赣南师范学院学报（自然科学）
1 9 8 8年第2期

Wilhelm Blaschke 的数学工作*

陈 省 身

在获得这样巨大的和不寻常的荣誉之时，我自然地想起了那些曾经影响了我的数学生涯的老师和朋友。在汉堡的那些人中，我愿意首先提到Emanuel Sperner教授。1933年我在北京听取了他的初等拓扑讲座.这是第一次把我引进了现代数学,打开了我的视野。我还愿意提到Erich Kähler教授。当我1934年作为学生来到汉堡时，Kähler 教授刚好完成了 他的名著“微分方程组理论导引”，这本书的内容就是后来大家所知道 的Cartan—Kähler理论。正是在他的讨论班上我体会到Elie Cartan的工作的威力和洞察力，并获得勇气去学习Cartan的创造性论文。Kahler教授对我的耐心帮助是难忘的。

Blaschke教授对我的影响之大，怎么说也不过分。1932年他访问了北京作为他 的全球旅行的一部份。我是他的听众席中一个年青的大学生。他的新颖的思想以及他认为数学是充满生气的、易于理解的学科的信念给了我深刻的印象。同他的接触有助于我作出去汉堡学习的决定。1934年11月我开始在汉堡学习，1936年2月获得博士学位。以后他极力主张我花一年时间去巴黎与Elie Cartan在一起。在我成长的时期得到这个建议是极大的幸运，直到今天我还铭记在心。

当Sperner教授要我作这个讲演时，我给出了上面所列的标题。我很快明白，Blaschke教授的工作是如此地广泛而有创见性，以至于要提纲挈领地进行综述，即使是部份 地 综 述它，也需要一个相当长的时间。在我所支配的这个时间内肯定不可能对他的工作作一个适当的描述。因此我把我们的讨论局限于由Blaschke教授开创的两个课题的近代发展 上，并 提出几个相关的、还未解决的问题。我相信这些进展将清楚地表明Blaschke教授的数学 思 想是远远地领先于他所处的时代。

1 再见曲面

1.1 问题

设M是一个n维完备黎曼流形。M在一点x的切空间Tx由M在x点的所有切 向量组成。指数映射$\exp_x$：$T_x \to M$把一个点$\xi \in T_x$映到在x点与ξ相切的测地线γ上的一个点，从x到这个点的弧长是ξ的长度。在几何上，指数映射是通过把切空间裹到流形上来定义。一个 点$\xi \in T_x$称为x的一个共轭点（conjugate point），如果指数映射在ξ是退化的，即 雅可 比行 列 式在ξ处为0。我们也称ξ在γ上的像点$y = \exp_p \xi$为x的一个共轭点。它的意义在于这 个 事 实：在超出y之后γ不再是从x引出的最短线了。通过x的所有测地线上的共轭点（或第一共轭点）

* 汉堡大学1971年授予名誉博士时的演讲。

形成x的共轭点轨迹（或第一共轭点轨迹）。

一个黎曼流形M称为再见流形，如果每个点的第一共轭点轨迹是一个点。此外，如果它是二维的，则称为再见曲面。人们容易看出，在这个条件下，从x到它的第一共轭点的测地弧有相同的长度，因此两个人从x出发以同样的速度沿不同的测地线旅行，将在共轭点相遇。再见曲面的一个明显例子就是通常欧氏空间中的度量球，其中对径点形成一对共轭点，不管连接他们的是哪一条大园弧。我们愿意对于高维情形进行叙述的Blaschke问题如下：一个再见流形在度量上是否为一个球面？

再见曲面问题有一个曲折的历史。Blaschke在他的“微分几何”第一版（1921）中提出了这个问题。该书的第二版（1924）有一个附录，其中Reidemeister用射影方法给出了一个证明。而第三版（1930）指出这个证明中的一个错误，并给出HJELMSLev的一个例子说明这个方法行不通。在得到几个部份的结果以后，这个问题被L. W. Green于1961年完全解决了（参看〔8〕）。这个故事告诉我们，尽管微分几何就象微积分一样的古老，但是大范围微分几何基本上还是一个年青的学科。

1.2 Green定理

Green定理如下：

一个可定向的再见曲面是一个常曲率的球面。

这个定理的证明有两个主要步骤。第一步是使用由Poincaré引入的而由Blaschke和Santalo在他们关于积分几何的工作中巧妙地开拓的运动密度的概念。令S是M上的单位切向量丛，投影映射为$\psi: S\to M$。对$e\in S$，令$x(s)$是M上以弧长为参数，以$x(0)=\psi(e)$、$x'(0)=e$为初始条件的唯一的一条测地线。共轭距离函数$f(e)$是一个实数t，它等于使$x(t)$共轭于$x(0)$的第一个正数。Blaschke已经知道，并在他的书中证明，M是一个再见曲面当且仅当$f(e)$是一个有限常数。与单位球面相对照，如果$f(e)=\pi$，则我们说这个标量被法化了。

我们置$x'(s)=e_s$。由于完备性，映射$e\to e_s$对所有的s有定义，它是实数在S上的可微作用，称为测地流。根据溯源于Liouville和Jacobi的经典结果可以推出，运动密度在测地流作用下是不变的。这种不变性的一个推论是，法化的再见曲面的面积等于4π。

证明的第二步是Green和Marchel Berger的一个等周不等式。设M是一个可定向的、紧致、亏格为0的二维黎曼流形。设A是它的面积，$a=\inf\limits_{\forall e\in S} f(e)$，则

$$\Pi A\geqslant 4a^2 \tag{1}$$

等号成立当且仅当M是常曲率为$(\Pi/a)^2$的球面。显然，把两步结合起来就给出了Green定理。

Berger—Green不等式（1）是黎曼流形上的一个“等周不等式”，这是一个会使Blaschke教授感兴趣的，并且会有远大前程的课题。我希望利用这个机会叙述一下Loewner-蒲保明—Blatter的不等式。设M表示一个紧致二维黎曼流形，A表示它的面积，$l=\inf l(\gamma)$，其中γ跑遍所有不同伦于0的封闭可求长曲线，$l(\gamma)$是它的长度。Loewner，蒲保明，Blatter的不等式分别为

$$A\geqslant\frac{\sqrt{3}}{2}l^2 \quad \text{（M同胚于环面）;} \tag{2}$$

（3）　$A \geqslant \frac{2}{\Pi} l^2$　（M同胚于射影平面）；

（4）　$A \geqslant \tau_g l^2$　（M是亏格为g的可定向曲面）。

最后一个公式中的τg是一个常数，它的下界是

（5）　$\tau g > \frac{\Pi}{2} \frac{1}{((g+1)!)^{\frac{1}{g}}} \sim \frac{\Pi e}{2g}$

1.3　高维情形

Blaschke问题是一个更一般的旨在研究共轭点轨迹的行为对于黎曼流形的影响的问题的特殊情形。用§1中的记号。如果M的维数为m，一个共轭点$\xi \in T_x$称为$k>0$阶的，如果指数映射的雅可比行列式在ξ的秩是$m-k$。与共轭点密切相关的是割点（cut point）的概念，从x出发的测地线γ上的一个点Z称为x的一个割点，如果Z是使γ不再是弧长最短曲线的第一个点。在很多例子中割点重合于第一共轭点，但是一般说来是在它的前面。从x出发的所有测地线上的割点形成x的割点轨迹。割点轨迹包含M的很多拓扑性质。

共轭点轨迹和割点轨迹是近年来很多研究的主题。我想叙述如下的定理，它们与Blaschke原来问题有关，其中前两个属于F·Warner〔13〕,〔14〕,第三个属于T·Otsuki〔9〕：

定理1　设M是一个单连通的，完备黎曼流形。假定存在一个点x∈M使得沿着过x的任一测地线的第一共轭点的阶≥2．则x的割点轨迹与它的第一共轭点轨迹重合。

定理2　设M是一个紧致、单连通的m维黎曼流形．假定存在一个点x∈M使得它的第一共轭点轨迹上的每一个点的阶为常数K，$2 \leqslant K \leqslant m-1$，则M有以下性质：

a）　$K=m-1$，并且M同胚于m维球面；

b）　或者$K=3$，$m=4h$，$h=2$，3，…，M具有四元数射影空间整上同调环；

c）　或者$K=7$，$m=16$，M具有Cayley射影平面的整上同调环。

定理3　设M是一个完备的再见黎曼流形．则M有以下性质：

1）M是紧的；

2）每条测地线是闭的；

3）共轭距离函数f（e），e∈S，是有限常数；

4）如果M是单连通的，则M同胚于m维球面．

假定度量被法化使得f（e）＝Π。假定M还有以下性质：它是单连通的，并且半径为$\frac{\pi}{2}$的测地球面是全测地的，则M等距于－m维单位球面．

定理3可以看成Green定理的一种弱形式的推广。参看Busemann的书〔15〕,P.331，定理（47.4）．

至于将来的发展，在这个方向上亟待解决的显然是以下的问题：

问题1　一个单连通的、完备的再见黎曼流形是否等距于一个正的常截面曲率空间？

作为更内在的等周不等式的下一步，我想提出以下问题：

问题2　设M是一个同胚于2n维实射影空间的黎曼流形。令V是它的全体积，$L=\inf L(\gamma)$，其中γ跑遍M的非同调于0的$2n-1$维子流形，$L(\gamma)$是γ的$2n-1$维体积。人们

猜测

(6) $V^{2n-1}\geqslant CnL^{2n}$,

其中Cn是一个普适常数，确定它的条件是：当M有常曲率度量时 上面不 等式的两 边相等，

当$n=1$时（6）化成蒲保明不等式（3）。

2 仿射球

2.1 问题

Blaschke教授的“微分几何”的第二卷是一个有很大创造性的、漂亮的工作，这 工作至今还未得到人们的注意。它的主要目的是把经典的微分几何推广到么模仿射空间，特别是发展超曲面的理论。由于么模仿射群比刚体运动群大得多，为了得到一个满意的理论，必须对超曲面加上比较强的条件。Blaschke所选择的最自然的条件就是，超曲面是严格 凸 的。

考虑$n+1$维么模仿射空间A^{n+1}以及光滑浸入在里面的一个严格凸超曲面。这种超曲 面的最简单的例子是超二次曲面：椭球面、抛物面以及双叶双曲面。设x是M上的一个点，Tx是M在x点的切超平面。与Tx平行的平面与M所界定的凸域相交成一个凸域，这凸域的 重心描出一条从x出发的曲线。这条曲线在x点的切线称为M在x点的仿射法线。因此对M的 每一点x可以以仿射不变的方式配上一条通过x而与Tx横截的直线。

仿射法线也可以用解析的方式定义。对M的凸性的假定，使得我们可以引入一个 正定的二次微分式，它的原型是经典曲面论中的第二基本形式。这就在M上定义了一个黎曼度 量，黎曼几何的概念就可以应用。首先，这包括拉普拉斯算子△的分析工具以及完备性，即测地线可以无限延长的概念。如果$x(u^1\cdots, u^n)$表示点X的坐标向量，它是参 数u^1，$\cdots u^n$ 的函数，则

(7) $\xi=\frac{1}{n}\triangle x$

称为仿射法向量，通过x平行于ξ的直线就是上面用几何方式定义的仿射法线。

超曲面称为一个真仿射球面，如果它的仿射法线通过一固定点；它称为一个虚仿射球，如果它的仿射法线互相平行。当$n=2$时这种曲面首先由G．TzitzéicA 研究[12]。在 欧氏空间中，当用通常法线代替仿射法线时，具有类似性质的超曲面必定是超球面或超平面；并且作为局部定理这也是对的，而仿射球则广泛得多。它们包括上面提到的凸二次超曲面．而超曲面

(8) $x_1\cdots x_{n+1}=1$

也是仿射球，其中x_1，$\cdots x_{n+1}$是在A^{n+1}中的坐标。

我们的问题是描述所有仿射球。

2.2 Calabi定理

为了使我们的问题有意义，我们加上完备性这个整体条件。完备虚仿射球的唯一性首先由E.Calabi证明〔5〕：

Calabi定理 一个完备的虚仿射球是一个凸抛物面。

这个定理的证明是困难的，我不打算在这里给出证明摘要。

下面我们考虑真仿射球M。用β表示它的中心，即位于所有仿射法线上的点．则我们有

$$(9)\qquad \xi=-H(x-\beta)$$

可以证明H（称为仿射平均曲率）是一个非0常数。根据$H>0$或$H<0$，中心分别位于M的凹的一边或凸的一边，相应地把该仿射球分别称为椭园型的或双曲型的．

一个完备的椭园型仿射球必定是紧的．Blaschke证明：一个紧致的仿射球必是椭球。他是对$n=2$证明的，而他的论证可推广到任意的n．

完备的双曲型仿射球是迷人的．它们不必是超二次曲面；超曲面（8）是一个例子。Calabi构造了别的有兴趣的例子，参看〔7〕。他还提出以下猜测：

问题3（Calabi猜测），每一个完备的双曲型仿射球渐近于一个顶点在它的中心的凸锥的边界．反过来，每一个这样的凸锥渐近于一个完备的双曲型仿射球，这个仿射球被其平均曲率的值唯一确定．

2.3 非线性偏微分方程

如果我们对一个非参数超曲面写出它是仿射球的分析条件，我们就能意识到这个看起来单纯的仿射球问题的困难程度了．设M由方程

$$(10)\qquad x_{n+1}=u(x_1,\cdots x_n)$$

所定义．它是仿射法线平行于x_{n+1}一轴的虚仿射球的条件可以写为

$$(11)\qquad \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)=1,\qquad i,\ j=1,\ \cdots,\ n.$$

上述方程的解$u(x_1,\ \cdots,\ x_n)$称为一个凸解，如果左边的矩阵是正定的．Calabi定理说，使得M是一个完备超曲面的（11）的一个凸解是定义在整个数空间上的二次多项式．

从分析的观点来看，去掉完备性的假定，而研究（11）的对所有的x_1，…，x_n有定义的凸解是自然的．到目前为止，我们仅有以下的唯一性定理，在$n=2$时是由Jòrgens证明的，对于$n\leqslant 5$是由Calabi证明的：

设$u=u(x_1,\ \cdots,\ x_n)$是（11）的一个凸解，它定义在整个n维数空间上，并且5次以上连续可微。如果$n\leqslant 5$，则u是一个二次多项式．

我相信以下猜测是正确的：

问题4（猜测）　推广Jorgens—Calabi定理到任意n．

通过Legendre变换可以看出，非参数的真仿射球的研究归结为以下方程的研究：

$$(12)\qquad \det\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)=(Hu)^{-n-2}$$

最后，我想提到在欧氏空间内非参数超曲面的微分几何中的类似方程的最近一些结果．超曲面（10）是极小超曲面的条件是

$$(13)\qquad \sum_{1\leqslant i\leqslant n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{P_i}{\sqrt{1+\sum_k P_k^2}}\right)=0,\qquad P_i=\frac{\partial u}{\partial x}$$

如果（13）的一个解$u(x_1,\ \cdots,\ x_n)$对所有x_1，…，x_n有定义，则当$n\leqslant 7$时u是线性函数，当$n\geqslant 8$时u不一定是线性函数，〔4〕．方程（13）是一个值得注意的方程，由于高维空间几何的原因，它的解对于比较大的n有十分不同的性状．

参 考 文 献

1 ALLAMIGEON, A.C.: Propriétés globales des espaces de Riemann harmoniques, Ann. Institut Fourier (Grenoble) 15 (1965), 91—132.

2 BERGER, M.: Du coté de chez Pu, Ann. Ac. Norm. Sup. série 4, t. 5 (1972), 1—44

3 BIATTER, C.: Uber Extremallängen auf geschlossenen Flächen, Comm. Math. Helv. 35 (1961), 153—168

4 BOMBIERI, E, DE GIORGI, E, and GIUSTI E.: Minimal cones and the Bernstein problem. Inven. Math. 7 (1969), 243—268

5 CALAB:, E.: Improper affine bypersphercs of convex type and generalization of a theorem of K. Jörgens, Mich. Math. J. 5 (1958), 105—126

6 CALAB, E.: Examples of Bernstein problems for some non-linear equations, Proc. Symp. in Pure Math. Amer. Math. Soc. 15 (1970), 223—230

7 CALABI, E.: Complete affine hyperspheres, to appcar in Rendiconti convengno di geometria differenziale

8 GREEN, L.W.: Auf Wiederschensflächen. Annals of Math. 78 (1963), 289—299

9 OTSUKI, T.: On focal elemems and the spheres, Tohoku Math. J. 17 (1965), 285—304

10 PU, P.M.: Some inequalities in certain non-orientable manifolds, Pacific J. 11 (1962), 55—71

11 SPERNÉR, E.: Zum Gedenken an Wilhelm Blaschke, these Abhandlungen 26 (1964), 111—128

12 TZ.TZÉ.CA, G.: Sur une nouvelle classe de surfaces, Rend. Cire. Mat. Palermo 25 (1908), 180—187; 28 (1909), 210—216

13 WARNER, F.: Conjugate loci of fimite order, Annals of Math. 86 (1967), 192—212

14 WARNER, F.: The conjugate locus of a riemannian manifold, Amer. J. Math. 87 (1965), 575—604

15 BUSEMANN, H., The Geometry of Geodesics, New York 1955

附注（1973.1月）：当这篇文章交出以后作者才注意到，问题4已被Pogorelov解决。参看A.V.pogorelov, On the improper convex affine hyperspheres, Geometriae Dedicata I (1972) 33—46

（李安民译　陈维桓校）