目　　次

第一编　泛函分析

第二编 变分法

第 一 编

泛 函 分 析

第一章 预备知识

在这一章里，我们将补充数学分析中关于实数的一些重要性质，介绍集合论和映射的基本知识，并引入 Lebesgue 积分的有关概念，为后面对抽象空间和泛函分析的研究作必要的准备.

§1.1 实数及其完备性

1. 有理数的稠密性与不完备性

形如$\frac{p}{q}$的数称为**有理数**，其中 p 与 q 是整数，且 $q>0$，p 与 q 互质(记为$(p,q)=1$). 或者说，一切有限小数和无限循环小数称为有理数. 这两种说法是完全一致的. 有理数的全体记为 R_0.

任何两个有理数 r_1,r_2 之间至少存在一个有理数$\frac{r_1+r_2}{2}$，从而任何两个有理数之间必有无穷多个有理数，这种性质称为有理数的**稠密性**.

有理数虽然是稠密的，但任何两个有理数之间(尽管极其靠近)仍有大量的空隙存在，此种空隙即为无理数. 确切地说，无限不循环小数称为**无理数**. 例如，可以证明 $\sqrt{2}$，π 等都是无理数. 以后大家将知道，无理数的"个数"远比有理数的"个数"多，这种现象我们称之为有理数的**不完备性**(或**不连续性**). 有理数与无理数统称为**实数**，实数的全体记为 R.

关于有理数的不完备性，可以用下述诸例说明.

例 1 考虑有理数列

$$1,\quad 1.4,\quad 1.41,\quad 1.414,\quad 1.4142,\quad \cdots,\qquad (1.1)$$

该数列中每一项都是 R_0 中的元素，而数列(1.1)的极限为 $\sqrt{2}\in R_0$，即此数列在 R_0 中无极限. 换句话说，在数集 R_0 中具有凝聚趋势的数列，在 R_0 中不一定有极限，亦称这种现象为不完备性.

当某集合不完备时，常使人们按惯例认为有效的方法失效.

例 2 在有理数轴上考虑一个闭区间套

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

其中 a_n,b_n 均为有理数，且当 $n\to\infty$ 时，$(b_n-a_n)\to 0$. 因为闭区间的长度趋于零，按照惯例，必能套住一个有理数 $r\in[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$. 但由于 R_0 的不完备性，这个结论就不一定成立. 例如，取

$$a_n:\ 0.1,\ 0.101,\ 0.101001,\ \cdots$$

$$b_n:\ 0.2,\ 0.102,\ 0.101002,\ \cdots$$

这里 $a_n,b_n,n=1,2,\cdots$，都是有理数，并且满足

$$[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots,$$

以及

$$\lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=\lim_{n\to\infty}10^{-\frac{n(n+1)}{2}}=0.$$

显然，只有唯一的数 $c=0.1010010001\cdots\in[a_n,b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$. 但是，数 c 不是有理数.

由此可见，完备性的概念是极为重要的，那么，什么叫完备性呢？概言之，若数集 A 的具有凝聚趋势的数列必在 A 中有极限，则说数集 A 是完备的.

2. 实数的完备性

定义 1 设 $\{x_n\}$ 为数列，x_0 为一定数. 若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当 $n\geqslant N$ 时有 $|x_n-x_0|<\varepsilon$，则称 x_0 为 $\{x_n\}$ 的**极限**，记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$ 或 $x_n\to x_0\ (n\to\infty)$. 这时，称 $\{x_n\}$ 为**收敛数列**.

定义 2 设 $\{x_n\}$ 为数列. 若 $\exists M>0$，使对一切的 n，均有 $|x_n|\leqslant M$，则称 $\{x_n\}$ 为**有界数列**.

易知，收敛数列必是有界数列.

定义 3 从数列$\{x_n\}$中去掉某些项(有限项或无限项)后，剩下的无限项按原来的次序排列所成的新数列，称为数列$\{x_n\}$的一个**子数列**，记为$\{x_{n_k}\}$.

这里k表示新数列的序号，n_k表示新数列的第k项在原数列中的序号，故恒有$n_k \geqslant k$.

按子数列的定义，有下列两个命题成立：

1° 每个数列都有无限多个子数列.

2° $\{x_n\}$有极限$\Longleftrightarrow\{x_n\}$的每个子数列都有相同的极限.

定义 4 若数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant x_{n+1} \leqslant \cdots,$$

则称$\{x_n\}$是**单调增加的**. 若数列$\{x_n\}$满足条件

$$x_1 \geqslant x_2 \geqslant \cdots \geqslant x_n \geqslant x_{n+1} \geqslant \cdots,$$

则称$\{x_n\}$是**单调减少的**.

单调增加和单调减少的数列统称为**单调数列**.

定理 1 设$\{x_n\}$是一实数列，则$\{x_n\}$必有单调的子数列.

证 记$X_n=\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}(n=1,2,\cdots)$. 我们分两种情形证明之.

(1) 如果每个数列X_n均有一个最大元. 设x_{n_1}是X_1中的最大元(如果有不止一个最大元，可取其中任何一个为x_{n_1}). 为了保证$n_1<n_2$，我们在数列X_{n_1+1}中取一个最大元为x_{n_2}，显然$x_{n_1} \geqslant x_{n_2}$. 同理，为了保证$n_2<n_3$，取数列$X_{n_2+1}$中的最大元为$x_{n_3}$，有$x_{n_2} \geqslant x_{n_3}$. 依次类推，可得到数列$\{x_n\}$中的一个单调增加的子数列$x_{n_1} \geqslant x_{n_2} \geqslant \cdots \geqslant x_{n_i} \geqslant \cdots$.

(2) 如果情形(1)不成立，则对某个自然数n_1，数列X_{n_1}中没有最大元. 因为$x_{n_1} \in X_{n_1}$，所以，X_{n_1}中应存在x_{n_2}，使得$x_{n_2}>x_{n_1}(n_2>n_1)$. 同理，X_{n_2}中应存在x_{n_3}，使得$x_{n_3}>x_{n_2}(n_3>n_2)$. 依次类推，可得到数列$\{x_n\}$的一个严格递增的子数列$x_{n_1}<x_{n_2}<\cdots<x_{n_i}<\cdots$.

因此，无论哪种情形，$\{x_n\}$中都有单调子数列. ▎

定义 5　给定数集 A，若有常数 M，使对 $\forall x\in A$，都有 $x\leqslant M$，则称 M 为集 A 的**上界**. 集 A 的最小上界 M_0 称为 A 的**上确界**，记为 $\sup A$（或 $\sup\limits_{x\in A} x$）. 即 $M_0=\sup A$.

因为 M_0 也是 A 的上界，故对 $\forall x\in A$，都有 $x\leqslant M_0$. 又由于 M_0 是 A 的最小上界，从而对 $\forall \varepsilon>0$，$M_0-\varepsilon$ 就不再是 A 的上界了. 于是，得到下述的等价定义.

定义 5′　设 M_0 是数集 A 的上界，如果对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon\in A$，使得 $x_\varepsilon>M_0-\varepsilon$（即 $M_0-\varepsilon$ 不再是 A 的上界），则称 M_0 是 A 的**上确界**.

注　(1) 数集的上确界不一定属于 A. 如 $A=\{x\mid x<0\}$，显然，$\sup A=0\overline{\in} A$. 但若数集 A 有最大值 x_0，则 $\sup A=x_0$.

(2) 非空无上界的数集 A，规定 $\sup A=+\infty$.

(3) 非空数集 A，必存在数列 $\{x_n\}\subset A$，使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\sup A$.

对于上述第(3)条，兹证明如下：

若 $\sup A=+\infty$，则 A 无上界，因此对于数 1，$\exists x_1\in A$，使 $x_1>1$；对于数 2，$\exists x_2\in A$，使 $x_2>2$；…；一般地，对于数 n，$\exists x_n\in A$，使 $x_n>n$. 于是得到一个数列 $\{x_n\}\subset A$，使 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=+\infty$.

若 $\sup A=M_0<+\infty$，按上确界的定义，取 $\varepsilon=\frac{1}{n}$，则 $\exists x_n$，使

$$M_0\geqslant x_n>M_0-\frac{1}{n},$$

取极限即得

$$\lim_{n\to\infty} x_n=M_0=\sup A. \blacksquare$$

定义 6　设数集 A 有下界 m_0，如果 m_0 满足下述三条件之一：

1° m_0 是 A 的最大下界；

2° 对 $\forall \varepsilon>0$，$m_0+\varepsilon$ 不再是 A 的下界；

3° 对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists x_\varepsilon\in A$，使得 $x_\varepsilon<m_0+\varepsilon$，

则称 m_0 为 A 的**下确界**，记为 $\inf A$（或 $\inf\limits_{x\in A} x$）. 即 $m_0=\inf A$.

下确界也有与上确界类似的三点说明，这里不再赘述.

注意到定义 5 与定义 6 并没有回答数集 A 上确界与下确界的

存在性问题，这涉及到实数的严格定义，对此我们不作深入的研究. 但实数系的“没有空隙”的性质，却是十分重要的，人们常常把这种性质表述成一条公理.

上确界存在公理 非空有上界的实数集必有上确界.

推论 非空有下界的实数集必有下确界.

下面，我们将根据上确界存在公理，证明关于实数完备性的几个重要定理.

定理 2 单调有界数列必有极限.

证 设$\{x_n\}$是单调增加数列(对单调减少数列可类似证明)，M_0 是$\{x_n\}$的上确界. 于是，对 $n=1,2,\cdots$，有 $x_n\leqslant M_0$. 按上确界定义有，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得 $M_0-\varepsilon<x_N$. 因为$\{x_n\}$是单调增加的，故当 $n\geqslant N$ 时，有 $M_0-\varepsilon<x_n\leqslant M_0$. 因此，数列$\{x_n\}$收敛于 M_0. ▌

定理 3(Bolzano-Weierstrass 定理) 任何有界数列必有收敛的子数列.

证 设$\{x_n\}$为有界数列. 根据定理 1，$\{x_n\}$必有单调的子数列$\{x_{n_k}\}$. 由于$\{x_n\}$为有界数列，故$\{x_{n_k}\}$也有界. 由定理 2 知，$\{x_{n_k}\}$必收敛. ▌

定理 4(Cantor 闭区间套定理) 设$\{[a_n,b_n]\}$是闭区间序列，它满足下列二条件：

1° $[a_{n+1},b_{n+1}]\subset[a_n,b_n]$，即 $a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n$，$n=1,2,\cdots$；

2° $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$.

则存在唯一的一点 $c\in[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$.

证 记 $A=\{a_n\}$，$B=\{b_n\}$. 由条件 1°知，每个 b_n 都是 A 的上界，而每个 a_n 都是 B 的下界，从而

$$a_n\leqslant\sup A\leqslant b_n,\quad a_n\leqslant\inf B\leqslant b_n,\quad n=1,2,\cdots,$$

这说明 $\sup A$ 是 B 的下界，而 $\inf B$ 是 A 的上界. 于是

$$a_n\leqslant\sup A\leqslant\inf B\leqslant b_n,n=1,2,\cdots.$$

由条件 2°可推出

$$0\leqslant \inf B-\sup A\leqslant \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0,$$

故知 $\sup A=\inf B$. 所以,存在点 $c=\sup A=\inf B$,使得 $a_n\leqslant c\leqslant b_n$,即 $c\in[a_n,b_n]$,$n=1,2,\cdots$.

下面证明这样的点 c 是唯一的. 反证,若有 $c'\in[a_n,b_n]$($n=1,2,\cdots$),且 $c'\neq c$,则

$$b_n-a_n\geqslant|c-c'|>0,n=1,2,\cdots,$$

这与条件 2°矛盾. ▌

定义 7 设$\{x_n\}$为数列. 若对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,使当 $n,m\geqslant N$ 时,都有$|x_n-x_m|<\varepsilon$,则称$\{x_n\}$是**基本数列**(或**基本列**).

显然,若$\{x_n\}$是基本列,则 $\lim\limits_{n,m\to\infty}|x_n-x_m|=0$.

定理 5 数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是$\{x_n\}$为基本数列.

证 先证必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$. 则对$\forall\varepsilon>0$,$\exists N>0$,使当 $n\geqslant N$ 时,有$|x_n-x_0|<\varepsilon/2$. 从而,当 $n,m\geqslant N$ 时,有

$$|x_n-x_m|\leqslant|x_n-x_0|+|x_m-x_0|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

即$\{x_n\}$是基本数列.

再证充分性. 设$\{x_n\}$是基本数列. 先证$\{x_n\}$是有界的. 取 $\varepsilon=1$,根据基本数列的定义知,$\exists N>0$,使当 $m=N$ 且 $n\geqslant N$ 时有

$$|x_n-x_m|=|x_n-x_N|<1,$$

即当 $n\geqslant N$ 时,有 $x_N-1<x_n<x_N+1$. 从而,对一切的 n,都有

$$\min\{x_1,x_2,\cdots,x_N-1\}\leqslant x_n\leqslant\max\{x_1,x_2,\cdots,x_N+1\},$$

故$\{x_n\}$是有界的.

下面证明$\{x_n\}$是收敛的. 因为$\{x_n\}$是有界的,由定理 3 知,有收敛的子数列$\{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$. 设$\{x_{n_k}\}$收敛于 x_0,则对$\forall\varepsilon>0$,$\exists K>0$,使当 $k\geqslant K$ 时,有$|x_{n_k}-x_0|<\varepsilon/2$. 由于$\{x_n\}$是基本数列,故对上述的 ε,有 $N_\varepsilon>0$,使当 $k\geqslant N_\varepsilon$(此时 $n_k\geqslant k\geqslant N_\varepsilon$)时,有

$$|x_{n_k}-x_k|<\varepsilon/2.$$

现取 $N=\max\{K,N_\varepsilon\}$,则当 $k\geqslant N$ 时,有

$$|x_k - x_0| \leqslant |x_k - x_{n_k}| - |x_{n_k} - x_0| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = x_0$. ▌

注 定理 4 反映了实数的完备性. 如果$\{x_n\}$是一般的序列(不一定是数列),那么若$\{x_n\}$收敛,则$\{x_n\}$是基本序列;反之不一定成立.

定义 8 设 A 是一数集,$\Delta=\{\delta\}$是以开区间为元素所成的集. 若对$\forall x\in A,\exists \delta_x\in\Delta$,使 $x\in\delta_x$,则称集 Δ 覆盖了数集 A.

定理 6(Heine-Borel 有限覆盖定理) 若闭区间$[a,b]$被开区间集 $\Delta=\{\delta\}$所覆盖,则在 Δ 中必有有限个开区间 $\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n$ 已完全覆盖了$[a,b]$.

证 反证法. 设$[a,b]$不能被 Δ 中的有限个开区间所覆盖. 将$[a,b]$二等分成为$[a,c]$和$[c,b]$,则二者中至少有一个不能被 Δ 中的有限个开区间所覆,记为$[a_1,b_1]$;再将$[a_1,b_1]$二等分成为$[a_1,c_1]$和$[c_1,b_1]$,同样地,二者中至少有一个不能被 Δ 中的有限个开区间所覆盖,记为$[a_2,b_2]$;如此继续分别分割下去,就得到了一个闭区间集$\{[a_n,b_n]\}$,它满足下列条件:

(1) 每一个$[a_n,b_n]$都不能被 Δ 中有限个开区间所覆盖;

(2) $[a,b]\supset[a_1,b_1]\supset[a_2,b_2]\supset\cdots\supset[a_n,b_n]\supset\cdots$;

(3) $b_n-a_n=\dfrac{b-a}{2^n}\to 0(n\to\infty)$.

由条件(2)及(3),根据定理 4 知,必有唯一的实数 $\xi\in[a_n,b_n](n=1,2,\cdots)$,且 $a_n\to\xi,b_n\to\xi(n\to\infty)$. 因为 $\xi\in[a,b]$,且$[a,b]$被 Δ 所覆盖,故有开区间 $\delta_\xi\in\Delta$,使得 $\xi\in\delta_\xi$. 因此,当 n 充分大时,必有$[a_n,b_n]\subset\delta_\xi$,这与条件(1)矛盾. ▌

注意 在定理 5 中,如果 Δ 不是开区间集或者$[a,b]$不是闭区间,那么就不一定能从 Δ 中选出有限个区间来覆盖. 如:$(a,b)=(3,5)$,$\Delta=\{(3+\frac{1}{n},5-\frac{1}{n})\}(n=1,2,\cdots)$,$\Delta$ 中必须有无穷多个开区间才能覆盖开区间(a,b).

§1.2 集合及其运算

1. 集合的概念

集合是数学中最基本的概念之一，然而它却象平面几何中的点、线、面一样，只能给出一种描述.

凡是具有某种特定性质的对象所组成的总体称为**集合**(或**集**). 集合中的对象称为这个集合的**元素**. 我们用大写字母表示集合，用小写字母表示元素. 若事物 a 是集合 A 的一个元素，则记为 $a \in A$；若 a 不是集 A 的元素，则记为 $a \overline{\in} A$；二者必居其一.

不包含任何元素的集合称为**空集**，记为 ϕ(或 0).

我们常用符号

$$A=\{元素符号 \mid 元素所具有的性质\}$$

来表示集合. 例如：

(1) $A=\{人 \mid 中国人\}$；

(2) $B=\{x \mid x\in N, 1\leqslant x<8\}$；

(3) $C=\{2n \mid n\in N\}$；

(4) $S=\{x \mid x^2-3x+2=0\}$.

定义 1 若集合 A 中的每一元素都是集合 B 中的元素，则称 A 是 B 的**子集**，或者说 B **包含** A，记为 $A\subset B$(或 $B\supset A$).

换言之，若 $x\in A$，必有 $x\in B$，则说 $A\subset B$.

我们规定，空集 ϕ 是任何集合的子集. 由定义 1 知，$A\subset A$，即任何集合 A 包含它自身.

如果 $A\subset B$，且 B 中存在元素 $b\overline{\in} A$，则称 A 是 B 的**真子集**.

定义 2 若集合 A 中的每一个元素都在集合 B 中，而集合 B 中的每一个元素又都在 A 中，则称 A 与 B **相等**，记为 $A=B$.

显然，$A=B$ 的充要条件是 $A\subset B$ 且 $B\subset A$.

注 在集合论中，当证明两集合 A 与 B 相等时，通常先证 $A\subset$

B，再证 $B \subset A$，这样就证明了 $A=B$.

2. 集合的运算

定义 3 设 A 与 B 是两个集合，则由 A 与 B 的全体元素所构成的新集合称为 A 与 B 的**并集**（或**和集**）（如图 1.1），记为 $A \cup B$. 即

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}.$$

设 $\{A_\xi \mid \xi \in I\}$ 是任意的一簇集，其中 I 是所有指标 ξ 所构成的集，则由一切 $A_\xi(\xi \in I)$ 的全体元素所构成的新集合称为这簇集的**并集**，记为 $\bigcup\limits_{\xi \in I} A_\xi$. 即

$$\bigcup_{\xi \in I} A_\xi=\{x \mid x \text{ 至少属于某个 } A_\xi, \xi \in I\}.$$

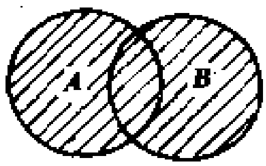


图 1.1 $A \cup B$

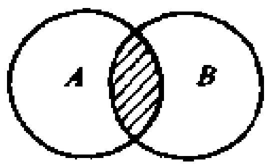


图 1.2 $A \cap B$

定义 4 设 A 与 B 是两个集合，则由 A 与 B 的所有公共元素所构成的新集合称为 A 与 B 的**交集**（如图 1.2），记为 $A \cap B$（或 AB）. 即

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}.$$

由同时属于每个 $A_\xi(\xi \in I)$ 的所有元素所构成的新集合称为这簇集的**交集**，记为 $\bigcap\limits_{\xi \in I} A_\xi$. 即

$$\bigcap_{\xi \in I} A_\xi=\{x \mid x \in A_\xi \text{ 对每个 } \xi \in I \text{ 同时成立}\}$$

如果集 A 与 B 没有公共元素，即 $A \cap B=\phi$，则称 A 与 B **互不相交**.

注 如果定义 3 与定义 4 中的指标集 I 为自然数集，则它们

的并与交分别称为**可列并**与**可列交**，也可记为

$$\bigcup_{n\in N}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n,\quad \bigcap_{n\in N}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n.$$

定义 5 设 A 与 B 是两个集合，则属于 A 但不属于 B 的全体元素所构成的新集合称为 A 与 B 的**差集**(如图 1.3)，记为 $A-B$. 即

$$A-B=\{x\mid x\in A\text{ 但 }x\overline{\in}B\}.$$

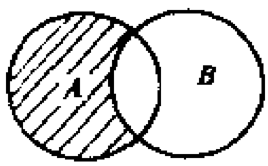


图 1.3 $A-B$

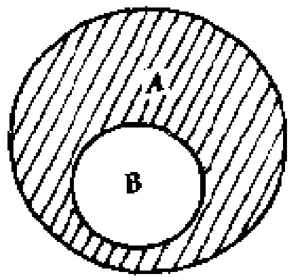


图 1.4 B^cA

若 $B\subset A$，则称 $A-B$ 为 B **关于** A **的余集**(如图 1.4)，记为 B^cA.

若在所讨论的问题中，所考察的集合都是一个"大"集合 X 的子集，则称 X 是**全集**(或**基本集**). 子集 A 关于全集 X 的余集，称为 A 的**余集**，记为 A^c. 即

$$A^c=A^cX=X-A.$$

定理 1 设 E 是集合，$\{A_\xi\}(\xi\in I)$是一簇集. 则

(1) $E\bigcap(\bigcup_{\xi\in I}A_\xi)=\bigcup_{\xi\in I}(E\bigcap A_\xi)$;

(2) $E\bigcup(\bigcap_{\xi\in I}A_\xi)=\bigcap_{\xi\in I}(E\bigcup A_\xi)$.

证 现以(1)为例证明之，对(2)的证明留给读者完成.

设 $x\in E\bigcap(\bigcup_{\xi\in I}A_\xi)\Longrightarrow x\in E$ 且 $x\in\bigcup_{\xi\in I}A_\xi)\Longrightarrow\exists\xi_0\in I$，使 $x\in E$，且 $x\in A_{\xi_0}\Longrightarrow x\in E\bigcap A_{\xi_0}\Longrightarrow x\in\bigcup_{\xi\in I}(E\bigcap A_\xi)$. 因为 x 是任取的，故有

$$E\bigcap(\bigcup_{\xi\in I}A_\xi)\subset\bigcup_{\xi\in I}(E\bigcap A_\xi).$$

又设 $x\in\bigcup_{\xi\in I}(E\bigcap A_\xi)\Longrightarrow\exists\xi_0\in I$，使 $x\in E\bigcap A_{\xi_0}\Longrightarrow x\in E$ 且 $x\in A_{\xi_0}$ $\Longrightarrow x\in E\bigcap(\bigcup_{\xi\in I}A_\xi)$.

于是 $$\bigcup_{\xi\in I}(E\cap A_\xi)\subset E\cap(\bigcup_{\xi\in I}A_\xi),$$

因此
$$\bigcup_{\xi\in I}(E\cap A_\xi)=E\cap(\bigcup_{\xi\in I}A_\xi).\ \blacksquare$$

定理 2(De Morgan 律) 设$\{A_\xi\}(\xi\in I)$是一簇集，它们都是全集 X 的子集，则

(1) $(\bigcup_{\xi\in I}A_\xi)^c=\bigcap_{\xi\in I}A_\xi^c$；

(2) $(\bigcap_{\xi\in I}A_\xi)^c=\bigcup_{\xi\in I}A_\xi^c$.

证 (1) 设 $x\in(\bigcup_{\xi\in I}A_\xi)^c\Longrightarrow x\notin\bigcup_{\xi\in I}A_\xi\Longrightarrow$ 对$\forall\xi\in I,x\notin A_\xi\Longrightarrow\forall\xi\in I,x\in A_\xi^c\Longrightarrow x\in\bigcap_{\xi\in I}A_\xi^c$. 所以，$(\bigcup_{\xi\in I}A_\xi)^c\subset\bigcap_{\xi\in I}A_\xi^c$.

又设 $x\in\bigcap_{\xi\in I}A_\xi^c\Longrightarrow$ 对$\forall\xi\in I,x\in A_\xi^c\Longrightarrow$ 对$\forall\xi\in I,x\notin A_\xi X\Longrightarrow x\notin(\bigcup_{\xi\in I}A_\xi)\Longrightarrow x\in(\bigcup_{\xi\in I}A_\xi)^c$. 所以，$\bigcap_{\xi\in I}A_\xi^c\subset(\bigcup_{\xi\in I}A_\xi^c)$. 于是，(1)获证.

(2) 设 $x\in(\bigcap_{\xi\in I}A_\xi)^c\Longrightarrow x\in X$ 但 $x\notin\bigcap_{\xi\in I}A_\xi\Longrightarrow\exists\xi_0\in I,x\notin A_{\xi_0}$但 $x\in X\Longrightarrow x\in A_{\xi_0}^c\Longrightarrow x\in\bigcup_{\xi\in I}A_\xi^c$. 所以，$(\bigcap_{\xi\in I}A_\xi^c)\subset\bigcup_{\xi\in I}A_\xi^c$.

又设 $x\in\bigcup_{\xi\in I}A_\xi^c\Longrightarrow\exists\xi_0\in I,x\in A_{\xi_0}^c\Longrightarrow x\in X,x\notin A_{\xi_0}\Longrightarrow x\in X,x\notin\bigcap_{\xi\in I}A_\xi\Longrightarrow x\in(\bigcap_{\xi\in I}A_\xi)^c$. 所以，$\bigcup_{\xi\in I}A_\xi^c\subset(\bigcap_{\xi\in I}A_\xi^c)$. 于是，(2)获证. $\blacksquare$

注意 设 A 与 B 为任意两集合，则$(A-B)\cup B=A$ 不一定成立. 但有 $B\subset A\Longleftrightarrow(A-B)\cup B=A$；$A\cup A=A$；$B\cap B=B$.

§1.3 可列集

数量上的有限或无限是数学中经常涉及到的重要概念. 对于有限集，我们可以通过数数的办法来确定两个集合中的元素个数是否相等；对于无限集，这种方法显然行不通了. 下面我们将引入对应关系的概念，研究无限集的元素个数相等问题.

定义1 若集 A 中的元素的个数是有限的，则称 A 为**有限集**；否则，称 A 为**无限集**(或**无穷集**).

如果集 A 中元素的个数为 n，则称 n 为 A 的**计数**. 规定，空集 ϕ 的计数为0.

定义2 设 A 与 B 是两个非空集合. 若存在一种对应法则 φ，使对每个 $x\in A$，都有 B 中的唯一元素 $y=\varphi(x)$ 与之对应，且 A 中不同的 x 对应着 B 中不同的 $\varphi(x)$，又 B 中每一个 y 都有 $x\in A$，使得 $y=\varphi(x)$. 则称 A 与 B 之间存在着**一一对应**，或称 φ 为 **A 到 B(上)的一一对应(或一对一的映照)**.

若存在 A 到 B 上的一个一一对应 φ，则称 A 与 B **是对等的**，记为 $A\sim B$(或 $A\overset{\varphi}{\sim}B$).

规定，空集与自身对等.

易见，若 A 与 B 为有限集，$A\sim B\Longleftrightarrow A$ 与 B 中元素的个数相等.

例1 设 N 是自然数集，M 为全体正偶数之集. 将此二集通过下述法则使成一一对应：

N	1	2	…	n	…
M	2	4	…	$2n$	…

则 $M\sim N$. 显然有 $M\subset N$.

例2 如图1.5所示，在直角三角形 CDE 中，设 $A=\{a\mid a\in CE\}$，$B=\{b\mid b\in CD\}$，过 CE 上的任一点 P 作 CD 的垂线交 CD 于 Q，令 $P\leftrightarrow Q$，则 $A\sim B$. 虽然 $|CD|<|CE|$，但仍可建立一一对应关系，似乎 CE 中点的"个数"与 CD 中点的"个数"一样多. 若在 CE 上取一点 F，使 $|CF|=|CD|$，则 $G=\{x\mid x\in CF\}\sim B$. 又因为 $A\sim B$，故 $A\sim G$. 显然有 $G\subset A$，且 G 为 A 的真子集. 此例告诉我们，一个较长的线段并不含有"更多的"点.

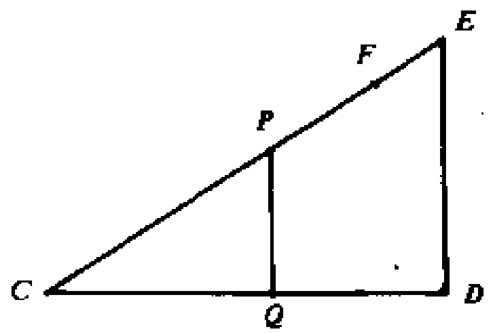


图 1.5

上述两例表明，无限集必含有与自身对等的真子集. 这也是无限集与有限集的不同之处. 由此可知，不能与自身的任何真子集对等的集是有限集，能与自身的某个真子集对等的集是无限集.

定义3 若集 A 与自然数集 N 对等，即

$$A\sim N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\},$$

则称 A 为**可列集**(或**可数集**).

例3 $A=\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$，$B=\{1,4,9,\cdots,n^2,\cdots\}$，$C=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$，$D=\{\cdots,-n,\cdots,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$等都是可列集.

显而易见，A 为可列集$\Longleftrightarrow A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$. 即 A 为可列集的充要条件是它可以排成一个无穷序列的形式.

可列集必为无限集. 可列集的无限子集仍是可列集. 因此，任何无限集必包含一个可列的子集.

定理1 若 A 为可列集，B 为有限集，且 $A\cap B=\phi$，则 $A\cup B$ 为可列集.

证 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\}$，则

$$A\cup B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

由于 $A\cup B$ 可排成无穷序列的形式，故 $A\cup B$ 为可列集. ▌

定理2 若 A 与 B 为可列集，且 $A\cap B=\phi$，则 $A\cup B$ 为可列集.

证 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\cdots\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$，则

$$A\cup B=\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots\},$$

故 $A\cup B$ 是可列集. ▌

上述两定理中 $A\cap B=\phi$ 的条件可以去掉，从而有

定理3 若 A 为可列集，B 为有限集或可列集，则 $A\cup B$ 为可列集.

证 令 $B^*=B-(A\cap B)$，则 $A\cap B^*=\phi$，其中 B^* 是有限的或可列的. 由于$A\cup B=A\cup B^*$，由定理1或定理2知，$A\cup B$是可列集. ▌

定理4 有限个或可列个可列集的并集是可列集.

证 不失一般性，设 $A_i(i=1,2,\cdots)$均为可列集，仅证明$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$也是可列集. 先证 $A_i\cap A_j=\phi(i\neq j)$的情况. 设

$$
\begin{aligned}
A_1&=\{a_{11},a_{12},a_{13},a_{14},\cdots\},\\
A_2&=\{a_{21},a_{22},a_{23},a_{24},\cdots\},\\
A_3&=\{a_{31},a_{32},a_{33},a_{34},\cdots\},\\
A_4&=\{a_{41},a_{42},a_{43},a_{44},\cdots\},\\
&\cdots\qquad\qquad\cdots
\end{aligned}
$$

按上表箭头所指顺序进行排列，于是有

$$\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i=\{a_{11},a_{21},a_{12},a_{31},a_{22},a_{13},a_{41},a_{32},a_{23},a_{14},\cdots\},$$

由此可知，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 为可列集.

再证 $A_i\cap A_j\neq\phi(i\neq j)$的情况. 令 $A_1^*=A_1, A_i^*=A_i-A_i\cap(\bigcup\limits_{j=1}^{i-1}A_j)$ $(i=2,3,\cdots)$，则 A_i^* 是可列集，且 $A_i^*\cap A_j^*=\phi(i\neq j)$. 因为$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i^*$，且$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i^*$ 是可列集，因此，$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$ 是可列集. ▌

例4 平面直角坐标系中，两个坐标x及y均为整数的点(x,y)（称为格点）的全体构成一个可列集.

证 对每一固定的整数 n，集合 $A_n=\{(n,m)\,|\,m=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$为可列集. 而全平面上所有格点的全体就是并集$\bigcup\limits_{n=-\infty}^{+\infty}A_n$，这是可列个可列集的并集. 按定理4，它是可列集. ▌

例5 有理数集 R_0是可列集.

证 令有理数 $r=\frac{p}{q}$(p, q 为整数，$q>0$). 易见，$\frac{p}{q}$与平面上的格点(p,q)是对应的. 由例4知，这种格点(p,q)的全体是可列集，故R_0是可列集. ▌

特别地，任何区间$[a,b]$中的有理数全体是一可列集.

设 A 与 B 为二非空集合，规定 $A\times B=\{(a,b)\,|\,a\in A,b\in B\}$，它称为 A 与 B 的**乘积集**. 用与例4同样的方法，并根据数学归纳法可

以证明，当 A 与 B 都为可列集时，$A\times B$ 也是可列集.

定理5 设 $A,B,\cdots,C$ 是有限个可列集，则乘积集

$$A\times B\times\cdots\times C=\{(a,b,\cdots,c)\mid a\in A,b\in B,\cdots,c\in C\}$$

也是可列集.

例6 整系数多项式的全体是可列集.

证 对固定的自然数 n，n 次整系数多项式

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n,\quad a_0\neq 0$$

的全体与 $n+1$ 个整数集的乘积集一一对应. 由定理5知，后者是可列集，故 n 次整系数多项式的全体是可列集，从而整系数多项式的全体也是可列集. ▌

例7 有理系数多项式的全体是一可列集.

整系数多项式的实根称为**代数数**；而不是代数数的实数称为**超越数**.

例8 代数数的全体是一可列集.

以上我们讨论了可列集，它是元素"个数"最少的无限集. 可以证明，不可列的无限集的确是存在的.

定理6 实数区间$[0,1]$是不可列集.

证 反证法. 假若$[0,1]$中的点是可列的，则它们必能排成一个无穷序列：

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,$$

将$[0,1]$三等分，则$[0,\frac{1}{3}]$与$[\frac{2}{3},1]$中至少有一个不含 a_1，把不含 a_1的闭区间记为 I_1；再将 I_1三等分，则在左右两闭区间中至少有一个不含 a_2，记为 I_2；再将 I_2三等分，又得到一个不含 a_3的闭区间 I_3，继续下去，于是得到闭区间套$\{I_n\}$，它满足条件：

1° $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$；

2° I_n 的长度等于$\frac{1}{3^n}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$；

3° $a_n\overline{\in} I_n$，$n=1,2,\cdots$.

由闭区间套定理可知，$\exists\xi\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n\subset[0,1]$. 因为 $a_n\overline{\in} I_n$，故 $\xi\neq a_n$

$(n=1,2,\cdots)$，即$[0,1]$中存在点 ξ，但 ξ 不在 $\{a_n\}$ 中，于是矛盾. ▌

推论 无理数的全体是不可列的；超越数的全体也是不可列的.

§1.4 实轴上的开集和闭集

为了满足研究测度和积分的需要，并且为在泛函分析中的更一般点集理论提供典型特例，有必要首先介绍实轴上的点集. 我们用 R 表示实数集，也就是实数轴；每个实数也称为点.

1. 开集

定义1 设 x_0 是一个实数，δ 是一个正数，则称开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 为 x_0 的 δ **邻域**（简称为 x_0 的邻域），记为 $\delta(x_0)$ 或 $o(x_0,\delta)$.

定义2 设 A 是直线上的非空点集，$x_0\in A$. 若存在 $\delta(x_0)\subset A$，则称 x_0 为集 A 的**内点**. 内点的全体所成之集称为**内点集**，记作 A°.

例如，开区间 (a,b) 中的每一点都是内点，实数集 R 中的每一点也都是内点.

显然，A 的内点必属于 A.

定义3 设 A 是直线上的点集. 若 A 中每一点都是内点，则称 A 为**开集**.

例如，直线上的开区间是开集；半开区间不是开集.

注意 空集 ϕ 和实数集 R 都是开集（为什么?）.

定理1 (1) 有限个开集的交集是开集；

(2) 任意个开集的并集是开集.

证 先证明(1). 设 $E=\bigcap\limits_{k=1}^{N}E_k$，其中 $E_1,E_2,\cdots,E_N$ 皆为开集. 若 $E=\phi$，则(1)已成立. 若 $E\neq\phi$，任取 $x\in E$，则 $x\in E_k(k=1,2,\cdots,N)$. 因为 E_k 是开集，故 $\exists\delta_k>0$，使得 $\delta_k(x)\subset E_k(k=1,2,\cdots,N)$. 令 $\delta(x)$

$=\min(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_N)$，则 $\delta(x)\subset\delta_k(x)\subset E_k\quad(k=1,2,\cdots,N)$，于是，$\delta(x)\subset E$，故 E 是开集．

再证明(2)．设 $E=\bigcup\limits_{\xi\in I}E_\xi$．对于 $\forall\xi\in I$，E_ξ 为开集．若 $E=\phi$，则(2)已成立．若 $E\neq\phi$，任取 $x\in E$，则 $\exists\xi_0\in I$，使 $x\in E_{\xi_0}$．因为 E_{ξ_0} 是开集，所以 $\exists\delta>0$，使 $\delta(x)\subset E_{\xi_0}\subset E$，故 E 为开集．▌

在定理1的(1)中，如果把"有限个开集"改为"无限个开集"，那么它们的交集就不一定是开集了．例如，取

$$G_n=(-\frac{1}{n},\frac{1}{n}),n=1,2,\cdots$$

则 $G=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}(-\frac{1}{n},\frac{1}{n})=\{0\}$，即 G 为独点集，故 G 不是开集．

在直线上，开区间是开集．由定理1知，任意个开区间的并集是开集．特别地，一簇互不相交的非空开区间 $\{(a_k,b_k)\}$ 的并集 $G=\bigcup\limits_k(a_k,b_k)$ 是开集，这正是非空开集的构造．

定理2(开集的构造)　直线上的非空开集必可唯一地表示成有限个或可列个两两不相交的开区间的并集．

2．闭集

定义4　若点集 F 的余集 $F^c=R-F$ 是开集，则称 F 为**闭集**．

例如，闭区间是闭集；空集 ϕ 和全集 R 都是闭集；将独点集 $\{a\}$ 理解为闭区间 $[a,a]$，它也是闭集．

定理3　(1) 有限个闭集的并集是闭集；

(2) 任意个闭集的交集是闭集．

证　先证明(1)．设 $F_1,F_2,\cdots,F_N$ 闭集．要证明 $F=\bigcup\limits_{k=1}^{N}F_k$ 是闭集，只需证明

$$F^c=(\bigcup_{k=1}^{N}F_k)^c=\bigcap_{k=1}^{N}F_k^c$$

是开集即可．而上式右端是有限个开集的交集，由定理1知，$F^c=\bigcap\limits_{k=1}^{N}F_k^c$ 是开集，故 F 是闭集．

再证明(2). 设 $F=\bigcap\limits_{\xi\in I}F_\xi$,对于$\forall\xi\in I$,$F_\xi$ 是闭集. 由于

$$F^c=(\bigcap_{\xi\in I}F_\xi)^c=\bigcup_{\xi\in I}F_\xi^c,$$

由定理1知,F^c 是开集,故 F 为闭集. ∎

注意 无限个闭集的并集未必是闭集. 例如,若取 $F_n=[\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]$ $(n=1,2,\cdots)$,则每个 F_n 都是闭集,但它的并集 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n=(0,1)$却是开集.

推论 有限点集是闭集.

3. 聚点

定义5 设 A 是非空点集,x_0是一点. 若 x_0的任何邻域 $\delta(x_0)$中至少有一个属于 A 而异于 x_0的点(即$\{\delta(x_0)-\{x_0\}\}\cap A\neq\phi$),则称 x_0是点集 A 的**聚点**(或**极限点**). A 的聚点的全体称为 A 的**导集**,记作 A'.

注 (1) 点集 A 的聚点 x_0不一定属于 A.

(2) 若 x_0是 A 的聚点,则含有 x_0的任何 δ 邻域内必含有 A 的无限个点.

例1 点集 $A=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$以0为聚点,其导集 $A'=\{0\}$.

例2 空集 ϕ 没有聚点,其导集 $\phi'=\phi$;有限点集 A 没有聚点,其导集 $A'=\phi$.

例3 以 A 表示$[0,1]$中有理数全体,那么$[0,1]$中的任何一点都是 A 的聚点,其导集 $A'=[0,1]\supset A$.

例4 闭区间 $A=[0,1]$的聚点全体就是$[0,1]$,即 $A'=A$.

注意 数列的极限与数集的聚点是两个不同的概念. 例如,数列1,1,…,1,…的极限是1,但是集合$\{1\}$无聚点. 数列$\frac{1}{2},1+\frac{1}{2},\frac{1}{3},1+\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},1+\frac{1}{n},\cdots$无极限;但是集合$\{\frac{1}{2},1+\frac{1}{2},\frac{1}{3},1+$

$\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},1+\frac{1}{n},\cdots\}$的聚点有两个，即0与1. 数列$\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots$的极限为0；集合$\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\}$的聚点也为0.

聚点的定义尚有多种形式，为此我们证明下面的定理.

定理4 设 A 是非空点集，x_0是一点，则下列四个条件等价：

(1) x_0是 A 的聚点；

(2) 存在集 A 中的点列$\{x_n\}$，$x_n\neq x_0(n=1,2,\cdots)$，使得 $x_n\to x_0$ $(n\to\infty)$；

(3) 存在集 A 中的互异点列$\{x_n\}$，使得 $x_n\to x_0(n\to\infty)$；

(4) 对$\forall\delta>0$，$\delta(x_0)$中必有 A 中无限多个点.

证 先证(1)$\Longrightarrow$(2). 由定义5可以知道，对于每一个正整数 n，必有 $x_n\in A$，$x_n\neq x_0$，且 $x_n\in(x_0-\frac{1}{n},x_0+\frac{1}{n})$. 就是说 A 中有异于x_0的 x_n，适合

$$|x_n-x_0|<\frac{1}{n},$$

因此，$x_n\to x_0(n\to\infty)$，即(2)成立.

次证(2)$\Longrightarrow$(3). 设 x_0适合(2)，则$\{x_n\}$中必有无限多项彼此各异. 否则，$\{x_n\}$中只有有限项各异，于是必有一点 a 出现无限次，但 $x_n\to x_0$，故 $x_0=a$，这与 $x_n\neq x_0$矛盾. 设$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$中无限多项彼此各异的点组成的子序列，则$\{x_{n_k}\}$就是适合(3)的序列.

再证(3)$\Longrightarrow$(4). 设$\{x_n\}$是 A 中互不相同的点组成的序列，且 $x_n\to x_0(n\to\infty)$. 则对$\forall\delta>0$，$\exists N>0$，使当 $n\geqslant N$ 时，有$|x_n-x_0|<\delta$，即当 $n\geqslant N$ 时，$x_n\in\delta(x_0)$. 因此，$\delta(x_0)$中含有 A 中无限多个点 x_{N+1}，x_{N+2}，$\cdots$.

最后证明(4)$\Longrightarrow$(1). 这是显而易见的. ▎

定理5 F 为闭集的充要条件是 F 的所有聚点皆属于 F，即 $F'\subset F$.

证 先证必要性. 设 x 为闭集 F 的任一聚点，即 $x\in F'$. 用反证法，假设 $x\overline{\in}F$，则 $x\in F^c$. 由于 F^c 为开集，故存在 δ

$(x)\subset F^c$，从而，$\delta(x)$中不含F的点.因此，x不是F的聚点，矛盾.故$x\in F$，因而$F'\subset F$.

再证充分性.设F的聚点都在F内，即$F'\subset F$.要证F为闭集，只需证明F^c为开集即可.任取$x\in F^c$，则$x\overline{\in}F$.因为F含其自身的所有聚点，所以x不是F的聚点.因此，$\exists\delta>0$，使$\delta(x)$不含F的点，即$\delta(x)\subset F^c$，故F^c是开集，从而F为闭集. ▌

根据定理5，闭集又可定义为：若集F含其自身的所有聚点，则称F为**闭集**；点集$\overline{F}=F\cup F'$称为F的**闭包**.

定理6 F为闭集的充要条件是对于F中的任何点列

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ \cdots,$$

如果$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$，则$x_0\in F$.

证 充分性显然，下面证明必要性.

设F为闭集，如果点列$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$中包含无穷多个不同的点，则$x_0$是$F$的一个聚点，由定理5知$x_0\in F$.如果点列$x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$中只有有限个不同的点，则此点列从某项以后的所有$x_n$都是$x_0$，从而也有$x_0\in F$. ▌

为了研究直线上闭集的结构，先引入构成区间和余区间的概念.

定义6 设G是开集.若开区间$(a,b)\subset G$，并且$a,b\overline{\in}G$，则称(a,b)为开集G的一个**构成区间**.

例如，开集$(0,1)\cup(2,4)$的构成区间是$(0,1)$与$(2,4)$.

定义7 设A为闭集，则称$A^c=R-A$的构成区间为A的**余区间**.

定理7 直线上的闭集F或是全直线，或是从直线上挖掉有限个或可列个互不相交的开区间(即F的余区间)所得到的集.

注 (1) 直线上存在既不开也不闭的集，如$[a,b)$，$(a,b]$等.

(2) 直线上既开又闭的集只有空集和全直线.

定理8 (1) 开集与闭集的差集是开集；

(2) 闭集与开集的差集是闭集.

定理8的证明是显然的. 留给读者自己完成.

§1.5 勒贝格测度

1. 引言——从 Riemann 积分到 Lebesgue 积分

在高等数学中,读者已学过了定积分:设 $f(x)$ 是定义在 $[a,b]$ 上的有界函数,在 $[a,b]$ 上任取一组分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b$,任取 $\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$,作和式

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{1.2}$$

如果对于区间 $[a,b]$ 的任意分法以及 ξ_i 的任意取法,当小区间的最大长度 $\|\Delta x\|\to 0$ 时,(1.2)式的极限存在且相等,则称函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上是 Riemann 可积的,简称 R 可积,记成 $f\in R[a,b]$,此极限值称为 Riemann 积分. 记成

$$(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\|\Delta x\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i. \tag{1.3}$$

可以证明:若 $f\in R[a,b]$,则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上"基本上是连续的"(几乎处处连续). 当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上"太不连续"时,$f(x)$ 在 $[a,b]$ 上就不是 R 可积了. 例如,Dirichlet 函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时},\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时},\end{cases}$$

在 $[0,1]$ 上就不是 R 可积的,这是因为

$$S=\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i=\begin{cases}1, & \text{当 } \xi_i \text{ 都取有理数时},\\ 0, & \text{当 } \xi_i \text{ 都取无理数时},\end{cases}$$

因此,当 $\|\Delta x\|\to 0$ 时,积分和式的极限不存在. 从而 $f\bar{\in}R[0,1]$.

由此可见,Riemann 积分的适用范围是相当狭窄的,有必要拓广 Riemann 积分的概念,使之能适用于更多的函数,Lebesgue 积分就是在这种情况下提出的新的积分理论.

下面我们从求曲边梯形的面积问题入手，分析 Riemann 积分存在的缺点，并找出克服其缺点的方法.

设函数 $y=f(x)\geqslant 0, x\in[a,b]$，求如图1.6所示的曲边梯形的面积 I.

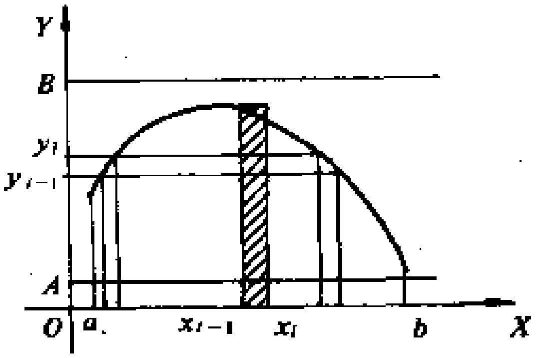


图 1.6

Riemann 积分的思想是，将曲边梯形分成 n 个狭长的小曲边梯形，并把每一个小曲边梯形的面积用一个小矩形的面积来代替，小矩形的面积之和就是积分和 S. 当分法越精细时，近似的程度将越好. 但是，当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上不连续时，情况就不同了. 如 Dirichlet 函数，我们可以设想它的面积是存在的，但用 Riemann 积分的方法却求不出来. 原因何在呢？这是因为我们在分割区间 $[a,b]$ 时，没有照顾到函数 $y=f(x)$ 在 $[a,b]$ 上取值的特点：当 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上"太不连续"时，在小区间上函数值变化很大，从而用小矩形来近似代替小曲边梯形时所产生的误差也就很大. Lebesgue 注意到了这个问题，他优先照顾到函数 $y=f(x)$ 的取值特点，使函数值相差不太大的那些 x 集中在一起，即考虑集合 $E_i=\{x\mid y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$，然后求出集合 E_i 的"长度"（记为 mE_i），再用 $y_{i-1}mE_i$ 或 y_imE_i 来近似代替对应的那块面积，最后作出这种图形的面积之和，和式的极限值作为积分值，这就是 Lebesgue 积分的基本思想.

具体地说，设 $y=f(x)$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的有界函数，不妨设 $A\leqslant f(x)<B$. 我们分割函数值所在的范围 $[A,B]$ 为 n 个小区间：$A=y_0<y_1<\cdots<y_{n-1}<y_n=B$. 令 $E_i=\{x\mid y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i\}$，任取 $\eta_i\in[y_{i-1},y_i]$，作和式

$$S=\sum_{i=1}^{n}\eta_i mE_i,$$

当$\|\Delta y_i\|=\max_i\{y_i-y_{i-1}\}\to 0$时，积分和式的极限$\lim_{\|\Delta y_i\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}\eta_i mE_i$就叫做$f(x)$在$[a,b]$上的积分.

由此可见，为了使这种新的积分方法得以实现，必须首先解决以下两个问题：

第一，给定直线上的点集E，如何定义它的“长度”呢？这就需要引入集合测度的概念.

第二，对于任何实数A,B，点集$\{x\mid A\leqslant f(x)<B\}$是否有“长度”呢？显然，此集合是否有“长度”，与函数$y=f(x)$的性质有关. 这就需要引入可测函数的概念.

本节主要介绍测度的概念，可测函数的概念将在§1.6中予以讨论.

值得一提的是，在平面几何中我们是这样定义平面图形面积的：先定义长方形面积，然后定义三角形面积，再求出多边形面积，最后用圆的内接多边形面积与外切多边形面积相“夹”的办法来定义圆的面积. 对于直线上点集的“长度”——测度，我们也用类似的方法来定义，即先定义简单集合的测度，再用相“夹”的办法来定义一般集合的测度.

2. 有界开集的测度

由于开集具有极简单的结构，所以先讨论开集的测度问题.

定义1 空集ϕ的测度规定为零，即$m\phi=0$；区间$\langle a,b\rangle$（开的或闭的或半开的）的测度规定为区间的长度，即$m\langle a,b\rangle=b-a$；非空有界开集G的测度规定为G的所有构成区间的长度之和. 即设$G=\bigcup_k(a_k,b_k)$，则$mG=\sum_k(b_k-a_k)$.

显然，有界开集的测度是非负的.

设有界开集$G=\bigcup_k(a_k,b_k)$，那么定义1中所规定的测度$mG=$

$\sum\limits_{k}(b_k - a_k)$ 是否合理呢？事实上，若 $G=\bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k,b_k)$，则 $mG = \sum\limits_{k=1}^{n}(b_k - a_k)$ 当然有意义．若 $G = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(a_k,b_k)$，因为 G 为有界开集，故有开区间 $(a,b)\supset G$．对任意的 n，有 $\bigcup\limits_{k=1}^{n}(a_k,b_k)\subset G\subset(a,b)$．因此，对于任意的 n，有 $\sum\limits_{k=1}^{n}(b_k-a_k)\leqslant b-a$．按正项级数收敛的充要条件知，级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(b_k-a_k)$收敛．从而定义1是合理的．

定理1 设 G_1,G_2是两个有界开集．

(1) 若 $G_1\subset G_2$，则 $mG_1\leqslant mG_2$ （单调性）；

(2) $m(G_1\bigcup G_2)\leqslant mG_1+mG_2$ （次可加性）．

特别地，当 $G_1\bigcap G_2=\phi$ 时，$m(G_1\bigcup G_2)=mG_1+mG_2$ （完全可加性）．

证 (1) 设 G_1,G_2的构成区间分别是$\{\delta_k^{(1)}\}$，$\{\delta_k^{(2)}\}$．因为 $mG_1 = \sum\limits_{k}m\delta_k^{(1)}$，$mG_2 = \sum\limits_{k}m\delta_k^{(2)}$ 都收敛，故对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使得 $mG_1 < \sum\limits_{k=1}^{N}m\delta_k^{(1)}+\varepsilon$．由于 $G_1\subset G_2$，所以 $\delta_1^{(1)},\delta_2^{(1)},\cdots,\delta_N^{(1)}$ 必含在 G_2内，从而 $\delta_1^{(1)},\delta_2^{(1)},\cdots,\delta_N^{(1)}$ 必含在 G_2的某 M 个构成区间 $\delta_1^{(2)},\delta_2^{(2)},\cdots,\delta_M^{(2)}$ 内 $(M\leqslant N)$．于是 $\sum\limits_{k=1}^{N}m\delta_k^{(1)}\leqslant\sum\limits_{k=1}^{M}m\delta_k^{(2)}$．

因此

$$mG_1\leqslant\sum_{k=1}^{N}m\delta_k^{(1)}+\varepsilon\leqslant\sum_{k=1}^{M}m\delta_k^{(2)}+\varepsilon\leqslant mG_2+\varepsilon.$$

考虑到 mG_1,mG_2是定数以及 δ 的任意性，故有 $mG_1\leqslant mG_2$．

(2) 令 $G=G_1\bigcup G_2$．因为 G,G_1,G_2都是开集，所以 $G=\bigcup\limits_{j}(\alpha_j,\beta_j)$，$G_1=\bigcup\limits_{k}(\alpha_k^{(1)},\beta_k^{(1)})$，$G_2=\bigcup\limits_{k}(\alpha_k^{(2)},\beta_k^{(2)})$．对于每个给定的 j，(α_j,β_j)必为某些$(\alpha_k^{(n)},\beta_k^{(n)})$ $(n=1,2)$的并集．任取正数 $\varepsilon<(\beta_j-\alpha_j)/2$．则$[\alpha_j+\varepsilon,\beta_j-\varepsilon]$的每一点都是某个$(\alpha_k^{(n)},\beta_k^{(n)})$的内点．根据有限覆

盖定理知，这些$(\alpha_k^{(n)},\beta_k^{(n)})$中的有限个就已覆盖了$[\alpha_j+\varepsilon,\beta_j-\varepsilon]$. 令

$\sum_j'(\beta_k^{(n)}-\alpha_k^{(n)})$ 表示有限覆盖$[\alpha_j+\varepsilon,\beta_j-\varepsilon]$的区间长度之和；

$\sum_j(\beta_k^{(n)}-\alpha_k^{(n)})$ 表示组成(α_j,β_j)的一切开区间的长度之和.

则

$$\beta_j-\alpha_j-2\varepsilon\leqslant\sum_j'(\beta_k^{(n)}-\alpha_k^{(n)})\leqslant\sum_j(\beta_k^{(n)}-\alpha_k^{(n)}).$$

注意到上式右端与ε无关，故

$$\beta_j-\alpha_j\leqslant\sum_j(\beta_k^{(n)}-\alpha_k^{(n)}),$$

再对j求和，便得

$$mG=\sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j-\alpha_j)\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\sum_j(\beta_k^{(n)}-\alpha_k^{(n)}),$$

即

$$m(G_1\cup G_2)\leqslant mG_1+mG_2.$$

再证$G_1\cap G_2=\phi$的情形. 这时每个(α_j,β_j)恰好是某个$(\alpha_k^{(n)},\beta_k^{(n)})$，因此上面对$j$求和也就是对$k=1,2,\cdots$以及$n=1,2$求和，故

$$mG=\sum_{j=1}^{\infty}(\beta_j-\alpha_j)=\sum_{n=1}^{2}\sum_{k=1}^{\infty}(\beta_k^{(n)}-\alpha_k^{(n)})=mG_1+mG_2. \blacksquare$$

3. 有界闭集的测度

我们将利用有界开集的测度来定义有界闭集的测度.

定义2 设F为有界闭集. 任取一个包含F的开区间(a,b)，令$G=(a,b)-F$，则定义F的测度为

$$mF=(b-a)-mG.$$

显然，有界闭集的测度也是非负的.

例1 求闭集$F=[1,3]$的测度.

解 取开区间$(a,b)\supset F=[1,3]$，则$G=(a,b)-[1,3]=(a,1)\cup(3,b)$. 因为

$$mG=(1-a)+(b-3)=b-a-2,$$

所以

$$mF=(b-a)-(b-a-2)=2.$$

可见，区间的测度等于该区间的长度.

例2 求二元素集 $F=\{1,2\}$的测度.

解 显然，$F=\{1,2\}$为闭集. 取$(a,b)\supset F$，则 $G=(a,b)-F=(a,1)\cup(1,2)\cup(2,b)$. 因为

$$mG=(1-a)+(2-1)+(b-2)=b-a,$$

所以

$$mF=(b-a)-mG=0.$$

可见，有限集的测度等于零.

注 在定义2中，我们对(a,b)的选取除了要求包含 F 外并未加其它限制. 那么，mF 是否为一个定值呢？也就是说，闭集 F 给定后，mF 是否与(a,b)的选取无关呢？回答是肯定的. 事实上，令 $a_1=\inf F$，$b_1=\sup F$. 当 F 给定后，$[a_1,b_1]$是唯一的. 由于 $a_1=\inf F$，故$\exists x_n\in F$，使 $x_n\to a_1$. 又因为 F 是闭集，故 $a_1\in F$；同理可知，$b_1\in F$. 因此，$[a_1,b_1]$是包含 F 的最小闭区间. 因为$[a_1,b_1]-F=(a_1,b_1)-F$，且令 $G_1=(a,b)-(a_1,b_1)$，$G_2=[a_1,b_1]-F=(a_1,b_1)-F$，则 $G_1\cap G_2=\phi$，且

$$\begin{aligned}G&=(a,b)-F=\big((a,b)-[a_1,b_1]\big)\cup\big([a_1,b_1]-F\big)\\&=G_1\cup G_2,\end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}mF&=(b-a)-mG=(b-a)-[mG_1+mG_2]\\&=(b-a)-[(b-b_1)+(a_1-a)+mG_2]\\&=(b_1-a_1)-mG_2.\end{aligned}$$

因此，mF 与(a,b)的选取无关.

定理2 (1) 设 F_1，F_2均为闭集，且 $F_1\subset F_2$，则 $mF_1\leqslant mF_2$；

(2) 设 F 是有界闭集，G 是有界开集，且 $F\subset G$，则 $mF\leqslant mG$.

证 (1) 取开区间(a,b)，使 $F_1\subset F_2\subset(a,b)$. 令 $G_1=(a,b)-F_1$，$G_2=(a,b)-F_2$. 因为 $F_1\subset F_2$，所以 $G_2\subset G_1$，故 $mG_2\leqslant mG_1$，从而有 $mF_1\leqslant mF_2$.

(2) 取开区间(a,b)，使 $F\subset G\subset(a,b)$. 因为

$$(a,b)=[(a,b)-F]\cup F\subset G_1\cup G,$$

式中 $G_1=(a,b)-F$，其中 G_1,G 为开集. 由定理1知，$b-a\leqslant mG_1+mG$，即 $b-a-mG_1\leqslant mG$. 所以，$mF\leqslant mG$. ▌

4. 有界集的测度

定义3 设 E 是非空有界集，称

$$m^*E=\inf\{mG\,|\,G\text{ 为包含 }E\text{ 的有界开集}\}$$

为 E 的**外测度**.

按定义3，若 G 为有界开集，则 $m^*G=mG$.

定义4 设 E 是非空有界集，称

$$m_*E=\sup\{mF\,|\,F\text{ 为含于 }E\text{ 中的有界闭集}\}$$

为 E 的**内测度**.

按定义4，若 F 为有界闭集，则 $m_*F=mF$.

容易证明，对任何有界集 E，都有

$$m_*E\leqslant m^*E.$$

事实上，设有开集 G 和闭集 F，且 $F\subset E\subset G$. 由定理2知，$mF\leqslant mG$. 因此，$mF=\sup\limits_{F\subset E}\{mF\}=m_*E\leqslant mG$，此式对于一切包含 E 的有界开集 G 都成立，故得 $m_*E\leqslant\inf\limits_{G\supset E}\{mG\}=m^*E$.

可以举出例子，说明直线上确实存在着有界集 E，使得 $m_*E<m^*E$. 于是，直线上的有界集就分成两类：一类是使 $m_*E<m^*E$；另一类是使 $m_*E=m^*E$. 我们仅研究后者.

定义5 设 E 是有界集，若 $m_*E=m^*E$，则称 E 为**可测集**（或 **Lebesgue 可测集**），并称 $mE=m_*E=m^*E$ 为 E 的**测度**（或 **Lebesgue 测度**）.

可以证明，有界开集与有界闭集都是可测集，其测度与定义1或定义2所定义的测度是一致的.

定理3（单调性） 若 $E_1\subset E_2$，则

(1) $m^*E_1\leqslant m^*E_2$； (2) $m_*E_1\leqslant m_*E_2$.

证 仅证(2),对(1)可类似证明.设 S 是所有包含在 E_1 中之闭集的测度所成的集合,T 是所有包含在 E_2 中之闭集的测度所成的集合.则

$$m_* E_1 = \sup S, \quad m_* E_2 = \sup T.$$

因为 $E_1 \subset E_2$,所以 $S \subset T$,故 $\sup S \leqslant \sup T$,即 $m_* E_1 \leqslant m_* E_2$. ▌

推论1 若 $m^* E = 0$,则 E 是可测集,且 $mE = 0$.

事实上,因为 $0 \leqslant m_* E \leqslant m^* E = 0$,故 $mE = m_* E = m^* E = 0$.

推论2 若 $E \subset E_1$,且 $mE_1 = 0$.则 E 是可测集,且 $mE = 0$.即零测集的子集是零测集.

事实上,由定理3知,$0 \leqslant m_* E \leqslant m_* E_1 = mE_1 = 0$,且 $0 \leqslant m^* E \leqslant m^* E_1 = mE_1 = 0$.因此,$mE = m_* E = m^* E = 0$.

注 推论2表明 Lebesgue 测度具有完全性.

定理4 设 E 为有界可测集,(a,b) 为开区间,则 $(a,b) \cap E$ 及 $(a,b) \cap E^c$ 都是可测集.

定理5 设 $E_n (n=1,2,\cdots)$ 是可测集,$E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 为有界集.则 E 为可测集,且 $mE \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} mE_n$(次可加性);当 $\{E_n\}$ 两两不相交时,$mE = \sum\limits_{n=1}^{\infty} mE_n$(完全可加性);特别地,对有限个 $E_1, E_2, \cdots, E_n$,定理也成立.

定理6 若 $E_n (n=1,2,\cdots)$ 是一列有界可测集,则 $E = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} E_n$ 也是可测集.特别地,对有限个可测集 $E_1, E_2, \cdots, E_n$,定理也成立.

证 因为 $E \subset E_1$,而 E_1 是有界的,故 E 是有界集.设 $E \subset (a,b)$,则

$$\begin{aligned}(a,b) - E &= (a,b) \cap E^c = (a,b) \cap \left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right)^c \\ &= (a,b) \cap \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [(a,b) \cap E_n^c].\end{aligned}$$

根据定理4知,$(a,b) \cap E_n^c$ 为可测集.再由定理5知,$(a,b) - E$ 也是可测集.由于

$$E=(a,b)-[(a,b)-E]=(a,b)\cap[(a,b)-E]^c,$$

根据定理4知，E 为可测集.

特别地，当 $E_1,E_2,\cdots,E_n$ 是有限个的情况，取 (a,b) 使得 $E_k\subset(a,b)(k=1,2,\cdots,n)$. 注意到 $\bigcap\limits_{k=1}^{n}E_k=(\bigcap\limits_{k=1}^{n}E_k)\cap(a,b)\cap(a,b)\cap\cdots$，由上述证明知，$\bigcap\limits_{k=1}^{n}E_k$ 也是可测的，故定理对有限交也成立. ▌

定理7 若 E_1,E_2 为有界可测集，则 E_1-E_2 也是可测集.

证 取开区间 (a,b)，使 $E_1,E_2\subset(a,b)$，则 $E_1-E_2=E_1\cap[(a,b)-E_2]=E_1\cap[(a,b)\cap E_2^c]$. 由定理4和定理6知，$E_1-E_2$ 是可测集. ▌

定理8（单调性） 若 E_1,E_2 为有界可测集，且 $E_1\subset E_2$，则 $mE_1\leqslant mE_2$.

证 因为 E_1,E_2 是可测集，所以 $mE_1=m^*E_1,mE_2=m^*E_2$. 由于 $E_1\subset E_2$，根据定理3知，$m^*E_1\leqslant m^*E_2$，从而 $mE_1\leqslant mE_2$. ▌

定理9 若 E_1,E_2 为有界可测集，且 $E_1\subset E_2$，则 $m(E_2-E_1)=mE_2-mE_1$.

证 因为 $E_1\subset E_2$，所以 $E_2=E_1\cup(E_2-E_1)$，且 $E_1\cap(E_2-E_1)=\phi$. 按定理5有

$$mE_2=m[E_1\cup(E_2-E_1)]=mE_1+m(E_2-E_1),$$

故 $m(E_2-E_1)=mE_2-mE_1$. ▌

注意 如果去掉条件"$E_1\subset E_2$"，则定理9未必成立.

例3 有界可列集的测度为零.

证 设 $A=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$，则 $A=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\}$，且 $m\{x_n\}=0$. 显然，A 是有界的. 按定理5知，$mA=m(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\{x_n\})\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}m\{x_n\}=0$，故 $mA=0$. ▌

注 把闭区间 $[0,1]$ 中的全体有理数记为 R_0，则 $mR_0=0$. 但是，$m[0,1]=1$. 可见，无理数比有理数多得多.

定理10 设 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 为一列有界可测集，且 $E_1\subset E_2\subset\cdots$

$\subset E_n \subset \cdots$. 若 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n=\lim_{n\to\infty} E_n$ 有界，则 $\lim_{n\to\infty} mE_n=mE$.

证 设 $G_1=E_1, G_2=E_2-E_1, \cdots, G_n=E_n-E_{n-1}, \cdots$. 由定理7知，$G_n(n=1,2,\cdots)$ 都是可测集，且 $G_i\cap G_j=\phi(i,j=1,2,\cdots;i\neq j)$. 注意到 $E=\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n=\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 是有界的，由定理5及定理9知

$$mE=\sum_{n=1}^{\infty} mG_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} mG_i$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left[mE_1+\sum_{i=2}^{n}(mE_i-mE_{i-1})\right]=\lim_{n\to\infty} mE_n.\ \blacksquare$$

定理11 设 $E_n(n=1,2,\cdots)$ 为一列有界可测集，且 $E_1\supset E_2\supset\cdots\supset E_n\supset\cdots$. 令 $E=\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$，则 $\lim_{n\to\infty} mE_n=mE$.

证 令 $G_i=E_1-E_i(i=1,2,\cdots)$，则 $G_1\subset G_2\subset\cdots\subset G_n\subset\cdots$. 由定理10知

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n)=\lim_{n\to\infty} mG_n=\lim_{n\to\infty} m(E_1-E_n)=mE_1-\lim_{n\to\infty} mE_n.$$

因为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}(E_1-E_n)=\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n^c=(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n)^c=E_1-E,$$

故有

$$m(\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n)=mE_1-mE,$$

因此，$mE=\lim_{n\to\infty} mE_n$. $\blacksquare$

5. 环和环上的测度

以某个固定的集 X 的某些子集为元素所成的集称为 X 的集类，简称为类. 集类用粗体的英文字母表示. 例如，X 的子集的全体就是一个集类.

设 $\mathbf{R}$ 是由 X 的某些子集所组成的一个集类，A 是 X 的一个固定子集，则 $\mathbf{R}\cap A$ 表示由一切形如 $E\cap A$ 的集合所成的集类，其中 $E\in\mathbf{R}$.

定义6 设 X 是一个集，$\mathbf{R}$ 是由 X 的某些子集所成的非空集

类. 如果对于任何 $A,B\in \mathbf{R}$,都有

$$A\cup B\in \mathbf{R},\quad A-B\in \mathbf{R},$$

则称 $\mathbf{R}$ 是 X 上的一个**环**,特别地,如果又有 $X\in \mathbf{R}$,则称 $\mathbf{R}$ 是一个**代数**.

由定义6可知,环是对集合的"$\cup$"及"$-$"运算封闭的非空集类.

例4 只包含一个空集的单元集类$\{\phi\}$是一个环.

例5 设 X 是任意的集(有限的或无限的),则 X 的有限子集(包括空集 ϕ)组成的集类 $\mathbf{R}$ 是一个环.

例6 X 的一切子集所成的集类 $\mathbf{R}$ 是一个代数.

定义7 设 $\mathbf{R}$ 是一个集类. 如果对于 $\mathbf{R}$ 中的每一个集 E,都有一个数 $\mu(E)$与之对应,则称 μ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上的一个**集函数**.

注 定义7中允许集函数 μ 的值可以是无限的. 为此,我们用 $\hat{R}$ 表示实数的全体 R 再加上$+\infty$,$-\infty$所成的"推广数集",也称 $\hat{R}$ 中的元素为广义实数. 数直线上补入$+\infty$和$-\infty$后,称为**扩张的数直线**. 因此,集函数就是以集类为定义域,集为变元,在 $\hat{R}$ 中取值的函数.

定义8 设 $\mathbf{R}$ 是 X 上的环,μ 是 $\mathbf{R}$ 上的集函数. 如果 μ 具有下列性质:

1° $\mu(\phi)=0$;

2° 对$\forall E\in \mathbf{R}$,都有 $\mu(E)\geqslant 0$;

3° 对于 $\mathbf{R}$ 中之集的任何不相交序列$\{E_n\}$,如果$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n\in \mathbf{R}$,必有

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\mu(E_n),$$

则称集函数 μ 为环 $\mathbf{R}$ 上的**测度**,并称 $\mu(E)$为 E 的**测度**.

设 $\mathbf{R}$ 是 X 上的一个环. 对$\forall E\in \mathbf{R}$,均令 $\mu(E)=+\infty$,则 μ 是 $\mathbf{R}$ 上的一个非负的且具有完全可加性的集函数. 容易看到,除了这个恒取$+\infty$值的平凡情况外,定义8中 $\mu(\phi)=0$条件可由 μ 的完全可加性推出. 这是因为对$\forall E\in \mathbf{R}$,有

$$\mu(E)=\mu(E\cup\phi\cup\phi\cup\cdots\cup\phi)=\mu(E)+\mu(\phi)+\cdots,$$

如果 $\mu(E)$ 为有限数，则由上式可知 $\mu(\phi)=0$.

因此，上述关于测度的定义也可以简单地说成：定义在环 $\boldsymbol{R}$ 上的具有完全可加性且不恒等于 $+\infty$ 的集函数，称为**环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度**.

例7 设 $\boldsymbol{R}$ 是 X 的有限子集全体所成的环．对于每个 $E\in\boldsymbol{R}$，令

$$\mu(E)=E\text{ 中元素的个数},$$

则 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度.

例8 设 X 是一非空集合，$\boldsymbol{R}=\{X,\phi\}$，令

$$\mu(X)=1,\quad \mu(\phi)=0,$$

则 μ 是环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度.

不难证明，环 $\boldsymbol{R}$ 上的测度 μ 具有下列性质：

1° **有限可加性**：若 $E_1,E_2,\cdots,E_n\in\boldsymbol{R}$，且 $E_i\cap E_j=\phi$，$(i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$，则 $\mu(\bigcup\limits_{k=1}^{n}E_k)=\sum\limits_{k=1}^{n}\mu(E_k)$.

2° **单调性**：若 $A,B\in\boldsymbol{R}$，且 $A\subset B$，则 $\mu(A)\leqslant\mu(B)$.

3° **可减性**：若 $A,B\in\boldsymbol{R}$、$A\subset B$，且 $\mu(A)<+\infty$，则 $\mu(B-A)=\mu(B)-\mu(A)$.

4° **次可加性**：若 $E,E_n\in\boldsymbol{R}(n=1,2,\cdots)$，且 $E\subset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}E_n$，则 $\mu(E)\leqslant\sum\limits_{n=1}^{\infty}\mu(E_n)$.

6. 无界集的测度

定义9 设 E 是 R 上的数集，若对于任何的整数 $n>0$，有界集 $(-n,n)\cap E$ 均可测，则称 E 为**可测集**，并称

$$mE=\lim_{n\to\infty}m[(-n,n)\cap E]$$

为 **E 的测度**.

在定义9中，测度 $m[(-n,n)\cap E]$ 是 n 的增函数，其极限必存

在（有限值或无穷大）. 若其极限为有限值，则此值即为 mE；否则，$mE=+\infty$.

对于无界集，Lebesgue 测度诸定理仍旧成立. 特别地，开集必为可测集；任意可列集的测度必为零.

§1.6 可测函数

在§1.5中我们建立了测度理论. 为了建立 Lebesgue 积分，还须引入可测函数的概念. 这是因为积分是对函数进行运算的. 因此需要对定义在集 E 上的函数 $f(x)$ 加以适当的限制，即要求对任何的实数 c,d，集 $\{x|c\leqslant f(x)<d\}$ 是可测集. 由于

$$\{x|c\leqslant f(x)<d\}=\{x|f(x)<d\}-\{x|f(x)<c\},$$

从而讨论集 $\{x|c\leqslant f(x)<d\}$ 的可测问题，等价于讨论集 $\{x|f(x)<a\}$（a 为实数）的可测问题.

1. 可测函数的概念及基本性质

定义1 设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的实值函数. 若对任何的实数 a，都有

$$E(a)=\{x|f(x)<a,x\in E\}$$

是可测集，则称 f 是 E 上的**可测函数**，或称 f 在 E 上**可测**.

例1 零测度集 E 上定义的任何实值函数 $f(x)$ 都是可测函数.

事实上，对任何的实数 a，$E(a)=\{x|f(x)<a,x\in E\}$ 是零测度集的子集. 故 $E(a)$ 为可测集，从而 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

例2 可测集 E 上的常值函数是可测函数.

事实上，设 $f(x)=c$，对任意实数 a，有

$$E(a)=\{x|f(x)<a,x\in E\}=\begin{cases}E, & a>c,\\ \phi, & a\leqslant c,\end{cases}$$

因为对任意实数 a，E 与 ϕ 都是可测集，故 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

例3 设 $E=\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$，其中 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$ 都是可测集，且 $E_i\cap E_j=\phi(i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$. 当 $x\in E_i$ 时，$f(x)=c_i$（c_i 为常数，这种类型的函数称为 E 上的简单函数），则 $f(x)$ 为 E 上的可测函数.

事实上，对任何的实数 a，集

$$E(a)=\{x\,|\,f(x)<a,x\in E\}$$

或是空集 ϕ，或是有限个 E_i 的并集，故 $E(a)$ 是可测集，从而 $f(x)$ 是 E 上的可测函数.

由例3可知，Dirichlet 函数是可测函数.

例4 定义在 R 上的连续函数 $f(x)$ 是可测函数.

证 对任何的实数 a，$E(a)=\{x\,|\,f(x)<a,x\in R\}$. 若 $E(a)\neq\phi$，兹证 $E(a)$ 是开集. 任取 $x_0\in E(a)$，则 $f(x_0)<a$. 因为 $f(x)$ 在 x_0 点连续，所以，$\exists\,\delta>0$，当 $x\in\delta(x_0)$ 时，$f(x)<a$，从而 $\delta(x_0)\subset E(a)$，故 x_0 是 $E(a)$ 的内点. 注意到 x_0 的任意性，故 $E(a)$ 是开集. 由于开集是可测的，因此 $f(x)$ 是可测函数. ▌

由例4可知，{连续函数}$\subset${可测函数}. 可见，连续函数较可测函数要求条件强，从下述的鲁金(Лузин)定理可洞察出它们之间的关系.

鲁金(Лузин)定理 设 $f(x)$ 是有界可测集 E 上的可测函数，则对任何 $\delta>0$，存在连续函数 $g_\delta(x)$，使得

$$m\{x\,|\,f\neq g_\delta,x\in E\}<\delta.$$

定理1 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，则对任何的实数 a，集

(1) $E_1=\{x\,|\,f(x)\geqslant a,x\in E\}$；

(2) $E_2=\{x\,|\,f(x)\leqslant a,x\in E\}$；

(3) $E_3=\{x\,|\,a\leqslant f(x)\leqslant b,x\in E,a,b\in R\}$；

(4) $E_4=\{x\,|\,f(x)=a,x\in E\}$，

都是可测集.

证 (1) $E_1=\{x|f(x)\geqslant a,x\in E\}=E-\{x|f(x)<a,x\in E\}$.
由§1.5定理7知，E_1是可测集.

(2) $E_2=\{x|f(x)\leqslant a,x\in E\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\{x|f(x)<a+\frac{1}{n},x\in E\}$.
由§1.5定理6知，E_2是可测集.

(3) $E_3=\{x|a\leqslant f(x)\leqslant b,x\in E,a,b\in R\}$
$$=\{x|f(x)\geqslant a,x\in E;a\in R\}\cap\{x|f(x)\leqslant b,x\in E;b\in R\}.$$
由(1)与(2)知，E_3为可测集.

(4) $E_4=\{x|f(x)=a,x\in E\}$
$$=\{x|f(x)\leqslant a,x\in E\}-\{x|f(x)<a,x\in E\},$$
根据§1.5定理7，由(2)及可测函数的定义知，E_4为可测集. ▌

注 设E是一可测集. $f(x)$在E上可测的充要条件是集E_1，E_2，E_3中至少有一个是可测集.

定理2 设$f(x)$，$g(x)$都是可测集E上的可测函数，则下列函数都是E上的可测函数：

(1) $kf(x)$ （k为常数）； (2) $f(x)\pm g(x)$；

(3) $f(x)g(x)$； (4) $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ $(g(x)\neq 0)$；

(5) $|f(x)|^{\alpha}$ $(\alpha>0)$.

2. 可测函数列的收敛性

定义2 设S是关于点集E的命题，使命题S不成立的点所成的集为E_0. 如果$mE_0=0$，则称命题S在E上几乎处处成立，或称在E上概成立，记为$a.e$于E（或$p.p$于E）.

注 (1) 所谓命题S在E上几乎处处成立，就是E中使得命题S不成立的点总是包含在某个测度为零的集内.

(2) 这里的集E未必是可测的，E_0也不要求含在E中. 如果E是可测集，那么就不妨取E_0为E的子集.

例5 设$D(x)=\begin{cases}1, & 当\ x\ 为无理数时,\\ 0, & 当\ x\ 为有理数时,\end{cases}$ 则$D(x)\overset{a.e}{=}1$.

例6 设 $f(x)=\mathrm{tg}x$，则 $f(x)$ 几乎处处连续.

至此，关于函数列 $\{f_n(x)\}$ 的收敛问题，我们已经知道了三种意义下的收敛：

1° **一致收敛**：对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon)>0$，使当 $n\geqslant N$ 时，对一切 $x\in E$，都有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$. 则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$.

2° **按点收敛**：任取 $x\in E$，对 $\forall \varepsilon>0$，$\exists N(\varepsilon,x)>0$，当 $n\geqslant N$ 时，有 $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$，则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上每一点收敛于 $f(x)$.

3° **几乎处处收敛**：设 $\{f_n(x)\}$ 和 $f(x)$ 是可测集 E 上的函数，如果在 E 中使 $\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=f(x)$ 不成立的点的集合 E_0 为零测度集（即 $mE_0=0$），则称 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$，记为 $f_n\xrightarrow{a.e.}f$.

不难证明，上述三种收敛存在关系：1°$\Longrightarrow$2°$\Longrightarrow$3°；但反之不真.

最后，介绍一种更弱的收敛概念——依测度收敛.

定义3 设 $f(x)$ 和 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数. 如果对于任何正数 ε，都有

$$\lim_{n\to\infty}mE_n(\varepsilon)=0,$$

其中 $E_n(\varepsilon)=\{x\,|\,|f_n(x)-f(x)|\geqslant\varepsilon,x\in E\}$，则称 $\{f_n(x)\}$ **依测度** m **收敛**于 $f(x)$（或称**度量收敛**于 $f(x)$），记为 $f_n(x)\xrightarrow{m}f(x)$.

测度收敛的意义是，对于事先任意给定一个表示偏差的正数 ε，不论这个 ε 多么小，能够使得 $|f_n(x)-f(x)|$ 大于或等于 ε 的点 x 可能很多，但这种点 x 所成集合的测度随着 n 的无限增大而趋向于零.

定理3（Lebesgue） 设 $f(x)$ 和 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 均是可测集 E 上几乎处处有限的可测函数. 如果 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上几乎处处收敛于 $f(x)$，则 $\{f_n(x)\}$ 度量收敛于 $f(x)$.

注意 定理3的逆不成立. 但是有下面的定理.

定理4（F·Riesz） 设 $\{f_n(x)\}$ 在 E 上度量收敛于 $f(x)$，$mE<\infty$，则存在 $\{f_n(x)\}$ 的子序列 $\{(f_{n_k}(x)\}$ 几乎处处收敛于 $f(x)$.

§1.7 勒贝格积分

在本节中，我们将利用§1.5介绍的测度和§1.6介绍的可测函数来建立新的积分概念.

1. 有界函数的 Lebesgue 积分

定义1 设 E 是有界可测集，$f(x)$ 是 E 上的有界可测函数，且 $A<f(x)<B$. 在$[A,B]$中任意插入若干个分点

$$A=y_0<y_1<\cdots<y_{i-1}<y_i<\cdots<y_n=B$$

分割区间$[A,B]$. 令

$$\|\Delta y_i\|=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{y_i-y_{i-1}\},$$

$$E_i=\{x\,|\,y_{i-1}\leqslant f(x)<y_i,x\in E\},i=1,2,\cdots,n,$$

则 E_i 具有下述四个性质：

1° $E_i\cap E_j=\phi(i,j=1,2,\cdots,n;i\neq j)$；

2° 每个 $E_i(i=1,2,\cdots,n)$都是可测集；

3° $E=\dot{\bigcup\limits_{i=1}^{n}}E_i$ （称为 E 的一个可测子集式分割）；

4° $mE=\sum\limits_{i=1}^{n}mE_i$.

在每个 E_i 中任取一点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，作和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)mE_i,$$

如果极限

$$\lim_{\|\Delta y_i\|\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)mE_i$$

存在，且极限值与区间$[A,B]$的分法和 E_i 中 ξ_i 的取法都无关. 则称 $f(x)$在 E 上是 **Lebesgue 可积的**，简称为 **L 可积**，记为 $f\in L(E)$；并称此极限值为 $f(x)$在 E 上的 **Lebesgue 积分**，记为 $(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x$，或

记为 $\int_E f(x)\mathrm{d}x$.

特别地，当 $E=[a,b]$时，常记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$.

定理1 若 $f(x)$是有界可测集 E 上的可测函数，则 $f(x)\in L(E)$.

可以证明，定义在有界可测集 E 上的有界函数 $f(x)$，若 $f(x)\in L(E)$，则 $f(x)$为可测函数.

例1 设 $D(x)$是定义在区间$[0,1]$上的 Dirichlet 函数，即

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}, \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时},\end{cases}$$

则 $D(x)$在 Lebesgue 意义下是可积的. 但它在 Riemann 意义下是不可积的.

例1表明，Lebesgue 积分确实较 Riemann 积分为广，这正是新积分的优点之一.

读者自然很关心这样一个问题：Lebusgue 积分与 Riemann 积分之间有什么必然的联系呢？下面的定理2将说明 Lebesgue 积分是 Riemann 积分的推广.

定理2 若 $f(x)\in R[a,b]$，则 $f(x)\in L[a,b]$，且

$$(L)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(R)\int_a^b f(x)\mathrm{d}x.$$

这个定理的意义在于：当 $f(x)$为 R 可积时，可将计算 $f(x)$的 Lebesgue 积分问题转化为大家熟知的 Riemann 积分来处理.

下面介绍 Lebesgue 积分的性质.

定理3 设 $f(x),g(x)\in L(E)$，则

1° $\int_E (f\pm g)\mathrm{d}x=\int_E f\mathrm{d}x\pm\int_E g\mathrm{d}x$;

2° $\int_E kf\mathrm{d}x=k\int_E f\mathrm{d}x$;

3° $\int_{E_1\cup E_2} f\mathrm{d}x=\int_{E_1} f\mathrm{d}x+\int_{E_2} f\mathrm{d}x,\quad E_1\cap E_2=\phi$;

4° 若在 E 上有 $f\leqslant g$，则 $\int_E f\mathrm{d}x\leqslant\int_E g\mathrm{d}x$;

5° 若在 E 上有 $f \geqslant 0$，且 $\int_E f\mathrm{d}x = 0$，则在 E 上，$f(x) \overset{\text{a.e.}}{=} 0$；

6° 若在 E 上有 $A \leqslant f(x) \leqslant B$，则 $AmE \leqslant \int_E f\mathrm{d}x \leqslant BmE$．特别地，当 $f(x) \overset{\text{a.e.}}{=} 0$ 时，$\int_E f\mathrm{d}x = 0$；当 $mE = 0$ 时，$\int_E f\mathrm{d}x = 0$．

最后，我们给出 Riemann 可积的一个充要条件．

定理4 函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上 R 可积的充要条件是 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续．

定理4是判定 R 可积性最简明的方法．在 §1.5中我们曾经提到，只有"基本上是连续"的函数才是 R 可积的，这句话现在得到了解释．

2. 非负无界函数的 Lebesgue 积分

设 $f(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数．令

$$[f(x)]_n = \begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x) \leqslant n \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } f(x) > n \text{ 时}, \end{cases}$$

则截断函数 $[f(x)]_n$（如图1.7）是有界可测函数，且

$$0 \leqslant [f]_1 \leqslant [f]_2 \leqslant [f]_3 \leqslant \cdots,$$

从而

$$0 \leqslant \int_E [f]_1 \mathrm{d}x \leqslant \int_E [f]_2 \mathrm{d}x \leqslant \cdots,$$

即 $\{\int_E [f]_n \mathrm{d}x\}$ 是非负单调增加数列．因此，下面的极限是存在的（有限值或无穷大）：

$$\lim_{n \to \infty} \int_E [f(x)]_n \mathrm{d}x .$$

定义2 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数，若极限

$$\lim_{n \to \infty} \int_E [f(x)]_n \mathrm{d}x$$

存在且为一有限值，则称 $f(x)$ 是 E 上的 **Lebesgue 可积函数**（或 **L 可积函数**），记为 $f \in L(E)$；而

$$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}(L)\int_E [f(x)]_n \mathrm{d}x$$

称为非负无界函数 $f(x)$ 在 E 上的 **Lebesgue** 积分.

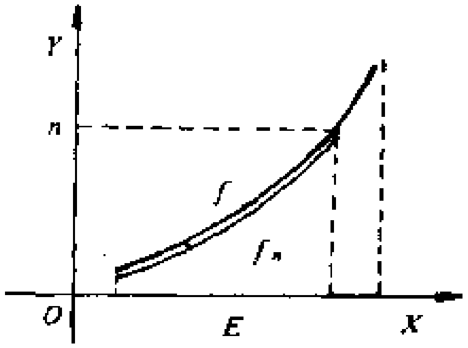


图 1.7

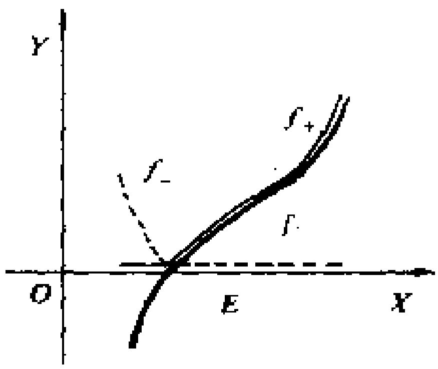


图 1.8

定理5 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的非负可测函数. 若 $F(x)\in L(E)$，且 $f(x)\leqslant F(x)$，则 $f(x)\in L(E)$.

3. 无界函数的 Lebesgue 积分

设 $f(x)$ 是定义在可测集 E 上的可测函数，令

$$f_+(x)=\begin{cases} f(x), & \text{当 } f(x)\geqslant 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } f(x)<0 \text{ 时}, \end{cases}$$

$$f_-(x)=\begin{cases} -f(x), & \text{当 } f(x)\leqslant 0 \text{ 时}, \\ 0, & \text{当 } f(x)>0 \text{ 时}, \end{cases}$$

则 $f(x)=f_+(x)-f_-(x)$（如图1.8），且 $f_+(x)$ 与 $f_-(x)$ 都是 E 上的非负可测函数.

定义3 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数. 若 $f_+, f_-\in L(E)$（即 $\int_E f_+\mathrm{d}x$ 与 $\int_E f_-\mathrm{d}x$ 均为有限值），则称

$$(L)\int_E f(x)\mathrm{d}x=(L)\int_E f_+(x)\mathrm{d}x-(L)\int_E f_-(x)\mathrm{d}x$$

为函数 $f(x)$ 在 E 上的 **Lebesgue 积分**，记为 $f\in L(E)$.

定理6 设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，则 $f(x)\in L(E)$ 的充要条件是 $|f(x)|\in L(E)$.

事实上，由 $|f(x)|=f_+(x)+f_-(x)$ 便知.

前已述及，当 $f(x)$ 有界且 R 可积时，$f(x)$ 必是 L 可积的. 但是，对于无界可测函数而言，这个结论未必成立. 这是因为对于广义的 Riemann 积分来说，当 $f(x)$ 可积时不能得到 $|f(x)|$ 也是可积的.

例2 考察[0,1]上的函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{x}, & 0<x\leqslant 1,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

由高等数学知识知 $f(x)$ 是广义 Riemann 可积的，但 $|f(x)|$ 不是广义 Riemann 可积的. 值得注意的是，$f(x)$ 在[0,1]上的 L 积分不存在！否则，按定理6知，$|f(x)|$ 是 L 可积的. 而 $\dfrac{1}{x}\left|\sin\dfrac{1}{x}\right|$ 在 $\left[\dfrac{1}{n},1\right]$ 上是 R 可积的，所以

$$(L)\int_0^1|f|\mathrm{d}x\geqslant(L)\int_{\frac{1}{n}}^1|f|\mathrm{d}x=(R)\int_{\frac{1}{n}}^1|f|\mathrm{d}x\to\infty\ (n\to\infty),$$

这说明 $|f|\overline{\in}L$，从而 $f\overline{\in}L$.

定理7(积分的绝对连续性) 若 $f(x)\in L(E)$，则对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使当 $e\subset E$，且 $me<\delta$ 时，便有

$$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon.$$

证 由定理6知，$|f|$ 在 E 上是非负可积的. 设 $[f]_N$ 是 $|f|$ 的截断函数. 根据定义2，必有自然数 N，使得

$$0\leqslant\int_E|f|\mathrm{d}x-\int_E[f]_N\mathrm{d}x<\frac{\varepsilon}{2},$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{2N}$，则对任何的 $e\subset E$，且 $me<\delta$ 时，有

$$\begin{aligned}\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|&\leqslant\int_e|f(x)|\mathrm{d}x=\int_e(|f(x)|-[f]_N)\mathrm{d}x+\int_e[f]_N\mathrm{d}x\\&\leqslant\int_E(|f(x)|-[f]_N)\mathrm{d}x+\int_e[f]_N\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + N\frac{\varepsilon}{2N} = \varepsilon. \blacksquare$$

4. 积分的极限定理

积分与极限交换次序是积分学中的一个重要问题. 在Reimann积分理论中讨论这类问题时，常常需要附加一致收敛等较强的条件，然而许多函数并不满足这些条件. 因此，扩大可积函数类，尽量减弱积分与极限交换次序的条件是很有必要的. Lebesgue积分所要求的条件则要弱得多，这进一步体现了Lebesgue积分的优越性.

定理8(Lebesgue) 设 $f(x)$ 和 $u_k(x)(k=1,2,\cdots)$ 都是 E 上的非负可测函数，而 $f(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} u_k(x)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{\infty}\int_E u_k(x)\mathrm{d}x.$$

注 定理8并没有假定 $f(x)$ 是可积的. 假若级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\int_E u_k(x)\mathrm{d}x$ 收敛，就可以断言 $f(x)$ 可积，因而和函数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k(x)$ 几乎处处有限.

定理9(Levi) 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是可测集 E 上的非负可测函数列. 若

$$f_1(x)\leqslant f_2(x)\leqslant f_3(x)\leqslant\cdots,$$

且

$$\lim_{n\to+\infty} f_n(x) \overset{\text{a.e.}}{=} f(x),$$

则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

证 为了把序列化为级数的情形，令

$$u_k(x) = f_k(x) - f_{k-1}(x),\quad k=1,2,\cdots; f_0(x)=0,$$

根据定理8，有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E[f_k(x)-f_{k-1}(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_E[f_k(x)-f_{k-1}(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_E\sum_{k=1}^{n}[f_k(x)-f_{k-1}(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x. \blacksquare$$

在定理9中，需要假设一切的 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 均可积. 当出现某个 $f_n(x)$ 不可积时，所要证明的等式两边都成为 $+\infty$；当极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x$ 存在时，则可断言 $f(x)$ 可积.

定理10(**Fatou**) 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是可测集 E 上的非负可测函数列，若 $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)\overset{a.e.}{=}f(x)$，则

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x\leqslant\sup_n\left\{\int_E f_n(x)\mathrm{d}x\right\}.$$

定理11 设 $f_n(x)(n=1,2,\cdots)$ 是可测集 E 上的可测函数列，$f(x)=\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x)$. 若存在 E 上的可积函数 $g(x)$，使得

$$|f_n(x)|\leqslant g(x),\quad n=1,2,\cdots;x\in E,$$

则 $f(x)$ 在 E 上可积，且有

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to+\infty}\int_E f_n(x)\mathrm{d}x.$$

定理11称为 **Lebesgue 控制收敛定理**，它在函数论、微分方程和概率论等学科中有许多重要的应用.

§1.8 常用的不等式

1. 积分不等式

设 $f(x)$ 是可测集 E 上的可测函数，实数 $p\geqslant1$. 若 $|f(x)|^p$ 在 E

上是 L 可积的，则称 f 为 E 上的 p 方 L-可积函数. 集 E 上的 p 方 L-可积函数的全体，记为 $L^p(E)$，即

$$L^p(E)=\left\{f\ \middle|\ \int_E|f|^p\mathrm{d}x<+\infty\right\}.$$

$L^p(E)$有时简记为 L^p.

1° Hölder 不等式

设$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$，$(p>1)$，并且 $f(x)\in L^p$，$g(x)\in L^q$，则 $f(x)g(x)\in L(E)$，且

$$\int_E|f(x)g(x)|\mathrm{d}x\leqslant\left[\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_E|g|^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}. \tag{1.4}$$

证 考虑曲线 $y=x^{p-1}$或 $x=y^{\frac{1}{p-1}}=y^{q-1}$ $(p>1,q>1)$（如图1.9），对任意的非负实数 ξ,η，有矩形 $O\xi B\eta$ 面积$\leqslant$曲边$\triangle O\xi C$ 面积$\leqslant$曲边$\triangle OD\eta$ 面积，即

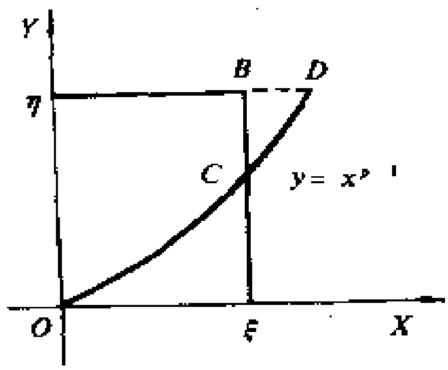


图 1.9

$$\begin{aligned}\xi\eta&\leqslant\int_0^\xi y\mathrm{d}x+\int_0^\eta x\mathrm{d}y\\&=\int_0^\xi x^{p-1}\mathrm{d}x+\int_0^\eta y^{q-1}\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{p}\xi^p+\frac{1}{q}\eta^q.\end{aligned} \tag{1.5}$$

如果(1.4)式右端两个积分中有一个是零，则(1.4)式显然成立，不妨设这两个积分均不为零，令

$$\bar{f}(x)=\frac{f(x)}{\left[\int_E|f|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}},\quad \bar{g}(x)=\frac{g(x)}{\left[\int_E|g|^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}},$$

显然有

$$\int_E|\bar{f}|^p\mathrm{d}x=1,\ \int_E|\bar{g}|^q\mathrm{d}x=1.$$

在不等式(1.5)中将 ξ 和 η 分别取为 $|\bar{f}(x)|$和$|\bar{g}(x)|$，则对$\forall x\in E$，有

$$|\bar{f}(x)\bar{g}(x)| \leqslant \frac{1}{p}|\bar{f}(x)|^p + \frac{1}{q}|\bar{g}(x)|^q. \tag{1.6}$$

由 $f \in L^p$，$g \in L^q$ 知 $\bar{f} \in L^p$，$\bar{g} \in L^q$，所以 $|\bar{f}\bar{g}| \in L$. 即 $|fg| \in L$. 对(1.6)式两边积分，得

$$\int_E |\bar{f}(x)\bar{g}(x)|\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,$$

将 $\bar{f}(x)$，$\bar{g}(x)$ 代入上式，得

$$\frac{\int_E |f||g|\mathrm{d}x}{\left[\int_E |f|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_E |g|^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}} \leqslant 1,$$

即

$$\int_E |fg|\mathrm{d}x \leqslant \left[\int_E |f|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_E |g|^q\mathrm{d}x\right]^{1/q}. \blacksquare$$

2° **В. Я. Буняковский 不等式**

在 Hölder 不等中，当 $p = q = 2$ 时，即可得到

$$\int_E |fg|\mathrm{d}x \leqslant \sqrt{\int_E |f|^2\mathrm{d}x}\sqrt{\int_E |g|^2\mathrm{d}x}. \tag{1.7}$$

3° **Minkowski 不等式**

设函数 $f(x)$，$g(x) \in L^p$，$(p \geqslant 1)$ 则 $f(x) + g(x) \in L^p$，且成立不等式

$$\left[\int_E |f+g|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_E |f|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p} + \left[\int_E |g|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}. \tag{1.8}$$

证 当 $p=1$ 时，(1.8)式显然成立. 现就 $p>1$ 证之.

先证 $f+g \in L^p$. 对任何的 ξ，η，有不等式

$$(\xi+\eta)^p \leqslant [2\max(|\xi|,|\eta|)]^p \leqslant 2^p(|\xi|^p + |\eta|^p),$$

因为 $|f+g|^p \leqslant 2^p(|f|^p + |g|^p)$，$f \in L^p$，$g \in L^p$，故 $2^p(|f|^p + |g|^p) \in L$，从而 $f+g \in L^p$.

下证不等式(1.8).

因为 $|f+g|^p \in L$，$|f+g|^{p/q} \in L^q$，且 $f \in L^p$. 由 Hölder 不等式，可得

$$\int_E |f|\,|f+g|^{p/q}\mathrm{d}x \leqslant \left[\int_E |f|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_E |f+g|^p\mathrm{d}x\right]^{1/q}, \quad (1.9)$$

注意到 $p=1+\frac{p}{q}$，则有

$$\begin{aligned}\int_E |f+g|^p\mathrm{d}x &= \int_E |f+g|\,|f+g|^{p/q}\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_E |f|\,|f+g|^{p/q}\mathrm{d}x+\int_E |g|\,|f+g|^{p/q}\mathrm{d}x \\ &\leqslant \left[\int_E |f|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_E |f+g|^p\mathrm{d}x\right]^{1/q} \\ &\quad +\left[\int_E |g|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}\left[\int_E |f+g|^p\mathrm{d}x\right]^{1/q} \\ &= \left[\int_E |f+g|^p\mathrm{d}x\right]^{1/q} \\ &\quad \cdot\left[\left(\int_E |f|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}+\left(\int_E |g|^p\mathrm{d}x\right)^{1/p}\right].\end{aligned}$$

由于 $1-\frac{1}{q}=\frac{1}{p}$，于是

$$\left[\int_E |f+g|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p} \leqslant \left[\int_E |f|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}+\left[\int_E |g|^p\mathrm{d}x\right]^{1/p}. \blacksquare$$

4° Cauchy 不等式

在 Minkowski 不等式中，取 $p=2$ 时，便得到 Cauchy 不等式

$$\sqrt{\int_E |f+g|^2\mathrm{d}x} \leqslant \sqrt{\int_E |f|^2\mathrm{d}x}+\sqrt{\int_E |g|^2\mathrm{d}x}. \quad (1.10)$$

2. 序列型不等式

把满足条件 $\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<+\infty$ 的数列 $x=\{x_k\}$ 的全体所成之集，记为 l^p.

1° Hölder 不等式

设 $x=\{x_k\}\in l^p$，$y=\{y_k\}\in l^q$，且 $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，$p>1$. 则 $\{x_ky_k\}\in l$，且

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_ky_k| \leqslant \left[\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^q\right]^{1/q}. \quad (1.11)$$

2° В. Я. Буняковский 不等式

在(1.11)式中，取 $p=q=2$，即得

$$\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_k|\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2}. \tag{1.12}$$

3° Minkowski 不等式

设 $x,y\in l^p$，则 $x+y\in l^p$，且有

$$\left[\sum_{k=1}^{\infty}|x_k y_k|^p\right]^{1/p}\leqslant\left[\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right]^{1/p}\left[\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^p\right]^{1/p}. \tag{1.13}$$

4° Cauchy 不等式

在(1.13)式中，令 $p=2$，则得到 Cauchy 不等式

$$\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k+y_k|^2}\leqslant\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^2}+\sqrt{\sum_{k=1}^{\infty}|y_k|^2}. \tag{1.14}$$

习　　题

1. 证明：

(1) $A-B=A-A\cap B=(A\cup B)-B$；

(2) $A\cap(B-C)=A\cap B-A\cap C$；

(3) $(A\cup B)-C=(A-C)\cup(B-C)$；

(4) $A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C)$；

(5) $A-(A-B)=A\cap B$.

2. 若数列 $\{x_n\}$ 收敛，则 $\{x_n\}$ 有界.

3. 若数列 $\{x_n\}$ 是基本列，则有子列 $\{x_{n_k}\}$，使得 $|x_{n_k}-x_{n_{k-1}}|<\dfrac{1}{k}$，$k=1,2,\cdots$.

4. 数列 $\{x_n\}$ 有极限的充要条件是 $\{x_n\}$ 的每个子列有相同的极限.

5. (1) 设 $E=\{x\mid x$ 是 $\{(1+\frac{1}{n})^n\}$ 的上界$\}$，则 E 中有最小值；

(2) 设 $A=\{(1+\frac{1}{n})^n, n=1,2,\cdots\}$，$B=\{0, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}+1, n=1,2,\cdots\}$，求 A'；$\overline{A}$；A°；B'；$\overline{B}$；B°.

6. 试作出$(0,1)$与$[0,1]$之间的一一对应.

7. 设 A 是非空实数集，试述 $\inf A$ 的意义，并证明：存在$\{x_n\}\subset A$，使得 $x_n\to\inf A(n\to\infty)$.

8. 数列$\{x_n\}$收敛的充要条件是数集$\{x_n\}$有聚点，对吗？

9. 证明：在三维空间中，坐标 x,y,z 都是有理数的点构成可列集.

10. 若 A 是可列集，则由 A 的有限子集所构成的集也是可列的.

11. 有理数集 Q 的子集所构成的集是否可列？

12. 设 A 是平面上以有理点（即坐标都是有理数的点）为中心，以有理数为半径的圆的全体，则 A 是可列集.

13. 任何数集 A 的全体内点所构成的集 A°是开集.

14. 有界集 E 为可测集的充要条件为：对$\forall\varepsilon>0$，存在着一个闭集 $F\subset E$，使得 $m^*(E-F)<\varepsilon$.

15. 设 $f(x)$是 R 上的实值连续函数，则$\forall c\in R$，集$\{x|f(x)>c, x\in R\}$，$\{x|f(x)<c, x\in R\}$是开集，而$\{x|f(x)\geqslant c, x\in R\}$是闭集.

16. 设 $f(x)$是集 E 上的可测函数，$f(x)\overset{a.e.}{=}g(x)$，则 $g(x)$也是集 E 上的可测函数.

17. 单调函数的间断点的个数至多是可列个，且单调函数是可测函数.

18. 举出按测度收敛而不几乎处处收敛的函数列的例子.

19. (1) 设 $A=\{1,2,\}$，$B=\{a,b,c\}$，$C=\phi$，求 $A\times B$，$B\times C$.

(2) 设 $X=\{x|a\leqslant x\leqslant b\}$，$Y=\{y|c\leqslant y\leqslant d\}$，$Z=\{z|-\infty<z<+\infty\}$，求 $X\times Y$ 及 $X\times Y\times Z$.

20. 设 A 为无穷集，证明存在集 $B\subset A$，使得 $A\sim B$，且 $A-B$ 是可列集.

21. 设 $f(x)$是集 E 上的可积函数. 如果对任意的有界可测函数 $\varphi(x)$, 都有 $\int_E f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $f(x)\overset{\text{a.e.}}{=}0$.

22. 设 $f(x)\in L[a,b]$. 如果对于 $[a,b]$ 中任意的 c, 有 $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x=0$, 则 $f(x)\overset{\text{a.e.}}{=}0$.

第二章　距离空间

第一章介绍了实变函数论的基本知识. 从本章起，将介绍线性泛函的一些基本知识和它的应用，其主要内容为空间结构及线性算子.

极限是数学分析中的基本概念之一，有了它可以派生出许多其它概念. 一般地说，极限概念是由更基本的概念(例如距离)来描述的. 如当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to a$，我们应理解为 x_n 与 a 的距离当 $n\to\infty$ 时趋向于零. 因此，对距离的理解不同，其极限也就不同. 集合 X 称为空间，就是在 X 中按某种方法引入了极限概念；所谓距离空间就是在该空间中的极限概念是由距离来引入的.

§2.1　距离空间

定义1　设 X 是非空集合，对于 X 中的任意两元素 x 与 y，按某一法则都对应唯一的实数 $\rho(x,y)$，并满足以下三条公理——距离公理：

1° 非负性：$\rho(x,y)\geqslant 0$，$\rho(x,y)=0$当且仅当 $x=y$；

2° 对称性：$\rho(x,y)=\rho(y,x)$；

3° 三点不等式：对$\forall x,y,z\in X$，有

$$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z),$$

则称 $\rho(x,y)$为 x 与 y 间的**距离(或度量)**，并称 X 是以 ρ 为距离的**距离空间(或度量空间)**，记成(X,ρ)，或简记为 X；X 中的元素称为 X 中的点.

注 所谓距离空间，就是在集合 X 内引入了距离. 在一个集合中，定义距离的方式不是唯一的. 如果对同一个集合 X 引入的距离不同，那么所构成的距离空间也不同. 所以，在集合 X 中引入距离后，我们就说在 X 中引入了**拓扑结构**.

如果对于 (X,ρ) 中的非空子集 M，仍以 X 中的距离 ρ 作为 M 中的距离，则 M 也是距离空间，它称为 X 的**子空间**. 显然，$(M,\rho)\subset(X,\rho)$.

定义2 设 $x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots$ 是距离空间 X 中的一个点列，x 是 X 中的一个确定的点. 若对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当 $n\geqslant N$ 时，有 $\rho(x_n,x)<\varepsilon$，即 $\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0$，则称 $\{x_n\}$ **收敛于** x，或者说 x 是 $\{x_n\}$ 的**极限**，记成 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，或 $x_n\to x(n\to\infty)$

定理1 如果 (X,ρ) 中的点列 $\{x_n\}$ 收敛，则其极限必唯一.

证 假若 $x_n\to x$，且 $x_n\to y$，但 $x\neq y$，因此 $\rho(x,y)\neq0$. 但由

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x_n,y)+\rho(x_n,y)\to0,\ (n\to\infty)$$

知 $\rho(x,y)=0$，矛盾. ▌

例1 设 X 是 R 中的任何一非空数集. 对 $\forall x,y\in X$，规定 $\rho(x,y)=|x-y|$，则 (X,ρ) 构成一距离空间.

证 为了证明 (X,ρ) 为距离空间，只须证明 $\rho(x,y)$ 满足公理，而这是显然的. ▌

例2 n 维实(或复)Euclid 空间 R^n 是 n 维向量 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)$ 的全体，其中 ξ_i 是实(或复)数. 对任何 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，规定

$$\rho(x,y)=\Big[\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\Big]^{\frac{1}{2}} \tag{2.1}$$

则 R^n 是距离空间.

证 只须证明 $\rho(x,y)$ 满足距离公理. 事实上，设 $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$.

1° $\rho(x,y)\geqslant0$，且 $\rho(x,y)=0\Longleftrightarrow\xi_i=\eta_i,(i=1,2,\cdots,n)\Longleftrightarrow x=y$；

$$2^\circ\quad \rho(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(|\eta_i-\xi_i|)^2}=\rho(x,y);$$

$$3^\circ\quad \rho(x,z)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\zeta_i|^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(|\xi_i-\eta_i)+(\eta_i-\zeta_i)|^2}$$

$$\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2}+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\eta_i-\zeta_i|^2}$$

$$=\rho(x,y)+\rho(y,z).\ \blacksquare$$

注 (1) (2.1)式所定义的距离称为 **Euclid 距离**；由此距离所成的空间称为 **Euclid 空间**，记作 R^n. 此时记号 R^n 有两层意思：一是表示 n 维向量的集合，二是表示 Euclid 空间.

(2) 在 R^n 中，设有元素列 $x_k=(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)})$ 及 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，那么当 $k\to\infty$ 时 $\rho(x_k,x)\to 0$ 是什么意思呢？由于

$$\rho(x_k,x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i^{(k)}-\xi_i|^2}\ \xrightarrow[k\to\infty]{}0$$

$$\Longleftrightarrow \xi_i^{(k)}\xrightarrow[k\to\infty]{}\xi_i,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

因此，在 Euclid 空间中，元素列 $\{x_k\}$ 收敛于 x 等价于按坐标收敛.

(3) 同一个集合 X，定义 $\rho(x,y)$ 不同，就产生不同的距离空间，如果在 R^n 中，按下式定义任意两点 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$ 及 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$ 的距离

$$\rho_1(x,y)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i-\eta_i|,$$

容易验证，在这个距离下 R^n 也构成一个距离空间，这时我们认为它不同于空间 R^n，记成 (R^n,ρ_1).

例3 用 $C[a,b]$ 表示 $[a,b]$ 上连续函数的全体，对 $\forall x,y\in C[a,b]$，规定

$$\rho(x,y)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|,\tag{2.2}$$

则 $\rho(x,y)$ 是一个距离，$C[a,b]$ 是一个距离空间，称之为 **Чебыщев 空间**，记成 $C[a,b]$；(2.2)式则称为 **Чебыщев 距离**.

证 距离公理的1°,2°是显然的. 对3°的证明如下：对$\forall x,y,z\in C[a,b]$,有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|\\&=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|\\&\leqslant\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-z(t)|+\max_{a\leqslant t\leqslant b}|z(t)-y(t)|\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y).\ \blacksquare\end{aligned}$$

注 在距离空间$C[a,b]$中，$x_n\to x$的意义为：因为$x_n\to x\Longleftrightarrow\rho(x_n,x)\to0\Longleftrightarrow$对$\forall\ \varepsilon>0,\exists\ N>0$，使当$n\geqslant N$时，有$\rho(x_n,x)<\varepsilon$. 而

$$\rho(x_n,x)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x(t)|\Longleftrightarrow|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon$$

对$\forall t\in[a,b]$均成立. 所以，在$C[a,b]$中元素列$\{x_n\}$收敛于x等价于函数列$\{x_n(t)\}$一致收敛于$x(t)$.

例4 l^p表示如下形式数列x的全体：

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots),\qquad\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty,\quad p\geqslant1.$$

设$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^p$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^p$,
规定

$$\rho(x,y)=\Big[\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\Big]^{\frac{1}{p}},\tag{2.3}$$

则l^p为距离空间，并记成l^p(或l_p).

证 由 Minkowski 不等式知，由(2.3)式定义的$\rho(x,y)$是有意义的. 下证$\rho(x,y)$满足距离公理. 距离公理的1°,2°是明显的. 今证明3°. 设$z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\cdots)$，且$x,y,z\in l^p$，则

$$\begin{aligned}\rho(x,z)&=\Big[\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\zeta_i|^p\Big]^{\frac{1}{p}}=\Big[\sum_{i=1}^{\infty}|(\xi_i-\eta_i)+(\eta_i-\zeta_i)|^p\Big]^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\Big[\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\Big]^{\frac{1}{p}}+\Big[\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i-\zeta_i|^p\Big]^{\frac{1}{p}}\\&=\rho(x,y)+\rho(y,z).\ \blacksquare\end{aligned}$$

在例2中我们看到，R^n 中点列的收敛等价于按坐标收敛. 现在我们考察 l^p 中点列收敛的意义.

设

$$x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_k^{(n)},\cdots)\in l^p,n=1,2,\cdots$$
$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in l^p.$$

若 $x_n\to x$，即

$$\rho(x_n,x)=\left[\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)}-\xi_k|^p\right]^{\frac{1}{p}}\to 0(n\to\infty),$$

则必有 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k(n\to\infty,k=1,2,\cdots)$，但是反之未必成立. 例如，设

$$x=(0,0,\cdots,0,0,\cdots),$$

$$x_n=\left(\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}},\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}},\cdots,\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{p}},0,0,\cdots\right),n=1,2,\cdots,$$

则 $x_n,x\in l^p$，且 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k=0(n\to\infty),k=1,2,\cdots$，但是

$$\rho(x_n,x)=\left[\sum_{k=1}^{\infty}|\xi_k^{(n)}|^p\right]^{\frac{1}{p}}=\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\right]^{\frac{1}{p}}=1\not\to 0.$$

这表明 l^p 中点列的收敛并不等价于按坐标收敛.

可以证明，在 l^p 中，$x_n\to x$ 等价于：

1° 对$\forall k$，当 $n\to\infty$时都有 $\xi_k^{(n)}\to\xi_k$；

2° 对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists K(\varepsilon)$，当 $k>K(\varepsilon)$ 时，对所有 n，都有 $\left[\sum_{i=k}^{\infty}|\xi_i^{(n)}|^p\right]^{\frac{1}{p}}<\varepsilon$.

例5 $L^p[a,b]$表示$[a,b]$上绝对值的 p 次幂 L 可积函数的全体，并把几乎处处相等的函数看成是同一个函数. 对于 $x,y\in L^p[a,b]$，规定

$$\rho(x,y)=\left[\int_a^b|x(t)-y(t)|^p dt\right]^{\frac{1}{p}},p\geqslant 1, \tag{2.4}$$

则 $L^p[a,b]$构成一距离空间，称之为 p **次幂可积函数空间**，并记成 $L^p[a,b]$或 $L_p[a,b]$.

证 由 Minkowski 不等式知，由(2.4)式定义的 $\rho(x,y)$是有意义的，并且满足距离公理. 事实上，

1° $\rho(x,y)\geqslant 0$，且 $\rho(x,y)=0 \Longleftrightarrow x(t)\overset{\text{a.e.}}{=}y(t)$.

由题目说明可知，此时应认为 $x=y$. 值得一提的是，如果不把几乎处处相等的函数视为同一个函数，那么由(2.4)式定义的 $\rho(x,y)$ 就不是距离了.

2° 显然有 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$.

3° 设 $x,y,z\in L^p[a,b]$，由 Minkowski 不等式知，

$$\begin{aligned}\rho(x,y)&=\left[\int_a^b|x(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}\\&=\left[\int_a^b|x(t)-z(t)+z(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\left[\int_a^b|x(t)-z(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}+\left[\int_a^b|z(t)-y(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}\\&=\rho(x,z)+\rho(z,y).\ \blacksquare\end{aligned}$$

注 若 $x_k,x\in L^p[a,b]$，当 $k\to\infty$ 时 $x_k\to x$ 是指

$$\rho(x_k,x)=\left[\int_a^b|x_k(t)-x(t)|^p\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{p}}\to 0\quad(k\to\infty).$$

$x_k(t)$ 的这种收敛称为 **p 次幂平均收敛**. 特别地，当 $p=2$ 时，我们称 $x_k(t)$ **平均收敛**于 $x(t)$. 它的物理意义是按能量收敛. 按这种收敛，并不一定能得到 $x_k(t)$ 逐点收敛于 $x(t)$，但是可以得到存在子序列 $\{x_{k_i}(t)\}$，使得 $x_{k_i}(t)\overset{\text{a.e.}}{\to}x(t)$. 这种收敛等价于 $x_k(t)$ 依测度收敛于 $x(t)$，且 $x_k(t)$ 在 $[a,b]$ 上有等度绝对连续积分.

例6 S 表示一切数列的全体，对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in S$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)\in S$，定义

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|},\tag{2.5}$$

则 S 是一距离空间.

证 距离公理的1°，2°显而易见. 下证3°. 设 $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n,\cdots)\in S$. 注意到，对任何数 a,b，有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\leqslant\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

事实上，令 $f(t)=\frac{t}{1+t}$，则对 $\forall t>0$，有 $f'(t)=\frac{1}{(1+t)^2}\geqslant 0$. 所以，当 $t\geqslant 0$ 时，$f(t)$ 单调增加.

由于 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，故有

$$\begin{aligned} f(|a+b|)=\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &\leqslant \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\ &=\frac{|a|}{1+|a|+|b|}+\frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\ &\leqslant \frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}. \end{aligned}$$

有了这个不等式，就可容易地证明3°.

$$\begin{aligned} \rho(x,z) &=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\zeta_i|}{1+|\xi_i-\zeta_i|} \\ &=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|(\xi_i-\eta_i)+(\eta_i-\zeta_i)|}{1+|(\xi_i-\eta_i)+(\eta_i-\zeta_i)|} \\ &\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\left[\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i-\eta_i|}+\frac{|\eta_i-\zeta_i|}{1+|\eta_i-\zeta_i|}\right] \\ &=\rho(x,y)+\rho(y,z). \quad \blacksquare \end{aligned}$$

注 在 S 中，设 $x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_i^{(n)},\cdots)$，$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i,\cdots)$，则当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x\Longleftrightarrow\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}{1+|\xi_i^{(n)}-\xi_i|}\to 0\Longleftrightarrow\xi_i^{(n)}\to\xi_i$，$i=1,2,\cdots$. 即在 S 中，当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x\Longleftrightarrow x_n$ 按坐标收敛于 x.

§2.2 距离空间中的开集和闭集

在距离空间中，也可比照 R 中的情况引入开集和闭集等概念.

定义1 设 X 是距离空间，$x\in X$，$\delta>0$，称 X 中的点集

$$\delta(x)=\{y\,|\,\rho(x,y)<\delta,\ y\in X\}$$

为以 x 为中心，以 δ 为半径的**开球**；而称 $\bar{\delta}(x)=\{y\,|\,\rho(x,y)\leqslant\delta,y\in$

$X\}$为闭球. 开球 $\delta(x)$也称为 x 的 δ 邻域.

定义2 设 $G\subset X$,$x\in G$. 若存在 $\delta(x)\subset G$,则称 x 为 G 的**内点**. 若 G 中的每一点都是它的内点,则称 G 为 X 中的**开集**.

容易知道,空集 ϕ 与距离空间 X 都是开集.

定理1 有限个开集的交集是开集;任意多个开集的并集是开集.

注 (1) 无限多个开集的交集未必为开集.

(2) 若距离空间 $X=[a,b]$,则 a 是空间(X,ρ)中点集$[a,b]$的内点,但 a 不是空间(R,ρ)中点集$[a,b]$的内点. 换言之,对于空间$([a,b],\rho)$,$[a,b]$是开集,但在空间(R,ρ)内,$[a,b]$只能为闭集,而不是开集.

定义3 设 $F\subset X$,若 $F^c=X-F$ 为开集,则称 F 为**闭集**.

按 De Morgan 律,由定理1可知,ϕ,X 为闭集,且有

定理2 有限个闭集的并集是闭集;任意多个闭集的交集为闭集.

定义4 设A是X中的非空集合,$x\in X$. 若对于任何$\delta>0$,在$\delta(x)$中总有属于 A 而异于 x 的点,则称 x 为 A 的**聚点(或极限点)**.

定理3 设 A 是 X 中的非空集合,$x\in X$. 则 x 为 A 的聚点的充要条件是在 A 中存在互异点列$\{x_n\}$,使当 $n\to\infty$时 $\rho(x_n,x)\to 0$.

定理4 设 $F\subset X$,则 F 为闭集的充要条件是 F 的聚点都在 F 内.

定义5 设 $A\subset X$,则 A 的所有聚点构成的集合称为 A 的**导集**,记成 A';并称 $A\cup A'$为 A 的**闭包**,记成 $\overline{A}$,即 $\overline{A}=A\cup A'$.

总结定理3、定理4及定理5,我们有:

F 为 X 中的闭集$\Longleftrightarrow F=\overline{F}\Longleftrightarrow$若 $x_n\in F$、且 $x_n\to x$ $(n\to\infty)$,则 $x\in F$.

定义6 设 $A\subset(X,\rho)$,若存在球 $\delta(x_0)$,使 $A\subset\delta(x_0)$,则称 A 为**有界集**.

定义7 设 A 是(X,ρ)中的非空集合,则 $dA=\sup\limits_{x,y\in A}\rho(x,y)$称为

集 A 的**直径**.

定义8 设 A 是(X,ρ)中的非空集合,$x\in X$,则称 $\rho(x,A)=\inf\limits_{y\in A}\rho(x,y)$为点 x 到集 A 的**距离**.

§ 2.3 稠密性与可分性

我们知道,有理数集 R_0在实数集 R 中稠密,即对$\forall x\in R$,在 R_0中总能找到一列$\{x_n\}$,使当 $n\to\infty$时 $x_n\to x$. 例如 $\sqrt{2}\in R$,则存在有理数列1.4,1.41,1.414,…趋向于 $\sqrt{2}$. 这就是说,对于 R 中的元素总可以用 R_0中的元素来逼近. 在抽象空间中也有类似的情况. 比如 $C[a,b]$中的元素(如 $\sin x,\ln x,\mathrm{tg}x,\cdots$)一般不具有可计算性,我们希望用一个较简单的函数类(如多项式函数类 $\boldsymbol{P}$)中的元素来逼近它,问题是对于$[a,b]$上的连续函数 $x(t)$,在 $\boldsymbol{P}$ 中是否存在一列元素$\{p_n\}$,使得 $p_n\to x$ 呢?Weierstrass 证明了这样一个定理:对于$[a,b]$上的连续函数 $x(t)$,总存在多项式列$\{p_n(t)\}$,使 $p_n(t)$在$[a,b]$上一致收敛于 $x(t)$. 这就是说,连续函数总可以用多项式来近似表示,而且其近似程度能达到我们所希望的程度. 为了把这样的概念推广到较一般的场合,我们引入如下概念.

定义1 设 A,B 为(X,ρ)中的两个集合,若对$\forall x\in A$,总存在 $y_n\in B$,使 $y_n\to x$,则称 B 在 A 中**稠密**.

例如,R_0在 R 中稠密;$\boldsymbol{P}$ 在 $C[a,b]$中稠密.

注 (1) 定义中我们并不要求 B 一定是 A 的子集,甚至它们没有公共点.

(2) 所谓 B 在 A 中稠密,就是说 A 中的点要么是 B 中的点,要么是 B 的聚点. 由此可以得到 B 在 A 中的稠密的三种等价说法:

1° $\overline{B}\supset A$;

2° 对$\forall x\in A$,x 的任意 ε 邻域内必有 B 中的点(注意,这种说法并不意味着 x 是 B 的聚点,为什么?);

3° 对于每一个 $y\in B$ 及对 $\forall\delta>0$，令 $\delta(y)=\{x\mid\rho(x,y)<\delta,x\in A\}$，则 $\bigcup_{y\in B}\delta(y)\supset A$. 即以 B 中每一点为中心，以 δ 为半径的开球所构成的集合覆盖着 A.

定义2 设 X 是距离空间. 如果 X 中存在一个可列子集 X_0，使 X_0在 X 中稠密，则称**距离空间 X 是可分的**. 设 A 是 X 的子集，如果 X 中有可数子集 B，使 B 在 A 中稠密，则说**子集 A 是可分的**.

例1 n 维 Euclid 空间 R^n 是可分的.

证 要证明 R^n 可分，只需找出子集 $R_0^n\subset R^n$，使 R_0^n满足：(i) R_0^n 可列；(ii) R_0^n在 R^n 中稠密. 取

$$R_0^n=\{r=(r_1,r_2,\cdots,r_n)\mid r_i\in R_0,i=1,2,\cdots,n\},$$

因有理数集 R_0为可列集，故 R_0^n是可列集. 下面证明 R_0^n在 R^n 中稠密，即证对于 R^n 中任意一点 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，有 $r_k=(r_1^{(k)},r_2^{(k)},\cdots,r_n^{(k)})\in R_0^n$，$k=1,2,\cdots$，使 $r_k\to x$. 由有理数集 R_0在实数集 R 中的稠密性知，对每一个实数 ξ_i，存在有理数列 $r_i^{(k)}$，使 $r_i^{(k)}\to\xi_i\ (k\to\infty)$，$i=1,2,\cdots,n$. 于是得到 R_0^n中点列

$$r_k=(r_1^{(k)},r_2^{(k)},\cdots,r_n^{(k)}),k=1,2,\cdots.$$

现证它收敛于 x. 对 $\forall\varepsilon>0$，由于 $r_i^{(k)}\to\xi_i$，对于 $\dfrac{\varepsilon}{\sqrt{n}}>0$，$\exists K_i>0$，当 $k>K_i$ 时，有

$$|r_i^{(k)}-\xi_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},\quad i=1,2,\cdots,n.$$

取 $K=\max(K_1,K_2,\cdots,K_n)$，当 $k>K$ 时，对于 $i=1,2,\cdots,n$，都有

$$|r_i^{(k)}-\xi_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}},$$

因此

$$\rho(r_k,x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|r_i^{(k)}-\xi_i|^2}<\sqrt{\frac{n\varepsilon^2}{n}}=\varepsilon,$$

即 $r_k\to x$. 所以，R_0^n在 R^n 中稠密，从而知 R^n 是可分空间. ▌

例2 空间 l^p 是可分的.

证　设 $E_0=\{r=(r_1,r_2,\cdots,r_n,0,0,\cdots)\,|\,r_i\in R_0;i=1,2,\cdots,n;n=1,2,\cdots\}=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}R_0^n$. 由于 R_0^n 可列，故 E_0 也可列. 下面证明 E_0 在 l^p 中稠密. 按前述等价说法2°，我们只须证明 l^p 中的任意点 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$ 的任意的 ε 邻域内有 E_0 中元素 r 即可. 因为 $x\in l^p$，所以 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p<\infty$，故对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ n_0$，使

$$\sum_{i=n_0+1}^{\infty}|\xi_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}.$$

对如此选定的正数 n_0，对于 n_0 个实数 $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_{n_0}$，取 n_0 个有理数列 $r_i^{(k)}$，使 $r_i^{(k)}\to\xi_i$，$i=1,2,\cdots,n_0$. 因此，存在 K，使当 $k\geqslant K$ 时，对于 $i=1,2,\cdots,n_0$，有

$$|r_i^{(k)}-\xi_i|<\frac{\varepsilon}{\sqrt[p]{2n_0}},$$

从而

$$\sum_{i=1}^{n_0}|r_i^{(k)}-\xi_i|^p<\frac{\varepsilon^p}{2}.$$

令 $r^{(k)}=(r_1^{(k)},r_2^{(k)},\cdots,r_{n_0}^{(k)},0,0,\cdots)\in E_0\subset l^p$，则

$$\rho(r^{(k)},x)=\sqrt[p]{\sum_{i=1}^{n_0}|r_i^{(k)}-\xi_i|^p+\sum_{i=n_0+1}^{\infty}|\xi_i|^p}$$

$$<\sqrt[p]{\frac{\varepsilon^p}{2}+\frac{\varepsilon^p}{2}}=\varepsilon.$$

这说明在 x 的 ε 邻域内必有 E_0 中的点，故 E_0 在 l^p 中稠密，即 l^p 有一个可列稠密子集. 因此，l^p 是可分的. ▌

例3　$C[a,b]$空间是可分的.

证　设 $\boldsymbol{P}_0=\{p=\sum\limits_{k=0}^{n}r_kt^k\,|\,r_k\in R_0;k=0,1,\cdots,n;n=0,1,2,\cdots\}$.

显然，$\boldsymbol{P}_0$是可列集. 要证$C[a,b]$可分，只需证明$\boldsymbol{P}_0$在$C[a,b]$中稠密. 在 $C[a,b]$中任取一元素 $x(t)$，对$\forall\ \varepsilon>0$，由 Weierstrass 定理知，存在多项式 $p_\varepsilon\in \boldsymbol{P}$，使

$$\rho(x,p_\varepsilon)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-p_\varepsilon(t)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

对如此取定的多项式 $p_\varepsilon(t)$，由于有理数在实数中稠密，故可找到一个以有理数为系数的多项式 $p_0(t)\in \boldsymbol{P}_0$，使得

$$\rho(p_\varepsilon,p_0)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|p_0(t)-p_\varepsilon(t)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

这样一来，对于 $C[a,b]$中的任意元素 x 与任意的 $\varepsilon>0$，存在 $p_0\in \boldsymbol{P}_0$，使得

$$\rho(x,p_0)\leqslant\rho(x,p_\varepsilon)+\rho(p_\varepsilon,p_0)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故 $\boldsymbol{P}_0$在 $C[a,b]$中稠密，从而 $C[a,b]$可分. ▌

注意 可分概念是与距离、集合有关的. 对于同一个集合，如果定义的距离不同，它在一种距离下可分，而在另一种距离下就不一定可分.

例4 设 $X=[0,1]$，对$\forall\ x,y\in[0,1]$，定义

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0, & x=y,\\ 1, & x\neq y.\end{cases}$$

容易知道，(X,ρ)是一个距离空间，但 $X=[0,1]$是不可分的.

证 反证法. 若(X,ρ)可分，则存在 X 的可列子集

$$B=\{x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots\}$$

在 X 中稠密，按前述等价定义3°，对$\forall\ \delta>0$，$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\delta(x_n)\supset X$，特别地，对于 $\delta=\frac{1}{3}$亦真. 下面我们将证明这是不可能的. 事实上，由于 $X=[0,1]$不可列，那么在可列个球 $\delta(x_n)(n=1,2\cdots)$中至少有一个球 $\delta(x_{n_0})$中含有 X 中的两个不同点 x',x''，即 $x',x''\in\delta(x_{n_0})$，且 $x'\neq x''$. 考虑到

$$\rho(x',x'')\leqslant\rho(x',x_{n_0})+\rho(x_{n_0},x'')<\frac{1}{3}+\frac{1}{3}<1,$$

这与 $x'\neq x''$时 $\rho(x',x'')=1$矛盾. 因此，$X=[0,1]$在例4所定义的距离 $\rho(x,y)$下是不可分的. ▌

§2.4 距离空间的完备性

在第一章中曾介绍过实数的完备性，并阐明了它的重要性，无疑完备性的概念在抽象空间中也是很重要的.

定义1 设$\{x_n\}$是(X,ρ)中的点列，若对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n,m\geqslant N$时，有$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$，则称$\{x_n\}$是$X$中的**基本序列**(或 **Cauchy 序列**).

定理1 收敛序列必为基本序列；但基本序列未必是收敛序列.

证 设$x_n\to a$，则对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，当$n\geqslant N$时，有

$$\rho(x_n,a)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

任取$m\geqslant N$.同理亦应有

$$\rho(x_m,a)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，当$n,m\geqslant N$时，就有

$$\rho(x_n,x_m)\leqslant\rho(x_n,a)+\rho(a,x_m)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

故收敛序列必为基本序列.反之，未必为真.如设$X=R-\{0\}$，其距离为通常的距离定义.因为

$$\rho(x_n,x_m)=\left|\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right|\to 0(n,m\to\infty),$$

所以$\{\frac{1}{n}\}$是(X,ρ)中的基本序列，但它在(X,ρ)中没有极限，故不是收敛序列. ▌

定义2 若距离空间(X,ρ)中的每一个基本序列都收敛于(X,ρ)中的某一元素，则称(X,ρ)是**完备的距离空间**.

由定义2可知，R是完备的距离空间.

例1 设 $X=\{1,2,3\}$，$\rho(x,y)=|x-y|$，则距离空间 (X,ρ) 是完备的.

证 设 $\{x_n\}$ 为 (X,ρ) 中的基本序列，则 x_n 从某一项开始必有相同的某元素 x_i. 事实上，取 $\varepsilon=\frac{1}{2}$，则存在 $N>0$，当 $n,m\geqslant N$ 时，$|x_n-x_m|<\frac{1}{2}$. 由于 x_n 只可能是1，2，3三个数，而任何两数之差的绝对值均不小于1，可见，为使从第 N 项以后两项之差的绝对值小于 $\frac{1}{2}$，只有 $x_n(n\geqslant N)$ 必为同一个数. 因此，$x_n\to x_i(n\to\infty)$. 这表明，(X,ρ) 中的任何基本序列在 (X,ρ) 中都有极限，从而 (X,ρ) 是完备空间. ▌

此例说明，空间 X 的完备性的概念与连续性的概念并不是一回事.

例2 R^n 是完备空间.

证 要证 R^n 是完备空间，就是要证明 R^n 中的任何基本序列皆为收敛序列.

设 $\{x_k\}$ 是 R^n 中的基本序列，$x_k=\{\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)}\}$，因此对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当 $k,m\geqslant N$ 时，有

$$\rho(x_k,x_m)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(m)}|^2}<\varepsilon. \tag{2.6}$$

由上式知，对 $i=1,2,\cdots,n$，只要 $k,m\geqslant N$，就有

$$|\xi_i^{(k)}-\xi_i^{(m)}|<\varepsilon.$$

这表明，$\{\xi_i^{(k)}\}(i=1,2,\cdots,n)$ 皆为基本序列，由实数的完备性知

$$\lim_{k\to\infty}\xi_i^{(k)}=\xi_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

由此就确定了元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$. 剩下的问题是：(i) $x\in R^n$ 吗？(ii) $\rho(x_k,x)\to 0$ 吗？

$x\in R^n$ 是显然的. 至于问题(ii)，在(2.6)式中令 $m\to\infty$，可得

$$\rho(x_k,x)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}|\xi_i^{(k)}-\xi_i|^2}\leqslant\varepsilon.$$

这就说明，对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，只要$k\geqslant N$，就有

$$\rho(x_k,x)\leqslant\varepsilon.$$

故x为$\{x_k\}$的极限. 因此，R^n是完备空间. ▍

例3 空间$C[a,b]$，$L^p[a,b]$，$l^p(p\geqslant 1)$都是完备空间.

证 下面仅就$C[a,b]$的完备性证明之，其余证明从略.

设$\{x_n(t)\}\subset C[a,b]$，$\{x_n(t)\}$是基本序列，则对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N>0$，使当$n,m\geqslant N$时，有

$$\rho(x_n,x_m)=\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon,$$

即对$\forall t\in[a,b]$，都有

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

这就是函数列$\{x_n(t)\}$一致收敛的充要条件，故存在函数$x(t)$，使得

$$x_n(t)\xrightarrow{u.c}x(t)(n\to\infty).$$

根据连续函数列$\{x_n(t)\}$若一致收敛则必收敛于连续函数的定理知，$x(t)\in C[a,b]$. 从而$C[a,b]$为完备空间. ▍

注意 集$C[a,b]$按Чебышев距离$\rho(x,y)=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)-y(t)|$是完备的距离空间，但按距离

$$\rho_1(x,y)=\int_a^b|x(t)-y(t)|\mathrm{d}t$$

所成的距离空间并不完备.

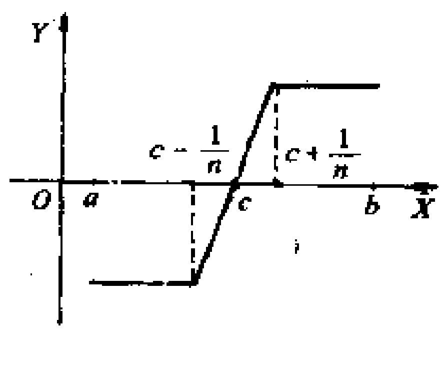


图 2.1

例4 $(C[a,b],\rho_1)$不是完备的距离空间.

证 为了要证明距离空间$(C[a,b],\rho_1)$不是完备的，只需在该空间中找出一个基本序列，使它在$(C[a,b],\rho_1)$中没有极限即可. 在$C[a,b]$中取函数列(如图2.1)

$$x_n(t)=\begin{cases}-1, & a\leqslant t\leqslant c-\frac{1}{n},\\ n(t-c), & c-\frac{1}{n}<t<c+\frac{1}{n},\\ 1, & c+\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant b.\end{cases}$$

先证明$\{x_n\}$是$(C[a,b],\rho)$中的基本序列. 事实上,设 $m>n$,考虑

$$\begin{aligned}\rho(x_m,x_n)&=\int_a^b|x_m(t)-x_n(t)|\mathrm{d}t\\ &=2\left[\int_c^{c+\frac{1}{m}}[m(t-c)-n(t-c)]\mathrm{d}t\right.\\ &\quad\left.+\int_{c+\frac{1}{m}}^{c+\frac{1}{n}}[1-n(t-c)]\mathrm{d}t\right]\\ &=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\to 0(n,m\to\infty).\end{aligned}$$

故$\{x_n\}$是$(C[a,b],\rho_1)$中的基本序列.

再证 $C[a,b]$中任何元素 x 都不可能是$\{x_n\}$的极限. 事实上,若 $x\in C[a,b]$是$\{x_n\}$的极限,则应有 $\rho_1(x_n,x)\to 0(n\to\infty)$. 而

$$\begin{aligned}\rho_1(x_n,x)&=\int_a^b|x_n(t)-x(t)|\mathrm{d}t\\ &=\int_a^{c-\frac{1}{n}}|x_n(t)-x(t)|\mathrm{d}t+\int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}}|x_n(t)-x(t)|\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_{c+\frac{1}{n}}^b|x_n(t)-x(t)|\mathrm{d}t\\ &=\int_a^{c-\frac{1}{n}}|-1-x(t)|\mathrm{d}t+\int_{c-\frac{1}{n}}^{c+\frac{1}{n}}|n(t-c)-x(t)|\mathrm{d}t\\ &\quad+\int_{c+\frac{1}{n}}^b|1-x(t)|\mathrm{d}t,\end{aligned}$$

考虑到当 $n\to\infty$时 $\rho_1(x_n,x)\to 0$,故有

$$\int_a^c |1+x(t)|\mathrm{d}t=0, \qquad \int_c^b |1-x(t)|\mathrm{d}t=0.$$

由 $x(t)$的连续性知，在$[a,c]$上 $x(t)\equiv-1$，在$[c,b]$上 $x(t)\equiv1$，而

$$\lim_{t\to c^-} x(t)=-1, \qquad \lim_{t\to c^+} x(t)=1,$$

这与 $x(t)$在 c 点连续矛盾. 故 $C[a,b]$中的任何元素都不可能是$\{x_n\}$的极限，因此$(C[a,b],\rho_1)$不完备. ▌

不完备的距离空间是大量存在的，但每一个不完备的空间都可以"扩大"成完备空间. 比如有理数全体 R_0作为 R 的子空间是不完备的，但我们可以将 R_0"扩大"成完备的距离空间 R，即在 R_0中加入新元素——无理数，使之成为新的距离空间 R，并且 R_0在 R 中稠密. 为此，首先介绍几个概念.

定义3 设(X,ρ)，$(\tilde{X},\tilde{\rho})$是两个距离空间，如果存在 X 到 $\tilde{X}$ 上的一一映照 T，使对$\forall\ x_1,x_2\in X$，都有

$$\rho(x_1,x_2)=\tilde{\rho}(Tx_1,Tx_2),$$

则称距离空间(X,ρ)与$(\tilde{X},\tilde{\rho})$是**等距同构**的；具有这种性质的映照 T 称为**等距同构映照**.

不难设想，在距离空间(X,ρ)中成立的(有关距离的)命题，在$(\tilde{X},\tilde{\rho})$亦成立. 因此，我们把等距同构的距离空间不加区别.

定义4 设 X_0，X 是距离空间，X 是完备的. 若 X 中有一稠密子集 X'，且 X' 与 X_0等距同构，则称距离空间 X 是 X_0的**完备化空间**.

例如，R 是 R_0的完备化空间.

定理2 每一个距离空间 X_0，都存在完备化距离空间 X，且在等距同构意义下是唯一的.

此定理指明，不管用什么方法来求完备化空间，其结果只有一个(在等距同构意义下).

值得注意的是集 $C[a,b]\subset L[a,b]$，但 $C[a,b]$作为 $L[a,b]$的子空间是不完备的，而 $L[a,b]$是完备的. 可以证明 $C[a,b]$在 $L[a,b]$中稠密，所以$(C[a,b],\rho_1)$的完备化空间为 $L[a,b]$. 因此可由 R

积分引入 L 积分[*]。

下面介绍完备空间的基本定理.

定理3（**闭球套定理**） 在完备距离空间 X 中，给定一串闭球套

$$\bar{\delta}_1(x_1) \supset \bar{\delta}_2(x_2) \supset \cdots \supset \bar{\delta}_n(x_n) \supset \cdots,$$

若 $\delta_n \to 0$，则在 X 中存在唯一的点 x_0 属于所有的球，即 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \bar{\delta}_n(x_n)$.

证 分三步证明.

第一步，证明球心序列 $\{x_n\}$ 是基本序列.

对任意的 $m>n$，有

$$x_m \in \bar{\delta}_m(x_m) \subset \bar{\delta}_n(x_n),$$

即

$$\rho(x_m, x_n) \leqslant \delta_n.$$

当 $m, n\to\infty$ 时，由 $\delta_n\to 0$，有 $\rho(x_m, x_n)\to 0$. 由于 X 是完备的，故存在 $x_0\in X$，使 $x_n\to x_0(n\to\infty)$.

第二步，证明 $x_0\in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{\delta}_n(x_n)$.

任意取定一闭球 $\bar{\delta}_k(x_k)$，由于 $\bar{\delta}_k(x_k)\supset\bar{\delta}_{k+1}(x_{k+1})\supset\cdots$，故 $x_{k+p}\in \bar{\delta}_k(x_k)$，$(p=1,2,\cdots)$. 因而序列 $x_k, x_{k+1},\cdots,x_{k+p},\cdots$ 也收敛于 x_0. 考虑到 $\bar{\delta}_k(x_k)$ 为闭集，故 $x_0\in\bar{\delta}_k(x_k)$. 注意到 k 是任意取的，因此对任何的 n，都有 $x_0\in\bar{\delta}_n(x_n)$，即 $x_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{\delta}_n(x_n)$.

第三步，证明唯一性.

若除点 x_0 外还有 $x'\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\bar{\delta}_n(x_n)$，由于

$$\rho(x', x_0)\leqslant\rho(x', x_n)+\rho(x_n, x_0)\leqslant 2\delta_n\to 0(n\to\infty),$$

所以，$\rho(x', x_0)=0$，从而 $x'=x_0$. ▌

定理4 设 (X,ρ) 是完备的距离空间，且 $M\subset X$，则 (M,ρ) 完备

---

*) 参见《线性泛函入门》，关肇直著.

的充要条件是 M 为 X 中的闭集.

证 必要性. 设 M 为 X 中的完备子空间, $\{x_n\}$ 为 M 中的收敛序列, 不妨假定 $x_n \to x$, 则 $\{x_n\}$ 必是 M 中的的基本序列. 由 M 的完备性知, 存在 $y \in M$, 使得 $x_n \to y$. 由极限的唯一性可知, $x = y \in M$, 故 M 是闭集.

充分性. 设 M 为 X 的闭子集, 且 $\{x_n\}$ 为 M 中的基本序列, 则 $\{x_n\}$ 也是 X 中的基本序列. 由于 X 是完备的, 所以, 存在 $x \in X$, 且 $x_n \to x$. 考虑到 M 为闭集, 故 $x \in M$. 因此, M 是完备的. ▌

推论 完备的距离空间的任何闭子空间都是完备的.

§2.5 不动点原理及其应用

作为完备距离空间概念的应用, 我们介绍不动点原理, 它在许多关于唯一存在性的定理(如微分方程、代数方程组、积分方程等)的证明中是一个有力的工具.

定义1 设 (X,ρ) 是距离空间, T 是 X 到 X 中的映照. 如果存在一个数 $\alpha(0<\alpha<1)$, 使得对所有的 $x, y \in X$, 都有

$$\rho(Tx,Ty) \leqslant \alpha\rho(x,y),$$

则称 T 是**压缩映照**.

压缩映照在几何上的意义是点 x 和 y 经映照后, 它们像的距离缩短了, 且不超过 $\rho(x,y)$ 的 $\alpha(0<\alpha<1)$ 倍.

定理1(Banach 压缩映照原理) 完备的距离空间 X 上的压缩映照 T, 必存在唯一的不动点 x^* (即方程 $Tx=x$ 有唯一的解).

证 任取 $x_0 \in X$, 令 $x_1 = Tx_0, x_2 = Tx_1, \cdots, x_n = Tx_{n-1}, \cdots$, 于是得到点列: $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$. 下面证明:

1° $\{x_n\}$是基本序列. 为此考虑

$$\rho(x_2,x_1) = \rho(Tx_1,Tx_0) \leqslant \alpha\rho(x_1,x_0),$$

$$\rho(x_3,x_2)=\rho(Tx_2,Tx_1)\leqslant\alpha\rho(x_2,x_1)\leqslant\alpha^2\rho(x_1,x_0),$$

$$\cdots,$$

$$\rho(x_{n+1},x_n)\leqslant\alpha^n\rho(x_1,x_0),$$

$$\cdots.$$

对任何正整数 p,考虑到

$$\begin{aligned}\rho(x_{n+p},x_n)&\leqslant\rho(x_{n+p},x_{n+p-1})+\rho(x_{n+p-1},x_{n+p-2})\\&\quad+\cdots+\rho(x_{n+1},x_n)\\&\leqslant[\alpha^{n+p-1}+\alpha^{n+p-2}+\cdots+\alpha^n]\rho(x_1,x_0)\\&=\frac{\alpha^n-\alpha^{n+p}}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0).\end{aligned}$$

由 $\alpha>0$可知,对任何正整数 p,有

$$\rho(x_{n+p},x_n)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0). \tag{2.7}$$

因为$0<\alpha<1$,所以当 $n\to\infty$时,$\alpha^n\to0$. 注意到 $\rho(x_1,x_0)$为定数,故不管 p 为何值,只要当 $n\to\infty$时,就有

$$\rho(x_{n+p},x_n)\to0.$$

故$\{x_n\}$为基本序列. 由 X 的完备性知,存在 $x^*\in X$,使得 $x_n\to x^*$ ($n\to\infty$).

2° 证明 x^* 为 T 的不动点,即证 $x^*=Tx^*$. 由于距离空间中极限是唯一的,因此,只需证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=Tx^*$ 即可. 为此考虑

$$\rho(Tx^*,x_n)=\rho(Tx^*,Tx_{n-1})\leqslant\alpha\rho(x^*,x_{n-1})\to0(n\to\infty).$$

因此,$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=Tx^*$,从而 $Tx^*=x^*$.

3° 证明 T 的不动点是唯一的. 反证,若还有另一个不动点 x',使得 $Tx'=x'$,且 $x'\neq x^*$. 考虑

$$\rho(x',x^*)=\rho(Tx',Tx^*)\leqslant\alpha\rho(x',x^*),$$

因为 $x'\neq x^*$,所以 $\rho(x',x^*)\neq0$. 因此,$\alpha\geqslant1$,矛盾. ▌

注 (1) 若用 x_n 近似代替 x^*,由于 $x_n=Tx_{n-1}$,则其误差为

$$\rho(x^*,x_n)\leqslant\frac{\alpha^n}{1-\alpha}\rho(x_1,x_0).$$

事实上，在(2.7)式中令$p\to\infty$，由ρ的连续性以及$\lim\limits_{p\to\infty}x_{n+p}=x^*$即得.

(2) 在$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$，$x\neq y$的条件下，未必存在不动点.

例如，令$Tx=x+\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x$，$x\in R$，$T$是$R$到$R$的映射. 设$x,y\in R$，则

$$Tx-Ty=(x+\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}x)-(y+\frac{\pi}{2}-\mathrm{arctg}y)$$
$$=x-y-(\mathrm{arctg}x-\mathrm{arctg}y).$$

根据微分中值定理，则存在$\xi\in(x,y)$，使得

$$Tx-Ty=x-y-\frac{x-y}{1+\xi^2}=(x-y)\frac{\xi^2}{1+\xi^2}.$$

故$|Tx-Ty|<|x-y|$，即$\rho(Tx,Ty)<\rho(x,y)$.

但是，当$Tx=x$时，方程$\mathrm{arctg}x=\frac{\pi}{2}$无解. 因此，映照$T$没有不动点.

例1 设f是R到R的映照，$f(x)$可微，且$|f'(x)|\leqslant\alpha<1$，则方程$f(x)=x$有唯一解x^*.

证 由于

$$|f(x)-f(y)|=|f'(\xi)||x-y|$$
$$\leqslant\alpha|x-y|,0<\alpha<1,$$

即

$$\rho(f(x),f(y))\leqslant\alpha\rho(x,y),$$

故f为完备空间R到自身的压缩映照. 根据本节定理1可知，方程$f(x)=x$有唯一解x^*，且任取初值$x_0\in R$，则有

$$|x^*-x_0|\leqslant\frac{\alpha^*}{1-\alpha}|f(x_0)-x_0|. \blacksquare$$

例2 设$f(x,y)$在R^2上连续，且对y满足 Lipschitz 条件

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2|，L\text{为常数},$$

则定解问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dx}=f(x,y), \\
y(x_0)=y_0,
\end{cases} \tag{2.8}
$$

必有唯一解.

证 1° 首先注意到,定解问题(2.8)式有解与积分方程

$$
y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx \tag{2.9}
$$

有连续解是等价的.

事实上,若(2.8)式有解 $y=y(x)$,则它满足微分方程与初始条件

$$
\frac{dy(x)}{dx}=f(x,y(x)),
$$

且

$$
y(x_0)=y_0.
$$

对上式两端积分可得

$$
y(x)-y(x_0)=\int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx,
$$

即

$$
y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y(x))dx. \tag{2.10}
$$

此式说明 $y(x)$是积分方程(2.9)式的解.

反之,若函数 $y=y(x)$是积分方程(2.9)式的解,即(2.10)式成立,由此可得 $y(x_0)=y_0$. 由连续性可知 $y(x)$是可微的,求导后可得

$$
\frac{dy(x)}{dx}=f(x,y(x)).
$$

这表明 $y=y(x)$是满足微分方程与定解条件的. 因此,求(2.8)式的解与求(2.9)式的解是等价的.

2° 在 x_0的 δ 邻域$(x_0-\delta,x_0+\delta)$内,(2.9)式有唯一连续解,其中 δ 只要满足$0<\delta<\dfrac{1}{L}$就行了. 令

$$(Ty)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(x,y(x))\mathrm{d}x,$$

可见，T 是 $C[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 到 $C[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 的映照，并且知道 T 的不动点 y^* 就是积分方程(2.9)式的解. 由于 $C[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 是完备空间，为了证明(2.9)式有唯一解，只需证明 T 是压缩映照即可. 为此考虑，对 $\forall y_1,y_2\in C[x_0-\delta,x_0+\delta]$，有

$$\begin{aligned}
\rho(Ty_1,Ty_2)&=\max_{|x-x_0|<\delta}\left|\int_{x_0}^{x} f(t,y_1(t))\mathrm{d}t-\int_{x_0}^{x} f(t,y_2(t))\mathrm{d}t\right| \\
&\leqslant \max_{|x-x_0|<\delta}\int_{x_0}^{x}\left|f(t,y_1(t))-f(t,y_2(t))\right|\mathrm{d}t \\
&\leqslant \max_{|x-x_0|<\delta}\left|L\max_{t\in[x_0,x]}|y_1(t)-y_2(t)|(x-x_0)\right| \\
&\leqslant L\delta\max_{|x-x_0|<\delta}|y_1(t)-y_2(t)| \\
&=L\delta\rho(y_1,y_2) \\
&=\alpha\rho(y_1,y_2).
\end{aligned}$$

可见，只要取定 δ 满足条件 $0<\alpha=L\delta<1$，则 T 就是 $C[x_0-\delta,x_0+\delta]$ 上的压缩映照. 由不动点原理知，存在唯一的 $y^*(x)\in C[x_0-\delta,x_0+\delta]$，使 $Ty^*=y^*$. 因此，$y=y^*(x)$ 是定解问题(2.8)式在 $(x_0-\delta,x+\delta)$ 内的解，且在 $(x_0-\delta,x_0+\delta)$ 内只有一个满足定解条件的解.

3° 解的延拓. 即证明在 $(-\infty,+\infty)$ 内定解问题(2.8)式有唯一的解.

在2°中我们证明了只要 δ 满足 $\delta<\frac{1}{L}$，则定解问题(2.8)式在 $(x_0+\delta,x_0-\delta)$ 内就有唯一的解. 注意，我们假定 $f(x,y)$ 满足 Lipschitz 条件，并非只对 x_0 点更有利，而是对于任何一点 x 都是一样的，特别对于 $x_1=x_0+\frac{\delta}{2}$ 也是如此. 计算 $y_0(x_0+\frac{\delta}{2})=y_1$，考虑定解问题

$$\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(x_1)=y_1, \end{cases} \tag{2.11}$$

由于 L 是常数，同理可知在 $(x_1-\delta,x_1+\delta)=(x_0-\frac{\delta}{2},x_0+\frac{3}{2}\delta)$ 内有唯一的解 $y^{**}(x)$ 满足(2.11)式. 下面证明 $y^*(x)$ 与 $y^{**}(x)$ 在公共部分 $(x_0-\frac{\delta}{2},x_0+\delta)$ 内一致. 若 $y^*(x)$ 与 $y^{**}(x)$ 在 $(x_0-\frac{\delta}{2},x_0+\delta)$ 内不一致，由于它们在 $(x_0-\frac{\delta}{2},x_0+\frac{\delta}{2})$ 内都满足微分方程与定解条件 $y^*(x_1)=y_1=y^{**}(x_1)$，所以它们都是定解问题(2.8)的解，这就与定解问题的唯一性相矛盾.

令

$$y=\begin{cases} y^*(x), & x\in(x_0-\delta,x_0+\delta), \\ y^{**}(x), & x\in(x_0+\delta,x_0+\frac{3}{2}\delta). \end{cases}$$

于是，得到一个定义在 $(x_0-\delta,x_0+\frac{3}{2}\delta)$ 上的函数，它满足定解问题(2.8)式. 如此继续延拓下去，就可以得到定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $y=y(x)$，它是定解问题(2.8)式的解. ▌

注 在定解问题解的存在性与唯一性的证明过程中，还提供了求近似解的方法：

$$y_1(x)=(Ty_0)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)\mathrm{d}x,$$

$$y_2(x)=(Ty_1)(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_1(x))\mathrm{d}x,$$

$$\cdots$$

$$y_n(x)=(Ty_{n-1})(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_{n-1}(x))\mathrm{d}x.$$

例3 设 Fredholm 第二类线性积分方程

$$x(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t. \tag{2.12}$$

对充分小的 $|\lambda|$，求证：

(1) 当 $f\in C[a,b]$，$K(s,t)\in C[a,b;a,b]$ 时，有唯一的连续解；

(2) 当 $f\in L^2[a,b]$，$K(s,t)\in L^2[a,b;a,b]$ 时，有唯一平方可积

解.

证 (1) 在 $C[a,b]$ 中定义算子：对 $\forall\ x\in C[a,b]$，有

$$(Tx)(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t.$$

显然，T 是 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 上的映照，并且算子 T 的不动点 x^* 就是积分方程的解. 在一般情况下，T 不是压缩映照，但当 $|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$ 时，T 为压缩映照，其中 $M=\max\limits_{[a,b;a,b]}|K(s,t)|$.

事实上，对于 $C[a,b]$ 中的任意两元素 x_1,x_2，有

$$\begin{aligned}\rho(Tx_1,Tx_2) &= \max_{a\leqslant s\leqslant b}|(Tx_1)(s)-(Tx_2)(s)|\\ &\leqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\lambda\int_a^b K(s,t)[x_1(t)-x_2(t)]\mathrm{d}t\right|\\ &\leqslant \max_{a\leqslant s\leqslant b}|\lambda|\int_a^b|K(s,t)||x_1(t)-x_2(t)|\mathrm{d}t\\ &\leqslant M|\lambda|\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_1(t)-x_2(t)|(b-a)\\ &= M(b-a)|\lambda|\rho(x_1,x_2).\end{aligned}$$

可见，当 $\alpha=M(b-a)|\lambda|<1$ 时，T 为压缩映照. 由于 $C[a,b]$ 为完备空间，故 T 存在唯一不动点 x^*，因此，当 $|\lambda|<\dfrac{1}{M(b-a)}$ 时，积分方程(2.12)式有唯一的连续解.

(2) 在 $L^2[a,b]$ 上定义算子：对任一 $x\in L^2$，规定

$$(Tx)(s)=f(s)+\lambda\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t.$$

它是将 $L^2[a,b]$ 映象到 $L^2[a,b]$ 的映照.

当 $|\lambda|<\dfrac{1}{\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|\mathrm{d}s\mathrm{d}t}$ 时，T 是压缩映照.

事实上

$$\begin{aligned}\rho_2(Tx_1,Tx_2) &= \left\{\int_a^b[(Tx_1)(s)-(Tx_2)(s)]^2\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &= \left\{\int_a^b\left[\lambda\int_a^b K(s,t)(x_1(t)-x_2(t))\mathrm{d}t\right]^2\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}}\\ &\leqslant |\lambda|\left\{\int_a^b\left[\int_a^b|K(s,t)||x_1(t)-x_2(t)|\mathrm{d}t\right]^2\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

由 Буняковский 不等式，有

$$\begin{aligned}
&\rho_2(Tx_1,Tx_2)\\
\leqslant\ &|\lambda|\left\{\int_a^b\left[\left(\int_a^b|K(s,t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^b|x_1(t)-x_2(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right]^2\mathrm{d}s\right\}^{\frac{1}{2}}\\
=\ &|\lambda|\left[\int_a^b|x_1(t)-x_2(t)|^2\mathrm{d}t\int_a^b\mathrm{d}s\int_a^b|K(s,t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}\\
=\ &|\lambda|\left(\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)\rho_2(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

可见，当 $|\lambda|<\dfrac{1}{\left(\int_a^b\int_a^b|K(s,t)|^2\mathrm{d}s\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}}$ 时，T 是 L^2 上的压缩映照. 由于 $L^2[a,b]$ 是完备的，故存在 T 的唯一不动点 $x^*\in L^2[a,b]$，即积分方程(2.12)有唯一的平方可积解. ▌

例4 设

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix},\quad x=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ \vdots\\ x_n\end{bmatrix}\in R^n,\quad f=\begin{bmatrix}f_1\\ f_2\\ \vdots\\ f_n\end{bmatrix}\in R^n.$$

若 $\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}<1$，则线性方程组 $x=Ax+f$ 有唯一解 x^*.

证 令

$$y=Bx=Ax+f=\begin{bmatrix}\sum\limits_{j=1}^{n}a_{1j}x_j+f_1\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{2j}x_j+f_2\\ \vdots\\ \sum\limits_{j=1}^{n}a_{nj}x_j+f_n\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ \vdots\\ y_n\end{bmatrix}.$$

由此所定义的算子 B 是 R^n 到 R^n 的映照. 由于 R^n 是完备的距离空间，所以，若能说明 B 是压缩映照，则 B 有唯一不动点 x^*，而 $x^*=Bx^*=Ax^*+f$，故方程组有唯一解. 下面将证明在给定条件下 B 是压缩算子. 设

$$x^{(1)}=\begin{bmatrix}x_1^{(1)}\\x_2^{(1)}\\\vdots\\x_n^{(1)}\end{bmatrix}\in R^n,\quad x^{(2)}=\begin{bmatrix}x_1^{(2)}\\x_2^{(2)}\\\vdots\\x_n^{(2)}\end{bmatrix}\in R^n,$$

$$y^{(1)}=Bx^{(1)},\quad y^{(2)}=Bx^{(2)}.$$

由于 $\rho(Bx^{(1)},Bx^{(2)})=\left[\sum_{i=1}^{n}|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$，则

$$\begin{aligned}(\rho(Bx^{(1)},Bx^{(2)}))^2&=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(1)}+f_i-\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j^{(2)}-f_i\right)^2\\&=\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_j^{(1)}-x_j^{(2)})\right]^2\\&\leqslant\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2\sum_{j=1}^{n}(x_j^{(1)}-x_j^{(2)})^2\right]\\&=\sum_{j=1}^{n}(x_j^{(1)}-x_j^{(2)})^2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}^2.\end{aligned}$$

所以，$\rho(Bx^{(1)},Bx^{(2)})\leqslant\left[\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2\right]^{\frac{1}{2}}\rho(x^{(1)},x^{(2)})$.

注意到，$\theta=\left(\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}<1$，故 B 是压缩映照. 因此，存在唯一的 $x^*=(x_1^*,x_2^*,\cdots,x_n^*)^T\in R^n$ 为 B 的不动点，即

$$Bx^*=Ax^*+f=x^*.\ \blacksquare$$

例5 若 $\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\leqslant\theta<1,i=1,2,\cdots,n$，则方程组

$$x=Ax+f$$

有唯一解.

证 令 $y=Bx=Ax+f$，B 是 R^n 到 R^n 的映照. 在 R^n 中引入距离

$$\rho_1(x^{(1)},x^{(2)})=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i^{(1)}-x_i^{(2)}|,$$

易知，(R^n,ρ_1)是一个完备的距离空间，并且 B 是一个压缩算子.

事实上，

$$\rho_1(Bx^{(1)},Bx^{(2)})=\rho_1(y^{(1)},y^{(2)})$$

$$
\begin{aligned}
&=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|y_i^{(1)}-y_i^{(2)}|\\
&=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x_j^{(1)}-x_j^{(2)})\right|\\
&\leqslant\max_{1\leqslant j\leqslant n}|x_j^{(1)}-x_j^{(2)}|\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\\
&=\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\right)\rho(x^{(1)},x^{(2)})\\
&\leqslant\theta\rho(x^{(1)},x^{(2)}),
\end{aligned}
$$

故 B 为压缩映照. 由 (R^n,ρ) 的完备性知，映照 B 存在唯一的不动点 x^*：$x^*=Bx^*=Ax^*+f$. 即 $Ax+f=x$ 存在唯一解. ▌

如果引入幂的概念，可以将定理1加以改进.

设 A 是 X 到 X 的映照，定义

$Ax, A^2x=A(Ax), A^3x=A(A^2x), \cdots, A^nx=A(A^{n-1}x), \cdots.$

于是有

定理2 设 X 为完备距离空间，A 是 X 到 X 的映照. 若存在某个自然数 n，使对 $\forall\ x,y\in X$，有 $\rho(A^nx,A^ny)\leqslant\theta\rho(x,y)$，$(0<\theta<1$，则方程 $x=Ax$ 有唯一解.

证 令 $B=A^n$，则 $\rho(Bx^{(1)},Bx^{(2)})\leqslant\theta\rho(x^{(1)},x^{(2)})$，由于 $0<\theta<1$，故 B 是压缩映照. 按定理1知，B 有唯一的不动点 x^*：$x^*=Bx^*$. 下面证明：(i) x^* 也是 A 的不动点；(ii) A 只有一个不动点. 事实上，(i) 因为 $Ax^*=A(Bx^*)=A^{n+1}x^*=B(Ax^*)$，所以 Ax^* 也是 B 的不动点. 由于 B 的不动点是唯一的，因此 $x^*=Ax^*$. (ii) 注意到 A 的不动点一定是 B 的不动点，由 B 的不动点唯一性知，A 的不动点也是唯一的. ▌

例6 设有 Volterra 第二类型积分方程

$$x(s)=f(s)+\lambda\int_a^s K(s,t)x(t)\mathrm{d}t,$$

当给定函数 $f\in C[a,b]$ 时，该 $K(s,t)$ 在三角域(如图2.2)：$a\leqslant t\leqslant s\leqslant b$ 上连续，则对任何参数 λ，存在唯一的连续解.

证 令 $M=\max\limits_{a\leqslant t\leqslant s\leqslant b}|K(s,t)|$,

$$(Tx)(s)=f(s)+\lambda\int_a^s K(s,t)x(t)\mathrm{d}t,$$

则 T 是 $C[a,b]$ 到 $C[a,b]$ 的映照. 显见,映照 T 的不动点 $x^*=Tx^*$ 就是积分方程的解. 由于 $C[a,b]$ 是完备的,故只需证明 T 是压缩映照即可.

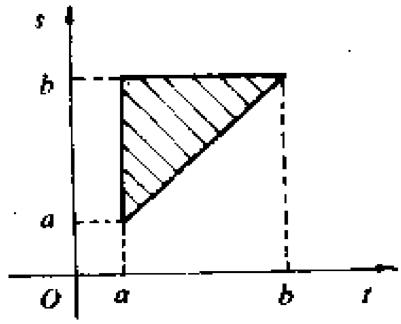


图 2.2

$$\begin{aligned}
&\rho(Tx_1,Tx_2)\\
&=\max_{a\leqslant s\leqslant b}|(Tx_1)(s)-(Tx_2)(s)|\\
&\leqslant\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\lambda\int_a^s K(S,t)[x_1(t)-x_2(t)]\mathrm{d}t\right|\\
&\leqslant|\lambda|M\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x_1(t)-x_2(t)|(b-a)\\
&=|\lambda|(b-a)M\rho(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

在一般情况下并不能肯定 T 是压缩映照,但是

$$\begin{aligned}
(T^2x)&=T(Tx)(s)\\
&=f(s)+\lambda\int_a^s K(s,t)((Tx)(t))\mathrm{d}t\\
&=f(s)+\lambda\int_a^s K(s,t)f(t)\mathrm{d}t\\
&\quad+\lambda^2\int_a^s\mathrm{d}t\int_a^t K(s,t)K(t,u)x(u)\mathrm{d}u,
\end{aligned}$$

从而

$$\begin{aligned}
&\rho(T^2x_1,T^2x_2)\\
&=\max_{a\leqslant s\leqslant b}\left|\lambda^2\int_a^s\mathrm{d}t\int_a^t K(s,t)K(t,u)[x_1(u)-x_2(u)]\mathrm{d}u\right|\\
&\leqslant\lambda^2M^2\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^s\mathrm{d}t\int_a^t|x_1(u)-x_2(u)|\mathrm{d}u\\
&\leqslant\lambda^2M^2\rho(x_1,x_2)\max_{a\leqslant s\leqslant b}\int_a^s\mathrm{d}t\int_a^t\mathrm{d}u\\
&\leqslant\frac{(b-a)^2}{2!}|\lambda^2|M^2\rho(x_1,x_2).
\end{aligned}$$

因此，一般地有

$$\rho(T^n x_1, T^n x_2) \leqslant \frac{(b-a)^n}{n!} |\lambda|^n M^n \rho(x_1, x_2).$$

考虑到，对于 $x \in (-\infty, +\infty)$，级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ 收敛于 e^x，特别地，当 $x = |\lambda| M(b-a)$ 时亦收敛. 根据级数收敛的必要条件知，一般项 $\frac{x^n}{n!} \to 0$ $(n \to \infty)$. 因此，对任何 λ 都有

$$\lim_{n \to \infty} \frac{(b-a)^n}{n!} |\lambda|^n M^n = 0,$$

故对于 $0 < \theta < 1$，存在 n_0，使当 $n \geqslant n_0$ 时，有

$$\frac{(b-a)^n}{n!} |\lambda|^n M^n < \theta.$$

取定 n_0，于是映照 T^{n_0} 满足

$$\rho(T^{n_0} x_1, T^{n_0} x_2) \leqslant \theta \rho(x_1, x_2),$$

按定理2知，T 存在唯一不动点 $x^* \in C[a,b]$，即

$$x^* = Tx^*.$$

这表明，连续函 $x^*(t)$ 就是 Volterra 方程的解. ▌

§ 2.6　列紧性

我们知道，在实数空间 R 中，任何有界数列必有收敛的子序列. 但是在一般的距离空间中，这个结论却未必成立. 例如，在距离空间 $C[0,1]$ 中的连续函数列 $A = \{x_n(t)\}$（如图2.3），其中

$$x_n(t) = \begin{cases} 0, & \frac{1}{n} \leqslant t \leqslant 1, \\ 1 - nt, & 0 \leqslant t < \frac{1}{n}. \end{cases}$$

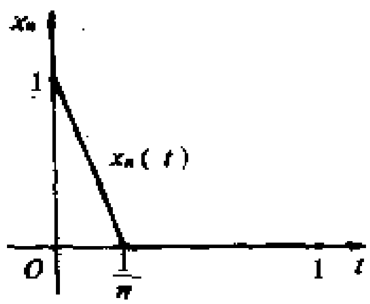


图　2.3

显然，$\{x_n(t)\}$是有界函数列，这是因为$\max\limits_{0\leqslant t\leqslant 1}|x_n(t)|\leqslant 1$，但它不可能有收敛的子序列．事实上，当$n\to\infty$时，它有一个不连续的极限函数

$$\lim_{n\to\infty}x_n(t)=x(t)=\begin{cases}0, & 0<t\leqslant 1,\\ 1, & t=0.\end{cases}$$

因此，在一般的距离空间中，并不是每个有界序列都存在收敛的子序列．对此，我们引入列紧集的概念．

定义1 设X为距离空间，$A\subset X$．若A中任何序列必有收敛的子序列，则称A是**列紧集**（或**致密集**）．若A是列紧的闭集，则称A是**紧集**（或**自列紧集**）．若整个距离空间(X,ρ)是列紧的（因而是紧的），则称(X,ρ)是**紧空间**．

例1 设A为有限集，则A是紧集．

证 设序列$\{x_n\}\subset A$．因为A是有限集，所以，$\{x_n\}$中必出现A的某元素无限次．因此，序列$\{x_n\}$中必有收敛的子列——常驻序列．又因为$A'=\phi$，故A为闭集．因此，A是紧集．▌

例2 R中的有界集必为列紧集．

证 设A为R中的有界集，则A中的任何数列$\{x_n\}$必为有界数列．因为有界数列必有收敛的子数列，按列紧集的定义，A为列紧集．▌

由此可知，(a,b)为列紧集，$[a,b]$为紧集，但是R不是紧空间，因为序列$\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$不包含收敛的子序列．

定理1 列紧集必是有界集．

证 设$A\subset(X,\rho)$，A为列紧集．反证，若A为无界集，则对任何一个以x_0为球心，以δ为半径的球$\delta(x_0)$，都不可能将A完全包含在此球内．即，对任意的x_0与$\delta>0$，存在$x\in A$，使$x\overline{\in}\delta(x_0)$，此即$\rho(x,x_0)\geqslant\delta$．

取$x_0\in A$，$\delta=1$，则存在$x_1\in A$，使$\rho(x_1,x_0)\geqslant 1$；

取$\delta=\rho(x_1,x_0)+1$，则存在$x_2\in A$，使$\rho(x_2,x_1)\geqslant\rho(x_1,x_0)+1$；

…

取 $\delta=\rho(x_{n-1},x_0)+\rho(x_{n-2},x_0)+\cdots+\rho(x_1,x_0)+1$，则存在 $x_n\in A$，使 $\rho(x_n,x_0)\geqslant\rho(x_{n-1},x_0)+\rho(x_{n-2},x_0)+\cdots+\rho(x_1,x_0)+1$；

…

如此就得到序列 $\{x_n\}\subset A$，具有如下性质：对任何的 m,n，当 $m>n$ 时，有

$$\begin{aligned}\rho(x_m,x_0) &\geqslant \rho(x_{m-1},x_0)+\rho(x_{m-2},x_0)+\cdots\\ &\quad+\rho(x_n,x_0)+\cdots+\rho(x_1,x_0)+1\\ &\geqslant \rho(x_n,x_0)+1.\end{aligned}$$

故

$$\rho(x_m,x_n)\geqslant\rho(x_m,x_0)-\rho(x_n,x_0)\geqslant 1.$$

因此，$\{x_n\}$ 不是基本序列，故不可能有收敛的子序列。至此已证明了，若 A 无界，则 A 中有序列 $\{x_n\}$，而它没有收敛的子序列，这与 A 是列紧集的假设矛盾。▌

值得注意的是，在一般距离空间中，有界集未必是列紧集。但是在 n 维 Euclid 空间中，集合的有界性和列紧性是等价的。

定理2 n 维 Euclid 空间 R^n 中的有界集必为列紧集。

证 设 A 为 R^n 中的有界集，任取 A 中的一个序列 $\{x_k\}$：

$$x_k=(\xi_1^{(k)},\xi_2^{(k)},\cdots,\xi_n^{(k)}),\quad k=1,2,\cdots.$$

由于 A 有界，所以该序列的每一个坐标 $\xi_i^{(k)}(i=1,2,\cdots,n;k=1,2,\cdots)$ 有界。特别地，该序列的第一个坐标数列 $\{\xi_1^{(k)}\}$ 是有界的，由 Bolzano-Weierstrass 定理知，它必存在收敛的子数列，记为 $\{\xi_1^{(k_1)}\}$，这里 $\{k_1\}$ 为一部分自然数组成的数列。显然 $\{\xi_2^{(k_1)}\}$ 是有界的，故又存在收敛的子数列，记为 $\{\xi_2^{(k_2)}\}$，这里 $\{k_2\}$ 是 $\{k_1\}$ 的子数列，于是 $\{\xi_1^{(k_2)}\}$，$\{\xi_2^{(k_2)}\}$ 都是收敛的。依次类推，我们可以找到由一部分自然数组成的数列 $\{k_n\}$，使 $\{\xi_1^{(k_n)}\}$，$\{\xi_2^{(k_n)}\}$，…，$\{\xi_n^{(k_n)}\}$ 都收敛。而 R^n 中序列收敛的充要条件是按坐标收敛，故序列 $\{x_k\}$ 的子序列 $\{x_{k_n}\}$ 收敛，即 A 是列紧集。▌

定理3 紧空间必为完备空间。

证 设 $\{x_n\}$ 是紧空间 X 中的基本列，则 $\{x_n\}$ 中必存收敛的子

序列$\{x_{n_i}\}$，$x_{n_i}\to x_0\in X$，即 $\rho(x_{n_i},x_0)\to 0(i\to\infty)$. 由三点不等式与$\{x_n\}$是基本列知

$$\rho(x_n,x_0)\leqslant \rho(x_n,x_{n_i})+\rho(x_{n_i},x_0)\to 0(n,i\to\infty).$$

这说明$\{x_n\}$的极限为 $x_0\in X$，故 X 为完备空间. ▌

定理4 列紧集的子集必为列紧集.

注意 紧集的子集不一定是紧集，紧集的闭子集为紧集.

定理5 距离空间 X 中的紧集 A，如果被开集簇 $\Delta=\{G\}$所覆盖(即$\bigcup\limits_{G\in\Delta}G\supset A$)，则在 Δ 中必可取出有限个开集 $G_1,G_2,\cdots,G_k$，使$\bigcup\limits_{i=1}^{k}G_i\supset A$. 反之，设 A 是 X 中的点集，如果 X 中的每个覆盖 A 的开集簇中必有有限个开集覆盖 A，则 A 必是紧集.

定理6 距离空间 X 中的紧集 A 上的连续函数 f 必有界，并且 f 在 A 上达到上、下确界.

证 设 B 是 f 在 A 上的所有函数值的集合，即 $B=f(A)$. $\{y_n\}$是B中的任一数列，相应地有A中的点列$\{x_n\}$，使得$y_n=f(x_n)$，$n=1,2,\cdots$. 因为 A 是紧集，所以$\{x_n\}$含有收敛的子序列$\{x_{n_k}\}$，并且$\{x_{n_k}\}\to x_0\in A$. 由于 f 在 x_0处连续，所以

$$\lim_{k\to\infty}y_{n_k}=\lim_{k\to\infty}f(x_{n_k})=f(x_0)=y_0\in B,$$

因此 B 是紧集. 再由§2.6定理1知 B 有界，即 f 是 A 上的有界函数. 又因为 B 为实直线上的闭集，B 的上确界 y_1及下确界 y_2必在 B 中，于是在 A 中有 x_1,x_2，使 $f(x_1)=y_1$，$f(x_2)=y_2$. ▌

由此定理可知，紧集 A 上的连续函数必在 A 上取得最大值和最小值.

§2.7 函数列的一个收敛性问题

本节所引用的集合，都是距离空间(X,ρ)中的集合，函数是在 X 的子集上有定义且映照于完备距离空间(X,ρ)内的抽象函数.

定义1 设$\{f_n(x)\}$是定义在集合E上的函数列. 若对$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ \delta>0$,使得对于E中任何两点x,x_0,当$\rho(x,x_0)<\delta$时,对$\{f_n(x)\}$中的每个函数f_n都成立着

$$\rho[f_n(x),f_n(x_0)]<\varepsilon,\quad n=1,2,\cdots,$$

则称函数列$\{f_n(x)\}$在E上**等度连续**.

定义2 设$\{f_n(x)\}$是定义在集合E上的函数列. 若对每个$x\in E$,集合$\{f_n(x)\}$有界,则称函数列$\{f_n(x)\}$在E上**逐点有界**.

定理1(Arzela-Ascoli) 设A是距离空间(X,ρ)中的紧集. 若函数列$\{f_n(x)\}$在A上逐点有界且等度连续,则$\{f_n(x)\}$含有在A上一致收敛的子序列.

该定理的证明详见参考文献[5]. 这个定理建立了具有等度连续性的函数列的一个选择原理. 然而,我们可以构造一个不连续函数列,但它一致收敛于连续函数. 如:

$$f_n(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{n},\\[2ex] 0, & \dfrac{1}{n}<x\leqslant 1,\end{cases}\qquad (n=1,2,\cdots)$$

函数列$\{f_n(x)\}$在区间$[0,1]$上一致收敛于连续函数$f(x)\equiv 0$. 这个简单的例子告诉我们,定理1中等度连续的条件不是必要的. 同时还启发我们,什么样的函数类一定可以选出一致收敛于连续函数的子序列,且该函数类较广于具有等度连续性的函数类呢?现在,我们将上述概念加以拓广,从而得出更一般的结果.

定义3 设$\{f_n(x)\}$是定义在集合E上的函数列. 若对$\forall\ \varepsilon>0$及每个$x_0\in E$,$\exists\ N(x_0,\varepsilon),\delta(x_0,\varepsilon)>0$,使当$\rho(x,x_0)<\delta,n\geqslant N$时,有

$$\rho_1(f_n(x),f_n(x_0))<\varepsilon,$$

则称函数列$\{f_n(x)\}$在E上**半等度连续**.

定理2 设$\{f_n(x)\}$是定义在紧集A上的函数列,且在A上收敛于连续函数$f(x)$,则$\{f_n(x)\}$在A上一致收敛于$f(x)$的充要条件是$\{f_n(x)\}$在A上半等度连续.

证 充分性. 由于$\{f_n(x)\}$在 A 上半等度连续,所以,对$\forall\ \varepsilon>0$及每个 $x_0\in A$,存在 $N_1(x_0,\varepsilon)$,$\delta_1(x_0,\varepsilon)>0$,当 $n\geqslant N_1$,$\rho(x,x_0)<\delta_1$时,有

$$\rho_1[f_n(x),f_n(x_0)]<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.13}$$

因为$f(x)$在 A 上连续,所以$\exists\ \delta_2(x_0,\varepsilon)$,当 $\rho(x,x_0)<\delta_2$时,有

$$\rho_1[f(x),f(x_0)]<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.14}$$

又$\{f_n(x)\}$在 A 上收敛于 $f(x)$,所以$\exists\ N_2(x_0,\varepsilon)$,当 $n\geqslant N_2$时,有

$$\rho_1[f_n(x_0),f(x_0)]<\frac{\varepsilon}{3}. \tag{2.15}$$

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,$\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$,则当 $n\geqslant N$,$\rho(x,x_0)<\delta$ 时,不等式(2.13),(2.14)及(2.15)同时成立. 由不等式

$$\begin{aligned}\rho_1[f(x),f_n(x)]\leqslant\ &\rho_1[f(x),f(x_0)]+\rho_1[f(x_0),f_n(x_0)]\\&+\rho_1[f_n(x_0),f_n(x)],\end{aligned}$$

及不等式(2.13),(2.14)及(2.15)式知,对$\forall\ \varepsilon>0$及每个 $x_0\in A$,都$\exists\ N(x_0,\varepsilon)$及 x_0的一个邻域 $G_{x_0}=\{x\in A\,|\,\rho(x,x_0)<\delta(x_0,\varepsilon)\}$,使对一切 $x\in G_{x_0}$,当 $n\geqslant N(x_0,\varepsilon)$时,有

$$\rho_1[f(x),f_n(x)]<\varepsilon.$$

因为 A 是紧集,由有限覆盖定理知,必存在有限个开集

$$G_{x_1},G_{x_2},\cdots,G_{x_m}$$

已经覆盖了 A,因此也对应了 m 个自然数$\{N(X_i,\varepsilon)\}_1^m$. 取 $N=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\{N(x_i,\varepsilon)\}$,则当 $n\geqslant N$ 时,对一切 $x\in A$,都有

$$\rho_1[f(x),f_n(x)]<\varepsilon.$$

即$\{f_n(x)\}$在 A 上一致收敛于 $f(x)$.

必要性. 只要注意不等式

$$\begin{aligned}\rho_1[f_n(x),f_n(x_0)]\leqslant\ &\rho_1[f_n(x),f(x)]+\rho_1[f(x),f_n(x_0)]\\&+\rho_1[f(x_0),f_n(x_0)]\end{aligned}$$

即可. ▌

定理3 若函数列$\{f_n(x)\}$在E上半等度连续且收敛于$f(x)$，则$f(x)$在E上连续.

证 设x_0是E中的任一点，注意到定理条件，再由不等式

$$\rho_1[f(x),f(x_0)] \leqslant \rho_1[f(x),f_n(x)]+\rho_1[f_n(x),f_n(x_0)] + \rho_1[f_n(x_0),f(x_0)]$$

知，$f(x)$在x_0处连续. 由于x_0是任意的，所以$f(x)$在E上连续. ▌

推论 设$\{f_n(x)\}$是定义在区间$[a,b]$上的实值函数列. 如果$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上收敛于$f(x)$，$f_n(x)(n=1,2,\cdots)$在$[a,b]$上可微，并且$|f_n'(x)|\leqslant\varphi(x)$，$\varphi(x)\in L[a,b]$，则$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$.

证 由不等式

$$|f_n(x)-f_n(x_0)|=\left|\int_{x_0}^{x} f_n'(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x}\varphi(x)\mathrm{d}x\right|$$

及积分的绝对连续性知，$\{f_n(x)\}$在$[a,b]$上半等度连续，再由§2.7定理2及定理3知，$\{f_n(x)\}$一致收敛于$f(x)$. ▌

习　题

1. 设S是三维空间中的球面. 对于任何的$x,y\in S$，规定$\rho(x,y)$为过两点x,y的大圆上的劣弧之长. 试证明：$\rho(x,y)$是一距离，且满足

$$d(x,y)\leqslant\rho(x,y)\leqslant\frac{\pi}{2}d(x,y).$$

2. 试给出国家与国家之间的一个距离.

3. 设$x,y\in(X,\rho)$，试证明距离$\rho(x,y)$是关于两个变元x,y的连续函数.

4. 设$\rho(x,y)$是(X,ρ)上的一个距离，则

$$\rho_1(x,y)=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

也是 X 上的一个距离.

5. 设在 R^n 中定义距离 $\rho(x,y)=\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}|\xi_k-\eta_k|$，则 R^n 按距离 ρ 是距离空间，其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$.

6. 距离空间 X 中的序列 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0 的充要条件是 $\{x_n\}$ 的任一子序列 $\{x_{n_k}\}$ 都收敛于 x_0.

7. 证明基本序列是有界序列.

8. 证明：(1) 距离空间中的闭集必为可列个开集的交集；

(2) 距离空间中的开集必为可列个闭集的并集.

9. 设集 $M\subset(X,\rho)$. 证明：M 的内点所组成的集必为开集.

10. 在距离空间 X 中，如果闭集 F 含有集 A，则 $F\supset\overline{A}$.

11. 设 (X,ρ) 为距离空间，$A\subset X$. 令 $f(x)=\inf\limits_{y\in A}\rho(x,y)$，$x\in A$. 证明：$f(x)$ 是连续函数.

12. 设 (X,ρ) 为距离空间，F_1,F_2 为 X 中两个不相交的闭集. 证明：存在开集 G_1 及 G_2，使得 $G_1\cap G_2=\phi$，且 $G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$.

13. 证明：紧集的闭子集也是紧集.

14. 证明：如果 F_1、F_2 是距离空间 (X,ρ) 中的紧集，则必存在 $x_0\in F_1$，$y_0\in F_2$，使得 $\rho(F_1,F_2)=\rho(x_0,y_0)$.

15. 列紧集的闭包必是紧集.

16. 设 F 是 R^n 中的有界闭集，A 是 F 到 F 的算子. 对 $\forall\, x,y\in F$，有 $\rho(Ax,Ay)<\rho(x,y)$. 求证：A 在 F 中存在唯一的不动点.

17. 设 (X,ρ) 是完备空间，A 是 X 到 X 的算子. 若

$$\alpha_n=\sup_{x,y\in X}\frac{\rho(A^nx,A^ny)}{\rho(x,y)}\to 0\ (n\to\infty),$$

则 A 在 X 中有唯一的不动点.

18. 设 $a_{jk}\ (j,k=1,2,\cdots,n)$ 为一组实数，$\sum\limits_{j,k=1}^{n}(a_{jk}-\delta_{jk})^2<1$，其中 $\delta_{jk}=\begin{cases}1, & j=k,\\ 0, & j\neq k,\end{cases}$ 则代数方程组

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

对任何固定的$(b_1,b_2,\cdots,b_n)$有唯一解.

19. 设 X 是距离空间，则 X 总在 X 中稠密. 若 X 是可列集，则 X 是可分的.

20. X 是完备的距离空间的充要条件是对 X 中的任一列闭集 $\{S_n\}$：

$$S_1 \supset S_2 \supset \cdots \supset S_n \supset \cdots,\ dS_n \to 0,$$

必有 $\bar{x} \in S_n (n=1,2,\cdots)$.

21. 设 X 是完备的距离空间，X_1是 X 的非空闭子集. 则把 X_1 看作独立的距离空间(按同一距离)时，X_1也是完备的.

22. 设$\{F_n\}$是紧空间 X 中的一列闭集，$F_1 \supset F_2 \supset \cdots \supset F_n \supset \cdots$，并且 $F_n \neq \phi (n=1,2,\cdots)$. 证明：$\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n \neq \phi$.

23. 设 S 是紧集 E 的无限子集，则 S 有属于 E 的聚点.

24. 设(X,ρ)是距离空间，$Y \subset X$. 证明下列陈述是等价的：

(1) Y 在 X 中稠密；

(2) 对于 $x \in X$，存在 Y 中的无限点列$\{x_n\}$，使 $x_n \to x (n \to \infty)$；

(3) 对于 $x \in X$，$\forall\ \varepsilon > 0$，$\exists\ x' \in Y$，使得 $\rho(x,x') < \varepsilon$；

(4) 若 F 是 X 中的闭集，$Y \subset F \subset X$，则 $F = X$；

(5) 若 G 是 X 中的开集，$Y \cap G = \phi$，则 $G = \phi$；

(6) Y 与 X 的任何开球都相交.

第三章　赋范线性空间与线性算子

泛函分析研究的对象之一是数学和物理中提炼出来的大量线性或非线性问题，为了有效地研究这些问题，仅有距离空间的概念是不够的．因此，引入所谓线性空间的概念，并在线性空间中引进适当的收敛概念乃是必要的．本章将介绍赋范线性空间及线性算子的一般概念和理论．

§3.1　线性空间与赋范线性空间

定义1　设 V 是一个非空集合，K 是实（或复）数域，如果对于 V 中任意两个元素 x,y，有唯一的元素 $z\in V$ 与之对应，称 z 为 x 与 y 的和，记为 $z=x+y$；又对于 V 中任意元素 x 及 K 中任一数 α，有唯一元素 $u\in V$ 与之对应，称 u 为数 α 与元素 x 的**数积**，记为 $u=\alpha x$，并且对于上述的加法与数乘运算满足下列条件（$x,y,z\in V$；$\alpha,\beta\in K$）：

1° $x+y=y+x$；

2° $(x+y)+z=x+(y+z)$；

3° V 中存在元素 0 使对任一 $x\in V$，$0+x=x$，称 0 为 V 的零元素；

4° 对任何 $x\in V$，存在加法逆元素 $-x$ 使 $x+(-x)=0$；

5° $1x=x$；

6° $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$；

7° $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$；

8° $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$.

则称 V 是数域 K 上的**线性空间**. 特别当 K 为实(或复)数域时,称 V **为实(或复)的线性空间**.

例如,$C[a,b]$,R^n,$L^p[a,b]$都是线性空间. 为了避免重复,我们将在介绍赋范线性空间的概念以后,再对它们作比较详细的讨论.

定义2 设 M 是线性空间 V 的一个非空子集. 若 M 中任何两个元素 x,y 的和 $x+y$ 属于 M,任何一个数 $\alpha\in K$ 与元素 $x\in M$ 的数积也属于 M(可以证明 M 按照 V 中的线性运算也是一个线性空间),则称 M 是 V 的**线性子空间**(**或简称为子空间**). 特别地,V 与 $\{\theta\}$也是 V 的子空间,称$\{\theta\}$为 V 的**零子空间**,除 V 以外的 V 的子空间称为 V 的**真子空间**.

定义3 设 V_1,V_2都是线性空间. 如果存在一个从 V_1到 V_2上的一一映照 T,使对任何的 $x,y\in V_1$和 $\alpha,\beta\in K$,有

$$T(\alpha x+\beta y) = \alpha Tx+\beta Ty,$$

则称线性空间 V_1与 V_2是**线性同构的**,T 称为 V_1到 V_2的**线性同构映照**.

定义4 设 X 是实(或复)线性空间,如果对于 X 中每个元素 x,按照一定的法则对应于一个实数$\|x\|$,且满足

1° $\|x\|\geqslant 0$,$\|x\|=0$的充分必要条件是 $x=\theta$;

2° $\|\alpha x\|=|\alpha|\|x\|$,这里 α 是实(或复)数;

3° $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$,

则称 X 为实(或复)**赋范线性空间**,$\|x\|$称为元素 x 的**范数**.

在赋范线性空间 X 中,我们可以用

$$\rho(x,y) = \|x-y\|$$

定义元素 x 与 y 之间的距离. 显然,$(X,\|\cdot\|)$成为一个距离空间,这是因为如此定义的距离满足距离公理. 事实上,

1° $\rho(x,y)=\|x-y\|\geqslant 0$,$\rho(x,y)=0$的充分必要条件是 $x=y$;

2° $\rho(x,z)=\|x-z+y-y\|\leqslant\|x-y\|+\|y-z\|$

$=\rho(x,y)+\rho(y,z)$;

3° $\rho(x,y)=\|x-y\|=\|(-1)(y-x)\|$
$$=\|y-x\|=\rho(y-x).$$

由于$(X,\|\cdot\|)$是距离空间，因此第二章介绍的概念和结论在$(X,\|\cdot\|)$中仍然有效. 如极限、邻域、内点、开集、闭集、极限点、列紧性、紧性、完备性等. 特别地，极限概念可以如下叙述，并且极限是唯一的.

定义5 设$\{x_n\}\subset X, x\in X$. 若$\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x\|=0$，则称$\{x_n\}$**依范数收敛于** X(或称$\{x_n\}$**强收敛于** x)，记为$x_n\xrightarrow{s}x(n\to\infty)$，或记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$(强).

因为X是线性空间，因此可在$(X,\|\cdot\|)$中引入级数的概念.

定义6 设$\{x_n\}\subset X$，令$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$. 若有$S_0\in X$使$\lim\limits_{n\to\infty}\|S_n-S_0\|=0$，则称级数$\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i$是收敛的，且和为$S_0$，记成$S_0=\sum\limits_{i=1}^{\infty}x_i$.

定理1 在赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$中，若$x_n\to x$，则$\|x_n\|\to\|x\|$ $(n\to\infty)$.

证 因为
$$\|x_n\|=\|x_n-x+x\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x\|,$$
且
$$\|x\|=\|x-x_n+x_n\|\leqslant\|x-x_n\|+\|x_n\|,$$
所以
$$|\|x\|-\|x_n\||\leqslant\|x-x_n\|\to 0\quad(n\to\infty).\ \blacksquare$$

此定理说明$\|x\|$是x的连续函数.

定义7 如果赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$是完备的，则称$(X,\|\cdot\|)$为**Banach 空间**.

例1 n维 Euclid 空间R^n是 Banach 空间.

证 在R^n中定义元素$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n), y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$的相加与数乘为
$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n),$$

$$\alpha x = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \cdots, \alpha\xi_n),$$

则 R^n 是一个线性空间. 在 R^n 中定义范数

$$\|x\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}},$$

则 R^n 构成一个赋范线性空间. 这样引入的范数称为**欧氏范数**,所形成的空间称为**欧氏空间**. 由这个范数引入的距离

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \Big(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i - \eta_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}$$

恰为欧氏距离. 在第二章 § 2.1的例2中已经证明了x_k收敛于 x 等价于按坐标收敛,因此,R^n 中的强收敛等价于按坐标收敛. 再由第二章 § 2.4的例2可知 R^n 是完备的,因此 R^n 是 Banach 空间. ▌

例2 连续函数空间 $C[a,b]$是 Banach 空间.

证 在 $C[a,b]$中,定义元素 $x(t)$与 $y(t)$的相加以及数 α 与元素 $x(t)$的相乘为

$$(x+y)(t) = x(t) + y(t), \qquad (\alpha x)(t) = \alpha x(t),$$

则连续函数的和函数是连续函数,常数乘连续函数仍为连续函数. 容易验证,$C[a,b]$是一个线性空间. 再在 $C[a,b]$中定义范数

$$\|x\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t)|, \qquad x(t) \in C[a,b],$$

则 $C[a,b]$是一个赋范线性空间,由此范数引入的距离

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \max_{a\leqslant t\leqslant b} |x(t) - y(t)|$$

恰为 Чебыщев 距离. 在第二章 § 2.4的例3中已证明,$C[a,b]$在 Чебыщев 距离下是完备的. 因此,赋范线性空间 $C[a,b]$是 Banach 空间. ▌

例3 空间 $L^p[a,b]$($1\leqslant p<+\infty$)是 Banach 空间.

证 在 $L^p[a,b]$中,凡几乎处处相等的函数视为同一元素,定义元素 $x(t)$与 $y(t)$相加以及数 α 与元素 $x(t)$相乘与例2相同,于是 $L^p[a,b]$是一个线性空间. 再在 $L^p[a,b]$中定义范数

$$\|x\| = \Big[\int_a^b |x(t)|^p \mathrm{d}t\Big]^{\frac{1}{p}},$$

容易验证它满足范数公理. 因此，$L^p[a,b]$是赋范线性空间. 由此范数引入的距离

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\sqrt[p]{\int_a^b |x(t)-y(t)|^p \mathrm{d}t}$$

与第二章 § 2.4例2中的 $L^p[a,b]$的距离一样，因此 $L^p[a,b]$是完备的. 所以 $L^p[a,b]$是 Banach 空间. ▌

例4 空间 $l^p(1\leqslant p<+\infty)$是 Banach 空间.

证 在 l^p 中定义元素 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$及元素 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)$的相加以及数 a 与元素 x 的相乘为

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n,\cdots),$$

$$ax=(a\xi_1,a\xi_2,\cdots,a\xi_n,\cdots),$$

则 l^p 是一个线性空间. 再在 l^p 中定义范数

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

由 Minkowski 不等式知，上述定义满足范数公理. 因此，l^p 是一个赋范线性空间. 又由此范数导出的距离

$$\rho(x,y)=\|x-y\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i-\eta_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

与第二章 § 2.1中例4所举的例子一致，故 l^p 在此范数下完备，因此 l^p 是 Banach 空间. ▌

例5 空间 l^∞是 Banach 空间.

证 在 $l^\infty=\{x\,|\,x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots),\exists\ K_x$ 使 $|\xi_i|\leqslant K_x,\xi_i\in R,\ i=1,2,\cdots\}$中，定义 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$及 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_m,\cdots)$的相加以及数 a 与元素 x 的相乘为

$$x+y=(\xi_1+\eta_1,\xi_2+\eta_2,\cdots,\xi_n+\eta_n,\cdots),$$

$$ax=(a\xi_1,a\xi_2,\cdots,a\xi_n,\cdots),$$

则 l^∞是一个线性空间. 再在 l^∞中定义范数

$$\|x\| = \sup_{1\leqslant i<+\infty}|\xi_i|,$$

容易验证它确为范数. 于是 l^∞是一个赋范线性空间，可以证明在

此范数下 l^∞ 是完备的，故 l^∞ 是一个 Banach 空间. ▌

例6 空间 $C^k[a,b]$ 是 Banach 空间.

设 $C^k[a,b]$ 表示在 $[a,b]$ 上具有直到 k 阶连续导数的一切函数组成的集. $C^k[a,b]$ 中的加法、数乘与例2相同，于是 $C^k[a,b]$ 是一个线性空间. 在 $C^k[a,b]$ 中定义范数：

$$\|x\|=\sum_{j=0}^{k}\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x^{(j)}(t)|,x^{(0)}(t)=x(t)\in C^k[a,b],$$

则 $C^k[a,b]$ 是一个赋范线性空间，且在 $C^k[a,b]$ 中 $\{x_n(t)\}$ 强收敛于 $x(t)$ 等价于 $x_n(t)$ 的直到 k 阶导数分别一致收敛于 $x(t)$ 的相应导数. 可以证明 $C^k[a,b]$ 是一个 Banach 空间.

我们已经看到，对于赋范线性空间，都可由范数

$$\rho(x,y)=\|x-y\|$$

引入距离，使其成为距离空间，且这个距离一定满足条件

$$\rho(x,y)=\rho(x-y,\theta),\quad \rho(\alpha x,\theta)=|\alpha|\rho(x,\theta). \tag{3.1}$$

然而，一般的距离空间都能成为赋范线性空间吗？当然不一定. 因为在一般的距离空间中，元素之间并不一定有线性运算. 如果有线性运算，我们称其为线性距离空间，若线性距离空间的距离满足(3.1)式，则定义 $\|x\|=\rho(x,\theta)$ 就是范数. 所以条件(3.1)式就是线性距离空间成为赋范空间的充分必要条件. 应该注意，线性距离空间中的距离不一定都满足(3.1)式. 例如，所有数列构成的空间

$$S=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)|x_i\in R,i=1,2,\cdots,n,\cdots\},$$

其中距离为

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{|\xi_i-\eta_i|}{1+|\xi_i+\eta_i|}.$$

取 $x=(1,1,1,\cdots,1,\cdots)$, $\theta=(0,0,0,\cdots,0,\cdots)$，则

$$2x=(2,2,2,\cdots,2,\cdots),\quad \rho(x,\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}.$$

而

$$\rho(2x,\theta)=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{2^i}\frac{2}{1+2}=\frac{2}{3},$$

可见

$$\rho(2x,\theta)\neq 2\rho(x,\theta).$$

所以，空间 S 按上述距离构成的线性距离空间不能成为赋范线空间.

作为第二章§2.4中定理4的一个有用的推论，最后我们给出如下定理.

定理2 一个 Banach 空间 X 的子空间 Y 是完备的充分必要条件是 Y 在 X 中是闭集.

§3.2 不同范数的等价性

在同一个线性空间中，可以用不同的方法定义范数. 例如，在线性空间 R^n 中，常用的三种方法如下：

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots\xi_n)\in R^n$，定义

$$\|x\|_1=\Big[\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big]^{\frac{1}{2}};\quad \|x\|_2=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|;\quad \|x\|_3=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|.$$

可以证明，上述三种定义都满足范数公理. 由于范数不同，就形成了不同的赋范线性空间 $(R^n,\|\cdot\|_1)$，$(R^n,\|\cdot\|_2)$ 及 $(R^n,\|\cdot\|_3)$. 下面讨论在同一个线性空间 X 中所引入的不同范数之间的关系.

设 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 是同一个线性空间 X 的两个不同的范数. 这样，对于 X 中的序列 $\{x_n\}$，就有两种按范数收敛的概念.

如果从 $\|x_n-a\|_1\to 0$ 推出 $\|x_n-a\|_2\to 0$，则称按“范数1”收敛强于按“范数2”收敛，或称按“范数2”收敛弱于“范数1”收敛.

一般地，由 $\|x_n-a\|_1\to 0$ 可推出 $\|x_n-a\|_2\to 0$，但并不一定能由 $\|x_n-a\|_2\to 0$ 推出 $\|x_n-a\|_1\to 0$. 如果对赋范线性空间中所有的收敛序列 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-a\|_1=0$，总有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-a\|_2=0$，同时只要 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-a\|_2=0$，也必有 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-a\|_1=0$，就称按“范数1”收敛与按“范数2”收敛等价. 注意到 $x_n\to a$ 与 $x_n-a\to 0$ 是一回事，于是有如下定义.

定义1 若对于 X 中的任意序列 $\{x_n\}$，当 $\|x_n\|_1\to0$ 时，有 $\|x_n\|_2\to0$，则称范数 $\|\cdot\|_1$ 比范数 $\|\cdot\|_2$ 强（或范数 $\|\cdot\|_2$ 比范数 $\|\cdot\|_1$ 弱）. 若当 $n\to\infty$ 时，$\|x_n\|_1\to0\Longleftrightarrow\|x_n\|_2\to0$，则称这两种范数是等价的.

定理1 范数 $\|\cdot\|_1$ 与范数 $\|\cdot\|_2$ 等价的充分必要条件是存在两个正的常数 k_1,k_2，使对任何 $x\in X$，不等式

$$k_1\|x\|_2\leqslant\|x\|_1\leqslant k_2\|x\|_2 \tag{3.2}$$

成立，即上述不等式关于 x 一致成立.

证 充分性. 假设(3.2)式成立，证明两范数等价. 事实上，对于 X 中的任一序列 $\{x_n\}$，若 $\|x_n\|_1\to0$，则由(3.2)式左边一个不等式知

$$\|x_n\|_2\leqslant\frac{1}{k_1}\|x_n\|_1\to0,$$

即

$$\|x_n\|_2\to0.$$

若 $\|x_n\|_2\to0$，则由(3.2)式右边一个不等式得

$$\|x_n\|_1\to0.$$

因此，两范数等价.

必要性. 假设两范数等价，即对 X 中的任何序列，有 $\|x_1\|_1\to0\Longleftrightarrow\|x_n\|_2\to0$，证明存在两个正常数 k_1,k_2，使得对任何 $x\in X$，(3.2)式成立. 我们先证明(3.2)式右边一个不等式成立，即存在正常数 k_2，使得对任何 $x\in X$，有

$$\|x\|_1\leqslant k_2\|x\|_2.$$

反证. 设对一切自然数 n，存在 $x_n\in X$，使

$$\|x_n\|_1>n\|x_n\|_2.$$

令

$$\tilde{x}_n=\frac{x_n}{\|x_n\|_1},$$

则

$$\|\tilde{x}_n\|_1=1.$$

而

$$\|\tilde{x}_n\|_2=\frac{\|x_n\|_2}{\|x_n\|_1}<\frac{1}{n}. \tag{3.3}$$

由(3.3)式得$\|\tilde{x}_n\|_2\to 0(n\to\infty)$. 因为两范数等价,则应有$\|\tilde{x}_n\|_1\to 0$ $(n\to\infty)$,而这与$\|\tilde{x}_n\|_1=1$矛盾. 因此,在两范数等价的情况下,必存在正常数 k_2,使得

$$\|x\|_1\leqslant k_2\|x\|_2$$

对 X 中的所有点 x 成立.

同理可证(3.2)式左边的不等式也成立. ▌

§3.3 有限维赋范线性空间

这一节将介绍有限维赋范线性空间的基本概念及其性质,读者将发现,它有一些性质是一般的赋范线性空间所不具有的.

我们先给出线性空间维数的概念. 若在线性空间 X 中存在 n $(n\geqslant 1)$个线性无关的元素 $e_1,e_2,\cdots,e_n$,使得对任何 $x\in X$,都可以表示成

$$x=c_1e_1+c_2e_2+\cdots+c_ne_n=\sum_{i=1}^{n}c_ie_i, \tag{3.4}$$

则称$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$是 X 的一个**基底**,称数组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$是 x 关于基底$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$的**坐标**. 由于 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是线性无关的,所以表示法(3.4)式是唯一的. 因此,在给定基底的情况下,对每一个 $x\in X$,就可由(3.4)式唯一地对应一个有序数组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$;反之,对每一有序数组$(c_1,c_2,\cdots,c_n)$,由(3.4)式唯一地确定 X 中的一个元素 x. 称正整数 n 为 X 的**维数**,而称 X 为 **n 维线性空间**. 如果 X 只含零元素,则称 X 为**零维线性空间**. 所有 n 维线性空间$(n=0,1,2,\cdots)$统称为**有限维线性空间**,非有限维的线性空间称为**无穷维线性空间**.

注意 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 线性无关与 X 中的元素有唯一表示 $x=\sum_{i=1}^{n}c_ie_i$ 是等价的.

例如,Euclid 空间 R^n 是一个 n 维线性空间. 事实上,在 R^n 中有 n 个线性无关的元素:$e_1=(1,0,0,\cdots,0)$,$e_2=(0,1,0,\cdots,0)$,$\cdots$,$e_n=(0,0,0,\cdots,1)$,而 R^n 中任何一个元素都可由它们的线性组合来表示,故 $e_1,e_2,\cdots,e_n$ 是 R^n 的一个基底.

又如,$C[a,b]$是一个无穷维线性空间. 事实上,对任何自然数 n,$C[a,b]$中都有 n 个线性无关的元素存在,例如,$1,t,t^2,\cdots,t^{n-1}$ $(t\in[a,b])$就是一组. 因此,不可能存在某个自然数 n_0 以及 n_0 个线性无关的元素,使得 $C[a,b]$中任何一个元素都可以表成这 n_0 个元素的线性组合.

下面讨论有限维赋范线性空间的性质.

设 X 是 n 维赋范线性空间,$e_1,e_2,\cdots,e_n$ 为 X 的一个基底. 对于 X 中的每一个 x,由(3.4)式就唯一地对应 R^n 中的一个点 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$;反之,对于 R^n 中的一个点 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,由(3.4)式也唯一地确定 X 中的一个元素 x,并且不同的 ξ 对应了不同的 x. 这样我们就确定了由 X 到 R^n 的一一对应关系 T:$Tx=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$,这种对应还保持着线性性质.

事实上,设 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i$, $y=\sum_{i=1}^{n}\eta_ie_i$,$\alpha,\beta\in K$,则

$$
\begin{aligned}
T(\alpha x+\beta y)&=T\Big[\sum_{i=1}^{n}(\alpha\xi_i+\beta\eta_i)e_i\Big]\\
&=(\alpha\xi_1+\beta\eta_1,\alpha\xi_2+\beta\eta_2,\cdots,\alpha\xi_n+\beta\eta_n)\\
&=\alpha(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)+\beta(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\\
&=\alpha Tx+\beta Ty.
\end{aligned}
$$

由此可见,n 维线性空间与 n 维 Euclid 空间 R^n 是线性同构的.

现在要问:n 维赋范线性空间$(X,\|\cdot\|)$与 n 维欧氏空间的范数有什么关系?

定理1 设$(X,\|\cdot\|)$是一个 n 维赋范线性空间，$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 X 的一个基底，则存在正数 M 及 M'，使得对一切的 $x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i \in X$，有

$$M\|x\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M'\|x\|. \tag{3.5}$$

证 对任一 $x\in X$，$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i$，有

$$\begin{aligned}\|x\|&\leqslant\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|\,\|e_i\|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=m\left(\sum_{k=1}^{n}|\xi_k|^2\right)^{\frac{1}{2}},\end{aligned} \tag{3.6}$$

其中，$m=\left(\sum_{i=1}^{n}\|e_i\|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 因为$\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 X 的一个基底，$e_i\neq\theta$ $(i=1,2,\cdots,n)$，故

$$\|e_i\|\neq 0,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

因而 $m>0$. 令 $M=\dfrac{1}{m}$，则

$$M\|x\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

对任意的 $x\in X$ 成立. 这样，就证明了(3.5)式的左边不等式成立.

注意到我们已建立了 X 到 R^n 的一一对应关系

$$T\left[\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i\right]=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),$$

在 R^n 上定义一个函数

$$\varphi(\xi)=\varphi(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)=\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_ie_i\right\|=\|x\|.$$

对函数 $\varphi(\xi)$，先证明两点：

(1) $\varphi(\xi)$在 R^n 上是连续的.

事实上，对于 R^n 中的任意两点 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$\eta=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，对应 X 中的两点为

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i,\quad y=\sum_{i=1}^{n}\eta_i e_i,$$

由(3.6)式及不等式的性质得

$$|\varphi(\xi)-\varphi(\eta)|=|\|x\|-\|y\||\leqslant\|x-y\|$$

$$\leqslant m\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i-\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=m\|\xi-\eta\|.$$

可见，对$\forall\ \varepsilon>0$，取$\delta=\dfrac{\varepsilon}{m}$，当$\|\xi-\eta\|<\delta$时，总有$|\varphi(\xi)-\varphi(\eta)|<\varepsilon$成立. 因此，$\varphi(\xi)$在$R^n$上是连续的.

(2) $\varphi(\xi)$在R^n中的单位球面$S:\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=1$上取值总大于某个正的常数$m'$，即当$\xi\in S$时，有

$$\varphi(\xi)\geqslant m'>0.$$

设$\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in S$，则$\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n$不全为零. 由于$e_1,e_2,\cdots,e_n$是$X$的一个基底，故

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\neq\theta,$$

因此

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i\right\|>0,$$

按$\varphi(\xi)$的定义，有

$$\varphi(\xi)=\|x\|>0.$$

令

$$m'=\inf_{\xi\in S}\varphi(\xi),$$

可以证明$m'>0$.

事实上，因为S是R^n中的有界闭集，所以S是紧集. 而在紧集上的连续函数必取得最小值，故存在$\xi_0\in S$，使$\varphi(\xi_0)=m'$. 又因为$\varphi(\xi)$在S上取值均大于零，因而$m'>0$.

有了(2)的结论，即可证明(3.5)式右边的不等式成立. 对于X中的任一元素$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i$，令

$$x' = \frac{x}{\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i' e_i,$$

其中

$$\xi_i' = \frac{\xi_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}},$$

故 $\xi' = (\xi_1', \xi_2', \cdots, \xi_n') \in S$，且

$$\|x'\| = \frac{\|x\|}{\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}} = \varphi(\xi') \geqslant m'.$$

令 $M' = \frac{1}{m'}$，则有

$$M'\|x\| \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

这样就证明了，存在 $M' > 0$，使得对于 X 中的任一点 $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$，均成立不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M'\|x\|. \blacksquare$$

定理2 在有限维线性空间 X 中，不论用什么方式引入的范数都是等价的.

证 设在有限维线性空间 X 中定义了两种范数 $\|x\|_1$，$\|x\|_2$. 由定理1知，存在正数 M, M' 及 m, m'，使得对任何的 $x = \sum_{i=1}^{n} \xi_i e_i$，均有

$$M\|x\|_1 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M'\|x\|_1,$$

$$m\|x\|_2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant m'\|x\|_2,$$

因此

$$\frac{M}{m'}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant \frac{M'}{m}\|x\|_1.$$

即$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价. ∎

在第二章最后一节中 我们已阐述了列紧集必为有界集，有界集不一定都是列紧集. 而在 R^n 中，集的有界性与列紧性是等价的. 下面将指出，有界性与列紧性等价的事实，不仅是有限维 Euclid 空间所具有的特性，而且是任何有限维赋范线性空间都具有的特性. 所以，集的有界性与列紧性等价是有限维赋范线性空间所具有的本质特征.

引理(F. Riesz) 设 E_0是赋范线性空间 X 的真闭子空间. 则对于任何给定的 $\varepsilon(0<\varepsilon<1)$，必存在 $x_\varepsilon\in X$ 适合$\|x_\varepsilon\|=1$，且对一切 $x\in E_0$，均有

$$\|x_\varepsilon-x\|\geqslant 1-\varepsilon.$$

证 取 $x_1\in X$，并且 $x_1\overline{\in} E_0$，令

$$d=\rho(x_1,E_0)=\inf_{x\in E_0}\|x_1-x\|,$$

则 $d>0$.

事实上，如果 $d=0$，则说明 x_1是 E_0的聚点，而 E_0是闭的，所以 $x_1\in E_0$，矛盾(注意：这就是引理中为什么假定 E_0是真子空间且是闭的原因).

按下确界定义，得

(1) 对$\forall\ x\in E_0$，$d\leqslant\|x_1-x\|$；

(2) 对$\forall\ \eta>0$，$\exists\ x_\eta\in E_0$，使得$\|x_1-x_\eta\|<d+\eta$.

令

$$y_\eta=\frac{x_1-x_\eta}{\|x_1-x_\eta\|},$$

则

$$\|y_\eta\|=1.$$

对$\forall\ x\in E_0$，有

$$\|y_\eta-x\|=\left\|\frac{x_1-x_\eta}{\|x_1-x_\eta\|}-x\right\|$$

$$=\frac{1}{\|x_1-x_\eta\|}\|x_1-(x_\eta+x\|x_1-x_\eta\|)\|.$$

由于 E_0是线性子空间，因此，当 $x_\eta,x\in E_0$时，$x_\eta+\|x_1-x_\eta\|x\in E_0$. 令 $x'=x_\eta+\|x_1-x_\eta\|x$，由(1)和(2)，有$\|x_1-x'\|\geqslant d$，$\|x_1-x_\eta\|<d+\eta$，因此

$$\|y_\eta-x\|>\frac{d}{d+\eta}=1-\frac{\eta}{d+\eta}.$$

总之，对$\forall\ \eta>0$，有 $y_\eta\in X$，$\|y_\eta\|=1$，对一切 $x\in E_0$，有

$$\|y_\eta-x\|>1-\frac{\eta}{d+\eta}. \tag{3.7}$$

对于$\forall\ \varepsilon\in(0,1)$，令 $\eta=\frac{d\varepsilon}{1-\varepsilon}$，对此 $\eta>0$，令 $x_\varepsilon=y_\eta$，由(3.7)式得，$x_\varepsilon\in X$，$\|x_\varepsilon\|=1$，且对一切 $x\in E_0$，均有 $\|x_\varepsilon-x\|>1-\varepsilon$. ▌

几何解释：对于任意给定的$0<\varepsilon<1$，可以在单位球面上至少找到一点 x_ε，使得 x_ε 到 E_0的距离大于$1-\varepsilon$，如图3.1所示. 引理的另一叙述形式：对$\forall\ \delta>0(0<\delta<1)$，$\exists\ x_\delta$，$\|x_\delta\|=1$，使得对$\forall x\in E_0$，均有

$$\|x_\delta-x\|>\delta.$$

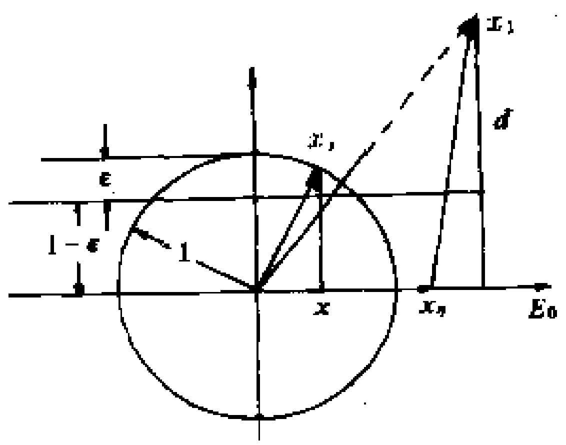


图 3.1

定理3 赋范线性空间 X 为有限维的充分必要条件是它的任一有界子集都是列紧的(此时称 X 是局部列紧的).

证 必要性. 设 X 是 n 维赋范性空间, A 是 X 中的任一有界集, 下面证明 A 是列紧的.

事实上, 对于 A 中的任意序列 $x_1, x_2, \cdots, x_m, \cdots$, 设 $x_m = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(m)} e_i$, 其中 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 X 的一个基底. 令 $\xi_m = (\xi_1^{(m)}, \xi_2^{(m)}, \cdots, \xi_n^{(m)})$, $m=1,2,3,\cdots$, 则 $\xi_m \in R^n$. 因为 A 是有界集, 故存在常数 K, 使 $\|x_m\| \leqslant K (m=1,2,3,\cdots)$. 由定理1, 存在常数 M', 使得

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i^{(m)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M' \|x_m\| \leqslant M'K.$$

也就是说, ξ_m 是 R^n 中的有界序列. 根据 R^n 中的有界集必是列紧集的结论, 必存在 ξ_m 的一子序列 $\xi_{m_j} \to \xi_0 = (\xi_1^{(0)}, \xi_2^{(0)}, \cdots, \xi_n^{(0)})$, 即

$$\|\xi_{m_j} - \xi_0\| \to 0 \quad (j \to \infty).$$

令 $x_0 = \sum_{i=1}^{n} \xi_i^{(0)} e_i$, 则 $x_0 \in X$. 再由定理6可知, 存在常数 M, 使得

$$M\|x_{m_j} - x_0\| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} |\xi_i^{(m_j)} - \xi_i^{(0)}|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \|\xi_{m_j} - \xi_0\|.$$

故当 $j \to \infty$ 时, $\|x_{m_j} - x_0\| \to 0$. 这说明 A 中任何序列 $\{x_n\}$ 都存在收敛的子序列, 因而 A 为列紧集.

充分性. 设 X 中的任何有界集都是列紧集, 要证明 X 是有限维的. 反证法, 设 X 是无穷维∈的, 令 S 为 X 中的单位球面: $S = \{x \mid \|x\| = 1\}$. 任取 $x_1 \in S$, 记

$$L_1 = \{\alpha x_1 \mid \alpha \in R\},$$

则 L_1 是 X 的有限维真子空间. 因为 L_1 是有限维的, 所以 L_1 是闭的. 按 Riesz 引理, 对于 $\varepsilon = \frac{1}{2}$, 存在 $x_2 \in S$, 使对一切 $x \in L_1$, 有

$$\|x_2 - x\| > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

特别地,

$$\|x_2 - x_1\| > \frac{1}{2}.$$

令

$$L_2=\{a_1x_1+a_2x_2\,|\,a_1,a_2\in R\},$$

显然，L_2仍是有限维赋范线性空间，而 X 是无穷维的，故 $L_2\neq X$. 又 L_2是有限维的子空间，故 L_2是闭的，再由 Riesz 引理知，存在 $x_3\in S$，对一切 $x\in L_2$，有

$$\|x_3-x\|>\frac{1}{2},$$

特别地，

$$\|x_3-x_2\|>\frac{1}{2},\ \|x_3-x_1\|>\frac{1}{2}.$$

这样选定的 x_1,x_2,x_3具有性质：

$$x_i\in S;\ \|x_i-x_j\|>\frac{1}{2},\quad i\neq j;i,j=1,2,3.$$

令

$$L_3=\{a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\,|\,a_1,a_2,a_3\in R\},$$

同理可知，L_3是 X 的一个有限维真子空间，故 L_3是闭的. 仍由 Riesz 引理知，存在 $x_4\in S$，使得对一切 $x\in L_3$，都有

$$\|x_4-x\|>\frac{1}{2},$$

特别地，

$$\|x_4-x_1\|>\frac{1}{2};\quad \|x_4-x_3\|>\frac{1}{2}.$$

这样就选定了 x_1,x_2,x_3,x_4，满足

$$\|x_i\|=\|x_i-x_j\|>\frac{1}{2},\quad i\neq j;\ i,j=1,2,3,4.$$

由于 X 是无穷维的，所以按上述方法可选出一序列

$$x_1,x_2,x_3,\cdots,x_n,\cdots,$$

具有性质

(1) $x_i\in S$，即$\|x_i\|=1$，　$i=1,2,3,\cdots$，

(2) $\|x_i-x_j\|>\frac{1}{2}$，　$i\neq j;i,j=1,2,3,\cdots$.

性质(1)说明$\{x_n\}$是 X 中的有界序列；性质(2)说明$\{x_n\}$中不

可能有收敛的子序列．这与 X 中的任何有界集必为列紧集的假设矛盾．因此，X 是有限维的．▌

注 在证明必要性时选出的收敛子序列 $\{x_{n_j}\}$ 的极限点 x_0 有可能不在 A 内，但它一定在 X 中．这表明，有限维赋范线性空间 X 必是闭的，或者说，赋范线性空间的有限维子空间必为闭子空间．

由于 R^n 是完备的、可分的，于是有下面的定理．

定理4 有限维赋范线性空间是完备的、可分的．

§3.4 有界线性算子

微分方程、积分方程、经典力学、量子力学中的许多问题，往往以算子或算子方程的形式出现，例如，在第二章 §2.5中，利用压缩映照原理讨论微分方程、积分方程解的存在性和唯一性时，就是将它们换成映照（即算子）的形式来考虑的．因此，算子的概念与距离空间、赋范线性空间一样，是泛函分析中的基本概念．

现在我们要考虑的是一类具有某种特性的算子——线性算子．

定义1 设 T 是由赋范线性空间 X 中的某个子集 D 到赋范线性空间 X_1 中的一个映照，则称 T 为**算子**，D 称为 T 的**定义域**，像集 $\{y \mid y=Tx, x\in D\}$ 称为 T 的**值域**，T 的定义域常用 $D(T)$ 表示，$T(D)$ 表示 D 的像．

设 T 的定义域 $D(T)$ 是 X 的子空间．若 T 满足

$$T(x+y)=Tx+Ty, \quad x, y \in D(T),$$

则称 T 为**可加算子**．若 T 满足

$$T(\alpha x)=\alpha Tx, \quad x \in D(T), \alpha \text{ 为数},$$

则称 T 为**齐次算子**．可加齐次算子称为**线性算子**．

若线性算子 T 满足条件：存在正数 M，使得对一切 $x\in D(T)$，有 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$，则称 T 是**有界算子**，否则称 T 是**无界算子**．

如果 T 是由 D 到实(或复)数域的映照,则称 T 为**泛函**. 泛函常以 f,g 等符号表示.

下面看几个简单的例子.

例1 将赋范线性空间 X 中的每个元素 x 映成 x 自身的算子,就是一个有界线性算子,称它为 X 上的**恒同算子**(或**单位算子**),常以 I 表示. 将 X 中的每个元素 x 映成 0 的算子,也是一个有界线性算子,称它为**零算子**,记成 0.

例2 解析几何中常见的旋转变换

$$\begin{cases} x' = x\cos\theta - y\sin\theta, \\ y' = x\sin\theta + y\cos\theta, \end{cases} \quad \theta \text{ 为某一固定的角},$$

就是二维实 Euclid 空间到自身的一个有界线性算子.

例3 连续函数的积分

$$f(x) = \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t, \quad x(t) \in C[a,b],$$

就是定义在连续函数空间 $C[a,b]$上的一个有界线性泛函.

定义2 设 $x \in D(T)$,对于 $D(T)$中任何收敛于 x 的点列$\{x_n\}$,都有 $Tx_n \to Tx\ (n \to \infty)$,则称 T 在点 x 处**连续**. 若 T 在 $D(T)$内每一点都连续,则称 **T 在 $D(T)$内连续**.

下面研究线性算子的连续性及有界性两个问题. 所用到的赋范线性空间中的范数,在不会引起混淆的情况下,均用$\|\cdot\|$表示.

定理1 设 X 和 X_1都是赋范线性空间,T 是定义在 X 的子空间 D 上而值域在 X_1中的可加算子. 如果 T 在某一点 $x_0 \in D$ 连续,则 T 在整个 D 上连续.

证 证明 T 在 D 上连续,就是要证明 T 在 D 上的任何一点 y 处都是连续的,即任取 $y_n \in D$, $y_n \to y\ (n \to \infty)$,要证明 $Ty_n \to Ty\ (n \to \infty)$.

事实上,由 T 的可加性知,$T(y_n + x_0) = Ty_n + Tx_0$. 因为

$$\begin{aligned} T(y_n + x_0) &= T(y_n - y + x_0 + y) \\ &= T(y_n - y + x_0) + Ty, \end{aligned}$$

所以

$$Ty_n=T(y_n-y+x_0)+Ty-Tx_0. \tag{3.8}$$

由于 $y_n-y+x_0\to x_0(n\to\infty)$，故由 T 在 x_0 点的连续性知

$$T(y_n-y+x_0)\to Tx_0 \quad (n\to\infty),$$

因而由(3.8)式得

$$Ty_n\to Ty \quad (n\to\infty).$$

即 T 在点 y 处连续. ▌

定理1告诉我们，为了验证一个可加线性算子是否连续，只要验证它在某一点(例如零点 θ)是否连续就可以了.

定理2 设 X 和 X_1 都是赋范线性空间，T 是定义在 X 的子空间 D 上而值域包含在 X_1 中的线性算子，则 T 连续的充要条件是 T 有界.

证 充分性. 设 T 有界，则存在 $M>0$，使对一切的 $x\in D$，$\|Tx\|\leqslant M\|x\|$. 任取 $x_n\in D, n=1,2,3,\cdots$，使 $x_n\to x(n\to\infty)$，于是

$$\|Tx_n-Tx\|=\|T(x_n-x)\|\leqslant M\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty),$$

即 T 在 D 内的任一点 x 处是连续的.

必要性. 用反证法. 设 T 连续，但 T 无界，则对每个自然数 n，必存在 $x_n\in D, x_n\neq\theta, n=1,2,3,\cdots$，使得

$$\|Tx_n\|\geqslant n\|x_n\|.$$

令 $y_n=\dfrac{x_n}{n\|x_n\|}$，则 $\|y_n\|=\dfrac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$. 由 T 的连续性可知，$Ty_n\to\theta$ $(n\to\infty)$. 另一方面，由于

$$\|Ty_n\|=\left\|\frac{Tx_n}{n\|x_n\|}\right\|=\frac{\|Tx_n\|}{n\|x_n\|}\geqslant 1,$$

矛盾，故 T 有界. ▌

由定理2可知，对线性算子来说，有界性与连续性是等价的.

定义在 X 上，映像为 X_1 的线性有界算子的全体记成 $B(X\to X_1)$ 或 $B(X,X_1)$. 注意，$B(X\to X_1)$ 或 $B(X,X_1)$ 是一个集合，它的元素是 $X\to X_1$ 的有界线性算子.

对于有界线性算子，我们将定义一个重要的概念——算子的

范数. 为了使读者对这一概念有比较清晰的了解，先作一些解释. 设 T 为 $D\subset X$ 到 X_1 的有界线性算子，任取 $x_0\in D, x_0\neq\theta$，由 T 的齐次性知，对任何 $x=\alpha x_0$（α 为数，$\alpha\neq 0$），有

$$\frac{\|Tx\|}{\|x\|}=\frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|},$$

因此，$\frac{\|Tx_0\|}{\|x_0\|}$ 是沿 x_0 方向的向量经过算子 T 作用后的伸长率. 当 x_0 在 D 中变化时，相应的伸长率也随着变化. 在定义1中，关于有界性的定义中的 M 便是这些伸长率组成的集合 $\mathscr{A}$ 的一个上界. 上界当然不唯一，我们取其中一个特殊的，把它叫做 T 的范数.

定义3 设 X 和 X_1 都是赋范线性空间，T 是定义在 X 的子空间 D 上而值域包含在 X_1 中的有界线性算子. 使 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$ 对一切 $x\in D$ 都成立的正数 M 的下确界，称为 **T 的范数**，记为 $\|T\|$.

上面已经指出，对任一给定的正数 M，当 $\|Tx\|\leqslant M\|x\|$ 对一切 $x\in D$ 都成立时，正数 M 是数集 $\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\,\middle|\, x\in D, x\neq\theta\right\}$ 的一个上界. 因此，作为这些 M 的下确界的算子范数 $\|T\|$ 也是数集 $\left\{\frac{\|Tx\|}{\|x\|}\,\middle|\, x\in D, x\neq\theta\right\}$ 的上界，而且是最小上界. 于是有

定理3 设 $T\in B(X\to X_1)$，则

$$\|T\|=\sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in D}}\|Tx\|=\sup_{\substack{\|x\|\neq 0\\ x\in D}}\frac{\|Tx\|}{\|x\|}.$$

证 只需证明前一等式就行了. 由于 $\|Tx\|\leqslant\|T\|\|x\|$，所以

$$\sup_{\substack{\|x\|=1\\ x\in D}}\|Tx\|\leqslant\|T\|.$$

另一方面，由下确界的定义，对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ x_\varepsilon\in D$，使得

$$\|Tx_\varepsilon\|>(\|T\|-\varepsilon)\|x_\varepsilon\|, \tag{3.9}$$

其中 $x_\varepsilon\neq\theta$. 事实上，若 $x_\varepsilon=\theta$，由上述不等式可得，$0=\|Tx_\varepsilon\|>(\|T\|-\varepsilon)\|x_\varepsilon\|=0$，矛盾. 在(3.9)式两边同除以 $\|x_\varepsilon\|$，得

$$\frac{\|Tx_\varepsilon\|}{\|x_\varepsilon\|}=\|T(\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|})\|>\|T\|-\varepsilon,$$

而$\left\|\frac{x_\varepsilon}{\|x_\varepsilon\|}\right\|=1$，故

$$\sup_{\|x\|=1}\|Tx\|\geqslant\|T\|-\varepsilon.$$

由于$\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|$与$\|T\|$都是与$\varepsilon$无关的定数，故$\sup\limits_{\|Tx\|\geqslant\|T\|}\|Tx\|\geqslant\|T\|$. 所以，$\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|=\|T\|$. ▌

现在举几个实例，说明如何估计算子的范数以及如何求出算子的范数. 不过一般情形下求算子的范数是很困难的.

例4 赋范线性空间 X 上的相似算子 $Tx=\alpha x$ 是线性有界算子，且$\|T\|=|\alpha|$. 若 $\alpha=1$，即为例1中的单位算子，记为 I，$\|I\|=1$；若 $\alpha=\theta$，即为零算子，记为 θ，$\|\theta\|=0$.

例5 在内插理论中，我们往往用 J. L. Lagrange 公式来求已知连续函数的近似多项式. 设 $x(t)\in C[a,b]$，在$[a,b]$内任取 n 个点 $a\leqslant t_1<t_2<\cdots<t_n\leqslant b$，作多项式

$$l_k(t)=\frac{(t-t_1)\cdots(t-t_{k-1})(t-t_{k+1})\cdots(t-t_n)}{(t_k-t_1)\cdots(t_k-t_{k-1})(t_k-t_{k+1})\cdots(t_k-t_n)},$$

其中 $k=1,2,\cdots,n$. 再令

$$y=L_nx:\quad y(t)=\sum_{k=1}^{n}x(t_k)l_k(t),$$

则 L_n 是 $C[a,b]$到其自身的有界线性算子，且

$$\|L_n\|=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|. \tag{3.10}$$

证 L_n 的线性性是明显的. 现在证明(3.10)式，令

$$\alpha=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|,$$

则

$$\begin{aligned}\|L_nx\|&=\max_{a\leqslant t\leqslant b}\left|\sum_{k=1}^{n}x(t_k)l_k(t)\right|\\&\leqslant\alpha\max_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|=\alpha\|x\|,\end{aligned}$$

故

$$\|L_n\| \leqslant \alpha.$$

另一方面，由于$\sum_{k=1}^{n}|l_k(t)|$在$[a,b]$上连续，故$\exists\ t_0\in[a,b]$，使

$$\alpha=\sum_{k=1}^{n}|l_k(t_0)|.$$

取 $x_0(t)\in C[a,b]$，使$\|x_0\|=1$，且使 $x_0(t_k)=\mathrm{sgn}\, l_k(t_0)$，$k=1,2,\cdots,n$，于是

$$\|L_n x_0\| \geqslant |(L_n x_0)(t_0)| = \left|\sum_{k=1}^{n} l_k(t_0)\mathrm{sgn}\, l_k(t_0)\right|$$

$$=\sum_{k=1}^{n}|L_k(t_0)|=\alpha,$$

故

$$\|L_n\| \geqslant \alpha.$$

从而

$$\|L_n\|=\alpha. \quad \blacksquare$$

例6 设 $K(s,t)$是定义在$0\leqslant s\leqslant 1$，$0\leqslant t\leqslant 1$上的连续实函数，在实连续函数空间 $C[0,1]$中定义积分算子

$$y(s)=(Tx)(s)=\int_0^1 K(s,t)x(t)\mathrm{d}t,$$

则 T 为 $C[0,1]$到其自身的有界线性算子，且

$$\|T\|=\max_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1|K(s,t)|\mathrm{d}t. \tag{3.11}$$

证 线性性是明显的．事实上，对于$\forall\ x,y\in C[0,1]$，$\alpha,\beta\in\Lambda$，

$$\begin{aligned}(T(\alpha x+\beta y))(s)&=\int_0^1 K(s,t)[\alpha x(t)+\beta y(t)]\mathrm{d}t\\&=\alpha\int_0^1 K(s,t)x(t)\mathrm{d}t+\beta\int_0^1 K(s,t)y(t)\mathrm{d}t\\&=\alpha(Tx)(s)+\beta(Ty)(s)\\&=(\alpha Tx+\beta Ty)(s),\end{aligned}$$

故

$$T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty.$$

下面证明 T 的有界线性及等式(3.11). 令

$$\alpha=\max_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1 |K(s,t)|\mathrm{d}t,$$

对于 $\forall\ x(t)\in C[0,1]$,有

$$\begin{aligned}\|Tx\|&=\max_{0\leqslant s\leqslant 1}\left|\int_0^1 K(s,t)x(t)\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|\cdot\max_{0\leqslant s\leqslant 1}\int_0^1|K(s,t)|\mathrm{d}t\\&=\alpha\|x\|.\end{aligned}$$

故 T 是有界的,且 $\|T\|\leqslant\alpha$.

可以证明,上述不等式的相反不等式也成立*,所以(3.11)式成立. ▌

例7 设 R^n 是 n 维线性空间. 在 R^n 中取一组基 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$,则对于任何 $x\in R^n$,x 可以唯一地表示成 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i$,对每一个 $n\times n$ 的矩阵 (t_{ij}),作 R^n 到 R^n 自身的算子 T 如下:

$$y=Tx=\sum_{j=1}^{n}y_j e_j,$$

其中,

$$x=\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i,\ y_j=\sum_{i=1}^{n}t_{ji}\xi_i,\ \ j=1,2,\cdots,n.$$

显然,这样定义的算子 T 是线性算子. 这个算子在线性代数中称为线性变换,算子 T 显然由方阵 (t_{ij}) 唯一确定,有时记为 $T=(t_{ij})$.

反过来,设 T 是 R^n 到 R^n 的一个线性算子,由于 $\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 是 R^n 的一组基,并且 $Te_i\in R^n$,因此可令

$$Te_i=t_{1i}e_1+t_{2i}e_2+\cdots+t_{ni}e_n,\ i=1,2,\cdots,n,$$

则当 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i$ 时,由 T 的线性性可得

---

* 参见刘斯铁尔尼克著《泛函分析概要》,142页.

$$Tx=\sum_{i=1}^{n}\xi_i Te_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\sum_{j=1}^{n}t_{ji}e_j$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}\xi_i t_{ji}\right)e_j=\sum_{j=1}^{n}y_j e_j,$$

其中

$$y_j=\sum_{i=1}^{n}\xi_i t_{ji}.$$

即 T 是对应于方阵 (t_{ji}) 的算子.

由此可知,在有限维的线性空间上,当基底选定以后,线性算子与矩阵是相对应的.

设 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 是一组数,当 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i$ 时,定义

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i.$$

易知,f 为 R^n 上的线性泛函.

反之,如果 f 是 R^n 上的线性泛函,记 $\alpha_i=f(e_i),i=1,2,\cdots,n$. 则当 $x=\sum\limits_{i=1}^{n}\xi_i e_i$ 时,由 f 的线性性可知

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\xi_i.$$

由此可见,n 维线性空间上的线性泛函与数组 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$ 相对应.

例8 设

$$A=\begin{pmatrix}\alpha_{11}&\alpha_{12}&\cdots&\alpha_{1n}\\\alpha_{21}&\alpha_{22}&\cdots&\alpha_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\alpha_{m1}&\alpha_{m2}&\cdots&\alpha_{mn}\end{pmatrix},\quad x=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\\vdots\\y_m\end{pmatrix}.$$

令 $y=Ax$,由于矩阵乘法是线性运算,所以 A 是 $R^n\to R^m$ 的线性算子,在 R^n,R^m 中分别定义范数 $\|x\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|,\|y\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}|y_i|$,则 A 是有界线性算子,且

$$\|A\|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|. \tag{3.12}$$

证 算子 A 的线性性是显然的. 今证 A 的有界性以及等式(3.12). 令

$$\alpha=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

则
$$\|Ax\|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}|y_i|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_j\right|$$
$$\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|\,|x_j|\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_j|\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|$$
$$=\alpha\|x\|.$$

故 A 是有界的，且 $\|A\|\leqslant\alpha$.

另一方面，令

$$\sum_{j=1}^{n}|a_{pj}|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

取

$$x_0=(\mathrm{sgn}a_{p1},\mathrm{sgn}a_{p2},\cdots,\mathrm{sgn}a_{pn})^T,$$

则 $\|x_0\|=1$，并且有

$$\|Ax_0\|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ \mathrm{sgn}a_{pj}\right|$$
$$\geqslant\left|\sum_{j=1}^{n}a_{pj}\ \mathrm{sgn}a_{pj}\right|=\sum_{j=1}^{n}|a_{pj}|$$
$$=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|=\alpha.$$

从而可知等式(3.12)成立. ▌

例9 对于任何 $x\in L^1[a,b]$，定义

$$(Tx)(t)=\int_a^t x(s)\mathrm{d}s,$$

则 T 为 $L^1[a,b]$到其自身的有界线性算子，且

$$\|T\|=b-a. \tag{3.13}$$

证 对于$\forall\ x,y\in L^1[a,b]$， $\alpha,\beta\in\Lambda$， $t\in[a,b]$，有

$$T(\alpha x+\beta y)(t)=\int_a^t[\alpha x(s)+\beta y(s)]\mathrm{d}s$$
$$=\alpha\int_a^t x(s)\mathrm{d}s+\beta\int_a^t y(s)\mathrm{d}s$$
$$=\alpha(Tx)(t)+\beta(Ty)(t)=(\alpha Tx+\beta Ty)(t),$$

故 $\quad T(\alpha x+\beta y)=\alpha Tx+\beta Ty.$

这说明 T 是线性算子. 下面证明 T 的有界性以及等式(3.13). 事实上,

$$\|Tx\|=\int_a^b|Tx(t)|\mathrm{d}t=\int_a^t\left|\int_a^t x(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\int_a^b\left(\int_a^t|x(s)|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$
$$\leqslant\int_b^a\left(\int_a^b|x(s)|\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^b\mathrm{d}t\int_a^b|x(s)|\mathrm{d}s=(b-a)\|x\|.$$

所以 T 是有界的,且 $\|T\|\leqslant b-a$.

另一方面,对于自然数 n,作函数(假定 n 足够大,使 $a+\frac{1}{n}<b$)

$$x_n(t)=\begin{cases}n, & t\in\left[a,a+\frac{1}{n}\right],\\ 0, & t\in\left(a+\frac{1}{n},b\right],\end{cases}$$

显然,$x_n\in L^1[a,b]$,且 $\|x_n\|=\int_a^b|x_n(t)|\mathrm{d}t=1$,而且

$$\|Tx_n\|=\int_a^b\left|\int_a^t x_n(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left|\int_a^t x_n(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t+\int_{a+\frac{1}{n}}^b\left|\int_a^t x_n(s)\mathrm{d}s\right|\mathrm{d}t$$
$$=\int_a^{a+\frac{1}{n}}n(-a)\mathrm{d}t+\int_{a+\frac{1}{n}}^b 1\mathrm{d}t$$
$$=(b-a)-\frac{1}{2n}.$$

故

$$\|T\| \geqslant \sup_n \|Tx_n\| \geqslant b-a,$$

从而$\|T\|=b-a$. ▌

注 当 $x\in L^1[a,b]$时，由积分的绝对连续性知，积分$\int_0^t x(s)\mathrm{d}s$是上限 $t(a\leqslant t\leqslant b)$的连续函数. 如果将 T 视为由 $L^1[a,b]$到 $C[a,b]$的算子，那么，算子 T 的范数就不再是$(a-b)$了(这一问题作为习题留给读者).

例10 $C^1[0,1]$表示在$[0,1]$上有一阶连续导函数的函数全体，定义

$$\|x\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|,$$

则 $C[0,1]$就构成赋范线性空间(实际上，它是 $C[0,1]$的子空间). 考虑微分算子 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，它是 $C^1[0,1]$到 $C[0,1]$的线性算子，但 D 是无界的.

证 取 $x_n(t)=t^n\in C^1[0,1]$，$n=1,2,\cdots$，则

$$\|x_n\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|t^n|=1,$$

而

$$\|Dx_n\|=\|Dt^n\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|nt^{n-1}|=n\to\infty\ (n\to\infty),$$

故 D 将 $C^1[0,1]$中的单位球面映成 $C[0,1]$中的无界集. 因此，D 是无界算子. ▌

注 若在 $C^1[0,1]$中引入范数

$$\|x\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|,$$

则 $C^1[0,1]$也构成赋范线性空间(它并不是 $C[0,1]$的子空间). 此时把 $D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$视为 $C^1[0,1]$到 $C[0,1]$的算子，则 D 是有界线性算子. 事实上，对$\forall\ x\in C^1[0,1]$，有

$$\|Dx\|=\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|Dx(t)|\leqslant\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x(t)|+\max_{0\leqslant t\leqslant 1}|x'(t)|=\|x\|.$$

由算子范数的定义知，$\|D\|\leqslant 1$. 故 D 是 $C^1[0,1]$到 $C[0,1]$的线性有界算子.

§ 3.5 有界线性算子空间

在上一节中，我们讨论了单个有界线性算子的性质．本节将研究 $B(X,X_1)$ 中元素之间的关系．

定理1 设 X 和 X_1 都是赋范性空间．在 $B(X,X_1)$ 中定义加法与数乘为：

$$(T_1+T_2)x=T_1x+T_2x \quad (T_1,T_2 \in B(X,X_1),x \in X),$$

$$(\alpha T)x=\alpha(Tx) \quad (T \in B(X,X_1),\alpha \text{ 为数}).$$

则 $B(X,X_1)$ 按照以上的线性运算是一个线性空间，再以本章 § 3.4 定义3中算子的范数作为范数，则 $B(X,X_1)$ 是一个赋范线性空间．

证　容易证明，如此引入的运算满足线性空间的定义，在此只需验证范数的三个条件：

1° $\|T\|\geqslant 0$ 是显然的，若 $T=\theta$（零算子），显然 $\|T\|=0$；反之，若 $\|T\|=0$，则对一切 $x\in X$，$Tx=\theta$，故 $T=\theta$；

2° $\|\alpha T\|=\sup\limits_{\|x\|=1}\|\alpha Tx\|=|\alpha|\sup\limits_{\|x\|=1}\|Tx\|=|\alpha|\|T\|$；

3°
$$\begin{aligned}\|T_1+T_2\|&=\sup_{\|x\|=1}\|(T_1+T_2)x\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_1x+T_2x\|\\&\leqslant\sup_{\|x\|=1}\|T_1x\|+\sup_{\|x\|=1}\|T_2x\|\\&=\|T_1\|+\|T_2\|.\end{aligned}$$ ▌

今后称 $B(X,X_1)$ 为**有界线性算子空间**．当 $X_1=X$ 时，我们将 $B(X,X)$ 记为 $B(X)$．

既然 $B(X,X_1)$ 是赋范线性空间，因此，赋范线性空间中所讨论的有关概念和结论在 $B(X,X_1)$ 内仍然有效．例如，极限、基本列、内点、开集、列紧性、完备性等．特别地，关于算子序列的收敛问题，我们需要说明如下．

定义1 设 $T_n,T\in B(X,X_1)$，$n=1,2,\cdots$．若 $\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$，称 T_n **按算子范数收敛**于 T，或称 T_n **一致收敛**于 T，记成 $T_n\to T$

$(n\to\infty)$. 对于$\forall\ x\in X$,若$\|T_n x-Tx\|\to 0$,则称 T_n **强收敛**于 T,记成 $T_n\xrightarrow{s}T$.

我们之所以将算子序列依算子范数收敛又称为一致收敛,原因在于下面的定理所阐明的事实.

定理2 设 $T_n(n=1,2,\cdots)$,T 都属于 $B(X,X_1)$,则$\{T_n\}$依算子范数收敛于 T 的充要条件是$\{T_n\}$在 X 中的任一有界集上一致收敛于 T.

证 必要性. 设$\lim\limits_{n\to\infty}\|T_n-T\|=0$,$A\subset X$ 为有界集. 对于 A,存在正数 K,使得当 $x\in A$ 时,$\|x\|\leqslant K$. 故

$$\|T_n x-Tx\|\leqslant\|T_n-T\|\,\|x\|\leqslant K\|T_n-T\|.$$

由于 $T_n\to T(n\to\infty)$,对于$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N>0$,使得当 $n\geqslant N$ 时,$\|T_n-T\|>\frac{\varepsilon}{K}$. 于是有

$$\|T_n x-Tx\|\leqslant K\|T_n-T\|<\varepsilon$$

对一切 $x\in A$ 一致成立,即$\{T_n\}$在 A 上一致收敛于 T.

充分性. 设$\{T_n\}\subset B(X,X_1)$在 X 中的任一有界集上一致收敛于 $T\in B(X,X_1)$. 取 X 中的单位球面 $S=\{x\mid\|x\|=1,x\in X\}$,由假设知,对$\forall\ \varepsilon>0$,$\exists\ N>0$,使当 $n\geqslant N$ 时,有

$$\|T_n x-Tx\|<\varepsilon$$

对于 $x\in S$ 一致地成立,于是当 $n\geqslant N$ 时,

$$\|T_n-T\|=\sup_{\|x\|=1}\|T_n x-Tx\|\leqslant\varepsilon.$$

即$\{T_n\}$依算子范数收敛于 T. ▌

对于 T_n 按算子范数收敛于 T 和 T_n 强收敛于 T 这两个不同的概念,我们有如下的结论.

定理3 一致收敛必强收敛,反之不然.

证 设 T_n 一致收敛于 T,即$\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$,对$\forall\ x\in X$,有

$$\|T_n x-Tx\|\leqslant\|T_n-T\|\,\|x\|\to 0\quad(n\to\infty),$$

所以

$$T_n \xrightarrow{s} T \quad (n \to \infty).$$

反之，例如在 l^p 空间中，对 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^p$，作左移算子 T_n：

$$T_1x=T_1(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)=(\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n,\cdots),$$

$$T_2x=(\xi_3,\xi_4,\cdots,\xi_n,\cdots),$$

$$\cdots$$

$$T_nx=(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots).$$

显然，$T_n\in B(l^p)$，且

$$\|T_nx\|=\|(\xi_{n+1},\xi_{n+2},\cdots)\|=\Big(\sum_{i=n+1}^{\infty}|\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\to 0 \quad (n\to\infty).$$

这就是说，对于$\forall\, x\in l^p$，都有

$$\|T_nx-\theta x\|\to 0,$$

即 $T_n\xrightarrow{s}\theta(n\to\infty)$，但

$$\begin{aligned}\|T_n-\theta\|&=\sup_{\|x\|=1}\|T_nx\|\\&\geqslant\|T_n(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots)\|\\&=\|(1,0,0,\cdots)\|=1.\end{aligned}$$

故$\|T_n-\theta\|\not\to 0(n\to\infty)$，即算子序列$\{T_n\}$并不依算子范数收敛于算子 θ. ▌

一般地，$B(X,X_1)$作为赋范线性空间不一定是完备的. 但若X_1完备，则有下面的定理.

定理4 设 X_1是 Banach 空间，则 $B(X,X_1)$也是 Banach 空间.

证 要证 $B(X,X_1)$完备，就是证明 $B(X,X_1)$中的基本列皆为收敛序列. 设$\{T_n\}$是 $B(X,X_1)$中的基本列，即对$\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\, N>0$，使当 $m,n\geqslant N$ 时，有

$$\|T_n-T_m\|<\varepsilon.$$

对于 X 中的任一固定元素 x，考虑序列$\{T_nx\}\subset X_1$，当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$\|T_nx-T_mx\|\leqslant\|T_n-T_m\|\|x\|<\varepsilon\|x\|,$$

故$\{T_nx\}$是 X_1中的基本列. 依假设,X_1完备,故$\{T_nx\}$在 X_1中收敛于某一元素,记为 y,即

$$\lim_{n\to\infty} T_nx=y. \tag{3.14}$$

由此可知,对于$\forall\ x\in X$,都可由(3.14)式唯一确定一个 $y\in X_1$,从而定义了由 $X\to X_1$的一个算子 T,使得 $y=Tx=\lim\limits_{n\to\infty}T_nx$. 容易知道,算子 T 是线性的. 事实上,由 T_n 的线性性可得

$$\begin{aligned}T(x_1+x_2)&=\lim_{n\to\infty}T_n(x_1+x_2)=\lim_{n\to\infty}T_nx_1+\lim_{n\to\infty}T_nx_2\\&=Tx_1+Tx_2,\quad x_1,x_2\in X,\\T(\alpha x)&=\lim_{n\to\infty}T_n(\alpha x)=\alpha\lim_{n\to\infty}T_nx\\&=\alpha Tx,\quad x\in X,\alpha \text{ 为数}.\end{aligned}$$

由于

$$|\|T_n\|-\|T_m\||\leqslant\|T_n-T_m\|\to 0(n,m\to\infty),$$

这说明数列$\{\|T_n\|\}$为基本列,因此$\|T_n\|$有界. 设$\|T_n\|\leqslant M$,$n=1,2,3,\cdots$,则

$$\|Tx\|=\lim_{n\to\infty}\|T_nx\|\leqslant(\lim_{n\to\infty}\|T_n\|)\|x\|\leqslant M\|x\|,\quad x\in X,$$

由此得到$\|T\|\leqslant M$,即 T 有界,所以 $T\in B(X,X_1)$.

最后证明$\{T_n\}$依算子范数收敛于 T. 在不等式

$$\|T_nx-T_mx\|<\varepsilon\|x\|$$

中,令 $m\to\infty$,得当$\geqslant N$ 时有

$$\|T_nx-Tx\|\leqslant\varepsilon\|x\|,$$

即

$$\|(T_n-T)x\|\leqslant\varepsilon\|x\|.$$

按算子范数的定义,有

$$\|T_n-T\|\leqslant\varepsilon.$$

故对于 $B(X,X_1)$中任意基本列$\{T_n\}$,存在 $T\in B(X,X_1)$,使$\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$,即有界算子空间 $B(X,X_1)$是完备的,从而 $B(X,X_1)$为 Banach 空间. ▌

现在考虑 X_1为数空间的情况. 此时,$X\to X_1$的有界线性算子就

是定义在 X 上的有界线性泛函，而 $B(X,R)$ 被称为 X 的**共轭空间**，记成 X^*。可见，X^* 是定义在 X 上的所有有界线性泛函所构成的赋范线性空间，泛函 $f\in X^*$ 的范数为

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|.$$

由于 R 是完备的，所以由定理4可知，X^* 必为 Banach 空间. 关于泛函序列和元素序列各种形式的收敛概念，我们分别说明如下：

(1) 关于泛函序列的强收敛与弱*收敛

设 $f_n(n=1,2,3,\cdots)$，f 都属于 X^*.

(i) 若当 $n\to\infty$ 时，$\|f_n-f\|\to 0$，则称 f_n 强收敛于 f 或称 f_n 依算子范数收敛于 f. 记成 $f_n\xrightarrow{s}f(n\to\infty)$. 这种收敛相当于算子序列的一致收敛.

(ii) 若对 $\forall\ x\in X$，$f_n(x)\to f(x)(n\to\infty)$，则称 f_n 弱*收敛于 f，记成 $f_n\xrightarrow{w^*}f(n\to\infty)$. 这种收敛相当于算子序列的强收敛.

(iii) 由定理3可知，若 f_n 强收敛于 f，必有 f_n 弱*收敛于 f.

(2) 关于元素序列的强收敛与弱收敛

设 $x_n(n=1,2,3,\cdots)$，x 都属于 X.

(i) 若当 $n\to\infty$ 时，$\|x_n-x\|\to 0$，则称 x_n 强收敛于 x 或按范数收敛于 x，记成 $x_n\xrightarrow{s}x$（或 $x_n\to x$）$(n\to\infty)$.

(ii) 若对任意 $f\in X^*$，$f(x_n)\to f(x)(n\to\infty)$，则称 x_n 弱收敛于 x，记成 $x_n\xrightarrow{w}x$.

(iii) 容易证明，若 x_n 强收敛于 x，必有 x_n 弱收敛于 x.

(3) 关于泛函序列两种弱收敛的关系

设 $f_n(n=1,2,3,\cdots)$，f 都属于 X^*. 若把 f_n，f 看成 X^* 中的元素，而不把它们看成 X 上的泛函，那么也有 f_n 弱收敛于 f. 这种收敛的意义是：设 X^* 的共轭空间为 X^{**}，对任一 $F\in X^{**}$，$F(f_n)\to F(f)(n\to\infty)$. 那么这两种弱收敛是否一样呢？回答是否定的. 一般说来，因为 $X\subset X^{**}$，故有

$$f_n\xrightarrow{w}f\Longrightarrow f_n\xrightarrow{w^*}f\quad(n\to\infty).$$

反之不真.

§3.6 某些函数空间上的有界线性泛函

1. n 维 Euclid 空间上的有界线性泛函

首先,对于固定的 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in R^n$,由 c 所确定的泛函

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i,\quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n, \tag{3.15}$$

是 R^n 上的有界线性泛函.

事实上,设 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in R^n$,($\alpha,\beta$ 为数),则由(3.15)式可知

$$\begin{aligned}f(\alpha x+\beta y)&=\sum_{i=1}^{n}c_i(\alpha\xi_i+\beta\eta_i)\\&=\alpha\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i+\beta\sum_{i=1}^{n}c_i\eta_i\\&=\alpha f(x)+\beta f(y).\end{aligned}$$

故 $f(x)$为线性泛函.

由 Cauchy 不等式知,对$\forall$ $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n$,有

$$\begin{aligned}|f(x)|&=\Big|\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i\Big|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|c_i|\,|\xi_i|\\&\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\&=\|c\|\ \|x\|.\end{aligned}$$

故 $f(x)$是有界线性泛函,且

$$\|f\|\leqslant\|c\|=\Big(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}. \tag{3.16}$$

另一方面,设 $f(x)$为 R^n 上的有界线性泛函,则 $f(x)$必具有(3.15)式的形式.

事实上，设 $e_1=(1,0,0,\cdots,0),e_2=(0,1,0,\cdots,0),\cdots,e_n=(0,0,0,\cdots,1)$，令 $c_i=f(e_i),i=1,2,\cdots,n$，则对任一 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in dR^n$，有

$$f(x)=f(\sum_{i=1}^{n}\xi_i e_i)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i f(e_i)=\sum_{i=1}^{n}c_i e_i.$$

综上所述，R^n 上的有界线性泛函 $f(x)$的一般形式是由(3.15)式给出的.

不仅如此，(3.15)式还指出，对于每一个 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\in R^n$，对应唯一的 $f\in(R^n)^*$，不同的 c 对应不同的 f；而$(R^n)^*$中每一个元素 f 也必对应唯一的 $c=(f(e_1),f(e_2),\cdots,f(e_n))\in R^n$. 因此，$R^n$ 与$(R^n)^*$之间是一一对应的. 这种对应还保持了线性性及范数的不变性，即$(R^n)^*$与 R^n 线性同构且等距的.

事实上，设 $f,\varphi\in(R^n)^*$，则它们与 R^n 中元素 c 与 d 对应，即

$$f\longleftrightarrow c=(c_1,c_2,\cdots,c_n),\ \varphi\longleftrightarrow d=(d_1,d_2,\cdots,d_n).$$

对数 α,β，有

$$\begin{aligned}(\alpha f+\beta\varphi)x&=\alpha f(x)+\beta\varphi(x)=\alpha\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i+\beta\sum_{i=1}^{n}d_i\xi_i\\&=\sum_{i=1}^{n}(\alpha c_i+\beta d_i)\xi_i,\end{aligned}$$

故

$$\alpha f+\beta\varphi\longleftrightarrow\alpha c+\beta d.$$

这说明这种对应保持了线性性. 下面再证明保范性.

设 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_n)\longleftrightarrow f\in(R^n)^*$，则

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\xi_i,\quad x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n.$$

(3.16)式已指明$\|f\|\leqslant\|c\|$. 下面只须证明相反的不等式. 因为

$$\|f\|=\sup_{\|x\|=1}|f(x)|,$$

故对于任意的 $x_0\in R$，只要$\|x_0\|=1$，都有

$$\|f\|\geqslant|f(x_0)|.$$

对于泛函 f，取

$$x_0=\left\{\frac{c_1}{\left(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}},\ \frac{c_2}{\left(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}},\ \cdots,\frac{c_n}{\left(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right\},$$

则$\|x_0\|=1$，且有

$$\|f\|\geqslant|f(x_0)|=\left|\sum_{i=1}^{n}c_i^2\Big/\left(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|=\left|\left(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}|c_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|c\|,$$

所以

$$\|f\|=\|c\|.$$

这样就证明了 R^n 与$(R^n)^*$是线性同构且等距. 我们认为这样的两个赋范线性空间是同一空间，即$(R^n)^*=R^n$.

定义1 设 X 是赋范线性空间，若 $X^*=X$，则称 X 为**自共轭空间**.

据此定义，n 维欧氏空间是自共轭空间.

2. $l^p(p>1)$空间上的有界线性泛函

设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^p$，$c=(c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots)\in l^q$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. 则 l^p 上有界线性泛函的一般形式为

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}c_i\xi_i,$$

且$(l^p)^*=l^q$.

当 $p=2$时，$q=2$，所以，$(l^2)^*=l^2$. 故 l^2是自共轭空间.

3. $L^p[a,b](p>1)$上的有界线性泛函

设 $x\in L^p[a,b]$，$y\in L^q[a,b]$，$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$，则 $L^p[a,b]$上有界线性泛函的一般形式为

$$f(x)=\int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

且 $$(L^p[a,b])^* = L^q[a,b].$$

当 $p=q=2$时，$(L^2[a,b])^* = L^2[a,b]$. 故空间 $L^2[a,b]$是自共轭空间.

§ 3.7 几个重要的定理

1. 非零有界线性泛函的存在定理

上面我们建立了一些具体赋范线性空间上的有界线性泛函. 但是到目前为止，我们还不知道任一赋范线性空间 X 上是否一定存在非零有界线性泛函，也就是 X^* 中是否一定存在非零元素. 如果这个问题不解决，X^* 可能只含零元素，那么引入共轭空间的概念的意义就不大了. 下面的定理回答了这个问题.

定理1 设$(X,\|\cdot\|)$是具有非零元素的赋范线性空间，则在 X 上有足够多的非零线性泛函存在. 特别地，对于每一个 $x_0\in X$，$x_0\neq 0$，有 $f_0\in X^*$，具有性质

$$\|f_0\|=1,\quad |f_0(x_0)|=\|x_0\|.$$

推论 设 X 是一个赋范线性空间，$x\in X$，若对任意的 $f\in X^*$，都有 $f(x)=0$，则 $x=0$.

证 反证法. 若 $x\neq 0$，由定理1知，必存在 $f_0\in X^*$，使$\|f_0\|=1$，$|f_0(x)|=\|x\|\neq 0$，与假设矛盾. ▌

2. 逆算子定理

在数学分析课程中，我们已经介绍过反函数概念，并且知道"单调函数必存在反函数". 现在我们把这个概念和结论推广到更一般的场合.

定义1 设 T 是 X 到 Y 的一个算子，即对于$\forall\ x\in X$，存在 $y\in Y$，使 $y=Tx$. 如果对于$\forall\ y\in Y$，有且只有一个 $x\in X$，适合 $y=Tx$，则

称 T 为可逆的. 若 T 为可逆的，那么对于 $\forall\ y\in Y$，都有唯一的 $x\in X$，使 $y=Tx$ 与之对应. 这样就确定了一个由 Y 到 X 的算子，称此算子为 T 的**逆算子**，记成 T^{-1}，即 $x=T^{-1}y, y\in Y, x\in X$. 因为 $TT^{-1}y=Tx=y, T^{-1}Tx=x$，故 $TT^{-1}=I_y, T^{-1}T=I_x$ 都是**恒同算子**.

问题1 若 T 是线性算子，T^{-1}是否为线性算子？回答是肯定的（这在特殊算子情形下已经证明过，如 Fourier 变换和 Laplace 变换等）.

事实上，设 $y_1, y_2\in Y, \alpha, \beta$ 是数，由 T 的线性性可得

$$
\begin{aligned}
&T(T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)-\alpha T^{-1}y_1-\beta T^{-1}y_2)\\
=&TT^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)-\alpha TT^{-1}y_1-\beta TT^{-1}y_2\\
=&\alpha y_1+\beta y_2-\alpha y_1-\beta y_2=0.
\end{aligned}
$$

因 T 是可逆算子，$T\neq 0$，故

$$Tx=0 \iff x=0.$$

因此

$$T^{-1}(\alpha y_1+\beta y_2)=\alpha T^{-1}y_1+\beta T^{-1}y_2.$$

所以，若 T 为线性算子，T^{-1}一定是线性算子.

问题2 若 T 是有界线性算子，T^{-1}是否有界？一般说来未必成立，但当 X, Y 都 Banach 空间时，T^{-1}一定是有界线性算子. 这就是著名的 Banach 逆算子定理.

定理2（Banach 逆算子定理） 设有界线性算子 T 将 Banach 空间 X 一一地映照到 Banach 空间 Y 上，则 T 的逆算子有界.

例1 设$(X,\|\cdot\|_1)$，$(X,\|\cdot\|_2)$都是 Banach 空间. 若其中一个范数（如$\|\cdot\|_2$）强于另一个范数，则这两个范数是等价的.

证 单位算子 I 可以看成$(X,\|\cdot\|_2)\to(X,\|\cdot\|_1)$上的线性算子. 由于$\|\cdot\|_2$强于$\|\cdot\|_1$，故$\exists\ M>0$，使对$\forall\ x\in X$，有$\|x\|_1\leqslant M\|x\|_2$，即

$$\|Ix\|_1=\|x\|_1\leqslant M\|x\|_2.$$

故 I 是$(X,\|\cdot\|_2)\to(X,\|\cdot\|_1)$上的有界线性算子. 注意到单位算子是一一映照，而上述两个空间都是 Banach 空间，由定理2可知，I 存在有界逆算子 $I^{-1}:(X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|_2)$. 设$\|I^{-1}\|=M_1$，则

$$\|I^{-1}x\|_2 = \|x\|_2 \leqslant \|I^{-1}\|\|x\|_1 = M_1\|x\|_1,$$
故$\|\cdot\|_1$强于$\|\cdot\|_2$，因此$\|\cdot\|_1$与$\|\cdot\|_2$等价. ∎

3. 闭图像定理

在高等数学中，我们已经知道，函数 $y=f(x)$的图形是 XOY 平面上的一条曲线，如图3.2所示. 当 $x\in[a,b]$时. 图形就是弧段 $\overset{\frown}{AB}=\{(x,f(x))\,|\,x\in[a,b]\}$，它是平面上的一个点集. 而且当 $f\in C[a,b]$时，$\overset{\frown}{AB}$ 是平面上的一个闭集. 现在我们把上述结论推广到一般赋范线性空间中去，从而可得到更一般的结果. 为此，先给出乘积空间的定义.

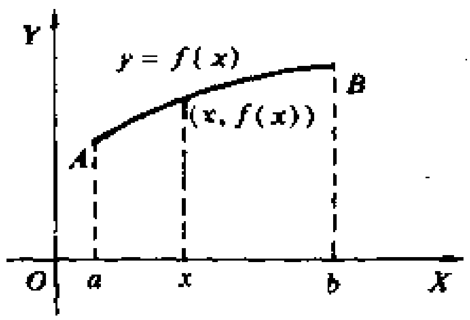


图 3.2

定义2 设 X 和 Y 是同一数域上的赋范线性空间，考虑集合的积

$$X\times Y=\{(x,y)\,|\,x\in X, y\in Y\}.$$

在集合 $X\times Y$ 中规定加法与数乘运算

$$(x_1,y_2)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2),$$

$$\alpha(x_1,y_1)=(\alpha x_1,\alpha y_1),$$

其中，$(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in X\times Y$，$\alpha$ 为数. 容易验证，这样的 $X\times Y$ 是线性空间. 在 $X\times Y$ 中引入范数

$$\|(x,y)\|=\|x\|+\|y\|,$$

可以证明，这时$(X\times Y,\|\cdot\|)$是赋范性空间，称它为 X 与 Y 的**乘积空间**，记成 $X\times Y$.

值得注意的是，既然$(X\times Y,\|\cdot\|)$为赋范线性空间，那么在$(X\times Y,\|\cdot\|)$中也就随之有了极限、内点、开集、闭集、列紧性、完备性等概念和相应的结论. 例如，在 $X\times Y$ 中的集 F 为闭集的充分必要条件是：对于 F 中的任意点列 f_n，若 $f_n\to f$，则 $f\in F$.

定义3 设 T 是 $D(T)\subset X$ 到 Y 的线性算子，则称

$$G_T=\{(x,Tx)\mid x\in D(T)\}\subset X\times Y$$

为算子 T 的**图像**. 若 G_T 为 $X\times Y$ 中的闭子空间，则称 T 为**闭线性算子**(或简称**闭算子**).

定理3(**闭图像定理**) 设 T 是定义在 Banach 空间 X 上且值域包含在 Banach 空间 Y 中的线性算子，则 T 为有界算子的充要条件是 T 为闭算子.

证 必要性. 设 T 为有界线性算子，所以 T 是连续的. 要证明 T 是闭算子，就是证明 G_T 为闭集，即证明对于任意点列 $(x_n,Tx_n)\in G_T$，若 $(x_n,Tx_n)\to(x,y)$，则有 $(x,y)\in G_T$.

事实上，因为

$$\begin{aligned}\|(x_n,Tx_n)-(x,y)\|&=\|(x_n-x,Tx_n-y)\|\\&=\|x_n-x\|+\|Tx_n-y\|\to 0,\end{aligned}$$

故 $x_n\to x$，$Tx_n\to y(n\to\infty)$. 而 X 是完备的，所以 $x\in X$，从而 T 在点 x 有定义. 又 T 是连续的，故 $Tx_n\to Tx(n\to\infty)$. 由极限唯一性可知，$y=Tx$. 按图像的定义得，$(x,y)=(x,Tx)\in G_T$.

充分性. 设 T 为闭算子，证明 T 是有界的. 为此先说明两点：

(1) 若 X,Y 都是 Banach 空间，则 $X\times Y$ 也是 Banach 空间.

事实上，对于 $X\times Y$ 中的任意基本序列 $\{(x_n,y_n)\}$，有

$$\|(x_n,y_n)-(x_m,y_m)\|=\|x_n-x_m\|+\|y_n-y_m\|\to 0(n,m\to\infty),$$

故

$$\|x_n-x_m\|\to 0,\ \|y_n-y_m\|\to 0(n,m\to\infty).$$

这说明 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ 分别为 X,Y 中的基本序列，由 X,Y 的完备性知，存在 $x\in X,y\in Y$，使 $x_n\to x,y_n\to y(n\to\infty)$. 因此，$(x,y)\in X\times Y$，且有

$$\|(x_n,y_n)-(x,y)\|=\|x_n-x\|+\|y_n-y\|\to 0(n,m\to\infty),$$

这说明 (x,y) 是 (x_n,y_n) 的极限，故 $X\times Y$ 是完备的.

(2) 当 G_T 为闭集时，G_T 是 Banach 空间.

首先说明 G_T 是线性空间. 事实上，(x_1,Tx_1)，$(x_2,Tx_2)\in G_T$，且

$$(x_1,Tx_1)+(x_2,Tx_2)=(x_1+x_2,T(x_1+x_2))\in G_T,$$
$$\alpha(x_1,Tx_1)=(\alpha x_1,\alpha Tx_1)=(\alpha x_1,T(\alpha x_1))\in G_T.$$
因此，G_T 是 $X\times Y$ 的线性子空间.

下面再证明 G_T 是完备的.

对 G_T 中的任意基本列$\{(x_n,Tx_n)\}$，即 $\|(x_n,Tx_n)-(x_m,Tx_m)\|=\|x_n-x_m\|+\|Tx_n-Tx_m\|\to 0(n,m\to\infty)$. 可知$\{x_n\}$，$\{Tx_n\}$分别是 X，Y 中的基本序列. 由 X，Y 的完备性，存在 $x\in X$，$y\in Y$，满足 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x$，$\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n=y$. 所以当 $n\to\infty$时，有
$$\|(x_n,Tx_n)-(x,y)\|=\|x_n-x\|+\|Tx_n-y\|\to 0.$$
这说明$(x,y)\in X\times Y$ 是序列$\{(x_n,Tx_n)\}$的极限. 又因为 G_T 是闭集，故$(x,y)\in G_T$，到此说明了 G_T 中的任意基本列必收敛于 G_T 上的某元素，故 G_T 是完备的赋范线性空间.

有了以上两点说明，我们就可以着手证明定理.

在 G_T 上定义算子 $\tilde{T}$：$\tilde{T}(x,Tx)=x$，则 $\tilde{T}$ 是定义在 G_T 上且值域在 X 上的线性有界算子，并且是 G_T 到 X 上的一一对应. 显然，$\tilde{T}$ 是一一对应的线性算子，在此我们只说明 $\tilde{T}$ 是有界的.

事实上，
$$\|\tilde{T}(x,Tx)\|=\|x\|\leqslant\|x\|+\|Tx\|=\|(x,Tx)\|,$$
所以 $\|\tilde{T}\|\leqslant 1$.

综上所述，G_T，X 都是 Banach 空间，$\tilde{T}$ 是 G_T 到 X 上的一一对应的线性有界算子. 由 Banach 逆算子定理（定理2）知，$\tilde{T}$ 存在有界的线性逆算子 $\tilde{T}^{-1}$. 即对任一 $x\in X$，有
$$\|\tilde{T}^{-1}x\|=\|(x,Tx)\|=\|x\|+\|Tx\|\leqslant\|\tilde{T}^{-1}\|\|x\|,$$
从而得
$$\|Tx\|\leqslant(\|\tilde{T}^{-1}\|-1)\|x\|.$$
因此，T 是有界线性算子，并且$\|T\|\leqslant\|\tilde{T}^{-1}\|-1$. ▌

注 闭图像定理常常用来验证线性算子的连续性.

例2 设

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

其中$\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2<\infty, j=1,2,\cdots$. 对任何$x\in l^2, x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i,\cdots)$，定义算子

$$y=Ax=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_i,\cdots)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix},$$

$$=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_j,\cdots)\in l^2,$$

其中$\eta_j=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i a_{ij}, j=1,2,3,\cdots$. 证明$A$是连续线性算子.

证 因为l^2是Banach空间，所以A为l^2到l^2的线性算子是显然的. 为了证明A有界，由定理3知，只须证明A是闭算子，即证明G_A是闭集.

设$(x_n,Ax_n)\in G_A$，并且$(x_n,Ax_n)\to(x,y)(n\to\infty)$，$(x,y)\in l^2\times l^2$. 即有

$$\|(x_n-x,Ax_n-y)\|=\|x_n-x\|+\|Ax_n-y\|\to 0(n\to\infty).$$

所以，$x_n\to x\in l^2$，$Ax_n\to y\in l^2$. 为了证明$(x,y)\in G_A$，只要证明$y=Ax$，记

$$x=(\xi_1^{(0)},\xi_2^{(0)},\cdots,\xi_i^{(0)},\cdots),$$

$$Ax=(\eta_1^{(0)},\eta_2^{(0)},\cdots,\eta_i^{(0)},\cdots),\quad \eta_i^{(0)}=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^{(0)}a_{ij},$$

$$x_n=(\xi_1^{(n)},\xi_2^{(n)},\cdots,\xi_i^{(n)},\cdots),$$

$$Ax_n=(\eta_1^{(n)},\eta_2^{(n)},\cdots,\eta_i^{(n)},\cdots),\quad \eta_i^{(n)}=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i^{(n)}a_{ij},$$

$$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_i,\cdots).$$

由 $Ax_n\to y(n\to\infty)$，则对 $j=1,2,3,\cdots$，有

$$|\eta_j^{(n)}-\eta_j|\leqslant\|Ax_n-y\|=\left(\sum_{j=1}^{\infty}|\eta_j^{(n)}-\eta_j|^2\right)^{\frac{1}{2}}\to 0(n\to\infty),$$

所以

$$\eta_j^{(n)}\to\eta_j(n\to\infty),j=1,2,3,\cdots.$$

如果对于任何 j，我们能证明，当 $n\to\infty$ 时，$\eta_j^{(n)}\to\eta_j^{(0)}$，则根据极限的唯一性，就可得到

$$\eta_j^{(0)}=\eta_j,\quad j=1,2,3,\cdots,$$

于是 $y=Ax$，这正是我们所希望的. 因为

$$\begin{aligned}|\eta_j^{(n)}-\eta_j^{(0)}|&=\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}(\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)})\right|\\&\leqslant\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|\,|(\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)})|\\&\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}^2|\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i^{(n)}-\xi_i^{(0)}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\\&=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|a_{ij}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty),\end{aligned}$$

对每个 j 都成立，故 $y=Ax$. ▌

注 要证明 A 的连续性，就是证明对任意的 $x_n\to x(n\to\infty)$，都有 $Ax_n\to Ax(n\to\infty)$. 但上面的证法并没有直接证明 $Ax_n\to Ax$，而是通过证明 A 是闭算子来实现的. 请读者自己直接证明.

4. 共鸣定理

定理 4（**Banach-Steinhaus**） 设 $\{T_\alpha\alpha\in\mathscr{A}\}$ 是所有定义在 Banach 空间 X 上，而值域包含在赋范线性空间 Y 中的有界线性算子组成的集，如果对每个 $x\in X$，有

$$\sup_{\alpha\in\mathscr{A}}\{\|T_\alpha x\|\}<+\infty,$$

则 $\{\|T_\alpha\|\,|\,\alpha\in\mathscr{A}\}$ 有界.

注 定理4称为共鸣定理.

推论 设$\{T_n\}$是 Banach 空间 X 到赋范线性空间 Y 的强收敛有界线性算子序列，则$\{\|T_n\|\}$有界.

证 因对任一固定的 $x\in X$，$\{T_nx\}$是收敛的，故$\{\|T_nx\|\}$有界.由共鸣定理可知，$\{\|T_n\|\}$有界. ▌

例3 在多项式逼近的内插理论中，我们往往用 Lagrange 插值多项式作为连续函数的近似表达式.问题是当插值点无限增多时，这种形式的插值多项式是否一定能够更好地逼近被插函数呢?对于连续函数而言，回答是否定的.而这否定性的结论就可以用共鸣定理来证明.

证 在$[a,b]$上给定插值点组

$$a\leqslant t_0^{(n)}<t_1^{(n)}<t_2^{(n)}<\cdots<t_n^{(n)}\leqslant b,n=1,2,\cdots,$$

对于 $x(t)\in C[a,b]$，作出它的 Lagrange 插值多项式

$$(L_nx)(t)=\sum_{k=0}^{n}x(t_k^{(n)})l_k^{(n)}(t),$$

其中

$$l_k^{(n)}(t)=\frac{\pi_n(t)}{(t-t_k^{(n)})\pi'_n(t_k^{(n)})},$$

$$\pi_n(t)=(t-t_0^{(n)})(t-t_1^{(n)})\cdots(t-t_n^{(n)}).$$

可以证明，L_n 是 $C[a,b]$到其自身的有界线性算子.但$\|L_n\|\geqslant\frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}$，若对任一 $x\in C[a,b]$，$L_nx\to x\ (n\to\infty)$，则$\{L_nx\}$一定有界.由于 $C[a,b]$是 Banach 空间，由共鸣定理知$\{\|L_n\|\}$也一定有界.可是我们已经知道$\|L_n\|\geqslant\frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}$，$\{\|L_n\|\}$有界是不可能的，故不可能对所有的连续函数 $x(t)\in C[a,b]$，有 $L_nx\to x(n\to\infty)$. ▌

例4 设 $x(t)$是以2π 为周期的连续函数，因此可按 Fourier-Euler 公式

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\mathrm{d}t,\ \ k=0,1,2,\cdots,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\mathrm{d}t,\quad k=1,2,3,\cdots,$$

计算出 a_k,b_k. 从而可以作出 $x(t)$的 Fourier 级数

$$x(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

当 $x(t)$连续且 $x(t)$可导时,$x(t)$的 Fourier 级数一致收敛到 $x(t)$. 问题是如果 $x(t)$仅仅连续,或者说,对于连续函数来说,它的 Fourier 级数是否一致收敛于 $x(t)$?回答是否定的. 利用共鸣定理容易证明:存在周期为2π 的连续函数 $x(t)$,它的 Fourier 级数不一致收敛于 $x(t)$.

例5 设某个固定的权函数 $\omega(t)$,对于 $x(t)\in C[a,b]$,它的 n 次最佳平方逼近多项式为 $L_nx,n=1,2,3,\cdots$,即 L_nx 是在次数不超过 n 的多项式中,使

$$\int_a^b[x(t)-(L_nx)(t)]^2\omega(t)\mathrm{d}t$$

达到极小的多项式. 则必存在 $x(t)\in C[a,b]$,使$(L_nx)(t)$不一致收敛于 $x(t)$. 利用共鸣定理来证明这个结论(Nikolev 定理)也是方便的. 这个结论表明:连续函数 $x(t)$的最佳平方逼近多项式$(L_nx)(t)$,当 $n\to\infty$时不一定都一致收敛于 $x(t)$. 但需注意,连续函数 $x(t)$的最佳一致逼近多项式$(T_nx)(t)$,当 $n\to\infty$时,必一致收敛于 $x(t)$.

§3.8 有界线性算子的正则集与谱

在泛函分析中,对线性算子的谱的研究是很重要的研究方向之一. 在这一节,我们仅介绍有关谱的一些基本概念.

正则集与谱的概念是由求解各种含参量 λ 的方程而提出来的. 如:

代数方程组:$Ax-\lambda x=y$,其中 $A=(a_{ij})_{n\times n}$为矩阵;$x,y\in R^n$.

微分方程：$D^2x-\lambda x=y$，其中 $D^2=\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}$；$x,y$ 为函数.

积分方程：$Kx-\lambda x=y$，其中 $(Kx)(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t$.

这些分别在代数、微分方程、积分方程等基本理论中都作了比较深入的研究. 现在，将它们抽象成一般形式来研究，它们的共同形式是

$$Ax-\lambda x=y \text{ 或 } (A-\lambda I)x=y, \tag{3.17}$$

其中 A 是某个赋范线性空间 X 到自身的线性算子，λ 是复数，I 为单位算子，$x,y\in X$.

我们感兴趣的是研究方程(3.17)的解 x 的存在性、唯一性和解 x 对 y 的连续依赖性(或称解的稳定性). 具体地说，就是希望弄清是否对任何的 $y\in X$，方程(3.17)都有唯一的、连续依赖于 y 的解 x 存在. 这就相当于要弄清楚算子 $(A-\lambda I)$ 是否有定义在整个 X 上的有界逆算子存在.

定义1 设 X 是赋范线性空间，$A\in B(X,X)$. 若 A^{-1}存在，且是定义在整个 X 上的有界线性算子，则称 A 是 X 上的**正则算子**.

上述问题既与 A 有关也与 λ 有关，故问题的确切提法是：当 A 确定时，对哪些 λ，$(A-\lambda I)$ 是正则算子.

定义2 设 X 是一个复赋范线性空间，$A\in B(X,X)$，I 为 X 上的单位算子.

(1) 若复数 λ 使得 $(A-\lambda I)$ 成为正则算子，则称 λ 为 A 的一个**正则值**. 正则值的全体记成 $\rho(A)$.

(2) 若复数 λ 不是 A 的正则值，则称 λ 为 A 的**谱点**. 全体谱点称为**谱**，记成 $\sigma(A)$.

(3) 若复数 λ_0 使得方程 $(A-\lambda_0 I)x=0$ 具有非零解 x_0，则称 λ_0 为 A 的一个**特征值**，x_0 称为对应于 λ_0 的**特征元素**.

显然，对任何 $A\in B(X,X)$，$\rho(A)\cup\sigma(A)=$全体复数. 从定义中还可看出，特征值必是谱点，但谱点未必全是特征值. 可是当 X 为有限维赋范线性空间时，A 的谱点与特征值是一致的. 这是因为，

对于行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix}$$

当 λ 为特征值时，$D=0$；当 λ 不为特征值时，$D\neq 0$. 对于无限维赋范线性空间来说，情况就不这样简单了. 下面我们给出一般谱点的分类.

首先注意到 λ 是 A 的正则值必须满足三个条件：(1) $A-\lambda I$ 是可逆的；(2) $A-\lambda I$ 是满映射；(3) $(A-\lambda I)^{-1}$有界.

可见，不满足上述三个条件之一的 λ 都是谱点，故谱点 λ 可分为三类：

(1) $(A-\lambda I)$不可逆. 其充要条件是$(A-\lambda I)x=0$有非零解或 λ 为 A 的特征值.

(2) $(A-\lambda I)$可逆，但不是满映射. 其充要条件是方程$(A-\lambda I)x=y$ 对某些 $y\in X$ 有解，并且解唯一，但不是对于 X 中所有的 y 都有解.

(3) $(A-\lambda I)$可逆，且是满映射，但$(A-\lambda I)$无界. 其充要条件是方程$(A-\lambda I)x=y$ 对于任何的 $y\in X$ 都有唯一解，但解不连续依赖于 y.

情况(1)称为 A 的**点谱**，(2)和(3)称为 A 的**连续谱**.

当 X 是 Banach 空间时，若 $A\in B(X,X)$，由 Banach 逆算子定理可知，情况(3)不会发生.

关于 $\rho(A)$与 $\sigma(A)$在复平面上的大体分布情况，我们可以得到下面的结论：

对任何一个 Banach 空间 X 到自身的有界算子 A，其正则集 $\rho(A)$至少包含了复平面上圆 $|\lambda|=\|A\|$以外的所有复数点. 另外，还知道 $\rho(A)$是复平面上的开集，$\sigma(A)$是复平面上非空的有界闭集.

习　　题

1. 设 R^n 是 n 维 Euclid 空间，$p\geqslant 1$，对每个 $X=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\in R^n$，定义 $\rho(x)=\left(\sum\limits_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$. 证明 $\rho(x)$ 是 R^n 中的一个范数.

2. 设 C_0 表示收敛数列的全体按通常数列运算规则构成的线性空间，对每个 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in C_0$，定义

$$\|x\|=\sup_i|\xi_i|.$$

证明 C_0 是一个赋范线性空间.

3. 设 H^p 表示 $[0,1]$ 上满足 Hölder 条件

$$|x(t_1)-x(t_2)|\leqslant M|t_1-t_2|^p, 0<p<1,$$

的函数的全体. 对每一个 $x(t)\in H^p$，定义

$$\|x\|=|x(0)|+\sup_{0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1}\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^p}.$$

证明 H^p 是一完备的赋范线性空间.

4. 设 M_0 是区间 $[a,b]$ 上有界函数的全体，线性运算的定义与 $C[a,b]$ 中的相同，在 M_0 中定义

$$\|x\|=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x(t)|.$$

证明 M_0 是 Banach 空间.

5. 对任何 $f\in L[a,b]$. 令

$$Tf(x)=g(t)=\int_a^t f(\tau)\mathrm{d}\tau,$$

则 T 为 $L[a,b]$ 到 $L[a,b]$ 中的有界线性算子，试求 $\|T\|$.

6. 在 R^n 中定义范数 $\|x\|=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\xi_i|$，求出矩阵

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

所确定的算子 A 的范数 $\|A\|$.

7. 设 X 和 Y 都是赋范线性空间，T 是定义在 X 上而值域包含在 Y 中的线性算子，当 T 为有界线性算子时，证明 T 的零空间

$$N=\{x \mid Tx=0, x\in X\}$$

一定是闭集；反之，若 T 的零空间是闭集，问 T 是否一定有界，如果不成立，试举出例子.

8. 设 X 是赋范线性空间，$x_n, y_n, x, y\in X$，$\lambda_n, \mu_n, \lambda, \mu$ 均为数域中的数或数列（$n=1,2,\cdots$）. 证明：

（1）$\|x-y\|\geqslant\|x\|-\|y\|$；

（2）如果 $x_n\to x$，则 $\|x_n\|\to\|x\|$ $\quad(n\to\infty)$；

（3）如果 $\lambda_n\to\lambda$，$\mu_n\to\mu$，且 $x_n\to x$，$y_n\to y$，则 $\lambda_n x_n+\mu_n y_n\to\lambda x+\mu y$ $(n\to\infty)$；

（4）如果 $x_n\to x(n\to\infty)$，且 $\|x\|\neq 0$，$\|x_n\|\neq 0$，$n=1,2,\cdots$，则

$$\frac{x_n}{\|x_n\|}\to\frac{x}{\|x\|}\quad(n\to\infty).$$

9. 设线性空间 X 上的两个范数 $\|\cdot\|_1$，$\|\cdot\|_2$ 均使 X 成为 Banach 空间，且对任一 $x\in X$，均有不等式

$$\|x\|_2\leqslant K\|x\|_1$$

成立，其中 K 为一固定的正数，证明 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

10. 设 m 是有界数列空间，无穷矩阵 (a_{ij}) $(i,j=1,2,3,\cdots)$ 满足 $\sup\limits_i\sum\limits_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|<+\infty$，则

$$y=Tx:\ \eta_i=\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\xi_j,$$

是由 m 到 m 中的有界线性算子，且

$$\|T\|=\sup_i\sum_{j=1}^{\infty}|a_{ij}|.$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)$.

11. 设 f 是 R^n 上的线性泛函，证明 f 连续.

12. 设 $x_n\xrightarrow{w}x$，证明 x 唯一.

13. 设 $x_n\xrightarrow{w}$，证明 $x_{n_k}\xrightarrow{w}x$.

14. 设$\{\alpha_n\}$是实数列，若对任何$\{x_n\}\in l^2$，都有$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\alpha_n x_n$收敛，则$\{\alpha_n\}\in l^2$上.（提示：在$l^2$上定义泛函列$f_n(x)=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i x_i$）.

第四章　希尔伯特空间

前面介绍了距离空间和赋范线性空间，这样的空间与三维向量空间相比少了内积概念. 因此，诸如正交、正交投影等有关概念就不好描述. 现在我们将内积引入一般的线性空间，称之为内积空间. 在内积空间中，不仅可以由内积诱导出范数、距离，从而产生拓扑结构，更重要的是可以引入正交概念.

希尔伯特(Hilbert)空间就是完备的内积空间. 虽然它只是一种特殊的 Banach 空间，然而由于正交性的引入，使它具有通常 Euclid 空间所具有的丰富的几何结构，是理论上和实际应用上重要的空间之一.

§4.1　基本概念和基本定理

定义1　设 X 为实(或复)数域 K 上的线性空间，若对于 X 中任意一对有序元素 x,y，恒对应于 K 中一个数 (x,y)，且满足

1° $(\alpha x,y)=\alpha(x,y)$；

2° $(x+y,z)=(x,z)+(y,z)$；

3° $(x,y)=(y,x)$，当 K 为实数域；

$(x,y)=\overline{(y,x)}$，当 K 为复数域；

4° $(x,x)\geqslant 0$，且 $(x,x)=0$ 的充分必要条件是 $x=\theta$.

则称 X 为**实(或复)内积空间**，简称为**内积空间**，(x,y) 称为 x,y 的**内积**.

由内积的定义，不难证明下述定理.

定理1 在内积空间 X 中，令 $\|x\|=\sqrt{(x,x)}$，则 X 是一个赋范线性空间.

证 只须证明如此定义的 $\|\cdot\|$ 满足范数三条公理就行了. 事实上，

1° $\|x\|\geqslant 0$，且 $\|x\|=0\Longleftrightarrow(x,x)=0\Longleftrightarrow x=\theta$；

2° $\|\alpha x\|=\sqrt{(\alpha x,\alpha x)}=\sqrt{\alpha\bar{\alpha}(x,x)}=|\alpha|\,\|x\|$，对任意 $\alpha\in K$，$x\in X$ 成立；

3° 再证对任意 $x,y\in X$，有

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|.$$

为此先证明下面的 Schwarz 不等式

$$|(x,y)|\leqslant\|x\|\,\|y\|. \tag{4.1}$$

现就复内积空间来证明. 对任何复数 λ，有

$$(x+\lambda y,x+\lambda y)\geqslant 0,$$

或

$$(x,x)+\bar{\lambda}(x,y)+\lambda(y,x)+|\lambda|^2(y,y)\geqslant 0.$$

当 $y=\theta$ 时，因有 $(x,y)=0$，故(4.1)式显然成立. 现设 $y\neq\theta$，令 $\lambda=-\dfrac{(x,y)}{(y,y)}$，得到 $(x,x)-\dfrac{2|(x,y)|^2}{(y,y)}+\dfrac{|(x,y)|^2}{(y,y)^2}(y,y)\geqslant 0$. 即

$$(x,x)-\frac{|(x,y)|^2}{(y,y)}\geqslant 0.$$

故

$$|(x,y)|^2\leqslant\|x\|^2\|y\|^2,$$

两边开平方，即得不等式(4.1).

由(4.1)，对 $x,y\in X$，有

$$\begin{aligned}\|x+y\|^2&=(x+y,x)+(x+y,y)\\&\leqslant\|x+y\|\|x\|+\|x+y\|\|y\|,\end{aligned}$$

故

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|. \ \blacksquare$$

这个定理指明内积空间必为赋范线性空间(今后我们说内积

空间是赋范线性空间均指以$\|x\|=\sqrt{(x,x)}$为范数)，从而必为距离空间. 所以，在距离空间和赋范线性空间中所引入的概念及有关结论，在内积空间中均适用. 例如极限、内点、开集、闭集、列紧、紧、可分性、完备性等概念及有关结论在内积空间中都成立.

定义2 完备的内积空间称为**希尔伯特(Hilbert)空间***). 常记成 H.

显然，Hilbert 空间必为 Banach 空间.

例1 在 n 维复线性空间 R^n 中，对于 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$，$y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)\in R^n$，规定

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\eta}_i,$$

则 R^n 是内积空间.

事实上，1° $(x,x)=\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\geqslant 0$，$(x,x)=0\Longleftrightarrow\xi_i=0$，$i=1,2,\cdots,n\Longleftrightarrow x=\theta$;

2° 设 $z=(t_1,t_2,\cdots,t_n)\in R^n$，$\alpha\in K$，则

$$(x+y,z)=\sum_{i=1}^{n}(\xi_i+\eta_i)\bar{t}_i=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{t}_i+\sum_{i=1}^{n}\eta_i\bar{t}_i=(x,z)+(y,z);$$

$$3°\ (x,y)=\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\eta}_i=\overline{\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{\xi}_i\eta_i\right)}=\overline{(y,x)};$$

$$4°\ (\alpha x,y)=\sum_{i=1}^{n}(\alpha\xi_i)\bar{\eta}_i=\alpha\sum_{i=1}^{n}\xi_i\bar{\eta}_i=\alpha(x,y).$$

故如此定义的二元函数确实为内积，因此 R^n 是内积空间. 由此内积所诱导出的范数

$$\|x\|=\sqrt{(x,x)}=\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

恰好是 Euclid 范数. 从而，记号 R^n 可以理解为：集合、线性空间、距

---

*)Hilbert 空间早期定义为无穷维可分的、完备的内积空间，我们采用的是近期的定义.

离空间、赋范线性空间和内积空间.

例2 已知 l^2是由满足

$$\|x\|=\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}<+\infty$$

的序列 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)$所组成，而且 l^2按上述范数是一个可分的 Banach 空间. 现在证明在 l^2中还可以定义内积. 任取 $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)\in l^2$，由不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|\xi_i\eta_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

令 $n\to\infty$，得到

$$\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i\eta_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{\infty}|\eta_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

由于上述不等式右端是有限数，故 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\xi_i\bar{\eta}_i$ 绝对收敛. 规定 x 与 y 的内积为

$$(x,y)=\sum_{i=1}^{\infty}\xi_i\bar{\eta}_i.$$

不难看出，定义1中内积的全部条件都满足. 再由 l^2的完备性与可分性，可知 l^2是一个可分的 Hilbert 空间.

例3 已知在 $L^2[a,b]$中可以定义范数

$$\|x\|=\left(\int_a^b|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},x(t)\in L^2[a,b],$$

而且 $L^2[a,b]$按上述范数是一个可分 Banach 空间. 利用 $L^2[a,b]$中的 Schwarz 不等式，在 $L^2[a,b]$中还可以定义 $x(t)$，$y(t)$的内积(x,y)为

$$(x,y)=\int_a^b x(t)\bar{y}(t)\mathrm{d}t,\ \ x(t),y(t)\in L^2[a,b].$$

不难看出，定义1中内积的全部条件都满足，于是 $L^2[a,b]$是一个可分的 Hilbert 空间.

在例2和例3中，若 $p\neq2$，l^p，$L^p[a,b]$中的范数都不可能是由某个内积空间中的内积诱导出来的. 这说明赋范线性空间不一定都

能成为内积空间. 定理2指出了一个赋范线性空间要成为内积空间，它的范数$\|\cdot\|$应具有的特征，并说明范数$\|\cdot\|$就是由内积诱导出的.

定理2 赋范线性空间 X 成为内积空间的充要条件是它的范数满足中线公式

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2, \tag{4.2}$$

其中 x,y 是 X 中任意元素，且有

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2). \tag{4.3}$$

证 必要性. 设 X 是内积空间，由内积诸条件知，

$$\begin{aligned}
&\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\\
&=(x+y,x+y)+(x-y,x-y)\\
&=(x,x+y)+(y,x+y)+(x,x-y)+(-y,x-y)\\
&=[(x,x+y)+(x,x-y)]+[(y,x+y)-(y,x-y)]\\
&=[(x,x)+(x,y)+(x,x)-(x,y)]\\
&\quad+[(y,y)+(y,x)+(y,y)-(y,x)]\\
&=2(x,x)+2(y,y)\\
&=2\|x\|^2+2\|y\|^2.
\end{aligned}$$

故必要性成立.

充分性. 我们假定 X 是复赋范线性空间. 由内积空间中内积与范数的关系，令

$$(x,y)=\frac{1}{4}(\|x+y\|^2-\|x-y\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}y\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}y\|^2).$$

关键在于验证(x,y)满足内积的全部条件. 由(4.2)式有

$$\begin{aligned}
&(x,z)+(y,z)\\
&=\frac{1}{4}(\|x+z\|^2-\|x-z\|^2+\mathrm{i}\|x+\mathrm{i}z\|^2-\mathrm{i}\|x-\mathrm{i}z\|^2)\\
&\quad+\frac{1}{4}(\|y+z\|^2-\|y-z\|^2+\mathrm{i}\|y+\mathrm{i}z\|^2-\mathrm{i}\|y-\mathrm{i}z\|^2)
\end{aligned}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+z\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-z\right\|^2\right)$$

$$+\frac{i}{2}\left(\left\|\frac{x+y}{2}+iz\right\|^2-\left\|\frac{x+y}{2}-iz\right\|^2\right)$$

$$=2\left(\frac{x+y}{2},z\right). \tag{4.4}$$

令 $y=\theta$,并注意到$(\theta,z)=0$,于是

$$(x,z)=2\left(\frac{x}{2},z\right).$$

将其中的 x 换成 $x+y$,得

$$(x+y,z)=2\left(\frac{x+y}{2},z\right),$$

再与(4.4)式比较,得到

$$(x,z)+(y,z)=(x+y,z). \tag{4.5}$$

由范数的性质,$\|ix\|=\|x\|$,故

$$(ix,y)=\frac{1}{4}(\|ix+y\|^2-\|ix-y\|^2+i\|ix+iy\|^2-i\|ix-iy\|^2)$$

$$=\frac{1}{4}(\|x-iy\|^2-\|x+iy\|^2+i\|x+y\|^2-i\|x-y\|^2)$$

$$=\frac{i}{4}(\|x+y\|-\|x-y\|^2+i\|x+iy\|^2-i\|x-iy\|^2)$$

$$=i(x,y). \tag{4.6}$$

由(4.5),(4.3)式及范数的连续性知,(x,y)是 x 的连续可加泛函. 再由(4.6)式,可以验证对任何复数 α,有

$$(\alpha x,y)=\alpha(x,y),$$

因此内积的条件1°,2°成立. 再由(4.3)式还可以证明

$$(x,y)=\overline{(y,x)},\quad (x,x)=\|x\|^2,$$

故内积的条件3°,4°成立. 在此,我们仅证明$(x,x)=\|x\|^2$. 事实上,

$$(x,x)=\frac{1}{4}(4\|x\|^2-0+i|1+i|^2\|x\|^2-i|1-i|^2\|x\|^2)$$

$$=\frac{1}{4}(4\|x\|^2+2i\|x\|^2-2i\|x\|^2)$$

$$=\|x\|^2.$$

因此，X 按照(4.3)式定义的内积是一个内积空间，而且由(4.3)导出来的范数就是 X 上原来的范数. ▌

注 (4.3)式常称为**极化恒等式**.

例4 证明 Чебышев 空间 $C[0,1]$不是内积空间.

证 由于中线公式成立是赋范线性空间成为内积空间的充要条件，为了说明$C[0,1]$不是内积空间，只须说明中线公式在$C[0,1]$中不成立即可. 为此，取 $x(t)=t, y(t)=1-t\in C[0,1]$，则

$$x(t)+y(t)=1,\quad x(t)-y(t)=2t-1.$$

由于

$$\|x\|=1,\ \|y\|=1,\ \|x+y\|=1,\ \|x-y\|=1,$$
$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2,\quad 2\|x\|^2+2\|y\|^2=4,$$

故在 $C[0,1]$中中线公式不成立，因而 $C[0,1]$是 Banach 空间，但不是内积空间. ▌

注 $C[0,1]$作为线性空间，尚未引入范数，但可以在其中引入内积

$$(x,y)=\int_0^1 x(t)\bar{y}(t)\mathrm{d}t.$$

可以验证此时构成一个内积空间，由此内积诱导出的范数为

$$\|x\|_2=\left[\int_0^1 |x(t)|^2\mathrm{d}t\right]^{\frac{1}{2}}.$$

它不是 Чебышев 范数，而是 $L^2[0,1]$空间中的范数. 但在此范数下，$(C[0,1],\|\cdot\|_2)$是不完备的，它的完备化空间为 $L^2[0,1]$.

定理3(内积的连续性) 在内积空间中，若 $x_n\to x, y_n\to y\ (n\to\infty)$，则$(x_n,y_n)\to(x,y)\ (n\to\infty)$.

证
$$\begin{aligned}|(x_n,y_n)-(x,y)|&\leqslant|(x_n,y_n)-(x_n,y)|+|(x_n,y)-(x,y)|\\&=|(x_n,y_n-y)|+|(x_n-x,y)|\\&\leqslant\|x_n\|\|y_n-y\|+\|y\|\|x_n-x\|,\end{aligned}$$

由范数的连续性知，当 $n\to\infty$ 时 $x_n\to x$，故有

$$\|x_n\|\to\|x\|.$$

由此知$\|x_n\|$有界，故当$n\to\infty$时

$$|(x_n,y_n)-(x,y)|\to 0. \blacksquare$$

在第二章中，我们曾叙述过，完备空间 X 的子空间 Y 是完备的充要条件是 Y 为闭子空间，并且还阐述过有限维子空间必为闭的. 这些结论当然在 Hilbert 空间中也成立.

§4.2　正交与正交分解

在解析几何中有正交的概念，这是解析几何中的一个基本概念，而且两个矢量正交的充要条件是它们的内积等于零. 在一般的内积空间中，利用内积同样可以引入正交的概念. 这一节的目的便是介绍这一概念，并讨论所谓正交分解.

定义1　设 X 是内积空间，$x,y\in X$，$A,B\subset X$；

(1) 若$(x,y)=0$，则称 x **与** y **正交**，记成 $x\perp y$；

(2) 若对$\forall\ a\in A$，都有 $x\perp a$，则称 x **与** A **正交**，记成 $x\perp A$；

(3) 若对$\forall\ a\in A,b\in B$，都有 $a\perp b$，则称 A **与** B **正交**，记成 $A\perp B$；

(4) X 中与 A 正交的全体元素组成的集合叫做 A 的**正交补**，记成 $A^{\perp}$，即

$$A^{\perp}=\{x\mid x\perp A,x\in X\}\subset X.$$

定理1　正交与正交补有下列性质：

1° 若 $x\perp y$，则$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2$；

2° 任何子集 $A\subset X$ 的正交补 $A^{\perp}$是 X 的闭子空间；

3° 若 $A\subset B\subset X$，则 $A^{\perp}\supset B^{\perp}$；

4° $A\subset(A^{\perp})^{\perp}$；

5° 当 A 为 X 的子空间时，$A\cap A^{\perp}=\{\theta\}$；

6° $\{\theta\}^{\perp}=X$，$X^{\perp}=\{\theta\}$.

证　1° $\|(x+y)\|^2=(x+y,x+y)$

$$=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y).$$

因为 $x\perp y$，所以 $(x,y)=(y,x)=0$，从而

$$\|x+y\|^2=\|x\|^2+\|y\|^2.$$

2° 先证明 $A^{\perp}$ 是 X 的子空间，设 $x,y\in A^{\perp}$，因为对 $\forall\ a\in A$，有 $(x,a)=0,(y,a)=0$. 故 $(x+y,a)=0$，即 $(x+y)\perp A$. 从而说明 $x+y\in A^{\perp}$. 又对任何数 α，$(\alpha x,a)=\alpha(x,a)=0$，故 $\alpha x\in A^{\perp}$，即说明 $A^{\perp}$ 为 X 的子空间.

再证明 $A^{\perp}$ 为闭子空间. 事实上，设 $x_n\in A^{\perp}$，且当 $n\to\infty$ 时，$x_n\to x(x\in X)$. 对于 $\forall\ a\in A$，因为 $x_n\in A^{\perp}$，故 $(x_n,a)=0$，由内积的连续性，有 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n,a)=(x,a)=0$，所以 $x\in A^{\perp}$.

据此可知，$A^{\perp}$ 是闭子空间，如果 X 是完备的，那么 $A^{\perp}$ 也是完备的.

3° 任取 $b\in B^{\perp}$，$a\in A$，因为 $A\subset B$，故 $a\in B$，所以 $(b,a)=0$，即 $b\in A^{\perp}$，从而证明了 $B^{\perp}\subset A^{\perp}$.

4° 任取 $x\in A^{\perp}$，$a\in A$，必有 $(a,x)=0$. 即说明 $a\in(A^{\perp})^{\perp}$，故 $A\subset(A^{\perp})^{\perp}$.

5° 当 A 为 X 的子空间时，有 $\theta\in A$. 又由2°，$\theta\in A^{\perp}$，故 $\theta\in A\cap A^{\perp}$，又任取 $x\in A$，$x\neq\theta$，则 $(x,x)=\|x\|^2>0$，故 $x\notin A^{\perp}$，从而 $A\cap A^{\perp}$ 中一定没有非零元素.

6° 因为任取 $x\in X$，$(x,\theta)=0$，所以 $x\in\{\theta\}^{\perp}$，即 $\{\theta\}^{\perp}=X$. 又显然 $\theta\perp X$，故 $\theta\in X^{\perp}$，而 X 中任一非零元素 x 的范数大于零，故 $(x,x)>0$，即 $x\notin X^{\perp}$，所以 $X^{\perp}=\{\theta\}$. ▌

在普通的向量空间中，任何向量 x，总可以分解成与平面 P 正交的向量 z 及 x 在平面 P 上的正交投影 x_0 的和：$x=x_0+z$，且分解是唯一的(如图4.1). 对于内积空间也有类似的结论.

定理2(正交分解定理) 设 M 是内积空间 X 的完备子空间，则对任意 $x\in X$，均有下列唯一的正交分解

$$x=x_0+z,\quad x_0\in M,z\in M^{\perp}.$$

并称如此的 x_0 为 x 在 M 上的**正交投影**.

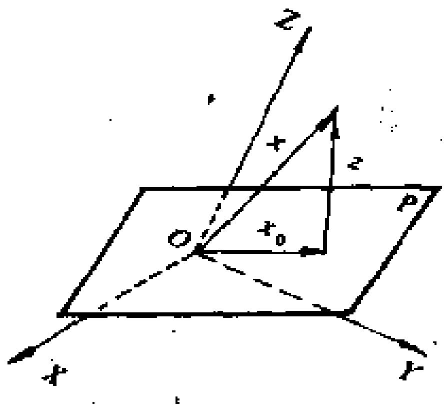


图 4.1

证 任取 $x\in X$，若 $x\in M$，此时令 $x_0=x, z=0$，显然此时具有定理2中所述的分解. 因此，不妨假定 $x\overline{\in} M$. 下面我们分三步来证明：

(1) x 的正交投影 x_0 的存在性，即寻找正交投影 x_0.

为此，令 $d=\inf\limits_{y\in M}\|x-y\|$，可以证明存在 $x_0\in M$，使

$$\|x-x_0\|=d.$$

事实上，按下确界定义，对于任一自然数 n，存在 $y_n\in M$，使得

$$d\leqslant\|x-y_n\|<d+\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots.$$

因此

$$\lim_{n\to\infty}\|x-y_n\|=d.$$

因为 $\frac{y_m+y_n}{2}\in M$，所以

$$\left\|x-\frac{y_m+y_n}{2}\right\|\geqslant d.$$

在中线公式(4.2)中将 x 换成 y_m-x，y 换成 $x-y_n$，得

$$\begin{aligned}\|y_m-y_n\|^2&=\|y_m-x+x-y_n\|^2\\&=2\|y_m-x\|^2+2\|x-y_n\|^2-4\left\|x-\frac{y_m+y_n}{2}\right\|^2\\&\leqslant2\|y_m-x\|^2+2\|y_n-x\|^2-4d^2.\end{aligned}$$

因为当 $m,n\to\infty$ 时，$\|y_m-x\|\to d$，$\|y_n-x\|\to d$，故

$$\|y_m-y_n\|\to0\quad(n,m\to\infty).$$

即 $\{y_n\}$ 为基本列. 因 M 是闭子空间，因此存在 $x_0\in M$，使 $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=x_0$.

再由范数的连续性，有

$$\|x-x_0\|=d.$$

（2）令 $z=x-x_0$，则 $z\in M^{\perp}$.

事实上，任取 $y\in M, y\neq\theta$，对任何数 $\lambda, x_0+\lambda y\in M$，故

$$\begin{aligned} d^2 &\leqslant \|x-x_0-\lambda y\|^2 \\ &= \|x-x_0\|^2-\bar{\lambda}(x-x_0,y)-\lambda(y,x-x_0)+|\lambda|^2\|y\|^2, \end{aligned}$$

移项，并注意到 $\|x-x_0\|=d$，得

$$\bar{\lambda}(x-x_0,y)+\lambda(y,x-x_0)-|\lambda|^2\|y\|^2\leqslant 0.$$

令 $\lambda=\dfrac{(x-x_0,y)}{\|y\|^2}$，并代入上式，有

$$|(x-x_0,y)|^2+|(x-x_0,y)|^2-|(x-x_0,y)|^2\leqslant 0,$$

即 $|(x-x_0,y)|^2\leqslant 0$. 显然，只有当 $(x-x_0,y)=0$ 时，不等式才能成立. 于是 $x-x_0\perp M$，即 $z\in M^{\perp}$.

（3）正交分解是唯一的.

设另有分解 $x=x_0'+z'$，其中 $x_0'\in M, z'\in M^{\perp}$，则 $x_0+z=x_0'+z'$，即 $x_0-x_0'=z'-z$，由于 x_0、$x_0'\in M$，故 $x_0-x_0'\in M$，于是 $z'-z\in M$. 又因为，$z', z\in M^{\perp}$，故 $z'-z\in M^{\perp}$. 所以 $z'-z\perp z'-z$，即 $(z'-z, z'-z)=0$，于是 $z'=z$，由此可得 $x_0'=x_0$. 因此，分解是唯一的. ▌

推论1 若定理2中的 X 是完备的，即 X 为 Hilbert 空间，则子空间 M 只要是闭的，定理2就成立. 特别地，若 M 是 X 的有限维子空间，定理2也成立.

推论2 当 X 是完备内积空间时，对 $\forall\, x\in X$，在子空间 M 上都有正交投影的充要条件是 M 本身是完备的内积空间.

证 充分性即定理2. 现证必要性，若对 $\forall\, x\in X$，都有在 M 上的正交投影 x_0，即 $\exists\, x_0\in M, z\in M^{\perp}$，使 $x=x_0+z$，证明 M 是闭集即可. 为此，设 $x\in\overline{M}\subset X$，由假设知，存在 $x_0\in M, z\in M^{\perp}$，使 $x=x_0+z$，因为 $x\in\overline{M}$，所以存在 $x_n\in M$，使得 $x_n\to x$，于是

$$x_n-x_0\to x-x_0=z.$$

由内积的连续性，并注意到 $x_n-x_0\in M, z\in M^{\perp}$，有

$$(z,z)=\lim_{n\to\infty}(x_n-x_0,z)=\lim_{n\to\infty}0=0.$$

故 $z=\theta$，于是 $x=x_0+\theta=x_0$，即 $x\in M$. ▌

最后，我们介绍一点正交分解定理在逼近论中的意义.

定义2 设 X 是赋范线性空间，M 是 X 的子空间，$x\in X$，令

$$d=\inf_{y\in M}\|x-y\|.$$

若有 $x_0\in M$，使 $\|x-x_0\|=d$，则称 x_0 是 x 在 M 中的**最佳逼近元素**.

综观定理2的证明过程，可以得到下列结论：

(1) 设 X 是内积空间，M 是它的完备子空间，则对任何 $x\in X$，X 在 M 中都存在唯一的最佳逼近元素 x_0.

(2) 设 X 是完备的内积空间，M 是它的闭子空间，对于任何 $x\in X$，如果都存在 $x_0\in M$ 是 x 的最佳逼近元素，则 $x-x_0\perp M$.

对于结论(2)，其逆命题也成立.

推论3 设 X 是完备的内积空间，M 是它的闭子空间，对于任何 $x\in X$，都存在 $x_0\in M$ 是 x 的最佳逼近元素的充要条件是 $x-x_0\perp M$.

证 必要性已证. 现证充分性，对于任何的 $y\in M$，有 $x-y=(x-x_0)+(x_0-y)$. 因为 $x_0-y\in M$，$x-x_0\perp M$，故得

$$\|x-y\|^2=\|x-x_0\|^2+\|x_0-y\|^2.$$

所以

$$\|x-y\|\geqslant\|x-x_0\|^2.$$

即 x_0是 x 在 M 上的最佳逼近元素. ▌

§4.3 内积空间中的标准正交系

在上一节中利用内积引入了正交的概念，有了正交的概念，便可以进而引入正交系，它是 Euclid 空间中直角坐标系的一种推广. 这一节将讨论内积空间中正交系的一些基本性质，以及将一元素

按标准正交系进行展开的问题.实际上这种展开我们过去已经遇见过.例如,在有限维空间中,将给定向量展开成正交单位向量的线性组合;在无穷维空间中,将给定函数展开成 Fourier 级数等问题.本节将研究这些问题更一般的情形.

定义1 内积空间 X 中的元素列$\{x_k\}$,如果满足

$$(x_i,x_j)=0,\ i\neq j;i,j=1,2,\cdots,$$

则称$\{x_k\}$是**一正交系**.

X 中的元素列$\{e_k\}$,如果满足

$$(e_i,e_j)=\delta_{ij}=\begin{cases}0,i\neq j,\\1,i=j,\end{cases}\qquad i,j=1,2,\cdots,$$

则称$\{e_k\}$是 X 中的一个**标准正交系**.

类似地,对于有限个向量组成的向量组,也有正交向量组和标准正交向量组的概念.且易知:

若$\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$为正交向量组,且 $x_i\neq\theta,i=1,2,\cdots,n$,则

(1) $\|x_1+x_2+\cdots+x_n\|^2=\|x_1\|^2+\|x_2\|^2+\cdots+\|x_n\|^2$;

(2) $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$必为线性无关组.

例1 在内积空间 l^2中,序列 $e_1=(1,0,0,\cdots),e_2=(0,1,0,\cdots),\cdots,e_n=(0,0,\cdots,0,1,0,\cdots),\cdots$是 l^2中的一个标准正交系.

例2 在内积空间 $L^2[-\pi,\pi]$中,三角函数列

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\cdots$$

是 $L^2[-\pi,\pi]$中的标准正交系,也是 $L^2[-\pi,\pi]$的子空间 $C[-\pi,\pi]$中的标准正交系.

定义2 设$\{x_k\}\subset X$.若$\{x_k\}$中任意有限个元素构成的向量组都是线性无关的,则称$\{x_k\}$是**线性无关系**.

例如,在 $L^2[-1,1]$中,函数系$\{1,t,t^2,\cdots,t^n,\cdots\}$是线性无关系.

显然,非零正交系必是线性无关系.反之不一定成立,但可采

用标准正交化过程将线性无关系转换成标准正交系. 通常采用所谓 Gram-Schmidt 正交化过程.

定理1(Gram-Schmidt) 若$\{x_k\}$是内积空间 X 的线性无关系，则必可作出一个标准正交系$\{e_k\}$，使得$\{x_k\}$与$\{e_k\}$的第 k 个元素均可由另一系的前 k 个元素线性表示，即

$$\mathrm{Span}\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}=\mathrm{Span}\{e_1,e_2,\cdots,e_k\},\quad k=1,2,\cdots,$$

其中 $\mathrm{Span}\{x_1,x_2,\cdots,x_k\}=\{c_1x_1+c_2x_2+\cdots+c_kx_k\,|\,c_i\in P,i=1,2,\cdots,k\}$.

例3 $\{1,t,t^2,\cdots,t^n,\cdots\}$是 $L^2[-1,1]$中的线性无关系，但不是正交系. 利用 Gram-Schmidt 过程，可得 $L^2[-1,1]$中的标准正交系

$$\{P_0(t),P_1(t),P_2(t),\cdots,P_n(t),\cdots\},$$

其中

$$P_0(t)=\sqrt{\frac{1}{2}},$$

$$P_1(t)=\sqrt{\frac{3}{2}}t,$$

$$P_2(t)=\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}t^2-\frac{1}{2}\right),$$

$$\cdots$$

$$P_n(t)=\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\cdot\frac{1}{2^n n!}\cdot\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^2-1)^n,$$

$$\cdots.$$

这恰好是勒让德(Legendre)多项式.

定义3 设$\{e_k\}$是内积空间 X 中的一个标准正交系，$x\in X$，称 $c_k=(x,e_k)$为 x 关于 $e_k(k=1,2,\cdots)$的 **Fourier 系数**，而称

$$\sum_{k=1}^{\infty}c_ke_k=\sum_{k=1}^{\infty}(x,e_k)e_k$$

为 x 关于标准正交系$\{e_k\}$的 **Fourier 级数**.

这里的 Fourier 级数比数学分析中的 Fourier 级数大大拓广了. 任何内积空间中的向量，对任何一个标准正交系都有相应的

Fourier 级数，而且 Fourier 级数的收敛性问题是与 X 中内积的定义有关的.

下面介绍 Fourier 级数的极值性质，或称为内积空间中的最佳逼近性质.

定理2 设 $\{e_k\}$ 是内积空间 X 中一个标准正交系. 对于 X 中的任何元素 x，它的 Fourier 级数的前 n 项部分和 $S_n=\sum_{i=1}^{n}c_ie_i$ 是 x 在空间 $\mathrm{Span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 上的最佳逼近元素，即对任何一组复数 $(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，均有

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}c_ie_i\right\|\leqslant\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\|.$$

证 我们可以证明

$$\left(x-\sum_{i=1}^{n}c_ie_i\right)\perp e_k,\quad k=1,2,\cdots,n,$$

事实上，

$$\begin{aligned}\left(\left(x-\sum_{i=1}^{n}c_ie_i\right),e_k\right)&=(x,e_k)-\sum_{i=1}^{n}c_i(e_i,e_k)\\&=(x,e_k)-c_k=c_k-c_k=0,\quad k=1,2,\cdots,n.\end{aligned}$$

因此，$\left(x-\sum_{i=1}^{n}c_ie_i\right)\perp\mathrm{Span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$，由最佳逼近的充要条件知，$\sum_{i=1}^{n}c_ie_i$ 是 x 在 $\mathrm{Span}\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ 上的最佳逼近元素. 如果不用这个充要条件，也可直接证明如下：

$$\begin{aligned}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\alpha_ie_i\right\|^2&=\left\|\left(x-\sum_{i=1}^{n}c_ie_i\right)+\sum_{i=1}^{n}(c_i-\alpha_i)e_i\right\|^2\\&=\left\|\left(x-\sum_{i=1}^{n}c_ie_i\right)\right\|^2+\left\|\sum_{i=1}^{n}(c_i-\alpha_i)e_i\right\|^2\\&\geqslant\left\|x-\sum_{i=1}^{n}c_ie_i\right\|^2.\ \blacksquare\end{aligned}$$

定理3（Bessel 不等式） 设 $\{e_k\}$ 是内积空间 X 中的一个标准正交系，则对 $\forall x\in X$，不等式

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|(x,e_k)|^2\leqslant\|x\|^2 \tag{4.7}$$

成立.

证 对任何自然数 n,有

$$\begin{aligned}\|x\|^2&=\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k+\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|^2\\&=\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|^2+\|\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|^2.\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\|\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|^2&=(\sum_{k=1}^{n}c_ke_k,\sum_{j=1}^{n}c_je_j)\\&=\sum_{k=1}^{n}c_k\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_j(e_k,e_j)\\&=\sum_{k=1}^{n}c_k\bar{c}_k=\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2.\end{aligned}$$

由此可知

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2.$$

由于范数的非负性,得

$$\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2\leqslant\|x\|^2.$$

由正项级数收敛的充要条件,级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$收敛,且有

$$\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\leqslant\|x\|^2. \blacksquare$$

由 Bessel 不等式很容易说明:内积空间中的任何元素的 Fourier 系数 $c_k\to0(k\to\infty)$. 特别地,当 $f\in L^2[a,b]$时,有

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\cos nx\mathrm{d}x=0,$$

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\int_a^b f(x)\sin nx\mathrm{d}x=0.$$

上述事实表明:给定内积空间 X 中的标准正交系$\{e_k\}$,对于任

何 $x\in X$，都对应 l^2 中一元素 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots)$，其中 $c_i=(x,e_i)$；反之，给定 $\xi=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k,\cdots)\in l^2$，是否对应 X 中的一个元素呢？即级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\xi_k e_k$ 是否一定收敛于 X 中的某个元素呢？一般说来不一定. 但当 X 是完备的内积空间时，结论成立.

定理4（Reisz-Fisher） 设 X 是完备的内积空间，$\{e_k\}$ 是 X 中的标准正交系，则对任何 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots)\in l^2$，都存在唯一元素 $x\in X$，使得

(1) $c_k=(x,e_k),k=1,2,\cdots$；

(2) $x=\sum\limits_{k=1}^{\infty}c_k e_k$；

(3) $\|x\|^2=\sum\limits_{k=1}^{n}|c_k|^2$.

证 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k e_k$. 我们证明 $\{S_n\}$ 是 X 中的基本列. 其实，对于任意的自然数 m,n（假定 $m>n$），可得

$$\|S_m-S_n\|^2=\|\sum_{k=n+1}^{m}c_k e_k\|^2=\sum_{k=n+1}^{m}|c_k|^2.$$

由于 $\{c_k\}\in l^2$，故级数 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$ 收敛. 因此，当 $m,n\to\infty$ 时

$$\|S_m-S_n\|^2=\sum_{k=n+1}^{m}|c_k|^2\to 0,$$

这表明 $\{S_n\}$ 是 X 中的基本列. 由 X 的完备性知，存在唯一元素 $x\in X$，使得

$$x=\lim_{n\to\infty}S_n=\sum_{k=1}^{\infty}c_k e_k.$$

不难证明，对于这个 x，c_k 就是它关于 e_k 的 Fourier 系数. 事实上，对于任意取定的 i，由内积的连续性，可得

$$(x,e_i)=\left(\sum_{k=1}^{\infty}c_k e_k,e_i\right)=\sum_{k=1}^{\infty}(c_k e_k,e_i)$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty} c_k(e_k,e_i)=c_i.$$

最后由$\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2=\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|^2$与$\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|\to 0$，得

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2,$$

或

$$\|x\|=\left(\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2\right)^{\frac{1}{2}}=\|c\|. \blacksquare$$

这表明，对于l^2中的任一序列$\{c_k\}$，都对应着完备的内积空间X中的一个元素x，且元素x的范数与序列$\{c_k\}$的范数相等. 反之，对于完备的内积空间X中的任一元素x，由定理3知，对应了l^2中的一个序列$\{c_k\}$，但两者的范数并不一定相等，只能得到$\|x\|^2\geqslant\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$（Bessel 不等式）. 为什么会出现这种情况呢？问题出在标准正交系$\{e_k\}$没有取“全”. 为了帮助读者理解所谓没有取“全”的含义. 我们选择所熟悉的三维向量空间考虑.

对于三维空间R^3中的任一向量$\boldsymbol{a}$，可以按三个坐标轴上的单位向量$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$分解成

$$\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k},$$

且

$$|\boldsymbol{a}|^2=a_x^2+a_y^2+a_z^2.$$

若$\boldsymbol{a}$没有在空间分解，而在XOY平面上分解，或者说没有取“全”$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$，而只取了$\boldsymbol{i},\boldsymbol{j}$，那就有不等式$|\boldsymbol{a}|^2>a_x^2+a_y^2$. 在一般情况下，我们不知道取“全”了没有，因此将是不等式形式

$$|\boldsymbol{a}|^2\geqslant\sum_i a_i^2.$$

这样，Bessel 不等式的出现就很自然了，同时也提供了取“全”的标志是对一切元素$x\in X$，有

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$$

成立.我们将这一标志以定义形式叙述如下.

定义4 设$\{e_k\}$是内积空间X中的一个标准正交系.如果对每个$x\in X$,都有

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2,\quad c_k=(x,e_k),$$

则称$\{e_k\}$是X中的**完备的标准正交系**,上述等式称为**巴塞弗(Parseval)公式**.

综上所述,若$\{e_k\}$是Hilbert空间H的一个完备的标准正交系,则H与l^2是等距同构的.

若$\{e_k\}$是内积空间X中一个完备的标准正交系,则对X中任何元素x,都可以按$\{e_k\}$展开成Fourier级数

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}c_ke_k,\quad c_k=(x,e_k).$$

反之亦成立.

因此,对于任意$x\in X$都能展开成Fourier级数的充要条件是$\{e_k\}$是X中的完备的标准正交系.

上面所谈及的Fourier级数收敛是指按内积空间中的范数收敛.

例如,在$L^2[-\pi,\pi]$中,

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}},\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x,\frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x,\cdots\right\}$$

是$L^2[-\pi,\pi]$中的一个完备的标准正交系.因此,对任意的$x(t)\in L^2[-\pi,\pi]$,可按这一完备的标准正交系展开成Fourier级数

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt),$$

其中

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\cos kt\mathrm{d}t,\quad k=0,1,2,\cdots,$$

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x(t)\sin kt\mathrm{d}t,\quad k=1,2,3,\cdots.$$

这时级数收敛是指按$L^2[-\pi,\pi]$中的范数$\|x\|=\left(\int_{-\pi}^{\pi}|x(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$收敛，即当$n\to\infty$时

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left[x(t)-\left(\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)\right)\right]^2\mathrm{d}t\to 0,$$

称之为**平均收敛**.

这种收敛并不表示在$[-\pi,\pi]$上逐点收敛，也不表示在$[-\pi,\pi]$上几乎处处收敛. 苏联数学家 H. H. Лузин 在1913年曾猜想，对于三角级数来说是几乎处处收敛的. 以后许多著名的数学家为此付出了辛勤的劳动，直到1966年 Carleson 才证明 Лузин 的猜想是正确的，即

$$x(t)\overset{\text{a.e}}{=}\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

因此，现在可以说，对于$x(t)\in L^2[-\pi,\pi]$，必可展开成几乎处处收敛的三角级数.

由上所述可以看出，找出内积空间X中完备的标准正交系是重要的. 按 Schmidt 方法逐步扩大，找出与已知正交元素组正交的单位元素，如此继续，若能进行到除零元素外，任一$x\in X$都不与已得标准正交系$\{e_k\}$正交时，我们自然会提出问题：这样组成的标准正交系$\{e_k\}$是否一定是X中的完备系呢？一般是不一定的. 为此，我们再给出标准正交系是完全系的概念.

定义5 设$\{e_k\}$是内积空间X中的一个标准正交系. 若X中除零元素外，再也没有元素与所有的$e_k(k=1,2,\cdots)$都正交，则称$\{e_k\}$是X中的**完全系**.

可以证明，$\{e_k\}$是完备系时，$\{e_k\}$一定是完全系. 事实上，若$\{e_k\}$不完全，即$\exists\ x\in X,x\neq\theta$，使$(x,e_i)=0(i=1,2,\cdots)$，于是$c_i=0\ (i=1,2,\cdots)$. 由假设知$\{e_k\}$是完备系，所以 Parseval 公式成立，有

$$\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2=\sum_{k=1}^{\infty}0=0.$$

即$x=\theta$，这与$x\neq\theta$矛盾.

反之一般不真，详细证明参见参考文献[5]。但当 X 是完备的内积空间时，反之亦真.

定理4 设 $\{e_k\}$ 是 Hilbert 空间 H 中的一个标准正交系，则 $\{e_k\}$ 的完备性与完全性等价.

证 $\{e_k\}$ 是完备系则一定是完全系的结论已证明. 现在我们证明，若 $\{e_k\}$ 是完全系，那么 $\{e_k\}$ 一定是完备系. 事实上，若不然，即 $\{e_k\}$ 在 H 中不是完备的标准正交系，则 $\exists x\in H$，使得 $\|x\|^2>\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$，其中 $c_k=(x,e_k)$，$k=1,2,\cdots$. 因为 $\{c_k\}\in l^2$，由定理3知，存在 $y=\sum_{k=1}^{\infty}c_ke_k\in H$，满足

$$\|y\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2<\|x\|^2.$$

因此

$$x-y=x-\sum_{k=1}^{\infty}c_ke_k\neq\theta.$$

另一方面，对任何 $j(j=1,2,\cdots)$，有

$$\begin{aligned}(x-y,e_j)&=(x-\sum_{k=1}^{\infty}c_ke_k,\ e_j)=(x,e_j)-\sum_{k=1}^{\infty}c_k(e_k,e_j)\\&=(x,e_j)-c_j=c_j-c_j=0.\end{aligned}$$

这说明 $x-y$ 与所有的 $e_j(j=1,2,\cdots)$ 正交，而此结果与 $\{e_k\}$ 是完全系矛盾. ▌

由此可知，对 Hilbert 空间 H 来说，要找完备的标准正交系，只须寻找 H 中完全的标准正交系即可. 对一般的 Hilbert 空间来说，可列的完全系不一定能找到，但当 H 是可分的 Hilbert 空间时，是一定可以找到的. 这就是说，可分的 Hilbert 空间一定存在完备的标准正交系.

定理5 每一个可分的 Hilbert 空间 H 都与 l^2(或 R^n)等距且同构.

证 由于 H 中一定存在完备的标准正交系 $\{e_k\}(k=1,2,\cdots)$，

对于 $x\in H$，令 $c_k=(x,e_k)$，$k=1,2\cdots$，由 Parseval 公式知 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots)\in l^2$，且$\|x\|=\|c\|$. 反之，对于任意 $c=(c_1,c_2,\cdots,c_k,\cdots)\in l^2$，由定理3知，

$$x=\sum_{k=1}^{\infty}c_ke_k\in H,$$

且$\|c\|=\|x\|$.

容易证明，H 与 l^2之间的这种对应是一一的、线性的，即 H 与 l^2是线性同构且保范. 因此，H 与 l^2(或 R^n)是等距且同构的. ▌

这个定理知诉我们，抽象可分的 Hilbert 空间可以看成 l^2空间. 由第三章 § 3.6所述可知$(l^2)^*=l^2$. 因此，对可分的 Hilbert 空间 H 亦有 $H^*=H$. 那么，对于一般的 Hilbert 空间情况怎样呢?下一节的 Riesz 表现定理回答了这一问题，从而得到一般的 Hilbert 空间 H 都是自共轭空间，即 $H^*=H$.

§ 4.4 希尔伯特空间的自共轭性与自共轭算子

定理1(Riesz 表现定理) 对于完备的内积空间 H 上的每一个有界线性泛函 f，必存在唯一的 $y\in H$，使得

$$f(x)=(x,y),\ \|y\|=\|f\|.$$

反之，对任一 $y\in H$，由等式 $f(x)=(x,y)$唯一地定义了 H 上的一个有界线性泛函 f，且满足$\|f\|=\|y\|$.

证 设 f 为定义在 H 上的有界线性泛函，若 $f=\theta$，取 $y=\theta$ 即可. 若 $f\neq\theta$，令

$$N(f)=\{x\,|\,f(x)=0,x\in H\},$$

则 $N(f)$是 H 的真闭子空间. 于是，可取非零元素 $x_0\in H$，且 $x_0\perp N(f)$，因为 $x_0\overline{\in}N(f)$，故 $f(x_0)\neq 0$. 于是，对$\forall\ x\in H$，由 f 的线性性，有

$$f\left(x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\right)=f(x)-\frac{f(x)}{f(x_0)}f(x_0)=0.$$

因此，由 $N(f)$的定义，知

$$x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0\in N(f).$$

考虑到 $x_0\perp N(f)$，所以

$$\left(x-\frac{f(x)}{f(x_0)}x_0,x_0\right)=0.$$

即

$$(x,x_0)-\frac{f(x)}{f(x_0)}(x_0,x_0)=0,$$

$$f(x)=\frac{f(x_0)}{\|x_0\|^2}(x,x_0)=\left(x,\frac{\overline{f(x_0)}}{\|x_0\|^2}x_0\right).$$

令 $y=\frac{\overline{f(x_0)}}{\|x_0\|^2}x_0$，则 $y\in H$，且

$$f(x)=(x,y).$$

这说明给定 $f\in H^*$，对应了 $y\in H$，使 $f(x)=(x,y)$.

现在证明这种对应是唯一的，以及$\|f\|=\|y\|$. 设另有 $y'\in H$，使 $f(x)=(x,y')$对一切 $x\in H$ 成立，于是

$$(x,y-y')=0.$$

即 $y-y'$与一切 $x\in H$ 正交，因此 $y-y'=\theta$，即 $y=y'$. 唯一性成立.

由 Schwarz 不等式可知，对一切 $x\in H$，有

$$|f(x)|=|(x,y)|\leqslant\|x\|\|y\|.$$

故得

$$\|f\|\leqslant\|y\|.$$

由于

$$|f(y)|=(y,y)=\|y\|^2,$$

即

$$\|f\|\|y\|\geqslant|f(y)|,$$

故

$$\|f\| \geqslant \|y\|,$$

从而

$$\|f\| = \|y\|.$$

现在设 $y \in H$ 为任一元素，考虑由内积定义的泛函

$$f(x) = (x, y), \forall\, x \in H.$$

由内积定义可知，内积是关于第一变量线性的，故 $f(x)$ 是线性泛函. 由于

$$|f(x)| = |(x, y)| \leqslant \|y\| \|x\|,$$

因此 $\|f\| \leqslant \|y\|$. 从而说明如此定义的 f 是有界线性泛函. 至于 $\|f\| = \|y\|$，上面已经证明. ▌

注意 定理中的完备性条件不能去掉.

这个定理指明：对于任一个 $f \in H^*$，都唯一地对应了 H 中的一个元素 y，且 $\|f\| = \|y\|$；反之，对于任一个元素 $y \in H$，都对应唯一的 $f \in H^*$，且 $\|y\| = \|f\|$. 这说明 H^* 与 H 之间是一一对应的，而且是保范的. 不仅如此，H 与 H^* 之间还是线性同构的. 因此，可以认为 $H = H^*$，即 H 是自共轭空间.

在代数中，我们曾经讲过实对称矩阵，它的特征值均为实数，在复数情况下是 Hermite 矩阵. 现在考虑这种特殊矩阵在无穷维空间的推广.

定义1 设 $T \in B(H, H)$. 若对任何 $x, y \in H$，都有

$$(Tx, y) = (x, Ty),$$

则称 T 为**自共轭算子(或自伴算子或 Hermite 算子)**.

例1 设

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

其中 $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. 又设 $x = (\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n) \in R^n$，定义算子

$$Tx=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)=y,$$

其中 $y\in R^n$，且 $\eta_i=\sum\limits_{j=1}^{n}a_{ji}\xi_j,i=1,2,\cdots,n$. 则 T 是 Hilbert 空间 $R^n\to R^n$ 的自伴算子.

证 对于$\forall\ x,z\in R^n$，令 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n),z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$，则

$$\begin{aligned}(Tx,z)&=\sum_{i=1}^{n}\eta_i\bar{\zeta}_i=\sum_{i=1}^{n}\Big(\sum_{j=1}^{n}a_{ji}\xi_j\Big)\bar{\zeta}_i\\&=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\sum_{i=1}^{n}a_{ji}\bar{\zeta}_i=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\overline{\Big(\sum_{i=1}^{n}a_{ij}\zeta_i\Big)}\\&=\sum_{j=1}^{n}\xi_j\bar{\eta}_j=(x,Tz).\end{aligned}$$

故 T 为自伴算子. ▌

定理2 设 $T\in B(H;H)$，则 T 为自伴算子的充要条件是对于 $\forall\ x\in H,(Tx,x)$均为实数.

证 必要性. 设 T 为自伴算子，证明(Tx,x)均为实数. 事实上，按自伴算子定义，有

$$(Tx,x)=(x,Tx)=(\overline{Tx,x}).$$

故(Tx,x)对任何 x 均为实数.

充分性. 设对于$\forall\ x\in H,(Tx,x)$均为实数，要证明 T 为自伴算子，即证对任何 $x,y\in H$，有$(Tx,y)=(x,Ty)$成立. 类似于 § 4. 1中的极化恒等式，有

$$\begin{aligned}(Tx,y)=\frac{1}{4}\big[&(T(x+y),(x+y))-(T(x-y),(x-y))\\&+\mathrm{i}(T(x+\mathrm{i}y),(x+\mathrm{i}y))-\mathrm{i}(T(x-\mathrm{i}y),(x-\mathrm{i}y))\big].\end{aligned}\tag{4.8}$$

由于(Tx,x)为实数，可知$(Tx,x)=(x,Tx)$，所以有

$$(Tx,y)=\frac{1}{4}\big[((x+y),T(x+y))-((x-y),T(x-y))$$

$$+i((x+iy),T(x+iy))-i((x-iy),T(x-iy))]$$
$$=(x,Ty).$$

因此，T 为自伴算子.

定理3 (1) 设 T 是自伴算子，当 λ 为实数时，$\lambda T, T-\lambda I$ 也是自伴算子；

(2) 两个自伴算子 T_1, T_2 相等的充要条件是对任何 $x\in H$，有 $(T_1x,x)=(T_2x,x)$；

(3) 设 T_1, T_2 都为自伴算子，则 T_1T_2 也是自伴算子的充要条件是 $T_1T_2=T_2T_1$；

(4) 设 T_1, T_2 都是自伴算子，则 T_1+T_2 也是自伴算子；

(5) 设 $T_n(n=1,2,\cdots)$ 是自伴算子列，且 $\|T_n-T\|\to 0(n\to\infty)$，则 T 是自伴算子.

证 (1) 因为 T 是自伴算子，所以，对任何 $x\in H$，(Tx,x) 均为实数. 当 λ 为实数时，$(\lambda Tx,x)=\lambda(Tx,x)$ 也为实数，故 λT 也是自伴算子.

由于 $((T-\lambda I)x,x)=(Tx,x)-\lambda(x,x)$ 为实数，故 $T-\lambda I$ 为自伴算子.

(2) 因为对任何 $x\in H$，$(T_1x,x)=(T_2x,x)$，故由(4.8)式可得，对任何 $x,y\in H$，有
$$(T_1x,y)=(T_2x,y),$$
即
$$((T_1-T_2)x,y)=0.$$
取 $y=(T_1-T_2)x$，则
$$((T_1-T_2)x,(T_1-T_2)x)=\|(T_1-T_2)x\|^2=0,$$
即
$$(T_1-T_2)x=0.$$
所以 $T_1=T_2$.

(3) 必要性. 若 T_1T_2 是自伴算子，则对任何 $x\in H$，有
$$(T_1T_2x,x)=(x,T_1T_2x).$$

另一方面，由于 T_1，T_2都是自伴算子，并且它们都是 $H\to H$ 的有界线性算子，故有

$$(T_1T_2x,x)=(T_2x,T_1x)=(x,T_2T_1x).$$

因此，对任何 $x\in H$，有

$$(x,T_1T_2x)=(x,T_2T_1x),$$

由(2)可知 $T_1T_2=T_2T_1$.

充分性. 若 $T_1T_2=T_2T_1$，则 T_1T_2必为自伴算子. 事实上，由 T_1，T_2的自伴性以及 $T_1T_2=T_2T_1$，有

$$(T_1T_2x,x)=(x,T_2T_1x)=(x,T_1T_2x).$$

所以，(T_1T_2x,x)均为实数，故 T_1T_2必为自伴算子.

(4) 因为$((T_1+T_2)x,x)=(T_1x,x)+(T_2x,x)$为实数，故 T_1+T_2为自伴算子.

(5) 因为 T_n 按范数收敛于 T，故 T_n 强收敛于 T，即对任何 $x\in H$，$T_nx\to Tx$，由内积的连续性，有

$$\lim_{n\to\infty}(T_nx,x)=(Tx,x).$$

由于 T_n 为自伴算子，故(T_nx,x)均为实数，因此(Tx,x)为实数，从而 T 为自伴算子. ▌

定理4 设 T 是自伴算子，则

(1) T 的特征值都是实数；

(2) 对应于 T 的不同特征值的特征元素相互正交.

证 (1) 设 λ 为 T 的特征值，x 是对应于 λ 的特征元素，即 $Tx=\lambda x$，从而

$$(Tx,x)=(\lambda x,x)=\lambda\|x\|^2.$$

因为 T 是自伴算子，故(Tx,x)为实数. 又由于$\|x\|^2$为实数，故 λ 必为实数.

(2) 设 λ_1，λ_2都是 T 的特征值，且 $\lambda_1\neq\lambda_2$，x_1，x_2分别是对应于特征值 λ_1，λ_2的特征元素，即

$$Tx_1=\lambda_1x_1,\quad Tx_2=\lambda_2x_2.$$

因为 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以 λ_1，λ_2中必有一特征值不为零，设 $\lambda_1\neq0$，考虑到 T，

是自伴算子，可得

$$
\begin{aligned}
(x_1,x_2) &= \frac{1}{\lambda_1}(\lambda_1 x_1,x_2)=\frac{1}{\lambda_1}(Tx_1,x_2) \\
&= \frac{1}{\lambda_1}(x_1,Tx_2)=\frac{1}{\lambda_1}(x_1,\lambda_2 x_2) \\
&= \frac{\bar{\lambda}_2}{\lambda_1}(x_1,x_2)=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(x_1,x_2).
\end{aligned}
$$

由于 $\lambda_1\neq\lambda_2$，所以$\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\neq 1$. 由 $\left(1-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)(x_1,x_2)=0$可知，$(x_1,x_2)=0$，即 $x_1\perp x_2$. ▌

前面，我们介绍了内积空间中标准正交系$\{e_k\}_1^\infty$的完全性、完备性概念以及 Paseval 等式，并讨论了级数的展开问题. 内积空间中的这些优美性质在 Banach 空间中是没有的. 但是，如果我们注意到 Hilbert 空间的自共轭性以及 H 中的线性有界泛函的一般表达式就是内积这一事实，就会自然地将 Banach 空间中的有界线性泛函视为内积的作用，而把标准正交系以及它的完全性、完备性等概念，连同它们可展性的结论推广到 Banach 空间中去.

设 X 为赋范空间，X^* 为 X 的共轭空间，$\{e_k\}$为 X 中的元素列，$\{f_n\}$为 X^* 中的元素列. 若对任何的 i,j，有

$$f_i(e_j)=\delta_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,$$

则称$\{e_k\}$，$\{f_j\}$构成**双正交系**.

若对$\forall\ x\in X,f\in X^*$，有

(1) 当 $f_i(x)=0(i=1,2,\cdots)$时，有 $x=0$;

(2) 当 $f(e_i)=0(i=1,2,\cdots)$时，有 $f=0$，

则称双正交系$\{e_i\}$，$\{f_j\}$为**完全的**.

若对$\forall F\in X^*$，泛函序列 $F_n=\sum_{i=1}^{n}F(e_i)f_i$ 弱*收敛于 F，即对于$\forall x\in X$，有

$$F_n(x)\to F(x)(n\to\infty),$$

则称双正交系$\{e_i\}$，$\{f_j\}$为**完备的**.

当 $X=H$ 时，由于 $H=H^*$，故$\{e_i\}$，$\{f_i\}$是同一空间中的元素

列. 假若$\{e_i\}$与$\{f_i\}$是一致的，则双正交系退化为普通正交系，而且知道这里所定义的完全性和完备性与在内积空间中的定义一致，可以证明：

1° 若$\{e_i\}$，$\{f_i\}$是完备的双正交系，则必为完全的双正交系；

2° 若$\{e_i\}$，$\{f_j\}$是 Banach 空间 X 中的完备双正交系，则对$\forall x\in X$，必可展成广义的 Fourier 级数

$$x=\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)e_i;$$

3° 设$\{e_i\}$，$\{f_j\}$是 Banach 空间 X 中的完全双正交系，则$\{e_i\}$，$\{f_j\}$是完备正交系的充要条件是

$$\sup\left\|\sum_{i=1}^{\infty}f_i(x)e_i\right\|<\infty,\ \forall x\in X.$$

上述结论的证明参见参考文献[10]. 关于这方面更深入的研究，请阅读参考文献[11].

习　题

1. 试在 $C[a,b]$上定义一种内积，并写出此内积诱导出来的范数与距离，这样的内积空间是完备的内积空间吗？

2. 设 $R_1,R_2,\cdots,R_n,\cdots$是一列内积空间，令

$$R=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\,|\,x_n\in R_n,n=1,2,\cdots;\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|^2<+\infty\}.$$

在 R 中定义运算

$$\alpha\{x_n\}+\beta\{y_n\}=\{\alpha x_n+\beta y_n\},$$

其中 α,β 是复数，并定义

$$(\{x_n\},\{y_n\})=\sum_{n=1}^{\infty}(x_n,y_n),$$

证明 R 是内积空间.

3. 设 H 是内积空间，$x_1,x_2,\cdots,x_n\in H$，适合条件

$$(x_i,x_j)=\delta_{ij},\ \ i,j=1,2,\cdots,n.$$

证明 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关.

4. 举出两个赋范线性空间 X 的例子，使 X 上的范数不能由内积诱导出来.

5. 设 U 是完备的内积空间，M 是 U 的线性子空间，若对任何 $x\in U$，x 在 M 上的正交投影都存在，证明 M 是闭的.

6. 证明内积空间中的标准正交系是线性无关系；并举例说明反之未必成立.

7. 证明内积空间中的内积 (x,y) 关于两个变元都是连续函数.

8. 设 $x(t)\in C[-\pi,\pi]$，求出 $x(t)$ 的 n 次最佳三角多项式逼近.

9. 设 $\{e_n\}$ 是完备的内积空间 H 中的标准正交系，则 $\{e_n\}$ 是完全系的充要条件是 $\{e_n\}$ 的线性组合在 H 中稠密.

10. 设 T_1,T_2 是 Hilbert 空间 H 到自身的有界线性算子，若对任何 $x,y\in H$，有

$$(T_1x,y)=(T_2x,y),$$

则 $T_1=T_2$.

11. 若 T 是 H 中的自共轭算子，λ 为实数，则 λT，$T-\lambda I$ 都是自共轭算子.

12. 若 T_1,T_2 是 H 中的两个自共轭算子，则 T_1T_2 是自共轭算子的充分必要条件为

$$T_1T_2=T_2T_1.$$

13. 设 $\{\alpha_n\}$ 是有界实数列，在 l^2 中定义算子 A 如下：

$$y=Ax=(\alpha_1\xi_1,\alpha_2\xi_2,\cdots,\alpha_n\xi_n,\cdots),$$

其中 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots)\in l^2$，证明 A 是自共轭算子.

14. 设 M,N 为内积空间 U 中的子集，且 $M\perp N$. 证明 $N\subset M^{\perp}$，$M\subset N^{\perp}$.

15. 设 M,N 是内积空间 U 中的子集，且 $M\subset N$，证明 $N^{\perp}\subset M^{\perp}$.

16. 设 A 是复内积空间 U 上的有界线性算子，如果对每一 $x\in U$，$(Ax,x)=0$，则 $A=0$. 对实内积空间成立吗？如果 A 是自共轭的，

则不论 U 是实的或复的内积空间，只要对任一 $x\in U$，有 $(Ax,x)=0$，就一定有 $A=0$.

第 二 编

变 分 法

第五章　变分概念与变分法基本引理

在17世纪末18世纪初，人们在研究多元函数极值的同时，就展开了更广泛意义下函数极值问题的讨论. 这些问题中最著名的要数由 James Bernoulli 提出的所谓捷线问题，这是变分法发展的一个标志，于是就逐步形成并发展了变分学. 变分学研究的主要内容就是泛函的极值，凡有关求泛函极值的问题都称作**变分问题**. 变分法是数学分析的一个分支，是微分学中处理函数极值方法的扩展. 变分法理论的发展与力学、物理学等其它自然科学的发展有着密的联系，它在自然科学和工程技术中有着广泛的应用，特别在探讨"最佳方案"、"最优设计"等方面的作用尤为显著. 本章先从几个实例开始，介绍变分概念和变分法基本引理，为讨论泛函极值的必要条件作准备.

§5.1　变分问题的几个实例

例1（捷线问题或最佳降线问题，James Bernoulli 1676年提出） 在同一铅直平面内所有连接不在同一铅直线上的两点 A 和 B 的曲线中，求一条曲线 Γ，使初速度为零的质点仅在重力作用下，自较高点 A 沿 Γ 滑到点 B 所需时间最短.

为了方便起见，选取如图5.1所示的坐标系. 设曲线 Γ 的方程为 $y=y(x)(0\leqslant x\leqslant a)$，质点下滑到点 $M(x,y)$时的速率为 v，质点的质量为 m，则质点从 A 滑至 M 失去的势能为 mgy，而获得的功能为

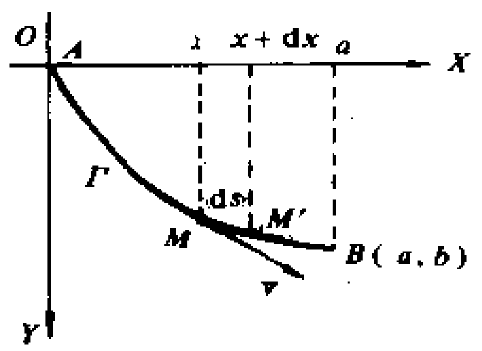


图 5.1

$\frac{1}{2}mv^2$. 由能量守恒定律，有

$$mgy = \frac{1}{2}mv^2,$$

即

$$v = \sqrt{2gy}.$$

设 A 为计算曲线弧长的起点，则

$$\frac{ds}{dt} = v = \sqrt{2gy},\quad ds = \sqrt{1+y'^2}dx.$$

于是

$$dt = \frac{ds}{v} = \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx.$$

从 A 至 B 积分，设所需的总时间为 T，则得

$$T = \int_0^T dt = \int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx.$$

泛函 T 的值与 $y=y(x)$ 有关，$T=T[y(x)]$. 于是捷线问题归结为：求光滑曲线 $\Gamma: y=y(x)\ (0\leqslant x\leqslant 1)$，在其满足条件 $y(0)=0, y(a)=b$ 下使泛函 $T[y(x)]$ 取极小值.

例2(短程线问题) 设 $A(x_0,y_0,z_0)$ 和 $B(x_1,y_1,z_1)$ 为曲面 Σ: $\varphi(x,y,z)=0$ 上的两点，求在曲面 Σ 上过 A 和 B 的长度为最短的曲线. 所求曲线称为短程线或测地线. 例如，球面上两点间的短程线就是过这两点大圆上的一段劣弧.

如图5.2所示. 设过 A,B 的曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1,$$

则曲线 Γ 的长度为

$$L = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+y'^2+z'^2}dx\ . \tag{5.2}$$

泛函 L 的值与 Γ 有关，即 L 与 $y=y(x), z=z(x)$ 有关. 记 $L=$

$L[y(x),z(x)]$，于是短程线问题归结为：求曲线

$$\Gamma:\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x), \end{cases} \qquad x_0 \leqslant x \leqslant x_1,$$

在其满足边界条件

$$\begin{cases} y_0=y(x_0), \\ z_0=z(x_0), \end{cases} \qquad \begin{cases} y_1=y(x_1), \\ z_1=z(x_1), \end{cases}$$

及约束条件

$$\varphi(x,y(x),z(x))=0$$

下使泛函(5.2)式取极小值.

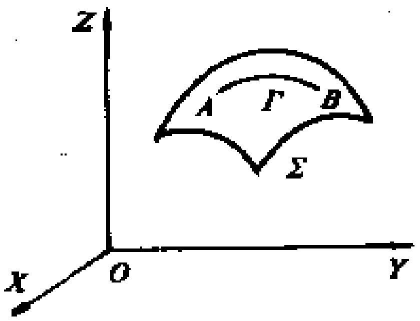


图 5.2

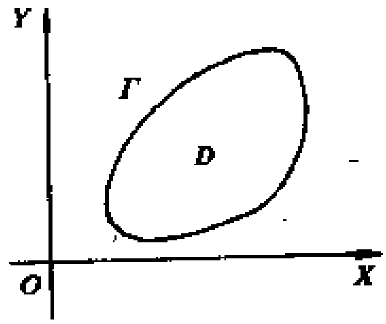


图 5.3

例3(等周问题) 求长为定值 l 的平面封闭曲线 Γ，使其所围成的平面区域 D 之面积最大.

该问题称为等周问题.设曲线 Γ 的方程为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \qquad t_0 \leqslant t \leqslant t_1,$$

$$x(t_0)=x(t_1), y(t_0)=y(t_1),$$

由弧长公式知

$$l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

由 Green 公式，Γ 所围面积 A 为

$$A=\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_\Gamma x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(xy'-yx')\mathrm{d}t. \quad (5.3)$$

泛函 A 的值与 $x(t),y(t)$ 有关. 记 $A=A[x(t),y(t)]$，于是等周问题归结为：求一对函数 $x=x(t),y=y(t)$，在其满足条件

$$\begin{cases} x(t_0)=x(t_1), \\ y(t_0)=y(t_1), \end{cases}$$

和等周条件

$$l=\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t$$

下使泛函(5.3)式取极大值.

例4(最小旋转曲面问题) 在 XOY 平面内求一条边界固定的曲线，使其绕横轴旋转所产生的空间曲面面积最小.

如图5.4所示，设过点 $A(x_0,y_0),B(x_1,y_1)$ 的曲线方程为

$$y=y(x),\quad x_0\leqslant x\leqslant x_1,$$

则旋转曲面的面积 S 为

$$S=2\pi\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x. \tag{5.4}$$

泛函数 S 的值与 $y=y(x)$ 有关，记 $S=S[y(x)]$. 于是最小旋转曲面问题归结为：求曲线 $y=y(x)(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$，在其满足边界条件

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0, \\ y(x_1)=y_1, \end{cases}$$

下使泛函(5.4)取极小值.

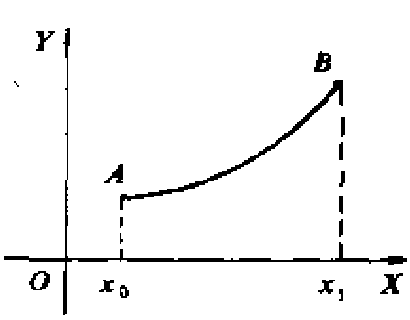


图 5.4

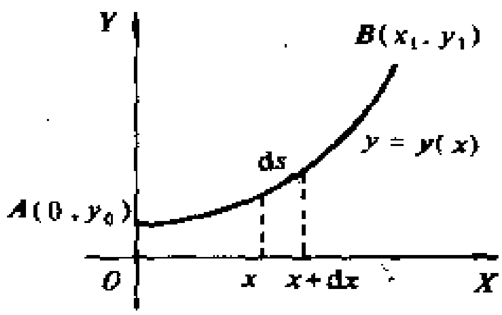


图 5.5

例5(悬链形状问题) 求长度为 l，两端系于 A,B 两点绝对柔

软而不伸长的匀质链的形状.

取坐标系如图5.5所示. 设链的方程为 $y=y(x)$ $(0\leqslant x\leqslant x_1)$, 链的线密度为 ρ. 按位能原理, 链的形状应使链具有最小位能. 小弧段 ds 的位能为

$$dU = \rho ds \cdot gy = \rho gy \sqrt{1+y'^2}dx,$$

链的总位能为

$$U = \rho g\int_0^{x_1} y\sqrt{1+y'^2}dx. \tag{5.5}$$

泛函 U 的值与曲线 $y=y(x)$ 有关, 记 $U=U[y(x)]$. 于是悬链形状问题归结为: 求函数 $y=y(x)$, 使其满足条件

$$\begin{cases} y(0) = y_0, \\ y(x_1) = y_1, \\ \int_0^{x_1}\sqrt{1+y'^2}dx = l, \end{cases}$$

且使泛函(5.5)式取极小值.

综合上述五个问题, 可见:

1° 都是求泛函的极值, 但有的只有一个变元 $y(x)$(如例1), 有的有两个变元 $y(x)$和 $z(x)$(如例2).

2° 边界都是固定的, 端点都有不变的值.

3° 除边界条件外, 有些再无其它条件, 有些则另附其它条件. 在有其它条件的情况下, 有的条件是一般函数, 有的条件本身也是一个泛函, 其中固定边界且无条件的泛函是最简单也是最基本的泛函.

上述问题将在本编中陆续解决.

§ 5.2 变分概念

定义1 设 $J[y(x)]$是定义在函数集合 $Y=\{y(x)\}$上的泛函,

称 $y(x)$为 $J[y(x)]$的宗量,y 为 $J[y(x)]$的定义域(或容许曲线类(簇)).

例 1 设 $y(x)\in C[0,1]$,且 $J[y(x)]=\int_0^1 y(x)\mathrm{d}x$,试求 $J[\frac{1}{x+1}]$,$J[\mathrm{e}^x]$ 及 $J[\frac{1}{1+x^2}]$.

解 $J[\frac{1}{x+1}]=\int_0^1\frac{1}{x+1}\mathrm{d}x=\ln 2$;

$J[\mathrm{e}^x]=\int_0^1\mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}-1$;

$J[\frac{1}{1+x^2}]=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4}$.

定义2 泛函 $J[y(x)]$的宗量 $y(x)$与另一宗量 $y_0(x)$之差称为**宗量 $y(x)$的变分**,记为

$$\delta y=\delta y(x)=y(x)-y_0(x).$$

定义3 若 $\max|y(x)-y_0(x)|$很小,则称 $y(x)$与 $y_0(x)$具有**零阶接近**,称函数集合

$$\{y(x)\,\big|\,|y(x)-y_0(x)|<\delta\}$$

为 $y_0(x)$的**零阶 δ-邻域**. 设 k 为正整数,若

$$\max\{|y(x)-y_0(x)|,|y'(x)-y'_0(x)|,\cdots,|y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}|\}$$

很小,则称 $y(x)$与 $y_0(x)$有 **k 阶接近**,称函数集合

$$\{y(x)\,|\max[|y(x)-y_0(x)|,\cdots,|y^{(k)}(x)-y_0^{(k)}(x)|]<\delta\}$$

为 $y_0(x)$的 **k 阶 δ-邻域**.

定义4 如果对$\forall\ \varepsilon>0$,使对 $y_0(x)$的 k 阶 δ-邻域中的任何 $y(x)$,都有

$$|J[y(x)]-J[y_0(x)]|<\varepsilon,$$

则称 $J[y(x)]$是在 $y_0(x)$处具有 **k 阶接近度的连续泛函**.

定义5 设 $F(x,y,y')$是关于三个变元 x,y,y'的二阶连续可微的函数,x 任意固定,$\eta(x)$是任意可微函数,ε 是小参数,则 $F(x,y,y')$的增量为

$$\Delta F=F(x,y+\varepsilon\eta,y'+\varepsilon\eta')-F(x,y,y').$$

按 Taylor 公式，有

$$\Delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\varepsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\eta' + R_1,$$

其中 R_1 是较 $\varepsilon \to 0$ 时高阶的无穷小. 称

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\varepsilon\eta + \frac{\partial F}{\partial y'}\varepsilon\eta'$$

为函数 $F(x,y,y')$ 的变分.

特别地，令 $F(x,y,y')=y$，则 $\delta y=\varepsilon\eta$；令 $F(x,y,y')=y'$，则 $\delta y'=\varepsilon\eta'$. 由此得

$$(\delta y)' = (\varepsilon\eta)' = \varepsilon\eta' = \delta y',$$

$$(\delta y)'' = (\delta y')' = \delta y'',$$

$$\cdots$$

$$(\delta y)^{(k)} = \delta y^{(k)}.$$

可见变分记号与微分记号是允许交换的，且

$$\delta F = \frac{\partial F}{\partial y}\delta y + \frac{\partial F}{\partial y'}\delta y'.$$

例2 设 F_1, F_2 都是 x,y,y' 的可微函数. 试证：

1° $\delta(F_1+F_2)=\delta F_1+\delta F_2$； 2° $\delta(F_1F_2)=F_1\delta F_2+F_2\delta F_1$.

证 1° $\delta(F_1+F_2)=\frac{\partial}{\partial y}(F_1+F_2)\delta y+\frac{\partial}{\partial y'}(F_1+F_2)\delta y'$

$$=\left(\frac{\partial F_1}{\delta y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial y'}\delta y'\right)+\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial y'}\delta y'\right)$$

$$=\delta F_1+\delta F_2;$$

2° $\delta(F_1F_2)=\frac{\partial}{\partial y}(F_1F_2)\delta y+\frac{\partial}{\partial y'}(F_1F_2)\delta y'$

$$=\left(F_1\frac{\partial F_2}{\partial y}+F_2\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\delta y+\left(F_1\frac{\partial F_2}{\partial y'}+F_2\frac{\partial F_1}{\partial y'}\right)\delta y'$$

$$=F_1\left(\frac{\partial F_2}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_2}{\partial y'}\delta y'\right)+F_2\left(\frac{\partial F_1}{\partial y}\delta y+\frac{\partial F_1}{\partial y'}\delta y'\right)$$

$$=F_1\delta F_2+F_2\delta F_1. \blacksquare$$

回顾函数 $y=f(x)$ 微分的定义：若 $\Delta y=f(x+\Delta x)-f(x)=A\Delta x+o(\Delta x)$，其中 A 是与 Δx 无关的常数，$o(\Delta x)$ 是比 Δx 更高阶的无穷

小，则称

$$dy=df=A\Delta x=f'(x)\Delta x$$

为函数 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分. 此外，若 α 是小参数，将 $f(x+\alpha\Delta x)$ 对 α 求导，得

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)=f'(x+\alpha\Delta x)\Delta x.$$

于是 $y=f(x)$ 在点 x 处的微分又可定义为

$$dy=df=\frac{\partial}{\partial\alpha}f(x+\alpha\Delta x)\big|_{\alpha=0}.$$

泛函的变分定义与上述定义类似.

定义6 如果泛函 $J[y(x)]$ 的增量 $\Delta J=J[y+\delta y]-J[y]$ 可表示为

$$\Delta J=J[y,\delta y]+\beta(y,\delta y)\max|\delta y|,$$

其中 $J[y,\delta y]$ 对 δy 而言是线性的，且当 $\delta y\to0$ 时，$\beta(y,\delta y)\to0$，则称 $J[y,\delta y]$ 为泛函 $J[y]$ 的**变分**，记为 δJ，即

$$\delta J=J[y,\delta y].$$

为了应用方便，我们再给出另一种较弱的变分定义. 考虑含参数 α 的一系列容许曲线 $y(x)+\alpha\delta y$，将 $y(x)$，δy 任意固定，而把泛函 $J[y+\alpha\delta y]$ 看成参数 α 的函数，记为 $\Phi(\alpha)=J[y+\alpha\delta y]$.

定义7 如果 $\Phi'(0)=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y+\alpha\delta y]\big|_{\alpha=0}$ 存在，则称 $\Phi'(0)$ 为泛函 $J[y]$ 的**变分**，仍将其记为 δJ，即

$$\delta J=\Phi'(0)=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y+\alpha\delta y]\big|_{\alpha=0}.$$

下面我们考察这两种定义下的变分之间的关系.

定理1 对于泛函 $J[y]$，若按定义6的变分存在，则在定义7意义下 $J[y]$ 的变分也存在并且两者相等.

证 设 $\delta J=J[y,\delta y]+\beta(y,\delta y)\max|\delta y|$，则

$$\Phi'(0)=\lim_{\alpha\to0}\frac{\Phi(\alpha)-\Phi(0)}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{J[y + \alpha\delta y] - J[y]}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \frac{J[y, \alpha\delta y] + \beta(y, \alpha\delta y)\max|\alpha\delta y|}{\alpha}$$

$$= \lim_{\alpha \to 0} \{J[y, \delta y] \pm \beta(y, \alpha\delta y)\max|\delta y|\}.$$

当 $\alpha \to 0$时 $\alpha\delta y \to 0$，从而 $\beta(y, \alpha\delta y) \to 0$，故

$$\Phi'(0) = J[y, \delta y] = \delta J. \quad \blacksquare$$

虽然有定理1的结论，但是定义6和定义7所定义的两种变分并不一定相等，即存在这样的泛函，它在定义7意义下的变分存在，但在定义6意义下的变分却不存在(参见参考文献[4])。不过对于大多数常见的泛函而言，这两种变分还是相同的。在以后研究变分问题时，上述两种意义下的变分都会遇到，具体应用哪一种变分要视具体情况而定。我们还将讨论形式更为复杂的泛函，它们的变分也可以类似地定义，并且也有上述类似的关系。

定义8 设 $y_0(x)$是泛函 $J[y]$的容许曲线簇 Y 中的某一函数，若对$\forall\ y \in Y$，都有

$$J[y(x)] \leqslant J[y_0(x)] (\text{或 } J[y(x)] \geqslant J[y_0(x)]),$$

则称泛函 $J[y]$在 $y_0(x)$处达到**极大(小)值**(或**绝对极大(小)值**)，并称 $y_0(x)$为 $J[y]$的**极大(小)值曲线**。

若对于 $y_0(x)$的零阶 δ-邻域内的所有函数 $y(x)$，都有

$$J[y(x)] \leqslant J[y_0(x)] (\text{或 } J[y(x)] \geqslant J[y_0(x)]),$$

则称泛函 $J[y]$在 $y_0(x)$处达到**强极大(小)值**。

若对于 $y_0(x)$的一阶 δ-邻域内的所有函数 $y(x)$，都有

$$J[y(x)] \leqslant J[y_0(x)] (\text{或 } J[y(x)] \geqslant J[y_0(x)]),$$

则称泛函 $J[y]$在 $y_0(x)$处达到**弱极大(小)值**。

推论1 强极值必是弱极值，但反之不真。

推论2 绝对极值必是强极值。

推论3 泛函 $J[y]$达到绝对极值的必要条件也是达到弱极值的必要条件，更是达到强极值的必要条件。

定理2 若具有变分的泛函 $J[y(x)]$在 $y = y_0(x)$达到极值，则

$\delta J|_{y=y_0(x)}=\delta J[y_0(x)]=0.$

证 $\Phi(\alpha)=J[y_0(x)+\alpha\delta y]$在 $\alpha=0$时达到极值，故 $\Phi'(0)=0$，即 $\delta J[y_0(x)]=0$. ▌

§5.3 变分法基本引理

基本引理1 设 $\Phi(x)\in C[x_0,x_1]$，如果对$\forall\ \eta(x)\in C'[x_0,x_1]$，$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$，都有

$$\int_{x_0}^{x_1}\Phi(x)\eta(x)\mathrm{d}x=0,$$

则在区间$[x_0,x_1]$上，$\Phi(x)\equiv0$.

证 用反证法. 假设 $\Phi(x)$在$[x_0,x_1]$中的某点 ξ 处不等于零，不妨设 $\Phi(\xi)>0$. 由 $\Phi(x)$的连续性知，必存在区间$[\xi_0,\xi_1]$，使 $\xi\in[\xi_0,\xi_1]\subset[x_0,x_1]$，并且当 $x\in[\xi_0,\xi_1]$时 $\Phi(x)>0$. 取

$$\eta(x)=\begin{cases}0, & x_0\leqslant x\leqslant\xi_0\\(x-\xi_0)^2(x-\xi_1)^2, & \xi_0<x<\xi_1\\0, & \xi_1\leqslant x\leqslant x_1\end{cases}$$

则 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$，$\eta'(x)$在$[x_0,x_1]$上连续，即 $\eta(x)$适合引理1的条件. 但是

$$\int_{x_0}^{x_1}\Phi(x)\eta(x)\mathrm{d}x=\int_{\xi_0}^{\xi_1}\Phi(x)(x-\xi_0)^2(x-\xi_1)^2\mathrm{d}x>0,$$

与引理假设矛盾，故 $\Phi(x)\equiv0$. ▌

注意 如果将引理1的条件"对于$\forall\eta(x)\in C^1[x_0,x_1]$，$\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$"改为"对于$\forall\eta(x)\in C^n[x_0,x_1]$，$\eta^{(k)}(x_0)=\eta^{(k)}(x_1)=0$，$k=0,1,\cdots,n-1$"，其它条件不变，引理仍成立.

基本引理2 设 D 为平面区域，D 的边界为 Γ，$\Phi(x,y)\in C(D)$，若对任一在 $D+\Gamma$ 上连续可微且在 Γ 上取零值的函数 $\eta(x,y)$，都有

$$\iint_D \Phi(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0,$$

则在 D 上 $\Phi(x,y)\equiv 0$.

证 用反证法. 假设∃ $(\xi,\zeta)\in D$，使 $\Phi(\xi,\zeta)\neq 0$，不妨设 $\Phi(\xi,\zeta)>0$. 由 $\Phi(x,y)$的连续性知，∃ $\rho>0$，使 $\Phi(x,y)$在圆 S_ρ：$(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2<\rho$ 内仍为正，且 $S_\rho\subset D$. 作函数

$$\eta(x,y)=\begin{cases}0, & (x-\xi)^2+(y-\zeta)^2\geqslant\rho^2,\\ [(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2-\rho^2]^2, & (x-\xi)^2+(y-\zeta)^2<\rho^2,\end{cases}$$

这样的函数 $\eta(x,y)\in C^1(D)$，且 $\eta(x,y)|_\Gamma=0$. 但是

$$\iint_D \Phi(x,y)\eta(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint_{S_\rho}\Phi(x,y)[(x-\xi)^2+(y-\zeta)^2-\rho^2]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0.$$

与引理假设矛盾，故 $\Phi(x,y)\equiv 0$. ▌

习　　题

将下面的变分问题(1—3)写成数学表达式，并写出相应的边界条件：

1. 用一条长为 l 的连续可微曲线将坐标原点与位于 x 轴上一点 $P(a,0)$连接起来，使曲线与 x 轴所围面积最大.

2. 通过 XOY 平面上纵轴同侧的两定点，连接一曲线段，使曲线段绕纵轴旋转所成的旋转曲面的面积最小.

3. 费马(Fermat)原理说：通过介质的光路，使光线通过这一段光路所需时间为最短. 试以二维空间为例写出这一原理的数学表达式.

4. 已知 $J[y(x)]=\int_{-R}^{R}y\mathrm{d}x$，求 $J[\sqrt{R^2-x^2}]$.

5. 已知 $J[y(x)]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}y\mathrm{d}x$，求 $J[\sin^n x]$ 及 $J[\cos^n x]$.

6. 已知 $J[y(x)]=\int_a^b \sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$，求 $J[a\operatorname{ch}\frac{x}{a}]$，其中 $a>0$.

7. 求泛函 $J_1=\int_{x_0}^{x_1}(2y'+3y^2)\mathrm{d}x$ 和 $J_2=\int_{x_0}^{x_1}(x^4y'+x^3y+3)\mathrm{d}x$ 的变分.

8. 证明：

(1) $\delta(\frac{F_1}{F_2})=\frac{F_2\delta F_1-F_1\delta F_2}{F_2^2}$;

(2) $\delta F^n=nF^{n-1}\delta F$;

(3) $\delta y^{(n)}=(\delta y)^{(n)}$;

(4) $\delta\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}\delta F(x,y,y')\mathrm{d}x$.

9. (1) 设函数 $f(x)\in C^1[x_0,x_1]$，对任意的函数 $\eta(x)\in C^1[x_0,x_1]$，且 $\eta(x_0)=\eta(x_1)=0$，都有

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\eta'(x)\mathrm{d}x=0,$$

试证：在区间 $[x_0,x_1]$ 上 $f(x)$ 恒等于常数.

(2) 设函数 $f(x)\in C^1[x_0,x_1]$，对任意的函数 $\eta(x)\in C^n[x_0,x_1]$，且 $\eta^{(k)}(x_0)=\eta^{(k)}(x_1)=0$，$k=0,1,2,\cdots,n-1$，都有

$$\int_{x_0}^{x_1}f(x)\eta^{(n)}(x)\mathrm{d}x=0,$$

试证：在区间 $[x_0,x_1]$ 上 $f(x)$ 是 $n-1$ 次多项式.

第六章　固定边界的变分问题

第五章介绍了变分概念以及变分引理.本章将研究在固定端点情况下泛函极值的必要条件.利用它们可求出在实际问题中存在极值曲线的那些泛函的极值.对于泛函极值的必要条件,本书从略.

§6.1　最简单情况下的 Euler 方程

为方便起见,我们先讨论最简单也是最基本的泛函

$$J[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{6.1}$$

的极值问题,其中设 $F\in C^2$,其容许曲线 $y(x)$ 都属于 $C^2[x_0,x_1]$,且满足边界条件

$$y(x_0) = y_0,\ y(x_1) = y_1. \tag{6.2}$$

设 $y(x)$ 使 J 达到极值,现推导 $y(x)$ 应满足的条件.考虑以实数 α 为参数的一系列容许曲线 $\bar{y} = y(x) + \alpha\delta y$,其中 δy 为宗量 $y(x)$ 的变分,即

$$\delta y|_{x=x_0} = \delta y|_{x=x_1} = 0.$$

显然 $\bar{y}|_{x=x_0} = y_0$,$\bar{y}|_{x=x_1} = y_1$,$\bar{y}\in C^2[x_0,x_1]$,当 $\alpha=0$时,$\bar{y}=y(x)$是使泛函(6.1)达到极值的曲线.将 $\bar{y}$ 代入(6.1)式,便得

$$\Phi(\alpha) = J[y+\alpha\delta y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y+\alpha\delta y,y'+\alpha\delta y')\mathrm{d}x.$$

$\Phi(\alpha)$在 $\alpha=0$时取得极值,由极值的必要条件,应有

$$\Phi'(0)=\frac{\partial}{\partial\alpha}J[y+\alpha\delta y]\Big|_{\alpha=0}$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x=0. \qquad (6.3)$$

由分部积分法，并注意到 $\delta y|_{x=x_0}=\delta y|_{x=x_1}=0$，有

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\delta y'\,\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\mathrm{d}(\delta y)$$

$$=F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\mathrm{d}x$$

$$=-\int_{x_0}^{x_1}\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\mathrm{d}x.$$

将上式代入(6.3)式，得

$$\Phi'(0)=\delta J=\int_{x_0}^{x_1}\Big[F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\Big]\delta y\mathrm{d}x=0.$$

由基本引理1知，使泛函 $J[y]$ 达到极值的函数 $y(x)$ 必满足微分方程

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0, \qquad (6.4)$$

或

$$F_{y'y'}y''+F_{yy'}y'+F_{xy'}-F_y=0. \qquad (6.5)$$

方程(6.4)式或(6.5)式称为泛函 $J[y]$ 的 **Euler 方程**.

综上所述便得：

定理 使泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x$ 在 $y(x)$ 达到极值的必要条件是 $y(x)$ 满足 Euler 方程(6.4)式或(6.5)式.

当 $F_{y'y'}\neq 0$ 时，Euler 方程是二阶常微分方程，其通解为 $y=y(x,c_1,c_2)$. 并可由 $y_0=y(x_0,c_1,c_2)$，$y_1=y(x_1,c_1,c_2)$ 确定任意常数 c_1，c_2. 这样的解曲线 $y=y(x)$ 只是 $J[y]$ 的可能的极值曲线，它称为 $J[y]$ 的临界曲线. 按理应利用充分条件判明这时的 $J[y(x)]$ 是否为极值，是极大值还是极小值. 但在实际问题中，极值的存在性往往在问题给出时就已肯定，这样，必要性就显得十分重要了. 因此，

以后，我们对"临界曲线"和"极值曲线"这两个名词不加区别. 具体问题视特定条件而定.

例1 证明 Euler 方程(6.5)具有形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F-y'F_{y'})-F_x=0. \tag{6.6}$$

证

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}=F_x+F_yy'+F_{y'}y'',$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'F_{y'})=y''F_{y'}+y'(F_{xy'}+F_{yy'}y'+F_{y'y'}y''),$$

两式相减，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F-y'F_{y'})=F_x-y'(F_{y'y'}y''+F_{yy'}y'+F_{xy'}-F_y).$$

再由(6.5)式便得证明. ▌

下面举两个简单的例子，用以说明如何通过解 Euler 方程来求泛函的极值曲线.

例2 求泛函 $J[y(x)]=\int_0^1(y'^2+12xy)\mathrm{d}x$ 满足边界条件 $y(0)=0, y(1)=1$ 的极值曲线.

解 $F(x,y,y')=y'^2+12xy$，其 Euler 方程为

$$12x-2y''=0.$$

解此方程，得

$$y=x^3+c_1x+c_2.$$

由 $y(0)=0, y(1)=1$ 得 $c_1=c_2=0$，因此 $J[y(x)]$的极值曲线为 $y=x^3$.

例3 求泛函 $J[y(x)]=\int_0^1(y'^2-y^2-2xy)\mathrm{d}x$ 满足边界条件 $y(0)=y(1)=0$ 的极值曲线.

解 $F=y'^2-y^2-2xy$，其 Euler 方程为

$$-2y-2x-2y''=0.$$

解此方程，得

$$y=c_1\cos x+c_2\sin x-x.$$

由边界条件 $y(0)=y(1)=0$得 $c_1=0, c_2=\dfrac{1}{\sin 1}$，于是 $J[y(x)]$的极值曲线为

$$y=\frac{\sin x}{\sin 1}-x.$$

以下就 Euler 方程几种简单的可积类型进行讨论.

1° $F=F(x,y)$，F 不显含 y'

这时 $F_{y'}\equiv 0$，于是 Euler 方程成为

$$F_y(x,y)=0.$$

这是一个普通的函数方程，它可能表示一条或几条曲线，但未必适合边界条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$. 因此，在一般情况下无解，只有曲线过端点时方有解.

例 4 讨论泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}y^2\mathrm{d}x, y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 的极值曲线.

解 $F=y^2, F_y=2y=0$，所以 $y=0$. 故当 $y_0=y_1=0$时有极值曲线 $y=0, J(0)=0$是极小值，否则无极值.

2° $F=P(x,y)+Q(x,y)y'$，F 是 y'的线性函数

Euler 方程为 $P_y=Q_x$. 这也是一个普通的函数方程，与1°的结论类似. 但若 $P_y\equiv Q_x$，则 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$ 是某一函数 $u(x,y)$的全微分，因而

$$\begin{aligned}J[y]&=\int_{x_0}^{x_1}(P+Qy')\mathrm{d}x\\&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\int_{(x_0,y_0)}^{(x_1,y_1)}\mathrm{d}u\\&=u(x_1,y_1)-u(x_0,y_0)=\text{常数}.\end{aligned}$$

此时变分失去意义.

例5 讨论泛函 $J[y]=\int_0^1(y^2+x^2y')\mathrm{d}x, y(0)=0, y(1)=a$ 的极

值曲线.

解 Euler 方程为 $P_y=Q_x$，即 $y=x$. 当 $a=1$时，$y=x$ 是极值曲线；当 $a\neq1$时无极值曲线.

例 6 讨论泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(y+xy')\mathrm{d}x, y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 的极值曲线.

解 Euler 方程成为恒等式，变分无意义.

3° $F=F(y')$，F 只依赖于 y'

Euler 方程为 $F_{y'y'}y''=0$.

若 $y''=0$，则 $y=c_1x+c_2$是含有两个参数的直线簇.

若 $y''\neq0$，即 $F_{y'y'}(y')=0$，解之得 $y'=k$(常数)，即 $y=kx+c$. 这是含一个参数的直线簇，它含在前面的直线簇中.

例7 在连接两点 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$的所有平面曲线中，试求长度最短的曲线.

解 易知问题可化为在边界条件 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$下求泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

的极小值.

这里 $F=\sqrt{1+y'^2}$仅依赖于 y'，由3°的结论知，极值曲线为直线簇 $y=c_1x+c_2$，代入边界条件确定 c_1,c_2，得

$$y=y_0+\frac{y_1-y_0}{x_1-x_0}(x-x_0).$$

因此，所求最短曲线就是我们熟知的连接 A，B 两点的直线.

4° $F=F(x,y')$，F 不显含 y

Euler 方程为$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}(x,y')=0$，它具有初积分

$$F_{y'}(x,y')=c_1.$$

这是不显含 y 的一阶微分方程，解此方程即得可能的极值曲线.

例8 求泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}\mathrm{d}x,\quad y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$$

的极值曲线.

解 $F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{x}$不显含 y,故 Euler 方程为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=0,$$

初积分为

$$\frac{y'}{x\sqrt{1+y'^2}}=c\quad 或\quad x=\frac{y'}{c\sqrt{1+y'^2}},$$

引进参数,令 $y'=\mathrm{tg}t$,则

$$x=\frac{\mathrm{tg}t}{c\sqrt{1+\mathrm{tg}^2t}}=\frac{1}{c}\sin t=c_1\sin t,c_1=\frac{1}{c},$$

$$\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x=\mathrm{tg}t\cdot c_1\cos t\mathrm{d}t=c_1\sin t\mathrm{d}t,$$

$$y=-c_1\cos t+c_2.$$

故有

$$\begin{cases}x=c_1\sin t,\\ y=-c_1\cos t+c_2.\end{cases}$$

消去参数 t,得

$$x^2+(y-c_2)^2=c_1^2.$$

这表示圆心在纵轴上的一簇圆,其中 c_1,c_2由边界条件确定.

5° $F=F(y,y')$,F 不显含 x

在 Euler 方程(6.6)中 $F_x=0$,于是

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(y'F_{y'}-F)=0.$$

Euler 方程具有初积分

$$y'F_{y'}-F=c,$$

由此方程即可解出可能的极值曲线.

例9 求捷线问题的解,即求

$$T=\int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}\mathrm{d}x,\quad y(0)=0,\quad y(a)=b$$

的极值曲线.

解 $F=\dfrac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}$不显含 x,故 Euler 方程具有初积分 $y'F_{y'}-F=c$,即

$$y'\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}}-\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}=c.$$

化简后,得

$$y(1+y'^2)=c_1.$$

令 $y'=\mathrm{ctg}\dfrac{t}{2}$,则

$$y=\frac{c_1}{1+y'^2}=c_1\sin^2\frac{t}{2}=\frac{c_1}{2}(1-\cos t),$$

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=\frac{\frac{c_1}{2}\sin t}{\mathrm{ctg}\frac{t}{2}}\mathrm{d}t=\frac{c_1}{2}(1-\cos t)\mathrm{d}t.$$

故

$$\begin{cases}x=\dfrac{c_1}{2}(t-\sin t)+c_2,\\[2mm] y=\dfrac{c_1}{2}(1-\cos t).\end{cases}$$

由 $t=0$时 $x=0$,得 $c_2=0$,而 c_1由 $y(a)=b$ 定出,于是捷线问题的解为

$$\begin{cases}x=\dfrac{c_1}{2}(t-\sin t),\\[2mm] y=\dfrac{c_1}{2}(1-\cos t).\end{cases}$$

这是一条过 A,B 两点的摆线.

例10 求最小旋转曲面面积问题的解,即求泛函

$$S[y]=2\pi\int_{x_0}^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x,\ y(x_0)=y_0,\ y(x_1)=y_1$$

的极值曲线.

解 Euler 方程具有初积分 $y'F_{y'}-F=c$,即

$$2\pi y\frac{y'^2}{\sqrt{1+y'^2}}-2\pi y\sqrt{1+y'^2}=c.$$

化简后可得

$$y=c\sqrt{1+y'^2}.$$

令 $y'=\mathrm{sh}t$,代入上式得

$$y=c_1\mathrm{ch}t,$$

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=\frac{c_1\mathrm{sh}t}{\mathrm{sh}t}\mathrm{d}t=c_1\mathrm{d}t.$$

于是,所求曲面是由平面曲线

$$\begin{cases}x=c_1t+c_2,\\ y=c_1\mathrm{ch}t,\end{cases}$$

绕 OX 轴旋转而成的.在上式中消去参数 t,得

$$y=c_1\mathrm{ch}\frac{x-c_2}{c_1},$$

其中常数 c_1,c_2 由 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$ 确定.由此可见,最小曲面是悬链面.

§6.2 含有多个未知函数的变分问题

有些实际问题往往要讨论多个未知函数的泛函的极值问题.为简便起见,本节着重讨论含有两个未知函数的泛函的极值,更一般的情形则可模拟推广.

设泛函为

$$J[y(x),z(x)]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x,\tag{6.7}$$

边界条件为

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0, \\ z(x_0)=z_0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y(x_1)=y_1, \\ z(x_1)=z_1. \end{cases} \tag{6.8}$$

欲求泛函(6.7)式在条件(6.8)式下的极值，先找出 J 取得极值的必要条件.

设 F 关于所含变量具有二阶连续偏导数，并设 J 在曲线 $y=y(x),z=z(x)$上取得极值. 设

$$\begin{cases} \bar{y}=y(x)+\alpha\delta y, \\ \bar{z}=z(x)+\beta\delta z, \end{cases}$$

为

$$\begin{cases} y=y(x), \\ z=z(x), \end{cases}$$

的邻近曲线，其中 $y(x),z(x)\in C^2[x_0,x_1]$，$\delta y,\delta z$ 是宗量 y,z 的变分，即 $\delta y|_{x_0}=\delta z|_{x_0}=\delta y|_{x_1}=\delta z|_{x_1}=0$. 把 $\bar{y},\bar{z}$ 代入(6.7)式，得

$$\begin{aligned} J[\bar{y},\bar{z}] &= J[y+\alpha\delta y,z+\beta\delta z] \\ &= \int_{x_0}^{x_1} F(x,y+\alpha\delta y,z+\beta\delta z,y'+\alpha\delta y',z'+\beta\delta z')\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

上式在 $\alpha=\beta=0$时取得极值，故

$$\left.\frac{\partial J}{\partial\alpha}\right|_{\alpha=\beta=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial J}{\partial\beta}\right|_{\alpha=\beta=0}=0,$$

即

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y')\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right)\delta y\mathrm{d}x=0,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}(F_z\delta z+F_{z'}\delta z')\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}\right)\delta z\mathrm{d}x=0.$$

因为 $\delta y,\delta z$ 是任意函数，由基本引理1知

$$\begin{cases} F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0, \\ F_z-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}=0. \end{cases} \tag{6.9}$$

方程(6.9)式称为泛函(6.7)式的 Euler 方程组.

定理1 泛函(6.7)在 $y(x)$, $z(x)$达到极值的必要条件是 $y(x)$, $z(x)$满足 Euler 方程组(6.9).

例 1 求泛函 $J[y,z]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y'^2+z'^2+2yz)\mathrm{d}x$ 满足边界条件

$$\begin{cases}y(0)=0,\\ y(\frac{\pi}{2})=1, z(0)=0,\\ z(\frac{\pi}{2})=-1,\end{cases}$$

的极值曲线.

解 $F=y'^2+z'^2+2yz$,故 Euler 方程组为

$$\begin{cases}2z-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2y')=0,\\ 2y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(2z')=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}z-y''=0,\\ y-z''=0.\end{cases}$$

由此方程组消去 z,得

$$y^{(4)}-y=0,$$

其通解为

$$\begin{cases}y=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+c_3\cos x+c_4\sin x,\\ z=y''=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}-c_3\cos x-c_4\sin x.\end{cases}$$

由边界条件可定出 $c_1=c_2=c_3=0$, $c_4=1$,故所求的极值曲线为

$$\begin{cases}y=\sin x,\\ z=-\sin x.\end{cases}$$

例 2 求泛函 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(y',z')\mathrm{d}x$ 的极值曲线,其中假设 $F_{y'y'}F_{z'z'}-F_{y'z'}^2\neq 0$.

解 因 $F_y=F_z=0$,故 Euler 方程组为

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}=0,\\ \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}F_{y'y'}y''+F_{y'z'}z''=0,\\ F_{y'z'}y''+F_{z'z'}z''=0.\end{cases}$$

按假设条件，该方程只有零解

$$y''=0,\ z''=0.$$

即

$$\begin{cases}y=c_1x+c_2\\ z=c_3x+c_4\end{cases}$$

是所求的极值曲线.

含有 n 个未知函数的泛函的极值问题有下述定理.

定理 2 泛函 $J=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$ 在满足边界条件

$$\begin{cases}y_i(x_0)=y_{i0},\\ y_i(x_1)=y_{i1},\end{cases}\qquad i=1,2,\cdots,n,$$

下取得极值的必要条件是 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 满足 Euler 方程组

$$F_{y_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_i'}=0,\ i=1,2,\cdots,n.$$

一般说来，上述 Euler 方程组的通解含有 $2n$ 个任意常数，它们可由所给的边界条件确定.

§6.3 依赖于未知函数的高阶导数的变分问题

我们先讨论泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x \tag{6.10}$$

的极值问题,其边界条件为

$$\begin{cases} y(x_0)=y_0, \\ y(x_1)=y_1, \end{cases} \qquad \begin{cases} y'(x_0)=y_0', \\ y'(x_1)=y_1'. \end{cases} \tag{6.11}$$

设 $F\in C^3, y(x)\in C^4$, 并设 $y(x)$是使 J 达到极值的函数, 令 $\bar{y}=y(x)+\alpha\delta y$,其中 δy 是宗量 y 的变分,即

$$\delta y|_{x_0}=\delta y|_{x_1}=\delta y|_{x_0}=\delta y'|_{x_1}=0,\quad \alpha \text{ 为实数}.$$

将 $\bar{y}$ 代入(6.10)式,对 α 求导后再令 $\alpha=0$,得

$$\delta J[y]=\int_{x_0}^{x_1}(F_y\delta y+F_{y'}\delta y'+F_{y''}\delta y'')\mathrm{d}x.$$

利用分部积分法,有

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y'}\delta y'\mathrm{d}x=F_{y'}\delta y\Big|_{x_0}^{x_1}-\int_{x_0}^{x_1}\delta y\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\mathrm{d}x=-\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\cdot\delta y\mathrm{d}x,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}F_{y''}\delta y''\mathrm{d}x=-\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\cdot\delta y'\mathrm{d}x=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}\cdot\delta y\mathrm{d}x,$$

于是

$$\delta J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\left(F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}\right)\delta y\mathrm{d}x.$$

由 δy 的任意性及基本引理1知

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}=0. \tag{6.12}$$

方程(6.12)称为 **Euler-Poisson 方程**. 于是得

定理1 泛函(6.10)在 $y(x)$取得极值的必要条件是 $y(x)$满足 Euler-Poisson 方程(6.12).

一般说来,E-P 方程是四阶常微分方程,其通解中含有四个任意常数,它们可由边界条件(6.11)确定.

例 1 求泛函 $J[y]=\int_0^1(1+y''^2)\mathrm{d}x$ 满足边界条件

$$y(0)=0,\quad y'(0)=0,\quad y(1)=1,\quad y'(1)=1$$

的极值曲线.

解 $F=1+y''^2$,其 E-P 方程为

$$\frac{d^2}{dx^2}(2y'')=0,$$

即

$$y^{(4)}=0,$$

其通解为

$$y=c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4.$$

再由边界条件可解得 $c_1=c_2=c_4=0, c_3=1$,因此,所求极值曲线为 $y=x$.

例 2 求泛函 $J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(y''^2-2y'^2+y^2)dx$ 满足边界条件

$$y(0)=y'(0)=0, y(\frac{\pi}{2})=1, y'(\frac{\pi}{2})=\frac{\pi}{2}$$

的极值曲线.

解 $F=y''^2-2y'^2+y^2$,其 E-P 方程为

$$2y-\frac{d}{dx}(-4y')+\frac{d^2}{dx^2}(2y'')=0,$$

即

$$y^{(4)}+2y''+y=0,$$

其通解为

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x.$$

由边界条件可得 $c_1=0, c_2=-1, c_3=1, c_4=0$,于是所求极值曲线为

$$y=-x\cos x+\sin x.$$

例 3 求泛函 $J[y]=\int_{-l}^{l}(\frac{1}{2}\mu y''^2+\rho y)dx$ 满足边界条件

$$y(-l)=0,\ y'(-l)=0,\ y(l)=0,\ y'(l)=0$$

的极值曲线.

解 本题在求两端嵌住的弹性柱形梁的弯曲时遇到. 如果梁是均匀的,则 $\mu\rho$ 是常数,E-P 方程为

$$\rho+\frac{d^2}{dx^2}(\mu y'')=0,$$

即

$$y^{(4)}=-\frac{\rho}{\mu},$$

其通解为

$$y=-\frac{\rho}{24\mu}x^4+c_1x^3+c_2x^2+c_3x+c_4.$$

由边界条件可得

$$c_1=c_3=0,\quad c_2=\frac{\rho l^2}{12u},\quad c_4=-\frac{\rho l^4}{24\mu},$$

于是所求极值曲线为

$$y=-\frac{\rho}{24\mu}x^4+\frac{\rho l^2}{12\mu}x^2-\frac{\rho l^4}{24\mu}=-\frac{\rho}{24\mu}(x^2-l^2)^2.$$

对于含有未知函数的更高阶导数，或含有多个未知函数的固定边界的变分问题，在 F 足够光滑的条件下，类似地可得下列结果.

定理 2 如果泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})\mathrm{d}x$，则 $y(x)$ 使 $J[y]$ 取得极值的必要条件是 Euler-Poisson 方程

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}-\cdots+(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}}=0$$

成立.

定理3 若泛函 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y',\cdots,y^{(n)};z,z',\cdots,z^{(n)})\mathrm{d}x$，则 $y(x),z(x)$使 $J[y,z]$取得极值的必要条件是 Euler-Poisson 方程组

$$\begin{cases}F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}-\cdots+(-1)^n\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{y^{(n)}}=0,\\ F_z-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}+\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{z''}-\cdots+(-1)^n\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}F_{z^{(n)}}=0,\end{cases}$$

成立.

定理 4 如果泛函 $J[y_1,y_2,\cdots,y_m]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,\cdots,y_1^{(n_1)};y_2,\cdots,y_2^{(n_2)};\cdots;y_m,\cdots,y_m^{(n_m)})\mathrm{d}x$，则 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$ 使 $J[y_1,y_2,\cdots,$

y_m]取得极值的必要条件是Euler-Poisson方程组

$$F_{y_i}-\frac{d}{dx}F_{y_i'}+\frac{d^2}{dx^2}F_{y_i''}-\cdots+(-1)^{n_i}\frac{d^{n_i}}{dx^{n_i}}F_{y_i^{(n_i)}}=0,\quad i=1,2,\cdots,m,$$

成立.

上述三个定理的证明请读者自己完成.

§6.4 依赖于多元函数的泛函

考虑二元函数的泛函

$$J[u(x,y)]=\iint_D F[x,y,u(x,y),u_x(x,y),u_y(x,y)]d\sigma \qquad (6.13)$$

的极值问题,其中 F 是具有二阶连续偏导数的五元函数,而函数 $u(x,y)$ 要求在平面上的闭区域 D 内有二阶连续偏导数,且在 D 的边界 Γ 上取已知值. 令

$$Y=\{u(x,y)\,|\,u\in C^2(D),u|_\Gamma=\text{已知值}\}.$$

现在的问题是,在 Y 中找一函数 $u(x,y)$,使泛函 $J[u(x,y)]$ 取极值. 若 $u\in Y$ 使得 $J[u]$ 达到极值,那么 $u(x,y)$ 具有什么特征呢? 与前几节的讨论类似,对于实数 α,考虑比较函数簇

$$\bar{u}=u+\alpha\eta,$$

其中 $\eta=\delta u=u_2-u_1,u_1,u_2\in Y,\eta|_\Gamma=u_2|_\Gamma-u_1|_\Gamma=0$. 因此 $\bar{u}\in Y$. 对于任意固定的 $\eta(x,y)$,考虑函数

$$\Phi(\alpha)=J[\bar{u}]=\iint_D f(x,y,u+\alpha\eta,u_x+\alpha\eta_x,u_y+\alpha\eta_y)d\sigma.$$

在所假定的条件下,$\Phi(\alpha)$ 具有连续导数,且当 $\alpha=0$ 时 $\Phi(\alpha)$ 取得极值,因而 $\Phi'(\alpha)|_{\alpha=0}=0$. 经计算得

$$\Phi'(\alpha)=\iint_D (F_u\eta+F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y)d\sigma.$$

注意,上式的被积函数中 F_u,F_{u_x},F_{u_y} 在 $x,y,u+\alpha\eta,u_x+\alpha\eta_x,u_y+$

$\alpha\eta_y$ 处取值，以 $\alpha=0$ 代入上式，得

$$\Phi'(0)=\iint_D (F_u\eta+F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y)\mathrm{d}\sigma=0. \tag{6.14}$$

(6.14)式的被积函数中 F_u, F_{u_x}, F_{u_y} 在 x,y,u,u_x,u_y 处取值，$u(x,y)$ 为使 $J[u]$ 达到极值的函数. 为了应用基本引理2，我们必须分离出 $\eta(x,y)$ 来，因此要解脱 η 对 x,y 的偏导数，我们应用 Green 公式

$$\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma.$$

但 $F_{u_x}\eta_x$ 与 $F_{u_y}\eta_y$ 并不是某个函数的偏导数，而是 $F_{u_x}\eta, F_{u_y}\eta$ 的偏导数的一部分. 事实上

$$\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\eta)=F_{u_x}\eta_x+\eta\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x},$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\eta)=F_{u_y}\eta_y+\eta\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y},$$

所以

$$\begin{aligned}
&\iint_D (F_{u_x}\eta_x+F_{u_y}\eta_y)\mathrm{d}\sigma\\
&=\iint_D\left[\frac{\partial}{\partial x}(F_{u_x}\eta)+\frac{\partial}{\partial y}(F_{u_y}\eta)\right]\mathrm{d}\sigma-\iint_D\eta\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\mathrm{d}\sigma\\
&=\oint_\Gamma(-F_{u_y}\eta)dx+(F_{u_x}\eta)\mathrm{d}y-\iint_D\eta\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\mathrm{d}\sigma\\
&=-\iint_D\eta\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\mathrm{d}\sigma.
\end{aligned}$$

将上式代入(6.14)式，得

$$\Phi'(0)=\iint_D\eta\left[F_u-\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)\right]\mathrm{d}\sigma=0.$$

因为 $\eta(x,y)$ 是任意的，由基本引理2知

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\equiv0.$$

于是，有下面的定理.

定理1 若函数 $u(x,y)\in Y$ 使泛函(6.13)取得极值，则 $u(x,y)$ 必满足偏微分方程

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0. \tag{6.15}$$

方程(6.15)称为泛函 $J[u]$的**奥氏方程**(Остроградский **方程**)，它是二阶偏微分方程.

注意 当 $u(x,y)$使泛函

$$J[u]=\iint_D F(x,y,u,u_x,u_y)\mathrm{d}\sigma$$

达到极值时，$u(x,y)$必是偏微分方程定解问题

$$\begin{cases}F_u-\dfrac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\dfrac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0,\\ u(x,y)|_\Gamma=\text{已知值},\end{cases}$$

的解. 这说明，求偏微分方程的定解问题的解可转化为求某个泛函的极值问题，这就是求解偏微分方程的变分方法的基础.

例1 写出泛函 $J[u]=\iint_D[u_x^2+u_y^2+2uf]\mathrm{d}\sigma$ 的奥氏方程.

解 $F=u_x^2+u_y^2+2uf, F_u=2f, F_{u_x}=2u_x, F_{u_y}=2u_y$，故奥氏方程为

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=2f-2u_{xx}-2u_{yy}=0,$$

或

$$\Delta u=\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=f(x,y).$$

即此泛函 $J[u]$的奥氏方程为 Poisson 方程.

关于多元函数的泛函，有下列三个结论.

定理2 对于两个二元函数的泛函

$$J[u(x,y),v(x,y)]=\iint_D F(x,y,u,v,u_x,v_x,u_y,v_y)\mathrm{d}\sigma,$$

其奥氏方程组为

$$\begin{cases} F_u-\dfrac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\dfrac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0, \\ F_v-\dfrac{\partial}{\partial x}F_{v_x}-\dfrac{\partial}{\partial y}F_{v_y}=0. \end{cases}$$

定理 3 对于具有一个二元函数 $u(x,y)$ 且 F 中含有它的高阶偏导数的泛函，如

$$J[u]=\iint\limits_D F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})\mathrm{d}\sigma,$$

其奥氏方程为

$$F_u-\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}\right)=0.$$

定理 4 三元函数的泛函

$$J[u(x,y,z)]=\iiint\limits_\Omega F(x,y,z,u,u_x,u_y,u_z)\mathrm{d}V,$$

的奥氏方程为

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}-\frac{\partial}{\partial z}F_{u_z}=0.$$

对于更一般形式的泛函，其奥氏方程可以类推.

例 2 写出泛函 $J[u(x,y,z)]=\iiint\limits_\Omega(u_x^2+u_y^2+u_z^2+2uf)\mathrm{d}V$ 的奥氏方程.

解 $F=u_x^2+u_y^2+u_z^2+2uf$, $F_u=2f$, $F_{u_x}=2u_x$, $F_{u_y}=2u_y$, $F_{u_z}=2u_z$, 故 $J[u]$ 的奥氏方程为

$$2f-2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}-2\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0,$$

或

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=f(x,y,z).$$

例 3 写出泛函 $J[u(x,y)]=\iint\limits_D(u_{xx}^2+2u_{xy}^2+u_{yy}^2)\mathrm{d}\sigma$ 的奥氏方

程.

解 $F=u_{xx}^2+2u_{xy}^2+u_{yy}^2$, $F_u=0$, $F_{u_x}=0$, $F_{u_y}=0$, $F_{u_{xx}}=2u_{xx}$, $F_{u_{xy}}=4u_{xy}$, $F_{u_{yy}}=2u_{yy}$, 故 $J[u]$的奥氏方程为

$$F_u-\left(\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}+\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}\right)+\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}F_{u_{xx}}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}F_{u_{xy}}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}F_{u_{yy}}\right)$$

$$=0-\left(\frac{\partial 0}{\partial x}+\frac{\partial 0}{\partial y}\right)+\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}(2u_{xx})+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(4u_{xy})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(2u_{yy})\right]=0,$$

或

$$\Delta\Delta u=\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}+2\frac{\partial^4 u}{\partial x^2\partial y^2}+\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}=0.$$

这个方程称为**重调和方程**,简记成 $\Delta\Delta u=0$.

§6.5 呈参数形式的变分问题

以上我们讨论泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{6.16}$$

的极值时,可取函数 $y=y(x)$都是单值函数,这样就缩小了我们的研究范围.如在等周问题中就遇到所求曲线是封闭曲线的情形,若用直角坐标方程来表示此封闭曲线,就会遇到多值函数的困难.但是,如果把曲线用参数形式表示为

$$\Gamma:\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}\qquad t_0\leqslant t\leqslant t_1, \tag{6.17}$$

则多值性问题就容易解决.这时曲线 Γ 所围成的区域的面积 A(见第五章中的等周问题)可由曲线积分来计算:

$$A=\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}[x(t)y'(t)-y(t)x'(t)]\mathrm{d}t,$$

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\mathrm{d}t=l.$$

这个泛函 A 应该只与曲线形状有关，而与曲线参数表示形式无关. 如果从面积 A 的表达式来看，它是两个函数 $x(t)$，$y(t)$的泛函. 一般说来，对于这种两个函数的泛函，当曲线的参数表示形式不同时，泛函的值也不同，虽然它们都表示同一条曲线. 例如，两个函数的泛函

$$J[x(t),y(t)]=\int_0^1 x'(t)y'(t)\mathrm{d}t.$$

对于线段 OB，若用直角坐标方程表示(如图6.1)，它只有一种形式：$y=x(0\leqslant x\leqslant 1)$，但用参数式表示则有无穷多种形式，下面就是不同的两种：

$$\Gamma_1:\begin{cases}x=t,\\ y=t,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\qquad J=\int_0^1 1\cdot 1\mathrm{d}t=1;$$

$$\Gamma_2:\begin{cases}x=t^2,\\ y=t^2,\end{cases}\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\qquad J=\int_0^1 2t\cdot 2t\mathrm{d}t=4.$$

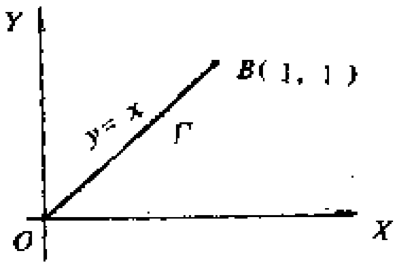


图 6.1

由此可见，对于一般含有多个函数的泛函，其值不仅与曲线形状有关，而且与该曲线的参数表示形式也有关. 因此，我们有必要探求两个函数的泛函中 F 具有什么性质时，其泛函的值仅与曲线本身的形状有关，而与该曲线的参数表示形式无关.

不失一般性，我们可以假定在区间$[t_0,t_1]$上 $x'(t)\neq 0$，将(6.17)式代入(6.16)式，则(6.16)式成为

$$J[x(t),y(t)]=\int_{t_0}^{t_1}F\left[x(t),y(t),\frac{y'(t)}{x'(t)}\right]\mathrm{d}t$$

$$\triangleq\int_{t_0}^{t_1}G[x(t),y(t),x'(t),y'(t)]\mathrm{d}t,\qquad(6.18)$$

其中 $G(x,y,x',y')=F(x,y,\frac{y'}{x'})$. 于是有如下结论：

定理 如果函数 $G(x,y,x',y')$ 是关于 x',y' 的正一次齐次函数，即对于任意的正数 k，恒有

$$G(x,y,kx',ky')=kG(x,y,x',y'),$$

则泛函(6.18)的值仅与曲线(6.17)的形状有关，而与该曲线的参数表示形式无关.

证 若把参数 t 换为另外的参数 τ，且 τ 与 t 是互为单值对应的，即设 $\tau=\varphi(t)$，$\varphi'(t)>0$，则有

$$J=\int_{t_0}^{t_1}G(x,y,x',y')\mathrm{d}t=\int_{\tau_0}^{\tau_1}G(x,y,\varphi'\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},\varphi'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau})\frac{1}{\varphi'}\mathrm{d}\tau.$$

由于 G 关于 x',y' 是一次齐次函数，故有

$$G(x,y,\varphi'\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},\varphi'\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau})=\varphi'G(x,y,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau}),$$

由此得

$$J=\int_{t_0}^{t_1}G(x,y,x',y')\mathrm{d}t=\int_{\tau_0}^{\tau_1}G(x,y,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}\tau},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\tau})\mathrm{d}\tau.$$

即被积函数不因曲线(6.17)的参数表示形式的改变而改变，从而 J 仅与曲线(6.17)的形状有关. ▌

剩下的问题是，如何寻求这种特殊类型泛函的极值曲线呢？当然可以象求含两个函数的泛函那样去解泛函的 Euler 方程组

$$\begin{cases} G_x-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{x'}=0, \\ G_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{y'}=0. \end{cases} \tag{6.19}$$

但对这种类型的泛函，上述两个微分方程并非独立. 这是因为如果 G 是关于 x',y' 的正一次齐次函数，即

$$G(x,y,kx',ky')=kG(x,y,x',y'),$$

两边对 k 求导，然后令 $k=1$，得恒等式

$$G=x'G_{x'}+y'G_{y'}. \tag{6.20}$$

再将(6.20)式两边对 t 求导，则有

$$x'G_x+y'G_y+x''G_{x'}+y''G_{y'}$$

$$=x''G_{x'}+x'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{x'}+y''G_{y'}+y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{y'},$$

整理后可得

$$(G_x-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{x'})x'+(G_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}G_{y'})y'=0.$$

上式表明,(6.19)式中两个方程中的一个可以通过另一个来表示,即它们不是独立的.

综上所述,在讨论形如 $J=\int_{t_0}^{t_1}G(x,y,x',y')\mathrm{d}t$ 的泛函的极值问题时,就选取最简单的参数方程;在求极值曲线时,取 Euler 方程组中的任一个,再配以确定参数的方程一并求积分. 例如,当取弧长作参数时,则 $\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=1$,这时就由

$$\begin{cases}G_x-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}G_{x'}=0,\\ x'^2+y'^2=1,\end{cases}$$

求出积分曲线.

习　题

1. 求泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

2. 求泛函 $J[y(x)]=\int_0^1(xy+y^2-2y^2y')\mathrm{d}x, y(0)=1, y(1)=2$ 的极值.

3. 求泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{y(1+y'^2)}\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

4. 求泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(xy'+y'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

5. 求泛函 $J[v(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(v^2+v'^2+2e^xv)\mathrm{d}v$ 的极值曲线.

6. 求泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+2yy'-16y^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

7. 求泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2-y'^2-2y\sin x)\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

8. 试在连接两点 $A(0,1)$ 与 $B(1,4)$ 的曲线中,求泛函

$$J[y(x)]=\int_0^1(12xy+yy'+y'^2)\mathrm{d}x$$

的极值曲线.

9. 求泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{1+y^2}{y'^2}\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

10. 求泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}\frac{y'^2}{x^3}\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

11. 求泛函 $J[y(x)]=\int_0^{\pi}(y'^2-y^2)\mathrm{d}x$ 满足边界条件 $y(0)=y(\frac{\pi}{2})=1$ 的极值曲线.

12. 求泛函 $J[y(x)]=\int_0^a 2\pi y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 的变分.

13. 求泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2-y'^2-2y\operatorname{ch}x)\mathrm{d}x$ 的变分.

14. 讨论泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+2xyy')\mathrm{d}x$ 满足边界条件 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=y_1$ 的极值曲线.

15. 按 Fermat 原理,光线在一种介质中自一点 $A_1(x_1,y_1)$ 传播到另一点 $A_2(x_2,y_2)$ 的道路 $y=y(x)$ 使传播时间

$$T[y(x)]=\int_{x_1}^{x_2}\frac{\mathrm{d}s}{v}$$

取极小值,其中 s 是弧长,$v(x,y)$ 是光在这种介质中的传播速度.证明:光的传播道路满足方程

$$vy''+(1+y'^2)^2\frac{\partial v}{\partial y}-y'(1+y'^2)\frac{\partial v}{\partial x}=0.$$

16. 求泛函 $J[y,z]=\int_0^1(y'^2+z'^2+y'z')\mathrm{d}x$ 满足边界条件 $y(0)=0,y(1)=1,z(0)=0,z(1)=1$ 的极值曲线.

17. 求泛函 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}(2yz-2y^2+y'^2-z'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

18. 求泛函 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2+2yz'+2y'z+z'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

19. 求泛函 $J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}(y'^2-2yz+2y+2z+z'^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

20. 求泛函 $J[y(x)]=\int_0^1 y''^2\mathrm{d}x$ 满足边界条件 $y(0)=y'(0)=0,y(1)=2,y'(1)=5$ 的极值曲线.

21. 求泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(16y^2-y''^2+x^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

22. 求泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(2xy+y'''^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

23. 求泛函 $J[y(x)]=\int_{x_0}^{x_1}(y^2+2y'^2+y''^2)\mathrm{d}x$ 的极值曲线.

24. 试在过 $A(0,0)$ 与 $B(1,0)$ 的曲线中找出满足条件 $y'(0)=a,y'(1)=b$,且使泛函 $J[y(x)]=\int_0^1 y''^2\mathrm{d}x$ 取极值的那一条.

25. 写出泛函 $J[z(x,y)]=\iint\limits_D(z_x^2-z_y^2)\mathrm{d}\sigma$ 的奥氏方程.

26. 写出泛函

$$J[u(x,y,z)]=\iiint\limits_\Omega[u_x^2+u_y^2+u_z^2+2uf(x,y,z)]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

的奥氏方程.

27. 曲面 S 的方程为 $z=z(x,y)$,S 的边界为 C,C 在 XOY 平面上的投影为区域 D 的边界 C',并设 $p=\dfrac{\partial z}{\partial x},q=\dfrac{\partial z}{\partial y}$,试证明:

(1) 曲面 S 的面积为 $\iint\limits_D\sqrt{1+p^2+q^2}\mathrm{d}\sigma$;

(2) 具有最小表面积的曲面必满足方程

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q}{\sqrt{1+p^2+q^2}}\right)=0;$$

(3) $\dfrac{p\mathrm{d}y - q\mathrm{d}x}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$ 是全微分.

28. 试证:封闭曲线 Γ 所围成的平面图形面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

与曲线 Γ 的参数表示形式无关.

29. 考察 n 维空间中曲线的弧长

$$s = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{x_1'^2 + x_2'^2 + \cdots + x_n'^2}\,\mathrm{d}t$$

与曲线的参数表示形式是否有关.

30. 考察泛函 $J = \int_{t_0}^{t_1}(x^2x' + 3xyy'^2)\mathrm{d}t$ 的值与曲线的参数表示形式是否有关.

第七章　可动边界的变分问题

上一章在讨论泛函的极值问题时，曾假定可取曲线的边界点是已经固定的，并且可取曲线都通过边界点. 但是在许多实际问题中，泛函的可取曲线的端点可以是固定的，也可以是变动的. 本章将讨论在可取曲线的端点能够移动的情况下泛函的极值问题.

§7.1　最简单的可动边界问题

1. 问题的提出

我们在第六章中讨论泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{7.1}$$

的极值时，曾假定边界点 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$是固定的. 现在我们假定这两个边界点中的一个或两个能够移动，这时可取曲线簇的范围扩大了. 也就是说，除了与所讨论的曲线有公共边界点的曲线作为比较曲线外，还可以取具有可动边界点的曲线作为比较曲线. 这样，不论在哪一条曲线 $y=y(x)$上，如果 $y(x)$能使具有可动边界的泛函达到极值，则对于与曲线 $y=y(x)$有公共边界点的范围更狭窄的曲线簇来说，该函数 $y(x)$亦能使具有固定边界的泛函达到极值. 因此，使得固定边界问题达到极值的基本必要条件应当得到满足，即函数 $y(x)$应当满足 Euler 方程

$$F_y - \frac{d}{dx}F_{y'} = 0. \tag{7.2}$$

这是一个二阶常微分方程，它的通解 $y=y(x,c_1,c_2)$ 中包含了两个任意常数，要想确定它们需要两个条件. 在固定边界的变分问题中，这两个条件是 $y(x_0)=y_0$ 和 $y(x_1)=y_1$，而在边界可变动的情形下，x_1 或(和)x_0 也是待定的，为了确定它们，需要寻求其它条件. 我们先讨论左端点 $A(x_0,y_0)$ 固定而右端点 $B(x_1,y_1)$ 可以变动的情形.

设泛函(7.1)式中的 $y(x)$ 有同一个固定的左端点 $A(x_0,y_0)$，即 $y(x_0)=y_0$，而设右端点 $B(x_1,y_1)$ 可以在某曲线 $w(x,y)=0$ 上移动，则又可给出一个条件 $w(x_1,y_1)=0$. 这与上一章的固定端点变分问题的差别在于 x_1 是变动的(x_1 待定). 此时的 x_1 应具有什么特征呢？

2. 斜截条件

我们先就一般情形来讨论. 设泛函(7.1)的极值曲线为 $y=y(x)$，考虑当边界点 $B(x_1,y_1)$ 的位置移动到点 $B'(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1)$ 的位置时泛函(7.1)的变分. 为此，我们在泛函的增量 ΔJ 中取出对 δx_1 和 δy_1 而言为线性主部的那一部分. 泛函 J 的增量

$$\begin{aligned}\Delta J &= \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y')dx - \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y')dx \\ &= \int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x,y+\delta y, y'+\delta y')dx \\ &\quad + \int_{x_0}^{x_1}[F(x,y+\delta y, y'+\delta y') - F(x,y,y')]dx.\end{aligned} \tag{7.3}$$

对于(7.3)式右端的第一项，由积分中值定理及 F 的连续性，有

$$\begin{aligned}\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1} F(x,y+\delta y, y'+\delta y')dx &= F\big|_{x=x_1+\theta\delta x_1}\cdot\delta x_1 \\ &= F(x,y,y')\big|_{x=x_1}\cdot\delta x_1 + \varepsilon_1\delta x_1,\end{aligned} \tag{7.4}$$

其中 $0<\theta<1$，而当 $\delta x_1\to 0$ 时 $\varepsilon_1\to 0$.

对于(7.3)式右端的第二项，由 Taylor 公式展开，得

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y')]\mathrm{d}x$$

$$=\int_{x_0}^{x_1}[F_y(x,y,y')\delta y+F_{y'}(x,y,y')\delta y']\mathrm{d}x+R_1, \quad (7.5)$$

其中 R_1是较 δy 和 $\delta y'$ 高阶的无穷小量. 利用分部积分法及 Euler 方程(7.2),并注意到 $\delta y|_{x_0}=0$,有

$$\int_{x_0}^{x_1}[F_y\delta y+F_{y'}\delta y']\mathrm{d}x$$

$$=[F_{y'}\ \delta y]|_{x_0}^{x_1}+\int_{x_0}^{x_1}\left[F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}\right]\delta y\mathrm{d}x$$

$$=[F_{y'}\delta y]\Big|_{x=x_1}. \quad (7.6)$$

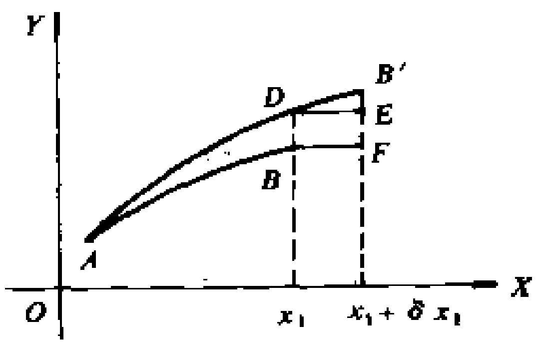


图 7.1

注意 一般说来,$\delta y|_{x=x_1}\neq\delta y_1$,这是因为 δy_1是当边界点移到$(x_1+\delta x_1,y_1+\delta y_1)$位置时 y_1的增量,而 $\delta y|_{x=x_1}$是当通过(x_0,y_0)和(x_1,y_1)两点的极值曲线移到通过(x_0,y_0)和$(x_1+\delta x_1,y_1+\delta y_1)$两点的极值曲线时,在点 x_1处纵坐标的增量(如图7.1所示).

由图7.1可以看出,$BD=\delta y|_{x=x_1}$,$FB'=\delta y_1$,$EB'\approx y'(x_1)\delta x_1$,$BD=FB'-EB'$,或 $\delta y|_{x=x_1}\approx\delta y_1-y'(x_1)\delta x_1$. 此时近似等式与精确等式相差一个较 δx_1为高阶的无穷小量. 于是由(7.4)式,并将(7.6)式代入(7.5)式,得

$$\int_{x_1}^{x_1+\delta x_1}F\mathrm{d}x\approx F|_{x=x_1}\delta x_1,$$

$$\int_{x_0}^{x_1}[F(x,y+\delta y,y'+\delta y')-F(x,y,y')]\mathrm{d}x$$

$$\approx F_{y'}|_{x=x_1}(\delta y_1-y'(x_1)\delta x_1).$$

其中近似等式与精确等式相差较 δx_1和 δy_1为高阶的无穷小量. 将以上两式代入(7.3)式,即可得到

$$\delta J = F|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}(\delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1)$$
$$= (F - y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1.$$

而极值的基本必要条件 $\delta J=0$就成为

$$(F - y'F_{y'})|_{x=x_1}\delta x_1 + F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1 = 0. \tag{7.7}$$

如果 δx_1和 δy_1是相互无关的，则有

$$(F-y'F_{y'})|_{x=x_1}=0\text{和 } F_{y'}|_{x=x_1}=0.$$

但是常常有必要考虑变分 δx_1与 δy_1相关的情形. 设右端点可以沿某一曲线 $C_1: w(x,y)=0$移动，此时

$$w_{x_1}\delta x_1 + w_{y_1}\delta y_1 = 0. \tag{7.8}$$

假定 $w_{y_1}\neq 0$，由(7.8)解出 δy_1后代入(7.7)，并由 δx_1的任意性，得

$$[(F-y'F_{y'})w_y - F_{y'}w_x]|_{x=x_1}=0. \tag{7.9}$$

如果假定 $w_{x_1}\neq 0$，同样也可得到(7.9).

方程(7.9)称为极值曲线 $y=y(x)$与曲线 C_1的**斜截条件**(或**贯截条件**). 它表明，如果 $y=y(x)(x_0\leqslant x\leqslant x_1)$为变动右端点的泛函的极值曲线，则右端点 x_1必满足(7.9)式. 下面我们考虑几种重要的特殊情形.

(1) 设右端点 B 可以沿曲线 $C_1: y=\varphi(x)$移动. 这时

$$w=y-\varphi(x),\quad w_x=-\varphi'(x),\quad w_y=1,$$

于是(7.9)式成为

$$[(\varphi'-y')F_{y'}+F]|_{x=x_1}=0. \tag{7.10}$$

这个条件建立了在边界点处 φ'和 y'二斜率之间的依从关系.

(2) 设右端点 B 可以在直线 $x=x_1$上移动. 这时 B 称为**自由端点**，而 $\delta x_1=0$，于是由(7.7)式或(7.9)式可得

$$F_{y'}|_{x=x_1}=0. \tag{7.11}$$

这说明，若 $y=y(x)$是 $J[y]$的极值曲线，则 $F_{y'}$沿着 $y=y(x)$在 $x=x_1$处的值为零. 这样的条件(7.11)称为 $J[y]$的**自然边界条件**.

(3) 设右端点 B 可以在直线 $y=y_1$上移动，于是 $\delta y_1=0$. 由(7.7)式或(7.9)式可得

$$[F-y'F_{y'}]|_{x=x_1}=0. \tag{7.12}$$

最后，如果可取曲线的左端点 $A(x_0,y_0)$是可变动的，或者两个端点 A 和 B 都是可变动的，则将上述同样的讨论应用于该点上，立即可知 x_0(或 x_0,x_1同时)按各种不同情形分别满足条件(7.9)—(7.12)式.

例1 求泛函 $J[y]=\int_{x_0}^{x_1}A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 的斜截条件.

解 这里 $F=A(x,y)\sqrt{1+y'^2}$. 为了求出该泛函的斜截条件，我们假定可取曲线的左端点是固定的，而设右端点 $B(x_1,y_1)$在曲线 $C_1:y=\varphi(x)$上移动，并设 $y(x)$为泛函的极值曲线. 由(7.10)得斜截条件为

$$\left\{[\varphi'(x)-y'(x)]\frac{A(x,y)y'}{\sqrt{1+y'^2}}+A(x,y)\sqrt{1+y'^2}\right\}\Bigg|_{x=x_1}=0,$$

或

$$\left\{\frac{A(x,y)}{\sqrt{1+y'^2}}[\varphi'y'+1]\right\}\Big|_{x=x_1}=0.$$

若 $A(x_1,y_1)\neq0$，则 $y'(x_1)=-\dfrac{1}{\varphi'(x_1)}$. 此式表明，极值曲线 $y=y(x)$与曲线 C_1在交点处正交. 或者说，在可取曲线簇中，只有那些与曲线 C_1正交的曲线才有可能成为此泛函的极值曲线.

例2 求连接平面上两条曲线 $x+y+1=0$与 $xy=1$的最短曲线(如图7.2).

解 设所求平面曲线为 $y=f(x)$，现在的问题是求泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

的极值曲线.

$$C_2:y=\psi(x)=-(1+x),A(x_0,\psi(x_0))\in C_2;$$

$$C_1:y=\varphi(x)=\frac{1}{x},B(x_1,\varphi(x_1))\in C_1.$$

$J[y]$的 Euler 方程的解为 $y=c_1x+c_2$. 这时有

$$y' = c_1,$$

$$F = \sqrt{1+y'^2} = \sqrt{1+c_1^2},$$

$$F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}.$$

在这种两个边界点都变动的情况下，由斜截条件(7.10)与所给边界条件，应有

$$\begin{cases} [(\varphi'-y')F_{y'}+F]|_{x=x_1}=0, \\ [(\psi'-y')F_{y'}+F]|_{x=x_0}=0, \\ y(x_0)=y_0, \\ y(x_1)=y_1, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \left(-\dfrac{1}{x_1^2}-c_1\right)\dfrac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}+\sqrt{1+c_1^2}=0, \\ (-1-c_1)\dfrac{c_1}{\sqrt{1+c_1^2}}+\sqrt{1+c_1^2}=0, \\ c_1x_0+c_2=-(1+x_0), \\ c_1x_1+c_2=\dfrac{1}{x_1}. \end{cases}$$

解联立方程得：$x_0=-\dfrac{1}{2}$，$x_1=\pm 1$，$c_1=1$，$c_2=0$.

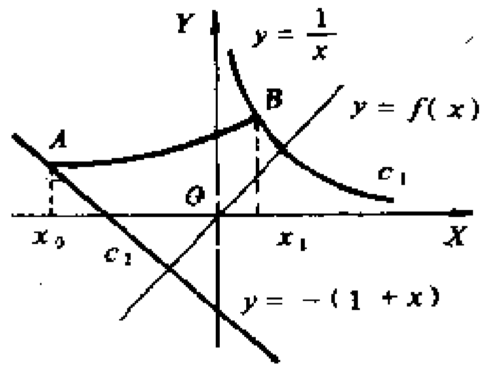


图 7.2

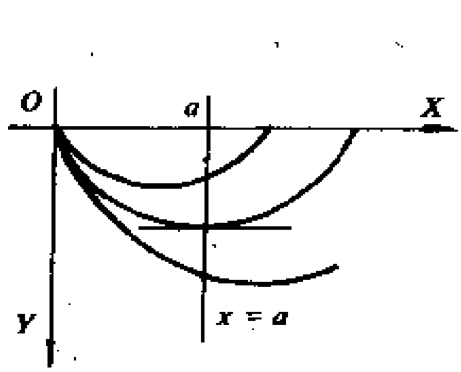


图 7.3

如果考虑的是双曲线上相应于 $x>0$ 的那一支，那么联立方程组只有唯一的一组解

$$x_0=-\frac{1}{2},\quad x_1=1,\quad c_1=1,\quad c_2=0.$$

于是所求曲线为 $y=x, -\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 1$.

例3 求泛函 $J[y]=\int_0^a \frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}}dx$ 的极值曲线.

解

$$F=\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{2gy}},$$

因此，有

$$F_{y'}=\frac{y'}{\sqrt{2gy}\sqrt{1+y'^2}}.$$

从而，满足边界条件 $y(0)=0$ 的 Euler 方程的解为

$$\begin{cases} x=\frac{c_1}{2}(t-\sin t), \\ y=\frac{c_1}{2}(1-\cos t). \end{cases}$$

题中对 $y(a)$ 没作任何要求，这意味着所给出的是自然边界条件，于是有

$$\left.\frac{y'(x)}{\sqrt{2gy(x)}\sqrt{1+[y'(x)]^2}}\right|_{x=a}=0,$$

即

$$y'(a)=0.$$

这说明，在所求曲线上的点 $(a,y(a))$ 处，切线应与 X 轴平行（如图 7.3）. 所以点 $(a,y(a))$ 应是摆线的顶点，而摆线的顶点对应于 $t=\pi$，因此

$$a=\frac{c_1}{2}(\pi-\sin\pi),\qquad c_1=\frac{2a}{\pi}.$$

于是所求极值曲线为

$$\begin{cases} x = \dfrac{a}{\pi}(t - \sin t), \\ y = \dfrac{a}{\pi}(t - \cos t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi.$$

§ 7.2 $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x$ 型泛函的可动边界问题

本节将探讨泛函

$$J[y,z] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x \tag{7.13}$$

的可动边界的极值问题. 为方便起见,我们假定 $J[y,z]$ 的一个边界点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 是固定的,而另一边界点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 可以移动. 设 (7.13) 式的极值曲线为

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases} \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_1. \tag{7.14}$$

类似于上一章的固定边界问题及本章上一节的讨论可知, $y(x)$, $z(x)$ 必满足 Euler 方程组

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0, \\ F_z - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} = 0. \end{cases} \tag{7.15}$$

这个方程组的通解中含有四个任意常数,由于 B 点变动,又多了一个未知量 x_1. 这样,为了能确定唯一解,就要确定五个常数. 由于 A 点固定,一般还可减少两个任意常数,为了确定另外三个常数,必须还有三个方程. 下面根据 B 的不同情况,分别给出这些

方程.

对于左端点 $A(x_0,y_0,z_0)$ 固定而右端点 $B(x_1,y_1,z_1)$ 可变动的情形，仿照上一节计算泛函 $J[y,z]$ 的变分，这时 $J[y,z]$ 取极值的必要条件 $\delta J=0$ 经化简后可写成

$$[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]|_{x=x_1}\delta x_1+F_{y'}|_{x=x_1}\delta y_1+F_{z'}|_{x=x_1}\delta z_1=0. \tag{7.16}$$

上式中 $\delta x_1,\delta y_1,\delta z_1$ 是任意的，即点 B 可按任意方式移动. 下面我们分三种情形讨论之.

(1) 若 $\delta x_1,\delta y_1,\delta z_1$ 相互无关，由(7.16)式可得

$$\begin{cases}[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}]|_{x=x_1}=0,\\ F_{y'}|_{x=x_1}=0,\\ F_{z'}|_{x=x_1}=0.\end{cases} \tag{7.17}$$

求出 Euler 方程组(7.15)的通解，由(7.17)式及 $A(x_0,y_0,z_0)$ 固定来确定这种情形下的极值曲线及 x_1 的值.

(2) 若右端点 B 沿曲线 $y=\varphi(x),z=\psi(x)$ 移动，这时 $\delta x_1,\delta y_1,\delta z_1$ 满足关系式

$$\delta y_1=\varphi'(x_1)\delta x_1,\delta z_1=\psi'(x_1)\delta x_1.$$

代入(7.16)式，得

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}+(\psi'-z')F_{z'}]|_{x=x_1}\cdot\delta x_1=0.$$

由 δx_1 的任意性，有

$$[F+(\varphi'-y')F_{y'}+(\psi'-z')F_{z'}]|_{x=x_1}=0. \tag{7.18}$$

上式称为泛函 $J[y,z]$ 的极值曲线与端点曲线的斜截条件. 求出 Euler 方程组(7.15)的通解，再由(7.18)式，$y_1=\varphi(x_1)$，$z_1=\psi(x_1)$ 及 $A(x_0,y_0,z_0)$ 固定就可以定出这种情形下的极值曲线和 x_1 的值.

(3) 若端点 B 在某曲面 $\Phi(x,y,z)=0$ 上移动，此时 $\delta x_1,\delta y_1,\delta z_1$ 满足关系式

$$\Phi_{x_1}\delta x_1+\Phi_{y_1}\delta y_1+\Phi_{z_1}\delta z_1=0.$$

如果 $\Phi_{z_1}\neq0$，则有

$$\delta_{z_1} = \frac{\Phi_{x_1}}{\Phi_{z_1}}\delta x_1 - \frac{\Phi_{y_1}}{\Phi_{z_1}}\delta y_1.$$

代入(7.16)式，并注意到 δx_1，δy_1的任意性，有

$$\begin{cases}\left[F-y'F_{y'}-z'F_{z'}-F_{z'}\dfrac{\Phi_x}{\Phi_z}\right]_{x=x_1}=0,\\ \left[F_{y'}-F_{z'}\dfrac{\Phi_y}{\Phi_z}\right]_{x=x_1}=0.\end{cases} \tag{7.19}$$

(7.19)式称为泛函 $J[y,z]$的极值曲线与端点曲面的斜截条件. 求出 Euler 方程组(7.15)的通解，再由(7.19)式，$\Phi(x_1,y_1,z_1)=0$和 $A(x_0,y_0,z_0)$是固定的可以定出极值曲线和 x_1的值.

最后，如果边界点 $A(x_0,y_0,z_0)$是可变动的，将上述同样的方法应用于该点上，就得出完全类似的条件. 当然也可以类似地讨论两个边界点同时变动的情形.

例4 求泛函

$$J[y,z] = \int_0^{x_1}[y'^2+z'^2+2yz]\mathrm{d}x$$

的极值曲线，已知 $y(0)=0$，$z(0)=0$，且点 $B(x_1,y_1,z_1)$在平面 $x=x_1$上移动.

解 本例是 $A(0,0,0)$固定，$B(x_1,y_1,z_1)$在平面 $x=x_1$上变动的情形.

先求 Euler 方程组的通解. 由于

$$F = y'^2+z'^2+2yz,$$

$$F_y = 2z,\ F_z = 2y,\ F_{y'} = 2y',\ F_{z'} = 2z',$$

Euler 方程组为

$$\begin{cases}F_y-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 2z-2y''=0,\\ F_z-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} = 2y-2z''=0.\end{cases}$$

它的通解为

$$\begin{cases} y = c_1\mathrm{ch}x + c_2\mathrm{sh}x + c_3\cos x + c_4\sin x, \\ z = c_1\mathrm{ch}x + c_2\mathrm{sh}x - c_3\cos x - c_4\sin x. \end{cases}$$

由边界条件 $y(0)=0, z(0)=0$得 $c_1=c_3=0$，于是

$$\begin{cases} y = c_2\mathrm{sh}x + c_4\sin x, \\ z = c_2\mathrm{sh}x - c_4\sin x. \end{cases} \tag{7.20}$$

由于 B 在平面 $x=x_1$上移动，故 $\delta x_1=0$，而 $\delta y_1, \delta z_1$任意. 由一般条件(7.16)，得

$$\begin{cases} F_{y'}\big|_{x=x_1} = 0, \\ F_{z'}\big|_{x=x_1} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y'(x_1) = 0, \\ z'(x_1) = 0. \end{cases}$$

由(7.20)式，得

$$\begin{cases} c_2\mathrm{ch}x_1 + c_4\cos x_1 = 0, \\ c_2\mathrm{ch}x_1 - c_4\cos x_1 = 0. \end{cases}$$

如果 $\cos x_1 \neq 0$则由上式可解得，$c_2=c_4=0$，于是，所求极值曲线为

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = 1. \end{cases}$$

如果 $\cos x_1=0$，则 $x_1=n\pi+\dfrac{\pi}{2}$(n 为整数)，$c_2=0$，极值曲线为

$$\begin{cases} y = c_4\sin x_1, \\ z = -\ c_4\sin x, \end{cases}$$

其中 c_4为任意常数. 它是平面 $z=-y$ 上的任一条曲线. 容易验证，在上述两种情形下，都有 $J[y,z]=0$.

例5 求连接点 $B(1,0,0)$与曲面 $\Sigma: z=x^2+y^2+\dfrac{1}{4}$ 的最短曲线(如图7.4).

解 设所求曲线为

$$\Gamma:\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases} \qquad x_0 \leqslant x \leqslant 1,$$

它必使泛函

$$J = \int_{x_0}^{1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}x$$

取最小值. 这个泛函的一个边界点 $B(1,0,0)$ 固定, 而另一个边界点 $A(x_0, y_0, z_0)$ 在空间曲面 Σ:

$$\Phi(x,y,z) = z - x^2 - y^2 - \frac{1}{4} = 0$$

上移动.

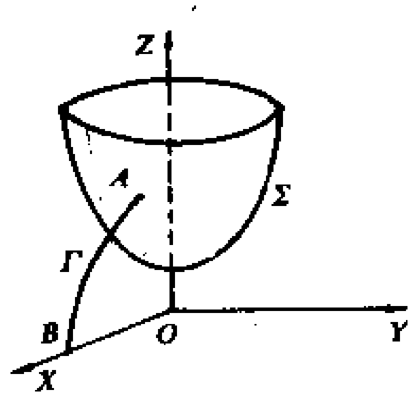


图 7.4

$$F = \sqrt{1 + y'^2 + z'^2},$$

$$F_y = 0, \quad F_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}},$$

$$F_z = 0, \quad F_{z'} = \frac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}}.$$

J 的 Euler 方程组为

$$\begin{cases} F_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \\ F_z - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} = -\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} \dfrac{y'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = c_1, \\ \dfrac{z'}{\sqrt{1 + y'^2 + z'^2}} = c_2. \end{cases}$$

所以 $z' = ky'$, 代入上式, 得 $y' = g_1, z' = g_2$, 于是有

$$\begin{cases} y = g_1 x + h_1, \\ z = g_2 x + h_2. \end{cases}$$

其中 k, g_1, g_2, h_1, h_2 皆为常数. 它的几何图形为空间直线.

由边界条件 $y(1)=0, z(1)=0$ 得 $h_1=-g_1, h_2=-g_2$，所以

$$\begin{cases} y = g_1(x-1), \\ z = g_2(x-1). \end{cases}$$

因点 A 在曲面 Σ 上移动，再由斜截条件(7.19)，有

$$\begin{cases} \left[F - y'F_{y'} - z'F_{z'} - F_{z'}\dfrac{\Phi_x}{\Phi_z}\right]\Bigg|_{x=x_0} = 0, \\ \left[F_{y'} - F_{z'}\dfrac{\Phi_y}{\Phi_z}\right]\Bigg|_{x=x_0} = 0, \\ z_0 - x_0^2 - y_0^2 - \dfrac{1}{4} = 0. \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} [1 + 2xz']|_{x=x_0} = 0, \\ [y' + 2yz']|_{x=x_0} = 0, \\ z_0 - x_0^2 - y_0^2 - \dfrac{1}{4} = 0. \end{cases}$$

由此解得 $g_1=0, g_2=-1, x_0=\dfrac{1}{2}$，于是所求直线为

$$\begin{cases} y = 0, \\ z = -(x-1), \end{cases} \qquad \frac{1}{2} \leqslant x \leqslant 1.$$

点 A 的坐标为$(\dfrac{1}{2}, 0, \dfrac{1}{2})$. 将所求直线代入泛函，即可得最短距离为

$$|AB| = \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 + y'^2 + z'^2}\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_{\frac{1}{2}}^{1} \sqrt{1 + (-1)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2}}{2},$$

或

$$|AB| = \sqrt{(\frac{1}{2} - 1)^2 + (\frac{1}{2})^2} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

§ 7.3 $\int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x$ 型泛函的可动边界问题

现在研究当泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x \tag{7.21}$$

的边界点可以变动时的极值问题. 先假定点 $A(x_0,y_0,y_0')$ 为固定点，而点 $B(x_1,y_1,y_1')$ 是可以变动的. 设泛函(7.21)的极值曲线为 $y=y(x)$，则它必满足 Euler-Poisson 方程

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''} = 0. \tag{7.22}$$

在一般情形下，这是一个四阶常微分方程，通解中含有四个任意常数. 由于 B 点变动，所以 x_1 也待定. 因为 A 点固定，由 $y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y_0'$ 可以确定出 Euler-Poisson 方程通解中的两个任意常数. 因此，为了确定唯一解，即为了确定另外三个待定常数，就必须再找出三个方程，这些方程可以由泛函取极值的基本必要条件 $\delta J=0$ 得到. 我们还是先就一般情形进行讨论，计算泛函(7.21)的增量 ΔJ，然后分离出线性主部 δJ.

设泛函(7.21)式在曲线 $y=y(x)$ 上取得极值，任取一条可取曲线 $y=y(x)+\delta y$，当 $x=x_0$ 时对应于点 A，当 $x=x_1+\delta x_1$ 时对应于点 $B'(x_1+\delta x_1, y_1+\delta y_1, y_1'+\delta y_1')$. 与前两节的推导类似，于是有

$$\begin{cases} \delta y\big|_{x=x_1} = \delta y_1 - y'(x_1)\delta x_1, \\ \delta y'\big|_{x=x_1} = \delta y_1' - y''(x_1)\delta x_1. \end{cases} \tag{7.23}$$

$$\Delta J = \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'')\mathrm{d}x - \int_{x_0}^{x_1} F(x,y,y',y'')\mathrm{d}x$$

$$= \int_{x_0}^{x_1+\delta x_1} F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'')\mathrm{d}x$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y+\delta y, y'+\delta y', y''+\delta y'') - F(x, y, y', y'')]\mathrm{d}x.$$

应用中值定理，并由 F 以及 $y(x)$，$y'(x)$，$y''(x)$诸函数的连续性，就得到

$$\Delta J = F(x, y, y', y'')\big|_{x=x_1} \cdot \delta x_1$$

$$+ \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'']\mathrm{d}x + R,$$

其中 R 是较$|\delta x_1|$，$|\delta y_1|$，$|\delta y|$，$|\delta y'|$，$|\delta y''|$诸模数中之最大阶次为更高阶的无穷小量. 因此

$$\delta J = F\big|_{x=x_1} \cdot \delta x_1 + \int_{x_0}^{x_1} [F_y \delta y + F_{y'} \delta y' + F_{y''} \delta y'']\mathrm{d}x.$$

将上式右端积分号下的第二项分部积分一次，第三项分部积分两次，并注意到右端点固定时 $\delta y|_{x=x_0}=0$，$\delta y'|_{x=x_0}=0$，再由(7.22)式，我们得到

$$\delta J = \left[F\delta x_1 + F_{y'}\delta y + F_{y''}\delta y' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F_{y''})\delta y\right]\bigg|_{x=x_1}.$$

将(7.23)式代入上式，这时泛函(7.21)取极值的必要条件 $\delta J=0$ 便成为

$$\left[F - y'F_{y'} - y''F_{y''} + y'\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right]\bigg|_{x=x_1} \cdot \delta x_1$$

$$+ \left[F_{y'} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right]\bigg|_{x=x_1} \cdot \delta y_1 + F_{y''}\big|_{x=x_1} \cdot \delta y_1' = 0. \qquad (7.24)$$

这说明，左端点固定，$y(x_0)=y_0$，$y'(x_0)=y_0'$，右端点不管如何变动，即不管 δx_1，δy_1，$\delta y_1'$为何值，沿使 $J[y]$取极值的曲线在 $x=x_1$ 处(7.24)式总成立. 这时也可分成三种情况来讨论：

(1) 若 δx_1，δy_1，$\delta y_1'$改为 y_1'相互无关，在(7.24)式中，由 δx_1，δy_1，$\delta y_1'$的任意性知，它们的系数在点 $x=x_1$处应该为零，即

$$\begin{cases}\left[F-y'F_{y'}-y''F_{y''}+y'\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right]\Big|_{x=x_1}=0,\\ \left[F_{y'}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right]\Big|_{x=x_1}=0,\\ F_{y''}|_{x=x_1}=0.\end{cases}\tag{7.25}$$

(2) 若 y_1,y_1' 都依赖于 x_1，端点 $B(x_1,y_1,y_1')$ 在曲线 $y=\varphi(x)$ 上移动，且 $y'=\psi(x)$，这时

$$\delta y_1=\varphi'(x_1)\delta x_1,\qquad \delta y_1'=\psi'(x_1)\delta x_1.$$

代入(7.24)式，并注意到 δx_1 的任意性，有

$$\left[F+(\varphi'-y')(F_{y'}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''})+(\psi'-y'')F_{y''}\right]_{x=x_1}=0.\tag{7.26}$$

故在 $x=x_1$ 处也有三个条件：$y_1=\varphi(x_1)$，$y_1'=\psi(x_1)$ 及(7.26)式.

(3) 若 x_1,y_1,y_1' 存在着关系式 $\Phi(x_1,y_1,y_1')=0$，则有

$$\Phi_{x_1}\delta x_1+\Phi_{y_1}\delta y_1+\Phi_{y_1'}\delta y_1'=0.$$

假定 $\Phi_{y_1'}\neq 0$，则

$$\delta y_1'=-\frac{\Phi_{x_1}}{\Phi_{y_1'}}\delta x_1-\frac{\Phi_{y_1}}{\Phi_{y_1'}}\delta y_1.$$

代入(7.24)式，再由 $\delta x_1,\delta y_1$ 的任意性，得

$$\begin{cases}\left[F-y'\left(F_{y'}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}\right)-\left(y''+\dfrac{\Phi_x}{\Phi_{y'}}\right)F_{y''}\right]\Big|_{x=x_1}=0,\\ \left[F_{y'}-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y''}-\dfrac{\Phi_y}{\Phi_{y'}}F_{y''}\right]\Big|_{x=x_1}=0.\end{cases}\tag{7.27}$$

故在 $x=x_1$ 处仍有三个条件，即 $\Phi(x_1,y_1,y_1')=0$ 及(7.27)式.

例1 设泛函 $J[y]=\int_0^1(1+y''^2)\mathrm{d}x$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$，$y(1)=1$，而 $y'(1)$ 任意. 试求 $J[y]$ 的极值曲线.

解 由于 $F=1+y''^2$，故 Euler-Poisson 方程为

$$F_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}+\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}F_{y''}=2y^{(4)}=0,$$

通解为

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3.$$

由 $y(0)=0$ 得 $c_1=0$；由 $y'(0)=1$ 得 $c_2=1$；由 $y(1)=1$ 得 $c_3+c_4=0$. 因为 $x_1=1,y_1=1$ 是固定的，所以 $\delta x_1=0,\delta y_1=0$，于是，一般条件(7.24)化为

$$F_{y'}|_{x=1}\delta y_1' = 0 \quad 或 \quad y''|_{x=1}\delta y_1' = 0.$$

由于 $\delta y_1'$ 是任意的，故 $y''|_{x=1}=0$. 而 $y''=2c_3+6c_4x$，当 $x=1$ 时有 $2c_3+6c_4=0$. 此式与 $c_3+c_4=0$ 联立可解得 $c_3=c_4=0$. 因此，极值只能在直线 $y=x$ 上达到.

习　题

1. 求泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1} A(x,y)e^{\arctan y'}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

的斜截条件，其中边界点 (x_0,y_0) 固定.

2. 求使泛函

$$J[y]=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(y^2-y'^2)\mathrm{d}x,\quad y(0)=0$$

达到极值的函数，另一个边界点在 $x=\frac{\pi}{4}$ 上滑动.

3. 求泛函

$$J[y]=\int_{(0,0)}^{(x_1,y_1)}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{\sqrt{y}}\mathrm{d}x$$

的极值，其中点 (x_1,y_1) 在直线 $y=x-5$ 上移动.

4. 只利用基本必要条件 $\delta J=0$，求能使泛函

$$J[y]=\int_0^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{y}\mathrm{d}x,\ y(0)=0$$

达到极值的曲线，其中第二边界点可以在圆周 $(x-9)^2+y^2=9$ 上移动.

5. 求泛函

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}x$$

的极值.设边界条件之一的坐标(x_0,y_0,z_0)满足方程$z_0=\varphi(x_0,y_0)$，而另一边界条件的坐标(x_1,y_1,z_1)满足方程$z_1=\psi(x_1,y_1)$.

6. 求泛函

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}A(x,y,z)\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}x$$

的斜截条件，其中$z_1=\varphi(x_1,y_1)$.

7. 试求当$y(0)=0,y'(0)=0,y(1)=1$，而$y'(1)$任意时，泛函

$$J[y]=\int_0^1(y''^2-2xy)\,\mathrm{d}x$$

的极值曲线.

8. 利用极值的基本必要条件$\delta J=0$，求能使泛函

$$J[y]=\int_0^1(y''^2-2xy)\,\mathrm{d}x,\quad y(0)=y'(0)=0,\quad y(1)=\frac{1}{120}$$

达到极值的函数，其中$y'(1)$是任意的.

9. 试求圆周Ⅰ：$\begin{cases}x^2+y^2=a^2\\ z=0\end{cases}$与双曲线Ⅱ：$\begin{cases}z^2-x^2=b^2\\ y=0\end{cases}$之间的最短距离.

第八章　条件极值的变分问题

前两章在讨论变分问题的极值时，除了边界点外，都没有对未知函数作其它的附加限制. 但是，在自然科学和工程技术中遇到的变分问题，多数是带有附加约束条件的极值问题，如第五章中的短程线问题、等周问题等. 所谓条件极值的变分问题，就是在泛函所依赖的函数上附加了一些约束条件来求泛函的极值问题.

§8.1　附有约束条件 $\varphi=0$ 的变分问题

在本节中，我们主要研究泛函

$$J[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,z,y',z')\mathrm{d}x \tag{8.1}$$

满足边界条件

$$\begin{cases}y(x_0)=y_0,\\ z(x_0)=z_0,\end{cases}\qquad \begin{cases}y(x_1)=y_1,\\ z(x_1)=z_1,\end{cases} \tag{8.2}$$

和约束条件

$$\varphi(x,y,z)=0 \tag{8.3}$$

的极值问题，导出泛函 J 的极值曲线所应满足的条件. 更一般的情形可以类推.

这类问题的几何意义是：在曲面 $\varphi(x,y,z)=0$ 上求一条曲线

$$\Gamma:\begin{cases}y=y(x),\\ z=z(x),\end{cases}\qquad x_0\leqslant x\leqslant x_1,$$

使泛函(8.1)在 Γ 上取得极值. 这种条件极值的求解问题类似于

多元函数极值的 Lagrange 乘数法，可化为无条件极值来处理.

Lagrange 定理 设 $y(x),z(x)$ 是泛函(8.1)在边界条件(8.2)和约束条件(8.3)下的极值函数. 如果在曲线

$$\Gamma:\begin{cases}y=y(x),\\ z=z(x),\end{cases}$$

上 φ_y,φ_z 至少有一个不为零，则必存在函数 $\lambda(x)$，使 $y(x),z(x)$ 满足泛函

$$J^*[y,z]=\int_{x_0}^{x_1}(F+\lambda\varphi)\mathrm{d}x\triangleq\int_{x_0}^{x_1}F^*\mathrm{d}x \tag{8.4}$$

的 Euler 方程组

$$\begin{cases}F_y^*-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}^*=0,\\ F_z^*-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}^*=0,\end{cases} \tag{8.5}$$

其中 $F^*=F+\lambda\varphi$.

证 不妨设在曲线 Γ 上 $\varphi_z\neq 0$，按隐函数存在定理，可由(8.3)式确定一个函数

$$z=\psi(x,y).$$

将此函数代入(8.1)式，得

$$J=\int_{x_0}^{x_1}F[x,y,\psi(x,y),y',\psi_x'+\psi_y y']\mathrm{d}x$$

$$\triangleq\int_{x_0}^{x_1}\Phi(x,y,y')\mathrm{d}x. \tag{8.6}$$

其中 $\Phi(x,y,y')=F[x,y,\psi(x,y),y',\psi_x+\psi_y y']\mathrm{d}x$. 这样就把泛函(8.1)的条件极值问题转化成了泛函(8.6)的无条件极值问题.

现写出泛函(8.6)的 Euler 方程

$$\Phi_y-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_{y'}=0, \tag{8.7}$$

计算 $\Phi_y,\Phi_{y'},\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_{y'}$，得

$$\Phi_y=F_y+F_z\psi_y+F_{z'}[\psi_{xy}+\psi_{yy}y'],$$

$$\Phi_{y'} = F_{y'} + F_{z'}\psi_y,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_{y'} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} + \psi_y \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} + F_{z'}[\psi_{yx} + \psi_{yy}y'],$$

代入(8.7)式,得

$$\Phi_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Phi_{y'} = F_y + \psi_y\left[F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}\right] - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0.$$

注意到 $\varphi_z \neq 0, \psi_y = \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\varphi_y}{\varphi_z}$,于是有

$$F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} - \frac{\varphi_y}{\varphi_z}\left[F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}\right] = 0,$$

或

$$\frac{F_y - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}}{\varphi_y} = \frac{F_z - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}}{\varphi_z} \triangleq -\lambda(x).$$

因此,存在 $\lambda(x)$,使极值函数 $y(x)$, $z(x)$满足方程组

$$\begin{cases} F_y + \lambda(x)\varphi_y - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'} = 0, \\ F_z + \lambda(x)\varphi_z - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'} = 0. \end{cases}$$

令 $F^* = F + \lambda\varphi$,则 $F_y^* = F_y + \lambda\varphi_y$, $F_{y'}^* = F_{y'}$, $F_z^* = F_z + \lambda\varphi_z$, $F_{z'}^* = F_{z'}$,于是上式变成

$$\begin{cases} F_y^* - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}^* = 0, \\ F_z^* - \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}^* = 0. \end{cases}$$

而这方程组就是以 F^* 为被积函数的泛函的 Euler 方程组. ▌

例1 在空间曲面 $\Sigma: z - \frac{1}{2}x^2 = 0$上求连接两点 $O(0,0,0)$和 $B(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$的最短曲线(如图8.1).

解 问题归结为在曲面 $\Sigma: z - \frac{1}{2}x^2 = 0$上求一曲线

$$\Gamma: \begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases} \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

使其满足边界条件

$$\begin{cases} y(0)=0, \\ z(0)=0, \end{cases} \qquad \begin{cases} y(1)=\dfrac{1}{2}, \\ z(1)=\dfrac{1}{2}, \end{cases}$$

且使泛函

$$J[y,z]=\int_0^1 \sqrt{1+y'^2+z'^2}\,\mathrm{d}x$$

取极小值.

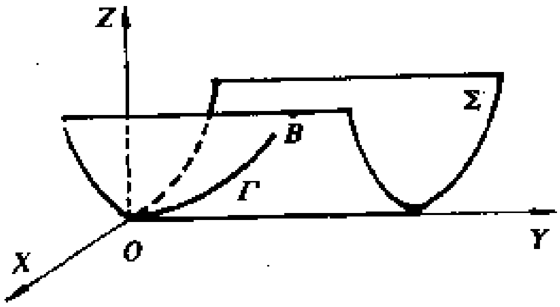


图 8.1

按 Lagrange 定理，作辅助泛函

$$J^*=\int_0^1\left[\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)\left(z-\frac{1}{2}x^2\right)\right]\mathrm{d}x=\int_0^1 F^*\,\mathrm{d}x,$$

其中 $F^*=\sqrt{1+y'^2+z'^2}+\lambda(x)\left(z-\dfrac{1}{2}x^2\right)$，由 Euler 方程组(8.5)式及约束条件，我们有

$$\begin{cases} F_y^*-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y'}^*=-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0, & (\text{I}) \\ F_z^*-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{z'}^*=\lambda(x)-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\dfrac{z'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}\right)=0, & (\text{II}) \\ z-\dfrac{1}{2}x^2=0. & (\text{III}) \end{cases}$$

由(I)式得 $\dfrac{y'}{\sqrt{1+y'^2+z'^2}}=c_1$，将(III)式代入此式得

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2+x^2}}=c_1,$$

或

$$y'=\sqrt{\frac{c_1^2}{1-c_1^2}}\sqrt{1+x^2}\triangleq c\sqrt{1+x^2}.$$

积分后可得

$$y=\frac{c}{2}\left[x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]+c_2.$$

因为所求曲线过点 $O(0,0,0)$ 和 $B(1,\frac{1}{2},\frac{1}{2})$，由此可定出

$$c_2=0,\quad c=\frac{1}{\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})}. \tag{N}$$

于是所求曲线为

$$\begin{cases} y=\dfrac{x\sqrt{1+x^2}+\ln(x+\sqrt{1+x^2})}{2[\sqrt{2}+\ln(1+\sqrt{2})]}, \\ z=\dfrac{1}{2}x^2, \end{cases} \quad 0\leqslant x\leqslant 1.$$

连接点 O 与 B 的弧段的长度为

$$\begin{aligned} J&=\int_0^1\sqrt{1+y'^2+z'^2}\,dx \\ &=\int_0^1\sqrt{1+c^2(1+x^2)+x^2}\,dx \\ &=\sqrt{1+c^2}\int_0^1\sqrt{1+x^2}\,dx \\ &=\sqrt{1+c^2}\,\frac{1}{2}\left[x\sqrt{1+x^2}+\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)\right]\Big|_0^1 \\ &=\frac{\sqrt{1+c^2}}{2c}, \end{aligned}$$

其中常数 c 如(N)式.

例2 试求出圆柱面 $x^2+y^2=R^2$ 上连接点 $P_1(x_1,y_1,z_1)$ 与点 $P_2(x_2,y_2,z_2)$ 的最短曲线(如图8.2).

解 设圆柱面的参数方程为

$$\begin{cases} x=R\cos t, \\ y=R\sin t, \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi.$$

因为点 P_1,P_2 在圆柱面上，故所求曲线 $\overset{\frown}{P_1P_2}$ 的 x,y 坐标与圆柱面的相同，只要求出 z 坐标 $z=z(t)$ 即可. 设 P_1,P_2 点对应的参数为 $t_1<t_2$，则 $\overset{\frown}{P_1P_2}$ 的弧长为

$$l[x(t),y(t),z(t)]=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}\mathrm{d}t.$$

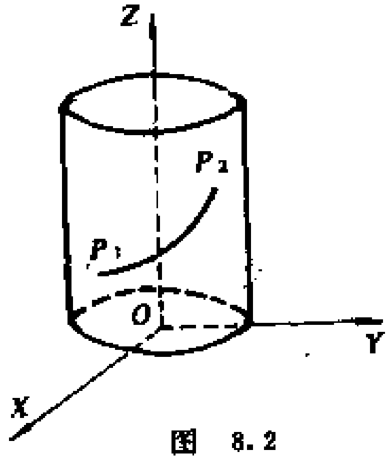


图 8.2

于是问题化为：求过 P_1,P_2 且位于圆柱面上的曲线，使泛函 l 取极小值.

作辅助泛函

$$l^*=\int_{t_1}^{t_2}[\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)+z'^2(t)}+\lambda(t)(x^2+y^2-R^2)]\mathrm{d}t.$$

将 $x=R\cos t,y=R\sin t$ 代入上式，得

$$l^*=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{R^2+z'^2(t)}\mathrm{d}t,$$

其中 $F^*=\sqrt{R^2+z'^2},F_z^*=0,F_{z'}^*=\dfrac{z'}{\sqrt{R^2+z'^2}}$，$l^*$ 的 Euler 方程为

$$F_z^*-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{z'}^*=-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{z'}{\sqrt{R^2+z'^2}}=0.$$

初(首次)积分，有

$$\frac{z'}{\sqrt{R'^2+z'^2}}=c,$$

则 $z'=\dfrac{cR}{\sqrt{1-c^2}}\triangleq c_1$. 再积分之，有

$$z=c_1t+c_2.$$

故所求最短曲线是圆柱螺线

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t, \\ z = c_1 t + c_2, \end{cases}$$

其中 c_1, c_2 由 $P_1(x_1, y_1, z_1), P_2(x_2, y_2, z_2)$ 确定.

注 若把 Lagrange 定理中约束条件改为：$\varphi(x, y, z, y', z') = 0$，而 $\varphi_{y'}$ 或 $\varphi_{z'}$ 中至少有一个不为零，则定理结论仍成立.

Lagrange 定理还可作如下推广：

设函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是泛函

$$J[y_1, y_2, \cdots, y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n')\mathrm{d}x$$

在边界条件

$$y_i(x_0) = y_{i0}, \quad y_i(x_1) = y_{i1}, \quad i = 1, 2, \cdots, n,$$

和约束条件

$$\varphi_j(x, y_1, y_2, \cdots, y_n) = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m; \quad m < n,$$

下的极值函数. 假定 $\varphi_j (j = 1, 2, \cdots, m)$ 是相互独立的，即至少有一个 m 阶函数行列式不为零，例如：

$$\frac{D(\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_m)}{D(y_1, y_2, \cdots, y_m)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_1}{\partial y_m} \\ \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_2}{\partial y_m} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_1} & \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi_m}{\partial y_m} \end{vmatrix} \neq 0,$$

则存在 m 个函数 $\lambda_1(x), \lambda_2(x), \cdots, \lambda_m(x)$，使极值函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x)$ 满足泛函

$$J^* = \int_{x_0}^{x_1}\left[F + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \varphi_i\right]\mathrm{d}x = \int_{x_0}^{x_1} F^* \mathrm{d}x$$

的 Euler 方程组

$$F_{y_i}^* - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} F_{y_i'}^* = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

上述结论表明，凡使泛函 J 达到极值的函数将同时使泛函 J^* 达到无条件极值.

如果将上述的约束条件改为

$$\phi_j(x, y_1, y_2, \cdots, y_n, y_1', y_2', \cdots, y_n') = 0, \quad j = 1, 2, \cdots, m; \quad m < n,$$

而假定

$$\frac{D(\phi_1, \phi_2, \cdots, \phi_m)}{D(y_1', y_2', \cdots, y_m')} \neq 0,$$

则上述同样的结论也成立.

例3 飞机以常速率 v_0 沿水平方向飞行，问它应绕什么样的闭曲线飞行，才能使得在给定时间 T 内绕过最大的面积. 此时假定风速是恒定的(即风向和大小都是一定的).

解 取 OX 轴与风向一致，用 α 表示飞机的速度 v_0 与 OZ 轴正向间的夹角. 设飞机的运动方程为

$$\begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

由于飞机以常速率 v_0 飞行，所以 $x(t), y(t)$ 必须受约束

$$x'(t) = v_0\cos\alpha + a, \quad y'(t) = v_0\sin\alpha. \tag{$*$}$$

其中常数 a 是风速的大小，但是 $\alpha = \alpha(t)$ 是变化的. 飞机飞行一段时间 T 后形成闭曲线 Γ，而这闭曲线所围成的面积为

$$J = \frac{1}{2}\oint_\Gamma x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \int_0^T [xy' - yx']\mathrm{d}t.$$

这样，我们的问题变成：在约束条件($*$)下求 $x(t), y(t)$，使泛函 J 取极大值.

由前面所述，极值函数 $x(t), y(t)$ 必适合泛函

$$J^* = \frac{1}{2}\int_0^T [(xy' - yx') + \lambda_1(t)(x' - v_0\cos\alpha - a) + \lambda_2(t)(y' - v_0\sin\alpha)]\mathrm{d}t$$

的 Euler 方程组. 这里

$$F^* = xy' - yx' + \lambda_1(t)(x' - v_0\cos\alpha - a) + \lambda_2(t)(y' - v_0\sin\alpha);$$

$F_x^* - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{x'}^* = 0$ 或 $y' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-y+\lambda_1) = 0$，即 $2y' - \lambda_1' = 0$；

$F_y^* - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{y'}^* = 0$ 或 $-x' - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x+\lambda_2) = 0$，即 $2x' + \lambda_2' = 0$；

$F_\alpha^* - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{\alpha'}^* = 0$ 或 $\lambda_1\sin\alpha - \lambda_2\cos\alpha = 0$，即 $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$.

对上述前两式积分，得

$$2x + \lambda_2 = c_2, 2y - \lambda_1 = c_1.$$

平移坐标原点，使上两式中常数 c_1, c_2 为零（这样做并不改变曲线形状），于是

$$x = -\frac{\lambda_2}{2}, y = \frac{\lambda_1}{2}.$$

转换成极坐标 (r,θ)，$r^2 = x^2 + y^2$，$\mathrm{tg}\theta = \frac{y}{x}$，由此有 $\mathrm{tg}\theta = -\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$. 因为 $\mathrm{tg}\alpha = \frac{\lambda_2}{\lambda_1} = -\mathrm{ctg}\theta = \mathrm{tg}(\frac{\pi}{2}+\theta)$，从而可知飞机飞行方向与矢径是垂直的，且有

$$x' = -v_0\sin\theta + a, y' = v_0\cos\theta.$$

于是

$$\begin{aligned} xx' + yy' &= r\cos\theta(-v_0\sin\theta + a) + r\sin\theta \cdot v_0\cos\theta \\ &= ar\cos\theta. \end{aligned}$$

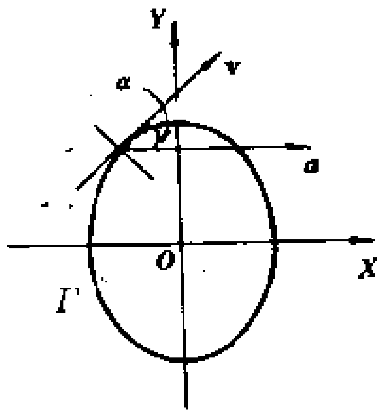


图 8.3

又因为

$$\begin{aligned} xx' + yy' &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x^2 + y^2) \\ &= \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}r^2 = r\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}, \end{aligned}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = v_0\cos\theta, \quad \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = \frac{a}{v_0}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t},$$

积分后，得 $r = \frac{a}{v_0}y + c$，即

$$r = \frac{c}{1 - \frac{a}{v_0}\sin\theta}.$$

这是焦点在原点的圆锥曲线方程，$\frac{a}{v_0}$为离心率. 因为我们总假定飞机的速率大于风速，即$\frac{a}{v_0}<1$，故所求曲线是离心率为$\frac{a}{v_0}$，长轴在 OY 轴上的椭圆（如图8.3）. 由此可知，最大飞行面积的曲线是椭圆，它的长轴垂直于风向，离心率等于风速与飞行速率之比，并且飞行方向垂直于椭圆的焦半径.

§8.2 等周问题

我们在第五章所提及的等周问题是狭义的等周问题，一般的等周问题是指在泛函约束（等周条件）

$$K[y]=\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x=l \tag{8.8}$$

及边界条件

$$y(x_0)=y_0,\quad y(x_1)=y_1 \tag{8.9}$$

下的所有具有二阶连续导数的函数 $y(x)$中，即在集合

$$Y=\{y(x)\left|\int_{x_0}^{x_1}G(x,y,y')\mathrm{d}x=l,y(x_i)=y_i,i=0,1,y\in C^2\right.\}$$

中求泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{8.10}$$

的极值函数，其中 G,l,y_i 等均是给定的函数或常数.

关于这种形式的等周问题极值存在的必要条件，我们有如下的 Euler 定理，它把条件极值的变分问题化成了无条件极值的变分问题.

Euler 定理 若曲线 $\Gamma: y=y(x)$在等周条件(8.8)及边界条件(8.9)下使泛函(8.10)达到极值，则存在常数 λ，使 $y(x)$满足泛函

$$J^*=\int_{x_0}^{x_1}(F+\lambda G)\mathrm{d}x\triangleq\int_{x_0}^{x_1}F^*\mathrm{d}x \tag{8.11}$$

的 Euler 方程

$$F_y^* - \frac{d}{dx}F_{y'}^* = 0. \tag{8.12}$$

其中 $F^* = F + \lambda G$.

证 因为在上一节中由微分方程约束条件的极值问题已经得到解决，现在自然是把泛函约束变成微分方程约束的情况来处理. 为此，令

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} G(x, y, y')dx,$$

它满足

$$u(x_0) = 0, \ u(x_1) = l, \ u'(x) = G[x, y(x), y'(x)].$$

如果把 $J[y]$ 看成两个函数 $y(x), u(x)$ 的泛函

$$J[y, u] = \int_{x_0}^{x_1} F(x, y, y')dx, \tag{8.13}$$

并令

$$\Phi(x, y, y', u, u') = G(x, y, y') - u',$$

则等周问题的极值曲线 $y = y(x)$ 必是泛函(8.13)在约束条件

$$\Phi(x, y, y', u, u') = 0$$

和边界条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y(x_1) = y_1, \quad u(x_0) = 0, \quad u(x_1) = l$$

下的极值函数之一.

由上节知，若 $y(x), u(x)$ 为此条件下的极值函数，则必存在 $\lambda(x)$，使 $y(x), u(x)$ 满足泛函

$$\begin{aligned} J^{**} &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y, y') + \lambda(x)\Phi(x, y, y', u, u')]dx \\ &= \int_{x_0}^{x_1} [F(x, y, y') + \lambda(x)(G(x, y, y') - u')]dx \\ &\triangleq \int_{x_0}^{x_1} F^{**}(x, y, y', u, u')dx \end{aligned}$$

的 Euler 方程组

$$\begin{cases} F_x^{**} - \dfrac{d}{dx}F_{x'}^{**} = 0, & (8.14) \\ F_y^{**} - \dfrac{d}{dx}F_{y'}^{**} = 0, & (8.15) \end{cases}$$

其中 $F^{**} = F(x,y,y') + \lambda(x)[G(x,y,y') - u']$.

因为 $F_x^{**} = 0, F_{x'}^{**} = -\lambda(x)$，这时(8.14)式成为

$$\frac{d}{dx}\lambda(x) = 0,$$

所以，λ 为常数. 由于

$$F_y^{**} = F_y + \lambda G_y, F_{y'}^{**} = F_{y'} + \lambda G_{y'},$$

由(8.15)式得

$$F_y + \lambda G_y - \frac{d}{dx}(F_{y'} + \lambda G_{y'}) = 0.$$

而此方程就是

$$F_y^* - \frac{d}{dx}F_{y'}^* = 0. \ \blacksquare$$

根据 Euler 定理，我们就得到求泛函(8.10)在等周条件(8.8)及边界条件(8.9)下的极值函数的解题方法：

作辅助泛函

$$J^*[y] = \int_{x_0}^{x_1}[F + \lambda G]dx \triangleq \int_{x_0}^{x_1} F^* dx,$$

其中 λ 为待定常数. 然后由 J^* 的 Euler 方程

$$F_y^* - \frac{d}{dx}F_{y'}^* = 0$$

与等周条件及边界条件联立求解.

例1 在 XOY 平面上求通过两定点 $A(x_0,y_0)$，$B(x_1,y_1)$ 且长度为定值 l 的曲线 $y=y(x)$，使它所围成的曲边梯形的面积最小，如图8.4所示.

解 问题是在等周条件及边界条件

$$\int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1 + y'^2}dx = l, \ y(x_0) = y_0, \ y(x_1) = y_1$$

下求泛函

$$J=\int_{x_0}^{x_1}y\mathrm{d}x$$

的极小值.

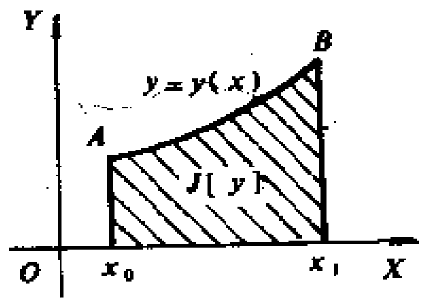


图 8.4

作辅助泛函

$$J^*=\int_{x_0}^{x_1}[y+\lambda\sqrt{1+y'^2}]\mathrm{d}x,$$

则有 $F^*=y+\lambda\sqrt{1+y'^2}$, $F_y^*=1$, $F_{y'}^*=\dfrac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}$, 故 J^* 的 Euler 方程为

$$1-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}=0,$$

即

$$x=\frac{\lambda y'}{\sqrt{1+y'^2}}+c_1.$$

令 $y'=\mathrm{tg}t$, 则 $x=\dfrac{\lambda\mathrm{tg}t}{\sec t}+c_1$ 或 $x=\lambda\sin t+c_1$. 由 $\mathrm{d}y=y'\mathrm{d}x$, 有

$$\mathrm{d}y=\mathrm{tg}t\cdot\lambda\cos t\mathrm{d}t=\lambda\sin t\mathrm{d}t.$$

由此得

$$y=-\lambda\cos t+c_2.$$

于是有

$$\begin{cases}x=\lambda\sin t+c_1,\\ y=-\lambda\cos t+c_2,\end{cases}$$

化为直角坐标方程

$$(x-c_1)^2+(y-c_2)^2=\lambda^2.$$

这说明,极值曲线是以 (c_1,c_2) 为圆心, λ 为半径的圆周簇中的一段圆弧. 由边界条件与约束条件可定出 c_1, c_2 和 λ. 注意,如果定出的圆弧不唯一,则一个使 J 取极大值,而另一个使 J 取极小值.

例2 求悬链形状问题的解,即求泛函

$$J[y]=\rho g\int_0^{x_1}y\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$$

在边界条件 $y(0)=y_0, y(x_1)=y_1$ 和约束条件 $\int_0^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x=l$ 下的极值曲线.

解 作辅助泛函

$$J^*=\int_0^{x_1}\left[y\sqrt{1+y'^2}+\lambda\sqrt{1+y'^2}\right]\mathrm{d}x=\int_0^{x_1}F^*\mathrm{d}x,$$

其中 $F^*=(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}$. 因为 F^* 不显含 x，由 Euler 方程的另一种形式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F^*-y'F^*_{y'})-F^*_x=0,$$

可知

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(F^*-y'F^*_{y'})=0,$$

所以

$$F^*-y'F^*_{y'}=c_1,$$

即

$$(y+\lambda)\sqrt{1+y'^2}-y'\frac{y'(y+\lambda)}{\sqrt{1+y'^2}}=c_1,$$

整理后可得

$$y=c_1\sqrt{1+y'^2}-\lambda.$$

令 $y'=\mathrm{sh}t$，代入上式，得

$$y=c_1\mathrm{ch}t-\lambda. \tag{* *}$$

由

$$\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{d}y}{y'}=\frac{c_1\mathrm{sh}t\mathrm{d}t}{\mathrm{sh}t}=c_1\mathrm{d}t,$$

得

$$x=c_1t+c_2.$$

由此解出 $t=\frac{x-c_2}{c_1}$ 后再代入(* *)式，得所求极值曲线为

$$y=c_1\mathrm{ch}\frac{x-c_2}{c_1}-\lambda.$$

这是一簇悬链线，由边界条件和约束条件可定出 c_1, c_2 和 λ.

例3 在平面上长度为定值 l 的所有闭曲线中求一曲线 C，使它所围成的面积最大.

解 设闭曲线的方程为

$$C:\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \end{cases} \quad t_0\leqslant t\leqslant t_1.$$

现在的问题是，在边界条件

$$x(t_0)=x(t_1), \quad y(t_0)=y(t_1)$$

及等周条件

$$\int_{t_0}^{t_1}\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}\,\mathrm{d}t=l$$

下求泛函

$$A=\frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}(xy'-yx')\mathrm{d}t$$

的极值曲线.

作辅助泛函

$$J^*=\int_{t_0}^{t_1}\left[(xy'-yx')+\lambda\sqrt{x'^2+y'^2}\right]\mathrm{d}t,$$

$$F^*=xy'-yx'+\lambda\sqrt{x'^2+y'^2}.$$

J^* 的 Euler 方程组为

$$\begin{cases} F_x^*-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{x'}^*=0, \\ F_y^*-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}F_{y'}^*=0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} y'-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[-y+\dfrac{\lambda x'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right]=0, \\ -x'-\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[x+\dfrac{\lambda y'}{\sqrt{x'^2+y'^2}}\right]=0. \end{cases}$$

整理后可得

$$(x-c_2)^2+(y-c_1)^2=\frac{\lambda^2}{4}.$$

这说明，极值曲线在一簇以(c_2,c_1)为圆心，$\frac{\lambda}{2}$为半径的圆周内. 由于曲线长为l，而有$l=2\pi\cdot\frac{\lambda}{2}$，$\lambda=\frac{l}{\pi}$，所以

$$(x-c_2)^2+(y-c_1)^2=\left(\frac{l}{2\pi}\right)^2.$$

由边界条件可定出c_1,c_2. 因此长度一定的闭曲线中，以圆周所围成的平面图形面积最大.

最后，我们给出 Euler 定理的一般情形：

设函数组$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$在等周条件

$$\int_{x_0}^{x_1}G_i(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')\mathrm{d}x=l_i, i=1,2,\cdots,m$$

和边界条件

$$y_j(x_0)=y_{j0},\ \ y_j(x_1)=y_{j1}, j=1,2,\cdots,n$$

下使泛函

$$J[y_1,y_2,\cdots,y_n]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y_1,\cdots,y_n,y_1',\cdots,y_n')\mathrm{d}x$$

达到极值，则必存在常数$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$，使$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$满足泛函

$$J^*=\int_{x_0}^{x_1}[F+\sum_{i=1}^{m}\lambda_iG_i]\mathrm{d}x\triangleq\int_{x_0}^{x_1}F^*\mathrm{d}x$$

的 Euler 方程组

$$F_{y_j}^*-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{y_j'}^*=0,\ \ j=1,2,\cdots,n.$$

习　题

1. 在球面上连接两定点的所有曲线中，求出长度最短的曲线.

2. 在等周条件$\int_0^\pi y^2\mathrm{d}x=1$和边界条件$y(0)=y(\pi)=0$下，求泛函$J[y]=\int_0^\pi y'^2\mathrm{d}x$的极值.

3. 求在条件 $\int_0^1 y^2 dx = 2, y(0) = 0, y(1) = 0$ 下，等周问题

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 + x^2) dx$$

的极值曲线.

4. 求在条件 $\int_{x_0}^{x_1} y dx = a$ 下，等周问题

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} y'^2 dx$$

的极值曲线，其中 a 为给定的常数.

5. 问围有同样给定面积 A 的所有闭曲线中，什么曲线具有最小长度?

6. 写出在条件 $\int_{x_0}^{x_1} r(x) y^2 dx = 1, y(x_0) = 0, y(x_1) = 0$ 下，泛函

$$J[y] = \int_{x_0}^{x_1} [p(x) y'^2 + q(x) y^2] dx$$

的极值曲线应满足的微分方程.

7. 在条件 $\int_0^1 (y'^2 - xy' - z'^2) dx = 2, y(0) = 0, z(0) = 0, y(1) = 1, z(1) = 1$ 下，求泛函

$$J[y,z] = \int_0^1 (y'^2 + z'^2 - 4xz' - 4z) dx$$

的极值曲线.

8. 求长为定值 l 的曲线 AB，使它和已给的曲线 $y=f(x)$ 在一起围出最大面积(如图8.5).

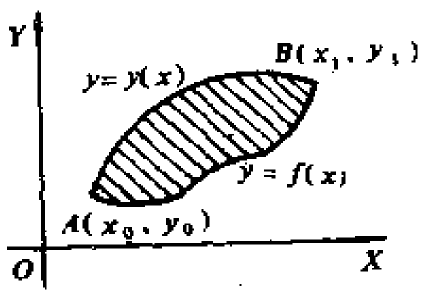


图 8.5

第九章　变分问题中的直接法

前面所讨论的变分问题，都可归结为 Euler 方程或奥氏方程的求解问题. 但是在大多数情况下，求这些方程的精确解是很困难的，有时甚至是不可能的. 因此，有必要用其它方法求变分问题的解，这就是所谓的直接法. 它的基本思想就是把变分问题看作含有限多个变量的函数极值问题的极限情形，这个含有有限多个变量的函数极值问题可以用寻常的方法来求解，而把这有限多个变量的函数极值问题的解作为原变分问题的近似解.

§9.1　里　兹　法

里兹(Ritz)法的基本思想是用选定的函数序列的线性组合逼近变分问题的极值曲线.

为明确起见，我们考察如下类型的变分问题. 设泛函

$$J[y]=\int_{x_0}^{x_1}F(x,y,y')\mathrm{d}x \tag{9.1}$$

的边界条件为

$$y(x_0)=0,y(x_1)=0. \tag{9.2}$$

这种边界条件称为**齐次边界条件**. 如果所讨论的泛函的边界不是齐次的，如 $y(x_0)=y_0, y(x_1)=y_1$，则可令

$$y(x)=z(x)+\frac{x-x_1}{x_0-x_1}y_0+\frac{x-x_0}{x_1-x_0}y_1, \tag{9.3}$$

这时有 $z(x_0)=z(x_1)=0$. 用(9.3)式对泛函(9.1)作变换，即可将问

题(9.1),(9.2)式化为齐次边界的变分问题

$$J[y] \triangleq J_1[z] = \int_{x_0}^{x_1} F_1(x, z, z')\mathrm{d}x, \quad z(x_0) = z(x_1) = 0.$$

设泛函 $J[y]$的极值曲线在曲线簇 Y 内,并且 Y 构成线性空间. 用里兹法求泛函 $J[y]$的近似解的步骤如下:

(1) 选取 Y 的基函数

$$\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_n(x), \cdots, \tag{9.4}$$

对任一 $y \in Y$, y 都可表示为$\{\varphi_i\}$的有限或无限线性组合. 特别,对极值函数 $f(x)$,也有

$$f(x) = c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) + \cdots + c_n\varphi_n(x) + \cdots.$$

(2) 对每个 n,考虑由 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 生成的线性子空间 Y_n,设

$$y_n = \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i \in Y_n,$$

由泛函 $J[y]$就确定了 n 元函数

$$J[a_1, a_2, \cdots, a_n] \triangleq J[y_n] = \int_{x_0}^{x_1} F[x, \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i(x), \sum_{i=1}^{n} a_i\varphi_i'(x)]\mathrm{d}x.$$

(3) 对每个 n,选取 $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)}$,使 $J[y_n]$取极值,也就是由方程组

$$\frac{\partial}{\partial a_i} J[y_n] = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

来确定 $a_1^{(n)}, a_2^{(n)}, \cdots, a_n^{(n)}$,然后用得到的函数

$$f_n = \sum_{i=1}^{n} a_i^{(n)}\varphi_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

作为变分问题的近似解.

上述的 f_n 是序列(9.4)式前 n 个函数所有可能的线性组合中使泛函 $J[y_n]$达到极值的函数. 这样得到的序列 $f_1, f_2, \cdots, f_n, \cdots$ 称为 $J[y]$的极小化序列. 因为

$$Y_1 \subset Y_2 \subset \cdots \subset Y_n \subset \cdots,$$

所以

$$J[f_1] \geqslant J[f_2] \geqslant \cdots \geqslant J[f_n] \geqslant \cdots,$$

并且

$$J[f_n] \geqslant J[f],\quad n = 1,2,\cdots,$$

在一般情况下，有

$$\lim_{n\to\infty} J[f_n] = J[f].$$

即使这样，也不能保证 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 存在，即使 $\lim\limits_{n\to\infty} f_n$ 存在，它也不一定收敛于 $J[y]$ 的极值函数 f. 但对常用函数来说，f_n 不仅逐点收敛而且一致收敛于 f. 因此，如果不去完成极限运算，而只限于前面的 n 项 $f_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i^{(n)} \varphi_i$，那么，$f_n$ 就是变分问题的近似解.

对于问题(9.1)，(9.2)式，基函数通常选取下列的三个函数系之一：

$$\varphi_n(x) = (x - x_0)^n (x_1 - x),\quad n = 1,2,\cdots;$$

$$\varphi_n(x) = (x_1 - x)^n (x - x_0),\quad n = 1,2,\cdots;$$

$$\varphi_n(x) = \sin \frac{n\pi(x - x_0)}{x_1 - x_0},\quad n = 1,2,\cdots.$$

例 用 Ritz 法求变分问题

$$J[y] = \int_0^1 (y'^2 - y^2 - 2xy)\mathrm{d}x, y(0) = y(1) = 0$$

的近似解.

解 取 $\varphi_n(x) = x^n(1-x), n = 1,2,\cdots$，显然

$$\varphi_n(0) = \varphi_n(1) = 0.$$

(1) 求一级近似解.

作 $y_1 = c_1\varphi_1(x) = c_1 x(1-x)$，则 $y' = c_1(1-2x)$. 代入泛函，得

$$\begin{aligned} J[y_1] &= J[c_1] \\ &= \int_0^1 [c_1^2(1-2x)^2 - c_1^2 x^2(1-x)^2 - 2xc_1 x(1-x)]\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{10}c_1^2 - \frac{1}{6}c_1. \end{aligned}$$

选取 c_1，使 $J[c_1]$ 取极值. 为此，令 $\frac{\mathrm{d}J}{\mathrm{d}c_1} = \frac{6}{10}c_1 - \frac{1}{6} = 0$，得 $c_1 = \frac{5}{18}$，故一级近似解为

$$f_1 = \frac{5}{18}x(1-x).$$

(2) 求二级近似解.

作

$$\begin{aligned} y_2 &= c_1\varphi_1(x) + c_2\varphi_2(x) \\ &= c_1x(1-x)+c_2x^2(1-x) \\ &= x(1-x)(c_1+c_2x). \end{aligned}$$

则

$$y_2' = (1-2x)(c_1+c_2x)+c_2x(1-x).$$

代入泛函,得

$$\begin{aligned} J[y_2] &= J[c_1,c_2] \\ &= \int_0^1 \{[(1-2x)(c_1+c_2x)+c_2x(1-x)]^2 \\ &\quad -x^2(1-x)^2(c_1+c_2x)^2-2x^2(1-x)(c_1+c_2x)\}dx. \end{aligned}$$

将 $J[y_2]$分别对 c_1和 c_2求偏导数,然后再令$\frac{\partial J}{\partial c_1}=0$,$\frac{\partial J}{\partial c_2}=0$,得方程组

$$\begin{cases} \frac{3}{10}c_1 + \frac{3}{20}c_2 = \frac{1}{12}, \\ \frac{3}{20}c_1 + \frac{13}{105}c_2 = \frac{1}{20}. \end{cases}$$

解此方程组,得 $c_1=\frac{71}{369}$,$c_2=\frac{7}{41}$,故二级近似解为

$$\begin{aligned} f_2 &= \frac{71}{369}x(1-x)+\frac{7}{41}x^2(1-x) \\ &= \frac{1}{41}x(1-x)\left(\frac{71}{9}+7x\right). \end{aligned}$$

(3) 近似解与精确解的比较.

解 Euler 方程,可得精确解为

$$y = \frac{\sin x}{\sin 1} - x.$$

现将精确解,一级近似解,二级近似解比较如下:

x	精确解	一级近似解	二级近似解
	$y=\frac{\sin x}{\sin 1}-x$	$y_1=\frac{5}{18}x(1-x)$	$y_2=\frac{1}{41}x(1-x)(\frac{71}{9}+7x)$
0	0	0	0
0.2	0.0361	0.0444	0.0362
0.4	0.0627	0.0667	0.0626
0.6	0.0710	0.0667	0.0709
0.8	0.0525	0.0444	0.0526
1	0	0	0

可见二级近似解与精确解的差已达10^{-4}数量级.

§9.2 康托罗维奇法

对于未知函数是多元函数的泛函 $J[z(x_1,x_2,\cdots,x_n)]$,设其可取函数簇的基函数为

$$u_1(x_1,x_2,\cdots,x_n),u_2(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots,u_m(x_1,x_2,\cdots,x_n),\cdots.$$

用 Ritz 法求解这种形式的变分问题时,是把变分问题的近似解取成

$$z_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}a_iu_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的形式,其中 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$是待定常数. 而康氏(Л. В. Канторович)法的不同之点在于将上式中的 $a_i(i=1,2,\cdots,m)$改为某一自变量的待定函数,例如取 $a_i=a_i(x_k)(i=1,2,\cdots,m)$,即把变分问题的近似解取成

$$z_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}a_i(x_k)u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

的形式,其中 $a_i(x_k)(i=1,2,\cdots,m)$是待定函数. 此时

$$J[z_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)]=\mathfrak{J}[a_1(x_k),a_2(x_k),\cdots,a_m(x_k)]$$

是一个依赖于 x_k 的 m 个函数 $a_1(x_k),a_2(x_k),\cdots,a_m(x_k)$的泛函. 按以

前的方法选取 $\alpha_i^{(m)}(x_k)$，使 $\mathcal{J}[\alpha_1(x_k),\alpha_2(x_k),\cdots,\alpha_m(x_k)]$取极值，于是就定出 m 级近似解

$$\tilde{z}_m(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^{(m)}(x_k)u_i(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

当 $J[z]$满足一定条件时，可以证明

$$\lim_{m\to\infty}\tilde{z}_m=z(\text{精确解}).$$

由于以变量 $\alpha_i(x_k)$为系数的函数类 $z_m=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x_k)u_i$ 要比以常数 α_i 为系数的函数类远为广泛，因此，一般说来，在取相同项数 m 时，康氏法要比里兹法精确.

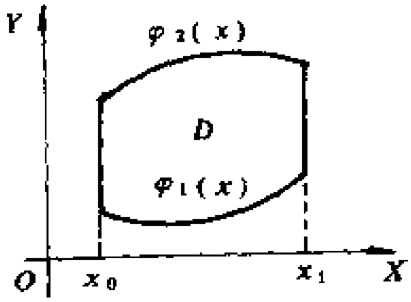


图 9.1

作为具体的例子，我们讨论泛函

$$J[z]=\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}F(x,y,z,\frac{\partial z}{\partial x},\frac{\partial z}{\partial y})\mathrm{d}y$$

在齐次边界条件 $z(x,y)|_{\partial D}=0$下的极值问题，其中 ∂D 表示区域 D 的边界，如图9.1所示.

(1) 选取可取函数簇 Y 的基函数

$$u_1(x,y),u_2(x,y),u_m(x,y),\cdots,$$

对每个 m，作

$$z_m(x,y)=\sum_{i=1}^{m}\alpha_i(x)u_i(x,y)\in Y.$$

(2) 计算 $J[z_m]$.

$$J[z_m]=\int_{x_0}^{x_1}\mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)}F[x,y,z_m(x,y),\frac{\partial z_m}{\partial x},\frac{\partial z_m}{\partial y}]\mathrm{d}y$$

$$\triangleq\int_{x_0}^{x_1}\varphi[x,\alpha_1(x),\cdots,\alpha_m(x),\alpha_1'(x),\cdots,\alpha'_m(x)]\mathrm{d}x$$

$$=\mathcal{J}[\alpha_1,\cdots,\alpha_m].$$

(3) 将 $\mathcal{J}[\alpha_1,\cdots,\alpha_m]$看成是 $\alpha_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$的泛函，选取 $\alpha_i(x)$，使 $\mathcal{J}[\alpha_1,\cdots,\alpha_m]$取极值. 因此，$\alpha_i(x)(i=1,2,\cdots,m)$应满足 $\mathcal{J}$ 的 Euler 方程组

$$\varphi_{a_i}-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi_{a_i'}=0,\ i=1,2,\cdots,m.$$

解此方程组，得 $a_i^{(m)}(x)(i=1,2,\cdots,m)$，代入 z_m，得 m 级近似解

$$\tilde{z}_m(x,y)=\sum_{i=1}^{m}a_i^{(m)}(x)u_i(x,y).$$

值得注意的一个事实是，变分问题

$$J[u(x,y)]=\iint_D[u_x^2+u_y^2+2uf]\mathrm{d}\sigma,\ u(x,y)|_{\partial D}=0$$

的解必为二维 Poisson 方程的 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f\\ u|_{\partial D}=0\end{cases}$$

的解. 因此，上述里兹法和康氏法可用来解偏微分方程.

事实上，若变分问题有解 $u(x,y)$，则它必适合奥氏方程

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=0.$$

而 $F=u_x^2+u_y^2+2uf$，所以 $F_u=2f,F_{u_x}=2u_x,F_{u_y}=2u_y$，于是

$$F_u-\frac{\partial}{\partial x}F_{u_x}-\frac{\partial}{\partial y}F_{u_y}=2[f-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}]=0,$$

即

$$\Delta u=f.$$

而 $J[u]$的解 u 是满足条件 $u|_{\partial D}=0$的，从而可知 $u(x,y)$必为 Dirichlet 问题的解. 可以证明，反之亦成立，即 Dirichlet 问题的解也必是变分问题的解. 对于其它变分问题的解与偏微分方程定解问题的解之间的关系也有类似情况.

例1 求泛函

$$J[z(x,y)]=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-b}^{b}[z_x^2+z_y^2+2z]\mathrm{d}y$$

在条件 $z(x,y)|_{\partial D}=0$下的极值函数的一级近似解.

解 取 $z_1=a(x)(b^2-y^2)$，显然有 $z_1|_{y=\pm b}=0$. 若再取 $a(x)$满足 $a(-a)=a(a)=0$，则不管 $a(x)$是怎样的函数，z_1都适合 $z_1|_{\partial D}=0$.

将 $z_{1x}=\alpha'(x)(b^2-y^2)$，$z_{1y}=\alpha(x)(-2y)$ 代入泛函，得

$$J[z_1]=\int_{-a}^{a}\mathrm{d}x\int_{-b}^{b}[\alpha'^2(b^2-y^2)^2+\alpha^2 4y^2-2\alpha(b^2-y^2)]\mathrm{d}y$$

$$=2\int_{-a}^{a}[\frac{8}{15}b^5\alpha'^2+\frac{4}{3}b^3\alpha^2-\frac{4}{3}b^3\alpha]\mathrm{d}x,$$

于是

$$F=\frac{8}{15}b^5\alpha'^2+\frac{4}{3}b^3\alpha^2-\frac{4}{3}b^3\alpha,$$

计算 F 对 α 及 α' 的偏导数，得

$$F_\alpha=\frac{4}{3}b^3(2\alpha-1),\quad F_{\alpha'}=\frac{16}{15}b^5\alpha'.$$

J 的 Euler 方程为

$$F_\alpha-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F_{\alpha'}=\frac{4}{3}b^3(2\alpha-1)-\frac{16}{15}b^5\alpha''=0,$$

或

$$\alpha''-\frac{5}{2b^2}\alpha=-\frac{5}{4b^2}.$$

该微分方程的通解为

$$\alpha(x)=c_1\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\ \frac{x}{b}\right)+c_2\mathrm{sh}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\ \frac{x}{b}\right)+\frac{1}{2}.$$

由 $\alpha(-a)=\alpha(a)=0$，得

$$c_2=0,\quad c_1=-\frac{1}{2\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\ \frac{a}{b}\right)}.$$

所求一级近似解为

$$z_1=\frac{1}{2}(b^2-y^2)\left(1-\frac{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\ \frac{x}{b}\right)}{\mathrm{ch}\left(\sqrt{\frac{5}{2}}\ \frac{a}{b}\right)}\right).$$

例2 设 D 为闭长方形区域：$D=[-a,a;-b,b]$，试求 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta=\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2,\\ u|_{\partial D}=0,\end{cases}$$

的近似解.

解 如前所述，此定解问题的解即为变分问题

$$J[u]=\iint_D[u_x^2+u_y^2-2u]\mathrm{d}\sigma,\ u|_{\partial D}=0$$

的解. 而此变分问题的近似解如例1的解，所以该 Direchlet 问题的一级近似解就是例1中的 $z_1(x,y)$.

值得一提的是，上述所研究的变分问题主要是以积分所定义的泛函的极值问题. 然而，变分法是涉及多门学科、应用甚广的课题. 变分法来源于对数理方程的研究，其实质是把求解微分方程边值问题化成求泛函极值问题. 变分法的基本思想是：为证明方程 $Tx=\theta$ 有解，其中 T 是非线性算子，先从 T 作一泛函 $\varphi(x)$，使得 $Tx=\mathrm{grad}\varphi(x)$（仅对 T 是势算子情形才能作出这样的泛函），然后证明 $\varphi(x)$ 有局部极值，于是在极值点 x，$\mathrm{grad}\varphi(x)=\theta$. 因此，$\varphi(x)$ 的极值点便是方程 $Tx=\theta$ 的解.

有兴趣的读者，可阅读参考文献[12].

习　题

1. 用 Ritz 法求泛函

$$J[y(x)]=\int_0^1(x^2y'^2+xy)\mathrm{d}x$$

在条件 $y(0)=y(1)=0$ 下极值问题的近似解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$.

2. 用 Ritz 法求泛函

$$J[y(x)]=\int_0^2(y'^2+y^2+2xy)\mathrm{d}x$$

在条件 $y(0)=y(2)=0$ 下极值问题的一级近似解，并与精确解作

比较.

3. 用 Ritz 法求泛函

$$J[y(x)]=\int_0^1(30x'y^2+12y)\mathrm{d}x$$

在条件 $y(0)=y(x)=0$ 下极值问题的二级近似解.

4. 在正方形区域 $D=[-a,a;-a,a]$ 内求 Dirichlet 问题

$$\begin{cases}\Delta u=-1,\\ u|_{\partial D}=0,\end{cases}$$

的近似解.

5. 求方程 $\Delta u=-1$ 的近似解，使其在由直线 $y=\pm\frac{\sqrt{3}}{3}x$ 和 $x=b>0$ 所围成的等腰三角形区域 D 内二次可微，且在这个区域的边界上等于零.

习题答案与提示

第一章

1. 欲证明两集合 A 与 B 相等，只需证明 $A\subset B$，且 $A\supset B$. 现仅以(2)为例证明之.

若 $x\in A\cap(B-C)\Longrightarrow x\in A$ 且 $x\in B-C\Longrightarrow x\in A$ 且 $x\in B$ 但 $x\overline{\in}C\Longrightarrow x\in A\cap B$ 但 $x\overline{\in}A\cap C\Longrightarrow x\in(A\cap B-A\cap C)$. 即 $A\cap(B-C)\subset(A\cap B-A\cap C)$.

若 $x\in(A\cap B-A\cap C)\Longrightarrow x\in A\cap B$ 但 $x\overline{\in}A\cap C\Longrightarrow x\in A$ 且 $x\in B-C$，即 $(A\cap B-A\cap C)\subset A\cap(B-C)$.

因此，$A\cap(B-C)=A\cap B-A\cap C$.

2. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 按极限的定义，对于 $\varepsilon=1$，$\exists\ N>0$，使当 $n\geqslant N$ 时对一切的 x_n，都有不等式 $|x_n-a|<1$ 成立. 于是，当 $n\geqslant N$ 时，成立不等式

$$|x_n|\leqslant|x_n-a|+|a|<1+|a|.$$

取 $M=\max\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_N|,1+|a|\}$，则对一切的 n，都有 $|x_n|\leqslant M$，故 $\{x_n\}$ 有界.

3. 对于 $\forall\ k>0$，$\exists\ N>0$，使当 $n,m\geqslant N$ 时 $|x_n-x_m|<\dfrac{1}{k}$. 取 $n_{k-1}>N\ (k=1,2,\cdots)$，则 $\{x_{n_{k-1}}\}$ 当然适合 $|x_{n_k}-x_{n_{k-1}}|<\dfrac{1}{k}\ (k=1,2,\cdots)$.

4. 必要性. 设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，则对于 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，使当 $n\geqslant N$ 时，

有$|x_n-a|<\varepsilon$. 又设$\{x_{n_k}\}$是$\{x_n\}$的任意子序列，因为$n_k\to\infty$，故必存在K，使当$k\geqslant K$时有$n_k\geqslant N$. 对于那些k之值，将成立不等式$|x_{n_k}-a|<\varepsilon$. 必要性获证.

充分性. 因为$\{x_n\}$也是子序列，亦有相同的极限，故$\{x_n\}$有极限. 充分性获证.

5. (1) 令$x_n=(1+\frac{1}{n})^n$. 因为对于一切n，均有$x_n<3$，所以x_n有上界，从而必有上确界. 因此，$E=\{x|x$ 是$(1+\frac{1}{n})^n$ 的上界$\}$有最小值.

(2)$A'=\{e\}$；$\overline{A}=\{e,(1+\frac{1}{n})^n;n=1,2,\cdots\}$；$A^\circ=\phi$；$B'=\{0,1\}$；$\overline{B}=\{0,1,\frac{1}{n},1+\frac{1}{n};n=1,2,\cdots\}$；$B^\circ=\phi$.

6. 将(0,1)中的全部有理数排列为：$r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$. 而[0,1]中的全部有理数排列为：$0,1,r_1,r_2,\cdots,r_n,\cdots$. 作其间的对应$f$如下：

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{当 } x=r_1\text{ 时},\\ 1, & \text{当 } x=r_2\text{ 时},\\ r_{n-2}, & \text{当 } x=r_n(n>2)\text{ 时},\\ x, & \text{当 } x \text{ 为(0,1)中的无理数时}.\end{cases}$$

则$f(x)$是(0,1)与[0,1]间的一一对应.

7. 设A是非空实数集，M是一个数，若对$\forall x\in A$，均有$x\geqslant M$，则称M是A的一个下界. 若A有下界，则A必有无穷多个下界. 数集A的最大下界称为A的下确界，记为$\inf A$. 或者说，若M是A的下界，且对$\forall\ \varepsilon>0$，而$M+\varepsilon$不再是A的下界，则称M是A的下确界，记为$M=\inf A$. 实数集合A的下确界也可以通过将A国的各元素改变符号后利用上确界来定义.

按定义，对非空而无下界的数集A，规定$\inf A=-\infty$. 验证：存在$\{x_n\}\subset A$，使得$x_n\to\inf A$.

若A无下界，则对$\forall\ M_n>0$，$\exists\ x_n\in A$，使得$x_n<-M_n$. 令$M_n\to+\infty$，则$x_n\to-\infty(=\inf A)$.

若 A 有下界，对 $\forall n$，$\exists x_n\in A$，使 $x_n<\inf A+\frac{1}{n}$，又因为 $x_n\geqslant \inf A$，故 $\inf A\leqslant x_n<\inf A+\frac{1}{n}$. 令 $n\to\infty$，则有 $x_n\to\inf A$.

8. 不对. 如数列1，1，…，1，…有极限1，但作为数集{1}，它是单元素集，故无聚点. 又如数列$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{4}{5}$，…无极限，但集合$\{\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{4},\frac{1}{5},\frac{4}{5},\cdots\}$却有聚点0和1.

9. [0,1]中的全体有理数可排列为：0，1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{4}$，$\frac{3}{4}$，$\frac{1}{5}$，…，它是可列的. 因为$[i,i+1]$与[0,1]对等，故$[i,i+1]$中的有理数也是可列的. 由于$[0,\infty)=\bigcup\limits_{i=0}^{\infty}[i,i+1]$，注意到$[i,i+1]$中的有理数是可列的，故知区间$[0,\infty)$中的有理数也是可列的，从而$(-\infty,+\infty)$中的有理数是可列的. 因此，$\{x|x$ 为有理数$\}$，$\{y|y$ 为有理数$\}$，$\{z|z$ 为有理数$\}$都是可列集.

令 $A_i=\{(x,y_i)\}$，$y_i\in\{y\}$，对于每一固定的 i，A_i 为可列集，而$\{(x,y)\}=\bigcup\limits_i A_i$ 是可列个可列集之并，故是可列集.

再令 $B_i=\{(x,y,z_i)\}$，则$\{(x,y,z)\}=\bigcup\limits_i B_i$ 是可列集.

10. 因为 A 是可列集，所以集 A 与自然数集 N 成一一对应，因此只要证明 N 的有限子集所成之集是可列的.

设$(n_1,n_2,\cdots,n_k)$是 N 的一个有限子集，不妨设 $n_1<n_2<\cdots<n_k$. 令$(n_1,n_2,\cdots,n_k)$与二进位小数对应，其对应方法如下：该二进位小数在小数点后第 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 位数上为1，其余各位为0. 例如{2，3，5}对应的二进位小数是0.01101，即二进位有理点$\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}=\frac{13}{32}$. 于是，自然数集 N 的一切有限子集所成的集簇与[0,1]中的全部二进位有理点集之间建立了一一对应关系. 从而，只需证明[0，1]中的全部二进位有理点是可列的即可. 编号按下法作出：0，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2^2}$，$\frac{3}{2^2}$，$\frac{1}{2^3}$，$\frac{3}{2^3}$，$\frac{5}{2^3}$，$\frac{7}{2^3}$，$\frac{1}{2^4}$，…. 因此，[0，1]中的二进位有理小数之集

与全体自然数的一切有限子集之间就建立了一一对应关系，即可列集的一切有限子集所成之集是可列的.

11. 不可列. 事实上，设 Q 的子集所成之集为 T. 如果 T 是可列的话，则 Q 与 T 之间一一对应，故必有对应法则使 Q 中任一元素 a 与 T 中唯一元素 t_a 对应，两种关系 $a\in t_a$ 与 $a\overline{\in} t_a$ 必有一个且仅有一个成立.

因为 $\{a\}\in T$，$\{a,b\}\in T$，故 $a\in t_a$ 不能对 Q 中的一切元素成立. 因此，Q 中必有元素 a 与 t_a 对应，而 $a\overline{\in} t_a$，记此种元素的全体为 t^*，则 t^* 也是 Q 的子集，即 $t^*\subset Q$，故 $t^*\in T$，于是 Q 中必有 a^* 与 t^* 对应，两关系 $a^*\in t^*$ 与 $a^*\overline{\in} t^*$ 必有一个且仅有一个成立. 但由 t^* 的构成知，只有 $a^*\overline{\in} t^*$ 成立，但 a^* 不属于 t^* 的元素必满足 $a^*\in t^*$，矛盾. 故 Q 与 T 不对等.

显然，Q 与 T 的子集对等，即 $Q\subset T$，故 T 是不可列集.

12. 对于平面上的任一有理点 a，以 a 为中心，以有理数为半径的圆是可列的，且平面上的有理点的全体是可列的. 因为可列个可列集之并集仍是可列集，故平面上以有理点为中心，以有理数为半径的圆之全体是可列的.

13. 若 $A=\phi$，则 A° 也是空集，从而 A° 是开集.

若 $A\neq\phi$. 设 x_0 是 A° 的任一点，只要证明 x_0 是 A° 的内点即可. 因为 $x_0\in A^\circ$，x_0 是 A 的内点，故 $\exists\ \delta_0>0$，使 $\delta_0(x_0)\subset A$，若能证明 $\forall\ x'\in\delta_0(x_0)$，都有 $x'\in A^\circ$，即 x' 是 A 的内点，则 $\delta_0(x_0)\subset A^\circ$，从而便可证明 A° 是开集.

因为 $x'\in\delta_0(x_0)$，取 $\delta\leqslant\delta_0-|x'-x_0|$，则 $\delta(x')\subset\delta_0(x_0)\subset A$，所以 x' 是 A 的内点，即 $x'\subset A^\circ$. 由于 x' 的任意性，故 $\delta_0(x_0)\subset A^\circ$，从而 A° 是开集.

14. 必要性. 因为 E 为有界可测集，所以 $mE=m_*E$. 由内测度的定义知，对 $\forall\ \varepsilon>0$，存在闭集 $F\subset E$，使得 $mF>mE-\varepsilon$，从而有 $m(E-F)<\varepsilon$，亦即 $m^*(E-F)<\varepsilon$.

充分性. 已知对 $\forall\ \varepsilon>0$，有闭集 $F\subset E$，使得 $m^*(E-F)<\varepsilon$. 由 E

$=F\bigcup(E-F)$，$F\bigcap(E-F)=\phi$，及

$$m^*E\leqslant m^*F+m^*(E-F)<mF+\varepsilon\leqslant m_*E+\varepsilon,$$

即知$0\leqslant m^*E-m_*E<\varepsilon$，因此，$m^*E=m_*E$，即 E 为可测集.

15. 令 $E(c)=\{x\,|\,f(x)>c,x\in R\}$，若 $E(c)=\phi$，则获证.

若 $E(c)\neq\phi$. 设 $x_0\in E(c)$，则 $f(x_0)>c$. 由于 $f(x)$ 在 x_0处连续，故$\exists$ $\delta>0$，使得当 $x\in\delta(x_0)$时，$f(x)>c$ 都成立，于是 $\delta(x_0)\subset E(c)$，从而 $E(c)$是开集.

类似地，可证明$\{x\,|\,f(x)<c,x\in R\}$也是开集.

注意到，$\{x\,|\,f(x)\geqslant c,x\in R\}^c=\{x\,|\,f(x)<c,x\in R\}$是开集，按闭集定义知，$\{x\,|\,f(x)\geqslant c,x\in R\}$是闭集.

16. 设 $A=\{x\,|\,f\neq g,x\in E\}$，则 $mA=0$，故 A 为可测集. 令 $B=E-A$ 是两可测集之差，则 B 是可测的. 由于 $B\subset E$，且

$$B(a)=\{x\,|\,f(x)>a,x\in B\}=B\bigcap\{x\,|\,f(x)>a,x\in E\},$$

故 $B(a)$是可测的，从而 $f(x)$是 B 上的可测函数. 因为在 B 上 $f(x)=g(x)$，所以 $g(x)$在 B 上可测. 由于 $g(x)$在 A 上也是可测的（零测集上的任何函数都可测），所以 $g(x)$在 $E=A\bigcup B$ 上是可测的.

17. 先证明$[a,b]$上的单调函数 $f(x)$的不连续点最多是可列个. 仅就增函数证明之，对减函数可类似地证明.

若 x_0是 $f(x)$的间断点，则必为第一类间断点. 事实上，$f(x)$在$[a,x_0]$上是单调有界的（必有极限），所以，$\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0-0)$有意义，同理，$f(x_0+0)$也有意义.

称差 $f(x_0+0)-f(x_0-0)$为 $f(x)$在间断点 x_0的跃度. 单调增函数的跃度是正的. 设 α 是任意正数，则跃度大于 α 的间断点集是有限点集，这些点的个数不超过$\dfrac{f(b)-f(a)}{\alpha}$. 令

$E_k=\{x\,|\,f(x+0)-f(x-0)>\dfrac{1}{k}$，$x$ 为 f 的间断点$\}$，E 为 $f(x)$的全部间断点所成之集.

显然，$E=\bigcup\limits_k E_k$. 由于 E_k 是有限集，故 E 至多是可列集.

次证定义在 R 上的单调函数的间断点之集至多是可列的。

令 A_i 为 $[-i,i]$ 上函数的间断点所成之集，A 为 R 上全部间断点所成之集，则

$$A=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_i\cup\cdots.$$

由于每个 A_i 至多是可列集，故 A 至多是可列集。

再证单调函数是可测函数。设 $f(x)$ 是可测集 E 上的单调函数。因为 $f(x)$ 的不连续点所成之集记为 E_0 至多是可列集，，则 $mE_0=0$。对任何实数 c，集 $\{x\,|\,f(x)>c,x\in E\}=\{x\,|\,f(x)>c,x\in E-E_0\}\cup\{x\,|\,f(x)>c,x\in E_0\}$。由于 $f(x)$ 在 $E-E_0$ 上连续，故 $\{x\,|\,f(x)>c,x\in E-E_0\}$ 为可测集。而 $\{x\,|\,f(x)>c,x\in E_0\}$ 为零测集 E_0 的子集，故也可测，从而 $\{x\,|\,f(x)>c,x\in E\}$ 是可测集。因此，$f(x)$ 是可测函数。

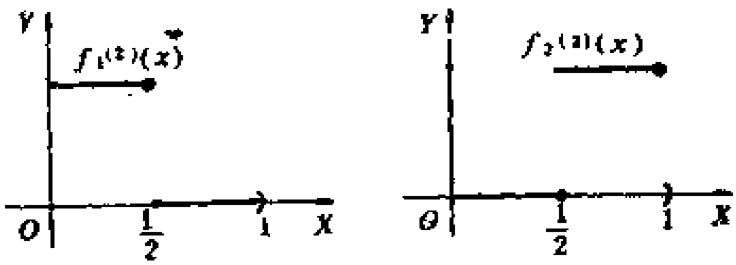
18. 对每一个自然数 k，在 $[0,1)$ 上定义 k 个函数

$$f_1^{(k)}(x),\ f_2^{(k)}(x),\ \cdots,\ f_k^{(k)}(x),$$

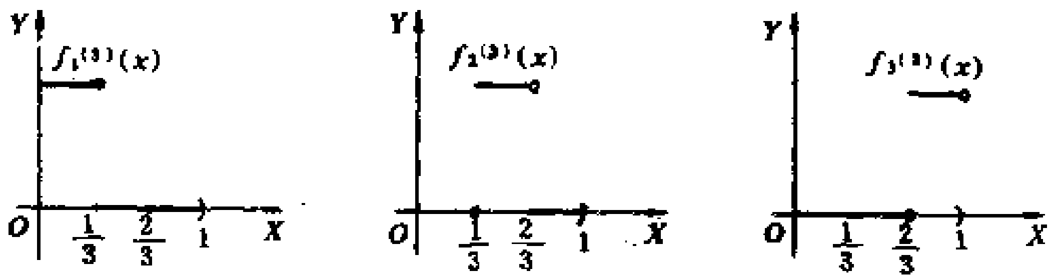
其中

$$f_i^{(k)}(x)=\begin{cases}1, & x\in\left[\dfrac{i-1}{k},\dfrac{i}{k}\right),\\[2mm] 0, & x\notin\left[\dfrac{i-1}{k},\dfrac{i}{k}\right).\end{cases}$$

当 $k=2$ 时，函数的图形为：



当 $k=3$ 时，函数的图形为：



特别地，$f_1^{(1)}(x)\equiv 1$. 令 $\varphi_1(x)=f_1^{(1)}(x)$，$\varphi_2(x)=f_1^{(2)}(x)$，$\varphi_3(x)=f_2^{(2)}(x)$，$\varphi_4(x)=f_1^{(3)}(x)$，$\varphi_5(x)=f_2^{(3)}(x)$，$\cdots$，$\varphi_n(x)=f_i^{(k)}(x)$，$\cdots$. 对任意的实数 a，令

$$E_n(a)=\{x\,|\,|\varphi_n(x)-0|\geqslant a, x\in[0,1)\}.$$

则当 $a>1$ 时，$E_n(a)=\phi$，$mE_n(a)=0$，当 $a\leqslant 1$ 时，$E(a)=[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k})$，$mE_n(a)=\frac{1}{k}$，故

$$\lim_{n\to+\infty} mE_n(a)=\lim_{n\to+\infty} m\{x\,|\,|\varphi_n(x)-0|\geqslant a, x\in[0,1)\}=0,$$

因此，$\{\varphi_n(x)\}$按测度收敛于零.

但是，对于在$[0,1)$中的任一点 x_0，任意固定 k，则必存在 i，使得 $x_0\in[\frac{i-1}{k},\frac{i}{k})$，从而必有 $f_i^{(k)}(x_0)=1$. 换句话说，当我们沿着序列

$$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_n(x),\cdots$$

看下去，不论有多远，总有等于1的数. 所以，$\lim\limits_{n\to+\infty}\varphi_n(x_0)=0$不能成立.

19. (1) $A\times B=\{(1,a),(1,b),(1,c),(2,a),(2,b),(2,c)\}$；

$B\times C=\phi$.

(2) $Z\times Y=\{(x,y)\,|\,a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$；

$Z\times Y\times Z=\{(x,y,z)\,|\,a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d, -\infty<z<+\infty\}$.

20. 设 A 为无穷集(可列的或不可列的)，则存在 $a_1\in A$，使 $A-\{a_1\}$为无穷集，又存在 $a_2\in A-\{a_1\}$，使 $A-\{a_1,a_2\}$为无穷集，如此继续下去，一般地，必存在 $a_n\in A-\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1}\}$，使 $A-\{a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n\}$为无穷集，故任何无穷集必有可列子集$\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}\subset A$.

取 $B=A-\{a_1,a_3,\cdots,a_{2k-1},\cdots\}$，作映射 $f:A\to B$，使得

$$f(x)=\begin{cases}a_{2k}, & \text{当 } x=a_k \text{ 时},\\ x, & \text{当 } x\neq a_k \text{ 时},\end{cases}$$

则 $A\sim B$，且 $A-B=\{a_1,a_3,\cdots,a_{2k-1},\cdots\}$是可列集.

21. 由于 $f(x)$ 在 E 上可积，则 $f(x)$ 在 E 上必可测. 取 $\varphi(x)=\operatorname{sgn}f(x)$，则 $\varphi(x)$ 是 E 上的可测函数. 事实上，$E\{x|\varphi(x)>1,x\in E\}=\phi$，$E\{x|\varphi(x)<-1,x\in E\}=\phi$，$E\{x|-1\leqslant\varphi(x)\leqslant-1,x\in E\}=E$ 皆为可测集，故 $\varphi(x)$ 是 E 上的可测函数. 且 $\varphi(x)$ 为有界的. 据题设，$\int_E f(x)\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_E f(x)\operatorname{sgn}f(x)\mathrm{d}x=\int_E|f(x)|\mathrm{d}x=0$，故在 E 上 $f(x)\overset{a.e.}{=}0$.

22. 根据题设，对任意区间 $(\alpha,\beta)\subset(a,b)$，恒有 $\int_\alpha^\beta f(x)\mathrm{d}x=\int_a^\beta f(x)\mathrm{d}x-\int_a^\alpha f(x)\mathrm{d}x=0$. 因为 $f(x)\in L[a,b]$，由积分的绝对连续性知，对 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta>0$，使对任一 $e\subset[a,b]$，当 $me<\delta$ 时，$\left|\int_e f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

对于任一可测集 $A\subset(a,b)$，存在开集 G，使得 $A\subset G\subset(a,b)$，且 $m(G-A)<\delta$，从而 $\left|\int_{G-A}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$.

设 $G=\bigcup_i(\alpha_i,\beta_i)$，其中 (α_i,β_i) 为 G 的构成区间，则 $\int_G f(x)\mathrm{d}x=\sum_i\int_{\alpha_i}^{\beta_i}f(x)\mathrm{d}x=0$. 又因为 $\int_A f(x)\mathrm{d}x=\int_G f(x)\mathrm{d}x+\int_{G-A}f(x)\mathrm{d}x$，故有 $\left|\int_A f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{G-A}f(x)\mathrm{d}x\right|<\varepsilon$. 由 ε 的任意性知，$\int_A f(x)\mathrm{d}x=0$，即对于 $[a,b]$ 中的任一可测集 A，都有 $\int_A f(x)\mathrm{d}x=0$.

特别地，$\int_{E(f>0)}f(x)\mathrm{d}x=0$，$\int_{E(f<0)}f(x)\mathrm{d}x=0$. 故在 E 上 $f(x)\overset{a.e.}{=}0$.

第 二 章

1. 先证 $\rho(x,y)$ 是一个距离. 设 $x,y,z\in S$，则按题意，$\rho(x,y)\geqslant 0$. 当且仅当 $x=y$ 时 $\rho(x,y)=0$. 且 $\rho(x,y)=\rho(y,x)$，再根据球面三角形两边之和不小于第三边可知，$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$，所以，

$\rho(x,y)$是一个距离，(S,ρ)是一个距离空间.

再证 $d(x,y)\leqslant\rho(x,y)\leqslant\frac{\pi}{2}d(x,y)$. 圆 O 是过球面 S 上 x,y 两点的大圆，则

$$\rho(x,y)=R\alpha,$$

$$d(x,y)=2R\sin\frac{\alpha}{2}\leqslant 2R\cdot\frac{\alpha}{2}=\rho(x,y),$$

故左边不等式成立. 又因为当$0\leqslant\frac{\alpha}{2}\leqslant\frac{\pi}{2}$时，有 $\sin\frac{\alpha}{2}\geqslant\frac{2}{\pi}\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha}{\pi}$. 故

$$d(x,y)=2R\sin\frac{\alpha}{2}\geqslant 2R\frac{\alpha}{\pi}=\frac{2}{\pi}\rho(x,y),$$

即

$$\rho(x,y)\leqslant\frac{\pi}{2}d(x,y).$$

于是

$$d(x,y)\leqslant\rho(x,y)\leqslant\frac{\pi}{2}d(x,y).$$

2. 以每一国的首都为该国在地球表面上的点，经过两国首都的地球大圆之劣弧为两国的距离，则由上题知，这样定义的距离满足距离公理.

3. 设 $x_n,y_n\in(X,\rho)$，$n=1,2,\cdots$，$x_n\to x$，$y_n\to y$，即

$$\rho(x_n,x)\to 0,\rho(y_n,y)\to 0(n\to\infty).$$

因为

$$\rho(x_n,y_n)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x,y)+\rho(y_n,y),$$

所以

$$|\rho(x_n,y_n)-\rho(x,y)|\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(y_n,y)\to 0(n\to\infty).$$

故 $\rho(x,y)$是关于 x,y 的连续函数.

4. 距离公理(1)，(2)显然成立. 现证明(3).

因为$\frac{t}{1+t}$是增函数，所以当$0<t_1<t_2$时，$\frac{t_1}{1+t_1}<\frac{t_2}{1+t_2}$.

由于

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,z),$$

故

$$\begin{aligned}\rho_1(x,y)&=\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}\leqslant\frac{\rho(x,y)+\rho(y,z)}{1+\rho(x,y)+\rho(y,z)}\\&\leqslant\frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}+\frac{\rho(y,z)}{1+\rho(y,z)}\\&=\rho_1(x,z)+\rho_1(y,z).\end{aligned}$$

5. 距离公理(1),(2)显然成立,现证明(3). 设 $x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)$, $y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$, $z=(\zeta_1,\zeta_2,\cdots,\zeta_n)$, 因为

$$\begin{aligned}|\xi_k-\eta_k| &\leqslant |\xi_k-\zeta_k| + |\zeta_k-\eta_k|\\&\leqslant \max_k|\xi_k-\zeta_k| + \max_k|\zeta_k-\eta_k|\\&= \rho(x,z) + \rho(y,z),\end{aligned}$$

故

$$\rho(x,y) \leqslant \rho(x,z) + \rho(y,z).$$

6. 充分性. 设 $\{x_n\}$ 的任一子序列都收敛于 x_0. 因为 $\{x_n\}$ 是其自身的子序列,所以 $\{x_n\}$ 也收敛于 x_0.

必要性. 设 $\{x_n\}$ 收敛于 x_0, 于是对 $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ N>0$, 使当 $n\geqslant N$ 时,有 $\rho(x_n,x_0)<\varepsilon$. 对于 $n_k>N$, 显然也有 $\rho(x_{n_k},x_0)<\varepsilon$. 故 $\{x_{n_k}\}$ 收敛于 x_0.

7. 参见第一章习题的第2题.

8. (1)设 $A\subset(X,\rho)$, A 为闭集,令 $G(n)=\{x\,|\,\rho(x,A)<\frac{1}{n},x\in X\}$, 因为 $\rho(x,A)$ 为 x 的连续函数,所以 $G(n)$ 为开集. 事实上,若 $x_n\in X$, 并且 $\rho(x_n,x)\to0$ 时,则有

$$\begin{aligned}\rho(x_n,A)&=\inf_{y\in A}\rho(x_n,y)\leqslant\inf_{y\in A}[\rho(x_n,x)+\rho(x,y)]\\&=\rho(x_n,x)+\rho(x,A),\end{aligned}$$

$$\rho(x,A)\leqslant\rho(x_n,x)+\rho(x_n,A).$$

故 $|\rho(x_n,A)-\rho(x,A)|\leqslant\rho(x_n,x)\to0$. 所以 $\rho(x,A)$ 为 x 的连续函数.

由 $G(n)$ 的定义知 $A\subset G(n)$, 故 $A\subset\bigcap_{n=1}^{\infty}G(n)$. 若 $x\in\bigcap_{n=1}^{\infty}G(n)$, 则 x

$\in G_n(n=1,2,\cdots)$，故 $\rho(x,A)<\frac{1}{n}$. 由 n 的任意性知，$\rho(x,A)=0$. 注意到 A 为闭集，故 $x\in A$，从而 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G(n)\subset A$. 因此，$A=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G(n)$.

(2)设 $B\subset(X,\rho)$，B 为开集，则 $X-B$ 为闭集. 由(1)知，$X-B=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G(n)$（$G(n)$ 为开集）. 因此可得，$B=X-(X-B)=(X-B)^c=(\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}G(n))^c=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(G(n))^c=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(X-G(n))$.

9. 设 M 的全体内点组成之集为 M°. 对 $\forall\ x_0\in M^\circ$，x_0 是 M 的内点，所以 $\exists\ \delta(x_0)\subset M$. 若能证明 $\delta(x_0)$ 中每一点都是 M 的内点，则 $\delta(x_0)\subset M^\circ$. 事实上，对 $\forall\ y\in\delta(x_0)$，令 $\delta_0\leqslant\delta-\rho(x_0,y)$，则 $\delta_0(y)\subset\delta(x_0)\subset M$，这表明 y 是 M 的内点. 由 y 的任意性知，$\delta(x_0)$ 中每一点都是内点，故 $\delta(x_0)\subset M^\circ$，这恰好说明 $M^\circ\neq\phi$，M° 是开集. 以上是就 $M^\circ\neq\phi$ 来证明的，若 $M^\circ=\phi$，结论显然成立.

10. 由聚点的定义和 $A\subset F$ 可直接推出 $A'\subset F'$. 由题设，F 是闭集知，$F'\subset F$，所以 $A\subset F$. 因此，$\bar{A}=A\bigcup A'=F$.

11. 任取 $x,x_0\in X$. 由 $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_0)+\rho(x_0,y)$ 可得

$$\inf_{y\in A}\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x_0)+\inf_{y\in A}\rho(x_0,y). \tag{1}$$

同理，由 $\rho(x_0,y)\leqslant\rho(x,x_0)+\rho(x,y)$ 可得

$$\inf_{y\in A}\rho(x_0,y)\leqslant\rho(x,x_0)+\inf_{y\in A}\rho(x,y). \tag{2}$$

由(1)式与(2)式可知

$$|f(x)-f(x_0)|=|\inf_{y\in A}\rho(x,y)-\inf_{y\in A}\rho(x_0,y)|\leqslant\rho(x,x_0),$$

故 $f(x)$ 连续.

12. 任取 $x\in F_1$，则 $d(x)=\rho(x,F_2)>0$. 作开球 $S\left(x,\frac{1}{2}d(x)\right)$，令 $G_1=\bigcup\limits_{x\in F_1}S\left(x,\frac{1}{2}d(x)\right)$. 同理，任取 $y\in F_2$，有 $d(y)=\rho(y,F_1)>0$，令 $G_2=\bigcup\limits_{x\in F_2}S\left(y,\frac{1}{2}d(y)\right)$，则 G_1,G_2 均为开集，且 $G_1\supset F_1$，$G_2\supset F_2$. 下面证明 $G_1\bigcap G_2=\phi$. 用反证法，假设 $\exists\ a\in G_1\bigcap G_2$，则 $\exists\ x_0\in F_1$，$Y_0\in F_2$，使得

$$a\in S\left(x_0,\frac{1}{2}d(x_0)\right),\ a\in S\left(y_0,\frac{1}{2}d(y_0)\right).$$

不妨设 $d(x_0)\geqslant d(y_0)$，则

$$\begin{aligned}d(x_0)&=\rho(x_0,F_2)\leqslant\rho(x_0,y_0)\leqslant\rho(x_0,a)+\rho(a,y_0)\\&<\frac{1}{2}d(x_0)+\frac{1}{2}d(x_0)=d(x_0),\end{aligned}$$

矛盾．故 $G_1\cap G_2=\phi$.

13．设 A 为紧集，闭集 $B\subset A$．设 $\{x_n\}$ 是 B 中任一点列，则 $\{x_n\}\subset B\subset A$．因为 A 是紧集，所以有子列 $x_{n_k}\to x\in A$．由于 $\{x_{n_k}\}\subset B$，且 B 为闭集，故 $x\in B$，即 B 中任何点列有子列收敛于 B 中的点，从而 B 是紧集．

14．根据两集合间距离的定义，$\exists\ x_n\in F_1,y_n\in F_2$，使得 $\rho(F_1,F_2)=\lim\limits_{n\to\infty}\rho(x_n,y_n)$．因为 F_1,F_2 是 X 中的紧集，所以必存在子序列 $\{x_{n_k}\}$ 与 $\{y_{n_k}\}$，使得 $x_{n_k}\to x_0\in F_1,y_{n_k}\to y_0\in F_2$．再由 $\rho(x,y)$ 的连续性得 $\rho(F_1,F_2)=\rho(x_0,y_0)$.

15．设 A 是列紧集．任取 $\{x_n\}\subset\overline{A}$，对于每个 n，由于 $x_n\in\overline{A}$，$\exists\ y_n\in A$，使 $\rho(x_n,y_n)<\frac{1}{n}$．因 A 是列紧的，对于 $\{y_n\}\subset A$，可取出子序列 $\{y_{n_k}\}$，使 $y_{n_k}\to y\in\overline{A}$．易证 $x_{n_k}\to y$，故 $\overline{A}$ 是紧集.

16．因为 F 是 R^n 中的有界闭集，由§2.6中定理2知，F 必为紧集.

设 $x\in F$．定义 $\varphi(x)=\rho(x,Ax)$ 是 F 上的实函数，令

$$\varphi_0=\inf_{x\in F}\rho(x,Ax)=\inf_{x\in F}\varphi(x),$$

则存在 $\{x_n\}\subset F$ 使得 $\varphi(x_n)\to\varphi_0$．因为 F 是紧集，故 $\exists\ \{x_{n_k}\}\subset\{x_n\}$ 使 $x_{n_k}\to x^*\in F,\varphi(x_{n_k})\to\varphi(x^*)=\inf\limits_{x\in F}\varphi(x)$．以下证明 $Ax^*=x^*$．否则，$\varphi(x^*)=\rho(x^*,Ax^*)>0$，则由已知条件知

$$\rho(AAx^*,Ax^*)<\rho(Ax^*,Ax^*),$$

即

$$\varphi(Ax^*)<\varphi(x^*)=\inf\varphi,$$

矛盾．故 $Ax^*=x^*$．唯一性是显然的.

17. 因为

$$\alpha_n=\sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}}\frac{\rho(A^n x,A^n y)}{\rho(x,y)}\to 0(n\to\infty),$$

故∃ N,使$0\leqslant\alpha_N<1$. 令 $\theta=\alpha_N$,由§2.5中定理2知,A 有唯一不动点.

18. 设 $A=(a_{ij})$,$x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^T$,$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)^T$,$b=(b_1,b_2,\cdots,b_n)^T$,则代数方程的矩阵形式是 $Ax=b$. 令 $I=(\delta_{ij})$是单位阵,则 $Ax+Ix=b+Ix$,或 $x=(I-A)x+b$. 令 $B=I-A$,则 $x=Bx+b$. 令 $Tx=Bx+b$,则 T 是 $R^n\to R^n$ 的算子.

在 R^n 中定义距离 $\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$,则在此距离下 R^n 是完备的. 而

$$\begin{aligned}Tx&=Bx+b=(I-A)x+b\\&=\begin{pmatrix}\delta_{11}-a_{11}&\delta_{12}-a_{12}&\cdots&\delta_{1n}-a_{1n}\\\delta_{21}-a_{21}&\delta_{22}-a_{22}&\cdots&\delta_{2n}-a_{2n}\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\\delta_{n1}-a_{n1}&\delta_{n2}-a_{n2}&\cdots&\delta_{nn}-a_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\\vdots\\b_n\end{pmatrix}\\&=\left[\sum_{j=1}^n(\delta_{1j}-a_{1j})x_j+b_1,\cdots,\sum_{j=1}^n(\delta_{nj}-a_{nj})x_j+b_n\right]^T,\end{aligned}$$

同理

$$Ty=\left[\sum_{j=1}^n(\delta_{1j}-a_{1j})y_j+b_1,\cdots,\sum_{j=1}^n(\delta_{nj}-a_{nj})y_j+b_n\right]^T.$$

于是问题转化为:求证 $x=Tx$ 有唯一解,即证 T 有唯一的不动点.

因为

$$\begin{aligned}\rho(Tx,Ty)&=\sqrt{\left[\sum_{j=1}^n(\delta_{1j}-a_{1j})(x_j-y_j)\right]^2+\cdots+\left[\sum_{j=1}^n(\delta_{nj}-a_{nj})(x_j-y_j)\right]^2}\\&=\sqrt{\sum_{i=1}^n\left[\sum_{j=1}^n(\delta_{ij}-a_{ij})(x_j-y_j)\right]^2}\\&\leqslant\sqrt{\sum_{i=1}^n\left\{\left[\sum_{j=1}^n(\delta_{ij}-a_{ij})^2\right]^{\frac12}\left[\sum_{j=1}^n(x_j-y_j)^2\right]^{\frac12}\right\}^2}\\&=\sqrt{\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n(\delta_{ij}-a_{ij})^2}\cdot\sqrt{\sum_{j=1}^n(x_j-y_j)^2}\end{aligned}$$

$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-a_{ij})^2}\rho(x,y),$$

由于 $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(\delta_{ij}-a_{ij})^2<1$，故由 Banach 定理知，$T$ 有唯一的不动点，即方程组 $Ax=b$，对任何 b 有唯一的不动点.

19. 对 $\forall\ x\in X$，总有 $x_n\to x$（如令 $x_n=x, n=1,2,\cdots$），$\{x_n\}\subset X$，故 X 在 X 中稠密. 又若 X 是可列的距离空间，则按可列的定义知，X 是可分的距离空间.

20. 必要性. 不妨设 $S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots$，则可取 $x_n\in S_n-S_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$，得 X 中的点列 $\{x_n\}$. 因为当 $n>m$ 时，有 $x_n, x_m\in S_m$，故当 $n>m$ 时，$\rho(x_n,x_m)\leqslant d(S_m)\to 0$. 所以 $\{x_n\}$ 是基本列. 由于 X 是完备的，因而 $\exists\ \bar{x}\in X$，使 $x_n\to\bar{x}$. 下面证明 $\bar{x}\in S_m(m=1,2,\cdots)$. 事实上，对 $\forall\ m>0$，当 $n>m$ 时，$x_n\in S_m$，S_m 是闭集，故 $\bar{x}\in S_m(m=1,2,\cdots)$. 所以 $\bar{x}\in\bigcap_{n=1}^{\infty}S_n$.

充分性. 设 $\{x_n\}$ 是 X 中的任一基本列，但它不是收敛序列，则对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当 $n,m\geqslant N$ 时，$\rho(x_n,x_m)<\varepsilon$. 令

$$S_1=\{x_n\}_1^\infty, S_2=\{x_n\}_1^\infty-\{x_1\},\cdots,S_n=\{x_n,x_{n+1},\cdots\},$$

则 $S_1,S_2,\cdots,S_n,\cdots$ 皆为闭集，且

$$S_1\supset S_2\supset\cdots\supset S_n\supset\cdots,\quad d(S_n)\to 0.$$

因此，存在 $\bar{x}\in S_m(m=1,2,\cdots)$，$\bar{x}\in X$，使 $\rho(x_m,\bar{x})\to 0$，矛盾，故 X 是完备的.

21. 设 $\{x_n\}$ 是 X_1 中的基本列，则 $\{x_n\}$ 也是 X 中的基本列. 因为 X 是完备的，所以 $\exists\ x\in X$，使 $x_n\to x$. 由于 X_1 是闭集，故 $x\in X_1$，因此，X_1 是完备的.

22. 用反证法. 假设 $\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n=\phi$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}F_n^c=(\bigcap_{n=1}^{\infty}F_n)^c=X.$$

因为 F_n 是闭集，所以开集簇 $\{F_n^c\}$ 是 X 的一个覆盖. 又因为 X 是紧空间，由有限覆盖定理知，$\exists\ N>0$，使 $\bigcup_{n=1}^{N}F_n^c=X$. 再由

$$F_n \supset F_{n+1} \Longrightarrow F_n^c \subset F_{n+1}^c \Longrightarrow F_N^c = X \Longrightarrow F_N = \phi,$$

矛盾.

23. 若 E 的点都不是 S 的聚点，则对每个 $x\in E$，有邻域 $\delta(x)$ 至多含有 S 的一个点(如果 $x\in S$，则就是 x). 因此，$\{\delta(x)\mid x\in E\}$ 没有可以覆盖 S 的有限子集. 由于 $S\subset E$，$\{\delta(x)\mid x\in E\}$ 也没有可以覆盖 E 的有限子集，这与 E 的紧性矛盾.

第 三 章

1. 显然 $\rho(x)\geqslant 0$，当且仅当 $x=(0,0,\cdots,0)$ 时 $\rho(x)=0$；

$$\rho(\alpha x)=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\alpha\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}=|\alpha|\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}=|\alpha|\rho(x);$$

$$\begin{aligned}\rho(x+y)&=\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i+\eta_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\&\leqslant\Big(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}+\Big(\sum_{i=1}^{n}|\eta_i|^p\Big)^{\frac{1}{p}}\\&=\rho(x)+\rho(y).\end{aligned}$$

故 $\rho(x)$ 适合范数三公理，所以 $\rho(x)$ 是 R^n 中的一个范数.

2. 范数公理1°，2°显然成立，现证公理3°也成立，设

$$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)\in C_0,$$

因为对任一 $i(i=1,2,\cdots,n,\cdots)$，有

$$\begin{aligned}|\xi_i+\eta_i|&\leqslant|\xi_i|+|\eta_i|\leqslant\sup_i|\xi_i|+\sup_i|\eta_i|\\&=\|x\|+\|y\|,\end{aligned}$$

故

$$\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|,$$

所以 C_0 是一赋范线性空间.

3. 容易证明 H^p 是一赋范线性空间，现只证明 H^p 的完备性.

事实上，设 $\{x_n(t)\}$ 是 H^p 中的任一基本列，则对 $\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当 $n,m\geqslant N$ 时，有

$$\|x_n(t)-x_m(t)\|=|x_n(0)-x_m(0)|$$
$$+\sup_{0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1}\frac{|x_n(t_1)-x_n(t_2)-x_m(t_1)+x_m(t_2)|}{|t_1-t_2|^r}<\varepsilon.$$

可见$\{x_n(t)\}$在$[0,1]$上处处收敛，设极限函数为$x(t)$，下证$x(t)\in H^r$，且$\|x_n-x\|\to 0\ (n\to\infty)$.

任取$0\leqslant t_1<t_2\leqslant 1$，当$n,m\geqslant N$时，有

$$|x_n(0)-x_m(0)|+\frac{|x_n(t_1)-x_n(t_2)-x_m(t_1)+x_m(t_2)|}{|t_1-t_2|^r}$$
$$\leqslant\|x_n(t)-x_m(t)\|<\varepsilon.$$

在上式中固定n，令$m\to\infty$，得

$$|x_n(0)-x(0)|+\frac{|x_n(t_1)-x_n(t_2)-x(t_1)+x(t_2)|}{|t_1-t_2|^r}<\varepsilon.$$

从而

$$|x(0)|+\frac{|x(t_1)-x(t_2)|}{|t_1-t_2|^r}$$
$$\leqslant\varepsilon+|x_n(0)|+\frac{|x_n(t_1)-x_n(t_2)|}{|t_1-t_2|^r}$$
$$\leqslant\varepsilon+\|x_n\|.$$

即$x(t)\in H^r$，且$\|x_n-x\|\to 0(n\to\infty)$，完备性得证.

4. 易证M_0是赋范线性空间. 现证明完备性，设$\{x_n(t)\}$是M_0中的基本列，则对$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ N>0$，当$n,m>N$时，有

$$\|x_n-x_m\|=\sup_{a\leqslant t\leqslant b}|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

故对一切$t\in[a,b]$，都成立不等式

$$|x_n(t)-x_m(t)|<\varepsilon.$$

因此$\{x_n(t)\}$在$[a,b]$上一致收敛于某一函数$x(t)$，又因为

$$|x(t)|\leqslant|x_n(t)-x(t)|+|x_n(t)|,$$

所以$x(t)\in M_0$而M_0中的收敛与一致收敛等价，故

$$\|x_n-x\|\to 0\quad(n\to\infty).$$

所以M_0是 Banach 空间.

5. 因为对任一$f(t)\in L[a,b]$，有

$$\|Tf(t)\| = \int_a^b \left|\int_a^t f(\tau)\,\mathrm{d}\tau\right|\mathrm{d}t$$
$$\leqslant \int_a^b |f(\tau)|\mathrm{d}\tau \int_a^b \mathrm{d}t$$
$$= (b-a)\|f\|,$$

于是$\|T\|\leqslant b-a$.

另一方面，对任意使$a+\frac{1}{n}<b$成立的自然数n，作

$$f_n(t)=\begin{cases} n, & t\in[a,a+\frac{1}{n}], \\ 0, & t\in[a+\frac{1}{n},b]. \end{cases}$$

则

$$\|f_n\| = \int_a^b |f_n(t)|\mathrm{d}t = \int_a^{a+\frac{1}{n}} n\mathrm{d}t = 1.$$

$$\|Tf_n\| = \int_a^b \left|\int_a^t f_n(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^{a+\frac{1}{n}}\left|\int_a^t n\mathrm{d}\tau\right|\mathrm{d}t + \int_{a+\frac{1}{n}}^b\left|\int_a^t f_n(\tau)\mathrm{d}\tau\right|\mathrm{d}t$$
$$= \int_a^{a+\frac{1}{n}} n(t-a)\mathrm{d}t + \int_{a+\frac{1}{n}}^b \mathrm{d}t$$
$$= \frac{n}{2}(t-a)^2\Big|_a^{a+\frac{1}{n}} + b - a - \frac{1}{n}$$
$$= \frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2} + b - a - \frac{1}{n}$$
$$= b - a - \frac{1}{2n},$$

故$\|T\|\geqslant\sup\limits_n\|Tf_n\|=b-a$，所以$\|T\|=b-a$.

6. 令$x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n)^T\in R^n$，$A=(a_{ij})$，$y=Ax=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)$，其中$\eta_i=\sum\limits_{j=1}^n a_{ij}\eta_j$. 因为

$$\|Ax\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}|\eta_i| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\xi_j\right|$$

$$\leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}||\xi_j| \leqslant \|x\| \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

所以 $\|A\| \leqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

另一方面，取

$$x_0 = (\mathrm{sgn}a_{p1}, \mathrm{sgn}a_{p2}, \cdots, \mathrm{sgn}a_{pn})^T,$$

其中 $\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{pj}| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$，则$\|x\|=1$. 而

$$\|Ax_0\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\mathrm{sgn}a_{pj}\right|$$

$$\geqslant \sum_{j=1}^{n}|a_{pj}| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|,$$

故 $\|A\| \geqslant \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$. 所以 $\|A\| = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\sum\limits_{j=1}^{n}|a_{ij}|$.

7. 设 $x_1, x_2 \in N$，α, β 是数，则由 T 的线性性得

$$T(\alpha x_1 + \beta x_2) = \alpha Tx_1 + \beta Tx_2 = \theta,$$

即 $\alpha x_1 + \beta x_2 \in N$，故 N 是 X 的线性子空间.

又取 $\{x_n\} \subset N$，$x_n \to x (n\to\infty)$. 由于 T 是连续的，故 $\lim\limits_{n\to\infty}Tx_n = Tx = \theta$，所以 $x \in N$，从而说明 N 是 X 的闭子空间.

反之未必成立，例如取 $X = C^1[0,1]$，$D = C[0,1]$，定义 $T = \dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$，$x(t) \in X$，$Tx(t) = \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$，$T$ 的零子空间为

$$N = \{x(t)\,|\,Tx = \theta, x \in X\} = \{x(t)\,|\,x = c, c \in R^1\}.$$

易证 N 为闭子空间，但 T 是无界算子.

其实，取 $x_n = t^n \in X$，$\|x_n\| = 1 (n = 1,2,\cdots)$，而

$$Tx_n = nt^{n-1},$$

$$\|Tx_n\| = \max_{1\leqslant t\leqslant 1}|nt^{n-1}| = n,$$

故 T 是无界算子.

8. (1) 因为

$$\|x\| = \|x - y + y\| \leqslant \|x - y\| + \|y\|,$$

故

$$\|x-y\| \geqslant \|x\| - \|y\|.$$

(2) 由(1)得

$$\big|\|x_n\| - \|x\|\big| \leqslant \|x_n - x\| \to 0 \quad (n \to \infty),$$

故

$$\|x_n\| \to \|x\| \quad (n \to \infty).$$

(3) 因为

$$\begin{aligned}&\|\lambda_n x_n + \mu_n y_n - \lambda x - \mu y\| \\ &\leqslant |\lambda_n| \|x_n - x\| \\ &+ \|x\| |\lambda_n - \lambda| + |\mu_n| \|y_n - y\| \\ &+ \|y\| |\mu_n - \mu| \to 0 \quad (n \to \infty),\end{aligned}$$

故

$$\lambda_n x_n + \mu_n y_n \to \lambda x + \mu y \quad (n \to \infty).$$

4. 因为

$$\|x_n\| \to \|x\| \quad (n \to \infty),$$

又 $\|x_n\| \neq 0, \|x\| \neq 0$,故

$$\frac{1}{\|x_n\|} \to \frac{1}{\|x\|} \quad (n \to \infty).$$

由(3)得

$$\frac{x_n}{\|x_n\|} \to \frac{x}{\|x\|} \quad (n \to \infty).$$

9. 设在两种范数下,由 X 所得到的 Banach 空间分别为 X_1 和 X_2,I 是将 X_1 内元素 x 变为 X_2 内同一元素的线性算子,由

$$\|Ix\|_2 = \|x\|_2 \leqslant K\|x\|_1,$$

知 I 是一一对应的有界线性算子,根据逆算子定理知 I^{-1} 也是有界线性算子,即对任意 $x \in X_2$,成立

$$\|x\|_1 = \|I^{-1}x\| \leqslant \|I^{-1}\| \|x\|_2,$$

所以 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

10. T 为线性算子是显然的,设 $x \in m$.

令

$$y = Tx,$$

即

$$\begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_n \\ \vdots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \\ \vdots \end{pmatrix},$$

其中 $\eta_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j, i = 1, 2, \cdots, n, \cdots.$

因为 $\|x\| = \sup_i |\xi_i|$，则

$$\|Tx\| = \sup_i |\eta_i| = \sup_i \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij}\xi_j \right|$$

$$\leqslant \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}| |\xi_j| \leqslant \|x\| \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|,$$

故 T 是有界的，且 $\|T\| \leqslant \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$.

另一方面，设 $\sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$，再令

$$x_0 = (\operatorname{sgn} a_{p1}, \operatorname{sgn} a_{p2}, \cdots, \operatorname{sgn} a_{pn}, \cdots),$$

则 $\|x_0\| = 1$. 而

$$\|Tx_0\| = \sup_i \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{ij} \operatorname{sgn} a_{pj} \right| \geqslant \left| \sum_{j=1}^{\infty} a_{pj} \operatorname{sgn} a_{pj} \right|$$

$$= \sum_{j=1}^{\infty} |a_{pj}| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|,$$

故 $\|T\| \geqslant \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$，所以 $\|T\| = \sup_i \sum_{j=1}^{\infty} |a_{ij}|$.

11. 设 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 是 R^n 的一个基底，又令

$$f_i = f(e_i), i = 1, 2, \cdots, n.$$

对任意 $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$，有

$$f(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i\xi_i.$$

于是

$$|f(x)|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|f_i||\xi_i|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^{n}|\xi_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$=\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\|x\|,$$

故 $\|f\|\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}|f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}$. 即 f 有界，也就说明 f 连续.

12. 反证. 如果 x 不唯一，即存在 y，使得 $x_n\xrightarrow{w}x$，$x_n\xrightarrow{w}y\ (n\to\infty)$，且 $x\neq y$. 由第三章 §3.7 中定理 1，存在连续泛函 l_0，使

$$l_0(x-y)=\|x-y\|>0.$$

另一方面，因为 $x_n\xrightarrow{w}x$，$x_n\xrightarrow{w}y$，故

$$l_0(x_n)\to l_0(x),\ l_0(x_n)\to l_0(y).$$

由数列极限的唯一性得

$$l_0(x)=l_0(y),$$

即 $l_0(x-y)=0$，矛盾. 所以 $x=y$.

13. 因为 $x_n\xrightarrow{w}x\ (n\to\infty)$，即对任意的 $l\in X^*$，有

$$l(x_n)\to l(x)\qquad (n\to\infty),$$

当然有

$$l(x_{n_k})\to l(x)\qquad (k\to\infty).$$

由于 l 的任意性知

$$x_{n_k}\xrightarrow{w}x\quad (k\to\infty).$$

14. 令 $x_n=(a_1,a_2,\cdots,a_n,0,\cdots)\in l^2$，$n=1,2,\cdots$，定义泛函序列

$$f_n(x)=\sum_{i=1}^{n}a_ix_i.$$

由已知条件，对任意 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)\in l^2$，有

$$\lim_{n\to\infty}|f_n(x)|=\left|\sum_{i=1}^{\infty}a_ix_i\right|<\infty.$$

所以

$$\|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant M,$$

对任意 n 都成立，故 $\{a_n\} \in l^2$.

第 四 章

1. 设 $x(t), y(t) \in C[a,b]$，规定

$$(x,y) = \int_a^b x(t)y(t)\mathrm{d}t,$$

则 $C[a,b]$ 是一内积空间. 再规定范数

$$\|x\| = \sqrt{(x,x)} = \left(\int_a^b |x(t)|^2 \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{2}},$$

则 $C[a,b]$ 也是一个赋范线性空间. 定义 $x(t), y(t)$ 的距离

$$\rho(x,y) = \|x-y\| = \left(\int_a^b |x(t) - y(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}.$$

则 $C[a,b]$ 也是距离空间.

如上定义的内积空间不是 Hilbert 空间.

2. 显然，R 是赋范线性空间，下面证明它是内积空间.

对任意的 $x, y \in R, x = \{x_n\}, y = \{y_n\}$，有

$$\|x+y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n + y_n\|^2,$$

$$\|x-y\|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|^2.$$

因为 R_n 是内积空间，故

$$\begin{aligned}&\|x_n + y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2 \\ &\quad = 2(\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2), \quad n = 1,2,\cdots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \\ &\quad = \sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n + y_n\|^2 + \|x_n - y_n\|^2) \\ &\quad = 2\sum_{n=1}^{\infty} (\|x_n\|^2 + \|y_n\|^2)\end{aligned}$$

$$= 2(\|x\|^2 + \|y\|^2).$$

故 R 是一内积空间.

3. 设 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是 n 个数，使

$$\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i = 0.$$

于是

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i, x_k\right) = 0, k = 1,2,\cdots,n. \qquad ①$$

又

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i, x_k\right) = \sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x_i, x_k) = \lambda_k, \qquad ②$$

故

$$\lambda_k=0,\ k=1,2,\cdots,n.$$

因此 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 线性无关.

4. 例如，在 R^n 中，设 $\|x\| = \sum_{i=1}^{n}|x_i|$，则 R^n 是一个赋范线性空间，但上述范数不能由内积诱导出来. 事实上，取 $x_1=(0,1,\cdots,0)$，$x_2=(0,1,\cdots,0)$，则

$$x_1+x_2=(1,1,0,\cdots,0),$$
$$x_1-x_2=(1,-1,0,\cdots,0).$$

故

$$\|x_1+x_2\|^2+\|x_1-x_2\|^2=2^2+2^2=8,$$

而

$$2(\|x_1\|^2+\|x_2\|^2)=2(1+1)=4,$$

不满足中线公式，故非内积空间.

5. 设 $x\in\overline{M}$，按题设，x 可分解为

$$x=x_0+y,$$

其中 $x_0\in M$，$y\in M^{\perp}$. 因 $x\in\overline{M}$，故存在 $\{x_n\}\subset M$，且

$$x_n\to x \quad (n\to\infty),$$

于是

$$x_n - x_0 \to x - x_0 = y \quad (n \to \infty).$$

由内积的连续性，并注意到 $x_n - x_0 \in M$，$y \in M^{\perp}$，得

$$(y, y) = \lim_{n \to \infty} (y, x_n - x_0) = 0.$$

故 $y = 0$，所以 $x = x_0$，即 $x \in M$，因而 M 是闭的。

6. 设 $\{x_i\}$ 是标准正交系，任取 $\{x_i\}$ 中 n 个元素 $x_1, x_2, \cdots, x_n$，及常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$。若

$$k_1 x_1 + k_1 x_2 + \cdots + k_n x_n = 0,$$

则

$$0 = (k_1 x_1 + k_1 x_2 + \cdots + k_n x_n, x_i) = k_i, i = 1, 2, \cdots, n,$$

故 $x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots$ 是线性无关系。

反之，例如在 $L^2[-1, 1]$ 中，$g_k(x) = x^k (k = 0, 1, 2, \cdots)$ 是线性无关系，但并非标准正交系。

7. 设 $x_n \to x, y_n \to y (n \to \infty)$。因为

$$\begin{aligned}
|(x_n, y_n) - (x, y)| &\leqslant |(x_n, y_n) - (x, y_n)| + |(x, y_n) - (x, y)| \\
&= |(x_n - x, y_n)| + |(x, y_n - y)| \\
&\leqslant \|x_n - x\| \|y_n\| + \|x\| \|y_n - y\| \to 0 \quad (n \to \infty),
\end{aligned}$$

所以内积关于两个变元都是连续的。

8. 在 $C[-\pi, \pi]$ 中取标准正交系

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, \ \cdots, \ \cos nx, \ \sin nx, \ \cdots,$$

定义内积

$$(f(t), g(t)) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) g(t) \mathrm{d}t,$$

则 $x(t)$ 关于上述标准正交系的 Fourier 系数为

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \cos kt \mathrm{d}t = (x, \cos kt), \ k = 1, 2, \cdots,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \sin kt \mathrm{d}t = (x, \sin kt), \ k = 1, 2, \cdots,$$

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{2}\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x(t) \mathrm{d}t = (x, \frac{1}{\sqrt{2}}).$$

按最佳逼近定理知，$x(t)$的最佳逼近三角多项式是

$$a_0+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt).$$

9. 由于$\{e_i\}$是完备的内积空间 H 的一个完全标准正交系，则$\{e_i\}$也是完备系.

必要性. 由假设，对任一 $x\in H$，有

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2,\qquad c_n=(x,e_n),$$

由 $\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|^2=\|x\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$ 及上述等式知

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|\to 0\qquad(n\to\infty).$$

故$\{e_n\}$的线性组合在 H 中稠密.

充分性. 任取 $x\in H$，仍记 $c_k=(x,e_k)$，$k=1,2,\cdots$. 因为$\{e_k\}$的线性组合在 H 中稠密，故对$\forall\ \varepsilon>0$，存在 $x_{n_0}=\sum_{k=1}^{n_0}\alpha_k^{(n_0)}e_k$，使

$$\|x-x_{n_0}\|<\varepsilon.$$

由最佳逼近定理得

$$\|x-\sum_{k=1}^{n}c_ke_k\|\leqslant\|x-\sum_{k=1}^{n_0}\alpha_k^{(n_0)}e_k\|<\varepsilon,$$

所以 $\|x\|^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2$，即$\{e_k\}$是完备的标准正交系.

10. 因为$(T_1x,y)=(T_2x,y)$，故

$$(T_1x-T_2x,y)=0.$$

即

$$((T_1-T_2)x,y)=0$$

对任意 $y\in H$ 成立，所以有

$$(T_1-T_2)x=0$$

对一切 $x\in H$ 都成立，即 $T_1=T_2$.

11. 因为 T 是自共轭算子，按定义有

$$(Tx,y)=(x,Ty).$$

则

$$\begin{aligned}(\lambda Tx,y)&=\lambda(Tx,y)=\lambda(x,Ty)\\&=(x,\bar{\lambda}Ty)=(x,\lambda Ty),\\((T-\lambda I)x,y)&=(Tx,y)-\lambda(x,y)\\&=(x,Ty)-(x,\lambda y)\\&=(x,(T-\lambda I)y).\end{aligned}$$

所以 $\lambda T,T-\lambda I$ 都是自共轭算子.

12. 充分性. 由题设,对任意 $x,y\in H$,有

$$(T_1T_2x,y)=(T_2x,T_1y)=(x,T_2T_1y)=(x,T_1T_2y),$$

所以 T_1T_2 为自共轭算子.

必要性. 对任意 $x,y\in H$,由题设

$$(T_1T_2x,y)=(x,T_1T_2y).$$

又

$$(T_1T_2x,y)=(T_2x,T_1y)=(x,T_2T_1y),$$

所以

$$T_1T_2=T_2T_1.$$

13. 设 $x,y\in l^2,x=(\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n,\cdots),y=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n,\cdots)$,则

$$\begin{aligned}(Ax,y)&=\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n,\sum_{n=1}^{\infty}\eta_n\Big)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\xi_n\,\bar{\eta}_n\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\,\overline{\alpha_n\eta_n}=(x,Ay).\end{aligned}$$

故 A 是自共轭算子.

14. 任取 $x\in N$,则 $x\perp M$,故 $x\in M^{\perp}$,因此,$N\subset M^{\perp}$;同理可证 $M\subset N^{\perp}$.

15. 任取 $x\in N^{\perp}$,即对任意的 $y\in N$,均有 $(x,y)=0$. 又因为 $M\subset N$,故任取 $y\in M$,必有 $y\in N$,所以有 $(x,y)=0$,因而 $x\in M^{\perp}$,所以得到 $N^{\perp}\subset M^{\perp}$.

16. 对于复内积空间,由条件 $(Ax,x)=0$ 对每一 $x\in U$ 都成立,

利用等式

$$(Ax,y)=\frac{1}{4}[(A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y)$$
$$+\mathrm{i}(A(x+\mathrm{i}y),(x+\mathrm{i}y))-\mathrm{i}(A(x-\mathrm{i}y),x-\mathrm{i}y)],$$

令 $y=Ax$，得

$$Ax=0,\ \forall x\in U,$$

故 $A=\theta$.

对实空间未必成立，例如，在 R^2 中，令 A 为

$$A\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}.$$

令 $V=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$，$AV=\begin{pmatrix}y\\-x\end{pmatrix}$，则

$$(AV,V)=xy-xy=0,\forall V\in R^2.$$

但显然 $A\neq\theta$.

当 A 为自共轭算子时，对实空间 U，利用等式

$$(Ax,y)=\frac{1}{4}((A(x+y),x+y)-(A(x-y),x-y))=0,$$

知

$$(Ax,y)=0$$

对任意 $x,y\in U$ 都成立. 故不论 U 是实的还是复的，均有 $A=0$.

第 五 章

1. 求泛函 $J=\int_0^a y\mathrm{d}x$ 满足边界条件 $y(0)=y(a)=0$ 及约束条件 $\int_0^a\sqrt{1+y'^2}\mathrm{d}x$ 的极大值.

2. 求泛函 $J=2\pi\int_{y_0}^{y_1}x\sqrt{1+x'^2_y}\mathrm{d}y$ 满足边界条件 $x(y_0)=x_0,x(y_1)=x_1$ 的极小值.

3. 求泛函 $J=\int_{x_0}^{x_1}\frac{\sqrt{1+y'^2}}{v(x,y)}\mathrm{d}x$ 满足边界条件 $y(x_0)=y_0,y(x_1)=$

y_1的极小值.

4. $\dfrac{\pi k^2}{2}$.

5. $J[\sin^n x]=J[\cos^n x]=\begin{cases}\dfrac{(n-1)!!}{n!!}\cdot\dfrac{\pi}{2}, & n\text{ 为偶数},\\ \dfrac{(n-1)!!}{n!!}, & n\text{ 为奇数}.\end{cases}$

6. $a\left(\operatorname{sh}\dfrac{a}{b}-\operatorname{sh}1\right)$.

7. $\delta J_1=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}(6y\delta y+2\delta y')\mathrm{d}x$;

$\delta J_2=\displaystyle\int_{x_0}^{x_1}(x^3\delta y+x^4\delta y')\mathrm{d}x$.

第 六 章

1. $(x-c_2)^2+y^2=c_1^2$.
2. 在连续曲线上不能达到极值.
3. $y=c_1^2+\dfrac{1}{4c_1^2}(x+c_2)^2$.
4. $y=c_2+c_1x-\dfrac{1}{4}x^2$.
5. $v=c_1\mathrm{e}^x+c_2\mathrm{e}^{-x}+\dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^x$.
6. $y=c_1\sin(4x-c_2)$.
7. $y=c_1\cos x+c_2\sin x-\dfrac{1}{2}x\cos x$.
8. $y=x^3+2x+1$.
9. $y=\operatorname{sh}(c_1x+c_2)$.
10. $y=c_1x^4+c_2$.
11. $y=B_n\sin x$.
12. $\delta J=\displaystyle\int_0^a\left[2\pi\sqrt{1+y'^2}\delta y+2\pi y\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}}\delta y'\right]\mathrm{d}x$.

13. $\delta v=\int_{x_0}^{x_1}2[y\delta y-y'\delta y'-\mathrm{ch}x\delta y]\mathrm{d}x.$

14. 与积分路径无关，故变分无意义.

16. $y=z=x.$

17. $\begin{cases}y=(c_1+c_2x)\sin x+(c_3+c_4x)\cos x,\\ z=(c_1x+c_2-2c_3)\sin x+(c_3x-c_4+2c_1)\cos x.\end{cases}$

18. $\begin{cases}y=c_1x+c_2,\\ z=c_3x+c_4.\end{cases}$

19. $\begin{cases}y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\sin x+c_4\cos x+1,\\ z=-c_1e^x-c_2e^{-x}+c_3\sin x+c_4\cos x-1.\end{cases}$

20. $y=x^3+x^2.$

21. $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}.$

22. $y=\frac{1}{7!}x^7+c_1x^5+c_2x^4+c_3x^3+c_4x^2+c_5x+c_6.$

23. $y=(c_1x+c_2)e^x+(c_3x+c_4)e^{-x}.$

24. $y=ax-(2a+b)x^2+(a+b)x^3.$

25. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2u}{\partial y^2}=0.$

26. $\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=f(x,y,z).$

第 七 章

1. 若 $A(x,y)\neq 0$，则 $\frac{y'-\varphi'}{1+y'\varphi'}=1$，即极值曲线应与边界点在其上滑动的曲线相截成$\frac{\pi}{4}$的角.

2. $y=0.$

3. $x=\frac{10}{3\pi}(2t-\sin 2t),y=\frac{10}{3\pi}(1-\cos 2t),J=\sqrt{15\pi}.$

4. $y=\pm\sqrt{8x-x^2}.$

5. 在直线上达到极值，这条直线与曲面 $z=\varphi(x,y)$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处以及与曲面 $z=\psi(x,y)$ 在点 (x_1,y_1,z_1) 处都正交.

6. 斜截条件即为与曲面 $z=\varphi(x,y)$ 正交的条件.

7. $y=\frac{1}{240}x^2(2x^3-129x+367)$.

8. $y=\frac{1}{120}x^5+\frac{1}{24}(x^2-x^3)$.

9. $\sqrt{b^2+\frac{a^2}{2}}$.

第 八 章

1. 球面上过两定点的大圆上的一段劣弧.

2. $y=\pm\sqrt{\frac{2}{\pi}}\sin x, 1$.

3. $y=\pm 2\sin n\pi x$,其中 n 为整数.

4. $y=\frac{a}{4}x^2+c_1x+c_2$,其中 c_1,c_2 和 a 由边界条件和等周条件确定.

5. 一个圆簇.

6. $p(x)y''+p'(x)y'-[q(x)+\lambda r(x)]y=0$.

7. $y=-\frac{5}{2}x^2+\frac{7}{2}x, z=x$.

8. $(x-c_2)^2+(y-c_1)^2=\lambda^2$,其中 c_1,c_2,λ 由条件 $y(x_0)=y_0$, $y(x_1)=y_1$, $\int_{x_0}^{x_1}\sqrt{1+y'^2}\,dx=l$ 确定.

第 九 章

1. $y_1=-\frac{5}{16}x(1-x)$,

$y_2=-\frac{3}{4}x(1-x)+\frac{7}{12}x^2(1-x)$.

2. 精确解 $y=\frac{2\operatorname{sh}x}{\operatorname{sh}2}-x$,

一级近似解 $y_1=\frac{5}{14}x(x-2)$.

3. $y_2=\frac{1}{11}(x-1)(5x-4x^2)$.

4. $z_1=\frac{1}{2}(y^2-a^2)\left(1-\frac{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}\cdot\frac{x}{a}}{\operatorname{ch}\sqrt{\frac{5}{2}}}\right)$.

5. $z_1=-\frac{3}{4}\left(1-\frac{x}{b}\right)\left(y^2-\frac{1}{3}x\right)$.

参 考 文 献

[1] Г. М. 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程,人民教育出版社,1956

[2] Я. А. 刘斯铁尔尼克,В. П. 索伯列夫. 泛函分析概要,科学出版社,1964

[3] П. Л. 那汤松. 实变函数论,人民教育出版社,1958

[4] 关肇直等. 线性泛函分析入门,上海科学技术出版社,1979

[5] 夏道行等. 实变函数与泛函分析,高等教育出版社,1983

[6] 郑维行等. 实变函数与泛函分析概要,人民教育出版社,1980

[7] 艾利斯哥尔兹. 变分法,高等教育出版社,1958

[8] 吴迪光. 变分法,高等教育出版社,1987

[9] 彭旭麟等. 变分法及其应用,华中工学院出版社,1983

[10] 苏家铎. 合肥工业大学学报,(2),1982

[11] Robert, M. Young. An introduction to nonharmonic fourier series, New York, 1980

[12] 赵义纯. 非线性泛函分析及其应用,高等教育出版社,1989