

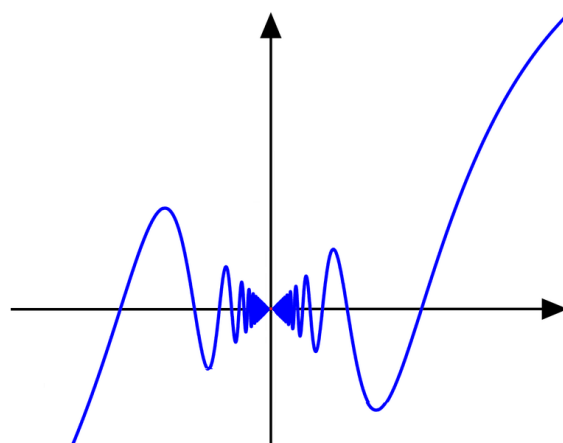
---

# Mathematical analysis exercises class

## lectures Answer

## 数学分析习题课讲义 解答

---



Don't give up, never give up.

---

作者：此号归我啦

制作时间：2016.07.10

Email: 845096273@qq.com

---

Version: 1.00

## 内 容 简 介

本书由《数学分析习题课讲义》读者根据自己收集的答案所编写。不公开。

## 第一版前言

读者自身水平非常有限，此解答大部分来自于网友和其他资料，若来自于其他资料则给出来源，若来自于网友则不给出来源(保护网友隐私)。

此号归我啦

845096273@qq.com

2016 年 07 月

# 目 录



1	引论	1
1.1	几个常用的不等式	1
2	数列极限	8
2.1	数列极限的基本概念	8
2.2	收敛数列的基本性质	8
2.3	单调数列	9
2.4	Cauchy 命题与 Stolz 定理	9
2.5	自然对数的底 $e$ 和欧拉常数 $\gamma$	9
2.6	由迭代生成的数列	9
2.7	第一组参考题	9
2.8	第二组参考题	18
3	实数系的基本定理	23
3.1	确界的概念与确界存在原理	23
3.2	闭区间套定理	23
3.3	凝聚定理	23
3.4	Cauchy 收敛准则	23
3.5	覆盖定理	23
3.6	数列的上极限与下极限	23
3.7	第一组参考题	23
3.8	第二组参考题	23
4	函数极限	24
4.1	函数极限的定义	24
4.2	函数极限的基本性质	24
4.3	两个重要极限	24
4.4	无穷小量、有界量、无穷大量和阶的比较	24
4.5	参考题	24
5	连续函数	25
5.1	连续性的概念	25
5.2	零点存在定理与介值定理	25
5.3	有界性与最值定理	25
5.4	一致连续性与 Cantor 定理	25
5.5	单调函数	25
5.6	第一组参考题	25
5.7	第二组参考题	25

6 导数与微分	26
6.1 导数及其计算	26
6.2 高阶导数及其他求导法则	26
6.3 一阶微分及其形式不变性	26
6.4 第一组参考题	26
6.5 第二组参考题	31
7 微分学的基本定理	33
7.1 微分学中值定理	33
7.2 Taylor 定理	33
7.3 第一组参考题	33
7.4 第二组参考题	38
8 微分学的应用	41
9 不定积分	42
10 定积分	43
11 积分学的应用	44
12 广义积分	45
12.1 第二组参考题	45
13 数项级数	46
14 函数项级数与幂级数	47
15 Fourier 级数	48
16 无穷级数的应用	49
16.1 积分计算	49
16.2 级数求和计算	49
17 高维空间的点集与基本定理	54
18 多元函数的极限与连续	55
19 偏导数与全微分	56
20 隐函数存在定理与隐函数求导	57
21 偏导数的应用	58
22 重积分	59
23 含参量积分	60
23.1 含参量常义积分	60
23.2 含参量广义积分	60
24 曲线积分	65



25 曲面积分	66
26 场论初步	67
参考文献	68





# 第1章 引论



## 1.1 几个常用的不等式

◆ 题目 1.1.1:

(1) 证明: 当  $-2 \leq h \leq -1$  时 Bernoulli 不等式  $(1+h)^n \geq 1+nh$  仍然成立;

(2) 证明: 当  $h \leq 0$  时成立不等式  $(1+h)^n \geq \frac{n(n-1)h^2}{2}$ , 并推广之;

(3) 证明: 若  $a_i > -1 (i = 1, 2, \dots, n)$  且同号, 则成立不等式

$$\prod_{i=1}^n (1+a_i) \geq 1 + \sum_{i=1}^n a_i$$

证 明:

(1)  $(1+h)^n \geq -|1+h|^n \geq -|1+h| = 1+h \geq 1+nh$

(2)  $(1+h)^n = 1+nh + \frac{1}{2}n(n-1)h^2 + \dots + h^n \geq \frac{1}{2}n(n-1)h^2$ , 推广  $(1+h)^n \geq 1+nh + \frac{1}{2}n(n-1)h^2$

(3)  $n=1$  时显然成立, 设  $n=k$  时不等式成立, 则  $n=k+1$  时,  $\prod_{i=1}^{k+1} (1+a_i) \geq (1 + \sum_{i=1}^k a_i)(1 +$

$$a_{k+1}) = 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i + \sum_{i=1}^k a_i a_{k+1} \geq 1 + \sum_{i=1}^{k+1} a_i.$$

□

◆ 题目 1.1.2: 阶乘  $n!$  在数学分析以及其他课程中经常出现, 以下是几个有关的不等式, 他们都可以从平均值不等式得到:

(1) 证明: 当  $n > 1$  时成立  $n! < \left(\frac{n+1}{2}\right)^n$ ;

(2) 利用  $(n!)^2 = (n \cdot 1)((n-1) \cdot 2) \dots (1 \cdot n)$  证明: 当  $n > 1$  时成立

$$n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n;$$

(3) 比较 (1) 和 (2) 中两个不等式的优劣, 并说明原因;

(4) 证明: 对任意实数  $r$  成立  $\left(\sum_{k=1}^n k^r\right)^n \geq n^n (n!)^r$ . (在第二章的参考题中还有关于  $n!$  的不等式. 这方面的深入讨论见本书 11.4.2 小节的 Wallis 公式和 Stirling 公式.)

证 明:



(1)  $n! \leq \left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}\right)^n = \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$ , 显然取不到等号.

(2) 由  $(n!)^2 = (n \cdot 1)((n-1) \cdot 2) \cdots (1 \cdot n) \leq \left(\frac{n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + \cdots + 1 \cdot n}{n}\right)^n$ , 而

$$\begin{aligned} & n \cdot 1 + (n-1) \cdot 2 + \cdots + 1 \cdot n \\ &= n \cdot 1 + n \cdot 2 + \cdots + n \cdot n - (1 \times 2 + \cdots + (n-1) \times n) \\ &= n(1+2+\cdots+n) - (1^2 + 2^2 + \cdots + n^2) + (1+2+\cdots+n) \\ &= \frac{n(n+1)^2}{2} - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\ &= \frac{1}{6}n(n+1)(n+2) \end{aligned}$$

所以  $(n!)^2 \leq \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6n}\right)^n$ , 故  $n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n$ .

(3) 答: (2) 较优, 当  $n$  越大时, (2) 的右边比 (1) 的右边更小.

$$(4) \frac{\sum_{k=1}^n k^r}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n k^r} = \sqrt[n]{(n!)^r}$$

□

◆ 题目 1.1.3: 证明几何平均值-调和平均值不等式: 若  $a_k > 0, k = 1, 2, \dots, n$ , 则有

$$\left(\prod_{k=1}^n a_k\right)^{\frac{1}{n}} \geq \frac{n}{\sum_{k=1}^n \frac{1}{a_k}}.$$

证明: 令  $b_k = \frac{1}{a_k}$ , 再由  $\frac{\sum_{k=1}^n b_k}{n} \geq \sqrt[n]{\prod_{k=1}^n b_k}$  即得.

□

◆ 题目 1.1.4: 证明: 当  $a, b, c$  为负整数时成立  $\sqrt[3]{abc} \leq \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3}$ .

(这个结果还可以推广到  $n$  个非负数的情况.)

证明: 证明:  $\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \geq \sqrt[3]{ab \cdot bc \cdot ac} = \sqrt[3]{abc}$ , 故不等式左边成立;

$\sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leq \frac{a+b+c}{3} \iff 3(ab+bc+ca) \leq (a+b+c)^2 \iff a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \geq 0$ , 此式显然成立, 即不等式右边得证. 综上, 证毕.

□

◆ 题目 1.1.5: 证明以下几个不等式:

$$(1) |a-b| \geq |a|-|b| \text{ 和 } |a-b| \geq ||a|-|b||$$

$$(2) |a_1| - \sum_{k=2}^n |a_k| \leq \left| \sum_{k=1}^n a_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|; \text{ 又问: 左边可否为 } \left| |a_k| - \sum_{k=2}^n |a_k| \right|?$$

$$(3) \frac{a+b}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|};$$

$$(4) |(a+b)^n - a^n| \leq (|a|+|b|)^n - |a|^n.$$



(特别要注意其中的 (1) 是应用三点不等式时常见的形式.)

证明:

(1) 由  $|a+b| \leq |a|+|b|$  得  $|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$ , 故有  $|a-b| \geq |a|-|b|$  和  $|a-b| \geq |b|-|a|$ . 所以  $|a-b| \geq ||a|-|b||$ .

(2) 右边的不等式可由三点不等式直接推得, 左边:  $|a_1 - (-\sum_{k=2}^n a_k)| \geq |a_1| - |\sum_{k=2}^n a_k| \geq |a_1| - \sum_{k=2}^n |a_k|$ . 不成立. 例如  $a_1 = 0, a_2 = 1, a_3 = -2$ , 则  $|a_1 - (a_2 + a_3)| = |0 - 1 - 2| = 3, |a_1 + a_2 + a_3| = 1$ , 得到  $3 > 1$ , 显然错误.

(3) 当  $|a+b| = 0$  时, 显然成立, 当  $|a+b| \neq 0$  时,

$$\begin{aligned} \frac{|a+b|}{1+|a+b|} &= \frac{1}{1+\frac{1}{|a+b|}} \leq \frac{1}{1+\frac{1}{|a|+|b|}} \\ &= \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|} \end{aligned}$$

证毕.

(4)  $|C_n^1 a^{n-1} b + \cdots + C_n^{n-1} a b^{n-1} + b^n| \leq |C_n^1 a^{n-1} b| + \cdots + |C_n^{n-1} a b^{n-1}| + |b^n| = (|a| + |b|)^n - |a|^n$ .

□

❖ 题目 1.1.6: 试按下列提示, 给出 Cauchy 不等式的几个不同的证明:

(1) 用数学归纳法.

(2) 用 Lagrange 恒等式

$$\sum_{k=1}^n a_k^2 \sum_{k=1}^n b_k^2 - \left( \sum_{k=1}^n |a_k b_k| \right)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^n (|a_k||b_i| - |a_i||b_k|)^2;$$

(3) 用不等式  $|AB| \leq \frac{A^2+B^2}{2}$

(4) 构造复的辅助数列  $c_k = a_k^2 - b_k^2 + 2i|a_k b_k|, k = 1, 2, \dots, n$  再利用

$$\left| \sum_{k=1}^n c_k \right| \leq \sum_{k=1}^n |c_k|$$

证明:



(1) 用数学归纳法

当  $n=2$  时,  $(a_1b_1 + a_2b_2)^2 = a_1^2b_1^2 + 2a_1b_1a_2b_2 + a_2^2b_2^2 \leq a_1^2b_1^2 + a_1^2b_2^2 + a_2^2b_1^2 + a_2^2b_2^2 = (a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)$ . 当且仅当  $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2}$  时取等号. 不等式成立.

假设  $n=k$  时不等式成立, 则  $n=k+1$  时, 有

$$\begin{aligned} \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{k+1} b_i^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2 + a_{k+1}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2 + b_{k+1}^2} \\ &\geq \sqrt{\sum_{i=1}^k a_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^k b_i^2 + |a_{k+1}b_{k+1}|} \\ &\geq \sum_{i=1}^k |a_i b_i| + |a_{k+1}b_{k+1}| \\ &= \sum_{i=1}^{k+1} |a_i b_i| \end{aligned}$$

综上, 证毕.

(2) 用 Lagrange 恒等式

由  $(\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2) - (\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^n (|a_i||b_k| - |a_k||b_i|)^2$ , 可得  $(\sum_{i=1}^n a_i b_i)^2 \leq (\sum_{i=1}^n a_i^2)(\sum_{i=1}^n b_i^2)$ .

故  $|\sum_{i=1}^n a_i b_i| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}$ . 故原不等式成立.

(3) 用不等式  $|AB| \leq \frac{A^2 + B^2}{2}$

对于  $\forall m \in \mathbb{R}^+$ , 有  $a_i b_i \leq \frac{1}{2} \left( m^2 a_i^2 + \frac{b_i^2}{m^2} \right)$ . 令  $m^2 = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n b_i^2}}{\sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2}}$ , 则有

$$|a_i b_i| \leq \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}} a_i^2 + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}} b_i^2 \right)$$

故

$$\sum_{i=1}^n |a_i b_i| \leq \frac{1}{2} \left( \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n b_i^2}{\sum_{i=1}^n a_i^2}} \sum_{i=1}^n a_i^2 + \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n a_i^2}{\sum_{i=1}^n b_i^2}} \sum_{i=1}^n b_i^2 \right)$$



$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \left( \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2} \right) \\
&= \sqrt{\sum_{i=1}^n a_i^2 + \sum_{i=1}^n b_i^2}
\end{aligned}$$

故原不等式成立.

(4) 构造复的辅助数列  $c_k = a_k^2 - b_k^2 + 2i|a_k b_k|, k = 1, 2, \dots, n$ . 再利用  $|\sum_{k=1}^n a_k| \leq \sum_{k=1}^n |a_k|$

设  $t$  为任意复数,  $a_k, b_k$  均为复数, 则

$$0 \leq |a_k - t\bar{b}_k|^2 = (a_k - t\bar{b}_k)(\bar{a}_k - \bar{t}b_k) = |a_k|^2 - 2\operatorname{Re}\bar{t}a_k b_k + |t|^2|b_k|^2.$$

所以

$$0 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 - 2\operatorname{Re}(\bar{t} \sum_{k=1}^n a_k b_k) + |t|^2 \sum_{k=1}^n |b_k|^2,$$

取

$$t = \frac{\sum_{k=1}^n a_k b_k}{\sum_{k=1}^n |b_k|^2},$$

代入上式有

$$0 \leq \sum_{k=1}^n |a_k|^2 - \frac{2\operatorname{Re}|\sum_{k=1}^n a_k b_k|^2}{\sum_{k=1}^n |b_k|^2} + \frac{|\sum_{k=1}^n a_k b_k|^2}{\sum_{k=1}^n |b_k|^2},$$

化简即得

$$\sum_{k=1}^n a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^n a_k^2} \sqrt{\sum_{k=1}^n b_k^2}.$$

□

◆ 题目 1.1.7: 用向前——向后数学归纳法证明: 设  $0 < x_i \leq \frac{1}{2}, i = 1, 2, \dots, n$ , 则

$$\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\left(\sum_{i=1}^n x_i\right)^n} \leq \frac{\prod_{i=1}^n (1-x_i)}{\left[\sum_{i=1}^n (1-x_i)\right]^n}$$

(这个不等式是由在美国数学界有重大影响的华裔数学家 Fan Ky 得到的.)

证明: 原不等式等价于

$$\frac{\prod_{i=1}^n x_i}{\prod_{i=1}^n (1-x_i)} \leq \frac{(\sum_{i=1}^n x_i)^n}{(\sum_{i=1}^n (1-x_i))^n} \quad (1)$$



$n = 2$  时,

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} - \left( \frac{x_1 + x_2}{(1-x_1)(1-x_2)} \right)^2 \\ &= \frac{(1+x_1 x_2 - x_1 - x_2)[x_1^2(x_2-1) + x_2^2(x_1-1) + x_1 x_2(x_1 x_2 - 1)]}{(1-x_1)(1-x_2)[(1-x_1)(1-x_2)]^2} \\ &\leq 0. \end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned} & \frac{x_1 x_2 x_3 x_4}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)} \\ &\leq \left( \frac{x_1 + x_2}{(1-x_1) + (1-x_2)} \right)^2 \left( \frac{x_3 + x_4}{(1-x_3) + (1-x_4)} \right)^2 \\ &= \left( \frac{\frac{x_1 + x_2}{2}}{1 - \frac{x_1 + x_2}{2}} \right)^2 \left( \frac{\frac{x_3 + x_4}{2}}{1 - \frac{x_3 + x_4}{2}} \right)^2 \\ &\leq \left( \frac{\frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}}{1 - \frac{x_1 + x_2}{2} + \frac{x_3 + x_4}{2}} \right)^4 \\ &= \left( \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{(1-x_1) + (1-x_2) + (1-x_3) + (1-x_4)} \right)^4 \end{aligned}$$

重复这样  $m$  次, 则可得

$$\frac{\prod_{i=1}^{2^m} x_i}{\prod_{i=1}^{2^m} (1-x_i)} \leq \frac{(\sum_{i=1}^{2^m} x_i)^{2^m}}{(\sum_{i=1}^{2^m} (1-x_i))^{2^m}}$$

即  $n = 2^m$  时 (1) 式成立.

现在设 (1) 式对  $n$  成立, 记  $A = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} x_i}{n}$ . 将 (1) 式运用于  $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, A$  这  $n$  个数, 即得

$$\begin{aligned} & \left( \frac{x_1 + \dots + x_{n-1} + A}{(1-x_1) + \dots + (1-x_{n-1}) + (1-A)} \right)^n \\ &= \left( \frac{A}{1-A} \right)^n \\ &\geq \frac{x_1 \cdots x_{n-1} A}{(1-x_1) \cdots (1-x_{n-1})(1-A)} \\ &\geq \frac{x_1 \cdots x_{n-1}}{(1-x_1) \cdots (1-x_{n-1})} \end{aligned}$$

即对  $n-1$  也 (1) 式也成立. 由反向归纳法原理知 (1) 式对任意  $n$  成立. 证毕.  $\square$



- ◆ 题目 1.1.8: 设  $a, c, g, t$  均为非负数,  $a + c + g + t = 1$ , 证明  $a^2 + c^2 + g^2 + t^2 \geq \frac{1}{4}$ , 且其中等号成立的充分必要条件是  $a = c = g = t = \frac{1}{4}$ .

(本题来自 DNA 序列分析.)

- ☞ 证明: (方法 1) 由  $1 = a + c + g + t \geq 4(acgt)^{\frac{1}{4}}$  得  $acgt \leq \frac{1}{256}$ . 当且仅当  $a = c = g = t$  时取等号.

又因为

$$\begin{aligned} 1 &= (a + c + g + t)^2 \\ &= a^2 + c^2 + g^2 + t^2 + 2(ac + ag + at + cg + ct + gt) \\ &\geq a^2 + c^2 + g^2 + t^2 + 12\sqrt[6]{ac \cdot ag \cdot at \cdot cg \cdot ct \cdot gt} \\ &= a^2 + c^2 + g^2 + t^2 + 12\sqrt{acgt} \end{aligned}$$

当  $acgt$  取到最大值  $\frac{1}{256}$  时,  $a^2 + c^2 + g^2 + t^2$  取到最小值  $1 - \frac{12}{\sqrt{256}} = \frac{1}{4}$ . 此时  $a = c = g =$

$t = \frac{1}{4}$ . 故命题得证.

(方法 2) 由 Cauchy 不等式有

$$(a^2 + c^2 + g^2 + t^2)(1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2) \geq (a + c + g + t)^2 = 1$$

所以  $a^2 + c^2 + g^2 + t^2 \geq \frac{1}{4}$ . 当且仅当  $a = g = c = t$  时取等号.

□



## 第2章 数列极限



### 2.1 数列极限的基本概念

5、证明：(方法1)  $a^\varepsilon > 1$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$ , 所以当  $n$  充分大时  $\sqrt[n]{n} < a^\varepsilon$ , 取对数得  $\frac{\log_a n}{n} < \varepsilon$ .  
(方法2) 由 O'Stolz 公式

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_a(n+1) - \log_a n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_a \frac{n+1}{n} = 0.$$

### 2.2 收敛数列的基本性质

1. 证明：(必要性) 若  $\{a_n\}$  收敛, 则对于  $\forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$ . 当  $n > N$  时, 有  $|a_n - a| < \varepsilon$ . 设  $n_k$  是一个自然数递增序列, 则  $\{a_{n_k}\}$  是  $\{a_n\}$  的一个子列. 当  $n_k > N$  时, 有  $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$ . 所以  $\{a_n\}$  的所有子序列都收敛于同一极限.  
(充分性) 设  $\{a_{2k}\}$  与  $\{a_{2k-1}\}$  收敛于同一极限  $a$ . 则对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N'$ , 当  $k > N'$  时, 有  $|a_{2k} - a| < \varepsilon$ . 也  $\exists N''$ , 当  $k > N''$  时, 有  $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$ . 取  $N = \max\{N', N''\}$ , 当  $k > N$  时,  $|a_{2k} - a| < \varepsilon, |a_{2k-1} - a| < \varepsilon$  同时成立, 即  $|a_n - a| < \varepsilon$ .

2. 解：(1) 设  $M = \max\{a_1, \dots, a_p\}$ , 则  $\sqrt[n]{M^n} \leq \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_p^n} \leq \sqrt[n]{p \cdot M^n}$ , 对此两边取极限, 都等于  $M$ , 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + \dots + a_p^n} = M$ .  
(2)  $\frac{2n}{\sqrt{(n+1)^2}} \leq x_n \leq \frac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{2}$ .  
(3)  $1^{\frac{1}{n}} \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$ , 则  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$ .  
(4)  $0 < a_n < a$ , 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 所以对  $\forall \varepsilon > 0 (\varepsilon < a), \exists N$ , 当  $n > N$  时,  $a - \varepsilon \leq a_n \leq a + \varepsilon$ , 则  $\sqrt[n]{a - \varepsilon} \leq \sqrt[n]{a_n} \leq \sqrt[n]{a + \varepsilon}$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$ .

## 2.3 单调数列

## 2.4 Cauchy 命题与 Stolz 定理

## 2.5 自然对数的底 e 和欧拉常数 $\gamma$

## 2.6 由迭代生成的数列

## 2.7 第一组参考题

◆ 题目 2.7.1: 设  $\{a_{2k-1}\}, \{a_{2k}\}, \{a_{3k}\}$  都收敛, 证明:  $\{a_n\}$  收敛.

☞ 证明: 由于  $\{a_{6k}\}$  既是  $\{a_{2k}\}$  和  $\{a_{3k}\}$  的子列, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{6k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3k}$ ; 而  $\{a_{6k-3}\}$  既是  $\{a_{2k-1}\}$  和  $\{a_{3k}\}$  的子列, 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{6k-3} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{3k}$ . 故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2k-1}$ , 则  $\{a_n\}$  收敛.  $\square$

◆ 题目 2.7.2: 设  $\{a_n\}$  有界, 且满足条件  $a_n \leq a_{n+2}, a_n \leq a_{n+3}, n \in \mathbb{N}^+$ , 证明:  $\{a_n\}$  收敛.

☞ 证明: 由  $a_n \leq a_{n+2}$ , 可知  $\{a_{2k-1}\}$  和  $\{a_{2k}\}$  单调增加; 再由  $a_n \leq a_{n+3}$  单调增加. 又因为  $\{a_n\}$  有界, 所以  $\{a_{2k-1}\}, \{a_{2k}\}, \{a_{3k}\}$  都收敛, 故由 1 可得  $\{a_n\}$  收敛.  $\square$

◆ 题目 2.7.3: 设  $\{a_n + a_{n+1}\}$  和  $\{a_n + a_{n+2}\}$  都收敛, 证明:  $\{a_n\}$  收敛.

☞ 证明: 设

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2}) = a$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+2}) = b.$$

则

$$b = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+1}) - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} + a_{n+2}) + \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + a_{n+2}) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2a_n$$

故  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b}{2}$ , 所以  $\{a_n\}$  收敛.  $\square$

◆ 题目 2.7.4: 设数列  $\{a_n\}$  收敛于 0, 又存在极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = a$ , 证明:  $a \leq 1$ .

☞ 证明: 假设  $a > 1$ . 由极限的保号性,  $\exists N \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n > N$  时, 有  $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$ , 故  $|a_{n+1}| > |a_n| > 0$  成立. 则  $\{|a_n|\}$  收敛于  $c (> 0)$  或者发散.

(a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = c$ . 取  $\varepsilon = \frac{c}{2}$ ,  $\exists N_1$  当  $n > N_1$  时, 有

$$\frac{c}{2} = c - \varepsilon < |a_n| < c + \varepsilon = \frac{3c}{2}$$

即有

$$\frac{c}{2} < a_n \text{ 或 } a_n < -\frac{c}{2} \quad (1)$$





而  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ . 取  $\varepsilon = \frac{c}{2}$ ,  $\exists N_2$  当  $n > N_2$  时, 有

$$-\frac{c}{2} < a_n < \frac{c}{2} \quad (2)$$

当  $N = \max\{N_1, N_2\}$  时, (1) 与 (2) 矛盾.

(b)  $\{|a_n|\}$  发散. 即  $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n| = +\infty$ . 显然与  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$  矛盾.

综上, 假设错误. 故  $a \leq 1$ .

□

◆ 题目 2.7.5: 设  $a_n = \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right)$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ , 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

证明: (徐森林上册 P8) 注意到等式

$$\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 = \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1} = \frac{k}{n^2(\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1)} \quad 1 \leq k \leq n$$

而

$$\frac{k}{\sqrt{1 + \frac{n}{n^2}} + 1} \leq \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1} \leq \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1}$$

故

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{n}{n^2}} + 1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} &= \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{n}{n^2}} + 1} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1} \\ &\leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1} \cdot \frac{n(n+1)}{2} \end{aligned}$$

代入  $a_n$  表达式得

$$\begin{aligned} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2(\sqrt{1 + \frac{n}{n^2}} + 1)} &\leq \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n \frac{k}{\sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} + 1} \\ &\leq \frac{1 + \frac{1}{n}}{2(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1)} \end{aligned}$$



再由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1)} = \frac{1}{4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{n}}{2(\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}} + 1)}$  及夹挤定理就得

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \left( \sqrt{1 + \frac{k}{n^2}} - 1 \right) = \frac{1}{4}$$

□

◆ 题目 2.7.6: 用  $p(n)$  表示能整除  $n$  的素数的个数, 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0$ .

证明: (徐森林上册 P8) 首先

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2(n+1) - \log_2 n}{(n+1) - n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \log_2 \frac{n+1}{n} = 0$$

由整数的标准分解式得  $n = \sum_{i=1}^k p_i^{\alpha_i}, \alpha_i \geq 0$  其中  $p_i$  为大于等于 2 的素数. 故

$$2^k \leq \sum_{i=1}^k p_i \leq n, k = p(n).$$

于是

$$1 \leq k \leq \log_2 n \cdot \frac{1}{n} \leq \frac{k}{n} = \frac{p(n)}{n} \leq \frac{\log_2 n}{n}$$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log_2 n}{n}$  及夹挤定理就得  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p(n)}{n} = 0$ . □

◆ 题目 2.7.7: 设  $a_0, a_1, \dots, a_p$  是  $p+1$  个给定的数, 且满足条件  $a_0 + a_1 + \dots + a_p = 0$ . 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 \sqrt{n} + a_1 \sqrt{n+1} + \dots + a_p \sqrt{n+p})$ .

解:  $a_0 = -a_1 - a_2 - \dots - a_p$ , 则

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} (a_0 \sqrt{n} + a_1 \sqrt{n+1} + \dots + a_p \sqrt{n+p}) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(-a_1 - a_2 - \dots - a_p) \sqrt{n} + a_1 \sqrt{n+1} + \dots + a_p \sqrt{n+p}] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [a_1(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) + a_2(\sqrt{n+2} - \sqrt{n}) + \dots + a_p(\sqrt{n+p} - \sqrt{n})] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{a_1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} + \frac{2a_2}{\sqrt{n+2} + \sqrt{n}} + \dots + \frac{pa_n}{\sqrt{n+p} + \sqrt{n}} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

◆ 题目 2.7.8: 证明: 当  $0 < k < 1$  时  $\lim_{n \rightarrow \infty} [(1+n)^k - n^k] = 0$ .

解:  $0 < (1+n)^k - n^k = n^k \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right] = n^k \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^k - 1 \right] < n^k \left[ \left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1 \right] = n^k \cdot \frac{1}{n} =$

$$\frac{1}{n^{1-k}} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty) \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} [(1+n)^k - n^k] = 0. \quad \square$$

◆ 题目 2.7.9:

(1) 设  $\{x_n\}$  收敛, 令  $y_n = n(x_n - x_{n-1}), n \in \mathbb{N}^+$ , 问  $\{y_n\}$  是否收敛.



(2) 在上一题中, 若  $\{y_n\}$  也收敛, 证明:  $\{y_n\}$  收敛于 0.

解:

(1) 令  $x_n = \frac{\sin n}{n} \rightarrow 0, (n \rightarrow \infty), y_n = n\left[\frac{\sin n}{n} - \frac{n-1}{n}\right]$  则有

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} n\left[\frac{\sin n}{n} - \frac{n-1}{n}\right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} n[n - (n-1)] \cdot \frac{(n+\theta)\cos(n+\theta) - \sin(\theta+n)}{(n\theta)^2} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+\theta)\cos(n+\theta) - \sin(n+\theta)}{n} \end{aligned}$$

上式极限不存在. 即  $y_n$  极限不存在.

(2) 令  $x_0 = 0$ , 则  $y_1 = x_1 - x_0$ . 而  $\{y_n\}$  收敛, 记  $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = l, \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .  
由 Cauchy 命题, 有

$$\begin{aligned} l &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(x_1 - x_0) + 2(x_2 - x_1) + \cdots + n(x_n - x_{n-1})}{n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-(x_0 + x_1 + \cdots + x_{n-1}) + nx_n}{n} \\ &= -a + a \\ &= 0 \end{aligned}$$

□

### ◆ 题目 2.7.10:

(1) 设正数列  $\{a_n\}$  满足条件  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0$ . 证明:  $\{a_n\}$  是无穷大量.

(2) 设正数列  $\{a_n\}$  满足条件  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}} = 0$ , 证明:  $\{a_n\}$  无界.

证明:

(1) 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = 0$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} = +\infty$ . 则对  $\forall G > 0, \exists N \in \mathbb{N}^+$ , 当  $n > N$  时有  $\frac{a_{n+1}}{a_n} > G$ .  
取  $G_0 > 1$ , 则

$$a_{n+1} > a_n \cdot G > a_{n-1} \cdot G^2 > \cdots > a_N \cdot G^{n+1-N}$$

令  $n \rightarrow \infty$ , 则  $a_N \cdot G^{n+1-N} \rightarrow \infty$ . 所以  $\{a_n\}$  为无穷大量.

(2) 假设  $\{a_n\}$  有界, 设整个数列的上确界为  $m_1$ , 则在  $a_{N_1}$  之后的项中存在大于  $\frac{m_1}{2}$  的项, 记大于  $\frac{m_1}{2}$  且下标最小的项为  $a_{N_1}$ . 那么有

$$\frac{\frac{m_1}{2}}{m_1 + m_1} < \frac{a_{N_1}}{a_{N_1+1} + a_{N_1+2}}$$



再设  $a_{N_1}$  之后的项的上确界为  $m_2$ , 则在  $a_{N_2}$  之后的项中存在大于  $\frac{m_2}{2}$  的项, 记大于  $\frac{m_2}{2}$  且下标最小的项为  $a_{N_2}$ . 那么有

$$\frac{\frac{m_2}{2}}{m_2 + m_2} < \frac{a_{N_2}}{a_{N_2+1} + a_{N_2+2}}$$

如此进行下去, 得到子列  $\left\{ \frac{a_{N_k}}{a_{N_k+1} + a_{N_k+2}} \right\}$ , 该子列要么发散, 要么收敛, 但极限大于等于  $\frac{1}{4}$ , 都与  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{a_{n+1} + a_{n+2}}$  矛盾, 故假设错误.

□

◆ 题目 2.7.11: 证明:  $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$ , 其中右边的不等式当  $n \geq 6$  时成立.

☞ 证明: 先证左边, 令  $x_n = \left(\frac{n}{3}\right)^n, x_0 = 1$ . 则

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{\left(\frac{n}{3}\right)^n}{\left(\frac{n-1}{3}\right)^{n-1}} = \frac{n}{3} \cdot \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} = \frac{n}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} < \frac{ne}{3} < n, (n \geq 2)$$

且  $\frac{x_1}{x_0} = \frac{1}{3} < 1$ . 则

$$\frac{x_1}{x_0} \cdot \frac{x_2}{x_1} \cdots \frac{x_n}{x_{n-1}} < n!.$$

再证右边,  $n = 6$  时,  $6! = 720 < 729 = \left(\frac{6}{2}\right)^6$ , 成立.

假设  $n = k, (k \geq 6)$  时成立, 即  $(k-1)! < \left(\frac{k-1}{2}\right)^{k-1}$  成立. 于是有

$$(k-1)! \cdot k = k! < \left(\frac{k-1}{2}\right)^{k-1} \cdot k = \frac{(k-1)^{k-1}}{2^{k-1}} \cdot k = \frac{2(k-1)^{k-1} \cdot k}{2^k}$$

要证  $\frac{2(k-1)^{k-1} \cdot k}{2^k} < \frac{k^k}{2^k}$ , 即证  $2k \cdot (k-1)^{k-1} < k^k$ , 即证  $2 \cdot (k-1)^{k-1} < k^{k-1}$ , 即证  $2 < \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} = \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}$ . 而  $2 < \left(1 + \frac{1}{k-1}\right)^{k-1}$  显然成立. 故  $n = k+1$  时成立.

综上, 证毕.

□

◆ 题目 2.7.12: 证明:  $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e \left(\frac{n}{2}\right)^n$ .

☞ 证明:

□

◆ 题目 2.7.13: (对于命题 2.5.4 的改进) 证明:

(1)  $n \geq 2$  时成立

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{n!n} = 3 - \frac{1}{2! \cdot 2} - \cdots - \frac{1}{n!(n-1)n};$$

(2)  $e = 3 - \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{(k-2)!(k+1)(k+2)}$ ;

☞ 证明:



(1)  $n=2$  时, 左边  $= 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{2! \cdot 2} = \frac{11}{4}$ ; 右边  $= 3 - \frac{1}{2! \cdot 1 \cdot 2} = \frac{11}{4}$ . 左边 = 右边, 等式成立.

假设  $n=k$  时等式成立. 即

$$1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{k!} + \frac{1}{k!k} = 3 - \frac{1}{2! \cdot 1 \cdot 2} - \cdots - \frac{1}{k!(k-1)k} \quad (*)$$

在 (\*) 式左边  $+\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!(k+1)} - \frac{1}{k!k} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!(k+1)}$ ,

而  $\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!(k+1)} - \frac{1}{k!k} = \frac{1}{(k+1)!} (1 + \frac{1}{k+1}) - \frac{k+1}{(k+1)!k} = -\frac{1}{(k+1)!k(k+1)}$ .

所以在 (\*) 式右边  $+\frac{1}{(k+1)!} + \frac{1}{(k+1)!(k+1)} - \frac{1}{k!k} = 3 - \frac{1}{2! \cdot 1 \cdot 2} - \cdots - \frac{1}{(k+1)!k(k+1)}$ ,  
即推出了  $n=k+1$  时成立. 综上证毕.

(2) 对 (1) 中等式两边取极限即得.

□

◆ 题目 2.7.14: 设  $a_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ , 证明:  $\{a_n\}$  收敛.

证明:  $a_{n+1} - a_n = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \frac{1}{\sqrt{n+1}} - \frac{1}{\frac{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}{2}} < 0$ , 所以  $\{a_n\}$  单调

递减.

下证:  $2(\sqrt{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ ,

当  $n=1$  时,  $2(\sqrt{2} - 1) < 1 < 2$ , 此时成立.

假设当  $n=k$  时不等式成立. 即  $2(\sqrt{k+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} < 2\sqrt{k}$ . 故

$$2(\sqrt{k+1} - 1) + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{k}} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} < 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

而  $4k + 8 + \frac{1}{k+1} > 4k + 8 \iff \left(2\sqrt{k+1} + \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2 > (2\sqrt{k+2})^2 \iff 2(\sqrt{k+1} - 1) +$

$\frac{1}{\sqrt{k+1}} > 2(\sqrt{k+2} - 2)$

并且  $4k < 4(k+1) - 4 + \frac{1}{k+1} \iff 2\sqrt{k} < 2\sqrt{k+1} - \frac{1}{\sqrt{k+1}} \iff 2\sqrt{k} + \frac{1}{\sqrt{k+1}} <$

$2\sqrt{k+1}$ . 即推出了  $n=k+1$  时成立.

所以  $2(\sqrt{n+1} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n}$ . 即有

$$-2 < 2(\sqrt{n+1} - \sqrt{n} - 1) < \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}} - 2\sqrt{n} < 0$$

所以  $\{a_n\}$  有下界 -2. 则  $\{a_n\}$  收敛.

□

◆ 题目 2.7.15: 设已知存在极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n} = 0$ .

证明: 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$  存在, 记为  $l$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n-1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n(n-1)} = 0$$



$$\begin{aligned}
 0 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_{n-1}}{n-1} + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n(n-1)} \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{n}
 \end{aligned}$$

□

◆ 题目 2.7.16: 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} (n!)^{1/n^2} = 1$ .

证:  $\frac{n \sqrt[n]{1}}{n} \leq \frac{\sqrt[n]{1} + \sqrt[n]{2} + \cdots + \sqrt[n]{n}}{n} \leq \frac{n \sqrt[n]{n}}{n}$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{1} = 1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n}$ .

所以

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n-1} + \cdots + \sqrt[n]{1}}{n} = 1.$$

$$n^2 \sqrt[1]{1} \leq n^2 \sqrt[n]{n!} = n^2 \sqrt[n^2]{(\sqrt[n]{n})^n \cdot (\sqrt[n]{n-1})^n \cdots (\sqrt[n]{1})^n} \leq \frac{n(\sqrt[n]{n} + \sqrt[n]{n-1} + \cdots + \sqrt[n]{1})}{n^2}$$

而  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt[1]{1} = 1$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} n^2 \sqrt[n]{n!} = 1$ .

□

◆ 题目 2.7.17: 设对每个  $n$  有  $x_n < 1$  和  $(1-x_n)x_{n+1} \geq \frac{1}{4}$ , 证明  $\{x_n\}$  收敛, 并求极限.

证: 若  $x_1 \leq 0$ ,  $1 > x_2 \frac{1}{4}(1-x_1) > 0$ , 则  $0 < x_3 < 1$ .

假设  $0 < x_k < 1$  ( $k \geq 2$ ), 则由  $(1-x_k)x_{k+1} \geq \frac{1}{4}$  与  $x_n < 1$ , 有  $0 < \frac{1-x_k}{4} < x_{k+1} < 1$ . 即  $n = k+1$  时也有  $0 < x_{k+1} < 1$ , 即  $0 < x_n < 1$ , ( $n \geq 2$ ).

当  $n = 2$  时,  $(1-x_{n+1})x_{n+1} \leq \frac{1}{4} \leq (1-x_n)x_{n+1}$ . 所以  $x_n \leq x_{n+1}$ , 显然  $n = 1$  时,  $x_n \leq x_{n+1}$  也成立. 故  $\{x_n\}$  单调递增有上界. 而  $\lim_{n \rightarrow \infty} (1-x_n)x_{n+1} \geq \frac{1}{4}$ . 令  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 则有  $(1-a)a = \frac{1}{4}$ , 解得  $a = \frac{1}{2}$ .

若有  $0 < x_1 < 1$ , 则由以上讨论有  $x_n \leq x_{n+1}$ , ( $n \geq 1$ ) 成立. 同样有  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a = \frac{1}{2}$ .

□

◆ 题目 2.7.18: 设  $a_1 = b, a_2 = c$ , 在  $n \geq 3$  时  $a_n$  由  $a_n = \frac{a_{n-1} + a_{n-2}}{2}$  定义, 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ .

解: 不妨设  $a_1 = b < c = a_2$ , 则  $a_3 = \frac{a_1 + a_2}{2} > a_1, a_3 < a_2, a_3 < a_4 = \frac{a_2 + a_3}{2} < a_2, a_3 < a_5 = \frac{a_3 + a_4}{2} < a_4$ . 则归纳可得  $a_1 < a_3 < a_5 < \cdots, a_2 > a_4 > a_6 > \cdots$ , 由此可得  $a_{2n} \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ). 又根据  $2a_{2n+2} = a_{2n-1} + a_{2n}$ , 可得  $a_{2n-1} \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ). 这说明  $a_n \rightarrow a$  ( $n \rightarrow \infty$ ).

由  $a_n \frac{a_{n-1} + a_{n+2}}{2}$ , 可得  $a_n + \frac{a_{n-1}}{2} = a_{n-1} + \frac{a_{n-2}}{2} = \cdots = a_2 + \frac{a_1}{2}$ . 对此式取极限得  $a = \frac{a_1 + 2a_2}{3} = \frac{b + 2c}{3}$ .

若  $b > c$ , 也可按照上述方法讨论, 也得  $a = \frac{a_1 + 2a_2}{3} = \frac{b + 2c}{3}$ .

若  $b = c$ , 得  $a_n = b = c$ , 也得  $a = \frac{a_1 + 2a_2}{3} = \frac{b + 2c}{3}$ .

综上  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{b + 2c}{3}$ .

□

◆ 题目 2.7.19: 设  $a, b, c$  是三个给定的实数, 令  $a_1 = a, b_1 = b, c_1 = c$ , 并以递推公式定义

$$a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{2}, b_{n+1} = \frac{c_n + a_n}{2}, c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, n \in \mathbb{N}^+$$



求这三个数列的极限.

证明: (徐森林上册 P6) 由题设得

$$a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1} = \cdots = a_0 + b_0 + c_0 = a + b + c$$

令  $L = a + b + c$ . 再由

$$\begin{aligned} a_n - b_n &= \frac{b_{n-1} + c_{n-1}}{2} - \frac{c_{n-1} + a_{n-1}}{2} = -\frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{2} \\ &= (-1)^2 \frac{a_{n-2} - b_{n-2}}{2^2} = \cdots = (-1)^n \frac{a_0 - b_0}{2^n} \end{aligned}$$

得  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(-1)^n (a_0 - b_0)}{2^n} = 0$ . 同理  $\lim_{n \rightarrow \infty} (c_n - a_n) = 0$ . 于是

$$a_n = \frac{1}{3}[(a_n + b_n + c_n) - (c_n - a_n) + (a_n - b_n)] = \frac{1}{3}[L - (c_n - a_n) + (a_n - b_n)].$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{3}[L - 0 + 0] = \frac{a + b + c}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n + (c_n - a_n)] = \frac{L}{3} + 0 = \frac{L}{3},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} [a_n - (a_n - b_n)] = \frac{L}{3} - 0 = \frac{L}{3}.$$

这就证得  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = \frac{a + b + c}{3}$ . □

◆ 题目 2.7.20:

(1) 设  $a_1 > b_1 > 0, a_{n+1} = \frac{2a_nb_n}{a_n + b_n}, b_{n+1} = \sqrt{a_{n+1}b_n}, n \in \mathbb{N}^+$ , 证明:  $\{a_n\}$  和  $\{b_n\}$  收敛于同一极限.

(2) 在  $a_1 = 2\sqrt{3}, b_1 = 3$  时, 证明上述极限等于单位圆的半周长  $\pi$ . (这里可以利用极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin \frac{\pi}{n} = \pi$ )

证明:

$$(1) \quad a_2 = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}} < \sqrt{a_1 b_1} < a_1, a_1 > b_1 > 0, a_2 - b_1 = \frac{2}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{b_1}} - b_1 = \frac{a_1 b_1 - b_1^2}{a_1 + b_1} > 0, b_1 < b_2 = \sqrt{a_2 b_1} < a_2.$$

假设

$$b_k < b_{k+1} < a_{k+1} < a_2$$

则

$$a_{k+2} - b_{k+1} = \frac{2a_{k+1}b_{k+1}}{a_{k+1} + b_{k+1}} - b_{k+1} = \frac{a_{k+1}b_{k+1} - b_{k+1}^2}{a_{k+1} + b_{k+1}} > 0.$$

则有

$$b_{k+1} < \sqrt{a_{k+1}b_{k+1}} = b_{k+1} < a_{k+2} = \frac{2a_{k+1}b_{k+1}}{a_{k+1} + b_{k+1}} < \sqrt{a_{k+1}b_{k+1}} < a_{k+1}.$$



所以由归纳法原理得

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_{k+1} < \cdots < a_{k+1} < a_k < \cdots < a_2 < a_1$$

而且  $a_n - b_n \rightarrow 0 (n \rightarrow \infty)$ , 所以两数列收敛于同一极限.

(2) 首先证明  $a_n = 3 \cdot 2^n \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$ ,  $b_n = 3 \cdot 2^n \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n}$ .

首先我们有

$$\tan \frac{a}{2} = \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = 2 \cdot \frac{\sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2}}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{\sin a}{2 \cos^2 \frac{a}{2}}$$

又因为

$$\cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} - 1$$

所以

$$\tan \frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2 \cos^2 \frac{a}{2}} = \frac{\sin a}{1 + \cos a} = \frac{\sin a \cdot \tan a}{\sin a + \tan a}$$

当  $n = 1$  时,  $a_1 = 3 \cdot 2^1 \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^1} = 2\sqrt{3}$ ,  $b_1 = 3 \cdot 2^1 \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^1} = 3$ .

假设  $n = k$  时成立. 即

$$a_k = 3 \cdot 2^k \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}, b_k = 3 \cdot 2^k \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}.$$

$n = k + 1$  时,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2a_k b_k}{a_k + b_k} \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cdot 2^k \cdot 3 \cdot 2^k \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}}{3 \cdot 2^k (\tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} + \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k})} \\ &= 3 \cdot 2^{k+1} \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \sqrt{3 \cdot 2^{k+1} \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}} \cdot 3 \cdot 2^k \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k}} \\ &= 3 \cdot 2^{k+1} \sqrt{\frac{1}{2} \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^k} \cdot \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}} \end{aligned}$$

由于  $2 \sin \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} = \sin a$ , 得

$$\sin^2 \frac{a}{2} = \frac{1}{2} \sin a \cdot \frac{\sin \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} = \frac{1}{2} \sin a \tan \frac{a}{2}$$





即  $\sin \frac{a}{2} = \sqrt{\frac{1}{2} \sin a \cdot \tan \frac{a}{2}}$ , 所以  $b_{k+1} = 3 \cdot 2^{k+1} \cdot \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^{k+1}}$ . 即  $n = k + 1$  时成立.  
所以

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} a_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 2^n \tan \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \\ &= \pi \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} 3 \cdot 2^n \sin \frac{\pi}{3 \cdot 2^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} b_n\end{aligned}$$

□

## 2.8 第二组参考题

◆ 题目 2.8.1: 设  $a_n = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ . 证明:  $\{a_n\}$  收敛.

☞ 证明:  $a_{n+1} = \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}}} > \sqrt{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}} = a_n$ .  
而  $2^{2^n} > n$  成立 ( $n \geq 1$ ).

则

$$a_n < \sqrt{2^2 + \sqrt{2^4 + \cdots + \sqrt{2^{2^n}}}} = 2\sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}} = 2b_n$$

显然  $\{b_n\}$  收敛. 记  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ . 则  $a_n < 2b$ . 故  $\{a_n\}$  单调有界. 所以  $\{a_n\}$  收敛. □

◆ 题目 2.8.2: 证明: 对每个自然数  $n$  成立不等式  $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{e}{2n}$ .

☞ 证明: (方法 1):  $(1 + \frac{1}{n})^n = e^{n \ln(1 + \frac{1}{n})} > e^{n(\frac{1}{n} - \frac{1}{2n})} = e \cdot e^{-\frac{1}{2n}} > e \cdot (1 - \frac{1}{2n})$

(方法 2) 令  $f(x) = \ln(1+x) + \frac{4}{2+x}$ , 则  $f'(x) = \frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2} > 0$ , ( $x > 0$ ). 所以  $f(x) >$

$f(0) = 2$ , 即有  $\ln(1 + \frac{1}{n}) + \frac{4}{1 + \frac{1}{n}} > 2$ .

故

$$e^{n \ln(1 + \frac{1}{n}) - 1} > e^{n(2 - \frac{4}{1 + \frac{1}{n}}) - 1} = e^{-\frac{1}{2n+1}} > 1 - \frac{1}{2n+1} > \frac{\sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}}{e} - \frac{1}{2n}$$

即  $(1 + \frac{1}{n})^n > \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} - \frac{e}{2n}$ . □

◆ 题目 2.8.3: 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} n \sin(2\pi n! e)$ .

☞ 解: (徐森林上册 P55) 因为

$$\begin{aligned}2\pi n! e &= 2\pi n! \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{1}{(n+1)!} + \frac{e^\theta}{(n+2)!} \right) \\ &= 2\pi n! \left( 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} \right) + \frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\end{aligned}$$



$$= 2\pi N + \frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right) \quad N \text{ 为某正整数}, 0 < \theta < 1$$

所以  $n \sin(2\pi en!) = n \sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + o\left(\frac{1}{n}\right)\right) \rightarrow 2\pi, (n \rightarrow \infty)$ . □

◆ 题目 2.8.4: 记  $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}^+$ . 用  $K_n$  表示使  $S_k \geq n$  的最小下标, 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n}$ .

✎ 解: (徐森林上册 P43) 由题意知  $\lim_{n \rightarrow \infty} K_n = +\infty$  及

$$H_{K_n} - \frac{1}{K_n} = H_{K_n-1} < n \leq H_{K_n}$$

由此得出

$$n \leq H_{K_n} < n + \frac{1}{K_n}$$

$$n+1 \leq H_{K_{n+1}} < n+1 + \frac{1}{K_{n+1}}$$

于是

$$1 - \frac{1}{K_n} < H_{K_{n+1}} - H_{K_n} < 1 + \frac{1}{K_{n+1}}.$$

由  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{K_n} = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{K_{n+1}}$  知  $\lim_{n \rightarrow \infty} (H_{K_{n+1}} - H_{K_n}) = 1$ . 而我们知道

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = x_n + \ln n$$

而  $X_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = c + \varepsilon_n \rightarrow c (n \rightarrow \infty)$ , 所以

$$H_{K_{n+1}} = \ln K_{n+1} + c + \varepsilon_{K_{n+1}}$$

$$H_{K_n} = \ln K_n + c + \varepsilon_{K_n}$$

$$H_{K_{n+1}} - H_{K_n} = \ln \frac{K_{n+1}}{K_n} + \varepsilon_{K_{n+1}} - \varepsilon_{K_n}.$$

令  $n \rightarrow \infty$  得

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} (H_{K_{n+1}} - H_{K_n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{K_{n+1}}{K_n} + 0,$$

于是  $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$ . 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\ln \frac{K_{n+1}}{K_n}} = e^1 = e$ . □

◆ 题目 2.8.5: 设  $x_n = \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \ln C_n^k, n \in \mathbb{N}^+$ , 求极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

✎ 解: 由 O'Stolz 定理

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \ln C_n^k = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum_{k=0}^n \ln C_n^k}{(n+1)^2 - n^2}$$



$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln C_{n+1}^{n+1} + \sum_{k=0}^n \ln \frac{C_{n+1}^k}{C_n^k}}{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^n \ln \frac{n+1}{n+1-k}}{2n+1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=0}^{n+1} \ln \frac{n+1}{n+2-k} - \sum_{k=0}^n \ln \frac{n+1}{n+1-k}}{2(n+1)+1-2n-1} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \frac{n+2}{n+2} + (n+1) \ln \frac{n+2}{n+1}}{2} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}}{2} \\
&= \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

□

◆ 题目 2.8.6: 将二项式系数  $C_n^0, C_n^1, \dots, C_n^n$  的算术平均值和几何平均值分别记为  $A_n$  和  $G_n$ . 证明:

(1)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{A_n} = 2$ ; (2)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{G_n} = \sqrt{e}$ .

证明: (1)  $A_n = \frac{\sum_{k=0}^n C_n^k}{n+1} = \frac{2^n}{n+1}$ , 所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\sqrt[n]{n+1}} = 2$

(2)  $G_n = \sqrt[n]{C_n^0 \cdot C_n^1 \cdots C_n^n}$ , 所以  $\sqrt[n]{G_n} = \left( \prod_{k=0}^n C_n^k \right)^{\frac{1}{n^2}} = e^{\frac{\ln(\prod_{k=0}^n C_n^k)}{n^2}}$ , 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{G_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\frac{1}{n^2} \sum_{k=0}^n \ln C_n^k} = e^{\frac{1}{2}}$$

□

◆ 题目 2.8.7: 设  $A_n = \sum_{k=1}^n a_k, n \in \mathbb{N}^+$ . 数列  $\{A_n\}$  收敛. 又有一个单调递增的正整数列  $\{p_n\}$ , 且为无穷大量.

证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = 0$ .

证明:  $\sum_{k=1}^n p_k a_k = \sum_{k=2}^n p_k (A_k - A_{k-1}) + p_1 A_1 = \sum_{k=1}^n A_k (p_k - p_{k+1}) + p_n A_n$ ,  
又

$$\begin{aligned}
\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} A_k (p_k - p_{k+1})}{p_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^n A_k (p_k - p_{k+1}) - \sum_{k=1}^{n-1} A_k (p_k - p_{k+1})}{p_{n+1} - p_n} \\
&= \lim_{n \rightarrow \infty} (-A_n)
\end{aligned}$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{p_1 a_1 + p_2 a_2 + \cdots + p_n a_n}{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sum_{k=1}^{n-1} A_k (p_k - p_{k+1}) + p_n A_n}{p_n} = 0$ .

□



◆ 题目 2.8.8: 设  $\{a_n\}$  满足  $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \sum_{i=1}^n a_i^2) = 1$ , 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[3]{3na_n} = 1$ .

☞ 证明: (徐森林上册 P24) 设  $S_n = \sum_{i=1}^n a_i^2$ , 显然  $\{S_n\}$  单调递增. 下证  $S_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$ . 事实上, 若  $S_n \rightarrow S$  (有限), 则  $a_n^2 = S_n - S_{n-1} \rightarrow S - S = 0 (n \rightarrow \infty)$ . 从而  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n S_n = 0 \cdot S = 0$$

这与题设  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$  相矛盾. 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i^2 = +\infty$$

再由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n S_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$  知,  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left( a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) \cdot \frac{1}{\sum_{i=1}^n a_i^2} = 1 \cdot 0 = 0$ .

考虑到

$$\begin{aligned} S_n^3 - S_{n-1}^3 &= (S_n - S_{n-1})(S_n^2 + S_n S_{n-1} + S_{n-1}^2) \\ &= a_n^2 [S_n^2 + S_n(S_n - a_n^2) + (S_n - a_n^2)^2] \\ &= 3(a_n S_n)^2 - 3a_n^4 S_n + a_n^6 \\ &= 3 \left( a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 - 3a_n^3 \left( a_n \sum_{i=1}^n a_i^2 \right) + a_n^6 \\ &\rightarrow 3 \times 1 - 3 \times 0 \times 1 + 0 = 3 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{3na_n^3} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(a_n S_n)^3} \cdot \frac{S_n^3}{3n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(a_n S_n)^3} \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3}{3n} \\ &\stackrel{\text{O'Stolz}}{=} 1 \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{S_n^3 - S_{n-1}^3}{3} = \frac{3}{3} = 1 \end{aligned}$$

即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 3na_n^3 = 1.$$

□

◆ 题目 2.8.9: 设数列  $\{u_n\}_{n \geq 0}$  对每个非负整数  $n$  满足条件

$$u_n = \lim_{m \rightarrow \infty} (u_{n+1}^2 + u_{n+2}^2 + \cdots + u_{n+m}^2),$$

证明: 若存在有限极限  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$ , 则只能是每个  $u_n = 0$ .

☞ 证明: 不妨设  $u_1 > 0$ , 易知  $u_n = u_{n+1} + u_{n+1}^2$ , 故  $u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_{n+1}}, u_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k^2 \geq 0$ . 而

$$u_n = u_{n+1} + u_{n+1}^2 \geq u_{n+1}, \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

从而有

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{1 + u_{n+1}} \geq \frac{u_n}{1 + u_n}$$



归纳可得

$$u_{n+1} \geq \frac{u_1}{1+nu_n} > \frac{1}{n + [\frac{1}{u_1}] + 1}$$

而  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n + [\frac{1}{u_1}] + 1} = +\infty$  (调和级数去掉有限项). 所以与  $\lim_{n \rightarrow \infty} (u_1 + u_2 + \cdots + u_n)$  为有限矛盾. 故每个  $u_n = 0$ . □

◆ 题目 2.8.10: (Toeplitz 定理) 设对每个  $n, k \in \mathbb{N}^+$  有  $t_{nk} \geq 0$ . 又有  $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1, \lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$ . 若已知

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 定义  $x_n = \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k$ . 证明:  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ .

证明: 由  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ , 知  $\exists M > 0$ , 使得  $|a_n - a| < M, \forall n \in \mathbb{N}^+$ . 对  $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N_1$

时,  $|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$ . 固定  $N_1$ , 因为  $\lim_{n \rightarrow \infty} t_{nk} = 0$ , 所以  $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ , 当  $n > N_2$  时,  $0 \leq t_{nk} < \frac{\varepsilon}{2N_1 M}, k =$

$1, 2, \dots, N_1$ , 令  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . 当  $n > N$  时, 利用等式  $\sum_{k=1}^n t_{nk} = 1$  有

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k - a \right| &= \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k - \sum_{k=1}^n t_{nk} a \right| = \left| \sum_{k=1}^n t_{nk} (a_k - a) \right| \\ &\leq t_{n1} |a_1 - a| + \cdots + t_{nN_1} |a_{N_1} - a| + \cdots + t_{nn} |a_n - a| \\ &< M(t_{n1} + \cdots + t_{nN_1}) + \frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1} + t_{nn}) \\ &\leq M \cdot N_1 \cdot \frac{\varepsilon}{2N_1 M} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot 1 = \varepsilon \end{aligned}$$

所以  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n t_{nk} a_k = a$ . □



## 第 3 章 实数系的基本定理



### 3.1 确界的概念与确界存在原理

### 3.2 闭区间套定理

### 3.3 凝聚定理

### 3.4 **Cauchy** 收敛准则

### 3.5 覆盖定理

### 3.6 数列的上极限与下极限

### 3.7 第一组参考题

### 3.8 第二组参考题

## 第 4 章 函数极限



### 4.1 函数极限的定义

### 4.2 函数极限的基本性质

### 4.3 两个重要极限

### 4.4 无穷小量、有界量、无穷大量和阶的比较

### 4.5 参考题

## 第 5 章 连续函数



### 5.1 连续性的概念

### 5.2 零点存在定理与介值定理

### 5.3 有界性与最值定理

### 5.4 一致连续性与 **Contor** 定理

### 5.5 单调函数

### 5.6 第一组参考题

### 5.7 第二组参考题



## 第6章 导数与微分



### 6.1 导数及其计算

### 6.2 高阶导数及其他求导法则

### 6.3 一阶微分及其形式不变性

### 6.4 第一组参考题

◆ 题目 6.4.1: 利用导数的定义计算极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \tan x)^{10} - (1 - \sin x)^{10}}{\sin x}$ .

✎ 解:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \tan x)^{10} - (1 - \sin x)^{10}}{\sin x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1 + \tan x)^{10} - (1 - \sin x)^{10} - 0}{x - 0} \\&= \left( (1 + \tan x)^{10} - (1 - \sin x)^{10} \right)'_x \Big|_{x=0} \\&= 10(1 + \tan x)^9 \cdot \frac{1}{\cos^2 x} + 10(1 - \sin x)^9 \cdot \cos x \\&= 20\end{aligned}$$

□

◆ 题目 6.4.2: 设  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 3x + 2}$ , 计算  $f^{(100)}(0)$ , 要求相对误差不超过 1%

✎ 解:  $f(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$ ,  $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2} + \frac{1}{(x+2)^2}$ ,  $f''(x) = \frac{2}{(x+1)^3} - \frac{2}{(x+2)^3}, \dots, f^{(100)}(x) = \frac{100!}{(x+1)^{100}} - \frac{100!}{(x+2)^{100}}$ , 接下来可以利用微分近似计算  $f^{(100)}(0)$  □

◆ 题目 6.4.3: 设  $f$  在点  $a$  可导,  $f(a) \neq 0$ . 计算  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right]^n$ .

✎ 解: 由 Heine 归结原理,

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \frac{f(a + \frac{1}{n})}{f(a)} \right]^n &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[ \frac{f(a + \frac{1}{x})}{f(a)} \right]^x \\&= \exp \left( \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left( \ln f(a + \frac{1}{x}) - \ln f(a) \right) \right) \\&= \exp \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\ln f(a + \Delta x) - \ln f(a)}{\Delta x} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \exp \left( (\ln f(x))' \Big|_{x=a} \right) \\
 &= \exp \left( \frac{f'(a)}{f(a)} \right)
 \end{aligned}$$

□

◆ 题目 6.4.4: 设  $a \neq 0$ , 计算  $f(x) = \frac{\sin x + \sin(x+a)}{\cos x - \cos(x+a)}$  的导数并对结果作出解释.

✎ 解:  $f(x) = \frac{2 \sin \frac{2x+a}{2} \cos \frac{a}{2}}{-2 \sin \frac{2x+a}{2} \sin \frac{a}{2}} = -\cot \frac{a}{2} \quad (a \neq 0)$  为常数函数, 故导数恒为 0.

□

◆ 题目 6.4.5: 设  $f(0) = 0, f'(0)$  存在. 定义数列

$$x_n = f\left(\frac{1}{n^2}\right) + f\left(\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n^2}\right), n \in \mathbb{N}^+,$$

试求  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$ .

✎ 解:  $f\left(\frac{1}{n^2}\right) = f'(0)\left(\frac{1}{n^2} - 0\right) + o\left(\frac{1}{n^2} - 0\right), \cdots, f\left(\frac{n}{n^2}\right) = f'(0)\left(\frac{n}{n^2} - 0\right) + o\left(\frac{n}{n^2} - 0\right)$ .  
故

$$\begin{aligned}
 x_n &= f'(0) \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) + o \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) \\
 &= \frac{n(n+1)}{2n^2} f'(0) + o \left( \frac{n(n+1)}{2n^2} \right)
 \end{aligned}$$

则  $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \frac{1}{2} f'(0)$ .

□

◆ 题目 6.4.6: 求下列数列极限:

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n}{n^2} \right),$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \left( 1 + \frac{2}{n^2} \right) \cdots \left( 1 + \frac{n}{n^2} \right) \right].$$

✎ 解:

$$(1) \sin \frac{1}{n^2} \sim \frac{1}{n^2}, \cdots, \sin \frac{n}{n^2} \sim \frac{n}{n^2}, (n \rightarrow \infty). \text{ 故}$$

$$\begin{aligned}
 &\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \sin \frac{1}{n^2} + \sin \frac{2}{n^2} + \cdots + \sin \frac{n}{n^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{2n^2} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$(2) \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \sim \frac{1}{n^2}, \cdots, \ln \left( 1 + \frac{n}{n^2} \right) \sim \frac{n}{n^2}, (n \rightarrow \infty).$$

故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) \left( 1 + \frac{2}{n^2} \right) \cdots \left( 1 + \frac{n}{n^2} \right) \right]$$



$$\begin{aligned}
 &= \exp \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \ln \left( 1 + \frac{1}{n^2} \right) + \ln \left( 1 + \frac{2}{n^2} \right) + \cdots + \ln \left( 1 + \frac{n}{n^2} \right) \right) \right) \\
 &= \exp \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \cdots + \frac{n}{n^2} \right) \right) \\
 &= \exp \left( \frac{1}{2} \right)
 \end{aligned}$$

□

◆ 题目 6.4.7: 设  $y = \frac{1+x}{\sqrt{1-x}}$ , 计算  $y^n(x)$ ,  $n \in \mathbb{N}^+$ .

✎ 解:

$$y' = (1-x)^{-\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = \frac{3}{2}(1-x)^{-\frac{5}{2}} + \frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\begin{aligned}
 y^{(n)} &= 2 \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} \right) (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}} + \frac{1}{2} \cdot \left( \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{2n-1}{2} \right) (1-x)^{-\frac{2n-1}{2}} \\
 &= \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}} (1-x)^{-\frac{2n+1}{2}} + \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} (1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}
 \end{aligned}$$

□

◆ 题目 6.4.8: 设  $f$  在  $\mathbb{R}$  上有任意阶导数, 证明: 对每个自然数  $n$  成立

$$\frac{1}{x^{n+1}} f^{(n)} \left( \frac{1}{x} \right) = (-1)^n \left[ x^{n-1} f \left( \frac{1}{x} \right) \right]^{(n)}.$$

✎ 证明:  $n=1$  时, 左边  $= \frac{1}{x^2} f' \left( \frac{1}{x} \right) = (-1) f' \left( \frac{1}{x} \right) \left( \frac{1}{x} \right)' = (-1) \left[ f \left( \frac{1}{x} \right) \right]' =$  右边.

假设  $n=k$  时成立, 即

$$\frac{1}{x^{k+1}} f^{(k)} \left( \frac{1}{x} \right) = (-1)^k \left[ x^{k-1} f \left( \frac{1}{x} \right) \right]^{(k)}$$

$n=k+1$  时, 等式左边  $= \frac{1}{x^{k+2}} f^{(k+1)} \left( \frac{1}{x} \right).$

$$\begin{aligned}
 \text{等式右边} &= (-1)^{k+1} \left[ x^k f \left( \frac{1}{x} \right) \right]^{(k+1)} \\
 &= (-1)^{k+1} \left[ C_{k+1}^0 x \left( x^{k-1} f \left( \frac{1}{x} \right) \right)^{(k+1)} + C_{k+1}^1 \left( x^{k-1} f \left( \frac{1}{x} \right) \right)^{(k)} \right] \\
 &= (-1)^{k+1} \left[ (-1)^{k+1} \left( \frac{k+1}{x^{k+1}} f^{(k)} \left( \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x^{k+2}} f^{(k+1)} \left( \frac{1}{x} \right) \right) + (k+1) (-1)^k \frac{1}{x^{k+1}} f^{(k)} \left( \frac{1}{x} \right) \right] \\
 &= (-1)^{k+1} \left[ ((-1)^{k+1} + (-1)^k) \frac{k+1}{x^{k+1}} f^{(k)} \left( \frac{1}{x} \right) + \frac{1}{x^{k+2}} f^{(k+1)} \left( \frac{1}{x} \right) \right]
 \end{aligned}$$



$$= \frac{1}{x^{k+2}} f^{(k+1)}\left(\frac{1}{x}\right)$$

所以  $n = k + 1$  时也成立. □

◆ 题目 6.4.9: 利用  $1 + x + x^2 + \cdots + x^n$  的和, 求下列各式的和:

(1)  $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$ ,

(2)  $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$ .

又问: 不用微分学方法能否求出 (1) 与 (2) 中的和?

解:

(1)  $1 + x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$ , 所以

$$\begin{aligned} 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} &= (1 + x + x^2 + \cdots + x^n)' \\ &= \left( \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right)' \\ &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1-x^{n+1})}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

(2)  $A = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n, B = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots + nx^{n+1}$ .

则  $B - A = nx^{n+1} - (x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n) = nx^{n+1} - \frac{x(1-x^n)}{1-x}$ .

故  $B - A = A(x-1) = nx^{n+1} - \frac{x(1-x^n)}{1-x}$ , 那么  $A = \frac{nx^{n+1}}{x-1} + \frac{x(1-x^n)}{(x-1)^2}$ .

因此

$$\begin{aligned} A' &= 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} \\ &= \frac{(n+1)nx^n(x-1) - nx^{n+1}}{(x-1)^2} + \frac{[1 - (n+1)x^n](x-1)^2 - 2(x-1)x(1-x^n)}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

□

◆ 题目 6.4.10: 证明组合恒等式:

(1)  $\sum_{k=1}^n k C_n^k = n 2^{n-1}, n \in \mathbb{N}^+,$

(2)  $\sum_{k=1}^n k^2 C_n^k = n(n+1) 2^{n-2}, n \in \mathbb{N}^+.$

证明:

(1)  $\sum_{k=1}^n k C_n^k = \sum_{k=1}^{n-1} n C_{n-1}^k = n 2^{n-1}$

(2)

$$\sum_{k=1}^n (k^2 C_n^k) = \sum_{k=1}^n (k(k-1)) C_n^k + \sum_{k=1}^n k C_n^k$$



$$\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-2} n(n-1)C_{n-1}^k + \sum_{k=1}^{n-1} nC_{n-1}^k \\
&= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \\
&= n2^{n-2}(n-1+2) \\
&= n(n+1)2^{n-2}
\end{aligned}$$

□

◆ 题目 6.4.11: 证明: 由抛物线的焦点出发的射线经抛物线反射后一定平行于抛物线的对称轴.

证明: (徐森林 P166) 设抛物线的方程为

$$y^2 = 2px$$

则焦点为  $F(\frac{p}{2}, 0)$ . 在抛物线上任取一点  $A(x_0, y_0)$ , 过  $A$  点做切线  $L$ , 记  $l$  与线段  $AF$  的夹角为  $\alpha$ ,  $L$  与  $x$  轴的夹角为  $\beta$ . 根据光学原理: 光线的入射角等于反射角. 因此, 如果能证明  $\alpha = \beta$ , 则就证明了反射光线平行于  $x$  轴 (对称轴). 记  $L$  与  $x$  轴的交点为  $B$ . 于是,

$$\alpha = \beta \iff AF = BF$$

将  $y^2 = 2px$  两边关于  $x$  求导得

$$2yy' = 2p$$

所以,

$$y' = \frac{p}{y}$$

因此, 抛物线  $y^2 = 2px$  在点  $A(x_0, y_0)$  的切线  $L$  的斜率为

$$y'|_{x=x_0} = \frac{p}{y_0}$$

故  $L$  的方程为

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

在上式中, 令  $y = 0$ , 即得  $B$  点的坐标为  $(-x_0, 0)$ . 因此,

$$BF = \left| \frac{p}{2} + x_0 \right|$$

且

$$AF = \sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2} = \sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px_0} = \left|\frac{p}{2} + x_0\right| = BF$$

□

◆ 题目 6.4.12: 证明: 由椭圆的焦点出发的射线经椭圆反射后一定经过椭圆的另一个焦点.

证明:

□



- ◆ 题目 6.4.13: 证明: 在曳物线  $x = a \left( \ln \tan \frac{t}{2} + \cos t \right)$ ,  $y = a \sin t$  的每一条切线上从切点到与  $x$  轴的交点的长度为常数.

☞ 证明: □

- ◆ 题目 6.4.14: 证明: 函数  $f$  在点  $x_0$  可微的充分必要条件是  $x_0$  的某个邻域内可以写成  $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$ , 其中  $\phi(x)$  在  $x_0$  连续.

☞ 证明: □

- ◆ 题目 6.4.15: 设  $n \geq 2$ , 函数  $f(x) = f(x_0) + \phi(x)(x - x_0)$ ,  $\phi(x)$  在某邻域  $O(x_0)$  中  $n - 1$  阶可导, 且  $\phi^{n-1}(x)$  在  $x_0$  连续. 证明: 存在  $f^{(n)}(x_0)$ .

☞ 证明: □

- ◆ 题目 6.4.16: 设  $f(x)$  在区间  $(a, b)$  上有  $n$  阶导数, 且存在不全为 0 的  $n + 1$  个常数  $a_0, a_1, \dots, a_n$ , 使得

$$a_0 f(x) + a_1 f'(x) + \dots + a_n f^{(n)}(x) \equiv 0$$

证明:  $f(x)$  在  $(a, b)$  上存在任意阶导数.

☞ 证明: □

- ◆ 题目 6.4.17: 设多项式  $p(x)$  只有实零点. 证明:  $[p'(x)]^2 - p(x)p''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$ .

☞ 证明: □

- ◆ 题目 6.4.18: 设  $f$  在  $[0, 1]$  上可微, 且使得  $\{x \in [0, 1] | f(x) = 0 = f'(x)\} = \emptyset$ . 证明:  $f$  在  $[0, 1]$  中只有有限个零点.

☞ 证明: □

- ◆ 题目 6.4.19: 对于  $y = \arctan x$ , 证明:

$$(1) \ y^{(n)}(x) = (n-1)! \cos^n y \sin n(y + \frac{\pi}{2});$$

$$(2) \ y^{(n)} = \frac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}, \text{ 其中 } P_{n-1}(x) \text{ 为最高次项系数是 } (-1)^{n-1}n! \text{ 的 } n-1 \text{ 次多项式.}$$

☞ 证明: □

- ◆ 题目 6.4.20: 定义  $f_0(x) \equiv 1, f_{n+1}(x) = x f_n(x) - f_n'(x), n = 0, 1, \dots$ . 证明:

(1)  $f_n(x)$  是  $n$  次多项式;

(2)  $f_n(x)$  有  $n$  个不同的实根, 且关于原点对称.

☞ 证明: □

## 6.5 第二组参考题

- ◆ 题目 6.5.1:

$$(1) \text{ 求 } \sum_{k=1}^n \sin kx \text{ 和 } \sum_{k=1}^n \cos kx;$$

$$(2) \text{ 求 } \sum_{k=1}^n k \sin kx \text{ 和 } \sum_{k=1}^n k \cos kx.$$



证明: □

◆ 题目 6.5.2: 证明: Riemann 函数处处不可导.

证明: □

◆ 题目 6.5.3: 若从点  $(x_0, y_0)$  向抛物线  $y = ax^2 + bx + c$  能够作出两条切线, 或只能作出一条切线, 或不能作出切线. 问: 在这三种情形下的  $(x_0, y_0)$  的位置与抛物线有什么关系?

证明: □

◆ 题目 6.5.4: 证明: Legendre 多项式  $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$  满足方程

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

证明: □

◆ 题目 6.5.5: 证明: Legendre 多项式满足方程

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

证明: □

◆ 题目 6.5.6: 分析三项式  $(u+v+w)^n$  展开的系数定律, 猜测并证明  $(uvw)^{(n)}$  的一般计算公式.

证明: □

◆ 题目 6.5.7: 设  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , 当  $|x| \leq 1$  时  $|f(x)| \leq 1$ . 证明: 当  $|x| \leq 1$  时  $|f(x)| \leq 4$ .

证明: □

◆ 题目 6.5.8: 证明: 对每个自然数  $n$  成立

$$\sum_{k=0}^n (-1)^k C_n^k k^m = \begin{cases} 0, & 0 \leq m \leq n-1, \\ (-1)^n n!, & m = n. \end{cases}$$

证明: □

◆ 题目 6.5.9: 设  $f(x) = x^n \ln x, n \in \mathbb{N}^+$ , 求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f^{(n)}(1/n)}{n!}$ .

证明: □

◆ 题目 6.5.10: 设  $f$  在  $x=0$  处连续, 且存在极限  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(2x) - f(x)}{x} = A$ . 证明:  $f'(0) = A$ .

证明: □

◆ 题目 6.5.11: 设  $y = (1 + \sqrt{x})^{2n+2}, n \in \mathbb{N}^+$ , 求  $y^{(n)}(1)$ .

证明: □

◆ 题目 6.5.12: 设  $f(x)$  在区间  $I$  上三阶可导,  $f'(x) \neq 0$ , 则可以定义  $f(x)$  的 Schwarz 导数如下:

$$S(f, x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2 = \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)' - \frac{1}{2} \left( \frac{f''(x)}{f'(x)} \right)^2$$

证明:

(1) 若  $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$ , 即分式线性函数, 则  $S(f, x) = 0$ ;

(2) 若  $p(x)$  是  $x$  的多项式, 且  $p'(x) = 0$  的根都是互不相同的实数, 则  $S(p, x) < 0$ ;

(3) 若  $f, g$  具有所需的各阶导数, 则  $S(f \circ g, x) = S(f, g(x))(g'(x))^2 + S(g, x)$ ;

(4) 若  $S(f, x) < 0, S(g, x) < 0$ , 则  $S(f \circ g, x) < 0$ ;

(5) 若  $S(f, x) < 0$ , 又记  $f^n = f \circ f \circ f \cdots \circ f$ , 则  $S(f^n, x) < 0$ .

证明: □



## 第7章 微分学的基本定理



### 7.1 微分学中值定理

### 7.2 Taylor 定理

### 7.3 第一组参考题

◆ 题目 7.3.1: 设有  $n$  个实数  $a_1, a_2, \dots, a_n$  满足

$$a_1 - \frac{1}{3}a_2 + \dots + (-1)^{n-1} \frac{a_n}{2n-1} = 0$$

证明: 方程  $a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x = 0$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  中至少有一个根.

☞ 证明: 令  $f(x) = a_1 \sin x = \frac{a}{3}a_2 \sin 3x + \dots + \frac{1}{2n-1}a_n \sin(2n-1)x$ , 则有  $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$ .

所以由 Rolle 中值定理,  $\exists \xi \in (0, \frac{\pi}{2})$  使得

$$f'(\xi) = a_1 \cos \xi + a_2 \cos 3\xi + \dots + a_n \cos(2n-1)\xi = 0.$$

此即方程  $a_1 \cos x + a_2 \cos 3x + \dots + a_n \cos(2n-1)x = 0$  在区间  $(0, \frac{\pi}{2})$  中至少有一个根  $\xi$ .  $\square$

◆ 题目 7.3.2: 设  $c \neq 0$ , 证明: 方程  $x^5 + ax^4 + bx^3 + c = 0$  至少有两个根不是实根.

☞ 证明: 令  $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + c$ , 则

$$f'(x) = 5x^4 + 4ax^3 + 3bx^2 = x^2(5x^2 + 4ax + b)$$

而  $x^2 \geq 0$ , 所以  $f'(x)$  的正负性由  $5x^2 + 4ax + b$  决定. 若  $5x^2 + 4ax + b = 0$  只有两个相同的实根, 那么  $f'(x)$  恒大于等于 0 或恒小于等于 0. 则  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上单调, 此时原方程只有一个实根. 若  $5x^2 + 4ax + b = 0$  无实根,  $f(x)$  也在  $(-\infty, +\infty)$  上单调, 此时原方程也只有一个实根. 若  $5x^2 + 4ax + b = 0$  有不同实根, 设其为  $x_1 < x_2$ , 则  $x \in (-\infty, x_1)$  时  $g(x) = 5x^2 + 4ax + b > 0$ ,  $x \in (x_1, x_2)$  时  $g(x) < 0$ ,  $x \in (x_2, +\infty)$  时  $g(x) > 0$ . 故  $f(x)$  在  $(-\infty, x_1)$  上单增, 在  $x \in (x_1, x_2)$  上单减, 在  $x \in (x_2, +\infty)$  单增, 故  $f(x) = 0$  至多 3 个实根.  $\square$

◆ 题目 7.3.3: 设  $a \neq 0$ , 证明: 方程  $x^{2n} + a^{2n} = (x+a)^{2n}$  只有一个实根  $x = 0$ .

☞ 证明: 假设方程至少有两个实根, 设其中两个实根为  $x_1, x_2$  且  $x_1 < x_2$ , 记  $f(x) = x^{2n} + a^{2n} - (x+a)^{2n}$ , 则有

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

由 Rolle 定理,  $\exists \xi \in (x_1, x_2)$  使

$$f'(\xi) = 2n\xi^{2n-1} - 2n(\xi+a)^{2n-1} = 0$$



由二项展开式,对比上式 $\xi$ 的系数可得 $a=0$ ,矛盾.故原方程只有一个实根.

再将 $x=0$ 代入原方程,显然成立.  $\square$

◆ 题目 7.3.4: 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上可微, 且满足条件

$$f(a)f(b) > 0, f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$$

证明: 对每个实数  $k$ , 在  $(a, b)$  内存在点  $\xi$ , 使得  $f'(\xi) - kf(\xi) = 0$ .

证: 由  $f(a)f(b) > 0, f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right) < 0$  以及  $f$  的连续性可知  $\exists x_1 \in (a, \frac{a+b}{2}), \exists x_2 \in (\frac{a+b}{2}, b)$  使得

$$f(x_1) = f(x_2) = 0.$$

令  $g(x) = \frac{f(x)}{e^{kx}}$ , 则  $g'(x) = \frac{f'(x) - kf(x)}{e^{kx}}, g(x_1) = g(x_2)$ . 由 Rolle 定理,  $\exists \xi \in (x_1, x_2) \subset (a, b)$  使得  $g'(\xi) = 0$ , 故有  $f'(\xi) - kf(\xi) = 0$ .  $\square$

◆ 题目 7.3.5: 设  $f(x) = \sum_{k=1}^n c_k e^{\lambda_k x}$ , 其中  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  为互异实数,  $c_1, c_2, \dots, c_n$  不同时为 0. 证明:  $f$  的零点个数小于  $n$ .

证: (徐森林上册 P128) 当  $n=1$  时,  $f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x}$ , 因  $c_1 \neq 0$ . 故  $f$  没有零点.

假设  $n=m$  时,  $f(x) = \sum_{k=1}^m c_k e^{\lambda_k x}$  至多有  $m-1$  个实零点成立. 则当  $n=m+1$  时,  $x_{m+1} \neq 0, f(x) = c_1 e^{\lambda_1 x} + c_2 e^{\lambda_2 x} + \dots + c_m e^{\lambda_m x} + c_{m+1} e^{\lambda_{m+1} x}$ . 将它改写成

$$f(x) = e^{\lambda_1 x} (c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \dots + c_m e^{(\lambda_m - \lambda_1)x} - c_{m+1} e^{(\lambda_{m+1} - \lambda_1)x})$$

$f(x) = 0$  的实根就是  $c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \dots + c_m e^{(\lambda_m - \lambda_1)x} - c_{m+1} e^{(\lambda_{m+1} - \lambda_1)x} = 0$  的实根. 但是  $g(x) = c_1 + c_2 e^{(\lambda_2 - \lambda_1)x} + \dots + c_m e^{(\lambda_m - \lambda_1)x} - c_{m+1} e^{(\lambda_{m+1} - \lambda_1)x}$  至多只有  $m$  个零点.(反证) 否则. 若  $g(x) = 0$  有  $m+1$  个零点, 由 Rolle 定理,  $g'(x) = 0$  有  $m$  个零点. 但

$$g'(x) = \sum_{k=2}^{m+1} c_k (\lambda_k - \lambda_1) e^{(\lambda_k - \lambda_1)x} = \sum_{i=1}^m b_i e^{u_i x},$$

其中  $b_i = c_{i+1}(\lambda_{i+1} - \lambda_1), u_i = \lambda_{i+1} - \lambda_1$ . 由  $\lambda_i$  互不相同,  $c_{m+1} \neq 0$ , 满足假设条件, 故  $g'$  至多只有  $m-1$  个零点, 矛盾.

这就证明了  $f(x)$  至多只有  $n-1$  个零点.  $\square$

◆ 题目 7.3.6:

(1) 设  $f$  在  $[0, 1]$  上可微,  $f(0) = 0, f(x) \neq 0, \forall x \in (0, 1)$ , 证明: 存在  $\xi \in (0, 1)$ , 使成立

$$2 \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

(2) 设  $f$  在  $[a, b]$  上可微,  $f(a) = 0, f(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$ , 证明: 对每个  $\alpha \neq 0$ , 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使成立

$$|\alpha| \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

证:

(1) 令  $g(x) = f^2(x)f(1-x)$ . 则  $g(0) = g(1) = 0$ . 对  $g$  在  $[0, 1]$  上使用 Rolle 中值定理, 则  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得

$$g'(\xi) = (2f'(\xi)f(1-\xi) - f'(1-\xi)f(\xi))f(\xi) = 0 \quad (7.1)$$



而  $\forall x \in (0, 1)$  有  $f(x) \neq 0$ . 则  $f(\xi) \neq 0$ . 所以对 (7.1) 式化简得

$$2 \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

(2) 令  $g(x) = f^{|\alpha|}(x)f(1-x)$ . 则  $g(0) = g(1) = 0$ . 对  $g$  在  $[0, 1]$  上使用 Rolle 中值定理, 则  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使得

$$g'(\xi) = (|\alpha|f'(\xi)f(1-\xi) - f'(1-\xi)f(\xi))f^{|\alpha|-1}(\xi) = 0 \quad (7.2)$$

而  $\forall x \in (0, 1)$  有  $f(x) \neq 0$ . 则  $f(\xi) \neq 0$ . 所以对 (7.2) 式化简得

$$|\alpha| \frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

□

◆ 题目 7.3.7: 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上可微, 但不是线性函数, 证明: 存在  $\xi, \eta \in (a, b)$ , 使成立

$$f'(\xi) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a} > f'(\eta).$$

证明: 做辅助函数

$$g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}x, x \in [a, b]$$

则  $g(x) \in C[a, b]$ , 且在  $(a, b)$  内可导,  $g(a) = g(b)$ . 因为  $f(x)$  不是线性函数, 所以  $\exists x_0 \in (a, b)$ , 使得  $g(x_0) \neq g(a) = g(b)$ .

若  $g(a) < g(x_0)$ , 则在  $[x_0, b]$  上使用 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi \in (x_0, b)$  使

$$g'(\xi) = \frac{g(b) - g(x_0)}{b - x_0} > 0$$

$$\text{即 } f'(\xi) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

若  $g(a) < g(x_0)$ , 则在  $[a, x_0]$  上使用 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi \in (a, x_0)$ , 使

$$g'(\xi) = \frac{g(x_0) - g(a)}{x_0 - a} > 0$$

$$\text{即 } f'(\xi) > \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

同理, 可在另一个区间上面使用 Lagrange 中值定理证得不等式的另外一边. □

◆ 题目 7.3.8: 设  $f$  在  $[a, b]$  上二阶可微,  $f(a) = f(b) = 0$ , 且在某点  $c \in (a, b)$  处有  $f(c) > 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使  $f''(\xi) < 0$ .

证明: 对  $f$  在  $[a, c]$  上使用 Lagrange 中值定理,  $\exists \eta_1 \in (a, c)$ , 使

$$f'(\eta_1) = \frac{f(c) - f(a)}{c - a} > 0$$

对  $f$  在  $[c, b]$  上使用 Lagrange 中值定理,  $\exists \eta_2 \in (c, b)$ , 使

$$f'(\eta_2) = \frac{f(c) - f(b)}{c - b} < 0$$



再对  $f'$  在  $[\eta_1, \eta_2]$  上使用 Lagrange 中值定理,  $\exists \xi \in (\eta_1, \eta_2) \subset (a, b)$ , 使

$$f''(\xi) = \frac{f'(\eta_1) - f'(\eta_2)}{\eta_1 - \eta_2} < 0$$

□

◆ 题目 7.3.9: 利用例题 7.1.3 的方法 (或其他方法) 于以下问题:

(1) 设  $f$  在  $[a, b]$  上三阶可微, 且有  $f(a) = f(b) = f'(a) = 0$ , 证明: 对每个  $x \in (a, b)$ ,  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使成立

$$f(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b).$$

(2) 设  $f$  在  $[0, 1]$  上五阶可微, 且有  $f(1/3) = f(2/3) = f(1) = f'(1) = f''(1) = 0$ , 证明: 对每个  $x \in [0, 1]$ ,  $\exists \xi \in (0, 1)$ , 使成立

$$f(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!} \left(x - \frac{1}{3}\right) \left(x - \frac{2}{3}\right) (x-1)^3.$$

(3) 设  $f$  在  $[a, b]$  上三阶可微, 证明: 存在  $\xi(a, b)$ , 使成立

$$f(b) = f(a) + \frac{1}{2}(b-a)[f'(a) + f'(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f'''(\xi).$$

(4) 设  $f$  在  $[a, b]$  上二阶可微, 证明: 对每个  $x \in (a, b)$ , 有  $\xi \in (a, b)$ , 使成立

$$\frac{1}{2}f''(\xi) = \frac{f(a)}{(a-b)(a-x)} + \frac{f(b)}{(b-x)(b-a)} + \frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}.$$

证明:

(1) 固定  $x \in (a, b)$ , 令  $\lambda = \frac{6f(x)}{(x-a)^2(x-b)}$ . 于是只要证明  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使得  $f''(\xi) = \lambda$ . 构造在  $[a, b]$  上的辅助函数

$$g(t) = f(t) - \frac{\lambda}{6}(t-a)^2(t-b)$$

由条件  $f(a) = f(b) = 0$ , 得到  $g(a) = g(b) = 0$ . 从  $\lambda$  的定义可以得到  $g(x) = 0$ . 在区间  $[a, x], [x, b]$  上分别使用 Rolle 中值定理, 得到两个点  $\eta_1$  和  $\eta_2$  满足条件

$$a < \eta_1 < x < \eta_2 < b \text{ 和 } g'(\eta_1) = g'(\eta_2) = 0$$

而由  $f'(a) = 0$ , 得到

$$g'(a) = f'(a) - \frac{\lambda}{6}[2(a-a)(a-b)^2 + (a-a)^2] = 0$$

然后再  $[a, \eta_1]$  和  $[\eta_1, \eta_2]$  上分别对  $g'$  使用 Rolle 定理, 得到两个点  $\eta_3$  和  $\eta_4$  满足条件

$$a < \eta_3 < \eta_1 < \eta_4 < \eta_2 \text{ 和 } g''(\eta_3) = g''(\eta_4) = 0$$

最后在区间  $[\eta_3, \eta_4]$  上使用 Rolle 定理, 知道有  $\xi \in (\eta_3, \eta_4) \subset (a, b)$  满足要求  $g''(\xi) = 0$ . 这就是  $f''(\xi) = \lambda$ .

(2)



(3)

(4)

□

◆ 题目 7.3.10: 设  $0 < a < b$ ,  $f$  在  $[a, b]$  上可微, 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使成立

$$\frac{1}{a-b} \begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi).$$

☞ 证明:

□

◆ 题目 7.3.11: 设  $f$  在区间  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上  $n$  次可微, 设  $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使成立

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \prod_{i>j} (x_i - x_j)$$

☞ 证明:

□

◆ 题目 7.3.12: 设  $f$  在区间  $[a, +\infty)$  上可微, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \infty$ , 证明:  $f$  在  $[a, +\infty)$  上非一致连续.

☞ 证明:

□

◆ 题目 7.3.13: 设  $f$  在  $(0, a]$  上可微, 又存在有限极限  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} f'(x)$ , 证明:  $f$  在  $(0, a]$  上一致连续.

☞ 证明:

□

◆ 题目 7.3.14: 设  $f$  在  $[a, +\infty)$  上可微, 且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = \infty$ , 证明:  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

☞ 证明:

□

◆ 题目 7.3.15: 对分别满足以下条件的  $f$ , 设已知  $f(x) = 1$ , 求  $f(2)$ :

(1)  $xf'(x) + f(x) = 0, \forall x > 0$ ;

(2)  $xf'(x) - f(x) = 0, \forall x > 0$ .

☞ 证明:

□

◆ 题目 7.3.16: 设  $f$  在  $[0, 2]$  上二阶可微, 且  $|f(x)| < A, |f''(x)| < B$ , 证明:  $|f'(x)| < A + \frac{B}{4}$ .

☞ 证明:

□

◆ 题目 7.3.17: 证明: 若在例题 7.2.5 中的区间从  $(0, +\infty)$  改为  $(-\infty, +\infty)$ , 则可以得到更好的估计  $M_1 \leq \sqrt{2M_0M_2}$ .

☞ 证明:

□



- ◆ 题目 7.3.18: 设当  $x \in (0, a]$  时有  $|f''(x)| \leq M$ . 又已知  $f$  在  $(0, a)$  中取到最大值. 证明:  $|f'(0)| + |f'(a)| \leq Ma$ .

☞ 证明:

□

## 7.4 第二组参考题

- ◆ 题目 7.4.1: 设  $f$  在  $[a, b]$  上可微, 在  $(a, b)$  上二阶可微, 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使成立

$$f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b - a)$$

(注意: 这里没有假定  $f' \in C(a, b)$ ).

☞ 证明:

□

- ◆ 题目 7.4.2: 设  $f$  在  $\mathbb{R}$  上无限次可微,  $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2 + 1}$ , 计算  $f^{(k)}(0)$ ,  $\forall k \in \mathbb{N}^+$ .

☞ 证明:

□

- ◆ 题目 7.4.3: 证明: 方程  $x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \cdots - 2nx + 2n + 1 = 0$  无实根.

☞ 证明:

□

- ◆ 题目 7.4.4: 设  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上二阶可微, 证明: 存在  $\xi$  使成立  $f''(\xi) = 0$ .

☞ 证明:

□

- ◆ 题目 7.4.5: 设  $f$  在  $[a, b]$  上可微,  $f'(a) = f'(b)$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 使成立

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$

☞ 证明:

□

- ◆ 题目 7.4.6: 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上可微, 又有  $c \in (a, b)$ ,  $f'(c) = 0$ , 证明: 存在  $\xi \in (a, b)$ , 满足

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}.$$

☞ 证明: 令  $h(x) = (f(x) - f(a))e^{\frac{x}{b-a}}$ , 则  $h'(x) = e^{\frac{x}{b-a}}(f'(x) - \frac{f(x) - f(a)}{b - a})$ .

假设  $h'(x) = 0$  在  $(a, b)$  上没有零点, 由 Darboux 定理  $h'(x) > 0$  或者  $h'(x) < 0$  在  $(a, b)$  上恒成立.

不妨设  $h'(x) > 0$  在  $(a, b)$  上恒成立.

因为  $c \in (a, b)$ , 所以

$$h'(c) = e^{\frac{c}{b-a}}(f'(c) - \frac{f(c) - f(a)}{b - a}) > 0$$

即

$$f'(c) - \frac{f(c) - f(a)}{b - a} > 0$$

因为  $f'(c) = 0$ , 所以

$$-\frac{f(c) - f(a)}{b - a} > 0$$



所以

$$f(c) < f(a) \quad (1)$$

另一方面  $h(a) = 0$ , 而  $h'(x) > 0$  在  $(a, b)$  上恒成立, 所以

$$h(c) = (f(c) - f(a))e^{\frac{c}{a-b}} > h(a) = 0$$

所以有  $f(c) > f(a)$ , 这与 (1) 式矛盾. 所以假设不成立, 即  $\exists \xi \in (a, b)$ , 使  $h'(\xi) = 0$ , 即

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b - a}$$

注释: 把结果写成关于  $f(x)$  的方程:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{b - a}.$$

先考虑齐次的方程:

$$f'(x) + \frac{f(x)}{a - b} = 0.$$

其实, 解方程就知道 (或者方程直接乘以  $e^{\frac{x}{a-b}}$ ):

$$\left(f(x) \cdot e^{\frac{x}{a-b}}\right)' = 0.$$

现在, 回到一开始的方程, 我们就发现

$$\left(f(x) \cdot e^{\frac{x}{a-b}}\right)' = \frac{f(a)}{a - b} \cdot e^{\frac{x}{a-b}} = \left(f(a) \cdot e^{\frac{x}{a-b}}\right)'.$$

于是,

$$\left((f(x) - f(a)) \cdot e^{\frac{x}{a-b}}\right)' = 0.$$

所以, 问题的结论是要我们证明存在一个  $\xi$  满足以上方程 (把导数展开之后).  $\square$

- ◆ 题目 7.4.7: 设  $f$  在  $[a, b]$  上连续, 在  $(a, b)$  上可微,  $f(a) = 0, f(x) > 0$ , 证明: 对每个  $\alpha > 0, \exists x_1, x_2 \in (a, b)$ , 使成立

$$\frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \alpha \frac{f'(x_2)}{f(x_2)}.$$

证明:  $\square$

- ◆ 题目 7.4.8: 设  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上二阶连续可微,  $|f(x)| \leq 1$ , 且有  $[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4$ , 证明: 存在  $\xi$ , 使成立  $f(\xi) + f''(\xi) = 0$ .  $\square$

证明:  $\square$

- ◆ 题目 7.4.9: 设  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上二阶连续可微, 且对所有  $x, h \in \mathbb{R}$  成立

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x + \frac{h}{2}).$$

证明:  $f(x) = ax^2 + bx + c$ .

证明:  $\square$



◆ 题目 7.4.10: (Schwarz 定理) 定义广义二阶导数

$$f^{[2]}(x) = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}.$$

若  $f \in C[a, b]$ , 同时  $f^{[2]}(x)$  在  $(a, b)$  上处处等于 0, 证明:  $f$  为线性函数.

☞ 证明:

□

◆ 题目 7.4.11: 设  $f$  在  $(-\infty, +\infty)$  上有任意阶导数, 且存在常数  $C \geq 0$ , 使对所有  $n \in \mathbb{N}^+$  和  $x \in (-\infty, +\infty)$  成立不等式  $|f^{(n)}(x)| \leq C$ , 又有  $f(1/n) = 0, \forall n \in \mathbb{N}^+$  成立, 证明:  $f(x) \equiv 0$ .

☞ 证明:

□

◆ 题目 7.4.12: 设  $f$  在点  $x_0$  有  $n$  阶导数, 证明:

$$f^{(n)}(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^n} \sum_{k=0}^n (-1)^{n-k} C_n^k f(x_0 + kh).$$

☞ 证明:

□

◆ 题目 7.4.13: 设  $f$  在  $[0, +\infty)$  上  $n$  阶可微, 且存在有限极限

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \text{ 和 } \lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(n)}(x),$$

证明: 对每个  $k = 1, 2, \dots, n$  成立  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f^{(k)}(x) = 0$ .

☞ 证明:

□

◆ 题目 7.4.14:

(1) 设  $f$  在  $(0, +\infty)$  上二阶可微,  $f''(x)$  有界, 且存在有限极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ , 证明:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

(2) 设  $f$  在  $[a, +\infty)$  可微, 且存在有限极限  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ ,

(a) 举例说明  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$  不一定成立,

(b) 证明: 若  $f'$  在  $[a, +\infty)$  上一致连续, 则一定成立  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f'(x) = 0$ .

☞ 证明:

(1)

(2)

□

◆ 题目 7.4.15: 设  $f$  在  $(a, b)$  上任意阶可导, 且对每个自然数  $n$  有  $f^{(n)}(x) \geq 0$  和  $|f(x)| \leq M$ , 证明: 对每个  $x \in (a, b), r > 0, x+r \in (a, b)$ , 成立关于导数的估计式

$$f^{(n)} \leq \frac{2Mn!}{r^n}, \forall n \in \mathbb{N}^+.$$

☞ 证明:

□

◆ 题目 7.4.16: (Bernstein 定理) 设  $f$  在  $(a, b)$  上任意阶可微, 且对每个  $n$  成立  $f^{(n)} \geq 0$ , 证明: 对每个  $x_0 \in (a, b)$  存在  $r > 0$ , 使得当  $x \in [x_0 - r, x_0 + r] \subset (a, b)$  时, 成立

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} (x - x_0)^k.$$

☞ 证明:

□



# 第 8 章 微分学的应用



◆ 题目 8.0.1:

☞ 证明:

☐

◆ 题目 8.0.2:

✎ 解:

☐

◆ 题目 8.0.3:

☞ 证明:

☐

◆ 题目 8.0.4:

☞ 证明:

☐



## 第 9 章 不定积分



## 第 10 章 定积分



## 第 11 章 积分学的应用



## 第 12 章 广义积分



### 12.1 第二组参考题

1. 设  $p > 0$ , 定义

$$g(x) = \begin{cases} p\left[\frac{x}{p}\right] + \frac{p}{2}, & x \geq 0 \\ -g(-x), & x < 0 \end{cases}$$

证明: 对所有  $x$  成立

$$\frac{p}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=-[x/p]}^{[x/p]} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})pt}{\sin \frac{1}{2}pt} \cdot \frac{\sin xt}{t} dt = \frac{1}{2}[g(x^+) + g(x^-)]$$

首先,  $x = 0$  时, 结论是成立; 又因为结论中的等式, 左右两边都是  $x$  的奇函数, 所以我们只需考虑  $x > 0$  的情形.

其次, 我们有

$$\sum_{n=-[\frac{x}{p}]}^{[\frac{x}{p}]} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})pt}{2 \sin \frac{1}{2}pt} = \frac{\sin\left(\left[\frac{x}{p}\right] + \frac{1}{2}\right)pt}{2 \sin \frac{1}{2}pt} = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{[\frac{x}{p}]} \cos kpt.$$

因此, 结论中等式的左边当  $x \neq mp$  ( $m \in \mathbb{Z}^+$ ) 时, 等于

$$\begin{aligned} & \frac{p}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{[\frac{x}{p}]} \cos kpt \right) \cdot \frac{\sin xt}{t} dt \\ &= \frac{p}{\pi} \left( \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin xt}{t} dt + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{[\frac{x}{p}]} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(x + kp)t + \sin(x - kp)t}{t} dt \right) \quad (12.1) \\ &= g(x). \end{aligned}$$

上面的推导中, 我们用到了积分等式:

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}.$$

如果  $x = mp$  ( $m \in \mathbb{Z}^+$ ), 则只需在(12.1)式中, 将对应于  $[\frac{x}{p}]$  的求和项中的被积函数, 替换为  $\frac{\sin 2xt}{t}$  即可. 此时, 计算结果为:

$$x + \frac{p}{4} = \frac{1}{2}(g(x+0) + g(x-0)).$$

## 第 13 章 数项级数



## 第 14 章 函数项级数与幂级数



## 第 15 章 Fourier 级数



## 第 16 章 无穷级数的应用



### 16.1 积分计算

### 16.2 级数求和计算

◆ 题目 16.2.1: 设已知  $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = A$ ,  $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = B$ , 证明:  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  收敛并求其和.

解: 显然有

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 2 \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = 2B - A.$$

□

◆ 题目 16.2.2: 设  $P(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_mx^m$  为  $m$  次多项式, 求级数  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!}$  的和.

解: 事实上,

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^k}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{k-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^{k-1}}{n!} \\ &= b_{k-1} + C_{k-1}^1 b_{k-2} + \cdots + C_{k-1}^{k-2} b_1 + b_0, \end{aligned}$$

其中  $b_0 = e$ . 由此得到的数叫 Bell 数, 记为  $B_n$ , 并且

$$B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{B(n)}{n!} x^n = e^{e^x - 1}.$$

回到原题, 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{P(n)}{n!} = e \sum_{k=0}^m a_k B_k.$$

□

◆ 题目 16.2.3: 求  $1 - \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} - \frac{4^3}{3!} + \cdots$  的和.

解: 事实上,

$$\begin{aligned} b_k &= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{n^k}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{k-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{(n+1)^{k-1}}{n!} \\ &= -b_{k-1} - C_{k-1}^1 b_{k-2} - \cdots - C_{k-1}^{k-2} b_1 - b_0, \end{aligned}$$

其中  $b_0 = 1/e$ . 因此  $b_1 = -1/e, b_2 = 0, b_3 = 1/e$ .

因此

$$1 - \frac{2^3}{1!} + \frac{3^3}{2!} - \frac{4^3}{3!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(n+1)^3}{n!}$$



$$=b_3+3b_2+3b_1+b_0=-\frac{1}{e}.$$

□

◆ 题目 16.2.4: 求下列级数的和: (1)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2}$ ; (2)  $\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2}$ .

✎ 解: 事实上

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{1}{2n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \arctan \frac{1}{2n-1} - \arctan \frac{1}{2n+1} \right) = \frac{\pi}{4}.$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \arctan \frac{2}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \arctan \frac{1}{n-1} - \arctan \frac{1}{n+1} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}.$$

□

◆ 题目 16.2.5: 设  $a > 1$ , 求  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n} + 1}$  的和.

✎ 解: 事实上

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n} + 1} &= \frac{1}{a+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n} + 1} = \frac{1}{a+1} - \frac{1}{a-1} + \frac{1}{a+1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n} + 1} \\ &= \frac{1}{a+1} - \frac{2}{a^2-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n} + 1} = \frac{1}{a+1} - \frac{2^2}{a^{2^2}-1} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{a^{2^n} + 1} \\ &= \frac{1}{a+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}} - 1} = \frac{1}{a+1}. \end{aligned}$$

□

◆ 题目 16.2.6: 求  $1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \dots$  的和.

✎ 解:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{8n-7} + \frac{1}{8n-5} - \frac{1}{8n-3} - \frac{1}{8n-1} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^{8n-8} + x^{8n-6} - x^{8n-4} - x^{8n-2}) \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (x^{8n-8} + x^{8n-6} - x^{8n-4} - x^{8n-2}) dx = \int_0^1 \frac{1+x^2-x^4-x^6}{1-x^8} dx \\ &= \frac{\arctan(1+\sqrt{2}x) - \arctan(1-\sqrt{2}x)}{\sqrt{2}} \Big|_0^1 = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

□

◆ 题目 16.2.7: 求  $1 - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{15} + \dots$  的和.

✎ 解:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{8n-7} - \frac{1}{8n-1} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^{8n-8} - x^{8n-2}) \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (x^{8n-8} - x^{8n-2}) dx = \int_0^1 \frac{1-x^6}{1-x^8} dx \\ &= \frac{2 \arctan x + \sqrt{2} \arctan(1+\sqrt{2}x) - \arctan(1-\sqrt{2}x)}{4} \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{2}+1}{8} \pi. \end{aligned}$$



□

◆ 题目 16.2.8: 求  $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \cdots$  的和.

✎ 解:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{6n-5} - \frac{1}{6n-2} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^{6n-6} - x^{6n-3}) \\ &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (x^{6n-6} - x^{6n-3}) dx = \int_0^1 \frac{1-x^3}{1-x^6} dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x^3} dx \\ &= \left( -\frac{1}{6} \ln(x^2-x+1) + \frac{1}{3} \ln(x+1) + \frac{\arctan \frac{2x-1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}} \right) \Big|_0^1 = \frac{\sqrt{3}\pi + 3\ln 2}{9}. \end{aligned}$$

□

◆ 题目 16.2.9: 设  $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n = 1, 2, \cdots$ , 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)}$  的和.

✎ 解:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n(n+1)} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n(n+1)} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}}{n} - \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}}{n+1} \right) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2} \\ &= 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}}{n+1} + \left( \frac{\pi^2}{6} - 1 \right) = \frac{\pi^2}{6} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+2}{1} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

□

◆ 题目 16.2.10: 求  $\sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2} \right)$  的和.

✎ 解:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left( \frac{1}{4n+1} + \frac{1}{4n+3} - \frac{1}{2n+2} \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 (x^{4n} + x^{4n+2} - x^{2n+1}) \\ &= \int_0^1 \sum_{n=0}^{\infty} (x^{4n} + x^{4n+2} - x^{2n+1}) dx = \int_0^1 \left( \frac{1+x^2}{1-x^4} - \frac{x}{1-x^2} \right) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = \ln 2. \end{aligned}$$

□

◆ 题目 16.2.11: 求  $1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{14} + \cdots$  的和.

✎ 解:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{5n-4} - \frac{1}{5n-1} \right) &= \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 (x^{5n-5} - x^{5n-2}) dx = \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} (x^{5n-5} - x^{5n-2}) dx \\ &= \int_0^1 \frac{1-x^3}{1-x^5} dx = \int_0^1 \left( \frac{(5-\sqrt{5})/10}{x^2 + \frac{\sqrt{5}+1}{2}x + 1} + \frac{(5+\sqrt{5})/10}{x^2 + \frac{-\sqrt{5}+1}{2}x + 1} \right) dx \end{aligned}$$



$$= \left[ \frac{5-\sqrt{5}}{10} \sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}} \arctan \frac{4x+\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} + \frac{5+\sqrt{5}}{5} \sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}} \arctan \frac{4x-\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \right] \Big|_0^1$$

$$= \frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{25} \pi.$$

□

◆ 题目 16.2.12: 求  $\frac{x^3}{3!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{15}}{15!} + \cdots$  的和函数.

解: 事实上, 方程  $\omega^3 = 1$  有三个根  $1, -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2}, -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2}$ . 利用  $\sinh$  便可得到所需函数

$$\frac{\sinh x + \sinh \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) x + \sinh \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) x}{3}$$

$$= -\frac{2}{3} \sinh \frac{x}{2} \cos \frac{\sqrt{3}x}{2} + \frac{\sinh x}{3} = \frac{x^3}{3!} + \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{15}}{15!} + \cdots.$$

我们还有

$$\frac{\sin x + \sin \left( -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) x + \sin \left( -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}i}{2} \right) x}{-3}$$

$$= \frac{2}{3} \sin \frac{x}{2} \cosh \frac{\sqrt{3}x}{2} - \frac{\sin x}{3} = \frac{x^3}{3!} - \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{15}}{15!} - \frac{x^{21}}{21!} + \cdots.$$

□

◆ 题目 16.2.13: 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!} (2x)^{2n}$  的和函数.

解: 在  $|x| < 1$  上对  $S(x)$  逐项求导, 知  $S'(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!} (2x)^{2n-1}$ , 且  $S''(x) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[(n-1)!]^2}{(2n-2)!} (2x)^{2n-2}$ .

由此可得  $(1-x^2)S''(x) - xS'(x) = 4$ . 在两端乘以  $(1-x^2)^{-1/2}$ , 我们有

$$\left( \sqrt{1-x^2} S'(x) \right)' = \frac{4}{\sqrt{1-x^2}},$$

故

$$S(x) = \frac{4 \arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

□

◆ 题目 16.2.14: 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$  的和函数.

解: 注意到

$$\left( 1 - \frac{1}{x} \right) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1} - x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \frac{1}{1-x^{n+1}} - \frac{1}{1-x^n} \right)$$



$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{1-x^{n+1}} - \frac{1}{1-x} = \begin{cases} \frac{1}{x-1}, & |x| > 1 \\ \frac{x}{x-1}, & |x| < 1 \end{cases}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})} = \begin{cases} \frac{x}{(x-1)^2}, & |x| > 1 \\ \frac{x^2}{(x-1)^2}, & |x| < 1 \end{cases}.$$

□

◆ 题目 16.2.15: 设  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$  为发散的级数,  $x > 0$ , 求  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_2 + x) \cdots (a_{n+1} + x)}$  的和函数.

解: 首先,

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_2 + x) \cdots (a_{n+1} + x)} \\ &= \frac{a_1}{a_2 + x} + \frac{1}{x} \sum_{n=2}^{\infty} \left[ \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_2 + x) \cdots (a_n + x)} - \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{(a_2 + x) \cdots (a_{n+1} + x)} \right] \\ &= \frac{a_1}{a_2 + x} + \frac{1}{x} \left[ \frac{a_1 a_2}{a_2 + x} - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{(a_2 + x) \cdots (a_{n+1} + x)} \right]. \end{aligned}$$

当  $n$  足够大时,

$$1 + \frac{x}{a_{n+1}} \sim e^{x/a_{n+1}}.$$

因此  $\left(1 + \frac{x}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{a_{n+1}}\right)$  与  $\exp \left\{ x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n} \right\}$  具有相同的收敛性, 均发散, 故

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_{n+1}}{(a_2 + x) \cdots (a_{n+1} + x)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1}{\left(1 + \frac{x}{a_2}\right) \cdots \left(1 + \frac{x}{a_{n+1}}\right)} = 0.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_1 a_2 \cdots a_n}{(a_2 + x) \cdots (a_{n+1} + x)} = \frac{a_1}{a_2 + x} + \frac{a_1 a_2}{x(a_2 + x)} = \frac{a_1}{x}.$$

□

◆ 题目 16.2.16: 设  $x > 1$ , 求  $\frac{x}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \cdots$  的和函数.

解:

$$\begin{aligned} I &= \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \cdots \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{x+1} + \frac{x^2}{(x+1)(x^2+1)}\right) + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{(x+1)(x^2+1)} + \frac{x^4}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \cdots \\ &= 1 - \frac{1}{(x+1)(x^2+1)(x^4+1)} + \cdots \\ &= \cdots = 1 - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{(x+1)(x^2+1) \cdots (x^{2^{n-1}}+1)} = 1. \end{aligned}$$

□



## 第 17 章 高维空间的点集与基本定理



## 第 18 章 多元函数的极限与连续



## 第 19 章 偏导数与全微分



## 第 20 章 隐函数存在定理与隐函数求导





## 第 21 章 偏导数的应用



## 第 22 章 重积分



## 第 23 章 含参量积分



### 23.1 含参量常义积分

### 23.2 含参量广义积分

❖ 题目 23.2.1:

(1) 讨论下列广义积分的一致收敛性:

$$(2) \int_0^{+\infty} e^{-(1+a^2)t} \sin t dt, \quad a \in (-\infty, +\infty);$$

$$(3) \int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x+y}} dx, \quad y \in [y_0, +\infty), \text{ 其中 } y_0 > 0;$$

$$(4) \int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx, \quad t \in (0, +\infty);$$

$$(5) \int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx, \quad \alpha \in [0, +\infty);$$

$$(6) \int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2} dx, \quad y \in (-\infty, +\infty);$$

$$(7) \int_0^{+\infty} x \ln x e^{-t\sqrt{x}} dx, \quad (1) t \in [t_0, +\infty), \text{ 其中 } t_0 > 0, \quad (2) t \in (0, +\infty);$$

$$(8) \int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-ut}}{t} \cos t dt, \quad u \in [0, 1];$$

$$(9) \int_0^{+\infty} \frac{\alpha t}{1+\alpha^2+t^2} \cdot e^{-\alpha^2 t^2} \cos \alpha^2 t^2 dt, \quad \alpha \in (0, +\infty);$$

$$(10) \int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin y dy, \quad x \in (0, +\infty);$$

$$(11) \int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1+\alpha^2 x^2}, \quad \alpha \in (0, 1);$$

$$(12) \int_0^2 \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}} dx, \quad |t| < \frac{1}{2};$$

$$(13) \int_0^1 (1-x)^{u-1} dx, \quad (1) u \in [a, +\infty), \text{ 其中 } a > 0, \quad (2) u \in (0, +\infty).$$

✎ 解:

(1) 一致收敛. 由于

$$\left| e^{-(1+a^2)t} \sin t \right| \leq e^{-t}, \quad 0 \leq t < +\infty, -\infty < a < +\infty,$$

而  $\int_0^{+\infty} e^{-t} dt = 1$  收敛, 由 Weierstrass 判别法知,  $\int_0^{+\infty} e^{-(1+a^2)t} \sin t dt$  在  $(-\infty, +\infty)$  上一致收敛.

(2) 一致收敛. 由于

$$\left| \int_0^A \cos xy dx \right| = \left| \frac{\sin Ay}{y} \right| \leq \frac{1}{y} \leq \frac{1}{y_0}, \quad A \geq 0, y \geq y_0,$$

因此它在  $[y_0, +\infty)$  一致有界. 而  $1/\sqrt{x+y}$  是  $x$  的单调减少函数且  $0 < 1/\sqrt{x+y} \leq 1/\sqrt{x+y_0}$ , 而  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+y_0}} = 0$ , 故这个极限关于  $y$  在  $[y_0, +\infty)$  上是一致的. 于是由 Dirichlet 判别法知  $\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x+y}} dx$  在  $[y_0, +\infty)$  上一致收敛.

(3) 非一致收敛. 对于正整数  $n$ , 取  $t_n = \frac{1}{n^2}$ , 这时

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{2n} e^{-t_n x^2} dx \right| &= \int_n^{2n} e^{-\frac{1}{n^2} x^2} dx > \int_n^{2n} e^{-\frac{1}{n^2} (2n)^2} dx \\ &= \int_n^{2n} e^{-4} dx = e^{-4} n \geq e^{-4}. \end{aligned}$$

因此, 只要取  $\varepsilon_0 = e^{-4}$ , 则对于任意大的正数  $A_0$ , 总存在正整数  $n$  满足  $n > A_0$ , 及  $t_n = 1/n^2 \in (0, +\infty)$ , 使得  $\left| \int_n^{2n} e^{-t_n x^2} dx \right| > e^{-4} = \varepsilon_0$ . 由 Cauchy 收敛原理的推论可知  $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2} dx$  关于  $t$  在  $(0, +\infty)$  上非一致收敛.

(4)  $\int_1^A \cos x dx$  显然有界,  $1/\sqrt{x}$  在  $[1, +\infty)$  上单调且  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$ , 由 Dirichlet 判别法,  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$  收敛, 它当然关于  $\alpha$  一致收敛. 显然  $e^{-\alpha x}$  关于  $x$  单调, 且

$$0 \leq e^{-\alpha x} \leq 1, \quad 0 \leq \alpha < +\infty, 1 \leq x < +\infty,$$

即  $e^{-\alpha x}$  一致有界. 由 Abel 判别法,  $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x} \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx$  在  $[0, +\infty)$  上一致收敛.

(5) 不一致收敛. 注意到  $J(A) = \int_A^{2A} e^{-(x-y)^2} dx = \int_{A-y}^{2A-y} e^{-u^2} du$ , 并让  $y$  取  $A$  值, 则得

$$J(A) = \int_0^A e^{-u^2} du \rightarrow \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du \quad (A \rightarrow +\infty), \text{ 即 } J(A) \text{ 在 } A \rightarrow +\infty \text{ 时不趋于 } 0.$$

(6) 先证明  $\int_0^{+\infty} x \ln x e^{-t\sqrt{x}} dx$  在  $[t_0, +\infty)$  ( $t_0 > 0$ ) 上一致收敛. 由于

$$\left| x \ln x e^{-t\sqrt{x}} \right| \leq |x \ln x| e^{-t_0\sqrt{x}}, \quad 0 \leq x < +\infty, t_0 \leq t < +\infty,$$



而  $\int_0^1 x \ln \frac{1}{x} e^{-t_0 \sqrt{x}} dx$  与  $\int_1^{+\infty} x \ln x e^{-t_0 \sqrt{x}} dx$  均收敛, 由 Weierstrass 判别法知,  $\int_0^{+\infty} x \ln x e^{-t \sqrt{x}} dx$  在  $[t_0, +\infty)$  上一致收敛.

再证明  $\int_0^{+\infty} x \ln x e^{-t \sqrt{x}} dx$  在  $(0, +\infty)$  上非一致收敛. 对于正整数  $n$ , 取  $t_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$ , 这时

$$\begin{aligned} \left| \int_n^{2n} x \ln x e^{-t_n \sqrt{x}} dx \right| &= \left| \int_n^{2n} x \ln x e^{-\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{x}} dx \right| \\ &> n \ln n \int_n^{2n} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{x}} dx > n \ln n \int_n^{2n} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}} \sqrt{2n}} dx \\ &= n^2 \ln n \cdot e^{-\sqrt{2}} \geq 4 \ln 2 \cdot e^{-\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

因此, 只要取  $\varepsilon_0 = 4 \ln 2 \cdot e^{-\sqrt{2}}$ , 则对于任意大的正数  $A_0$ , 总存在正整数  $n$  满足  $n > A_0$ , 及  $y_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \in (0, +\infty)$ , 使得  $\left| \int_n^{2n} x \ln x e^{-t_n \sqrt{x}} dx \right| > 4 \ln 2 \cdot e^{-\sqrt{2}} = \varepsilon_0$ . 由 Cauchy 收敛原理的推论知  $\int_0^{+\infty} x \ln x e^{-t \sqrt{x}} dx$  关于  $t$  在  $(0, +\infty)$  上非一致收敛.

(7) 一致收敛. 由于  $\int_1^{+\infty} \frac{\cos t}{t} dt$  收敛, 它当然关于  $u$  一致收敛. 显然  $1 - e^{-ut}$  关于  $t$  单调, 且

$$0 \leq 1 - e^{-ut} \leq 1, \quad 0 \leq u \leq 1, 1 \leq t < +\infty,$$

即  $1 - e^{-ut}$  一致有界. 由 Abel 判别法,  $\int_1^{+\infty} \frac{1 - e^{-ut}}{t} \cos t dt$  在  $[0, 1]$  上一致收敛.

(8) 一致收敛. 由于

$$\left| \int_0^A \alpha t \cdot e^{-\alpha^2 t^2} \cos \alpha^2 t^2 dt \right| \leq \int_0^A \alpha t \cdot e^{-\alpha^2 t^2} dt = \frac{1 - e^{-\alpha^2 A^2}}{2\alpha},$$

且

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{1 - e^{-\alpha^2 A^2}}{2\alpha} = 0, \quad \lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-\alpha^2 A^2}}{2\alpha} = 0,$$

因此它在  $(0, +\infty)$  一致有界, 而  $\frac{1}{1 + \alpha^2 + t^2}$  是  $x$  的单调减少函数且  $\frac{1}{1 + \alpha^2 + t^2} \leq \frac{1}{1 + t^2}$ ,  $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{1 + t^2} = 0$ , 因此  $\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + \alpha^2 + t^2} = 0$  关于  $\alpha$  在  $(0, +\infty)$  上是一致的, 于是由 Dirichlet 判别法知  $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha t}{1 + \alpha^2 + t^2} \cdot e^{-\alpha^2 t^2} \cos \alpha^2 t^2 dt$  在  $(0, +\infty)$  上一致收敛.

(9) 非一致收敛. 对于正整数  $n$ , 取  $x_n = \frac{1}{\sqrt{1 + (2n+1)^2 \pi^2}}$ , 这时

$$\begin{aligned} \left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x_n^2(1+y^2)} \sin y dy \right| &= \left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-\frac{1}{1+(2n+1)^2 \pi^2} (1+y^2)} \sin y dy \right| \\ &> \frac{1}{e} \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} \sin y dy = \frac{2}{e}. \end{aligned}$$

因此, 只要取  $\varepsilon_0 = 2/e$ , 则对于任意大的正数  $A_0$ , 总存在正整数  $n$  满足  $2n\pi > A_0$ , 及  $y_n = \frac{1}{\sqrt{1 + (2n+1)^2 \pi^2}} \in (0, +\infty)$ , 使得  $\left| \int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x_n^2(1+y^2)} \sin y dy \right| > \frac{2}{e} = \varepsilon_0$ . 由

Cauchy 收敛原理的推论知  $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)} \sin y dy$  关于  $x$  在  $(0, +\infty)$  上非一致收敛.



(10) 非一致收敛. 对于任意取定的正数  $A$ , 由于

$$\int_A^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1 + \alpha^2 x^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(\alpha A),$$

取  $\alpha = \frac{1}{A}$ , 则有

$$\int_A^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1 + \alpha^2 x^2} = \int_A^{+\infty} \frac{\frac{1}{A}}{1 + \frac{x^2}{A^2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

因此  $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1 + \alpha^2 x^2}$  在  $(0, 1)$  上不一致收敛.

(11) 一致收敛. 见周民强 207 页. 利用当  $0 < x < 1$  时, 我们有

$$0 \leq \left| \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}} \right| < \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}.$$

当  $1 < x < 2$  时, 有

$$0 \leq \left| \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}} \right| < \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}.$$

因此有

$$\int_0^2 \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}} dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{(1-x)(2-x)}} dx + \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx.$$

注意到下列渐近估计

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{(1-x)(2-x)}} &= O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), x \rightarrow 0^+, \\ \frac{1}{\sqrt{x} \sqrt[3]{(1-x)(2-x)}} &= O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right), x \rightarrow 1, \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} &= O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right), x \rightarrow 1, \\ \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} &= O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}\right), x \rightarrow 2, \end{aligned}$$

可知右端积分均收敛. 由 Weierstrass 判别法可知, 原积分关于  $|t| < 1/2$  一致收敛.

(12) 先证明  $\int_0^1 (1-x)^{u-1} dx$  在  $[a, +\infty)$  ( $a > 0$ ) 上一致收敛. 由于

$$(1-x)^{u-1} \leq (1-x)^{a-1}, \quad 0 \leq x \leq 1, a \leq u < +\infty,$$

而  $\int_0^1 (1-x)^{a-1} dx = \frac{1}{a}$  收敛, 由 Weierstrass 判别法知,  $\int_0^1 (1-x)^{u-1} dx$  在  $[a, +\infty)$  上一致收敛.

再证明  $\int_0^1 (1-x)^{u-1} dx$  在  $(0, +\infty)$  上非一致收敛. 对于任意取定的正数  $A$  且  $A \rightarrow 0$ , 由于

$$\int_A^1 (1-x)^{u-1} dx = \frac{1}{A},$$



取  $u = A \in (0, +\infty)$ , 当  $A$  足够小时, 我们有

$$\int_A^1 (1-x)^{u-1} dx = \frac{(1-A)^u}{u} = \frac{(1-A)^A}{A} > 1.$$

因此  $\int_0^1 (1-x)^{u-1} dx$  在  $(0, +\infty)$  上非一致收敛.

□

◆ 题目 23.2.2: 设  $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x) dx$  当  $\lambda = a, \lambda = b$  时收敛 ( $a < b$ ). 证明  $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x) dx$  当  $\lambda = a, \lambda = b$  关于  $\lambda \in [a, b]$  一致收敛.

✎ 解: 这题来自菲哥第二册 P577. 积分  $\int_0^1 x^a f(x) dx$  是收敛的, 而  $x^{\lambda-a}$  对于  $\lambda \geq a$  的值是  $x$  的单调函数, 并以 1 为界. 因此积分

$$\int_0^1 x^\lambda f(x) dx = \int_0^1 x^{\lambda-a} \cdot x^a f(x) dx$$

关于  $\lambda$  一致收敛. 类似地可以看出以下积分

$$\int_1^{+\infty} x^\lambda f(x) dx = \int_1^{+\infty} x^{\lambda-b} \cdot x^b f(x) dx,$$

关于  $\lambda \leq b$  一致收敛. 因此原积分一致收敛.

□

◆ 题目 23.2.3: 证明积分  $\int_0^{+\infty} x e^{-xy} dy$  在  $(0, +\infty)$  上不一致收敛.

✎ 解: 对于任意取定的正数  $A$ , 由于

$$\int_A^{+\infty} x e^{-xy} dy = e^{-Ax},$$

取  $x = \frac{1}{A} \in (0, +\infty)$ , 则有

$$\int_A^{+\infty} x e^{-xy} dy = \frac{1}{e}.$$

因此  $\int_0^{+\infty} x e^{-xy} dy$  在  $(0, +\infty)$  上不一致收敛.

□



## 第 24 章 曲线积分





## 第 25 章 曲面积分



## 第 26 章 场论初步



## 参考文献

