离散数学原理之二

图论及其算法

王树禾 编著

中国建学技术大学出版社

1990 - 合肥

内容简介

本书系统地阐述了图论与算法图论的基本概念,基础理论,基本算法及其重要应用,立论严谨,概念清楚,语言流畅,载有大量例题及著名算法,每章布置足够多的引人人胜的习题,是图论数学与自学比较理想的一部书。

本书可作为理工科大学计算机、无线电电讯、系统科学、应用数学等专业的本科生及研究生的数核。他可供有关专业研究人员参考。

图论及其算法

王树禾。编著

中国科学技术大学出版社出版 第160m市金家路96号,邮政编码230026) 中国科学技术大学印刷厂印刷 安徽省新华书店发行

*

开本: 850×1168/32 印张, 10.75 李数: 279千 1990年10月第1版 1990年10月第1次印刷 印数: 1-4000册 ISBN7-312-00216-1/〇·82 定价: 2.60元

74/218/04

序

多年来,为了大规模快速计算的目的,数学影响了计算机科学的形成与发展,随着计算机在社会中作用的变大,它反过来又影响数学,图论就是这方面的显著范例。由于图论对计算机有许多应用,例如数据表示、网络设计等等,搞计算机科学技术的都要学习图论。

当然,图论的应用领域远不止于此,它同理论物理、有机化学、系统科学、运筹学、社会学等等都有关联。至于同数学内部,例如代数结构、数学关系论、拓扑学等等的关系更是众所周知的,它同组合数学的关系如此之密切,以致于许多人都认为图论是组合数学的一个重要组成部分。

学习好图论,除了能使人应用它的成果,同样重要的是能培养思考和解决问题的能力,从长远观点来看,它理应成为人们必须接受的数学教育的不可少的科目之一。

王树禾同志编著的这本书,是他多次使用并不断更新完善的两份讲义重新组织改写的结果,书中从问题的陈述到论证解答,都有许多独到之处。他用自己的讲义,已经培养了中国科学技术大学计算机科学技术系九届毕业生,教学实践证明,即使是原来的讲义,也已经是相当之成功的。

本书包括了现今图论教材中应涉及的所有课题,它的基本理论严谨,系统性强,另一个特色在于它相当强调算法。图论算法是算法设计与分析这一分支中的重要组成部分,数学证明的算法化已经形成潮流,在计算机大量应用的时代,这当然是不可避免的。采用本书学习图理论的同时,学习相应的算法及其分析方

法,这自然是十分理想的。

综上可见,这是一部理科和工科大学生、研究生以及工程技术人员、教师都可以学习、参考的好书。

陶懋颀

1990年2月于北京

\$1713 Car 1

> **a** 5

前 言

本书阐述了图论与算法图论的基本概念与基础理论,包括计算复杂性的概念与理论。书中主要采用构造性的组合技术和代数方法,要求读者具有线性代数与代数结构两门学科的基础知识;当然,由于图论自身的特点,还要求读者具备足够的数学机敏性与成熟性。

本书共分十七章,各章布置了较丰富的习题(共计 361 题)。 习题和书中的例题一样有趣,不少习题自身就是比较 重 要 的 定 理.图论题目,不仅要引用定义定理,而且往往需要运用精彩的 技巧才能解决,不多做习题,不可能掌握图论的思想与方法。

本书问世过程中,陶懋颀教授提出许多重要建议,并为本书撰写了序言和第十七章,作者对陶懋颀 同 志对本书的贡献 表示 想谢。

李乔教授对本书的出版给予热情支持和鼓励,并提出重要修 改意见,在此**道**致谢忱。

王树禾

1990年2月于科大数学系

目

•

•

;

•

,				
, · .		-	≕ t.	\$
•		Ħ	求	State of the second
				ia(1)
1.1	图论的内容与历	史回顾		······································
(1,2	图的定义	***************************************		······································
1.3	轨道与连通	,	••, ••• ••• ••	(9)
1.4	Brouwer 不动点	就定理······		
1.5	Dijkstra 算法…			(16)
习题				.,
2 树*		**********		(26,)
2.1	树及其性质	*********		
2.2	生成树的个数***	*****	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	(30)
2.3	Kruskal 算法…	***********		(33)
2.4	几类常用树		• • • • • • • • • • • • • • • • • • • •	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
对题:		, ***	والمعاوم وفالجعام	(44)
8. 鑑通	性			«»····» (47)
3.1	连通性和 Whitn	ey 定理····		(47)
3.2	割顶、桥、块…	••••••		(50,)
3.3	可靠通讯网的构	作		(.52)
				······································
				(57.)
	· - ·-			(57)
•				· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
				(62)

	4.4	货郎问题	(69)	٠
	习题	· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·	• (73)	١-
5	平面	:	(76)	r
	5.1	平面图的概念	(76)	٠
	:5.2	Euler 公式·······	(78)	۴
	5.3	平面图的对偶图	(79)	ŀ
•	5.4	Kuratowsky 定理	(83)	F
	5.5	图的厚度	(87)	۴.
	习题		• (9 0)	ř
6	纵深	!搜索算法与平面嵌入算法	(9,2)	>
•	6.1	广度与深度优先搜索法	(92)	À
	6.2	平面嵌入算法	(1	100)	ř
•	习题	**************************************	•(1	107)	r
7	匹克	理论及其应用	()	109)	۴
	7.1	匹配与许配	()	109)	ř
	7.2	匹配基本定理	()	111)	r
	7.3	二分图中最大匹配与最佳匹配的算法	(118)	١-
	习题		(1	l 23)	ı.
8	支配	集与独立集	(1	26)	۴
	8.1	支配集与独立集的概念	(1	126)	ř
	8.2	支配数、覆盖数和独立数的计算	(1	(8	-
	8.3	支配集与独立集的应用	(1	131)	r
•	8.4	Ramsey $\bigotimes r(k,l)$	(133)	þ
	习題	**************************************		-	
9	着色	理论		141)	P
;	9.1	边色数	Ç	41)	ř
	9.2	Ramsey 数和 Schur定理	(1	44)	r
	9.3	时间表问题	(1	46)	•
	9.4	顶色数	(1	49)	•

9.5	面色数(151)
9.6	颜色多项式(153)
9.7	求色数的一个算法 (157)
习题	(159)
10 有	向图 (163)
10.1	有向图的连通性(163)
10.2	有向 Euler 图 (165)
10.3	有向轨(168)
10.4	有向圈(171)
习题	(176)
11 周	络中的最大流(178)
11.1	Ford 和 Fulkerson 算法(178)
11.2	Dinic 算法(181)
11,3	容量有上下界的网络(187)
11,4	有供需约束的流(191)
习題	(193)
12 20 5	烙流方法的应用(196)
12.1	顶连通度(196)
12.2	有向图的连通度和无向图的边连通度(200)
12.3	有向图的边连通度和弱独立外向生成树(202)
12,4	二分图(205)
12.5	关于 PERT 的两个问题 (208)
习题	(211)
18 无	向图中的空间与矩阵 (216)
13,1	圈空间(216)
13.2	断集空间(219)
13,3	关联矩阵······(223)
13,4	圈矩阵(226)
13.5	割集矩阵(228)

	13.6	邻接矩阵与道路矩阵(230)
:	13.7	开关网络(233)
1	习题	
1	4 有向	·图中的矩阵·························(246)
	14.1	邻接矩阵与道路矩阵(246)
	14,2	关联矩阵和生成树的数目(250)
!	14.3	圈矩阵与割集矩阵(254)
	14.4	电路网络(256)
	习题	(264)
18	NP (C概念与 Cook 定理(266)
	15.1	算法的好与坏(266)
	15,2	判定问题的 NP 类(268)
	15,3	NPC与 Cook 定理(272)
	15,4	NPC 中的几个组合问题 ····· (278)
	习题	(283)
16	NP	C 中若干著名的图论问题·················· (285)
	16.1	团、独立集和顶覆盖(285) Hamilton 轨和 Hamilton 圈(286)
	16.2	Hamilton 轨和 Hamilton 圈 ······(286)
	16.3	图的色数(289) 有向图的反馈集(291)
	16.4 16.5	有问图的汉项来····································
	16.6	最大断集(293)
	16.7	图的直线排列(296)
	16.8	多商品整流问题(299)
	习题	(302) 与图(305)
17	拟阵	
	17.1	定义与例(305)
	17.2	拟阵与图论(310)
	习题	(314)
_		或提示······(316)-
7	行义歌	(334)

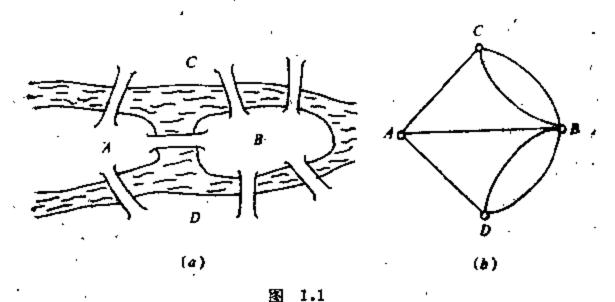
1 通 论

1.1 图论的内容与历史回顾

本节以比较自由的方式介绍图论的主要内容,并对它的重要 历史事件进行回顾。所涉及的内容以后各章节将予以严格而详细 地论述。

一个图就是一个集合V连同V的一些二元子集的集合构成的 一个数学结构。

1736年是图论的历史元年。这一年,Euler 研究Königsberg (今苏联加里宁格勒)的七桥问题 (图 1.1(a)),发表了图论的首篇论文。当时哥尼斯堡的市民热衷于这样一个有趣的游戏。从



A, B, C, D四块土地的某一处出发,通过每座桥恰一次再回到出发地,是否可能? Euler 否定地回答了这个问题, 他 把 A, B, C, D 四块土地抽象成四个几何点,于是就得到图 1.1(b),从而得到证明。事实上,A, B, C, D 任何一个点做为出发点

时,都必然是先"出"后"回",最后以"出"告终,才能行遍与该点相连的桥,所以不可能回到原来的出发点。Euler 堪称图论之父。

我们看到,正是上述似乎没有多大意义的七桥游戏,它的抽象。 与论证的方法,开创了图论科学的研究。遗憾的是,由于当时社。 会生产落后,对图论知识的要求甚寡,这一学科的发展颇为迟 缓,甚至处于停滞状态。两百年以后,1936年,匈牙利著名图论 学家 König 发表《有限图与无限图理论》,这是图论的第一部专 著,它总结了图论二百年的主要成果,是图论的重要里程碑。此 后的五十多年,图论经历了一场爆炸性的发展,终于成长为数学 科学中一门独立的学科。它的主要分支有图论、超图理论、极值 图论、算法图论、网络图论和随机图论等。近二十年来,图论在 科学界可以说是异军突起,活跃非常。原因主要有两条:一是现 代生产和科学技术向图论提出越来越多的问题要求解决,无论在。 数学、物理学、化学、天文学、地理学和生物学等基础学科, 还是有线电、无线电、交通运输、军事作战等高 技术 学科, 图: 论都是大有作为的。第二个主要原因是大型电子计算机的出现和 计算机科学的迅猛发展, 为图论及其算法的解决提供了强大的计 数与证明的手段,而图论对开关理论、形式语言、数据结构、编: 译程序、操作系统、人工智能、计算 机网络 等方面,亦有显著。 贡献.

二十世纪科学史上重要事件之一是 1976 年美国伊利诺 大 学的 Appel 和 Haken 在 Koch 的协作之下,用计算机证明了 数 学史上悬挂多年的四色猜想是正确的。他们用了一百亿逻辑判断,花了一千二百个机时,从此 4CC 便晋升为四色定理。从(平面图) ▼4.

四色猜想的原始提法是, 地图或地球仪上, 最多用四种颜色。即可把每一国之版图染好, 使得国界线两侧异色。

这个问题如此之简单,以数于可以在两三分钟之内向公路上

和我们随机相遇的行人讲清楚。但是,1976年以前的百余年间,有多少精干的数学家潜心研究过它,无奈谁也未能得出实质性进展,时至今日,仍欠理论性(非计算机的)证明。当然,大批优秀数学家的工作并非徒劳,人们在冲击 4CC 时采用的思路、方法和技巧,为图论宝库增添了一个又一个精彩成果,例如1912年Birkhoff 提出了颜色多项式理论。1879 年论数数学会的Kemple发表了证明 4CC 的论文,尽管他的证明十年后被人指出错误,但Kemple的极为精巧的论证方法,用 Appel 的话来说, 其实"包含着一个世纪后终于引出正确证明的绝大部分基本思想"。1890 年,Heawovd 用 Kemple 的方法证明了五色定理。 ※ (平面图) ≤5。

4CC 是 1852 年一个叫做 Guthrie 的伦敦学生提出的。伊 利诺事件宣告了数学难题由机器证明的新纪元已经开始。

与染色有关的生动问题非常之多,封面上那幅漂亮的图,涉及许多图论中要讨论的概念:它是无桥三次正则图,每个顶点处关联了三条边;它的围长不小于5,它的边色数是4,删除三条边不会使它破裂成两个有边图,这种图叫做妖怪(Snark graph),这里"妖怪"是个数学名词,并非绰号,事实上,因为有这种性质的图非常之难以设计(扑捉)出来,所以称这种图为妖怪。

还可以再提出一个虽然还没有难到人令绝望的程度,看来也是非常之不易解决的问题,它就是著名的 Ulam 猜想(1929年)。

 G_1,G_2 是两个顶数相同的图, $V(G_1) = \{u_1, \dots, u_n\}, V(G_2)$ = $\{v_1,v_2,\dots,v_n\}, G_1-u_i \subseteq G_1-p_1, i=1,2,\dots,n, mG_1 \subseteq G_2.$

正如 4CC 之证明, 指望用手和笔写出 Ulam 猜想之 证 明谈何容易!

Hamilton 图是顶点分布在同一个圆周上的图,它是1895年 Hamilton 玩旅游世界的游戏时提出的。这种图中的难题多得很, 至今连 Hamilton 图的充要条件(象 样 儿 的)尚 未 建 立 。 与 Hamilton 图有血缘关系的是货郎问题。

·一位货郎从城中出发去各村卖货,再返回城来,要求各村都 要恰到一次、试求他的最短里程。

用计算机"历数"各种行动方案来挑这个最短里程是不现实 的,假如有20个村子,任何两村之间都有路直接相通, 要比较 1/2 \times 201 次。这在每秒千万次的计算机上亦要百年。目前正在努力 探求有效的解决方法。

在诸多图论难题之中,还有一个 Ramsey 问题,直观地讲。 就是问,任给一人群,有 k个人相识或 l 个人不相识,这群人至 少几人? 这个答案用 r(k, l) 表示, 目前我们连 r(4, 5) 的值都 得不出来。本书中,我们将给出一些 r(k,l)的值,例如 r(3,3)=6。它的证明十分简单。

用六个点代表六个人,相识者之间连一绿边,否则连一红 边。六个人分別为 マュ, マュ, マュ, マ。, マ。, 与 ヤュ 相关联的 五 条边中有三条同色,不妨设其为绿色,这三边的另一端不妨设为 υ,, υ,, υ,, 着 Δυ,υ,υ, 是同色三角形, 则有三人相识 或 不 相 识, 否则, Δυ,υ,υ, 中有绿色边, 于是 在υ,, υ,, υ, 之 间 出现绿色三角形,即有三人相识,而只有五人的人群,未必如此。 例如图 1.2 中, 实线表示相识, 虚线表示不相识。

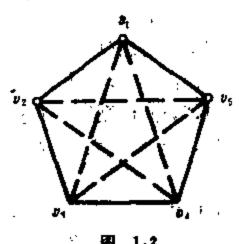


图 1.2

从许多实例中, 我们发现图论最 吸引人的特色是它蕴含着大量强有力 的思想、漂亮的图形和巧妙的论证、 即使是非常困难的尚未解决的问题也 易于表达。现实生活中处处潜藏有图 论的难题,图论是最接近群众生活, 最容易向科学水准很低的人们阐述的 一门学科。问题外表的简单朴素和本

质上的难以解决,使每个搞图论的人在图论问题面前都必须谨慎 严肃地思考问题,常常是一个貌似简单的问题,即使幸运地得出证 明,证明中包含的细节也十分之繁琐,并且往往运用了极艰苦的计算。

在过去的十年中,图论的算法受到了更多的重视。我们有有效算法求得两个顶之间的最短道路(Dijkstra 算法),知尚未找到求图中最长轨道的有效算法,我们还没有一个有效的算法判别一个图的顶点是否分布在同一个圆局上,我们也没有有效算法确定平面图能否用三种颜色正常(邻顶异色)着色,我们在网络理论中,已经有有效算法,知道如何在铁路网上把工厂生产的一种商品最多地运往销地,但对于两个工厂出产的两种产品,分别运往两个销地时,我们尚无有效的算法安排运输,使得两个销地的需求得以满足,等等。图论发展至今,已经积累了数以百计的这种现实问题,仍然找不到解决的有效算法。Edmonds,Cook和Karp等人发现,这批难题有一个值得注意的性质,对其中一个问题存在有效算法时,每个问题都会有有效算法。这些问题号称NP-完全问题,其代号为NPC。离散数学中最大的挑战之一就是确定NPC问题们是否真的不存在有效算法?

1.2 图的定义

定义 1 有序三重集合 $G=\{V(G), E(G), \psi_e\}$ 称为一个图,其中 $V(G)\neq \phi$,叫做顶点集合,V(G) 的元素 叫 做 图 G 的 顶点,E(G) 叫做边集合,E(G) 的元素叫做边, $V(G)\cap E(G)$ $=\phi$; ψ_e 叫做关联函数,其定义域是 E(G) , $\forall e\in E(G)$, \exists 唯一的顶对 $u,v\in V(G)$,使得 $\psi_e(e)=uv$; 当 u 与 v 无序时,G 叫做无向图;当 u , v 有序时,G 叫做有 向 图;记 $\{V(G)\}=v$, |E(G)|=e ,当 $v+e<+\infty$ 时,G 叫做有限图,否则为无限图。 +v 日 +v 一种图

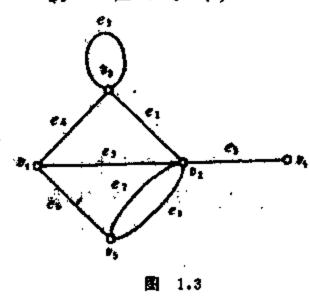
本书只讨论有限图。

为直观起见,我们如下地画一个图的图示。把V(G) 的元素用不重合的几何点表示,位置任选,当 $\psi_{\mathfrak{g}}(e)=\mathfrak{u}v$ 时,若是无

向图,在顶 1 与 v 之间连一条曲线表示边 e,若是有向图,则在上述曲线上从 1 到 v 画上箭头。曲线的长短曲直不加介意。一般,顶点标以 v₁, v₂, ···, 边 标 以 e₁, e₂, ···, e_n, ···; 顶点标志字母的图叫做标志图。

图与其图示不是一回事,但它们是同构的,为了直观,下面 我们把图示看成就是原来那个图。

例 1 在图 1.3 中,



$$V(G) = \{v_1, v_2, v_4, v_4, v_5\},$$

$$E(G) = \{e_1, e_2, e_4, e_5, e_4, e_7, e_6\},$$

$$\psi_c(e_1) = v_1 v_4,$$

$$\psi_c(e_2) = v_2 v_1,$$

$$\psi_c(e_3) = v_4 v_4,$$

$$\psi_c(e_1) = v_1 v_1,$$
 $\psi_c(e_1) = v_1 v_1,$
 $\psi_c(e_1) = v_2 v_1,$

$$\psi_c(e_*) = v_*v_*,$$

$$\psi_{\mathfrak{c}}(e_{\mathfrak{c}}) = v_{\mathfrak{c}}v_{\mathfrak{s}},$$

$$\psi_{\mathfrak{a}}(e_{\tau}) = \psi_{\mathfrak{a}}(e_{\mathfrak{a}}) = v_{\mathfrak{a}}v_{\mathfrak{s}}.$$

下面我们列出十一个术语。

- (1) **边的销点:** ψ_e(e) = uv 时, u 与 υ 叫做边 e 之端点, 也可写成 e = uv.
 - (2) **边驾票租关联**, ψ_s(e) = uv 时, e与 u, v 相关联.
 - (3) **邻頁**: ψ_c(ε) = uυ 时, u 与υ 叫做邻顶。
- (4) 解边。与同一顶关联的两条边叫做邻边。
 - (5) 环,只与一个顶关联的边叫像环。 无
 - (6) 重边: , ψ_e(e₁) = ψ_e(e₂) = uυ 时, e₁ 叫 e₂ 叫 做重边。
 - (7) 平凡國: ν=1, ε=0的图.
 - (8) 韓國。 无环无重边的图。(マル 筒季電)
 - (9) 完全图: 任二顶皆相邻的图,记成K。
 - (10) 二分配: $V(G) = X \cup Y$, $X \cap Y = \emptyset$, X 中的任二项

不相邻,Y 中的任二顶亦不相邻,则G叫做二分图;若X 中的每一顶皆与Y 中一切顶相邻时,G 叫做完全二分圈,记之为 $K_{n,n}$,其中|X|=m,|Y|=n

(11) 頂点v的次數: 记成d(v),定义 $d(v) = d_1(v) + 2l(v)$,其中 $d_1(v)$ 是与v 相关联的非环边数,l(v) 是与v 相关联的环数。

例如图 1.3 中,
$$d(v_*) = 4$$
, $d(v_*) = 3$, $d(v_*) = 3$.
定理 1 (Euler, 1736) $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon$.

证 定义函数

$$\xi(v_1,v_j) = \begin{cases} 1, & \text{if } v_i v_j \in E(G), \\ 0, & \text{否则}, & i = 1,2,\cdots,\nu, j = 1,2,\cdots,\nu. \end{cases}$$

当G是单图时,

$$\begin{split} d(v_{i}) &= \sum_{i=1}^{v} \xi(v_{i}, v_{i}), \\ \sum_{j=1}^{v} d(v_{j}) &= \sum_{j=1}^{v} \sum_{i=1}^{v} \xi(v_{i}, v_{j}) \\ &= \xi(v_{1}, v_{1}) + \xi(v_{1}, v_{2}) + \xi(v_{1}, v_{3}) + \dots + \xi(v_{1}, v_{v}) \\ &+ \xi(v_{2}, v_{1}) + \xi(v_{2}, v_{2}) + \xi(v_{2}, v_{1}) + \dots + \xi(v_{2}, v_{v}) \\ &\dots \\ &+ \xi(v_{v}, v_{1}) + \xi(v_{v}, v_{2}) + \xi(v_{v}, v_{3}) + \dots + \xi(v_{v}, v_{v}) \\ &= 2e. \end{split}$$

当G不是单图时,只要把每 \overline{y} 一环与每 \overline{y} 一重边上"嵌入"一个新顶,类似可证, $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon$ 。证单。

上述证明无非是"每条边两个'头儿',一共有 28 个线头儿"的严格化。

推论 「 奇次顶的总数是偶数。

证, $\odot V(G) = V. \cup V$. 是偶次顶的集合,V. 是流次顶的集合,由定理 1.

$$\sum_{v \in V} d(v) + \sum_{v \in V_0} d(v) = 2\varepsilon, \quad \text{if } i \in V_i$$

而 $\sum_{v \in V_0} d(v)$ 是偶数,故 $\sum_{v \in V_0} d(v)$ 亦为偶数,但 V_0 中每頂 皆奇 $v \in V_0$ 次,故 $|V_0|$ 必为偶数、证毕。

例 2 晚会上大家握手言 欢,试证 握过 奇次 手的 人 数 是 偶数。

证 构作一图,以入为顶,二人握手时,则相应的二顶之间连一边,于是每人握手的次数即为相应顶的次数,由推论1,奇次顶的个数是偶数,所以握过奇次手的人数为偶数。证毕。

例 8 空间中不可能 有这样的多面体存在,它们有奇数个面,而每个面又有奇数条边。

证 以此多面体的面集合为V(G)。当显仅当两个面有公共 楼时,在G的相应两顶间连一边,得到图G、依愿意,V(G) 是奇数,而且d(v) 从而 $\sum_{v \in V(G)} d(v)$,也是奇数,与定理 1 相违,

故这种多面体不存在。证案。

例 4 碳氢化合物中氢原子个数是偶数。

证 以每个原子为顶,每条化学键为边,则每个碳氢化合物就是一个图。"氢"的次数是1,由推论1,氢的原子个数是偶数。证单。

以后我们把d(y) = k的图叫做 k 次正剪圈。例如妖怪是三次正则图。我们也经常使用下面两个符号:

$$\delta = \min_{1 \le i \le \nu} \{d(v_i)\}, \quad \Delta = \max_{1 \le i \le \nu} \{d(v_i)\}.$$

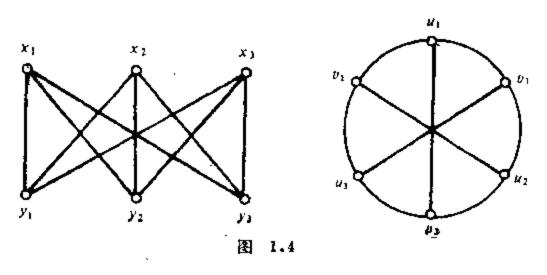
下面给出两个图同构的定义。

定义 2 G与H是两个圈,存在映射

$\varphi: E(G) \rightarrow E(H)$,

 θ 与 φ 皆为 可逆 映 射。当 且 仅当 $\psi_{\sigma}(e) = uv$ 时。 $\psi_{H}(\varphi(e))$ = $\theta(u)\theta(v)$,则称G与H 同构,记成 $G \cong H$ 。

两个图同构时,其图示可以画成平面几何中的全等形。上述"定义中的 $\psi_{B}(\varphi(e)) = \theta(u)\theta(v)$ 当且仅当 $\psi_{G}(e) = uv$ 的意思是同构图的"对应顶夹对应边"。例如下面两个图是同构的:



1.3 轨道与连通

本节只讨论无向单图。

定义 3 $W=v_0e_1v_1e_2v_2\cdots e_kv_k$,其中 $e_i\in E(G)$, $i=1,2,\cdots$, $k,v_i\in V(G)$, $j=0,1,\cdots$,k; 且 e_i 与 v_{i-1} , v_i 相关联,则称W为图 G中的一条道路, v_0 做叫W的起点, v_k 为终点,k为路长, v_i (1 $\leq i\leq k-1$)叫做道路的内点。各边相异的道路叫做行迹。顶点各异的道路叫做轨道,记成 $P(v_0,v_k)$ 。起点与终点重合的逆路叫做回路。起点与终点重合的轨道叫做圈。长k的圈叫k防道。u,v两顶的距离是指u,v间最短轨道的长度。记之为d(u,v)。若u,v两顶间存在道路。则称u与v相连通。图G中任二个顶皆连道时,存G为连通图。

定义 4 G与H为两个图, $V(H)\subseteq V(G)$, $E(H)\subseteq E(G)$, 则称H是G之子顶,记成 $H\subseteq G$,若 $H\subseteq G$,且H与G不同构,则

H是G之真子图,记成H $\subset G$; 着H $\subseteq G$,且V(H) = V(G) ,则称H E G 的生成子图;着H $\subseteq G$,且V(H) = V' ,E(H) 是 由 E(G) 中两端皆在V' 中的边构成的子集,则称H 为由 V' 导出的G 之子图,记成H = G[V'] ;着 $V(G) = \bigcup_{i=1}^{g} V_i$,又当且仅当两个项词而一个子集 V_i 时,此二项连通,则称 $G[V_i]$ $(i = 1, 2, \cdots, \omega)$ 为G 的当图片。

由以上定义知,G是连通图当且仅当 $\omega=1$ 。

显然,若 u 与 v 之间存在道路,则 u 与 v 之间存在轨道;闭 的行迹中含有圈。但回路上未必含圈,例如 K 2 中有回路 v 1 v 1 v 1 v 1 但 K 2 中无圈。

例 5 有 2n 个电话交换台, 每个台与至少 n 个台有直通 线路,则其中任两台之间可以通话。

证 把交换台视为图G的顶点,当且仅当两个台有直通线路时,两个相应的顶是相邻的。于是问题化为2n个顶点的图,每顶次数至少为n,则图G是连通的。事实上,若G不连通,则至少有一个连通片,其顶点数目至多是n,在此连通片中,顶的次数最大是n-1,与原图中每顶次数至少为n相违。证单。

例 6 图中只有两个奇次顶,则它们必连通。

征 否则此二顶分属两个连通片,而每个连通片看成一个图时,只有一个奇次顶,与推论1矛盾。征毕。

定理 2 **G为二分图的充要条件是G中无衡图**。 **逐**证 不妨考虑连通图。

若二分图G中无圈,则无奇圈。若G中有一个圈 $C=v_1v_1v_2$ … v_2v_3 ,不妨设 $v_4\in X$,于是 v_3 , v_4 可见 v_4 是奇数,属C长 v_4 十 是偶圈。至此证明出二 分图 中 无奇圈。

反之,若 G中无奇麗,往证G是二分图。为此,令 $X = \{w | w \in V(G), d(v_1, w) = \text{even}\}$

 $Y = \{w | w \in V(G), d(v_1, w) = odd\},\$

其中 v_1 是G的任一项点。 $\forall u,v\in X, \partial P_1(v_1,u)$ 是 $\mathcal{M}v_1$ 至x的最短轨, $P_2(v_1,v)$ 是 $\mathcal{M}v_1$ 至v的最短轨, ∂u_1 是 P_1 与 P_2 的最后一个公共顶点,因 $P_1(v_1,u)$ 与 $P_2(v_1,v)$ 最短,故 P_1 上的一段 $P_{11}(v_1,u_1)$ 与 P_2 上一段 $P_2(v_1,u_1)$ 等长,且最短。因 P_1 与 P_2 之长为偶数,从而 P_1 上的一段 $P_{12}(u_1,u_1)$ 与 P_2 上的一段 $P_{22}(u_1,v_1)$ 有相同的奇偶性。若u与v相邻,则 P_{12} , P_2 和uv图成一个奇圈,与G中无奇圈相违,故X中任二顶不相邻,同理可证Y中任二顶不相邻。证事。

- 侧 7 一只老鼠,在 3×3×3 的立方体乳酪块上 咬出 一条洞,这个洞通过 1×1×1 的27个小立方体的中心。它从大立方体的一角咬起,只要还有它没尝过的 1×1×1 的小点心块,就继续向前咬,问这只老鼠能否在 3×3×3 立方体中心停止? 假设这只老鼠是从一个 1×1×1 的小立方体的中心沿与侧面正交的方向向另一未咬过的小点心块的中心咬去的。
- 解 以1×1×1的小立方体为顶构作一个图,把3×3×3立方体中心那块小立方体与开始被咬的小立方体之间连一条边,再把有公共倾面的小立方体之间连上边,以八个角上及六个倾面中心处的小立方体为X集合,其余的小立方体为Y集合,于是构成了一个二分图。由定理2,此图不会有27阶圈,所以老鼠不会停留在3×3×3立方体的中心。

例 8 中的所谓量长轨方法以后还会用到,它是图论中的典型 技巧之一。

例 9 若G是连通图, $G' \subseteq G$, 且|V(G')| < |V(G)|,则G'

中有不属于G'的边,它的一个端点在G'上,另一端点不在G'上。

证 因 G 是连通 图,又 |V(G')| < |V(G)|,则 可以找到 $v \in V(G')$, $u \in V(G')$ 有一条轨道 P(u,v)。我们从 u 出发,沿 P(u,v)前进,遇到第一个G'中的顶 w 为止,则 P(u,v) 上的一段 P(u,v) 的最后一条边即为题中所述的那种边。证据。

例9的事实在图论的一些证明中常被引用。

有的例題其实就是一个有用的定理,为了重点突出,我们只 把最重要的命題以定理的名义列出,其余命題则以例题的形式讲 解或放入习题由读者自行论证。希望读者注意从例题与习题中吸 收那些较为重要的常用的图论知识。

例 10 G是单图,每顶次数不小于3,则G中有偶圈。

证 设 $v_0v_1v_2\cdots v_n$ 是G中的一条最长轨,由于 $d(v_0) \ge 3$,由 "最长轨方法" 知存在 $v_i \ne v_j$, $1 \le i < j \le m$, v_1 , v_j 皆与 v_0 相邻。若 i 与 j 中有奇数,例如 i 是奇数,则 $v_0v_1v_2\cdots v_i$ 与边 v_0v_i 合成一个偶圈(长i+1)。若 i ,j 都是偶数,则由 $v_iv_{i+1}\cdots v_j$ 与边 v_0v_1 , v_0v_1 合成一个例图(长j-i+2)。证事。

_ 由例10知, 妖怪图中有偶圖。

例 11 G为单图,每顶次数不小于3,则 G中各个圈长的最大公因数是1或2.

证 只需证无大于 2 的公因数。由例 10, G中 有 长 i+1, j+1和 j-i+2的圈。若 i+1, j+1, j-i+2有公因数k>2, 则 k

能整除j-i,于是 k 能除尽 2, 这是不可能的。证事。

定义 5 单图中最长圈的长度叫做该图的周长,最短圈的长度叫做该图的圈 (腰)长,圈G的直径d(G)定义为d(G)= $\max\{d(u,v)\mid u,v\in V(G)\}$ 。

例如, Petersen图((图1.5) 最小的

妖怪)的問长是9, 围长是5, 直径是2.

1.5

求图的周长和直径是图论中的难题之一。

定义 6 单图 G 的补图记成 G^c ,它是这样一个图 , V(G) $\mathbf{w}^{V}(G^c)$, 及当且仅当G 中海积不相邻时,此二项在 G^c 中相邻。

例 12 单图与其补图必有一个是连通图。

证 设单图 G不连通,证 G '是连通图 设 G ', G ', G ', G '。是 G 的连通片。任取二顶 u ,v ,若 u ,v 属于同一个连通片 G , $1 \le i \le \omega$, w 是 不在 G '中的一个顶,则 u w ,v w 是 E (G '),即 在 G '中 u 与 v 连通 E 者 u 与 v 分别属于两个连通片 G , G , G , G , G , G ' G ' , G ' G ' , G ' G ' 中 G ' G

1.4 Brouwer不动点定理

本节介绍拓扑学中著名的Brouwer不动点定理,为证明这个定理,拓扑学中用了一系列的预备知识,证明不易被未系统地学习过拓扑学的人所理解。本节用图论方法给出一个新证明,其通俗易懂之程度很值得欣赏。这是又一个用图论方法证明数学问题的生动范例。

"。我们把平面闭三角形区域Δ°进行单纯有分。

$$\Delta^2 = \bigcup_{i=1}^m \delta_i^2,$$

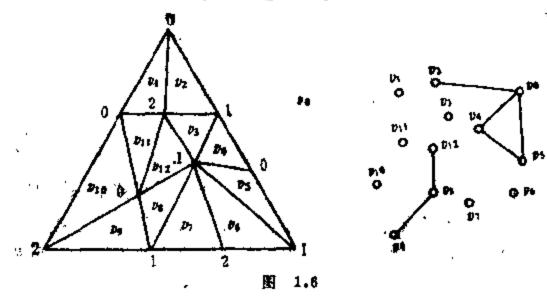
 δ ? 是比 Δ *小的三角形,且 δ ? $= \delta$ 或 δ *或 δ *。这里 δ * 是一个项点, δ *是两个小三角形的公共边。把 Δ *与 δ ?, $i=1,2,\cdots,m$ 的项用 0, 1, 2 标号,着

- (1) A² 三个顶分别标以 0, 1, 2,
- (2) Δ^2 的一条掉两端标号为;与i, $0 \le i < j \le 2$,与此边、接触的小三角形之顶亦标号;或i,则称这种标号为正态标志。

在正态标志之下,小三角形的三个顶分别标以 0 , 1 , 2 时,称这个小三角形为正态三角形。

定理 3 (Sperner) Δ'的单纯制分正态标志中,必有奇象 个正态三角形。

证 令86是 Δ °的外部区域, δ 1, δ 2,…, δ 2,是剖分所得之小三角形,设计一个图G,V(G) = $\{\delta$ 3, δ 1,…, δ 3, 当且权当 δ 2,与 δ 3 ($i \times j \neq 0$)有公共的 0-1 标志的边时, δ 3,与 δ 3 这两个顶之间连一边, δ 3,与 δ 3 ($1 \le i \le m$)当且仅当 δ 3 的0-1 标志边完全落在 Δ 3 的0-1 标志边上时,在 δ 3 与 δ 4 之间连一边。



下面证明 $d(\delta_{\delta}^2) = odd$ 。事实上, $d(\delta_{\delta}^2)$ 是 Δ^2 上0-1边以0,1为端点的小区间的个数。若 Δ^2 的这条边的内点无小三角形之顶,则 $d(\delta_{\delta}^2) = 1$,若 Δ^2 这条边内点有小三角形之顶,且这些小三角形之顶皆标以0或1,亦有 $d(\delta_{\delta}^2) = 1$,若 Δ^2 这条边内点上0与1标号都有,我们把两端标号一致的小区间缩成一点,标号不变。这时, Δ^2 这条边上标号为 $0101\cdots01$,这里有奇数个小区间端点分别标以0与1,所以 $d(\delta_{\delta}^2) = odd$ 。

由推论 1, δ_1^2 ,…, δ_m^2 中奇次顶是奇 数 个,且 $d(\delta_1^2) < 3$,故 δ_1^2 , δ_2^2 ,…, δ_m^2 中的奇次顶只能是一次的,仅当 δ_1^2 是正态三角形时, $d(\delta_1^2) = 1$,故正态三角形的个数是奇数。证单。

图 1.6 中把证明中的δ 改成 υ,υ,,υ,,υ, 是三个一次顶,即

正态三形角是三个。

定理 4 (Brouwer) $f_* \Delta^2 \rightarrow \Delta^2$ 是连续映射,则 $\exists x_0 \in \Delta^2$,使得 $f(x_0) = x_0$.

症 设 x_0,x_1,x_2 是 Δ^2 的三个顶点,则 Δ^2 上任一点x 可唯一 地表成

$$x = a_0 x_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2$$
,

其中 $a_i \ge 0$ (i = 0, 1, 2), $\sum_{i=0}^{2} a_i = 1$ 。这里写的 x, x_0, x_1, x_2 是二维向量。记 $x = (a_0, a_1, a_2)$, $f(x) = (a'_0, a'_1, a'_2)$ 。令 $S_i = \{(a_0, a_1, a_2)\}$ (a_0, a_1, a_2) (a_0, a_1, a_2

为此,考虑 Δ '的一个单纯剖分正态标志,使得标:的每个顶属于 S_i , i=0,1,2。事实上, Δ '上任一点x, $x=(a_i,a_1,a_2)$, $f(x)=(a_0',a_1',a_2')$ 时,存在一个 S_i , 使 $x\in S_i$, 且 $a_i>0$,否则对每个 $a_i>0$ 时, $a_i'>a_i$,于是 $\sum_{i=0}^2 a_i>\sum_{i=0}^2 a_i$,矛盾。我们如下地标志:

一个三角形顶点 $x \in S_1 \perp a_i > 0$ 时,x 标以i 。这种标志是正态标志,例如 Δ^* 的顶点 x_i $(i \neq 0,1,2)$ 有 $a_i = 1$,故 $x_i \in S_i$,标成i; 在 $\Delta^* x_i x_i$ 边上各点的 $a_i = 0$,我们只能把这边上的点 标以 0 或 1 , $x_i x_i$ 边上的点同理只能标 0 或 2 , $x_i x_i$ 上的点只,能标 1 或 2 , 数为正态标志。

由定理 3,至少有一个正态三角形,其顶点分别属于S,,S,,S.。我们使剖分无限变密,且小三角形有任意小的真疑,则S.。

- S_2 , S_3 中有三个点相距可以任意小,又 f 连续,故 $S_1(i=0,1,1)$ 经 经常数 2^{-1}
- 2) 是闭集,于是 ∩ S_i≠φ. 证**毕**.

1.5 Dijkstra 算法

路路线,这是一个极普通的实际问题。这个问题的数学模型如下, $_{\mu}$ $_{\mu}$ $_{\mu}$ $_{\nu}$ $_{\nu}$

$$W(G) = \sum_{e \in E(G)} w(e),$$

 $\overline{W}(G)$ 叫做图G的权。我们求满足某种条件的子图H,且使其权最小,即

$$W(H) = \sum_{e \in E(a)} w(e) = \min,$$

其中 $H \subseteq G$,且有某种指定的性质,上述铁路问题即在连通图G中的任给定的两项u,v之间找出一条轨 $P_{o}(u,v)$,使得

$$W(P_0) = \min_{P \in \mathscr{P}(u,v)} \{W(P)\},$$

 $\mathcal{P}(u,v)$ 是从 u 到 v 的轨集合。这里,我们称 $W(P_v)$ 为 u 与 v 的距离,记成d(u,v)。

边的权在友谊图中可以代表两个朋友的感情深厚的程度,在 通讯图中,边的校可能代表有线通讯线路的造价数维修费用,等 等。许多不同的实际问题,其数字模型与上述铁路两上的最短路 线问题的数学模型是一致的

下面介绍求顶点 $u_o \in V(G)$ 到连通图G的各个顶点最短轨的一个有效算法。

"所谓算法,是指一组有穷规则,它准确告知,为解决稳定的 16 问题, 何时应做何种操作。

算法的 表述 方式有三种: (1)直叙式, (2)框图式,

- (3)算法语言表述。本书的一切算法皆以直叙式表出,待上机 执行时,再将其转述成算法语言。图论算法的设计和分析是一个 引人入胜的领域,也是与计算机 科 学技术关系最 为密 切的领域 之一。
- 定义 7 一个图论算法的计算量 $f(v, \varepsilon) = O(P(v, \varepsilon))$ 时,则称此算法为有效算法或好算法,其中 $P(v, \varepsilon)$ 是某个多项式,v与 ε 分别是图的复数与边数

Diastra (10, v 不相邻时, w(40) = ∞) ...

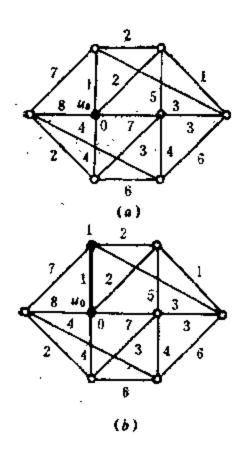
- (1) $\diamondsuit l(u_0) = \emptyset$, $l(v) = \infty$, $v \neq u_0$, $S_0 = \{u_0\}$, i = 0.
- (2) 对每一个 $v \in S_i(\bar{S}_i, \text{指 } S_i, \text{以外的顶所成 之集合})$,用 $\min\{l(v), l(u_i) + w(u_iv)\}$ 代替 l(v),设 u_{i+1} 是使 l(v) 取最小值的 \bar{S}_i 中的 顶,令 $S_{i+1} = S_i \cup \{u_{i+1}\}$,
 - (3) 若i=v-1, 止, 若i<v-1,用i+1代替 i,转(2)。由上述算法知:
- (1) 8.中各顶标 (u) 即为u。到u 的距离,又因 $u<\infty$,故有限步之后。V(G) 中每一顶都标志了与v。的距离,从而可以找到各顶到u 的最短轨。
- (2) Dijkstra 算法的时间复杂度 $f(v,e) \in O(v^2)$, 所以是有效算法。

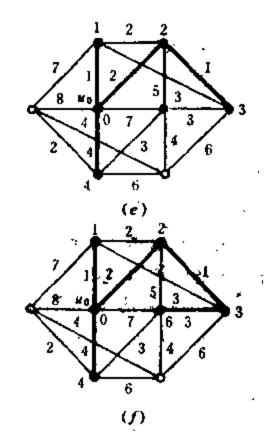
侧 13 求图1.7中由顶4。到各顶的最短轨道及距离、

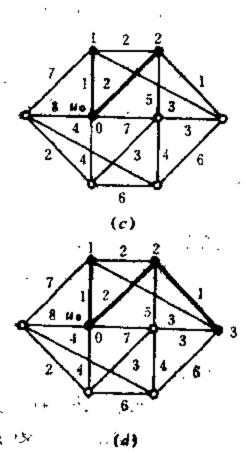
(h)中各顶标即该顶至u。的距离,而u。至每项的最短轨可按图中相实线找到。

作为本章的结尾,应当提请读者注意的有以下几点。

(1)我们在图记中研究的图,并非几何图形、工程图或美术图画,它表现的只是顶点集合上的二元关系,基本质是抽象的概念,我们之所以画成图示,只是为了直观示意,或者认为是所考







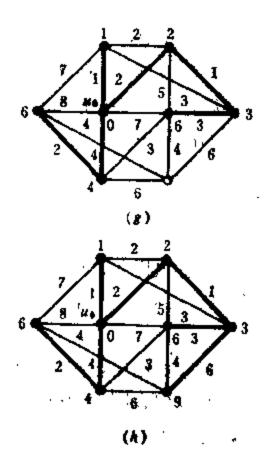


图 - 1.7

態的图的同构物,所以边的曲直长短,顶点的位置,都没有关心的必要。它们的几何性质与图的性质并不相关,这一点说明图其实是一维拓扑学的研究对象。

- (2)我们讲了图论简史,应着重领会的是,干万不要不加分析地瞧不起游戏性的问题,有些游戏问题可能成为一门很有生命力的学科的"种子",例如七桥问题以及周游世界的游戏。但是,并非一切游戏性问题(往往又难又有趣)的解决引出的方法与概念都有如此之大的意义。社会生产对其要求(或者说依赖)的程度才是该门学科发展的决定因素。图论前两百年停滞不前,而后五十多年,尤其是近二十多年来,则高速发展,道理盖出于此。
- (3)本章只是图论的一个开头,就冒出这么多的概念、术语和符号,以后各章中的概念有增无减。这也是图论学科的一个特色,而且两一个概念中的术语符号往往因作者而异,目前看来,术语符号统一的可能性不太大,本书尽可能使用学术界较为流行的一些术语。

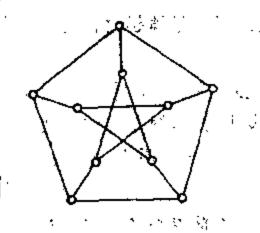
图论的概念为数甚次》未必逐字记忆,要多画示意图,从正反两个方而把本质和易于误解的地方搞清楚。

- (4) Enter 公式 $\sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon$ 、轨和圈是本章引出的三个主要内容,尤其是轨与圈是以后各章讨论的中心。
- (5)本章给出的Brouwer不动点定理的证明,例证了图论 方法对连续统中的某些数学问题亦是可以有所贡献的,而且解决 得甚为奇妙直观又不失严格性。我们的目的是唤起读者用图论方 法解决各种理论问题的自觉性。
- (6) 算法是计算机科学中的中心课题之一,本章通过Dij-ks tra 算法,示范图论算法的设计与表达方式,树立有效性观点。 Dijkstra 算法本身是解决最优化问题的重要工具之一。我们应当明了其思想,而且要会用。
 - (7) 本章提供了不少习题,以后各章也不会太少。大家一

定体会到,与数学分析等非离散数学的味道很不一样,图论代入公式的机会非常之罕见,几乎每个题目都要求我们自行设计一个思路,不少题目"貌似简朴,实则困难",怎么对付它? 多做习题,训练图论的机敏性,积累经验。

习 夏

- 1. 从日常生活中举出五个实例,它们的数学模型是图。
- 2. G是单图,则 $e \leqslant \binom{\nu}{2}$.
- 3.(1) $G \cong H$, 则 $\nu(G) = \nu(H)$, $\varepsilon(G) = \varepsilon(H)$.
 (2) (1) 之逆不真.
- 4. 画出不同构的一切四顶单图。
- 5.一间房子里有N(>3) 个人, 至少有一个人没有和房子里每个人握手,房子里可能与每个人握手的人数的极大值是几?
- 6. 把1, 2, 3, 4, 5任意划分成两个集合,则必然有一个集合包含两个数及其差。
- 7. 任何两个以上的人组成的人群中, 至少有两个人, 他们的朋友数一样多。
- 8.2n个(n≥2)人中每个人至少同其中n个人相识,则其中至少有四个人,使得这四人圈 圆桌而 坐时,每个人旁 边是 他认识的人.
 - 9. 证明下面两图同构 (图 1.8) №



A 1.8

10. $G \cong H$ 的充要条件是存在可逆映射 θ . $V(G) \rightarrow V(H)$,

ì

使得 $uv \in E(G)$, 当且仅当 $\theta(u)\theta(v) \in E(H)$,其中G与H是单图。

14. G是单图,则 $s=\begin{pmatrix} 2\\ 2 \end{pmatrix}$ 的充聚条件是 $G \cong K$...

- 12. (a) e(K_{n,n}) = mn. (b) G是完全三分图, 则e≤v²/4.
- 13. 在一次象棋比赛中,任意两名选手之间至多只下一盘,则总能找到两名选手,他们下过的盘数恰好一样。
- 14. 上题中, 若每名选手与其余的选手都比赛过,人数是n, 求总盘数。
- 15. 一个旅游小组,其任意 4 入中至少有 1 入以前见过另外三人,则任意 4 人中有 1 人,他早就见过旅游小组(至少有 4 人) 内其余的每个人。
 - 16. 一个图,每顶次数至少是2,则图中有圈。
- 17. n个运动队之间安排+-项竞赛, 尼赛完和-1局, 求证存在十个队, 它已至少参加过 3.局比赛。
- 18. $A \subseteq V(G)$, k 是恰有一个端点在A内的边的条数,若A内奇**次顶**的个数是偶数,则 k 为偶数,否则, k 为奇数。
- 19. 一些國面覆盖平面上取定的 26 个点,每个國至 少 盖住 n+1个点,则任意两个点能由平面上的一条曲线所联结,这曲线 整个地被一些圆所覆盖。
 - 20. 每頂皆 2次的连通图是圈。
 - 21. 是否有这种不连通单图, ν≤6, 而每顶次数皆 2.
 - 22. 有多少顶点为6个的单图,每顶次数为2?
- 23. k维立方体是顶点为分置取 0 或 1 的 k维向量,又当且仅当它们只一个分置不相同时,此二顶之间连一边。证明 k维立方体有2*个顶,k2*-*条边,且是 2 分图。
 - 24. KS与KA、基础公样的图?
 - 25. $G^{\bullet} \cong G$,则称G自补,若G自补,则 $\nu(G) \equiv 0$ 或 $\mathbb{I}(\text{mod}4)$ 、

- 26. 有多少ν=5的自补单图?
- 27. 每个 n 顶单图与K,的一个子图同构。
- 28. 完全图的每个导出子图仍是完全图。
- 29、二分图的任一子图仍是二分图。
- 30. 求一个二分图, 它不与任何 k 维立方体的子图同构。
- 31. G是单图,整数 n 满足 $1 < n < \nu 1$,证明若 $\nu \ge 4$,且 G 的 所有的 n 个顶的导出子图都有相同的边数,则 $G \cong K$ 。或 $G \cong K$ 。
 - 32. $\delta \leq 2e/\nu \leq \Delta$.
- 33、一个 A 次正则二分图有顶集划分 $V(G) = X \cup Y$,则|X| = |Y|。
- $34.V(G) = \{v_1, v_2, \cdots, v_r\}, 则称<math>d(v_1), d(v_2), \cdots, d(v_r)\}$ 为 G的次数序列,证明非负整数序列 d_1, d_2, \cdots, d_r 是个图次数序列的充要条件是 $\sum d_r = \text{even}$.
 - 35、单图次数序列叫做图序列,证明
- (a) 7, 6, 5, 4, 3, 3, 3, 5, 6, 5, 4, 3, 3, 1不是图序列。
- (b) d₁,d₂,...,d_n是图序列,且d₁≥d₂≥...d_n,则∑d_n是偶数,且对1≤k≤n,

$$\sum_{i=1}^k d_i \leq k(k-1) + \sum_{i=k+1}^n \min\{k_i d_i\}.$$

- 36. d₁,d₂,···,d_a 是非负整数非增序列,d′ 是序列 d₁,-1, d₁-1,···,d₂₊₁-1,d₂₊₂,···,d_n,证明
 - (a) d,,d,,...,d,是图序列的充聚条件为d/是图序列。
 - (b) 给出一个由图序列构作单图的算法。
 - 37. 无环图G包含一个二分生成子图H,使得 $d_x(v) \gg \frac{1}{2} d_x(v)$

对一切 $v \in V(G)$ 成立。

- 38. $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ 为平面点集,且任二点相距至少为1,则相距恰为1的点对少于 3n 个。
- 39. 图 G 的边图是以 E(G) 为顶集,又当且仅当 G 中两条边相邻时,在边图中此二顶相邻,证明若 G 为单图,则 G 的边图有 e(G) 个 顶, $\sum_{v \in V(G)} \binom{d_G(v)}{2}$ 条边。画出 K 。的边图。
 - 40. G是单图、 $\delta \ge k$,则G有长 k 的轨。
- 41. G是连通图的充要条件是V(G)的每个分成两个非空子集 V_1,V_2 的划分,总存在一边,它的两端分别属于 V_1 与 V_2 。
 - 42. G是单图, $\epsilon > \binom{\nu-1}{2}$,则 G连通.
 - 43. $\nu > 1$, 画一个非连通单图, 使 $\epsilon = \begin{pmatrix} \nu 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.
 - 44. G是单图, $\delta > \left[\frac{\nu}{2}\right] 1$,则G连通。
 - 45. (a) $e \in E(G)$, 则 $\omega(G) \leq \omega(G-e) \leq \omega(G)+1$.
- (b) υ∈V(G), 则(a)中G-e未必可由 G-υ代替,其中 ω(G)是G的连通片数目。
 - 46. G连通,每顶皆偶次,则 $\omega(G-v) \leq \frac{1}{2}d(v)$.
 - 47. 连通图两条最长轨有公共顶。
- 48. G中頂u,v注通时、u,v之间的距离定义为u,v之间最短轨之长;u,v不连通时,规定其距离为 ∞ ,证明d(u,v)+d(v,w) $\geq d(u,w)$,其中 $u,v,w \in V(G)$,d(u,v)表示u与v之距离。
 - 49. G的直径大于 3 ,则G 的直径小于 3 。
 - 50. 直径为 2 的单图, Δ=v-2, 则 e≥2v-4.
- 51. G是连通单图,G不是完全图,则G中有三个顶点u,v,w,使得uv,vw $\in E(G)$, 而 uw $\in E(G)$.

- 52. $e \in E(G)$, e 在一个闭行迹上,则 e 在一个圈上。
- 53. δ≥2的图中有圈。
- 54. G是单图, $\delta \ge 2$,则 G中有长至少为 δ + 1的圈.
- 55. 一个围长为 4 的 k 次正则图至少有 2k 个顶; 有 2k 个顶 时,图在同构意义下是唯一的。
 - 56. 围长为 5 的 k 次正则图至少有 k²+1 个顶。
 - 57. (a) ε≥ν, 则G中有圈.
 - $(b)/e \gg v + 4$,则G中有两个无公共边的圈。
- 58. 一公司在六个城市有分公司 $c_1,c_2,...,c_6$,下面矩 阵的 (i,j) 号元素是 c_1 到 c_2 的飞机票价,试为该公司制作一张由 c_1 到 各公司去的最便宜的通航线路图,

$$\begin{vmatrix} 0 & 50 & \infty & 40 & 25 & 10 \\ 50 & 0 & 15 & 20 & \infty & 25 \\ \infty & 15 & 0 & 10 & 20 & \infty \\ 40 & 20 & 10 & 0 & 10 & 25 \\ 25 & \infty & 20 & 10 & 0 & 55 \\ 10 & 25 & \infty & 25 & 55 & 0 \end{vmatrix} .$$

- 59. 船公把一只老狼、一只小羊和一头大白菜运过河。船小,一次只能运走一宗,为安全起见,不能让狼与羊,或羊与白菜无人看管时在一起,试问应如何运送最省时又安全?
- 60。两人有酒,装满 8 斤之瓶,另有能装 5 斤与 3 斤的空瓶 各一只,今欲平分其酒,请设计一个最简便的方法。
- 61. Brouwer 不动点定理证明中"S,是闭集"一语何以正确,试加证明。
 - 62. 正四面体到自身的连续映射有不动点。
- 63. 有 n。个药箱,每两个药箱中有一种相同的药,每种药恰好在两个药箱中出现,问共有多少种药?
 - 64. $\nu = n, \varepsilon = n+1$, 则∃ $v \in V(G)$, 使得 $d(v) \ge 3$.

- 65. 俱乐部有14人想打桥牌,过去每个人都曾与其中5个人合作过,现规定四人中必须任何两个人都未合作过才准许在一起打一局,在这种规定之下,只打了三局就无法续继进行,这时新来了一位年轻人,试证明有这个年轻人参加,一定还可以再打一局。
 - 66. 任何 9 个人中必有三人相识或四人彼此不相识。
- 67. 把 K_{1} 。的边染成红色或兰色,证明不论如何染,一定可以找到四个顶,它们导出的 K_{1} 是同色的。
- 68. 从 K,中删除至少几条边,才能得到不连通图,且有一个连通片含n'个顶 $(1 \le n' < n)$?
- 69. n个人参加一次会议,其中有相识者,每两个相识者皆 无共同的熟人,而每两个不相识者恰有两个共同的熟人,则每人 都有同样数目的熟人.
- 70. 在接线柱A,B之间连接着一些电阻,试问至少要多少个电阻,怎么联接,才能使任意损坏9个电阻时,电路仍连通且不短路?
- 71. 从敌区铁路交通图上发现,要使两个城市 v_1,v_2 的铁路交通完全中新,至少要炸毁 k 段铁路。若有一城市 v_2 与 v_1,v_2 之间各有一段铁路 e_1,e_2 相通,证明把 e_1,e_2 炸毁后,至少还要炸坏k-1段铁路,才会使 v_1,v_2 之间的铁路交通中断。
- 72. 长为奇数的回路必含圈,试证明之。长为偶数的回路是 否一定含圈?
 - 73. 在 k 次正则图中, $kv \equiv 0 \pmod{2}$.
 - 74. G是连通图, v≥2, e<v, 则 G中至少有两个一次顶。
 - 75. 直径为 d 围长为 2d+1 的图是正则图。

2 树

2.1 树及其性质

树在我们这里是一个数学概念,它是在各种各样的图中,极为简单又极为重要的一类图。树在各个不同的领域中有广泛的应用。对于图论学科本身,树扮演着一种特殊的角色,那就是,一个一般的图论难题或猜想提出之后,大都首先用树来探讨其真伪。有的问题往往对一般图难以解决,而对于树,则可以圆满解决。本章只考虑单图。

定义 1 无圈连通图叫做树,用T表示,T中d(v)=1的项v 叫做叶,每个连通片皆为树的圈叫做林。孤立项叫做平凡树。

图 2.1 是一个林,每个连通片皆为树。

定义 2 树T是圆G的生成子圈时,T称为G的生成树,从G中把T之边剩除得到的图G-E(T) 叫做G的余树成树余。

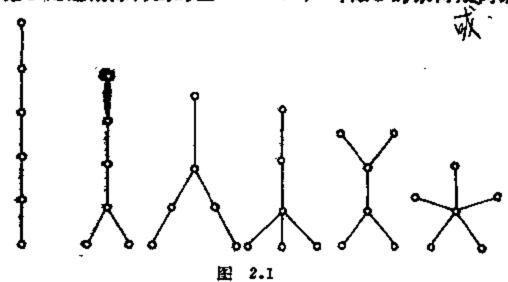


图 2.2 中租实线表示生成树,细实线是余树边。可见 余树可能不连通。

为了充分认识 树 的图论特征,我们下面 给出树 的六个等价 命题。

定理 1 下面的六个命题等价:

- (1) G是树。
- . (2) G中任二顶之间 有且仅有一条轨。
 - (3) G中无圈,且 $\varepsilon = v 1$ 。
 - (4) G连通,且 $\varepsilon = v 1$ 。

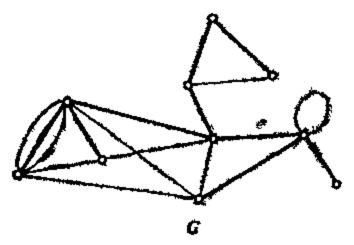


图 2.2

- (5) G连通, $\forall e \in E(G)$, G e 不连通。
- (6) G无臘, $\forall e \in E(G)$, G + e 恰有一个圈。

证 $(1)\Rightarrow(2)$ 因为G是树,连通,故 $\forall u,v\in V(G)$, 当轨 $P_1(u,v)$, 若还存在 $P_2(u,v)\neq P_1(u,v)$, 当我们沿 P_1 由 u 走向 v 时, P_1 上一定存在两个顶 w_1,w_2 , w_1 与 w_2 是 P_1 与 P_2 的两个公共顶,但在 w_1 与 w_2 之间 P_1 上再无其它与 P_2 公共的顶,且使得 P_1 与 P_2 在 w_1 与 w_2 之间的部分合成一个圈,与 G为树无圈相违。可见 (2) 成立。

(2)⇒(3) 若G中有**關,**则此圈上任二顶之间有两条不同的轨,与(2)相违,故G中无圈。

下面用关于ν的归纳法证明 e = ν - 1。

 $\nu = 1$ 时, e = 0, $\nu = 2$ 时, e = 1, $e = \nu - 1$ 成立.

假设 $v \le k$ 时,(3)已成立,考虑v = k+1的情形。这时,若u与v是G中两个邻顶,取 $G_* = G - uv$,在G上u与v之间只有一条轨即边uv,故 G_* 中u与v之间无轨道, G_* 不连通,但 G_* 显然只有两个连通片 G_* , G_* ,在 G_* 与 G_* 中,两顶之间只有一条轨,由归纳法假设, $e_1 = v_1 - 1$, $e_* = v_2 - 1$, $e_* = e_*$ + $e_* + 1 = v_1 + v_2 - 2 + 1 = v - 1$ 。即(3)成立。

- (3)⇒(4) 只欠证*G*连通。若*G*不连 通,*G*₁,*G*₂,…,*G*₂(ω ≥2) 是*G*的连通片,则 $e_1=\nu_1-1$,这是因为 e_1 是连通 无圈图,即 e_1 是树,故对 e_2 0,(3)成立;于是 $e_1=\nu-\omega$ 0,与 $e_2=\nu-1$ 相违,故 e_2 0 是连通图。
- (4) \Rightarrow (5) 只欠证 $\forall e \in E(G)$, G-e 不连通. 因为 e(G-e) = e(G) 1 = v 2, 只要 我 们证出连 通 图的必要条 件 是 e $\geq v 1$, 则可得出 G-e 不连通的结论.

事实上, $\nu=2$ 的连通单图满足 $e=\nu-1$ 。假设 $\nu \leq k$ 的 连通图 $e \geq \nu-1$,对于 $\nu=k+1$ 的连通图,考虑 $G-\nu$,其中 $\nu \in V(G)$ 。

- (i) 若 G-v 仍 连 通, 则 $e(G-v) \ge k+1-1-1=k-1$, 而 $e(G) \ge e(G-v)+1$,于是 $e \ge k$,即 $e \ge v-1$ 。
- (ii) 若 G-v 不连通, G_1,G_2,\cdots,G_w 是 G-v 的连通 片, $\omega \ge 2$,由归纳法假设, $e_i \ge v_i 1$, $i = 1,2,\cdots,\omega$,

$$\varepsilon(G-v) \geqslant \sum_{i=1}^{\omega} v_i - \omega = k+1-1-\omega = k-\omega,$$

而 $\varepsilon \geqslant \varepsilon (G-v) + \omega$, 故 $\varepsilon \geqslant k = v-1$.

(5)⇒(6) 先证 G中无圈。若 G 中有圈,从 G 的圈上 哪 除一边所得之图仍连通,与 (5)相违,故 G 中无圈。

下证 G+e 恰含一个圈。事实上,(5)说 G 连通,上面 又证出 G 无圈,故 G 是树,从而(2)成立,即任二顶间仅有一轨相连,所以 G+e 必有含 e 的圈;若 G+e 中有两个含 e 的圈, G+e-e e e 中仍有一个圈,与 G 中无圈矛盾。

(6)⇒(1) 只欠证G连通. ∀u, v∈V(G), 若u与 v 相邻, 则u与v连通, 若u与 v 不是邻顶, 由 (6) 知 G+uv 只含一圈, 即 G中 u 与 v 之间有轨, 故 u 与 v 亦连通、由 u 与 v 之任意性, G是连通图. 证事。

推论 1 非平凡树至少两个叶。

证 T为非平凡树,则 e(T) = v(T) - 1,又

$$2\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} d(v_i) = 2(v-1);$$

T是连通图,于是 $d(v_i)$ ≥1, 若全是不小于 2 次的顶,则

$$\sum_{i=1}^{\nu} d(v_i) \ge 2\nu, \qquad = \sum_{i=1}^{\nu} d(v_i) = 2\nu - 2$$

矛盾,故至少有一个一次顶u,除u外,其余v-1个顶次数之和为2v-3。若除u外每顶次数不小于2,则它们的次数和>2(v-1)=2v-2,与它们的次数和为2v-3矛盾。故除u外还至少有一个一次顶。证单。

推论 2 G连通的充要条件是G有生成树。

证 充分性的证明不足道。

若G连通,设T是G的边数最少的连通生成子图,则 $\forall e \in E(T)$,T-e不连通,由定理 1 (5)知T是树,即G有生成树。证毕。

例 1 顶数大于 4 的图 G 或其补图中含有圈。

证 岩G中与G'中皆无圈。设G1,…,G2,是G的连通片,G1,G2,…,G3,是G4 的连通片,则G6的边数为 $\nu(G)$ - ω 1, G5 的边数为 $\nu(G)$ - ω 2, G5 边数之和为

$$\frac{1}{2}v(v-1) = 2v - \omega - \omega',$$

$$v^2 - 5v + 2(\omega + \omega') = 0 \ (\omega, \omega' \ge 1)$$

$$v^2 - 5v + 4 \le 0.$$

解得 $1 \le \nu \le 4$, 与 $\nu > 4$ 矛盾, 故 G 或 G' 中有圈。证毕。

例 2 连通图的无圈子图可以是生成树的一部分。

证 若 G 是树,命题自然成立。若 G 不是树,G 中有圈 C_1 ,设 G' 是 G 的无圈子图,则 C_1 上至少有一边 e_1 不 在 G' 上,把 e_1 从 G 上 删除, $G-e_1$ 仍 连 通。若 $G-e_1$ 上 仍 有圈 C_2 ,则 C_2 上有一边 e_2 不在 G' 上,把 e_2 从 $G-e_1$ 上 删除, $G-e_1-e_2$ 仍

连通。

由于是有限图,这一过程会在(有限) k步后终止,终止时所得的从G中删去了一些圈上之边的图 $G-e_1-e_2-\dots-e_n$ 无圈连通,即它是树,于是 G' 是 $G-e_1-e_2-\dots-e_n$ 的一部分,且 $G-e_1-e_2-\dots-e_n$ 是 G 的生成树、证**毕**。

例 3 T_1,T_2 是树T的子树, T_1 是 T_1 与 T_2 公共 边 端 点 形成的顶子集的导出子图,则 T_1 也是树。

证 T, 显然 无圈,只欠证 T, 是连 通 图。任取两个顶 u, $v \in V(T_1)$, 则 u, $v \in V(T_1)$, u, $v \in V(T_2)$. 在 T_1 上 有 唯一的 轨 $P_1(u,v)$, 在 T_2 上 有 唯一的 轨 $P_1(u,v)$, 在 T_3 上 有 唯一的 轨 $P_1(u,v)$, $P_1(u,v)$, $P_2(u,v)$ 都是树 T 上 之 轨,故 $P_1 = P_2$,即 $P_1(u,v)$ 上 的 边 亦是 T_3 上 的 边 ,从而 $P_1(u,v)$ 是 T_3 的 子图,即 T_3 上 u 与 v 两 顶 连 通 。 证 单 。

2.2 生成树的个数

顶点标志的连通图,除非它本身就是树,一般地,有不止一个生成树,我们把标志不同而同构的生成树视为不同的生成树,如此,一个小小的K1。竟有一亿棵生成树。本节给出一个求生成树个数的方法和完全图生成树个数的 Caylay 公式。

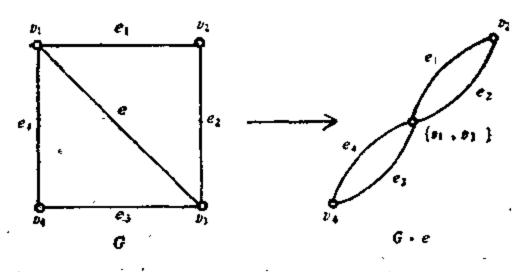


图 2.3

图G的一边。被收缩,是指从G中把。删除,再令其二端点重合成一个顶(图 2.3)。所得之新图,记成 G · e · 若 · 不是事。则显然有

$$u(G \cdot e) = \nu(G) - 1, \ e(G \cdot e) = e(G) - 1,$$
 $\omega(G \cdot e) = \omega(G) \quad (\omega$ 是连通片个数)。
 T 是树。 $T \cdot e$ 仍为树。

我们用τ(G)表示标志图的生成树之个数。

定理 2 c是标志连理连 G 的非环状边,则有公式

$$\tau(G) = \tau(G-e) + \tau(G \bullet e).$$

证 G的含 e的生成树与 $G \cdot e$ 的生成树一一对应,即 $\tau(G \cdot e)$ 是 G中含 e 的生成树之个数。另一方面,G的不含 e 的生成树与 G - e 的生成树一一对应,即 $\tau(G - e)$ 是 G中不 含 e 的生成树之个数,所以有

$$\tau(G) = \tau(G - e) + \tau(G \cdot e)$$
. **证毕**.

 \mathbf{G} 4 求四边形带一条对角线的图的 $\tau(G)$.

由图 2.4 知带一条对角线的四边形的生成树个数是 8.

定理 3 (Caylay) $\tau(K_n) = n^{n-2}$.

证 令 K,的顶集为 $N = \{1,2,3,\dots,n\}$,则由N中 元 素 构成的长 n-2 的序列恰为 n^{n-2} 个。这是因为序 列 t_1,t_2,\dots,t_{n-2} ($t_i \in N$) 中的每个 t_i 有 n 种不同的取法。下面建立上述序列与 K,的生成树之间的一一对应系。关

任取定 K,的一个生成树 T,设 s_1 是T中第一个 (号码最小者) 一次顶,取 t_1 为与 s_1 相邻的顶之号码,把 s_2 从 T 上删除,设 s_2 是 $T-s_1$ 中第一个叶,取 t_2 为 s_2 在 $T-s_1$ 中相邻的顶之号码,依此类推,即得由N 中元素构成的长 n-2 的序列(图 2.5)。最后剩下的是一个 K_2 。

反之,任给定由N中元素构成的长n-2的一个序列 t_1,t_2 ,…, t_{n-1} ,我们可以如下地画出一个生成树。 s_1 是N中不在 $\{t_1,t_2,\dots,t_{n-2}\}$ 中的第一个号码,把 s_1 与 t_1 连一边。 s_2 是不在

 $\{t_2,t_3,\dots,t_{n-s}\}$ 中的 $N-\{s_1\}$ 的第一个号码,把 s_2 与 t_2 连一点。

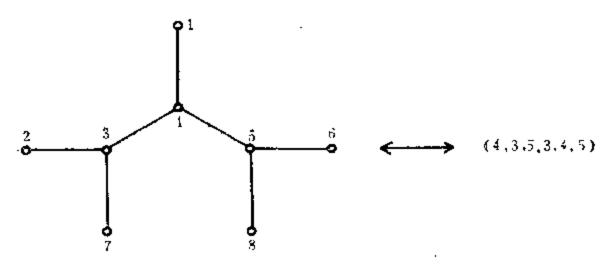


图 2.5

继续这一过程,得 n-2 个边 $s_1t_1, s_2t_2, \dots, s_{n-2}t_{n-2}$. 再 连 接 $N-\{s_1, s_2, \dots, s_{n-2}\}$ 中的两个顶,则得一个生成树。至此建立了 t_1, t_2, \dots, t_{n-2} 型的($t_i \in N$)序列与 K_* 生成树之间的 一一对应,故 $\tau(K_n) = n^{n-2}$ 。证单。

例如 K_{100} 的 生成树的个数是 $100^{\circ 0} = 10^{10}$ 个。

2.3 Kruskal算法

今欲修筑连接几个城市的铁路,已知i城与j城之间的铁路造价为 $c_{i,i}$,设计一个线路图,使总造价最低。

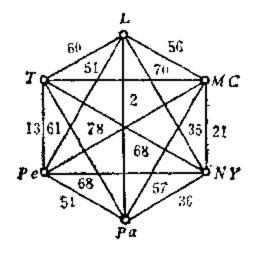
上述实际问题的数学模型为,在已知的加权连通图上求权最小的生成子图。显然它是一个生成树,这个生成树叫做最优树。下面介绍求最优树的 Kruskal 算法。

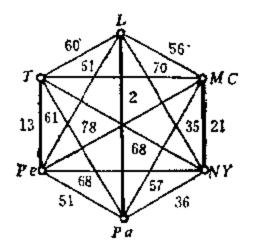
Kruskal 算法:

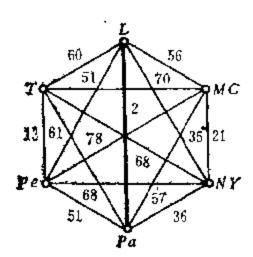
- (1) 选 $e_1 \in E(G)$, 使得 $w(e_1) = \min$.
- (2) 若 e₁,e₂,…,e_i 已选 好,则 从 $E(G) \{e_1,e_2,…,e_i\}$ 中选取 e_{i+1},使得
 - (i) G[{e₁,e₂,…,e₁,e₁,...}] 中无曜, 且

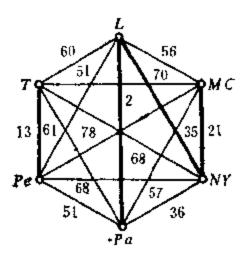
- (ii) $w(e_{i+1}) = \min_{i=1}^{n}$
- (3)继续进行到选得 e,_,为止。

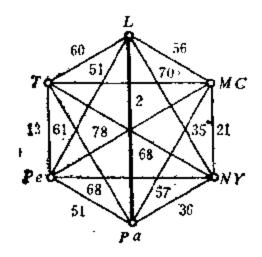
其中 G[E'] ($E'\subseteq E(G)$) 叫做 E' 的导出子图,它是以











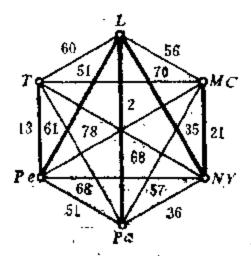


图 2.8

E' 为边集,以E' 中边之端点为顶的图。

定理 4 Kruskal 算法选得的边的导出子图为最优树。...

证 Kruskal 算法得出的子图 T^* 是生成树自不待说。下证它的最优性。设 T^* 不是最优树, T_1 是 G的任给定的一个生成树, $f(T_1)$ 是 $\{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}\}$ 中不在 T_1 上的 e_i 的足标 i 的最小值,令 T 是使 f(T) 最大的一个最优树。因为 T^* 不是最优树,又 $E(T^*) = \{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}\}$,故 $e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}$ 中必有 不在 E(T) 中的边。设 f(T) = k,即 $e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1}$ 在 T 与 T^* 上,而 e_n 不在 T 上,于是 $T + e_n$ 中有一个图 C_n 令 e_n' 是在 T 上 而不在 T^* 上的边。且 e_n' 在 C 上。显然, $T' = (T + e_n) - e_n'$ 也是 生成树,又 $W(T') = W(T) + w(e_n) - w(e_n')$ 。由算法知, e_n 本 是使 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}]$ 上无圈的权最小的 边,又 $G[\{e_1,e_2,\cdots,e_{\nu-1},e_n'\}]$ 是 T 之子图,也无圈,则有 $w(e_n') \geq w(e_n)$ 。于是 $W(T') \leq W(T)$,即 T' 也是最优树,但 f(T') > k = f(T),与 f(T) 之最大性矛盾。证 E

例 5 求下面加权图的最优树。(它的实际背景是北京与巴黎、纽约、东京、伦敦、墨西哥城这六大城市间的航空路线距离图,单位是百公里。)

图 2.6 中粗实线表示的是最优树, 其权为 122.

2.4 几类常用树

本节介绍几类常用的有向树,为此首先提出有向图中的一些 名词。

设*G*是有向图,e=uv是有向边,箭头从u画向v,u 叫做 边 e 之尾,v 叫做 e 的头。 $W=v_0e_1v_1e_1\cdots e_nv_n$,有向 边 e_i 的尾是 v_{i-1} ,头是 v_i , $1 \le i \le k$,则W 叫做有向道路,有向轨是指W 中顶点两两相异。 $d^-(v)$ 表示以 v 为头的边 做, $d^+(v)$ 表示以 v 为尾的边数。

2.4.1 有序二元树

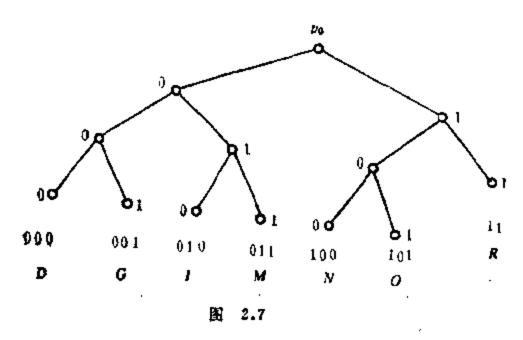
定义 3 T是一个树,把有边规定一个方向且使得 Vv_i V(T),日有向轨 $P(v_0,v_i)$,则称 T是外向树, v_0 叫 做 根。 把外向树之定向反过来,得到的有向树叫做内向树。

我们习惯于把有序林中一切树根画在同一水平线上,每一内顶(非叶)的儿子们从左到右有序地排列,且边不内交,叶在最下方。

例 6 画一个二元树,兄弟关系中,左为 0 右为 1,试问下面(图2.7)的二元树上抄出的0-1密码表达什么信息: 0 0 1 1 0 1 1 1 1 1 1 0 0 0 1 0 1 0 0 0 0 1 .

解 上述 0-1 密码从二元树上译出为

Good Morning



我们把从根到叶的有向轨上的 0-1号码依次抄在该叶之下 36 方,再把各个叶下方的字符串收集起来,就得到一个二元树的所谓**常缀码**,例如图 2.7中的前缀码为{000,001,010,010,011,010,011,11}显然,给一个前缀码,则可以画出一个唯一的有序二元树,前缀码与有序二元树——对应。这样,可用前缀码代表一个二元树,这给机器表达有序二元树提供了方便。而任何有序树,都可以化成二元有序树,于是可以用计算机方便地处理有关有序树的问题。

按"左下方是儿子,右下方是兄弟"的规则,可以把有序树转化成有序二元树,而且这种转化是可逆的。同时这种规则还可以把有序林可逆地转化成有序二元树(只需把根也看成兄弟)。

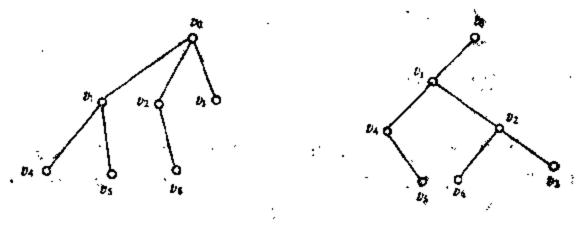


图 2.8

图 2.8 左图是一个有序树,右图是与之对应的有序二元树。 v_0 有三子 v_1, v_2, v_3 , v_1 是长子,在相应的二元树中 v_1 画在 v_2 。左下方, v_2, v_3 做为 v_1 的兄弟依次 v_2 画在 v_1 的右下方,而 v_3 画在 v_2 的右下方, v_1 有二子,长子 v_2 画在 v_3 左下 方, v_4 做为 v_4 的兄弟画在 v_4 的右下方, v_4 只一个儿子 v_4 , v_4 画在 v_2 的左下方。

图 2.9 是有序林画成有序二元树的示意图。

2.4.2 Catalan &

为了求得n顶有序二元树和n顶有序林的个数,我们介绍有趣的 Catalan 数。

括号列是指由左括号 *("和右括号 *)"组成的有限序列。

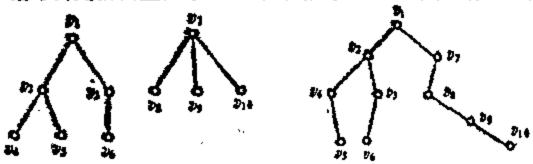


图 2.9

定义 5 好括号列是指

- (1) 空列是好的;
- (2) 若A与B是好指号列、到AB也是;
- (3) 若 A 是好括号列、则(A) 也是;
- (4)除(1)、(2)、(3)中的括号列外,再无其它好括号列(不是好括号列者、称为坏括号列)。

例如 (()(())) 是好列, 而 (()))(() 是坏列。

定理 5 一个括号列是好括号列的充要条件是它由偶数个括号组成,其中半载是左括号,且从左向右读这个括号列时,读出的右括号个数不会超过读出的左指号个数。

证 若括号列是好列,显然它是由左括号占半数的偶数个括号鑑成的。下面用关于括号个数的归纳法证明从左至右读出的左括号的个数不少于右括号读出的个数。若括号数为 2 , 命 题 为 真。设加个左括和加个右括的好列命题已真,我们考虑 n 个左括和 n 个右括组成的好括号列。其中 m < n

- (i) 若造此括号列时,最后一步是(2),此括号列形如 AB,A与B皆非空好列,从左至右读时,只要还在读A,由 归 纳法假设,读出的左括不比右括少,当我们读到A的最后一个括 号时,读出的左、右括号个数一样。再读下去,即读B,由归纳 法假设,读出的右括号总数仍然不会超过读出的左括号总数。
- . (ii) 若造这个括号列时,最后一步是(3),命题显然成立。

下面证明由左括占半数的括号列,若从左藝右读时 读出的左括个数不少于右括个数,则此括号列是好列。仍用关于括号数的归纳法。括号数为 2 时,命题显然成立。假设 m < n 时, m 个左括和 m 个右括组成的括号列命题已真,考虑 n 个左括 n 个右括的括号列,从左向右读时,读了 2m 个括号后,读得的左右括号个数相等,由归纳法假设,读出的这个子列 A 是好括号列,右面未读的子列 B 也满足命题条件,由归纳法假设, B 亦为好列,所以整个括号列 AB 也是好列。

若上述非空列A不存在,我们从左向右读时,读了第一个括号而未读其它括号时,由命题条件知第一个括号为左括。读到只剩一个括号未读时,已读出的左括不比右括少,而左括右括总数各占其半,故最后一个括号是右括,于是原括号列形如(A),A仍满足命题条件,由归纳法假设,A是好列,故(A)亦是好列。证集

定理 6 由 2n 个括号组成的好括号列个数是

$$c(n) = \frac{1}{n+1} C_{2**}^n$$

这个数 c(n) 叫做 Catalan 数。

 $C_{2}^{n} - C_{2}^{n+1}$

证 设 $p_1p_2\cdots p_2$ 。是n个左括n个右括构成的坏括号列。由定理 5知,有一个前缀,其中右括比左括 3。设 $p_1p_2\cdots p_l$ 的右括比左括 3,且i最小,这时右括只比左括 3 1 个,把从 $p_1\ldots$ 开始的每个括号"翻"过来,则得n-1个左括 n+1个右括的坏活号列,显然这一变换是可逆的,故n个左括 n+1个右括组成的坏括号列与n-1个左括 n+1个右括组成的括号列共计 C_2^{n+1} 个,n个左括 n+1个右括组成的括号列共计 n+1个右括组成的括号列共有

$$= \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n+1)}{n!} - \frac{2n(2n-1)\cdots(2n-n)}{(n+1)!}$$

$$=\frac{1}{n-1}C_{2}^{n}.$$

证毕.

定理 7 n 个字符每 个都 要 进入"先入后 出"存储器 S 恰一次,进入 S 时 是有 序 的,则出 S 的不同字 符 列共计 可能 有 $c^{(n)}$ 个。

证 有字符进 S时,记"(",出 S时记")",当 n 个字符全部出了 S时,得到一个 n 个左括 n 个右括组成的 2n 个括 号 的括号列。由定理 5,得到的是个好括号列。而且这种好括号列与出 S的不同字符列之间——对应,所以,由定理 6,定理 7 得证。证单。

- 例 7 一个汽车队在狭窄路而上行驶,不得超车。但可以进入一个死胡同去加油,之后再插队行驶,共有 n 辆汽车,问可能有几种排列不同的车队开出城去?
- 例 8 饭后,姐姐洗碗,妹妹把姐姐洗过的碗一个一个放进碗橱摞成一摞。共有 n 个图样两两相异的碗,洗前也摞成摞,也许因为小妹贪玩,碗拿进橱子不及时,姐姐就把洗过的碗摞在旁边,问小妹摞起的碗可能有几种方式?

由定理7,例7与例8的答案都是c(n)。

2.4.3 有序2元树的个数

n个顶的有序二元树形形色色,n个顶的有序林更是如此,但它们的数目恰为c(n)。

定理 8 n 顶有序体和 n 顶有序二元制的个数量为 c(n).

证 把有序林中每个叶标以(),把其儿子们的标志分别是 $w_1,w_2,\dots w$,的内顶标志以($w_1w_2,\dots w$),最后从左到右根的标志分别为 x_1,x_2,\dots,x_n ,整个林的标志是 $x_1x_2\dots x_n$.这一标志映射显然是可逆的,且 $x_1x_2\dots x_n$,是2n个括号组成的好括号列,几有序林之间——对应。所

以,由定理 6 , n 顶有序林的个数是 c(n) ,又 n 顶有序 林 与 n 顶有序二元树之间——对应,故 n 页有序 二 元 树 的 个 数 也 是 c(n) 。证毕。

定理 9 n 顶典型有序二元树的个数 为 $c\left(\frac{n-1}{2}\right)$.

证 容易看出,典型有序二元树的叶数 L(T) 与内 顶 个 数 I(T) 满足 L(T) = I(T) + 1. 所以有 $\frac{n-1}{2}$ 个内顶。而 n 顶 典型有序二元树与 $\frac{n-1}{2}$ 个顶的定位二元树——对应,因为把n 页典型有序二元树之叶全部揪去,则得 $\frac{n-1}{2}$ 个顶的有序二元树,显然,这种变换是可逆的。由定理 8 ,得知 n 顶典型二元树个数为 $c\left(\frac{n-1}{2}\right)$. 证毕。

从这个定理证明中知 n 顶典型二元树的顶数 n 是奇数。

2.4.4 Huffman

由例 6 我们看到,若设计 26 个叶的有序二元树,每个叶代表一个英语字母,则可以用这个二元树上的叶码序列表示出任何一句话,进而任何一篇文章的信息。自然,我们希望总码长越短越好。粗略地讲,字母出现的频率小的(例如 Z)相应的叶码长一点还不怕,但字母出现的频率大的(例如 e)相应的叶码可不要太长,以期整个文章的总码长最短。

定义 6 v_0 为根的 v_1,v_2,\cdots,v_n 为叶的有序二元 树 中, 轨 $P(v_0,v_i)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 的长 l_i 叫数叶 v_i 的码 长。 若 v_i $(i=1,2,\cdots,n)$

$$=1,2,\cdots,n$$
) 代表的事物出来的概率 为 p_i , $\sum_{i=1}^n p_i=1$, 使得

$$m(T) = \sum_{i=1}^{n} p_i I_i = \min$$

的有序二元树 T 叫做带权 p_1, p_2, \dots, p_n 的 Huffman 树,也 叫 做 最优二元树。

m(T) 虽是 1,12,…,1。的 n元函数,但 1,满足的条件 是二元树上的根叶距,不易写出这些条件的表达式,所以这一条件极值问题,不能用传统的数学分析方法来解决,一般用下述的图论方法来解决。

下设 $p_1 \leq p_2 \leq \cdots \leq p_n$, v_1, v_2, \cdots, v_n 为与之相应的叶。

定理 10 (1) T为 Huffman 树, v_i , v_j 是兄弟, 则 l_i = l_{ij} (2) v_1 与 v_2 最兄弟; (3) 设 T^+ 是 带 权 p_1+p_2, p_3, \cdots , p_n 的 Huffman 树, 与 p_1+p_2 相应的叶子生出两个新叶 分 別 有 权 p_1,p_2 , 则得则的树 T 即为带权 p_1,p_2,\cdots,p_n 的 Huffman 树。

证 (1)由树上轨 $P(v_0,v_1)$ 及 $P(v_0,v_1)$ 的唯一性,以及 v_0 到 v_1,v_1 之父的轨的唯一性 知, $P(v_0,v_1)$ 与 $P(v_0,v_1)$ 等长。

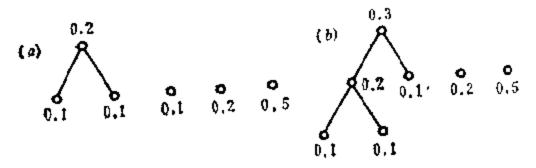
- (2) 若 Huffman 树仅 v_1,v_2 两个叶,由m(T) = min知 兄弟 v_1 与 v_2 的码长 $l_1 = l_2 = 1$ 。若 T 有三个以上的叶子,则因 T 为二元树,有码长不小于 2 的叶。又 $m(T) = p_1 l_1 + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n = min$,不妨设 $l_1 \ge l_1$, $i = 2, 3, \cdots, n$ 。这是因为,若 p_n = p_1 ,而 $l_n > l_1$ ($n \ge k \ge 2$),我们把 v_1 与 v_n 足标对换,得一同构树,m(T) 不变,而使新树上 v_1 的码长大于 v_n 的码长。若 $p_k > p_1$,而 $l_n > l_1$ ($n \ge k \ge 2$),把 v_1 与 v_n 带权对换,得到的新树 T' 上 $m(T') = p_1 l_n + p_2 l_2 + \cdots + p_n l_n + \cdots p_n l_n < m(T)$,与 m(T) 最小矛盾。故 l_1 不妨认为是最长的码长,且 $l_1 \ge l_2 \ge \cdots$ $\ge l_n$,若 v_n 无兄弟,则 l_1 还可缩短 1,这与 m(T) = min 矛盾。故 v_1 的兄弟是 v_2 。
- (3)设T'是带权 p_1,p_2,\cdots,p_n 的 Huffman树,只需证明 $m(T) \leq m(T')$ 。由(2),带权 p_1 与 p_2 的叶在T'中是兄弟,令 T'_+ 是T'中 p_1 与 p_2 为权的叶删除,其父的权为 p_1+p_2 的树,则

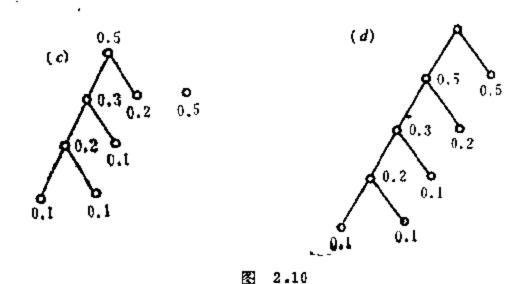
$$m(T') = m(T'_{+}) + p_{1} + p_{2},$$

 $m(T) = m(T^{+}) + p_{1} + p_{2}.$

而 T^+ 是带权 p_1+p_2,p_3,\cdots,p_n 的 Huffman 树,故 $m(T'_+) \ge m(T^+)$,于是 $m(T) \le m(T')$ 。证毕。

例 9 求带权 0.1, 0.1, 0.1, 0.2, 0.5 的 Huffman 树。 **解** (d) 中画出的是 Huffman 树 (不是唯一解)。





这里的解法是依据定理 10 进行的,这种方法称为"兄弟寻父法"。

本章我们讨论了树的六种等价的说法,并且介绍了 Kruskal 求最优树的算法,它和第一章的 Dijkstra 算法都是最优化 问题中的著名算法。关于 Kruskal 算法,我们不仅看到它的可行性,而且还证明了它的正确性。对于一个算法,起码的要求有三点:可行性、正确性和有效性。Kruskal 的时间复杂度为 $O(v^i)$ 。由 Kaylay 定理(定理 3)知道,求 r(G) 是没有好算法的,用 公

式 $\tau(G) = \tau(G \cdot e) + \tau(G - e)$ 求 $\tau(G)$ 只对小图适用。

本章介绍的二元树、Catalan 数、括号列方法和 Huffman树、不但趣味盎然,而且很有实用价值。早在 1857年, Caylay 就利用树研究有机物的分子结构, 1847年, Kirchhoff 用树 研究 电网络。几乎所有应用图论的领域都要在相当大的程度上依靠树来解决某些重要问题。树,尤其是生成树(本书以后章节有几处还要讨论生成树)可以说是图的骨骼,从来是被重视的一个问题。

习 鹽

- 1. 非平凡树中最长轨的起点和终点是叶。
- 2. 一个恰有两个叶的树是一条轨。
- 3. △≥k約树至少有 k个叶。
- 4. 有ω个连通片的图, 当且仅当 ε= r-ω 时是林。
- 5. G的中心是指 $\max_{v \in V(x)} d(u,v) = \min$ 的顶 u, 证明树有一个中心或有两个相邻的中心。
- 6. G是有 2k个 奇次顶的林,则 G中存在 k 条无公共 边 的 轨 P_1,P_2,\cdots,P_k ,使 得 $E(G)=\bigcup_{i=1}^k E(P_i)$,
 - 7. 正整数序列 d_1,d_2,\cdots,d_n 是树的次数序列的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{n} d_{i} = 2(r-1).$$

- 8. T是 k+1 个顶的树,G是单图, $\delta(G) \ge k$,则G 中含有与T 同构的子图。
- 9. 烷烃的分子式为 C_mH_n , 碳原子四价,氢原子一价,且价键不成回路,则对每个自然数m, 仅当n=2m+2 时, C_mH_n 才可能存在。
 - 10. 求 t(K ...).
- 11. 轮是圈加一个新顶(轮心),再把每顶与新顶连上一条

边(辐条)所得的图,试求n条辐条的轮的生成树的数目。

12.
$$e \in E(K_v)$$
, $\mathfrak{M} \tau(K_v - e) = (v - 2)v^{v-3}$.

14. 画出带权 0.2, 0.18, 0.12, 0.1, 0.1, 0.08, 0.06, 0.06, 0.06, 0.04的 Huffman 树。

15. 构作与括号列

相应的有序林、有序二元树和通过"先入后出"存储器的排列。

16. b。表示有序二元树的数目,令 b。= 1, 且定义

$$B(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots$$

(b) 证明:
$$xB^2(x) - B(x) + 1 = 0$$
;

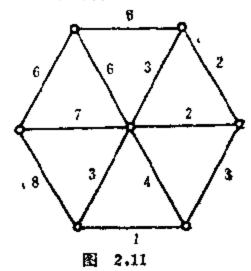
证明

$$b_n = \frac{1}{n+1} C_{2n}^n = c(n).$$

- 17. Kruskal 算法能否用来:
 - (a) 在加权连通图中求最大权的树?
- (6) 在不连通图中求最小权生成林?

如果能,怎么求?写出算法来,并指出其时间复杂度。

18. 求图 2.11 的最优树:



- 19. v>2 的连通图中至少有两个顶,把它们删除后,所得的图仍连通。
- 20. 连通图中或有一个一次顶或有一条边,把它删除后所得的图仍连通。
 - 21. 连通图有 n个顶, 至少有 n-1 条边。
 - 22. $\tau(K_s) = ?$ 其中不同构的生成树有几个?
 - 23、 若G的边数不少于顶数,则G中有删。
- 24. 乒乓球单打比赛采用淘汰制,有 n 名选手参加比赛,要 决出冠军,共需几场比赛?
- 25, 在坐标纸上有 11 条水平线和 11 条竖直线, 以它们的交点为顶点构成一个图,这些直线上的线段为边,问去掉多少条边,才能使每顶次数小于 4? 至多可以去掉几条边,还能使图连通?
 - 26. 对于无向树 T, 可以有几种定向方式使其成为外向树?
 - 27. H 是把图G 的每条边用长k 的轨代替后得到的图,则 $\tau(H) = k^{r-v+1}\tau(G)$.
- 28. 有若干个点,各对点间的距离互不相等,从每个点到离本身最近的点画上直线段,求证不会出现封闭多边形。
 - 29. 每个树皆二分图, 什么树是完全二分图? 试加以证明。
 - 30. $T \in n(n \ge 3)$ 顶树, d(T) = 2 当且仅当 $T \cong K_{1 + n 1}$.
 - 31. 证明或反驳:
 - (1) d(G) = 2, 则 G有生成星.
 - (2) G有生成星,则d(G)=2.
- 32. 连通图 *G*中有一个 *M C* , *C* 长为 *s* , 且 *C* 上的边权皆取最小值,则 *G* 中至少有 *s* 个不同的最优树。

3 连 通 性、

3.1 连通性和 Whitney 定理

图 3.1 中 G_1 , G_2 , G_3 , G_4 , G_5 ,

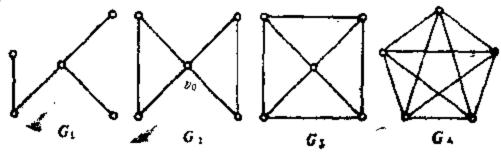


图 3.1

定义 1 $V' \subset V(G)$, G[V(G) - V'] 不连通,而G是连疆图,则称 V' 是G 的頂剖分集。最小顶剖分集中顶的个数,记成 $\kappa(G)$,叫 做G 的连 通度,规定 $\kappa(K_*) = v - 1$, κ (不通通图) $\approx \kappa$ (平凡图) = 0。由一个顶组成 的顶 剖分集叫做锅顶。没有锅顶的割叫做块,G 中成块的极大子图叫做G 的块。

例如图 3.1 中 $\kappa(G_1)=1$, $\kappa(G_2)=1$, $\kappa(G_3)=3$, $\kappa(G_4)=5-1=4$; G_1 , 与 G_2 , 是块, G_2 中有两个三角形块, G_3 中有四个块,它们都是 K_2 形的,

定义 2 $E'\subseteq E(G)$, G为连通图, 而 G-E' (从 G中制除 E' 中的边) 不连通,则称 E' 为 G 的边 剖分集,若 G 中 已 无边

割分集 E', 使得 |E'| < |E'|, 则称 |E'|为 G的边连集集,记成 $\kappa'(G)$ 。 |E'| = 1 时, E' 中的边叫做桥。规定 κ' (不连集 图) = 0, $\kappa'(K_*) = \nu - 1$.

图 3.1 中, $\kappa'(G_1) = 1$, $\kappa'(G_2) = 2$, $\kappa'(G_3) = 3$, $\kappa'(G_4) = 5 - 1 = 4$. G_2 , G_3 , G_4 中无桥, 而 G_4 每一边都是桥。

定义 3 $\kappa(G) \ge k$ 时,G 叫做 k 集通图; $\kappa'(G) \ge k$ 时,G 称为 k 边集集图。

图 3.1 中,G,是 1 连通图,也是 1 边连通图;G,是 1 连通图, 2 边连通图, 当然也是 1 边连通图;G,是 3 连通图, 当然也是 1、 2 连通图, G,是 3 边连通图, 当然也是 1、 2 边连通图, G,是 4 连通图, 当然也是 1、 2、 3 连通图, G,是 4 边连通图, 当然也是 1、 2、 3 边连通图。

k连通图, 当 k>1时, 也是 k-1连通图。

k边连通图, 当 k > 1 时, 也是 k-1 边连通图,

定理 1 $\kappa(G) \leq \kappa'(G) \leq \delta$.

证 设 $d(v) = \delta$,则删除与v关联的 δ 条边后,G变成不连通图,所以这 δ 条边形成一个边剖分集,故最小边剖分集边数不超过 δ ,即 $\kappa'(G) \leq \delta$ 。下证 $\kappa \leq \kappa'$ 。分情形讨论之。

若G中有桥e=uv,则 $\kappa'=1$,这时u或v是割顶或 $G=K_2$, $\kappa=1$.

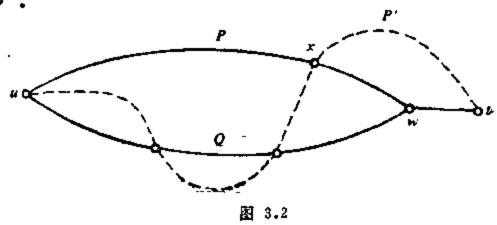
若G中无桥,则有 $\kappa' \ge 2$ 条边,移去它们之后,G 变成不连通图。于是删除这 κ' 条中的 $\kappa'-1$ 条后,G 变成有桥的图。设此桥为 e=uv,我们对于上述 $\kappa'-1$ 条则去的每条边上,选取一个端点,删除这些(不超过 $\kappa'-1$)端点,若 G 变得不连通,则 $\kappa \le \kappa'-1$;若仍连通,则再删去 u 或 v ,即可使 G 变得不连 通,于是 $\kappa \le \kappa'$ 。证单。

定理 2 (Whitney, 1932) ν≥3 的图是 2 连通通的充要条 : 件是任二頭共要(在一个通上).

证 若任二顶共圆,任删除一个顶 w 后,得图 G - w。任取

两顶 $u,v\in V(G-w)$, u,v在 G 中共存于某圈 C 上,若 w 不在 C 上,则 G-w 中仍有圈 C,即 u 与 v 在 G-w 中仍连通;若 w 在 G 中时在 C 上,在 G-w 中 u 与 v 在轨 C-w 上,故 u 与 v 仍连 通。由 u 与 v 之任意性,G-w 是连通图。故 $\kappa(G) \ge 2$,即 G 是 连通图。

反之,若G是2 连通图, $v \ge 3$,任取 $u,v \in V(G)$,用对d(u,v)的归纳法证明u与v之间有两条无公共内顶的轨(图 3.2).



当d(u,v)=1时,因 $\kappa \leq \kappa' \leq \delta$,故 $\kappa' \geq 2$,uv 边不 是 桥, G-uv 仍连通,于是 G-uv 中存在 从 u 到 v 的 轨 $P_1(u,v)$, 这样从 u 到 v 有两条无公共内顶的轨 $P_1(u,v)$ 与边 uv.

假设 d(u,v) < k 时 $(k \ge 2)$,结论已成立,考虑 d(u,v) = k 的情形。令 $P_0(u,v)$ 之长为 k, w 是 $P_0(u,v)$ 上与 v 相邻 的 顶,则 d(u,w) = k-1,由归纳法假设,在 u,w 之间有两条无公共内顶的轨 P = Q,因 G = Q 连通图,故 G = w 仍连通。在 G = w 中存在轨 $P'(u,v) \neq P_0(u,v)$,令 $x \in P \cup Q$ 上 P' 的最后一个顶。因 $u \in P \cup Q$,故 x 存在(可能 x = u)。不妨设 $x \in V(P)$,则 G 有两个 u,v 之间无公共内顶的轨:一个是 P = Q + wv 证学。

3.2 割顶、桥、块

割顶、桥和块是一个图中的关键部位,对其特征要有较为全面的认识。

定理 3 v是连通图的一个顶点,剩下述命题等价:

- (1) v 農制頂。
- (2) 存在与v 不同的两个顶u,w,使得v 在每一条由u 到w的 轨上。
- (3) 存在 $V \{v\}$ 的一个划分 $V \{v\} = U \cup W$, $U \cap W = \emptyset$,使得 $\forall u \in U$, $\forall w \in W$,v 在每一条由 u 到 w 的轨上。
- 证 (1) \Rightarrow (3) 因 v 是割顶,G-v 不连通,至少两个连通片,设 U 是一个连通片的顶集,令 $W=V(G)-(U\cup\{v\})$ 。于是任意二顶 $u,w(u\in U,w\in W)$ 分别属于 G-v 的不同的连通片。这时 G 中从 u 到 w 的一切轨含 v ,不然,若 G 中的轨 P(u,w) 不含 v ,在 G-v 中仍有 P(u,w) ,与 u ,w 分属于不同的连通片矛盾。
 - (3) ⇒ (2) 不足道, (2) 只是 (3) 的特殊情形。
- (2) \Rightarrow (1) 若v在u到w的每一条轨上,则G-v中已不存在从u到w的轨,G-v不连通。故v为G的割顶。证单。

定理 4 × 是G的一边,G是连通图,则下述各命题等价:

- (1) x 是 G 的榜。
- (2) × 不在G的任一關上。
- (3) 存在頂 $u,v \in V(G)$, 使得x 在每一个从u 到v 的轨上。
- (4) 存在V(G)的划分U与W,使得任二 顶 $u,w,u\in U$, $w\in W$ 时, x 在每条从 u 到 w 的轨上。

证 (1) \Rightarrow (2) 设 x 是桥,若 x 在 G 的一个圈 C 上,则 G -x 仍 连 通, 这 是 不 可 能 的 .

(2) \Rightarrow (1) x 不在任何關上,若 x 不是桥,则 G-x 仍连 通。 G-x 中 x 的两个端点间有轨 P,于是在 G 中 P 与 x 并成 一

个圈,与x不在圈上矛盾,故x是桥。

- (1) \Rightarrow (4) x 是桥,则 G-x 不连通,设 U 是 G-x 的一个连通片的顶集,W 是 G-x 中其它顶所成之集合,于是任二顶 $u,w(u\in U,w\in W)$ 分属于 G-x 的两个连通片。在 G 中,从 u 到 w 的一切轨上皆含 x ,不然,若 G 中之轨 P(u,w) 不 含 x ,在 G-x 中 仍 有 P(u,w) ,与 u ,w 分属 G-x 的两 个 连通 片相违。
 - (4) ⇒ (3) 不足道。
- (3) \Rightarrow (1) 因为 x 在每条从 u 到 v 的轨上, 故 G-x 中, u 与 v 之间不存在轨,即 x 是桥。证毕。

定理 5 G连通, v≥3, 则下列命题等价:

- (1) G是块。
- (2) G的任二顶共图。
- (3) G的任一项与任一边共催。
- (4) G的任二边共器。
- (5) 任给 G 的二顶及一边,存在连接此二顶含此边之轨。
- (6) 对G的三个不同的 \overline{M} ,存在一轨,连接其中两个 \overline{M} ,含第三个项。
- (7) 对G的三个不同的项,存在一轨,连接其中两个项,不含第三个项。
 - 证(1)⇔(2) 见定理2.
- - (3) ⇒ (4) 与 (2) ⇒ (3) 类似地证明。

- $(4) \Rightarrow (5)$ 已知任二边共圈,设 u,v 是 G 上任给定的 两个顶, x 是任给定的一条边,只考虑 x 与 u,v 皆不相关 联的情形。由任二边共圖显然有任二顶共圖,于是由于 $(2) \Rightarrow (3)$ 知 u 与 x 共圖,设此圈是 C_1 ;同理 v 与 x 共圈,设此圈是 C_2 ; 司理 v 与 x 共圈,设此圈是 C_3 ; 者 v $\in C_4$ 或 u $\in C_4$,则 u $\in C_4$ $\in C_4$
- (5) \Rightarrow (6) 设 u,v,w 是G的三个顶,且与w相关联的一条边为x,由 (5) ,存在轨 P(u,v), x 在 P(u,v)上,于是w 在 P(u,v)上。
- (6) ⇒ (7) u,v,w∈V(G), 由 (6), 存在 轨 P(u,w), P(u,w)含顶 v,则 P(u,w)的从 u 到 v 的一段不含w。
- (7) \Rightarrow (1) 由 (7) ,对任给定的二顶 u 与 v ,不存在这样的顶,它在从 u 到 v 的每一轨上,由定理 3 , G 无 割 顶, 故 G 是块。证单。

3.3 可靠通讯网的构作

我们要构作一个有线通讯网,使得敌人炸坏我几个通讯站后,其余的通讯站仍然可以彼此通话。显然,有两个要求是必要的:一是不怕被敌人炸坏的站的数目要多,一是整个造价要小。这个实际问题的数学模型如下:

G是加权连通图,k 是给定的自然数,求 G 的有最小权的 k 连通生成子图。当 k=1 时,它就是用 Kruskal 算法求得的生成树,当 k>1 时,是尚未解决的难解问题之一。

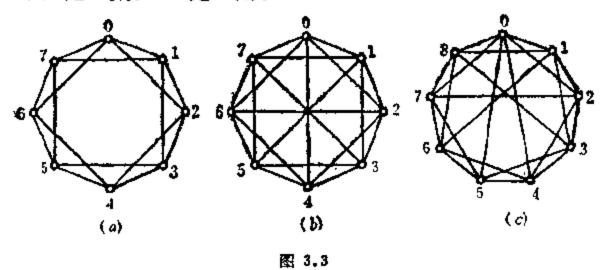
当 $G=K_{**}$,每边权皆为1时,Harary于1962年解决了这一问题。下面介绍Harary的工作。

令 f(m,n) 表示 n 个顶的m连通图当中边数的最小值,m < n。

$$f(m,n) \geqslant \left\{\frac{mn}{2}\right\}$$
.

Harary 实际构作出一个 n 个顶的 m 连通图,它的边数 恰 为 $\left\{\frac{mn}{2}\right\}$ 条,且 $f(m,n) = \left\{\frac{mn}{2}\right\}$ 。此图记成 $H_{m,n}$ 。

- (1) m是偶数,m = 2r. H_2 ,,以 $\{0,1,2,\dots n-1\}$ 为顶集合。 当 $i-r \le j \le i+r$ 时,在顶点 i 与 j 之间连——边,这里加法在 m od n 意义下进行。
- (2) m是奇数, m=2r+1, n 是偶数。先构作一个 H_{1r} ., 然后 对 $1 \le i \le \frac{n}{2}$ 的 i , 在 i 与 $i+\frac{n}{2}$ 间加上一条边得 H_{2r+3} ...
- (3) m 是奇数, m=2r+1, n 是 奇数。先构作 H_{2r+n} , 然后在顶点 0 与 $\frac{n-1}{2}$, 0 与 $\frac{n+1}{2}$ 之间加上边,在顶i 与 $i+\frac{n+1}{2}$ 间加上边,其中 $1 \le i \le \frac{n-1}{2}$,则得到 H_{2r+1} ,见图 3.3。(a) 是 H_{2r+n} ,
 - (b) 是H_{5.4}, (c)是H_{5.9},



定理 6 H. . 是加连疆图,且边数量少。

证 m=2r 时,我们来证明 $H_{2,1,2}$, 设有少于 2r个顶组成 的顶部分集。若 V' 是一个顶部分集,且|V'| < 2r,又设 i 与 i 两个顶分别属于 $H_{2,1,2}$ -V' 的不同连通片,令

$$S = \{i, i+1, \dots, j-1, j\},\$$

$$T = \{j, j+1, \dots, i-1, i\},\$$

其中加法在 mod n下执行 因为|V'| <2r, 不失一般性,设 $|V'\cap S|$ <r, 则显然存在 S-V' 中的序列,从 i 始 至 i 终,使得序列中连续二顶号码之差的绝对值最大是 Y。但这样的序 列中相邻顶之间由(1)知存在边,即在 $H_{*,*,*}-V'$ 中有轨P(i,j),与 i,j 分居于 $H_{*,*,*}-V'$ 的两个连通片中相矛盾,故 $H_{*,*,*}$ 是 2r 连通的。

相似地可以证明m = 2r + 1 时, $H_{q_{r+1,n}}$ 是 2r + 1 连通的。由于

$$f(m,n) \ge \left\{\frac{mn}{2}\right\}, \ \varepsilon(H_{m,n}) = \left\{\frac{mn}{2}\right\},$$

而日...是 n 顶 m 连通图, 故有

$$f(m,n) \leqslant \left\{\frac{mn}{2}\right\},\,$$

从而得

$$\varepsilon(H_{m,\bullet}) = f(m,n) = \left\{\frac{mn}{2}\right\}.$$

证毕.

由于 $\kappa \leq \kappa'$,故 $H_{\bullet,\bullet}$ 也是 m 边连通图。若用 g(m,n) 表示 κ 个顶 m 边连通图中的最少 边数,则对于 1 < m < n,g(m,n) = $\left\{\frac{mn}{2}\right\}$.

图的连通性是实际问题与理论问题当中都十分关心的重要概念之一。后面我们还要讲有向图的连通性并给出 求 κ 与 κ'的 有

效算法和连通性的 Menger 型定理。本章要求我们掌握《与心的定义, k 连通与 k 边连通图的定义,以及割顶、桥、块的特征。关于割顶、桥、块的有效算法,我们后面有机会学习。

习 죮

- 1. G 是 k 边连 通 图, E' 是 G 的 k 条边 的集 合,则 $\omega(G E') \leq 2$
- 2. 给出一个 k 连通图 G 及 G 的 k 个顶的集合 V' ,使得 $\omega(G V') > 2$ 。
 - 3. G是单图, δ≥ν-2, 则κ(G)=δ.
 - 4. 找一个单图G, 满足 $\delta=\nu-3$, $\kappa(G)<\delta$.
 - 5. G是单图, $\delta \ge \frac{v}{2}$, 则 $\kappa'(G) = \delta$.
 - 6. G 是单图。 $\delta \ge \frac{1}{2}(\nu + k 2)$,则 G 是 k 连通的。
 - 7.κ(妖怪)=κ'(妖怪).
 - 8. 若 1≤m≤n, 则存在单图, 满足 $\kappa = 1$, $\kappa' = m$, $\delta = n$.
- 9. G 为 2 边连通图的充要条件是任二顶之间至少有两条无公共边的轨相连通。
- 10. P 是 2 连通图中 u 与 v 两顶之间的轨,是否一定有另一条与 P 无公共内顶的轨 $P_1(u,v)$?
 - 11. 若G不含偶圈和孤立顶,则G的块或是K。或是奇圈。
- 12. 一个不是块的连通图中至少存在两个块,它们仅含G的一个割顶。
- 13. b(v) 表示 G 中含顶 v 的 块 的数 目,则 G 的 块 数为 ω + $\sum_{v \in V(G)} (b(v) 1).$
- 14. G 是 2 连通图,X与Y是V中不相交子集,且 每个之中至少含两个顶,则 G 中含两条无公共内顶的轨 P与Q, 使 得。

- (1)P 与 Q 之起点皆属于 X ; (2)P 与 Q 之终点皆属于 Y ; (3) P 与 Q 的内点皆不属于 $X \cup Y$.
 - 15. ∀e∈E(G), 则κ(G-e) <κ(G), 则称 G 是 κ 临 界图。
 - (a) 每个 K 临界 2 连通图有一个二次顶。
 - (b) G是κ临界2连通图、ν≥4, 则 ε≤2ν-4.
 - 16. H,,,,, 是 2r+1 连通图。
 - 17. $\kappa(H_{m,n}) = \kappa'(H_{m,n}) = m_*$
 - 18. 树T上v是割顶,则d(v)>1.
 - 19. 只有两个顶不是割顶的连通图是轨。
 - 20. G两每顶皆偶次,则G中无桥。
 - 21. G是 k 次正则 2 分图, k≥2, 则 G无桥。
 - 22. G是连通图, v≥3.
 - (a) 若 G有桥,则 $\exists v \in V(G)$,使得 $\omega(G-v) > \omega(G)$.
 - (b) (a)之逆未必正确。
 - 23. 画出H., H.,
- 24. G'是G的真于图,G连通,则 $\exists e \in E(G)$, $e \notin E(G')$,但 e 的一端在G' 上。
 - 25。三次正则图有一个割顶,当且仅当它有一条桥。
 - 26. 证明, 有桥三次正则图至少 10 个顶。

4 可 行 遍 性

4.1 Euler 图

本节把七桥问题引出的图论问题系统地讲一讲。

定义 1 图中含每一条边的行迹叫做Euler行迹;闭的 Euler 行迹叫做 Euler图路,含 Euler 回路的图叫做 Euler 图。

直观地讲,欧拉图就是从一顶出发每条边恰通过一次又能回到出发顶点的那种图,即不重复地行遍所有的边再回到出发点。下面给出 Euler 图的特征性描述。

定理 1 G是透通图时,下面三个命图等价:

- (1) G是 Euler 图.
- (2) G 的每顶皆偶次.

(8)
$$G = \bigcup_{i=1}^{d} C_i, C_i \neq \emptyset, \quad \mathbf{E}(C_i) \cap E(C_i) = \emptyset (i \neq j).$$

证 (1) \Rightarrow (2) 已知 G是 Euler 图,设W是 G中的Euler 回路, $\forall v \in V(G)$, 则 v 必 在W 上出现。设v 出现了 k 次,则 显然d(v) = 2k,即 v 是偶次的。由 v 之任意性, (2) 成立。

(2) \Rightarrow (3) 已知G是每顶皆偶次的连通图,而非平凡树至少两个叶,故G不是树,G内可以找到一个图 C_1 ,把 C_1 上的边从G上删除,得新图 G_1 ,若 G_1 每顶皆零次,则 $G=C_1$,

(3) 成立,不然, G_1 中必有一个连通片每顶皆偶次,于是 G_2 中有圈 G_2 ,把 G_1 的边从 G_1 中删除,得一新图 G_2 ,依此类推,

进行有限次之后,得到无边图 G_0 . 于 是, $G = \bigcup_{i=1}^{4} C_i$, C_i 是 G 中

之圈, 且 $E(C_i) \cap E(C_j) = \emptyset$, $i \neq j$, $1 \leq i$, $j \leq d$.

(3) \Rightarrow (1) d=1 时,G 显然 是 $Eul_{:r}$ 图; $d \geqslant 2$ 时,由于G 连通,可以找到两个圈,不妨设其为 C_1 , $i_{:r}$ C_1 , $i_{:r}$ C_2 有公共 顶 $v_{:r}$, ϕ $C_{1,2} = C_1 \cup C_2$,则 $C_{1,2}$ 是闭行迹。又由下G 连通,还可找到一个圈,不妨设为 C_3 。使 C_3 与 $C_{1,2}$ 有 公共 下 于是 $C_{1,3} = \bigcup_{i=1}^{3} C_i$ 也是闭行迹。如此下去,得证 $G = \bigcup_{i=1}^{3} C_i$ 是闭行迹。如此下去,得证 $G = \bigcup_{i=1}^{3} C_i$ 是闭行迹。故 G 是 Euler 图。证学。

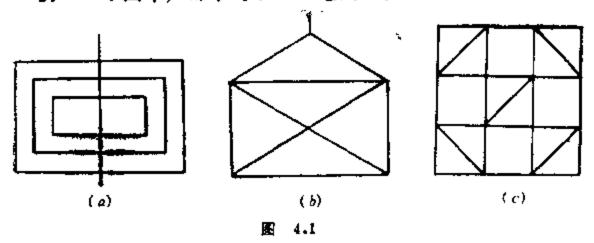
定理 2 连通图G中有Euler 行迹的充要条件是G中至 ${f 5}$ 有两个奇次顶。

证 设连通图G有 Euler 行迹,若是闭行迹,则G是 Euler 图,由定理 1,G中无奇次顶。若不是闭行迹,设 u_0 与 v_0 是此行迹的起止顶,考虑 $G+u_0v_0$,它有 闭 行 迹,是 Euler 图,每 顶皆偶次,故G中只有 u_0,v_0 两个奇次顶。

反之,若G中无奇次顶,由定理1,它是Euler 图,有闭的 Euler 行迹。若有奇次顶,至多不超过两个奇次顶,由于 奇次顶个数是偶数,所以恰有两个奇次顶,设它们是 u_0,v_0 。由于 $G+u_0v_0$ 是每顶皆偶的连通图,由定理1, $G+u_0v_0$ 是 Euler 图,有 Euler 回路 C,于是 $C-u_0v_0$ 即 G 中的 Euler 行迹。证毕。

定理 2 为判别图形能否一笔画给出了依据。

例 1 下图中,哪个可以"一笔画"?



篇 (a)与(c)可以,(b)不可。因为(a)中只两个奇次顶,**竖** 线的两个端点;(c)中只两个奇次顶,中间小正方形上的两个**五** 次顶;(b)中上方三角形一个顶点和下方矩形的下底边的两个**顶**点为三个奇次顶,另外最上方还有一个一次顶。

例 2 七桥问题。

- 解 见图1.1(b),图中有奇次顶,所以不是Euler图,不会有Euler回路,即不会每桥(边)恰行过一次而回到出发点,更有甚者,因它的四个顶皆奇次,由定理2,它亦无Euler行迹,既使不要求回到出发点,每桥恰过一次亦不可能。
- 例 3 在圆上任取 n>2 个点,把每个点用线段与其余 各点连接,能否一笔画出所有这些线段,使第一条线段的终点与第二条线段的起点相重,第二条线段的终点与第三条线段 的 起点 相重,…,最后一条线段的终点与最初那条线段的起点相重合?
- 解 以这 n 个点为顶点,以所连线段为边,构成 一个 连 通 图; 当 n 为奇数时, G 的每顶皆偶次,由定理 1 ,本题答案是肯定的; 当 n 为偶数时, G 的每顶皆奇次,由定理 1 ,本题的答案 是否定的。

4.2 中国邮路问题

一位邮递员从邮局选好邮件去投递,然后回到邮局.当然他必须经过他所管辖的每条街至少一次。请为他选择一条路线,使其所行路程尽可能地少。

这就是**中国邮路问题**的原始模型,是我国的管梅谷教授**首先** 提出并进行研究的。

中国邮路问题在于在连通加权图上求取含有一切边的权最小的回路,我们称这种回路为理想回路。显然,在 Euler 图中, 等每个 Euler 回路都是理想回路。

下面介绍求 Euler 图中 Euler 回路的 Fleury算法。

Fleury 算法:

- (1) $\forall v_0 \in V(G)$, $\diamondsuit W_0 = v_0$.
- (2) 设行迹W,=v,e,v,e,v,已选定,则从E-{e,, e,, ..., e,} 中选取一条边 e,,,, 使得
 - (i) e,+1 与 e,相邻,
- (ii)除非巳无选择余地, e_{i+1} 不要 选 $G_i = G \{e_1, \dots, e_i\}$ 的桥。
 - (3) 直到(2) 不能进行为止。

例 4 求图 4.2 中的 Euler 回路.

"解 取 $W_0 = v_0$, $W_1 = v_0 e_1 v_1$, 这时与 e_1 相邻的未取 用 的 边只有 e_2 ,尽管 e_2 是 $G-e_1$ 中的桥,但已无其它选择的余地, 故只有取

$$W_2 = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2$$

至此, W,不可选为 v,e,v,e,v,, 因为 e,是 G-{e,,e,}的 桥,而这时并非无其它选择的余地,例如可以不选 e。而选 e,或. e, 所以可以取

$$W_3 = v_0 e_1 v_1 e_2 v_2 e_3 v_3$$
.

继续执行 Fleury 算法,得

$$W_{4} = v_{0}e_{1}v_{1}e_{2}v_{2}e_{3}v_{3}e_{4}v_{4},$$

 $W_{5} = v_{0}e_{1}v_{1}e_{2}v_{2}e_{3}v_{3}e_{4}v_{4}e_{5}v_{2},$

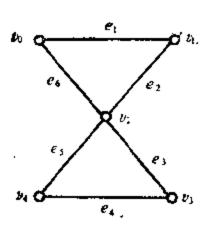
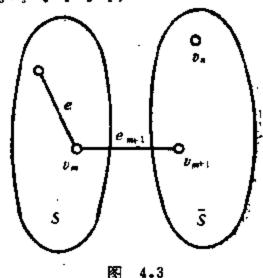


图 4.2



&

W。即为 Euler 回路。

定理 3 若G是 Euler 图, Fleury 算法终止 时得到的是 Euler 回路。

证 G是 Euler 图, $W_*=v_0e_1v_1e_2\cdots e_4v_2$ 是 Fleury 算法 终止时得到的行迹,则 v_* 在 G_* 中的次数是 0。故 $v_0=v_2$, W_* 是闭行迹。

者W。不是 Euler 回路,令S是G。中有正次数的顶集,则 $S \neq \emptyset$ 。但v。 ξS ,令 $\tilde{S} = V - S$,则v。 ξS 。令m是v。 ξS 而v。t 不是 t 的脚标的最大值,因t 。 ②t 。 ②t

若G不是 Euler 图,任何理想回路通过某些 边 多 于 1 次,例如图 4.4 中xuywvzwyxuwvxzyx 是理 想 回 路,边 ux, xy, yw 和 wv 上通过了两次。

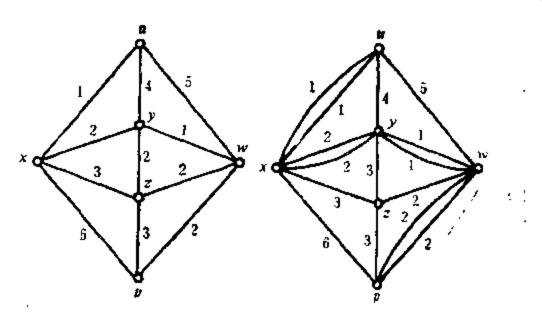


图 4.4

把边 e 的两端间再连上一条权亦为 w(e)的新边,则称 新 边

为原来那条边的**借**边。ux,xy,yw,wv都有倍边。一般中国邮路问题的数学模型是:

(i) 用倍边法由G得到G* 图, 使G* 是 Enler 图, 且

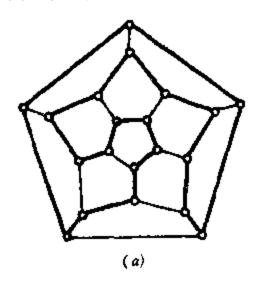
$$\sum_{e \in (E(G^*) - E(G))} w(e) = \min,$$

(ii) 在 G* 中找到 Euler 回路。

上述问题已由 Edmonds 和 Johnson 于 1973 年解决。

4.3 Hamilton图

1859年,数学家 Hamilton 发明了一种周游世界的游戏,把一个 12 面体的 20 个顶点分别标上北京、东京、华盛顿等20个大都市的名字,要求玩的人从某城出发,沿着 12 面体的棱通 过每一城市恰一次,再回到出发的那个城市。这种游戏在欧州曾风糜一时,Hamilton 以 25 个金币的高价把该项专利卖给了一个玩具商(图4.5)。



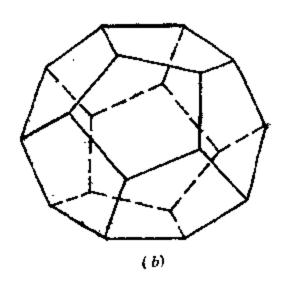


图 4.5.

用图论的语言来讲,这个游戏是让人在十二面体图上找出生成圈。

定义 2 含图的一切顶的轨叫 Hamilton 轨,闭的 Hamilton

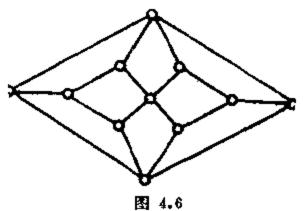
"轨叫做 Hamilton 圈; 有 Hamilton 圈的圈叫做 Hamilton 图。

例 5 K_{ν} ($\nu \ge 3$) 是 Hamilton 图。而 $\nu = Odd$ 的二分图不是 Hamilton 图,因为二分图中无奇圈。图 4.6 中的图号称Herschel 图,Herschel 图是 11 个顶的二分图,所以它不是 Hamilton 图。

下面探讨 Hamilton 图的性质。和 Euler 图不一样,Hamilton 图的充要条件(象样的)至今尚未建立起来,只是分别地给了一些充分条件,另外给了一些必要条件,用这些条件来判定任意给定的图是否是 Hamilton 图,只能在个别情形之下才能见效。

定理 4 G是Hamilton圈, $\forall S \subset V$, $S \neq \emptyset$, 则 $\omega(G - S) \leq |S|$.

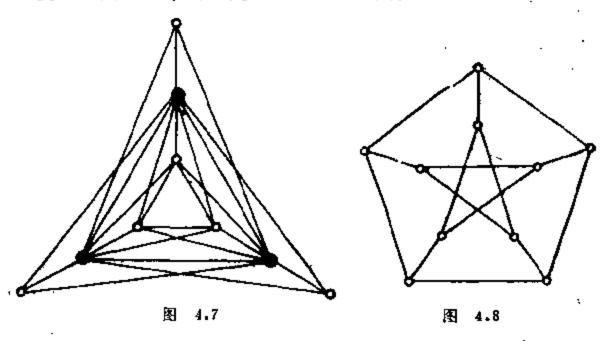
证 设 C 是 Hamilton :園,则 ∀ S⊂V,S≠∅,有 ω(C-S)≤|S|,



又 C-S 是 G-S 的生成子图,故 $\omega(G-S) \leq \omega(C-S) \leq |S|$.

证毕.

例 6 图 4.7 中的图是否 Hamilton 图?



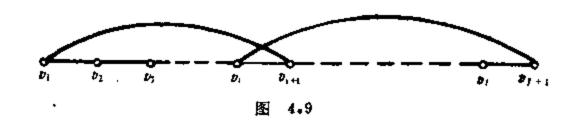
解不是、三个"黑顶"删除后,得四个连通片,由定理4,它不是Hamilton图。

注意定理 4 之逆不真,例如图 4.8 中的 Petersen 图(是个最小的妖怪图),它不是 Hamilton 图,但 G-v($\forall v \in V(G)$)则是 Hamilton 图,可见 Petersen 图满足 $\forall S \subset V(G)$, $S \neq \emptyset$,则 $o(G-S) \leq |S|$.

定理 5 (Ore, 1960) $G \mathbb{R} v \geqslant 3$ 的图, $\mathbb{E} \forall u, v \in V(G)$, $d(u) + d(v) \geqslant v - 1$, 则G中有 Hamilton 敬, 若 $d(u) + d(v) \geqslant v$, 则 $G \mathbb{R}$ Hamilton 图.

证 首先证明,当 $\forall u, v \in V(G)$, $d(u) + d(v) \geqslant v - 1$ 时,G是连通图。事实上,若 G不连通,有 $o \geqslant 2$ 个连通片 G_1, G_2, \dots , G_u 。 $\forall u_1 \in G_1$,有 $d(u_1) \leqslant v(G_1) - 1$, $\forall u_2 \in G_2$,有 $d(u_2) \leqslant v(G_1) - 1$,于是 $d(u_1) + d(u_2) \leqslant v(G_1) + v(G_2) - 2 \leqslant v - 2$,与 $d(u_1) + d(u_2) \geqslant v - 1$ 矛盾。

若 $\forall u, v \in V(G)$, $d(u) + d(v) \geq v - 1$, 而 G 中无 Hamilton 轨,令 $P(v_1, v_{i+1})$ 是 G 的最长 轨,其 长 为 l < v - 1,则 v_1 与 v_{i+1} 的相关联的边的另一个端点必为 $P(v_1, v_{i+1})$ 上的内顶。设 P 上的顶依次为 $v_1, v_2, v_3, \dots, v_{i+1}$,其中 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ 与 v_i 和 $v_{i_1-1}, v_{i_2-1}, \dots, v_{i_{k-1}}$ 都 v_{i+1} 和 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ 与 v_{i+1} 和 $v_{i_1}, v_{i_2}, \dots, v_{i_k}$ 为 v_{i_1}

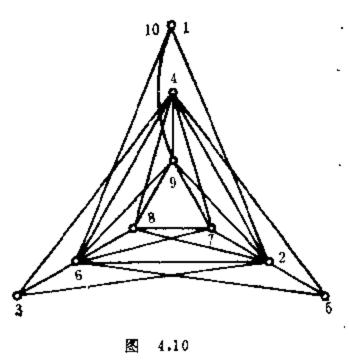


因 $P(v_1,v_{l+1})$ 上的顶的个数 l+1 < v, 故存在 $w \in V(G)$, w不在 $P(v_1,v_{l+1})$ 上。由 G 的连通性,存在轨 $P_1(w,v_1)$,设 v_1 ,是 从 w 起 $P_1(w,v_1)$ 上第一个在 C 上的顶,这样有一条轨 起 点 在

w,终点在C上的比 $P(v_1,v_{i+1})$ 更长的轨,它是由 $P_i(w,v_1)$ 上从w到 v_i 。段及C上由 v_i ,开始的长i1的轨并成的。至此得到矛盾。

定理的后半部分显然成立,因为G中有最长轨,长 $\nu-1$,于是与上面证明同理,在此长 $\nu-1$ 的轨上出现图 4.9 式的结构,即有一个长 ν 的圈,证**毕**.

值得注意的是,这个定理之逆不真,例如G是一个5阶圈, $\forall u, v \in G, d(u) + d(v) = 4 < 5 = v$,定理5的条件不满足,但G仍然是Hamilton图。



例7 图 4.10 是例 6 中图 4.7 稍加改变后得到的,它是 Hamilton 图, Hamilton 圏 是 1 2 3 4 5 6 7 8 9 1, 但 d (3) + d(5) = 6 < 9 = v. 这种 Hamilton 图不能用 Ore 定理来判定。

例 8 若围圆桌至少坐着五个人,那么一定可以调整他们的 **座位**,使得每个人两侧都挨着新邻居。

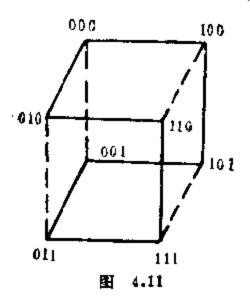
证 若恰好是五个人,设原来座次是 ABCDEA, 可以调成 ADBECA。

若超过了五个人,以入为顶,仅当两人原来不邻座时,在此相应的二顶之间连一条边,得一个图G.由于每个顶都是|V(G)|-3次的,于是任二顶次数之和为2v-6,又v>5,故2v-6》v,由定理 5,G是 Hamilton 图,按G的 Hamilton 圈的次序请各位入席即可。证单。

例 9 一个有限集合的全部子集可以这样排序,使任何相邻的集合相差一个元素。

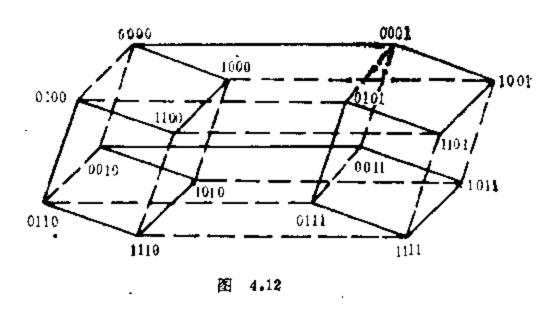
证 设此集合为 A, |A|=n, 我们把 A的每个子集用 有序的 n个 0-1 数码来表示,不妨设 A={1,2,3,...,n},一个子集中含有 i 时,在第 i 位上写 1,否则在第 i 值上写 0.全部子集共计 2*个,以这 2*个子集相应的 n个分量的 0-1编码为顶,仅当两个编码仅有一个同位数码相异时,在此二顶之间连一边,得到一个图,此图是 n维立方体。n维立方体是由两个 n-1维立方体之间顶标一致的两个顶加上边构成的,于是用数学归纳法极易证明例 9.证券

(图 4.11 和图 4.12, 实线表示 Hamilton 圈).



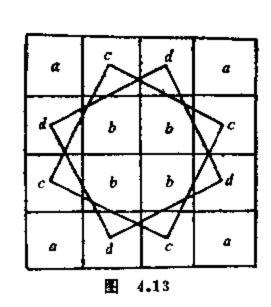
下面研究棋盘上的所谓马图.我们把下面的图叫做"马图"。以方格似盘上的小方格为顶,当且仅当一格能以马的一步跳到另一格时,此二格所代表的顶之间连一边。

例 10 4×4的棋盘上的马图是否 Hamilton 图?即马从任一方格出发,每个格恰跳到一次,再回到出发的那个方格,是否可能?



解 见图 4.13, 4个c号顶形成一个4阶圈; 4个d号顶形成。

一个4阶圈;4个a号顶是2次顶,每个a顶仅与两个b顶相邻。 于是把四个b顶删除后,得六个连通片:一个c号4阶圈,一个 d号 4 阶圈,四个孤立顶 a,而原来的马图是连通的,每个 b 与 一个c一个d相邻,而每个a顶与两个b顶相邻。由定理4知, 4 × 4 的马图 不是 Hamilton 图, 即马从任何方格出发也不能每 格恰跳到一次又回到出发的方格。



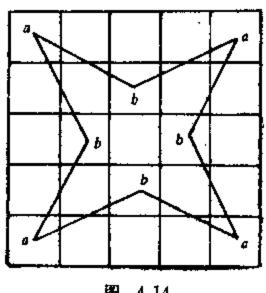


图 4.14

例 11 对 5 × 5 的马图, 讨论例 10 中的问题。

解'见图 4.14,因为图上的 α 号顶是 2 次的,它们已经在 — 个8阶圈上,所以这4个 a 顶不会与其余的21个顶形成 Hamilton 圈, G 不是 Hamilton 图, 从而答案是否定的。

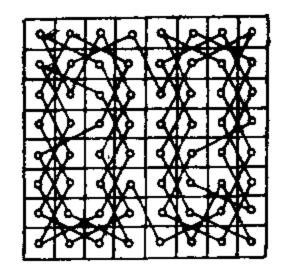
例 12 8×8的棋盘上的马图是 Hamilton 图,即在国际 象棋棋盘上马可以从任何一个方格跳到每个方格恰一次再回到出 发的方格,一种解,即一个 Hamilton 圈如图4.15所示, 这是一个幻方,每行与每列之和皆为260。

下面介绍 Bondy 与 Chvatal 1974 年建立的闭包判别法.

定理 6 u 与 v 是 G 的两个不相邻的顶,且 $d(u)+d(v) \ge v$. 頭 G为 Hamilton 图的充图条件是 G+w 是 Hamilton 图。

证 G为 Hamilton 图, G+uv 显然也是 Hamilton 图. 反 之, 若 G+uv 是 Hamilton 图, 而 G不 是 Hamilton 图, 这 时 G

中有Hamilton 轨 v,v,v,····v, 其中 v, = u, v, = v. 若对 某 个



50	Ιi	24	63	14	37	26	35
23	62	51	12	25	34	15	38
10	49	64	21	40	13	36	27
61	22	9	52	33	28	3 9	16
48	7	60	ı	20	41	54	29
59	4	45	8	53	32	17	42
6	47	2	57	44	:9	30	55
3	58	5	46	31	56	43	18

图 4.15

 $i (2 \le i \le \nu - 1), v_1 v_i \in E(G), 则 v_{i-1} v_{\nu} \in E(G), 不然 v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v_{\nu} v_{\nu-1} \cdots v_i v_i$ 是 G的 Hamilton 圈. 因而 $d(v_{\nu}) \le \nu - 1 - d(v_i), d(v_1) + d(v_{\nu}) \le \nu - 1, 与 d(u) + d(v) \ge \nu$ 矛盾. 证毕.

这一定理启发人们引入闭包的概念。

定义 3 把G中次数之和至少为 ν 的不邻的两顶之间添加一边,直至这种加边过程终止,得到的图叫 做 G的闭 包,记 之为C(G)。

定理 G 分连通图,到 C(G) 存在且唯一。

证 C(G)的存在性不足道。若图中 无 $d(u) + d(v) \ge v$ 的 不 邻顶对,则 C(G) = G,否则,加边过程会在有限步之内 终止。

下证 C(G)的唯一性。设 G_1 与 G_2 是 G的两个闭包,且 e_1 , e_2 , ..., e_n 与 f_1 , f_2 , ..., f_n 分别是构作 G_1 与 G_2 时加的 边 (若 G 一条边也不能加时,则 C(G) = G,这时唯一性成立),我 们 证 明 $e_i \in E(G_2)$, $i = 1, 2, ..., m_i$ $f_i \in E(G_1)$, $j = 1, 2, ..., n_n$ 设 e_{i+1} 是 e_1 , e_2 , ..., e_n 中不在 G_1 中的第一条边,令 $H = G + \{e_1, e_2, ..., e_k\}$ 。由 G_1 的定义,当 $uv = e_{k+1}$ 时,

$$d_{R}(u) + d_{R}(v) \geqslant v$$

又 $H\subseteq G_{2}$,故

$$d_{c_2}(u) + d_{c_1}(v) \geqslant v,$$

 $\mathbf{G}_{e_1+1} = \mathbf{u}v$ 不在 G_2 中,应有 $d_{e_1}(\mathbf{u}) + d_{e_2}(v) < v$,矛盾。可见 $e_1, e_2, \cdots, e_n \in E(G_1)$ 。同理可证 $f_1, f_2, \cdots, f_n \in E(G_1)$ 。**证毕**。

定理 6 指出 G是 Hamilton图的充要条件是C(G)是Hamilton图。这个事实有时能发挥独到的作用,例如图4.16中的G不满足Ore 定理的条件,不能用Ore 定理判其为 Hamilton 图,但它确为 Hamilton图。因为它的闭包是K。由此可见,闭包的引入是

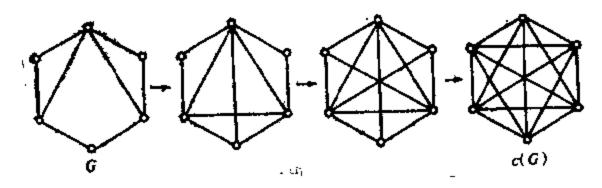


图 4.16

有一定作用的,但它并未给出令人满意的一个充要条件,只是把一个图G是否为 Hamilton 图的问题转化为另一个图C(G) 是 否为 Hamilton 图的问题。这种进展步子不太大,尚需追求更为 有效的充要条件。

4.4 货郎问题

货郎问题有两种提法。一种是货郎到各村去卖货,再回到出发处,每村都要串到,(不限制次数),为其设计一种路线,使得所用旅行售货的时间最短。这个问题的数学模型是在加权图G上求一个生成回路C,使得

$$W(C) = \sum_{e \in C} w(e) = \min\{$$
各个生成回路的权\}.

这个C叫做理想题路。

另一种提法是限制货郎每村到且仅到一次。这时,其数学模

型是在加权图上求一个 Hamilton 图 C_{i} , 使得

$$W(C_h) = \sum_{e \in C_h} w(e) = \min\{\text{各个Hamilton 圈的权}\}.$$

从算法理论上讲,这两种提法的难度是相当的。我们现在考虑与 Hamilton 图关系更为直接的后一种提法的货即问题。这个问题的难度很大。

- (1)如何判定G是否 Hamilton 图。这个问题目前尚无 有效算法,也不知道究竟存在不存在它的有效算法。在不知G是否为 Hamilton 图的情况下,硬去找一条如何 如 何 的 Hamilton 图 自然是盲目的,甚至是徒劳的。
- (2) 已知G是 Hamilton 图,求出一个 Hamilton 图 来 至 今亦无有效算法,和(1)一样,也不知道究竟存在不存在它的 有效算法。

算法:

(1) 在C上检查是否有 i≠j, 使得 v_{i-1}v_i∈E(G), v_iv_{i+1}
 ∈E(G), 且w(v_{i-1}v_i) + w(v_iv_{i+1}) < w(v_{i-1}v_i) + w(v_iv_{i+1});
 有,则构成新圈

$$C_1 = v_1 v_2 \cdots v_{i-1} v_i v_{i-1} \cdots v_i v_{i+1} v_{i+2} \cdots v_v v_{1}$$

C,叫做C的改良圈。

(2) 用 C₁ 代替 C 转(1), 直至终止。

上述算法得到的 Hamilton 圈未必 是 理想 Hamilton 圈;不过上述算法的时间复杂度是 $O(v^2)$ 。

例 13 从北京到伦敦(L)、墨西哥城(MC)、纽约(NY)、巴黎(Pa)、东京(T)各城去环球讲学,乘飞机到各城恰去一次再返回首都北京,应取何种安排最省旅费?各城相距做为边权在图 4.17 中标出。

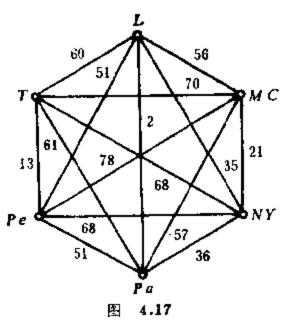
解 执行改良圈算法的过程见图 4.18. 初始圈为 C = (Pe) (T) (L) (MC) (NY) (Pa) (Pe), 算法终止时的改良圈为 $C_a = (Pe)(T)$ (MC) (NY) (L) (Pa) (Pe). 按 C_a (或逆时针方

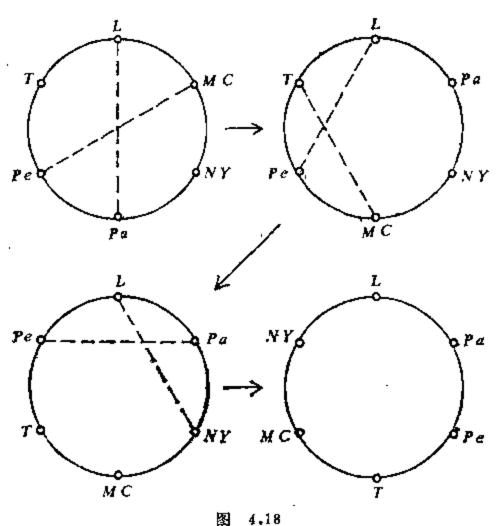
向的 C_{\bullet}) 安排访问讲学的总航程是

$$13 + 70 + 21 + 35 + 2 + 51$$

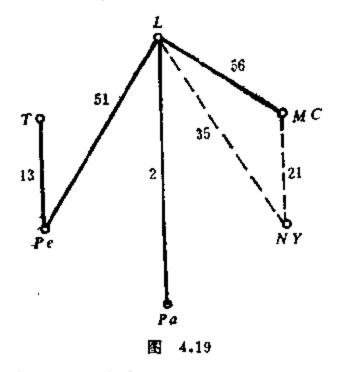
= 192 (百公里).

192是理想 Hamilton圈的上界,下面考查其下界。在第二章例 5 中,我们已用 Kruskal 算法求得了最优树 T,又 $\forall v \in G$,理想圈 C_o 上删去 v 是 G 的一个生成树,





在 C_0 上有两条 与 v 关 联 的 边, 我们从 G 上与 v 关 联 的 边中选 两条其权之和 最小者为 e_1 , e_2 ,则 $W(C_0) \ge W(T) + w(e_1) + w(e_2)$



在本题中,我们取v=NY,e,=(NY)(MC),e,=(NY)(L)(见图 4.19),则得W(C₁)≥122+21+35=178(百公里)。可见,我们的改良圈与理想 Hamilton圈之差≤14(百公里)。

Euler 图和Hamilton图 是两个最漂亮的图类,它们 都有可行遍的性质。Euler

图可以从任何一顶出发不重复地行追所有的 边,Hamilton 图 可以从任何一顶出发不重复地行追所有的顶。而且两者都可返回出发点。

本章的重点内容是:

- (1) Euler 图与 Hamilton 图的定义。
- (2) Euler 图和 "一笔画"的充要条件。
- (3) Ore 定理和 Bondy 的闭包判别法。
- (4) 中国邮路问題和 Fleury 算法。
- (5) 货郎问题及其困难之所在。

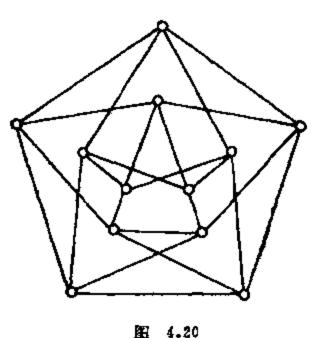
我们对 Hamilton 图的概念似乎已经十分清楚,事实上,我们对它的认识十分肤浅,连判断一个图是否 Hamilton 图的有效算法也不知是否存在。Hamilton 图的研究从来是图论中既图 难又吸引人的课题。

- 1. G是 Euler 图,则G的每个块亦是 Euler 图。
- 2. G是连通图,有 2k>0个 奇次顶,则 G有 k 条无公共 边的行迹 Q_1,Q_2,\cdots,Q_k ,使得

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{k} E(Q_i).$$

- 3. G是非平凡 Euler 图, $v \in V(G)$, 则 G中每一条起点 为v的行迹可以延长 成 G 的 Euler 回 路 的 充 要 条 件 是 G v 是 林。
- 4. 一个图是由顶 v。可任意行遍的,若经过下列步骤 总 是产生一条 Euler 回路:由 v。出发,经任何一条与之关联的 边,达到一顶 u 后由任何一条尚未用过的与 u 关联的边离开 u,继续下去,直至用遍所有的边。证明。Euler 图 G 是可由 v。任意 行遍的,当且仅当 G 的每个圈含 v。。
- 5.一个图称为随意可溯的(随意 Hamilton 的),若一条生成道路(Hamilton 圈)总可以如下产生,从G的任何一顶出发,然后进入任何一个还未进入过的邻顶,直至没有新的顶可以进入。证明、 $\nu \ge 3$ 的图G是随意可溯的,当且仅当它是随意Hamilton 的。这种图仅仅是 C_* , K_* , 或 K_* , 之一。
- 6. G不是 2 连通图,或G是 2 分图但其顶划分 $|X| \neq |Y|$,则 G不是 Hamilton 图。
- 7. 若G有 Hamilton 轨,则 ∀S⊂V, 皆有ω(G-S) ≤ |S|+1.
- 8. G中任二顶之间皆有 Hamilton 執, 则称G是 Hamilton 连通的.证明: G是Hamilton连通的,且v≥4, 则ε>[1/2 (3v +1)].

- 9. G不是 Hamilton 图, 但 Yv∈V(G), G-v 是Hamilton 图、则称G为亚Hamilton 图。证明 Petersen 图是 亚Hamilton 图.
 - 10. 证明图 4.4 中的 xu ywvzw yxuwvxz yx 是理想回路。
 - 11. K_n 中有 $\binom{n}{2}$ 个无公共边的 Hamilton 图。
- 12. 用 n 条 (n>1) 水平线与 n 条竖直线相截得一图,以 n_* 个交点为顶,以截得的线段为边,问这个图是否有 Hamilton 轨 和 Hamilton 图?



- 13. 英国亚瑟王有 # 名骑士,每次聚会他们围一 圆桌就坐, 若两名骑士只能 相邻一次,问这样的聚会能 进行多少次?
- 14. 亚瑟王在宫中召见 他的 2n 名骑士, 其中 某些 骑士间互在仇怨,每个骑士 的仇人不 超 过 n-1 个。证 明亚瑟王的谋士摩尔林能够 让**这些骑士围着那张著**名的

圆桌就坐,每个骑士不与他的仇人相邻.

- 15 "易縢"难题: 今有 1 cm 的小立方体四个,它们的每个 面用红、黄、兰、绿四色之一染成, 请把这四个立方 体堆 成 高 4 cm 的四棱柱, 使柱的每一侧面上都出现四种颜色。
 - 16. 求 Chvatal 图上的 Euler 回路 (图4.20) .
 - $17. \nu = 2k+1$ 的 k 次正则图是 Hamilton图 (k>1).
- 18. 用改良圈算法求下面货即问题的近似解, 距 离 矩 阵 为 D_{\bullet} v_{1} 是出发的商店, $v_{2},v_{\bullet},v_{\bullet},v_{\bullet}$ 是要去卖货的村镇:

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 34 & 2 & 50 & 59 \\ 34 & 0 & 36 & 68 & 67 \\ 2 & 36 & 0 & 51 & 60 \\ 50 & 68 & 51 & 0 & 13 \\ 59 & 67 & 60 & 13 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 19. 在正八面体的每个面上重合地放一个四面体的面,对应于所得的多面体的图是否 Hamilton 图?
- 20. 一个二十面体是用一张纸制成的,能否把这张纸剪成两份,使剪子剪每个面为两部分,而不通过二十面体的顶点?
- 21. 一个 n 行 m 列的方格网,每个结点处有一颗珍珠,确定 m 与 n 的值,使剪断一些线之后,做成一个项链.

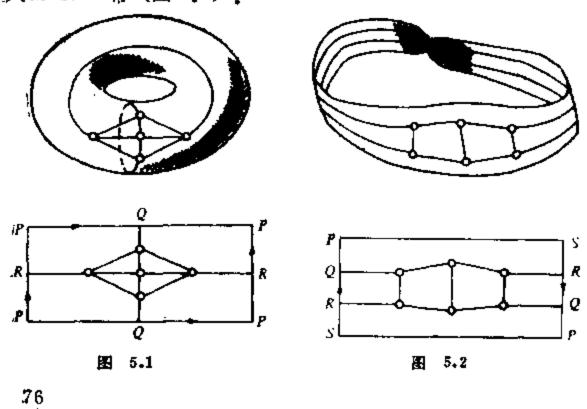
5 平 面 图

5.1 平面图的概念

相传古代有一位独裁者,临死时留有遗嘱,把土地瓜分给他的五个儿子,这五个儿子在自己的领地上各修筑了一座宫殿,他们还企图修一些道路,使得每两座宫殿之间有一条道路直接相通,又要求道路不能交叉。结果,这五个愚蠢的王子煞费苦心,终告失败。1930年,波兰数学家 Kuratowsky 给出平面图的充分必要条件,严格证明了五宫修路问题是无解的。

定义 ¹ 一个图称为可嵌入曲面 S, 是指把它的图示画在 S 上,可以使任两条边不内交。可嵌入平面的图叫做平面面,否则 为非平面图。

例如树皆平面图。 K_s 可以嵌入环面(图 5.1), K_s 。可以嵌入 Möbius 带(图 5.2)



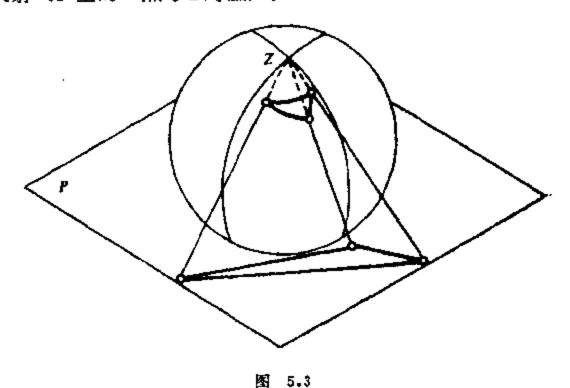
定理 1 任何图皆嵌入 E*

征 取E³ 中曲线 $l: x=t, y=t^2, z=t^3, t \ge 0$. 从 l 上 任取四个点 $(t_i, t_i^2, t_i^3), i=1,2,3,4, t_i \ge 0$,则由于范德蒙. 行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ t_1 & t_2 & t_3 & t_4 \\ t_1^2 & t_2^2 & t_3^2 & t_4^2 \\ t_1^3 & t_2^3 & t_3^3 & t_4^3 \end{vmatrix} = \prod_{1 \le i \le i \le 4} (t_i - t_i) \neq 0$$

知这四个点不共面,我们把G的顶画在 1 上,把边画成直线段,这时不会有任何两条边在内点相交,不然相交的两条线段共面。于是其四个端点共面,与 1 上四点不共面矛盾。所以我们可如此把任何图 G 画在 E'中而边不内交。证单。

定理 2 G是平面图的充要条件是G可在球面上嵌入。



若图G有平面嵌入G',则由 φ ,G' 在S上的原象即G在S上的嵌入,反之。若G'' 是G在S上的嵌入,不妨设Z不在G'' 的边上或顶上,则由 φ ,G'' 之象即为G的平面嵌入。证事。

5.2 Euler 公式

一张鱼网上结点间的线段数目,可以数一数结点和网孔算出来,计算的公式就是著名的 Euler 公式。

定义 2 平面图 G 之平面嵌入把平面分成若干个连通的闭区域,每个这种闭区域叫做G 的一个面,那 个 无 界 面 叫 做 G 的外面。

定理 3 ν 是平面图的顶点,则可以把G 嵌入在平面上,使 ν 在外面上。

证 考虑G的一个球面嵌入,由定理2,这种嵌入 是 存在的。令N是球面上含 ν 的闭区域的内点,以N为北极进行球极平面映射,则得所求之平面嵌入—— ν 被嵌入外面上。证**毕**。

定理 4 (Euler, 1736) G是连通平面图, 则

$$\nu-\varepsilon+\phi=2,$$

其中 ϕ 是G的面数。

证 对 ϕ 进行归纳法证明。 $\phi = 1$ 时, G 中无圈, 又 G 是连通图,故 G 是树, e = v - 1,于是 v - e + 1 = 2,公式成立, 假 设 $\phi \leq n(n \geq 1)$ 时,公式已成立,考虑 $\phi = n + 1$ 的情形。

由于 $\phi = n+1 \ge 2$, 有圈,设 e 是某**面**上的边,则 G - e 仍 连通,而被 e 分隔的 G中的网个面在 G - e 中成为一个面,且 G - e 仍为平面图,由归纳法假设。

$$v(G-e)-\varepsilon(G-e)+\phi(G-e)=2,$$

$$v(G)-[\varepsilon(G)-1]+[\phi(G)-1]=2,$$

$$v(G)-\varepsilon(G)+\phi(G)=2.$$

证毕.

推论 「平面图的面数与平面嵌入的方式无关。

推论 2 平面图平面嵌入时,有界面 的 个 數 恰 为 余 树 的 边数。

例 1 对哪些 n, 存在 n 条 棱的 多面体?

解 以多面体的顶点为顶点,以多面体的棱为边,构成一个连通平面图 G. 则 $\nu(G) \ge 4$, $\phi(G) \ge 4$,由 Euler 公式, $\varepsilon(G) \ge 6$ 。即无棱数小于 6 的多面体。

四面体是棱数为 6 的多面体。因为 $2e(G) \ge 3\phi(G)$, 若有 7 条棱的多面体,则 $\phi \le \frac{14}{3}$,即 $\phi = 4$,于是

$$7 = v(G) + \phi - 2 = v + 2$$

 $\nu = 5$,但 $\phi = 4$ 时,唯一的多面体是四面体,它只有四个 顶,可见,无 7 棱多面体。

考虑 $k \ge 4$,以 k 边形为底的棱锥为 2k 条棱的多面体。若 把 k-1 边形为底的棱锥底角处一个三面角"锯掉一个小尖儿",得 到 2k+1 条棱的多面体。总之 $n \ge 6$, $n \ne 7$ 时,有 n 条棱的多面体。

5.3 平面图的对偶图

定义 3 G' 是平面图G的平面嵌入,则如下高出的图G*是G的一个对偶图。

- (1) G' 的每个面内面且仅图 G^* 的一个顶点 f^* .
- (2) 当且仅当面 f_i 与面 f_i 有公共边 e_i 时,面 G^* 的一条边 $e_i^* = f_i^* f_i^*$ 。
- (3) e 为 G' 的桥时, 面 G^* 的一个环,此环与 e 所 在 的 面内的顶 f^* 相关联(图 5.4)。

同一个平面图的不同平面嵌入方式,可能会形成不同构的对偶图。例如图 5.4 中有一次顶,有桥,但此桥还可以嵌入含f*或含f**。 的面,从而环关联的顶可以是 f**,可以是 f**,也可以是 f**。

又例如图 5.5 是同一个平面图的两种平面 嵌入,相应的对偶图 显然不同构,(a)的对偶图中有 5 次顶(在外面内),而(b)的 对偶图无 5 次顶。

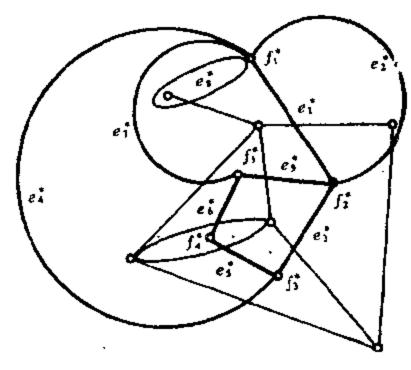
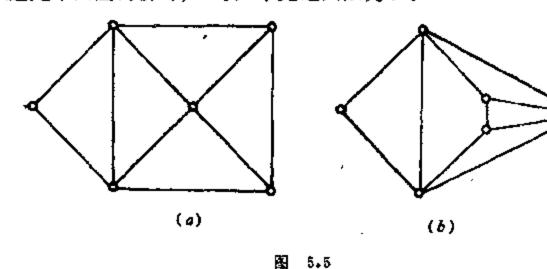


图 5.4

记 $F(G) = \{f_1, f_2, \dots, f_s\}$,是平面图平面嵌入的面集 合; d(f) 是 $f \in F(G)$ 时, f 边界上的边数,叫做面 f 的次 数;一条 边是平面图的桥时, d(f) 中此边贡献为 2.



容易看出, G为平面图, 则有

(1)
$$\phi(G) = \nu(G^*)$$
, $\varepsilon(G) = \varepsilon(G^*)$, $d(f) = d_{G^*}(f^*)$.

- (2)每个平面图皆有对偶图,未必唯一,但对偶图仍为平面图。
 - (3) G连通时, (G*)*=G.
 - (4) 平面图 G₁≌G₂, 未必 G₁≌G₂.

定理 5 分平面图,则对任给的平面嵌入,皆有

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2\varepsilon.$$

证

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = \sum_{f^* \in V(G^*)} d(f^*) = 2\varepsilon(G^*) = 2\varepsilon(G) \quad .$$
 证单。

推论 3 $\nu \ge 3$ 的平图图, $\varepsilon \le 3\nu - 6$.

证 只需对连通平面图来证明。因 $\nu \ge 3$,显然 $d(f) \ge 3$,其中 $f \in F(G)$ 。又 $2e = \sum_{f \in F(G)} d(f) \ge 3\phi$,由 Euler 公式 $\nu - e + \phi$ = $2,3\nu - 3e + 3\phi = 6,3\nu - 6 = 3e - 3\phi \ge 3e - 2e = e$,即 $e \le 3\nu - 6$ 证单。

推论 4 δ(平面图)≤5.

で ν=1或2,命题显然成立。当ν≥3时、由推论3,

$$\delta v \leqslant \sum_{v \in V(G)} d(v) = 2\varepsilon \leqslant 2(3v - 6),$$

$$\delta \leqslant 6 - \frac{12}{v}$$
,

故得 δ≤5, 证毕。

平面图的边数,在 ² 固定后,不会太多,不然在平面上嵌入时"放不下",推论 ³ 与推论 ⁴ 反映的正是这一情形。

定义 3 G 为平面单图,若 对任 何 不 相 邻 的 顶 u 与 v , G+uv 不再是平面图,则称 G 是极大平面图。

这里顺便说一下,"最大"与"极大"是有区别的,"最大"是指某个量不能再增大,"极大"是在集合包含义下不能再扩大。

即不能在原有的基础上扩大。例如树上每两个叶之间的唯一轨都是极长轨,但只有其中最长的一条才是最长轨。极大的可以不唯一,而且量也未必一致,最大的就量而论是唯一的。最小与极小亦应作与此相应的理解。

定理 6 G 是 $\nu \ge 3$ 的极大平面图,当且仅当G 的 平面 嵌入每个面凿 3 次。

证 设 G' 是极大平面图 G 的平面嵌入, G' 中有一个面的边界不是 K_3 ,这个面的边界是 $v_1v_2v_3\cdots v_kv_1$, $k \ge 4$,则在此面内可加一边,事实上,若多边 形 $v_1v_2v_3\cdots v_kv_1$ 的 对 角 线 $v_1v_1\in E$ (G),则多边形 $v_1v_2\cdots v_kv_1$ 上 v_i 的两个邻顶之间在 G 中 不 相邻,于是我们可以在此二顶之间加一边,得到的图仍是平面图,与 G 为极大平面图矛盾。

反之,若 G' 的每个面皆 3 次,则 由 $\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2e$, 3 ϕ

G = 2e, 及 G 是连通图,从 Euler 公式 $v - e + \phi = 2$ 得 e = 3v - 6. 而由推论 3,平面图边数之上界是 3v - 6,所 以 G 是 极 大 平 面图。证学。

定理 7 $\nu \ge 4$ 的平面图 G 为极大平面图,则 $\delta(G) \ge 3$.

证 $\forall v \in V(G)$ 。由于G是平面图,则 G-v 也是平面图,v 在 G'-v 的一个面 f' 的内部,这里 G' 是 G 的平面]嵌入。由于 G是极大平面图,G-v 的顶至少有三个在上述 G'-v 的面 f' 的边界上,即得 $d(v) \ge 3$ 。由 v 之任意性, $\delta(G) \ge 3$ 。证单。

推论 5 G 是极大平面图,则 $\varepsilon=3\nu-6$ 。

由此可知,极大平面图的边数达到平面图边数(顶数给定为 v)的上界,故极大平面图就是最大平面图,反之亦然.

推论 6 平面 Euler 图可表成不超过 v-2 个无公共边 的圈的并。

这里应注意的是,对于非平面 Euler 图,虽然猜想推论 6 的结论仍成立,但至今尚未证明。

5.4 Kuratowsky定理

定理 8 K_s 和 K_s 。都是非平面图。

证 $\nu(K_s) = 5$, $e(K_s) = 10$, $3\nu - 6 = 3 \times 5 - 6 = 9$, 不 満 足 平面图的必要条件 $e \le 3\nu - 6$, 故 K_s 非平面图.

 $K_{s,i}$, 是二分图,无奇圈,所以无子。图 $K_{s,i}$, 若 $K_{s,i}$, 是 平 面图,每面次数至少是 4、于是

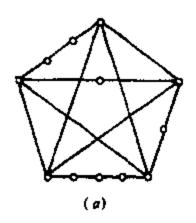
$$4\phi \leqslant \sum_{f \in F(K_{3-})} d(f) = 2\varepsilon = 2 \times 9 = 18,$$

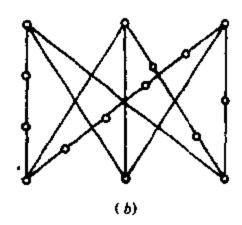
故有 $\phi \leq 4\frac{1}{2}$, 即 $\phi \leq 4$, 由 Euler 公式,

$$2 = v - \varepsilon + \phi \leq 6 - 9 + 4 = 1$$

这是不可能的. 证毕。

两个图叫做**同胚**的,若一个图是另一图边上"加上"一些新顶得到的,规定图**自同胚**。图 5.6 中 画的是K, 与 K, ,的 同 K. 图 .





翻 5.6

1930年,波兰数学家 Kuratowsky 指出,K,或 K,,的同胚图是引起图不能嵌入平面的仅有的两个"疙瘩"。

定理 9 (Kuratowsky,1930) G是平面图的充要条件 是G中无与K,或 $K_{1,1}$ 同胚的子图。

- 证 条件的必要性不足道,下证充分性。(以下证明是1954年 Dirac 和 Schuster 给出的)设 G 中无 K。或 K₁。的同胚做子图,但 G 是非平面图。令 G 是边数最少的这种图,则 G 是块,且 $\delta(G) \ge 3$ 。令 $x_0 = u_0 v_0 \in G$,则 $F = G x_0$ 是平面图。
 - 1) F中有含 u。和 v。的圈。

若F中无含 u_0 和 v_0 的圈,则 u_0 与 v_0 在F的不同的块中。从而存在F的一个割顶 w_1 它在每条 u_0 $-v_0$ 轨上。若 F 中 没有边 w_1 。与 w_2 。,我们把它们加入 F 构成图 F_0 。 F_0 中 u_0 与 v_0 。 我们把它们加入 F 构成图 F_0 。 F_0 中 u_0 与 v_0 。 F_0 中 F_0 中

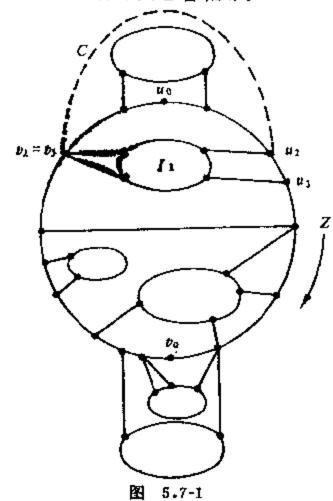
2) 把F嵌入平面,使含u。和v。的一个圈Z含有数目最多的面、指定Z的一个方向(例如颇时针方向),Z[u,v] 是Z上从u到v的轨,若v在Z上不是紧跟着u的,用Z(u,v) 表示Z[u,v] 删去u和v得到的轨。

Z 的外部是指由Z外的顶导出的F 的子图。这个子图的连通片,叫做外部连通片。Z 的外桥是指F 的一个子图,它由关联于至少一个在某个外部连通片的顶点的所有边导出或者由在Z 外部且与Z 的二顶关联的一条边导出。类似地可以定义Z 的内部、内部连通片与内桥。称一个外桥或内桥是分离u-v的,若它与Z(u,v),Z(v,u)上都有公共顶。显然,若u与v在Z上相邻,任何一个外桥或内桥都不会分离u-v。

因为 F 是连通的, 又 F 没有割顶, 所以每个内桥与外桥至少

- 与 Z 有两个公共顶、没有外桥可以与 $Z(u_0,v_0)$ 或 $Z(v_0,u_0)$ 有一个以上的公共顶,因为否则就有一个 含 u_0 , v_0 的圈,有 比 Z 更多的内部面数。同理没有外桥可以以 u_0 或 v_0 为 与 Z 的 公共顶,从而每个外桥与 Z 恰有两个公共顶,且分离 u_0-v_0 。此外,由于不能在 F 中加入 x_0 而保持平面性,所以至少有一个分 离 u_0-v_0 的内桥。
- 3) 存在一个分离 $u_0 v_0$ 的外桥,它与 $Z(u_0, v_0)$ 有公共顶 u_1 ,与 $Z(v_0, u_0)$ 有公共顶 v_1 ,使得存在一个内桥,它分离 $u_0 v_0$ 、又分离 $u_1 v_1$.
- 若3)不真,我们会找到矛盾。为此,把分离 u_0-v_0 的内桥进行编号,从 u_0 起沿 Z前进,按公共顶出现的次序给相应的内桥编号为 I_1 , I_2 , I_3 , \dots , I_1 是从 u_0 起在 I_3 上最先遇到它的顶的内桥。令 u_2 与 u_2 是 I_3 与 I_3 0 之 I_4 0 的第一个和最后一个公共顶, v_2 0, v_3 0 的第一个和最后一个公共顶。每个外桥与 I_4 0 的两个公共顶必在 I_2 0, I_4 0 则是或在 I_4 1, I_4 2 的两个公共顶必在 I_4 2 是 I_4 3 是 I_4 4 是 I_4 4 是 I_4 5 是 I_4 6 是 I_4 6 是 I_4 6 是 I_4 6 是 I_4 7 是 I_4 8 是 I_4 9 是 I_4
- 4) 令H是 3) 中指的内桥,它分离 $u_0 v_0$,又分离 $u_1 v_1$ 。令H与 $Z(u_0, v_0)$, $Z(v_0, u_0)$, $Z(u_1, v_1)$, $Z(v_1, u_1)$ 的公共**项**分别是 w_0 , w_0 , w_1 , w_1 . 依上述四项的分布,分四种情形讨论之(图5.7)
- (1) 顶点 w_1 与 w_1 中有一个在 $Z(u_0, v_0)$ 上,而另一个在 $Z(v_0, u_0)$ 上,我们可以取 $w_0 = w_1$, $w_1' = w_1'$ 。在这种情形,

G中含 $K_{s,a}$ 子图(图5.7(a)), $K_{s,a}$ 的顶划分成空心与实心两种,空心者与实心者相邻。



(2) w₁ 与w₁ 都在 $Z(u_o, v_o)$ 上或 $Z(v_o, u_o)$ 上,不失一般性,我们取第 一种情形,又有两种可能, $v_1 \neq w'_1$ 与 $v_1 = w'_0$ 。若 $v_1 \neq$ w_0 ,则G含有同胚于 $K_{3,3}$ 的 子图.依赖于 w_0 在 $Z(u_1,v_1)$ 上或在 $Z(v_1,u_1)$ 上, 分别 如图5.7(b) 或(c). 若v, $=\omega_0($ 图5.7(d)),则H含— 个顶点r,存在由r开始到 w1, w1和 v1的三条不相交 的轨,它们的所有顶点(除 了 w1, w1和 v1外)都属于 H. 这时 G 也含 有 K, ,的 同胚子图.

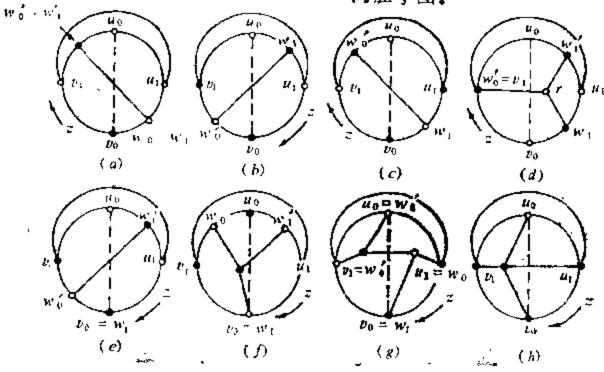


图 5.7-2

- (3) $w_1 = v_0$ 和 $w_1' \neq u_0$. 不失一般性,令 w_1' 在 $Z(u_0, v_0)$ 上, G又含 $K_{*,*}$,同胚的子图。若 w_0' 在 $Z(v_0, v_1)$ 上,则 如 图 5.7(e) 所示, G有一个同胚于 $K_{*,*}$,的子图。若 w_0' 在 $Z(v_1, u_0)$ 上,如图 5.7(f) 所示,也有 $K_{*,*}$,的同胚 子 图,若 $w_0' = v_1$,修 改一下这个图形也容易看出 G含 $K_{*,*}$,的同胚子图。
- (4) $w_1 = v_0$ 且 $w_1' = u_0$,我们设 $w_0 = u_1$, $w_0' = v_1$,否则我们可以得到前三种情形之一。我们分两种子情形考虑,令 P_0 是 H中从 u_0 到 v_0 的一条最短轨道, P_1 是从 u_1 到 v_1 的一条最短 道路。 P_0 与 P_1 一定相交。若其交点不止一个,则如图 5.7(g) 所示,G 中含同胚于 K_1 , 的子图,否则,如图 5.7(h) 所示,G 中含 K_2 的同胚子图。
- (1), (2), (3), (4) 已包括所有可能的情形。证準。 所谓G的初等收缩是删去邻顶u和v,再加上一个新顶w, 使w与邻接于u和邻接于v的每个顶邻接。若H是G通过一系列 初等收缩得到的,则称G可收缩到H。例如 Petersen 图可以收 缩到 K_{**}

Kuratowsky 定理可以写成。G 是平面图当且仅当G 中无可收缩到K。或K, ,的子图。

最小的妖怪, Petersen 图不是平面图。

5.5 图的厚度

一个图不是平面图,不能把它嵌入平面,于是自然提出分层 嵌入几个平面的问题: G的边集至少可以划分成几个子集,使得 每个子集的导出子图都是平面图?

定义 4 如果

$$G = \bigcup_{i=1}^d G_i,$$

其中 G_i 皆平面图,i=1, $2, \dots, d$, $E(G_i) \cap E(G_j) = \emptyset$, $i \neq j$; 劉称 (G_1, G_2, \dots, G_d) 为G的平图分解,而

 $\theta(G) = \min\{d \mid (G_1, G_2, \dots, G_d)$ 是G的平面分解} 称为G的厚度或层数。

例如 $\theta(K_s) = 2$. 见图 5.8.

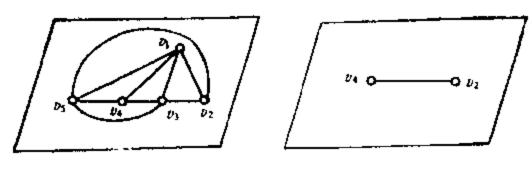


图 5.8

如何确定图的厚度至今既无公式又无有效算法! 但厚度及分层嵌入是实际需要的待解问题. 例如设计电路板,需要把电路图在平面上实现,问至少需要几块印刷线路板? 这个问层实则为求图的厚度及其最少层数分解。

下面给出厚度的下界, {x}表示大于 z 的最小整数。

定展 10 (1)
$$\theta(G) \ge \left\{ \frac{e}{3\nu - 6} \right\}$$
 ($\nu > 2$).

(2)
$$G$$
中不含三角形,则 $\theta(G) \geqslant \left\{\frac{\varepsilon}{2\nu-4}\right\}$ $(\nu>2)$.

(3)
$$\theta(K_{\nu}) \geqslant \left[\frac{\nu+7}{6}\right] (\nu > 3, \nu \neq 9).$$

证 (1) 对于平面图, 0<ε≤3υ-6, 从而 (ν>2)

$$0<\frac{\varepsilon}{3\nu-6}\leqslant 1$$
,

故有

$$\theta(G) \geqslant \left\{\frac{\varepsilon}{3v-6}\right\}.$$

(2) 若G是平面图,且不含三角形,G的 ϕ 个面次数分别为 n_1 , n_2 , …, n_4 。显然 $n_4 \ge 4$, i=1, 2, …, ϕ 。又因为

$$\sum_{f \in F(G)} d(f) = 2e,$$

故得 $4\phi \leq 2e$, $\phi \leq \frac{e}{2}$, 由 Euler 公式 (不妨设 G 为 平面 图)

$$2 = \phi + \nu - e \leq \frac{\varepsilon}{2} + \nu - e = \nu - \frac{\varepsilon}{2}, \ \epsilon \leq 2\nu - 4, \$$
所以 $0 < \frac{2}{2\nu - 4}$

≤1, 于是

$$\theta(G) \leqslant \left\{ \frac{\varepsilon}{2\nu - 4} \right\}$$
.

(3) 由(1) 得

$$\theta(K_{\nu}) \geqslant \left\{\frac{\varepsilon}{3\nu - 6}\right\}.$$

又对于K,,

$$\varepsilon = -\frac{1}{2} - \nu (\nu - 1),$$

取

$$\alpha=1-\frac{1}{3\nu-6},$$

因ν>3, 故 0<α<1, 于是有

$$\theta(K_{\nu}) \ge \left\{ \frac{\frac{1}{2} \nu (\nu - 1)}{3\nu - 6} \right\} \ge \left[\frac{\nu (\nu - 1)}{6\nu - 12} + 1 - \frac{1}{3\nu - 6} \right]$$

$$= \left[\frac{\nu^{2} + 5\nu - 14}{6(\nu - 2)} \right] = \left[\frac{\nu + 7}{6} \right].$$

证毕.

上面给出的 $\theta(G)$ 的下界有时偏离较大,例如 Petersen 图, $\theta(\text{Petersen}) = 2$, 但下界给出的是

$$\left\{\frac{\varepsilon}{3\nu-6}\right\} = \left\{\frac{15}{3\times10-6}\right\} = \left\{\frac{15}{24}\right\} = 1.$$

误差100%。

另外 $\theta(K_{\bullet}) = 3$, 所以定理10 (3) 中 $\nu \neq 9$.

平面图在工程技术上的广泛应用和在图论中的重要性(例如四色问题发生在平面图),使它与Hamilton图一起,成了图论中十分活跃的课题。从历史上看,正是Kuratowsky定理的提出与证明打破了图论研究的沉闷局面,成了图论振兴的转折点。本章的内容要点是:掌握平面图、对偶图、同胚图、厚度等概念,会证会用 Euler 公式,理解 K_s 与 $K_{s,a}$ 的同胚图是造成图 非平面性的根源,对于Kuratowsky 定理的证明,初学者亦可暂时放下,等图论学习深入一段时间,图论意识的训练充分之后再加以领会,事实上,Dirac 等人的证明十分之精彩,很值得一学。

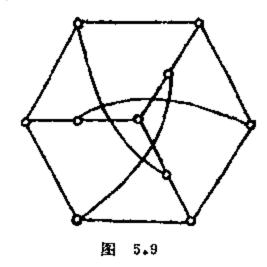
我们用范德蒙行列式证明了任何图可直线段地嵌入 E³,表明 我们在图论中的图与三维欧氏空间中的直线形同构。但图论毕竟 不是初等立体几何,它研究的不是空间形式与位置关系,而是顶 与边的关联关系。

习 轰

- 1. 证明 K, -e(e∈E(K_s)) 是平面图.
- 2. 证明 K_{*,3}-e(e∈E(K,3)) 是平面图。
- 3. 试把K, 嵌入在环面上。
- 4. 一个图为平面图的充要条件是它的每个块皆平面图。
- 5. 平面图若与其对偶图同构, 称之为自对偶图。证明
- (1) G为自对偶图,则 e=2v-2.
- (2) 对每个 n≥4, 作一个 n 顶自对偶图.
- 6. G是极大平面图,则其对偶图是2边连通3次正则图。
 - 7. G是 $\nu \ge 11$ 的平面图,则 G 是非平面图.
 - 8. S={x1, x2, ···, xx}, n≥3, S是平面点集,它的任二

点的距离至少为1,则最多3n-6对点,它们的距离为1.

- 9. 正十二面体与正六面体的对偶图是什么?
- 10. 图5.9是平面图吗?



- 11. G是平面图, 则 $\nu \varepsilon + \phi = \omega + 1$.
- 12. 论证正多面体有且仅有哪几种?它们的边数、顶数和面数各是多少?
- 13. 若多面体的每两个面至多有一条公共边,则它至少有两个面有相同数目的边。
 - 14. G 由 $K_{s,s}$ 和两个零次顶构成,则 G^{s} 为非平面图。
- 15. 把平面分成 φ 个区域,每两个区域都相邻,问 φ 最 大 是几?
 - *16. 平面图的平面嵌入可以使每条边皆直线段。
 - 17. 没有6连通平面图。
- 18. 平面图的平面嵌入可使每个顶点在同一个面上,称其为外可平面图。证明G是外可平面图的充要条件是G不含K.与K.,,的同胚。

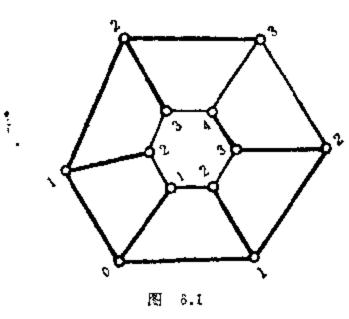
6 纵深搜索算法与平面嵌入算法

6.1 广度与深度优先搜索法

本节介绍图论算法中两个关键性算法,一个是广度优先搜索 算法 (Breadth First Search),代号 BFS,一个是深度优先 搜索法 (Depth First Search),代号 DFS。它们,尤其是 DFS 给出求生成树、割顶和块的有效算法。DFS 还有许多应 用,例如在平面图嵌入平面的算法中,扮演了极为重要的角色, 而且其思想方法渗透到许多图论算法的设计之中。

6.1.1 BFS 算法

- (1) $\forall v \in V(G)$, 标号 I(v) = 0, 令 I = 0.
- (2) 当所有标号为 I 的顶 u 的相关联的边的端点皆已标号时,则转(3);否则,把与 u 相关联的边的未标号的 顶 标 以



的子图是 G 的一个生成树。

l+1, 并记录这些边,用l+1代替 l, 转(2)。

(3) 止.

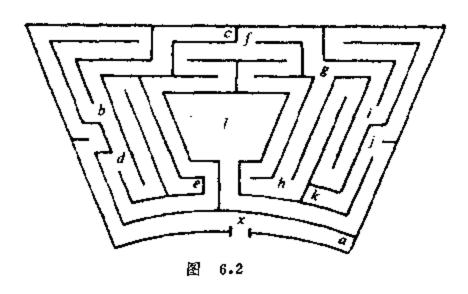
例 1 在图 6.1 中求生成树。

图 6.1 中粗实线表示一 个生成树。

定理 1 BFS終止,仍 有未标号的 顶 , 则 G 不 连 通,否则,记录下的边导出 证 由 BFS 的过程,标号之顶与 0 号顶连通,从而,终止时所有顶已被标号,则记录下来的边之导出子图是 G 的连通生成子图,又顶不二次标号,故此生成子图无圈,即它是生成树。否则,未标号的顶必与已标号的顶不连 通,即 G 为 不 连 通 图,证单。

6.1.2 DFS 算法

DFS 算法是图论中的首要算法,为理解它的思路,我们追溯到1690年修筑的威廉王迷宫,它至今还保存着(图6.2).



迷宫法则,任务是从迷宫入口处出发,每个走廊都要搜索,最后再从入口出来。为了不完圈子,我们可以记住哪些走廊已经走过,沿着未走过的通道尽可能远地走下去,走到死胡同或那里已无未走过的走廊可选时,沿原路返回,到达一个路口,发现可通往一条未走过的走廊时,沿这一未走过的走廊尽可能远地走下去,…,最后即可搜索遍全部走廊和厅室,再由入口处出迷宫。

相传雅典王子忒修斯冲进克里特岛的迷宫去斩除吃人的牛身人面妖精米诺托时,为了让忒修斯留下退路,且不忘记哪些走廊已被搜索,公主亚丽阿特涅给了他一只绒线球,告诉他:"把线的一头栓在迷宫大门上,你呢,一边走,一边放开线球。"

由上述的故事, 启发人们设计了如下的

DFS 算法 (Hopcroft, Tarjan, 1973):

- (1)标志一切边 "未用 过",对每顶 v∈V(G), k(v)←0.
 ◆ i←0, v←s.
 - (2) $i \leftarrow i+1$, $k(v) \leftarrow i$.
 - (3) 若 v 无未用过的关联边,转(5).
- (4) 选一条未用过的与v关联的边e=uv,标志e "用"过",若k(u) ≠ 0,转(3),否则(k(u) = 0),f(u) ← v,v ← u,转(2).
 - (5) 若 k(v) = 1, 止,
 - (6) v←f(v), 转(3).

k(v) 叫做顶v 的 DFS 编码,f(v) 叫做顶v 的父亲,v 叫做f(v)之子,以父为尾,以子为头的有向边叫做**父子边**。

上述 DFS 的时间复杂度是 O(|E|).

定理 2 G 为连通图,则 DFS 中产生的父子边导出的 子图"是以 s 为根的外向生成树。

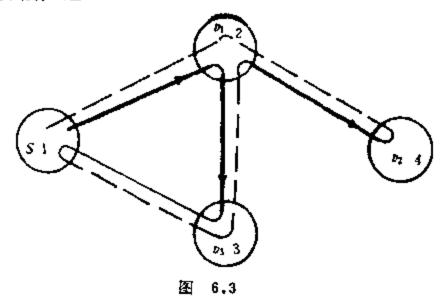
证 显然,在父子边导出的子图上, $d^-(s)=0$, $d^-(v)=1$ ($v\neq s$)。父子边导出的子图显然是无圈连通图(作为无向图而言),所以是树 ·考虑序列 v_0 , v_1 , v_2 ,…,其中 $f(v_i)=v_{i+1}$ ($i\geq 0$),其中 $v_0=v\neq s$,因f(s)不存在,故这一序列止于s . 这些给出从s 到v 的一个有向轨。由v 的任意性,可见父子边导出的子图是以s 为根的外向生成树(图6.3)。证**非**。

图 6.3 是 DFS执行过程的示意图,有方向的粗实线尾为父, 头为子,是父子边,它们导出生成树,而且是以 DFS 出发点 s 为根的外向树。

图 6.3 中的虚线是返回路线,G 中非父子边叫做**返回边**,例 \mathbf{m}_{sv} ,是返回边。

显然,在 DFS 搜索中,每边恰通过两次,又回到出发点。如果我们把每条边都再附着一条重边,则G变成了Euler 图,于是 DFS 过程就是沿 Euler 回路旅游的过程。但是,这里不能用

Fleury 算法, 这里的图 整体结构是未知的——就象 忒 修 斯 不



知道迷宫的图一样,只知道所到之顶点是几次的,以及执行 DFS 的过程所做的(已到的边与顶上的)标志,要求我们探索出一条行遍性路线,再回到出发点,可见 DFS 的作用有两点: (1)能把一个图的未知结构,即边顶关联关系搞清楚; (2)同时找到了一棵生成树。

定理 3 在 DFS 中, e = ab 是返回边,则要 么 a = b 之 祖 先, 要么 a = b 之后代孙。

证 设 k(a) < k(b),在 DFS 的活动中心,即算法中的 v,只沿父子边移动。若 a不是 b之 祖先,但 由于 k(a) < k(b), a比 b 先 "生"。则活动中心移到 b 之前,已从 a 移到 a 的某个前辈。然而,由算法知,仅当与 a 关联的边皆被用过后才倒行至其父,这说明 e 已被用过,b 已被发现,k(b) < k(a),与 k(a) < k(b) 矛盾,故 a 是 b 之祖先。

若 k(b) < k(a), 则可证得 a 是 b 的后代孙. 证毕。

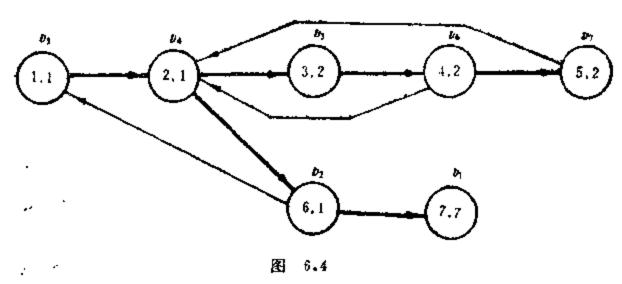
例如图 6.3 中 sv_3 是返回边, s 是 v_3 之 "祖 父", v_3 是 s 之 "孙"。

6.1.3 求割顶与块的算法

设连通图G已被DFS定向,返向边以祖为头。我们规定顶

v 的标号 l(v): 从 v 出发沿有向轨可以到达的顶 u 中 k(u) 的最小值,此轨长可以为 0 ,但至多允许含一条返回边。例如 图 6.4 中,顶上第一个数是 k(v) ,第二个数是 l(v) 。

$$l(v_1) = 7$$
, $l(v_2) = l(v_3) = l(v_4) = 1$,
 $l(v_5) = l(v_6) = l(v_7) = 2$.



定理 4 DFS中, e=uv 是 父子 边,且 k(u)>1, I(v) > k(u), 则 u 是割顶。

证 令 S是从根 r 到 u 的轨上含 r 而不含 u 的一切顶组成的集合, T是 v 为根的子树上的顶集。由定理 3 ,不存在连接 T 与 V $-(S \cup \{u\} \cup T)$ 的边。若 存在 连 接 $t \in T$, $s \in S$ 的 边 ts ,则它是返回边,且 k(s) < k(u) 。这时 $l(v) \le k(s) < k(u)$,与 已 知 $l(v) \ge k(u)$ 矛盾,故 ts 这种边不存在,故 u 是割顶。证准。

例如图 6.4 中, v_*v_* 是父子边,且 $k(v_*)=2>1$, $l(v_*)=2$, 又 $k(v_*)=2$, 由定理 4, v_* 是割顶。

证 因 u 的割顶,设 $V-\{u\}$ 划分成 V_1,V_2,\cdots,V_n , $G[V_i]$ 是 G-u 的连通片, $i=1,2,\cdots,m(\geq 2)$,则当 $i\neq j$ 时,在 G 上从 V_i 到 V_i 的一切轨皆含 u ,又 k(u)>1 ,u 不是有向生成树的根,不妨设 $r\in V_1$,r 是根,在 DFS 过程中,活动中 心 必 然 要 通 过

u, 设 uv 是 $v \in V$, 的第一条父子边, 设 $v \in V$, 因无连通 V, 与 $V - (V, \bigcup \{u\})$ 之间的边, 故 $I(v) \ge k(u)$. 证字。

定理 6 r 是 DFS 过程中生成树的根, r 是图 G 的割顶 的 充要条件是至少有两条以 r 为尾的父子边。

证 设 r 是 DFS 的生成树的 根,且 r 是 G 的 割 顶, V_1 , V_2 ,…, V_n 是 V_n 的一个 划 分, $G[V_i]$ 是 G_n 的 连 通 片, $i=1,2,\cdots,m$ 。 $i\neq j$ 时,从 V_i 到 V_i 的轨都含 r ,这时没 有 起于边 $rv(v \in V_i)$ 而止于 V_i 中顶的树上有向轨,故至少有两条 以 r 为尾的父子边。

设 rv_1, rv_2 是两条父子边, T 是根在 v_1 的子树,由定理 3, 无 连 接 V(T) 与 $V(G) - (V(T) \cup \{r\})$ 之顶的 边,又 V(G) $- (V(T) \cup \{r\}) \neq \emptyset$ 。故 r 是 G 的割顶。证**非**。

求块和割顶的算法:

- (1) 标一切边未 用 过, $S = \emptyset$,对 每 顶 $v \in V(G)$,k(v) $\leftarrow 0$, $i \leftarrow 0$, $v \leftarrow s$.
- (2) i←i+1, k(v)←i, l(v)←i, 把v放入先入后出存储器 S.
 - (3) 若 v 无未用过的关联边, 转 (5).
- (4) 选一未用过的边 e=pu, 标志 e 用过了, 若 $k(u)\neq 0$, f

$$l(v) \leftarrow \min\{l(v), k(u)\},\$$

- 转 (3); 否则 (k(u) = 0), $\Diamond f(u) \leftarrow v$, $v \leftarrow u$, 转 (2).
 - (5) 若 k(f(v)) = 1, 转 (9)。
 - (6) $(f(v) \neq s)$ 若 I(v) < k(f(v)), 则 $I(f(v)) \leftarrow \min\{I(f(v)), I(v)\},$

转(8).

- (7) $(l(v) \ge k(f(v)))$ f(v) 是割顶、把 S 中包括 v 在内的 v 上部之顶移出,这些顶连同 f(v) 导出一个块。
 - (8) $v \leftarrow f(v)$, 转(3).

- (9) 把 S中连同v 在内v 上方之顶移出,这些顶连同s 导出一个块。
 - (10) 若 & 无未用过的关联边, 止,
 - (11) 顶 s 是割顶。 令 v←s, 转 (4)。

上述算法的时间复杂度是O(|E|)。

这个算法能把连通图 G 的一切割顶和块找到。

6.1.4 有向图的 DFS

有向图的 DFS 算法:

- (1) 标志每条边未用过,对每个顶 $v \in V(G)$, $k(v) \leftarrow 0$, $i \leftarrow 0$, f(v)未定, $v \leftarrow s$ ($s \in V(G)$), 是搜索的出发点).
 - (2) $i \leftarrow i+1$, $k(v) \leftarrow i$.
 - (3) 若无以 v 为尾的未用过的边, 转 (5)。
- (4) 选一条未用过的边e=vu, 标志 e 已用过。若 $k(u) \neq 0$, 转 (3), 若 k(u)=0, $f(u)\leftarrow v$, $v\leftarrow u$, 转 (2).
 - (5) 若 f(v) 已确定, v←f(v), 转 (3).
- (6) 若 f(v) 未 确 定, 选 顶 u 满 足 k(u) = 0, v←u, 转 <(2).
 - (7)止(所有顶皆被搜索)。(图6.5.)

上述算法的时间复杂度为O(|E|).

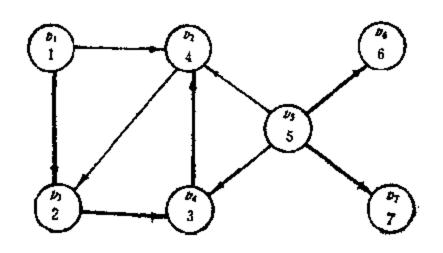


图 6.5

有向图经 DFS 后,边划分成四类:

- (1) 父子边 导出G的生成林。
- (2) 返祖边 后代通向祖先之边。
- (3) 前进边 祖先通向后代孙之边。
- (4) 横跨边 生成林之间的边。

例如图 6.5 中, v₁v₃,v,v,v₂v₂,v₅v₀,v₂v₁ 为父子 边, 生 成 林 用粗实线表示, v₂v₃ 是返祖边; v₁v₄ 是 前 进 边; v₅v₂,v₅v, 是 横跨边。

6.1.5 求极大强连通子图的算法

在有向图G中, $x,y \in V(G)$,且存在有向轨P(x,y)时,叫做x可达y,若x可达y,对可达x,则记成 $x \sim y$ 。" \sim "是一种等价关系,即" \sim "是自反的,对称的和可传递的关系。我们用" \sim "把V(G)划分成若干等价类,每一等价类之导出子图叫做G的极大强连通子图。

求祖大强连通子图的算法。

- (1) 标志一切边未用 过,对 每一 顶 $v \in V(G)$, $k(v) \leftarrow 0$, f(v)未定, $S = \emptyset$, $i \leftarrow 0$, 活动中心 $v \leftarrow s(s \in V(G))$.
 - (2) $i \leftarrow i+1, k(v) \leftarrow i, l(v) \leftarrow i, l(v) \leftarrow i, l(v) \leftarrow i$, 把v放入S.
 - (3) 若无以 v 为尾的未用过之边, 转 (7)。
- (4) 选一未用过的边e=vu, 标志 e用过了, 若 k(u)=0, 则 $f(u)\leftarrow v$, $v\leftarrow u$, 转 (2).
- (5) 若 k(u)>k(v) (e=vu 是前进边), 转 (3), 若 k(u) < k(v), u∈S, 转 (3).
 - (6) k(u) < k(v), $u \in S$, 令 $l(v) \leftarrow \min\{l(v), k(u)\}$, 转 (3).
- (7)若I(v) = k(v),则下至v的S中之顶全 部移出,它们导出一个极大强连通子图。
 - (8) 若f(v) 巳确定,则

 $l(f(v)) \leftarrow \min\{l(f(v)), l(v)\}, v \leftarrow f(v)$ 转(3)。

(9) f(v) 未定, 岩存在 u∈V(G), k(u) = 0,则 v←u, 转(2).

(10) 止(一切顶被搜索)。

上述算法之时间复杂度是O(|E|)。

6.2 平面嵌入算法

Kuratowsky 定理给出图为平面图的充要条件,但要检验 G 中究竟有无 K。与 K。,的同胚图,我们并无良策。本节给出一个平面嵌入算法,算法终止时,得到了平面嵌入者,自然为平面图,否则为非平面图。这个算法是有效算法,不但是一种平面性判定,面且当图是平面图时,给出绘制一种嵌入图的程序。我们这里介绍的是 1966 年 Lempel,Even 和 Cederbaum 给 出 的 所谓"顶点漆加平面嵌入法"。

6.2.1 st 编码

因为G为平面图的充要条件是G的块皆平面图,不妨认为图 G是一个块来考虑其平面嵌入问题。

取 $e = st \in E(G)$, 称满足下列条件的——映射 g 为面的st 编码:

$$g: V(G) \to \{1, 2, \dots, \nu\},\$$

使得

(1) g(s)=1, (2) g(t)=v, (3) $v \in V(G)-\{s,t\}$, 则存在 v 的两个邻顶 u 与 w ,有

是否任意的图 (块) 都有 st 编码? 如果有,如何 编?为此首先建立一个导路算法(Path finding algorithm),代号 PFA。PFA 重法,

- (0) 对G执行 DFS, 且取 k(t)=1, k(s)=2 (即 t 是 DFS 之出发点, s是 t 的儿子),把顶s, t 及边ts标成"老的", 其余边顶皆标成"新的"
- (1) 若 $v \in V(G)$, 存在新的返回边 e = vw, (k(w) < k(v))则标 e 为老的,得路 vw, 止.
- (2) 若存在新的父子边 e = vw(k(w) > k(v)),从 e 开始,追踪定义 l(w) 的路(沿父子边前进,通过一条返回边在一顶 u 处结束,其中 k(u) = l(w))。把此路上的一切顶与边标成老的,止。
- (3) 若存在新的返回边 $e=\omega v$ (k(w)>k(v)),则从e及父子边逆行直至一个老顶,此路上的一切顶与边标以老的,止。
 - (4)一切与v关联的边皆老的,产生空路,止.

上述算法时间复杂度是O(|E|).

证 用归纳法来证、若v=s, s之祖先是t, t 是老的,命题成立。假设已进行了p次寻路,每次皆从老顶出发,且老顶之祖先皆老顶。考虑p+1 次寻路之后,从寻路的四个步骤可以看出,其中任何一条执行时,命题结论仍正确。证据。

定理 8 G是块,从老顶v出发($v \neq t$) 写路,则每次产生一个过新边新顶的路,此路止于另一个老顶,或是v的一切关联边墙为老的,产生空路。

证 只需考查寻路算法中的(2)。因G是块,v 非 割顶,则 l(w) < k(v),故(2)寻路之终止点 u 是v之祖 先,由 于v 是 老的,由定理 7,所以 u 也是老的。证**非**。

st 编码算法:

- (1) $i \leftarrow 1$, $s, t \in S$, $s \in t$ 之上方.
- (2) 若 v 在 S 之顶 部, 把 v 从 S 中 移 出, 若 v = t, g(t) ←i, 止。

- (3) 若 $v \neq t$, 对 v 执行寻路算法, 岩从 v 始寻到的是空路,则 $g(v) \leftarrow i$, $i \leftarrow i+1$,转(2).
- (4) 若得的路非空,设它是 $vu_1,u_2...u_1w_n$ 按 u_1,u_{1-1} , ..., u_1,u_1,v 的顺序把它们放入S, 转(2).

上述算法的时间复杂度是O(|E|)。

定理 8 st 编码算法给出一个 st 编码。

证 我们从算法发现三个事实:

- (i)没有一个顶同时出现在S的两个或更多的位置上。
- (ii) 一旦 v 出现在 S 中, S 中在 v 下方的顶直到 v 得到编码前是不会得到编码的。
- (iii) 仅当与 v 关联的边皆"老的"时,此顶才从 S 中移出,不再进入 S.

下面来证 t 被移出 S 之前,每个顶都会被放入 S 。因为开始时 t 与 s 已在 S 中,我们只考虑 $v \neq s$, t ,因 G 是 块,则 从 s 到 v 有一条不过 t 的轨。设此 轨为 s u_1 u_2 … u_1 — 1 v ,且 u_m 是 未放入 S 的第一个顶,这里 s m u_1 ,v m m 。因 u_{m-1} 放入了 S ,由(ii),t 只能在 u_{m-1} 之后被移出,且由(iii), u_{m-1} 被移出,只,能 在与之关联的一切边皆老之后,所以 u_m 必于 t 被移出前放入 S 。

下面证明得到的是 st 编码。

因为每顶放入 S后,终于要被移出,所以每顶得一编码g(v). 显然 g(s)=1,因为 s 是第一个被移出者。以后的赋值是递增的,故 g(z)=v。其它顶第一次放入 S 时,是做为一路之内顶,故在 S 中,此顶下方还有一个在 G 中相邻的顶,上方也有一顶是此顶在 G 中的邻顶。由(ii),在此顶上方的那个顶编号 小,此顶下方的那个顶的编号大,故 g 是一个 s t 编码。证券。

6.2.2 顶点添加平面嵌入箕法

设G是块,已被st编码,我们用顶点的st码来称呼该顶。 $V = \{1,2,\dots,\nu\}$ 。我们把G定向,使每有向边满足尾小于头,

于是:

- (1) $d^{-}(1) = 0$, 1是唯一的"源", 只出不入。
- (2) $d^{+}(v) = 0$, v 是唯一的"坑",只入不出。
- (3) $v \in \{2,3,\dots,v-1\}$, $d^+(v) \cdot d^-(v) \neq 0$, v 非源非坑,有进有出。

记G' 是平面图G之平面嵌入, $G_* = G[\{1,2,\dots,k\}]$ 、

引理 1 设 G'_k 是含于G' 中的 G_k 之平画嵌入,则 $G' - V(G'_k)$ 的一切顶与边皆嵌在 G'_k 的一个画内部,其中 k < v。

证 $G' - V(G'_k)$ 的顶集非空,而 $V(G' - V(G'_k)) \cap V(G'_k)$ = Ø,所以存在 G'_k 的一个面 f , f 内部含 $G' - V(G'_k)$ 的若 干 个顶。又因 f 的边界上的顶皆小于 f 内部的顶(f 内之顶是 $V(G' - V(G'_k))$ 中的,都比 k 大),于是 f 内的最大的顶必为坑,不然,有一边以它为尾,此边之头 是比 尾 更大的顶,此头不在 f 内,必在 f 的边界上,而 f 上的顶属于 G'_k ,都不大于 k ,矛盾。又 G 只有一个坑。所以 f 内部含有 $G' - V(G'_k)$ 的一切顶与边,不然,在 G'_k 的另一个面 f' 内仍有 $G' - V(G'_k)$ 的顶,于是同理得知 f' 内亦有坑,与坑的唯一性相违。证单。

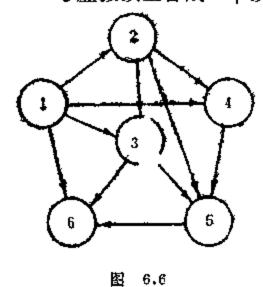
由引理 1,我们可以把 $G'-V(G'_k)$ 的边与顶嵌在 G'_k 的 外面内。

我们如下地生长一个灌木 B_{**} 把 G_{*} 的预按 st 号码放在 从第一层到第 ν 层的水平线上,再画上边,实 现 G_{*} 的 平 面 嵌 入 G_{**} 。 再从 G_{*} 的顶出发不交叉地画出进入 $V(G) - V(G_{**})$ 的一切边,不过这些边的头画在最高层的水平线上,其中两条边有同一个头时,也画成两个头。再把这些头标志以在 G 中的 st 编 码。这时,可能有几个在最高层的顶有相同的号码,它们在 G 中本来是同一个顶。

我们把上述最高层的顶叫做虚拟顶,以虚拟顶为头的边叫虚拟边(图 6.6 与图 6.7)。

若 B_* 的 k+1 号虚拟顶连贯地出现在最高层,我们 把 这 些

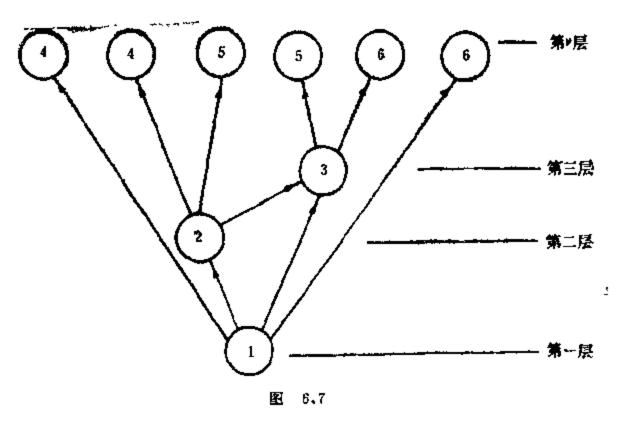
k+1号虚拟顶重合成一个顶,保持其关联的边不交叉,并把此顶从



第 》 层拉下来,放在 第 k+1 层 上, 再把从 k+1 号顶出发的虚拟边 与虚 拟顶画好,得到灌木 B_{*+1}。这 一过 程若总能进行,则可得 灌 木 B_{*},即 得到了 G 的平面嵌入。

问题在于要有办法解决虚拟顶上 同一号码在第 » 层水平线上不连贯出 现的情形。为此我们讨论图(未必是 块)的元件概念。

在G-v中取一连通片 G_i , $G[V(G_i)\cup\{v\}]$ 叫做G的关于v的一个元件。

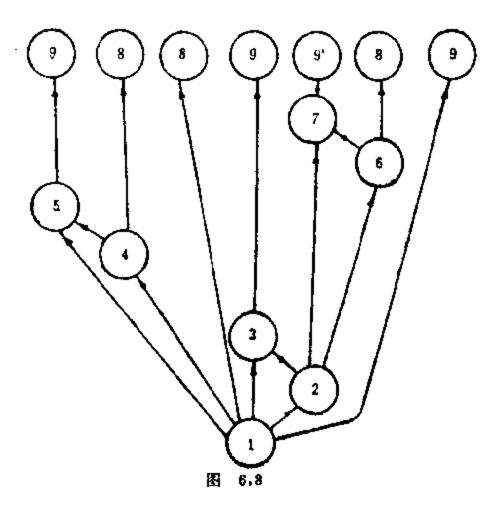


引理 2 设v是 B。的一个割顶、v>1,则恰有 B。的 关于 v 的一个元件,含有比v 小的顶。

证 由 st 码之 定义,任 取 $u \in V(B_*)$, $1 \le u < v$,不 妨 设 u > 1,存在 $u_1 < u$, $u_1 u \in E(B_*)$,存在 $u_2 < u_1, u_2 u_1 \in E(B_*)$;

…,于是找到了一条从1到u但不超过v的道路。即一切比v小的顶在 B_* -v的同一个连通片上,于是 v>1 时,恰有一个元件 含比v小的顶。证**毕**。

引理 2 的意思是,若 v 是 B。的割顶,除去含 1 的那个关 于 v 的元件,其它关于 v 的元件中, v 都是最小顶、而这些以 v 为 最小 (低)的顶的每个元件又是以 v 为根的子灌木,每个子灌木可以以 v 为根翻转 180° (我们约定根在最下方)或者把同根的灌木们位置进行置换,以期 k+1 号虚拟顶在最高层连贯地 出 现。(图6.8)。



在图 6.8 中画的是一个 B₁, 我们可以如下地施行翻转 与置换, 使最高层 8 号连贯, 1 与 8 导出的元件与 1 与 9 导出的元件对换, 再把 1, 4, 5, 8, 9 导出的元件翻转, 轮换到最右侧,则会出现最高层的排列 9, 9, 9, 8, 8, 8, 9, 于是 8 号连

贯出现.

引理 3 设H是 B_k 的块, $V(H) \supseteq \{y_1, y_2, \cdots, y_m\}$, y_1 , y_2 , \cdots , y_m 又是 $B_k = E(H)$ 中边之端点,则所有 的 y_1, y_2 , \cdots , y_m 在 B_k 的每一种平面嵌入形成的灌木 B_k 中都在H的平面嵌入H' 的外面边界上,且面序相同(可以是照时针也可以是逆时针

证 设在 B'_{k} 中,H的嵌入为H',则 $y_{1},y_{2},...,y_{n}$ 是 B'_{k} -E(H')的边之端点,所以 $y_{1},y_{2},...,y_{n}$ 在 H' 的外面边界上是显然的。

设 B_{x}^{\prime} , B_{x}^{\prime} 是 G 的两个不同方式画出的灌木,H 是其中的块,H 的嵌入分别为 H^{\prime} , $H^{\prime\prime}$ 。 若 y_{i} , y_{i} 在 H^{\prime} 的外边界上 相 邻,但在 $H^{\prime\prime}$ 外边界上不相邻,则 $H^{\prime\prime}$ 的外边界上有另外两个顶 y_{i} , 它们隔 离 了 y_{i} , y_{i} 。 在 $H^{\prime\prime}$ 中 有 两 条 轨 $P_{1}(y_{i},y_{i})$ 与 $P_{2}(y_{i},y_{i})$,它们无公共顶点,但在 $H^{\prime\prime}$ 中这样的两条 轨 不 存 在,矛盾。所以 B_{x} 不同的画法不影响 y_{1} , y_{2} , \dots , y_{n} 在 H 的嵌入中在外边界上的相邻关系。证单。

定理 10 设 B'_k 与 B'_k 是 G_k 的两个面木,则 存 在 有 限 个 B'_k 的元件的翻转与置换,使得 B'_k 变成 B''_k ',且 B''_k ' 与 B''_k 中虚拟 顶出现的次序一致。

证 对顶数进行归纳证明。

若 B', 与 B, 只有两个顶、命题自然成立、

假设对顶数≤p-1 的灌木 B'_k 与 B'_k 定理已成立,考虑 顶数 为 p 的两个灌木 B'_k , B'_k , 令 v=1 (根) .

- (i) 若 $v \in B'_{k}$ 与 B'_{k} 的割顶,我们把关于 v 的 元 件 (子 灌木) 排列得顺序一致,由归纳法假设, B'_{k} 中的每一以 v 为 根 的子灌木可以通过有限次元件翻转与置换而使其虚拟顶的排列与 B'_{k} 中相应的子灌木一致。从而定理成立。
- (ii) 若v不是 B_k 与 $B_k^{\prime\prime}$ 的割顶,设H是含v的块, 在 $B_k^{\prime\prime}$ 与 $B_k^{\prime\prime}$ 中, H的嵌入分别是 $H^{\prime\prime}$ 与 $H^{\prime\prime}$ 。设 $\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$ 是 H

之顶集的子集,且 y_1,y_2,\dots,y_n 都是 $E(B'_k)-E(H')$ 中边之端点,由引理 3, y_1,y_2,\dots,y_n 都出现在 H' 与 H' 的外面 边界上。若绕行顺序相反,则可把 B'_k 翻转而使 y_1,y_2,\dots,y_n 按同一绕行方向在 H' 与 H' 的外边界上顺序一致。由引理 2,每个 $y_i(i=1,2,\dots,m)$ 皆为某个子灌木之根,且这些子灌木在 B'_k 与 B'_k 中的出现次序,由引理 3,可以经置换变得一致。又由归纳法 假设,每个上述的子灌木可经有限次翻转与置换,使相应的子灌木上的虚拟顶出现的次序一致,进而 B'_k 与 B'_k 的虚拟顶出 现的 次序一致。证**毕**。

由引理 1 知,我们把 G嵌入平面时,可以把 $G' - V(G_k')$ 的 边与顶嵌在 G_k' 的外面内,所以存在一种 B_k ,使得 k+1 号 虚拟 顶在最高层连贯出现;倘若我们在画灌木 B_k 时,最高层上k+1 号虚拟顶未能连贯出现,由定理 10,我们总可以通过元件的翻转与置换而使其 k+1 号虚拟顶在最高层连贯出现,进而得到 B_{k+1} , 最后得到 G' 。

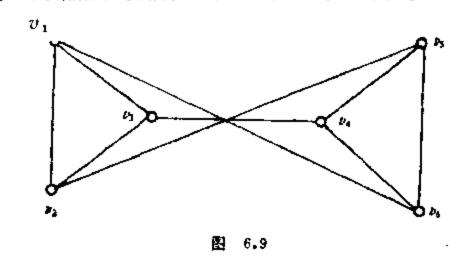
本章我们介绍了图论中的三个基本 算 法, 尤 其是 DFS 算 法, 应当领会它的"走一步是一步, 走不通时则倒退"的摸索精神。它的优点在于无需知道图的整体结构,即可把图遍历,而且还能得到生成树和有向图的生成林。DFS 是很多图论算法 的 基础, 例如本章讲的 st 编码。

平面图的平面嵌入算法不止一种,我们这里介绍的顶点添加。算法是其中最直观最生动的方法之一,它用生长灌木的形象来进行,通俗易懂,便于掌握。而且,当这一算法不能实现平面嵌入时,我们便判定图是非平面图。

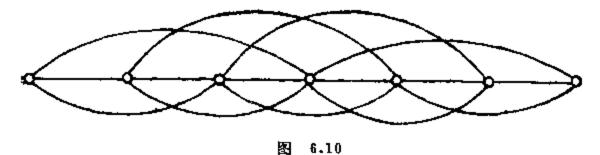
习 颞

1 证明 DFS 得到的生成树上,一个团的一切顶必 出 现 在。 一条有向道路上,它们是否连贯地出现?论证你的回答。

- 2 设G是连通图,
- (a) 顶 $u \neq s$ 是 割顶的充要条件是当 $G \perp DFS$ 终 止 时,存在父子边 uv,不存在返回边 xy,使得 x 是 v 的后 代, y 是 u 的 祖先。
- (b) 设计一个时间复杂度为O(|E|) 的求割顶的算法,且能产生块。
- 3 C是有向图上的有向图,执行 DFS 时, v是 C上 k(v) 最小者,则 v是 DFS 所得生成林中一个子树之根,且 C的一 切顶皆在此子树上。
 - 4. 设计一个求桥的算法,
 - 5. 用顶点添加嵌入法讨论 Petersen 图是否平面图.
 - 6. 用顶点添加算法把下面的图 6.9 嵌入平面。



7. 图 6.10 是否平面图? 用顶点添加算法讨论之。



7 匹配理论及其应用

7.1 匹配与许配

让我们从一个古典问题谈起,这个问题就是组合数学当中著名的**婚配问题**:某团体有若干未婚的姑娘和小伙子,所有的姑娘都已到结婚年龄。如果没有另外的条件限制,为了满足姑娘们的愿望,唯一的必备条件是,可供选择的小伙子至少要和姑娘一样多。但每个姑娘都不会草率处理终身大事,她们往往会排除一些小伙子作为她的可能的配偶,于是,实际上有一个她认为是可以接受的配偶的名单。问:

(1) 这个团体里的每个姑娘是否都可以与她自己认可的小 伙子结婚?

显然这并非永远可以,因为或许有三位姑娘,她们手头上的 名单都只列出两个小伙子,而且三张名单竟完全一样! 既然并非 永远可行,那么,问:

- (2) 在什么条件下可以满足每位姑娘的心愿? 当这种条件不具备时,又问:
 - (3) 最多有几位姑娘的愿望会得以满足?
 - (4) 如何匹配,才会使婚后这个团体的家庭最为美满?

提请读者注意,这里讲的不是笑话或游戏,这四个问题十分 典型,事实上,有很多实际问题,它的数学模型与上述婚配问题 的数学模型是一样的,为了解决诸如此类的问题,发展了一整套 数学理论和有效算法。这些,正是本章所要研究的内容。本章仍 研究无向单图。

定义 1 $M\subseteq E(G)$, $\forall e_i, e_j \in M$, e_i , e_i 不相邻,则称M

是图G中的一个匹配,M中的一条边之两个端点叫做在M之下相配,M中的每个端点称为被M许配,G中每个顶皆被M许配时,M称为完备匹配,G中已无匹配M',使得M' |>|M|,则称M为最大匹配。

图 7.1(a) 的粗实线表示一个最大匹配,(b) 中粗实线表示一个完备匹配(当然是最大匹配)。

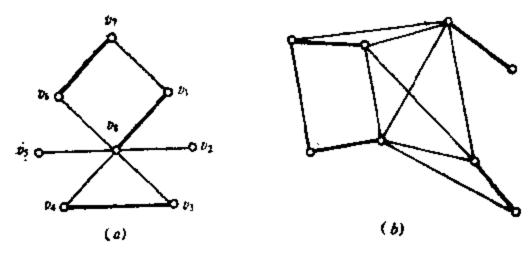


图 7.1

例 1 Bernoulli-Euler 错放信笺问题:

某人给六个人各写了一封信,准备了六个写有收信入地址的信封,问有多少种投放信笺的可能,使每份信笺与信封上收信人不相符?

解 设信笺为 x_i , 信封为 y_i , $i=1, 2, 3, 4, 5, 6. <math>x_i$ 与 y_i 是相符的,于是问题转化为求图 7.2 中的图 G有多少 不同 的完备匹配,我们把这个数目记成 $\varphi(6)$ 。

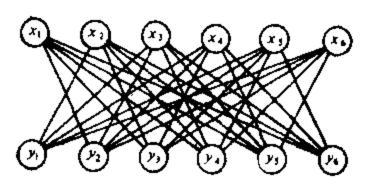


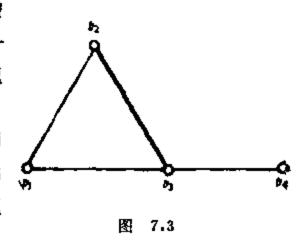
图 7.2

 x_1 与 y_2 相配时,完备匹配的个数等于从图G中删除顶 x_1 与 y_2 后所得的图 $G_{x_1y_2}$ 中完备匹配的个数,这个数记成 $\psi(5)$ 。在 $G_{x_1y_2}$ 中,若 x_2 与 y_1 相配,则 $\psi(5) = \varphi(4)$;若 x_2 不与 y_2 相配,则 $\psi(5) = \varphi(5)$ 。于是G中 x_1 与 y_2 相配时,可得 $\varphi(5)$ + $\varphi(4)$ 个完备 匹配;同理, x_1 与 y_1 (3 \leq i \leq 6) 相配时,亦有 $\varphi(5)$ + $\varphi(4)$ 个完备匹配,故 $\varphi(6) = 5[\varphi(5) + \varphi(4)]$;同理可得 $\varphi(5) = 4[\varphi(4) + \varphi(3)]$, $\varphi(4) = 3[\varphi(3) + \varphi(2)]$, $\varphi(3) = 2[\varphi(2) + \varphi(1)]$,而 $\varphi(2) = 1$, $\varphi(1) = 0$,故得 $\varphi(6) = 265$,即可能有 265 种投放错误。

一般地,有递推公式 (n 封信): $\varphi(n) = (n-1)[\varphi(n-1) + \varphi(n-2)], \varphi(2) = 1$.

定义 2 M是G上的匹配,G中有一轨,其边交替地在E-M和M中出现,则称此轨为G中M的交错轨。若M的交错轨的起源上顶管未被M许配,则称此轨为M的可增广轨。

图 7.3 中 $v_1v_2v_3v_4$ 是 可增广轨,其中 $M_1 = \{v_2v_3\}$ 是 一个 1 个 1 个 1 个 1 以取 新 的 2 配 $M_2 = \{v_1v_2, v_3v_4\}$,使 $\{M_2\}$ 一 M_1 一 这 正 是 增 广 的 含 义 ,即 可以 把 可增 广 轨 上 不 在 2 配 中 的 边 放 入 2 配 中 , 而 把 原 属 于 2 匹 配 的 边 从 2 配 中 去 掉 , 得 到 的 新 2 匹 配 的 2 以 数 增 大 1 。



7.2 匹配基本定理

我们把A与B两个集合的对称差记成 $A \ominus B$,定义 $A \ominus B$ = $(A \cup B) - (A \cap B)$,显然 $A \ominus B = B \ominus A$,故名**对称差**。符号 \ominus 也可写成 \ominus 。

下面是 Berge, Hall, König 和 Tutte 的四个著名定理。

定理 1 (Berge, 1957) M是G的最大匹配的充聚条件 是G中无M的可增广轨。

证 设M是G的最大匹配,但G有一个可增广轨,则可以把M的边数增加 1,与M是最大匹配矛盾,故这时G中无M的可增广轨。

下面证充分性。已知 G 内不含匹配 M 的可增广轨,要证M 是最大匹配。若M不是最大匹配,则存在 另一匹 配 M', M' M' M' M'

$$H = G[M \ominus M'],$$

则H中顶的次数非 1 则 2 ,因为H的顶至多与M 的一条 边,M' 的一条边相关联,又不会有零次顶。故H的连通 片,或 是M 与 M' 的边交错出现的一个偶圈,或是M与M' 的边交错出现的一条轨,又因M' |>|M|,故H中的边M' 中的 比M中 的 S,所以,必有H的某个连通片是轨,且此轨以M' 的边为起止 边,于是得到了M 的可增广轨,与G中无M 的可增广轨矛盾。证**毕**。

定义 3 $A \subseteq V(G)$, V(G) 中与A中顶相邻的顶所 成 之 集 合记成N(A), 叫做A的邻集。

定理 2 (Hall, 1935) G 是二分图,顶集划分成X与Y,G 中存在把X中顶皆许配的匹配之充 要 条 件 是,对一切 $S \subseteq X$, $|N(S)| \ge |S|$ 。

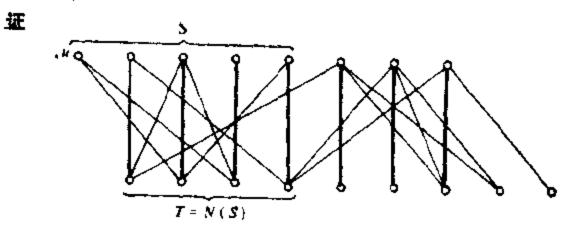


图 7.4

设G中含把X中每顶皆许配的匹配M,且令S是X的子集,则S中各顶亦被许配,故 $|N(S)| \ge |S|$ 。

反之,若一切 $S \subseteq X$,有 $[N(S)] \geqslant |S|$,但G中没有把 X中顶皆许配的匹配。设 M^* 是G的一个最大匹配, M^* 也不能把 X中的顶都许配,令 u是一个X中未被 M^* 许配的 顶(图 7.4),又令 Z是被 M^* 的交错轨与 u 相连通的顶点集合,因 M^* 是最大匹配,由 Berge 定理, u是 Z中仅有的未被 M^* 许配的顶。取

$$S = Z \cap X$$
, $T = Z \cap Y$.

显然, $S - \{u\}$ 中的顶在 M^* 中与T 中的顶相配, 于是 |T| = |S| - 1, N(S) = T.

故得

$$|S| = |N(S)| + 1$$

与|N(S)|≥|S|矛盾。证单。

推论 1 G 是 k 次正则 2 分图, k > 0,则 G 有完备匹配。

证 设 G 之 顶的 二 分 图 划 分 为 X , Y , 则 $k[X] = \varepsilon = k[Y]$, k>0 , 故 |X| = |Y| 。 令 S 是 X 中任 一 非 空 子 集 , E , 与 E 。 分 别 表 示 与 S 及 N(S) 中 顶 相 关 联 的 边 集 , 由 N(S) 之 定 义 , E , \subseteq E , 故

$$k|N(S)| = |E_z| \gg |E_1| = k|S|$$
,

于是 $|N(S)| \ge |S|$,由 Hall 定理,G中有把X中顶皆许配的匹配M,又因|X| = |Y|,故M为完备匹配,证单。

定义 4 $K \subset V(G)$,且G的每一边至少有一个端点属于K,则称K是图G的一个覆盘。若K是一个覆盘, $\forall v \in K$, $K - \{v\}$ 不是覆盘,则称K为极小覆盘。若K为覆盘,但已无覆盘K',使得|K'| < |K|,则称K为最小覆盘。用 $\alpha(G)$ 表示G中最小覆盘之顶数, $\alpha(G)$ 称为G的覆盖数。

→例如图 7.5 中的黑色顶是一个极小覆盖,同时 也 是一个 最小覆盖, $\alpha(G) = 4$ 。这里覆盖一词的含义是顶覆盖全体 边,即 G = K 为无边图。任意一个匹配 M, 都满足

$a(G) \geqslant |M|$.

定理 3 (König, 1931) 在二分图中,若 M^* 是最大 匹 配, \bar{K} 是最 小 覆 盖 , 则 $|M^*| = |\bar{K}|$

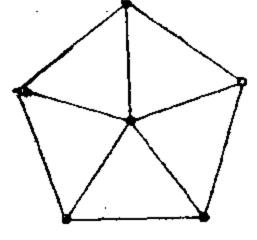


图 7.5

 $=\alpha(G)$.

证 设 M^* 是二分图G中的最大匹配,V(G) 的二分图划分为X与Y,若 M^* 把X中一切顶皆许配,则 $|M^*|$ =|X|,这时,显然X是一个最小覆

盖、故 $|M^*| = \alpha(G)$.

若存在未被 M^* 许配的顶,令 U 是X中未被 M^* 许配的顶之集 合(图

7.6), Z 是由 M^* 的交错轨与U中顶相连通的顶之 集 合,且 令 $S = Z \cap X$, $T = Z \cap Y$,则N(S) = T。又 令 $K = (X - S) \cup T$,则 G 的每一边至少 有一端 在 K中,不然,将会有一边,一端在 S中,另一端在中 Y - T 中,这与N(S) = T 矛盾,故 K 是 G 的

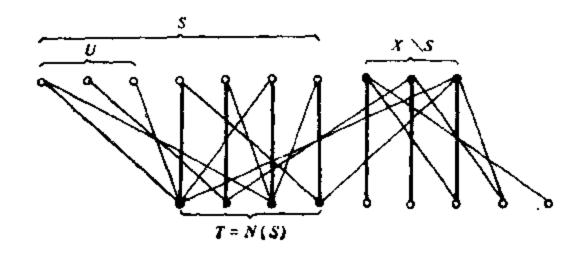


图 7.6

一个覆盖,且显然有 $|M^*| = |\overline{K}|$ 。而任一个匹配M,都有 $|M| \le a(G)$,故 $|M^*| \le a(G)$,于是 $|\overline{K}| \le a(G)$,故 \overline{K} 是最小覆盖。证 **华**。

刻画完备匹配的一个非常深刻的成果归功于 Tutte, 用它来

否定一个图存在完备匹配很方便。

定义 5 图的顶数为奇数的连通片叫做奇片,顶数为偶数的连通片叫数偶片,o(G) 表示G中奇片的个数。

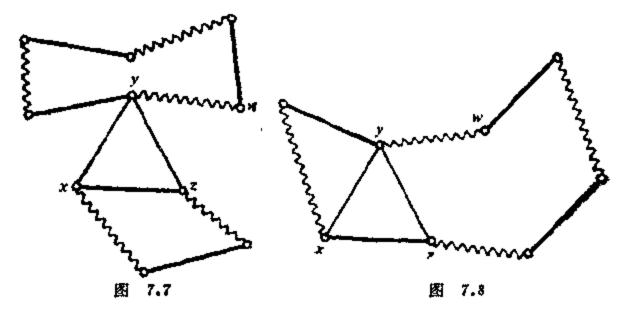
定理 4 (Tutte, 1947) 图 G 有完备匹配的充要条件 是对一切 $S \subset V$, $o(G - S) \leq |S|$.

证 设单图G有完备匹配M. G_1 , G_2 , …, G. 是G-S 的 奇片, $n \ge 0$. 显然, 当 $S = \emptyset$, o(G - S) = 0, 即 n = 0, 所以不妨设 $S \ne \emptyset$. 因 G_i , i = 1, 2, …, n 是奇片, G_i 中的某个 顶 u_i 必然被M许配于S的一个顶 v_i , 因而 $\{v_1, v_2, ..., v_n\} \subseteq S$, $o(G - S) = n = |\{v_1, v_2, ..., v_n\}| \le |S|$.

特别地, 取 $S = \emptyset$, $o(G^*) = 0$, 故 $v(G^*)$ 是偶數.

用U表示 G^* 中v-1 次顶之集合,由 G^* 之定 义, $U \neq \emptyset$ 。 若 U=V, G^* 中有完备匹配,于是U是 $V(G^*)$ 的真子集。下面证明 G^*-U 是不相交的完全图之并。不然, G^*-U 的某个连 通 片不是完全图,则在该连通片之中,存在顶 x , y , z , 使得xy , $yz \in E(G^*)$, 但 $xz \in E(G^*)$ 。又 $y \in U$,存在 $w \in V(G^*-U)$,使 得 $yw \in E(G^*)$ 。因为 G^* 是没有完备匹配的 |V(G)| 个顶的 边 数 最 多的图,对一切 $e \in E(G^*)$, G^*+e 中有完备匹配。令 $M_1 = M_2$ 分别是 $G^*+xz = G^*+yw$ 的完备匹配,H 为 $M_1 \hookrightarrow M_2$ 在 $G^*+xz = Y$, Y 中的导出子图,则Y 的每顶皆 Y 次,Y 是不相交偶图之 并,因为它们上面的边是 Y ,Y 的边交替出现的。图 Y 7 中 黑 实线是 Y ,Y 的边。

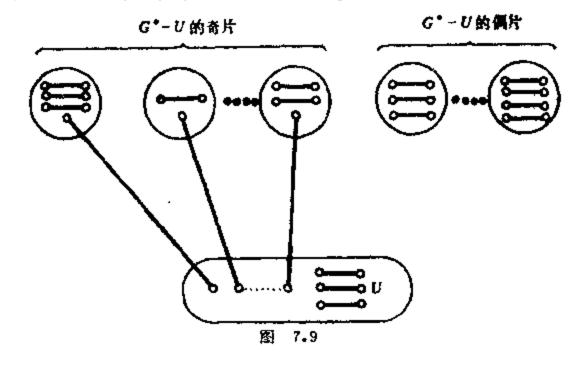
情形 1×2 和 yw 在 H 的 不同连通片中。若 yw 在 H 的 屬 C 上,那 C M,在 C 上的 边与 M,不 在 C 上的 边构成 G * 的一个 完备 匹配,与 G * 之定义矛盾,见图 7.7。



情形 2 xz与 yw 在H的同一个圈 C上,见图 7.8. 这 时 在 C上 yw…z 部分M,的边与yz 及M,不在yw…z 部分的边构 成 G* 的一个完备匹配,矛盾。

综上所述,知 G^*-U 是不相交的完全图之并。

由 $o(G^*-U) \leq |U|$, G^*-U 中的奇片至少|U|个。但是 G^* 中有了完备匹配(图7.9)。把 G^*-U 的每奇片中的一个顶许配给U的一个顶,U和 G^*-U 的连通片中的其余的顶(由于 每个 G^*-U 的连通片皆完全图)可以许配给本连通片中或U中的另一顶,这与 G^* 中无完备匹配矛盾。证单。



推论 1 每个无桥的三次正则图有完备匹配。

证 令G是三次正则图,G中无桥,S是V(G)的真子集, G_1 , G_2 , …, G_n 是G-S的奇片, m_i 是 G_i 中有一个端点,另一端点在S的边之个数, $1 \le i \le n_a$ 因 $d(v) = 3(v \in V(G))$,则

$$\sum_{v \in V^{-(G_i)}} d(v) = 3v(G_i), \quad i = 1, 2, \dots, n$$

$$\sum_{v \in S} d(v) = 3[S],$$

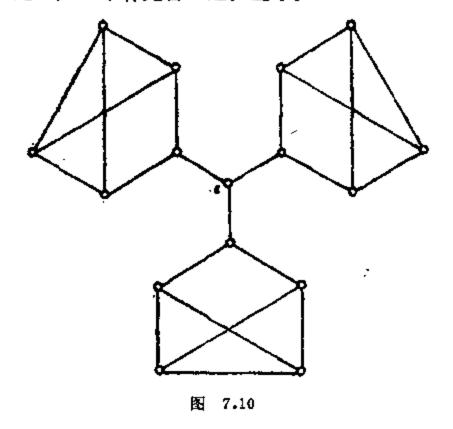
于是

$$m_{i} = \sum_{v \in V \setminus (G_{i})} d(v) - 2\varepsilon (G_{i})$$
$$= 3v (G_{i}) - 2\varepsilon (G_{i}),$$

可见 m_i 是奇数, 又无桥, 故 $m_i \neq 1$, $m_i \geq 3$, $1 \leq i \leq n$. 从而

$$o(G-S) = n \le \frac{1}{3} \sum_{i=1}^{n} m_i \le \frac{1}{3} \sum_{v \in S} d(v) = |S|,$$

由 Tutte 定理, G中有完备匹配。证单。



例如一切妖怪图都有完备匹配,而图 7.10 的图虽 然 是三次正则图,但有桥,不能用推论 1 来判它有完备匹配,事实上,由于o(G-v)=3,由 Tutte 定理,它没有完备匹配。

7.3 二分图中最大匹配与最佳匹配的算法

7.3.1 匈牙利算法

分工问题如下:某公司有工作人员 x_1, x_2, \dots, x_n ,他们去做工作 y_1, y_2, \dots, y_n ,每人适合做其中的一项或几项工作,问能否每人都分配一项合适的工作?

这个问题的数学模型是: G是二分图, 顶集划分为 $X \cup Y = V(G)$, $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, 当且 仅当 x_i 适合干工作 y_i 时, $x_iy_i \in E(G)$, 问 G 中是 否有完备 匹配?

Edmonds 于1965年提出如下的所谓匈牙利算法,解决了这个问题。

匈牙利算法:

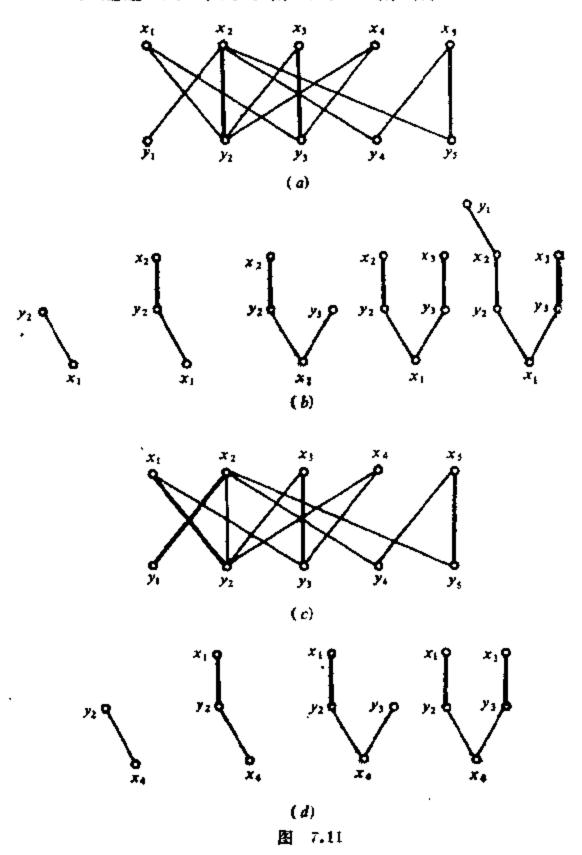
- (0) 从G中取一个初始匹配M。
- (1) 若M已把X中顶皆许配,止,M即为完备匹配;否则取X中未被M匹配的一顶u,记 $S = \{u\}$, $T = \emptyset$ 。
- (3) 若y是被M许配的,设 $yz \in M$, $S \leftarrow S \cup \{z\}$, $T \leftarrow T$ $\cup \{y\}$, 转 (2); 否则,取可增广轨P(u, y), 令 $M \leftarrow M \ominus E(P)$. 转 (1).

这个算法的要点是把初始匹配通过可增广轨**逐次**增广以至得到最大匹配。

例 2 求图 7.11 中的最大匹配。

(a) 取初始匹配 $M = \{x_2y_2, x_3y_3, x_1y_5\}$.

- (b) 以未被M许配的顶 x_1 为根,生长外向交错树。结果 得到可增广轨 $x_1y_1x_2y_1$ 。
 - (c) 通过 (b) 中的可增广轨把M增广成



$$M_1 = \{x_1 y_2, x_2 y_1, x_3 y_3, x_5 y_5\}.$$

(d) 以未被 M_1 许配的顶 x_* 为根,生长外向交错 树,结果未得到可增广轨,可见 M_1 是最大匹配,无完备匹配。

7.3.2 Kuhn-Munkres 算法

在分工问题中,工作人员可以做的各项工作,效益未必一致,我们需要制定一个分工方案,使公司的总效益最大,这就是所谓**最佳分配问题**。它们数学模型如下。

G是加权完全二分图,V(G) 的二分图划分为X,Y,X = { x_1 , …, x_n }, $Y = \{y_1, y_1, \dots, y_n\}$, $w(x_n y_n) ≥ 0$ 是工作人员 x_n 做 y_n 工作时的效益,求权最大的完备匹配,这种完备匹配。配称为最佳匹配。

若用穷举法,需要对n1个完备匹配进行比较,当n较大时,计算量过大,是不可能很快得到结果的.本节给出一种有效算法,为此,我们首先引入一个定义和一个定理,作为本节中心算法的基础.

定义 6 映射 $l: V(G) \rightarrow R$,满足、 $\forall x \in X$, $\forall y \in Y$, 成立 $l(x) + l(y) \ge v_2(xy)$,

則称l(v) 是二分题G的可行頂标;令

$$E_{I} = \{xy \mid xy \in E(G), I(x) + I(y) = w(xy)\},\$$

称以 E_i 为边集的G之生成子图为相等子图,记为 G_i 。

可行顶标是存在的, 例如

$$\begin{cases} l(x) = \max_{y \in Y} w(xy), & x \in X; \\ l(y) = 0, & y \in Y. \end{cases}$$

定题 5 G_i 的完备匹配即为G的量佳匹配。

证 设 M^* 是G,的一个完备匹配,因G,是G的生成子图,故 M^* 也是G的完备匹配。 M^* 中的边之端点集合含G的每个顶点恰一次,所以

$$W(M^*) = \sum_{e \in M^*} w(e) = \sum_{v \in V(\mathcal{C})} l(v).$$

另一方面,若M是G中任意一个完备匹配,则

$$W(M) = \sum_{\sigma \in M} w(e) \leq \sum_{v \in V(G)} l(v),$$

所以

$$W(M^*) \geqslant W(M)$$
,

即 M^* 是最佳匹配。证毕。

定理 5 告知,欲求二分图的最佳匹配,只需用匈牙利算法求取其相等子图的完备匹配,问题是,当 G,中无完备匹配 时怎么办? Kuhn和 Munkras给出修改顶标的一个算法,使新的相等子图的最大匹配逐渐扩大,最后出现相等子图的完备匹配。

Kuhn-Munkras 算法:

- (0)选定初始的可行顶标 l,确定 G_l ,在 G_l 中选取一个匹配 M_l
- (1) X中顶皆被M许配,止,M即为最佳匹配,否则,取 G_1 中未被M许配的顶u,令 $S=\{u\}$, $T=\emptyset$ 。

(2) 若
$$N_{\sigma_1}(S) \supset T$$
, 转 (3), 若 $N_{\sigma_1}(S) = T$, 取
$$\alpha_i = \min_{x \in S, y \in T} \{l(x) + l(y) - w(xy)\},$$

$$\overline{l}(v) = \begin{cases} l(v) - \alpha_i, & v \in S_3 \\ l(v) + \alpha_i, & v \in T_3 \\ l(v), & 其它. \end{cases}$$

 $1 \leftarrow \overline{l}, G_i \leftarrow G_{\overline{l}}$

(3) 选 $N_{e_1}(S) - T$ 中一顶y,若y已被M许配,且 $yz \in M$,则 $S \leftarrow S \cup \{z\}$, $T \leftarrow T \cup \{y\}$,转(2),否则,取G.中一个M的可增广轨P(u, y),令 $M \leftarrow M \ominus E(P)$,转(1)。

例 3 已知 $K_{s,s}$ 的权矩阵为

求最佳匹配,其中 $K_{s,s}$ 的顶划分为 $X = \{x_i\}, Y = \{y_i\}, i = 1$, 2, 3, 4, 5.

解 (1) 取可行顶标 l(v) 为 $l(y_i) = 0$, i = 1, 2, 3, 4, 5, $l(x_1) = \max\{3,5,5,4,1\} = 5, l(x_2) = \max\{2,2,0,2,2\} = 2.$ $l(x_1) = \max\{2, 4, 4, 1, 0\} = 4, l(x_1) = \max\{0, 1, 1, 0, 0\} = 1,$ $I(x_s) = \max\{1,2,1,3,3\} = 3$

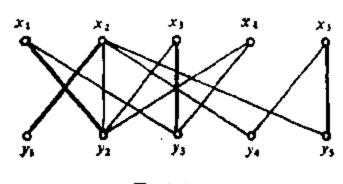


图 7.12

(2) G, 及其上之匹 配见图7.12.

这个图中 $o(G-x_1)=3$, 由 Tatte 定 理知 无 完备 匹 配. 需要修改顶标。

(3)
$$u=x_4$$
, 得 $S=\{x_4,x_5,x_1\},T=\{y_3,y_3\},$

$$N_{e_{i}}(S) = T$$
, 于是
$$\alpha_{i} = \min_{x \in S, y \in T} \{l(x) + l(y) - w(xy)\} = 1.$$

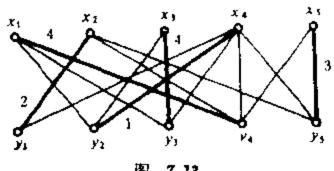


图 7.13

x1, x2, x3, x4, x6的顶标分别修改成4, 2, 3, 0, 3; 122

- y_1, y_2, y_3, y_4, y_6 的顶标分别修改成0, 1, 1, 0, 0.
- (4) 用修改后的顶标 \overline{l} 得 $G_{\overline{l}}$ 及其上面的一个完备匹配 如图 7.13. 图中租实线给出了一个最佳匹配,其最大 权 是 2+4+1+4+3=14.

我们看出。 $\alpha_1 > 0$,修改后的顶标仍是可行顶标, G_7 中仍含 G_1 中的匹配 M_1 , G_7 中至少会出现不属于M的一条边,所以会造成M的逐渐增广。

匹配问题不但饶有兴趣,而且应用极为广泛,理论上亦较完备,这一章主要应该掌握的内容是:

- (1) 匹配、许配、最大匹配、完备匹配和 $K_{*,*}$ 中的最佳 匹配之定义。
- (2) Berge, Hall, König 和 Tutte 的四个基本定理的 理解与应用。
- (3) 匈牙利算法和 Kuhn-Munkres 算法要会 执 行。关 键 是用未被许配的顶为根生长外向交错树的方法找到可增广轨,把 原匹配增广以及修改顶标而得最佳匹配。

习 题

- 1. 求 K_{**} 和 K_{**} ,中不同的完备匹配的个数。
- 2. 证明树至多有一个完备匹配。
- 3. 对于 k>1, 给出没有完备匹配的 k 次正则图的例子。
- 4. 两人在图 G上博奕:交替选取不相同的顶点 v_•, v₁, v₂, ···, 使得 i>0 时, v₁与 v₁₋₁相邻, 直到不能选到顶为止, 谁最后选得一顶谁赢。证明:第一个选顶人有必胜策略的充要条件是 G中无完备匹配,并叙述一个必胜策略。
- 5. G的一个 k次因子是指G的一个 k次正则生成子图。G的 k次因子分解是指把G表成无公共边的 k次因子之并,即 G= $\bigcup_{i=1}^n H_i$,其中 H_i , $1 \le i \le n$ 是G的 k次因子。证明

- (a) $K_{\bullet,\bullet}$ 与 $K_{\bullet,\bullet}$ 是可 1 次因子分解的。
- (b) Petersen 图是不可1次因子分解的。
- 6. K_{n+1} (n≥1) 可表成 n 个连通的 2 次因子之并。
- 7. 证明: 8×8的正方形删去对角上两个 1×1 的小正方形后 不能用 1×2 的长方形单层遮盖。
- 8. 证明,二分图有完备匹配的充要条件是 对 任 何 $S \subseteq V$, $\lfloor N(S) \rfloor \geq \lfloor S \rfloor$ 。这一命题对一般图是否成立。
 - 9. 对于 k>0, 证明:
 - (a) 每个 k 次正则 2 分图是可以 1 次因子分解的。
 - (b) 每个2k次正则图可以2次因子分解。
- 10. 城中每位姑娘都"结识" k个小伙子, (k≥1),每个小伙子都"结识" k个姑娘,则每个小伙子和每个姑娘都能与他们的意中人结婚。
- 11. 矩阵的一行或一列称为矩阵的一条线,证明,0-1矩阵 中含矩阵的所有1的线集合的最小阶数等于没有两个在同一线上 的1的最大个数。
- 12 $A = (a_{11})_{n \times n}$, $a_{11} \in \{0, 1\}$, $m \le n$, 且矩阵A的每一行都有k个1, 而每一列中1的个数不超过k个,则 $A = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$, 其中 P_1 也是 $m \times n$ 的 0-1 矩阵, 每行恰有1个1, 每列中1的个数不超过1个。
- 13. G 是顶集划分为X与Y的二分图,则G的最大匹配的边数等于 $|X| = \max_{S \subset X} \{|S| |N(S)|\}$.
 - 14。由 König 定理推导出 Hall 定理。
 - 15. 由 Tutte 理定推导出 Hall 定理。
- 16. 证明. G是 k-1 边连通 k次正则图,且 ν 是 偶 数,则 G有完备匹配。
- 17. 树T有完备匹配的充要条件是对任意 $v \in V(T)$, o(T v) = 1.
 - 18. 甲乙二人玩"捉乌龟"游戏,先将54张扑克牌藏起一张, 124

于是剩下的有一张没有对于,它叫做"乌龟". 再将 牌 分 给 两个人,每人把手中的对子都抛出来,你能否判 断"乌龟"在 谁 手中?为什么?

- 20. {ace, bc, dab, db, be}这组信息是否可以分别把每个字用它的一个字母来代替,加以简化?若能,给出简化结果.
- 21. A, B, C, D四种材料造a, b, c, d四种产品的成本如下面矩阵所示。

- 一种产品只用一种材料,问什么生产方案使成本最低?
- 22. 从 64 格棋盘上选 16 个格, 使每行每列含其中两个格, 求证可以把16个棋子 (8 个白子 8 个黑子) 放在所选的格子上, 使每行每列恰有一个白于一个黑于.

8 支配集与独立集

8.1 支配集与独立集的概念

定义 1 $D \subseteq V(G)$ 称为图G的一个支配 集, 若任 何 顶 点 $u \in V(G)$,要么 $u \in D$,要么 u = D 内一顶相邻,一个支配集称为极小支配集, 若它的任何真子集皆非支配集。 D。是一个支配 集,但已无支配集 D1,使得 $|D_1| < |D_2|$,则称 D3。是最小 支配 集,这时记 $Y(G) = |D_3|$,Y(G) 叫做 G 的支配数。

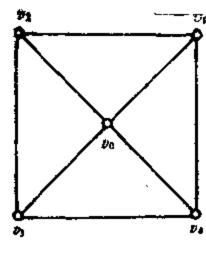


图 8.1

由上述定义可知,凡最小支配集一定是一个极小支配集,任何一个支配集以一个极小支配集为其子集,极小支配集可能有两个以上,而且其顶数也可以不一致。例如,只有一个非叶的顶之树叫做星,星中的非一次顶叫做星心。星心是最小支配集,Y(星)=1,但还有一个极小支配集由全部叶构成。一个支配集可能含两个以上的极小支配集,例如图8.1中,{v。,v1,v₃}是支配集,它有两个子集{v₆}

与 $\{v_1,v_s\}$ 都是极小支配集,且Y(G)=1。

定理 1 G 中无零次项,则存在一个支配象D,使得D=V(G) -D 也是一个支配象。

证 不妨设G连通、于是G有生成树T,任取 定 v_{\bullet} $\in V(G)$,令

$$D = \{v | v \in V(G), d_T(v_0, v) = 0 \pmod{2}\},$$

$$\overline{D} = \{v | v \in V(G), d_T(v_0, v) = 1 \pmod{2}\}.$$

则 $\overline{D} = V(G) - D$, 且 D 与 \overline{D} 都是支配集. 证本。

定理 2 G 中元 零 次项, D_1 为极小支配集,则 $\overline{D}_2 = V(G)$ $-D_1$ 也是一个支配集。

证 若有一页 $v_0 \in D_1$,而 D_1 中没有使 $v_0 u \in E(G)$ 的 顶u,则 $D_1 = v_0$ 仍为一支配集,与 D_1 为极小支配集矛盾,故 D_1 也是支配集。证事。

由定理 2 知,对无孤立顶的图 G中的一个极小支配 集 D_1 ,至少存在另一个极小支配集 D_2 ,使得 $D_1 \cap D_2 = \emptyset$ 。

定义 2 $I \subseteq V(G)$, I 中任二顶不邻,则称 I 是图 G 的一个独立集,任取 $u \in V(G) - I$, $I \cup \{u\}$ 不是独立集,则称 I 是 极 大 独

立集,G 中已无独立集 I_1 ,使得 $|I_1|>|I|$,则称I 是G 的最大独立集,这时,记 $\beta(G)=|I|$, $\beta(G)$ 叫做G 的独立做。

例如图 8.2 中, 两个 黑 色 顶 构成一个极大独立集, 也是 最 大 独 立集, $\beta(G) = 2$.

定理 3 一个独立集 是 极 大 独 立集, 当显仅当它是支配集。

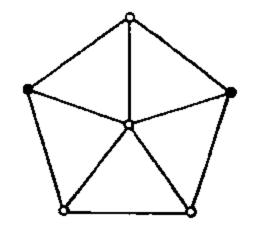


图 8.2

证 若 I 是独立集,且是极大独立集,则不 存 在 $v \in V(G)$ -I,使得对任何 $w \in I$, $uv \in E(G)$,从而 I 是支配集。

反之,若 I 是独立集,又是支配集,则任 取 V(G) - I 中一个顶 $\sigma_* I \cup \{v\}$ 不是独立集,放 I 是极大独立集。**证毕**。

例如星心是独立集,又是极大独立集,则星心是支配集;同 理星的全部叶构成支配集,又是独立集,则它是极大独立集。与 然由星的全部叶构成的也是最大独立集。

定理 4 I 是独立集,当且仅当 V-I 是覆盖集。

证 I 是独立集,等价于没有两端都在I 中的边,而这人等价于G 的每一边至少有一端在V(G) – I 中,即等价于V(G) – I 是

覆盖集,证毕,

推论 1 K是极小覆盖集,当且仅当V - K 是极大独立集。 推论 2 $\alpha(G) + \beta(G) = v$ 。

证 设 I 是最大独立集, $|I| = \beta(G)$,设 K 是最小覆 盖 集, $|K| = \alpha(G)$ 、由定理 4,V - I 是覆盖集,得

$$v - \beta(G) = |V - I| \geqslant \alpha(G). \tag{1}$$

mV-K是独立集,故得

$$v - a(G) = |V - K| \leq \beta(G)$$
 (2)

由(1)与(2)得

$$\alpha(G) + \beta(G) \leqslant \nu, \tag{3}$$

$$a(G) + \beta(G) \geqslant v, \tag{4}$$

由(3)与(4)得

$$\alpha(G) + \beta(G) = \nu$$

证毕.

定理 4 极大独立集必为极小支配集。

证 不妨设 $\epsilon(G) \neq 0$ 。设 I 为极大独立集,故对任何 $u \in V = I$, u = I 中一顶相邻,所以 I 是支配集。又任取 $v \in I$, $v = I = \{v\}$ 中的顶不相邻,可见 I 是极小支配集。证**毕**。

定理 4 之逆不真,例如 4 阶圈上的两个相邻的顶是极小支配集,但不是极大独立集,连独立集也不是。

对于连通图,覆盖集必为支配集;但反过来未必成立,例如4条辐的轮心构成支配集,但它不是覆盖集。

8.2 支配数、覆盖数和独立数的计算

8.2.1 逻辑运算及其性质

设 X,Y,Z 是三条指令, 规定:

"要么执行X,要么执行Y"记成X+Y。

"X与Y同时执行"记成XY。

128

上述逻辑运算有以下运算定律:

(1) 交換律

$$X + Y = Y + X$$
;
 $XY = YX$.

(2) 结合律

$$(X + Y) + Z = X + (Y + Z);$$

 $(XY) Z = X (YZ).$

(3) 分配律

$$X(Y+Z) = XY + XZ;$$

$$(Y+Z)X = XY + XZ.$$

(4) 吸收律

$$X + X = X$$
,
 $XX = X$,
 $X + XY = X$.

上述定律可直接由定义验明,这些定律,尤其是吸收律,在下面的计算中用处极大。

8.2.2 求出所有极小支配集的公式

公式

$$\phi\left(v_{1},v_{2},\cdots,v_{\nu}\right)=\prod_{i=1}^{\nu}\left(v_{i}+\sum_{u\in N\left(v_{i}\right)}u\right).$$

公式中的运算是逻辑运算,展开成积之和,每一项给出一个极小支配集,所有项 给出了一切 极 小支配集,其中最小者为最小支配集。

例 1 求图 8.3 中的一切极小支配集及支配数。

解

 $-\psi \left(v_{1},v_{2},v_{3},v_{4},v_{5},v_{6}\right)$

$$= (v_1 + v_2 + v_3 + v_4) (v_2 + v_1 + v_4) (v_3 + v_1 + v_4) (v_4 + v_1 + v_2 + v_3 + v_5 + v_6) (v_5 + v_4 + v_6) (v_4 + v_4 + v_5)$$

$$= (1+2+3+4)(2+1+4)(3+1+4)(4+1+2+3+5+6)$$

$$(5+4+6)(6+5+4)$$

= $15+16+4+235+236$,

故得所有极小支配集如下:

$$\{v_1, v_5\}, \ \{v_1, v_6\}, \ \{4\}, \ \{v_2, v_3, v_5\}, \{v_2, v_3, v_6\},$$

$$Y(G) = 1,$$

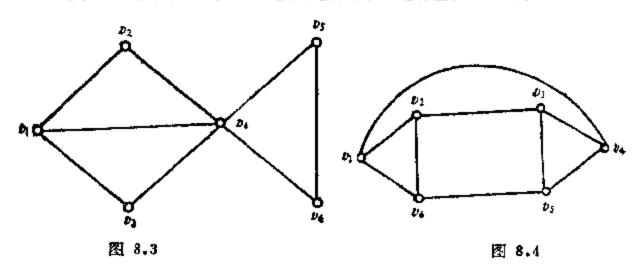
8.2.3 求出所有极小覆盖集的公式

公式

$$\varphi(v_1,v_2,\cdots,v_\nu)=\prod_{i=1}^\nu\Big(v_i+\prod_{u\in N(v_i)}u\Big),$$

展开成积之和形式,每一项表出一个极小覆盖,得到了所有极小 覆盖,其中最小者为最小覆盖。

例 2 求图8.4中一切极小覆盖集及覆盖数 $\alpha(G)$.



 $\boldsymbol{\mathcal{R}} \quad \varphi(v_1, v_2, \cdots v_6)$

$$= (1 + 246) (2 + 136) (3 + 245) (4 + 135) (5 + 346) (6 + 125)$$

=2456+1356+1346+2346+1245+1235

即得一切极小覆盖集如下:

$$\{v_2, v_4, v_4, v_6\}, \ \{v_1, v_8, v_5, v_6\}, \ \{v_1, v_4, v_6\},$$

$$\{v_2, v_3, v_4, v_6\}, \ \{v_1, v_2, v_4, v_6\}, \ \{v_1, v_2, v_3, v_8\},$$

$$\alpha(G) = 4.$$

例 3 求图 8. 及大独立集及独立数 $\beta(G)$.

解 由极大独立集与极小覆盖集的互补性,得一切极大独立集如下:

$$V - \{v_1, v_4, v_5, v_6\} = \{v_1, v_5\}, V - \{v_1, v_3, v_5, v_6\} = \{v_2, v_4\}, V - \{v_1, v_3, v_4, v_6\} = \{v_2, v_5\}, V - \{v_2, v_3, v_4, v_6\} = \{v_1, v_5\}, V - \{v_1, v_2, v_4, v_6\} = \{v_3, v_6\}, V - \{v_1, v_2, v_4, v_6\} = \{v_4, v_6\}, S(G) = 2.$$

8.3 支配集与独立集的应用

8.3.1 中心台站的选址

要在 v₁,v₂,····,v_n,这 **个城镇建立一个通讯系统,为此,从这几个城镇中选定几座城镇,在那里建立中心台站,要求它们与其它各城镇相邻,同时,为减少造价,要使中心台站数目最少,有时还会提其它要求,例如在造价最低的条件下,需要造两套(或更多套)通讯中心,以备一套出故障时,启用另一套。

这种问题的数学模型是,以城镇为顶,仅当两城之间有直通通讯线路时,相应的两顶连一边形成一个图,此图的最小支配集即为所求。若建两套,则从一切极小支配集 $D_{\cdot,\cdot},D_{\cdot,\cdot\cdot\cdot},D_{\cdot}$ 中选取 $D_{\cdot,\cdot}$ 与 $D_{\cdot,\cdot}$,使得

$$D_{\bullet} \cap D_{\bullet} = \emptyset$$

 $|D_{\bullet} \cup D_{\bullet}| = \min\{|D_{i}| + |D_{i}| | 1 \le i, j \le d, D_{\bullet} \cap D_{j} = \emptyset$. 例如在图 8.3 中所示的六个城镇之中建中心台站,由例 1 知,若建一套,只需建立在 v_{\bullet} 城,若建两套,则 v_{\bullet} 建 一 套, v_{1}, v_{\bullet} 或 v_{1}, v_{\bullet} 建第二套。

有些实际问题可以化成上述这种数学模型来处理。

8.3.2 信息论中的独立集问题

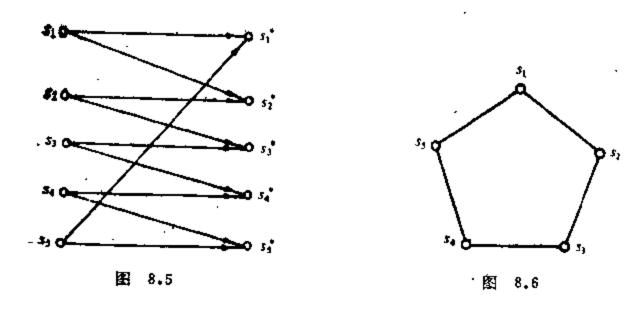
独立集对信息论有十分重要的应用。例如信息传送的基本信

号集合为S,

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n\}$$

可以把信号 s. 设想成汉字或拉丁字母.统计规律表明哪些信号与哪些信号易于发生错乱是已知的。例如,输入s.,i=1,2,...,5,输出应该是 s.,i=1,2,...,5,但由于干扰发生了错乱,s. 可能和 s. 错乱,s. 还可能和 s. 错乱等等,例如已知错乱可能性如图 s.5 所示。

为丁确切地从输出信号得知输入信号,我们不能选用s₁,s₁, …,s₂, 中的每一信号,只能从中选一部分用于输出。这就导致求图 8.6 中的最大独立集,之所以用最大独立集,目的是使可用于输出的信号最多。例如可以选 s₁ 与 s₂ 做为输出信号,或选 s₁



与 s. 或 s. 与 s. 或 s. 与 s. 或 s. 与 s. 做输出信号,它们都 构成最大独立集。

如果用两信号组成一个词向外传输信息,也有一个如何排除于扰的问题,为此,我们考虑一种图的积的概念。

定义 3 两个用 G1 与 G2,

$$\begin{split} V(G_1) &= \{v_1^{(1)}, v_1^{(2)}, \cdots, v_{v_1}^{(1)}\}, \\ V(G_2) &= \{v_2^{(1)}, v_2^{(2)}, \cdots, v_{v_2}^{(2)}\}, \end{split}$$

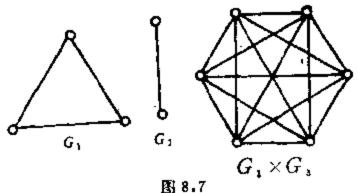
枸作图 G, 使得

 $V(G) = \{ (v_i^{(1)}, v_i^{(2)}) \mid v_i^{(1)} \in V(G_1), v_i^{(2)} \in V(G_2) \},$ G中的顶 $(v_i^{(1)}, v_i^{(2)})$ 之邻集为

$$\begin{split} N(v_{i}^{(1)},v_{i}^{(2)})) &= \big\{ (v_{k}^{(1)},v_{i}^{(2)}) \, \big| \, v_{k}^{(1)} \in N(v_{i}^{(1)}) \big\} \\ &= \bigcup \big\{ (v_{i}^{(1)},v_{i}^{(2)}) \, \big| \, v_{i}^{(2)} \in N(v_{i}^{(2)}) \big\} \\ &= \bigcup \big\{ v_{k}^{(1)},v_{i}^{(2)} \big\} \, \big| \, v_{k}^{(1)} \in N(v_{i}^{(1)}), v_{i}^{(2)} \in N(v_{i}^{(2)}) \big\}, \end{split}$$

则称G为G。与G。之积,记成 $G = G_1 \times G_2 = G_2 \times G_2$ 。

例如 G_1 是 K_3 , G_2 是 K_2 , 则 $G_1 \times G_2$ 是 K_3 , **范围 8.7**



在上面讨论过的例子中, 若用{s,,s,,...,s,}中的两个信号组 成词向外输出,最多能用哪几个词才不致于发生错乱呢?这只需 考虑圈 $C = s_1 s_2 s_3 s_4 s_4 s_1$ 的平方 $C \times C = C^2$ 中的最大独立集中的 各顶对应的词。相似地可用 $G^* = G \times G \times \cdots \times G$ 中的最大独立集

来确定由 n 个信号组成的词进行信息传送而不致发生错乱。

8.4 Ramsey数r(k,l)

定义 4 单图G的团是顶集的子集S, 使 得 G[S] 是完 全 图。对任意给定的自然数 k 与 I ,若存在最小自然数 r(k,l) ,使 得每个 r(k,l)个顶的图包含 k 个顶的团或 l 个顶的独立集, 则称 r(k,1)为 Ramsey 数。

例如
$$r(1,l) = r(k,1) = 1$$
,
 $r(2,l) = l, r(k,2) = k$.

Ramsey 于 1930 年证明,对任意给定 的 自 然 数 k 与 l, Ramsey 数 r(k,l)是存在唯一的,但 Ramsey 数的确定则非常之难,以致于连 r(4,5) 的值至今尚未得出!

定理 5 k, l 为自然数, $k \ge 2$, $l \ge 2$, 则 $r(k, l) \le r(k, l-1) + r(k-1, l)$,

若 r(k, l-1)与r(k-1, l) 管偶数,则上面不等式是严格不等式。

证 令G是r(k,l-1)+r(k-1,l)个顶的图, $v\in V(G)$,我们分两种情形讨论。

- (1) v 与至少 r(k, l-1) 个顶的集合 S 不相邻、
- (2) v 与至少 r(k-1,l) 个顶的集合 T 相邻.

由于与v相邻的顶点数目加上与v不相邻的顶点数目是r(k,l-1)+r(k-1,l)-1,所以要么(1)要么(2)必然成立(v与s不相邻指v与s中每个顶都不是邻顶,v与s和邻,指v与s中每个顶皆相邻)。

在情形(1), G[S]中有 k 顶团或 l-1 顶独立集, 故 $G[S \cup \{v\}]$ 中有 k 顶团或 l 顶独立集, 相似地, 在情形(2), $G[T \cup \{v\}]$ 中有 k 顶团或 l 顶独立集。由于(1)与(2)必出现其中的一种情形,故 G中含 k 顶团或 l-1 顶独立集,所以成立

$$r(k,l) \leq r(k-1,l) + r(k,l-1)$$
.

设r(k-1,l)与r(k,l-1)皆偶数,且G是 顶数 是r(k-1,l)+r(k,l-1)-1的图,因而G的顶数是奇数,必有一顶 v 是偶次的,特别地,v 不与r(k-1,l)-1个顶相邻,故(1)或(2)成立,于是G含 k 顶团或 l 顶独立集,故

$$r(k,l) \leq r(k,l-1) + r(k-1,l) - 1$$
,

即得严格不等式

$$r(k,l) < r(k,l-1) + r(k-1,l)$$
.

证毕.

定义 5 r(k,l) - 1 个项的既无 k 项团又无 l 项独立集的图 叫做(k,l) - Ramsey 图。

由r(k,l)的定义,对于 $k \ge 2$, $l \ge 2$, (k,l)-Ramsey 图 是存在的。通过一些 Ramsey 图可以确定相应的 Ramsey 数。

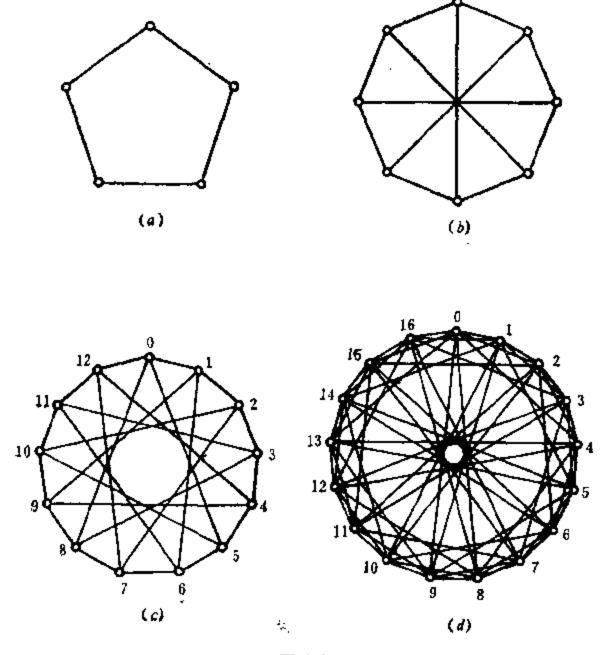


图 8.8

图 8.8(a)是 (3,3)-Ramsey 图,它既无 3 顶团,亦无 3 顶独立集; (6)是(3,4)-Ramsey 图,它既无 3 顶团,亦无 4 顶独立集; (c)是 (3,5)-Ramsey 图,它既无 3 顶团,亦无 5 顶独立集; (d)是(4,4)-Ramsey 图,它既无 4 顶团,亦无 4 顶独立集;

下面利用上述四个 Ramsey 图及定理 5 确 定 几 个 较 小 的

Ramsey 数。

(1) 由图8.8(a)知

$$r(3,3) \ge 6$$
;

又由定理5,

$$r(3,3) \le r(3,2) + r(2,3) = 6$$
.

故得

$$r(3,3) = 6$$

(2) 由图8.8(b)知

$$r(3,4) \ge 9$$
;

又由定理5,

$$r(3,4) \le r(2,4) + r(3,3) - 1 = 4 + 6 - 1 = 9$$

故得

$$7 r(3,4) = 9$$

(3) 由图 8.8(c)知

$$r(3.5) \ge 14$$
;

又由定理5,

$$r(3,5) \le r(2,5) + r(3,4) = 5 + 9 = 14$$

故得

$$r(3,5) = 14$$
.

(4) 由图 8.8 (d)知

$$r(4,4) \ge 18;$$

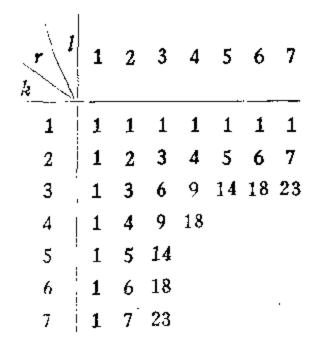
又由定理5,

$$r(4,4) \le r(3,4) + r(4,3) = 9 + 9 = 18,$$

故得

$$r(4,4) = 18$$
.

显然,r(k,l)=r(l,k),至今已知的 Ramsey 数共计 34个,其中除去 r(k,l)=r(1,l)=1,r(k,2)=k,r(2,l)=l这些平凡的 Ramsey 数而外,事实上我们知道的 Ramsey 数 r(k,l) 只有6个,r(3,3),r(3,1),r(3,5),r(3,6),r(3,7),r(4,4):



上面几个 Ramsey 图都是高度对称的很端正很漂亮的图,如果我们能设计出(4,5)-Ramsey 图,r(4,5)的值也就确定出来了。

下面给出r(k,l) 的界。

定理 6
$$r(k,l) \leq {k+l-2 \choose k-1}$$
.

证 对 k+l 用数学归纳法,由于 r(1,l)=r(k,l)=1, r(k,l)=k, r(2,l)=l,对于 $k+l \le 5$,定理成立。

假设对于一切满足 $5 \le k+1 < m+n$ 的正整数 1,k,定理已成立,m,n 是自然数。由定理 5 及归纳法假设,得

$$r(m,n) \leq r(m,n-1) + r(m-1,n)$$

$$\leq {m+n-3 \choose m-1} + {m+n-3 \choose m-2}$$

$$= {m+n-2 \choose m-1}.$$

证毕.

定題 7 (Erdős,1947) $r(k,k) \ge 2^{\frac{1}{2}} (k > 1)$. 证 因 r(2,2) = 2, 故对 k = 2, 定理成立,下面考虑 $k \ge 3$. 令 \mathcal{G}_{\bullet} 表示以 $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$ 为顶集的图之集合, $\mathcal{G}_{\bullet}^{\mathsf{S}}$ 表示 \mathcal{G}_{\bullet} 中有 h 顶团的那些图组成的集合。显然

$$[\mathscr{G}_n] = 2^{\binom{n}{2}}.\tag{1}$$

这是因为($^{\circ}$)条边组成的边集之每一子集合确定一个 $^{\circ}$ 。中的图,而有($^{\circ}$)个元素的集之子集个数为 $^{\circ}$ 。相似地, $^{\circ}$ 。中有某个指定的 $^{\circ}$ 加团的图的数目为 $^{\circ}$ 卫因为存在($^{\circ}$)个不同的 $^{\circ}$ 和以为, $^{\circ}$ 和以为,人, $^{\circ}$ 和以为, $^{\circ}$ 和以为, $^{\circ}$ 和以为,人, $^{\circ}$ 和以为, $^{\circ}$ 和以为,人, $^{\circ}$ 和以为,人, $^{\circ}$

$$|\mathscr{G}_{k}^{k}| \leq {n \choose k} 2^{{n \choose 2} \cdot {n \choose 2}}. \tag{2}$$

由(1)与(2),

$$\frac{\left|\mathscr{G}_{n}^{k}\right|}{\left|\mathscr{G}_{n}\right|} \leqslant {n \choose k} 2^{-{k \choose 2}} \leqslant \frac{n! 2^{-{k \choose 2}}}{k!}. \tag{3}$$

设 n<2⁴, 由(3)得

$$\frac{|\mathscr{G}_{k}^{k}|}{|\mathscr{G}_{\bullet}|} < \frac{2^{\frac{k^{2}}{2}}2^{-\binom{k}{2}}}{k!} = \frac{2^{-\frac{k}{2}}}{k!} < \frac{1}{2} \qquad (k \ge 3).$$

$$r(k,k) \geqslant 2^{\frac{k}{2}}$$
.

证毕.

推论 3 $m = \min\{k, l\}$,则 $r(k, l) \ge 2^{\frac{m}{2}}$.

当 k=4 时, $r(4,4) \ge 2^{\frac{1}{2}} = 4$,其实 r(4,4) = 18,可见 $Erd\ddot{o}s$ 给的下界与真实值之间的误差可能很大。

本章介绍的支配集与独立集问题,在图论中是非常之**唐难**而 又引人入独的问题之一。尤其涉及到这些问题的定量计算,大部 很难得以进展,但它又有强烈的实用背景,所以成了图论研究的 热点之一。需要着重理解的内容是:

- (1)极小支配集,最小支配集,极小覆盖集,最小覆盖集,极大独立集,最大独立集的定义及其彼此之间的关系。尤其是覆盖与独立集之间的互补关系。
 - (2) Ramsey 数与 Ramsey 图的概念。
- (3) 求支配数、覆盖数与独立数的逻辑公式对小图可以用,但对较大的图,计算量会陡增;目前尚无解此问题的有效算法。
- (4) Ramsey 数的确定是数学当中的老大难问题之一,目前首当其冲的是确定 r(4,5).

习 题

- 1. 求 Petersen 图的所有 极小支配集及支配数。
- 2. 求 Petersen 图的所有极小覆盖集及覆盖数。
- 3. 求 Petersen 图的所有极大独立集及独立数。
- 4. G为二分图的充要条件是对G的任意子图 H, 独 立 教 $\beta(H) \geqslant \frac{1}{2} \nu(H)$ 。
- 5. 一个图 G 称为是 β -临界的,若 \forall e \in E(G), β $(G-e) > \beta$ G),证明 β -临界图无割顶。
 - 6. r(k, l) = r(l, k).
 - 7. 有三个人相识或 4 个人不相识的人群最少几人?
 - 8. 求r (二十面体).
 - 9. 求α(k维立方体).
- 10. $\forall k \in N$ 存在一个图G,G 上的一个支配集中含有 k 个极小支配集,试加以证明。
 - 11. 证明或反驳:每个覆盖集中必含最小覆盖集。
 - 12. 国际象棋中,以64个方格为顶的"马图"。"象图"。

"车图", "皇后图"的独立数、支配数和覆盖数各是多少?

13. 证明: G是顶点不交的完全图的并当且仅当其独立数

$$\beta(G) = \sum_{v \in V(G)} \frac{1}{d(v) + 1}.$$

- 14. 求顶点不交的局构完全图之并所成之图 G的覆盖数。
- 15. 证明: 若 $\forall u, v \in V(G)$, 有 $d(u) + d(v) \ge v$, 则 $\beta(G) \le \kappa(G)$.

9着色理论

9.1 边 色 数

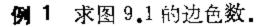
本章只讨论无环图。

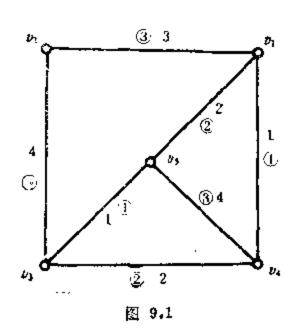
定义 1 图G的一个 k 边 着 色 是 指 对E(G) 的一个 划 分

$$C = (E_1, E_2, \dots, E_k), E(G) = \bigcup_{i=1}^k E_i, E_i \cap E_i = \emptyset, i \neq j, E_i$$

 $(1 \le i \le k)$ 中的边皆染上i 色。若 $E_i(1 \le i \le k)$ 中的边两两不相邻,则称C是一个正常k 边溢色。G 可以正常k 边溢色,而不能正常k-1 边溢色时,则称k 为G 的边色数,记成 $\chi'(G) = k$ 。与顶v 关联的边中有i 色边时,称i 色在顶v 处出现,在顶v 处出现的颜色数目记成c(v)。

例如任何图皆可正常 ε 边着色. G 可以 正常 k 边着色,当 $k < l \le \varepsilon$ 时,亦可正常 l 边着色。
显然, $\chi'(G) \ge \Delta$. 正常边着色 时 c(v) = d(v),其中 $v \in V(G)$ 中任取的一顶。正常边着色时的边划分 $C = (E_1, E_2, \dots, E_k)$ 中的 $E_1(i = 1, 2, \dots, k)$ 是G 中一个匹配。





解 图上我们已经标明了用四种颜色正常边着色的一种方式,即 $C = (\{v_1v_1, v_2v_3\}, \{v_1v_3, v_3v_4\}, \{v_1v_2\}, \{v_1v_2\}, \{v_2v_3, v_2v_3\})$,但是,若欲用 3 种颜色进行正常边着色,则只能按圆圈中的颜色号码对边染色,但这时 v_2v_3 边无法上色,故 $\mathcal{U}(G) = 4$.

引理 1 G是连通图,非奇图,财存在 2 边港色,使所用的两种颜色在每个次数至少为 2 的顶处出现。

证 设 G是 Euler 图,若 G是偶图,命题显然成立,若 G不是偶图,至少有一个顶 v_0 , $d(v_0) \ge 4$ 。令 $v_0e_1v_1e_2\cdots e_nv_n$ 是 G的一条 Euler 回路,令

 $E_1 = \{e_i \mid i \text{ 为奇数}\}, E_2 = \{e_i \mid i \text{ 为偶数}\}.$ 于是 $C = (E_1, E_2)$ 即为所求之 2 边着色。

若G不是Euler 图,我们增加一个新 顶 v_* ,把 v_* 与G 的每个奇次顶之间连一条边,得到的图 G^* 是 Euler 图,令 $v_*e_*v_*$ … e_**v_* 是 G^* 的一个 Euler 回路,仍 如上 定 义 E_* 与 E_2 ,则 C = $(E_1 \cap E(G), E_2 \cap E(G))$ 即为所求之 2 边着色。证学。

定义 2 设C 与C' 都是G 的 k 边港色,相应的 c(v) 与 c'(v) 満足

$$\sum_{v \in V(G)} c'(v) > \sum_{v \in V(G)} c(v),$$

期称 C' 是对 C 的一个改善,不能改善的 k 边上色叫做 最 佳 k 边 着色。

引现 2 $C = (E_1, E_2, \dots, E_n)$ 是 G 的一个最佳 k 边港色,存在一个顶 u 及两种颜色 i , j , i 色不在 u 处出现,而 j 色在 u 处 至少出现两次,则 $G[E_i \cup E_j]$ 中含 u 的连通片是一个奇圈。

证 设 u 是满足引理条件的顶,而H是 $G[E, UE_i]$ 中含 u 的连通片。若H不是奇圈,由引理 1 ,H有一个 2 边着色,所用两种颜色在H的次数至少为 2 的每个顶处都出现。我们用 i ,i 两种颜色依引理 1 的办法对H的边重新着色。因为在此新的 k 边着色 $C' = (E_1, E_2, \dots, E_k)$ 中,i ,i 两色都在 u 处 出 现, 故 c' (u) = c(u) + 1 ,而 $v \neq u$ 时, c' $(v) \geqslant c(v)$,于是

$$\sum_{v \in V(G)} c'(v) > \sum_{v \in V(G)} c(v),$$

与 C 是最佳 k 边着色矛盾。证毕。

定理 1 χ' (二分图) = Δ .

证 若 \mathcal{X}' (二分图 G) $> \Delta$, $C = (E_1, E_2, \dots, E_{\Delta})$ 是一个最佳 Δ 边着色。令顶 u 满足 c(u) < d(u), 显然, u 满足引理 2 的条件, 因此 G中有奇圈,与G为二 分 图 矛 盾,故 \mathcal{Y} (二分图) $\leq \Delta$, 又 $\mathcal{X}' \geq \Delta$, 故 \mathcal{X}' (二分图) $= \Delta$. 证事。

定理 2(Vizing, 1964) G是单图, 要么 $\chi'(G) = \Delta$, 要么 $\chi'(G) = \Delta + 1$.

证 G是单图, $\mathcal{X}'(G) \gg \Delta$,我们只需证明 $\mathcal{X}'(G) \ll \Delta + 1$. 假设 $\mathcal{X}' > \Delta + 1$,令 $C = (E_1, E_2, \dots, E_{d+1})$ 是 G 的最佳 $\Delta + 1$ 边着 色, u 是 c(u) < d(u) 的一个顶,则存在颜色 i_0, i_1 , i_0 在 u 处不出现,而 i_1 在 u 处至 少出现两次。设 uv_1 是 i_1 色 (图 9 . 2),因为 $d(v_1) < \Delta + 1$,其色 i_2 在 v_1 处不出现, i_2 在 u 处出现,否则用 i_2

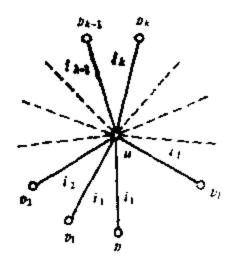


图 9.2

重新对 uv_1 着色,得到一个对C的改善,这与C是最佳 $\Delta+1$ 边着色矛盾。故某边 uv_2 着色为 i_2 。又 $d(v_1)<\Delta+1$,某色 i_3 不在 v_2 处出现, i_3 必在u处出现,不然用 i_2 对 uv_1 ,用 i_3 对 uv_2 重新上色,会得到对C的改善,这是不可能的。故有某边 uv_1 着色 i_3 继续这个过程,我们构作了一顶序列 v_1 , v_2 , …和一个颜色序列 i_1 , i_2 ,…,使得

- (1) யு 着色i, 且
- (2) 1,11 不在 0, 处出现。

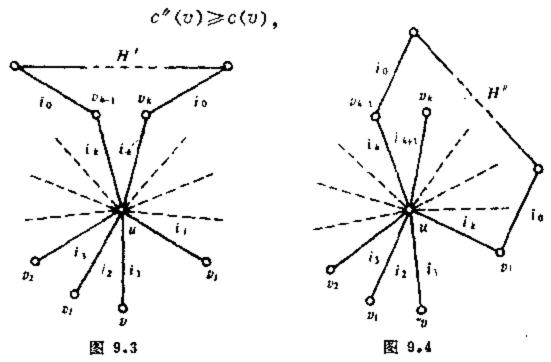
由于u的次数有限,所以存在最小整数l,使得对某个k < l有(3) $i_{l+1} = i_{k}$ (图 9.2)

我们用下述办法对G的边重新着色:对于 $1 \le j \le k-1$,用 i_{1+1} 重新对 uv_1 上色,得到一个新的 $\Delta+1$ 边着色 $C'=(E'_1,E'_2,...,E'_{\Delta+1})$ (图9.3) . 显然,对一切 $v \in V(G)$,

$$c'(v) \geqslant c(v)$$
,

且 C' 是一个最佳 $\Delta+1$ 边着色。由引理 2 , $G[E'_{i_o}UE'_{i_k}]$ 的 含 u 的连通片 H' 是一个奇圈。

现在,我们用 $i_{i+1}(k \le j \le l-1)$ 重新给 uv_i 上色,在 uv_i 上的颜色是 i_* ,得到 $\Delta+1$ 边着色 $C''=(E'_1',E'_2',\cdots,E'_{2'1})$ (图 9.4) . 显然,对一切 $v \in V(G)$,



且 $G[E'_{i_o} \cup E'_{i_k}]$ 含 u 的连通片 H'' 是一个奇圈。但在 H' 中 v_* 的次数为 2 ,在 H'' 中 v_* 的次数是 1 ,这是不可能的•证毕。

我们根据 $\mathcal{X}'(G)$ 的值把一切单图划分成两 类, $\mathcal{X}'(G) = \Delta$ 的图 G 称为**第一类的**图, $\mathcal{X}'(G) = \Delta + 1$ 的图 G 称为**第二类的图**•二分图是第一类的图,而妖怪是第二类的图。

9.2 Ramsey 数和 Schur 定理

第八章中我们讨论过 Ramsey 数,用着色的语言来讲,就是,对任意给定的自然数 k与 l, r(k,l) 是满足如下条件的最

小整数 n, 得使 K 中的任一个 2 边着色 (E_1, E_2) 或 K $[E_1]$ 含子图 Kk, 或 K $[E_2]$ 中含子图 K_1 , 则称 r(k,l) 为 Ramsey 数

用上述定义可以把 r(k,l) 推广。

定义 3 对任意给意的由 m 个数组成的自然数列 k_1,k_2,\cdots , k_m , $r(k_1,k_2,\cdots,k_m)$ 是满足下列条件的最小整数 n ,对 K 。的任意 m 边著色 (E_1,E_2,\cdots,E_m) ,存在 某 个 i , K 。 $[E_i]$ 中 有 K_{k_i} 子图, $1 \le i \le m$, 则称 $r(k_1,k_2,\cdots,k_m)$ 为 Ramsey 数。

与 R(k,l) 相似地有上界估计公式:

$$r(k_{1},k_{2},\cdots,k_{m}) \leq r(k_{1}-1,k_{2},\cdots,k_{m}) + r(k_{1},k_{2}-1,k_{3},\cdots,k_{m}) + \cdots + r(k_{1},k_{2},\cdots,k_{m-1},k_{m}-1) - m + 2,$$

$$r(k_{1}+1,k_{2}+1,\cdots,k_{m}+1) \leq \frac{(k_{1}+k_{2}+\cdots+k_{m})!}{k_{1}!k_{2}!\cdots k_{m}!}.$$

定理 3 (Schur,1916) 设(S_1, S_2, \dots, S_n)是集合 $\{1, 2, \dots, r_n\}$ 的任一划分,其中 $r_n = r(\underbrace{3, 3, \dots, 3}_{n \wedge 3})$,则对某个 $i(1 \leq i \leq n)$,

 s_i 中有三个数 x, y, z,满足 x + y = z.

证 考虑 $K_{r,n}$, $K_{r,n}$ 的顶集 为 $\{1,2,\cdots,r_n\}$, 对 $K_{r,n}$ 用 1, 2, 3, …, n这 n 种颜色进行边着色,当且仅当|u-v| $\in s_n$ 时,uv 边着以 i 色;由 r_n 定义,在 $K_{r,n}$ 中有单色三角 形,即 有 三个顶 a, b, c, ab, ac, bc 有同种颜色 i . 无损一般 性,设 a > b > c, e x = a - b, y = b - c, z = a - c, 则 $x, y, z \in s_n$, 且 x + y = z. 证毕.

例 2 平面上有六个点,任何三点都是一个不等边三角形的 顶点,则这些三角形中有一个的最短边又是 另一个三角形的 最 长边。

证 把每个三角形的最短边染成红色,剩下的边染成白色。由于 $r_2 = 6(r_2 = r(3,3))$,所以必有单色三角形。又每个三角形都有最短边,所以每个三角形上都有红色边,故上述单色三角形是红色的,所以它的最长边也是红色的,同时,这个红色边又是

另一个三角形的最短边。证毕。

例 3 把 $\{1,2,3,4,5,6\}$ 划分成两个集合,则必有一个集合包含两数及其差。

证 $r_1=6$,由Schur 定理,在题中所述划分出的两个集合中,必有一个集合 S 中有三个数 x, y, z, 满足 x+y=z, 于是该集 合 S 中有两数 z, x 及其差 y. 证毕。

9.3 时间表问题

学校里有 $m位教师x_1,x_2,\cdots,x_n$ 和 $n个班级y_1,y_2,\cdots,y_n$ 。 x_1 老师为 y_1 班每天上课 $p_{1,1}$ 学时。试安排一个授课表,使学校上课的时间最少。

令 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, 顶 x_i 与 y_i 之间有 p_i , 条边相 连,形成一个二分图。每一学时,每 位 教师最多 为一个 班上课,每个班也至多接受一个老师的授课。故我们的问题之解就是求 X'(G)。因 $Y'(\Box A) = \Delta$,若没有授课多于 P 节的教师,也没有授课多于 P 节的班级,则可以编出一个至 多 P 节课的时间表。然而,若只有指定的几个教室可用,全校一天最少安排几节课?

设共计 l 门功课,编成每天 p 节课的功课表,每节课平均要开 $\frac{1}{p}$ 门功课,至少需要 $\left\{\frac{l}{p}\right\}$ 间教室。为了编制功课表,我们首先给出下面的引理和定理。

引理 3 M和N是限G的无公共边的匹配,且 $\{M\}>\{N\}$, 剩存在无公共边的匹配 M',N',使得

|M'| = |M| - 1, |N'| = |N| + 1, $M' \cup N' = M \cup N$.

证 考虑 $H = G[M \cup N]$, 正如 Berge 定理 之 证 明,H的 每个连通片要么是边在M = N中交错出现的偶圈,要么是边在M = N中交错出现的轨。又因M = M,M = M,M = M

始边与终边皆在M内,令这一轨为

$$P = v_0 e_1 v_1 \cdots e_{2n+1} v_{2n+1}$$

且取

$$M' = (M - \{e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1}\}) \cup \{e_2, e_4, \cdots, e_{2n}\},$$

$$N' = (N - \{e_2, e_4, \cdots, e_{2n}\}) \cup \{e_1, e_2, \cdots, e_{2n+1}\}.$$

则M'与N'亦是G中匹配,且满足引理 3 的要求。证毕。

定理 4 G是二分图, $\Delta \leq p$,则G内存在 P 个无 公 共边 的 匹配 M_1 , M_2 ,... , M_p ,使得

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{p} M_{i,j}$$

且对于 $1 \leq i \leq p$,

$$[\epsilon/p] \leq |M_{\bullet}| \leq \{\epsilon/p\}_{\bullet}$$

证 由于G是二分图, $X'(G) = \Delta$,E(G)可以 划 分 成 Δ 个 匹配 $M'_1, M'_2, \dots, M'_{\Delta}$ 。 故 对于 $p > \Delta$,存在无公共边的匹配 $M'_1, M'_2, \dots, M'_{\Delta}$ (当 $i > \Delta$ 时, \Diamond $M'_i = \emptyset$),使得

$$E(G) = \bigcup_{i=1}^{p} M'_{i}.$$

反复运用引理 3 于那些边数差大于 1 的每对匹配,我们则得到 p 个两两不相交的匹配 M_1, M_2, \cdots, M_n ,满 足 定 理 4 的 要 求。 **证单**。

例 4 四名教师, 五个班级, 教学要求如下:

试排出四间教室, 三间教室和两间教室的课程表。

解 以
$$X = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}, Y = \{y_1, y_2, y_1, y_2, y_4\}$$
为二

分图的顶集划分构作二分图G,当A矩阵中i,i号元素为a,i, 时,在x,i与y,之间加a,i条边,于是 $\Delta(G)=4$, $\epsilon=11$,安排 4节课, $\left[\frac{\epsilon}{4}\right]=2$, $\left\{\frac{\epsilon}{4}\right\}=3$,由定理 4,可安排 3 个教室 4 节课的课表,若欲用两个教室,由于 $\left\{\frac{11}{6}\right\}=2$, $\left\{\frac{11}{6}\right\}=1$,则可编排 6 节课的课表(图9.5)

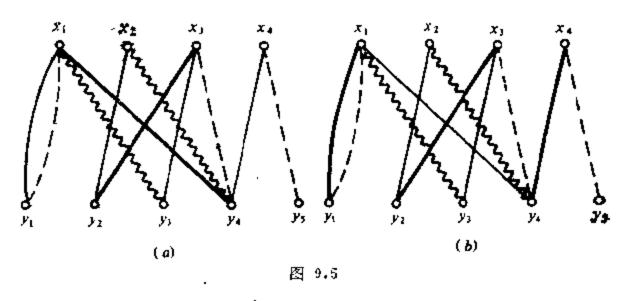


图 9.5(a) 相应的课表为:

共用四间教室,因为第一节课 y₁,y₁,y₁,y₁,y₂, 四个班都在上课。图 9.5 中细实线代表第一节上课的教师与班级的匹配,第二节用虚线表示,第三节课用浪线表示,第四节课用粗实线表示。

我们把图 9.5(a) 中的 轨 $y_1x_1y_2x_4$ 中 粗 细 实线易位,得图 9.5(b)。它对应的课表为:

教师节	1	2	3	4	5	6
x_1 x_2	у,	y 1	<i>y</i> ,	У1	_	_
X_2	y ,	-	y 4		-	-
Х,	y 3	\mathcal{Y}_{ullet}	-	y 2	-	_
x_4	_	y s	-	у,	-	_

因为每节课最多三个班在上课, 所以只需三间教室。

根据引理 3 与定理 4, 我们把图 9.5(6)中的匹配调 整 成 六个两两不相交的匹配,则可得六节课的课表。

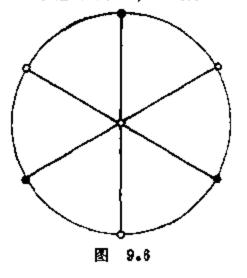
教师	节 1	2	3	. 4	5	6
x_1	y, y, -	у,	у,	-	y 1.	_
x_2	y 2	y 4	~	-	-	-
x_3	-	-	у.	Уз	y 2	
x_{\bullet}	. –	-	-	у.	_	y 5
	9.4	_	1		数	

定义 4 图 G 的一个 k 顶着色是指 V(G) 的一个划 G V_1 , V_2 , ..., V_k), V_i 中 $(1 \le i \le k)$ 的顶谱着以 i 色。又若每个 V_i 中 无每邻顶,则称此 k 顶着色为正常 k 顶着色。若 G 可以正常 k 顶着色,但不能 k-1 顶正常着色,则称 G 的色数为 k ,记成 V(G)

=k, 且称G为 k色 图。若G的 任一 真子图H, $\chi(H) < \chi(G)$, 则称G为 色鹤界图, (G) = k 时,称为 k 色临 界图。

例如, $\chi(G) = 1$,当且仅当 $\epsilon(G) = 0$, $\chi(G) = 2$,当且 仅 当 G 是有边二 分图,每个k色图皆存在k色临界子图。

每 5 求 7 顶轮的色数。



解 因为 7 顶轮 G 有边,故 $\chi(G) > 1$,又轮有三角形,即有 奇圈,所以非二分图, $\chi(G) > 2$,即 $\chi(G) \ge 3$ 。我们把轮心着 以 1 色,轮周上 2 色与 3 色相间出现,则知 $\chi(G) \le 3$,于 是 $\chi(G) \le 3$ (图 9.6)。

这个例 题 说明 $\chi(G) < \Delta(G) + 1 = 7$, 也有 $\chi(G) = \Delta(G) + 1$ 的图,例如 $G = K_1, \chi(K_3) = 3 = \Delta(K_3) + 1$.

定理 5 $\chi(G) \leq \Delta + 1$.

证 任取一顶 $v \in V(G)$,着以 $\Delta + 1$ 种颜色之一,取无 色 顶 $u \in V(G)$,着以与 u 相邻的顶上颜色相异的一种颜色。因 为 d(u) $\leq \Delta$,故 u 的邻顶上的颜色最多 Δ 种, $\Delta + 1$ 种颜色中至少有一种可以用于 u 的着 色。而 $|V(G)| < +\infty$,故如此进行有限次之后可以完成 G 的正常顶着色,且 $X(G) \leq \Delta + 1$ 。证单。

可以化为求色数的实际问题很多,下面提供三个实例。

(1) **考试安排问题**,学期的期末考试最少几天才能完成? 设学校共有 n 门功课需要进行期末考试,因为不少学生不止 选修一门课,所以不能把一个同学选修的两门课安排在同一个时 间进行考试。

我们以每门功课为一个顶,当且仅当两门功课被同一个学生选修时,在相应二顶之间连一条边,得到一个图G。我们对G的顶进行正常着色,同色顶则安排在同一时间考试,于是 $\mathcal{X}(G)$ 即为学校期末考试所需最少天数。

(2) **存储问题**:有的货物,放在一起不安全(例如黄鼠狼和小鸡),问至少要几个库房才能安全存放?

以货物为顶,在且仅在放在一起不安全的两种货物之间连上一条边,得一图G, $\chi(G)$ 即为所求。

(3) 距离约束同值题频率 分配 问题 (代号 F*D-CCA P): 地面上有若干无线电发射台,我们要对每个台分配一个频率令其采用,频率用自然数从1起编号,称为信道号码。为排除 洞信道造成的干扰,我们要求使用同信道的发射台之间相距必须

大于指定的正数d,问至少要用几个信道?

我们以 $\frac{d}{2}$ 为半径,以发射台为圆心作圆,仅当两个圆有公共点时,在两个圆心之间加一边,以圆心为顶,得到一个图G(圆盘图), $\chi(G)$ 即为所求。

9.5 面 色 数

若 G^* 是G的对偶图、则显然有 $\chi(G^*) = \chi^*(G)$ 。

四色定理有两种表述方式:

- (1) 对于任何平面图G, $\chi^*(G) \leq 4$.
- (2) 对于任何平面图G, $\chi(G) \leq 4$.

这两种表述是等价的。事实上,若G是平面图,且 $\chi(G) \leq 4$,由于 G^* 也是平面图,故 $\chi(G^*) \leq 4$,又 $\chi(G^*) = \chi^*(G)$,故 得 $\chi^*(G) \leq 4$.反之,若 $\chi^*(G) \leq 4$,不妨设 G是平面连通图;则 $\chi(G) = \chi((G^*)^*) = \chi^*(G^*)$,而 G^* 是 平面 图,故 $\chi^*(G^*) \leq 4$,即 $\chi(G) \leq 4$.

定面 6 (Heawood, 1890) X(平面图) ≪5.

证 我们对 ν 进行数学归纳法证明。

ν≤5 时,定理显然成立。

假设对 $v \le n-1$, 定理已成立,考虑v=n的情形。因G是平面图,所以存在 $v_0 \in V(G)$, $d(v_0) \le 5$ 。

(1) $d(v_0) \le 4$,考虑 $G-v_0$,由归纳法假 设, $\chi(G-v_0)$ ≤ 5 ,再把 v_0 着以与邻顶 (不超过四个) 相异的 第 五 色,则 知

 $\chi(G) \leq 5$

(2) $d(v_*) = 5$, 设 v_*, v_*, v_*, v_*, v_* 是 v_* 的邻顶, 按逆时

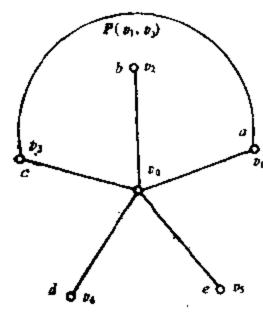


图 9.7

针为序画在平面上(图 9.7),分别着以 a,b,c,d,e 五种颜色。记 $G_0=G-v_0$, G_a . 是 G_0 中由 a,c 色之顶导出的子图。在 G_a . 中,

(i) 若 v_1 与 v_2 分处于两个连通片,在含 v_1 的连通片中,a,c两色互换,由归纳法假设, $\chi(G_0)$ ≤ 5 ,这时,把 v_0 着以a色,则得 $\chi(G) \leq 5$.

(ii) 若 v, 与 v, 在一个连通 片中, 则存在轨 P(v, ,v,), 在 P(v,

 v_*) 上a, c 二色交替出现,在G中 $v_*v_*P(v_1,v_*)v_*v_*$ 是一个圈,因为已经平面嵌入, v_* 与 v_* 必分居于此圈之内外。显然,在 G_* 中由b, d 两 色导出 的子图 G_* 。中, v_* 与 v_* 分属于两个连通片,不然,在 G_* 。中有轨 $P(v_*,v_*)$,它与 $P(v_1,v_*)$ 相交于一个公共顶,这个公共顶一方面在 $P(v_1,v_*)$ 上,是a 或c 色;另一方面,在 $P(v_2,v_*)$ 上,是b 或d 色,这是不可能的。既然 v_* 与 v_* 在 G_* 。中分属于两个连通片,把 v_* 所在的连通 片中b 与d 色互换,再对 v_* 着以b 色,则得 $k(G) \leqslant 5$ 。证事。

定理 6 中 "顏色互换"的技巧是 Kemple 首次提出的。这种 技巧在染色中不止一次地运用。

例 6 平面上任作 n 条直线,把平面划分成 若 干 区 域,证明:只需两种颜色即可把全部区域上色,面且有公共边界线的两区域异色。

证 对 n 进行数学归纳法,n=1 时,命题显然 成 立、假 设 $n \le k$ 时,命题已成立,令 n = k+1,从 k+1 条直线中任意 删 除 一条直线 L,由归纳法假设,对剩下的 k 条直线划分的区域,可

以只用 a,b 两种颜色着色,且相邻区域异色。这时,再把 L 恢复到原来位置上,且把 L 某一例的 a,b 两色互换,则得 证 命 题 对 k+1=n 仍成立。证事。

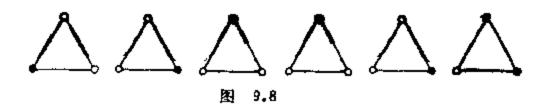
9.6 颜色多项式

今有 $k \rightarrow 0$ ($k \ge 1$),用以对给定的标志图正常顶着色,问共有多少种不同的着色方式?所谓两次着色方式不同,是指至少有一个顶,两次着色颜色不同。我们用 P(G,k) 表示图 G 的上述不同的着色方式的总数,对给定的 G ,P(G,k) 是 k 的一元函数,定义域是自然数集合 N 。

由定义可知:

- (1) P(G,k) > 0 的充要条件是 $\chi(G) \leq k$.
- (2) $\varepsilon(G) = 0$ B, $P(G,k) = k^{\nu}$
- (3) $G = K_{\nu}$, $\mathfrak{P}(G,k) = k(k-1)\cdots(k-\nu+1)$.

例如, $P(k_3,3)=3(3-1)(3-2)=6$ (图9.8), 即用三种颜色对标志的三角形正常顶着色, 共有6种不同的上色方式。



定理 7 $G是单理,任取一边 <math>e \in E(G)$,则

 $P(G,k) = P(G-e,k) - P(G \cdot e,k)$

证 设 e = uv, 考虑用 k 种颜色对 G - e 着色,

- (1) 当 u 与 v 同色时,上色方式的数目恰为 $P(G \cdot e,k)$.
- (2) 当 u 与 v 异色时, 上色方式的数目恰为 P(G,k)。

由(1)与(2)得

$$P(G-e,k) = P(G \cdot e,k) + P(G,k),$$

故得

$$P(G,k) = P(G-e,k) - P(G \cdot e,k)$$
 . **证毕**.

利用定理 7 给出的公式可以递推地求得一些 小 图 的 P(G, k)。图 9.9 给出了四顶星用 k 种颜色上色时,不同上色方式的数目是 k(k-1)",四 阶 图(四 边 形)的 上 色 方 式 有 k(k-1) · (k^2-3k+3) 种。

这两个图的 P(G,k) 都是多项式,事实上,这并非偶然。

定理 8 P(G,k) 是 k 的 ν 次多项式,且 (1) 首项 为 k^{ν} ; (2) 第二项为 $-\epsilon k^{\nu-1}$; (3) 常数为零; (4) 系数皆整数,且正负交错出现。

证 对 ε 进行数学归纳法证明。不妨设 G 为单图, $G \cdot \varepsilon$ 中有重边时,只保留重边中的一条边。 $\varepsilon = 0$ 时, $P(G, h) = h^*$,定 理成立。假设 $\varepsilon \leq m-1$ 时定理已成立。考虑 $\varepsilon = m$ 的情形,由归纳法假设。

$$P(G-e,k) = k^{\nu} - (\varepsilon-1)k^{\nu-1} + \sum_{i=1}^{\nu-2} (-1)^{\nu-i}a_ik^i,$$

$$P(G \cdot e, k) = k^{\nu-1} - e' k^{\nu-2} + \sum_{i=1}^{\nu-3} (-1)^{\nu-i-1} b_i k^i.$$

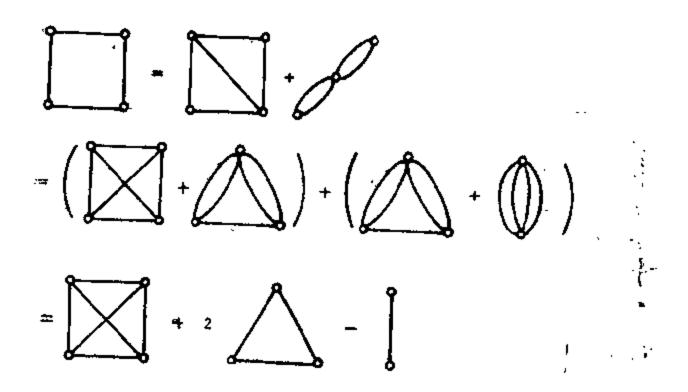
其中 ϵ' 是 $G \cdot e$ 的边数, a_i, b_i 是非负整数。由定理 7,

$$\begin{split} P(G,k) &= P(G - e,k) - P(G \cdot e,k) \\ &= k^{\nu} - \varepsilon k^{\nu-1} + (\varepsilon' + a_{\nu-2}) k^{\nu-2} + \sum_{i=1}^{\nu-3} ((-1)^{\nu-i} a_i) \\ &+ (-1)^{\nu-i} b_i k^i = k^{\nu} - \varepsilon k^{\nu-1} + (\varepsilon' + a_{\nu-2}) k^{\nu-2} \\ &+ \sum_{i=1}^{\nu-3} (-1)^{\nu-i} (a_i + b_i) k^i \end{split}$$

证毕。

定理 8 告诉我们 P(G,k) 是多项式,今后我们称P(G,k) 为 **颜色多项式**, 颜色多项式是 1912 年 Birkhoff 冲击 4CC 时 引入 的,用颜色多项式来表述四色猜想就是:

 $=k^{2}-3k^{3}+3k^{2}-k=k(k-1)^{2}$



 $= k(k-1)(k-2)(k-3) + 2k(k-1)(k-2) + k(k-1) = k(k-1)(k^2 - 3k+3)$ 图 9.9

任意的平面图G, 皆有P(G,4)>0

如今四色猜想已被证明。所以,如果图G的颜色多项式 $P(G,k)=P_1(k)(k-4)$ 时,其中 $P_1(k)$ 是k的 $\nu-1$ 次多项式,则P(G,4)=0,于是可以断言G非平面图。平面图的颜色多项式不会有大于 3 的实根。

若 G_1,G_2,\cdots,G_ω 是G的连通片,则显然有

$$P(G,k) = \prod_{i=1}^{m} P(G_i,k).$$

颜色多项式的缺点之一是它与图不一一对应;同构的两个标志图,其颜色多项式当然相等,但两个图的颜色多项式相等时,两图未必同构。这一点从下面的定理可以看得出来。

定理 9 G是树的充要条件是 $P(G,k) = k(k-1)^{\nu-1}$ 。 证 若 $P(G,k) = k(k-1)^{\nu-1}$,这时颜色多项式中有 1 次项,

由 $P(G,k) = \prod_{i=1}^{d} P(G_i,k)$ 知 $\omega = 1$,即 G 是连通图;又 $k(k-1)^{\nu-1}$

的 $\nu-1$ 次项的系数是 $-(\nu+1)$, 即 $\varepsilon=\nu-1$, 故 G 是树。

若G是树,我们用关于 ν 的数学归 纳 法 来 证 明 P(G, k) = $k(k-1)^{\nu-1}$ 。事实 上 G=T 是 树, $\nu=1$ 时, $P(T,k)=k,\nu=2$ 时, $T=K_2$,P(T,k)=k(k-1),定理成立。假设 $\nu \leq n-1$ 时, $P(T,k)=k(k-1)^{\nu-1}$ 。设 $\nu \in V(T)$,且 ν 是 叶, $\nu(T)=n$,考 虑 $T'=T-\nu$,由归纳法假设, $P(T',k)=k(k-1)^{\nu-2}$ 。然 而,对 T' 的每一正常顶着色(限用 k 种颜色中的一些颜 色), ν 的 着色有 k-1 种选择而使 T 正常顶着色,故

$$P(T,k) = P(T',k)(k-1) = k(k-1)^{n-1}$$

证毕.

ν 顶的树, 当 ν ≥ 3 时, 其中有不少不同构者, 但它 们 的 颜 色多项式却是一致的。

关于颜色多项式,还有不少问题引人注意,例如:

- (1) k(k-1)"⁻¹为颜色多项式的图都是树,推广地问:▼有相同颜色多项式的图若不同构,它们有什么共同点?
 - (2) 如何判断一个多项式是否颜色多项式?

例如 $k^*-3k^*+3k^*$ 满足定理 8 的首项系数为 1,系数 皆 整数, 正负交错地出现, 无常数顶, 但它并不是颜色多项式。事实上, 若它是图 G 的颜色多项式, G 连 通 时, 因 $\varepsilon=3$, 而 $\nu=4$, 故 G 是树, 它的颜色多项式应为 $k(k-1)^{\nu-1}=k(k-1)^{\imath}\neq k^*$ 、 $-3k^*+3k^2$, 若 G 不连通, 只能有是 G=K, $\bigcup K$, ,而这时 $P(G,k)=P(K_1,k)\cdot P(K_1,k)=k(k-1)(k-2)k\neq k^*-3k^3+3k^2$.

(3) Read 猜想: P(G,k) 中系數的绝对值先是严格 单 调上升、继而严格单调下降。

至今尚无人证明或反驳 Read 猜想。

9.7 求色数的一个算法

求色数目前尚无好算法,即尚无有效算法,本节介绍一个算法,它对顶数较多的图不适用。

为得到色数的算法,我们首先讨论所谓规范 k 顶着色。

定义 6 图 G 的一个 k 顶着色 (V_1,V_2,\cdots,V_k) ,若 V 是 $G-\bigcup_{i=1}^{i-1}V_i$ 的极大独立集, $i=1,2,\cdots,k$, $V_0=\varnothing$, 则称 这一 k

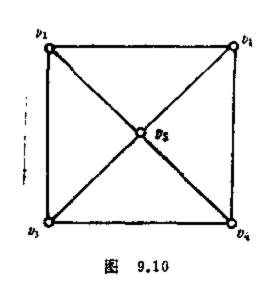
顶着色是规范 4 顶着色。

规范 k 顶着色是正常 k 顶着色。

定理 10 G是可以 k 顶正常着色的,则 G存在 k 顶规 范 着色。

证 设 (V_1,V_2,\cdots,V_k) 是 G 的一个正常 k 顶着色,若 V_1 是 G 的极大独立集,则把 V_1 各 顶着以 1 色,不然, V_1 是独立集,从 $V-V_1$ 中调入某些顶进入 V_1 ,可以使 V_1 扩张成极大独立 集 $V_1^{(1)}$, V_2 , V_3 , \cdots , $V_k^{(1)}$, 考虑 G

 $-V_1^{(1)}$, $煮V_2^{(1)}$ 是其极大独立集,则把 $V_2^{(1)}$ 的顶着 以 2 色,不然,从 $G-V_1^{(1)}-V_2^{(1)}$ 中调一些顶进入 $V_2^{(1)}$,使 $V_2^{(1)}$ 扩张 成 $G-V_1^{(1)}$ 的极大独立集 $V_2^{(2)}$ 。如此以往,最后可得G的规范 k 顶着色 $(V_1^{(1)},V_2^{(2)},\cdots,V_d^{(k)})$,证毕。



例如图9.10中的极大独立集共计三个: $\{v_s\}$, $\{v_1,v_1\}$, $\{v_2,v_2\}$.所以G的规范着色是唯一的: $\{\{v_s\}$, $\{v_1,v_2\}$, $\{v_2,v_2\}$,故得 $\{\{v_3\}$,

这里介绍的规范着色的方法求色 数其实需要求极大独立集以及一切规 范着色,这对于大图,因为计算量过 大而成为实际上不可完成的解法,所 以是一个坏算法。

着色问题的理论与应用,内容之丰富,之精彩,使它成了图论中的重要篇章。4色定理尚欠理论性证明,此外,还有一些猜想(例如 Read 猜想)亦未被证明或反驳;我们用时间表之编排及F*D-CCAD 问题为范例来说明如何把实际问题化为 染色 问题,读者应当增强用着色思想考虑实际问题的观念。

- 、 本章的要点是
- λ (1) $\chi(G)$, $\chi'(G)$, $\chi^*(G)$ 的定义与联系。

- $(2)\chi'$ (二分图) $=\Delta$, χ' (单图) $=\Delta$ 或 $\Delta+1$, $\chi(G)$ $\leq \Delta+1$.
 - (3) 颜色多项式的定义和求法。
 - (4)四色定理与五色定理。
 - (5) 把时间表问题及 F*D-CCAP 化成着色问题。

习 反.

- 1. x' (Petersen 图) = 4.
- 2. 怎样求二分图的正常 Δ 边着色?
- 3. G是二分图, $\delta > 0$, 则 G有一个 δ 边着色, 在 G 的 任 一 顶处均有 δ 个颜色出现。
 - $4 \cdot \chi(K_{2n-1}) = \chi'(K_{2n}) = 2n-1$
 - 5. G是正则图, ν 是奇数, $\varepsilon \neq 0$, 则 χ' (G) = $\Delta + 1$.
 - 6. G是无环单图, v=2n+1, $\epsilon > n\Delta$, 则 $\chi' = \Delta + 1$.
- 7. 图 G 中任意两个正常 k 边着色对边集合的色划分 一 致,则称 G 是唯一正常 k 边着色图,证明唯一 3 边正常染色 3 次正则图是 Hamilton 图。
- 8. 学校里有 7 名教师, 12 个班, 每周五天教学, 教课要 求由下面矩阵给出:

其中 p.; 是教师 x. 教 y; 班的节数, 试问:

(1) 一天应分几节课?

- (2) 若每天上8节课, 需要几间教室?
- 9. 证明:
 - (1) $r_n \leq n(r_{n-1}-1)+2$.
 - (2) $r \leq [n!e] + 1$
 - (3) $r_3 \leq 17$.
- 10. G是无环图、则存在 Δ 正则图、使 G为其子图。
- 11. 单图G与H之积 $G \times H$ 是下面的图,其顶集为 $V(G) \times V(H)$, (u,v)与(u',v')相邻的充要条件是 $u=u',vv' \in E(H)$, 或v=v', $uu' \in E(G)$. 试证明:
 - (1) $\chi'(G \times K_2) = \Delta(G \times K_2)$.
- (2) H是一个非平凡图,且 $\chi'(H) = \Delta(H)$,则 $\chi'(G \times H)$ = $\Delta(G \times H)$.
 - 12. 写出一个在单图上 Δ+1 正常顶着色的算法。
- 13. $\delta(G)>1$, G是单图,则存在 $\delta-1$ 边着色,使G的每顶处出现 $\delta-1$ 种颜色。
- 14. s. 是满足下列条件的最小整数: 把 $\{1,2,\dots,s.\}$ 划分成。 x 个子集,总存在一个子集,其中有 x+y=z 的解,证明

$$s_1 = 2$$
, $s_2 = 5$, $s_3 = 14$.

$$15_{\bullet} s_{\bullet} \ge 3s_{\bullet-1} - 1_{\bullet}$$

16.
$$s_* \ge \frac{1}{2}(3^* + 1)$$
.

17.
$$s_* \ge \frac{1}{2} (27(3)^{-3} + 1)$$
.

- 18. 一个国际社团,由六个国家的1976人组成,对每个人任编一号码,但号码从1编到1976,则定有一人,其号码是其某同胞号码之2倍或某两同胞号码之和。又
 - (1) 把 1976 改成 1958, 命题是否仍成立?
- (2) 若只有 364 名人士时,可以有一编号方法,使上述 同, 胞号码关系不出现。

- (3) 把 6 国推广成 n 国(n≥6),问至少多少位人士 参 加才能发生题中所述的同胞号码关系?又问至多多少人士参加时,才可设法避免那种同胞号码关系?
 - 19. G是 单 图,则 $\chi(G) \geqslant_{\bar{\nu}^2 2\bar{\epsilon}}^{\bar{\nu}^2}$.
 - 20. G中任二奇圈皆有公共顶,则炎≤5.
- 21. G的次数列为 d_1,d_2,\cdots,d_ν , 且 $d_1\geqslant d_2\geqslant \cdots \geqslant d_\nu$, 则 $\chi\leqslant \max(d_1+1,i)$.
 - 22. $\varepsilon > 0$,则 $\chi \leq \{(2\varepsilon)^{1/2}\}$.
 - 23. $\chi(G) + \chi(G^c) \leq \nu + 1$.
- 24. 仅有的 1 色临界图是 K_1 , 仅有的 2 色临界 图 是 K_2 , 面仅有的 3 色临界图是 k 阶奇圈。 k 是不小于 3 的奇数
 - 25. 求图 9.11 中两个图的颜色多项式。

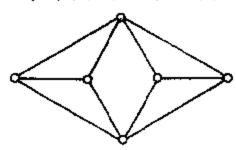


图 9.11

- 26. $P(C_n,k) = (k-1)^n + (-1)^n (k-1)$, 其中 C_n 是 n 阶圈。
- 27. $P(G,k) = k(k-2)^n + (-1)^n k(k-2)$,其中G为n+1 顶轮。
 - 28. $G \cap H$ 是完全图, 其中 $G \ominus H$ 是单图, 则 $P(G \cup H,k) \cdot P(G \cap H,k) = P(G,k) \cdot P(H,k)$.
 - 29. P(G,k) = 0 的实根不大于 ν .
 - 30. X(n 维立方体) = ? X'(n 维立方体) = ?

- 32. 证明, 若图 G满足下列条件之一, 则 G是第二类的图:
 - (1) $v = \text{odd}, \prod_{v \in V} [\Delta d(v)] < \Delta_{\bullet}$
 - (2) v=odd 的正则图。
- (3) 含割顶的正则图。
- G=0 (4) G=0
- (5) G是从 v = even 的正则图中一条边被剖分得到 的图。

10 有 向 图

10.1 有向图的连通性

有向图的概念以及有向道路、有向轨、有向圈等概念,我们 前面介绍过,本章要深入研究这些概念的性质和应用。

定义 1 把有向图的各边的方向去掉,所得的无向图叫做该有向图的底图,有向图G之底图是连题图时,此有向图称为弱做题有向图。对于有向图G的顶 $u,v \in V(G)$,存在有向轨P(u,v)时,称u可达v;任取 $u,v \in V(G)$,u可达v或v可达u时,存尽是单连题有向圈;任取 $u,v \in V(G)$,不但u可达v,圈 且v可达u时,称u

定理 1 G是强连通有向图的充圈条件是G的一切顶在一个有向图路上。

证 设 G 是强连通有向图, $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_v\}$,则存在有向轨 $P_1(v_1, v_2), P_1(v_2, v_1), \dots, P_{v-1}(v_{v-1}, v_v), P_v(v_v, v_1)$,于是 $\bigcup_{i=1}^{v} P_i$ 即为含一切顶的有向回路。反之,若 G 之一切顶共处于一个有向回路上,则任取 $u,v \in V(G)$,存在有 向 轨 $P_1(u,v)$ 与 $P_2(v,u)$,故 G 是强连通有向图。证**毕**。

定理 2 有向图G为单连通圈的充要条件是G中存在有向生或道路。

证 充分性不足道。

下证必要性。已知有向图G是单连通的,任取定 $V_1 \subseteq V(G)$,总存在一个顶 $v_1 \in V_1$,对任何 $v \in V_1$,使得 v_1 可达 v_2 ,不然的话,

必有一个最小的无此性质的 顶 子 集 $U = \{v_1, v_2, \dots, v_s\}$,在 $U = \{v_s\}$ 中存在一个顶 v ,对任意的 $u \in U - \{v_s\}$, v 可 达 u 。由 此 知,在 U中只能是 v 不能达 v_s ,同时 v_s 不可达 v ,这与 G 是 单 连 通 有 向 图 相 违 。 证 毕 。

定理 3 无向图G可定向成强连通图的充要条件 是 无向 图 (底图) G 是 2 边连通图。

证 若无向图 G 可定向成强连通图,则 G 中无桥,不然桥的两端点在定向后的有向图中不能彼此可达,与强连通的 定义 相违. 所以 G 是 2 边连通图。

反之,若G是 2 边连通的无向图,它无桥,存在一个圈 G_1 ,我们构作 G 的连通子图序列 G_1 , G_2 ,…,若 G_1 ($i=1,2,\dots$) 不 是生成子图,设 v_1 不是 G_1 中的顶,而 $v_1 \in V(G)$,则找到 两个 无关公共边的轨 P_1 , Q_1 (见第 3 章习题 9) , P_1 , Q_1 的 一端 是 v_1 ,另一端在 G_1 中,这时,令 $G_{1+1} = G_1 \cup P_1 \cup Q_1$ 。又 因 $|V(G)| < +\infty$,故这一序列必然到某一生成子图 G_1 为止。我们给 G_2 定向,首先把 G_1 定向成有向圈, P_1 定向成起点在 v_1 的有向轨, v_2 定向成终点在 v_1 的有向轨,于是每个 v_2 ,进而 v_3 。有了定向,且显然 v_4 是强连通有向图,把不在 v_4 。上的 v_4 之边任意定向,则得以 v_4 为底图的有向图,且是强连通有 向图。证

定理 3 的实际背景是: 什么样的公路网,为减少车祸和交通阻塞,可以规定单向行驶方向,且保证运输畅通? 这不总是办得到的,例如图 10.1 就办不到.

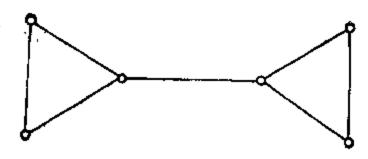


图 10.1

办不成的原因是它的图上有一个桥。定理 3 构造性地指出仅当无桥时可以规定单向行驶方向。

10.2 有向Euler图

与第4章相应地可以定义有向 Euler 图。有向图中含每条边的有向行迹叫做有向 Euler 行迹,有向图中含每条边的有向 Euler 回路,含有向 Euler 回路的有向 图叫做有向 Euler 图。直观地讲,有向 Euler 图是从一顶出发,顺着箭头指示的方向走,可以走过每条边恰一次又返回出发点的那种图。下面给出有向 Euler 图的特征性描述。

- 定理 4 G 是弱连进有向图,则下述命题等价。

- (1) G 中含有向 Euler 回路.
- (2) $\forall v \in V(G), d^-(v) = d^+(v).$

(3)
$$G = \bigcup_{i=1}^{n} C_i$$
, 其中 C_i 是有问图,且 $E(C_i) \cap E(C_i)$

 $=\emptyset$, $1 \le i < j \le n$, n 为某个自然数。

定理 4 的证明与第 4 章定理 1 证明相似。当证明(2)⇒(3)时,首先证明 G 中有有向圈 C_1 . 为此,考虑 G 中的最长有向轨 $P_{\bullet}(u,v)$,因 $d^{+}(v) = d^{-}(v)$,所以有一条边 e , e 的尾是 v , e 的头必在 $P_{\bullet}(u,v)$ 上,于是产生了有向圈。其它推导与第 4 章定理 1 雷同。

定理 5 G是關连繼有问题,且滿足

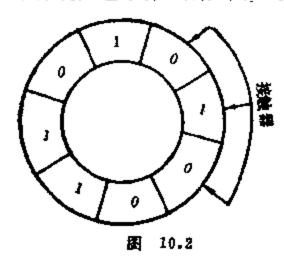
$$d^{-}(v) = \begin{cases} d^{+}(v), & v \neq u_{1}, u_{2}, u_{1}, u_{2}, v \in V(G), \\ d^{+}(v) - 1, & v = u_{1}, \\ d^{+}(v) + 1, & v = u_{1}, \end{cases}$$

则G中有以 u_1 为起点以 u_2 为终点的有向 Euler 行迹。

定理5的证明与第4章定理2相似。

下面介绍如何用有向 Euler 图的概念设计有效磁鼓。一个

磁鼓,实际上相当于把一个曲面分割成2°部分,每一部分或由导体或由绝缘体组成。图 10.2 接触器的位置表示一个2进制



数 010, 当磁鼓顺时针转动一格后,得 101, 再转一格得 010, 这就不好了,这个状态与开始的状态无法区别。

一般地,设计一个磁鼓,即将鼓面划分成 2°个格子,在每个格于上分配数字 0 或 1,但必须满足"不重复,不遗漏"的条件。

- (1) 不重复 即相继的 k 个接触器随着鼓的转动所读 出 的 2* 个 k 位二进制数要两两相异。为此必须 2*≥2*。
- (2) 不遗漏 即 2* 个不同的 k 位二进制数,每个都对应鼓的某一状态,为此,2*≤2*.

所以必须 k=n.

k=n 的不重复、不遗漏的磁鼓叫做有效磁鼓,图 10.2 中的磁鼓不是有效磁鼓,它不满足条件(1)与(2)。

对于任给的 k=n,怎样设计一个有效磁鼓?Good用有向Euler 回路解决了这一问题。

构作有向图 G_n , $p_i \in \{0,1\}$, $i=1,2,\dots,n$.

$$V(G_n) = \{p_1 p_2 \cdots p_{n-1} | p_i = 0 \text{ id } 1, 1 \leq i \leq n-1\},\$$

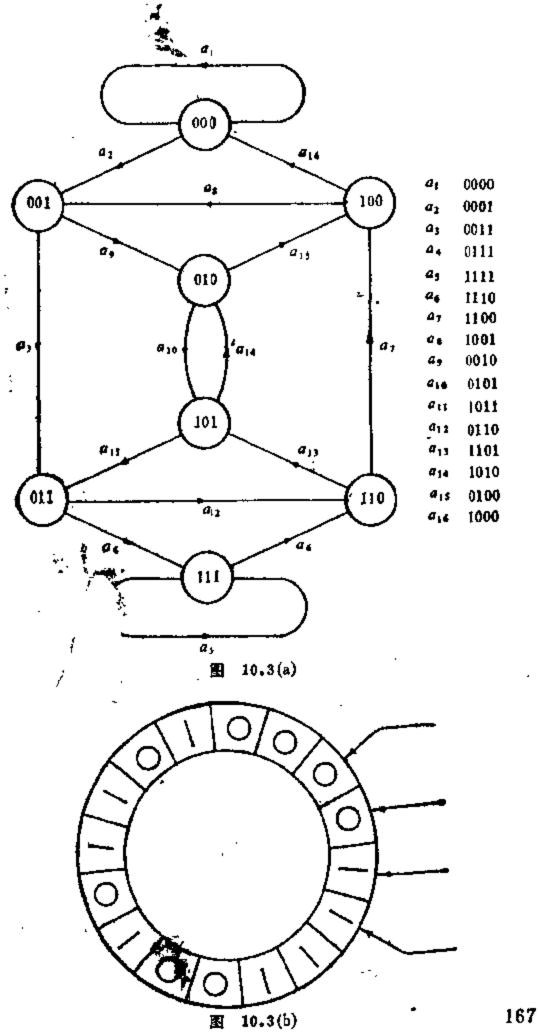
$$\forall v_1, v_2 \in V(G_n),$$

 $v_1v_2 \in E(G_n) \iff v_1 = p_1p_2 \cdots p_{n-1}, v_2 = p_2p_3 \cdots p_{n-1}p_n,$ $ill v_1v_2 = p_1p_2 \cdots p_{n-1}p_n.$

客易看出, $\forall v \in V(G_n)$,则 $d^-(v) = d^+(v) = 2$ 。事实上, 若 $v = p_1 p_2 \cdots p_{n-1}$,则恰有两个边 a_1, a_2 以 v 为头,恰有两个边 a_3 , a_4 以 v 为尾。

$$a_1 = (0p_1p_2 \cdots p_{n-2}, v), \quad a_2 = (1p_1 \cdots p_{n-1}, v),$$

$$a_3 = (v, p_2p_3 \cdots p_{n-1}0), \quad a_4 = (v, p_2p_3 \cdots p_{n-1}1).$$

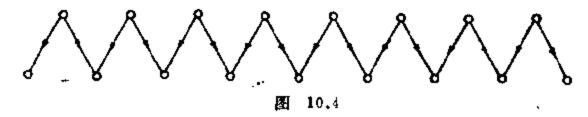


٧,

由定理 4, G. 是有向 Euler 图, 沿 G. 的有向 Euler 回 路每边取其第一位数字,所得 0,1 数字串顺次抄入 2 个格子便完成了有效磁鼓之设计。图 10.3 给出 n=k=4 时的有效磁鼓 及 相应的 G..

10.3 有 向 轨

任给一个有向图,它上面有向轨的长度与其底图上轨之长度一般没有多大关系。例如图 10.4 中,有向轨最长者长为1,而相应的底图上却有长16的轨,但多少有些出乎意料地,有向图上的有



向轨的长度却与其底图的色数有非常密切的关系。

定理 6 以G为底图的有向图中必有长 $\chi(G)-1$ 的有向轨.

证 设 E' 是使有向图 G' (仍以 G 表示以 f' 为底图的有 向图) 不含有向圈的最小边子集,其中 G' = G - I 又设 G' 中最长的有向轨长为 k . 把颜色 1 , 2 , ..., k+1 含 G' 的顶,当以 v 为起点的 G' 内的有向轨最大长度是 i-1 可 者以 i 色。用 V_i 表示 i 色顶的集合,下证 (V_1,V_2,\cdots) 是 G 的正常 k+1 顶着色。

首先看到,G' 中任一有向轨的起点与终点异色。事实 上,若 P(u,v) 是G'的一条有向轨,设 $v \in V_I$,则有有向轨 $Q = vv_Iv_I$ … $v_I \subseteq G'$ 。又 G' 中无有向圈,则 P(u,v) U Q 是起点 为 u 长 至 少为 i 的有向轨,于是 $u \in V_I$ 。

再证G的任一边头尾异色。设 $uv \in E(G)$,若 $uv \in E(G')$,则 $uv \in G'$ 的有向轨, $u = v \neq 0$,若 $uv \in E'$, 由 E' 的最小性, G' + uv 含有向圈 C. $C - uv \in G'$ 的一条有向轨,故 $u = v \Rightarrow p \Rightarrow 0$

色.至此证得 (V_1,V_2,\cdots,V_{k+1}) 是G的正常k+1顶着色,故k(G) $\leq k+1,k \geq k(G)-1$,即G中有长k(G)-1的有向轨。证毕。

我们称 K。定向后的有向图为竞赛图。

推论 1 竞赛图中有有向 Hamilton 轨(含一 切 顶 的 有 向 轨)。

证 $\chi(K_{\nu})=\nu$, 故竞赛图中有长 $\chi(K_{\nu})-1=\nu-1$ 的 有 向 執、所以它含 ν 个顶的有向轨,即含有向 Hamilton 轨。证毕。

图 10.4 中最长轨长是 1,而色数为 2. 符合定理 6. 定理 6 的 X(G) - 1 不能再增大,在某种意义上讲,它给出了一个 最好的上界。每个无向图,都可以有一个适当定向,使得到的有向图中最长轨恰为长 X(G) - 1 的轨。若 $(V_1,V_2,\cdots,V_{-(c)})$ 是 G 的正常 X(G) 顶着色,当 $u \in V_i$, $v \in V_i$ 时,且 i < j, $u v \in E(G)$,则把 uv 边定向成有向边 uv,它以 u 为尾,于是没有有向轨能 含 X(G) 个顶,故由定理 6,最长轨长 X(G) - 1。

定义 2 G 是有向图,当 $uv \in E(G)$ 时,称尾 u 为头 v 的内邻顶,v 为 u 的外邻顶,v 的内邻顶集合记成 $N^-(v)$,v 的外邻顶集合记为 $N^+(v)$ 。

定理 T G 是无环有向图,则底图中有一个独立集 S ,使得 V(G)-S 中的每个顶可通过长度至多是 2 的有向轨由 S 内的 顶达到。

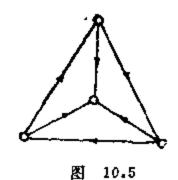
証 对 少进行归纳法证明。

v=1时,定理自然成立。假设顶数比 v 少的有向图,定理已成立,今考虑顶数为 v 的有向图 G。任取 $v\in V(G)$,令 $G'=G-(\{v\}\cup N^+(v))$,由归纳法假设(不妨设 $V(G')\neq\emptyset$)存在 G' 的一个独立集 S',G' 中不在 S' 中的顶可由 S' 中的顶经 至 多长 2 的有向轨达到,若 v 是 S' 的某顶 u 之外邻顶,那么 $N^+(v)$ 的每个顶可由 u 通过至多长 2 的有向轨达到,这时,定理成立。若 v 不是 S' 中任何顶的外邻顶,于是 v 不与 S' 中的任何 顶 邻接,那么独立集 $S=S'\cup\{v\}$ 满足定理的要求。证单。

推论 2 竞赛图中含有一顶,从该顶通过长至多为 2 的有向 轨可以到达任何顶。

证 由于 *K*。的最大独立集为一个顶构成,由定理 7 ,推论 2 成立。**证毕**。

我们称推论 2 中的那种可以通过至多长 2 的产匀轨达到任何顶的顶为竞赛图中的"王"。"王"未必唯一,例如图10.5中的



竞赛图有三个王,它们是大三角形的三个顶点,它们都是 $d^+(v)$ 最大的顶。

作为本节的结束,我们讲一个有向轨的重要应用,即工作的最佳排序问题。今有工作 $J_1,J_2,...,J_n$,要在同一台机器上进行,从 J_1 到 J_1 的机器调整时间为 $J_{1,1}$,

试把n 项工作排队,使得 $\Sigma t_{i,i} = \min$ 。这个问题至今仍无 有 效 算法,我们这里给一个近似算法。

- (1) 以 $V(G) = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ 为有向图G的**顶**集,当且仅当 $t_{i,j} \leq t_{j,i}$ 时,做有向边 $v_i v_i$ 。于是得到的有向图中含生成 竞赛图。
- (2) 在有向图G中求出有向 Hamilton 執, 依此 Hamilton 執上顶的顺序来安排工作顺序。

例 1 设机器调整矩阵为

求这六项工作如何安排工序, 使总加工时间最少?

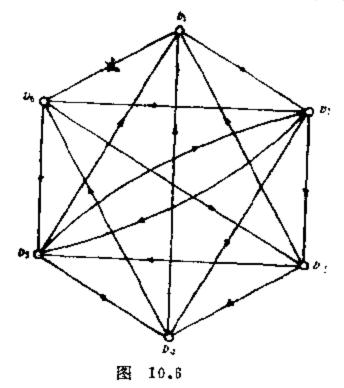
解 构作有向图G(图10.6),以{v1,v2,v2,v4,v4,v6}为

顶集, 当且仅 当 t₁₁ ≤ t₁₁ 时, 连一有 向 边 v₁v₁.

从图 G 中求得一条 有向 Hamilton 轨为

v₁v₄v₅v₅v₂, 所需调机时间为(以J₁ J₄J₃J₄I₅J₂为序)

1+2+1+1+3=8。 若用自然顺序J₁J₂J₃J₄ J₄J₅,·则所需调机时间 为



5+1+1+1+5=13

10.4 有 向 圈

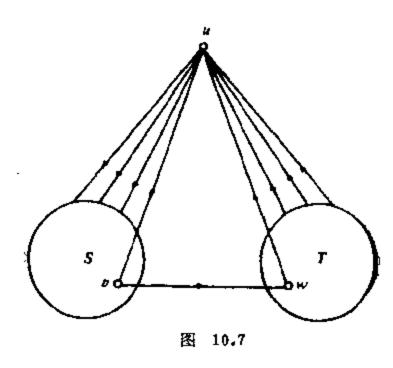
G 是有向图, S 与 T 是 V(G) 的子集, (S, T) 表示尾在S 头在T 的边集合。

定理 8 $v \ge 3$ 的强连通竞赛图的每一顶都含于某有向 k 阶层上,其中 $k=3,4,5,\cdots,v$ 。

证 设 G 是强连通竞赛图, u 是 G 的任意一个顶。 取 $S=N^*(u)$, $T=N^*(u)$ 。我们来证明 u 在 G 的三阶圈上(图 10.7)。 事实上,由于 G 是强连通竞赛图, S 与 T 皆非空,且(S ,T) \neq Ø,故有边 vw, $v \in S$, $w \in T$,于是 u 在三角形 uvwu 上,它是一个 3 阶有向图。

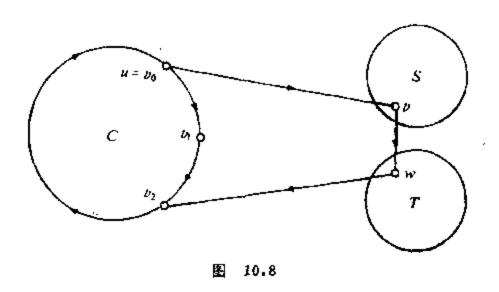
下面用对 k 的归纳法证明之。假设 u 在某长为 3 ,4 ,... ,n 的有向獨上,这里 n < v ,考虑 u 是否在某个长 n+1 的 圈 上。 设 $C = v_0 v_1 v_2 ... v_n$ 是一个 n 阶圈,且 $u = v_0 = v_n$. 若存在 $v \in V(G)$ -V(C) , v 是尾在 C 上的一边的头,又是头在 C 的一边之尾,

那么C上有顶 v_i , v_{i+1} , 使得 v_iv , vv_{i+1} $\in E(G)$, 于是 u 在 n



v,v,…v.上. 证年.

推论 3 G是强连通竞赛图的充分必要条件是G中有生成有向圈。



以后,我们称生成有向圈为有向Hamilton圈,含有向Hamilton圈的有向图叫做有向Hamilton圈。

下称无环亦无端点相同、方向相同的边之有向图 为 **严 格 有 向图**。

引理 1 G 是产格有向圈,则G有长度不小于 $\max\{\delta^-,\delta^+\}$ 172

的有向轨,其中 $\delta^- = \min_{v \in V(G)} \{d^-(v)\}, \delta^+ = \min_{v \in V(G)} \{d^+(v)\}.$

证 不妨设 $\max\{\delta^-, \delta^+\} = \delta^+$,不然可以考虑 G 的反向图,即把 G 之各边定向反过来得到的有向图 G' ,在 G 与 G' 中对应的有向轨的长度一致。设 $P(u_o,v_o)$ 是 G 中最长的有向轨,若 P 的长度小于 δ^+ ,由于 G 是严格有向图,必有尾为 v_o 而头不在 P 上的边,从而 P 可以延长,与 P 之最长性相违,故 $P(u_o,v_o)$ 的长不小于 $\delta^+ = \max\{\delta^-, \delta^+\}$ 。证单。

引理 2 G是严格有向图,且 $\max\{\delta^-,\delta^+\}=k>0$,则G中的有长度不小于 k+1 的有向图。

证 不妨设 $\max\{\delta^-, \delta^+\} = \delta^+$, G中一条最长轨为 $P(u_0, v_0)$,其长不小于 k>0,由于 G是严格有向图,从而应有 $d^+(v_0)$ 条以 v_0 为尾的边,这些边的头两两相异。又 $d^+(v_0) \geq k$,由 $P(u_0, v_0)$ 的最长性,这些以 v_0 为尾的边之头皆在 P上,故 G 中含长度不小于 k+1 的有向圈。证单。

定理 9 G 是严格有向图,且

$$\min\{\delta^-,\delta^+\} \ge \frac{v}{2} > 1$$

则 G是有向 Hamilton 图。

证 设 G 是满足定理条件但不含有向 H amilton 圈的图,G 中最长有向圈长为 I, $C=v_1v_2\cdots v_1v_1$ 是 G 的一个长 I 的有向圈。由引理 2,G 中有长度不小于 $\frac{v}{2}+1$ 的有向圈,故 $I>\frac{v}{2}$ 。令 P(u,v) 是 G-V(C) 中最长有向轨,其长为m (图10.9)。显然,

$$v \ge l + m + 1$$
.

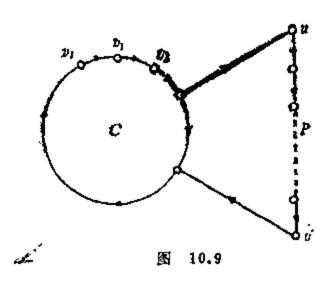
又因 $1>\frac{\nu}{2}$, 得

$$m < \frac{v}{2}$$
.



$$S = \{i \mid v_{i-1}u \in E(G)\},$$

$$T = \{i \mid vv_i \in E(G)\}.$$



首先证明 $S \cap T = \emptyset$ 。事实上,令 $C_{i,k}$ 是C上起于 v_i 止于 v_k 的部分。若某个i在 $S \cap T$ 之内,则G中就含有长l+m+1的有向圈 $C_{i,i-1}v_{i-1}uP(u,v)vv_i$,与C是G的最长圈矛盾。故知

$$S \cap T = \emptyset$$
 (2)

因P(u,v) 是G-V(C) 中最长有向轨,故有

$$N^-(u)\subseteq V(P)\cup V(C)$$
.

但在 $C \perp u$ 的内邻顶个数为 |S|, 于是,

$$d_G^-(u) = d_P^-(u) + |S|$$
.

又因 $d_G^-(u) \geqslant \delta^- \geqslant \frac{v}{2}$,且 $d_P^-(u) \leqslant m$,故有

$$|S| \geqslant \frac{\nu}{2} - m. \tag{3}$$

相似地有

$$|T| \geqslant \frac{v}{2} - m. \tag{4}$$

由 (1) 知 $S \neq \emptyset$, $T \neq \emptyset$ 。由 (3) 、 (4) 及 $v \geqslant l + m + 1$,得 $|S| + |T| \geqslant l - m + 1$. (5)

故由(2)得

$$|S \cup T| \geqslant l - m + 1 \tag{6}$$

又 $S \neq \emptyset$, $T \neq \emptyset$, 也不交, 故存在自然数 i , k , 使得 $i \in S$, $i + k \in T$, 且

$$i + j \in S \cup T, \ 1 \leq j < k. \tag{7}$$

. . . 3

这里的运算在 mod l 意义下进行。由 (6) 与 (7) 知 $k \le m$ 。故 $C_{i+k,i-1}v_{i-1}uPvv_{i+k}$ 是有向圈,长 l+m+1-k,比 C 还长,矛盾、证毕。

有向图的理论非常之多,本章只就有向轨、有向图、有向 Euler 图与有向 Hamilton 图等方面进行了较为深入的讨论,并 指出有向图与其底图之间在上述几方面虽有相似之处,但更有许多显著的区别。例如有向 Euler 图的充要条件是图可表 成 无 公共边的有向圈之并,与无向 Euler 图的充要条件为图可 表 成 无 公共边的圈之并是相似的,但谈到次数的条件,连通 无 向 图 为 Euler 图的充要条件是每顶皆偶次,而弱连通有向图为 Euler 图的充要条件是每顶皆偶次,而弱连通有向图为 Euler 图的充要条件是每顶皆偶次,而弱连通有向图为 Euler 图的充要条件是每顶皆偶次,而弱连通有向图为 Euler 图的充要条件是有顶皆偶次,而弱连通有向图为 Euler 图的充要条件是有顶皆偶次,而弱连通有向图为 Euler 图的充要条件是对。对每个 $v \in V(G)$ 成立,两者有明显区别,又如有向图中轨的长度,简直与底图中轨的长度不相关,却与似乎不相关的色数有密切关系,表现了定向后图的性质与其底图有时会有极大的偏离。

有向图还有一个特有的方向对偶性原则。

方向对偶原则:对每个关于有向图的定理,有一个相应的定理,它是由第一个定理中的每个概念代之以反向的概念得到的。

例如,有向图G的底图中无圈,则存在 $v \in V(G)$,使得 $d^+(v) = 0$ 。这个命题是成立的,因为若 P(u,v) 是G中的最长有向轨。则 $d^+(v) = 0$ 。

应用方向对偶原则,可以得出下面的一个正确的命题。有向图 G 底图中无圈,则存在 $v \in V(G)$,使得 $d^-(v) = 0$ 。

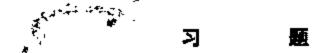
又例如,一个弱连通有向图是一个外向树的充要条件是恰有一顶 v_0 , $d^-(v_0)=0$,而对于其余的顶v,皆有 $d^-(v)=1$ 。

这个命题显然是正确的,由它及方向对偶性原则,可得下面的正确命题:

一个弱连通有向图是内向树的充要条 件 是 恰 有 一 顶 v_0 , $d^+(v_0)=0$, 而对于其余的顶 v_0 , $d^+(v)=1$.

本章的要点是:

- (1) 弱连通、单连通及强连通有向图的定义和单连通 与 强连通有向图的充要条件。
- (2) 有向 Euler 图的充要条件及有问"一笔画"的充分 条件。
 - (3) 有向图中的有向轨长度与色数的关系。
 - (4) 竞赛图及其性质, 存在"王"及有向 Hamilton 轨。
 - (5) 强连通竞赛图的充要条件及其性质。
 - (6) 有向 Hamilton 图的充分条件。
 - (7) 有向图理论对于有效磁鼓及工序问题的应用。



- 1 6 单图 G 可以有多少种不同的定向方式?
- 3. 有向图G中无有向圈,则 $\delta^{-}=0$, $\delta^{+}=0$.
- 4. G为强连通有向图的充要条件是其底图连通,且底图的每个块在G中强连通。
- 5. 有向图G之逆是G的每边皆反向定向得到的有向图G',证明。
- (1) (G')'=G。(2) d⁺_G,(v)=d⁻_G(v)。(3) G' 申 u 可 达 v 的充要条件是在G 中 v 可込 u。
- 6. 竞赛图是强连通有向图或只要改变一条边的方向就可变成强连通图。
- 7. G有一种定向方式,使得每条有向轨不长于 Δ (底图的最大次数).
 - 8. G是满足下列条件的有向图:
 - (1) $d^+(x) d^-(x) = d^-(y) d^+(y) = l$,
 - (2) $d^+(v) = d^-(v)$, $v \in V \{x, y\}$,

则G中有「条无公共边且以×为起点以×为终点的有向轨。

- 9. V(G) 的每一非空真子集 S, 均有 $|(S,\bar{S})| \ge k$, 则 称 非平凡有向图 G 是 k 边连通有向图。证明,非平凡有向图 G 是强 连通有向图的充要条件为它是 1 边连通有向图。
- 10. 百种昆虫,两种之中必有一种能咬死另一种。证明可以 将这一百种昆虫每种取一个虫子,再排成一个纵队,使得每个虫 子能咬死紧跟在它后面的那个虫子。
- 11. n 名棋手比竞,没有平局,也没有 v₁ 胜 v₂, v₂ 胜 v₃, ···, v₄ 胜 v₁ 的现象,则必有一人在所有的比赛中全胜,也必 有一人在所有的比赛中全负。
- 12. $n (n \ge 3)$ 名棋手比赛,无平局,亦无一人全胜,则 必有甲胜乙,乙胜丙,丙又胜甲的现象。
 - 13. 试设计 n=k=5 的磁鼓。
 - 14. 在 Petersen 图上设计单向行驶路线。
- 15. 桌上两堆火柴,两人轮流从某一堆中取若干根火柴,每次只能从一堆中取,不能不取,没有火柴可取的人是输者。给出取胜策略。
- 16. 一个有向图是本原的,若它的邻接矩阵 A 的某个幂的所有元皆正;试证,本原有向图 G 的充要条件是 G 为强连通图,且各个圈长的最大公约数为 1.

11 网络中的最大流

11.1 Ford 和 Fulkerson 算法

把商品从产地运往市场,交通网上每个路段运输能力给定的条件下,设计一个运输方案,使得运输得最快。为解决上述问题,我们讨论下面相应的数学模型;当然,下面的数学模型不只适用于运输问题,而且也适用于很多其它实际问题。

有向加权图 G,指定两个顶 s 和 t,分别称为源和 汇。边 e 上的权 c(e) 称为边 e 的容量,又设此有向图是严格有 向 图,则称这个有向加权图是一个网络。

映射 $f: E(G) \rightarrow R$, 满足

(C1)
$$\forall e \in E(G)$$
, $0 \leq f(e) \leq c(e)$,

(C2)
$$\forall v \in V(G) - \{s, t\},$$

$$0 = \sum_{e \in a(v)} f(e) - \sum_{e \in \beta(v)} f(e), \qquad (1)$$

其中 $\alpha(v)$ 表示以v 为头的边集, $\beta(v)$ 表示以v 为尾的边集,则称f 为流函数。称

$$F = \sum_{e \in a(t)} f(e) - \sum_{e \in B(t)} f(e)$$
 (2)

为 f 的流量。

我们的目标是定义一个流函数f, 使 $F = \max$.

设 $S \subset V(G)$, $s \in S$, $t \in V(G) - S = \overline{S}$, 则 称 (S, \overline{S}) 为网络的一个量。称

$$C(S) = \sum_{e \in (\varepsilon, \overline{\tau})} c(e)$$

为截量.

引建 1 对每个 $S \subset V(G)$,

$$F = \sum_{e \in (s,\overline{s})} f(e) - \sum_{e \in (\overline{s},s)} f(e)_{*}$$

证 把 (2) 及关于 $v\in S-\{t\}$ 的一切 (1) 型方程 相 加,左 端为 F,考虑边 e=xy,因 $v\in S-\{t\}$,所以不考虑 x,y 皆在 S中的情形。

- (a) $x, y \in S$, 关于 y 的 (1) 型方程出现正 的 f(e), 关于 x 的 (1) 型方程中出现负的 f(e), 正负抵消。
- (b) 者 $x \in S$, $y \in \overline{S}$, 则右端只出现 f(e) 的 正 项,这 时 是 $e = xy \in (S, \overline{S})$.
- (c) 若 $x \in \bar{S}$, $y \in S$, 则右端只现 f(e)的负项,这时是e = xy = (\bar{S}, S) .

由(a),(b),(c)知引理1成立。证毕。

引理 1 的直观意义是明显的, $\sum_{e \in (s,\overline{t})} f(e)$ 是从S 流入 \overline{S} 的 总

量, $\sum_{e \in \overline{G}, s} f(e)$ 是从 \overline{S} 倒流入 S 的总量, F 表示净流入 t 的量,

所以应该是从S流入 \bar{S} 的量减去从 \bar{S} 倒流入 \bar{S} 的量。

引達 2 对每个流函数及每个 $S \subset V(G)$,

$$F \leqslant C(S). \tag{3}$$

证 由引理1;

$$F = \sum_{e \in (s,\overline{s})} f(e) - \sum_{e \in (\overline{s},s)} f(e).$$

(由C1),

$$0 \leq f(e) \leq c(e),$$

故得

$$F \leqslant \sum_{e \in (S, \overline{s})} c(e) = C(S)$$
.

证毕.

推论1 若F = C(S),则f 是最大流, (S, \overline{S}) 是最小载(指 C(S) 最小)。

为简洁地表述 Ford-Fulkerson 算法 (下称 2F 算法), 我们约定;

(1) 若 e = uv, u 已有标志, 而 v 尚未标志, 且 c(e) > f(e), 则称通过边 e 可以向前标志顶 v, 规定

$$\Delta(e) = c(e) - f(e),$$

且得到标志边e。

(2) 若 e=vu, u 已有标志, 而 v 尚未标志, 且 f(e)>0, 则称通过边 e 可以**向后标志**顶 v, 规定

$$\Delta(e) = f(e),$$

且得到标志边 e.

2F 算法 (Ford, Fulkerson, 1962):

- (1) 对每边 e, 取 f(e) = 0.
- (2) 标志顶点 s, 其它顶未标志。
- (3) 选可向前标志或可向后标志的顶 v, 若无此种 顶 可 选时, 止, 现流函数即为最大流; 若有此种顶可选, 则得新的标志顶 v 及标志边 e; 若 v = t, 转 (4), 否则转 (3)。
- (4) 设已得标志之轨为(此轨是无向的) se [v] e 2v, ···e, t, 从 t 始沿此轨逆行, 令

$$\Delta = \min_{1 \le i \le l} \Delta(e_i),$$

者 e_i 是前进边,即在有向图 中 $e_i = v_{i-1}v_i$, $(s = v_0, t = v_i)$ 则 $f(e_i) \leftarrow f(e_i) + \Delta_i$

若 e, 是后退边, 即 e, = v, v, -, , 则

$$f(e_1) \leftarrow f(e_1) - \Delta$$

(5)转(2)。

在 2F 过程中, f 始终满足 (C1)与(C2)。

若 c(e) 是整数、初始流为0,则每次经 2F 的调整、流量 至

少增加1,而流量的上界为 $\sum c(e)$,故 2F 算法经有限步之 后必停止。

定理 $\mathbf{1}$ $\mathbf{2F}$ 算法止时得到的函数f 是最大流,且最大 流 最 等于最小截的容量。

证 设 2F 止时,S 是最后一轮从s 开始而不能达到t 的 标 志过程中可得到标志的顶之集合, 于是,

$$f(e) = \begin{cases} c(e), & e \in (S, \widehat{S}), \\ 0, & e \in (\overline{S}, S), \end{cases}$$

不然可得新的不属于S的标志顶,这已不可能。由引理1,

$$F = \sum_{e \in (S,\overline{S})} f(e) - \sum_{e \in (\overline{S},S)} f(e) = \sum_{e \in (S,\overline{S})} c(e) = C(S).$$

由推论 1, f 为最大流, (S,\overline{S}) 为最小截, 且最大流量 等于最

小截之容量、证毕。

定理1说明最大流是存在的,它可由2F 算法求得,定理1 一般称为网络中的"双量定理"。它是图论中的核心定理之一, 不久我们就会发现,《双最定理在理论与实际问题当中,有许多精 彩的应用.

11.2 Dinic 算 法

2F 算法有缺点,例如图 11.1 中所示的网络,用 2F 算法 求

得最大流时, 若通过 sabt 与 sbat 交替地充当增载 轨(2F 算法无 法 排除这种 坏 可 能) , 由 f(e) = 0开始增载, 需要进行 2M 次增载才 能获得最大流,于是2年的计算其 时间复杂度不仅与网络之规模,即 边数与顶数有关,而且还与(原则 上是任意的) 边之权有关系(图11.1).

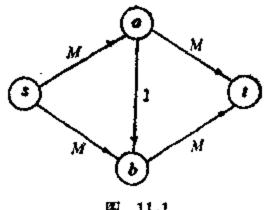


图 11.1

本节我们介绍另一个求最大流的算法,它是 1970 年由 Dinic 提出的一个有效算法。

下面我们把 e=uv, 且 0 < f(e) < c(e) 或 e=vu, f(e) > 0的 边叫做从#到#的有用边。

首先用下面的分层算法获得 层状网络。

分展算法:

- (1) $V_0 \leftarrow \{s\}, i \leftarrow 0$
- (2) $T \leftarrow \{v \mid v \in V_i, j \leq i, 且存在一个从 V, 某顶到 v 的有$ 用边}.
 - (3) 若 $T = \emptyset$, 止, 网络上的流即为最大流。
 - (4) 若 t∈T, 则 l←i+1, V, ←{t}, 止,
 - (5) 令 V₍₊₁←T, 增大 i, 转 (2).

上述分层算法的时间复杂度为O(|E|)

 $V_i(0 \le i \le l)$ 叫做第 i 层,仅相邻两层之间有 边,是 从 层 次小的层中的顶到层次大的层的顶的有用边。得到的这个网络叫 于流函数 / 的层状网络。 定理 2 若分展算法止于 (3) , 则 / 为最大流。 做关于流函数丿的层状网络。

证 令
$$S = \bigcup_{k=0}^{\infty} V_k$$
,则 (S,\bar{S}) 中的边 $e = uv$ 满足 $f(e) = c(e)$,

不然 e 是从 u 到 v 的有用边, 这与 $T = \emptyset$ 矛盾。同理在(\bar{S} ,S)中 的边e = vu满足f(e) = 0。由引理1,

$$F = \sum_{\sigma \in (S,\overline{I})} f(e) - \sum_{\sigma \in (\overline{I},S)} f(e) = \sum_{\sigma \in (S,\overline{I})} c(e) \approx C(S),$$

由推论1、1是最大流、证鉴。

下而讨论如何利用层状网络改进原来网络中的流量, 设原网 络中的流函数是f, E, 是层状网络 中 从V₁₋₁ 到V₁ 的 边 集 合 $\forall e = uv \in E_I$,规定

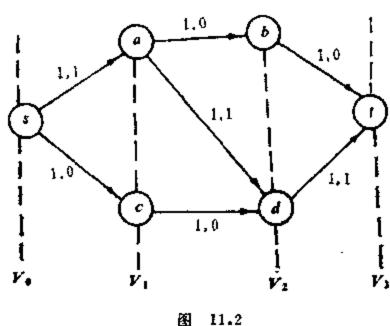
$$\widehat{c}(e) = \begin{cases} c(e) \stackrel{?}{=} f(e), & u \in V_{i-1}, & v \in V_{i}, \\ f(e), & v \in V_{i-1}, & u \in V_{i}. \end{cases}$$

ō(e)表示 e 上可改进的流量的上界。

我们把层状网络的边取权 $\bar{c}(e)$, 采用零初始流 $\bar{f}(e) \equiv 0$, 并 把层状网络上的边重新定向为都从 V ;- ; 指向 V , (有的 边 在 原 网络中的方向可能与此相反),E,表示从 V_{i-1} 指向 V_i 的边集。

所谓**层状网络上的极大流** \overline{f} 是指对每一条轨 $sv_1v_2\cdots v_{t-1}t$ 上 至少有一边 e_i , 使得 $\tilde{f}(e_i) = \tilde{c}(e_i)$, 其中 $v_i \in V_i$, $e_i \in E_i$.

值得注意的是, 层状网络上的极大流未必是它的最大流, 例 如图 11,2 中,其最大流量为 2, 而图中标出的极大流流量为 1,



如果我们能求得层状网络上的一个极大流产,则可以如下地 把原网络上的流 f 改进成流量更大的流 f':

$$f'(e) = \begin{cases} f(e) + \bar{f}(e), & e = uv \in E(G), u \in V_{i-1}, v \in V_i; \\ f'(e) = \begin{cases} f(e) - \bar{f}(e), & e = vu \in E(G), u \in V_{i-1}, v \in V_i; \\ f(e), & \exists E. \end{cases}$$

容易证明 f'(e) 在原网络中满足(C1), (C2), 且 f' 的 流 量 F'大于f的流量F。

我们把由原来网络的施 f 找到分层网络。 再求得层状网络上 的极大流 7。并把原网络的流改进成 11 的一个过程叫做 一 个 黔 **段**. 层状网络最后一层的脚标 / 叫做**感状网络的 长 度**,用 / _{*} 表 示第 k 阶段层状网络的长度。

求层状网络 🛚 上极大流的算法:

- (1) 对 N 上每条边 e, 标志 e 未堵塞, f(e)←0.
- (2) $v \leftarrow s$, $S = \emptyset$.
- (3) 若无未堵塞的边e=vu, u 在下一层,则(v 是 堵 死端)执行:
 - 。 (3.1) 若 s = v, 止, f 即为极大流.
 - (3.2) 从S 中移出其顶部的边e = uv.
 - (3.3) 标志 e 堵塞, v←u.
 - (3.4) 转(3)
- (4)选一未堵塞边 e = vu (u 在下一层),把 e 放入 S中, v ← u, 若 v ≠ t, 转 (3).
 - (5) S 中的边构成一个可增载轨

$$se_1v_1e_2v_2e_3\cdots v_{l-1}e_lt_*$$

(5.1)
$$\Delta \leftarrow \min_{1 \le i \le l} \{ \bar{c}(e_i) - \bar{f}(e_i) \}$$
.

(5.2) 对每个1 $\leq i \leq l$, $\overline{f}(e_i) \leftarrow \overline{f}(e_i) + \Delta$. 当 $\overline{f}(e_i)$ = $\overline{c}(e_i)$, 标 e_i 堵塞.

(5.3) 转(2)。

上述求极大流的时间复杂度是 $O(|E| \cdot |V|)$ 。

下面我们将证明。凡 是严格递增函数,于是分层只能进行不

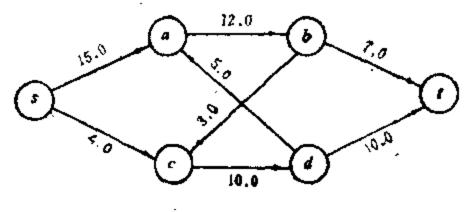
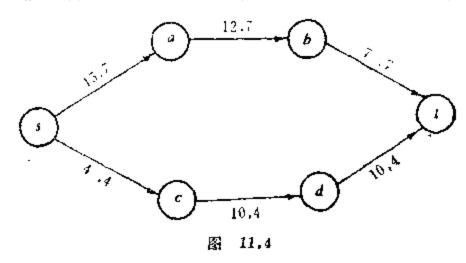


图 11.3

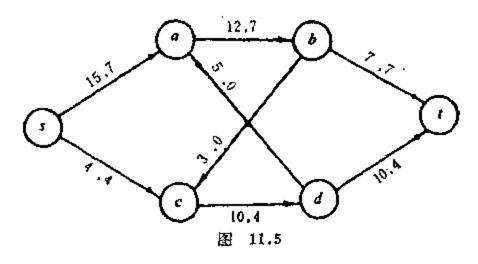
超过 |V|-1次,即有限阶段后,对所得之流函数已不能再分层,由分层算法中的(3),即得到了最大流,而整个 Dinic 算法的时间复杂度是 $O(|V|^2 \cdot |E|)$.

例 1 求图 11.3 中网络上的最大流。

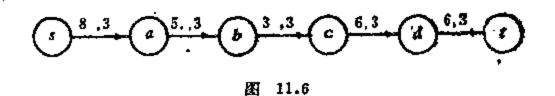
解 图中边上的第一个数是边容量,第二个数是流函数值。第一阶段分层网络及其上的极大流如图 11.4 所示。改进后



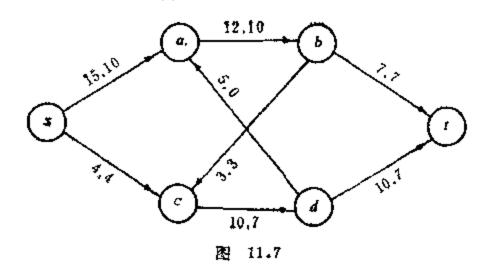
的流为图 i1.5 所示。



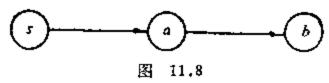
第二阶段用图 11.5 中的流函数来分层得层状网络及其 极 大流 (图11.6)。



原网络上第二阶段得以改进的流如图 11.7 所示。



第三阶段用图 11.7 中的流函数分层时未到达 t 即中止于 6 (图 11.8), 于是图 11.7 中的流函数即为最大流,其流量为14.



定理 3 Dinic 算法必能求得最大流。

证 只欠证若第k+1阶段不是最后阶段,则 $l_{k+1}>l_{k+1}$ 设在第k+1阶段的层状网络中,有从s到t的长 l_{k+1} 的轨

$$P = se_1v_1e_2\cdots v_{t_{k+1}-1}e_{t_{k+1}}t_{\bullet}$$

(1)设P上的一切顶在第k阶段的层状网络上出现过。用 V_i 表示第k阶段层状网络上第j层中的顶集,若v. $\in V_i$,则 $a \ge b$.

用关于α的归纳法证明之。

a=0 时, $v_*=v_0=s$, $V_0=\{s\}$,命题 " $v_*\in V_*$,则 $a\geq b$ "成立;假设 $v_*\in V_*$, $v_{*+1}\in V_*$,若 $c\leq b+1$,由归纳法 假 设 $v_*\in V_*$ 时, $a\geq b$,得 $a+1\geq b+1$ 。今 $c\leq b+1$,故 $c\leq a+1$ 。若 c>b+1,而今 $v_{*+1}\in V_*$,又 V_* 与 V_* 不是邻层,这是不可能的。故 只 有 $c\leq a+1$ 。

今 $t=v_{l_{k+1}},t\in V_{l_k}$,故有 $l_{k+1}\geq l_k$ 。下证等号不能成立。若

1,+1=1,,我们已假设 P 上的顶在 k 阶段的层状网络上出现过, 轨上之边在 k+1 阶段的层状网络上用过,则在 k 阶段的层 状 网络上用过,且 P 整个在 k 阶段层状网络上,此与 k 阶段 上 得出过极大流矛盾。

(2) 设 P 上有的顶未在第 k 阶段层状网络上出现,令 e_{-+1} = $v_{-}v_{-+1}$ 是对某个 $b_{-}v_{-}\in V_{-}$,但 v_{-+1} 不在第 k 阶段层状 网络上出现的第一条边,则 e_{-+1} 在第 k 阶段层状 网络中未用过, e_{-+1} 在第 k+1 阶段开始时有用,故在第 k 阶段开始时也有用。由分层算法 (4) , $V_{b+1}=\{t\}$, $b+1=l_{k}$,于是 $a \ge b$, $a+1 \ge b+1=k_1$,又 $v_{a+1} \ne t$,故 $l_{a+1} > a+1$,所以 $l_{a+1} > l_a$,证学。

11.3 容量有上下界的网络

设边容量之下界为 $b(e) \ge 0$, 上界为 c(e), 这时流 函 数 应满足

(C1')
$$b(e) \leq f(e) \leq c(e)$$
.

(C2')
$$\sum_{e \in a(v)} f(e) - \sum_{e \in \beta(v)} f(e) = 0, \quad v \neq s, t.$$

我们的目标仍然是求最大流。但是,有上下界的网络,有时不存在流,例如图 11.9 中的网络就没有流函数。边上第一个数

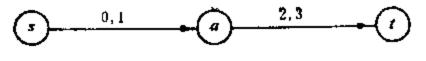


图 11.9

是 b(e), 第二个数是 c(e).

下面讨论有上下界的网络中有可行流的充要条件。我们把有上下界的网络记成 N(G(V,E), b(e), c(e)), N的**附加网络** N 为下述网络:

(1) *P*={*s*,*i*} ∪*V*, *s*,*i*∈*V*, *s*,*i* 分别叫做附加源与附加汇。

- (2) 对每个 $v \in V(G)$, 加一条新边 $e = v \bar{t}$, 令 $\bar{c}(e) = \sum_{e \in B(v)} b(e)$, $\bar{c}(e)$ 是 e 的容量上界,下界取 0.
- (3) 对每个 $v \in V$,加一条新边 $e = \overline{s}v$, \diamondsuit $\overline{c}(e) = \sum_{e \in a(v)} b(e)$, $\overline{c}(e)$ 是 e 的容量之上界,下界取 0 。
- (4) E 中的边 e 在 N 中皆保留,但界要变: 下 界 取 0, 上界 $\bar{c}(e) = c(e) - b(e)$.
- (5) 再加新边 e = st, e' = ts, 且令 e = e'的下界为 0,上界 $\tilde{c}(e) = \tilde{c}(e') = \infty$ 。

定理 4 网络 N(G(V,E),b(e),c(e))有可行流的充 要 条件是附加网络 \overline{N} 上的最大流使流出 \overline{S} 的一切边皆满载(可 行 流即满足(C1')(C2')的流)。

证 设 \overline{N} 中流函数 \overline{f} 使得从 \overline{S} 发出的边皆满载,对于N,令 $f(e) = \overline{f}(e) + b(e)$, $e \in E(G)$.

下证 f(e) 是 N 中的可行流。

(i) $b(e) \leq f(e) \leq c(e)$.

事实上, $0 \le \overline{f}(e) \le \overline{c}(e) = c(e) - b(e), e \in E(G), \text{所以} f(e)$ 满足(C1')。

$$b(e) \leq f(e) \leq c(e)$$
.

(ii) f(e)满足(C2').

令 $v \in V(G) - \{s,t\}$,而 $\sigma = \overline{S}v$, $\tau = v \in \mathbb{R}$ 中的边,由 \overline{N} 中的 \overline{I} 满足(C2')、得

$$\sum_{\vec{\sigma} \in a(v)} \bar{f}(e) + \bar{f}(\sigma) = \sum_{\sigma \in \beta(v)} \bar{f}(e) + \bar{f}(\tau), \qquad (1)$$

又有定理条件

$$\bar{f}(\sigma) = \bar{c}(\sigma) = \sum_{\sigma \in \alpha(v)} b(e), \qquad (2)$$

$$\bar{f}(\tau) = \bar{c}(\tau) = \sum_{e \in \beta(e)} b(e). \tag{3}$$

由(1), (2), (3)得

$$\sum_{\sigma \in \alpha(v)} \bar{f}(e) + \sum_{\sigma \in \alpha(v)} b(e) = \sum_{\sigma \in \beta(v)} \bar{f}(e) + \sum_{\sigma \in \beta(v)} b(e),$$

从而得

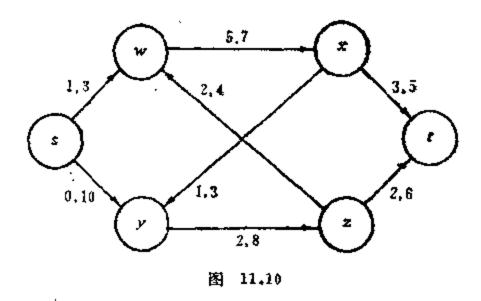
$$\sum_{e \in \sigma(v)} f(e) - \sum_{e \in \beta(v)} f(e) = 0,$$

即 f(e)满足(C2'),故 f(e) 是可行流。反之,若 f(e) 是 N 的可行流,令

$$\tilde{f}(e) = \begin{cases} f(e) - b(e), & e \in E(G); \\ \bar{c}(e), & e \in \alpha(\tilde{i}) \text{ if } e \in \beta(\tilde{S}). \end{cases}$$

显然 F(e) 是 \overline{N} 上使得从 \overline{S} 发出的边皆满载的流。证单。

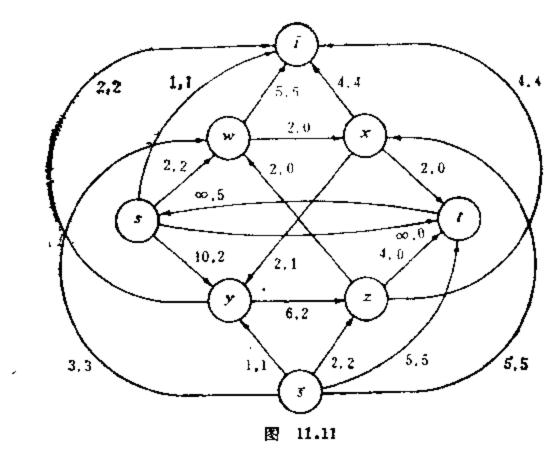
例 2 求图 11.10 中网络上的最大流,边上写的数第一个是 b(e),第二个是 c(e)。



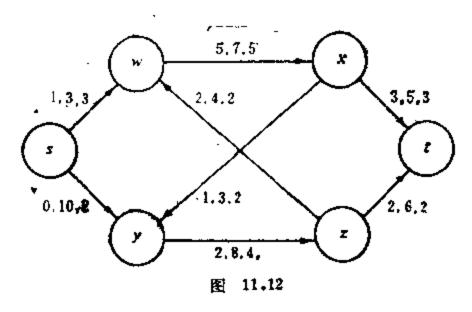
解 (1)作附加网络,如图 11.11,用 2F 或 Dinic 算法。求得附加网上的最大流 f。在图 11.11 上,用边上 第二 个数 值表示,由于出 S 的边皆满载,由定理 4 ,图 11.10 中有可行流。

(2) 把 7 化为原网络图 11.10 上的可行流

$$f = \overline{f} + b(e),$$

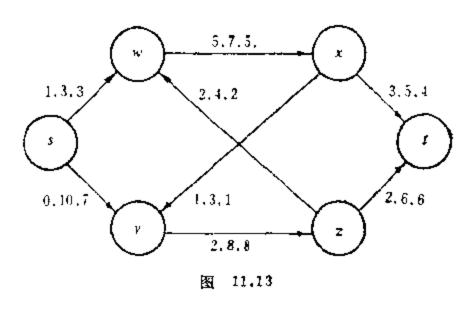


如图11.12, 边上的三个数依次为b,c,f.



(3) 把图 11.12 中的可行流放大(用 2F 算法亦可用 Dinic 算法), 得最大流如图 11.13。

最大流的流量F=10.



11.4 有供需约束的流

设 N(G(V,E),c(e)) 是一个网络,c(e)是边 e 的容量,又 $X = \{x_1,x_2,\dots,x_n\}$ 是源集合, $m \ge 1$, $Y = \{y_1,y_2,\dots,y_n\}$ 是汇集合, $n \ge 1$.

$$\sigma: X \rightarrow \{0,1,2,\cdots\},$$

 $\sigma(x_i)$ 称为源 x_i 的供应量;

$$\rho, Y \to \{0, 1, 2, \cdots\},\$$

 $\rho(y_i)$ 称为汇 y_i 的需求量.要求流函数 f(e)不仅满足 (C1)(C2),而且满足供求约束.

(C3)
$$\sum_{\sigma \in \beta(x_i)} f(\sigma) - \sum_{\sigma \in \alpha(x_i)} f(\sigma) \leq \sigma(x_i), i = 1, 2, \dots, m;$$

(C4)
$$\sum_{e \in a(y_i)} f(e) - \sum_{e \in \beta(y_i)} f(e) \geqslant \rho(y_i), i = 1, 2, \dots, n.$$

(C3) 表示对于产地,求不能过于供; (C4)表示对于 销 地,供不能低于求,这样可以免于发生供求矛盾。

把满足 (C1), (C2), (C3), (C4) 的流 f(e) 称为可行流。若

 $S\subseteq X$,则记 $\sigma(S)=\sum_{v\in I}\sigma(v)$,若 $S\subseteq Y$,则记 $\rho(s)=\sum_{v\in I}\rho(v)$.

下面给出可行流的充要条件、

定理 4 f 是有供需约束的可行流,当且 仅 当 对 一 切 $S \subseteq V(G)$ 。

$$C(S) \geqslant \rho(Y \cap \bar{S}) - \sigma(X \cap \bar{S}),$$

其中 \overline{S} 是 S 的补集,X 为源集,Y 为汇集,C(S) 为 (S,\overline{S}) 中边约容量和(即载量)。

证 构作新网络N'.

- (i) 增加两个新顶 x。, y。。
- (ii) 加边 x_0x_i , $i = 1, 2, \dots, m$, 令 $c(x_0x_i) = \sigma(x_i)$.
- (iii) 加边 $y_i y_0$, $j = 1, 2, \dots, n$. 令 $c(y_i y_0) = \rho(y_i)$.
- (iv) $\Diamond x$ 。为 N' 的源, y。为 N' 的汇。

容易证明,N有可行流的充要条件是N'中有一个使 $(Y,\{y_o\})$ 中每边皆满载的流。

今有 N' 中的流使 $(Y, \{y_o\})$ 中每边 皆 满 载,则 其 流 量 $\rho(Y) = C(Y)$,此流是 N' 中的最大流。这说 明 N 有可 行 流,当且仅当对 N' 中的每个截($S \cup \{x_o\}$, $\bar{S} \cup \{y_o\}$)成立

$$C(S \cup \{x_0\}) \geqslant \rho(Y)$$

等价于

$$C(S,\bar{S}) + \rho(Y \cap S) + \sigma(X \cap \bar{S}) \geqslant \rho(Y), \tag{3}$$

等价于

$$C(S, \bar{S}) \geqslant \rho(Y) - \rho(Y \cap S) - \sigma(X \cap \bar{S}),$$

等价于

$$C(S,\bar{S}) \geqslant \rho(Y \cap \bar{S}) - \sigma(X \cap \bar{S})$$

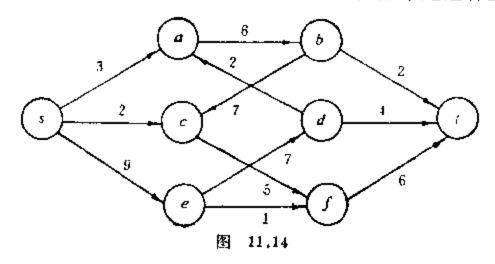
证毕.

从算法的角度而言,只要用 2F 或 Dinic 算法,求 N' 的 最大流 f,若 f 是使 $(Y,\{y_o\})$ 中每边皆满载的流,则 f 亦是 N 中的可行流。

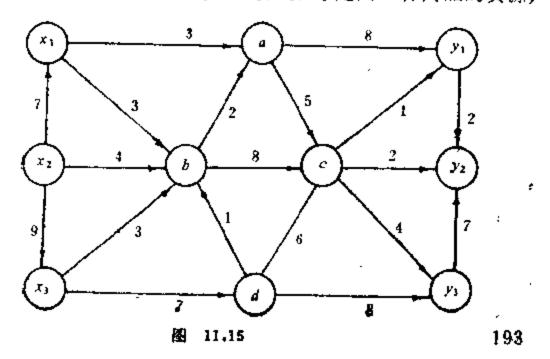
本章主要介绍了Ford-Fulkerson 算法和 Dinic 算法来求最大流,有上下界的网络和有供需约束的网络可以转化成另一个网络,继而可用 2F 或 Dinic 来求解。这些算法,似乎有点烦琐但很重要,应熟练掌握。至于最大流最小截定理,即双最定理,是图论中的骨干定理之一,它对于理论和实际的问题,都有 尔用。这一点,从下一章我们就会看得更清楚。

习 類

- 1. 若网络中不存在从s到t的轨, s是源, t是汇, 则此网络上的最大流量与最小截量皆为0.
 - 2. 求图 !!.14 中网络的最大流,边上的数字是边容量。

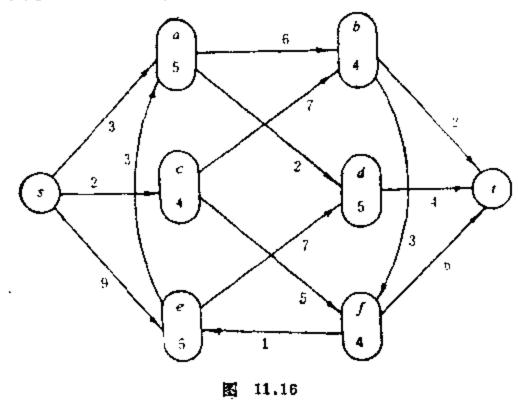


3. 在图 11.15 的网络中, x₁,x₂,x₃ 是同一种商品的货源,



供应量 x_1 为 5, x_2 为 10, x_3 为 5; y_1,y_2,y_3 是市场,需求量 y_1 是 5, y_2 是 10, y_3 为 5,是否所有的需求皆可同时被满足?

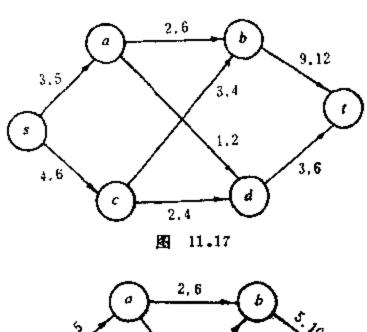
4. 在图 11.16 中,除 边有容量外, s 与 t 外的每个顶都有一个可以通过它的流量的上界,即顶的容量,它写在 顶 标 志 之下. 求此网络上的一个最大流。

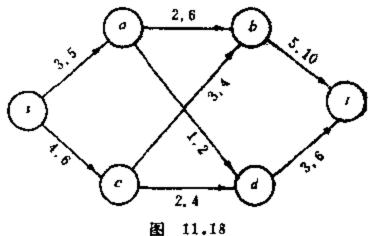


- 5.(a) 写出一个如同 2F 算法的标志过程, 但标志由 f 开始, 到达 s 时即得一可增载轨。
- (b) 写出一个当此边容量增大时,最大流量也增加的边之定位方法。
 - (c) (b)中所述之边总存在吗?
- 6. 证明有供需约束的网络上有可行流的充要条件是N'中有一个使 $(Y,\{y,\})$ 每边皆满载的流,其中N'见定理 4 之证明。
- 7. 证明 在有 正下界 b(e) 但无上界 $(c(e) = \infty)$ 的网络中,存在可行流的充要条件是对每一边 e ,要么 e 在一个 有 向 回 路上,要么 e 在 由 e 到 f 或由 f 到 f 的有向道路上。
 - 8. 在第2题中,岩边上写的为下界,而无上界,求一个最 194

小流.

- 9. 下面 两个网络(图11.17,图11.18)中,哪个无可行流?若存在可行流,求其最大流与最小流;若不存在可行流,找出一个不含源亦不含汇的顶子集,它要么要求"冒出"流,要么要求"漏掉"流。
- 10. 证明有上下界的网络中无可行流的充要条件是:存在一个顶子集,不含源与汇,且它要求"冒出"或"漏掉"流。





12 网络流方法的应用

12.1 顶连通度

若 $S \subset V(G)$, $\{a,b\} \subset V - S$, 若每条由 a 到 b 的轨至 b 一个内顶在 S 中,则称 S 为 $\{a,b\}$ 分离集; a 与 b 相邻时,无 $\{a,b\}$ 分离集、设 b 是 $\{a,b\}$ 分离集集合,令

$$N(a,b) = \min |S|, S \in \mathcal{S}$$

N(a,b) 叫做 a 顶与 b 顶的 b **高數**.

我们称从 a 到 b 的两两无公共内顶的轨为独立轨。

·定理 1 a,b是图 G(V,E) 不相邻的项,则 N(a,b) = p(a,b).

其中 p(a,b) 是 a 到 b 独立轨的最大条数。

证 我们构作一个有向图 $G(\overline{v}, \overline{E})$. 把 V(G)中的每一顶变成 \overline{v} 中的两个顶 v' 与 v'',且 $e_* = v'v'' \in \overline{E}$ 。对于 E 中每条边 e = uv,在 \overline{E} 中有两条边 e' = u''v', e'' = v''u' 与之对应,此外, $G(\overline{v}, \overline{E})$ 中无其它的边与顶。在 $G(\overline{v}, \overline{E})$ 上形成一个网络, a''为源,b'为汇,对 e_* 型边,容量为 1 ,其它边容量 ∞ .

下证 p(a,b) 是 a' 到 b' 的最大流量 F。

设无向图G中有p(a,b) 条从a到b的独立轨,每条这种 轨相应地在 $G(\overline{P},\overline{E})$ 中形成一条有向轨。在G中的轨为

$$av_1v_2\cdots v_{l-1}b,$$

在 $G(\overline{v}, \overline{\varepsilon})$ 中相应的有向轨为

$$a''v'_1v''_1v'_2v''_2\cdots v'_{l-1}v''_{l-1}b'$$
,

这些有向轨在 $G(\overline{v}, \overline{\varepsilon})$ 中两两无公共内顶,每条都可以用来 从

a" 到b' 流过1个单位的流量, 故

$$F \geqslant p(a,b)$$
.

设 f 是一个最大流,其流量为 F,由 $G(\overline{V}, \overline{E})$ 的构造及边容量之分配知,这 F 个单位的流量被分解到 F 条独立有向轨上去了,每条轨流过 1 个流量,故

$$F \leq p(a,b)$$
.

至此得知

$$F = p(a,b)$$
.

由双最定理,F 等于某截 (S,\overline{S}) 之容量, $a'' \in S$, $b' \in \overline{S}$,所以 $C(S) = \sum_{\sigma \in (S,\overline{S})} c(e) = F < \infty$,即 (S,\overline{S}) 中的边皆e.型。而

在 $G(\overline{P}, \overline{E})$ 中,从 a' 到 b' 的有向轨上至少含(S, \overline{S}) 中的一条 边,故 G 中每条由 a 到 b 的轨至少含一个顶 v,使 e. 在 (S, \overline{S}) 中、于是

$$R = \{v \mid v \in V(G), e \in (S, \overline{S})\}$$

是无向图 G 中(a,b) 分离集,且

$$|R| = C(S) = F.$$

从而有

$$N(a,b) \leq F$$
.

另一方面, 显然有 $N(a,b) \ge p(a,b)$, 故得证

$$N(a,b) = p(a,b).$$

证毕.

无向图G的顶连通度 $\kappa(G)$,用我们本章的符号则可写成。

$$\kappa(G) = \begin{cases} |V| - 1, & G$$
 为完全图;
$$\min_{a,b \in \mathbb{R}^{9}} N(a,b), G$$
 不为完全图.

定理 2
$$\kappa(G) = \min_{a,b \in V(G)} p(a,b).$$

证 G是完全图,定理显然成立。下面考虑G不是完全图的 特形,先证明

$$\min_{a,b\in V(G)} p(a,b) = \min_{a,b\in V(G)} p(a,b).$$

设 $ab \in E(G)$, e = ab, 且 p(a,b)是一切间顶对间独立轨最大条数的最小值, 令 G' = G - e, 在 G'中 a,b间独立轨最大条数为 p(a,b)-1=p'(a,b)。由定理 1, G'中存在 (a,b) 分 离 集 R, 使得

$$p'(a,b) = |R| = p(a,b) - 1$$

若 |R| = |V| - 2, 则 p(a,b) = |V| - 1, 但 当 $u,v \in V(G)$, u 与 v 不相邻时, $p(u,v) + 2 \le |V|$, $p(u,v) \le |V| - 2$, 这是不 可能的,故得 |R| < |V| - 2. 于是存在 $v \in V - (R \cup \{a,b\})$, 不 妨 设 R 是 (a,v) 分离集(不然用 (b,v) 代替 (a,v)),于是 G 中 $av \in E(G)$, $R \cup \{b\}$ 也是 (a,v) 分离集,因而

$$p(a,v) \leq |R| + 1 = p(a,b),$$

故得

$$\min_{\substack{a,b\in V(G)\\a,b\neq\emptyset}} p(a,b) = \min_{\substack{a,b\in V(G)\\a,b\neq\emptyset}} p(a,b).$$

下面证明 G 不是完全图时,

$$\kappa(G) = \min_{a,b \in V(G)} p(a,b).$$

事实上,这时 $\kappa(G) = \min_{\substack{a,b \in V(G) \\ 4 \cdot b}} N(a,b)$ 。由定理 1,得

$$\kappa(G) = \min_{\substack{a,b \in V(G) \\ a,b \in X}} p(a,b) = \min_{\substack{a,b \in V(G) \\ a,b \in X}} p(a,b).$$

证毕.

定理1和定理2告诉我们如何通过求某网络上的最大流而得到 $\kappa(G)$ 的值。

定理1和定理2是图论中十分重要的两个定理,是著名的Menger型定理中的两个,它们有许多精彩的推论。

G是无向图, $x \in V(G)$, $U \subset V(G)$, $x \in U$, 一端为 x, 另一

198

端在U中的|U|条除x外再无公共顶的轨形成的 子图 叫做G的 — 个x = U **扇子**。

推论 1 G 是 k 连通图的充要条件是 $|V(G)| \ge k+1$,任 取 $U \subset V(G)$, |U| = k, $x \in V(G) - U$, 则存在G 的x = U 顧子。

证 假设 G 是 k 连通图,显然 $|V(G)| \ge k+1$,加一新顶 y,把 y 与 U 的每顶之间连一边,得图H,对 H 应用定理 2 ,知 x 与 y 之间有 k 条独立轨,故 G 中有x-U 扇子。反之,设 $|V(G)| \ge k+1$,且有推论中所述的扇子,但 G 非 k 连通图,则 $\kappa(G) \le k-1$,于是 存在 x , $y_1 \in V(G)$, $S \subset V(G)$, |S| = k-1 ,在 G-S 中, x , y_1 不连通,在 G 中无 $x-(S \cup \{y_1\})$ 扇子,矛盾。证单。

推论 2 (Dirac) G是 k 连適图, $k \ge 2$, 则任意 k 个项共图。

证 对 $k \pm l \ge 2$ 时推论已成立,要证 k = l + 1 时,推论 2 仍成 立。假 设 $k = l \ge 2$ 时推论已成立,要证 k = l + 1 时,推论 2 仍成 立。

事实上,因G是 l+1连通的,所以也是 l 连通的,由 归 纳 法假设,任取的 l+1 个顶中的 l 个是共圈的,记它们所在 的 圈 是 C_1 . 另一方面,由推论 1 ,任取 $x\in V(G)$,再任取 $U\subset V(G)$, $x\in U$, $\{U\}=l+1$,存在x-U扇子。记上述 l+1 个顶是 v_1,v_2 , … , v_{l+1} , $\{v_1,v_2,\dots,v_l\}\subseteq V(C_l)$, 而 $|V(G)|\geqslant l+2$, 我们取 $U=\{v_1,v_2,\dots,v_l,w\}$, $x=v_{l+1}$. 若 C_l 上只有 l 个顶,由扇 子 $v_{l+1}-U$ 可知 v_1,v_2,\dots,v_{l+1} 共圈 $v_1v_2\dots v_l\dots v_{l+1}\dots v_{l+1}\dots v_{l+1}$

若 C_1 上存在一顶 $u \in \{v_1, v_2, \dots, v_1\}$,不妨 设 $u \in v_1 v_2$ 。在 扇子 $v_{i+1} - \{v_i, v_2, \dots, v_{i+1}\}$ 上, $v_{i+1} = \{v_1, \dots, v_1, u\}$ 之间 的 l+ 条独立轨为 $P(v_{i+1}, v_i)$ ($i=1,\dots,l$) 与 $P(v_{i+1}, u)$,它们与 C_1 1的第一个交点(顶)分别为 w_1, w_2, \dots, w_{i+1} ,且 $w_i \neq w_i$, $i \neq j$, $1 \leq i, j \leq l+1$ 。由鸽笼原理,必有两个顶 w_i, w_j 落在同一段 弧 $v_n v_{n+1}$ 上,脚标 m满足 $1 \leq m \leq l$ (按 mod l 计算) 。于是 v_1, v_2, \dots, v_{l+1} 共圈:

 $v_{i+1} \cdots w_i v_m v_{m-1} \cdots v_2 v_1 v_i v_{i-1} \cdots v_{m+1} w_i \cdots v_{i+1}$,

这里假设在 $v_n v_{n+1} \perp w_i$ 距 v_n 较近,且可能 $v_n = w_n$,或可能 $w_i = v_{n+1}$ 。证**生**。

12.2 有向图的连通度和 无向图的边连通度

12.2.1 求有向图的连通度的算法

设G是无平行边的有向图, $S \subset V(G)$, $S \cap \{a,b\} = \emptyset$,a, $b \in V(G)$,从a到b的有向轨上至少有一个内顶属 于S,则 称S是G中一个(a,b) 分离集。令 S表示有向图G中(a,b) 分离集

$$N(a,b) = \min |S|, S \in \mathscr{G}$$

为 (a,b) 分离数。而 p(a,b) 表示从 a 到 b 的有向独立轨之最大条数。

有向图G的连通度记为 $\kappa(G)$ 。定义为

所谓**双向完全图**是指 $\forall a,b \in V(G)$, $\exists ab$, $ba \in E(G)$. G中有 (a,b) 分离集的充要条件是 $ab \in E(G)$. 这里说的有向图的连通度有时也称为**强连通度**. $\kappa(G) > 0$ 当且仅当G为强连通有向图。

(1) $ab \in E(G)$, 则 p(a,b) = N(a,b) = N中最大流之流霜.

(2) G 不是双向完全图,则

$$\min_{a,b \in E(G)} (a,b) = \min_{a,b \in V(G)} p(a,b).$$

(3)
$$\kappa(G) = \min_{a \mid b \in V(G)} p(a,b).$$

可见,通过求最大流可以求得非双向完全图中的N(a,b) ($ab\in E(G)$),经取 min 运算,即可得有向图的连通度 $\kappa(G)$ 。注意 这里的字母 a 与 b 是有序的。

12.2.2 求无向图的边连通度的算法

设 $T \subseteq E(G)$, G 是 无向 图, c, $b \in V(G)$, 从 a 到 b 的每条轨上 至少有一边在T 中,则称T 是 G 的 (a,b) 边分离集。令 \mathscr{T} 表示 (a,b) 边分离集集合,规定

$$M(a,b) = \min |T|, T \in \mathscr{F}$$

M(a,b) 叫做G中 a,b 的**边分离数**。我们用 p'(a,b) 表 示 从 a 到 b 弱独立轨的最大条数,所谓**瞬独立轨**是指无公共边的轨,即若 P_1,P_2,\cdots,P_n 是轨, $E(P_i)\cap E(P_i)=\emptyset$, $1\leq i,j\leq m$, $i\neq j$,则称 P_1,P_2,\cdots,P_n 是弱独立轨。

边连通度。1(G)显然为

$$\mathcal{N}(G) = \min\{M(a,b) \mid (a,b) \in V \times V\}.$$

我们把 G(V,E) 的每一边 e=uv 变成重边,再定向成 互 为 反向,得 e'=uv, e''=vu, 赋权 c(e')=c(e'')=1,以 a 为源,以 b 为汇,得到一个网络 N。与无向图的顶连通度讨论相似地可以证明。

$$M(a,b) = p'(a,b) = \overline{N}$$
 中从 a 點 b 的最大流量。

于是可以用网络流技术得 k'(G)。

12.3 有向图的边连通度和 弱独立外向生成树

12.3.1 求有向图的边连通度的算法

设 $T \subseteq E(G)$, G 是 有 向图,且从 a 到 b 的每 条 有向 轨 上 至少有一条边在 T 中,则称 T 是 G 中一个(a,b) 边分 高 集,其 中 a, $b \in V(G)$,定义 G 的边连通度为

$$\kappa'(G) = \min\{M(a,b) \mid (a,b) \in V \times V\},$$

其中

$$M(a,b) = \min |T|, T \in \mathcal{F}$$

 \mathcal{F} 是G中(a,b)边分离集集合。

以a为源,以b为汇,每边容量为1,在G上建立一个网络N,则与前面相似地可以证明

M(a,b) = p'(a,b) = N 中从 a 到 b 的最大流的流量。 于是求 $\kappa'(G)$ 化为求网络之最大流。

定理 3 (Edmonds, 1973) α 是有向图 G 的 一 个 顶,且 $\min_{v \in V - \{a\}} M(a,v) = k$,到 G 中存在以 a 为根的 k 裸弱独立外向生成

树(所谓蜀独立生成树,即无公共边的生成树)。

证 对 k进行归纳法证明。k=1 时, $\min_{o \in V - (a)} M(a,v) = 1$,又 M(a,v) = p'(a,v),故从 a 至任意一个顶 v 至少有 1 条有向轨,显然有一棵外向生成树,它以 a 为根,可见 k=1 时定理 成 立。 令

$$\delta_c(S) = |(S, \overline{S})|, S \subset V(G)$$

且用G-H表示从G中删去其子图H之一切边所得的生成子图。显然有(因为 $\delta_a(S)$ 是截容量,而M(a,v)是最大流量)。

202

设F(V',E')是G的子图,且满足

- (i) F是根在 a 的外向树,
- (ii) 对每个 $S \subset V$, $S \neq V$, $a \in S$, $\delta_{c-r}(S) \geqslant k-1$. 这样的 F 是存在的。若 F 是 G 的外向生成树,由归纳法假设及式(1)知, G F 中有 k-1 棵弱独立的以 a 为根的外向生成树,于是 G 中有 k-1+1=k 棵弱独立的以 a 为根的外向生成树。

若F不是G的外向生成树。我们下面令F"生长"为一棵外向生成树又不破坏(i)与(ii)。为此考虑满足下列三个条件的集合 $S \subset V$: (1) $\alpha \in S$, (2) $S \cup V' \neq V$, (3) $\delta_{c-r}(S) = k-1$. 若S集不存在,我们把 (V', \overline{V}') 的任一条边。加到F上,使F+e仍满足 (i)与(ii)。

(i) 自然满足。下面反证(ii)亦能满足。不然,存在某个集合 $S,S\neq V$, $a\in S$, 但 $\delta_{c-(I+1)}(S)< k-1$, 即 $\delta_{c-I}(S)< k$, $\delta_{c-I}(S)\leq k-1$. 又已有 $\delta_{c-I}(S)\geq k-1$, 故 $\delta_{c-I}(S)=k-1$, 即S满足(3),S满足(1) 早已成立,若S还满足(2),则S满足了(1),(2),(3),与不存在满足(1),(2),(3)的S矛盾。

下验证S满足(2)。设e=uv是加到F上去的那条边,因 $F_{s-(r+s)}(S) < k-1$, $\delta_{c-r}(S) = k-1$,故 $v \in S$,又 $v \in V$,所以 $S \cup V' \neq V$ 。即S满足(2)。

若存在满足(1), (2), (3)的S, A 是满足(1), (2), (3)的极大顶子集,因为F的边之头皆在V'中,故

$$\delta_{c-r}(A \cup V') = \delta_c(A \cup V') \geqslant k$$
.

由(3),

$$\delta_{c-r}(A \cup V') > \delta_{c-r}(A)$$
.

这个不等式指出,在G-F中存在一条边e=xy,eE($A \cup V'$,

 $\overline{A} \cup V'$),但 $e \in (A, \overline{A})$ 。所以 $x \in \overline{A} \cap V'$, $y \in \overline{A} \cap \overline{V'}$ 。下面证明F + e满足(i)与(ii)。

(i) 自然满足。

设
$$S \subset V$$
, $S \neq V$, $a \in S$, $e \in (S, \overline{S})$, 则
$$\delta_{g-(F+\bullet)}(S) = \delta_{g-F}(S) \geqslant k-1. \tag{2}$$

设 $e \in (S, \overline{S})$, 对 V 的每两个子集 S = A,

 $\delta_{c-r}(S \cup A) + \delta_{c-r}(S \cap A) \leq \delta_{c-r}(S) + \delta_{c-r}(A)$. (3) 由以上的式(2)与式(3)及 $\delta_{c-r}(A) = k-1, \delta_{c-r}(A \cap S) \geq k-1$, 得

$$\delta_{c-r}(S \cup A) \leqslant \delta_{c-r}(S). \tag{4}$$

又 $x \in S$, $x \in A$, 知S不是A的子集,于是 $|S \cup A| > |A|$,又 $y \in \overline{S}$, $y \in \overline{A}$, $y \in \overline{V}$ ',所以, $S \cup A \cup V' \neq V$ 。由 $A \geq \overline{K}$ 大性, $\delta_{c-r}(S \cup A) \geq k$, $\delta_{c-r}(S) \geq k$,故 $\delta_{c-r+r+r}(S) \geq k-1$,即证得(ii) 满足。证单。

上述证明是构造性的,它提供了 k 个外向弱独立同根生成树的求法。

定理 4 设*G*是有向图,且 $\kappa'(G) \ge k > 0$,则 $\forall u, v \in V(G)$? 及 $\forall I \in \{0,1,2,\cdots,k\}$,存在 u 到 v 的 I 条码独立有向轨,同时存在 v 到 u 的 k-I 条码独立有向轨。

证 构成辅助图 G如下:图 G上加上新顶 α ,从 α 到 u 加 l 条平行的新边,从 α 到 v 加 k-l 条平行的新边。若能 证 明 G 中

$$\min_{\alpha\in V(\overline{\omega})}M(\alpha,\omega)=k,$$

由定型3,可以在 G中找到以 a 为根的 k 裸外向弱独立生成树,由 G 之构造知定理 4 成立。

由所加 k 条新边可知, $\min_{w \in V(S)} M(a, w) \leq k$,下证"<"号不成立。若 $\min_{w \in V(G)} M(a, w) < k$,则存在 $S \subset V(G) \cup \{a\}$, $|(S, \bar{S})| < k$, $a \in S$, 显然 $S \neq \{a\}$ 。 $\{a\}$, $\{x\}$, $\{x\}$, $\{x\}$,由于 $\{x\}$, $\{x\}$, $\{x\}$, $\{x\}$

得 M(x,y) < k, 此与 $\kappa'(G)$ ≥ k 矛盾。证单。

推论 3 G是有向图, $\kappa'(G) \ge 2$,则G上任二项在某个有向 回路上。

12.4 二 分 图

12.4.1 二分图的次数序列

设 $p=(p_1,p_2,\cdots,p_n)$, $q=(q_1,q_2,\cdots,q_n)$ 是两个非负整 **数** 序列,是否存在二分图 (单图)G,其顶划分为 $X=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$, $Y=\{y_1,y_2,\cdots,y_n\}$, 使 得 $d(x_i)=p_i$, $d(y_j)=q_j$, $i=1,2,\cdots,m,j=1,2,\cdots,n$?

若上述问题得到肯定回答,则称 (p,q) 被二分图 G 实 现 . 显然, (p,q) 被二分图实现的必要条件是

$$\sum_{i=1}^{m} p_i = \sum_{i=1}^{n} q_{i}. \tag{1}$$

但(1)不是(p,q)可由二分图实现的充分条件,例如p=(5,4,4,2,1),q=(5,4,4,2,1),

虽满足(1),但没有二分图能实现(p,q).

定理 $p = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, $q = (q_1, q_2, \dots, q_n)$ 是 满足. (1) 的非负整数列,且 $q_1 \ge q_2 \ge \dots \ge q_n$, (p,q) 可由二分图 实现的充要条件是

$$\sum_{i=1}^{m} \min\{p_{i}, k\} \ge \sum_{i=1}^{k} q_{i}, \ 1 \le k \le n.$$
 (2)

证 令 $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ 是 K_n 。的 顶划分,把 K_n 。定向,每边都从X指向 Y,得有 向 图G。把G中每边的容量定为 1,X为源集合,Y 为汇集合,x 的 供 应 量 为 p_i , y_i 的需求量为 q_i 。考虑此网络N 上有供需约束的可 行 流。问题。

对G的每个生成子图,对应地有一个N上的流,使此子图上每一边皆满载,且此对应是一一的。由(1)知,(p,q)可由二分图实现的充要条件是N上有可行流。

下面利用第11章定理4证明N内有可行流的充要条件是(2)式成立。

对于 $S \subseteq V(G)$ 。今

$$I(S) = \{i \mid x_i \in S\}, I(S) = \{j \mid y_i \in S\}, T(S) = \{j \mid y_i \in S\}$$

由定义,

$$C(S) = \sum_{e \in (S,S)} c(e) = |I(S)| \cdot |J(\overline{S})|,$$

$$\sigma(X \cap \overline{S}) = \sum_{i \in I(S)} p_i,$$

$$\rho(Y \cap \overline{S}) = \sum_{i \in I(S)} q_i.$$
(3)

设N中有可行流,由第11章定理4和(3),

$$|I(S)| \cdot |J(\bar{S})| \geqslant \sum_{i \in I(\bar{S})} q_i - \sum_{i \in I(\bar{S})} p_i$$

取 $S = \{x_i | p_i > k\} \cup \{y_j | j > k\}$, 于是

$$\sum_{i \in I(S)} \min \{p_i, k\} \ge \sum_{i=1}^k q_i - \sum_{i \in I(\vec{S})} \min\{p_i, k\},$$

因此(2)成立。

反之, 岩(2)式成立, S = V(G)的任一子集, 由(2)与(3)。

$$C(S) \ge \sum_{i \in I(S)} \min \{p_i, k\} \ge \sum_{i=1}^k q_i - \sum_{i \in I(\overline{S})} \min \{p_i, k\},$$

$$\ge \rho(Y \cap \overline{S}) - \sigma(X \cap \overline{S}),$$

其中 $k = |J(\bar{S})|$, 由第11章定理 4、N有可行流。证单。

从算法的角度判断(p,q)可否由某二分图来实现,等价于定206

理 5 证明中的网络N是否有可行流,又由第11章定理 4 的证明,这又等价于第 11 章定理 4 证明中N'上是否有使 $(Y,\{y_o\})$ 中每边皆满载的最大流。至此,我们搞清楚了:先求 N' 的最大流,若使 $(Y,\{y_o\})$ 边皆满载,则此流标志了一个(p,q) 的实现过程,所需的二分图之边仅取流值为 1 的边。

12.4.2 二分图上的匹配

这一段我们用网络流技术求二分图上的最大 匹配, 并 给 出 Hall 定理的一个简洁证明。

设 G(X,Y,E)是一个二分图,构作一个网络 $N(G(\overline{P},\overline{E}),c(e))$:

 $\overline{V} = \{s,t\} \cup V(G), s 为源, t 为汇;$ $\overline{E} = \{sx\}x \in X\} \cup \{yt\}y \in Y\} \cup \{xy|xy \in E(G)\}.$

赋于容量 c(sx) = c(yt) = 1, $c(xy) = \infty$.

定理 6 二分图中最大匹 配 的边数等于网络 N 中最大流之流量。

证 设M是一个最大匹配,对M中的每个边xy,通过有向轨xxyt,从xyt,从xyt,从xyt,以xyt,从xyt,以xyt 、xyt xyt 、xyt xyt 、xyt xyt xyt

设 f 是 N 上 的整值流函数,所有从 s 到 t 的有向 轨 皆 形 如 sxyt,若它从 s 到 t 运送一个流量,则不会再有边 xy' 或x' y能 被用来通过流量。故使得 f(xy)=1 的边 xy 之集合形成 G(X, Y, E) 的一个匹配,于是 $|M| \ge F$,从而|M| = F。证单。

上述定理告诉我们求网络N上的最大流 f,使得 f(xy) = 1的边之集合即为G的一个最大匹配。

下面利用双最定理证明 Hall 婚配定理。

定理(Hall) G 是二分圈,顶划分为X与 $_{\bullet}Y$,G 中存在把X 中顶皆许配的匹配之充要条件是,对一切 $S' \subseteq X$, $|N(S')| \ge |S'|$ 。

证 设G中无把X中顶皆许配的匹配,沿用定理 6 的记号,最大流量 F = |M|,M是 G中最大匹配,但|M| < |X|. 设 S是 2F 算法结束时被标志的顶集合,则(S, \bar{S})是最小截。又一切形如xy 的边容量为 ∞ ,令 $S' = X \cap S$,N (S') $\subset S$,又无 Y - N (S') 中的顶被标志,于是我们有

$$(S, \bar{S}) = (\{s\}, X - S') \cup (N(S'), \{t\}).$$

又 $|(S,\bar{S})| = |M| < |X|$, 于是

$$|X - S'| + |N(S')| < |X|$$

即|N(S')| < |S'|.

反之,若G中有把X中顶皆许配的匹配,显然对 每个 $S'\subseteq X$, $|N(S')|\geqslant |S'|$. 证单。

12.5 关于 PERT 的两个问题

PERT 是规划审核技术的代号 (Program evaluation and review technique), 它是运筹学中的典型问题之一。

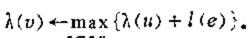
PERT 图是指这样的一个有向图 G(V,E),

- (i) V(G) 中存在起始顶 s 与终止顶 t.
- (ii) G 中无有向回路,
- (iii) $\forall v \in V(G) = \{s,t\}$, v 在某条由 s 到 t 的有向 轨 上. 约定:
- (1) PERT 图上的每一边代表一个过程。
- (2) β(s)中的过程可以马上开始。
- (3) $v \in V(G)$, $v \neq s$, 当 a(v) 中的过程全结束时, $\beta(v)$ 中的过程才能开始。
- **问题** 1 (**关键轨道问题**) 设 PERT 图每边 e 之权 l(e) 表示该过程所需时间,问由 $\beta(s)$ 中过程开始的时刻到 $\alpha(s)$ 中过程全部完成,最短需要多长时间?

例如图 12.1 中的最短完成时间为 3+2+5=10.

PERT量短时间算法:

- (1)λ(s)←0, 其它 的顶未标志。
- (2) 找一个υEV(G),υ未标志,且α(υ)中一切边之尾已标志,令



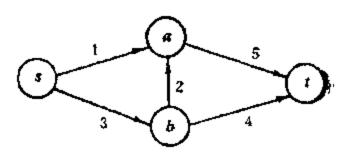


图 12.1

定理 7 PERT 最短 时间 算 法止 时得 到 的 $\lambda(t)$ 为问 题 1 的解。

证 先证(2)中v的存在性。若这种v不存在,则对每个未标志之顶v,皆可找到一边,以v为头,但此边以另一未标志之顶为尾。又顶数有限。则G中存在有向回路,这是不可能的。

下证 $\lambda(v)$ 是到完成 $\alpha(v)$ 中一切过程所用的最小时间。用标志次数进行归纳证明。第一次标志的是 s ,命题自然成立。设第 k 次标志的是 v 。, $\lambda(v)$ 是 $\alpha(v)$ 中过程全部完成所用的最 小时间,设 v 。 是第 k+1 次标志的顶,由(2),显然

$$\max_{e=\bullet, b=0} \{\lambda(u) + l(e)\}$$

是到 $a(v_{k+1})$ 中过程全完成所用的时间之最小值。证毕。

容易看出,当算法停止时,由t向s经过"确定顶标的边" 返回,即经

$$\lambda(v) \leftarrow \max_{e=uv} \{\lambda(u) + l(e)\}$$

中使 λ(u) + l(e) = λ(v) 的边 e 返回,则得一最长轨,这种最长轨叫做**关键轨短**. 欲缩短工期,必须把每条关键轨道至少一条边之长缩短. 关键轨道未必唯一,例如图 12.1 中 sbat 是一条关键

轨道、

上述缩短工期的方法通常称为 CPM (Critical Path method), 即关键轨道方法。

问题 2 PERT 中每一过程由一台机器 (或 人) 来 完 成, 何需要最少准备多少台机器, 才能使得对任意 给 定 的 1(e), 每一过程都不至于因为机器不够而被延误?

为解决问题 2, 我们考虑以 s 为源,以 t 为 汇 的 PERT 图上的一个网络,边容量下界是 1 ,上界为 ∞ .

下面我们称一个边子集为**并流边集合**,若此集合中没有在同一有向轨上的两条边。

由于 PERT 中每边皆在由 s 到 t 的 有 向 轨 上,以 及 $u(e^{t})$ = 1, $c(e) = \infty$ 知 我 们 的 网络上有 可 行 流, 所 以 有 从 s 到 t 的 最 小 流。

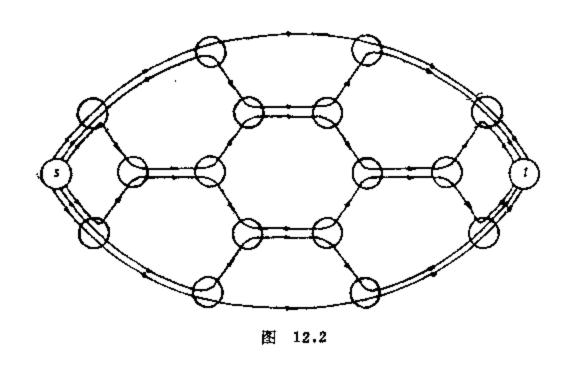
定理 8 以 s 为源以 t 为汇,b(e) = 1, $c(e) = \infty$ 的 PERT 图上的网络上的最小流量即为问题 2 的解。

证 让我们以 t 为源,以 s 为汇,求由 t 到 s 的最大流,它恰为由 s 到 t 的最小流。当求由 t 到 s 的最大流时,2F 算 法 终止时被标志的那些顶之集合为 T,则 $t\in T$, $s\in T$ 。于是 $(T,T)=\emptyset$,不然,因 $c(e)=\infty$,仍可由 T 中的某顶向前标志,与 2F 标志终止矛盾。所以(T,T) 是并流边集。

若 (\bar{T},T) 中有的边之权 $I(e)\gg 1$, (\bar{T},T) 外的边之权I(e) 比 (\bar{T},T) 中最小权还小得多,所以会有 (\bar{T},T) 中边代表的过程同时进行的时刻。故机器数 $\gg |(\bar{T},T)|$.

设 F 是从 s 到 t 最小流量,相应的流为f, $f(e) \ge b(e) = 1$ 对每一边 $e \in E(G)$ 成立。 F 个单位的总流量分解到 从 s 到 t 的 F 条 有向轨上,能使 E(G) 中的每条边至少在这 F 条 有向轨的一条上。我们把每台机器分配给上述 F 条 有向轨中之一条轨上的所有边,每个机器在分配去的有向轨上从 s 到 t 依次完成各个过程,于是得知机器数 $\le F$ (图 12.2)。 而 $F = |(\bar{T},T|)$,故得证 问 题

12 中的机器至少为 s 到 t 的最小流量 F . 证毕 .



本章用求最大流的有效算法求得了无向图的连通度与边连通度及有向图的连通度与边连通度,并且建立了一批Menger型定理 (N(a,b)=p(a,b) $(ab\in E(G))$, M(a,b)=p'(a,b), $\kappa(G)=\min_{a,b\in V}p(a,b)$, $\kappa'(G)=\min_{a,b\in V}p'(a,b)$, 这些 Menger 型 定理是图论的一组基本定理,从中可以推导出许多重要结论,例如 k 连通图的扇形结构与圈结构,有向图中的弱独立同根外向生成树的存在及个数等等。

网络流技术还可以求取二分图中的最大匹配,以及判别与实现二分图的次数序列,同时对某些定理(例如 Hall 定理)提供简洁的新证明。

最后我们用求最大流的方法解决了 PERT 中的一个重要问题。

习 魒

1. 用 12.1 的定理 1 证明匹配理论中的Konig 定理。

- 2. 证明(p,q) 不能由二分图来实现,其中p=(5,4,4,2,1),q=(5,4,4,2,1).
- 3. 七种设备用五架飞机运往目的地,每种设备各有四台,五架飞机的容量分别为8,8,5,4,4台,问能否有一种装机方案,使同种设备不会有两台同在一架飞机上? 若飞机容量分别为7,7,6,4,4台时,又怎样?
- 4. 今有张、王、李、赵四人小乐队和小提琴、大提琴、钢琴、吉他四种乐器,张善于演奏小提琴、大提琴和吉他,王善于大提琴和钢琴,李善于小提琴和大提琴,赵只会弹吉他。今四人同台演出,每人演奏一种乐器,试求每人各演奏一种乐器时所有不同方案。试把这一问题化成网络最大流问题。
- 5. G 是没有有向回路的有向图,欲求一个无公共顶点的有向轨道的最小条数,使这些轨道覆盖一切顶,这种轨道可以从任何一顶始而止于任何顶,也可以长为0.
 - (a) 叙述一个解此问题的算法。
 - (b) 指出G中没有有向圈的条件是否必要。
 - (c) 给出你的算法的时间复杂度。
- 6. 上题中, 把 "无公共顶"的要求删去,解决上题中 同 样 的(a),(b),(c)三个问题。

两个顶 u 与 v 叫做无逆流的,若无从 u 到 v 或 无 从 v 到 u 的 有向轨道。一个无逆流顶靠是指此集中任二顶皆为无逆流的。证明覆盖轨道的最小数目等于最大无逆流顶集之顶数。

- 7. (a) G(X,Y,E) 是二分图,写出一个有效算法求出一个最小边子集 $E' \subseteq E$,使得每顶皆为 E' 中至少一条边之端点。
 - (b) 给出你的算法的时间复杂度。
- (c) 证明这个覆盖顶的 E' 满足 $|E'| = \beta(G)$, 其中 $\beta(G)$ 是 G 的独立数。
 - 8. (a) G(X,Y,E) 是完全二分图,则 $\kappa(G) = \min\{|X\}, |Y\}$.

- (b) 证明对每个k, 存在一个图 G, 使 得 $\kappa(G) \ge k$, 且 G 无 Hamilton 轨。
- 9. 设M是二分图G的一个匹配,则存在一个最大匹配M',使得被M许配的每个顶也被M'许配。
- 10. G 是无圈有向图,恰有一个顶 s, $d^-(s) = 0$, 恰有一个顶 t, $d^+(t) = 0$, 称边 $e_1 = ab$ 优于边 $e_2 = cd$, 当且仅当G中有从b 到 c 的有向轨道。一个边子集叫做一个"片",若它之中无比另一边为优的边,且它是极大的。P 是边子集,证明下述三个命题等价:
 - (1) P 是一个片。
 - (2) P 是(s,t) 边分离集, P 中没有比其它边为优的边。
- (3) 对某 $\{s\}\subset S\subset V-\{t\}$ 的S, $P=(S,\bar{S})$,使得 $(\bar{S},S)=\emptyset$.
- 11. S_1, S_2, \dots, S_n 为有限集,集合 $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ 叫做相异样品组 (SDR) ,若对每个 i, $1 \leq i \leq m$, $e_i \in S_i$.
 - (a) 若 SDR 存在, 写出一个求 SDR 的有效算法。
- (b) 证明 SDR 存在的充要条件是对任意的 $k(1 \le k \le m)$ 个集合之并,至少含k个元素。
- 12. π_1 与 π_2 是 m 个元素的一个集合之划分,每个之中恰含 r 个两两不交的子集,欲求 r 个元素的一个子集,使 得 π_1 与 π_2 的每个子集都被表征。
 - (a) 给一个有效算法判断这样的r个样品的集合是否存在.
- (b) 与 Hall 婚配定理相似地建立一个这种样品集合存在 的充要条件。
- 13. 有向图叫做完全连通的,若它是一个竞赛图。完全连通有向图是可分的,若V(G)可划分成A与B两个非空子集,使得A与B之间的边皆从A到B。令V(G) = $\{v_1,v_2,\cdots,v_n\}$,且

$$d^+(v_1) \leq d^+(v_2) \leq \cdots \leq d^+(v_n)$$

则G是可分的 完 全 连 通有向图的充要条件是存在 k < n, 使得

$$\sum_{i=1}^k d^*(v_i) = \binom{k}{2}.$$

- 14. S 是人的集合,|S| ≥4,每四个人中总有一人 与 其 余 三人相识,则 S 中有一人,他与 S 中的每个人相识。
- 15. 在学校里,有n个男同学n个女同学,每个同学 恰认识 $k(1 \le k \le n)$ 个异性同学,证明全体同学可参加一次舞会,使每对舞伴皆相识,而且可以组织 k 场舞会,使得每人皆与每个相识者恰跳一次舞。试用网络流方法证明此题。
- 16. 证明或反驳: 若有向图 G, $\kappa(G) \ge 2$, 则 对 每 三 个 顶 x,y,z, 存在一个从 $x \le y \le 2$ 的有向轨.
 - 17. G 是无向图, κ'(G)≥2, 则:
 - (a) 对每三个顶x,y,z,,存在一个行迹,从x经y到z。
 - (b) 对每三个顶x,y,z,存在一个行迹从x到z不经过y.
- 18. 在图 12.3 所示的无有向回路的有向图中,既有 AND顶 (\land) ,也有 OR 顶 (\lor) ,正如 PERT 中一样,边表示 过 程,边长是过程所用时间(写在每边旁),当所有(至少一个)进入的

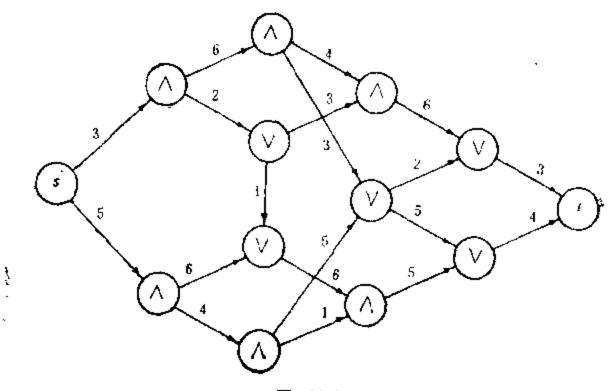


图 12.3

过程完成时,从一个 AND(OR)顶出发的过程才可开始。写出一个算法,求从开始 (于 s 顶) 到结束 (于 t 顶)所用的最少时间。且把你的算法在图 12.3 中应用。并指出你的算法的时间复杂度。

- 19. 在未必无有向回路的有向图上考虑上题, 你应如何修改你的算法或指出无解?
- 20. k(N, l(k))是从图G上删除 k个顶所得子图的边连通度之最小值,讨论函数 l(k) 的定义域单调性和极值;若 $\kappa(G)=4$, $\kappa'(G)=5$, l(1)=2, l(2)=3 是否成立?

13 无向图中的空间与矩阵

13.1 圏 空 间

令 $F_2 = \{0, 1\}$, 在 F_2 上定义加法 \oplus 与乘法"·"如下:

⊕	0	1	•	O	1
0	0	1	0	0	0
1	1	0	1	0	1

于是 $\langle F_2, \oplus \rangle$ 是 Abel 群, $\langle F_2 - \{0\}, \bullet \rangle$ 也是 Abel 群,且乘 法对于加法有分配律,故 $\langle F_2, \oplus, \bullet \rangle$ 是一个域,称其为 0-1 二元域,简写成 F_2 。

若 (q_1, q_2, \dots, q_n) 与 (r_1, r_2, \dots, r_n) 两个向量中 q_i , $r_i \in F_n$, 则定义

 $(q_1,q_2,\cdots,q_n) \oplus (r_1,r_2,\cdots,r_n) = (q_1 \oplus r_1,\cdots,q_n \oplus r_n).$ Ød (1, 1, 1) \oplus (1, 1, 1) = (0, 0, 0).

本章中把一个图或子图写成 0-1 向量的形式,利用线性代数的方法研究 (0-1 向量对应的)图的性质。

设G是给定的标志图, $E(G) = \{e_1, e_2, \dots, e_e\}$,任意取 $Q \subseteq E(G)$ 、令

$$q_i = \begin{cases} 1, e_i \in Q, \\ 0, e_i \in Q, \end{cases}$$

记 $Q=(q_1, q_2, \dots, q_s),$

于是 Q的全体子图组成的集合在 0-1二元域F,上构成一个 ϵ 维的线性空间,记这个空间为 $\mathscr{E}(G)$,称为 G的**边子集空间**,简称边空

间。 8中有 2° 个向量, (1, 0, 0, …, 0), (0, 1, 0, 0, …, 0), …, (0, 0, …, 0, 1) 是它的一组基。

定义 1 量T是连通图G的生成树,设 e 是余树的一条边,则 T+e 上有唯一的一个圈,这个圈叫做G的基本圈,关于生成树T的全部基本图 C_1 , C_2 , ..., C_{e-1+1} 叫做G的一个基图组。

定理 1 $E(C_1)$, $E(C_2)$, …, $E(C_{\ell-\nu+1})$ 作为 $\mathscr O$ 中的 $\varepsilon-\nu+1$ 个向量是线性无关的,其中 C_1 , C_2 , …, $C_{\ell-\nu+1}$ 是 G 的关于生成树 T 的基图组。

证 因每一基图含有其它基图不含的边、故得

$$\sum_{i=1}^{n-\nu+1} a_i C_i = \mathbf{0} \iff a_i = 0 \ (i = 1, 2, \dots, e-\nu+1).$$

其中 $a_i \in F_i$, 故 $E(C_1)$, …, $E(C_{i-\nu+1})$ 是线性无关组,证单.

`本章中边子集 Q, Q在 & 中的向量形式以及 G[Q] 可以认为是一回事。

我们把图G中无公共边的圈之并与零向量组成的 集合 记成 $\mathscr{C}(G)$

定理 2 $\mathscr{C}(G)$ 在城F, 上构成线性空间。

证 只需证明, $\forall B_1, B_2 \in \mathscr{C}(G)$,有 $B_1 \oplus B_2 \in \mathscr{C}(G)$,则容 易验证 $\mathscr{C}(G)$ 满足在 F_2 上构成 线 性 空 间 的一切 条 件。下 证 $B_1 \oplus B_2 \in \mathscr{C}(G)$ 。

- (1) B, 或 B, 为 O 时, 结论自然成立。
- (2) B, 与 B, 皆非 $\mathbf{0}$, 考虑 B, 与 B, 中有无公共边,分两种情形讨论。
- (i) 对每个 i, $1 \le i \le e$, $B_1 \ni B_2$, 的第 i 分量不同时为 1, 则 $B_1 \oplus B_2$ 图中每顶 皆 偶 次, 其 连 通 片 是 Euler 图。由 Euler 图的性质, $B_1 \oplus B_2$ 的每个连通片,进而 $B_1 \oplus B_2$ 本身 是 无公共边的圈之并,即 $B_1 \oplus B_2 \in \mathscr{C}(G)$.
 - (ii) 若有些同位置的分量在 B_1 与 B_2 中皆为 1,则在 B_3

 $\bigoplus B_2$ 图中,与这几个分量 1 对应的边的端点的次数,比在 B_1 中与 B_2 中同一顶的次数之和少一个偶数,故 $B_1 \bigoplus B_2$ 中每顶皆 偶次,与 (i)一样地知 $B_1 \bigoplus B_2 \in \mathscr{C}(G)$. 证**毕**.

定理 3 G是连通图,则 $\mathscr{C}(G)$ 是 \mathscr{E} 的 $e^{-\gamma+1}$ 维 的 线 性子空间,关于任一生或树的基圈组是 $\mathscr{C}(G)$ 的一个基底。

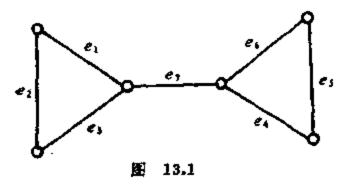
证 只欠证 $\forall B \in \mathscr{C}(G)$, B是关于任一生成树T的基圈组的线性组合 (组合 系数取自 F_2)。事实上,B=0时,结论自然成立。下面考虑 $B\neq 0$,于是 B图中至少有一条边是余树上的边。今设 $e_{i,j}$, $e_{i,j}$, …, $e_{i,k}$, 是 B图中余树上的边之全体,它们对 应 的基圈分别为 $C_{i,j}$, $C_{i,j}$, …, $C_{i,k}$, 令

$$B' = \sum_{i=1}^k C_{i_i},$$

这里 Σ 中的加法是 \oplus 。由定理 2 , $B' \in \mathscr{C}(G)$, $B' \oplus B \in \mathscr{C}(G)$; 若 $B' \oplus B \neq 0$,即 B + B' 对应的 图只含有生成树上的 边,由 $\mathscr{C}(G)$ 之定义,这是不可能的,只有 $B \oplus B' = 0$,于是 B = B'' = $\sum_{i=1}^{k} C_{i,j}$ 证毕。

以后我们称(G) 为图G的图空间。

若 G有 ω 个连通片,显然 $\mathscr{C}(G)$ 的维数 为 $e-\nu+\omega$. 连 通图 G的图空间 $\mathscr{C}(G)$ 中有 $2^{e-\nu+1}$ 个向量,不连通的图, $\mathscr{C}(G)$ 中的向量个数为 $2^{e-\nu+\omega}$; 事实上,对于连通图而言,因为 $\mathscr{C}(G)$ 中每个向量由 $e-\nu+1$ 个基向量线性表出,在线性表达式中,每个基向量的组合系数有 0 与 1 两 种选择,故 $|\mathscr{C}(G)| = 2^{e-\nu+1}$.



es}, 则有 e-v+1=2 个基图:

例 1 求 图 13.1 中 图G的 ■空间 ② (G) 中的全体" 向量, 并画出相应的子图。

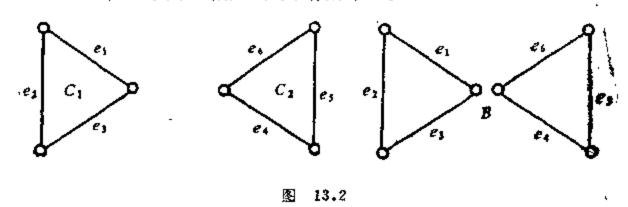
第 e=7,v=6, G(G) 中有 2*-*+1=2*=4 个向 量,取生成树为T=G-{e₂, ${}^{\bullet}C_{1} = (1, 1, 1, 0, 0, 0, 0), C_{2} = (0, 0, 0, 1, 1, 1, 0)$ 除 C1, C2 外, &(G) 中还有 0 向量:

$$\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0, 0, 0, 0)$$

第四个向量是B:

 $B = C_1 \oplus C_2 = (1, 1, 1, 1, 1, 1, 0)$.

这三个非零向量相应的子图如图 13.2



13.2 断集空间

本节只讨论连通无向图。

定义 2 $S \subseteq E(G)$, G为连通图, G - S 有两个连通片, 像 AG中删除S的任何真子集,仍得 到连 通 图,则 称 S 是 G 的 一个割集.

在割集定义中, 要特别注意它的 ·极小性, S这个集合再缩小就割不断 连通图G了。

例如图 13.3 中, {e,,e,,e,} 不 是割集,因为 $G-\{e_1,e_3,e_5\}$ 有三个 连通片, {e₁}, {e₂}或{e₂}也不是割 集,因为G-{e₁}, G-{e₃}, G- $\{e_s\}$ 仍连通,而 $G-\{e_s,e_s\}$ 有两个 连通片,又{e₁, e₃}已是极小化,故

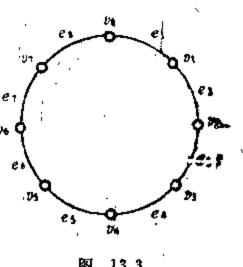


图 13.3

 $\{e_1, e_s\}$ 是一个割集。在此图上,任意两条边皆构成一个割集。

定义 3 V_1 是连通图G的非空顶真子集,即 $V_1\neq\emptyset$, $V_1\subset V(G)$,一端在 V_1 ,另一端在 \overline{V}_1 的边组成的集合,记成(V_1 , \overline{V}_1),(V_1 , \overline{V}) 叫做G的一个断集。

由定义,割集是断集,反之未必成立。例如图 13.3 中, $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ 是断集($\{v_1, v_3\}$, $\{v_2, v_4, v_5, v_6, v_7, v_8\}$),但它不是割集,"大"了一些。

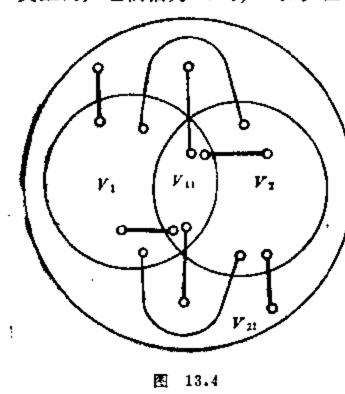
我们把连通图G中的一切断集与0向量组成的集合,记成。SP(G)。

定理 4 $\mathcal{S}(G)$ 在域 F, 上构成线性空间。

证 只需证明,若 S_1 , $S_2 \in \mathscr{S}(G)$, 则 $S_1 \oplus S_2 \in \mathscr{S}(G)$. 不妨设 $S_1 \neq S_2$, 不然 $S_1 \oplus S_2 = \mathbf{0} \in \mathscr{S}(G)$. 令 $S_1 = (V_1, V_1)$, $S_2 = (V_2, V_2)$, $V_{11} = V_1 \cap V_2$, $V_{22} = \overline{V}_1 \cap \overline{V}_2$, $V_3 = V_{11} \cup V_{23}$, 由图 13.4 知

$$S_1 \oplus S_2 = (V_3, \overline{V}_3) \in \mathscr{S}(G)$$
.

事实上, S_1 中的边有图中上半部分的四种类型, S_2 中的边有下半部的四种类型,经 Θ 运算后, $S_1 \oplus S_2$ 中的边只是图中粗 实线类型的,它们恰为(V_1 , \overline{V}_2)。证单。



以后把 $\mathcal{S}(G)$ 称为 连通图 G 的**新集连间**。

显然,割集与断集中至 少有一条边是生成树上的 边。

定义 4 连通图G的含 且仅含生成树T的一条边之 割集,叫做G的关于T的基 本割集,关于T的基本图集 之全体 S_1 , S_2 , ..., S_{v-1} 叫做G的关于生成树T的基 本割集组。 定理 5 连通图G的断集空间 $\mathscr{S}(G)$ 的 维 数是 v-1, 对于任给的生成树T,关于T的基本割集组 S_1 , S_2 , ..., S_{v-1} 是 $\mathscr{S}(G)$ 的一组基。

证 与定理 1 相似地,容易证明 S_1 , …, $S_{\nu-1}$ 是线性无关的。只需证明 $\forall S \in \mathscr{S}(G)$, S 可由 S_1 , …, $S_{\nu-1}$ 线性 表 出。

事实上,因 S 是断集, S 上有 T 中之边,令 S = { $e_{i,j}$, $e_{i,j}$, ..., $e_{i,k}$, $e_{i,k+1}$, ..., $e_{i,n}$ },前 k 条边是生成树 T 上的。令 $S_{i,j}$ (j = 1,2,...,k) 是含 $e_{i,j}$ 的基本割集,由于 S (S) 是 线 性空间, $S_{i,j} \in S$ (G),故

$$S' = \sum_{j=1}^{k} S_{ij} \in \mathcal{S}(G).$$

且

$$S'' = S + S' \in \mathcal{S}(G),$$

但 S'' 中已不含 T 上之边,则 S'' 不是断集,因为断集 中 至少有一条树边,所以 S''=0,于是

$$S = S'' = \sum_{i=1}^{k} S_{i,i}$$

证毕.

𝓕(G) 中一共有 2"-1 个向量。

例 2 求图13.5 中的图G之断集空间 S(G) 的一组基底和 S(G) 中的一切 向量,并画出相应子图。

解 $\nu=4$, $\mathcal{S}(G)$ 中有 $2^{\nu-1}=2^{\circ}$ = 8 个向量,其中 3 个是基向量,一个是 0 向量。我们取生成树为 $G[\{e_1,e_2,e_3\}]$,相应的三个基本割集为 S_1 , S_2 , S_3 , $S_1=(1,0,0,1,0,1)$, $S_2=(0,1,0,1,0)$, $S_3=(0,0,1,0,1)$.

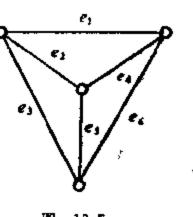


图 13.5

由基底线性表出的其它5个向量为:

$$S_{\bullet} = S_{1} \oplus S_{2} = (1, 1, 0, 0, 1, 1),$$

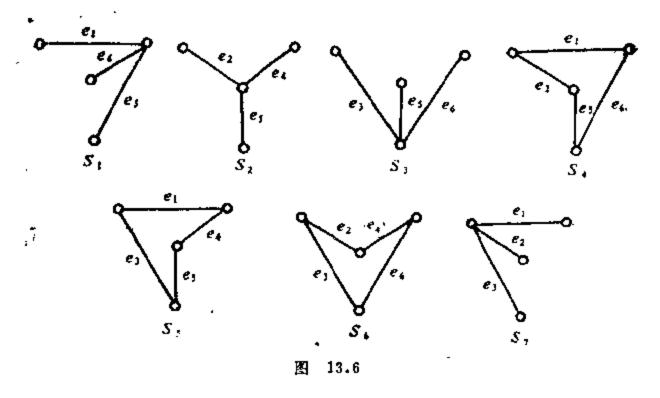
$$S_{5} = S_{1} \oplus S_{3} = (1, 0, 1, 1, 1, 0),$$

$$S_{6} = S_{2} \oplus S_{3} = (0, 1, 1, 1, 0, 1),$$

$$S_{7} = S_{1} \oplus S_{2} \oplus S_{3} = (1, 1, 1, 0, 0, 0),$$

$$S_{\bullet} = 0 \cdot S_{1} + 0 \cdot S_{2} + 0 \cdot S_{3} = \mathbf{0} = (0, 0, 0, 0, 0, 0).$$

 $S_1 - S_7$ 的相应子图见图 13.6.



我们看到, $\mathscr{C}(G)$ 与 $\mathscr{S}(G)$ 可能有相同的非零向量,断集可能是圈,例如例 2 中的 S_* , S_* , S_* .

作为 $\mathscr{C}(G)$ 的两个子空间 $\mathscr{C}(G)$ 与 $\mathscr{S}(G)$ 是正交的。

定理 6 $\forall B \in \mathscr{C}(G), \ \forall S \in \mathscr{S}(G), \ \mathbf{M有正交性}$ $B \cdot S = 0$,

其中G是连通图,"·"是向量的数量积(在F,中)。

证 若B = S中有 0,则结论自然成立。若 $B \neq 0$, $S \neq 0$,因为圈若与断集有公共边,则公共边的条数必为偶数,所以B = S中同序号分量皆为 1 的现象发生偶数次,从而知 $B \cdot S = 0$,事实上,这时, $B \cdot S$ 的运算中只发生同序号皆为 1 的两分量的积 1

的求和,同序号的分量有零时只算出 0,而这偶数个 1 相加仍得 0. 证毕。

13.3 关联矩阵

定义 5 G是单图 ,G 的关联矩阵 B(G)是如下的矩阵 B(G) = $(b_{ij})_{v \times \varepsilon}$, 其中

$$b_{ij} = \begin{cases} 1, v_i = e_i, & \text{相关联,} \\ 0, v_i = e_i, & \text{不关联,} \end{cases}$$

 $v_i \in V(G), e_i \in E(G)$

例如K、的关联阵为

$$B(K_4) = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

每个标志图有唯一的关联矩阵, 反之,若给出一个图的关联矩阵,我。 们可以依据此矩阵把相应 的 图 画 出 来,可见关联矩阵中已含有相应的图 的一切信息,原则上,通过图的关联 矩阵的研究,应该得到图的一切性质。

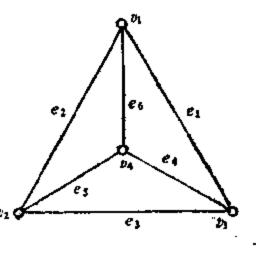


图 13.7

一个 0-1 矩阵,每列恰有两个 1,它必为某个图 的 关 联 矩 阵,关联矩阵每行中 1 的个数是该行所对应的顶之次数。

关联矩阵的每一行都是 $\mathcal{S}(G)$ 中的一个向量。

定义 6 从单图G的关联矩阵中任意删除一行后 所 得 之 矩 阵,叫做G的基本关联矩阵,记之为 $B_f(G)$ 。

定理 7 连通图 G 的关联矩阵秩为 ν - 1。

证 因为关联矩阵的每一行皆 $\mathscr{S}(G)$ 中的向量,所以 $r(B) \leqslant$

 $\nu-1$, 下证 $r(B) \ge \nu-1$. 反证之,若 $r(B) < \nu-1$,则 B 中任 $\nu-1$ 行线性相关,即对行向量 $B_{i,j}$, $B_{i,j}$, …, $B_{i,\nu-1}$, 存在 不全为 0 的常数, k_1 , k_2 , …, $k_{\nu-1} \in F_2$, 使得

$$\sum_{j=1}^{v-1} k_j B_{i_j} = \mathbf{0}_{\bullet}$$

不妨设 k_1 , …, $k_{\nu-1}$ 中前 m 个皆为 1 ,后面的皆 为 0 , $2 \le m \le \nu-1$ 。不难看出,以 $B_{i,j}$, $B_{i,j}$, …, $B_{i,m}$ 为行 组 成 的 m 行 e 列 的 子矩阵 B 每 列 恰 有 两 个 1 ,或 每 列 皆 为 0 。

我们把V(G) 划分成两个子集。 $V_1 = \{v_{i_1}, v_{i_2}, \cdots, v_{i_m}\}$, $V_2 = V - V_1$ 。由 B的结构知, $(V_1, V_2) = \emptyset$,又 $V_1 \cap V_2 = \emptyset$,于是G不连通,与G为连通图矛盾。证**毕**。

定理 8 G是连通图,则 $r(B_f(G)) = v-1$ 。

定理8的证明与定理7的证明雷同。

推论 $1 G \mathbf{a} \omega$ 个连通片,则

$$r(B(G)) = r(B_f(G)) = v - \omega$$

推论 2 G是连通图的充要条件是

$$r(B(G)) = r(B_1(G)) = v - 1.$$

定理 e_{I_0} , e_{I_0} , $e_{I_{n-1}}$ 是图G的生成树的边,当且仅当这n-1条边在 $B_I(G)$ 中对应的列构成的行列式不为零。

证 设定理 9 所称的行列式对应的矩阵为 B_1 ,以 B_1 为基本 关联矩阵的图为 $G[\{e_i, e_{i_1}, \cdots, e_{i_{\nu-1}}\}]$,它有 ν 个顶, ν -1 条边。又行列式 $|B_1| \neq 0$,即 $r(B_1) = \nu$ -1,由本节推论 2, $G[\{e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{i_{\nu-1}}\}]$ 是连通图。又它的边数是顶数减 1,故 $G[\{e_{i_1}, \cdots, e_{i_{\nu-1}}\}]$ 是树,即它是G的生成树。

反之,若 e_i , …, $e_{i_{\nu-1}}$ 是 G 的生成树之边, $G[\{e_{i,j}, ..., e_{i_{\nu-1}}\}]$ 的基本关联矩阵是 B_i , 故 $r(B_i)=\nu-1$, B_i 为 满秩方阵,故 $|B_i|\neq 0$. 证毕。

对于比较小的图。用定理9可以给出生成树的一个清单。

- 例 3 求出图 13.7 中所有的生成树。
- 解 取图 13.7 中 K, 的一个基本关联矩阵如下:

$$B_{f}(K_{\bullet}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$e_2$$
 e_5 e_6 e_7 e_8 e_9 e_9

$$\{e_1,e_2,e_4\},\ \{e_1,e_2,e_5\},\ \{e_1,e_2,e_6\},\ \{e_1,e_3,e_4\},\ \{e_1,e_4,e_5\},\ \{e_1,e_4,e_5\},\ \{e_1,e_5,e_6\},\ \{e_2,e_3,e_4\},\ \{e_2,e_4,e_5\},\ \{e_2,e_3,e_6\},\ \{e_2,e_4,e_6\},\ \{e_3,e_4,e_6\},\ \{e_1,e_5,e_6\},\ \{e_4,e_5,e_6\},\ \{e_4,e_6,e_6\},\ \{e_4,e_6,e_6$$

导出 16 个生成树。

这个结果符合 Caylay 公式 $\tau(G) = v^{v-2} = 4^{4-2} = 16$.

13.4 圏 矩 阵

本节只讨论连通图.

定义 7 由图G的每个圈上的边集在 $\mathscr{E}(G)$ 中的向量 为行

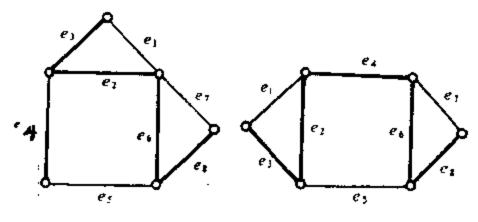


图 13.8

构成的矩阵叫做G的噩矩阵,记之为C(G),取定生成 树,由每个基本圈上的边集在 $\mathcal{E}(G)$ 中的向量为行组成的矩阵叫做基本圈矩阵,记之为 $C_I(G)$ 。

例如图 13.8 中的两个图,以 $\{e_2,e_3,e_4,e_6,e_6\}$ 导出生成树,则得

这个矩阵中前三行是 $C_1(G_1) = C_1(G_2)$.

值得注意的是,这里 G,与G,并不同构,但它们却 有 相 同 的圈矩阵与基本圈矩阵。可见,凭圈矩阵或基圈矩阵不能确定一个图到同构的程度,这是 C(G) 与 $C_{\ell}(G)$ 的缺点,但它仍不失为研究图的性质,尤其是解决网络问题的有力工具之一。

因为
$$\varepsilon - \nu + 1$$
 个基本圈是 $\mathscr{C}(G)$ 的一个基底,故有 $r(C_f) = r(C(G)) = \varepsilon - \nu + 1$.

由于B的行属于 $\mathscr{S}(G)$,而 $\mathscr{S}(G)$ 与 $\mathscr{C}(G)$ 有正交性,故 $B \cdot C^{\tau} = C \cdot B^{\tau} = 0$ (0 阵)

若把边的号码调整成余树的边从 1 号到 e-v+1 号,且把含第 i 边的基圈记成 C_i ,则图 G 的基本圈矩阵为

$$C_I(G) = [I : C_{I_{12}}],$$

其中 I 是 $\varepsilon - \nu + 1$ 阶单位矩阵, C_{III} 的列对应着生成树的边。

定理 10 若G是连通醴,关于生成树T,

$$C_{t} = [I : C_{t_{11}}], B_{t} = [B_{11} : B_{12}],$$

其中 $C_{f,z}$ 与 $B_{1,z}$ 的列对应每T的边,则

$$C_I = [I : B_{11}^T (B_{12}^T)^{-1}]_{\bullet}$$

证 由 $\mathscr{C}(G)$ 与 $\mathscr{S}(G)$ 中向量的正交性得

$$\mathbf{0} = C_I B_I^T = [I : C_{I_{12}}] \begin{bmatrix} B_{11}^T \\ \cdots \\ B_{11}^T \end{bmatrix} = B_{11}^T + C_{I_{12}} B_{12}^T,$$

所以有

$$B_{11}^T = C_{I_{11}} B_{12}^T$$

又 B_1 , 的列对应生成 树 T 的 边, 由 定 理 9, $|B_1^T| \neq 0$,于 是 $(B_1^T)^{-1}$ 存在,故得

$$C_{I_{12}} = B_{11}^T (B_{12}^T)^{-1},$$

 $C_I(G) = [I : B_{11}^T (B_{12}^T)^{-1}].$

证毕.

定理 10 给出由基本关联矩阵求基本圈矩阵乃至 $\mathcal{C}(G)$ 中一切向量的一种计算方法。这种现象是可以理解的,因为由基本关联矩阵 $B_1(G)$ 可以求得关联阵 B(G),就能把 相 应 的 图 画 出来。可见,已知基本关联矩阵,就是已知一个图,自然可以求得这个图的基本圈矩阵。

13.5 割集矩阵

本节只谈连通图.

定义 8 $\mathscr{S}(G)$ 中的全体制集向量为行构成的矩阵为连 通 图 G 的图象矩阵,记成 S(G),全体基本制集向量为行组成的 矩 件为基本制象矩阵,记成 $S_I(G)$ 。

例如图13.7, e=6, v=4, 则基本割集有三个。对于 $\{e_i, e_i\}$ 导出的生成树, 基本割集为

 $S_1 = \{e_1, e_2, e_4\}, S_2 = \{e_1, e_2, e_4\}, S_3 = \{e_2, e_3, e_5\}.$ 基本割集矩阵为

$$S_{I}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

割集除 S_1 , S_2 , S_3 , S_4 , 还有:

$$S_{\bullet} = \{e_{\bullet}, e_{\bullet}, e_{\bullet}\}, S_{\bullet} = \{e_{\bullet}, e_{\bullet}, e_{\bullet}, e_{\bullet}\},$$

 $S_{\bullet} = \{e_{\bullet}, e_{\bullet}, e_{\bullet}, e_{\bullet}\}, S_{\bullet} = \{e_{\bullet}, e_{\bullet}, e_{\bullet}, e_{\bullet}\}.$

割集矩阵为

$$S(G) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

对于割集矩阵与基本割集矩阵,显然有

$$r(S(G)) = r(S_f(G)) = v - 1,$$

 $C(G)(S(G))^T = S(G) \cdot (C(G))^T = 0,$
 $C_f(G) \cdot (S_f(G))^T = S_f(G) \cdot (C_f(G))^T = 0.$

定理 11 设G是连通图、关于生成树T、基本程连阵为

$$C_i = [I : C_{i,.}],$$

基本割集矩阵为

$$S_I = [S_{I_N} : I],$$

其中 $C_{I,1}$ 的列对应T的边, $S_{I,1}$ 的列对应余树边,则

$$S_{f_{11}} = C_{f_{32}}^{\mathsf{T}}$$

WE
$$0 = S_f \cdot (C_f)^T = [S_{f_{1i}} : I] \begin{bmatrix} I \\ \cdots \\ C_{f_{1i}}^T \end{bmatrix} = S_{f_{1i}} + C_{f_{1i}}^T,$$

我们在F,中计算,故有

$$S_{f_0} = C_{f_0}^T$$

证毕.

定理11告知,可以由基本图矩阵求得基本割集矩阵,从而可以由基本关联矩阵求得基本割集矩阵。

13.6 邻接矩阵和道路矩阵

本节的计算在实数域中进行。

定义 9 称矩阵 $A = (a_{ij})_{y \times y}$ 是标志 图 G 的 邻接 矩 阵,其中

$$a_{i,i} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E(G), \\ 0, & v_i v_j \in E(G). \end{cases}$$

例如 K。的邻接矩阵是(1), x_1 ,其中(1), x_2 是每个元素皆为 1 的 ν 阶方阵, I 是 ν 阶单位阵,一般地, G 的 邻接 阵 A(G) 是主对角线上皆为 0 的对称 0-1 方阵。每一行的和是该行对应的顶之次数。

和关联矩阵一样,A(G) 中含有图G的一切性质,我们可以根据 A(G) 把图G画出,所以,原则上,欲研究图G,只需 研究其邻接矩阵 A(G)。

定理 12 设A(G) 是G的邻接矩阵,G中从 v_i 到 v_j 长为 k的道路的条数为 A^* 中 i , j 号元素。

证 对 k 进行归纳证明。k=1 时, $A^*=A$,由A之定义,定理 12 的结论为真。假设 $k \le n$ 时,定理 12 已真,要证 k=n+1 时定理 12 仍真。

令 a_{ij} 是 A的 i , j 号元素, a_{ij}^{m} 是 A^{n} 的 i , j 号元素,则 A^{n+1} 的 i , j 号元素为

$$a_{i,i}^{(n+1)} = a_{i,j}^{(n)} a_{1,i} + a_{i,j}^{(n)} a_{2,j} + \dots + a_{i,j}^{(n)} a_{i,j}$$

而从 v_i 到 v_j 长n+1的道路无非是从 v_i 经n步到某 顶 v_i , $1 \le k \le v_j$,再由 v_i 走一步到 v_j 。由归纳法假设,从 v_i 到 v_i 长n的道路共计 $a_i^{(n)}$ 条,由 v_i 到 v_j 长1的道路 a_{ij} 条,所以长n+1的道路 v_i … v_iv_j 共有 $a_{ij}^{(n)}a_{ij}$ 条,令 $k=1,2,…,v_j$ 于是长n+1的

从 v_i 中经 v_* (共v 个中转顶 v_*)到达 v_i 的道路共计 $\sum_{k=1}^{n}a_{i,k}^{(n)}a_{k,i}$,

这正是 $A^{(+1)}$ 中第i,j号元素。证毕。

注意, 定理 12 中的道路未必是轨道。

69 4
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
, $\Re A^{k} = ? k \in N$.

解 考虑 $V = \{v_1, v_2\}$ 的连通图 K_2 ,则A恰为 K_2 的邻接矩阵,当k为奇数时,从 v_1 到 v_1 的长k的道路及从 v_2 到 v_2 的长k的道路不存在,而从 v_1 到 v_2 的长k的道路恰有 1 条,故由定理12,

$$A^{1} = A(k$$
为奇数)。

当 k 为偶数时,从 v_1 到 v_2 的长 k 的道路不 存 在,从 v_1 到 v_1 ,从 v_2 到 v_2 长 k 的道路恰一条,故由定理 12 得

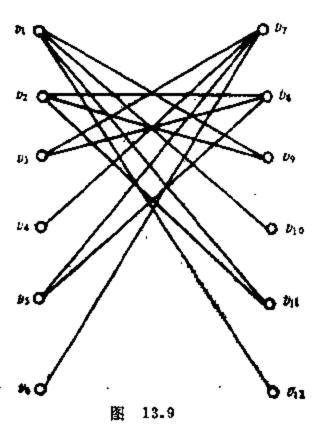
$$A^{*}=I(k$$
为偶数)

其中 I 是 2 阶单位阵。

例 5 我方两名军事人员与敌方两名军事人员同到某现场视察,途中要经过一条河,现只有一只小船,每次最多能乘二人,为安全起见,敌我双方同时在场时,我方人员不能少于敌方人

员,船过一次河要 10 分钟, 问最短几分钟能使双方人员 都渡过河去?

解用(m, n, l) 表示左岸有我 m人,敌 n人;(m, n, r) 表示右岸有我 m人,敌 n人,从左岸到右岸去,全部可能的状态为 $v_1 = (2,2,l)$, $v_2 = (2,1,l)$, $v_3 = (1,1,l)$, $v_4 = (2,2,r)$, $v_4 = (2,2,r)$, $v_4 = (2,1,r)$, $v_5 = (1,1,r)$,



$$v_{10}(2,0,r), v_{11}=(0,2,r), v_{12}=(0,1,r).$$

渡河可视为状态转移。我们 以 $V = \{v_1, v_2, \dots, v_{12}\}$ 为 顶 集合,可以互相转移的两种状态之间连一 条 边,得 到一个二分 图 (图13.9) 图 13.9 的邻接矩阵为

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & \overline{A} \\ \overline{A} & 0 \end{bmatrix}_{12 \times 12},$$

中其

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

显然有

$$A' = \begin{cases} \begin{bmatrix} A' & 0 \\ 0 & \overline{A'} \end{bmatrix}, & k 为偶数; \\ \begin{bmatrix} 0 & \overline{A'} \\ \overline{A'} & 0 \end{bmatrix}, & k 为奇数. \end{cases}$$

用 $a_{i,j}$ 记 A 中元素, $a_{i,j}^{(k)}$ 记 A^{*} 中 i,j 号元素,我们的目标是 求使 $a_{i,j}^{(k)} \neq 0$ 的最小自然数 k 、经计算, $a_{i,j}^{(k)} = a_{i,j}^{(k)} = 0$, $a_{i,j}^{(k)} = 4$,即小船至少五次过河才能把 4 人全运到右岸,共需 50 分钟。

由 $a_1(3) = 4$, 说明有四种不同的过河方案。

下面用邻接矩阵及1+1=1的逻辑运算引入道路矩阵的概念。 定义 10 图 G的通路矩阵是指

$$P(G) = \bigvee_{k=1}^{v} A^{(k)}(G)$$
,

其中 $\bigvee_{i=1}^{\nu}$ 是逻辑和, $A^{(*)}$ 是 A^* 的逻辑 k 次方,运算中加法按 1+1

= 1 进行。A(G) 是G 的邻接矩阵。

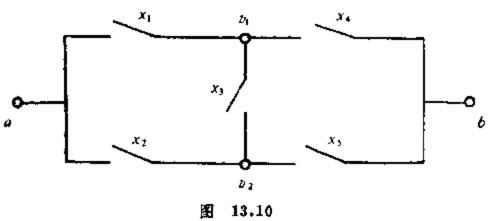
如果只是定性地关心顶 v_i ,与 v_i 之间有无道路,而 对 v_i ,与 v_i 之间道路的数目及长度不感兴趣时,道路矩阵 P(G) 可 以 回答我们所关心的问题,P(G) 中i,i号元素为1,当且仅当 v_i 与 v_i 之间有道路。G是连通图的充要条件是 P(G)中的元素皆为1。

13.7 开关网络

开关网络是计算机设计与通讯系统等方面的重要课题。我们 只讨论简单接触网络。

一个开关电路可以抽象成一个无向加权图,例如图 13.10 是实际的开关电路,图 13.11 是相应的无向加权图。其中权

$$x_i = \begin{cases} 1, \text{ 开关 } x_i \text{ 接通,} \\ i = 1, 2, \dots, 5, \\ 0, \text{ 开关 } x_i \text{ 断开.} \end{cases}$$

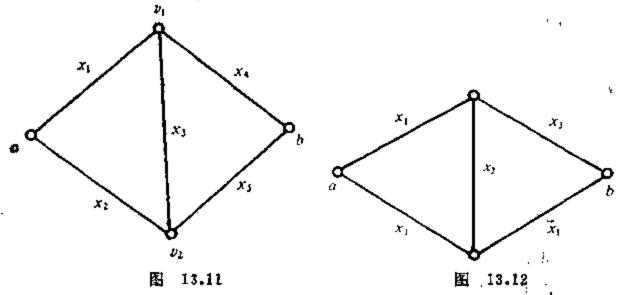


定义 11 开关网络是一个无向加权图 G,边的权为 $w(e_i)$ $= x_i$, $e_i \in E(G)$, $i = 1, 2, \cdots, e$, $x_i \in \{0, 1\}$, 把 开 关 网 络 记 成 $N(G, x_i)$, 若 $a,b \in V(G)$, a,b 之间共有 n 条不 同 的 轨 P(x), $k = 1, 2, \cdots, n$. 今

$$f_{ab} = \sum_{k=1}^{n} \prod_{ab}^{(k)}$$

其中 $\Pi(S)$ 是執 P(S) 的边权之积,这里的加法按 1+1=1 执行、

則称 $f_{\cdot, a}$ 为关于a与b的开关函数、当 $N(G, x_i)$ 中各边之权 x_i 管独立变量时。 $N(G, x_i)$ 叫做简单接触网络。



例如图 13.11 中的网络就是简单开关网络,它的开关函数 $f_{x,y} = x_1x_1 + x_1x_2x_3 + x_2x_3 + x_2x_3x_4$.

而图 13.12 中的网络不是简单接触网络,它的开关函数为

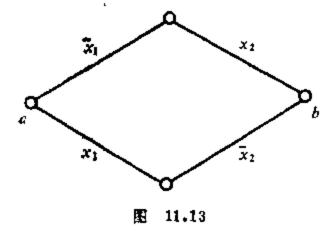
$$f_{*b} = x_1 x_1 + x_1 x_2 \bar{x}_1 + x_3 \bar{x}_1 + x_3 x_2 x_4$$

$$= x_1 x_1 + x_3 \bar{x}_1 + x_2 x_3 = x_3 (x_1 + \bar{x}_1 + x_2) = x_3.$$

 $f_{.,}=x_{s}$ 表明只要把 x_{s} 这个开关接通, a 与 b 则接通, 只 要 把 x_{s} 这个开关断开, a 与 b 则断开,电路中 x_{s} 与 x_{s} 的开 关 是 无 效的,可以折除,以免浪费。

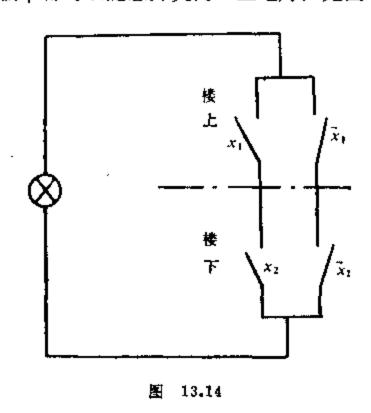
下面 (图 13.13) 是一个常用的非简单开关网络。它的开关 $f_{*b}=x_1\bar{x}_2+\bar{x}_1x_2$,

函数表为



	x 1	x,	f
	0	0	0
	0	1	1
	1	0	1
	1	1	0
-			1

由此表可以看出,只变化 x₁ 与 x₂ 其中之一,则会引起 f₄, 的变化,由此可以设计出一个电灯开关电路,楼上楼下各设一开关,使得楼上与楼下都可以随意开关同一盏电灯,见图 13.14.



我们只关心 a 与 b 是否接通, 所以采用逻辑运算。

$$f_{\bullet,b} = \sum_{k=1}^{n} \prod_{a \in b}^{(k)} = \begin{cases} 1 \iff \exists k = k_0, \ \exists P_a(k_0) \text{ 边权皆 } 1 \iff P_a(k_0) \text{ 接通;} \\ 0 \iff a \vdash b \text{ 断开.} \end{cases}$$

f., 的值叫做 a, b 间的**传输**. f., 的表达式表现了 a 与 b 接通的所有方式。我们的中心问题是,设计满足给定开关函数 f., 的简单开关网络。但是,如果只要求满足开关函数,开关网络的设计是不成问题的,例如已知开关函数为

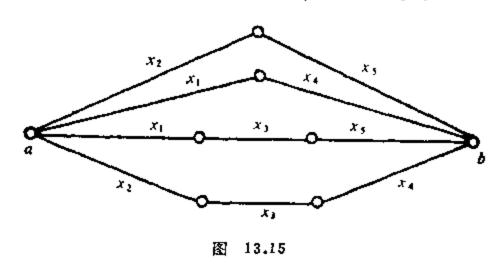
$$f_{\bullet b} = x_1 x_4 + x_1 x_3 x_5 + x_2 x_5 + x_2 x_3 x_4,$$

可以取相应的开关电路如图 13.15 所示,其实图 13.11 亦满足这个开关函数,而且用的开关比图 13.15 中的少,事实上,图 13.15 不是简单开关络网,有些边上的权是相同的,而非独立的,在节省开关个数的意义下,简单开关网络是最优的。

为解决简单开关网络的设计,我们首先建立两个引理。

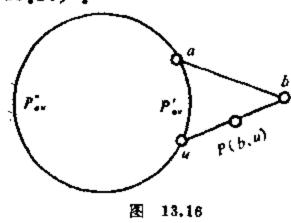
引理 1 设 $G = \bigcup_{i=1}^{\infty} P_{a_i}^{(i)}$, $P_{a_i}^{(i)}$ 是以 a , b 为起铊点的轨,

 $e_a = ab \in E(G)$,对G中不含 e_a 的图C,存在两条轨 $P'_{a,a}$ 与 $P''_{a,a}$, 使得 $E(C) = E(P'_{a,a}) \oplus E(P''_{a,a})$



证(1) 若 a, b 在 C 上,则引理 1 自然成立,这时取图 C 被 a, b 分隔的两个弧分别为 P'_a , 与 P''_a .

(2) a与b只一个顶在C上,不妨设 a在C上。设 P(b, u) 是G上一条轨,u 在C上,但 $u \neq a$,这种轨,由于 G 的构造特点,一定存在,不妨设 P(b,u) 是这种轨中的 最短 者(图 13.16).



a 与 u 把 C 分成两条轨
P'(a, u) 与 P'(a, u),取
P'a, = P(b, u) ∪ P'(a, u),
P'a, = P(b, u) ∪ P'(a, u),
则

$$E(C) = E(P'_{ab})$$

$$\oplus E(P''_{ab}).$$

(3) a与b皆不在 C 上. 因 G = ∪ P(i), 所以对于 C 上的边。,存在一条轨 P(i), 1≤k≤m,使得。在 P(i) 上. 令 236

P(x) 与C的第一个公共顶为v,最末一个公共顶为w,P(x) 上从w到v的一段记成P(x),P(x) 上从w到v的一段记成P(x),P(x) 上从w到v的一段记成P(x),P(x) 。

$$P'_{ab} \approx P_{av}^{(k)} \cup P'_{va} \cup P_{wb}^{(k)},$$

$$P''_{ab} = P_{av}^{(k)} \cup P''_{va} \cup P_{wb}^{(k)},$$

劐

 $E(C) = E(P'_{a,b}) \oplus E(P''_{a,b})$

证毕.

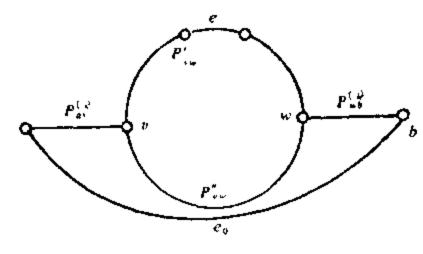


图 13.17

引理 2 G悬连潇图、且

$$\overline{C} = [I : *]$$

是由 $\mathscr{C}(G)$ 的向量为行构成的 $\varepsilon = \nu + 1$ 行, ε 列的矩阵,**则存在**: G 的一个生成树,相应的基本圈矩阵满足

$$\overline{C} = C_1(G)$$
,

且♂中的单位阵 / 的列对应的边是余树边。

证 因 e_1 只含在 e_2 的第一行所对应的无公共边的**国**之并中,故 $G-e_1$ 仍连通,同理

$$G - \{e_1, e_2, \dots, e_{\epsilon - \nu + 1}\} = G_0$$

也是连通图。但

$$|E(G_v)| = \varepsilon - (\varepsilon - v + 1) = v - 1,$$

故 G_0 是G 的生成树, $e_1,e_2,\cdots,e_{s-\nu+1}$ 是余树边。下证 $\overline{C}=C_f(G)$ 。

事实上,C显然是C(G)的一个基底,对于生成树G。,构作基本圈矩阵, $C_{I}(G)$,得

$$C_I(G) = [I : \cdot],$$

 $C_{\ell}(G)$ 的行可由 \mathcal{C} 的行线性表出,由 \mathcal{C} 的构造特点,必有 $C_{\ell}(G)$ 的各行与 \mathcal{C} 的对应行相等,即 $C_{\ell}=\mathcal{C}$. 证**毕**.

下面应用上述引理1与引理2,举例说明如何由已知的开关 函数绘制相应的简单开关网络。

例 6 已知
$$f_a$$
, $= x_1x_2x_3x_5x_7 + x_1x_3x_4x_6 + x_1x_5x_6x_8$ $+ x_2x_4 + x_2x_1x_5x_6 + x_3x_4x_6x_7x_6 + x_5x_6x_7$ 。 试绘出相应的简单开关网络图。

解 此网络中共8条边。

(1)写出f.,中各项对应的向量为行组成的矩阵,因为每一项代表从g到g的一条轨,我们称下面的矩阵为开关函数f.。相应的轨矩阵。

$$P_{ab} = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$C_{11} \qquad x_{1} x_{2} x_{3} x_{4} x_{5} x_{6} x_{7} x_{4} x_{0}$$

$$C_{1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(3) 通过 C_1 的行与列的初等变换求出 (在 F_2 中) C_4 (G_4 + G_4)。 经行的初等变换及调换列的次序,得

$$Z_1 = \begin{bmatrix}
x_1 & x_4 & x_6 & x_2 & x_3 & x_5 & x_7 & x_9 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}$$

我们按 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_2, x_2, x_3, x_4, x_5$ 。把 $G+x_6$ 的边排 F,由引理 1, $G+x_6$ 的基本圈向量可由 C_1 的行线性表出,而 C_1 是由 C_1 的行初等变换而得,故 C_1 的每一行可由 C_1 的前四行线性表出,进而知用 C_1 的前四行可以线性表出 $G+x_6$ 的每一基圈向量,又 C_1 的前四行线性无关,可见 C_1 的前四 行是 $C(G+x_6)$ 的基底阵,故知 $G+x_6$ 有 9 条边, 4=e-v+1=9-v+1,可知 v=6。由引理 2 ,存在一个 $G+x_6$ 的生成树 T ,使 得 关于 T 的基本圈矩阵 $C_1(G+x_6)$ 就是 C_1 中前四行组成的矩阵。且 x_1 , x_2, x_3, x_4 是 $G+x_6$ 余树边。

(4) 由 C,(G+x_o) 求出 S,(G+x_o). 用定理 11 得

$$S_{f}(G+x_{0}) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

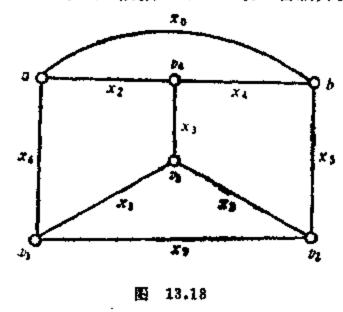
(5) 由 $S_{f}(G+x_{0})$ 求 出 $B(G+x_{0})$ 、 因 为 $B_{f}(G+x_{0})$ 的行可由 $S_{f}(G+x_{0})$ 的行线性表出,我们对 $S_{f}(G+x_{0})$ 进 行的初等变换,得到了每列最多两个 1 的矩阵,即得到了图 $G+x_{0}$

的基本关联矩阵 $B_{*}(G+x_{*})$:

$$B_{f}(G+x_{0}) = \begin{bmatrix} x_{1} & x_{4} & x_{5} & x_{2} & x_{3} & x_{5} & x_{7} & x_{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(6) 把 $B_1(G+x_0)$ 的各列相加 (在 F_2 中)得 $B(G+x_0)$:

(7) 根据 $B(G+x_s)$ 绘制开关网络图如图 13.18.



在图 13.18 中, 删 去 x。这 一边即得简单开关网络,它 b 满足开关函数 f.,.

在对图进行构造性的综合研究的同时,引入向量表示与空间化矩阵化的定量研究,是图论学科的一个进步,在计算机上处理图论问题,强烈地刺激着图论在这

一方向上的发展。为此,首先在 0-1 二元域上定义了两个线性空间。圈空间 $\mathcal{C}(G)$ 和断集空间 $\mathcal{L}(G)$ 。

对于选定的生成树T,基本圈向量构成的矩阵 $C_1(G)$ 是空

间 $\mathscr{C}(G)$ 的一个基底矩阵,所以有了生成树T,原则上,就等于把圈空间的情况搞清楚了,基本割集向量构成的矩阵 $S_{\ell}(G)$ 是 $\mathscr{S}(G)$ 空间的一个基底矩阵,所以,有了生成树T,原则上,就等于把断集空间的情况搞清楚了。而生成树的不同选择, $C_{\ell}(G)$ 与 $S_{\ell}(G)$ 往往会相应地变动,生成树好似是空间 $\mathscr{C}(G)$ 与 $S_{\ell}(G)$ 的标架。

在应用中, $C_{r}(G)$ 与 $S_{r}(G)$ 起很重要的作用,例 如 在 开 关网络的设计中, C_{r} 与 S_{r} 起了关键作用。

在无向图的矩阵中,关联矩阵 B(G) 对图作了完整 刻划,它与图是一一对应的,可以互相确定,而且基本关联矩阵 $B_{\ell}(G)$ 又是 $\mathcal{S}(G)$ 的一个基底矩阵。 $B_{\ell}(G)$ 中含有图 G 的一切信息,由 $B_{\ell}(G)$ 可以把 B(G), $S_{\ell}(G)$, $C_{\ell}(G)$ 确定出来便是可以理解的了。

从另一个角度完整刻划图的矩阵是邻接矩阵 A(G), 它与图保持有一一对应关系,可以互相确定。A(G) 中也含有图 G 的一切信息,例如可以构作道路矩阵,从而判别 G 是否连通,任意两顶间有多长的道路,有几条,等等。

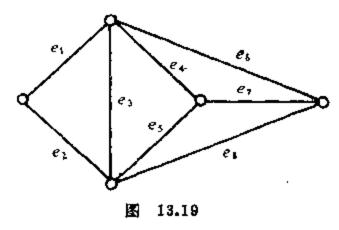
本章学后应知应会的问题有:

- (1) 空间 $\mathscr{E}(G)$, $\mathscr{C}(G)$, $\mathscr{S}(G)$ 的定义、基底 和 维 数 及向量个数。
 - (2) 关联阵 B(G) 与基本关联阵 $B_{\prime}(G)$ 的定义及秩,
- (3) B(G) 和 $B_I(G)$ 与图的连通性的关系及生成树的 确定。
- (4) 圈矩阵 C(G), 基圈阵 $C_{\ell}(G)$, 割集矩阵 S(G), 基本割集矩阵 $S_{\ell}(G)$ 的定义,秩以及 $B_{\ell}(G)$, $C_{\ell}(G)$, $S_{\ell}(G)$ 之间的关系。
- (5) 邻接矩阵 A(G) 与道路矩阵 P(G) 的定义, $A^{*}(G)$ 的图论含义。
 - (6) 简单开关网络与开关函数 f_{\bullet} , 的定义, 如何由 f_{\bullet} , 求

相应的简单开关网络?

习 題

1. 求图,13.19 中图G的圈空间 $\mathscr{C}(G)$ 的全体向量,并求出 $\mathscr{C}(G)$ 的一个基底,给出相应的图示。



- 2. 求图 13.19 中图 G 的断集空间 $\mathcal{S}(G)$ 中的全 体向 量, 并求出 $\mathcal{S}(G)$ 的一个基底, 给出相应的图示。
- 3. G为 Euler 图的充要条件是对任何 $S \in \mathcal{S}(G)$, S 中非 0 分量有偶数个.
- 4 邻接阵A(G) 的每列之和与关联矩阵的每行之和有什么图 论含义?
- 5。G是二分图,证明G的顶可以适当编号,使 得 A(G) 呈如下形状

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & A_{12} \\ A_{21} & 0 \end{bmatrix},$$

其中 A21 = A712.

6. 巳知

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{array} \right],$$

求 A¹⁰⁰¹中的 2,2 号元素。

7. 求 K. 中任一顶到自己的长 3 的道路数目,且在图上标 242

出这些道路。

8. 已知图G的邻接矩阵为

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

不许画图,论证 G是否连通。

9. 巴知图 G 的基本圈矩阵为

$$C_{I}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

求G的一个基本割集矩阵 $S_{+}(G)$ 。

10. 已知图 G 的基本关联阵为

$$B_{*}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

求 $C_t(G)$ 与 $S_t(G)$ 。

11. 已知连通图 G的基本圈阵为

$$C_{f}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

不许画图,回答是否:

(1) {b, c, e, f}导出生成树。

(2) {a, c, e, f}导出生成树。

(3) {a, b, e, g}是割集。

(4) {b, f, c}是割集。

- (5) {d, e, f, g}是割集.
- (6) {a, b, c, d, g}导出一个圈.
- (7) {a, c, d, e, g, f}导出一个圈。
- 12. 画出图 13.20 中的每棵生成树;

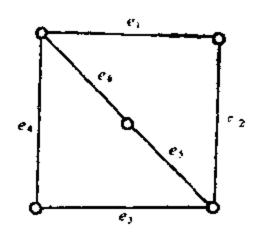


图 13.20

- 13. 已知开关函数 f_{as} , 画出相应的简单开关网络。
 - (1) $f_{*,b} = x_1x_3 + x_1x_2x_5 + x_2x_3x_4 + x_4x_5$.
- (2) $f_{.6} = x_1 x_2 x_5 + x_1 x_4 x_6 + x_2 x_3 x_6 + x_3 x_4 x_7$ $+ x_1 x_2 x_6 x_7 x_8 + x_1 x_4 x_5 x_6 x_7 + x_2 x_5 x_5 x_7 x_6$ $+ x_3 x_4 x_5 x_6 x_8$
- 14. A(G) 是图G的邻接矩阵,
- (1) A^2 主对角线之和为 100, 求 |E(G)| = ?
- (2) A3 主对角线之和为 600, 求 G中三角形个数。
- 15。已知 n 阶矩阵 A 的左下角及主对角线右邻

$$A = \left[\begin{array}{cccccc} 0 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ & & \cdots & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{array} \right]$$

的元素为1,其余元素皆为0, k为自然数,试用图论方法求。 (1) A^* 主对角线元素之和。

- (2) A 主对角线元素之和。
- 16. K_* 中存在 6 个圈 $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, C_6$,使得 $E(K_*) = E(G) \oplus E(C_2) \oplus E(C_3) \oplus E(C_4) \oplus E(C_5) \oplus E(C_6)$.
- 17. V. 是图G的独立集,求邻接矩阵A(G[V]) 和道路矩阵P(G[V]).
- 18. 图G的每个基本圈向量中,非零分量的个数皆为偶数,求 $\sum_{i=1}^{n} A^{2i-1}$ 主对角线之和,其中A是G的邻接矩阵。
- 19. T_1, T_1 是图G的两个生成树,相应的基圈阵分别为 $C_i^{(1)}$ 与 $C_i^{(2)}$,求证 $C_i^{(3)}$ 可以由 $C_i^{(1)}$ 通过初等行变换而得。
 - 20. A=(a,1),x,是图G的邻接矩阵,
- (1)对任一自然数 k, $A^{2^{1-1}}$ 主对角线元素之和为零, $|E(G)| \neq 0$, 求 $\chi'(G)$.
- (2)对任一自然数 k, A^{2k-1} 主对角线元素之和为零, $|E(G)| \neq 0$, 求 $\chi(G)$.
 - 21. G的基本关联矩阵为

$$B_{f} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

不许画图,回答,

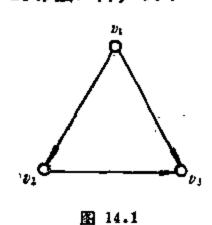
- (1) G是否连通图? 为什么?
- (2) G是否 Euler 图? 为什么?
- (3) G是否可以"一笔画"? 为什么?
- (4) G是否平面图? 为什么?
- (5) 8(G) 是几维线性空间?
- (6) G中共有几个圈? 为什么?
- (7) G是否 Hamilton 图? 为什么?
- (8) $\tau(G) = t$

14 有向图中的矩阵

14.1 邻接矩阵与道路矩阵

本章讨论无环与平行边的有向图。

定义 1 G是标志的有向图, 称矩阵 $A(G) = (a_{ij})_{vkv}$ 为 G的邻接矩阵,其中

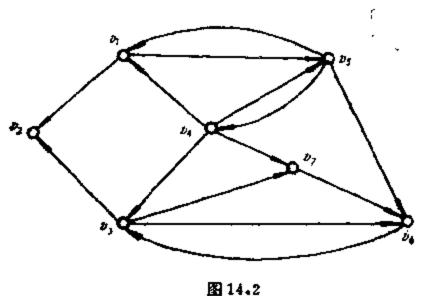


$$a_{ij} = \begin{cases} 1, & v_i v_j \in E(G), \\ 0, & v_i v_j \in E(G). \end{cases}$$

例如图 14.1 中图 G 的邻接矩阵为

$$A(G) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 & 0 & 1 & 1 \\ v_2 & 0 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

定理 1 有向图G中长k的有向道路 $W(v_i,v_i)$ 的条数等于 $A^{i}(G)$ 中i,j号元素。



证明与第13章定理12相同,有向道路未必是有向轨。

例 1 图 14.2 是 7 个城市间的道路网络, 问 由 v₁ 到 v₁ 有 无道路相道? 若有,至少多长? (两城之间的边长为 1.)

解 图 14.2 中有向图的邻接矩阵为

从A(G)中知 $a_1,=0$,即从 v_1 到 v_2 无长1的道路,从 v_1 到 v_2 去要"绕行"。

 A^2 中的 1,7 号元素为 0,说明从 v_1 到 v_2 无长 2 的道路。

$$A^{3}(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 2 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

 $A^{\bullet}(G)$ 中的 1,7号元素为 1,说明从 v_1 到 v_2 只有 1 条 长 3 的 道路,这是一条从 v_1 到 v_2 的最短路,它是 $v_1v_2v_3v_4$.

定义 2 设A(G)是有向图G的邻接矩阵,则称矩阵

$$P(G) = \bigvee_{k=1}^{v} A^{(k)}(G)$$

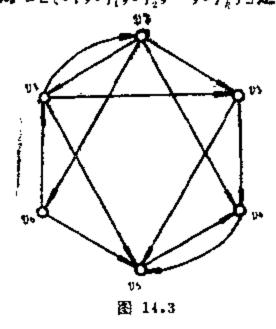
为有向图G的道路矩阵,其中 $\bigvee_{k=1}^{r}$ 是逻辑和, $A^{(k)}$ 是A(G)的逻辑k次方。

显然,有向图G是强连通图的充要条件是通路矩阵P(G)中的元素皆为1。

定理 2 若P(G)是有向图G的道路矩阵,令

$$P(G) \odot P^{T}(G) = \begin{bmatrix} p_{11}^{2} & p_{12}p_{21} & \cdots & \cdots & p_{1\nu}p_{\nu 1} \\ p_{21}p_{12} & p_{22}^{2} & \cdots & \cdots & p_{2\nu}p_{\nu 2} \\ & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ p_{\nu 1}p_{1\nu} & p_{\nu 2}p_{2\nu} & \cdots & \cdots & p_{2\nu}^{2} \end{bmatrix},$$

其中 p_{ij} 是 P(G) 的元素,设 $P(G) \odot P^{T}(G)$ 中第 i 行的非 零 元 景为



证 因为 $p_{i,1}p_{i,1},\cdots,p_{i,l_k}$ p_{l_k} i 皆 非零, 故 $p_{i,l_1}=p_{i,l_1}$ =1, $l=1,2,\cdots,k$, 于是 v_i 与 v_{i,l_1} 在一个有向回路上,从而 v_{i,l_2} 0,…, v_{i,l_k} 在一个有向回路化。上,另一方面,若 $v_{i} \in V(W_0)$, $i \neq j$,则 p_{i,l_1} 0, $i \neq j$,则 p_{i,l_2} 0, $i \neq j$,数 $\{v_{i,l_1}|l=1,2,\cdots,k\}$,故 $\{v_{i,l_1}|l=1,2,\cdots,k\}$,故 $\{v_{i,l_2}|l=1,2,\cdots,k\}$

..., k} = $V(W_o)$, 所以 $G_1 = G[\{v_1, v_{I_0}, ..., v_{I_k}\}$ 是强连通子图。

下证 G_1 之极大性。 $\forall v_m \in V(G)$, $v_n \in V(W_0)$,若 $G[\{v_m\} \cup V(W_0)]$ 仍是强连通子图,则 $v_n \in \{v_n\} \cup \{v_$

例 2 一群孩子,有些比较要好,有些则不大要好,而且,甲对乙有好感,乙未必对甲有好感,以孩子为顶,孩子 v_i 对孩子 v_i 有好感时,在 v_i 与 v_i 之间连一有向边 v_iv_i ,如图 14.3所示,问哪些孩子经常在一起玩

解 图 14.3 中的有向图 G 之邻接矩阵为

$$A(G) = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & v_4 & v_4 & v_6 \\ v_1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ v_2 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ v_4 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ v_5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_6 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

由
$$P(G) = \bigvee_{i=1}^{6} A^{(k)}(G)$$
得

$$P \odot P^{T} = \begin{bmatrix} v_{1} & v_{2} & v_{6} & v_{3} & v_{4} & v_{5} \\ v_{1} & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ v_{2} & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ v_{3} & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ v_{5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

由定理 2 知, {v1,v2,v6}, {v1,v5}导出三个极大强连 通 子

图,可见 v_1,v_2,v_3 这三个孩子经常在一起玩, v_4 与 v_5 这两个孩子经常在一起玩,而 v_3 这个孩子经常一个人玩。

注意,定理 2 中说 $G[\{v_i,v_{i_1},\cdots v_{i_k}\}]$ 是极大强连通子图,但 $G[\{v_i,v_{l_1},\cdots,v_{l_k}\}]=G[\{v_{l_1},\cdots,v_{l_k}\}]$,即 $v_i\in\{v_{l_1},v_{l_2},\cdots,v_{l_k}\}$],即 $v_i\in\{v_{l_1},v_{l_2},\cdots,v_{l_k}\}$] 为强连通 子图 时, $v_i=1$,于是 $v_{i_1}v_{i_2}=1$,故在 $P \odot P^r$ 的第 i 行的非零元素中有一个 $v_{i_1}v_{i_2}$ 即为 $v_{i_2}v_{i_3}$,即 $v_{i_m}=v_i$, $1 \le m \le k$ 。

14.2 关联矩阵和生成树的数目

定义 3 有向图 G的关联矩阵是这样一个矩阵 B(G) = $(b_{G})_{y \times z}$, 其中

$$b_{i,j} = \begin{cases} 1, v_i \stackrel{\text{de}}{=} 2\mathbb{R}; \\ -1, v_i \stackrel{\text{de}}{=} 2\mathbb{A}; \\ 0, e_i \stackrel{\text{de}}{=} 12\mathbb{A}; \end{cases}$$

例如图 14.1 中图的关联矩阵为

$$B(G) = \begin{bmatrix} v_1 & e_1 & e_3 \\ v_2 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ v_3 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

与无向图类似地,把 B(G) 中的任一行删除,得到的子矩阵记成 $B_{I}(G)$,称为有向图G 的基本关联矩阵,且有结论:

- (1) G是竊连遷有向關,則 $r(B(G)) = r(B_1(G)) = v-1$.
- (2) 有向图 G 之底图有 ω 个连通片,则

$$r(B(G)) = r(B_f(G)) = v - \omega$$

与无向图相区别的是这里的计算在实数域中进行。

定編 8 有向關G的关联矩阵 B(G)的任意子行列式取值 范围是 $\{0, 1, -1\}$ 。

证 设 B。是 B(G)中第 i2, i2, ···, in 行 与 第 j1, j2, ···, jn

列的元素构成的 m×m 子方阵。

- (1) 若 B。中每列 1 与 1 各出现恰一次,则 B。各 行 向 量之和为 0,即|B。|=0.
 - (2) 若 B。中有一列元素皆 0,则 $|B_0|=0$ 。
- (3) 若 B。中有一列只有一个非 0 元素,我们按上述这一列的代数余子式展开行列式 $[B_0]$,得 $[B_0] = \pm [B_1]$, B_1 比 B。的 所数少 1 ,若 $[B_1] = 0$,则 $[B_0] = 0$,若 $[B_1] \neq 0$,则 $[B_1] = 0$, 直 至 到 $[B_0] = \pm 1$ 。证样。

定理 4 $e_{i_1}, e_{i_2}, \cdots, e_{I_{n-1}}$ 是 G 的生成树的边的充要条 件 是 这 v-1 条边在 $B_r(G)$ 中对应的列组成的行列式等于 1 或 -1,这 里 G 为有向图。

定理 4 之证明与第 13 章定理 9 相似。

下面给出求有向图G的生成树数目的公式,为此,引用一下 线性代数中的

Binet-Cauchy 公式:

已知 $P = (p_{i,i})_{n \times n}, Q = (q_{i,i})_{n \times n}, 且 m \leq n, 则$

$$\det(PQ) = \sum_{\substack{1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \dots \leq i_m \leq n \\ p_{ni_1} \cdots p_{ni_m} \\ p_{mi_1} \cdots p_{mi_m} \\ } \begin{vmatrix} q_{i_11} & \cdots & q_{i_{1m}} \\ q_{i_21} & \cdots & q_{i_{2m}} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ q_{i_{m1}} & \cdots & q_{i_{mm}} \end{vmatrix}.$$

例如
$$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$
, $Q = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$,

$$PQ = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \det(PQ) = \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 13.$$

用 Binet-Cauchy 公式算得

$$\det(PQ) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 13.$$

定理 5 G是弱连通有向图,则G的生成树的数目为 $\det(B_1(G) \cdot B_1^*(G))$ 。

证 对 $B_r(G)$ 与 B_r^T 用 Binet-Cauchy 公式,再用定理 4 得 $\det(B_r(G)B_r^T(G)) = r(G) \cdot (\pm 1)^2 = r(G)$,

其中 $\tau(G)$ 为生成树的数目。证毕。

例 3 求竞赛图 K_{ν} 的生成树之个数 $\tau(K_{\nu})$ 。

解 设 $B_{\ell}(K_{\nu})$ 的元素是 $b_{\ell,\ell}$ 则 $B_{\ell}(K_{\nu})B_{\ell}^{T}(K_{\nu})=(b_{\ell,\ell}')_{(\nu-1)\times(\nu-1)}$,

$$b'_{i,j} = \sum_{k=1}^{c} b_{i,k} b_{i,k}, i,j = 1,2,\dots,\nu-1.$$

当i = j时,

$$b'_{i,i} = b'_{i,i} = \sum_{k=1}^{c} (b_{i,k})^{2}, i = 1, 2, \dots, v-1.$$

又由于 K_{ν} 是完全图,每顶与 ν_{-1} 条边相关联,故

$$b'_{i,i} = v - 1, i = 1, 2, \dots, v - 1.$$

当 $i \neq j$ 时, $b'_{i,j} = -1$,故得

$$B_{f}(K_{\nu})B_{f}^{T}(K_{\nu}) = \begin{bmatrix} \nu-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \nu-1 & -1 & \cdots & -1 \\ & \cdots & \cdots & & \\ & -1 & -1 & -1 & \cdots & \nu-1 \end{bmatrix}.$$

下面计算 $\det(B_I(K_v)B_I^*(K_v))$ 。为此,考虑v-1阶方 阵 T,其元素为

$$t_{i,i} = 2, i < \nu - 1;$$
 $t_{\nu-1}, \nu-1 = 1;$
 $t_{i,i} = 1, i \neq i$

易知det T = 1. 于是

$$\det(TB_f(G)B_f^T(G)) = \begin{vmatrix} v & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & v & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & v & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & v & 0 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ v^{v-2} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{v-2} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{v-2} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{v-2} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{v-2} & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ v^{v-2} & \vdots & \ddots$$

而

$$\det (TB_f(G)B_f^T(G)) = \det T \cdot \det (B_f(G)B_f^T(G))$$

$$= \det (B_f(G)B_f^T(G)),$$

故

$$\tau(K_{\nu}) = \det(B_{I}(G)B_{I}^{T}(G)) = \nu^{\nu-2},$$

这正是 Caylay 定理的结论。

例 4 求图 14.4 中图的生成树个数 $\tau(G)$ 。

鯶

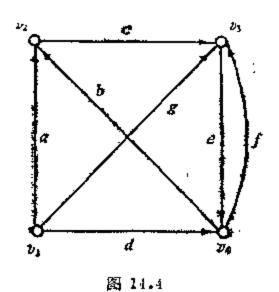
$$B_{i}(G) = v_{2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ v_{3} & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}.$$

$$B_f(G)B_f^{\mathsf{T}}(G) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{bmatrix},$$

故得

$$\tau(G) = \det(B_f(G)_f^T(G))$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 4 \end{vmatrix} = 24.$$

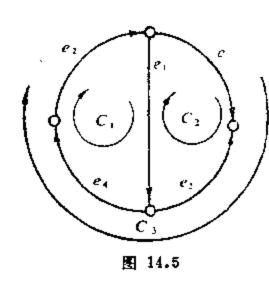


14.3 圈矩阵与割集矩阵

G是有向图,在其底图上,对每个无向圈 C_1 ,首先任 意 指 定一个**循环方向**。

定义 4 称以 $C_{i,j}$ 为元素的矩阵 C(G) 为有问图 G 的 图 矩阵,其中

1, 无向圈 C; 中含边 e; ,且 e; 的方向与 C; 的循 环 方 向 一致;
C; = { -1, 无向圈 C; 中含边 e; ,但 e; 的方向与 C; 的循 环方向相反; 0, 无向圈 C; 中不含边 e; .



例如图 14.5 中,其底图上有三个 无向圈,已被规定了顺时针的循环方 向(也可以取逆时针循环方向,但取 定之后,不能改变其循环方向),于 是这个有向图的圈矩阵为

$$C(G) = \begin{bmatrix} C_1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ C_2 & -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ C_3 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

定义 5 在有向圈G中取定生成树T,在G的圈矩阵中,提取只含一条余树边的圈(基本圈)对应的行构成子矩阵 $C_i(G)$,称其为有向图的基本圈矩阵。

例如图 14.5 中,取 e_1,e_4,e_5 为生成树的边,则其基本圈矩阵为

$$C_{I}(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

下面讨论有向图中的割集和基本割集矩阵。

在有向图G中, $V_1 \subset V(G)$, $V_1 \neq \emptyset$, $\overline{V}_1 \neq \emptyset$,考虑边子集 $(V_1, V_1) \cup (V_1, V_1)$,我们规定一个流向,这个流向可以任意 取定与 $(V_1 V_1)$ 中的边方向一致或与 (\overline{V}_1, V_1) 中边的方 向一致,则称 $(V_1, \overline{V}_1) \cup (\overline{V}_1, V_1)$ 连同规定的流向为G的一个有向断集。同理,把G的底图中的一个割集对应的在有向图G中的有向断集称为有向图G的有向割集,底图中的基本割集对应的有向割集称为有向图G中的基本有向断集。

定义 6 称 $S(G) = (s_{ij})$ 为有向图 G 的割集矩阵,其中 1 ,有向割集 S_i 中含边 e_i ,且两者方向一致; $s_{ij} = \begin{cases} -1 & \text{有向割集 } S_i \text{ 中含边 } e_j \text{ ,且两者方向相反; } \\ 0 & \text{有向割集 } S_i \text{ 中不含边 } e_j \text{ .} \end{cases}$

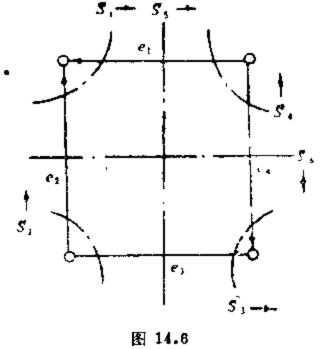
又提取有向图G的割集矩阵中的基本有向割集对应的行构成子矩阵 $S_1(G)$,称其为**有向图G的基本割集矩阵**。

例如图 14.6 中,有六个有向割集,它的割集矩阵为

$$S(G) = \begin{cases} s_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ s_2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ s_5 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ s_6 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{cases}$$

若取 e_1,e_2,e_3 为生成树 的 边,则有向图 G 的基本割集矩阵为

$$S_{t}(G) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$



有向图中的矩阵具有无向图中相应矩阵的相似的性质:

(1)
$$B(G)C^r(G) = C(G)B^r(G) = 0$$
.

(2)
$$r(C(G)) = r(C_1(G)) = \varepsilon - v + 1$$
.

(3)
$$C(G)S^{r}(G) = S(G)C^{r}(G) = 0$$
,

(4)
$$r(S(G)) = r(S_1(G)) = v - 1$$
.

(5) G是弱连通有向图, T为生成树,

$$C_{f}(G) = [I : C_{f_{1}}],$$

 $B_{f}(G) = [B_{11} : B_{12}],$

其中 C_{I1} , 与 B_{I1} 的列对应于树 T 之边, I 与 B_{I1} 对应 $\overline{}$ 于 余 树 之边,则

$$C_I(G) = [I : -B_{11}^T (B_{12}^T)^{-1}].$$

(6) 对于生成树T、

$$S_{I}(G) = [S_{I1} : I],$$

 $C_{I}(G) = [I : C_{I1}],$

其中 $C_I(G)$ 与 $S_I(G)$ 中列对应的边之序号一 敢, 且 $S_{I,1}$ 对 应 余树边, $C_{I,1}$ 对应树边,则

$$St_{11} = -Ct_{12}^T$$

14.4 电路网络

本节利用有向图的矩阵建立电路网络中的电流与电压满足的常微分方程,进而求出各支路上的电流与电压。

基尔霍夫电流定律,代号KCL。

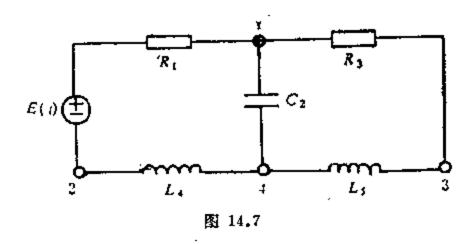
KCL, 电网路上每个节点上各支路电流代数和为零。

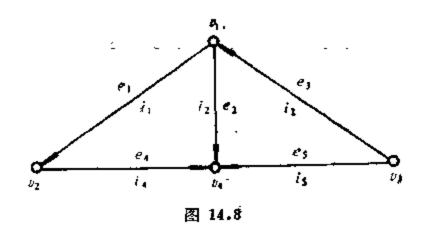
基尔智夫电压定律,代号 KVL。

KVL:电网络上每一回路内各支路电压代数和为零。

由于各支路电流与电压的方向往往不能事先断定,为方便起见,事先规定各支路上电流与电压的一个一致的所谓**参考方向,**于是便把一个实际电路网络抽象成一个有向图G,再把各支路电流 i(e,t) 视为边 e 之权,则得一个网络,把此网络记成N(G,i(e,t)),有时以各支路之电压 v(e,t) 为边 e 之权,得到的网络记成 N(G,v(e,t)).

例如图 14.7 中电路相应的有向 M 权图 N (G, i(e,t)) 知 图 14.8 所示。





KCL 的图论表达式为

$$B(G)\bar{I}=\mathbf{0,}$$

$$B_{1}(G) \bar{i} = 0;$$

KVL 的图论表达式为 ...

$$C(G)V=\mathbf{0},$$

$$C_I(G)V = \mathbf{0}_{\bullet}$$

其中

例如图14.8中,

KCL:
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1(t) \\ i_2(t) \\ i_3(t) \\ i_4(t) \\ i_5(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$KVL_{t} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{vmatrix} v_{1}(t) \\ v_{2}(t) \\ v_{3}(t) \\ v_{4}(t) \\ v_{5}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

在 KVL 的表达式中,我们取循环方向为顺时针方向, C_1 是 $v_1v_2v_1$, C_2 是 $v_1v_3v_4v_1$, C_3 是 $v_1v_2v_4v_4$ 0.

下面推导电路网络计算中状态变量法的基本关系式。

对于选定的生成树T,对边适当排序,使得一

$$C_f(G) = [I : C_{I_1}],$$

 $B_f(G) = [B_{11} : B_{12}],$

其中 I 与 B_{11} 的列对应余树边,由 $B_{I}(G)I = 0$ 得

$$[B_{11}:B_{12}]\begin{bmatrix} \overline{I}_{\epsilon} \\ \overline{I}_{\tau} \end{bmatrix} = \mathbf{0},$$

其中 1。是余树边上的电流列, 1, 是树边上的电流列, 即

$$B_{11}\bar{I}_{e} + B_{12}\bar{I}_{r} = 0$$

$$\bar{I}_{r} = -B_{12}^{-1}B_{11}\bar{I}_{e}.$$
(1)

由(1)知,余树边上的电流与生成树边上的电流不全是独立的,知其一方可求得另一方。

由 $C_1V=0$ 得

$$[I:C_{fiz}]\begin{bmatrix}V_{i}\\V_{I}\end{bmatrix}=0,$$

其中V 是余 树 边上的 电压列,V 是生成树边上的 电流列,

$$V_{\bullet} = -C_{I12}V_{I\bullet} \tag{2}$$

由(2)知余树边上的电压与生成树边上的电压不是独立的,知 其一方可求得另一方。

又由于
$$C_{f_n} = -B_1^T (B_{12}^{-1})^T$$
得
$$C_{f_n}^T = -B_{12}^{-1} B_{12}.$$
令
$$K = -C_{f_{12}} = B_{11}^T (B_{12}^{-1})^T,$$
则有

则有

$$V_{\bullet} = KV_{\tau},$$

$$\bar{I}_{\tau} = -K^{\tau}I_{\bullet \bullet}$$

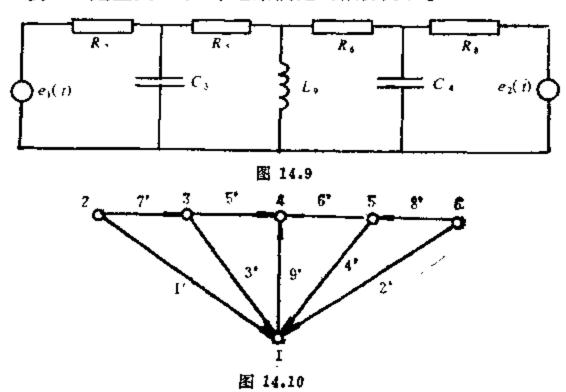
最后得基本关系式

$$\begin{bmatrix} V_{\bullet} \\ I_{\tau} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & K \\ -K^{\tau} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{\bullet} \\ V_{\tau} \end{bmatrix}. \tag{3}$$

下面用例题说明如何应用公式 (3) 把电路问题化为常 微分 方程组来解。

图论中常用的字母 v 与 e 在电路中有固定的物理意义,为避 免混淆,我们改用1,2,…表示图的顶,1',2',…表示图的边。

例 5 建立图 14.9 中电路满足的微分方程。



解 选 1', 2', 3', 4', 5' 为生 成树 的 边, 它 们 含 $e_1(t)$, $e_2(t)$, $e_3(t)$, $e_4(t)$, e_4

$$V_{\bullet} = \begin{bmatrix} v_{6} \\ v_{7} \\ v_{\bullet} \\ v_{9} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_{\bullet} i_{6} \\ R_{7} i_{7} \\ R_{\bullet} i_{\bullet} \\ L_{9} \frac{\mathrm{d} i_{9}}{\mathrm{d} t} \end{bmatrix}, \quad \tilde{I}_{\bullet} = \begin{bmatrix} i_{6} \\ i_{7} \\ i_{\bullet} \\ i_{9} \end{bmatrix},$$

$$V_{T} = \begin{pmatrix} v_{1} \\ v_{2} \\ v_{3} \\ v_{4} \\ v_{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e_{1}(t) \\ e_{2}(t) \\ v_{3} \\ v_{4} \\ v_{5} \end{pmatrix}, I_{T} = \begin{pmatrix} i_{1} \\ i_{2} \\ i_{3} \\ i_{4} \\ i_{6} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{1} \\ i_{2} \\ C_{s} \frac{dv_{3}}{dt} \\ C_{4} \frac{dv_{4}}{dt} \\ \frac{v_{5}}{R_{5}} \end{pmatrix}$$

$$B_{1}(G) = \begin{cases} 1' & 2' & 3' & 4' & 5' & 6' & 7' & 8' & 9' \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 5 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{cases}$$

把边重新排序, 使 $B_1(G) = [B_{11} : B_{12}]$, 其中

$$B_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_{12}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$K = B_{11}^{\mathsf{T}} (B_{12}^{-1})^{\mathsf{T}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

代入公式(3)得

展开得

$$i_{5} = (v_{4} + v_{5} - v_{3})/R_{5},$$

$$i_{7} = (e_{1}(t) - v_{5})/R_{7},$$

$$i_{8} = (e_{2}(t) - v_{4})/R_{8},$$

$$L_{9} \frac{di_{9}}{dt} = v_{5} - v_{5},$$
(4)
(5)

$$i_1 = -i_1, \tag{8}$$

$$i_2 = -i_0, \tag{9}$$

$$C_{s} \frac{\mathrm{d}v_{s}}{\mathrm{d}t} = i_{s} + i_{\tau} + i_{s},$$
 (10)

$$C_4 \frac{\mathrm{d}v_4}{\mathrm{d}t} = i_4 - i_6, \tag{11}$$

$$v_s = -R_s(i_0 + i_0). {12}$$

由(4)与(12)得

$$v_s = \frac{R_s v_s - R_s R_s i_g - R_s v_s}{R_s + R_s}.$$
 (13)

$$. i_6 = \frac{R_6 (v_4 - v_3) - R_5 R_6 i_9}{R_6 (R_5 + R_6)}$$
 (14)

把 (13) 代入 (7) 得

$$L_{s} \frac{\mathrm{d}i_{s}}{\mathrm{d}t} = \frac{-R_{s}R_{6}}{R_{s} + R_{6}}i_{s} - \frac{R_{6}}{R_{5} + R_{6}}v_{s} - \frac{R_{5}}{R_{5} + R_{6}}v_{s}. \tag{15}$$

类似地由 (10) 与 (11) 得

$$C_s \frac{\mathrm{d}v_s}{\mathrm{d}t} = \frac{R_s}{R_s + R_s} i_s - \left(\frac{1}{R_s} + \frac{1}{R_s + R_s}\right) v_s + \frac{1}{R_s + R_s} v_s + \frac{e_1(t)}{R_t},$$

(16)

$$C_{4}\frac{\mathrm{d}v_{4}}{\mathrm{d}t} = \frac{R_{5}}{R_{5} + R_{6}}v_{5} + \frac{1}{R_{5} + R_{6}}v_{5} - \left(\frac{1}{R_{8}} + \frac{1}{R_{5} + R_{6}}\right)v_{4} - \frac{e_{2}(t)}{R_{8}}.$$

(17)

把 (15) 、 (16) 、 (17) 写成矩阵形式为

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} i_{9} \\ v_{s} \\ \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-R_{s}R_{s}}{L_{9}(R_{s} + R_{6})} & \frac{-R_{6}}{L_{9}(R_{s} + R_{6})} & \frac{-R_{5}}{L_{9}(R_{5} + R_{6})} \\ \frac{R_{s}}{C_{s}(R_{s} + R_{6})} & \frac{R_{s} + R_{6} + R_{4}}{C_{3}(R_{5} + R_{6})R_{7}} & \frac{1}{C_{3}(R_{5} + R_{6})} \\ \frac{R_{s}}{C_{4}(R_{5} + R_{6})} & \frac{1}{C_{4}(R_{5} + R_{6})} & \frac{R_{s} + R_{6} + R_{4}}{R_{8}C_{4}(R_{5} + R_{6})} \end{vmatrix} v_{s} + \frac{1}{C_{4}(R_{5} + R_{6})}$$

$$+ \begin{bmatrix}
0 & 0 \\
\frac{1}{C_{3}R_{3}} & 0 \\
0 & \frac{1}{C_{4}R_{5}}
\end{bmatrix} \begin{bmatrix}
e_{1}(t) \\
e_{2}(t)
\end{bmatrix}.$$
(18)

解常系数非齐次线性微分方程组(18)得:,(r),v,(r),v,(r),进而可以求得各支路上的电流与电压。

- (1) 画出电路对应的网络N(G,i(e,t)).
- (2)选一棵所谓正规生成树 T,它含一切电压源,尽可能 多的电容和尽可能少的电感以及一些电阻。
- (3) 按先是余树边后是树边的次序把边排序,使得 B₁(G) = [B₁₁: B₁₂], C₁(G) = [I: C₁₁₂],
 并求出 B₁₁ 与K。
 - (4) 列出基本关系式(3)。
- (5)从(3)中尽可能多地消去一些变量,剩余的变量即为状态变量。
 - (6)解状态变量方程

$$\dot{X} = MX + NU,$$

其中X 是以状态变量为分量的列向列,M,N,U 为已知矩阵。

有向图和无向图一样,也有八大矩阵:

A(G), B(G), $B_1(G)$, C(G), $C_1(G)$, S(G), $S_1(G)$, P(G). 而且有向图与其底图在相应的矩阵之定义及性质方面有许多相似之处。我们的注意力自然应集中到两者的区别上,

(1) 有向图的邻接矩阵无对称性, 而无向图的邻接矩阵是

对称的。

- (2) 在无向图中,B(G), $B_{1}(G)$,C(G), $C_{1}(G)$,S(G), $S_{1}(G)$ 的运算是在 0-1 二元域 F_{2} 中进行,1+1=0;而这些矩阵在有向图中的运算则在实数域 R上进行。
- (3) 有向图中,定义 C(G) 时比无向图多引入一个循环 方向,定义 S(G) 时,比无向图多引入一个流向。
- (4) 有些公式在有向图中有符号变化,例如 $C_{I}(G) = [I:C_{I_{1}}], B_{I}(G) = [B_{11}:B_{12}], S_{I}(G) = [S_{I_{11}}:I]$,则 $C_{I_{11}} = \pm B_{I}^{T}(B_{I}^{T})^{-1},$ $S_{I_{11}} = \pm C_{I_{11}}^{T},$

公式中, 无向图取"+"号, 有向图取"-"号。

本章引入的解电路问题的状态变量法是有向图的 最 重 要 的 应用之一,这种方法——电路理论与计算中的先进方 法 被 广 泛 采用。

习 摄

1. 巴知有向图 G 的邻接矩阵是

$$A(G) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

不许画图,回答G是否强连通,为什么?

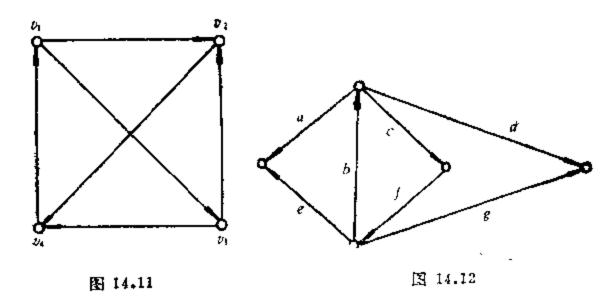
- 2. 求图 14.11 的极大强连通子图。
- 3. 有向图G的关联矩阵为

$$B(G) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

求 $\tau(G)$,并画出一切生成树。

4. 写出图 14.12 中关于生成树 $T = G[\{a,b,c,d\}]$ 的 基 标 264

圈矩阵与基本割集矩阵.



5. 求图 14.13 中两个电路的状态变量方程组。

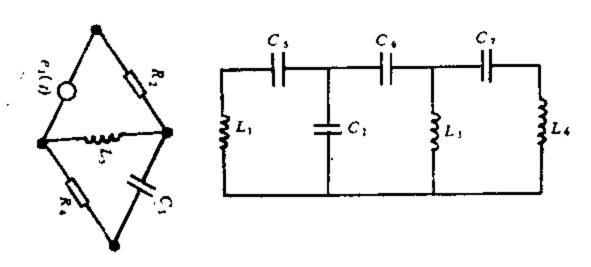


图 14.13

6 , B(G) 是有向图 G(V,E) 的关联矩阵,求

$$\sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|E|} b_{i|j} = ?$$

其中 b,1 是 B(G)的元素。

又若 G(V,E) 的邻接矩阵 $A(G) = (a_{i,j})_{u \times v}$,说明

$$\sum_{i=1}^{|V|} \sum_{j=1}^{|V|} a_{i,j}$$
的图论意义。

15 NPC概念和Cook定理

15.1 算法的好与坏

多年来,许多学者企图对任何组合问题都找一个有效算法来解决,可惜至今大家只是部分地得到成功,本书前面各章列出的种种算法,记录了这方面取得成功的一些重要成果。另外还有大批的问题,例如我们已经接触的工序问题、货郎问题、色数问题等,虽曾做过极大努力,仍未找到有效算法。人们发现了一个问题集团,其中包含的问题已经落实的就有几百个(以后还会增加),它们都被认真研究过,但其中任何一个问题皆未找出有效算法。虽然这个集团中的问题其实际背景与数学模型各异,但是已经严格证实,这个集团中的问题在算法的时间复杂度方面是共命运的,即若其中一个问题存在有效算法,则它们每个问题都有有效算法。当然,据此判定这些问题一定不会有有效算法,显然是不能令人信服的,但这种情形给出了一个很强的暗示,令人倾向于猜测这个问题集团可能真的不会有有效算法。

我们把描述一个问题的实例的数据之长度叫做输入长。

所谓**有效算法**,又称好算法,按Edmonds的定义,是指对给定的问题,存在一个多项式 P(n),使得对输入长为n 的每个实例,最多用P(n)个基本运算步骤即得以解决。

这里"有效"二字体现于:

- (1)在文献中发表的被公认是有效地解决了的问题所用的原法,皆属于Edmonds意义下的有效算法。
 - (2)任何一个难解问题(指上述共命运的问题集团中的问题

题),皆未发现Edmonds意义下的有效算法。

(3) Edmonds意义下的有效算法比指数时间的算法(例如: 穷举法)好得多。

例如算法 A的时间复杂度是n°, 算法 B的时间复杂度是2°, 其中 n 是输入长。假设计算的时间有限,例如是一个小时内必须 完成,今有输入长为 n。的一个实例,使用计算机 C来 解。用 B 算法,一个小时内运算步骤必须不少于 2°, 个, 若改用另一台 更 快速的计算机 C′来解, C′是 C运算速度的百倍,我们指望 C′会 解决输入长比 n。大得多的实例,但'C'在一小时内处理的实例之 输入长 n 满足

$$2* = 2*0 \times 100$$
.

即

$$n = n_o + \log_2 100 < n_o + 7$$
.

由此可见,由于算法B的笨拙,我们虽然把计算机计算速度提高了百倍,但用算法B去解决问题时,并未显示出大型快速计算机的优势来。我们已经意识到,虽然计算机的更新换代是必要的和令人鼓舞的进展,但从某种意义上来说,提供好的算法比机器提高速度更为有效。

对于同一个问题,若用A算法在C'机上去解,则可处理的输入长n满足

$$n^2 = 100n_0^2$$
, $n = 10n_0$.

这时可以处理输入长是C机上处理的输入长10倍的实例。若有一个算法的时间复杂度是输入长的线性函数,用此算法在C'机上去解可以处理比C机处理的输入长扩大百倍的实例。

下面的表格对有效算法与指数时间的算法的效果进行了具体 比较。

村间复杂度	原计算机	扩大百倍速度的计算机	千倍速度计算机
12	N ₁	100N,	1000 N 1
n³	N 2	4.64 N ₂	10 N 2
n s	N _s	2.5N,	$3.98N_{s}$
2 •	N.	N . + 6.64	$N_{\bullet} + 9_{\bullet} 97$
3 •	N_{5}	N s + 4.19	$N_{s} + 6.29$

其中N,(i=1,2,3,4,5)是单位时间内可以处理的输入长之上界。我们看到,若用3*这种时间复杂度的坏算法,既使机器的计算速度扩大干倍,输入长的增加也不到7。

下页的表是用每秒百万次计算机得出的,我们看到,输入长30的实例,在这种快速计算机上用3°时间复杂度的算法尚需6年半的时间才能完成,而输入长为30的实例并不罕见;若用这种算法处理输入长为60的实例,则需要1.3×10''个世纪!这实际上宣布了3°时间复杂度的算法是无用的坏算法。

15.2 判定问题的NP类

我们称答案不是"是"就是"否"的问题为**判定问题**。有些问题,可以化成判定问题,例如边容量为自然数的网络上的最大流问题就可以化成:给定网络N与非负整数 k,问是否存在流量不少于 k的流函数? 若回答说"是",我们用 k+1 代替 k, 再提问同样的问题,如此可以找到最大流。

为了讨论判定问题的时间复杂度理论·我们引入Turing 机的概念。Turing 机是年轻的英国数学家Turing 1936年提出的一个数学概念,它并非什么机器,但它的功用却十分之大,不仅是研究计算复杂度理论的得力工具,而且为1946年真计算机之间世奠定了思想基础。

我们称下面的八重组为一部 Turing 机:

n 0.00001* 0.00002* 0.00003* 0.00004* 0.00005* 0.00006* n² 0.0001* 0.0004* 0.0009* 0.0016* 0.0025* 0.0036* n³ 0.001* 0.008* 0.027* 0.064* 0.125* 0.0036* n³ 0.1* 3.2* 24.3* 1.7' 5.2' 13.0' 2* 0.001* 1.0* 17.9' 12.9\tag{5.2} 35.75.2' 366±½ 3* 0.059* 58' 6.54 3855±½ 2×10*±½ 1.3×10*±	时 利 利 () () () () () () () () ()	10	20	30	40	20	09
0.0001* 0.0004* 0.0009* 0.0016* 0.0025* 0.001* 0.008* 0.027* 0.064* 0.125* 0.1* 3.2* 24.3* 1.7* 5.2* 0.001* 1.0* 17.9* 12.9* 35.7* 0.059* 58* 6.54* 3855世紀 2×10*世紀	E	0.00001*	0,00002*	0,00003*	0,00004	0.00005	~90000°0
0.001" 0.008" 0.027" 0.064" 0.125" 0.1" 3.2" 24.3" 1.7' 5.2' 0.001" 1.0" 17.9' 12.9天 35.7年 0.059" 58' 6.5年 3855世紀 2×10"世紀	71 ²	0.0001	0.0004	*6000°0	0,0016	0.0025	%9£00°0
0.10° 3.2° 24.3° 1.7′ 5.2′ 0.001° 1.0° 17.9′ 12.9天 35.7年 0.059° 58′ 6.5年 3855世紀 2×10°世紀	27.0	0.001	0.008*	0.027*	0*064*	0,125"	0,216"
0,001" 1,0" 17,9' 12,9天 35,7年 0,059" 58' 6,5年 3855世紀 2×10°世纪	a a	0.1		24,3%	1,7/	5,2	13,0′
0.059" 58' 6.5年 3855世紀 2×10°世紀	*	0.001	1.0%	17.9/	12.9米	35.7年	366胜经
	**	0.059	587	6.5年	3855世纪		1 ,3× 1013世纪

$$(S,\Gamma,\Sigma,f,b,s_n,s_n,s_n)$$
,

其中

$$S = \{s_1, s_2, \dots, s_n, s_n, s_n, s_n\}$$

是状态集合,s。叫做初态,s,叫做Yes态,s,叫做No态。

$$\Gamma = \{\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_k, b\}$$

是带符集合, 6叫做空白符。

 $\Sigma \subset \Gamma$ 叫做输入符集合。

$$b \in \Gamma - \Sigma$$
.

$$f: (S - \{s, s_n\}) \times \Gamma \rightarrow S \times \Gamma \times \{1, -1\},$$

f 叫做转换函数。

Turing 机上有一个无限长的"纸带",划分成…,C(-2), C(-1),C(0),C(1),C(2),…地址序列。

Turing 机还具有一个"读写头"。

下面说明 Turing 机的操作及表达式。

(1) 头位函数h(t)

读写头每个单位时间瞄准一个地址,若t时刻瞄准的地址是C(i),则写成

$$h(t) = i$$
.

规定

$$h(0) = 1$$
.

即开始时读写头在C(1)处。

(2)数据输入

设输入符集合为 $\Sigma = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$,记时刻 t 在C(i) 处写的一带符是Y(i,t),且规定

$$\gamma(i,0) = x_i, \quad i = 1,2,\dots,n_3$$
 $\gamma(i,0) = b, \quad i \neq 1,2,\dots,n_s$

(3) 转换函数 f

设时刻 t 之状态为 $s(t) \in S - \{s_t, s_t\}$,则 f(s(t), Y(h(t), t)) = (p, q, d),

其中

$$(S(t),\gamma(h(t),t)) \in (S - \{s_{\tau},s_{\kappa}\}) \times \Gamma,$$

$$(p,q,d) \in S \times \Gamma \times \{1,-1\}.$$

含义是

$$s(t+1) = p,$$

$$h(t+1) = h(t) + d,$$

$$\gamma(i,t+1) = \begin{cases} q, & i = h(t); \\ \gamma(i,t), & i \neq h(t). \end{cases}$$

(4) 停机

$$s(s) \in \{s_y, s_N\}$$
时停机。

Turing 机解决了一个判定问题D, 是指:

对任意给定的D的一个实例,这个实例用字 符 x_1,x_2,\cdots,x_n 表达时,实例答案为"是"当且仅当 以 x_1,x_2,\cdots,x_n 做为输入, Turing 机停机于 s_n 态。

定义 1 对于判定问题D,存在一个多项式P(x),使得对其每一输入长为n 的实例,Turing 机可以在P(n) 时间内解决,此种问题D的全体组成的集合叫做P类问题集合,记之为P。

有许多问题,我们虽然尚不知其有无多项式算法,但给出一些附加信息,则可以在多项式时间内由 Turing 机加以解决。例如"图 G 是否 Hamilton 图?"众所周知,这个问题是个难解问题,但若给出G 的一个子图,则在多项式时间内可以验证它是否为G 的 Hamilton 圈。

设 Turing 机开始计算前,把某些信息存入 C(-1), C(-2), …等地址, 称符号列

$$\gamma(-1,0), \gamma(-2,0), \dots = g_1g_2\dots$$

为一个猜想。

我们注意到,若 Turing 机的计算时间以某个多项式 P(n) 为上界,则不要把比P(n) - 1长的猜想存入机器中去,因为地址 C(-P(n)) 在计算中达不到。

一个判定问题D在不确定 Turing 机上在多项式时间内被解决是指:对于问题D,存在多项式P(n),使得对D的输入长为n的实例,若其答案为"是",则存在一个猜想,对于它,机器在P(n)时间内停机于S,态;若其答案是"否"则对于每个猜想,在P(n)时间内 Turing 机管停机于S,态。

不确定 Turing 机概念中 "不确定"三个字的含义是:上述的"若答案为'是',则存在一个猜想,对于它,机器停机于 S,态"一语中,我们只是相信有这么一个猜想存在,但并未给出什么确定的方法可以找到这个猜想。也许我们侥幸碰上了这么一个猜想,但这种幸运是罕见的,或者这个实例之答案是否定的,这时,要逐个验算猜想,而猜想可有 $|\Gamma|^{(n)-1}$ 个,要用 $P(n)|\Gamma|^{(n)-1}$ 时间来完成,这是一个可怕的指数时间,会随着 P(n) 之增大而爆炸性增大,所以用这种方法来求解,实际上是不现实的,也就是说,用Turing 机如此解决问题不可能实际地得出确定的答案。

不确定 Turing 机对于解决问题实际上是个无效的工具, 它只有理论上的价值,借助于它,我们可以建立 NP 概念。

定义 2 在多项式时间内能被不确定 Turing 机解决的判定问题之集合叫做 NP 类判定问题集合,记做NP。

显然, $P \subseteq NP$ 。但 P = NP 是否成立?这是一个尚未解决而其意义十分之深远的问题。

15.3 NPC与Cook定理

定义 3 D_1 与 D_2 是两个判定问题,存在一个映射 f ,以及一个多项式 Q(n) ,使得对于任集给定的 D_1 的一个实例的输入 I_1 , I_1 之长为 n ,则 f 在Q(n) 时间内把 I_1 映射成 D_2 的一个集入 $f(I_1)$,且 I_1 的答能是"是"当且仅当 $f(I_1)$ 的答案是"是",集存在多项式时间内 D_1 转化成 D_2 ,记之为 D_1 \sim D_2 。

定义 4 若判定问集 $D \in NP$,且 $\forall D' \in NP$,有 $D' \propto D$,则 272

 $RD \in NPC$ 、即NPC是下面的判定问题集合:

NPC = {D| D是判定问题,D∈NP, $\forall D'$ ∈NP 时,D'∞D}。这个定义是 Karp 于 1972年提出的。

推论 1 设 D_1 , D_2 是两个判定问题, $D_1{\leftarrow}D_2$, D_2 \in P,则 D_1 \in P。

证 设 I_1 是 D_1 之输入,输入长 $|I_1|=n$,又 D_1 × D_2 ,则存在映射 f 及多项式Q(x),使得 $f(I_1)$ 是 D_2 的一个输入,此映射可于 Q(n)时间内完成,又由于 D_2 \in P_3 ,故存在多项式P(x) (不妨设 P(x) 单调上升),使得对于 D_2 之输入 $f(I_1)$,在 $P(|f(I_1)|)$ 时间内解决,又 $|f(I_1)|$ $\leq Q(n)$,所以 $|f(I_1)|$ 可于多项式时间 P(Q(n)) 内解决,于是, $|I_1$ 亦可在多项式 Q(n)+P(Q(n)) 时间内解决,即 D_1 \in P_2 证单。

推论 2 $D_1, D_2 \in NPC$, 则 $D_1 \propto D_2$.

证 由于 $D_1 \in NPC$,则 $D_1 \in NP$,又 $D_2 \in NPC$,由定义, $\forall D' \in NP$, $D' \propto D_2$,取 $D_1 = D'$,则 $D_1 \propto D_2$,证毕。

推论 2 告知, NPC 内各问题间在时间复杂度方面是等 价 的(或多项式可归约的)。

由推论1可得

推论 3 若 $D \in NPC$, 假设 $D \in P$,则 NP = P.

证 因 D∈NPC,则 D∈NP,且 ∀D′∈NP,D′∝D, 侵设 D∈P,由推论1,D′∈P,即NP⊆P.又P⊆NP,故得P=NP. 证单.

推论 4 $D \in NPC$,假设 $D \in P$,则 $NPC \subseteq P$; 若 $D \in NPC$,假设 $D \in P$,则 $NPC \cap P = \emptyset$ 。

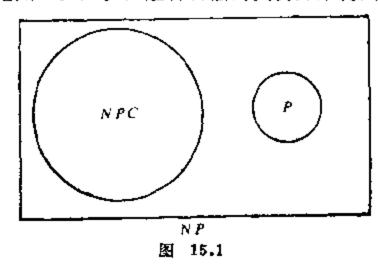
证 由推论 3 知当 $D \in NPC$,且 $D \in P$ 时,NP = P,但 $NPC \subseteq NP$,故得 $NPC \subseteq P$ 。另一方面,若 $D \in NPC$, $D \in P$,但 $NPC \cap P \neq \emptyset$,则存在一个 $D_1 \in NPC \cap P$,即 $D_2 \in P$, $D_3 \in NPC$ 。由推论 4 前半段的结论, $NPC \subseteq P$,于是 $D \in P$,与 $D \in P$ 矛盾,所以当 $D \in NPC$, $D \in P$ 时,则 $NPC \cap P = \emptyset$ 。证单。

推论 4 告知, NPC中的问题,只要有一个是P类的,则个个都是P类的,即NPC中的问题皆存在有效算法(但愿如此!),但若发现某个NPC中的问题不是P类的,即它无有效算法,则NPC中各个问题皆无有效算法!NPC问题在有无有效算法的意义下是共命运的。

定理 1 (NP 完备性定理) 若 $D \in NPC$, $D' \in NP$, $D \propto D'$, $\text{gl}D' \in NPC$.

证 因 $D \in NPC$,故 $\forall D' \in NP$, $D' \propto D$,又知 $D' \in NP$,且 $D \propto D'$,则 $D'' \propto D'$,由定义 $D' \in NPC$ 。证单。

目前,有些意见倾向于NP \neq P,P \cap NPC $=\emptyset$,NP-NPC-P $\neq\emptyset$ (见图15.1)。但这种看法的真伪并未得到证明。



1972年,多伦多大学的 Cook 找到了第一个NPC问题,它的代号为 SAT(Satisfiability)。以它为NPC家族的"种子",由定理1,繁衍出大批NPC中的问题。

设有限变量集

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\},\,$$

X中的每个变量可以取T与F两个值之一,且 $x_i = T$,则 $\bar{x}_i = F$, $x_i = F$,则 $\bar{x}_i = T$ 。

称

$$L = \{x_1, x_2, \dots, x_n; \bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n\}$$

为字集合,字集合的子集叫做句子。

SAT 的实例是: 任意给定一个句子集合 $\{C_1,C_2,\cdots,C_n\}$, 是否有一种赋值方法,使得每个句子 C_i 中皆有 T值的字? 句子中有的字取 T值时,则此句子称为**饱和**的。

输入。一个句子集合。

SAT.

问:是否存在一种赋值方法,使这些句子皆饱和? 定理 2 (Cook) $SAT \in NPC$.

证 SAT \in NP是显然的。下证 \forall $D \in$ NP,皆有 $D \propto$ SAT。即当 I 是 D 的长 n 的输入时,要证存在一个映射 f ,使得 f(I) 是 SAT 的一个输入,此映射耗时为多项式 Q(n) ,且 I 回答 "是" 当且仅当 f(I) 回答 "是"。

所谓机器对 I 回答"是",是指存在一个猜想,机器在多项式时间 P(n) 内停机于 S, 态,即 Turing 机有序地执行以下步骤:

- (1) 初始时,I由C(1),C(2),…,C(n) 处的内容表达出来,而C(0),C(n+1),C(n+2),…,C(P(n)+1) 皆为空白。
 - (2) 初始态是 S_0 ,开始时头在C(1),即h(0) = 1.
 - (3) 对于每一时刻 $t,0 \le t \le P(n)$,机器恰在一种状态下。
- (4) 对于每一时刻 $t,0 \le t \le P(n)$, 每个地址C(i) 处恰写一个带符、 $-P(n)+1 \le i \le P(n)+1$.
- (5) 对于每个时刻 t, $0 \le t \le P(n)$, 头恰在一个地址C(i)上, $-P(n)+1 \le i \le P(n)+1$.
- (6) 仅当时刻 t 头在此地址上,该地址的内容才能从时刻 t 到时刻 t + 1 的情况下改变。
- (7) 若 $S(t) \in S \{s_r, s_N\}$,则S(t+1), $\gamma(h(t), t+1)$,h(t+1)由f确定。若 $s(t) \in \{s_r, s_N\}$,则s(t+1) = s(t).
 - (8) $s(P(n)) = s_{r_0}$

为明确起见,把记号规定如下:

 $S = \{s_0, s_1, s_2, s_3, \dots, s_q\}, s_1 = s_7, s_2 = s_N.$ i: 地址, $i = C(i), -P(n) + 1 \le i \le P(n) + 1.$

$$j_*$$
 带符, $0 \le j \le g$, $\Gamma = \{\gamma_0 = b, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s\}, j = \gamma_i$ 。

$$k$$
: 状态, $0 \le k \le q$, $k = s_*$.

$$I = x_1 x_2 x_3 \cdots x_n$$

取SAT的变量集为

$$X = \{G(i,t,j)\} \cup \{H(i,t)\} \cup \{s(t,k)\}.$$

显然变量G的个数是 $O(P^{2}(n))$,H的个数是 $O(P^{2}(n))$,S 的个数是O(P(n)).

赋值方法为:

当且仅当 $Y(i,t) = Y_i$ (时刻 t,C(i) 处的带符是 Y_i), $G(i,t,j) = T_i$

当且仅当t时刻头在C(i)上,H(i,t) = T,当且仅当时刻t状态为 s_i ,S(t,k) = T。

取句子集合为 $\bigcup_{i=1}^{b} S_{i,j} S_{i,j}$ 如下:

$$S_1 = \{ \{G(i,0,j)\} \mid 1 \le i \le n, \ x_i = Y_i \}$$

$$\cup \{ \{G(i,0,0)\} \mid n < i \le P(n) + 1 \} \cup \{ \{G(0,0,0)\} \}.$$

$$S_{*} = \{\{s(0,0)\}, \{H(1,0)\}\}.$$

$$S_{s} = \bigcup_{t} \left[\left\{ \left\{ S(t,0), S(t,1), \cdots, S(t,q) \right\} \right\} \bigcup_{k_{1} < k_{2}} \left\{ \left\{ S(t,k_{1}), \overline{S(t,k_{2})} \right\} \right\} \right].$$

$$S_{\bullet} = \bigcup_{i} \bigcup_{i} \mathbb{E}\{\{G(i,t,0),G(i,t,1),\cdots,G(i,t,g)\}\}$$

$$\bigcup \bigcup_{i_1 \le i_2} \{ \{ \overline{G(i,t,j_1)}, \overline{G(i,t,j_2)} \} \}].$$

$$S_s = \bigcup_t [\{\{H(-P(n)+1,t), H(-P(n)+2,t\}, \cdots, \}]$$

$$H(P(n)+1,t)\}\} \cup \bigcup_{i_1 \le i_2} \{\{\overline{H(i_1,t)},\overline{H(i_2,t)}\}\}\}.$$

$$S_{i} = \bigcup_{i=0 < t < p(n)} \bigcup_{j} \{\{H(i,t), G(i,t,j), \overline{G(i,t+1,j)}\}\},$$

$$S_{i} = \bigcup_{0 < t < p(n)k+1, 2 = i} \bigcup_{j} \{\{\overline{S(t,k)}, \overline{H(i,t)}, \overline{G(i,t,j)}, \overline{H(i+d,t+1)}\} |f(s_{i},r_{i}) = (s_{k'},r_{i'},d)\} \bigcup_{i < p(n)} \{\{\overline{S(t,1)}, \overline{G(i,t,j)}, \overline{G(i,t,j$$

可以验证 S_i 中句子皆饱和的充要条件是 Turing 机执 行 步骤 (i), $1 \le i \le 8$ 。 至此, Cook 定理证毕。

下面考虑由 SAT 在多项式时间内转化的另一个NPC问题, 它的代号为 3SAT。

3SAT.

输入。一个句子集合,每句恰含三个字。

问,是否存在一存赋值方法,使每句皆饱和?

定理 3 3SAT∈NPC.

证 我们来证明 SAT ~ 3SAT (3SAT ∈ NP 是显然 的). 为此, 令

$$S_1 = \{\{a,b,c,d\}\} \cup S',$$

 $S_2 = \{\{a,b,x\}, \{\bar{x},c,d\}\} \cup S',$

其中x在S,中不出现。

首先证明, S_1 可饱和当且仅当 S_2 可饱和。若有赋值方法使 S_1 句句饱和,则这一赋值法可使 S_2 中的 S' 中之句 子皆 饱和,且 S_2 的前两个句子至少有一个饱和的,再 对 x 赋值,使 S_2 中的前两个句子都饱和,于是 S_2 句句饱和。反之,若有一个赋值法使 S_2 句句饱和,则这一赋值法使 S_1 中 S' 部分的句

子皆饱和,且 a,b,c,d 中至少有一个值为T,故这一赋值法可使 S,句句饱和。

上面事实告知,一个长 4 的句子可由两个长 3 的句子代替,通过 l-3 个新变量的引入,一个长 l(l>3) 的句子可由 l-2 个长 3 的句子代替:句子 $\{a_1,a_2,\cdots,a_i\}$ 被 $\{a_1,a_2,x_1\}$, $\{\bar{x}_1,a_3,x_2\}$,…, $\{\bar{x}_{l-3},a_{l-1},a_l\}$ 代替。若一赋值使 a_1,a_2,\cdots,a_i 中有一个变量取 l 值,则长句 $\{a_1,a_2,\cdots,a_l\}$ 饱和,这时,

若 a_1 或 a_2 为T,则令 $x_1=x_2=\cdots x_{l-1}=F$,

若 a_{i-1} 或 a_i 是T, 则令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{i-1} = T$.

若某个 $a_k = T$, 2 < k < l - 1, 则令 $x_1 = x_2 = \cdots = x_{k-2} = T$, $x_{k-1} = x_k = \cdots = x_{l-1} = F$,

以上三种可能至少发生一种,每种情形发生时,上述那些长 3的句子皆饱和。

若 a_1,a_2,\dots,a_l 皆F,长句未饱和,这时无 法 给 x 变 量 赋值,使 l-2 个短句皆饱和。

我们看到,长句被短句代替所用的时间是以描述原句子集输入长的多项式为界、变成的句子集中,句子数目以原句子集中字的数目为界,且变成的句子每个至多含三个字,即SAT ~ 3SAT, 证 4.

15.4 NPC 中的几个组合问题

应第 16 章之需,我们这里讲几个组合问题,它们属于 NPC. 三维匹配问题。代号 3DM,

输入、W, X, Y 是三个集合, $|W| = |X| = |Y| = p \neq 0$, $M \subseteq X \times Y \times W$ 。

例,是否存在 $M'\subseteq M$,|M'|=p,且 M' 中无两个有相同分量的三元组。

例如 $W = X = Y = \{0,1\}, M = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), 278$

(1,0,0)},则 3DM 之回答是"否",若在M中再加入一个(1,0,1),则取 $M' = \{(0,1,0), (1,0,1)\}$,这时 3DM 的回答是"是"。

定理 4 3DM∈NPC.

证 显然 3DM ∈ NP, 下证 3SAT ∞ 3DM.

令 3SAT 之輸入为 $I = \{c_1, c_2, \cdots, c_n\}, x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 出现于 I 中的变量。我们来构作 3DM 的一个输入 f(I) 中的W,X,Y,M

$$W = \{x_{i,i}, \bar{x}_{i,i} | 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\},$$

$$X = A_1 \cup S \cup G,$$

$$Y = A_2 \cup S \cup G,$$

$$A_1 = \{a_{i,i} | 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\},$$

$$A_2 = \{b_{i,i} | 1 \le i \le n, 1 \le j \le m\},$$

$$S = \{s_i | 1 \le j \le m\},$$

$$G = \{g_1 | 1 \le k \le m(n-1)\},$$

$$M = AC \cup SC \cup GC,$$

$$AC = \bigcup_{i=1}^{n} AC_i,$$

$$AC_1 = \{(x_{i,i}, a_{i,i}, b_{i,i}) | 1 \le j \le m\} \cup$$

$$\{(\bar{x}_{i,i}, a_{i,i+1}, b_{i,i}) | 1 \le j \le m-1\} \cup$$

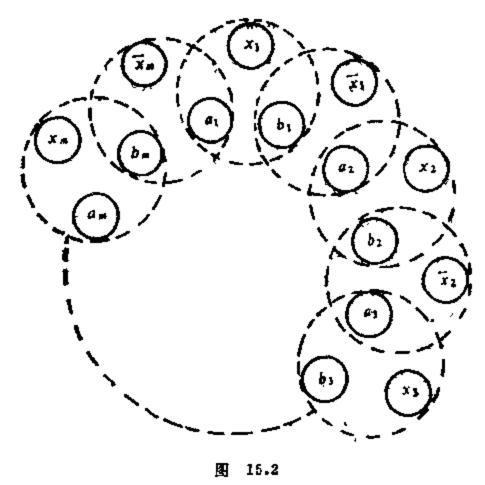
$$\{(\bar{x}_{i,n}, a_{i,i+1}, b_{i,i}) | 1 \le j \le m-1\} \cup$$

图 15.2 表示 AC_i 的结构,其中每个圈内为一个三元组,标志 i 已被省略,每个 $a_{i,1},b_{i,i}$ 参加两个三元组,对每个 i ,M' 要么含形如($x_{i,k},a_{i,i},b_{i,i}$)的三元组,要么含所有其它类型 的三元组,但不能混合。此即表明所有出现的 x_i 或皆 T 或皆 F 。

$$SC = \bigcup_{i=1}^{m} SC_{i},$$

$$SC_{i} = \{(x_{i,i}, s_{i}, s_{i}) | x_{i} \in C_{i}\} \cup \{(\bar{x}_{i,i}, s_{i}, s_{i}) | \bar{x}_{i} \in C_{i}\}, =$$

由 3SAT 之定义,每个 SC_1 中含三个三元组,为了使 s_i 做为第二与第三分量,仅一个三元组在 M' 中,显然,这只能是 $x_{i,i}(\tilde{x}_{i,j})$ 在 $M' \cap AC$ 中未用过,即 x_i 给以真(假)赋值。



令 $M' \cap (AC \cup SC)$ 用了W的mn+m个元素,为含其余m(n-1)个元素,我们有

$$GC = \{(x_{i,i}, g_{i}, g_{i}), (\tilde{x}_{i,i}, g_{i}, g_{i}) | 1 \leq i \leq n, \\ 1 \leq j \leq m, 1 \leq k \leq m(n-1) \}.$$

证毕.

下面再讨论→一个著名的组合问题,它称为三元**亲子集特勒索 查问题**,代号 3XC。

3XC.

输入。集合 U及其三元素子集素团 C。

问。C中最否存在子囊团,使其精确覆盖U?

即若 s_1,s_2,\dots,s_n 是3元素集合,且对每个i, $1 \leq i \leq n$,

280

 $IS_i \subset U$, 问是否存在 $I \subseteq \{1,2,\cdots,n\}$, 使得

$$\bigcup_{i=I} S_i = U,$$

且 $i, j \in I$, $i \neq j$ 时, $S_i \cap S_j = \emptyset$ 。换句话说,问是否存在 U 的一个划分,得到的子集皆三个元素,且划分出的子集在预先指定的三之素子集团 C 之中,

定理 5 3XC6NPC

证 3XC 显然是 NP 问题。下证 $3DM \approx 3XC$ 。设 W , X , Y , M 是 3DM 之输入 I , 其中 $M \subseteq W \times X \times Y$, 且 W , X , Y 两不相交,不然,把公共元素改变一下名称即可。取

$$C = \{\{w, x, y\} \mid (w, x, y) \in M\},\$$

$$U = W \cup X \cup Y.$$

下证C有子集精确覆盖U的充要条件是存在完备匹配M' $\subseteq M$ 。显然,若M'是一个完备匹配,则

$$C' = \{\{w, x, y\} | \{(w, x, y) \in M'\}$$

是U的一个精确覆盖。反之,若C'是U的一个精确覆盖,则 $M' = \{\{w,x,y\} | \{w,x,y\} \in C'\}$

是一个完备匹配。证毕。

在 3XC 中, 若不要求每个子集皆 3 个元素, 则问题变成 所谓精确覆盖问题, 其代与为 XC。

定理 6 XCENPC.

定理 6 的证明只要论证 3XC∞XC, 留作习题,请读者完成。" 最后研究代号为 SC 的集合覆盖问题。 SC.

输入:集合U,U的子集集团C,整数 k.

阿:是否存在C的子集图C',使得C'覆盖U,且C'中集合的载目不超过k ?。郧

$$\bigcup_{s \in C'} S = U, \quad \exists \mid C' \mid \leq k.$$

定理 7 SCENPC.

证 只需证 $3XC \propto SC$, 设 C = U = 3XC 的输入 I. 令 $k = \lfloor |U|/3 \rfloor$.

取 C, U, k 做为 SC 之输入 f(I)。若 |U| 被 3 除不尽,则 3XC 答案为 "否",这时 SC 之答案亦为 "否"。若 |U| 可被 3 除 尽,这时,若 C' 是一个精确覆盖,C' 当然也是一个覆盖,且 |C'| = |U|/3 = k,反之,若 C' 是一个覆盖, $|C'| \le k$,则 |C'| = k,因而是一个精确覆盖,证单。

在 SC 中, 若每个子集皆含 3 个元 素, 则 SC 变 成 3SC 问 题。

定理 8 3SCENPC.

证明请读者给出。

本章我们学习了 Edmonds 意义下有效算法的概念,引入 Turing 机,进而定义了 P,NP与 NPC 三个问题集合。一般总是用 Turing 机作为描述算法过程的基本数学模型。任何能在 现代数字计算机上实现的计算都能用 Turing 机来描述。

计算复杂性理论不仅是计算机专家最感兴趣的问题之一,而且是应用数学家必须过问和研究的重大课题。它使我们用精确的概念来审定问题究竟是否难解,而不是凭直观的感觉粗略地判定一个算法的好坏。

1972年,Cook S A提出的关于 SAT ∈ NPC的基本定理, 奠定了计算复杂性分析的理论基础,同年 Karp R M提出 21 个 NP 问题可由 SAT 转化 (∞),从而得到了第一批 NPC 中的问题,到 1978年,NPC问题已经由 21 个迅速增加到 300 多个,其中有不少是图论中的问题。近年来,人们仍然热衷于确定某些实际问题与理论问题的计算是否 NPC 问题。

至于 NPC 中的问题是否真的不存在多项式算法,是当今 科学界面临的重大课题之一。显然,这一问题的解决,即回答

"P = NP 否?",是一个十分困难而有意义的工作!如果 P = NP,就应该为 NPC 中的问题设计有效算法,若 $P \neq NP$,就不要 再指望有效地解决 NPC 中的问题。有些问题人们还考虑它的计算 复杂度是否介于 P 与 NPC 之间,即 NP 中的问题能否有更细的划分。关于 NP 的完全性理论尚处于发展之中。

为了研究图论中的 NPC 问题,本章介绍了组合论中的几个 NPC 问题,它们是:

SAT, 3SAT, 3DM, 3XC, XC, SC, 3SC.

本章涉及的思想、概念和技巧都很不通俗,颇有几分难懂,但它们是搞计算机科学和应用数学的必要知识,所以必须下力气彻底弄明白。Cook 定理等本章提到的定理不论是证明的思路还是技巧与细节,都十分新颖生动而引人入胜,很值得学习。

习 題

- 1. 称 $M \subseteq X \times Y \times W$ 是分段调和的,若对于一切 a,b,c, x,y,w, $\{(a,b,y),(a,x,c),(w,b,c)\}\subset M$,表明 $(a,b,c)\in M$ 。证明:即使M限定为分段调和,3DM仍属于NPC。
 - 2. 包装问题, 代号 SP (Set packing),

输入。一个集合集团C,正整数k。

问: C中是否存在 k 个两两不相交的集合? 证明: $SP \in NPC$.

(例如: C是一盒一盒的什锦糖果,要从C中选取 k 盒出来 包装在一个大箱子里,使箱子中任意两盒糖中没有相同味道的糖 果,这种要求能否实现?)

3. 相遇集问题, 代号 HS (Hitting set):

输入:集合U的子集集团C,正整数 k.

问:是否存在子集 $U'\subseteq U$,使得 $\{U'\mid \leqslant k\}$,且U'与C中每一个集合交非空?

试证: HS∈NPC.

(例如:入们组织了一些团体,我们欲采访每个团体里至少一一个人,但囿于时间,被采访的总人数不得超过 k 名,问是否可能?)

4. 背包问题, 代号 0-1 KNAP (0-1 Knapsack):

输入:正整数 a_1,a_2,\cdots,a_n,b_n

问: 是否存在 I ⊆ {1,2,...,n}, 使得

$$\sum_{i \in I} a_i = b?$$

试证: 0-1 KNAP∈NPC.

(例如:一个背包至多只能装 b 公斤,今有 a,公斤, a。公斤, …, a,公斤,件东西,问能否从中挑选几件,使得总重量 恰;为 b 公斤?)

5. 划分问题, 代号 PART(Partition problem):

输入: 正整数 p1, p2, …, p...

问:是否存在 $J\subseteq\{1,2,\cdots,m\}$,使得

$$\sum_{i \in I} p_i = \sum_{i \in I} p_i.$$

试证, PART∈NPC.

(例如: m个盒子中密封了相同的球,不许拆开盒子,能否: 把这些球平分?)

- 6. 试证: XC∈NPC.
- 7. 试证: 3SC∈NPC.

16 NPC 中若干著名的图论问题

本章从一百多个已知的 NPC 的图论问题当中选择最著名 的若干问题,详细证明它们属于 NPC, 借以体现证明图论问题 为 NPC 问题时所用方法与技巧的一些特色,我们 马 上 就 能 体 会到,欲证明一个图论问题属于 NPC 是何等的图难和讲究技巧。

16.1 团、独立集和顶覆盖

首先讲最大团问题,代号 CLIQUE,

输入: 无向图 G(V,E), 正整數 $k \leq |V|$.

问:G中是否有一个团C,使得 $\{C| \ge k?$ 其中 $\{C| \ge C\}$ 的真

定理! CLIQUEENPC.

证 显然, CLIQUE €NP, 卞证 3DM ∞ CLIQUE.

设 I 是 3DM 的 输 入, I 为 W , X , Y , $M \subseteq W \times X \times Y$, 取 f(I) 为 CLIQUE 的相 应 输 入, f(I) 中 k = |X| ,图 G(V,E) 为

$$V(G) = M$$
,

 $E(G) = \{e = m_1 m_2 \mid m_1, m_2 \in M,$

且 m, 与 m, 无相同的对应分量},

于是I "是"当且仅当f(I) "是"。证率。

CLIQUE 问题的解决实际上意味着找到G中顶数最大的 团的顶数,可惜这个问题属于 NPC,这个貌似简单的问题实则 非常困难。

下面讨论量大独立集问题,代号 IND.

输入: 图 G(V,E), 正整數 $k \leq |V|$.

问: 是否存在独立集 S,使得 $|S| \ge k$?

定理2 IND€NPC.

证 显然 INDENP, 下证 CLIQUE ∞ IND. 事实上, 若 I 是 CLIQUE 的输入, I 由 G(V,E) 与自然数 k 组成, 则取 相应的 IND 的输入 f(I) 为 G 的补 图 G^* 与 k , 这 时, 显然 有: I "是"当且仅当 f(I) "是"。证 毕。

最后讲~~下量小顶覆盖问题。代号 VC。

. 輸入, 图 G(V,E), 自然输 !≤|V|。

□ 问: G中是否有颠覆盖C,使得|C|≤!?

定理\$ VCENPC.

证 $VC\in NP$ 不足道。下证 $IND \times VC$ 。设 G(V,E) 与 k 是 IND 之 输入 I ,相应的 VC 之 输入 f(I) 取为 G(V,E) 与 I = |V|-k,由独立集与顶覆盖集的互补性知, I "是"当且仅 当 f(I) "是",证单。

16.2 Hamilton 轨和 Hamilton 圈

有向 Hamilton 轨阀壁。代号 DHP,

输入:有向图 G(V,E), $s,t\in V(G)$.

问: G中是否有有向Hamilton 執 P(s,t)?

定理4 DHP€NPC

证 显然 DHP \in NP, 下证 VC \propto DHP。设 VC之 输入 I为 G(V,E) 及自然数 $k \leq |V|$,下面给出相应的 DHP 之输入 f(I)。

设 e(v,1), e(v,2),…,e(v,d(v))是 G(V,E)中与顶 v 关联的边,f(I)中的有向图 G'(V',E') 构作如下。

$$V' = \{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k\} \cup \bigcup_{v \in V(G)} \{(v, 1, i), (v, 2, i) \}$$

$$\{1 \le i \le d(v)\}.$$

即把无向图 G(V,E) 的每个顶 v 变成 2d(v) 个顶, 再添 加 k+1 个

新顶 a_a, a_1, \dots, a_n , 这些顶合起来构成有向图 G' 的顶集合 V'.

$$E' = \{a_i \to (v, 1, 1) \mid 0 \le i < k, v \in V(G)\} \cup \{(v, 2, d(v)) \to a_i \mid 0 < i \le k, v \in V(G)\} \cup \{(u, 1, i) \to (v, 1, j), (u, 2, i) \to (v, 2, j) \mid e(u, i) = e(v, j)\} \cup \{(v, 1, i) \to (v, 2, i) \mid v \in V(G), 1 \le i \le d(v)\} \cup \{(v, 2, i) \to (v, 1, i + 1) \mid v \in V(G), 1 \le i \le d(v)\} \cup s = a_0, \quad t = a_k.$$

我们称顶v "内部由(v,1,1)到(v,2,d(v))" 的有向轨 为 顶v 之 "迹"。下证 G' 中有 Hamilton 轨 $p(a_a,a_k)$,当且仅当 G 中有 k 顶顶覆盖。

设 $C = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ 是 G 中一个顶覆盖,我们来构作 G' 中的一个 Hamilton 轨 $P(a_0, a_1)$ 。 取边 $a_0 \rightarrow (v_1, 1, 1)$,通过 v_1 的迹 到达 $(v_1, 2, d(v_1))$,再到 a_1 ,由 a_1 到 $(v_2, 1, 1)$,经 v_2 之迹到达 $(v_2, 2, d(v_2))$,再到 a_2, \dots ,最后从 $(v_k, 2, d(v_k))$ 到达 a_k ,得到一条 G' 中的有向 轨 $P'(a_0, a_k)$ 。 但 $P'(a_0, a_k)$ 不一定是 G' 的 Hamilton 轨。若 $P'(a_0, a_k)$ 不是 Hamilton 轨, $\forall v$ $\in C$,且 $e = uv \in E(G)$, e = e(v, j) = e(u, i),则 $u \in C$ 。这时,用 $(u, 1, i) \rightarrow (v, 1, j) \rightarrow (v, 2, j) \rightarrow (u, 2, i)$ 代替 P' 中的 $(u, 1, i) \rightarrow (u, 2, i)$ 。由于 C 是顶覆盖,v 在 G' 中 "分裂" 成的 2d(v) 个顶都被通过仅一次,于是得到了 G' 中的 Hamilton 轨 $P(a_0, a_k)$ 。

反之,若G'中有Hamilton轨 $P(a_v,a_v)$,则我们能构作出G的一个k顶的顶覆'盖S',当且仅当(v,1,1)与(v,2,d(v))在 $P(a_v,a_v)$ 上皆与 $\{a_v\}$ 中顶相邻时,取 $v \in S$ 。证单。

有向 Hamilton 圖问题,代号 DHC:

输入,有向图 G(V,E).

问: G(V,E) 中是否存在有向 Hamilton 题? 定理5 DHCENPC

证 DHC 显然为 NP 问题。下证 DHP ∞ DHC。设 DHP 之

输入 I 为 G(V,E) 及二顶 s,t,相应 的 DHC 的 输入 f(I) 取 为 G'(V',E'),其中

$$V' = V(G) \cup \{a\},$$

$$E' = E(G) \cup \{a \rightarrow s, t \rightarrow a\}.$$

显然, G'(V,E) 中有 Hamilton 執 P(s,t) 当且仅当 G' 中有 Hamilton 圈. 证毕。

无向图中的 Hamilton 轨问题、代号 HP。

输入: 无向图 G(V,E), 二顶 $s,t\in V(G)$.

问: G中是否存在无向Hamilton 轨P(s,t)?

定理6 HPENPC.

证 显然有HP∈NP。下证 DHP∝HP。

设 DHP 之输入 I 为有向 图 G(V,E),二 顶 $s,t \in V(G)$,相 应的 HP 之输入 f(I) 取为 G'(V',E') 及 $(s,0),(t,2) \in V'$ 。

G'(V',E')构作如下:

$$V' = \{(v,0), (v,1), (v,2) | v \in V(G)\}.$$

$$E' = \{(v,0) - (v,1), (v,1) - v(2) | v \in V(G)\} \cup \{(u,2) - (v,0) | e = uv \in E(G)\}.$$

显然, G(V,E) 中有有向 Hamilton 轨 P(s,t) 时, G' 中有 无 向 Hamilton 轨 P'((s,0),(t,2)).

反之,若P'((s,0),(t,2))是G'(V',E')中的Hamilton 轨,我们可以追踪P'((s,0),(t,2)),并从(s,0)开始把每三个在P'上相邻的顶小组 $\{(v,0),(v,1),(v,2)\}$ 合成一个顶,从而得G(V,E)中的一条有向 Hamilton 轨P(s,t). 证毕。

无向 Hamilton 個问题。代号 HC.

输入: 无向图 G(V,E).

问: G中是否存在 Hamilton 糰?

定理7 HCENPC.

证 显然HC€NP。下证HP∞HC。

设G(V,E)及 $s,t\in V(G)$ 是HP之输入I,HC的相应输入

f(I)为图 G'(V',E'):

 $V' = V(G) \cup \{a\},$ $E' = E(G) \cup \{as, at\}\}.$

显然, HP"是"当且仅当 HC"是"。证毕。

货邮问题, 代号 TS(Traveling salesman):

输入: 无向图 G(V,E), 自然数 k, $\forall e \in E$, l(e).

问:是否有G的一个生成回路C,使得C之总长不大于k?定理8 TS \in NPC.

证 不妨设 I(e)=1,不然可把边剖分。显然 $TS \in NP$,要证 $HC \propto TS$ 。设 HC 的输入 I 为 G(V,E),取 TS 相应的输入 f(I) 为 G(V,E), k=|V|。于是 I "是"当且仅当 f(I) "是"。证**毕**。

16.3 图的色数

3 色问题, 代号 3C:

输入:图 G(V,E).

问, X(G) ≤3 **吗**?

定理9 3CENPC

证 显然 3CENP, 只需证 3SAT ∝3C.

设 3SAT 之输入 I 为字集 $\{x_1,x_2,\cdots,x_n; \bar{x}_1,\cdots,\bar{x}_n\}$ 及 句子集 $\{C_1,C_1,\cdots,C_n\}$,相应的 3C 之输 入 f(I)为 G(V,E),其中(图16.1)

$$V(G) = \{a,b\} \cup \{x_{i}, \tilde{x}_{i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{ij} | 1 \leq i \leq 6, 1 \leq j \leq m\}.$$

$$E(G) = \{ab\} \cup \{ax_{i}, a\tilde{x}_{i}, x_{i}\tilde{x}_{i} | 1 \leq i \leq n\} \cup \{w_{1j}w_{2j}, w_{1j}w_{4j}, w_{2j}w_{4j}, w_{1j}w_{5j}, w_{1j}w_{5j}, w_{1j}w_{6j}, w_{5j}w_{6j}, w_{6j}w_{6j}, w_{6j}b | 1 \leq j \leq m\} \cup \{\xi_{1j}w_{1j}, \xi_{2j}w_{2j}, \xi_{3j}w_{3j} | 1 \leq j \leq m,$$

$$C_{i} = \{\xi_{i,i}, \xi_{i,i}, \xi_{i,i}\}\}.$$

设 0, 1, 2 是我们使用的三种颜色。若 I 已句句饱和,我们约定当字 $\xi_{k,l} = T$ 时,顶 $\xi_{k,l} + 1$ 色, $1 \le k \le 3$, 当 $\xi_{k,l} = F$ 时,顶 $\xi_{k,l} + 1$ 色。由于 I 中每句皆饱和,所以没有

$$(\xi_{1}, \xi_{1}, \xi_{1}, \xi_{1}) = (0, 0, 0)$$

的现象。

我们把 b 着以 0 色,a 着以 2 色,w。,着以 1 色, $j=1,2,\cdots$,加,于是得正常上色。反之,若 f(I) 已用 3 种颜色正常着色,我们称 a 上的颜色为 2 号色,b 上的颜色为 0 号色,于是可得"字"上的颜色是 0 色或 1 色,且 w。,不是 0 色,用反证法容 易 证明 $(\xi_1,\xi_1,\xi_3)\neq(0,0,0)$ 。这时,我们规定 3 SAT 的赋 值 法 为 "字"为 1 色时,此字值为 T;

"字"为0色时,此字值为F,

则 $(\xi_{1,j},\xi_{2,j},\ \xi_{3,j}),\ j=1,2,...,m$ 皆饱和。证单。

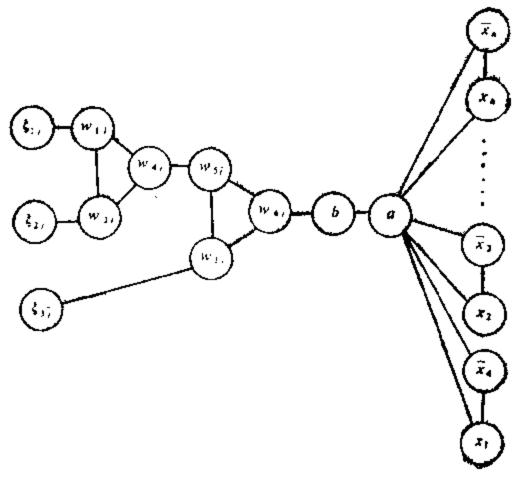


图 16.1

16.4 有向图的反馈集

最小顶反馈集问题,代号 FVS(Feedback vertex set); 输入: 有向题 G(V,E), 自然数 k.

问: 是否存在 $V'\subseteq V$,使得 $|V'|\leq k$,且G-V'中无有向题?

定理10 FVSENPC.

证 显然 $FVS \in NP$,只需证明 $VC \propto FVS$ 。若 I 为 $VC \geq$ 输入。G(V,E) 及自然数 k,相应的 f(I) 作为 FVS 之输入取为有向图 H(V,F) 及 k。

$$F = \{a \rightarrow b, b \rightarrow a \mid ab \in E(G)\},\$$

于是, V' 是G的顶覆盖当且仅当V' 是H的反馈集。证毕。

最小边反馈集问题,代号FES:

输入: 有向題 G(V,E), 自然数 k.

问:是否存在 $E'\subseteq E$, $|E'|\leqslant k$,且G-E'中无有向圈? 定理11 FESENPC。

证 FES 显然属于 NP, 下证 FVS∞FES.

设I是 FVS 之输入,I为 G(V,E)及 自然 数 k,相应的 f(I)作为 FES 之输入取为有向图 H(W,F) 及 k:

$$W = \{ (v,1), (v,2) | v \in V(G) \},$$

$$F = \{ (v,1) \to (v,2) | v \in V(G) \} \cup$$

$$\{ (u,2) \to (v,1) | u \to v \in E(G) \}.$$

我们称 $(v,1) \rightarrow (v,2)$ 型边为"内边", $(u,2) \rightarrow (v,1)$ 型边为"外边",每个与(v,1)关联的外边皆入边,且与(v,1)关联的内边只1条,它是出边,由此知,若在一个边反馈集中有一条外边 $(u,2) \rightarrow (v,1)$,它可以用内边 $(v,1) \rightarrow (v,2)$ 代替,所以我们可以假设边反馈集中的边皆为内边。在G中,与这些内边相对应的顶集 $V' \subseteq V$ 是G的顶反馈集,反之,若V' 是G的顶反馈集,则在

H中的相应内边们组成H的一个边反馈集。证毕。

16.5 Steiner 树

Steiner 树问题, 代号 ST.

输入:连通图 G(V,E),边权 1(e)>0,自然数 k, X⊆V(G)。 问: G上是否有树 T(W,F),使得 X⊆W⊆V, F⊆E(G), 且∑1(e)≤k?

这个问题用图论语言来讲,就是求一个权最小的树状子图, 使此树之顶含有指定的顶子集。实际背景是挑选连通指定的几个 城市的最廉价的交通(或通讯)网。

定理12 STENPC.

证 ST显然属于 NP。下证 3XC∞ ST。

设 3XC 的输入 I 为 $U = \{u_1, u_2, \cdots, u_e\}$, $t \neq 0$, $t \equiv 0 \pmod{3}$, U 的三元素子 集 果 闭 $C = \{S_1, S_2, \cdots, S_e\}$, 相 应 的 f(I) 作 为 ST 之输入,我们取图 G(V, E) 及 $l(e) \equiv 1$, $k = \frac{4}{3}t$, $X = \{v_e\} \cup U$. 其中

 $V(G) = \{v_0\} \cup C \cup U_{\bullet}$

 $E(G) = \{v_0 S_i | 1 \leq i \leq n\} \cup \{S_i u_i | u_i \in S_i\}.$

记 $v_0S_i = e_i$, $S_iu_i = f_{ii}$.

若对 I 回答 "是",即 存在 $J\subseteq\{1,2,\cdots,n\}$,使 得 $\bigcup_{i\in I}S_i$

=U,且对J中之 $i\neq j$, $S_i\cap S_i=\emptyset$,我们来证这时对f(I)之回答也是"是"。事实上,取T(W,F)为

 $W = \{v_o\} \cup \{S_i \mid i \in J\} \cup U,$ $F = \{e_i \mid i \in J\} \cup \{f_{i,i} \mid i \in J, u_i \in S_i\}.$

显然 T(W,F) 是树,且 $X\subseteq W\subseteq V$, $F\subseteq E(G)$ 。又因 $|J|=\frac{t}{3}$,

于是 $|\{e_i|i\in J\}| = \frac{t}{3}$, $|\{f_{i,i}|i\in J, n_i\in S_i\}| = t$,故 $\sum_{e\in F} l(e)$ $= \frac{t}{3} + t = \frac{4}{3}t$, 这时f(I)之回答是"是".

反之,若f(I)是"是",要证I亦是"是"。

设 T(W,F)是 f(I) 的一个 Steiner 树, $X \subseteq W$, 故 $u_i(i=1,2,\cdots,t)$ 是 T 上的顶; 不妨设每个 u_i 皆叶,不然, 若 $d_r(u_i)$ >1, 则 u_i 与 S_{i_1} , S_{i_2} 相邻, 删去边 $f_{i_{i_1}}$,加上边 e_{i_1} , e_{i_2} 之一, 仍然得到 Steiner 树, 且总权不变。令 I 中的 I 为 $J = \{i \mid S_i \in W\} (\neq \emptyset)$.

则此树上的S,型顶是U的一个三元精确覆盖。证单。

定理 12 的证明指出,即使是 l(e)=1, ST 问题 仍 然 属 于 NPC.

16.6 最大断集

最大断集问题,代号 MAXC(Maximum cut):

输入: 无向图 G(V,E), 自然数 k.

问:是否存在顶子集 $S \subset V(G)$, 使得 $(S,\bar{S}) | \ge k$? 定理13 MAXCENPC.

证 MAXC 显然属于NP, 下证 3SAT ∝ MAXC。

设 I 是 3SAT 的输入, I 为: 字集 L 与句集 C ,

$$L = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n\}, C = \{C_1, \dots, C_m\}.$$

首先构作一个最大权断集问题,代号 MAXWC:

MAXWC 的输入。图 G'(V',E'), $\forall e \in E'$, 权 w(e), 自然数 k'。

问。是否有 $S' \subset V'$,使得 $\sum_{e \in (x', x')} w(e) \geqslant k'$?

下证3SAT∝MAXWC.

取f(I)为 MAXWC 的与 I 相应的输入,G'(V',E'),w(e)与 k' 如下。

$$k' = (10m + 1)n + 6m$$

$$V'(G') = \{v_i \mid 0 \leqslant i \leqslant m\} \cup L.$$

 $E'(G') = \{uv | u \neq v 且 \exists i, \ni u, v \in A_i\} \cup \{x_1 \bar{x}_j | 1 \le j \le n\},$ 其中

$$A_{i} = \{v_{o}\} \cup \{v_{i}\} \cup C_{i}, i = 1, 2, \dots, m_{o}\}$$

w(e)取为

$$w(v_0\xi) = \sum_{i=1}^{m} |C_i \cap \{\xi\}|, \, \cong \xi \in L_1$$

$$w(\xi'\xi'') = \sum_{i=1}^{m} |C_i \cap \{\xi'\}| \cdot |C_i \cap \{\xi''\}|,$$

当 ξ',ξ"∈L 且 ξ' ≠ξ";

$$w(x_i\bar{x}_i)=10m+1;$$

$$w(v_i u) = 1$$
, 当 $i > 0$ 且 $u \in A_i$.

若 I "是",设 τ 是 T 值之字集,令 τ \subset s' , L $-\tau$ \subset s' , 于 是 $x_1\bar{x_1}$ \in (S',\bar{s}') , $i\in$ $\{1,2,\cdots,n\}$, 它们对权的总贡献是(10m + 1) n . 把 v 。 放入 \bar{s}' 中 。 m 个句子中的每一句至少 有一个"字顶"在 S' 中 (都是饱和句,每句 至 少一个 T 字在 τ 中,而 τ \subset S')。 我们把 v 。 放入 S' 或 \bar{s}' ,使 A_i 中的 顶 "2-3 分之", A_i 对断集提供 6 条边,由权之定义, m 个 团 (K_s) 共 对 (S',\bar{s}') 提 供权数 6m 。 这时,

$$\sum_{e \in (s', \sqrt{s'})} w(e) = k',$$

即 f(I) 的回答是 "是"。

反之,若f(I)的回答是"是",即存在 $S' \subset V'$,使得

$$\sum_{r \in (sr, Sr)} w(e) \ge k' = (10m + 1)n + 6m,$$

则每条边 $x_i\bar{x}_i\in(S',\bar{s}')$,故每个团 A_i 必须最大限度地再提供

6 (造成 A,2-3 分顶)。这时我们称 v。所在的为"假端",另一端为"真端"。于是最多两个字(C,中)在假端,至少一个字在真端。我们把真端之字赋值 T,假端之字赋值 F,则 I 回答"是"。

下面把加权问题化为无权断集问题。

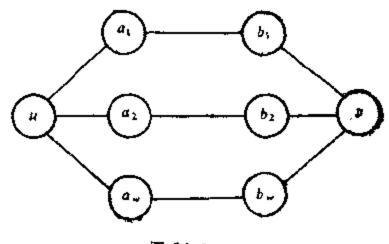


图 16.2

在 G' 中一条 边uv 之 权 为 w(uv) = w(e) , 在 G 中 变 成 如 图 16.2 的 结 构 ,如此得到图 G 。下面证明 G 中有大小 至 少为 k = 2[(10 m + 1)n + 10m] + k' 的断集,当且 仅当 G' 中有权至少 为 k' 的断集。

事实上,若G'中权为k'的断集为 (S',\bar{S}') ,考虑G中的断集 (S,\bar{S}) , $S'\subset S$, $\bar{S}'\subset \bar{S}$,轨 ua_1b_1v 中,若u,v在G的断集 (S,\bar{S}) 的同一端,则最多有两条边在此断集中,若u与v分居于(S,S')之两端,则可使此轨对断集 供献 3.故G'的每一边 e 能把G的断集 (S,\bar{S}) 的权提高2w(e),G'的一切边,对G的断集提高 $2\sum_{i\in S'}w(e)$,且

$$\sum_{e \in E'} w(e) = (10m+1)n + 10m_{\bullet}$$

若 G' 中(S', \bar{S}')的权是 k', 令 $S' \subset S$, $\bar{S}' \subset \bar{S}$, 可使 $[(S,\bar{S})] = 2[(10m+1)n+10m] + k' = k$.

反之,若G的断集 (S, \overline{S}) 中至少有 k 条边,对 G' 的 每一边 e = uv,若 u,v 在此断集之同一端, e 对此断集至多提供 2w(e),

不妨设恰为 2w(e) (不然改变 S) , 若 u 与 v 分居于此断集之两端, e 对此断集之供献最多为 3w(e) , 不妨认为恰为 3w(e) (不然改变一下 S) , 故

$$|(S, \overline{S})| = 2 \sum_{e \in E'} w(e) + \sum_{e \in (S', \overline{S}')} w(e) \ge k,$$

其中 $S' = S \cap V'$,因为 $|(S,\bar{S})| \ge k$,故

$$\sum_{i\in(s',\bar{s}')}w(e)\geqslant k',$$

于是G'有权不小于k'的断集。证单。

16.7 图的直线排列

本节问题的实际背景是部件排列最优化的问题。

把图 G(V,E) 的顶分别放在 X 轴的1,2,...,V 处,用 p(v) 表示 v 顶的坐标,且使 G 的边成为直线段,则 G 的边长之和为

$$L = \sum_{uv \in K(G)} |p(u) - p(v)|.$$

我们的目标是使 L=min, 可惜这个问题 也 是 NPC 中的一员!

密的最短线状排列问题,代号 MINLA (Minimum linear arrangement).

輸入: 单劉 G(V,E), 自然數 k.

问。是否存在可逆映射

$$p: V \to \{1, 2, \dots, |V|\},$$

使得 ·

$$\sum_{u\,v\,\in E(C)} |p(u)-p(v)| \leq k?$$

与 MINLA 相应的,还有一个**题的最长线状排列 问 题,代** 号 MAXLA。

MAXLA 輸入: 单题 G(V,E), 自题教 k.

问。是否存在可逆映射

$$p: V \to \{1, 2, \dots, |V|\},$$

298

$$\sum_{u:v\in E(z)} |p(u)-p(v)| \ge k?$$

定理14 MAXLAENPC.

证 只欠证 $MAXC \propto MAXLA$ 。若 MAXC 之 输入 I 为: G'(V',E'),自然数 k'(|V'|=n),相应的 MAXLA之输入 f(I) 取为单图 G(V,E) 及自然数 k:

$$V = V'U\{x_1, x_2, \dots, x_n^3\},$$

 $E = E',$
 $k = k'n^3.$

设 I "是",即 G' 中存 在 断 集 (S', \bar{S}') ,使 得 $[(S', \bar{S}')]$ $\geq k'$,我们来安排 G 之顶,使 G 的顶在 $\{1, 2, \cdots, n, n+1, \cdots, n+n^*\}$ 上,且边之总长 $\geq k$ 。

者v∈S',则令

$$1 \leq p(v) \leq |S'|;$$

者で≤5′,则令

$$|S'| + n^3 < p(v) \leq n + n^3$$
;

若 v∈{x1,x,,…,x,³}, 则令

$$|S'| < p(v) \leq |S'| + n^3$$

于是跨n, 个孤立顶的边之条数是 $|(S',\overline{S}')|$, 每边之 $E \geq n^3$, 所以

$$\sum_{u,v\in B(J)} |p(u)-p(v)| > |(S',\bar{S}')|n^{1} \ge k'n^{3} = k.$$

即f(I)回答"是"。

反之,若 f(I)回答"是",即存在对V的安置 $p:V \rightarrow \{1,2,...,n+n^3\}$,使得

$$\cdot \sum_{uv \in E(G)} |p(u) - p(v)| \geqslant k.$$

我们来建立G'中的一个断集 (S',\bar{S}') ,使得 $[(S',\bar{S}')] \ge k'$ 。

又新顶皆孤立顶,则G'中的断集与G中新集是同一的。令

$$S_i = \{v \mid v \in V, p(v) \leq i\}, 1 \leq i \leq |V| = n + n^3$$

 (S_1, \overline{S}_1) 是断集。

令 j 满足

$$|(S_i, \overline{S}_i)| = \max_{1 \leq i \leq n+n^3} |(S_i, \overline{S}_i)|.$$

调整G 顶之位置,使V' 中的顶的相对位置(左右顺序)不 变,而把 x_1, \dots, x_n " 放在 $S_i \cap V'$ 与 $S_i \cap V'$ 之间,则

$$\sum_{u\,v\,\in\,E}\left|p'\left(u\right)-p'\left(v\right)\right|\geqslant\sum_{u\,v\,\in\,E}\left|p\left(u\right)-p\left(v\right)\right|\geqslant k=k'\,n^{s}\,,$$

其中p' 是调整后的"安置"(映射)。在p' 的安置之下,G的 边总长可以分成两部分。

- (1) 令 $S' = S_1 \cap V'$, (S', \bar{S}') 是 G' 之断集,而孤立顶 x_1, \dots, x_n 插在 S' 与 \bar{S}' 之间, (S', \bar{S}') 中边 之 长 增 加 为 n] (S', \bar{S}')] 。
- (2)把 x_1,x_2,\cdots,x_n 全卸下去,把S'与 \bar{S}' 之间的间隙 靠紧,这时边总长之上界为

$$(n-1)\cdot 1 + (n-2)\cdot 2 + \cdots + 1\cdot (n-1) = \frac{n(n^2-1)}{6}$$
.

于是

$$|n^{3}|(S', \overline{S}')| + \frac{n(n^{2}-1)}{6} \ge k'n^{3},$$

 $|(S', \overline{S}')| + \frac{n_{2}-1}{6n^{2}} \ge k',$

即

$$|(S',\bar{S}')| \geq k',$$

I回答"是"。证毕。

定理 15 MINLA ENPC.

证 只需证明 MAXLA∝MINLA。

设 MAXLA 的输入为 I , I 是 G(V,E) 和自然 数 k , 相 应

的 MINLA 之输入 f(I) 取为

$$k' = \frac{n(n^2-1)}{6} - k$$
, $(n = |V|)$,

G'(V',E')为

$$V' = V$$
,
 $E' = \{uv \mid u \neq v, \exists uv \in E(G)\}$.

注意到完全图 K。之边的总长恰为 $\frac{n(n^2-1)}{6}$,于是可得知 I 与

f(I)同时回答"是",事实上,G'是G之补图,对每个安置D,

$$\sum_{uv \in E(G)} |p(u) - p(v)| + \sum_{uv \in E(G')} |p(u) - p(v)| = \frac{n(n^2 - 1)}{6},$$

故

$$\sum_{u,v\in E(S)} |p(u)-p(v)| \geqslant k,$$

当且仅当

$$\sum_{u\,v\,\in\,\mathbb{E}\,(G')} |p(u)-p(v)| \leq k',$$

证毕.

16.8 多商品整流问题

对于一种商品运输中的 最大流 问题,我 们已经有 2F 或 Dinic 等有效算法,但对于多种商品,既使是两种商品的整数流问题,也尚未找到有效算法,它是 NPC 的一员!

令顶 S_1 , S, 是源, t_1 , t_2 是 汇(坑),边 容 量 c(e)>0 构 成有向图 G(V,E)上的一个网络,二商品流是指如下的两个流函数 f_1 , f_2 :

(C1) 对每个边 $e \in E(G)$, $f_1(e) \ge 0$, $f_2(e) \ge 0$, $f_1(e) + f_2(e) \le c(e)$;

(C2) 对每个 $i\in\{1,2\}$, 和每个 $v\in V(G) - \{s_1,s_2,t_1,t_2\}$,

$$\sum_{e \in a(v)} f_i(e) = \sum_{e \in \beta(v)} f_i(e).$$

每个流的总流量为(i=1,2);

$$F_{i} = \sum_{e \in a \ (r_{i})} f_{i}(e) - \sum_{e \in \beta \ (r_{i})} f_{i}(e).$$

我们设 $f_i(e)$ 与c(e)皆非负整数。

二萬品豐流问题,代号D2CIF(The two-Commodity integral flow problem in directed networks);

输入:有向二聚二汇网络N,非负整数 R_1 , R_2 (需求)。

问:有无整值流函数 f_i , (i=1,2), 使 $F_i \geqslant R_i$?

当 c(e)=1 时, D2CIF 称为简单 D2CIF。

定理16 簡单 D2CIF€NPC。

证 显然,简单 D2CIF€NP。下证 SAT ∞ 简单 D2IF。 设 SAT 之输入 I 为字集

$$L = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \bar{x}_1, \cdots, \bar{x}_n\}$$

和句子集

$$C = \{C_1, C_2, \dots, C_n\}$$

简单 D2CIF 的相应输入 f(I) 取为:

 $R_1 = 1$, $R_2 = m$, 二源二汇网络N, 其中N的构造为

若 p_i 是字 x_i 在句子中出现的次数, q_i 是 \bar{x}_i 在句子中出现的次数,则对每个 x_i 我们构作如图 16.3 所示的结构。

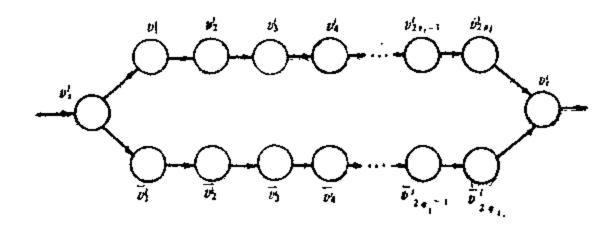


图 16.3

把图 16,3 的结构连成一串,以 v_i^i 为尾,以 v_i^{i+1} 为头有一条有向边,以 S_i 为尾,以 v_i^i 为头有一条有向边,以 S_i 为尾,以 v_i^i 和 v_i^i 为头有有向边,这 S_i 为尾,以 v_i^i 和 v_i^i 为头有有向边,这 S_i 是另一些顶,每个 C_i 为(尾, $i=1,2,\ldots,m$, t_i 为头,有一条有向边,若 $x_i(\bar{x_i})$ 第i 次出现时,则以 v_i^i ($\bar{y_i}$) 为尾,以 C_i 为头有一有向边,其中 C_i 是 $x_i(\bar{x_i})$ 出现的句子。

由(C2),第一种商品必然由S,出发从左到右地要么经过图 16.3 的上轨,要么经过下轨流入 t_1 。

设f(I) "是",我们取赋值法为:仅当 f_1 流过第i 个图 16.3式的结构下轨时, $x_i = T$ 。于是对 SAT 的输入I,回答"是"。

反之,若有赋值法,使 I 中旬旬饱和,若 $x_i = T$ 时,我们令第一种商品流过图 16.3 的下轨,若 $x_i = F$,我们令第一种商品流过图 16.3 的上轨,令 ξ 是 C 。中的"真"字,若 $\xi = x_i$,则图 16.3 的上轨不通过第一种商品,而使用它从 S 。到 C 。流过第二种商品的一个单位;若 $\xi = \bar{x}_i$,用下轨从 S 。到 C 。流过第二种商品一个单位,于是 可 使 $F_1 = 1$, $F_2 = m$,即 f(I) 亦 "是"。证单 。

本章我们介绍了图论中 16个 著名的问题,其中货即问题、图的线排列问题以及二商品流问题等,显然有极强烈的实际背景,是急待解决的应用实例。我们已证明它们属于 NPC,于是要搞出有效算法精确地解决它们就个分困难,甚至这些问题本身不存在有效算法,进而 NPC 中的全体问题都无有效算法。

当前对于 NPC 中的问题,我们常常把追求问题的有效算法的努力转移到设计良好的近似算法上去,例如对于货郎问题已有改良圈近似算法。

Garey M R和 Johnson D S在《Computers and Intra-

ctability》一书中给出了一部分 NPC 问题的一个清单,有兴趣的读者可以去查阅。

习 艧

- 1. 不用 Cook 定理证明 IND∝CLIQUE.
- 2.证明求最小独立集但它也是顶覆盖可在多项式时间内解决。
- 3. 叙述一个判定问题型的最小支配集问题,且证明它是NPC的。
- 4. 把无向图中的货郎问题(回路上的顶可以通过不止一次)叙述成判定问题,且证明它是 NPC 的。
- 5.证明:存在多项式算法求出一个回路C,其长满足 $I(C) \le 2I(T)$,其中I(T)是G的最小生成树T之长,且若每边长皆正数,则这种回路满足I(C) > I(T)
- 6.证明对每个k ≥ 3,图的k正常着色问题(一般)是NPC的。
 - 7. 下述问题叫做图的团划分问题:

输入:图G(V,E),自然数k.

问:能否把V划分成 k 个子集 V_1,V_2,\cdots,V_s ,使得 $G[V_7]$ 是团?

证明:此问题是NPC的。

8. 考虑下面关于有向图的问题:

输入:强连通有向图 G(V,E), 自然数 k.

问,是否有边子集 E',使得 $|E'| \leq k$? 且 G'(V,E')是 强连通的?

证明。该问题是NPC的。

9. 证明下列最长轨问题是 NPC 的。

输入:图G(V,E),二顶点s,t,正整数k.

问:是否存在从s到t长度不少于k的轨?

- 10. 证明对于2分图,无向 Hamilton 轨问题也是 NPC 的。
- 11. 证明即使 s,t 不指定,无向 Hamilton 轨问题也是 NPC 的。
 - 12。下面是限制次数的生成树问题:

输入:图 G(V,E),自然数 k.

问: G中是否有生成树,对每个顶, $d_r(v) \leq k$?

证明,即使 $k \ge 2$ 是固定的,而不是输入的一部分,该 问 题 也是 NPC 的。

13. 考虑下面的网络通讯问题, $G(V_1E)$ 是一个图, $v_0 \in V(G)$ 称为中心,每顶 $v \in V - \{v_0\}$ 有一个需求 $r(v) \ge 0$,每 边 e 上有一个容量 c(e) > 0 和一个费用 $k(e) \ge 0$,找一个满足下列条件的 最小费用生成树 T_0 若 U(e) 是一些顶之集合,使得从 v_0 经 e 到达这些顶,则 $\sum_{i=1}^{n} r(v) \le c(e)$,树的费用为 $\sum_{i=1}^{n} k(e)$.

叙述一个相应的判定问题,且证明它是 NPC 的。

14. 有向 Steiner 树问题:

输入,有向图 G(V,E), 顶子集X,一顶 $r\in X$,自然数 k.

问 $_{i}G$ 中是否有根在 $_{i}$ 的外向树 $_{i}T(W,F)$,使得 $_{i}X\subseteq W\subseteq V$,且 $_{i}F$ 1 $_{i}\leqslant k$?

证明,此问题是 NPC 的。

- 15. 在二分图 G(X,Y,E)中, X集合是连通的, Steiner 树 问题仍是 NPC 的。
- 16. 下列问题称为最少揪边二分子图问题,代号 MINEDB (Minimum edge-deletion bipartite subgraph):

输入:图G(V,E),自然数 k.

问,是否存在边子集 $E' \subseteq E$,使得 G(V, E - E') 是二分图,且 $|E'| \le k$?

证明,MINEDBENPC.

17. 下列问题称为等分最小断集问题,代号 MINCES (Minimum cut into equal-sized):

输入:图G(V,E),二顶s,t,自然数k.

问:是否存在V的划分 S,\overline{S} ,使得 $|S| = |\overline{S}|$, $s \in S$, $t \in \overline{S}$, 且 $|\{uv|u \in S,v \in \overline{S}\}| \leq k$?

证明. MINCES ENPC_

- 18. 证明网络中的最大流 2F 算法中能否只用 k 条可增载 轨 得出的问题是 NPC 的。
- 19. 成捆整流问题,代号IFWB(Integral flow with bundles):

在最大流问题中,"捆儿"是指边 子、集 B_1 , B_2 , …, B_n , 分别具有捆容量 C_1 , C_2 , …, C_n , 流 f 要满足对每个捆 B_n , i=1,

 $2,\dots,k$, $\sum_{e\in B_i} f(e) \leq C_i$, 且对每个顶 $v\in V-\{s,t\}$, 流入与流出

相等,问是否存在满足需求R之流f? 证明、IFWB \in NPC。

17 拟阵与图

17.1 定义与例

拟阵在计算机科学及系统理论中的应用日益增多。本章介绍 它的一些性质及其与图论的联系。

在线性代数当中,有如下的**替换定理**,V是一个线性空间,B, 与 B, 是 V 的两组基,那么对 B, 中任一向量 e ,可 找 到 B ,中一个向量 f ,使得 $(B, -\{e\}) \cup \{f\}$ 也是 V 的一组基。

在图论中亦有类似的事实。

定理 1 G是连通图, T_1 与 T_2 分别 是 G 的 生 成 树, $\forall e \in E(T_1)$, 则 $\exists f \in E(T_2)$, $\ni (T_1 - e) + f$ 是 G 的生成树。

证 若 $e \in E(T_2)$,则定理自然成 立。若 $e \in E(T_2)$,则 e 的端 点 非一次,且 $E(T_2) - E(T_1) \neq \emptyset$ 。记 $T_2 - T_1 = E(T_2) - E(T_1)$,把 $T_1 - T_1$ 中的边分别添入 T_1 而得的各个圈中必有一个圈 $C \geq e$,否则,分别删去所得各圈中不 属 于 T_2 的 的 边 得 T_2 ,但 $e \in E(T_2)$,未被删去,这是不可能的。显然,C 上 必 有一边 $f \in E(T_2)$,但 $f \in E(T_1)$,于是,从C 上删除 e 后得 $T_1 - e$ + f 仍为G 的生成树。证单。

我们把定理1的事实抽象成集合的语言,引出拟阵的概念。

定义 1 (E, \mathscr{B}) 为有序偶,其中E是非空有限集合, \mathscr{B} 是 E的一些子集组成的非空族,称 \mathscr{B} 中每个子集为基,且满足

(多1) 每个基不是别的每的真子集,

(第,) 若 B_1 与[B_2 是基, $\forall e \in B_1$,则引 $\in B_2$, $\ni (B_1 - \{e_1\})$ 以 {f}也是基。

这时我们称(E, \mathscr{B})是一个拟阵,记成 $M=(E,\mathscr{B})$.

由 (\mathcal{B}_{2}) 易见,M中任二个基 B_{1} , B_{2} , 必有 $|B_{1}| = |B_{2}|$,我们称这个数字为M的**秩**。

若G(V, E) 是一个图,由G的各个生成林的边集为基则构成一个拟阵 $M(G) = (E(G), \mathcal{B})$ 。通常称M(G) 为图G的**图拟阵** (Circuit matroid)。

若E是向量空间中一个非空有限向量集,L(E)是由E线性生成的子空间,则E的任何一个线性无关子集,当它能线性生成 L(E)时,便作为一个基,这样的基之全体记成 \mathcal{B} ,于是 (E, \mathcal{B}) 也是一个拟阵,称为**向量拟阵**。

在拟阵中,E的一个子集称为无关的,是指它是拟阵某个基的子集。基即为极大无关集。任何一个拟阵,都可由它的极大无关集唯一决定。对子向量拟阵,E的一个子集为无关集的充要条件是,当把E的这个子集的元素视为向量空间的向量时,它们是线性无关的。与此相仿地,若G(V,E)是图,则M(G)的无关集便是G的不含圈的边集,即导出G含有的林的边集。

一个拟阵可以用它的无关集来描绘, 所以可以用无关集来叙述拟阵的定义。

定义 2 一个拟阵M是一个有序俱 (E, \mathcal{I}) ,其中 E是非空有限集, \mathcal{I} 是 E的一些子集的非空族, 其中每个子集 称 为 无 关集, 无关集满足

(月1) 无关集的子集是无关集;

 (\mathscr{I}^2) I 与I 是两个无关集,且|I|>|I|,则在I 中有一个元素 e,它不在I 中而能使I \cup $\{e\}$ 是无关集。

注意,用此定义时,可把一个基定义为一个极大无关集;反复使用(*9*2)于任一无关集,便可把它扩充为一个基。

容易证明,在定义1中,规定每个基的子集为无关集,则 E 连同它的全体无关集自动地满足定义 2. 反之,在定义 2中,按 其后"注意"引入基时, E 连同全部基也满足定义 1,故定义 1 与定义 2 是等价的。

若 $M = (E, \mathcal{I})$ 是一个拟阵,E的一个子集不是无关集 时,称之为**相关集**,极小的相关集称为**圈,**对于M(G),它的每个 图正是图G中的圈。

(定义 3 一个拟阵M是一个有序偶 (E, ρ) ,其中E是非 空 有限集合, ρ 是定义在E的幂集合上的整值函数,且满足

- $(\rho 1)$ $0 \le \rho(A) \le |A|$ 对 E 的每个子集 A 成立;
- $(\rho 2)$ 若 $A \subseteq B \subseteq E$, 则 $\rho(A) \leqslant \rho(B)$;
- $(\rho 3)$ 对任何 $A, B \subseteq E, \rho(A \cup B) + \rho(A \cap B) \leq \rho(A) + \rho(B)$ 。 定理 2 定义 3 与定义 2 等价。

证 设 $M = (E, \mathcal{I})$ 是定义 2 中的拟阵,规定 $\rho(A)$ 为含于 A的最大无关集中元素个数,则 $(\rho 1)$ 与 $(\rho 2)$ 成立。下证 $(\rho 3)$ 亦成立。设X是 $A\cap B$ 的极大无关子集,由于X是 A 的 无 关 子集,它能扩充为 A 的一个极大无关子集 Y ,再扩充为 $A \cup B$ 的一个极大无关子集 Z ,因为 $X \cup (Z-Y)$ 是 B 的无关子集,由 $(\rho 2)$, $\rho(B) \geqslant \rho(X \cup (Z-Y)) = |X| + |Z| - |Y| = \rho(A \cap B) + \rho(A \cup B) - \rho(A)$,故 $(\rho 3)$ 成立。

反之,设 $M = (E, \rho)$ 是定义 3 中的拟阵,规定五的子集 A 是无关集的充要条件是 $\rho(A) = |A|$. 若 $A_1 \neq \emptyset$, $A_1 \subset A_1$ 当 A 为无关集时, $A = A_1 \cup (A - A_1)$,若 $\rho(A_1) < |A_1|$,因 $\rho(A - A_1)$ 。 $|A - A_1| = |A| - |A_1|$,故 $|A| = \rho(A) = \rho(A_1 \cup (A - A_1))$ $= \rho(A_1 \cup (A - A_1)) + \rho(A_1 \cap (A - A_1)) \leq \rho(A_1) + \rho(A - A_1)$ < $|A_1| + |A| - |A_1| = |A|$,矛盾。故 $\rho(A_1) = |A_1|$, A_1 是 无关集 ,即 (\mathcal{I} 1) 成立。下证 (\mathcal{I} 2) 成立。设 I = I 是无关集 I1 》 I1 ,用反证法,设 $\rho(I) = k$,并设对每个属于I 而不属于I1 的元素 e ,都有 $\rho(I \cup \{e\}) = k$,那么,若 e = I7 都属于I7 而不属于I7 ,则由 (ρ 3) 知

 $\rho(I \cup \{e\} \cup \{f\}) \leq \rho(I \cup \{e\}) + \rho(I \cup \{f\}) - \rho(I) = k$, 由此得 $\rho(I \cup \{e\} \cup \{f\}) = k$. 继续这种程序,每次添入 I 的一个新元素,由于每一步得到的集合秩皆为 k,最后得 $\rho(I \cup I) = k$. 由 $(\rho 2)$ 知 $\rho(I) \leq k$,与 $\rho(I) = |I| > |I| = \rho(I) = k$ 矛盾。所以在 I 中 存在 一个不属于 I 的元素 I ,使得 $\rho(I \cup \{f\}) = k+1$ = |I| + 1 证毕。

所谓拟阵 $M = (E, \rho)$ 的**环** (loop),是指E中满足 $\rho(\{e\})$ = 0 的元素 e,M的一对**平行元素**是指E中一对元素 $\{e,f\},e$,f 皆非环,但 $\rho(\{e,f\})=1$ 。在图的圈拟阵M(G)中,这里说的环与平行元素分别是图的环与重边。

下面介绍几种重要的特殊拟阵。

- (1) 平凡拟阵 只有空集这一个无关集的拟阵,它是一个 秩为 0 的拟阵、
 - (2) 离散拟阵 E的每个子集皆无关集的拟阵。

离散拟阵只有一个基,它是B本身; $\forall A \subseteq E$, $\rho(A) = |A|$.

(3) 均匀拟阵 全部基即为E的全体k元子集时,称拟阵 为E上的k-均匀拟阵。

平凡拟阵与离散拟阵皆均匀拟阵的特例。

- (4) **同构拟阵** $M_1 = (E_1, \mathcal{I}_1), M_2 = (E_2, \mathcal{I}_2)$ 称为 **同构拟阵**,指存在可逆映射 $\psi: E_1 \rightarrow E_2$,使 E_1 中的元素 组成的子集在 M_1 中为无关集,当且仅当它在 E_2 中的象 是 M_2 中的无关集。
- (5)可图拟阵 岩拟阵M与一个图G的圈拟阵同构,则称拟阵M为可图拟阵。

例如在 $E = \{1,2,3\}$ 上,以 \emptyset , $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$, $\{1,2\}$, $\{1\}$, $\{3\}$ 为无关集的拟阵M与图 17.1 中的图 G 之圈拟阵 M(G) 同构,此拟阵M为可图拟阵。

但并非每个拟阵都是可图的,例如 4 元素集合上 2-均 匀 拟 阵不可图.

(6)图的割集拟阵与补可图拟阵

设 G(V, E) 是一个图、拟阵 (E, \mathcal{I}) 中、 \mathcal{I} 是 E 的如 此 子集族, 其成员不以G的任何割集为 子集,记之为 $M^*(G)$,称为图G的 割集拟阵。若一个拟阵与某个图 G 的 割集拟阵同构,则称此拟阵为补可图 拟阵。

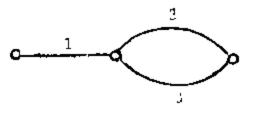


图 17.1

下面验证割集拟阵满 足 拟 阵 定

义。(\mathcal{I} 1) 自然成立。下面证明 (\mathcal{I} 2) 亦成立。设I与I都是 必的子集,且|I| < |J|, $\{e_1, e_2, \dots, e_s\} = I \cap J, I = \{e_1, \dots, e_s\}$ e_{k} , e_{k+1} , ..., e_{s} }, $J = \{e_{1}, ..., e_{k}, e_{s+1}, ..., e_{s}\}$, 于是由 |I|<|I|知 q-p>p-k. 若 I∪{e_i}(i=p+1, …, q) 皆不属 子》,那么这q-p个集合都以G的割集为子集。由于J是 无 关 集,故 $I \cup \{e_i\}$ 所含的G之割集不会是 $\{e_1, \dots, e_k, e_i\}$ 的子集。 它必含有 $\{e_{i+1}, e_i\}$ 中的某些边,而 $I \cup \{e_i\}(j \neq i, i, j$ 取 p+1, …, q 中的值) 中所含的G的割集 与 $I \cup \{e_i\}$ 所 含 者 不 同,即它所含的 $\{e_{i+1}, \dots, e_{j}\}$ 中的边与 $I \cup \{e_{i}\}$ 所含者不同, 但 q-p>p-k, 矛盾、故必有 $e\in I$ 、 $e\in I$ 、 使得 $I\cup\{e\}$ 仍为无关 集.

(7) 可平面报阵 既是可图的又是补可图的拟阵叫做可平 面拟阵。

(8) 可表示拟阵

M是集合E上的拟阵、称M在域F上是可表示的、指存在F上的一个向量 空间 V以及映射 φ , $E \rightarrow V$, 它具有以下性质。 A $^{\prime}\subseteq E$ 在M中为无关的,即 φ 在A上是——对应且 $\varphi(A)$ 在V中线性 无关。当F取 0-1二元域时,称M为二分拟阵。在每个域上 皆可 表示的拟阵叫做正则拟阵;有的拟阵在任 何 域 上 皆 不 是 可 表 示的。

图G(V, E) 的圈拟阵M(G) 是一个二分拟阵。事 实 上、

在关联阵中每条边对应的列向量为 0-1 向量,一些边组成一个圈时,对应的向量之和为零向量(在 0-1 二元域中计算).

(9) 二部拟阵与 Euler 拟阵

一个拟阵的每个圈都由偶数个元素组成,则 称 它 为二部 拟 阵。若E是一些无公共元素的 圈 的并,则在 集合 E上的拟阵称为 Euler 拟阵。

(10) 子拟阵

M是定义在集合 E上的拟阵, $A \subseteq E$,M在 A上的**限制** 记 成 $M \times A$,是指如下拟阵,它的圈恰好是 M含于 A的 圈。 M到 A的 **收缩**记成 $M \cdot A$,是指如下的拟阵,它的圈是集族 $\{C_i \cap A\}$ 的极小元,其中 C_i 是 M的 圈。它们对应于在一个图中删去某些 边及 把某些边收缩掉。

某拟阵M经有限次限制与收缩得到的拟阵叫做M的子拟阵。

17.2 拟阵与图论

定义 4 若 $M=(E, \rho)$ 是用秩函数定义的一个拟 阵,M的 对偶拟阵M* 定义如下, $M*=(E, \rho^*)$,对 $A\subseteq E, \rho^*$ 满足 $\rho^*(A)=|A|+\rho(E-A)-\rho(E)$

定理 3 $M^* = (E, \rho^*)$ 是 E 上的一个拟阵。

证 我们对 ρ^* 验证定义 3 中的 $(\rho 1)$, $(\rho 2)$, $(\rho 3)$ 三个 条件。设 $A\subseteq B$, 由 ρ^* 的表达式得

 $\rho^*(B) - \rho^*(A) = |B| - |A| + \rho(E - B) - \rho(E - A),$ 令 $B_1 = E - B$, $A_1 = E - A$, $B_1 \subseteq A_1$, $\rho(A_1) \leqslant \rho(A_1 - B_1)$ $+ \rho(B_1)$ 或 $\rho(B_1) - \rho(A_1) \geqslant -\rho(A_1 - B_1) = -\rho(B - A)$, 代回原 式得 $\rho^*(B) - \rho^*(A) = |B| - |A| + \rho(B_1) - \rho(A_1) \geqslant |B| - |A|$ $-\rho(B - A)$, 由 $(\rho 1)$ 知此式不小于 0, 从而 $A \subseteq B \subseteq E$ 时, $\rho^*(B)$ $\geqslant \rho^*(A)$, 即 ρ^* 满足 $(\rho 2)$.

为了验证 (ρ 1), 首先易知 ρ *(A) \leq |A|,又由 (ρ 3), ρ (E) 310

 $+\rho(\phi) \leq \rho(A) + \rho(E-A)$,故 $\rho(E) - \rho(E-A) \leq \rho(A) \leq |A|$.因而 $\rho^*(A) \geq 0$.

最后验证 ρ^* 满足 $(\rho 3)$, 对任何 A, $B \subseteq E$, $\rho^*(A \cup B) + \rho^*(A \cap B) = |A \cup B| + |A \cap B|$ $+ \rho(E - (A \cup B)) + \rho(E - (A \cap B)) - 2\rho(E)$ $= |A| + |B| + \rho((E - A) \cap (E - B))$ $+ \rho((E - A) \cup (E - B)) - 2\rho(E) \leqslant |A| + |B|$ $+ \rho(E - A) + \rho(E - B) - 2\rho(E)$ $= \rho^*(A) + \rho^*(B)$

证毕.

定理 4 M*的基是M的基的补集。

证 岩 B^* 是 M^* 的基,往证 E- B^* 是M 的 基。由于 B^* 在 M^* 内是无 关 的, $|B^*| = \rho^*(B^*)$,因此 $\rho(E - B^*) = \rho(E)$,于是只剩下要证 $E - B^*$ 在M中是无关的。由于 B^* 是 M^* 的基,故 $\rho^*(B^*) = \rho^*(E)$,于是 $\rho^*(E) = |E| + \rho(\phi) - \rho(E) = |E| - \rho(E)$,故 $|B^*| + \rho(E - B^*) - \rho(E) = |E| - \rho(E)$, $\rho(E - B^*) = |E - B^*|$,证**毕**。

每个拟阵都有唯一的对偶,而且 $(M^*)^* = M$.

定理 5 G是一个图,则 $M^*(G) = (M(G))^*$.

证 由于 $M^*(G)$ 的圈都是G的割集,我们必须验证 C^* 是 $(M(G))^*$ 的圈的充要条件是。 C^* 是G的割集。若 C^* 是G的割集。而 C^* 在 $(M(G))^*$ 中是无关集,那么 C^* 可以扩充为 $(M(G))^*$ 的一个基 B^* 。由此得 $C^*\cap (E-B^*)=\phi$,而任何割集与生成林有公共边,这里 $E-B^*$ 正是G的一个生成 林,由此得矛盾。于是 C^* 是 $(M(G))^*$ 中的相关集,它含有 $(M(G))^*$ 的一个圈。

反之,若 D^* 是 $(M(G))^*$ 的一个圈,则 D^* 不含于 $(M(G))^*$ 的任一基内。由此, D^* 与M(G)的每个基都有公共边,即 D^* 与G的每个生成林都有公共边,所以 D^* 含有G的一个割集。

证毕。

若拟阵M的一些元素组成的集合形成M*的一个圈,则称这个集合形成M的一个补圈。由定理 5 知,图 G的圈拟阵的补圈恰好是 G的割集。还可仿此定义M的一个补基为M*的一个基,以及相应的补秩、补无关集等等。我们还可指出,拟阵M是"补可图的"的充要条件是M*是可图的。引入"补概念",我们便可以集中注意拟阵M,不必分心照顾M*。为说明这一点,我们证明下列结果在拟阵方面的类似结果。

命题 1 F 是圈G 的生成林,则:(1)G 的每个割集都与F 有一条公共边;(2)G 的每个圈都与F 关于G 的补围(从G 中圈去F 各边得的图)有一条公共边。

以上结果在拟阵中的类似结果有

定理 6 拟阵的补圈与基相交.

证 设 C^* 是拟阵M的补圈,B是M的基,且 $C^* \cap B = \phi$,即 C^* 含于 E - B内,作为 M^* 的圈, C^* 含于 M^* 的一个基 内,矛盾。证毕。

推论 1 拟阵的圈与补基相交。

我们看到,用拟阵的观点,上述命题1的(1)与(2)实际上是一个结果的两种对偶形式,在拟阵论中只需证明一个结果并用一下对偶性即可。

作为拟阵论引入简化的进一步的例子, 我们考虑下面的

命题 2 (1) 若圈G的两个不同的圈都含有洞一条边e,则 G有一个不含e的圈; (2) 把圈改成割集, (1) 仍成立.

在拟阵论中,若我们证明了关于圈的结果之后,再把它用于 $M^*(G)$,立即得出关于割集的结果,反之,亦可利用对偶性,由关于割集的结果归结出关于圈的结果。

下面讨论有关平面图对偶图的问题,在第5章中,我们给出过平面图的几何对偶图的定义,下面引入图的抽象对偶的概念。

定义 5 图G的抽象对偶,记成 G^* ,是指这样一个图, G^*

与 G^* 的边之间 ——对应,使得 G 中一个边子集构成 G 的一个圈的充要条件是,此边子集对应的 G^* 中之边子集 形成 G^* 的一个割集。图 17.3 画生—个图 G 及其拍象对偶 G^* 。

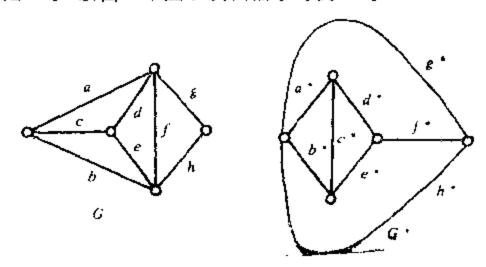


图 17.2

下面对可平面图而言,其几何对偶与抽象对偶,如何可作为 拟阵中对偶性的推论而引入。

定理 7 G^* 是 G 图的抽象对偶,则 $M(G^*)$ 与 $(M(G))^*$ 词构。

证 由于 G^* 是 G的抽象对偶,E(G) 与 $E(G^*)$ 之间有——对应,使 G中的圈对应于 G^* 中的割集,反之亦然。由此得M(G) 的圈对应于 $M(G^*)$ 的补圈,由定理 5, $M(G^*)$ 与 $(M(G))^*$ 同构。证集。

推论 2 G^* 是连遼平面图 G 的几何对偶,则 $M(G^*)$ 与 $(M(G))^*$ 同构。

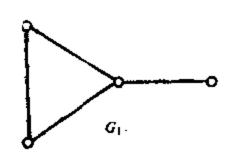
证 先证G的一个圈对应于G*的一个割集,反之,G*中任一割集对应于G中一个圈。设C是G中一个圈,则C包围了G的一个或几个有界区域,故其内含G*的非空顶子集。由此,G*与C交叉的那些边,形成G*的割集;反之,把G*的割集删除后,得到含两个连通片的图,其中一个连通片的顶点集不含与G的无界区域对应的顶点时,围了这个顶点集所对应的G的各区域的外围边,即是此割集所对应的G中的圈,由定理7知推论2成

立、证毕。

一个平面图可能有不止一个互不同构的对偶,而拟阵的对偶是唯一的。可以验证,若 G^* 与G'是G的两个对偶,则 G^* 与G'的圈拟阵是同构的拟阵。

习 题

- 1. $E = \{a, b, c, d, e\}$, 找出 E 上满足下列条件的拟阵。(1) E 有唯一的蓝,(2) 空集是唯一的基,(3) E 的恰含三个元素的子集的全体组成基集合,对每个拟阵,写出它的无关集、圈(如果有)以及秩函数。
- 2. G_1 , G_2 如图 17.3 所示, 写出圈拟阵 $M(G_1)$ 与 $M(G_2)$ 的基、圈以及无关集。



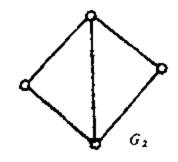


图 17.3

- 3. $M \not\in E = \{a,b,c,d\}$ 上的拟阵,全部基为 $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$,与出M的全部圈,并引出结论。M不是任何图G的圈拟阵。
- 4. 利用性质 (\Re 1) (\Re 2) 证明: (1) 集合 E 上的拟阵 任何两个基含同样多的元素; (2) $A \subseteq E$, 则 A 的任何两个 极 大无关子集内含有同样多个元素。
 - 5. 怎样把图的基本圈集的定义推广到拟阵去?
- 6. 证明: 拟阵M也可定义为一个有序偶(E,%), 其中E为非空有限集,%是E的非空子集的一个族(其中每个非空子集称为圈),它满足: (1)每个圈都不是圈的真子集,(2) C_1 , C_2 是含边 E0两个圈,则 $C_1 \cup C_2$ 中有一个圈,它不含 E0.

- 7. $E = \{a,b\}$, 若同构的拟阵不加区别,则 E 上恰有四个 拟阵, 试把它们的基、无关集和圈写出来。
- 8. $E = \{a,b,c\}$,若同构的拟阵不加区别,则 E 上恰有 8 个拟阵,写出它们的基、无关集与圈。
 - 9. 证明可图拟阵 $M(K_s)$ 与 $M(K_{s,s})$ 都不是补可图的。
- 10. M是集合 E 上的 拟阵,且 $A \subseteq B \subseteq E$,则 (1) ($M \times B$) $\times A = M \times A$; (2) ($M \cdot B$) $\cdot A = M \cdot A$.
- 11. 若拟阵 M 满足下列性质中任一性质,则 M 的任何子拟阵 也满足同一性质: (1) 可图的; (2) 补可图的; (3) 二分的; (4) 正则的。
- 12. (1)证明离散拟阵的对偶是平凡拟阵; (2) n元素 集合上的 k-均匀拟阵的对偶是什么?
 - 13. 求第8题中的8个拟阵的对偶。
 - 14、下列拟阵的补圈与补基是什么?
- (1) 九元素集上的 3-均匀 拟 阵; (2) 图 17.3 中G、与G。的圈拟阵。

习题答案或提示

第1章

- 2 $\varepsilon(K_{\nu}) = {\nu \choose 2}$, 故有 $\varepsilon(G) \leq {\nu \choose 2}$.
- 3 (2) n个顶的轨与n个顶的星状图边数亦同,但不同构。
- 5 N-2.
- 6 设 S_1 与 S_2 是任意划分成的两个集合,以 $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ 为顶集作 K_2 ,当且仅当顶 u 与 v 满足 $|u-v| \in S_1$ (j=1,2)时,把边 uv 染成 j 色。若 123451 与 135241 分别 是 1 色 与 2 色 的同色五边形,则 1 与 4 在同一个集合, 2 与 3 在另一集合, 这 时命题成立。不然,会出现同色三角形 Δuvw ,设 x=u-v>0, y=v-w, z=u-w, 则 x, y, z 在同一集 合,且 x+y=z.
- 7 以人为顶点,两人为朋友时,相应的两 顶 之 间 连一条 边,若任二人朋友数相 异, 依 题 意, $\Delta \ge \nu 1(\nu$ 是人数), 而 $\Delta = \nu 1$ 时,必有 $\delta \ge 1$,从而 $\Delta \delta + 1 < \nu$,这与各顶次数相 异矛盾,而 $\Delta > \nu 1$ 亦不可能。
 - 8 以人为顶,相识时,之问连一条边。
- 10 必要性 不足 道。由 θ 定 义 ϕ . $E(G) \rightarrow E(H)$,使 $uv\in E(G)$ 和 $\theta(u)\theta(v)\in E(H)$ 对应,于是 ϕ 可逆,且 $\phi_c(e)=uv$ 的 充要条件是 $\phi_u(\phi(e))=\theta(u)\theta(v)$.
- 11 充分性显然成立;由 $e(K_v) = \binom{\nu}{2}$,从而不是完全图且 $e = \binom{\nu}{2}$ 的图中一定有重边或环,与G是单图矛盾。
 - 12(6) 设G的顶划分为X, Y, |X|=v-m, |Y|=m, 则 316

$$\varepsilon(G) \leqslant \varepsilon(K_{\nu-m,m}) = (\nu-m) m \leqslant \frac{\nu^2}{4}$$
.

14 总盘 数=
$$\varepsilon(K_*) = \frac{n(n-1)}{2}$$
.

- 16 若图中无圈,考虑其最长轨,此轨两个端点必为一次顶。
- 17 以运动队为顶,两队赛一局,则在二队之间连一边。再用 $2\varepsilon(G) = \sum_{v \in V} d(v)$ 来证明,这里 $\varepsilon(G) \approx n+1$ 。
- 18 令 $G_1 = G[A]$, 把恰有一个端点在 A内的 k 条边之另一端点重合成一个端点 v . 把这 k 条边与顶 v 并入 G_1 得图 G_2 , 再根据 G_2 中奇次顶之个数是偶数即可得证。
- 19 以 2n 个点为顶,只要两个顶在同一个圆内,则 此二顶相邻,得到一个图 G. 我们只需再证明 G是连通的,结合每个顶次数不小于 n.
- 20 先证此图必有一个圈C,用最长轨方法证。若 $\exists v \in V(G)$,但 $v \in C$,则 C 上有三次以上的顶。
 - 21 两个三角形。
 - 22 2 个
- 23 k 维立方体与 0-1k 维向量——对应,而后者恰为 2^{1} 个。在上述 k 维向量中,固定 k-1 个坐标后,在 k 维立方 体中,对应两个顶,这二顶相邻,故 $e=C_{k}^{k-1}2^{k-1}=k2^{k-1}$ 。按 每个顶 点坐标和的奇偶性,把顶划分成两个子集,即可验证其为二分图。
 - 24 K_n^c 是无边图, $K_{n,n}^c$ 是 K_n 与 K_n 的并。
 - 25 $\varepsilon(G) + \varepsilon(G^{\circ}) = \varepsilon(K_{\nu}) = \frac{1}{2} \nu(\nu 1)$, 又 $G \cong G^{\circ}$, 故

 $\varepsilon(G) = \frac{1}{4} \nu(\nu-1)$, 而 $\nu = \nu-1$ 中有一奇数, 从而 $\nu = 0$,

1 n od 4 .

- 26 这种图 ν = ε = 5。共有两个,一个是五边形,另一个 是 五边形删去一条边后加一对角形使其含三角形。
 - 30 K1,*+1.
- 31 设G中n个顶的导出子图有m条边。v, 与v, 是G中任意两个顶、在G-v, 中n个顶的导出子图共 $\binom{v-1}{n}$ 个,在G
- -v,中任-边v在这 $\binom{v-1}{n}$ 个n 顶导出子图中取到的次数为G-
- $-\{v_1,u,v\}$ 中取 n-2 个顶点的导出子图 的个数 $\binom{v-3}{n-2}$. 于是有

$$\varepsilon(G) - d(v_i) = \varepsilon(G - v_i) = m \binom{v-1}{n} / \binom{v-3}{n-2}, \tag{1}$$

$$\varepsilon(G) - d(v_i) = \varepsilon(G - v_i) = m \binom{v-1}{n} / \binom{v-3}{n-2}, \qquad (2)$$

$$\varepsilon(G) - d(v_i) - d(v_i) + a_{i,j} = \varepsilon(G - \{v_i, v_i\})$$

$$= m \binom{\nu-2}{n} / \binom{\nu-4}{n-2}, \tag{3}$$

其中

$$a_{i,j} = \begin{cases} 1, v_i v_j \in E(G), \\ 0, 否则. \end{cases}$$

(3)-(1)-(2) 得 a,, 与 i, j 的取法无关, 于是

$$G \cong \begin{cases} K_{\nu}^{\epsilon}, & a_{i,i} = 0, \\ K_{\nu}, & a_{i,i} = 1. \end{cases}$$

- 32 由 $v\delta \leqslant \sum_{v \in v} d(v) = 2\varepsilon \leqslant v\Delta$ 即得证。
- 33 $k|X| = k|Y| = \varepsilon$, to |X| = |Y|.

35(a) 7, 6, 5, 4, 3, 3,2 若是图序列,则此图 7 个顶, Δ <6, 而今 $d(v_1)=7$; 6, 6, 5, 4, 3,3,1 若是图序列,此图 7 个顶,又 $d(v_1)=d(v_2)=6$,于是 v_1 , v_2 与每个顶墙、相邻,故 $\forall v \in G$, $d(v) \ge 2$,而 $d(v_7)=1$,矛盾。

(b) $\sum_{i=1}^{n} d_i$ 显然成立。又 k 个顶导出的子图次 数之 和 $\leq k(k-1)$, 剩下的 v_{k+1} , …, v_{*} 可以给予 v_{1} , …, v_{*} 最大的可能次数 之和 $\sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\}$, 故

$$\sum_{i=1}^{k} d_{i} \leq k(k+1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_{i}\}.$$

36(a) 必要性。G为单图, $d(v_i) = d_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, (1)与 v_i 关联的边为 v_1v_2 , …, v_1v_{2i+1} , 则 $G - v_i$ 的图序列是d'.

(2) 若 v; 关联的 d; 条边中, 有 v, v;, 且 j>d; +1, 令

$$j_0 = \max\{j | v_1 v_j \in E(G)\} > d_1 + 1,$$

$$i_0 = \min\{i \mid v_1 v_i \in E(G)\} \leq d_1 + 1,$$

则 $v_i v_j \in E(G)$, j > j。时, $v_i v_j \in E(G)$, $v_i v_i \in E(G)$, i < i。时, $v_i v_i \in E(G)$, 因为 $d_{i_0} \ge d_{j_0}$, $\exists v_i, v_i$. 与 v_j . 不相邻,否则 $d_{i_0} \ge d_{i_0}$ + $1 > d_{i_0}$, 矛盾。 令 $G' = G - \{v_i v_j, + v_{i_0} v_i\} + \{v_i v_{i_0} + v_i v_{i_0}\}$, G' 与 G 的图序列皆为 d,只是 G' 的 j。小而 i。大 了,如 此 继续,可化成(1)。

充分性。设 G' 的图序列为 d' 。在 G' 上加入 异于 G' 顶点 v_1 , v_2 , v_3 , v_4 , v_5 。 的新 顶 v_1 , 而在 v_1 与 v_2 , v_3 , v_4 , v_4 , v_4 之 间连上边,得图 G,则 G 的图序列为 d 。

- 37 若丹是G中边数最多的二分生成子图,可以证明H即为所求。
 - 38 取V(G) = S, S中两顶相邻当且仅当两点相 距 为 1,

引用 $\sum_{v \in V} d(v) = 2e$ 可得证。

- 40 令 P 是最长轨,若 P 之长小于 k,设 $P = v_1 v_2 \cdots v_1 v_{l+1}$,则 $d(v_1) \ge \delta \ge k \ge l$,从而有 v_0 使 得 $v_0 v_1 v_2 \cdots v_{l+1}$ 也 是 轨,与 P 为最长轨矛盾。
- 41 $v_1 \in V_1$, $v_2 \in V_2$, 由连通性, 有轨 $P(v_1, v_2)$, 在 $P(v_1, v_2)$ 上有两顶 u, v, 使得 $u \in V_1$, $v \in V_2$, $uv \in E(G)$. 若 G 不 连 通 ,设 G_1 , G_2 是 两 个 连 通 片,取 $V_1 = V(G_1)$, $V_2 = V(G)$ 一 V_1 , 于是 V_1 与 V_2 之间不存在端点分别属于 V_1 , V_2 的边,与 充分性的假设矛盾。
- 42 若G不连通,可以分为两个顶点数分别是 v_1 与 v_2 的互不连通的子图 G_1 , G_2 , 从而 $e(G) \leq {v_1 \choose 2} + {v_2 \choose 2} \leq {v-1 \choose 2}$,矛盾。
 - 43 K,-, 加上一个0次顶。
 - 44 若G不连通,有一个连通片 G_1 , $|V(G_1)| \leq \left[\frac{\nu}{2}\right]$,

$$\Delta(G_1) \leqslant \left[\frac{v}{2} \right] - 1$$
,与 $\delta > \left[\frac{v}{2} \right] - 1$ 矛盾。

45 设 G_1 是G-V的一个连通片, $\sum_{v \in V \setminus G_1} d_c(v) - 2\varepsilon(G_1)$ > 0 为偶数,故 v 伸向 G_1 顶之边至少两条,从而 $\omega(G-v)$ $\leq \frac{1}{2} d(v)$.

- 47 设 $P = P(v_1, v_2)$ 与 $P' = P'(v_1, v_2)$ 是两条最长轨,且无公共顶,由连通性存在轨 $P''(v_2, v_2)$,从而可 找 出 比 P 更 长的轨。
- 48 不妨设u, v, w 连通, P(u,v), P'(v,w) 是两条最短轨, 则 $P(u,v) \cup P'(v,w)$ 中含一条从u 到w的最短轨.
 - 49 任意顶对u, $v \in V(G)$, $(1)uv \in E(G)$ 时 $d_{\sigma} \circ (u,v) = 1$.

- $(2)uv\in E(G)$, (a)V(G) 中任意顶至少与 u, v 中一 顶 相 邻, x, $y\in V(G)$, 若 x, y 皆与 u (或 v)相 邻, 则 $d_c(x,y)\leq 2$; 若 x 与 u 相邻, y 与 v 相邻, 则 $d_c(x,y)\leq 3$, 故 G 的 E 径 不大于 E 子,不可能。(b) $w\in V(G)$,使得 E 使得 E E E E E0, 于是 E0, E0 以 E1. 综上可知 E2 的直径小于 E3.
- 50 由 $\Delta = \nu 2$ 知, 存在顶 ν , ν 与 $\nu 2$ 个顶相邻, 而 与 顶 u 不相邻, 又 直径为 2 , 故 u 到各顶距离不超过 2 , 故 $\varepsilon(G)$ $\geq 2(\nu 2) = 2\nu 4$.
- 51 存在 $uw_1 \in E(G)$, 又G连通,有轨 $P(u, w_1)$,令 $P = uu_1u_2 \cdots u_n w_1$, $r \ge 1$, $uu_2 \in E(G)$, 取 $u_1 = v$, $u_2 = w$ (n = 1 时 $u_2 = w_1$).
 - 53 反证法,最长轨方法。
- 54 设 $P((v_*,v_*)$ 是最长轨, v_* 的邻顶全 在 $P(v_*,v_*)$ 上,从而可以找到长至少为 $\delta+1$ 的圈。
- 55 $xy \in E(G)$, S(x), S(y)分别表示与x, 义距离为1的项集, $S(x) \cap S(y) = \phi$. |S(x) y| = |S(x) x| = k-1, 故至少 2+2(k-1)=2k个顶.
- 56 $x \in V(G)$, S_i 是与 x 距离为 i 的顶点集合(i = 0,1,2, …), S_i 中顶 不相邻, S_i 中每 顶恰与 S_i 中一顶 相邻, $|S_i|$ = 1, $|S_1| = k$, $|S_2| = k(k-1)$, 故 G 至少有 1 + k + k(k-1) = $k^2 + 1$ 个顶。
- 57(a) 逐次删去一次顶,由于ν=1或2的单图不可能ε≥ν, 故当删去一次顶的步骤终止时,得到ν≥3的无一次顶的子图, 此于图中有圈。
- (b) 只需证明 $\varepsilon=v+4$ 时成立。用反证法,若 G 是无两个无公共边的圈的 $\varepsilon=4+v$ 的顶数最少的图,则 G 的圈长不小于 5 ,且 $\delta(G) \ge 3$,于是,由 $\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$ 得知 $v+4=\varepsilon \ge \frac{3}{2}v$, $v \le 8$ 。由围长 ≥ 5 ,在 G 中有长 G (图长)的圈 C , C 。无对角 线, C 。

上的每个顶皆有伸向 C。外的边,设 S,是 C。上顶的邻顶集,则 $|V(C_s)| \leq |S_s|$,故 $v \geq |S_s| + |S_s| \geq g + g \geq 10$,与 $v \leq 8$ 矛盾。

- 58 用 Dijkstra 算法。
- 59 只能有人狼羊菜,人狼羊,人狼菜,人羊菜,人羊,空,菜,羊,狼,狼菜10种状态,以这十状态为顶,可以互相转化的两种状态之间连一边,再用 Dijkstra 算法得(边权取1):

60 (x₁,x₂,x₁) 表示 8, 5, 3 斤瓶子中的 有 酒 状 态, 用 Dijkstra 算法求 (8, 0, 0) 到 (4, 4, 0) 的最短轨得:

$$(800) \rightarrow (350) \rightarrow (323) \rightarrow (620) \rightarrow (602) \rightarrow (152) \rightarrow (143) \rightarrow (440)$$
.

61 令 $y_* = (a_0^{(*)}, a_1^{(*)}, a_2^{(*)}) \in S_i$, $f(y_*) = (a_0^{(*)})'$, $a_1^{(*)}$, $a_2^{(*)}$, $f(y_*) = (a_0^{(*)})'$, $f(y_*) = (a_0^{(*)})'$, $f(y_*) = f(y_*)$, $f(y_*)$

63
$$\frac{1}{2}(n-1)n(=\varepsilon(K_{\kappa})).$$

- 64 首先逐次删除 1 次 顶, 得一个 至 少 四 顶 图, 且 不 会 是圈.
 - 66 r(3,4) = 9.
 - 67 r(4,4) = 18.
 - 68 n'(n-n')
- 69 以人为顶,相识时连一边,则此图中的四边 形 无 对 角线,不相 邻 的二顶在一个四边形上,从而得证此图是正则图 $(n = 2k, \Delta = \delta = k)$ 。

73 用公式
$$\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$$
.

74 用反证法及 $\sum_{v \in v} d(v) = 2e$.

第2章

- 1 最长轨起点终点非叶则有圈。
- 2 最长轨方法。
- 3 若有 s 个叶, s < k, 用 $\sum_{v \in V} d(v) = 2\varepsilon$ 计算得矛盾。
- 4 若 $\varepsilon = v w$, 而 G 的 某 连 通 片 G_1 中 有 圈, $\varepsilon(G_1)$

$$\geqslant \nu(G_i)$$
,从而 $\varepsilon(G) = \sum_{i=1}^{w} \varepsilon(G_i) \geqslant \sum_{i=1}^{w} \nu(G_i) - w + 1 = v - w + 1$,

矛盾.

- 5 把叶删除后得的树与原来的树有相同中心。
- 6 数学归纳法。
- 7 对 ル 用 归 纳 法 .
- 8 对 k 用归纳法
- 10 81

$$=0,从而求出\tau.=-2+\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^*+\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^*.$$

12 由公式 $\tau(K_n) = n^{n-2}$, 由对称性, K_n 的每条边在 它 所有的生成树中用了 $(n-1)n^{n-2} / \frac{1}{2} n(n-1)$ 次, 所以 $\tau(K_n)$

$$-e) = n^{n-2} - 2n^{n-3} = (n-2)n^{n-3}$$

16 把根删去得两个子树,顶的个数分别为 k与 n-k-1,

$$b_{x-1}b_0$$
. 由 $xB^2(x) - B(x) - 1 = 0$ 得 $B(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1-4x}}{2x}$, 把

- $\sqrt{1-4x}$ 做级数展开,比较系数得 $b_{\bullet}=c(n)$.
 - 19 删去生成树的两个叶。
 - 20 有圈时,从圈上删去一条边,无圈时删去一个叶。
 - 26 v(T).

第3章

- 1 $e \in E'$, $\omega((G E') \cup e) = 1$,若 e 为 $(G E) \cup e$ 的桥, 则 $\omega(G E') = 2$, 否则 $\omega(G E') = 1$.
- 2 G为 K_* 中加入三个新顶 x , y , z , 且每个新顶与 K_* 的每个顶相邻。
- 3 $\delta=\nu-1$, $G=K_{\nu}$, $\kappa(G)=\nu-1=\delta$. $\delta=\nu-2$, $\exists v_1$, v_2 , v_1v_2 $\in E(G)$, $\forall v_3 \in V(G)$, v_1v_3 , $v_2v_3 \in E(G)$, 这时任意 $\nu-3$ 个顶的子集 V', G-V' 仍连通, $\kappa(G) \geqslant \nu-2=\delta$, $\kappa(G)=\delta$.
 - 4 把两个K。的每个顶皆与K。... 的各顶之间连上边。
- 5 G中有 κ' 条边删除后 G 变成两个连通片 G_1 与 G_2 的不连通图,不妨设 $|V(G_1)|=1 \leqslant -\frac{\nu}{2}$, $\delta \geqslant \frac{\nu}{2} \geqslant l$, G_1 中 至 少 有 $\delta (l-1)$ 条边伸向 G_2 , κ' (G) $\geqslant [\delta (l-1)l \geqslant \delta$, $\kappa' = \delta$.
- 6 删去 k-1 个顶得图 G_1 ,则 $\delta(G_1)>-\frac{1}{2}$ $\gamma(G_1)-1$, G_2
- 9 若任二顶间至少有两条无公 共 边 的 轨,则 $\forall e \in E(G)$, G-e 连通,即 G 是 2 边连通的。反之, G 为 2 边连通图,无桥, 把 G 分解成块, $\forall u$ 、 $v \in V(G)$,若 u , v 在 同一块, 结论 成立, u , v 在 两 块内, 例如 B_1 , B_2 , … , B_n 是 块, $u \in B_1$, $v \in B_n$, 则连接各块 的是割顶,有两条无公共边的轨起于 u 而止于 v , 割 顶是两条轨公共顶。

- 10 未必,例如四边形 ABCD 再加上 对角 线 AC 得到的图中, 轨 BACD 与另外的轨皆有公共顶,但它是 2 连通图.
 - 11 只需证明多于两个顶的块是奇圈。
 - 12 对块数进行归纳法证明。
 - 13 对 G中割点数进行归纳证明.
- 14 在G上加入新顶×与y,且×与X中顶皆邻, y与Y中顶皆邻, 再用Whitney 定理。

15(a) 对 e 进行归纳证明。(b) 对 v 进行归纳证明。

第4章

- 1 只含一个割顶的块是 Euler 图。从G 中把此块 的 边 删除后仍为 Euler 图。
- 2 设 v_1 , v_2 , …, v_{21} 是奇次顶, 在 v_i 与 v_{i+1} 之间加上新边 e_i (i=1, 2, ..., k).
- 3 若G-v中有圈C, G-E(C) 中含v的连通片是Euler图, T是此连通片上的 Euler 回路, T无法延长成G上的 Euler 回路, 故G-v是林。设Q是一条不能延长成G的 Euler 回路的最长的起于v的行迹,则Q是闭行迹,G-Q的连通片皆Euler图,与G-v为林矛盾。
 - 4 用反证法。
- 6 G非2连通图,有割顶υ,ω(G-υ)≥2,故非Hamilton
 ton图. [X]<|Y],ω(G-X)=|Y|>|X], G非 Hamilton
 图.
 - 7 $\omega(G-S) \leq \omega(P-S) \leq |S|+1$, P是Hamilton 轨。
- 8 若 $v_o \in V(G)$, 使 $d(v_o) = 2$, v_o 的邻顶为 v_1, v_2 ,则G 中不存在以 v_1 , v_2 为端点的 Hamilton 轨,故 $\delta \geqslant 3$, $e \geqslant \left\{ \frac{3v}{2} \right\}$.
 - 12 有 Hamilton 轨; 仅当 n = odd 时无 Hamilton 圈。

13
$$\left[\frac{n-1}{2}\right]$$
.

- 14 以骑士为顶,无仇者之间连一边, $d(v) \ge n$, $d(u) + d(v) \ge 2n$,由 Ore 定理知可以就坐。
- 19 删去八面体的六个顶则得八个连通片,故不是Hamilton图。
- 20 在二十面体每个面 (三角形) 中取一点,两个面相邻时,把其内的二点用线连结,此线与棱相交得到一个图 G. G是 Hamilton 图 (同构于十二面体),沿其Hamilton 图剪即可。
 - 21 m×n为偶数。

第5章

- 4 平面图的块是平面图。反之,可用关于块数的归纳法证明。每个块皆平面图的图是平面图。
- $5(1) \nu = \phi$ 。删去 $\phi 1$ 条边后 G 变成树, 故有 $e (\phi 1)$ $= \nu 1$, $e = 2\nu 2$. (2) $n \ge 4$, n 1 条辐的轮是 n 个顶 自 对 禺 '图。
- 8 以S为顶集,仅当两点相距为1时,两 顶 相 邻 得一图 G,可以证明G是平面图,于是 $\varepsilon \leq 3n-6$,n=3 时等号不成立。
 - 9 正二十面体和正八面体。
 - 10 不是。
- 12 仅五种。正四面体, 4 顶 6 边; 正六面体, 8 顶 12 边; 正八面体, 6 顶 12 边; 正十二面体, 20 顶 30 边; 正二十面体, 12 顶 30 边。
- 13 考虑此多面体平面嵌入后的对偶图 G^* , $\nu(G^*) = \phi(G)$. $3 \le d_c * (v) \le \phi 1$, 由抽屜原理, 必有两个面边数一致。

第7章

- 1 (2n-1)!!, n!
- 2 若有两个相异的完备匹配 M_1 , M_2 , 则 $M_2 \ominus M_2 \neq \phi$, ' $T[M_1 \ominus M_2]$ 的顶皆 2 次顶,不可能。
- 3 k为偶数,取K,,,, k为奇数,取顶v,, v,, …, v,,-,, 把奇号顶与偶号顶点间两两加边,再加边v,v,, v,v,,

- …, $v_{2k-1}v_{2k-3}$,得到的图为 G_0 ,取 k 个两两不交的 G_0 和 一个新顶 v_0 ,把每个 G_0 中的 v_{2k-1} 与 v_0 之间加上边即得所求之 G_0 .
- 4 若有完备匹配,第二人总取第一人相配的顶,则第一人必输。反之,若G中无完备匹配,M为最大匹配,第一人取未被M许配的顶 v_a ,下面不论第二人如何 $\mathbf{R}v_{i-1}$, v_{i-1} 皆被M许配,于是第一人总取与 v_{i-1} 相配的顶 v_a 。
- 5 (a) 把 $K_{n,n}$ 的顶划分 (X_n , Y) 中的 X 与 Y 之 顶以 0 , 1 , 2 , ... , n-1 编号, (i , j) 表示 X 中的 i 号顶与 Y 中的 i 号顶之间的边, {(i , i + k (mod n)} i = 0 , 1 , ... , n-1 是 $K_{n,n}$ 的 1 因子。 把 $K_{n,n}$ 的 0 , 0 , ... , 0 , ... , 0
- 6 $K_{2,+1}$ 的顶为 0, 1, …, 2n. 0 放在圆心, 其余 的 等分地放在圆周上, 取 $C_1 = 012(2n)3(2n-1)4(2n-2) \cdots n(n+2)$ (n+1)0, C_1 是一个 2-因子, 把 C_1 逆时针每转一个顶点 就产生一个新的 2-因子。
- 7 以方格为顶,有公共边界者相邻得一二分图G,G无完备匹配。
- 9 (b) G中有 Euler 回路C, 构作二分图 G'(X, Y, E). $X = \{x_1, x_2, \dots, x_v\}$, $Y = \{y_1, y_2, \dots, y_v\}$, $x_i x_i \in E(G')$ 当且仅当 v_i , v_i , 在C 中版次相连,于是 G' 是 可 1 -因 子 分解的,从而G 可以 2 -因子分解。
- 11 X是行的集合,Y为列的集合,当且仅当两线有公共 1时,两线相邻、构成一个二分图G。应用定理 3 (König)即可。
- 12 按11题构图,把Y中不满 k次的顶"切"成一次顶,再按次数由大到小排列之,从后面调一些一次顶并到前方m个顶不满 k次的顶上,得一 2m 个顶的 k次正则二分图。有完备匹配,这

种匹配边导出的生成子图对应一个 $0-1(m\times n)$ 阵,这种步骤可以进行 k次。

13 B = X - S, 于是 $X - \max_{S \subseteq X} \{ |S| - |N(s)| \} = \min_{S \subseteq X} \{ |X| - |S| + |N|(s)| \} = \min_{S \subseteq X} \{ |B| + |N(X - B)| \}$, G的任最小爱盖皆取 $B \cup N(X - B)$ 的形式,故最大匹配边数为 $|X| - \max_{S \subseteq X} \{ |S| - |N(s)| \}$.

- 14 利用 13 题。
- 15 G=(X,Y,E) 是二分图, ν 是偶数时,加一些边使 G[Y]是完全图,当 ν 是奇数时,再加一些边,使 $G[Y\cup \{Y_\bullet\}]$ 是完全图, y_\bullet 是增加的新顶。G变成图H。G中有把X皆 许配的匹配的充要条件是H有完备匹配,Hall定理等价子。"H有完备匹配的充要条是 $\forall S\subseteq X$, $|N_B(s)| \ge |S|$ "。
- 16 用 Tutte 定理。 G_1 , …, G_i 是 G_i 一 S 的 奇片, m_i 是 G_i 与 S 间的边数, m_i = $\begin{cases} \text{odd}, & k = \text{odd}, \\ \text{even}, & k = \text{even}. \end{cases}$ 又 G_i 与 S 至 \mathcal{Y} 有 k-1 边相连, $m_i \geqslant k$. $\nu = \text{even}$, 则 o(G-S) = 0.
- 17 G有完备匹配,由 Tutte 定理 $o(G-v) \leq 1$,又 v(G) = even,故 $o(G-v) \geq 1$ 。若 $\forall v \in V(G)$,o(G-v) = 1,有唯一奇片 $C_o(v)$, $v = C_o(C)$ 之间的边为 e(v) = vu, $M = \{e(v)\}$ 为完备 匹配。
 - 18 在剩的牌多的人手中。
- 19 $X = \{a,b,c,d,e,f\}$, $Y = \{(b,c,d), (a,e,f), (a,b,e,f), (a,b,d,f), (a,b,c)\}$, $x_i \in y_i$ 时, $x_i y_j \in E(G)$, 构作一个二分图G.
- 20 构作二分图 $G = (X,Y,E), X = \{a,b,c,d,e\}, Y = \{ace,bc,dab,db,be\},x,\in y,$ 时,x,y, $\in E(G)$,求G的完备匹配。
- 22 以选出的8行为X,8列为Y构作二分图G=(X,Y,E),行与列有公共方格时,此二顶相邻,G是2次正则二分图,

有完备匹配, 白子与黑子相配。

第8章

- 1 $\gamma(\text{Petersen}) = 3$
- 2 $\alpha(\text{Petersen}) = 4$.
- 3 $\beta(Petersen) = 6$.
- 4 $\beta(H) \ge \max\{|X(H)|, |Y(H)|\} \ge \frac{1}{2} \nu(H)$ 反之, G不是二分图,有奇圈H, $\beta(H) < \frac{1}{2} - \nu(H)$,矛盾。
 - 5 只需证连通的有割顶的图不是 β -临界的。
 - 6 考虑G及G'。
 - 8 Y(二十面体) = 2.
 - 9 a(k维立方体)=2*-1*
 - 11 反驳, 例如 Star.

館9章

- 2 G=(X,Y,E) 为二分图,设 $|X| \ge |Y|$,在 Y中 添 加一些顶使|X| = |Y|,再加一些边,使成为 Δ 次正则二分图,逐次求其完备匹配。
- 3 反证。G存在最佳 δ 边着色和顶v,满足 $d_c(v) > c(v)$ 。v 満足引理 2 的条件,G 中有奇圈,矛盾。
 - 5 $\nu = \text{odd}$, 在正常边上色中, 同色边条数 $\leq \frac{1}{2}(\nu 1)$.

$$\frac{1}{2}$$
 $\chi'(G)(v-1) \geqslant \varepsilon(G)$, 而G正则, $\varepsilon(G) = \frac{1}{2}\Delta v, \chi' > \Delta$,

由 Vizing 定理, $\mathcal{U} \leq \Delta + 1$, 故 $\mathcal{U}(G) = \Delta + 1$.

- 6 正常边上色时,同色边数最多 n 条, $\epsilon > n\Delta$,故 $\chi'(G)$ $>\Delta$,由 Vizing 定理。 $\chi'(G) = \Delta + 1$ 。
- 7 每顶 3 种色各出现一次,每色组成一个匹配。1 色与 2 色边导出的子图是 2-因子 G_1 , G_1 连通, G_1 为 Hamilton 圈。

- 8 7节课; 若上8节课, 需要6间教室。
- 9 (1) 对 K, ", 进 行 n 边 着 色, r(2, 3, …, 3)≤r, ..., , r(3,3,…,3,2,3,…,3)≤r, ... (2) 对 n 进行归纳证明。
- 18 利用不等式 r_s≤[n₁e]+1及 Schur 定理, r_s≤[6₁e]+1=1958.
 - 19 V(G) 可划分成 $\chi(G)$ 个独立集, 第 i 个独立集 n_i 个

顶,
$$2\varepsilon(G) \leq v^2 - \sum_{i=1}^x n_i^2$$
, 当 $n_i = -\frac{v}{\chi}$ 时, $\sum_{i=1}^x n_i^2$ 取极小值, $-\frac{v^2}{\chi}$,

- 20 G_1 为G中1, 2, 3色顶的导出子图, G_2 是其余色 (4, 5, …, χ) 顶导出的子图, G_1 , G_2 皆非二分图, 有无公共 顶之奇圈.
- 25 $k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$, $k(k-1)(k-2)^2(k^2-5k+8)$.
 - 26 对 n 进行归纳证明。
- 27 利用26题及P(G',k) = kP(G,k-1), 其中G'是G加-一新顶w, 再把w与G中各顶连一边。
 - 30 X(n维立方体)=2, X'(n维立方体)=n.
 - 31 否, 五色定理。

(第 10 章

- 1 2.
- 3 若 $\delta^->0$, G 中每顶至少有一条边进入,又由 $\nu<+\infty$,在每顶处选一进入边,这些边导出的子图中有有向圈。
 - 6 竞赛图中有有向 Hamilton 轨。
 - 7 用 X≪Δ+1 及有向图中有长 X-1 的有向轨证明。
 - 8 利用定理 4.
- 10 甲虫能咬死乙虫时,从乙向甲 连一条 有 向 边,得一竞 赛图。

11 参考第三题。

第11章

- 3 设立附加源 s 与汇 t , 从 s 到 x, 连 3 条有向 边, 容 量 分别为 5 , 10 , 5 ; 从 y , 到 t 连 3 条有向边, 容量分别 为 5 , 10 , 5 .
- 4 把每顶v变成两个顶v'与v''及加一条边e=v'v'', c(e)取v顶的容量,进入v的边皆进入v',出v的边皆出v''。
 - 5 进行源到汇与汇到源的标志、

第12章

- 5 构作网络: $V' = \{s,t\} \cup \{x_1, \dots, x_{|v|}\} \cup \{y_1, y_2 \dots, y_{|v|}\}$, $E' = \{sx_i | 1 \le i \le |V|\} \cup \{y_i t | 1 \le i \le |V|\} \cup \{x_i y_i | v_i \in E(G)\}$, 边容量皆 1, 证出在 G 中覆盖V 的轨的最小条 数 为 |V| F, F 是最大流。
- 6 构作网络 $V' = \{s,t\} \cup \{x_1,\cdots,x_{|V|}\} \cup \{y_1,\cdots,y_{|V|}\}$, $E' = \{sx_i | 1 \le i \le |V| \cup \{y_it | 1 \le i \le |V|\} \cup \{x_iy_i | 1 \le i \le |V|\}$ $\cup \{y_ix_i | v_iv_i \in E(G)\}$, x_iy_i 的下界为 1, 其余边之下界为 0, 一切边之上界为 ∞ 。求从 s 到 t 的最小流。 $O(|V| \cdot |E|)$ 。
 - 11 在一个二分图上解一个匹配问题。

第18章

- 3 设 S 中 的 边 为 (V_1, \overline{V}_1) , $\forall v_0 \in V_1$, 追 腙 由 v_0 始 的 Euler 回路, 由于最后还要回到 v_0 , 故 (V_1, \overline{V}_1) 中的 边 数一定是偶数。反之,取 $|V_1|=1$,则知每顶皆偶次,是 Euler 图。
 - 4 相应的顶的次数。
- 5 G = (X,Y,E) 是二分图, $v_1,v_2,v_3,...,v_{|X|},v_{|X|+1},$ …, $v_{|X|+1}$,是顶的排列。 $\{v_1,...,v_{|X|}\} = X_*$
 - 6 对应的图是三个顶的轨, A'°°' 的 2, 2 号元 素 为 0.
 - 8 否.
 - 14 (1) 50, (2) 100
 - 15 A对应的图是一个圈, (1) 2n, (2) 当 n ≠ 3 时为 0;

当 n=3 时为6.

- 17 皆零阵.
- 18 0.
- 19 $C_i^{(1)}$ 中的行皆为 $\mathscr{C}(G)$ 中元素,可由基底 $C_i^{(1)}$ 中的行线性表出。
 - 20 (1) $\chi' = \Delta(G)$, (2) $\chi(G) = 2$.
- 21 (1) 是, $r(B_i) = 3 = \nu 1$ 。 (2) 否, B_i 的第三个和为3,有奇次顶; (3) 是,写出B后知仅有两个奇次顶; (4) 是,无 K_i 与 K_i 的同胚,此图只 4个顶; (5) $e \nu + 1 = 5 4 + 1 = 2$ 。 (6) $\mathscr{C}(G)$ 中元素共 $2^{e \nu + 1} = 4$ 个,有一个为零向量,又从B知无 4次顶,故两个基本圈并成的 $\mathscr{C}(G)$ 中另一向量为一个圈; (7) 因度序列为 2, 3, 2, 3,满足Ore定理,是Hamilton 圈; (8) $\tau(G) = 8$

第14章

6
$$\sum_{i=1}^{\lfloor \nu \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \nu \rfloor} b_{i,j} = 0$$
, $\sum_{i=1}^{\lfloor \nu \rfloor} \sum_{j=1}^{\lfloor \nu \rfloor} a_{i,j}$ 表示边数.

第15章

- 1 参考 3DM∈NPC 的证明、
- 3 SC \propto HS, 令 $\{S_1,S_2,\cdots,S_n\}$ 和 k是SC 的输入, 其中 $S_i\subseteq S=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$, $R_i=\{j|u_i\in S_i\}$, HS 的输入, $C=\{R_i|1\leqslant i\leqslant n\}$, $U=\{j|1\leqslant j\leqslant m\}$, k保持不变。
 - 4 XC ∞ 0-1 KNAP。 令 XC 的输入是集 U = {u₀, u₁, ···,

$$u_{i-1}$$
}的子集 S_1, S_2, \dots, S_n 组成,定义 $f(I): a_i = \sum_{u_i \in S_i} (m+1)^i$,

$$i = 1, 2, \dots, m, \quad n = m, \quad b = \sum_{i=0}^{i-1} (m+1)^{i} = \frac{(m+1)^{i} - 1}{m}.$$

5 0-1KNAP \propto PART, m = n + 2, $p_i = a_i$, $i = 1, 2, \dots$,

$$n_i P_{n+1} = \sum_{i=1}^n a_i + b_i, P_{n+2} = 2\sum_{i=1}^n a_i - b_i$$

, 对每个边 uv 附加上一条新的轨 uxv, VC∝最小支 配集

- 0 HPENPC的证明稍加改变。
- 2 首先对 k=2 用第 11 题证明。
- .3 参考ST€NPC的证明。
- 16 MAXC∝MINEDB.
- 17 MAXC ∞ MINCES, $I \oplus G'(V', E')$ 和 k' 组 成, 由 G(V, E), s, t 和 k 组 成:

 $V = V' \cup \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, n = |V'|, E = \{uv \mid uv \in E(G')\}.$ $c_1, t = x_n, k = n^2 - k'.$

- 18 参考 0-1KNAP。
- 19 IND∝IFWB.

参考文献

- [1] Bondy J. A. Murty U S R. Graph Theory with Applications. Macmillan Press LTD, 1976
- [2] Even S. Graph Algorithms. Maryland Computer Science Press 1979
- [3] Garey M. R. Johnson D. S. Computers and Intractability, A Guide to the Theory of NP-Completeness, Freaman, 1979
- [4] [例]Andra'sfai B. 著, 郭照人译、图论导引. 北京: 高等教育出版社、1985
- [5] [美]Harary F.著,李慰萱译。图论。上海科学技术 出版社、1980
- [6] 卢开澄。图论与算法。清华大学出版社,1981
- [7] 陈树柏。网络图论及其应用。科学出版社,1982
- [8] Beinehe L. W. Wilson R. J. Selected Topics in Graph Theory Academic Press, 1978
- [9] Bollobas B. Extramal Graph Theory. Academic Press. 1978
- [10] Chartrand G. The Theory and Applications of Graphs. (Fourth International Conference). John wiley & Sons, 1981
- [11] 王朝瑞。图论。人民教育出版社,1981