13.4 多元函数的偏导数和全微分

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 *(1)* 设 $z = x^y$, 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial z}{\partial y}$

(2) 设 $u = u(x,y,z) = x^{y^z}$, 求函数 u 对三个自变量的全部偏导数.

解: (1) 将 y 视为常量, 则 $z = x^y$ 作为 x 的函数是幂函数, 从而有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = yx^{y-1}.$$

同理, 将 x 视为常量, 则 $z = x^y$ 作为 y 的函数是以 x 为底的指数函数, 从而有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^y \ln x.$$

(2) $u = u(x,y,z) = x^{y^z}$ 是三个自变量的函数, 因此有三个偏导数. 用一元函数所学过的复合函数求导法不难分别得到:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u}{\partial x} = y^z x^{y^z-1};\\
&\frac{\partial u}{\partial y} = x^{y^z}\ln x \frac{\partial}{\partial y} y^z = x^{y^z}(\ln x) z y^{z-1};\\
&\frac{\partial u}{\partial z} = x^{y^z}\ln x \frac{\partial}{\partial z} y^z = x^{y^z}(\ln x) y^z \ln y.
\end{aligned}$$

□

例 2 函数 $f(x,y) = xy$, 平面上每一点 (x_0, y_0) 处都是可微的.

证明. 函数 $f(x,y) = xy$ 在点 (x_0,y_0) 处的全增量可以表示为

$$\begin{aligned}
\Delta f(x_0,y_0) &= (x_0+\Delta x)(y_0+\Delta y) - x_0 y_0\\
&= y_0\Delta x + x_0 \Delta y + \Delta x \Delta y.
\end{aligned}$$

如果记 $\alpha = 0$, $\beta = \Delta x$, 则可写

$$\Delta x \Delta y = \alpha \Delta x + \beta \Delta y.$$

显然当 $(\Delta x, \Delta y) \to (0,0)$ 时 $\alpha \to 0$, $\beta \to 0$. 因此根据定义, 函数 $f(x,y) = xy$, (x_0,y_0) 处可微, 且

$$df\big|_{(x_0,y_0)} = y_0 \Delta x + x_0 \Delta y.$$

■

例 3 定义 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$, 考察 $f(x,y)$ 在原点的偏导数和可微性.

解: 利用偏导数的定义, 注意到 $f(x,0)=f(0,y)=f(0,0)=0$, 由此可以得到

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,\\ f_y(0,0) &= \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0. \end{aligned}$$

断言: 函数 $f(x,y)$ 在原点不可微. 反证法, 设函数 $f(x,y)$ 在原点可微, 根据可微的必要条件, 容易算出全微分为

$$\mathrm{d}f(0,0)=f_x(0,0)\cdot\Delta x+f_x(0,0)\cdot\Delta y=0\cdot\Delta x+0\cdot\Delta y=0.$$

另一方面, 函数 f 的全增量可以表为 $\Delta f(0,0)=\sqrt{|\Delta x\Delta y|}$. 既然已经假设 $f(x,y)$ 在原点可微, 因此在原点的某个邻域内, 根据可微的定义有

$$\alpha\Delta x+\beta\Delta y=\Delta f(0,0)-\mathrm{d}f(0,0)=\sqrt{|\Delta x\Delta y|},$$

尤其是, 如果取 $\Delta x=\Delta y>0$, 则在这种情形下, 上式可以写为

$$\alpha+\beta=\frac{\sqrt{|\Delta x|^2}}{\Delta x}=1.$$

此与当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时在 $\alpha\to 0,\beta\to 0$ 相矛盾. 因此 $f(x,y)=\sqrt{|xy|}$ 在原点不可能是可微的. □

定理 3.4.2 揭示了一个函数 $z=f(x,y)$ 所代表的曲面存在切平面的判据以及切平面的求法: 如果函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 可微, 且 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的全微分为 $\mathrm{d}f|_{(x_0,y_0)}=A\Delta x+B\Delta y$, 则曲面 $z=f(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0,f(x_0,y_0))$ 的切平面方程可以写为

$$z-f(x_0,y_0)=A(x-x_0)+B(y-y_0). \tag{1}$$

过切点 P 又与切平面垂直的直线称为曲面在点 P 的**法线**. 由切平面的方程可知法线的方向数为 $\pm(A,B,-1)$, 所以过切点 P 的**法线方程**是

$$\frac{x-x_0}{A}=\frac{y-y_0}{B}=\frac{z-f(x_0,y_0)}{-1}. \tag{2}$$

例 4 设函数 $f(x,y)=xy$, 求出曲面 $z=xy$ 在点 (x_0,y_0) 处的切平面和法线方程.

解: 在例 **??** 中已经证明过函数 $f(x,y)=xy$ 在平面上每一点 (x_0,y_0) 处都是可微的, 因此切平面存在. 因此根据公式 (**??**) 和 (**??**), 切平面和法线方程分别为

$$z-x_0y_0=y_0(x-x_0)+x_0(y-y_0),\qquad \frac{x-x_0}{y_0}=\frac{y-y_0}{x_0}=\frac{z-x_0y_0}{-1}.$$

特别是, 当切点分别位于 x 在 y 轴上时, 切平面方程分别为 $z=x_0y$ 和 $z=y_0x$. □

例 5 设 $z=x^y$ 在 $u=u(x,y,z)=x^{y^z}$. 求全微分 $\mathrm{d}z$ 和 $\mathrm{d}u$.

解: 由上面的例 **??** 可知, 这两个函数的偏导数在定义域内连续, 因此 z 和 u 都是可微的, 且

$$\mathrm{d}z=\frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y=yx^{y-1}\mathrm{d}x+x^y(\ln x)\mathrm{d}y.$$

同理

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x + \frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y + \frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z \\ &= y^z x^{y^z-1}\mathrm{d}x + x^{y^z}(\ln x)zy^{z-1}\mathrm{d}y + x^{y^z}(\ln x)(\ln y)y^z\mathrm{d}z.; \end{aligned}$$

□

当函数 $f(x,y)$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 可微时, 如果在 $f(x,y)$ 的全增量 $\Delta f(x_0,y_0)$ 中略去高阶的无穷小量 $\alpha\Delta x$ 和 $\beta\Delta y$, 即用 $\mathrm{d}z|_{P_0} = \mathrm{d}f|_{(x_0,y_0)}$ 近似代替全增量 $\Delta f(x_0,y_0)$, 可以近似地计算 $P_0(x_0,y_0)$ 的临近点 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ 处的函数值 $f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$, 即

$$f(x,y) = f(x_0,y_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}(x-x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}(y-y_0). \tag{3}$$

例 6 计算 $\ln[(1.02)^{\frac{3}{5}} + (0.99)^{\frac{5}{3}} - 1]$ 的近似值.

解: 可取 $f(x,y) = \ln(x^{\frac{3}{5}} + y^{\frac{5}{3}} - 1)$ 及 $(x_0,y_0) = (1,1)$, $(x,y) = (1.02, 0.99)$. 则 $(\Delta x, \Delta y) = (0.02, -0.01)$. 不难算出: $f(1,1) = 0$,

$$\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial}{\partial x}\ln(x^{\frac{3}{5}} + y^{\frac{5}{3}} - 1)\right|_{(1,1)} = \left.\frac{3x^{-\frac{2}{5}}}{5(x^{\frac{3}{5}} + y^{\frac{5}{3}} - 1)}\right|_{(1,1)} = \frac{3}{5};$$

$$\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} = \left.\frac{\partial}{\partial y}\ln(x^{\frac{3}{5}} + y^{\frac{5}{3}} - 1)\right|_{(1,1)} = \left.\frac{5y^{\frac{2}{3}}}{3(x^{\frac{3}{5}} + y^{\frac{5}{3}} - 1)}\right|_{(1,1)} = \frac{5}{3}.$$

因此, 所欲求的函数值 $f(1.02, 0.99) = \ln[(1.02)^{\frac{3}{5}} + (0.99)^{\frac{5}{3}} - 1]$ 可以用 (**??**) 式近似计算为

$$\ln[(1.02)^{\frac{3}{5}} + (0.99)^{\frac{5}{3}} - 1] \approx \frac{3}{5}\times 0.02 + \frac{5}{3}\times(-0.01) \approx -0.004667.$$

(数 $\ln[(1.02)^{\frac{3}{5}} + (0.99)^{\frac{5}{3}} - 1]$ 的 8 位精确值为: -0.00466949.) □

思考题

1. 在什么情况下, 函数的全增量等于函数的微分?

解: 当函数为线性函数时, 函数的全增量等于函数的微分。例如: $z = ax + by$, 其中 a, b 为常数. □

2. $f_x(x_0,y_0)$ 和 $f_y(x_0,y_0)$ 存在能保证 $f(x,y_0)$, $f(x_0,y)$ 分别在 x_0, y_0 连续, 能否保证 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续?

解: □

3. f 在 P_0 可微可保证 f 在 P_0 点连续, 还有什么条件可以保证 f 在 P_0 连续?(可从中值公式考虑)

解: □

4. 切平面的法向量是什么? 法线的方向向量是什么?

解: □

习题

1. 求如下函数的所有的偏导数

(1) $z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$;　　(2) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$;

(3) $z = y^{\sin x}$;　　(4) $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$;

(5) $z = \arctan\frac{x+y}{1-xy}$;　　(6) $u = z^{\frac{x}{y}}$.

解: (1) 将 y 视为常量, 则 $z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$ 作为 x 的函数是以 e 为底的指数函数, 从而有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}} \cdot \frac{1}{y} = \frac{1}{y}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}.$$

同理, 将 x 视为常量, 则 $z = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}$ 作为 y 的函数是以 e 为底的指数函数, 从而有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \mathrm{e}^{\frac{x}{y}}(-\frac{x}{y^2}) = -\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{\frac{x}{y}}.$$

(2) $u = \left(\frac{x}{y}\right)^z$ 是三个自变量的函数, 因此有三个偏导数. 用一元函数所学过的复合函数求导法不难分别得到:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = z \cdot \left(\frac{x}{y}\right)^{z-1} \cdot \left(\frac{x}{y}\right)'_x = \frac{y}{z} \cdot \frac{x}{y}^{z-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = z \cdot \frac{x}{y}^{z-1} \left(\frac{x}{y}\right)'_y = -\frac{xz}{y^2}\frac{x}{y}^{z-1};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \left(\frac{x}{y}\right)^z \cdot \ln\frac{x}{y}.$$

(3) 将 y 视为常量, 则 $z = y^{\sin x}$ 作为 x 的函数是幂函数, 从而有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^{\sin x} \cdot \ln y \cdot (\cos x)' = y^{\sin x} \cos x \ln y.$$

同理, 将 x 视为常量, 则 $z = y^{\sin x}$ 作为 y 的函数是以 y 为底的指数函数, 从而有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \sin x \cdot y^{\sin x - 1}.$$

(4) $u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x}$ 是三个自变量的函数, 因此有三个偏导数. 用一元函数所学过的复合函数求导法不难分别得到:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{y} - \frac{z}{x^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{z} - \frac{x}{y^2};$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{x} - \frac{y}{z^2}.$$

(5) 将 y 视为常量, 则 $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ 作为 x 的函数是反三角函数, 从而有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1+(\frac{x+y}{1-xy})^2}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\\
&= \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{1-xy-(x+y)(-y)}{(1-xy)^2}\\
&= \frac{1-xy-(x+y)(1-y)}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\\
&= \frac{1+y^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2}\\
&= \frac{1+y^2}{x^2y^2+x^2+1+y^2}\\
&= \frac{1+y^2}{x^2(y^2+1)+1+y^2}\\
&= \frac{1}{x^2+1}..
\end{aligned}
$$

同理, 将 x 视为常量, 则 $z=\arctan\dfrac{x+y}{1-xy}$ 作为 y 的函数是反三角函数, 从而有

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{1}{1+(\frac{x+y}{1-xy})^2}\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x+y}{1-xy}\right)\\
&= \frac{(1-xy)^2}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\cdot\frac{1-xy-(x+y)(-x)}{(1-xy)^2}\\
&= \frac{1-xy-(x+y)(1-y)}{(1-xy)^2+(x+y)^2}\\
&= \frac{1+x^2}{1-2xy+x^2y^2+x^2+2xy+y^2}\\
&= \frac{1+x^2}{x^2y^2+y^2+1+x^2}\\
&= \frac{1+x^2}{y^2(x^2+1)+1+x^2}\\
&= \frac{1}{y^2+1}.
\end{aligned}
$$

(6) $u=z^{\frac{x}{y}}$ 是三个自变量的函数, 因此有三个偏导数. 用一元函数所学过的复合函数求导法不难分别得到:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= z^{\frac{x}{y}}\cdot\ln z\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{\ln z}{y}z^{\frac{x}{y}};\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= z^{\frac{x}{y}}\cdot\ln z\cdot\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{y}\right)=-\frac{x\ln z}{y^2}z^{\frac{x}{y}};\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{x}{y}z^{\frac{x}{y}}.
\end{aligned}
$$

□

2. 求在指定点处的全微分 $\mathrm{d}u|_P$

(1) $u=x^y$, 在点 $P(3,3)$.

(2) $u=\ln(1+x+y^2+z^3)$, 在点 $P(0,0,0)$.

解: (1) 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\cdot x^{y-1},\frac{\partial u}{\partial y}=\ln x\cdot x^{y},$$

且上述偏导数在点 $P(3,3)$ 连续, 所以由 Th13.4.4 知, 函数在点 $P(3,3)$ 可微. 进一步, 由 $u_x(3,3)=27, u_y(3,3)=27\ln 3$, 可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u|_{(3,3)} &= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(3,3)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(3,3)}\mathrm{d}y \\ &= 27\mathrm{d}x+27\ln 3\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

(2) 因为

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{1+x+y^2+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{2y}{1+x+y^2+z^2},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{3z^2}{1+x+y^2+z^2}.$$

在点 $P(0,0,0)$ 连续, 所以由 Th13.4.4 知, 函数在点 $P(0,0,0)$ 可微. 进一步, 由

$$u_x(0,0,0)=1,\quad u_y(0,0,0)=0,\quad u_z(0,0,0)=0,$$

可得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u|_{(0,0,0)} &= \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{(0,0,0)}\mathrm{d}x+\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{(0,0,0)}\mathrm{d}y+\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{(0,0,0)}\mathrm{d}z \\ &= \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

□

3. 求全微分:

(1) $z=x^3+y^3-3xy$.

(2) $u=\ln(1+x^2+y^2+z^2)$.

解: (1) $z=x^3+y^3-3xy$ 的定义域为 $\mathbb{R}^2$, 其两个偏导数分别为:

$$z_x=3x^2-3y,\quad z_y=3y^2-3x.$$

这两个偏导数在定义域内是连续的, 因此由定理 13.4.4 知 $z=x^3+y^3-3xy$ 是可微的, 并有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y \\ &= (3x^2-3y)\mathrm{d}x+(3y^2-3x)\mathrm{d}y. \end{aligned}$$

(2) $u=\ln(1+x^2+y^2+z^2)$ 的定义域为 $\mathbb{R}^2$, 其三个偏导数分别为:

$$u_x=\frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2},u_y=\frac{2y}{1+x^2+y^2+z^2},u_z=\frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2}.$$

这三个偏导数在定义域内是连续的, 因此由定理 13.4.4 知 $u=\ln(1+x^2+y^2+z^2)$ 是可微的, 并有

$$\begin{aligned} \mathrm{d}u &= \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}z \\ &= \frac{2x}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}x+\frac{2y}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}y+\frac{2z}{1+x^2+y^2+z^2}\mathrm{d}z \\ &= \frac{2(x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y+z\mathrm{d}z)}{1+x^2+y^2+z^2}. \end{aligned}$$

□

4. 求曲面在指定点处的切平面和法线:

(1) $z=4-x^2-y^2$, 在点 $P(1,1,2)$.

(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$, 在点 $P(3,4,5)$.

解: (1) $z=4-x^2-y^2$ 的两个偏导数分别为:

$$z_x=-2x, z_y=-2y.$$

这两个偏导数在点 $(1,1)$ 是连续的, 因此由定理 13.4.4 知 $z=4-x^2-y^2$ 在点 $(1,1)$ 是可微的, 从而切平面存在, 故曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在点 $P(1,1,2)$ 的切平面方程为: $z-2=-2(x-1)-2(y-1)$, 化简得:

$$2x+2y+z=6$$

曲面 $z=4-x^2-y^2$ 在点 $P(1,1,2)$ 的法线方程为: $\frac{x-1}{-2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{-1}$ 化简得:

$$x-1=y-1=2(z-2)$$

(2) $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 的两个偏导数分别为:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot\frac{\partial}{\partial y}(x^2+y^2)=\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

这两个偏导数在点 $(3,4)$ 是连续的, 因此由定理 13.4.4 知 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $(1,1)$ 是可微的, 切平面存在, 且

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(3,4)}=\left.\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(3,4)}=\frac{3}{5},$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(3,4)}=\left.\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|_{(3,4)}=\frac{4}{5},$$

故曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $P(3,4,5)$ 上的切平面方程为: $z-5=\frac{3}{5}(x-3)+\frac{4}{5}(y-4)$, 化简得:

$$3x+4y-5z=0.$$

曲面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在点 $P(3,4,5)$ 上的法线方程为: $\frac{x-3}{\frac{3}{5}}=\frac{y-4}{\frac{4}{5}}=\frac{z-5}{-1}$, 化简得:

$$\frac{x-3}{3}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-5}{-5}.$$

□

5. 在曲面 $z=xy$ 上求一点, 使得这一点的切平面平行于平面 $x+3y+z+9=0$, 并求出这个切平面及其法线的方程.

解: 因为平面 $x+3y+z+9=0$ 的法向量为 $\boldsymbol{r}_1=(1,3,1)$, 而过曲面 $z=xy$ 上一点 $P_0(x_0,y_0)$ 的法向量为 $\boldsymbol{r}_2=\pm(z_x,z_y,-1)$, 若使曲面 $z=xy$ 上点 $P_0(x_0,y_0)$ 的切平面平行于平面 $x+3y+z+9=0$, 则有 $\boldsymbol{r}_1//\boldsymbol{r}_2$, 于是有

$$\frac{1}{y_0}=\frac{3}{x_0}=-1$$

解得 $x_0=-3, y_0=-1$, 从而得到点 P_0 的坐标为 $(-3,-1,3)$, 故曲面 $z=xy$ 上过点 P_0 的切平面方程为: $-(x+3)-3(y+1)-(z-3)=0$, 化简得:

$$x+3y+z+3=0$$

曲面 $z=xy$ 上过点 P_0 的法线方程为: $\dfrac{x+3}{-1}=\dfrac{y+1}{-3}=\dfrac{z-5}{-1}$, 化简得:

$$3(x+3)=y+1=3(z-3).$$

□

6. 考察函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的可微性:

$$f(x,y)=\begin{cases} xy\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

解: 由偏导数的定义知:

$$f_x(0,0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x,0)-f(0,0)}{\triangle x}=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{0-0}{\triangle x}=0$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{f(\triangle y,0)-f(0,0)}{\triangle y}=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{0-0}{\triangle y}=0$$

因为

$$\begin{aligned} & \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)}\frac{f(\triangle x,\triangle y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\triangle x+f_y(0,0)\triangle y]}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}} \\ = & \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)}\frac{\triangle x\triangle y\sin\frac{1}{\triangle x^2+\triangle y^2}}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}} \\ = & \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)}\frac{1}{\frac{1}{\triangle x^2}+frac1\triangle y^2}\sin\frac{1}{\triangle x^2+\triangle y^2} \\ = & \ 0. \end{aligned}$$

由定义知: 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 是可微的. □

7. 证明: 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续, 偏导数存在但不连续, 而函数在点 $(0,0)$ 可微,

$$f(x,y)=\begin{cases} (x^2+y^2)\sin\dfrac{1}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0), \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

解: **(i)** 因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x^2+y^2)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0$$

即有

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=f(0,0),$$

所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续;

(ii) 由偏导的定义知:

$$\begin{aligned} f_x(0,0) &= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x,0)-f(0,0)}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle x^2\sin\frac{1}{\triangle x^2}}{\triangle x} \\ &= \lim_{\triangle x\to 0}\triangle x\sin\frac{1}{\triangle x^2} \\ &= 0. \end{aligned}$$

所以, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 对 x 的偏导是存在的; 同理可证 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 对 y 的偏导是存在的; 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时，有

$$f_x(x,y)=2x\sin\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x}{x^2+y^2}\cos\frac{1}{x^2+y^2}$$

由

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}}f_x(x,y)=\lim_{x\to 0}\left(2x\sin\frac{1}{2x^2}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{2x^2}\right),$$

可知, 上述极限是不存在的, 所以 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 对 x 的偏导是不连续的; 同理可证, $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 对 x 的偏导是不连续的;

(iii) 注意到

$$f_x(0,0)-f_y(0,0)=0,$$

故有,

$$\begin{aligned} & f(0+\triangle x,0+\triangle y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\triangle x+f_y(0,0)\triangle y] \\ = & \left(\triangle x^2+\triangle y^2\right)\sin\frac{1}{\triangle x^2+\triangle y^2} \\ = & \, o\left(\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}\right), \end{aligned}$$

所以, 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 可微的.

□

8. 证明: 如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微, 则 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续.

解: 由于二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 可微的, 有定义知:

$$\begin{aligned} \Delta z &= f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) \\ &= A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y, \end{aligned}$$

这里 A 和 B 是常数, α 和 β 是当 $(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)$ 时的无穷小量, 则

$$\begin{aligned} & \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0) \\ = & \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} A\Delta x+B\Delta y+\alpha\Delta x+\beta\Delta y \\ = & \, 0, \end{aligned}$$

于是得到

$$\lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)=f(x_0,y_0),$$

由函数连续的定义知: 二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 连续. □

---

9. 证明: 如果二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某邻域中偏导存在且有界, 则 $z=f(x,y)$ 在该邻域中连续.

证明. 因为二元函数 $z=f(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 某邻域中偏导存在且有界, 故 $\exists M>0$, 使得对 $\forall(x',y')\in U(P_0,\delta_1)$, 有

$$|f_x(x',y')|\leqslant M, |f_Y(x',y')|\leqslant M \tag{4}$$

其中 $P_0(x_0,y_0)$.

下证 $\forall P(x,y)\in U(P_0,\delta_1)$, 总有 $z=f(x,y)$ 在点 (x,y) 连续.

事实上, 对上述的 $P(x,y)$, $\exists\delta_2=\min\{\|P_0-P\|,\delta_1-\|P_0-P\|\}$, 使得 $U(P,\delta_2)\subset U(P_0,\delta_1)$, 于是有

$$\begin{aligned}
\triangle z &= |f(x+\triangle x,y+\triangle y)-f(x,y)| \\
&= |f(x+\triangle x,y+\triangle y)-f(x+\triangle x,y)+f(x+\triangle x,y)-f(x,y)| \\
&= |f_y(x+\triangle x,y+\theta_1\triangle y)\triangle y-f_x(x+\theta_2\triangle x,y)\triangle x| \\
&\leqslant |f_y(x+\triangle x,y+\theta_1\triangle y)|\cdot|\triangle y|+|f_x(x+\triangle x,y+\theta_1\triangle y)|\cdot|\triangle x| \\
&\leqslant M(|\triangle y|+|\triangle x|),
\end{aligned}$$

其中上面最后一步利用 $(x+\triangle x,y+\theta_1\triangle y,x+\triangle x,y+\theta_1\triangle y)\in U(P_0,\delta_1)$, 故满足 (**??**),

因此, 对 $\forall\epsilon>0,\exists\delta=\min\{\delta_2,\frac{\epsilon}{2M}\}$, 当 $|\triangle x|>\delta,|\triangle y|>\delta$ 时, 有

$$|f(x+\triangle x,y+\triangle y)-f(x,y)|<\epsilon,$$

故结论得证. ∎

10. 证明: 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续且偏导数存在, 但不可微, 其中

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$$

证明. (i) 解法一: 记 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$, 则 $(x,y)\to(0,0)$ 等价于 $r\to 0$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=\lim_{r\to 0}r\cos^2\theta\sin\theta=0=f(0,0)$$

所以, 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续;

解法二: 当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$0\leqslant\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant\left|\frac{x^2y}{2x^2}\right|=\left|\frac{1}{2}\right|\to 0((x,y)\to(0,0))$$

由迫敛性知, $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)=0$, 所以, 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 连续;

(ii) 由偏导的定义知:

$$f_x(0,0)=\lim_{\triangle x\to 0}\frac{f(\triangle x,0)-f(0,0)}{\triangle x}=0,$$

$$f_y(0,0)=\lim_{\triangle y\to 0}\frac{f(0,\triangle y)-f(0,0)}{\triangle x}=0,$$

所以, 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 的偏导数存在;

(iii)

$$\begin{aligned}
& \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} \frac{f(\triangle x,\triangle y)-f(0,0)-[f_x(0,0)\triangle x+f_y(0,0)\triangle y]}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}} \\
= & \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} \frac{f(\triangle x,\triangle y)}{\sqrt{\triangle x^2+\triangle y^2}} \\
= & \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} \frac{\triangle x^2\triangle y}{(\triangle x^2+\triangle y^2)^{\frac{3}{2}}},
\end{aligned}$$

当 $\triangle y = k\triangle x$ 时,

$$\lim_{\substack{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)\\ \triangle y=k\triangle x}} \frac{\triangle x^2\triangle y}{(\triangle x^2+\triangle y^2)^{\frac{3}{2}}} = \lim_{(\triangle x,\triangle y)\to(0,0)} \frac{\triangle x^2\cdot k\triangle x}{(1+k^2)^{\frac{3}{2}}\triangle x^3} = \frac{k}{(1+k^2)^{frac32}},$$

所以, 上述极限不存在, 因此, 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 不可微.

$\blacksquare$