式
$$\sum_k C_k'(x)y_i^{(k)}(x)=f_i(x),\quad i=1,2\cdots,n.\tag{122}$$

是以 $C_k'(x)$ 为未知函数的非齐次綫性(代数)联立方程組。由未知函数的系数 $y_i^{(k)}$ 所組成的行列式是 $y_i^{(k)}$ 的隆斯基行列式，其值不会等于 0。所以从方程組(122)必能唯一地定出 $C_k'(x)$。令

$$C_k'(x)=\psi_k(x)$$

积分得：

$$C_k(x)=\int\psi_k(x)dx+C_k=\Psi_k(x)+C_k, \tag{123}$$

此处 C_k 是积分常数。因为我們只需要(101)的一个特解，所以可以令 C_k 等于零。于是所求之特解是：

$$y_i(x)=\sum_k\Psi_k(x)y_i^{(k)}(x), \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

若令 C_k 仍是任意常数，那么把(123)代入(121)式中，即得方程組(101)的通解。

習　題

設 $y_i^{(k)}(x, \xi)(i, k=1, 2, \cdots, n)$ 对于任一固定的 k 都能滿足一个以 x 为自变数的方程組(104)。又当 $x=\xi$ 时，設它們滿足下列条件：

$$\text{若 } i=k \text{ 时}, y_i^{(k)}(\xi, \xi)=1,$$
$$\text{若 } i\neq k \text{ 时}, y_i^{k}(\xi, \xi)=0.$$

若 x_0 是考虑这方程組(101)的区間內 x 的任意一个值，求証：

$$y_i(x)=\int_{x_0}^{x}\sum_k f_k(\xi)y_i^{(k)}(x, \xi)d\xi$$

滿足方程組(101)〔柯西(Cauchy)〕。

§41. 对于 n 阶非齐次綫性方程式的推論

非齐次綫性方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n}=a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+$$

$$+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_0(x)y+f(x) \tag{124}$$

可化为下面的綫性方程組:

$$\frac{dy_0}{dx}=y_1,$$

$$\frac{dy_1}{dx}=y_2,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dy_{n-2}}{dx}=y_{n-1},$$

$$\frac{dy_{n-1}}{dx}=a_0(x)y_0+a_1(x)y_1+a_2(x)y_2+\cdots+$$

$$+a_{n-1}(x)y_{n-1}+f(x).$$

于是方程組(122)現在变成下面的方程組:

$$C_1'(x)y^{(1)}(x)+C_2'(x)y^{(2)}(x)+\cdots+C_n'(x)y^{(n)}(x)=0,$$

$$C_1'(x)\frac{dy^{(1)}}{dx}+C_2'(x)\frac{dy^{(2)}}{dx}+\cdots+C_n'(x)\frac{dy^{(n)}}{dx}=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$C_1'(x)\frac{d^{n-1}y^{(1)}}{dx^{n-1}}+C_2'(x)\frac{d^{n-1}y^{(2)}}{dx^{n-1}}+\cdots+$$

$$+C_n'(x)\frac{d^{n-1}y^{(n)}}{dx^{n-1}}=f(x).$$

在这些函数 y_i 中，显然只須求出 $y_0(x)=y(x)$，所以只須把求出的 $C_i(x)$ 代入等式

$$y_0(x)=\sum_{k=1}^{n}C_k(x)y_0^{(k)}(x)$$

中卽可。

§ 42. 却潑雷金关于微分不等式的定理

苏联著名的力学家却潑雷金在 1919 年曾証明一个关于微分不等式的定理，它是一种求微分方程的近似解的方法的基础。这定理使我們可以借助于满足一个微分不等式的函数来估計这微分方程的未知解，而所用的微分不等式的形状是与所給的微分方程形状相类似的。

定理 設在区間(a, b)上給有一个微分方程(124)，其系数是連續的。則对于每一个 x_0 $(a<x_0<b)$，都可以找到这样的 x_1 $(x_0<<x_1\leqslant b)$，若方程(124)的已給的解 $y(x)$，与一个 n 次連續可微的函数 $z(x)$ $(x_0\leqslant x<x_1)$ 能満足如下的諸条件：

$$\frac{d^n z}{dx^n}>a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}+\cdots+$$

$$+a_1(x)\frac{dz}{dx}+a_0(x)z+f(x)$$

$$(x_0\leqslant x<x_1), \tag{125}$$

$$z(x_0)=y(x_0),\ \left.\frac{dz}{dx}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0},\cdots,$$

$$\left.\frac{d^{n-2}z}{dx^{n-2}}\right|_{x=x_0}=\left.\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}\right|_{x=x_0},\quad \left.\frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}\right|_{x=x_0}\geqslant\left.\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right|_{x=x_0},$$

則有 $z(x)>y(x)$ $(x_0<x<x_1)$。这里的 x_1 只与 x_0 及系数 $a_0(x)$, $a_1(x)$, $\cdots$, $a_{n-1}(x)$有关。

証 用数学归納法来証明。并且只須驗証。設函数 $u(x)$ 在 $x_0\leqslant x<x_1$ 是 n 次連續可微的，又設

$$\frac{d^n u}{dx^n}>a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}+a_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}+\cdots+$$

$$+a_1(x)\frac{du}{dx}+a_0(x)u,\quad (x_0\leqslant x<x_1), \tag{126}$$

$$u\Big|_{x=x_0}=\frac{du}{dx}\Big|_{x=x_0}=\cdots=\frac{d^{n-2}u}{dx^{n-2}}\Big|_{x=x_0}=0,$$

$$\frac{d^{n-1}u}{dx^{n-1}}\Big|_{x=x_0}\geqslant 0, \tag{127}$$

则 $u(x)>0$. $(x_0<x<x_1)$

先考虑 $n=1$ 的情況。在这情况可以令 $x_1=b$。实际上，不等式(126)与条件(127)此时变为如下的关系式：

$$\frac{du}{dx}>a_0(x)u \quad (x_0\leqslant x<b),\ u(x_0)\geqslant 0. \tag{128}$$

由此推得：对于大于 x_0 而且足够接近于 x_0 的所有的 x，将有 $u(x)>0$。倘使 $u(x)$有比 x_0 大的根，則考虑这些的根中的最小的一个，立刻推得与(128)中第一个不等式矛盾的結果。所以这样的根是沒有的，也就是，当 $x_0<x<b$ 时，$u(x)>0$，这就是所須要証明的。

[应指出：却滲雷金定理当 $n=1$ 时对于非綫性方程在相比較的函数存在的整个区間上也是正确的(参看 § 13，習題 7)]。

現在假定：这定理对于$(n-1)$阶的方程已經証明。由公式

$$u(x)=v(x)e^{\int_{x_0}^{x}\varphi(s)ds}$$

引进一个新函数 $v(x)(x_0\leqslant x<x_1)$，式中的 $\varphi(x)$ 是某一待定的$(n-1)$次可微的函数。累次取导数給出：

$$u'=(v'+\varphi v)e^{\int_{x_0}^{x}\varphi(s)ds},$$

$$u''=[v''+2\varphi v'+(\varphi'+\varphi^2)v]e^{\int_{x_0}^{x}\varphi(s)ds}, \tag{129}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$u^{(n)}=[v^{(n)}+n\varphi v^{(n-1)}+\cdots+(\varphi^{(n-1)}+\cdots)v]e^{\int_{x_0}^{x}\varphi(s)ds}. \quad (129)$$

用这些公式自(127)式即得:

$$v\Big|_{x=x_0}=\frac{dv}{dx}\Big|_{x=x_0}=\cdots=\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}\Big|_{x=x_0}=0,\ \frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}\Big|_{x=x_1}\geqslant 0. \quad (130)$$

将公式(129)替入后，不等式(126)变成了一些类似的关于$v(x)$的不等式:

$$\frac{d^nv}{dx^n}>b_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}v}{dx^{n-1}}+b_{n-2}(x)\frac{d^{n-2}v}{dx^{n-2}}+\cdots+$$

$$+b_1(x)\frac{dv}{dx}+b_0(x)v,\quad (x_0\leqslant x<x_1) \quad (131)$$

这里的系数 $b_i(x)$ 是連續的，所以如此，是因为 $b_i(x)$ 是用系数 $a_j(x)$, 并用函数 $\varphi(x)$ 及其到 $(n-1)$ 阶的一些导函数表出的。特别是

$$b_0(x)=-\varphi^{(n-1)}(x)+\cdots, \quad (132)$$

上式中未写出的一些項含有系数 $a_j(x)$, 并含有函数 $\varphi(x)$ 及其到 $(n-2)$阶的一些导函数。

現在来选擇函数 $\varphi(x)$使 $b_0(x)\equiv 0$。为此，由于(132)式，我們必須解某一个 $(n-1)$ 阶的(非綫性)微分方程。設这方程的解$\varphi(x)$在某一区間$[x_0, b_1)(x_0<b_1\leqslant b)$上存在。此时若在这区間上采用$\frac{dv}{dx}=u^*$的記号，則自公式(131)与(130)得: 如果 $x_1\leqslant b_1$, 則有

$$\frac{d^{n-1}u^*}{dx^{n-1}}>b_{n-1}(x)\frac{d^{n-2}u^*}{dx^{n-2}}+\cdots+b_1(x)u^*,\quad (x_0\leqslant x<x_1)$$

$$u^*\Big|_{x=x_0}=\frac{du^*}{dx}\Big|_{x=x_0}=\cdots=\frac{d^{n-3}u^*}{dx^{n-3}}\Big|_{x=x_0}=0,\ \frac{d^{n-2}u^*}{dx^{n-2}}\Big|_{x=x_0}\geqslant 0.$$

就是根据归納法的假定，所以选擇这样一个与这些系数 $b_i(x)$ 有关的 x_1，使得

$$\frac{dv}{dx}=w^*(x)>0.\quad (x_0<x<x_1)$$

但是 $v(x_0)=0$；所以 $v(x)>0$ $(x_0<x<x_1)$，因而 $u(x)>0$ $(x_0<x<x_1)$，这就是所要証明的。

附注 1. $x<x_0$ 的情况以及不等式(125)中的不等号反过来的情况也可以类似地討論之。不过这些情况都可以将自变数 x 或未知函数的符号变更后而化为上述的已討論的情况。

附注 2. 当利用定理时，我們希望这 x_1 尽可能大一些。因为当定出 $\varphi(x)$时，可以在这 $(n-1)$ 阶的方程的一些解答中任选一个，所以有可能使 x_1 大一些。但不应該以为 x_1 可以任意地增大。

例如，讓我們考虑如下的不等式:

$$z''+z>0,\ (z(0)=0,\ z'(0)\geqslant 1)$$

函数 $y=\sin x$ 是方程 $y''+y=0$ 在开始条件 $y(0)=0$, $y'(0)=1$ 下的解。所以，本定理保証:

$$z(x)>\sin x.\qquad (0<x<x_1)$$

讓我們来确定这 x_1 的可能的値。極易証明，在这情况下确定 $\varphi(x)$的方程有如下的形状:

$$\varphi'(x)+\varphi^2(x)+1=0.$$

这方程有通解 $\varphi(x)=-\operatorname{tg}(x-C)$。若取任意地接近于 $\frac{\pi}{2}$ 而仍小于 $\frac{\pi}{2}$ 的 C，則可以使 x_1 任意地接近于 π，但小于 π [因为 $\varphi(x)$ 应該在 $x_0=0\leqslant x<x_1$ 上存在]。所以，可以保証这不等式 $z(x)>\sin x$ 在 $0<x<\pi$ 上是成立的。

把 x_1 取得更大一些是不可能的。这从例子 $z(x)=A\sin x+x^2$(当 A 足够大时)，極易証明 x_1 不能大于 π。所以，在这个所討論的例題中，$x_1=\pi$ 是最大值。

推論 1. 若在不等式(125)中把不等号$>$变为$\geqslant$，則有

$$z(x)\geqslant y(x).\quad (x_0\leqslant x<x_1)$$

事实上，为了証明这推論，只須比較 $z(x)$ 与下述方程的解 $y_\varepsilon(x)$:

$$\frac{d^n y_\varepsilon}{dx^n}=a_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y_\varepsilon}{dx^{n-1}}+\cdots+a_1(x)\frac{dy_\varepsilon}{dx}+$$
$$+a_0(x)y_\varepsilon(x)+f(x)-\varepsilon,\quad (a<x<b)$$

而且 $$y_\varepsilon\Big|_{x=x_0}=y\Big|_{x=x_0},\quad \frac{dy_\varepsilon}{dx}\Big|_{x=x_0}=\frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0},\ \cdots,$$
$$\frac{d^{n-1}y_\varepsilon}{dx^{n-1}}\Big|_{x=x_0}=\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\Big|_{x=x_0},$$

再取当 $\varepsilon\to 0$ 时的極限。

推論 2. 方程（124）在一定的开始条件下的解在区間(x_0, x_1)上單調地依賴于 $f(x)$：若把 $f(x)$換为处处較大的函数，則解 $y(x)$在这区間(x_0, x_1)上亦处处变得比較大.

事实上，把卻潑雷金定理应用于 $f(x)=f_1(x)$及 $f(x)=f_2(x)$的两个微分方程的两个解的差，可推得这推論。

習 題

1. 試証：在本定理的証明中的条件 $b_0(x)=0$，可以換为$b_0(x)\geqslant 0$。这变換使我們可以更自由地选擇这函数 $\varphi(x)$，因而对x_1的值可以作出更有效的估計。

2. 試証：在本定理的条件下，可以找到一个依賴于 x_0 与系数$a_0(x), a_1(x), \cdots, a_{n-1}(x)$的这样的値 $x_1(x_0<x_1<b)$，使得：

$$z(x)>y(x),\ \frac{dz}{dx}>\frac{dy}{dx},\ \cdots,\ \frac{d^{n-1}z}{dx^{n-1}}>\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}},\quad (x_0<x<x_1)$$

这里記号同定理中的一样。

可以保証对于 n 阶的导数，类似的不等式一定成立么？

3. 根据阿达馬引理。試举出使非綫性方程的却濺雷金定理成立的充分条件。

第六章 常系数綫性微分方程組

§43. 預先应注意的事項

在这一章中我們将討論綫性微分方程組，其未知函数与不含未知函数的項及系数都是复数；但自变数則取实値。

設
$$\varphi(x)=\overset{*}{\varphi}(x)+i\overset{**}{\varphi}(x),$$
其中 $\overset{*}{\varphi}(x)$ 及 $\overset{**}{\varphi}(x)$ 都是实函数。則按照定义：
$$\varphi'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\varphi(x+\Delta x)-\varphi(x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overset{*}{\varphi}(x+\Delta x)-\overset{*}{\varphi}(x)}{\Delta x}+$$
$$+i\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\overset{**}{\varphi}(x+\Delta x)-\overset{**}{\varphi}(x)}{\Delta x}=\overset{*}{\varphi}'(x)+i\overset{**}{\varphi}'(x).$$

这里当然假定 $\overset{*}{\varphi}'(x)$ 和 $\overset{**}{\varphi}'(x)$ 是存在的。由此易知，若 C_j，$\varphi_j(x)$ 都取复值，则
$$\left[\sum C_j\varphi_j(x)\right]'_x=\sum C_j\varphi_j'(x),$$
这就是說，同 C_j 及 $\varphi_j(x)$ 都取实値时的情形是完全一样的。同样可以証明，求二复值函数之乘积的导数时，我們仍可以用普通的求导数的法則。

这一章的主要定理是：任何一組常系数綫性微分方程組，都可以用一个非奇异的常系数的綫性变換，化为"典則形式"。

若一綫性变換的系数所成的行列式之値不是 0，則此綫性变換叫做非奇异的。显然，連續运用两个非奇异綫性变換之結果，仍为非奇异綫性变換。

形状如下的綫性微分方程組叫做綫性組的典則形式:

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 && + f_1^*(x)\\
\frac{dz_2}{dx} &= \alpha_1 z_1 + \lambda_1 z_2 && + f_2^*(x)\\
\frac{dz_3}{dx} &= \alpha_2 z_2 + \lambda_1 z_3 && + f_3^*(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz_{n_1}}{dx} &= \alpha_{n_1-1} z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} && + f_{n_1}^*(x)\\
\frac{dz_{n_1+1}}{dx} &= \lambda_2 z_{n_1+1} && + f_{n_1+1}^*(x)\\
\frac{dz_{n_1+2}}{dx} &= \beta_1 z_{n_1+1} + \lambda_2 z_{n_1+2} && + f_{n_1+2}^*(x)\\
\frac{dz_{n_1+3}}{dx} &= \beta_2 z_{n_1+2} + \lambda_2 z_{n_1+3} && + f_{n_1+3}^*(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz_{n_1+n_2}}{dx} &= \beta_{n_2-1} z_{n_1+n_2-1} + \lambda_2 z_{n_1+n_2} && + f_{n_1+n_2}^*(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz_{n-n_k+1}}{dx} &= \lambda_k z_{n-n_k+1} && + f_{n-n_k+1}^*(x)\\
\frac{dz_{n-n_k+2}}{dx} &= \omega_1 z_{n-n_k+1} + \lambda_k z_{n-n_k+2} && + f_{n-n_k+2}^*(x)\\
\frac{dz_{n-n_k+3}}{dx} &= \omega_2 z_{n-n_k+2} + \lambda_k z_{n-n_k+3} && + f_{n-n_k+3}^*(x)\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz_n}{dz} &= \omega_{n_k-1} z_{n-1} + \lambda_k z_n && + f_n^*(x).
\end{aligned}\right\} \quad (133)
$$

这里的 $\lambda_i, \alpha_i, \beta_i, \cdots, \omega_i$ 都是复值常数; $\alpha_i, \beta_i, \cdots \omega_i$ 可以任意选择,只要沒有一个等于 0; 特别是,可以認为它們的絕对值是任意小。而这些数 λ_i 是完全被微分方程組确定。

把一个方程組化成典則形式后,我們就容易积分它。事实上,典則微分方程組的第一个方程式只含有一个未知函数 $z_1(x)$。从

这个方程式求得 $z_1(x)$ 后，代入第二个方程式，我們再得到只含一个未知函数 $z_2(x)$ 的方程式，于是 $z_2(x)$ 又可求出。其余依此类推(参看§47)。

習　題

証明：实变数的复数值函数不一定滿足拉格朗日(Lagrange)的有限增量公式，但对于在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的可微函数 $f(x)$，公式

$$\lambda[f(b)-f(a)]=\mu f'(\xi)$$

是正确的，这里 $a<\xi<b$，而 λ, μ 为两个实数，这两个数一般說来与 a, b, f 都有关，并且 $\lambda^2+\mu^2\neq 0$。

§44. 关于化为典則形式的定理

定理　設給有一个常系数綫性方程組

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j+f_i(x),\quad i=1, 2, \cdots n \qquad (134)$$

則必有一个綫性变换

$$y_i=\sum_{j=1}^{n}C_{ij}z_i$$

存在，其系数 C_{ij} 都是复常数，而行列式 $|C_{ij}|\neq 0$，它把方程組(134)化为典則形式(133)。在新的方程組(133)中，$f_i^*(x)$ 是函数 $f_i(x)$ 的常数系数綫性組合。

証　当 $n=1$ 时，定理显然成立。設定理在方程式的个数为 $n-1$ 时成立，我們将証定理在方程式的个数为 n 时也成立。

以常数 k_i 乘方程組(134)的第 i 式，常数 k_i 之値以后再确定。将所得結果相加，即有

$$\frac{d\sum_i k_i y_i}{dx} = \sum_{ij} a_{ij} k_i y_j + \sum_i k_i f_i(x).$$

現在来定出这样的 k_i, 使下列对 y_i 的恒等式能成立:

$$\sum_{ij} a_{ij} k_i y_j = \lambda \sum_i k_i y_i = \lambda \sum_j k_j y_j,$$

其中 λ 是实値或复値常数。显而易見, 使这恒等式成立的充要条件是: 这式的两端中同一个 y_j 的系数必須一样, 即

$$\lambda k_j = \sum_i a_{ij} k_i, \quad j = 1, 2, \cdots, n.$$

这样, 为了确定 k_i, 我們得到一联立 n 元一次齐次方程組。这联立方程組有一組不全是 0 的解(只有这种解才有用)的必要而且充分的条件是: 由这联立方程組的系数所成的行列式之値为 0。这条件可写为:

$$|\lambda E - \|a_{ij}\|| = 0, \tag{135}$$

这里的 E 是單位矩陣。方程式(135)叫做"長期方程式", 它在数学、物理学和天文学的許多問題上起重要的作用。矩陣 $\lambda E - \|a_{ij}\|$ 叫做方程組(134)的特征矩陣。

設 λ_1 为方程式(135)的一个根。以 $k_{1i}(i = 1, 2, \cdots, n)$ 表示这联立方程組

$$\lambda_1 k_{1j} = \sum_i a_{ij} k_{1i}$$

的一組不全是 0 的解。为明确起見, 令 $k_{11} \neq 0$。显然, 这样不会影响定理的普遍性, 因为我們总可以改編 y_i 的标数而达到这个目的, 而改編 y_i 的标数也是一个非奇异綫性变換。令

$$z_1 = \sum_j k_{1j} y_j. \tag{136}$$

这函数 z_1 滿足方程式

$$\frac{dz_1}{dx}=\lambda_1 z_1+f_1^*(x),$$

这里 $f_1^*(x)=\sum_i k_{1i}f_i(x)$。用这方程式来代替(134)中的第一个方程式。用自(136)式得到的 y_1 的表达式替代其余方程式中的 y_1, 把其余所有的方程式重新写出。这个 y_1 的表达式是可以得到的，因为假定 $k_{11}\neq 0$。$\left[\text{事实上，}\ y_1=\frac{1}{k_{11}}\left(z_1-\sum_{i=2}^{n}k_{1i}y_i\right)\right]$。这样得到的新方程組的形状如下：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx}&=\lambda_1 z_1 && +f_1^*(x),\\
\frac{dy_2}{dx}&=a_{21}^*z_1+a_{22}^*y_2+a_{23}^*y_3+\cdots+a_{2n}^*y_n && +f_2(x),\\
\frac{dy_3}{dx}&=a_{31}^*z_1+a_{32}^*y_2+a_{33}^*y_3+\cdots+a_{3n}^*y_n && +f_3(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy_n}{dx}&=a_{n1}^*z_1+a_{n2}^*y_2+a_{n3}^*y_3+\cdots+a_{nn}^*y_n && +f_n(x).
\end{aligned}\right\}(134^*)$$

我們原已假定本定理对于含 $n-1$ 个方程式的方程組成立。把(134*)的第一个方程式除外，在其余 $n-1$ 个方程式所成的方程組中，把 $z_1(x)$ 也和 $f_i(x)$ 同样地看作已知函数，則由这个假定可知必有非奇异綫性变换

$$y_i=\sum_{j=2}^{n}k_{ij}y_j^*,\qquad i=2,3,\cdots,n,$$

能把(134*)变成下列形状：

$$\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx}&=\lambda_1 z_1 && +f_1^*(x),\\
\frac{dy_2^*}{dx}&=b_2 z_1+\lambda_2 y_2^* && +\bar{f}_2(x),
\end{aligned}$$

$$
\left.\begin{aligned}
\frac{dy_3^*}{dx} &= b_3 z_1 + \alpha_1 y_2^* + \lambda_2 y_3^* + f_3(x),\\
\frac{dy_4^*}{dx} &= b_4 z_1 + \alpha_2 y_3^* + \lambda_2 y_4^* + f_4(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy_{n_1+1}^*}{dx} &= b_{n_1+1} z_1 + \alpha_{n_1-1} y_{n_1}^* + \\
&\qquad + \lambda_2 y_{n_1+1}^* + f_{n_1+1}(x),\\
\frac{dy_{n_1+2}^*}{dx} &= b_{n_1+2} z_1 + \lambda_3 y_{n_1+2}^* + f_{n_1+2}(x),\\
\frac{dy_{n_1+3}^*}{dx} &= b_{n_1+3} z_1 + \beta_1 y_{n_1+2}^* + \lambda_3 y_{n_1+3}^* + f_{n_1+3}(x),\\
\frac{dy_{n_1+4}^*}{dx} &= b_{n_1+4} z_1 + \beta_2 y_{n_1+3}^* + \lambda_3 y_{n_1+4}^* + f_{n_1+4}(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy_{n_1+n_2+1}^*}{dx} &= b_{n_1+n_2+1} z_1 + \beta_{n_2-1} y_{n_1+n_2}^* + \\
&\qquad + \lambda_3 y_{n_1+n_2+1}^* + f_{n_1+n_2+1}(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy_{n-n_k+1}^*}{dx} &= b_{n-n_k+1} z_1 + \lambda_{k+1} y_{n-n_k+1}^* + f_{n-n_k+1}(x),\\
\frac{dy_{n-n_k+2}^*}{dx} &= b_{n-n_k+2} z_1 + \omega_1 y_{n-n_k+1}^* + \\
&\qquad + \lambda_{k+1} y_{n-n_k+2}^* + f_{n-n_k+2}(x),\\
\frac{dy_{n-n_k+3}^*}{dx} &= b_{n-n_k+3} z_1 + \omega_2 y_{n-n_k+2}^* + \\
&\qquad + \lambda_{k+1} y_{n-n_k+3}^* + f_{n-n_k+3}(x),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dy_n^*}{dx} &= b_n z_1 + \omega_{n_k-1} y_{n-1}^* + \lambda_{k+1} y_n^* + f_n(x).
\end{aligned}\right\}\quad (134^{**})
$$

要把这方程組化成典則形式，只要消去其中的一些 b_i。因为从第二个到第 n_1+1 个这一組方程式与从第 n_1+2 个到第 n_1+n_2+1 个这一組方程式，……，及从第 $n-n_k+1$ 个到第 n 个这一組方程式的情形完全一样，所以我們只討論如何来消去 $b_2, b_3, \cdots, b_{n_1+1}$。現在我們分两种情形来討論：1) $\lambda_1 \neq \lambda_2$，2) $\lambda_1 = \lambda_2$。

第一种情形　$\lambda_1\neq\lambda_2$。令 $z_2=y_2^*+Kz_1$，則

$$\frac{dz_2}{dx}=\frac{dy_2^*}{dx}+K\frac{dz_1}{dx}=b_2z_1+\lambda_2y_2^*+K\lambda_1z_1+f_2^*(x)=$$

$$=b_2z_1+\lambda_2z_2-K\lambda_2z_1+K\lambda_1z_1+f_2^*(x)=$$

$$=\lambda_2z_2+[b_2+K(\lambda_1-\lambda_2)]z_1+f_2^*(x).$$

此处 $f_2^*(x)$ 是 $f_1^*(x)$ 及 $\bar{f}_2(x)$ 的綫性組合。选这样的 K 使下式能成立：

$$b_2+K(\lambda_1-\lambda_2)=0.$$

这是可以做到的，因为我們已假定 $\lambda_1\neq\lambda_2$。于是得

$$\frac{dz_2}{dx}=\lambda_2z_2+f_2^*(x),$$

就是說，第二个方程中已消去了 b_2。

現在来討論第三个方程式。令 $z_3=y_3^*+K_1z_1$，則

$$\frac{dz_3}{dx}=\frac{dy_3^*}{dx}+K_1\frac{dz_1}{dx}=b_3z_1+\alpha_1y_2^*+\lambda_2y_3^*+K_1\lambda_1z_1+f_3^*(x)=$$

$$=(b_3-\alpha_1K+K_1\lambda_1-K_1\lambda_2)z_1+\alpha_1z_2+\lambda_2z_3+f_3^*(x),\text{①}$$

这里 $f_3^*(x)$ 是 $f_1^*(x)$ 与 $\bar{f}_3(x)$ 的綫性組合。选 K_1 使 $b_3-K\alpha_1=-K_1(\lambda_2-\lambda_1)$，因 $\lambda_2\neq\lambda_1$，故这是可以做到的，故得

$$\frac{dz_3}{dx}=\alpha_1z_2+\lambda_2z_3+f_3^*(x).$$

式(134**)中的第一分組中的其余方程式的 b_i 都可以用同样办法消去。

第二种情形　$\lambda_1=\lambda_2$。令

$$y_{n_1+1}^*=z_{n_1+1},\ b_{n_1+1}z_1+\alpha_{n_1-1}y_{n_1}^*=\alpha_{n_1}^*z_{n_1},$$

其中 $\alpha_{n_1}^*$ 是任意一个不等于 0 的数。因 $\alpha_{n_1}^*\neq0$，$\alpha_{n_1-1}\neq0$，故自上面第二式可解出 $y_{n_1}^*$ 和 z_{n_1}。代入第(n_1+1)个方程式及第 n_1 个方程式，即得

---

① 此处須利用 $y_2^*=z_2-Kz_1$，$y_3^*=z_3-K_1z_1$ 两个等式——譯者注。

$$\frac{dz_{n_1+1}}{dx}=\alpha^*_{n_1}z_{n_1}+\lambda_2 z_{n_1+1}+\tilde{f}_{n_1+1}(x),$$

$$\frac{dz_{n_1}}{dx}=\frac{b_{n_1+1}}{\alpha^*_{n_1}}\frac{dz_1}{dx}+\frac{\alpha_{n_1-1}}{\alpha^*_{n_1}}\frac{dy^*_{n_1}}{dx}=\frac{b_{n_1+1}}{\alpha^*_{n_1}}\lambda_1 z_1+\frac{\alpha_{n_1-1}b_{n_1}z_1}{\alpha^*_{n_1}}+$$

$$+\frac{\alpha_{n_1-1}\alpha_{n_1-2}}{\alpha^*_{n_1}}y^*_{n_1-1}+\frac{\alpha_{n_1-1}}{\alpha^*_{n_1}}\lambda_2 y^*_{n_1}+f^*_{n_1}(x)=$$

$$=\frac{b_{n_1+1}\lambda_1}{\alpha^*_{n_1}}z_1+\frac{\alpha_{n_1-1}b_{n_1}}{\alpha^*_{n_1}}z_1+\frac{\alpha_{n_1-1}\alpha_{n_1-2}}{\alpha^*_{n_1}}y^*_{n_1-1}+$$

$$+\lambda_2\frac{\alpha^*_{n_1}z_{n_1}-b_{n_1+1}z_1}{\alpha^*_{n_1}}+f^*_{n_1}(x)=$$

$$=\frac{\alpha_{n_1-1}b_{n_1}}{\alpha^*_{n_1}}z_1+\frac{\alpha_{n_1-1}\alpha_{n_1-2}}{\alpha^*_{n_1}}y^*_{n_1-1}+\lambda_2 z_{n_1}+f^*_{n_1}(x).$$

令 $$\alpha^*_{n_1-1}z_{n_1-1}=\frac{\alpha_{n_1-1}b_{n_1}}{\alpha^*_{n_1}}z_1+\frac{\alpha_{n_1-1}\alpha_{n_1-2}}{\alpha^*_{n_1}}y^*_{n_1-1},$$

其中 $\alpha^*_{n_1-1}$ 为任一不等于 0 的数。于是第 n_1 个方程式即可写成

$$\frac{dz_{n_1}}{dx}=\alpha^*_{n_1-1}z_{n_1-1}+\lambda_2 z_{n_1}+f^*_{n_1}(x).$$

我們可以同样把这个方法用到(134**)第一分組中的其他各方程式。这样我們消去了 $b_{n_1+1}, b_{n_1}, \cdots, b_4, b_3$。若 $b_2\neq 0$, 我們就不能消去它。但由于 $\lambda_1=\lambda_2$, 在化原方程組为典則形式时本可以不要消去 b_2。而且在 $b_2\neq 0$ 时，令 $z_1=Kz^*_1$ 也可使 b_2 变为任意一个不等于 0 的数。这里 $f^*_i(x)$ 总指 $\tilde{f}_i(x)$ 与 $f^*_i(x)$ 的綫性組合。

若除 λ_2 外还有别的 λ 和 λ_1 相等，例如 $\lambda_3=\lambda_1$, 則用同样方法也可消去 $b_{n_1+3}, b_{n_1+4}, \cdots, b_{n_1+n_2+1}$。为了避免引用新的記号，我們設方程組(134**)中已經有：

$$b_3=b_4=b_5=\cdots=b_{n_1+1}=b_{n_1+3}=b_{n_1+4}=\cdots=b_{n_1+n_2+1}=0.$$

但 b_2 及 b_{n_1+2} 可以异于 0。若 $b_2=0$, 則掉换对应于 λ_2 及 λ_3 那两組方程，这样，若 $b_{n_1+2}\neq 0$, 为了化为典則形式，也无須消去它。若 $b_2\neq 0$, $b_{n_1+2}\neq 0$, 我們可以假定 $n_1\geqslant n_2$, 因为我們总可以掉换与 λ_2 和 λ_3

对应的那两組方程的地位而达到目的。令 $z_{n_1+2}=y^*_{n_1+2}+K_1y^*_2$，則

$$\frac{dz_{n_1+2}}{dx}=\frac{dy^*_{n_1+2}}{dx}+K_1\frac{dy^*_2}{dx}=$$

$$=b_{n_1+2}z_1+\lambda_3y^*_{n_1+2}+K_1b_2z_1+K_1\lambda_2y^*_2+f^*_{n_1+2}(x)=$$

$$=b_{n_1+2}z_1+\lambda_3z_{n_1+2}-\lambda_3K_1y^*_2+K_1b_2z_1+K_1\lambda_2y^*_2+f^*_{n_1+2}(x).$$

由假設 $b_2\neq0$，故可选 K_1 使

$$K_1b_2=-b_{n_1+2}.$$

又因 $\lambda_2=\lambda_3$，故得

$$\frac{dz_{n_1+2}}{dx}=\lambda_3z_{n_1+2}+f^*_{n_1+2}(x).$$

以 $z_{n_1+2}-K_1y^*_2$ 代第 n_1+3 个方程式中的 $y^*_{n_1+2}$，則得

$$\frac{dy^*_{n_1+3}}{dx}=-\beta_1K_1y^*_2+\beta_1z_{n_1+2}+\lambda_3y^*_{n_1+3}+f_{n_1+3}(x).$$

在这方程式里令 $z_{n_1+3}=y^*_{n_1+3}+K_2y_3$，又可消去 y^*_3。繼續用这一种变換，最后即化到典則形式。

最后应注意，我們所采用的化方程組(134)为典則形状的所有的綫性变換，都是單值可逆变換，这就是說，新变数和旧变数之間有一綫性关系，而这綫性关系旣把新变数表为旧变数的單值函数，也把旧变数表为新变数的單值函数。所以把 y_i 变为 z_i 的变換，因为这綫性可逆的，故是非奇异变換(証畢)。

剛才講到的把微分方程組(134)化为典則形式的方法，实际做起来很麻煩。所以希望能找一个方法，可以迅速地求出典則形式的結构：即求出 λ_i 及对应于每一个 λ_i 的方程式的个数。下面諸节的目的就是講这种方法。

§ 45. 綫性变換的不变式

設給有常系数的綫性方程組

$$\frac{dz_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}z_j, \quad i=1, 2, \cdots, n \tag{B}$$

它是从綫性方程組

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n} a_{ij}y_j, \quad i=1, 2, \cdots, n \tag{A}$$

經过"非奇异綫性变換"

$$z_i=\sum_{j=1}^{n} k_{ij}y_j \quad i=1, 2, \cdots, n$$ ③

得到的。于是有下列二定理。

定理 1. 令 $\|a_{ij}\|=A$, $\|b_{ij}\|=B$, $\|k_{ij}\|=K$, 并以 E 表示 n 阶的單位矩陣，則

$$\lambda E-B=K(\lambda E-A)K^{-1}. \tag{137}$$

証 用 z_i 的表达式 $\sum_{j=1}^{n} k_{ij}y_j$ 替代方程組 (B) 式中的 z_i, 于是得用

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\frac{dy_j}{dx}=\sum_{j=1}^{n} b_{ij}\sum_{s=1}^{n} k_{js}y_s.$$

利用方程組(A)，我們由上式得

$$\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\sum_{s=1}^{n} a_{js}y_s=\sum_{j,s=1}^{n} k_{ij}a_{js}y_s=\sum_{s,j=1}^{n} b_{ij}k_{js}y_s.$$

因为上列关系式是对 y_s 的恒等式，所以对于一切的 i 与 s, 必有

$$\sum_{j} k_{ij}a_{js}=\sum_{j} b_{ij}k_{js};$$

③ 为了不使証法复杂起見，本节到处只講齐次方程組，可是本节所証定理对于非齐次方程組也正确的。

这就是說，　　$KA=BK$，亦即 $B=KAK^{-1}$。

　　又因　　$E=KEK^{-1}$，即 $\lambda E=\lambda KEK^{-1}$，

二式相減，即得(137)。

定理 2. λ矩陣[1] $\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 的一切的 l 阶 ($l=1, 2, \cdots, n$)"子式"的最大公因子必完全相同，但常数因子不計[2]。

順便提及，由本定理直接推得：$\lambda E-A$ 与 $\lambda E-B$ 二矩陣的行列式必恒等。

証　只須証：矩陣 $\lambda E-A$ 所有的 l 阶子式的最大公因子亦必是矩陣 $\lambda E-B$ 所有的 l 阶子式的最大公因子的因子。因为由 (A) 可以变换到 (B)，而由 (B) 亦可变换到 (A)，因而推得这两个最大公因子必相同(常数因子不計)。

为了証明这結論，我們應先注意下列的事实：矩陣 $K(\lambda E-A)$ 的一切的 l 阶的子式都可展开为許多項之和，其每一項都是λ矩陣 $\lambda E-A$ 的某一个 l 阶子式，与矩陣 K 的一些元素相乘的乘积。所以 $\lambda E-A$ 的 l 阶子式一切的公因子，亦是 $K(\lambda E-A)$ 的 l 阶子式的公因子。由此直接推得：矩陣 $K(\lambda E-A)$ 的一切 l 阶子式的最大公因子，必被"矩陣 $\lambda E-A$ 的一切 l 阶子式的最大公因子"所整除。同样的理由可証：矩陣 $K(\lambda E-A)K^{-1}=\lambda E-B$ 的 l 阶子式的最大公因子必被 $K(\lambda E-A)$ 的 l 阶子式的最大公因子所整除，这就証明了所需要証的。

習　題

求証：每个矩陣都滿足其特征方程式，也就是說，把这个矩陣代替它的特征方程式中的 λ，即得到零矩陣[薛尔衛斯特(Sylvester)]。

---

[1] 元素为 λ 的多項式之矩陣叫 λ 矩陣。

[2] 求 l 阶子式的最大公因子正如求 λ 多項式的最大公因子一样。

§46. 初等因子

引理[1]　設一 n 阶的矩陣 P 內，含有元素完全是 0 的長方陣 Q，該長方陣的行数 a 与列数 b 之和假定是大于 n，則矩陣的行列式之值必等于 0。

証　我們一定能把長方陣 Q 迁移到矩陣 P 的左上角，同时又不改变 P 的行列式的絕对值。如此迁移后的矩陣 P 用簡圖 26 来表示。根据拉卜拉斯(Laplace)定理，我們知：矩陣 P 的行列式等于許多項"乘积"的代数和：其每一項乘积都由下述的某二个子行列式相乘而得的，即：(I)元素都在長方形 Q 及 Q_1 內的一个 b 阶子行列式 D，与(II)元素都在長方形 R 及 R_1 內的对应于 D 的余子式 D_1，二者相乘而得。既然 $n-a<b$，所以一切的子行列式 D 至少含有完全由 0 組成的一行，因此 D 的值等于 0。可見，矩陣 P 之行列式的值亦必等于 0(証畢)。

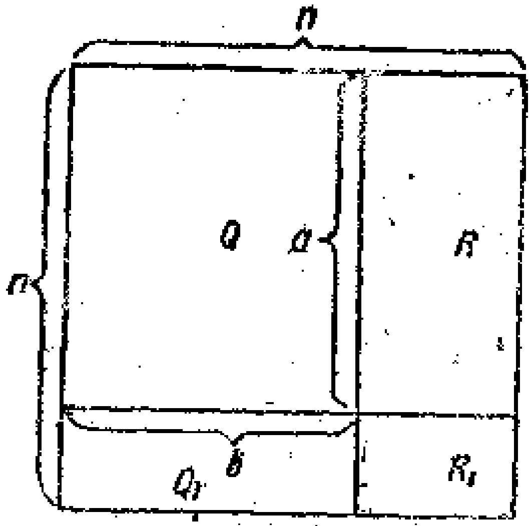

圖　26

把剛才証明的引理，应用于求形状如 158 頁上所示的矩陣 M 的所有的 l 阶子行列式的最大公因子。

此处在正方形 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ 外所有的元素都是 0；而 M_i 內未显明写出的所有元素亦等于 0；可是 $\varepsilon_{i1}, \varepsilon_{i2}, \cdots, \varepsilon_{in_i-1}$ 都不等于 0；而且 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 这些数中也可以有一些是彼此相等的。除了在对角綫附近的元素諸 ε 的記号不同外，矩陣 M 就是微分方程組(134)化成典則形式(133)时的特征矩陣。

[1] 引理是 С. Л. Соболев 指教作者的。

$$M=\left\|\begin{array}{cccc} M_1 & & & \\ & M_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & M_k \end{array}\right\|,$$

其中

$$M_s=\left\|\begin{array}{ccc|ccc} \lambda-\lambda_s & & & & & \\ \varepsilon_{s1} & \lambda-\lambda_s & & & & \\ & \varepsilon_{s2} & \lambda-\lambda_s & & & \\ \hline & & & \lambda-\lambda_s & & \\ & & & \varepsilon_{sn_s-2} & \lambda-\lambda_s & \\ & & & & \varepsilon_{sn_s-1} & \lambda-\lambda_s \end{array}\right\|,$$

首先計算 $l=n=\sum\limits_{s=1}^{k} n_s$ 的情形，就是說，首先求矩陣 M 的行列式的值。显而易見，它等于諸矩陣 M_s 的行列式的乘积，卽

$$|M|=(\lambda-\lambda_1)^{n_1}(\lambda-\lambda_2)^{n_2}\cdots(\lambda-\lambda_k)^{n_k}.$$

根据前节的定理，我們知道这行列式必与矩陣 $\lambda E-\|a_{ij}\|$ 的行列式恒等，所以由此得下之推論：

推論　方程組(133)中所有的 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 都是方程組(134)的特征矩陣的根。

現在討論矩陣 M 的 $(n-1)$ 阶的所有的子式的最大公因子的求法。为此，首先應明显地写明 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_k$ 取怎样的值，对我們将方便些。設所取的值是如下的互相不同的數：

$$\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \cdots, \lambda^{(m)}. \qquad (m\leqslant k)$$

其次应注意下列的事实：所有的 l 阶的子式的公因子，亦是整

个矩陣 M 的行列式的因子。所以若用符号 $D_l(\lambda)$ 表示 M 的所有的 l 阶的子式的最大公因子，那么 $D_l(\lambda)$ 必作下列的形式（常数因子不計）：

$$D_l(\lambda)=(\lambda-\lambda^{(1)})^{p_1}(\lambda-\lambda^{(2)})^{p_2}\cdots(\lambda-\lambda^{(m)})^{p_m}.$$

此处 p_i 是一非負的整数。現在矩陣 M 中划去任意一行与任意一列，假定这行与这列在这些矩陣 M_s 之外相交，例如，圖 27 所表示的。那么剩下的 $(n-1)$ 阶矩陣 M' 必含有完全由 0 填滿的長方陣 Q，它的行数与列数之和等于 n（这長方陣 Q 在圖 27 中加斜綫标明）。所以根据本节引理知，M' 的行列式等于 0。因此，求矩陣 M 的 $(n-1)$ 阶的子式最大公因子 $D_{n-1}(\lambda)$，只須考虑自 M 划去一列与一行所得的矩陣 M' 的行列式，而所划去的一行与一列是在一方陣 M_s（例如 M_{s_1}）之内相交的。求这样的矩陣 M' 的行列式方法如下：設以 M'_{s_1} 表示自 M_{s_1} 中划去一行与一列所得的矩陣，显而易見，M' 的行列式等于 M'_{s_1} 的行列式，与其余的 M_s 的行列式的乘积。为了求所

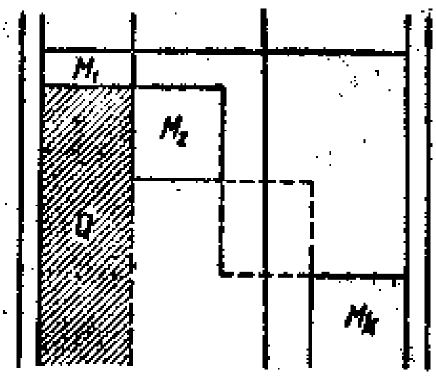

圖 27

有的 $(n-1)$ 阶的子式 $|M'|$ 的最大公因子，显然，我們应特别注意那些含

$$(\lambda-\lambda^{(1)}),\ (\lambda-\lambda^{(2)}),\ \cdots,\ (\lambda-\lambda^{(m)})$$

的最低幂的子式。为了使 $|M'_{s_1}|$ 有 $(\lambda-\lambda_{s_1})$ 最低幂的因子，显然，我們必須在 M_{s_1} 内划去它的第一行与它的最末一列。划去后所得之行列式等于乘积：

$$\varepsilon_{s_1 1}\varepsilon_{s_1 2}\cdots\varepsilon_{s_1 n_{s_1}-1},$$

这乘积必不等于 0，盖因一切 $\varepsilon_{s_1 i}$ 都不等于 0。于是子式 $|M'|$ 所含的 $(\lambda-\lambda_{s_1})$ 的幂之次数，必比在 $|M|$ 中所含的低 n_{s_1} 次。所以所

有的子式$|M'|$所含的$(\lambda-\lambda^{(i)})$之最低幂必为

$$(\lambda-\lambda^{(i)})^{m_i-m_i^{(1)}},$$

此处m_i是以$(\lambda-\lambda^{(i)})$为对角綫元素的一切的子式M_i的阶数之和，而以$m_i^{(1)}$表示这样的子式的阶数中最大的那个阶数。因此知

$$D_{n-1}(\lambda)=\prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda^{(i)})^{m_i-m_i^{(1)}},$$

用同样的理由，我們得

$$D_{n-2}(\lambda)=\prod_{i=1}^{m}(\lambda-\lambda^{(i)})^{m_i-m_i^{(1)}-m_i^{(2)}},$$

此处$m_i^{(2)}$是表示其对角綫元素是$\lambda-\lambda^{(i)}$的矩陣M_i的阶数中次大的那个阶数。其余类推。

幂$(\lambda-\lambda^{(i)})^{m_i^{(i)}}$叫做$\lambda$矩陣$M$的初等因子。

根据§45中的定理2，我們知道：与微分方程組典則形式式(133)对应的矩陣M，它的所有子式的最大公因子，必与方程組(134)所对应的矩陣$\lambda E-\|a_{ij}\|$的子式的最大公因子一样(但不計常数因子)，所以两个矩陣的初等因子亦是一样的。若此时在矩陣$\lambda E-\|a_{ij}\|$中，任一初等因子出現若干次，則在矩陣M中亦以同样次数出現。所以知道矩陣$\lambda E-\|a_{ij}\|$的初等因子，及每一因子的重复次数后，就能指示出，矩陣$\lambda E-\|a_{ij}\|$可以化到怎样的典則形式。此时只有M_i的对角綫相邻的元素尚未确定。我們在§44中已知道，它們可以任意地选擇，但只要使它們不等于0就可以。

§47. 齐次方程組的基本解的求法

引理 設有m行綫性无关的函数如下：

$$z_1^{(1)},\ z_2^{(1)},\ \cdots,\ z_n^{(1)},$$

$$z_1^{(2)},\ z_2^{(2)},\ \cdots,\ z_n^{(2)},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$z_1^{(m)},\ z_2^{(m)},\ \cdots,\ z_n^{(m)}.$$

若$|k_{ij}|\neq 0$，則函数組

$$y_i^{(s)}=\sum_{j=1}^{n} k_{ij}z_j^{(s)},\quad s=1,2,\cdots,m,\quad i=1,2\cdots,n \tag{138}$$

亦是互相綫性无关的m行函数(其逆亦然)。

証　倘使說本定理不正确，那么必有这样的常数$C_1,C_2,\cdots,C_m$存在(其中至少有一个不等于0)，能使下列諸不等式成立:

$$\sum_{s=1}^{m} C_s y_i^{(s)}(x)\equiv 0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

以C_s乘方程式(138)，并把它們按s自1至m相加，就得

$$\sum_{s=1}^{m} C_s y_i^{(s)}=\sum_{j=1}^{n} k_{ij}\sum_{s=1}^{m} C_s z_j^{(s)},\ i=1,2,\cdots,n.$$

由此可見，若$\sum_{s} C_s y_i^{(s)}\equiv 0,\ i=1,2,\cdots,n,$

則

$$\sum_{s} C_s z_j^{(s)}\equiv 0,\ j=1,2,\cdots,n,$$

与假設矛盾。其逆定理是根据y与z可以互相变换的事实而得的(証畢)。

在前节中我們已知，在典則方程組中与矩陣$\lambda E-\|a_{ij}\|$的初等因子$(\lambda-\lambda_s)^{p_s}$对应的是下列齐次微分方程分組:

$$\frac{dz_{k+1}}{dx}=\lambda_s z_{k+1},$$

$$\frac{dz_{k+2}}{dx}=\varepsilon_1 z_{k+1}+\lambda_s z_{k+2},$$

$$\frac{dz_{k+3}}{dx}=\qquad\qquad \varepsilon_2 z_{k+2}+\lambda_s z_{k+3},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dz_{k+p_s-1}}{dx}= \qquad \varepsilon_{p_s-2}z_{k+p_s-2}+\lambda_s z_{k+p_s-1}$$

$$\frac{dz_{k+p_s}}{dx}= \qquad \varepsilon_{p_s-1}z_{k+p_s-1}+\lambda_s z_{k+p_s}$$

(此处 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_{p_s-1}$ 都是不等于 0 的数)。

现对未知函数作变换，令

$$z_{k+l}=z^{*}_{k+l}e^{\lambda_s x}.$$

若 λ_s 是复数，且等于 $\lambda^{*}_s+i\lambda^{**}_s$ 的話（此处 λ^{*}_s 与 λ^{**}_s 是实数），由欧拉公式知 $e^{\lambda_s x}$ 等于 $e^{\lambda^{*}_s x}(\cos\lambda^{**}_s x+i\sin\lambda^{**}_s x)$。

这式对 x 的导数等于：

$$\lambda^{*}_s e^{\lambda^{*}_s x}(\cos\lambda^{**}_s x+i\sin\lambda^{**}_s x)+e^{\lambda^{*}_s x}(-\lambda^{**}_s\sin\lambda^{**}_s x+$$
$$+i\lambda^{**}_s\cos\lambda^{**}_s x)=(\lambda^{*}_s+i\lambda^{**}_s)e^{\lambda^{*}_s x}(\cos\lambda^{**}_s x+$$
$$+i\sin\lambda^{**}_s x)=\lambda_s e^{\lambda_s x}.$$

所以，經过上述的替換后，即得

$$\frac{dz^{*}_{k+1}}{dx}=0,$$

$$\frac{dz^{*}_{k+2}}{dx}=\varepsilon_1 z^{*}_{k+1},$$

$$\frac{dz^{*}_{k+3}}{dx}= \qquad \varepsilon_2 z^{*}_{k+2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{dz^{*}_{k+p_s-1}}{dx}= \qquad \varepsilon_{p_s-2}z^{*}_{k+p_s-2},$$

$$\frac{dz^{*}_{k+p_s}}{dx}= \qquad \varepsilon_{p_s-1}z^{*}_{k+p_s-1}.$$

自上列方程的第一式积分后得：

$$z^{*}_{k+1}=C_1=C^{(1)}_0.$$

把这式代入第二式，再积分得

$$z^*_{k+2}=C_1\varepsilon_1x+C_2=C_1^{(2)}x+C_0^{(2)},$$

把这式代入第三式，积分得

$$z^*_{k+3}=\frac{C_1\varepsilon_1\varepsilon_2}{2}x^2+C_2\varepsilon_2x+C_3=C_2^{(3)}x^2+C_1^{(3)}x+C_0^{(3)},$$

其余类推。最后得

$$z^*_{k+p_s}=C^{(p_s)}_{p_s-1}x^{p_s-1}+C^{(p_s)}_{p_s-2}x^{p_s-2}+\cdots+C_1^{(p_s)}x+C_0^{(p_s)},$$

此处附有各种标号的C都是表示某些实常数或复数常数。

由上式化回 $z_{k+1}, z_{k+2}, \cdots, z_{k+p_s}$，即得

$$\left.\begin{aligned}
&z_{k+1}=e^{\lambda_s x}C_0^{(1)},\\
&z_{k+2}=e^{\lambda_s x}(C_1^{(2)}x+C_0^{(2)}),\\
&z_{k+3}=e^{\lambda_s x}(C_2^{(3)}x^2+C_1^{(3)}x+C_0^{(3)}),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&z_{k+p_s}=e^{\lambda_s x}\Big(C^{(p_s)}_{p_s-1}x^{p_s-1}+\\
&\quad+C^{(p_s)}_{p_s-2}x^{p_s-2}+\cdots+C_1^{(p_s)}x+C_0^{(p_s)}\Big).
\end{aligned}\right\}\qquad(139)$$

这些等式就是所考虑的微分方程分組的通解。把§34的定理4应用到这分組上，我們得：这方程分組有 p_s 个形如(139)的互相綫性无关的解。除(139)外，若令其他一切 z_i 都恒等于0，那么亦能滿足整个的齐次典則方程組。因为 $y_i(i=1,2,\cdots,n)$ 是能用 $z_i(i=1,2,\cdots,n)$的一次式表示出的，所以根据本节已証的引理得到下之結論：若 $(\lambda-\lambda_s)^{p_s}$ 是矩陣 $\lambda E-\|c_{ij}\|$ 中的一个初等因子則必有形状如下的 p_s 个綫性无关的解与之对应：

$$y_i=e^{\lambda_s x}\sum_{j=0}^{p_s-1}C_j^{*(i)}x^j,\ i=1,2,\cdots,n.$$

显而易見，在这些綫性无关的 p_s 个解中，可設其第一个解中

的 $C_j^{*(i)}$，当 $j>0$ 时都等于 0，但 $\sum_{i=1}^{n}|C_0^{*(i)}|>0$，这样的解是与 $z_{k+1}=z_{k+2}=\cdots z_{k+p_1-1}=0$ 对应的；在第二解中可設一切当 $j>1$ 时的 $C_j^{*(i)}$ 都等于 0，但 $\sum_{i=1}^{n}|C_1^{*(i)}|>0$，这样的解是与 $z_{k+1}=\cdots=z_{k+p_1-2}=0$ 对应的；其余的解类推。

如果矩陣 $\lambda E-\|a_{ij}\|$ 有几个 $(\lambda-\lambda^{(1)})$ 冪的初等因子，例如說有：

$$(\lambda-\lambda^{(1)})^{m^{(1)}},\ (\lambda^{(1)})^{m^{(2)}},\ \cdots,\ (\lambda-\lambda^{(1)})^{m^{(k)}},$$

則方程組

$$\frac{dy_i}{dx}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_i,\qquad i=1,2,\cdots,n \tag{140}$$

必有 $m^{(1)}+m^{(2)}+\cdots+m^{(k)}$ 个綫性无关之解，其形状如下：

$$y_i=e^{\lambda^{(1)}x}\sum_{j=0}^{M-1}C_j^{(i)}x^j, \tag{141}$$

此处 M 是 $m^{(1)},m^{(2)},\cdots,m^{(k)}$ 中最大者。为了求这些解，只須定出系数 $C_j^{(i)}$。这可以用"待定系数法"定它，即以(141)式替代(140)表达式中的 y_i，把所得方程約去 $e^{\lambda^{(1)}x}$ 后，比較两端的 x 同次冪的系数。由形为 $(\lambda-\lambda^{(p)})$ 冪的别的初等因子亦能以同样方法造出其他的解。对应于 $(\lambda-\lambda^{(1)})$ 冪的这些解，与对应于 $(\lambda-\lambda^{(p)})$ 冪的那些解是綫性无关的，因为在典則方程組中，与 $(\lambda-\lambda^{(p)})$ 冪的初等因子对应的是另外的方程分組。

附注　若我們討論的齐次方程組的一切系数都是实数，那么这方程組的复数解的实部与虚部，分为两部分后仍为这方程之解。解 $y_j^*(x)+iy_j^{**}(x)$ 中的 $y_j^*(x)$ 叫做这解的实部，而 $y_j^{**}(x)$ 叫做这解的虚部 $(j=1,2,\cdots n)$。

若我們有 n 行綫性无关的解：

$$y_j^{(k)}(x)=y_j^{*(k)}(x)+iy_j^{**(k)}(x);\quad k,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

則在下面的 $2n$ 行中：

$$\begin{array}{l} y_1^{*(k)}(x),\ y_2^{*(k)}(x),\ \cdots,\ y_n^{*(k)}(x), \\ y_1^{**(k)}(x),\ y_2^{**(k)}(x),\ \cdots,\ y_n^{**(k)}(x), \end{array}\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n,$$

必能找到 n 行綫性无关的解(請讀者自己說明理由)。所以对于实系数的綫性微分方程組必能有由实解构成的基本解組。

§ 48. 对于 n 阶齐次方程式的应用

与一个微分方程式(108)等价的常系数的方程組(109)之特征矩陣是形狀如下的矩陣：

$$\begin{Vmatrix} \lambda, & -1, & & & & & & \\ & \lambda, & -1, & & & & & \\ & & \lambda, & -1 & & & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & & & & \lambda, & -1 \\ -a_0, & -a_1, & -a_2, & -a_3, & \cdots & \cdots, & -a_{n-2}, & \lambda-a_{n-1} \end{Vmatrix} \tag{142}$$

現在我們假定一切的 a_i 都是常数。这矩陣的行列式極易算出，是等于

$$\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-a_{n-2}\lambda^{n-2}-\cdots-a_1\lambda-a_0\equiv M(\lambda).$$

划去第一列与最末一行后，所得矩陣的行列式之值等于 $+1$ 或 -1。可見，若多項式 $M(\lambda)$ 有 p_s 重的 λ_s 根，則矩陣(142)有初等因子 $(\lambda-\lambda_s)^{p_s}$；这矩陣并无其他 $(\lambda-\lambda_s)$ 幂的初等因子。所以与 p_s 重的重根 λ_s 对应的是 p_s 个互相綫性无关的解，其形狀为：

$$(C_0+C_1x+C_2x^2+\cdots+C_{p_s-1}x^{p_s-1})e^{\lambda_s x}. \tag{143}$$

这些解与对应于 $M(\lambda)$ 的其他根的解亦必綫性无关①。

显然(143)中的 p_s 个綫性无关解可以設为

---

① 因为在方程組(109)的典則形式中，与它們对应的是别的方程分組。

$$e^{\lambda_s x}, xe^{\lambda_s x}, x^2e^{\lambda_s x}, \cdots, x^{p_s-1}e^{\lambda_s x}.$$

事实上，倘使說这些函数間有綫性关系，則將有形如(143)的式子，它恒等于零，而且 C_i 中至少有一个不等于 0。但因 $e^{\lambda_s x}$ 决不会等于 0，而且系数不全等于 0 的多項式，不可能恒等于 0。所以这 p_s 个函数綫性无关。

若一切的 a_i 都是实数，那么矩陣(142)的任何一个复数初等因子$(\lambda-\lambda_s)^{p_s}$，对应于这矩陣的共軛初等因子$(\lambda-\bar{\lambda}_s)^{p_s}$。所以对于实数常系数的方程式(108)的任何一解

$$y_1(x)=x^ke^{\lambda_s x}=x^ke^{\alpha_s x}(\cos\beta_s x+i\sin\beta_s x),$$

必有这方程式的另一解

$$\bar{y}_1(x)=x^ke^{\bar{\lambda}_s x}=x^ke^{\alpha_s x}(\cos\beta_s x-i\sin\beta_s x)$$

与之对应，(此处，$\lambda_s=\alpha_s+i\beta_s$)。所以实函数

$$\frac{y_1(x)+\bar{y}_1(x)}{2}=x^ke^{\alpha_s x}\cos\beta_s x,$$

与

$$\frac{y_1(x)-\bar{y}_1(x)}{2i}=x^ke^{\alpha_s x}\sin\beta_s x$$

亦必滿足这方程式。

这样，我們得到常系数方程式(108)的 n 个綫性无关的实解。(为什么？)

習　題

1. 求証：一个一阶常系数齐次方程組經非奇异变换后能化到形如(109)的方程組(就是与一 n 阶的方程式等价的方程組)，其充分条件是它的初等因子有本节所述的构造（用波紋綫特别标出的)。这样我們有了一个使一阶常系数微分綫性方程組能与一个 n 阶的常系数方程式等价（在刚才所述的意义下）的必要与充分条件。

2. 求方程式(欧拉 Euler 方程)

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+x^{n-1}a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+xa_1\frac{dy}{dx}+a_0y=0$$

的通解，这里所有的 a 都是常数。提示：令 $x=e^t$ 以更换自变数。

3. 求方程式

$$y'(x)=ay(x)+by(c-x)$$

的所有在 $-\infty<x<\infty$ 上存在的解(此处 a, b, c 是常数)。

4. 把 $\sin x$ 与 $\cos x$ 看作是方程式 $y''+y=0$ 在开始条件 $y|_{x=0}=0,\ y'|_{x=0}=1$ 及 $y|_{x=0}=1,\ y'|_{x=0}=0$ 下的兩个解，試推出 $\sin x$ 与 $\cos x$ 所有的基本性質。

5. 引用記号：

$$L[f]\equiv\frac{d^nf}{dx^n}-a_{n-1}\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}-a_{n-2}\frac{d^{n-2}f}{dx^{n-2}}-\cdots-a_1\frac{df}{dx}-a_0f,$$

試推出如下的公式：

$$L[e^{\lambda x}f]=e^{\lambda x}\left\{M(\lambda)f+\frac{M'(\lambda)}{1!}\frac{df}{dx}+\cdots+\frac{M^{(n)}(\lambda)}{n!}\frac{d^nf}{dx^n}\right\}.$$

自这公式可得常系数微分方程式(108)的通解。

§49. 非齐次方程組的特解求法

我們只研究这种情形，即在方程組(134)中：

$$f_i(x)=\sum_{k=1}^{m}C_i^{(k)}e^{\alpha_kx}x^{\beta_k},$$

此处 α_k 与 $C_i^{(k)}$ 可能是实数亦可能是复数，而 β_k 是非負数的整数。显然，我們只須研究 $m=1$ 的情形。盖因一般情形的特解就是此种特殊情形($m=1$)之特解所成之和。因此令

$$f_i(x)=C_ie^{\alpha x}x^{\beta}.$$

写出方程組(133)中对应于特征矩陣的任一方塊 M_s 的分組

如下:

$$\begin{aligned}
\frac{dz_{k+1}}{dx}&=\lambda_s z_{k+1} & &+C^*_{k+1}x^\beta e^{\alpha x},\\
\frac{dz_{k+2}}{dx}&=\varepsilon_1 z_{k+1} &+\lambda_s z_{k+2} &+C^*_{k+2}x^\beta e^{\alpha x},\\
\frac{dz_{k+3}}{dx}&=\varepsilon_2 z_{k+2} &+\lambda_s z_{k+3} &+C^*_{k+3}x^\beta e^{\alpha x},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz_{k+p_s}}{dx}&=\varepsilon_{p_s-1} z_{k+p_s-1} &+\lambda_s z_{k+p_s} &+C^*_{k+p_s}x^\beta e^{\alpha x},
\end{aligned}$$

此处 C^*_i 是某些新常数。令

$$z_i=z^*_i e^{\lambda_s x},\ i=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k+p_s,$$

以引入新的未知函数 z^*_i。于是得

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz^*_{k+1}}{dx}&= & &+C^*_{k+1}x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x},\\
\frac{dz^*_{k+2}}{dx}&=\varepsilon_1 z^*_{k+1} & &+C^*_{k+2}x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x},\\
\frac{dz^*_{k+3}}{dx}&= &\varepsilon_2 z^*_{k+2} &+C^*_{k+3}x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x},\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
\frac{dz^*_{k+p_s}}{dx}&=\varepsilon_{p_s-1} z^*_{k+p_s-1} & &+C_{k+p_s}x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x}.
\end{aligned}\right\} \qquad (144)$$

在积分此方程組时,我們应区别两种情形,卽 α 与 λ_s 相等和 α 与 λ_s 不等两种情形。

第一种情形 $\lambda_s\neq\alpha$。

自第一式开始,逐步积分这方程分組(144),卽得

$$z^*_i=M^{(\beta)}_i(x)e^{(\alpha-\lambda_s)x},\ i=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k+p_s,$$

此处 $M^{(\beta)}_i(x)$是 x 的不超过 β 次之某一多項式①。由此得

① 在解析函数論証明:当若 $\alpha-\lambda_s$ 是实数时积分 $x^\beta e^{(\alpha-\lambda_s)x}$ 所得之公式,在 $\alpha-\lambda_s$ 是复数时也正确。这亦可以直接証明。

$$z_i = M_i^{(\beta)}(x)e^{\alpha x},\ i=k+1,\ k+2,\ \cdots,\ k+p_s.$$

倘使任何一个 λ_s 皆不等于 α，則一切的 $z_i(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$将有如下的形式:

$$z_i = M_i^{(\beta)}(x)e^{\alpha x},$$

所以特解 y_i 必将有如下的形式:

$$y_i = M_i^{*(\beta)}(x)e^{\alpha x}. \tag{145}$$

多項式 $M_i^{*(\beta)}(x)$之系数，能以比較系数法求得之，即以(145)式代替方程(134)中的 y_i，所得之方程約去 $e^{\alpha x}$ 后，再比較两端同一 x 冪的系数。

第二种情形 $\lambda_s=\alpha$

此时，方程分組(144)作下列形式:

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{dz^*_{k+1}}{dx} = & & & +C^*_{k+1}x^\beta, \\
\dfrac{dz^*_{k+2}}{dx} = & \varepsilon_1 z^*_{k+1} & & +C^*_{k+2}x^\beta, \\
\dfrac{dz^*_{k+3}}{dx} = & & \varepsilon_2 z^*_{k+2} & +C^*_{k+3}x^\beta, \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\
\dfrac{dz^*_{k+p_s}}{dx} = & & \varepsilon_{p_s-1} z^*_{k+p_s-1} & +C^*_{k+p_s}x^\beta.
\end{array}$$

逐步积分这些方程，我們得形状如下之特解:

$$z^*_{k+i}(x) = M_{k+i}^{(i)}(x)x^\beta,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ p_s,$$

此处 $M_{k+i}^{(i)}$ 是次数不高于 i 的含 x 的多項式。由此知

$$z_{k+i}(x) = x^\beta M_{k+i}^{(i)}(x)e^{\alpha x},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ p_s.$$

所以，方程組(134)必有特解如下:

$$y_i(x) = M_i^{*(\beta+p)}(x)e^{\alpha x},\text{[1]} \quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

---

(1) 方程組(134)不一定有形如 $y_i = x^\beta M_i^{*(p)}(x)e^{\alpha x}$ 的特解，因为除了我們所考察的与 $\lambda_s=\alpha$ 对应的方程分組外，尚有与 $\lambda_s\neq\alpha$ 对应的分組。

此处 $M_i^{(\beta+p)}(x)$ 是次数不超过 $(\beta+p)$ 的含 x 的多項式，而 p 是 $\lambda E-\|a_{ij}\|$ 的形状如 $(\lambda-\alpha)^s$ 的初等因子之指数中最高者。

对于 n 阶方程式之推論 設多項式

$$\lambda^n-a_{n-1}\lambda^{n-1}-a_{n-2}\lambda^{n-2}-\cdots-a_1\lambda-a_0$$

有一个 p 重根 $\alpha(p\geqslant 0)$，則微分方程式

$$\frac{d^ny}{dx^n}=a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+a_{n-2}\frac{d^{n-2}y}{dx^{n-2}}+\cdots+a_1y'+a_0y+Cx^{\beta}e^{\alpha x}$$

必有形状如 $$y(x)=M^{(p+\beta)}(x)e^{\alpha x}$$

的特解，此处 $M^{(p+\beta)}(x)$ 是次数不高于 $(p+\beta)$ 之多項式。自这个解減去形状如(143)的齐次方程的解，即得非齐次方程的形状如下的特解：

$$y(x)=M^{(\beta)}(x)x^pe^{\alpha x}.$$

習 題

利用§48的習題5的結果，求出这推論中所述的方程式的特解的形状。

§50. 化微分方程式 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{ax+by}{cx+dy}$ 为典則形式

方程式
$$\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{cx+dy}\tag{146}$$

等价于下列方程組：

$$\frac{dx}{dt}=cx+dy,\quad \frac{dy}{dt}=ax+by,\tag{147}$$

此处 t 是輔助变数。我們現在假定系数 a, b, c, d 都是实数。化方程組(147)为典則形式时，按照下面的 λ 矩陣：

$$\begin{Vmatrix}\lambda-c & -d\\ -a & \lambda-b\end{Vmatrix}\tag{148}$$

的初等因子的不同而可分为下列三种情形:

第一种情形 初等因子都是一次实因子。据上面所講的关于化成典則形式的定理的証明,推得:必有这样的实系数非奇异綫性变換

$$x^*=k_{11}x+k_{12}y,\quad y^*=k_{21}x+k_{22}y,\tag{149}$$

能把方程組(147)化为典則形式

$$\frac{dx^*}{dt}=\lambda_1x^*,\quad \frac{dy^*}{dt}=\lambda_2y^*.\tag{150}$$

若

$$\begin{vmatrix}a & b\\ c & d\end{vmatrix}\neq 0,\tag{151}$$

則 λ_1 与 λ_2 都不会等于零,所以作变換(149)后,方程(146)化为

$$\frac{dy^*}{dx^*}=\frac{\lambda_2y^*}{\lambda_1x^*}.$$

第二种情形 矩陣(148)之初等因子$(\lambda-\lambda_1)$与$(\lambda-\lambda_2)$都是复数。既然我們現在假定 a, b, c, d 都是实数,那么 λ_1 与 λ_2 必互相共軛。于是变換(149)亦把方程組(147)化为典則形式(150)。在这里系数 k_{21} 与 k_{22} 可以認为同 k_{11} 与 k_{12} 共軛。事实上,因为 $\lambda_2=\bar{\lambda}_1$,所以 $\bar{x}^*$ 必滿足方程式

$$\frac{dy^*}{dt}=\lambda_2y^*.$$

所以我們可以取 $\quad y^*=\bar{x}^*.$

設 $\quad k_{11}=k_1^*+ik_1^{**},\ k_{12}=k_2^*+ik_2^{**}.$

又令 $\quad \xi=k_1^*x+k_2^*y,\ \eta=k_1^{**}x+k_2^{**}y,$

$$\lambda_1=\alpha+i\beta,\quad (\beta\neq 0).$$

于是把方程組(150)分离实部与虚部后可得下列二式:

$$\frac{d\xi}{dt}=\alpha\xi-\beta\eta,\quad \frac{d\eta}{dt}=\beta\xi+\alpha\eta,$$

由此得

$$\frac{d\eta}{d\xi}=\frac{\beta\xi+\alpha\eta}{\alpha\xi-\beta\eta}.$$

請注意，把 x 与 y 化到 ξ 与 η 之綫性变换是非奇异的，因为否則

$$\begin{vmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

第三种情形 矩陣(148)只有一个初等因子 $(\alpha-\alpha_1)^2$。于是必有这样的实系数非奇异变换(149)，把方程組(147)化到下列方程組(参看§44)：

$$\frac{dx^*}{dt} = \lambda_1 x^*, \quad \frac{dy^*}{dt} = \varepsilon x^* + \lambda_1 y^*. \tag{152}$$

若行列式(151)不等于零，則 $\lambda_1 \neq 0$。又因 a, b, c, d 都是实数，則 λ_1 亦必是实数。ε 是任一异于 0 的数，如果認为它是实数，則系数 k_{ij} 亦可当它是实数，这自§44所討論的可以推出。譬如說，我們可以令 $\varepsilon = \lambda_1$，于是自方程(152)我們得

$$\frac{dy^*}{dx^*} = \frac{\lambda_1 x^* + \lambda_1 y^*}{\lambda_1 x^*} = \frac{x^* + y^*}{x^*}.$$

習 題

設坐标原点是方程式(146)的焦点。試說明这方程式中的系数应該有怎样的关系，則螺旋綫逆时針圍繞着而进入奇点；系数应有怎样的关系，則它順时針圍繞着而进入奇点。

对于在圖16中所繪的結点，試解决同样的問題。

2. 設坐标原点是方程式(146)的鞍点或結点。試說明积分曲綫沿怎样的方向进入原点（在結点的情况下，应說明沿怎样的方向有无穷条曲綫趋近原点）。

設坐标原点是中心，說明橢圓主軸的位置，并說明这二軸中哪一个是長軸？

§51. 解的李雅普諾夫(Ляпунов)穩定性

設方程組的解的开始值在 $x = x_0$ 处給定。設

$$y_i(x)=y_i^0(x),\quad i=1,2,\cdots,n,$$

是方程組

$$\frac{dy_i}{dx}=f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),\quad i=1,2,\cdots,n \tag{86}$$

的具有下列性質的解：任意給定一个 $\varepsilon>0$，必能找到这样的 $\eta(\varepsilon)>>0$，只要这方程組的一个解 $y_i(x)$ 的开始值能使下面的不等式

$$|y_i(x_0)-y_i^0(x_0)|<\eta(\varepsilon)$$

对一切 i 成立，則它也必能使不等式

$$|y_i(x)-y_i^0(x)|<\varepsilon,$$

对一切 i，当 $x\geqslant x_0$ 时成立。——具有这样性質的解 $y_i^0(x)(i=1,2,\cdots,n)$叫做：当 $x\to+\infty$ 时按照李浦諾夫(Ляпунов)的定义是稳定的。

自然，此处的函数 $y_i^0(x)$ 必須先假定它当 $x\geqslant x_0$ 时是确定的，而且在曲綫 $y_i=y_i^0(x)$ 的邻域 $|y_i-y_i^0(x)|<M,\ x\geqslant x_0(M>0;i==1,2,\cdots,n)$ 內，方程組(86)亦必須先假定是确定的。

显然，若取新的未知函数 $y_i(x)-y_i^0(x)$ 以代替 $y_i(x)$，总能化到下面的情形：

$$y_i^0(x)\equiv 0,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

此处 f_i、一切的 y_i 与 x 都假定是实数。

微分方程組的解的稳定性的基本研究，应归功于俄罗斯著名数学家 А. М. 李浦諾夫①。

定理　設在方程組(86)中，

$$f_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n)=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_j+F_i(x,y_1,y_2,\cdots,y_n),$$

此处 a_{ij} 是常数，F_i 对所有的变数連續，而特征方程式

① А. М. Ляпунов: Общая задача об устойчивости движения, ОНТИ, 1950.

$$\left|\|a_{ij}\| - \lambda E\right| = 0 \tag{153}$$

的所有的根 λ 的实部都是負数。同时又假定当 $x \geqslant x_0$，而 $|y_i|$ 又充分小时，下面的不等式成立：

$$|F_i(x, y_1, \cdots, y_n)| \leqslant M[|y_1|^{1+\alpha} + \cdots + |y_n|^{1+\alpha}], \tag{154}$$

此处 M 与 α 都是正的常数。則方程組(86)的解

$$y_i^0(x) \equiv 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

当 $x \to +\infty$ 时是稳定的。而且当一切的 $|y_i(x_0)|$ 都充分小时，則 $y_i(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 (i = 1, 2, \cdots, n)$。

特別是，若方程(153)所有的根的实部都是負数，方程組(86)之右端的 f_i 不含 x，而且它在坐标原点的一邻域內有連續的一阶及二阶偏导数，則本定理中的条件必能滿足。事实上，如对此等函数 f_i 应用戴劳公式，則得

$$f_i(x, y_1, \cdots, y_n) = \sum_j a_{ij} y_j + O\left(\sum y_j^2\right)^{①}.$$

本定理的証明　对方程組(86)应用能連带把方程組

$$\frac{dy_i}{dx} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

化为典則形式这样的常系数非奇异綫性变换。

考虑所得到的方程組中与矩陣 $\|a_{ij}\| - \lambda E$ 的一个初等因子，例如 $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}$ 对应的分組：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dz_1}{dx} &= \lambda_1 z_1 && + F_1^*(x, z_1 \cdots, z_n), \\
\frac{dz_2}{dx} &= \beta_1 z_1 + \lambda_1 z_2 && + F_2^*(x, z_1 \cdots, z_n), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{dz_{n_1}}{dx} &= \qquad \beta_1 z_{n_1-1} + \lambda_1 z_{n_1} && + F_{n_1}^*(x, z_1, \cdots, z_n).
\end{aligned}\right\} \tag{155}$$

① 参看第 76 頁脚注 1。

此处 λ_1 是特征方程(153)的一根，β_1 的值可以任意地选擇，只要不等于零。

若假定 F_i 滿足不等式(154)，那么 F_i^* 亦必滿足不等式：

$$|F_i^*(x, z_1, \cdots, z_n)| \leqslant M^*[|z_1|^{1+\alpha} + \cdots + |z_n|^{1+\alpha}], \quad (156)$$

此处 M^* 是另一新的常数。这是因为 $F_i^*(x, z)$ 是 $F_i(x, y)$ 的以常数为系数的綫性組合，可以

$$|F_i^*(x, z)| \leqslant M_1 \sum_j |F_j(x, y)| \leqslant M_2[|y_1|^{1+\alpha} + \cdots + |y_n|^{1+\alpha}];$$

y_i 也是 z_i 的常系数綫性組合，所以对一切 i 又有：

$$|y_i|^{1+\alpha} \leqslant M_3(\max|z_j|)^{1+\alpha} \leqslant M_3[|z_1|^{1+\alpha} + \cdots + |z_n|^{1+\alpha}].$$

此处 M_1, M_2, M_3 都是新的常数，而 $\max|z_j|$ 表示 $|z_1|, |z_2|, \cdots, |z_n|$ 中的最大者。把上述不等式代入关于 $|F_i^*|$ 之不等式中，即得所欲証的(156)。

因为 a_{ij} 是实数，所以与矩陣 $\|a_{ij}\| - \lambda E$ 的每一初等因子 $(\lambda - \lambda_1)^{n_1}$ 对应的有它的共軛初等因子 $(\lambda - \bar{\lambda}_1)^{n_1}$。显然，在典則形式中与初等因子 $(\lambda - \bar{\lambda}_1)^{n_1}$ 对应的方程分組，其形式可以假定是：

$$\left.\begin{aligned}
\frac{d\bar{z}_1}{dx} &= \bar{\lambda}_1\bar{z}_1 && + F_1^{**}(x, z_1, \cdots, z_n), \\
\frac{d\bar{z}_2}{dx} &= \bar{\beta}_1\bar{z}_1 + \bar{\lambda}_2\bar{z}_1 && + F_2^{**}(x, z_1, \cdots, z_n), \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\frac{d\bar{z}_{n_1}}{dx} &= \beta_1\bar{z}_{n_1-1} + \lambda_1\bar{z}_{n_1} && + F_{n_1}^{**}(x, z_1, \cdots, z_n).
\end{aligned}\right\} \quad (157)$$

若 λ 是实数，則这方程分組与方程分組(155)一样。

当 $i > 1$ 时，自(155)与(157)得

$$\frac{d|z_i|^2}{dx} = \bar{z}_i\frac{dz_i}{dx} + z_i\frac{d\bar{z}_i}{dx} = \lambda_1 z_i\bar{z}_i + \bar{\lambda}_i\bar{z}_i z_i + \beta_1 z_{i-1}\bar{z}_i +$$

$$+ \beta_1\bar{z}_{i-1}z_i + \bar{z}_i F_i^* + z_i F_i^{**}. \quad (158)$$

当 $i=1$ 时，亦得类似的式子，只是沒有 β 及 $\bar{\beta}$ 的各項而已。

令 λ_1 之实部 $=-a_1$，利用不等式(156)，自(158)式可得：

$$\frac{d|z_i|^2}{dx}\leqslant -2a_1|z_i|^2+|\beta_1|[|z_i|^2+|z_{i-1}|^2]+$$

$$+M_1^*[|z_1|^{1+\alpha}+\cdots+|z_n|^{1+\alpha}]\cdot\max|z_j|,\ i=2,\cdots,n_1 \quad (158')$$

$$\frac{d|z_1|^2}{dx}\leqslant -2a_1|z_1|^2+M_1^*[|z_1|^{1+\alpha}+\cdots+$$

$$+|z_n|^{1+\alpha}]\cdot\max|z_j|. \quad (158'')$$

可是，$M_1^*[|z_1|^{1+\alpha}+\cdots+|z_n|^{1+\alpha}]\cdot\max|z_j|\leqslant$

$$\leqslant M_1^*\cdot n[\max|z_j|^2]^{1+\frac{\alpha}{2}}\leqslant M_1^*\cdot n[|z_1|^2+\cdots+|z_n|^2]^{1+\frac{\alpha}{2}}.$$

以 $-a$ 表示所有的特征根 λ_i 之实部中最大者(根据假定，$-a$ 是負数)，現把(158′)与(158″)各式自 $i=1$ 到 $i=n$ 都相加起来，即得：

$$\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\leqslant -2a\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2+2B\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2+$$

$$+M_1^*\cdot n^2\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)^{1+\frac{\alpha}{2}}, \quad (159)$$

此处 B 是一切的 $|\beta_i|$ 中最大者。既然 β_i 可以选为不等于 0 的任意小之値，所以我們可以选 B 之值使 $B<\frac{a}{4}$。

此外，我們可以选一切所考察的 y_i 小到这样程度，使 z_i 的絕对値会滿足不等式：

$$\left(\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\right)^{\frac{\alpha}{2}}<\frac{a}{2M_1^*n^2}, \quad (160)$$

于是得 $$\frac{d}{dx}\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2\leqslant -a\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2. \quad (159')$$

現在来研究由下式确定的函数 $z(x)$:

$$\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2=ze^{-a(x-x_0)}.$$

将上式微分并利用(159′)式得:

$$\frac{dz}{dx}\leqslant 0,$$

由此知：当 x 增加时，z 之値反减小，因而 $\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2$ 亦减小。所以，若不等式(160)在 $x=x_0$ 能成立，則对一切 $x>x_0$ 亦成立；由此知 z 是遞减的，而 $\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2$ 是趋于零的單調遞减函数。

因为自 y_i 变换到 z_i 是非奇异的綫性变换，故立刻推得：只要所有的 $|y_i(x_0)|$ 是充分小，則有

$$y_i(x)\underset{x\to\infty}{\to}0.\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

其次，当 $|y_i(x_0)|$ 是充分小时，則所有的 $|z_i(x_0)|$ 与 $\sum_{i=1}^{n}|z_i^2(x_0)|$ 能任意小。所以根据上面証明的事实知道：
当 $x>x_0$ 时，

$$\sum_{i=1}^{n}|z_i^2(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|z_i^2(x_0)|.$$

由这不等式，并注意到 y_i 变到 z_i 是非奇异变换，就証明了解 $y_i(x)\equiv 0\ (i=1,2,\cdots,n)$ 的稳定性。

附注　若經过曲綫 $y_i=y_i^0(x)(i=1,2,\cdots,n),\ x\geqslant x_0$ 的任一点，方程組(86)仅有唯一解，則解的稳定性与点 x_0 的具体选擇无关系。换一句話說，若有另外的任意一点 $x_0'>x_0$，那么以 x_0' 为开始点时方程組(86)的解 $y_i=y_i^0(x)(i=1,2,\cdots,n)$ 稳定的充分必要

条件是：以 x_0 为开始点时，解 $y_i=y_i^0(x)$ 是稳定的。此事实是由"在有界的区間 $x_0\leqslant x\leqslant x_0'$，解是开始值的連續函数"推得（参看：§20、§30，特別是§20定理的附注）。

習 題

1．求証：在对于函数 F_i 所作的假定下，即使方程式(153)只有一个根的实部是正的，解 $y_i\equiv0,\ i=1,2,\cdots,n$，也不是稳定的。

提示：設把方程組化成典則形式以后，函数 $z_1,z_2,\cdots,z_m$ 对应于 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，这些 λ 的实部都是正数而且都大于某个 $\delta>0$，而其余的 z 对应于实部非正数的 λ，則

$$\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{m}|z_i|^2-\sum_{i=m+1}^{n}|z_i|^2\right]e^{-\frac{\delta}{2}x}=$$

$$=\frac{d}{dx}\left[\sum_{i=1}^{m}z_i\bar{z}_i-\sum_{i=m+1}^{n}z_i\bar{z}_i\right]e^{-\frac{\delta}{2}x}\geqslant$$

$$\geqslant\varepsilon\sum_{i=1}^{n}|z_i|^2e^{-\frac{\delta}{2}x}\geqslant\varepsilon\left[\sum_{i=1}^{m}|z_i|^2-\sum_{i=m+1}^{n}|z_i|^2\right]e^{-\frac{\delta}{2}x},$$

此处 ε 是一个正数。

2．举出形如(86)的方程組的例，使它只有一个稳定解，但具有任何开始条件的解都存在，唯一，而且对于所有的 x 有界。

3．設方程組(86)的具有任何开始条件的解都漸近地趋于 $y_i\equiv0,\ i=1,2,\cdots,n$，則 $y_i\equiv0$ 这个解仍然可以是不稳定的（試举例）。再設已知这解 $y_i\equiv0,\ i=1,2,\cdots,n$，是稳定的。是否开始点充分接近的解也都是稳定的？分为 $n=1$ 及 $n>1$ 两情形討論。

4．若滿足如下条件：

$$|y_i(x_0)|<M,\quad i=1,2,\cdots,n \tag{*}$$

的解都一致地漸近地趋于一个解 $y_i\equiv 0$, $i=1, 2, \cdots, n$, 則滿足条件(*)的所有的解也都是稳定的

5. 試証：本节的定理及習題 1 中的条件(154)可用下述的較弱的条件来代替：

当一切的 $y_i\to 0$ 时，对 x 一致地有

$$\frac{F_i(x, y_1, \cdots, y_n)}{|y_1|+\cdots+|y_n|}\to 0\ (i=1, \cdots, n).$$

6. 設 $n=1$, 又設滿足开始条件 $y(x_0)=y^{01}$ 及 $y(x_0)=y^{02}>y^{01}$ 的两个解当 $x\to\infty$ 时漸近地趋于同一的(有限的)極限。若开始条件所确定的解的唯一性成立，試証：滿足 $y^{01}<y(x_0)<y^{02}$ 的条件的每一个解都是稳定的。

7. 求出常系数齐次綫性微分方程組的零解有稳定性的充要条件。

8. 为了使連續系数的齐次綫性微分方程組的零解稳定，其充要条件是：这方程組的每一个解都是有界的。

9. 設有一个連續可微的函数 $V(y_1, \cdots, y_n)$, 它在坐标原点的邻域内确定，而且 $V(0, \cdots, 0)=0$, $V(y_1, \cdots, y_n)>0$ ($|y_1|+\cdots+|y_n|>0$), 而

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial y_i}f_i(x, y_1, \cdots, y_n)\leqslant 0$$

(李浦諾夫函数)，則方程組(86)具有零解，而且它是稳定的。倘使 V 依賴于 x, 則这命題成立否？

§52. 一个物理学的例題

設有質量为 m 的一个質点，沿 Ox 軸运动。現以 x 表示質点的横坐标。設介質的阻力与質点的速度成正比例，卽阻力等于

$$-a\frac{dx}{dt};$$

又設一力

$$-bx,$$

把質点向坐标原点吸引。此处 a 与 b 是常数，$a\geqslant 0$, $b>0$。这样的运动，在物理上可以想象为：在有阻力的介質中（例如說，在液体中或气体中）受了彈簧彈性力影响的質点运动。作用的彈性力的大小是根据虎克定律。这定律是：彈性力是向平衡点所在位置的一側起作用，彈性力的大小是与質点和平衡点的距离成正比例。現在假定在質点上沿 Ox 轴方向施以一个周期性的力，这力在时刻 t 等于 $A\cos\omega t$（此处 A 与 ω 都是实的常数，且 $\omega>0$）。則运动的微分方程是：

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=A\cos\omega t. \tag{161}$$

先研究 $A=0$ 的情形，这时沒有外力作用于动点。質点的这种运动叫做“自由振动”。設 λ_1 与 λ_2 是方程

$$m\lambda^2+a\lambda+b=0 \tag{164}$$

的根，就是說

$$\lambda_{1,2}=\frac{-a}{2m}\pm\sqrt{\frac{a^2}{4m^2}-\frac{b}{m}}.$$

則齐次微分方程式

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+a\frac{dx}{dt}+bx=0 \tag{162}$$

的通解，在 $\lambda_1\neq\lambda_2$ 的条件下，是

$$x=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}. \tag{163}$$

若 $a>0$，則 λ_1 与 λ_2 之实部都是負数。于是(162)式的一切的解，当 $t\to+\infty$ 时都趋于 0。完全同样，与方程式(162)对应的方程組：

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt}=x_1, \\ m\dfrac{dx_1}{dt}=-ax_1-bx, \end{cases} \tag{165}$$

的一切的解 $(x(t), x_1(t))$ 当 $t\to+\infty$ 时也趋于这方程組的解 $x(t)\equiv0$, $x_1(t)\equiv0$。此外，容易看出，这方程組的解 $x(t)\equiv0$, $x_1(t)\equiv0$ 当 $t\to+\infty$ 时是稳定的。

若 $a=0$，則方程式(162)的一切的实解都由公式

$$x(t)=C_1\sin\sqrt{\frac{b}{m}}t+C_2\cos\sqrt{\frac{b}{m}}t=C\sin\left(\sqrt{\frac{b}{m}}t+v\right)$$

給出，此处

$$C=\sqrt{C_1^2+C_2^2},\quad C_1=C\cos v,\quad C_2=C\sin v.$$

由此得
$$x_1(t)=\frac{dx}{dt}=C\sqrt{\frac{b}{m}}\cos\left(\sqrt{\frac{b}{m}}t+v\right).$$

所以，点 $(x(t), x_1(t))$ 在 (x, x_1) 平面上沿一橢圓运动，这橢圓的長半軸与短半軸的方向，与坐标軸方向一样，而長半軸与短半軸長度之比值，对于所有的解都是一样的：它等于 $\sqrt{\frac{b}{m}}$。对于方程組(165)而言，坐标原点是中心点。点 $x(t)$ 沿 Ox 軸以 $\sqrt{\frac{m}{b}}2\pi$ 为周期而振动，这周期对于方程(162)所有的解都是一样的。

我們現在更詳細地研究当 $a>0$ 时的运动，这时可能有下列三种情形：

情形 1. $a^2>4bm$。特征方程(164)的两个根都是实数而且是負的。对于方程組(165)而言，坐标原点是結点(請参看§23，圖13、14)。公式(163)中，C_1 与 C_2 取实值时所得的函数 $x(t)$ 及其导函数 $x_1(t)$，只对于 t 的一个值会等于0。所以函数 $x(t)$ 至多有一个極大值或者極小值。

情形 2. $a^2=4bm$。在这情形下，方程(162)的通解由公式

$$x=e^{-\frac{at}{2m}}(C_1+C_2t)$$

給出。$x(t_0)$ 与 $x_1(t)$ 只对于 t 的一值会等于 0。实平面 (x, x_1) 的坐标原点是方程組(165)的結点(参看圖 16)。

情形 3. $a^2<4bm$. 特征方程(164)的根的虛部不等于 0。設

$$\lambda_{1,2}=-\alpha\pm i\beta;\quad \beta>0,\quad \alpha>0.$$

此时实平面 (x, x_1) 的坐标原点对方程組(165)而言，是一焦点。方程式(162)的实解是

$$x=e^{-\alpha t}(C_1\sin\beta t+C_2\cos\beta t)=Ce^{-\alpha t}\sin(\beta t+v).$$

x 点沿 Ox 軸作周期性的振动，而方程(162)的任一个解的周期都是 $\frac{2\pi}{\beta}$，而振幅 $Ce^{-\alpha t}$ 逐漸趋于 0。

現在研究方程(161)中 $A\neq 0$ 的情形。不用(161)式而改为研究下列的方程：

$$m\frac{d^2z}{dt^2}+a\frac{dz}{dt}+bz=Ae^{i\omega t},\tag{166}$$

对我們会更方便。这方程(166)的解的实数部分必滿足(161)，反过来說，方程(161)所有的解也是这方程(166)的某一个解的实部。(何故？)

若方程(164)的两根都不是 $i\omega$，又設 $\lambda_1\neq\lambda_2$，則方程(166)的通解是

$$z=C_1e^{\lambda_1 t}+C_2e^{\lambda_2 t}+\frac{Ae^{i\omega t}}{m(i\omega)^2+a(i\omega)+b};$$

若 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$，則(166)的通解是

$$z=C_1e^{\lambda t}+C_2te^{\lambda t}+\frac{Ae^{i\omega t}}{m(i\omega)^2+a(i\omega)+b}.$$

以上二公式中的前面两項的和就是齐次方程(162)的通解，这通解之值对 $t>t_0$ 永远是有界的。这些公式中最末一項是方程(166)的特解，根据 §49 末段所述規則求出的。若 $a>0$，則上面二

公式中的前二項，当 $t\to+\infty$ 时趋于 0，而方程(166)的解趋近于

$$\frac{Ae^{i\omega t}}{m(i\omega)^2+a(i\omega)+b}.$$

当 A 不变时，若 $m(i\omega)^2+a(i\omega)+b$ 愈小，則这函数的絕对值愈大。

现研究 $i\omega$ 是特征方程(164)的根的情形，即 $m(i\omega)^2+a(i\omega)+$ $+b=0$ 的情形。这只有 $a=0$ 时，方有可能，所以(166)式的通解是

$$x=C_1e^{i\omega t}+C_2e^{-i\omega t}+\frac{Ate^{i\omega t}}{2m(i\omega)+a},$$

这式首二項之和是(166)的齐次方程的通解，其値永远是有界的。最末一項就是根据 § 49 的規則求得的(166)式的特解，当 $t\to+\infty$ 时，它的絕对值无限增大。在这情形下，方程(161)的解 $x(t)$ 是振动的，并且它的振幅无穷增大，这现象在物理学中叫做"一質点的自由振动与外力間的共振现象"。由前面的討論可以看出，若一質点的自由振动的周期与外力的周期一样时，这现象方会發生。在有"共振现象"的物理系統中，經一定时間后，質点的振动能大到这样程度，以致系統遭到破坏。所以預料这共振现象的發生是很重要的。

習　題

1. 仔細討論 $a<0$ 的情形，即有負摩擦的振动。在很多物理过程中，如从外面供給能量，这种振动即可实现。

2. 求証：方程組(165)的零解的稳定性，由研究能量积分 $\frac{m}{2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\frac{b}{2}x^2$ 对时間的导数入手。

附 录

含一未知函数的一阶偏微分方程式

这种方程的理論的基本事实是：求它的所有的解的問題，可化为求常微分方程組的积分的問題。下面各节将專述这理論。

§ 53. 殆綫性偏微分方程式

在本节我們将研究比綫性方程稍广泛的一种方程，就是形状如下的方程：

$$\sum_{k=1}^{n} a_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)\frac{\partial u}{\partial x_k}+b(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)=0. \quad (167)$$

我們此处假定：未知函数 u 非綫性地包含在 $b(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)$ 內。設系数 $a_k(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在空間 $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ 的一个区域 G 內具有对所有的变数的連續一阶偏导数，而且

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2>0.$$

关于 $b(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)$ 我們将假定：当点 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 在区域 G 內，而且 $|u|<M$ 时，$b(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)$ 是确定的，而且对所有的变数都有連續一阶导数。特別是，若 $b(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)$ 是 u 的綫性函数，而且 u 的系数具有对所有的 x_k 的連續一阶偏导数，上述关于 b 的假定亦滿足。在这特殊情形下，方程(167)就叫綫性方程。

写出下面的常微分方程組：

$$\frac{dx_k}{ds}=\frac{a_k(x_1,\cdots,x_n)}{\sqrt{\sum_{m=1}^{n}a_m^2(x_1,\cdots,x_n)}},\quad k=1,2,\cdots,n. \tag{168}$$

由于对 a_k 所作的假定，方程(168)右端对于所有的 x_k 都有連續导数。所以在区域 G 的任一内点，有一条而且仅有一条这方程組的积分曲綫通过（此处 s 是参数，它等于积分曲綫的弧長）。这曲綫叫做方程(167)的特征曲綫。

唯一性定理 設函数 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 在区域 G 内滿足偏微分方程(167)，且假定它具有連續的一阶偏导数，則 u 在任一特征曲綫 H 的一段上（此处 $|u|<M$）所有的值，完全被这段特征綫上任意一定点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ 的 u 値所决定。

証 以 $\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}$ 除方程(167)的两端，并注意方程(168)，于是則得：

$$\sum_k\frac{a_k}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}\frac{\partial u}{\partial x_k}+\frac{b}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}=\sum_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{dx_k}{ds}+$$

$$+\frac{b}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}=\frac{du}{ds}+\frac{b}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}=0. \tag{169}$$

因为已假定了 u 的一阶偏导数連續，所以在上式中可以用 $\frac{du}{ds}$ 来代替 $\sum_k\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial x_k}{\partial s}$（参看菲赫金哥尔茨著，微积分学教程，第一卷，第二分册，369 頁，高等教育出版社，1958 年）。

設特征曲綫 H 經过区域 G 之某一定点 $(x_1^0,\cdots,x_n^0)$，并設 $|u(x_1^0,\cdots x_n^0)|<M$。則沿这特征曲綫有：

$$x_k=\varphi_k(s,x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0),\quad k=1,\cdots,n.$$

此处 φ_k 与它的一阶导数都是 s 与一切 x_i^0 的連續函数。把这些 x_k 的式子代入

$$\frac{b}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}$$

中，推得这函数 u 沿 H 满足下列的常微分方程式：

$$\frac{du}{ds}=\psi(s, u, x_1^0, \cdots x_n^0), \tag{170}$$

上式的 ψ 具有对所有变数的連續一阶偏导数。所以在此使 $|u|<<M$ 的 H 的一段上各点，u 的值完全被这綫段任何一定点的 u 值所决定，特别是，被点 $(x_1^0, \cdots x_n^0)$ 上的 u 值所决定。

存在定理　設 S 是在区域 G 的任一 $(n-1)$ 維的曲面，它有連續轉动的切平面。此外，更假定 S 与方程式(167)的任一特征曲綫都不相切。

設在 S 上給有任一函数 f，具有下列二性質：

1）f 的絕对值小于 M。

2）对曲面 S 上的任一点都有这样的邻域存在，在这邻域內 f 可以表为坐标 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 中的任意 $(n-1)$ 个坐标的函数；而且它具有对于这 $(n-1)$ 个坐标的連續一阶导数。

最后，假定有曲面 S 的一个邻域 R_0，具有下列性質：

1．R_0 包含在 G 內。

2．将經过曲面 S 的任一点的特征曲綫在 R_0 內向两端延長，决不会和 S 相遇；同时經过 R_0 的每一点只有一条这样的特征曲綫弧。

3．对于曲面 S 的任一点 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$，方程(170)中满足开始条件 $u(0)=f(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 的解可以沿着包含在 R_0 內的整个特征曲綫弧开拓，并且这解依絕对值保持小于 M。

于是我們将証明，在邻域 R_0 內有一个函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 存在，具有下列性質：

1）它对一切的 x_k 都有連續一阶导数；

2）它满足偏微分方程式(167)；

3）它的值在 S 上等于 f。

求满足这些条件的函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的問題，叫做方程(167)的葛西問題。

方程(167)的葛西問題的解的存在的証明　在与曲面 S 相交的每一特征綫 H 上，这样定出函数 u，使它在 H 上滿足方程(170)，并使它在曲面 S 与特征綫 H 之交点上取給定的函数 f 的值。一般說，函数 u 不可能在整条特征綫 H 上都这样地确定，因当沿 H 延拓 u 时，u 之値可能会超出了确定这函数 $b(x_1, \cdots, x_n, u)$ 的 u 的区域[①]，也可能 H 与 S 相交两次。但是由于本定理中的条件我們总可以在曲面 S 的整个邻域 R_0 上定出滿足上述条件的函数 u。下面只須証明所造的函数 $u(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 对一切的 x_k 都有連續偏导数；于是在 R_0 上，关系式

$$\sum_k \frac{du}{dx_k} \cdot \frac{dx_k}{ds} = \frac{du}{ds}$$

将成立，所以函数 u 不但滿足方程(170)[也就是滿足方程(169)]，而且也滿足方程(167)。

在証明 u 在邻域 R_0 内任意一点 $A^*(x_1^*, \cdots x_n^*)$ 都有对 $x_1, \cdots, x_n$ 的連續偏导数之前，我們将在这邻域引入新的曲綫坐标如下。以 H^* 表示那在 R_0 内經过 A^* 点的特征曲綫段（端点不算在曲綫段内）。

設这特征曲綫段与 S 相交于点 $A_0(x_1^0, x_2^0, \cdots x_n^0)$。为明确起見，假定曲面 S 在 A_0 点的切平面不与 Ox_n 軸平行（若所說的不是 Ox_n，而是其他任一坐标軸以下的討論仍然有效）。于是在 A_0 点附近之曲面 S 可用下列方程表示：

$$x_n = F(x_1, x_2, \cdots x_{n-1}),$$

上式的 F 对所有的变数都有連續导数。自另一方面看，既然 $\varphi_k(s,$

① 即 $|u| < M$ 的区域——譯者注。

$x_1^0, \cdots x_n^0$), $k=1, \cdots, n$, 有对 s 的連續导数(假定在 S 上 $s=0$), 而且有对 $x_1^0, \cdots, x_n^0$ 的連續导数(§ 30), 所以函数

$$\varphi_k(s, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0, F(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)) \equiv$$
$$\equiv \psi_k(s, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0), k=1, 2, \cdots, n,$$

亦有对 s 及 $x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0$ 之連續导数，我們将采取 $s, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0$ 为新坐标。現将証：函数組 $x_k=\psi_k(s, x_1^0 \cdots x_{n-1}^0)$, $k=1, \cdots, n$, 所成之雅谷比行列式之値到处必异于零。为了証此，先应注意此函数組必满足常微分方程組(168)。为了有簡便計，把这些方程簡写为下列形式：

$$\frac{dx_k}{ds}=\Phi_k(x_1 \cdots, x_n), \ k=1, \cdots, n.$$

把函数 ψ_k 代上式中之 x_k, 于是得下列含 $s, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0$ 之恒等式：

$$\frac{d\psi_k(s, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)}{ds} \equiv$$
$$\equiv \Phi_k(\psi_1(s, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0), \cdots, \psi_n(s, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)), k=1, \cdots, n. \tag{171}$$

因为函数 ψ_k 与 Φ_k 对所有变数都有連續偏导数，所以恒等式右端亦有对 s 与 $x_1^0, \cdots x_{n-1}^0$ 之連續偏导数，可見其左端也有对这些变数的連續偏导数。所以把等式(171)两端对 $s, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0$ 微分，并令

$$\frac{\partial \psi_k}{\partial s}=D_0\psi_k, \ \frac{\partial \psi_k}{\partial x_p^0}=D_p\psi_k, \ p=1, \cdots, n-1,$$

即得① 下式：

$$\frac{dD_p\psi_k}{ds} \equiv \sum_{r=1} \frac{\partial \Phi_k}{\partial \psi_r} D_p\psi_r, \quad p=0, 1, \cdots, n-1, k=1, \cdots, n$$

此处系数 $\frac{\partial \Phi_k}{\partial \psi_r}$ 同 p 无关②。这样我們推得函数 $D_p\psi_r$, $(r=1, \cdots, n)$

① d, D 二微分运算所以可以交换是根据数学分析中証明的定理，此定理是：設函数 f 是确定于 (x, y) 平面一区域 G 内，且設 f 有連續的 f'_x, f'_y 与 f''_{xy}, 則 f''_{yx} 在 G 内到处等于 f''_{xy}。

② 即不論 $p=0, 1, \cdots n-1$, 系数 $\frac{\partial \Phi_k}{\partial \psi_r}$ 总是一样的——譯者注。

对一切的 $p(p=0,1,\cdots,n-1)$，满足同一的綫性齐次常微分方程組。所以为了使行列式 $|D_p\psi_r|$ 之值在整个綫段 H^* 上异于 0，其必要及充分条件是①：行列式在 A_0 点之值异于 0，即在曲面 S 与这特征綫之交点之值异于 0。可是在这 A_0 点有

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial x_1^0}, & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_2^0}, & \cdots, & \frac{\partial\psi_1}{\partial x_{n-1}^0}, & \frac{\partial\psi_1}{\partial s} \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial x_1^0}, & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_2^0}, & \cdots, & \frac{\partial\psi_2}{\partial x_{n-1}^0}, & \frac{\partial\psi_2}{\partial s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial x_1^0}, & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_2^0}, & \cdots, & \frac{\partial\psi_n}{\partial x_{n-1}^0}, & \frac{\partial\psi_n}{\partial s} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0, & \cdots, & 0, & \frac{\partial\psi_1}{\partial s} \\ 0, & 1, & \cdots, & 0, & \frac{\partial\psi_2}{\partial s} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_1^0}, & \frac{\partial F}{\partial x_2^0}, & \cdots, & \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}^0}, & \frac{\partial\psi_n}{\partial s} \end{vmatrix} =$$

$$= -\frac{\partial F}{\partial x_1^0}\frac{\partial\psi_1}{\partial s} - \cdots - \frac{\partial F}{\partial x_{n-1}^0}\frac{\partial\psi_{n-1}}{\partial s} + \frac{\partial\psi_n}{\partial s}.$$

这式是与曲面 S 在 A_0 点的法綫同特征綫 H^* 在 A_0 点的切綫間夹角的余弦乘上一个不等于 0 的因子。(何故?) 据假設这余弦异于 0，这就是說，雅谷比行列式 $|D_p\psi_r|$ 之値在 H^* 上处处异于 0。

所以由隐函数定理推得：在区域 R_0 內，方程組

$$x_k=\psi_k(s, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0), \; k=1, \cdots, n$$

能对 $s, x_1^0, \cdots x_{n-1}^0$ 單値地解出。在这时旣然函数 ψ_k 对所有的变数都具有連續偏导数，所以变数 $s, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0$ 亦必有对 $x_1, \cdots, x_n$ 的連續偏导数。所以要証明以前我們在区域 R_0 上所作之函数 u 在区域 R_0 內有对所有的 x_k 之連續偏导数，只須証明，若在此区域內把 u 看作是 $s, x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0$ 之函数，則 u 必有对 $s, x_1^0, \cdots x_{n-1}^0$ 的連續偏导数。为了証此，請注意下列事实。

以函数 $F(x_1^0, \cdots, x_{n-1}^0)$ 替代(170)式右端之 x_n^0，我們推得函数 u 滿足形状如下的方程：

① 此处利用了 §35 的定理之推論——譯者注。

$$\frac{du}{ds}=\Psi(s,\ u,\ x_1^0,\ \cdots,\ x_{n-1}^0),$$

此处Ψ对所有变数都有連續偏导数。此外，当$s=0$时（即在曲面S上时）函数u的开始值，据假定具有对$x_1^0,\cdots,x_{n-1}^0$的連續偏导数。所以，应用§20的已知的定理，我們推得，我們所造出的函数u在区域R_0內，亦有对$s,\ x_1^0,\ \cdots x_{n-1}^0$的連續偏导数。

附注 1. 設曲面S与在S上的函数f滿足这存在定理中的条件。于是極易証实：滿足本定理的条件的邻域R_0必存在，为此，只須取那些經过S上的点的特征綫足够小的弧段所构成的区域作为R_0。这样，就保証了在S的足够狹的邻域內，寇西問題的解的存在。

应注意：曲面S可以是閉曲面，也可以不是閉曲面；在不是閉曲面的情况下，S的边不算在S內。

附注 2. 若不假定方程(167)左端所含a_k与b有連續偏导数，則这方程可能沒有任何連續偏导数的解u。下面的方程可以作为这样的例子(Н. М. Гюнтер)。

設$b(z)$是对z到处无导数的連續函数（外氏 Weierstrass 函数），那么下面之方程：

$$\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}=b(x-y), \tag{172}$$

就不会有具連續偏导数的解。为了証明，令$x+y=t$，及$x-y=z$，而引进新自变数t与z以代替x与y。

假定在$(x,\ y)$平面的某区域內有方程(172)的解$u(x,\ y)$[1]存在，且假定u具有对x与y的連續偏导数。据通常的公式，以$\frac{\partial u}{\partial t}$与$\frac{\partial u}{\partial z}$表出$\frac{\partial u}{\partial x}$与$\frac{\partial u}{\partial y}$，則得：

① 方程(172)的解即一函数$u(x,\ y)$，它在我們所考虑的区域內对x，y都有偏导数，并且滿足这个方程式。

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{2}b(z).$$

这方程的所有的解都可用下式表示:

$$u(t, z)=\frac{1}{2}b(z)t+c(z), \tag{173}$$

式中 $c(z)$ 是 z 的任意函数,由(173)式知,

$$u(x+y, x-y)=u^*(x, y)=\frac{1}{2}(x+y)b(x-y)+c(x-y).$$

但極易証明:在 (x, y) 平面上决不会有这样的区域,在这区域内由上面公式定出的函数 u^* 会有对 x 与 y 的偏导数。为了証明此事,請注意下列事实:倘使說在 (x, y) 与 $(x+\varepsilon, y+\varepsilon)$ 二点,u^* 的偏导数存在,則函数

$$u^*(x+\varepsilon, y+\varepsilon)-u^*(x, y)=\varepsilon b(x-y)$$

在点 (x, y) 亦必有偏导数,但由于 $b(z)$ 是不会有导数,$\varepsilon b(x-y)$ 有偏导数是不可能的事。这就是說,函数 $u^*(x, y)$ 不能滿足方程(172),可見原假定不真确。

又可以証明:① 甚至不假定这解有連續偏导数,方程(172)的一切連續解,亦必作(173)形式。所以我們得結論:方程(172)在任何区域內都不会有連續解。

習 題

1. 如果开始值給在特征曲綫上,則方程式(167)或者沒有解,或者有无限个解。当 $n=2$ 时这两种情形分別在什么时候出現?

2. 求証:若 $n=2$,而区域是單連通的,則綫性方程的解都可以在任一由 S 作出的諸特征綫的点所构成的区域上开拓。如果区域不是單連通的,这就不一定可能了(試举例)。注意在 $n>2$ 的时

① 参看 Baire, Sur les fonctions de variables réelles, Annali di mathematica (3), 卷 3, 1899, 第 101—121 頁。

候，即使在單連通区域也不一定能够这样。

§ 54. 常微分方程組的第一积分

由上节講的推得下面的結論：常微分方程組（168）与方程式

$$\frac{du}{ds}+\frac{b}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}=0$$

所共同构成的常微分方程組，在空間 $(x_1, \cdots, x_n, u)$ 内确定一积分曲綫族，方程(167)的积分曲面

$$u=u(x_1, \cdots, x_n)$$

就由这族中的曲綫組成（s 看作参变数）。現把这組常微分方程改写为对称的形式如下：

$$\frac{dx_1}{a_1}=\frac{dx_2}{a_2}=\cdots=\frac{dx_n}{a_n}=\frac{du}{-b}. \tag{174}$$

有时很容易找到不恒等于常数的一个函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n, u)$，它在方程組(174)的任何一条积分曲綫上都能保持常数值。这样的函数 φ 叫做方程組(174)的第一积分。

設用某种方法，我們已找到方程組(174)的 n 个第一积分

$$\varphi_k(x_1, \cdots, x_n, u), \quad k=1, 2, \cdots, n,$$

且假定在所考察的空間 $(x_1, \cdots x_n, u)$ 的区域 G_u 内每一点，矩陣

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial x_n}, \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial u} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_1}, \cdots, \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial x_n}, \dfrac{\partial\varphi_n}{\partial u} \end{matrix}\right\|$$

至少有一 n 阶子式的值异于 0，于是方程組

$$\varphi_k(x_1, \cdots, x_n, u)=\varphi_k(x_1^0, \cdots x_n^0, u^0), \; k=1, \cdots, n, \tag{175}$$

在区域 G_u 内規定某一曲綫 L，这是因为函数組（175）在这区域每一点的邻域内能确定某些 n 个坐标为第 $n+1$ 个坐标的函数。同

§9所討論的类似(参看圖6),一般說,此曲綫可能由数段构成。我們再假定:在区域 G_u 內(175)之每一曲綫仅由一段构成。根据第一积分的定义,在方程組(174)的經过定点 $(x_1^0, \cdots x_n^0, u^0)$ 的积分曲綫上,函数 $\varphi_k(x_1, \cdots x_n, u)$ 取常数值 $\varphi_k(x_1^0, \cdots, x_n^0, u^0)$。所以这积分曲綫在区域 G_u 內完全与曲綫(175)重合。由此推得:方程組

$$\varphi_k(x_1, \cdots, x_n, u) = C_k \quad k=1, \cdots, n \tag{176}$$

是方程(174)在区域 G_u 之通积分。为什么呢?因为选擇常数 C_k 之值为 $\varphi_k(x_1^0, \cdots, x_n^0, u^0)$,我們得到方程組(174)的經过区域 G_u 之任一点 $(x_1^0, \cdots, x_n^0, u^0)$ 之积分曲綫,就是,可以得到方程組(174)之任一积分曲綫。

現在要找方程(167)經过 $(n-1)$ 維的曲面

$$\left.\begin{aligned} x_k &= \psi_k(v_1, \cdots, v_{n-1}), \ k=1, \cdots, n \\ u &= \psi(v_1, \cdots, v_{n-1}) \end{aligned}\right\} \tag{177}$$

之积分曲面。

同时假定:

1) 所有的函数 ψ_k 和 ψ 都具有对所有的 v 之連續偏导数。

2) 行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial\psi_1}{\partial v_1}, & \cdots, & \frac{\partial\psi_1}{\partial v_{n-1}}, & a_1(\psi_1, \cdots, \psi_n) \\ \frac{\partial\psi_2}{\partial v_1}, & \cdots, & \frac{\partial\psi_2}{\partial v_{n-1}}, & a_2(\psi_1, \cdots, \psi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\psi_n}{\partial v_1}, & \cdots, & \frac{\partial\psi_n}{\partial v_{n-1}}, & a_n(\psi_1, \cdots, \psi_n) \end{vmatrix}$$

到处异于0。自几何上看,条件2)可解释为如下之条件,即在 $(x_1, \cdots, x_n)$ 空間內的曲面

$$x_k = \psi_k(v_1, \cdots, v_{n-1}) \quad k=1, \cdots, n$$

与方程(167)的特征綫处处不相切。

于是据§53的基本定理，在曲面(177)的某一个邻域内，方程(167)有一个而且只有一个积分曲面，經过$(n-1)$維的曲面(177)。既然根据前节，这积分曲面是由方程組(174)的經过曲面(177)上的点的积分曲綫构成的，所以将$\psi_1(v_1, \cdots, v_{n-1}), \cdots, \psi_n(v_1, \cdots, v_{n-1}), \psi(v_1, \cdots, v_{n-1})$依次替代方程(175)的右端中的$x_1^0, \cdots x_n^0, u^0$，即得所要找的积分曲面之参变数方程($v_1, \cdots, v_{n-1}$是参变数)。于是我們得

$$\varphi_k(x_1, \cdots, x_n, u)=\varphi_k(\psi_1, \cdots, \psi_n, \psi)=\Phi_k(v_1, v_2, \cdots, v_{n-1}),$$
$$k=1, \cdots, n.$$

附注 方程組(174)在区域G_u^*的任何第一积分$\varphi(x_1, \cdots, x_n, u)$必是这些$\varphi_k(x_1, \cdots, x_n, u)$, $k=1, 2, \cdots, n$的函数。因为根据第一积分之定义知，第一积分$\varphi(x_1, \cdots, x_n, u)$在方程組(174)之任一积分曲綫上应当保持常数值。但每条这样的积分曲綫，根据前面講的，完全由函数$\varphi_k(x_1, \cdots, x_n, u)$ $k=1, 2, \cdots, n$在曲綫上的值决定。

例 求方程

$$2\frac{\partial u}{\partial x_1}+3\frac{\partial u}{\partial x_2}+5=0 \tag{167'}$$

經过直綫

$$x_1=a_1v, \quad x_2=a_2v, \quad x_3=a_3v$$

之积分曲面，此处常数a_1, a_2，选擇得使行列式

$$\begin{vmatrix} a_1 & 2 \\ a_2 & 3 \end{vmatrix} \neq 0. \tag{178}$$

方程組(174)現作如下形式：

$$\frac{dx_1}{2}=\frac{dx_2}{3}=\frac{du}{-5}. \tag{174'}$$

积分下列二方程：

$$\frac{dx_1}{2}=\frac{dx_2}{3},$$

$$\frac{dx_1}{2}=\frac{du}{-5},$$

即得方程組(174′)的两个第一积分:

$$\varphi_1 = 3x_1 - 2x_2, \quad \varphi_2 = 5x_1 + 2u.$$

又因行列式

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_1} & \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以方程

$$3x_1 - 2x_2 = C_1 \text{ 与 } 5x_1 + 2u = C_2 \tag{176′}$$

是方程(174′)在整个(x_1, x_2, u)空間的通积分。当常数C_1和C_2取任意值时,方程組(176′)定出仅由一段組成的綫(直綫),所以我們想要找的方程(167′)的积分曲面的方程可以写为:

$$3x_1 - 2x_2 = 3a_1v - 2a_2v,$$

$$5x_1 + 2u = 5a_1v + 2a_3v.$$

自此二方程中能消去 v。为了消去 v,先自第一方程解出 v,由于条件(178)这是可以的,再将求得 v 之值代入第二方程,我們就消去了 v。

習　題

求証: 一般說来,已知 k 个函数无关的第一积分,就可以把方程組(86)中的未知函数减少 k 个。

§ 55. 拟綫性偏微分方程式①

形式如下的偏微分方程式:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(x_1, \cdots, x_n, u)\frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x_1, \cdots, x_n, u) = 0. \tag{179}$$

① 俄文是 Квазилинейный уравнение——譯者注。

叫做拟綫性偏微分方程式。这种方程按照 u 的导数来說是綫性的，可是按 u 本身来說不是綫性的。我們将假定 $a_i(x_1, \cdots, x_n, u)$ 与 $b(x_1, \cdots, x_n, u)$ 在 $(x_1, \cdots, x_n, u)$ 在空間 $(x_1, \cdots x_n, u)$ 某一区域內对所有的变数都有連續偏导数，而且假定

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2(x_1, \cdots, x_n, u) > 0.$$

設我們已知这方程的任何一个解 $u(x_1, \cdots, x_n)$，而且假設这解有連續的一阶偏导数。現造出輔助常微分方程組如下：

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{a_i(x_1, \cdots, x_n, u(x_1, \cdots, x_n))}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \cdots, x_n, u(x_1, \cdots, x_n))}}, \quad i=1, 2, \cdots, n \tag{180}$$

这里 s 是参变数，它等于积分曲綫在平面 $u=0$ 上的投影的弧長。把这解 $u(x_1, \cdots, x_n)$ 代入方程(179)，并把所得之恒等式的两端除以

$$\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \cdots, x_n, u(x_1, \cdots, x_n))},$$

于是得如下的恒等式：

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i(x_1, \cdots, x_n, u(x_1, \cdots, x_n))}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \cdots, x_n, u(x_1, \cdots, x_n))}} \frac{\partial u}{\partial x_i} + \frac{b(x_1, \cdots, x_n, u)}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \cdots, x_n, u)}} =$$

$$= \sum_i \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{ds} + \frac{b(x_1, \cdots, x_n, u)}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \cdots, x_n, u)}} =$$

$$= \frac{du}{ds} + \frac{b(x_1, \cdots, x_n, u)}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \cdots, x_n, u)}} = 0.$$

可見，当函数 a_i 含 u 时，$\sum_i \frac{a_i}{\sqrt{\sum_j a_j^2}} \frac{\partial u}{\partial x_i}$ 亦可看作 u 的沿某一方向的导数。可是在現在的情形，这方向不但与 $x_1, \cdots, x_n$ 有关，也与 u 有关。

方程(179)的辜西問題，象方程(167)一样，可以叙述如下：試求方程(179)的这样的解，使这解在$(x_1, \cdots, x_n)$空間的$(n-1)$維曲面 S 上取指定的值。更一般的問題提法是：求方程(179)的 n 維积分曲面 T，使 T 經过$(x_1, \cdots, x_n, u)$空間的已給的$(n-1)$維曲面 S^*。①

在下述的假定下，我們首先将証明方程(179)在足够接近 S^* 处的解的唯一性。假定曲面 S^* 沒有这样的切綫，它在平面 $u=0$ 上的投影的方向余弦会与方程(180)所規定的方向余弦一样[就是(180)的右端在 S^* 上之値，由代入切点坐标而确定的]。为了証唯一性，我們将指出一种方法，只要假定这解是存在的，用这种方法就能唯一地定出辜西問題的解。这方法能实际地解决拟綫性方程的辜西問題。我們前已証明方程(179)的具有連續偏导数的解必滿足下列方程組：

$$\frac{dx_i}{ds} = \frac{a_i(x_1, \cdots, x_n, u)}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \cdots, x_n, u)}}, \quad i=1, \cdots, n,$$

$$\frac{du}{ds} = \frac{-b(x_1, \cdots, x_n, u)}{\sqrt{\sum_j a_j^2(x_1, \cdots, x_n, u)}}. \tag{181}$$

在曲面 S^* 上的每一点 $(x_1^0, \cdots, x_n^0, u^0)$ 的 x_i 与 u 的开始值是已知的。根据这些开始值，方程組(181)唯一地定出 u 与一切的 x_i 作为

① 在这里 T 可能用 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的多值函数表示。可是在 T 上任意一点的充分邻近处，T 应当可用一滿足方程(179)的單值可微函数 $u(x_1 \cdots x_n)$ 表示。例如，T 的形状可能是一个以 Ou 为軸的螺旋面，但除去軸的某邻域。

s 的函数。曲綫

$$x_i=x_i(s, x_1^0, \cdots, x_n^0, u^0),\ i=1, \cdots, n,$$
$$u=u(s, x_1^0, \cdots, x_n^0, u^0)$$

叫做偏微分方程(179)的特征曲綫。可見，对于充分小的一片曲面 S^*，在它的$(x_1, \cdots, x_n)$平面上的投影的邻域內(这邻域由与 S^* 相交的特征綫的投影布滿)，我們能唯一地定出 u，而且这邻域的'闊度'也不会縮小到0；事实上，我們有

1) S^*沒有与 Ou 軸平行的切綫，此因，在曲面 T 上 $\dfrac{\partial u}{\partial x_i}(i=1, \cdots, n)$之值是有限的(参看第1頁第1段)，$\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$的存在則是根据假設。

2) S^* 不会有这样切綫，它在平面 $u=0$ 上的投影有方程(180)所規定的方向余弦。事实上，这就是我們假定的条件。

可見，任意两个通过 S^* 之积分曲面必在 S^* 的某一邻域內重合。

倘使我們能証明剛才根据开始値作出的函数 u 有連續的一阶偏导数，那么如果滿足剛才所說的条件(即用波紋綫标出的条件)，我們就証明了方程(179)的柯西問題的解的存在。为了証此，我們必須再添加一些假設。假定曲面 S^*(或者是在問題的第一种提法中的曲面 S)及在它上面給定的函数 u 都是足够平滑的。我們不拟詳述这証明，因为在下面一节我們将詳細地証明更一般的定理。

§56. 非綫性偏微分方程式

現研究下面的方程式：

$$F\left(x_1, \cdots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)=0, \tag{182}$$

并且假定函数 F 在$(2n+1)$維空間的某区域內具有对所有的变数的連續的二阶偏导数，而且假定：

$$\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\partial F}{\partial\left\{\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\}}\right]^2>0. \tag{183}$$

为簡写起見，我們令

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}=X_i,\quad \frac{\partial F}{\partial u}=U,\quad \frac{\partial u}{\partial x_i}=p_i,\quad \frac{\partial F}{\partial p_i}=P_i.$$

我們不再叙述关于方程(182)的葛西問題，就直接研究它的解的唯一性問題。由此可以得到葛西問題的解的实际求法。

假定 $u(x_1,\cdots,x_n)$ 是方程(182)的有連續二階偏导数的任意一个解。把这解代入方程(182)，并把所得的恒等式，对每一个 $x_k(k=1,\cdots,n)$ 微分后，即得

$$\sum_{i=1}^{n}P_i\frac{\partial p_i}{\partial x_k}+X_k+Up_k=\sum_{i=1}^{n}P_i\frac{\partial p_k}{\partial x_i}+X_k+Up_k=0. \tag{184}$$

这些方程对 p_i 說是拟綫性的。在方程組

$$\frac{dx_i}{ds}=\frac{P_i}{\sqrt{\sum\limits_k P_k^2}}\qquad i=1,\cdots,n \tag{185}$$

的右端，把解 $u(x_1,\cdots,x_n)$ 与它的导数替代 u 与相应的 p_k，并在 $(x_1,\cdots,x_n)$ 空間內造出(185)的积分曲綫。于是方程(184)可改写为如下之形式：

$$\frac{dp_i}{ds}=-\frac{X_i+Up_i}{\sqrt{\sum P_k^2}}.\qquad i=1,\cdots,n \tag{186}$$

最后，讓我們求 $u(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 沿方程組(185)所确定的方向 s 的导数，我們得

$$\frac{du}{ds}=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial u}{\partial x_i}\cdot\frac{dx_i}{ds}=\sum_{i=1}^{n}\frac{P_ip_i}{\sqrt{\sum P_k^2}}. \tag{187}$$

如果指定了 x_i, p_i 与 u 的开始値，由方程(185)、(186)、(187)共同构成的方程組就能把 x_i, p_i 与 u, 作为 s 的函数單値地定出。这方程組在空間$(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n)$的积分曲綫叫作方程(182)的**特征綫**；它仅与这方程(182)有关①。

設指定 u 的开始値的曲面 S 是由下列方程式：

$$x_i = x_i(v_1, \cdots, v_{n-1}), \quad i=1, \cdots, n$$

表示的。于是在 S 上，u 亦可看作 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 的函数。

我們将假定：函数 $x_i(v_1, \cdots, v_{n-1})$ 与 $u(v_1, \cdots, v_{n-1})$ 与它們对 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 的二阶偏导数都是連續的；而且假定在曲面 S 上的每一点上，矩陣

$$\left\|\begin{matrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial v_1} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial v_1} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots \\ \dfrac{\partial x_1}{\partial v_{n-1}} & \cdots\cdots & \dfrac{\partial x_n}{\partial v_{n-1}} \end{matrix}\right\|$$

至少有一个$(n-1)$阶的子式的値不等于 0。

我們即将看出，这些开始条件将在曲面 S 上确定出 p_i 的値，不錯，一般說，所得的 p_i 値不是單値的。事实上，在等式 $u=u(x_1, \cdots, x_n)$ 中用以 v 表出的 u 的式子及所有的 x 的式子替入，則这等式变成了一个恒等式。微分这恒等式，則得

$$\sum_{i=1}^{n} p_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} = \frac{\partial u}{\partial v_k} \quad (k=1, \cdots, n-1) \tag{188}$$

(此处的 p_i 当然是在 S 上取的)。自另一方面看，在 S 上恒等式(182)应成立。自它得

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n) = 0, \tag{189}$$

① 这些曲綫在平面$(x_1, \cdots, x_n)$上或在平面$(x_1, \cdots, x_n, u)$上的投影有时也叫特征綫。

此处应該用 v 表出的式子来代替 $x_1, \cdots, x_n, u$。

关系式(188)与(189)是 n 个方程式的方程組，它的未知函数 $p_1, \cdots, p_n$ 是以 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 为变数的。所以为了应用隐函数定理，对于 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 所有的考虑的值，即在 S 上处处都必須是

$$\begin{vmatrix} P_1, & P_2, & \cdots, & P_n \\ \frac{\partial x_1}{\partial v_1}, & \frac{\partial x_2}{\partial v_1}, & \cdots, & \frac{\partial x_n}{\partial v_1} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial x_1}{\partial v_{n-1}}, & \frac{\partial x_2}{\partial v_{n-1}}, & \cdots, & \frac{\partial x_n}{\partial v_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{190}$$

自此出發，首先我們将認为，在 S 上不但給定了 u 的值，而且也已选定了連續依賴于 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 的 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 的值，使得它們滿足关系式(188)—(190)。于是自隐函数定理推得 $p_1, \cdots, p_n$ 有对 $v_1, \cdots, v_{n-1}$ 的連續偏导数。

应指出：由于方程(189)是非綫性的，給定 u 后，p_i 在 S 上之值一般說不是單值的。可是如滿足前段所述在 S 上的条件，而且在曲面 S 上的某一点 A 上有 $p_i^{(1)}(A)=p_i^{(2)}(A)$, $(i=1\cdots, n)$, 則在 S 上到处有 $p_i^{(1)}\equiv p_i^{(2)}$, $(i=1, \cdots, n)$; 这根据条件(190)从隐函数定理可以証明之。

条件(190)的几何意义是：設 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 是曲面 S 上的任意一点，則經过点 $x_1^0, \cdots, x_n^0, u^0, p_1^0, \cdots, p_n^0$ 的特征綫在平面 $x_1, \cdots, x_n$ 上的投影决不在点 $(x_1^0, \cdots, x_n^0)$ 与曲面 S 相切(此处之 $u^0, p_1^0, \cdots, p_n^0$ 是从开始条件定得的)。試驗証之。

自方程組(185)—(187)的解的唯一性，推出highlight西問題的解的唯一性。事实上，因为我們假定这函数 F 对所有的变数都具有連續二阶偏导数，由于条件(183)、方程(185)的右端具有对所有的变数的連續一阶偏导数，这就保証了方程組(185)—(187)的解的唯一性。

現討論葦西問題的解的存在問題，我們假定：曲面 S 与在 S 上給定的函数 u 滿足在 200 頁上以波紋綫标出的条件，此外，并假定在 S 上选定的 $p_1, \cdots, p_n$，在 S 上到处滿足条件(188)—(190)。

在这些假定下要証明解的存在，我們只要証明：根据开始値 $x_i(s, v_1, \cdots, v_{n-1}), u(s, v_1 \cdots, v_{n-1}), p_i(s, v_1, \cdots, v_{n-1})$（我們假定在 S 上，$s=0$）所造出的方程組(185)—(187)的解具有下列三性質：

1) 方程組

$$x_i = x_i(s, v_1, \cdots, v_{n-1}), \quad i = 1, \cdots, n,$$

在曲面 S 的某一邻域內，能按 $s, v_1, \cdots, v_{n-1}$ 單値地解出；而且这些解都有对 $x_1, \cdots, x_n$ 的連續导数。于是在曲面 S 的这邻域內，变数 $s, v_1, \cdots, v_{n-1}$ 可以取做曲綫坐标。因为我們已假定在 S 上給定的函数 $x_i(v_1, \cdots, v_{n-1})$ 与 $u(v_1, \cdots, v_{n-1})$ 对所有的 v_i 有連續二阶偏导数，并且因方程(185)—(187)的右端对所有的变数有連續偏导数，所以我們所造的解必有对 $s, v_1, \cdots, v_{n-1}$ 的連續偏导数。因此，可見在 $u=(s, v_1, \cdots, v_{n-1})$ 的式子中把 $s, v_1, \cdots, v_{n-1}$ 用它們的以 $x_1, \cdots, x_n$ 表出的式子代替后，就知 u 是 $x_1, \cdots, x_n$ 的函数而且对 $x_1, \cdots, x_n$ 有連續一阶导数。

2) 函数 $x_i(s, v_1, \cdots, v_{n-1}), u(s, v_1, \cdots, v_{n-1}), p_i(s, v_1, \cdots, v_{n-1})$ 在 S 的所考慮的邻域內能到处滿足方程(189)。

3)
$$p_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

要証第一性質，我們只須証明：对充分小的 $|s|$ 値，行列式

$$\left|\frac{\partial x_i}{\partial v_k}\right| \quad i, k = 1, \cdots, n \tag{191}$$

之値不等于 0（我們令 $v_n = s$）。旣然行列式的元素对于 $s, v_1, \cdots, v_{n-1}$ 都是連續的，所以只須証明在曲面 S 上这行列式之値不等于 0。但这結論可以从下面的事实推出：若以曲面 S 上任意一点作为开始点，沿坐标曲綫 $s, v_1, \cdots, v_{n-1}$ 的方向作矢量，那么这 n 个矢量

所构成的平行多面体体积，即行列式(191)，根据条件(190)是不等于0的。

第二性質在曲面 S 上显然是正确的：因为选择 $p_1, \cdots, p_n$ 时我們就这样选择使它們能滿足方程 (189)。为了証明不但在曲面 S 上(就是当 $s=0$ 时)，而且对于一切充分小的 s，这关系也都成立。我們将証明：倘使以方程組(185)—(187)的解 $x_i(s, v_1, \cdots, v_{n-1})$，$u(s, v_1, \cdots, v_{n-1})$，$p_i(s, v_1, \cdots, v_{n-1})$替代这方程(189)左端中的 x_i，u，p_i，則替代的結果将与 s 无关。实則，

$$\frac{dF}{ds}=\sum_i X_i\frac{dx_i}{ds}+\sum P_i\frac{dp_i}{ds}+U\frac{du}{ds}.$$

以(185)—(187)諸式的右端替代上式的$\frac{dx_i}{ds}, \frac{dp_i}{ds}, \frac{du}{ds}$，結果恒等于0。由此知(189)式成立。

在証第三性質$\left(就是 p_i=\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)$之前，我們首先証明：在我們所考虑的曲面 S 的邻域內：

$$\frac{\partial u}{\partial v_k}-\sum_i p_i\frac{\partial x_i}{\partial v_k}=0, \quad k=1, 2, \cdots, n(v_n\equiv s). \tag{192}$$

当 $k=n$ 时，由于方程(185)，方程

$$\frac{\partial x_i}{\partial v_n}=\frac{P_i}{\sqrt{\sum P_k^2}}, \quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

是正确的，所以(192)中 $k=n$ 时的方程与方程(185)相同，所以(192)中 $k=n$ 时的等式成立。关于(192)中其他方程($k=1, \cdots, n-1$ 时)，我們仅知道它們当 $s=0$ 时是正确的，因为 p_i 在曲面 S 上的开始值已經选擇得使滿足关系式(188)。

为了証明这些方程对于其他的 s 值亦必滿足，令

$$U_k\equiv\frac{\partial u}{\partial v_k}-\sum p_i\frac{\partial x_i}{\partial v_k},$$

并求出$\frac{dU_k}{ds}$.

对s微分U_k是可以的。因为正如我們前面指出过的，我們作出的方程組(185)—(187)的解具有对$s, v_1, \cdots, v_{n-1}$的連續偏导数，倘使把这些解代入(185)—(186)，那么所得恒等式的右端亦必有对$v_k(k=1, \cdots n)$的連續偏导数。这就是說，它的左端亦同样有对v_k的連續偏导数。也就是說：偏导数

$$\frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial v_k}, \frac{\partial^2 u}{\partial s \partial v_k} \quad (k=1, \cdots, n-1)$$

存在，而且是連續的。

于是
$$\frac{dU_k}{ds}=\frac{\partial^2 u}{\partial v_k \partial s}-\sum_i \frac{\partial p_i}{\partial s} \cdot \frac{\partial x_i}{\partial v_k}-\sum_i p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial v_k \partial s}. \tag{193}$$

因为剛才已証明恒等式

$$\frac{\partial u}{\partial s}-\sum_i p_i \frac{\partial x_i}{\partial s} \equiv 0$$

对于$s, v_1, \cdots, v_{n-1}$的一切所考虑的値都是眞确的，所以現在可以将它对v_k微分，于是得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial s \partial v_k}-\sum_i \frac{\partial p_i}{\partial v_k} \frac{\partial x_i}{\partial s}-\sum_i p_i \frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial v_k} \equiv 0. \tag{194}$$

自(193)逐項減去(194)，即得

$$\frac{dU_k}{ds}=\sum_i \frac{\partial p_i}{\partial v_k} \frac{\partial x_i}{\partial s}-\sum_i \frac{\partial p_i}{\partial s} \frac{\partial x_i}{\partial v_k}.$$

若再利用等式(185)与(186)，可以把上式改写为：

$$\frac{dU_k}{ds}=\sum_i \frac{\partial p_i}{\partial v_k} \frac{P_i}{\sqrt{\sum P_i^2}}+\sum_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k} \frac{X_i+U p_i}{\sqrt{\sum P_i^2}}. \tag{195}$$

把上面已証明的恒等式

$$F(x_1, \cdots, x_n, u, p_1, \cdots, p_n) \equiv 0$$

对 v_k 微分，我們得

$$\sum_i X_i \frac{\partial x_i}{\partial v_k}+\sum_i P_i \frac{\partial p_i}{\partial v_k}+U\frac{\partial u}{\partial v_k}=0.$$

把上式的两端都以$\sqrt{\sum P^2}$除后，再自(195)式中减去，于是得：

$$\frac{dU_k}{ds}=-\frac{U}{\sqrt{\sum P_i^2}}\left(\frac{\partial u}{\partial v_k}-\sum_i p_i\frac{\partial x_i}{\partial v_k}\right)=-\frac{U\cdot U_k}{\sqrt{\sum P_i^2}}.$$

所以

$$U_k(s)=U_k(0)\cdot e^{-\int_0^s \frac{U}{\sqrt{\Sigma P_i^2}}ds}.$$

既然 $U_k(0)=0$, 由上式知对于 S 的所有其他的值，都有 $U_k(s)=0$。

这样，我們証明了，在曲面 S 整个所考慮的邻域內，下式成立：

$$\frac{\partial u}{\partial v_k}=\sum_{i=1}^n p_i\frac{\partial x_i}{\partial v_k},\quad k=1,\cdots,n.$$

現将証$\frac{\partial u}{\partial x_k}=p_k$。为了証明此事实，請注意

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_k \frac{\partial u}{\partial v_k}\cdot\frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

把这式中的$\frac{\partial u}{\partial v_k}$，用由前一恒等式得出的值 $\sum_{i=1}^n p_i\frac{\partial x_i}{\partial v_k}$ 来替代，即得：

$$\frac{\partial u}{\partial x_i}=\sum_{k,s=1}^n p_s\frac{\partial x_s}{\partial v_k}\frac{\partial v_k}{\partial x_i}=\sum_s p_s\frac{\partial x_s}{\partial x_i}.$$

因为当 $i\neq s$ 时，$\frac{\partial x_s}{\partial x_i}=0$，而$\frac{\partial x_i}{\partial x_i}=1$，所以

$$\sum_s p_s\frac{\partial x_s}{\partial x_i}=p_i,\ 即\ \frac{\partial u}{\partial x_i}=p_i.$$

附注 我們也可以引入新的参变数 t，以代替特征綫在$(x_1,\cdots,$

x_n)平面上的投影的弧長 s; s 与 t 有下列的关系:

$$ds=\sqrt{\sum P_k^2}\,dt.$$

于是方程組(185)—(187)又可写为 $\frac{\partial x_i}{\partial t}=P_i$ 等等。

例　求偏微分方程

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x_2}\right)^2-1=0 \tag{196}$$

經过圓周 $x_1^2+x_2^2=1$, $u=0$ 的解。

引入参变数 v, 把圓周的方程改写为:

$$x_1=\sin v,\ x_2=\cos v,\ u=0. \tag{197}$$

于是方程(185)—(187)作下列形式:

$$\frac{dx_1}{2p_1}=\frac{dx_2}{2p_2}=\frac{du}{2(p_1^2+p_2^2)}=\frac{dp_1}{0}=\frac{dp_2}{0}=dt. \tag{198}$$

自上式最后二方程求得:

$$p_1=C_1,\ p_2=C_2,$$

此处 C_1, C_2 是常数。把它們代入(198)的前面三个方程,求得:

$$x_1=2C_1t+C_3;\ x_2=2C_2t+C_4;\ u=2(C_1^2+C_2^2)t+C_5,$$

此处 C_3, C_4, C_5 亦是常数。

为了滿足这偏微分方程,必須是:

$$C_1^2+C_2^2=1. \tag{199}$$

所以

$$u=2t+C_5.$$

为了使曲綫

$$x_1=2C_1t+C_3,\ x_2=2C_2t+C_4,\ u=2t+C_5$$

当 $t=0$ 时能經过圓周(197)由参变数 v 所确定的点,則必須有

$$C_3=\sin v,\ C_4=\cos v,\ C_5=0.$$

于是方程式(196)的經过圓周(197)的积分曲面可以表示如下:

$$x_1=2C_1t+\sin v,\ x_2=2C_2t+\cos v,\ u=2t,$$

上式中的 t 与 v 是参变数。为了使当 $t=0$ 时下式

$$\frac{\partial u}{\partial v}=p_1\frac{\partial x_1}{\partial v}+p_2\frac{\partial x_2}{\partial v}$$

成立，必須有:

$$0=p_1\cos v-p_2\sin v,\ 或\ C_1\cos v=C_2\sin v.$$

請注意(199)式，于是由上式得

$$C_1=\varepsilon\sin v,\ C_2=\varepsilon\cos v,\ 此处\ \varepsilon=\pm1.$$

由連續性推得，在整条曲綫上，ε 是常数，所以，最后我們得到积分曲面的参变数方程如下:

$$x_1=(2t\varepsilon+1)\sin v;\quad x_2=(2t\varepsilon+1)\cos v;\quad u=2t.$$

自上式消去 t 和 v，得

$$x_1^2+x_2^2=(1\pm u)^2. \tag{200}$$

这样，我們找到了方程(196)的經圓周(197)的二积分曲面。这就是在(x_1, x_2, u)空間的二圓錐曲面，其底就是这圓(197)，而其公共軸与 Ou 軸重合。

附注 自上面的例題可以看出: 202 頁所述的行列式(191)之値仅在曲面 S 附近不会等于 0 的条件中，'附近'二字是重要的。不应認为，不管参变数 s 或与它相当的参变数 t 之値怎样大，方程組(185)—(187)經过曲面S^*的积分曲綫在空間$(x_1, \cdots, x_n, u)$上的投影

$$x_i=x_i(s, x_1^0, \cdots, x_n^0),\ i=1, \cdots, n;\ u=u(s, x_1^0, \cdots, x_n^0)$$

一定构成一平滑的曲面（此处的 S^* 与 § 55 中的意义一样）①。虽然对于任意大的 t 値，方程組(198)的积分曲綫都能确定；可是开拓方程(196)的經过圓周(197)的积分曲面到任意远处，又不碰到奇点，那是办不到的。这奇点就是圓錐面(200)的頂点。

拟綫性方程式不会有这种类型的奇点，因为这种方程式的在

① 此处所謂"平滑的曲面"是指$\frac{\partial u}{\partial x_i}$存在且連續。显然，在圓錐面的頂点这偏导数不存在——譯者注。

空間$(x_1, x_2, \cdots, x_n, u)$內的特征綫彼此不相交。

習　題

1．試說明本节中所引入的特征綫与§53及§55中所引入的特征綫間的关系。

2．可以将特征綫想象为在$(x_1, \cdots, x_n, u)$空間的一条曲綫，而在这曲綫的每一点有一斜率为$p_1, \cdots, p_n$的平面通过。求証：在这曲綫的每一点上，这平面与这曲綫相切。

3．(Haar)。設在$(x_1, \cdots, x_n)$的空間內$(n\geqslant 0)$，以M为底的一棱錐体$\overline{G}$由下列不等式确定：

$$0\leqslant x_n\leqslant a,\ \max\{|x_1|, \cdots, |x_{n-1}|\}\leqslant a-x_n, \quad (a>0).$$

設在$\overline{G}$上給有一个可微的函数$u(x_1, \cdots, x_n)$，滿足不等式

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x_n}\right|\leqslant \sum_{i=1}^{n-1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|+|u|+\delta, \quad (\delta\geqslant 0).$$

則在$\overline{G}$上处处将有

$$\min\{\min_M u, 0\}e^{x_n}-\delta(e^{x_n}-1)\leqslant u(x_1, \cdots, x_n)\leqslant$$
$$\leqslant\max\{\max_M u, 0\}e^{x_n}+\delta(e^{x_n}-1).$$

提示：考虑这函数

$$v(x_1, \cdots, x_n; \lambda)=e^{-(1+\lambda)x_n}[u(x_1, \cdots, x_n)-\delta(e^{x_n}-1)]$$

$(\lambda>0)$的極大点。

利用这結論及阿达馬引理，在适当的假定下，試証方程式(182)的解的唯一性，解对于开始条件及方程式本身的形状之連續依賴性。为了簡單起見，在这里可以先假定开始条件是在$x_n=0$处給定的。

§57. 法甫(Pfaff)微分方程式

形式如：

$$Pdx+Qdy+Rdz=0 \tag{201}$$

的方程式(此处 P、Q、R 是 x, y, z 之函数),称为在(x, y, z)空間之法甫方程式。

对于这种方程,有两种处理方法:第一种方法是将 x, y, z 看作某一参变数 t 之函数。在变量 x, y, z 三者之中,任意給定两个作为 t 之函数,我們就得到确定第三个变量的常微分方程式。我們又可以任意地給定 x, y, z 間的某一个关系式如下:

$$\Phi(x, y, z)=0. \tag{202}$$

把 x, y, z 都看作一参变数 t 之函数,并把关系式(202)对 t 微分,卽得:

$$\Phi'_x dx+\Phi'_y dy+\Phi'_z dz=0. \tag{203}$$

在对于函数 Φ, P, Q, R 的很一般的假設下,(201)与(203)能按照微分 dx, dy, dz 中某二个微分与第三个的比值解出,例如說,按$\frac{dz}{dx}$与 $\frac{dy}{dx}$ 解出。于是得到确定 y, z 为 x 的函数的两个常微分方程式。一般說,条件(202)使其通解中保留一个任意常数。

法甫方程的另一种处理法是:在三个变量 x, y, z 中把其中一个(例如說 z)看作其他两个变量的函数。且假定在考察的区域中,$R\neq0$, 于是自方程(201)得

$$dz=P_1dx+Q_1dy, \tag{204}$$

此处 $P_1=\frac{-P}{R}$, $Q_1=-\frac{Q}{R}$.

由此得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=P_1(x, y, z), \tag{204_1}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=Q_1(x, y, z). \tag{204_2}$$

再假定 z 有对 x 与 y 的連續二阶偏导数。又假定 P_1 与 Q_1 有对于 x, y, z 的連續一阶偏导数。因为

$$\frac{\partial_2 z}{\partial x\partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x},$$

于是得
$$\frac{\partial P_1}{\partial y}+\frac{\partial P_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x},$$

即
$$\frac{\partial P_1}{\partial y}+\frac{\partial P_1}{\partial z}Q_1=\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial z}P_1. \tag{205}$$

在对 x 与 y 微分 P_1, Q_1 时，我們不但考虑了 P_1, Q_1 和它們所明显地依賴着的 x 与 y 的依賴关系，而且考虑了由于 z 是 x, y 的函数的假定而引入的与 x, y 的关系。条件(205)又可写为

$$P\left(\frac{\partial Q}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial y}\right)+Q\left(\frac{\partial R}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial z}\right)+R\left(\frac{\partial P}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial x}\right)=0. \tag{206}$$

定理 假設在(x, y, z)空間的区域 G 內，恒能滿足条件(206)，也就是滿足条件(205)，而且函数 P_1 和 Q_1 对一切的变数有連續的二阶的导数。則經过 G 內任一定点，必有方程組(204)也就是方程式(201)的一个而且仅有一个积分曲面經过。

証 首先証方程組(204)經过定点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 的解的唯一性。为此，請注意下列事实：方程式(204_1)中的 y 若恒等于常数 y_0，則在平面 $y=y_0$ 內，方程(204_1)确定出經过定点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 的唯一的积分曲綫 L。而方程式(204_2)中若 x 取某一定值，在 $x=$常数 x_0 的平面內，經过曲綫 L 在該平面內的那一点，方程(204_2)亦确定出唯一的积分曲綫 $l(x)$。由曲綫 L 上所有的点所作的曲綫 $l(x)$ 全体，唯一地定出方程組(204)的經点(x_0, y_0, z_0)之积分曲面。

現在将証，剛才所作的曲面的确是方程組(204)的积分曲面。由于这曲面的作法，显然它的所有的点都能滿足方程(204_2)。現尚須証明，曲面上所有的点，亦滿足方程(204_1)。在 § 53 (186—190頁)所研究的結論，現在完全可以应用。从这个結論推知，我們所作出的函数

$$z=z(x, y)$$

到处都有对 x 的連續偏导数。尚須証明，$\frac{\partial z}{\partial x}$ 滿足方程(204₁)。为了証此，注意，根据曲面 S 之作法，当 $y=y_0$ 时，这方程是被满足的。为了証明对于 y 的其他各值，該方程亦被满足，令

$$\frac{\partial z}{\partial x}-P_1(x, y, z)=F,$$

并求 $\frac{\partial F}{\partial y}$。因为函数 z 能满足方程(204₂)，而方程(204₂)的右端对于 x, y, z 都有連續偏导数，我們推得 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 必有导数 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$。故

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)-\frac{\partial P_1}{\partial y}-\frac{\partial P_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\partial P_1}{\partial y}-\frac{\partial P_1}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}=$$

$$=\frac{\partial Q_1}{\partial x}+\frac{\partial Q_1}{\partial z}P_1+\frac{\partial Q_1}{\partial z}F-\frac{\partial P_1}{\partial y}-\frac{\partial P_1}{\partial z}Q_1. \qquad (207)$$

在上式化 $\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$ 时，我們曾利用下列諸式：

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),\quad \frac{\partial z}{\partial y}=Q_1.$$

而且当对 y 微分 Q_1 时，我們应考虑由 z 引入的对 y 的依賴关系。利用恒等式(205)，我們可把等式(207)改写为下面的形式：

$$\frac{\partial F}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial z}F.$$

由此得

$$F(x, y)=F(x, y_0)e^{\int_{y_0}^{y}\frac{\partial Q_1}{\partial z}dy}.$$

既然 $F(x, y)$ 当 $y=y_0$ 时，等于 0，所以 $F(x, y)$ 对一切所考察的 y 必等于 0。这就是我們所須要証的。

自几何方面来說，在第一种处理法中，求法甫方程的解就是求作曲綫，使这些曲綫都与在空間 (x, y, z) 規定的方向場正交［这方

[向場在每一点(x, y, z)的方向，都由各坐标軸上投影为P, Q, R的矢量所規定]。在第二种处理法中，就是求作与方向場正交的曲面族(換言之，就是求曲面族，使它們在空間每一点都有已給的切平面)。

俄中名辞对照表

А

Абсцисса 横坐标

В

Вершина 顶点
Выпуклость 凸性
Вековое Уравнение 长期方程式
Внутренная точка 内点

Г

Граница 边界
График 图线
Голоморфная (Функция) 正则(函数)
Геликоид 螺旋面

Д

Дифференциальное Уравнение 微分方程
Дифференциальное Уравнение с частными производными 偏微分方程

З

Задача Коши 柯西問題
Замкнутый интервал 闭区間
Закон Гука 虎克定律
Звено [illegible]

И

Излом 尖点
Интеграл 积分
Интегрирующий Множитель 积分因式
Интегральная Кривая 积分曲线
Инвариант 不变式

К

Квазилинейное Уравнение 拟线性方程
Кривая 曲线
Колебание 振动
Канонический Вид 典则形式

Л

Лемма 引理
Линейно Зависимый 线性相关
Линейно независимый 线性无关
Линейная система 线性组
Линейное Уравнение 线性方程
Линейное Преобразование 线性变换

М

Матрица 矩阵
Метод Вариации Постоянных 变动常数法
Метод Последовательных Приближений 逐次逼近法
Многозначным 多值

Н

Нелинейный 非线性的
Неизвестная Функция 未知函数
Неоднородный 非齐次的
Неособенный 非奇异的

Непрерывный 連續

Начальное Значение 开始值

О

Общее Решение 通解

Общий Интеграл 通积分

Обыкновенная точка 正常点

Однозначная Функция 單値函数

Ограниченныи 有界的

Огибающая 包絡綫

Однородныи 齐次的

Окрестность 邻域

Особая точка 奇点

Особая Линия 奇曲綫

Открытый интервал 开区間

Определитель Вронского 暨斯基行列式

Область 区域

П

Предельный Цикл 極限环綫

Первый интеграл 第一积分

Почти Линейное Уравнение 殆綫性方程式

Поле 場

Полоса 条形区域

Порядок 一阶

Поле Направлений 方向場

Последовательность 序列

Продолжать 开拓

Р

Равновесие 平衡

Равномерная Ограниченность 一致有界

Равностепенно Непрерывный 同等連續

Равномерно Сходиться 一致收歛

Решение 解

Ряд 級数

С

Седло 鞍点

Семейство 族

Сопряженные Системы 共軛組

Т

Точка 点

У

Узел 結点

Угловой Коэффициент 斜率

Уравнения в Полных Дифференциалах 全微分方程

Устойчивость 穩定性

Уравнение Пффафа 法甫方程

Условие Липшица 李卜希茨条件

Ф

Фокус 焦点

Фундаментальная Система 基本組

Х

Характеристическая Матрица 特征矩陣

Характеристика 特征(綫)

Ц

Центр 中心点

Ч

Член 項

Э

Эквивалент 等价

Элементарные Делители 初等因子

Я

Якобиан 函數行列式(雅各比行列式)