数 学 分 析 讲 义

(第 二 册)

(2009 年试用本)

对第二册的说明

第二册的内容有三部分: 积分、极限续论和级数.

1. 第一部分是一元积分学, 其中包含四章, 即第九–十二章, 内容分别为不定积分、定积分、广义积分和积分学的应用.

   (1) 第九章不定积分完全是计算, 其中只包含最为基本的计算方法, 为应用 Newton–Leibniz 公式作好准备.

   (2) 第十章定积分是一元积分学的核心部分. 除了常规的必要内容之外, 在 §10.2 中的最后两个小节中介绍了零测度集, 几乎处处连续函数与 Lebesgue 定理. 其中前两个概念对于第三册中的重积分也是需要的. 关于 Lebesgue 定理的证明可以根据情况作出取舍. 书中考虑到不讲这部分内容时不影响其他内容和绝大多数练习题的完成.

   (3) 第十一章在定积分基础上对变动积分限取极限得到广义积分. 这一章的内容与第一册的函数极限有较密切联系, 同时其中的许多概念和判别法在今后的无穷级数和含参变量积分中将会多次重现.

   (4) 第十二章是积分学的应用. 由于积分就是连续量求和, 因此该章的前 4 节就是用统一的方法解决面积、弧长、体积、旋转体侧面积和一系列物理量的计算. 后两节为积分的近似计算和两个重要公式的证明, 它们也可以放在第十章后面学习. 这一章还有一个有关科学史的附录, 供选用.

2. 第二部分是极限续论, 只含一章: 第十三章.

   (1) 第十三章的前两节是对第一册中的数列极限的补充. §13.1 的上极限和下极限概念是对于第一册数列极限理论的补充, §13.2 的压缩映射原理和 Newton 求根法是迭代生成数列的两个应用. 这些都是数学分析中应当要学的内容, 为了减轻第一册的负担, 才移后到这里讲.

   (2) §13.3 用于对实数系作通俗介绍, 并列出可以进一步阅读的文献资料. 这样的安排是因为要确切理解实数理论需要相当的数学修养, 或者说数学思维的成熟性. 对于刚从中学毕业的读者来说, 立即学习和掌握实数理论是有很大困难的. 同时在实数理论中如何构造实数的方法对于学习数学分析本身来说也是非必要的. 因此本书在第一册的 §1.2 中只强调指出实数系与有理数系之间的区别在于实数系有连续性, 而有理数系则没

有连续性, 然后引入连续性原理作为出发点. 到第二册中时读者已经学习了 6 个实数系基本定理, 它们的等价性证明即将完成, 同时还在代数课程中学到了等价关系、同构等概念, 这样就有较好的数学修养来理解与实数系有关的许多问题. 这一节的附录对如何具体构造实数系作介绍, 供参考.

3. 第三部分是无穷级数, 其中含三章, 即第十四–十六章, 内容为数项级数、函数项级数与幂级数、Fourier 级数.

   无穷级数一方面与数列极限密切有关, 可以看成是对离散变量极限的进一步研究, 另一方面又与定积分密切相关. 积分是连续求和, 级数就是离散求和. 它们在方法上是相通的.

   (1) 第十四章是数项级数, 其中的项可以是具体的数值, 也可以含有参数, 但并不作为函数处理. 这里的结果非常多. 就判别法来说, 本书只列举最基本的几个判别法, 连 Raabe 判别法等都未收入. 注意: 这一章中的敛散性判别法可以和第十一章关于广义积分的敛散性判别法对照起来学习, 在两者之间有非常多的相似性.

   (2) 第十五章前三节是函数项级数的一般性理论, 它的后两节和第十六章分别介绍两类最重要的函数项级数——幂级数和 Fourier 级数. 它们自己的独特个性, 都有极其广泛的应用. 对于今后其他课程的学习非常重要.

   (3) 第十五章最后有一个附录, 对于如何得到 Euler 公式和复数方法作介绍, 供参考.

最后说明, 本书所收的绝大多数练习题都属于最低水平, 即为了掌握正文的内容所必须的基础训练题. 考虑到本书与 [25] 配套使用, 在该书中已经提供了有一定难度的许多练习题与参考题, 包括大量的考研题在内, 因此在本册的每章后不再设置总练习题或参考题.

编者　谢惠民

2009 年 1 月 1 日

后记　由于在付印前没有足够的时间对本册做全面校对, 因此必然会有比第一册更多的错误, 特此致歉. 敬请读者斧正, 以便今后修订时改进.

目　　录

插图目录

第九章 不定积分

内容简介 这一章学习计算不定积分的一些常用方法. 在 §9.1 从面积计算问题引入求导数运算的逆运算, 即求原函数与不定积分. §9.2 介绍计算不定积分的换元法和分部积分法. §9.3 提出不定积分的可积概念, 并介绍几类基本的可积函数类及其计算方法.

§9.1 求导数的逆运算

9.1.1 曲边梯形的面积计算问题

正如微分学中的导数概念来自于求运动的变化率 (即速度) 和曲线的切线等问题, 积分学起源于求平面图形的面积和立体形体的体积等问题. 因此我们从面积计算问题谈起.

虽然我们很早就学了圆面积公式 (以及圆周长公式), 但在初等数学中无法考虑由曲线围成的一般平面图形 (包括圆在内) 的面积计算问题, 对于圆面积公式也不能作出严格的证明. 这些问题的解决需要有全新的思想和工具, 这就是从本章开始学习的积分学.

如图 9.1 所示, 考虑曲边梯形的面积计算问题. 设有连续函数 $f \in C[a,b]$, 且 $f(x) > 0 \, \forall x \in [a,b]$. 该图中的曲边梯形就是由下列点集定义的平面图形:

$$\{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$

由于对一般平面图形的面积概念要到第三册的重积分一章中解决, 目前先假定这类曲边梯形的面积是有意义的, 并将其面积记为 S.

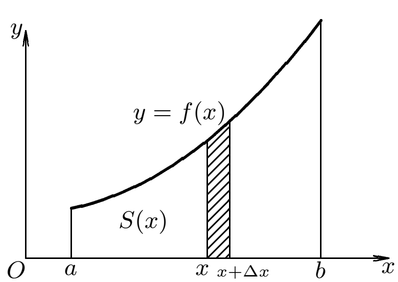


图 9.1: 求曲边梯形面积的嵌入法

在积分学中的方法是取 $x \in [a,b]$, 过点 $(x,0)$ 作平行于 y 轴的直线, 得到以 $[a,x]$ 为底边的曲边梯形

$$\{(t,y) \mid a \leqslant t \leqslant x,\, 0 \leqslant y \leqslant f(t)\}.$$

显然, 这个曲边梯形的面积是 x 的函数, 它在区间 $[a,b]$ 上有定义, 记为 $S(x)$. 若能求出这个函数, 则在其中令 $x=b$ 就得到原问题的解 $S=S(b)$.

上面所说的就是一种嵌入法. 原来的问题只是求以 $[a,b]$ 为底边的一个曲边梯

形的面积, 现在的问题是求以 $[a,x]\ \ (a\leqslant x\leqslant b)$ 为底边的无穷多个曲边梯形的面积. 这样就将求一个特定数值的问题转变成求一个函数 $S(x)$, 在求出这个函数之后 (若真的能够求出的话), 令 $x=b$ 代入即可.

第一次接触到嵌入法的读者可能会认为这种方法有将简单问题复杂化的嫌疑. 其实不然, 对于曲边梯形面积问题来说, 正因为将一个特殊问题放到更广泛的一个框架中去, 从而可以引进变量, 将静态问题转化为动态问题, 并联系到前面已经学过的微分学方法来解决原问题. 当然, 嵌入法是一种有启发性的思想方法, 或者说是一种科学方法. 这里的曲边梯形面积问题只是它的一个应用实例罢了.

现在如图 9.1 中所示, 同时考虑 $S(x)$, $S(x+\Delta x)$ 以及它们之差. (图中为了确定起见对 Δx 取正数, 但当然也可以取负数.) 这时可以发现

$$\Delta S=S(x+\Delta x)-S(x)\approx f(x)\Delta x,$$

于是有

$$\frac{\Delta S}{\Delta x}\approx f(x).$$

从图上不难猜测到, 若 f 连续, 则就有可能成立

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=S'(x)=f(x). \tag{9.1}$$

由于面积 $S(x)$ 的定义问题还没有解决, 因此严格证明 (9.1) 成立的问题要到下一章中解决. 然而从计算的角度来看, 只要承认 $S(x)$ 有意义, 且承认 (9.1) 成立, 则问题就归结为如何求出导函数等于 $f(x)$ 的函数 $S(x)$. 这就是这一章中要介绍的内容, 即不定积分的计算问题.

从本书第一册的定理 7.12 (即所谓不定积分基本定理) 知道, 在 f 连续时, 满足 $S'(x)=f(x)$ 的 $S(x)$ 若存在则一定不惟一, 同时又只能是彼此相差一个常数的函数. 其中哪一个才是我们所要求的呢? 从图 9.1 可见, 这就是满足条件 $S(a)=0$ 的那一个. 这时原问题中以 $[a,b]$ 为底边的曲边梯形面积就是 $S=S(b)$.

例题 9.1 求由抛物线 $y=x^2$, $y=0$, $x=1$ 所围成的曲边三角形的面积 S.

解 如图 9.2 所示, 用嵌入法定义的函数 $S(x)$ 是图中用阴影线画出的曲边三角形面积, $0\leqslant x\leqslant 1$. 求出满足 $S'(x)=x^2$ 的所有解. 根据定理 7.12 知道有 $S(x)=\dfrac{1}{3}x^3+C$, 其中 C 待定. 利用条件 $S(0)=0$ 可定出 $C=0$, 于是所求面积为 $S=S(1)=\dfrac{1}{3}$. □

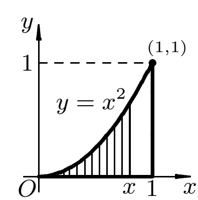


图 9.2: 抛物线 $y=x^2$ $(0\leqslant x\leqslant 1)$ 下的面积

注 这虽然只是个简单例子, 但在古希腊时代只有像 Archimedes 这样的数学家才能解决这类面积问题, 而且他的方法也难以推广 [12, 15, 18].

现在举一个简单的运动学问题, 其中的问题与曲边梯形面积问题从数学上看是相同的.

例题 9.2 设在地面附近的一个质点从某点开始以初速 v_0 在重力作用下垂直下落, 求到时刻 t 时所经过的路程 $s=s(t)$.

解 在起始点处取垂直向下的坐标轴, 记 $s_0=0$. 根据速度和加速度与路程的关系有 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v(t)$, $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g$, 其中 g 为重力加速度常数.

从 $\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}=g$ 得到 $v(t)=gt+C$, 其中 C 为待定常数. 根据 $v(0)=v_0$ 可确定常数 $C=v_0$, 于是得到 $v(t)=gt+v_0$.

然后再从 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v(t)=gt+v_0$ 可以得到 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t+C_1$, 其中 C_1 为待定常数. 从 $s(0)=s_0=0$ 可确定 $C_1=0$, 因此就得到 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2+v_0t$. □

小结 从前面的讨论和两个例题可见问题就是求解 (9.1). 可以将它看成是关于未知函数 $S(x)$ 的一个方程. 由于在这种方程中出现导数, 因此称为微分方程. (9.1) 就是最简单的微分方程. 与第六章求导数问题比较, 这里是给定导数后求原来的函数, 因此我们将这样的计算问题称为求导数运算的逆运算. 容易看出这个逆运算与第六章中的求导公式和法则会有密切联系.

9.1.2 原函数与不定积分

定义 9.1 设 f 于区间 I 上定义. 若有在 I 上定义的函数 F, 它在区间 I 上处处满足 $F'(x)=f(x)$, 则称 F 为 f 在区间 I 上的一个原函数.

从可导蕴含连续可知, 在区间上的原函数必定是连续函数.

关于原函数有三个基本问题.

第一个问题是原函数的存在性问题, 即对于在一个区间上给定的函数 f, 是否存在原函数?

这不是一个很简单的问题, 有待到下一章中再讨论. 这里只指出, 如第一册的定理 7.10 所示, 若 f 在一个区间上有第一类间断点, 则它在这个区间上不可能有原函数. 同时, 例题 7.11 则表明, 在一个区间上有第二类间断点的函数仍然可以在这个区间上有原函数.

第二个问题是: 若存在原函数, 则是否惟一? 如不惟一, 则在各个原函数之间有什么关系?

如前所说, 这个问题已在定理 7.12 中得到解决. 在那里我们就已经将它称为不定积分基本定理. 它告诉我们, 若 F 是 f 在某个区间上的一个原函数, 则 $F+C$ 是 f 的全部原函数, 其中 C 是任意常数.

从几何上看, 集合 $F(x)+C$ 就是将某一个原函数 F 的图像在 y 轴方向作平行移动所得到的曲线全体. 对于固定的自变量, 各个曲线的对应点上的切线斜率相等 (参见图 9.3).

由此提出以下概念.

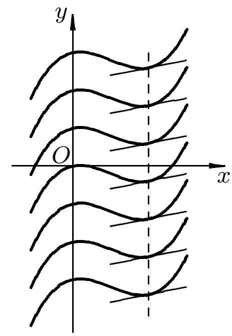


图 9.3: 不定积分是由一个原函数平移得到的集合

定义 9.2 将函数 f 的原函数全体 $F+C$ 记为 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 即有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)+C,$$

其中 C 为任意常数. 称 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 为 f 的不定积分, 即 f 的全部原函数所成集合. 称 f 为被积函数, x 为积分变量, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式.

注 1 不定积分记号 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 代表一个集合, 即 $\{F(x) \mid F'(x)=f(x)\}$, 习惯上记为 $F(x)+C$, 其中 $F(x)$ 是 f 的一个原函数. 今后若同一个不定积分题出现两种答案 $F_1(x)+C$ 和 $F_2(x)+C$, 则 $F_1(x)$ 与 $F_2(x)$ 可以相差一个常数.

注 2 在定义 9.2 的不定积分记号中, 除了 $f(x)$ 之外还出现微分 $\mathrm{d}x$. 从定义来看这是没有必要的. 这个问题将在后面会解释, 这里只指出, 这样的记法对于不定积分的计算会带来很大的方便, 因此从 Leibniz 创造之后就一直沿用至今 [27].

关于原函数的第三个问题就是如何计算, 这是本章以下的主要内容.

9.1.3 基本不定积分表及其应用

利用初等函数求导, 就可以验证下列基本不定积分表的正确性. 读者应将它看成是不定积分计算中的九九表, 并通过做题训练以求熟练掌握其中的每一个公式.

1. $\int \mathrm{d}x = x+C$;

2. $\int x^\alpha\,\mathrm{d}x = \dfrac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C\ (\alpha\neq -1)$;

   $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x} = \ln|x|+C$;

3. $\int a^x\,\mathrm{d}x = \dfrac{1}{\ln a}a^x+C\ (0<a\neq 1)$;

   $\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x+C$;

4. $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x+C$;

   $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x+C$;

5. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int \sec^2 x \,\mathrm{d}x = \tan x + C;$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int \csc^2 x \,\mathrm{d}x = -\cot x + C;$$

6. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C;$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - a^2} = \frac{1}{2a} \int \left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a}\right) \mathrm{d}x = \frac{1}{2a} \ln \left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C;$$

7. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C;$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} = \ln |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| + C;$$

(在上述 4 个公式中出现的常数 a 均设为正数)

8. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \csc x \,\mathrm{d}x = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C \text{ (参见例题 6.13)};$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \sec x \,\mathrm{d}x = \ln \left| \tan\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \right| + C.$$

建议读者通过对原函数求导运算来验证表中每一个积分公式的正确性.

注 在基本不定积分表中, 公式 2 中有 $\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln |x| + C$, 其中出现绝对号, 这表明它实际上是不同区间上的两个公式:

$$当 x > 0 时有 \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln x + C,$$
$$当 x < 0 时有 \int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \ln(-x) + C.$$

例题 9.3 下面是利用这些基本公式所做的第一批计算题:

$$\int x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3} x^3 + C,$$
$$\int \frac{1}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x = \int x^{-\frac{1}{2}} \,\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} + C,$$
$$\int 2^{-x} \,\mathrm{d}x = \int \left(\frac{1}{2}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(1/2)} \left(\frac{1}{2}\right)^x + C = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 - 5}} = \ln |x + \sqrt{x^2 - 5}| + C. \quad \square$$

例题 9.4 在不定积分计算中, 积分号下的积分变量可以取 x 之外的其他符号, 但必须与计算得到的原函数的自变量的符号相同. 下面是这方面的例子.

$$\int \sin\theta\,\mathrm{d}\theta = -\cos\theta + C, \qquad \int t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{4}t^4 + C,$$
$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \ln|u| + C, \qquad \int \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y = \mathrm{e}^y + C. \quad \square$$

注 求不定积分往往不容易, 然而对于所得到的结果要验证它是否正确则比较容易, 只需要对结果求导即可. 由于求导运算是高等数学中最容易的运算, 因此希望读者要养成习惯, 即通过求导运算来检查不定积分计算是否正确.

9.1.4 线性运算公式

不定积分的线性运算公式是
$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)]\,\mathrm{d}x = \alpha\int f(x)\,\mathrm{d}x + \beta\int g(x)\,\mathrm{d}x.$$
它来自于导数计算的线性法则 (见 §6.2.3 的法则 1), 还可推广到有限项线性组合的情况. 下面是用这个公式的几个例子.

例题 9.5 $\displaystyle\int (x^2 - 2x + 3)\,\mathrm{d}x = \int x^2\,\mathrm{d}x - 2\int x\,\mathrm{d}x + 3\int \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C.$

注 虽然这一题的计算是通过对三项分别求不定积分后相加, 但最后答案中只要写一个任意常数即可. 这从不定积分是集合的观点来看是容易理解的.

例题 9.6 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1}\,\mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x = x - \arctan x + C.$

例题 9.7 $\displaystyle\int \cos^2\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1+\cos x}{2}\,\mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2}\sin x + C.$

9.1.5 例题

例题 9.8 这里介绍一种方法, 即若有
$$\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C,$$
则就有
$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$
用链式法则就可见这是成立的. 利用不定积分记号中的 $\mathrm{d}x$ 就可以如下记忆:
$$\begin{aligned}
\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{a}\int f(ax+b)\,\mathrm{d}(ax+b)\\
&= \frac{1}{a}\int f(u)\,\mathrm{d}u \quad (\text{记住其中 } u = ax+b)\\
&= \frac{1}{a}F(u) + C \quad (\text{记住其中 } u = ax+b)\\
&= \frac{1}{a}F(ax+b) + C. \quad \square
\end{aligned}$$

下面是应用这个方法的几个例子.

例题 9.9 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int \frac{1}{x+1}\,\mathrm{d}(x+1) = \ln|x+1| + C.$ □

例题 9.10 $\displaystyle\int \sin 3x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int \sin 3x\,\mathrm{d}(3x) = -\frac{1}{3}\cos 3x + C.$ □

例题 9.11 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = -2\int \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}(-\frac{x}{2}) = -2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + C.$ □

例题 9.12

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-2x+5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2+2^2} = \int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2+2^2}.$$

$$= \frac{1}{2}\arctan\frac{x-1}{2} + C. \quad \square$$

例题 9.13

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$$

$$= \int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}$$

$$= \arcsin\frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \arcsin(2x-1) + C. \quad \square$$

例题 9.14 计算 $I = \displaystyle\int \frac{x^2+3}{x(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x.$

解 1 这是求有理分式函数的不定积分的一个特例, 其一般性讨论将在 §9.3.2 中进行, 这里先通过这个特例介绍一种重要方法, 即分拆法.

在分母为三个一次因子的乘积时, 可以将被积函数分拆如下, 其中含三个待定常数:

$$\frac{x^2+3}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}. \tag{9.2}$$

将右边的三个分式通分, 分子为

$$A(x+1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x+1)$$

$$= (A+B+C)x^2 + (3A+2B+C)x + 2A,$$

将上式等置于左边的分子 x^2+3, 就得到关于 A, B, C 的线性代数方程组

$$A+B+C=1,\ 3A+2B+C=0,\ 2A=3,$$

然后解得 $A=\dfrac{3}{2}, B=-4, C=\dfrac{7}{2}$. 理论上可以证明这样的解一定存在惟一. 然而这种方法需要求解线性代数方程组, 计算量可能大一点.

最后计算积分得到

$$I=\int\left(\frac{3/2}{x}+\frac{-4}{x+1}+\frac{7/2}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-4\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+\frac{7}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}$$
$$=\ln\frac{|x|^{\frac{3}{2}}|x+2|^{\frac{7}{2}}}{|x+1|^4}+C.\quad\square$$

解 2 这里介绍求待定常数 A,B,C 的另一种方法. 先说如何求 A. 将上述待定的分解式 (9.2) 的两边乘以 x, 然后令 $x\to 0$, 这样就可以发现右边等于 A, 而左边就是去掉分母中的因子 x 后用 $x=0$ 代入的结果. 由于原来的有理函数于 $x=0$ 没有定义, 因此用 $x=0$ 代入可说成是对两边乘 x 后令 $x\to 0$. 这样就得到 $A=\dfrac{3}{2}$.

用同样的方法, 在 (9.2) 的两边乘以 $x+1$ 并令 $x\to -1$, 就得到 $B=-4$. 最后, 再在两边乘以 $x+2$ 并令 $x\to -2$, 就得到 $C=\dfrac{7}{2}$. 以下积分计算同解 1. $\square$

注 在 (9.2) 的两边乘 x 再令 $x\to+\infty$, 就得到

$$A+B+C=1,$$

从而可从 A,B 求出 $C=1-A-B=1-\dfrac{3}{2}+4=\dfrac{7}{2}$. 当然还可以找到求待定常数的其他途径, 这里有很大的灵活性.

这种将有理分式分拆为简单分式的方法在前面已经多次出现. 例如在基本不定积分表中求 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$ 时就是如此. 又如在第一册的例题 6.18 中, 对高阶导数 $\left(\dfrac{1}{x(x-1)}\right)^{(n)}$ 的计算就是通过分解

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}$$

而得到解决的. 此外, 例题 3.10 和例题 8.34 中也都是如此.

例题 9.15 求 $I=\displaystyle\int x(1-2x)^{99}\,\mathrm{d}x$.

解 这里当然不宜用二项式定理展开 $(1-2x)^{99}$, 而应当将 $1-2x$ 看成为一个中间变量 u, 然后将被积函数用 u 表出:

$$x(1-2x)^{99}=(1-2x)^{100}(-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(1-2x)^{99}.$$

然后计算如下:

$$I=-\frac{1}{2}\int(1-2x)^{100}\,\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int(1-2x)^{99}\,\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}\int(1-2x)^{100}\,\mathrm{d}(1-2x)-\frac{1}{4}\int(1-2x)^{99}\,\mathrm{d}(1-2x)$$
$$=\frac{1}{404}(1-2x)^{101}-\frac{1}{400}(1-2x)^{100}+C$$
$$=\frac{1}{4}(1-2x)^{100}\left(\frac{1}{101}(1-2x)-\frac{1}{100}\right)+C$$
$$=-(1-2x)^{100}\left(\frac{1}{202}x+\frac{1}{40400}\right)+C.\quad\square$$

小结 在原函数和不定积分的定义中不涉及到极限运算, 因此以上计算只是如何利用基本不定积分表. 然而仅仅如此是走不了多远的. 如果被积函数或在将它分拆为几项之后, 仍然与不定积分表中的任何一个公式都对不上, 则如何能够猜测出它的原函数是什么? 为此需要有求不定积分的新方法. 这就是下面两节的内容.

练习题

1. 求下列不定积分:

(1) $\int (a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n)\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int (2^{x+1} - \csc x\cot x + \dfrac{4}{x} + 3\sec^2 x + \dfrac{\pi}{1+x^2})\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int (\sqrt{x} - 2\mathrm{e}^x + \dfrac{\cos x}{3} - \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}})\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int \left(\dfrac{2}{x^2} - \dfrac{5}{x} + \dfrac{1}{3\sqrt[4]{x}} - x^3\sqrt{x}\right)\mathrm{d}x$;

(5) $\int \left(2^x - x^2 + \tan^2 x\right)\mathrm{d}x$;

(6) $\int \left(\dfrac{4}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x^4}{x^2+1}\right)\mathrm{d}x$;

(7) $\int \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{x\sqrt{x}}\right)\mathrm{d}x$.

2. 求下列不定积分:

(1) $\int (x-1)^4\,\mathrm{d}x$;

(2) $\int \dfrac{(1-x^2)^3}{x}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int \cos^2\dfrac{x}{2}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\int \dfrac{\cos 2x}{\sin^2 x\cos^2 x}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\int \sin(x+1)\,\mathrm{d}x$;

(6) $\int \dfrac{\mathrm{d}x}{x^2+x+1}$;

(7) $\int \sqrt[5]{2x-3}\,\mathrm{d}x$;

(8) $\int \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)}$;

(9) $\int \sin ax\sin bx\,\mathrm{d}x$;

(10) $\int \dfrac{x^2\,\mathrm{d}x}{(3x-1)^{100}}$.

§9.2 换元法和分部积分法

这一节介绍计算不定积分的主要方法, 其中有两种换元法和分部积分法.

9.2.1 换元法 1——凑微分法

第一种换元法是例题 9.8 的推广. 在该例题中, 从 $F'(u)=f(u)$ 出发, 对于 $u=ax+b$ 有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{a}F(ax+b)+C.$$

现在再发展一步, 同样从 $F'(u)=f(u)$ 出发, 也就是有 $\int f(u)\,\mathrm{d}u=F(u)+C$, 则对于可微函数 $u=u(x)$ 就有

$$\int f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x=F(u(x))+C.$$

由此可见, 这实际上就是作代换 $u=u(x)$, 在形式上可以将积分写为 $\int f(u(x))\,\mathrm{d}u(x)$, 即 $\int f(u)\,\mathrm{d}u$, 在它的不定积分 $F(u)+C$ 中将 $u=u(x)$ 代入得到最后答案.

这里要注意以下几点:

(1) 换元法 1 的正确性来自于求复合函数导数的链式法则.

(2) 在不定积分记号中引入微分 $\mathrm{d}x$ 对于换元法的使用有帮助. 从上面的等式可见, 换元法 1 就是要将积分号下的被积表达式凑成为复合函数 $F(u(x))$ 的微分:

$$f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x=f(u(x))\,\mathrm{d}u(x)=\mathrm{d}F(u(x)),$$

因此可以将换元法 1 称为凑微分法.

在 §9.1.5 中已经见到用 $u(x)=ax+b$ 的许多例题, 它们都是用换元法 1 的简单情况. 下面先看一个重要例题.

例题 9.16 若有 $F'(u)=f(u)$, 则在 $\alpha\neq 0$ 时有

$$\int f(x^\alpha)\,x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\alpha}\int f(x^\alpha)\,\mathrm{d}(x^\alpha)=\frac{1}{\alpha}F(x^\alpha)+C,$$

其中 $u(x)=x^\alpha$.

今后称 $u=x^\alpha$ 为幂代换, 特别称 $u=x^{-1}$ 为倒代换. 可以用这些代换的例子很多, 例如 $\alpha=-1$ 时从 $F'(u)=f(u)$ 有

$$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-F\left(\frac{1}{x}\right)+C,$$

对于 $\alpha=2$ 则有

$$\int f(x^2)x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(x^2)\,\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}F(x^2)+C.$$

此外, 可以归入这一类的还有

$$\int f(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int f(\ln x)\,\mathrm{d}(\ln x) = F(\ln x) + C. \quad \square$$

下面是用幂代换的常见例子.

例题 9.17 求 $I = \displaystyle\int \frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

解 $I = -\displaystyle\int \sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = \cos\frac{1}{x} + C$.

例题 9.18 求 $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$.

解 这里可以用倒代换:

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{x\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}} = -\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) \\
&= -\int \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right) = -\ln\left|\frac{1}{x} + \sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right| + C. \quad \square
\end{aligned}$$

例题 9.19 求 $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解 $I = \displaystyle\int \frac{2}{1+(\sqrt{x})^2}\,\mathrm{d}(\sqrt{x}) = 2\arctan(\sqrt{x}) + C$. $\square$

例题 9.20 求 $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^n)}$, 其中 n 为正整数.

解 关键在于写出 $I = \displaystyle\int \frac{x^{n-1}\,\mathrm{d}x}{x^n(1+x^n)} = \frac{1}{n}\int \frac{\mathrm{d}(x^n)}{x^n(1+x^n)}$, 于是可以先计算出

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)} = \int \left(\frac{1}{u} - \frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u = \ln\left|\frac{u}{1+u}\right| + C,$$

再令 $u = x^n$ 代入就得到 $I = \dfrac{1}{n}\ln\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}\right| + C$. $\square$

例题 9.21 求 $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$.

解 看出可用 $u = \ln x$, 就得到 $I = \ln|\ln x| + C$. $\square$

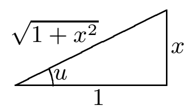
例题 9.22 求 $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}}$

解 1 对这个例子介绍一种新方法. 利用 $(\arctan x)' = \dfrac{1}{x^2+1}$, 取 $u = \arctan x$, 则 $\mathrm{d}u = \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$, $x = \tan u$, 于是有

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{\tan^2 u+1}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sec u} \\
&= \int \cos u \,\mathrm{d}u = \sin u + C \\
&= \sin(\arctan x) + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \quad \square
\end{aligned}
$$

注 1 这个解法是三角函数在分析计算中的一种典型应用, 尽管原来的被积函数和最后的答案都不出现三角函数. 这种情况在不定积分计算中是常见的.

注 2 在作代换 $u = \arctan x$ 时, 可以作出右图所示的辅助三角形, 这对于最后将 $\sin u$ 转化为 x 的函数是有用的. 对于其他三角代换也是如此.



解 2 本题也可以用倒代换计算如下:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \int \frac{1}{x^2}\cdot\frac{\dfrac{1}{x}\,\mathrm{d}x}{\left(1+\dfrac{1}{x^2}\right)^{3/2}} \\
&= -\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{3/2}} \quad (\text{这里的 } u = \frac{1}{x}) \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+u^2)}{(1+u^2)^{3/2}} \\
&= -\frac{1}{2}\int v^{-3/2}\,\mathrm{d}v \quad (\text{这里的 } v = 1+u^2) \\
&= -\frac{1}{2}\cdot(-2)v^{-1/2} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \quad \square
\end{aligned}
$$

9.2.2 三角函数积分的例子

以下都是凑微分法的应用:

$$
\begin{aligned}
&\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x = \int f(\sin x)\,\mathrm{d}\sin x, \\
&\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x = -\int f(\cos x)\,\mathrm{d}\cos x, \\
&\int f(\tan x)\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \int f(\tan x)\sec^2 x\,\mathrm{d}x = \int f(\tan x)\,\mathrm{d}\tan x, \\
&\int f(\cot x)\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x} = \int f(\cot x)\csc^2 x\,\mathrm{d}x = -\int f(\cot x)\,\mathrm{d}\cot x.
\end{aligned}
$$

此外还有

$$
\begin{aligned}
\int f(\tan x)\,\mathrm{d}x &= \int f(\tan x)\cos^2 x\,\mathrm{d}\tan x \\
&= \int \frac{f(\tan x)}{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}\tan x,
\end{aligned}
$$

因此问题归结为求 $\displaystyle\int \frac{f(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

例题 9.23 求 $I = \displaystyle\int \sqrt{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

解 $\displaystyle I = \int \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}\sin x = \frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}} + C.$ □

例题 9.24 求 $I = \displaystyle\int \tan x\,\mathrm{d}x$.

解 1 $\displaystyle I = \int \frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x = -\int \frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C = \ln|\sec x| + C.$ □

解 2 利用 $\mathrm{d}\tan x = (1+\tan^2 x)\,\mathrm{d}x$,

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}\tan x = \int \frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^2} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+u^2)}{1+u^2}\\ &= \frac{1}{2}\ln|1+u^2| + C = \frac{1}{2}\ln\sec^2 x + C = \ln|\sec x| + C.\end{aligned}$$ □

例题 9.25 求 $I = \displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

解 1 $$\begin{aligned}I = \int \sin x(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x &= \int (\cos^2 x - 1)\,\mathrm{d}\cos x\\ &= \frac{1}{3}\cos^3 x - \cos x + C.\end{aligned}$$ □

解 2 将 $\sin^n x$ 或 $\cos^n x$ 写为倍角函数的代数和往往是计算它们的不定积分的一种有效方法. 这一般可以用 Euler 公式得到. 对本题而言, 则有

$$\begin{aligned}\sin^3 x &= \frac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x)\\ &= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x,\end{aligned}$$

然后就有

$$I = \int \left(\frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\right)\mathrm{d}x = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C.$$ □

注 1 写出

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\cos x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x)\\ &= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x,\end{aligned}$$

代入解 1 的答案中, 可见与解 2 的答案相同.

注 2 可以用 De Moivre 公式同时计算出 $\cos 3x$ 和 $\sin 3x$ 的倍角公式. 先写出

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3\\ &= \cos^3\theta + 3\,\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathrm{i}\sin^3\theta,\end{aligned}$$

等置两边的实部与虚部, 就同时得到:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

例题 9.26 求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x}$.

解 1 这类问题总可以化为有理分式后求不定积分 (参见 §9.3.4).

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^3 x(1-\sin^2 x)}\\&=\int\frac{\mathrm{d}u}{u^3(1-u^2)}\ (u=\sin x)\ (\text{若于此就作部分分式分解则计算量较大})\\&=\frac{1}{2}\int\frac{u\,\mathrm{d}u}{u^4(1-u^2)}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}v}{v^2(1-v)}\ (v=u^2).\end{aligned}$$

然后作分拆 (参见例题 9.14):

$$\frac{1}{v^2(1-v)}=\frac{A}{v}+\frac{B}{v^2}+\frac{C}{v-1},$$

两边乘 v^2, 令 $v\to 0$ 得到 $B=1$; 两边乘 $v-1$, 令 $v\to 1$ 得到 $C=-1$; 两边乘 v, 令 $v\to+\infty$, 得到 $A+C=0$, 于是 $A=1$.

最后计算不定积分:

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\left(\int\frac{\mathrm{d}v}{v}+\int\frac{\mathrm{d}v}{v^2}-\frac{\mathrm{d}v}{v-1}\right)\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{v}{v-1}\right|-\frac{1}{2v}+C\\&=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right|-\frac{1}{2\sin^2 x}+C\\&=\ln|\tan x|-\frac{1}{2}\csc^2 x+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 一个巧妙的方法是将被积函数分子的 1 无中生有地换为 $\cos^2 x+\sin^2 x$:

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\sin^3 x\cos x}\,\mathrm{d}x=\int\frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x+\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x}\\&=\int\csc^2 x\cot x\,\mathrm{d}x+\int\frac{\sec^2 x\,\mathrm{d}x}{\tan x}=-\int\cot x\,\mathrm{d}\cot x+\int\frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan x}\\&=-\frac{1}{2}\cot^2 x+\ln|\tan x|+C.\quad\square\end{aligned}$$

注 在如上分拆为两项后计算方法很多. 例如其中第一项可如下计算

$$\int\frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^3 x}=-\frac{1}{2}\sin^{-2}x+C=-\frac{1}{2}\csc^2 x+C,$$

第二项可直接用 §9.1.3 中的基本不定积分表中的第 8 组的第一个公式得到

$$\int\frac{\mathrm{d}(2x)}{\sin 2x}=\ln|\tan x|+C.$$

解 3 将解 2 的无中生有方法再发展一步则有

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{(\sin^2 x+\cos^2 x)^2}{\sin^3 x\cos x}\,\mathrm{d}x\\&=\int[\tan x+2\cot x+\cot x(\csc^2 x-1)]\mathrm{d}x\\&=-\ln|\cos x|+\ln|\sin x|-\frac{1}{2}\cot^2 x+C.\quad\square\end{aligned}$$

例题 9.27 求 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{A\cos^2 x + 2B\cos x\sin x + C\sin^2 x}$, 其中设 $A \neq 0$.

解 利用 $A \neq 0$ 的条件, 将分子分母同除以 $\sin^2 x$, 并令 $t = \cot x$, 就得到

$$I = \int \frac{\csc^2 x\,\mathrm{d}x}{A\cot^2 x + 2B\cot x + C} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{At^2 + 2Bt + C}.$$

以下对二次三项式 $At^2 + 2Bt + C$ 作配方, 并按不同情况分别处理.

首先有

$$I = -\frac{1}{A}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t + t_0)^2 + \beta},$$

其中 $t_0 = \frac{B}{A}$, $\beta = \frac{1}{A^2}(AC - B^2)$. 于是可分别积分如下:

(1) $AC - B^2 > 0$, 则

$$I = -\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\frac{\cot x + t_0}{\sqrt{\beta}} + C;$$

(2) $AC - B^2 = 0$, 则

$$I = \frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\cot x + t_0} + C;$$

(3) $AC - B^2 < 0$, 则

$$I = -\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-\beta}}\ln\left|\frac{\cot x + t_0 - \sqrt{-\beta}}{\cot x + t_0 + \sqrt{-\beta}}\right| + C. \quad \square$$

9.2.3 换元法 2——代入法

将换元法 1 倒过来就得到换元法 2. 它的基本思路很简单, 就是在被积表达式 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 中用可微函数 $x = x(t)$ 代入, 这样就得到

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t,$$

若右边的不定积分为 $F(t) + C$, 则用反函数 $t = t(x)$ 代入, 就得到原来的不定积分为 $F(t(x)) + C$.

下面我们先举例说明如何应用这种新的换元法, 最后对其正确性给出证明.

例题 9.28 求 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + a^2}}$. (即 §9.1.3 的基本不定积分表中第 7 组的第二个公式中的一种情况.)

解 令 $x = a\tan t$, 并利用基本不定积分表中第 8 组的第二个公式, 就有

$$I = \int \frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{\mathrm{d}t}{\cos t} = \ln\left|\tan\left(\frac{t}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C.$$

为了将右边写为 x 的函数, 可以利用恒等式 $\tan\frac{t}{2} = \frac{1 - \cos t}{\sin t}$, 就有

$$I=\ln\left|\frac{1-\cos(t+\pi/2)}{\sin(t+\pi/2)}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|+C$$
$$=\ln\left|\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{\dfrac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}}\right|+C=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.\quad\square$$

注　不套用积分表中的公式可如下计算:
$$\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}=\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{1-\sin^2 t}=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1-\sin t}{1+\sin t}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|+C.$$

下面用换元法 2 来回顾前面的几个题.

(**例题** 9.18)　求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$.

解　当时是用倒代换求解, 若看不出这条路, 则可以令 $x=\tan t$. 于是
$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\tan t\sec t}=\int\frac{\mathrm{d}t}{\sin t}\\&=\ln\left|\tan\frac{t}{2}\right|+C=\ln\left|\frac{\sin t}{1+\cos t}\right|+C\\&=\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C.\quad\square\end{aligned}$$

(**例题** 9.19)　求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解　令 $\sqrt{x}=t$, 即 $x=t^2$, 于是
$$I=\int\frac{2t\,\mathrm{d}t}{t(1+t^2)}=2\int\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=2\arctan t+C=2\arctan\sqrt{x}+C.\quad\square$$

(**例题** 9.20)　求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^n)}$.

解　令 $x^n=t$, 即 $x=t^{1/n}$, 这样就有
$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\frac{1}{n}t^{1/n-1}\,\mathrm{d}t}{t^{1/n}(1+t)}=\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)}\\&=\frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right|+C\\&=\frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right|+C.\quad\square\end{aligned}$$

(**例题** 9.22)　求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}}$.

解　令 $x=\tan t$, 则有
$$I=\int\frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\sec^3 x}=\int\cos t\,\mathrm{d}t=\sin t+C=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+C.\quad\square$$

(**例题** 9.25)　求 $I=\displaystyle\int\sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

解　若不用倍角公式, 则可以令 $x=\arcsin t$, 即 $t=\sin x$, 于是

$$\begin{aligned}
I &= \int t^3 \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2\,\mathrm{d}(t^2)}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{v\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v}} \qquad (\text{其中 } v = t^2) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1-(1-v)}{\sqrt{1-v}}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int [(1-v)^{-1/2} - (1-v)^{1/2}]\,\mathrm{d}v \\
&= -(1-v)^{1/2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-v)^{3/2} + C \\
&= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C. \quad \square
\end{aligned}$$

最后我们来证明换元法 2 的正确性. 从前面的介绍来看, 这里似乎要求比换元法 1 高, 即 $x = x(t)$ 必须有反函数. 但实际上可以更宽一点.

定理 9.1 设 $f(x)$ 在区间 I 上有原函数, $x = x(t)$ 可微, 又存在 $t = t(x)$ 满足 $x(t(x)) \equiv x$, 则若有

$$\int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t = F(t) + C,$$

就成立

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(t(x)) + C.$$

证 问题只是要证明 $[F(t(x))]'_x = f(x)$.

从条件知道在 I 上存在 $U(x)$ 满足 $U'(x) = f(x)$, 又有 $F'(t) = f(x(t))x'(t)$. 利用复合函数求导的链式法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}U(x(t))}{\mathrm{d}t} = f(x(t))x'(t) = F'(t).$$

根据定理 7.12, $U(x(t))$ 与 $F(t)$ 只相差一个常数, 即是存在一个常数 C_0, 使得

$$U(x(t)) = F(t) + C_0.$$

用 $t = t(x)$ 代入并利用条件 $x(t(x)) \equiv x$, 就有

$$U(x(t(x))) = U(x) = F(t(x)) + C_0,$$

这样就证明了 $[F(t(x))]'_x = U'(x) = f(x)$, 因此成立

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(t(x)) + C. \quad \square$$

9.2.4 分部积分法

这是求不定积分的另一个基本方法, 它与两种换元法一起成为求不定积分的主要工具. 从前面看到两种换元法比较接近, 有时可以按照各人偏好有所选择, 但分部积分法则往往是换元法不能取代的工具.

换元法与复合函数求导的链式法则有密切联系. 分部积分法则来自于两个函数乘积的求导法则.

设 $u=u(x), v=v(x)$ 都是可微函数, 则有 $(uv)'=u'v+uv'$, 因此就有

$$\int (u'v+uv')\,\mathrm{d}x=\int v\,\mathrm{d}u+\int u\,\mathrm{d}v=uv+C,$$

于是就得到分部积分公式

$$\int u\,\mathrm{d}v=uv-\int u\,\mathrm{d}v. \tag{9.3}$$

这里要注意几点:

(1) 在 (9.3) 的右边也有一个不定积分, 因此不必再写任意常数 C.

(2) 只有在 (9.3) 右边的不定积分 $\int u\,\mathrm{d}v$ 比左边的 $\int v\,\mathrm{d}u$ 容易计算时, 该公式才对于左边积分的计算是有用的. 实际上分部积分公式的主要思想就是告诉我们, 这两个不定积分之和是已知的, 因此只要能够求出其中之一, 则另一个也能得到.

分部积分公式只不过来自于一个熟知的求导公式 $(uv)'=u'v+uv'$, 但却非常有用, 往往可以解决换元法解决不了的问题.

例题 9.29 求 $I=\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

分析 我们先举出几种不成功的尝试. 例如, 用换元法, 令 $\mathrm{e}^x=t$, 则 $x=\ln t$, $\mathrm{d}x=\dfrac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. 于是

$$I=\int t\ln t\cdot\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\int \ln t\,\mathrm{d}t,$$

仍然无从下手. (其实是有收获的, 即若本题能解决, 则就可得到 $\int \ln t\,\mathrm{d}t$.)

另一个办法, 就是

$$I=\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})=\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x-\int\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x).$$

这里也不知道如何做下去. 但可以观察到. 原来的困难就在于被积函数除了 e^x 之外多了一个因子 x. 通过上面的分部积分, 这个因子次数反而升高了. 可见方向错了. 若倒转方向, 就有希望解决问题. 这就是应用分部积分法时的关键问题, 即如何正确选择 u 与 v.

解 同样用分部积分法, 有

$$\begin{aligned} I&=\int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x\\ &=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C=(x-1)\mathrm{e}^x+C. \quad \square\end{aligned}$$

现在回过头来解决上面分析中见到的求对数函数的原函数问题. 它是用分部积分法的一个典型例子, 它的答案也经常有用.

例题 9.30 求 $I=\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

解 用分部积分法:

$$
\begin{aligned}
I &= x\ln x - \int x\,\mathrm{d}(\ln x)\\
&= x\ln x - \int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\
&= x\ln x - \int \mathrm{d}x = x\ln x - x + C. \quad \Box
\end{aligned}
$$

注 验证: 从 $(x\ln x - x)' = \ln x + x\cdot\dfrac{1}{x} - 1 = \ln x$ 可见结果正确.

例题 9.31 求 $I = \displaystyle\int x\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 从上一题的经验可知应当如何使用分部积分法消除被积函数中的因子 x:

$$
\begin{aligned}
I &= \int x\,\mathrm{d}(-\cos x) = -x\cos x + \int \cos x\,\mathrm{d}x\\
&= -x\cos x + \sin x + C. \quad \Box
\end{aligned}
$$

例题 9.32 求 $I = \displaystyle\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$.

解 这里的问题是如何解决因子 $\ln^2 x$, 下面的办法就是按照这个思路来做的, 即先将 $\ln^2 x$ 的次数从 2 降为 1, 然后降为 0:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \ln^2 x\,\mathrm{d}(x^2) = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}(\ln^2 x)\\
&= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \int x\ln x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{1}{2}\int \ln x\,\mathrm{d}(x^2)\\
&= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}(\ln x)\\
&= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \int \frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\\
&= \frac{x^2}{2}\ln^2 x - \frac{x^2}{2}\ln x + \frac{x^2}{4} + C. \quad \Box
\end{aligned}
$$

例题 9.33 求 $I = \displaystyle\int \arctan x\,\mathrm{d}x$.

解 这也是用分部积分法的典型例题.

$$
\begin{aligned}
I &= x\arctan x - \int x\,\mathrm{d}(\arctan x)\\
&= x\arctan x - \int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= x\arctan x - \frac{1}{2}\ln(1+x^2) + C. \quad \Box
\end{aligned}
$$

例题 9.34 求 $I = \displaystyle\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$.

解 1 在此题计算中出现了在求不定积分过程中经常发生的循环现象:

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{a}\int \sin bx\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax}) = \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\int \cos bx\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax})\\ &= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}(\cos bx)\\ &= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{a^2}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(\frac{1}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}\cos bx) + C\\ &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C. \quad \square\end{aligned}$$

这里补充一个内容. 即利用复数计算工具对本题给出一个新解, 而且可以同时计算出两个不定积分, 其中也不需要分部积分法.

注意: 以下计算的根据来自于对实变复值函数 $u(x)+\mathrm{i}v(x)$ 的导数定义为

$$(u(x)+\mathrm{i}v(x))' = u'(x)+\mathrm{i}v'(x),$$

并用相同方法定义实变复值函数的原函数和不定积分, 然后即可验证公式 (9.4) 成立. 参见例题 6.17 的解 2.

解 2　首先利用 Euler 公式有

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx)\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{a+\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} + C.\end{aligned} \tag{9.4}$$

然后分离出 (9.4) 右边第一项的实部与虚部, 就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+\mathrm{i}b}\cdot \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} &= \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}\cdot \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx)\\ &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}[(a\cos bx + b\sin bx) + \mathrm{i}(-b\cos bx + a\sin bx)],\end{aligned}$$

又写复常数 $C = C_1 + \mathrm{i}C_2$, 其中 C_1, C_2 为实常数, 就同时得到两个不定积分:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C_1,\\ \int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos bx + a\sin bx) + C_2. \quad \square\end{aligned}$$

例题 9.35 求 $\displaystyle\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解　利用 $(\cot x)' = -\csc^2 x$,

$$\begin{aligned}I &= \int \ln\cos x\,\mathrm{d}(-\cot x) = -\cot x\ln\cos x + \int \cot x\,\mathrm{d}(\ln\cos x)\\ &= -\cot x\ln\cos x + \int \cot x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x\\ &= -\cot x\ln\cos x - \int \mathrm{d}x = -\cot x\ln\cos x - x + C. \quad \square\end{aligned}$$

例题 9.36 求 $I=\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0$.

解 (此题也可以用换元法解.) 这里也发生循环现象.

$$\begin{aligned}
I&=x\sqrt{a^2-x^2}-\int x\,\mathrm{d}(\sqrt{a^2-x^2})\\
&=x\sqrt{a^2-x^2}-\int\frac{-x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{a^2-(a^2-x^2)}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x\\
&=x\sqrt{a^2-x^2}+\int\frac{a^2\,\mathrm{d}x}{\sqrt{a^2-x^2}}-\int\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{2}x\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C. \quad \square
\end{aligned}$$

分部积分法也是导出不定积分的递推公式的主要工具.

例题 9.37 求 $I_n=\int\sin^n x\,\mathrm{d}x$ 的递推公式.

解 在被积函数中取出一个因子 $\sin x$ 与 $\mathrm{d}x$ 组成 $\mathrm{d}(-\cos x)$, 然后分部积分:

$$\begin{aligned}
I_n&=\int\sin^{n-1}x\,\mathrm{d}(-\cos x)\\
&=-\sin^{n-1}x\cos x+\int\cos x\cdot(n-1)\sin^{n-2}x\cos x\,\mathrm{d}x\\
&=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)\int(1-\sin^2 x)\sin^{n-2}x\,\mathrm{d}x\\
&=-\sin^{n-1}x\cos x+(n-1)I_{n-2}-(n-1)I_n\\
&=-\frac{1}{n}\sin^{n-1}x\cos x+(1-\frac{1}{n})I_{n-2}.
\end{aligned}$$

例题 9.38 求 $I_n=\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^n x}\ (=\int\csc^n x\,\mathrm{d}x)$ 的递推公式.

解 利用三角恒等式即可得到 (设 $n\geqslant 2$):

$$\begin{aligned}
I_n&=\int\frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^n x}\,\mathrm{d}x=I_{n-2}+\int\frac{\cos^2 x}{\sin^n x}\,\mathrm{d}x\\
&=I_{n-2}+\int\cos x\,\mathrm{d}\Big(\frac{\sin^{1-n}x}{1-n}\Big)\\
&=I_{n-2}+\cos x\cdot\frac{\sin^{1-n}x}{1-n}+\int\frac{\sin^{2-n}x}{1-n}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{1-n}\sin^{1-n}x\cos x+\frac{2-n}{1-n}I_{n-2}. \quad \square
\end{aligned}$$

练习题

1. 找出造成以下谬论的原因: 用凑微分法有

$$\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=\int 2\sin x\,\mathrm{d}\sin x=\sin^2 x+C,$$

$$\int 2\sin x\cos x\,\mathrm{d}x=-\int 2\cos x\,\mathrm{d}\cos x=-\cos^2 x+C,$$

于是得到 $\sin^2 x+C=-\cos^2 x+C$, 这导致明显的谬论: $\sin^2 x+\cos^2 x=0$.

2. 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4-5x^2}}$; (2) $\displaystyle\int\frac{x+1}{x(1+x\mathrm{e}^x)}\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int\cot x\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int\sin^2 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int\tan^2 x\sec^5 x\,\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int\tan^5 x\sec^2 x\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int\tan^5 x\sec x\,\mathrm{d}x$; (8) $\displaystyle\int\tan x\sec^5 x\,\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int 2x(x^2-1)^{\sqrt{2}}\,\mathrm{d}x$; (10) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}}$;

(11) $\displaystyle\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}$; (12) $\displaystyle\int\frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$;

(13) $\displaystyle\int x^2\sqrt[3]{1+x^3}\,\mathrm{d}x$; (14) $\displaystyle\int\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x$;

(15) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{1+\sin^4 x}\,\mathrm{d}x$; (16) $\displaystyle\int\frac{\sin x\cos x}{1+\cos^4 x}\,\mathrm{d}x$;

(17) $\displaystyle\int\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$; (18) $\displaystyle\int\frac{x^2-1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$;

(19) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^4-1}$; (20) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$;

(21) $\displaystyle\int\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x+x}\,\mathrm{d}x$; (22) $\displaystyle\int\mathrm{e}^{x^2+\ln x}\,\mathrm{d}x$;

(23) $\displaystyle\int\sqrt{\frac{\ln(x+\sqrt{1+x^2}\,)}{1+x^2}}\,\mathrm{d}x$; (24) $\displaystyle\int\frac{x^{99}}{x^{100}+1}\,\mathrm{d}x$

(25) $\displaystyle\int\sin^3 x\cos^5 x\,\mathrm{d}x$; (26) $\displaystyle\int\sin^5 x\cos^3 x\,\mathrm{d}x$;

(27) $\displaystyle\int\sin^2 x\cos^2 x\,\mathrm{d}x$; (28) $\displaystyle\int\frac{1+\cos x}{x+\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(29) $\displaystyle\int\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,\mathrm{d}x$; (30) $\displaystyle\int\frac{x-3}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,\mathrm{d}x$.

3. 求下列不定积分:

(1) $\int \arcsin x \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$;　(2) $\int \frac{\cos(\sqrt{x}+1)}{\sqrt{x}} \mathrm{d}x$;

(3) $\int x^2 \sqrt[3]{1+x} \, \mathrm{d}x$;　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{(1-x^2)^{\frac{3}{2}}}$;

(5) $\int \frac{\sqrt{x} \, \mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}-1}$;　(6) $\int \frac{x \arctan \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x$;

(7) $\int \mathrm{e}^{\sqrt{x+1}} \mathrm{d}x$;　(8) $\int \frac{(\sqrt{x}+1)^3}{x} \mathrm{d}x$;

(9) $\int \frac{\sqrt{1+x}-1}{\sqrt{1+x}+1} \mathrm{d}x$;　(10) $\int \frac{x \arctan \sqrt{1+x^2}}{\sqrt{1+x^2}} \mathrm{d}x$.

4. 求下列不定积分

(1) $\int (x+1)^3 \ln x \, \mathrm{d}x$;　(2) $\int \frac{\arcsin x}{x^2} \mathrm{d}x$;

(3) $\int \frac{\arctan x}{x^2} \mathrm{d}x$;　(4) $\int x^5 \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x$;

(5) $\int \sec^3 x \, \mathrm{d}x$;　(6) $\int \left(\ln(\ln x) + \frac{1}{\ln x}\right) \mathrm{d}x$;

(7) $\int \frac{\ln x}{x^2} \mathrm{d}x$;　(8) $\int \cos(\ln x) \, \mathrm{d}x$;

(9) $\int \left(\frac{x}{\cos^2 x} + x \sin^2 x\right) \mathrm{d}x$;　(10) $\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x}} \mathrm{d}x$;

(11) $\int \ln(x+\sqrt{1+x^2}) \, \mathrm{d}x$;　(12) $\int (\arcsin x)^2 \mathrm{d}x$;

(13) $\int \sqrt{x} \ln^2 x \, \mathrm{d}x$;　(14) $\int \frac{x^7}{(1-x^4)^2} \mathrm{d}x$;

(15) $\int \frac{x+\sin x}{1+\cos x} \mathrm{d}x$;　(16) $\int \frac{x\mathrm{e}^x}{\sqrt{1+\mathrm{e}^x}} \mathrm{d}x$.

5. 求下列不定积分的递推公式:

(1) $\int \cos^n x \, \mathrm{d}x$;　(2) $\int \sec^n x \, \mathrm{d}x$;

(3) $\int \tan^n x \, \mathrm{d}x$;　(4) $\int \ln^n x \, \mathrm{d}x$.

6. 求下列不定积分:

(1) $\int \frac{x^k}{\sqrt{1-x^2}} \mathrm{d}x, k=0,1,2,3$;　(2) $\int \frac{x^k}{x^2+1} \mathrm{d}x, k=0,1,2,3$;

(3) $\int \cos^k x \, \mathrm{d}x, k=1,2,3,4$;　(4) $\int \frac{\mathrm{d}x}{x(x^{100}+1)^k}, k=1,2,3$;

(5) $\int \frac{x^k}{x^4-1} \mathrm{d}x, k=1,2,3$.

§9.3 若干可积函数类

9.3.1 不定积分的可积性概念

在前两节的基础上我们已经能够求出许多初等函数的原函数 (或不定积分), 而且这些原函数也都是初等函数. 现在的问题是: 这样的计算能走多远? 是否所有初等函数都能够用某些技巧计算出它们的原函数 (或不定积分)?

有一段时间人们对于求不定积分非常热心, 发明了许多技巧, 得到了许多结果. 但是这种情况没有持续很久, 因为 Liouville① 首先证明, 初等函数的原函数 (或不定积分) 不一定是初等函数, 当然不可能用上一节中的各种技巧或更复杂的技巧计算出来.

例如下面几个不定积分就是如此:

$$\begin{aligned}&\int \frac{\mathrm{e}^x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{\ln x}, \quad \int \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x, \quad \int \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \\ &\int \sin x^2\,\mathrm{d}x, \quad \int \sqrt{1-k^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x\ (0<k<1).\end{aligned} \tag{9.5}$$

今后将一个初等函数的不定积分仍是初等函数的情况称为可积, 意思就是"积得出", 反之则称为不可积, 也就是"积不出".

这个事实也可以换一个说法. 设 A 是区间上初等函数全体所成集合, 用 D 表示求导算子 (即从一个函数得到其导函数的映射), 用 DA 表示对 A 中的每个初等函数求导得到的导函数集合.

从初等函数的定义 (见第三章) 和求导数运算的四则运算法则和链式法则可以知道, 初等函数的导函数仍然是初等函数, 即有 $DA \subset A$. Liouville 的发现就是

$$DA \subsetneqq A.$$

这表明在差集 $A - DA$ 中的每个初等函数的原函数 (或不定积分) 不是初等函数. 例如在 (9.5) 中的不定积分的被积函数 $\dfrac{\mathrm{e}^x}{x}, \dfrac{1}{\ln x}, \dfrac{\sin x}{x}, \mathrm{e}^{-x^2}$ 等都属于差集 $A - DA$ 之中, 它们的原函数不是初等函数.

如何证明以上所说的 $DA \subsetneqq A$, 或者对于以上举出的几个具体函数 (之一) 证明它们的原函数不是初等函数? 这些问题已经越出数学分析课程的范围. 是否有一个方法可以判定什么样的初等函数可积或者不可积? 至少到目前为止还没有这样的方法. 所有这些乃是"微分代数"方向所研究的内容, 其中还没有可在本科教学中使用的材料.

小结 初等函数的导数是初等函数, 但初等函数的原函数 (或不定积分) 可以是非初等函数. 对于这种情况, 我们称这样的初等函数的不定积分为不可积.

---

① 刘维尔 (Joseph Liouville, 1809–1882), 法国数学家, 在函数论、微分方程、数论等方面有许多贡献.

这里需要指出, 这类不可积情况的存在并非什么坏事. 如 (9.5) 中列举的例子都是在许多应用领域中非常重要的非初等函数. 实际上在数学分析课程中会见到产生非初等函数的许多途径. 初等函数的不可积的原函数就是其中之一①.

由于初等函数的不定积分不可积的现象大量存在, 同时又没有有效的方法来区分可积与不可积, 因此在下面我们将主要学习几类最为基本的可积函数类.

在实际工作中, 对于所遇到的不定积分可以查阅为此而编制的不定积分表, 或者利用 Mathematica, Maple 等数学符号计算软件来解决问题.

9.3.2 有理函数的不定积分计算

有理函数 (或称有理分式函数) 是最重要的一类可积函数.

这里所说的有理函数就是指实系数有理分式, 即两个实系数多项式之商. 对于假分式, 即分子次数大于等于分母次数的情况, 一定可以分解为一个多项式与一个真分式之和. 由于多项式是可积的, 它的不定积分仍然是多项式, 因此问题就归结为如何求真分式的不定积分.

一个真分式, 即分子次数小于分母次数的情况, 由于实系数多项式一定可以在实数域内因式分解为若干个一次因式和二次因式的乘积, 因此真分式一定可以分解为下列两种简单分式之和:

$$\frac{c}{(x-a)^k}\ (k \geqslant 1), \quad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ (n \geqslant 1). \tag{9.6}$$

其中的 c, a, M, N, p, q 均为实数. 今后称这两类分式为部分分式 (partial fraction), 而将实系数有理分式分解为部分分式的过程称为部分分式分解.

下面的代数定理是部分分式分解的理论基础.

部分分式分解定理 实系数有理真分式一定能够以惟一的方式分解为部分分式之和.

注 可以看到, 这里恰好是分析与代数的一个小小的交汇点. 用代数的部分分式分解定理解决有理分式的不定积分问题, 同时在进行这个代数分解的运算中又可能会用到分析的极限手段.

---

① 这里可以与我们早就熟悉的运算和逆运算的封闭性问题作类比. 例如, 在正整数集合 $\mathbb{N}$ 内的加法运算是封闭的, 这就是说两个正整数相加仍然是正整数, 但是加法的逆运算在正整数范围内是不封闭的. 为此我们将数系从正整数扩张到整数范围, 即从 $\mathbb{N}$ 扩张到 $\mathbb{Z}$.

又如在 $\mathbb{Z}$ 内的乘法运算是封闭的, 但是其逆运算除法是不封闭的. 为此我们将 $\mathbb{Z}$ 扩张到有理数系 $\mathbb{Q}$.

如前所说, 在初等函数集合 A 上的求导数运算是封闭的, 但是它的逆运算, 即求原函数, 在 A 中不封闭. 这样就使我们所研究的函数范围越出初等函数而接触到非初等函数.

下面我们先学习如何进行有理分式的分解, 以及如何计算部分分式的不定积分, 而将定理的证明放在下一小节中进行. 在前面的例题 9.14 和例题 9.26 的解 2 就是这类问题中比较简单的情况. 下面的例题还是从简单开始.

例题 9.39 求 $I = \displaystyle\int \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$.

解 先将被积函数化为多项式与真分式之和, 然后即可积出:

$$I = \int \left(x - 1 + \frac{1}{1+x}\right) \mathrm{d}x = \frac{x^2}{2} - x + \ln|1+x| + C. \quad \square$$

例题 9.40 求 $I = \displaystyle\int \frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(2x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

解 首先对被积函数作部分分式分解. 根据分母可知分解的形式为

$$\frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(2x+1)^2} = \frac{C_1}{x+1} + \frac{C_2}{2x+1} + \frac{C_3}{(2x+1)^2}, \tag{9.7}$$

其中有 3 个待定常数 C_1, C_2, C_3.

第一种方法就是两边乘以左边的分母, 使两边都成为多项式, 然后等置两边同次幂项的系数, 就得到关于待定常数的线性方程组. 由部分分式分解定理可以推出这个线性方程组的解存在惟一, 以下就可以按照标准方法进行计算. 这种方法理论上有根据, 解题过程规范, 但在未知量个数较多时计算量可能较大.

第二种方法是利用极限工具来解代数问题. 例题 9.14 和例题 9.26 的解 2 中的方法就是如此.

将 (9.7) 两边同乘 $x+1$ 后令 $x \to -1$, 右边就得到 C_1, 而左边等于将 $x=-1$ 代入到分母去掉因子 $(x+1)$ 之后的表达式中. 因此就得到:

$$C_1 = \left.\frac{2x^2+3x+2}{(2x+1)^2}\right|_{x=-1} = 1.$$

同理两边乘以 $(2x+1)^2$ 后令 $x \to -\dfrac{1}{2}$, 就有

$$C_3 = \left.\frac{2x^2+3x+2}{x+1}\right|_{x=-\frac{1}{2}} = 2.$$

对于 C_2 以上两种方法不能直接用. 这里有多种方法可供选择. 例如, 将 $x=0$ 代入 (9.7) 中得到 $2 = C_1 + C_2 + C_3$, 于是 $C_2 = 2 - C_1 - C_3 = -1$.

再推荐几种方法. 例如在 (9.7) 两边乘 x 后令 $x \to +\infty$, 就得到 $\dfrac{1}{2} = C_1 + \dfrac{1}{2}C_2$, 由此也可解得 $C_2 = -1$.

当然也可以将已经确定的项移到左边进行计算以求出最后一项:

$$\begin{aligned}
\frac{2x^2+3x+2}{(x+1)(2x+1)^2} - \frac{1}{x+1} - \frac{2}{(2x+1)^2} &= \frac{2x^2+3x+2-(2x+1)^2-2(x+1)}{(x+1)(2x+1)^2} \\
&= \frac{-2x^2-3x-1}{(x+1)(2x+1)^2} = \frac{-(x+1)(2x+1)}{(x+1)(2x+1)^2} = -\frac{1}{2x+1}.
\end{aligned}$$

最后的积分计算已经没有困难, 这就是

$$I = \int \left(\frac{1}{x+1} + \frac{-1}{2x+1} + \frac{2}{(2x+1)^2} \right) \mathrm{d}x$$
$$= \ln|x+1| - \frac{1}{2}\ln|2x+1| - \frac{1}{2x+1}. \quad \square$$

下面看分母上有二次不可约因子的例子. 在其中将系统使用上面所说的最后一种方法, 即每求出一项就移到左边相减. 这种方法的优点是事先可以肯定通分后的分子必须具有什么样的因子, 因此计算中如有错误会自动发现 (即有自校正特性), 从而比较可靠. 此外在计算中一定是越算越简单.

例题 9.41 求 $I = \int \dfrac{-5x^2-4}{(x-1)(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x.$

解　根据部分分式分解定理, 有

$$\frac{-5x^2-4}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{C_1}{x-1} + \frac{M_1x+N_1}{x^2+2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+2)^2}. \tag{9.8}$$

两边乘以 $x-1$ 后令 $x \to 1$ 就得到 $C_1 = -1$. 然后计算

$$\frac{-5x^2-4}{(x-1)(x^2+2)^2} + \frac{1}{x-1} = \frac{-5x^2-4+(x^2+2)^2}{(x-1)(x^2+2)^2}$$
$$= \frac{x^4-x^2}{(x-1)(x^2+2)^2} = \frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2}.$$

于是最后的有理式等于 (9.8) 右边的后两项之和, 即有

$$\frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2} = \frac{M_1x+N_1}{x^2+2} + \frac{M_2x+N_2}{(x^2+2)^2}.$$

将上式两边乘以 $(x^2+2)^2$ 后令 $x \to \mathrm{i}\sqrt{2}$, 就得到

$$-2(1+\mathrm{i}\sqrt{2}) = \mathrm{i}\sqrt{2}M_2 + N_2,,$$

等置两边的实部和虚部, 就得到 $M_2 = N_2 = -2$. 这样就一举求出了两个待定常数, 表现出复数计算方法的特点.

再作减法, 即有

$$\frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2} + \frac{2x+2}{(x^2+2)^2} = \frac{x^3+x^2+2x+2}{(x^2+2)^2} = \frac{x+1}{x^2+2},$$

即有 $M_1 = N_1 = 1$. (这里分子一定有因子 x^2+2, 否则就是计算出错了.)[①]

上面是代数分解计算, 下面才是计算不定积分, 即需要分别求三个不定积分.

$$I = \int \frac{-1}{x-1}\mathrm{d}x + \int \frac{x+1}{x^2+2}\mathrm{d}x + \int \frac{-2x-2}{(x^2+2)^2}\mathrm{d}x.$$

先将容易计算的求出如下:

---

① 由于形式 (9.8) 已经确定, 因此在求出 C_1 之后也不难直接凑出所需的分解:

$$\frac{x^2(x+1)}{(x^2+2)^2} = \frac{x(x^2+2)+(x^2+2)-(2x+2)}{(x^2+2)^2} = \frac{x+1}{x^2+2} - \frac{2(x+1)}{(x^2+2)^2}.$$

$$I = -\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{x^2+2} - 2\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2}.$$

对于上式最后一项的计算, 可以从已经会求的积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2}$ 开始, 用分部积分法升高分母的次数:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} = \frac{x}{x^2+2} + \int\frac{2x^2\,\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2} = \frac{x}{x^2+2} + 2\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} - 4\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2},$$

这样就得到

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2} = \frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{x}{4(x^2+2)} + C.$$

合并以上结果就得到

$$\begin{aligned}I &= -\ln|x-1| + \frac{1}{2}\ln|x^2+2| + \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + \frac{1}{x^2+2}\\&\qquad - \frac{x}{2(x^2+2)} - \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C\\&= \ln\frac{\sqrt{x^2+2}}{|x-1|} + \frac{-x+2}{2(x^2+2)} + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C. \quad \square\end{aligned}$$

在例题 9.41 中最后一步的计算方法可以用于计算 $\frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}$ $(n \geqslant 2)$ 的不定积分. 这也是部分分式分解后留下的积分问题.

由于二次三项式 x^2+px+q 在实数域不可约, 因此其判别式 $p^2-4q<0$, 从而一定可以通过配方和平移将问题简化为计算 $n \geqslant 2$ 时的不定积分

$$I_n = \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^n}, \tag{9.9}$$

其中设 $a>0$.

对于 (9.9) 的计算介绍两种方法.

先介绍递推法. 它就是在例题 9.41 中计算 $\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2}$ 时所用的方法. 代替从 I_n 出发如何将 n 降低, 而是倒过来将 n 升高如下:

$$\begin{aligned}I_{n-1} &= \int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)^{n-1}} = \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \int\frac{x\cdot(n-1)\cdot 2x}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x\\&= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^n}\,\mathrm{d}x\\&= \frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + 2(n-1)I_{n-1} - 2(n-1)a^2 I_n.\end{aligned}$$

整理后得到所求的递推公式:

$$I_n = \frac{1}{2a^2(n-1)}\cdot\frac{x}{(x^2+a^2)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2a^2(n-1)}\cdot I_{n-1}.$$

当然一般不需要记住这类公式, 而是要学会用上述方法, 或者猜出它的形式然后用待定系数法. 例如, 对于例题 9.41 中遇到的积分, 写出待定的等式

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2} = \frac{Ax}{x^2+2} + \lambda\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2},$$

其中 A,λ 是待定常数.

两边求导得到

$$\frac{1}{(x^2+2)^2}=\frac{A}{x^2+2}-\frac{2Ax^2}{(x^2+2)^2}+\frac{\lambda}{x^2+2}=\frac{(A+\lambda)(x^2+2)-2Ax^2}{(x^2+2)^2},$$

等置两边分子的同次数幂项的系数, 就得到

$$\lambda-A=0,\quad \lambda+A=\frac{1}{2},$$

并解得 $A=\lambda=\dfrac{1}{4}$. 于是可以得到与前面相同的结果:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2}&=\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4}\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2}\\&=\frac{x}{4(x^2+2)}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+C.\end{aligned}$$

计算 (9.9) 的另一种方法是作三角代换 $x=a\tan\theta$, 则 $\mathrm{d}x=a\sec^2\theta$, 因此有

$$I_n=\int\frac{a\sec^2\theta\,\mathrm{d}\theta}{a^{2n}\sec^{2n}\theta}=\frac{1}{a^{2n-1}}\int\cos^{2n-2}\theta\mathrm{d}\theta,$$

这样就可以用 De Moivre 公式将被积函数化为倍角函数求积. 当然也可以写出递推公式 (作为练习题).

例如, 对例题 9.41 中遇到的积分可以再次计算如下, 其中作代换 $x=\sqrt{2}\tan\theta$:

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)^2}&=\frac{\sqrt{2}}{4}\int\cos^2\theta\,\mathrm{d}\theta=\frac{1}{4\sqrt{2}}\int(1+\cos2\theta)\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}(\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta)+C\\&=\frac{1}{4\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}+\frac{1}{4\sqrt{2}}\cdot\frac{x\sqrt{2}}{x^2+2}+C.\end{aligned}$$

再计算一个常见的不定积分.

例题 9.42 求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

解 1 按照标准方法先将分母作因式分解, 得到

$$\begin{aligned}x^4+1&=(x^4+2x^2+1)-2x^2=(x^2+1)^2-(\sqrt{2}x)^2\\&=(x^2+\sqrt{2}x+1)(x^2-\sqrt{2}x+1).\end{aligned}$$

于是有部分分式分解

$$\frac{1}{x^4+1}=\frac{ax+b}{x^2+\sqrt{2}x+1}+\frac{cx+d}{x^2-\sqrt{2}x+1}.$$

令 $x=0$ 代入得到 $b+d=1$. 乘以 x 后令 $x\to+\infty$ 得到 $a+c=0$. 再令 $x=\mathrm{i}$ 代入得到

$$\frac{1}{2}=\frac{a-c}{\sqrt{2}}+\frac{b-d}{\mathrm{i}\sqrt{2}}.$$

等置两边的实部与虚部得到 $a-c=1/\sqrt{2}$, $b=d$. 与前面的结果联合即可确定 $a=-c=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $b=d=\dfrac{1}{2}$.

最后计算不定积分如下:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}x+\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x + \int \frac{-\frac{\sqrt{2}}{4}x-\frac{1}{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x+\sqrt{2}}{x^2+\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+\sqrt{2}x+1} - \frac{\sqrt{2}}{8}\int \frac{2x-\sqrt{2}}{x^2-\sqrt{2}x+1}\,\mathrm{d}x \\
&\qquad + \frac{1}{4}\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-\sqrt{2}x+1} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{8}\ln\left|\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1}\right| + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x+1) \\
&\qquad + \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan(\sqrt{2}x-1)+C. \quad \square
\end{aligned}
$$

解 2 解本题比较巧妙的方法是配对法:

$$
\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2-1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int \frac{1-\frac{1}{x^2}}{x^2+\frac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2} - \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(x+\frac{1}{x})}{(x+\frac{1}{x})^2-2} \\
&= \frac{1}{2\sqrt{2}}\arctan\frac{x-\frac{1}{x}}{\sqrt{2}} - \frac{1}{4\sqrt{2}}\ln\left|\frac{x+\frac{1}{x}-\sqrt{2}}{x+\frac{1}{x}+\sqrt{2}}\right| + C. \quad \square
\end{aligned}
$$

9.3.3 部分分式分解定理的证明

为方便起见重新叙述定理如下.

部分分式分解定理 实系数真有理分式可以惟一方式分解为部分分式之和.

证 设有实系数真有理分式 $\dfrac{Q(x)}{R(x)}$, 分子与分母为不可约的多项式, 则可以分为以下几步来证.

(1) 设分母为

$$R(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,$$

其中所有系数都是实数, 且 $a_n\neq 0$. 利用代数基本定理, $R(x)$ 在复数域 $\mathbb{C}$ 中一定有根 (或者说有零点). 如果是实根, 记为 a, 则 $R(x)$ 可以为 $x-a$ 整除. 如果是复根, 将这个根记为 z, 并用 $\overline{z}$ 表示 z 的共轭复数, 则对于

$$R(z)=a_nz^n+a_{n-1}z^{n-1}+\cdots+a_1z+a_0=0$$

取共轭之后就有

$$\overline{R(z)}=a_n\overline{z}^n+a_{n-1}\overline{z}^{n-1}+\cdots+a_1\overline{z}x+a_0=R(\overline{z})=0,$$

可见 $\overline{z}$ 也是 $R(x)$ 的根. 因此 f 的根或者是实根, 或者以一对共轭复根出现. 于是 $R(x)$ 可以为 $(x-z)(x-\overline{z})$ 所整除. 这时的二次三项式

$$(x-z)(x-\overline{z})=x^2-(z+\overline{z})x+z\cdot\overline{z}$$

在实数域上不可约. 从 $R(x)$ 中劈去已知的因子后再继续下去, 这样经过有限步后就可以实现所要的分解, 并同时证明了 n 次代数多项式恰有 n 个根, 其中有重根时要计入根的重数.

由多项式在实数域上的因式分解与根的关系可见这样的分解是惟一的.

(2) 设真有理分式 $\dfrac{Q(x)}{R(x)}$ 的分母 $R(x)=f(x)\cdot g(x)$, 其中 $f(x)$ 和 $g(x)$ 为互素的多项式, 则可以证明存在惟一的一对多项式 $u(x)$ 和 $v(x)$, 使得成立

$$\frac{Q(x)}{R(x)}=\frac{u(x)}{f(x)}+\frac{v(x)}{g(x)},$$

且右边的两个分式都是真分式.

先证明存在性.

根据代数学中的定理知道存在多项式 $u_1(x)$ 和 $v_1(x)$, 使得成立

$$u_1(x)g(x)+v_1(x)f(x)=1.$$

乘以 $Q(x)/R(x)$ 并利用 $R(x)=f(x)g(x)$, 就得到

$$\frac{Q(x)}{R(x)}=\frac{Q(x)u_1(x)}{f(x)}+\frac{Q(x)v_1(x)}{g(x)},$$

将右边第一个分式的分子除以 $f(x)$, 得到

$$Q(x)u_1(x)=h(x)f(x)+u(x),$$

其中 $u(x)$ 是余项, 次数低于 $f(x)$ 的次数.

这样就可以将上式改写为

$$\frac{Q(x)}{R(x)}=\frac{u(x)}{f(x)}+\frac{h(x)g(x)+Q(x)v_1(x)}{g(x)},$$

记 $v(x)=h(x)g(x)+Q(x)v_1(x)$, 则由于上式左边和右边第一个分式都是真分式, 因此 $v(x)/g(x)$ 也是真分式.

现在证明这样的 $u(x),v(x)$ 是惟一的. 用反证法. 若存在满足条件的另一对多项式 $\overline{u}(x),\overline{v}(x)$, 则就有

$$\frac{u(x)}{f(x)}+\frac{v(x)}{g(x)}=\frac{\overline{u}(x)}{f(x)}+\frac{\overline{v}(x)}{g(x)},$$

改写为

$$u(x)-\overline{u}(x)=\frac{f(x)\cdot(\overline{v}(x)-v(x))}{g(x)},$$

则左边为多项式, 右边由于 $f(x),g(x)$ 互素, 而 $\overline{v}(x)-v(x)$ 的次数小于分母 $g(x)$ 的次数, 因此不会是多项式. 除非 $u(x)-\overline{u}(x)$ 和 $v(x)-\overline{v}(x)$ 都是零多项式, 否则就会引出矛盾.

利用第 (1) 步中对于分母 $R(x)$ 的因式分解, 再 (反复) 利用 (2) 的结果, 就可以将真分式 $\dfrac{Q(x)}{R(x)}$ 以惟一的方式分解为几个真分式之和, 它们的分母均不相同, 且只有两种类型, 或者是 $(x-a)^k, k\geqslant 1$, 或者是 $(x^2+px+q)^{k'}, k'\geqslant 1$, 其中的 x^2+px+q 为实数域上的不可约多项式.

(3) 将上述分解得到的 $x-a$ 和 x^2+px+q 统记为 $p(x)$, 则对于 $k>1$ 的情况有进一步的分解:

$$\frac{v(x)}{p^k(x)}=\frac{u_1(x)}{p(x)}+\frac{u_2(x)}{p^2(x)}+\cdots+\frac{u_k(x)}{p^k(x)},$$

其中分子 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_k(x)$ 的次数均低于 $p(x)$ 的次数.

将 $v(x)$ 用 $p(x)$ 除, 所得的余项记为 $u_k(x)$, 将所得的商再用 $p(x)$ 除, 所得的余项记为 $u_{k-1}(x)$, 如此继续, 就得到

$$v(x)=u_1(x)p^{k-1}(x)+u_2(x)p^{k-2}(x)+\cdots+u_{k-1}(x)p(x)+u_k(x).$$

(或者也可以将 $v(x)$ 用 $p^{k-1}(x)$ 除得到 $u_1(x)$ 后再做下去.) 从上述过程可见每个 $u_i(x)$ 的次数都低于 $p(x)$ 的次数, 然后除以 $p^k(x)$ 即得所要的分解式. 惟一性的证明则相当于在 $v(x)$ 为零多项式时, 所得的每个 $u_i(x)$ 都是零多项式.

于是对 $R(x)=(x-a)^kR_1(x)$, $R_1(a)\neq 0$ 的情况, 在部分分式分解中就有

$$\frac{c_1}{x-a}+\cdots+\frac{c_k}{(x-a)^k},$$

而当 $R(x)=(x^2+px+q)^kR_2(x)$, $R_2(x)$ 与 x^2+px+q 互素的情况, 在部分分式分解中就有

$$\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\cdots+\frac{M_kx+N_k}{(x^2+px+q)^k}. \quad \square$$

注 多数数学分析书中不写出部分分式分解定理的证明而请读者看代数教科书或复变函数论的教科书. 写出证明的分析教材多数采用 [8] 的写法. (见该书的第二卷的 274 小节, 老版为 262 小节.)

9.3.4 有理三角函数的积分

三角函数 $\sin x,\cos x,\tan x,\cot x,\sec x,\csc x$ 的有理式都可以转化为$\sin x$ 和 $\cos x$ 的有理式, 因此只要考虑如何求积

$$I=\int R(\cos x,\sin x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $R(u,v)$ 是 u,v 的有理函数.

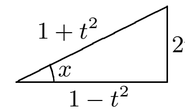
对这类积分有万能代换 (或万能代换) $t=\tan\dfrac{x}{2}$, 它可以将上述积分转化为有理函数的积分, 从而一定可积.

万能代换之所以有效是因为它可以将 $\sin x, \cos x$ 和 $\mathrm{d}x$ 同时有理化:

$$\sin x = 2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2} = 2\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2},$$

$$\cos x = \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \frac{1-\tan^2\dfrac{x}{2}}{\sec^2\dfrac{x}{2}} = \frac{1-t^2}{1+t^2},$$

$$\mathrm{d}x = \mathrm{d}(2\arctan t) = \frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t,$$



这样就可以将积分归结为有理函数的不定积分:

$$I = \int R(\cos x, \sin x)\,\mathrm{d}x = \int R\left(\frac{1-t^2}{1+t^2}, \frac{2t}{1+t^2}\right)\cdot\frac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t.$$

下面举一些例子.

例题 9.43 求 $I = \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$ (即基本不定积分表中最后一组的第一个积分).

解 1　令 $t = \tan\dfrac{x}{2}$, 则就有

$$I = \int\frac{\dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{\dfrac{2t}{1+t^2}} = \int\frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln|t| + C = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C. \quad \square$$

但本题还有多种其他解法.

解 2　不用万能代换可以如下求解:

$$I = \int\frac{\mathrm{d}x}{2\sin\dfrac{x}{2}\cos\dfrac{x}{2}} = \int\frac{\mathrm{d}x}{2\tan\dfrac{x}{2}\cos^2\dfrac{x}{2}}$$

$$= \int\frac{\sec^2\dfrac{x}{2}}{\tan\dfrac{x}{2}}\,\mathrm{d}\left(\frac{x}{2}\right) = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C. \quad \square$$

解 3　也可以不用半角公式而求积如下.

$$I = \int\frac{\sin x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x = \int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos^2 x - 1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\cos x - 1}{\cos x + 1}\right| + C. \quad \square$$

注　本题的答案还可以有以下各种不同形式:

$$\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \ln\left|\frac{\sin x}{1+\cos x}\right| + C$$

$$= \ln\left|\frac{1-\cos x}{\sin x}\right| + C$$

$$= \ln|\csc x - \cot x| + C.$$

例题 9.44 求 $I = \displaystyle\int\frac{\mathrm{d}\theta}{1 - 2r\cos\theta + r^2}$, 其中 $0 \leqslant r < 1$.

解 用万能代换 $t=\tan\dfrac{\theta}{2}$ 即可计算如下:

$$\begin{aligned}
I&=\int\frac{\dfrac{2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t}{1+r^2-2r\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}}=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+r^2)(1+t^2)-2r(1-t^2)}\\
&=\int\frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+r)^2t^2+(1-r)^2}\\
&=\frac{2}{(1+r)^2}\cdot\frac{1+r}{1-r}\cdot\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot t\right)+C\\
&=\frac{2}{(1-r)^2}\cdot\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot\tan\frac{\theta}{2}\right)+C.\quad\square
\end{aligned}$$

万能代换的缺点是代换后所得的有理函数的分母次数可能较高, 从而引起繁复的计算. 这里指出对于以下三种情况可以不必用万能代换.

1. 若 $R(-\sin x,\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则可用 $t=\cos x$ (其特例就是 $R(\cos x)\sin x$) ;

2. 若 $R(\sin x,-\cos x)=-R(\sin x,\cos x)$, 则可用 $t=\sin x$ (其特例就是 $R(\sin x)\cos x$) ;

3. 若 $R(-\sin x,-\cos x)=R(\sin x,\cos x)$, 则可用 $t=\tan x$ (其特例就是 $R(\tan x)$) .

注 这里可以与 §9.2.2 三角函数积分的例子作比较. 当然在那里的被积函数不限于有理三角函数.

下面举一些例子.

例题 9.45 求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{a+b\tan x}$, 其中 $b\neq 0$.

解 1 作代换 $t=\tan x$, 则得到 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(a+bt)}$.

作部分分式分解

$$\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}=\frac{c}{a+bt}+\frac{At+B}{1+t^2},$$

则在两边乘以 $a+bt$ 后令 $t\to-\dfrac{a}{b}$ 就得到 $c=\dfrac{b^2}{a^2+b^2}$. 然后移项计算

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}-\frac{b^2}{a^2+b^2}\cdot\frac{1}{a+bt}&=\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}(1-\frac{b^2}{a^2+b^2}(1+t^2))\\
&=\frac{1}{(1+t^2)(a+bt)}\cdot\frac{1}{a^2+b^2}\cdot(a^2-b^2t^2)\\
&=\frac{1}{1+t^2}\cdot\frac{a-bt}{a^2+b^2}.
\end{aligned}$$

最后计算不定积分如下

$$\begin{aligned}I &= \frac{b}{a^2+b^2}\ln|a+bt| - \frac{b}{2(a^2+b^2)}\ln(1+t^2) + \frac{a}{a^2+b^2}\arctan t + C\\ &= \frac{a}{a^2+b^2}x + \frac{b}{(a^2+b^2)}\ln\left|\frac{a+bt}{\sqrt{1+t^2}}\right| + C\\ &= \frac{a}{a^2+b^2}x + \frac{b}{(a^2+b^2)}\ln\left|\frac{a+b\tan x}{\sec x}\right| + C\\ &= \frac{a}{a^2+b^2}x + \frac{b}{(a^2+b^2)}\ln|a\cos x+b\sin x| + C. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 这又是可用配对法解决问题的一个例子.

$$\begin{aligned}I &= \int\frac{\cos x}{a\cos x+b\sin x}\,\mathrm{d}x\\ &= A\int\frac{-a\sin x+b\cos x}{a\cos x+b\sin x}\,\mathrm{d}x + B\int\frac{a\cos x+b\sin x}{a\cos x+b\sin x}\,\mathrm{d}x\\ &= A\ln|a\cos x+b\sin x| + Bx + C,\end{aligned}$$

其中的常数满足方程

$$bA+aB=1, \quad -aA+bB=0,$$

这就解出 $A=\dfrac{b}{a^2+b^2}$, $B=\dfrac{a}{a^2+b^2}$. $\square$

9.3.5 可以有理化的无理函数的不定积分

与前面一样用 $R(u,v)$ 表示两个变元的有理函数, 下面考虑含有根式的无理函数的不定积分, 其中介绍两种常见的可积类型.

一. $\displaystyle\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x$.

其中设 $ad-bc\neq 0$ (否则如何?). 作代换

$$t=\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}},$$

就可以解出 x 为 t 的有理函数:

$$x=g(t)=\frac{b-dt^n}{ct^n-a},$$

于是就一定可以有理化:

$$\int R\left(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}\right)\mathrm{d}x = \int R(g(t),t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

此外, $\displaystyle\int R(x,\sqrt[n]{ax+b})\,\mathrm{d}x$ 也属于这个类型, 只要令 $t=\sqrt[n]{ax+b}$ 就可有理化.

例题 9.46 求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{(1-x)\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)}}$.

解 表面上看似乎不属于上述类型, 其实只要将三次根式作如下改写即可:

$$\sqrt[3]{(1-x)^2(1+x)} = (1-x)\sqrt[3]{\frac{1+x}{1-x}},$$

令 $t=\sqrt[3]{\dfrac{1+x}{1-x}}$, 则 $x=\dfrac{1-t^3}{1+t^3}$, $1-x=\dfrac{2t^3}{1+t^3}$, $\mathrm{d}x=-\dfrac{6t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t$, 于是得到

$$\begin{aligned}I&=-\int t\cdot\frac{(1+t^3)^2}{4t^6}\cdot\frac{6t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t=-\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{t^3}=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{t^2}+C\\&=\frac{3}{4}\cdot\sqrt[3]{\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^2}+C.\quad\square\end{aligned}$$

二. $\displaystyle\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\,\mathrm{d}x$.

其中设 $a\neq 0$, $b^2-4ac\neq 0$ (否则如何?)

用三角代换就可以证明这类不定积分也一定是可积的. 关于这类积分的计算方法有很多内容, 例如 Euler 代换和递推方法等 [8], 这里不作介绍. 下面举两个例子. 其中用三角代换的方法未必最快捷.

例题 9.47 求 $I=\displaystyle\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0$.

解 1 用分部积分法, 可以 (与例题 9.36 的计算类似) 如下求出答案:

$$\begin{aligned}I&=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x\\&=x\sqrt{x^2+a^2}-\int\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x+a^2\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}\\&=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2+a^2}+\frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})+C.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 令 $x=a\tan t$, 则 $\sqrt{x^2+a^2}=a\sec t$, $\mathrm{d}x=a\sec^2 t\,\mathrm{d}t$, 于是有

$$\begin{aligned}I&=\int a^2\sec^3 t\,\mathrm{d}t=a^2\int\sec t\,\mathrm{d}\tan t=a^2\tan t\sec t-a^2\int\sec t\tan^2 t\,\mathrm{d}t\\&=a^2\tan t\sec t-a^2\int\sec t(\sec^2 t-1)\,\mathrm{d}t=\frac{a^2}{2}\tan t\sec t+\frac{a^2}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}\\&=\frac{a^2}{2}\tan t\sec t+\frac{a^2}{2}\ln|\tan(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})|+C.\end{aligned}$$

最后需要将上式转化为 x 的函数. 容易看出其第一项就是 $\dfrac{1}{2}x\sqrt{a^2+x^2}$. 利用

$$\tan(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4})=\frac{1-\cos(t+\frac{\pi}{2})}{\sin(t+\frac{\pi}{2})}=\frac{1+\sin t}{\cos t}=\sec t+\tan t,$$

可见第二项就是 $\dfrac{a^2}{2}\ln\left(\dfrac{x}{a}+\dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}\right)$, 答案与解 1 相同. $\square$

例题 9.48 求 $I=\displaystyle\int x^2\sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a>0$.

解 1 令 $x^2=u$, 则有

$$I=\int u\sqrt{u+a^2}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{2\sqrt{u}}=\frac{1}{2}\int\sqrt{u^2+a^2u}\,\mathrm{d}u$$
$$=\frac{1}{2}\int\sqrt{(u+\frac{a^2}{2})^2-\frac{1}{4}a^4}\,\mathrm{d}u.$$

令 $u+\dfrac{a^2}{2}=t$, 又记 $b=\dfrac{1}{4}a^4$, 然后利用分部积分法, 就有

$$\begin{aligned}
I&=\frac{1}{2}\int\sqrt{t^2-b}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-b}-\frac{1}{2}\int\frac{t\cdot t}{\sqrt{t^2-b}}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-b}-\frac{1}{2}\int\frac{t^2-b+b}{\sqrt{t^2-b}}\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{2}t\sqrt{t^2-b}-\frac{1}{2}\int\sqrt{t^2-b}\,\mathrm{d}t+\frac{b}{2}\int\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^2-b}}\\
&=\frac{1}{4}t\sqrt{t^2-b}+\frac{b}{4}\ln|t+\sqrt{t^2-b}|+C\\
&=\frac{1}{4}(x^2+\frac{a^2}{2})\sqrt{x^4+a^2x^2}-\frac{a^4}{16}\ln(x^2+\frac{a^2}{2}+\sqrt{x^4+a^2x^2})+C\\
&=\frac{1}{4}(x^3+\frac{a^2}{2}x)\sqrt{x^2+a^2}-\frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.\quad\square
\end{aligned}$$

解 2 作代换 $x=a\tan t$, 则有

$$I=\int a^2\tan^2t\cdot a\sec t\cdot a\sec^2t\,\mathrm{d}t=a^4\int\frac{\sin^2t\,\mathrm{d}t}{\cos^5t}=a^4\int\frac{\sin^2t\,\mathrm{d}\sin t}{(1-\sin^2t)^3},$$

再令 $u=\sin t$, 就成为有理函数的积分:

$$I=a^4\int\frac{u^2\,\mathrm{d}u}{(1-u)^3(1+u)^3}.$$

写出部分分式分解

$$\begin{aligned}
\frac{u^2}{(1-u)^3(1+u)^3}&=\frac{C_1}{1-u}+\frac{C_2}{(1-u)^2}+\frac{C_3}{(1-u)^3}\\
&\quad+\frac{C_4}{1+u}+\frac{C_5}{(1+u)^2}+\frac{C_6}{(1+u)^3},
\end{aligned}$$

两边乘以 $(1-u)^3$ 后令 $u\to1$ 得到 $C_3=1/8$. 同法可得 $C_6=1/8$. 移项计算

$$\begin{aligned}
&\frac{u^2}{(1-u)^3(1+u)^3}-\frac{1}{8}(\frac{1}{(1-u)^3}+\frac{1}{(1+u)^3})\\
&=\frac{u^2}{(1-u)^3(1+u)^3}-\frac{1}{8}\cdot\frac{2+6u^2}{(1-u)^3(1+u)^3}\\
&=\frac{1}{4}\cdot\frac{u^2-1}{(1-u)^3(1+u)^3}=-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{(1-u)^2(1+u)^2}\\
&=\frac{C_1}{1-u}+\frac{C_2}{(1-u)^2}+\frac{C_4}{1+u}+\frac{C_5}{(1+u)^2}.
\end{aligned}$$

由此可以确定 $C_2=C_5=-\dfrac{1}{16}$. 又令 $u=0$ 代入两边得到 $C_1+C_2+C_4+C_5=-\dfrac{1}{4}$, 因此 $C_1+C_4=-\dfrac{1}{8}$. 最后两边乘以 u 后令 $u\to+\infty$, 得到 $C_1=C_4$. 于是

$C_1 = C_4 = -\dfrac{1}{16}$.

以下是不定积分的计算:

$$\begin{aligned}
I &= \frac{a^4}{16}\left(-\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| - \frac{1}{1-u} + \frac{1}{1+u} + \frac{1}{(1-u)^2} - \frac{1}{(1+u)^2}\right) + C \\
&= -\frac{a^4}{16}\ln\left|\frac{1+u}{1-u}\right| + \frac{a^4}{8}\cdot\frac{u+u^3}{(1-u^2)^2} + C \\
&= -\frac{a^4}{16}\ln\frac{1+\sin t}{1-\sin t} + \frac{a^4}{8}\frac{\sin t(1+\sin^2 t)}{\cos^4 t} + C \\
&= -\frac{a^4}{8}\ln|\tan t + \sec t| + \frac{a^4}{8}(\sec t\tan t + 2\sec t\tan^3 t) + C \\
&= -\frac{a^4}{8}\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}| + \frac{1}{8}(2x^3 + xa^2)\sqrt{x^2+a^2} + C. \quad \square
\end{aligned}$$

最后介绍著名的微分二项式的不定积分. 这就是下列形式的积分:

$$\int x^m (bx^n + a)^p \, \mathrm{d}x,$$

其中 m, n, p 都是有理数, 且至少有一个不是整数. Chebyshev[①]证明: 微分二项式的不定积分可积的充分必要条件是以下三个有理数

$$p, \frac{m+1}{n}, p + \frac{m+1}{n}$$

之中至少有一个是整数 [8].

练 习 题

1. 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3+1}$;

(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^3-1}$;

(3) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{x^2-3x+4}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int \frac{x^7}{x^2-1}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)(x+2)^2}$;

(6) $\displaystyle\int \frac{x^2+x}{x^6+1}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \frac{x^9\,\mathrm{d}x}{(x^{10}+2x^5+2)^2}$;

(8) $\displaystyle\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}}\,\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^4+x^2+1}$;

(10) $\displaystyle\int \frac{1-x^5}{x(1+x^5)}\,\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)(x^2+1)^2}$;

(12) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+2)(x^2+3)}$;

(13) $\displaystyle\int \frac{x^2+1}{(x^2-1)(x+1)}\,\mathrm{d}x$;

(14) $\displaystyle\int \frac{x^4-x^3-x^2-3x}{(x^2-1)(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

① 切比雪夫 (Пафнутий Львович Чебышев, 1821–1894), 俄国数学家、理论力学家, 彼得堡数学学派的奠基人.

2. 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{\sin x \cos x}{1+\tan^4 x}\,\mathrm{d}x$;
(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x + 2\cos x + 3}$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\cos x}{\sqrt{2+\cos 2x}}\,\mathrm{d}x$;
(4) $\displaystyle\int (\tan^2 x + \tan^3 x)\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int (\tan^2 x + \tan^4 x)\,\mathrm{d}x$;
(6) $\displaystyle\int \frac{\sin^2 x}{1+\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin x}$;
(8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2+\cos x)\sin^2 x}$;

(9) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan x}$;
(10) $\displaystyle\int \sin^5 x \cos^4 x\,\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int \frac{\sin x}{\sqrt{2+\cos 2x}}\,\mathrm{d}x$;
(12) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{1+\varepsilon\cos x} - \frac{1}{1-\varepsilon\cos x}\right)\mathrm{d}x$.

(在题 (12) 中设 $0<\varepsilon<1$)

3. 求下列不定积分:

(1) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\,\mathrm{d}x$;
(2) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x+1)\sqrt[3]{x^2+2x}}$;

(3) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[4]{x^3(1-x)}}$;
(4) $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-3x+4}}$;

(5) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2-3x+4}}$;
(6) $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-3x+4}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+\sqrt[4]{x})}$;
(8) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(2-3^x)^4}$;

(9) $\displaystyle\int \frac{(2x+1)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{-4x^2+12x+27}}$;
(10) $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\sqrt{x^2+4x+5}}$.

第十章 定积分

内容简介 这一章是一元积分学的核心. §10.1 从面积计算问题引入 Riemann 积分的定义, 并证明微积分基本定理. 这不仅揭示出导数与积分两大概念的深刻关系, 同时也给上一章的不定积分定位. §10.2 讨论可积性, 给出了可积的充要条件, 证明了三类函数可积, 还引入零测度集和几乎处处连续函数, 通过 Lebesgue 定理彻底解决了可积性问题. §10.3 为定积分的性质, 其中包括两个积分中值定理, 并解决了原函数的存在性问题. §10.4 集中介绍计算方法, 其中包括与上一章对应的换元法和分部积分法, 还介绍了利用对称性计算某些定积分的方法.

§10.1 定积分与微积分基本定理

10.1.1 面积计算的新方法

在第九章开始围绕面积计算问题的启发式讨论 (参见图 9.1) 使我们看到求导数运算的逆运算的重要性. 然而其中留下了几个重要问题没有解决, 首先是还不知道如何给出曲边梯形面积 $S(x)$ 的定义, 然后是如何证明它可导, 且成立 $S'(x) = f(x)$. 同理可知, 在例题 9.1 中对于抛物线 $y = x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$ 下的曲边梯形面积计算也存在同样的问题. 为了解决这些问题我们需要全新的思想和方法.

从一个简单例子开始, 这就是例题 9.1 中的那个曲边梯形的面积计算问题, 但将采取完全不同的方法. 下面我们结合图 10.1 来介绍这里的新方法.

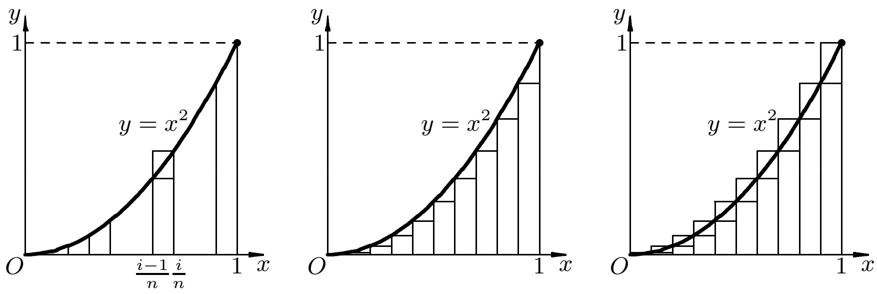


图 10.1: 计算曲边梯形面积的逼近方法

如图 10.1 所示, 考虑由 $y = x^2$, $y = 0$ 和 $x = 1$ 围成的曲边梯形 (实际上是一个曲边三角形) 的面积. 这里还可与图 9.2 所提示的方法比较.

在分图 (a) 中, 将区间 $[0,1]$ 作 n 等分, 这时的所有分点和区间的端点一共有 $n+1$ 个, 按照大小可以排列为

$$0<\frac{1}{n}<\frac{2}{n}<\cdots<\frac{n-1}{n}<\frac{n}{n}=1.$$

这样就将原来的曲边梯形划分为 n 个狭长的曲边梯形. 它们的底边长度都是 $1/n$.

如分图 (a) 所示, 对于其中第 i 个曲边梯形, 它包含一个底边相同而高为 $\dfrac{(i-1)^2}{n^2}$ 的内接矩形. 同时又可以作出有相同底边而高为 $\dfrac{i^2}{n^2}$ 的外接矩形, 它包含第 i 个曲边梯形.

先考虑所有的内接矩形, 即对于 $i=1,\cdots,n$ 的点集

$$\{(x,y)\mid \frac{i-1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{i}{n},0\leqslant y\leqslant(\frac{i-1}{n})^2\},$$

这样就得到分图 (b). 不难计算出所有内接矩形面积之和为

$$\begin{aligned}S_n&=\frac{1}{n}\cdot 0+\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n-1}i^2\\&=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n-1)(2n-1)}{6}=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}.\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$ 就得到极限值为

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{1}{3}.$$

问题: 每一个狭长的曲边梯形与上述矩形之间还有一个小小的曲边三角形, 当 n 趋于无穷大时, 这些三角形的个数也趋于无穷大, 而每一个三角形的面积趋于 0, 于是它们的面积之和就是 $0\cdot\infty$ 型的不定式. 其极限是否是 0? 如果不是 0, 则上面的计算结果就未必是原来的曲边梯形的面积.

现在采用夹逼方法, 即对每一个底边长度为 $1/n$ 的狭长的曲边梯形, 同时考虑包含它的外接矩形, 即平面点集

$$\{(x,y)\mid \frac{i-1}{n}\leqslant x\leqslant\frac{i}{n},0\leqslant y\leqslant(\frac{i}{n})^2\},$$

其中 $i=1,\cdots,n$. 再计算所有外接矩形面积之和, 记为 S_n', 即有

$$\begin{aligned}S_n'&=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\frac{1}{n}\left(\frac{2}{n}\right)^2+\cdots+\frac{1}{n}\left(\frac{n}{n}\right)^2=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}i^2\\&=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{(n+1)(2n+1)}{6n^2}.\end{aligned}$$

由此可见有

$$\lim_{n\to\infty}S_n'=\frac{1}{3}.$$

这同时也证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}(S_n'-S_n)=0$, 即前面的 $0\cdot\infty$ 型的不定式的极限只能是 0.

虽然我们并没有对于曲边梯形面积给出定义, 但从上面的计算可以看出, 无论如何定义曲边梯形的面积 S, 只要这个定义合理, 则总应该满足不等式

$$S_n \leqslant S \leqslant S'_n,$$

因此只能得到 $S = \dfrac{1}{3}$. 这里夹在中间的不是数列, 因此不能用现成的夹逼定理. 然而夹逼的思想仍然有效.

在这个例子的以上计算中恰好可以利用 n 个正整数的平方和公式. 这有偶然性. 对于其他的一般函数就不知道如何做了. 然而从下面可见, 上述例子中所体现出来的许多新思想是与积分学理论密切有关的. 这就是本书要介绍的 Riemann 积分. 当然它后来又发展成为 Lebesgue 积分, 但我们认为在本科的数学分析中还是应当以 Riemann 积分为主来介绍积分学.

10.1.2 Riemann 积分的定义

首先需要对如何划分区间, 如何刻画划分越来越细等给出定义和适当的记号. 为此在下面依次给出分划和 Riemann 和的定义.

定义 10.1 (分划的定义) 对于有界闭区间 $[a,b]$, 称分点的集合

$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$$

为 $[a,b]$ 的一个分划 (Partition), 其中满足 $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$. P 将 $[a,b]$ 分成 n 个闭子区间 $[x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$. 记这些子区间长度为 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $i = 1, \cdots, n$, 定义分划 P 的细度为这些子区间长度中的最大数:

$$\|P\| = \max\{\Delta x_1, \cdots, \Delta x_n\}.$$

(分划也可称为分割或划分, 分划的细度也称为模或长度.)

在分划中最简单的是等距划分, 即 $\Delta x_1 = \cdots = \Delta x_n = \dfrac{b-a}{n} = \|P\|$. 这时 $n \to \infty$ 就是 $\|P\| \to 0$.

定义 10.2 (Riemann 和的定义) 设 f 于 $[a,b]$ 上有定义. 任取 $[a,b]$ 的一个分划 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 又对于由 P 生成的每个子区间任取一个介点 $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, \cdots, n$, 然后作出一个有限和式

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i,$$

将它称为 f 的一个 Riemann 和, 或者更确切地说是由分划 P 与介点集 $\xi = \{\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n\}$ 共同确定的一个 Riemann 和.

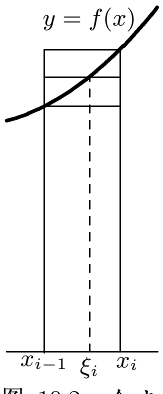


图 10.2: 介点的意义

在图 10.2 中作出了在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上的曲边梯形的外接矩形和内接矩形. $f(\xi_i)\Delta x_i$ 就是底边长 Δx_i 和高为 $f(\xi_i)$ 的矩形面积, 它不大于外接矩形面积, 也不小于内接矩形面积.

以上定义的突出特点是有两个任意性. 不仅分划任意, 而且还允许在每个子区间中任意选取介点 ξ_i. 为什么不简单地将 ξ_i 取为端点 x_{i-1} 或者 x_i? 在早期由 Cauchy 提出的积分定义中就是如此. 今天还将这样的和式所得到的积分称为 Cauchy 积分. 但是后来发现 Riemann 的积分定义有很多优点, 因此一般现在不再用 Cauchy 积分定义了. 这样做会带来的优点我们不久就会看到.

现在可以讲什么是 Riemann 积分了.

定义 10.3 (Riemann 积分的定义) 给定 $[a,b]$ 上的函数 f, 若存在数 I, 对于 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,\delta>0, \forall\,P\ (\|P\|<\delta), \forall\,\xi\ (\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ \forall\,i)$ (即介点集 ξ 与分划 P 相容):

$$\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon,$$

则称 f 于 $[a,b]$ 上 Riemann 可积 (或者说 (R) 可积, 或简称可积①), 并将 I 称为 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 积分或 (R) 积分, 记为

$$I = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

定积分记号与不定积分类似, 其中同样有被积函数, 被积表达式和积分变量. 它的不同之处是在积分号的上下方出现有符号 a,b. 今后称 a 为积分下限, b 称为为积分上限. 又称 $[a,b]$ 为积分区间.

定义 10.3 中的定积分是一种新型的极限, 常写为

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

它与过去的数列极限和函数极限都不相同.

与以前相比, 在数列极限中对给定的 ε 取定 N 之后, 满足 $n\geqslant N$ 的 n 也是无穷多个, 但 n 取定之后就确定了 x_n. 对于函数极限来说, 情况也是类似的. 目前的 Riemann 和的极限则要复杂得多. 对于给定的 ε 取定 δ 之后, 满足 $\|P\|<\delta$ 的分划 P 当然有无穷多个, 而取定一个分划 P 之后, 满足 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]\ \forall\,i$ 的介点集也有无穷多个, 而要求由它们确定的 Riemann 和都满足 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right| < \varepsilon$.

下面叙述并证明有关 Riemann 积分的第一个定理. 它是定积分的一个基本性质, 同时也反映出 Riemann 和的定义 10.2 中介点集可以任意选取的重要性.

定理 10.1 (R) 可积的函数一定是有界函数.

证 设 f 于 $[a,b]$ 上 (R) 可积, 且其积分值为 I, 要证明 f 于 $[a,b]$ 上有界.

① 这里的可积性与第九章 §9.3 中不定积分的可积性完全是两回事. 这里的可积是指 Riemann 和有极限, 而不定积分的可积是指原函数为初等函数.

根据定义, 对 $\varepsilon_0=1$, 存在 $\delta>0$, 只要分划 P 的细度小于 δ, 则对于与 P 相容的任何介点集 ξ, 成立 $\left|\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i - I\right|<1$, 也就是

$$I-1<\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i<I+1.$$

固定分划 P, 又固定 $\xi_2,\cdots,\xi_n$, 则就得到

$$\frac{1}{\Delta x_1}\left(I-1-\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right)<f(\xi_1)<\frac{1}{\Delta x_1}\left(I+1-\sum_{i=2}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right).$$

由于 $\xi_1\in[a,x_1]$ 可以任取, 可见 f 于第一个子区间 $[a,x_1]$ 上有界. 同理可知 f 在其余 $n-1$ 个子区间上也都有界, 因此 f 在 $[a,b]$ 上有界. $\square$

注 由此可见在 Riemann 积分定义中引入介点集的作用. 与此相反的是, 在 Cauchy 积分定义中就不能从可积性推出函数有界.

下面举一个最简单的例子说明如何理解定积分的定义. 它相当于数列极限中的常值数列.

例题 10.1 设 f 是 $[a,b]$ 上恒等于 c 的常值函数, 则有

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i=c\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=c(b-a),$$

可见当 P 的细度趋于 0 时 Riemann 和的极限就是 $c(b-a)$, 即得到

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x=c(b-a).\quad\square$$

容易理解按照定义 10.3 来计算定积分一般是非常困难的. 从 §10.1.1 中 $y=x^2$ 的例子已经看到, 在将介点集限制为子区间的端点的情况下, 也还是需要利用前 n 个正整数的平方和公式才能成功. 因此我们需要有计算定积分的有效方法. 这就是下面的微积分基本定理, 其中的公式称为 Newton–Leibniz 公式.

10.1.3 微积分基本定理

Newton 和 Leibniz 在数学上的重大贡献之一是发现了下列定理. 它揭示出微分和积分之间的可逆联系, 为一门全新的数学学科的诞生奠定了基础 [3, 5, 21].

定理 10.2 (微积分基本定理) 设函数 f 在 $[a,b]$ 上 (R) 可积, 同时 f 在 $[a,b]$ 上存在原函数 F, 则成立下列的 Newton–Leibniz 公式

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)\ \left(=F(x)\Big|_a^b\right).\tag{10.1}$$

证 根据 f 的可积条件, 定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 有意义. 问题只是证明公式的两边相等. 取 $[a,b]$ 的分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 于是可以将 (10.1) 的右边改写为

$$F(b)-F(a)=F(x_n)-F(x_0)=\sum_{i=1}^{n}[F(x_i)-F(x_{i-1})].$$

然后在每一个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上对于 F 用 Lagrange 微分中值定理, 存在 $\xi_i\in(x_{i-1},x_i)$, 使得

$$F(x_i)-F(x_{i-1})=F'(\xi_i)\Delta x_i=f(\xi_i)\Delta x_i,$$

于是就有

$$F(b)-F(a)=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i,$$

令 $\|P\|\to 0$, 利用 f 可积, 就知道右边和式的极限为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. □

注 1 这个非常关键的定理能够如此简短地得到证明依赖于两个因素: 一是利用了 Lagrange 中值定理, 即微分学中最有力的工具之一, 二是利用了 Riemann 积分定义中介点集的任意性, 从而可以成功地将 $F(b)-F(a)$ 写为 Riemann 和.

注 2 上述定理中存在原函数的条件还可以放宽为存在广义的原函数. 这就是 $F\in C[a,b]$, 而等式 $F'(x)=f(x)$ 可以允许在区间 $[a,b]$ 的有限个点上未必成立. 这时 Newton–Leibniz 公式仍然成立. 证明的方法也很简单, 只要在原来的证明中取分划 P 时, 将所有例外点吸收为分点即可. 或者也可以将区间 $[a,b]$ 用有限个例外点分成若干子区间, 对每一个子区间写出 Newton-Leibniz 公式, 然后相加即得. (在关于原函数的定理 7.12 中已经考虑到这种可能性.)

例题 10.2 虽然 $F(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导, 但下列计算对于 $a<0<b$ 仍然是正确的:

$$\int_a^b \operatorname{sgn}x\,\mathrm{d}x=|x|\Big|_a^b=|b|-|a|,$$

这是因为广义原函数 $|x|$ 在导数不存在的点 $x=0$ 处连续. □

例题 10.3 利用 Newton–Leibniz 公式就容易计算出如下几个简单的定积分:

$$\int_0^1 x\,\mathrm{d}x=\frac{x^2}{2}\Big|_0^1=\frac{1}{2},\quad \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x=\frac{x^3}{3}\Big|_0^1=\frac{1}{3},$$

其中的第二个就是例题 9.1 和在 §10.1.1 中讨论的问题. □

例题 10.4 同样容易得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,\mathrm{d}x=-\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1,$$

它表明由 $y=\sin x$ 和 $y=0, x=\dfrac{\pi}{2}$ 围成的曲边三角形的面积恰好是 1 (见图 10.3). 当然还可以得到

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,\mathrm{d}x=\sin x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=1.\quad □$$

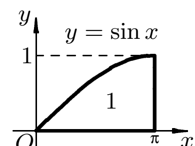


图 10.3: 面积等于 1 的曲边梯形

由以上例题可见, 在被积函数的原函数容易求出的前提下, 我们完全不需要按照定积分的定义去计算极限, 只要用 Newton–Leibniz 公式就够了. 这使得定积分的计算变得非常容易. 作为这方面的一个应用, 有时我们会将某些数列看成为某个函数的 Riemann 和, 从而将求数列极限的某些问题归结为定积分计算来解决.

例题 10.5 求极限: $I = \lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n+1} + \dfrac{1}{n+2} + \cdots + \dfrac{1}{n+n}\right)$.

解 (在第二章的例题 2.28 和例题 2.29 的注 2 中对上述问题已经给了两个解, 但都很难推广到更一般的问题上去.) 将数列通项记为 x_n, 改写为

$$x_n = \frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{n}} + \frac{1}{1+\frac{2}{n}} + \cdots + \frac{1}{1+\frac{n}{n}}\right),$$

就可以将 x_n 看成为区间 $[0,1]$ 上的函数 $f(x) = \dfrac{1}{1+x}$ 的一个 Riemann 和, 其中采用 n 等分的等距分划, 并将每个小区间的右端点取为介点. 因此极限为

$$I = \lim_{n\to\infty} x_n = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x} = \ln(1+x)\Big|_0^1 = \ln 2. \quad \square$$

例题 10.6 求极限 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}\sqrt[n]{n(n+1)\cdots(2n-1)}$.

解 记数列通项为 x_n, 则有

$$\ln x_n = \frac{1}{n}\Big(\ln 1 + \ln(1+\frac{1}{n}) + \cdots + \ln(1+\frac{n-1}{n})\Big),$$

可见这是 $[0,1]$ 上的函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 的一个 Riemann 和, 其中采用 n 等分的等距分划, 在每个子区间上取左端点为介点. 从 $\lim\limits_{n\to\infty}\ln x_n = \ln I$ 可见有

$$\ln I = \int_0^1 \ln(1+x)\,\mathrm{d}x = [(1+x)\ln(1+x) - x]\Big|_0^1 = 2\ln 2 - 1 = \ln\frac{4}{\mathrm{e}},$$

因此所求的极限为 $I = \dfrac{4}{\mathrm{e}}$. $\square$

当然以上几题的计算都有不严格处, 即没有验证有关的函数在相应的区间上的 (R) 可积性, 而这是应用 Newton–Leibniz 公式前需要解决的问题. 那么如何来检验函数的 (R) 可积性呢? 代替对许多具体问题的不胜其烦的一一讨论, 我们将在下一节中统一解决几大类函数的可积性问题.

此外, 对于曲边梯形的面积在目前就用积分来定义. 具体来说, 对于 $[a,b]$ 上的非负函数 $y = f(x)$, 若 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 则就将曲边梯形

$$\{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$$

的面积定义为积分值 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 这种做法当然有很大的局限性. 对于一般平面图形的面积定义问题将在第三册中讨论.

除了可积性之外, 为了利用微积分基本定理, 即 Newton–Leibniz 公式 (10.1), 还需要知道什么样的函数存在原函数. 这也是在第九章中没有讨论过的问题, 在那里我们只学习了计算方法, 而将原函数的存在性留待这一章处理.

练 习 题

1. 将 §10.1.1 中区间 $[0,1]$ 上的函数 $y=x^2$ 改为 $y=\mathrm{e}^x$, (1) 对区间 $[0,1]$ 作等距分划, 然后用该小节中的逼近方法求出曲边梯形 $S=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant 1,\ 0\leqslant y\leqslant \mathrm{e}^x\}$ 的面积; (2) 用 Newton–Leibniz 公式 (10.1) 再计算该面积.

2. 用肯定方式给出 Riemann 积分定义的否定说法, 并证明 Dirichlet 函数 $D(x)$ (见第一册例题 3.8) 在区间 $[0,1]$ 上不可积.

3. Cauchy 曾经以下列等式不成立为例说明在使用 Newton–Leibniz 公式时验证条件的重要性:
$$\int_0^{\frac{3\pi}{4}}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x=\arctan(\sec x)\Big|_0^{\frac{3\pi}{4}}=-\arctan\sqrt{2}-\frac{\pi}{4}.$$
请回答: 上式为什么不成立? 对该积分应当如何计算?

4. 求下列定积分 (假定积分都存在):
(1) $\displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$;
(2) $\displaystyle\int_{-1}^2 \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x$;
(3) $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$;
(4) $\displaystyle\int_1^2 \ln x\,\mathrm{d}x$;
(5) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{x+1}\,\mathrm{d}x$;
(6) $\displaystyle\int_0^1 \sqrt{3x+1}\,\mathrm{d}x$;
(7) $\displaystyle\int_0^9 x(x-\sqrt{x})\,\mathrm{d}x$;
(8) $\displaystyle\int_0^{\pi} \sin 4x\sin 6x\,\mathrm{d}x$.

5. 试用定积分计算下列数列极限:
(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\sum_{k=1}^n\frac{1}{n^2+k^2}$;
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2+k^2}}$;
(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{(-1)^{k-1}}{n+k}$;
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sin\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^n\sin\frac{k\pi}{n}$;
(5) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^n\frac{2^{\frac{k}{n}}}{n+\frac{1}{k}}$;
(6) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left[\prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$;
(7) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\sqrt{(nx+k)(nx+k-1)}$, $x>0$ (此题可参考定理 10.8).

§10.2 可积性与可积函数类

在第九章的基础上, 有了 Newton-Leibniz 公式之后, 就可以解决许多具体的定积分计算问题. 然而该公式成立需要两个条件, 即被积函数的可积性与原函数的存在性. 前一个问题将在本节解决, 后一个问题对于许多具体例子来说不成问题, 但是其存在性的一般性讨论将在 §10.3 解决.

10.2.1 Riemann 可积的充分必要条件

由于在定积分定义中既有任意分划, 又有任意选取的介点集, 因此从定义出发来检验函数是否可积是困难的. 为此我们介绍 Darboux 的方法, 它就是体现在图 10.1 中的夹逼思想. 这使得我们可以摆脱介点集的任意性而只需要考虑分划.

给定分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 对于 $i=1,\cdots,n$ 用 M_i 和 m_i 记 f 在第 i 个子区间上的上确界和下确界:

$$M_i=\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},\quad m_i=\inf\{f(x)\mid x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},$$

然后分别乘以 Δx_i 对 i 求和, 得到两个新的和式, 且将 Riemann 和夹在中间:

$$\underline{S}_P=\sum_{i=1}^n m_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^n M_i\Delta x_i=\overline{S}_P. \tag{10.2}$$

称左边的 $\underline{S}_P$ 为 Darboux 下和, 右边的 $\overline{S}_P$ 为 Darboux 上和. 它们的值只与分划 P 有关, 在不发生混淆时可将下标省略.

不等式 (10.2) 使我们摆脱了对于介点集 ξ 的依赖, 而可以用上和与下和来进行估计. 再回顾 §10.1.1 中的例子 $f(x)=x^2$, $0\leqslant x\leqslant 1$, 其中的 S_n 和 S'_n 就是等距分划时的 Darboux 下和与 Darboux 上和.

又对 $i=1,\cdots n$ 引入记号 ω_i $(i=1,\cdots,n)$ 表示函数 f 在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, 即

$$\omega_i=M_i-m_i.$$

这里注意所有的 ω_i 和 Δx_i 都是非负数. 现在将和式

$$\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i=\overline{S}_P-\underline{S}_P$$

称为与分划 P 对应的振幅面积. 它有明显的几何意义. 回顾图 10.1, 可见与其中的函数和分划对应的振幅面积就是分图 (c) 上的许多小矩形面积之和.

注意: 对于 $[a,b]$ 上的有界函数, 所有 M_i,m_i,ω_i 和振幅面积都是有限数. 反之, 如果振幅面积为有限数, 则函数也一定有界. (关于振幅概念可以回顾第一章的定义 1.8, 例题 1.3 和第五章的定义 5.1 等内容.)

现在叙述本小节的主要定理如下.

定理 10.3 对于在 $[a,b]$ 上定义的函数 f, 以下三个条件等价:

(1) 函数 f 于 $[a,b]$ 上 Riemann 可积;

(2) (可积第一充要条件) $\displaystyle\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i = 0$;

(3) (可积第二充要条件) 对 $\forall\,\varepsilon>0,\exists\,P$, 使得成立 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$.

注 在定理的 (2) 中出现的极限与 Riemann 和的极限 (见定义 10.3 及其注) 属于同一类型的极限, 用 ε–δ 语言写出就是

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i=0 \Longleftrightarrow \forall\,\varepsilon>0,\exists\,\delta>0,\forall\,P\ (\|P\|<\delta):\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon.$$

与定义 10.3 比较, 上述极限中不出现介点集, 因此更简单一些.

下面我们对定理 10.3 的证明步骤是

$$(1)\Longrightarrow(2)\Longrightarrow(3)\Longrightarrow(1),$$

其中第一步不难, 第二步很容易, 第三步则相当难, 但正是在这一步证明中充分反映了定积分的基本思想和技巧.

定理 10.3 的前两步证明

(1) $\Longrightarrow$ (2). 从 f 为 (R) 可积的定义知道, 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 对细度 $\|P\|<\delta$ 的每一个分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 和与 P 相容的每一个介点集 ξ, 成立不等式

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon,$$

也就是

$$I-\varepsilon<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i<I+\varepsilon,$$

其中 $I=\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

利用介点集的任意性, 在上述不等式中对 Riemann 和取上下确界, 就得到

$$I-\varepsilon\leqslant \underline{S}_P=\sum_{i=1}^{n}m_i\Delta x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}M_i\Delta x_i=\overline{S}_P\leqslant I+\varepsilon.$$

因此, 只要 $\|P\|<\delta$, 就成立

$$0\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i\leqslant(I+\varepsilon)-(I-\varepsilon)=2\varepsilon,$$

这就证明了 (2).

(2) $\Longrightarrow$ (3). 这是容易的. 因为 (3) 中只要存在一个分划 P 就够了. (这表明 (3) 是要求最低的条件, 因而往往就是最好用的条件.)

下面是最后一步, 即 (3) $\Longrightarrow$ (1). 这是最难的一步. 为此需要先做准备工作, 即建立关于 Darboux 和的两个引理.

引理 1 设 $|f(x)| \leqslant M \ \forall x \in [a,b]$, 分划 P 的上和与下和为 $\overline{S}$ 与 $\underline{S}$, 又设向 P 多加一个分点后对应的上和与下和为 $\overline{S}'$ 与 $\underline{S}'$, 则成立

$$\underline{S} \leqslant \underline{S}' \leqslant \overline{S}' \leqslant \overline{S},$$

即加入新分点后上和不增加, 下和不减少, 而且还有以下估计:

$$|\overline{S} - \overline{S}'| \leqslant 2M\|P\|, \quad |\underline{S} - \underline{S}'| \leqslant 2M\|P\|.$$

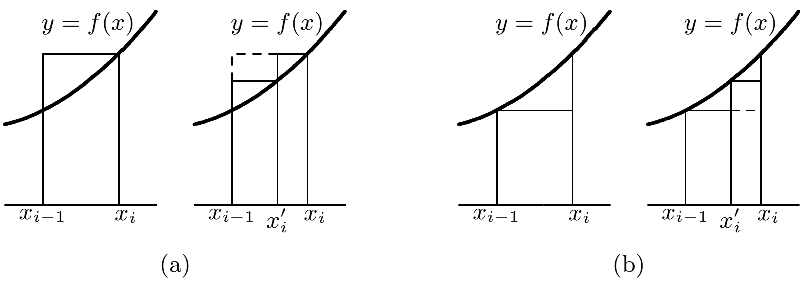


图 10.4: (a) 上和加分点后不增加; (b) 下和加分点后不减少

证 先看上和 (参见图 10.4(a)). 设新分点满足 $x_i' \in (x_{i-1}, x_i)$, 即加在由分划 P 生成的第 i 个子区间内. 这样就将原来的一个子区间分成了两个. 记 f 在 $[x_{i-1}, x_i']$ 和 $[x_i', x_i]$ 上的上确界分别为 M_i', M_i'', 则成立不等式

$$M_i', M_i'' \leqslant M_i.$$

比较上和 $\overline{S}$ 与新的上和 $\overline{S}'$, 则除了相同项之外, 有

$$M_i \Delta x_i = M_i \Delta x_i' + M_i \Delta x_i'' \geqslant M_i' \Delta x_i' + M_i'' \Delta x_i'',$$

其中 $\Delta x_i' = x_i' - x_{i-1}$, $\Delta x_i'' = x_i - x_i'$, 可见 $\overline{S} \geqslant \overline{S}'$ 成立. 再估计它们的差:

$$\begin{aligned} |\overline{S} - \overline{S}'| &= |M_i \Delta x_i - M_i' \Delta x_i' - M_i'' \Delta x_i''| \leqslant M \Delta x_i + M(\Delta x_i' + \Delta x_i'') \\ &= 2M \Delta x_i \leqslant 2M\|P\|. \end{aligned}$$

对于下和 $\underline{S}$, 可以用相同的方法得到所要的相应结论 (参见图 10.4(b)). $\square$

引理 2 任何分划的上和不小于任何分划的下和.

证 设 P_1, P_2 为任意两个分划, 同时又考虑合并它们的所有分点后的分划, 记为 $P_1 \cup P_2$, 则从引理 1 (参见右边的图 10.5), 就有不等式

$$\overline{S}_{P_1} \geqslant \overline{S}_{P_1 \cup P_2} \geqslant \underline{S}_{P_1 \cup P_2} \geqslant \underline{S}_{P_2}. \quad \square$$

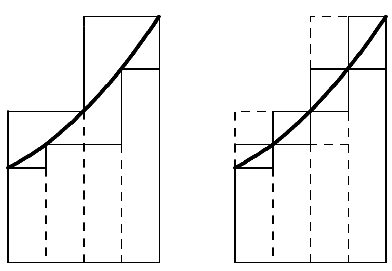


图 10.5: 分划合并对上下和的影响

注 1　对图 10.5 需要做一点说明. 在其左分图中作出了两个分划 P_1 和 P_2, 同时作出了 $\overline{S}_{P_1}$ 和 $\underline{S}_{P_2}$. 为简单起见, 由 P_1 只生成 2 个子区间, 由 P_2 只生成 3 个子区间. 右分图则是将两个分划合并, 这时有 4 个子区间. 在右分图中还作出了不等式 $\overline{S}_{P_1} \geqslant \overline{S}_{P_1\cup P_2} \geqslant \underline{S}_{P_1\cup P_2} \geqslant \underline{S}_{P_2}$ 的示意图.

注 2　两个引理分别体现了对于分划可以施行两种手术: (1) 增加分点, (2) 将两个分划合并. 这是关于分划的基本运算.

下面引入 Darboux 上积分和下积分的定义.

定义 10.4 对于在 $[a,b]$ 上定义的函数 f, 引入记号

$$\overline{I} = \inf_P \overline{S} = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \underline{I} = \sup_P \underline{S} = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \tag{10.3}$$

并分别称为 f 在区间 $[a,b]$ 上的 Darboux 上积分与下积分.

由于确界可以是无穷大, 因此 Darboux 上积分和下积分的存在不需要什么条件. 但对于有界函数来说, 设 $|f(x)| \leqslant M\ \forall x \in [a,b]$, 则任何分划对应的上和与下和都落在范围 $[-M(b-a), M(b-a)]$ 之中. 因此 Darboux 上积分和下积分都是有限数. 又从定义可见对任何分划 P 一定成立不等式

$$\underline{S}_P \leqslant \underline{I} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}_P.$$

注意: Darboux 上积分与 Darboux 下积分可以不相等. 下面就是一个例子.

例题 10.7 对于 $[0,1]$ 上的 Dirichlet 函数来说, 由于任何子区间中既有有理数, 又有无理数, 因此不论什么分划 P, Darboux 上和与下和总是分别等于 1 和 0. 因此知道其 Darboux 上积分等于 1, 下积分等于 0.　□

现在来完成定理 10.3 的最后一步的证明.

定理 10.3 中的 (3) $\Longrightarrow$ (1) 的证明

由 (3) 成立已经可以推出函数 f 在 $[a,b]$ 上有界, 否则至少会有一个子区间上的振幅是无穷大, 从而振幅面积也是无穷大.

取 M 使得 $|f(x)| \leqslant M\ \forall x \in [a,b]$ 成立, 于是由每个分划确定的上和 $\overline{S}$ 满足 $|\overline{S}| \leqslant M(b-a)$. 设 $\overline{I}$ 是在定义 10.4 中由 (10.3) 定义的上积分, 我们来证明: 在条件 (3) 成立时, f 在 $[a,b]$ 上的定积分就等于 $\overline{I}$.

利用条件 (3) 成立, 对给定的 $\varepsilon > 0$, 存在一个分划 P_1, 满足不等式

$$\overline{S}_{P_1} - \underline{S}_{P_1} = \sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \frac{\varepsilon}{2}.$$

为方便起见, 将分划 P_1 中除端点 a, b 之外的分点个数记为 n_1.

从引理 2 和关于 $\overline{I}$ 的定义 (10.3), 可见这时成立不等式 (参见图 10.6(a))

$$\underline{S}_{P_1} \leqslant \overline{I} \leqslant \overline{S}_{P_1}. \tag{10.4}$$

现在的问题是对于任意一个分划 P, 它的细度小到什么程度时才能保证 $\overline{S}_P-\underline{S}_P<\varepsilon$? 出发点是已经有了上述分划 P_1.

合并 P 和 P_1 得到 $P\cup P_1$. 由于它是 P_1 的加细, 从引理 1 有 (参见图 10.6(b))

$$\underline{S}_{P_1}\leqslant \underline{S}_{P\cup P_1}\leqslant \overline{I}\leqslant \overline{S}_{P\cup P_1}\leqslant \overline{S}_{P_1},$$

并可以从 $\overline{S}_{P_1}-\underline{S}_{P_1}<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 得到

$$\overline{S}_{P\cup P_1}-\underline{S}_{P\cup P_1}<\frac{\varepsilon}{2}.$$

又将分划 $P\cup P_1$ 看成是 P 的加细, 所增加的点的个数至多为 n_1, 就可以再用引理 1 估计得到:

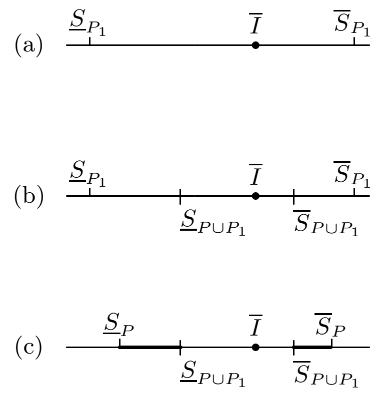


图 10.6: 关于上下和之差的估计

$$0\leqslant \overline{S}_P-\overline{S}_{P\cup P_1}\leqslant 2n_1M\|P\|,$$
$$0\leqslant \underline{S}_{P\cup P_1}-\underline{S}_P\leqslant 2n_1M\|P\|.$$

(这就是对图 10.6(c) 中两个粗黑线段的长度的估计.)

将以上两式相加并整理后得到

$$\overline{S}_P-\underline{S}_P\leqslant \overline{S}_{P\cup P_1}-\underline{S}_{P\cup P_1}+4n_1M\|P\|<\frac{\varepsilon}{2}+4n_1M\|P\|.$$

于是为了使得上式最后一项 $<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 只要取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{8n_1M}$, 就可以使得当 $\|P\|<\delta$ 时成立 $\overline{S}_P-\underline{S}_P<\varepsilon$.

如引入 Darboux 上和与下和时所示 (见 (10.2)), 与 P 对应的 Riemann 和, 无论其中与 P 相容的介点集如何取, 都成立不等式 $\underline{S}_P\leqslant \displaystyle\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i\leqslant \overline{S}_P$, 同时又成立与 (10.4) 类似的不等式 $\underline{S}_P\leqslant \overline{I}\leqslant \overline{S}_P$.

综合以上就有

$$\left|\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i-\overline{I}\right|<\varepsilon,$$

即 f 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积, 于是 (1) 成立.

综合以上就得到 (1) $\Longleftrightarrow$ (2) $\Longleftrightarrow$ (3). □

注 1 上述证明表明在 $[a,b]$ 上的函数 f 为 Riemann 可积时其积分值等于 Darboux 上积分. 完全对称地可知这个积分值也等于 Darboux 下积分. 因此可积时一定有 $\overline{I}=\underline{I}$. 易见这也是必要的. 实际上可以直接证明这是 f 为 Riemann 可积的充分条件, 留作练习题.

注 2 定理 10.3 的可积第二充要条件特别简单, 只要对于给定的每一个 ε 找到

一个分划即可. 于是我们要问, 这是为什么? 在过去所学的数列极限和函数极限中是否也有类似的结果?

可以指出, 关键在于某种单调性. 引理 1 所说的就是这种单调性. 分划全体所成集合的特性在前面已经看到, 虽然两个分划难以直接比较, 但采取加细和合并方法, 可以看出对应的上和与下和也具有某种“单调性”. 这就是可积的第二充要条件的本质所在.

与此对应, 在过去的单调数列和单调函数中也确实存在类似的结论. 例如正项单调数列 $\{x_n\}$ 收敛于 0 的充分必要条件就可以简单地叙述为: 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在一个 N, 使得 $x_N<\varepsilon$ (留作练习题).

10.2.2 几类重要的可积函数

对于有界闭区间 $[a,b]$, 将在该区间上所有 Riemann 可积函数全体所成集合记为 $R[a,b]$. 下面我们用积分第二充分必要条件给出数学分析中最常见的三类可积函数.

数学分析中最重要的可积函数类是连续函数类, 即有 $C[a,b]\subset R[a,b]$.

定理 10.4 若 $f\in C[a,b]$, 则 $f\in R[a,b]$.

证 设 f 于 $[a,b]$ 上连续, 则从 Cantor 定理知道 f 于 $[a,b]$ 上一致连续. 对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, $\forall\,x',x''\in[a,b]$, 只要 $|x'-x''|<\delta$, 就成立 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{b-a}$.

现取满足 $\|P\|<\delta$ 的一个划分. 根据有界闭区间上连续函数的值域定理 (或最值定理), f 在每个子区间上达到自己的上确界与下确界. 设最大值点和最小值点分别为 x_i' 与 x_i'', 则振幅满足估计

$$\omega_i=M_i-m_i=f(x_i')-f(x_i'')<\frac{\varepsilon}{b-a}.$$

因此分划 P 的振幅面积可以估计为

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\frac{\varepsilon}{b-a}\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=\varepsilon,$$

根据定理 10.3 中的可积第二充要条件可见 f 在 $[a,b]$ 上可积. □

下面是数学分析中第二个重要的可积函数类, 即单调函数类.

定理 10.5 设 f 为 $[a,b]$ 上的单调函数, 则 $f\in R[a,b]$.

证 不妨只讨论单调增加情况. 设 f 在 $[a,b]$ 上单调增加, 则对 $\forall\,\varepsilon>0$, 取细度小于 ε 的一个分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 则对每个 $i=1,\cdots,n$ 就有

$$0<\Delta x_i\leqslant\|P\|<\varepsilon,\quad \omega_i=f(x_i)-f(x_{i-1}),$$

因此就可以估计出这个分划 P 对应的振幅面积为

$$\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \varepsilon\sum_{i=1}^{n}[f(x_i)-f(x_{i-1})=\varepsilon[f(b)-f(a)],$$

可见 $f\in R[a,b]$. □

第三个可积函数类是间断点个数有限的有界函数类.

定理 10.6 设 f 在 $[a,b]$ 上有界, 在 $[a,b]$ 上除去有限个点外处处连续, 则 $f\in R[a,b]$.

证 为简明起见, 只对 f 在 $[a,b]$ 上仅有一个间断点 $c\in(a,b)$ 的情况写出证明. 对于 c 为端点或 f 在 $[a,b]$ 有多于一个的有限个间断点的情况的证明是类似的.

设 $|f(x)|\leqslant M\ \forall x\in[a,b]$. 对给定的 $\varepsilon>0$, 取 $\delta\leqslant\varepsilon$, 且使得 $O_\delta(c)\subset(a,b)$. 于是 f 在这个邻域上的振幅不超过 $2M$.

在区间 $[a,c-\delta]$ 和 $[c+\delta,b]$ 上 f 处处连续, 从定理 10.4 可见分别存在这两个区间的分划 P_1 和 P_2, 使得它们对应的振幅面积分别小于 ε.

由于 P_1 的最大分点为 $c-\delta$, P_2 的最小分点为 $c+\delta$, 因此将它们合并就得到 $[a,b]$ 的一个分划, 记为 P. 可以看出 P 对应的振幅面积小于

$$2\varepsilon+4\delta M\leqslant(2+4M)\varepsilon,$$

可见 $f\in R[a,b]$. □

以下举出的几个例题, 其中可以用可积第二充分必要条件或前面已经建立的定理来解决.

例题 10.8 $[a,b]$ 上的 $\operatorname{sgn}x$, $[x]$ 都只有有限个间断点, 因此可积. □

例题 10.9 $[0,1]$ 上定义 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$, 它只有一个间断点, 但无界, 因此从定理 10.1 知道它不可积. □

例题 10.10 函数 $f(x)=\begin{cases}0, & x=0,\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}, n\in\mathbb{N},\end{cases}$ 是 $[0,1]$ 上的单调增加函数, 因此可积. □

例题 10.11 再回顾在例题 10.7 中的Dirichlet 函数. 已知它处处不连续 (参见例题 3.8 和例题 5.6). 容易证明它在任何区间 $[a,b]$ 上不可积. 这可以从它在每个长度非零的区间上的振幅总是等于 1 看出, 因为不论什么分划 P, 对应的振幅面积总是等于区间 $[a,b]$ 的长度 $b-a$. □

最后指出, 本小节利用积分第二充分必要条件轻而易举地得到了三类可积函数. 但可积函数并非只有这三类. 那么什么是刻画可积函数的充分必要条件呢? 为了完全解决这个问题, 需要引入零测度集合和几乎处处连续函数的新概念. 这就是下一小节的内容.

10.2.3　零测度集与几乎处处连续函数

测度, 即 measure, 就是度量. 对于 $\mathbb{R}$ 上的数集, 测度就是有界区间长度的推广. 它的一般性发展就成为"测度论". 这是实变函数论课程中的内容. 下面只讲给出测度为 0 的集合的定义. 这对于目前已经足够.

以下对于有界区间 I, 用记号 $|I|$ 表示它的长度.

定义 10.5 设数集 $A \subset \mathbb{R}$. 若对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在至多可列个开区间 $\{I_n\}$[①], 使得 $A \subset \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} I_i$ (即 A 为 $\{I_n\}$ 覆盖), 同时 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_i| < \varepsilon$, 则称 A 为零测度集, 或说 A 的测度为零.

例题 10.12 有限点集是零测度集.

证　设 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$, 对给定的 $\varepsilon > 0$, 令

$$I_i = (a_i - \frac{\varepsilon}{3n}, a_i + \frac{\varepsilon}{3n}), \quad i = 1, \cdots, n,$$

则 $\sum\limits_{i=1}^{n} |I_i| = \dfrac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon$. □

当然有限点集为零测度集似乎太平凡了, 但是下一个例题就很不平凡.

例题 10.13 可列点集是零测度集.

证　(这里要用到第一章的可列集和第二章中的无穷级数等概念.)

设有可列点集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$. 对给定的 $\varepsilon > 0$, 构造区间

$$I_i = (a_i - \frac{\varepsilon}{2^{i+2}}, a_i + \frac{\varepsilon}{2^{i+2}})\ \forall i \in \mathbb{N},$$

则 $|I_1| = \dfrac{\varepsilon}{4}, |I_2| = \dfrac{\varepsilon}{8}, \cdots, |I_i| = \dfrac{\varepsilon}{2^{i+1}}, \cdots$, 可见无穷级数 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |I_i|$ 收敛, 且其和为

$$\sum_{i=1}^{\infty} |I_i| = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |I_i| = \lim_{n\to\infty} \varepsilon(\frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots) = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \quad \square$$

注　于是可知 $\mathbb{R}$ 中的有理点全体所成集合为零测度集, 当然任何有界区间中的有理点全体也是零测度集. 这与有理点的稠密性似乎矛盾, 但确实两者都是对

① 若在定义中将开区间换为闭区间, 或混合使用开区间和闭区间, 甚至退化为一点的闭区间, 所定义的零测度集仍然相同. 因此有时就只说区间了.

的. 由此可见, 分析的有些内容不是都可以通过几何直观来理解的. 此外, 还存在不可列的零测度集, 从略.

例题 10.14 设 A_1, A_2 都是零测度集, 则并集 $A_1 \cup A_2$ 也是零测度集.

证 这时 A_1 为至多可列个开区间 (或族) $\{I_n\}$ 覆盖, $\sum_i |I_i| < \frac{\varepsilon}{2}$, 同时 A_2 为至多可列个开区间 $\{J_n\}$ 覆盖, $\sum_i |J_i| < \frac{\varepsilon}{2}$, 于是 $A_1 \cup A_2$ 为至多可列个开区间 $\{I_n, J_n\}$ 所覆盖, 而且它们的长度之和小于 ε. □

定义 10.6 设 f 在 $[a,b]$ 上定义, 其间断点集为零测度集, 则称 f 为几乎处处连续的函数. (几乎处处连续也写为 a. e. 连续, 其中 a. e. 为 almost everywhere 的缩写.)

注 以上语言还可以推广其使用范围. 例如, 若某个函数在除去一个零测度集外处处为 0, 我们就说该函数几乎处处等于 0.

10.2.4 Lebesgue 定理

Lebesgue 定理完全解决了什么样的函数才是 Riemann 可积函数的问题. 在证明中的主要工具是第二章的有限覆盖定理 (即 §2.6 的定理 2.29) 和连续性的第三定义 (见第五章的定义 5.1).

有了 Lebesgue 定理之后, 当然可立即推出有关可积函数类的前三个定理, 而且还可以知道有无限多个间断点的非单调函数也可能 Riemann 可积. 例如, Riemann 函数 (参见例题 3.9 和 5.9) 就是如此.

定理 10.7 (Lebesgue 定理) $f \in R[a,b]$ 的充分必要条件是 f 在 $[a,b]$ 上同时有界和几乎处处连续.

证 **必要性** ($\Longrightarrow$). 设 $f \in R[a,b]$, 则从定理 10.1 可知 f 在 $[a,b]$ 上有界. 现在将 f 在 $[a,b]$ 上的间断点全体所成集合记为 D, 我们要证明 D 为零测度集.

从定义 5.1 知道, 每个间断点处 f 的振幅大于 0. 固定一个正数 $\delta > 0$, 考虑 D 中振幅大于等于 δ 的间断点所成的子集, 并记为

$$D_\delta = \{x_0 \in D \bigm| \omega_f(x_0) \geqslant \delta\}.$$

对给定的 $\varepsilon > 0$, 从可积第二充要条件知道存在一个分划 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$, 使得 P 所对应的振幅面积

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon\delta.$$

将 n 个子区间按照 f 的振幅大小分成 $\omega_i < \delta$ 和 $\omega_i \geqslant \delta$ 的两类, 则有

$$\delta \sum_{\omega_i \geqslant \delta} \Delta x_i \leqslant \sum_{\omega_i \geqslant \delta} \omega_i \Delta x_i < \varepsilon\delta,$$

由此可见 $\sum\limits_{\omega_i \geqslant \delta} \Delta x_i < \varepsilon$, 即振幅大于等于 δ 的子区间长度之和小于 ε.

对于每个点 $x_0 \in D_\delta$, 在包含 x_0 为内点的任何子区间上 f 的振幅大于等于 δ. 因此 D_δ 中的点不可能是 $\omega_i < \delta$ 的子区间的内点, 这样就只能有①

$$D_\delta \subset \Big(\bigcup_{\omega_i \geqslant \delta} [x_{i-1}, x_i]\Big) \bigcup \{x_0, x_1, \cdots, x_n\},$$

这样就得到对 D_δ 的覆盖 (注意这里只用有限个闭区间就覆盖了 D_δ), 其中区间的长度之和小于 ε. 由于 $\varepsilon > 0$ 可任意小, 因此 D_δ 为零测度集.

由于 f 的每个间断点必定属于某个 $D_{\frac{1}{n}}$, 只要 n 充分大, 因此有

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 用长度小于 $\varepsilon/2$ 的有限个区间覆盖 D_1, 用长度小于 $\varepsilon/4$ 的有限个区间覆盖 $D_{\frac{1}{2}}$, 如此继续下去, 就得到了覆盖 D 的可列个区间, 它们的长度总和小于 ε, 因此 D 为零测度集.

充分性 ($\Longleftarrow$). 从 f 有界知道有 $M > 0$, 使得 $|f(x)| < M\ \forall x \in [a, b]$.

对于给定的 $\varepsilon > 0$, 由于 f 的间断点集 D 为零测度集, 因此存在总长度不超过 ε 的至多可列个开区间覆盖 D. 将这样的开区间称为第一类开区间.

对于连续点 x, 存在半径 $\delta_x > 0$ 的邻域 $O_{\delta_x}(x)$, 且振幅 $\omega_f(x, \delta_x) < \varepsilon$. 对每个连续点如此做, 就得到覆盖所有连续点的开区间族, 将如此得到的开区间称为第二类开区间.

合并以上所有两类开区间, 它们的并覆盖了 $[a, b]$. 根据有限覆盖定理知道其中存在有限个开区间, 它们的并仍然覆盖 $[a, b]$.

将这有限个开区间按以下方式从左向右加以编号②. 首先将覆盖左端点 a 的某一个开区间记为 Δ_1. 它如不覆盖右端点 b, 则一定存在覆盖它的右端点的一个开区间, 记为 Δ_2. 如此继续下去直到覆盖 b 为止. 这时若还有多余的开区间则可以弃去, 余下的仍然是 $[a, b]$ 的有限开覆盖, 记为 $\Delta_1, \cdots, \Delta_n$.

取 $x_0 = a$, $x_1 \in \Delta_1 \cap \Delta_2$, $\cdots$, $x_{n-1} \in \Delta_{n-1} \cap \Delta_n$, $x_n = b$, 从而得到一个分划 $P = \{x_0, x_1, \cdots, x_n\}$. 注意这时从 $x_{i-1} \in \Delta_{i-1} \cap \Delta_i$ 和 $x_i \in \Delta_i \cap \Delta_{i+1}$ 可见 $[x_{i-1}, x_i] \subset \Delta_i$ 对每个 $i = 1, \cdots, n$ 成立.

按照 $\omega_i \geqslant \varepsilon$ 和 $\omega_i < \varepsilon$ 将 n 个子区间分成两类.

---

① 这里要看到, D_δ 中的点不会是 $\omega_i < \delta$ 的子区间的内点, 但仍然有可能是某些子区间的端点.

② 这与定理 5.5 的证 3 中的做法完全相同.

对于 $\omega_i \geqslant \varepsilon$ 的第一类子区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 由于它只能为第一类开区间所覆盖, 因此它们的长度总和小于 ε. 同时总有 $\omega_i \leqslant 2M$.

对于 $\omega_i < \varepsilon$ 的第二类子区间 $[x_{i-1}, x_i]$, 则它们的长度总和不会超过区间 $[a, b]$ 的长度 $b-a$.

于是就可以对于分划 P 的振幅面积作出估计:

$$\sum_{i=1}^{n} \omega_i \Delta x_i = \Big(\sum_{\omega_i \geqslant \varepsilon} + \sum_{\omega_i < \varepsilon}\Big) \omega_i \Delta x_i \leqslant 2M\varepsilon + (b-a)\varepsilon = (2M + b - a)\varepsilon.$$

因此根据 Riemann 可积第二充要条件知道 $f \in R[a, b]$. □

将 Lebesgue 定理与定理 10.3 的可积第二充要条件相比, 在解决具体问题时, 前者依赖于对 f 的间断点集的直接分析, 后者则依赖于构造特殊的分划因此是比较间接的手段. 例如, 下面推论中的各个结论, 用 Lebesgue 定理来证明就容易得多. 当然也可用积分第二充分必要条件或其他方法来证明.

推论 设 $f, g \in R[a, b]$, α 是数, 则 $f \pm g$, αg, fg, f/g (设 $|g(x)| \geqslant \delta$ 在 $[a, b]$ 上处处成立, δ 是个正数) 和 $|f|$ 都在 $[a, b]$ 上可积.

又如对于下面两个例题中的问题, 用 Lebesgue 定理也要方便得多.

例题 10.15 Riemann 函数在任何 $[a, b]$ 上可积.

证 从例题 5.9 知道 Riemann 函数的不连续点集就是有理点全体所成集合 $\mathbb{Q}$. 由于 $\mathbb{Q}$ 可列, 在任何 $[a, b]$ 内的有理点集也可列, 从而一定是零测度集, 因此 Riemann 函数几乎处处连续, 从而可积. □

例题 10.16 (1) 设函数 g 在 $[a, b]$ 上除有限点外都有 $g(x) = 0$, 证明 $g \in R[a, b]$, 且其积分为 0.

(2) 设 f 在 $[a, b]$ 上有定义, 现在改变 f 在 $[a, b]$ 中的有限多个点上的函数值, 问: 这样是否会改变 f 的 (R) 可积性? 又若可积性不变的话, 则 f 的积分值 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 是否会发生改变?

解 (1) 可见 g 的间断点至多有限, 因此可积. 对分划 P 来说, 只要介点避开上述有限个例外点, 则 Riemann 和总是 0. 令 $\|P\| \to 0$, 可见 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(2) 用 Lebesgue 定理可见, 若原来的 f 在 $[a, b]$ 上几乎处处连续, 则作了上述改变后仍然几乎处处连续, 因此可积性不会改变.

设 f 可积, 并将作上述改变后得到的函数记为 g, 则由于 g 可积, 对分划 P, 只要介点避开上述有限点, 两者的 Riemann 和就相同, 因此可知 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$. □

注　从例题 10.16 再发展一步, 就可以考虑在区间的有限个点上没有定义的函数的可积性. 从该例题可见, 在这有限点处按照任何方式补充定义得到的函数要么均可积, 要么均不可积. 因此即使不补充定义也可以说该函数可积或不可积.

这种情况在今后是常见的. 例如可以对于在 $(a,b),(a,b],[a,b)$ 上定义的函数讨论它是否可积. 从 Lebesgue 定理来看, 这很显然, 因为函数的有界性和几乎处处连续性都与有限个点上是否有定义以及如何定义无关.

但是以上关于在有限个点上改变函数定义不影响可积性, 以及在可积情况不影响积分值的事实不能推广到可列个点上去. 例如, 区间 $[0,1]$ 上的 Riemann 函数和 Dirichlet 函数, 它们在端点和所有无理点上取相同值, 而在 $(0,1)$ 内的所有有理点上取不同值, 但前者可积, 而后者不可积.

练 习 题

1. 若在 Riemann 积分的定义 (即定义 10.3) 中将分划 P 限制为只使用区间的等距分划, 其余保持不动, 则函数的可积性是否有变化?

2. 设 $f(x)=\begin{cases} a, & 0\leqslant x\leqslant 1\\ b, & 1<x<2\\ c, & 2\leqslant x\leqslant 5\end{cases}$, 证明: $f\in R[0,5]$, 并求 $\displaystyle\int_0^5 f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. 对于区间 $[a,b]$ 上的有界函数 f, 证明
$$\lim_{\|P\|\to 0}\overline{S}_P=\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,\qquad \lim_{\|P\|\to 0}\underline{S}_P=\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

4. 对于区间 $[a,b]$ 上的有界函数 f, 证明 $f\in R[a,b]$ 的充分必要条件是
$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

5. 设 f 在 $[0,1]$ 上有界, 其间断点集为 $\{\dfrac{1}{n}\mid n\in\mathbb{N}\}$, 证明 $f\in R[0,1]$.

6. 设 $f(x)=\begin{cases}\operatorname{sgn}(\sin\dfrac{\pi}{x}), & x\in(0,1]\\ 0, & x=0\end{cases}$, 试讨论 f 在 $[\varepsilon,1]$ 上的可积性, 其中 $\varepsilon\in R(0,1)$. 又问: $f\in[0,1]$ 是否成立?

7. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有界, 且对于每个正数 $\varepsilon\in(0,b-a)$, $f\in R[a,b-\varepsilon]$, 问: 是否有 $f\in R[a,b]$.

8. 设 $f\in R[a,b]$, $g(x)=f(b-x)\,\forall\,x\in[0,b-a]$, 证明: $g\in R[0,b-a]$.

9. 设 $f \in R[a,b]$, $[c,d] \subset [a,b]$, 证明: $f \in R[c,d]$.

10. 试分别用定理 10.3 中的可积第二充要条件和 Lebesgue 定理证明 §10.2.4 中的推论: 设 $f, g \in R[a,b]$, α 是常数, 则 $f \pm g$, αg, fg, f/g (设 $|g(x)| \geqslant m$ 在 $[a,b]$ 上处处成立, $m > 0$) 和 $|f|$ 都在 $[a,b]$ 上可积.

11. 设 f 为 $[a,b]$ 上的非负可积函数, 证明 $\sqrt{f} \in R[a,b]$.

12. 设 $|f| \in R[a,b]$, 问: $f \in R[a,b]$ 是否一定成立?

13. 设 $|f'| \in R[a,b]$, 证明: $f' \in R[a,b]$.

14. 设 $f \in R[A,B]$, $g \in R[a,b]$, 值域 $\mathscr{R}(g) \subset [A,B]$, 问: 复合函数 $f \circ g \in R[a,b]$ 是否一定成立? 又若 $f \in C[A,B]$ 则如何?

15. 设 $f \in R[A,B]$, g 在 $[a,b]$ 上连续可微且导数不等于 0, 值域 $\mathscr{R}(g) \subset [A,B]$, 证明: 复合函数 $f \circ g \in R[a,b]$.

16. 记 $Lip[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上满足 Lipschitz 条件 (见第一册 p.172) 的函数类, 又记 $D[a,b]$ 为 $[a,b]$ 上的可微函数类, 讨论 $R[a,b]$, $C[a,b]$, $Lip[a,b]$, $D[a,b]$ 之间的关系.

17. 分别举出满足以下条件的具体函数例子.

    (1) 在 $[a,b]$ 上有界, 当 $\|P\| \to 0$ 时, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i \to +\infty$.

    (2) 在 $[a,b]$ 上可积, 当 $\|P\| \to 0$ 时, $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \omega_i \to +\infty$.

    (3) 在 $[a,b]$ 上单调, 且有无限多个间断点.

    (4) 在 $[a,b]$ 上可积, 在 $[a,b]$ 的任何一个子区间上都不单调, 且有无限多个间断点.

18. 证明: 零测度集的任何子集也是零测度集.

19. 证明: 可列个零测度集的并集也是零测度集.

20. 设区间 $[a,b]$ 上的两个函数 f 和 g 在一个零测度集 $S \subset [a,b]$ 之外处处相等, 问: f 与 g 是否同时在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积或不可积? 又问: 若已知它们同时在 $[a,b]$ 上可积, 则积分是否相等?

§10.3 定积分的性质

今后为简明起见, 在不发生混淆的情况下, 常将 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 简记为 $\int_a^b f$. 由于定积分只是一个数值, 在其记号中用什么符号为积分变量是无关紧要的, 例如

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(s)\,\mathrm{d}s$$

总是成立的. 在这一点上定积分与不定积分完全不同. 函数 $f(x)$ 的原函数必须是 x 的函数, 不定积分中的每一个原函数当然也是如此.

10.3.1 基本运算性质

首先介绍关于积分的两个最为基本的性质: 关于被积函数的线性性质和关于积分区间的可加性.

性质 1 (**积分的线性性质**) 设 $f, g \in R[a,b]$, 则对常数 α, β 有

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g) = \alpha \int_a^b f + \beta \int_a^b g.$$

证 这个性质源自于 Riemann 和的线性性质, 即对于分划 P 和与之相容的介点集 ξ, 总是成立有

$$\sum_{i=1}^n (\alpha f + \beta g)(\xi_i)\Delta x_i = \alpha \sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i + \beta \sum_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i,$$

然后令 $\|P\| \to 0$ 即得. □

性质 2 (**对于积分区间的可加性**) 若 $f \in R[a,b]$, 且 $c \in (a,b)$, 则成立

$$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

证 从可积第二充要条件或 Lebesgue 定理都可以证明

$$f \in R[a,b] \Longrightarrow f \in R[a,c], f \in R[c,b],$$

细节请读者补充 (即上一节的练习题 9.)

写出 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 和, 而且要求分划 P 必须含有 c 为其分点, 则从 P 就分别生成 f 在区间 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上的两个分划, 记为 P' 和 P''. 相应地可以将 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 和分拆为两项:

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = \sum{}' f(\xi_i)\Delta x_i + \sum{}'' f(\xi_i)\Delta x_i,$$

其中 $\sum'$ 与 $\sum''$ 分别为 f 在区间 $[a,c], [c,b]$ 上与分划 P', P'' 对应的 Riemann 和. 令 $\|P\| \to 0$, 注意到这时也有 $\|P'\| \to 0$ 和 $\|P''\| \to 0$, 因此就得到所求的等式. □

注 到此为止, 在定积分记号 $\int_a^b f$ 中总假定 $a < b$. 但今后会发现在许多场合中在 $a \geqslant b$ 的情况下使用记号 $\int_a^b f$ 是非常有用的, 为此给出定义如下:

$$\int_a^a f = 0, \quad \text{在 } a > b \text{ 时令 } \int_a^b f = -\int_b^a f.$$

在有了这样的补充定义之后, 性质 2 对于任何三点 a, c, b 都成立, 而不必一定要求 $a < c < b$. 只是在性质 2 中的条件应当修改为: f 在最大可能的区间 $[\min\{a, b, c\}, \max\{a, b, c\}]$ 上可积. 例如, 若有 $a < b < c$, f 在 $[a, c]$ 上可积, 则根据性质 2 有

$$\int_a^c f = \int_a^b f + \int_b^c f,$$

然后改写为与性质 2 的形式完全相似的等式:

$$\int_a^b f = \int_a^c f - \int_b^c f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

以上两个简单性质在计算定积分时是常用的工具.

例题 10.17 求 $I = \int_0^1 (x^2 - \frac{1}{2}x + 3)\,\mathrm{d}x$.

解 此题也可以不用线性性质来做, 但用了之后更为方便. 因为我们不必去直接考虑被积多项式的原函数, 而只需要分别三次求系数为 1 的单项式的原函数即可. 这里的思维方式是不一样的:

$$I = \int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 x\,\mathrm{d}x + 3\int_0^1 \mathrm{d}x = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + 3 = 3\frac{1}{12}. \quad \Box$$

例题 10.18 求由 $x = \pm 1$, $y = 0$ 和 $f(x) = \begin{cases} 2 - x^2, & x \leqslant 0 \\ 1 - x, & x > 0 \end{cases}$ 围成的曲边梯形的面积 S.

解 对分段定义函数用性质 2 是非常合适的:

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^0 (2 - x^2)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (1 - x)\,\mathrm{d}x \\ &= (2x - \frac{x^3}{3})\Big|_{-1}^0 + (x - \frac{x^2}{2})\Big|_0^1 \\ &= 0 - (-2 + \frac{1}{3}) + \frac{1}{2} \\ &= \frac{5}{3} + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{6}. \quad \Box \end{aligned}$$

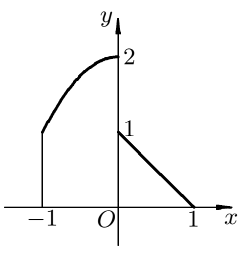


图 10.7: 分段定义函数

例题 10.19 求 $I = \int_0^{2\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x$.

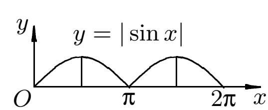


图 10.8: $y = |\sin x|$

解 将区间分拆为 $[0, \pi]$ 和 $[\pi, 2\pi]$ 就可以克服绝对值号带来的困难:

$$I = \int_0^{\pi} \sin x\,\mathrm{d}x + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x)\,\mathrm{d}x = (-\cos x)\Big|_0^{\pi} + (\cos x)\Big|_{\pi}^{2\pi} = 4.. \quad \Box$$

注 利用对称性, 从图 10.3 和图 10.8 就可见答案是 4.

性质 3 (积分的比较性质) 设 $f,g \in R[a,b]$, $a \leqslant b$, 且在 $[a,b]$ 上处处成立 $g(x) \leqslant f(x)$, 则成立 $\int_a^b g \leqslant \int_a^b f$.

证 写出 f,g 的 Riemann 和, 就有不等式 $\sum\limits_{i=1}^n g(\xi_i)\Delta x_i \leqslant \sum\limits_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i$, 注意其中两边是由相同的分划和介点集确定的 Riemann 和, 再令 $\|P\| \to 0$ 即可. □

注 这里 $a \leqslant b$ 是必须的. 若 $a > b$, 则不等式反向. 为避免混淆起见, 我们约定, 今后在不附加说明时一般总认为定积分记号 $\int_a^b f$ 中成立 $a \leqslant b$.

推论 1 设 $f \in R[a,b]$, 则成立

$$\left|\int_a^b f\right| \leqslant \left|\int_a^b |f|\right|.$$

(若 $a < b$, 则右边的外层绝对号是不必要的.)

证 利用不等式 $-|f(x)| \leqslant f(x) \leqslant |f(x)|\ \forall x \in [a,b]$, 再用比较性质即可. □

注 注意这里还用到一个基本事实, 即在上一节的 Lebesgue 定理后的推论中的部分内容:

$$f \in R[a,b] \Longrightarrow |f| \in R[a,b],$$

此外, 从 $|f| \in R[a,b]$ 一般不能推出 $f \in R[a,b]$. (这些都是上一节中的练习题.)

比较性质还广泛应用于积分估计. 其中最为基本的估计如下: 设 $a < b$, 在 $[a,b]$ 上处处成立 $m \leqslant f(x) \leqslant M$, 其中 m, M 是两个常数, 则就有

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f \leqslant M(b-a).$$

特别当 f 在 $[a,b]$ 上处处有 $f(x) \geqslant 0$ 时, 即有 $\int_a^b f \geqslant 0$.

不难证明两个可积函数的乘积仍然可积. (这也是上面提到的推论中的内容, 同时也已经列为上节的练习题.) 此外, 与此联系还有以下有用的结果. 它表明在某些情况下可以使用比 Riemann 和更为一般的和式来求极限.

定理 10.8 若 $f,g \in R[a,b]$, 且介点集 ξ 和 ξ' 均与分划 P 相容, 则成立

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)g(\xi_k')\Delta x_k = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 由于 $fg \in R[a,b]$, 为此只要证明上述和式与 fg 的 Riemann 和的差当分划的细度趋于 0 时的极限为 0 即可. 记 M 是 $|f|$ 在 $[a,b]$ 上的上界, 又记 ω_k 是 g 在分划 P 确定的子区间 $[x_{k-1}, x_k]$ 上的振幅, $k = 1, \cdots, n$, 则就有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k')\Delta x_k - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |f(\xi_k)|\cdot|g(\xi_k')-g(\xi_k)|\Delta x_k$$
$$\leqslant M\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k,$$

由于 $g \in R[a,b]$, 令 $\|P\| \to 0$ 即可. □

10.3.2 积分第一中值定理

在积分学中有两个中值定理. 先介绍第一个中值定理.

定理 10.9 (积分第一中值定理) 设 $f, g \in R[a,b]$, g 在 $[a,b]$ 上不变号, $m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall\, x \in [a,b]$, 则存在 $\mu \in [m,M]$, 成立

$$\int_a^b fg = \mu\int_a^b g; \tag{10.5}$$

特别当 $f \in C[a,b]$ 时, 则存在 $\xi \in [a,b]$, 使得 (10.5) 成为

$$\int_a^b fg = f(\xi)\int_a^b g. \tag{10.6}$$

证 只对于 $g(x) \geqslant 0\ \forall\, x \in [a,b]$ 和 $a < b$ 的情况写出证明. 这时从不等式 $m \leqslant f(x) \leqslant M\ \forall\, x \in [a,b]$ 出发就得到

$$mg(x) \leqslant f(x)g(x) \leqslant Mg(x)\ \forall\, x \in [a,b].$$

由于 $a < b$, 对这个不等式从 a 到 b 积分, 就得到

$$m\int_a^b g \leqslant \int_a^b fg \leqslant M\int_a^b g.$$

若 $\displaystyle\int_a^b g = 0$, 则由上式可见也有 $\displaystyle\int_a^b fg = 0$, 于是 (10.5) 对任意 μ 成立. 否则, 令

$$\mu = \frac{\displaystyle\int_a^b fg}{\displaystyle\int_a^b g},$$

就可见 $m \leqslant \mu \leqslant M$, 且使得 (10.5) 成立.

若 $f \in C[a,b]$, 则可取 m, M 为 f 的最小值和最大值, 且有 $f([a,b]) = [m,M]$. 因此从 $\mu \in [m,M]$ 可知存在 $\xi \in [a,b]$, 使 $f(\xi) = \mu$, 从而使 (10.6) 成立. □

注 1 由第七章知道在微分中值定理中有 $\xi \in (a,b)$, 而上述积分中值定理在 f 连续时在 (10.6) 中的 $\xi \in [a,b]$. 实际上这里也可以改进为 $\xi \in (a,b)$, 且不需要再增加条件. 这个证明可参见 [25] 的例题 10.2.2.

注 2 对于积分第一中值定理需要强调指出, 函数 g 在 $[a,b]$ 上的保号条件是不能缺少的, 否则公式 (10.5) 和 (10.6) 都可能不成立. 为此举一个例子. 在区间 $[-1,1]$ 上令 $f(x) = g(x) = x$, 则 (10.5) (或 (10.6)) 的左边是

$$\int_{-1}^{1} x\cdot x\,\mathrm{d}x = \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3},$$

但右边的积分却是 $\int_{-1}^{1} x\,\mathrm{d}x = \frac{x^2}{2}\Big|_{-1}^{1} = 0$, 因此等式不可能成立. 问题就出在 $g(x)=x$ 在区间 $[-1,1]$ 上不是保号函数.

注意积分第一中值定理的一个特殊情况, 即当 $g(x)\equiv 1$ 时, 则 (10.5) 成为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mu(b-a),$$

其中 $\mu\in[m,M]$; 而当 $f\in C[a,b]$ 时则存在 $\xi\in[a,b]$, (10.6) 成为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a).$$

我们称其中的 $f(\xi)$ 是 f 在 $[a,b]$ 上的积分平均值. 注意到积分就是一种求和, 因此积分平均值的名称是合理的. 它有明显的几何意义. 如图 10.9 所示, 由 $[a,b]$ 上的连续函数 f 生成的曲边梯形的面积恰好等于以某点 ξ 的函数值 $f(\xi)$ 为高的同底矩形的面积.

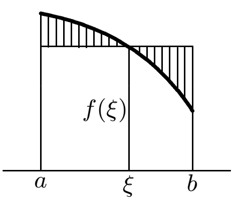


图 10.9: 积分平均值的意义

下面是利用积分第一中值定理估计积分的一个例子.

例题 10.20 从积分第一中值定理知道存在 $\xi\in[0,2\pi]$, 使得成立

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{t^2+4\pi^2}\,\mathrm{d}t=\sin\xi\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{d}t}{t^2+4\pi^2}=\frac{1}{8}\sin\xi,$$

因此可知

$$|I|=\left|\int_0^{2\pi}\frac{\sin t}{t^2+4\pi^2}\,\mathrm{d}t\right|\leqslant\frac{1}{8}.$$

或者又可以如下给出更好一点的估计:

$$|I|\leqslant\int_0^{2\pi}\frac{|\sin x|}{t^2+4\pi^2}\,\mathrm{d}t\leqslant\frac{1}{4\pi^2}\int_0^{2\pi}|\sin t|\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi^2}.\quad\square$$

10.3.3　作为积分限函数的定积分

现在引入变动积分限, 从而使得定积分成为积分限的函数.

设 $f\in R[a,b]$, 则对于 $x\in[a,b]$, 积分 $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 总是有意义的. 这样就得到以变动上限 x 为自变量的一个新型的函数. 同样可以引入以变动下限为自变量的函数 $\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$. 这里要注意, 当积分限为变量 x 时, 积分变量不能再用符号 x, 而应当立即改用其他符号.

实际上这种做法在第九章一开始已经见到 (参见图 9.1), 即引入变量 x 的面积函数 $S(x)$.

关于这类函数有两个基本结果. 首先介绍下面的定理.

定理 10.10 若 $f \in R[a,b]$, 则以下两个函数

$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad G(x)=\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

都是 $[a,b]$ 上的连续函数.

证 从 $f \in R[a,b]$ 知道 f 有界, 即 $\exists\, M>0, \forall\, x \in [a,b]: |f(t)| \leqslant M$. 于是当 $x, x+\Delta x \in [a,b]$ 时, 就有

$$\begin{aligned}|F(x+\Delta x)-F(x)| &= \left|\int_a^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right| = \left|\int_x^{x+\Delta x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\int_x^{x+\Delta x} |f(t)|\,\mathrm{d}t\right| \leqslant M|\Delta x|,\end{aligned}$$

可见 F 在 $[a,b]$ 上处处连续. 对函数 G 可作同样推导, 或者将它写为

$$G(x)=\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t,$$

从而可以不必再讨论. □

注 从 $|F(x+\Delta x)-F(x)| \leqslant M|\Delta x|$ 可见, 定积分作为变动积分限的函数, F 和 G 不仅是连续函数, 而且具有更好的性质, 即是满足 Lipschitz 条件的函数. (参见 §5.2 的习题 19 与例题 7.12.)

下面是定积分作为变动积分限的函数的第二个基本结果. 它与前面的微积分基本定理 (即定理 10.2) 一样, 揭示出求导运算和积分运算之间的互逆关系, 因此也称为微分形式的微积分基本定理. 为了区分起见, 可以将前面的定理 10.2 称为积分形式的微积分基本定理.

定理 10.11 (微分形式的微积分基本定理) 设 $f \in R[a,b]$, $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, $a \leqslant x \leqslant b$, 且 f 于点 $x_0 \in [a,b]$ 处连续, 则有

$$F'(x_0)=\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)\Bigg|_{x=x_0}=f(x_0).$$

证 由于 f 于点 x_0 连续, 对 $\forall\, \varepsilon>0, \exists\, \delta>0, \forall\, x \in O_\delta(x_0)\cap[a,b]$, 成立

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

于是就有

$$\begin{aligned}\left|\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}-f(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{\Delta x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t-\int_a^{x_0} f(t)\,\mathrm{d}t\right)-f(x_0)\right| \\ &= \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^x (f(t)-f(x_0))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\frac{1}{\Delta x}\int_{x_0}^x |f(t)-f(x_0)|\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon,\end{aligned}$$

这就证明了 $F'(x_0)=f(x_0)$. □

注 若 $f \in C[a,b]$, 则 F 在 $[a,b]$ 上可导, 且有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = f(x).$$

这里的求导法则非常简单, 就是只要将上限的 x 代入被积函数即可.

上述结果容易推广到对变动的下限求导, 得到以下求导法则:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_b^x f(t)\,\mathrm{d}t = -f(x)$$

这里假定 f 在点 x 连续.

进一步可以将以上求导公式推广到积分上下限是 x 的可微函数的情况.

设 $f \in C[a,b]$, $\alpha(x), \beta(x)$ 都是可微函数, 它们的值域不越出 $[a,b]$, 则可以取定点 $c \in [a,b]$, 并用复合函数求导公式 (即链式法则) 就有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_{\alpha(x)}^{c} f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^{\beta(x)} f(t)\,\mathrm{d}t\right)\\ &= -f(\alpha(x))\alpha'(x) + f(\beta(x))\beta'(x).\end{aligned}$$

现在我们可以叙述并证明最主要的一个原函数存在定理, 这是第九章一开始遗留下来的问题.

定理 10.12 (连续函数的原函数存在定理) 设 I 是区间, $f \in C(I)$, 则 f 在区间 I 上存在原函数, 也就是存在不定积分 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$.

证 任取一点 $x_0 \in I$, 定义

$$F(x) = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t \ \forall\, x \in I,$$

从前两个定理可知 $F \in C(I)$, 且有 $F'(x) = f(x)\ \forall\, x \in I$, 因此 F 就是 f 在区间 I 上的一个原函数, 从而不定积分 $\displaystyle\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 且可以写出

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{x_0}^x f(t)\,\mathrm{d}t + C. \quad \square$$

例题 10.21 设 $F(x) = \displaystyle\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$, 在 $x \neq 0$ 时求 $F'(x)$.

解 由于 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x \neq 0$ 时连续, 因此可用定理 10.11 提供的求导法则得到

$$F'(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \sin\frac{1}{x}. \quad \square$$

注 由于 $\sin\dfrac{1}{x}$ 在 $x = 0$ 时有第二类间断, 因此不能用本小节的定理来求 $F'(0)$. 但这并不是说 F 在 $x = 0$ 一定不存在导数. 实际上本题的函数 F 在 $x = 0$ 处可导, 它的计算将在后面的例题 10.30 中解决.

例题 10.22 计算下列变积分限函数的导数:

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathrm{e}^x}^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^2}\right)_x' &= \frac{1}{(1+t^2)^2}\bigg|_{t=x^2}\cdot(x^2)' - \frac{1}{(1+t^2)^2}\bigg|_{t=\mathrm{e}^x}\cdot(\mathrm{e}^x)'\\ &= \frac{2x}{(1+x^4)^2} - \frac{\mathrm{e}^x}{(1+\mathrm{e}^{2x})^2}. \quad \square\end{aligned}$$

例题 10.23 计算极限

$$I = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x}\int_{1/x}^{1} \frac{\cos 2t}{4t^2}\,\mathrm{d}t.$$

解 这是 $\frac{*}{\infty}$ 型的极限问题, 用 L'Hospital 法则可计算如下:

$$I = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_{1/x}^{1}\frac{\cos 2t}{4t^2}\,\mathrm{d}t\right)_x' = -\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{4}\cdot\cos\frac{2}{x}\cdot\left(\frac{1}{x}\right)' = \frac{1}{4}. \quad \square$$

10.3.4 Abel 变换与积分第二中值定理

Abel 变换是用于有限和式 $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i b_i$ 的变换技巧. 它在数学分析中的有关问题中起重要作用.

令 $S_0 = 0$, $S_k = \sum\limits_{i=1}^{k} a_i$, $k = 1, \cdots, n$, 则就可以作 Abel 变换如下:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} b_i(S_i - S_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} b_i S_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1} S_i \\ &= b_n S_n + \sum_{i=1}^{n-1}(b_i - b_{i+1})S_i.\end{aligned} \tag{10.7}$$

在图 10.10 中对于 $n = 4$, 在 a_i, b_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ 都是正数, 且有 $b_1 > b_2 > b_3 > b_4 > 0$ 的附加条件下, 作出了 Abel 变换的示意图. 它表明 Abel 变换在这里相当于

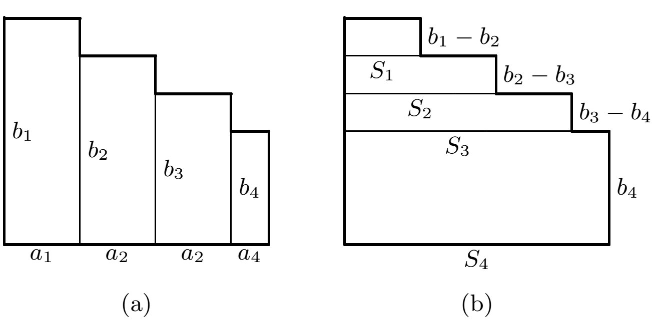


图 10.10: Abel 变换的示意图

将分图 (a) 中的 4 个矩形面积之和 $\sum\limits_{i=1}^{4} a_i b_i$ 变换为分图 (b) 中的新的 4 个矩形面积之和, 即不同的求和方式. 当然图中的附加条件对 Abel 变换本身是不必要的.

以 Abel 变换为工具可以如下证明积分学中的第二个中值定理.

定理 10.13 (积分第二中值定理) 设 $a < b$, 在 $[a, b]$ 上 f 单调, g 可积, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{10.8}$$

证 先讨论一种较简单的情况. 这就是 f 在 $[a,b]$ 上为单调减少的非负函数. 这时可以证明存在 $\xi \in [a,b]$, 使成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.9}$$

取分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 将上式左边的积分改写如下:

$$\begin{aligned} I = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})\int_{x_{i-1}}^{x_i} g(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} [f(x)-f(x_{i-1})]g(x)\,\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{10.10}$$

为简明起见, 将上式的两个和式分别记为 $\sum'$ 和 $\sum''$, 即有

$$I = \sum{}' + \sum{}''.$$

首先可以证明, 第二个和式 $\sum''$ 当分划的细度趋于 0 时的极限为 0. 为此记 M 是 $|g|$ 在 $[a,b]$ 上的一个上界, 又记 ω_i 是 f 在 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅, 则可以将第二个和式 $\sum''$ 的绝对值估计如下:

$$\left|\sum{}''\right| \leqslant \sum_{i=1}^n \int_{x_{i-1}}^{x_i} |f(x)-f(x_{i-1})|\cdot|g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant M\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i,$$

这样就得到 $\lim\limits_{\|P\|\to 0} \sum'' = 0$.

由此可见积分 $I = \sum' + \sum''$ 的主要部分是第一个和式, 且已经得到

$$\lim_{\|P\|\to 0} \sum{}' = I.$$

为了对 $\sum'$ 用 Abel 变换, 引入函数 $G(x) = \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t$, 并将 $\sum'$ 改写如下:

$$\sum{}' = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})[G(x_i)-G(x_{i-1})].$$

对此和式用 Abel 变换 (10.7), 注意到 $G(a)=0$, 就得到

$$\begin{aligned} \sum{}' &= \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})[G(x_i)-G(x_{i-1})] = \sum_{i=1}^n f(x_{i-1})G(x_i) - \sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)G(x_i) \\ &= f(x_{n-1})G(b) + \sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i-1})-f(x_i)]G(x_i). \end{aligned}$$

由定理 10.10 知道 $G \in C[a,b]$. 记 G 在 $[a,b]$ 上的最小数和最大数为 m, M, 又利用 f 非负单调减少, 于是就有

$$f(x_{n-1}) + \sum_{i=1}^{n-1}[f(x_{i-1})-f(x_i)] = f(a),$$

并得到下列估计:

$$mf(a) \leqslant \sum{}' \leqslant Mf(a).$$

最后令 $\|P\| \to 0$ 就得到

$$mf(a) \leqslant I \leqslant Mf(a).$$

由此可见存在 $\mu \in [m, M]$, 使得 $I = \mu f(a)$. 由连续函数 G 的介值性质, 存在 $\xi \in [a, b]$ 使得 $\mu = G(\xi)$, 最后得到所求证的 (10.9):

$$I = f(a)G(\xi) = f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x.$$

用类似的方法可以证明当 f 为非负单调增加时, 存在 $\xi \in [a, b]$, 使得代替 (10.9) 成立

$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.11}$$

最后回到一般情况, 则当 f 单调减少时, 只要对 $f(x) - f(b)$ 用 (10.9) 即可得到所要求证的等式 (10.8):

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^b [f(x) - f(b)]g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= [f(a) - f(b)]\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \\ &= f(a)\int_a^\xi g(x)\,\mathrm{d}x + f(b)\int_\xi^b g(x)\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

对于 f 单调增加, 则可以对 $f(x) - f(a)$ 用 (10.11) 导出 (10.8), 从略. $\square$

注 从一般公式 (10.8) 出发, 对于 f 单调非负情况可以直接导出 (10.9) 或 (10.11). 例如对于 f 单调减少且非负, 则在 $f(b) > 0$ 时可以重新定义 $f(b) = 0$, 这不影响积分值和 f 非负单调减少的条件, 因此就从 (10.8) 导出 (10.9).

由此可见, 积分第二中值定理的一般形式 (10.8) 和加非负条件后的特殊形式 (10.9) 或 (10.11) 都是等价的.

注意积分第二中值定理的一个特殊情况, 设 f 在 $[a, b]$ 上单调减少非负, $g(x) \equiv 1$, 这时 (10.8) 变为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d} = f(a)\int_a^\xi \mathrm{d}x = f(a)(\xi - a),$$

与积分第一中值定理的图 10.9 类似地可以作出右边的图 10.11, 它表明存在一个 $\xi \in [a, b]$, 使得以 $[a, \xi]$ 为底和以 $f(a)$ 为高的矩形面积恰好等于由 $[a, b]$ 上 $y = f(x)$ 生成的曲边梯形的面积.

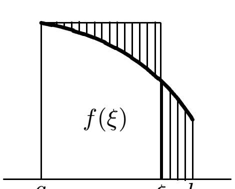


图 10.11: 第二中值定理的几何意义

10.3.5 例题

下面的例子是对于积分的估计.

例题 10.24 证明不等式 $\dfrac{1}{\mathrm{e}} \leqslant \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$.

证 在区间 $[0,1]$ 上成立 $\mathrm{e}^{-1} \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$, 对 x 从 0 积分到 1 即得. □

前面已知当 $a<b$ 时, 非负可积函数 f 的定积分 $\displaystyle\int_a^b f \geqslant 0$. 下面给出该积分严格大于 0 的一个常用的充分条件.

例题 10.25 设 f 是 $[a,b]$ 上的非负可积函数, 且至少在某一个连续点 c 处有 $f(c)>0$, 则 $\displaystyle\int_a^b f > 0$.

证 先给出 c 为 $[a,b]$ 的内点情况的证明.

从连续函数的局部保号性 (定理 5.1), 存在 $\delta>0$, 使得 $O_\delta(c) \subset [a,b]$, 且在此邻域上 $f(x) \geqslant \dfrac{f(c)}{2}$. 然后就有

$$\int_a^b f = \int_a^{c-\delta} f + \int_{c-\delta}^{c+\delta} f + \int_{c+\delta}^b f \geqslant \int_{c-\delta}^{c+\delta} \frac{f(c)}{2}\,\mathrm{d}x = f(c)\delta > 0.,$$

其中用到积分对积分区间的可加性, 将原来的积分拆成三个积分, 然后分别用比较性质.

对于 $c=a$ 或 $c=b$ 的证明是类似的, 从略. □

下一个例题需要用到几乎处处连续函数和 Lebesgue 定理.

例题 10.26 设 f 是 $[a,b]$ 上的非负可积函数, 则积分 $\displaystyle\int_a^b f = 0$ 的充要条件是 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处等于零.

证 必要性 ($\Longrightarrow$). 由于 f 处处非负, 从积分 $\displaystyle\int_a^b f = 0$ 和例题 10.25 可见 f 在每个连续点处必须为 0. 用 Lebesgue 定理知道 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续, 因此 $f(x)=0$ 几乎处处成立.

充分性 ($\Longleftarrow$). 对于每个分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 只取 f 的连续点为介点, 则 Riemann 和 $\displaystyle\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i = 0$. 由于 f 在 $[a,b]$ 上可积, 因此令 $\|P\| \to 0$ 时这样的 Riemann 和的极限等于积分值 $\displaystyle\int_a^b f$, 可见该积分等于 0. □

注 在命题中 f 的可积性是前提. 注意: 在一个区间上几乎处处等于零的函数可以是不可积的, 例如 Dirichlet 函数; 也可以是可积的, 例如 Riemann 函数. 它恰好就是满足例题中的全部条件而又在无限个点上不等于 0 的一个具体例子.

例题 10.27 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=0.$

分析 这是数列极限问题, 只不过数列的每一项都是积分. 这个积分是可以计算出来的, 但求出积分后再求极限也不见得方便. 何况许多同类型问题中的积分根本积不出来. 因此这里介绍求这类极限的新方法.

如右边的图 10.12 所示, 当 n 充分大时, 在曲线 $\sin^n x$ 下的曲边梯形面积趋于 0. 由于不论取多大的 n 时该曲线总是经过点 $(\dfrac{\pi}{2},1)$, 因此采取分而治之的方法. 这就是用底边长度为一个小量 δ 和高为 1 的矩形覆盖 $[\dfrac{\pi}{2}-\delta,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的曲边梯形, 这样的矩形面积只是 δ. 至于在区间 $[0,\dfrac{\pi}{2}-\delta]$ 上的余下部分是容易处理的. 这样就可以对于 n 充分大时的 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$ 上的曲边梯形面积作出有效的估计.

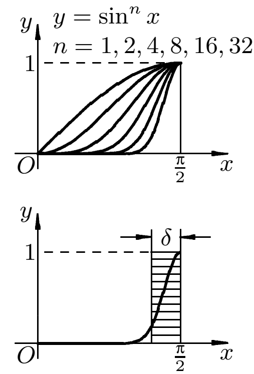


图 10.12: $y=\sin^n x$ 的图像

证 对于给定的 $\varepsilon>0$, 不妨取 $\delta=\min\{\dfrac{\varepsilon}{2},\dfrac{\pi}{4}\}$, 然后对积分作如下估计:

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x&=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta}\sin^n x\,\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}-\delta}^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\\&\leqslant\frac{\pi}{2}\sin^n(\frac{\pi}{2}-\delta)+\delta\leqslant\frac{\pi}{2}\cos^n\delta+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

由于 $0<\cos\delta<1$, 因此存在 N, 只要 $n\geqslant N$, 上式右边第一项就小于 $\varepsilon/2$, 因此也就使得 $0\leqslant\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x<\varepsilon$. 这就表明数列 $\left\{\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\right\}$ 的极限为 0. □

下面是一个最常见的积分不等式, 即 Cauchy–Schwarz–Buniankowski 不等式, 今后称为 Schwarz 不等式. 它在理论和应用方面都是重要的. 它的离散情况就是 §1.5.2 中的 Cauchy 不等式.

对这个不等式我们举出几种证明方法.

例题 10.28 设 $f,g\in R[a,b]$, $a\leqslant b$, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x\cdot\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 1 从 f,g 可积知道 fg,f^2,g^2 都可积. 引入实参数 λ, 则从 $a\leqslant b$ 和 $(\lambda f(x)-g(x))^2\geqslant 0\ \forall x\in[a,b]$ 得到

$$\int_a^b(\lambda f-g)^2=\lambda^2\int_a^b f^2-2\lambda\int_a^b fg+\int_a^b g^2\geqslant 0.$$

若 $\displaystyle\int_a^b f^2=0$, 则从例题 10.26 可见 f 于 $[a,b]$ 上几乎处处为 0, 从而 fg 也是如此, 且也有 $\displaystyle\int_a^b fg=0$, 因此所要求证的不等式已经成立.

若 $\int_a^b f^2 \neq 0$, 则从关于 λ 的二次三项式非负知道其判别式 $\Delta \leqslant 0$, 这样就得到

$$\left(\int_a^b f \cdot g\right)^2 - \int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2 \leqslant 0,$$

整理后就得到所要证的不等式. □

证 2 (模仿定理 1.8 的证法) 先写出对所有 $x, y \in [a, b]$ 都成立的不等式

$$(f(x)g(y) - f(y)g(x))^2 \geqslant 0.$$

将 x 看成自变量, y 看成参数, 将上式对于 x 从 a 积分到 b, 得到

$$g^2(y)\int_a^b f^2 - 2f(y)g(y)\int_a^b fg + f^2(y)\int_a^b g^2 \geqslant 0.$$

再将上式对于 y 从 a 积分到 b, 得到

$$2\int_a^b g^2 \int_a^b f^2 - 2\left(\int_a^b fg\right)^2 \geqslant 0,$$

整理即得. □

证 3 将 $[a, b]$ 作 n 等分的等距分划, 又取介点 $\xi_i = x_i = a + \dfrac{i}{n}(b - a)$, $i = 1, \cdots, n$, 应用关于有限数组 $f(x_i), g(x_i), i = 1, \cdots, n$ 的 Cauchy 不等式 (见定理 1.8), 除以 n^2 并将每个和式写成 Riemann 和, 就得到

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f(x_i)g(x_i)\right)^2 \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f^2(x_i) \cdot \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n g^2(x_i).$$

令 $n \to \infty$, 从 fg, f^2, g^2 均为 (R) 可积即得所要求证的积分不等式. □

注 下面来解决-Schwarz 不等式成立等号的充要条件.

设 $\int_a^b f^2 > 0$, 若不等式成立等号, 也就是证 1 中关于 λ 的二次三项式的判别式等于 0, 因此存在相等的实根, 记为 λ_0, 从而得到

$$\int_a^b (\lambda_0 f - g)^2 = 0.$$

由于被积函数非负, 而积分等于 0, 因此由例题 10.26 知道 $\lambda_0 f - g$ 几乎处处等于 0. 反之, 这个条件对于 $\int_a^b (\lambda_0 f - g)^2 = 0$ 也是充分的.

以上是在 $\int_a^b f^2 > 0$ 时得到的条件. 若 $\int_a^b g^2 > 0$, 讨论是类似的. 对于这两个积分都等于 0 的情况, 就导致 f, g 都是几乎处处为零的情况. 总结起来就可见 Cauchy-Schwarz 积分不等式成立等号的必要条件是存在不同时等于 0 的两个常数 λ, μ, 使得 $\lambda f + \mu g$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处等于 0. 反之可以看出这也是充分条件.

练 习 题

1. 举出满足下列条件的例子: $f, g \in R[a,b]$, $\int_a^b fg \neq \int_a^b f \int_a^b g$.

2. 试举出 $[a,b]$ 上的三对不可积函数 f_i, g_i, $i=1,2,3$, 分别满足下列要求:

   (1) $f_1+g_1 \in R[a,b]$; (2) $f_2g_2 \in R[a,b]$; (3) $f_3 \circ g_3 \in R[a,b]$.

3. 讨论区间 $[a,b]$ 上 $f(x), |f(x)|, f^2(x)$ 的可积性之间的关系.

4. 试用积分第一中值定理证明: 若 $\dfrac{a_0}{n+1}+\dfrac{a_1}{n}+\cdots+\dfrac{a_{n-1}}{2}+a_n=0$, 则方程
$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$
   在 $[0,1]$ 上有根. (这就是第一册 §7.1 的题 7(2).)

5. (1) 若 $f \in R[0,1]$, 证明: $\left(\int_0^1 f\right)^2 \leqslant \int_0^1 f^2$.

   (2) 若 $f' \in R[0,1]$, $f(1)-f(0)=1$, 证明: $\int_0^1 (f')^2 \geqslant 1$.

6. 设 $f \in R[a,b]$, $f(x) \geqslant 0\ \forall x \in [a,b]$, 且 $\int_a^b f = 1$, 证明:

   (1) $\int_a^b x^2 f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant \left(\int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x\right)^2$;

   (2) $\left(\int_a^b f(x)\cos kx\,\mathrm{d}x\right)^2+\left(\int_a^b f(x)\sin kx\,\mathrm{d}x\right)^2 \leqslant 1$, 其中 k 为任何正整数.

7. 设 $f \in R[a,b]$, $f(x) \geqslant m > 0\ \forall x \in [a,b]$, 证明: $\ln f \in R[a,b]$, 且成立
$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right) \geqslant \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\,\mathrm{d}x.$$

8. 设 $f \in R[a,b]$, 证明: $\mathrm{e}^{f(x)}, \mathrm{e}^{-f(x)} \in R[a,b]$, 且成立
$$\int_a^b \mathrm{e}^{f(x)}\,\mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{e}^{-f(x)}\,\mathrm{d}x \geqslant (b-a)^2.$$

9. 试比较下列各对积分的大小:

   (1) $\int_0^1 \dfrac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$ 与 $\int_0^1 \dfrac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+\sin x}$;

   (2) $\int_1^2 \mathrm{e}^{-x}\sqrt[3]{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 与 $\int_1^2 \mathrm{e}^{-x^2}\sqrt[3]{2+\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

   (3) $\int_{0.1}^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}}$ 与 $\int_{0.1}^1 \dfrac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x}}$.

10. (1) 若 $f \in C[a,b]$, $\int_a^b f^2 = 0$, 证明: $f(x) \equiv 0$.

    (2) 若 $f \in C[a,b]$, 且对于满足条件 $g(a)=g(b)=0$ 的每一个 $g \in C[a,b]$ 都有 $\int_a^b fg = 0$, 证明: $f(x) \equiv 0$.

11. 计算以下极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n\,\mathrm{d}x}{1+x}$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}(n+1)\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\,\mathrm{d}x\ (f\in C[0,1])$;

(3) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}}{\dfrac{x}{\ln x}}$; (4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\displaystyle\int_0^{\sin x}\tan t\,\mathrm{d}t}{\displaystyle\int_0^{\tan x}\sin t\,\mathrm{d}t}$;

(5) $\lim\limits_{x\to+\infty}\displaystyle\int_x^{x+a}\frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t\ (a>0)$; (6) $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_0^x t^2\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{x\mathrm{e}^{x^2}}$.

12. 若 $f\in C(\mathbb{R})$, 且 $\displaystyle\int_x^{x+1} f(t)\,\mathrm{d}t=0\ \forall x\in\mathbb{R}$, 证明 f 是周期 1 的周期函数.

13. (1) 若 $f\in C[a,b]$, $f(x)>0\ \forall x\in[a,b]$, 证明 $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的严格单调增加函数.

(2) 若 $f\in C[0,+\infty)$, $f(+\infty)=A$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t}{x}=A$.

(3) 若 $f\in C[a,b]$, 且为单调增加函数, 证明: $F(x)=\dfrac{\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t}{x-a}$ 是在 (a,b) 上的单调增加函数.

14. 若 $f'\in C[0,1]$, $f(0)=0$, 证明: $\displaystyle\int_0^1 |f(x)f'(x)|\,\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1 (f'(x))^2\,\mathrm{d}x$.

15. (1) 若 f 是区间 $[1,+\infty)$ 上的单调减少非负函数, 记 $a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n f(k)-\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x$, 证明: $\{a_n\}$ 为收敛数列.

(2) 记 $c_n=\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{k}-\ln n$, 证明: $\{c_n\}$ 为收敛数列. (这就是第一册的例题 2.29.)

(4) 证明不等式: $2(\sqrt{n+1}-1)<\displaystyle\sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{k}}\leqslant 2\sqrt{n}-1$.

(5) 若 $f'\in R[0,1]$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^n f\Big(\frac{k}{n}\Big)-n\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)=\frac{f(1)-f(0)}{2}.$$

16. 设 $f\in R[a,b]$, 证明: $F(x)=\displaystyle\int_a^b |x-t|\cdot|f(t)|\,\mathrm{d}t$ 是 $[a,b]$ 上的下凸函数.

17. 若 $f'\in R[0,a]$, 证明: $|f(0)|\leqslant\dfrac{1}{a}\displaystyle\int_0^a|f|+\int_0^a|f'|$.

18. 若 $f'\in R[0,1]$, 证明: $\displaystyle\int_0^1|f|\leqslant\max\left(\int_0^1|f'|,\left|\int_0^1 f\right|\right)$.

§10.4 定积分的计算方法

这一节专门讨论定积分的计算. 虽然前面已经有了 Newton–Leibniz 公式, 但我们会发现在很多情况下还是将不定积分中的换元法和分部积分法移植到定积分计算中来更为方便. 此外, 还介绍如何利用对称性解决某些定积分的计算问题, 其中的原函数可能是积不出来的.

10.4.1 换元法

定理 10.14 设函数 $u(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有连续导函数, $f(u)$ 在函数 $u=u(x)$ 的值域 (必定是区间) 上连续, 则成立

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,\mathrm{d}u. \tag{10.12}$$

证 作辅助函数

$$F(t)=\int_a^t f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x-\int_{u(a)}^{u(t)} f(u)\,\mathrm{d}u,\ a\leqslant t\leqslant b,$$

则 $F(a)=0$, 且对于每个 $t\in[a,b]$ 有

$$F'(t)=f(u(t))u'(t)-f(u(t))u'(t)=0,$$

因此 $F(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上为常值函数, 从而有 $F(b)=F(a)=0$. 这就是要求证的公式 (10.12). □

注 1 在不定积分中我们学习了两种换元法. 其实从公式 (10.12) 来看, 若要计算的是左边, 则就有 $\mathrm{d}u(x)=u'(x)\,\mathrm{d}x$, 因此就是用凑微分法 (即第一种换元法) 将左边化为右边. 反之, 从右边化到左边就是第二种换元法. 与不定积分不同之处是, 在对定积分用换元法时必须注意积分限作相应的变换.

此外, 与不定积分的情况类似, 可以将 (10.12) 左边的 $u'(x)\,\mathrm{d}x$ 看成为 $\mathrm{d}u$, 因此在定积分记号中的微分符号 $\mathrm{d}x$ 对于计算也是有帮助的.

注 2 定理 10.14 中的条件可以减弱, 本书从略. 但另一方面这里不要求 $u=u(x)$ 是从 $[a,b]$ 到 $[u(a),u(b)]$ 的一一映射, 条件比较宽松.

例题 10.29 求 $I=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\cos x\,\mathrm{d}x$.

解 用凑微分法, 令 $u=\sin x$, 则 x 从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 对应于 u 从 0 到 1, 因此就有

$$I=\int_0^1 u^n\,\mathrm{d}u=\frac{1}{n+1}.\quad\square$$

注 这里可以看出, 由于积分限取定时定积分只是一个数, 因此对定积分用换元法时, 最后不必再恢复到原来的积分变量, 因此比用不定积分的换元法加上

Newton–Leibniz 公式来得方便. 这是不定积分的换元法与定积分的换元法之间的又一个差别.

例题 10.30 求圆 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 的面积.

解 只要求出第一象限的面积再乘 4 即可, 因此有 $S=4\int_0^R\sqrt{R^2-x^2}\,\mathrm{d}x$. 作代换 $x=R\sin t$, 则当 t 从 0 到 $\dfrac{\pi}{2}$ 时 x 从 0 到 R. 于是有

$$\begin{aligned}S&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}R\cos t\,\mathrm{d}(R\sin t)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}R^2\cos^2 t\,\mathrm{d}t\\&=4R^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}\,\mathrm{d}t\\&=4R^2\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{4}\sin 2t\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}\Big)=\pi R^2.\quad\square\end{aligned}$$

下面是有关周期函数积分的一个基本结果.

例题 10.31 设 f 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 T 的周期函数, 且在任何有界区间上 (R) 可积, 证明 f 在长度为周期 T 的每个区间上的积分值都相同, 也就是说对每个 a 成立:

$$\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^T f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 利用定积分关于区间的可加性写出

$$\int_a^{a+T}f=\int_a^0 f+\int_0^T f+\int_T^{a+T}f,$$

然后对于右边第三个积分 $\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x$ 作代换 $x=t+T$, 则当 x 从 T 到 $a+T$ 时 t 从 0 到 T, 因此得到

$$\int_T^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^a f(t+T)\,\mathrm{d}t=\int_0^a f(t)\,\mathrm{d}t=-\int_a^0 f(t)\,\mathrm{d}t,$$

代入前式即得. $\square$

注 若本题中 f 的条件加强为连续函数, 则可以用对积分限求导的方法来证明. 定义 $F(a)=\int_a^{a+T}f(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 a 为自变量. 由于 f 连续, 因此就有

$$F'(a)=f(a+T)-f(a)=0,$$

可见 $F(a)$ 关于 a 为常值函数. 所要求证的等式就是 $F(a)=F(0)$.

10.4.2 分部积分法

定理 10.15 设函数 u,v 的导函数 $u',v'\in R[a,b]$, 则成立如下的分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x=u(x)v(x)\Big|_a^b-\int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 从 Newton–Leibniz 公式有

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b.$$

利用 $(uv)' = uv' + u'v$ 就得到

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_a^b,$$

移项即得. □

注 利用定积分记号中的微分 $\mathrm{d}x$, 分部积分公式可记为对于使用更为方便的下列形式:

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_a^b - \int_a^b v\,\mathrm{d}u.$$

此外, 利用 Newton–Leibniz 公式的推广 (见定理 10.2 的注), 上述分部积分公式也有相应的推广. 这就是允许 u, v 的导函数 u', v' 在有限个点上不一定存在, 但只要 u, v 连续, 且 $u', v' \in R[a,b]$, 则公式仍然成立.

例题 10.32 求 $I = \displaystyle\int_0^a \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x$, 其中 $a > 0$.

解 这题的不定积分已在例题 9.47 中用分部积分法求出, 因此只要对那里的结果用 Newton–Leibniz 公式即可. 下面用相同方法但直接计算定积分.

$$\begin{aligned}
I &= x\sqrt{x^2+a^2}\Big|_0^a - \int_0^a \frac{x^2}{\sqrt{x^2+a^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= \sqrt{2}a^2 - \int_0^a \sqrt{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x + a^2\int_0^a \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2}a^2 + \frac{a^2}{2}\ln(x+\sqrt{x^2+a^2})\Big|_0^a \\
&= \frac{a^2}{2}(\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})). \quad \square
\end{aligned}$$

例题 10.33 求 $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\,\mathrm{d}x$.

解 对第二个积分用代换 $x = \dfrac{\pi}{2} - t$ 即可知道它等于第一个积分. 对于第一个积分用分部积分法得到递推公式如下, 其中设 $n \geqslant 2$:

$$\begin{aligned}
I_n &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-1} x\,\mathrm{d}(-\cos x) \\
&= -\sin^{n-1} x\cos x\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x\,\mathrm{d}(\sin^{n-1} x) \\
&= (n-1)\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{n-2} x\cos^2 x\,\mathrm{d}x = (n-1)I_{n-2} - (n-1)I_n,
\end{aligned}$$

于是得到递推公式

$$I_n = \frac{n-1}{n} I_{n-2}.$$

利用 $I_0=\dfrac{\pi}{2}$ 和 $I_1=1$, 就可以归纳得到

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 奇},\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 偶}.\end{cases}\qquad\square$$

这个例题所求得的公式在许多计算中都会用到, 因此需要记住. 例如, 若能记得这个公式即可直接写出

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x\sin^2 x\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{2}\left(1-\frac{3}{4}\right)=\frac{\pi}{16},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7 x\,\mathrm{d}x=\frac{6\cdot 4\cdot 2}{7\cdot 5\cdot 3}=\frac{16}{35}.$$

例题 10.34 对于函数 $F(x)=\displaystyle\int_0^x\sin\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$ 计算 $F'(0)$.

解 在前面的例题 10.21 中已经用定理 10.11 求出了 $x\neq 0$ 时的导数 $F'(x)$. 本题的难处在于积分号下的被积函数在 $t=0$ 处不但没有定义, 而且是第二类间断点, 因此不能用连续延拓原理来解决问题.

用分部积分法可以克服这个困难. 关键在于导出 F 的新的表达式:

$$\begin{aligned}F(x)&=\int_0^x t^2\,\mathrm{d}(\cos\frac{1}{t})=t^2\cos\frac{1}{t}\Big|_{0+}^{x}-\int_0^x\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t^2\\&=x^2\cos\frac{1}{x}-\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

已知 $F(0)=0$. 将上式右边的第一项连续延拓到 $x=0$, 而第二项的被积函数在 $x=0$ 处也可以连续延拓, 这样就可以对两项分别求导, 由于这两个导数都是 0, 因此得到 $F'(0)=0$. $\square$

注 以下是在分部积分后不用连续延拓的证明方法. 首先从 F 的定义有 $F(0)=0$. 然后在作上述分部积分后直接按照导数的定义来计算差商的极限:

$$\begin{aligned}F'(0)&=\lim_{x\to 0}\frac{F(x)-F(0)}{x-0}\\&=\lim_{x\to 0}(x\cos\frac{1}{x})-\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}.\end{aligned}$$

右边第一项的极限明显为 0, 而第二项则可以用 L'Hospital 法则, 即有

$$\lim_{x\to 0}\frac{\displaystyle\int_0^x 2t\cos\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t}{x}=\lim_{x\to 0}2x\cos\frac{1}{x}=0.$$

下一个例子是分部积分法在积分估计 (或积分不等式) 中的应用.

例题 10.35 设 f 在 $[0,1]$ 上有连续导函数, $f(0)=f(1)=0$, 证明

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\frac{1}{2}\int_0^1|f'(x)|\,\mathrm{d}x.$$

证 对于左边的积分来说要利用 $f' \in C[0,1]$ 的条件, 当然需要作分部积分. 但仅仅如此, 则只能有

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = xf(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 xf'(x)\,\mathrm{d}x$$

还不能达到目的.

这里需要利用一个技巧, 即在分部积分中将 $\mathrm{d}x$ 看成为 $\mathrm{d}(x-\frac{1}{2})$, 将上述分部积分过程改写为

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}(x-\frac{1}{2}) = (x-\frac{1}{2})f(x)\Big|_0^1 - \int_0^1 (x-\frac{1}{2})f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

则在 $f(0)=f(1)=1$ 的条件下就有

$$\left|\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \int_0^1 |x-\frac{1}{2}|\cdot|f'(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{2}\int_0^1 |f'(x)|\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

10.4.3 对称性在积分计算中的应用

设积分区间关于原点对称, 例如为 $[-a,a]$ $(a>0)$, 则容易知道, 当被积函数 f 是奇函数, 即其图像关于原点为中心对称时, 就有 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0$; 而当 f 为偶函数, 即其图像关于 y 轴为对称时, 就有 $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,\mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

如果将以上的对称性进一步推广, 则对于某些积分的计算是很有好处的. 下面我们会看到利用对称性可以计算出被积函数没有初等原函数的某些定积分.

首先可以注意到, 在区间 $[a,b]$ 上有定义的任意函数 $f(x)$, 如果将自变量换为 $a+b-x$ 之后的函数记为 $g(x)=f(a+b-x)$, 则两者的图像关于区间 $[a,b]$ 的中点 $\dfrac{a+b}{2}$ 就具有对称性:

$$g(x) = f(a+b-x) = f(\frac{a+b}{2} + (\frac{a+b}{2} - x)).$$

在 $f \in R[a,b]$ 时不难证明

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.13}$$

实际上只要对于右边的积分作代换 $t=a+b-x$, 并最后将 t 再记为 x 即可:

$$\int_a^b f(a+b-x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

下面我们主要关心在区间 $[0,a]$ 上有定义的函数的对称性. 从上面的结果可见, 若 $f \in R[0,a]$, 则有

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x. \tag{10.14}$$

利用 (10.14) 就不难得到以下两个结果.

定理 10.16 设函数 f 在区间 $[0,a]$ 上可积, 且关于区间中点 $a/2$ 为奇函数, 即有 $f(x)=-f(a-x)\,\forall\, x\in[0,a]$, 则成立

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

定理 10.17 设函数 f 在区间 $[0,a]$ 上可积, 且关于 $x=a/2$ 为偶函数, 即有 $f(x)=f(a-x)\,\forall\, x\in[0,a]$, 则成立

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{a/2} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 将 $[0,a]$ 上的积分拆为 $\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{a/2} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_{a/2}^a f(x)\,\mathrm{d}x$, 然后对右边第二个积分作代换 $x=a-t$, 并利用条件 $f(t)=f(a-t)$ 就得到

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{a/2} f(x)\,\mathrm{d}x-\int_{a/2}^0 f(a-t)\,\mathrm{d}t=2\int_0^{a/2} f(x)\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

对于在 $[0,a]$ 上不一定具有上述两种对称性的可积函数, 可以用以下方法生成在 $[0,a]$ 上关于直线 $x=a/2$ 的偶函数. 这对于某些积分的计算是有用的.

定理 10.18 设 f 在 $[0,a]$ 上可积, 则成立

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{a/2}[f(x)+f(a-x)]\,\mathrm{d}x. \tag{10.15}$$

证 由于 $g(x)=f(x)+f(a-x)$ 关于点 $a/2$ 为偶函数, 因此只要联合使用等式 (10.14) 和定理 10.17 即可有

$$\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(\int_0^a f(x)\,\mathrm{d}x+\int_0^a f(a-x)\,\mathrm{d}x\right)=\int_0^{a/2}[f(x)+f(a-x)]\,\mathrm{d}x. \quad \square$$

注 实际上定理 10.18 和公式 (10.15) 已经覆盖了前两个定理的结论. 此外, 当然还可以将 (10.15) 推广到更一般的区间上, 得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^{\frac{a+b}{2}}[f(x)+f(a+b-x)]\,\mathrm{d}x.$$

例题 10.36 计算 $I=\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}\,\mathrm{d}x.$

解 根据 (10.15) 先计算其中的被积函数

$$\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}+\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}=\frac{\pi\sin x}{1+\cos^2 x},$$

因此就有

$$I=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin x\mathrm{d}x}{1+\cos^2 x}=-\pi\arctan(\cos x)\Big|_0^{\pi/2}=\frac{\pi^2}{4}. \quad \square$$

下一个例题在今后的 Fourier 系数计算中有用.

例题 10.37 设 $f \in R[-\pi,\pi]$ 为偶函数, 且在 $[0,\pi]$ 上关于点 $\pi/2$ 为奇函数, 证明: 对每个正整数有

$$I = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

证 由于被积函数 $f(x)\cos 2nx$ 是偶函数, 因此 $I = 2\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x$. 在区间 $[0,\pi]$ 上则从

$$f(\pi - x)\cos 2n(\pi - x) = -f(x)\cos 2nx$$

可见被积函数关于点 $\pi/2$ 是奇函数. 用定理 10.16 即得所要的结论. □

注 直接证明则可作代换 $t = \pi - x$ 如下:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x &= \int_{\pi}^{0} f(\pi - t)\cos 2n(\pi - t)\,\mathrm{d}(\pi - t)\\ &= \int_0^{\pi}(-f(t))\cos 2nt\,\mathrm{d}t = -\int_0^{\pi} f(x)\cos 2nx\,\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

可见该积分等于 0.

例题 10.38 计算 $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

解 作代换 $x = \tan t$, $\mathrm{d}x = \sec^2 t\,\mathrm{d}t$, 就得到

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan t)\,\mathrm{d}t.$$

用公式 (10.15) 计算上式右边的积分. 先计算其被积函数为

$$\begin{aligned}&\ln(1+\tan t) + \ln[1+\tan(\frac{\pi}{4} - t)]\\ &\qquad= \ln(1+\tan t) + \ln\left(1 + \frac{1-\tan t}{1+\tan t}\right)\\ &\qquad= \ln(1+\tan t) + \ln\frac{2}{1+\tan t} = \ln 2.\end{aligned}$$

由此可得到

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{8}} \ln 2\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{8}\ln 2. \quad \square$$

下面的例题中的积分中有一个参数 α, 但其积分值却是一个常数.

例题 10.39 证明: 对任意实数 a 成立恒等式

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\tan^a x} \equiv \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+\cot^a x} \equiv \frac{\pi}{4}.$$

证 容易证明两个积分相等, 因此只计算第一个积分. 从公式 (10.15) 先计算

$$\frac{1}{1+\tan^a x} + \frac{1}{1+\cot^a x} = \frac{1}{1+\tan^a x} + \frac{\tan^a x}{1+\tan^a x} = 1,$$

它在 $[0,\pi/4]$ 上的积分就是 $\dfrac{\pi}{4}$. □

练 习 题

1. 计算下列定积分:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^2 x(1-x^2)^3\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^1 \left(\frac{x-1}{x+1}\right)^4\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{2}(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}$; (6) $\displaystyle\int_0^4 \mathrm{e}^{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{e}^x\sin^k x\,\mathrm{d}x\ (k=1,2)$; (8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^k x\,\mathrm{d}x\ (k=1,2)$;

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x^k\sin x\,\mathrm{d}x\ (k=1,2)$; (10) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin^k x\,\mathrm{d}x\ (k=1,2)$;

(11) $\displaystyle\int_0^1 \arcsin x\,\mathrm{d}x$; (12) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}}^{\mathrm{e}^3} \frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$;

(13) $\displaystyle\int_{-\frac{1}{5}}^{\frac{1}{5}} x\sqrt{2-5x}\,\mathrm{d}x$; (14) $\displaystyle\int_0^3 \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+\sqrt{1+x}}$;

(15) $\displaystyle\int_{-1}^0 (x+1)\sqrt{1-x-x^2}\,\mathrm{d}x$; (16) $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(x^2-x+1)^{3/2}}$;

(17) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{a^2-x^2}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$; (18) $\displaystyle\int_0^a x^2\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}\,\mathrm{d}x\ (a>0)$;

(19) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^4 x\sin 2x\,\mathrm{d}x$; (20) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\cos x+\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(21) $\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \sin(mx)\sin(nx)\,\mathrm{d}x\ (m,n\in\mathbb{N})$; (22) $\displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\cos^2 x}{x(\pi-2x)}\,\mathrm{d}x$;

(23) $\displaystyle\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}} |\ln x|\,\mathrm{d}x$; (24) $\displaystyle\int_0^1 \operatorname{sgn}(x-x^2)\,\mathrm{d}x$;

(25) $\displaystyle\int_0^1 x|x-a|\,\mathrm{d}x\ (0<a<1)$; (26) $\displaystyle\int_0^2 [\mathrm{e}^x]\,\mathrm{d}x$.

2. 证明: $\displaystyle\int_0^1 x^m(1-x)^n\,\mathrm{d}x=\int_0^1 x^n(1-x)^m\,\mathrm{d}x$, 其中 $m,n\in\mathbb{N}$.

3. 设 $f\in C[0,+\infty)$, $f(+\infty)=A$, 求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f(nx)\,\mathrm{d}x$.

4. 设 $f\in C[0,1]$, 且 $\displaystyle\int_0^1 f(xt)\,\mathrm{d}t=0\ \forall x\in[0,1]$, 证明 $f(x)\equiv 0$.

5. 若 $f\in R[a,b]$, 证明: $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 f(a+(b-a)x)\,\mathrm{d}x$.

6. 若 $f(\sin x)\in R[0,\pi]$, 证明:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x)\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^{\pi} xf(\sin x)\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\int_0^{\pi} f(\sin x)\,\mathrm{d}x$;

并求 $\int_0^{\pi} x\sin^4 x\,\mathrm{d}x$.

7. 若 $f'' \in R[a,b]$, 试证:
$$\int_a^b xf''(x)\,\mathrm{d}x = (bf'(b)-f(b))-(af'(a)-f(a)).$$

8. 若 $f \in R[a,b]$, 证明存在 $[a,b]$ 上的函数序列 $\{f_n(x)\}$, 使得成立
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f(x)-f_n(x)|\,\mathrm{d}x = 0,$$
其中 $\{f_n(x)\}$ 是:

(1) 折线函数列; (2) 阶梯函数列;

(3) 连续函数列; (4) 连续可导函数列.

9. 若 $f \in R[a,b]$, $g' \in R[a,b]$, 证明:
$$\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g'(x)\left(\int_x^b f(t)\,\mathrm{d}t\right)\mathrm{d}x.$$

10. 若 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期为 T 的周期函数, 且在任何有界区间 $[a,b]$ 上可积, 证明: $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 是一个线性函数与一个周期函数之和.

第十一章 广义积分

内容简介 广义积分是上一章的定积分在两个方向上的推广, 即允许积分区间无界, 又允许函数无界. §11.1 是两类广义积分的定义和基本性质. §11.2 是广义积分的计算. §11.3 是广义积分的敛散性判别法.

§11.1 广义积分的定义和性质

11.1.1 定积分的推广

从第十章中的定积分定义和定理 10.1 可见, 定积分只能对有界区间上的有界函数才可能有意义. 然而许多理论问题和应用问题中都需要突破这两方面的限制, 从而产生了定积分的推广, 即广义积分 (也称为反常积分). 为了区别起见, 今后称第十章中的定积分为常义积分 (或正常积分).

先举一个例子, 它自然引导到广义积分. 这就是求第二宇宙速度, 即使物体脱离地球引力所需要的最低的初始速度, 记为 $v_2$①.

设从地面向上垂直发射物体. 在离地面高度为 x 处物体所受的地球引力为

$$F(x) = \frac{GMm}{(x+R)^2},$$

其中 G 为引力常数, M 为地球质量, R 为地球半径, m 为物体质量. 这里已经将物体简化为一个质点.

问题是计算质点从地面到无穷远处克服重力所作的功 W. 为此先计算出从地面到高度 x 时所作的功 $W(x)$, 然后取极限. 方法是先求出 $W(x)$ 的变化率, 即导数 $W'(x)$, 然后再积分. 首先, 使质点从高度 x 到 $x+\Delta x$ 所作的功为

$$\Delta W = F(x)\Delta x = \frac{GMm}{(x+R)^2}\Delta x,$$

于是就得到

$$W'(x) = \lim_{\Delta x \to 0}\frac{\Delta W}{\Delta x} = F(x).$$

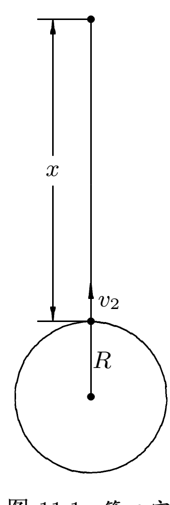


图 11.1: 第二宇宙速度的计算

① 中学物理中以初速 v 垂直向上的物体所达到的高度满足公式 $\frac{1}{2}mv^2 = mgh$. 这里的前提是只在地面附近, 因此重力 $F = mg$ 不变. 这与计算第二宇宙速度的问题完全不同.

利用 $F(0)=mg$, 就有 $\dfrac{GMm}{R^2}=mg$, 因此可以消去 G 得到 $W'(x)=\dfrac{mgR^2}{(x+R)^2}$. 从 $W'(x)$ 的表达式求其原函数得到

$$W(x)=-\frac{mgR^2}{x+R}+C,$$

其中 C 是待定常数. 由于 $x=0$ 时 $W(0)=0$, 可定出 $C=mgR$, 因此

$$W(x)=mgR-\frac{mgR^2}{x+R},$$

然后令 $x\to+\infty$, 得到 $W=W(+\infty)=mgR$. 这就是要将地面上的物体送到无穷远处所需要作的功.

最后从方程 $\dfrac{1}{2}mv_2^2=mgR$ 可得到 $v_2=\sqrt{2gR}$. 利用 $g=9.8$ 米/秒^2, $R=6.38\times10^6$ 米, 则得到 $v_2\approx 11.2$ 公里/秒①.

回顾以上计算并将它写成积分形式, 就有

$$\lim_{x\to+\infty}W(x)=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x F(t)\,\mathrm{d}t=\lim_{x\to+\infty}\int_0^x\frac{mgR^2}{(t+R)^2}\,\mathrm{d}t.$$

将最后的表达式记为

$$\int_0^{+\infty}\frac{mgR^2}{(t+R)^2}\,\mathrm{d}t,$$

这就是区间 $[0,+\infty)$ 上的广义积分.

小结 上述广义积分就是在 Riemann 积分的基础上对积分限取极限得到的, 因此是有先后次序的二次极限的结果. 第一次是 Riemann 和的极限, 第二次是 $x\to+\infty$ 的函数极限.

再举一个例子. 从

$$\lim_{x\to1^-}\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}=\lim_{x\to1^-}\arcsin x=\frac{\pi}{2},$$

可以引入积分区间有界但被积函数无界的第二种广义积分, 即

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}.$$

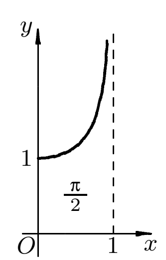


图 11.2: 无界区域的面积

注 与定积分的几何意义类似, 对于广义积分也可以从几何上给以解释. 上述例子就可以解释成为由 $y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 和 $x=0,1$, $y=0$ 所限制的无界区域是否具有有限数值的面积 (见图 11.2). 从积分计算可知其面积为 $\pi/2$.

---

① 第一宇宙速度, 即使得物体不落到地面所需的速度, 用初等方法即可求出. 为此只要使得向心加速度与重力加速度相等, 从 $\dfrac{mv_1^2}{R}=mg$ 得到 $v_1=\sqrt{gR}$, 也就是有 $v_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}v_2\approx 7.9$ 公里/秒.

11.1.2　广义积分的定义

先将区间无界和函数无界两个因素分开, 分别定义两类最基本的广义积分.

定义 11.1 (无界区间上的广义积分) 设 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上有定义, 且对每个 $A>a$, f 在区间 $[a,A]$ 上 Riemann 可积, 则定义 f 在 $[a,+\infty)$ 上的广义积分为

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x,$$

如果这个极限存在的话. 这时也称该广义积分收敛. 反之, 若上述极限不存在, 则称该广义积分发散. 称 $+\infty$ 为这个广义积分的奇点. 类似地可以定义 f 在 $(-\infty,a]$ 上的广义积分. 又定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的广义积分为

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{a} f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

若右边两个广义积分分别存在. (可以证明其中的分点 a 不影响左边的广义积分的敛散性.)

完全相同地可以给出有界区间上无界函数的广义积分的定义.

定义 11.2 (有界区间上无界函数的广义积分) 设 f 在有界区间 $[a,b)$ 上有定义, 在点 b 处局部无界①, 且对于每个 $b'\in(a,b)$, f 在 $[a,b']$ 上 Riemann 可积, 则定义 f 在 $[a,b]$ 上的广义积分②为下列极限

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b'\to b^-}\int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

如果右边的极限存在的话. 这时也称该广义积分收敛. 反之, 若上述极限不存在, 则称该广义积分发散. 称 b 为这个广义积分的惟一奇点.

类似地当 f 在点 a 局部无界时称 a 为奇点. 当 a 为惟一奇点时可以类似地定义广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 又当 f 在 $[a,b]$ 中有惟一奇点 $c\in(a,b)$ 时定义广义积分

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x,$$

仅当右边的两个广义积分都收敛时称 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 否则称该广义积分发散.

注 1　f 在奇点 b 处是否有定义是无关紧要的, f 在 b 处局部无界的条件是本质的, 若将它换成 f 在 $[a,b)$ 上有界, 则如上一章例题 10.16 及其注所示, 只能得到 $f\in R[a,b]$ 的平凡结论.

注 2　对于有多个奇点的广义积分的定义, 采用上述定义中已经采用的方法, 即先在形式上将广义积分分拆为多个广义积分之和, 使得每个广义积分只含一个

① 局部无界是局部有界性质的否定, 即对 $\forall\,\delta\in(0,b-a)$, 函数 f 在 $(b-\delta,b]$ 上无界.

② 在部分教科书中将这里的有界区间上无界函数的广义积分称为瑕积分. 为简明起见本书对两类不同的广义积分用统一名称.

奇点. 然后定义仅当每个广义积分收敛时才称原来的广义积分收敛, 且等于各个广义积分之和.

关于广义积分定义的小结 由以上两个定义可见广义积分是一种有先后次序的二次极限, 第一次是 Riemann 和的极限, 然后对于变动的积分限 (上限或下限) 再取极限. 如上一章的定理 10.10 和 10.11 所示, 作为积分限的函数至少是连续函数, 而当被积函数连续时还是可微函数. 由此可见, 广义积分与第一册的函数极限有密切联系. 收敛的广义积分与定积分一样是一个数, 发散的广义积分则只是一个符号. 但有时也可能是 $\pm\infty$, 即所谓非正常极限 (参见 §2.1.5 与 §4.1.4).

以下给出广义积分收敛的最基本的判别准则. 由上述分析可见它们依赖于 §4.2.7 关于函数极限的存在定理. 为简明起见, 在可能时对两类广义积分采用统一的记号.

设函数 f 在区间 $[a,b)$ 上定义, 其中 b 是惟一奇点, 它可以是有限数, 也可以是 $b=+\infty$. 注意这时我们总是假设对每一个 $b'\in[a,b)$, f 在 $[a,b']$ 上 Riemann 可积. 若 b 为有限数, 则 f 在 b 局部无界.

对于保号函数的广义积分这依赖于单调函数的极限存在定理. 下面只写出对于非负函数的结论.

定理 11.1 设 f 是在区间 $[a,b)$ 上有定义的非负函数, 其中 b 或者是大于 a 的有限数, 或者是 $+\infty$, 而且是惟一的奇点, 则广义积分 $\displaystyle\int_a^b f$ 一定有意义, 即或者收敛, 或者发散于 $+\infty$.

证 为此只要定义函数
$$F(x)=\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ a\leqslant x<b,$$
由于 f 非负, 因此 F 是单调增加函数, 可见 $\displaystyle\lim_{x\to b^-}F(x)$ 一定有意义, 其中的极限过程 $x\to b^-$ 在 $b=+\infty$ 时就理解成为 $x\to+\infty$. 应用关于单调函数的极限存在定理 (参看定理 4.11) 就得到所要的结论. □

对于一般情况的被积函数, 则当然依赖于函数极限的 Cauchy 收敛准则.

定理 11.2 (广义积分的 Cauchy 收敛准则) 设 f 在 $[a,b)$ 上以 b 为惟一奇点, 则广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛的充分必要条件是: 对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists b_0\in(a,b)$, $\forall b',b''\in(b_0,b):\left|\displaystyle\int_{b'}^{b''}f(x)\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$

证 根据广义积分收敛的定义为
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{b'\to b^-}\int_a^{b'}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

如果右边的极限存在的话 (当 $b=+\infty$ 时 $b'\to b^-$ 理解为 $b\to+\infty$). 将右边的积分看成为自变量 b' 的函数, 记为 $F(b')$, 对它用函数极限的 Cauchy 收敛准则 (参看定理 4.12) 就得到所要的结论. □

下面一些简单例题都只要直接应用广义积分的定义即可.

例题 11.1 用定义 11.1 即有

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2}&=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\mathrm{d}x}{x^2}\\&=\lim_{A\to+\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^A=\lim_{A\to+\infty}(1-\frac{1}{A})=1\end{aligned}$$ □

例题 11.2 一个发散的广义积分的例子:

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x}&=\lim_{A\to+\infty}\int_1^A\frac{\mathrm{d}x}{x}\\&=\lim_{A\to+\infty}\ln x\Big|_1^A=\lim_{A\to+\infty}\ln A=+\infty\end{aligned}$$ □

上述两个例题只是下面带有参数的广义积分的特例.

例题 11.3 讨论带有正参数 $p>0$ 的广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 的敛散性:

解　奇点为 $+\infty$. 在 $p\neq 1$ 时可如下计算

$$\int_1^A x^{-p}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_1^A=\frac{1}{1-p}(A^{1-p}-1),$$

令 $A\to+\infty$, 可见上式当 $p>1$ 时收敛于 $\dfrac{1}{p-1}$, 而当 $0<p<1$ 是发散于 $+\infty$. 对 $p=1$ 可以引用例题 11.2 的结果.

合并以上得到: (1) $p>1$ 时广义积分收敛, (2) $0<p\leqslant 1$ 时广义积分发散. □

下面是同样的被积函数在不同区间上的广义积分.

例题 11.4 讨论 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 的敛散性, 其中 $p>0$.

解　奇点为 $x=0$. 根据定义在 $p\neq 1$ 时先对 $0<a'<1$ 计算下列积分:

$$\begin{aligned}\int_{a'}^1 x^{-p}\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{1-p}x^{1-p}\Big|_{a'}^1\\&=\frac{1}{1-p}(1-(a')^{1-p}),\end{aligned}$$

然后令 $a'\to 1^+$, 可见在 $0<p<1$ 时广义积分收敛, 且有 $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=\frac{1}{1-p}$, 在 $p>1$ 时广义积分发散于 $+\infty$. 对于 $p=1$, 则需另行计算如下:

$$\int_{a'}^1\frac{\mathrm{d}x}{x}=\ln x\Big|_{a'}^1=-\ln a',$$

可见也是发散的. □

注 将例题 11.4 与例题 11.3 相结合, 几何上可以解释为在第一象限的广义的直角双曲线 $y=1/x^p$ $(p>0)$ 和两条坐标轴所围成的无界区域的面积是 $+\infty$. 若将它用 $x=1$ 分成两块无界区域, 则除了 $p=1$ 时两块的面积都是无穷大之外, 总有一块是有限数, 另一块是无穷大. 如右边的图 11.2 所示, 其中作出了三条曲线, 即 $y=\dfrac{1}{x^2}$, $y=\dfrac{1}{x}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$. 三个函数和三条曲线之间的对应关系可以从上面两个例题的结论直接看出.

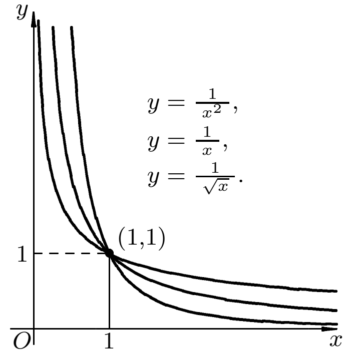


图 11.3: $y=1/x^p$ 与广义积分

注意: 这两个例题是广义积分中的重要例子, 在今后的广义积分敛散性判别中起重要作用.

对下面几个例题中的广义积分也可以考虑它们对应的几何意义.

例题 11.5 讨论 $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^q x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 其中 $q>0$.

解 奇点为 $+\infty$. 对于 $q\neq 1$, 有

$$\int_2^A\frac{\mathrm{d}x}{x\ln^q x}=\frac{1}{1-q}\ln^{1-q}x\Big|_2^A=\frac{1}{q-1}(\ln^{1-q}2-\ln^{1-q}A),$$

可见当 $q>1$ 时积分收敛, 而当 $0<q<1$ 时积分发散.

对于 $q=1$ 则从 $\displaystyle\int_2^A\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}=\ln\ln x\Big|_2^A=\ln\ln A-\ln\ln 2$ 可见积分发散. □

例题 11.6 求 $I=\displaystyle\int_0^1\ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

解 奇点为 $x=1$. 根据定义可以计算如下:

$$\begin{aligned}I&=\lim_{b'\to1^-}\int_0^{b'}\ln(1-x)\,\mathrm{d}(x-1)\\&=\lim_{b'\to1^-}[(x-1)\ln(1-x)-x]\Big|_0^{b'}=-1,.\end{aligned}$$

其中最后用到极限 $\displaystyle\lim_{t\to0^+}t\ln t=0$. □

例题 11.7 求 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}$.

解 有两个奇点 $-\infty$ 和 $+\infty$. 按照定义分为两个积分来做. 先作分拆

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}.$$

然后就有

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}&=\lim_{A'\to-\infty}\int_{A'}^{0}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\\&=\lim_{A'\to-\infty}\arctan x\Big|_{A'}^{0}=\lim_{A'\to-\infty}(-\arctan A')=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

同样有 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2}$. 因此原来的广义积分收敛, $I=\pi$. □

例题 11.8 求 $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$.

解 惟一的奇点为 $x=0$, 先分拆为两个积分:

$$I=\left(\int_{-1}^{0}+\int_{0}^{1}\right)\frac{1}{x^2}\cdot\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x.$$

然后分别计算如下 (其中第一个是常义积分):

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{0}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x&=\lim_{b'\to0^-}\int_{-1}^{b'}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)\\&=\lim_{b'\to0^-}(-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})\Big|_{-1}^{b'}=\lim_{b'\to0^-}(\mathrm{e}^{-1}-\mathrm{e}^{\frac{1}{b'}})=\mathrm{e}^{-1},\\\int_{0}^{1}\frac{1}{x^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x&=\lim_{a'\to0^+}\int_{a'}^{1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right)\\&=\lim_{a'\to0^+}(-\mathrm{e}^{\frac{1}{x}})\Big|_{a'}^{1}=\lim_{a'\to0^+}(-\mathrm{e}+\mathrm{e}^{\frac{1}{a'}})=+\infty.\end{aligned}$$

因此广义积分发散, $I=+\infty$. □

11.1.3 线性运算公式

由于广义积分是在定积分的基础上通过函数极限过程来定义的, 因此很自然对于被积函数具有线性性质, 证明从略.

线性运算公式 设广义积分 $\displaystyle\int_a^b f$ 和 $\displaystyle\int_a^b g$ 都收敛, α,β 是两个实数, 则就有

$$\int_a^b(\alpha f+\beta g)=\alpha\int_a^b f+\beta\int_a^b g.$$

注 上述公式中的 a,b 可以是有限数, 也可以是 $a=-\infty,b=+\infty$. 此外也允许存在多个奇点的情况.

例题 11.9 求 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)}$.

解 用线性运算公式即有

$$\begin{aligned}I&=\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2+1}-\frac{1}{x^2+2}\right)\mathrm{d}x\\&=\arctan x\Big|_{-\infty}^{+\infty}-\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^{+\infty}\\&=(1-\frac{1}{\sqrt{2}})\pi.\quad\square\end{aligned}$$

注 在用线性运算公式时必须注意条件是否满足. 例如下列等式

$$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)} = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x} - \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x+1}$$

就不能成立. 右边两项都是发散的广义积分, 而左边的广义积分实际上是收敛的, 这可以按照定义直接计算如下:

$$\begin{aligned}
\int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x &= \lim_{A\to+\infty} \int_1^{A} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right) \mathrm{d}x \\
&= \lim_{A\to+\infty} [\ln x - \ln(x+1)]\Big|_1^A \\
&= \lim_{A\to+\infty} (\ln \frac{A}{A+1} + \ln 2) = \ln 2.
\end{aligned}$$

11.1.4 广义 Newton–Leibniz 公式

定理 11.3 设 $a < b$, 若函数 f 在 (有界或无界) 区间 (a,b) 上只有有限个奇点, 在不含奇点的每个有界闭区间上常义可积, 又在 (a,b) 上存在原函数 F, 则成立广义 Newton–Leibniz 公式:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(x)\Big|_{a^+}^{b^-} = F(b^-) - F(a^+),$$

若右边的极限存在的话. 否则, 左边的积分发散.

注 这里对于 $a = -\infty$ 和 $b = +\infty$ 的情况, 将 $F(a^+)$ 和 $F(b^-)$ 分别理解为 $F(-\infty)$ 和 $F(+\infty)$. 此外, 这里的原函数 F 与定理 10.2 的注中相同, 也允许作广义理解, 即 F 在 (a,b) 上连续, 且除去有限个点外均满足 $F'(x) = f(x)$. 这时称为广义原函数.

证 不妨只对 a, b 为仅有的有限奇点情况作出证明. 取 $[a', b'] \subset (a,b)$, 则在 $[a', b']$ 上可以用常义积分的 Newton–Leibniz 公式得到

$$\int_{a'}^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b') - F(a'),$$

令 $a' \to a^+$, $b' \to b^-$ 即得. □

例题 11.10 用广义 Newton–Leibniz 公式可以作如下计算:

$$\int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x\Big|_{-1}^{1} = \arcsin 1 - \arcsin(-1) = \pi.$$

事实上, 导数公式 $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ 只在 $(-1,1)$ 时成立, 在两个端点 (也就是奇点) 处不成立. 由于原函数 $\arcsin x$ 在 $[-1,1]$ 上连续, 因此上述计算中用 $x = \pm 1$ 代入和取极限是一样的. □

对于广义原函数来说, 它的连续性是重要的. (这里可以回顾例题 10.2, 其中已经使用了广义原函数.) 下面就是由于不满足连续性条件而错误使用 Newton–Leibniz 公式的例子.

例题 11.11 指出下列计算中的错误:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = -\arctan\frac{1}{x}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = 0-0=0$$

解 在 $x \neq 0$ 时确实有

$$(-\arctan\frac{1}{x})' = -\frac{1}{1+\dfrac{1}{x^2}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{1+x^2},$$

但是函数 $-\arctan\dfrac{1}{x}$ 在原点不连续, 因此它不能在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上作为广义原函数来使用. □

11.1.5 无界区间上广义积分收敛与被积函数的渐近性质

在第二章的 §2.1.6 的无穷级数介绍中, 定理 2.8 告诉我们, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 则一定有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. 将无穷级数与广义积分类比, 这一小节的问题是: 设 f 在无界区间 $[a,+\infty)$ 上定义, 且广义积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

收敛, 则是否一定可以推出 $f(+\infty)=0$?

从前面许多涉及到无界区间上的广义积分例题来看, 这个推论似乎都是成立的 (见例题 11.1,11.3,11.6,11.7 等). 但下面一个例子表明, 这个结论不能成立. (对于广义积分 $\int_{-\infty}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $f(-\infty)$ 也存在同样的问题.)

例题 11.12 在区间 $[0,+\infty)$ 上定义函数 $f(x) = \begin{cases} n, & n-\dfrac{1}{n\cdot 2^n} \leqslant x \leqslant n \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 求 $I = \int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.

解 由于 f 非负, 因此从定理 11.1 知道该广义积分一定有意义, 或者收敛, 或者为正无穷大. 为此只要在 $[0,n]$ 上计算函数 f 的定积分, 然后观察当 $n\to\infty$ 时是否有界即可. 从下列计算可见有

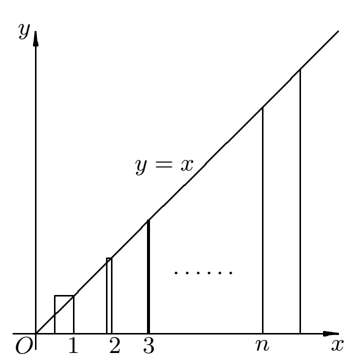


图 11.4: 广义积分收敛但 $f(+\infty)$ 发散的例子

$$F(n)=\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n},$$

于是得到 $\lim\limits_{n\to\infty} F(n)=1$. 因此广义积分收敛, $I=1$. □

为了进一步讨论上述问题, 首先需要对函数 f 加以适当限制. 与定积分中的例题 10.16 类似, 例如改变 f 在 $x_n=n\ (n>a)$ 上的可列个函数值, 不会改变 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ 收敛性, 但是却可能改变极限 $f(+\infty)$ 的存在性. 一个比较合理的选择是在以下讨论中假设 $f\in C[a,+\infty)$ 成立.

下面是这方面的两个基本结果.

例题 11.13 若 $f\in C[a,+\infty)$, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则存在数列 $\{x_n\}\subset[a,+\infty)$, $x_n\uparrow+\infty$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=0$.

证 记上述广义积分值为 I, 则从函数极限的 Heine 归结原理知道有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x=I.$$

于是也有

$$\lim_{n\to\infty}\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

根据积分第一中值定理, 对每个 n, 存在 $x_n\in[n,n+1]$, 使成立 $f(x_n)=\displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$. 这个数列 $\{x_n\}$ 就满足定理中的要求. □

注 由此可见, 在 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛时, 如果存在极限 $f(+\infty)$, 则这个极限只能等于 0. 下面是保证 $f(+\infty)=0$ 的一个常用条件.

例题 11.14 设 $f\in C[a,+\infty)$, 且 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则

$$f(+\infty)=0 \Longleftrightarrow f \text{ 在 } [a,+\infty) \text{ 上一致连续.}$$

证 1 $f\in C[a,+\infty)$ 时只要存在极限 $f(+\infty)$ 就保证 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 因此必要性是平凡的 (参见例题 5.14). 这里不需要广义积分收敛条件.

下面证明充分性. 用反证法. 设 $f(+\infty)=0$ 不成立. 用 §1.4 的对偶法则, 知道存在 $\varepsilon_0>0$, $\forall\, A>a$, $\exists\, x_0>A:|f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$ (参见图 11.5).

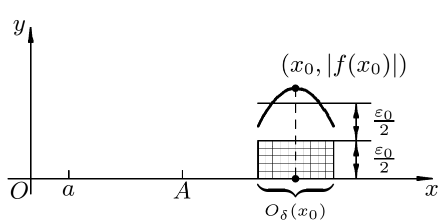


图 11.5: 例题 11.14 证 1 示意图

利用 f 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 对上述 ε_0, $\exists\,\delta>0$, $\forall\, x',x''\in[a,+\infty)$ $(|x'-x''|<\delta):|f(x')-f(x'')|<\varepsilon_0/2$. 于是当 $x\in O_\delta(x_0)$ 时就有

$$|f(x)|\geqslant|f(x_0)|-|f(x_0)-f(x)|>\frac{\varepsilon_0}{2},$$

而且 $f(x)$ 与 $f(x_0)$ 同号. 于是就有积分估计

$$\left|\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \geqslant \frac{\varepsilon_0}{2}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\mathrm{d}x = \varepsilon_0\delta.$$

由于 x_0 可取任意大, 最后的不等式与广义积分的 Cauchy 收敛准则 (即定理 11.2) 相矛盾. □

证 2　下面是对于充分性的不用反证法的证明.

对于给定的 $\varepsilon > 0$, 根据一致连续条件, 存在 $\delta > 0$, 当 $x', x'' \in [a, +\infty)$, 且满足 $|x' - x''| < \delta$, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

记 $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, 则由于存在极限 $F(+\infty)$, 从 Cauchy 收敛准则 (见定理 4.12) 知道存在 $M > a$, 使得当 $x > M$ 时,

$$|F(x+\delta) - F(x)| = \left|\int_x^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < \varepsilon\delta.$$

于是就有

$$\begin{aligned}|f(x)\delta| &\leqslant \left|f(x)\delta - \int_x^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t\right| + \left|\int_x^{x+\delta} f(t)\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\int_x^{x+\delta} |f(x) - f(t)|\,\mathrm{d}t\right| + \varepsilon\delta \leqslant 2\varepsilon\delta,\end{aligned}$$

可见当 $x > M$ 时就有 $|f(x)| < 2\varepsilon$. 这证明了 $f(+\infty) = 0$. □

练 习 题

1. 试证在定义 11.1 中广义积分 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 的敛散性与分点 a 的选取无关.

2. 设 $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)\ \forall\, x \in [a, +\infty)$,

   (1) 若已知 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\displaystyle\int_a^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ 均收敛, 证明: $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

   (2) 若还知道 $\displaystyle\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = I$, 证明: $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = I$.

3. 按定义计算下列广义积分:

   (1) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$;　　(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{x+1} + \mathrm{e}^{3-x}}$. ;

   (3) $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$;　　(4) $\displaystyle\int_1^2 \sqrt{\frac{x-1}{2-x}}\,\mathrm{d}x$.

4. 求下列数列极限:

   (1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n^2}\frac{n}{n^2+k^2}$;　　(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}$.

5. 若 $\int_a^{+\infty} f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则称 f 在 $[a,+\infty)$ 上平方可积.

(1) 讨论 f 在 $[a,+\infty)$ 上可积、绝对可积和平方可积之间的关系;

(2) 设 $\int_a^{+\infty} f^2$ 和 $\int_a^{+\infty} g^2$ 收敛, 讨论 fg 和 $(f+g)^2$ 在 $[a,+\infty)$ 上的可积性.

6. 设有限数 b 是 $[a,b)$ 上的 f 的惟一奇点, 讨论 f 在 $[a,b)$ 上可积、绝对可积和平方可积之间的关系.

7. 证明:

(1) 存在 $\xi\in[0,1]$ 使得 $\int_{100}^{200}\frac{\sin\pi x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\xi}{100\pi}$;

(2) 存在 $|\xi|\leqslant 1$, 使得 $\int_{100}^{200}\frac{\sin\pi x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{200\pi}+\frac{4\xi}{10^6\pi^3}$.

§11.2 广义积分的计算

在上一节从广义积分定义出发, 依赖线性运算法则和 Newton–Leibniz 公式已经解决了一些比较简单的广义积分计算问题. 然而与常义积分情况类似, 这些工具还是远远不够的. 本节介绍的计算方法可看成是常义积分计算方法的推广, 因此与 §10.4 的内容有密切联系. 此外, 为了简明起见, 在下面的叙述中在可能的情况下对两类广义积分采用统一的记号. 因此记号 $\int_a^b f$ 中的 a, b 不一定是有限数.

11.2.1 分部积分法

定理 11.4 (分部积分法) 设 $u(x), v(x)$ 在 (有界或无界) 区间 (a, b) 上连续, 下列极限

$$u(x)v(x)\Big|_{a^+}^{b^-} = u(b^-)v(b^-) - u(a^+)v(a^+)$$

存在, 又除去至多有限个点外, 导数 $u'(x), v'(x)$ 存在且连续, 则积分 $\int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x$ 和 $\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散, 且在收敛时成立下列分部积分公式

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{a^+}^{b^-} - \int_a^b v(x)u'(x)\,\mathrm{d}x.$$

(与常义积分情况类似可将上述公式简写为 $\int_a^b u\,\mathrm{d}v = uv\Big|_{a^+}^{b^-} - \int_a^b v\,\mathrm{d}u$.)

证 从广义 Newton–Leibniz 公式有

$$\int_a^b (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{a^+}^{b^-},$$

根据定理中的条件知道上式左边的积分收敛, 它可以是常义积分或广义积分.

若 u', v' 在 (a, b) 上处处存在且连续, 则有 $(uv)' = uv' + u'v$, 因此有

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (u(x)v(x))'\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\Big|_{a^+}^{b^-},$$

由此可见上式左边两个积分中只要有一个收敛, 则另一个也收敛.

若 u', v' 于 (a, b) 中的某个点 c 处不全存在, 则可以在 (a, c) 和 (c, b) 上分别写出上式然后相加即可. □

例题 11.15 试用不同方法计算广义积分 $\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x$, 并分析它们的差异.

解 首先可以从广义积分定义出发计算. 这时 $x = 0$ 是惟一奇点, 因此就有

$$\int_0^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0^+}\int_\eta^1 \ln x\,\mathrm{d}x = \lim_{\eta\to0^+}(x\ln x - x)\Big|_\eta^1$$

$$= \lim_{\eta\to0^+}(-1 - \eta\ln\eta + \eta) = -1.$$

其次可以用广义的 Newton–Leibniz 公式来计算:

$$\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x = (x\ln x - x)\Big|_{0^+}^{1} = -1.$$

以上两个方法的共同点是依赖于 $\ln x$ 的原函数为 $x\ln x - x$.

最后用分部积分法来计算, 它不需要事先求出上述原函数:

$$\int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x = x\ln x\Big|_{0^+}^{1} - \int_0^1 x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -1. \quad \square$$

例题 11.16 设参数 $s>0$, 证明对于每个非负整数 n 成立

$$I_n = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}t^n \,\mathrm{d}t = \frac{n!}{s^{n+1}}.$$

证 当 $n=0$ 时有

$$I_0 = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-st}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-st}\Big|_0^{+\infty} = \frac{1}{s}.$$

当 $n\geqslant 1$ 时则可以用分部积分法求出递推公式

$$I_n = -\frac{1}{s}\cdot\mathrm{e}^{-st}t^n\Big|_0^{+\infty} + \frac{1}{s}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-st}\cdot nt^{n-1}\,\mathrm{d}t = \frac{n}{s}I_{n-1},$$

因此就得到

$$I_n = \frac{n}{s}\cdot\frac{n-1}{s}\cdots\frac{1}{s}\cdot I_0 = \frac{n!}{s^{n+1}}. \quad \square$$

注 若将 I_n 的公式两边乘以 s^{n+1}, 并将积分号下的 st 重新记为 t, 就得到

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t}t^n\,\mathrm{d}t = n!.$$

将积分中的非负整数 n 改为连续参数 $x-1$, 就得到含参变量的广义积分, 即 Gamma 函数 $(x>0)$:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

从 $\Gamma(n+1)=n!$ 可知它实现了阶乘 $\{n!\}$ 的连续化. $\Gamma(x)$ 是一个重要的特殊函数, 将在第三册中含参变量积分一章中作专门介绍.

下面介绍用分部积分法时的一个技巧, 它在第十章的例题 10.35 中已经用过, 这就是可以将分部积分公式改写为

$$\int_a^b u\,\mathrm{d}v = \int_a^b u\,\mathrm{d}(v\pm c) = u(v\pm c)\Big|_{a^+}^{b^-} - \int_a^b (v\pm c)\,\mathrm{d}u,$$

其中的 c 可以根据需要而自由选择. 下面就是一个例子.

例题 11.17 求 $\displaystyle\int_0^1 \ln(1-x)\,\mathrm{d}x$.

解 若用分部积分法如下:

$$\int_0^1 \ln(1-x)\,\mathrm{d}x = x\ln(1-x)\Big|_0^{1^-} - \int_0^1 x\,\mathrm{d}(\ln(1-x)),$$

则右边第一项不是有限数, 因此违反定理 11.4 的基本条件. 为此作如下修改即可.

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1-x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \ln(1-x)\,\mathrm{d}(x-1) \\ &= (x-1)\ln(1-x)\Big|_0^{1^-} - \int_0^1 (x-1)\,\mathrm{d}(\ln(1-x)) \\ &= \int_0^1 (-1)\,\mathrm{d}x = -1. \quad \Box\end{aligned}$$

11.2.2 换元法

定理 11.5 (广义积分换元法) 设函数 $u=u(x)$ 于 (有界或无界) 区间 (a,b) 上单调且连续可微, 函数 $f(u)$ 在 $u(x)$ 的值域上连续, $a<b$, 则广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x$ 与 $\displaystyle\int_{u(a^+)}^{u(b^-)} f(u)\,\mathrm{d}u$ 同敛散, 在收敛时成立等式

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = \int_{u(a^+)}^{u(b^-)} f(u)\,\mathrm{d}u. \tag{11.1}$$

下面先举例说明用法, 然后再作出证明.

例题 11.18 求 $I=\displaystyle\int_{-\infty}^{-1} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}}$.

解 1 在 $x<0$ 时, 被积表达式 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\mathrm{d}x}{-x^2\sqrt{1+\dfrac{1}{x^2}}} = \dfrac{\mathrm{d}(1/x)}{\sqrt{1+(1/x)^2}}$, 因此可作代换 $u=1/x$, 且有 $u(-1)=-1$, $u(-\infty)=0$, 这样就得到

$$I=\int_0^{-1} \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+u^2}} = \ln(u+\sqrt{1+u^2})\Big|_0^{-1} = \ln(\sqrt{2}-1). \quad \Box$$

解 2 作代换 $x=\tan t$, 当 x 从 $-\infty$ 到 -1 时 t 从 $-\pi/2$ 到 $-\pi/4$, 这时 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{1+x^2}} = \dfrac{\mathrm{d}t}{\sin t}$ 于是

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} = \ln\Big|\tan\frac{t}{2}\Big|\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{-\frac{\pi}{4}} = \ln\tan\frac{\pi}{8},$$

最后用三角函数的半角公式可以计算出 $\tan\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$. $\Box$

例题 11.19 求 $I=\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x$.

解 这是常义积分, 如下用凑微分法,

$$I=\int_{-1}^{1} \frac{1+\dfrac{1}{x^2}}{x^2+\dfrac{1}{x^2}}\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2},$$

于是可考虑用代换 $u(x)=x-\dfrac{1}{x}$. 但这里有陷阱. 当 x 从 -1 到 1 时, u 从 0 到 0, 而上下限相等的积分为 0. 这是不可能的.

问题在于用上述代换时, $u(x)$ 在点 $x=0$ 处有第二类间断点, 不可能在该处连续延拓. (读者可以从 $u(x)$ 的图像来理解这一点.) 因此以上代换是不行的.

利用积分 I 的区间为 $[-1,1]$, 而被积函数为偶函数, 因此就可以如下作代换而转化为一个广义积分来计算:

$$I=2\int_0^1\frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x=2\int_0^1\frac{\mathrm{d}(x-\frac{1}{x})}{(x-\frac{1}{x})^2+2}$$
$$=2\int_{-\infty}^0\frac{\mathrm{d}u}{u^2+2}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{u}{\sqrt{2}}\Big|_{-\infty}^0=\frac{\pi}{\sqrt{2}}.\quad\Box$$

例题 11.20 求 $I=\displaystyle\int_{-1}^1\frac{4x\mathrm{d}x}{2x^2-1}$.

解 从分母有零点 $\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\in(-1,1)$ 可见有两个奇点. 根据广义积分的定义, 作如下分拆:

$$I=\left(\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}+\int_{-\frac{\sqrt{2}}{2}}^0+\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1\right)\frac{4x\,\mathrm{d}x}{2x^2-1},$$

且仅当其中每一个积分收敛时 I 为有限数.

实际上这 4 个广义积分都是发散的. 看其中第一个, 作代换 $u(x)=2x^2-1$, 则当 x 从 -1 到 $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 时, u 从 1 到 0, 就有

$$\int_{-1}^{-\frac{\sqrt{2}}{2}}\frac{4x\,\mathrm{d}x}{2x^2-1}=\int_1^0\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}u}{u}=-\infty.$$

由此可见不必再看其他三个积分就知道本题的广义积分发散. $\Box$

最后给出定理 11.5 的证明.

广义积分换元公式 (11.1) **的证明** 只对于一种特殊情况写出证明, 这就是 $b=+\infty$ 为惟一奇点, $u(x)$ 严格单调增加, 且 $u(+\infty)=A$ 为有限数的情况. 对其他情况的证明都是类似的. 这时等式 (11.1) 成为

$$\int_a^{+\infty}f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{u(a)}^{u(+\infty)}f(u)\,\mathrm{d}u.\tag{11.2}$$

要求证明上式两边的积分同时收敛或发散, 且在收敛情况时成立等式. 也可说成上述等式只要一边收敛就成立.

取 $b'>a$, 则从常义积分的换元公式就有 (这里不需要 $u(x)$ 的单调性):

$$\int_a^{b'}f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x=\int_{u(a)}^{u(b')}f(u)\,\mathrm{d}u.\tag{11.3}$$

以下分两种情况.

(i) 设 (11.2) 的右边收敛 (它可能是常义积分也可能是广义积分), 即已有

$$\int_{u(a)}^{A}f(u)\,\mathrm{d}u=\lim_{u'\to A^-}\int_{u(a)}^{u'}f(u)\,\mathrm{d}u$$

收敛, 记其极限为 I. 则对 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,\delta>0,\ \forall\,u'\in(A-\delta,A)$, 成立

$$\Big|\int_{u(a)}^{u'} f(u)\,\mathrm{d}u - I\Big| < \varepsilon.$$

由于 $u(x)\uparrow A\ (x\to+\infty)$, 对上述 $\delta>0$, 存在 M, 只要 $b'>M$, 就有 $u(b')\in(A-\delta,A)$. 再利用 (11.3) 就知道当 $b'>M$ 时成立

$$\Big|\int_{a}^{b'} f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x - I\Big| < \varepsilon.$$

这样就证明了 (11.2) 左边的广义积分也收敛于 I.

(ii) 反之, 如果 (11.2) 左边的广义积分收敛, 也记其极限为 I, 则对 $\varepsilon>0,\ \exists\,M$, $\forall\,b'>M$, 成立

$$\Big|\int_{a}^{b'} f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x - I\Big| < \varepsilon.$$

利用 $u=u(x)$ 严格单调增加趋于 A, 对于 $u(M)<u'<A$ 中的 u', 存在惟一的 $b'>M$, 使得 $u'=u(b')$. 再利用 (11.3) 就知道当 $u(M)<u'<A$ 时, 成立

$$\Big|\int_{u(a)}^{u'} f(u)\,\mathrm{d}u - I\Big| < \varepsilon.$$

这样就证明了 (11.2) 右边的积分也收敛于 I. □

注 引入函数

$$G(u)=\int_{u(a)}^{u} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

则公式 (11.3) 右边就是 $G(u(b'))$, 同时 (11.2) 就成为

$$\lim_{b'\to+\infty} G(u(b')) = \lim_{u\to A^-} G(u). \tag{11.4}$$

将这与第四章的 (4.17) 比较, 可见这就是复合函数极限问题, 只不过改动了那里的记号, 同时要证明的是 (11.2) 只要有一边收敛即成立等式.

已经看到, 在常义积分换元公式, 即 (11.3), 成立的前提下, 对于严格单调的变量代换证明是不难的. 这里的多种情况可以归纳为下列引理.

引理 若代换 $y=g(x)$ 为严格单调函数, 又将单侧极限与 $x\to\pm\infty$ 统记为 $\lim$, 则下列表达式

$$\lim f(g(x)) = f(\lim g(x)) \tag{11.5}$$

只要有一边收敛就成立等式.

注 引理的证明并不困难, 已列为 §4.2 的练习题 6. 其中有多种可能性: $y=g(x)$ 的单调性有 2 种, $\lim$ 有 4 种, $\lim g(x)$ 还有 3 种 (即有限数和 $\pm\infty$).

11.2.3 例题

下一个例题的结果在许多问题中有用. 它的计算可以在例题 9.34 的基础上用 Newton–Leibniz 公式得到, 但独立计算则更为简单.

例题 11.21 求 $I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \sin bx \,\mathrm{d}x$, 其中设 $a > 0$.

解 1 与求不定积分类似地发生循环现象:

$$I = -\frac{1}{a}\int_0^{+\infty} \sin bx \,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-ax}) = -\frac{1}{a}\mathrm{e}^{-ax} \sin bx\Big|_0^{+\infty} + \frac{b}{a}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \cos bx \,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{-ax} \cos bx\Big|_0^{+\infty} + \frac{b}{a^2}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax} \,\mathrm{d}(\cos bx)$$
$$= \frac{b}{a^2} - \frac{b^2}{a^2}I = \frac{b}{a^2+b^2}. \quad \square$$

解 2 与例题 9.34 的解 2 类似可以用 Euler 公式计算如下.

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{-a+\mathrm{i}b}\cdot \mathrm{e}^{(-a+\mathrm{i}b)x}\Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{a-\mathrm{i}b} = \frac{a+\mathrm{i}b}{a^2+b^2}.\end{aligned}$$

取两边的虚部就得到与解 1 相同的答案. 若又取两边的实部, 则同时得到另一个积分的答案:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax}\cos bx\,\mathrm{d}x = \frac{a}{a^2+b^2}. \quad \square$$

下面是用换元法的一个证明题.

例题 11.22 设 $a > 0$, $f \in C(\mathbb{R})$, 证明以下等式在左边积分收敛时成立:

$$\int_0^{+\infty} f\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)\frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x = \ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{a}{x}+\frac{x}{a}\right)\frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

证 这里有两个奇点 $x = 0, +\infty$, 但用换元公式则不必分成两个积分来处理. 记左边的积分为 I, 并作代换 $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{u}$, 则有

$$\begin{aligned}I &= \int_{+\infty}^0 f\left(\frac{u}{a}+\frac{a}{u}\right)\cdot\frac{(2\ln a - \ln u)u}{a^2}\cdot(-\frac{a^2}{u^2})\,\mathrm{d}u \\ &= \int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{a}+\frac{a}{u}\right)\cdot\left(\frac{2\ln a}{u} - \frac{\ln u}{u}\right)\mathrm{d}u \\ &= -I + 2\ln a\int_0^{+\infty} f\left(\frac{u}{a}+\frac{a}{u}\right)\frac{\mathrm{d}u}{u}.\end{aligned}$$

可见当 I 为有限数时另一边的广义积分也收敛, 且成立所求的等式. $\square$

例题 11.23 求 $I = \int_0^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

解 1 利用部分分式分解方法或配对法求出原函数 (见例题 9.42), 然后用 Newton–Leibniz 公式求得答案. 从略.

解 2 作代换 $u = 1/x$, 则当 x 从 0 到 $+\infty$ 时, u 从 $+\infty$ 到 0. 于是有

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{+\infty}^{0} \frac{-\dfrac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u}{1+\dfrac{1}{u^4}} = \int_0^{+\infty} \frac{u^2\,\mathrm{d}u}{u^4+1} \quad (\text{将 } u \text{ 再改记为 } x)\\
&= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{x^2+1}{x^4+1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}(x-\dfrac{1}{x})}{(x-\dfrac{1}{x})^2+2} \quad (\text{令 } v = x-\frac{1}{x})\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{v^2+2} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}v}{v^2+2}\\
&= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{v}{\sqrt{2}}\Big|_0^{+\infty} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}. \quad \square
\end{aligned}
$$

与上一例题类似, 下一例题中的原函数在例题 9.44 中已经用万能变换求出, 但在计算定积分时不如直接计算为方便.

例题 11.24 求 $I = \displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}$, 其中 $0 \leqslant r < 1$.

解 用万能变换 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$, 则当 θ 从 0 到 2π 时, $t(\theta)$ 在 $\theta = \pi$ 处有第二类间断点. 因此需要分成两个积分来处理. 然而利用积分 I 的被积函数是周期 2π 的周期函数, 因此可以将积分区间换为 $[-\pi,\pi]$ 来计算 (参看例题 10.31), 这时又可以利用对称性, 因被积函数为偶函数, 于是就可如下计算, 其中用万能变换 $t = \tan\dfrac{\theta}{2}$:

$$
\begin{aligned}
I &= 2\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{1-2r\cos\theta+r^2}\\
&= 2\int_0^{+\infty} \frac{2\,\mathrm{d}t}{(1+r)^2t^2+(1-r)^2}\\
&= \frac{4}{1-r^2}\arctan\left(\frac{1+r}{1-r}\cdot t\right)\Big|_0^{+\infty} = \frac{2\pi}{1-r^2}. \quad \square
\end{aligned}
$$

下面是在广义积分计算中利用对称性的一个例子 (参见定理 10.18):

例题 11.25 (Euler 积分) 求 $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 用代换 $t = \dfrac{\pi}{2} - x$ 就可以得到 (参见公式 (10.15))

$$
I = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\ln\sin x + \ln\cos x)\,\mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\sin 2x\,\mathrm{d}x - \frac{\pi}{4}\ln 2,
$$

对最后一式中的积分作代换 $2x = t$, 就得到

$$
I = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin t\,\mathrm{d}t - \frac{\pi}{4}\ln 2 = \frac{1}{2}I - \frac{\pi}{4}\ln 2,
$$

因此 $I = -\dfrac{\pi}{2}\ln 2$. $\square$

注 Euler 积分是不能用 Newton–Leibniz 公式求出的典型例子, 它在许多问题中以各种不同形式出现. (参见 [25] §12.3 的练习题 3 的 8 个小题.)

下面是对于广义积分的估计.

例题 11.26 试证明下列估计:

(1) $1-\dfrac{1}{n+1}<\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x<1+\dfrac{1}{n\mathrm{e}}$; (2) $\displaystyle\int_{1.9}^{2}\dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[4]{2+x-x^2}}\,\mathrm{d}x<0.03$.

证 (1) 利用在区间 $[0,1]$ 上有 $1-x^n\leqslant \mathrm{e}^{-x^n}\leqslant 1$, 积分后得到

$$1-\frac{1}{n+1}<\int_0^1\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x<1.$$

在 $[1,+\infty)$ 上则有

$$0<\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{n}\int_1^{+\infty}nx^{n-1}\mathrm{e}^{-x^n}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n\mathrm{e}},$$

将以上两式相加即得.

(2) 将被积函数分解为两个因子后估计如下:

$$\int_{1.9}^{2}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt[4]{1+x}}\cdot\frac{1}{\sqrt[4]{2-x}}\,\mathrm{d}x<\frac{\mathrm{e}^{-1.9}}{\sqrt[4]{2.9}}\cdot\frac{4}{3}(0.1)^{\frac{3}{4}}<0.027176.\quad\square$$

最后一个例子中需要用积分第二中值定理 (即定理 10.13).

例题 11.27 估计积分 $I=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos 100x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$.

分析 若简单地将被积函数的绝对值放大为 $\dfrac{1}{1+x^2}$, 则只能得到 $|I|\leqslant\dfrac{\pi}{2}$. 实际上被积函数的图像是在 $y=\pm\dfrac{1}{1+x^2}$ 之间高频振荡的曲线, 积分值 I 非常小.

解 由于 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $x\geqslant 0$ 时非负单调减少, 在 $x=0$ 时等于 1, 因此对于 $A>0$, 从第二中值定理知道存在 $\xi\in[0,A]$, 使得成立

$$\int_0^A\frac{\cos 100x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x=\int_0^{\xi}\cos 100x\,\mathrm{d}x,$$

于是可以估计得到

$$\left|\int_0^A\frac{\cos 100x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^{\xi}\cos 100x\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{\sin 100x}{100}\Big|_0^{\xi}\right|\leqslant\frac{1}{100}.$$

令 $A\to+\infty$ 就得到 $|I|\leqslant\dfrac{1}{100}$. $\square$

注 1 这里用的是积分第二中值定理的下列形式: $\displaystyle\int_a^b fg=g(a)\int_a^{\xi}f$, 其中 g 在 $[a,b]$ 上单调减少且非负. 当时我们就是先证明这个结果, 然后由它推出积分第二中值定理的一般形式.

注 2 本题也可以用分部积分法得到同样的估计. 例如先用分部积分得到

$$I=\frac{\sin 100x}{100}\cdot\frac{1}{1+x^2}\Big|_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}\frac{\sin 100x}{100}\cdot\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x,$$

由于右边的第一项为 0, 因此就有

$$|I|\leqslant\frac{1}{100}\int_0^{+\infty}\frac{2x}{(1+x^2)^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{50}\left(-\frac{1}{2(1+x^2)}\right)\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{100}.$$

还可以看出, 如不是简单地将被积函数中的因子 $\sin 100x$ 用 1 放大, 而是继续用分部积分法, 则有可能得到更好的估计.

练 习 题

1. 计算下列广义积分:

(1) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)(x^2+2)}$; (2) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2(1+x)}$;

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^2+2x+5}$; (4) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{3/2}}$;

(5) $\displaystyle\int_{\sqrt{2}}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{(x-1)\sqrt{x^2-2}}$; (6) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{x^n\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}$;

(7) $\displaystyle\int_{1}^{+\infty}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{(1+x)^2}$; (8) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(1+x^{\sqrt{2}})}$;

(9) $\displaystyle\int_{0}^{1}(\ln x)^n\,\mathrm{d}x$; (10) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\tan x}}$.

2. 计算下列广义积分:

(1) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\tan x}$; (2) $\displaystyle\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}x\ln\sin x\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\ln x}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$; (6) $\displaystyle\int_{0}^{\pi}\frac{x\sin x}{1-\cos x}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{a^2\mathrm{e}^{x}+b^2\mathrm{e}^{-x}}\ (ab\neq 0)$; (8) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}|\sin x|\,\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int_{-\infty}^{0}\mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x\ (a>0)$; (10) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin x\sin 3x}{x}\,\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{b\sin ax-a\sin bx}{x^2}\,\mathrm{d}x\ (ab>0)$.

3. 证明对下列广义积分的估计:

(1) $\displaystyle\frac{1}{29}<\int_{1}^{+\infty}\frac{x^{30}+1}{x^{60}+1}\,\mathrm{d}x<\frac{1}{29}+\frac{1}{59}$;

(2) $\displaystyle\frac{\pi}{10}<\int_{0}^{2}\frac{\mathrm{d}x}{(4+\sqrt{\sin x})\sqrt{4-x^2}}<\frac{\pi}{8}$;

(3) $\displaystyle\frac{1}{30}<\int_{2}^{+\infty}\frac{\sqrt{x^3-x^2+3x}}{x^5+x^2+1}\,\mathrm{d}x<\frac{\sqrt{2}}{20}$;

(4) $\displaystyle\left|\int_{2}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^4}\cos\sqrt{x}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant 2^{-5}\mathrm{e}^{-16}$;

(5) $\displaystyle\int_{x}^{+\infty}\sin t^2\,\mathrm{d}t=\frac{\cos x^2}{2x}+O\Big(\frac{1}{x^3}\Big)\ (x\to+\infty)$;

(6) $\displaystyle\int_{0}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{x+100}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{100}-\frac{\xi}{10000},\ \xi\in[0,1]$;

(7) $\displaystyle\int_{0}^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}\sim\frac{1}{2}\ln\frac{1}{1-k}\ (k\to 1^-)$.

§11.3 广义积分的敛散性判别法

广义积分的敛散性判别是一个基本问题. 对于上两节中的许多例题中的广义积分来说, 我们的做法是在计算的同时知道它们是收敛的. 然而敛散性与如何计算或能不能计算终究不是一回事. 本节将介绍判定广义积分的敛散性的几种常用判别法. 它们的基础是定理 11.1 和定理 11.2.

为简明起见, 用统一的记号同时叙述对两类基本广义积分的类似判别法.

11.3.1 广义积分的绝对收敛性判别法

首先要指出, 广义积分有两种不同的收敛性, 它们在一系列方面具有本质差异. 为此引入下列概念.

定义 11.3 设 f 在 $[a,b)$ 上以 b 为惟一奇点. 若广义积分 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则称广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛, 也称 f 在 $[a,b)$ 上绝对可积.

若广义积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 但 $\displaystyle\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 发散, 则称 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 为条件收敛, 也称 f 在 $[a,b)$ 上条件可积.

当然对于保号函数来说, 其广义积分收敛和绝对收敛没有区别. 但后面将会看到, 确实存在收敛而不绝对收敛的广义积分.

首先建立这方面的最基本事实.

定理 11.6 绝对收敛的广义积分一定收敛.

证 设 b 为惟一奇点. 从 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛出发, 根据 Cauchy 收敛准则的必要性, 对 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, b_0,\ \forall\, b',b''\in(b_0,b):\ \left|\displaystyle\int_{b'}^{b''}|f(x)|\,\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$. 于是同时就有

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{b'}^{b''} |f(x)|\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon,$$

再根据 Cauchy 收敛准则的充分性, 可见 f 在 $[a,b)$ 上的广义积分收敛. □

注 如前所说, 对广义积分来说, f 可积时不一定绝对可积. 然而对于常义积分来说, f 可积 则一定绝对可积 (见第十章 Lebesgue 定理后的推论). 这表明条件收敛只是广义积分中有用的概念, 同时在可积和绝对可积的关系上, 广义积分与常义积分恰恰相反.

对于在定义区间上保号的函数, 其中包括非负函数和非正函数, 它们的广义积分收敛和绝对收敛等价. 因此下面关于绝对收敛的判别法同时也是保号函数的广义积分收敛判别法, 且在收敛时不需要再讨论该广义积分是否条件收敛.

广义积分的比较判别法 设两个函数 f, g 在 $[a,b)$ 上以 b 为惟一奇点, 且 $|f(x)| \leqslant |g(x)|\ \forall x \in [a,b)$, 则从 $\displaystyle\int_a^b g$ 绝对收敛可推出 $\displaystyle\int_a^b f$ 绝对收敛, 反之, 从 $\displaystyle\int_a^b |f|$ 发散可推出 $\displaystyle\int_a^b |g|$ 发散.

证 1 证前一半即可. 设 $\displaystyle\int_a^b |g|$ 收敛, 则从 Cauchy 收敛准则, 对 $\varepsilon > 0$, $\exists\, b_0 \in (a,b)$, $\forall\, b', b'' \in (b, b_0)$: $\left|\displaystyle\int_{b'}^{b''} |g|\right| < \varepsilon$. 这时就有

$$\left|\int_{b'}^{b''} |f|\right| \leqslant \left|\int_{b'}^{b''} |g|\right| < \varepsilon,$$

因此根据 Cauchy 收敛准则知道 $|f|$ 在 $[a,b)$ 上可积. □

从定理 11.1 可知, 非负函数的广义积分的敛散性不用 Cauchy 收敛准则也可以解决. 这就是下一个证明的内容.

证 2 从定理 11.1 可见, 在 $|g|$ 可积时, 作为积分上限 b' 的函数 $\displaystyle\int_a^{b'} |g|$ 是 $[a,b)$ 上的单调增加有上界的函数. 因此从

$$\int_a^{b'} |f| \leqslant \int_a^{b'} |g|$$

可见, 左边的积分作为 b' 的函数也是如此, 因此当 $b' \to b^-$ 时收敛. □

例题 11.28 证明 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

证 惟一奇点为 $+\infty$. 利用不等式 $\left|\dfrac{\sin x}{1+x^2}\right| \leqslant \dfrac{1}{1+x^2}\ \forall x$ 成立, 而广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}$ 的收敛性是已知的, 因此所求证的结论成立. □

例题 11.29 证明 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 绝对收敛.

分析 $x = 0$ 为惟一奇点. 问题是如何处理 $\ln\sin x$.

这里容易犯的一种错误是: 从 $0 < \sin x < x\ \forall\, 0 < x < 1$ 出发写出 $|\ln\sin x| \leqslant |\ln x|$. 但是实际上恰恰相反, 只能得到 $|\ln\sin x| > |\ln x|$. 因此这样做是错误的.

证 用 L'Hospital 法则可以得到 $\ln\sin x \sim \ln x\ (x \to 0^+)$, 因此存在 $C > 1$, 使得 $|\ln\sin x| \leqslant C|\ln x|$ 在 $[0,1]$ 上成立. 然后利用对数函数 $y = \ln x$ 在 $x = 0$ 右侧为无穷大量, 但与幂函数 $1/x^\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ 当 $x \to 0^+$ 时的无穷大量相比, 却是无穷小量, 即有

$$\ln x = o\Big(\frac{1}{x^\varepsilon}\Big)\ (x \to 0^+),\ \ \text{也就是}\ \lim_{x \to 0^+} x^\varepsilon \ln x = 0,$$

其中 $\varepsilon > 0$ 可以是任意一个正数. 由于本题的被积函数 $\dfrac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}$ 的分母 $x^{1/2}$ 的指数离开 1 还有 1/2 的余地, 因此可取 $\varepsilon = 1/4$, $\exists\, x_0 \in (0,1)$, $\forall\, x \in (0, x_0)$, 成立

$$|\ln x| < \frac{1}{x^{1/4}}\ \forall x \in (0, x_0).$$

这样就在 $(0, x_0)$ 上成立估计式

$$\left|\frac{\ln\sin x}{\sqrt{x}}\right| \leqslant \frac{C|\ln x|}{\sqrt{x}} < \frac{C}{x^{1/2}} \cdot \frac{1}{x^{1/4}} = \frac{C}{x^{3/4}},$$

利用 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{x^{3/4}}$ 收敛, 可见本题的广义积分收敛. □

注 这里要看到, 对于本题中只有一个奇点 $x=0$ 的广义积分来说, 只要对某个 $x_0 \in (0,1)$, 证明 $[0, x_0]$ 上的广义积分收敛就足够了. 因为在 $[x_0, 1]$ 上的积分只是常义积分, 它的收敛性没有问题.

上一个例题中实际上已经用了等价量方法, 这在很多情况下要比寻找比较判别法中的不等式关系要方便一些. 这就是下面的等价量判别法的内容, 证明从略.

广义积分的等价量判别法 设 f, g 于 $[a, b)$ 上均以 b 为惟一奇点, 且有等价量关系:

$$|f(x)| \sim |g(x)|\ (x \to b^-),$$

则 $\int_a^b |f|$ 与 $\int_a^b |g|$ 同敛散.

例题 11.30 讨论积分 $\int_0^{+\infty} \frac{y^{a-1}}{|y-1|^{a+b}}\,\mathrm{d}y$ 的敛散性, 其中 a, b 为参数.

解 这里有 3 个奇点: $x = 0, 1, +\infty$[①]. 对它们分别用等价量判别法即可. 下面的依据是例题 11.3 和 11.4 中的已知结论.

将被积函数记为 $f(y)$, 从等价量关系

$$|f(y)| \sim y^{a-1}\ (y \to 0^+)$$

可见对于奇点 $x=0$ 而言, 当 $a>0$ 时收敛.

从等价量关系

$$|f(y)| \sim \frac{1}{|y-1|^{a+b}}\ (y \to 1)$$

可见对于奇点 1 而言, 当 $a+b<1$ 时收敛.

从等价量关系

$$|f(y)| \sim \frac{1}{y^{b+1}}\ (y \to +\infty)$$

可见对于奇点 $+\infty$ 而言, 当 $b>0$ 时收敛.

合并以上讨论知道当 $a>0, b>0, a+b<1$ 时该广义积分收敛, 否则发散. □

注 本题的被积函数非负, 对于非负函数的广义积分来说, 收敛就是绝对收敛.

---

① 在讨论时注意, 对于参数的不同取值, 奇点个数可能不同. 例如只有当 $a<1$ 时 $x=0$ 才是奇点.

11.3.2 广义积分的 Abel–Dirichlet 判别法

对于变号的被积函数, 其广义积分又不绝对收敛的情况, 则上一节中的方法失效. 这时最常用的工具是 Abel–Dirichlet 判别法. 它依赖于将被积函数分解成满足一定条件的两个函数的乘积.

(1) Abel 判别法 设 f, g 于 $[a, b)$ 上以 b 为惟一奇点, 且已知 $\displaystyle\int_a^b f$ 收敛, g 单调有界, 则 $\displaystyle\int_a^b fg$ 收敛.

(2) Dirichlet 判别法 设 f, g 于 $[a, b)$ 上以 b 为惟一奇点, 且已知 $\displaystyle\int_a^{b'} f$ 作为自变量 b' 的函数, 在 $b' \in [a, b)$ 上有界, g 单调且 $\displaystyle\lim_{x\to b^-} g(x) = 0$, 则 $\displaystyle\int_a^b fg$ 收敛.

证 在两个判别法中的 g 均为单调, 因此在 $a \leqslant b' < b'' < b$ 时, 在区间 $[b', b'']$ 上可以对于积分 $\displaystyle\int_{b'}^{b''} fg$ 用积分第二中值定理, 知道有 $\xi \in [b', b'']$ 使得成立

$$\int_{b'}^{b''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(b')\int_{b'}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b'')\int_{\xi}^{b''} f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11.6}$$

这是证明两个判别法的共同基础. 以下分别讨论.

(1) 这时有 $M > 0$, 使得 $|g(x)| < M\ \forall x \in [a, b]$. 由于广义积分 $\displaystyle\int_a^b f$ 收敛, 根据 Cauchy 收敛准则的必要性, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, b_0 \in (a, b)$, $\forall\, b', b'' \in (b_0, b)$, 成立 $\left|\displaystyle\int_{b'}^{b''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. 于是从 (11.6) 可以估计得到

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon,$$

再根据 Cauchy 收敛准则的充分性知道 $\displaystyle\int_a^b fg$ 收敛.

(2) 从积分 $\displaystyle\int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x$ 在 $a \leqslant b' < b$ 时有界的条件知存在 $M > 0$, 使得对 $\forall\, b' \in [a, b)$, 成立不等式 $\left|\displaystyle\int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < M$. 这时对于 $b', b'' \in [a, b)$, 就有

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)\,\mathrm{d}x\right| = \left|\int_a^{b''} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{b'} f(x)\,\mathrm{d}x\right| < 2M.$$

又利用 $g(b^-) = 0$ 的条件, 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\, b_0 \in [a, b)$, $\forall x \in [b_0, b) : |g(x)| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$.

于是可以从 (11.6) 估计得到

$$\left|\int_{b'}^{b''} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M = \varepsilon,$$

再根据 Cauchy 收敛准则的充分性知道 $\displaystyle\int_a^b fg$ 收敛. □

注 一种常见的误解是以为用 Abel–Dirichlet 判别法判定某个广义积分收敛时, 该积分就一定是条件收敛的. 这是错误的. Abel–Dirichlet 判别法只是广义积

分收敛性的一种充分性判别法. 对于变号函数来说, 加绝对值号后的广义积分是否收敛完全是另一个问题, 需要重新讨论.

下面是一个重要例子, 其中证明广义积分收敛但不绝对收敛的两步都是解决同类问题中的典型方法.

例题 11.31 证明广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 条件收敛.

证 从 $\displaystyle\left|\int_0^A \sin x\,\mathrm{d}x\right| = \left|-\cos x\Big|_0^A\right| \leqslant 2$ 和 $\dfrac{1}{x} \downarrow 0\ (x \to +\infty)$ 可见只要用 Dirichlet 判别法就知道该广义积分收敛.

下面我们来证明该广义积分不绝对收敛. 写出以下不等式:

$$\frac{|\sin x|}{x} \geqslant \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{2x}.$$

由于 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散, 而对于 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ 可以再一次用 Dirichlet 判别法知道它收敛, 因此广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散. 最后用比较判别法, 就知道本题的广义积分不绝对收敛. □

例题 11.32 讨论 $I = \displaystyle\int_0^{\infty} \sin x^2\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解 作变量代换 $x^2 = t$, 则有

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t,$$

利用 $\dfrac{1}{\sqrt{t}} \downarrow 0\ (t \to +\infty)$, 用 Dirichlet 判别法即知积分收敛. 利用例题 11.31 的方法, 有

$$\frac{|\sin t|}{\sqrt{t}} \geqslant \frac{\sin^2 t}{\sqrt{t}} = \frac{1-\cos 2t}{2\sqrt{t}},$$

就可以证明本例题中的广义积分收敛但不是绝对收敛. □

例题 11.33 讨论广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x \arctan x}{x^{\lambda}}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性, 其中参数 $\lambda > 0$.

证 由于积分下限为 1, 因此只有一个奇点 $+\infty$.

先看绝对收敛的可能性. 记被积函数为 f, 则当 $x \geqslant 1$ 时有 $|\sin x| \leqslant 1$ 和 $\arctan x < \dfrac{\pi}{2}$ 成立, 可见有 $|f(x)| \leqslant \dfrac{\pi}{2x^{\lambda}}$, 因此 $\lambda > 1$ 时广义积分绝对收敛.

对于 $0 < \lambda \leqslant 1$, 可以用 Dirichlet 判别法于 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^{\lambda}}\,\mathrm{d}x$, 知道它收敛. 然后再利用 $\arctan x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调有界, 从而再用 Abel 判别法知道本题的广义积分收敛.

最后还需要讨论当 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时积分是绝对收敛还是条件收敛. 再次用例题 11.31 中的方法, 写出不等式

$$|f(x)| \geqslant \frac{\sin^2 x \arctan x}{x^{\lambda}} = \frac{(1-\cos 2x)\arctan x}{2x^{\lambda}},$$

就可以分别证明当 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^{\lambda}}\,\mathrm{d}x$ 发散, $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\cos 2x \arctan x}{x^{\lambda}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 从而知道当 $0 < \lambda \leqslant 1$ 时本题的广义积分为条件收敛. □

11.3.3　非负函数的广义积分与级数的联系

这方面只介绍关于无界区间上广义积分的一个结果.

定理 11.7 设 f 在 $[a, +\infty)$ 上非负, 且以 $+\infty$ 为惟一奇点, 数列 $\{b_n\}$ 是单调增加的无穷大量, $b_1 = a$, 则

$$\text{广义积分} \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛} \Longleftrightarrow \text{无穷级数} \sum_{n=1}^{\infty} \int_{b_n}^{b_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 收敛.}$$

且在收敛时广义积分的值与无穷级数之和相等.

证　不妨设 $b_1 = a$. 令 $F(A) = \displaystyle\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$, 则由于被积函数 f 非负, F 是在 $[a, +\infty)$ 上的单调增加函数. 广义积分 $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ 收敛等价于函数 F 有上界.

又记右边的无穷级数部分和数列为

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \int_{b_k}^{b_{k+1}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^{b_{n+1}} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

则同样由于 f 非负知道上述无穷级数是非负项级数 (见 §2.3.4), 因此部分和数列 $\{S_n\}$ 单调增加. 这时无穷级数收敛等价于 $\{S_n\}$ 有上界 (见定理 2.18).

由 f 非负可见, 若 F 在 $[a, +\infty)$ 上有上界 M, 则也有 $S_n \leqslant M\ \forall n$. 另一方面, 若 $\{S_n\}$ 有上界 M, 则对每个 $A \geqslant a$, 存在 n, 使得 $A \leqslant b_{n+1}$, 从而 $F(A) \leqslant S_n \leqslant M$, 即 F 也以 M 为上界. 这样就证明了广义积分和无穷级数同敛散.

在收敛情况二者的极限都等于它们的上确界. 由于它们的上界集合相同, 因此定理中的广义积分的值就等于无穷级数的和. □

注　定理中从左边推到右边实际上只是第四章中关于 $x \to +\infty$ 的 Heine 归结原理的推论.

下面举几个例子, 其中的广义积分敛散性是用无穷级数来解决的.

例题 11.34 重新证明例题 11.31 中的后一半, 即积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散.

证　取 $b_n = n\pi\ \forall n$, 则所讨论的广义积分的敛散性与正项无穷级数 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ 的敛散性相同, 其中

$$u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{(n+1)\pi}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = \frac{2}{(n+1)\pi}.$$

利用调和级数发散 (见例题 2.32), 可见广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{|\sin x|}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散. □

注 这里利用了函数 $|\sin x|$ 是周期为 π 的周期函数, 因此在 $[n\pi, (n+1)\pi]$ 上的积分值与在 $[0,\pi]$ 上的积分值相等, 然后又利用 $\sin x$ 在 $[0,\pi]$ 上关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 为偶函数, 因此就知道 $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |\sin x|\,\mathrm{d}x = 2$. 当然也可以通过积分的变量代换得到这个结果. 此外, 在下一个例题中也有类似之处, 即函数 $\sin^2 x$ 也是周期 π 的周期函数, 在 $[0,\pi]$ 上关于 $x = \frac{\pi}{2}$ 也是偶函数, 从而使得有关的积分估计变得容易了.

例题 11.35 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x}$ 的敛散性.

解 取 $b_n = n\pi\ \forall n$, 所讨论的广义积分的敛散性与无穷级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 相同, 其中的通项 u_n 可估计如下:

$$\begin{aligned}
u_n &= \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^6\sin^2 x} \leqslant (n+1)\pi \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^6\sin^2 x} \\
&= 2(n+1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^6\sin^2 x} \quad (\text{然后利用例题 8.17 的 Jordan 不等式}) \\
&\leqslant 2(n+1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+(n\pi)^6(4/\pi^2)x^2} \\
&= 2(n+1)\pi \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{1+4n^6\pi^4x^2} \quad (\text{作代换 } \theta = 2n^3\pi^2 x \text{ 并将积分上限放宽为 } +\infty) \\
&< \frac{2(n+1)\pi}{2n^3\pi^2} \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}\theta}{1+\theta^2} \\
&= \frac{n+1}{n^3\pi} \cdot \frac{\pi}{2} \leqslant \frac{1}{n^2}.
\end{aligned}$$

最后利用无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 收敛, 可见本题的广义积分收敛. □

注 将这个例题中的被积函数记为 $f(x)$, 则可见在 $[0,+\infty)$ 上 $0 \leqslant f(x) \leqslant x$, $f(n\pi) = n\pi\ \forall n \in \mathbb{N}$. 因此 $y = f(x)$ 的图像与例题 11.12 中的被积函数图像 (见图 11.4) 非常相似. 但这里的 f 不但连续, 而且可微. 从例题 11.14 可见, f 在 $[0,+\infty)$ 上不是一致连续函数. 当然也容易直接证明这一点. (请读者作出 f 的图像.)

练 习 题

1. 判别下列广义积分的敛散性, 对于收敛的情况还要区分它是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x^2+100}}$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^m\,\mathrm{d}x}{x^n+1}\ (m,n\in\mathbb{N})$;

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^p+1}\,\mathrm{d}x\ (p\geqslant 0)$;

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{(\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1)^p}{\ln^q(1+\frac{1}{x})}\,\mathrm{d}x$;

(5) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x\ (p\geqslant 0)$;

(6) $\displaystyle\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln(\ln x)}$;

(7) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos x}{x^p}\,\mathrm{d}x\ (p\geqslant 0)$;

(8) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\sin x\ln\ln x}{\ln x}\,\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\sin x)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;

(10) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin(2x)}{x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$;

(11) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{x^p\sin x}{x^q+1}\,\mathrm{d}x\ (p,q>0)$;

(12) $\displaystyle\int_2^{+\infty}(\cos\frac{2}{x}-1)\,\mathrm{d}x$;

(13) $\displaystyle\int_1^{+\infty}\ln(1+\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}-1}{2})\,\mathrm{d}x$;

(14) $\displaystyle\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{px}}{(x-1)^p\ln x}\,\mathrm{d}x$;

(15) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\,\mathrm{d}x}{1+x^2\sin^2 x}$;

(16) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\cos x^2\,\mathrm{d}x$;

(17) $\displaystyle\int_{-\sqrt{\pi}}^{+\infty}(\sin x)^{\frac{1}{3}}\,\mathrm{d}x$;

(18) $\displaystyle\int_{\pi}^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}-\sin x}\,\mathrm{d}x$.

2. 判别下列广义积分的敛散性, 对于收敛的情况还要区分它是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{x\,\mathrm{d}x}{\ln x}$;

(2) $\displaystyle\int_0^{1}x^p\ln x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\displaystyle\int_0^{2}\frac{\arctan x}{\sqrt{8-x^2}}\,\mathrm{d}x$;

(4) $\displaystyle\int_0^{2}\frac{\sqrt{x}\,\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^{\sin x}-1}$;

(5) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{x^3}\,\mathrm{d}x$;

(6) $\displaystyle\int_0^{1}x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x$;

(7) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}+\arctan x}$;

(8) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}\,\mathrm{d}x$;

(9) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sqrt{\mathrm{e}^2+x^2}-\mathrm{e}^{\cos x}}{x^p}\,\mathrm{d}x\ (p>0)$;

(10) $\displaystyle\int_{-1}^{1}\left(\frac{1+x}{1-x}\right)^p\ln(2+x)\,\mathrm{d}x$;

(11) $\displaystyle\int_0^{1}\ln(\tan x)\,\mathrm{e}^{-\sin x}\,\mathrm{d}x$;

(12) $\displaystyle\int_0^{1}\frac{\sin(x+\frac{1}{x})}{x^p}\,\mathrm{d}x$.

3. 设 $\displaystyle\int_1^{+\infty}xf(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明: $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

4. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上的周期函数, 周期为 $T>0$, 且 $\int_a^{a+T} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 又设 g 是 $[a,+\infty)$ 上的单调函数, 且 $g(+\infty)=0$, 证明: $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

5. 判别下列广义积分的敛散性, 对于收敛的情况还要区分它是绝对收敛还是条件收敛.

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{\sin x}\sin 2x}{x^p}\,(p>0)$; (2) $\int_0^{+\infty} x^{p-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$;

(3) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[5]{(x-1)(x-2)^2(x-3)^3}}$; (4) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p+x^q}$.

6. (1) 设 $f\in C[0,+\infty)$, $f(+\infty)=A$, $a,b>0$, 证明:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = [f(0)-A]\ln\frac{b}{a};$$

(2) 若将 (1) 中的条件 $f(+\infty)=A$ 改为对某个 $c>0$, 积分 $\int_c^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明:

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = f(0)\ln\frac{b}{a};$$

(3) 设 $a,b>0$, 求 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$, $\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,\mathrm{d}x$.

7. 设 $f\in C[0,1]$, 求

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x\int_x^1 f(t)\,\mathrm{d}t}{t^2}.$$

8. 利用 $\ln\sin x$ 在 $(0,\frac{\pi}{2}]$ 上保号, 证明: 广义积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\,\mathrm{d}x$ 收敛.

第十二章 积分学的应用

内容简介 这一章介绍积分学的多方面应用. §12.1 为平面图形的面积计算. §12.2 为曲线弧长的定义及其计算, 其中包括曲率的概念. §12.3 为旋转体的体积和侧面积计算. §12.4 为积分学在物理中的几个应用. §12.5 为积分的近似计算. §12.6 证明 Wallis 公式和 Stirling 公式. 本章还有一个附录, 介绍科学发展史上的头等大事: Newton 用微积分工具从 Kepler 行星运动三定律推导出万有引力定律.

§12.1 平面图形的面积计算

12.1.1 由 $f(x), g(x)$ 围成的平面图形面积计算

从第九章开始已经讨论了由 $[a,b]$ 上的非负函数 $y = f(x)$ 的图像和 $y = 0$, $x = a, x = b$ 围成的曲边梯形. 按照目前的定义, 它的面积就是 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

但是当 f 在 $[a,b]$ 上变号时, 积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 的几何意义实际上是图形在 x 轴上方的部分面积减去图形在 x 轴下方的部分面积. 特别当 $f(x) < 0\ \forall x \in [a,b]$ 时, 积分值 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x < 0$. 由此可见, 若约定面积大于 0, 则就应当计算将函数 f 取绝对值后的积分. 例如在图 12.1 中为了求 4 块面积之和就需要计算 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$.

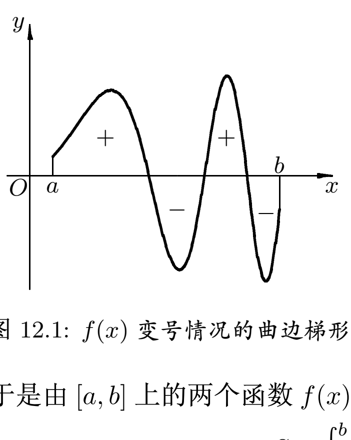


图 12.1: $f(x)$ 变号情况的曲边梯形

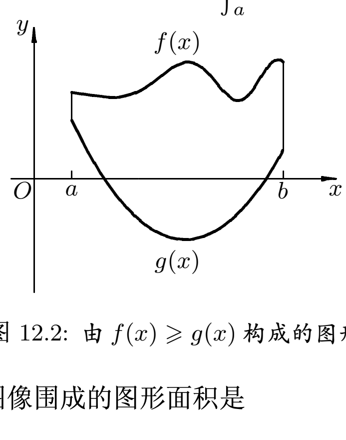


图 12.2: 由 $f(x) \geqslant g(x)$ 构成的图形

于是由 $[a,b]$ 上的两个函数 $f(x), g(x)$ 的图像围成的图形面积是

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,\mathrm{d}x.$$

如果在 $[a,b]$ 上处处成立 $f(x) \geqslant g(x)$, 则当然在积分号下不必取绝对值. 这相当于图形的上边界为 $f(x)$, 下边界为 $g(x)$ 的情况. 在图 12.2 中就是如此.

例题 12.1 求在 $[0, 2\pi]$ 上由正弦曲线 $y = \sin x$ 和余弦曲线 $y = \cos x$ 所围成的面积.

解 1 这时的面积为下列积分:

$$S = \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x| \,\mathrm{d}x,$$

然后如图 12.3 所示, 可以先求出两条曲线的交点, 将 S 分成 3 个积分计算如下:

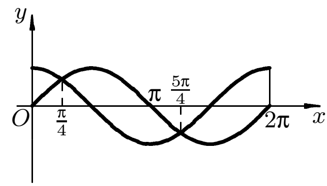


图 12.3: 在 $[0, 2\pi]$ 上由 $\sin x, \cos x$ 围成的面积

$$\begin{aligned} S &= \left(\int_0^{\frac{\pi}{4}} + \int_{\frac{5\pi}{4}}^{2\pi}\right)(\cos x - \sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x \\ &= 2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} (\sin x - \cos x)\,\mathrm{d}x = 2(-\cos x - \sin x)\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5\pi}{4}} \\ &= 2\Big(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\Big) = 4\sqrt{2}. \quad \square \end{aligned}$$

注 在解 1 中利用了三角函数的性质看出面积 S 等于在区间 $[\frac{\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}]$ 上的面积的两倍, 从而实际上只需计算一个积分再乘以 2 就够了. 下面的方法更巧妙一点.

解 2 利用三角函数的和差角公式, 又利用周期函数在周期长度区间上积分相等的事实 (见例题 10.31), 则可计算如下 (还可参见例题 10.19):

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{2\pi} |\sin x - \cos x|\,\mathrm{d}x = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin(x - \frac{\pi}{4})|\,\mathrm{d}x \\ &= \sqrt{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{2\pi - \frac{\pi}{4}} |\sin t|\,\mathrm{d}t = \sqrt{2}\int_0^{2\pi} |\sin t|\,\mathrm{d}t = 4\sqrt{2}. \quad \square \end{aligned}$$

例题 12.2 设由 $y = \sin x$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{2}$ 和 $y = t\ (0 \leqslant t \leqslant 1)$ 所围成的图形面积为 $S(t)$ (参见图 12.4), 求其最大值和最小值.

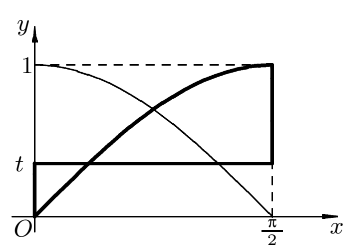


图 12.4: 两块面积之和的最大最小问题

解 1 计算出在 $[0, 1]$ 上的函数表达式

$$\begin{aligned} S(t) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} |t - \sin x|\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\arcsin t} (t - \sin x)\,\mathrm{d}x + \int_{\arcsin t}^{\frac{\pi}{2}} (\sin x - t)\,\mathrm{d}x \\ &= 2t\arcsin t + 2\sqrt{1 - t^2} - \frac{\pi}{2}t - 1, \end{aligned}$$

然后求导, 得到 $S'(t) = 0$ 的根为 $t = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, 且从 $S'(t)$ 先负后正, 可判定其为最小值点. 最小值为 $S(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \sqrt{2} - 1$. 在端点处 $S(0) = 1$, $S(1) = \dfrac{\pi}{2} - 1$, 可知最大值是 1, 于 $t = 0$ 达到. $\square$

解 2 此题有巧妙的初等解法, 它也可以从导数的几何意义得到解释. 观察两块面积在 t 增加时的变化率, 即导数. 从图 12.4 上可直接读出它们的导数分别是 $\arcsin t$ 和 $-(\dfrac{\pi}{2}-\arcsin t)$, 相加后乘 -1 得到 $\dfrac{\pi}{2}-2\arcsin t$, 几何上恰是 $y=t$ 为 $y=\sin x$ 和 $y=\cos x$ 所截下的中间一段的长度. 这就导致下列初等几何解法.

在图 12.4 上用细线作出辅助曲线 $y=\cos x$, 可看出 $S(t)$ 等同于下列两个图形的面积之和, 其中第一个图形为:

$$S_1=\{(x,y)\mid 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{2}, \sin x\leqslant y\leqslant \cos x\}$$

它与 t 无关. 第二个图形是 $y=t$ 和 $\sin x, \cos x$ 围成的一个三角形. 从而只有当这个三角形退化为一点时面积达到最小. 这就是取 t 为 $\sin x$ 和 $\cos x$ 相交点的纵坐标 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 最大值点也可由此看出为 $t=0$. □

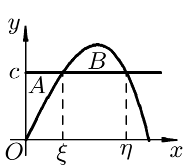


图 12.5: 求两块区域面积相等的参数值 c

例题 12.3 如图 12.5 所示, 水平直线 $y=c$ 与三次曲线 $y=2x-3x^3$ 交于第一象限. 求使得区域 A 与区域 B 的面积相等的 c 值.

解 记交点中较大的为 η, 则有 $\displaystyle\int_0^\eta(2x-3x^3-c)\,\mathrm{d}x=0$. 这导致 $\eta-\dfrac{3}{4}\eta^3-c=0$. 再联合 $2\eta-3\eta^3=c$, 即解得 $c=\dfrac{4}{9}$. □

12.1.2 参数方程形式下的面积公式

这里讨论两种情况.

第一种情况是函数关系 $y=y(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, 是由参数方程 $x=x(t)$, $y=y(t)$, $\alpha\leqslant t\leqslant\beta$ 给定的. 这就是说或者没有 $y(x)$ 的显式表达式, 或者虽有但使用不方便, 而参数方程表达式却比较简单. 这里可以回顾第六章 §6.3.4 开始时的解说, 即函数的自变量仍然是 x, 因变量仍然是 y, t 所起的是中介作用, 即在 $y=y(t(x))$ 中的中间变量.

为此当然需要能够从 $x=x(t)$ 定出反函数 $t=t(x)$, 从而得到 $y=y(t(x))$. 同时 t 的区间 $[\alpha,\beta]$ 的两个端点与 x 的区间 $[a,b]$ 一一对应. 这里有两种可能, 即 $x=x(t)$ 为严格单调增加和严格单调减少的两种情况.

这时的面积计算实际上就是对 $\displaystyle\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x$ 用换元法.

对于 $x(t)$ 严格单调增加的情况, 则 $x(\alpha)=a$, $x(\beta)=b$, 于是

$$S=\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta y(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t=\int_\alpha^\beta y(t)\,\mathrm{d}x(t). \tag{12.1}$$

反之, 对于 $x(t)$ 严格单调减少的情况, 则有 $x(\alpha)=b$, $x(\beta)=a$, 得到

$$S=\int_a^b y(x)\,\mathrm{d}x=\int_\beta^\alpha y(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t=-\int_\alpha^\beta y(t)\,\mathrm{d}x(t). \tag{12.2}$$

例题 12.4 求旋轮线一拱与 x 轴包围的面积. 旋轮线方程为

$$x=a(t-\sin t), y=a(1-\cos t),\quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

如图 12.6 所示, 旋轮线是半径为 a 的圆周上的固定点在圆周滚动时描出的轨迹. 在该图中设一开始时圆周上的这个点的位置在原点处, 然后圆周向右滚动. 圆周滚动一周所得的旋轮线称为一拱. 图中描出圆周滚动的角度为 t 时的位置. 由此即可得出题中的旋轮线的参数方程.

解 直接用公式 (12.1) 即有

$$\begin{aligned}S&=\int_0^{2\pi} y(t)\,\mathrm{d}x(t)\\&=\int_0^{2\pi} a^2(1-\cos t)^2\,\mathrm{d}t\\&=a^2\Big(2\pi+\int_0^{2\pi}\cos^2 t\,\mathrm{d}t\Big)=3a^2\pi.\quad\square\end{aligned}$$

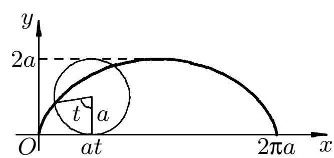


图 12.6: 旋轮线的一拱

第二种情况是考虑由参数方程表示的封闭曲线所围图形的面积.

为简单起见, 只考虑满足以下条件的封闭曲线, 即平行于 y 轴的直线与该闭曲线至多交于两点.

将曲线上 x 坐标最小的 (惟一) 点记为 A, x 坐标最大的 (惟一) 点记为 B, 又设曲线上的点从 A 到 B 再回到 A 时对应的参数 t 从 α 到 γ 再到 β, 而且是沿逆时针方向. (更一般些应当说成点在前进时邻近的曲线内部的点始终在其左侧.) 参数 $t=\alpha$ 和 $t=\beta$ 对应于同一点 A. 设 A 与 B 对应于 $x=a$ 和 $x=b$,

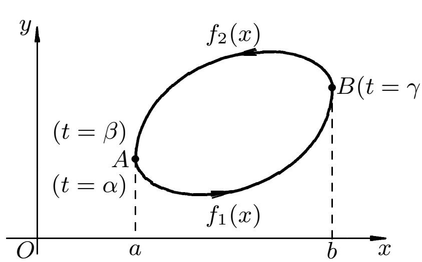


图 12.7: 参数方程形式的封闭曲线

又设在 $x\in(a,b)$ 时, 封闭曲线上的两个点的纵坐标分别为 $y_2(x)$ 和 $y_1(x)$, 这就是封闭曲线所限制的平面图形的上边界和下边界. 作代换 $x=x(t)$, 并应用 (12.1) 和 (12.2), 就可以计算面积如下:

$$S=\int_a^b[f_2(x)-f_1(x)]\,\mathrm{d}x=-\int_\gamma^\beta y(t)\,\mathrm{d}x(t)-\int_\alpha^\gamma y(t)\,\mathrm{d}x(t)=-\int_\alpha^\beta y(t)\,\mathrm{d}x(t). \tag{12.3}$$

对上述公式用分部积分法可以得到另一个公式:

$$S=-y(t)x(t)\Big|_\alpha^\beta+\int_\alpha^\beta x(t)\,\mathrm{d}y(t)=\int_\alpha^\beta x(t)\,\mathrm{d}y(t). \tag{12.4}$$

将这两个公式相加除 2 则得到第三个公式, 也是用得最多的公式:

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}(x(t)\,\mathrm{d}y(t) - y(t)\,\mathrm{d}x(t)). \tag{12.5}$$

注 使用以上公式时对封闭曲线的限制可以放宽, 此外参数值的起点 (终点) 也可以任取. 这些将在多元微积分的曲线积分理论中给出证明, 这里从略.

例题 12.5 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围的面积.

解 对此题将举出几种方法来进行比较.

引入参数方程 $x = a\cos t, y = b\sin t$, 用公式 (12.3) 则有

$$S = -\int_0^{2\pi} y\,\mathrm{d}x = -\int_0^{2\pi} ab(-\sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \pi ab.$$

用公式 (12.4) 则有

$$S = \int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}y = \int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t)\,\mathrm{d}t = \pi ab.$$

用公式 (12.5) 则有

$$S = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab(\cos^2 t + \sin^2 t)\,\mathrm{d}t = \pi ab.$$

直接用直角坐标方程计算则有

$$\begin{aligned} S &= 4\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x \quad (\text{用代换 } x = a\cos t) \\ &= 4ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t = \pi ab. \quad \square \end{aligned}$$

注 以上几个解法说明用参数方程进行计算可能会比用直角坐标方便, 公式 (12.5) 也可能会比前两个公式更好.

例题 12.6 求 Descartes 叶形线 $x^3 + y^3 = xy$ 在第一象限的环形围成的面积 (参见第一册图 8.25).

解 在例题 8.37 中引入的参数方程对于这里的计算是非常合适的. 由 $y = tx$ 引入参数, 即以点 (x, y) 到原点的连接线的斜率作为参数 t, 这样就得到

$$x(t) = \frac{t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{t^2}{1+t^3},$$

并计算得到:

$$x'(t) = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2}, \quad y'(t) = \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2},$$

从参数的几何意义看出当 t 从 0 增加到 $+\infty$ 时点 $(x(t), y(t))$ 描出第一象限的环形. 因此用公式 (12.5) 就可以求出面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}(x(t)y'(t) - y(t)x'(t))\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1+t^3)^2}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{3(1+t^3)}\bigg|_0^{+\infty}\right) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

注 这里虽然出现广义积分, 但理论上没有问题. 实际上从广义积分的换元法计算可以看出, 在换元过程中, 广义积分可以变为常义积分, 常义积分也可以变为广义积分. 当然容易理解, 本题的面积难以在直角坐标下计算, 但也可以用下一小节的极坐标以避免广义积分 (见 [9, §143]), 只是计算稍复杂一点.

12.1.3 极坐标形式下的面积计算

设曲线的极坐标方程 $r = r(\theta), \alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$, 要求由该曲线与两条直线 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ 围成的平面图形的面积. (这里假设始终满足 $r(\theta) \geqslant 0$.)

虽然可以将曲线方程写成参数方程的形式: $x = r(\theta)\cos\theta$, $y = r(\theta)\sin\theta$, 但这只是图形边界的一部分, 还不能直接利用前面的公式. 比较方便的做法是直接用 Riemann 积分的定义于极坐标下的图形[①].

对于区间 $[\alpha, \beta]$ 作分划 $P = \{\theta_0, \theta_1, \cdots, \theta_n\}$, 记 $\Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1}$, 就可以将上面所说的图形分划成为 n 个扇形. 如图 12.8 所示, 其中还如图 10.1 那样将上述每一个扇形用两个圆扇形夹在其中.

然后可以在每个子区间中取介点 $\xi_i \in [\theta_{i-1}, \theta_i]$, $i = 1, \cdots, n$, 用半径为 $r(\xi_i)$ 的圆扇形来近似每一个扇形, 这样就得到 Riemann 和:

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} r^2(\xi_i)\Delta\theta_i.$$

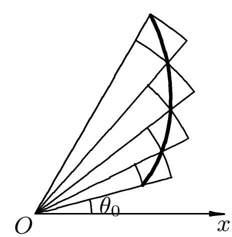


图 12.8: 极坐标曲线的下和与上和

由此可见只要 $r = r(\theta)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续, 当分划的细度趋于 0 时就有极限, 我们就将它作为图形的面积. 从上述 Riemann 和可见这个极限就是下列积分

$$S = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} r^2(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

当然这里在理论上有一点问题. 即由这个公式所计算得到的面积和前面对于曲边梯形的面积定义是否一致? 这是可以证明的. 留作练习.

例题 12.7 求由双纽线 $r^2 = a^2\cos 2\theta$ 所围图形的面积.

这里首先还是要作图, 确定出它的图形后就不难知道只要将 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上的面积乘 4 即可用公式计算 (双纽线的图像见第一册图 8.24(4)). 这就是

$$S = 4 \cdot \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}} a^2\cos 2\theta\,\mathrm{d}\theta = a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\,\mathrm{d}t = a^2. \quad \square$$

---

① 应当指出最早想出这个方法的是 Kepler. 他在发现行星运动第二定律时需要计算与此相同的问题, 采用了与图 12.8 类似的分划方法.

例题 12.8 求下列三个圆的公共部分的面积: $x^2+y^2 \leqslant 4$, $(x-2)^2+y^2 \leqslant 4$, $x^2+(y-2)^2 \leqslant 4$.

解 如图 12.9 所示, 要计算的是以 O, A, B 为顶点的一个曲边三角形的面积, 在图中用粗黑线标出.

容易计算出点 A, B 到 O 的连接线将第一象限的直角恰好三等分, 因此圆弧 $\widetilde{AB}$ 对应的圆扇形面积就是半径为 2 的圆的 1/12, 即 $\pi/3$.

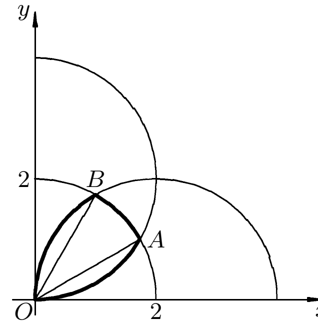


图 12.9: 三圆公共部分的面积计算

余下即需要计算两个小弓形的面积. 由于它们相等, 因此只要算出一个的面积乘以 2 即可. 圆弧 $\widetilde{OA}$ 的极坐标方程可以从其直角坐标方程 $x^2+(y-2)^2=4$ 求出为 $r=4\sin\theta$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi/6$, 因此两个弓形的面积之和为

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} 16\sin^2\theta\,\mathrm{d}\theta = 8\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos 2\theta)\,\mathrm{d}\theta = \frac{4}{3}\pi - 2\sqrt{3},$$

最后的答案是 $S = \dfrac{5\pi}{3} - 2\sqrt{3}$. □

练 习 题

1. 已知由 $y=\cos x$, $y=0$, $x=0$ 所围图形被曲线 $y=a\sin x$ 分成面积相等的两部分, 求 a.
2. 已知 $y^2=2px$ 和 $x^2+y^2=2Rx$ 交于 O, A, B 三点, 求 p, 使得由 $y^2=2px$ 与弦 $\overline{AB}$ 所围图形的面积达到最大, 并求其最大值.
3. 求下列曲线所围图形的面积:

   (1) $y=x^2, y=2-x^2$;　　(2) $y=|\ln x|, x=\mathrm{e}^{-1}, x=\mathrm{e}, y=0$;

   (3) $y^2=2px\ (p>0)$ 和它在点 $(\dfrac{p}{2}, p)$ 处的法线;

   (4) $\sqrt{\dfrac{x}{a}}+\sqrt{\dfrac{y}{b}}=1\ (a,b>0), x=0, y=0$.
4. 求由 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ 所围图形在圆 $x^2+y^2=\dfrac{a^2}{2}$ 外部的面积.
5. 设 $y=x$ 将椭圆 $x^2+3y^2 \leqslant 6y$ 分成面积为 A, B 的两部分 $(A>B)$, 求 A/B.
6. 设平面 π_1 和平面 π_2 的夹角为 $\alpha\ (0 \leqslant \alpha \leqslant \pi)$, 求 π_1 上面积为 S 的图形在 π_2 上垂直投影所得的图形的面积.

§12.2 曲线的弧长

12.2.1 曲线的弧长概念

本小节的问题是如何定义和计算曲线的弧长. 曲线弧长的一个特例就是圆周长, 或圆弧长, 但在中学数学中并没有对它给出数学上的严格定义, 因此我们的讨论需要从头开始. 其中包括曲线是否可求长都是问题.

今后经常将由参数方程 $x(t), y(t),\ t \in [\alpha, \beta]$, 给定的平面曲线写成为向量形式:

$$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta.$$

假设上述函数 $x(t), y(t)$ 都是 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 这时 $\boldsymbol{r}(t)$ 为连续曲线. 又若 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上有连续的导函数, 且始终成立 $x'^2(t) + y'^2(t) \neq 0$, 则称曲线 $\boldsymbol{r}(t)$ 为光滑曲线①.

取 $[\alpha, \beta]$ 的分划 $P = \{t_0, t_1, \cdots, t_n\}$, 得到曲线上的 $n+1$ 个点 (若为封闭曲线则为 n 个点) $M_i = (x(t_i), y(t_i)),\ i = 0, 1, \cdots, n$. 将它们顺次用直线段连接就得到一条折线, 称为曲线的内接折线 (参见图 12.10).

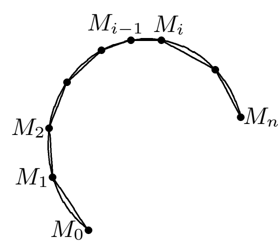


图 12.10: 用折线逼近曲线

如将分划 P 加细, 则内接折线的长度不会减少. 对于两个不同的分划 P_1 和 P_2, 可以将它们合并为 $P_1 \cup P_2$, 它同时是 P_1 和 P_2 的加细.

现在给出弧长的定义.

定义 12.1 若曲线的内接折线的长度有上界, 则称该曲线可求长, 并将内接折线的上确界定义为曲线的长度.

下面将要证明, 在曲线方程 $\boldsymbol{r} = (x(t), y(t))$ 满足一定条件下, 曲线一定可求长, 且建立计算曲线弧长的积分公式.

12.2.2 弧长的计算公式

定理 12.1 设 $x(t), y(t)$ 在 $[\alpha, \beta]$ 上可微且导数 $x'(t), y'(t) \in R[\alpha, \beta]$, 则曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t)), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$ 可求长, 其弧长为

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}. \tag{12.6}$$

① 从第一册的 Darboux 定理 (即定理 7.8) 和 §6.3.4 的参数方程求导法则知道, 光滑曲线若无自交点, 则在每一点 $(x(t), y(t))$ 的邻近可以将曲线用函数 $y = y(x)$ 或 $x = x(y)$ 来描述, 且存在相应的切线.

证 先证明曲线可求长. 设 $P=\{t_0,t_1,\cdots,t_n\}$ 是 $[\alpha,\beta]$ 的分划, 则内接折线的长度为:

$$\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i},$$

其中 $\overline{M_{i-1}M_i}=\sqrt{(x(t_{i-1})-x(t_i))^2+(y(t_{i-1})-y(t_i))^2}$. 因 $x(t),y(t)$ 可导, 用微分中值定理就有 $\xi_i,\eta_i\in[t_{i-1},t_i]$, 使得

$$\overline{M_{i-1}M_i}=\sqrt{x'^2(\xi_i)+y'^2(\eta_i)}\,\Delta t_i.$$

又因 $x',y'\in R[\alpha,\beta]$, 因此均有界. 于是存在与分划无关的常数 $C>0$, 使得 $\overline{M_{i-1}M_i}\leqslant C\Delta t_i$. 于是内接折线的长度不会超过 $C(\beta-\alpha)$. 因此曲线可求长.

其次, 证明当分划 P 的细度趋于 0 时内接折线的长度收敛于定理中的积分.

由于前面用微分中值定理后所得到的 ξ_i 与 η_i 未必相同, 因此内接折线之和还不是函数 $\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}$ 的 Riemann 和. 然而从条件可知下列极限成立:

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(t_i)+y'^2(t_i)}\,\Delta t_i=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

下面只需要证明内接折线之和与对应分划下的上述 Riemann 和之差趋于 0 即可. 将分点 t_i 对应的曲线上的点记为 $M_i=(x(t_i),y(t_i))$, $i=0,1,\cdots,n$, 则可以利用不等式 (见图 12.11)

$$\begin{aligned}|\sqrt{a^2+b^2}-\sqrt{c^2+d^2}|&\leqslant\sqrt{(a-c)^2+(b-d)^2}\\&\leqslant|a-c|+|b-d|,\end{aligned}$$

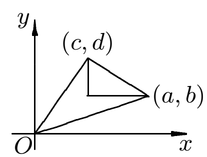


图 12.11: 两个初等不等式的几何意义

估计得到

$$\begin{aligned}\Delta&\equiv\Big|\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i}-\sum_{i=1}^{n}\sqrt{x'^2(t_i)+y'^2(t_i)}\Delta t_i\Big|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\Big|\sqrt{(x(t_{i-1})-x(t_i))^2+(y(t_{i-1})-y(t_i))^2}-\sqrt{x'^2(t_i)+y'^2(t_i)}\Delta t_i\Big|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\Big|x(t_i)-x(t_{i-1})-x'(t_i)\Delta t_i\Big|+\sum_{i=1}^{n}\Big|y(t_i)-y(t_{i-1})-y'(t_i)\Delta t_i\Big|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\omega_i'\Delta t_i+\sum_{i=1}^{n}\omega_i''\Delta t_i,\end{aligned}$$

其中最后一步使用了微分中值定理, 并用 ω_i',ω_i'' 记导函数 $x'(t),y'(t)$ 在 $[t_{i-1},t_i]$ 上的振幅. 由此可知 $\lim\limits_{\|P\|\to 0}\Delta=0$, 也就是成立

$$\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\overline{M_{i-1}M_i}=\int_\alpha^\beta\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

最后, 我们来证明上述积分值就是内接折线长度的上确界. 记积分值为 I, 内接折线长度的上确界为 s, 则由于内接折线长度不会超过 s, 因此也有 $I \leqslant s$.

为证明 $I = s$, 用反证法. 若 $I < s$, 记 $\varepsilon = s - I$, 则存在 $\delta > 0$, 使得当 $\|P\| < \delta$ 时, 对应的内接折线长度一定落在区间 $(I - \frac{\varepsilon}{2}, I + \frac{\varepsilon}{2})$ 内, 即不会超过 $I + \frac{\varepsilon}{2} = s - \frac{\varepsilon}{2}$.

由于 s 是内接折线长度的上确界, 因此存在某个分划 P, 使得对应的内接折线长度落在区间 $(s - \frac{\varepsilon}{2}, s]$ 内. 如果这个分划的细度不小于 δ, 则可以加细使得满足这个要求. 由于内接折线长度在分划加细时不会减少, 又不会超过上确界, 因此仍然在区间 $(s - \frac{\varepsilon}{2}, s]$ 之内. 这就引出矛盾. 因此只能是 $I = s$. □

注 由于曲线弧长的定义 12.1 与曲线表示方式无关, 因此用不同的曲线方程计算可求长曲线的弧长的值不变, 只相当于定积分计算中的变量代换.

下面是从定理 12.1 可以得到的三种不同形式的弧长公式.

(1) 设 $y = y(x)$ 于 $[a, b]$ 上可微, $y'(x) \in R[a, b]$, 则将 x 看成为参数时就可以从定理 12.1 得出弧长公式

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x.$$

(2) 设曲线由极坐标 $r = r(\theta)$, $\alpha \leqslant \theta \leqslant \beta$ 给出, 则以 θ 为参数的曲线方程为 $\boldsymbol{r}(t) = (r(\theta)\cos\theta, r(\theta)\sin\theta)$. 因此在弧长公式 (12.6) 的被积表达式的根式下为

$$(r'(\theta)\cos\theta - r(\theta)\sin\theta)^2 + (r'(\theta)\sin\theta + r(\theta)\cos\theta)^2 = r'^2(\theta) + r^2(\theta),$$

于是得到

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{r'^2(\theta) + r^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta.$$

(3) 弧长的定义和计算公式可以推广到三维空间曲线 $\boldsymbol{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\alpha \leqslant t \leqslant \beta$, 得到

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)}\,\mathrm{d}t.$$

现在举几个例题.

例题 12.9 求半径为 R 的圆周长.

解 1 在直角坐标系下做, 写出圆周的方程 $x^2 + y^2 = R^2$, 利用对称性, 只要计算第一象限的弧长. 这时函数关系为 $y = \sqrt{R^2 - x^2}$, $0 \leqslant x \leqslant R$, 就有

$$\begin{aligned} s &= 4\int_0^R \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x = 4\int_0^R \sqrt{1 + \left(\frac{-x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2}\,\mathrm{d}x \\ &= 4R\int_0^R \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = 4R\arcsin\frac{x}{R}\bigg|_0^{R^-} = 4R\cdot\frac{\pi}{2} = 2\pi R. \end{aligned}$$

注意这里出现广义积分. 当然也可用三角代换 $x = R\sin t$ 使得计算更简单. □

解 2 将圆周用参数方程 $x = R\cos t, y = R\sin t$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$ 来描述, 则有

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-R\sin t)^2 + (R\cos t)^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} R\,\mathrm{d}t = 2\pi R. \quad \square$$

解 3 用极坐标, 则 $r = R$ 为常值函数, $0 \leqslant \theta < 2\pi$. 于是有

$$s = \int_0^{2\pi} \sqrt{R^2 + 0^2}\,\mathrm{d}\theta = 2\pi R. \quad \square$$

例题 12.10 求抛物线 $y = \dfrac{1}{2}x^2$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, 的弧长.

解 从弧长公式可见要计算积分

$$s = \int_0^1 \sqrt{1 + x^2}\,\mathrm{d}x.$$

用分部积分法就有 (参见例题 9.47 和 10.32):

$$\begin{aligned} s &= x\sqrt{1+x^2}\Big|_0^1 - \int_0^1 x \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\,\mathrm{d}x = \sqrt{2} - s + \int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(x + \sqrt{1+x^2})\Big|_0^1 = \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \ln(1+\sqrt{2})). \quad \square \end{aligned}$$

注 容易想到可以用三角代换 $x = \tan t$, 化为求

$$s = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sqrt{1 + \tan^2 t}\,\sec^2 t\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^3 t},$$

但实际计算后发现并不更方便一点.

例题 12.11 求椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1\ (0 < a < b)$ 的弧长.

解 用参数方程 $x = a\cos t, y = b\sin t\ (0 \leqslant t \leqslant 2\pi)$, 又利用对称性, 就有

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

可以证明其中被积函数的原函数不是初等函数, 因此不可能用 Newton-Leibniz 公式来计算 (详见[8, §8.5]). 这里涉及到称为椭圆函数的几类特殊函数. 椭圆弧长的标准化写法是

$$s = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{b^2 - (b^2 - a^2)\sin^2 t}\,\mathrm{d}t = 4b\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}\,\mathrm{d}t,$$

其中参数 $\varepsilon = \dfrac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b} \in (0, 1)$ 即椭圆的离心率. 一般称上述积分为第二类全椭圆积分, 记为 $E(\varepsilon)$. 第一类椭圆积分是 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sqrt{1 - \varepsilon^2\sin^2 t}}\,\mathrm{d}t$, 其中参数 $\varepsilon \in (0, 1)$. 与此例有关的还有对于椭圆周长的近似公式, 也就是椭圆积分的近似计算方法. 可参见 [25] 的下册 p.108.

12.2.3　弧长的微分和曲线的自然参数方程

设曲线由参数方程给出: $x = x(t), y = y(t), \alpha \leqslant t \leqslant \beta$. 在 $x(t), y(t)$ 连续可微条件下, 曲线上从点 $(x(\alpha), y(\alpha))$ 到流动点 $(x(t), y(t))$ 的弧长为 t 的函数. 将这个函数记为

$$s(t) = \int_\alpha^t \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau.$$

由于被积函数连续, 因此 $s(t)$ 对 t 可导, 且有 $s'(t) = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}$ (见定理 10.11). 于是我们可以写出 $s(t)$ 的微分为

$$\mathrm{d}s = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2}.$$

这样就对第六章图 6.15 中描述的微分三角形提供了严格的根据.

对于 $y = y(x)$ 确定的曲线, 可以将 x 看成参数, 从而就有

$$\mathrm{d}s = \sqrt{1 + y'^2(x)}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2},$$

在图 12.12 上作出了这种情况的微分三角形.

对于极坐标方程 $r = r(\theta)$ 给出的曲线则有

$$\mathrm{d}s = \sqrt{r^2(\theta) + r'^2(\theta)}\,\mathrm{d}\theta,$$

也有相应的微分三角形. 对于三维情况有类似的推广.

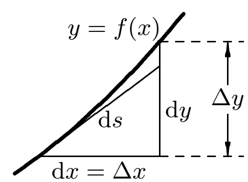


图 12.12: 微分三角形的示意图

从光滑曲线的条件可知有 $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} > 0$, 因此 $s = s(t)$ 是 t 的严格单调增加函数. 当然这很直观, 从某个点开始计算弧长, 则随着参数增长对应的弧长一定严格增加.

由此可见, 存在反函数 $t = t(s)$, 这表明可以取弧长 s 作为参数, 即有 $x = x(s), y = y(s)$. 将曲线的这种表示方式 $x = x(s), y = y(s)$ 称为曲线的自然参数方程. 从

$$s = \int_0^s \sqrt{x'^2(\tau) + y'^2(\tau)}\,\mathrm{d}\tau$$

两边对 s 求导, 就得到

$$1 = \sqrt{x'^2(s) + y'^2(s)}.$$

这表明由 $(x'(s), y'(s))$ 决定的向量一定是单位长度的向量, 即单位向量.

在很多问题中对于其中的曲线采用弧长为参数的自然参数方程特别有利. 上面证明了对于光滑曲线这总是可能的.

这里附带指出, 对于参数方程表示的光滑曲线, 由于在 $x'(t), y'(t)$ 中至少有一个不是 0, 因此一定可以在该点的一个邻域内得到 $y = y(x)$ 或 $x = x(y)$ 的形式. 例如对于前一种情况, 切方向的斜率就是 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 从微分概念可见这就是 $\mathrm{d}y\colon \mathrm{d}x$, 而从参数方程求导法则早就知道这个比也就是 $y'(t)\colon x'(t)$. 特别是当采用弧长为参数时, $(x'(s), y'(s))$ 就是单位切向量, 它的指向是弧长的增加方向.

12.2.4 平面曲线的曲率

本小节要讨论如何刻画曲线的弯曲程度. 同一条曲线在不同点上的弯曲程度可以不一样, 除非是圆或直线. 从比较不同半径的圆弧可知它们的弯曲程度是不同的. 对于一般的曲线来说, 各个点处的弯曲程度也可能是不一样的.

如何度量曲线的弯曲程度? 我们采取的方法是用切向量方向作为曲线方向, 然后观察在曲线上经过相同弧长情况下曲线的方向变化的大小. 因此这也是一种变化率问题 (回忆第六章从变化率引入导数的过程).

具体来说, 设以弧长为参数的光滑曲线方程为 $\boldsymbol{r}(s)=(x(s),y(s))$, 它的方向由 $\boldsymbol{r}'(s)=(x'(s),y'(s))$ 确定. 但曲线从点 $\boldsymbol{r}(s)$ 变化到 $\boldsymbol{r}(s+\Delta s)$ 时, 曲线的方向从 $\boldsymbol{r}'(s)$ 变化到 $\boldsymbol{r}'(s+\Delta s)$. 如图 12.13 所示, 将方向的变化记为 $\Delta\varphi$. 此后的问题就与导数的定义完全相同, 这就是先写出平均变化率, 然后取极限.

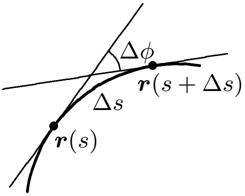


图 12.13: 曲率定义的由来

定义 12.2 光滑曲线 $\boldsymbol{r}(s)$ 在某一点处的曲率为

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\left|\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}\right|,$$

其中 φ 是切向量 $\boldsymbol{r}'(s)=(x'(s),y'(s))$ 的倾斜角.

例题 12.12 求半径为 R 的圆周的曲率 K.

解 容易看出, 与弧长的增量 Δs 对应的 $\Delta\varphi$ 等于 Δs 对应的圆心角, 即有 $\Delta\varphi=\dfrac{\Delta s}{R}$, 因此

$$K=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}=\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\frac{\Delta s}{R}}{\Delta s}=\frac{1}{R}. \quad \square$$

以上结论与直观是完全一致的, 即圆周上各个点的曲率相同, 而半径越小, 圆弧的弯曲程度越大, 半径越大, 则圆弧越是平坦, 即弯曲程度越小. 极端情况是直线, 它可以看成是半径无穷大的圆弧.

下面介绍曲率的具体计算公式.

(1) 曲线由直角坐标方程 $y=y(x)$ 给出. 这时 $\varphi=\arctan y'$, $\dfrac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}=\sqrt{1+y'^2}$, 于是有 (以 x 为参数的计算公式)

$$\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}s}=\frac{\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}x}}{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}x}}=\frac{y''}{1+y'^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}}=\frac{y''}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}},$$

取绝对值就得到所求的曲率公式:

$$K=\frac{|y''|}{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

注 对上述计算作一点解释. φ 作为弧长 s 的函数, 但它们又都是曲线参数的函数. 对于由 $y=y(x)$ 给出的曲线来说, 参数就是 x. 于是有 $\varphi=\varphi(x)$, $s=s(x)$. 由于 $s(x)$ 一定严格单调增加, 因此存在反函数 $x=x(s)$. 从而建立起函数关系 $\varphi(x(s))$. 因此求导法则与 §6.3.4 中的法则完全一样.

(2) 曲线由 $x=x(t), y=y(t)$ 给出. 这时只要将

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y_t'}{x_t'},\quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\left(\frac{y_t'}{x_t'}\right)_t'\cdot t_x'=\frac{y_t''x_t'-x_t''y_t'}{x_t'^3}$$

代入前面的公式即可得到

$$K=\frac{|y_t''x_t'-x_t''y_t'|}{(x_t'^2+y_t'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

对于曲线由极坐标方程给出的曲率公式留作为练习题.

在曲率概念的基础上下面给出曲率圆、曲率半径和曲率中心的定义, 它们对于理解曲率概念提供了非常具体的几何意义. 为简单起见, 在图 12.14 中对于用粗黑线表示的曲线 $y=y(x)$ 在点 (x_0,y_0) $(y_0=y(x_0))$ 处作出了曲线在该点的曲率圆, 其中设曲线在点 (x_0,y_0) 的曲率为 K.

定义 12.3 过点 (x_0,y_0) 且与曲线 $y=y(x)$ 在该点具有相同的一阶和二阶导数的圆 $(X-a)^2+(Y-b)^2=R^2$ 称为曲线在该点的曲率圆, 曲率圆的圆心 (a,b) 称为曲线 $y=y(x)$ 上点 (x_0,y_0) 的曲率中心, R 称为曲率半径.

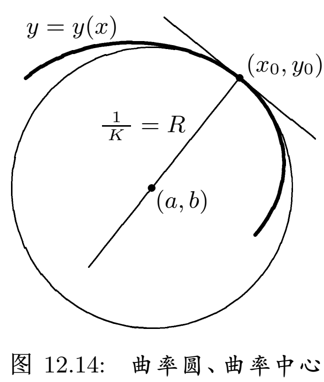


图 12.14: 曲率圆、曲率中心和曲率半径

由于曲线的曲率 K 只由一阶和二阶导数决定, 因此从定义可见, 曲率圆在该点的曲率也只能是 K. 从例题 12.12 知道圆的曲率处处等于其半径的倒数, 因此就有 $R=\dfrac{1}{K}$.

此外, 由于曲线和曲率圆在该点切线相同, 因此曲率中心一定在该点的法线上. 又从 $y''(x)$ 的符号可以确定当 $y''(x)>0$ 时, 曲率中心在点 $(x,y(x))$ 的上方, 而当 $y''(x)<0$ 时则在其下方. 这一点利用 §8.4 中的凸函数知识就容易理解. 从定义可知, 曲线在点 $(x,y(x))$ 的凸性与曲率圆在该点的凸性必须相同. 又利用上半圆为上凸, 而下半圆为下凸, 可见曲率圆一定位于所说的方向上.

例题 12.13 对于椭圆 $x(t)=10\cos t,\ y(t)=8\sin t,\ 0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上由参数值 $t_0=\pi/4$ 确定的点计算其曲率圆的半径和中心.

解 这里的点 (x_0,y_0) 为 $(5\sqrt{2},4\sqrt{2})$. 由曲率公式 $K=\dfrac{|x''y'-x'y''|}{(x'^2+y'^2)^{3/2}}$ 可以计

算出在该点的曲率 $K = \dfrac{80}{(82)^{3/2}}$, 因此 $R = 1/K \approx 9.28$. 求出椭圆在该点的导数值 -0.8, 然后过该点作出法线 $Y - y_0 = 1.25(X - x_0)$, 就可以计算出曲率中心 (a, b), 它们的近似值为 $a \approx 1.273, b \approx -1.591$. □

注 例题中的数据就是作图 12.14 的依据.

将曲率圆比切线提供了更多的信息. 它不仅提供了切线方向, 还提供了曲线在该点的弯曲程度和如何弯曲. 由于二阶导数与 Newton 力学第二定律的联系, 曲率在许多问题中都是不能不考虑的因素. 下面举一个例子.

例题 12.14 曲率概念的应用之一是铺设铁轨时对于弯道的联接问题. 若简单地将直线和圆弧联接, 则由于向心加速度的突然变化, 对于路基、铁轨和人都极其不利. 从数学角度来看, 就是要使得曲率变化有一个光滑的过渡. 我国一般采用 3 次曲线过渡.

具体来说, 如右边的示意图中那样, 设铁轨的直道取为 x 轴的负半轴, 从左方到原点后开始左拐弯. 要求前进方向 x_0 米时曲率半径到达指定的数值 r (例如 600米). 采用过渡曲线为 kx^3, 要求计算出 k. 前提是 $kx_0^3 \ll x_0$, 即 $kx_0^2 \ll 1$.

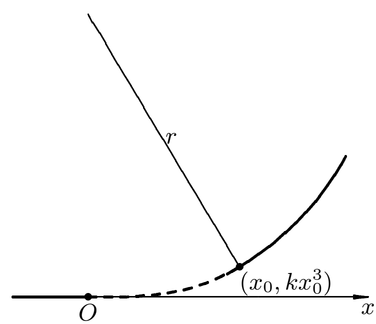


图 12.15: 过渡轨道问题示意图

解 在曲率半径公式 $R = \dfrac{1}{K} = \dfrac{(1+y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|y''|}$ 中用 $y = kx^3$, $x = x_0$, $R = r$ 代入, 并利用 $kx_0^3 \ll x_0$ 的前提条件, 则有

$$r = \frac{(1 + 9k^2x_0^4)^{\frac{3}{2}}}{6kx_0} \approx \frac{1}{6kx_0}.$$

同时过渡轨道的长度 $l = \displaystyle\int_0^{x_0} \sqrt{1 + y'^2}\,\mathrm{d}x \approx x_0$, 因此最后的公式为 $k = \dfrac{1}{6rl}$. 由此可以定出过渡轨道与圆形轨道的结合点位置.

例如, 设取 $r = 600$米, $l = 100$米, 则

$$kx_0^3 \approx \frac{1}{6 \times 600 \times 100} \cdot (100)^3 = \frac{100}{36} \approx 2.77,$$

即接近 3米. 这表明前进 100 米时向左偏转 3米 就实现了曲率从 0 到 1/600 的过渡, 然后就可以平滑地与半径为 600米的弯曲轨道联接了. □

思考题 计算三次曲线 $y = x^3$ 的曲率半径的变化规律.

注 从目前文献来看 (不限于铁轨铺设问题), 对于过渡轨道或缓和曲线等问题的研究很多, 有许多学术论文. 实际上凡是要将两条不同轨道连接时都有一个如何过渡的问题. 以上可以说是最简单的一类问题.

练习题

1. 求下列曲线的弧长:

(1) $y=\ln(1-x^2)$, $0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$;

(2) $y=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{x}\sqrt{\cos t}\,\mathrm{d}t$, $-\dfrac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{\pi}{2}$.

2. 证明: 旋轮线 $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$ $(a>0)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$ 上 $t\in(0,\pi)$ 的对应点 P 到顶点 $(\pi a,2a)$ 的弧长为 $s=4a\sin\theta$, 其中 θ 是旋轮线在点 P 的切线与 Ox 轴的夹角. (参见图 12.6 中的旋轮线.)

3. 给定曲线 $r=a(\sin\dfrac{\theta}{3})^3$ $(a>0)$, $0\leqslant\theta\leqslant 2\pi$, 证明: 它在 $[0,\dfrac{\pi}{2}]$, $[\dfrac{\pi}{2},\pi]$, $[\pi,\dfrac{3\pi}{2}]$ 上的弧长成等差数列, 并求曲线的全长.

4. 证明: 空间曲线 $l:\begin{cases}x^2+y^2+z^2=R^2\\ x^2+y^2=Rx\end{cases}$ 的弧长等于长轴为 $\sqrt{2}R$ 而离心率为 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 的椭圆的周长.

5. 求下列曲线在指定点的曲率:

(1) $y=\sin x$, $(\dfrac{\pi}{2},1)$;

(2) $y=\displaystyle\int_0^x(2t+1)\,\mathrm{d}t$, $(1,2)$;

(3) $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ $(a>0)$, $(\dfrac{\sqrt{2}a}{4},\dfrac{\sqrt{2}a}{4})$;

(4) $r=a\mathrm{e}^{\lambda\theta}$ $(a>0,\lambda>0)$, $\theta=\dfrac{1}{\lambda}$ 对应的点.

6. 记抛物线 $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ 上任意点的曲率半径为 R, 该点的弧长 (以某定点为起点) 为 s, 证明:

$$3R\cdot\frac{\mathrm{d}^2R}{\mathrm{d}s^2}-\left(\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}s}\right)^2=9.$$

7. 求曲线 $l: y=\mathrm{e}^x$ 上曲率达到最大的点.

8. 已知椭圆的参数方程为: $\begin{cases}x=2\cos t\\ y=\sin t\end{cases}$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 有人用如下方法求其面积:

$$r^2=x^2+y^2=4\cos^2 t+\sin^2 t,$$

$$S=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}r^2\,\mathrm{d}t=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}(4\cos^2 t+\sin^2 t)\,\mathrm{d}t=\frac{5\pi}{2},$$

而实际上椭圆的面积是 2π. 问: 错在何处?

§12.3 旋转体的体积和侧面积计算

12.3.1 一般体积公式

关于体积的一般性定义和计算方法将在多元微积分中解决. 但有一种简单情况则可以用一元函数的定积分来计算.

设有一个几何体夹在三维直角坐标系的两张平面 $x=a$ 和 $x=b$ 之间 $(a<b)$. 若对于每一个 $x\in[a,b]$, 用平面 $X=x$ 去截该几何体, 所得到的截面面积是能够计算出来的, 记为 $S=S(x)$. 则我们就可以将该几何体的体积定义为

$$V=\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x,$$

如果该积分收敛的话.

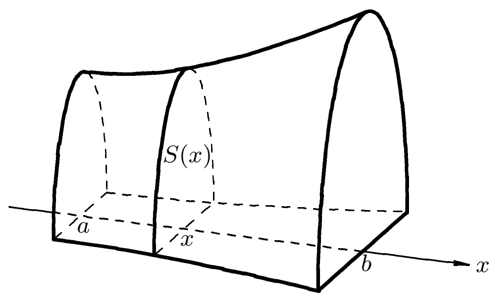


图 12.16: 与 x 轴方向垂直的截面面积已知

这里的思想与平面图形面积的定义完全相同. 首先用许多平行于 yz 坐标平面的平面去截该三维几何体, 这对应于 $[a,b]$ 的一个分划 P, 然后对介于两张平面之间的几何体近似地看成为母线平行于 x 轴的柱体, 从而它的体积近似地等于 $S(\xi_i)\Delta x_i$, 其中 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$. 对 i 求和得到 Riemann 和, 再令 $\|P\|\to 0$ 就得到定积分①.

以下用几个简单例子验证上述积分公式的合理性.

例题 12.15 求底面积 S 高为 h 的圆锥体体积.

解 如图 12.17 所示, 将圆锥体的顶点取为原点, 将与底面垂直的方向取为 z 轴, 将底面安置在水平平面 $z=h$ 上. 对于 $0\leqslant z\leqslant h$, 平行于底面的平面 $Z=z$ 与圆锥相交的截面为圆, 它的半径与 z 成比例, 因此截面面积 $S(z)$ 为 kz^2, 其中的系数 k 可以从条件 $kh^2=S$ 求出为 $k=\dfrac{S}{h^2}$, 于是截面面积为 $S(z)=\dfrac{S}{h^2}z^2$, 从而体积为

$$V=\int_0^h \frac{S}{h^2}z^2\,\mathrm{d}z=\frac{1}{3}Sh.\quad\square$$

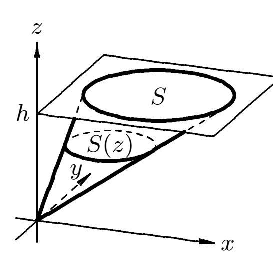


图 12.17: 倒放的斜圆锥体

---

① 这里可以回顾图 10.1 以及在 (10.2) 中定义的 Darboux 上和与下和, 从而可以证明, 在 $S(x)$ 为 Riemann 可积时, 作为上述几何体的体积的惟一数值只能是积分 $\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x$.

例题 12.16 求底面积为 S, 高为 h 的柱体的体积.

解 按照通常所取的方法, 可以将它夹在两个水平平面 $z=0$ 与 $z=h$ 之间, 而截面面积 $S(z)=S$ 是常数, 于是就有 $V=\int_0^h S(z)\,\mathrm{d}z=Sh.$ □

注 在上面两个例题中得到我们已经知道的柱体和圆锥体的体积公式, 其中的柱体可以是斜柱体, 即其母线和底面不必垂直, 同样, 如图 12.17 所示, 圆锥体也可以是斜圆锥体. 这就是说, 两个等高的几何体, 只要在所有等高处的水平截面面积相等, 则它们的体积相等. 这在中国古代数学中称为祖暅原理①.

例题 12.17 求椭球 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1$ 的体积 $(a,b,c>0)$.

解 用平行于 XoY 坐标平面的平面 $Z=z,\ -c\leqslant z\leqslant c$ 去截椭球, 则截面是椭圆, 可用下列方程描述:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leqslant 1-\frac{z^2}{c^2}.$$

将右边除到左边并写成标准形式, 就可以求出它的长半轴和短半轴, 这样就知道截面面积为

$$S(z)=\pi ab\Big(1-\frac{z^2}{c^2}\Big).$$

于是就可以计算得到

$$\begin{aligned}V&=\int_{-c}^{c}S(z)\,\mathrm{d}z=2\pi ab\int_0^c\Big(1-\frac{z^2}{c^2}\Big)\,\mathrm{d}z\\&=2\pi ab\Big(c-\frac{c^3}{3c^2}\Big)=\frac{4}{3}\pi abc.\quad\square\end{aligned}$$

12.3.2 旋转体的体积计算

可以纳入上述框架的一类几何体就是旋转体. 如右边的图 12.18 所示的几何体就是由曲边梯形 $\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant y(x)\}$ 围绕 x 轴旋转一周得到的旋转体. 这时与该 x 轴垂直的平面与几何体相交得到的截面是圆. 因此就得到旋转体体积公式为

$$V=\int_a^b \pi y^2(x)\,\mathrm{d}x.$$

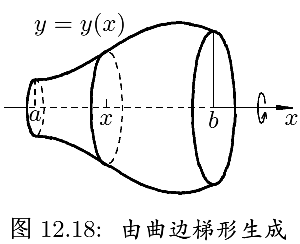


图 12.18: 由曲边梯形生成的旋转体

旋转体的体积计算虽然简单, 但还是有需要注意的地方.

① 祖暅 (公元 5–6 世纪), 中国南北朝齐梁时代的数学家、天文学家.

注　习惯上有时说由某条曲线围绕某条直线旋转而生成旋转体. 这不妥当. 曲线旋转只能生成旋转曲面. 封闭的旋转曲面围成的形体才是旋转体. 于是严格来说应当是某个平面图形围绕不经过其内部的直线旋转而得到旋转体. 这比图 12.18 中由曲边梯形围绕其底边得到的旋转体要更广一点. 此外还要注意, 这时与旋转轴垂直的平面与旋转体的截面不一定是圆, 也可能是圆环, 或者它们的并. 当然这样的截面面积仍然是容易计算的.

例题 12.18 设由抛物线 $y = 2x^2,\ 0 \leqslant x \leqslant 1$ 决定两个曲边梯形:

$$A_x = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 2x^2\},$$
$$A_y = \{(x, y) \mid 0 \leqslant y \leqslant 2, 0 \leqslant x \leqslant \sqrt{\frac{y}{2}}\},$$

求出 A_x 和 A_y 分别绕 x 轴和 y 轴旋转所产生的旋转体的体积 V_x 和 V_y (参看图 12.19).

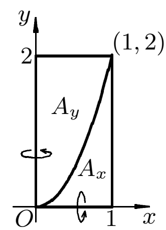


图 12.19: 由抛物线 $y = x^2$ 生成的两个曲边梯形

解　先计算出相应旋转体的截面面积, 就可计算得到

$$V_x = \int_0^1 \pi y^2 \,\mathrm{d}x = \pi \int_0^1 4x^4 \,\mathrm{d}x = \frac{4\pi}{5},$$
$$V_y = \int_0^2 \pi x^2 \,\mathrm{d}y = \pi \int_0^1 \frac{y}{2} \,\mathrm{d}y = \pi. \quad \square$$

例题 12.19 求一个救生圈的体积, 其内直径为 d_1, 外直径为 d_2 (参见图 12.20).

解　救生圈可由圆绕圆外的直线旋转生成. 从题意可知此圆的半径为 $r = \dfrac{d_2 - d_1}{4}$, 而圆心到旋转轴的距离为 $R = \dfrac{d_2 + d_1}{4} > r$. 如图 12.20 所示, 将此生成圆中心放在点 $(0, R)$ 处, 则对于 $-r \leqslant x \leqslant r$ 中的每个 x, $X = x$ 生成的截面是一个圆环, 外半径和内半径分别是 $R + \sqrt{r^2 - x^2}$ 和 $R - \sqrt{r^2 - x^2}$. 于是有

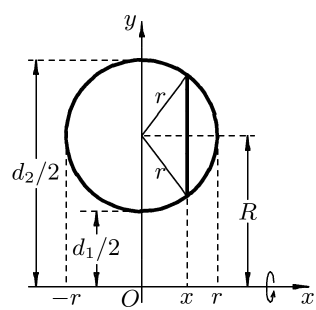


图 12.20: 救生圈的生成

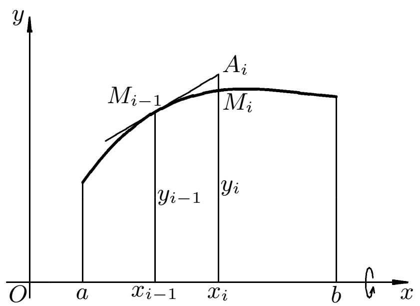
$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^{r} \pi[(R + \sqrt{r^2 - x^2})^2 - (R - \sqrt{r^2 - x^2})^2] \,\mathrm{d}x \\ &= 8\pi R \int_0^r \sqrt{r^2 - x^2} \,\mathrm{d}x = 8\pi R r^2 \cdot \frac{\pi}{4} = 2\pi^2 R r^2 \\ &= \frac{\pi^2}{32}(d_2 + d_1)(d_2 - d_1)^2. \quad \square \end{aligned}$$

注　最后的体积恰等于 $2\pi R \times \pi r^2$, 即形心绕旋转轴一周的周长乘上救生圈的截面面积. 这是后面要介绍的 Guldin 定理的特例.

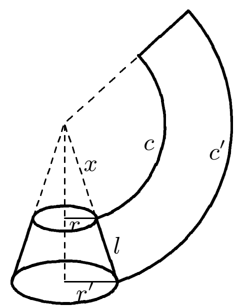
12.3.3 旋转曲面的面积

设在 $[a,b]$ 上有曲线 $y=y(x)\geqslant 0$, 将它围绕 x 轴旋转一周, 就得到旋转曲面. 对曲边梯形生成的旋转体而言, 称这个旋转曲面为旋转体的侧面积.

由于曲面面积定义要到多元微积分中学, 这里对于旋转曲面面积作如下定义. 设 $y(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续的导函数. 将 $[a,b]$ 的分划记为 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$. 如图 12.21(a) 所示, 从曲线上的点 $M_{i-1}=(x_{i-1},y_{i-1})$ 处作曲线的切线, 将它与 $x=x_i$ 的交点记为 A_i. 注意一般来说它与点 $M_i=(x_i,y_i)$ 不同. 对 $i=1,\cdots,n$ 都这样做. 然后将所有直线段 $M_{i-1}A_i$ 围绕 x 旋转一周得到的面积求和. 如果当 $\|P\|\to 0$ 时该和式有极限, 则就作为旋转曲面的面积. 这实际上就是用许多圆台的侧面积之和去逼近旋转曲面的面积.



(a)



(b)

图 12.21: (a) 用圆台侧面积之和逼近旋转曲面面积, (b) 圆台的侧面积计算

这里需要知道圆台的侧面积公式. 如图 12.21(b) 所示, 设圆台的上底面是半径 r 的圆, 下底面是半径 r' 的圆, 母线长 l, 则有公式 (其证明见底注[①])

$$S_{\text{圆台侧}}=\pi l(r'+r).$$

记 $y'_{i-1}=y'(x_{i-1})$. 在 $M_{i-1}A_i$ 绕 x 轴旋转一周生成的圆台中, $r=y_{i-1}$, $r'=y_{i-1}+y'_{i-1}\Delta x_i$, $l=\sqrt{1+y'^2_{i-1}}\Delta x_i$. 于是这个圆台的侧面积为

$$\begin{aligned}\Delta S_i&=\pi\sqrt{1+y'^2_{i-1}}\Delta x_i(2y_{i-1}+y'_{i-1}\Delta x_i)\\&=2\pi y_{i-1}\sqrt{1+y'^2_{i-1}}\Delta x_i+\pi y'_{i-1}\sqrt{1+y'^2_{i-1}}\Delta x_i^2.\end{aligned}$$

注意其中右边的第二项为增量的二次项.

---

① 圆台侧面积公式已是中学数学的必修内容. 为方便读者起见, 将公式推导附在下面. 如图 12.21(b) 所示, 将圆台的母线延长 x 得到正圆锥体, 并将它的侧面展开. 以圆台的上下底面为底圆的两个圆锥的侧面积分别为 $\frac{1}{2}xc$ 和 $\frac{1}{2}xc'$ (其中 c 和 c' 是两个底圆的周长), 也就是 πxr 和 $\pi(x+l)r'$. 圆台侧面积就是它们的差 $\pi lr'+\pi x(r'-r)$. 利用比例 $r':r=(l+x):x$ 就可以推出 $x(r'-r)=lr$, 最后得到 $S_{\text{圆台侧}}=\pi l(r'+r)$.

将上述的右边第一项对 i 从 1 到 n 相加, 并令分划的细度趋于 0, 由于 y' 连续, 因此就得到

$$S=\int_a^b 2\pi y(x)\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x. \tag{12.7}$$

余下的问题是证明 ΔS_i 的第二项加起来的极限为 0, 从而上述积分就是旋转曲面的面积计算公式.

由于每个第二项都是是增量的二次项, 因此它们之和可如下估计. 由于导函数 $y'(x)$ 于 $[a,b]$ 上连续, 存在 $M>0$, 使得 $|y'(x)|\leqslant M\ \forall\, x\in[a,b]$, 于是可以估计出

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i=1}^n \pi y'_{i-1}\sqrt{1+y'^2_{i-1}}\Delta x_i^2\right| &\leqslant \pi M\sqrt{1+M^2}\sum_{i=1}^n \Delta x_i^2\\ &\leqslant \pi M\sqrt{1+M^2}(b-a)\|P\|=o(1)\ (\|P\|\to 0),\end{aligned}$$

可见 $\sum\Delta S_i$ 的极限确实就是 (12.7) 中的积分.

利用弧长微分 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+y'^2(x)}\,\mathrm{d}x$, 可将旋转曲面面积公式 (12.7) 改记为

$$S=2\pi\int_a^b y\,\mathrm{d}s. \tag{12.8}$$

然后还可以将这个公式再发展一步. 这里的问题是如何处理平行于 y 轴的直线段绕 x 轴旋转得到的面积. 例如设 $0<c<d$, 从点 (a,c) 到 (a,d) 的直线段绕 x 轴旋转, 则得到一个圆环的面积为 $\pi(d^2-c^2)$. 可以看出它等于 $2\pi\displaystyle\int_c^d y\,\mathrm{d}y$. 这时的 $\mathrm{d}y=\mathrm{d}s$, 因此上述侧面积公式仍然成立.

综合以上分析, 就可以对于处于 x 轴上方的任意形状的光滑曲线 (包括封闭曲线) 绕 x 轴得到的曲面面积 (不限于旋转体的侧面积) 公式统一为:

$$S=2\pi\int_0^l y\,\mathrm{d}s, \tag{12.9}$$

其中以弧长 s 为自变量, l 是整条曲线的弧长.

注 1 在不少教科书中推导旋转曲面面积公式时采用下列方法. 首先 (在图 12.21(a) 中) 联接点 M_{i-1} 和 M_i, 然后将直线段 $M_{i-1}M_i$ 围绕 x 轴旋转得到的圆台侧面积对 i 求和, 最后将分划的细度趋于 0 时的极限定义为旋转曲面面积. 可以证明这个极限与 (12.7) 相同.

注 2 在旋转曲面面积公式方面要注意上述三个公式的共同点是其中弧长微分起核心作用. 一个常见错误是在公式 (12.8) 中将 $\mathrm{d}s$ 随意写为 $\mathrm{d}x$. 问题的根源还是对圆台侧面积公式的理解. 那里出现的 l 是圆台的母线长度, 它与上下底面之间的距离是不同的. (参看关于 $S_{\text{圆台侧}}$ 的底注中的推导过程.)

例题 12.20 求半径为 r 的球面面积.

解 将球面看成为 x 轴上方的半圆 $y=\sqrt{r^2-x^2}$ 绕 x 轴旋转得到的旋转曲面, 则用公式 (12.7) 即有

$$S=2\pi\int_{-r}^{r}y\sqrt{1+y'^2}\,\mathrm{d}x=2\pi\int_{-r}^{r}\sqrt{r^2-x^2}\cdot\frac{r}{\sqrt{r^2-x^2}}\,\mathrm{d}x=4\pi r^2.\quad\square$$

注 也可用 s 为自变量, 这时从 $(r,0)$ 点开始有 $y=r\sin\frac{s}{r}$, $l=\pi r$, 于是可用公式 (12.9) 作如下计算

$$S=2\pi\int_0^{\pi r}y\,\mathrm{d}s=2\pi\int_0^{\pi r}r\sin\frac{s}{r}\,\mathrm{d}s=2\pi\Big(-r^2\cos\frac{s}{r}\Big)\Big|_0^{\pi r}=4\pi r^2.$$

例题 12.21 求例题 12.19 中的救生圈的表面积. 用公式 (12.9), 这时有 $y=R+r\sin\frac{s}{r}$, 弧长 $l=2\pi r$, 于是就可以更为简单地计算如下:

$$S=2\pi\int_0^{2\pi r}y\,\mathrm{d}s=2\pi\int_0^{2\pi r}\Big(R+r\sin\frac{s}{r}\Big)\,\mathrm{d}s=2\pi R\times 2\pi r=4\pi^2Rr.\quad\square$$

练 习 题

1. 求由 $z=\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$, $z=h$ 所围的体积 V, 其中 $a,b,h>0$.

2. 求圆柱体 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 和 $y^2+z^2\leqslant R^2$ 的公共部分的体积.

3. 求由下列曲线旋转所生成曲面所包围的体积:

   (1) $y=\mathrm{e}^{-x}$, $y=0$, $0\leqslant x<+\infty$, (a) 绕 x 轴, (b) 绕 y 轴.

   (2) $x=\sqrt{y}$, $x^2+y^2=2$, $y=0$, 绕 y 轴.

   (3) $x=4y-y^2$, $x=0$, 绕 x 轴.

4. 证明: 用极坐标表示的平面图形 $\{(r,\theta)\mid 0\leqslant r\leqslant r(\theta),0\leqslant\alpha\leqslant\theta\leqslant\beta\leqslant\pi\}$ 绕极轴旋转的旋转体体积为
$$V=\frac{2\pi}{3}\int_\alpha^\beta r^3(\theta)\sin\theta\,\mathrm{d}\theta.$$

5. 求下列旋转曲面的面积:

   (1) $y=\sin x$, $0\leqslant x\leqslant\pi$, 绕 x 轴;

   (2) $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, $0<a<b$, 绕 y 轴;

   (3) $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\leqslant t\leqslant 2\pi$, 绕 x 轴;

   (4) $r^2=a^2\cos 2\varphi$, (a) 绕极轴, (b) 绕 $\varphi=\dfrac{\pi}{2}$, (c) 绕 $\varphi=\dfrac{\pi}{4}$;

   (5) 求 $y=\dfrac{a}{2}\cdot(\mathrm{e}^{\frac{x}{a}}+\mathrm{e}^{-\frac{x}{a}})$, $|x|\leqslant b$ 绕 x 轴旋转一周所产生的旋转体的面积.

§12.4 物理应用

从 Riemann 的下列评论就可以看出物理学与微积分的关系, 即

“只有在微积分发明之后, 物理学才成为一门科学.”

这一节我们只能举几个例子. 在第三册的多元积分学中还会看到微积分与物理学的更多联系. 同时在这一节还要讲两个都以 Guldin①命名的定理.

12.4.1 质量

与体积计算一样, 这里只考虑能用一元函数的定积分来计算的情况. 这就是质量分布只在某一个方向 (例如 x 轴的方向) 有变化, 而其他方向为均匀分布的情况.

设在 $[a,b]$ 上有质量发布. 为了计算其总质量首先要有质量密度的概念. 记密度函数为 $\rho(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, 它是从 x 到 $x+\Delta x$ 上的质量的平均密度 $\dfrac{\Delta m}{\Delta x}$ 取极限后得到的. 于是质量就是 $M = \displaystyle\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x$.

12.4.2 质心

先从离散情况开始. 设平面上有 n 个质点 $p_i(x_i, y_i)$, 它们的质量分别为 m_i, $i = 1, \cdots, n$, 则这个质点系统的质心的坐标可简记为

$$x_c = \frac{\sum m_i x_i}{\sum m_i}, \quad y_c = \frac{\sum m_i y_i}{\sum m_i}.$$

这里要指出, 从质心计算公式可以证明质心所具有的下列特性. 若将一个质点系统分成几个子系统, 分别计算出它们的质心, 并将每个子系统的质量集中在各自的质心, 然后再求出整个系统的质心, 则结果不变. 例如, 分成两个子系统时, 就可以从下列推导直接看出这个结论成立:

$$x_c = \frac{\sum mx}{\sum m} = \frac{\sum' mx + \sum'' mx}{\sum' m + \sum'' m} = \frac{M_1 \cdot \dfrac{\sum' mx}{M_1} + M_2 \cdot \dfrac{\sum'' mx}{M_2}}{M_1 + M_2}.$$

下面我们将多次利用质心的以上特性.

在离散系统的质心公式的基础上, 利用微积分就可以推广到质量连续分布的物体的质心计算. 但由于目前还只有一元函数的积分知识, 因此还是只能解决一维分布情况的质心计算.

设在 $[a,b]$ 上质量的密度函数为 $\rho(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, 则可以对区间 $[a,b]$ 先作分划, 然后在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上将质量近似地记为 $\rho(x_i)\Delta x_i$ (或 $\rho(\xi_i)\Delta x_i$), 且将其位置看成集中在 x_i 处, 则就可以套用上面的离散分布质点的质心公式, 得到

① 古尔丁 (Paul Guldin, 1577–1643), 瑞士数学家.

$$x_c \approx \frac{\sum x_i \rho(x_i)\Delta x_i}{\sum \rho(x_i)\Delta x_i},$$

然后令分划的细度趋于 0, 就得到公式

$$x_c = \frac{\displaystyle\int_a^b x\rho(x)\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_a^b \rho(x)\,\mathrm{d}x}.$$

分母就是总质量.

例题 12.22 设在 $[0,1]$ 上分布有密度为 $\rho(x)=hx$ 的质量, 则质心坐标为

$$x_c = \frac{\displaystyle\int_0^1 hx^2\,\mathrm{d}x}{\displaystyle\int_0^1 hx\,\mathrm{d}x} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}.$$

12.4.3 平面图形的形心

虽然我们目前没有多重积分的知识, 不能解决平面图形或几何体的许多问题, 但却可以解决平面图形的形心位置计算问题. 实际上所谓形心, 就是指质量均匀分布情况下的质心位置. 这时密度函数为常值函数, 因此无论从哪一个方向来看都可以作为一维问题解决.

现在推导形心的计算公式. 为简单起见, 取密度函数 $\rho \equiv 1$. 这时曲线的长度和平面图形的面积也就是它们的质量.

如图 12.22 所示, 考虑由

$$\{(x,y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y_1(x) \leqslant y \leqslant y_2(x)\}$$

定义的平面图形.

对 $[a,b]$ 取分划 P, 相应地将平面图形划分为许多平行于 y 轴的细长条. 将每一个细长条的质量 (即面积) 集中到细长条的中心, 对于 $[x_{i-1},x_i]$ 上的细长条来说, 这个中心的位置近似于 $(x_i, \dfrac{y_1(x_i)+y_2(x_i)}{2})$. 相应的质量近似于 $[y_2(x_i)-y_1(x_i)]\Delta x_i$. 对于这个离散的质点系统写出它的形心公式, 然后令 P 的细度趋于 0, 这样就得到所求的形心公式:

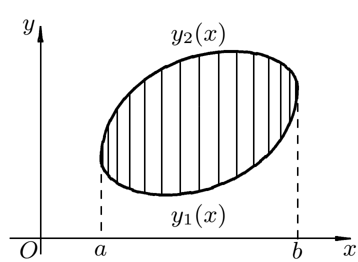


图 12.22: 求平面图形形心位置方法的示意图

$$x_c = \frac{\displaystyle\int_a^b x[y_2(x)-y_1(x)]\,\mathrm{d}x}{S}, \quad y_c = \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_a^b [y_2^2(x)-y_1^2(x)]\,\mathrm{d}x}{S}. \tag{12.10}$$

利用形心的纵坐标 y_c 的计算公式就可以得到下列的定理.

定理 12.2 (关于旋转体的 Guldin 定理) 平面图形围绕不穿过其内部的轴旋转得到的旋转体体积等于此图形的面积乘以图形形心旋转得到的圆周长.

证 不妨设图形在 x 轴上方, 并绕其旋转, 则从 (12.10) 中关于 y_c 的公式得到

$$2\pi y_c S = \pi \int_a^b [y_2^2(x) - y_1^2(x)]\,\mathrm{d}x, \tag{12.11}$$

回顾 §12.3.2 中关于旋转体的体积讨论, 可以看出上式右边就是平面图形围绕 x 轴旋转得到的旋转体的体积 V_x. □

注 利用上述形心的推导方法可以对于 V_x 给出一个新的计算公式. 首先注意到从上述 Guldin 定理同时也得到 $V_y = 2\pi x_c S$, 这里 V_y 是平面图形围绕 y 旋转得到的旋转体体积. 注意到两个体积公式很不相同, 又考虑到 x 和 y 的对称性, 因此, 又可以得到 V_x 的第二个公式:

$$V_x = 2\pi \int_c^d y s(y)\,\mathrm{d}y, \tag{12.12}$$

其中假设图 12.22 中的平面图形也可以表示为

$$\{(x,y) \mid c \leqslant y \leqslant d, x_1(y) \leqslant x \leqslant x_2(y)\},$$

然后取 $s(y) = x_2(y) - x_1(y)$. 容易看出, 这个旋转体体积公式也有明显的几何意义, 但与 §12.3.2 中的思想完全不同. 这里当然有一个问题, 即如何从数学上证明上述两个公式确实给出同一个 V_x. 这可以到多元积分学中解决.

例题 12.23 求上半圆 $\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2, y \geqslant 0\}$ 的形心.

解 由对称性知 $x_c = 0$. 为求 y_c 可以利用关于旋转体体积的 Guldin 定理. 由于图形绕 x 轴的旋转体就是半径 R 的球体, 因此就有

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi y_c \times \frac{1}{2}\pi R^2 = \pi^2 y_c R^2,$$

由此即可得到 $y_c = \dfrac{4R}{3\pi}$. □

注 这是在体积已知时用 Guldin 定理求形心位置, 反之, 在形心已知时则可利用 Guldin 定理求体积. 例如例题 12.19 (即求救生圈的体积), 就可从形心求出体积 $V = \pi r^2 \times 2\pi R = 2\pi^2 R r^2$.

12.4.4 平面曲线的形心

下面是求曲线的形心计算公式, 以及相应的 Guldin 定理.

设有密度为常值 (于是设 $\rho \equiv 1$) 的质量分布在一条平面曲线上, 这时也称其质心为曲线的形心. 将曲线 Γ 分成小段, 将质量集中在每一段上, 乘上坐标后求和, 再除以总的质量, 也就是曲线长度 l, 最后取极限就得到

$$x_c = \frac{\int_0^l x(s)\,\mathrm{d}s}{l}, \quad y_c = \frac{\int_0^l y(s)\,\mathrm{d}s}{l}. \tag{12.13}$$

这时也有相应的 Guldin 定理.

定理 12.3 (关于旋转曲面的 Guldin 定理) 平面曲线围绕不与其相交的轴旋转得到的旋转曲面面积等于平面曲线的弧长乘以曲线的形心旋转得到的圆周长.

证 设曲线 Γ 处于上半平面, 形心为 (x_c, y_c), 绕 x 轴旋转, 则从 (12.13) 中关于 y_c 的公式就有

$$2\pi y_c l = 2\pi \int_0^l y(s)\,\mathrm{d}s.$$

回顾旋转曲面面积公式 (12.9), 上式右边就是曲线绕 x 轴旋转生成的曲面面积. □

例题 12.24 求上半圆周 $\{(x,y) \mid x^2+y^2=R^2, y \geqslant 0\}$ 的形心位置.

解 由对称性知 $x_c = 0$. 由于这时的旋转曲面就是球面, 曲线长度为 πR, 用关于旋转曲面的 Guldin 定理, 则有 $2\pi y_c \times \pi R = 4\pi R^2$, 因此得到 $y_c = \dfrac{2R}{\pi}$. □

注 同样可以回顾例题 12.21 中关于救生圈表面积的计算, 它恰好等于 $2\pi R \times 2\pi r$, 这里 $2\pi R$ 就是形心绕 x 轴一周的长度, 而 $2\pi r$ 就是曲线长度.

练习题

1. 在空间的光滑曲线 $\boldsymbol{r} = (x(t), y(t), z(t))$, $t_0 \leqslant t \leqslant t_1$ 上分布着线密度为 $\rho = \rho(x,y,z)$ 的质量. 证明该曲线的质心坐标 (x_c, y_c, z_c) 的计算公式如下:
$$x_c = \frac{1}{M}\int_{t_0}^{t_1} \rho x \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t,$$
$$y_c = \frac{1}{M}\int_{t_0}^{t_1} \rho y \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t,$$
$$z_c = \frac{1}{M}\int_{t_0}^{t_1} \rho z \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t,$$
其中总质量 $M = \displaystyle\int_{t_0}^{t_1} \rho \sqrt{x'^2+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}t$.

2. 曲线 Γ 由 $x^2+y^2=R^2$, $y \geqslant 0$ 和 $y = 0$, $-R \leqslant x \leqslant R$ 组成. 求 Γ 的形心.

3. 求曲线 $x^2+(y-R)^2 = r^2$ $(R \geqslant r)$ 围绕 x 轴旋转一周所产生的面积.

4. 求 $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} \leqslant 1$, $x \geqslant 0$ 的形心.

§12.5 定积分的近似计算

由于初等函数的原函数未必是初等函数 (见 §9.3.1), 因此能够用 Newton–Leibniz 公式来计算的定积分很有限. 这样就必须发展对定积分的近似计算方法. 这方面的大量内容属于算数学的范畴, 本节只是介绍其中的几种最初步的方法及其误差估计.

12.5.1 矩形法

这就是用矩形面积来逼近曲边梯形面积. 从积分第一中值定理知道, 当 f 连续时, 一定存在一个矩形, 它的面积与曲边梯形面积相等 (参见图 10.9). 由于中值未知, 就用 $f(\dfrac{a+b}{2})(b-a)$ 来逼近 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 当然仅仅这样做还不切实用.

改进的办法是对区间 $[a,b]$ 用等距分划, 记分划细度 $h=\dfrac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$, $i=0,1,\cdots,n$. 对每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上用上述公式 (见图 12.23), 就得到

$$R_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}f\Big(\frac{x_{i-1}+x_i}{2}\Big).$$

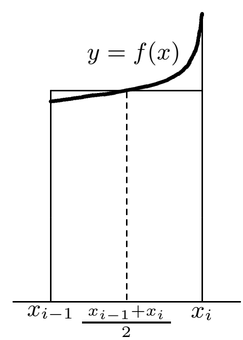


图 12.23: 矩形积分公式示意图

由于 R_n 是 f 在 $[a,b]$ 上的 Riemann 和, 只要 $f\in R[a,b]$, 当 $n\to\infty$ 时其极限就是积分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. 问题是收敛速度如何, 这就需要作误差分析.

首先在区间 $[0,1]$ 上研究. 设在 $[0,1]$ 上的函数 F 二阶连续可微, 在点 $1/2$ 处展开得到带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式:

$$F(t)=F(\frac{1}{2})+F'(\frac{1}{2})(t-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}F''(\xi)(t-\frac{1}{2})^2.$$

然后对 t 从 0 到 1 积分, 利用 $t-\dfrac{1}{2}$ 关于区间中点 $\dfrac{1}{2}$ 为奇函数, 就有

$$\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t=F(\frac{1}{2})+\frac{1}{2}\int_0^1 F''(\xi)(t-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}t.$$

对于右边的第二项, 如积分第一中值定理所示, 利用第二个因子 $(t-\dfrac{1}{2})^2$ 保号, $F\in C[0,1]$, 即可知存在 $\eta\in[0,1]$, 得到

$$\begin{aligned}\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t-F(\frac{1}{2})&=\frac{1}{2}F''(\eta)\int_0^1(t-\frac{1}{2})^2\,\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2}F''(\eta)\cdot\frac{1}{3}(t-\frac{1}{2})^3\Big|_0^1=\frac{1}{24}F''(\eta).\end{aligned}$$

下一步, 对于 $[a,b]$ 上的二阶连续可微函数 $f(x)$, 令 $F(t)=f(a+(b-a)t)$, 即作代换 $\dfrac{x-a}{b-a}=t$, 就有 $F''(t)=(b-a)^2f''(a+(b-a)t)$, 于是有 $\xi\in[a,b]$, 使得

成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=(b-a)\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t=(b-a)f(\frac{a+b}{2})+\frac{1}{24}(b-a)^3f''(\xi).$$

最后, 对于 $[a,b]$ 的 n 等距分划, 在子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上就有

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x=hf(\frac{x_{i-1}+x_i}{2})+\frac{1}{24}h^3f''(\xi_i).$$

对 i 从 1 到 n 求和, 就得到

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=R_n+\frac{nh^3}{24}\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n f''(\xi_i)\right),$$

其中 $nh^3=\dfrac{(b-a)^3}{n^2}$. 从 $f''\in C[a,b]$, $\exists\xi\in[a,b]: f''(\xi)=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n f''(\xi_i)$. 这样就得到所要的误差估计为

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-R_n=\frac{(b-a)^3}{24n^2}f''(\xi)=O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

12.5.2 梯形法

这就是用直角梯形逼近曲边梯形. 对于 $[a,b]$ 上的 $f(x)$, 即用 $\dfrac{b-a}{2}\cdot[f(a)+f(b)]$ 来逼近 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

当然在实际使用时也是对于 $[a,b]$ 用等距 n 分划, $h=\dfrac{b-a}{n}$, $x_i=a+ih$, $i=0,1,\cdots,n$, 然后对每个 $[x_{i-1},x_i]$ 上的曲边梯形用直角梯形代替, 得到

$$T_n=\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^n\frac{1}{2}\cdot[f(x_{i-1})+f(x_i)].$$

实际上这也可以理解为用联接所有 $(x_i,f(x_i))$ $(i=0,1,\cdots,n)$ 的折线来逼近 $y=f(x)$, 而 T_n 就是由此折线生成的曲边梯形的面积, 因此也称为折线公式.

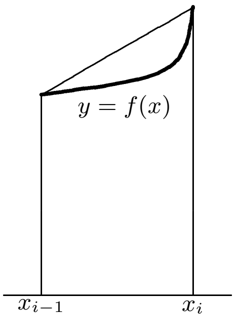


图 12.24: 梯形公式示意图

下面同样进行误差分析, 我们看是否比矩形公式有改进.

先在 $[0,1]$ 上证明, 若 F 在 $[0,1]$ 上二阶连续可微, 则存在 $\xi\in[0,1]$, 使得

$$\int_0^1 F(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{2}[F(0)+F(1)]-\frac{1}{12}F''(\xi).$$

证明方法是作辅助函数

$$\varphi(x)=F(x)-[F(0)+x(F(1)-F(0))].$$

这时 $\varphi''(x)=F''(x)$, $\varphi(0)=\varphi(1)=0$. 于是有

$$\int_0^1\varphi(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 F(x)\,\mathrm{d}x-\frac{1}{2}[F(0)+F(1)].$$

另一方面有

$$\begin{aligned}\int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \varphi(x)\,\mathrm{d}(x-\frac{1}{2}) = \varphi(x)(x-\frac{1}{2})\Big|_0^1 - \int_0^1 \varphi'(x)(x-\frac{1}{2})\,\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^1 \varphi'(x)\,\mathrm{d}(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x) \\ &= -\varphi'(x)(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x)\Big|_0^1 + \int_0^1 \varphi''(x)(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2}F''(\xi)\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{12}F''(\xi).\end{aligned}$$

以此为基础就可以如前面一样得到以下结果:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}(b-a)[f(a)+f(b)] - \frac{1}{12}(b-a)^3 f''(\zeta),$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{h}{2}[f(x_{i-1})+f(x_i)] - \frac{h^3}{12}f''(\zeta_i), i=1,\cdots,n,$$

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - T_n = -\frac{1}{12}\cdot\frac{(b-a)^3}{n^2}f''(\zeta) = O\Big(\frac{1}{n^2}\Big).$$

由此可见, 梯形法与矩形法没有多大差别.

12.5.3 抛物线法

下面介绍抛物线公式, 也称为 Simpson① 公式.

对于 $[a,b]$ 上的 $f(x)$, 用经过其图像上三点 $(a,f(a)),(\dfrac{a+b}{2},f(\dfrac{a+b}{2})),(b,f(b))$ 的二次多项式 (即抛物线) 来代替 $f(x)$, 这就是抛物线方法的思想. 回顾前面的矩形公式, 就是用经过点 $(\dfrac{a+b}{2},f(\dfrac{a+b}{2}))$ 的常值函数 (即 0 次多项式) 代替 $f(x)$, 而梯形公式就是用经过两点 $(a,f(a)),(b,f(b))$ 的一次多项式代替 $f(x)$.

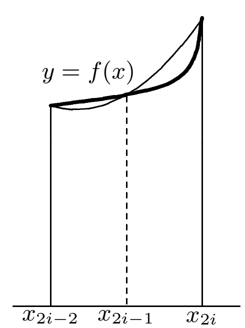


图 12.25: 抛物线公式示意图

当然还是需要对 $[a,b]$ 作分划. 由于要三点决定二次三项式, 因此采取等距 $2n$ 分划, 即 $h=(b-a)/2n$, $x_i = a+ih$, $i=0,1,\cdots,2n$, 然后在每个子区间 $[x_{2i-2},x_{2i}]$ 上用抛物线方法. 根据下面的一个引理, 可以证明在抛物线下的面积为:

$$\frac{1}{6}[f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})]\times\frac{b-a}{n},$$

然后对 i 从 1 加到 n, 就得到

$$S_{2n} = \frac{b-a}{6n}\sum_{i=1}^{n}[f(x_{2i-2})+4f(x_{2i-1})+f(x_{2i})].$$

为了解释上面公式中的系数 $1/6, 4/6, 1/6$ 是如何来的, 我们先证明下面的一个简单而有趣的引理. 它使得我们不必求出图 12.25 中的抛物线方程就可以直接写出

① 辛普森 (Thomas Simpson, 1710–1761), 英国数学家.

抛物线下的面积.

引理 设 f 是不超过 3 次的多项式, 则有

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)](b-a).$$

证 不妨只对 $[0,1]$ 上的 $f(t)$ 写出证明, 然后用代换 $x=a+(b-a)t$ 得到一般情况的结论. 又由于两边关于 F 都是线性运算因此只需要对于 $f(t)$ 为 $1,t,t^2,t^3$ 这 4 个单项式来检验等式成立就够了. 而这是容易计算的:

$$\int_0^1 \mathrm{d}t = \frac{1}{6}(1+4+1)=1,$$
$$\int_0^1 t\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}(0+4\cdot\frac{1}{2}+1)=\frac{1}{2},$$
$$\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}(0+4\cdot\frac{1}{4}+1)=\frac{1}{3},$$
$$\int_0^1 t^3\,\mathrm{d}t = \frac{1}{6}(0+4\cdot\frac{1}{8}+1)=\frac{1}{4}.$$

由此可见引理为真. □

注 这个引理中的公式有一个名称:"万能公式", 它可以用于求许多几何体的体积. 使用方法是求出上底面、中截面和下底面的面积, 乘以权重系数 $1,4,1$ 后相加, 再乘高除 6 即可. 例如, 对于半径 r 的球, 则有

$$V=\frac{2r}{6}(0+4\cdot\pi r^2+0)=\frac{4}{3}\pi r^3.$$

此外, 万能公式还可以用于计算棱柱、棱锥、棱台、圆柱、圆锥和圆台的体积. 它还可以用于计算平面图形的面积, 例如平行四边形、梯形和三角形等. 但可惜对于圆面积则不能给出准确结果.

由于抛物线公式的误差估计比较复杂, 将它专门列为下一小节.

12.5.4 抛物线公式的误差估计

如同对于矩形公式和梯形公式的误差估计那样, 主要工作在于证明下面定理中的结论, 然后就可以推到一般.

定理 12.4 设 $f\in C^4[-1,1]$, 则存在 $\xi\in[-1,1]$, 使得成立

$$\int_{-1}^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)]-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}. \tag{12.14}$$

证 分以下几步来证明.

(i) 引入二次多项式 $p(x)$, 使得 $p(-1)=f(-1)$, $p(0)=f(0)$, $p(1)=f(1)$, 这时从引理有

$$\int_{-1}^1 p(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}[f(-1)+4f(0)+f(1)].$$

然后构造辅助函数[①]

$$\varphi(x)=f(x)-p(x)+(f'(0)-p'(0))(x^3-x).$$

则 $\varphi(-1)=\varphi(0)=\varphi(1)=\varphi'(0)=0$. 且 $\varphi^{(4)}(x)=f^{(4)}(x)$. 这时有

$$\int_{-1}^{1}[f(x)-p(x)]\,\mathrm{d}x=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x. \tag{12.15}$$

于是问题归结为如何估计右边的积分.

(ii) 利用微分中值定理应用中的待定常数法 (参见第一册 242 页底注), 我们来证明: 对每个 $x\in[-1,1]$, 存在 $\zeta\in(-1,1)$, 使得

$$\varphi(x)=\frac{f^{(4)}(\zeta)}{4!}\cdot x^2(x^2-1). \tag{12.16}$$

若 $x=\pm1,0$, 则 ζ 可任取. 否则, 令

$$\lambda=4!\cdot\frac{\varphi(x)}{x^2(x^2-1)},$$

定义辅助函数

$$F(t)=\varphi(t)-\lambda\cdot\frac{t^2(t^2-1)}{4!},\quad t\in[-1,1],$$

这时有 $F(0)=F(-1)=F(1)=F(x)=0$, $F'(0)=0$. 反复应用 Rolle 定理可知存在 $\zeta\in(-1,1)$, 使得 $F^{(4)}(\zeta)=0$, 即 $\varphi^{(4)}(\zeta)=\lambda$, 这就是 (12.16).

(iii) 将 (12.16) 代入 (12.15) 的右边, 并利用导函数 $f^{(4)}\in C[-1,1]$, 就可以如积分第一中值定理所示存在 $\xi\in[-1,1]$, 使得成立

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}[f(x)-p(x)]\,\mathrm{d}x&=\int_{-1}^{1}\varphi(x)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\int_{-1}^{1}x^2(x^2-1)\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}.\quad\square\end{aligned}$$

下一步是考虑一般的区间 $[a,b]$. 作代换 $x=\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b-a}{2}t$, 就有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x&=\frac{b-a}{2}\int_{-1}^{1}f(\frac{a+b}{2}+\frac{b-a}{2}t)\,\mathrm{d}t\\&=\frac{b-a}{6}[f(a)+4f(\frac{a+b}{2})+f(b)]-\frac{f^{(4)}(\xi)}{90}\cdot\left(\frac{b-a}{2}\right)^5.\end{aligned}$$

这样就可以对于前面所作的等距 $2n$ 分划, 即 $h=(b-a)/2n$, $x_i=a+ih$, $i=0,1,\cdots,2n$, 对 $i=0,1,\cdots,n-1$ 有

---

① 从 (12.15) 可见, 引入 $\varphi(x)=f(x)-p(x)$ 是最为自然的. 然而这样下去会发现用积分第一中值定理时保号性条件不能成立. 因此需要在辅助函数中增加一项, 它是 x^3-x 的倍数. 由于这是奇函数, 在 $[-1,1]$ 上积分为 0, 因此不影响 (12.15) 的成立. 另一方面, 利用系数 $f'(0)-p'(0)$ 可以使得 $\varphi'(0)=0$, 从而使得 (12.16) 中出现的导数为 4 阶.

$$\int_{x_{2i}}^{x_{2i+2}} f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{6}[f(x_{2i}) + 4f(x_{2i+1}) + f(x_{2i+2})] \times \frac{b-a}{n} + r_i,$$

其中

$$r_i = -\frac{f^{(4)}(\xi_i)}{90} \cdot \left(\frac{b-a}{2n}\right)^5.$$

对于 i 求和后就有误差估计为

$$\begin{aligned} r &= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - S_{2n} \\ &= r_0 + r_1 + \cdots + r_{n-1} \\ &= -\frac{1}{90}[f^{(4)}(\xi_0) + \cdots + f^{(4)}(\xi_{n-1})] \cdot \left(\frac{b-a}{2n}\right)^5. \end{aligned}$$

最后再利用 $f^{(4)}$ 的介值性, 就存在 $\xi \in [a,b]$, 使得

$$r = -\frac{1}{90} \cdot nf^{(4)}(\xi) \cdot \left(\frac{b-a}{2n}\right)^5 = -\frac{f^{(4)}(\xi)(b-a)^5}{4!120\,n^4} = O\Big(\frac{1}{n^4}\Big).$$

由此可见, 抛物线法要比矩形法和梯形法好得多, 是一种比较实用的数值积分方法. 在有的计算器上的积分计算就是用这种方法来编制程序的.

12.5.5 Gauss 求积法

Gauss[①]求积法的思想与前面的矩形法、梯形法和抛物线法不同, 但与上一小节中的引理却有相似之处. 它的目标是要求公式对于所有不超过某次的多项式都能够提供精确结果. 不同之处在于除了要选择每一项的系数之外, 同时还考虑在什么点上计算被积函数的值.

这里只介绍 Gauss 求积法的一个特例. 分析表明, 对于不超过 3 次的多项式, 只要计算两个点上的值就够了. 设在 $[-1,1]$ 上对于所有不超过 3 次多项式要求精确成立以下求积公式:

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = w_1 f(t_1) + w_2 f(t_2),$$

问: 如何取 w_1, w_2, t_1, t_2.

与引理的证明方法相同, 用 f 为 $1, t, t^2, t^3$ 代入, 得到方程

$$\begin{aligned} 2 &= w_1 + w_2, & 0 &= w_1 t_1 + w_2 t_2, \\ \frac{2}{3} &= w_1 t_1^2 + w_2 t_2^2, & 0 &= w_1 t_1^3 + w_2 t_2^3. \end{aligned}$$

从右边两个方程可推出 $t_1 = -t_2$, $w_1 = w_2$. 再联合第一个方程可见 $w_1 = w_2 = 1$. 最后求出 $t_1^2 = t_2^2 = \dfrac{1}{3}$. 这样就得到 Gauss 公式:

① 高斯 (Carl Friedrich Gauss, 1777–1855), 德国数学家, 与 Archimedes 和 Newton 一起被认为是有史以来贡献最大的三位数学家之一. 他对天文学、测地学和电磁学也有重要贡献.

$$\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = f(-\frac{1}{\sqrt{3}}) + f(\frac{1}{\sqrt{3}}).$$

若令 $x = \dfrac{a+b}{2} + \dfrac{b-a}{2}t$, 则当 t 从 -1 到 1 时, x 就从 a 到 b. 于是就有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1} f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2}t)\cdot\frac{b-a}{2}\,\mathrm{d}t\\ &= \frac{b-a}{2}\left[f(\frac{a+b}{2} - \frac{b-a}{2\sqrt{3}}) + f(\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2\sqrt{3}})\right],\end{aligned}$$

它对于所有不超过 3 次的多项式给出精确结果.

关于 Gauss 求积法的一般性介绍及其误差分析可以在计算数学的书中找到.

练 习 题

1. 将 $[0,1]$ 10 等分, 分别用梯形公式和抛物线公式计算 $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的近似值, 并与其 6 位有效值 0.946083 作比较.

2. 若 $f \in R[a,b]$, 证明:
$$\lim_{n\to\infty} M_n = \lim_{n\to\infty} T_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

3. 设 $f'' \in C[a,b]$, 证明: 存在 $\xi \in [a,b]$, 使得成立
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{f(a)+f(b)}{2}\cdot(b-a) - \frac{f''(\xi)}{12}\cdot(b-a)^3.$$

4. 若 $f'' \in C[a,b]$, $f''(x) \leqslant 0\ \forall x \in [a,b]$, 证明:
$$T_n - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant 0.$$

5. 证明: 当 $n \geqslant 2$ 时成立下列不等式:
$$\frac{3n+1}{2n+2} < \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^n < 1.6.$$

§12.6 Wallis 公式与 Stirling 公式

12.6.1 Wallis 公式

出发点是定积分 $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n x\,\mathrm{d}x$ (见例题 10.33). 已知有

$$I_n=\begin{cases}\dfrac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n=2k,\\ \dfrac{(2k)!!}{(2k+1)!!}, & n=2k+1.\end{cases}$$

这里对 n 为奇数和偶数的公式很不一样, 似乎很奇怪. 但可以证明

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}}=1. \tag{12.17}$$

下面会看到这就是 Wallis 公式.

从 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的不等式

$$\sin^{2n+2}x\leqslant\sin^{2n+1}x\leqslant\sin^{2n}x$$

出发, 得到 $I_{2n+2}<I_{2n+1}<I_{2n}$. 由此就有

$$I_{2n+2}=\frac{2n+1}{2n+2}I_{2n}<I_{2n+1}<I_{2n},$$

除以 I_{2n}, 并令 $n\to\infty$, 用夹逼定理就得到 (12.17).

将 (12.17) 中的 I_{2n}, I_{2n+1} 用前面的定积分结果代入, 就得到 Wallis 公式.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n+1}\cdot\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{2}{\pi}=1. \tag{12.18}$$

注意: Wallis 公式可以有多种形式出现. 例如以下几个都是 Wallis 公式, 可以根据不同场合选用:

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sim\sqrt{\pi n}, \tag{12.19}$$

$$I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n x\,\mathrm{d}x\sim\sqrt{\frac{\pi}{2n}}, \tag{12.20}$$

$$\mathrm{C}_{2n}^n=\frac{(2n)!}{(n!)^2}\sim\frac{2^{2n}}{\sqrt{\pi n}}. \tag{12.21}$$

12.6.2 Stirling 公式

在过去已经有关于 $n!$ 的许多结果. 从无穷大量来看, 已经知道对于任何 $a>1$, 有 $a^n\ll n!\ll n^n$. (见例题 4.20 和其中所引第二章中的练习题.) Stirling 公式则给出了 $n!$ 的确切描述, 即

$$n!\sim\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}. \tag{12.22}$$

Stirling 公式的证明 从 $\dfrac{n^n}{n!}$ 的下列分解开始:

$$\frac{n^n}{n!}=\frac{n^{n-1}}{(n-1)!}=\left(\frac{2}{1}\right)\left(\frac{3}{2}\right)^2\left(\frac{4}{3}\right)^3\cdots\left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1},$$

取对数, 得到

$$n\ln n-\ln n!=\sum_{k=1}^{n-1}k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right). \tag{12.23}$$

利用对数函数 $f(x)=\ln(1+x)$ 的带 Lagrange 型余项的 Maclaurin 展开式, 从 $f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$, $f''(x)=-\dfrac{1}{(1+x)^2}$, $f'''(x)=\dfrac{2}{(1+x)^3}$, 得到

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3(1+\theta x)^3}\quad(0<\theta<1),$$

其中的 θ 与 x 有关. 注意: 当 $x>0$ 时 $1+\theta x>1$.

对于 $x=\dfrac{1}{k}$, 将与之对应的 $\dfrac{1}{(1+\theta/k)^3}$ 记为 $\theta_k\in(0,1)$, 就有

$$\ln(1+\frac{1}{k})=\frac{1}{k}-\frac{1}{2k^2}+\frac{\theta_k}{3k^3}\quad(0<\theta_k<1).$$

令 $k=1,\cdots,n-1$, 并将它们代入 (12.23) 就得到

$$\begin{aligned}n\ln n-\ln n!&=\sum_{k=1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{2k}+\frac{\theta_k}{3k^2}\right)\\&=n-1-\frac{1}{2}\ln n-\frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k}-\ln n\right)+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{\theta_k}{3k^2}.\end{aligned}$$

利用第二章中关于 Euler 常数的例题 2.29, 并参考例题 2.41, 可见上式最后两项当 $n\to\infty$ 时都收敛. 这样就得到

$$\ln n!-n\ln n+n-\frac{1}{2}\ln n=C+o(1),$$

再改写为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n!}{\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n}}=\mathrm{e}^C=S>0.$$

余下的问题就是计算出极限 S 的数值. 用 Wallis 公式即可解决如下:

$$\begin{aligned}\sqrt{\pi}&=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!\sqrt{n}}\ \text{(下面利用等价量代换方法)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{2n}\left[S\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{n}\right]^2}{S\left(\dfrac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\sqrt{2n}\sqrt{n}}=\frac{S}{\sqrt{2}},\end{aligned}$$

因此 $S=\sqrt{2\pi}$. □

注 例题 2.31 中的 $\sqrt[n]{n!}\sim\dfrac{n}{\mathrm{e}}$ 可以从 Stirling 公式推出, 可以说是 Stirling 公式的弱形式.

附录 从 Kepler 三大定律到万有引力定律

在这个附录中我们介绍微积分在科学史上的第一次有重大意义的应用, 这就是如何从 Kepler 的行星运动三大定律通过微积分推导出万有引力定律. 这项研究是由 Newton 完成的, 于 1687 年发表于他的划时代著作 [21] 中.

由于 Newton 的微积分在当时是用几何语言表达的, 不易理解, 与今天的数学分析差距太大, 下面的讲述只用现代语言来进行 [21].

从 Kepler 关于行星运动的第一定律开始.

Kepler 第一定律 *行星绕太阳的运动轨迹是椭圆, 太阳位于椭圆的一个焦点上.*

容易理解在这里采用直角坐标下的标准方程 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 是不合适的. 我们将太阳 (作为一个质点) 的位置取为原点, 将椭圆用极坐标方程表示为

$$r=\frac{p}{1-\varepsilon\cos\theta}, \tag{N1}$$

其中设椭圆的两个半轴长为 $0<b<a$, 偏心率 $\varepsilon=\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$, 焦参数 $p=\dfrac{b^2}{a}$.

然而方程 (N1) 还只是行星运动的轨迹, 行星在椭圆上的真实运动是由第二定律来描述的. 这就是

Kepler 第二定律 (等面积定律) *从太阳到行星的联线在相等的时间内所扫过的面积相等.*

如何揭示在这条定律背后的深刻含义, 是一个极为关键的问题. Newton 用他特有的方法发现上述第二定律就表明太阳对行星的作用为向心的引力. 下面我们用微积分来做.

为此首先需要以时间 t 为参数来描述平面上的曲线运动. 采用极坐标并写为向量值函数

$$\boldsymbol{r}(t)=r(t)\cos\theta(t)\,\boldsymbol{i}+r(t)\sin\theta(t)\boldsymbol{j},$$

其中右方的 $r(t)$ 和 $\theta(t)$ 都是时间 t 的标量函数. 将 $\boldsymbol{r}(t)$ 对 t 求导两次, 得到加速度向量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}(t)=\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t^2}&=(\ddot r\cos\theta-2\dot r\dot\theta\sin\theta-r\dot\theta^2\cos\theta-r\ddot\theta\sin\theta)\,\boldsymbol{i}\\&\quad+(\ddot r\sin\theta+2\dot r\dot\theta\cos\theta-r\dot\theta^2\sin\theta+r\ddot\theta\cos\theta)\,\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

这个表达式看上去比较复杂, 但很容易简化. 为此引入两个单位向量, 即矢径方向的单位向量和与之正交的单位向量,

$$\boldsymbol{e}_r=\cos\theta\,\boldsymbol{i}+\sin\theta\,\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{e}_n=-\sin\theta\,\boldsymbol{i}+\cos\theta\,\boldsymbol{j},$$

从而就可以将上述加速度向量表示为

$$\boldsymbol{a}(t)=(\ddot r-r\dot\theta^2)\,\boldsymbol{e}_r+(2\dot r\dot\theta+r\ddot\theta)\,\boldsymbol{e}_n. \tag{N2}$$

现在回顾 Kepler 第二定律, 即从太阳到行星的矢径在相等的时间内扫过的面积相等. 记矢径从角度为零开始到角度为 θ 时所扫过的面积为 $A(\theta)$, 根据极坐标下的面积公式有

$$A(\theta) = \frac{1}{2}\int_0^\theta r^2(\tau)\,\mathrm{d}\tau.$$

根据等面积定律, 将上式对 t 求导应当为常数. 用求导的链式法则得到

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\theta}\cdot\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \text{常数}. \tag{N3}$$

对最后一个等式再求导一次, 将常数消去, 并约去一个因子 r, 就得到

$$\dot{r}\dot{\theta} + \frac{1}{2}r\ddot{\theta} = 0. \tag{N4}$$

将这个关系代入加速度公式 (N2) 中, 就得到

$$\boldsymbol{a}(t) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{e}_r.$$

这样就证明了加速度 $\boldsymbol{a}$ 与矢径 $\boldsymbol{r}$ 的方向共线.

应用 Newton 的力学第二定律, 可见太阳对行星的作用力为

$$\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\boldsymbol{e}_r. \tag{N5}$$

下面的问题就是要确定 (N5) 中系数 $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ 的符号和大小与什么有关.

为此先将椭圆的极坐标方程 (N1) 改写为

$$p = r(1 - \varepsilon\cos\theta),$$

求导两次得到

$$0 = \ddot{r}(1-\varepsilon\cos\theta) + 2\varepsilon\dot{r}\dot{\theta}\sin\theta + r\varepsilon\dot{\theta}^2\cos\theta + r\varepsilon\ddot{\theta}\sin\theta.$$

利用关系式 (N4) 可见上式右边第二项与第四项之和为 0, 因此得到

$$\ddot{r} = -\frac{r\varepsilon\dot{\theta}^2\cos\theta}{1-\varepsilon\cos\theta}.$$

这样就可以计算出

$$\begin{aligned}\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 &= \frac{-r\varepsilon\dot{\theta}^2\cos\theta - r\dot{\theta}^2 + r\varepsilon\dot{\theta}^2\cos\theta}{1-\varepsilon\cos\theta} = -\frac{r\dot{\theta}^2}{1-\varepsilon\cos\theta}\\ &= -\frac{r^2\dot{\theta}^2}{p} = -\frac{a}{b^2}r^2\dot{\theta}^2.\end{aligned}$$

将这个结果代入力 $\boldsymbol{F}$ 的表达式 (N5) 中, 得到

$$\boldsymbol{F} = -\frac{ma}{b^2}r^2\dot{\theta}^2\,\boldsymbol{e}_r.$$

由此可见太阳对于行星的作用力是向心力. 为了看出右边的系数与什么有关, 再次利用 (N3), 即 $r^2\dot{\theta} =$ 常数, 就可以将力 $\boldsymbol{F}$ 的上述表达式改写为

$$\boldsymbol{F} = -\frac{ma}{b^2r^2}(r^2\dot{\theta})^2\boldsymbol{e}_r = -\frac{m}{r^2}\cdot\frac{a}{b^2}(r^2\dot{\theta})^2\,\boldsymbol{e}_r. \tag{N6}$$

由此可见, 行星在轨道上所受的引力确实与距离平方成反比. 但其中的比例常数由什么决定? 它是否与行星有关? 到此还不清楚.

这时 Kepler 第三定律就起着不可替代的作用了.

Kepler 第三定律 行星绕太阳一周所用的时间的平方与行星到太阳的平均距离的三次方成正比.

根据 Kepler 第一定律可见, 这里的平均距离就是椭圆的长半轴 a, 于是就可以写出 Kepler 第三定律的数学形式为

$$\frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3} = \cdots = k, \tag{N7}$$

其中 T_i 和 a_i 是第 i 个行星的周期和长半轴, k 在太阳系内为常数.

利用椭圆的面积 $A = \pi ab$, 又已知 $\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta} = \mathrm{const}$, 就可以计算出周期为

$$T = \frac{\pi ab}{\dfrac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}t}} = \frac{\pi ab}{\dfrac{1}{2}r^2\dot{\theta}}.$$

代入 (N7) 式, 得到

$$k = \frac{T^2}{a^3} = \frac{\pi^2 a^2 b^2}{\dfrac{1}{4}(r^2\dot{\theta})^2} \cdot \frac{1}{a^3} = \frac{4\pi^2 b^2}{a(r^2\dot{\theta})^2}. \tag{N8}$$

将这些结果代入力 $\boldsymbol{F}$ 的表达式 (N6) 中, 就得到:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{F} &= -\, m \left(\frac{a}{b^2}(r^2\dot{\theta})^2 \right) \frac{1}{r^2}\, \boldsymbol{e}_r \\ &= -\, m \cdot \frac{4\pi^2}{k} \cdot \frac{1}{r^2}\, \boldsymbol{e}_r. \end{aligned} \tag{N9}$$

于是就证明了在行星绕太阳的运动中太阳对行星的作用力为向心力, 其大小与距离平方成反比, 其中的系数与行星的质量成正比, 这与我们所知的万有引力定律已经比较接近了.

Newton 又利用他最富有独创性的力学运动第三定律, 即作用力与反作用力定律, 看出在太阳吸引行星的同时, 行星也一定以大小相等的力吸引太阳. 既然这个力与行星的质量 m 成正比, 那麽它也应当同太阳的质量 M 成正比. 这样就从 (N9) 得到了为我们所熟悉的形式

$$\boldsymbol{F} = -\frac{GMm}{r^2}\, \boldsymbol{e}_r, \tag{N10}$$

其中 G 称为万有引力常数.

反过来 Newton 又从上述引力定律推导出 Kepler 的三个行星运动定律, 这样就将 Kepler 从无数次天文观测总结出来的经验定律上升成为有严格数学基础的科学理论. Newton 又用所得的引力定律于地月运动和地面上物体的运动等一系列问题, 从而使他确信 (N10) 是一条普适的自然规律.

Newton 的这项工作宣告了 Copernicus 日心说的完全胜利. 在这以前不仅宗教界强烈反对日心说, 就是在科学界中也少有像 Kepler 那样的坚定的支持者. 在 Newton 的工作之后情况完全改观. 没有任何有理智的人再反对日心说. 这是因为这个学说有了微积分的支持, 它是可以用数学来证明的! 人类进入了理性时代.

第十三章 极限续论

内容简介 本章是对于第一册中的极限理论和实数系的补充. §13.1 介绍数列的上极限和下极限. §13.2 是几个应用, 包括压缩映射原理和 Newton 求根法. §13.3 从实数系基本定理等价性开始, 对于实数系从公理化角度作介绍, 并在附录中介绍构造实数系模型的几种常用方法.

§13.1 上极限和下极限

一个数列不一定收敛, 即不一定有极限, 但是一定有上极限和下极限.

上极限和下极限是第二章的数列极限理论的补充和完善. 本节的具体内容与 §2.5 的子列概念有直接联系, 特别是以下几点: 有界数列必有收敛子列 (即定理 2.28); 若点 ξ 的每一个邻域中都含有 $\{x_n\}$ 中的无限多项, 则 ξ 必是该数列的某个收敛子列的极限 (§2.5 练习题 12); 它的反面也成立.

13.1.1 上极限和下极限的定义

若数列 $\{x_n\}$ 发散, 则一定存在子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ 有意义. 实际上, 若 $\{x_n\}$ 有界, 则可用凝聚定理知道存在收敛的子列. 若 $\{x_n\}$ 无上界, 则存在发散于 $+\infty$ 的子列, 若 $\{x_n\}$ 无下界, 则存在发散于 $-\infty$ 的子列. 今后, 称所有这些情况的 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}=a$ 为数列 $\{x_n\}$ 的极限点, 其中 a 可以是有限数, 也可以是 $+\infty$ 和 $-\infty$. 为区别起见, 称 a 为有限数的情况为正常极限点, 而将 $a=\pm\infty$ 称为非正常极限点.

在需要比较包括 $\pm\infty$ 在内的极限点的大小时, 我们约定: $+\infty$ 大于任何有限数, $-\infty$ 小于任何有限数.

例题 13.1 举几个例子.

(1) 数列 $\{(-1)^n\}$ 的收敛子列虽有无限多个, 但极限点只有两个: -1 与 1;

(2) 数列 $\{n(-1)^n\}$ 的极限点也只有两个: $-\infty$ 与 $+\infty$;

(3) 数列 $\{n^{(-1)^n}\}$ 的极限点是 0 和 $+\infty$;

(4) 第一册第二章总练习题中题 10 给出的数列有无穷多个极限点, 它们的全体恰好就是闭区间 $[0,1]$. $\square$

在极限点概念的基础上, 给出上极限和下极限的定义和记号:

定义 13.1 数列 $\{x_n\}$ 的上极限与下极限是该数列的最大极限点与最小极限点, 并分别记为 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ 与 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$[1].

当然, 这个定义本身是否有意义则首先依赖于上极限和下极限的存在性.

定理 13.1 数列的上极限和下极限一定存在且惟一.

证 从最大数和最小数的定义本身可见若上极限和下极限存在则必惟一. 因此以下只需证明存在性. 为简明起见只证明存在上极限.

设给定数列 $\{x_n\}$, 先看两个特殊情况.

(1) 若该数列无上界, 则存在一个非正常极限点 $+\infty$, 它当然就是最大的极限点. 反正也成立. 因此

$$\text{数列无上界} \Longleftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty.$$

(2) 最大的极限点为 $-\infty$ 也是可能的. 显然这时不允许存在其他极限点, 因此只能是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, 即 $\{x_n\}$ 为负无穷大量. 这样就有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty \Longleftrightarrow \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty.$$

(3) 现在考虑余下的情况, 也是最主要的情况. 这时设 $\{x_n\}$ 有上界, 但又不是负无穷大量. 这样就至少存在一个有限极限点. 将 $\{x_n\}$ 的所有极限点所成集合记为 L, 则 L 是非空有上界数集. 根据确界定理 (定理 1.5), L 有上确界, 将它记为 β. 我们来证明: β 一定是数列 $\{x_n\}$ 的一个极限点, 从而就是最大极限点, 即上极限.

实际上对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 从上确界的 (第二) 定义 (见定义 1.6), 在 $(\beta-\varepsilon, \beta]$ 中一定有数集 L 中的某个数 l. 由于 l 是数列 $\{x_n\}$ 的极限点, 因此在它的每一个邻域中一定有数列 $\{x_n\}$ 中的无穷多项. 这样就已经证明, 在 β 的每一个邻域 $O_\varepsilon(\beta)$ 中存在数列 $\{x_n\}$ 的无穷多项. 这已经足以保证 β 是 $\{x_n\}$ 的极限点.

对于下极限, 我们写出相应的三种情况而略去证明过程:

$(1)'$ 下极限为 $-\infty$ 只能发生如下:

$$\text{数列无下界} \Longleftrightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty.$$

$(2)'$ 下极限为 $+\infty$ 只能发生如下:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty \Longleftrightarrow \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty.$$

$(3)'$ 对于余下的情况, 即数列 $\{x_n\}$ 有下界, 同时又不是正无穷大量, 则下极限为有限数, 它就是数列的极限点集的下确界, 也是最小数. □

---

① $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n$ 和 $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n$ 也是上极限和下极限的常用记号.

13.1.2　上极限和下极限的基本性质

从定理 13.1 可见, 上极限和下极限为无穷大的情况是简单的. 下面我们证明, 在上极限和下极限为有限数时, 它们可以用过去熟悉的语言来描述, 其中包括用 ε–N 语言的描述, 它可以作为上极限和下极限的第二定义. 这些都与数列极限的基本定义 2.1 非常相似, 这里还可以将下面的附图 13.1 与第二章中的定理 2.3 和图 2.3 作比较.

定理 13.2 设以下的 β 和 α 都是有限实数.

(I) β 为数列 $\{x_n\}$ 的上极限的充分必要条件是: 对于每一个给定的 $\varepsilon>0$,

(1) 数列 $\{x_n\}$ 中至多只有有限多项 $\geqslant \beta+\varepsilon$;

(2) 数列 $\{x_n\}$ 中有无限多项落在 $O_\varepsilon(\beta)$ 中.

(II) α 为数列 $\{x_n\}$ 的下极限的充分必要条件是: 对于每一个给定的 $\varepsilon>0$,

(1) 数列 $\{x_n\}$ 中至多只有有限多项 $\leqslant \alpha-\varepsilon$;

(2) 数列 $\{x_n\}$ 中有无限多项落在 $O_\varepsilon(\alpha)$ 中.

下面是定理 13.2 的几何表示:

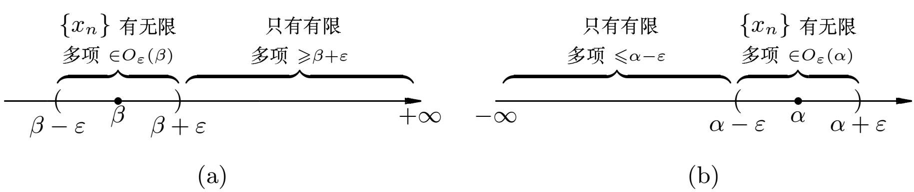


图 13.1: 上极限和下极限的几何意义

若用 ε–N 语言写出, 则可以将定理 13.2 改写为

$$\text{(I)}\ \beta=\varlimsup_{n\to\infty}x_n \iff \begin{cases}(1)\quad \forall\,\varepsilon>0, \exists\,N, \forall\,n\geqslant N: x_n<\beta+\varepsilon;\\ (2)\quad \forall\,\varepsilon>0, \forall\,N', \exists\,n'\geqslant N': \beta-\varepsilon<x_{n'}<\beta+\varepsilon.\end{cases}$$

$$\text{(II)}\ \alpha=\varliminf_{n\to\infty}x_n \iff \begin{cases}(1)\quad \forall\,\varepsilon>0, \exists\,N, \forall\,n\geqslant N: \alpha-\varepsilon<x_n;\\ (2)\quad \forall\,\varepsilon>0, \forall\,N', \exists\,n'\geqslant N': \alpha-\varepsilon<x_{n'}<\alpha+\varepsilon.\end{cases}$$

定理 13.2 的证明　只写出关于上极限的证明.

必要性　若有限数 $\beta=\varlimsup\limits_{n\to\infty}x_n$, 则由于 β 是极限点, 因此对 $\forall\,\varepsilon>0$, 数列 $\{x_n\}$ 必有无限多项在 $O_\varepsilon(\beta)$ 中. 此外, 在该邻域之外的右侧, 若还有数列中的无限多项, 则其中就会有收敛子列, 它的极限点 $\geqslant \beta+\varepsilon>\beta$. 这与上极限 β 为最大极限点矛盾 (参看图 13.1(a)).

充分性　对每个 $\varepsilon > 0$ 成立条件 (2) 就保证了 β 是数列的一个极限点. 若还有比 β 大的极限点, 记为 $\beta' > \beta$. 则取 $\varepsilon = (\beta' - \beta)/2$, 就会在 $O_\varepsilon(\beta') \subset [\beta + \varepsilon, +\infty)$ 中存在数列中的无限多项, 这与条件 (1) 矛盾. $\square$

下面的定理给出了上极限和下极限的表达式, 它们在上极限和下极限的计算和讨论中有用. 此外, 也可将它们作为上极限和下极限的 (第三) 定义.

定理 13.3 数列 $\{x_n\}$ 的上极限和下极限有下列表达式:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}, \tag{13.1}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \lim_{n\to\infty} \inf\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}, \tag{13.2}$$

其中当 $\{x_n\}$ 无上界时, (13.1) 的右边理解为 $+\infty$; 当 $\{x_n\}$ 无下界时, (13.2) 的右边理解为 $-\infty$.

证　只写出关于上极限的表达式 (13.1) 的证明. 以下记 $\beta = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} x_n$, 又记 $b_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}\ \forall\, n$. 从其定义可见 $\{b_n\}$ 单调减少, 因此 $b = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$ 一定有意义.

(1) 若 $\beta = +\infty$, 则 $\{x_n\}$ 无上界, 因此每个 $b_n = +\infty$. 这时 (13.1) 右边只能约定为 $+\infty$.

(2) 若 $\beta = -\infty$, 则 $x_n \to -\infty$, 因此 $\forall\, G > 0, \exists\, N, \forall\, n \geqslant N : x_n \leqslant -G$. 于是也有 $b_n \leqslant -G$, 这表明 (13.1) 右边的 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -\infty$.

(3) 若 β 为有限数, 则从定理 13.2 的 (I)(1), 对于 $\varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geqslant N : x_n < \beta + \varepsilon$. 于是也有 $b_n \leqslant \beta + \varepsilon$. 令 $n \to \infty$ 可见 $b \leqslant \beta + \varepsilon$. 利用 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 可见 $b \leqslant \beta$.

若有 $b < \beta$, 则对于 $\varepsilon = (\beta - b)/2, \exists\, N, \forall\, n \geqslant N : b_n < b + \varepsilon = \beta - \varepsilon$. 这时从 $b_n = \sup\{x_n, x_{n+1}, \cdots\}$ 可见也有 $x_n < \beta - \varepsilon$. 这违反了定理 13.2 的 (I)(2), 即 $O_\varepsilon(\beta)$ 中含数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项. 可见只能 $b = \beta$. $\square$

13.1.3　上极限和下极限与极限的关系

定理 13.4 数列 $\{x_n\}$ 有极限 (包括非正常极限) 的充分必要条件是其上极限和下极限相等, 且在相等时成立

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \overline{\lim_{n\to\infty}} x_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} x_n.$$

证　**必要性**　若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 有意义, 将它记为 a, 则 $\{x_n\}$ 的每个子列都趋于 a (参见定理 2.25 及其注), 可见 a 是其惟一的极限点, 因此上极限和下极限都等于 a.

充分性　这时上极限和下极限相等, 记为 a, 则只有一个极限点 a. 下面对 a 为有限数和 $\pm\infty$ 的三种情况分别证明 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

若 $a=-\infty$, 则从定理 13.1 知道, $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=-\infty$ 就是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=-\infty$.

若 $a=+\infty$, 则从定理 13.1 知道, $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=+\infty$ 就是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

最后讨论 a 为有限数的情况. 同时利用定理 13.2 中的 (I)(1) 和 (II)(1), 就知道, $\forall\,\varepsilon>0, \exists\, N, \forall\, n\geqslant N$, 成立 $a-\varepsilon<x_n<a+\varepsilon$, 即 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$. □

作为上极限和下极限的一个应用, 下面以例题的形式给出 Cauchy 收敛准则的充分性部分的证明.

例题 13.2 若 $\{x_n\}$ 是基本数列, 则一定收敛.

证　设 $\{x_n\}$ 是基本数列, 则 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\, N, \forall\, n\geqslant N, \forall\, p\in\mathbb{N}$, 成立 $|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$. 将最后一式改写为

$$x_n-\varepsilon<x_{n+p}<x_n+\varepsilon,$$

固定 n, 并令 $p\to+\infty$, 则得到

$$x_n-\varepsilon\leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\leqslant x_n+\varepsilon.$$

由此可见, 有

$$0\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n-\underline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n\leqslant 2\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon>0$ 可取得任意小, 因此只能是 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n=\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$. 根据定理 13.4, 可知基本数列 $\{x_n\}$ 收敛. □

13.1.4　上极限和下极限的运算

与极限运算满足的四则运算法则不同, 上极限和下极限的运算法则要复杂一些. 这里只以例题的形式讲一个加法规则.

例题 13.3 证明:

(1) 在下式右边不是不定式时成立不等式:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n;$$

(2) 在 $\{x_n\}$ 收敛时则成立等式:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)=\lim_{n\to\infty} x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

证　(1) 的证明可以用上极限表达式 (13.1) 如下推导得到:

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n+y_n)&=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}\{x_k+y_k\}\leqslant\lim_{n\to\infty}\big(\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}+\sup_{k\geqslant n}\{y_k\}\big)\\&=\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}\{x_k\}+\lim_{n\to\infty}\sup_{k\geqslant n}\{y_k\}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.\end{aligned}$$

这里在最后一式中的两个上极限均为有限数时成立.

对于其中出现无穷大的情况, 不如直接讨论. 由对称性可知只要讨论 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ 为无穷大的情况.

设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = +\infty$, 但 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$ 不是 $-\infty$, 则右边是 $+\infty$, 因此无论左边如何不等式总是成立的.

设 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n = -\infty$, 但 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, y_n$ 不是 $+\infty$. 这时从定理 13.1 知道 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = -\infty$, 而数列 $\{y_n\}$ 有上界. 这时 $\{x_n + y_n\}$ 也是负无穷大量, 因此不等式两边相等.

(2) 从上述 (1) 中的不等式就有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \leqslant \lim_{n\to\infty} x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

然后有

$$\begin{aligned}\overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\,[x_n + y_n + (-x_n)] \\ &\leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) + \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(-x_n) \\ &= \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) - \lim_{n\to\infty} x_n,\end{aligned}$$

将右边最后一项移到左边并与前面的不等式合并即可. □

注 也可以用上极限和下极限的定义或定理 13.2 来证明有关上极限和下极限的各种性质, 下面就是对例题 13.3 中的 (1) 的不同证法.

直接从上极限定义证明例题 13.3 之 (1) 只讨论右边两项均为有限数的情况. 由于两个数列这时都有上界, 因此左边也是有限数.

这时存在子列 $\{x_{n_k} + y_{n_k}\}$, 使得

$$\lim_{k\to\infty}(x_{n_k} + y_{n_k}) = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n).$$

从 $\{x_{n_k}\}$ 中取子列 $\{x_{n_{k_j}}\}$, 使得 $\lim\limits_{j\to\infty} x_{n_{k_j}}$ 有意义. 这时 $\lim\limits_{j\to\infty} y_{n_{k_j}}$ 也有意义. 为简明起见, 不妨设 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k}$ 和 $\lim\limits_{k\to\infty} y_{n_k}$ 已经有意义. 于是得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} + \lim_{k\to\infty} y_{n_k} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n. \quad \square$$

用定理 13.2 证明例题 13.3 之 (1) 也只对于右边两项均有限的情况作出证明. 从上极限的性质知道 $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geqslant N:$

$$x_n < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \frac{\varepsilon}{2}, \quad y_n < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n + \frac{\varepsilon}{2},$$

于是当 $\forall\, n \geqslant N$ 时也有

$$x_n + y_n < \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n + \varepsilon.$$

这表明

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n + y_n) \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, x_n + \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n + \varepsilon.$$

由于这对每一个 $\varepsilon > 0$ 成立, 因此就得到所求证的不等式. □

下面是与上极限和下极限有关的一个有多方面应用的重要例题.

例题 13.4 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $a_{n+m} \leqslant a_n a_m \ \forall\, n, m \in \mathbb{N}$, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n} = \inf_{n\geqslant 1} \left\{ \frac{\ln a_n}{n} \right\}.$$

证 将等式右边记为 α, 则可见有

$$\alpha \leqslant \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{\ln a_n}{n}. \tag{13.3}$$

又从 α 为下确界可见, 对 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N$, 使得

$$\frac{\ln a_N}{N} < \alpha + \varepsilon.$$

固定这个 N, 可以将每个自然数 n 写为 $n = mN + k$, 其中 $0 \leqslant k < N$. 从题设条件有不等式

$$a_n = a_{mN+k} \leqslant a_N^m a_k,$$

取对数后可以得到

$$\frac{\ln a_n}{n} \leqslant \frac{m}{n} \ln a_N + \frac{1}{n} \ln a_k \leqslant \frac{mN}{n}(\alpha + \varepsilon) + \frac{1}{n} \ln a_k.$$

在这个不等式两边令$n \to \infty$. 右边第一项的极限为 $\alpha + \varepsilon$, 而第二项中的 a_k 至多只取 N 不同值, 因此极限为 0. 因数列之间的不等式在取上极限时仍保持，即有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln a_n}{n} \leqslant \alpha + \varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 的任意性, 就得到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln a_n}{n} \leqslant \alpha.$$

将这个不等式与 (13.3) 合并, 可见 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln a_n}{n}$ 一定有意义, 且等于 α. □

注 例题中的 α 不一定是有限数. 当 α 为有限数时数列 $\left\{ \dfrac{\ln a_n}{n} \right\}$ 收敛, 而当 $\alpha = -\infty$ 时, 这个数列一定是负无穷大量. 此外, 由这个例题可见, 在正数列满足条件 $a_{n+m} \leqslant a_n a_m \ \forall\, n, m \in \mathbb{N}$ 时, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n}$ 一定存在.

最后指出, 对于第四章中的每一种函数极限, 同样可以定义上极限和下极限, 这样就可以对于极限不存在时的函数性态作出进一步的刻画. 例如

$$\overline{\lim_{x\to 0}} \sin\frac{1}{x} = 1, \quad \underline{\lim}_{x\to 0} \sin\frac{1}{x} = -1;$$

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \sin x = 1, \quad \underline{\lim}_{x\to+\infty} \sin x = -1;$$

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}} \frac{x}{1 + x^6 \sin^2 x} = +\infty, \quad \underline{\lim}_{x\to+\infty} \frac{x}{1 + x^6 \sin^2 x} = 0.$$

其中最后一个例子就是例题 11.34 中的被积函数, 它在 $[0, +\infty)$ 上的广义积分收敛.

练 习 题

1. 求下列各个数列的上极限和下极限:

(1) $\{n^{(-1)^n}\}$;　(2) $\{\sin(\frac{n\pi}{3})\}$;　(3) $\left\{\dfrac{n\sin(\frac{n\pi}{3})}{n+1}\right\}$;

(4) $\{\sin\frac{n\pi}{3}+\sin\frac{3}{n\pi}\}$;　(5) $\{[1+(-1)^n]n\}$;　(6) $\{n^{n^{(-1)^n}}\}$;

(7) $\{r_n\}$ ($\{r_n\}$ 是 $(0,1)$ 中的有理数全体排成的数列).

2. 对于任何数列 $\{x_n\}$ 和它的任何子列 $\{x_{n_k}\}$, 证明:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant \varlimsup_{k\to\infty} x_{n_k} \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

3. 设 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ 均有界, 且 $x_n \leqslant y_n\ \forall\, n$, 证明:

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{k\to\infty} y_n, \quad \varlimsup_{k\to\infty} x_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

4. (夹逼定理的推广) 设 $\{x_n\},\{y_n\},\{z_n\}$ 均有界, 满足 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n\ \forall\, n$, 且有 $\varliminf\limits_{n\to\infty} y_n \geqslant \varlimsup\limits_{n\to\infty} z_n$, 证明这三个数列都收敛, 且有相同极限:

$$\lim_{n\to\infty} y_n = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} z_n.$$

5. 对于有界数列 $\{x_n\},\{y_n\}$ 证明:

$$\begin{aligned}\varliminf_{n\to\infty} x_n + \varliminf_{n\to\infty} y_n &\leqslant \varliminf_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leqslant \varliminf_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n\\ &\leqslant \varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n.\end{aligned}$$

(其中最后一个不等式就是例题 13.3(1).)

6. 设 $\{x_n\}$ 为有界数列, 且对于任何其他有界数列 $\{y_n\}$ 成立

$$\varlimsup_{n\to\infty}(x_n+y_n) = \varlimsup_{n\to\infty} x_n + \varlimsup_{n\to\infty} y_n,$$

证明: $\{x_n\}$ 收敛.

7. 设 $\{x_n\}$ 收敛于正极限, $\{y_n\}$ 有界, 证明:

$$\varlimsup_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \varlimsup_{n\to\infty} y_n.$$

8. 对于 $\{x_n\}$ 令 $S_n = \dfrac{x_1+\cdots+x_n}{n}\ \forall\, n$ 定义数列 $\{S_n\}$, 证明

$$\varliminf_{n\to\infty} x_n \leqslant \varliminf_{n\to\infty} S_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} S_n \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} x_n.$$

9. 若对于数列 $\{x_n\}$ 的每一个子列 $\{x_{n_k}\}$ 都成立 $\lim\limits_{j\to\infty}\dfrac{x_{n_1}+\cdots+x_{n_j}}{j}=a$, 证明: $\{x_n\}$ 收敛且以 a 为极限.

10. 对于正数列 $\{x_n\}$, 证明: $\varlimsup\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_1+x_{n+1}}{x_n}\right)^n \geqslant \mathrm{e}.$

(还可以证明右边为最佳常数.)

§13.2 数列极限的几个应用

本节介绍的压缩映射原理和 Newton 求根法都是数列的重要应用, 特别是与 §2.3.5 的迭代生成数列密切有关, 当然还需要其他工具的配合.

13.2.1 压缩映射原理

在第二章介绍迭代数列时引入了不动点概念 (见定义 2.13). 此后又在许多问题中看到求方程 $f(x)=0$ 的根和求 $g(x)=x-f(x)$ 的不动点是等价的. (参见第五章总练习题的题 6 和题 7.) 这一小节将讨论如何求不动点, 或至少求其近似值.

先引入压缩映射的概念.

定义 13.2 设函数 φ 在 $[a,b]$ 上定义, 且存在常数 k, $0 \leqslant k < 1$, 使得对 $\forall\, x, y \in [a,b]$, 成立 $|\varphi(x)-\varphi(y)| \leqslant k|x-y|$, 则称 φ 是 $[a,b]$ 上的压缩映射.

定理 13.5 (压缩映射原理) 设 φ 是 $[a,b]$ 上的压缩映射, 同时存在迭代数列 $\{x_n\} \subset [a,b]$, $x_{n+1}=\varphi(x_n)\ \forall\, n$, 则 φ 在 $[a,b]$ 中存在惟一的不动点 ξ, 且成立 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \xi$.

证 从映射的压缩性可以先证明不动点若存在则一定惟一. 设有 $\varphi(\xi_1)=\xi_1$, 又有 $\varphi(\xi_2)=\xi_2$, 则

$$|\xi_1-\xi_2| = |\varphi(\xi_1)-\varphi(\xi_2)| \leqslant k|\xi_1-\xi_2|,$$

由于 $0 \leqslant k < 1$, 因此只能有 $\xi_1=\xi_2$.

由于压缩映射一定连续[①], 因此只要能够证明迭代数列 $\{x_n\}$ 收敛, 在迭代公式 $x_{n+1}=\varphi(x_n)$ 中令 $n\to\infty$, 就可以知道其极限 ξ 满足 $\xi=\varphi(\xi)$, 即是 φ 的不动点.

余下的问题是证明 $\{x_n\}$ 收敛.

为此对于正整数 n 和 p, 估计 x_n 与 x_{n+p} 之差如下:

$$\begin{aligned}|x_n-x_{n+p}| &= |\varphi(x_{n-1})-\varphi(x_{n+p-1})| \leqslant k|x_{n-1}-x_{n+p-1}| \\ &\leqslant k^2|x_{n-2}-x_{n+p-2}| \leqslant \cdots\cdots \leqslant k^n|x_0-x_p| \leqslant k^n(b-a).\end{aligned}$$

可见对于给定的 $\varepsilon>0$, 由于 $0 \leqslant k < 1$, 存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时就有 $|x_n-x_{n+p}|<\varepsilon$. 而且这与 p 无关. 这样就证明了压缩映射下的迭代数列一定是基本数列. 根据 Cauchy 收敛准则, $\{x_n\}$ 收敛. □

例题 13.5 证明: Kepler 方程 $x=\varepsilon\sin x+b$ 于参数 $|\varepsilon|<1$ 时存在惟一实根.

---

① 在 §5.2 的练习题 19 中引入了满足 Lipschitz 条件的函数. 压缩映射也是满足 Lipschitz 常数的函数, 只是其 Lipschitz 常数小于 1.

证 记 $\varphi(x)=\varepsilon\sin x+b$, 则可以从

$$|\sin x-\sin y|=2\left|\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}\right|\leqslant|x-y|,$$

或者用 Lagrange 微分中值定理, 得到

$$|\varphi(x)-\varphi(y)|\leqslant|\varepsilon|\cdot|x-y|\ \forall\, x,y\in\mathbb{R},$$

可见 $\varphi(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上是压缩映射. 由于 Kepler 方程的根就是 φ 的不动点, 因此已经知道 Kepler 方程若有根则一定惟一.

余下的问题是需要定出一个有界区间, 使得迭代数列 $\{x_n\}$ 落在其中.

从 $|\varphi(x)|\leqslant|\varepsilon|+|b|=a>0$ 可见, φ 的值域不超出 $[-a,a]$, 于是不论初值 x_0 如何, 从 x_1 开始的所有 $x_n\in[-a,a]$. 用压缩映射原理就知道 Kepler 方程存在根. □

注 如 §3.2 的练习题 3 所示, 本题也可以用 $f(x)=x-\varepsilon\sin x$ 在 $|\varepsilon|<1$ 时的严格单调性和反函数存在定理来解决. 这时由于 f 的值域为 $(-\infty,+\infty)$, 因此对每一个 b, 方程 $f(x)=b$ 的解存在惟一.

比较以上两个不同的证明方法, 用压缩映射原理的优点之一是它同时给出了实际计算的可能性, 而且可以对迭代过程中的误差作出估计. 下面对此作出解释.

从以下估计

$$\begin{aligned}|x_n-\xi|&=|\varphi(x_{n-1})-\varphi(\xi)|\leqslant k|x_{n-1}-\xi|\\&\leqslant k(|x_{n-1}-x_n|+|x_n-\xi|),\end{aligned}$$

就可以解出

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{k}{1-k}\cdot|x_n-x_{n-1}| \tag{13.4}$$

这就是所谓的事后估计. 即在迭代过程中, 每迭代一次, 就可以从前次的 x_{n-1} 和这次的 x_n 估计出当前误差范围.

在 (13.4) 的右边再反复用压缩条件, 又可以得到所谓的事前估计:

$$|x_n-\xi|\leqslant\frac{k^n}{1-k}\cdot|x_1-x_0| \tag{13.5}$$

它的右边使我们可以在一开始就用 x_0,x_1 和压缩系数 k 估计出为了达到指定的精度, 至少需要做多少次迭代计算.

最后指出, 压缩映射原理的一个很大的优点是容易推广到高维空间甚至无穷维空间中去, 而 §2.3.5 中的几何方法只能用于一维问题.

下面是 Newton 曾经考虑过的例子.

例题 13.6 试用压缩映射原理求方程 $x^3-2x-5=0$ 在 $x=2$ 附近的根, 要求误差不超过 10^{-4}.

解 从方程左边的多项式在 $x=2,3$ 时异号可见方程在 $[2,3]$ 内有根. 以下先将上述方程的求根问题转化为求某个函数的不动点问题. 这里有多种选择, 例如 $x=\sqrt[3]{2x+5}$, $x=\sqrt{2+\dfrac{5}{x}}$, $x=\dfrac{1}{2}(x^3-5)$ 等.

可以看出用 $g(x)=\sqrt[3]{2x+5}$ 满足 $g([2,3])\subset[2,3]$. 又通过求导估计有

$$\max_{2\leqslant x\leqslant 3}|g'(x)|=\frac{2}{3\sqrt[3]{(2x+5)^2}}\leqslant g'(2)=\frac{2}{9\sqrt[3]{3}}\approx 0.154080,$$

因此可以从 $x_0=2$ 开始作迭代计算, 得到

$$x_1=g(x_0)=2.080084, x_2=g(x_1)=2.092351, x_3=g(x_2)=2.094217,$$

$$x_4=g(x_3)=2.094501, x_5=g(x_4)=2.094544.$$

可以证明这里的小数后前 4 位都是正确的 (留作练习题). □

13.2.2 Newton 求根法

从计算数学的实用角度来看, 如何提高数列收敛的速度非常重要, 而一般的迭代数列, 包括由压缩映射生成的在内, 收敛速度不一定很快. Newton 求根法就是利用微分学成果的一个高效率算法, 且有多方面的发展和应用. 例如, Newton 求根法可以推广到高维空间而成为一大类算法的基础.

设 f 在 $[a,b]$ 上可微, $f(a)f(b)<0$, f' 没有零点 (从而 f 严格单调), 于是 f 在 (a,b) 内有惟一实根, 记为 ξ. 设已经有根的一个近似值 x_n, 如何求下一个更好的近似值? 这里就出现了迭代思想, 即从 x_n 求出 x_{n+1}①.

Newton 方法也称为切线法, 图 13.2 可以解释为什么有这样的名称. 但我们还是先不利用它的几何意义而作如下分析推导.

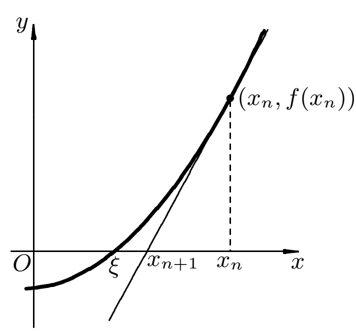


图 13.2: Newton 求根法的几何解释

利用无穷小增量公式 (见第六章 §6.4 或 (7.5) 式), 写出

$$f(\xi)=f(x_n)+f'(x_n)(\xi-x_n)+o(\xi-x_n),$$

弃去余项, 又利用 $f(\xi)=0$, 就有

$$\xi-x_n\approx-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)},$$

右边就是修正量. 于是取下次的近似值为

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}. \tag{13.6}$$

这就是 Newton 求根法的迭代公式.

从几何上看, 在图 13.2 中过曲线上的点 $(x_n,f(x_n))$ 作切线

$$Y-f(x_n)=f'(x_n)(X-x_n),$$

它与 x 轴的交点的横坐标就是公式 (13.6) 的右边表达式. 在上面的推导中不用几何方法的好处是它可以几乎原封不动地推广为高维空间中的 Newton 求根法.

① 在古代中国数学中已经出现了一系列用迭代计算的方法, 其中包括求解线性方程组的消去法, 计算圆周率的迭代方法和解一次不定方程的大衍求一术等 [18].

从图 13.2 可以看出, 如果从 x_{n+1} 计算出 $f(x_{n+1})$, 过点 $(x_{n+1}, f(x_{n+1}))$ 再作切线与 x 轴相交, 则就可能与根 ξ 相当接近了. 这提示我们, Newton 求根法可能会有较好的收敛速度.

需要指出, Newton 求根法也需要一定的条件才能成功. 如图 13.3 所示, 数列 $\{x_n\}$ 不收敛, 或者某一步之后迭代公式给出的 x_{n+1} 越出函数的定义域, 这些都有可能发生. 关于这方面的分析可参考 [8] 等.

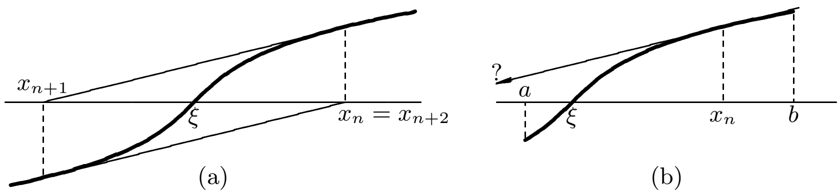


图 13.3: Newton 求根法可能失败的情况

关于 Newton 求根法的收敛速度可如下推导. 先利用带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式:

$$0 = f(\xi) = f(x_n) + f'(x_n)(\xi - x_n) + \frac{f''(\theta_n)}{2}(\xi - x_n)^2,$$

其中 $\theta_n \in (\xi, x_n)$. 这时利用迭代公式 (13.6) 就得到

$$\begin{aligned} x_{n+1} - \xi &= x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} - \xi = \frac{-f(x_n) - f'(x_n)(\xi - x_n)}{f'(x_n)} \\ &= \frac{f''(\theta_n)(\xi - x_n)^2}{2f'(x_n)}, \end{aligned}$$

又利用 $\lim\limits_{n\to\infty} f''(\theta_n) = f''(\xi)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f'(x_n) = f'(\xi) \neq 0$, 可见存在 $M > 0$, 使得当 n 充分大时成立

$$|x_{n+1} - \xi| \leqslant M|x_n - \xi|^2.$$

这就是所谓的二阶收敛速度. 粗略地说, 即每迭代一次可以将有效位数增加一倍.

例如试用 Newton 求根法计算 $A > 0$ 的平方根. 这就是要求二次方程 $f(x) = x^2 - A = 0$ 的正根. Newton 迭代公式为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - A}{2x_n} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{A}{x_n}\right).$$

以 $A = 2$ 为例, 即

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{2}{x_n}\right) = \frac{x_n}{2} + \frac{1}{x_n}.$$

设 $x_0 = 1$, 则有

$$x_1 = 1.5,\ x_2 = 0.75 + 0.\dot{6} = 1.41\dot{6},\ x_3 = 1.414215986\cdots,$$

$$x_4 = 1.414213562\cdots.$$

其中 x_4 写出的全为有效数字. 从中可见二阶收敛速度的特征是明显的.

注　这种求根方法已见于古代中东地区的美索不达米亚的泥板中. 不清楚当时如何发明这样的算法.. 但可以设想, 对于 $\sqrt{A}$ 而言, 若其近似值 $x < \sqrt{A}$, 则 $\dfrac{A}{x} > \sqrt{A}$, 反之, 若 $x > \sqrt{A}$, 则 $\dfrac{A}{x} < \sqrt{A}$. 因此它们的算术平均值 $\dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{A}{x}\right)$ 有可能是更好的近似值 [18].

练 习 题

1. 对例题 13.6 用公式 (13.4) 和 (13.5) 估计根的近似值 x_5 的误差.

2. 在例题 13.6 中是否可以在区间 $[2,3]$ 上对于 $g_2(x) = \sqrt{2 + \dfrac{5}{x}}$ 或 $g_3(x) = \dfrac{1}{2}(x^3 - 5)$ 用压缩映射原理求解?

3. 任取实数 x_0, 然后用 $x_n = \cos(x_{n-1})\ \forall\, n$ 得到迭代数列 $\{x_n\}$, 证明: 该数列收敛于 $g(x) = \cos x$ 的惟一不动点.

4. 用 Newton 求根法重做例题 13.6 中的问题, 并与原来的解法作比较.

5. 用 Newton 求根法求方程 $x^3 - 2x^2 - 4x - 7 = 0$ 在 $[3,4]$ 之间的根的近似值, 精确到 10^{-4}.

6. 用 Newton 求根法求方程 $\sin x = 1 - x$ 的根的近似值, 精确到 10^{-4}.

7. 设 f 在 $[0,1]$ 上可微, 且 $0 < f(x) < 1$, $f'(x) \neq 1\ \forall\, x \in [0,1]$, 证明 f 在 $[0,1]$ 中有惟一的不动点.

8. 设 f 在 $[0,1]$ 上二阶可微, $f(0) = g(1)$, $f(x) \in [0,1]\ \forall\, x \in [0,1]$, 且 $|f''(x)| < 2\ \forall\, x \in [0,1]$, 证明 f 在 $[0,1]$ 中有惟一的不动点.

9. 若 f 是 $[a,b]$ 上的单调增加函数, $a \leqslant f(a) \leqslant f(b) \leqslant b$, 证明: f 在 $[a,b]$ 上有不动点.

10. 证明: 不存在可微实函数 f, 它满足条件 $(f \circ f)(x) \equiv -x^3 + x^2 + 1$.

§13.3 实数系理论简介

这一节先对第一册中的 6 个实数系基本定理 (参见 §2.6 最后的注) 的等价性作补充, 然后从公理化角度对实数系理论作简略的介绍, 在附录中讲述构造实数系模型的几种常用方法.

13.3.1 实数系基本定理的等价性

在第一册中介绍了实数系中的 6 个基本定理:

(1) 确界存在定理 (定理 1.5), 当时用 §1.2 的实数系连续性原理给出了证明.

(2) 单调有界数列收敛定理 (定理 2.18), 用 (1) 证明.

(3) 闭区间套定理 (定理 2.22), 用 (2) 证明.

(4) Cauchy 收敛准则 (定理 2.23), 用 (3) 证明, 后来又用下面的 (5) 给出第二个证明. 最近在例题 13.2 中又给出了第三个证明 (在其背后还是用到 (5)).

(5) Bolzano-Weierstrass 凝聚定理 (定理 2.28), 用 (2) 证明. 后来又用下面的 (6) 给出第二个证明.

(6) Heine-Borel 有限开覆盖定理 (定理 2.29), 用 (3) 和 (5) 给出了两个证明.

如 §2.6 最后的注中指出, 这 6 个定理是彼此等价的. 因此从其中任何一个出发可以证明其他 5 个定理中的任何一个. 这样就可以列出 30 个命题, 其中有的比较容易, 有的不太容易. 此外, 其中每个命题的证明还可能有多个方法.

检查上面的各个定理及其证明, 可见只要再证明 (4) $\Longrightarrow$ (1) 和 (6) $\Longrightarrow$ (1), 就完成了 6 个实数系基本定理的等价性证明.

下面以例题的形式给出这两个证明.

例题 13.7 用 Cauchy 收敛准则证明确界存在定理.

证 只证明有上界的非空数集必有上确界.

设 A 为非空数集, 且有上界. 取数 $s \in A$, 若 s 就是 A 的上界, 则 s 就是 A 的最大数, 也就是上确界, 因此不必再讨论.

以下设数 $s \in A$, 但不是 A 的上界. 这时存在某个数 $t > s$, t 是 A 的上界.

对正整数 n, 考虑数集 $\{s + \dfrac{k}{n} \mid k \in \mathbb{N}\}$. 则存在正整数 k_0[①], 使得 $s + \dfrac{k_0 - 1}{n}$ 不是 A 的上界, 但 $s + \dfrac{k_0}{n}$ 是 A 的上界. 将这个上界记为 $x_n = s + \dfrac{k_0}{n}$.

对每个 n 都这样做, 得到数列 $\{x_n\}$. 它的每一项有两个特性: (1) x_n 是 A 的上界, (2) $x_n - \dfrac{1}{n}$ 不是 A 的上界.

① 这里要用到 Archimedes 原理, 见第一册 §1.2 的练习题 4.

先证明数列 $\{x_n\}$ 是基本数列.

任取 x_n, x_m, 由于 x_m 是 A 的上界, 而 $x_n - \frac{1}{n}$ 不是 A 的上界, 因此有

$$x_n - \frac{1}{n} < x_m \Longleftrightarrow x_n - x_m < \frac{1}{n}.$$

改变 n, m 的地位, 就有

$$x_m - \frac{1}{m} < x_n \Longleftrightarrow x_m - x_n < \frac{1}{m}.$$

合并以上两个不等式就有

$$-\frac{1}{n} < x_m - x_n < \frac{1}{m} \Longleftrightarrow |x_n - x_m| < \max\left\{\frac{1}{n}, \frac{1}{m}\right\}.$$

可见对 $\forall \varepsilon > 0$, 只要取 $N > \frac{1}{\varepsilon}$, 则当 $n, m \geqslant N$ 时, 就有 $|x_n - x_m| < \varepsilon$. 这就证明了 $\{x_n\}$ 是基本数列. 对 $\{x_n\}$ 用 Cauchy 收敛准则, 知 $\{x_n\}$ 收敛, 记其极限为 β.

现在证明 β 是数集 A 的上界, 而且是最小上界.

对 $\forall x \in A$, 由于 x_n 是 A 的上界, 不等式 $x \leqslant x_n$ 对每个 n 成立. 令 $n \to \infty$, 就有 $x \leqslant \beta$. 这样就证明了 β 是 A 的上界.

任取 $\varepsilon > 0$, 则由于 $\{x_n - \frac{1}{n}\}$ 也收敛于 β, 因此有 N, 使得成立

$$\beta - \varepsilon < x_N - \frac{1}{N} < \beta.$$

由于 β 是 A 的上界, 而 $x_N - \frac{1}{N}$ 不是 A 的上界, 因此存在某一个 $x \in A$, 使得

$$\beta - \varepsilon < x_N - \frac{1}{N} < x < \beta,$$

这样就证明了 β 是数集 A 的最小上界. □

例题 13.8 用有限覆盖定理证明确界存在定理.

证 只给出有上界非空数集有上确界的证明. 设数 $s \in A$, 但不是数集 A 的上界, 又设 A 的一个上界为数 t. 这时当然有 $s < t$.

我们来证明 A 必有最小上界, 即上确界. 当然它应当落在区间 $[s, t]$ 中.

用反证法. 设 A 没有最小上界.

取 $x_0 \in [s, t]$, 则 x_0 或者是 A 的上界, 或者不是 A 的上界, 二者必居其一.

若 x_0 是 A 的上界, 则由于 A 没有最小上界, 因此还有比 x_0 小的上界 t_0. 取 $\delta = x_0 - t_0$, 就知在邻域 $O_\delta(x_0)$ 中的每个数都是 A 的上界.

若 x_0 不是 A 的上界 (于是 $x_0 < t$), 则存在某个 $s_0 \in A$, 使得 $x_0 < s_0$. 于是只要取 $\delta = s_0 - x_0$, 就知道在邻域 $O_\delta(x_0)$ 中的每个数都不是 A 的上界.

对每个 x_0 都这样做, 就得到 $[s, t]$ 的一个开覆盖. 在这个开覆盖中的每个邻域 (即开区间) 或者完全由 A 的上界组成, 或者其中不含有 A 的任何一个上界.

用有限开覆盖定理于上述开覆盖, 得到一个子覆盖, 即有限个邻域, 它们的并覆盖了 $[s, t]$, 同时每一个邻域中的点或者都是 A 的上界, 或者都不是 A 的上界.

从左到右对这有限个邻域进行编号[①]. 首先取覆盖点 s 的一个邻域为 O_1. 由于 s 不是 A 的上界, 因此 O_1 中每个数都不是 A 的上界. 然后考虑 O_1 的右端点. 它不可能大于 t, 因为 t 是 A 的上界. 于是存在覆盖 O_1 的右端点的一个邻域, 记为 O_2. 由于 $O_1 \cap O_2$ 非空, 因此 O_2 中每个数也不是 A 的上界. 如此继续下去, 有限次后就得到覆盖 $[s,t]$ 的有限个邻域, 其中的每个邻域都不含有 A 的上界. 这与 t 是 A 的上界相矛盾. □

最后指出, 在 §1.2 中引入的实数系连续性原理实际上与以上各个实数系基本定理也是等价的. 由于确界存在定理 (即定理 1.5) 当时是用实数系连续性原理证明的, 因此只要完成下列例题中的证明即可知道上述等价性成立.

例题 13.9 用确界存在定理证明实数系连续性原理.

证 设有两个非空实数集 A 和 B, 且对 $\forall x \in A, \forall y \in B$, 成立 $x < y$. 这时 B 中的每个数都是 A 的上界. 对 A 用确界存在定理, 知道 A 有上确界, 记为 β. 我们将证明这个数 β 就是连续性原理中的 c (即 $\forall x \in A, y \in B : x \leqslant c \leqslant y$).

由于 β 是 A 的上确界, 因此 $\forall x \in A$ 成立 $x \leqslant \beta$. 又由于 B 中的每个数都是 A 的上界, 而上确界 β 是 A 的最小上界, 因此 $\forall y \in B$ 成立 $\beta \leqslant y$. □

13.3.2 什么是实数?

从上面关于实数系基本定理的等价性讨论可见, 经过如此之多的证明之后, 我们还不能说其中任何一个定理是否成立. 至多只能说, 如果其中有一个成立, 则它们都成立. 反之, 只要有一个不成立, 则它们都不成立.

情况确实如此. 例如, 其中每一个定理在有理数系 $\mathbb{Q}$ 中都是不成立的, 或者说是错误的. 为此只要看一个定理就够了. 例如, 在 §1.2 中举出的非空数集 $A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x > 0, x^2 < 2\}$. 它在 $\mathbb{Q}$ 中仍然是有上界的非空数集, 但不可能在 $\mathbb{Q}$ 中有上确界 (请证明). 如果这一点能够确定, 就足以肯定所有实数系基本定理在 $\mathbb{Q}$ 中都不成立.

为了明白实数系基本定理究竟是否成立, 就不可能回避什么是实数这个问题.

从另一方面说, 数学分析课程从开始到此的内容表明, 对于实数系来说, 只要承认一条非常简单的连续性原理, 其他一切在逻辑上也都成立. 从例题 13.9 又看到, 其实只要承认 6 个实数系基本定理中的某一个定理成立也是一样的. 因此, 可以说数学分析中真正需要的是实数系的连续性, 而不是实数本身. 也正因为如此, 我们将什么是实数这个问题拖后到这里来讨论, 而且从下面可见, 也只是给出一个简略的答案. 对于需要了解其全面内容的读者, 将给出重要的参考资料供阅读. 这

① 这个方法在定理 5.5 的证 3 和 Lebesgue 定理 (即定理 10.7) 的证明中都用过.

样做的一个理由在于, 根据我们的认识, 说数学分析的基础是实数系, 这没有错. 只有在 $\mathbb{R}$ 上才能够建立起合理的极限理论, 而数学分析的核心概念就是极限. 但实数系理论的本身并非是数学分析, 而可以说是属于代数或数论的范畴. 因此在本书中就不准备作完整的介绍了.

当然还应当指出, 不仅极限理论需要在实数系中才能建立, 就是中学数学中的许多初等函数, 除了多项式和有理分式之外, 没有实数也是无法给出定义的. 将无限不循环小数定义为无理数是容易为学生接受的, 但在这样定义的实数系内四则运算如何进行, 还是完全不清楚的, 而且实际上也不是简单的. 至于指数 a^b, 对数 $\log_a b$, 当其中的 a, b 都是实数时应当如何定义就更困难了. 由此可见, 即使为了对初等函数给出严格的定义, 也需要回答什么是实数这样一个问题. 当然这不是中学数学要承担的任务.

具体来说, 在下一小节中从公理化方法的角度给出实数系的描述, 而将构造实数系模型的各种方法写成为本节的一个附录供参考.

13.3.3 实数系的公理化方法

所谓公理化方法, 起源于古希腊数学家 Euclid① 的《几何原本》. 在该书中对于几何学提出了为数绝少的几条公理, 然后用逻辑推理的方法得到所有其他定理, 从而将整个几何学建成为一个明白易懂又非常严格的逻辑体系. 只要公理不错, 则所有得到的定理的真理性也就没有问题. 这里的所谓公理, 听起来似乎抽象, 实际上就是指大家都能够接受, 对它们的正确性没有疑问的几个事实.

所谓实数系的公理化方法也是如此, 我们将自己心目中实数应当具有的尽可能少的独立性质列出来作为公理, 使得其他性质都可以由公理推出来, 这就建成了一个公理化系统.

为清楚起见, 将实数系的公理分成几组分列如下. 其中实数系 $\mathbb{R}$ 就是实数的集合, 以下的 a, b, c 代表其中的任意实数.

I. **域公理** 在 $\mathbb{R}$ 中存在两种运算, 分别称为加法和乘法. 对于任何 $x, y \in \mathbb{R}$, 用 $x + y$ 表示它们通过加法得到的实数, 称为和, 又用 $x \cdot y$ 或 (在不会发生混淆时) xy 表示它们通过乘法得到的实数, 称为积. 这两种运算满足以下公理:

- 公理 1 (交换律) $a + b = b + a$, $ab = ba$.
- 公理 2 (结合律) $a + (b + c) = (a + b) + c$, $a(bc) = (ab)c$.
- 公理 3 (分配律) $a(b + c) = ab + ac$.

① 欧几里得 (Euclid, ?～ 约公元前 275 年), 古希腊数学家. 他在公元前 300 年左右写成《原本》, 使几何学成为一门独立的、演绎的科学. 该书的中译本定名为《几何原本》.

- 公理 4 (加法可逆性) 对任意给定的 a,b, 方程 $a+x=b$ 有惟一的实数解 x, 并记为 $x=b-a$. 将 $a-a$ 记为 0 (可证明它与 a 无关). 将 $0-a$ 记为 $-a$, 并称它是 a 的相反数.
- 公理 5 (乘法可逆性) 至少存在一个实数 $a\neq 0$. 对任意给定的 a,b, 且 $a\neq 0$, 方程 $ax=b$ 有惟一的实数解 x, 并记为 $x=b/a$. 将 a/a 记为 1 (可证明它与 a 无关). 称 $1/a$ 是 a 的倒数.

II. **序公理** 在 $\mathbb{R}$ 中存在一种关系 $<$, 使得在实数之间有大小顺序, 且满足以下公理:

- 公理 6 (三歧性或**惟一性**) 对任意 a,b, 关系 $a<b$, $a=b$, $a>b$ 三者有且只有一个成立. (关系 $a<b$ 与 $b>a$ 等同.)
- 公理 7 (序的传递性) 若 $a<b, b<c$, 则 $a<c$.
- 公理 8 (加法的保序性) 若 $a<b$, 则对任意 c 有 $a+c<b+c$.
- 公理 9 (乘正数的保序性) 若 $a<b$, 则对任意 $c>0$ 有 $ac<bc$.

III. **Archimedes 公理** 对每一对正数 $a,b\in\mathbb{R}$, 存在正整数 n, 使得 $na>b$.

到这里我们先暂时停一下, 看看究竟做了些什么. 首先, 上面的三组公理只不过是将我们从小学开始就熟悉的内容写为公理. 当然不是所有过去的规则都写进去了. 但由以上公理出发, 就可以导出所有在中小学课程中已经熟悉的等式和不等式的运算规则. 关系 $a\leqslant b$ 则理解为 $a<b$ 或 $a=b$, $a\leqslant b$ 与 $b\geqslant a$ 等同. 这里的细节从略.

其次, 上述三组公理在有理数系 $\mathbb{Q}$ 中也全部成立. 这与中学数学讲到实数时的概念也完全一致, 那就是在当时的课程中对实数没有提出任何本质上的新的运算关系. 因此到目前为止的三组公理中, 还没有刻画实数与有理数区别的公理. 下面将看到, 这样的公理只需要一条.

这里容易联系到在上一小节中所讨论的内容. 实数系的连续性原理, 或者与它等价的某一个基本定理, 就应当被列为一个公理. 根据公理应当尽可能少且相互独立的原则, 一个就够了. 这里的做法不是惟一的, 在各种数学分析教科书和参考书中有多种选择. 考虑到在 6 个实数系基本定理中, 在叙述每一个定理之前都必须引入与之有关的概念. 为了尽可能简单, 本书选择在 §1.2 中提出的连续性原理作为最后一条公理 (这里参考了 [20, 29] 的做法).

IV. **连续性公理** 设有两个实数集 A 和 B, 且对于 $\forall x\in A, \forall y\in B$, 成立 $x<y$, 则一定存在实数 c, 使得对于 $\forall x\in A, \forall y\in B$, 成立 $x\leqslant c\leqslant y$.

作为公理化系统的练习, 下面将以例题的形式对第一册 §1.2 的几个练习题给出答案. 这几个例题中的内容都是平时经常使用的事实, 同时还包含了关于 Archimedes 公理的讨论.

例题 13.10 从实数系的连续性原理证明正整数集 $\mathbb{N}$ 没有上界.

证 用反证法. 若 $\mathbb{N}$ 有上界, 则这个上界不会是正整数. 将 $\mathbb{N}$ 的所有上界全体所成集合记为 B, 则就符合 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in B : n < y$. 因此根据连续性公理, 存在实数 c, 使得 $\forall n \in \mathbb{N}, \forall y \in B : n \leqslant c \leqslant y$.

这表明 c 是 $\mathbb{N}$ 的最小上界, 因此 $c-1$ 不会是 $\mathbb{N}$ 的上界. 于是一定存在一个正整数 n_0, 使得成立 $c-1 < n_0$. 但这导致 $c < n_0+1$, 而 n_0+1 仍然是正整数, 这与 c 为 $\mathbb{N}$ 的上界矛盾. $\square$

例题 13.11 从连续性原理证明 Archimedes 原理 (也称为 Archimedes 公理): 对每一对正数 $a, b \in \mathbb{R}$, 存在正整数 n, 使得 $na > b$.

证 考虑实数 $\dfrac{b}{a}$. 从上一个例题知道它不可能是 $\mathbb{N}$ 的上界, 因此存在一个正整数 n, 使得 $\dfrac{b}{a} < n$, 这也就是 $b < na$. $\square$

注 Archimedes 公理是我们平时经常使用的一个性质, 但这里有一些问题需要解释.

我们将满足域公理的集合称为域, 又将同时满足域公理和序公理的集合称为有序域. 在有序域中满足 Archimedes 公理的称为 Archimedes 有序域, 否则称为非 Archimedes 有序域. 由于可以构造出非 Archimedes 有序域的具体例子 [24], 因此就证明了 Archimedes 公理独立于域公理和序公理.

例题 13.11 表明, 若在实数系中如前面那样引入连续性公理, 则 Archimedes 公理可以去掉.

但这里有一个很微妙的问题, 即与连续性原理等价的 6 个实数系基本定理中, 并不是每一个都能够推出 Archimedes 公理的. 具体来说, Cauchy 收敛准则和闭区间套定理就是如此, 而其余 4 个基本定理则可以推出 Archimedes 公理. 回顾例题 13.7, 在用 Cauchy 准则证明确界存在定理时, 就多次用到了 Archimedes 公理. 因此在采用 Cauchy 收敛准则作为实数系的公理时 (这时一般称它为完备性公理), 则 Archimedes 公理必须保留.

下一个例题中的内容是我们经常使用的事实, 它也依赖于 Archimedes 公理.

例题 13.12 证明有理数和无理数都在实数系中处处稠密, 也就是说, 给定任何两个实数 $a < b$, 在 (a, b) 中一定既有有理数, 也有无理数.

证 只需要先对于 $0 < a < b$ 的情况作出证明, 然后就可以推到一般情况.

从 Archimedes 公理, 存在正整数 n, 使得 $n(b-a) > 1$, 这样就有 $\dfrac{1}{n} < b-a$.

再用 Archimedes 公理, 存在正整数 m, 使得 $na < m$. 我们取满足这个要求的最小的正整数, 仍记为 m. 这时就有 $m-1 \leqslant na$. 于是就得到

$$\frac{m-1}{n} \leqslant a < \frac{m}{n} = \frac{m-1}{n} + \frac{1}{n} < a + (b-a) = b,$$

于是 $\frac{m}{n}$ 就是满足要求的有理数.

对于 $a' = \frac{a}{\sqrt{2}}$ 和 $b' = \frac{b}{\sqrt{2}}$ 重复以上过程, 就得到一个有理数 $\frac{m'}{n'} \in (a', b')$, 这时也就得到满足要求的无理数 $\frac{m'}{n'} \cdot \sqrt{2}$:

$$a < \frac{m'}{n'} \cdot \sqrt{2} < b. \quad \Box$$

利用以上几个例题中的同样方法, 就可以从实数系的公理化系统出发解决前面所提到的一系列基本问题 (具体细节可参考 [8, 绪论] 等文献).

(1) 设 a 为任意正实数, n 为正整数, 则存在惟一的实数 x, 满足 $x^n = a$. 于是可以将它定义为 $a^{\frac{1}{n}}$. 然后在此基础上可以定义以任意有理数 r 为指数的幂 a^r, 并证明它满足关于幂的通常运算规则.

(2) 在 (1) 的基础上可以定义以任意实数 b 为指数的幂 a^b, 并证明它满足关于幂的通常运算规则. 同时在这里可以证明指数函数的严格单调性, 即当 $a > 1$ 时, 从 $x < x'$ 得到 $a^x < a^{x'}$, 而当 $0 < a < 1$ 时, 从 $x < x'$ 得到 $a^x > a^{x'}$①.

(3) 在 (2) 的基础上可以对于任意实数 $0 < a \neq 1$ 和 x, 定义以 a 为底的对数 $\log_a x$, 并证明对数函数的严格单调增加性.

(4) 证明每一个实数 a 都可以用某个整数加上一个十进制的无限小数表示出来, 且其中除了以 0 和 9 循环的情况之外, 这种表示方式对每个实数是惟一的.

① 在中学数学和本书第一册中留下的类似的问题很多, 它们都需要在实数系中才能得到解决. 这实际上是容易理解的. 如幂函数、指数函数、对数函数等, 它们的定义都离不开实数, 因此它们的基本性质也只有现在才能严格证明.

附录　构造实数系模型的方法

公理化方法刻画了我们所需要的实数系究竟是什么样的, 它解决了中学数学中有关实数的许多遗留问题, 保证了第一册中的 6 个实数系基本定理全部成立, 为数学分析的极限理论的展开提供了必要的舞台. 那么还有什么问题要讨论呢?

第一个问题是存在性, 即是否存在满足所有上述公理的一个实数系?

第二个问题是惟一性, 即如果存在这样的实数系, 它是否惟一?

我们将看到, 存在性问题是通过构造来实现的. 也就是给出生成实数系的具体方法, 同时证明在其中满足公理化方法中列出的所有公理.

生成实数系的方法有多种. 在这个附录中只能简短地浏览一下在文献中构造实数系的最常见的三个方法.

I. Dedekind 的切割方法

这个方法完全来自于实数的几何直观表示.

如图 13.4 所示, 取一条有方向的直线, 在直线上取定一点作为原点 O, 又取定一个单位长度, 称这样的直线为数轴. 这样就可以将每一个实数与这条直线上的点对应起来. 这就是解析几何的基础性假设, 也是在数学分析中进行形象思维的依据. 例如在本书开始以来的许多表述方式中, 就经常将实数与数轴上的点不加区分.

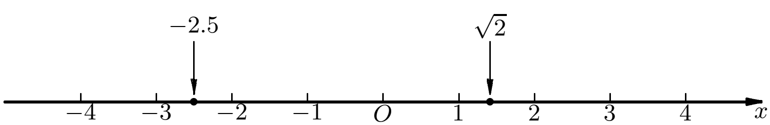


图 13.4: 实数的几何表示

现在提出一个问题: 如果只考虑数轴上对应于有理数的那些点, 则会发生什么事情? 由于任何两个有理数之间还有有理数, 因此在图 13.4 的数轴上对应于有理数的点不仅有无穷多个, 而且处处稠密. 因此我们的眼睛不可能发现有理数全体组成的几何形象与原来的数轴有任何区别.

然而眼睛看不到的事情却可以由我们的心智来发现.

首先我们看图 13.5 的分图 (a), 其中在数轴上用一个空心小圆标出实数 $\sqrt{2}$ 的位置. 在该点左边的加粗线段代表所有小于 $\sqrt{2}$ 的有理数集合, 记为 S_q; 而在该点右边的加粗线段则代表所有大于 $\sqrt{2}$ 的有理数集合, 记为 T_q. 于是我们发现在数轴上的这两个有理数集合之间存在由无理数 $\sqrt{2}$ 所代表的间隙. (这在 §1.2 中已经指出过.)

用集合论语言可以将分图 (a) 所揭示的事实确切地表达出来. 这就是将有理数集合 $\mathbb{Q}$ 分成两个非空集 S_q 和 T_q, 使满足条件

$$\mathbb{Q} = S_q \cup T_q, \quad S_q \cap T_q = \varnothing,$$

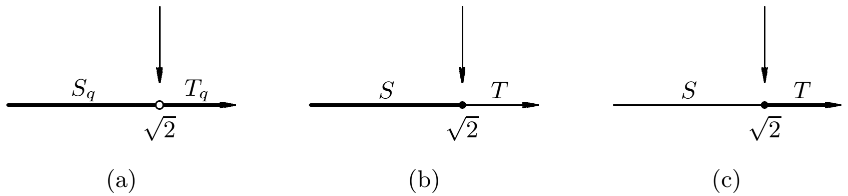


图 13.5: 实数连续性的示意图

并且使得满足条件 $s \in S_q, t \in T_q$ 的每一对有理数 s, t, 总是成立 $s < t$. 这时称 S_q 为下集, T_q 为上集. 分图 (a) 表明有可能出现下集 S_q 中没有最大数, 同时上集 T_q 中没有最小数的情况. 这实际上已经在 §1.2 中证明过, 只是当时的集合 A 与这里的下集不完全一样. 这里用集合记号就是

$$S_q = \{x \in \mathbb{Q} \mid x < 0 \text{ 或者 } x^2 < 2\}, \quad T_q = \mathbb{Q} - S_q.$$

我们称这样的 S_q 和 T_q 是对于有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个切割. 它表明在数轴上的有理数集 $\mathbb{Q}$ 是有间隙 (或空隙) 的, 也就是不连续的. 当然这只是一个例子. 但可以证明, 在数轴上的有理数全体虽然有无限多, 而且稠密, 但在任何两个有理数之间都有间隙, 也就是说存在无穷多个间隙. 因此我们说有理数集合在数轴上是不连续的. 容易想象, 数轴上的这些间隙, 也就是无理数应当占有的位置. 如果将这些间隙填满, 那么数轴就连续了. 这是一种直观想象.

Dedekind① 的方法就是考虑对于 $\mathbb{Q}$ 的所有可能的切割 (在英语中就是 cut). 具体来说, 就是将 $\mathbb{Q}$ 分成两个不相交的非空集 S 和 T, 满足条件:

(i) $\mathbb{Q} = S \cup T, \quad S \cap T = \varnothing$,

(ii) 对于满足 $s \in S, t \in T$ 的每一对有理数 s, t, 成立 $s < t$.

用记号 $S \mid T$ 记这样的切割, 称 S 为切割的下集, T 为切割的上集. 前面的 $S_q \mid T_q$ 就是一个具体的切割.

容易看出只存在下列三类切割:

1. 在下集 S 中有最大数, 在上集 T 中没有最小数.
2. 在下集 S 中没有最大数, 在上集 T 中有最小数.
3. 在下集 S 中没有最大数, 同时在上集 T 中也没有最小数.

这是因为不可能出现下集 S 有最大数且同时上集 T 有最小数的切割.

前两类切割是平凡的, 事实上从每个给定的有理数都可以定义出分属于第一类和第二类的两个切割. 但第三类切割则带来了新意. 图 13.5 的分图(a) 中的 $S_q \mid T_q$ 就是第三类切割的一个具体例子. 它恰好揭示出在数直线上的有理数集中的间隙.

Dedekind 的无理数就是第三类切割.

---

① 戴德金 (Richard Dedekind, 1831–1916), 德国数学家, 现代实数理论的奠基人之一.

定义 13.3 (Dedekind) 称有理数集 $\mathbb{Q}$ 中的第三类切割为无理数.

于是图 13.5(a) 中的切割 $S_q \mid T_q$ 就是无理数 $\sqrt{2}$.

对于初次见到上述定义的我们来说, 这似乎有点不可思议. 切割如何会是数? 无理数就是切割? 没错, Dedekind 的定义就是如此. 不但如此, 为了解决无理数和有理数的不平等地位, 他还将有理数等同于上述第一类或第二类切割. 于是它们都是切割, 地位平等了. 最后定义实数全体所成集合 $\mathbb{R}$ 就是所有这些切割的集合.

为此我们需要数学上的同构概念. 就实数系而言, 当两个集合都满足相同的公理化系统, 又在它们的元素之间存在一一对应, 而且在这种对应下所有运算和序关系仍然保持的话, 我们就说它们是实数系的两个同构的模型, 在使用中不加区分. 因此在模型中的具体元素是什么并不重要. 具体来说, 我们不必为目前的无理数、有理数和实数是切割而不安.

在这个定义的基础上, 就不难证明在这个 $\mathbb{R}$ 中前面的所有公理全部成立. 其中特别重要的是现在可以证明下列基本定理 (见 [8]).

Dedekind 定理 设有两个非空实数集 S 和 T, 满足以下两个条件: (1) $\mathbb{R} = S \cup T$, (2) $\forall\, x \in S, \forall\, y \in T : x < y$, 则或者 S 有最大数, 或者 T 有最小数.

注 这就是说, 与 $\mathbb{Q}$ 中的切割相比, 在实数系 $\mathbb{R}$ 中的切割只有两类, 没有第三类. 图 13.5 的分图 (b) 和 (c) 就是用来表明, 在引入无理数之后, 对实数集 $\mathbb{R}$ 的任何切割都不会出现间隙, 即 $\mathbb{R}$ 是连续的.

下面以推论的形式给出用 Dedekind 定理证明连续性公理的过程.

推论 在 Dedekind 的实数系 $\mathbb{R}$ 中连续性公理 (即 §1.2 中的连续性原理) 成立.

证 若有两个非空数集 A, B, 使得 $\forall\, x \in A, \forall\, y \in B : x < y$, 则可以定义

$$S = \{x \in \mathbb{R} \mid x < y\ \forall\, y \in B\}, \quad T = \mathbb{R} - S.$$

这时有 $A \subset S$, $B \subset T$. 于是 S 的最大数或者 T 的最小数就是连续性原理中所要求的数 c. $\square$

注 这里有一个容易引起混淆的问题需要解释.

§1.2 的连续性原理在 §13.3.3 中被采用为一个公理, 即连续性公理. 公理是不需要也不可能证明的. 为什么在上述推论中我们能够证明公理呢? 实际上这是出发点不同引起的问题. 回顾 Dedekind 的 $\mathbb{R}$, 可以发现, 它是在有理数系 $\mathbb{Q}$ 的基础上的一种构造. 其中可以证明 Dedekind 定理, 而连续性公理在表面上比它还要简单, 当然可以作为一个推论得到了. 反之, 在不考虑模型的公理化系统中, 当然谈不上证明公理了. 例如, 在不少教科书的公理化系统中, 就直接将上述 Dedekind 基本定理的内容作为连续性公理, 这时当然也没有需要证明的问题了. 这也就是 Dedekind 定理有时被称为 Dedekind 公理的原因.

文献综述 关于 Dedekind 切割方法在有关数学分析的著作中多有介绍. 经典性的叙述则是 Landau[①]特地为此而写的小书《分析基础》 [17], 该书的副标题就是"整数、有理数、实数、复数的运算". 当然其中只见数, 不见"分析".

在前苏联的数学分析教材中对 Dedekind 方法作完整叙述的首推由三卷组成的经典性教材《微积分学教程》 [8] 的绪论, 它为全书奠定了牢靠的基础，此外还可以参考 [1], [14] 的第一讲, [19] 的附录 I, [10] 的附录 II 等.

在西方教材中, [23] 在开始时用两章详细介绍了数系的公理, 在书末再用三章讲如何构造实数. 较简短的叙述见 [22] 的第一章及其附录等. 这两种教材中对 Dedekind 切割有改动, 将实数定义为满足以下 3 个条件的所有有理数集 α:

(1) $\alpha \subset \mathbb{Q}$, 但 $\alpha \neq \varnothing, \alpha \neq \mathbb{Q}$,

(2) 若 $x \in \alpha, y \in \mathbb{Q}, y < x$, 则 $y \in \alpha$,

(3) α 中无最大数, 即 $\forall x \in \alpha, \exists y \in \alpha : x < y$.

回顾前面的切割, 容易看出, 对于与无理数对应的第三类切割, 只要取其下集, 就得到符合上述条件的 α, 而对于有理数, 则取与其对应的第二类切割的下集即可. 从数学史知道这基本上就是 Russell[②]提出的实数定义方法 [3].

二. Cantor 的基本数列方法

如果说 Dedekind 的方法具有强烈的几何背景和代数特征, 则 Cantor 的方法可以说是分析性质的, 当然这并不是说其中可以使用极限概念.

回顾实数系基本定理中的 Cauchy 收敛准则 (见第一册的 §2.4), 我们知道它在有理数系中是不成立的. 如何扩张有理数系使得 Cauchy 收敛准则成立, 这就是 Cantor 方法的核心内容.

这与 Dedekind 的连续性命题很不一样. 一般将 Cantor 方法所解决的问题称为完备性 (或完全性) 问题. 这里代替 §13.3.3 中的连续性公理的是:

IV$'$ (**完备性公理**) 在 $\mathbb{R}$ 中的基本数列必有极限.

Cantor 方法的具体做法也非常直观 (虽然不是几何直观), 这就是利用无理数可以用有理数无限逼近的事实, 但又不能引入极限概念, 以免出现循环定义.

定义 13.4 设 $\{a_n\}$ 是有理数组成的数列. 若对于每个给定的正有理数 ε, 存在正整数 N, 使得当 $n, m > N$ 时, 成立

$$|a_m - a_n| < \varepsilon,$$

则称 $\{a_n\}$ 为有理数构成的基本数列.

---

① 兰道 (E. G. H. Landau, 1877–1938), 德国数学家, 著名数论专家.

② 罗素 (B. A. W. Russell, 1872–1970), 英国数学家、逻辑学家、哲学家、政论作家和社会活动家, 他是在数学基础研究中的逻辑主义学派的代表人物.

从极限理论中的 Cauchy 收敛准则知道, 凡是有极限的有理数列都是基本数列. 例如, 无理数 $\sqrt{2}$ 的不足近似值 $1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots$ 构成的数列当然就是基本数列. 目前无理数还没有定义, 那么为什么不可以就用基本数列作为无理数的定义呢? 这即是 Cantor 方法的内容.

这里要看到, 收敛于同一个无理数的基本数列有无限多个, 因此不能简单地将每一个基本数列对应于一个无理数. 在这里数学中的等价类概念起重要作用.

具体来说, 称两个基本数列 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 等价, 如果对于每个给定的正有理数 ε, 存在正整数 N, 使得当 $n > N$ 时总成立 $|a_n - b_n| < \varepsilon$.

现在于所有基本数列的集合中, 利用等价关系将这个集合分解为等价类的集合, 在每一个等价类中的任何两个基本数列都是等价的. 然后定义每个等价类为一个实数. 如果在一个等价类中有一个常值有理数列

$$a, a, \cdots, a, \cdots,$$

则就认为这个等价类就是有理数, 而此外的等价类就是无理数. 这就是 Cantor 方法中定义的实数.

以下的问题就是证明这样定义的实数系满足 13.3.3 中的前 3 组公理和上面列出的公理 IV$'$. 然后从公理 I,II,III,IV$'$ 出发就可以证明 §13.3.3 中的连续性公理 IV 成立. 这个证明与例题 13.7 和 13.9 完全相同. 只是要指出, 其中不可避免地要使用 Archimedes 公理. 因此在用公理 IV$'$ 的实数系公理化系统中必须保留公理 III.

从有理数系扩张为实数系后, 由实数组成的基本序列一定收敛, 也就是说从基本序列出发不可能再扩张了. 这就是完备性 (或完全性) 的含义.

这里可以回顾 Cauchy 在这方面的一个失误. 当然 Cauchy 在为数学分析建立严格基础方面作出了重大贡献, 澄清了在他之前的许多混乱和模糊之处. 但他与此前的许多数学家一样, 只是将无理数看成为有理数组成的基本序列的极限, 没有注意到其中的逻辑循环错误. 例如, 只有当有理数列 $1, 1.4, 1.41, 1.414, \cdots$ 收敛时我们才能说它的极限是 $\sqrt{2}$, 但数列收敛的定义是以存在极限为前提的 (参见第一册中的定义 2.1 和 2.3). 于是对 $\sqrt{2}$ 的定义需要以自身的存在为前提, 成了同义反复. 可以看出, Cauchy 实际上认为收敛数列一定有极限, 没有能够认识到有建立实数系的必要性. 出于同一个原因, Cauchy 当时不能够证明今天以他命名的收敛准则的充分性.

Cantor 的方法可以说是沿着 Cauchy 的方向成功地解决了实数系的建立问题, 避免了出现恶性循环, 同时也对于 Cauchy 收敛准则给出了证明.

应当指出, 相对于 Dedekind 方法来说, Cantor 方法有一个非常突出的优点. 这就是从代数角度来看, Cantor 方法对一般的有序域都适用 [24], 而从度量的角度来看, 可以几乎原封不动地用于广泛得多的空间中去, 具体来说就是可以与维数无关地证明每个度量空间都可以完备化, 即等距嵌入到一个完备空间中去, 使得

Cauchy 收敛准则在其中成立. 这在拓扑学和泛函分析中都具有基本的重要性. 反之, 以数轴的几何直观为基础的 Dedekind 方法就无法推广到高于一维的问题中去.

文献综述 这方面的内容可以参考 [13] 的第四章, [24] 的 §68, [26] 的第五章, [30] 的第二章, [10] 的第一版的附录 II 等.

三. 从十进制小数表示出发的方法

这种方法与前两个方法不同, 不需要引入新的数学对象作为无理数, 而是从中学数学已有的定义出发, 即承认十进制有限小数和无限循环小数是有理数, 而十进制无限非循环小数则是无理数. 这样就比较容易为中学生所接受. 因此也称为中学生的实数理论.

但什么是十进制无限非循环小数? 这里不可避免地涉及到极限问题. 如第一册 §2.4 的练习题 2 所示, 在有了 Cauchy 收敛准则之后, 我们可以从数列极限或无穷级数之和来理解十进制无限非循环小数. 但在建立实数系之前是不能如此理解的, 否则就与历史上的 Cauchy 犯同样的错误了.

因此, 为了避免逻辑上的循环定义, 在将十进制无限非循环小数定义为无理数时, 一开始不可能将它看成是一个无穷级数的和, 而只是将它看成一个纯粹的记号, 一个还不清楚有什么意义的数学对象. 然后在所有十进制小数全体组成的集合内引入加法、乘法运算, 并规定其中任何两个小数之间的序, 并验证它满足 §13.3.3 中所有的 4 组公理. 当然这里需要经过很多步骤的推论. 事实上, 认为这样一种记号代表实数也是一种数学的抽象, 而且这也是连续性公理的另一种等价形式. 历史上 Wallis 于 1696 年将有理数与循环小数等同, 而 Stolz 则于 1886 年提出将十进制无限非循环小数作为无理数的定义 [15], 但仍未建立起一个满意的实数理论.

从十进制小数开始讲实数的教材很多, 例如可以参考 [2, 7, 11] 等. 在 [28] 的第一章中比较详细地讲解了在十进制小数中引入四则运算的严格方法.

可以归入这条途径的还有一种做法, 就是引进以有理数为端点的闭区间套原理作为连续性公理的一种替代物. 它既比较直观, 同时又避开了十进制无限非循环小数这类一开始难以说清楚的对象, 因此也是一种好方法. 见 [4, 7, 16] 等.

四. 实数系的惟一性

首先要明白这里的惟一性的确切含义. 如前所说, 这是在同构意义上的惟一性. 具体来说, 就是证明凡是满足 §13.3.3 中全部公理的实数系模型都是同构的.

这方面我们只列出文献供参考.

按照 Dedekind 方法建立实数系后对其在同构意义下惟一性的讨论见 [23] 的最后一章 “实数的惟一性”. 按照 Cantor 方法建立实数系时的惟一性讨论可以看 [26] 的第五章的最后部分的证明. 这里只有一个问题需要注意, 这就是前面已经多次提

到的 Archimedes 公理. 如果像 §13.3.3 中那样, 将 §1.2 的连续性原理作为连续性公理, 则从例题 13.11 知道, 可以从公理化系统中去掉 Archimedes 公理. 但在 Cantor 方法中, 在证明了所构造的实数系中完全性公理成立时还不能推出 Archimedes 公理成立. 因此就不能不将它列为一条公理. 同样若用闭区间套定理作为实数系的连续性公理, 则 Archimedes 公理也是不能缺少的.

五. 历史的回顾

从以上的浏览可见, 如果说有理数系是我们过去已经熟悉的对象, 则实数系就不是如此简单了. 从以上无论那种方法来看, 无理数都具有相当的抽象性. 在 Dedekind 方法中, 实数是切割. 在 Cantor 方法中, 实数是有理数基本序列的等价类. 在将实数定义为十进制小数的方法中, 表面上与中学数学的有理数知识最为接近, 但实际上需要从如何将它们相加和相乘开始进行构造. 显然这里都离不开无限性带来的困难. 举例来说, 如果一定要将 $\sqrt{2}$ 用无限十进小数来表示, 那么直到今天还没有人看到过完整的 $\sqrt{2}$.

可以从回顾数学分析的发展历史来观察这个问题. 众所周知, 分析作为一门独立的数学知识是在 17 世纪下半叶形成的. 从一开始起就明白, 分析与有着古老起源的算术、几何、代数的最大不同之处是: 分析是围绕极限概念而展开的. 而从今天的认识回顾则很清楚地知道, 没有实数理论是不可能建立严格的极限理论的. 但要认识到这一点并建立起实数理论是非常不容易的, 为此只要指出一件事就够了. 这就是作为微积分基础的实数理论是在微积分创始之后经过 200 多年的努力才得到解决. 在这个阅读材料中介绍的前两种方法, 即 Dedekind 的切割方法和 Cantor 的基本序列方法, 不约而同地发表于 1872 年. 这是分析学科达到成熟的里程碑标志. 长期以来有关极限、导数、无穷小量等微积分基本概念方面的困惑到此时都迎刃而解. 微积分的基础建设终于完成了①.

如果从人类对于无理数的认识来回顾历史, 从古希腊数学家第一次面对 $\sqrt{2}$ 到 1872 年完成实数系的建设, 时间的跨度已经超过了 2000 多年. 这充分表明我们所面对的问题, 即对实数系的学习, 是多么的不容易.

① 在数学史上将由微积分的基础问题引起的论战称为第二次数学危机. 有关情况可以看关于微积分历史的著作 [3, 5, 6] 和关于数学史的一般性著作 [12, 15, 18] 等.

第十四章 数项级数

内容简介 这是无穷级数的第一章, 介绍级数的一般理论. §14.1 是无穷级数的基本概念, 其中回顾了第二章中关于无穷级数的内容. §14.2 是非负项级数的敛散性判别法. §14.3 是一般项级数的敛散性判别法. §14.4 讨论收敛级数的性质. §14.5 是无穷乘积介绍.

§14.1 基本概念与敛散性

14.1.1 基本概念回顾

在第二章的 §2.1.6, §2.3.4 等处已经对无穷级数作了初步介绍. 以下列举该两小节的主要内容, 然后作适当补充.

1. 无穷级数的定义和基本概念, 其中包括通项、部分和、部分和数列、级数的收敛与发散, 以及收敛级数的和等.

2. 对给定的数列, 可以构造一个无穷级数, 使得它的部分和数列就是给定的数列. 这说明, 研究数列和级数在本质上是一回事.

3. 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 $\Longrightarrow \lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$ (定理 2.8).

4. 对于非负项级数, 其部分和数列单调增加, 因此只有两种可能性, 即级数的和为有限数或为 $+\infty$ (定理 2.18).

5. 通过对级数的部分和数列用 Cauchy 收敛准则, 得到了无穷级数的 Cauchy 收敛准则 (定理 2.24). 为方便起见, 在这里重新列出如下.

定理 14.1 (无穷级数的 Cauchy 收敛准则) 无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充分必要条件是对 $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geqslant N, \forall\, p \in \mathbb{N}$:

$$|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| < \varepsilon.$$

6. 已经讨论了几个具体的级数, 其中特别重要的有

(1) 几何级数 $1 + x + \cdots + x^n + \cdots$ 收敛的充分必要条件是 $|x| < 1$, 这时级数的和为 $\dfrac{1}{1-x}$ (例题 2.10);

(2) 调和级数 $1 + \dfrac{1}{2} + \cdots + \dfrac{1}{n} + \cdots$ 发散 (例题 2.32);

(3) 数 e 的无穷级数展开: $\mathrm{e} = 1 + \dfrac{1}{1!} + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + \cdots$ (定理 2.19, 例题 7.9).

以下补充几点. 从级数与数列的联系就容易证明以下几个结论, 它们在今后都会经常用到.

7. 若两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛时, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 收敛, 且

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n+\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$$

又若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, c 为常数, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n$ 也收敛, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} ca_n = c\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

8. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 中一个收敛, 一个发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ 发散.

9. 将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 改变或去掉前有限项后其敛散性不变. 因此今后在判别一个无穷级数的敛散性时, 可以不顾前面的有限多项, 而只考虑从某一项开始的所有项具有什么性质. 这对于下面的判别法特别重要.

将上述最后一点加以引申, 我们引入无穷级数的余项概念.

定义 14.1 对于收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, 称 $r_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k$ 为级数的第 n 个余项.

注 由于每个 r_n 都是一个无穷级数之和, 它是从原来的级数去掉前 n 项后得到的级数, 因此只有当该级数收敛时余项才有意义. 从定义可见有

$$r_n=\lim_{k\to\infty}(S_{n+k}-S_n)=S-S_n.$$

如果是通过计算部分和来求级数和的近似值, 则对余项的估计就有可能确定误差的范围.

前面已经看到与级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 有关的有两个数列, 即由其通项组成的数列 $\{u_n\}$ 和级数的部分和数列 $\{S_n\}$. 现在又有与级数有关的第三个数列, 即由余项组成的数列 $\{r_n\}$, 但它只对于收敛数列有意义, 且一定有 $r_n=o(1)$.

作为复习, 我们看下面的例子, 并举出几个不同解法, 其中的前两个解法都在第一册见过. 它们是进一步发展各种方法的起点.

例题 14.1 证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛.

证 1 (见例题 2.33) 由于这是非负项级数, 因此只要证明其部分和数列有上界. 利用 $\dfrac{1}{n^2}<\dfrac{1}{(n-1)n}$ $\forall\, n\geqslant 2$, 就可以估计如下:

$$S_n = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2}$$
$$< 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n} = 2 - \frac{1}{n} < 2,$$

可见级数收敛, 且知道其和不超过 2. □

注　今后会证明这个级数的和为 $\dfrac{\pi^2}{6} \approx 1.6449$, 这是一个有用的结果.

证 2　(见例题 2.40) 用 Cauchy 收敛准则, 从

$$\left|\frac{1}{(n+1)^2} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^2}\right| < \frac{1}{n(n+1)} + \cdots + \frac{1}{(n+p-1)(n+p)}$$
$$< \frac{1}{n} - \frac{1}{n+p} < \frac{1}{n},$$

可见对 $\forall \varepsilon > 0$, 只要取 $N > \dfrac{1}{\varepsilon}$, 就保证对每个 $n \geqslant N$ 和每个正整数 p, 上式小于 ε, 因此级数收敛. □

证 3　对于 $n > 1$, 有不等式

$$\frac{1}{n^2} < \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}x}{x^2},$$

因此可以用积分估计出部分和数列有上界:

$$S_n < 1 + \int_1^n \frac{\mathrm{d}x}{x^2} = 1 + \left(-\frac{1}{x}\right)\Big|_1^n = 2 - \frac{1}{n} < 2. \quad \square$$

方法的比较　第一个证明最简单, 只依赖于 $n^2 > n(n-1)$. 这里重要的是连锁消去法, 即如果能有 $0 \leqslant u_n \leqslant v_{n+1} - v_n \ \forall n$, 且 $\{v_n\}$ 有上界, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

第二个证明是用 Cauchy 收敛准则. 它是收敛的充要条件, 但使用比较复杂 (可回顾 §2.4.2).

第三个证明利用积分. 上面的估计依赖于广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2}$ 收敛. 这将发展成为 §14.2.5 中的 Cauchy 积分判别法.

14.1.2　p 级数

下面讨论含有参数 p 的无穷级数, 俗称为 p 级数. 当 $p = 1$ 时就是调和级数, 当 $p = 2$ 时就是例题 14.1. 关于 p 级数的敛散性结论是今后的基本知识.

例题 14.2 (p 级数)　证明: 以 p 为参数的无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

当 $p \leqslant 1$ 时发散, 而当 $p > 1$ 时收敛.

证 1　若 $p \leqslant 0$, 则级数通项不是无穷小量, 因此发散. 对于 $0 < p \leqslant 1$, 利用 $p = 1$ 时的调和级数发散和 $\dfrac{1}{n^p} \geqslant \dfrac{1}{n}$ 成立, 可见级数的部分和数列无上界, 因此发散. 下面只要对于 $p > 1$ 时的收敛性给出证明.

模仿证明调和级数发散的方法 (参见例题 2.32), 写出

$$S_3 = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} < 1 + 2\cdot\left(\frac{1}{2^p}\right) = 1 + \frac{1}{2^{p-1}},$$

$$S_7 = S_3 + \frac{1}{4^p} + \frac{1}{5^p} + \frac{1}{6^p} + \frac{1}{7^p} < S_3 + 4\cdot\left(\frac{1}{4^p}\right) < 1 + \frac{1}{2^{p-1}} + \frac{1}{4^{p-1}},$$

$\cdots \quad \cdots\cdots$

就可以猜测有以下不等式:

$$S_{2^{k+1}-1} < 1 + r + r^2 + \cdots + r^k. \tag{14.1}$$

其中 $r = \dfrac{1}{2^{p-1}}$. 用数学归纳法来证明这个不等式. 对于 $k = 1, 2$ 它已经成立. 若设对 k 成立, 则对于 $k+1$ 就有

$$\begin{aligned}
S_{2^{k+2}-1} &= S_{2^{k+1}-1} + \frac{1}{(2^{k+1})^p} + \frac{1}{(2^{k+1}+1)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{k+2}-1)^p} \\
&< S_{2^{k+1}-1} + 2^{k+1}\cdot\left(\frac{1}{(2^{k+1})^p}\right) \\
&= S_{2^{k+1}-1} + \frac{1}{(2^{p-1})^{k+1}} = S_{2^{k+1}-1} + r^{k+1},
\end{aligned}$$

可见 (14.1) 成立.

由于 $p > 1$, $r = \dfrac{1}{2^{p-1}} < 1$, 因此从 (14.1) 可见对于每个 n 成立不等式

$$S_n < \frac{1}{1-r},$$

从而 $\{S_n\}$ 有上界, 即当 $p > 1$ 时的 p 级数收敛. □

以下对于 $p > 1$ 再给出几个证明.

证 2 用连锁消去法, 即要寻找有上界的 $\{v_n\}$, 使成立 $0 \leqslant u_n \leqslant v_{n+1} - v_n\ \forall\, n$. 在区间 $[n, n+1]$ 上对函数 x^{1-p} 用 Lagrange 微分中值定理, 存在 $0 < \theta < 1$, 使得成立不等式

$$\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}} = \frac{p-1}{(n+\theta)^p} > \frac{p-1}{(n+1)^p},$$

这样就可以对 $p > 1$ 的级数部分和估计其上界:

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^p} &< 1 + \frac{1}{p-1}\left[\left(1 - \frac{1}{2^{p-1}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(N-1)^{p-1}} - \frac{1}{N^{p-1}}\right)\right] \\
&= 1 + \frac{1}{p-1}\left(1 - \frac{1}{N^{p-1}}\right) < \frac{p}{p-1}. \quad \square
\end{aligned}$$

证 3 利用证 2 中的不等式即可写出

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{1}{(n+1)^p} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^p}\right| \\
&< \frac{1}{p-1}\left[\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+1)^{p-1}}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{(n+p-1)^{p-1}} - \frac{1}{(n+p)^{p-1}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{p-1}\left(\frac{1}{n^{p-1}} - \frac{1}{(n+p)^{p-1}}\right) < \frac{1}{p-1}\cdot\frac{1}{n^{p-1}},
\end{aligned}$$

这样就可以用 Cauchy 收敛准则完成证明. □

注 如过去的例题 2.41 所示, 上述证 3 虽然与证 2 极其相似, 但证 3 的方法可以用以证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{b_n}{n^p}$ 收敛, 其中 $p>1$, 数列 $\{b_n\}$ 只要有界就行, 而证 2 的方法则只能用于 $\{b_n\}$ 为非负有界数列的情况.

证 4 与例题 14.1 的证 3 类似, 利用 $n>1$ 时的不等式

$$\frac{1}{n^p}<\int_{n-1}^{n}\frac{\mathrm{d}x}{x^p},$$

就可以估计得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^p}<1+\int_1^n\frac{\mathrm{d}x}{x^p}=1+\frac{1}{1-p}\cdot x^{1-p}\Big|_1^n<1+\frac{1}{p-1}.\quad\square$$

练 习 题

1. 证明: 无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性在下列各种变动下不变:

   (1) 任意插入有限项; (2) 任意删去有限项; (3) 任意改动有限项; (4) 任意改变有限项的顺序.

2. 设有三个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$, 且当 n 充分大时成立 $v_n\leqslant u_n\leqslant w_n$, 又假设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n$ 都收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛. 又请将本题与数列的夹逼定理 (见第一册定理 2.12) 作比较, 找出它们的相同处和不同处.

3. 按照无穷级数的 Cauchy 收敛准则, 用肯定叙述方式写出无穷级数发散的充分必要条件.

4. 仿例题 14.2 中对 $p>1$ 情况的多种证明方法, 对于 $p=1$ 时的调和级数发散给出几种证明.

5. (1) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 证明: 对每个正整数 p, 有

   $$\lim_{n\to\infty}(u_{n+1}+\cdots+u_{n+p})=0;$$

   (2) 举例说明 (1) 不是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充分条件;

   (3) 找出 (1) 与 Cauchy 收敛准则中的条件的差别.

6. 讨论下列级数的敛散性, 并在收敛时求出级数和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(3n-1)(3n+2)}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\dfrac{1}{2^n}-\dfrac{1}{3^n})$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(n^2+1)((n+1)^2+1)}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{1}{n^2+n+1}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\cos\dfrac{\pi}{n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{4^n}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{2n^2+n}{2n^2+n-1}$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}$ $(\forall\, x\geqslant 2)$.

7. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\dfrac{3}{n^2}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^n\cos nx,\ (\forall\,|q|<1)$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx-\sin(n+1)x}{n}$.

8. 确定使得下列级数收敛的 x 的范围, 并求出此时的级数和:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(1+3x)^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin^n x$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^n$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$.

9. 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的通项 $u_n\to 0\ (n\to\infty)$, 且级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界, 问: 级数是否收敛?

10. (1) 试举出 $f\in C[1,+\infty)$, 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 发散, 但广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛;

(2) 试举出 $f\in C[1,+\infty)$, 使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 收敛, 但广义积分 $\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

§14.2 非负项级数的敛散性判别法

将每一项同号的级数称为保号级数. 显然只需要讨论每一项非负的级数即可. 这就是在 §2.3.4 已经开始讨论的非负项级数. 又若每一项大于 0, 则称为正项级数. (在阅读其他书籍时请注意, 不少教科书中所说的正项级数实际上是非负项级数.)

由上一节的讨论可见, 本节对于非负项级数的各种敛散性判别法也可以用于从某一项开始的每一项非负的级数. 这一点在下面叙述和证明这些判别法时不再重复.

14.2.1 比较判别法

从非负项级数收敛的充要条件 (见定理 2.18) 出发, 最基本的判别法就是比较判别法. 它的应用依赖于寻找另一个合适的级数作比较. 今后称它为比较级数.

比较判别法 若 $0 \leqslant a_n \leqslant b_n\ \forall n$, 则有

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛},$$

$$(2)\ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 发散} \Longleftarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 发散}.$$

证 由于两个级数都是非负项级数, 因此只要从部分和是否有界就可以判定敛散性. 从级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 可见 $\exists\, M > 0, \forall\, n : \sum\limits_{k=1}^{n} b_k \leqslant M$. 利用条件 $a_n \leqslant b_n\ \forall\, n$ 可见也有 $\forall\, n : \sum\limits_{k=1}^{n} a_k \leqslant M$, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 这就是 (1). 而 (2) 只是 (1) 的逆否命题. □

例题 14.3 判别非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\ln n}{n^{\frac{3}{2}}}$ 的收敛性.

证 利用例题 14.2 中关于 p 级数的敛散性结论, 又利用 $\ln x = o(x^{\varepsilon})$ $(x \to +\infty)$ 对每个 $\varepsilon > 0$ 成立, 取 $\varepsilon = 1/4$, 则存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时, $\ln n \leqslant n^{\frac{1}{4}}$, 因此就有

$$0 \leqslant \frac{\ln n}{n^{3/2}} \leqslant \frac{1}{n^{5/4}},$$

从而可以用 $p = 5/4$ 时的 p 级数作为比较级数推出本题的非负项级数收敛. □

例题 14.4 讨论 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{n}{n^2+1}$ 的敛散性.

解 记 $a_n = \dfrac{n}{n^2+1}$, 则有

$$a_n \geqslant \frac{n}{n^2+n^2} = \frac{1}{2n},$$

因此从调和级数发散知道 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 发散. $\square$

14.2.2 等价量判别法

证明不等式往往不如求极限更方便, 这样就从比较判别法得出下列判别法.

等价量判别法 若 $b_n \geqslant 0,\ a_n > 0\ \forall\, n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散.

证 从 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = 1$ 可知存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时有 $\dfrac{1}{2} < \dfrac{b_n}{a_n} < 2$.

从 $b_n < 2a_n$ 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛},$$

而从 $b_n > \dfrac{1}{2}a_n$ 可知

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ 收敛}. \quad \square$$

注 更广一点的是比较判别法的下列极限形式. 其证明留作练习题.

比较判别法的极限形式 若 $b_n \geqslant 0, a_n > 0\ \forall\, n$, 且 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{b_n}{a_n} = l$, 则

(1) 在 $0 < l < +\infty$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 同敛散;

(2) 在 $l = 0$ 时可从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也收敛;

(3) 在 $l = +\infty$ 时可从 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 也发散.

例题 14.5 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{(n^2+3n-2)^x}$ 的敛散性, 其中参数 $x > 0$.

解 从 $a_n \sim \dfrac{1}{n^{2x}}$ 可知, 当 $x > \dfrac{1}{2}$ 时, 级数收敛. 同时又知道, 当 $x \leqslant \dfrac{1}{2}$ 时, 级数发散. $\square$

例题 14.6 讨论 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \ln\left(1 - \dfrac{1}{n}\right)$ 的敛散性.

解 这是负项级数, 即每一项小于 0. 利用 $\ln(1+x) \sim x\ (x \to 0)$, 可见级数与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(-\dfrac{1}{n}\right)$ 同敛散, 因此发散. □

14.2.3 D'Alembert 比值判别法

为了讨论一个给定级数的敛散性, 上两小节的比较判别法等都需要寻找另一个比较级数. 这里要介绍的 D'Alembert① 判别法则无需如此. 这无疑是一个优点. 它也有非极限形式与极限形式, 为简明起见只列出后一种.

D'Alembert 比值判别法 对于正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 若存在极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=l,$$

则当 $l<1$ 时, 级数收敛, 而当 $l>1$ 时, 则级数发散.

证 若 $l<1$, 则可取 r 使得 $l<r<1$. 从条件知存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时, 有

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}<r.$$

于是当 $n \geqslant N+1$ 时成立

$$0<a_n<ra_{n-1}<r^2a_{n-2}<\cdots<r^{n-N}a_N=\frac{a_N}{r^N}\cdot r^n,$$

这样就得到一个收敛的几何级数:

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} r^{n-N}a_N=\frac{a_N}{r^N}\sum_{n=N+1}^{\infty} r^n,$$

将它作为比较级数, 由比较判别法可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

若 $l>1$, 则存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>1$, 因此 $a_n>a_{n-1}>\cdots>a_N>0\ \forall n \geqslant N+1$. 这表明通项数列 $\{a_n\}$ 不是无穷小量, 因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

注 1 若 $l=1$, 则 D'Alembert 判别法失效, 不能得到任何结论. 例如 p 级数, 用 D'Alembert 判别法总是 $l=1$, 无论 p 是什么都是如此.

注 2 从证明可以看出 D'Alembert 判别法实际上依赖于将几何级数作为比较级数. 下一小节的根值判别法也是如此.

例题 14.7 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 的敛散性.

解 从 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\dfrac{1}{n+1}$, 可见极限为 $l=0$. 因此级数收敛. □

① 达朗贝尔 (Jean le Rond d'Alembert, 1717–1783), 法国数学家、力学家, 18 世纪法国启蒙运动的杰出代表.

14.2.4 Cauchy 根值判别法

这里需要上极限的概念, 它保证了判别法中要计算的 l 在任何情况下有意义.

Cauchy 根值判别法 设有非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$, 且记

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l,$$

则当 $l < 1$ 时该级数收敛, 而当 $l > 1$ 时级数发散.

证 若 $l < 1$, 取 r 满足 $l < r < 1$, 则从上极限的性质可知, 大于等于 r 的 $\sqrt[n]{|a_n|}$ 至多只有有限多项 (见定理 13.2(I)(1)), 因此存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时, $\sqrt[n]{a_n} < r$. 这导致 $0 \leqslant a_n < r^n$, 从比较判别法可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛.

若 $l > 1$, 则同样由上极限的性质可知 (见定理 13.2(I)(2)), 存在无限多个 n, 满足 $\sqrt[n]{a_n} > 1$, 这就是 $a_n > 1$, 因此 $\{a_n\}$ 不是无穷小量, 从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散. □

注 1 同样从 p 级数可知, 在 Cauchy 根值判别法中的 $l = 1$ 时判别法失效.

注 2 在 §2.2 的练习题 19(5) 中已经证明, 若 $x_n > 0\ \forall\, n$, 则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1}}{x_n} = l \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x_n} = l.$$

因此若一个正项级数的收敛性能用 D'Alembert 比值判别法解决, 则也一定可用 Cauchy 根值判别法解决. 另一方面, 可以举出例子说明反之不能成立.

例题 14.8 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{x^n}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}$ 的敛散性, 其中参数 $x > 0$.

解 由于

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x}{1+\dfrac{1}{n}} = x,$$

可知 $x > 1$ 时级数发散, $0 < x < 1$ 时级数收敛. 当 $x = 1$ 时, 级数通项 $a_n \to \dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 因此级数发散. □

例题 14.9 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1+(-1)^n}{n} \ln^n x$ 的敛散性, 其中参数 $x > 0$.

解 记通项为 a_n, 当 n 为奇数时 $a_n = 0$, 而当 n 为偶数时 $a_n > 0$. 因此可用根值判别法. 由于

$$\varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = |\ln x|,$$

因此当 $|\ln x| < 1$ 时, 即 $\dfrac{1}{\mathrm{e}} < x < \mathrm{e}$ 时级数收敛. 当 $|\ln x| > 1$ 时, 即 $x > \mathrm{e}$ 或 $0 < x < \dfrac{1}{\mathrm{e}}$ 时级数发散.

当 $x=\mathrm{e}$ 或 $x=\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 则 $a_n=\dfrac{1+(-1)^n}{n}$, 即 $a_{2n-1}=0,\ a_{2n}=\dfrac{1}{n}$. 从调和级数发散知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散. □

注 1 由于这个级数的奇数项总是 0, 因此不能直接用 D'Alembert 判别法.

注 2 一般来说比值的极限要比根值的极限容易求, 特别遇到阶乘时是如此. 但这时往往可以用 Stirling 公式. 例如对于下列级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}n!\left(\frac{3}{n}\right)^n,$$

比值极限计算如下:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=3\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\to\frac{3}{\mathrm{e}},$$

而根值极限计算如下:

$$\sqrt[n]{n!}\left(\frac{3}{n}\right)\sim\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)\sqrt[2n]{2\pi n}\left(\frac{3}{n}\right)\to\frac{3}{\mathrm{e}}.$$

这里若用例题 2.31 的已知结果, 即 $\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}\sim\dfrac{1}{\mathrm{e}}$, 则更为方便.

14.2.5 Cauchy 积分判别法

这种方法已出现在例题 14.1 和 14.2 中, 现在叙述其一般形式. 它来自于用定积分表示的曲边梯形面积与作为级数部分和的矩形面积之和的比较, 见图 14.1.

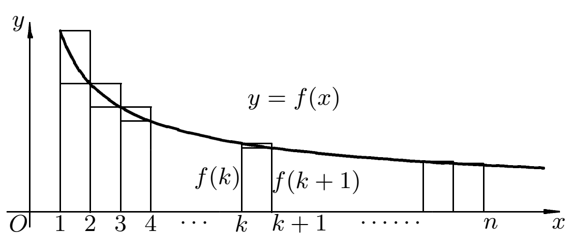


图 14.1: Cauchy 积分判别法的几何意义

Cauchy 积分判别法 若函数 f 在区间 $[1,+\infty)$ 上非负单调减少, 则无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}f(n)$ 与广义积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 同敛散.

证 从 f 单调减少可知对于每个正整数 $k\geqslant 1$ 有下列不等式

$$f(k+1)\leqslant\int_k^{k+1}f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant f(k).$$

取 $k=1$ 到 $n-1$ 并相加, 就得到 (参见图 14.1):

$$\sum_{k=2}^{n}f(k)\leqslant\int_1^n f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\sum_{k=1}^{n-1}f(k). \tag{14.2}$$

若广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 (14.2) 式中间的积分有上界, 而左边的不等式表明非负项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ 的部分和数列有上界, 因此级数收敛.

若非负项级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f(k)$ 收敛, 则其部分和数列有上界, 而 (14.2) 的右边的不等式表明变动上限 $A\ (\geqslant 1)$ 的积分

$$\int_1^A f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_1^{[A]+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

是 A 的单调增加有上界函数, 因此广义积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. □

注 由于无穷级数的敛散性在去掉级数的有限项后保持不变, 因此与前面的各种判别法一样, Cauchy 积分判别法中的条件可以放宽. 这就是只要对某一个正整数 N, 函数 f 在区间 $[N,+\infty)$ 上非负单调减少, 就足以保证:

$$\text{无穷级数 } \sum_{n=1}^{\infty} f(n) \text{ 与广义积分 } \int_N^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \text{ 同敛散.}$$

例题 14.10 用 Cauchy 积分判别法讨论 p 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n^p}$ 的敛散性, 其中 $p > 0$.

解 这就是例题 14.2 的解 4, 只是现在可以直接用广义积分的例题 11.3, 即 $\int_1^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 于 $0 < p \leqslant 1$ 时发散, 于 $p > 1$ 时收敛, 于是 p 级数也是如此. □

注 注意前面已经提到, D'Alembert 比值判别法和 Cauchy 根值判别法对于 p 级数的敛散性判定问题都失效. 下一个例题也是如此.

例题 14.11 讨论级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{n \ln^q n}$ 的敛散性, 其中 $q > 0$.

解 $f(x) = \dfrac{1}{x \ln^q x}$ 在 $x \geqslant 2$ 上非负单调减少. 由于 $\int_2^{+\infty} \dfrac{\mathrm{d}x}{x \ln^q x}$ 于$0 < q \leqslant 1$ 时发散, 而于 $q > 1$ 时收敛 (参见例题 11.5), 因此本题的无穷级数也是如此. □

最后一个例题是通项单调减少的非负项级数在收敛时其通项所具有的渐近性质, 也称为 Abel①–Pringsheim② 定理.

例题 14.12 设 $\{a_n\}$ 是单调减少的非负数列, 且级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则成立

$$a_n = o\Big(\frac{1}{n}\Big) \ (\text{即 } \lim_{n\to\infty} na_n = 0).$$

① 阿贝尔 (Niels Henrik Abel, 1802–1829), 挪威数学家, 近代数学发展的先驱.
② 普林斯海姆 (Alfred Pringsheim, 1850–1941), 德国数学家.

证 从 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geqslant N$, 成立

$$a_{n+1} + \cdots + a_{2n} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

(这就是在 Cauchy 收敛准则中取 $p = n$.) 由于 $a_n \downarrow$, 因此有

$$na_{2n} \leqslant a_{n+1} + \cdots + a_{2n} < \frac{\varepsilon}{2},$$

于是有 $2na_{2n} < \varepsilon$. 因此数列 $\{na_n\}$ 的偶数项子列收敛于 0.

同时又有

$$(2n-1)a_{2n-1} \leqslant (2n-1)a_{2n-2} = (2n-2)a_{2n-2} + a_{2n-2},$$

由于最后一式的两项当 $n \to \infty$ 时都收敛于 0, 因此数列 $\{na_n\}$ 的奇数项子列也收敛于 0. 这就证明了所要的结论. □

注 这里 $a_n \downarrow$ 的条件是重要的, 否则结论不能成立. 例如, 令

$$a_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \text{ 是平方数}, \\ 0, & n \text{ 不是平方数}, \end{cases}$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 但却有 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, na_n = 1,\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, na_n = 0$.

练 习 题

1. 设从非负项数列 $\{u_n\}$ 中删去所有零项并保持其余项的顺序得到数列 $\{u'_n\}$, 问: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u'_n$ 的敛散性是否相同?

2. 举例说明对非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 若有 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{u_n} < 1$, 则级数未必收敛.

3. 证明: 用上极限和下极限可将正项级数的 D'Alembert 判别法推广如下:

   (1) 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r < 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 收敛;

   (2) 若 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = r > 1$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 发散.

4. 证明: 对于正项数列 $\{u_n\}$ 有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{u_{n+1}}{u_n} \leqslant \underline{\lim_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{u_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \sqrt[n]{u_n} \leqslant \overline{\lim_{n\to\infty}}\, \frac{u_{n+1}}{u_n},$$

   并由此推出根值判别法要比比值判别法强.

5. 讨论以下级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{2n^2+1}{3n^2-1}\right)^n n^3$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln n\cdot\arcsin\dfrac{1}{n}}{n}$;

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\mathrm{e}^{\frac{1}{n}}-1)\arctan\dfrac{1}{n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\dfrac{\ln n}{n}\right)^{2n}$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sqrt{n^{100}+1}}{2^n}$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{10^n}{n!}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\dfrac{1}{\cos\dfrac{1}{n}}$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^n}{n!}$;

(9) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln n)^n}$; (10) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\left[\mathrm{e}-\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\right]^p}{n}$; (12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n}{\mathrm{e}^n}$;

(13) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a^n n!}{n^n}\ (a>0)$; (14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(2n-1)!!}{n!}$;

(15) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$; (16) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2\left(\dfrac{n\pi}{3}\right)}{2^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})^2}$;

(17) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$; (18) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a^{n^2}b^n\ (a,b>0)$;

(19) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{e}^{-\sqrt{n}}$; (20) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{\ln\left(1+\dfrac{(3+(-1)^n)\arctan n}{n}\right)}{\ln^2 n-\ln\ln n}$;

(21) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\ln(1+\ln n)}{\sqrt[3]{n^3-2}\cdot\ln^3(n+2)}$; (22) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\sqrt[n]{n}-1)$;

(23) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n\sin\dfrac{1}{n}}-\cos\dfrac{1}{n}\right)$; (24) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n^2}}-\cos\dfrac{1}{n}\right)$;

(25) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{k!}{(n+3)!}\right)$; (26) $\sum\limits_{n=3}^{\infty}\dfrac{(\ln\ln n)^{100}}{\ln n\ln n!}$.

6. 设非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 同敛散, 试讨论以下两个级数的敛散性:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\max\{u_n,v_n\},\ \sum_{n=1}^{\infty}\min\{u_n,v_n\}.$$

7. 讨论以下级数的敛散性:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{\frac{\pi}{n}}\frac{x\sin^2 x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+n^2x^2}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{\cos^4 x}{x}\,\mathrm{d}x$; (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\mathrm{L.C.M.}(1,2,\cdots,n)}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln[n(n+1)^a(n+2)^b]$; (6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(2a^{\frac{1}{n}}-b^{\frac{1}{n}}-c^{\frac{1}{n}})\ (a,b,c>0)$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|\sin n|}{n}$; (8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos^4 n}{n}$;

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{a_n}}$, 其中 $a_n\to 1.01$, 又问:若 $a_n\to 1$ 则如何?

8. 若级数 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}|a_n-a_{n-1}|$ 收敛, 证明: 数列 $\{a_n\}$ 收敛. 又问: 反之如何?

9. 若非负项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 证明以下级数均收敛:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n^2$; (2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{u_n}}{n^p}\ (p>\frac{1}{2})$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{u_nu_{n+1}}$; (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln(1+u_n)$.

又分别回答: 以上 4 种情况的逆是否成立?

10. 设 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是非负项级数, 对它任意加括号后得到的级数记为 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}u_n'$, 证明: 这两个级数的敛散性相同, 且在收敛时具有相同的和.

11. 级数的讨论经常需要数列的知识. 但有时也可以用级数知识来解决数列中的问题. 试用级数收敛的必要条件证明:

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{n^n}{(n!)^2}=0$; (2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{(2n)!}{2^{n!}}=0$.

12. 证明以下估计成立:

(1) $\exists C,\forall n:\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\leqslant Cn^{\frac{3}{2}}$; (2) $1.5\leqslant\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\leqslant 1.75$.

§14.3 任意项级数的敛散性判别法

若在一个无穷级数中只有有限项大于 0 或小于 0, 则其敛散性都可以用非负项级数的敛散性判别法去讨论. 因此本节的所谓任意项级数中就包含了既有无穷多个正项又有无穷多个负项的级数. 今后称这类级数为变号级数.

14.3.1 Leibniz 型级数

首先介绍在任意项级数中的一类具有特殊形状的收敛级数——Leibniz 型级数. 它可以说是与保号级数相反的一类常见的无穷级数, 例如以下两个有名的无穷级数都是 Leibniz 型级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots=\ln 2,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4}.$$

定义 14.2 称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为 Leibniz 型级数, 如果满足以下 3 个条件:
(1) $u_n=(-1)^{n-1}b_n$, 其中 $b_n>0$; (2) $\{b_n\}$ 为单调减少数列; (3) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

注 满足条件 (1) 的级数称为交错级数. 它是一种特殊类型的变号级数. 为方便起见设第一项大于 0. 后两个条件可合并写为 $b_n\downarrow 0$, 或者 $|u_n|\downarrow 0$. 因此 Leibniz 型级数就是通项绝对值单调趋于 0 的交错级数.

定理 14.2 Leibniz 型级数一定收敛.

证 记级数的部分和数列为 $\{S_n\}$, 并考察其中由偶数项 S_{2n} 组成的子列. 从

$$S_{2n}=(b_1-b_2)+(b_3-b_4)+\cdots+(b_{2n-1}-b_{2n}),$$

利用 $b_n\downarrow$ 可见有 $S_{2n+2}=S_{2n}+(b_{2n+1}-b_{2n+2})\geqslant S_{2n}$, 因此数列 $\{S_{2n}\}$ 是单调增加数列.

另一方面, 从

$$S_{2n}=b_1-(b_2-b_3)-\cdots-(b_{2n-2}-b_{2n-1})-b_{2n}\leqslant b_1,$$

可见数列 $\{S_{2n}\}$ 有上界. 应用单调有界数列收敛定理, $\{S_{2n}\}$ 收敛. 记其极限为 b, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty}S_{2n}=b$.

现在再考察数列 $\{S_n\}$ 中由奇数项构成的子列. 这时有

$$S_{2n-1}=S_{2n}-b_{2n},$$

从 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ 可见也有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n} = 0$, 因此又得到 $\lim\limits_{n\to\infty} S_{2n-1} = b$. 合并以上就有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = b$. □

注 从上面的证明可见有 $b \leqslant b_1$. 同理可知 Leibniz 型级数的余项的绝对值一定不超过余项的第一项的绝对值. 这对于误差估计是非常方便有用的.

下面是几个常见的 Leibniz 型级数:

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots,$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \cdots.$$

然而它们之间实际上有本质差异, 这是下一小节要讨论的内容.

14.3.2 绝对收敛与条件收敛

研究发现, 收敛级数可以分为两类, 它们具有完全不同的性质. 为此需要先建立一个基本结论.

定理 14.3 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定收敛.

证 从条件知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N} : |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon$. 因此也有

$$|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}| \leqslant |u_{n+1}| + \cdots + |u_{n+p}| < \varepsilon,$$

从而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛. □

在上述定理的基础上给出两类收敛级数的定义.

定义 14.3 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为绝对收敛级数; 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛, 但 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散, 则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为条件收敛级数.

显然, 对于保号或至少从某一项开始后保号的级数来说, 收敛和绝对收敛是等价的. 因此条件收敛的级数只能到变号级数中去找.

例如, 从 p 级数的知识可知, 上一小节最后的 3 个 Leibniz 级数中, 前两个就是条件收敛级数, 但第三个则是绝对收敛级数.

下面列表说明在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 之间, 从收敛和发散来看, 只有三种可能:

	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛	收敛	收敛
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛	收敛	发散
$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散	发散	发散

下面的定理指出了两种收敛级数的本质差异.

定理 14.4 对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 定义两个非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$, 其通项为:

$$a_n^+ = \max\{a_n, 0\} = \begin{cases} a_n, & a_n \geqslant 0, \\ 0, & a_n < 0; \end{cases} \quad a_n^- = -\min\{a_n, 0\} = \begin{cases} 0, & a_n \geqslant 0, \\ -a_n, & a_n < 0. \end{cases}$$

则有:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛的充分必要条件是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛;

(2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则同时有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$.

证 除了级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 之外, 再引进 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 三个非负项级数的部分和数列, 即对 $\forall\, n$ 令

$$S_n' = \sum_{k=1}^{n} |a_k|, \quad S_n^+ = \sum_{k=1}^{n} a_k^+, \quad S_n^- = \sum_{k=1}^{n} a_k^-,$$

则有以下关系:

$$S_n = S_n^+ - S_n^-, \qquad S_n' = S_n^+ + S_n^-.$$

此外还有不等式关系 $0 \leqslant S_n^+ \leqslant S_n'$, $0 \leqslant S_n^- \leqslant S_n'$ 成立.

由此可见, 当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛时, 两个新的非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-$ 都收敛, 反之也成立.

当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛时, 即是 $\{S_n\}$ 收敛, $S_n' \uparrow +\infty$, 于是可以从

$$S_n^+ = \frac{1}{2}(S_n' + S_n), \quad S_n^- = \frac{1}{2}(S_n' - S_n)$$

直接看出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$. $\square$

注 写出

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}(S_n^+ - S_n^-),$$

可以看到, 对于条件收敛级数, 右边出现 $\infty - \infty$ 型的不定式, 而极限为有限数.

下面的问题是如何判定任意项级数的敛散性. 若给定的级数绝对收敛, 则可以对每一项取绝对值后用上一节中的非负项级数的敛散性判别法去讨论. 反之, 若给定的级数为条件收敛, 则 §14.2.1 的比较判别法和 §14.2.5 的 Cauchy 积分判别法当然无法应用. 下面一个例子则指出, 对于任意项级数, §14.2.2 中的等价量判别法也是不能用的.

例题 14.13 讨论 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ 的敛散性.

解 将上述级数的通项记为 a_n, 则有等价关系 $a_n \sim \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 成立. 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 与 Leibniz 型级数只差一个符号, 因此收敛. 但可以证明本题的级数实际上发散. 因此等价量判别法在这里是不能应用的.

由于通项 a_n 明显为两项之和, 因此只要分别讨论两个级数即可.

第一个级数就是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$, 已知收敛.

第二个级数就是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$, 当然发散. 合并以上可知本题的级数发散. $\square$

再回顾 §14.2.3 和 §14.2.4 中的比值判别法和根值判别法, 由于要取绝对值来做, 因此不可能用于判定一个条件收敛级数的收敛性. 但这里有一个例外, 即当这两个判别法中的 $l > 1$ 时, 却可以判定一个任意项级数发散. 这是因为从 $l > 1$ 可以推出级数的通项不趋于 0, 这对于任意项级数也是成立的.

14.3.3 级数收敛的 Abel–Dirichlet 判别法

一. Abel 不等式

回顾 §10.3.4 中的 Abel 变换, 即有

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} a_i b_i &= \sum_{i=1}^{n} b_i(S_i - S_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} b_i S_i - \sum_{i=1}^{n-1} b_{i+1} S_i \\ &= b_n S_n + \sum_{i=1}^{n-1}(b_i - b_{i+1})S_i,\end{aligned}$$

其中 $S_0=0,\ S_k=\sum\limits_{i=1}^{k}a_i,\ k=1,\cdots,n.$

下面将利用 Abel 变换证明 Abel 不等式, 然后用它推出两个新的判别法.

定理 14.5 (Abel 不等式) 设给定 $\{a_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 与 $\{b_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$, 其中 $\{b_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 单调, 则成立不等式

$$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|\leqslant(|b_1|+|b_n|)\max_{1\leqslant l\leqslant m\leqslant n}|a_l+\cdots+a_m|.$$

证 分几种情况.

(i) 设 $\{b_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 单调减少且非负, 记 $S_k=a_1+\cdots+a_k,\ k=1,\cdots,n$, $M=\max\limits_{1\leqslant l\leqslant m\leqslant n}|a_l+\cdots+a_m|$, 则有不等式

$$-M\leqslant S_k\leqslant M\quad\forall\, k=1,\cdots,n.$$

对上述不等式分别乘以 $(b_1-b_2),\cdots,(b_{n-1}-b_n),b_n$ 并相加, 由于这些数都是非负的, 因此不等式的方向不会改变. 这时从 Abel 变换知道不等式的中间部分就是 $a_1b_1+\cdots+a_nb_n$, 从而得到

$$-Mb_1\leqslant a_1b_1+\cdots+a_nb_n\leqslant Mb_1,$$

即得到

$$|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|\leqslant Mb_1(=M|b_1|).$$

(ii) 设 $\{b_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 单调减少, 且 $b_1\geqslant\cdots\geqslant b_k\geqslant 0\geqslant b_{k+1}\geqslant\cdots\geqslant b_n$, 则有

$$\begin{aligned}|a_1b_1+\cdots+a_nb_n|&\leqslant|a_1b_1+\cdots+a_kb_k|+|a_n(-b_n)+\cdots+a_{k+1}(-b_{k+1})|\\&\leqslant M(|b_1|+|b_n|).\end{aligned}$$

(iii) $\{b_k\}_{1\leqslant k\leqslant n}$ 单调增加, 则将顺序颠倒即可. □

二. Abel–Dirichlet 判别法

这是两个比较精细的判别法. 它们依赖于将级数的通项作适当的分解. 由于它们的条件相近, 证明也类似, 我们将它们放在一起来证明. 但在具体使用时还是需要搞清楚每一个判别法的确切条件, 以及到底是用哪一个判别法.

注 这里可以参见 §11.3.2, 即广义积分的 Abel–Dirichlet 判别法. 证明它们的工具是积分第二中值定理. 而这个定理也是以 Abel 定理为基础的 (见 §10.3.4).

(1) Abel 判别法 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 数列 $\{b_n\}$ 单调有界, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

(2) Dirichlet 判别法 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列 $\{S_n\}$ 有界, 数列 $\{b_n\}$ 单调收敛于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

证 以无穷级数的 Cauchy 收敛准则 (即定理 14.1) 为基础来证明这两个判别法. 首先, 由于在两个判别法中 $\{b_n\}$ 均单调, 因此从 Abel 不等式就有

$$|a_{n+1}b_{n+1}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}| \leqslant (|b_{n+1}|+|b_{n+p}|)\max_{n+1\leqslant l\leqslant m\leqslant n+p}|a_l+\cdots+a_m|.$$

这是证明两个判别法的共同基础.

(1) 在 Abel 判别法中, 取 $M>0$ 使得 $|b_n|\leqslant M\ \forall n$, 并对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 用 Cauchy 收敛准则, 对 $\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n\geqslant N, \forall p\in\mathbb{N}: |a_{n+1}+\cdots+a_{n+p}|<\dfrac{\varepsilon}{2M}$, 则同时也就有

$$|a_{n+1}b_{n+1}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}|<(|b_{n+1}|+|b_{n+p}|)\cdot\frac{\varepsilon}{2M}\leqslant\varepsilon,$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

(2) 在 Dirichlet 判别法中, 取 $M>0$ 使得 $|S_n|\leqslant M\ \forall n$ 成立, 这时对任何 $l\leqslant m$, $|a_l+\cdots+a_m|=|S_m-S_{l-1}|\leqslant 2M$. 然后对 $\forall\varepsilon>0, \exists N, \forall n\geqslant N: |b_n|<\dfrac{\varepsilon}{4M}$, 则就对 $\forall p\in\mathbb{N}$ 有

$$\begin{aligned}|a_{n+1}b_{n+1}+\cdots+a_{n+p}b_{n+p}| &< (|b_{n+1}|+|b_{n+p}|)\cdot\max_{n+1\leqslant l\leqslant m\leqslant n+p}|a_l+\cdots+a_m|\\ &\leqslant\frac{\varepsilon}{2M}\cdot 2M\leqslant\varepsilon,\end{aligned}$$

可知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛. □

下面以例题的形式对这两个判别法本身作补充.

例题 14.14 从 Dirichlet 判别法可以推出 Abel 判别法.

证 设 Dirichlet 判别法已经成立. 对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$, 若已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 且数列 $\{b_n\}$ 有界, 则存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$. 将这个极限记为 b, 则可以将级数分解如下:

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(b_n-b)+b\sum_{n=1}^{\infty}a_n,$$

然后利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 因此其部分和数列有界, 同时 $\{b_n-b\}$ 单调收敛于 0, 因此对上式右边的第一个级数用 Dirichlet 判别法就知道它收敛. 又因为已知第二个级数收敛, 因此就证明了 Abel 判别法成立. □

例题 14.15 用 Dirichlet 判别法证明 Leibniz 型级数收敛 (即给出定理 14.2 的新证明).

证　对于 Leibniz 型级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$, 其中 $b_n \downarrow 0$, 令 $a_n=(-1)^{n-1}$, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列只由 1 和 0 组成, 当然有界. 因此用 Dirichlet 判别法即知道级数收敛. □

14.3.4　例题

在举例之前先注意以下几点:

(1) 对于任意项级数的敛散性, 建议在可能情况下, 先观察它是否绝对收敛. 如果能对此有确定的答案, 不论是绝对收敛还是不绝对收敛, 都是有价值的. 若是绝对收敛, 则敛散性问题已完全解决; 如果不绝对收敛, 则就知道将有两种可能, 即发散或条件收敛.

(2) 对任意项级数的敛散性问题, 若不经过步骤 (1) 而能够直接判定其为收敛, 则还要求进一步判定该级数是绝对收敛还是条件收敛.

(3) Abel 判别法和 Dirichlet 判别法本身只是任意性级数收敛的充分条件, 它们不能告诉我们级数是绝对收敛还是条件收敛.

例题 14.16 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{na_n}{n+1}$ 也收敛.

解　由于数列 $\{\dfrac{n}{n+1}\}$ 单调有界, 用 Abel 判别法即可. 或者写 $\dfrac{na_n}{n+1}=a_n-\dfrac{a_n}{n+1}$, 然后对第二项为通项的级数用 Dirichlet 判别法 (见例题 14.14). 又从非负项级数的等价量判别法知道两个级数同时为绝对收敛或条件收敛. □

注　若另加 a_n 保号, 或至少从某项之后保号的条件, 则本题用等价量判别法就够了. 然而本题的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 为任意项级数, 例题 14.13 表明不能用等价量判别法.

例题 14.17 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列有界, 参数 $\sigma>0$, 证明: 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^{\sigma}}$ 收敛.

解　因数列 $\{\dfrac{1}{n^{\sigma}}\}$ 单调收敛于 0, 用 Dirichlet 判别法即可. □

下面是一个重要例题. 其中的级数及讨论方法在今后会多次出现. 还可以将这个例题与广义积分中的例题 11.29 作比较.

例题 14.18 证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 处处收敛, 而在 $x=k\pi\ \forall k\in\mathbb{N}$ 之外均为条件收敛.

证 在 $x=k\pi$ 时级数每一项为 0. 对于其他的 x 值, 先估计 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx$ 的部分和. 利用三角函数的积化和差公式就有

$$|\sin x+\cdots+\sin nx|=\left|\frac{\cos\frac{1}{2}x-\cos\frac{2n+1}{2}x}{2\sin\frac{1}{2}x}\right|\leqslant\frac{1}{|\sin\frac{1}{2}x|},$$

然后利用 $\dfrac{1}{n}\downarrow 0$, 就可以用 Dirichlet 判别法知道级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin nx}{n}$ 收敛.

以下证明 $x\neq k\pi$ 时的级数为条件收敛, 即要证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin nx|}{n}$ 发散. 利用不等式

$$\frac{|\sin nx|}{n}\geqslant\frac{\sin^2 nx}{n}=\frac{1-\cos 2nx}{2n}, \tag{14.3}$$

然后分别考虑两个级数: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ (调和级数) 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{n}$ 的敛散性. 前者已知发散. 对后者再次利用三角函数的积化和差公式得到

$$|\cos 2x+\cos 4x+\cdots+\cos 2nx|=\left|\frac{\sin(2n+1)x-\sin x}{2\sin x}\right|\leqslant\frac{1}{|\sin x|},$$

就可以同样用 Dirichlet 判别法知道当 $x\neq k\pi$ 时, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2nx}{n}$ 收敛. 回到 (14.3), 可见非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin^2 nx}{n}$ 可以写为一个发散级数与一个收敛级数之和, 因此发散. 最后根据比较判别法可知非负项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{|\sin nx|}{n}$ 发散. □

注 这里利用了 §14.1.1 中列举的第 8 点, 它是判定级数发散时的常用手段.

练 习 题

1. 试用以下方法重新证明定理 14.3: 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 令 $v_n=u_n+|u_n|\ \forall n$, 并利用
$$0\leqslant v_n\leqslant 2|u_n|,\ u_n=v_n-|u_n|,\ \forall n.$$

2. Leibniz 型级数是否一定绝对收敛? 若肯定写出证明, 若否定举出反例.

3. 讨论下列级数的敛散性, 若收敛则再讨论是否绝对收敛:

(1) $\frac{4}{1}+\frac{1}{2}-\frac{2}{3}-\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\frac{1}{6}-\frac{2}{7}-\frac{3}{8}+\cdots$;

(2) $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}-\frac{1}{6}+\cdots$;

(3) $1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{5}-\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\cdots$, 并求其和.

4. 讨论下列级数的敛散性, 若收敛则再讨论是否绝对收敛:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)}{2n-1}$;

(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sqrt{\frac{n^3+1}{n^3-1}}\cdot\ln(1+\frac{(-1)^n}{n})$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(n+(-1)^n)^p}\ (p>0)$;

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\sin n}{n^{\frac{2}{3}}}-\sin\left(\frac{\sin n}{n^{\frac{2}{3}}}\right)\right]$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\sin 2n}{n^2-\ln n}$;

(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(\ln n)^6\cdot\cos\frac{n\pi}{6}}{\sqrt{n}}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(\sqrt{n}+100)}{n+x^2},\ \forall\, x\in\mathbb{R}$;

(8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[n]}}{n^2+1}$;

(9) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(n!x)}{n\sqrt{n}-2}$;

(10) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{2n+(-1)^n}$;

(11) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin nx\ (\forall\, x\in\mathbb{R})$;

(12) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$;

(13) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}\cdot\ln\ln n}{\ln n}$;

(14) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_{n-1}^{n}\frac{\cos nx}{\sqrt{x^4+1}}\,\mathrm{d}x$.

5. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{x_0}}$ 收敛, 证明: 若 $x>x_0$ 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 收敛.

6. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}na_n$ 收敛, 证明: 以下两个级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\quad \sum_{n=1}^{\infty}na_{n+m}$$

均收敛, 其中 m 为正整数.

7. 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{n}=0.$$

§14.4 收敛级数的性质

从 §2.1.6 开始引入的无穷级数是对于有限项求和的推广. 本节的问题是: 有限项求和所满足的基本性质, 如结合律、交换律与乘法分配律等[①], 是否可以推广到无限项求和中. 将会看到这与级数的收敛以及是哪一种收敛有密切联系.

14.4.1 加法结合律

这里的结合就是加括号. 对于有限项求和结合律总是成立的, 这保证了任意有限项的和在不加括号时有确定的意义, 同时加括号也为计算提供了方便. 然而无限项求和却并非如此.

下面是历史上的著名例子. 它表明在无限项求和中括号不是可以随意加的.

例题 14.19 下面的等式成立:

$$(1-1)+(1-1)+(1-1)+\cdots=0+0+0+\cdots=0,$$

其中的无穷级数每项为 0 , 它的和当然为 0. 但若将左边去掉括号后, 则为级数:

$$1-1+1-1+1-1+\cdots,$$

它的通项为 $(-1)^{n-1}$, 显然发散. □

这个问题为下列定理解决. 它表明对于收敛级数来说, 结合律成立.

定理 14.6 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则任意加括号后的级数:

$$\begin{aligned}(a_1+a_2+\cdots+a_{n_1})+(a_{n_1+1}+\cdots+a_{n_2})+\cdots\\+(a_{n_k+1}+a_{n_k+2}+\cdots+a_{n_{k+1}})+\cdots\end{aligned}$$

$(1 \leqslant n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots)$ 也收敛, 且其和不变.

证 先将加括号后得到的级数记为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$, 其中 $(n_0=0)$: $b_k=a_{n_{k-1}+1}+a_{n_{k-1}+2}+\cdots+a_{n_k}\ \forall\, k$.

记原级数的部分和数列为 $\{S_n\}$, 又记加括号后的上述级数的部分和数列为 $\{\sigma_k\}$, 则就有

$$\sigma_k=b_1+\cdots+b_k=a_1+a_2+\cdots+a_{n_k}=S_{n_k}.$$

因此 $\{\sigma_k\}$ 是 $\{S_n\}$ 的子列, 可见结论成立 (参见定理 2.25). □

这个看似平凡的结论经常有用. 下面的例子就是如此.

① 这就是 §13.3.3 的域公理中前 3 个公理中的内容.

例题 14.20 证明下列级数发散:

$$\frac{1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{\sqrt{2}+1}+\frac{1}{\sqrt{3}-1}-\frac{1}{\sqrt{3}+1}+\cdots\frac{1}{\sqrt{n}-1}-\frac{1}{\sqrt{n}+1}+\cdots.$$

证 利用 $\dfrac{1}{\sqrt{n}-1}-\dfrac{1}{\sqrt{n}+1}=\dfrac{2}{n-1}$ 可见, 若从头开始每两项加括号, 则就得到发散级数. 用定理 14.6 的逆否命题, 可见原来的级数一定发散. □

注 回顾第一册中关于调和级数发散的第一个证明 (即例题 2.32), 现在可以理解为定理 14.6 的一次应用. 这就是将调和级数加括号如下:

$$1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)+\cdots,$$

使每个括号内的和大于 $\dfrac{1}{2}$, 因此级数发散, 从而原来的调和级数也只能是发散的.

用加括号的方法有时也可用于证明某些级数收敛, 其理由见下一个例题.

例题 14.21 设对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 加括号得到 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$, 其中 $b_k=a_{n_{k-1}+1}+a_{n_{k-1}+2}+\cdots+a_{n_k}\ \forall k$, 下标 $n_0=0<n_1<\cdots<n_k<\cdots$, 若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 收敛, 且每个 b_k 中的项 $a_{n_{k-1}+1},a_{n_{k-1}+2},\cdots,a_{n_k}$ 同号, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证 记级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$, 则加括号后的级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}b_k$ 的部分和数列为 $\{S_{n_k}\}$. 设 $\lim\limits_{k\to\infty}S_{n_k}=S$, 则对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists K$, $\forall k\geqslant K:|S_{n_k}-S|<\varepsilon$. 令 $n_K=N$, 则对 $\forall n>N$, 存在 $k\geqslant K$, 使得 $n_k+1\leqslant n\leqslant n_{k+1}$. 由于 $a_{n_k+1},a_{n_k+2},\cdots,a_{n_{k+1}}$ 同号, 因此 S_n 处于 S_{n_k} 与 $S_{n_{k+1}}$ 之间, 从而也有 $|S_n-S|<\varepsilon$. 这样就证明了原来的级数也收敛于同一个和. □

注 还可以将例题中的的项 $a_{n_{k-1}+1},a_{n_{k-1}+2},\cdots,a_{n_k}$ 同号的条件改进为

$$\lim_{k\to\infty}\left(|a_{n_{k-1}+1}|+|a_{n_{k-1}+2}|+\cdots+|a_{n_k}|\right)=0,$$

留作练习题.

14.4.2 加法交换律

上一小节的定理 14.6 表明收敛级数一定满足结合律, 但下面的例子则表明收敛级数不一定满足交换律.

例题 14.22 对下列 Leibniz 型级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\cdots,$$

若适当改变其求和顺序, 则会得到一个新的收敛级数, 但具有不同的和.

证　记该收敛级数的和为 S, 部分和数列为 $\{S_n\}$, 则可用 Euler 常数计算如下:

$$\begin{aligned}S_{2n} &= \left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)-2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\\ &= \ln(2n)+\gamma+o(1)-(\ln n+\gamma+o(1)) = \ln 2+o(1)\to\ln 2,\end{aligned}$$

于是也有 $S=\ln 2$. (不用 Euler 常数的方法见例题 2.28 和 10.5.)

现在将求和的顺序改变一下, 从级数的第一项开始, 每取两个正项后取一个负项, 但不改变正项之间以及负项之间的原有顺序, 这样就得到一个新的级数:

$$1+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{4}+\cdots.$$

现计算这个新级数的和. 将它的部分和数列记为 $\{S'_n\}$, 先看前 $3k$ 项的部分和:

$$\begin{aligned}S'_{3k} &= \left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{4k}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4k}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)\\ &= \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{4k}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2k}\right)-\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{k}\right)\\ &= (\ln(4k)+\gamma)-\frac{1}{2}(\ln(2k)+\gamma)-\frac{1}{2}(\ln k+\gamma)+o(1)\to\frac{3}{2}\ln 2.\end{aligned}$$

然后从 $S'_{3k+1}=S'_{3k}+\dfrac{1}{4k+1}$ 和 $S'_{3k+2}=S'_{3k}+\dfrac{1}{4k+1}+\dfrac{1}{4k+3}$ 可以知道三个子列 $\{S'_{3k}\}$, $\{S'_{3k+1}\}$, $\{S'_{3k+2}\}$ 收敛于同一极限, 并由此得到 $\{S'_n\}$ 收敛于 $\dfrac{3}{2}\ln 2$. □

上述例题表明在无穷项求和时, 不能随意改变求和的顺序, 也就是说加法交换律不成立. 下面我们要证明对于绝对收敛级数来说, 加法交换律仍然成立, 即不会发生例题 14.22 中的现象, 而对于条件收敛级数来说, 改变求和顺序后级数的和发生改变的现象却是普遍存在的.

为使得讨论严格化, 先引入下列定义.

定义 14.4 称两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a'_n$ 互为更序级数, 若数列 $\{a'_n\}$ 只是 $\{a_n\}$ 的重新排列, 反之也是如此.

定理 14.7 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 绝对收敛, 则它的任何更序级数都绝对收敛, 且具有相同的和.

证　设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a'_n$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 的一个更序级数,

对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a'_n|$ 的部分和 $|a'_1|+\cdots+|a'_n|$, 存在 N, 使得

$$\{a'_1, \cdots, a'_n\} \subset \{a_1, \cdots, a_N\}. \tag{14.4}$$

因此有

$$|a'_1| + \cdots + |a'_n| \leqslant |a_1| + \cdots + |a_N|.$$

由此可见, 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 收敛, 即其部分和数列有上界, 就可推出其更序级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a'_n|$ 的部分和数列也有上界, 因此收敛.

然后要证明这两个级数不但都绝对收敛而且具有相同的和. 这时要考虑两个级数的部分和之间的关系. 由于这是任意项级数, 因此问题比上面困难一点.

利用 (14.4) 可以看出有

$$\{a_1, \cdots, a_N\} - \{a'_1, \cdots, a'_n\} \subset \{a'_{n+1}, a'_{n+2}, \cdots\},$$

因此成立不等式:

$$a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n \leqslant a_1 + \cdots + a_N + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a'_k|,$$

右边最后一个和式就是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a'_n|$ 的第 n 个余项. 注意上述不等式中 N 是由 n 按照 (14.4) 的要求确定的, 若再增大则仍然满足该式的包含关系. 令 $N \to \infty$, 就得到

$$a'_1 + a'_2 + \cdots + a'_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} |a'_k|.$$

由于已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$ 收敛, 在上式中再令 $n \to \infty$, 利用余项一定趋于 0, 就得到

$$\sum_{n=1}^{\infty} a'_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

这样就证明绝对收敛的级数在更序之后, 其和不增加. 然而上式右边的级数也可以看成是由左边的级数更序得到的, 因此反向的不等式也成立, 从而只能相等. □

注 这里的方法与定理 2.19 中证明数 e 的两个定义等价有类似之处.

下面讨论条件收敛级数的求和换序问题. 其中的结果从本质上依赖于定理 14.4 中的结论.

定理 14.8 (关于条件收敛级数的 Riemann 定理) 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛, 则对于给定的 $\alpha \leqslant \beta$ (其中允许 $-\infty \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty$), 一定存在一个更序级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a'_n$, 使得它的部分和数列 $\{S'_n\}$ 具有性质:

$$\varliminf_{n\to\infty} S'_n = \alpha \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} S'_n = \beta.$$

证 只对于 $\alpha=\beta$ 且为有限数的情况写出简要证明, 对于一般情况的证明是类似的. 证明中的记号 a_n^+, a_n^- 见定理 14.4 中的定义, 即 $a_n^+=\max\{a_n,0\}$, $a_n^-=-\min\{a_n,0\}$.

问题就是如何改变求和顺序, 这里要保证原级数的每一项都取到且只取到一次, 又要使得部分和越来越接近于给定的数 α.

主要讲第一步, 以后用归纳法完成.

从定理 14.4 知道 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^+=+\infty$, 取最小可能的正整数 m_1, 使得满足要求

$$a_1^+\cdots+a_{m_1}^+>\alpha,$$

然后利用 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^-=+\infty$, 取最小可能的正整数 p_1, 使得满足要求

$$a_1^+\cdots+a_{m_1}^+-a_1^--\cdots-a_{p_1}^-<\alpha,$$

将以上两式改写如下:

$$\alpha<a_1^+\cdots+a_{m_1}^+<\alpha+a_{m_1}^+,$$

$$\alpha-a_{p_1}^-<a_1^+\cdots+a_{m_1}^+-a_1^--\cdots-a_{p_1}^-<\alpha.$$

这样就决定了更序级数的前 m_1+p_1 项, 而且它的第 m_1 个部分和直到第 m_1+p_1 个部分和都落在区间 $(\alpha-a_{p_1}^-, \alpha+a_{m_1}^+)$ 内.

利用数学归纳法可以证明这样的做法可以无限进行下去, 这样就决定了一个更序级数. 若将第 k 步中所取的两个正整数记为 m_k 和 p_k, 则可知更序级数的第 m_k 个部分和直到第 m_k+p_k 个部分和都落在区间 $(\alpha-a_{p_k}^-, \alpha+a_{m_k}^+)$ 内.

由于原级数条件收敛, 其通项是无穷小量, 从而有 $a_n^+\to 0$ 和 $a_n^-\to 0$ 成立. 于是也有 $a_{m_k}^+\to 0$ 和 $a_{p_k}^-\to 0$, 这样就证明了更序级数的和等于 α. □

注 将 $\alpha=+\infty$ 时的证明作为练习题.

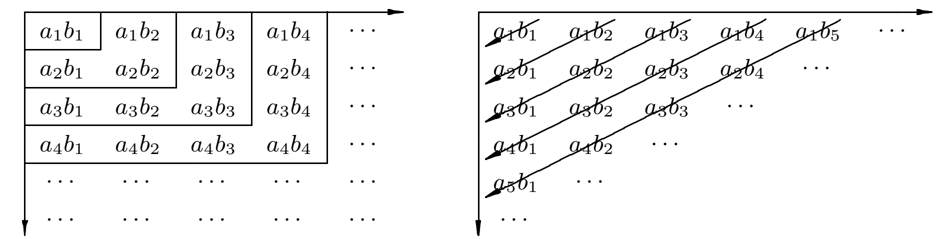
14.4.3 级数的相乘

所谓两个收敛级数相乘, 当然不是说将它们的和相乘, 而是说能否将两个有限和相乘的规则 (也就是分配律) 推广到无限项求和的情况. 具体来说, 就是如何将有限项之和的乘积推广到两个无穷级数相乘的问题. 对于有限项之和的乘积来说, 例如 $(a_1+\cdots+a_m)(b_1+\cdots+b_n)$, 利用算术运算的结合律、交换律和分配律, 这 mn 项 a_ib_j 的求和顺序怎么做都可以. 但对于无穷级数相乘来说, 问题就要复杂得多.

设有两个收敛级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n=A$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n=B$, 则问题就是要考虑如何将所有 a_ib_j 形式的项相加. 这当然是一个无穷级数, 其中涉及到求和的顺序问题, 级数的收敛问题, 以及收敛时的和是否等于 $A\cdot B$ 的问题. 为清楚起见下面将所讨论的上述级数称为乘积级数.

如图 14.2 所示, 将所有 a_ib_j 按照无限阶矩阵 (矩阵就是表) 的方式列出, 然后问题就是按照什么样的顺序将它们求和.

在图 14.2 中列出了最常用的两种求和方式. 分图 (a) 中的方式可以称为正方形方式, 即乘积级数的每一个部分和恰好是表中的一个正方形内的所有项, 即 $(a_1+\cdots+a_n)(b_1+\cdots+b_n)$. 分图 (b) 中的方式可以称为对角线方式, 这时的乘积级数中的每一个部分和恰好是表中由对角线组成的一个三角形内的所有项, 即 $\sum\limits_{i+j\leqslant n} a_ib_j=\sum\limits_{k=1}^{n}\sum\limits_{i+j=k} a_ib_j$.



(a)　　　　(b)

图 14.2: 乘积级数的两种求和方式

当两个级数都是绝对收敛时, 它们的乘积是最容易处理的. 这就是下面的定理.

定理 14.9 (级数乘积的 Cauchy 定理) 设两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 均为绝对收敛, 它们的和分别为 A 与 B, 则按任何方式将所有 a_ib_j 相加得到的乘积级数也是绝对收敛的, 且以 $A\cdot B$ 为其和.

证　设以某种方式将所有 a_ib_j 的项相加的无穷级数记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_{i(n)}b_{j(n)}$, 其中下标 $i(n)$ 与 $j(n)$ 用以标记这个级数中的第 n 项的两个因子在级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 中的位置.

从绝对收敛条件可知存在 $M>0$, 使得 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|\leqslant M$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|\leqslant M$ 成立. 任取正整数 N, 记 $a_{i(n)}b_{j(n)}, n=1,\cdots,N$ 中所有下标的最大值为 N', 就有

$$\sum_{n=1}^{N} |a_{i(n)}b_{j(n)}|\leqslant\left(\sum_{n=1}^{N'}|a_n|\right)\left(\sum_{n=1}^{N'}|b_n|\right)\leqslant M^2,$$

这样就证明了以任意求和方式所组成的乘积级数总是绝对收敛的.

由于绝对收敛级数的求和顺序可以任意更动和加括号而保持和不变, 因此可以采取如下的正方形方式求和 (见图 14.2(a)):

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_{i(n)}b_{j(n)} = a_1b_1 + (a_2b_1 + a_2b_2 + a_1b_2) + \cdots,$$

它的部分和就是 $\sum\limits_{n=1}^{N} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{N} b_n$ 的乘积, 因此乘积级数的和就是 $A \cdot B$. □

下面将要讨论当两个收敛级数未必都是绝对收敛情况时的乘积问题. 为此首先注意, 除了上述 Cauchy 定理证明中的正方形顺序之外, 在图 14.2(b) 中的对角线顺序有特殊的重要性. 下面给出有关定义.

定义 14.5 (级数乘积的 Cauchy 定义) 对于两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$, 构造出下列级数:

$$a_1b_1 + (a_1b_2 + a_2b_1) + \cdots = \sum_{n=2}^{\infty}\Big(\sum_{i+j=n} a_ib_j\Big),$$

并称它为原来的两个级数的 Cauchy 乘积级数 (简称为 Cauchy 乘积).

Mertens① 发现, 对于 Cauchy 乘积来说, Cauchy 定理中的条件可以减弱为只要求一个级数为绝对收敛.

定理 14.10 (Mertens 定理) 设两个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛, 它们的和分别为 A 和 B, 且其中至少有一个为绝对收敛, 则它们的 Cauchy 乘积级数收敛, 且以 AB 为其和.

为方便起见, 我们先证明一个引理. (这就是第二章总练习题中的题 4.)

引理 设 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 绝对收敛, 则有

$$\lim_{n\to\infty}(a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1) = 0.$$

证 记 $z_n = a_1b_n + a_2b_{n-1} + \cdots + a_nb_1$, 则要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = 0$.

根据条件存在 $M > 0$, 使得 $|a_n| < M\ \forall n$, 同时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n| < M$. 然后对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K$, 使得 $\sum\limits_{k=K+1}^{\infty} |b_k| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. 固定这个 K, 在 $n > K$ 时将 z_n 分拆如下:

$$|z_n| \leqslant |a_nb_1 + \cdots + a_{n+1-K}b_K| + |a_{n-K}b_{K+1} + \cdots + a_1b_n|, \tag{14.5}$$

其中第一项的绝对号内有 K 项.

在 (14.5) 右边的第二项已经可以估计为

$$|a_{n-K}b_{K+1} + \cdots + a_1b_n| \leqslant M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2}.$$

① 默滕斯 (Franz Mertens, 1840–1927), 德国数学家.

为估计 (14.5) 右边的第一项, 利用条件 $a_n \to 0$, $\exists N, \forall n \geqslant N$, 有 $|a_n| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$. 于是当 $n \geqslant N+K$ 时, 就有

$$|a_n b_1 + \cdots + a_{n+1-K} b_K| \leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \sum_{n=1}^{\infty} |b_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

合并以上对 (14.5) 右边两项的分别估计, 可见当 $n \geqslant N+K$ 时就成立 $|z_n| < \varepsilon$. □

注 这里的方法就是在 §2.2.4 中证明 Cauchy 命题的方法.

Mertens 定理的证明 不妨设第一个级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛.

写出 Cauchy 乘积级数的部分和:

$$\begin{aligned} S_n = a_1 b_1 + (a_1 b_2 + a_2 b_1) + (a_1 b_3 + a_2 b_2 + a_3 b_1) \\ + \cdots + (a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1), \end{aligned}$$

则只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = AB$.

将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的余项记为 $\{r_n\}$, 则有

$$\begin{aligned} S_n &= a_1(b_1 + \cdots + b_n) + a_2(b_1 + \cdots + b_{n-1}) + \cdots + a_n b_1 \\ &= a_1(B - r_n) + a_2(B - r_{n-1}) + \cdots + a_n(B - r_1) \\ &= (a_1 + \cdots + a_n)B - (a_1 r_n + a_2 r_{n-1} + \cdots + a_n r_1). \end{aligned}$$

令 $n \to \infty$, 则上面最后一式的第一项的极限为 AB, 而第二项中由于 $r_n \to 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 从引理可见极限为 0. □

还要指出, Mertens 定理在下面的意义上已经是最佳结果, 这就是说如果两个收敛级数都是条件收敛级数, 则它们的 Cauchy 乘积可以是发散的.

例题 14.23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ 为 Leibniz 型级数, 且为条件收敛, 将它自乘, 这时的 Cauchy 乘积级数的通项为

$$C_n = (-1)^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 \cdot n}} + \frac{1}{\sqrt{2 \cdot (n-1)}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n \cdot 1}} \right).$$

利用平均值不等式, 对 $k = 0, 1, \cdots, n-1$ 有 $\sqrt{(k+1)(n-k)} \leqslant \dfrac{n+1}{2}$, 因此有

$$|C_n| \geqslant n \cdot \frac{2}{n+1} \to 2,$$

可见 Cauchy 乘积级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} C_n$ 发散.

注 在第十五章中利用幂级数工具将会证明, 若两个收敛级数的 Cauchy 乘积级数收敛, 则两个级数和的乘积等于 Cauchy 乘积级数之和. 这里在三个级数都收

敛的条件下不需要其他附加条件. 同时也说明了 Cauchy 乘积的重要性 (见例题 15.28).

练 习 题

1. 证明: 若只关心级数的敛散性和级数的和, 则变号级数可归结为交错级数来讨论.

2. 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{b_n}$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n^2}{b_n^2}$ 均收敛, 且已知 $b_n(a_n+b_n)\neq 0\ \forall\, n$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{a_n+b_n}$ 收敛.

3. 设 $|x|<1$, $|y|<1$, 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}x^n$, $\quad\sum\limits_{n=0}^{\infty}y^n$ 均绝对收敛, 且有
$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}x^k y^{n-k}\right)=\frac{1}{(1-x)(1-y)}.$$

4. (1) 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$ 对于所有实数 x 都绝对收敛;

   (2) 将上述级数的和记为 $E(x)$, 证明: $E(x+y)=E(x)E(y)$.

5. (1) 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$ 对于所有实数 x 都绝对收敛;

   (2) 将上述两个级数的和分别记为 $S(x)$ 和 $C(x)$, 证明: $S(2x)=2S(x)C(x)$.

§14.5 无穷乘积

无穷乘积与无穷级数都可以看成是数列极限理论的进一步发展. 另一方面, 无穷级数可看成是有限项求和的推广, 而无穷乘积则可看成是有限项相乘的推广, 因此有许多相似之处, 而且可以利用级数已有的成果.

14.5.1 无穷乘积

回顾数列与无穷级数的关系, 将数列 $\{x_n\}$ 的通项写成为

$$x_n = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_2 - x_1) + x_1,$$

令 $u_1 = x_1$, $u_k = x_{k-1} - x_k \; \forall\, k \geqslant 2$, 这样就有 $x_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$. 于是数列 $\{x_n\}$ 的收敛问题就归之于无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}$ 的收敛问题了. 当然在研究数列时我们也经常关心数列的后项与前项之差, 特别由此可以判定数列是否单调. 只是将数列问题转化为无穷级数之后则带来了极其丰富的成果, 远远超出了第二章的范围.

类似地, 在数列的每一项都不是 0 的前提下, 可以将 $\{x_n\}$ 的通项如下改写:

$$x_n = \left(\frac{x_n}{x_{n-1}}\right) \cdot \left(\frac{x_{n-1}}{x_{n-2}}\right) \cdots \left(\frac{x_2}{x_1}\right) \cdot x_1,$$

然后令 $p_1 = x_1$, $p_k = \dfrac{x_k}{x_{k-1}} \; \forall\, k \geqslant 2$, 这样就可以将数列收敛问题转化为无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 的收敛问题. 当然在第二章中我们有时也研究数列的后项与前项之比, 这有助于判定数列是否单调, 此外还可能得出其他结果. 但无穷乘积则是这种方法的系统化.

这里需要指出两点: (1) 若乘积中有一个因子为 0, 则乘积为 0; (2) 若乘积中的每一个因子都大于 0, 则可以取对数而将问题归之于无穷级数去研究.

于是称

$$p_1 \cdot p_2 \cdots p_n \cdots = \prod_{n=1}^{\infty} p_n$$

为无穷乘积. 实际上这样的例子在本书前面已多次出现.

最早的数列例题中就有 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n$ (例题 2.3), 它就是 $p_n = r \; \forall\, n$ 的无穷乘积. 又如 §2.2 的练习题 15 的 (1),(7),(8) 小题都是无穷乘积问题. 其中之 (1) 就是

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right),$$

即是 $p_n = 1 - \dfrac{1}{n^2} \; \forall\, n$ 的无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty} p_n$.

再回顾 Wallis 公式 (见 §12.6.1 中的 (12.18) 及其几个等价形式), 这就是

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right)^2\cdot\frac{1}{2n+1}=\frac{\pi}{2}.$$

这当然可写成为无穷乘积. 例如以下几种写法都是 Wallis 公式:

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{4n^2-1}\right)=\frac{\pi}{2},$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{(2n+1)^2}\right)=\frac{\pi}{4},$$

$$\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{4n^2}\right)=\frac{2}{\pi}.$$

下面是一个重要的无穷乘积:

$$\frac{\sin x}{x}=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdots\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right)\cdots=\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{x^2}{n^2\pi^2}\right). \tag{14.6}$$

若令 $x=\pi/2$ 则就得到上述 Wallis 公式的最后一种形式.

无穷乘积 (14.6) 是 Euler 通过类比发现的. 其左边在 $x=0$ 时可以连续延拓为 1, 使得两边相等. 考虑到左边的所有零点为 $x=\pm k\pi\ \forall\, k\in\mathbb{N}$, 而右边的每一个因子恰好吸收了左边的两个根 $\pm k\pi\ \forall\, k\in\mathbb{N}$. 作为类比的就是一个 n 次多项式 $p(x)$, 它有 n 个根 $a_1,\cdots,a_n$, 且 $p(0)=1$, 则就可以得到

$$p(x)=\left(1-\frac{x}{a_1}\right)\left(1-\frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1-\frac{x}{a_n}\right). \tag{14.7}$$

这就是 Euler 提出 (14.6) 的依据. 当然这不是证明.

Euler 还进一步利用类比得到级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 的和, 这在当时是一个长期没有解决的难题, 称为 Basel 问题. 实际上在 (14.7) 中可以看出 $p(x)$ 的一次项系数为 $-\left(\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}\right)$. 于是从 (14.6) 的左边为 $1-\dfrac{1}{6}x^2+o(x^3)$, 计算右边的 x^2 项的系数, 就得到

$$-\frac{1}{6}=-\frac{1}{\pi^2}\left(1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots\right).$$

这样就得到

$$1+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}. \tag{14.8}$$

注 关于公式 (14.6) 和 (14.8) 的证明可以参看 [25]下册的例题 13.4.3 和例题 16.2.2. 此外, 在本书的第十六章 Fourier 级数中将给出 (14.8) 的多个证明.

14.5.2 无穷乘积的定义

如同无穷级数那样, 对给定的一个无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$, 称 p_n 为通项, 引入部分乘

积 $\pi_n = \prod\limits_{k=1}^{n} p_k \ \forall\, n$, 于是就得到两个数列 $\{p_n\}$ 和 $\{\pi_n\}$. 然后给出敛散性定义.

定义 14.6 若无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 的部分乘积数列 $\{\pi_n\}$ 收敛于非零极限, 则称该无穷乘积收敛, 且定义它的乘积为极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n$; 若部分乘积数列 $\{\pi_n\}$ 发散或收敛于 0, 则称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散.

注 在这个定义中当 $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n = 0$ 时称无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 发散 (于 0), 这似乎有点奇怪. 但从下面的许多例子会看到这个说法的合理性和它所带来的方便.

例题 14.24 两个不同的发散无穷乘积的例子. 设 $p_n = \dfrac{1}{2} \ \forall\, n$, 则

$$\prod_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2^n} = 0;$$

又若 $p_n = 1 + \dfrac{1}{n} \ \forall\, n$, 则有

$$\prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{n+1}{n} = \lim_{n\to\infty} (n+1) = +\infty. \quad \square$$

例题 14.25 设 $p_n = \cos \dfrac{\varphi}{2^n} \ \forall\, n$, 利用三角恒等式

$$\sin\varphi = 2^n \cos\frac{\varphi}{2} \cos\frac{\varphi}{2^2} \cdots \cos\frac{\varphi}{2^n} \sin\frac{\varphi}{2^n},$$

可见当 $\varphi \neq 0$ 时有

$$\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{\varphi}{2^n} = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{\varphi}{2^k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\varphi}{2^n \sin\dfrac{\varphi}{2^n}}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{\varphi}{2^n}}{\sin\dfrac{\varphi}{2^n}} \cdot \frac{\sin\varphi}{\varphi} = \frac{\sin\varphi}{\varphi},$$

当 $\varphi = 0$ 时直接看出每一个 $p_n = 1$, 因此无穷乘积收敛于 1. $\square$

注 这个无穷乘积见 §4.2 的练习题 12. 令 $\varphi = \dfrac{\pi}{2}$ 就得到 Viète 公式:

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots\cdots = \frac{2}{\pi},$$

它与 Wallis 公式一起是数学分析发展史上最早的两个无穷乘积的例子, 都具有里程碑式的意义, 同时也恰巧都与圆周率有关, 标志着对 π 的全新认识.

14.5.3 无穷乘积敛散性的判别法

这里的基本方法就是对乘积取对数, 从而将无穷乘积归结为无穷级数. 但是为了对通项 p_n 取对数, 必须要求 $p_n > 0$. 这能够满足吗?

为此我们先要证明收敛的无穷乘积的一个必要条件. 由于其重要性, 我们将它写为一个引理.

引理 若无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛, 则有 $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$.

证 首先根据定义, 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n$ 收敛就是部分乘积数列 $\{\pi_n\}$ 收敛, 而且其极限不等于 0. 这样就保证了每一项 $p_n \neq 0$. 将部分乘积数列的极限记为 $A \neq 0$, 则就有

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\pi_n}{\pi_{n-1}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n}{\lim\limits_{n\to\infty} \pi_{n-1}} = \frac{A}{A} = 1. \quad \square$$

注 容易看到, 这个引理恰好相当于无穷级数收敛可确保其通项极限为 0 (定理 2.8). 它是一个无穷乘积收敛的必要条件, 但不是充分条件 (参见例题 14.24 中的第二个例子). 此外, 还可看出若无穷乘积发散于 0, 则引理不成立. 其中还包括某一项 $p_n = 0$ 的无趣特例. 因此将 $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n = 0$ 的情况不归入到收敛中是合理的.

由引理可知, 一个收敛无穷乘积的通项 p_n 至少当 n 充分大时一定会大于 0. 又因为收敛无穷乘积已经排除了某一项 p_n 等于 0 的可能性, 因此无穷乘积的敛散性与前有限个因子无关. 这样就不妨假设收敛无穷乘积的每一项已经大于 0, 否则只要去掉前有限项即可.

于是在引理结论满足时, 可以不失一般性地将无穷乘积的通项 p_n 改记为 $p_n = 1 + \alpha_n$, 而将无穷乘积写为

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n), \tag{14.9}$$

且设其中的 $\alpha_n = o(1)$.

以 (14.9) 为基础就容易得到判别无穷乘积敛散性的准则.

定理 14.11 设 $p_n = 1 + \alpha_n > 0\ \forall\, n$, 则

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1 + \alpha_n) \text{ 收敛} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \ln(1 + \alpha_n) \text{ 收敛}. \tag{14.10}$$

证 由于每个 $p_n = 1 + \alpha_n > 0$, 因此可以写出无穷乘积的部分乘积与无穷级数的部分和之间的关系式

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + \alpha_k) = \exp\Big[\sum_{k=1}^{n} \ln(1 + \alpha_k)\Big]. \tag{14.11}$$

由此可见, 若 (14.11) 左边的无穷乘积收敛, 则根据 $p_n > 0\ \forall n$ 的条件和无穷乘积收敛的定义, 当 $n \to \infty$ 时 (14.11) 左边的极限大于 0. 两边取对数并利用对数函数的连续性就知道 (14.10) 右边的无穷级数收敛.

反之, 则从 (14.10) 右边的无穷级数收敛和指数函数的连续性知道 (14.11) 的左边当 $n \to \infty$ 时有极限, 且不等于 0. 这表明 (14.10) 左边的无穷乘积收敛. □

注 现在比较详细地讨论无穷乘积发散于 0 的各种可能情况.

设 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} p_n = 0$, 则有两种可能性: 第一种可能性是某一个因子 $p_n = 0$, 这不需要再讨论. 第二种可能性是每个 $p_n \neq 0$, 则可以看出这时也一定有 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} |p_n| = 0$. 对后者的部分乘积取对数, 可见有

$$\sum_{k=1}^{n} \ln |p_k| = \ln \left(\prod_{k=1}^{n} |p_k| \right) \to -\infty\ (n \to \infty),$$

即无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln |p_n| = -\infty$. 因此这种情况可以通过讨论无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln |p_n|$ 而得到解决.

按照定理 14.11, 为了解决无穷乘积的敛散性, 除了在上述注中已经解决的两个特殊情况之外, 只需要讨论无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_n)$ 的敛散性. 这在级数各项同号 (或至少当 n 充分大时如此) 时比较容易. 这就得到下面的定理.

定理 14.12 在 $\alpha_n \geqslant 0$ 或 $\alpha_n \leqslant 0\ \forall n$ 或至少对充分大的 n 成立时,

$$\prod_{n=1}^{\infty} (1+\alpha_n)\ \text{收敛} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n\ \text{收敛}.$$

证 根据定理 14.11, 无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} (1+\alpha_n)$ 收敛等价于无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ln(1+\alpha_n)$ 收敛. 在该级数保号时, 根据 $\ln(1+\alpha_n) \sim \alpha_n$ 与等价量判别法可知这等价于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛. □

对于无穷乘积 $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1 - \dfrac{1}{n^2}\right)$, $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1 + \dfrac{1}{n^2}\right)$, 以及前面出现的许多无穷乘积的例子都可以用推论 1 知道它们是收敛的.

下一个例题很有用, 例如在下一章中讨论二项式级数的端点敛散性时就需要这个结果.

例题 14.26 设 s 不是 0 和负整数, 即 $s \neq 0, -1, -2, \cdots$, 则存在非零常数 $C \neq 0$, 使得

$$s(s+1)\cdots(s+n) \sim Cn^s n!\ (n \to \infty).$$

证 用无穷乘积方法. 定义数列 $\{a_n\}$ 如下:

$$a_n = \frac{s(s+1)\cdots(s+n)}{n^s n!}\ \forall\, n.$$

又令 $a_0 = 1$. 为了证明数列 $\{a_n\}$ 有非零极限, 只要证明无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{a_n}{a_{n-1}}$ 收敛即可, 因为这个无穷乘积的部分和乘积为 $\prod\limits_{k=1}^{n} \dfrac{a_k}{a_{k-1}} = a_n\ \forall\, n$.

计算这个无穷乘积通项得到

$$\begin{aligned}
\frac{a_n}{a_{n-1}} &= \frac{(s+n)}{n} \cdot \frac{(n-1)^s}{n^s} \\
&= \left(1+\frac{s}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{1}{n}\right)^s \\
&= \left(1+\frac{s}{n}\right) \cdot \left(1-\frac{s}{n}+\frac{s(s-1)}{2n^2}+o\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \\
&= 1+O\left(\frac{1}{n^2}\right),
\end{aligned}$$

因此该无穷乘积收敛, 其极限 $C \neq 0$ 即所求. □

注 这里利用了 Taylor 展开式: $(1+x)^s = 1+sx+\dfrac{s(s-1)}{2}x^2+o(x^2)$. 当然还可以计算得更精确一些: $\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = 1-\dfrac{s(s+1)}{2n^2}+o\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$.

对于数列 $\{\alpha_n\}$ 不保号的情况 (即指既存在无限多项大于 0, 又存在无限多项小于 0 的情况), 问题要困难一点. 这方面提供以下判别法.

定理 14.13 在无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛的前提下,

$$\prod_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)\ \text{收敛} \iff \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2\ \text{收敛}.$$

而在 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 发散时, 则 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}(1+\alpha_n)$ 发散于 0.

证 利用 Taylor 展开式 $\ln(1+x) = x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2)\ (x \to 0)$, 以及 $\alpha_n \to 0$, 就有

$$\ln(1+\alpha_n) = \alpha_n - \frac{\alpha_n^2}{2} + o(\alpha_n^2),$$

因此有

$$\ln(1+\alpha_n) - \alpha_n \sim -\frac{\alpha_n^2}{2}.$$

由于在 $\alpha_n \to 0$ 时以上式左边为通项的级数为保号级数, 它的敛散性与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n^2$ 相同. 最后利用已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛的条件, 可见结论成立. $\square$

注 推论 2 对 $\{\alpha_n\}$ 不变号的情况也成立, 只是这时用推论 1 就够了.

例题 14.27 讨论无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}\left(1+\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}\right)$ 的敛散性, 其中 x 为参数.

解 若 $x=0$, 则乘积的因子中有 0; 若 $x<0$, 则通项的极限不是 1, 因此都是发散的.

对于 $x>0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n-1}}{n^x}$ 是 Leibniz 型的收敛级数, 因此根据推论 2 可知, 无穷乘积的敛散性与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{2x}}$ 相同. 从而知道 $x>1/2$ 时本题的无穷乘积收敛, 而当 $0<x\leqslant 1/2$ 时发散. $\square$

最后用无穷乘积工具来证明 §12.6.2 中的 Stirling 公式, 作为对这个重要公式的第二个证明.

例题 14.28 证明 Stirling 公式 $n! \sim \left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n\sqrt{2\pi n}$.

证 令 $\pi_n = \dfrac{n!}{\sqrt{n}}\left(\dfrac{\mathrm{e}}{n}\right)^n$ $\forall\, n$, 则只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\pi_n=\sqrt{2\pi}$.

令 $\pi_0=1$, $p_1=\pi_1=\mathrm{e}$, 对 $n\geqslant 2$ 定义

$$p_n=\frac{\pi_n}{\pi_{n-1}}=\mathrm{e}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-\frac{1}{2}}=\exp\left[1+(n-\frac{1}{2})\ln(1-\frac{1}{n})\right],$$

则问题归结为研究无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$. 用 Taylor 展开式计算得到

$$\begin{aligned}1+(n-\frac{1}{2})\ln(1-\frac{1}{n}) &= 1+(n-\frac{1}{2})(-\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}-\frac{1}{3n^3}+o(\frac{1}{n^3}))\\ &= 1+(-1-\frac{1}{2n}-\frac{1}{3n^2})+(\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2})+o(\frac{1}{n^2})\\ &= -\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2}).\end{aligned}$$

于是

$$p_n=\exp\left[-\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2})\right]=1-\frac{1}{12n^2}+o(\frac{1}{n^2}).$$

可以看出, 当 n 充分大时 p_n 小于 1, 因此只要用定理 14.11 即知无穷乘积 $\prod\limits_{n=1}^{\infty}p_n$ 收敛. 将这个极限记为 $C>0$, 则就有

$$n! \sim C\left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \sqrt{n}.$$

为了确定 $\lim\limits_{n\to\infty} \pi_n = C$, 可以计算得到

$$\begin{aligned}\frac{\pi_n^2}{\pi_{2n}} &= \frac{(n!)^2}{n}\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^{2n}\frac{\sqrt{2n}}{(2n)!}\left(\frac{2n}{\mathrm{e}}\right)^{2n}\\ &= \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}\sqrt{\frac{2}{n}} = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\sqrt{\frac{2}{n}},\end{aligned}$$

这时左边的极限为 C, 右边则用 Wallis 公式 (12.19) 知道极限为 $\sqrt{2\pi}$. □

练 习 题

1. 讨论下列无穷乘积的敛散性:

   (1) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{n^2-1}{n^2+1}$;

   (2) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} a^{\frac{(-1)^n}{n}}\ (a>0)$;

   (3) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

   (4) $\prod\limits_{n=2}^{\infty} \left(1-\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)$;

   (5) $\prod\limits_{n=0}^{\infty} \sqrt{\dfrac{n+1}{n+2}}$;

   (6) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \left(1-\dfrac{x^2}{n^2\pi^2}\right)$;

   (7) $\prod\limits_{n=1}^{\infty} \cos x_n$, 其中 $0 < x_n < \dfrac{\pi}{2}$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n^2$ 收敛.

2. 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{3}{4}\cdots\dfrac{2n-1}{2n}\right) = 0$.

第十五章 函数项级数与幂级数

内容简介 这一章有两个主题. 前三节介绍函数项级数的一般理论. 首先在 §15.1 中引入一致收敛性概念, 然后在 §15.2 讨论一致收敛的判别方法, 最后在 §15.3 中讨论函数项级数的和函数性质. 后两节则介绍一类特殊的函数项级数——幂级数. §15.4 是幂级数的一般理论, §15.5 则讨论如何将函数展开为幂级数.

§15.1 一致收敛性

这一章的主要对象是函数项级数, 即每一项是函数的无穷级数. 回顾第十四章, 其中的许多数项级数的形式为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 其中 x 是参数, 每一项也可看成是 x 的函数. 那么这两章有什么不一样呢? 问题是角度完全不同. 在第十四章中关心的主要是敛散性. 在有参数时仍然如此. 在这一章中则从函数的角度考虑问题. 设通项 $u_n(x)$ 于数集 I 上有定义, 且对每个 $x \in I$ 收敛, 于是级数的和就成为在 I 上有定义的函数, 今后称为和函数, 经常记为

$$S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad \forall\, x \in I.$$

问题就是如何研究 $S(x)$ 的性质, 其中包括连续性、可积性和可微性, 还有积分与导数的计算方法. 若能够求出 $S(x)$ 的有限表达式 (也经常称为封闭形式), 则原则上已经没有困难. 但重要的情况恰恰是和函数只有上述无穷级数表达式的情况, 这时怎么办[①]?

办法是从通项 $u_n(x)$ 的性质出发, 去研究和函数 $S(x)$ 是否继承了相应的性质.

为此在下面将会发现, 第十四章中的敛散性概念是不够用的. 这里需要引入本章的核心概念——一致收敛性.

15.1.1 点态收敛

对函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, $x \in I$, 记其部分和函数序列 (简称为函数列) 为

① 这里要指出, 恰如带有参数的定积分以及带有变动积分限的定积分给出许多新的非初等函数那样, 函数项级数也是定义新的函数的重要手段. 第十五章的问题就是如何研究由无穷级数给出的函数的性质.

$\{S_n(x)\}$, 则级数敛散性也就是这个函数列的敛散性. 如数列与级数的关系一样 (参见定理 2.7), 讨论函数列与讨论函数项级数也是等价的.

先叙述最简单的点态收敛概念, 它就是在上一章中的收敛概念, 只不过是对函数列或函数项级数而言.

下面的记号 I 一般为区间或区间的并, 也可以是更一般的数集.

定义 15.1 设函数列 $\{S_n(x)\}$ 于 I 上有定义, 且对每个 $x \in I$ 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x) = S(x),$$

则称 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上点态收敛或点态收敛于 $S(x)$, 称 $S(x)$ 为 $\{S_n(x)\}$ 的极限函数. 若这时的 $\{S_n(x)\}$ 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和函数列, 则称该函数项级数在 I 上点态收敛或点态收敛于和函数 $S(x)$.

先举一个虽然简单但却可以说明许多问题的典型例子.

例题 15.1 在 $I = [0,1]$ 上考虑函数列 $\{x^n\}$, 则该函数列在 I 上点态收敛, 其极限函数是

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} x^n = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

注意 $S(x)$ 于点 $x = 1$ 处左侧不连续. 可见在 I 上连续的函数列的极限函数可以有不连续点.

在图 15.1 中作出 $n = 1, 2, 4, 8, 16$ 的函数 x^n 的图像 (用细曲线), 用粗黑线作出极限函数 $S(x)$. □

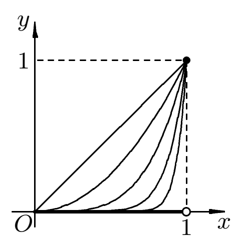


图 15.1: 在 $[0,1]$ 上的 $\{x^n\}$ 及其极限函数

注 可将上述例子换一个说法, 即函数项级数

$$x + (x^2 - x) + \cdots + (x^n - x^{n-1}) + \cdots = x + \sum_{n=2}^{\infty} (x^n - x^{n-1})$$

在 $[0,1]$ 上点态收敛, 其和函数为上述 $S(x)$. 于是在一个区间上每一项连续的函数项级数的和函数可以有不连续点.

15.1.2 一致收敛性

如前所说, 点态收敛没有什么新的内容, 它就是在第十四章中所使用的收敛概念, 若级数的通项有参数的话.

本章的核心概念是一种新的收敛概念——一致收敛. 下面给出函数列以及函数项级数的一致收敛的定义.

定义 15.2 称函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$, 若对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall n\geqslant N, \forall x\in I$:

$$|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon.$$

若这时的 $S_n(x)$ 是函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 的部分和函数列, 则称该函数项级数于 I 上一致收敛于其和函数 $S(x)$.

代替收敛的记号 $\to$, 今后用记号 $\rightrightarrows$ 表示一致收敛. 于是 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$ 可表示为 $S_n(x)\rightrightarrows S(x)$, $x\in I$ 或 $S_n(x)\overset{I}{\rightrightarrows}S(x)$.

注　从定义可见, 若 $\{S_n(x)\}$ 于 I 上一致收敛于 $S(x)$, 则也一定点态收敛于 $S(x)$. 进一步用 ε–N 语言对比以上两个定义, 就可看出它们的差别.

点态收敛就是要求对每一个点 $x\in I$ 有 $S_n(x)\to S(x)$. 因此对于给定的 $\varepsilon>0$, 存在 N, 当 $n\geqslant N$ 时成立 $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$. 这里的 N 不仅会随着 ε 的变化而改变, 而且还与点 x 有关. 这种依赖关系可以写成 $N=N(\varepsilon,x)$.

从一致收敛的定义 15.2 可见, 它与点态收敛的区别在于对每个 $\varepsilon>0$, 要求存在只与 ε 有关的 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时, $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$ 对所有 $x\in I$ 同时成立.

从几何上来看一致收敛可能更为清楚. 如图 15.2 所示, 设 $I=[a,b]$, 则对给定的 $\varepsilon>0$ 就生成以 $y=S(x)$ 为中线 (在图上用粗黑曲线表示) 的一个带状区域:

$$\{(x,y)\mid a\leqslant x\leqslant b, S(x)-\varepsilon<y<S(x)+\varepsilon\}.$$

一致收敛的意义在于存在 $N=N(\varepsilon)$, 使得所有 $n\geqslant N$ 的曲线 $y=S_n(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$, 完全落在上述带状区域之内.

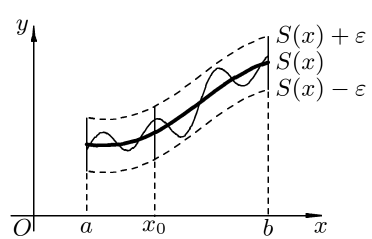


图 15.2: 一致收敛的几何意义

在图 15.2 的带状区域内画了一条有多个极值的细曲线代表某一个 $y=S_n(x)$. 又画出区域内的平行 y 轴的一个直线段, 即 $x=x_0, S(x_0)-\varepsilon<y<S(x_0)+\varepsilon$.

对于在点 $x=x_0$ 处的 $S_n(x_0)\to S(x_0)$ 来说, 只要 N 足够大, 当 $n\geqslant N$ 时, 点 $(x_0,S_n(x_0))$ 一定会落在上述直线段内. 这就是点态收敛的几何意义. 对于不同的点 x_0, N 一般是不同的. 这就是说点 $(x,S_n(x))$ 进入带状区域的先后可以不一样. 一致收敛则要求存在只与 ε 有关的 N, 当 $n\geqslant N$ 时所有 $S_n(x)$, $a\leqslant x\leqslant b$ 同时进入到带状区域中.

到此可以明白, 一致收敛是一种整体性质, 因此每次必须指出在什么 I 上一致收敛[①]. 在下一个例题中我们列出可以从定义直接得到的一致收敛的若干平凡而常用的性质. 其证明留作练习题.

① 显然一致收敛是与区间 (或更一般的数集) 有关的整体性概念. 过去已经见到过这类概念, 例如函数在区间上的有界性和一致连续性.

例题 15.2 从一致收敛定义可以直接证明以下结论:

(1) 若 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛, $J \subset I$, 则 $\{S_n(x)\}$ 也在 J 上一致收敛;

(2) 若函数列 $\{S_n\}$ 在 I 和 J 上分别一致收敛, 则也在 $I \cup J$ 上一致收敛;

(3) 若函数列 $\{S_n\}$ 在 $[a,b)$ 上一致收敛, 又在点 $x=b$ 收敛, 则该函数列在 $[a,b]$ 上一致收敛.

(4) 若函数列 $\{S_n\}$ 在 $[a,b]$ 上点态收敛, 但不一致收敛, 则该函数列在 $[a,b),(a,b],(a,b)$ 上都不是一致收敛的.

在理解和验证一致收敛时, 引入函数的范数概念是有用的.

对于在 I 上的函数 f, 其范数定义为

$$\|f\| = \sup_{x\in I} |f(x)|. \tag{15.1}$$

这时 $\|f-g\|$ 就代表两个函数 f 与 g 之间的某种距离 (即函数空间①中的距离). 如 $\|f-g\|=0$, 则 f 和 g 在 I 上恒等. 这时有以下结论.

定理 15.1 设 $\{S_n(x)\}$ 是 I 上的函数列, $\|\cdot\|$ 是 I 上的范数, 则

$$S_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} S(x) \quad \Longleftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty} \|S_n - S\| = 0.$$

证 若 $S_n(x) \overset{I}{\rightrightarrows} S(x)$, 则对 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N, \forall\,n \geqslant N, \forall\,x\in I: |S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$. 将上述最后一个不等式关于 $x \in I$ 取上确界, 就有 $\|S_n - S\| \leqslant \varepsilon$. 这样就已经得到 $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n - S\| = 0$.

反之, 若有 $\lim\limits_{n\to\infty} \|S_n - S\| = 0$, 则对 $\forall\,\varepsilon>0, \exists\,N, \forall\,n\geqslant N: \|S_n - S\| < \varepsilon$. 根据范数的上确界定义, 就有 $|S_n(x)-S(x)| < \varepsilon\ \forall\,x\in I$. □

由此可见, 对于给定在 I 上的函数列, 若能计算出它的极限函数, 又能计算出定理中的范数, 则一致收敛问题就转化为一个数列是否收敛于 0 的问题了. 可惜对于一般的函数列或者函数项级数的部分和函数列来说, 以上几步计算过程往往是难以实现的. 下面我们用一些简单例子来学习一致收敛概念和定理 15.1 的用法.

例题 15.3 证明函数列 $S_n(x) = \dfrac{x}{1+n^2x^2}\ \forall\,n$ 在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

证 可先求出极限函数为 $S(x)\equiv 0$. 以下计算范数 $\|S_n - S\|$. 可以估计得到

① 函数空间是泛函分析中的概念, 在数学分析中也很有用. 具体来说, 考虑在 I 上的所有 (或具有某种性质的) 函数全体的集合, 其中引入加法和数乘法成为一个线性空间, 然后还可以引入其他结构. 这样的空间就称为函数空间. 这个空间中的一个点 (或一个元) 就是一个函数. 正文中引入的范数 (15.1) 就是一种结构. $\|f\|$ 可看成为 f 到空间原点 (即恒等于 0 的函数) 的距离. 定义范数的方法不是惟一的. 在下一章的 Fourier 级数中我们还会再遇到函数空间及其范数的概念.

$$\left|\frac{x}{1+n^2x^2}\right| = \frac{1}{2n} \cdot \frac{2n|x|}{1+n^2x^2} \leqslant \frac{1}{2n},$$

且当 $n|x| = 1$ 时成立等号. 可见范数 $\|S_n - S\| = \dfrac{1}{2n}$. 因此 $\{S_n(x)\}$ 一致收敛. □

现在继续讨论例题 15.1 中的函数列 (并参看图 15.1).

例题 15.4 证明函数列 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

证 1 在前面已经得到了极限函数 $S(x)$, 它除了在 $x=1$ 处为 1 之外处处等于 0, 因此可以直接计算出范数 $\|x^n - S(x)\|$ 为:

$$\sup_{0\leqslant x\leqslant 1} |x^n - S(x)| = \sup_{0\leqslant x<1} |x^n| = 1.$$

由于这对每一个正整数 n 成立, 因此 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上不一致收敛. □

证 2 反证法. 设 $\{x^n\}$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛. 则对 $\varepsilon_0 = 1/2$, 存在 N, $\forall\, n \geqslant N$, $\forall\, x \in [0,1]$:

$$|x^n - S(x)| < \frac{1}{2}.$$

令 $x \to 1^-$, 就导致矛盾 $1 \leqslant \dfrac{1}{2}$. □

注 如例题 15.1 后的注中所说, 令

$$u_1(x) = x, u_n(x) = x^n - x^{n-1}\ \forall\, n \geqslant 2,$$

这样就得到了在 $[0,1]$ 上点态收敛但不一致收敛的函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$.

例题 15.5 证明 $S_n(x) = \mathrm{e}^{-nx^2}\ \forall\, n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛, 但在 $|x| \geqslant \delta$ 时一致收敛, 其中 $\delta > 0$ 为给定的正数.

证 先求出极限函数为 $S(x) = \begin{cases} 1, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$, 然后计算在 $(-\infty,+\infty)$ 上的范数, 也就是

$$\sup_{-\infty<x<+\infty} |\mathrm{e}^{-nx^2} - S(x)| = \sup_{x\neq 0}\{\mathrm{e}^{-nx^2}\} = 1,$$

可见 e^{-nx^2} 在 $(-\infty,+\infty)$ 上不一致收敛. 又计算出在 $|x| \geqslant \delta$ 上的范数, 即有

$$\sup_{|x|\geqslant\delta} |\mathrm{e}^{-nx^2} - S(x)| = \mathrm{e}^{-n\delta^2},$$

可见只要固定 $\delta > 0$, 则 e^{-nx^2} 在 $(-\infty,-\delta) \cup (\delta,+\infty)$ 上一致收敛. □

15.1.3 内闭一致收敛

这是介于点态收敛和一致收敛概念之间的一种收敛性, 在解决下面的许多问题时有用.

定义 15.3 若 $\{S_n(x)\}$ 在数集 I 内的每一个有界闭区间上一致收敛, 则称 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上内闭一致收敛.

注 若 $I=[a,b]$ 本身就是有界闭区间, 则在 I 上的内闭一致收敛就是一致收敛, 定义 15.3 不起作用. 有意义的是 I 不是有界闭区间, $\{S_n(x)\}$ 在 I 上不一致收敛但却是内闭一致收敛的情况.

这样的例子很多. 先看例题 15.4 的继续.

例题 15.6 函数列 $\{x^n\}$ 在 $[0,1)$ 上不一致收敛, 但内闭一致收敛.

证 (从例题 15.4 和例题 15.2(4) 就可推出 $\{x^n\}$ 在 $[0,1)$ 上不一致收敛, 但下面还是给出一个独立证明.)

已知 $\{x^n\}$ 在 $[0,1)$ 上点态收敛于 $S(x)\equiv 0$. 用反证法. 若 $\{x^n\}$ 在 $[0,1)$ 上一致收敛, 则对 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N,\ \forall\,n\geqslant N,\ \forall\ 0\leqslant x<1: |x^n|<\varepsilon$. 固定一个 n, 令 $x\to 1^-$, 就得到 $1\leqslant\varepsilon$. 这与 $\varepsilon>0$ 的任意性矛盾.

对于在 $[0,1)$ 中的有界闭区间, 不妨讨论 $[0,b]$, 其中 $0<b<1$. 这时利用 $b^n\to 0$, 对 $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N,\ \forall\,n\geqslant N: 0\leqslant b^n<\varepsilon$. 于是 $\forall\,x\in[0,b]: 0\leqslant x^n\leqslant b^n<\varepsilon$. 这就证明了 $\{x^n\}$ 在 $[0,b]$ 上一致收敛. $\square$

注 同样可以证明, 例题 15.5 中的函数列 $\{\mathrm{e}^{-nx^2}\}$ 在 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但却内闭一致收敛.

下面看几种具体情况中内闭一致收敛的意义.

(1) $\{S_n(x)\}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上内闭一致收敛等价于对每一个 $M>0$, $\{S_n(x)\}$ 在 $[-M,M]$ 上一致收敛.

(2) $\{S_n(x)\}$ 在 (a,b) 上内闭一致收敛等价于对每一个 $\delta\in(0,\dfrac{b-a}{2})$, $\{S_n(x)\}$ 在 $[a+\delta,b-\delta]$ 上一致收敛.

(3) $\{S_n(x)\}$ 在 $(a,b]$ 上内闭一致收敛等价于对每一个 $\delta\in(0,b-a)$, $\{S_n(x)\}$ 在 $[a+\delta,b]$ 上一致收敛.

(4) $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b)$ 上内闭一致收敛等价于对每一个 $\delta\in(0,b-a)$, $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b-\delta]$ 上一致收敛.

注 不厌其烦列举以上几点情况是为了什么? 可以这样来理解, 为了证明函数列在 I 上内闭一致收敛, 需要考虑在 I 中的所有有界闭区间 $[c,d]$, 这时两个端点都是参数, 很不方便. 因此列举出以上各个情况, 其中设法将参数的个数从 2 个降为 1 个, 从而为检验内闭一致收敛提供方便. 这里的依据见例题 15.2(1).

例题 15.7 讨论在 $I=[0,+\infty)$ 上的函数列 $\{nx\mathrm{e}^{-nx}\}$ 的一致收敛性或内闭一致收敛性.

解　记 $S_n(x) = nx\mathrm{e}^{-nx}\ \forall n$, 可以看出这个函数列在 $I = [0,+\infty)$ 上点态收敛于 $S(x) \equiv 0$.

为了判定函数列是否在 I 上一致收敛, 需要计算 $\|S_n - S\| = \sup\limits_{x\geqslant 0}\{nx\mathrm{e}^{-nx}\}$. 利用微分学, 从

$$(nx\mathrm{e}^{-nx})' = n\mathrm{e}^{-nx} - n^2x\mathrm{e}^{-nx} = n\mathrm{e}^{-nx}(1-nx),$$

可以知道最大值点是 $x = 1/n$, 最大值是 e^{-1}. 于是就得到 $\|S_n - S\| = \mathrm{e}^{-1}$. 这表明 $\{S_n(x)\}$ 在 $I = [0,+\infty)$ 上不一致收敛.

同样可以看出 $\{S_n(x)\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上也不一致收敛. 但下面我们来证明它在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛.

为此只要对 $\forall\,\delta > 0$, 证明函数列 $nx\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛.

取 $N = [1/\delta] + 1$, 则当 $n \geqslant N$ 时, 就有 $n \geqslant N > \dfrac{1}{\delta}$. 这等价于 $1/n < \delta$. 因此 $S_n(x)$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上严格单调减少, 从而就得到在 $n \geqslant N$ 时的

$$\sup_{x\geqslant\delta}|S_n(x) - S(x)| = \sup_{x\geqslant\delta}(nx\mathrm{e}^{-nx}) = n\delta\mathrm{e}^{-n\delta} = \frac{n\delta}{\mathrm{e}^{n\delta}} \to 0\ (n\to\infty),$$

可见 $\{nx\mathrm{e}^{-nx}\}$ 在 $[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. 由于在 $(0,+\infty)$ 内的任何有界闭区间都可以被形如 $[\delta,+\infty)$ 所包含, 只要取 δ 为足够小的正数即可, 因此已经证明了 $\{nx\mathrm{e}^{-nx}\}$ 在 $(0,+\infty)$ 上内闭一致收敛.　□

注　结合函数 $y = nx\mathrm{e}^{-nx}$ 的几何图像和一致收敛的几何意义就容易理解本例题中的结果. 如图 15.3 所示, 函数列中的每一个函数在 $x = 1/n$ 处达到同一个最大值 $1/\mathrm{e}$, 因此只要 $\varepsilon < 1/\mathrm{e}$, 图像就越出了图 15.2 中所说的带状区域 (这里只需考虑 $y \geqslant 0$):

$$\{(x,y)\ \big|\ x\in[0,+\infty), 0\leqslant y<\varepsilon\}.$$

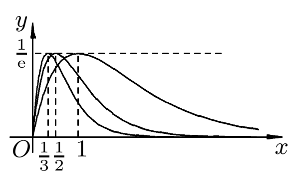


图 15.3: 函数列 $\{nx\mathrm{e}^{-nx}\}$ 的前三项的图像

因此在 $[0,+\infty)$ 上不可能一致收敛.

其次要看到这个最大值点 $1/n$ 是随着 n 增加而趋于 $x = 0$. 于是对于给定的 $\delta > 0$, 取 $n \geqslant N = [1/\delta] + 1$ 时就使得图像的峰已经移出了 $x \geqslant \delta$ 的范围. 关于内闭一致收敛就是依赖于此而得到证明的.

小结　从一致收敛开始, 在讨论中所涉及的变量 (包括参数) 个数越来越多, 这对初学者往往造成了很大的困难. 因此在这里对前面的概念作一个梳理是必要的.

在第二章中的对象是数列 $\{x_n\}$, 从函数角度看, 自变量是 n, 定义域是 $\mathbb{N}$. 到第三章和第四章, 对象是连续变量的函数 $f(x)$, 定义域为区间或区间的并. 在第十四章的无穷级数中, 自变量仍然是 n, 只是级数的通项可以含有参数.

从本章开始, 函数列 $\{S_n(x)\}$ 中每一个 $S_n(x)$ 实际上是二元函数, 但它和今后在多元函数中经常出现的二元函数 $z = f(x,y)$ 还不相同. 因为 $S_n(x)$ 中的 n, x 一

个离散, 另一个连续, 同时地位也不平等, 在不同的问题中处理的方法也不同. 每一次运算中哪一个是变量, 哪一个只是不参加运算的参数, 必须要区分清楚.

例如在讨论点态收敛时, 实际上与第十四章的无穷级数一样, 还是将 $x \in I$ 作为参数, 而求 $n \to \infty$ 时的极限.

但是为了研究函数列是否在 I 上一致收敛于其极限函数, 我们需要计算范数 $\|S_n - S\| = \sup\limits_{x \in I} |S_n(x) - S(x)|$. 在这里的计算中 n 是参数, 自变量是 $x \in I$. 求出每一个 $\|S_n - S\|$ 后, 在问它是否是无穷小量时, 当然 n 是自变量了.

内闭一致收敛就更复杂一点, 因为其中的有界闭区间可以在 I 中任取. 两个端点可随意取, 因此又多了两个参数. 在上面我们已经指出一般可以只用一个参数就可以了.

总结起来就是说在出现了多个变量的情况, 将参与当前运算的变量与不参加运算的参数区分开来是重要的.

15.1.4 函数项级数的例子

如本章的标题指出, 主题是函数项级数, 讨论函数列时主要关心的是函数项级数的部分和函数列. 这一小节中将提出一些基本概念, 并给出几个例子, 为下一节作准备.

对于给定的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 将使得该级数收敛的点 x 的集合称为该级数的收敛域. 相仿地定义发散域和绝对收敛域. 这里只需要点态收敛概念.

例题 15.8 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^n}{n^x}$ 的收敛域、发散域和绝对收敛域.

解 由于 $x > 0$ 时为 Leibniz 型级数, 因此收敛. 反之则通项不是无穷小量. 因此收敛域为 $(0, +\infty)$, 发散域为 $(-\infty, 0]$. 又可以从 p 级数的知识知道绝对收敛域是 $(1, +\infty)$. □

下面是一个有用的结论. 其中的余项概念见定义 14.1. 已知收敛级数的余项一定收敛于 0.

定理 15.2 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是级数的余项 $r_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{\infty} u_k(x)$ 在 I 上一致收敛于 0.

证 设函数项级数的部分和函数列为 $\{S_n(x)\}$.

若该函数项级数在 I 上一致收敛, 则记其和函数为 $S(x)$, 就有

$$r_n(x) = S(x) - S_n(x). \tag{15.2}$$

可见余项所成的函数列在 I 上一致收敛于 0 (更确切地说是一致收敛于恒等于 0 的常值函数). 反之, 余项在 I 上有意义就已经表明对应的函数项级数在 I 上点态收敛. 由于余项对每个 x 都是无穷小量, 因此余项所成的函数列一致收敛也就是 $\{r_n(x)\}$ 一致收敛于 0. 从 (15.2) 可见这就是 $\{S_n(x)\}$ 一致收敛于 $S(x)$. □

下面举出两个例子.

例题 15.9 在 $x > 1$ 时定义著名的 Riemann zeta 函数为

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

注意这里右边的级数就是第十四章的 p 级数 (见 §14.1.2 的例题 14.2), 区别仅仅在于在 p 级数讨论中 p 是参数, 所关心的只是敛散性; 而在这里 x 是自变量, 所关心的是无穷级数的和函数具有什么性质. 当然二者也有联系. 由 p 级数的敛散性讨论知道函数 $\zeta(x)$ 的定义域为 $(1, +\infty)$.

与 zeta 函数相联系的是一个著名的世界难题, 称为 Riemann 猜想. 这里首先要将该函数的定义域从数轴上的 $(1, +\infty)$ 延拓到整个复平面上. Riemann 提出, $\zeta(x)$ 的无穷多个非平凡零点都落在直线 $\operatorname{Re} z = \dfrac{1}{2}$ 上, 也就是都具有 $\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\alpha$ 的形状. 一般认为, 这个猜想与素数分布等重大问题有直接联系, 是当前纯粹数学中最重要的未解决问题. 2000 年 Clay 数学促进会设立了 7 个新千年数学奖问题. 每个问题的奖金额为一百万美元. Riemann 猜想即其中之一. □

例题 15.10 从第十四章的例题 14.18 可知, 函数

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上处处有定义, 而且是周期 2π 的周期函数. 这个级数将是本章和下一章中的重要例子.

练 习 题

1. 在函数项级数中任意插入、删去或改变有限项是否会影响其一致收敛性?

2. 按照一致收敛的定义 15.2, 用肯定叙述方式写出 $S_n(x) \not\rightrightarrows S(x),\ x \in I$.

3. 设 $f_n(x) \rightrightarrows f(x),\ x \in I$. $g_n(x) \rightrightarrows g(x),\ x \in I$, 证明:
$$af_n(x) + bg_n(x) \rightrightarrows af(x) + bg(x),\ x \in I.$$

4. 试举出区间 $[0,1]$ 上的可积函数列 $\{f_n(x)\}$, 它点态收敛于 $f(x),\ x \in [0,1]$, 但 $f \notin R[0,1]$.

5. 讨论下列函数列或函数项级数在指定区间上是否一致收敛:

(1) $\left\{\dfrac{x}{1+n^2x^2}\right\}$, $[0,1]$;　(2) $\{n\sin\dfrac{1}{nx}\}$, $[1,+\infty)$;

(3) $\left\{\dfrac{1}{n}xe^{-nx}\right\}$, $[0,+\infty)$;　(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n+|x|}}$, $\mathbb{R}$;

(5) $\{\ln(2+\dfrac{ne^x}{n^2+e^{2x}}\}$, $[0,+\infty)$;　(6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{n+1}x^2}{(1+x^2)^n}$, $\mathbb{R}$;

(7) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^2}{(1+x^2)^n}$, $\mathbb{R}$;　(8) $\left\{\sqrt{f^2(x)+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}\right\}$, $\mathbb{R}$;

(9) $\left\{\dfrac{[nf(x)]}{n}\right\}$, $\mathbb{R}$ ((8), (9) 中 f 为任意函数).

6. 讨论下列函数列或函数项级数在指定区间上是否一致收敛:

(1) $\left\{\dfrac{x^n}{1+x^n}\right\}$, (i) $(0,1)$, (ii) $(0,\mathrm{b}]$ $(0<\mathrm{b}<1)$;

(2) $\{e^{-(x-n)^2}\}$, (i) $[-\mathrm{b},\mathrm{b}]$, (ii) $\mathbb{R}$;

(3) $\left\{n\displaystyle\int_0^x \sin(t^n)\,dt\right\}$, $[0,b]$ $(0<b<1)$;

(4) $\{n^2(1-x)^n x\}$, (i)$(0,1]$, (ii)$[\mathrm{b},1]$ $(0<\mathrm{b}<1)$;

(5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{2n+1}{(\sin^2 x+n^2)(\sin^2 x+(n+1)^2)}$, $\mathbb{R}$.

7. (1) 若 f 在 $\mathbb{R}$ 上一致连续, 作 $f_n(x)=f(x+\dfrac{1}{n})$ $\forall x\in\mathbb{R}, n\in\mathbb{N}$. 证明: $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in\mathbb{R}$;

(2) 设已知 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, 且 $f\in C(\mathbb{R})$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x+\dfrac{1}{n})=f(x)$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

8. (1) 设 $\{f_n(x)\}$ 是在区间 I 上的单调函数列, 且一致有界, 问: 能否推出 $f_n(x)\rightrightarrows$, $x\in I$?

(2) 设有 $g_n(x)\leqslant f_n(x)\leqslant h_n(x)$ $\forall x\in I, \forall n$, 且已知 $g_n(x)\rightrightarrows$, $x\in I$ 和 $h_n(x)\rightrightarrows$, $x\in I$, 问: 能否推出 $f_n(x)\rightrightarrows$, $x\in I$?

(3) 设有 $v_n(x)\leqslant u_n(x)\leqslant w_n(x)$ $\forall x\in I, \forall n$, 且已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n(x)\rightrightarrows$, $x\in I$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}w_n(x)\rightrightarrows$, $x\in I$, 问: 能否推出 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\rightrightarrows$, $x\in I$?

9. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 函数 g 在 I 上有界, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}g(x)u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

10. (1) 若存在 N 和 $r \in (0,1)$ 使得 $|u_n(x)| \leqslant r^n \ \forall n \geqslant N, \forall x \in I$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

    (2) 若存在 N 使得 $|u_n(x)| \leqslant v_n(x) \ \forall n \geqslant N, \forall x \in I$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

11. 将数项级数中的 Leibniz 型级数推广成为某类一致收敛的函数项级数, 并写出证明.

12. (1) 若对 $\forall \varepsilon \in (0, a-b)$ 有 $f_n(x) \rightrightarrows \ \forall x \in [a, b-\varepsilon]$, 且已知数列 $\{f_n(b)\}$ 收敛, 问: 能否推出 $f_n(x) \rightrightarrows \ x \in [a,b]$?

    (2) 若已知 $f_n(x) \rightrightarrows \ \forall x \in [a,b)$, 且数列 $\{f_n(b)\}$ 收敛, 问: 能否推出 $f_n(x) \rightrightarrows$ $x \in [a,b]$?

13. 若 $f_n(x) \to f(x) \forall x \in [a,b]$, 且存在 $L > 0$ 使得成立:
$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leqslant L|x' - x''| \forall x', x'' \in [a,b], \forall n,$$
证明: $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x \in [a,b]$.

§15.2 一致收敛性判别法

定理 15.1 将函数列的一致收敛性等价于由范数组成的数列收敛于 0, 但实际上很难将这个定理用于判定无穷级数的一致收敛性.

问题在于, 若打算用上述定理于某一个函数项级数, 则第一步就要能求出它的部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 的有限表达式 (也称为封闭性表达式), 第二步是求出其极限函数 $S(x)$, 也就是函数项级数的和函数, 然后才有可能考虑是否能够计算出数列 $a_n = \|S_n - S\|$. 最后就是判定 $a_n \to 0$ 是否成立.

能够将以上做法贯彻到底的最典型例子就是几何级数. 对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$, 只要所讨论的区间 I 在其收敛域 $(-1,1)$ 内, 以上的每一步都没有困难. 第一步就是当 $x \neq 1$ 时, 有

$$x + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x(x^n-1)}{x-1},$$

以下从略.

然而这样顺利的例子实际上是百中难得其一. 一般来说第一步, 即求 $S_n(x)$ 的有限表达式就做不到, 遑论其他. 普遍的情况是, 在解决了点态收敛问题, 即解决了函数项级数的和函数的定义域之后, 无穷级数就可能是和函数 $S(x)$ 的惟一已知表达式. 这时 $S(x) - S_n(x)$ 就是余项 $r_n(x)$. 而每一个 $r_n(x)$ 仍然是一个无穷级数. 于是我们还是要从级数本身出发来讨论它的一致收敛性.

15.2.1 Cauchy 一致收敛准则

首先还是叙述并证明关于函数列的 Cauchy 一致收敛准则.

定理 15.3 (函数列的 Cauchy 一致收敛准则) 函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是对 $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N,\ \forall\, n, m \geqslant N,\ \forall\, x \in I : |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$.

(用范数则为: 对 $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N,\ \forall\, n, m \geqslant N : \|S_n(x) - S_m(x)\| < \varepsilon$.)

证　必要性　函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛已经保证了它在 I 上点态收敛, 记其极限函数为 $S(x)$, 则根据 $\{S_n(x)\}$ 在 I 上一致收敛于 $S(x)$, 因此对 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, N,\ \forall\, n \geqslant N,\ \forall\, x \in I : |S_n(x) - S(x)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$. 于是当 $n, m \geqslant N$ 时就对所有 $x \in I$ 成立

$$|S_n(x) - S_m(x)| \leqslant |S_n(x) - S(x)| + |S(x) - S_m(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

充分性　根据条件, 对 $\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N,\ \forall\, n, m \geqslant N,\ \forall\, x \in I : |S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$. 固定 $x \in I$, 则从 Cauchy 收敛准则可见数列 $\{S_n(x)\}$ 收敛. 记其极限为 $S(x)$, 并对每一个 $x \in I$ 这样做, 就知道 $\{S_n(x)\}$ 点态收敛于极限函数 $S(x)$, $x \in I$.

利用 $n, m \geqslant N$ 中的 N 对 $x \in I$ 同时适用, 在不等式 $|S_n(x) - S_m(x)| < \varepsilon$ 中令 $m \to \infty$, 就得到 $|S_n(x) - S(x)| \leqslant \varepsilon$. 这就已经证明了 $\{S_n(x)\}$ 于 I 上一致收敛于 $S(x)$. $\square$

由此可以直接推出函数项级数的 Cauchy 一致收敛准则.

定理 15.4 (函数项级数的 Cauchy 一致收敛准则) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛的充分必要条件是对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}, \forall x \in I:$

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| < \varepsilon.$$

(用范数则为: $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}: \ \|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}\| < \varepsilon.$)

15.2.2 函数项级数一致收敛的比较判别法

这是最常用的一致收敛判别法. 其基本思想与 §11.3.1 中广义积分的比较判别法以及 §14.2.1 中非负项级数的比较判别法相同, 即对于给定的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in I$ 的每一项取绝对值, 然后寻找一个正项级数来控制它. 它也称为 Weierstrass (比较) 判别法, 优级数判别法, 强级数判别法等等.

函数项级数一致收敛的比较判别法 设对于函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x),\ x \in I$ 的每一项有 $|u_n(x)| \leqslant a_n\ \forall x \in I$, 且 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

(称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 为优级数或强级数.)

证 对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 用 Cauchy 收敛准则, 即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geqslant N, \forall p \in \mathbb{N}:$

$$0 \leqslant a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon.$$

然后根据条件有不等式

$$\begin{aligned} |u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)| &\leqslant |u_{n+1}(x)| + \cdots + |u_{n+p}(x)| \\ &\leqslant a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon, \end{aligned}$$

可见函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛. $\square$

注 1 从证明过程可见, 这时每一项取绝对值后的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |u_n(x)|$ 在 I 上也收敛. 因此我们称原来的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致绝对收敛.

由此可见, 若一个函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上不 (处处) 绝对收敛, 则它在 I 上是否一致收敛的问题不可能用比较判别法解决.

注 2　用比较判别法时, 如果可能的话只需要直接计算 $a_n = \sup\limits_{x\in I} |u_n(x)|$, 然后看级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 是否收敛. 若它收敛, 则原来的函数项级数就在 I 上一致收敛; 若该级数发散, 则比较判别法失效, 需要用其他方法再做.

注 3　不易想到的是, 即使一个函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致绝对收敛, 也不一定可以用比较判别法来得到这个结论. 实际上从比较判别法可见, 对于给定的函数项级数来说, 比较判别法中的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 必须对每个 n 满足下列不等式:

$$a_n \geqslant \sup_{x\in I} |u_n(x)|,$$

而上式右边的数作为通项的级数可能发散, 即使原来的函数项级数一致绝对收敛. 例如, 令 $I = [0, 1]$, 并定义级数的通项为

$$u_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & x = \dfrac{1}{n}, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

则有 $a_n \geqslant \dfrac{1}{n}$, 因此 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 一定发散. 然而这时 $u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)$ 只在 p 个不同点 $x = \dfrac{1}{n+1}, \cdots, \dfrac{1}{n+p}$ 上不等于 0, 而且在其中的每一个点上这 p 项中只有一项不是 0, 因此成立不等式:

$$0 \leqslant u_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x) \leqslant \frac{1}{n+1},$$

可见级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 于 $[0, 1]$ 上一致绝对收敛.

利用比较判别法就可以得到在今后的 Fourier 级数理论中有用的结论:

例题 15.11　若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ 都在 $\mathbb{R}$ 上一致收敛.

证　对这两个函数项级数取 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 为强级数即可. □

15.2.3　函数项级数一致收敛的 Abel–Dirichlet 判别法

与 §11.3.2, §14.3.3 一样, 这是两个有密切联系的判别法.

(1) Abel 一致收敛判别法 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上一致收敛, 函数列 $\{v_n(x)\}$ 关于 n 单调且对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in I$ 一致有界, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

(2) Dirichlet 一致收敛判别法 若函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 对于 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in I$ 一致有界, 函数列 $\{v_n(x)\}$ 关于 n 单调且一致收敛于 0, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

证 由于在两个一致收敛判别法中函数列 $\{v_n(x)\}$ 关于 n 均单调, 对每一个 $x \in I$, 从 Abel 不等式就有

$$
\begin{aligned}
&|u_{n+1}(x)v_{n+1}(x) + \cdots + u_{n+p}(x)v_{n+p}(x)| \\
&\qquad \leqslant (|v_{n+1}(x)| + |v_{n+p}(x)|) \max_{n+1 \leqslant l \leqslant m \leqslant n+p} |u_l(x) + \cdots + u_m(x)|.
\end{aligned}
$$

关于 $x \in I$ 取上确界, 得到

$$
\|u_{n+1}v_{n+1} + \cdots u_{n+p}v_{n+p}\| \leqslant (\|v_{n+1}\| + \|v_{n+p}\|) \max_{\substack{n+1 \leqslant l \leqslant m \\ \leqslant n+p}} \|u_l + \cdots + u_m\| \tag{15.3}
$$

这是证明两个判别法的共同基础.

(1) 在 Abel 判别法中, 取 $M > 0$ 使得 $\|v_n\| \leqslant M \ \forall n$, 并对 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 用 Cauchy 一致收敛准则, 即对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geqslant N$, $\forall p \in \mathbb{N}$, 成立 $\|u_{n+1} + \cdots + u_{n+p}\| < \dfrac{\varepsilon}{2M}$, 则同时也就有

$$
\|u_{n+1}v_{n+1} + \cdots + u_{n+p}v_{n+p}\| < (\|v_{n+1}\| + \|v_{n+p}\|) \cdot \frac{\varepsilon}{2M} \leqslant \varepsilon,
$$

可知函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n v_n$ 于 I 上一致收敛.

(2) 在 Dirichlet 判别法中, 取 $M > 0$ 使得 $\|S_n\| \leqslant M \ \forall n$ 成立, 然后对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geqslant N$, 成立 $\|v_n\| < \dfrac{\varepsilon}{4M}$, 则就对 $\forall p \in \mathbb{N}$ 有

$$
\begin{aligned}
\|u_{n+1}v_{n+1} + \cdots + u_{n+p}v_{n+p}\| &< \frac{\varepsilon}{2M} \cdot \max_{n+1 \leqslant l \leqslant m \leqslant n+p} \|S_m - S_{l-1}\| \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2M} \cdot 2M \leqslant \varepsilon,
\end{aligned}
$$

可知函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛. □

注 这里的判别法中出现了新的一致有界性概念, 即一个函数列的一致有界性. 这与过去用于单个函数的整体性概念不同, 而是将一个函数的有界性概念推

广到一族函数上去. 它们有共同的定义域, 每一个都是有界函数. 一致有界表明存在一个适用于所有函数的共同界限. 对于 I 上的 $\{S_n(x)\}$ 来说, 就是 $\exists\, M > 0$, $\forall\, x \in I, \forall\, n \in \mathbb{N} : |S_n(x)| < M$. 这等价于由范数形成的数列 $\|S_n\|$ 为有界数列.

例题 15.12 证明: 函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上内闭一致收敛.

证 为此只要对于 $\delta \in (0, \pi)$, 证明该函数项级数在 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上一致收敛.

利用前面已经用过的不等式, 即在 $\sin \dfrac{x}{2} \neq 0$ 时有

$$|\sin x + \cdots + \sin nx| = \left| \frac{\cos \frac{1}{2}x - \cos \frac{2n+1}{2}x}{2\sin \frac{1}{2}x} \right| \leqslant \frac{1}{|\sin \frac{1}{2}x|},$$

可见在 $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$ 时有

$$|\sin x + \cdots + \sin nx| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\delta},$$

这表明函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \sin nx$ 的部分和函数列 $\{S_n(x)\}$ 在区间 $[\delta, 2\pi - \delta]$ 上一致有界. 另一个因子 $\dfrac{1}{n}$ 单调趋于 0, 且与 x 无关, 因此当然关于 x 一致. 用 Dirichlet 一致收敛判别法可知结论成立. □

例题 15.13 证明: 函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0, 2\pi)$ 上不一致收敛.

(实际上若一致收敛, 则不必再讨论它在 $(0, 2\pi)$ 上内闭一致收敛了. 又由于该级数于 $x = 0, 2\pi$ 处都收敛, 因此它在 $(0, 2\pi)$ 上不一致收敛等价于在 $[0, 2\pi]$ 上不一致收敛.)

证 对于 Cauchy 一致收敛准则用对偶法则, 函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 I 上不一致收敛的充要条件是: $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, $\forall\, N$, $\exists\, n \geqslant N$, $\exists\, p \in \mathbb{N}$, $\exists\, x_0 \in I$, 有

$$|u_{n+1}(x_0) + \cdots + u_{n+p}(x_0)| \geqslant \varepsilon_0.$$

这里要自己决定 ε_0, n, p, x_0, 当然不太容易了.

先看如何用无穷级数的 Cauchy 收敛准则证明调和级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散. 同样用对偶法则, 这就是要证明 $\exists\, \varepsilon_0 > 0$, $\forall\, N$, $\exists\, n \geqslant N$, $\exists\, p \in \mathbb{N}$, 有

$$\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \cdots + \frac{1}{n+p} \geqslant \varepsilon_0.$$

为减少困难, 取 $p = n$, 则上式左边 $> \dfrac{n}{2n} = \dfrac{1}{2}$, 可见取 $\varepsilon_0 = \dfrac{1}{2}$, $\forall\, N$, 就取 $n = p = N$, 这样就满足要求, 也就是已经证明调和级数发散.

现在回到我们面临的具体问题, 即要对付的表达式是

$$\frac{\sin(n+1)x}{n+1}+\frac{\sin(n+2)x}{n+2}+\cdots+\frac{\sin(n+p)x}{n+p}.$$

同样令 $p=n$, 这时每一项的分母小于等于 $2n$, 而分子的正弦函数的自变量为 $(n+1)x, (n+2)x, \cdots, 2nx$. 取 $x_0=\dfrac{\pi}{4n}$ 就可以使它们都落在 $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ 之中, 这样上述表达式中每个分式的分子都大于 $\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$. 从而这 n 项之和就大于 $n\cdot\dfrac{1}{2n}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$.

于是只要取 $\varepsilon_0=\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, $\forall N$, 取 $n=p=N$, 取 $x_0=\dfrac{\pi}{4N}$, 就有

$$\frac{\sin(n+1)x_0}{n+1}+\cdots+\frac{\sin(2n)x_0}{2n}>\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)>\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{n}{2n}=\varepsilon_0,$$

于是就证明了函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0,2\pi)$ 上不一致收敛. □

练 习 题

1. 讨论下列函数项级数在指定区间上是否一致收敛:

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} r^n\cos nx\ (0<r<1),\ \mathbb{R}$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \mathrm{e}^{-n^2x^2}\sin nx,\ \mathbb{R}$;

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{x}{x^2+n^2}\right)^2,\ [0,+\infty)$;

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n+x^2},\ \mathbb{R}$;

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(1-\mathrm{e}^{-nx})}{n+x^2},\ [0,+\infty)$;

(6) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-x)x^n,\ [0,1]$;

(7) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(1-x^n)x^n,\ [0,1]$;

(8) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}x^n\mathrm{e}^{-nx},\ [0,1]$;

(9) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n}{n(1+x^n)},\ (0,1)$;

(10) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^nx^n(1-x)}{1-x^{2n}},\ (0,1)$;

(11) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{1}{nx}\sin^2\frac{nx}{n^3+x},\ (0,+\infty)$;

(12) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin nx}{\sqrt{n+x}},\ [0,\frac{\pi}{2}]$;

(13) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\frac{x}{n}}\cos nx}{x^2+n^2x},\ [a,+\infty)\ (a>0)$;

(14) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{n\pi}{3}}{\sqrt{n+x^2}},\ \mathbb{R}$;

(15) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{x}{(n+1)\ln^2(n+1)}\right),\quad [-a,a]$;

(16) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^nx},$ (i) $(0,+\infty)$, (ii) $[\delta,+\infty)\ (\delta>0)$.

2. (1) 证明: 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 于 I 上一致收敛, 则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 也于 I 上一致收敛. 又问: 反之如何?

(2) 举例说明: 即使 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 于 I 上一致收敛, 且该级数于 I 上处处绝对收敛, 也未必能保证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|u_n(x)|$ 于 I 上一致收敛.

3. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $x=a,b$ 处绝对收敛, 且每个 $u_n(x)$ 都是 $[a,b]$ 上的单调函数, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

4. 设 $\{f_n(x)\}$ 为 I 上的有界函数列, 且 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in I$, 证明: (1) f 在 I 上有界; (2) $\{f_n\}$ 在 I 上一致有界; (3) $\mathrm{e}^{f_n(x)}\rightrightarrows \mathrm{e}^{f(x)}$, $x\in I$.

5. 设 $\{f_n(x)\},\{g_n(x)\}$ 是 I 上的两个有界函数列, 且均在 I 上一致收敛, 证明: $\{f_n(x)g_n(x)\}$ 在 I 一致收敛.

6. 设 $f_1\in R[a,b]$, 并归纳地定义 $f_{n+1}(x)=\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\ \forall n$, 证明: $f_n(x)\rightrightarrows 0$, $x\in[a,b]$.

7. 若 $\{f_n(x)\}$ 为 $[a,b]$ 上的可积函数列, 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 证明:
$$\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows,\ x\in[a,b].$$

8. (Bendixon 判别法) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上收敛, 且存在 $K>0$, 使得
$$\left|\sum_{k=1}^{n}u_k'(x)\right|\leqslant K\ \forall x\in[a,b],\forall n,$$
证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

9. 若 $\sqrt{n}a_n\to 0$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{n}|a_n-a_{n+1}|$ 收敛, 且存在 $K>0$, 使得
$$\left|\sum_{k=1}^{n}\frac{u_k(x)}{\sqrt{k}}\right|\leqslant K\ \forall x\in[a,b],\forall n,$$
证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nu_n(x)\rightrightarrows$, $x\in[a,b]$.

10. 证明: $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in I$ 的充分必要条件是: 对 $\forall\{x_n\}\subset I:$
$$\lim_{n\to\infty}[f_n(x_n)-f(x_n)]=0.$$

§15.3 一致收敛级数的性质

15.3.1 问题的提出

设在 $x \in I$ 时有收敛的函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = S(x),$$

则就产生了和函数 $S(x)$. 若它是初等函数, 则就提供了新的表达式, 即所谓 $S(x)$ 的无穷级数展开式. 这在很多情况非常有用. 但是更多的情况却是, 这样得到的 $S(x)$ 不是初等函数, 于是上述无穷级数就是定义 $S(x)$ 的表达式.

可以理解, 对于这样得到的函数 $S(x)$, 若要研究它的种种性质, 就需要通过无穷级数来进行. 点态收敛只能确定和函数的定义域问题, 对于和函数的性质讨论则需要新的工具.

以下讨论最基本的三个问题, 即和函数 $S(x)$ 的连续性、可微性和可积性, 可以提出以下问题.

(1) 若级数的每一项 $u_n(x)$ 都是 I 上的连续函数, 则级数的和函数 $S(x)$ 是否也是 I 上的连续函数? 这就是说, 级数通项的连续性是否能够传递到和函数上?

对于级数, 如在 I 上有和函数 $S(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 则和函数在点 x_0 是否连续的问题可以表达为

$$S(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x\to x_0} u_n(x) = \lim_{x\to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)?$$

这就是 $x \to x_0$ 的极限过程与级数求和是否可交换顺序的问题.

对于函数列 $\{S_n(x)\}$ 也是如此. 设其在 I 上的极限函数为 $S(x)$, 则它在点 x_0 是否连续的问题可以表达为

$$S(x_0) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to x_0} S_n(x) = \lim_{x\to x_0} \lim_{n\to\infty} S_n(x)?$$

这里同样是两种极限的交换顺序问题.

从本章的第一个例子, 即例题 15.1 中的函数列 $\{x^n\}$ $(x \in [0,1])$ 及其注, 可见仅仅点态收敛是不够的. 可以证明, 若上述级数不仅点态收敛, 而且是在 I 上一致收敛或至少内闭一致收敛, 则这种"传递性"确实成立.

(2) 进一步设级数通项 $u_n(x)$ 在 I 上可微, 问这样的可微性能否传递到和函数上? 下面我们会知道, 在一定的条件下这也是成立的. 此外, 这里还涉及到如何求和函数的导数这样的计算问题. 当上述级数收敛于 $S(x)$ 时, 是否能够用逐项求导的方法来计算和函数的导数, 即

$$S'(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}?$$

这就是求导数运算是否可以与级数求和交换顺序的问题.

对于函数列 $\{S_n(x)\}$ 也是如此. 设其在 I 上的极限函数为 $S(x)$, 则它是否可导的问题可以表达为

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}S_n}{\mathrm{d}x}?$$

这里同样是两种极限的交换顺序问题.

(3) 在可积性问题上, 什么条件能够保证级数的和函数可积? 在可积的情况下又是否可以通过级数逐项求积来计算和函数的积分? 这同样是重要的问题. 具体写出即是对于在 $[a,b]$ 上的无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$, 设其在 $[a,b]$ 上的和函数为 $S(x)$, 是否有

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x?$$

对于函数列 $\{S_n(x)\}$ 也是如此. 设其在 $[a,b]$ 上的极限函数为 $S(x)$, 则它是否可积的问题可以表达为

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x?$$

这里同样是两种极限的交换顺序问题.

可以如同关于连续性的例子那样, 对于可微和可积问题, 举出例子说明仅仅级数的点态收敛是不能解决这些问题的. 这就是我们要学习比点态收敛更强的一致收敛概念的由来.

例题 15.14 (从可微角度回顾例题 15.1) 函数列 $\{x^n\}$ 的每一项在 $[0,1]$ 上连续可微, 然而它的极限函数是

$$S(x)=\begin{cases}0, & 0\leqslant x<1,\\ 1, & x=1,\end{cases}$$

在点 1 处不连续, 当然更谈不上可导了. □

例题 15.15 设在 $[0,1]$ 上对每个 n 令 $S_n(x)=\begin{cases}n, & 0<x\leqslant\dfrac{1}{n},\\ 0, & \dfrac{1}{n}<x\leqslant 1, x=0,\end{cases}$ 则可以求出其极限函数 $S(x)\equiv 0\ \forall x\in[0,1]$. 实际上, 对于 $x=0$, 每一个 $S_n(0)=0$, 因此极限 $S(0)=0$. 对于 $x_0\in(0,1]$, 存在 N, 使得 $\dfrac{1}{N}<x_0$. 则当 $n\geqslant N$ 时, $S_n(x_0)=0$, 因此极限 $S(x_0)=0$.

下面我们来观察这个函数列在 $[0,1]$ 上的定积分和 $n\to\infty$ 是否可交换.

这时对每个正整数 n 有 $\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x = n\cdot\dfrac{1}{n} = 1$, 但是 $\int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 因此

$$1 = \lim_{n\to\infty}\int_0^1 S_n(x)\,\mathrm{d}x \neq \int_0^1 S(x)\,\mathrm{d}x = 0. \quad \square$$

15.3.2　连续性定理

定理 15.5 (连续性定理) (1) 设函数列 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

(2) 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则其和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续.

证　只证明 (1) 就够了.

设 $x, x_0 \in [a,b]$, 将 $|S(x)-S(x_0)|$ 分拆如下 (俗称为 3ε 方法或 $\dfrac{\varepsilon}{3}$ 方法):

$$|S(x)-S(x_0)| \leqslant |S(x)-S_n(x)| + |S_n(x)-S_n(x_0)| + |S_n(x_0)-S(x_0)|. \tag{15.4}$$

对于给定的 $\varepsilon>0$, $\exists\, N$, $\forall\, n\geqslant N$, $\forall\, x\in[a,b]$: $|S_n(x)-S(x)|<\varepsilon$. 于是只要 $n\geqslant N$, (15.4) 右边的第一项和第三项已分别小于 ε.

为了使得其右边的第二项也足够小, 其中的 n 仅仅大于等于 N 还是不行的, 因为有无限多个这样的 n. 取定 $n=N$, 这样就得到

$$|S(x)-S(x_0)| \leqslant 2\varepsilon + |S_N(x)-S_N(x_0)|. \tag{15.5}$$

利用 $S_N(x)\in C[a,b]$, 存在 $\delta>0$, 当 $x\in O_\delta(x_0)\cap[a,b]$ 时, 成立 $|S_N(x)-S_N(x_0)|<\varepsilon$. 这时从 (15.5) 可见, 当 $x\in O_\delta(x_0)\cap[a,b]$ 时也就有 $|S(x)-S(x_0)|<3\varepsilon$. 这样就证明了 $S(x)$ 在点 x_0 连续. 由于 x_0 可以取到 $I=[a,b]$ 的每一个点, 因此已经证明 $S(x)$ 在 $I=[a,b]$ 上连续. $\square$

定理 15.5 中的一致收敛条件只是充分条件, 但不是必要条件. 对于区间 I 不是有界闭区间的其他情况, 则内闭一致收敛条件已经足够. 这就是下面的推论.

推论　(1) 设函数列 $\{S_n(x)\}$ 在区间 I 上连续, 且该函数列在 I 上内闭一致收敛于 $S(x)$, 则 $S(x)$ 在 I 上连续.

(2) 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项在区间 I 上连续, 且级数在 I 上内闭一致收敛, 则其和函数 $S(x)$ 在 I 上连续.

证　只对于 (1) 作出证明.

对 $x_0\in I$, 存在有界闭区间 $[c,d]$, 使得 $x_0\in[c,d]\subset I$. 若 x_0 是 I 的内点, 则还可以做到 $c<x_0<d$. 由于函数列 $\{S_n(x)\}$ 于 I 中内闭一致收敛, 因此在 $[c,d]$ 上一致收敛. 从定理 15.5 的证明可见 $S(x)$ 在点 x_0 连续. $\square$

注 1 这里要注意连续性是局部性质, 因此实际上是逐点证明的. 具体来说就是对一个点用一个有界闭区间将它包住, 然后在这个区间上用定理 15.5. 这也就是内闭一致收敛概念的由来.

注 2 连续性定理的逆否命题也经常有用, 即连续函数列的极限函数不连续, 或连续函数项级数的和函数不连续时, 则一定不会是内闭一致收敛的. 例如在 $[0,1]$ 上的 $\{x^n\}$ 就是如此. 于是从例题 15.1 的计算就可以得到例题 15.4 的结论.

例题 15.16 从例题 15.12 已知 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛, 因此其和函数 $S(x)$ 在 $(0,2\pi)$ 上连续. □

注 由于上述级数于 $x=0,2\pi$ 处显然收敛于 0, 而且每一项都是周期 2π 的函数, 因此 $S(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上处处有定义, 且是周期 2π 的周期函数. 从第十六章将会看到, 这个和函数 $S(x)$ 恰恰就在包括点 $0,2\pi$ 在内的 $2k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ 处不连续.

例题 15.17 对于 $\zeta(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$, 已知收敛域是 $(1,+\infty)$, 讨论其连续性.

解 对于收敛域 $(1,+\infty)$ 中的有界闭区间 $[c,d]$, 利用在 $x\in[c,d]$ 上成立 $\dfrac{1}{n^x}\leqslant\dfrac{1}{n^c}$, 因此用 Weierstrasss 判别法知道级数在 $[c,d]$ 上一致收敛. 由于 $[c,d]\subset(1,+\infty)$ 的任意性, 因此级数在 $(1,+\infty)$ 上内闭一致收敛. 于是根据连续性定理知道 $\zeta(x)\in C(1,+\infty)$. □

注 实际上这里不一定需要引入内闭一致收敛的概念. 只要对 $\forall\, x_0\in(1,+\infty)$, 取 c,d 满足 $1<c<x_0<d$, 然后如上面一样证明级数在 $[c,d]$ 上一致收敛, 从而和函数在点 x_0 连续. 由于 $x_0>1$ 的任意性, 证毕.

极限函数或和函数的连续性定理的逆定理不成立. 下面是一个例子.

例题 15.18 设在 $[0,1]$ 上 $S_n(x)=nx^n(1-x)\ \forall\, n$, 则可以看出极限函数 $S(x)\equiv 0\ \forall\, x\in[0,1]$. 但可以证明上述函数列在 $[0,1]$ 上不一致收敛.

证 为此只要计算 $\displaystyle\sup_{x\in[0,1]}|S_n(x)-S(x)|=\max_{x\in[0,1]}S_n(x)$, 除了用微分学方法之外也可以用平均值不等式看出

$$\begin{aligned}S_n(x)&=nx^n(1-x)=n^{n+1}\left(\frac{x}{n}\right)^n(1-x)\\&\leqslant n^{n+1}\left(\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1},\end{aligned}$$

且右边可达到, 因此 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\|S_n-S\|=\frac{1}{\mathrm{e}}$, 即不是一致收敛. □

注 建议读者对若干个 n 作出 $S_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上的草图, 这样就会发现与图 15.3 类似的现象, 从而加深对于不一致收敛现象的理解.

然而若除了极限函数 (或和函数) 的连续性之外, 对于连续函数列再加上单调性 (对于连续函数项级数加上保号性), 就可以推出一致收敛. 这就是 Dini[①]定理.

定理 15.6 (Dini 定理) (1) 设 $\{S_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的连续函数列, 且关于 n 为单调序列, 其极限函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则该函数列在 $[a,b]$ 上一致收敛.

(2) 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 是在区间 $[a,b]$ 上保号的连续函数项级数, 其和函数 $S(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则该函数项级数在 $[a,b]$ 上一致收敛.

证 (**用有限覆盖定理**) 只证明 (1).

不妨设对每个 $x \in [a,b]$, $\{S_n(x)\}$ 关于 n 为单调减少数列, 即有 $S_n(x) \downarrow S(x)$. 以下我们要构造 $[a,b]$ 的一个开覆盖, 请参见图 15.4.

设给定 $\varepsilon > 0$. 任取 $x_0 \in [a,b]$, 则从 $S_n(x_0) \downarrow S(x_0)$, 存在 N, 使得

$$S(x_0) \leqslant S_N(x_0) < S(x_0) + \varepsilon.$$

利用 $S_N(x)$ 和极限函数 $S(x)$ 都在 x_0 处连续, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in O_\delta(x_0) \cap [a,b]$ 时成立

$$S(x) \leqslant S_N(x) < S(x) + \varepsilon.$$

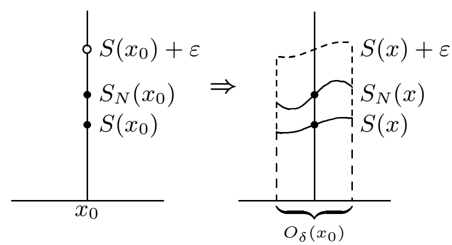


图 15.4: Dini 定理证明中的覆盖生成过程

这样就得到覆盖 x_0 的一个邻域 $O_\delta(x_0)$, 且存在与该邻域对应的一个下标 N. 由于序列的单调性, 当 $n \geqslant N$, $|x - x_0| < \delta$ 时, 成立 $S(x) \leqslant S_n(x) \leqslant S_N(x) < S(x) + \varepsilon$. 在图 15.4 中就是落在下列区域内:

$$\{(x,y) \mid x \in O_\delta(x_0), S(x) \leqslant y < S_N(x)\}.$$

对于每一个点 $x_0 \in [a,b]$ 都这样做, 就得到 $[a,b]$ 的一个开覆盖. 用有限覆盖定理 (即定理 2.29), 在上述开覆盖中存在有限子覆盖, 不妨记为 $O_1, \cdots, O_p$, 它们的并覆盖了 $[a,b]$. 同时它们分别对应了下标 $N_1, \cdots, N_p$, 使得 $\forall i \in \{1, \cdots, p\}$, $\forall x \in O_i$, 成立

$$S(x) \leqslant S_{N_i}(x) < S(x) + \varepsilon.$$

最后, 取 $N = \max\{N_1, \cdots, N_p\}$, 则当 $n \geqslant N$ 时, 对每一个 $x \in [a,b]$, 存在某个 i, 使得 $x \in O_i$, 从而有

$$S(x) \leqslant S_n(x) \leqslant S_{N_i}(x) < S(x) + \varepsilon,$$

这就是 $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$, 从而就证明了 $\{S_n(x)\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$. □

注 若将 Dini 定理中的区间 $[a,b]$ 改为其他类型的区间 I, 则只要将结论改为在 I 上内闭一致收敛即可. 这对于级数情况同样适用.

① 狄尼 (Ulisse Dini, 1845–1918), 意大利数学家.

15.3.3 积分极限定理

先给出区间 $[a,b]$ 上的积分与极限或求和的交换定理.

定理 15.7 (1) (积分极限定理) 若函数列 $\{S_n(x)\}$ 于 $[a,b]$ 上连续, 且一致收敛于 $S(x)$, 则成立

$$\int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

(2) (逐项积分定理) 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项都在区间 $[a,b]$ 上连续, 且级数在 $[a,b]$ 上一致收敛, 则成立等式

$$\int_a^b \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\Big)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

证 只给出 (1) 的证明. 这时从定理 15.5 知道 $S(x)\in C[a,b]$. 直接估计

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b S_n(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b S(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leqslant \left|\int_a^b |S_n(x)-S(x)|\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant \max_{x\in[a,b]}|S_n(x)-S(x)|\cdot|b-a| \\ &= \|S_n-S\|\cdot|b-a|.\end{aligned}$$

利用 $\{S_n(x)\}$ 于 $[a,b]$ 上一致收敛于 $S(x)$, 因此上式右边当 $n\to\infty$ 时收敛于 0. □

现在考虑将上述定理进一步推广到任意的区间 I 上, 同时积分限改为 $x_0, x\in I$, 其中 x_0 固定, x 作为自变量, 这样就可以从原来的函数列 (或级数) 通过积分生成新的函数列 (或级数).

推论 (1) 若函数列 $\{S_n(x)\}$ 于 I 上连续, 内闭一致收敛于 $S(x)$, 点 $x_0, x\in I$, 则成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x_0}^x S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x S(t)\,\mathrm{d}t,$$

且函数列 $\left\{\int_{x_0}^x S_n(t)\,\mathrm{d}t\right\}$ 在 I 上内闭一致收敛.

(2) 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的每一项都在区间 I 上连续, 级数在 I 上内闭一致收敛, 点 $x_0, x\in I$, 则成立

$$\int_{x_0}^x \Big(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(t)\Big)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty}\int_{x_0}^x u_n(t)\,\mathrm{d}t,$$

且上式右边的函数项级数在 I 上内闭一致收敛.

证 只给出 (1) 的证明. 在区间 $[x_0,x]$ 上用定理 15.7, 就有 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_{x_0}^x S_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^x S(t)\,\mathrm{d}t$. 将 $\left\{\int_{x_0}^x S_n(t)\,\mathrm{d}t\right\}$ 看成在 I 上有定义的新函数列, 则已经证明它在 I

上点态收敛于 $\displaystyle\int_{x_0}^{x} S(t)\,\mathrm{d}t$.

现在取 $[c,d]\subset I$, 要证明新得到的函数列 $\left\{\displaystyle\int_{x_0}^{x} S_n(t)\,\mathrm{d}t\right\}$ 在 $[c,d]\subset I$ 上一致收敛. 不妨设 $[c,d]$ 足够大, 使得有 $x_0\in[c,d]$, 于是当 $x\in[c,d]$ 时就有

$$\left|\int_{x_0}^{x} S_n(t)\,\mathrm{d}t-\int_{x_0}^{x} S(t)\,\mathrm{d}t\right|\leqslant \max_{t\in[c,d]}|S_n(t)-S(t)|\cdot|d-c|,$$

其中利用了 $[x_0,x]\subset[c,d]$. 从 $\{S_n(x)\}$ 于 $[c,d]$ 上一致收敛, 可见上式右边当 $n\to\infty$ 时收敛于 0. □

例题 15.19 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}\tan\frac{x}{2^n}$ 在 $(-\pi,\pi)$ 上的和函数.

证 从 $n\geqslant 2$ 起, 当 $|x|<\pi$ 时, $|x/2^n|<\pi/4$, 因此级数以 $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 为强级数, 从而在 $(-\pi,\pi)$ 上一致收敛. 记和函数为 $f(x)$, 对 $x\in(-\pi,\pi)$ 用逐项积分定理, 有

$$\begin{aligned}
\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t&=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x\frac{1}{2^n}\tan\frac{t}{2^n}\,\mathrm{d}t=-\sum_{n=1}^{\infty}\ln\cos\frac{x}{2^n}\\
&=-\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\ln\cos\frac{x}{2^k}=-\lim_{n\to\infty}\ln\left(\cos\frac{x}{2}\cos\frac{x}{4}\cdots\cos\frac{x}{2^n}\right)\\
&=-\lim_{n\to\infty}\ln\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}=-\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{2^n\sin\frac{x}{2^n}}\right)\\
&=-\ln\left(\lim_{n\to\infty}\frac{\sin x}{x}\cdot\frac{\frac{x}{2^n}}{\sin\frac{x}{2^n}}\right)=-\ln\frac{\sin x}{x}.
\end{aligned}$$

最后一式当 $x=0$ 时理解为其极限值 0. 然后在 $0\neq|x|<\pi$ 时对 x 求导, 就得到

$$f(x)=\left(-\ln\frac{\sin x}{x}\right)'=\frac{x}{\sin x}\left(\frac{\cos x}{x}-\frac{\sin x}{x^2}\right)=\cot x-\frac{1}{x}.$$

由于 f 在 $(-\pi,\pi)$ 上连续, 因此在上述表达式中取 $x\to 0$ 就得到 $f(0)=0$ (或从原来的级数中令 $x\to 0$ 得到). □

注 上述例题体现了级数求和的新方法, 即用逐项求积定理, 然后再求导.

15.3.4 求导极限定理

这里直接对一般区间 I 来叙述定理.

定理 15.8 (1) (求导极限定理) 设函数列 $\{S_n(x)\}$ 在区间 I 上存在连续的导函数, 至少在某一点 $x_0\in I$ 处收敛, 又求导后的函数列 $\{S_n'(x)\}$ 在 I 上内闭一致收敛, 则极限函数 $S(x)=\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x)$ 在 I 上存在连续的导函数, 且成立

$$S'(x)=\lim_{n\to\infty}S_n'(x).$$

(2) (逐项求导定理) 设函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 中每个 $u_n(x)$ 于区间 I 上存在连续的导函数, 至少在某一点 $x_0\in I$ 处收敛, 又逐项求导后得到的函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 I 上内闭一致收敛, 则和函数 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 I 上存在连续的导函数, 且成立

$$\frac{\mathrm{d}S(x)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}u_n(x)}{\mathrm{d}x}.$$

证 只写出 (1) 的证明.

利用极限函数 $S(x)$ 在点 x_0 已经有定义, 再利用 Newton–Leibniz 公式, 得到

$$S_n(x)=S_n(x_0)+\int_{x_0}^{x}S_n'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{15.6}$$

利用 $\{S_n'(t)\}$ 在 $[x_0,x]$ 上一致收敛的条件, 将其极限函数记为 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n'(t)=T(t)$, 并令 $n\to\infty$, 应用定理 15.7 就从 (15.6) 得到

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=S(x_0)+\int_{x_0}^{x}T(t)\,\mathrm{d}t. \tag{15.7}$$

这样就证明了极限函数 $S(x)$ 在 I 上处处有定义. 由于 $T(t)$ 连续, 因此从 (15.7) 就得到

$$S'(x)=T(x)=\lim_{n\to\infty}S_n'(x). \quad \square$$

注 要注意与前两个定理有不同之处. 定理 15.8 中的主要条件是加在导函数组成的函数列 (或逐项求导后得到的函数项级数) 上, 即要求它内闭一致收敛, 而对于原来的函数列 (或函数项级数) 则只要求在一个点上收敛就够了. 例如, 前面见过多次的函数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}, \tag{15.8}$$

我们已知它处处收敛, 在 $(0,2\pi)$ 上内闭一致收敛. 但逐项求导后的级数是

$$\sum_{n=1}^{\infty}\cos nx,$$

可以证明无论 x 取什么值, 这个级数的通项都不会是无穷小量, 因此处处发散. 这就证明了对 (15.8) 中的无穷级数逐项求导是不可能的. 当然这并不表示 (15.8) 的和函数不可导. 将来会知道 $S'(x)=-\dfrac{1}{2}$ 在 $(0,2\pi)$ 上处处成立, 只是不可能用定理 15.8 来计算 $S'(x)$.

练 习 题

1. (1) 举出在 (a,b) 上的连续函数列 $\{f_n(x)\}$, 它点态收敛于极限函数 $f\in C(a,b)$, 但 $f_n(x)\not\rightrightarrows f(x)$, $x\in(a,b)$.

   (2) 举出在 $\mathbb{R}$ 上处处不连续的函数列 $\{f_n(x)\}$, 使得有 $f_n(x)\rightrightarrows f(x)$, $x\in\mathbb{R}$, 且 $f\in C(\mathbb{R})$.

2. 问: $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^n\sin\dfrac{1}{3^n x}$, $x\in(0,+\infty)$, 是否是连续函数?

   (参见 §15.2 的练习题 1(16).)

3. 求极限: $\lim\limits_{x\to1}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^x}$.

4. 对于函数列 $\{\dfrac{1}{1+x^n}\}$, $x\in[0,+\infty)$,

   (1) 求其极限函数;

   (2) 问: 该函数列在 $[0,+\infty)$ 上是否一致收敛?

5. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数列, 且在 $[a,b]$ 上一致收敛于 $f(x)$, 证明:
$$\int_a^x f_n(t)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x\in[a,b].$$

6. 设 $\{f_n(x)\}$ 是 $[a,b]$ 上的可积函数列, 又有 $f,g\in R[a,b]$, 且有
$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b(f_n(t)-f(t))^2\,\mathrm{d}t=0,$$
   证明: $\displaystyle\int_a^x f_n(t)g(t)\,\mathrm{d}t\rightrightarrows\int_a^x f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, $x\in[a,b]$.

7. 判定下列函数列在指定区间上是否一致收敛:

   (1) $\left\{\dfrac{1}{x+n}\right\}$, $(0,+\infty)$;

   (2) $\left\{\dfrac{nx}{1+n+x}\right\}$, $[0,1]$;

   (3) $\{\tan^n x\}$, (i) $[0,\frac{1}{2}]$, (ii) $[0,\frac{\pi}{4}]$;

   (4) $\{(\sin x)^{\frac{1}{n}}\}$, (i) $[0,\pi]$, (ii) $[\delta,\pi-\delta]$, 其中 $\delta\in(0,\frac{\pi}{2})$;

   (5) $\left\{\dfrac{x^n}{1+x^n}\right\}$, (i) $[0,1-\delta]$, 其中 $0<\delta<1$, (ii) $[1-\delta,1+\delta]$, 其中 $0<\delta<1$, (iii) $[1+\delta,+\infty)$, 其中 $\delta>0$.

8. (1) 证明 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^2}{n^3+x^3}$ 在 $[0,a]$ 上一致收敛, 其中 $a>0$;

(2) 证明: $\lim_{x\to1}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^2}{n^3+x^3}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3+1}$.

9. 将级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 上的和函数记为 $S(x)$. 证明它在 $(0,+\infty)$ 上处处连续, 并求 $\int_{\ln 2}^{\ln 3}S(x)\,\mathrm{d}x$.

10. 证明在 $|r|<1$ 时成立下列等式:

$$1+2\sum_{n=1}^{\infty}r^n\cos nx=\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2},$$

并用它证明 Poisson 积分公式:

$$\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1-r^2}{1-2r\cos x+r^2}\,\mathrm{d}x=2\pi.$$

又问: 能否用其他方法求这个定积分?

11. 证明: Riemann zeta 函数 $\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}$ 在区间 $(1,+\infty)$ 中有任意阶导函数.

12. (1) 记 $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2(n+1)^2+x^2}$, $x\in\mathbb{R}$, (i) 证明 $f\in C(\mathbb{R})$, (ii) 证明广义积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, (iii) 求出上述广义积分的值.

(2) 求 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^2\ln^2(n+1)}$, $x\in\mathbb{R}$, 的导数.

§15.4 幂级数

现在开始介绍两类最重要的函数项级数中的第一类——幂级数. 它可以看成是多项式的直接推广.

称函数项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n \tag{15.9}$$

为以 x_0 为中心的幂级数, 简称幂级数. 注意在 (15.9) 中的求和是从 $n=0$ 开始的. 为方便起见总可以通过平移 $t=x-x_0$, 再将 t 记为 x, 从而使得幂级数的形式为

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{15.10}$$

即以 $x_0=0$ 为中心的幂级数. 以下对幂级数的各种性质的讨论经常可以对 (15.10) 来进行, 然后通过平移转移到一般形式的幂级数上去.

若从某个 n 起系数 a_n 全等于 0, 则幂级数 (15.9) 就是多项式. 若 $a_n=c\ \forall\, n$ 为常数, 则就得到几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n$, 即第二章的例题 2.10. 此外, 例题 2.11 中的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} nx^n$ 也是幂级数.

15.4.1 幂级数的收敛域

在讨论收敛域时只需要点态收敛的概念.

显然, 形式为 (15.9) 的幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 一定在 $x=x_0$ 处收敛, 和为 a_0, 而形式为 (15.10) 的幂级数则一定在 $x=0$ 处收敛.

刻画幂级数收敛域特征的基本结论是下列定理.

定理 15.9 (Abel 第一定理) (1) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x_1 \neq 0$ 处收敛, 则该幂级数在满足 $|x|<|x_1|$ 的点 x 处绝对收敛;

(2) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在点 $x_1 \neq 0$ 处发散, 则该幂级数在满足 $|x|>|x_1|$ 的点 x 处发散.

证 可以看出从 (1) 即推出 (2), 因此只需证明 (1).

从级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ 收敛可见 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n x_1^n = 0$, 从而存在 $M>0$, 使成立 $|a_n x_1^n| \leqslant M\ \forall\, n$. 现在对于取绝对号后的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 的通项可以写出不等式

$$|a_nx^n| = |a_nx_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqslant M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n,$$

于是当 $|x| < |x_1|$ 时就可以用收敛的几何级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} M\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ 作为比较级数而知道结论 (1) 成立. □

注 对 Abel 第一定理的一个错误证明是企图利用不等式 $|a_nx^n| \leqslant |a_nx_1^n|$, 而没有注意到定理的条件只是说幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx_1^n$ 收敛, 但并不知道它是否绝对收敛. 因此不可能简单地用上述不等式来作出证明.

由 Abel 第一定理可以确定幂级数收敛域的特征. 我们也将它写成一个定理.

定理 15.10 (幂级数收敛半径的存在定理) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 在某一点 $x_1 \neq 0$ 处收敛, 又在另一点 x_2 处发散, 则存在一个正数 $r > 0$, 使得该幂级数在所有满足 $|x| < r$ 的点 x 处收敛, 而在所有满足 $|x| > r$ 的点 x 处发散.

证 从关于 x_1, x_2 的条件和 Abel 第一定理可知数集

$$A = \{x > 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \text{ 收敛}\}, \quad B = \{x > 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} a_nx^n \text{ 发散}\},$$

都非空, 且 $\forall x \in A, \forall y \in B$, 成立 $x < y$.

用实数系连续性原理①, 存在 r, 使得 $\forall x \in A, \forall y \in B : x \leqslant r \leqslant y$. 于是 $r > 0$. 我们来证明它满足定理中的要求.

设 x 满足 $|x| < r$. 若幂级数于 x 处发散, 则从 $|x| < \frac{1}{2}(|x| + r) < r$ 和 Abel 第一定理可见幂级数在点 $\frac{1}{2}(|x| + r)$ 处发散, 从而这个点属于数集 B. 但这与 $\forall y \in B : r \leqslant y$ 矛盾. 因此满足 $|x| < r$ 的 x 都属于幂级数的收敛域.

同样设 x 满足 $|x| > r$, 而幂级数于 x 处收敛, 则从 $r < \frac{1}{2}(|x| + r) < |x|$ 和 Abel 第一定理可见幂级数在点 $\frac{1}{2}(|x| + r)$ 处收敛, 从而这个点属于数集 A. 但这与 $\forall x \in A : x \leqslant r$ 矛盾. 因此满足 $|x| > r$ 的 x 都不属于级数的收敛域. □

由此即可得到幂级数的收敛半径的概念.

定义 15.4 (1) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 在 $x \neq 0$ 时处处发散, 则该幂级数的收敛半径为 0;

(2) 若幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_nx^n$ 对所有 x 收敛, 则该幂级数的收敛半径为 $+\infty$;

① 这里用了 §2.1 的实数系的连续性原理. 当然也可以用与它等价的确界存在定理或其他定理来确定正数 r 的存在并完成证明.

(3) 对于其他情况, 称正数 $r>0$ 为幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径, 若级数在满足 $|x|<r$ 的所有 x 处收敛, 在满足 $|x|>r$ 的所有 x 处发散.

由此可知, 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域有三种可能: (1) 该幂级数仅仅在点 $x=0$ 处收敛, 收敛域为单元集 $\{0\}$;

(2) 该幂级数处处收敛, 收敛域就是 $(-\infty,+\infty)$;

(3) 该幂级数有正收敛半径 r, 由于在 $x=\pm r$ 处幂级数收敛或发散的各种可能性都会发生, 因此收敛域有 4 种可能: $(-r,r)$, $(-r,r]$, $[-r,r)$ 和 $[-r,r]$. 可以用一个特殊记号 $\langle -r,r\rangle$ 来表示其中的任何一种. 在端点 $x=\pm r$ 处的幂级数敛散性一般需要直接讨论.

对幂级数的一个好结果是存在计算收敛半径的 Cauchy–Hadamard① 公式. 我们将它写为下面的定理. 由它可以推出 Abel 第一定理的结论.

定理 15.11 (收敛半径的 Cauchy–Hadamard 公式) 对于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 r 有计算公式

$$r=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}, \tag{15.11}$$

且约定: 若其中的分母为 $+\infty$, 则 $r=0$; 若其中的分母为 0, 则 $r=+\infty$.

证 记 $u_n=a_n x^n\ \forall\, n$, 用 §14.2.4 的 Cauchy 根值判别法, 计算

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|u_n|}=\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot|x|.$$

由此可见, 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=+\infty$, 则幂级数只对于 $x=0$ 收敛, 即 $r=0$; 若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=0$, 则幂级数对每个 x 收敛, 即 $r=+\infty$. 因此定理中的约定成立.

对于余下的情况, 即 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}$ 为有限正数, 从 Cauchy 根值判别法可见, 当 $|x|<r$ 时幂级数收敛, 当 $|x|>r$ 时幂级数发散. 因此这个 r 就是定义 15.4 中的收敛半径. □

从 Abel 第一定理或者 Cauchy 根值判别法都可以得到下列重要推论.

推论 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为有限数 $r>0$, 则当 $|x|<r$ 时幂级数绝对收敛, 而当 $|x|>r$ 时幂级数的通项不是无穷小量. (从 Abel 第一定理的证明可推出这时的通项一定无界.)

① 阿达马 (Jacques–Salomon Hadamard, 1865–1963), 法国数学家.

例题 15.20 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{x^n}{n^s}$ 的收敛半径 r 和收敛域.

解 直接计算

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{1}{n^s}}=\frac{1}{(\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n})^s}=1,$$

其倒数仍然为 1, 因此收敛半径 $r=1$. 余下的是端点问题. 这可以将 $x=\pm1$ 代入级数后直接观察是否收敛.

在 $s\leqslant 0$ 时, $x=\pm1$ 时级数发散. 因此收敛域为 $(-1,1)$.

在 $0<s\leqslant 1$ 时, $x=1$ 时级数发散, 而 $x=-1$ 时级数为 Leibniz 型, 因此收敛, 而且为条件收敛. 于是收敛域为 $[-1,1)$.

在 $s>1$ 时, 收敛域为 $[-1,1]$. 在两个端点处级数都是绝对收敛的. □

注 这个例子表明幂级数在端点处发散、条件收敛和绝对收敛的各种可能性都是存在的.

例题 15.21 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n!\Big(\dfrac{x^2}{n}\Big)^n$ 的收敛半径 r 和收敛域.

解 1 记 $u_n=n!\Big(\dfrac{x^2}{n}\Big)^n$, 直接用数项级数的 D'Alembert 比值判别法 (见 §14.2.3), 则有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\lim_{n\to\infty}(n+1)x^2\cdot\frac{n^n}{(n+1)^{n+1}}=\frac{x^2}{\mathrm{e}},$$

由此可见当 $|x|<\sqrt{\mathrm{e}}$ 时级数收敛, 而当 $|x|>\sqrt{\mathrm{e}}$ 时级数发散. 收敛半径 $r=\sqrt{\mathrm{e}}$.

对于端点, 设 $x=\sqrt{\mathrm{e}}$, 则从 Stirling 公式知道 $u_n\sim\sqrt{2\pi n}$, 即通项不趋于 0, 因此级数发散. 对于 $x=-\sqrt{\mathrm{e}}$ 情况也一样. 最后收敛域为 $(-\sqrt{\mathrm{e}},\sqrt{\mathrm{e}})$. □

解 2 用数项级数的 Cauchy 根值判别法 (见 §14.2.4), 这时 $\sqrt[n]{u_n}=x^2\cdot\dfrac{\sqrt[n]{n!}}{n}$, 可见极限为 $\dfrac{x^2}{\mathrm{e}}$. 以下与解 1 同. □

注 上面两个解法完全是用第十四章的工具于一般的级数, 并没有考虑幂级数的特殊性.

解 3 作为幂级数可以用 Cauchy-Hadamard 公式. 首先按照幂级数定义写出系数的通式

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{k!}{k^k}, & n=2k,\\[2mm] 0, & n=2k-1,\end{cases}$$

则可以计算

$$\varlimsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}=\lim_{k\to\infty}\sqrt[2k]{|a_{2k}|}=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{\sqrt[k]{k!}}{k}\right)^{1/2}=\frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}}},$$

可见收敛半径为 $\sqrt{\mathrm{e}}$. 其余与解 1 同. □

注 这个例题表明可以用各种不同方法来计算收敛半径, 而不一定用 Cauchy-Hadamard 公式.

例题 15.22 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^n x^n$ 的收敛半径和收敛域.

此题用上一个例题中的三种方法都可以得到收敛半径 $r=0$ 的结论, 即收敛域是单元集 $\{0\}$. 细节从略.

例题 15.23 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_{\alpha}^{n} x^n$ 的收敛半径和收敛域, 其中 α 不是非负整数, 即 $\alpha \neq 0,1,2,\cdots$, 记号 $\mathrm{C}_{\alpha}^{n} = \dfrac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}$.

解 这里直接用 D'Alembert 判别法最方便: 记级数通项为 u_n, 则有

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{\alpha-n}{n+1}\right| \cdot |x| \to |x|,$$

可见 $r=1$. 关于端点 ± 1 处的敛散性讨论很不容易. 一个比较方便的方法是直接利用例题 14.27 的结论. 即当 $s \neq 0,-1,-2,\cdots$ 时, 存在非零常数 $C \neq 0$, 使得成立

$$s(s+1)\cdots(s+n) \sim Cn^s n! \ (n \to \infty). \tag{15.12}$$

现在考虑 $x=1$ 处的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_{\alpha}^{n}$ 的敛散性. 将其通项改写后并利用 (15.12), 就得到:

$$\mathrm{C}_{\alpha}^{n} = (-1)^n \cdot \frac{(-\alpha)(-\alpha+1)\cdots(-\alpha+n)}{n!(-\alpha+n)} \sim (-1)^n \cdot \frac{C}{n^{\alpha+1}}.$$

这样就得到了级数在 $x=1$ 处的敛散性结论:

(1) 当 $\alpha \leqslant -1$ 时级数通项不趋于 0, 因此级数发散;

(2) 若 $\alpha > 0$, 则级数绝对收敛;

(3) 当 $-1 < \alpha < 0$ 时为交错级数, 通项趋于 0, 且

$$|C_{\alpha}^{n+1}| = |C_{\alpha}^{n}| \cdot \frac{|\alpha-n|}{n+1} < |C_{\alpha}^{n}|,$$

因此是 Leibniz 型级数. 再考虑到 $0 < 1+\alpha < 1$, 可知为条件收敛.

最后考虑 $x=-1$ 处的级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_{\alpha}^{n}(-1)^n$ 的敛散性. 可看出对 $x=1$ 的结论 (1),(2) 现在仍然成立. 但情况 (3) 则不同. 这时级数项当 n 充分大时保号, 且等价于 $\dfrac{C}{n^{\alpha+1}}$, 而 $0 < \alpha+1 < 1$, 因此发散. □

为参考方便起见, 将上述例题的两个端点的敛散性列表如下:

	$\alpha \leqslant -1$	$-1<\alpha<0$	$\alpha>0$
$x=1$	发散	条件收敛	绝对收敛
$x=-1$	发散	发散	绝对收敛
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_\alpha^n x^n$ 的收敛域	$(-1,1)$	$(-1,1]$	$[-1,1]$

注 $\alpha=-1$ 时 $\mathrm{C}_{-1}^n=(-1)^n$, 即熟知的 $1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots$. 收敛域为 $(-1,1)$.

15.4.2 幂级数的分析性质

为讨论幂级数的分析性质, 先要了解幂级数在收敛域内的一致收敛性质.

定理 15.12 (Abel 第二定理) 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 r, 则有:

(1) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 在 $(-r,r)$ 上内闭一致收敛;

(2) 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛域上内闭一致收敛.

证 (1) 只要证明对 $\forall\, \delta \in (0,r)$, 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ 在 $[-r+\delta, r-\delta]$ 上一致收敛.

从 Abel 第一定理 (或 Cauchy–Hadamard 公式的证明) 知道, 当 $x=r-\delta$ 时幂级数绝对收敛, 即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} |a_n(r-\delta)^n|$ 收敛. 从

$$|a_n x^n| \leqslant |a_n(r-\delta)^n|\ \forall\, x \in [-r+\delta, r-\delta],$$

用一致收敛的比较判别法可知结论成立.

(2) 若收敛域就是开区间 $(-r,r)$, 则不需要再讨论.

现设 $x=r$ 时幂级数收敛, 也就是 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 收敛, 我们来证明该幂级数于 $[0,r]$ 上一致收敛. (这就保证了在 $(-r,r]$ 上内闭一致收敛.)

与 (1) 不同处在于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 未必绝对收敛[①](见例题 15.21,15.23 等), 这里需要 §15.2.3 的 Abel 一致收敛判别法.

---

① 在 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 收敛的条件下证明 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 于 $[0,r]$ 上一致收敛时, 最常见的错误就是误以为 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 必然绝对收敛, 然后就用一致收敛的比较判别法.

将幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的通项分拆为 $a_n x^n = a_n r^n \cdot \left(\dfrac{x}{r}\right)^n$, 则已知以 $a_n r^n$ 为通项的级数收敛, 且与 x 无关, 而第二个因子在 $0 \leqslant x \leqslant r$ 时关于 n 单调, 且一致有界, 因此用 Abel 一致收敛判别法就知道结论成立.

同样, 当 $x = -r$ 收敛时, 可以证明幂级数在 $[-r, 0]$ 上一致收敛. 合并两者即得所求. □

在 Abel 第二定理的基础上就可以解决幂级数的分析性质以及有关的计算方法问题. 下面的定理中的结论都是非常有用的.

定理 15.13 设幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 r, 收敛域为 I, 记其和函数为 $S(x)$, 则有以下结论:

(1) $S(x)$ 于 I 上处处连续;

(2) $S(x)$ 于 $(-r, r)$ 上无限次可导, 且可逐项求导:

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1};$$

(3) 对 $\forall\, x \in I$ 可在 $[0, x]$ 上逐项求积:

$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x a_n t^n\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} \cdot x^{n+1}.$$

此外, 在 (2),(3) 中通过逐项求导和逐项求积得到的两个新的幂级数的收敛半径仍然等于 r.

证　(1) 根据 Abel 第二定理 (即定理 15.12) 之 (2), 幂级数在其收敛域上内闭一致收敛, 再利用函数项级数的连续性定理 (即定理 15.5(2)) 的推论 (2) 即得. 注意, 若幂级数于右端点 $x = r$ 处收敛, 则 $S(x)$ 于 $x = r$ 处左连续. 对于左端点 $x = -r$ 也有类似结果.

(2) 这里当然需要函数项级数的逐项求导定理. 为此首先要证明逐项求导后得到的幂级数在 $(-r, r)$ 上内闭一致收敛. 对其系数 $n a_n$ 直接用 Cauchy-Hadamard 公式①, 可见收敛半径仍然是 r, 因此再用 Abel 第二定理 之 (2) 即得.

(3) 直接用逐项积分定理即可, 且知道所得的新的幂级数至少在 I 上收敛, 即其收敛半径不会小于 r. 当然还是直接用 Cauchy-Hadamard 公式可以知道逐项积分得到的幂级数的收敛半径恰好等于 r. □

---

① 这里和下面需要关于上极限的一个结论: 设 $\{x_n\}$ 为非负收敛数列, 则成立

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,(x_n y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \overline{\lim_{n\to\infty}}\, y_n.$$

当然对于这里的 $x_n = \sqrt[n]{n}$ 和 $\sqrt[n]{\dfrac{1}{n+1}}$ 直接证明也不困难.

注 以上列举的分析性质都是幂级数特有的, 对于其他函数项级数来说未必成立. 例如函数列 $\{x^n\}$ 的收敛域为 $(-1,1]$, 但并不在 $(-1,1]$ 上内闭一致收敛, 而只能在 $(-1,1)$ 上内闭一致收敛. 实际上, 这个函数列等价于函数项级数

$$1+\sum_{n=1}^{\infty}(x^n-x^{n-1}),$$

但它不是幂级数.

对于幂级数来说逐项求积和逐项求导成为非常有力的计算工具, 下面举一些例子.

例题 15.24 求幂级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^n}{n}$ 的和函数 $S(x)$.

解 先用 Cauchy–Hadamard 公式可计算出收敛半径 $r=1$, 然后直接讨论端点处的敛散性, 确定收敛域为 $(-1,1]$. 这就是和函数 $S(x)$ 的定义域.

在 $(-1,1)$ 中对幂级数逐项求导就有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{n-1}=\frac{1}{1+x},$$

又有 $S(0)=0$, 因此在 $(-1,1)$ 上得到

$$S(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t}=\ln(1+x).$$

由于 $S(x)$ 于 $(-1,1]$ 上有定义, 且于 $x=1$ 处左连续, 因此得到

$$S(1)=\lim_{x\to1^-}\ln(1+x)=\ln 2.\quad\square$$

注 这里要注意, 定理 15.13 告诉我们, 对于一个幂级数在其收敛域的每一个内点处可以逐项求导, 而且得到的幂级数仍然有相同的收敛半径. 在这个例子中 $S(x)=\ln(1+x)$ 的幂级数, 即原来给定的幂级数, 在 $(-1,1]$ 上收敛, 而其导函数 $S'(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 的幂级数则只在 $(-1,1)$ 上收敛. 因此端点处的收敛情况在求导后可能发生变化.

例题 15.25 求 $S(x)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}nx^{2n}$.

解 先求出收敛半径为 $r=1$, 又可看出级数于 $x=\pm1$ 处发散, 因此收敛域, 也就是 $S(x)$ 的定义域, 为 $(-1,1)$.

观察到 $(x^{2n})'=2nx^{2n-1}$, 就有

$$\begin{aligned}S(x)&=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}2nx^{2n-1}=\frac{x}{2}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^{2n}\right)'=\frac{x}{2}\left(\frac{1}{1-x^2}\right)'\\&=\frac{x}{2}\frac{2x}{(1-x^2)^2}=\frac{x^2}{(1-x^2)^2}.\quad\square\end{aligned}$$

注 或者令 $x^2=y$, 记和函数为 $y\sum\limits_{n=1}^{\infty}ny^{n-1}$, 然后再计算也很方便.

这里介绍数项级数求和的 Abel 方法. 即对于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$, 在收敛的前提下, 引入幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nx^n$. 则其收敛半径 $r\geqslant 1$, 且当 $r=1$ 时, 和函数 $S(x)$ 在点 $x=1$ 处一定左连续. 因此只要能够求出 $(-1,1)$ 上的 $S(x)$, 就可以得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{x\to 1^-}S(x).$$

例题 15.26 求下列数项级数之和

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}+\cdots.$$

解 用 Abel 方法, 考虑求下列幂级数之和:

$$S(x)=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots.$$

当然我们的目的是求 $S(1)$. 所以这里又是一种"嵌入法".

确定该幂级数的收敛域为 $[-1,1]$. 在 $(-1,1)$ 上逐项求导得到

$$S'(x)=1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^{n-1}x^{2n-2}+\cdots=\frac{1}{1+x^2}.$$

再利用 $S(0)=0$, 则在 $-1<x<1$ 上有

$$S(x)=\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}=\arctan t\Big|_0^x=\arctan x.$$

由于 $S(x)$ 于 $x=1$ 左连续, 因此最后就有

$$S(1)=\lim_{x\to 1^-}S(x)=\lim_{x\to 1^-}\arctan x=\arctan 1=\frac{\pi}{4}.\quad\square$$

例题 15.27 求 $S(x)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{x^n}{n!}$.

解 记通项为 $u_n=\dfrac{x^n}{n!}$, 则从 $\left|\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\dfrac{x}{n+1}\right|$, 可见该级数处处收敛, 即 $r=+\infty$. (当然这里也可以用 Cauchy–Hadamard 公式.) 于是和函数 $S(x)$ 处处有定义. 逐项求导后就有

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}=S(x).$$

这是关于未知函数 $S(x)$ 的一阶常微分方程. 一种求解方法是对方程 $S'(x)-S(x)=0$ 乘以 e^{-x}, 这样得到

$$\mathrm{e}^{-x}(S'(x)-S(x))=(\mathrm{e}^{-x}S(x))'=0,$$

这就是将左边凑成为导数. 于是可见 $e^x S(x) \equiv C$, 其中 C 为某个常数. 这样就得到 $S(x) = Ce^{-x}$, 称为微分方程 $S'(x) - S(x) = 0$ 的通解. 利用 $S(0) = 1$, 可确定出 $C = 1$, 因此最后得到 $S(x) = e^x$. □

注 令 $x = 1$, 则就得到

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

见定理 2.19, 也可以在例题 7.9 中令 $n \to \infty$ 得到.

例题 15.28 回顾 §14.4.3 中关于无穷级数相乘得到的乘积级数, 现在可以证明, 若三个数项级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ 都收敛, 且对每一个非负整数 n 成立

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0,$$

则成立等式

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n.$$

证 这时相应的三个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 和 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 的收敛半径至少不小于 1, 且在 $[0, 1)$ 上均为绝对收敛.

根据级数相乘的 Cauchy 定理 (即定理 14.9), 或者 Mertens 定理 (即定理 14.10), 在 $[0, 1)$ 上成立等式:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n.$$

这里用到了 $\{c_n\}$ 与 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 之间的关系, 它保证了上式右边恰好是左边两个级数的 Cauchy 乘积级数.

由于三个级数的和函数在 $x = 1$ 处都左连续, 在上述等式两边令 $x \to 1^-$ 即得所求. □

练 习 题

1. 能否对于 $\mathbb{R}$ 的任意一个子集 S, 作出一个函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 使得该级数的收敛域恰好等于数集 S?

2. 设幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-1)^n$$

在 $x = -2$ 处收敛, 问: 该级数在 $x = \sqrt{3} + \sqrt{5}$ 处是否收敛?

3. (Abel 第三定理) 设 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $r > 0$, 记其和函数为 $S(x)$, 证明: 对于端点 $x = r$ 成立以下结论 (对于端点 $x = -r$ 有类似的结论):

   (1) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n r^n$ 收敛, 则 $S(x)$ 在点 $x = r$ 左连续;

   (这已为定理 15.13(1) 所包含.)

   (2) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n a_n r^{n-1}$ 收敛, 则其和就是 $S(x)$ 在点 r 的左侧导数 $S'_-(r)$;

   (这表明定理 15.13(2) 的结论在这时对于 $x = r$ 也成立.)

   (3) 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n+1} r^{n+1}$ 收敛, 则其和就是 $\displaystyle\int_0^r S(t)\,\mathrm{d}t$.

   (这表明定理 15.13(3) 的结论在这时对于 $x = r$ 也成立.)

4. 证明: $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(1-x)}{x}\,\mathrm{d}x = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$.

5. 设 $b_n = o(a_n)$, 证明: 幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$ 与 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 有相同的收敛半径.

6. (1)若 $\exists\, N, \forall\, n \geqslant N : |a_n| \leqslant |b_n|$, 证明: $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径不小于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ 的收敛半径.

   (2) 设已知 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 r, 求以下幂级数的收敛半径:

   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n^m x^n, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{mn},$$

   其中 m 为正整数.

7. 求下列幂级数的收敛半径:

   (1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n!}{n^n} (x-1)^n$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{\sin n^2}{n^n} x^n$;

   (3) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^{n^2} x^n \ (q > 0)$; (4) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n x^{n^2} \ (q > 0)$;

   (5) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n + (-1)^n}{n^2} (x+1)^n$; (6) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{2^n \sin \frac{n\pi}{4}}{n} x^n$;

   (7) $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \arcsin(\mathrm{e}^{-n}) x^n$; (8) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^n}{n!\mathrm{e}^n} (x-2)^n$.

8. 求下列幂级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}(\frac{x+1}{2})^n$; (2) $\sum_{n=0}^{\infty}\sin\frac{n}{3^n}(x-1)^n$;

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}\arctan(\frac{1}{2^n})x^n$; (4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n+3^n}x^n$.

9. 求下列幂级数的和函数:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}nx^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+1)}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}x^{2n}}{n(2n-1)}$;

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n})x^n$.

10. 设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 为非负项发散级数, 又已知 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_0+a_1+\cdots+a_n}=0$, 证明: $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径为 1.

11. 求下列广义幂级数的收敛域:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^n$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n^2}\mathrm{e}^{-nx}$.

12. 记 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n}}{(2n)!!}$, 证明: $f''(x)-xf'(x)-f(x)=0$.

13. 已知 k 阶 Bessel 函数为

$$J_k(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(n+k)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+k},$$

证明: $x^2J_k''(x)+xJ_k'(x)+(x^2-k^2)J_k(x)=0$.

§15.5 函数的幂级数展开

15.5.1 问题的提出

由于幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n$ 的通项为单项式, 且其次数就是该项在级数中的位置, 级数的部分和函数列 $S_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} a_k(x-x_0)^k$ 就是 n 次多项式, 对于计算特别方便. 因此如何将函数展开为幂级数就成为一个重要问题.

这里要指出, 将初等函数展开为幂级数也是一个重要问题. 回顾 §3.2.5 中的基本初等函数, 除了包括常值函数在内的多项式函数之外, 它们的计算都是有困难的. 例如 a^x, $\ln x$, $\sin x$, $\arcsin x$ 等等都只不过是函数的记号. 记号本身不能告诉我们如何去计算它们①. 过去为这些函数准备了许多数学用表, 就是因为不容易计算. 今天我们可以在计算器和计算机上非常简单地计算它们, 其背后与无穷级数有密切的联系.

首先观察, 什么样的函数才可能展开为幂级数, 或者说, 什么样的函数才可能是幂级数的和函数. 注意当前的问题是将函数展开为无穷级数, 这与第七章的 Taylor 展开式是有限项的情况不一样. 它们之间的联系在下面就会看到.

首先, 函数 f 在 $x_0=0$ 附近能够展开为幂级数的意思是: 在点 0 的某一个邻域上成立下列等式:

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{15.13}$$

当然等式 (15.13) 成立的范围应当在右边的幂级数的收敛域内. 由于幂级数的和函数在 $(-r,r)$ 上无限次可导, 从而可知函数 f 在 0 点附近也必须无限次可导. 这当然是很高的要求. 于是, 如 $f(x)=|x|$ 那样的函数, 在 $x=0$ 附近不可能展开为幂级数.

从逐项求导定理, 连用 k 次逐项求导后得到下列等式:

$$f^{(k)}(x)=\sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\cdots(n-k+1)a_n x^{n-k}.$$

令 $x=0$ 代入, 就得到 $f^{(k)}(0)=k!a_k$. 因此就已经将幂级数的系数算出来了:

$$a_k=\frac{f^{(k)}(0)}{k!}\ \forall\, k=0,1,\cdots.$$

前面的 $a_0=f(0)$ 只是它的特例而已.

① 回顾 §13.3.3 的最后部分关于如何对一般实数 $a>0$ 和 b 定义指数 a^b, 就可以理解它们的计算是不简单的.

于是我们在不知道是否可以将 $f(x)$ 在 $x=0$ 附近展开为幂级数时, 已经得到两个结论:

(1) 若能展开, 则 f 必须至少在 $x=0$ 的一个邻域内无限次可微;

(2) 若能展开, 则这个幂级数一定惟一, 而且只能是

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n.$$

称右边为 $f(x)$ 在点 $x=0$ 处的 Taylor 级数, 类似地可以写出函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的 Taylor 级数如下:

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots.$$

在 $x_0=0$ 时也将上述级数称为 Maclaurin 级数.

反之, 只要 f 在点 x_0 无限次可微, 就可以写出它的 Taylor 级数, 接下来的两个自然的问题就是:

(1) 它是否有正收敛半径?

(2) 若它有收敛半径 $r>0$, 则是否在其收敛域上恰好以 $f(x)$ 为和函数?

可惜对于这两个重要问题的回答都是“不一定”.

对问题 (1) 的答案是①: 对于每一个幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$, 一定存在于点 x_0 处无限次可微的函数 $f(x)$, 使得这个幂级数恰好是 f 在点 x_0 的 Taylor 级数. 于是, 每一个收敛半径为 0 的幂级数, 都一定是某个函数 f 的 Taylor 级数.

对问题 (2), 只要回顾第六章的例题 6.19 (以及图 6.9), 其中的函数为

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

在该例题中已经证明 f 于 $x=0$ 处的所有阶导数等于 0. 这样一来, 这个函数在点 $x=0$ 的 Taylor 级数就是每一项都等于 0 的幂级数, 它当然处处收敛, 即 $r=+\infty$. 但是除了点 $x=0$ 之外, f 处处大于 0, 因此 $f(x)$ 与它的 Taylor 级数都不相等.

于是对于函数的幂级数展开问题需要作专门的研究. 这里的方法就是第七章中关于 Taylor 展开式的余项. 如 §7.2.2 与 §7.2.4 中那样定义余项为

$$r_n(x)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k,$$

于是

① 这个结果可以在多种书刊中找到, 就我们目前所见到来看, 最早给出这个答案的是范惠民的论文, “函数的幂级数展开式中的一个问题”, 《数学通报》, 1964 年 第 10 期, 38–40 (可参见 [25, 命题 14.4.2]).

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$$

是否成立的问题就简单地归结为是否有 $\lim\limits_{n\to\infty} r_n(x) = 0$? 使此极限为 0 的 x 的范围, 就是函数 f 能够展开为幂级数的范围.

这里还可以看出, 若 f 在点 x 能够展开为幂级数, 则上述余项概念与第十四章的 §14.1.1 中引进的无穷级数的余项概念是一致的.

小结 用第七章中关于 Taylor 展开式的余项可以同时解决 Taylor 级数收敛且其和函数等于 $f(x)$ 的问题.

15.5.2 Taylor 展开式的积分型余项

在第七章的 §7.2 已经学过两种余项, 即 Peano 型余项和 Lagrange 型余项, 其中前者不可能用于研究这里的问题, 而后者则含有未知的中值, 在某些估计中能力不够, 因此本小节要介绍更有力的积分型余项. 在这个余项中不出现“中值” ξ.

定理 15.14 设 f 在点 0 的某个邻域 $O(0)$ 上有 $n+1$ 阶连续导函数, 则有关于 Taylor 展开式的余项 $r_n(x)$ 的积分表达式如下:

$$r_n(x) = f(x) - \sum_{i=0}^{n} \frac{f^{(i)}(0)}{i!}\, x^i = \frac{1}{n!}\int_0^x f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\, \mathrm{d}t. \tag{15.14}$$

证 用数学归纳法给出证明.

对于 $n=0$, 则 $r_0(x) = f(x) - f(0) = \displaystyle\int_0^x f'(t)\,\mathrm{d}t$, 就是 Newton-Leibniz 公式.

现设 $n=k$ 时 (15.14) 已经成立, 讨论 $n=k+1$. 这时的条件是 f 在点 0 的某个邻域内有 $k+2$ 阶连续导函数. 用分部积分法即有

$$\begin{aligned}
r_{k+1}(x) &= r_k(x) - \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}\, x^{k+1} \\
&= \frac{1}{k!}\int_0^x f^{(k+1)}(t)(x-t)^k\,\mathrm{d}t - \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}\, x^{k+1} \\
&= -\frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+1)}(t)\Big|_{t=0}^{t=x} + \int_0^x \frac{(x-t)^{k+1}}{(k+1)!} f^{(k+2)}(t)\,\mathrm{d}t - \frac{f^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}\, x^{k+1} \\
&= \frac{1}{(k+1)!}\int_0^x f^{(k+2)}(t)(x-t)^{k+1}\,\mathrm{d}t. \quad \square
\end{aligned}$$

注 由于公式 (15.14) 右边的被积函数中因子 $(x-t)^n$ 在 $[0,x]$ 上保号, 因此可以用积分第一中值定理 (见定理 10.8), 存在 $\xi \in [0,x]$, 使得

$$\begin{aligned}
r_n(x) &= \frac{1}{n!} f^{(n+1)}(\xi)\int_0^x (x-t)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi)(-(x-t)^{n+1})\Big|_{t=0}^{t=x} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}\, x^{n+1}.
\end{aligned}$$

这样就从积分型余项导出了第七章中的 Lagrange 型余项 (见 §7.2.4).

15.5.3 基本初等函数的 Taylor 级数展开式

本小节给出基本初等函数在 $x=0$ 的 Taylor 级数展开式, 也就是 Maclaurin 级数展开式.

基本展开式 1 指数函数 e^x 在 $x=0$ 的 Maclaurin 级数展开式:

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.}$$

这只要用第七章例题 7.8 的结果即可, 这就是带 Lagrange 型余项的 Maclaurin 展开式

$$r_n(x) = \mathrm{e}^x - \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}\right) = \frac{\mathrm{e}^{\theta x} x^{n+1}}{(n+1)!},$$

其中 $0<\theta<1$. 固定 x, 从 $|r_n(x)| \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{|x|}|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ 可见当 $n\to\infty$ 时极限为 0, 即得到上述展开式.

基本展开式 2 正弦函数 $\sin x$ 在 $x=0$ 的 Maclaurin 级数展开式:

$$\boxed{\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.}$$

这里需要正弦函数 $f(x)=\sin x$ 在 $x=0$ 的所有高阶导数值. 为了写出余项, 则还需要高阶导函数的表达式. 由于 $(\sin x)^{(n)}$ 是在 $\pm\sin x, \pm\cos x$ 之间作周期 4 循环, 因此其绝对值总不超过 1. 这里可以用 Lagrange 型余项, 也可以用积分型余项. 用后者可估计如下:

$$|r_n(x)| \leqslant \frac{1}{n!}\left|\int_0^x |x-t|^n \,\mathrm{d}t\right| \leqslant \frac{|x|^{n+1}}{n!} \to 0 \ (n\to\infty),$$

即处处收敛①.

基本展开式 3 余弦函数 $\cos x$ 在 $x=0$ 的 Maclaurin 级数展开式:

$$\boxed{\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \cdots, -\infty < x < +\infty.}$$

证明与 $\sin x$ 的情况类似, 它的 Lagrange 型余项见例题 7.8.

基本展开式 4 二项式函数 $(1+x)^\alpha$ 在 $x=0$ 的 Maclaurin 级数展开式 (其中设 α 不是非负整数②):

---

① 这里只是函数序列 $\{r_n(x)\}$ 的点态收敛. 又由于除了 n 还出现 x, 因此最好还是在后面加上 $(n\to\infty)$ 以免引起误解.

② α 为非负整数时展开式仍然成立, 只不过右边是多项式, 即中学已经熟知的二项式展开定理.

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+\cdots.}$$

展开式在右边的幂级数的收敛域上成立.

求 $(1+x)^\alpha$ 的高阶导数是容易的, 这样就可以写出右边的 Maclaurin 级数. 对它的收敛域也已经在例题 15.23 中做过讨论. 但如前面所说, 我们不能根据级数的收敛域来判断函数的 Taylor 级数展开式在什么范围上成立, 为此还是要研究余项. 以下先证明当 $|x|<1$ 时, 余项当 $n\to\infty$ 收敛于 0.

若写出 Lagrange 型余项

$$r_n(x)=\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)}{(n+1)!}(1+\theta x)^{\alpha-n-1}x^{n+1},$$

其中 $0<\theta<1$, 则当 $x\in(-1,0)$ 时, 由于 n 充分大时 $\alpha-n-1<0$, 因子 $(1+\theta x)^{\alpha-n-1}$ 无法估计. 因此需要用积分型余项.

写出积分型余项

$$r_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^x \alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)(1+t)^{\alpha-n-1}(x-t)^n\,\mathrm{d}t,$$

然后作如下估计:

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}\left|\int_0^x(1+t)^{\alpha-1}\left|\frac{x-t}{1+t}\right|^n\mathrm{d}t\right|. \tag{15.15}$$

观察上式右边积分号下的第二个因子 $\left|\dfrac{x-t}{1+t}\right|^n$, 它是这里的主要困难. 在 $x\in(-1,1)$ 且 $t\in[0,x]$ 时, $\dfrac{x-t}{1+t}$ 保号. 又从

$$\left(\frac{x-t}{1+t}\right)'=\frac{-(1+t)-(x-t)}{(1+t)^2}=\frac{-1-x}{(1+t)^2}<0$$

可知它是 $t\in[0,x]$ 上的单调函数, 因此就可以对于一切 $t\in[0,x]$ 得到如下估计:

$$\left|\frac{x-t}{1+t}\right|\leqslant\max\left\{\left|\frac{x-0}{1+0}\right|,\left|\frac{x-x}{1+x}\right|\right\}=|x|.$$

由于 (15.15) 右边积分号下的第一个因子 $(1+t)^{\alpha-1}$ 在 $x\in(-1,1)$ 和 $t\in[0,x]$ 时有界, 与 n 无关 (且可以积出), 因此就得到对余项的进一步估计式

$$|r_n(x)|\leqslant\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}\cdot|x|^n\cdot\left|\frac{(1+x)^\alpha-1}{\alpha}\right|.$$

为简明起见将上式右边与 n 有关的因子记为

$$c_n=\frac{|\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n)|}{n!}\cdot|x|^n.$$

写出

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{|\alpha-n-1|\cdot|x|}{n+1}\to|x|<1\ (n\to\infty),$$

这样就得到 $c_n\to 0$ (例如见例题 2.26). 于是就证明了当 $|x|<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}r_n(x)=0$, 即 $(1+x)^\alpha$ 在 $(-1,1)$ 上的 Maclaurin 级数展开式成立.

为了讨论端点 $x=\pm1$ 处展开式是否成立, 只要将该级数的收敛域与 $(1+x)^\alpha$ 的定义域作比较即可. 为清楚起见列表如下:

	$\alpha \leqslant -1$	$-1 < \alpha < 0$	$\alpha > 0$
$\sum\limits_{n=0}^{\infty} \mathrm{C}_\alpha^n x^n$ 的收敛域	$(-1,1)$	$(-1,1]$	$[-1,1]$
$(1+x)^\alpha$ 的定义域	$(-1,+\infty)$	$(-1,+\infty)$	$(-\infty,+\infty)$

由于函数 $(1+x)^\alpha$ 在自己的定义域上连续, 而幂级数的和函数在自己的收敛域上也连续, 因此只要级数在端点处收敛, 对应的展开式就成立.

注 对于 $\alpha \leqslant -1$, 二项式函数 $(1+x)^\alpha$ 在 $x=1$ 处连续, 然而幂级数在 $x=1$ 处发散, 因此展开式不成立. 例如 $f(x)=\dfrac{1}{1+x}$ 于 $x=1$ 就是如此.

将 α 取不同的值就可以得到许多结果. 例如以下都是常见的展开式:

$$\alpha=-1,\ \frac{1}{1+x}=1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n+\cdots,-1<x<1;$$

$$\alpha=-2,\ \frac{1}{(1+x)^2}=1-2x+3x^2+\cdots+(-1)^n(n+1)x^n+\cdots,-1<x<1;$$

$$\alpha=-\frac{1}{2},\ \frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2-\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(-1)^n x^n+\cdots,-1<x\leqslant 1;$$

$$\alpha=\frac{1}{2},\ \sqrt{1+x}=1+\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2+\cdots+\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}(-1)^{n-1}x^n+\cdots,-1\leqslant x\leqslant 1.$$

基本展开式 5 对数函数 $\ln(1+x)$ 在 $x=0$ 的 Maclaurin 级数展开式:

$$\boxed{\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+\cdots,-1<x\leqslant 1.}$$

这可以从上面的 $\alpha=-1$ 的二项式展开, 即几何级数, 逐项积分得到. 见前面的例题 15.24.

这里用余项再给出一个证明. 从高阶导数表达式

$$(\ln(1+x))^{(n)}=\frac{(n-1)!(-1)^{n+1}}{(1+x)^n},$$

就可以写出 Maclaurin 级数. 但若要用 Lagrange 型余项, 则又会在 $-1<x<0$ 时遇到困难, 因此需要用积分型余项. 讨论方法与二项式函数的展开式类似, 但要简单一点. 具体的估计如下:

$$\begin{aligned}|r_n(x)| &= \left|\frac{1}{n!}\int_0^x \frac{n!}{(1+t)^{n+1}}(x-t)^n\,\mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^x \frac{1}{1+t}\cdot\left|\frac{x-t}{1+t}\right|^n \mathrm{d}t\right| \\ &\leqslant |x|^n\cdot|\ln(1+x)|.\end{aligned}$$

于是在 $|x|<1$ 时展开式成立. 对于 $x=1$, 利用幂级数在 $x=1$ 收敛, 其和函数于 $x=1$ 左连续, 而函数 $\ln(1+x)$ 也如此, 可见展开式也成立.

由基本展开式 5 又可得出以下常用展开式:

$$-\ln(1-x)=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}+\cdots,-1\leqslant x<1;$$

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}=x+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots,-1<x<1.$$

基本展开式 6 反正切函数 $\arctan x$ 于 $x=0$ 的 Maclaurin 级数展开式如下:

$$\boxed{\arctan x=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1}+\cdots,-1\leqslant x\leqslant 1.}$$

这已经在例题 15.26 中解决, 这就是利用 $\alpha=-1$ 时的二项式函数的展开式, 并将其中 x 换为 x^2, 然后逐项积分即可. 若要从余项来证明则需要有 $\arctan x$ 的高阶导函数表达式, 反而不方便.

基本展开式 7 反正弦函数 $\arcsin x$ 在 $x=0$ 的 Maclaurin 级数展开式如下:

$$\boxed{\arcsin x=x+\frac{1}{6}x^3+\frac{3}{40}x^5+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}+\cdots,-1\leqslant x\leqslant 1.}$$

这可以从 $\alpha=-\dfrac{1}{2}$ 的二项式级数出发, 并于其中将 x 换为 $-x^2$, 则就得到

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=1+\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{8}x^4+\cdots+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}+\cdots,\ -1<x<1.$$

注意在端点 $x=\pm 1$ 处, 级数保号, 通项 $\sim\dfrac{1}{\sqrt{\pi n}}$, 因此发散.

在 $|x|<1$ 时, 从 $\arcsin x=\displaystyle\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}}$ 逐项积分就得到所要的展开式.

最后, 这时的 Taylor 级数于 $x=\pm 1$ 时其通项为 $O\left(\dfrac{1}{n\sqrt{n}}\right)$, 因此绝对收敛, 而函数 $\arcsin x$ 于 $x=\pm 1$ 也连续, 因此展开式在 ± 1 处也成立. 这样在逐项积分之后, 级数的收敛域和展开式成立的范围同时为 $-1\leqslant x\leqslant 1$.

15.5.4 例题

例题 15.29 将下列函数展开为 Maclaurin 级数, 并确定在什么范围上成立展开式:

$$(1)\ \sin^2 x;\quad (2)\ \frac{6}{(x-1)(x+2)};\quad (3)\ \ln(1-x-x^2+x^3).$$

解 以下只指出如何做, 未写出详细答案.

(1) 从 $\sin^2 x=\dfrac{1}{2}(1-\cos 2x)$ 即可写出.

(2) 从 $\dfrac{6}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{2}{x-1}+\dfrac{-2}{x+2}=\dfrac{-2}{1-x}-\dfrac{1}{1+\dfrac{x}{2}}$ 即可写出.

(3) 从 $\ln[(1-x)^2(1+x)]=2\ln(1-x)+\ln(1+x)$ 即可写出.

例题 15.30 求 $y=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$ 的 Maclaurin 展开式.

解 求导得到 $y' = \dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}} = (1+x^2)^{-\frac{1}{2}}$, 用二项式函数展开式得到

$$y' = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{3}{8}x^4 + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} + \cdots.$$

利用 $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ 的展开式于 $t=1$ 成立, 可知上述展开式于 $x=\pm 1$ 时也成立. 于是逐项积分后就有

$$y = x - \frac{x^3}{6} + \frac{3}{40}x^5 + \cdots + (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+1)(2n)!!}x^{2n+1} + \cdots,$$

且于 $-1 \leqslant x \leqslant 1$ 时成立. $\square$

例题 15.31 将函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 展开为满足以下要求的无穷级数: (1) 按 $x-1$ 的幂展开, (2) 按 $\dfrac{x-1}{x+1}$ 的幂展开.

解 (1) 令 $t = x-1$, 则就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} = \frac{1}{1+t} &= 1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^n t^n + \cdots \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - \cdots + (-1)^n(x-1)^n + \cdots,\end{aligned}$$

且在 $|x-1| < 1$ 上成立, 也就是 $0 < x < 2$.

(2) 令 $t = \dfrac{x-1}{x+1}$, 则就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{x} &= \frac{1-t}{1+t} = \frac{2}{1+t} - 1 \\ &= 2(1 - t + t^2 - \cdots + (-1)^n t^n + \cdots) - 1 \\ &= 1 - 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right) + 2\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^2 - \cdots + 2(-1)^n\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^n + \cdots,\end{aligned}$$

且在 $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| < 1$ 时成立展开式. 最后的条件与 $x > 0$ 等价. $\square$

例题 15.32 求幂级数 $x + \dfrac{x^2}{3} + \dfrac{x^3}{5} + \cdots + \dfrac{x^n}{2n-1} + \cdots$ 的和函数.

解 先确定收敛域为 $[-1, 1)$, 记和函数为 $S(x)$.

可以看出若用 $x = y^2$ 代入就有可能用逐项求导方法. 这样得到

$$\begin{aligned}S(x) = S(y^2) &= y\left(y + \frac{y^3}{3} + \cdots + \frac{y^{2n-1}}{2n-1} + \cdots\right) \\ &= \frac{1}{2}y\ln\frac{1+y}{1-y},\ 0 \leqslant y < 1,\end{aligned}$$

这里利用 $\ln(1\pm y)$ 在 $y=0$ 的 Maclaurin 级数展开式并相减除 2. 最后代入 $y=\sqrt{x}$, 就得到 $0 \leqslant x < 1$ 时的结果为 $S(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{x}\ln\dfrac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}}$.

由于上面的计算对 $x < 0$ 不适用, 因此对于 $x < 0$ 需要另行计算.

令 $x = -t^2$, 就有

$$S(x)=S(-t^2)=-t(t-\frac{t^3}{3}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}t^{2n-1}}{2n-1}+\cdots)$$
$$=-t\arctan t,\ 0\leqslant t\leqslant 1,$$

这样就有 $-1\leqslant x\leqslant 0$ 时的结果为 $S(x)=-\sqrt{-x}\arctan\sqrt{-x}$. □

例题 15.33 求出下列非初等函数

$$F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t,$$

在 $x=0$ 的 Maclaurin 展开式.

解 直接计算函数 F 在点 $x=0$ 的所有高阶导数是不容易的, 而在讨论展开式成立的范围时还会遇到更大的困难, 因此用间接法来做.

写出在 $(-\infty,+\infty)$ 上正弦函数的 Maclaurin 级数展开式

$$\sin t=t-\frac{t^3}{6}+\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!!}+\cdots,$$

在 $t\neq 0$ 时除以 t, 可见成立有

$$\frac{\sin t}{t}=1-\frac{t^2}{6}+\cdots+(-1)^n\frac{t^{2n}}{(2n+1)!!}+\cdots, \tag{15.16}$$

$t=0$ 时将左边的函数连续延拓为 1, 则以上等式就在 $(-\infty,+\infty)$ 成立. 在 $[0,x]$ 上逐项积分得到

$$F(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,\mathrm{d}t=x-\frac{x^3}{18}+\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!!(2n+1)}+\cdots,$$

这就是所求的 Maclaurin 级数展开式, 且于 $(-\infty,+\infty)$ 上成立. □

注 在 (15.16) 中将左边在 $t=0$ 连续延拓后的函数记为 $f(t)$, 则可以从该展开式求出 f 在点 $t=0$ 的所有高阶导数值:

$$f^{(n)}(0)=\begin{cases}0, & n=2k-1,\\ \dfrac{(-1)^k(2k)!!}{2k+1}, & n=2k.\end{cases}$$

这实际上成为计算高阶导数的一种方法. 又从 $F'(x)=f(x)$ 可以求出 F 在 $x=0$ 的所有高阶导数值 (参见例题 7.7 中的相同方法).

对 Taylor 级数的小结

(1) Taylor 级数当然是幂级数. 反之则已经证明, 任何一个幂级数一定是某个函数的 Taylor 级数.

(2) 对于一个给定函数和给定点 x_0, 是否可以将该函数在点 x_0 展开为幂级数, 这个问题与第七章的 Taylor 展开式有密切联系, 可以说非常相似, 而且这里的级数展开式是否成立问题的解决还用到了第七章的余项概念. 在 §15.5.2 介绍了积分型余项, 从概念上与第七章的余项完全相同, 只是使用了积分工具.

(3) 除了联系之外, 当然要搞清楚两种 Taylor 展开式的不同之处, 以免混淆. 简要地说有以下几点不同: 第七章的展开式是有限项, 这里是无穷级数; 在那里对函数的要求只是有限次可导, 这里必须无穷次可导; 在那里的 (带 Lagrange 型余项的) 展开式在函数满足条件的范围内都成立, 这里则要根据余项是否趋于 0 才能确定.

可以记住一个简单的例子. 这就是在 $(-\infty,+\infty)$ 上无限次可导的函数 $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, 它在 $x=0$ 的 Taylor 级数 $1-x^2+x^4-\cdots+(-1)^n x^{2n}+\cdots$ 只在收敛域 $-1<x<1$ 的范围内与 $f(x)$ 相等.

(4) 计算函数的 Taylor 级数展开式的方法与第七章类似, 除了少数情况用直接法之外, 大多数问题中我们都是用间接法. 由于幂级数可以逐项求导和逐项求积, 间接法中可以使用的工具比第七章多得多了.

(5) 幂级数不仅解决了初等函数的展开问题, 而且成为研究非初等函数的有力工具.

练 习 题

1. 求下列函数的幂级数展开式 (未加说明时均取中心点 $x_0=0$):

   (1) $\dfrac{x}{(1+x)(1-x)^2}$;　　(2) $\dfrac{1}{a-x}\ (a\neq 0)$;

   (3) $\cos^2 x+1$;　　(4) $(1-x)\ln(1+x)$;

   (5) $\ln\dfrac{1+x}{1-x}$;　　(6) $\dfrac{x^2}{\sqrt{1+x}}$;

   (7) $\dfrac{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}{2}$;　　(8) $\sin(a+bx^2)$;

   (9) $\dfrac{1}{1+x+x^2}$;　　(10) $\dfrac{1}{(1+x^3)(1+x^6)(1+x^{12})}$;

   (11) $\dfrac{1}{x},\ x_0=-1$;　　(12) $\ln x,\ x_0=2$.

2. 试用 Lagrange 型余项对于 $\ln(1+x)$ 的 Maclaurin 展开式在 $[0,1)$ 的成立给出证明.

3. 若 f 在 (a,b) 上任意阶可导, 且 $\exists\, K>0,\ \forall\, x\in(a,b),\ \forall\, n: |f^{(n)}(x)|\leqslant K$, 证明: $\forall\, x,x_0\in(a,b)$:
$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n.$$
(例如 $\mathrm{e}^x,\sin x,\cos x$ 就是如此.)

4. 试通过对 $\dfrac{1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mathrm{C}_{\alpha}^{n}x^{n}}{(1+x)^{\alpha}}$ 求导来证明于 $x\in(-1,1)$ 时成立展开式

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{C}_{\alpha}^{n}x^{n}.$$

5. 计算 $f(x)=\displaystyle\int_{x}^{x^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t^4}}$ 的 Maclaurin 展开式到 x^{10} 项.

6. 验证关于椭圆积分的两个级数展开式:

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\frac{\varepsilon^{2n}}{2n-1}\right)$, $|\varepsilon|<1$;

(2) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-\varepsilon^2\sin^2 x}}=\frac{\pi}{2}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right)^2\varepsilon^{2n}\right)$, $|\varepsilon|<1$.

附录 复数项幂级数与 Euler 公式

本书在前面已经多次应用 Euler 公式和复数方法, 例如关于正弦和余弦函数的高阶导数公式的导出 (例题 6.17 的解 2), $\mathrm{e}^{ax}\cos bx$ 和 $\mathrm{e}^{ax}\sin bx$ 的不定积分计算 (例题 9.34 的解 2), 以及这两个函数在 $[0,+\infty)$ 上的广义积分计算 (例题 11.21). 然而作为这种方法的基础的 Euler 公式该如何证明, 一直没有说清楚. 为此我们将利用幂级数工具在这个附录中对 Euler 公式给出一个简要的介绍. 这对于下一章也是有用处的. 同时再举几个例题以说明复数方法在数学分析中的其他应用.

当然首先要突破实数范围的限制而进入复数域中. 从第一册的数列极限、无穷级数直到 Cauchy 收敛准则, 都可以平行地推广到复数域中, 只要用复数 z 的模 $|z|$ 代替实数 x 的绝对值 $|x|$ 即可. 这里本质上没有新的内容. 对于 §15.4 开始的幂级数也是如此, 称

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$$

为 (以 $z=0$ 为中心的) 复幂级数, 其中的系数 c_n, $n=0,1,\cdots$, 为复数, z 是复变量. 这时关于幂级数的收敛半径概念和 Cauchy–Hadamard 公式都仍然成立. 若收敛半径为有限数 $r>0$, 可以证明复幂级数在以 r 为半径的开圆内处处收敛, 在 $|z|=r$ 的圆周上则级数一定有发散点.

这时将 §15.5 中的 $\mathrm{e}^x, \sin x, \cos x$ 的 Maclaurin 级数中的 x 换为 z 后, 就可以用来定义以下三个复函数:

$$\mathrm{e}^z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!},\quad \sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1},\quad \cos z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}z^{2n},$$

且可以证明其中的三个复幂级数的收敛半径为 $+\infty$, 即在复平面上处处收敛. 将级数相乘的概念和有关定理推广到复级数后就可以从以上级数定义证明以上三个复函数满足与过去已经熟悉的实数范围中相同的许多公式.

在上述 e^z 中用 $\mathrm{i}z$ 代替 z, 就得到这三个函数之间的关系:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}=\cos z+\mathrm{i}\sin z.$$

又如将 z 限制为实数 x, 则就得到:

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x,$$

同时还得到

$$\cos x=\frac{1}{2}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}),\quad \sin x=\frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}),$$

以上几个公式都称为 Euler 公式.

以下是举例.

例题 15.34 用复数方法计算 $\mathrm{e}^x\cos x$ 的 Maclaurin 级数.

解 只需如下计算即可:

$$\begin{aligned}\mathrm{e}^x\cos x&=\operatorname{Re}\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})x}=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(1+\mathrm{i})^n}{n!}x^n\\&=\operatorname{Re}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\sqrt{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi/4})^n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}}{n!}x^n.\quad\square\end{aligned}$$

例题 15.35 用复数方法计算 $f(x)=\dfrac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}$ 的 Maclaurin 级数, 其中 $|x|<1$, $|a|\leqslant\pi$.

解 1 注意分母恰是 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-x|^2$, 于是可作如下计算:

$$\begin{aligned}\frac{x\sin a}{1-2x\cos a+x^2}&=\frac{x\sin a}{(\cos a-x)^2+\sin^2 a}=-x\operatorname{Im}\left(\frac{(\cos a-x)-\mathrm{i}\sin a}{(\cos a-x)^2+\sin^2 a}\right)\\&=-x\operatorname{Im}\frac{1}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-x}=-x\operatorname{Im}\Big(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}a}\sum_{n=0}^{\infty}x^n\mathrm{e}^{-\mathrm{i}na}\Big)\\&=\operatorname{Im}\sum_{n=0}^{\infty}(-x^{n+1}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n+1)a})=\sum_{n=1}^{\infty}x^n\sin na.\quad\square\end{aligned}$$

解 2 同样利用分母为 $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}-x|^2$, 可以有不同做法. 记 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}a}$, 则有

$$\cos a=\frac{z^2+1}{2z},\quad \sin a=\frac{z^2-1}{2\mathrm{i}z},$$

代入上式后即可作部分分式分解:

$$f(x)=\frac{x(z^2-1)}{2\mathrm{i}(1-xz)(z-x)}=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\frac{1}{1-xz}-\frac{1}{1-xz^{-1}}\right).$$

利用 $|xz|=|xz^{-1}|=|x|<1$, 就可以展开为

$$f(x)=\frac{1}{2\mathrm{i}}\left(\sum_{n=0}^{\infty}x^nz^n-\sum_{n=0}^{\infty}x^nz^{-n}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}x^n\sin na.\quad\square$$

注 若将最后的级数中的 x 看成参数, 而将 a 看成自变量, 则就是下一章中的 Fourier 级数.

例题 15.36 设 n 为正整数, 计算积分 $D_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin nx}{\sin x}\,\mathrm{d}x$.

解 利用 Euler 公式, 有

$$\begin{aligned}\frac{\sin nx}{\sin x}&=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}x}}\\&=\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-1)x}+\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-3)x}+\cdots+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(n-1)x}.\end{aligned}\tag{15.17}$$

这里利用了恒等式

$$\frac{a^n-b^n}{a-b}=a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1}.$$

以下需要按照 n 为奇数和偶数两种情况分别计算.

当 n 为奇数 $2k-1$ 时, (15.17) 中恰有 n 项, 中间一项为 1, 其余各项指数中的 $(n-1),(n-3),\cdots$ 全为偶数, 且关于 0 呈对称分布. 利用

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}2kx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}2kx}=2\cos 2kx$$

在 $[0,\frac{\pi}{2}]$ 上的积分为 0, 可见有

$$D_{2k-1}=\frac{\pi}{2}.$$

当 n 为偶数 $2k$ 时, 则 (15.17)中 也有 n 项, 其中的 $(n-1)$ 等均为奇数, 关于 0 也是对称分布. 利用

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}(2k-1)x}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(2k-1)x})\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos(2k-1)x\,\mathrm{d}x=\frac{2(-1)^{k-1}}{2k-1},$$

就可以得到

$$D_{2k}=2\left(1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+\frac{(-1)^{k-1}}{2k-1}\right).\quad\square$$

例题 15.37 设 $|r|\neq 1$, 计算 Poisson 积分 $I(r)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1+r^2-2r\cos x)\,\mathrm{d}x$.

解 这是一元实函数的常义积分, 有多种计算方法. 以下介绍用 Riemann 和来计算的方法, 其中需要用到复数知识.

二项式方程 $r^{2n}-1=0$ 除了 ±1 两个根之外, 还有 $2n-2$ 个根为

$$\cos\frac{k\pi}{n}\pm\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n},k=1,2,\cdots,n-1.$$

对其中每一对共轭复根计算乘积

$$[r-(\cos\frac{k\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n})]\cdot[r-(\cos\frac{k\pi}{n}-\mathrm{i}\sin\frac{k\pi}{n})]=r^2-2r\cos\frac{k\pi}{n}+1.$$

因此得到

$$\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}=\prod_{k=1}^{n-1}(1+r^2-2r\cos\frac{k\pi}{n}).$$

取对数后就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\ln(1+r^2-2r\cos\frac{k\pi}{n})&=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{r^{2n}-1}{r^2-1}\cdot(r+1)^2\right)\\&=\frac{1}{n}\ln\left((r^{2n}-1)\frac{r+1}{r-1}\right).\end{aligned}$$

令 $n\to\infty$, 得到

$$I(r)=\begin{cases}2\ln|r|, & |r|>1,\\ 0, & |r|<1.\quad\square\end{cases}$$

第十六章 Fourier 级数

内容简介 Fourier 级数是幂级数之外的另一类重要的函数项级数. §16.1 引入 Fourier 级数的定义与计算方法. §16.2 是 Fourier 级数的收敛性判别法. §16.3 介绍 Fourier 级数的性质. §16.4 用 Fourier 级数等工具证明连续函数的一致逼近定理.

§16.1 Fourier 级数的定义和计算

在自然界中, 周期现象是常见的. 在物理学中将它们称为振动, 振动的传播就是波. 声、光、电都离不开波. 描述周期现象的数学函数就是周期函数.

对于周期现象的数学分析, 幂级数并不合适. 例如, 虽然我们有正弦和余弦函数在 $(-\infty,+\infty)$ 上的 Taylor 级数展开式, 但难以从这些展开式中看出它们的和函数是周期函数. 描述周期现象的基本数学工具是三角级数. 它的一般形式为

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega x+b_n\sin n\omega x). \tag{16.1}$$

可以联系声学来观察 (16.1). 这时将其中的一次谐波写为 $A\cos(\omega t+\varphi)$, 称为纯音. 它可以用音叉的振动生成. 一般的乐音不会是纯音, 而是由三角级数中许多项合成的. 不同的乐器的组成是不一样的. 所谓音色或者音品, 就是合成的效果. $f=\dfrac{1}{T}=\dfrac{\omega}{2\pi}$ 为频率. 人耳能听到的声波的频率大致为 $20\sim 2\times10^4$ Hz. 更高频率的声波称为超声波, 低于 20 Hz 的声波称为次声波. 最重要的次声波就是由大地震引起的.

从数学上看, (16.1) 的和函数 (若收敛的话) 是周期为 $T=\dfrac{2\pi}{\omega}$ 的周期函数. 经常将其中的第一项称为常数项 (在电学中可称为直流项), 和式中 $n=1$ 的项称为一次谐波, $n=2$ 的项称为二次谐波等等. 若在 (16.1) 的和式中只有有限个非零项, 则称为三角多项式. Fourier①级数是一类特殊的三角级数, 其定义将在下面给出.

16.1.1 Fourier 级数的定义

通过变量代换总可以将 (16.1) 中的参数 ω 取为 1. 这时该级数取下列形式:

① 傅里叶 (Jean–Baptiste Joseph Fourier, 1768–1830), 法国数学家. 他在热传导的数学理论研究中提出了将函数展开为三角级数的全新思想, 对于函数论、集合论以及函数概念的发展有重大影响.

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

其中每一项都以 2π 为周期, 因此在收敛时它的和函数也是周期 2π 的函数.

称组成上述级数的下列函数集合, 即

$$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}, \tag{16.2}$$

为三角函数系.

如果将幂级数看成为 $1,x,x^2,\cdots,x^n,\cdots$ (或者 $1,(x-x_0),(x-x_0)^2,\cdots,(x-x_0)^n,\cdots$) 的线性组合, 则三角级数就是三角函数系中的函数的线性组合. 利用代数学中的线性空间概念, 可以考虑在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数形成的线性空间, 其中将一个函数看成为该空间的一个元 (一个点), 并用通常的方法定义其中的加法和数乘法. 虽然这个空间不是有限维的, 但有限维空间中的许多概念仍然可以推广到无限维空间中去. 这里首先是内积和正交性.

在有限维空间中引入内积之后就可以定义向量的正交性. 具体来说, 对于实 n 维空间中的向量 $\boldsymbol{a}=(a_1,\cdots,a_n)$ 和 $\boldsymbol{b}=(b_1,\cdots,b_n)$, 若有 $\sum\limits_{i=1}^{n}a_ib_i=0$, 则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 正交, 记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

对于定义在 $[-\pi,\pi]$ 上的函数 f,g, 设它们都是 Riemann 可积函数, 则可以将 f 和 g 的内积定义为 $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}fg$, 并将 $f\perp g$, 即 f 和 g 正交, 定义为

$$(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)g(x)\,\mathrm{d}x=0.$$

现在区间 $[-\pi,\pi]$ 上观察三角函数系 (16.2), 并采用上述正交性定义, 则首先可以计算出

$$\int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}=0,\quad \int_{-\pi}^{\pi}1\cdot\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}(-\cos nx)\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

这表明三角函数系 (16.2) 中的第一个函数, 即恒等于 1 的常值函数, 和该三角函数系内的所有其他函数正交. 然后又可以计算出

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\cos mx\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\sin(n+m)x+\sin(n-m)x]\,\mathrm{d}x=0,\\
\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\cos mx\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n+m)x+\cos(n-m)x]\,\mathrm{d}x=\pi\,\delta_{nm},\\
\int_{-\pi}^{\pi}\sin nx\sin mx\,\mathrm{d}x&=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}[\cos(n-m)x-\cos(n+m)x]\,\mathrm{d}x=\pi\,\delta_{nm},
\end{aligned}$$

其中用了 Kronecker[①]符号 $\delta_{nm}=\begin{cases}0, & n\neq m\\ 1, & n=m\end{cases}.$

这样我们就证明了在三角函数系 (16.2) 中任何两个函数相互正交. 今后称这样的函数系为正交函数系.

① 克罗内克 (Leopold Kronecker, 1823–1891), 德国数学家.

注 在上述正交性计算中得到的附带结果在今后有用. 这就是在三角函数系 (16.2) 中, 除了 $\int_{-\pi}^{\pi} 1^2 \,\mathrm{d}x = 2\pi$ 之外, 其他函数与自身相乘后在 $[-\pi, \pi]$ 上的积分都等于 π.

下面讨论三角级数的第一个基本问题, 即如果一个周期 2π 的函数能够展开为三角级数, 即在 $(-\infty, +\infty)$ 上使得以下等式

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{16.3}$$

成立, 则展开式右边的系数 a_n, b_n 与函数 f 有什么联系? 或者说如何根据 f 来计算这些系数?

对于函数的幂级数展开式来说, 从 $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n$ 就一定有 $a_n = \dfrac{f^{(n)}(x_0)}{n!}$ $\forall\, n$, 只要右边的幂级数有非零的收敛半径. 对于函数的三角函数展开式 (16.3) 来说, 情况完全不同.

现在假设 (16.3) 中右边的级数在 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 上一致收敛 (这等于说在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛), 则从 §15.3 的理论知道, (16.3) 左边的和函数 f 连续, 而且可以用对级数的逐项积分来计算其定积分. 在 $[-\pi, \pi]$ 上通过这样的计算就得到

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x = \pi a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)\,\mathrm{d}x = \pi a_0,$$

于是就得到了展开式 (16.3) 右边第一个系数 a_0 的计算公式

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

由于 f 有周期 2π, 因此上式中的积分也可以改为在 $[0, 2\pi]$ 或任何长度为 2π 的区间上的积分.

在展开式 (16.3) 两边乘以 $\cos mx$. 从关于无穷级数的 Cauchy 一致收敛准则可见, 对一致收敛的级数的每一项乘以同一个有界函数后仍然一致收敛, 因此又可以重复上面的逐项积分计算, 同时利用三角函数系的正交性, 这样就可以得到

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos mx\,\mathrm{d}x &= \frac{a_0}{2} \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{-\pi}^{\pi} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \cos mx\,\mathrm{d}x \\ &= \pi a_m,\end{aligned}$$

再将 m 改记为 n, 这样就得到展开式 (16.3) 中系数 a_n $(n \geqslant 1)$ 的计算公式:

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x.$$

而且可以看到当 $n = 0$ 时就得到上面的 a_0. (这是将 (16.3) 的常数项记为 $\dfrac{a_0}{2}$ 的理由之一.) 用完全同样的方法又可以得到对 $n \geqslant 1$ 成立的关于 b_n 的计算公式:

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x.$$

现在给出本章的主要定义.

定义 16.1 设周期 2π 的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积和绝对可积[1], 令

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x, \quad \forall n \geqslant 0, \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x, \quad \forall n \geqslant 1, \end{aligned} \tag{16.4}$$

称它们为 f 的 Fourier 系数, 称由此得到的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

为函数 f 的 Fourier 级数, 并记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx). \tag{16.5}$$

又称计算 Fourier 系数的公式 (16.4) 为 Euler–Fourier 公式.

注 1 这里要注意在 Fourier 级数理论中的专用记号 $\sim$ 的意义. (16.5) 仅仅表示右边的三角级数是左边函数 f 的 Fourier 级数, 也就是说右边的系数是通过对左边函数 f 用 Euler–Fourier 公式计算得到的 Fourier 系数, 除此之外什么也没有说. 这里不考虑 (16.5) 右边的级数的敛散性, 也不考虑在收敛的点上级数的和是否等于左边函数 f 在该点的函数值. 在 (16.5) 中何时成立等号的问题到 §16.2 解决.

注 2 记号 $\sim$ 虽然比等号弱, 但仍然具有线性运算性质. 这就是说, 若两个函数 f, g 分别有自己的 Fourier 级数, 则将两个级数相加就得到 $f+g$ 的 Fourier 级数. 又将 f 的 Fourier 级数的每一项乘以常数 c 就得到 cf 的 Fourier 级数.

注 3 Fourier 级数只是三角级数中的一类. 在本章后面将会给出例子, 说明确实存在不是 Fourier 级数的三角级数.

在定义 16.1 中的 Fourier 系数公式是对于展开式 (16.3) 右边增加一致收敛条件后通过逐项积分计算得到的. 在有了定义 16.1 之后可以将上述推导计算写成为一个定理.

定理 16.1 在 $(-\infty,+\infty)$ (或 $[-\pi,\pi]$) 上一致收敛的三角级数一定是其和函数的 Fourier 级数.

---

① 由于 f 可以无界, 因此定义中的积分可以是广义积分. 对于常义积分来说, 可积一定绝对可积, 反之不一定成立, 而对于广义积分来说, 绝对可积一定可积, 反之不一定成立. 因此在本章中经常假设函数同时可积与绝对可积. 此外, 由于函数 f 为周期 2π 的周期函数, 因此 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积与绝对可积的条件等价于 f 在任何有界区间上可积与绝对可积. 在本章以下凡是说到周期函数可积与绝对可积时均作这样的理解.

对于只含有限个非零项的三角多项式, 即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

将它看成为无穷级数时总是一致收敛的, 因此就得到下面的推论. (当然也可以直接用定义 16.1 对推论作出证明.)

推论 三角多项式一定是自身的 Fourier 级数.

注 由定理 16.1 可知, 若一个三角级数不是 Fourier 级数, 则它不会是一致收敛的. 此外, 从 §16.2 的收敛性定理可知, Fourier 级数的和函数有间断点是常见的. 由连续性定理 (即定理 15.5) 可见, 这时级数当然不会是一致收敛的.

本节的主要理论到此为止, 下面主要是举例和计算.

例题 16.1 设周期 2π 的函数 在 $(-\pi,\pi]$ 上为 $f(x)=\begin{cases}1, & 0\leqslant x\leqslant\pi\\ 0, & -\pi<x<0\end{cases}$, 计算 f 的 Fourier 级数. (今后会证明本题的 Fourier 级数在 x 不等于 π 的整数倍的所有点上确实收敛于 $f(x)$.)

解 按照公式有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=1,\quad a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x=0\ \forall\, n\geqslant 1,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x=-\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{n\pi}(1-(-1)^n)=\begin{cases}\dfrac{2}{n\pi}, & n\text{ 奇},\\ 0, & n\text{ 偶}.\end{cases}$$

于是就得到所求的结果为:

$$f(x)\sim\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n-1)x}{2n-1}.\quad\square$$

注 将周期函数展开为三角级数在许多科学和技术领域中称为频谱分析. 这就是将一个复杂振动分解为许多简谐振动的迭加. 在例题 16.1 中的计算实际上就是对于图 16.1 中的矩形波作频谱分析. 在该图中用粗黑线表示 $f(x)$ 所代表的矩形波, 又用细曲线表示 f 的 Fourier 级数中的前两项之和, 即 $\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sin x$, 也就是直流项与一次谐波的迭加.

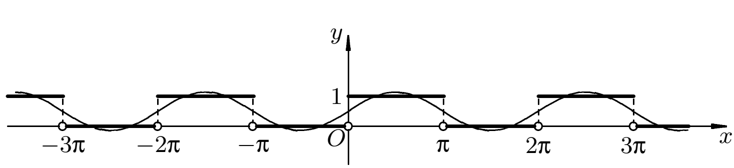


图 16.1: 矩形波的频谱分析示意图

从例题 16.1 的计算还可以看出函数的对称性在 Fourier 系数中的反映. 从 Euler–Fourier 公式 (即 (16.4)) 可见, 若 f 为奇函数则所有 $a_n = 0$, 若 f 为偶函数则所有 $b_n = 0$. 在例题 16.1 中的 f 既不是奇函数, 也不是偶函数, 但可以看出 $f(x) - \dfrac{1}{2}$ 为奇函数, 这里不考虑在 π 的整数倍的那些点上的值, 因为改变有限点上的函数值对积分没有影响. 这样就解释了为什么在该题的答案中 $a_n = 0\ \forall\, n \geqslant 1$.

此外, 在该题答案中的所有 $b_{2n} = 0\ \forall\, n$ 也是对称性带来的. 回顾 §10.4.3, 只要 f 在 $[0, \pi]$ 上关于 $x = \pi/2$ 为偶函数, 则有

$$f(\pi - x)\sin 2n(\pi - x) = -f(x)\sin 2nx,$$

因此 $f(x)\sin 2nx$ 在 $[0, \pi]$ 上关于中点 $\pi/2$ 为奇函数, 从而有 (参见定理 10.15)

$$\int_0^{\pi} f(x)\sin 2nx\,\mathrm{d}x = 0.$$

这方面还可以参看那里的例题 10.37, 它就是关于 Fourier 系数的一个命题.

例题 16.2 设周期 2π 的函数 f 在 $[0, 2\pi)$ 上等于 x, 计算 f 的 Fourier 级数. (在图 16.2 中给出了 f 的图像, 可以称为锯齿波.)

解 由于 f 是周期 2π 的函数, 又给出了在 $[0, 2\pi)$ 上的表达式, 利用周期函数在周期长度区间上的积分不变 (见例题 10.30), 在计算 Fourier 系数时就可以将 Euler–Fourier 公式中的积分区间改为 $[0, 2\pi]$ 来计算. 于是有

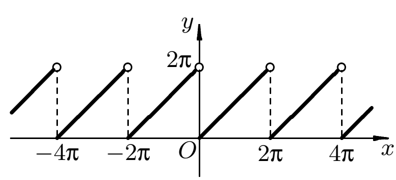


图 16.2: 锯齿波的示意图

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi}x^2\Big|_0^{2\pi} = 2\pi,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi}x\sin nx\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\sin nx\,\mathrm{d}x = 0,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} x\sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi}x\cos nx\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x = -\frac{2}{n}.$$

这样就得到

$$f(x) \sim \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}. \quad \square$$

注 右边出现了前面已经熟悉的函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$. 在例题 16.6 和 §16.2 中将证明, 在 x 不是 2π 的整数倍的所有点上, 这个级数确实收敛于 $f(x)$.

例题 16.3 设 $\alpha \neq 0$, 求 $f(x) = \mathrm{e}^{\alpha x}$, $-\pi \leqslant x < \pi$ 的 Fourier 级数.

解 与前两个例子不同, 本题的提法是只在区间 $[-\pi, \pi)$ 上给定一个函数. 为什么也可以考虑计算它的 Fourier 级数? 对这类题我们都理解为用周期延拓的方

法将题中的函数延拓成为 $(-\infty,+\infty)$ 上周期 2π 的函数. 具体来说, 即对 $\forall x\in(-\infty,+\infty)$, 存在惟一的 $k\in\mathbb{Z}$, 使得 $x-2k\pi\in[-\pi,\pi)$, 然后用 $\widetilde{f}(x)=f(x-2k\pi)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个函数 $\widetilde{f}$. 它的 Fourier 级数只要用 $[-\pi,\pi)$ 上的函数值即可计算. 为简明起见, 仍将延拓后的函数记为 f. 在图 16.3 中作出了延拓后的图像 (其中设 $\alpha>0$).

首先计算常数项

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}\,dx=\frac{1}{\alpha\pi}e^{\alpha x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\alpha\pi}(e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}).$$

对于其他系数的计算, 这里介绍一种复数计算法. (参见第十五章的附录.)

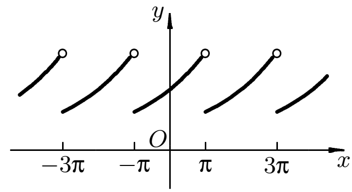


图 16.3: 将 $[-\pi,\pi)$ 上的函数周期延拓

利用系数公式 (16.4) 和 Euler 公式 $e^{inx}=\cos nx+i\sin nx$, 可以计算如下:

$$\begin{aligned}a_n+ib_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{\alpha x}(\cos nx+i\sin nx)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{(\alpha+in)x}\,dx\\&=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{\alpha+in}\cdot e^{(\alpha+in)x}\Big|_{-\pi}^{\pi}=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\alpha-in}{\alpha^2+n^2}\cdot[e^{\alpha\pi}(-1)^n-e^{-\alpha\pi}(-1)^n]\\&=\frac{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}{\pi(\alpha^2+n^2)}\cdot(-1)^n(\alpha-in).\end{aligned}$$

这样就同时得到了 a_n 和 b_n, 最后所求的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{e^{\alpha\pi}-e^{-\alpha\pi}}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha\cos nx-n\sin nx}{\alpha^2+n^2}\right).\quad\square$$

16.1.2 正弦级数和余弦级数

称 $a_n=0\ \forall n\geqslant 0$ 的 Fourier 级数为正弦级数, 又称 $b_n=0\ \forall n\geqslant 1$ 的 Fourier 级数为余弦级数. 如前所述, 奇周期函数的 Fourier 级数为正弦级数, 偶周期函数的 Fourier 级数为余弦级数.

这一小节主要介绍对于仅仅在 $[0,\pi]$ 上给出的函数, 如何将它展开为正弦级数或余弦级数. 办法就是用奇延拓或偶延拓. (这可以看成是例题 16.3 的发展.)

例题 16.4 给定函数 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<h\\0, & h<x<\pi\end{cases}$, 其中 $0<h<\pi$, 要求出该函数的余弦级数.

解 如图 16.4 那样, 首先将 f 延拓成为 $(-\pi,\pi)$ 上的偶函数. 这时的函数在点 $x=0,\pm h,\pm\pi$ 处都还没有定义. 如前所说, 这不影响 Fourier 系数的积分计算. 然后

再按照周期 2π 延拓为 $(-\infty,+\infty)$ 上的周期函数. 为简明起见, 仍用 f 表示延拓后的函数.

由于 f 为偶函数, 因此所有 $b_n=0$. 关于 $a_n\ \forall n\geqslant 0$ 则有

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\mathrm{d}x=\frac{2h}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{h}\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n\pi}\sin nh.$$

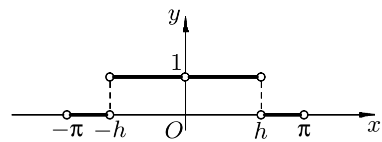


图 16.4: 对 $(0,\pi)$ 上的函数作偶延拓

这样就得到

$$f(x)\sim\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx.\quad\square$$

16.1.3 一般周期函数的 Fourier 级数

设函数 $f(x)$ 是在 $(-\infty,+\infty)$ 上周期为 T 的周期函数, 且在 $[0,T]$ 上可积与绝对可积. 这时用周期 2π 的三角函数系显然不合适. 与其从头开始讨论, 不如用变量代换 $x=\dfrac{Tt}{2\pi}$, 当 t 从 0 增加到 2π 时, x 就从 0 增加到 T. 将函数 f 经过这个变量代换后得到的函数记为 $\varphi(t)=f\left(\dfrac{Tt}{2\pi}\right)$, 它就成为周期 2π 的函数了. 这样就可以如前计算出函数 $\varphi(t)$ 的 Fourier 级数:

$$\varphi(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nt+b_n\sin nt),$$

然后再回到变量 x, 就有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{2\pi n}{T}x+b_n\sin\frac{2\pi n}{T}x).$$

由此可见, 对于周期 T 的周期函数, 所用的三角函数系实际上就是

$$\{1,\cos\frac{2\pi}{T}x,\sin\frac{2\pi}{T}x,\cdots,\cos\frac{2\pi n}{T}x,\sin\frac{2\pi n}{T}x,\cdots\},$$

若引入圆频率 $\omega=\dfrac{2\pi}{T}$ 代替频率 $\dfrac{1}{T}$, 则三角函数系就是

$$\{1,\cos\omega x,\sin\omega x,\cdots,\cos n\omega x,\sin n\omega x,\cdots\}.$$

再观察系数计算公式的变化. 这时有

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right)\,\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{T}f(x)\,\mathrm{d}x,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right)\cos nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{T}f(x)\cos\frac{2\pi nx}{T}\,\mathrm{d}x,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(t)\sin nt\,\mathrm{d}t=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f\left(\frac{Tt}{2\pi}\right)\sin nt\,\mathrm{d}t=\frac{2}{T}\int_0^{T}f(x)\sin\frac{2\pi nx}{T}\,\mathrm{d}x.$$

例题 16.5 计算 $f(x)=|x|, -1\leqslant x\leqslant 1$ 的 Fourier 级数.

解 如图 16.5 将 $[-1,1]$ 上的 $f(x)=|x|$ 按照周期 2 作周期延拓.

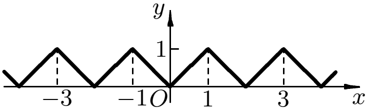


图 16.5: 将 $[-1,1]$ 上的 $f(x)=|x|$ 按周期 2 延拓

在计算时有两种方法, 或者用刚才得到的公式, 或者用变量代换将问题归之于标准的公式 (16.4) 的方法. 现在用后一个方法.

作变量代换 $x=\dfrac{t}{\pi}$, 则 $\varphi(t)=f\left(\dfrac{t}{\pi}\right)=\dfrac{|t|}{\pi}$, $-\pi\leqslant t\leqslant\pi$. 然后如例题 16.3 一样, 按照周期 2π 延拓为 $\mathbb{R}$ 上的周期函数.

现在计算其 Fourier 系数. 由于 φ 是偶函数, 所有 $b_n=0$, 因此只要计算 a_n:

$$\begin{aligned}
a_0&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t}{\pi}\,\mathrm{d}t=1,\\
a_n&=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{t\cos nt}{\pi}\,\mathrm{d}t=\frac{2}{\pi^2}\left(\frac{t\sin nt}{n}\bigg|_0^{\pi}-\frac{1}{n}\int_0^{\pi}\sin nt\,\mathrm{d}t\right)\\
&=\frac{2}{n^2\pi^2}\cos nt\bigg|_0^{\pi}=\frac{2}{n^2\pi^2}[(-1)^n-1]\\
&=\begin{cases}-\dfrac{4}{n^2\pi^2}, & n\text{ 奇},\\[2ex] 0, & n\text{ 偶}.\end{cases}
\end{aligned}$$

于是得到

$$\varphi(t)\sim\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(2n-1)t.$$

最后回到自变量为 x, 就有

$$f(x)\sim\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(2n-1)\pi x.\quad\square$$

注 这里提出一个思考题, 即如何解释在刚才得到的 Fourier 级数中, 不仅所有 $b_n=0$, 而且所有 $a_{2n}=0$.

16.1.4 复数形式下的 Fourier 级数

从 Euler 公式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta$ 出发有

$$\cos\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2},\quad \sin\theta=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}}{2\mathrm{i}}.$$

在其中令 $\theta=nx$, 就得到

$$\cos nx=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2},\quad \sin nx=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}nx}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}nx}}{2\mathrm{i}}.$$

将它们代入 Fourier 级数的通项中, 则有

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = c_n e^{inx} + \overline{c}_n e^{-inx},$$

其中 $\overline{c}$ 是 c 的共轭复数:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad \overline{c}_n = \frac{1}{2}(a_n + ib_n).$$

引入记号 $c_0 = \dfrac{a_0}{2}$, $c_{-n} = \overline{c}_n$, 就得到复数形式的 Fourier 级数:

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{inx} + c_{-n} e^{-inx}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{inx},$$

其中最后一个表达式理解为极限

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}.$$

也可以直接写出复系数的计算公式:

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx}\,dx = \overline{c}_{-n}.$$

需要指出, 由于复数计算在许多方面更为方便, 因此复数形式的 Fourier 级数在许多应用领域得到广泛使用.

练 习 题

1. 设 f 是 $\mathbb{R}$ 上周期 2π 的可积与绝对可积的周期函数, 已知

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

求以下函数的 Fourier 级数:

(1) $f(-x)$; (2) $-f(x)$; (3) $f(x+h)$, 其中 h 为常数.

2. (1) 证明: $\{1, \cos x, \cos 2x, \cdots, \cos nx, \cdots\}$ 和 $\{\sin x, \sin 2x, \cdots, \sin nx, \cdots\}$ 都是 $[0,\pi]$ 上的正交函数列;

(2) 证明: $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ 不是 $[0,\pi]$ 上的正交函数列.

3. 设 f 是周期 2π 的可积与绝对可积函数, 证明: 对于任意实数 c 成立:

$$\frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi} f(x)\cos nx\,dx = a_n \ \forall\, n \geqslant 0,$$

$$\frac{1}{\pi}\int_{c}^{c+2\pi} f(x)\sin nx\,dx = b_n \ \forall\, n \geqslant 1.$$

4. 设 f 是周期 2π 的可积与绝对可积函数,

(1) 若 $f(x+\pi) = f(x)$, 证明: $a_{2n-1} = b_{2n-1} = 0 \ \forall\, n \geqslant 1$;

(2) 若 $f(x+\pi) = -f(x)$, 证明: $a_0 = a_{2n} = b_{2n} = 0 \ \forall\, n \geqslant 1$.

5. 若 f 是 $[-\pi,\pi]$ 上的单调函数, 证明: $a_n = O(\frac{1}{n})$, $b_n = O(\frac{1}{n})$.

6. 若 f 在 $[0,2\pi]$ 上单调减少, 证明: $b_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0\ \forall n \geqslant 1$.

7. 若 f 在 $[0,2\pi]$ 上下凸, 证明: $a_n = \dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x \geqslant 0\ \forall n \geqslant 1$.

8. 求下列函数的 Fourier 级数:

(1) $f(x) = \begin{cases} x, & -\pi \leqslant x < 0, \\ 0, & 0 \leqslant x < \pi; \end{cases}$　　(2) $f(x) = \mathrm{e}^x, -\pi < x < \pi$;

(3) $f(x) = x^2, -\pi < x < \pi$;　　(4) $f(x) = x^2, 0 < x < 2\pi$;

(5) $f(x) = |\sin x|, -\pi \leqslant x \leqslant \pi$;　　(6) $f(x) = \dfrac{h}{2\pi}x, 0 < x < 2\pi\ (h > 0)$;

(7) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\dfrac{T}{2} \leqslant x < 0, \\ E\sin\omega x, & 0 \leqslant x < \dfrac{T}{2}; \end{cases}$　　(8) $f(x) = \begin{cases} 0, & -\dfrac{T}{2} \leqslant x < 0, \\ E, & 0 \leqslant x < \dfrac{T}{2}. \end{cases}$

((6),(7),(8) 中的 $f(x)$ 表示常见的锯齿波、半波整流波和方波.)

9. 分别求出图 16.6 所示的三角波与矩形波的正弦级数与余弦级数.

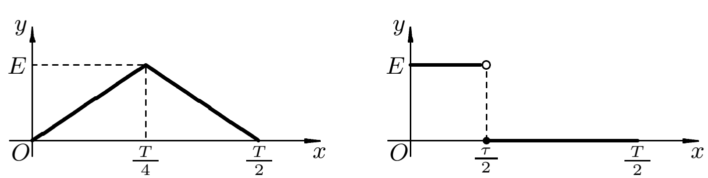


图 16.6: 三角波与矩形波

10. 给定 $f \in R[0, \frac{\pi}{2}]$, 试将它延拓为 $(-\pi,\pi)$ 上的函数, 使它的 Fourier 级数为

(1) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos(2n-1)x,\ x \in (-\pi,\pi)$;

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin(2n-1)x,\ x \in (-\pi,\pi)$.

11. 将 $f(x) = |x|$, $x \in [-\pi,\pi]$, 展开成 Fourier 级数的复数形式.

§16.2 Fourier 级数的收敛性

16.2.1 Riemann 引理

一般认为, 以下引理是 Fourier 级数理论中的基本引理.

定理 16.2 (Riemann 引理) 设 f 于区间 $[a,b)$ 上可积与绝对可积, 其中 b 可以是 $+\infty$, 则

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0,\quad \lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0.$$

证 只给出第一个极限的证明, 对其中的 $p\to\infty$, 也只讨论 $p\to+\infty$. 其余情况都是类似的. (可从图 16.7 来理解引理的意义.)

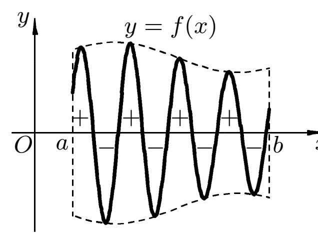


图 16.7: Riemann 引理的几何意义 (其中 $f(x)>0$, $p=25$)

先设 $[a,b]$ 为有界区间, 且 $f\in R[a,b]$. 对于最简单情况, 即 $f(x)\equiv c$ 为常值函数, 则

$$\left|\int_a^b c\cos px\,\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{c}{p}\sin px\Big|_a^b\right|\leqslant\frac{2c}{p},$$

可见当 $p\to+\infty$ 时极限为 0.

由 $f\in R[a,b]$ 的可积第二充要条件 (见定理 10.3(3)), 对给定的 $\varepsilon>0$, 存在分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 使得对应的振幅面积 $\sum\limits_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 这时对于积分可以估计如下:

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x\right|&=\left|\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i}[f(x)-f(x_i)]\cos px\,\mathrm{d}x\right|+\left|\sum_{i=1}^n f(x_i)\int_{x_{i-1}}^{x_i}\cos px\,\mathrm{d}x\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^n\omega_i\Delta x_i+\sum_{i=1}^n|f(x_i)|\cdot\frac{2}{p},\end{aligned}$$

这时最后一式的第一项已经小于 $\varepsilon/2$, 又由于分划 P 已经取定, 因此第二项的和式 $\sum\limits_{i=1}^n|f(x_i)|$ 是确定的数. 从而存在 $p_0>0$, 当 $p>p_0$ 时就使得第二项也小于 $\varepsilon/2$, 也就是使得

$$\left|\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

这样就证明了 $\lim\limits_{p\to+\infty}\displaystyle\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0$.

对于 f 为 $[a,b)$ 上的广义积分的情况, 为简单起见设 b 是惟一奇点, 则由于对广义积分为绝对收敛的假设条件, 对给定的 $\varepsilon>0$, 存在 $b'\in(a,b)$, 使得

$\displaystyle\int_{b'}^{b}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2}$. 这时 f 在 $[a,b']$ 上常义可积, 因此根据前面的证明, 存在 $p_0>0$, 当 $p>p_0$ 时, 成立 $\left|\displaystyle\int_a^{b'}f(x)\cos px\,\mathrm{d}x\right|<\frac{\varepsilon}{2}$, 于是也就有

$$\left|\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_a^{b'}f(x)\cos px\,\mathrm{d}x\right|+\int_{b'}^{b}|f(x)|\,\mathrm{d}x<\varepsilon.\quad\square$$

由 Riemann 引理知道 Fourier 系数一定具有以下性质.

推论 若 a_n,b_n 是定义 16.1 中的 Fourier 系数, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0,\ \lim\limits_{n\to\infty}b_n=0.$

以下两个例题是 Riemann 引理的重要应用.

例题 16.6 求 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 的和函数 $S(x)$.

解 在例题 14.18 已知和函数 $S(x)$ 处处有定义. 由于 $S(0)=0$, $S(x)$ 以 2π 为周期, 只要在 $(0,2\pi)$ 上求 $S(x)$ 即可.

对于 $0<x<2\pi$ 计算级数的部分和如下:

$$\begin{aligned}S_n(x)&=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k}=\sum_{k=1}^{n}\int_0^x\cos kt\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{k=1}^{n}\cos kt\right)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^x\left(\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}t=\int_0^x\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\mathrm{d}t-\frac{x}{2}.\end{aligned}$$

最后一个积分的被积函数的分母 $2\sin\dfrac{t}{2}\sim t$, 而 $\dfrac{1}{t}$ 在 $(0,x)$ 上的积分发散, 因此不能对这个积分用 Riemann 引理.

对于 $x=\pi$, 总有 $S_n(\pi)=0$, 因此得到恒等式 (其中为常义积分):

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}.\tag{16.6}$$

这个恒等式称为 Dirichlet 积分①, 它也可以从 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos kt$ 在 $[0,\pi]$ 上的积分直接求出. 利用这个恒等式可将部分和 $S_n(x)$ 改写为

$$S_n(x)=\frac{\pi-x}{2}-\int_x^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

对于 $x\in(0,2\pi)$, 函数 $\dfrac{1}{\sin\frac{t}{2}}$ 在区间 $[x,\pi]$ 上常义可积, 令 $n\to\infty$, 用 Riemann 引理就得到和函数的表达式为

① (16.6) 的被积函数在 $t=0$ 值可以定义为 $t\to0$ 时的极限值 $n+\dfrac{1}{2}$. 这与它来自于 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos kt+\frac{1}{2}$ 是一致的.

$$S(x) = \lim_{n\to\infty} S_n(x) = \frac{\pi - x}{2}, \quad 0 < x < 2\pi. \quad \square$$

注 1 在例题 16.2 中计算得到

$$f(x) \sim \pi - 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},$$

其中周期 2π 的函数 $f(x)$ 在 $[0, 2\pi)$ 上等于 x. 利用记号 $\sim$ 具有线性运算性质, 因此就可以推出本例题中的三角级数是 $S(x)$ 的 Fourier 级数.

注 2 在 $[0, 2\pi]$ 上 $S(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n} = \begin{cases} \dfrac{\pi - x}{2}, & 0 < x < 2\pi, \\ 0, & x = 0, 2\pi. \end{cases}$ 在下面的图 16.8 中作出了 $S(x)$ 的图像. 由于 $S(x)$ 在所有 $2n\pi$ $(n \in \mathbb{Z})$ 的点上不连续, 因

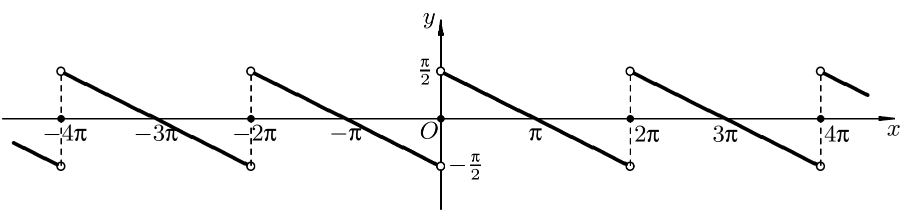


图 16.8: 无穷级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 的和函数

此可以从连续性定理 (即定理 15.5) 的逆否命题推出函数项级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}$ 在含有这些不连续点, 或者以它们为端点的任何区间上都不一致收敛. 其中包括 $[0, 2\pi], (0, 2\pi), (0, \pi], [\pi, 2\pi)$ 等. (在例题 15.13 中已经用 Cauchy 一致收敛准则证明该级数在 $(0, 2\pi)$ 上不一致收敛.)

注 3 令 $x = \pi/2$, 就得到在例题 15.26 中的结果

$$1 - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} + \cdots = \frac{\pi}{4}.$$

例题 16.7 计算广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ (它也常称为 Dirichlet 积分).

解 利用 (16.6), 即 $\displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}$, 将被积函数的分母换为 x, 得到:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x + \int_0^{\pi} \sin(n+\frac{1}{2})x \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{2} + \int_0^{\pi} \sin(n+\frac{1}{2})x \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}}\right)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

由于右边积分号下的因子 $\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{2\sin\dfrac{x}{2}}\right)$ 在 $[0,\pi]$ 上常义可积, 因此用 Riemann 引理知道当 $n\to\infty$ 时极限为 0, 这样就得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\dfrac{1}{2})x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.$$

最后, 用变量代换有

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\dfrac{1}{2})x}{x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{(n+\frac{1}{2})\pi}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x,$$

而已知广义积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛 (见例题 11.29), 因此从 Heine 归结原理就有

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_0^{A}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_0^{n+\frac{1}{2}}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\quad\square$$

16.2.2 Fourier 级数收敛的局部性定理

设 f 为周期 2π 的周期函数, 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积与绝对可积, 则可以求出 f 的 Fourier 级数. 为了研究该级数的收敛性, 我们从该级数的部分和函数 $S_n(x)$ 出发.

这里要注意, 目前的问题是点态收敛问题, 为此在下面将 x 改记为 x_0, 更清楚地表明我们只是在讨论在这一个点 x_0 处的 $\{S_n(x_0)\}$ 的收敛性.

如下定义 $S_n(x_0)$, 将其中的 Fourier 系数用 (16.4) 代入, 然后利用三角函数的和角公式以及恒等式 $\dfrac{1}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\cos k\theta=\dfrac{\sin(n+\dfrac{1}{2})\theta}{2\sin\dfrac{\theta}{2}}$, 这样就有

$$\begin{aligned}
S_n(x_0)&=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx_0+b_k\sin kx_0)\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\cos kt\cos kx_0+\sin kt\sin kx_0)\right]f(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x_0)\right]f(t)\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\dfrac{1}{2})(t-x_0)}{2\sin\dfrac{t-x_0}{2}}\cdot f(t)\,\mathrm{d}t \qquad (16.7)\\
&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin(n+\dfrac{1}{2})u}{2\sin\dfrac{u}{2}}\cdot f(x_0+u)\,\mathrm{d}u \qquad (16.8)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} \cdot [f(x_0+u)+f(x_0-u)]\,\mathrm{d}u. \tag{16.9}$$

注 对上述推导的最后几步作些说明. (16.8) 是从 (16.7) 作 $t=x_0+u$ 的变量代换得到的, 其积分区间应当是 $[-\pi-x_0, \pi-x_0]$. 然而利用 f 是周期 2π 的周期函数, (16.8) 中的被积函数也是如此, 因此可以将积分区间仍然取为 $[-\pi,\pi]$ (参见例题 10.30). 最后一步是将 (16.8) 的积分拆开为 $\int_{-\pi}^{0}+\int_0^{\pi}$, 然后在第一个积分中作代换 $u_1=-u$, 使积分区间变为 $[0,\pi]$, 并将 u_1 重新记为 u, 合并两个积分得到 (16.9).

我们关心的问题就是在什么条件下成立

$$\lim_{n\to\infty} S_n(x_0) = f(x_0)? \tag{16.10}$$

由于 Fourier 系数是通过公式 (16.4) 的积分计算得到的, 如果在点 x_0 点处改变 $f(x_0)$ 的值, 则 Fourier 级数不会有任何改变. 由此可见, 极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)$ 即使存在, 也不一定就是 $f(x_0)$.

于是我们不直接讨论问题 (16.10), 而是将 $\{S_n(x_0)\}$ 收敛时的极限记为 S, 然后讨论 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n(x_0)=S$ 在什么条件下成立.

利用公式 (16.9) 和 Dirichlet 积分 (16.6), 可以写出

$$S_n(x_0)-S = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{2\sin\frac{u}{2}} \cdot \varphi(u)\,\mathrm{d}u, \tag{16.11}$$

其中

$$\varphi(u) = f(x_0+u)+f(x_0-u)-2S. \tag{16.12}$$

下面对 (16.11) 再作两步简化, 目的是看出其中的主要部分是什么.

(I) 将 (16.11) 中的分母用 u 代替并估计由此引起的差 (这就是例题 16.7 中的方法). 从

$$\lim_{u\to 0}\left(\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}-\frac{1}{u}\right)=0$$

出发, 可见函数 $\dfrac{1}{2\sin\frac{u}{2}}-\dfrac{1}{u}$ 在 $[0,\pi]$ 上常义可积. 根据 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积与绝对可积, 由 (16.12) 定义的函数 $\varphi(u)$ 在 $[0,\pi]$ 上也可积与绝对可积. 根据 Riemann 引理, 就得到

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi}\sin(n+\frac{1}{2})u\cdot\left(\frac{1}{2\sin\frac{u}{2}}-\frac{1}{u}\right)\cdot\varphi(u)\,\mathrm{d}u=0.$$

于是从 (16.11) 得到

$$S_n(x_0)-S=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{u}\cdot\varphi(u)\,\mathrm{d}u+o(1)\ (n\to\infty).$$

(II) 取定 $\delta \in (0, \pi]$, 将上式的定积分拆开为 $[0, \delta]$ 和 $[\delta, \pi]$ 上的两个积分, 并再次用 Riemann 引理得到

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\delta}^{\pi} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{u} \cdot \varphi(u)\,\mathrm{d}u = 0.$$

由此可见, 取定 $\delta \in (0, \pi]$ 之后, 就有

$$S_n(x_0) - S = \frac{1}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{\sin(n+\frac{1}{2})u}{u} \cdot \varphi(u)\,\mathrm{d}u + o(1)\ (n \to \infty). \tag{16.13}$$

(16.13) 告诉我们, Fourier 级数在点 x_0 的敛散性完全取决于函数 $\varphi(u)$ 在 $u = 0$ 邻近的性质. 从该函数的定义 (16.12) 可以看出, 这仅仅取决于函数 f 在点 x_0 邻近的性质. 这样就得到了 Fourier 级数的局部性定理, 它是 Riemann 首先发现的, 因此也称为 Riemann 定理.

定理 16.3 (Fourier 级数的局部性定理) 函数 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处的敛散性, 以及在收敛时的极限值是什么, 仅仅与 f 在点 x_0 的一个任意小邻域中的性质有关.

前面已经提到, 由于 Fourier 系数是从积分得到的, 因此级数在点 x_0 的敛散性与 $f(x_0)$ 无关. 现在上述局部性定理则表明, 敛散性取决于 f 在点 x_0 的任意邻近的局部性质, 这是非常惊人的一个结论.

如图 16.9 所示, 假设两个函数 f, g 在点 x_0 的一个小邻域中完全相同, 但在此邻域外则毫无关系. 这时 f, g 的 Fourier 级数可以完全不同. 根据局部性定理, 这两个看上去无关的 Fourier 级数在点 x_0 的敛散性则完全相同. 若收敛, 则它们在 $x = x_0$ 的级数和也相同.

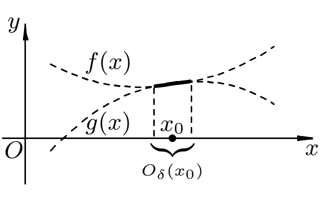


图 16.9: 局部性定理示意图

显然, 局部性定理是 Fourier 级数理论中的最基本结果. 它告诉我们, 虽然级数系数是根据函数在一个周期长度上的积分确定的, 但每一个点处的敛散性却只由函数在该点的局部性质决定.

注 Fourier 级数的敛散性问题非常困难, 但已经取得了丰富的成果. 下面是其中有里程碑意义的几项工作.

1876 年 Du Bois Reymond① 首先举出例子说明在 f 的连续点上, f 的 Fourier 级数可以发散. 这表明连续性条件是不足以保证 Fourier 级数收敛的.

1930 年, Kolmogorov 举出例子, 一个可积且绝对可积函数的 Fourier 级数处处发散.

① 杜 · 布瓦–雷蒙 (Paul David Gustav Du Bois–Reymond, 1831–1889), 德国数学家.

1966 年, Carleson[①] 证明: 平方可积函数的 Fourier 级数一定几乎处处收敛. 这当然包括连续函数在内.

16.2.3 Dini 判别法

从 (16.13) 可以导出多种判别法. 最常用的判别法之一为 Dini 判别法. 设 f 为周期 2π 的可积与绝对可积函数, $\varphi(u)=f(x_0+u)+f(x_0-u)-2S$.

Dini 判别法 若有 $\delta>0$, 使得积分 $\displaystyle\int_0^\delta \frac{|\varphi(u)|}{u}\,\mathrm{d}u$ 收敛, 则 f 的 Fourier 级数在点 x_0 处收敛于 S.

证 写出 (16.13):

$$S_n(x)-S=\frac{1}{\pi}\int_0^\delta \sin(n+\frac{1}{2})u\cdot\frac{\varphi(u)}{u}\,\mathrm{d}u+o(1)\ (n\to\infty),$$

根据条件用 Riemann 引理即得. □

如上所示, 在 Riemann 引理和 (16.13) 的基础上, Dini 判别法很容易就得到了. 但在使用上还不方便, 其中也没有告诉我们 S 是什么. 下面写出最常见的一些情况作为 Dini 判别法的推论.

只讨论两种情况[②]: (1) f 在点 x_0 处连续, (2) f 以点 x_0 为第一类间断点. 它们的共同点是都存在两个单侧极限, 然后取

$$S=\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)].\tag{16.14}$$

当 f 于点 x_0 连续时 $S=f(x_0)$. 其实从 $\varphi(u)$ 的定义 (16.12) 和 Dini 判别法中的积分收敛条件可见, 对以上两种情况来说 (16.14) 中的 S 是惟一可能的选择.

Dini 判别法的推论 1 设有 $\delta>0$, 使得函数 f 在点 x_0 邻近满足如下的指数为 α 的广义 Lipschitz 条件:

$$|f(x_0\pm u)-f(x_0^\pm)|\leqslant Lu^\alpha,\quad 0<u\leqslant\delta,$$

其中 $L>0$, $0<\alpha\leqslant 1$ (若 $\alpha>1$ 则只能是常值函数), 则 f 的 Fourier 级数于点 x_0 处收敛于 (16.14) 定义的 S.

证 从 $\varphi(u)$ 的定义 (16.12) 可见有 $\lim\limits_{u\to0^+}\varphi(u)=0$. 这时从下列不等式

$$\frac{|\varphi(u)|}{u}\leqslant\frac{|f(x_0+u)-f(x_0^+)|+|f(x_0-u)-f(x_0^-)|}{u}\leqslant\frac{2L}{u^{1-\alpha}}$$

---

① 卡尔森 (Lennart Carleson, 1928–), 瑞典数学家.

② 在这里我们不加证明地叙述 Fourier 级数理论中的一个基本结果: 若 x_0 是 f 的连续点或第一类间断点, 且存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}S_n(x_0)$, 则这个极限只能是 $f(x_0)$ 或 $\frac{1}{2}[f(x_0^+)+f(x_0^-)]$. 在本书的正文中我们没有用这个结果, 但包括从 (16.8) 到 (16.9) 以及下面的讨论都是在这个结果的指导下进行的. 其证明见 [25, 命题 15.2.2].

和 $0 \leqslant 1-\alpha < 1$, 利用积分 $\displaystyle\int_0^\delta \frac{\mathrm{d}u}{u^{1-\alpha}}$ 收敛, 可见 Dini 判别法的条件满足. □

Dini 判别法的推论 2　设 f 在点 x_0 两侧存在下列广义单侧导数

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{f(x_0 \pm u) - f(x_0^\pm)}{u}, \tag{16.15}$$

则 f 的 Fourier 级数于点 x_0 收敛于 (16.14) 定义的 S.

证　这就是推论 1 中的 $\alpha = 1$ 的特例, 这时 $\displaystyle\int_0^\delta \frac{|\varphi(u)|}{u}\,\mathrm{d}u$ 为常义积分. □

注　由于函数在点 x_0 可导时一定连续, 这时在 (16.15) 中的两个极限也一定存在 (且相等), 因此在函数的可导点上, Fourier 级数一定收敛于 f 在该点的值.

更为方便的是以下推论, 它解决了绝大多数常见函数的 Fourier 级数的收敛问题. 今后将满足其中条件的函数简称为分段光滑函数.

Dini 判别法的推论 3　设周期函数 f 在每个有界区间上至多除去有限点外, 处处存在连续的导函数, 而在每个例外点处, 函数 f 及其导函数 f' 都存在两个单侧极限, 则 f 的 Fourier 级数处处收敛于 $\dfrac{1}{2}[f(x^+) + f(x^-)]$.

证　如推论 2 的注所示, 只需要讨论例外点. 设 x_0 处右侧存在 $f(x_0^+)$, 同时又存在导函数的单侧极限 $f'(x_0^+)$, 则用 L'Hospital 法则就得到

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{f(x_0 + u) - f(x_0^+)}{u} = f'(x_0^+),$$

这样就证明了 f 在 x_0 的右侧存在广义导数. 对左侧的证明是类似的. □

注　以上讨论与例题 8.12 以及导数极限定理 (即定理 7.9) 完全类似.

例题 16.8 对于本章前 5 个例题中的 Fourier 级数. 确定级数的和, 并与 f 作比较.

解　例题 16.1 (参见图 16.1).

其中周期 2π 的函数 f 在 $(-\pi, \pi]$ 上为 $\begin{cases} 1, & 0 \leqslant x \leqslant \pi \\ 0, & -\pi < x < 0 \end{cases}$, 作为周期 2π 的函数, 所有 $n\pi\ (n \in \mathbb{Z})$ 的点为第一类间断点. 由于 f 分段光滑函数, 因此它的 Fourier 级数处处收敛. 从 (16.14) 可见在所有间断点上级数的和为 $\dfrac{1}{2}$, 而在其他所有点上级数的和与 f 相等. 这些从该例题的附图 16.1 看是非常清楚的. 在 $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$ 上的 Fourier 级数的和为:

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n-1)x}{2n-1} = \begin{cases} 0, & -\pi < x < 0, \\ 1, & 0 < x < \pi, \\ \dfrac{1}{2}, & x = 0, \pm\pi. \end{cases}$$

例题 16.2 (参见图 16.2).

其中周期 2π 的函数 f 在 $[0,2\pi)$ 上等于 x. 作同样讨论可以写出在 $[0,2\pi]$ 上的 Fourier 级数的和为:

$$\pi-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}x, & 0<x<2\pi,\\ \pi, & x=0,2\pi.\end{cases}$$

例题 16.3 (参见图 16.3).

其中先在 $[-\pi,\pi)$ 上给定 $f(x)=\mathrm{e}^{\alpha x}$, $\alpha\neq 0$, 然后作周期 2π 的延拓. 可见所有 $(2n+1)\pi$ $(n\in\mathbb{Z})$ 的点为第一类间断点. 于是有

$$\frac{\mathrm{e}^{\alpha\pi}-\mathrm{e}^{-\alpha\pi}}{\pi}\cdot\left(\frac{1}{2\alpha}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\alpha\cos nx-n\sin nx}{\alpha^2+n^2}\right)=\begin{cases}\mathrm{e}^{\alpha x}, & |x|<\pi,\\ \dfrac{1}{2}[\mathrm{e}^{\alpha\pi}+\mathrm{e}^{-\alpha\pi}], & x=\pm\pi.\end{cases}$$

例题 16.4 (参见图 16.4).

其中先在 $(0,\pi)$ 上给定 $f(x)=\begin{cases}1, & 0<x<h\\ 0, & h<x<\pi\end{cases}$, 其中 $0<h<\pi$, 然后作偶延拓, 再按照周期 2π 延拓. 这时所有 $n\pi$, $2n\pi\pm h$ $(n\in\mathbb{Z})$ 都是第一类间断点. 可以写出 Fourier 级数在 $[0,\pi]$ 上的和为

$$\frac{h}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nh}{n}\cos nx=\begin{cases}1, & 0\leqslant x<h,\\ \dfrac{1}{2}, & x=h,\\ 0, & h<x\leqslant\pi.\end{cases}$$

其中 $x=0,\pi$ 处原来的 f 没有定义. 在作上述偶延拓和周期 2π 延拓后它们都是可去第一类间断点, 因此按照 (16.14) 可知级数的和在该处分别为 1 和 0.

例题 16.5 (参见图 16.5).

其中将 $f(x)=|x|,-1\leqslant x\leqslant 1$ 按照周期 2 延拓. 这时可以看出所得的周期函数处处连续, 在所有整数点处不可导, 但存在两个单侧导数, 因此就可以知道在 $[-1,1]$ 上的 Fourier 级数处处收敛于 $f(x)=|x|$, 即有:

$$\frac{1}{2}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{(2n-1)^2\pi^2}\cos(2n-1)\pi x=|x|,\quad -1\leqslant x\leqslant 1.\quad\square$$

注 1 例题 16.6 (参见图 16.7) 与前 5 个例题不同, 是先用 Riemann 引理求出三角级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{x}$ 的和函数, 然后从例题 16.2 可以推出该三角级数就是 $S(x)$ 的 Fourier 级数. 当然也可以直接用 Euler–Fourier 公式 16.4 来验证这个结论. 下面就是在 $[0,2\pi]$ 上的级数的和函数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}=\begin{cases}\dfrac{\pi-x}{2}, & 0<x<2\pi,\\ 0, & x=0,2\pi.\end{cases}$$

注 2 注意在确定 Fourier 级数的和函数时, 要养成作图的习惯, 这对于在每一个间断点处确定函数的两个单侧极限, 从而确定级数的和, 是有帮助的. 例如, 设给定 $(-\pi,\pi]$ 上的连续可微函数, 要求确定它的 Fourier 级数的和函数在 $(-\pi,\pi]$ 的值. 这时在 $(-\pi,\pi)$ 上级数的和处处等于 f 的值, 但在点 π 处就不一定. 若有 $f(\pi)\neq f(-\pi^+)$, 则在将 f 作周期 2π 的延拓时, 点 $-\pi,\pi$ 都是不连续点. 于是 Fourier 级数的和函数在点 π 处只能收敛于 $\dfrac{1}{2}[f(\pi)+f(-\pi^+)]$.

练 习 题

1. 试在较强的条件 $f'\in R[a,b]$ 下直接证明 Riemann 引理:
$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0,\qquad \lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0.$$

2. 设 f 为 $[0,+\infty)$ 上的单调函数, 且 $f(+\infty)=0$, 证明:
$$\lim_{p\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\sin px\,\mathrm{d}x=0,\qquad \lim_{p\to\infty}\int_0^{+\infty} f(x)\cos px\,\mathrm{d}x=0.$$

3. 设 $f'\in R[-\pi,\pi]$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty} na_n=0$.

4. 记 Dirichlet 核 $D_n(x)=\dfrac{\sin(n+\frac{1}{2})x}{2\sin\frac{x}{2}}\left(=\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx\right)$, 证明:
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\pi} xD_n(x)\,\mathrm{d}x=0,$$
并由此求出以下两个级数的和:
(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(2n-1)^2}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$.

5. 记 Fejér 核 $F_n(x)=\dfrac{1}{n\pi}\left(\dfrac{\sin\frac{nx}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)^2$, 证明: $\displaystyle\int_0^{\pi} F_n(x)\,\mathrm{d}x=1$.

6. 设 $f\in R[-\pi,\pi]$, $S_n(x)$ 是 f 的 Fourier 级数的部分和函数, 证明:
$$S_n(x)=O(\ln n).$$

7. 设 f 是能展开为 Fourier 级数的周期 2π 的周期函数, 证明:
$$f(x+\pi)-f(x)=-\frac{2}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(2n+1)(t-x)\,\mathrm{d}t.$$

8. 设在 $(-\pi,\pi)$ 上成立
$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

问: 级数 $\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\cos nx$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin nx$ 是否收敛? 若收敛则和函数是什么?

9. 若 $f\in R[a,b]$, 证明:

$$\lim_{p\to\infty}\int_a^b f(x)|\sin px|\,\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(此题有几种方法. 其中之一是用 §16.1 练习题 8(5) 中的 $|\sin x|$ 的 Fourier 级数展开式.)

10. 确定 §16.1 的练习题 8 与 9 中各题的 Fourier 级数的敛散情况.

11. 记 n 阶三角多项式为 $T_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$, $D_n(x)$ 同题 4, 证明:

(1) $T_n(x)=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}T_n(u)D_n(u-x)\,\mathrm{d}u$;

(2) $\max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|T_n'(x)|\leqslant n^2\max\limits_{-\pi\leqslant x\leqslant\pi}|T_n(x)|$.

§16.3 Fourier 级数的性质

16.3.1 最佳平方逼近

设 f 是周期 2π 的周期函数, 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积与平方可积①.

考虑用三角多项式

$$U_n(x)=\frac{\alpha_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k\cos kx+\beta_k\sin kx) \tag{16.16}$$

来逼近 f. 这里的逼近是按照平方平均 (均方) 的意义上来定义的, 即如何选择 (16.16) 中的 $2n+1$ 个系数, $\alpha_k\ \forall\, k=0,1,\cdots,n$ 和 $\beta_k\ \forall\, k=1,\cdots,n$, 使得

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-U_n(x)]^2\,\mathrm{d}x \tag{16.17}$$

达到最小.

以下定理中的记号与前面相同, 即

$$f\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

并将其部分和记为 $S_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$.

下面证明这个最优化问题的解是取 $U_n(x)=S_n(x)$.

定理 16.4 设 f 是周期 2π 的函数, 且在 $[-\pi,\pi]$ 上可积与平方可积, 则有

$$\min_{U_n}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-U_n(x)]^2\,\mathrm{d}x=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

证 首先直接计算 (16.17) 中的积分, 并利用关于 Fourier 系数的 Euler–Fourier 公式 (16.4) 和三角函数系的正交性:

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(f-U_n)^2&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2-2\int_{-\pi}^{\pi}fU_n+\int_{-\pi}^{\pi}U_n^2\\&=\int_{-\pi}^{\pi}f^2-\pi a_0\alpha_0-2\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k\alpha_k+b_k\beta_k)+\frac{\pi\alpha_0^2}{2}+\pi\sum_{k=1}^{n}(\alpha_k^2+\beta_k^2).\end{aligned}$$

然后用配方法得到

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}(f-U_n)^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2+\frac{\pi}{2}(\alpha_0-a_0)^2+\pi\sum_{k=1}^{n}[(\alpha_k-a_k)^2+(\beta_k-b_k)^2]\\-\frac{\pi}{2}a_0^2-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),\end{aligned}$$

① 这时若 f 是常义可积, 当然也绝对可积; 若 f 是广义可积, 则从不等式 $|f(x)|\leqslant\dfrac{1+f^2(x)}{2}$ 可见, 在有界区间上平方可积必定绝对可积. 因此可积与平方可积可以推出绝对可积.

这样就知道当 $\alpha_0=a_0,\ \alpha_k=a_k,\ \beta_k=b_k,\ k=1,\cdots,n$ 时上式左边的积分值达到最小, 且同时得到最小值为

$$\min_{U_n}\int_{-\pi}^{\pi}(f-U_n)^2=\int_{-\pi}^{\pi}(f-S_n)^2=\int_{-\pi}^{\pi}f^2-\frac{\pi}{2}a_0^2-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2).\quad\square$$

利用上述定理证明的最后一式, 就可以得到著名的 Bessel① 不等式. 我们将它写为下面的定理.

定理 16.5 (Bessel 不等式) 设周期 2π 的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积与平方可积, 且有 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则成立不等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2.\tag{16.18}$$

证 从定理 16.4 最后得到的最小值非负, 可见成立不等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2.$$

令 $n\to\infty$ 就得到所要求的不等式. $\square$

注 可以证明, 实际上在不等式 (16.18) 中成立等号, 这就是 Parseval② 等式:

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2.\tag{16.19}$$

由于需要更多的工具, 我们将在下一节最后给出它的证明.

例如, 对于 $(0,2\pi)$ 上的 Fourier 展开式

$$\frac{\pi-x}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n},$$

用 Parseval 等式就可以得到

$$\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{4}\int_{0}^{2\pi}(\pi-x)^2\,\mathrm{d}x=\frac{1}{6}\pi^3,$$

这样就得到 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

下面我们用函数空间的概念对本小节提出的问题, 即使得 (16.17) 最小化的问题, 以及定理 16.4 给出的答案, 作出几何解释.

从函数空间的角度来看, U_n 是三角函数系

$$\{1,\cos x,\sin x,\cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$$

① 贝塞尔 (Friedrich Wilhelm Bessel, 1784–1846), 德国天文学家、数学家.
② 帕塞瓦尔 (Marc Antoine Parseval, 1755–1836), 法国数学家.

中前 $2n+1$ 个函数的线性组合. 用 Π_n 表示所有这样的 U_n 所成的集合, 则它是所有周期 2π 的函数全体所成线性空间中的线性子空间. 如在本章开始时那样, 在这样的函数空间中引入 $(f,g)=\int_{-\pi}^{\pi} fg$ 作为 f 和 g 的内积, 当时我们将内积为 0 作为 f 与 g 正交的定义. 现在我们从内积引入 f 的范数 为

$$\|f\|=\sqrt{(f,f)}=\sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x},$$

则就可以用 $\|f-g\|$ 来表示 f 与 g 的距离①.

于是本小节的问题就是, 对于给定的函数 f, 在子空间 (或者说超平面) Π_n 中哪一个元与 f 最为接近? 在示意图 16.10 中用过原点 O 的平面表示 Π_n, 函数 f 用平面外的一个向量代表.

定理 16.4 中的计算表明: S_n 是在超平面 Π_n 中最接近 f 的元. 在定理最后得到的等式可以改写为

$$\|f-S_n\|^2=\|f\|^2-\|S_n\|^2,$$

这显然就是勾股定理. 它等价于

$$(f-S_n,S_n)=0,$$

即 $f-S_n$ 与 S_n 正交.

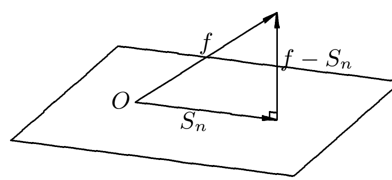


图 16.10: (16.17) 的最小化问题的几何意义

16.3.2 Fourier 级数的一致收敛性

从上一节的 Dini 判别法和许多具体例子可以知道, Fourier 级数的和函数可以有第一类间断点. 从函数项级数的连续性定理 (即定理 15.5) 知道, 这时的 Fourier 级数不可能一致收敛. 下面给出保证 Fourier 级数一致收敛的充分性条件. 实际上只要对于上一节的分段光滑条件再加上连续性条件就够了.

为今后引用方便起见, 先证明一个引理.

引理 设 f 是周期 2π 的连续函数, 且分段光滑, 又设 f 的 Fourier 系数为 $\{a_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{b_n\}_{n\geqslant 1}$, f' 的 Fourier 系数为 $\{a_n'\}_{n\geqslant 0}$, $\{b_n'\}_{n\geqslant 1}$, 则有

$$a_0'=0,\quad a_n'=nb_n,\quad b_n'=-na_n\ \forall\, n.$$

证 首先注意在 f 分段光滑的条件下, 导函数 f' 在周期长度的区间上至多只在有限个点上没有定义, 在这些例外点之间的区间上连续, 且在区间端点处均存在

① 回顾在 §15.1.2 中也曾经引入范数来刻画函数之间的距离, 并用于一致收敛性的讨论, 可见在函数空间中可以引入不同的范数. 实际上不同的范数对应了不同的收敛性. 在这里引入的平方平均范数对应于平方平均收敛, 它是点态收敛和一致收敛之外的新的收敛性概念.

极限, 因此是常义可积函数. 先计算它的第一个 Fourier 系数. 利用 $f(-\pi)=f(\pi)$, 就有

$$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}[f(\pi)-f(-\pi)]=0.$$

再用广义分部积分公式 (见定理 10.14 的注), 就可以得到所要求的其余结果:

$$\begin{aligned}a_n'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}f(x)\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)n\sin nx\,\mathrm{d}x\\&=\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=nb_n,\\b_n'&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\sin nx\,\mathrm{d}x=\frac{1}{\pi}f(x)\sin nx\Big|_{\pi}^{\pi}-\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)n\cos nx\,\mathrm{d}x\\&=-\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x=-na_n.\quad\square\end{aligned}$$

定理 16.6 设 f 是周期 2π 的连续函数, 且分段光滑, 则 f 的 Fourier 级数在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛于 $f(x)$.

证 从 Dini 判别法 (的推论 3) 和 f 的连续性知道, f 的 Fourier 级数处处收敛于 $f(x)$, 这样就有

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx). \tag{16.20}$$

将 f' 的 Fourier 系数记为 $\{a_n'\}_{n\geqslant0}$ 和 $\{b_n'\}_{n\geqslant1}$, 从引理和平均值不等式可以得到

$$|a_n|+|b_n|=\frac{|b_n'|}{n}+\frac{|a_n'|}{n}\leqslant\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2}[(a_n')^2+(b_n')^2].$$

由于 f' 可积与平方可积, 因此利用对于 f' 的 Fourier 系数的 Bessel 不等式, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}[(a_n')^2+(b_n')^2]$ 收敛, 这样就推出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|+|b_n|<+\infty,$$

这保证了 f 的 Fourier 级数一致绝对收敛. $\square$

16.3.3 逐项积分定理

与第十五章的逐项积分定理 (即定理 15.7(2)) 完全不同, 这里不仅不需要一致收敛条件, 甚至连收敛性条件也是多余的.

定理 16.7 (Fourier 级数的逐项积分定理) 设 f 为周期 2π 的分段连续函数[①], 在 $[0,2\pi]$ 上可积与绝对可积, 且已知有

① 为了证明简单起见, 这里加了分段连续条件. 其实去掉这个条件之后逐项积分定理仍然成立, 证明见 [8].

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

则有:

(1) 级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n}$ 收敛,

(2) $\forall\, x, x_0 \in \mathbb{R}: \displaystyle\int_{x_0}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{x_0}^{x} \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{x_0}^{x} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,\mathrm{d}t.$

证 对 (2) 只需要对于 $x_0 = 0$ 作出证明即可.

定义函数 $F(x) = \displaystyle\int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) \mathrm{d}t$①, 则从

$$F(2\pi) - F(0) = \int_0^{2\pi} \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t - a_0\pi = 0,$$

可见 F 是周期 2π 的连续函数.

在 f 为分段连续且只有第一类间断点的条件下, 由于在 f 连续处有 $F' = f$, 因此 F 就是分段光滑的连续函数. 于是 F 的 Fourier 级数处处收敛于自身, 即有

$$F(x) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos nx + B_n \sin nx),$$

其中右边为 F 的 Fourier 级数. 通过分部积分就可以对于所有正整数 n 得到

$$A_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n\pi} F(x) \sin nx \Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{b_n}{n},$$

$$B_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} F(x) \sin nx\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{n\pi} F(x) \cos nx \Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{a_n}{n}.$$

(这里又使用了广义的分部积分公式, 见定理 10.14 的注.)

在 F 的 Fourier 展开式中用 $x = 0$ 代入, 就得到

$$0 = F(0) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n = \frac{A_0}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n},$$

这样就证明了定理的 (1), 且知道该级数的和是 $\dfrac{A_0}{2}$.

在 F 的 Fourier 级数展开式中, 将 $A_0/2$ 换为 $-\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} A_n$, 代入到和式中, 再用上面得到的 A_n, B_n 的表达式, 就得到

---

① 周期 2π 的函数 f 的积分 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$ 一定可以分解为一个线性函数 ax 和一个周期 2π 的函数之和 (见 §10.4 练习题 10), 其中系数 $a = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{a_0}{2}$. 于是 $\displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t - \frac{a_0}{2}x = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right) \mathrm{d}t$ 就是分解式中的周期函数. 这就是 $F(x)$ 的来历.

$$\begin{aligned}F(x) = \int_0^x \left(f(t) - \frac{a_0}{2}\right)\,\mathrm{d}t &= \sum_{n=1}^{\infty}[A_n(\cos nx - 1) + B_n \sin nx] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{b_n}{n}(1-\cos nx) + \frac{a_n}{n}\sin nx\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x (a_n \cos nt + b_n \sin nt)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

再将左边的 $\int_0^x \frac{a_0}{2}\,\mathrm{d}t$ 移到右边即得所求. □

注 1 这个定理的一个副产品就是可以找到不是 Fourier 级数的三角级数. 例如下面的三角级数:

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin nx}{\ln n}, \tag{16.21}$$

与我们熟悉的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$ 一样, 只要用 Dirichlet 判别法就知道级数 (16.21) 处处收敛. 但由于级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散, 根据定理 16.7(1) 知道 (16.21) 中的三角级数不可能是 Fourier 级数.

注 2 应用逐项积分定理使得我们可以从 (不知是否收敛的) Fourier 级数得到新的 Fourier 级数, 而且它是收敛的. 下面是一个典型例子.

例题 16.9 在 $[0, 2\pi]$ 上, 有

$$\frac{\pi - x}{2} \sim \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n}$$

(实际上已知在 $(0, 2\pi)$ 上成立等号), 取 $x \in [0, 2\pi]$, 逐项积分得到 (逐项积分定理中的 x 是没有限制的, 但这里只能取 $x \in [0, 2\pi]$, 因为当 x 越出 $[0, 2\pi]$ 时左边的函数表达式不正确):

$$\begin{aligned}\int_0^x \left(\frac{\pi - t}{2}\right)\mathrm{d}t = \frac{\pi x}{2} - \frac{x^2}{4} &= \sum_{n=1}^{\infty}\int_0^x \frac{\sin nt}{n}\,\mathrm{d}t \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n^2}\cos nt\Big|_0^x\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1-\cos nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx,\end{aligned}$$

且在 $[0, 2\pi]$ 上成立. 利用前面已经得到的 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$, 就得到一个新的 Fourier 级数展开式, 即在 $[0, 2\pi]$ 上成立

$$\frac{x^2}{4} - \frac{\pi x}{2} + \frac{\pi^2}{6} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\cos nx. \quad \square$$

注 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$ 是在前面的 Parseval 等式 (16.19) 的一个应用. 由于 (16.19) 在那里没有证明, 因此我们在这里对这个级数的和给出一个独立的证明. 为此令 $x=\pi$ 代入上面逐项求积得到的等式中, 利用 $\cos n\pi=(-1)^n$, 就有

$$\frac{\pi^2}{4}=2\left(1+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right).$$

记收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的和为 A, 则就有

$$\begin{aligned}A&=\left(1+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{(2n-1)^2}+\cdots\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}+\cdots\right)\\&=\frac{\pi^2}{8}+\frac{1}{4}A,\end{aligned}$$

这样就又得到 $A=\frac{\pi^2}{6}$.

16.3.4 逐项求导定理

这里也不宜用第十五章中的逐项求导定理 (即定理 15.8(2)), 而需要利用 Fourier 级数自身的特点来讨论.

假设周期 2π 的函数 f 可积且绝对可积, 且有

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

问题是在什么条件下可以逐项求导得到

$$f'(x)\sim\left(\frac{a_0}{2}\right)'+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)'=\sum_{n=1}^{\infty}(nb_n\cos nx-na_n\sin nx).$$

容易看到, 首先要假设 f 可导, 至多只能在有限个点上例外, 且 f' 可积与绝对可积. 其次, 从上面可见 f' 的第一个 Fourier 系数等于 0, 这就是

$$\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)\,\mathrm{d}x=f(\pi)-f(-\pi)=0,$$

于是 f 必须是周期 2π 的连续函数. 若不满足这个条件, 则不可能逐项求导.

这方面叙述下列结果.

定理 16.8 (Fourier 级数的逐项求导定理) 设 f 是周期 2π 的连续函数, 且

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

又设导函数 f' 分段光滑, 则就有

$$\frac{f'(x^-)+f'(x^+)}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)'.$$

证　由于导函数 f' 分段光滑, 因此可积与绝对可积, 记 f' 的 Fourier 系数为 $\{a'_n\}_{n\geqslant 0}$, $\{b'_n\}_{n\geqslant 1}$. 用 §16.3.2 的引理, 就有

$$a'_0 = 0, \quad a'_n = nb_n, \quad b'_n = -na_n \ \forall\, n.$$

又因 f' 分段光滑, 从 Dini 判别法的推论 3 知道处处成立

$$\frac{f'(x^-)+f'(x^+)}{2} = \sum_{n=1}^{\infty}(a'_n \cos nx + b'_n \sin nx).$$

合并以上结果, 可见上式右边就是 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)'$.　□

注　再次回顾在 $(0, 2\pi)$ 上成立的 Fourier 级数展开式

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n},$$

左边的和函数在 $(0, 2\pi)$ 的导数恒等于 $-\dfrac{1}{2}$, 但由于该函数不能延拓为周期 2π 的连续函数, 因此不可能对它的 Fourier 级数逐项求导. 事实上, 右边逐项求导后得到的是处处发散的一个三角级数: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$.

练 习 题

1. 设 f 在 $[-\pi, \pi]$ 上可积与平方可积, 且有

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

记 $S_n(x) = \dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$, 证明

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_{n+1}(x)]^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \, \mathrm{d}x.$$

(用 §16.3.1 中的语言就是 $\|f - S_{n+1}\| \leqslant \|f - S_n\|$.)

2. 设 f 的 Fourier 级数 $\dfrac{a_0}{2} + \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上一致收敛, 证明 Parseval 公式

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\, \mathrm{d}x.$$

3. 若 $f \in C[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, f' 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段连续, 证明

$$a_n = o\Big(\frac{1}{n}\Big), \quad b_n = o\Big(\frac{1}{n}\Big).$$

4. 若 $f \in C[-\pi, \pi]$, $f(-\pi) = f(\pi)$, 且已知 f 的所有 Fourier 系数都等于 0, 证明: $f(x) \equiv 0$.

5. (1) 证明

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{n^3}=\frac{1}{12}x^3-\frac{\pi}{4}x^2+\frac{\pi^3}{6}x,\ 0\leqslant x\leqslant 2\pi;$$

(2) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$.

6. (1) 记 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{(\pi-1)x}{2}, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{\pi-x}{2}, & 1<x\leqslant\pi,\end{cases}$ 证明成立以下展开式:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^2}\sin nx;$$

(2) 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^2 n}{n^4}$.

7. (1) 若 $\frac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$ 的系数满足条件:

$$a_n=O(\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}),\quad b_n=O(\frac{1}{n^{2+\varepsilon}}),$$

证明: 该三角级数一致收敛, 且和函数连续可导;

(2) 若 f 是周期 2π 的周期函数, $f''\in R[-\pi,\pi]$, 证明: f 的 Fourier 级数一致收敛.

§16.4 用多项式一致逼近连续函数

16.4.1 Weierstrass 一致逼近定理

Weierstrass 的一致逼近定理有两种形式, 分别称为第一逼近定理和第二逼近定理, 即在有界闭区间上的连续函数一定可以用多项式或三角多项式一致逼近到事先指定的任意精确程度. 证明方法很多, 可参考 [25] 的 §16.3.

下面的引理实际上是定理 16.6 的一个特殊情况, 由于其本身的简单性, 我们给出一个独立的证明.

引理 设 $\varphi(x)$ 是周期 2π 的分段线性连续函数, 则 $\varphi(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛于 $\varphi(x)$.

证 写出①

$$\varphi(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

根据分段线性的条件, 存在分划 $\{x_0, x_1, \cdots, x_m\}$, $x_0 = -\pi < x_1 < \cdots < x_m = \pi$, 使得 φ 在每个子区间 $[x_{i-1}, x_i]$ 上为线性函数, 导数为 $\varphi'(x) = k_i$ $(i = 1, \cdots, m)$. 令 $M = \max\{|k_1|, \cdots, |k_m|\}$.

直接估计 φ 的 Fourier 系数:

$$\begin{aligned}|a_n| &= \left|\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos nx \,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\frac{1}{n\pi}\varphi(x)\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \varphi'(x)\sin nx \,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\frac{1}{n\pi}\sum_{i=1}^{m} k_i \int_{x_{i-1}}^{x_i} \sin nx \,\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{2mM}{n^2\pi}.\end{aligned}$$

于是 $a_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. 同理可知也有 $b_n = O\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$. 这样就证明了 φ 的 Fourier 级数为一致收敛. □

定理 16.9 (Weierstrass 第一逼近定理) 设 f 是 $[-\pi, \pi]$ 上的连续函数, 且 $f(-\pi) = f(\pi)$, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在三角多项式

$$T(x) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{n}(\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx),$$

使得成立

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon \ \forall x \in [-\pi, \pi].$$

① 这时 φ 为分段光滑的连续函数, 因此其 Fourier 级数处处收敛. 但下面将直接证明 Fourier 级数一致收敛, 从而不必在这里用 Dini 判别法.

证 从 $f \in C[-\pi,\pi]$ 可知 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上一致连续, 因此对 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, $\forall\, x', x'' \in [-\pi,\pi]$, 只要 $|x'-x''|<\delta$, 就有 $|f(x')-f(x'')|<\dfrac{\varepsilon}{2}$.

对区间 $[-\pi,\pi]$ 作分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 使得细度 $\|P\|<\delta$, 然后在每个子区间 $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$ 上定义线性函数

$$\begin{aligned}\varphi(x) &= f(x_{i-1}) + \frac{f(x_i)-f(x_{i-1})}{x_i-x_{i-1}}\cdot(x-x_{i-1})\\ &= f(x_{i-1})\cdot\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}} + f(x_i)\cdot\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}},\end{aligned}$$

于是在 $x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i$ 时就有

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-f(x)| &\leqslant |f(x_{i-1})-f(x)|\cdot\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}} + |f(x_i)-f(x)|\cdot\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\left(\frac{x_i-x}{x_i-x_{i-1}}+\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\right)=\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

可见这样作出的分段线性函数 φ 对于 f 的一致逼近程度小于 $\varepsilon/2$.

由于 $\varphi(x_i)=f(x_i)$ 对每个 $i=0,1,\cdots,n$ 成立, 而 $x_0=-\pi$, $x_n=\pi$, $f(-\pi)=f(\pi)$, 因此也有 $\varphi(-\pi)=\varphi(\pi)$.

将 φ 按照周期 2π 延拓到 $(-\infty,+\infty)$ 上, 这样就得到了周期 2π 的分段线性函数. 应用引理, φ 的 Fourier 级数一致收敛于 φ. 因此只要取足够大的正整数 N, 就可以使得在 $[-\pi,\pi]$ 上 $\varphi(x)$ 与其 Fourier 级数的部分和 $S_N(x)$ 之差的绝对值一致小于 $\varepsilon/2$:

$$|\varphi(x)-S_N(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall\, x\in[-\pi,\pi]. \tag{16.22}$$

从而也就保证在区间 $[-\pi,\pi]$ 上成立

$$|f(x)-S_N(x)|\leqslant|f(x)-\varphi(x)|+|\varphi(x)-S_N(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \quad \square$$

定理 16.10 (Weierstrass 第二逼近定理) 设 f 是有界闭区间 $[a,b]$ 上的连续函数, 则对 $\forall\,\varepsilon>0$, 存在多项式 $p(x)$, 使得成立

$$|f(x)-p(x)|<\varepsilon\ \forall\, x\in[a,b].$$

证 因为作线性变换一定可以将定义区间改变为 $[0,\pi]$, 而且多项式在线性变换下仍为多项式, 因此一开始就不妨设 $a=0, b=\pi$.

将 f 偶延拓为 $[-\pi,\pi]$ 上的偶函数, 这时有 $f(-\pi)=f(\pi)$. 应用第一逼近定理, 存在三角多项式 $T(x)$ (从该定理的证明知道 $T(x)$ 可为余弦函数), 使得成立

$$|f(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall\, x\in[-\pi,\pi].$$

由于正弦函数与余弦函数的 Maclaurin 级数的收敛半径 $R=+\infty$, 因此在 $[0,\pi]$ 上一致收敛, 从而对于上述三角多项式 $T(x)$, 存在多项式 $p(x)$, 使得成立

$$|T(x)-p(x)|<\frac{\varepsilon}{2}\ \forall\, x\in[0,\pi]. \tag{16.23}$$

于是就知道 $\forall\, x\in[0,\pi]$:

$$|f(x)-p(x)|\leqslant|f(x)-T(x)|+|T(x)-p(x)|\leqslant 2\cdot\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon. \quad \square$$

16.4.2 Parseval 等式的证明

利用 Weierstrass 的逼近定理已不难证明前面的 Parseval 等式 (16.19). 为方便起见, 重新叙述如下.

定理 16.11 设周期 2π 的函数 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上可积与平方可积, 且有 $f(x)\sim\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$, 则成立等式

$$\frac{1}{2}a_0^2+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2. \tag{16.24}$$

证 从 Bessel 不等式 (16.18) 知道上式左边的级数收敛, 记

$$\delta_n=\int_{-\pi}^{\pi}f^2-\frac{\pi}{2}a_0^2-\pi\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2),$$

则只需要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\delta_n=0$. 此外, 从定理 16.4 的证明知道 δ_n 具有下列性质:

$$\delta_n=\min_{U_n}\int_{-\pi}^{\pi}(f-U_n)^2=\int_{-\pi}^{\pi}(f-S_n)^2=\|f-S_n\|^2=\|f\|^2-\|S_n\|^2, \tag{16.25}$$

其中 S_n 是 f 的 Fourier 级数的部分和.

以下分几种情况给出证明.

(i) 设 $f\in C[-\pi,\pi]$ 且 $f(-\pi)=f(\pi)$. 对 $\forall\varepsilon>0$, 由第一逼近定理, 存在三角多项式 $T(x)$, 使得

$$|f(x)-T(x)|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{2\pi}}\ \forall x\in[-\pi,\pi].$$

于是就有

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T(x)]^2\,\mathrm{d}x<\varepsilon.$$

由于 $T(x)$ 是三角多项式, 因此从 (16.25) 知道, 存在 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时,

$$\delta_n=\|f-S_n\|^2\leqslant\|f-T\|^2<\varepsilon.$$

这样就证明了 $\delta_n\to 0$.

(ii) 对于其他情况的 f, 下面要分拆 $f=f'+f''$, 这里记号 f',f'' 是两个函数. 因此在这里需要做一些准备工作. 设 f',f'' 的对应的 Fourier 级数的部分和为 S_n' 和 S_n'', 则有 $S_n=S_n'+S_n''$. 又记 $\delta_n'=\|f'-S_n'\|^2$, $\delta_n''=\|f''-S_n''\|^2$, 则从 $|f(x)-S_n(x)|\leqslant|f'(x)-S_n'(x)|+|f''(x)-S_n''(x)|$, 就有

$$[f(x)-S_n(x)]^2\leqslant 2\{[f'(x)-S_n'(x)]^2+[f''(x)-S_n''(x)]^2\},$$

因此得到

$$\delta_n\leqslant 2(\delta_n'+\delta_n''). \tag{16.26}$$

(iii) 现在设 $f \in R[-\pi,\pi]$. 这时 f 有界, 设有 $M>0$, 使得 $|f(x)| \leqslant M\ \forall x \in [-\pi,\pi]$.

先改变 f 在端点的值, 使得 $f(-\pi)=f(\pi)$. 这不影响 f 的可积性和积分值.

对于 $\forall \varepsilon>0$, 存在区间 $[-\pi,\pi]$ 的分划 $P=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$, 使得对应的振幅面积 $\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \dfrac{\varepsilon}{8M}$. 然后构造辅助函数 $\varphi(x)$, 满足 $\varphi(x_i)=f(x_i)\ \forall i=0,1,\cdots,n$, 而在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上为线性函数. (这就是在第一逼近定理中的分段线性函数, 但这里不是一致逼近.)

分拆 $f=(f-\varphi)+\varphi$, 并记 $f'=f-\varphi$, $f''=\varphi$.

由于在每个子区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上, $|f(x)-\varphi(x)| \leqslant \omega_i$ (参见第一逼近定理的证明), 这样就可以估计下列积分

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-\varphi(x)]^2\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{i=1}^{n}\omega_i^2\Delta x_i < 2M\sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i < \frac{\varepsilon}{4}.$$

对于 $f'=f-\varphi$ 的 δ_n' 可以利用 (16.25), 有

$$\delta_n' \leqslant \|f'\|^2 = \|f-\varphi\|^2 < \frac{\varepsilon}{4}.$$

对于 $f''=\varphi$, 则由于函数 $\varphi(x)$ 符合 (i) 中的条件, 因此存在 $N, \forall n \geqslant N: \delta_n'' < \dfrac{\varepsilon}{4}$. 于是从 (16.26) 就有

$$\delta_n \leqslant 2(\delta_n'+\delta_n'') < 2\left(\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\right)=\varepsilon.$$

这样也就得到了 $\delta_n \to 0$.

(iv) 最后考虑 f 在 $[-\pi,\pi]$ 上为广义平方可积的情况. 为简明起见, 考虑 f 在这个区间上只有惟一的奇点 $x=\pi$ 的情况.

根据广义积分收敛的定义, 对于 $\forall \varepsilon>0$, 存在 $\eta>0$, 使得

$$\int_{\pi-\eta}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x < \frac{\varepsilon}{4}.$$

根据 η 分拆 $f=f'+f''$, 其中

$$f'(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[-\pi,\pi-\eta], \\ 0, & x\in(\pi-\eta,\pi]; \end{cases} \qquad f''(x)=\begin{cases} 0, & x\in[-\pi,\pi-\eta], \\ f(x), & x\in(\pi-\eta,\pi]. \end{cases}$$

这时对于 δ_n'' 可以再次用 (16.25) 得到

$$\delta_n'' \leqslant \|f''\|^2 < \frac{\varepsilon}{4},$$

而由于 f' 属于 (iii) 的情况, 存在 $N, \forall n \geqslant N: \delta_n' < \dfrac{\varepsilon}{4}$. 于是同时也就有

$$\delta_n \leqslant 2(\delta_n'+\delta_n'') < 2\left(\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}\right)=\varepsilon.$$

这样也就得到了 $\delta_n \to 0$. □

由 Parseval 等式就立即可以推出, 若一个周期 2π 的连续函数 f 与三角函数系 $\{1,\cos x,\sin x\ \cdots,\cos nx,\sin nx,\cdots\}$ 中的每一个函数在 $[-\pi,\pi]$ 上正交, 则只

能是 $f(x) \equiv 0\ \forall x \in (-\infty, +\infty)$. 这是因为所有的 Fourier 系数都等于 0, 因此从 Parseval 等式得到 $\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 从而 f 只能恒等于 0.

更进一步, 若 f 是在 $[-\pi, \pi]$ 上可积与平方可积的函数, 而且 f 也与三角函数系的每一个都在 $[-\pi, \pi]$ 正交, 则就可以推出 f 在 $[\pi, \pi]$ 上几乎处处为零. 在函数空间中我们认为所有这样的函数都与恒等于 0 的函数等价.

我们将上述事实称为三角函数系 $\{1, \cos x, \sin x \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots\}$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的所有可积与平方可积函数的空间中是完全的. 关于这个概念的意义可以回顾三维 Euclid 空间, 其中任何三个相互正交的非零向量组成完全系, 但少于三个的相互正交向量则是不完全的. 于是三角函数系的完全性表明在对应的函数空间中它们可以作为空间的基底, 而其中每一个函数都可以用它们的线性组合表示出来, 这个表示就是 Fourier 级数.

小结 在 $[-\pi, \pi]$ 上的所有可积与平方可积函数的空间中, 引入内积和相应的范数后, 函数的 Fourier 级数就是函数以三角函数系为基底的正交展开式. 这时的 Parseval 等式就是这个无穷维空间中的广义勾股定理.

练 习 题

1. 设 $f \in C[a, b]$, 且对每一个非负整数 n 有 $\int_a^b x^n f(x)\,\mathrm{d}x = 0$, 证明 $f(x) \equiv 0$.

2. (1) 设 $f \in R[a, b]$, 证明: 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在多项式 $P(x)$, 使得成立
$$\left| \int_a^b [f(x) - P(x)]\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon;$$
(2) 证明: 对每一个非负整数 n, 有 $\lim\limits_{p\to\infty} \int_a^b x^n \sin px\,\mathrm{d}x = 0$;

(3) 对于 $f \in R[a, b]$ 证明 $\lim\limits_{p\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x = 0$;

(4) 设广义积分 $\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ 收敛, 证明 $\lim\limits_{p\to\infty} \int_a^b f(x) \sin nx\,\mathrm{d}x = 0$.

(以上一组题重新给出了 Riemann 引理的证明.)

3. (1) 若多项式函数列 $\{P_n(x)\}$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 则其极限函数只能是多项式;

(2) 能否将 Weierstrass 一致逼近定理推广到 $(-\infty, +\infty)$ 上去?

参 考 文 献

[**说明**] 以下文献按作者名(编者名)的(拼音)字母顺序排列, 对翻译著作未列出译者名.

[1] П. С. Александров, *Introduction of Set Theory and Function Theory*, 1948. (中译本: 亚历山大罗夫, 集与函数的汎论初阶, 高等教育出版社, 1955.)

[2] Г. И. Архипов, В. А. Садовничий, В. Н. Чубариков, *Lectures of Mathematical Analysis*, 2004. (中译本: 阿黑波夫, 萨多夫尼奇, 丘巴里阔夫, 数学分析讲义, 高等教育出版社, 2006.)

[3] C. B. Boyer, *The Concepts of the Calculus, A Critical and Historical Discussion of the Derivative and the Integral*, Hafner Publishing Company, 1949. (中译本: 波耶, 微积分概念史, 对导数与积分的历史性的评论, 上海人民出版社, 1977.)

[4] R. Courant, F. John, *Introduction to Calculus and Analysis*, Springer-Verlaq, 1989. (中译本: 柯朗、约翰, 微积分和数学分析引论, 科学出版社, 2001.)

[5] C. H. Edwards, Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer, 1979. (中译本: 爱德华, 微积分发展史, 北京出版社, 1987.)

[6] 龚昇、林立军, 简明微积分发展史, 湖南教育出版社, 2005.

[7] 关肇直, 高等数学教程, 高等教育出版社, 1959.

[8] Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, Fizmatlit Publishers Russia, 2003. (中译本: 菲赫金哥尔茨, 微积分学教程 (第 8 版), 高等教育出版社, 2006.)

[9] М. К. Гребенча, С. И. Новоселов, Курс математического анализа, 1951. (中译本: 格列本卡, 诺渥舍诺夫, 数学分析教程, 商务印书馆, 1953.)

[10] 华东师范大学数学系编, 数学分析 (第三版), 高等教育出版社, 2001.

[11] 华罗庚, 高等数学引论, 科学出版社, 1963.

[12] V. J. Katz, *A History of Mathematics——An Introduction*, 2nd ed., Addison-Wesley, 1998. (中译本:卡茨, 数学史通论 (第二版), 高等教育出版社, 2004.)

[13] А. Я. Хинчин, A Brief Course of Mathematical Analysis, 1953. (中译本: 辛钦, 数学分析简明教程, 高等教育出版社, 1954.)

[14] А. Я. Хинчин, (中译本: 辛钦, 数学分析八讲, 武汉大学出版社, 1998.)

[15] M. Kline, *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, 1972. (中译本: 克莱因, 古今数学思想, 上海科学技术出版社, 1979.)

[16] K. Knopp, *Theory and Application of Infinite Series*, Dover Publications,Inc., 1990.

[17] E. Landau, *Grundlagen der Analysis*, Akademische Verlag., Leipzig, 1934. (中译本: 兰道, *分析基础*, 高等教育出版社, 1958.)

[18] 李文林, *数学史概论*, 第二版, 高等教育出版社, 2002.

[19] Н. Н. Лузин, *Theory of Function of Real Variables*, 1948. (中译本: 鲁金, *实变函数论*, 高等教育出版社, 1954.)

[20] 莫绍揆, *极限论新解*, 高等教育出版社, 1992.

[21] I. Newton, *The Principia, Mathematical Principles of Natural Philosophy*, A New Translation by I. B. Cohen and A. Whitman, University of California Press, Berkeley, 1999. (该书为拉丁文, 出版于 1687 年, 上面列出的是最新的英译本. 中译本:牛顿,*自然哲学之数学原理·宇宙体系*, 武汉出版社, 1992.)

[22] W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, Third ed., McGraw-Hill Companies,Inc., 1976. (中译本: 卢丁, *数学分析原理*, 人民教育出版社, 1979.)

[23] M. Spivak, *Calculus*, W. A. Benjamin, Inc., 1967. (中译本: 斯皮瓦克, *微积分*, 人民教育出版社, 1980.)

[24] B. L. Van der Waerden, *Algebra*, Springer, 1955. (中译本: 范德瓦尔登, *代数学*, 科学出版社, 1963.)

[25] 谢惠民、恽自求、易法槐、钱定边, *数学分析习题课讲义*, 高等教育出版社, 2003.

[26] 许绍溥、姜东平、宋国柱、任福贤, *数学分析*, 南京大学出版社, 2000.

[27] 徐品方、张红, *数学符号史*, 科学出版社, 2006.

[28] 张筑生, *数学分析新讲*, 北京大学出版社, 1990.

[29] В. А. Зорич (V. A. Zorich), *Mathematical Analysis*, 4th ed., Springer, 2002. (中译本: 卓里奇, *数学分析*, 第四版, 高等教育出版社, 2006.)

[30] 邹应, *数学分析*, 高等教育出版社, 1995.