FANYAN JIHE LILUN JIQI YINGYONG

反演集合理论及其应用

刘建忠　著

云南科技出版社

反演集合理论及其应用

刘建忠 著

云南科技出版社

图书在版编目(C I P)数据

反演集合理论及其应用/刘建忠著.—昆明:云南科技出版社,1999.7

ISBN 7-5416-1302-9

Ⅰ.反... Ⅱ.刘... Ⅲ.集论,反演 Ⅳ.0144

中国版本图书馆 CIP 数据核字(1999)第 46715 号

书　　名:反演集合理论及其应用
作　　者:刘建忠
出 版 者:云南科技出版社(昆明市书林街 100 号,650011)
责任编辑:夏映虹　赵　敏
封面设计:杨　峻
印 刷 者:云南教育印刷厂印装
发 行 者:云南科技出版社发行
开　　本:850×1168　1/32　印张:6　字数:150 千
版　　次:1999 年 7 月第 1 版
印　　次:1999 年 7 月第 1 次印刷
印　　数:0001—2000 册
书　　号:ISBN 7-5416-1302-9/O·52
定　　价:20.00 元

内容提要

本书首先论述了普通集合、模糊集合的哲学基础归根结底都是形式逻辑矛盾. 随后作者以辩证法矛盾为基础，提出了反演集合，并探讨了反演集合与普通集合、模糊集合的关系，研究了反演关系、反演与对称、反演集合拓扑空间等；给出了反演集合理论在辩证法、决策学、预测学、工业设计、智能控制、人工神经网络和物理学中的一些应用.

这是一本独辟蹊径开拓数学理论并研究其理论应用的书. 是作者自 1994 年首次提出反演集合理论以来所出版的第一本专著.

序 言

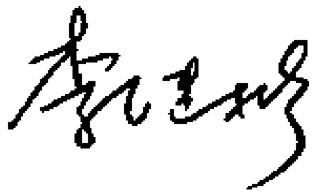
1998年末，建忠送来打印好的书稿．这是自他1994年提出反演集合理论以来完成的第一本专著，也是他多年研究反演集合理论所发表文章的总结．

自Cantor提出集合概念后，集合成为数学的基础概念，集合理论成为现代数学的基础理论．本世纪60年代，美国数学家Zadeh，L．A．提出了模糊集合概念，稍后，我国刘应明院士等发展了不分明拓扑理论，蔡文教授提出了可拓集合概念等．建忠认为，无论是经典的集合概念还是模糊集合概念，其哲学基础归根结底都是形式逻辑矛盾．哲学中另一类矛盾，辩证法矛盾所对应的集合应该是什么样子，未见国内外文献论述．他以辩证法矛盾为基础建立了反演集合理论，并发表了一系列文章，这是青年同志富于开拓、勇于创新的新成果．

辩证法矛盾和形式逻辑矛盾作为人类思维的两种方式中的矛盾并存于人类的思维当中．任何一个真实的思维过程，都是形式逻辑思维与辩证法思维共同作用的过程，在这个过程中，辩证法矛盾和形式逻辑矛盾是相辅相成、共同作用的．如果数学仅建立在形式逻辑矛盾基础上，与辩证法矛盾无关，似乎是不够完美的．从这种意义上讲，发展以辩证法矛盾为基础的集合理论是数学发展之所需．现在建忠开了个好头，在辩证法矛盾基础上提出了反演集合概念，建立了一套理论，这对于数学基础的完善，数学体系的扩大是一个有益的尝试．

作者兼顾数学的理论和应用．在探讨了反演集合与普通集合、模糊集合的关系，研究了反演关系、反演与对称、反演集合拓扑空间之后，又探讨了反演集合理论在辩证法中、在决策学中、在预测学中、在工业设计中、在智能控制中、在人工神经网络中和在物理学中的应用．这是值得上述领域的科技工作者参考的有意义贡献．

建忠教了十年书，后又从事九年科技管理工作．无论是在教书期间，还是在机关工作期间，都持之以恒、孜孜不倦地探索数学，非常难能可贵．他每次发表了自己满意之作，都送一份单行本给我．值此专著出版，深表祝贺．作为数学研究百花园中的一束鲜花，希望本书的出版在理论和应用两方面都产生积极作用．



1999年元旦于昆明理工大学校园

引 言

遥远的长途电话中，一位编辑对我说："你的文章我看过了，你是想建立一个新的数学体系."

"不，"我回答道，"我是要扩大现有的数学体系；… …"

现代数学理论大厦是建立在集合现论基础之上的.然而，在普遥集合概念中，一个元素要么属于集合，要么不属于集合，二者必居其一，它的哲学基础是形式逻辑矛盾；在模糊集合概念中，一个元素要么属于集合，要么不属于集合，要么以百分数的形式归属于中间模糊区域，它的哲学基础是形式逻辑矛盾＋模糊中介；可拓集合是在模糊集合基础上的进一步推广；它们的哲学基础归根结底都是形式逻辑矛盾.

而我论述的反演集合现论则是以辩证法矛盾为基础的.由于辩证法矛盾不能与形式逻辑矛盾分离，辩证法矛盾的产生是以形式逻辑矛盾为推备条件的，所以，反演集合的产生是以普通集合和模糊集合为推备条件的，故我所做的工作是扩大了现有的数学体系.

囿于作看水平，书中恐有错误和不当之处，敬请读者指正，欢迎交流.可通过下列 E－mail 地址与作者联系：liujianz @ public.km.yn.cn

目　　录

Contents

第一章　反演集合的概念和运算

§1　普通集合和模糊集合的哲学基础

数学是什么？数学中最基本的东西是什么？

美籍华裔数学家陈省身先生认为："数学是根据某些假设，用逻辑的推理得到结论．"①

翻开数学史，数学发展的早期，无论是中国或是印度，还是后来发明了演绎逻辑证明的古希腊人，对数学常见的是直观解释．例如：12 世纪印度数学家婆什迦罗（Bhaskara）在著书里画了一幅图去解释勾股定理，那幅图与魏晋人赵爽注《周髀算经》作的弦图一样（见图 1－1），但婆什迦罗除了写下一句"看呀！"便没再说什么了．这种证明，与古代希腊数学家用形象观察去证明关于图形数的性质是极类似的．古代希腊数学家后来发明了演绎逻辑推理这种证明方法，的确是极其重要的贡献，但那不等于说，别的思考方式或解释手段便不算证明．

由此，数学中最基本的东西应该是那些假设，逻辑只是数学的工具．在数学中，不同的假设会推出不同的数学结论．例如：在几何中，我们可以由"在平面上过直线外一点只能作一条和这条直线不

① 陈省身《中国的数学——几件数学新闻和对于中国数学的一些看法》（庆祝自然科学基金制设立 15 周年和国家自然科学基金委员会成立 10 周年的讲演）

相交的直线"推出欧氏几何;可以由"约定在平面上过一点可引不只一条直线与已知直线不相交"推出双曲几何;还可以由"约定在平面上的任何两条直线均相交"推出椭圆几何.

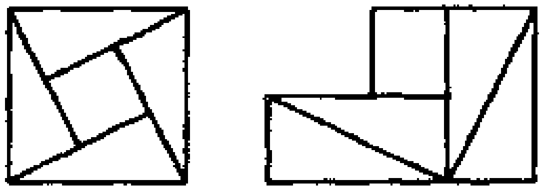


图 1-1

因为用这么简单的方法,所以数学是一门坚固的科学.但同时我们也不得不承认,数学模式与客观世界符合程度,与这些假设的客观性、合理性密切相关.

因此,研究数学概念的前提假设,依据客观世界实际情况完善、补正假设,由此发现新的数学概念,不失为一种好的研究方法.

集合是现代数学中最基础的概念.集合的前提假设是什么?

从哲学角度看,康托尔(Cantor)提出的普通集合中,一个元素要么属于集合,要么不属于集合,二者必居其一,绝不模棱两可.因此,普通集合依据的前提假设是亚里士多德(Aristoteles)提出的形式逻辑的矛盾律和排中律,即:"A 不能既是 B 又不是 B"和"A 是 B 或不是 B"①.

所谓形式逻辑矛盾概念是指事物肯定性概念(是)和否定性概念(非)之间的矛盾.矛盾双方是"有我无你","势不两立";它坚持一个公式:"是则是,否则否,除此之外,都是鬼话."

在客观世界中,这显然是一厢情愿的事情.客观世界中的事物不一定非此即彼,确实存在有既不是百分之百是 B,又不是百分之百不是 B 的事物,许多事情在"是"与"非"之间存在一个中介过渡

① 《中国大百科全书·哲学》第 599 页,659 页

阶段.一个典型例子是“秃子悖论”：

有一根头发算不算秃？一个油光的脑壳上隐约有一根头发，当然应该算秃；两根头发呢？也应该算秃，谁见过脑壳上仅有两根头发就欣喜若狂地宣称自己不是秃子？现在改用数学归纳法，如果n根头发算秃，n+1根头发算不算秃？n根头发算秃，n+1根头发不算秃不合常理，有谁辨别秃子是扒着人家脑袋数头发，“多了一根！不算秃.”

但是，如果n+1根头发算秃，则一根一根的加上去，满头青发都是秃，人人都是秃子.

此类例子很多，例如，年老与年轻；高个子与矮个子；美与丑；胖与瘦；有矿与无矿；多与少；大与小等等.这些例子都能说明：有些事情如果失去中介过渡阶段，思维会引起混乱.故普通集合的前提假设——形式逻辑矛盾的矛盾律和排中律不能全面地正确反映客观世界.

由子普通集合的前提假设不能囊括客观现象，客观世界确实存在有既不是百分之百是B，又不是百分之百不是B的中介过渡阶段，从面启示扎德(Zadeh)提出了模糊集合概念.

从哲学角度讲，扎德修正了普通集合的前提假设，即在形式逻辑中的“是B”与“不是B”之间增加了一个模糊中介.也就是在前面“秃子悖论”中的“秃”与“不秃”之间增加了一个叫做“有些秃”的模糊中介.

在模糊集合中，论域中任意一元素，或百分之百属于B，或百分之百不属于B，或以百分数的形式归属于中介过渡(模糊)区域.换言之，模糊集合的前提假设是修正了的形式逻辑矛盾，即：形式逻辑矛盾+模糊中介.

普通集合和模糊集合的前提假设归根结底都是形式逻辑矛盾.

在哲学中矛盾分两类，一类是形式逻辑矛盾，一类是辩证法矛

盾,如果以辩证法矛盾概念为前提假设会怎样？会导出新集合吗？这正是本书要回答的问题:**如果我们以辩证法矛盾为前提假设,则可以导出一类新集合,我们称它为"反演集合"**.

辩证法矛盾与形式逻辑矛盾截然不同.形式逻辑矛盾是指人们在逻辑思维过程中,对同一个论断既给予肯定又给予否定的自相矛盾现象;辩证法矛盾**是指在客观世界中,事物自身所包含的对立面的统一关系,是指事物自身内部对立的两个侧面(正、反两面)之间的矛盾**.形式逻辑矛盾是一种认识上的逻辑错误,应予排除;辩证法矛盾是认识对象所固有的,应予正确地反映.

例如:正电子与非正电子之间是形式逻辑矛盾,一个电子要么是正电子,要么是非正电子,二者不能同真,其中必有一假.我们不能说一个电子"是正电子",又说它"不是正电子."

正电子与(负)电子之间是辩证法矛盾,正电子与(负)电子一起组成"电子"这个(统一体)概念,分别代表电子(统一体)的两个侧面.正电子概念是相对于负电子概念而提出的,同理,负电子概念也是相对于正电子概念而提出的,正电子与(负)电子是一一对应,互为存在条件的.正电子一方不存在,另一方(负)电子也将不存在(负电子也就无所谓"负").正、负电子双方共同处于"电子"概念这个统一体中,作为统一体的两个侧面,相互依存,同生同灭.

我们可以进一步用"判断"概念来区分辩证法矛盾和形式逻辑矛盾:

在判断中,根据形式逻辑矛盾律,我们对珠穆朗玛峰不能同时说:"珠穆朗玛峰是世界上最高的山峰"和"珠穆朗玛峰不是世界上最高的山峰".如果同时肯定两个互相矛盾的判断,就会出现形式逻辑矛盾.根据形式逻辑矛盾律,两个判断不能同时并存,只能肯定一个,否定另一个.

对于辩证法矛盾,如果我们用判断来表示,我们就应该把辩证法矛盾双方完整地表述于一个判断里,例如对光量子的二象性(间

断性和非间断性的矛盾),应当这样来表述:"光既具有粒子性(间断性)又具有波动性(非间断性)."这是一个反映了光的辩证法矛盾的判断(见图 1-2).

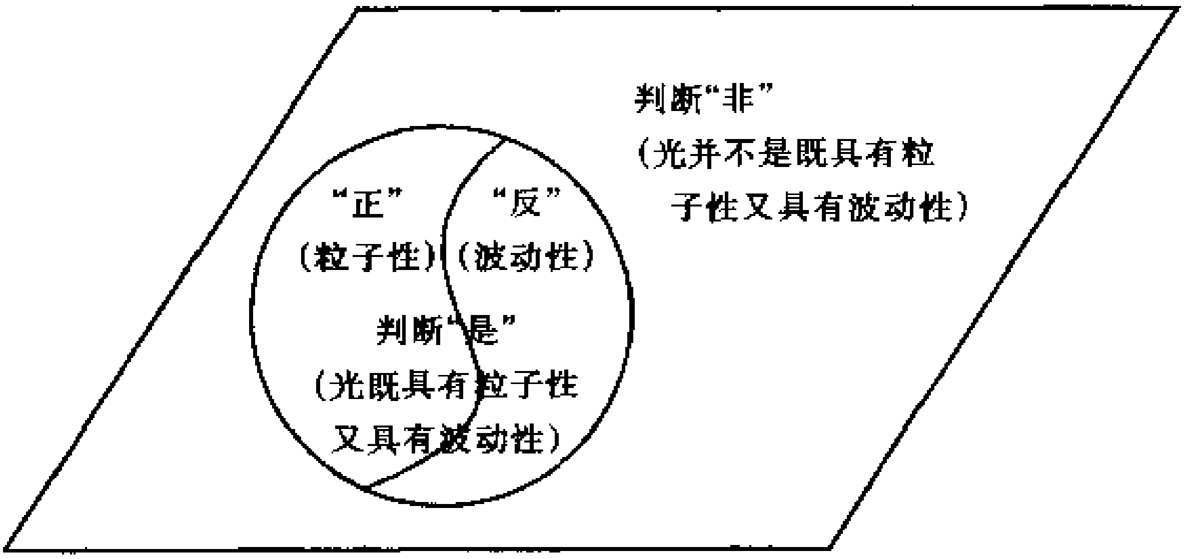


图 1-2

所谓形式逻辑矛盾则是在否定上述这个正确判断的情况下产生的,就是说,一方面我们肯定了"光既具有粒子性又具有波动性,"接着又加以否定,说:"不对,光并不是既具有粒子性又具有波动性".这样就出现了两个互相矛盾的判断.这是不能容许的,其中必有一个是假的、错误的判断.

总而言之,形式逻辑矛盾是指事物自身被肯定和被否定之间的矛盾;辩证法矛盾是指事物内部对立统一的两个侧面之间的矛盾.

辩证法矛盾遵循对立面的统一这个表现着辩证法的本质公式.辩证法矛盾双方互相依存,互为存在的条件,一方的存在以另一方的存在为前提,一方不存在,另一方也将不存在.矛盾双方是共同处于一个统一体中,互相对立、互相排斥而又互相统一、互相联结的两个方面.

辩证法矛盾和形式逻辑矛盾有着根本的区别,但它们又是密

切地联系着的,作为人类思维的两种方式中的矛盾并存于人类的思维当中.

辩证法矛盾不能与形式逻辑矛盾分离,辩证法矛盾的产生是以形式逻辑矛盾为准备条件的.从图1-3中可以看出,形式逻辑矛盾与辩证法矛盾是不相抵触的,二者涉及的范围不同.形式逻辑矛盾是判断"是"和判断"非"之间的矛盾,辩证法矛盾是判断"是"事物内部(正、反)两个侧面之间的矛盾.形式逻辑的规律是辩证法矛盾所不能违背的,没有形式逻辑矛盾的研究,要想深入地研究辩证法矛盾是不可思议的.

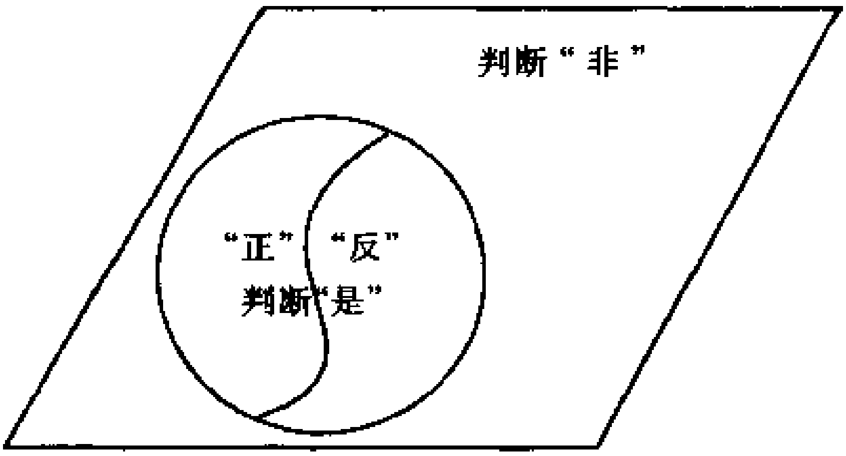


图 1-3

实际上,任何一个真实的思维过程,都是形式逻辑思维与辩证法思维共同作用的过程.形式逻辑思维与辩证法思维既互相区别,又互相联系,在人们的思维、认识过程中所起的作用不同.

辩证法矛盾的一分为二性,换数学语言描述,则我们可以描述为**反演集合定义:论域中任一元素都有两面性,一面属于正集合,另一面属于反集合.**

这样做,我们平常叫做任何事物都有两面性,要一分为二地看问题.

由此,我们得到一种新的集合——反演集合.

普通集合、模糊集合和反演集合之间是不相抵触的,各自涉及

的范围不同.

任何事物,从表面现象上去看,都是一个完整的统一体,一个人就是一个人,一条狗就是一条狗,一棵树就是一棵树,一块石头就是一块石头.但是深入到事物的内部,从其本质上来看,便可以发现任何事物又都是一分为二的,都包含着互相对立、互相排斥而又互相统一、互相联结的两个方面.作为目前唯一以辩证法矛盾为基础,能够对辩证法正反两方面矛盾予以数学分析的反演集合理论,应该有着自己独特的生命力.

§2　反演集合概念

历史表明,一个数学上的创新,往往与数学思想方法的突破分不开,一种新的数学思想方法的产生,不仅同数学自身的矛盾运动有关,而且还与哲学思想等有着紧密联系.反演集合概念的产生就是如此.

在哲学中,矛盾分两类:一类是形式逻辑矛盾,另一类是辩证法矛盾.数学中的普通集合概念和模糊集合概念是以形式逻辑矛盾为哲学基础的.

在形式逻辑中,矛盾概念是指事物肯定性概念(是)和否定性概念(非)之间的矛盾.如:"数"的:数——非数;"作用力"的:作用力——非作用力;"电子"的:电子——非电子;"质子"的:质子——非质子;"中微子"的:中微子——非中微子等之间的矛盾.

在任意一指定的论域 U 中,普通集合 A 涉及的是"是"与"非",论域中任一元素 a,要么

$$a\in A$$

要么

$$a\notin A$$

二者必居其一.绝对不允许有含糊不清,界线不分明的情况

产生.

对于普通集合,我们还可以用叫做"特征函数"的方式表示:

论域 U 中任一元素 a,集合 A 的特征函数为:

$$f_A(a)=\begin{cases}1,\text{当 } a\in A\\ 0,\text{当 } a\notin A\end{cases}$$

因此,只要给出论域 U 中一个集合 A,就唯一地确定一个 A 的特征函数(几何意义见图 1-4).

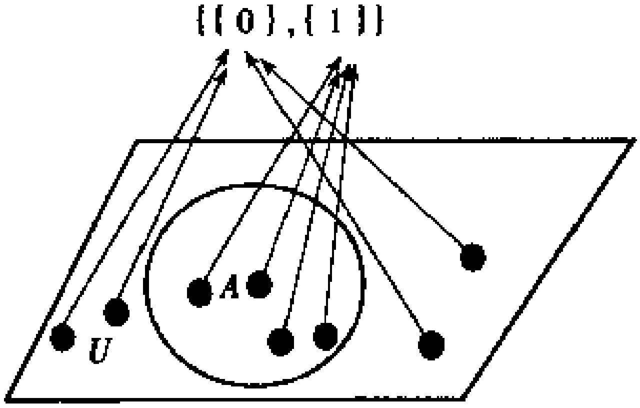


图 1-4

特征函数法还可以讲的再简单些:

对于论域 U 中任一元素 a,当百分之百属于集合 A 时

$$\text{特征函数 } f_A(a)=1$$

当百分之百不属于集合 A 时

$$\text{特征函数 } f_A(a)=0$$

所以,只要给定论域 U 中一个特征函数 f_A:

$$U\xrightarrow{f_A}\{0,1\}$$

就等于给定了一个 U 的子集,它是由 U 中以 1 为像的一切元素所组成的.

即:$A=\{((x,f_A(x))\mid x\in U,f_A(x)=1\}$

在任意一指定的论域中,模糊集合涉及的是"是"与"非",和"是"与"非"之间中介过渡的(模糊)区域,论域 U 中任一元素 a,当

百分之百属于集合 A 时

$$隶属函数\ f_A(a)=1$$

(这里隶属函数概念相当于前面的特征函数概念，但在模糊集合中，用隶属函数概念比用特征函数概念表述意义更准确，并且方便与普通集合概念区别.)

当元素 a 百分之百不属于集合 A 时

$$隶属函数\ f_A(a)=0$$

当元素 a 以百分数的形式归属于中介过渡(模糊)区域时

$$隶属函数\ f_A(a)\in(0,1)$$

换言之：

$$f_A(a)=\begin{cases}1 & 当\ a\in A\\(0,1) & 当\ a\in(A\ 与非\ A\ 的中介)\\0 & 当\ a\notin A\end{cases}$$

即所谓给定论域 U 中一个模糊子集 A，是指给定一个从 U 到区间[0,1]的一个隶属函数 f_A：

$$U\xrightarrow{f_A}[0,1]$$

$f_A(a)$叫做元素 a 对于 A 的隶属度. A 是由 U 中以(0,1]为像的一切元素所组成的(几何意义见图 1-5).

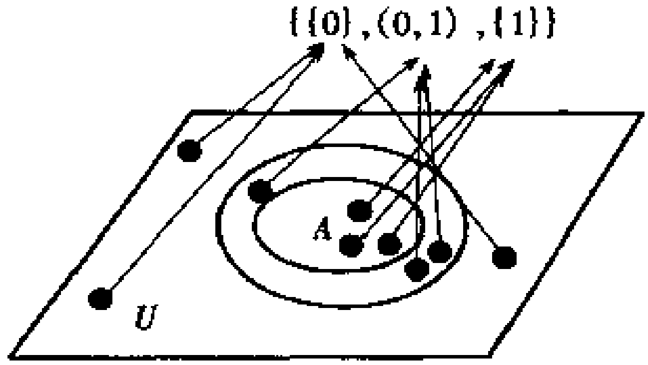


图 1-5

即：$A=\{(x,f_A(x))\mid x\in U,f_A(x)\in(0,1]\}$

在辩证法中，矛盾概念是指一个事物内部对立的两个侧面(正、反两面)之间的矛盾. 如："数"的：正数——负数；"作用力"的：作用力——反作用力；"电子"的：正电子——(负)电子；"质子"的：质子——反质子；"中微子"的：中微子——反中微子等之间的矛盾.

以辩证法矛盾为哲学基础，我们可以给出一种有别于普通集合和模糊集合的新集合——反演集合，其定义如下：

定义 1-1 所谓给定了论域 U 上的一对互为反演的集合 A、$\bar{A}$，是指对任意元素 $x\in U$，存在有：$f_A(x)\in R^n$，$f_{\bar{A}}(x)\in R^n$，$f_A(x)$ 是 x 在 A 中的 n 维非负映射值，$f_{\bar{A}}(x)$ 是 x 在 $\bar{A}$ 中的 n 维非负映射值；反演集合映射对：

$f_A: U\to R^n,\ x\to f_A(x)$

$f_{\bar{A}}: U\to R^n,\ x\to f_{\bar{A}}(x)$

分别叫做 A、$\bar{A}$ 的 n 维映射；R^n 表示 n 维空间，正集合 A 与反集合 $\bar{A}$ 互为反演集合，其中：

$A=\{(x,f_A(x))\mid x\in U,f_A(x)>0\}$

$\bar{A}=\{(x,f_{\bar{A}}(x))\mid x\in U,f_{\bar{A}}(x)>0\}$

$(A,\bar{A})=\{((x,f_A(x)),(x,f_{\bar{A}}(x)))\mid x\in U\}$ 表示论域 U 上的正、反集合组成的集合对，为讨论方便简记为：$Z=(A、\bar{A})$；并且有时我们简记 $A=\{f_A(x)\mid x\in U\}$；$\bar{A}=\{f_{\bar{A}}(x)\mid x\in U\}$ 或简记为 $A=\{(x,f_A(x))\mid x\in U\}$；$\bar{A}=\{(x,f_{\bar{A}}(x))\mid x\in U\}$. $(U,A,\bar{A})$ 为反演集合空间(几何意义见图 1-6).

上述定义可以用语言描述为：

论域中任一元素 x 都有两面性，n 维非负映射 $f_A(x)$ 将 x 的正面性映射到正集合 A 中，n 维非负映射 $f_{\bar{A}}(x)$ 将 x 的负面性映射到 $\bar{A}$ 中；A、$\bar{A}$ 是一对互为反演的集合.

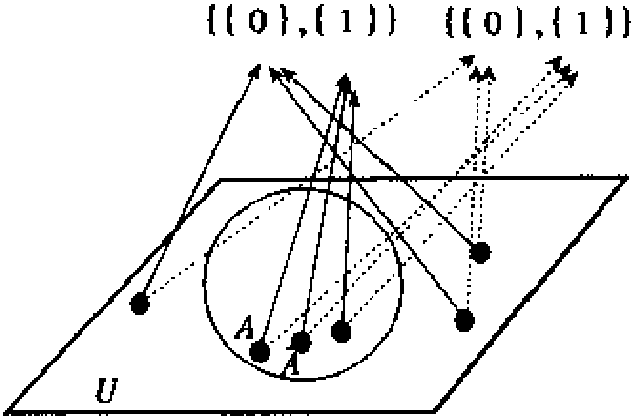


图 1－6

例 1　设 $U=\{a,b,c,d,e\}$，则其上有反演集合对：

$$A=\{(a,f_A(a)),(b,f_A(b)),(c,f_A(c)),(d,f_A(d)),(e,f_A(e))\}$$

$$\tilde{A}=\{(a,f_{\tilde{A}}(a)),(b,f_{\tilde{A}}(b)),(c,f_{\tilde{A}}(c)),(d,f_{\tilde{A}}(d)),(e,f_{\tilde{A}}(e))\}$$

例 2　设 $U=[1,3]$，反演集合映射对分别为：

$$f_A(x)=-x^2+4x-2$$

$$f_{\tilde{A}}(x)=x$$

则有反演集合对：

$A=\{(x,-x^2+4x-2)\mid x\in[1,3]\}$，$\tilde{A}=\{(x,x)\mid x\in[1,3]\}$. 几何意义见图 1－7.

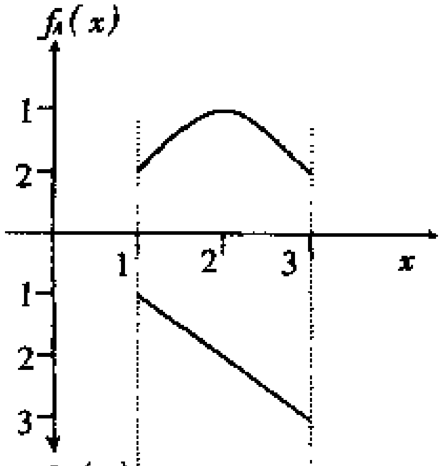


图 1－7

例 3　设 $U=\{a,b,c,d\}$，映射：$f_A(a)=3$，$f_A(b)=3$，$f_A(c)=4$，$f_A(d)=4$，$f_{\tilde{A}}(a)=1$，$f_{\tilde{A}}(b)=1$，$f_{\tilde{A}}(c)=2$，$f_{\tilde{A}}(d)=2$，则有：

$$A=\{(a,3),(b,3),(c,4),(d,4)\},$$

$$\tilde{A}=\{(a,1),(b,1),(c,2),(d,2)\}.$$

由例 3 可以看出：反演集合映射对中的 $f_A(x)$，$f_{\tilde{A}}(x)$，不一定

是一一映射.

§3 反演集合运算

反演集合之间的包含和相等关系:

定义 1-2 设论域 U 中有两个反演集合 $Z_1=(A_1,\tilde{A}_1)$、$Z_2=(A_2,\tilde{A}_2)$,如果对于论域 U 中每一个元素 x,都有 $f_{A_1}(x)\leqslant f_{A_2}(x)$, $f_{\tilde{A}_1}(x)\leqslant f_{\tilde{A}_2}(x)$,则说 Z_2 包含 Z_1,Z_1 称为 Z_2 的反演子集合,记为:$Z_1\subseteq Z_2$.其几何意义见图 1-8.

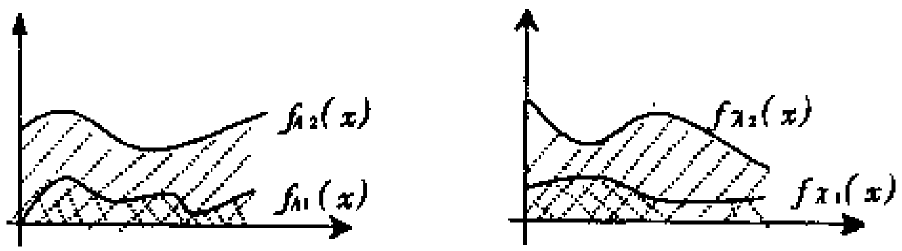


图 1-8

定义 1-3 设有两个反演集合 Z_1、Z_2,若 $Z_1\subseteq Z_2$,且 $Z_1\supseteq Z_2$,则 Z_1 与 Z_2 相等,记为:$Z_1=Z_2$

显然包含关系"$\subseteq$"有性质:

反射性:$Z\subseteq Z$(Z 为任意反演集合)

反对称性:若 $Z_1\subseteq Z_2$,$Z_1\subseteq Z_2$,则 $Z_1=Z_2$

传递性:若 $Z_1\subseteq Z_2$,$Z_2\subseteq Z_3$,则 $Z_1\subseteq Z_3$

反演集合对的"空"集定义:

定义 1-4 反演集合中的空集合:

$\varnothing\triangleq(\varnothing,\tilde{\varnothing})\triangleq(\varnothing,\varnothing)$

(其中:$\varnothing=\tilde{\varnothing}$,$\triangleq$ 表示"被定义",下同.)

反演集合对的"交"、"并"集定义:

定义 1-5 设论域 U 中有两个反演集合 Z_1、Z_2:

$$
\begin{aligned}
Z_1 \cup Z_2 &= (A_1,\bar{A}_1)\cup(A_2,\bar{A}_2)\\
&\triangleq (A_1\cup A_2,\bar{A}_1\cup\bar{A}_2)\\
&\triangleq ((x,\max(f_{A_1}(x),f_{A_2}(x))),\\
&\quad (x,\max(f_{\bar{A}_1}(x),f_{\bar{A}_2}(x))))\\
&\triangleq ((x,f_{A_1}(x)\vee f_{A_2}(x)),(x,f_{\bar{A}_1}(x)\vee f_{\bar{A}_2}(x)))
\end{aligned}
$$

其几何意义如图 1-9.

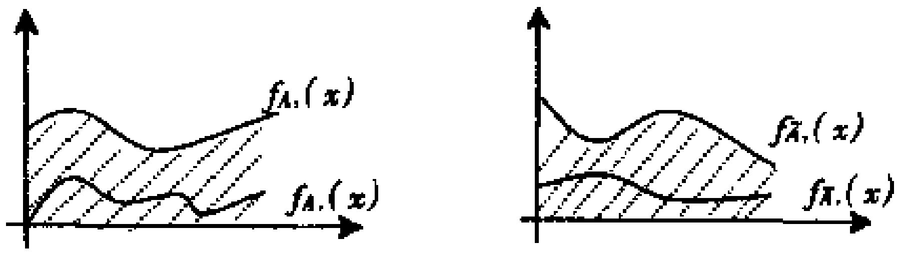


图 1-9

$$
\begin{aligned}
Z_1 \cap Z_2 &= (A_1,\bar{A}_1)\cap(A_2,\bar{A}_2)\\
&\triangleq (A_1\cap A_2,\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)\\
&\triangleq ((x,\min(f_{A_1}(x),f_{A_2}(x))),\\
&\quad (x,\min(f_{\bar{A}_1}(x),f_{\bar{A}_2}(x))))\\
&\triangleq ((x,f_{A_1}(x)\wedge f_{A_2}(x)),(x,f_{\bar{A}_1}(x)\wedge f_{\bar{A}_2}(x)))
\end{aligned}
$$

其几何意义如图 1-10.

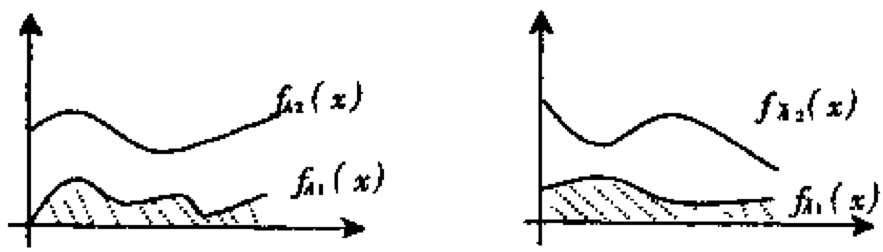


图 1-10

显然:$Z_1\cup\emptyset = Z_1$

$Z_1\cap\emptyset=\emptyset$

例4　设 $U=\{a,b,c,d\}$，$Z_1=(A_1,\tilde{A}_1)$，$Z_2=(A_2,\tilde{A}_2)$，其中：

$A_1=\{(a,3),(b,3),(c,4),(d,4)\}$

$\tilde{A}_1=\{(a,1),(b,1),(c,2),(d,2)\}$

$A_2=\{(a,5),(b,5),(c,4),(d,4)\}$

$\tilde{A}_2=\{(a,1),(b,1),(c,0),(d,0)\}$

求：$Z_1\cup Z_2$，$Z_1\cap Z_2$.

解　$Z_1\cup Z_2=(A_1\cup A_2,\tilde{A}_1\cup\tilde{A}_2)=(\{(a,3),(b,3),(c,4),(d,4),(a,5),(b,5)\},\{(a,1),(b,1),(c,2),(d,2),(c,0),(d,0)\})$

$Z_1\cap Z_2=(A_1\cap A_2,\tilde{A}_1\cap\tilde{A}_2)$

$\qquad=(\{(c,4),(d,4)\},\{(a,1),(b,1)\})$　证毕.

例5　设 $U=[1,3]$，$Z_1=(A_1,\tilde{A}_1)$，$Z_2=(A_2,\tilde{A}_2)$. 其中：

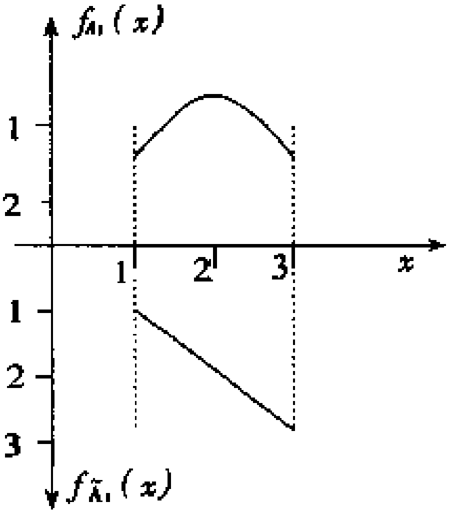


图 1－11

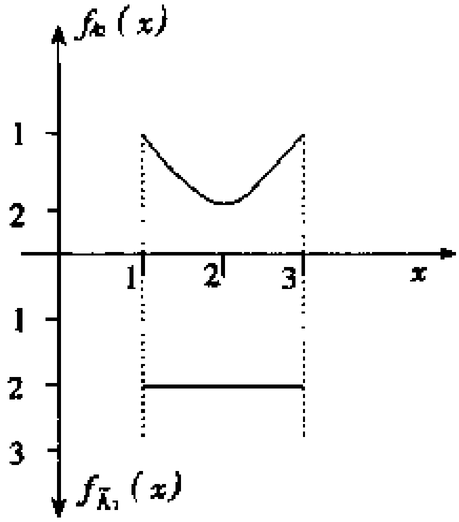


图 1－12

$f_{A_1}(x)=-x^2+4x-2$，$f_{\tilde{A}_1}(x)=x$，

$A_1=\{(x,-x^2+4x-2)\mid x\in[1,3]\}$，$\tilde{A}_1=\{(x,x)\mid x\in[1,3]\}$，

$f_{A_2}(x)=x^2-4x+5$，$f_{\tilde{A}_2}(x)=2$，

$A_2=\{(x,x^2-4x+5)\mid x\in[1,3]\}$，$\tilde{A}_2=\{(x,2)\mid x\in[1,3]\}$，

几何意义见图 1－11、图 1－12.

求：$Z_1 \cup Z_2, Z_1 \cap Z_2$.

解 $Z_1 \cup Z_2 = (A_1 \cup A_2, \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2)$

$$= ((x, f_{A_1}(x) \vee f_{A_2}(x)), (x, f_{\bar{A}_1}(x) \vee f_{\bar{A}_2}(x)))$$

$$= (x, (-x^2+4x-2) \vee (x^2-4x+5)), (x, x \vee 2)$$

几何意义见图 1－13.

$$Z_1 \cap Z_2 = (A_1 \cap A_2, \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2)$$

$$= ((x, f_{A_1}(x) \wedge f_{A_2}(x)), (x, f_{\bar{A}_1}(x) \wedge f_{\bar{A}_2}(x)))$$

$$= ((x, (-x^2+4x-2) \wedge (x^2-4x+5)), (x, x \wedge 2))$$

几何意义见图 1－14.毕.

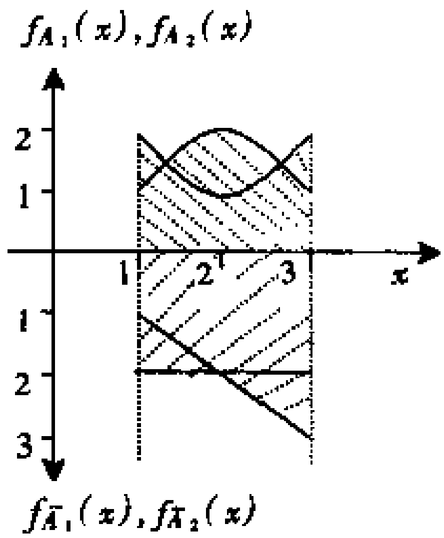


图 1－13

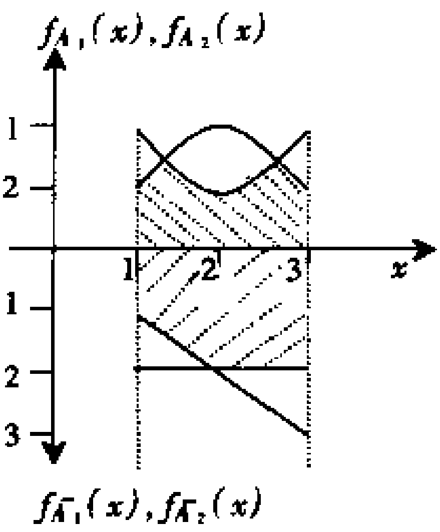


图 1－14

对于无限多个反演子集合，有：

定义 1－6 设论域 U 中有一族反演子集合 $\{Z_i \mid i \in I\}$（这里 I 是指标集），规定：

$$\bigcup_{i \in I} Z_i \triangleq \sup\{Z_i \mid i \in I\}$$

$$\triangleq \{((x, \sup f_{A_i}(x)), (x, \sup f_{\bar{A}_i}(x))) \mid i \in I\}$$

$$\triangleq((x,\bigvee_{i\in I}f_{A_i}(x)),(x,\bigvee_{i\in I}f_{\bar{A}_i}(x)))$$

$$\bigcap_{i\in I}Z_i \triangleq \inf\{Z_i \mid i\in I\}$$

$$\triangleq\{((x,\inf f_{A_i}(x)),(x,\inf f_{\bar{A}_i}(x)))\mid i\in I\}$$

$$\triangleq((x,\bigwedge_{i\in I}f_{A_i}(x)),(x,\bigwedge_{i\in I}f_{\bar{A}_i}(x)))$$

定义 1-7 反演集合的“反演点”：

在定义 1-1 里，若 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 是单值映射，对于任意一 $(x,f_A(x))\in A$，显然有唯一点 $(x,f_{\bar{A}}(x))\in\bar{A}$ 与其对应，若不然则与 $f_{\bar{A}}$ 是单值映射矛盾；反之亦然．这种相互一一对应的点我们称之为互为反演点，即：点 $(x,f_A(x))$ 的反演点是 $(x,f_{\bar{A}}(x))$，反之，点 $(x,f_{\bar{A}}(x))$ 的反演点是 $(x,f_A(x))$，或称点 $(x,f_{\bar{A}}(x))$ 与点 $(x,f_A(x))$ 互为反演点．此时，集合 A 中元素与集合 $\bar{A}$ 中元素是一一对应的．

定义 1-8 $\bar{\bar{A}}=A$．

§4 几个定理

定理 1-1 若 Z_1、Z_2 是论域 U 中反演集合，则 $Z_1\cap Z_2$ 是论域 U 中反演集合．

证明： 已知 $Z_1\cap Z_2\triangleq(A_1\cap A_2,\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)$，设 x 为论域 U 中任意元素，已知 $Z_1=(A_1,\bar{A}_1)$、$Z_2=(A_2,\bar{A}_2)$ 是论域 U 中反演集合，所以有 $(x,f_{A_1}(x))\in A_1$，$(x,f_{\bar{A}_1}(x))\in\bar{A}_1$，$(x,f_{A_2}(x))\in A_2$，$(x,f_{\bar{A}_2}(x))\in\bar{A}_2$，又

$$Z_1\cap Z_2=(A_1\cap A_2,\quad \bar{A}_1\cap\bar{A}_2)$$

$$=((x,f_{A_1}(x)\wedge f_{A_2}(x)),(x,f_{\bar{A}_1}(x)\wedge f_{\bar{A}_2}(x)))$$

现设：$f_{A_1\cap A_2}(x)=f_{A_1}(x)\wedge f_{A_2}(x)$

$f_{\bar{A}_1\cap\bar{A}_2}(x)=f_{\bar{A}_1}(x)\wedge f_{\bar{A}_2}(x)$

对任意 $x\in U$，由已知条件知 $f_{A_1}(x)$和 $f_{A_2}(x)$分别存在，所以 $f_{A_1\cap A_2}(x)=f_{A_1}(x)\wedge f_{A_2}(x)$存在，所以$(x,f_{A_1}(x)\wedge f_{A_2}(x))\in A_1\cap A_2$.

同理，由已知条件知 $f_{\bar{A}_1}(x)$和 $f_{\bar{A}_2}(x)$也分别存在，所以

$f_{\bar{A}_1\cap\bar{A}_2}(x)=f_{\bar{A}_1}(x)\wedge f_{\bar{A}_2}(x)$存在，

所以$(x,f_{\bar{A}_1}(x)\wedge f_{\bar{A}_2}(x))\in\bar{A}_1\cap\bar{A}_2$，

故 $f_{A_1\cap A_2}(x)$是 x 在$A_1\cap A_2$ 中映射值，$f_{\bar{A}_1\cap\bar{A}_2}(x)$是 x 在$\bar{A}_1\cap\bar{A}_2$ 中映射值. 所以 $Z_1\cap Z_2=(A_1\cap A_2,\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)$是反演集合. 证毕.

定理 1-2 若 Z_1、Z_2 是论域 U 中反演集合，则 $Z_1\cup Z_2$ 是反演集合.

证明：已知 $Z_1\cup Z_2\triangleq(A_1\cup A_2,\bar{A}_1\cup\bar{A}_2)$，设 x 为论域U 中任意元素，因为 $Z_1=(A_1,\bar{A}_1)$、$Z_2=(A_2,\bar{A}_2)$是论域 U 中反演集合，所以有 $(x,f_{A_1}(x))\in A_1$，$(x,f_{\bar{A}_1}(x))\in\bar{A}_1$，$(x,f_{A_2}(x))\in A_2$，$(x,f_{\bar{A}_2}(x))\in\bar{A}_2$，又

$$Z_1\cup Z_2=(A_1\cup A_2,\bar{A}_1\cup\bar{A}_2)$$
$$=((x,f_{A_1}(x)\vee f_{A_2}(x)),(x,f_{\bar{A}_1}(x)\vee f_{\bar{A}_2}(x)))$$

现设：$f_{A_1\cup A_2}(x)=f_{A_1}(x)\vee f_{A_2}(x)$

$f_{\bar{A}_1\cup\bar{A}_2}(x)=f_{\bar{A}_1}(x)\vee f_{\bar{A}_2}(x)$

对任意 $x\in U$，由已知条件知 $f_{A_1}(x)$和 $f_{A_2}(x)$分别存在，所以 $f_{A_1\cap A_2}(x)=f_{A_1}(x)\vee f_{A_2}(x)$存在，所以$(x,f_{A_1}(x)\vee f_{A_2}(x))\in A_1\cup A_2$.

同理，由已知条件知 $f_{\bar{A}_1}(x)$和 $f_{\bar{A}_2}(x)$也分别存在，所以 $f_{\bar{A}_1\cup\bar{A}_2}(x)=f_{\bar{A}_1}(x)\vee f_{\bar{A}_2}(x)$存在，所以

$(x,f_{\bar{A}_1}(x)\vee f_{\bar{A}_2}(x)))\in\bar{A}_1\cup\bar{A}_2$，

故 $f_{A_1\cup A_2}(x)$是 x 在$A_1\cup A_2$ 中映射值，$f_{\bar{A}_1\cup\bar{A}_2}(x)$是 x 在$\bar{A}_1\cup\bar{A}_2$

中映射值．所以 $Z_1\cup Z_2=(A_1\cup A_2,\tilde{A}_1\cup\tilde{A}_2)$是反演集合．证毕．

定理 1-3 若$\{Z_i\mid i\in N\}$是论域 U 中的一族反演集合子集（这里是自然数集合），则$\bigcup\limits_{i=1}^{n}Z_i$ 是反演集合．

证明： 已知$\bigcup\limits_{i=1}^{n}Z_i\triangleq[\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i,\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bar{A}_i]$

$\triangleq\{((x,\sup f_{A_i}(x)),(x,\sup f_{\bar{A}_i}(x)))\mid i=1,2,\cdots,n;x\in U\}$

$\triangleq\{((x,\vee f_{A_i}(x)),(x,\vee f_{\bar{A}_i}(x)))\mid i=1,2,\cdots,n;x\in U\}$；

设$f_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bar{A}_i}(x)=\bigvee\limits_{i=1}^{n}f_{\bar{A}_i}(x)$

$f_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}(x)=\bigvee\limits_{i=1}^{n}f_{A_i}(x)$

对任意 $x\in U$，因为每一 $f_{\bar{A}_i}(x)$都存在，所以有限 n 个的$\bigvee\limits_{i=1}^{n}f_{\bar{A}_i}(x)$存在，由于每一$f_{\bar{A}_i}(x)\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}\tilde{A}_i$，所以有 $f_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bar{A}_i}(x)\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}\bar{A}_i$；同理可证$f_{\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i}(x)\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$，所以$\bigcup\limits_{i=1}^{n}Z_i=[\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i,\bigcup\limits_{i=1}^{n}\tilde{A}_i]$是反演集合．证毕．

定理 1-4 若$\{Z_i\mid i\in I\}$是论域 U 的一族反演集合子集（这里 I 是指标集），对任意 $x\in U$，$\bigvee\limits_{i\in I}f_{A_i}(x)$和$\bigvee\limits_{i\in I}f_{\bar{A}_i}(x)$同时存在，则$\bigcup\limits_{i\in I}Z_i$ 是反演集合．

证明： $\bigcup\limits_{i\in I}Z_i\triangleq[\bigcup\limits_{i\in I}A_i,\bigcup\limits_{i\in I}\bar{A}_i]$

$\triangleq\{((x,\bigvee\limits_{i\in I}f_{A_i}(x)),(x,\bigvee\limits_{i\in I}f_{\bar{A}_i}(x)))\mid x\in U\}$

已知：$\bigvee\limits_{i\in I}f_{A_i}(x)$、$\bigvee\limits_{i\in I}f_{\bar{A}_i}(x)$存在，

设：$f_{\bigcup\limits_{i\in I}A_i}(x)=\bigvee\limits_{i\in I}f_{A_i}(x)$

$f_{\bigcup\limits_{i\in I}\bar{A}_i}(x)=\bigvee\limits_{i\in I}f_{\bar{A}_i}(x)$

任意 $x\in U$，已知$\bigvee\limits_{i\in I}f_{A_i}(x)$存在，所以；$f_{\bigcup\limits_{i\in I}A_i}(x)\in\bigcup\limits_{i\in I}A_i$；又$\bigcup\limits_{i\in I}\bar{A}_i=(x,\bigvee\limits_{i\in I}f_{\bar{A}_i}(x))$，由已知条件 $f_{\bigcup\limits_{i\in I}\bar{A}_i}(x)$存在，所以 $f_{\bigcup\limits_{i\in I}\bar{A}_i}(x)\in\bigcup\limits_{i\in I}\bar{A}_i$；所以$\bigcup\limits_{i\in I}Z_i\triangleq[\bigcup\limits_{i\in I}A_i,\bigcup\limits_{i\in I}\tilde{A}_i]$，是反演集合．证毕．

定理 1-5　若$\{Z_i \mid i\in I\}$是论域 U 的一族反演集合子集(这里 I 是指标集),则$\bigcap\limits_{i\in I}Z_i$ 是反演集合.

证明:　已知$\bigcap\limits_{i\in I}Z_i \triangleq [\bigcap\limits_{i\in I}A_i, \bigcap\limits_{i\in I}\bar{A}_i]$

$\triangleq \{(x,\inf f_{A_i}(x)),(x,\inf f_{\bar{A}_i}(x)) \mid i\in I, x\in U\}$

$\triangleq \{((x,\bigwedge\limits_{i\in I}f_{A_i}(x)),(x,\bigwedge\limits_{i\in I}f_{\bar{A}_i}(x))) \mid x\in U\}$

现设:$f_{\bigcap\limits_{i\in I}A_i}(x)=\bigwedge\limits_{i\in I}f_{A_i}(x)$

$f_{\bigcap\limits_{i\in I}\bar{A}_i}(x)=\bigwedge\limits_{i\in I}f_{\bar{A}_i}(x)$

任意 $x\in U$,因为 $f_{A_i}(x)\geqslant 0$ 和 $f_{\bar{A}_i}(x)\geqslant 0$,且由已知条件 Z_i 是反演集合可知$f_{A_i}(x)$和 $f_{\bar{A}_i}(x)$分别存在,所以$\bigwedge\limits_{i\in I}f_{A_i}(x)$和$\bigwedge\limits_{i\in I}f_{\bar{A}_i}(x)$存在,$f_{\bigcap\limits_{i\in I}A_i}(x)\in\bigcap\limits_{i\in I}A_i$,$f_{\bigcap\limits_{i\in I}\bar{A}_i}(x)\in\bigcap\limits_{i\in I}\bar{A}_i$,所以$\bigcap\limits_{i\in I}Z_i\triangleq[\bigcap\limits_{i\in I}A_i,\bigcap\limits_{i\in I}\bar{A}_i]$是反演集合,证毕.

推理$\bigcap\limits_{i\in I}^{n}Z_i$ 是反演集合.

§5　反演集合基本性质

性质 1-1(交换律)

$$Z_1\cup Z_2=Z_2\cup Z_1$$
$$Z_1\cap Z_2=Z_2\cap Z_1$$

证明　对任意 $x\in U$,都有

$Z_1\cup Z_2=(A_1\cup A_2,\bar{A}_1\cup\bar{A}_2)$

$=((x,f_{A_1}(x)\vee f_{A_2}(x)),(x,f_{\bar{A}_1}(x)\vee f_{\bar{A}_2}(x)))$

$=((x,f_{A_2}(x)\vee f_{A_1}(x)),(x,f_{\bar{A}_2}(x)\vee f_{\bar{A}_1}x)))$

$=(A_2\cup A_1,\bar{A}_2\cup\bar{A}_1)=Z_2\cup Z_1$

$Z_1\cap Z_2=(A_1\cap A_2,\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)$

$=((x,f_{A_1}(x)\wedge f_{A_2}(x)),(x,f_{\bar{A}_1}(x)\wedge f_{\bar{A}_2}(x)))$

$=((x,f_{A_2}(x)\wedge f_{A_1}(x)),(x,f_{\bar{A}_2}(x)\wedge f_{\bar{A}_1}x)))$

$=(A_2\cap A_1,\bar{A}_2\cap\bar{A}_1)=Z_2\cap Z_1$，证毕.

性质 1-2(结合律)

$Z_1\cup(Z_2\cup Z_3)=(Z_1\cup Z_2)\cup Z_3$

$Z_1\cap(Z_2\cap Z_3)=(Z_1\cap Z_2)\cap Z_3$

证明： 对任意 $x\in U$，都有

$Z_1\cup(Z_2\cup Z_3)=(A_1\cup(A_2\cup A_3),\bar{A}_1\cup(\bar{A}_2\cup\bar{A}_3))$

$=((x,f_{A_1}(x)\vee(f_{A_2}(x)\vee f_{A_3}(x))),(x,f_{\bar{A}_1}(x)\vee(f_{\bar{A}_2}(x)\vee f_{\bar{A}_3}(x))))$

$=((x,(f_{A_1}(x)\vee f_{A_2}(x))\vee f_{A_3}(x)),(x,(f_{\bar{A}_1}(x)\vee f_{\bar{A}_2}(x))\vee f_{\bar{A}_3}(x)))$

$=((A_1\cup A_2)\cup A_3,(\bar{A}_1\cup\bar{A}_2)\cup\bar{A}_3)$

$=(Z_1\cup Z_2)\cup Z_3$

$Z_1\cap(Z_2\cap Z_3)=(A_1\cap(A_2\cap A_3),\bar{A}_1\cap(\bar{A}_2\cap\bar{A}_3))$

$=((x,f_{A_1}(x)\wedge(f_{A_2}(x)\wedge f_{A_3}(x))),(x,f_{\bar{A}_1}(x)\wedge(f_{\bar{A}_2}(x)\wedge f_{\bar{A}_3}(x))))$

$=((x,(f_{A_1}(x)\wedge f_{A_2}(x))\wedge f_{A_3}(x)),(x,(f_{\bar{A}_1}(x)\wedge f_{\bar{A}_2}(x))\wedge f_{\bar{A}_3}(x)))$

$=((A_1\cap A_2)\cap A_3,(\bar{A}_1\cap\bar{A}_2)\bar{A}_3)$

$=(Z_1\cap Z_2)\cap Z_3$，证毕.

性质 1-3(分配律)

$Z_1\cap(Z_2\cup Z_3)=(Z_1\cap Z_2)\cup(Z_1\cap Z_3)$

$Z_1\cup(Z_2\cap Z_3)=(Z_1\cup Z_2)\cap(Z_1\cup Z_3)$

证明： 对任意 $x\in U$，都有

$Z_1\cap(Z_2\cup Z_3)$

$=(A_1\cap(A_2\cup A_3),\bar{A}_1\cap(\bar{A}_2\cup\bar{A}_3))$

$=((x,f_{A_1}(x)\wedge(f_{A_2}(x)\vee f_{A_3}(x))),(x,f_{\bar{A}_1}(x)\wedge(f_{\bar{A}_2}(x)\vee f_{\bar{A}_3}$

$(x))))$

$=((x,(f_{A_1}(x)\wedge f_{A_2}(x))\vee(f_{A_1}(x)\wedge f_{A_3}(x)))$,

$(x,(f_{\tilde{A}_1}(x)\wedge f_{\tilde{A}_2}(x))\vee(f_{\tilde{A}_1}(x)\wedge f_{\tilde{A}_3}(x)))$

$=((A_1\cap A_2)\cup(A_1\cap A_3),(\tilde{A}_1\cap\tilde{A}_2)\cup(\tilde{A}_1\cap\tilde{A}_3))$

$=(Z_1\cap Z_2)\cup(Z_1\cap Z_3)$

$Z_1\cup(Z_2\cap Z_3)=(A_1\cup(A_2\cap A_3),\tilde{A}_1\cup(\tilde{A}_2\cap\tilde{A}_3))$

$=((A_1\cup A_2)\cap(A_1\cup A_3),(\tilde{A}_1\cup\tilde{A}_2)\cap(\tilde{A}_1\cup\tilde{A}_3))$

$=(Z_1\cup Z_2)\cap(Z_1\cup Z_3)$证毕.

容易证明下面两个性质:

性质 1-4(幂等律)

$$Z_1\cup Z_1=Z_1$$

$$Z_1\cap Z_1=Z_1$$

性质 1-5(吸收律)

$$Z_1\cup(Z_1\cap Z_2)=Z_1$$

$$Z_1\cap(Z_1\cup Z_2)=Z_1$$

§6　反演集合与普通集合的相互转化

虽然普通集合与反演集合依据的哲学基础各自不同,但由于形式逻辑矛盾与辩证法矛盾之间存在着必然联系,所以普通集合与反演集合二者之间也存在着必然联系,在一定条件下,普通集合可看成是反演集合的特例.

我们知道,普通集合的哲学基础之一是亚里士多德提出的形式逻辑的排中律思想,一个元素要么属于集合,要么不属于集合,二者必居其一.普通集合涉及的是形式逻辑矛盾的"是"与"非".论域中任一元素,或属于该集合,或不属于该集合.换言之,指定一集合 A,论域 U 中任意一元素,或属于该集合(不妨看作 $f(x)$不为

零),或不属于该集合(不妨看作 $f(x)$为零).即:

$$U\text{ 中任意元素 } x:\begin{cases}\text{属于集合 } A(=f(x)\text{不为零})\\ \text{不属于集合 } A(=f(x)\text{为零})\end{cases}$$

反演集合与普通集合的根本区别,在于反演集合理论的哲学基础是辩证法的“事物总是一分为二的”思想.反演集合涉及的是辩证法的“正”与“反”矛盾,“正”与“反”矛盾是相互对立、相互排斥而又相互统一、相互联结的两个方面,辩证法认为二者是同时存在同生同灭的.

从某种意义上讲,反演集合就是在充分肯定以形式逻辑为基础的普通集合的同时,把普通集合 A(或 $\bar{A}$)所对应的另一半 $\bar{A}$(或 A)找回来.因为它们原本就是相互依存的一对孪生兄弟,却让人硬给分开了.现在找回来,并探讨 A 与 $\bar{A}$ 之间关系,这就是反演集合理论的实质.从辩证法角度讲:A 与 $\bar{A}$ 有条件的相对的同一性和无条件的绝对的斗争性相结合,由此推动 A 与 $\bar{A}$ 组成的统一物的运动和变化.

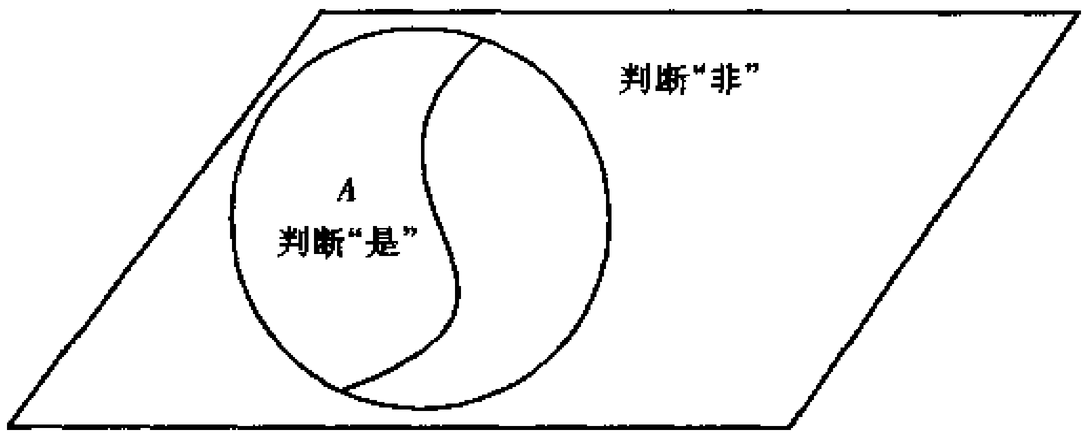


图 1-15

换言之,对论域 U 中任意一元素,指定一集合对$(A,\bar{A})$是指“正”与“反”集合对或同时存在(不妨看作 $f_A(x)$、$f_{\bar{A}}(x)$同时不为零),或同时不存在(不妨看作 $f_A(x)$、$f_{\bar{A}}(x)$同时为零).即:

$$U\text{ 中元素 }x:\begin{cases}\text{属于集合对}(A,\bar{A})\\(=f_A(x),f_{\bar{A}}(x)\text{二者同时不为零})\\\text{不属于集合}(A,\bar{A})\\(=f_A(x),f_{\bar{A}}(x)\text{二者同时为零})\end{cases}$$

由反演集合定义可知 $f_A(x)$ 与 $f_{\bar{A}}(x)$ 有对应关系. 反演集合的建立使得能够研究 $f_A(x)$、$f_{\bar{A}}(x)$ 二者之间的对应、变换、变化等关系. 可以看出,普通集合实际上是反演集合只舍弃 $f_A(x)$ 或只舍弃 $f_{\bar{A}}(x)$ 时的特例(比较图 1－15 与图 1－16 几何意义).

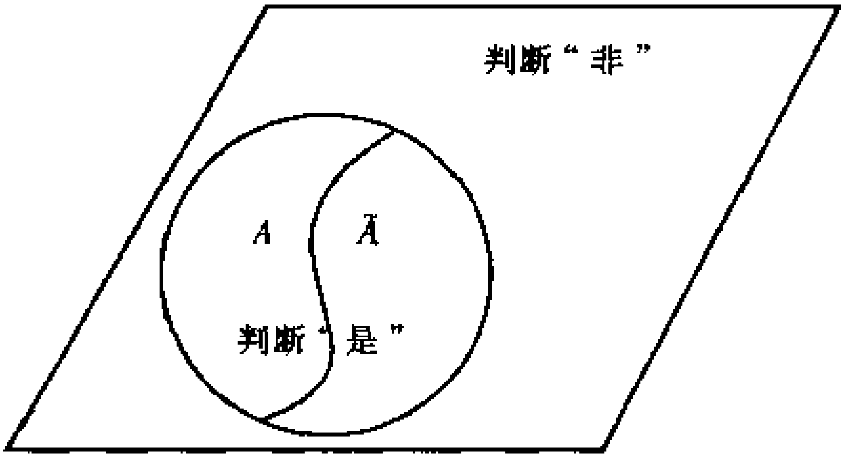


图 1－16

从哲学方面看,普通集合(也就是亚里士多德提出的形式逻辑的排中律思想)是要么只考虑正面,而不考虑反面;要么只考虑反面,而不考虑正面. 将一个有机结合体活生生的割裂开来,更不用说讨论二者之间对应关系了.

唯物辩证法认为,事物总是一分为二的. 事物的运动和发展只有一个源泉——事物内部的正、反两面的矛盾性. 在反演集合中,正反两面中对应元素之间的值的变化演示出正、反两面矛盾斗争变化的量变关系. 作为目前唯一以辩证法矛盾为基础建立的集合理论,反演集合有着勃然生机.

§7　荒诞小故事:塞翁解惑

轻松一下,我们讲个荒诞小故事:

有一个叫塞翁的人丢失了一匹马.找马到河边,遇见李耳先生,问之,李耳一边钓鱼,一边心不在焉地自言自语:"祸兮福之所倚".塞翁似懂非懂,再追问,李耳不理.塞翁只好去求教亚里士多德先生.亚里士多德说:"这是倒霉的事,哪里还有福?祸就是祸,福就是福,除此之外,都是鬼话."

过了几天,丢失的马跑了回来,还带回来一匹野马.塞翁想起李耳的话,如梦初醒,十分佩服,登门感谢.李耳一边给牛喂料,一边答非所问说:"福兮祸之所伏".塞翁心里疑惑,知道再问不会有结果,便告辞.刚出门碰见亚里士多德怒面而来,惊问:"先生何往?"亚里士多德答道:"找李耳算帐,他硬说他的理论是高级的,我的理论是低级的,要人家降我一级工资."塞翁急中生智,抬手往东一指说:"李耳在河边放牛."亚里士多德转身奔河边而去.

塞翁急忙返屋告诉李耳,李耳慌忙牵牛往西逃去.

塞翁心中疑惑几日不能解.但李耳跑了,又因放走李耳得罪了亚里士多德,无奈,只好去请教智者野鹤先生.塞翁祖上治家有方,经过几代努力,家境殷实.人有钱,人缘儿自然好,走在大街上人人见了塞翁都要上前寒暄儿声,唯独野鹤对塞翁视面不见.现在塞翁不得已去见穷酸高傲的野鹤先生,心里有十分不自在.

野鹤夫人见家里来了客人,赶忙带着孩子去挖野菜.

野鹤先生给自己和塞翁各倒了一杯茶,听塞翁述说完缘由,笑着说:"要学会用辩证法看问题.事物总是一分为二的,任何事情都有两面性,这就是辩证法.就当初丢失马这件事情来说,也有两面性.有坏的一方面,养匹马不容易,丢失了怎么能是好事情呢?亚里士多德说是坏事情,我看是说对了.另一方面,从一分为二看问

题，它还应该有好的一面，好的一面是什么，当时还看不到．看不到就是看不到，不能说理论上有，看不到好的方面也是有了，这是唯心论，不是唯物论．看不到李耳也说有，李耳就成了算命先生了，是唯心主义，是错误的．亚里士多德干脆就不承认理论上有，当然也是错误的．后来好的方面发现了，证明了亚里士多德不承认两面性是错误的，但也不能说明李耳当算命先生就当对了，如果你的马淹死在河里怎么办？理论是理论，实践是实践，二者必须相结合，但不能相互替代．李耳用理论替代实践，就是唯心论；亚里士多德认为事情坏就是一切都坏，好就是一切都好，不承认事物同时存在两面性，那是典型的形式逻辑作风，是片面的．”

野鹤先生呷了一口茶，接看说："我认为，理论指导实践，在实践中发展完善理论，这才是正确的．"

"比如说，现在你的马回来了，还带回来一匹野马，当然是好事情．但从一分为二看，它也许有不好的一面，不好的一面是什么，现在还没有看到，没看到我们可以分析：野马难以圈养，可能会跑，跑的时候会不会把家马带走？野马性情暴烈，驯化难，饲养时存易伤人．利用一分为二的方法，使我们可以全面地认识问题，认识到不好的一面发生的可能性，我们就能够预防了，这样我们就聪明了．但我们不能说坏的一面一定会发生，那就变成算命先生了．一分为二是个法宝，是辩证法精髓．"

塞翁茅塞顿开．

说话间，时间已到中午．野鹤夫人端来午饭：两碗米饭，两碟野菜，几根辣椒．塞翁胃口装不下这些，推说家中有事，急忙起身告辞．

第二章 模糊集合基础上的反演集合概念

§1 建立在模糊集合基础上的反演集合定义

模糊集合基础上的反演集合定义：

定义 2-1 所谓给定了论域 U 上的一对反演集合 A、$\tilde{A}$，是指对于任意元素 $x\in U$，都有 $f_A(x)\in[0,1]$，$f_{\tilde{A}}(x)\in[-1,0]$；$f_A(x)$ 叫作对 x 于 A 的隶属度，$f_{\tilde{A}}(x)$ 叫做 x 对于 $\tilde{A}$ 的隶属度；反演集合映射对：

$f_A: U\rightarrow[0,1]; x\rightarrow f_A(x)$

$f_{\tilde{A}}: U\rightarrow[-1,0]; x\rightarrow f_{\tilde{A}}(x)$

分别叫做 A、$\tilde{A}$ 的隶属函数，A 与 $\tilde{A}$ 互为反演集合. 正集合 A 与反集合 $\tilde{A}$ 互为反演集合，其中：

$A=\{(x,f_A(x))\mid x\in U, f_A(x)\in(0,1]\}$

$\tilde{A}=\{(x,f_{\tilde{A}}(x))\mid x\in U, f_{\tilde{A}}(x)\in[-1,0)\}$

$(A,\tilde{A})=\{((x,f_A(x)),(x,f_{\tilde{A}}(x)))\mid x\in U\}$表示论域 U 上的正、反集合组成的集合对，为讨论方便简记为：$Z=(A$、$\tilde{A})$；或有时我们简记为

$A=\{f_A(x)\mid x\in U\}$

$\tilde{A}=\{f_{\tilde{A}}(x)\mid x\in U\}$

或演记为

$A=\{(x,f_A(x))\mid x\in U\}$

$\bar{A}=\{(x,f_{\bar{A}}(x))\mid x\in U\}$

$(U,A,\bar{A})$为反演集合空间.

例1　设 $U=[1,3]$,反演集合映射对分别满足:

$0\leqslant f_A(x)\leqslant 1,\ -1\leqslant f_{\bar{A}}(x)\leqslant 0$,则:

$A=\{(x,f_A(x))\mid x\in[1,3]\}$

$\bar{A}=\{(x,f_{\bar{A}}(x))\mid x\in[1,3]\}$

几何意义见图 2-1.

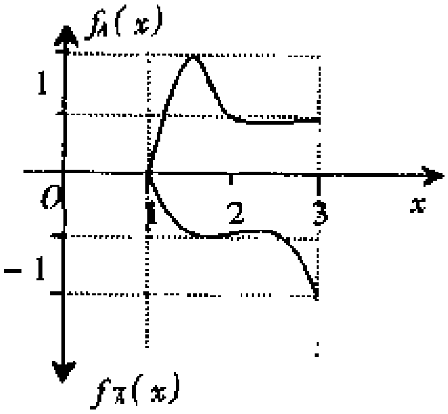


图 2-1

§2　模糊集合基础上的反演集合的运算

模糊集合基础上的反演集合之间的包含和相等关系:

定义 2-2　设论域 U 中两个反演集合 $Z_1=(A_1,\bar{A}_1)$、$Z_2=(A_2,\bar{A}_2)$,对于 U 中每一个元素 x,都满足 $f_{A_1}(x)\leqslant f_{A_2}(x)$,$f_{\bar{A}_1}(x)\geqslant f_{\bar{A}_2}(x)$;则说 Z_2 包含 Z_1,记作 $Z_1\subseteq Z_2$(见图 2-2).

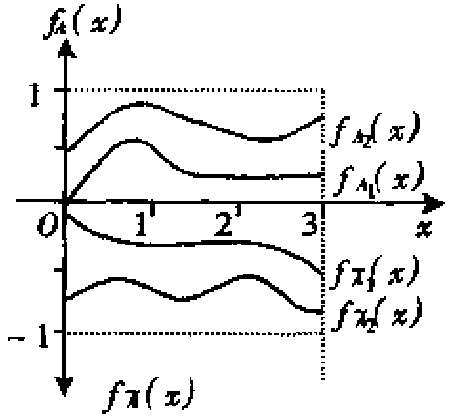


图 2-2

如果 $Z_1\subseteq Z_2$,且 $Z_1\supseteq Z_2$,则说 Z_1 与 Z_2 相等,记为:$Z_1=Z_2$

显然包含关系"$\subseteq$"有性质:

反射性:$Z\subseteq Z$(Z 为任意反演集合)

反对称性:若 $Z_1\subseteq Z_2$,$Z_2\subseteq Z_1$ 则 $Z_1=Z_2$

传递性:若 $Z_1\subseteq Z_2$,$Z_2\subseteq Z_3$,则 $Z_1\subseteq Z_3$

模糊集合基础上的反演集合对的"空"集定义:

定义 2-3 模糊集合基础上的反演集合中的空集合:

$\emptyset \triangleq (\emptyset, \bar{\emptyset}) \triangleq (\emptyset, \emptyset)$

(其中：$\bar{\emptyset} = \emptyset$)

模糊集合基础上的反演集合对的“并”、“交”集定义：

定义 2-4　设论域 U 中有两个反演集合 Z_1、Z_2：

$$
\begin{aligned}
Z_1 \cup Z_2 &= (A_1, \bar{A}_1) \cup (A_2, \bar{A}_2) \\
&\triangleq (A_1 \cup A_2, \bar{A}_1 \cup \bar{A}_2) \\
&\triangleq ((x, \max(f_{A_1}(x), f_{A_2}(x))), (x, \min(f_{\bar{A}_1}(x), f_{\bar{A}_2}(x)))) \\
&\triangleq ((x, f_{A_1}(x) \vee f_{A_2}), (x, f_{\bar{A}_1}(x) \wedge f_{\bar{A}_2}(x)))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Z_2 \cap Z_2 &= (A_1, \bar{A}_1) \cap (A_2, \bar{A}_2) \\
&\triangleq (A_1 \cap A_2, \bar{A}_1 \cap \bar{A}_2) \\
&\triangleq ((x, \min(f_{A_1}(x), f_{A_2}(x))), (x, \max(f_{\bar{A}_1}(x), f_{\bar{A}_2}(x)))) \\
&\triangleq ((x, f_{A_1}(x) \wedge f_{A_2}(x)), (x, f_{\bar{A}_1}(x) \vee f_{\bar{A}_2}(x)))
\end{aligned}
$$

其几何意义分别如图 2-3、图 2-4.

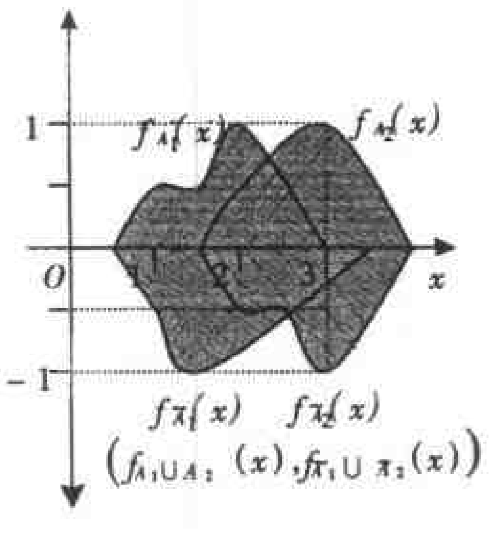


图 2-3

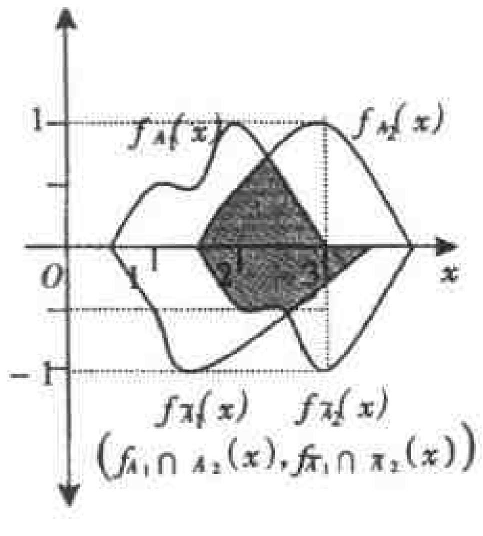


图 2-4

显然：$Z_1 \cap \emptyset = \emptyset$

$Z_1 \cap \emptyset = Z_1$

定义 2-5　设论域中有一族反演子集合$\{Z_i \mid i\in I\}$(这里 I 是指标集),规定:

$$
\begin{aligned}
\bigcup_{i\in I} Z_i &\triangleq \sup\{Z_i \mid i\in I\} \\
&\triangleq \{((x,\sup\{f_{A_i}(x)\}),(x,\sup\{f_{\bar{A}_i}(x)\})) \mid i\in I\} \\
&\triangleq ((x,\bigvee_{i\in I}\{f_{A_i}(x)\}),(x,\bigvee_{i\in I}\{f_{\bar{A}_i}(x)\})) \\
\bigcap_{i\in I} Z_i &\triangleq \inf\{Z_i \mid i\in I\} \\
&\triangleq \{((x,\inf\{f_{A_i}(x)\}),(x,\inf\{f_{\bar{A}_i}(x)\})) \mid i\in I\} \\
&\triangleq ((x,\bigwedge_{i\in I}\{f_{A_i}(x)\}),(x,\bigwedge_{i\in I}\{f_{\bar{A}_i}(x)\}))
\end{aligned}
$$

定义 2-6　$\bar{\bar{A}} = A$

§3　模糊集合基础上的反演集合的几个定理

容易证明下述定理成立:

定理 2-1　若 Z_1、Z_2 是论域 U 中反演集合,则 $Z_1\cap Z_2$ 是论域 U 中反演集合.

定理 2-2　若 Z_1、Z_2 是论域 U 中反演集合,则 $Z_1\cup Z_2$ 是反演集合.

定理 2-3　若$\{Z_i \mid i\in N\}$是论域 U 中的一族反演集合子集(这里 N 是自然数集合),则$\bigcup_{i\in I}^{n} Z_i$ 是反演集合.

定理 2-4　$\{Z_i \mid i\in I\}$若是论域 U 的一族反演集合子集(这里 I 是指标集),且$\bigvee_{i\in I} f_{A_i}(x)$和$\bigvee_{i\in I}\{f_{\bar{A}_i}(x)\}$同时存在,则$\bigcup_{i\in I} Z_i$ 是反演集合.

定理 2-5　若$\{Z_i \mid i\in I\}$是论域 U 的一族反演集合子集(这里 I 是指标集),则$\bigcap_{i\in I} Z_i$ 是反演集合.

推理　$\bigcap_{i\in I}^{n} Z_i$ 是反演集合.

§4 模糊集合基础上的反演集合的基本性质

容易证明，下述性质成立：

性质 2-1(交换律)

$$Z_1 \cup Z_2 = Z_2 \cup Z_1$$

$$Z_1 \cap Z_2 = Z_2 \cap Z_1$$

性质 2-2(结合律)

$$Z_1 \cup (Z_2 \cup Z_3) = (Z_1 \cup Z_2) \cup Z_3$$

$$Z_1 \cap (Z_2 \cap Z_3) = (Z_1 \cap Z_2) \cap Z_3$$

性质 2-3(分配律)

$$Z_1 \cup (Z_2 \cap Z_3) = (Z_1 \cup Z_2) \cap (Z_1 \cup Z_3)$$

$$Z_1 \cap (Z_2 \cup Z_3) = (Z_1 \cap Z_2) \cup (Z_1 \cap Z_3)$$

性质 2-4(幂等律)

$$Z_1 \cup Z_1 = Z_1$$

$$Z_1 \cap Z_1 = Z_1$$

性质 2-5(吸收律)

$$Z_1 \cup (Z_1 \cap Z_2) = Z_1$$

$$Z_1 \cap (Z_1 \cup Z_2) = Z_1$$

§5 反演集合与模糊集合的相互转化

在定义 2-1 中，当 $f_A(x)$恒为零时，则定义 2-1 为一模糊集合定义.

模糊集合与反演集合的根本区别是依据的哲学基础截然不同，但二者存在着必然联系，反演集合可包含模糊集合. 换言之，模糊集合可看成是反演集合的特例：

模糊集合：

$$U\text{ 中元素 }x:\begin{cases}\text{属于模糊集合 }A(=f(x)\text{不为零})\\ \text{不属于模糊集合 }A(=f(x)\text{为零})\end{cases}$$

反演集合：

$$U\text{ 中元素 }x:\begin{cases}\text{属于反演集合对}(A,\bar{A})\\ (=f_A(x),f_{\bar{A}}(x)\text{二者同时不零})\\ \text{不属于反演集合}(A,\bar{A})\\ (=f_A(x),f_{\bar{A}}(x)\text{二者同时为零})\end{cases}$$

可看出，模糊集合是反演集合中 $f_{\bar{A}}(x)\equiv 0$ 时的特例.

§6　浅论可拓集合的哲学基础

自 Cantor 提出集合概念，Zadeh，L. A. 提出模糊集合概念后，我国的蔡文教授于 1983 年提出可拓集合概念.

如同模糊集合理论产生之初，曾出现过有人认为模糊集合理论的哲学基础是辩证逻辑一样，有人认为可拓集合理论的哲学基础是辩证逻辑[①]，并由此质疑反演集合理论能否是目前唯一以辩证法矛盾为基础的集合理论.

关于可拓集合的哲学基础，蔡文先生本人认为是“辩证逻辑和形式逻辑相结合的可拓逻辑”.[②] 我认为蔡文先生这句话的含义是，可拓逻辑突破了形式逻辑（乃至模糊逻辑）的局限性，并且包含有一定的辩证法思想. 但这绝不等于可拓逻辑就是辩证逻辑. 从逻辑上讲，如果可拓逻辑等于辩证逻辑，可拓逻辑这个词就是废话了.

---

① 刘文奇. 不确定性数学大纲. 昆明：云南大学出版社，1995

② 蔡文. 物元模型及其应用. 北京：科学技术文献出版社，1994

为了详细说明上述观点，我们先看蔡文先生自己是如何论述可拓集合的哲学基础：

经典数学的基础是经典集合论．在经典集合中，“是”就是“是”，“非”就是“非”．人们用0，1两个数来表征对象属于某一集合或不属于该集合．经典集合描述的是事物的确定性概念，它的数学表达形式是特征函数．

在模糊数学中，用[0,1]中的数来描述事物具有某种性质的程度，称为隶属度．模糊集合是以隶属函数来表征的，它是模糊数学的基础，描述的是现实世界中事物的模糊性．

但是，要解决矛盾问题，必须考虑“非”和“是”的互相转化．机器由于高度超过车间大门的高度，因而不属于可以搬进车间的物体的集合．但是，变换事物的特征，把小于入门高度的长换为高．这时的机器变为属于能搬进车间的物体的集合的元素．由此可见，人们不但要发展纯粹的数学逻辑，而且有必要研究容许一定矛盾前提的逻辑．

为此，我们建立了可拓集合的概念，以便讨论对象集中不属于经典子集而又能转化到该子集中的元素，这是解决矛盾问题的数学工具的基础．与可拓集合相对应，关联函数的概念把逻辑值域从{0,1}扩展到$(-\infty,+\infty)$．用关联函数值的大小来衡量元素和集合的关系，使经典集合中“属于”和‘不属于”集合的定性描述扩展为定量描述，以表征元素间的层次关系．

……

概言之，经典集合描述现实世界中事物的确定性；模糊集合可描述事物的模糊性；可拓集合能够描述事物的可变性．

经典数学的逻辑关系是形式逻辑，模糊数学的逻辑关系是模糊逻辑，而可拓集合论的逻辑关系则是以辩证逻辑和形式逻辑相结合的可拓逻辑．

……

集合论是描述人脑思维对客观事物的识别和分类的数学方法．客观事物是复杂的，处于不断运动和变化之中．因此，人脑思维对客观事物的识别和分类并不是只有一个模式，而是多种形式的．因而，描述这种识别和分类的集合论也不应是唯一的，而应是多样的．

对给定的论域 U 与给定的性质 P，造集的过程主要是人们对元素 $u\in U$ 与 P 性质之间的关系的识别过程．这个识别过程在人脑思维中往往是根据不同条件而灵活多样的．这种多样性，表现为对这个识别过程附加上不同的准则，不同的准则反映对识别给予不同的要求．由于要求不同，也就得到不同的集合论．

假如对识别的过程规定如下的准则："只允许考虑如下两个命题：

(1)元素 $u(u\in U)$ 具有性质 P；

(2)元素 $u(u\in U)$ 不具有性质 P.

而且要求对每个 $u\in U$，这两个命题有且仅有一个成立．所有能使第一个命题成立的元素组成一类，能使第二个命题成立的元素组成第二类．"在这种限制下建立起来的集合就是 Cantor 集合．这个附加准则符合形式逻辑的要求．因此，以 Cantor 集合为基础的整个经典数学，是以形式逻辑为其推理规则的．

又如，对识别过程规定另一准则："只允许考虑如下三个命题：

(1)元素 $u(u\in U)$ 具有性质 P；

(2)元素 $u(u\in U)$ 不具有性质 P；

(3)允许存在这样的中介元素 $u\in U$，它使前两个命题各在一定程度上成立．

也即对每一个元素 $u\in U$，要么第一个命题成立，要么第二个命题成立，要么两个命题各在一定程度上均成立．"

在上述准则下建立起来的集合，就是 Fuzzy 集合．这个准则不完全符合形式逻辑中的排中律．

再如,对识别过程规定新的准则:"只允许考虑如下四个命题:

(1)元素 $u(u\in U)$具有性质 P;

(2)元素 $u(u\in U)$不具有性质 P;

(3)可使原来不具有性质 P 的元素变为具有性质P;

(4)元素 $u(u\in U)$具有性质 P,又不具有性质 P.

对每一个元素 $u\in U$,上述四个命题中的某一个成立."

在这个准则下建立起来的集合概念,就是可拓集合.

例如,工厂里生产某种工件,以"所有现存的工件"作为论域 U,以"合格"作为性质 P,在现有的加工条件下,不合格品中有一部分通过重新加工可以变成合格品.这样,我们就不是把对象看作一成不变的,而是可以通过"一定条件"使其转化,也就是命题(3)所描述的元素.

又如,在现实世界中,有一类既是又非的"中间"事物.既导电又不导电的半导体,既是金属又是非金属的亚金属等等就是命题(4)所指的事物.

如上所述,集合论出现了多样性,分别在 Cantor 集合、Fuzzy 集合和可拓集合基础上建立起来的集合论各自有它特有的概念和方法.各自构成它特有的逻辑和数学内容.

我们认为,之所以说普通集合的哲学基础是形式逻辑,是因为普通集合是建立在形式逻辑矛盾基础上的;而蔡文先生所讲的模糊逻辑,本书第一章中已经论述它应划归为形式逻辑矛盾的一种变形. 如果一个集合理论的哲学基础是辩证逻辑,则它应该是建立在辩证法矛盾基础之上的;换言之,我们实际上要讨论的问题是:可拓集合是否是以辩证法矛盾为基础的集合理论.

在辩证法中,矛盾性概念是指事物内部对立的两个侧面(正、反两面)之间的矛盾.如:"数"的:正数与负数;"电子"的:正电子与(负)电子等之间的矛盾.

面蔡文教授提出的可拓集合按蔡文教授自己的说法是"从{0,

1}扩展到$(-\infty,+\infty)$”，用关联函数值的大小来衡量元素和集合的关系，使经典集合中“属于”和“不属于”集合的定性描述扩展为定量描述，即：是将模糊集合中的“是”、“非”、“模糊中介”三个区域同时进一步扩展为：$(-\infty,-1)$，$\{-1\}$，$(-1,0)$，$\{0\}$，$(0,+\infty)$五个区域．$(0,+\infty)$区域是所谓的经典区域（是经典模糊区域$(0,1]$的扩充）；$(-\infty,-1)$区域是所谓的非域（是模糊集合中0点的扩充）；所谓拓界$\{-1\}$、可拓域$(-1,0)$、零界$\{0\}$都是模糊中介区域$(0,1)$的改进扩充．和模糊集合一样，其哲学基础应该是形式逻辑的“是”、“非”矛盾，而不是辩证逻辑的“正”、“反”矛盾，因此不是以辩证逻辑为哲学基础的．即可拓集合与模糊集合、普通集合一样，都是以形式逻辑为哲学基础的．

与上述情况相比，反演集合理论则是以“任何事物都是一分为二的”思想为出发点，以辩证法中“正”、“反”两个侧面（正、反两面）之间的矛盾为客观依据的集合理论．

由于反演集合的哲学基础是辩证法中“正”、“反”矛盾，因此我们说它是以辩证逻辑为哲学基础的集合理论．

数学被誉为是科学的一种卓越的语言．不同的语言是由不同的词汇和规则组成，不同的语言（即不同的词汇和规则）有着不同的局限性．用异于辩证法矛盾的词汇和规则组成的语言来表达辩证法矛盾，这显然是有困难的．虽然在个别问题上或许会有吻合，但那毕竟是一种巧合，终究不是一回事．普通集合、模糊集合和可拓集合是用以形式逻辑矛盾为基础的词汇和规则构成的“语言”．对辩证矛盾的数学研究，如果用普通集合、模糊集合或可拓集合表达，自然显得词不达意了．

表 2-1

类　　别	模糊集合	可拓集合	反演集合
提 出 人	Zadeh, L.A.	蔡　文	刘建忠
提出时间	1965 年	1983 年	1994 年
哲学基础	在形式逻辑矛盾基础上增加模糊中介	在形式逻辑矛盾基础上将模糊数学中的是、非、模糊中介三方面同时扩展	辩证法矛盾
集合定义	所谓给定了论域 U 上的一个模糊子集 A，是指：对于任意 $u \in U$，都指定了一个数 $u_A(u) \in [0,1]$，叫做 u 对 A 的隶属程度。映射 $u_A: U \to [0,1]\ u \mapsto u_A(u)$ 叫做 A 的隶属数。	所谓在某种限制下对象集 U 上的一个可拓集合 $\tilde{x}$，是指对于任何 $u \in U$，规定了一个实数 $K_{\tilde{x}}(u) \in (-\infty, +\infty)$，用它来表示 u 与 $\tilde{x}$ 的关系。映射 $K_{\tilde{x}}$： $U \to (-\infty, +\infty) \quad u \to K_{\tilde{X}}(u)$ 称为 $\tilde{X}$ 的关联函数。$K_{\tilde{x}}(u)$ 称为 u 与可拓集合 $\tilde{X}$ 的关联度。 $X = \{(u/K_{\tilde{X}}(u) \mid u \in U, K_{\tilde{X}}(u) > 0\}$ 为 $\tilde{X}$ 的经典域 $\underset{\sim}{X} = \{(u/K_{\tilde{X}}(u) \mid u \in U, -1 < K_{\tilde{X}}(u) < 0\}$ 为 $\tilde{X}$ 的可拓域 $\bar{X} = \{(u/K_{\tilde{X}}(u) \mid u \in U, K_{\tilde{X}}(u) < -1\}$ 为 $\tilde{X}$ 的非域 $J_x = \{(u/K_{\tilde{X}}(u) \mid u \in U, K_{\tilde{X}}(u) = 0\}$ 为 $\tilde{X}$ 的零界 $J_e = \{(u/K_{\tilde{X}}(u) \mid u \in U, K_{\tilde{X}}(u) = -1\}$ 为 $\tilde{X}$ 的拓界	所谓给定了论域 U 上的一对互为反演的集合 A、$\bar{A}$，是指对任意元素 $x \in U$，存在有： $f_A(x) \in R^n, f_{\bar{A}}(x) \in R^n$ $f_A(x)$ 叫做 x 在 A 中的 n 维映射值， $f_{\bar{A}}(x)$ 叫做 x 在 $\bar{A}$ 中的 n 维映射值； $f_A: U \to R^n, x \mapsto f_A(x)$ $f_{\bar{A}}: U \to R^n, x \mapsto f_{\bar{A}}(x)$ 分别叫做 A、$\bar{A}$ 的 n 维映射； R^n 表示 n 维空间，正集合 A 与反集合 $\bar{A}$ 互为反演集合，其中： $A = \{(x, f_A(x)) \mid x \in U, f_A(x) > 0\}$ $\bar{A} = \{(x, f_{\bar{A}}(x)) \mid x \in U, f_{\bar{A}(x)} > 0\}$-

§7 荒诞小故事：拜师学艺记

建忠不愿意荒废年华，慕名拜亚里士多德为师学数学真谛．亚里士多德说："数学界我有杰出弟子康托尔，你去找他吧．"亚里士多德领路带建忠来到天地间，只见一个火球在天地间滚动着，留下一溜儿闪光痕迹．大数学家康托尔双手拿着一个大漏勺，不停地从火球中捞出一些五颜六色的石子，每一勺放进一个小筐，每一个小筐上都标有"××集合"字样．亚里士多德解释道："这火球是人间事物，康托尔捞出的石子叫元素，用数学术语讲，康托尔正在从事物中抽象出一个个集合；康托尔可以利用这些集合中元素分析事物留下的轨迹，并能预测今后事物会滚动出什么样的轨迹．"

建忠恭敬地上前问满头大汗的康托尔："用这些石子预测火球今后滚动的轨迹能准确吗?"

筋疲力尽的康托尔瞪建忠一眼说道："捞得越多，自然越准，想在数学中混，还不快点帮忙．"

建忠一边挽袖子一边忙说："老前辈休息一下，我来也……．"

一晃十年过去，建忠像机器人一样不停地捞了十年，毫无数学建树，却天天被康托尔大骂基础太差，只配做些皮毛小事．建忠不服，找亚里士多像评理，亚里士多德批评建忠没有灵性．

建忠满肚冤屈，巧遇好友野鹤先生云游到此，建忠向野鹤先生述苦．

野鹤先生叹口气，说："亚里士多德和康托尔都是大学问家，书读的很多，休步他们的后尘，怎能追赶上?"

"那就没辙了?"

"这也未必，认识万千世界关键不在书读多少，而在于善不

善于发现问题，有没有解决问题的好方法.”

“此话太空!”建忠说道.

野鹤先生想了一下说：“好吧，我教你一招具体的. 你集中精力用眼睛盯着那火球，十分钟不准分神，不准眨一下眼.”

“为啥?”建忠觉得奇怪.

“这叫做‘务必十分注意’，世界上怕就怕认真二字，你想有所成就，就必须认真.”

建忠静下心来，全身放松，聚精会神，眼睛盯着那火球. 渐渐地，时间概念消失了，不知过了多久，只见那火球内部隐约有东西. 定神细看，竟是一团红气和一团绿气，两团气滚成一团，争斗得死去活来，却又界线分明，各自所属元素一眼就分得清. “想不到火球竟是由红绿两团气组成.”建忠心里暗自惊奇.

再看火球旁边的康托尔，手持大漏勺，伸进红气中捞一阵子元素，又伸进绿气中捞一阵子元素，总是不能在红气和绿气中同时各捞一些元素.

野鹤先生在建忠耳边提醒道：“那火球滚动轨迹是红、绿两团气斗争所致，康托尔要么仅用红气中元素分析轨迹，要么仅用绿气中元素分析轨迹，怎么能预测准确呢?”

建忠赶紧说：“我可以将两个漏勺绑在一起，一起伸进火球，一个漏勺捞红气中元素，一个漏勺捞绿气中元素，然后用红气中元素和绿气中元素同时分析和预测火球轨迹.”

野鹤先生笑道：“谁说你没有灵性. 不过你再仔细看看，红气中每一元素都有极细金丝与绿气中元素相连，这金丝叫做一一对应线，红、绿二气中元素就是利用这根线相互斗争和相互统一的；康托尔把这根重要的金丝弄断了，你捞的时候可要千万注意.”

建忠只顾自己心中欢喜，顾不得回答. 却又听野鹤先生说：“我要去蓬莱仙景看嫦娥独舞晚会，君愿同往否?”

“不去不去,”建忠一边回答，一边后退了一步，一下子跌落深渊，惊出一身冷汗醒来，原来是一场梦．想起梦中情景，赶紧翻身，从枕头底下抽出纸张和笔，速速记下．几日后，细心整理推敲，写出关于反演集合理论的第一篇文章．

第三章 反演关系

§1 普通集合二元关系基本知识回顾

§1.1 关 系

在初中、高中、大学的数学课程里,我们都使用过"关系"一词.如两个数的大小关系、集合之间的包含关系、函数关系等等,它们都是指出某些给定集合的元素之间某种联系的概念.所谓关系,就是指由有序对组成的集合,即:有序对的集合称为关系.

定义 3-1 有序对集合 R 叫做一个关系 R.

换言之:一集合 R 的每一元素都是一有序对时,就叫 R 为一关系.

例 1 设 $X=Y=R$(实数集):

$S=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y,y=x\}$

则 S 是 X 到 Y 的一个关系.对任意 $(x,y)\in X\times Y$,当 $y=x$ 时,$(x,y)\in S$,此时 x 与 y 有关系 S,当 $y\neq x$ 时,$(x,y)\notin S$,此时 x 与 y 没有关系 S(几何意义见图 3-1).

例 2 设 $X=Y=R$(实数集):

$T=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y,x\geqslant y\}$

则 T 是平面上元素间的"大于或等于"关系(几何意义见图 3-2).

数学中,凡是有序对组成的集合,我们统称作关系.设 X、Y 是

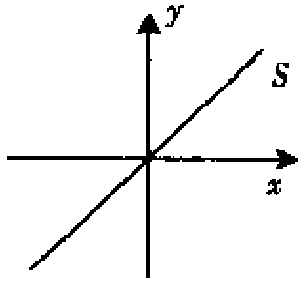


图 3-1

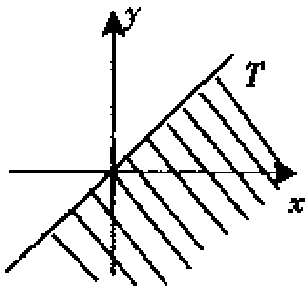


图 3-2

两个集合,令

$X\times Y=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y\}$

叫作 X 与 Y 的直积集. $X\times Y$ 的每一子集 R(即指 $R\subset X\times Y$)均称为是从 X 到 Y 中的关系.

定义 3-2 设 X、Y 是两个非空集合, $X\times Y$ 的子集 R 称为 X 到 Y 中的一个二元关系. 记作

$X\xrightarrow{R}Y$

当 $(x,y)\in R$ 时,称 x 与 y 是 R-相关的,记作 xRy;当 $(x,y)\notin R$ 时,称 x 与 y 不是 R-相关的,记作 $x\bar{R}y$. 而 $\bar{R}$ 也是一种关系(它是 R 的补集). 所以元素 x 与元素 y 之间有关系 $\bar{R}$.

如果 $A\subset X$,则 Y 的子集:

$\{y\in Y\mid$存在 $x\in A$ 使得 $xRy\}$

称为集合 A 对子关系 R 而言的像集,或者简单地称为集合 A 的像集,或者称为集合 A 的 R 像,并且记作 $R(A)$.

在 $(x,y)\in R$ 中, (x,y) 为有序元素对, x 称为 (x,y) 的第一个坐标, y 称为 (x,y) 的第二个坐标; X 称为 $X\times Y$ 的第一个坐标集, Y 称为 $X\times Y$ 的第二个坐标集,所有第一坐标、第二坐标所成的集分别称为关系 R 的定义域与值域,用 $\mathrm{dom}R$ 与 $\mathrm{ran}R$ 表示,即

$\mathrm{dom}R=\{x\mid x\in X,$存在 $y\in Y$ 使 $xRy\}$

$\mathrm{ran}R=\{y\mid y\in Y,$存在 $x\in X$ 使 $xRy\}$

它们的并集称为关系 R 的域,记作 $\mathrm{fld}R$,即

$\mathrm{fld}R=\mathrm{dom}R\cup\mathrm{ran}R$

对比映射 $f:X\to Y$ 和 $X\times Y$ 上的二元关系 R

$f=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y$ 并且 $f(x)=y\}$

$R=\{(x,y)\mid x\in X,y\in Y$ 并且 $xRy\}$

f 的定义域 $\mathrm{dom}f=X$,而 R 的定义域 $\mathrm{dom}R\subseteq X$. 在 f 中,如果 $(x,y_1)\in f,(x,y_2)\in f$ 必有 $y_1=y_2$. 而在 R 中可能存在 $x_0\in X$; $y_1,y_2\in Y$ 且 $y_1\neq y_2$ 使 $(x_0,y_1)\in R,(x_0,y_2)\in R$. 所以,关系这个概念是从映射概念引伸出来的,它反映集合间的联系比映射还要广泛. 即:映射是单值,关系可以是多值.

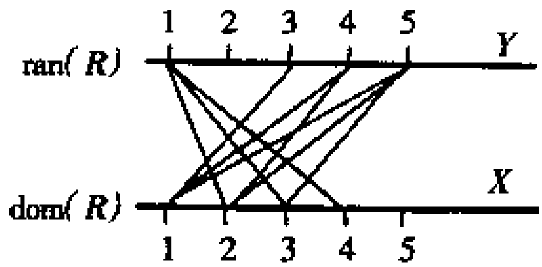


图 3-3

例 3 设 $X=\mathrm{dom}R=\{1,2,3,4\}$, $Y=\mathrm{ran}R=\{1,3,4,5\}$, $R=\{(2,1),(3,1),(1,3),(4,1),(1,5),(2,5),(2,4),(1,4),(3,5)\}$ 见图 3-3.

例 4 设 $R=\{(0,1),(1,2),(2,3),(3,4),(4,5),(5,10),(6,12),(7,14)\}$,那么

$X=\mathrm{dom}R=\{0,1,2,3,4,5,6,7\}$

$Y=\mathrm{ran}R=\{1,2,3,4,5,10,12,14\}$

见图 3-4.

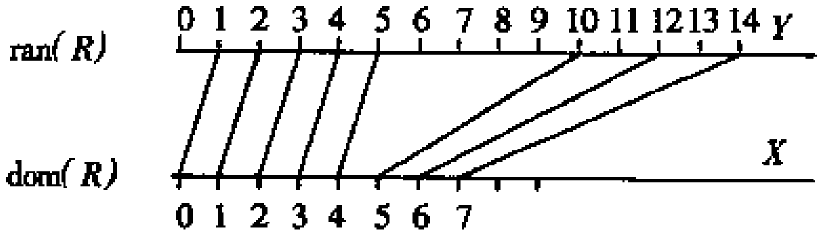


图 3-4

例 5 设 $R=\{(0,0),(1,1),(2,1),(3,0)\}$,那么 $X=\mathrm{dom}R=$

$\{0,1,2,3\}$，$Y=\mathrm{ran}R=\{0,1\}$，见图 3－5.

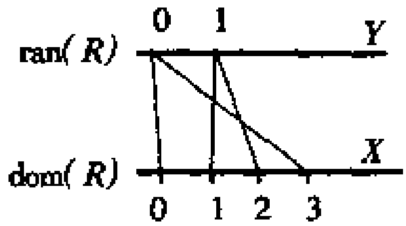


图 3－5

例 6 X 是学生的集合，Y 是老师的集合．如果 x 是 y 的学生，就记为 xRy，此 R 就是 $X\times Y$ 上的一个二元关系．

例 7 X 是女人的集合，Y 是男人的集合．如果 x 和 y 是夫妻，就记为 xR_1y，如果 x 和 y 有血缘关系，就记为 xR_2y，则 R_1、R_2 都是 $X\times Y$ 上的二元关系．

例 8 设 X,Y 为非空集合，由于 $X\times Y\subset X\times Y$，所以 $X\times Y$ 为从 X 到 Y 中的关系，易见对于任意 $x\in X,y\in Y$，x 和 y 都是 $X\times Y$－相关的，即 $x(X\times Y)y$．并且有 $\mathrm{dom}(X\times Y)=X$，$\mathrm{ran}(X\times Y)=Y$，$X\times Y$ 称为全关系．

例 9 设 X,Y 为集合，由于 $\emptyset\subset X\times Y$，所以 $\emptyset$ 为从 X 到 Y 中的关系，易见对于任意 $x\in X,y\in Y$，x 和 y 都不是 $\emptyset$－相关的，即 $x\emptyset y$ 不成立．并且有 $\mathrm{dom}(\emptyset)=\mathrm{ran}(\emptyset)=\emptyset$；以及对于 X 的任意子集 A，都有：$\emptyset(A)=\emptyset$．

§1.2 关系补

设 $R\subset X\times Y$ 是一个二元关系，则 $X\times Y$ 中不属于 R 的元素所成的集合称为 R 的关系补，记作 $\bar{R}$．即

$$\begin{aligned}\bar{R}&=\{(x,y)\in X\times Y\mid (x,y)\notin R\}\\&=X\times Y-R\end{aligned}$$

§1.3 关系的逆、原像

设 R 为从集合 X 到集合 Y 中的关系（即 $R\subset X\times Y$），则集合$\{(y, x)\mid xRy\}$为 $Y\times X$ 的子集，即为从 Y 到 X 中的关系，称为 R 的**逆**，记作 R^{-1}. 此时，对于 $B\subset Y$，$R^{-1}(B)\subset X$ 为集合 B 的 R^{-1}-像，我们也常称之为 B（对于关系 R 而言）的原像，或 B 的 R-原像.

关系是一种集合，逆关系也是一种集合，因此如果 R 是一个关系，那么 R^{-1}与 $\bar{R}$ 都是关系.

例 10 实数集 R 上的"$<$"关系（"小于"关系），其逆关系是"$>$"（"大于"关系），"$\geqslant$"关系则是"$<$"关系的补关系.

例 11 实数集 R 上的"$\neq$"关系（"不等于"关系），其逆关系仍然是"$\neq$"关系，而它的补关系是"$=$"关系.

§1.4 关系的复合

设 R 为从集合 X 到集合 Y 中的关系（即 $R\subset X\times Y$），S 为从集合 Y 到集合 Z 中的关系（即 $S\subset Y\times Z$），集合$\{(x,z)\mid$存在 $y\in Y$，使得 $xRy, ySz\}$为 $X\times Z$ 的子集，即从 X 到 Z 中的关系，称为关系 R 与关系 S 的**复合**或积，记作 $S\circ R$.

一般情况下，$S\circ R\neq R\circ S$

例 12 设 $X=Y=Z=N$（N 为自然数集），$R\subset N\times N, S\subset N\times N$，且：

$R=\{(1,2),(2,3),(3,4)\}$

$S=\{(4,3),(2,4),(1,3)\}$

则 $S\circ R=\{(1,4),(3,3)\}$

$R\circ S=\{(4,4),(1,4)\}$

例 13 设 $X=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$，$Y=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$，$Z=\{z_1,z_2,z_3\}$

(见图 3-6),若 $R\subset X\times Y, S\subset Y\times Z$,

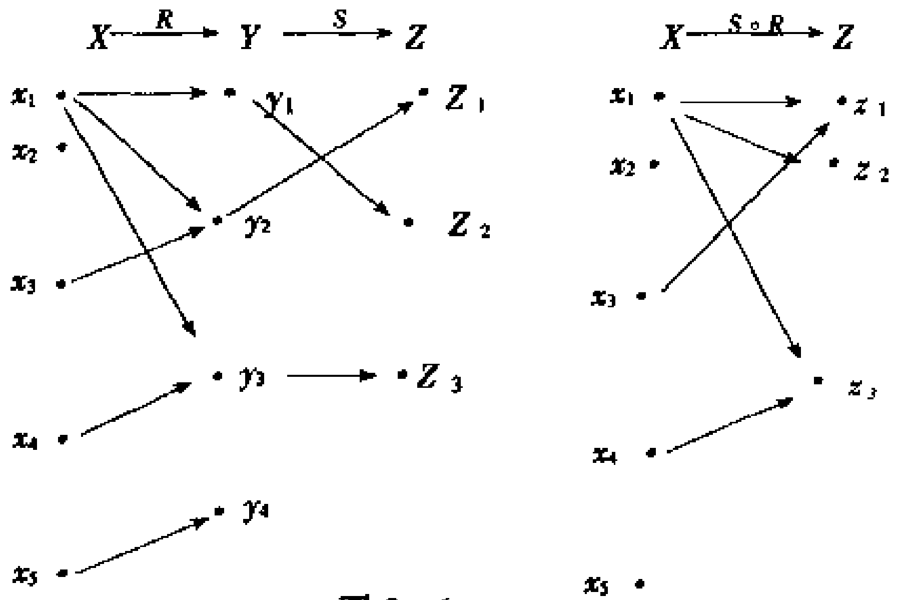


图 3-6

$R=\{(x_1,y_1),(x_1,y_2),(x_1,y_3)(x_3,y_2),(x_4,y_3),(x_5,y_4)\}$

$S=\{(y_1,z_2),(y_2,z_1),(y_3,z_3)\}$

则 $S\circ R=\{(x_1,z_1),(x_1,z_2),(x_1,z_3),(x_3,z_1),(x_4,z_3)\}$

定理 3-1　若 X,Y,Z,U 为集合;$R\subset X\times Y, S\subset Y\times Z$, $T\subset Z\times U$,则有:

(1)$(R^{-1})^{-1}=R$

(2)$(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$

(3)$T\circ(S\circ R)=(T\circ S)\circ R$

证明:(1)$(x,y)\in(R^{-1})^{-1}\Leftrightarrow x\ (R^{-1})^{-1}y\Leftrightarrow yR^{-1}x\Leftrightarrow xRy\Leftrightarrow (x,y)\in R$,故$(R^{-1})^{-1}=R$

(2)$(z,x)\in(S\circ R)^{-1}\Leftrightarrow z(S\circ R)^{-1}x\Leftrightarrow x(S\circ R)z$

存在 $y\in Y$ 使得 xRy, ySz,即 $yR^{-1}x, zS^{-1}y\Leftrightarrow zR^{-1}\circ S^{-1}x\Leftrightarrow(z,x)\in R^{-1}\circ S^{-1}$,故$(S\circ R)^{-1}=R^{-1}\circ S^{-1}$

(3)与上述类似,略. 证毕.

定理 3-2 若 X,Y,Z 为集合；$R\subset X\times Y$，$S\subset Y\times Z$，则对于任意 $A,B\subset X$，有：

(1)$R(A\cup B)=R(A)\cup R(B)$

$R(A\cap B)\subset R(A)\cap R(B)$

(2)$(S\circ R)(A)=S(R(A))$

证明：(1)若 $y\in R(A\cup B)$，则有 $x\in A\cup B$ 使得 xRy：若 $x\in A$，则 $y\in R(A)$；若 $x\in B$，则 $y\in R(B)$. 总之只要 $x\in A\cup B$，便有 $y\in R(A)\cup R(B)$，故有 $R(A\cup B)\subset R(A)\cup R(B)$. 同理可证 $R(A\cup B)\supset R(A)\cup R(B)$，所以 $R(A\cup B)=R(A)\cup R(B)$ 成立.

类似可证 $R(A\cap B)\subset R(A)\cap R(B)$.

(2)若 $z\in(S\circ R)(A)$，即有 $x\in A$ 使得 $xS\circ Rz$；从而有 $y\in Y$，使得 xRy，ySz. 于是 $y\in R(A)$，且因 ySz 得到 $z\in S(R(A))$，故 $(S\circ R)(A)\subset S(R(A))$，同理可证 $(S\circ R)(A)\supset S(R(A))$；所以 $(S\circ R)(A)=S(R(A))$ 成立. 证毕.

§2 反演关系

§2.1 反演关系定义

定义 3-3 设 U、X、Y 是非空集合，所谓反演关系是指存在关系对 $R=(R_A,R_{\bar{A}})$，$R_A(R_A\subset U\times X)$ 称为 U 到 X 中的一个二元关系，$R_{\bar{A}}(R_{\bar{A}}\subset U\times Y)$ 称为 U 到 Y 中的一个二元关系. 记作

$$U\xrightarrow{R_A}X$$

$$U\xrightarrow{R_{\bar{A}}}Y$$

且 $\mathrm{dom}R_A=\mathrm{dom}R_{\bar{A}}$

当 $(u,x)\in R_A$ 和 $(u,y)\in R_{\bar{A}}$ 时，分别称 u 与 x 是 R_A-相关的

和 u 与 y 是 $R_{\bar{A}}$ - 相关的，分别记作 uR_Ax 和 $uR_{\bar{A}}y$；当 $(u,x)\notin R_A$ 和 $(u,y)\notin R_{\bar{A}}$ 时，称 u 与 x 不是 R_A - 相关和 u 与 y 不是 $R_{\bar{A}}$ - 相关的，分别记作 $u\bar{R}_Ax$ 和 $u\bar{R}_{\bar{A}}y$，其中：

$\mathrm{dom}R_A=\{u\mid u\in U$，存在 $x\in X$ 使 $uR_Ax\}$

$\mathrm{dom}R_{\bar{A}}=\{u\mid u\in U$，存在 $y\in Y$ 使 $uR_{\bar{A}}y\}$

$\mathrm{ran}R_A=\{x\mid x\in X$，存在 $u\in U$ 使 $uR_Ax\}$

$\mathrm{ran}R_{\bar{A}}=\{y\mid y\in Y$，存在 $u\in U$ 使 $uR_{\bar{A}}y\}$

它们的并集称为关系 R_A 和 $R_{\bar{A}}$ 的域，记作 $\mathrm{fld}(R_A\cup R_{\bar{A}})$，即 $\mathrm{fld}(R_A\cup R_{\bar{A}})=\mathrm{dom}R_A\cup\mathrm{ran}R_A\cup\mathrm{ran}R_{\bar{A}}$

$=\mathrm{dom}R_{\bar{A}}\cup\mathrm{ran}R_A\cup\mathrm{ran}R_{\bar{A}}$.

例 14　设 $U=X=Y=\{$整数集$\}$，$R_A=\{(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)\}$，$R_{\bar{A}}=\{(1,3),(2,3),(3,5),(4,6)\}$，那么，$\mathrm{dom}R_A=\mathrm{dom}R_{\bar{A}}=\{1,2,3,4\}$，$\mathrm{ran}R_A=\{2,3,4,5\}$，$\mathrm{ran}R_{\bar{A}}=\{3,5,6\}$，所以 R_A 和 $R_{\bar{A}}$ 是反演关系对，即 $R=(R_A,R_{\bar{A}})$成立(几何意义见图 3-7).

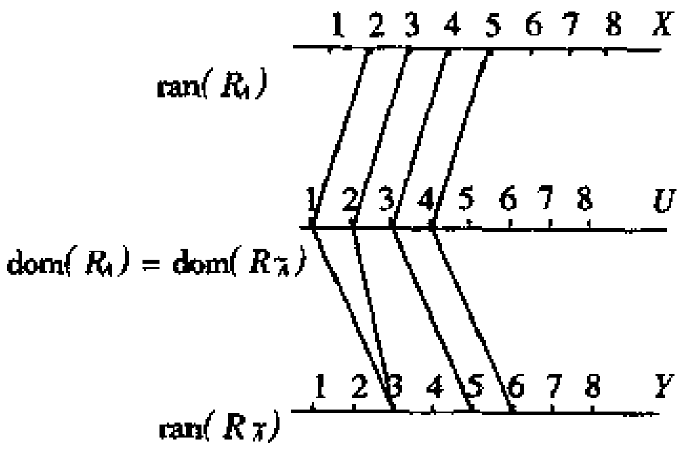


图 3-7

例 15　设 U、X、Y 是非空集合，$\emptyset(\emptyset\subset U\times X)$称为 U 到 X 中的一个二元关系，$\emptyset(\emptyset\subset U\times Y)$称为 U 到 Y 中的一个二元关系.由于 $\emptyset\subset U\times X$，$\emptyset\subset U\times Y$，易见对于任意 $u\in U$，$x\in X$，$y\in$

Y，u、x 和 u、y 都不是 $\varnothing$－相关的，即 $u\varnothing x$ 和 $u\varnothing y$ 不成立．并且有 $\mathrm{dom}(\varnothing)=\mathrm{ran}(\varnothing)=\varnothing$；以及对于 U 的任意子集 V，都有：$\varnothing(V)=\varnothing$，所以 $\varnothing=(\varnothing,\varnothing)$成立．

§2.2 反演集合的关系补

设 U、X、Y 是非空集合，反演关系对 $R=(R_A,R_{\bar{A}})$中，$R_A\subset U\times X$、$R_{\bar{A}}\subset U\times Y$，则 $U\times X$ 中不属于 R_A 的元素和 $U\times Y$ 中不属于 $R_{\bar{A}}$ 的元素所成的集合称为反演关系对 $R=(R_A,R_{\bar{A}})$的关系补，记作 $\bar{R}=(\bar{R}_A,\bar{R}_{\bar{A}})$．其中

$$\bar{R}_A=\{(u,x)\mid(u,x)\in U\times X,(u,x)\notin R_A\}=U\times X-R_A$$

$$\bar{R}_{\bar{A}}=\{(u,y)\mid(u,y)\in U\times Y,(u,y)\notin R_{\bar{A}}\}=U\times Y-R_{\bar{A}}$$

由反演集合定义不难推出 $\mathrm{dom}\bar{R}_A=\mathrm{dom}\bar{R}_{\bar{A}}$．

§2.3 反演关系像

设 U、X、Y 是非空集合，反演关系对 $R=(R_A,R_{\bar{A}})$中，$R_A\subset U\times X$，$R_{\bar{A}}\subset U\times Y$；$C\subseteq U$，则 R_A 和 $R_{\bar{A}}$ 在 C 上的限制 $R_A\mid C$、$R_{\bar{A}}\mid C$ 分别在各自第二坐标所成的集合叫做集合 C 在 $R=(R_A,R_{\bar{A}})$下的像，或称为集合 C 对于关系 $R=(R_A,R_{\bar{A}})$而言的像集，并记作 $R(C)=(R_A(C),R_{\bar{A}}(C))$．其中

$$R_A(C)=\{x\mid \text{存在 } u\in C \text{ 使 } uR_Ax\}=\mathrm{ran}R_A\mid C$$

$$R_{\bar{A}}(C)=\{y\mid \text{存在 } u\in C \text{ 使 } uR_{\bar{A}}y\}=\mathrm{ran}R_{\bar{A}}\mid C$$

§2.4 关系的逆、原像

一般情况下反演关系 $R=(R_A,R_{\bar{A}})$不一定有逆．但 R_A 和 $R_{\bar{A}}$ 的逆分别存在，可分别记作 R_A^{-1} 和 $R_{\bar{A}}^{-1}$，并分别存在原像．其运算过程与普通二元关系相同．

第四章　反演与对称

§1　反演与对称的统一

对称是反演的特例. 对称与不对称现象可以在反演集合理论中得到统一:

任意一反演集合 $Z=(A、\bar{A})$

$=\{((x,f_A(x)),(x,f_{\bar{A}}(x)))\mid x\in U\}$

由第一章§3中反演集合的"反演点"定义(定义1-7)知道,若 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 是单值映射,对于任意一 $(x,f_A(x))\in A$,有唯一点 $(x,f_{\bar{A}}(x))\in\bar{A}$ 与其对应,反之亦然.

对任意 $x\in U$,在 A 与 $\bar{A}$ 中,如果 $f_A(x)$ 和 $f_{\bar{A}}(x)$ 符号相反、绝对值相等,则我们认为两个集合是完全对称(或简称为对称)的;如果仅有少数 $x\in U$ 对应的 $f_A(x)$ 和 $f_{\bar{A}}(x)$ 不满足元素值符号相反、绝对值相等,则我们认为是基本对称的;如果只有一部分 $f_A(x)$ 和 $f_{\bar{A}}(x)$ 满足元素值符号相反、绝对值相等,则我们可认为两个集合是部分对称的;如果 $f_A(x)$ 和 $f_{\bar{A}}(x)$ 之间相互对应值符号和绝对值是杂乱无章的,则我们可认为两个集合之间是不对称的. 显然,完全对称是反演集合的特例.

思考问题严谨的读者可能对上述说法感到不快,在数学中"少数"、"一部分"的尺度如何掌握? 故我们给出以下对称关系.

§2 反射对称

一个图形集合 A,通过一个假想镜面 σ,使得在镜面中得到一个新的图形集合 $\bar{A}$,这 A 种 $\bar{A}$ 的对称关系叫做关于镜面 σ 的反射对称,简称反射对称.

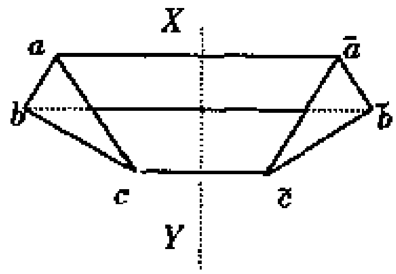


图 4-1

图 4-1 表示集合 $A=\{a,b,c\}$ 与集合 $\bar{A}=\{\bar{a},\bar{b},\bar{c}\}$ 是相互关于镜面 XY 的反射对称图形.

自然界中一些反射对称现象(图 4-2):

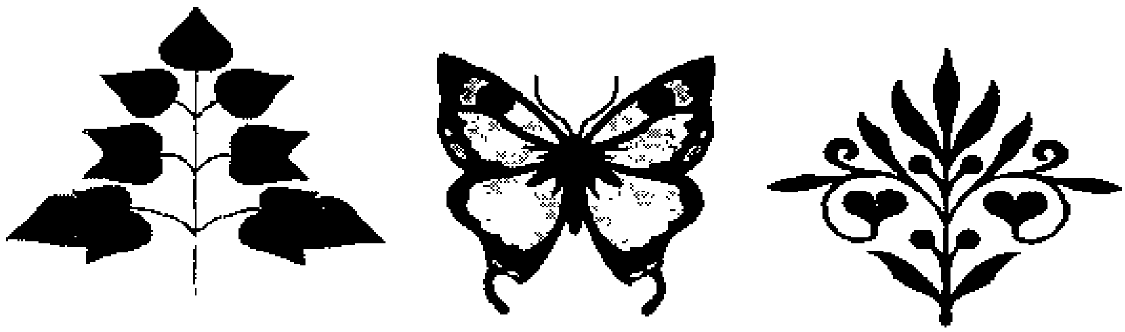


图 4-2

§3 旋转对称

一个图形集合 A,绕某一固定直线、按一定方向旋转某个角度 α 后,形成一个新的图形集合 $\bar{A}$,这种 A 与 $\bar{A}$ 的对称关系叫做关于固定直线的旋转对称,简称旋转对称.

例如:任意反演集合 $Z=(A、\bar{A})$

$=\{((x,f_A(x)),(x,f_{\bar{A}}(x)))\mid x\in U\}$

如果:$(f_{\bar{A}}(x)=M(f_A(x),\alpha)$(其中,$M$ 表示函数关系,α 表示

旋转角度),则点$(x,f_A(x))$与点$(x,f_{\tilde{A}}(x))$关于x轴旋转对称,$\tilde{A}$是A的旋转对称图形,反之亦然(见图4-3).

图4-4表示集合$A=\{a,b,c\}$与旋转α角度后形成的集合$\tilde{A}=\{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\}$是关于$X$轴的旋转对称图形.

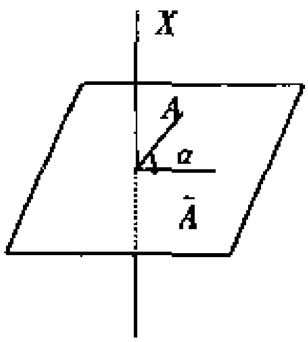


图4-3

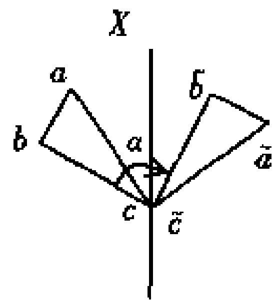


图4-4

一些旋转对称图案(图4-5):

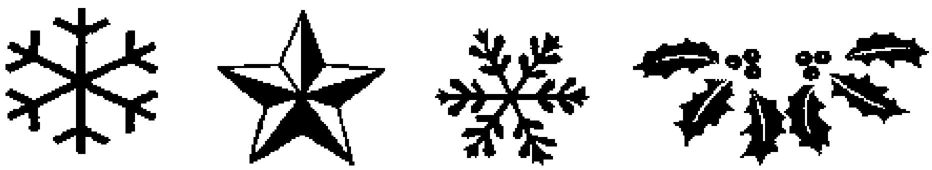


图4-5

§4　平移对称

一个图形集合A,按某向量$\vec{a}$移动后,形成一个新的图形集合$\tilde{A}$,这种A与$\tilde{A}$的对称关系叫做关于向量$\vec{a}$的平移对称,简称平移对称.

例如:任意反演集合$Z=(A、\tilde{A})$

$=\{((x,f_A(x)),(x,f_{\tilde{A}}(x)))\mid x\in U\}$

如果:$f_{\tilde{A}}(x)=f_A(x)+c$ (c为常数)

则点$(x,f_A(x))$与点$(x,f_{\tilde{A}}(x))$是关于向量$\vec{a}$的平移对称,$\tilde{A}$是A的平移对称图形,反之亦然(见图4-6、图4-7).

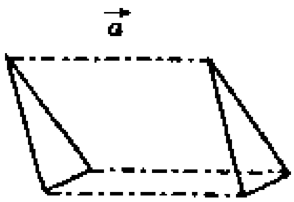


图 4-6

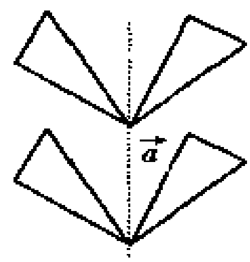


图 4-7

艺术图形中的平移对称图形(图 4-8):

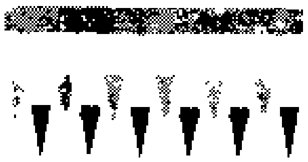


图 4-8

§5 反演点对称

一个图形集合 A 中的每一点和定点 O 联结,并向反方向按一固定比例延长,形成一个新的图形集合 $\bar{A}$,这种集合 A 与集合 $\bar{A}$ 通过 O 点按一固定比例对称的关系我们称为是关于定点 O 的按比例对称关系,其中顶点 O 称为反演对称聚焦点. 为讨论方便,简称反演点对称.

换言之,存在一个称作反演对称聚焦点的定点 $O(x_0,y_0)$,使得反演集合 $Z=(A、\bar{A})$中的集合 A 中的每一点$(x_i,f_A(x_i))$,都存在有唯一的点$(x_j,f_{\bar{A}}(x_j))\in\bar{A}$,满足:

$$\begin{cases}\dfrac{x_i+x_j}{2}=\lambda x_0 & (\lambda\text{ 是比例常数})\\[2ex] \dfrac{f_A(x_i)+f_{\bar{A}}(x_j)}{2}=\lambda y_0\end{cases}$$

则图形集合 A 与 $\bar{A}$ 是关于定点 O 的反演点对称图形(图 4-9).

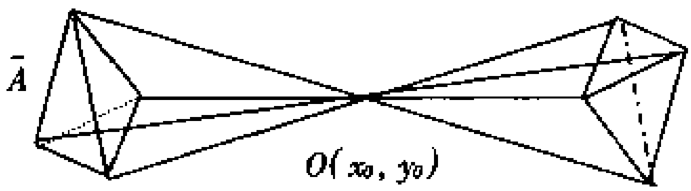


图 4-9

例如，照相机摄像时，物与像的关系（图 4－10）：

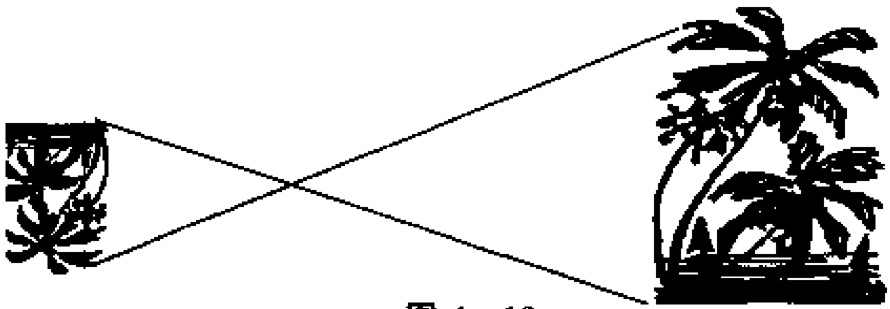


图 4-10

§6 放大倍数对称

在反演集合 $Z=(A、\bar{A})$中，集合 A 中的任意两点间距离定义为$d\left(f_A(x_i),f_A(x_j)\right)$，集合 $\tilde{A}$ 中的任意两点间距离定义为 $d\left(f_{\bar{A}}(x_i),f_{\bar{A}}(x_j)\right)$．如果对于任意 x_i、x_j 都满足：

$d\left(f_{\bar{A}}(x_i),f_{\bar{A}}(x_j)\right)=\lambda d\left(f_A(x_i),f_A(x_j)\right)$，

（λ 为比例常数，$\lambda\geqslant 0$）

则称图形集合 $\bar{A}$ 是图形集合A 的放大对称图形集合，简称放

图 4-11

大倍数对称，λ 为放大倍数.

如图 4－11，放大倍数对称图像.

§7 正反差对称

在反演集合 $Z=(A、\tilde{A})=\{((x,f_A(x)),(x,f_{\tilde{A}}(x)))x|\in U\}$ 中，设有方程组：

$$\begin{cases}0\leqslant f_A(x)\leqslant m\\0\leqslant f_{\tilde{A}}(x)\leqslant m\\f_{\tilde{A}}(x)=m-f_A(x)\end{cases}$$

则称图形集合 A 与图形集合 $\tilde{A}$ 是正反差对称. 如图 4－12：

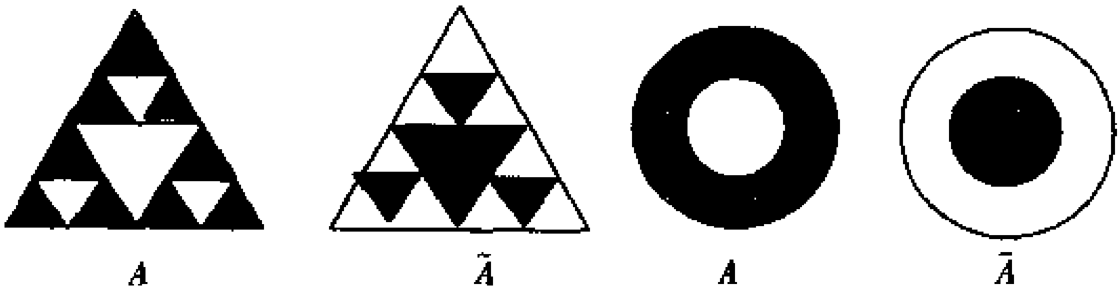


图 4－12

§8 带有畸变的对称

在现实生活中，我们遇到的是多少带有一些畸形变化的对称图像. 例如：左手、右手，左眼、右眼等. 我们可看成是由于映射 f_A 和 $f_{\tilde{A}}$ 受到干扰而导致产生的图像带有畸变的对称，我们也可称之为带有畸变的对称图像. 如图 4－13：

图 4 - 13

§9　一般情况下的对称

在现实世界中，对称方式往往不是单一的，而是综合的．如图 4 - 14 就是反射对称和放大倍数对称综合在一起的对称现象．

图 4 - 14

第五章 反演集合拓扑空间

§1 普通集合映射基本知识回顾

定义 5-1 设 X、Y 是两个任意集合,如果有一个确定的规律(或法则)f,它把集合 X 中的每个元素 x 都对应成集合 Y 的唯一确定的元素 y,则称这个规律(或法则)f 为从集合 X 到集合 Y 的一个映射,记作

$f:X\to Y$ 成 $X\xrightarrow{f}Y$

定义 5-2 如果元素 $x\in X$ 经过映射 f 变成元素 $y\in Y$,则记成 $f(x)=y$ 或 $f:x\to y$,称 y 为元素 x 在映射 f 之下的像,或者叫做映射 f 在 x 点的值,而 x 叫 y 的原像.

定义 5-3 $f:X\to Y$,集合 X 的全部元素在映射 f 之下的全体像组成的集合称之为 f 的值域,记为 $\mathrm{ran}(f)$. 显然
$\mathrm{ran}(f)=\{y\mid y\in Y,存在\ x\in X\ 使 f(x)=Y\}\subseteq Y$

定义 5-4 $f:X\to Y$,如果 $\mathrm{ran}(f)=Y$,则称 f 为满射. 如果 $f(x_1)=f(x_2)$,必推出 $x_1=x_2$,则称 f 为单射,或称 f 是一一映射. 如果 f 是满射且为单射,则称 f 为双射.

定义 5-5 若 f 是从集合 X 到集合 Y 的双射,定义 $f^{-1}(y)=x$,如果 $f(x)=y$,那么 f^{-1} 称为映射 f 的逆映射.

令 $f:X\to Y$,任取 X 的子集 S,定义 S 的像集

$f(S)=\{f(x)\mid x\in S\}$

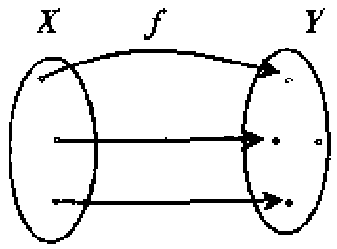


图 5-1　单射

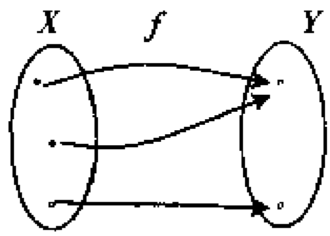


图 5-2　满射

特别当 $S=\varnothing$ 时，$f(\varnothing)=\varnothing$，当 $S=A$ 时，$f(A)$叫做映射 f 的像集，记为 $\mathrm{Im}f$.

定理 5-1　若 f 是从集合 X 到集合 Y 的双射，则 f^{-1}是从集合 Y 到集合 X 的双射.

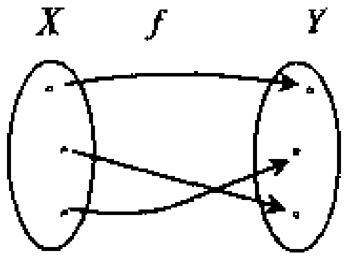


图 5-3　双射

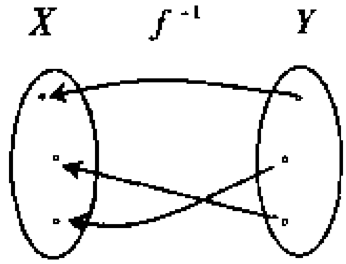


图 5-4　逆映射

定理 5-2　如果映射 $f:X\to Y$ 存在着逆映射f^{-1}，那么 $f^{-1}\circ f=I_A$(I_A 表示恒等映射).

定理 5-3　映射的合成满足结合律. 即设 $f:W\to X$，$g:X\to Y$，$h:Y\to Z$，则$(h\circ g)\circ f=h\circ(g\circ f)$

定理 5-4　$f:X\to Y$，$g:Y\to Z$，

1.若 f,g 是满射，则 $g\circ f$ 也是满射.

2.若 f,g 是单射，则 $g\circ f$ 也是单射.

3.若 f,g 是双射，则 $g\circ f$ 也是双射，并且 $g\circ f$ 的逆映射$(g\circ f)^{-1}=f^{-1}\circ g^{-1}$.

定义 5-6　对任意两个集合 X、Y，如果存在一双射 $f:X\to Y$，则称 X 与 Y 是一一对应的，也叫集合 X 与 Y 是等势的.

定理 5-5　对任意的两个集合 X 与 Y，如果有一单射 $f:X\to$

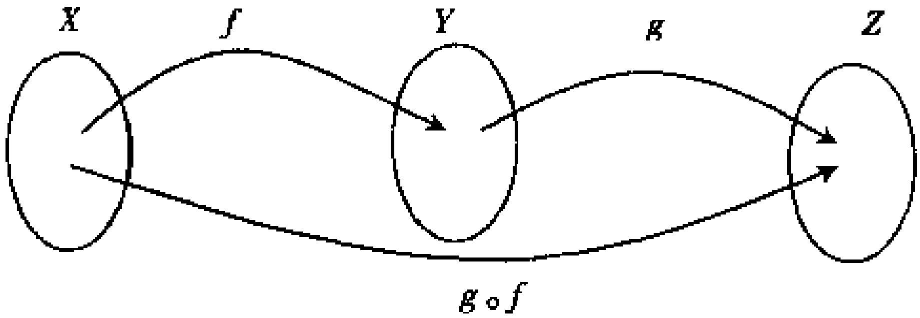


图 5-5

Y,则总存在 $A\subseteq Y$,使得 $f:X\rightarrow A$ 为一双射.

§2 反演集合映射

由反演集合定义可知,f_A 与 $f_{\bar{A}}$ 都是单值映射时,论域 U 中任意一点 $u\in U$,集合 $A=\{(u,f_A(u))\mid u\in U\}$ 中元素点 $(u,f_A(u))$的反演点是集合 $\bar{A}=\{(u,f_{\bar{A}}(u))\mid u\in U\}$中元素 $(u,f_{\bar{A}}(u))$,反之亦然,即:点$(u,f_A(u))$与点$(u,f_{\bar{A}}(u))$互为反演点且唯一.

根据反演集合定义,可设 $X\subseteq R^n$,$\bar{X}\subseteq R^n$,使得

$A=\{(u,f_A(u))\mid u\in U,f_A(u)\in X\}$

$\bar{A}=\{(u,f_{\bar{A}}(u))\mid u\in U,f_{\bar{A}}(u)\in\bar{X}\}$

即:

$f_A:U\rightarrow X$ 或 $U\xrightarrow{f_A}X$

$f_{\bar{A}}:U\rightarrow\bar{X}$ 或 $U\xrightarrow{f_{\bar{A}}}\bar{X}$

定义 5-7 设 U、X、$\bar{X}$ 是三个任意集合,如果有一对确定的规律(或法则)f_A、$f_{\bar{A}}$,它们把集合 U 中的每个元素 u 都对应成集合 X 和集合 $\bar{X}$ 的各自唯一确定的元素组成的有序对$(x,\bar{x})$,$x\in X$ 和 $\bar{x}\in\bar{X}$,则称这对规律(或法则)f_A、$f_{\bar{A}}$ 为从集合 U 到集合 X 和集合 $\bar{X}$ 的一个映射对,记作

$f_A:U\rightarrow X$ 或 $U\xrightarrow{f_A}X$

$f_{\bar{A}}: U \to \bar{X}$ 或 $U \xrightarrow{f_{\bar{A}}} \bar{X}$

定义 5-8　如果元素 $u \in U$ 经过映射 f_A、$f_{\bar{A}}$ 变成元素 $x \in X$ 和 $\bar{x} \in \bar{X}$，则记成

$f_A(u) = x$

$f_{\bar{A}}(u) = \bar{x}$

或 $f_A: u \to x$

$f_{\bar{A}}: u \to \bar{x}$

分别称 x 和 $\bar{x}$ 为元素 u 在映射 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 下的像，或者叫做映射 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 在 u 点的值，而 u 叫 x 和 $\bar{x}$ 的原像.

定义 5-9　对集合 U 的任意元素 u，都同时存在有

$f_A: u \to x$

$f_{\bar{A}}: u \to \bar{x}$

集合 U 的全部元素在映射 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 下的全体像组成的集合分别称之为 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 的值域，分别记为 $\mathrm{ran}(f_A)$ 和 $\mathrm{ran}(f_{\bar{A}})$. 显然有

$\mathrm{ran}(f_A) = \{x \mid x \in X$，存在 $u \in U$ 使 $f_A(u) = x\} \subseteq X$

$\mathrm{ran}(f_{\bar{A}}) = \{\bar{x} \mid \bar{x} \in \bar{X}$，存在 $u \in U$ 使 $f_{\bar{A}}(u) = \bar{x}\} \subseteq \bar{X}$

定义 5-10　$f_A: U \to X$，$f_{\bar{A}}: U \to \bar{X}$，如果 $\mathrm{ran}(f_A) = X$，$\mathrm{ran}(f_{\bar{A}}) = \bar{X}$，则称 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 为满射对，如果 $u_1 \neq u_2$，必推出 $f_A(u_1) \neq f_A(u_2)$ 和 $f_{\bar{A}}(u_1) \neq f_{\bar{A}}(u_2)$，则称 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 为单射对或称一一映射对. 如果 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 是满射对且为单射对，则称 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 为双射对.

定义 5-11　若 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 是分别从集合 U 到集合 X 和从集合 U 到集合 $\bar{X}$ 的双射对，如果 $f_A(u) = x$ 和 $f_{\bar{A}}(u) = \bar{x}$，定义 $f_A^{-1}(x) = u$ 和 $f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{x}) = u$，$f_A^{-1}$ 和 $f_{\bar{A}}^{-1}$ 分别称为映射 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 的逆映射.

令　$f_A: U \to X$

　　$f_A: U \to \bar{X}$

任取 U 的子集 S，定义 S 的像集

$f_A(S)=\{f_A(u)\mid u\in S\}$

$f_{\bar{A}}(S)=\{f_{\bar{A}}(u)\mid u\in S\}$

特别当 $S=\emptyset$ 时,$f_A(\emptyset)=f_{\bar{A}}(\emptyset)=(\emptyset)$

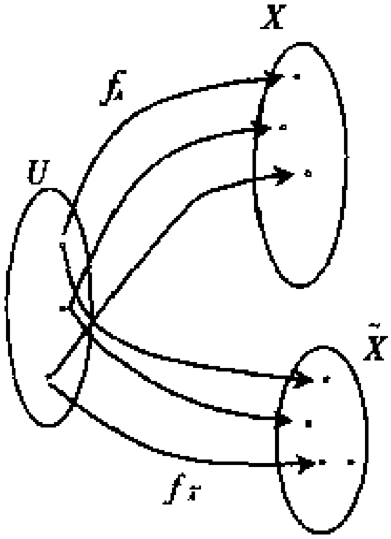


图 5-6 反演单射

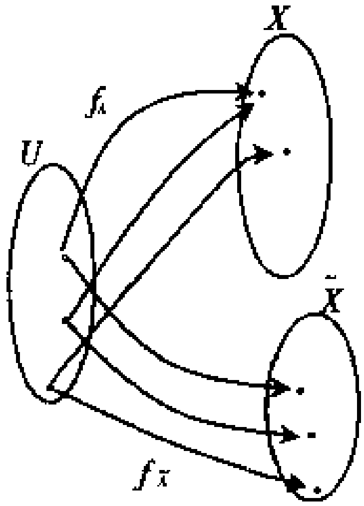


图 5-7 反演满射

定理 5-6 若 $f_A: U\to X$

$f_{\bar{A}}: U\to \tilde{X}$

f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 都是双射,则 f_A^{-1} 和 $f_{\bar{A}}^{-1}$ 也都是双射(见图 5-8、图 5-9).

证明: 若 f_A 是双射,则可由定理 5-1 结论得知 f_A^{-1} 也是双射;同理,由于 $f_{\bar{A}}$ 是双射,则可由定理 5-1 结论得知 $f_{\bar{A}}^{-1}$ 也是双射.证毕.

定理 5-7 如果映射对

$f_A: U\to X$

$f_{\bar{A}}: U\to \tilde{X}$

分别存在着逆映射 f_A^{-1} 和 $f_{\bar{A}}^{-1}$,那么 $f_A^{-1}\circ f_A=I_A$,$f_{\bar{A}}^{-1}\circ f_{\bar{A}}=I_{\bar{A}}$.

证明: $f_A^{-1}\circ f_A=I_A$ 可用定理 5-2 结论得知;同理可证

$f_{\bar{A}}^{-1}\circ f_{\bar{A}}=I_{\bar{A}}$. 证毕.

定理 5-8 若 $f_A: U\to X$,$f_{\bar{A}}: U\to \tilde{X}$,$f_A$ 和 $f_{\bar{A}}$ 都是双射,则

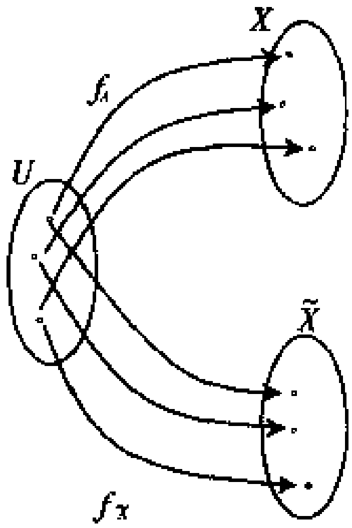


图 5－8　反演双射

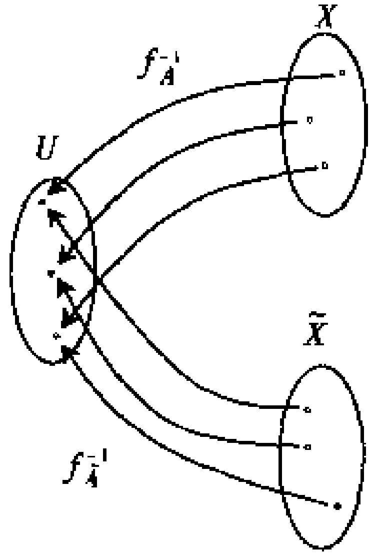


图 5－9　反演逆映射

$f_A \circ f_{\tilde{A}}^{-1}, f_{\tilde{A}} \circ f_A^{-1}$ 都是双射.

证明：　因为 f_A 和 $f_{\tilde{A}}$ 都是双射，由定理 5－6 可知 f_A^{-1} 和 $f_{\tilde{A}}^{-1}$ 也都是双射. 再由定理 5－4 结论 3 可以知道 $f_A \circ f_{\tilde{A}}^{-1}$ 和 $f_{\tilde{A}} \circ f_A^{-1}$ 都是双射. 证毕.

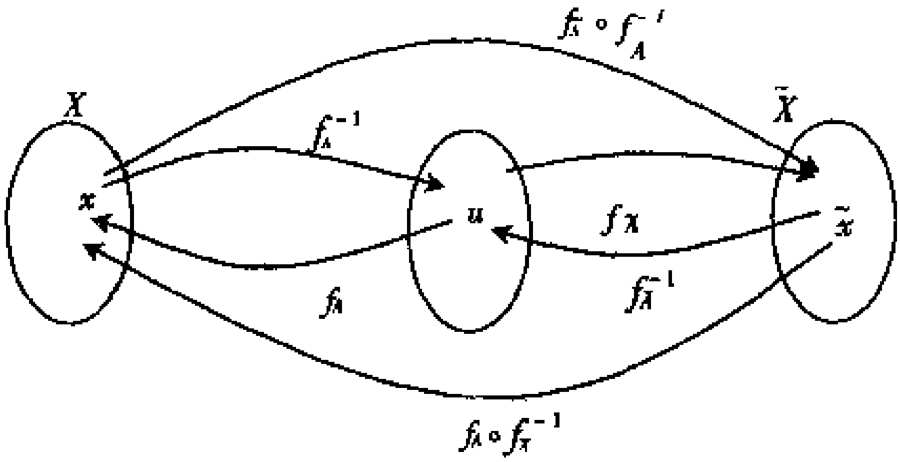


图 5－10

定理 5－9　若 $f_A: U \to X, f_{\tilde{A}}: U \to \tilde{X}$，$f_A$ 和 $f_{\tilde{A}}$ 都是双射，则集合 X 中元素与集合 $\tilde{X}$ 中元素一一对应.

证明：　由定理 5－8 知道 $f_A \circ f_{\tilde{A}}^{-1}, f_{\tilde{A}} \circ f_A^{-1}$ 都是双射，所以对集

合 X 中任意元素 x,在 $\tilde{X}$ 中都对应有元素 $\bar{x}$;反之亦然. 证毕.

§3 普通集合度量空间回顾

§3.1 距 离

欧氏空间中,每个点的坐标形成一组有顺序的 n 个实数(x_1, x_2,$\cdots$,x_n),简称为实数的一个 n 组. 在平面的情形 $n=2$,在三维空间 $n=3$,在直线上 $n=1$. R 表示全体实数,用 R^n 表示实数的全体 n 组. $R=R^1$ 表示一个有坐标系的直线,R^2 表示一个有坐标系的平面,R^3 表示一个有坐标系的三维空间(见图 5—11),而 R^n 则表示一个有坐标系的 n 维空间.

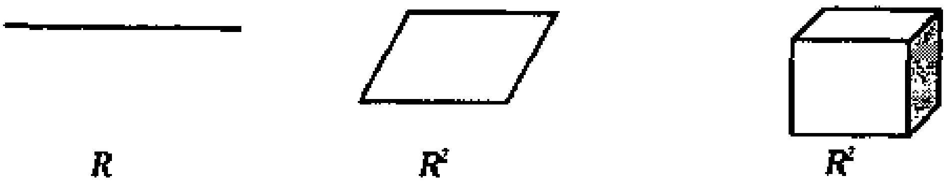


图 5-11

若 x 和 y 是 R^n 中的两个点,所谓它们之间的距离,指的是平常的直线距离,用 $\rho(x,y)$表示. 在用 x 和 y 的坐标表示时,计算公式如下:

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-x_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^n}$$
$$=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

这个公式表示的是欧氏距离. 也就是我们平常测量物体距离时采用的距离公式.

欧氏距离 ρ 满足下列三条性质:

对任意 $x,y,z\in R^n$,有

$D_1:\rho(x,y)\geqslant 0$,并且 $\rho(x,y)=0$,当且仅当 $x=y$;

$D_2:\rho(x,y)=\rho(y,x)$;

$D_3:\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y)$.

这是三条重要的距离性质,我们后面将要回顾如何以这三条重要性质为基础抽象出度量空间.

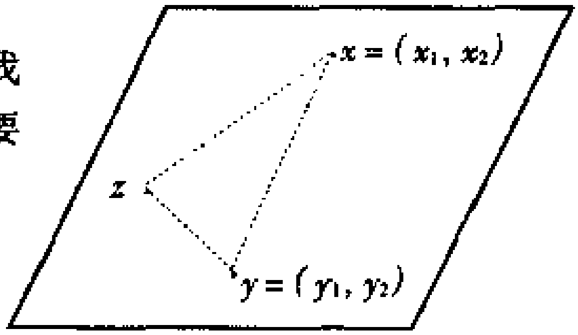


图 5-12

§3.2 收 敛

在欧氏空间中,可以利用距离来描述"邻近"的概念:在数学分析中,点列的收敛是一个重要的基本概念,点列$\{x_i\}$收敛于点 x,就其直观的通俗的含义来说,就是 x_i 距 x 可以无限接近,只要 i 充分地大,要多接近就可以有多接近(见图 5-13).

R^n 上具有距离结构,自然可以借助距离概念定义收敛:

定义 5-12 点列$\{x_i\}$收敛于点 x 是指对于任意给定的$\varepsilon>0$,存在 N,使得 $\rho(x,x_i)<\varepsilon$ 对一切 $i\geqslant N$ 恒成立.

§3.3 度 量

欧氏空间中距离概念可作如下推广:

定义 5-13 设 X 是一个集合,如果映射 $\rho:X\times X\rightarrow R$ 满足距离性质(D_1)、(D_2)和(D_3),则称(X,ρ)为度量空间,ρ 称为 X 上的度量,$\rho(x,y)$称为点 x 到点 y 的距离.

n 维欧氏空间 R^n 是一个度量空间,前面讲过的度量 ρ:

$$\rho(x,y)=\left[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2\right]^{1/2}$$

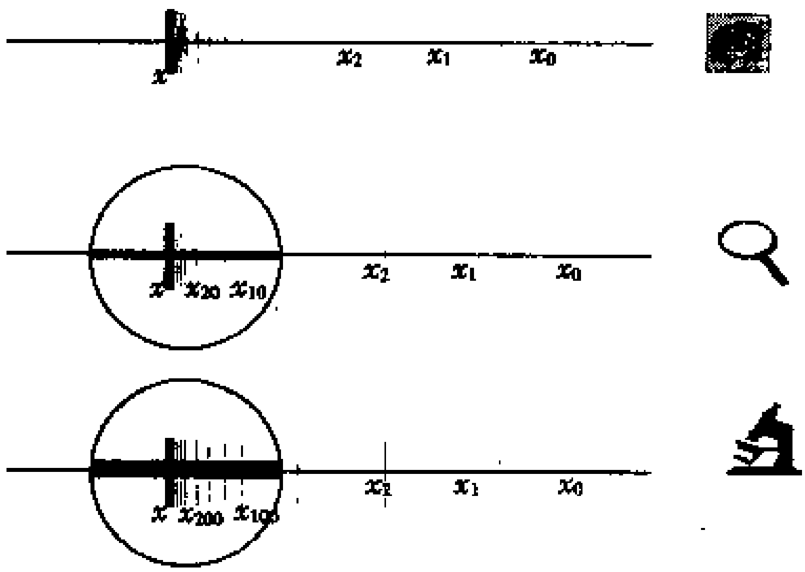


图 5－13

称为欧氏度量.

例 1 在欧氏空间 R^n 中,我们至少可以给出三种度量:

$$\rho_1(x,y)=[\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2]^{1/2}$$

$$\rho_2(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$$

$$\rho_3(x,y)=\max_{1\leq i\leq n}|x_i-y_i|$$

例 2 设 $X=\{x(t)|x(t)$是 $a\leq t\leq b$ 上的实值连续函数$\}$,其上两点 $x(t)$与 $y(t)$间的距离为:

$$\rho(x,y)=\max_{a\leq t\leq b}|x(t)-y(t)|$$

不难验证满足(D_1)、(D_2)和(D_3),所以(X,ρ)为度量空间.

例 3 散度量空间:

设 X 是任意集合,X 中任意两点 x,y 的距离规定为:

$$\rho(x,y)=\begin{cases}0,\text{当 } x=y \text{ 时}\\ 1,\text{当 } x\neq y \text{ 时}\end{cases}$$

显然 ρ 满足(D_1)、(D_2)和(D_3),所以(X,ρ)为度量空间. 这个空间叫做散空间.

从上面的例子可以看出，推广欧氏空间距离得到的度量空间比欧氏空间广泛得多了. 在数学方法中，从特指对象中抽象出某种性质，而后把这种性质加以推广形成一类更广的新对象，是数学中较为常用的一种典型推广方法. 我们后面将要讲到的拓扑空间，就是采用类似的方法从度量空间中抽象出开集性质加以推广而形成的.

§3.4 完备度量空间

定义 5-14 设(X,ρ)为度量空间，$\{x_i\}$是其中的点列. 点列$\{x_i\}$称做 Cauchy 序列(或称基本序列)，是指对于任意给定的 $\epsilon > 0$，存在 N，当 $m,n \geqslant N$ 时，有 $\rho(x_m, x_n) < \epsilon$ 成立.

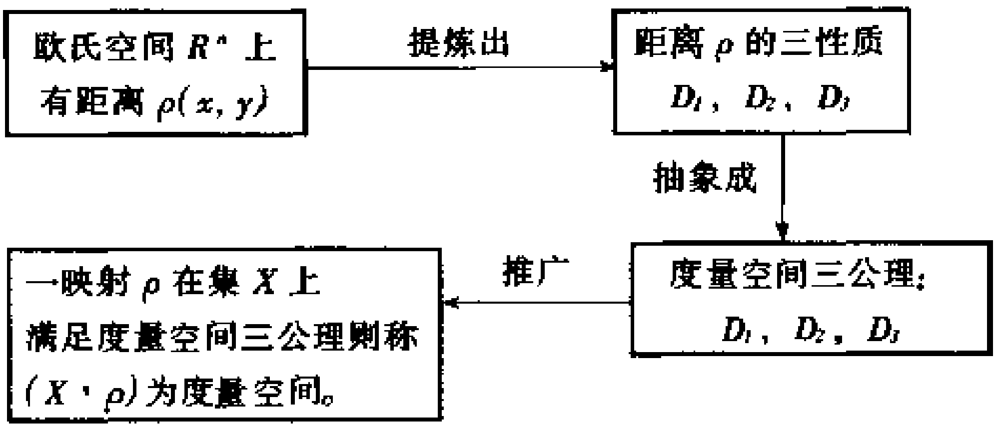


图 5-14

定义 5-15 设(X,ρ)为度量空间，其上的点列$\{x_n\}$收敛，是指存在有 $x \in X$，使得

$$\lim_{n\to\infty} \rho(x_n, x) = 0$$

称$\{x_n\}$收敛于 x，又称 x 是$\{x_n\}$的极限点.

定义 5-16 设(X,ρ)为度量空间，如果其上的每个 Cauchy 点列$\{x_i\}$都收敛，则(X,ρ)为完备度量空间.

定义 5－17 设(X,ρ_1)和(Y,ρ_2)是度量空间，f是从$W(W\subset X)$到Y中的映射，如果对每个$\epsilon>0$，存在$\delta>0$，使对W中任何满足$\rho_1(x_1,x_2)<\delta$的x_1和x_2，有$\rho_2(f(x_1),f(x_2))<\epsilon$，则$f$在$W$上一致连续.

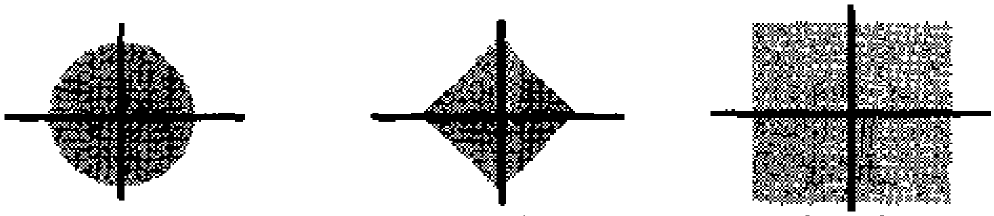
§3.5 邻 域

度量空间中球形邻域概念如下：

定义 5－18 设x为度量空间X中的一点，ϵ为一正实数. 在X中的、与x距离小于ϵ的点的全体，定义为x的、在X中的、以ϵ为半径的邻域，用$B(x,\epsilon,X)$表示，而在X明白无误，不会引起误会时，可简单用$B(x,\epsilon)$表示. $B(x,\epsilon)$也叫做度量空间X中以x为中心、ϵ为半径的开球或球形邻域.

例 4 若$X=R^n$，在$n=1$时，则$B(x,\epsilon,R)$就是以x为中点、长度为2ϵ的开区间$(x-\epsilon,x+\epsilon)$；而$n=2$时，则$B(x,\epsilon,R^2)$恰好是以x为中心、以ϵ为半径的圆的内部(或称之为开圆)；对于任意n，$B(x,\epsilon,R^n)$是R^n中一个n维球形邻域，或称n维开球.

例 5 在欧氏空间R^2中，例 1 中给出的三种度量的球形邻域如图 5－15：



$\rho_1(x,y)<\epsilon$　　$\rho_2(x,y)<\epsilon$　　$\rho_3(x,y)<\epsilon$

图 5－15

在欧氏空间中，当X不是整个R^n时，则$B(x,\epsilon,X)$恰就是X的位于$B(x,\epsilon,R^n)$内部的那部分(见图 5－16)，即X自身与x在R^n中的邻域$B(x,\epsilon,R^n)$的交集：

$B(x,\varepsilon,X)=X\cap B(x,\varepsilon,R^n)$

定义 5-19 设 X 是一度量空间，$x\in X$，$W\subset X$，若存在开球 $B(x,\varepsilon,X)$，使得 $B(x,\varepsilon,X)\subset W$，则称 W 是 x 的一个邻域. 换句话说，"W 是 x 的一个邻域"是"x 是 W 的一个内点"的逆. x 的邻域全体称为 x 的邻域系，记作 $\mu(x)$. (见图 5-17)

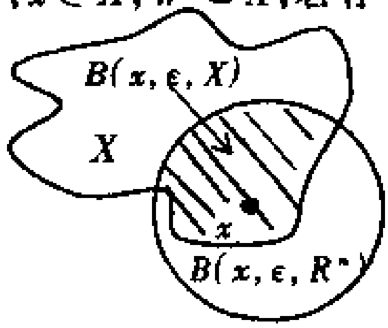


图 5-16

由定义，包含 x 的开集都是 x 的邻域，但邻域不一定是开集.

例 6 设 X 是实直线，若 $x\in(a,b)$，则 (a,b)，$[a,b]$，$(a,b]$，$[a,b)$，(a,∞)等都是 x 的邻域，但 $(a,x]$，$[x,b)$不是 x 的邻域，因为 x 在 (a,b)中的任一开球 $B(x,\varepsilon,(a,b))=(x-\varepsilon,x+\varepsilon)$都不可能被包含在$(a,x]$和$[x,b)$之中.

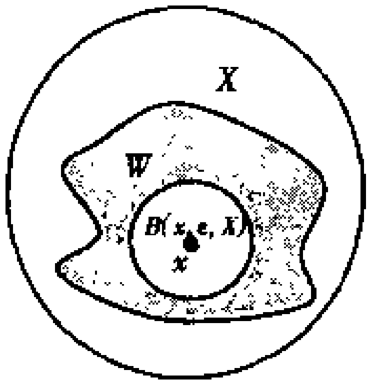


图 5-17

我们可以用收敛概念来刻划邻域，同时也可以用邻域的概念来刻划收敛，即邻域与收敛所起的作用是等价的.

定理 5-10 设 x 为度量空间 X 中的一点，x 的邻域系记为 $\mu(x)$；X 中的点列 $\{x_i\}$ 收敛于点 x 的充要条件是：对于 x 的任意一个邻域 $V\in\mu(x)$，存在 N，使得 $x_i\in V$ 对一切 $i\geqslant N$ 恒成立.

定理 5-11 度量空间 X 中的一子集 V 是 x 的邻域的充要条件是对于每一个收敛于 x 的点列 $\{x_i\}$，都存在自然数 N，使得，$i\geqslant N$ 时，$x_i\in V$.

§3.6 连 续

在微积分中,函数连续性的定义为:函数 $f: R \to R$ 称为在点 $x_0 \in R$ 处是连续的,如果对于任意给定实数 $\varepsilon > 0$,存在 $\delta > 0$,使当 $|x - x_0| < \delta$ 时,$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

在这个定义中,只涉及两个实数的距离(即两实数差的绝对值)的概念,另外,为了验证函数的连续性也常常只用到这个距离的某些最基本的性质,而与实数的其他性质无关. 类似地,函数连续性概念用邻域概念描述如下:

定义 5-20 设 $f: X \to Y$ 是一个函数,其中 $X \subset R^m$ 而 $Y \subset R^n$,又设 $x \in X$. 如果对于 $f(x)$ 在 Y 中的每一个邻域,X 中存在的某一个邻域,它的 f 像被包含在 $f(x)$ 的所考虑的邻域中,则说 f 在 x 处连续.

为了简短地表达这个条件,按照微积分中惯用符号,用 ε 与 δ 表示这些邻域的半径,把它们分别叫做 ε 邻域与 δ 邻域. 则定义重复如下:

对每一个正数 ε,存在一个正数 δ,使得 x 的 δ 邻域的 f 像,属于 $f(x)$ 的 ε 邻域:

$$f(B(x,\delta,X)) \subset B(f(x),\varepsilon,Y)$$

若 f 在 X 的每一点处连续,则说函数 f 在 X 中连续(几何意义见图 5-18).

若把 δ 与 ε 解释为接近的程度,则定义可以意译为:人们只须要求 x' 足够接近 x,就能使 $f(x')$ 接近 $f(x)$. 更粗略的意译是:x 的微小改变,引起 $f(x)$ 的微小改变.

§3.7 开 集

开集是拓扑中最重要的概念. 在拓扑发展的早期(1900~1930

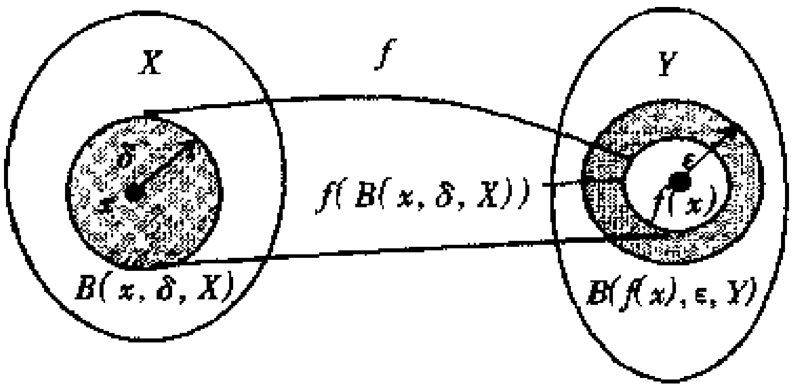


图 5－18

年)，人们曾采用过诸如下列名词所表达的概念：邻域空间，度量空间，极限点，序列极限以及闭包. 当时并未弄清楚这些途径都是等价的，都殊途同归；也无人能预言拓扑的发展方向与最终形式. 直到这个时期的末期，才逐渐弄清楚下述事实：开集概念是探讨所有拓扑性质的简单而灵活的工具. 从那以后，人们公认开集这个概念所提供的途径最优越.

度量空间的开集定义：

定义 5－21 在度量空间 X 中，若对于 X 的子集 V 中的每一点 x，V 包含 x 的、在 X 中的某邻域，则称子集 V 为 X 的开集.

上述定义利用球形邻域概念可重述如下：对于任意 $x\in V$，存在有正数 $\epsilon>0$，使得 $B(x,\epsilon,X)\subset V$，则称子集 V 为 X 的开集.

开集特征：

若 V 是 x 的邻域，我们称 x 是 V 的内点. 若 V 中每一点都有邻域，那么 V 称作开集(见图 5－19). 换言之，每一点都是其内点的集叫开集.

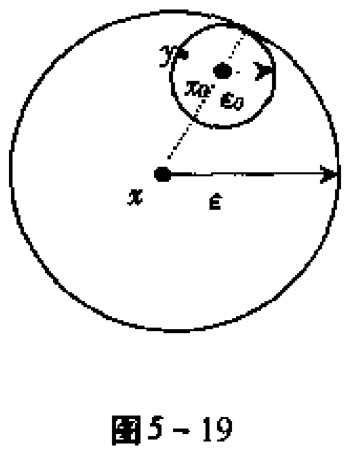


图5－19

例 7 在 R^1 中，半开区间 $\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 不是 R^1 的开子集. 但

$\left[0,\frac{1}{2}\right)$是度量空间$[0,1]$的开子集. 事实上,$\left[0,\frac{1}{2}\right)$是度量空间$[0,1]$中的开球$B\left[0,\frac{1}{2},[0,1]\right]$.

从上例中看到,虽然$\left[0,\frac{1}{2}\right)$不是$R^1$的开子集,但如果用$A$表示(有绝对值度量的)度量空间$[0,1]$,则区间$\left[0,\frac{1}{2}\right)$是$A$上一个开集. 因此,给定一个集是否是开集,与我们把它看作是那个度量空间中的子集有关.

实际上,如果(X,ρ)为任意一度量空间,并且$A\subset X$,则A恒为度量空间(A,ρ)中的开集,虽然在(X,ρ)中A可以不是开集.

我们现在更严密地研究一下这个现象:

设(M,ρ)为任意一度量空间,A为M的任意一非空子集. 于是,(A,ρ)也是一度量空间. 现在,如果$a\in A$,我们就必须区分A中以a为心的开球和M中以a为心的开球. 例如,若$(M,\rho)=R^1$,$(A,\rho)=[0,1]$,则R^1中的开球$B\left(0,\frac{1}{2},R^1\right)$是区间$\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$,而$A=[0,1]$中的开球$B\left(0,\frac{1}{2},[0,1]\right)$是区间$\left[0,\frac{1}{2}\right)$(这就是说,在$A=[0,1]$中,$A$中所有到0点的距离小于$\frac{1}{2}$的点所构成的集,是区间$\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 因此,若$a\in A$,则

$$B(a,\varepsilon,A)=\{x\in A\mid \rho(a,x)<\varepsilon\}$$
$$B(a,\varepsilon,M)=\{x\in M\mid \rho(a,x)<\varepsilon\}$$

于是有

$$B(a,\varepsilon,A)=A\cap B(a,\varepsilon,M)$$

定理5-12 设(M,ρ)是一度量空间,A是M的一个真子集. 则A的子集G_A是(A,ρ)的开子集,当且仅当存在(M,ρ)的一个开子集G_M,满足$G_A=A\cap G_M$. 这也就是说,一个集在(A,ρ)中是开

集，必须而且只须它是 A 与 (M,ρ) 中一个开集的交.

证明： 首先假定 G_A 是 A 中的开集，于是对每个 $a\in G_A$，存在 $\epsilon>0$，使得 $B(a,\epsilon,A)\subset G_A$. 定义 G_M 为

$$G_M=\bigcup_{a\in G_A}B(a,\epsilon,M)$$

于是，因为 G_M 是 M 中开球的并，所以它在 M 中是开集. 此外，由上面例 7 讨论可知 $A\cap G_M=G_A$.

反之，假定 G_M 是 M 中的开集，并设 $G_A=A\cap G_M$. 我们希望证明 G_A 是 A 中的开集. 若 $a\in G_A$，则 $a\in G_M$. 因为 G_M 是 M 中的开集，故有一开球 $B(a,\epsilon,M)$ 包含在 G_M 中. 但因此 $B(a,\epsilon,M)\cap A\subset G_M\cap A$，这说明 $B(a,\epsilon,A)\subset G_A$，于是对每个 $a\in G_A$，我们证明了有一开球 $B(a,\epsilon,A)$ 包含在 G_A 中. 这就证明 G_A 是 A 中的开集.

例 8 若 $M=R^1$ 和 $A=[0,1]$，集 $G_A=\left[0,\frac{1}{2}\right)$ 是在 A 中的开集. 但 $G_A=A\cap\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$，$\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$ 是 M 中的开集. 因此，上述定理中的 G_M 可取为 $\left(-\infty,\frac{1}{2}\right)$.

下面的定理告诉我们，一旦 R^n 的开集描绘清楚了，如何"看出" R^n 的一个子集 X 的开集.

定理 5-13 若 $X\subset R^n$，则 X 的开集族就是 X 自身交 R^n 的全体开集的交集族.

例 9 令 A 表示 R^2 中的一个矩形的四条边（四条线段）上的诸点的集合. 它的补集 R^2-A 有两部分：

内部 W 与外部 V（见图 5-20），若 x 是 W 的一个点，并选取一个正数 ϵ，使得它比从 x 到 A 的边的最短距离还小，则 $B(x,\epsilon,R^2)$ 在 W 内. 所以 W 是 R^2 中的开集. 同理，外部 V 也是 R^2 的开集. 但 A 在 R^2 中不是开集；因为它的一个点 z，没有邻域 $B(z,\epsilon,

$R^2) \subset A$. 实际上,A 的每个点都有这个性质.

若用任意简单闭多边形如三角形或六边形来代替矩形 A,这些结论照样有效.

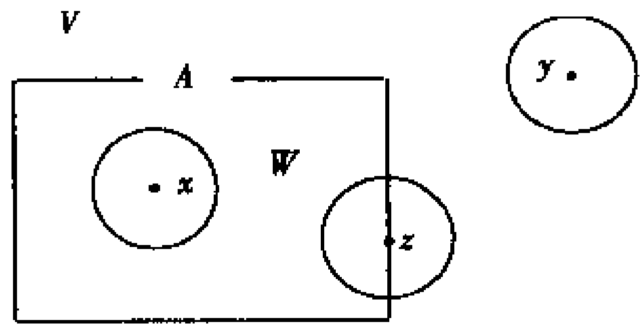


图 5-20

应该注意:开集这性质是十分脆弱的,即一个开集可以在添加一个点后不再是开集. 在上面的例子中,若把 A 的内部 W 添加上 A 的一点(即 $W \cup \{z\}, z \in A$)或 A 外部的一个点(即 $V \cup \{y\}, y \in V$),则这扩大的集合(即 $W \cup \{z\}$ 或 $V \cup \{y\}$)就不再是 R^2 的开集了.

例 10 与例 9 同理,平面 R^2 中开线段 $L = \{(x,0) \mid |x| < 1\}$ 即不是开集也不是闭集,$\bar{L} = \{(x,0) \mid |x| \leqslant 1\}$.

定理 5-14 若 W 与 V 都是 X 的开集,则它们的交集 $W \cap V$ 是 X 的一个开集. X 的任何有限个开集的交集是 X 的一个开集. (几何意义见图 5-21)

证明: 令任意 $x \in X$,因为 $x \in W$ 且 W 是开集,有一个 $r > 0$ 使 $B(x, r, X) \subset W$. 因为 $x \in V$ 且 V 是开集,有一个 $s > 0$ 使 $B(x, s, X) \subset V$. 设 ε 为 r 与 s 中较小的那个,显然 $B(x, \varepsilon, X)$ 在 W 和 V 中,故在 $W \cap V$ 中. 这就

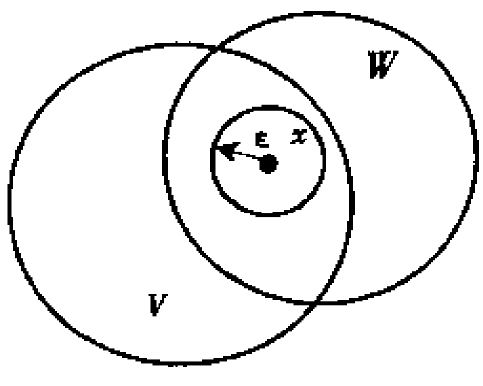


图 5-21

证明 $W \cap V$ 是开集.

设 $x \in W_1, W_2, \cdots, W_K$，于是有 $r_i > 0(i = 1,2\cdots,k)$，使 $B(x, r_i, X) \subset W_i$. 取 $r_1, r_2, \cdots, r_K$ 中最小的那个设为 ϵ，显然 $B(x,\epsilon,X)$ 在交集中. 即有限个开集的交集是 X 的一个开集. 证毕.

定理 5-15　空集 $\emptyset$ 是 X 的一个开集，并且 X 自身是 X 的一个开集.

证明：　我们根据开集的定义来验证空集是开集：因为 $\emptyset$ 中没有点，所以它的每个点有一个邻域包含在 $\emptyset$ 中. 这种说法是正确的，所以 $\emptyset$ 是开集. 再换一种说法：

空集 $\emptyset$ 是开集，因为在 $\emptyset$ 中不可能有这样的点，它不是一个内点.

第二个命题是显而易见. 因由邻域的定义，对于每个 $x \in X$，和所有的 $r>0, B(x,r,X) \subset X$. 证毕.

定理 5-16　X 的任意多个开集的并集是 X 的一个开集.

证明：　令 C 表示这么多个开集的全体，又令 A 表示它们的并集. 若 $x \in A$，则 C 中存在一个开集 V 包含 x. 因 V 是开集，有一个 $r>0$ 使 $B(x,r,X) \subset V$. 由并集定义，$V \subset A$，从而 $B(x,r,X) \subset A$，这就证明了 A 是开集. 证毕.

这些结果表明，对于大多数集合 X，它的开集族是很庞大的. 通过作邻域的并集能无止境地作各种各样的开集.

X 的一个开集 V 的主要性质是给它下定义的性质：每一个 $x \in V$ 有一个邻域 $B(x,r,X) \subset V$. 对于单独一个开集，所能说的只是这一句话，并无其他. 但对于 X 的开集族还有如下性质：开集族的元素包括空集、X 自身、与每个球形邻域 $B(x,r,X)$；此外还包括它的任意有限个元素的交集，以及任意有限个或无穷多个元素的并集.

例 11　无限个开集的交集不一定是 X 的开集. 例如：集合组

$$\left\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2<\frac{1}{n}\right\},n=1,2,3,\cdots$$

的各集合一齐拿来作交集得到的是 R^3 的原点，即 $\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=\{0,0,0\}$，仅有一个点组成的单点集 $\{0,0,0\}$ 不是开集.

在三维空间 R^3 中，每个开球：

$$B((x_0,y_0,z_0),\varepsilon,R^3)$$
$$=\{(x,y,z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2<\varepsilon;x,y,z\in R^3\}$$

都是在 R^3 中的开集. 球的外部同样是 R^3 中的开集，但球面在 R^3 中就不是开集. 令 A 表示 R^3 中的一个矩形盒子的面、边、与顶点的全体点的集合，则 R^3-A 分成两个开集：盒子的内部与外部. 令 T 表示 R^3 中一个环面（油炸圈饼）的面上的全体点集合，于是 R^3-T 分成两个开集：T 的内部和外部（见图 5－22）.

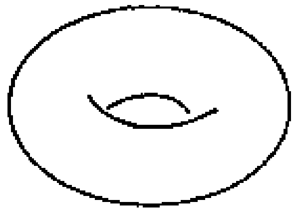


图 5－22

在 n 维空间 R^n 中，每个 n 维开球：

$$B((x_0,y_0,\cdots,z_0),\varepsilon,R^n)$$
$$=\{(x,y,\cdots,z)\mid(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+\cdots+(z-z_0)^2<\varepsilon,x,y,\cdots,z\in R^n\}$$

都是 R^n 中的一个开集.

设 $\omega_i(i=1,2,\cdots,n)$ 为 R 中的开区间 (a_i,b_i) 或空集 $\varnothing$，在 R^n 中，我们称 R^n 的子集 $\omega_1\times\omega_2\cdots\times\omega_n$ 为开方块（当基之一 ω_i 是空集时，它是空集）. R^n 中的任何开方块是 R^n 中的开集. 但 R^2 中的直线不是 R^2 中的开集；R^2 中的开方块不是 R^3 中的开集；换言之，R^{n-1} 中的开方块不是 R^n 的开集.

归纳上面的讨论，可以得出开集有以下基本性质：

O_1:$\varnothing$ 与 X 本身是开集;

O_2:有限多个开集之交是开集;

O_3:任意多个开集之并是开集.

这是一组很重要的性质,我们后面建立拓扑空间定义时要用它.

§3.8 闭 集

下面我们回顾闭集.

定义 5-22 设 X 是度量空间,X 的子集 A 叫做 X 的一个闭集,如果 A 在 X 中的补集 $X-A$ 是 X 的一个开集. 简短地说,A 是闭集如果 $X-A$ 是开集.

引用开集的定义,就得出 A 是 X 的闭集的检验法:$X-A$ 的每一点有一个不与 A 相交的邻域.

例 12 任意 $x\in X$,$\{x\}$ 是 X 中的闭集.

显然有 $\{x\}\subset X$. 对任意 $y\in X$,且 $y\neq x$,有 $y\in(X-\{x\})$. 取 $r<\rho(x,y)$,则存在 $B(y,r,X)\subset X$,所以 $X-\{x\}$ 是开集. 故 $\{x\}$ 是 X 中的闭集.

同理,我们可证明一平面或空间中的一直线 L,是任一较大集合中的一个闭集;因为,若 y 不在 L 上,而 r 是从 y 到 L 的最近点的距离,则 $B(y,r,X)$ 与 L 不相交.

X 中的一个集合 A 与它的补集 $X-A$ 之间的关系是互逆的:$X-A$ 的补集是 A. 在 X 的子集之间的这种对应关系叫做 X 中的对偶性. 开集和闭集是对偶概念,因为一个开集的对偶是一个闭集,并且反过来,一个闭集的对偶也是一个开集.

由于开集和闭集之间的这种对偶性,我们能从已经证明的关于开集的每个定理推演出关于闭集的一个正确的"对偶"定理.

在作出对偶命题时，重要的办法是利用下述事实：并集和交集在下述意义下是“对偶”运算．A 与 B 的并集的补集，是 A 的与 B 的补集的交集：

$$X-(A\cup B)=(X-A)\cap(X-B)$$

几何意义如图 5－23．

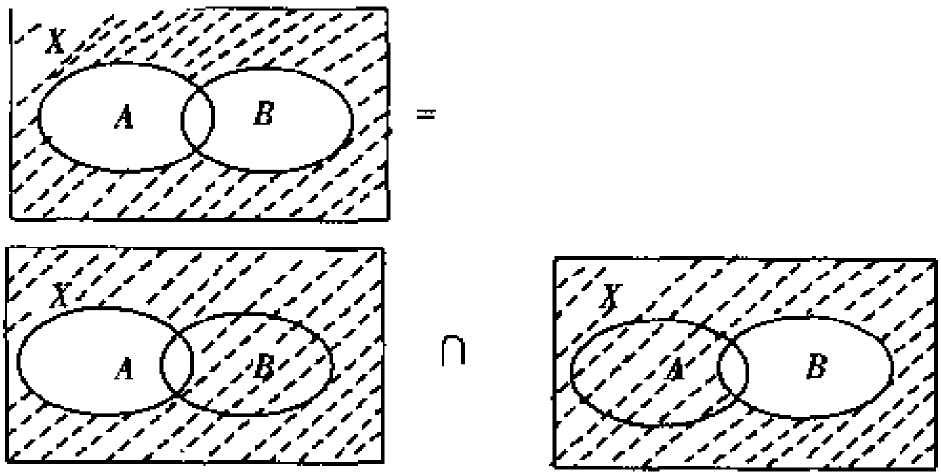


图 5－23

同样地，A 与 B 的交集的补集，是 A 的与 B 的补集的并集：

$$X-(A\cap B)=(X-A)\cup(X-B)$$

几何意义如图 5－24．

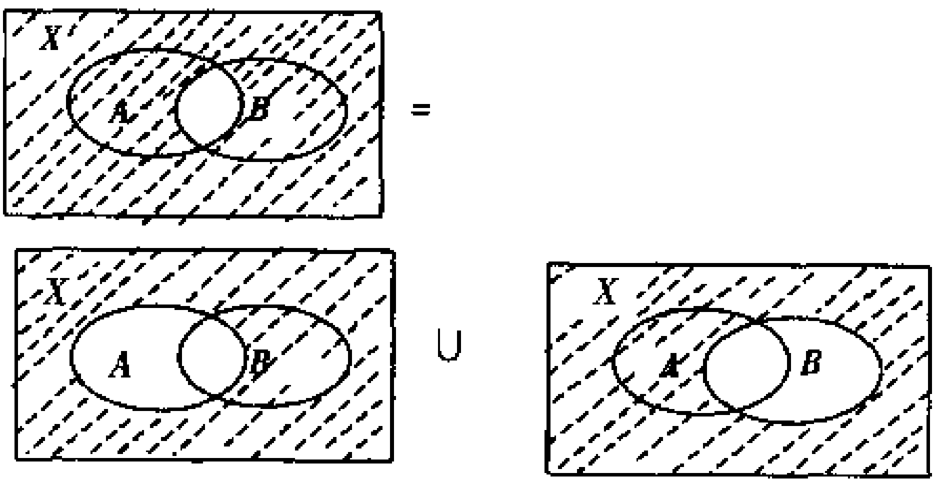


图 5－24

于是下面四个关于闭集的定理，对应于那些关于开集已经证

明的定理. 给出对偶:

定理 5-17 若 A 与 B 都是 X 的闭集, 则它们的并集 $A\cup B$ 是 X 的一个闭集. X 的任意有限个闭集的并集是 X 的一个闭集.

定理 5-18 空集 $\emptyset$ 和 X 都是闭集.

我们在讨论开集时, 知道 $\emptyset$ 和 X 都是开集. 这里我们只须注意到 $\emptyset$ 和 X 在 X 中互为补集:

$X-\emptyset=X$, 而 $X-X=\emptyset$

所以 $\emptyset$ 和 X 即都是开集又都是闭集.

定理 5-19 X 的任意多个闭集的交集是 X 的一个闭集.

定理 5-20 若 $X\subset R^n$, 则 X 的闭集族就是 X 自身交 R^n 的全体闭集的交集族.

设 $A\subset X\subset R^n$, 而 A 是 R^n 的闭集; 则本定理断言 $A\cap X$ 是 X 的闭集. 因为 $A\cap X=A$, 故有:

推论 设 A 是 R^n 的一个闭集, 如果 R^n 的子集 X 包含 A, 则 A 是 X 的一个闭集.

在 R^n 中, 存在着既不是开集, 也不是闭集的子集. 例如, 半开区间 $(0, 1]$ 在 R 中既不是开集, 也不是闭集.

从上面的讨论中可以看出, 闭集有以下基本性质:

C_1: $\emptyset$ 与 X 本身是闭集;

C_2: 有限多个闭集之并是闭集;

C_3: 任意多个闭集之交是闭集.

§3.9 函数的连续性

利用开集概念来阐述函数的连续性阐述的简易, 为我们后而的讨论带来方便.

定理 5-21 设 X, $Y\subset R^n$, 函数 f: $X\to Y$ 连续的充分必要条件是 Y 的每个开集 V 的逆像 $f^{-1}(V)$ 是 X 的一个开集.

(见图 5－25)

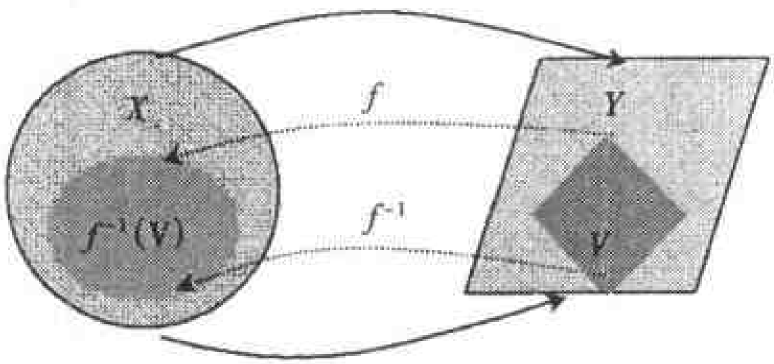


图 5－25

等价地有：

定理 5－22 f 连续的充分必要条件是 Y 的每个闭集 W 的逆像 f^{-1}（W）是 X 的一个闭集.（见图 5－26）

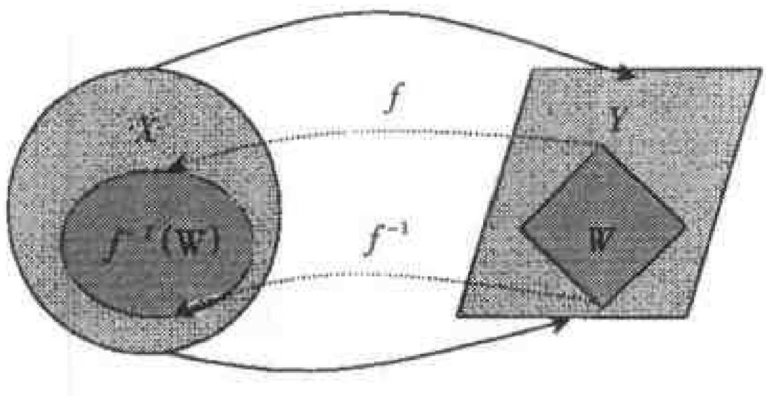


图 5－26

定理 5－23 若 f：$X\to Y$ 与 g：$Y\to Z$ 都是连续函数，则它们的复合函数 $g\circ f$：$X\to Z$ 也连续.（见图 5－27）

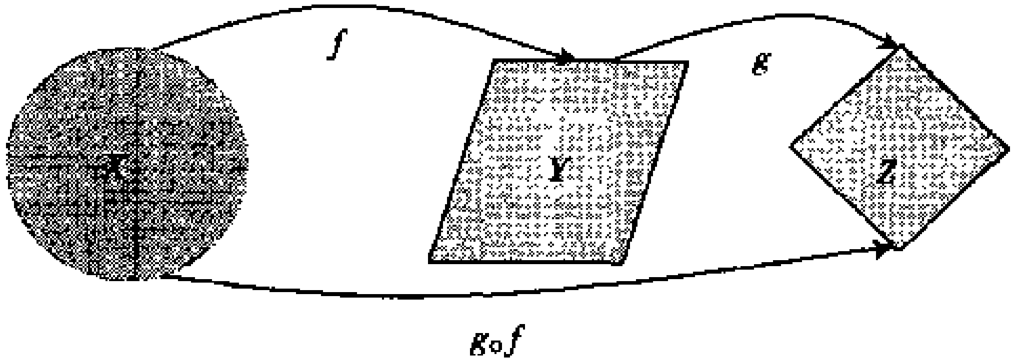


图 5－27

我们现在整理一下上述度量空间中建立邻域、开集、闭集概念的思路：

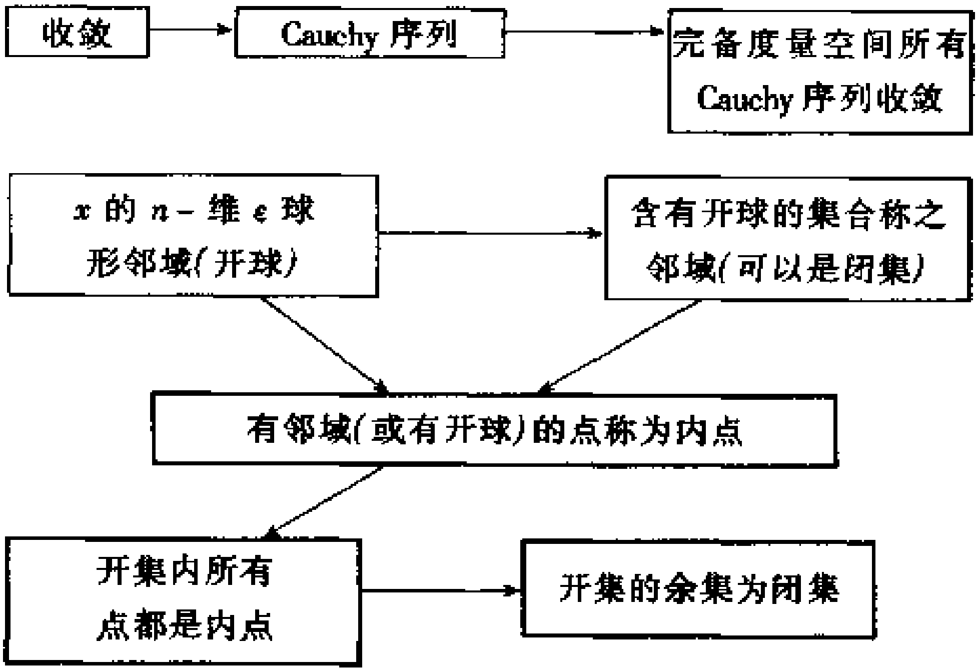


图 5－28

§4　普通集合拓扑空间回顾

古人云：“授人以鱼，只供一饭之需；教人以渔，则终身受

用无穷."我对这句话的理解是：在数学中，掌握思维方法比了解结果更重要. 我们现在分析一下建立度量空间和拓扑空间的思维方法（见图 5 - 29）.

我们从欧氏空间中提炼出“距离”概念,然后抽象成度量空间三公理,在此基础上推广成度量空间,使得人们从欧氏空间观念的束缚中解放出来;现采用类似的思维方法,从度量空间中提炼出“开集”概念,抽象成拓扑空间三公理,而后在此基础上推广成拓扑空间. 又使得我们从度量空间的“束缚”中解放出来(见图 5 - 29).我们有:

欧氏空间⊂度量空间⊂拓扑空间

定义 5 - 23 设 X 是集合,τ 是 X 中的一族子集,如果它满足下列条件:

O_1:$\emptyset, X\in\tau$

O_2:对任意的 X_i、$X_j\in\tau$,$X_i\cap X_j\in\tau$;

O_3:若 $X_\alpha\in\tau(\alpha\in I)$,其中 I 是任意指标集,则

$$\bigcup_{\alpha\in I}X_\alpha\in\tau$$

则称 τ 为 X 的一个拓扑,称偶对(X,τ)为拓扑空间,简记为 X,τ 中集合称为开集,开集的补集称为闭集.

我们上面是从度量空间中的开集概念中抽象出来的拓扑公理出发,构造出一个拓扑空间 X. 但拓扑空间中开集的概念不是预先定义的,而是先给出拓扑结构之后,称拓扑结构中满足拓扑公理条件的成员为“开集”.

上述定义可以重述如下:集合 X 上的一个拓扑是由 τ 的子集所构成的一个非空集,它的成员叫作开集,它们满足下列要求:任意多个开集的并集是开集,有限多个开集的交集是开集,X 与空集是开集.集合 X 配备了它上面的一个拓扑以后叫作一个拓扑空间.

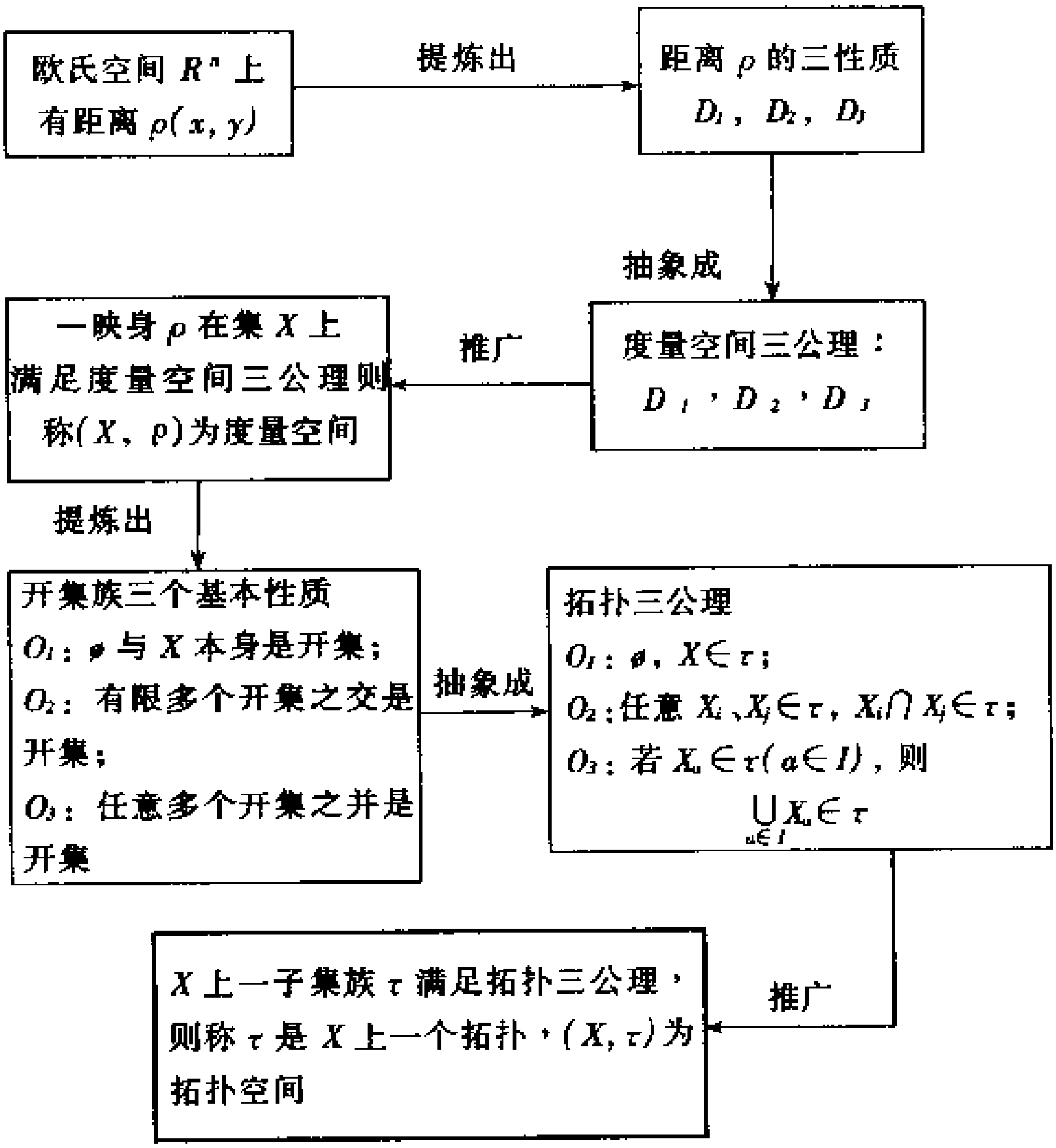


图 5－29

例 13 考察 $X=\{a,b,c,d,e\}$ 的下列子集组：

$$\tau_1=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

$$\tau_2=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d\}\}$$

$$\tau_3=\{X,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{a,b,d,e\}\}$$

则 τ_1 是 X 上的一个拓扑；因为它满足拓扑三公理 O_1,O_2,O_3. τ_2 不是 X 上的一个拓扑；因为 τ_2 中两个元素 $\{a,c,d\}$ 与 $\{b,c,d\}$ 的并 $\{a,b,c,d\}$ 不属于 τ_2，即 τ_2 不满足公理 O_3. τ_3 也不是

X 上的拓扑;因为 τ_3 中两个元素 $\{a,c,d\}$ 与 $\{a,b,d,e\}$ 的交 $\{a,d\}$ 不属于 τ_3,即 τ_3 不满足公理 O_2.

例 14 考察 X 的子集组:

$$\tau=\{X,\varnothing\}$$

则 τ 是 X 上的一个拓扑;因为它满足拓扑三公理 O_1,O_2,O_3.

例 15 X 上任意两个拓扑 τ_1、τ_2 的交集 $\tau_1\cap\tau_2$ 也是 X 上的一个拓扑. 因为由 O_1,τ_1 与 τ_2 都含有 X 与 $\varnothing$,故 $\tau_1\cap\tau_2$ 也含有 X 与 $\varnothing$,即 $\tau_1\cap\tau_2$ 满足 O_1. 又若 $W,V\in\tau_1\cap\tau_2$,则 $W,V\in\tau_1$ 和 $W,V\in\tau_2$,因为 τ_1、τ_2 是拓扑,所以 $W\cap V\in\tau_1$ 和 $W\cap V\in\tau_2$,从而 $W\cap V\in\tau_1\cap\tau_2$. 即 $\tau_1\cap\tau_2$ 满足 O_2. 类似可证 $\tau_1\cap\tau_2$ 满足 O_3.

定理 5-24 设 $\{\tau_i \mid i\in I\}$ 是集 X 上的任何一簇拓扑,则交 $\bigcap_i \tau_i$ 也是 X 上的一个拓扑.

但是,拓扑之并不一定是拓扑.

例 16 设 $X=\{a,b,c\}$,则

$$\tau_1=\{X,\varnothing,\{a\}\}\text{和 }\tau_2=\{x,\varnothing,\{b\}\}$$

都是 X 上拓扑,但 $\tau_1\cup\tau_2=\{X,\varnothing,\{a\},\{b\}\}$ 不是 X 上拓扑. 这是因为虽然 $\{a\}\in\tau_1\cup\tau_2$,$\{b\}\in\tau_1\cup\tau_2$,但 $\{a\}\cup\{b\}=\{a,b\}\notin\tau_1\cup\tau_2$.

拓扑空间是比度量空间更广泛的一类空间. 在拓扑空间中,只要规定了开集,就可利用开集定义邻域,其内点、闭集等概念,定义方法与度量空间相同.

定义 5-24 设 X 是一拓扑空间,$W\subset X$,$x\in X$,如果存在 X 中的开集 G,使得 $x\in G\subset W$,则称 W 是 x 的一个邻域. x 的一切邻域构成的集合,称为 x 的邻域系,记作 $\mu(x)$.

由定义,包含 x 的 G 是开集,但邻域 W 不一定是开集.

x 的邻域系 $\mu(x)$ 具有下列基本性质:

(1)x 的任何邻域包含 x,且任何 x 至少有一个邻域($\mu(x)\neq$

$\emptyset$,且对任意 $V\in\mu(x)$,则 $x\in V$);

(2)x 的两个邻域的交是 x 的邻域(若 $V,W\in\mu(x)$,则 $V\cap W\in\mu(x)$);

(3)包含 x 的任何邻域的集合是 x 的邻域(若 $V\in\mu(x)$, $V\subset W$,则 $W\in\mu(x)$);

(4)如果 V 是 x 的邻域,那么存在 x 的子邻域 $W\subset V$,使得 V 是 W 的每一点邻域(对任意 $V\in\mu(x)$,则存在 $W\in\mu(x)$,使得 $W\subset V$,且对任意的 $x\in W$,有 $W\in\mu(x)$).

这四条性质的意义是:由性质(1),X 的每一点都在它的任意邻域中;由性质(2),邻域系关于有限交运算封闭;由性质(3),包含某点邻域的集合仍然是该点的邻域;由性质(4),点的邻域也是充分“接近”该点的其它点的邻域.

定理 5-25 设 X 是一拓扑空间,而 W 是 X 的子集,则 W 是开集的充要条件是 W 是其所含的每一点的邻域.

§5 反演集合度量空间

§5.1 反演集合中的度量

在反演集合 $Z=(A,\bar{A})=\{((x,f_A(x)),(x,f_{\bar{A}}(x)))\mid x\in U\}$ 中,我们可以分别在 A 和 $\bar{A}$ 上建立度量空间 (A,ρ_A) 和 $(\bar{A},\rho_{\bar{A}})$. 在本书中,我们仅讨论 ρ_A 和 $\rho_{\bar{A}}$ 是同一度量情形. 我们将 ρ_A 和 $\rho_{\bar{A}}$ 分别看成是同一度量 ρ 在 A 上的限制 $\rho\mid A$,记为 ρ_A;和 ρ 在 $\bar{A}$ 上的限制 $\rho\mid\bar{A}$,记为 $\rho_{\bar{A}}$. 则 (A,ρ_A) 和 $(\bar{A},\rho_{\bar{A}})$ 都是用度量 ρ 建立的度量空间. 并且 (A,ρ_A) 满足:

任意 $x_A,y_A,z_A\in A$,有

(1)$\rho_A(x_A,y_A)\geqslant 0$，且 $\rho_A(x_A,y_A)=0$，当且仅当 $x_A=y_A$

(2)$\rho_A(x_A,y_A)=\rho_A(y_A,x_A)$

(3)$\rho_A(x_A,z_A)\leqslant\rho_A(x_A,y_A)+\rho_A(y_A,z_A)$

$(\bar{A},\rho_{\bar{A}})$满足：

任意 $x_{\bar{A}},y_{\bar{A}},z_{\bar{A}}\in\bar{A}$，有

(1)$\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})\geqslant 0$，且 $\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})=0$，当且仅当 $x_{\bar{A}}=y_{\bar{A}}$

(2)$\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})=\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},x_{\bar{A}})$

(3)$\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},z_{\bar{A}})\leqslant\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})+\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},z_{\bar{A}})$

反演集合度量空间定义：

定义 5-25 如果在反演集合 $Z=(A,\bar{A})$中存在一度量 ρ，ρ 的限制ρ_A和$\rho_{\bar{A}}$分别使得(A,ρ_A)和$(\bar{A},\rho_{\bar{A}})$都是度量空间，则称(Z,ρ)为反演度量空间，其中，对于任意 $x=(x_A,x_{\bar{A}})$，$y=(y_A,y_{\bar{A}})$，$z=(z_A,z_{\bar{A}})\in Z=(A,\bar{A})$，$\rho=(\rho_A,\rho_{\bar{A}})$有：

(1)$\rho(x,y)+\rho(y,z)$

$=(\rho_A(x_A,y_A),\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}}))+(\rho_A(y_A,z_A),\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},z_{\bar{A}}))$

$=(\rho_A(x_A,y_A)+\rho_A(y_A,z_A),\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})+\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},z_{\bar{A}}))$

(2)$\rho(x,y)-\rho(y,z)$

$=(\rho_A(x_A,y_A),\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}}))-(\rho_A(y_A,z_A),\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},z_{\bar{A}}))$

$=(\rho_A(x_A,y_A)-\rho_A(y_A,z_A),\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})-\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},z_{\bar{A}}))$

(3)$\rho(x,y)\circ\rho(y,z)$

$=(\rho_A(x_A,y_A),\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}}))\circ(\rho_A(y_A,z_A),\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},z_{\bar{A}}))$

$=(\rho_A(x_A,y_A)\circ\rho_A(y_A,z_A),\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})\circ\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},z_{\bar{A}}))$

上述定义中，ρ_A 是A 上度量，$\rho_{\bar{A}}$ 是$\bar{A}$ 上度量；$x=(x_A,x_{\bar{A}})$，$y=(y_A,y_{\bar{A}})$，$z=(z_A,z_{\bar{A}})\in Z=(A,\bar{A})$(即 $x,y,z\in Z$)，则表示是 x_A，y_A，$z_A\in A$ 和 $x_{\bar{A}},y_{\bar{A}},z_{\bar{A}}\in\bar{A}$. 今后我们说反演集合 $Z=(A,\bar{A})$中有元素 $x=(x_A,x_{\bar{A}})$，$y=(y_A,y_{\bar{A}})$，$z=(z_A,z_{\bar{A}})\in Z=(A,\bar{A})$(或简单写成 $x,y,z\in Z$)成立，既表示是 $x_A,y_A,z_A\in A$ 和 $x_{\bar{A}},y_{\bar{A}},z_{\bar{A}}\in\bar{A}$ 同

时成立.

定理 5 - 26　设(Z,ρ)为度量空间,对于任意 $x=(x_A,x_{\bar{A}})$, $y=(y_A,y_{\bar{A}})$, $z=(z_A,z_{\bar{A}})\in Z=(A,\bar{A})$, $\rho=(\rho_A,\rho_{\bar{A}})$有

(1)$\rho(x,y)\geqslant 0$ 当且仅当同时满足 $\rho_A(x_A,y_A)\geqslant 0$ 和 $\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})\geqslant 0$; $\rho(x,y)=0$ 当且仅当同时满足 $\rho_A(x_A,y_A)=0$ 和 $\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})=0$

(2)$\rho(x,y)=\rho(y,x)$,当且仅当同时满足:$\rho_A(x_A,y_A)=\rho(y_A,x_A)$和 $\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})=\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},x_{\bar{A}})$

(3)$\rho(x,z)\leqslant\rho(x,y)+\rho(y,z)$当且仅当同时满足:

$\rho_A(x_A,z_A)\leqslant\rho_A(x_A,y_A)+\rho_A(y_A,z_A)$和 $\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},z_{\bar{A}})\leqslant\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})+\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},z_{\bar{A}})$

证明:　(1)显然 $\rho(x,y)\geqslant 0$,现证明 $\rho(x,y)=0$ 当且仅当同时满足 $\rho_A(x_A,y_A)=0$ 和 $\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})=0$;

当 $\rho_A(x_A,y_A)=0$, $\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})=0$, 由定义 $\rho(x,y)=(\rho_A(x_A,y_A),\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}}))=(0,0)=0$;反之 $\rho(x,y)=0$,则显然必须有 $\rho_A(x_A,y_A)=0$, $\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})=0$

(2)$\rho(x,y)=(\rho_A(x_A,y_A),\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}}))$

$=(\rho_A(y_A,x_A),\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},x_{\bar{A}}))$

$=\rho(y,x)$

(3)$\rho(x,y)+\rho(y,z)=(\rho_A(x_A,y_A)+\rho_A(y_A,z_A),\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})+\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},z_{\bar{A}}))$

因为

$\rho_A(x_A,y_A)+\rho_A(y_A,z_A)\geqslant\rho_A(x_A,z_A)$, $\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})+\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},z_{\bar{A}})\geqslant\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},z_{\bar{A}})$,

所以

$$(\rho_A(x_A,y_A)+\rho_A(y_A,z_A),\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},y_{\bar{A}})+\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},z_{\bar{A}}))\geqslant(\rho_A(x_A,z_A),\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},z_{\bar{A}}))=\rho(x,z),$$

即 $\rho(x,y)+\rho(y,z)\geq\rho(x,y)$. 证毕.

§5.2 反演集合度量空间中的点收敛

反演集合度量空间中的点列收敛概念与普通集合度量空间中的点列收敛类似,点列$\{x_i\}$收敛于点 x,就其直观的通俗的含义来说,就是 $x_i=(x_{A_i},x_{\bar{A}_i})$距 $x=(x_A,x_{\bar{A}})$可以无限接近,只要 i 充分地大,要多接近就可以有多接近. 换言之,$x_i\to x$,就是 $x_{A_i}\to x_A$ 且 $x_{\bar{A}_i}\to x_{\bar{A}}$. 反演集合度量空间 $Z=(A,\bar{A})$上具有距离结构,自然就有了远近关系,从而借助距离概念定义了收敛:

定义 5-26 反演集合度量空间 Z 中的点列$\{x_i\}$收敛于点 x 是指对于任意给定的 $\varepsilon>0$,存在 N,使得 $\rho(x,x_i)<\varepsilon$(既 $=(\rho(x_A,x_{A_i})<\varepsilon,\rho(x_{\bar{A}},x_{\bar{A}_i})<\varepsilon)$),对一切 $i\geq N$ 恒成立.

§5.3 反演集合中的邻域

定义 5-27 在反演集合 $Z=(A,\bar{A})$中,设(A,ρ_A)和$(\bar{A},\rho_{\bar{A}})$都是度量空间,对于任意给定的 $x=(x_A,x_{\bar{A}})\in Z$,$B_A(x_A,\varepsilon,A)=\{y_A\mid y_A\in A,\rho_A(y_A,x_A)<\varepsilon\}$表示$A$ 中以 x_A 为中心以ε 为半径的球形邻域,$B_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},\varepsilon,\bar{A})=\{y_{\bar{A}}\mid y_{\bar{A}}\in\bar{A},\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},x_{\bar{A}})<\varepsilon\}$表示$\bar{A}$ 中的以 $x_{\bar{A}}$ 为中心以ε 为半径的球形邻域.

反演集合度量空间中的球形邻域定义:

定义 5-28 设(Z,ρ)为反演集合度量空间,$x=(x_A,x_{\bar{A}})\in Z$,对于任给的实数 $\varepsilon>0$,集合$\{y\mid y=(y_A,y_{\bar{A}})\in Z,\rho_A(y_A,x_A)<\varepsilon,\rho_{\bar{A}}(y_{\bar{A}},x_{\bar{A}})<\varepsilon\}$记作 $B_z(x,\varepsilon,Z)$,称为以 x 为中心以ε 为半径的开球或球形邻域,或简称为 x 的ε-开球或ε-邻域.

从定义可以看出,反演集合度量空间中的球形邻域,是分别在

正反集合 A、$\tilde{A}$ 中的一对开球(见图 5-30).

定义 5-29　设 Z 是一反演度量空间,$x\in Z$,$W=(W_A,W_{\tilde{A}})\subset Z$,若存在开球 $B(x,\varepsilon,Z)$,使得 $B(x,\varepsilon,Z)\subset W$,则称 W 是 $x=(x_A,x_{\tilde{A}})$的一个邻域(见图 5-31). $x=(x_A,x_{\tilde{A}})$的邻域全体称为 $x=(x_A,x_{\tilde{A}})$的邻域系,记作 $\mathcal{N}(x)=(\mathcal{N}_A(x_A),\mathcal{N}_{\tilde{A}}(x_{\tilde{A}}))$.

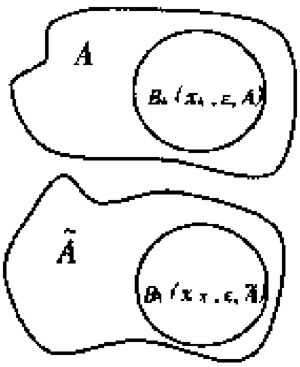


图 5-30

由定义,包含 $x=(x_A,x_{\tilde{A}})$的开球都是 $x=(x_A,x_{\tilde{A}})$的邻域,但邻域不一定都是反演开集,并且由于 W_A 和 $W_{\tilde{A}}$ 可能不是同时为反演闭集或同时为反演开集,所以邻域 W 有可能是既不是反演开集,也不是反演闭集.(反演开集和反演闭集定义见后面定义 5-30、5-31)

定理 5-27　设 $x=(x_A,x_{\tilde{A}})$为度量空间 $Z=(A,\tilde{A})$中的一点,$x=(x_A,x_{\tilde{A}})$的邻域系记为 $\mathcal{N}(x)=(\mathcal{N}_A(x_A),\mathcal{N}_{\tilde{A}}(x_{\tilde{A}}))$; Z 中的点列 $\{x_i\}=(x_{A_i},x_{\tilde{A}_i})$收敛于点 $x=(x_A,x_{\tilde{A}})$的充要条件是:对于 $x=(x_A,x_{\tilde{A}})$的任意一个邻域 $V=(V_A,V_{\tilde{A}})\in\mathcal{N}(x)=(\mathcal{N}_A(x_A),\mathcal{N}_{\tilde{A}}(x_{\tilde{A}}))$,存在 N,使得 $x_i=(x_{A_i},x_{\tilde{A}_i})\in V=(V_A,V_{\tilde{A}})$对一切 $i\geqslant N$ 恒成立.

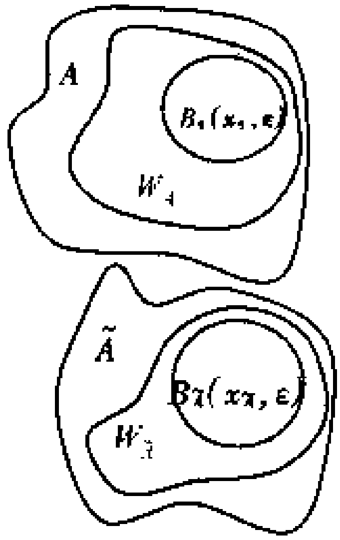


图 5-31

证明:　由定理 5-10,可知(A,ρ_A)和$(\tilde{A},\rho_{\tilde{A}})$分别成立,所以$(Z,\rho)=((A,\rho_A),(\tilde{A},\rho_{\tilde{A}}))$成立,证毕.

定理 5-28　度量空间 Z 中的一子集 $V=(V_A,V_{\tilde{A}})$是 $x=(x_A,x_{\tilde{A}})$的邻域的充要条件是对于每一个收敛于 $x=(x_A,x_{\tilde{A}})$的点列

$\{x_i\}=\{(x_{A_i},x_{\bar{A}_i})\}$,都存在自然数 N,使得 $i\geqslant N$ 时,$x_i=(x_{A_i},x_{\bar{A}_i})\in V=(V_A,V_{\bar{A}})$.

证明: 由定理 5-11,可知(A,ρ_A)和$(\bar{A},\rho_{\bar{A}})$分别成立,所以$(Z,\rho)=((A,\rho_A),(\bar{A},\rho_{\bar{A}}))$成立.证毕.

§5.4 反演集合中的开集

反演集合度量空间中的开集定义:

定义 5-30 令 Z 为反演集合度量空间,若对于 Z 的子集 $V=(V_A,V_{\bar{A}})$中的每一点 $x=(x_A,x_{\bar{A}})$,$V=(V_A,V_{\bar{A}})$包含 $x=(x_A,x_{\bar{A}})$的、在 Z 中的某邻域,则称子集 V 为 Z 的反演开集.

上述定义可重述如下:对于任意一点 $x=(x_A,x_{\bar{A}})\in V=(V_A,V_{\bar{A}})$,存在有正数 $\varepsilon>0$,使得

$B(x,\varepsilon,Z)=(B(x_A,\varepsilon,A),B(x_{\bar{A}},\varepsilon,\bar{A}))=(B_A(x_A,\varepsilon),B_{\bar{A}}(x_{\bar{A}},\varepsilon))\subset V=(V_A,V_{\bar{A}})$,则称子集 V 为 Z 的反演开集.

反演集合开集特征:

若 $V=(V_A,V_{\bar{A}})$是 $x=(x_A,x_{\bar{A}})$的邻域,我们称 $x=(x_A,x_{\bar{A}})$是 V 的内点.若 V 中每一点都有邻域,则称 V 为反演开集.换言之,每一点都是其内点的集叫做反演开集.

定理 5-29 若 $W=(W_A,W_{\bar{A}})$与 $V=(V_A,V_{\bar{A}})$都是 $Z=(A,\bar{A})$的反演开集,则它们的交集 $W\cap V=(W_A\cap V_A,W_{\bar{A}}\cap V_{\bar{A}})$是 $Z=(A,\bar{A})$的一个反演开集.Z 的任何有限个反演开集的交集是 Z 的一个反演开集.(见图 5-32)

证明: 由定理 5-14,可知 $W_A\cap V_A$,和 $W_{\bar{A}}\cap V_{\bar{A}}$ 分别是开集,所以 $W\cap V$ 是反演开集.证毕.

定理 5-30 空集 $\emptyset=(\emptyset_A,\emptyset_{\bar{A}})$(这里 $\emptyset_A=\emptyset_{\bar{A}}=\emptyset$)是 $Z=(A,\bar{A})$的一个反演开集,并且 $Z=(A,\bar{A})$自身是 $Z=(A,\bar{A})$的一

个反演开集.

证明： 由定理 5-15 可知 $\emptyset, A, \bar{A}$ 分别是开集，所以 $\emptyset$ 和 Z 是反演开集. 证毕.

定理 5-31　Z 的任意多个反演开集的并集是 Z 的一个反演开集.

证明： 类似定理 5-30 证明方法，由定理 5-16 可推知. 证毕.

这些结果表明，反演集合的开集族同普通集合开集族一样是很庞大的. 通过作邻域的并集能无止境地作各种各样的反演开集.

Z 的一个反演开集 $V=(V_A, V_{\bar{A}})$ 的主要性质是给它下定义的性质：每一个 $x=(x_A, x_{\bar{A}}) \in V=(V_A, V_{\bar{A}})$ 有一个邻域 $B(x, \epsilon, Z)=(B(x_A, \epsilon, A), B(x_{\bar{A}}, \epsilon, \bar{A})) \subset V=(V_A, V_{\bar{A}})$.

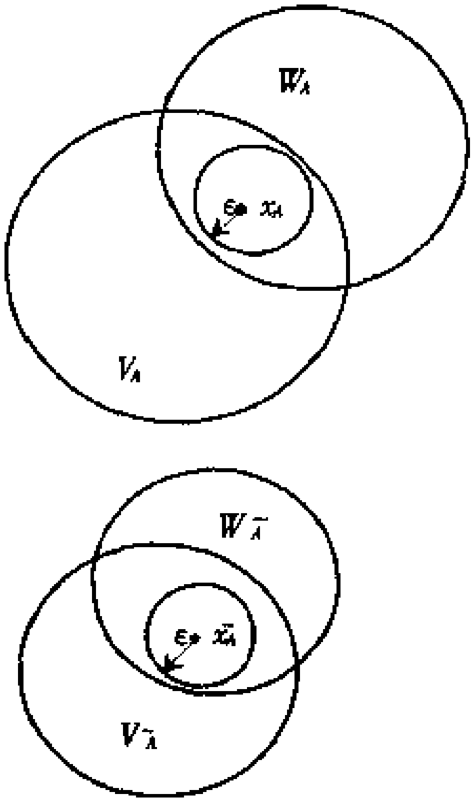


图 5-32

对于单独一个反演开集，所能说的只是这一句话，并无其他. 但对于 Z 的反演开集族 $\mathcal{N}(x)=(\mathcal{N}_A(x_A), \mathcal{N}_{\bar{A}}(x_{\bar{A}}))$ 还有如下性质：反演开集族的元素包括空集 $\emptyset=(\emptyset, \emptyset)$ 和 Z 自身以及每个开球 $B(x, r, Z)$，此外还包括它的任意有限个元素的交集，以及任意有限个或无穷多个元素的并集.

定理 5-32　设 (Z, ρ) 是一反演集合度量空间，$M=(M_A, M_{\bar{A}})$ 是 Z 的一个真子集. 则 $M=(M_A, M_{\bar{A}})$ 的子集 $G_M=(G_{M_A}, G_{M_{\bar{A}}})$ 是 $(M, \rho)=((M_A, \rho_A), (M_{\bar{A}}, \rho_{\bar{A}}))$ 的开子集，当且仅当存在 (Z, ρ) 的一个开子集 $G_Z=(G_{Z_A}, G_{Z_{\bar{A}}})$，满足 $G_M=(G_{M_A}, G_{M_{\bar{A}}})=M \cap G_Z=$

$(M_A, M_{\bar{A}}) \cap (G_{Z_A}, G_{Z_{\bar{A}}}) = (M_A \cap G_{Z_A}, M_{\bar{A}} \cap G_{Z_{\bar{A}}})$这也就是说，一个集在$(M,\rho)$中是反演开集，必须而且只须它是 $M=(M_A, M_{\bar{A}})$与(Z,ρ)中一个反演开集的交.

证明： 由定理 5 - 12 不难推知．证毕.

归纳上述的讨论，可以得出反演开集有以下基本性质：

O_1：$\emptyset$ 与 Z 本身是反演开集；

O_2：有限多个反演开集之交是反演开集；

O_3：任意多个反演开集之并是反演开集.

我们后面建立反演集合拓扑空间定义时要用这一组重要的性质.

§5.5 反演集合中的闭集

下面我们讨论反演闭集.

定义 5 - 31 设 $Z=(A,\tilde{A})$是反演集合度量空间，$Z=(A,\bar{A})$的子集 $V=(V_A, V_{\bar{A}})$叫做 $Z=(A,\tilde{A})$的一个反演闭集，如果 $V=(V_A, V_{\bar{A}})$在 $Z=(A,\bar{A})$中的补集 $Z-V=(A-V_A, \bar{A}-V_{\bar{A}})$是 $Z=(A,\bar{A})$中的一个反演开集. 简短地说，$V=(V_A, V_{\bar{A}})$是反演闭集如果 $Z-V=(A-V_A, \tilde{A}-V_{\bar{A}})$是反演开集.

引用反演开集的定义，就得出 V 是 Z 的反演闭集的检验法：$Z-V$中的每一点都有一个不与 V 相交的邻域.

例 17 任意 $x \in Z$，单点集$\{x\}=\{(x_A, x_{\bar{A}})\}$是 $Z=(A,\bar{A})$中的反演闭集.

显然有$\{x\} \subset Z$. 对任意 $y \in Z$，且 $y \neq x$，有 $y=(y_A, y_{\bar{A}}) \in (Z-\{x\})=(A-\{x_{\bar{A}}\}, \bar{A}-\{x_{\bar{A}}\})$. 取 $r<\rho(x,y)$(即 $r<\rho_A(x_A, y_A)$ 和 $r<\rho_{\bar{A}}(x_{\bar{A}}, y_{\bar{A}})$)，则存在 $B(y,r,Z) \subset Z$(即 $B(y_A, r, A) \subset A$，$B(y_{\bar{A}}, r, \bar{A}) \subset \bar{A}$)所以 $Z-\{x\}=(A-\{x_A\}, \bar{A}-\{x_{\bar{A}}\})$是反演开集. 故$\{x\}$是 Z 中的反演闭集.

$Z=(A,\tilde{A})$中的一个集合 $V=(V_A,V_{\tilde{A}})$与它的补集 $Z-V=(A-V_A,\tilde{A}-V_{\tilde{A}})$之间的关系是互逆的：$Z-V=(A-V_A,\tilde{A}-V_{\tilde{A}})$的补集是 $V=(V_A,V_{\tilde{A}})$. 在 $Z=(A,\tilde{A})$的子集之间的这种对应关系叫做 $Z=(A,\tilde{A})$中的对偶性. 反演开集和反演闭集是对偶概念，因为一个反演开集的对偶是一个反演闭集，并且反过来，一个反演闭集的对偶也是一个反演开集.

由于反演开集和反演闭集之间的这种对偶性，我们能从已经证明的关于反演开集的每个定理推演出关于反演闭集的一个正确的"对偶"定理. 在作出对偶命题时，重要的办法是利用下述事实：并集和交集在下述意义下是"对偶"运算. $W=(W_A,W_{\tilde{A}})$与 $V=(V_A,V_{\tilde{A}})$的并集的补集，是 $W=(W_A,W_{\tilde{A}})$的与 $V=(V_A,V_{\tilde{A}})$的补集的交集：

$$Z-(W\cup V)=(Z-W)\cap(Z-V).$$

(既$(A,\tilde{A})-(W_A,W_{\tilde{A}})\cup(V_A,V_{\tilde{A}})=(A,\tilde{A})-(W_A\cup V_A,W_{\tilde{A}}\cup V_{\tilde{A}})=(A-(W_A\cup V_A),\tilde{A}-(W_{\tilde{A}}\cup V_{\tilde{A}}))=((A-W_A)\cap(A-V_A),(\tilde{A}-W_{\tilde{A}})\cap(\tilde{A}-V_{\tilde{A}}))=(Z-W)\cap(Z-V)$)

同样地，W 与 V 的交集的补集，是 W 的与 V 的补集的并集：

$$Z-(W\cap V)=(Z-W)\cup(Z-V)$$

(即$(A,\tilde{A})-(W_A,W_{\tilde{A}})\cap(V_A,V_{\tilde{A}})=(A,\tilde{A})-(W_A\cap V_A,W_{\tilde{A}}\cap V_{\tilde{A}})=(A-(W_A\cap V_A),\tilde{A}-(W_{\tilde{A}}\cap V_{\tilde{A}}))=((A-W_A)\cup(A-V_A),(\tilde{A}-W_{\tilde{A}})\cup(\tilde{A}-V_{\tilde{A}}))=(Z-W)\cup(Z-V)$)

于是给出对偶：下面四个关于反演闭集的定理对应于那些关于反演开集已经证明的定理.

定理 5-33　若 $W=(W_A,W_{\tilde{A}})$与 $V=(V_A,V_{\tilde{A}})$都是 $Z=(A,\tilde{A})$的反演闭集，则它们的并集 $W\cup V=(W_A\cup V_A,W_{\tilde{A}}\cup V_{\tilde{A}})$是 $Z=(A,\tilde{A})$的一个反演闭集. $Z=(A,\tilde{A})$的任意有限个反演闭集的并集是 Z 的一个反演闭集.

定理 5-34　空集 $\varnothing=(\varnothing,\varnothing)$和 $Z=(A,\tilde{A})$都是反演闭集.

我们在讨论反演开集时，知道 $\emptyset$ 和 Z 都是反演开集.这里我们只须注意到 $\emptyset$ 和 Z 在 Z 中互为补集：

$$Z-\emptyset=(A-\emptyset,\bar{A}-\emptyset)=(A,\bar{A})=Z$$

而 $Z-Z=(A-A,\bar{A}-\bar{A})=(\emptyset,\emptyset)=\emptyset$

所以 $\emptyset$ 和 Z 即都是反演开集又都是反演闭集.

定理 5-35 $Z=(A,\bar{A})$ 中的任意多个反演闭集的交集是 $Z=(A,\bar{A})$ 的一个反演闭集.

定理 5-36 若 $Z\subset R^n$（既 $A\subset R^n$，$\bar{A}\subset R^n$），则 $Z=(A,\bar{A})$ 的反演闭集族就是 Z 中的 A 与 $\bar{A}$ 自身分别交 R^n 的全体反演闭集的交集族.

设 $V=(V_A,V_{\bar{A}})\subset Z\subset R^n$，而 V 是 R^n 的反演闭集，则本定理断言 $V\cap Z=(V_A\cap A,V_{\bar{A}}\cap\bar{A})$ 是 $Z=(A,\bar{A})$ 的反演闭集.因为 $V\cap Z=V=(V_A,V_{\bar{A}})$，故有

推论 设 $V=(V_A,V_{\bar{A}})$ 是 R^n 中的一个反演闭集（既 V_A 和 $V_{\bar{A}}$ 都是 R^n 的闭集），如果 R^n 的反演子集 $Z=(A,\bar{A})$ 包含 $V=(V_A,V_{\bar{A}})$，则 $V=(V_A,V_{\bar{A}})$ 是 $Z=(A,\bar{A})$ 的一个反演闭集.

从上面的讨论中可以看出，反演闭集有以下基本性质：

C_1：$\emptyset$ 与 Z 本身是反演闭集；

C_2：有限多个反演闭集之并是反演闭集；

C_3：任意多个反演闭集之交是反演闭集.

§5.6 反演映射对的连续性

我们利用反演开集概念来阐述反演映射对 f_A、$f_{\bar{A}}$ 的连续性.

定理 5-37 设 X、$\bar{X}$、$U\subset R^n$，映射对 $f_A:U\to X$，$f_{\bar{A}}:U\to\bar{X}$，都是连续的充分必要条件是 X 和 $\bar{X}$ 中的每个反演开集 $V=(V_A,V_{\bar{A}})$ 的逆像 $f_A^{-1}(V_A)$ 和 $f_{\bar{A}}^{-1}(V_{\bar{A}})$ 是 U 中的共同的一个开集（见图 5-33）.

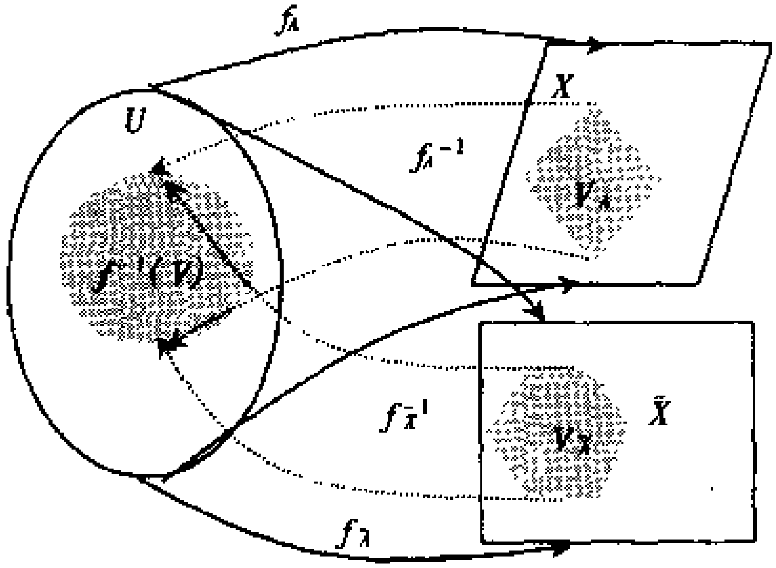


图 5－33

证明： 由定理 5－21 可知 f_A 和 $f_{\bar{A}}$ 分别成立，而由反演集合定义可知 $f_A^{-1}(V_A)=f_{\bar{A}}^{-1}(V_{\bar{A}})$，所以 $f_A^{-1}(V_A)$ 和 $f_{\bar{A}}^{-1}(V_{\bar{A}})$ 是 U 中的一个共同的开集. 证毕.

等价地有：

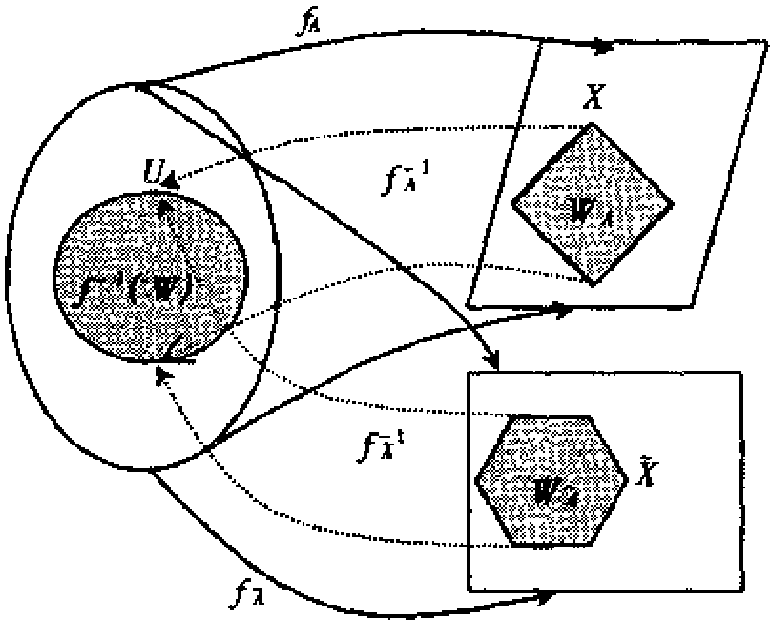


图 5－34

定理 5－38 映射对 $f_A:U\to X$，$f_{\bar{A}}:U\to\bar{X}$，都是连续的充分必

要条件是 X 和 $\tilde{X}$ 中的每个反演闭集 $W=(W_A, W_{\bar{A}})$ 的逆象 $f_A^{-1}(W_{\bar{A}})$ 和 $f_{\bar{A}}^{-1}(W_{\bar{A}})$ 是 U 中的一个共同的闭集.(见图 5－34)

证明:由定理 5－22 可推知.

我们现在整理一下上述度量空间中建立邻域、开集、闭集概念的思路(见图 5－35):

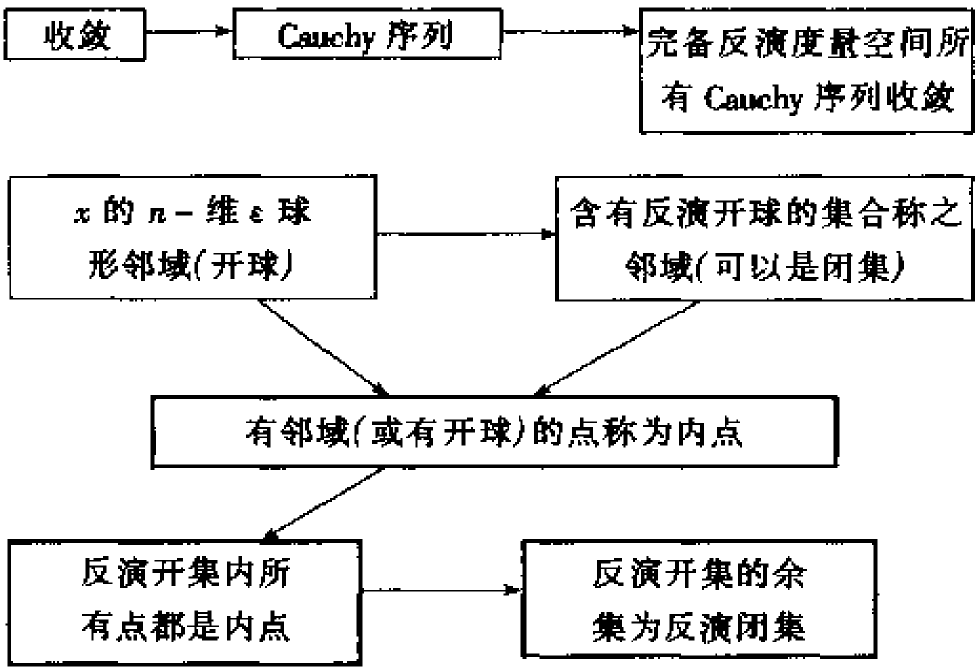


图 5－35

§6 反演集合拓扑空间

我们现在归纳一下建立反演集合度量空间和下面准备建立反演集合拓扑空间的思维方法(图 5－36).

上一节中,我们由普通集合度量空间三公理推广出反演集合度量空间三公理,由此建立反演集合度量空间.进而从反演集合度量空间中提炼出“反演开集”概念.现在我们在“反演开集”的基础上抽象成反演拓扑空间三公理,从而推广出反演拓扑空间(见图 5－36).我们有:

反演度量空间⊂反演拓扑空间.

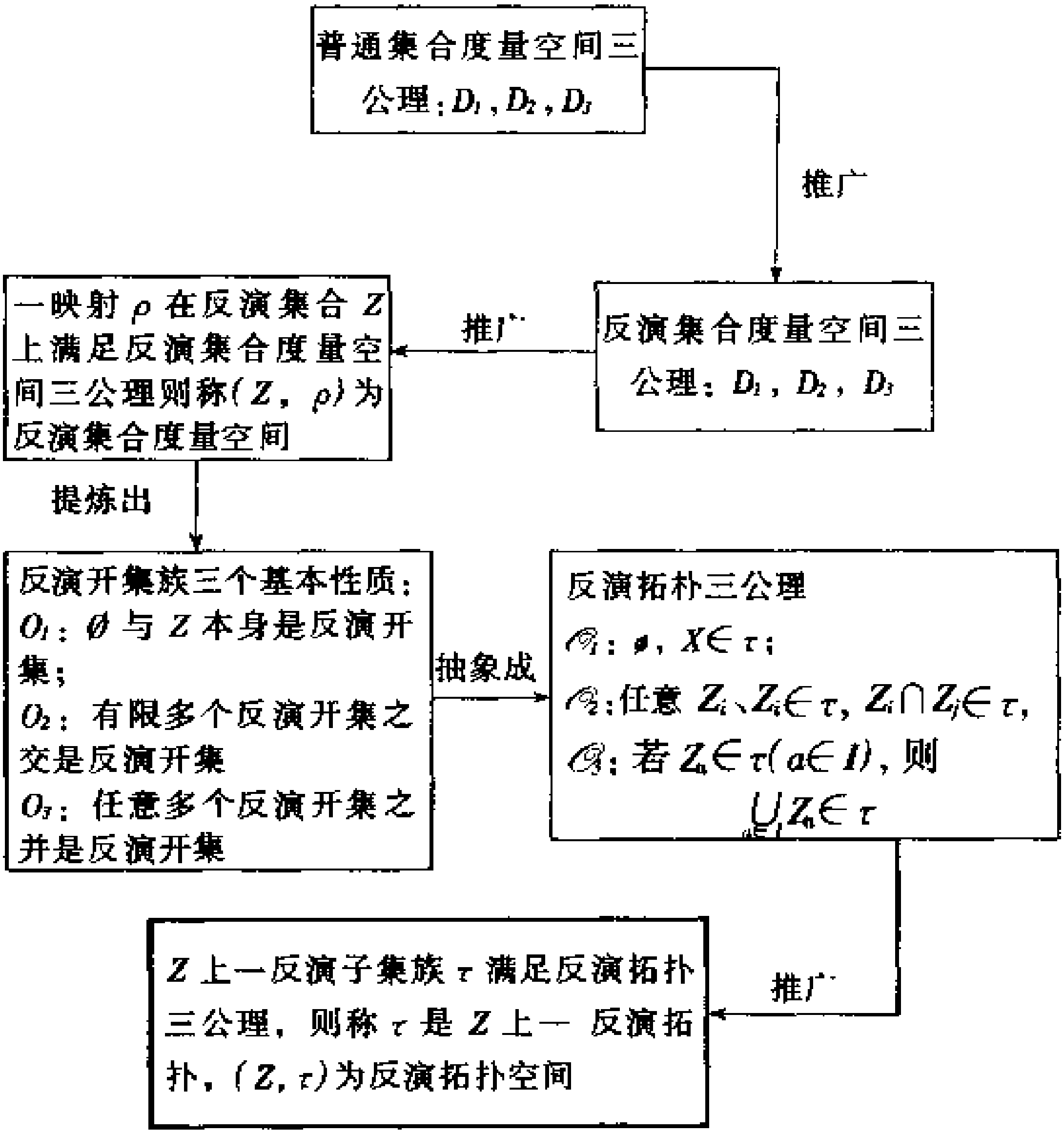


图 5-36

对于任意一族反演子集合$\{Z_i \mid i\in I\} = \{(A_i,\tilde{A}_i)\mid i\in I\}$(其中,$I$是指标集合),我们可以给出反演拓扑空间定义:

定义 5-32　设 Z 是反演集合,$\tau=(\tau_A,\tau_{\tilde{A}})$是 $Z=(A,\tilde{A})$中的一族反演子集合,它满足下列条件:

$\mathcal{O}_1$: $\emptyset, Z\in\tau$;

$\mathscr{O}_2$:对任意的 Z_i、$Z_j\in\tau$,$Z_i\cap Z_j\in\tau$;

$\mathscr{O}_3$:若 $Z_a\in\tau(a\in I)$,其中 I 是任意指标集,则

$\bigcup\limits_{a\in I}Z_a\in\tau$

则称 $\tau=(\tau_A,\tau_{\bar{A}})$为 $Z=(A,\bar{A})$的一个反演拓扑,称偶对$(Z,\tau)=((A,\tau_A),(\bar{A},\tau_{\bar{A}}))$为反演拓扑空间. 其中,$\tau$ 中每一个元称为反演开集对,反演开集对的两个开集分别属于 τ_A 和 $\tau_{\bar{A}}$,反演开集对的补集称为反演闭集对.

上述定义中,$\varnothing$、$Z\in\tau$ 表示 $\varnothing$、$A\in\tau_A$ 和 $\varnothing$、$\bar{A}\in\tau_{\bar{A}}$;Z_i、Z_j 表示 A_i、$A_j\in\tau_A$ 和 $\bar{A}_i$、$\bar{A}_j\in\tau_{\bar{A}}$;$Z_i\cap Z_j\in\tau$ 表示 $A_i\cap A_j\in\tau_A$ 和 $\bar{A}_i\cap\bar{A}_j\in\tau_{\bar{A}}$;任意元素 $x=(x_A,x_{\bar{A}})\in Z=(A,\bar{A})$,则表示 $x_A\in A$ 且 $x_{\bar{A}}\in\bar{A}$.

同普通拓扑空间相同,我们是从上面反演度量空间中的反演开集概念中抽象出来的反演拓扑公理出发,构造出一个反演拓扑空间$(Z,\tau)=((A,\tau_A),(\bar{A},\tau_{\bar{A}}))$.但反演拓扑空间中反演开集的概念不是预先定义的,而是先给出反演拓扑结构之后,称反演拓扑结构中满足反演拓扑公理条件的成员为“反演开集”.

上述定义可以重述如下:反演集合 $Z=(A,\bar{A})$上的一个反演拓扑是由 $\tau=(\tau_A,\tau_{\bar{A}})$的子集所构成的一个非空集,它的成员叫做反演开集,它们满足下列要求:任意多个反演开集的并集是反演开集,有限多个反演开集的交集是反演开集,Z 与空集是反演开集. 反演集合 Z 配备了它上面的一个反演拓扑以后叫作一个反演拓扑空间.

例 18　考察 $Z=(A,\bar{A})=(\{a_A,b_A,c_A,d_A,e_A\},\{a_{\bar{A}},b_{\bar{A}},c_{\bar{A}},d_{\bar{A}},e_{\bar{A}}\})$的下列子集组:

$$\tau_1=\{Z,\varnothing,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$
$$=(\tau_{A_1},\tau_{\bar{A}_1})$$
$$=(\{A,\varnothing_A,\{a_A\},\{c_A,d_A\},\{a_A,c_A,d_A\},\{b_A,c_A,d_A,e_A\}\},\{\bar{A},\varnothing_{\bar{A}},\{a_{\bar{A}}\},\{c_{\bar{A}},d_{\bar{A}}\},\{a_{\bar{A}},c_{\bar{A}},d_{\bar{A}}\},\{b_{\bar{A}},c_{\bar{A}},d_{\bar{A}},e_{\bar{A}}\}\})$$

$\tau_2=\{Z,\emptyset,\{a\},\{c,d\}\{a,c,d\}\{b,c,d\}\}$

$=(\tau_{A_2},\tau_{\bar{A}_2})$

$=(\{A,\emptyset_A,\{a_A\},\{c_A,d_A\},\{a_A,c_A,d_A\},\{b_A,c_A,d_A\}\},\{\bar{A},\emptyset_{\bar{A}},\{a_{\bar{A}}\},\{c_{\bar{A}},d_{\bar{A}}\},\{a_{\bar{A}},c_{\bar{A}},d_{\bar{A}}\},\{b_{\bar{A}},c_{\bar{A}},d_{\bar{A}}\}\})$

$\tau_3=\{Z,\emptyset,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\}\{a,b,d,e\}\}$

$=(\tau_{A_3},\tau_{\bar{A}_3})$

$=(\{A,\emptyset_A,\{a_A\},\{c_A,d_A\},\{a_A,c_A,d_A\}\{a_A,b_A,d_A,e_A\}\},\{\bar{A},\emptyset_{\bar{A}},\{a_{\bar{A}}\},\{c_{\bar{A}},d_{\bar{A}}\},\{a_{\bar{A}},c_{\bar{A}},d_{\bar{A}}\},\{a_{\bar{A}},b_{\bar{A}},d_{\bar{A}},e_{\bar{A}}\}\})$

则 τ_1 是 Z 上的一个拓扑,因为 $\tau_{A_1},\tau_{\bar{A}_1}$ 分别满足拓扑三公理 O_1,O_2,O_3,所以 τ_1 满足反演集合拓扑三公理 $\mathscr{O}_1,\mathscr{O}_1,\mathscr{O}_3$. τ_2 不是 Z 上的一个拓扑,因为 τ_{A_2} 中两个元素 $\{a_A,c_A,d_A\}$ 与 $\{b_A,c_a,d_A\}$ 的并 $\{a_A,b_A,c_A,d_A\}$ 不属于 τ_{A_2},所以 τ_{A_2} 不满足公理 O_3,故 τ_2 不能满足公理 $\mathscr{O}_3$. τ_3 也不是 Z 上的拓扑,因为 τ_{A_3} 中两个元素 $\{a_A,c_A,d_A\}$ 与 $\{a_A,b_A,d_A,e_A\}$ 的交 $\{a_A,d_A\}$ 不属于 τ_{A_3},即 τ_{A_3} 不满足公理 O_2,所以 τ_3 也不能满足公理 $\mathscr{O}_1$.

例 19 考察 $Z=(A,\bar{A})$ 的子集组:

$\tau=\{Z,\emptyset\}=(\{A,\emptyset_A\},\{\bar{A},\emptyset_{\bar{A}}\})=(\{A,\emptyset\},\{\bar{A},\emptyset\})$

因为 $\tau_A=\{A,\emptyset\},\tau_{\bar{A}}=\{\bar{A},\emptyset\}$ 分别都满足普通集合拓扑三公理 $\mathscr{O}_3,\mathscr{O}_1,\mathscr{O}_3$,所以它们都是拓扑空间;换言之,就是 $\tau=\{Z,\emptyset\}=(\{A,\emptyset\},\{\bar{A},\emptyset\})$ 满足反演集合拓扑三公理 $\mathscr{O}_1,\mathscr{O}_2,\mathscr{O}_3$,所以 $\tau=\{Z,\emptyset\}$ 是反演集合拓扑空间.

定理 5-39 Z 上任意两个反演拓扑 $\tau_1=(\tau_{A_1},\tau_{\bar{A}_1})$、$\tau_2=(\tau_{A_2},\tau_{\bar{A}_2})$ 的交集 $\tau_1\cap\tau_2=(\tau_{A_1}\cap\tau_{A_2},\tau_{\bar{A}_1}\cap\tau_{\bar{A}_2})$ 也是 Z 上的一个反演拓扑.

证明: 因为由 $\mathscr{O}_1$,τ_1 与 τ_2 都含有 Z 与 $\emptyset$,故 $\tau_1\cap\tau_2$ 也含有 Z 与 $\emptyset$,即 $\tau_1\cap\tau_2=(\tau_{A_1}\cap\tau_{A_2},\tau_{\bar{A}_1}\cap\tau_{\bar{A}_2})$ 满足 $\mathscr{O}_1$. 又若 $W=(W_A,W_{\bar{A}})$、$V=(V_A,V_{\bar{A}})\in\tau_1\cap\tau_2$,即 W_A、$V_A\in\tau_{A_1}\cap\tau_{A_2}$,$W_{\bar{A}}$、$V_{\bar{A}}\in\tau_{\bar{A}_1}\cap$

$\tau_{\tilde{A}_2}$,则 $W_A \in \tau_{A_1}$, $V_A \in \tau_{A_1}$, $W_A \in \tau_{A_2}$, $V_A \in \tau_{A_2}$, $W_{\tilde{A}} \in \tau_{\tilde{A}_1}$, $V_{\tilde{A}} \in \tau_{\tilde{A}_1}$, $W_{\tilde{A}} \in \tau_{\tilde{A}_2}$, $V_{\tilde{A}} \in \tau_{\tilde{A}_2}$,因为 $\tau_1 = (\tau_{A_1}, \tau_{\tilde{A}_1})$、$\tau_2 = (\tau_{A_2}, \tau_{\tilde{A}_2})$分别都是拓扑,所以 $W_A \in \tau_{A_1} \cap \tau_{A_2}$, $V_A \in \tau_{A_1} \cap \tau_{A_2}$, $W_{\tilde{A}} \in \tau_{\tilde{A}_1} \cap \tau_{\tilde{A}_2}$, $V_{\tilde{A}} \in \tau_{\tilde{A}_1} \cap \tau_{\tilde{A}_2}$,既 $W_A \cap V_A \in \tau_{A_1} \cap \tau_{A_2}$, $W_{\tilde{A}} \cap V_{\tilde{A}} \in \tau_{\tilde{A}_1} \cap \tau_{\tilde{A}_2}$,所以 $W \cap V = (W_A \cap V_A, W_{\tilde{A}} \cap V_{\tilde{A}}) \in \tau_1 \cap \tau_2 = (\tau_{A_1} \cap \tau_{A_2}, \tau_{\tilde{A}_1} \cap \tau_{\tilde{A}_2})$. 即 $\tau_1 \cap \tau_2 = (\tau_{A_1} \cap \tau_{A_2}, \tau_{\tilde{A}_1} \cap \tau_{\tilde{A}_2})$满足 $\mathcal{O}_2$.类似可证 $\tau_1 \cap \tau_2 = (\tau_{A_1} \cap \tau_{A_2}, \tau_{\tilde{A}_1} \cap \tau_{\tilde{A}_2})$满足 $\mathcal{O}_3$. 证毕.

定理 5-40 设$\{\tau_i \mid i \in I\}$是集 $Z = (A, \tilde{A})$上的任何一簇反演拓扑,则交$\cap \tau_i = (\cap \tau_{A_i}, \cap \tau_{\tilde{A}_i})$也是 $Z = (A, \tilde{A})$上的一个反演拓扑.

证明: 因为$\cap \tau_{A_i}$, $\cap \tau_{\tilde{A}_i}$都是普通集合拓扑空间之交,由定理 5-24 可知$\cap \tau_{A_i}$、$\cap \tau_{\tilde{A}_i}$都是拓扑. 故$(\cap \tau_{A_i}, \cap \tau_{\tilde{A}_i}) = \cap \tau_i$是反演集合拓扑空间. 证毕.

但是,反演拓扑之并不一定是拓扑.

例 20 设 $Z = \{a, b, c\} = (A, \tilde{A}) = (\{a_A, b_A, c_A\}, \{a_{\tilde{A}}, b_{\tilde{A}}, c_{\tilde{A}}\})$,则

$\tau_1 = \{Z, \emptyset, \{a\}\} = (\tau_{A_1}, \tau_{\tilde{A}_1}) = (\{A, \emptyset_A, \{a_A\}\}, \{\tilde{A}, \emptyset_{\tilde{A}}, \{a_{\tilde{A}}\}\})$

$\tau_2 = \{Z, \emptyset, \{b\}\} = (\tau_{A_2}, \tau_{\tilde{A}_2}) = (\{A, \emptyset_A, \{b_A\}\}, \{\tilde{A}, \emptyset_{\tilde{A}}, \{b_{\tilde{A}}\}\})$

都是 $Z = (A, \tilde{A})$上拓扑,但 $\tau_1 \cup \tau_2 = \{Z, \emptyset, \{a, b\}\} = (\{A, \emptyset_A, \{a_A, b_A\}\}, \{\tilde{A}, \emptyset_{\tilde{A}} \{a_{\tilde{A}}, b_{\tilde{A}}\}\})$不是 $Z = (A, \tilde{A})$上拓扑. 这是因为虽然,$\{a\} \in \tau_1 \cup \tau_2$, $\{b\} \in \tau_1 \in \cup \tau_2$,但$\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \notin \tau_1 \cup \tau_2$.

反演拓扑空间是比反演度量空间更广泛的一类空间. 在反演拓扑空间中,只要规定了反演开集,就可利用反演开集定义邻域,其反演内点、反演闭集等概念定义方法与反演度量空间中方法相同.

定义 5-33 设 Z 是一反演拓扑空间,$W = (W_A, W_{\tilde{A}}) \subset Z$, $x = (x_A, x_{\tilde{A}}) \in Z$,如果存在 Z 中的反演开集 $G = (G_A, G_{\tilde{A}})$,使得 $x = (x_A, x_{\tilde{A}}) \in G = (G_A, G_{\tilde{A}}) \subset W = (W_A, W_{\tilde{A}})$,则称 $W = (W_A, W_{\tilde{A}})$是 x

$=(x_A, x_{\bar{A}})$的一个反演邻域. $x=(x_A, x_{\bar{A}})$的一切反演邻域构成的集合,称为 $x=(x_A, x_{\bar{A}})$ 的反演邻域系,记作 $\mathscr{N}(x)=(\mathscr{N}_A(x_A), \mathscr{N}_{\bar{A}}(x_{\bar{A}}))$.

由定义,包含 $x=(x_A, x_{\bar{A}})$的 $G=(G_A, G_{\bar{A}})$是开集,但邻域 $W=(W_A, W_{\bar{A}})$不一定是开集.

$x=(x_A, x_{\bar{A}})$的邻域系 $\mathscr{N}(x)=(\mathscr{N}_A(x_A), \mathscr{N}_{\bar{A}}(x_{\bar{A}}))$具有下列基本性质:

(1)x 的任何邻域包含 $x=(x_A, x_{\bar{A}})$,且任何 $x=(x_A, x_{\bar{A}})$至少有一个邻域($\mathscr{N}(x)\neq\emptyset$,且对任意 $V=(V_A, V_{\bar{A}})\in\mathscr{N}(x)=(\mathscr{N}_A(x_A), \mathscr{N}_{\bar{A}}(x_{\bar{A}}))$,则 $x=(x_A, x_{\bar{A}})\in V=(V_A, V_{\bar{A}})$)

(2)$x=(x_A, x_{\bar{A}})$的两个邻域的交是 $x=(x_A, x_{\bar{A}})$的邻域(若 $W=(W_A, W_{\bar{A}})$、$V=(V_A, V_{\bar{A}})\in\mathscr{N}(x)=(\mathscr{N}_A(x_A), \mathscr{N}_{\bar{A}}(x_{\bar{A}}))$,则 $V\cap W=(V_A, V_{\bar{A}})\cap(W_A, W_{\bar{A}})\in\mathscr{N}(x)=(\mathscr{N}_A(x_A), \mathscr{N}_{\bar{A}}(x_{\bar{A}}))$)

(3)包含 x 的任何邻域的集合是 x 的邻域(若 $V=(V_A, V_{\bar{A}})\in\mathscr{N}(x)=(\mathscr{N}_A(x_A), \mathscr{N}_{\bar{A}}(x_{\bar{A}}))$, $V=(V_A, V_{\bar{A}})\subset W=(W_A, W_{\bar{A}})$则 $W=(W_A, W_{\bar{A}})\in\mathscr{N}(x)=(\mathscr{N}_A(x_A), \mathscr{N}_{\bar{A}}(x_{\bar{A}}))$)

(4)如果 V 是 $x=(x_A, x_{\bar{A}})$的邻域,那么存在 $x=(x_A, x_{\bar{A}})$的子邻域 $W=(W_A, W_{\bar{A}})\subset V=(V_A, V_{\bar{A}})$,使得 $V=(V_A, V_{\bar{A}})$是 W 的每一点邻域(对任意 $V=(V_A, V_{\bar{A}})\in\mathscr{N}(x)=(\mathscr{N}_A(x_A), \mathscr{N}_{\bar{A}}(x_{\bar{A}}))$,则存在 $W=(W_A, W_{\bar{A}})\in\mathscr{N}(x)=(\mathscr{N}_A(x_A), \mathscr{N}_{\bar{A}}(x_{\bar{A}}))$,使得 $W=(W_A, W_{\bar{A}})\subset V=(V_A, V_{\bar{A}})$,且对任意的 $x=(x_A, x_{\bar{A}})\in W=(W_A, W_{\bar{A}})$,有 $W=(W_A, W_{\bar{A}})\in\mathscr{N}(x)=(\mathscr{N}_A(x_A), \mathscr{N}_{\bar{A}}(x_{\bar{A}}))$.

这四条性质的意义是:由性质(1),Z 的每一点都在它的任意邻域中;由性质(2),邻域系关于有限交运算封闭;由性质(3),包含某点邻域的集合仍然是该点的邻域;由性质(4),点的邻域也是充分"接近"该点的其他点的邻域.

定理 5-41　设 Z 是一反演拓扑空间,而 $W=(W_A, W_{\bar{A}})$是 Z

的子集，则 $W=(W_A, W_{\bar{A}})$是反演开集的充要条件是 $W=(W_A, W_{\bar{A}})$是其所含的每一点的反演邻域.

证明： 由定理 5－25 可知 $W_A, W_{\bar{A}}$ 分别成立，所以 $W=(W_A, W_{\bar{A}})$成立．证毕.

第六章　反演集合理论的初步应用

§1　数学与应用

数学起因于人类对事物的抽象分析，由于应用的需要而得到发展．为了说清楚这一点，我们不妨考察一下“数”的起源：在人类拥有“数”这个概念之前，人类已经有了一种能将具体事物区分多少的能力，我们姑且叫它为“数觉”．例如：我们即使不使用数字，也能进人一间屋子时，一眼就看出屋中的人比平常要少些．

除人类外，少数动物也有这种“数觉”．有个田主决心要打死一只在他庄园的瞭望楼里筑巢的乌鸦．他试了好几次想接近它都没有成功，因为人一走近，乌鸦就离开了巢，飞开了．它栖在远远的树上守着，等到人离开了瞭望楼，才肯飞回巢去．有一天，田主定下一个计策：两个人走进瞭望楼，一个留下，一个出来走开了．但乌鸦并不上当，它老等着，直到留在瞭望楼里的人也走了出来才罢．这个试验一连做了几天，两个人，三个人，四个人，都没有成功．末了，用了五个人，也像以前一样，先都进了瞭望楼，留下一个人在里面，其他四人走了出来，离开了．这次乌鸦却数不清了，它不能辨别四与五，马上就飞回巢里去了．

数(指自然数)这个对我们来说非常习惯的概念，是经过漫长岁月才创造(抽象)出来的．这一点，从古代原始社会时，一些民族的计算方式上可以判断出来．在这些民族中，有的民族甚至没有二或三以上的数量名称，有的民族则能够计算到很大的数字．无论前

者还是后者，它们的数数能力有限，更大的数字只能称做“多的”、“数不尽的”，这就可以看出，人类能够数清数字是经过长期的，逐渐的积累过程才达到的.

我们还可以进一步从一些民族对数的称谓上看出：他们用“手”这个词代表5，用“全部人体”这句话代表20. 在这种情况下，5就不能抽象地去理解，只能理解为“与手指数量相同”的数. 20也只能理解为“与一个人手脚指数量一样”的数. 当时尚无抽象的数，数只能用于某一固定的事物，也就是“有名称”的数. 另外许多民族他们能使用“三人”、“三个地方”等等，但没有“3”这个词.

后来，原始人由于清点猎物和记事的需要，或许是借助“屈指可数”的手，利用对应的方法数猎物逐渐抽象出数的概念. 到了大约人类会用数清点羊群数目的时候，人类有了掌握数学专门知识的数学家；我们小时候，跟着父母学从1数到100，羡慕父母的学识真渊博，或许就是那时的情景再演. 至于专门靠向别人传授数学知识就能挣得到饭吃，那已经是离我们今天很近的时候了. 可以说，数学最初是为了应用而发展起来的，数学从产生那天起，就与应用有着血肉关系.

自然界中所有事物都有数量关系，抽象的数学方法可以得到广泛应用，带来极大的方便，数学得到快速的发展、普及. 但数学毕竟是人头脑中抽象思维产生的人类主观的智慧成果，是一堆人工宝石，而不是天然的钻石. 数学不是一个真理体系，数学公理和定理并不一定是自然世界中的真理.

就对自然世界的研究而言，数学仅仅提供了理论模型，而数学模型要想与自然界现象吻合则需要在应用中反复不断地修正. 数学理论的科学价值在于应用，数学离开应用，如同语言离开描述对像，成为了一种符号游戏.

我们很难给数学确定一个范围，数学是一种思维模式，只要自然科学在发展着，自然科学就会源源不断地向数学提供新思维模

式的雏形，数学家的天职是把这些模式雏形抽象为数学．几乎每一次数学进步都是添置新的或改进了原有的思维模式，每一个新数学学科的建立都是人类又向大自然索取了一套新的思维模式．较为形象的比喻是：数学是用来描述客观世界的、由众多思维模式组成的一个思维模式库，并且伴随着人类认识发展这个思维模式库在不断地扩展补充新思维模式．几何是空间的思维模式，三角是古典天文学的思维模式，代数是通过公式描述定律的思维模式，微积分是分析运动的思维模式……每一个科学上的进步似乎都需要一个新的理论框架，新的理论框架需要新的思维模式，如果现有数学没有提供合适的思维模式，那么一种新的思维模式必须从自然界中抽象出来．近来产生的模糊数学、灾变理论、分形、混沌、灰色理论、思维数学以及本书论述的反演集合理论，都是应科学发展需要而产生的新数学思维模式．

在某些情况下，除非用数学的形式否则很难表达一个理论．一个典型的例子是麦克斯威尔的电磁定律，如果不用数学也行的话，法拉第无疑已经得到它了，但事实是，该理论及其关于光、无线电波等等本质的推断直到麦克斯威尔才最终完成．

在本书的第一章开头我们引用了数学家陈省身先生的观点："数学是根据某些假设，用逻辑的推理得到结论"．并指出数学的根基是那些假设．这些假设最初是自然科学家和数学家们共同的经验产物，数学家们习惯于把这些假设称做公理，醉心于把这些公理作为基石来建设自己的数学大厦．但公理并不一定是自然世界原始实在，所谓数学的公理只不过是某些领域在一定条件下的经验启发的特定假设，在此公理基础上的数学演绎本身不能解决自己前提的真实与否的问题，演绎结果的真理性本身就带有先天的局限性．一旦这些领域扩展了，科学就会要求数学及时完善现有数学或补充新数学．典型的例子是几何学，最初我们从公理"在平面上过直线外一点只能作一条和这直线不相交的直线"推出欧氏几何；

而后又从公理"约定在平面上过一点可引不只一条直线与已知直线不相交"推出双曲几何;还从公理"约定在平面上的任何两条直线均相交"推出椭圆几何.三种几何都有自己先天的局限性,只有相互并存、相互补充才能满足科学发展的需要.事实上,数学从产生那天起,就一直在应外部的需要而扩充和应内部的完善而深化.

由于从一开始,数学就立足于"公理"这个与自然科学家们相同的思考起始点,数学在描述自然真实本性过程中必然会存在着一定的真实性,最典型的例子莫过于有些演绎结果最初除美学价值外,一时很难在自然界中找到它的用途,但在几十年甚至于几个世纪后则会发现出乎意料的应用.例如,连当时高斯也承认虚数"$\sqrt{-1}$的真正本义无从琢磨",它的有用性在本世纪被它在量子力学中所起的基础性的作用成功地证实.事实上复数也许代表了人类历史上最富有想象力的发明.这一切是数学选择公理作为自己的基石而产生的必然结果.换言之,这是数学从起始点就开始注意自己的应用基础的结果.但这并不意味着所有的数学演绎结果都会与自然现象吻合或会在自然世界中找到相应的应用.

数学是人类对自然界的认识,在一定历史阶段上"积淀"成相对稳定的思维结构.个体通过学习和训练,通过一个思维的个体发育过程而接受、获得这种思维结构,从而具有一定的数学认识能力.对于人的认识而言,这种数学思维结构就是某种相对先验的东西了.人们正是凭借这种相对先验的数学思维结构去认识自然界的.

在数学中,新与旧是延伸或扩充面不是替代.远古时期的计数法和古希腊数学我们今天仍可以使用,最新的数学成果与我们今天称之为"初等数学"的古代数学成果之间存在着千丝万缕的联系.数学具有永久性,这是数学家与自然科学家相比最能引起自慰的.数学与各自然科学有着密切的联系,没有这种联系,数学就不能成为科学,数学与各自然科学又有区别,数学是具体科学的抽象

化,它突破了具体科学的局限性,成为普遍性的方法论.

数学家的另一项重要工作是完善数学思维模式这个工具,探索数学自己的生命,找寻各种数学思维模式之间的关系和将它们相互杂交.这是很重要的,完善的思维模式使得我们可以准确、丰富多彩地描述自然.各种数学思维模式之间千丝万缕的关系,使得我们可以幸运地运用数学将现在研究的问题与以往研究的事物有机结合起来,启迪我们的思维,拓宽我们的研究视野.自然界万事万物之间存在着万丝千缕的关系,利用各种数学思维模式之间的关系和它们的杂交结果,我们能够将自然界中两个从表面上看几乎是毫无关联的事物联系起来.

数学是一种思维模式,数学家创造的是模式,只要自然科学在进步,科学猜想就需要数学提供模式,只要自然科学在发展,数学就需要发展.数学与应用不可分割,数学最终的生命力依赖于应用.

§2 反演集合理论在辩证法中的应用

§2.1 辩证法矛盾的数学分析工具反演集合理论[①]

在本书第一章§2中我们讲过:在哲学中,矛盾分两类:一类是形式逻辑矛盾,另一类是辩证法矛盾.数学中的普通集合和模糊集合概念是以形式逻辑矛盾为哲学基础的.反演集合是以辩证法矛盾为哲学基础的.

所谓形式逻辑矛盾概念,是指事物肯定性概念(是)和否定性概念(非)之间的矛盾.如:"数"的:正数——非正数;"作用力"的:作用力——非作用力;"电子"的:正电子——非正电子;"质子"的:

① 原文发表在《科技日报》1996年10月9日,本节有较大删补改动

质子——非质子;“中微子”的:中微子——非中微子;……;等之间的矛盾.矛盾双方是“有我无你”,“势不两立”;它坚持一个公式:“是则是,非则非,除此之外,都是鬼话.”换数学语言言之,则就是普通集合定义:论域中任一元素,或属于该集合,或不属于该集合,二者必居其一.这样做,我们平常叫做要么肯定,要么否定,不要模棱两可.

在辩证法中,矛盾概念是指事物自身中的矛盾性,即是指一个事物内部对立的两个侧面(正、反两面)之间的矛盾.如:“数”的:正数——负数;“作用力”的:作用力——反作用力;“电子”的:正电子——(负)电子;“质子”的:质子——反质子;“中微子”的:中微子——反中微子;……;等之间的矛盾.它遵循的公式是:对立面的统一.

辩证法矛盾的两个方面互相依存,互为存在,一方的存在以另一方的存在为前提,一方不存在,另一方也将不存在.矛盾双方是共同处于一个统一体中,互相对立、互相排斥而又互相统一、互相联结.换数学语言言之,则就是反演集合定义:论域中任一元素都有两面性,一面属于正集合,另一面属于反集合.这样做,我们平常叫做任何事物都有两面性,要一分为二地看问题.

所以我们说,形式逻辑矛盾和辩证法矛盾是两类截然不同的矛盾,以形式逻辑矛盾为基础建立的普通集合和以辩证法矛盾为基础建立的反演集合是分别研究两种不同对象的集合.

世界上的一切事物之所以是不断发展的,就在于事物自身中的矛盾性.马克思认为:“两个互相矛盾方面的共存、斗争以及融合成一个新范畴,就是辩证运动的实质”①.列宁认为:“就本来的意义说,辩证法就是研究对象的本质自身中的矛盾”.“统一物之分解

① 《马克思恩格斯选集》第一卷,1972年版,第111页

为两个部分以及对其矛盾着的各部分的认识","是辩证法的实质"[①].毛泽东认为:"总之,对立面的统一是无往不在的……一分为二,这是个普遍现象,这就是辩证法."[②]

反演集合理论作为一门数学理论及其方法,是作者经过多年酝酿之后,于1994年正式公开发表的.但是反演集合理论的哲学思想起源很早.我国古代朴素辩证法之中和西方古代朴素辩证法之中都有论述.在古希腊,赫拉克利特认为:"自然便是将雌和雄配合起来,而不是将雌配雌,将雄配雄.自然是由联合对立物造成最初的和谐,而不是由联合同类的东西","统一物是由两个对立面组成的,所以在把它分为两半时,这两个对立面就显露出来了","互相排斥的东西结合在一起","相反者相成"[③];我国古代的《易经》中认为:阴与阳是宇宙间最根本的对立.自然界的一切事物,正象男女交感产生子女一样,都是由于阴阳的交感面产生的.是推动事物变化发展的内在原因."易经·系辞"中有:"刚柔相推面生变化","一阴一阳之谓道"等.在《孙子兵法》中,此思想被用于指导战争:"知己知被,百战不殆".

到了近代,散见于国内外不少文献有将此思想方法应用于不同的学科.例如:在有些决策方法中,利用普通数学方法将正、反两方而分别予以讨论等.再如国外有学者在研究物理系统时提出"模型空间"和"数据空间"等.但这些工作都没有形成一个能将正、反两方面有机结合起来进行研究的、系统的、自成一体的数学理论.

---

① 《哲学笔记》1956年版,第256页,第361页

② 《毛泽东选集》第5卷,第498页

③ 赫拉克利特.转引自江家齐编著《辩证法发展概述》,广东人民出版社1997年9月第一版,第11、第12页

§2.2　辩证法中"质变点"的数学分析及其意义

§2.2.1　反演集合定义下的"质变点"性质分析

唯物辩证法认为,质的变化是随量的变化而变化的."量与质是同时存在(非分割的),同时发展,二者是统一的","质变是通过量变完成的".当质的变化显现出阶段性变化时,辩证法中称"部分质变".当质的变化发生"新质"替代"旧质"的飞跃变化时,辩证法中称"总体质变"(简称"质变",下同).质变是矛盾双方主次易位的变化,"质变点"是矛盾双方主次易位变化的临界点.由此可知,在论域 U 中,当元素(事物)内部对立的正、反两侧面之间主次地位发生易位变化时就产生了质变.由此,我们可以给出反演集合定义下的"质变点"数学定义.

定义 6-1　$|f_A(x)|$、$|f_{\bar{A}}(x)|$二者大小易位变化的临界点 x 称为"质变点".

定理 6-1　设论域 U 为反演集合度量空间,设 $g(x)=|f_A(x)|-|f_{\bar{A}}(x)|$,若有 $x_p\in U$,满足:$g(x)=0$;并且对任意正数 $\varepsilon>0$,x_p 的邻域 $B(x_p,\varepsilon)=\{x\mid d(x_p,x)<\varepsilon,x\in U\}$中都有:$x_i>x_p>x_j(x_j,x_j\in U)$,使得 $g(x_i)\times g(x_j)<0$,则 x_p 为质变点.

证明:　设有 $x_p\in U$,满足:$g(x_p)=0$,在 $B(x_p,\varepsilon)$中存在有:$x_i>x_p>x_j$,$(x_i,x_j\in U)$,满足 $g(x_i)=|f_A(x_i)|-|f_{\bar{A}}(x_i)|>0$,可知$|f_A(x_i)|>f_{\bar{A}}(x_i)|$. 又由 $g(x_i)\times g(x_j)<0$ 知道:$x_j<x_p$,满足 $g(x_j)=|f_A(x_j)|-|f_{\bar{A}}(x_j)|<0$,故有$|f_A(x_j)|<|f_{\bar{A}}(x_j)|$,所以点 x_p 是$|f_A(x)|$、$|f_{\bar{A}}(x)|$二者大小易位变化的临界点.

反之,$x_i>x_p>x_j(x_i,x_j\in U)$,满足 $g(x_i)\times g(x_j)<0$,则推理过程与上述类似便可证得 x_p 是$|f_A(x)|$、$|f_{\bar{A}}(x)|$二者大小易位变化的临界点.

综上所述,点 x_p 为质变点. 证毕.

定理 6-2　设论域 U 为反演集合度量空间,设 $g(x)=|f_A$

$(x)| - |f_{\bar{A}}(x)|$,若有区间$(a,b)\subset U$,满足任意 $x_p\in(a,b)$:$g(x_p)=0$;并且不管正数 ϵ 怎样小,U 中点 a 的邻域$B(a,\epsilon)$中有 $x_i<a$,点 b 的邻域$B(b,\epsilon)$中有 $x_j>b$,$(x_i,x_j\in U)$,满足:$g(x_i)\times g(x_j)<0$,则(a,b)为质变区间.

证明:　证明方法与定理 6-1 证明方法基本相同.

§2.2.2 反演集合定义下的"部分质变点"性质分析

上述讨论的"总体质变点"(简称"质变点"),是事物内部的根本矛盾正、反矛盾双方主次易位变化的临界点. "部分质变"与"总体质变"有严格区别. "部分质变"是指事物的根本矛盾正、反矛盾的某一方面(正面或反面),在"连续的渐进"变化过程中,使该方面的质发生阶段性差异. "部分质变"的产生根源,"是因为事物发展过程的根本矛盾的性质和过程的本质虽然没有变化,但……被根本矛盾所规定和影响的许多大小矛盾中,有些是激化了,有些是暂时地或局部地解决了,或者缓和了,又有些发生了,因此,过程就显示出阶段性. ",是异常明显的. 在一定条件下,总体质变和部分质变的对立是确定的. 从范围看,部分质变是局部的,总体质变是全局的,从解决矛盾看,部分质变是非根本矛盾的解决,总体质变是根本矛盾的解决.

为了讨论"部分质变点"的数学性质,我们给出以下定义:

定义 6-2　设 $f_A=\psi_A(f_{A_1},f_{A_2},\cdots f_{A_n})$,其中 f_{A_i} 是子矛盾映射,且 $f_{A_i}\in C^r$ 类连续可微映射.$(i=1,\cdots,n)$.如果在某一区间(a,b)上,f_A 中所有非零子矛盾映射(即 $f_{A_i}(x)\neq 0$):$f_{A_1},f_{A_2},\cdots f_{A_m}(m\leqslant n)$,组成集合 B_j,则称 f_A 在区间(a,b)上是 m 维的,记为 $\dim(B_j)=m$(实际上,我们总是可以省略一些非重要子矛盾,使 f_A 成为有限维的).

对于 $f_{\bar{A}}=\psi_{\bar{A}}(f_{\bar{A}_1},f_{\bar{A}_2},\cdots,f_{\bar{A}_n})$同理.

定理 6-3　设 $f_A = \psi_A(f_{A_1}, f_{A_2}, \cdots, f_{A_n}) = \sum_{i=1}^{m} f_{A_i}$，则 $f_A \in C^r$.

证明：　已知 f_{A_i} 是 r 次连续可微的，$df_A = \sum_{i=1}^{m} df_{A_i}$，故 f_A 连续微，即 $f_A \in C^r$. 证毕.

同理可证得 $\bar{f}_A = \psi_{\bar{A}}(\bar{f}_{A_1}, \bar{f}_{A_2}, \cdots, \bar{f}_{A_n}) = \sum_{i=1}^{m} \bar{f}_{A_i}$ 是 r 次连续可微映射.

"部分质变点"，我们可以这样解释：它是函数产生明显阶段性差异的分界点. 我们由此可给出"部分质变点"的数学定义如下：

定义 6-3　f_A 上的"极值点"和"拐点"是"部分质变点".

定理 6-4　设论域 U 是反演集合度量空间，若 $a \in U$，是光滑映射 $f_{A_i}(x)$、$f_{A_j}(x)$ 的正常点，则 a 也是 $f_A(x) = f_{A_i}(x) + f_{A_j}(x)$ 的正常点.

证明：　已知 a 是光滑映射 $f_{A_i}(x)$、$f_{A_j}(x)$ 的正常点，即 $f_{A_i}(x)$、$f_{A_j}(x)$ 在点 a 处是连续可微的. 由定理 6-3 可知 $f_A(x)$ 也是连续可微映射，且 $f_A(a) = f_{A_i}(a) + f_{A_j}(a)$，故 a 也是 $f_A(x)$ 的正常点. 证毕.

§2.2.3　"部分质变"的阶段性差异性质分析

由上述的定义 6-3 我们知道，可用求极值点和求拐点的方法求"部分质变点". 有时，在一个长的事物发展过程中，质会发生多次阶段性变化. 这种变化，不仅反映了质的阶段之间的差异，也反映了质的每一阶段的特有性质.

设"所有部分质变点" b_j 构成区间集合 $\{(b_i, b_{i+1}) \mid i \in N\}$，$f_A$ 在区间 (b_i, b_{i+1}) 上的非零子矛盾映射集合是 B_i，集合中非零子矛盾映射(元素)的数量即 f_A 的维数表示为 $\dim(B_i)$，则"部分质变"分以下几种情况：

①$B_i = B_{i+1}$，此时有 $\dim(B_i) = \dim(B_{i+1})$；则说明在"部分质变

点"上有子矛盾发生了突变,但子矛盾本身没有"消失"的,也没有新"产生"的.

②$B_i \neq B_{i+1}$, $\dim(B_i)=\dim(B_{i+1})$时,则说明在两个阶段的交接点上,有些子矛盾"消失"了,同时又有相同数量的新的子矛盾"产生"了.

③$B_i \neq B_{i+1}$, $\dim(B_i)>\dim(B_{i+1})$时,则说明在两个阶段的交接点上,消失的子矛盾多于新生的子矛盾.

④$B_i \neq B_{i+1}$, $\dim(B_i)<\dim(B_{i+1})$时,则说明在两个阶段的交接点上,消失的子矛盾少于新生的子矛盾

⑤$B_i \supset B_{i+1}$,此时有 $\dim(B_i)>\dim(B_{i+1})$,说明仅有子矛盾消失.

⑥$B_i \subset B_{i+1}$,此时有 $\dim(B_i)<\dim(B_{i+1})$,说明仅有新子矛盾产生.

§3 反演集合理论在决策学中的应用

§3.1 反演集合决策学中的几个定理及其应用①

§3.1.1 反演集合决策学中的几个定理

辩证法认为,任何事物都是一分为二的. 一般来说,每一个决策方案都有两面性:有利的一面(正面)和不利的一面(反面). 作为特例,一个决策在一定的条件下,在特定的范围内可能只有一面(只有正面或反面),但这种情况我们可以认为是另一面效应函数值为零时的特例. 因此,任何决策方案我们都可以看作是具有两面性的.

我们利用模糊集合基础上的反演集合定义(第二章中§1定

---

① 原文发表在《系统工程理论与实践》1998年2期,本节有删改

义 2－1)，设有利一面的效应函数值集合是 A，不利一面的效应函数值集合是 $\bar{A}$．在决策过程中，我们对决策方案有利的一面(正面)效应值 $f_A(x)$有一个最低限度的要求，低于这个限度的方案是不值得选取的方案，我们设这个最低限度值为 λ．A 中所有大于或等于 λ 的元素组成的集合为 A_λ：

定义 6－4 $A_\lambda=\{f_A(x)\geqslant\lambda\mid\lambda>0,x\in U\}$，$\lambda$ 是 A_λ 集的截值．

同理，我们对方案的反面效应值有一个最高限度的要求，高于这个限度值的方案是我们对其负作用承受不起的方案，故也是不能选取的方案，我们设这个最高承受能力值为 η．我们设反面效应值 $f_{\bar{A}}(x)$是负数，效应值越负表示反面效应越大，所以 $\bar{A}$ 中小于或等于 η 的元素是指 $\bar{A}$ 中所有绝对值小于或等于 η 的元素，组成的集合为 $\bar{A}_\eta$：

定义 6－5 $\bar{A}_\eta=\{|f_{\bar{A}}(x)|\leqslant\eta\mid\eta>0,x\in U\}$，或 $\bar{A}_\eta=\{f_{\bar{A}}(x)\geqslant-\eta\mid\eta>0,x\in U\}$，$\eta$ 是 $\bar{A}_\eta$ 集的截值．

引理 6－1 若 f 是同胚映射，则 f 是闭映射；此时若 U 是闭集，则 $f(U)$是闭集．

引理 6－2 若 $f:X\rightarrow Y$ 的连续映射，闭集 $U\subset Y$，则 $f^{-1}(U)$是闭集．

定理 6－5 设 U 为反演集合度量空间中一闭集，U 中任一元素(决策方案)x 的正、反效应函数分别是 $f_A(x)$、$f_{\bar{A}}(x)$，f_A、$f_{\bar{A}}$ 在 U 上都是同胚映射，$f_A(x)$在 U 上有最大值，$|f_{\bar{A}}(x)|$在 U 上有最小值，则在 U 上有：

可承受决策范围 $=\{f_A(x),f_{\bar{A}}(x)\mid x\in f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta)\cap f_A^{-1}(A_\lambda)\subset U\}$

最小风险值决策 $=\max\{f_A(x),\min|f_{\bar{A}}(x)|\mid x\in f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta)\cap f_A^{-1}(A_\lambda)\subset U\}$

最大效应值决策 $=\min\{\max f_A(x),|f_{\bar{A}}(x)|\mid x\in f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta)\cap f_A^{-1}(A_\lambda)\subset U\}$

最优差异决策 $=\{f_A(x), f_{\bar{A}}(x) \mid \max(f_A(x)-f_{\bar{A}}(x)), x \in f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta) \cap f_A^{-1}(A_\lambda) \subset U\}$

证明： 已知 $f_A(x)$，$|f_{\bar{A}}(x)|$在 U 上分别有最大值、最小值；

(1) 所谓可承受决策范围，是指在决策过程中，我们要求决策方案正效应值大于或等于最低限度值 λ 和反效应值的绝对值低于或等于最高承受能力值 η.

充分性：

设 $x_i \in f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta) \cap f_A^{-1}(A_\lambda)$，但 $f_A(x_i) \in A_\lambda$，$f_{\bar{A}}(x_i) \in A_\eta$. 已知 f_A、$f_{\bar{A}}$ 是同胚映射，故有 $x_i = f_{\bar{A}}^{-1}(f_A(x_i)) \in f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta)$，$x_i = f_A^{-1}(f_A(x_i)) \in f_A^{-1}(A_\lambda)$，即：$x_i \in f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta) \cap f_A^{-1}(A_\lambda)$，假设不成立.

必要性：

设 $x_i \in f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta) \cap f_A^{-1}(A_\lambda)$，因为 f_A、$f_{\bar{A}}$ 是同胚映射，所以 $f_{\bar{A}}^{-1}$、f_A^{-1} 是一一映射，所以 $f_A(x_i) \in A_\lambda$，$f_{\bar{A}}(x_i) \in A_\eta$.

故有：

可承受决策范围 $=\{f_A(x), f_{\bar{A}}(x) \mid x \in f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta) \cap f_A^{-1}(A_\lambda) \subset U\}$.

(2)所谓最小风险值决策，是指在可承受决策范围内，如果从反效应值的绝对值的最小值点中选取对应的正效应值中的最大值，此时 A_λ 中若有对应值，则对应的决策方案必有最小风险值. 由已知条件知 $|f_{\bar{A}}(x)|$ 在 U 上有最小值存在，又由定义 6-5 知道最小值存在 A_η 中，现证明在 A_λ 中有对应值存在.

由定理 6-5 中条件知 $|f_{\bar{A}}(x)|$ 有最小值存在，并由定义 6-5 知 $\bar{A}_\eta=\{|f_{\bar{A}}(x)| \le \eta \mid \eta>0, x \in U\}$，我们可设 $\bar{A}_\eta$ 中至少有一最小值. 已知 U 为闭集，由引理 6-1 知 $A=f_A(U)$、$\bar{A}=f_{\bar{A}}(U)$都是闭集，又由定义 6-4、定义 6-5 可知 A_λ、$\bar{A}_\eta$ 分别是 A、$\bar{A}$ 的闭子集，由引理 6-2 知 $f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta)$、$f_A^{-1}(A_\lambda)$是闭集，所以 $f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta) \cap f_A^{-1}(A_\lambda)$ 是闭集. 设 $x_0 \in f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta)$，且 $|f_{\bar{A}}(x_0)|$ 是 $\bar{A}_\eta$ 中最小值，由定义 6-4

知最小值$|f_{\bar{\lambda}}(x_0)|$对应的正效应值$f_A(x_0)$存在，设在$\tilde{A}_\eta$中最小值$|f_{\bar{\lambda}}(x_0)|$有序列$\{f_{\bar{\lambda}}(x_n)\}$，$(n\in N)$，满足$f_{\bar{\lambda}}(x_n)\to f_{\bar{\lambda}}(x_0)$，$(n\to\infty)$；则由于$f_{\bar{\lambda}}^{-1}$是连续的，故有$f_{\bar{\lambda}}^{-1}(f_{\bar{\lambda}}(x_n))=x_n\to x_0=f_{\bar{\lambda}}^{-1}(f_{\bar{\lambda}}(x_0))$；又由于$f_A$连续，对应在$A_\lambda$中有序列$\{f_A(x_n)\}$，满足$f_A(x_n)\to f_A(x_0)$，因为$A_\lambda$为闭集，所以$f_A(x_0)\in A_\lambda$，因为$f_A$是同胚映射，所以有$x_0\in f_A^{-1}(A_\lambda)$，故$x_0\in f_{\bar{\lambda}}^{-1}(\tilde{A}_\eta)\cap f_A^{-1}(A_\lambda)$，所以有：

最小风险值决策 $=\max\{f_A(x),\min|f_{\bar{\lambda}}(x)|\mid x\in f_{\bar{\lambda}}^{-1}(\tilde{A}_\eta)\cap f_A^{-1}(A_\lambda)\}\subset U\}$.

(3)所谓最大效应值决策，是指在可承受决策范围内，如果我们从正效应的最大值点中选取对应的反效应值中的最小值，此时$\tilde{A}_\eta$中若有可取值，则对应的决策方案必有最大效应值.

由定理 6－5 中条件知$f_A(x)$有最大值存在，并且由定义 6－4 $A_\lambda=\{f_A(x)\geqslant\lambda\mid\lambda>0,x\in U\}$，我们可设$A_\lambda$中至少有一最大值. 其余部分证明可将上面"(2)"中证明方法中的最小值换成最大值，便可证明：

最大效应值决策 $=\min\{\max f_A(x),|f_{\bar{\lambda}}(x)|\mid x\in f_{\bar{\lambda}}^{-1}(\tilde{A}_\eta)\cap f_A^{-1}(A_\lambda)\subset U\}$.

(4)最优差异决策：考虑到在许多决策方案中，高效益伴随着高风险，正效应曲线与反效应曲线常常成正比例增长，在可承受决策范围内，有时我们需要以尽可能小的代价换取尽可能大的效益，即选取正效应值与反效应值的差的最大值. 现证明在定理一的条件下这个最大值是存在的.

设序列$\{x_n\}\in f_{\bar{\lambda}}^{-1}(\tilde{A}_\eta)\cap f_A^{-1}(A_\lambda)$，$(n\in N)$，当$x_n\to x_0$时，对应有趋于最大值的序列：$(f_A(x_n)-f_{\bar{\lambda}}(x_n))\to(f_A(x_0)-f_{\bar{\lambda}}(x_0))$，其中$f_A(x_n)\in A_\lambda$，$f_{\bar{\lambda}}(x_n)\in\tilde{A}_\eta$. 由上面的证明过程已知$f_{\bar{\lambda}}^{-1}(\tilde{A}_\eta)\cap f_A^{-1}(A_\lambda)$为闭集，所以$x_0\in f_{\bar{\lambda}}^{-1}(\tilde{A}_\eta)\cap f_A^{-1}(A_\lambda)$，又

$$\lim_{x_n \to x_0} (f_A(x_n) - f_{\bar{A}}(x_n))$$
$$= \lim_{x_n \to x_0} f_A(x_n) - \lim_{x_n \to x_0} f_{\bar{A}}(x_n)$$
$$= f_A(x_0) - f_{\bar{A}}(x_0)$$

因为 A_λ、$\bar{A}_\eta$ 是闭集，所以 $f_A(x_0) \in A_\lambda$，$f_{\bar{A}}(x_0) \in \bar{A}_\eta$，即 $\max(f_A(x) - f_{\bar{A}}(x))$ 存在.故有：

最优差异决策 $= \{f_A(x), f_{\bar{A}}(x) \mid \max(f_A(x) - f_{\bar{A}}(x)), x \in f_{\bar{A}}^{-1}(\bar{A}_\eta) \cap f_A^{-1}(A_\lambda) \subset U\}$. 证毕.

定理 6-6 设 U 为满足定义一的度量空间，若任意 $x_i \in U$，都有：$f_A(x_i) > f_{\bar{A}}(x_i)$，则 f_A，$f_{\bar{A}}$ 不存在公共不动点 x_0.

证明： 若不然，设有 $x_p(p \in N)$ 为公共不动点，则有：$x_p = f_A(x_p) = f_{\bar{A}}(x_p)$，与 $f_A(x_p) > f_{\bar{A}}(x_p)$ 矛盾.证毕.

§3.1.2 在企业产品开发策略决策中的应用实例

企业决策产品开发策略的依据是企业的技术支撑能力和经济支撑能力.技术支撑能力是指企业的技术人才、科研设备、科研环境的综合力量，任何企业的技术支撑能力都是有限的.新产品开发工作本身是个技术探索工作，具有较大的风险性.美国的一项研究发现，新产品失败率的情况为：消费品 40%，工业品 20%，服务 18%，可见新产品的失败率是较高的.对技术力量投人的越多，越会加快新产品开发速度，但也越会增大失败后的损失.如无法收回的材料设备消耗、人力资源的浪费、对企业后续产品产生的负影响等，即会增大企业承受的技术失败风险. 所以在新产品开发过程中，企业要十分注意控制技术力量投入的风险，将风险限制在可承受范围内.

经济支撑能力是指企业对科研项目计划投入资金和不可预见费用投入资金之和的承担能力.任何企业的经济支撑能力也是有

限的.投入越多,越会加大企业负担.但投入足够的资金,可加快产品开发速度,迅速开拓或占领市场.

例:某国营企业策划开发一新产品,对该企业而言,该产品所需的企业技术、经济支撑能力见表 6-1.针对该产品,企业采用完全仿造产品策略会引起产权纠纷,产品开发技术进步最低限度是有所改进产品,即技术支撑能力至少要投入 $\lambda=0.35$(即至少要投入工厂技术力量总和的 35%);技术失败风险承受能力至少要小于 $\eta=|-0.6|$(即一旦投入工厂技术力量总和的 60% 以上,将会严重影响工厂开发其他产品,如果失败工厂损失难以承受).

表 6-1

效应函数(%)	创新产品 $x=1$	改进产品 $x=0.5$	仿造产品 $x=0$
技术支撑能力 $f_{A_1}(x)$	强 0.7	中 0.5	弱 0.3
技术失败风险 $f_{\tilde{A}_1}(x)$	高 -0.7	中 -0.5	低 -0.3
市场占有率 $f_{A_2}(x)$	高 0.6	中 0.4	低 0.2
经济支撑能力 $f_{\tilde{A}_2}(x)$	大 -0.7	中 -0.5	少 -0.3

根据国内外市场调研,产品只有占领国内 30% 以上的市场,企业才有可能收回投资,即市场占有率最低限度值 $\lambda=0.3$;企业自筹资金,经济投入承受能力小于 $\eta=|-0.7|$(即小于或等于含不可预见费用的总投资的 70%).现求解决策方案:

决策方案我们分三步求,先求技术决策方案,再求资金决策方案,最后求总决策方案.

①技术决策:

根据表一中已知条件可求出 $f_{A_1}(x)=0.4x+0.3$,$f_{\tilde{A}_1}(x)=-0.4x-0.3$(几何意义见图 6-1).

由定理 6-5 可知:

可承受决策范围 $=\{f_{A_1}(x),f_{\tilde{A}_1}(x)\mid x\in f_{\tilde{A}}^{-1}(\tilde{A}_\eta)\cap f_A^{-1}(A_\lambda)\}$

$=\{0.35\leqslant f_{A_1}(x)\leqslant 0.6,\ -0.6\leqslant f_{\bar{A}_1}(x)\leqslant -0.35\mid x\in(0.125,0.75)\}$

最小风险值决策 $=\max\{f_{A_1}(x),\min|f_{\bar{A}_1}(x)|\mid x\in f_{\bar{A}_1}^{-1}(\bar{A}_\eta)\cap f_{A_1}^{-1}(A_\lambda)\}$

$=\max\{0.35\leqslant f_{A_1}(x)\leqslant 0.6,\min(0.6\geqslant|f_{\bar{A}_1}(x)|\geqslant 0.35)\mid x\in(0.125,0.75)\}$

$=\max\{0.35,-0.35\mid x=0.125\}$

最大效应值决策 $=\min\{\max f_{A_1}(x),|f_{\bar{A}_1}(x)|\mid x\in f_{\bar{A}_1}^{-1}(\bar{A}_\eta)\cap f_{A_1}^{-1}(A_\lambda)\}$

$=\min\{\max(0.35\leqslant f_{A_1}(x)\leqslant 0.6),0.6\geqslant|f_{\bar{A}_1}(x)|\geqslant 0.35\mid x\in(0.125,0.75)\}$

$=\min\{0.6,-0.6\mid x=0.75\}$

最优差异决策值 $=\{f_{A_1}(x),f_{\bar{A}_1}(x)\mid\max(f_{A_1}(x)-f_{\bar{A}_1}(x)),x\in f_{\bar{A}_1}^{-1}(\bar{A}_\eta)\cap f_{A_1}^{-1}(A_\lambda)\}$

$=\{0.35\leqslant f_{A_1}(x)\leqslant 0.6,\ -0.6\leqslant f_{\bar{A}_1}(x)\leqslant -0.35\mid\max(f_{A_1}(x)-f_{\bar{A}_1}(x)),x\in(0.125,0.75)\}$

$=\{0.35\leqslant f_{A_1}(x)\leqslant 0.6,\ -0.6\leqslant f_{\bar{A}_1}(x)\leqslant -0.35\mid x\in(0.125,0.75)\}$.

几何意义见图 6－1.

由图 6－1 分析可看出，由于 $f_{A_1}(x)$ 与 $f_{\bar{A}_1}(x)$ 是关于 x 轴对称的，所以最优差异决策值是一个区间范围．即在 $x\in(0.125,0.75)$ 此区间内每一点都是最优差异决策．

②资金决策：

又由表 6－1 可求出：$f_{A_2}(x)=0.4+0.2$，$f_{\bar{A}_2}(x)=-0.5x-0.3$（几何意义见图 6－2）．

又由定理 6－5 可知：

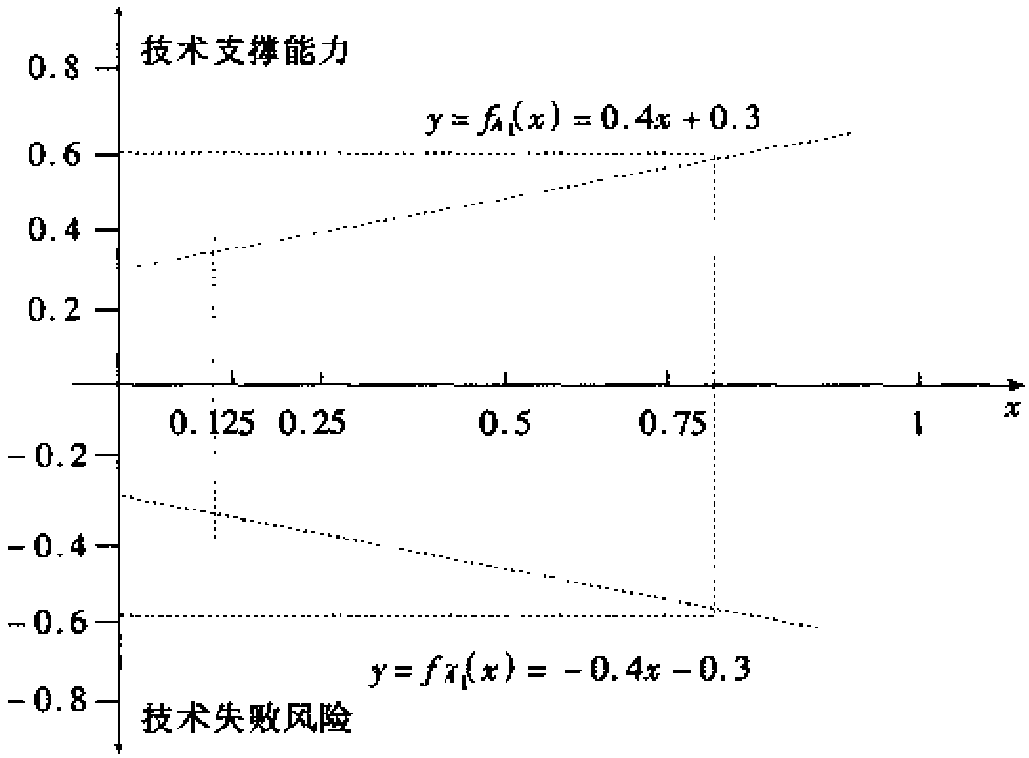


图 6-1

可承受决策范围 $=\{f_{A_2}(x), f_{\bar{A}_2}(x) \mid x \in f_{\bar{A}_2}^{-1}(\bar{A}_\eta) \cap f_{A_2}^{-1}(A_\lambda)\}$

$=\{0.3 \leqslant f_{A_2}(x) \leqslant 0.52,\ -0.7 \leqslant f_{\bar{A}_2}(x) \leqslant -0.425 \mid x \in (0.25, 0.8)\}$

最小风险值决策 $=\max\{f_{A_2}(x), \min(f_{\bar{A}_2}(x)) \mid x \in f_{\bar{A}_2}^{-1}(\bar{A}_\eta) \cap f_{A}^{-1}(A_\lambda)\}$

$=\max\{0.3 \leqslant f_{A_2}(x) \leqslant 0.52, \min(0.7 \geqslant |f_{\bar{A}_2}(x)| \geqslant 0.425) \mid x \in (0.25, 0.8)\}$

$=\max\{0.3 \leqslant f_{A_2}(x) \leqslant 0.52,\ -0.425 \mid x=0.25\}$

$=\max\{0.3,\ -0.425 \mid x=0.25\}$

最大效应值决策 $=\min\{\max f_{A_2}(x), |f_{\bar{A}_2}(x)| \mid x \in f_{\bar{A}_2}^{-1}(\bar{A}_\eta) \cap f_{A_2}^{-1}(A_\lambda)\}$

$=\min\{\max(0.3 \leqslant f_{A_2}(x) \leqslant 0.52), 0.7 \geqslant |f_{\bar{A}_2}(x)| \geqslant 0.425 \mid x \in (0.25, 0.8)\}$

$=\min\{0.52, 0.7 \geqslant |f_{\bar{A}_2}(x)| \geqslant 0.425 \mid x=0.8\}$

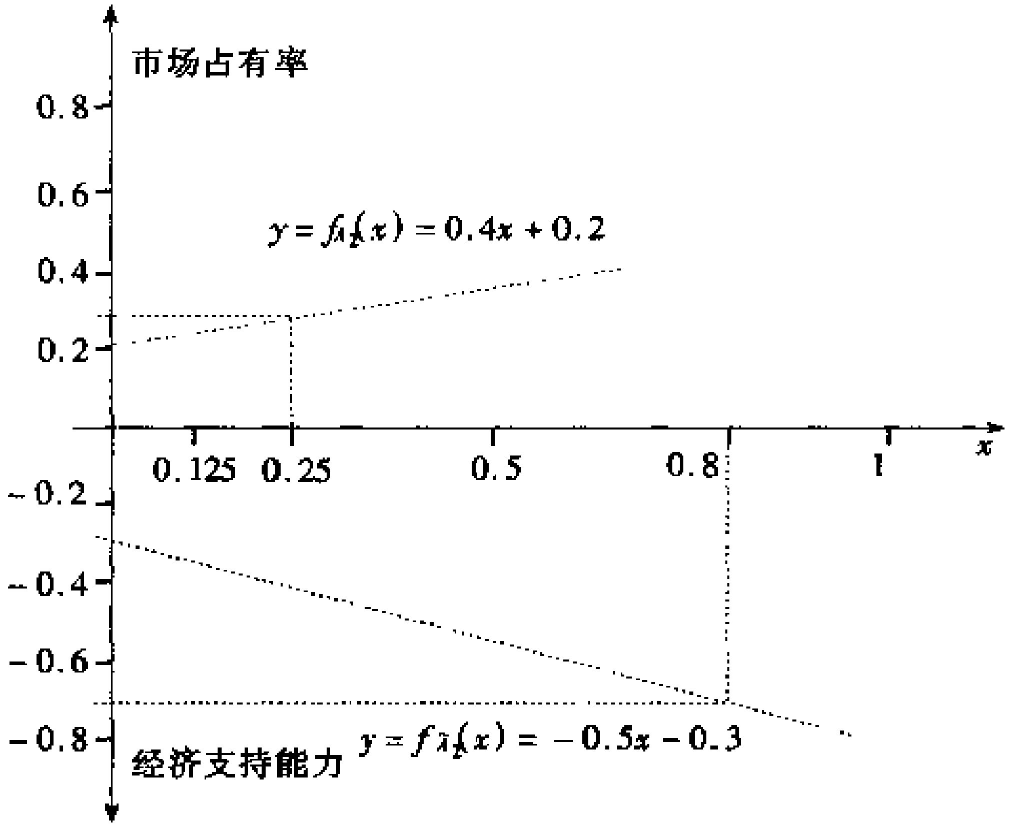


图 6-2

$=\min\{0.52,-0.7\mid x=0.8\}$

最优差异决策值 $=\{f_{A_2}(x),f_{\bar{A}_2}(x)\mid \max(f_{A_2}(x)-f_{\bar{A}_2}(x)),x\in f_{\bar{A}_2}^{-1}(\bar{A}_\eta)\cap f_{A_2}^{-1}(A_\lambda)\}$

$=\{0.3,-0.425\mid x=0.25\}$

几何意义如图 6-2.

③总决策方案

我们仅求最优差异决策方案.

由①可知,$x\in(0.125,0.75)$时对技术决策来说都是最优差异值;又由②可知,$x=0.25$ 时资金决策是最优差异值,故 $x=(0.125,0.75)\cap\{0.25\}=0.25$ 是整个方案的最优差异决策.即企业产品开发介于仿造与改进之间是企业总体决策最佳方案.

§4 反演集合理论在预测学中的应用

§4.1 反演集合理论中的德尔菲预测法及其应用①

§4.1.1 反演集合理论中的德尔菲预测方法

德尔菲法(Delphi technique)是美国兰德公司(RAND Corporation)的戈登(T. Gordon)和赫尔默(O. Helmer)于20世纪40年代末创制的,并首次用于技术预测.德尔菲是古希腊历史遗址,阿波罗神殿所在地.该神以预言灵验著称.据说该神常派人到各地去收集聪明人的意见.德尔菲法既有灵验之意,又有集中众人智慧之意.德尔菲法特点是以书信形式向互相不见面的专家发出征询预测意见表,要求专家填写,然后集中进行综合整理,将各种不同的判断和预测意见再以书面形式反馈给参加预测的专家,再次征询和综合整理.如此反复,通过几轮函询书面征求专家意见后进行整理集中,得出预测结论.它是一种应用广泛的预测方法.

从辩证法角度看,事物总是一分为二的,一个方案总是有利、有弊.并且一个好的方案,不仅能最接近地达到决策人员的意图,还要尽可能地减少负作用.这一点至关重要.我们举几个反面例子:埃及决定在尼罗河上修建阿斯旺水坝.从正面看,带来了廉价的电力,控制水旱灾害,灌溉农田.然而建成后,却发现它破坏了尼罗河流域的生态平衡.人们不得不为此付出巨大的代价.再如我国50年代,我们仅注意到年轻的共和国治愈战争创伤,百业待兴需要人,而忽视控制人口增长这一反面意见,背上了10余亿人口的大包袱,需要再经过几十年的长期努力后才能逐渐甩掉.在90年

① 原文发表在《科技管理研究》1995年2期,本节有删改

代,个别基层决策者为解一方贫困竟要在世界级风景区石林建设对环境污染很大的水泥厂.这些事例都在说明:决策时将一个方案的利弊两方面有机地结合在一起,作深入细致的分析是十分必要的.

普通的德尔菲法有不足之处,主要表现在参与预测的专家"对需要预测的未来问题往往缺乏辩证认识,而采用各自惯用的简单的方法,常常是只注意了事物的表面现象,而不能反映事物的本质","专家评价的结论只是在某种特定的条件(外界条件)下的统计分布",在"有些情况下,真理恰恰在少数人甚至个别人手中,但德尔菲法却将其作为偏离中位数的'奇异点'给予抛弃",使得预测结论"是不科学的".[①] 况且一项重大预测常常涉及社会、经济、科技等多方面因素,一位专家一般都不可能具备这么多方面的知识.从不同的角度对方案利弊的看法认识也往往不相同.

本节中,作者针对上述情况用反演集合理论修正德尔菲法.其特点是根据一分为二原则,要求每一位专家在提出方案的同时要指出方案的利与弊,然后由工作人员将各种不同的方案和方案的利与弊集中整理后,再以书面形式反馈给参加预测的专家,要求所有专家对每一方案的利与弊提出自己的意见或提出新方案.如此反复,通过几轮函询书面征求专家意见后,工作人员用反演集合数学方法归纳整理专家们意见,得出预测结论,从而减少普通德尔菲方法的缺点.

本节中,作者将反演集合理论应用到德尔菲预测方法.利用反演集合理论将方案的利弊两方面有机地结合在一起讨论.是一种更符合思维模式的数学方法.

---

① 姜圣阶等《决策学基础》上册,中国社会科学出版社 1986 年第 1 版 P170 ~ 185

§4.1.2 反演集合理论中的德尔菲法应用举例

我们设专家所提出的方案为元素，全体元素组成讨论域 U. 由于每一方案都有利弊两个方面，故在 U 上的元素符合第一章中反演集合定义 1-1，即论域中任一元素都有两面性，一面属于正集合 A，另一面属于反集合 $\tilde{A}$.

定义 6-6 $\tilde{\tilde{A}} = A$

定义 6-7 我们设有反演集合 U_1、U_2:

$U_1 \cup U_2 = \{A_1 \cup A_2, \tilde{A}_1 \cup \tilde{A}_2\}$

$U_1 \cap U_2 = \{A_1 \cap A_2, \tilde{A}_1 \cap \tilde{A}_2\}$

例 1 反演集合中德尔菲预测方法在某企业开发 W 产品决策过程中的应用：

实际共咨询专家 13 人，并且 13 位专家都自始至终参与了预测.

在第一轮询问调查表中，要求每一位专家对企业是否应该开发 W 产品提出自己的方案 U_i 的同时，指出方案 U_i 的利 A_i 与弊 $\tilde{A}_i$. 在汇总的专家意见集合 $\bigcup\limits_{i=1}^{13} U_i$ 中，8 位专家建议开发，5 位专家建议不开发，并都指出了方案的利与弊. 第一轮方案集中整理后，内容如下(图 6-3)：

工作小组把上述第一轮意见整理后，反馈给 13 位专家，再次返回来的调查表中，13 位专家中有 9 位建议开发，4 位仍建议不开发，但 13 位专家都对集合 A_{11} 中所有元素予以肯定，没有予以否定的. 而对集合 $\tilde{A}_{11} = \bigcup\limits_{i=1}^{13} \tilde{A}_i$ 中元素争议较大，具体意见整理如下(图 6-4)：

从图 6-4 可看出 A_{12} 集合实质是开发方式元素集合，即 A_{12} 集合中元素是针对集合 $\tilde{A}_{11}$ 中元素采取规避的技术处理方法. 工作小

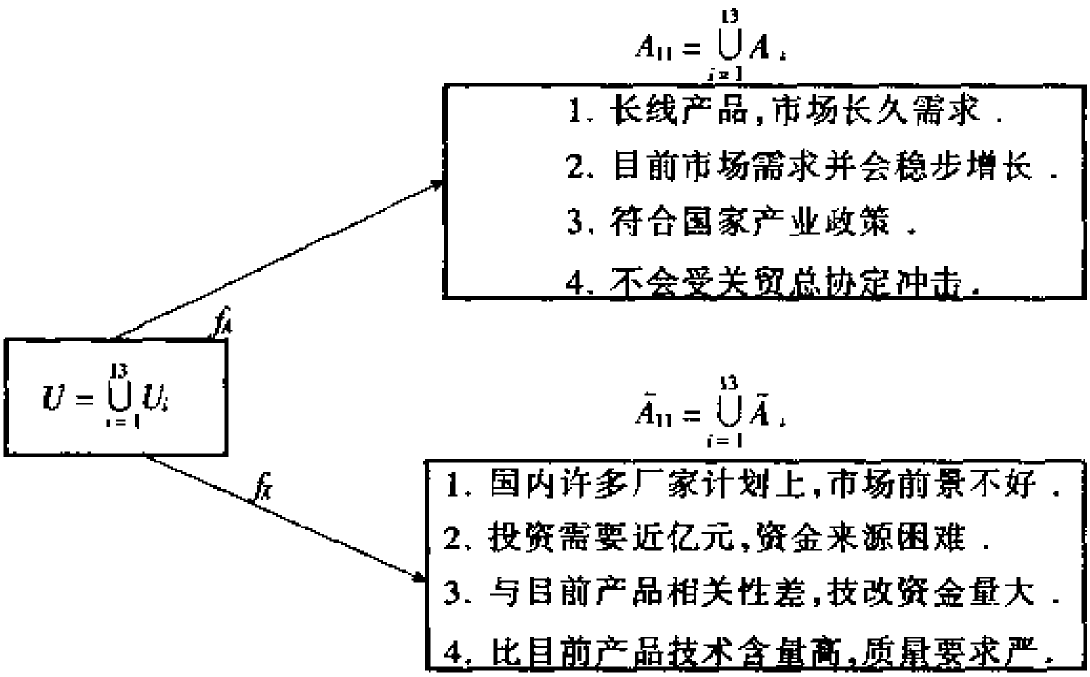


图 6-3

组把上述第二轮意见整理后再返给 13 位专家后,再次返回来的调查表中,13 位专家中有 11 位建议开发,2 位建议再作进一步市场调查,看看能否寻找到与目前产品结构更相关的产品后再决策开发.具体意见整理后如下(图 6-5):

综上所述,我们看出,专家们意见已经基本一致了,可归纳为两个方案供领导决策:

①建议开发

理由:*a*. 长线产品市场长久需求;

b. 目前市场需求并会稳步增长;

c. 符合国家产业政策;

d. 不会受关贸总协定冲击.

②作进一步市场调查,看看能否寻找到与目前产品结构更相关的产品后再决策开发

理由:与目前生产的产品相关性差.

由上述讨论我们可以看出,由于我们采用了反演集合中的德

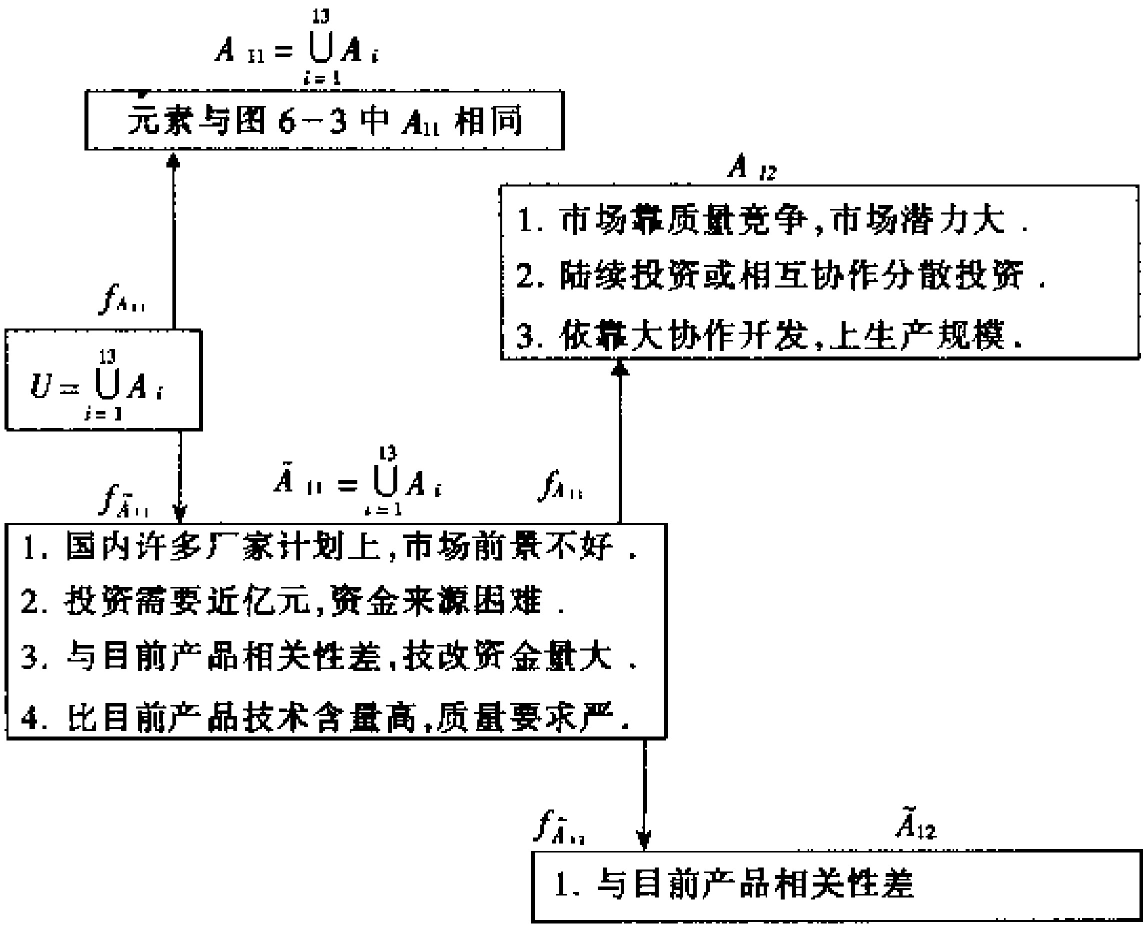


图6－4

尔菲法搜集意见，即要求每一位专家在提出自己的方案的同时，要指出方案的利与弊，并将每一轮方案汇集整理后再以书面形式反馈给专家后，要求所有专家对每一方案的利与弊仍按两分法提出自己的意见或新方案，使得整个预测过程中自始至终坚持了将方案的利、弊两方面有机地结合在一起进行深入细致的分析，使每一位参与预测的专家自觉不自觉地用辩证法思想对每一方案从各自不同角度进行分析评估，从而保证更科学地得出预测结论．在整理专家意见方案时，由于我们没有采用德尔菲法常采用的简单的数理统计方法，而是采用反演集合数学方法统计整理专家们意见，故可保证个别有远见卓识的专家的意见也能够得到充分的讨论，而不是被简单的数理统计方法给抛弃掉．

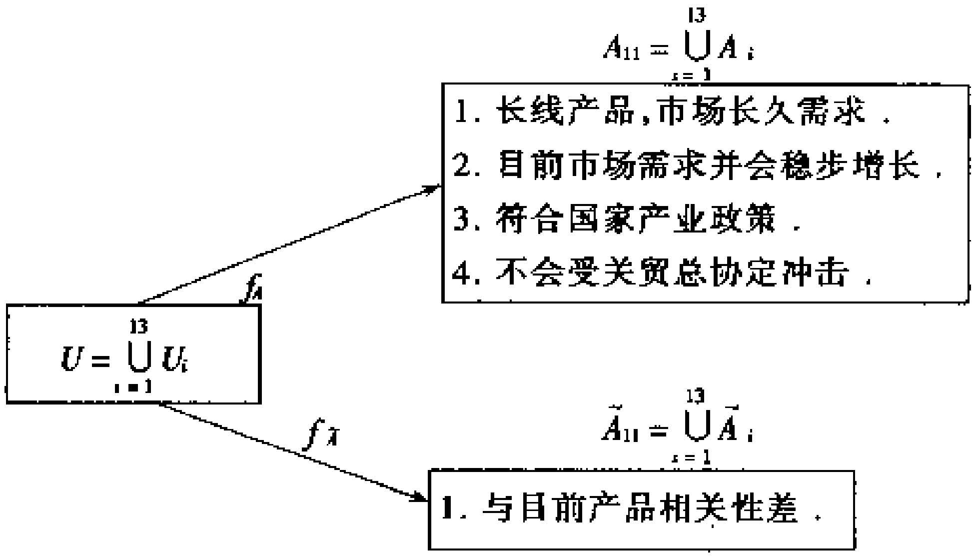


图 6-5

§5　反演集合理论在工业设计中的应用

§5.1　反演集合理论在工业设计质量评定中的应用①

§5.1.1　问题的提出

制定工业设计质量评定标准是实施工业设计目标的重要手段．许多国家和地区为了实施某一时期特定的工业设计目标，都制定了相适应的设计质量评定标准．目前各国和地区制定的标准中，美国强调环境设计和图样，英国和德国注重工业和机械制品，台湾和韩国侧重休闲娱乐产品和家电产品．对优良设计的评审尤如对美的审视，评估标准因不同国家和地区的不同时期而异，只有在基于本位的基点上确立务实的评估标准，才能以阶段式的目标规划促使设计的实质性进展．

① 原文收录在《'95 国际工业设计研讨会论文集》中，本节有删改

工业设计质量评定方法是实施设计质量评定标准的工具.由于各国和地区的评定环境(工业设计基础,文化背景,民族传统,美学观念与市场需求迫切性等)、人员结构(评定人员的专业领域、审美观、评定经验等)不同,评定方法应适应国情.德国工业设计大赛评委乔治·波尔顿(George Burden)教授在武汉讲学期间,由于文化背景和传统观念的差异,我国教师认为某位学生画图和模型应该得高分,乔治·波尔顿教授却认为该生思维方式不对,设计很糟糕.这是评定方法相同时由于评定环境、人员不同,所得的不同评定结论.

产品设计质量评定是对产品价值的判断,也是对产品设计成绩的评判,能够引导设计人员的工作方向和激励其更好、更快地出成果,促进设计质量的提高;寻求更好、更符合国情的评定方法,无疑会促进我国工业设计行业出人才.因此,结合国情分析和比较常用评定方法,以寻求更为合理的评定方法相当重要.

评定工业设计质量的方法主要有:语意区分法(Method of Semantic Differentiate)、α 乘 β 法(Method of $\alpha \cdot \beta$)和我国制订的综合评定法等.在操作评定法过程中,评定人员的素质十分重要.前国际工业设计联合会主席亚瑟·普洛斯(Arthur J. Pulos)认为:工业设计师不是艺术家,他们必须对所处时代的美学特征和文化倾向敏感,而且对工作应经常采用艺术处理方法;工业设计师不是工程师,必须懂科学和工程技术的基本知识与制造工艺;工业设计师不是心理学家也不是社会学家,必须对人类和社会有深刻的理解.在我国,目前同时具备多方面知识的专家尚不多,评定专家大多来自不同的专业,在评定中,他们多以个人专业经验作为判断的主要依据,缺乏一定的确见性.目前采用的评定方法未能弥补这一缺陷,主要表现为:

(1) 缺乏统一的评定参照点.评定专家的文化修养、专业知识和美学观点不尽相同,囿于自己的经验,对同一产品造型常采用各

自惯用的简单的方法评定，缺乏统一的认识，甚至于背道而驰．例如 1992 年某公司为某展览会设计电控柜展品，两位新毕业的造型专业大学生将电控柜门框设计成宽黑边．预展时，有关领导评价“象棺材”．意见反馈后设计者则说“外行，这是当前最流行款式”．究其分歧原因，是双方评定参照点不同，一个是从所处地域民族传统美学观念和人文风俗习惯评定电控柜，一个是片面理解书本，不合时宜地将流行款式移植于电控柜．也有一些评审者评价设计方案时，体积大常被形容为棺材，体积小则为火柴盒，长的是板凳，圆的像冬瓜，不恰当但又形象的比喻足以把设计者的创造性与想象力扫光，而评审者的想象则是既高级又漂亮，说不清，道不明，最后结局还可能回到老产品上，变化只是变换商标的金色．有设计人员埋怨：对于蓝科长，什么都是蓝色最好，凡蓝色设计皆批准．可见，没有统一的参照点就不会有统一的认识．

(2)评定参照点漂移．由于没有统一、固定的评定参照点，专家靠经验参照点以取舍之．当评定环境、评定人员发生较大变动时，评定所依照的经验参照点也随人与环境变化(参照点漂移)，以致于两个相同档次产品造型评定结果大不相同．

(3)少数人意见得不到充分讨论，结论不一定科学．专家们各自以自己的经验为参照点，对产品的水平认识不同．如达到“国内先进水平”，国内先进水平的标准是什么？由于没有统一的参照点，量化标准不统一，评定统计方法只是在某种特定外界条件下的统计分布，是少数服从多数．有时，真理恰恰在少数人甚至个别人手中，目前的评定方法没有给少数专家应有的发言机会(打分是不允许互相讨论的)，统计方法将少数人意见作为偏离中位数的“奇异点”给予抛弃，使得专家结论不一定科学．

为了弥补这种缺陷，我们将反演集合理论应用于工业设计质量评定．其特点是在评定前首先给出或请与会专家们讨论得出统一参照系统．每位专家依据参照系统内的参照点用比较法提出量

化数值.由工作人员集中整理得出评定结论.反演集合工业设计质量评定法是更科学、更符合思维模式的数学方法.

§5.1.2　反演集合工业设计质量评定模型

各国和地区的工业设计质量评定标准都是根据自己的具体情况和一定时期的工业设计目标而制定的,根据国情,我国工业设计标准可归纳为:

(1)产品造型与环境的和谐关系.产品功能和造型对环境有互补性,在同一环境中应与其他产品的互相配合,产品的造型、色彩和材质应体现产品的价值.

(2)整体造型是否明晰表达产品功能.

(3)造型符合产品操作功能,减少操作复杂程度,符合人机工程学要求.

(4)造型明确表达产品的结构、造型原则和体积、尺寸、色彩、材质等视觉指标.

(5)造型具有刻意性,避免雷同.

(6)造型能激起心灵的共鸣.整体表现能引起使用者的兴趣和愉快的感觉.

(7)产品的材料选用无论在生产和将来回收处理上均要考虑对生态环境的影响.

设上述七点为元素 $x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7$,全体元素组成讨论域 $U=\{x_i \mid i=1,2,3,4,5,6,7\}$.并在 U 上给出模糊集合基础上的反演集合定义(见第二章中定义 2-1).

定义中,我们设集合 A 是评定参照集合,$\bar{A}$ 是专家们给出的评定量化值集合.设:

$$u_i=f_A(x_i)$$

$$v_i=f_{\bar{A}}(x_i)$$

则有:

$A = \{u_i | i = 1,2,3,4,5,6,7\}$

$\tilde{A} = \{v_i | i = 1,2,3,4,5,6,7\}$

几何意义如下(图 6-6)：

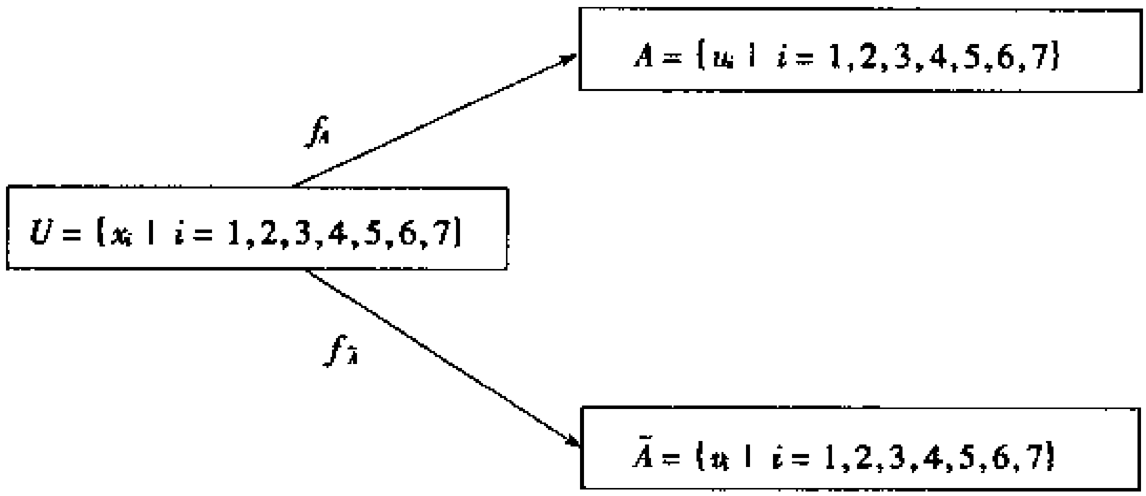


图 6-6

其中，参照集合 A 中元素是我们根据评定要求事先给出或请与会专家讨论统一的造型比较参照依据. 为讨论方便，设 $u_i = 0.5(i = 1,2,\cdots,7)$.

当：$|v_i| > u_i = 0.5$，我们称 v_i 超越 u_i

　　$|v_i| = u_i = 0.5$ 时，我们称 v_i 与 u_i 相似

　　$|v_i| < u_i = 0.5$ 时，我们称 v_i 劣于 u_i

§5.1.3 反演集合工业设计质量评定模型的应用

例 1 设有待评定产品，在国内同类产品中，产品 Q 在 u_1, u_2, u_3 方面具有国内先进水平，产品 Z 在 u_4, u_5 方面具有国内先进水平，产品 H 在 u_6 方面具有国内先进水平，产品 K 在 u_7 方面具有国内先进水平(均经国内大赛确认或经与会专家讨论公认). 设参照集合 A 中元素

$u_1 = 0.5 =$ 产品 Q 的造型

$u_2 = 0.5 =$ 产品 Q 的造型

$u_3 = 0.5 =$ 产品 Q 的造型

$u_4 = 0.5 =$ 产品 Z 的造型

$u_5 = 0.5 =$ 产品 Z 的造型

$u_6 = 0.5 =$ 产品 H 的造型

$u_7 = 0.5 =$ 产品 K 的报废回收处理指标

上述工作完毕后(也可在评定会前完成),请专家们用参照集合 A 中指标来比较评定给出 W 产品的七个方面的量化值,即给出集合 $\tilde{A} = \{v_i \mid i = 1,2,3,4,5,6,7\}$ 诸元素的数值.

设有 m 位专家各自提出的意见如下:

$\tilde{A}_1 = \{v_{11}, v_{12}, v_{13}, v_{14}, v_{15}, v_{16}, \nu_{17}\}$

$\tilde{A}_2 = \{v_{21}, v_{22}, v_{23}, v_{24}, v_{25}, v_{26}, v_{27}\}$

……

$\tilde{A}_m = \{v_{m1}, v_{m2}, v_{m3}, v_{m4}, v_{m5}, v_{m6}, v_{m7}\}$

汇总专家们意见:

$$\tilde{A} = \left\{ V_1 = \frac{\sum_{i=1}^{m} V_{i1}}{m}, V_2 = \frac{\sum_{i=1}^{m} V_{i2}}{m}, \cdots, V_7 = \frac{\sum_{i=1}^{m} V_{i7}}{m} \right\}$$

假设有如下结论:

$|v_1| < u_1$

$|v_2| > u_2$

$|v_3| = u_3$

$|v_4| < u_4$

$|v_5| < u_5$

$|v_6| = u_6$

$|v_7| > u_7$

则我们可得出如下结论:

产品 W 在 x_2, x_3, x_6, x_7 方面达到国内先进水平;在 x_1, x_4, x_5 方面劣于国内最好水平.故 W 产品的特点是:

优点：

①整体造型能清楚表达产品的功能.

②产品造型能符合操作功能.

③造型能激起心灵上的共鸣.

④产品对生态环境没有不良影响，指标达到国内先进水平.

缺点：

①产品造型与环境不够和谐.

②产品造型结构和原则表达不够，其体积、尺寸、色彩、材质、视觉指标没有明确的感观.

③在产品造型的刻意性，避免雷同不够.

上述讨论表明：

(1)评定工作的第一步是统一确定参照集合中诸元素的内容，再用以评定产品，可避免因参照点不同而引起的误差.

(2)由于参照点统一，评定两个以上的产品时，评定人员、环境变化一般不会使评定结论产生大的偏差.

(3)评定前讨论统一参照点，使少数专家有机会充分表述自己的见解.

§5.1.4 在两个产品造型比较中的应用

用反演集合质量评定方法还可进行两个产品造型的比较.

例2 比较产品 W、Q 二者造型的优劣.

我们令产品 W 为参照体，即我们设参照集合 A 中元素：

$u_1=0.5=$ 产品 W 的造型

$u_2=0.5=$ 产品 W 的造型

$u_3=0.5=$ 产品 W 的造型

$u_4=0.5=$ 产品 W 的造型

$u_5=0.5=$ 产品 W 的造型

$u_6=0.5=$ 产品 W 的造型

$u_7=0.5=$ 产品 W 的报废回收处理指标

请专家们用参照集合 A 指标来比较评定 Q 产品的七个方面的量化值，即给出集合 $\tilde{A}=\{v_i \mid i=1,2,3,4,5,6,7\}$ 中诸元素的数值.

设有 m 位专家各自提出的意见：

$\tilde{A}_1=\{v_{11},v_{12},v_{13},v_{14},v_{15},v_{16},v_{17}\}$

$\tilde{A}_2=\{v_{21},v_{22},v_{23},v_{24},v_{25},v_{26},v_{27}\}$

……

$\tilde{A}_m=\{v_{m1},v_{m2},v_{m3},v_{m4},v_{m5},v_{m6},v_{m7}\}$

与例 1 同理，汇总专家们意见便可得出结论(过程省略).

§6 反演集合理论在智能控制中的应用

§6.1 用反演集合理论在烟叶复烤机上实现智能控制的设想①

§6.1.1 问题的提出

烟片复烤机是保证打叶复烤工艺指标的重要设备，某公司设计的烟片复烤机单机电控系统方案，与国内外同类设备相比是能够满足烟厂生产工艺要求的.但是，如果从烟机产品向智能化方向发展趋势看，从探索开发具有自己特色的、具有国际领先水平的控制系统看，该控制系统还需要进一步改进.客观地分析，现运行的烟片复烤机电控系统方案还存在有以下局限性：

(1)在烟叶加工过程中，烟片回潮区的出口物料水分是由加水量 $\Delta_{加水量}$、红外水分仪 h_1、红外水分仪 h_2、回潮一区箱体温度 T_1、回潮二区箱体温度 T_2、输送带速度 $v_{速度}$，这六个因素共同作用决

① 原文在'96 云南省造船工业学会年会上宣读，本节有删改

定的.而现有电控设计方案中水的闭环控制仅依据红外水分仪 h_2,汽的闭环控制仅依据箱体温度,即将水、汽各自根据自己的设定值进行各自的闭环反馈控制(见图 6-7),因此,控制方案不能说是完善的.

(2)由于控制系统只能根据红外水分仪 h_2 测量的物料含水分变化数据因素进行控制,不能依据箱体温度 T_1、T_2,红外水分仪 h_1 和输送带速度 $V_{速度}$ 进行综合控制,具体表现为针对某一品种烟叶,用一组设定的固定参数值保证工艺指标,其结果导致了在而定的设定值下加工流动中的烟叶原料,加工出的烟叶成品最终工艺指标因上述五项因素波动而波动.

(3)由于回潮区控制方案没有利用红外水分仪 h_1,使控制方式是滞后控制方式,即红外水分仪 h_2 测量的物料含水分变化数据不一定能真实的反映回潮一区、回潮二区此时物料的实际含水分量,更不具备智能控制功能.

针对上述问题,本节利用反演集合理论企图给出一种烟片加工过程中工艺指标智能化控制数学模型.从理论上讲,该模型在对烟片的水分进行控制的同时,还具有记忆、比较、判断、自调节、自优化等智能控制功能,使烟片加工成品最终工艺指标实现最少节拍,质量小波纹控制.

§6.1.2 智能模型及其应用

烟片复烤机水分控制系统是由 $\Delta_{加水量}$, $h_{设}$, h_1, h_2, T_1, T_2, $v_{速度}$ 组成的一个系统(见图 6-8),其中 $h_{设}$是系统的工艺指标——出口水分设定值,$v_{速度}$是物料输送速度.在现有的一些控制系统方案中,$h_{设}$, $\nu_{速度}$看作是常量,为讨论方便,我们这里依然如此.我们称所有变量因素 $\Delta_{加水量}$, h_1, h_2, T_1, T_2 为元素,全体元素组成讨论域 U.在实际工作中,对任意一元素都有设定值和实际运行值之分,我们令设定值分别为 $\Delta_{加水量}$, h_1, h_2, T_1, T_2,则对应有它的实际运

行值——反演值 $\tilde{\Delta}_{加水量}$，$\bar{h}_1$，$\bar{h}_2$，$\bar{T}_1$，$\bar{T}_2$. 即在 U 上的元素满足如下模糊集合基础上的反演集合定义(见第二章定义 2-1).

定义 6-8 在$(U, A, \bar{A})$中，任意 $x \in U$，满足 $f_A(x)+f_{\bar{A}}(x)\equiv 0$，则称$(U, A, \bar{A})$为对称反演集合空间，简称对称空间.

下面我们建立智能模型. 由前面讨论我们知道：

$$h_2 = g(h_1, \Delta_{加水量}, T_1, T_2) \tag{1}$$

当烟片复烤机初始运行时，智能系统可根据一组设定的初始运行值 h_1，$\Delta_{加水量}$，T_1，T_2 来运行. 由反演集合定义 2-1 及讨论可知，对应有它的实际运行指标值：

$$\bar{h}_2 = g(\bar{h}_1, \tilde{\Delta}_{加水量}, \bar{T}_1, \bar{T}_2) \tag{2}$$

由于种种原因，实际运行值的绝对值往往不等于设定值，换言之，$(U, A, \bar{A})$为非对称反演集合空间. 例如，来料水分 $\bar{h}_1$ 实际上就可能比设定的 h_1 大或小，箱体实际温度 $\bar{T}_1$、$\bar{T}_2$ 也会比设定的 T_1、T_2 低或高等，使 $h_2 \neq \bar{h}_2$. 为了保持 $h_2 = \bar{h}_2$，由函数 $\bar{h}_2 = g(\bar{h}_1, \tilde{\Delta}_{加水量}, \bar{T}_1, \bar{T}_2)$，我们知道参数 $\bar{h}_1$，$\tilde{\Delta}_{加水量}$，$\bar{T}_1$、$\bar{T}_2$ 相互之间有内在联系，假如 $\bar{h}_2$ 达不到设定值，使得 $|\bar{h}_2 - h_{设}| > |h_2 - h_{设}| + c$（$c$ 为常数，限制调节过于频繁)，则我们可通过调节各个参数来保证 $\bar{h}_2$ 接近 h_2. 当某一参数变量值在其调节范围内调到 $\min|\bar{h}_2 - h_{设}|$ 值时仍不能满足 $|\bar{h}_2 - h_{设}| \leqslant |h_2 - h_{设}| + c$，则可调节下一个参数变量，依次类推，直至 $|\bar{h}_2 - h_{设}| \leqslant |h_2 - h_{设}| + c$（显然，这里调节过程采用多维空间中的"局部寻优法"较为方便).

由上述自调节过程可看出，当烟片物理特性的波动导致工艺指标 $\bar{h}_2$ 不能达到或接近 h_2 时，此时即使 $\tilde{\Delta}_{加水量} = \Delta_{加水量}$，但只要 $|\bar{h}_2 - h_{设}| > |h_2 - h_{设}| + c$，上述过程仍可进行调节使 $|\bar{h}_2 - h_{设}| \leqslant |h_2 - h_{设}| + c$（调节中可能会使 $\tilde{\Delta}_{加水量}$不一定等于$\Delta_{加水量}$).

设定运行值 h_1，$\Delta_{加水量}$，T_1，T_2 实际上是工艺人员按一定的烟草原料物理特性，根据以往积累的加工经验面确定的(储存在数据

库中的数据），所以，针对某一特定环境、特定烟草物理特性，设定运行值 $h_1, \Delta_{加水量}, T_1, T_2$ 不一定是唯一最佳数值组. 当 $|\tilde{h}_2 - h_{设}| \leqslant |h_2 - h_{设}| + c$ 时，我们令：$h_2 = \tilde{h}_2$，此时的 $\tilde{h}_1, \tilde{\Delta}_{加水量}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2$ 作为一组新设定值记忆储存在数据库中保留并可替代原设定运行值. 即：此时令 $h_2 = (h_1, \Delta_{加水量}, T_1, T_2) = \tilde{h}_2 = (\tilde{h}_1, \tilde{\Delta}_{加水量}, \tilde{T}_1, \tilde{T}_2)$，则这一组参数 $h_2 = (h_1, \Delta_{加水量}, T_1, T_2)$ 将被记忆储存在数据库中. 经过一段时间的运行，数据库中就可积累若干组最佳数值组，它可以取代原有的靠操作人员经验给出的参数值数据来作为模型比较数据库存在，可供系统自动从中选取一组作为设定运行值，以适应实际生产的需要.

模型的比较、判断、记忆、自调节程序框图如图 6－7.

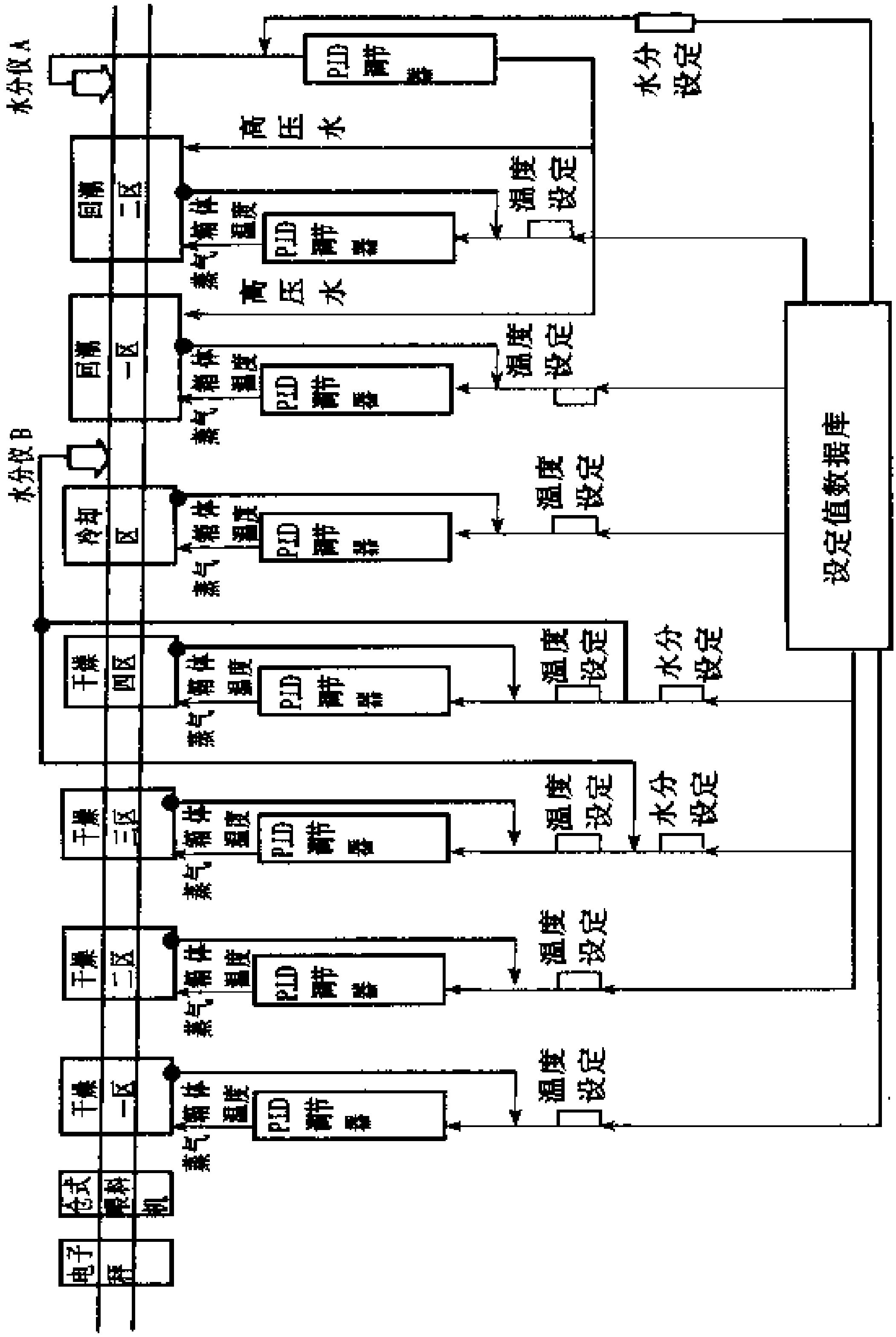

水分仪A
水分仪B
PID调节器
高压水
温度设定
水分设定
回潮二区
回潮一区
冷却区
干燥四区
干燥三区
干燥二区
干燥一区
蒸气
箱体温度
仓式喂料机
电子秤
设定值数据库

图6-7

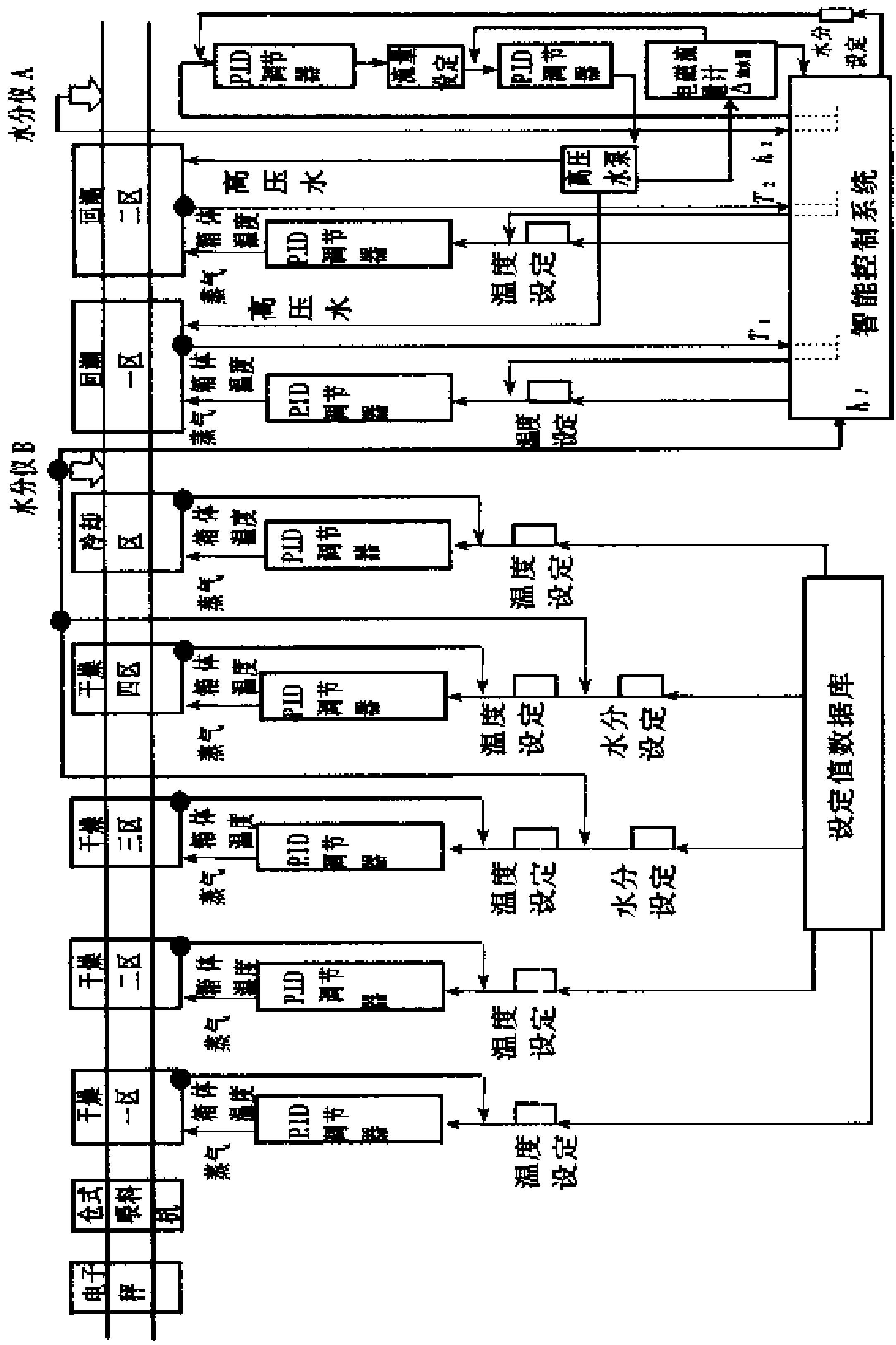

水分仪A
水分仪B
智能控制系统
设定值数据库
高压水泵
高压水
PID调节器
温度设定
水分设定
流量设定
箱体温度
蒸气
回潮二区
回潮一区
冷却区
干燥四区
干燥三区
干燥二区
干燥一区
仓式喂料机
电子秤

图6－8

§6.1.3 智能模型及其应用

烟片复烤工艺指标控制系统是一自律分散控制系统，它由分散的子系统一面相对独立运行，一面相互协调而使大系统的工艺指标得到有序的控制．虽然由公式(1)、(2)我们知道大系统中的工艺指标值 $\tilde{h}_2$ 是由子系统决定的，并且也有设定工艺指标值和实际运行工艺指标值之分．但由于大系统的滞后性质和参数之间的非线性关系使我们不能简单地通过逻辑电路调节来保证 $\tilde{h}_2$ 接近或达到 $h_{设}$．尽管如此，我们仍然能够根据函数(1)知道变量之间相互关系和确定变量的调节范围来保证 $\tilde{h}_2$ 接近或达到 $h_{设}$．

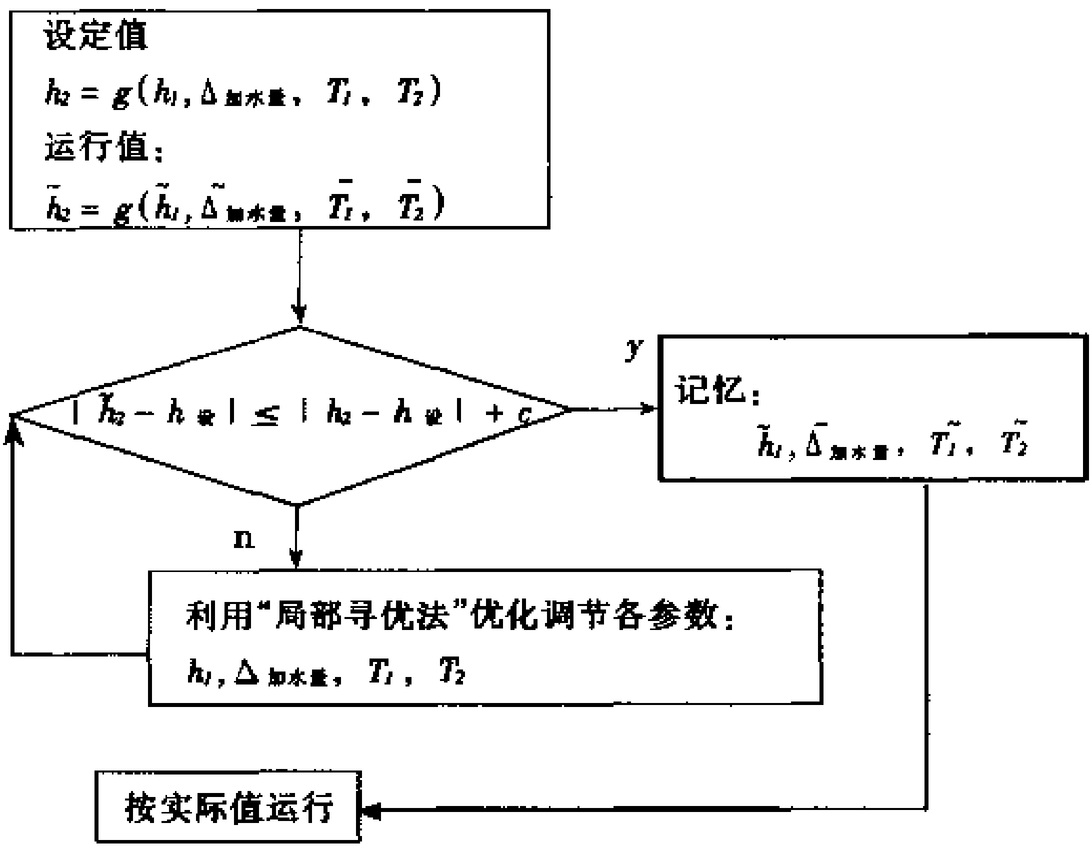


图6－9

由于上述变量自调节过程是可以自动随烟草物理特性的波动

而调节的，从而可减少因烟草物理特性波动而导致的烟叶成品工艺指标 $\bar{h}_2$ 的波动变化，达到实现成品工艺指标 $\bar{h}_2$ 少节拍，质量小波纹控制.

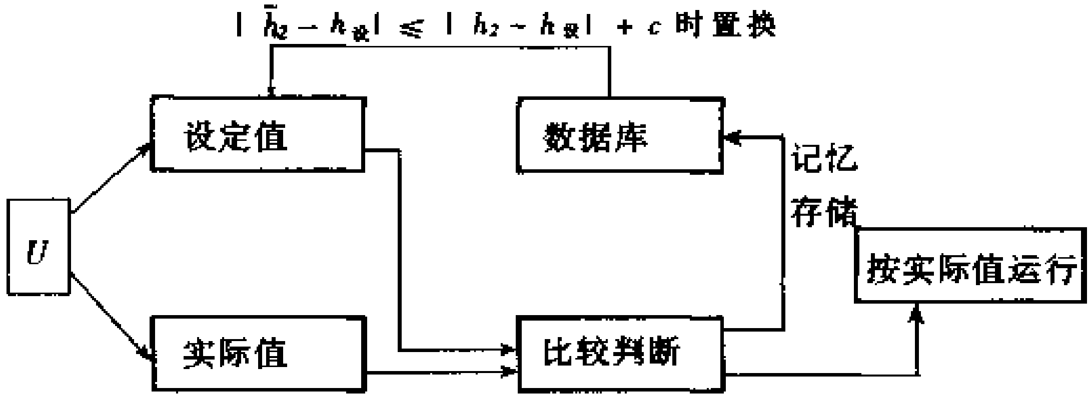


图 6－10

当该智能模型在某一特定的烟片品种中长时期运行后，智能系统就可对同一牌号、同一等级烟草积累若干组(视设计人员需要数量而定)最佳设定运行(记忆)值 h_2. 这种靠智能系统在长期工作中筛选的自优化值，远胜于靠有限个工艺人员依据有限次的试验而确定的设定运行值. 因此，该智能模型是具有自优化功能的.

§6.2　反演集合理论在烟草制丝线智能化控制中的应用①

§6.2.1　问题的提出

近年来，国内外对烟草制丝线控制系统已研究和开发出了一些集中控制、监视的理论和技术. 应用这些理论和技术，人们可根据预先设定的固定工艺指标值，对运行状态下的成套设备进行数据监视和控制. 但目前的集中控制监视系统只能根据加工过程中的物流流量、水分变化等因素进行控制，不能根据烟草物理特性不

① 原文发表在《烟草科技》1996 年 4 期，本节有删改

均匀性进行控制,具体表现为针对某一品种、某一牌号卷烟,用一组设定的或人工在线整定的固定参数值保证工艺指标,其结果导致了在固定的设定值下加工流动中的烟草原料,加工出的烟草成品最终工艺指标(如烟丝填充值、烟丝弹性、出丝率等)因烟草物理特性波动而波动.

针对上述问题,本节利用反演集合理论给出一种烟草加工过程中工艺指标智能化控制数学模型.在理论上,该模型在对制丝线的物流流量、水分进行控制的同时,还能够根据烟草固有物理特性的波动性进行控制.并且具有记忆、比较、判断、自调节、自优化等智能功能.可以为解决上述问题提供理论依据,使烟草加工成品最终工艺指标实现最少节拍,质量小波纹控制.

§6.2.2 制丝线系统中的反演集合定义

制丝线是由一百余台设备组成的一个大系统 $Z=\{Z_i \mid i\in N\}$.其中 Z_i 是大系统的工艺指标,例如:烟丝填充值 Z_1、烟丝弹性 Z_2、出丝率 Z_3 等.

制丝线大系统 Z 是由 m 个子系统 $P_i=\{Q_{ij} \mid i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots\}$ 组成.例如:由烟叶预处理段 p_1,打叶段 p_2,加料段 p_3,切丝段 p_4,梗丝膨胀段 p_5,叶丝膨胀段 p_6,混丝段 p_7 等组成.并且大系统的工艺指标 Z_i 是子系统 $p_i=\{Q_{ij} \mid i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots\}$ 中的工艺指标 Q_{ij} 的函数.例如:烟丝填充值 Z_1 是烟叶预处理段 p_1 上工艺指标烟叶含水率 Q_{11},打叶段 p_2 上工艺指标叶中含梗率 Q_{21}、大中片率 Q_{22},切丝段 p_4 上指标烟丝宽度 Q_{41}、造碎率 Q_{42},梗丝膨胀段 p_5 上指标梗丝膨胀率 Q_{51},叶丝膨胀段 p_6 上指标叶丝膨胀率 Q_{61},混丝段 p_7 上指标叶、梗丝混合比例 Q_{71} 等工艺指标的函数.即:

$$Z_1=f_1(Q_{11},Q_{21},Q_{22},Q_{41},Q_{42},Q_{51},Q_{61},Q_{71},\cdots)$$

对任意 Z_i 有:

$$Z_i = f_i(Q_{11}, Q_{12}, \cdots, Q_{1h}, Q_{21}, Q_{22}, \cdots Q_{2k}, \cdots, Q_{m1}, Q_{m2}, \cdots Q_{mp})$$
$$(h, k, p \in N) \tag{1}$$

子系统 $p_i = \{Q_{ij} \mid i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots\}$ 中的工艺指标值 Q_{ij} 是子系统中参数 $x_{ij}(i,j \in N)$ 的函数. 例如: p_1(预处理段)上回潮后的烟叶含水率 Q_{11} 是真空回潮机的蒸气压力 x_{11},来料含水率 x_{12},…的函数; p_2(打叶段)上打叶后工艺指标叶中含梗率 Q_{21}、大中片率 Q_{22},梗中含叶率 Q_{23} 是烟叶含水率 x_{21},原料流量 x_{22},打叶机的底风 x_{23},腰风 x_{24},顶风 x_{25} 等的函数. 既:

$$\begin{aligned} Q_{1j} &= g_{1j}(x_{11}, x_{12}, \cdots) \\ Q_{2j} &= g_{2j}(x_{21}, x_{22}, \cdots) \\ &\cdots\cdots \\ Q_{mj} &= g_{mj}(x_{m1}, x_{m2}, \cdots) \end{aligned} \tag{2}$$

将所有参数 x_{ij} 和参数函数 Q_{ij}、Z_i 为元素,全体元素组成讨论域 U. 在 U 上的元素满足如下第二章中模糊集合基础上的反演集合定义(第二章中§1定义2-1).

在实际工作中,对任意一元素 x_{ij}、Q_{ij} 或 Z_i,都有设定值和实际运行值之分,我们令设定值分别为 x_{ij}、Q_{ij}、Z_i,则对应有它的反演值——实际运行值 $\tilde{x}_{ij}$、$\tilde{Q}_{ij}$、$\tilde{Z}_i$.

§6.2.3　智能模型及其应用

下面我们建立智能模型:

以打叶段 p_2 工艺指标叶中含梗率 Q_{21}、大中片率 Q_{22}、梗中带叶率 Q_{23} 为例,由前面讨论我们知道 Q_{21}、Q_{22}、Q_{23} 是 p_2 中参数 x_{21}, x_{22}, …, x_{2n} 的函数. 即: $Q_{2j} = g_{2j}(x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n})$,当制丝线初始运行时,智能系统可根据一组设定的值 $x_{21}, x_{22}, \cdots, x_{2n}$ 来运行. 由反演集合定义2-1及讨论可知,对应有它的实际运行指标值: $\tilde{x}_{21}$, $\tilde{x}_{22}, \cdots, \tilde{x}_{2n}$ 及函数 $\tilde{Q}_{2j} = \tilde{g}_{2j}(\tilde{x}_{21}, \tilde{x}_{22}, \cdots, \tilde{x}_{2n})$.

由于种种原因,实际运行值的绝对值往往不等于设定值.例如,来料水分$|\tilde{x}_{21}|$实际上就可能比设定的x_{21}大或小,来料流量$|\tilde{x}_{22}|$实际上也会比设定的x_{22}大或小,烟草原料固有物理特性的不均匀性会导致实际运行工艺指标值过低或过高等,使$|\tilde{Q}_{2j}| \neq Q_{2j}$.为了保持$\tilde{Q}_{2j}$为最佳值,由函数$\tilde{Q}_{2j} = \tilde{g}_{2j}(\tilde{x}_{21}, \tilde{x}_{22}, \cdots, \tilde{x}_{2n})$,我们知道参数$\tilde{x}_{21}, \tilde{x}_{22}, \cdots, \tilde{x}_{2n}$相互之间有内在联系,假如某一$|\tilde{x}_{2k}|$达不到设定值,使得$|\tilde{Q}_{2j}| < Q_{2j}$,则我们可通过调节其他参数来保证$|\tilde{Q}_{2j}|$接近或达到$Q_{2j}$.当某一$\tilde{x}_{2k}$值调到极限(最大或最小)值时仍不能使$|\tilde{Q}_{2j}|$接近或达到$Q_{2j}$,则可利用逻辑电路通知调节下一个$\tilde{x}_{2k+1}$,依次类推,直至$|\tilde{Q}_{2j}|$接近或达到$Q_{2j}$.

由上述自调节过程可看出,当烟草物理特性的波动而导致工艺指标$|\tilde{Q}_{2j}|$不能达到或接近Q_{2j}时,此时即使$|\tilde{x}_{2j}| = x_{2j}$,但只要$|\tilde{Q}_{2j}| < Q_{2j} - C$($C$为常数,限制调节过于频繁),上述过程也是可进行调节使达到$|\tilde{Q}_{2j}|$接近Q_{2j}(此时$|\tilde{x}_{2j}|$不一定等于x_{2j}).

设定值Q_{2j}、x_{21}、x_{22}、…,实际上是工艺人员按一定的烟草原料物理特性,根据以往积累的加工经验而确定的(储存在数据库中的数据),所以,针对某一特定环境、特定烟草物理特性,设定值Q_{2j}不一定是最大值(最佳值).当$|\tilde{Q}_{2j}| \geq Q_{2j} + C$时,我们令:$Q_{2j} = |\tilde{Q}_{2j}|$,而原设定值记忆储存在数据库中保留.式中$C$为比较阈值常数,它的作用是调节替换精度,限制替换过于频繁.

模型的比较、判断、记忆、自调节程序框图(见图6-11):

在图6-11运行模式下,当$|\tilde{Q}_{2j}| \geq Q_{2j}$时,智能模型运行框图(见图6-12):

§6.2.4　讨　论

制丝线工艺指标控制是一大滞后自律分散控制系统,它由分散的子系统p_i一而相互协调一面独自运行而使大系统Z的工艺指标得到有序的控制.虽然由函数(1)我们知道大系统Z中的工

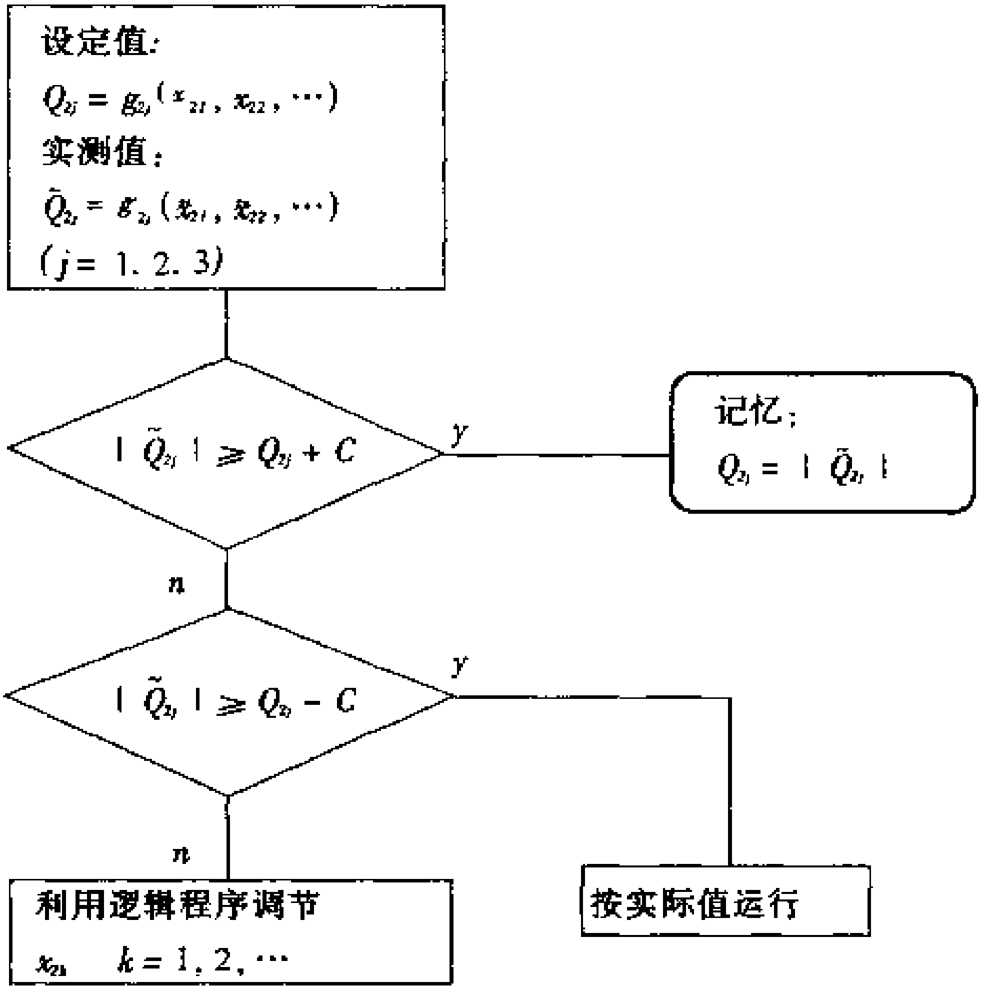


图 6－11 智能模型的程序框图

艺指标值 Z_i 是由子系统中 Q_{ij} 决定着，并且也有设定工艺指标值 Z_i 和实际运行中工艺指标值 $\tilde{Z}_i$ 之分．但由于大系统 Z 的大滞后性质使我们不能简单的通过逻辑电路调节 $\tilde{Q}_{ij}$ 来保证 $|\tilde{Z}_i|$ 接近或达到 Z_i．例如：切丝段加工的叶片至少是打叶机几个小时以前所打下的叶片．虽然如此，我们仍然能够根据函数(1)知道 $\tilde{Q}_{ij}$ 之间相互关系和确定 $\tilde{Q}_{ij}$ 的调节范围来保证 $|\tilde{Z}_i|$ 接近或达到 Z_i．

由于上述 $\tilde{Q}_{ij}$ 自调节过程是可以自动随烟草物理特性的波动而调节的，从而可减少因烟草物理特性波动而导致的烟丝成品工

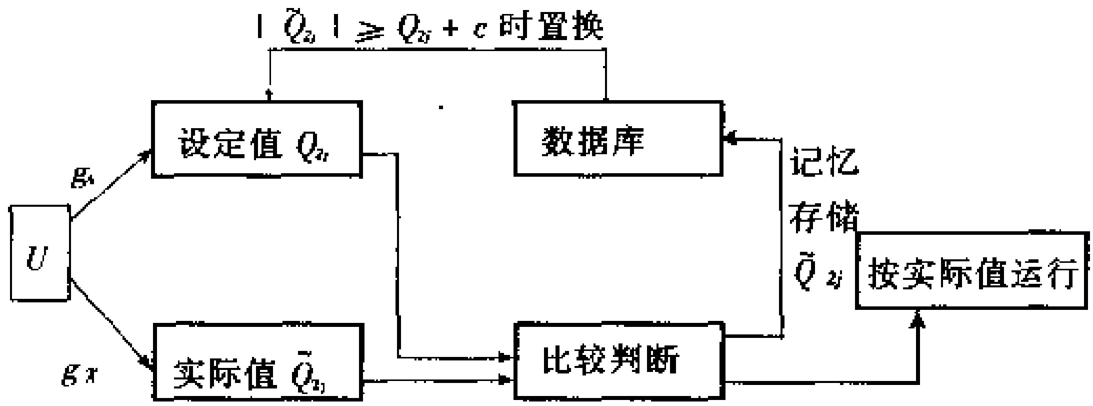


图 6-12 当 $|\tilde{Q}_{2j}| \geq Q_{2j}$ 时智能模型运行框图

艺指标 $|\tilde{Z}_i|$ 的波动变化，达到实现成品工艺指标 $|\tilde{Z}_i|$ 少节拍、质量小波纹控制.

当该智能模型在某一特定的烟草品种中长时期运行后，智能系统就可对同一牌号、同一等级烟草积累若干组（视设计人员需要数量而定）最佳设定（记忆）值. 这种靠智能系统在长期工作中筛选的自优化值，远胜于靠有限个工艺人员依据有限的试验次数确定的设定值. 因此，该智能模型是具有自优化功能的.

§6.3 激光扫描导引 AGV 机器人的反演集合数学模型①

§6.3.1 引 论

国外率先推出的激光扫描（合作反射靶）导引系统设备，依靠高速计算来完成实时导引 AGV 行走. 与目前采用的被动式（Pas-

① 原文收录在《第二届国际物流技术与装备国际学术会议暨第十五届仓库自动化国际学术会议》论文集中，1997 年 10 月，论文号 3211，本节有删改

sive)摄像机的视觉定位系统相比,具有结构简单,造价低廉的优点;与现在较广泛应用的电磁导引、光电导引等系统相比,具有不需要预先埋置电缆或预置线路,可通过控制计算机在一定范围内随意改变 AGV 行走路线等优点.是一项在工业生产中适用的、具有一定发展前途的新技术,市场前景好.

本节中,作者根据物流自动化系统中 AGV 机器人运行所需的外部环境,将 AGV 工作范围划分成不同区域,在每一区域内确定一组已知坐标点的激光反射靶(用于 AGV 定位),利用激光扫描方法同时测定 AGV 到各反射靶的距离和到各反射靶之间的夹角角度,利用反演集合理论方法将 AGV 行走轨迹理论计算值与实际行走值进行比较、分析,确定 AGV 行走的下一坐标点,并且讨论了在此状态下 AGV 判断障碍物的方法等,由此给出了一个有别于国内外现行激光扫描导引方式的、可实现一定智能化的、导引精确度更高的数学模型——距角结合导引法.

本节论述的激光导引系统是由激光扫描器(探测器),反射靶(路标)和导引计算机组成.激光扫描器和导引计算机装在 AGV 上,反射靶安装在 AGV 行走路线上的一侧或两侧墙上或物体上,可用廉价的反射纸制成.导引计算机中储存有全部预先设定(可变动更改)的行走线路和各个反射靶位置的坐标.

本节提出的反演集合数学模型,旨在模拟导引计算机识别("确认")某一反射靶,确定 AGV 实际行走位置坐标(x,y),判断消除杂光干扰,判断障碍物的存在、方位(为实施 AGV 自行规避障碍物规划作准备),并给出 AGV行走下一位置坐标的数学全过程.利用反演集合理论实现 AGV 自动规避障碍物的规划方法将另外发表.

§6.3.2　从反演集合理论观点看现行各种激光扫描测距法的优缺点

事物总是一分为二的. AGV 在行走时,我们理论上要求 AGV 行走的轨迹点是理论计算值,由于各种误差,AGV 实际行走轨迹点值一般情况下不等于理论计算值. 我们设理论计算值属于集合 $\tilde{A}$,实际行走值属于集合 A,每一个实际行走值对应有理论计算值,反之亦然;设反射靶坐标值属于论域集 U. 由此我们可给出反演集合定义(见第一章定义 1-1).

引理 6-1　在第一章定义 1-1 中,如果 f_A、$f_{\tilde{A}}$ 是一一映射,则 $f_A(x)$与 $f_{\tilde{A}}(x)$是一一对应的.

目前,国内外利用激光扫描进行测距的方法主要有三种方法,从反演集合理论观点看其优缺点如下:

(1)用扫描反射靶之间的角度计算出 AGV 当前坐标点值(见图 6-14、图 6-15).

这种方法的优点是 AGV 机器人从一个已知坐标点出发到下一个目标坐标点,理论计算的下一目标坐标点到每个反射靶之间的夹角角度($\tilde{A}$ 中的值)是已知的(是计算出的),故我们可以将 AGV 实际行走的坐标点到每个反射靶之间的实测夹角角度(A 中的值)与导引计算机计算的理论数值进行比较,扫描器每秒扫描 r 转,$1/r$ 秒机器人仅行走距离 L 米,每 $1/r$ 秒这个比较过程进行一次,所以理论值角度 $\tilde{\theta}$ 与实际值角度 θ 应当相差很小,即:

$$|\theta-\tilde{\theta}|\leqslant c(\theta) \tag{3}$$

其中 $c(\theta)$是误差常数. 通过比较,满足公式(3),则导引计算机可"确认"为是反射靶的反射光,否则是干扰光. 由于在 $1/r$ 秒内只判断识别几个反射点,计算量少,故可大大加快计算机计算速度,提高 AGV 行走速度. 但这种方法有二个缺点:一是只能得到几个点的信息,得不到完整的二维数据信息,更得不到三维数据信息;二是不能有效的判别存在障碍物,更不能判断障碍物存在的距离. 例如:在图 6-14 中,当具有反射光线能力的"障碍物 1"在反射靶的位置上将激光反射回来时,这种方法是没有能力区分是反

射靶还是障碍物反射的激光，更不能判断此处存在障碍物.

(2)三角法(见图 6－13)

即用激光扫描测距仪测距.是将一束激光扫描到物体上，通过该亮点在接收器上成像的位置，利用三角关系计算出接收器到物体的距离(图 6－13).

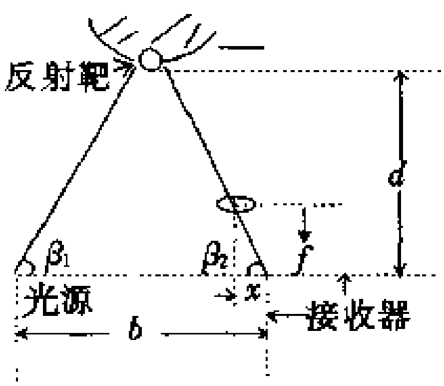


图 6－13

$$d = b/(\mathrm{ctg}\beta_1 + \mathrm{ctg}\beta_2)$$

$$\beta_2 = \mathrm{arctg}(f/x)$$

测量精度正比于基线 b，正比于焦距 f；反比于物体距离.如果用点光源，则得到一组二维数据信息；如果投射一组狭缝光，即在物体表面照射一条亮带，接收器同时可获得该亮带上的所有点的信息，则可得到一组三维数据信息.这种方法的缺点一是测量距离精度反比于测量距离(对厂房内的 AGV 来说，它的测量距离精度是足够了)；二是由于数据信息量大，导致计算机运算速度慢，从而导致 AGV 行走速度慢.

(3)时间法

时间法测距就是计算光波从发出到由物体表而返回所需的时间来判断出物体的距离；或测量发射光和接收光之间的相位差来代替测量时间，即所谓的相位法测距.利用激光的相位差来测定距离，优点是精度高，特别适用于远程距离测量，这一点恰好弥补三角法的不足，缺点是扫描一圈只能得到一组二维数据信息和数据信息量大.

本节中，我们将方法二的测距和方法一的测角相结合，为叙述方便，我们简称这种方法为“距角结合法”.

§6.3.3　距角结合导引法的工作原理

我们设 AGV 行走理论计算轨迹坐标点属于集合 $\tilde{A}$，$\tilde{A}$ 集合中

每一坐标点记为$(\tilde{x}, f_{\tilde{A}}(x)) = (\tilde{x}, \tilde{y}) \in R^2$，AGV 实际行走轨迹坐标点属于集合 A，A 中每一坐标点记为$(x, f_A(x)) = (x, y) \in R^2$；所有反射靶坐标点属于 $\tilde{A} \cap A$，即：$(\tilde{x}_p, \tilde{y}_p) \in \tilde{A}$，$(x_p, y_p) \in A$，且$(\tilde{x}_p, \tilde{y}_p) = (x_p, y_p)$. 几何意义如图 6 - 14.

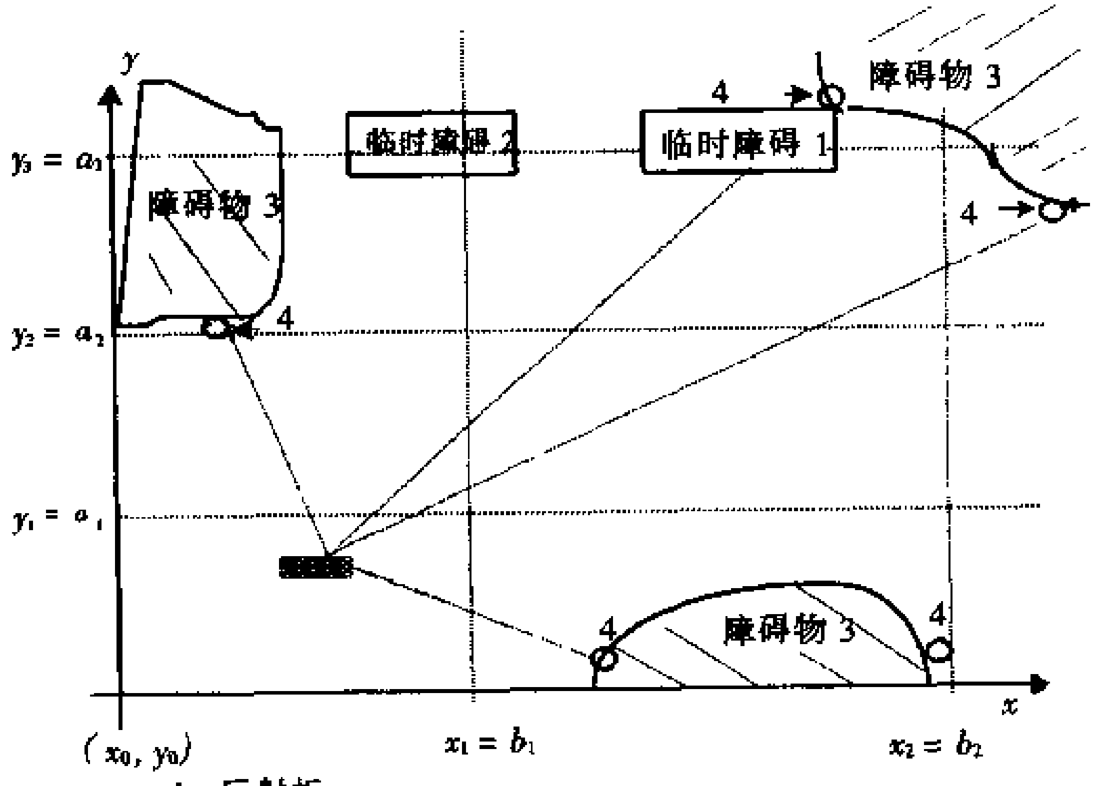


图 6 - 14

所谓导引计算机识别("确认")某一反射靶、确定 AGV 当前位置坐标、给出 AGV 行走下一位置坐标的数学过程，实际上是利用反演集合关系，对集合 $\tilde{A}$、A 二者中坐标点数据不断进行比较、分析处理的过程.

我们设 AGV 在任意一段路径中至少能看到有一定扫描间距(指扫描角度)的、不规则排列的、不少于 4 个不多于 n 个的反射靶. 如图 6 - 14 所示，一组函数：

$$y_i = a_i$$

$$x_j = b_j$$

将集合 $\tilde{A}$ 中储存的 AGV 运行范围地图划分为 $q=i\times j$ 个区域，并且满足如下规定：

(1)在每个区域中，导引计算机的数据库仅提供 AGV 看到 m 个($5\leqslant m\leqslant n$)反射靶的坐标，供计算 AGV 的确切位置.

(2)在相临的两个区域内，AGV 从一个区域内至少能看到另一个区域内的不少于 4 个的反射靶(如果导引计算机通知它看另一区域的话).

当 AGV 机器人接收到货物搬运指令，从起始点坐标出发时，在集合 A 中，即从计算机计算的理论起始点坐标$(x_0,y_0)=(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$出发到理论计算的$(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1)$，而实际到达的坐标是$(x_1,y_1)$，AGV 在$(x_1,y_1)$点能看到那些反射靶，取决于理论计算值$(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1)$，当$(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1)$落在另一区域而实际行走值$(x_1,y_1)$没有到达该区域，但它一定会在邻近区域，此时导引计算机“通知”AGV 在(x_1,y_1)点看$(\tilde{x}_1,\tilde{y}_1)$点所在区域的反射靶，由上述规定 2 可知它仍然能够至少看到 4 个反射靶，并不影响导引计算机计算 AGV 当前位置(x_1,y_1)的值，当(x_1,y_1)值求出，完成置换：$\tilde{x}_1=x_1,\tilde{y}_1=y_1$ 后，便可计算出 AGV 行走的下一坐标点$(\tilde{x}_2,\tilde{y}_2)$.

由于采用的是距角结合法，故当一束激光被反射回来时，扫描器同时测得 AGV 与反射靶之间的距离 l 和反射靶之间角度 θ(见图 6-15)，这种实测距离 l、角度 θ 数据(A 中的值)与导引计算机计算的理论计算距离 $\tilde{l}$、角度 $\tilde{\theta}$ 数据($\tilde{A}$ 中的值)进行比较：

$$\begin{cases}|\theta-\tilde{\theta}|\leqslant c(\theta)\\ |l-\tilde{l}|\leqslant c(l)\end{cases}\qquad(4)$$

其中 $c(\theta)$、$c(l)$是误差常数.

显然，公式(4)方法明显要好于公式(3)中仅考虑角度数值比较的方法. 如果有一反光的障碍物遮挡在反射靶处将激光反射回来，则由于实测距离与导引计算机中理论计算距离之间的误差远超过误差值 $c(l)$，故导引计算机可判断出障碍物存在.

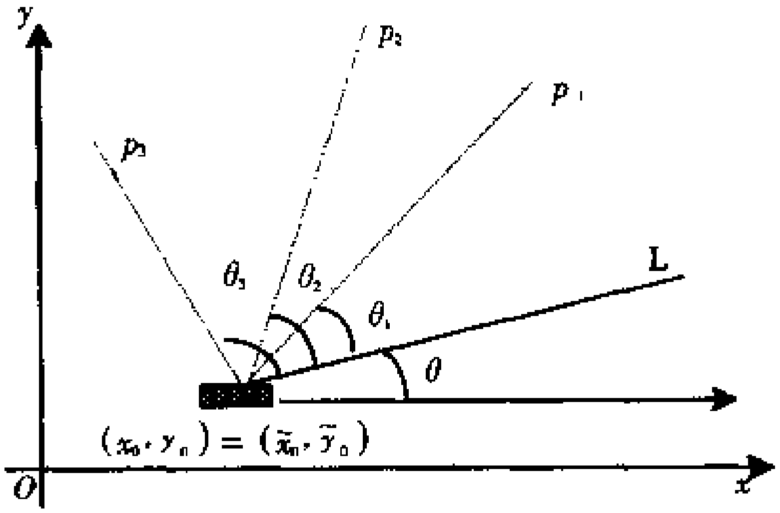


图 6~15

设 AGV 在(x_0, y_0)点的纵向矢量轴 L 与 m 个反射靶之间的扫描测量角度分别是 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ 和距离分别是 $l_1, l_2, \cdots, l_m$；导引计算机在$(\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$点计算的到各个反射靶的角度分别是 $\tilde{\theta}_1, \tilde{\theta}_2, \cdots, \tilde{\theta}_m$ 和距离分别是 $\tilde{l}_1, \tilde{l}_2, \cdots, \tilde{l}_m$. 在起始点，集合 A 中起始点坐标值与 $\tilde{A}$ 中的理论起始点坐标值相等. 即：$(x_0, y_0) = (\tilde{x}_0, \tilde{y}_0)$，故有：

$$\begin{aligned} \theta_i &= \tilde{\theta}_i \\ l_i &= \tilde{l}_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

我们设扫描器每秒扫描 r 转，$1/r$ 秒 AGV 行走距离 s 米，如果 AGV 在 $1/r$ 秒后所到的 A 中的坐标点(x_1, y_1)恰好是导引计算机所提供的集合 $\tilde{A}$ 中的理论计算值$(\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$，则$(x_1, y_1) = (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$，且

$$\begin{aligned} \theta_i &= \tilde{\theta}_i \\ l_i &= \tilde{l}_i \end{aligned} \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

但实际上由于机械运动累积误差等原因，导致$(x_1, y_1) \neq (\tilde{x}_1, \tilde{y}_1)$，故存在有

$$\left.\begin{array}{l}\theta_i \neq \tilde{\theta}_i \\ l_i \neq \tilde{l}_i\end{array}\right. \qquad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

扫描器实际测量角度 $\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$ 和 $l_1, l_2, \cdots, l_m$，采集比较方法见图6－16.

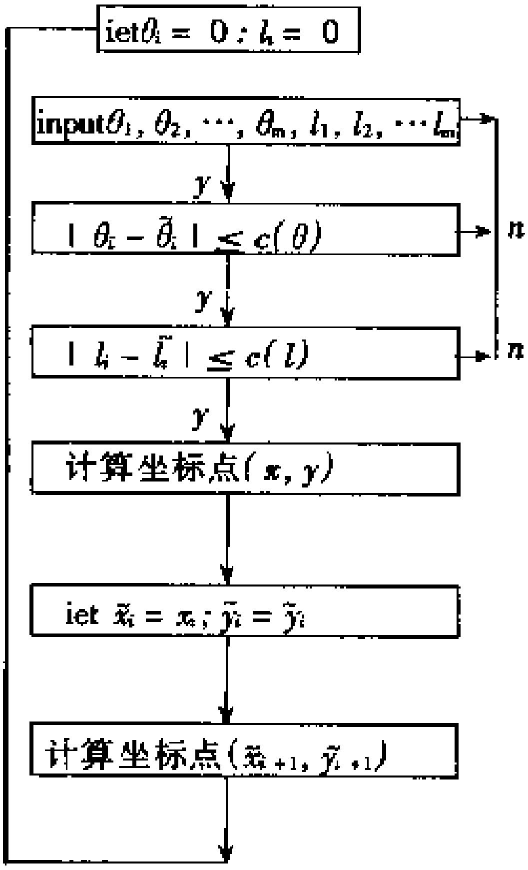


图 6－16

如果 AGV 行走轨迹脱离了 $\tilde{A}$ 中理论轨迹，为了使 AGV 回到理论轨迹上来，设理论轨迹在这一局部行程为直线方程：$ax + by + c = 0$(见图 6－17)，根据公式：$\vec{d} = \dfrac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$ 可计算出为校正 AGV 机器人行走轨迹应该给 AGV 施加的横向矢量 $\vec{d}$，AGV 从 (x_1, y_1) 到 (x_2, y_2) 的连线与理论轨迹直线方程之间的夹角为 α，又从 (x_0, y_0) 到 (x_1, y_1) 的连线与理论轨迹直线方程之间的夹角为 θ，所以 AGV 纵向矢量轴应当旋转 $\alpha + \theta$ 后才能在下一个 $1/r$ 秒后，AGV 行走 s 米距离后回到理论轨迹上的坐标值 $(x_2, y_2) = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$.

如果 AGV 行走 $1/r$ 秒后回到 $\tilde{A}$ 中的理论轨迹上，即 $(x_2, y_2) = (\tilde{x}_2, \tilde{y}_2)$，则可按公式计算出 $(x_3, y_3) = (\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)$. 否则，AGV 行走 $1/r$ 秒后没有回到 $\tilde{A}$ 中的理论轨迹上，再重复上述过程.

在 (x_3, y_3) 点处能够"看到"那些反射靶，取决于理论计算值 $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)$，如果点 (x_3, y_3) 恰好落在 $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)$ 所在区域的分界线上，接收器仍能"看到" m 个反射靶；如果 (x_3, y_3) 没有落在 $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)$ 所在的区域内或区域边界上，则它一定落在 $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)$ 所在的邻近区域，由前面的区域设定"规定(2)"可知，此时接受器至少能看到 $(\tilde{x}_3, \tilde{y}_3)$

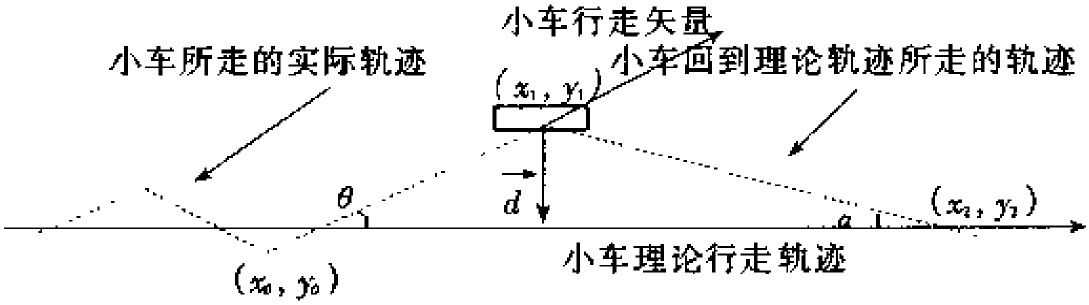


图 6－17

所在区域内的不少于 4 个的反射靶，所以不会影响导引 AGV 运行.

§6.3.4 AGV 判断障碍物存在方法

我们采用的是将方法二的测距和方法一的测角相结合——距角结合法，在 AGV 行走过程中，如果我们自始至终让激光扫描器投射一组狭缝光以获得四周的三维图象或用点光源获取四周的完整的二维数据信息，则由于导引计算机计算量大，从而降低了 AGV 行走速度，尽管计算机的发展速度很快，其体积越来越小，计算速度越来越快，使得问题趋向解决，但至少目前仍然是一个值得研究的问题.为减少导引计算机的计算量，加快 AGV 行走速度，我们作如下规定：

(1) AGV 只在起始点、拐弯处和人为干预时投射一组狭缝光，获得 AGV 四周的三维图像并记忆下来；

(2) AGV 只在间隔 t 秒时间情况下用点光源扫描一次以获取 AGV 四周的一组完整的二维数据信息并记忆下来；

(3)AGV 在正常行走的情况下，主要利用反射靶的强反射光导航.

由于反射靶是特制的反光装置，反光量远远高于普通物体，因此我们只需要在处理接收器信号时设定一阈值，仅对超过阈值的光信号进行处理便可达到“规定(3)”的目的；而当 AGV 实施“规定

(1)、规定(2)"时,我们此时只需将阈值降低到一定程度便可达到目的.

上述规定实际上是模拟人类行走过程中判别四周环境的方法:我们初到某地,首先定住脚步仔细判别方向和规划并记忆行走路线(即上述规定(1));而后快速行走,在快速行走中,我们凭借记忆力不需要再每一步仔细考虑环境,而是依据几个主要坐标参照物进行快速行走(上述规定(3));只是不定时的(AGV 采用间隔 t 秒)用目光搜索可能出现在附近的障碍物并根据搜索数据修正行走路线等(上述规定(2));遇到拐弯,面对一陌生环境,又重复上述过程.如果过分缩短规定(2)中 AGV 的间隔时间 t 秒,就会像我们步步小心谨慎地观察四周而降低行走速度一样,降低 AGV 行走速度;如果过分放长规定(2)中 AGV 的间隔时间 t 秒,又会像我们走路过分不小心有时会绊一跤一样,AGV 有时会发现不了突然出现的障碍物(如图 6-14 中的"临时障碍 2"),导致无法实施规避.

所以我们说,本节提出的数学模型使 AGV 能够实现一定的智能化.

§6.3.5　其他几个问题的讨论

(1)θ 的测量精确度与常数 $c(\theta)$之间关系

很明显,AGV 在 $1/r$ 时间内行走的距离越短,测量值 θ 与理论值 $\bar{\theta}$ 之间的差距越小,$c(\theta)$可越小,即 θ 的测量精确度越高;此外,位于 AGV 前方的反射靶之间的 θ 是逐渐增大的,此时(图 6-16)判别公式可只考虑加 $c(\theta)$;位于 AGV 后方的反射靶之间的 θ 是逐渐减小的,此时判别公式可只考虑减 $c(\theta)$.

(2)AGV 抗杂光干扰方法

为了防止杂光干扰,我们要求反射靶安装在周围背景阴暗或弱反光的物质上,即尽可能避免反射靶周围有杂光产生,这在实际应用中是不难做到的.尽管如此,上述数学模型在建立时,仍然考

虑了 AGV 运行空间中产生杂光时，模型的抗干扰性.

我们是采用距角结合法测量每一反射靶的位置，并利用反演集合理论方法将测量的角度 θ_i 和距离数值 l_i 与理论计算的角度 $\bar{\theta}_i$ 和距离数值 $\bar{l}_i$ 进行比较，并且是在 $1/r$ 时间内比较一次，如果有杂光源与反射靶同时满足

$$|\theta_i - \bar{\theta}_i| \leqslant c(\theta)$$

$$|\theta_j - \bar{\theta}_i| \leqslant c(\theta)$$

则可选取 $\min|l_i - \bar{l}_i|, |l_j - \bar{l}_i|$ 对应的一组为反射靶坐标. 很明显，θ、l 都是重要的比较判断数值，实际上，由于我们是将反射靶安装在墙壁上或四周无行走物可碰撞的物体上，所以如果一杂光源在角度上难以与反射靶区分时，杂光源在距离上是很容易与反射靶相区别的. 这正是本节提出的数学模型比目前广泛应用的方法一定位判别精确度高的根本原因.

(3)测量距离精确度与区域范围及其划分之间的关系

测量距离精确度与 AGV 到反射靶的距离成反比，AGV 与反射靶的距离越远，测量误差越大. 但由于我们将 AGV 运行范围划分成不同的区域，在不同的区域内用不同的反射靶进行定位，所以不论在那一个区域内，我们都可以把用于该区域定位的反射靶固定在适当位置上，从而在理论上讲，本节提出的数学模型可以让 AGV 行走区域任意扩大，并且能够保证其测量距离精确度.

(4)行走精确度与扫描器每秒旋转次数的关系

AGV 在 $1/r$ 时间内行走的距离越短，累积误差会越小，行走精确度会越高；当 AGV 行走速度不变时，扫描器每秒旋转次数越高，AGV 在 $1/r$ 时间内行走距离越短，所以，行走精确度与扫描器每秒旋转次数成正比.

扫描器每秒旋转次数受到激光光源的脉冲次数和导引计算机运算速度的制约，激光光源的脉冲次数越高、导引计算机运算的速度越快，则扫描器每秒旋转次数可以越高. 但是，提高激光光源的

脉冲次数和提高导引计算机的运算速度已经不是数学模型所研究的范围了.

§7　反演集合理论在人工神经网络中的应用

§7.1　关于建立脑整合神经网络系统的设想[①]

§7.1.1　引　论

近年来,国内外对脑科学和脑功能研究空前活跃,探索和揭示脑的奥秘被认为是人类向自身的一场无与伦比的挑战,是科学家魂牵梦绕的重大课题.许多研究人员希望能够寻找出更直接模拟人脑的思维过程和更接近人类的推理决策技巧的神经网络系统,并应用于智能控制.准确地讲,整个大脑是一个复杂的生物神经网络系统,人的智能行为是在其上实现的,如果能人工模仿其结构实现其功能,无疑将极大促进智能化产业,其社会、经济效益前景巨大,继美国1990年提出"脑十年计划",欧洲1991年开始实施"EC脑十年计划"之后,日本1996年提出的为期20年的"脑科学时代计划",就把研制"由1亿个神经元组成的具有思考机能的脑型计算机"列入为最终目标之一.

现有的各种人工神经网络系统是经过大大简化的、局部模仿的、仅反映生物神经网络局部某些特征的数理表示,尚不能从整合角度较完整地反映脑的生物神经网络结构,更不能较完整地反映脑功能.例如,大脑最典型的左右两半球结构就没有反映在现有神经网络结构中,额叶区与颞叶区不同的分工及其整合功能也同样没有反映在现有神经网络结构中.

因此,一些学者呼吁寻求建立新的、更能完整模拟脑结构的神

① 原文收录在《中国第三届青年学术会议论文集》中,1998年

经网络系统，借以发现脑结构微观成果的宏观意义和整体功能，并发展应用到智能控制中.例如：1997年5月19日至22日，第73次香山科学会议上有观点指出“脑的奥秘的揭示是不能完全依赖于神经元和分子水平的研究”，也应该“从整合的观点认识脑功能”.

笔者认为，人的智能行为是在脑结构整合工作原理上体现的，尽可能模仿人脑结构整合工作原理，应该更容易逼近产生人脑智能.基于这种思路，我们以鲁利亚(Luria, A.R.)提出的大脑三个基本机能联合区学说为理论基础、以模仿脑结构为手段、以逼近产生人脑智能为目的、以现有的人工神经网络为器件、以反演集合理论为数学工具，寻求建立一种新的人工神经网络系统——脑整合神经网络系统.

§7.1.2 脑整合神经网络系统应该具有的一些特征

所谓脑整合神经网络系统是指根据鲁利亚的大脑三个基本机能联合区学说，至少利用6个现有人工神经网络模块组成左前额神经网络、右前额神经网络、左运动区神经网络、右运动区神经网络、左颞神经网络、右颞神经网络，并仿照脑神经纤维丛连接方式将其连接起来(详见图6-18)，并包含以下特征：

(1)鲁利亚通过长期的临床观察，特别是对脑损伤病人的深入分析而创立了脑的3个基本机能联合区理论.第一基本机能联合区位于脑干网状结构、间脑和大脑皮层内侧部，是调节机体紧张度保证觉醒状态；第二基本机能联合区位于两半球后部皮质，包括视觉区(枕叶)、听觉区(颞叶)和一般感觉区(顶叶)以及相应的皮层下组织，是对来自外部世界信息的加工和储存；第三基本机能联合区位于两半球前部皮质，即额叶区，位于中央沟的前方，是制定程序、调节和控制行为活动.鲁利亚认为额叶是脑的最高级部分.

如果说，现有的各种各样神经网络的输入、输出部分可以大略地对应第一基本机能联合区，现有人工神经网络系统的应用功能

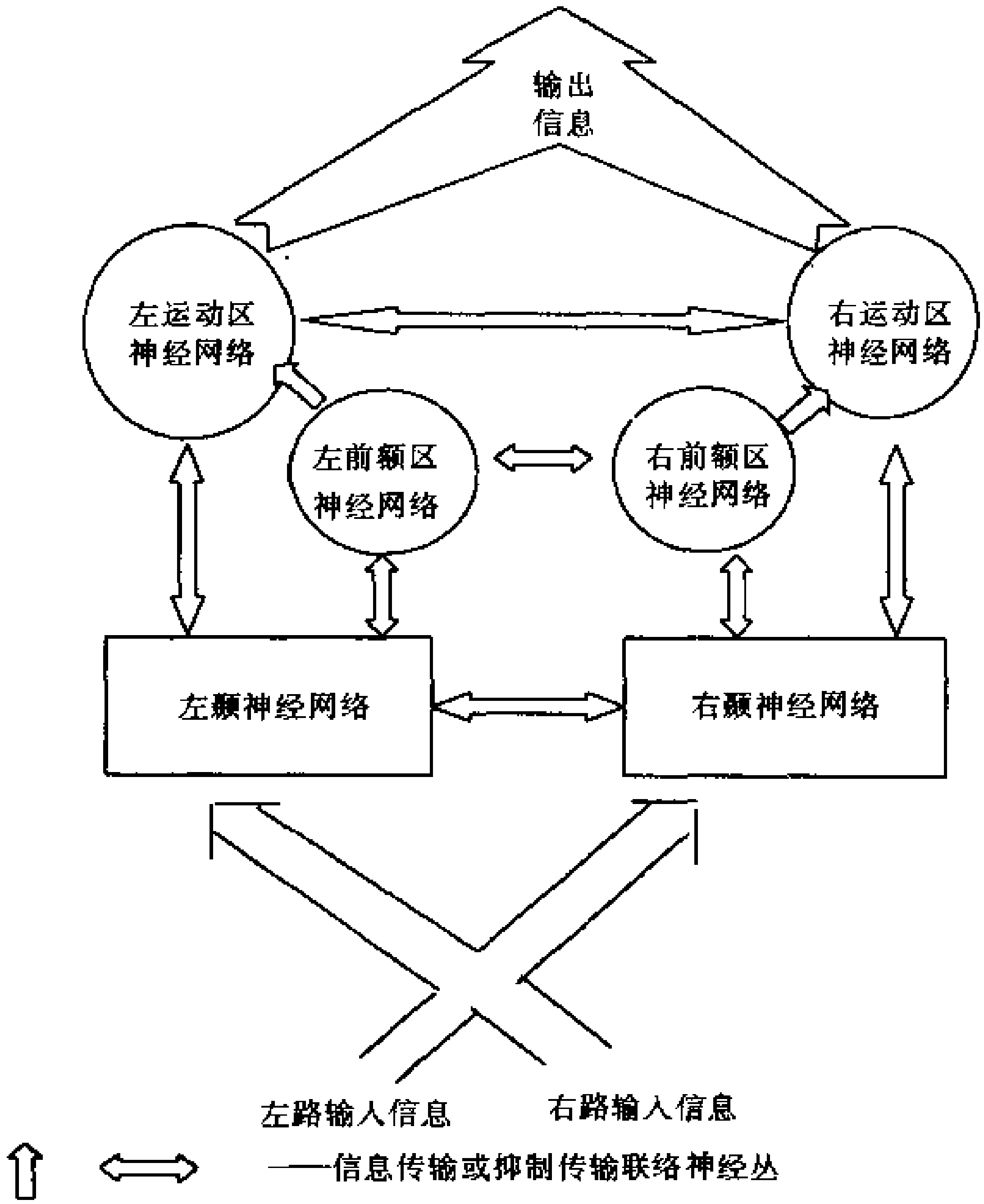


图 6－18

可以近似地对应第二基本机能联合区，则第三基本机能联合区的制定程序、调节和控制行为活动功能在现有人工神经网络系统中是没有对应部分的．这是现有人工神经网络系统的缺陷之一．而在脑整合神经网络系统中应该具备有这种对应结构（见图 6－18）．

为讨论方便,在图 6-18 中我们将第二基本机能联合区简称为颞神经网络,将第三基本机能联合区简称为前额区神经网络和运动区神经网络,其中运动区神经网络是前额区神经网络的“出口”.

(2)大脑最典型的结构是分为左右两半球,如果把颅骨去掉,肉眼能见到明显的分界线,这是整个动物界大脑的共同特征,对应两半球特征的有两手、网眼、两耳等等.大脑的左右网半球在结构上是相似的,到目前为止还没有发现一种宏观的或微观的结构是一侧半球所独有的,“人的大脑半球存在于共生的相互关系中,活动的能力和动机是相互补充的.”“在两群神经元之间具有交互性的通讯联系,使脑成为一个具有高度复杂行为的真正的动态系统,并且在一定程度上独立于周围的环境.”因此,脑整合神经网络系统也应该具备这种对称结构.具体作法如图 6-18.

(3)大脑两侧半球功能是不对称的,“两半球所表现的功能优势的不同实质上是工作方式的不同”.大脑网半球之间在某些形态特征方面具有量的差异,我们经常看到,两半球在长度上的差别,如:右利手者左半球比较长,左利手者右半球比较长等.在一系列观察中,同一皮质区,有时左半球的(神经元细胞)大些,有时右半球的(神经元细胞)大些.

大脑两半球彼此独立,是两个信息处理中心.人的左右两个脑半球由胼胝体密切相连,实行两半球信息共享,它们及时交流信息,及时协调,使人的精神体现出完整性、统一性.脑整合神经网络系统也应该具备这种特点,具体作法是图 6-18 中左右神经网络模块信息加工应该各有所侧重.

§7.1.3 反演集合理论作为脑整合神经网络系统数学分析方法的生理学基础

归纳神经心理学各方面工作我们可以整理出以下结论:

(1)网半球无论在宏观或微观的结构都有相互对应的皮质结

构,而不存在一侧半球所独有的皮质区域."人的大脑半球存在于共生的相互关系中,活动的能力和动机是相互补充的","尚没有令人信服的证据说明任何复杂的心理过程是为哪一半球所绝对控制……,就某种行为而言,只可能有一侧半球的相对优势,而不是绝对的一侧性控制.两侧半球作用的分工是相对的,而不是绝对的."

(2)"近年来的研究表明,两侧大脑半球只有功能分工不同,而没有优劣之分和主导与从属之分."

(3)从胎儿到出生后6个月,大脑的所有脑神经元都已形成.大脑半球的特化发生于出生后前几个月.

(4)"无论哪侧半球被切除,感觉-运动机能,运用和语言都大部保存.似乎无论哪个半球都有众多的这类机能","人类大脑半球的左侧优势现象,主要是在后天生活实践中逐步形成的.一些研究结果表明,儿童在2~3岁以前,左侧优势半球尚未建立,双侧大脑半球均与言语活动有关;到10~12岁时,左侧优势逐步建立,但在左侧大脑半球损伤后,尚有可能在右侧大脑皮层再建立起言语活动中枢",有的人两侧都有语言功能".

综上所述,既然还没有发现一种宏观的或微观的结构是一侧半球所独有的,为了建立数学模型,我们不妨作如下假设:大脑两半球中任一同皮质区域都是由数量相同的神经元组成(如果一侧半球中一些脑神经元萎缩死亡或确有个别皮质区上的神经元数量是左右不对称时,此时萎缩死亡或确实不存在的神经元可看成是所对应的神经元功能为零的特殊情况).

两半球好比两套信息加工系统,有所分工、有所侧重.左右两眼的视觉信息分别传到相应的右左两个半球时,两个半球处理信息时相互支持的互补性紧密结合得如同一个单位在工作,而不是一个开动着,另一个闲置着.

上述假设用数学描述,我们可设两侧半球同一位置的两个神

经元有一公共名称 x_i，$f_A(x_i)$为属于脑左半球的神经元，$f_{\bar{A}}(x_i)$为属于脑右半球的神经元，f_A、$f_{\bar{A}}$ 是一一映射．即对大脑左半球任一皮质区域 $A_j(j\in N)$中的任一神经元 $y_i=f_A(x_i)(i\in N)$，在大脑右半球中对应的皮质区域 $\bar{A}_j(j\in N)$内，存在有与它对应的一神经元 $\tilde{y}_i=f_{\bar{A}}(x_i)(i\in N)$，对应关系为：$f_A(x_i)\to x_i\to f_{\bar{A}}(x_i)$（一侧半球中一些脑神经元萎缩死亡或确实不存在时，此时可看成是 $f_A(x_i)\neq 0$、而 $f_{\bar{A}}(x_i)=0$ 或 $f_A(x_i)=0$、而 $f_{\bar{A}}(x_i)\neq 0$ 时的特例情况），反之亦然．

我们设所有 x_i 组成集合 U，U 中任意元素 x_i 对应有 $(f_A(x_i),f_{\bar{A}}(x_i))$；其中 $y_i=f_A(x_i)$是大脑左半球中的一神经元，$\tilde{y}_i=f_{\bar{A}}(x_i)$是大脑右半球中与其对应的神经元．不难看出，当大脑左半球中的一神经元 $f_A(x_i)\neq 0$，而 $f_{\bar{A}}(x_i)=0$ 时，则可看成大脑右半球中对应的神经元$f_{\bar{A}}(x_i)$萎缩为零了．设所有 $f_A(x_i)$组成集合 $A=\{f_A(x_i)\mid x_i\in U\}$，所有 $f_{\bar{A}}(x_i)$组成集合 $\bar{A}=\{f_{\bar{A}}(x_i)\mid x_i\in U\}$．显然，$A$ 是大脑左半球所有神经元组成的集合，$\bar{A}$ 是大脑右半球所有神经元组成的集合．

由此可以给出基于脑神经网络的反演集合定义：

定义：所谓给定了论域 U 上的一对互为反演的集合 A、$\bar{A}$，是指对任意元素 $x\in U$，存在有 $y=f_A(x)\in R^n$，$\tilde{y}=f_{\bar{A}}(x)\in R^n$，$f_A(x)$叫做 x 在A 中的n 维映射值，$f_{\bar{A}}(x)$叫做 x 在 $\bar{A}$ 中的n 维映射值；映射：

$$f_A: U\to R^n, x\to f_A(x)$$

$$f_{\bar{A}}: U\to R^n, x\to f_{\bar{A}}(x)$$

分别叫做 A、$\bar{A}$ 的n 维映射，R^n 表示n 维实数空间，正集合 A 与反集合$\bar{A}$ 互为反演集合．

$$A=\{(x,f_A(x))\mid x\in U\},\bar{A}=\{(x,f_{\bar{A}}(x))\mid x\in U\}$$

两个反演函数值$f_A(x)$、$f_{\bar{A}}(x)$ 的大小变化，可看作是两个相互对应的脑神经元发生的各自不同的特化（萎缩死亡，或神经元体

积、突触变化等).正是由于这种从"出生后前几个月"开始的脑神经元特化,使大脑两半球呈现不对称性.

§8 反演集合理论在物理学中的应用

§8.1 "反地球、反太阳系"会存在吗?

§8.1.1 引 论

自1928年狄拉克提出反电子存在著名预言至今,经过60多年探索,人们不但在实验室中发现反电子、反质子、制造出反氢原子,而且发现了在距离银河系中心3000光年处迸发的反物质粒子,"该反物质源像是被煮沸了一样从银河系的中心附近喷发出来,其巨大的粒子束流竟有28000万亿公里长."(《科技日报》1997年5月1日).

面对奇异景观,人们既觉兴奋又感困惑,它不仅发展了人类对世界的已有认识,还使一个近60年的话题又重新热闹起来,存在与我们相对应的一个镜像世界吗?存在反地球吗?

人们曾这样设想过,在宽广无垠的宇宙以外的什么地方也许有个诺大的空域,哪儿隐匿着反物质,或许还存在着反地球,反银河.这个设想成为科幻小说的重要题材,多少年来,现代物理学家们自认无知,让科幻小说家们独自在这个领域驰骋.但最近的反物质研究进展,尤其是反氢原子的制造成功,使我国一些学者认为目前的科学进展"证实了宇宙中真实存在着我们日常世界的镜面对称影像——'反世界'"(《光明日报》1996年3月2日);有学者认为"任何物质都有与之对应的反物质.它们是完全对称的……,按照'完全对称'的道理,应该有与它们对应的反物质,就是说应该有个'反地球',也应该有个'反太阳系'"(《科技日报》1996年2月5日);"应该有个'反地球',还应该有个'反太阳系'"(《科技日报》

1996年12月25日).

反地球、反太阳系真的存在吗?笔者认为,从存在的数学概率来看,反地球、反太阳系是不存在的.

理由阐述如下:

§8.1.2 在基于正、反粒子的正、反世界反演集合空间模型中完全对称仅是其特例

为了便于表述观点,我们先建立一个简单的、基于正、反粒子的正反世界反演集合空间模型:现代物理理论认为,每一个粒子均存在着一个相应的反粒子,一对正、反粒子相撞可以同时湮灭.如果我们将所有正粒子组成的集合表示为 A,所有反粒子组成的集合表示为 $\bar{A}$,则正、反两个集合是相互一一对应、相伴相生的一对集合.在这对集合中,任一集合中任意元素(粒子)都在另一集合中存在有与其对应的相反元素(粒子),反之亦然,我们不妨称它们为互为反演的一对集合,简称"反演集合".正、反集合构成的空间模型称为反演集合空间$(A,\bar{A})$.

对称与不对称现象可以在反演集合理论中得到统一:在正、反集合构成的反演集合空间模型$(A,\bar{A})$中,如果两个集合中所有相互对应的元素的元素值符号相反、绝对值相等,则我们认为两个集合是完全对称的;如果仅有少数对应的元素不满足元素值符号相反、绝对值相等,则我们认为是基本对称的;如果只有一部分元素满足元素值符号相反、绝对值相等,则我们可认为两个集合是部分对称的;如果两个集合之间相互对应的元素值符号和绝对值是杂乱无章的,则我们可认为两个集合之间是不对称的.

根据目前我们对正、反粒子的了解,正、反粒子之间质量(元素值的绝对值)相等,电荷(元素值符号)相反,所以所有由正粒子组成的集合与所有反粒子组成的集合是完全对称的.显然,完全对称是反演集合空间模型的特例.

§8.1.3 正元素与反元素完全对称并不意味着正、反元素的各自任意组合物质也一定是完全对称的

正粒子有反粒子与其完全对称，正原子有反原子与其完全对称，如果正分子有反分子与其完全对称的话，正混合物质一定会有反混合物质与其完全对称吗？(地球是混合物质).

翻译成数学术语为，如果集合 A_1 中所有元素与集合 $\tilde{A}_1$ 中所有元素是一一完全对称的，那么 A_1 中所有元素的任意组合与 $\tilde{A}_1$ 中所有元素的任意组合一定是完全对称的吗？

答案是：不一定．虽然 A_1 中元素与 $\tilde{A}_1$ 中元素完全对称，但由于 A_1 中元素的组合方式有许多种，$\tilde{A}_1$ 中元素的组合方式也有许多种，而两种不同的组合方式不一定是完全对称的.

现设有两个集合：$A_1=\{a,b,c\cdots\cdots\}$、$\tilde{A}_1=\{\tilde{a},\tilde{b},\tilde{c}\cdots\cdots\}$.

由反演集合空间模型定义不难得出以下结论：

(1)如果 A_1 中元素的组合规则与 $\tilde{A}_1$ 中元素的组合规则完全相同，并且组合规则使得 A_1、$\tilde{A}_1$ 中元素的组合方式是有限的，A_1 中所有元素与 $\tilde{A}_1$ 中所有元素都能按组合规则完全进行组合，则 A_1 的元素组合集合与 $\tilde{A}_1$ 的元素组合集合完全对称；

(2)如果 A_1 中元素的组合规则与 $\tilde{A}_1$ 中元素的组合规则完全相同，并且组合规则使得 A_1、$\tilde{A}_1$ 中元素的组合方式都是有限的，但 A_1 中所有元素或 $\tilde{A}_1$ 中所有元素不能按组合规则完全进行组合，则 A_1 的元素组合集合与 $\tilde{A}_1$ 的元素组合集合可能是部分对称.

由此结论可知，由子原于是粒子的一种组合方式，原子种类是有限的，即由粒子组合成原子的组合方式是有限的．有限种类的正、反粒子对称可以推出有限种类正、反原子的集合可以是部分对称．但我们也不能轻易地说正原子集合和反原子集合是完全对称的，到目前为止没有观察或实验数据支持反世界中粒子一定会像正世界中粒子一样多的进行了组合.

同理，分子是原子的一种组合方式，如果分子也是有限种类的话，有限种类的正、反原子对称可以推出有限种类正、反分子的集合可以是部分对称．但我们也不能轻易地说正分子集合和反分子集合会是完全对称的，到目前为止没有观察或实验数据支持反世界中原子一定会像正世界中原子一样多的进行了组合．但如果分子不是有限种类的话，则连部分对称都保证不了．

由此可想而知，由于混合物质的组合方式是无限的，即使分子是有限种类的，有限种类的正、反分子对称也不可能推出各自有无限种组合方式的正、反混合物质是完全对称的．

像地球、太阳系这样是由难计其数的分子组成的混合物质，不难计算出存在与其完全对称的反地球、反太阳系的可能性是趋于零的．

§8.1.4 正、反世界之间是反演关系而不是完全对称

也许有人会说，世界不是靠数学模型存在的，反地球的存在与否要依靠实验与观察才能确认．

实际上，正是我们生活的世界中的万物繁衍变化规律性启示我们这种在数学上几乎是不存在的反地球、反太阳系在客观世界中也是不可能存在的．

你见过完全对称的双胞胎吗？你见过两片完全相同的树叶吗？你能用相同的物质做出完全对称的两样混合物质吗？莱布尼兹说过："世界上没有两片相同的树叶"；李政道先生认为："当我们说左—右对称时，其含义是不可能观测到左与右之间的绝对差别（人们自然知道'左与右'是不同的）．换句话说，假如能够找到它们之间的绝对差别，那么，我们就有左—右对称的破坏，或左—右不对称了．事实上，所有的对称原理，均基于下述假设：某些基本量是不可能观察到的．这些量将称之为'不可观测量'；反之，只要某个不可观测量变成可观测量，那么，我们就有对称性的破坏．"（《对

称,不对称和粒子世界》,北京大学出版社,p8).举一个例子:我的小姨妹生了一对可爱的双胞胎,除她们父母之外,别人很难区分开.就连我细心的女儿也经常搞错.我对小姨妹说,这一对长得太像了.可小姨妹却列举出两个孩子的种种不同之处.这些原本是对我们的不可观测量一旦变成可观测量,我们也就能区分了.孩子在成长,过一段时间再见面,原来的可观测量变化得难以区分她们俩了.但我知道,她俩肯定是有区别的,如何区别只需要问她们的母亲.世间万事万物都是同理.因此,我认为:严格讲,在现实世界中只有近似对称(或称基本对称),完全对称是不存在的.

有完全一样的粒子,有完全一样的原子,还可以有完全一样的分子,但找不到有完全一样的两个混合物质.为什么我们会相信有完全对称的正、反粒子,有完全对称的正、反原子,或许还可以有完全对称的正、反分子,就一定会有完全对称的两个混合物质?正、反世界之间是反演关系,完全对称作为极其特殊的例子,虽然在理论上存在于反演集合空间模型中,但在现实中则是不可能存在的.

例如,早晨起床照镜子,镜面的微小凹凸不平使的镜子中的像和你不是完全对称,有差别,是反演集合现象(准确说是基本对称);到目前为止还没有(将来也不会有)一个绝对不变形的镜子来产生完全对称现象.如果你照的是哈哈镜,正、反对应变化会更大一些.

§8.1.5 “存在反地球”是错误的运用数学归纳法导致的结果

为什么会产生存在反地球、反太阳系的错误概念?笔者认为,是错误的运用数学归纳法方法面导致的结果.在这种错误推理认识中认为:“在物质世界里,最小的为基本粒子,面基本粒子中则存在着所持电荷相反、质量等相同的粒子和反粒子.带负电荷的反质子及带正电荷的正电子则是具代表性的反粒子.反质子及其周围

的正电子组成了反原子，反原子组成反物质，反物质形成一个反物质世界.反物质世界同物质世界应该是一样的，物质世界的物质理论同样也应该适用于反物质世界的反物质.反物质就像物质的‘底’”(《科技日报》1996年1月10日).

在这种错误推理中，错误的认为：如果集合 A 中元素与集合 $\tilde{A}$ 中元素是一一完全对称的，则集合 A 的元素组合集合也一定会与集合 $\tilde{A}$ 的元素组合集合是一一完全对称的(这一点，我们已经在前面阐述是错误的了).即由“存在着所持电荷相反、质量等相同的粒子和反粒子”错误推出“反物质世界同物质世界应该是一样的，……反物质就像物质的‘底’”.自然会导致产生所谓“反地球、反太阳系”一定存在的错误结论.

还有一种错误观点，即希望寄托于能否发现正、反物质之间差异，认为如果反物质“与普通物质有差异，无论这种差异如何小，人们从理论上推导出的物质世界与反物质世界正、反相同的理论就会瓦解，人类物质理论研究将会发生前所未有的变化”(《科技日报》1996年1月10日).“假如与它对应的物质即反氢元素的特性，即使在极小的细节上与之不同，那么，科学家们就必须对绝大多数现存的理论与结论重新进行思考.”(《光明日报》1996年3月2日).

在这种观点中，寻找所谓物质差异，实际上是要寻找正、反氢原子之间差异.似乎如果找不到正、反氢原子之间差异的话，“物质世界与反物质世界正、反相同”就注定要发生了.我们已经知道，正、反世界之间是反演关系，而不是完全对称.正、反氢原子之间即使是没有差异，也不能说明正、反世界就注定“相同”.

§9 数学强国梦

昨夜里，我做了一个梦，梦见2020年阳光明媚的春天里，我坐

在干净明亮的教室里观察窗外柳树嫩绿的枝芽，一位充满青春活力的年青女教师站在讲台上自豪地对我们讲："2000年前后，中国数学异军突起，凭借几千年中华民族思想蓄积之势能，在数学上喷发出许多崭新思想，成为近20年来世界数学发展主流方向之一，形成了当今中国数学学派……".

昨夜里，我还做了一个梦，梦见2020年阴雨缠绵的秋天里，我坐在因几个星期笼罩在阴雨中而显得昏暗的教室里，一位老态龙钟的教师柱着拐杖站在讲台上用沉闷嘶哑的声音对我们讲："2000年前后，中国数学出现了一些新的思想萌芽，可惜被当时的金钱风、留洋风、崇洋风吹折了……".

§9.1 科技强国事，事事有数学

中国由于科技落后，饱尝了近百年的欺辱；我驻南使馆被五枚卫星制导炸弹袭击又一次警示我们：一个科技落后的民族是没有生存权力保障的民族. 现在强调科技强国，已经是迫在眉睫的事了.

数学是科学技术的基础，科学技术的进步与数学进步密切相关，在今天信息化、数字化的时代里，一个数学弱国是难以成为科技强国、军事强国的. 现代科学技术之所以得到迅猛发展，其重要的原因之一就是数学对科学技术发展所起的奠基作用以及数学在科学技术中的广泛应用. 现代科学的特点及数学学科的特殊性，使得数学成为科学发现和科学理论构建的重要方法. 它渗透于科学发现及理论形成的具体过程，在一定程度上预示和规范着科学的发展方向. 本世纪以来的一系列重大科学理论，如相对论、量子力学、基本粒子物理学、统一场理论等，它们的建立从一开始就以一定的数学理论为先导，这些科学理论所需要的相适应的数学理论，被数学家们提前"预备". 例如：黎曼几何先于相对论、矩阵代数先于量子力学、纵维丛理论先于基本粒子物理学、群论先于统一场理

论…… 更有甚者，有些数学演绎结果最初除美学价值外，似乎很难在自然界中找到它的用途，但在几十年甚至于几个世纪后则会发现出乎意料的应用. 例如，连当时高斯也承认虚数“$\sqrt{-1}$的真正本义无从琢磨”，它的有用性在本世纪被它在量子力学中所起的基础性的作用成功地证实.

反过来，几乎每一门新数学学科的创立又都依赖于科学思想的突破. 数学本质是一种思维方法，数学家创造的是思维模式. 每一个科学上的进步似乎都需要一个新的理论框架，新的理论框架需要新的思维模式，如果现有数学没有提供合适的思维模式，那么一种新的思维模式必须从自然界中抽象出来.

近年来产生的模糊数学、灾变论、分形、混沌、灰色数学、思维数学及反演集合等，都是应科学发展需要而产生的新思维模式. 任何一门科学的突破都可归结为是一种思维方法的突破. 而新思维方法定形化就是新思维模式. 几乎每一次数学进步都是添置新的或改进了原有的思维模式，每一个新数学学科的建立都是人类又向大自然索取了一套新的思维模式. 某一门学科的思维方法突破产生的新思维模式对其他学科突破往往具有借鉴或直接应用的功能，故从一门学科中抽象出来的思维模式对其他学科经常会有非常大的应用价值. 更让人兴奋的是这种思维模式自身发展完善(这个工作过程经常被一些数学家称之为从事“纯数学”)结果反过来对进一步认识科学本身不仅具有指导性，更有重要的预见性. 从而使得人们愿意依赖这个自己创造的思维模式工具去重新审视所研究的科学成果，甚至于会达到这样一种迷恋程度，对数学演绎出来的一些让人感到莫名其妙的结论，总是想方设法到客观世界中去寻找对应物，而不是怀疑数学模式本身. 直至有一天人们又发现一种新思维方法，找不到现成数学模式与它吻合，于是乎，又将这种新思维方法定形化——抽象成新数学学科.

数学反哺科学技术的作用力是巨大的. 数学理论变革往往是

科学技术理论变革的前兆，数学发展的里程碑也多是科学技术发展的里程碑．许多高科技问题得不到解决可归结为是由于其数学模型尚不清楚或还没有相应的数学方法．越来越多的人认为“高技术本质上是一种数学技术”，当代高技术竞争甚至可因数学应用水平决定竞争胜负．例如：在美日高清晰度电视技术的竞争中，因为美国在应用数学（如小波分析）方面的优势使美国在信息压缩技术方面超过其他国家，进而使得美国在高清晰度电视以及网络传输方面领先于日本，成为世界上技术最先进的国家．

§9.2　数学前沿在哪里？

“我国数学界包括中科院的数学工作者半个世纪以来在瞄准追赶国际前沿方面作出了巨大的努力并取得了成果，但在创造重要数学新知识、新理论和新方法的能力与水平方面，我们与发达国家相比仍有相当的差距，在当今国际数学前沿迅猛推进，国际数学研究综合化、统一化趋势日益加强……”（杨乐院士语：《在‘中国科学院数学与系统科学研究院’成立大会上的讲话》1998 年 12 月）．

数学的意义在于创新和应用．数学从产生那天起，就一直在应外部的需要而扩充和应内部的完善而深化．应内部的完善而深化是创新，并且在两个数学学科深化过程中两个学科交叉处总有许多新的生长点，这些新的生长点极有可能发展成新学科．如国内陈大为同志在模糊集合和灰色集合的交叉处提出灰色模糊集合等；国外则远有解析几何，近有微分拓扑、代数拓扑、代数几何等等例子．对这一方面的重大意义大家认识是大体统一的，这里就不必多说了．

我想强调另一个方面，应外部的需要而扩充的问题．从数学史看，从近年来国内外数学进展看，许多重要的、充满活力的数学新学科都是来源于科学实践：1963 年，美国气象学家 E．N．洛伦兹在其计算机上检查天气数学模型时“发现”了混沌，被世人称为“混沌

之父";1965年,美国控制论专家L.A.扎德教授因研究事物是非之间渐变的中介过渡形态而提出模糊集合;1967年,法国数学家R.托姆为了解释胚胎学中的成胚过程而提出了突变论;1975年,美籍法国数学家B.B.曼德布罗特提出分形理论,他自称是在一切定型的学科之间的选择性游牧民,探索的都是一些"不受欢迎"的原理;1981年,法国地质物理学家Morlet在分析地质数据时基于群论提出了小波分析……

这些例子充分说明了科学问题是数学之母,是数学发展的源泉.从科学问题出发认识数学,展示的是数学发展的活生生的动态过程,数学是在解决科学问题中汲取营养、维持生命的.排斥来自数学外部世界的科学问题,是堵塞了数学新材料的源泉,等于切断数学生命的神经.

在这个意义下,不仅需要一部分(纯粹)数学家从自己的狭窄专业中走出来,面向更广阔的领域,其他学科的利器往往可用来解决自己狭窄专业中的问题.更重要的是要破除数学创新神秘感,创造一个数学创新氛围,让数学界以外的(不是专门搞数学的)科学家敢大胆加入到发展数学的队伍中来.要让他们知道,数学发展不能仅仅是、也不可能仅仅是(纯粹)数学家的事情,许多新数学思想是在解决具体的科学问题中产生的;反过来,对数学知识的长进又可以促使他们所研究的专业科学得到重要突破,即凭借数学突破的成果来进行专业科学的突破.数学面向专业科学与专业科学数学化,会使得数学和专业科学相得益彰,自古以来都是如此.要让大家明白,数学前沿不但在数学内部的自我完善中,更多的还是在科学实践中.并且在解决科学技术问题中产生的数学创新往往都是一些重大创新.事实上,数学史上几乎所有的重大突破都是来源于科学实践.数学归根结蒂是源于科学研究经验的理性创造,数学家实际上是在从事一种与现实有密切联系而又独立存在的思维模式的研究与创造.

数学有其自身的价值,它的价值是能否为科学技术的发展提供有效工具;数学有内在的规律,它自身需要完善系统化.但相比之下,更重要的是提供工具.因为这是它之所以有必要存在的原因.数学离开为科学技术服务,就成了符号游戏.

还要说明一点的是新学科创立几乎都是标新立异的,循规蹈矩难有重大突破.过去一提创立新学科,就会有人说:熔百家于一炉,推陈出新,独创一格.更有甚者引诱后生坐在故纸堆里白首穷经.殊不知一个人的精力是有限的,不要说让他熔百家,就是一家一家去弄明白大概也需要几世吧.

大凡创立新学科者,往往是集一个或几个问题之结点,发现已知方法之不足,或是找不到好的解决方法,或因自己知识面窄而无路可走,却又敢大胆冒进,奇思异想,苦苦求索,经过小心求证,无数想法被丢进废纸篓,但偶尔有一火花,一下照亮心房,用于解释问题,眼前一片光明.将思想细细梳理一遍,发现竟与诸学科思想有相通之处.

由于要向大家解释清楚思想根源,解释清楚新学科的合理之处,于是追本溯源,从故纸堆里翻先哲言论,在大家认可的学科中找相同之处,这样就给新学科涂染了一层承圣贤思想、熔百家精华而后生的神秘色彩,让人觉得开创者一定是思想深邃、博学多才者.这样就容易吓倒后生,让人感到望尘莫及、高不可攀.其实不然.

坐在故纸堆上,沿着前人的足迹一步一个脚印地循规蹈矩苦索不舍固然是一种重要的研究方法,但新时代更需要与生活息息相关的数学,更需要能握住时代科学脉搏的数学家,更需要敢于在科学难题荆棘中独辟蹊径探索自己的路的数学探索者.只有这样才能做到真正意义上的赶超.前几年日本人发展传真机,占领了世界的大部分市场.如果美国人跟着日本人的路子走,是否能超过很难说,即是超过也只能达到日本人的水平.美国采取的战略是你做

你的，我做我的，传真机我不做了，你去做吧！我做电子邮件（*E-mail*），*Email* 有一天把你的传真机全部打倒，现在全世界都看到这一趋势了.

改革开放以来，我国数学界敢于独辟蹊径探索新路者不乏其人：1982 年，邓聚龙教授将客观现实中存在的部分已知、部分未知的量称为“灰量”，并在其基础上提出灰色数学；1983 年，蔡文教授受工人将高度超过车间大门的机器搬运进车间里的启示提出物元分析；1989 年，孟凯韬教授因对思维规律感兴趣受钱学森教授启发和鼓励提出思维数学；1990 年，王光远院士根据建筑工程研究的需要提出未确定数学；1994 年，刘建忠高级工程师因“发现”康托尔集合和模糊集合的哲学基础是形式逻辑矛盾而提出以辩证法矛盾为哲学基础的反演集合…….

但与国外的数学创新比较起来，让人感到国内学术界对待这些成果不像对待国外的那样重视. 科学上的突破常常是少数人、有时是在鲜为人知的环境下完成的. 其中有的可能对科学技术进步产生重大的影响. 如果没有学术界的广泛参与，新理论发展进程将会十分缓慢. 学术界积极参与即可以造就数学创新氛围，催生出更多的数学新思想，又可以使新理论得到更加严格的检验，并从新的角度在更加广阔的背景下进行研究，发现真理，扬弃谬误，筛选出优秀的新思想.

从另一个角度讲，这些探索者今天的处境，可能就是中国数学下一代——未来数学家们明天所要遇到的处境. 给这些探索者们一个客观公正的评价，开一个好头，对中国未来的数学是有积极意义的.

§ 9.3 借鉴西方的、发展自己的是振兴中国数学的希望之路

一个民族要自强，就需要开放、开明、开创. 开放——“海纳百川，有容为大”；开明——“不管黑猫白猫，抓住老鼠就是好猫”；开

创——“推陈出新”，不断创新．任何一个人、一个国家要在科学上取得突破，几乎都需要以他人、他国的成就作为基础和起点．因此，我们要尽可能多地吸收国外先进的东西，这是完全正确的．吸收的目的是超越，为了超越，我们的眼睛就不能总是盯着西方，中国有中国的文化，西方有西方的文化，中国人有中国人的思维方式，西方人有西方人的思维方式，它们是两种不同形态的文化和思维方式．中国传统思想在与西方数学思想碰撞、融汇中必然会产生一些新数学思想，这些新数学思想应当发扬光大，并且自然而然应该属于中国数学学派范畴，因为它是我们民族创造的；中国数学学派还应该包括从民族数学遗产中挖掘整理出的数学思想和一切由我们本民族努力得到的东西．如吴文俊院士提出的数学机械化理论，是挖掘我国古代数学思想而产生的；冯康院士独创的有限元方法，是属于我们本民族努力得到的范畴．

他山之石可以攻玉，在掌握新数学思想上，不必管它是谁家的，“不管黑猫白猫”，只要我国科学技术需要我们都“拿来”．在今天我国数学总体研究水平落后于西方的情况下，对国外重视的课题我们有人跟踪研究是十分必要的，但要“不以人蔽己”，要坚持走自己的数学创新之路．只有大胆走自己的路，中国才能尽快形成自己的数学学派，成为数学强国．我国科学技术虽然落后，但发展不会、也不应该亦步亦趋走西方的老路，自己开创道路走更需要有适应自己的先进有效的新数学工具．因此，不应该在研究基金困难的情况下就对国外重视的课题“有所为”，对自己民族的东西“有所不为”．

走自己的路（而不是老跟在后面追）数学更容易“推陈出新”不断创新．现代高科技的竞争，越来越呈现出是一种数学突破和数学应用的竞争趋势．谁掌握了先进的数学，谁就能更快地发展自己的科学技术，有些掌握先进科学技术的国家总是想凭借科技实力来制于别的国家，而落后的国家只能受制于人．在这种情况下，为了

民族生存大计,多强调一些民族自尊心是十分需要的.以发展中国科学技术为目标,吸收世界上一切先进的东西,并将它们与中国实际情况相结合——"本土化",形成中国自己的数学学派,是中国数学发展的希望之路.

我做了一个美梦,梦见国内数学苑囿春潮涌动,百花齐放、百家争鸣,各行各业学者基于自己学科的观点纷纷卷入,中国数学像久旱逢春雨的大地那样重新焕发了勃勃生机.外国的、中国的、古代的、今天的一大批见解独异、锋芒四射的数学思想相互撞击、交融,新观点、新思想如雨后春笋涌现.充满奉献精神的中华好儿女们不分学科,不分专业,不问学历,不问职称职务,没有出身贵贱、年幼长者之分,都能相互平等地讨论学术观点.有温文尔雅的交流,有势不两立的争辩,有含糊不清的痴语,有淋漓尽致的演说.追求新思想,新学说蔚然成风……

愿美梦成真.

参考资料

第一章 参考资料

1 孙继田主编. 毛泽东一元论辩证法. 昆明:云南人民出版社,1995:81~101

2 王健吾著. 数学思想方法引论. 合肥:安数教育出版社,1996

3 葛苏林著. 模糊子集·模糊关系·模糊映射. 北京:北京师范大学出版社,1985

第二章 参考资料

1 蔡文. 物元分析. 广州:广东高等教育出版社,1987

2 刘建忠. 企业产品竞争的反演集合决策模型及应用. 云南科技管理,1994:6

3 刘文奇. 不确定性数学大纲. 昆明:云南大学出版社,1995:7

4 寿华好编译. 数学与科学. 世界科学,1996;(10)

5 汪培庄. 模糊集合论及其应用. 上海:上海科学技术出版社,1983

6 蔡文. 物元模型及其应用. 北京:科学技术文献出版社,1994

第三章 参考资料

1 谷超豪.数学词典.上海:上海辞书出版社,1992
2 熊金城.点集拓扑讲义.北京:人民教育出版社,1981
3 孙淑玲.代数结构.合肥:中国科学技术大学出版社,1991
4 马振华.离散数学导引.北京:清华大学出版社,1993

第四章 参考资料

1 朱水林.对称和群.上海:上海教育出版社,1984

第五章 参考资料

1 熊金城.点集拓扑讲义.北京:人民散育出版社,1981
2 儿玉之宏永见启应.拓扑空间论.北京:科学出版社,1984
3 孙淑玲.代数结构.合肥:中国科学技术大学出版社,1991
4 吴东兴.点集拓扑学基础.北京:科学出版社,1981
5 陈锡驹等.拓扑学的首要概念.上海:上海科学技术出版社,1984
6 王戎堂等.点集拓扑学原理.西安:陕西科学技术出版社,1985
7 野口宏.拓扑学的基础和方法.北京:科学出版社,1986
8 李元熹.拓扑学.上海:上海科学技术出版社,1986
9 〔美〕S.李普舒茨著.一般拓扑学.陈昌平等译.上海:华东师范大学出版社,1982
10 〔美〕RICHARD R·GOLDBERG 著.实分析方法(上册).侯德润译.北京:人民教育出版社,1980

第六章参考资料

1 寿华好编译.数学与科学.世界科学,1996;(10)

2 〔美〕T.丹齐克著.数·科学的语言.北京:商务印书馆,1985

3 〔美〕M.克莱因著.数学:确定性的丧失.长沙:湖南科学技术出版社,1997

4 王健吾著.数学思想方法引论.合肥:安徽教育出版社,1996

5 孙继田主编.毛泽东一元论辩证法.昆明:云南人民出版社,1995

6 刘建忠.辩证矛盾的数学分析工具反演集合理论.世界科学,1996

7 刘建忠.辩证矛盾的数学分析工具反演集合理论.科技日报,1996-10-9

8 刘建忠.企业产品竞争的反演集合决策模型及应用.云南科技管理,1994

9 刘建忠.反演集合理论中的德尔菲预测方决.科技管理研究,1995

10 刘建忠.反演集合理论在工业设计质量评价中的应用.重庆大学学报,1995;增刊(18):122

11 余玄冰.点集拓扑.北京:北京师范大学出版社,1983

12 姜圣阶等.决策学基础.北京:中国社会科学出版社,1986

13 韩淑梅主编.现代经营管理全书.北京:企业管理出版社,1995:744

14 刘建忠.反演集合理论在烟草制丝线智能化控制中的应用.烟草科技,1996;(4)

15 Albert Tarantola. Inverse Problem Theory. Elsevier Science Publishers B.V.,1987.张先康等译.反演理论.北京:学术书刊出版

社,1989:364－367

16 姜圣阶等.决策学基础(上册).北京:中国社会科学出版社,1986

17 张同.部分国家和地区优良设计评审标准.设计新潮,1992

18 谢跃.文化传统与设计教育.设计新潮,1992

19 吴永健.工业艺术造型设计的理论与方法.北京:北京航空航天大学出版社,1992

20 亚瑟·普洛斯.工业设计的功能.设计,1992

21 王明旨.潜在的阻力.设计,1992

22 付月明.产品造型的意义.设计,1992

23 蒋新松主编.机器人学导论.沈阳:辽宁科学技术出版社,1994

24 丁峻(等).试论当代脑研究中的哲学和心理学方法论问题.自然辩证法研究,1995

25 A.P.鲁利亚等著.心理学的自然科学基础.北京:科学出版社,1984

26 田运主编.思维辞典.杭州:浙江教育出版社,1996

27 乔治·阿德尔曼主编.神经科学百科全书.伯克毫伊萨尔出版社、上海科学技术出版社,1992

28 K.W.沃尔什著.神经心理学.北京:科学出版社,1984

29 彼德·罗赛尔著.大脑的功能与潜力.北京:中国人民大学出版社,1988

30 叶奕乾等.图解心理学.南昌:江西人民出版社,1982

31 杨清主编.简明心理学辞典.吉林:吉林人民出版社,1985

32 邵郊编著.生理心理学.北京:人民教育出版社,1987

33 A.P.鲁利亚.神经心理学.北京:科学出版社,1983

34 杨雄里.脑科学的影响不可估量.世界科学,1998

后　记

皎月的清光像空中垂下的银色轻纱，笼罩着窗外酣睡的大大小小建筑物，一束泻进窗来的月光不知几时爬上了书桌，照在书稿上．我打开玻璃窗，扑面飘来昆明温暖的冬夜里清凉、幽静的气流，里面夹带着一丝从隐隐约约的一带远山中带来的松树林中散发的令人愉快的气味；一轮明月依旧，叹息人间变幻．回想1977年，在距离昆明一百多公里的深山沟工厂里，贺万昌高级工程师促膝劝导当工人的我去考大学，我们幻想搞一个像欧姆定律那样的公式为祖国争光．那时我们是认真的，心是真诚的，真诚得像一片白云．依赖张葭章高级工程师无私辅导，我能考人曲靖师专学习数学．

回望当年，初生之犊，壮志凌云．尔后种种磨难，难以计数的失败，失望的煎熬…….

磨难出激情，激情造就诗人，也造就数学家，数学家和诗人一样需要激情，诗人把激情燃烧成火焰用炽热文字喷出来，数学家把激情冷却成理智用冰凉符号写出来．他们创作的源头都是磨难．

记得在提出反演集合理论的最初那段心跳日子里，得到了昆明理工大学李继彬教授的鼓励支持．在研究工作中，李教授给予鼓励和帮助，支持本书的写作，并拨冗写序，我深感荣幸．

在数学上，对我影响大的还有两位老师：

一位是我的老师陈世樵副教授．他在授课中十分注意培养我们的数学思维方法；是他极力策划，并在陶锟教授的帮助下，使我能够在1981年去云南大学数学系进修近一年半时间．我的数学研究功底就是在那段时间里打下的，这对我来说是很重要的．

有一段时间，陈老师也来云南大学进修，每天晚饭后，夕阳余晖中，我们散步在古旧狭窄的胡同里讨论数学.

另一位是陶锟教授. 陶教授在我进修期间（当时任云南大学数学系副主任，后任昆明大学校长）给予了许多指导和帮助，正是陶教授的坚持，说服了我的领导使我的进修时间延长了半年，成为近一年半.

在学术交流中，西北大学数学系孟凯韬教授平易近人，相识恨晚.

感谢我的朋友云南省社会科学院罗翊重副研究员，在他的专著有关章节中正确、公正表述我的思想，那是我们合作的结晶.

这本书能够顺利出版要感谢我的朋友禄劝县城建局李志有局长给予的资助. 研究数学基础是选择清贫，在物欲横流的市场经济中需要有人理解和支持.

云南科技出版社编辑部夏映虹主任、赵敏编辑为本书的出版做了辛勤工作，谨致谢意.

我坚持认为：数学本质是一种思维方法，它的根应该扎在哲学中. 孙编田教授主编的《毛泽东一元论辩证法》一书对我启发很大. 所以我说我的反演集合思想是从毛泽东的“一分为二”思想中汲取营养来发展完善的一点不为过.

由于近十年来从事繁忙的科技管理工作，虽然反演集合理论的应用研究偶尔得益于一些工作，但反演集合理论的理论基础研究工作和这本书的写作都是利用业余时间完成的. 十年来我没有了节假日，没有了歇息时间. 感谢我的妻子王玉坤对我无微不至的照顾，也请女儿刘淼原谅我占用了理应陪伴她的时间.

斜阳下，我在山坳中发现一条被荒草掩埋的小路，我沿小路走了几步，直觉告诉我小路尽头有未知宝藏……

有一段时间，陈老师也来云南大学进修，每天晚饭后，夕阳余晖中，我们散步在古旧狭窄的胡同里讨论数学.

另一位是陶锟教授. 陶教授在我进修期间（当时任云南大学数学系副主任，后任昆明大学校长）给予了许多指导和帮助，正是陶教授的坚持，说服了我的领导使我的进修时间延长了半年，成为近一年半.

在学术交流中，西北大学数学系孟凯韬教授平易近人，相识恨晚.

感谢我的朋友云南省社会科学院罗翊重副研究员，在他的专著有关章节中正确、公正表述我的思想，那是我们合作的结晶.

这本书能够顺利出版要感谢我的朋友禄劝县城建局李志有局长给予的资助. 研究数学基础是选择清贫，在物欲横流的市场经济中需要有人理解和支持.

云南科技出版社编辑部夏映虹主任、赵敏编辑为本书的出版做了辛勤工作，谨致谢意.

我坚持认为：数学本质是一种思维方法，它的根应该扎在哲学中. 孙编田教授主编的《毛泽东一元论辩证法》一书对我启发很大. 所以我说我的反演集合思想是从毛泽东的“一分为二”思想中汲取营养来发展完善的一点不为过.

由于近十年来从事繁忙的科技管理工作，虽然反演集合理论的应用研究偶尔得益于一些工作，但反演集合理论的理论基础研究工作和这本书的写作都是利用业余时间完成的. 十年来我没有了节假日，没有了歇息时间. 感谢我的妻子王玉坤对我无微不至的照顾，也请女儿刘淼原谅我占用了理应陪伴她的时间.

斜阳下，我在山坳中发现一条被荒草掩埋的小路，我沿小路走了几步，直觉告诉我小路尽头有未知宝藏……