集与映射

湖南人民出版社

JIYUYINGSHE

集与映射

湖南人民出版社

集与映射

李养成

*

湖南人民出版社出版
（长沙市展览馆路14号）
湖南省新华书店发行
湖南省新华印刷二厂印刷

*

1980年1月第1版第1次印刷
字数：185,000　印张：9.125　印数：1——2,000
统一书号：7109·1202　　定价：0.72元

内 容 提 要

本书力图通俗地介绍集论的基础知识。概念的引入和定理的证明，叙述得比较详细，便于读者自学。它的主要内容包括：集及其运算、映射和关系、集的势、点集和函数五章，另加两个附录介绍了布尔代数的概念及超实数理论。

书中带有“*”的地方，初学者可略去不看，因不影响后面内容的学习。

此书可供中学数学教师阅读，高等院校理工科学生亦可参考。

前　言

集合论是现代数学的一个重要分支。自从德国数学家康托尔(Cantor, 1845—1918)在1892年对集合论作了奠基性的工作以后，集合论思想的应用愈来愈扩大，并已成为现代数学各分支的基础与工具。本世纪以来，集合论一直吸引着许多数学家去进行研究，不断地攻克了许多难关，取得不少的成绩。在六十年代，由康托尔的集合概念又拓广为弗齐(Fuzzy)集的概念。弗齐集合论是现代弗齐数学(也叫不分明数学或模糊数学)的理论基础，因此康托尔的集合论又叫做经典集合论。

本书介绍的是经典集合论的内容。

第一章介绍集的一般概念，然后讲述集的运算及其基本运算规律，其中包含集代数的基本内容。

第二章在建立了直积集的概念的基础上，讨论集之间的关系，首先是单值对应关系，即本书所指的映射。在映射中，一一映射又是一种重要的映射。此外，还介绍了集中的有序关系和等价关系，相应地引进了有序集、集的分类和商集等。

第三章研究集的势，它描述了集的一种性质。无限集的势是有限集的元素个数这一概念的推广。判断两集是否等势，贝恩斯坦定理是一个有力的工具。在无限集的势中，主要讨论可数势与连续势，并指出可数势是最小的无限势，而最大的无限

势却不存在。

第四章介绍了距离空间，特别是欧氏空间点集论的基础知识，另外还简略地谈到了零集——依勒贝格意义测度为0的集合。

第五章主要对连续函数类、单调函数类、黎曼可积函数类进行讨论，它是微积分中相应内容的进一步深入。

附录一给出了布尔代数两种等价的定义，为此我们在有序集的基础上，引进了格的概念。另外还指出了集代数和逻辑代数都是布尔代数。

附录二比较详尽地介绍了超实数理论。在定义超实数系$^*R$时，我们引入了超滤子概念，然后规定超实数的四则运算和顺序关系，讨论了$^*R$的一系列性质，最后给出了$^*R$的几何表示。

本书在编写中，承本系李盛华教授的热情指导，使笔者受到不少启发和教益。孙烈武老师审阅了全书正文，尤兆桢、程麒老师审阅了附录，他们提出的宝贵建议使本书得到了进一步的改进。在此，一并表示衷心的感谢。

由于水平有限，书中的错误和缺点请读者批评指正。

编　者

79年5月于湖南师范学院数学系

目　　录

第一章　集及其运算

§1　集的概念

一、集合与元素

集合是现代数学最基本的概念之一。当我们把一群确定的事物作为整体来考察时，这一整体就叫做集合（简称集）。例如，某工厂全体工人可以作为一个集合，一个学校的所有教师也是一个集合。又如，一个教室里的所有座位，一个图书馆的所有书籍都可以看作是集合。

研究数学，总是要跟这样或那样的集合打交道。例如，全体自然数组成一个集合，界于 -1 与 1 之间的一切实数组成一个集合，方程 $x^2+5x+6=0$ 的解组成一个集合，形如 $f(x)=ax^2$（其中 a 为实数，且 $a\neq 0$）的二次函数组成一个集合。还有各种几何图形，如直线段、平行四边形、球面、圆锥体等，都可以看作是具有某种几何属性的点的集合。

从上面列举的各种集合中，我们很自然地把集合理解为具有某种性质（或满足某一条件）的抽象的或具体的事物的全体。然而需要指出的是，上面关于集合概念的叙述不能认为是给它下定义，仅仅是一种解释而已。因为“整体”、“全体”等词都

是“集合”的同义词．而要把什么叫“集合”说清楚并不容易，正好象几何学中的“点”和“直线”一样．关于集合的严格数学定义，属于数学基础的研究范围，这里不作讨论．

组成集合的每一个事物，叫做这个集合的元素(简称元)．例如，一个公社的每台拖拉机是这个公社的拖拉机集合的元素；数 5 是自然数集合的一个元素．

如果两个集合所含有的元素完全相同，就说这两个集合是相等的．

在理解集合的概念时，应注意：

1° 集合是指具有某种属性的事物的全体，而不是指其中的个别事物，也就是说要区别集合及其元素这两个概念．例如，“湖南省全体教师”这个集合，不是指在湖南省工作的某一位教师，而是指在湖南省工作的所有教师．

2° 在讨论某一集合时，集合中所包含的事物应该是确定的，即可以确切地判断一个事物属于还是不属于这个集合．例如，只有在湖南省工作的教师才是“湖南省全体教师”这个集合的一元，不是教师或即使是教师、但不在湖南省工作的教师就不属于这个集合．

再看一个例子．“与数 3 接近的实数”能不能构成一集合？在这里，因无法判断一个数，比如 2，究竟是算接近于 3 的数还是不算接近于 3 的数，所以“与 3 接近的数”不能形成一个集合．

另外，所谓“包罗一切的集合”等类似术语，我们也不应当使用．

3° 由单独一个元素组成的单元素集与它含有的唯一元素

在概念上不是一回事，请不要混淆。

二、集合的表示法

习惯上，我们常用大写字母A，B，X，Y，… 表示集合，而用小写字母a，b，x，y，…表示元素。

若x是集A的一个元素，记为

$$x \in A,$$

读作“x属于A”。

若x不是集A的一个元素，则记为

$$x \notin A,$$

读作“x不属于A”。

例 1 以1,2,3,4为元素的集合可记为

$$\{1,2,3,4\}.$$

这种把集合的所有元素一一列举出来表示集合的方法叫做列举法。

注 $\{1,2,3,4\}$还可记为$\{1,3,4,2\}$，$\{2,4,1,3\}$等，因为它们含有的元素完全相同，表示同一个集合。

例 2 4到30以内的所有质数记为P：

$$P=\{5,7,11,13,17,19,23,29\},$$

显然 $13 \in P, 31 \notin P$.

例 3 “绝对值小于5的所有整数”这一集合可表示为

{绝对值小于5的整数}.

这是表示集合的另一种方法．用描述集合元素的共同特征来表示集合的方法叫做描述法。

例 4 以N,Z,Q分别表示全体自然数，所有整数与一切有

理数，则它们可表示为

$$N=\{\text{自然数}\},\ Z=\{\text{整数}\},\ Q=\{\text{有理数}\}.$$

显然 $-2\in Z,-2\notin N$；$\frac{1}{2}\in Q$，$\frac{1}{2}\notin Z$.

除了用文字来描述一个集合的元素特征外，还可用数学式子来表达．设$p(x)$是某一与x有关的条件，所有适合这一条件的x所成之集可用$\underset{x}{E}[p(x)]$或$E[x;p(x)]$等表示．

例 5 如$p(x)$表示“数x的平方等于4”，则满足这一条件的x所成之集可表示为

$$E[x;x^2=4],$$

显然它是由-2与2这两个数组成的集合，用列举法又可表为$\{-2,2\}$，即

$$E[x;x^2=4]=\{-2,2\}.$$

比较这两种表示集的方法，可以看出：

1° 列举法的好处是可以具体看出集合由哪些元素所组成而描述法则刻划了集合元素的共同特征．

2° 对于由有限多个元素组成的有限集①，由例5可知，既可采用列举法又可采用描述法来表示该集，又如

$$\{1,2,3,4\}=\{\text{比5小的自然数}\};$$

$$\{\text{绝对值小于5的整数}\}=\{-4,-3,-2,-1,0,1,2,3,4\}.$$

但是当有限集包含的元素较多时，还是采用描述法表示较好．如{小于100的正整数}用列举法表示就显得不便．

3° 对于不是由有限多个元素，即由无限多个元素组成的无

① 关于有限集的严格定义，见第三章§1．

限集①，则只能采用描述法表示。如集合{1,2,3,…}不加说明，我们没有理由认为它表示自然数集，因为“…”究竟表示什么，我们并不清楚。倘若要用它表示自然数集，还须补充说明，比如

自然数集{1,2,3,…}，

或 {1,2,3,…,n,…}(其中n为自然数)等。

对于由某些实数组成的特殊数集，在数学上用专门的符号表示。

设$R=\{$实数$\}$，a、b为二实数，且$a<b$。

把满足不等式$a\leqslant x\leqslant b$的一切实数x组成的集记为$[a,b]$，叫做闭区间，即

$$E[x;x\in R,a\leqslant x\leqslant b]=[a,b].$$ 列举法 描述法

类似地，

$$E[x;\ x\in R,a<x<b]\xlongequal{记为}(a,b),$$ 叫做开区间，

$$E[x;x\in R且a\leqslant x<b]=[a,b)$$

和 $$E[x;x\in R且a<x\leqslant b]=(a,b]$$

统称为半开(或半闭)区间。

$$E[x;x\in R且x\geqslant a]=[a,+\infty)$$

表示不小于a的一切实数之集，全体实数集R可记为$(-\infty,+\infty)$。这里$+\infty$，$-\infty$是记号，不是数。至于$(a,+\infty)$，$(-\infty,b)$，$(-\infty,b]$，其意义请读者补述。

---

① 关于无限集的精确定义，见第三章§1。

例 6　设函数

$$f(x)=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0,\end{cases}$$

则　$E\left[x;f(x)>-\frac{1}{2}\right]$表示$(-\infty,+\infty)$中使$f(x)>-\frac{1}{2}$的所有$x$组成的集，该集是$[0,+\infty)$（图1.1）。

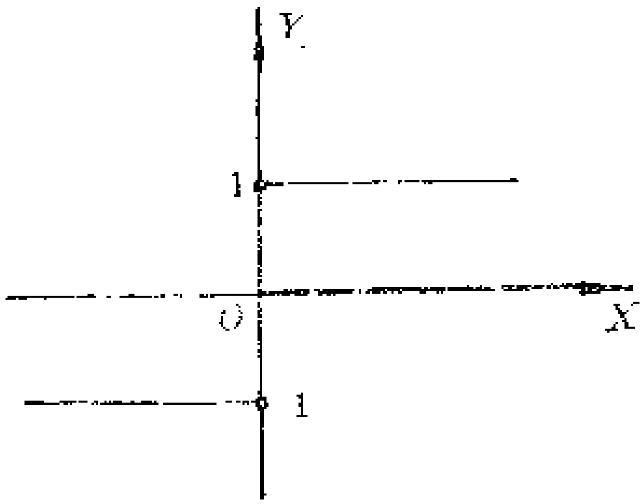


图　1.1

三、空集

不含任何元素的集叫做空集，记为$\varnothing$。

例 7　设 $A=\{x;x$ 是整数且$3x=-8\}$，则 $A=\varnothing$。因为由$3x=-8$，得$x=-\frac{8}{3}$，而$-\frac{8}{3}$不是整数。

例 8　设$B=\{x;x$是实数且$x^2+1=0\}$，则$B=\varnothing$。因为任意一个实数的平方不能为负数，因此方程$x^2+1=0$无实数解．也就是说，在实数集内，该方程的解集是一个空集。

注　1°　$\{0\}$不是空集，因为它含有数0，$\{0\}$是单元素集。

2° 不能将空集记作$\{\varnothing\}$，因为它是以空集$\varnothing$为元素的单元素集。

我们把由某些集为元素所组成的集，叫做集族。$\{\varnothing\}$可看作是一个集族。

四、子集

设有A、B二集。如果属于A的元素都属于B，我们把A叫做集B的一个子集，或说集B包含集A。记为$A\subset B$或$B\supset A$。

因此，$A\subset B$可规定为：

对每一个$x\in A$，必有$x\in B$。

包含关系"$\subset$"是集之间的一种关系。在讨论集的运算与集之间的关系时，我们可用一种专门的直观图来表示集，这种图叫韦恩(*Venn*)图。通常用圆、矩形等封闭图形表示集，而用其中的点表示它的元。

"$A\subset B$"的直观表示见图1.2。

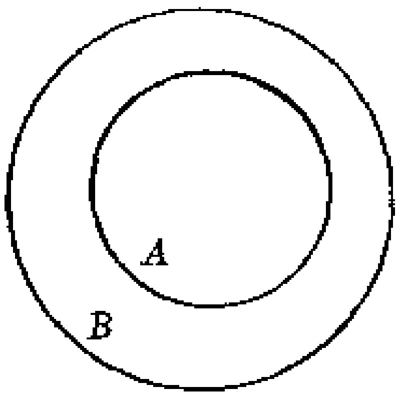


图 1.2

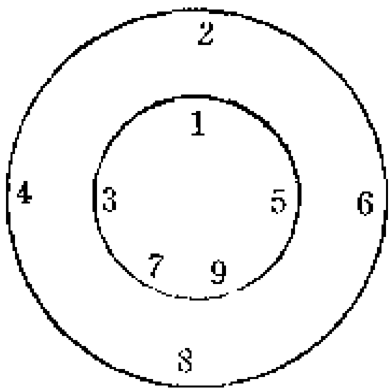


图 1.3

例 9 设$A=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

$B=\{1,3,5,7,9\}$。

显然 $B\subset A$（如图1.3）。

例10 {等边三角形}⊂{等腰三角形}，

{等腰三角形}⊂{三角形}.

见图1.4，其中

U——任意三角形集，

I——等腰三角形集，

E——等边三角形集.

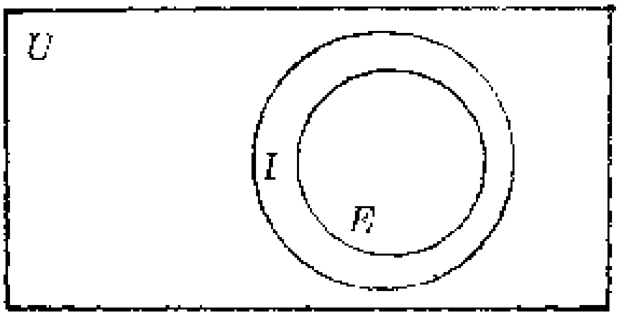


图 1.4

例11 设有实数集

$$R_1=\underset{x}{E}[x^2>1]\text{与}R_2=\underset{x}{E}[x^2>2].$$

在集R_2内任取数x_0，则$x_0^2>2$，更有$x_0^2>1$，所以$x_0\in R_1$. 既然对任意的$x_0\in R_2$，都有$x_0\in R_1$，故

$$R_2\subset R_1$$

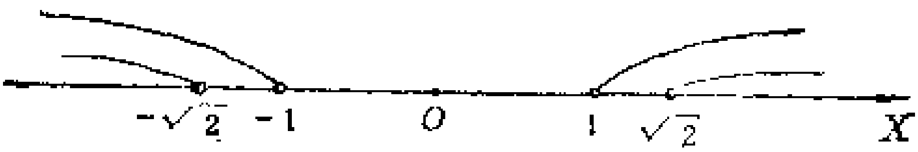


图 1.5

不难看出，集R_1由$(-\infty,\ -1)$和$(1,+\infty)$组成，集R_2由$(-\infty,-\sqrt{2})$和$(\sqrt{2},+\infty)$组成，所以$R_2\subset R_1$(图1.5).

注 从属关系“$\in$”与包含关系“$\subset$”是两个不同的概念，

前者指的是集合的元素与集合本身的关系，后者表示的是两个集合之间的一种关系。例如，

设$A=\{a,b\}$。a是A的一元，$\{a\}$是A的一个子集，可分别记为$a\in A$，$\{a\}\subset A$。而写法$a\subset A$，$\{a\}\in A$则是错误的。

定理 1 对于任意的集A,B,C：

1) $A\subset A$；

2) $\varnothing\subset A$；

3) 若$A\subset B$，$B\subset C$，则$A\subset C$。

证明 1) 由子集定义知，任意集都是它自己的子集，即$A\subset A$。

2) 因$B\subset A$的意义是：若$a\in B$，则$a\in A$。此命题与它的逆否命题等价；即若$a\notin A$，则$a\notin B$。

现设$B=\varnothing$。要证$\varnothing\subset A$，只要证：若$a\notin A$，则$a\notin\varnothing$就行了。事实上，若$a\notin A$，因$\varnothing$是空集，当然$a\notin\varnothing$，所以$\varnothing\subset A$。

3) 若$A=\varnothing$，结论成立（据2）。现设$A\neq\varnothing$。任取$a\in A$，因为$A\subset B$，所以$a\in B$。又因为$B\subset C$，所以$a\in C$。由此可见，A中的每一个元素都是C中的元素，因而

$A\subset C$。 】①

图1.4正好反映了包含关系的传递性。

定理 2 $A=B$的必要充分条件是：$A\subset B$且$B\subset A$。

证明 1° 必要性 这是很明显的。

$\because$ $A\subset A$，而$A=B$，$\therefore A\subset B$。

---

① 符号“】”表示“证明完毕”。

同理有$B\subset A$。

2° 充分性 用反证法

设$A\neq B$（表示A与B不相等），只有下列两种情形：

1）要么A中至少有一元素$a\notin B$。因$A\subset B$，由$a\in A$，又得出$a\in B$，与$a\notin B$矛盾。

2）要么B中至少有一元素$b\notin A$。因$B\subset A$，由$b\in B$又得出$b\in A$，与$b\notin A$矛盾。

既然1）、2）中的假设都不成立，说明A与B所含元素完全相同，$A=B$。 ▌

注 由本定理，使我们能用"$A\subset B$且$B\subset A$"来作为A、B二集相等的定义。这一定义给我们指出了证明二集相等的重要方法，就是分别证明每一个集里面的任意一个元素属于另一个集。

五、给定集的子集、全集

例12 设$A=\{a,b,c\}$，它有下列子集：

$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a,b\}$，$\{a,c\}$，$\{b,c\}$，$\{a,b,c\}$。

从前面七个集看到，它们中的每一个都没有包含集A的全部元素，这样的一些集都叫做集A的真子集，而A叫全集。

一般地，若$B\subset A$，且$B\neq A$，即B的一切元素都是A的元素，但是A中又确有元素不属于B时，那么B叫做A的真子集。

A本身也是A的子集，但不是真子集，称它为全集。

注意：全集一定是非空集。

另外，从例12我们看到，一个三元素集$\{a,b,c\}$，除了前面列举的八个子集外，不再有别的集作为它的子集，因此三元素

集的一切子集共有$2^3=8$个．由此，我们自然会设想：

若U是一个有限集，由n个元素组成，则U的一切子集共有2^n个．现在我们来证实这一设想是正确的．

记U的一切子集所成之集为$\mathscr{U}$．

显然，从U中每次取出一个元素组成的单元素集共有C_n^1个，每次取出两个元素组成的双元素集共有C_n^2个．一般地，从U中每次取出k个元素组成的k元素集共有C_n^k个（$k\leqslant n$）．

因此，集族$\mathscr{U}$包含一个空集，C_n^1个单元素集，C_n^2个双元素集，…，C_n^k个k元素集，…，最后C_n^n个（即一个）与集U本身相等的子集．集族$\mathscr{U}$的元素（注意：$\mathscr{U}$的元素是U的子集）个数为

$$1+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^k+\cdots+C_n^n$$
$$=(1+1)^n=2^n.$$

显然 $2^n>n$．

特例 若U是单元素集，则$\mathscr{U}$只含两个元素：空集$\varnothing$与集U本身，这可由上式令$n=1$得出．当$n=0$，即当$U=\varnothing$时，$2^0=1$，此时$\mathscr{U}$只含一个元素，就是$\varnothing$，$\mathscr{U}=\{\varnothing\}$．

由上面全集的概念，我们又可把它叙述为：如果我们所研究的一切集合都是某个固定集的子集，则这个固定集叫做全集．通常用U或I表示它，在韦恩图上常用矩形或圆代表全集．

显然，全集的选取与我们所研究的问题密切相关．例如在平面几何中，取整个平面为全集，一切平面几何图形作为点的集合都是它的子集．如果我们研究的只是各种各样的四边形，则取$U=\{$四边形$\}$，此时矩形集，平行四边形集等都是它的子集．又如在微积分中，因以实数集作为论域，我们取全集

$U=\{$实数$\}$，函数的定义域，值域都是它的子集。

§2 并、交、补

在§2—§5中，我们所考虑的一切集都看作是全集U的子集，以下不再声明。

一、并集、交集与补集的定义

1.并集

设A、B为二集。由集A与集B的所有元素组成的集，叫做集A与集B的并集(或和集)，简称为并(或和)，记为$A\cup B$(或$A+B$)。

由定义知，当$x\in A\cup B$时，x或属于A，或属于B(不排斥

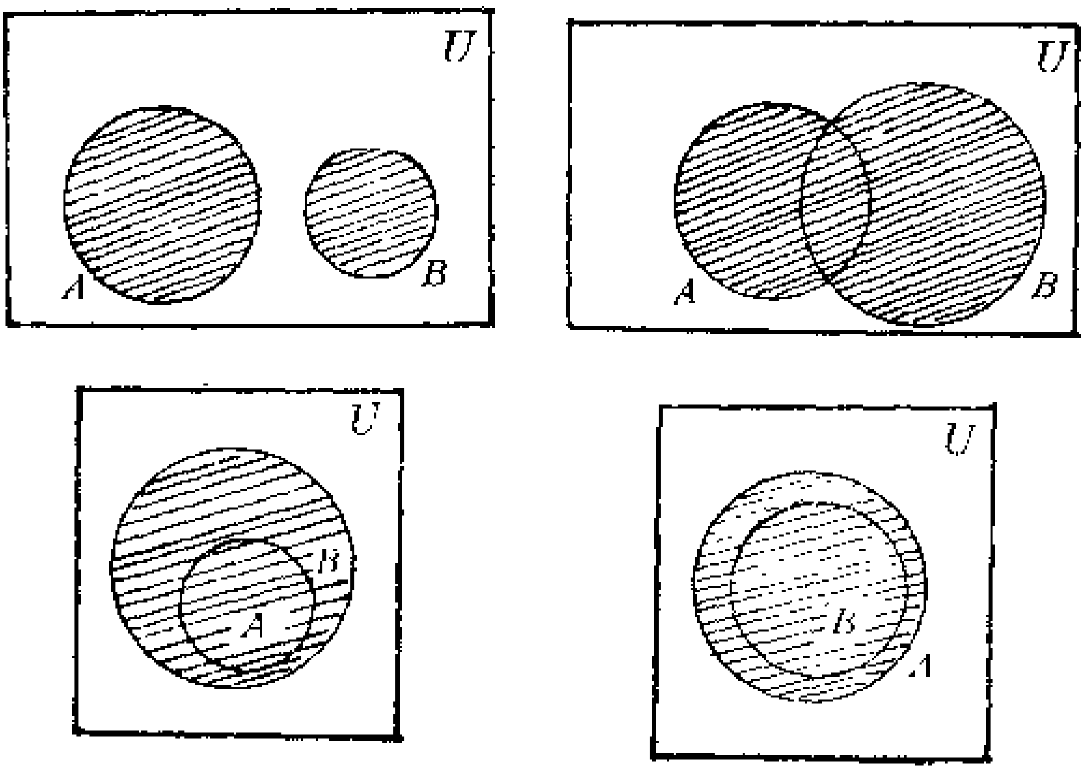


图1.6

x同时属于A、B二集)，反之，属于A或属于B的元素x也一定属于$A\cup B$，因此，A与B的并是由属于A的元素或属于B的元素的全体所构成的集。换句话说，$A\cup B$可定义为：

$$A\cup B=E[x;\ x\in A\text{或}x\in B],$$

其韦恩图见图1.6，其中阴影部分表示$A\cup B$。

例 1 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{c,d,e,f,g\}$。

$$A\cup B=\{a,b,c,d,e,f,g\}.$$

注意的是，A与B所共有的元素，在并集中只列举一次，因为集合中的元素必须是相异的（图1.7）。

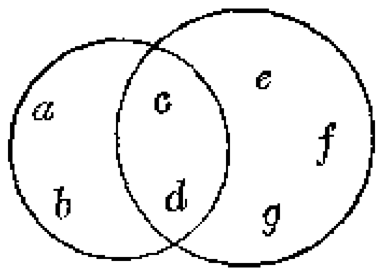


图1.7

例 2 {等腰三角形}∪{等边三角形}={等腰三角形}。

例 3 $[0,2]\cup[1,3)=[0,3)$ （图1.8）。

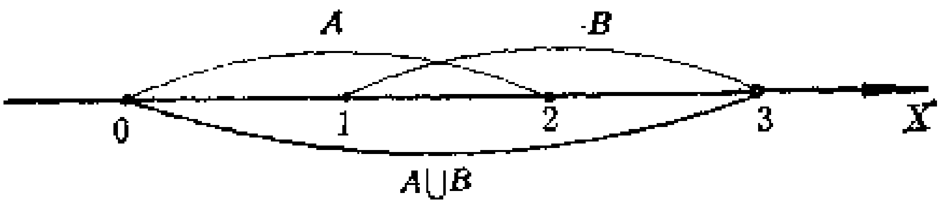


图1.8

有限个集的并集(多于两个)可仿上类似地定义。

$$A\cup B\cup C=E[x;\ x\in A\text{或}x\in B\text{或}x\in C].$$

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$
$$=E[x;\ x\in A_1\text{或}x\in A_2\text{或}\cdots\text{或}x\in A_n].$$

例 4 {等腰三角形}∪{锐角三角形}∪{直角三角形}∪{钝角三角形}={三角形}。

例 5 $[0,1]\cup[1,2]\cup\cdots\cup[n-1,n]=[0,n]$。

(n为自然数)

2.交集

设有A、B二集。由集A与集B的所有公共元素组成的集，叫做集A与集B的交集(或通集)，简称为交(或通)，记为$A\cap B$(或$A\cdot B$，AB)。

由定义知，$A\cap B$的元素既属于A又属于B，因此$A\cap B$可定义为：

$$A\cap B=E[x;\ x\in A\text{且}x\in B]。$$

其韦恩图如图1.9，阴影部分表示$A\cap B$。

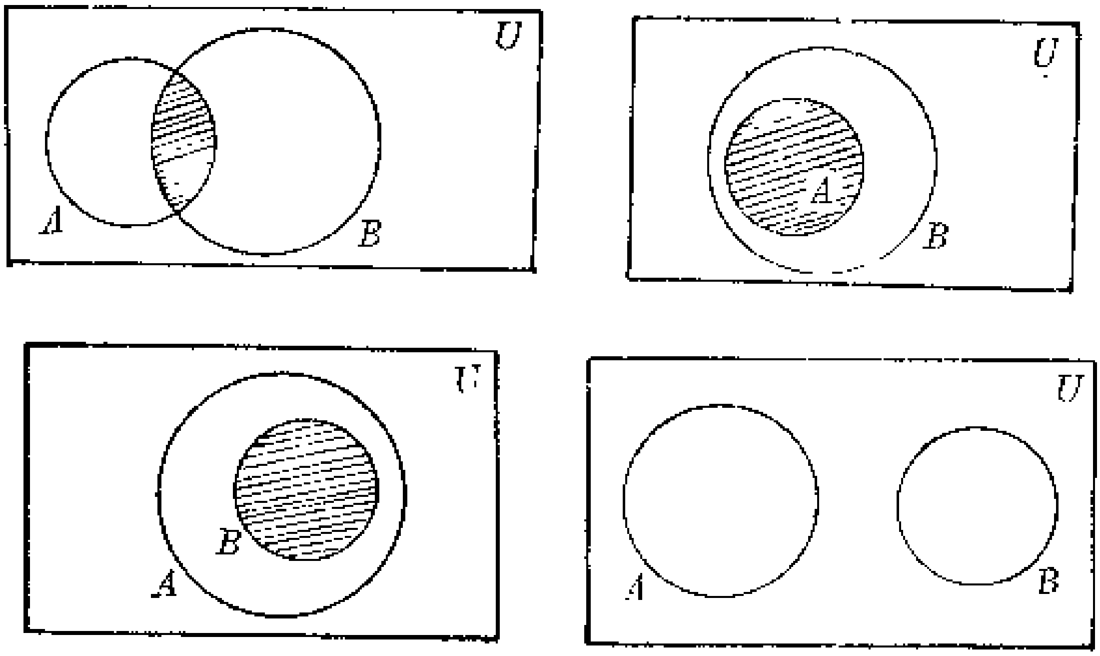


图1.9

若A、B非空，且$A\cap B=\varnothing$，说明A与B没有一个公共元素，我们说A与B是互不相交的。

例 6 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{c,d,e,f,g\}$，

$$A\cap B=\{c,d\}。\quad (见图1.7)$$

例 7 $\{$正方形$\}=\{$矩形$\}\cap\{$菱形$\}$，

$\{$等腰直角三角形$\}=\{$直角三角形$\}\cap\{$等腰三角形$\}$.

例 8 $[0,2]\cap[1,3)=[1,2]$， （见图1.8）

$[-3,+\infty)\cap(-\infty,\sqrt{2})=[-3,\sqrt{2})$.（见图1.10）

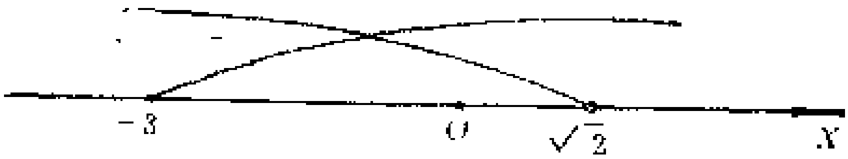


图1.10

例 9 讨论圆与直线的关系

记l—平面上的直线，C—同一平面上的圆，

$$l\cap C=\begin{cases}\varnothing, & \text{圆与直线相离；}\\ \{P\}, & \text{圆与直线相切，切点为}P\text{；}\\ \{P_1,P_2\}, & \text{圆与直线相交，交点为}P_1,P_2\text{。}\end{cases}$$

图1.11表明了直线l与圆C_1,C_2,C_3的相互位置关系。

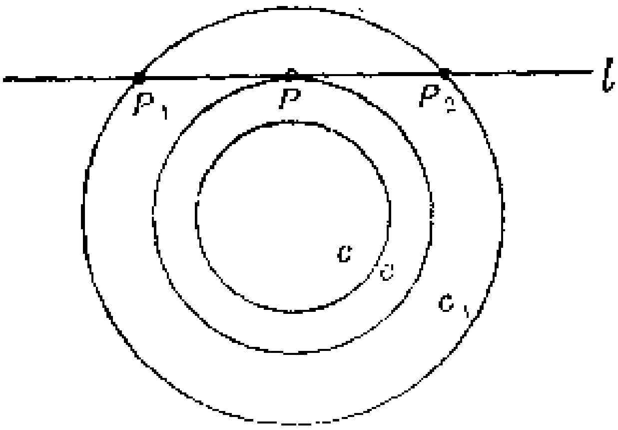


图1.11

有限个集的交集（多于两个）定义如下：

$A\cap B\cap C=E[x;\ x\in A$且$x\in B$且$x\in C]$，

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$
$$= E[x;\ x \in A_1 \text{且} x \in A_2 \text{且} \cdots \text{且} x \in A_n]。$$

例10 设 $A_k = \left[0,\ \frac{1}{k}\right]$，（$k$为自然数）

则 $$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = [0,1] \cap \left[0,\frac{1}{2}\right] \cap \left[0,\frac{1}{3}\right] = \left[0,\frac{1}{3}\right],$$

$$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n = \left[0,\frac{1}{n}\right]。$$

3.补集

从全集U中去掉集A的所有元素，剩余下来的元素构成的集叫做集A的补集（或余集），简称补（或余），记为A'。

由定义知，A'的元素不属于A，但属于U。因此，A'可规定为：

$$A' = E[x;\ x \notin A \text{但} x \in U]。$$

其韦恩图如图1.12，阴影部分表示A'。

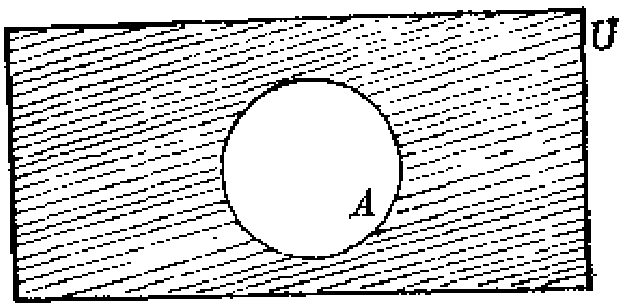


图1.12

例11 设 $U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

$A = \{1,3,4,8\}$。

则 $A' = \{2,5,6,7,9\}$。

例12 (i) 设 $U=\{$自然数$\}$，$A=\{$正奇数$\}$，

则 $$A'=\{\text{正偶数}\}.$$

(ii) 设 $U=\{$实数$\}$，$A=\{$有理数$\}$，

则 $$A'=\{\text{无理数}\}.$$

二、运算规律

现讨论并、交、补这三种集运算所遵循的基本运算规律。

由并与交的定义，立即有

1.交换律

$$A\cup B=B\cup A,\quad A\cap B=B\cap A.$$

2.结合律

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C,$$

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

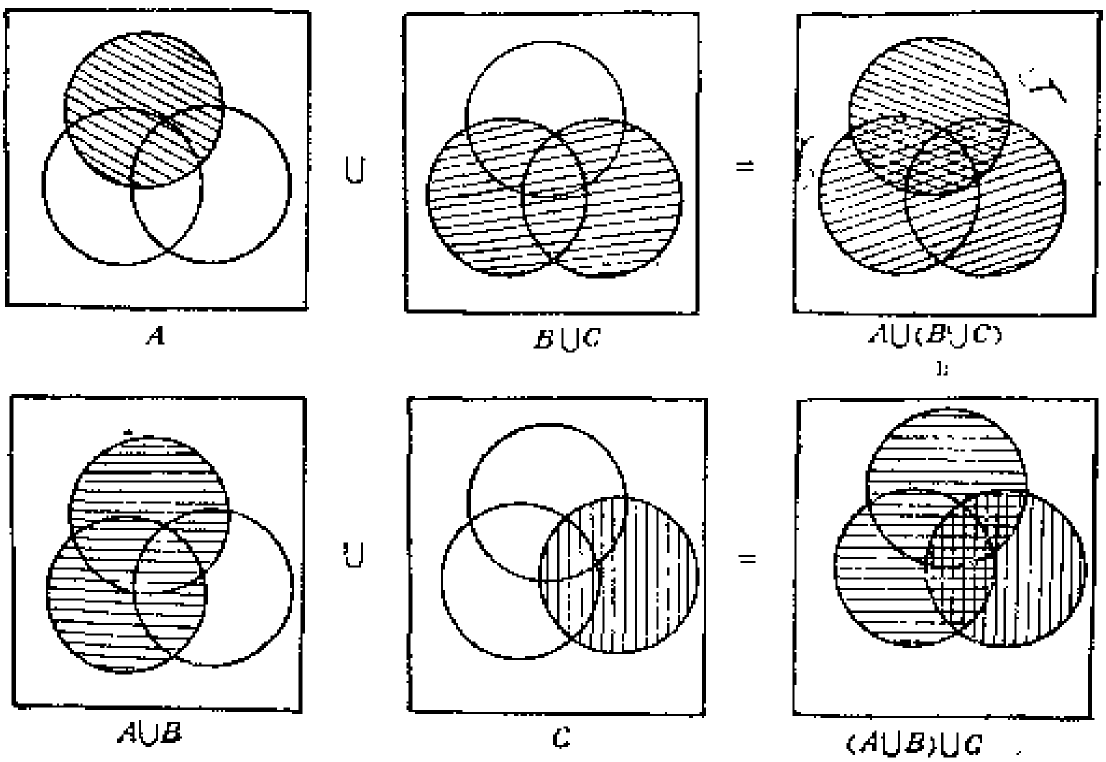


图1.13

事实上，$A\cup(B\cup C)$是由属于A或属于B或属于 C 的元素组成，而$(A\cup B)\cup C$也是这样，因而它们表示同一个集。这可以用上面的韦恩图验证。

交的结合律也是很明显的。因$A\cap(B\cap C)$是由A，B，C的公共元素所组成的集，它与$(A\cap B)\cap C$是同一个集。这可用下面的韦恩图验证。

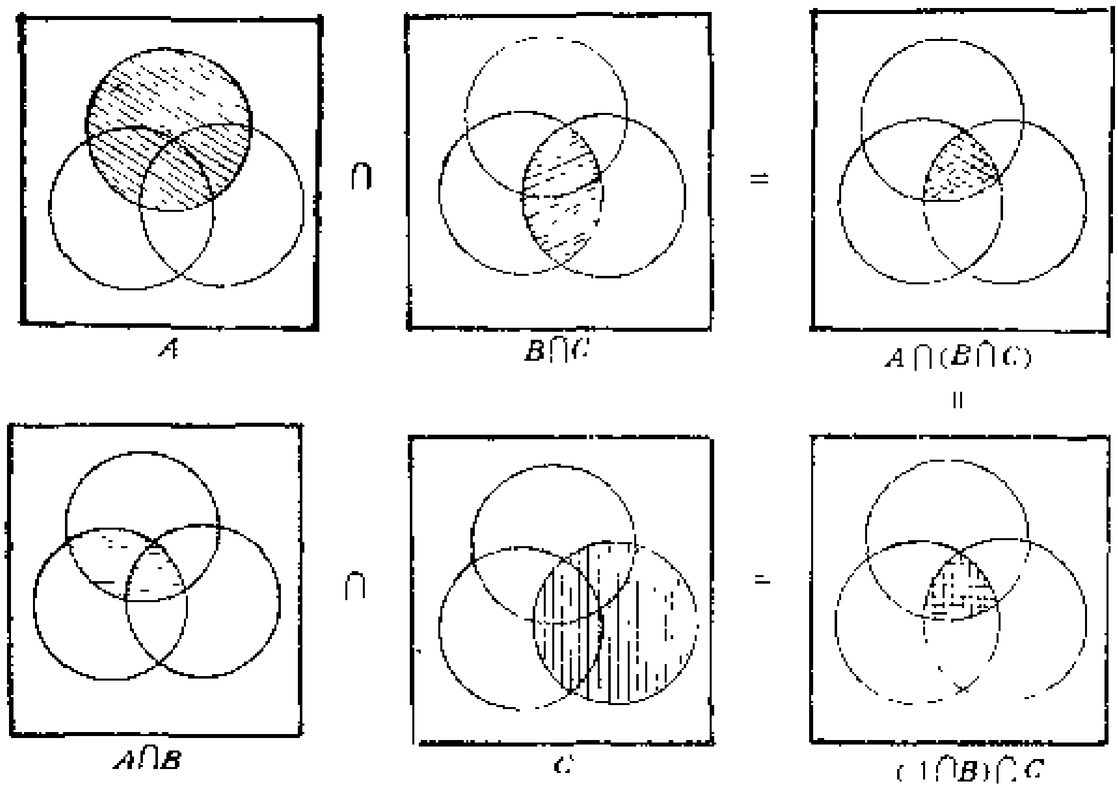


图1.14

根据结合律，有

$$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)=A\cup B\cup C,$$

$$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)=A\cap B\cap C.$$

这种任意省略括号的做法可以推广到任意有限个集合的情形上去，并且根据交换律，还可任意调换这些集合的次序。例如，

$$(A\cup B\cup C)\cup D=(A\cup B)\cup(C\cup D)$$
$$=(C\cup D)\cup(A\cup B)$$
$$=(D\cup C)\cup(B\cup A)$$
$$=(D\cup C\cup B)\cup A,$$

$$A\cup B\cup C\cup D=D\cup C\cup B\cup A.$$

3.分配律

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C),\quad\text{(并对交的分配律)}$$
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).\quad\text{(交对并的分配律)}$$

证明前，先注意一个明显的事实：

$$A\subset A\cup B,\qquad B\subset A\cup B.$$

证明 1) 并对交的分配律成立。

设 $x\in A\cup(B\cap C)$， 则 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$.

i) 如果 $x\in A$，则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$，因而

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

ii) 如果 $x\in B\cap C$，则 $x\in B$ 且 $x\in C$，因而 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$，于是

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

由 i)，ii) 得：

$$A\cup(B\cap C)\subset(A\cup B)\cap(A\cup C).\qquad(1)$$

反之，若 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则$x\in A\cup B$ 且$x\in A\cup C$.

i)′ 如果 $x\notin A$，则 $x\in B$ 且 $x\in C$，因而 $x\in B\cap C$，

$$x\in A\cup(B\cap C).$$

ii)′ 如果 $x\in A$，自然有

$$x\in A\cup(B\cap C).$$

由 i)′, ii)′ 得:

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subset A\cup(B\cap C) \tag{2}$$

据(1)与(2), 有

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C). \quad ▌$$

作韦恩图验证如下:

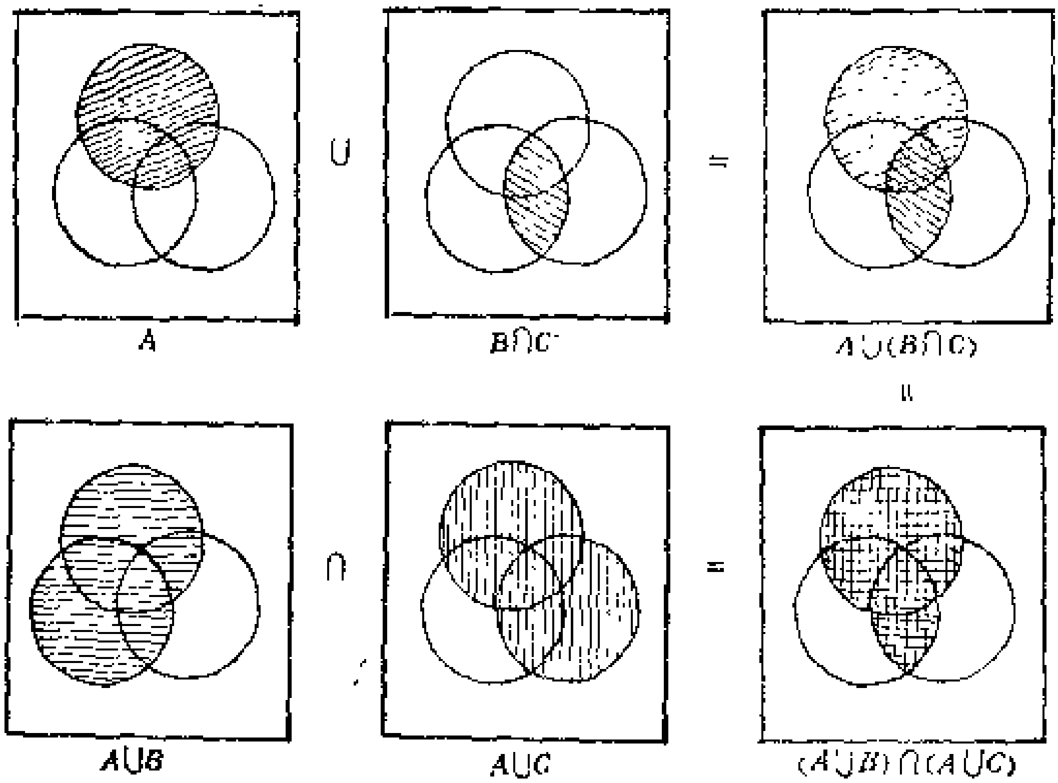


图1.15(a)

2) 交对并的分配律亦成立。

设 $x\in A\cap(B\cup C)$, 则 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$. 后者又得出 $x\in B$或$x\in C$.

由$x\in A$及$x\in B$,得$x\in A\cap B$; 由$x\in A$及$x\in C$, 得$x\in A\cap C$, 因而都有$x\subset(A\cap B)\cup(A\cap C)$, 故

$$A\cap(B\cup C)\subset(A\cap B)\cup(A\cap C) \tag{3}$$

反之，若 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，则 $x\in A\cap B$或$x\in A\cap C$。

如果 $x\in A\cap B$,则 $x\in A$且 $x\in B$，因而 $x\in A$且$x\in B\cup C$，$x\in A\cap(B\cup C)$；

如果 $x\in A\cap C$，仿上可证 $x\in A\cap(B\cup C)$，故

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subset A\cap(B\cup C) \tag{4}$$

由(3)，(4)得：

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$ ▮

作韦恩图验证如下。

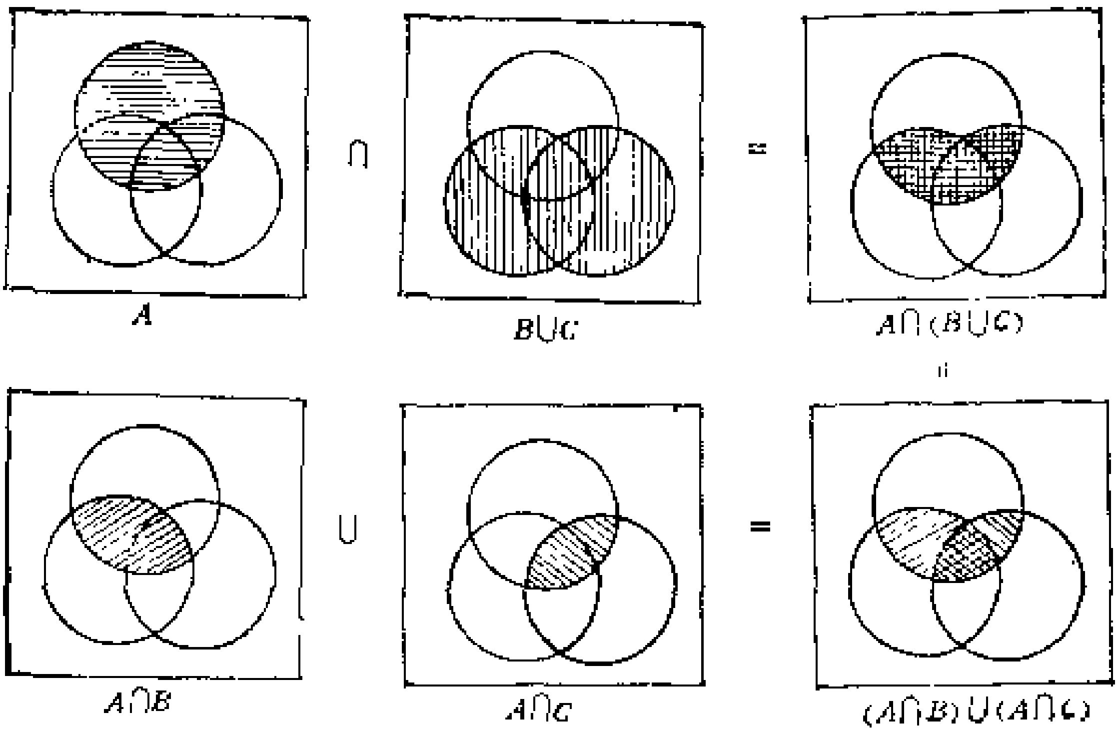


图1.15(*b*)

4．0—1律

对任意集A，有

1） $A\cup\varnothing=A$，　　$A\cap U=A$；

2） $A\cup U=U$，　　$A\cap\varnothing=\varnothing$。

这是有关空集与全集的运算规律，其证明留给读者。

5.等幂律

$$A\cup A=A,\quad A\cap A=A.$$

对任意集A都成立，这也是很明显的事实。

6.吸收律

$$A\cup(A\cap B)=A,\quad A\cap(A\cup B)=A.$$

证明

$$\begin{aligned}A\cup(A\cap B)&=(A\cap U)\cup(A\cap B) &&\text{(据0—1律)}\\&=A\cap(U\cup B) &&\text{(据分配律)}\\&=A\cap U &&\text{(据交换律与0—1律)}\\&=A. &&\text{(据0—1律)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}A\cap(A\cup B)&=(A\cup\varnothing)\cap(A\cup B) &&\text{(据0—1律)}\\&=A\cup(\varnothing\cap B) &&\text{(据分配律)}\\&=A\cup\varnothing &&\text{(据交换律与0—1律)}\\&=A. &&\text{(据0—1律)}\end{aligned}$$

7.补集的运算规律

1） $U'=\varnothing$， $\varnothing'=U$.

2） 求补律 $A\cup A'=U$， $A\cap A'=\varnothing$.

3） 二次否定律 $A''\equiv(A')'=A$.

证明

1） 由补集定义知，全集的补集是空集，空集的补集是全集。

2） 我们以 $A\cap A'=\varnothing$ 为例给出证明，用反证法。

若 $A\cap A'\neq\varnothing$，则有 $x\in A\cap A'$，从而 $x\in A$ 且 $x\in A'$. 但这是不可能的，因A'中的元素不属于A。故

$$A \cap A' = \varnothing.$$

$A \cup A' = U$ 的正确性，请读者补证。

3) 我们作出韦恩图予以验证，其证明让读者自己完成。

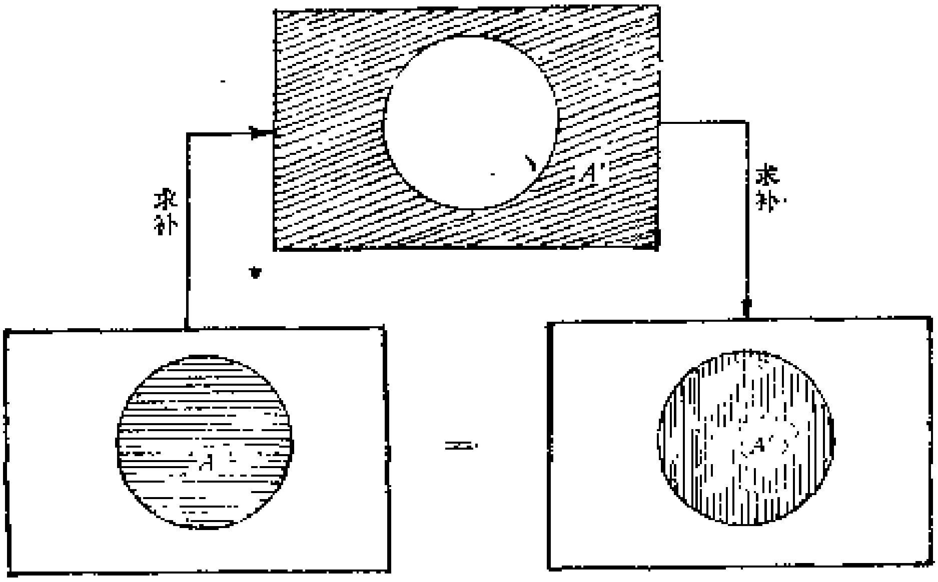


图1.16

$A'' = A$是说：任意集的补集的补集就是这个集自身。

8. 反演律

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \quad (A \cap B)' = A' \cup B'.$$

证明 1) 先证第一个公式。

设 $x \in (A \cup B)'$，则 $x \notin A \cup B$，因而 $x \notin A$ 且 $x \notin B$，或者说 $x \in A'$ 且 $x \in B'$，于是 $x \in A' \cap B'$。由此推出

$$(A \cup B)' \subset A' \cap B'. \tag{5}$$

反之，若 $x \in A' \cap B'$，则$x \in A'$ 且 $x \in B'$，换句话说$x \notin A$ 且 $x \notin B$，因而 $x \notin A \cup B$，$x \in (A \cup B)'$，于是又有

$$A' \cap B' \subset (A \cup B)' \tag{6}$$

由(5)，(6)得：

$$(A\cup B)'=A'\cup B'.$$

作韦恩图验证如下。

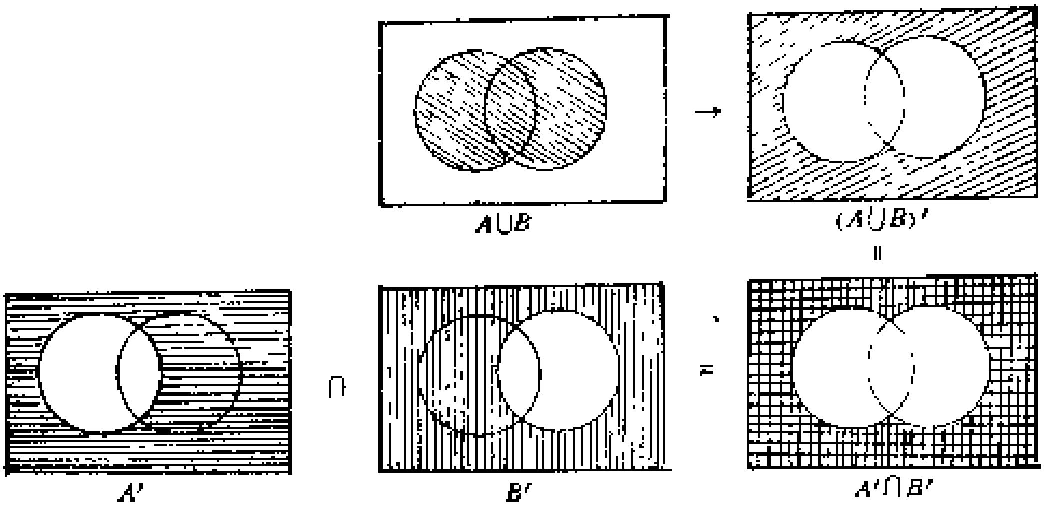


图1.17(a)

2) 仿上可证第二个公式，这里我们采用另一办法。

在已证明的第一个公式中，将A，B分别换为A'，B'，得

$$(A'\cup B')'=(A')'\cap(B')',$$

从而 $\quad(A'\cup B')'=A\cap B$。（据二次否定律）

因相等二集的补集相等，对上式两边同时取补，得

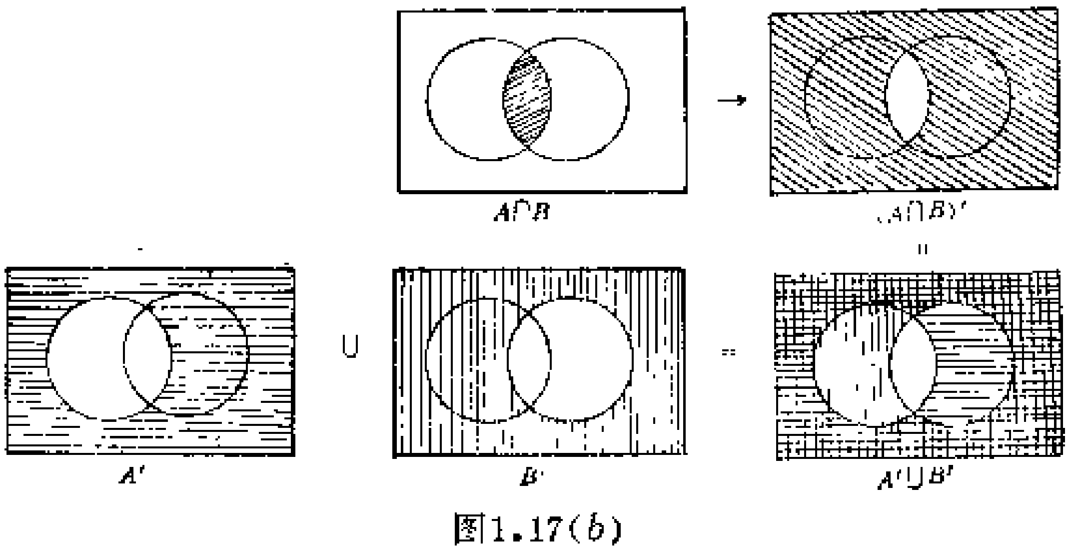


图1.17(b)

$$(A'\cup B')''=(A\cap B)',$$

即 $$(A\cap B)'=A'\cup B'.$$]

这两个公式叫做德·摩根(De·Morgan)公式，它指出并与交取补后互换。详细地说，并的补集是补集的交，交的补集是补集的并。

现将上面得到的基本运算规律列表如下：

交换律	$A\cup B=B\cup A$, $A\cap B=B\cap A$.
结合律	$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$, $A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.
分配律	$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$, $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.
0—1律	$A\cup\varnothing=A$, $A\cap U=A$. $(A\cup U=U, A\cap\varnothing=\varnothing.)$
等幂律	$A\cup A=A$, $A\cap A=A$.
吸收律	$A\cup(A\cap B)=A$, $A\cap(A\cup B)=A$.
求补律	$A\cup A'=U, A\cap A'=\varnothing$.
反演律	$(A\cup B)'=A'\cap B', (A\cap B)'=A'\cup B'$.
二次否定律	$A''=A$(或$(A')'=A$).

三、包含

定理 1 $A\subset B$的必要充分条件是：$A\cup B=B$.

证明 1)必要性 由子集定义，若$A\subset B$，则A的元都是B的元，因而$A\cup B$的元，按照并的定义，与B的元完全相同，故$A\cup B=B$.

2）充分性　若$A\cup B=B$，则A的元皆为B的元，故$A\subset B$。】

引入记号“$p\Rightarrow q$”，表示由命题p可推得命题q成立；“$p\Leftarrow q$”表示由命题q可推得命题p正确；“$p\Longleftrightarrow q$”的意思是既有“$p\Rightarrow q$”又有“$p\Leftarrow q$”，也就是说，从p可推得q，并且从q可推得p，因此我们说，p等价于q。

于是定理 1 可改写为：$A\subset B \Longleftrightarrow A\cup B=B$。

定理 2　$A\cup B=B \Longleftrightarrow A\cap B=A$。

证明　$A\cup B=B \Rightarrow A\cap B=A\cap(A\cup B)\xlongequal{\text{吸收律}}A$；

反之，$A\cap B=A\Rightarrow A\cup B=(A\cap B)\cup B\xlongequal{\text{交换律}}B\cup(B\cap A)$

$$\xlongequal{\text{吸收律}}B。$$】

注　由定理 1 和定理 2，有

$$A\subset B\Longleftrightarrow A\cup B=B\Longleftrightarrow A\cap B=A,$$

它指出了集的包含关系和集的运算之间的联系。虽然包含关系不象并、交、补那样是集的一种运算，但这两个定理告诉我们，可以用$A\cup B=B$或$A\cap B=A$作为$A\subset B$的定义，从而使我们有可能用集的运算规律来讨论集之间的包含关系。

定理 3　对任意的A，B，C，有

(i)$A\subset B\Rightarrow A\cup C\subset B\cup C$，（并的单调性）

(ii)$A\subset B\Rightarrow A\cap C\subset B\cap C$。（交的单调性）

证明

(i) $A\subset B \Rightarrow A\cup B=B \Rightarrow (A\cup C)\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$

$=B\cup C \Rightarrow A\cup C\subset B\cup C$。

(ii)$A\subset B \Rightarrow A\cup B=B \Rightarrow (A\cap C)\cup(B\cap C)\xlongequal{\text{交换律、分配律}}$

$=C\cap(A\cup B)=C\cap B=B\cap C \Rightarrow A\cap C\subset B\cap C$。　】

定理 4

(i)$A\subset B \iff A'\cup B=U$,

(ii)$A\subset B \iff A\cap B'=\varnothing$.

证明

(i)$A\subset B \Rightarrow A\cup B=B \Rightarrow A'\cup B=A'\cup(A\cup B)$

$=(A'\cup A)\cup B=U\cup B=U$.

反之，$A'\cup B=U\Rightarrow A\cup B=(A\cap U)\cup B=(A\cap(A'\cup B))\cup B$

$\xlongequal{\text{分配律}}(A\cap A')\cup(A\cap B)\cup B=\varnothing\cup(A\cap B)\cup B$

$=(A\cap B)\cup B\xlongequal{\text{交换律、吸收律}}B \Rightarrow A\subset B$.

(ii)$A\subset B \Rightarrow A\cap B=A \Rightarrow A\cap B'=(A\cap B)\cap B'$

$=A\cap(B\cap B')=A\cap\varnothing=\varnothing$.

反之，$A\cap B'=\varnothing\Rightarrow A\cap B=(A\cap B)\cup\varnothing=(A\cap B)\cup(A\cap B')$

$\xlongequal{\text{分配律}}A\cap(B\cup B')=A\cap U=A \Rightarrow A\subset B$. ▌

定理 5 $A\subset B \iff B'\subset A'$.

证明 $A\subset B \overset{\text{定理 4}}{\iff} A'\cup B=U \overset{B=B''}{\iff} A'\cup(B')'=(B')'\cup A'$

$=U \overset{\text{定理 4}}{\iff} B'\subset A'$

或者 $A\subset B \overset{\text{定理 4}}{\iff} A\cap B'=\varnothing \overset{A=(A')'}{\iff} (A')'\cap B'=$

$B'\cap(A')'=\varnothing \overset{\text{定理 4}}{\iff} B'\subset A'$. ▌

作为练习，建议读者从“包含”、“相等”、“并”、“交”、“补”的定义来推导定理 3—定理 5，并作出相应的韦恩图加以验证。

四、补充说明

令$\mathscr{U}$为全集$U(\neq\varnothing)$的一切子集组成的集．因为$\varnothing\in\mathscr{U}$，

$U\in\mathscr{U}$，所以$\mathscr{U}$是至少包含两个元素的集族。

对任意的A，$B\in\mathscr{U}$，有

$$A\cup B,\ A\cap B,\ A'\in\mathscr{U}.$$

正因为集的运算“$\cup$，$\cap$，$'$”具有这种性质，我们说$\mathscr{U}$对于集运算是封闭的，或说“$\cup$，$\cap$，$'$”是集的三种代数运算。称代数系统$\langle\mathscr{U},\cup,\cap,'\rangle$为集代数。

如果将集运算$\cup$，$\cap$与数的普通算术运算$+$，$\cdot$相比较，它们都满足交换律、结合律、分配律，另外空集$\varnothing$和数0有相似的地方。类似于$0+a=a$，有$\varnothing\cup A=A$；类似于$0\cdot a=0$，有$\varnothing\cap A=\varnothing$。全集$U$与数1有点相像，类似于$1\cdot a=a$，有$U\cap A=A$。然而$1+a\neq1(a\neq0)$，但是$U\cup A=U$。

再有，在数的运算中没有补运算，因此集合中求补律、反演律等有关补集的运算规律自然在数的运算中不成立。等幂律、吸收律等集运算规律在数的运算中一般也不成立。至于分配律、在集代数中有两个：并对交的分配律、交对并的分配律，而在数运算中只有一个：积对和的分配律，即

$$a\cdot(b+c)=ab+ac.$$

$a+bc$一般不等于$(a+b)\cdot(a+c)$，这又是它们之间的不同之处。

由此可见，在对集施行运算中，切不可滥用数的运算法则。

最后我们指出，本节第二段列表所总结的几个公式，在集代数中是推导其他公式的依据。读者从第三段可发现这一点，现在不妨再看一个例子。

例13 证明：

1) $(A\cap B)\cup(A\cap B')=A$,

2) $A\cup(A'\cap B)=A\cup B$,

3) $(A\cap B)\cup(A'\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cup(A'\cap C)$,

4) $((A\cap B)\cup(A'\cap C))'=(A\cap B')\cup(A'\cap C')$.

证明

1) $(A\cap B)\cup(A\cap B')\xlongequal{\text{分配律}}A\cap(B\cup B')$

$\xlongequal{\text{求补律}}A\cap U\xlongequal{\text{0—1律}}A$.

2) $A\cup(A'\cap B)\xlongequal{\text{分配律}}(A\cup A')\cap(A\cup B)$

$\xlongequal{\text{求补律}}U\cap(A\cup B)\xlongequal{\text{交换律}}(A\cup B)\cap U$

$\xlongequal{\text{0—1律}}A\cup B$.

3) $(A\cap B)\cup(A'\cap C)\cup(B\cap C)$

$\xlongequal{\text{由1)}}(A\cap B)\cup(A'\cap C)\cup((B\cap C)\cap A)\cup((B\cap C)\cap A')$

$\xlongequal{\text{交换律、结合律}}(A\cap B)\cup(A'\cap C)\cup((A\cap B)\cap C)\cup$

$((A'\cap C)\cap B)$

$\xlongequal{\text{交换律}}(A\cap B)\cup((A\cap B)\cap C)\cup(A'\cap C)\cup((A'\cap C)\cap B)$

$\xlongequal{\text{吸收律}}(A\cap B)\cup(A'\cap C)$.

4) $((A\cap B)\cup(A'\cap C))'$

$\xlongequal{\text{反演律}}(A\cap B)'\cap(A'\cap C)'$

$\xlongequal{\text{反演律}}(A'\cup B')\cap(A''\cup C')$

$\xlongequal{\text{二次否定律}}(A'\cup B')\cap(A\cup C')$

$\xlongequal{\text{交换律、分配律}}(A'\cap A)\cup(A'\cap C')\cup(B'\cap A)\cup(B'\cap C')$

$\xlongequal{\text{求补律}}\varnothing\cup(A'\cap C')\cup(B'\cap A)\cup(B'\cap C')$

$\xlongequal{\text{0—1律、交换律}}(A\cap B')\cup(A'\cap C')\cup(B'\cap C')$

$\xlongequal{\text{由3)}}(A\cap B')\cup(A'\cap C')$.]

§3 差与对称差

一、差

设A、B为二集，由所有属于集A而不属于集B的元素组成的集，叫做集A减集B的差集，记为$A-B$或$A\backslash B$。因此，$A-B$规定为：

$$A-B=E[x;\ x\in A且x\notin B]$$

或

$$A-B=A\cap B'.$$

差集$A-B$也叫做集B在集A中的相对补集。其韦恩图见下图中的阴影部分。

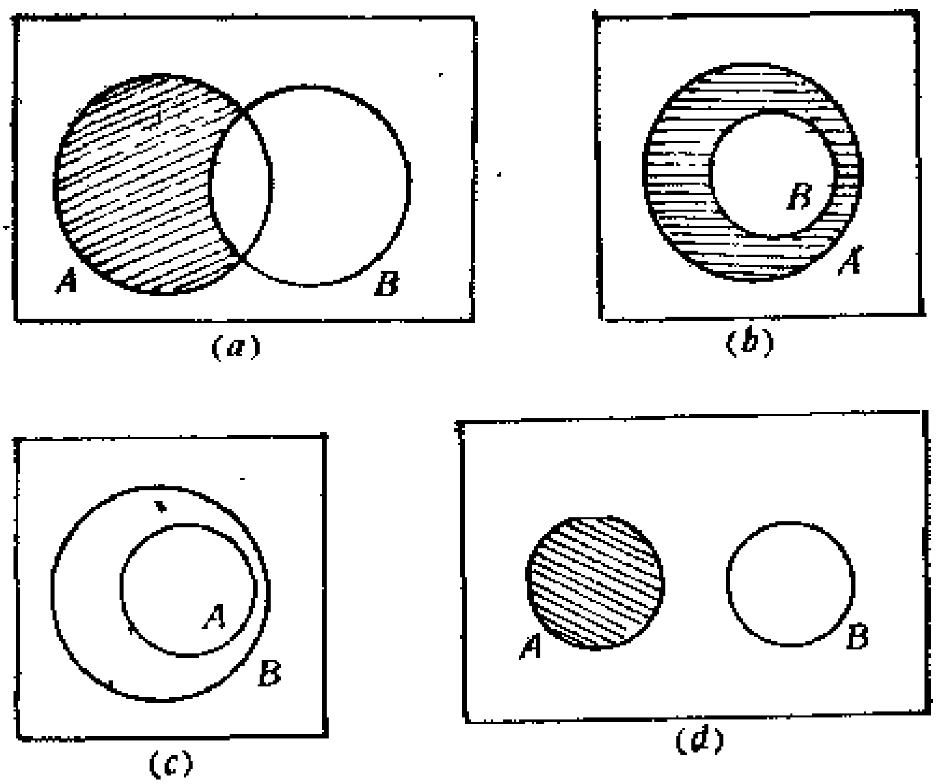


图1.18

例 1 设$A=\{a,b,c,d\}$， $B=\{c,d,e,f,g\}$。

则 $A-B=\{a,b\}$， $B-A=\{e,f,g\}$。

由此可见，$A-B$与$B-A$，一般来说是两个不同的集。

例 2 令$A=[0,2]$，$B=(1,3)$。

$A-B=[0,2]-(1,3)=[0,1)$。

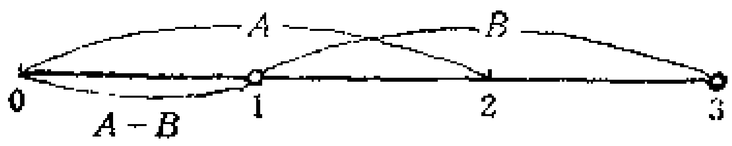


图1.19

集合差具有下列性质：

性质 1 $U-A=A'$。

因 $U-A=U\cap A'=A'$。

性质 2 $A-B\subset A$。

显然。

性质 3 $A-B=\varnothing \iff A\subset B$。（见图1.18(c)）

证明 $\because$ $A-B=A\cap B'$，

$A\cap B'=\varnothing \iff A\subset B$，（据§2定理4）

$\therefore$ $A-B=\varnothing \iff A\subset B$。 ∎

性质 4 $A-B=A \iff A\cap B=\varnothing$。（如图1.18(d)）

证明 $A-B=A \Rightarrow A\cap B=(A-B)\cap B=(A\cap B')\cap B$

$=A\cap(B'\cap B)=A\cap\varnothing=\varnothing$，

反之， $A\cap B=\varnothing \Rightarrow A=A\cap U=A\cap(B\cup B')$

$=(A\cap B)\cup(A\cap B')=\varnothing\cup(A\cap B')$

$= A\cap B' = A-B.$ ∎

性质 5 $(A-B)\cup B = A\cup B.$

证明 $(A-B)\cup B=(A\cap B')\cup B=(A\cup B)\cap(B'\cup B)$

$= B\cup(A\cap B')$

$=(A\cup B)\cap U = A\cup B.$ ∎

特别 若$B\subset A$，则

$(A-B)\cup B = A.$

性质 6 $C\cap(A-B)=(C\cap A)-(C\cap B)$，（交对差的分配律）

证明 $(C\cap A)-(C\cap B)=(C\cap A)\cap(C\cap B)'$

$=(C\cap A)\cap(C'\cup B')$

$=(C\cap A\cap C')\cup(C\cap A\cap B')$

$=(\varnothing\cap A)\cup(C\cap(A-B))$

$=C\cap(A-B).$ ∎

读者试作出韦恩图加以验证。

值得指出的是，并对差不是可分配的，这从性质 5 中所考虑的并来看是很清楚的。因为 $(A-B)\cup B$ 包含 B 的所有元素，但$(A\cup B)-(B\cup B)=(A\cup B)-B=(A\cup B)\cap B'=(A\cap B')\cup(B\cap B')=A\cap B'$却不包含$B$的元素。

二、对称差

A、B二集的对称差定义为A与B之差及B与A之差的并，记为$A\triangle B$，即

$$A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$$
$$=(A\cap B')\cup(B\cap A').$$

其韦恩图见下图中阴影部分。

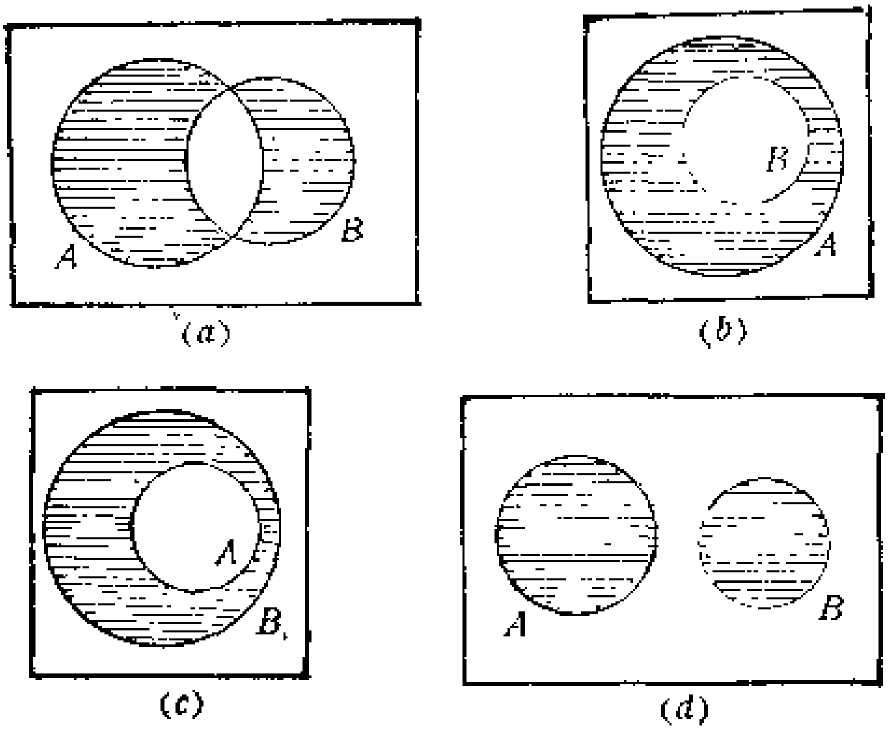


图1.20

由图可看出：$A\triangle B$是由属于A或B，但不同时属于A、B二集的元素所构成的集合，即

$$A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B).$$

事实上，

$$\begin{aligned}(A\cup B)-(A\cap B)&=(A\cup B)\cap(A\cap B)'\\&=(A\cup B)\cap(A'\cup B')\\&=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']\\&=(A\cap A')\cup(B\cap A')\cup(A\cap B')\cup(B\cap B')\\&=(B\cap A')\cup(A\cap B').\end{aligned}$$

$$\therefore\quad A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B).$$

由此又有：

$$A\cap B=(A\cup B)-(A\triangle B),$$

$$A\cup B=(A\triangle B)\cup(A\cap B).$$

请作出相应的韦恩图予以验证，并且可立即推出下列性质：

性质 1 $A\triangle A=\varnothing$.

$\because$ $A\triangle A=(A\cup A)-(A\cap A)=A-A=A\cap A'=\varnothing$.]

性质 2 $A\cap B=\varnothing \iff A\triangle B=A\cup B$. (图1.20(d))

证明 $A\cap B=\varnothing \Rightarrow A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B)$

$=(A\cup B)-\varnothing=A\cup B$;

$A\triangle B=A\cup B \Rightarrow A\cap B=(A\cup B)-(A\triangle B)$

$=(A\cup B)-(A\cup B)=\varnothing$.]

性质 3 $A\triangle B=\varnothing \iff A=B$.

证明 因为$A\triangle B=(A\cap B')\cup(A'\cap B)$. 若$A\triangle B=\varnothing$，则

$A\cap B'=\varnothing$ 且 $A'\cap B=\varnothing$,

于是 $A\subset B$ 且 $B\subset A$, $A=B$.

反之，若$A=B$，由性质 1 知 $A\triangle B=\varnothing$.]

运算"$\triangle$"还具有：

性质 4 交换律 $A\triangle B=B\triangle A$.

$\because$ $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)$

$=(B-A)\cup(A-B)=B\triangle A$.

性质 5 结合律 $(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C)$.

（证明从略）

性质 6 交关于对称差的分配律

$$C\cap(A\triangle B)=(C\cap A)\triangle(C\cap B).$$

证明 $C\cap(A\triangle B)=C\cap[(A-B)\cup(B-A)]$

$=[C\cap(A-B)]\cup[C\cap(B-A)]$

$$=[(C\cap A)-(C\cap B)]\cup[(C\cap B)-(C\cap A)]$$
$$=(C\cap A)\triangle(C\cap B).$$

然而，并关于对称差不是可分配的。因为

$$A\cup(A\triangle B)=A\cup B,$$
$$\begin{aligned}(A\cup A)\triangle(A\cup B)&=A\triangle(A\cup B)\\&=(A\cup B)-A\\&=(A\cup B)\cap A'\\&=(A\cap A')\cup(B\cap A')\\&=B\cap A'.\end{aligned}$$

§4 无限多个集的并与交

在本章§2中，我们讨论了有限个集的并与交，现在推广到无限个集上去。

一、定义

1.并

设有一列集$A_1,A_2,\cdots,A_n\cdots$。由一切$A_n(n=1,2,\cdots)$的元素组成的集叫做这一列集的并集，记为

$$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots,\text{ 或}A_1+A_2+\cdots+A_n+\cdots,$$

简记为 $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，或$\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n$。

由定义知，当$x\in\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$时，$x$至少属于其中一个$A_n$，因此$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$可定义为由所有至少属于一个$A_n$的元素组成的集，即

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = E[x;\ 有自然数 n,使 x \in A_n]。$$

更一般地，设有一组集A_α，下标α可以在某个范围Λ内变化，Λ叫做指标集.由一切A_α的元素组成的集叫做这一组集的并集，记为$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$或$\sum\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$；或者说$\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$是由所有至少属于一个$A_\alpha$的元素所组成的集，

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = E[x;\ 有\alpha\in\Lambda,\ 使 x \in A_\alpha]。$$

例 1 (1) 设$A_n = \left(0,\dfrac{1}{n}\right)$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = (0,1)。$$

(2) 设$B_n = \left[-1+\dfrac{1}{n},\ 1-\dfrac{1}{n}\right]$，则

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = (-1,1)。$$

例 2 设指标集Λ为大于1且小于2的一切实数：$1<\alpha<2$，$A_\alpha = [0,\alpha]$，则

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha = \bigcup_{\alpha\in(1,2)} [0,\alpha) = [0,2)。$$

2.交

一列集$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$的交集$A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$是指由所有的属于一切$A_n$的元素组成的集，即

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = E[x;\ 对一切自然数 n,\ 都有 x \in A_n]。$$

更一般地，一组集A_α($\alpha\in\Lambda$，Λ为指标集)的交集$\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$是指由属于每个集$A_\alpha$的元素所组成的集，即

$$\bigcap_{\alpha\in A} A_\alpha = E[x;\ 对每一\alpha\in A,\ 都有x\in A_\alpha]。$$

例 3 (1) 设 $A_n=\left[0,\frac{1}{n}\right)$，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\left[0,\frac{1}{n}\right)=\{0\}\quad（单元素集，仅含数0）。$$

事实上，$0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$（因$0\in A_n, n=1,2,\cdots$）。若$x_0<0$，则$x_0\notin A_n$，故 $x_0\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$。若 $x_0>0$，当 n 足够大时，将有$\frac{1}{n}<x_0$，因此 $x_0\notin A_n$，从而 $x_0\notin\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$。这样一来，属于一切$A_n$的数0就成为交集$\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n$的唯一元素了。

(2) 若 $B_n=\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$，则

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(0,\ \frac{1}{n}\right)=\varnothing。$$

例 4 设A是大于 1 的一切实数 α 之集，$A_\alpha=[0,\alpha)$，则

$$\bigcap_{\alpha\in A}A_\alpha=\bigcap_{\alpha\in(1,+\infty)}[0,\alpha)=[0,1]。$$

例 5 设$f(x)$是定义在区间$[a,b]$上的函数，那末对任意实数 c，必成立下列关系式：

(1) $E[x;\ f(x)>c]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E[x;\ f(x)\geqslant c+\frac{1}{n}]$，

(2) $E[x;\ f(x)\geqslant c]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left[x;\ f(x)>c-\frac{1}{n}\right]$。

证明

(1) 显然有 $\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[x;f(x)\geqslant c+\frac{1}{n}\right]\subset E[x;f(x)>c]$， ①

为此只要证相反的包含关系成立就行了。

不妨设$E[x;\ f(x)>c]\neq\varnothing$。取 $x_0\in E[x;f(x)>c]$，则$x_0\in[a,b]$且$f(x_0)>c$，因 $f(x_0)-c>0$，一定存在有自然数n_0，使得$\frac{1}{n_0}\leqslant f(x_0)-c$，即 $f(x_0)\geqslant c+\frac{1}{n_0}$，于是$x_0\in E\left[x;f(x)\geqslant c+\frac{1}{n_0}\right]$，

更有 $$x_0\in\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[x;\ f(x)\geqslant c+\frac{1}{n}\right],$$

从而 $$E[x;\ f(x)>c]\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[x;\ f(x)\geqslant c+\frac{1}{n}\right]. \qquad ②$$

由①与②得

$$E[x;\ f(x)>c]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[x;\ f(x)\geqslant c+\frac{1}{n}\right].$$

(2) 留给读者证明。 ▌

二、性质

在§2中，运算∪，∩的许多性质可推广到含有任意个集的一般情形，我们择其几个比较重要的进行证明。

定理 1

(1) 若$A_\alpha\subset C(\alpha\in\Lambda)$，则$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\subset C$；

(2) 若$A_\alpha\supset C(\alpha\in\Lambda)$，则$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\supset C$。

证明 (1) 设$x\in\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，则有$\alpha\in\Lambda$，使$x\in A_\alpha$。而$A_\alpha\subset C$，所以 $x\in C$，因而

$$\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\subset C.$$

(2) 留给读者。 ▌

定理 2 $\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\cup B_\alpha)=(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)\cup(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha)$。

证明 记$X=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha\cup B_\alpha)$，$Y=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，$Z=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}B_\alpha$。

设$x\in X$,则有$\alpha_0\in A$,使$x\in A_{\alpha_0}\cup B_{\alpha_0}$,于是$x\in A_{\alpha_0}$或$x\in B_{\alpha_0}$。若$x\in A_{\alpha_0}$,则$x\in Y$;若$x\in B_{\alpha_0}$,则$x\in Z$。总之$x\in Y\cup Z$。因而

$$X\subset Y\cup Z. \qquad ①$$

反之,若$x\in Y\cup Z$,则$x\in Y$或$x\in Z$。如果

1) $x\in Y$,则必有$\alpha_1\in A$,使$x\in A_{\alpha_1}$,从而$x\in A_{\alpha_1}\cup B_{\alpha_1}$;

2) $x\in Z$,则必有$\alpha_2\in A$,使$x\in B_{\alpha_2}$,从而$x\in A_{\alpha_2}\cup B_{\alpha_2}$。

不论是情形1)还是2),都有$x\in X$,于是有

$$Y\cup Z\subset X. \qquad ②$$

由①与②,得 $X=Y\cup Z$,即

$$\bigcup_{\alpha\in A}(A_\alpha\cup B_\alpha)=(\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha)\cup(\bigcup_{\alpha\in A}B_\alpha). \qquad \rbrack$$

定理 3 设有一组集A_α $(\alpha\in A)$与集C,则

(1) $C\cup(\bigcap_{\alpha\in A}A_\alpha)=\bigcap_{\alpha\in A}(C\cup A_\alpha)$;(并对交的分配律)

(2) $C\cap(\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha)=\bigcup_{\alpha\in A}(C\cap A_\alpha)$。(交对并的分配律)

证明 证(2),(1)留给读者。

记 $S=C\bigcap(\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha)$,$T=\bigcup_{\alpha\in A}(C\bigcap A_\alpha)$

设 $x\in S$,则$x\in C$且$x\in\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha$。后者表示有$\alpha_0\in A$,使$x\in A_{\alpha_0}$,因而$x\in C\bigcap A_{\alpha_0}$,所以$x\in T$。于是有

$$S\subset T. \qquad ①$$

反之,若$x\in T$,则有$\alpha_1\in A$,使$x\in C\bigcap A_{\alpha_1}$,于是$x\in C$且$x\in A_{\alpha_1}$。后者又推出$x\in\bigcup_{\alpha\in A}A_\alpha$,故$x\in S$,因而

$$T\subset S \qquad ②$$

由①与②,$S=T$。 $\rbrack$

定理 4

(1) $(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)'=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha'$；

(2) $(\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)'=\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha'$。 （德·摩根公式）

证明

(1) 记$P=(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)'$，$Q=\bigcup\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha'$。

设$x\in P$，则$x\notin\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，这说明$x$不是一切$A_\alpha$的公共元素，因而$x$至少不属于某一集$A_{\alpha_0}(\alpha_0\in\Lambda)$，即$x\notin A_{\alpha_0}$，从而$x\in A_{\alpha_0}'$，$x\in Q$。这样便得到

$$P\subset Q。\qquad ①$$

反之，若$x\in Q$，则必有$\alpha_1\in\Lambda$，使$x\in A_{\alpha_1}'$，故$x\notin A_{\alpha_1}$因而$x\notin\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha$，于是$x\in(\bigcap\limits_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)'=P$。由此得到

$$Q\subset P。\qquad ②$$

由①与②，$P=Q$。

(2) 仿(1)可证第二个公式，我们采用另一方法证明。在已证得的第一个公式中，将A_α换为A_α'，那末有

$$(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha')'=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}(A_\alpha')',$$

即 $$(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha')'=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha。\quad ((A_\alpha')'=A_\alpha)$$

两边同时取补，得

$$(\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha')''=(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)',$$

即 $$\bigcap_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha'=(\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha)'。$$ 】

特例 i) $\left(\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i\right)'=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i'$，$\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i\right)'=\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i'$；

(此时$A=\{1, 2, 3, \cdots, n\}$)

ii) $\left(\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i\right)' = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i'$, $\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right)' = \bigcap_{i=1}^{\infty} A_i'$.

(此时$A=\{$自然数$\}$)

显然，这两个公式是§ 2的两个公式

$$(A\cup B)' = A'\cap B', \quad (A\cap B)' = A'\cup B'$$

的推广。

由德·摩根公式与关于补集的基本公式，可以得出下面重要的反演原理：

若有关集的并、交、补运算的某一关系式成立。将式中的记号

$$\cup, \cap, \subset \text{ 和 } \supset$$

分别换成

$$\cap, \cup, \supset \text{ 和 } \subset,$$

式中出现的等号保持不变，并将式中每一个集换成它的补集(特别，全集U换为空集$\varnothing$；空集$\varnothing$换为全集U)，由此得到的关系式也一定成立。

例如，在例5中已证得

$$E[x; f(x)>c] = \bigcup_{n=1}^{\infty} E\left[x; f(x)\geqslant c+\frac{1}{n}\right]$$

因 $E[x; f(x)>c]$, $E\left[x; f(x)\geqslant c+\frac{1}{n}\right]$的补集分别是 $E[x; f(x)\leqslant c]$和$E\left[x; f(x)<c+\frac{1}{n}\right]$，由反演原理，有

$$E[x; f(x)\leqslant c] = \bigcap_{n=1}^{\infty} E\left[x; f(x)<c+\frac{1}{n}\right].$$

同样，由例 5 中已证的等式

$$E[x;\ f(x)\geqslant c]=\bigcap_{n=1}^{\infty}E\left[x;\ f(x)>c-\frac{1}{n}\right]$$

可得出 $E[x;\ f(x)<c]=\bigcup_{n=1}^{\infty}E\left[x;\ f(x)\leqslant c-\frac{1}{n}\right]$.

由此可见，借助于反演原理，使集论中有关公式的证明可省去一半。

作为练习，运用反演原理，试由已证的交对并的分配律推证并对交的分配律亦成立。

*§5 上限集与下限集

设A_1，A_2，…，A_n，…是任意一列集。

如果$\overline{A}$是由具有下列性质的一切元素x组成的集：x属于无限多个A_n，我们称$\overline{A}$为集列$\{A_n\}$的上限集，记为

$$\overline{A}=\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n.$$

如果$\underline{A}$是由具有下列性质的一切元素x组成的集：只有有限个A_n不含有x（其余的集都要包含这个元素），我们称$\underline{A}$为集列$\{A_n\}$的下限集，记为

$$\underline{A}=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n.$$

由于后者要求比前者强，故

$$\underline{A}\subset\overline{A}，即\ \underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\subset\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n.$$

特别，若集列$\{A_n\}$的上限集与下限集相等，

$$\varliminf_{n\to\infty} A_n = \varlimsup_{n\to\infty} A_n,$$

称集列$\{A_n\}$收敛，而称$A = \underline{A} = \bar{A}$为集列$\{A_n\}$的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty} A_n$。

例 1 集列$\{A_n\}$如下给出：

$$A_n = \begin{cases} [0,\ 1], & n = 2k-1, \\ \left(\dfrac{1}{2}, 2\right], & n = 2k. \end{cases}$$

显然，$\varlimsup\limits_{n\to\infty} A_n = [0,\ 2]$，$\varliminf\limits_{n\to\infty} A_n = \left(\dfrac{1}{2},\ 1\right]$。

例 2 设以A_1表示区间$[0,\ 1]$，以A_2，A_3表示区间$\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$，$\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right]$，以$A_4$，$A_5$，$A_6$表示区间$\left[0,\ \dfrac{1}{3}\right]$，$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3}\right]$，$\left(\dfrac{2}{3},\ 1\right]$，依此类推。那末

$$\varlimsup_{n\to\infty} A_n = [0,\ 1], \qquad \varliminf_{n\to\infty} A_n = \varnothing.$$

例 3 设$A_n = \left[0,\ 1 + \dfrac{1}{n}\right]$，$n = 1, 2, \cdots$。显然，区间$[0,\ 1]$上的所有点属于一切$A_n$。而对于区间$(1,\ 2)$中的任何一点$x$，必存在自然数$n_0 = n_0(x)$（因为$n_0$与$x$有关，记为$n_0(x)$），当$n > n_0$时，有

$$1 + \frac{1}{n} < x.$$

因此，$x \notin A_n (n>n_0)$。故

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = [0, 1]。$$

定理 1

(1) $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n'\right)'$；

(2) $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \left(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n'\right)'$。

证明 记$B_n = A_n'$。A_n与B_n都是全集U的子集。设x为U的一元，那末或者只有有限个A_n不包含x，因此x只属于有限多个B_n；或者x属于无限多个B_n。从而

$$U = \underline{A} \cup \overline{B}，\text{且} \underline{A} \cap \overline{B} = \varnothing。$$

故 $(\overline{B})' = \underline{A}$，即$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \left(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n'\right)'$。

类似地可证 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \left(\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n'\right)'$。 】

定理 2

(1) $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$；

(2) $\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m$。

证明

(1) 记$\overline{A} = \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n$，$A^* = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m$。

设$x \in \overline{A}$。由定义，x必属于无限多个A_n，故存在一列自然数$\{n_k\}$，$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，使得$x \in A_{n_k}$，$k=1, 2, \cdots$。

因此，对任何自然数 n，当 $n_k \geqslant n$ 时，$x \in A_{n_k} \subset \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$，所以 $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} \bigcup\limits_{m=n}^{\infty} A_m$，$\bar{A} \subset A^*$。

反之，设 $y \in A^*$。今证明在 $\{A_n\}$ 中必有无限个集同时含有 y。事实上，取 $n=1$，因 $y \in \bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m$，故必存在自然数 n_1，使 $y \in A_{n_1}$；其次，又因 $y \in \bigcup\limits_{m=n_1+1}^{\infty} A_m$，故必存在自然数 $n_2 > n_1$，使 $y \in A_{n_2}$，如此手续继续下去，得到一列自然数 $\{n_k\}$，$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，使得 $y \in A_{n_k}$，因此 $y \in \bar{A}$，$A^* \subset \bar{A}$。

总起来，就有 $\bar{A} = A^*$，(1) 式得证。

(2) 类似于 (1) 的证明，可证 (2) 亦成立。但是我们利用(1)证(2)。为此在 (1) 式中用 A_n' 代 A_n，有

$$\overline{\lim_{n \to \infty}}\ A_n' = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} A_m'.$$

根据反演原理，有

$$\left(\overline{\lim_{n \to \infty}}\ A_n'\right)' = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} (A_m')'.$$

由定理 1，有

$$\underline{\lim_{n \to \infty}}\, A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcap_{m=n}^{\infty} A_m. \qquad]$$

如果集列 $\{A_n\}$ 满足

$$A_n \subset A_{n-1}, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

称集列 $\{A_n\}$ 是**递增集列**。若

$$A_n \supset A_{n+1}, \qquad n = 1, 2, \cdots,$$

称集列$\{A_n\}$是递减集列。递增集列与递减集列统称为单调集列。

从极限定义，容易证明：

定理 3 单调集列一定收敛，而且

(1) 当$\{A_n\}$为递增集列时，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$；

(2) 当$\{A_n\}$为递减集列时，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$。

现讨论一般集列与单调集列之间的联系。设$\{A_n\}$是任意一个集列，作集

$$B_n=\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m,\quad C_n=\bigcap_{m=n}^{\infty} A_m.$$

显然 $B_n\supset B_{n+1}$，$C_n\subset C_{n+1}$，$n=1, 2, \cdots$，

因此$\{B_n\}$，$\{C_n\}$都是单调集列。据定理2，定理3，有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n=\lim_{n\to\infty} B_n,$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\ A_n=\lim_{n\to\infty} C_n.$$

这就是说，任何一列集的上、下限可以化为递减、递增集列的极限。

在实变函数论中，经常要将集按照需要作各种各样的合并与分解。§4例5是一个例子，现再举一个例子。

*__例 4__ 设 $f_n(x)$，$n=1, 2, \cdots$及 $f(x)$都是区间$[a,b]$上的函数，且 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$。(即$f(x)$是函数列$\{f_n(x)\}$的极限函数)。证明：对任意实数$c$，有

(1) $E[x;\ f(x)\leqslant c]=\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\ \underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\ E\left[x; f_n(x)\leqslant c+\dfrac{1}{k}\right]$,

(2) $E[x;\ f(x)>c]=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}\varlimsup\limits_{n\to\infty} E\left[x;\ f_n(x)>c+\dfrac{1}{k}\right]$.

证明

(1) 设$x\in E[x;\ f(x)\leqslant c]$，则$f(x)\leqslant c$。对任一自然数$k$，均有$f(x)<c+\dfrac{1}{k}$。然而$f(x)$是$\{f_n(x)\}$的极限，因此必有自然数$N$，使当$n>N$时，$f_n(x)<c+\dfrac{1}{k}$，于是$x\in E\left[x;f_n(x)\leqslant c+\dfrac{1}{k}\right]$ $(n>N)$。由下限集定义，

$$x\in \varliminf_{n\to\infty} E\left[x;\ f_n(x)\leqslant c+\frac{1}{k}\right]\quad (k=1,\ 2,\ \cdots),$$

所以 $\quad x\in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\varliminf\limits_{n\to\infty} E\left[x;\ f_n(x)\leqslant c+\dfrac{1}{k}\right]$，

从而得到 $E[x;f(x)\leqslant c]\subset \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\varliminf\limits_{n\to\infty} E\left[x;\ f_n(x)\leqslant c+\dfrac{1}{k}\right]$.

反之，设$x\in \bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\varliminf\limits_{n\to\infty} E\left[x;\ f_n(x)\leqslant c+\dfrac{1}{k}\right]$，那末对每一$k$，$x\in \varliminf\limits_{n\to\infty} E\left[x;\ f_n(x)\leqslant c+\dfrac{1}{k}\right]$，因而有一个$N_k$，使当$n>N_k$时，$x\in E\left[x;\ f_n(x)\leqslant c+\dfrac{1}{k}\right]$或写成$f_n(x)\leqslant c+\dfrac{1}{k}$.因此,对每一$k$，$f(x)\leqslant c+\dfrac{1}{k}$。令$k\to\infty$，有$f(x)\leqslant c$。所以

$$x\in E[x;\ f(x)\leqslant c],$$

从而又有$\bigcap\limits_{k=1}^{\infty}\varliminf\limits_{n\to\infty} E\left[x;\ f_n(x)\leqslant c+\dfrac{1}{k}\right]\subset E[x;\ f(x)\leqslant c]$。

综合起来，就得到（1）。

(2)　由证得的(1)，运用反演原理，得到

$$(E[x;f(x)\leqslant c])'=\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\varliminf_{n\to\infty}E\left[x;f_n(x)\leqslant c+\frac{1}{k}\right]\right)'$$

而　$$(E[x;f(x)\leqslant c])'=E[x;f(x)>c].$$

$$\left(\varliminf_{n\to\infty}E\left[x;f_n(x)\leqslant c+\frac{1}{k}\right]\right)'$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}\left(E\left[x;f_n(x)\leqslant c+\frac{1}{k}\right]\right)'\quad(\text{据定理}1)$$

$$=\varlimsup_{n\to\infty}E\left[x;f_n(x)>c+\frac{1}{k}\right]$$

所以　$$E[x;f(x)>c]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\varlimsup_{n\to\infty}E\left[x;f_n(x)>c+\frac{1}{k}\right].$$

由定理 2，又有：

$$E[x;f(x)\leqslant c]=\bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{m=n}^{\infty}E\left[x;f_m(x)\leqslant c+\frac{1}{k}\right].$$

与　$$E[x;f(x)>c]=\bigcup_{k=1}^{\infty}\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{m=n}^{\infty}E\left[x;f_m(x)>c+\frac{1}{k}\right].$$

利用函数列$f_n(x)$所定义的集（如$E[x;\ f_n(x)\leqslant c]$）来分析极限函数$f(x)$所定义的集（$E[x;\ f(x)\leqslant c]$）的方法是实变函数论所常用的（利用集论）一种分析方法。借助于这种方法，可得到实变函数论中一些重要结果和著名定理。

§6　应用举例

一、集合与事件

概率论是一门研究随机现象的数量规律的科学。随机事件

(简称事件)及其概率是概率论中两个最基本的概念. 例如在检验某些圆柱形产品中，要求它的长度和直径都符合规格时才算合格，因此我们要考虑"产品合格"、"产品不合格"、"直径合格"、"直径不合格"、"长度合格"、"长度不合格"、"直径合格但长度不合格"等等事件. 显然，这些事件相互之间是有关联的，从而它们的概率之间必然有联系. 事件之间有哪几种主要关系呢?

1. 事件 A 发生，必导致事件 B 发生，称事件 A 是事件 B 的特款，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 如"直径不合格"是"产品不合格"这一事件的特款.

如果 $A\subset B$, $B\subset A$ 同时成立，称 A 与 B 等价，记作 $A=B$. 等价的两个事件我们看作是一样的.

2. 事件 A 与 B 至少一个发生而构成的事件，称为事件 A 与 B 的和，记作 $A\cup B$. 如"产品不合格"便是"直径不合格"与"长度不合格"两事件的和. 事件之和还可推广到有限个或无限个的情形.

3. 由事件 A 与 B 同时发生而构成的事件叫做事件 A 与 B 的交，记作 $A\cap B$. 如"产品合格"便是"直径合格"与"长度合格"的交. 类似地，可定义有限个或无限个事件的交.

若事件 A 与 B 不能同时发生，称 A 与 B 是互不相容的事件，此时 $A\cap B=V$ (V 表不可能事件). 如"长度合格"与"长度不合格"是互不相容的事件.

4. 事件 A 发生而事件 B 不发生所组成的事件称为事件 A 与 B 的差，记为 $A-B$. 如"长度合格而直径不合格"便是"长度

合格”与“直径合格”这两事件的差。

5.若事件A、B满足$A\cup B=U$（必然事件），$A\cap B=V$（不可能事件），我们说事件A与B是互逆的，A叫做B的逆事件（B也是A的逆事件）.记A的逆事件为$\bar{A}$。如“产品合格”与“产品不合格”便构成一对互逆事件。

从上面定义的事件间的种种关系与运算，如$A\subset B$，$A\cup B$，$A\cap B$，$\bar{A}$等，我们发现这种关系与运算和集合的关系与运算是相同的。例如，事件A发生导致事件B发生（$A\subset B$），相当于集论中集A为集B的子集（$A\subset B$）；又如事件A、B的同时发生（$A\cap B$）相当于集论中集A与B的交（$A\cap B$）。将事件与集合之间建立这样的对应关系后，对于事件的讨论可以转化为对集合的讨论。

这里自然会提出一个问题，集合可以解释为事件（或者说事件可以用集合来描述），那末集合中的元素指的是什么呢？不妨再看一个例子。考察在单位时间内，电话交换台接到呼唤这一随机现象。每次观察的结果，可以是“接到1次呼唤”、“接到2次呼唤”、“接到10次呼唤”、“没有接到呼唤”等等。一般地，考察任一随机现象，则每次的试验或观察，总可得一结果，称此结果为基本事件，所有基本事件的全体叫做基本空间，记为U。若用u_n表示“接到n次呼唤”这一基本事件，则$U=\{u_0, u_1, u_2, \cdots, u_n, \cdots\}$。因此，若把基本空间看作集（而且相当于集论中所说的全集），其元素为基本事件，那末所说的事件，不过是基本空间的某个子集。例如，电话交换台在单位时间内，“接到呼唤不多于3次”这一事件就是由u_0，u_1，u_2，u_3这四

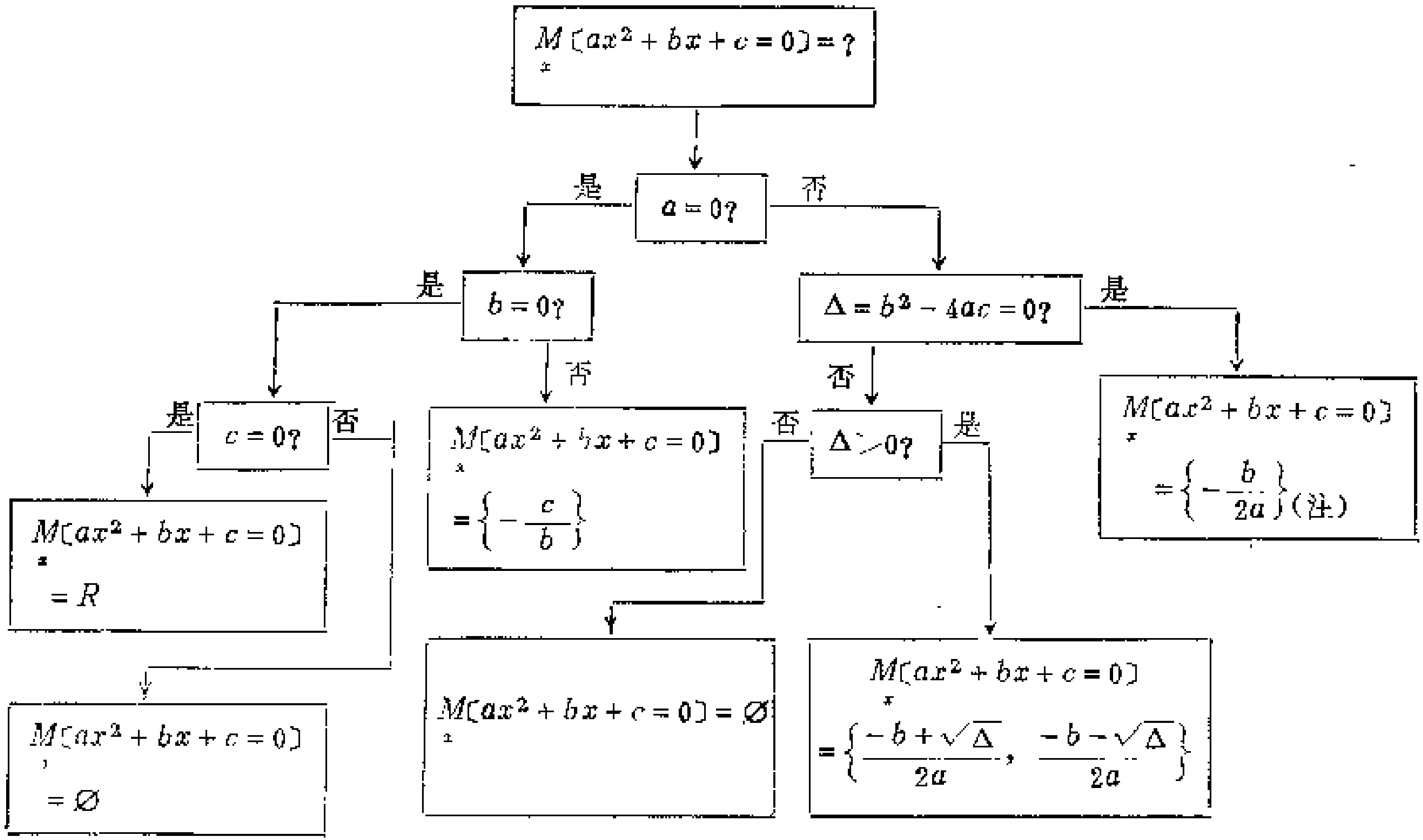
个基本事件组成，可表为$\{u_0, u_1, u_2, u_3\}$，它是全集U的一个子集。

事件的概率是用一个满足一定条件的非负集函数来描述，所以，我们研究集，掌握集之间的关系与运算，对我们理解事件，分析事件之间的联系是有好处的，它不仅帮助我们更深刻地认识事件的本质，而且有助于简化一些复杂事件的概率计算。

在下面两段讨论中，取实数集R为全集。

二、方程与不等式（组）的解集

例 1 令$M[ax^2+bx+c=0]$表示在R内满足方程$ax^2+bx+c=0(a, b, c\in R)$的一切$x$的集合（即解集）。现讨论如下：



注：当$a\neq0$且$\Delta=b^2-4ac=0$时，方程$ax^2+bx+c=0$有相等的二实根 $x=-\frac{b}{2a}$.

例 2 讨论一元分式方程的解法。

对于分式方程，通常用去分母的办法把它化为整式方程来求解。例如用 $(x+2)(2x+3)$乘分式方程

$$\frac{x}{(x+2)(2x+3)}=\frac{2x}{2x+3}-\frac{1}{x+2} \qquad (1)$$

的两边，经整理得整式方程

$$2x^2+x-3=0 \qquad (2)$$

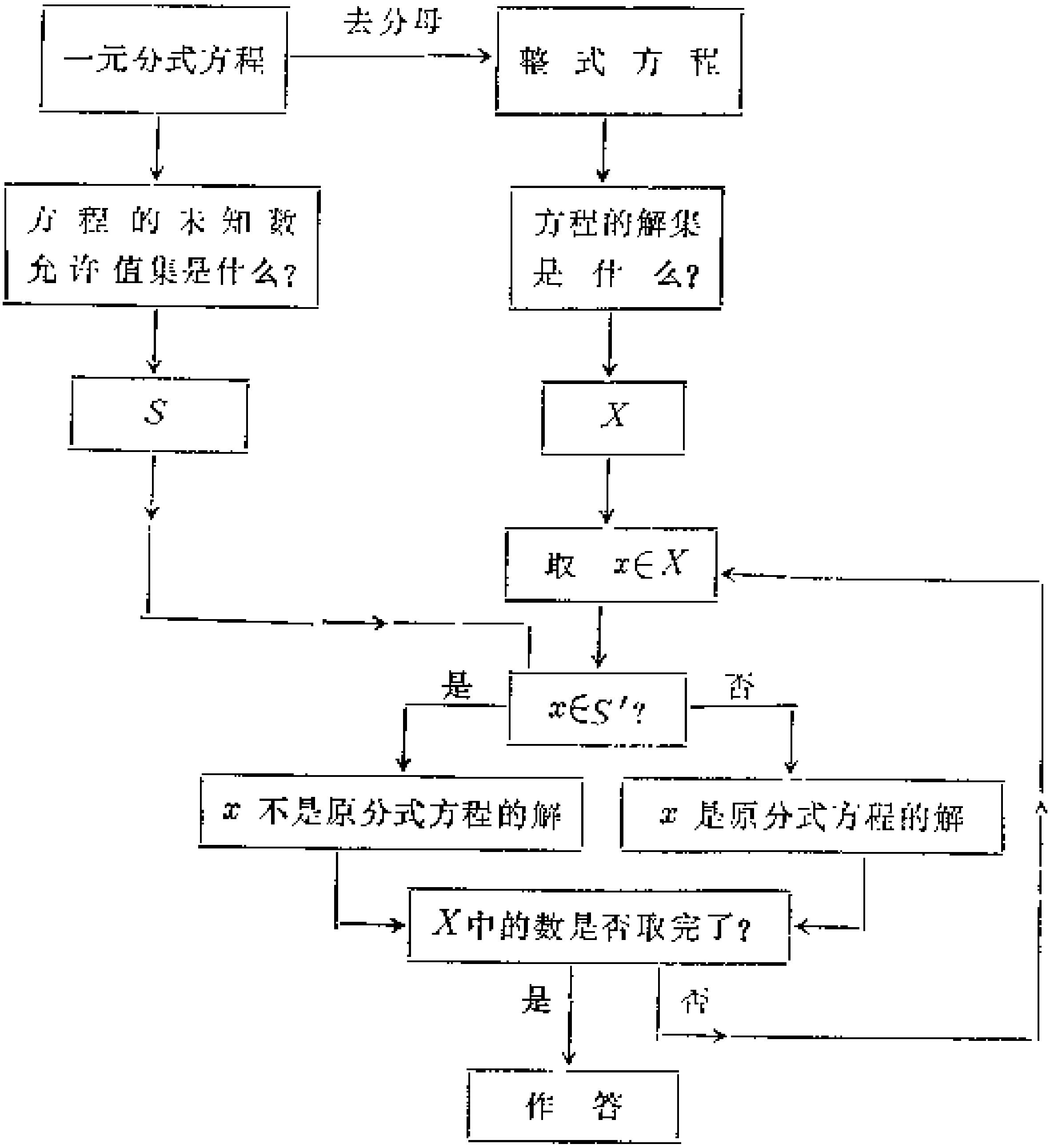
解方程（2），得 $x_1=1$，$x_2=-\frac{3}{2}$。

经验算知 $x_1=1$是方程（1）的根，而$x_2=-\frac{3}{2}$却是增根。

现分析增根产生原因。首先看方程（1）的未知数允许值集是什么?所谓一个一元方程的未知数允许值集S是使方程两边的函数都有意义的一切x值的集合。就方程（1）来说，S：除去-2，$-\frac{3}{2}$的一切实数，即 $S=(-\infty,\ -2)\cup\left(-2,-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2},\ +\infty\right)$。而一个方程的解肯定属于该方程的未知数允许值集内。

因方程（1）经变形得方程（2），未知数允许值集由S变为R（注意S是R的子集）。而方程（2）的解$x_2\notin S$，即$x_2=-\frac{3}{2}\in S'=\left\{-2,-\frac{3}{2}\right\}$，所以$x_2=-\frac{3}{2}$不是方程（1）的解。

对于一般的一元分式方程，若通过去分母化为整式方程，其解归结如下：



注：若$x\cap s'=\varnothing$，两方程同解；若$x\cap s'\neq\varnothing$，两方程不同解。

例 3 解不等式

$$\left|\frac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1.$$

记该不等式的解集为 $\underset{x}{M}\left\{\left|\frac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1\right\}$，那末

$$\underset{x}{M}\left\{\left|\frac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1\right\}=\underset{x}{M}\left\{-1\leqslant\frac{2x}{x+1}\leqslant 1\right\}$$

$$=\underset{x}{M}\left\{\frac{3x+1}{x+1}\geqslant 0\text{且}\frac{x-1}{x+1}\leqslant 0\right\}$$

$$=\underset{x}{M}\left\{\frac{3x+1}{x+1}\geqslant 0\right\}\cap\underset{x}{M}\left\{\frac{x-1}{x+1}\leqslant 0\right\}.$$

而 $$\underset{x}{M}\left\{\frac{3x+1}{x+1}\geqslant 0\right\}=\underset{x}{M}[3x+1\geqslant 0\text{且}x+1>0]$$

$$\cup\underset{x}{M}[3x+1\leqslant 0\text{且}x+1<0]$$

$$=(\underset{x}{M}[3x+1\geqslant 0]\cap\underset{x}{M}[x+1>0])\cup(\underset{x}{M}[3x+1\leqslant 0]$$

$$\cap\underset{x}{M}[x+1<0])$$

$$=\left(\left[-\frac{1}{3},\ +\infty\right)\cap(-1,\ +\infty)\right)\cup\left(\left(-\infty,\ -\frac{1}{3}\right]\right.$$

$$\left.\cap(-\infty,\ -1)\right)$$

$$=\left[-\frac{1}{3},\ +\infty\right)\cup(-\infty,-1),$$

$$\underset{x}{M}\left\{\frac{x-1}{x+1}\leqslant 0\right\}=\underset{x}{M}[x-1\leqslant 0\text{且}x+1>0]$$

$$\cup\underset{x}{M}[x-1\geqslant 0\text{且}x+1<0]$$

$$=(\underset{x}{M}[x-1\leqslant 0]\cap\underset{x}{M}[x+1>0])\cup(\underset{x}{M}[x-1\geqslant 0]$$

$$\cap\underset{x}{M}[x+1<0])$$

$$=((-\infty,\ 1]\cap(-1,\ +\infty))\cup([1,\ +\infty)$$

$$\cap(-\infty,\ -1))$$

$$=(-1,\ 1]\cup\varnothing=(-1,\ 1].$$

$\therefore \quad M\left\{\left|\frac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1\right\}=\left(\left[-\frac{1}{3},\ +\infty\right)\cup(-\infty,-1)\right)$

$$\cap(-1,1]$$

$$=\left(\left[-\frac{1}{3},\ +\infty\right)\cap(-1,\ 1]\right)\cup((-\infty,-1)$$

$$\cap(-1,\ 1])$$

$$=\left[-\frac{1}{3},\ 1\right]\cup\varnothing$$

$$=\left[-\frac{1}{3},\ 1\right].$$

原不等式$\left|\frac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1$的解为$-\frac{1}{3}\leqslant x\leqslant 1$。

例4 解二元一次不等式组

$$\begin{cases} y<x+1, & ① \\ y<-x+9, & ② \\ y>\frac{1}{3}x-1. & ③ \end{cases}$$

设它的解集为M，又设二元一次不等式①，②，③的解集分别为M_1，M_2，M_3，则

$$M=M_1\cap M_2\cap M_3.$$

我们知道，满足不等式①的所有$(x,\ y)$形成无限集$M_1=\{(x,\ y);\ y<x+1\}$，它可用XOY平面上位于直线l_1：$y=x+1$下方的平面点集（即半平面）来表示。类似地，M_2表示为直线l_2：$y=-x+9$下方的半平面，M_3表示为直线l_3：$y=\frac{1}{3}x-1$上方的半平面。因此M可用XOY平面上由三条直线

① 不包括$\triangle ABC$的三条边。

l_1、l_2、l_3所围成的$\triangle ABC$(图1.21) 内部的点集 D 来表示①.

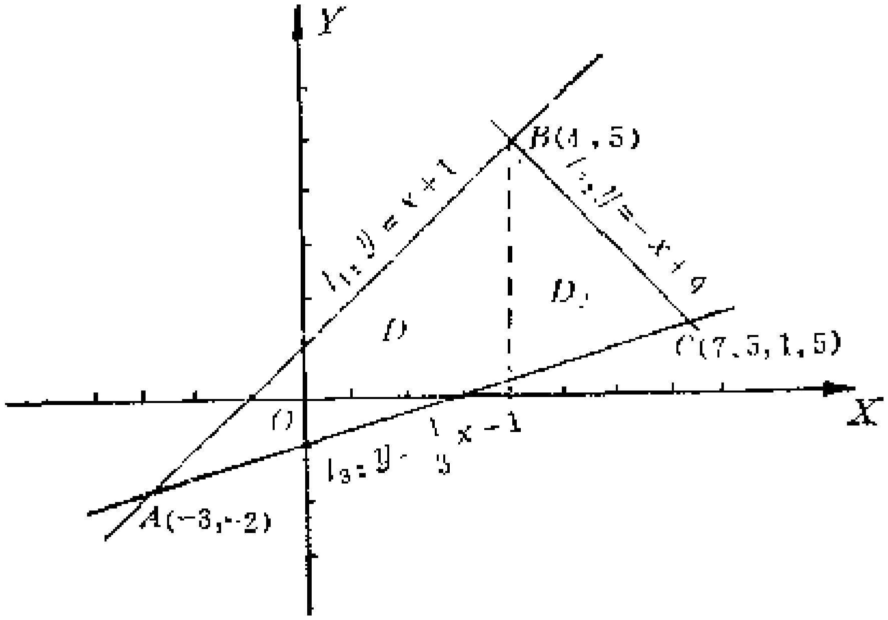


图1.21

其中$l_1\cap l_3=\{A\}$, $l_1\cap l_2=\{B\}$, $l_2\cap l_3=\{C\}$.

为写出D的相应表示式, 先求出A, B, C三点坐标, 也就是解三个二元一次方程组:

$$\begin{cases}y=x+1,\\ y=\frac{1}{3}x-1;\end{cases}\qquad \begin{cases}y=x+1,\\ y=-x+9;\end{cases}\qquad \begin{cases}y=\frac{1}{3}x-1,\\ y=-x+9;\end{cases}$$

从而得: $A(-3, -2)$, $B(4, 5)$, $C\left(7\frac{1}{2}, 1\frac{1}{2}\right)$. 再过点$B$作平行于$y$轴的直线分$D$为$D_1$与$D_2$ (读者可进一步思考为什么要这样分, 还有不有别的分法):

$$D=D_1\cup D_2$$

其中 $$D_1=\left\{(x, y);\ -3<x\leqslant 4,\ \frac{1}{3}x-1<y<x+1\right\},$$

$$D_2=\left\{(x, y);\ 4\leqslant x<7\frac{1}{2},\ \frac{1}{3}x-1<y<-x+9\right\}.$$

因此，原不等式组的解为：

当$-3<x\leqslant 4$时，$\frac{1}{3}x-1<y<x+1$；

当$4\leqslant x<7\frac{1}{2}$时，$\frac{1}{3}x-1<y<-x+9$。

本段并非对方程(组)、不等式(组)作全面细致的讨论，主要想通过几个例子说明在方程与不等式的教学中可运用集论的思想来分析某些问题，以期引起注意，达到抛砖引玉的目的。

三、函数定义域的表示

我们就一元实变单值函数（一元，指自变量的个数只是一个；实变，指自变量与因变量的取值范围限于实数）加以讨论。

设函数$f(x)$与$g(x)$的定义域为P和Q，那末函数

$\alpha f(x)+\beta g(x)$（α、β为实常数），$f(x)\cdot g(x)$ 的定义域均为$P\cap Q$。函数

$$\frac{f(x)}{g(x)}$$

的定义域为$P\cap(Q-\{x;\ g(x)=0\})$或$P\cap Q\cap\{x;\ g(x)\neq 0\}$。

函数$\sqrt[2n]{f(x)}$（n为自然数），$\log f(x)$，$\arcsin f(x)$与$\arccos f(x)$的定义域分别为

$P\cap\{x; f(x)\geqslant 0\}$，$P\cap\{x;\ f(x)>0\}$，$P\cap\{x;\ |f(x)|\leqslant 1\}$。

函数 $\operatorname{tg} f(x)$ 与 $\operatorname{ctg} f(x)$ 的定义域分别为

$$P-\bigcup_{k\in A}\left\{x;\ f(x)=k\pi+\frac{\pi}{2}\right\},\ P-\bigcup_{k\in A}\{x;\ f(x)=k\pi\},$$

指标集A为整数集。用话来说，例如 $\operatorname{tg} f(x)$ 的定义域是从函数$f(x)$的定义域中除去使得$f(x)=k\pi+\frac{\pi}{2}$（$k=0$，± 1，± 2，…）的那些数。

函数 $f(x)^{g(x)}=e^{g(x)\ln f(x)}$ 的定义域为

$$Q\cap P\cap\{x;\ f(x)>0\}.$$

当函数 $y=f(x)$ 用公式法表示时，每一个包含变量 x 的解析表达式具有所谓自然的"适用区域"：这是使解析表达式保持有意义的(也就是使它具有确定的实数值的)一切 x 值的集合。我们求函数的定义域指的是这个意思。如果函数关系是根据某一实际问题给出时，其定义域还要依据实际意义来确定。

例 5 函数 $y=\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sin \pi x}$ 的定义域。

$$P=\{x;\ x-1\geqslant 0\}\cap\{x;\ \sin\pi x\neq 0\}$$

为此要求 x 满足：

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ \sin\pi x\neq 0,\end{cases}$$

解得 $x\geqslant 1$ 且 $x\neq k(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$

因此 $P=\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}(k,\ k+1)$.

例 6 函数 $y=\lg[\cos(\lg x)]$ 的定义域。

$$\begin{aligned}Q&=\{x;\ \cos(\lg x)>0\}\\
&=\bigcup_{k\in I}\left\{x;\ 2k\pi-\frac{\pi}{2}<\lg x<2k\pi+\frac{\pi}{2}\right\}\\
&=\bigcup_{k\in I}\left\{x;\ 10^{2k\pi-\frac{\pi}{2}}<x<10^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right\}\\
&=\bigcup_{k\in I}\left(10^{2k\pi-\frac{\pi}{2}},\ 10^{2k\pi+\frac{\pi}{2}}\right).\end{aligned}$$
(I为整数集)

例 7 函数 $y=\arcsin\dfrac{2x}{x+1}+\sqrt{3x-x^3}$ 的定义域。

$$S=\left\{x;\ \left|\frac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1\right\}\cap\left\{x;\ 3x-x^3\geqslant 0\right\}$$

由例 3 知，$\left\{x;\ \left|\dfrac{2x}{x+1}\right|\leqslant 1\right\}=\left[-\dfrac{1}{3},\ 1\right]$。

又 $\qquad \{x;\ 3x-x^3\geqslant 0\}=\{x;\ x(\sqrt{3}+x)(\sqrt{3}-x)\geqslant 0\}$，

列下表，求 $\{x;\ 3x-x^3\geqslant 0\}$。

	$(-\infty,-\sqrt{3})$	$-\sqrt{3}$	$(-\sqrt{3},0)$	0	$(0,\sqrt{3})$	$\sqrt{3}$	$(\sqrt{3},+\infty)$
x	−	−	−	0	+	+	+
$\sqrt{3}+x$	−	0	+	+	+	+	+
$\sqrt{3}-x$	+	+	+	+	+	0	−
$3x-x^3$	+	0	−	0	+	0	−

由表知：$\{x;\ 3x-x^3\geqslant 0\}=(-\infty,\ -\sqrt{3}]\cup[0,\ \sqrt{3}]$。

$$\therefore\quad S=\left[-\frac{1}{3},\ 1\right]\cap((-\infty,\ -\sqrt{3}]\cup[0,\sqrt{3}])$$

$$=\left(\left[-\frac{1}{3},\ 1\right]\cap\left(-\infty,\ -\sqrt{3}\right)\right)$$

$$\cup\left(\left[-\frac{1}{3},1\right]\cap\left[0,\ \sqrt{3}\right]\right)$$

$$=\varnothing\cup[0,\ 1]$$

$$=[0,\ 1]。$$

第二章　映射和关系

§1　直积集

一、有序对

从解析几何中已经知道，可以用一对有次序的实数，例如(1，1)，(1，−1)，(−1，1) 等来表示坐标平面上的点，并且(1，−1)与(−1，1)表示平面上两个不同的点，可见在有序数对中，元素的次序是很重要的。

一般地，设有A、B二集．我们把按一定次序并列的两个元素 (a, b) 叫做有序对或有序元偶，其中 a 取自集A，b 取自集B。有序数对是有序对的特例，仿照有序数对的一些称呼，我们把 a 叫做有序对(a, b)的第一坐标，b叫做第二坐标。

两个有序对，当且仅当它们具有相同的第一坐标和相同的第二坐标时，才认为它们是相等的，即规定

$$(a, b)=(p, q) \Longleftrightarrow a=p, b=q.$$

按照这一规定，若$a\neq b$，则$(a, b)\neq(b, a)$。

有序对(a, b)与双元素集$\{a, b\}$是两个不同的概念．前者考虑元素的次序，而且允许用两个相同的元素 a 组成一有序对(a,a)；后者的 a 与 b 则假定相异，且与次序无关．例如，

$\{1, 2\}=\{2, 1\}$，（双元素集）

$(1, 2)\neq(2, 1)$，（有序对）

二、直积集

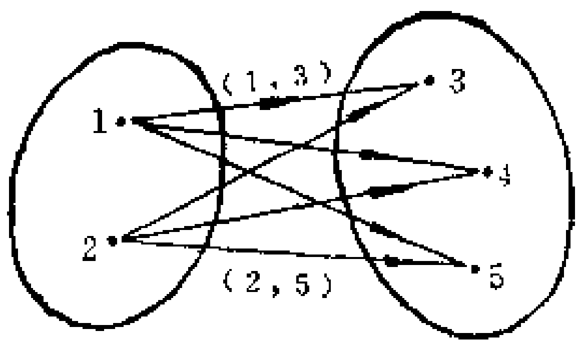
为说明直积的概念，先看下面例子。

例1 设 $A=\{1, 2\}$，$B=\{3, 4, 5\}$。作有序对，取A的元素为第一坐标，B的元素为第二坐标，得

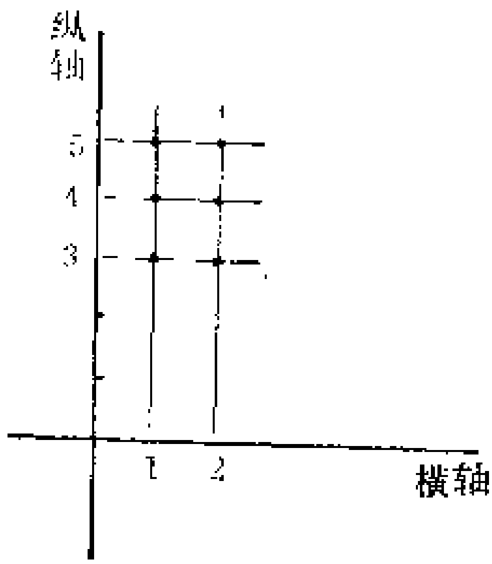
$$(1,3),\ (1,4),\ (1,5),\ (2,3),\ (2,4),\ (2,5).$$

集$\{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\}$叫做$A$、$B$的直积集，记为$A\times B$。显然，该集既不同于$A$，也不同于$B$，而是由$A$、$B$构作的新集。

A、B的直积集$A\times B$可以表示为图2.1(a)那样的矢线集；也可以象图2.1(b)那样，把A的元素放置在横轴上，B的元素放置在纵轴上，因而$A\times B$的元素用平面上的格子点表示。



(a)



(b)

图2.1

如果由上述二集构作直积集，其元素（有序对）的第一坐

标取自 B 的一切元，第二坐标取自 A 的一切元，那么所有这样的有序对是

$$(3,1),\ (3,2),\ (4,1),\ (4,2),\ (5,1),\ (5,2),$$

而以它们为元素组成的直积集记为$B\times A$，

$$B\times A=\{(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\},$$

显然 $\quad A\times B\neq B\times A$。

定义 设A、B为任意二集．由A中的元素a与B中的元素b组成的有序对(a,b)的全体构成的集叫做A与B的直积集，记为$A\times B$。

$$A\times B=\{(a,b);\ a\in A,\ b\in B\}.$$

因此，直积集$A\times B$是有序对的集合$\{(a,b)\}$，其中a取遍A的一切元，b取遍B的一切元。

特别，若A、B都是有限集，A由m个元、B由n个元组成，则$A\times B$由mn个元组成。

例 2 取$A=B=\{1,2,3\}$，此时

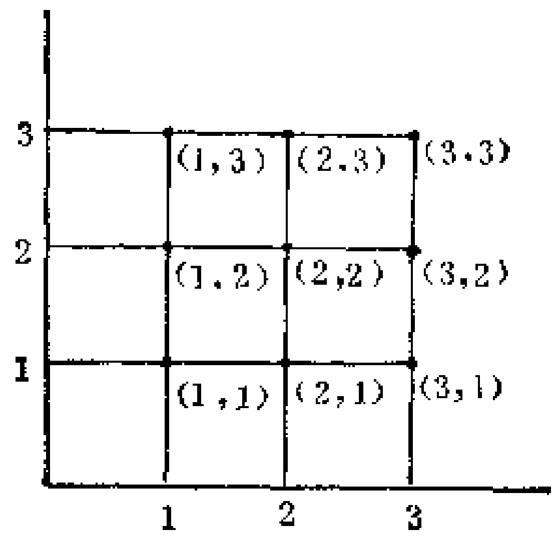


图2.2

$$A\times B=B\times A$$
$$=\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),(2,1),(2,2),(2,3),\ (3,1),(3,2),\ (3,3)\}.$$

由于$A=B$，我们把它叫做直幂集，记为

$$A^2\equiv A\times A\ (\text{或}B^2\equiv B\times B).$$

图2.2是集 $A^2=A\times A$ 的直观图，读者还可用矢线集(或叫箭头图）来表示A^2。

例 3　设$A=\{x;\ a\leqslant x\leqslant b\}$，$B=\{y;\ c\leqslant y\leqslant d\}$。

$$A\times B=\{(x,y);\ x\in A,\ y\in B\}$$
$$=\{(x,y);\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d\}$$

可表为坐标平面D_2上的矩形(图2.3)。

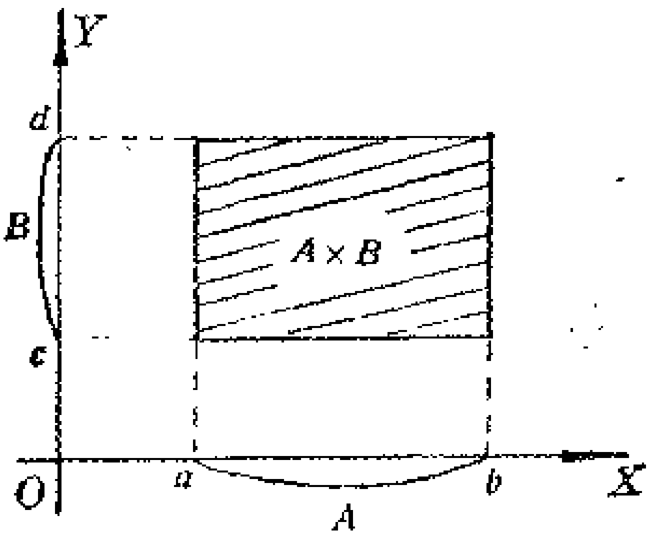


图2.3

而坐标平面D_2可看作是所有有序实数对(x,y)的集合，即

$$D_2=\{(x,\ y);\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}$$
$$=\{x;\ -\infty<x<+\infty\}\times\{y;\ -\infty<y<+\infty\},$$

因此，平面是两个坐标轴的直积集。

记$R=\{$实数$\}$，D_2又可写为：

$$\begin{aligned}D_2&=\{(x,\ y);\ x\in R,\ y\in R\}\\&=\{x;\ x\in R\}\times\{y;\ y\in R\}\\&=R\times R\\&=R^2,\end{aligned}$$

坐标平面D_2（又叫二维笛卡儿空间）也可说成是两个实数直线R（又叫一维笛卡儿空间）的直幂集。

借用例 3 中的术语，我们把全集叫做空间，属于全集的元素相应地叫做空间的点。称两个全集X与Y组成的直积集$X\times Y$叫做笛卡儿乘积空间。

若$A\subset X$，$B\subset Y$，称$A\times B$（它是$X\times Y$的一个子集）为矩形，而把构成这个矩形的集A和B叫做矩形的边。

注意，这里矩形、边也都是借用的几何术语，除非矩形的边是区间，否则它和我们通常所说的矩形的意义并不同。

定理 1 矩形为空集的必要充分条件是：它的一个边为空集。

证明 设$A\times B\neq\varnothing$。如果$(x,y)\in A\times B$，则$x\in A$，$y\in B$，因此$A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$。

另一方面，若$A\neq\varnothing$，$B\neq\varnothing$，则存在一个点$(x,\ y)$，使得$(x,y)\in A\times B$，因此$A\times B\neq\varnothing$。 ▮

定理 2 设$E_1=A_1\times B_1$，$E_2=A_2\times B_2$是两个非空矩形，则$E_1\subset E_2$的必要充分条件是：

$$A_1\subset A_2\ 和\ B_1\subset B_2.$$

证明 条件显然是充分的。条件的必要性证明如下。

设 $(x,y)\in A_1\times B_1$。假定存在A_1中的点x_1，使得$x_1\notin A_2$，则将有

$$(x_1,\ y)\in A_1\times B_1 \text{ 和 } (x_1,\ y)\notin A_2\times B_2.$$

而$E_1=A_1\times B_1\subset A_2\times B_2=E_2$，因此这样的点$x_1$不可能存在，故 $A_1\subset A_2$。

同理可证 $B_1\subset B_2$。 ▌

定理 3 设$A_1\times B_1=A_2\times B_2$是一个非空矩形，则$A_1=A_2$，$B_1=B_2$。

证明 根据定理2，有

$$A_1\subset A_2 \text{ 和 } A_2\subset A_1,$$

以及 $$B_1\subset B_2 \text{ 和 } B_2\subset B_1.$$

从而 $$A_1=A_2,\ B_1=B_2.$$ ▌

定理 4 设有二矩形$E_1=A_1\times B_1$，$E_2=A_2\times B_2$，作矩形$E_3=(A_1\cup A_2)\times(B_1\cup B_2)$，$E_4=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$，则

1) $E_1\cup E_2\subset E_3$，即

$$(A_1\times B_1)\cup(A_2\times B_2)\subset(A_1\cup A_2)\times(B_1\cup B_2);$$

2) $E_1\cap E_2=E_4$，即

$$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2).$$

证明 1) 不妨设E_1，E_2非空。任取$(x,y)\in E_1\cup E_2$，则$(x,y)\in E_1$或$(x,y)\in E_2$。若$(x,y)\in E_1$，那么$x\in A_1$，$y\in B_1$，因而$x\in A_1\cup A_2$，$y\in B_1\cup B_2$，$(x,y)\in(A_1\cup A_2)\times(B_1\cup B_2)=E_3$。若$(x,y)\in E_2$，仿上可证$(x,y)\in E_3$。

由$(x,y)\in E_1\cup E_2\Rightarrow(x,y)\in E_3$，所以 $E_1\cup E_2\subset E_3$。

2) 留作练习。 ∎

若$E=E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2=\varnothing$，称E是E_1与E_2的不相交并集。

*__定理 5__　设$E=A\times B$，$E_1=A_1\times B_1$和$E_2=A_2\times B_2$是三个非空矩形，则E成为E_1与E_2的不相交并集的必要充分条件是：或者A是A_1与A_2的不相交并集而$B=B_1=B_2$，或者B是B_1与B_2的不相交并集而$A=A_1=A_2$，二者必居其一。

证明　1) 必要性　由于$E=E_1\cup E_2$，所以$E_1\subset E$，$E_2\subset E$。据定理2，有$A_1\subset A$，$A_2\subset A$，从而

$$A_1\cup A_2\subset A.$$

同理　$B_1\cup B_2\subset B$.

然而

$$E_1\cup E_2\subset(A_1\cup A_2)\times(B_1\cup B_2),$$

因此　$A\subset A_1\cup A_2$，$B\subset B_1\cup B_2$。

于是　$A=A_1\cup A_2$，$B=B_1\cup B_2$。

另外，$(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)\subset E_1\cap E_2$。

而　$E_1\cap E_2=\varnothing$，据定理1，$A_1\cap A_2$和$B_1\cap B_2$二者中至少有一个是空集。

不妨设$A_1\cap A_2=\varnothing$。我们证明在这一情形下必有$B=B_1=B_2$。假定存在点$y\in B-B_1$。如果x是A_1中任意一点，则$(x,y)\in E$；但是我们知道$(x,y)\notin E_1$（因为$y\notin B_1$），并且由于$x\notin A_2$，又有$(x,y)\notin E_2$。这一结果与假设$E=E_1\cup E_2$相矛盾，因此$B-B_1=\varnothing$。同理有$B-B_2=\varnothing$，故$B=B_1=B_2$。

至于$B_1\cap B_2=\varnothing$，可类似地加以讨论。

2) 充分性　设A是A_1和A_2的不相交并集，并且$B=B_1$

$=B_2$。于是$A\supset A_1$，$A\supset A_2$，$B\supset B_1$，$B\supset B_2$，因此$E\supset E_1\cup E_2$。此外，如果$(x,y)\in E$，则按照$x\in A_1$或$x_2\in A_2$而分别有

$$(x,y)\in E_1 \text{ 或 } (x,y)\in E_2,$$

可见E的确是E_1和E_2的不相交并集。 ▌

三、推广

本段将前两段的一些概念加以推广。仿照有序对(a,b)，我们可定义有序三元(a,b,c)，这是依一定次序并列的三个元，a，b，c分别叫做有序三元的第一、第二、第三坐标。两个有序三元相等的定义可规定为：

当且仅当$a=p$，$b=q$，$c=r$时，$(a,b,c)=(p,q,r)$。

此外，一个有序三元的三个坐标不必互异。

设A，B，C是任意给定的三个集。A，B，C三集的直积集规定为

$$A\times B\times C=\{(a,b,c);\ a\in A,\ b\in B,\ c\in C\}.$$

这是一个有序三元的集合，其中a取遍A中的一切元，b取遍B中的一切元，c取遍C中的一切元。

例 4 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{4,5\}$，$C=\{6,7\}$。

$$\begin{aligned}A\times B\times C&=\{1,2,3\}\times\{4,5\}\times\{6,7\}\\&=\{(1,4,6),\ (2,4,6),\ (3,4,6),(1,5,6),\\&\quad (2,5,6),\ (3,5,6),\ (1,4,7),(2,4,7),\\&\quad (3,4,7),\ (1,5,7),(2,5,7),(3,5,7)\}.\end{aligned}$$

例 5 $A=\{x;\ a\leqslant x\leqslant b\}$，$B=\{y;\ c\leqslant y\leqslant d\}$，

$C=\{z;\ e\leqslant z\leqslant f\}$。

$$A\times B\times C=\{(x,y,z);\ x\in A,\ y\in B,\ z\in C\}$$

$$=\{(x,y,z);\ a\leqslant x\leqslant b,\ c\leqslant y\leqslant d,\ e\leqslant z\leqslant f\},$$

它是三维笛卡儿空间内的一个长方体。

三维笛氏空间D_3是由三个实数组成的有序数组(x,y,z)全体所成之集。记$R=\{实数\}$

$$\begin{aligned}D_3&=\{(x,y,z);\ x\in R,\ y\in R,\ z\in R\}\\&=R\times R\times R\\&\equiv R^3,\end{aligned}$$

因此，三维笛氏空间D_3可看作是三个一维笛氏空间R的直幂集。

更一般地，n个集A_1，A_2，…，A_n的直积集定义为

$$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\{(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n);\ a_1\in A_1,\ a_2\in A_2,\ \cdots,\ a_n\in A_n\}$$

简记 $$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n=\prod_{i=1}^{n}A_i,$$

它是一个有序n元的集合，其中a_i取遍A_i中的一切元$(i=1,2,\cdots,n)$。

如果$A_1=A_2=\cdots=A_n=A$，那末

$$\prod_{i=1}^{n}A_i=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n个}\equiv A^n$$

叫做直幂集，即全部因式都相同的直积集。

n维笛氏空间D_n（由n个实数组成的有序数组$(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$全体所成之集）可看作是$n$个一维笛氏空间$R$的直幂集：

$$D_n=\{(x_1,x_2,\cdots,\ x_n);\ x_1\in R,\ x_2\in R,\ \cdots,x_n\in R\}$$

$$= \underbrace{R \times R \times \cdots \times R}_{n\text{个}}$$
$$= R^n.$$

§2 映　射

本节讨论集之间的一种关系——对应关系，它是函数概念的拓广。首先回顾一下一元实变单值函数的定义。

在某一过程中，有两个变量 x 和 y 互相联系着。如果对于变量 x 的每一许可取的值，按照某一法则f，变量y有唯一确定的值与之对应，我们说变量 y 是变量 x 的函数，记为$y=f(x)$。自变量 x 所许可的取值范围叫做函数的定义域，函数值$f(x)$的全体所成之集叫做函数的值域。

通常所研究的数学分析（又称为标准分析），以实数集R作为论域，因此变量 x 和 y 都是在某一实数集（分别记为$\mathscr{X}$和$\mathscr{Y}$）内取值。而法则 f 正是建立了 x 与 y 这两个变量的数值之间的确定对应关系；或者说f给出了从数集$\mathscr{X}$到数集$\mathscr{Y}$的一个关系，按照这一关系，对于数集$\mathscr{X}$内的每一个数x，有数集$\mathscr{Y}$内的一个确定的数 y 与之对应。

然而数学的发展要求我们不只限于考察数集之间的对应关系，这就导致更一般的概念——映射概念的建立。

一、映射

定义　设A、B是两个非空集。如果存在一个从A到B的关系φ，使得A中的每一个元素 x，有B中唯一确定的元素y与之

对应，即

$$x \xrightarrow{\varphi} y,$$

我们把关系 φ 叫做从 A 到 B 中的映射。

例 1　设$A=\{a,b,c,d,e\}$，$B=\{1,2,3,4\}$。A到B的关系φ规定如下：

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 4 & 2 & 4 & 2, \end{array}$$

它是 A 到 B 中的一个映射，因为对 A 中每一个元素，有 B 中唯一确定的数与它对应（图2.4）。

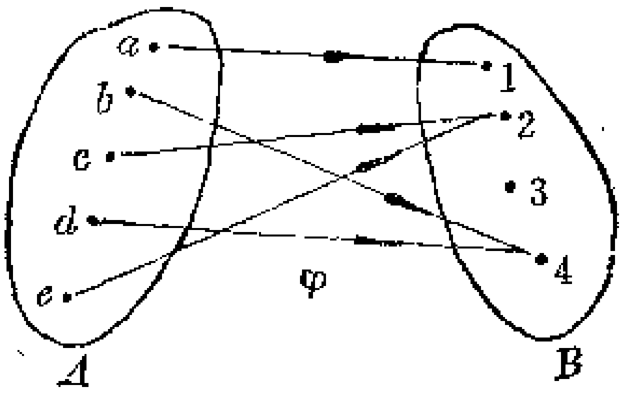
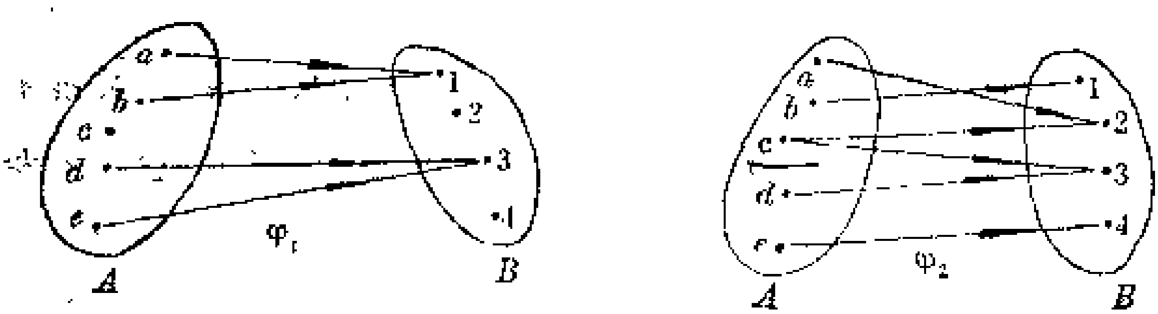


图2.4

再看看由下面二图规定的 A 到 B 的关系：



(a)　　(b)

图2.5

关系φ_1不是映射，因为A中的元素"c"不与B中的任何元素相对应。由此可见，关系成为映射的一个条件是：A 中的每一个元素必和 B 中的元素相对应。

关系φ_2也不是映射，因为A中的元素“c”对应于B中的元素“2”与“3”，因此关系是映射的另一个条件是：A的一个元素仅对应于B中的一个元素①。

按照映射的定义，A中的不同元素可以对应于B中的同一个元素，因此A到B的映射又叫做多对一映射。

如果φ是A到B中的映射，我们记作

$$\varphi: \ A \to B$$

或 $$\text{对每一} x \in A \xrightarrow{\varphi} y \in B$$

等。y叫做x(在映射φ下）的象，记为$y=\varphi(x)$，x叫做y的原象。把适合关系$y=\varphi(x)$的x全体叫做元素y的完整原象，记为$\varphi^{-1}(y)$（这是属于集A的一个子集）。集A叫做映射φ的定义域，A中所有元素x的象构成的集合叫做映射φ的值域，记为$\{\varphi(x)\}$或$\varphi(A)$。显然$\varphi(A)\subset B$。

例1中的映射φ的定义域是$A=\{a, \ b, \ c, \ d, \ e\}$，其值域是$\varphi(A)=\{1,2,4\}\subset B$。此时$A$中的元素$b$，$d$的象都是4，反过来$b$，$d$都是4的原象，4的完整原象$\varphi^{-1}(4)=\{b, \ d\}\subset A$，又如$\varphi^{-1}(2)=\{c, \ e\}$。

设φ，ψ都是A到B中的映射。如果对于A中的一切x，都有

$$\varphi(x)=\psi(x),$$

称映射φ与ψ相等，记为$\varphi=\psi$。

二、全射

考察由下图规定的映射。

①如同函数有单值函数与多值函数一样，映射也有单值与多值之分，请读者注意，本书所谈的映射是指单值映射。

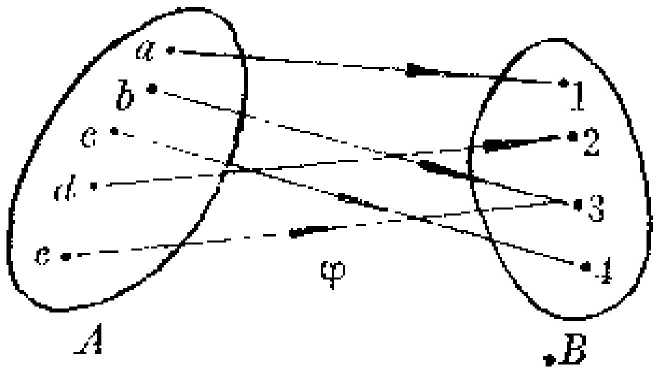


图2.6

在映射φ下，1,2,4分别是a, d, c的象，3是b, e的象. 由此可见，φ具有这样的特点：B的每一元素至少是A中某一元素的象，即对于每一$y\in B$，必有$x\in A$，使得$\varphi(x)=y$，我们把φ叫做A到B上的映射. 说得简洁些：

设φ是A到B中的映射，如果$\varphi(A)=B$，称φ是A到B上的映射，简称为全射.

例 2 设$A=\{$自然数$\}$, $B=\{$负整数$\}$.

对每个自然数，使有相同绝对值的负整数与之对应，即令

$$\varphi: n\in A\longrightarrow -n\in B,$$

那么φ是A到B上的映射.

如令 φ_1: $n\in A\longrightarrow -2n\in B$,

则φ_1是A到B中的映射，此时$\varphi_1(A)=\{$负偶数$\}$.

例 3 设$I=\{$整数$\}$, $I_1=\{$非负整数$\}$.

对于每一整数m，令m的绝对值$|m|$与它对应：

$$m\xrightarrow{\varphi}|m|,$$

这是I到I_1上的映射. 在映射φ下，I_1中的每一正整数n都是I中两个不同的整数n与$-n$的象.

例 4 设A是平面上所有平行四边形之集，B为正实数之集．每个平行四边形都有面积．令φ为平行四边形与其面积值相对应，则φ是{平行四边形}到$(0,\ +\infty)$上的映射．

显然，A到B上的映射必为A到B中的映射，其逆一般不真．然而后者又可化为前者考虑，因为我们有下列结论：映射φ是集A到集$\{\varphi(x)\}$上的映射（即φ是其定义域到其值域上的映射）．

事实上，对集A中的每一个元素x，因映射φ，有集$\{\varphi(x)\}$中的一个元素$y=\varphi(x)$与x对应；并且集$\{\varphi(x)\}$中的每一个元素y，由集$\{\varphi(x)\}$的定义，在A中至少有一个元素x，使得$y=\varphi(x)$，所以φ是集A到集$\{\varphi(x)\}$上的映射．

由此可知，A到B上的映射，其值域是B．

四、补充说明

1）映射是函数概念的推广

设φ：$A\to B$．

1° 若A、B都是实数集，映射就是通常意义下的一元实变单值函数．例如

正弦函数$y=\sin x$是一个映射f：$x\to\sin x$，定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域是$[-1,\ 1]$．

指数函数$y=a^x(a>0)$是一个映射g：$x\to a^x$，定义域为$(-\infty,\ +\infty)$，值域为$(0,\ +\infty)$．

又如符号函数

$$\operatorname{sign}x=\begin{cases}1, & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -1, & x<0.\end{cases}$$

是$(-\infty, +\infty)$到$\{-1, 0, 1\}$上的映射。

2° 若A是有序实数对(x, y)的集合，B是实数集时，映射就是通常意义下的二元函数。例如，二元函数$z=\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$是一个映射，定义域是$R\times R$中的子集$\{(x,y); x^2+y^2\neq 0\}$(即除去点$(0, 0)$外的一切平面点的集合)，而值域是$(0, +\infty)$。

若A是由n个实数组成的有序数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的集合，B仍为实数集，则映射φ: $A\to B$就是通常意义下的多元函数，二元函数是多元函数的特例（这里$n\geqslant 2$）。

3° 若A、B的元素是复数，所说的映射就是通常意义下的复变函数。例如映射h: $z\to z^2$是复变函数$h(z)=z^2$（z是复变数）。

4° 如果A是一般集，B是实数集或复数集，从一般集到数集（可为实数集或复数集）的映射又叫做集函数(或泛函)。例4提供了一个集函数的例子，又如

设A是区间$[0,1]$上的连续函数全体，$B=(-\infty, +\infty)$。令I为对$[0, 1]$上的连续函数取定积分

$$f(x)\in A\xrightarrow{I}\int_0^1 f(x)dx,\ (\text{这是数})$$

A到B上的映射I是A上的集函数

$$\int_0^1 f(x)dx=I(f(x)),\ (f(x)\in A)$$

2）运算是特殊的映射

1° 普通数的运算

为明确起见，以实数集R为例。

任取二实数a、b，通过加法运算，就有唯一的一个实数（记作$a+b$，叫做a、b的和）与之对应：

$$(a,\ b)\to a+b,$$

例如　$(2,\ 3)\to 5=2+3$，$(-1,\ 2)\to 1=(-1)+2$，

因此，加法运算可看作是$R\times R$到R上的一个映射。

同样地，减法运算：$(a,\ b)\to a-b$，

乘法运算：$(a,\ b)\to a\cdot b$

都可以看成是$R\times R$到R上的映射。

记$R_0=R-\{0\}$，取$a\in R$，$b\in R_0$，由除法运算得商$\frac{a}{b}$。因此，除法运算可看作是$R\times R_0$到R上的映射：$(a,\ b)\to\frac{a}{b}$。

由上可知，实数的四则运算都可看作是映射。此外，如指数运算也是映射。

记$R^+=\{$正实数$\}$，取$a\in R^+$，$b\in R$，由指数运算得幂a^b，因此，指数运算可看作是$R^+\times R$到R^+上的映射：$(a,b)\to a^b$。

2° 集的代数运算

设$\mathscr{U}$是全集U的一切子集所成之集．任取A、$B\in\mathscr{U}$，前面说过

$$A\cup B,\ A\cap B,\ A'\in\mathscr{U},$$

因此，并与交运算都可看作是$\mathscr{U}\times\mathscr{U}$到$\mathscr{U}$上的映射，补运算可看作是$\mathscr{U}$到$\mathscr{U}$上的映射。

3° 此外，例如微积分学中的微分运算也是映射．设A表$[a,\ b]$上的可微函数全体，B表$[a,\ b]$上的函数全体。

$$f(x)\in A\xrightarrow{\text{求导数}}f'(x)\in B,$$

因此，微分运算可看作是可微函数集到函数集中的映射。

如果从更广泛的意义上了解，任何一种运算也可以看成是一种映射。

3）变换

设 φ：$A\to B$。如果$A=B$，称映射φ为A中的变换。也就是说，一个集合到它本身的映射叫做这个集合的变换。例如平面几何中，平移、旋转、对称、相似等都是平面内的变换；又如在集的代数运算中，求补运算是$\mathscr{U}$上的一个变换（$\mathscr{U}$的意义如前所述）。

在集的所有变换中，有一个特殊的变换，就是集中的每一元素变为它自己，这个变换叫做恒等变换（或恒等映射），记为e。于是对任意集A的每一元素x，均有

$$e(x)=x.$$

由上面的讨论可知，映射概念如同集合概念一样，也是现代数学中最基本的概念之一。

§3 一一映射 复合映射

一、单一映射

考察由图2.7规定的映射φ：$A\to B$。

它有一个特点，就是在A中找不到两个元素具有相同的象。也就是说，A中的不同元素在B中的象也不相同，用式子表示，即

$$x_1,\ x_2\in A,\ x_1\neq x_2\ \Rightarrow\ \varphi(x_1)\neq\varphi(x_2).$$

因此，我们把具有这种性质的映射φ叫做单一映射，简称为内射。

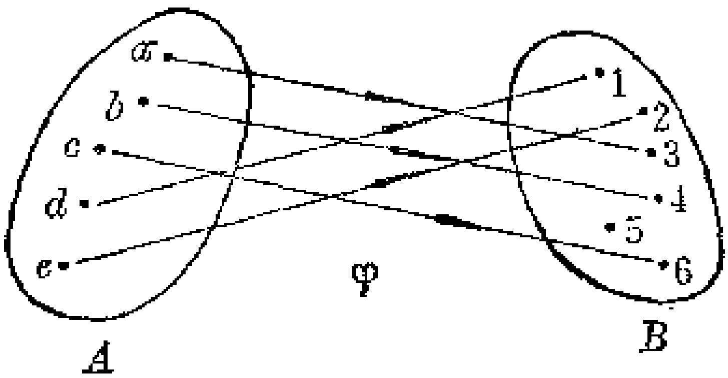


图2.7

为使用方便，有时用它的等价形式。设 $\varphi: A\to B$，又 $\varphi(x_1)=\varphi(x_2)\Rightarrow x_1=x_2$，称$\varphi$是$A$到$B$中的单一映射。

特别，若A、B为数集，A到B中的单一映射又叫做内射函数。

例 1 任何一个严格单调函数，如$y=ax+b(a\neq 0)$，$y=a^x$ $(a>0$且$a\neq 1)$都是内射函数，反过来不一定成立。内射函数可以不是严格单调函数，甚至可以不是单调函数。例如

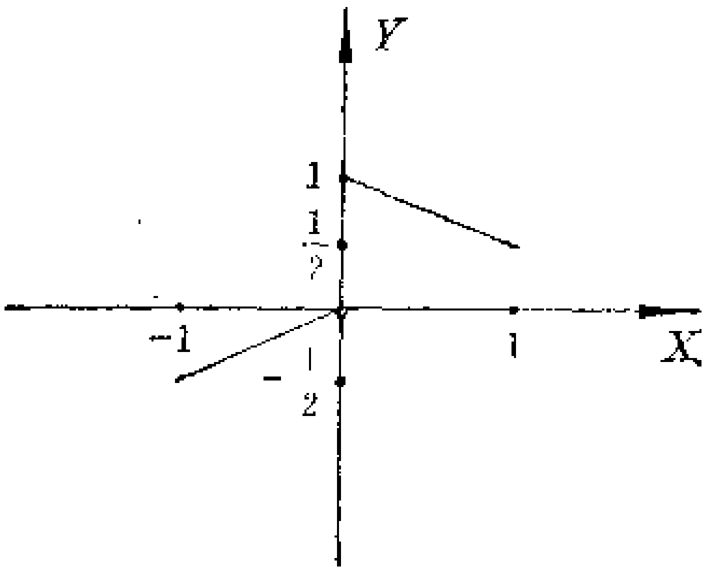


图2.8

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & -1\leqslant x<0\\ -\frac{1}{2}x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

是$[-1,\ 1]$到$\left[-\frac{1}{2},\ 1\right]$中的单一映射，因而是内射函数，但是$f(x)$不是$[-1,\ 1]$上的单调函数(图2.8)。

例 2　设A是实系数二次三项式全体所成之集：$A=\{P_2(x)\}$，$P_2(x)=a_0x^2+a_1x+a_2$，a_0，a_1，$a_2\in R=\{\text{实数}\}$，且$a_0\neq 0$。$B=R^3\equiv R\times R\times R$。

令　φ：$P_2(x)\to(a_0,\ a_1,\ a_2)$，

即　$$a_0x^2+a_1x+a_2\xrightarrow{\varphi}(a_0,\ a_1,\ a_2).$$

显然

$$a_0x^2+a_1x+a_2\neq b_0x^2+b_1x+b_2$$

$$\Rightarrow (a_0,a_1,a_2)\neq(b_0,b_1,b_2).$$

因此，φ是A到B中的单一映射。

例 3　设A是XOY平面上的一切圆所成之集，$B=R^3$。

我们知道，有了圆心与半径就可以决定圆．而圆心是平面内的一个点，以一对实数$(x,\ y)$作为其坐标．因此，我们令φ为平面上的圆和三个实数组成的有序数组$(x,\ y,\ r)$相对应，其中前两个数表圆心坐标，后一个数表圆的半径．那末φ是A到B中的单一映射。

二、一一映射

如果φ是A到B上的单一映射，称φ是A到B上的一一映射，

简称为双射。因此，φ 是双射，则φ 既是单一的，又是到上的映射。

例如，由下图规定的映射是双射。

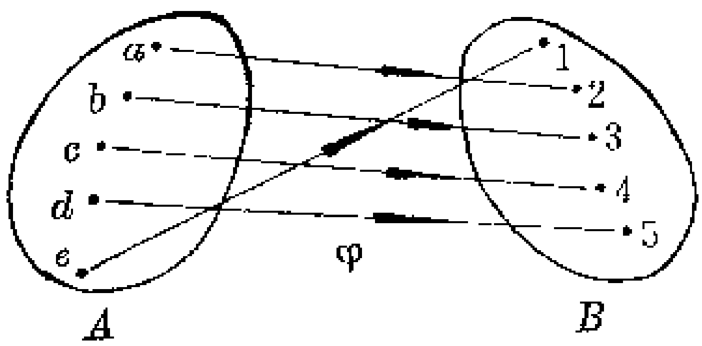


图2.9

例 4 集A由圆心在点(0，1)的半圆周

$$x^2+(y-1)^2=1 \quad (y<1)$$

上的一切点组成。由于条件$y<1$，半圆周的端点（-1，1）与（1，1）不属于集A。集B是直线 $y=0$（即横轴）上的一切点组成。

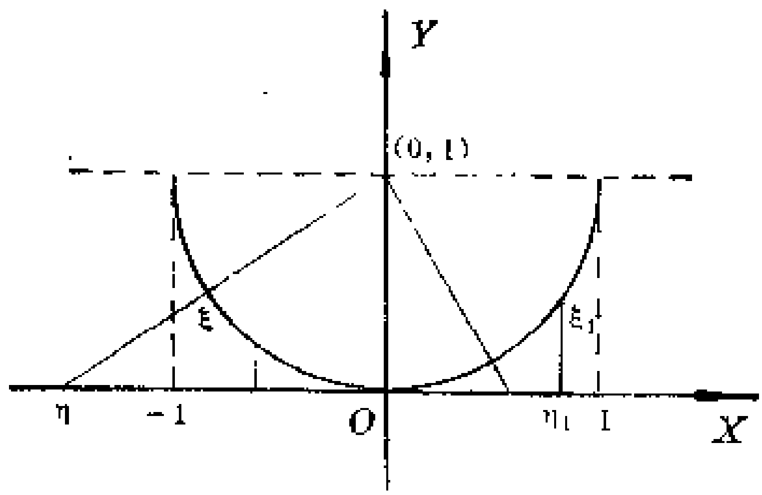


图2.10

φ规定为中心投影（投影中心在点(0, 1)）。在这中心投影下，半圆周上的点ξ与x轴上的点η对应（点η是连接圆心与点ξ的射线与x轴的交点）。显然φ是A到B上的一一映射。

如果取x轴上的区间$(-1, 1)$作为集C。规定映射ψ为将半圆周正投影（投影方向平行于y轴）到x轴上，即使圆周上的点ξ_1与它在x轴上的正投影点η_1相对应，显然ψ是A到C上的双射。

***例 5** $\mathscr{U}$表全集U的所有子集组成的集族。求补运算

$$\varphi: A \in \mathscr{U} \rightarrow A' \in \mathscr{U}$$

是$\mathscr{U}$到$\mathscr{U}$上的一一映射。前面已说过，ψ是到上的，只要证ψ是单一的。事实上，$A' = B' \Rightarrow A = B$。

注：一个集到其自身的一一映射又叫这个集的一一变换。显然，恒等变换是一一变换。

为讨论方便起见，有时用到一一映射另一种等价定义。所谓φ是A到B上的一一映射，就是对A中任何元素x，可以确定B中一个元素$y = \varphi(x)$；反过来，B中任一个元素y，必有A中唯一的元素x，使$\varphi(x) = y$。

当A、B都是数集时，A到B上的一一映射又叫做双射函数。

任何严格单调函数都可以看作是其定义域到值域上的双射函数。其实，我们还可以得到更一般的结论：

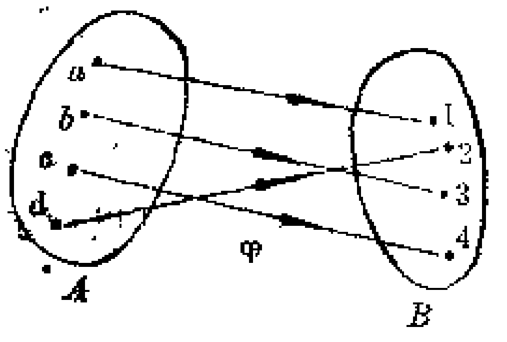
任何单一映射φ：$A \rightarrow B$一定是A到$\varphi(A)$上的一一映射。这是很明显的，因为映射φ是单一的，同时又是A到$\varphi(A)$上的。

在例1中我们已经说过

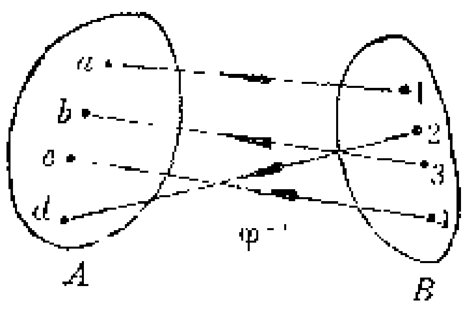
$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & -1\leqslant x<0,\\ -\frac{1}{2}x+1, & 0\leqslant x\leqslant 1\end{cases}$$

是〔-1，1〕到$\left[-\frac{1}{2},\ 1\right]$中的单一映射，但不是〔-1，1〕到$\left[-\frac{1}{2},\ 1\right]$上的一一映射，因为在$\left[-\frac{1}{2},\ 1\right]$内至少有一点，例如$\frac{1}{4}$，便找不到原象。记$A=[-1,1]$，$f(A)=\left[-\frac{1}{2},0\right)\cup\left[\frac{1}{2},1\right]$。显然$f$是$A$到$f(A)$上的一一映射。

三、逆映射



(a)



(b)

图2.11

由图2.11(a)规定的映射φ是A到B上的一一映射，将图2.11(a)中的所有矢线箭头都反过来，得到B到A的映射，记为φ^{-1}，φ^{-1}叫做映射φ的逆映射，见图2.11(b)。

上面是一个例子。一般地，设φ是A到B上的一一映射。由于对每一$y\in B$，有唯一的$x\in A$，使$\varphi(x)=y$，我们定义$\varphi^{-1}(y)$为x：

$$x=\varphi^{-1}(y),\quad (y\in B)$$

那末　　对每一 $y\in B\xrightarrow{\varphi^{-1}}x=\varphi^{-1}(y)\in A$,

φ^{-1}是B到A中的一个映射，称φ^{-1}是映射φ的逆映射。

当A、B为数集时，A到B的一一映射f的逆映射f^{-1}就是通常意义下的反函数。因此，双射函数必有反函数。

例 6　任何一个严格单调函数必有反函数。例如，指数函数$y=a^x$（$a>0$且$a\neq1$）（其定义域为全体实数R，值域为正实数集R^+），它的反函数是对数函数$y=\log_a x$（定义域为R^+，值域为R）。

又如，$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$上的正弦函数$y=\sin x$是严格递增的，其反函数是 $y=\arcsin x$（定义域为$[-1,1]$，值域是$\left[-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right]$）。

定理1　设φ是A到B上的一一映射，则φ的逆映射φ^{-1}是B到A上的一一映射。

简言之，一一映射的逆映射也是一一映射。这从直观图2.11是很容易理解的。

证明　1° 先证φ^{-1}是B到A上的映射。

因为φ是A到B上的映射，所以对A中任一元素x，必有B的元素y，使得$\varphi(x)=y$，这就是说，对A中任一元素x，必有B的元素y，使得$\varphi^{-1}(y)=x$，所以φ^{-1}是到上的。

2° 再证φ^{-1}是单一的，即证$\varphi^{-1}(y_1)=\varphi^{-1}(y_2)\Rightarrow y_1=y_2$。记　$\varphi^{-1}(y_1)=x_1$，$\varphi^{-1}(y_2)=x_2$，$x_1,x_2\in A$。由映射φ，

$$x_1\to\varphi(x_1),\quad x_2\to\varphi(x_2)。$$

而φ是单一的，所以 $x_1=x_2 \Rightarrow \varphi(x_1)=\varphi(x_2)$，即 $\varphi^{-1}(y_1)=\varphi^{-1}(y_2) \Rightarrow \varphi(x_1)=\varphi(x_2)$。而$\varphi(x_1)=y_1$，$\varphi(x_2)=y_2$，故 $\varphi^{-1}(y_1)=\varphi^{-1}(y_2) \Rightarrow y_1=y_2$。 ▌

推论 1）一一映射φ及逆映射φ^{-1}的定义域与值域恰好互换，即φ的定义域与值域分别是φ^{-1}的值域与定义域。

2）双射函数的反函数仍为双射函数。特别，严格单调函数的反函数也是严格单调的。

***例3** 设A是区间$[0,1]$上具有连续导函数而在0点值为0的函数全体，B是$[0,1]$上连续函数全体，φ表示微分运算

$$F(x)\in A \xrightarrow{\varphi} F'(x)\in B.$$

由数学分析的知识，对于任意的 $f(x)\in B$，$\int_0^x f(t)dt\in A$，且 $\left(\int_0^x f(t)dt\right)'=f(x)$，因此$\varphi$是$A$到$B$上的映射。我们还可以证明，映射$\varphi$是单一的。用反证法。

假设φ不是单一的，那么必有二函数$F_1(x),F_2(x)\in A$，$F_1(x)\neq F_2(x)$，使得$F_1'(x)=F_2'(x)$，即

$$[F_1(x)-F_2(x)]'=0, \quad (x\in[0,1])$$

从而 $$F_1(x)-F_2(x)=c. \quad (c\text{为常数})$$

因 $F_1(0)=F_2(0)=0$，在上式中令$x=0$，得$c=0$。所以

$$F_1(x)=F_2(x) \quad \text{与假设} \quad F_1(x)\neq F_2(x)\text{矛盾。}$$

总上，φ是A到B的一一映射，其逆映射

$$\varphi^{-1}: f(x)\in B \longrightarrow \int_0^x f(t)dt.$$

φ^{-1}表积分运算，它是微分运算的逆运算。

四、复合映射

设A、B、C是三个非空集，φ是A到B中的映射，ψ是B到C中的映射。

对任一$x\in A$，因映射φ，有$y=\varphi(x)\in B$与之对应；而对于$y=\varphi(x)$，又因映射ψ，有$z=\psi(y)\in C$与之对应。从而对每一$x\in A$，有$z=\psi(\varphi(x))\in C$与之对应，这样便得到一个从A到C中的映射，记为χ。称映射χ是映射φ和ψ的复合，或说映射χ是映射φ与ψ的积，记为

$$\chi=\psi\cdot\varphi \quad 或\chi=\psi\varphi。$$

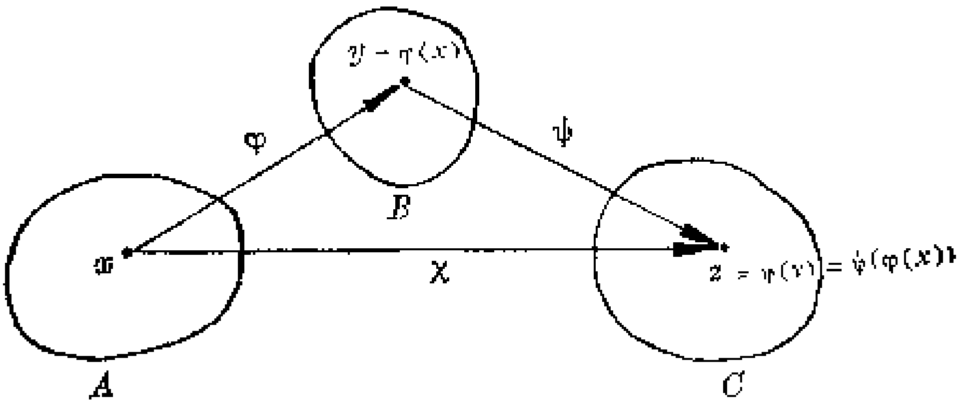


图2.12

当A、B、C都是数集时，这就是通常意义下的复合函数概念。例如，由函数$y=\sqrt{x}$与$z=\sin y$复合得函数$z=\sin\sqrt{x}$。反过来，复合函数又可分解为比较简单的函数，如$y=\ln\cos x$可分解为二函数$y=\ln z$，$z=\cos x$。由几个比较简单的函数经函数复合的步骤（有限次）得到比较复杂的函数；反过来，将一个比较复杂的函数分解为几个比较简单的函数（当然这种分解并非唯一），这在微积分中是经常用到的。

定理 2 如果φ是A到B上的一一映射，ψ是B到C上的一一

映射，则$\psi\varphi$是A到C上的一一映射。

简言之，两个双射之积仍为双射。

证明　1° 证明映射$\psi\varphi$是A到C上的。

因为ψ是到上的，对任一$z\in C$，必有$y\in B$，使得$\psi(y)=z$。既然$y\in B$，而φ也是到上的，所以必有$x\in A$，使得$\varphi(x)=y$。从而对每一$z\in C$，有$x\in A$，使得$\psi\varphi(x)=\psi(\varphi(x))=\psi(y)=z$，故$\psi\varphi$是到上的。

2° 证明$\psi\varphi$是单一的。

设　$x_1,\ x_2\in A$ 且 $x_1\neq x_2 \xRightarrow{\varphi\text{是单一的}} \varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$ $(\varphi(x_1),\ \varphi(x_2)\in B) \xRightarrow{\psi\text{是单一的}} \psi(\varphi(x_1))\neq\psi(\varphi(x_2))$，即$\psi\varphi(x_1)\neq\psi\varphi(x_2)$。可见$\psi\varphi$确是单一映射。

由1°与2°，$\psi\varphi$是A到C上的一一映射。　　　　▌

例 8　设A、B、C分别为平面内的直线l_1，l_2，l_3上的一切点所成之集。φ为直线l_1到直线l_2的平行投影（投影方向异于直

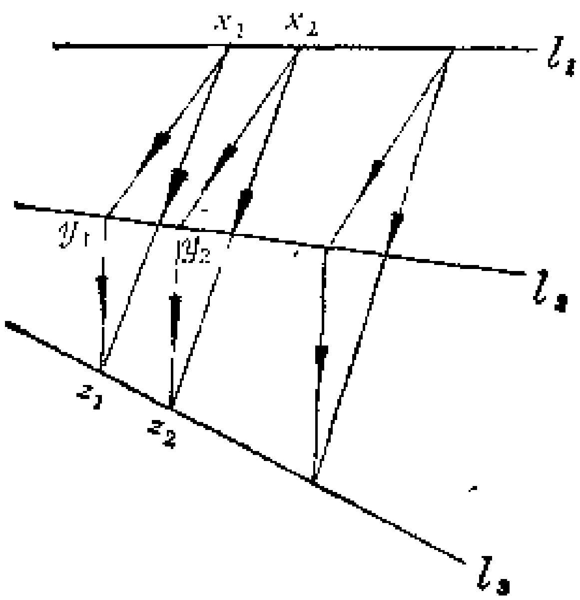


图2.13

线l_1与l_2的方向)，ψ为直线l_2向直线l_3的平行投影(投 影 方向异于l_2与l_3的方向)。显然φ,ψ都是一一映射。将两次投影φ与ψ复合便得到l_1到l_3的一个映射，记为χ：$\chi=\psi\cdot\varphi$。由定理 2，χ也是一一映射。

定理 3　设φ是A到B上的一一映射，则

$$\varphi^{-1}\cdot\varphi=\varphi\cdot\varphi^{-1}=e.$$

精确地说，$\varphi^{-1}\cdot\varphi=e_A$，　$\varphi\cdot\varphi^{-1}=e_B$(其中$e_A$表$A$的恒等映射，$e_B$表$B$的恒等映射)。

证明留给读者。下面证明它的逆命题也是成立的。

定理 4　设φ是A到B中的映射，ψ是B到A中的映射，如果

$$\psi\varphi=e_A,\quad \varphi\psi=e_B,$$

则：1) φ是A到B上的一一映射，ψ是B到A上的一一映射；

2) $\psi=\varphi^{-1}$。

证明　1) 我们先证φ是A到B上的双射。

1° φ是单一的，因为

$$\varphi(x_1)=\varphi(x_2)\Rightarrow x_1=e_A(x_1)\xlongequal{\psi\varphi=e_A}\psi\varphi(x_1)$$
$$=\psi(\varphi(x_1))=\psi(\varphi(x_2))=\psi\varphi(x_2)=e_A(x_2)=x_2.$$

2° φ又是到上的。因为

$$\varphi(A)\subset B,\ \psi(B)\subset A,\ \text{又}$$
$$B=e_B(B)=\varphi\cdot\psi(B)=\varphi(\psi(B))\subset\varphi(A),$$

故　　$\varphi(A)=B$。

从而φ是A到B上的一一映射。同理可证ψ是B到A上的一一映射。

2) 任取$y\in B$。因φ是A到B上的一一映射，故存在逆 映 射

φ^{-1}，从而

$$\varphi^{-1}(y)=e_A\cdot(\varphi^{-1}(y))=\psi\varphi(\varphi^{-1}(y))=\psi(\varphi(\varphi^{-1}(y)))$$
$$=\psi(\varphi\varphi^{-1}(y))=\psi(e_B(y))=\psi(y).$$

既然对任意$y\in B$，有$\varphi^{-1}(y)=\psi(y)$，故

$$\psi=\varphi^{-1}.$$ ▌

例 9 讨论平面上绕一点O的所有旋转组成的集。

在平面上建立直角坐标系，取O点为坐标原点。绕O点的旋转(旋转角为θ)可看作是平面内的变换φ：$(x,y)\to(x',y')$，其中

$$x'=x\cos\theta-y\sin\theta,$$
$$y'=x\sin\theta+y\cos\theta.$$

显然，φ是平面内的一一变换，φ的逆变换是以$-\theta$为旋转角的绕O点的旋转。设$\theta=0$，得恒等变换。绕O点的两个旋转变换（相应的旋转角为θ_1和θ_2）之积仍然是一个旋转变换(其旋转角为$\theta_1+\theta_2$)，又旋转变换与其逆变换之积是恒等变换。

除了绕定点的旋转是平面内的一一变换外，平移、对称以及它们的复合等都是平面内的一一变换，那末对于平面内的所有一一变换，是否也具有例 9 中所说的性质呢？甚至我们还可以把问题提得更一般化些，对于一般集内的一一变换，是否仍具有例 9 中所述的性质呢？

定理 5 设G是集A的所有一一变换组成的集（显然，$G\neq\varnothing$，因恒等变换$e\in G$），则

1）对于任意的$f,g\in G$，有$fg\in G$。

2）对于任意的$f,g,h\in G$，有

$$(fg)h=f(gh). \qquad \text{（结合律）}$$

3） 对任意的$f\in G$，总有

$$ef=f.$$

4） 对任意的$f\in G$，有

$$f^{-1}f=e.$$

证明 1） 因集A的一一变换是集A到其自身上的一一映射，由定理2，对任意$f,g\in G$，有

$$fg\in G.$$

2） 对每一$x\in A$，有

$$(fg)h(x)=(fg)(h(x))=f(g(h(x)))$$

和 $$f(gh)(x)=f(gh(x))=f(g(h(x)))$$

所以 $$(fg)h=f(gh).$$

3） 与4） 显然。 ∎

正因为集G具有上述性质，我们说集G对于变换的乘积形成一个群，集G叫做集A的(一一)变换群。

变换群在几何上是非常重要的，因为变换群的不同，就有不同的几何学。例如

运动变换群——欧氏几何学；

仿射变换群——仿射几何学；

射影变换群——射影几何学；

拓扑变换群——拓扑几何学。

这些因已超出本书范围，不作讨论。

§4 关　　系

我们常使用"关系"一词，其中包括有普通数的相等关系、大小关系，图形的全等关系、相似关系，集合之间的包含关系、对应关系等等。本节概括地对"关系"这一概念予以定义。

一、关系

先看一个简单例子。

例 1　设$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{1,2,3\}$。

$$S=\{(x,y);\ x\in A,\ y\in B,\ x\leqslant y\}$$
$$=\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,2),\ (2,3),(3,3)\}.$$

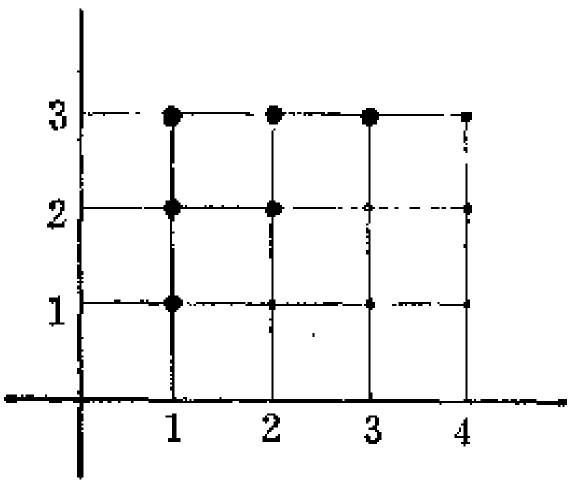


图2.14

S是有序对的集合，它是A、B二集的直积集$A\times B$的一个子集。若A中的元素x与B中的元素y具有"$\leqslant$"关系，则$(x,y)\in S$；反过来，若$(x,y)\in S$，则$x\leqslant y$。这就是说，S可看作是介于集A与集B之间的一种联系，A中的元素x和B中的元素y是否具有

“$\leqslant$”关系，完全等价于(x,y)是否属于集S。这就启发我们，如何来描述“关系”这一概念。

定义 给定两个集A与B。A到B的一个(二元)关系，就是$A\times B$的某一个子集，记为S：

$$S\subset A\times B.$$

当$(x,y)\in S$时，称x与y具有关系S，记为xSy；

当$(x,y)\notin S$时，称x与y不具有关系S，记为$x\not{S}y$。

若$A=B$，此时$S\subset A\times A$，我们把A到A的关系S简称为A中的关系。

例 2 设$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，A中的关系S规定为：

$$S=\{(x,y);\ xy=6\}.$$

用列举法写出集S，

$$S=\{(1,6),\ (2,3),\ (3,2),\ (6,1)\}$$

x与y的关系就是我们熟知的反比例关系。

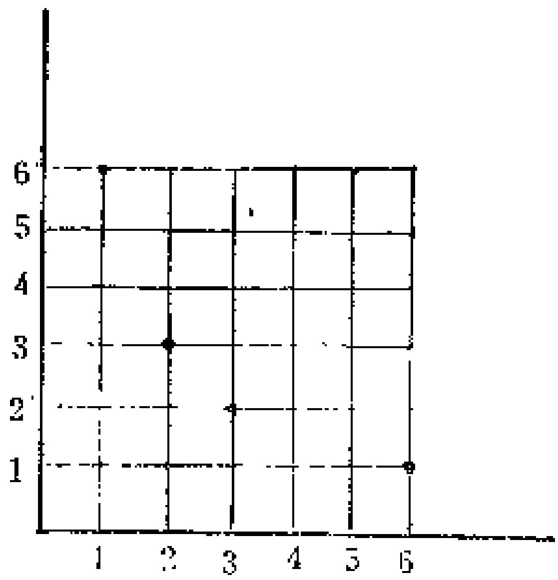


图2.15

例 3　设$R=\{实数\}$中的关系

$$S=\{(x,y);\ 3x-2y=4\},$$

集S是XOY平面上的直线。因此，我们说x,y之间的关系是直线关系(或线性关系)。

注　两个集之间的关系是这两个集的直积集的一个子集，并且它本身给出了一种规定，使得属于该子集的每一有序对的坐标之间，按此规定相互联系着。

二、关系的定义域和值域

设有A到B的关系S。

关系S的定义域是A的一个子集，由A中具有下列性质的元素x组成：至少有一个$y\in B$，使得$(x,y)\in S$。关系S的定义域记以$domS$，

$$domS=\{x;\ x\in A且对某一y\in B,\ 有(x,y)\in S\}.$$

关系S的值域(记以$ranS$)是B的一个子集，由B中具有下列性质的元素y组成：至少有一个$x\in A$，使得$(x,y)\in S$，即

$$ranS=\{y;\ y\in B,\ (x,y)\in S对某一x\in A\}.$$

例 1 中的$domS=\{1,2,3\}$，$ranS=\{1,2,3\}$。

例 2 中的$domS=\{1,2,3,6\}$，$ranS=\{1,2,3,6\}$。

注　讨论实数集R中的关系，有时其定义域与值域未明显指出。此时，我们取R的最大可能的子集分别作为关系的定义域与值域。

例 4　求下列关系的最大可能的定义域与值域。

1) $S_1=\{(x,y);\ x^2+y^2=25\}$.

此时　$domS_1=[-5,\ 5]$，$ranS_1=[-5,\ 5]$。

2） $S_2=\{(x,y);\ x^2-y^2=1\}$

此时　　$domS_2=(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$,

$ranS_2=(-\infty,+\infty)$.

三、逆关系

设有A、B二集，S是A到B的一个关系．规定B到A的关系

$$S^{-1}=\{(y,x);\ (x,y)\in S\}.$$

S^{-1}叫做S的逆关系．

不难证明：$domS^{-1}=ranS$，$ranS^{-1}=domS$.

事实上，

$$\begin{aligned}domS^{-1}&=\{y;\ y\in B\text{且有}x\in A，\text{使得}(y,x)\in S^{-1}\}\\&=\{y;\ y\in B\text{且有}x\in A，\text{使得}(x,y)\in S\}\\&=ranS.\end{aligned}$$

而另一个式子可类似地证明．

例 5　设$A=\{-3,-2,-1,0,1,2,3\}$，$R=\{$实数$\}$,A到R的关系

$$\begin{aligned}S&=\{(x,y);\ y=x^2\}\\&=\{(-3,9),\ (-2,4),\ (-1,1),\ (0,0),\\&\qquad(1,1),\ (2,4),\ (3,9)\}\end{aligned}$$

这里　　$domS=A$，$ranS=\{0,1,4,9\}$.

交换S中每一有序对的第一坐标与第二坐标，得到S^{-1}中的所有有序对．

$$\begin{aligned}S^{-1}&=\{(9,-3),\ (4,-2),\ (1,-1),\ (0,0),\\&\qquad(1,1),\ (4,2),(9,3)\}\\&=\{(x,y);\ x=y^2\}.\end{aligned}$$

这里 $domS^{-1}=\{0,1,4,9\}$，$ranS^{-1}=A$。

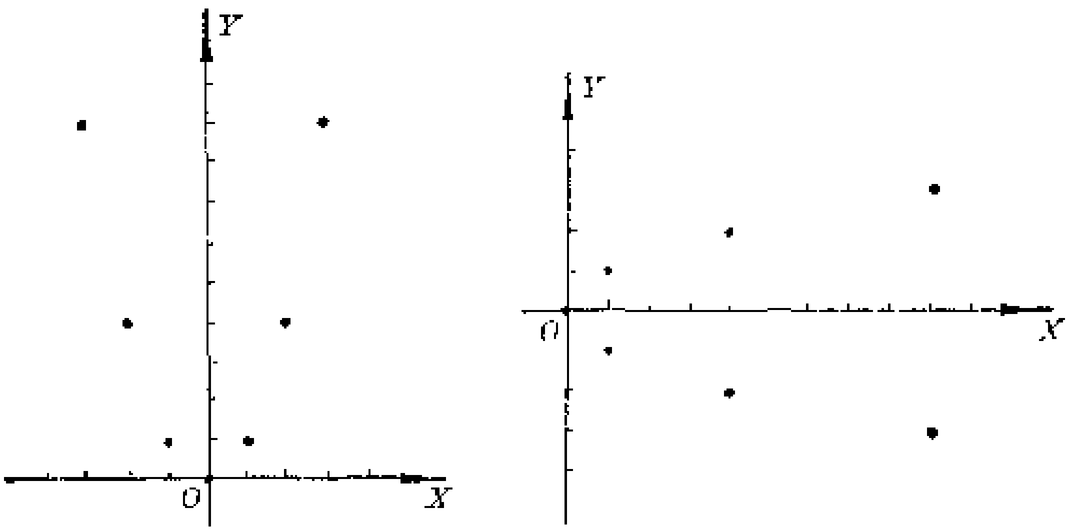


图2.16

例 6 R中的关系$S=\{(x,y);\ x=a,y\geqslant 0\}$

$\cup\{(x,y);\ x^2+y^2=a^2,\ x\geqslant 0,\ y\leqslant 0\}$

$\cup\{(x,y);\ x\leqslant 0,\ y=-a\}$

S的图形可分为三部分：

1) 过点$(a,0)$平行于y轴正向的射线；

2) 连接点$(a,0)$与$(0,-a)$的圆弧段$\left(\text{所对圆心角为}\dfrac{\pi}{2}\right)$；

3) 过点$(0,-a)$平行于x轴负向的射线。

S^{-1}的图形也可分为三部分：

1) 过点$(0,a)$平行于x轴正向的射线；

2) 连接点$(0,a)$与$(-a,0)$的圆弧段；

3) 过点$(-a,\ 0)$平行于y轴负向的射线。

$$S^{-1}=\{(x,y);\ x\geqslant 0,\ y=a\}\cup\{(x,y);\ x^2+y^2=a^2,\ x\leqslant 0,\ y\geqslant 0\}\cup\{(x,y);\ x=-a,\ y\leqslant 0\}.$$

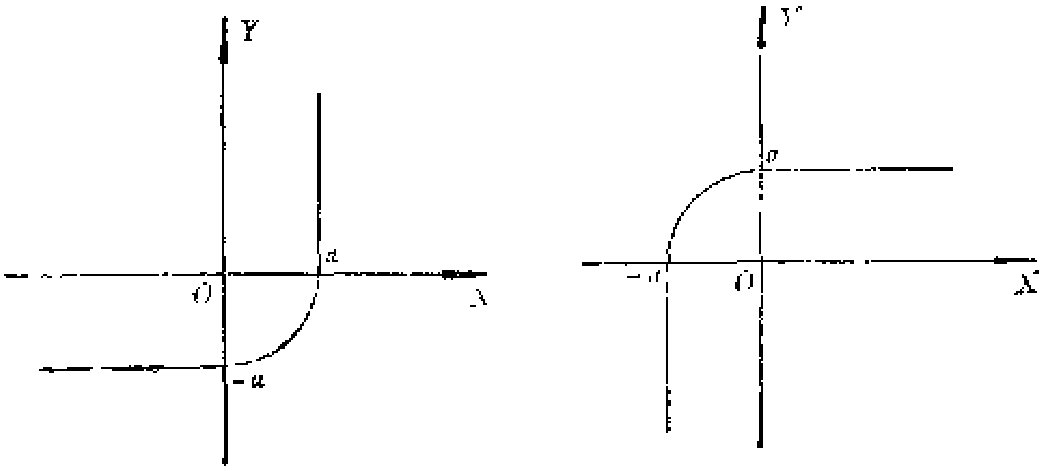


图2.17

四、映射是特殊的关系

本章§2曾指出A到B中的映射是A到B的这样一种关系，使得对于每一$x\in A$，有唯一的$y\in B$与之对应。在该说法中，我们使用了“对应”这个词，然而什么是“对应”呢？并未给予精确的数学含义。其实，“对应”、“映射”是同义语，指的是一回事，因此，有必要对映射这一数学上的重要概念叙述得更严谨些。

定义 A到B的关系φ，如果满足下列条件：

(1) $dom\varphi = A$；

(2) $(x,y)\in\varphi$和$(x,z)\in\varphi \Rightarrow y=z$，

称φ为A到B中的映射。

可见映射是特殊的关系，因而函数、运算、变换等都是关系，即通常所说的对应关系；反过来，任意一个关系不一定是映射。例如

$$P=\{(x,y);\ 3x+2y>6\},$$

$$Q=\{(x,y);\ 3x+2y<6\}$$

是关系，但都不是映射。Q可表为XOY平面上位于直线$3x+2y=6$下方的半平面，P则表为位于直线$3x+2y=6$上方的半平面。

下面两节研究两种重要的关系，即“有序关系”与“等价关系”。

§5 有序集

顺序概念是数学中常用的概念之一。例如有理数集、实数集的一个重要性质是“有序性”；又如我们把取值成实数列的变量叫做整序变量。为在一般集上引入顺序关系，我们先看有理数集Q内的关系“$\leqslant$”有什么特征。

任取a、b、$c\in Q$，显然

1）对一切$a\in Q$，有$a\leqslant a$；

2）若$a\leqslant b$，$b\leqslant a$，则$a=b$；

3）若$a\leqslant b$，$b\leqslant c$，则$a\leqslant c$。

并且4）$a\leqslant b$与$b\leqslant a$中必有一个成立。

对于一般集，我们有下列

定义 设A是一集，在其中规定了某些元素之间的关系，记为$\prec$。对于任意的a、b、$c\in A$，如果关系$\prec$具有下列性质：

1）自反性：$a\in A\ \Rightarrow\ a\prec a$，

2）反称性：$a\prec b$，$b\prec a\ \Rightarrow\ a=b$，

3）传递性：$a\prec b$，$b\prec c\ \Rightarrow\ a\prec c$，

称$\prec$为A中的一个半序关系（或称关系$\prec$是A中的一个顺序），称

集A按顺序$\prec$成一个半序集(也叫有序集)。

$a\prec b$读作a在b前或b在a后，$a\prec b$也可写作$b\succ a$。

设A是一个半序集，如果对于任意的a, $b\in A$, $a\prec b$与$b\prec a$中必有一个成立，称$\prec$是A中的一个全序关系，A叫做全序集。换句话说，如果在半序集A里，每两个元素都是可比较的($a\prec b$或$b\prec a$)，则A叫做全序集。

例 1 设集A由a,b,c三个元素组成。

$$A_1=\{a,b,c\},\ A_2=\{a,c,b\},$$

其中元素的顺序依{ }中所写的，即规定A_1中元素的顺序为$a\prec b\prec c$，A_2中元素顺序为$a\prec c\prec b$，则A_1，A_2都是全序集。尽管这两个集由相同的元素组成，但顺序关系不同，A_1与A_2是两个不同的全序集。

由a, b, c三个元素可以作出六个不同的全序集，除了上面两个外，还有

$$\{b,a,c\},\ \{b,c,a\},\ \{c,a,b\},\ \{c,b,a\},$$

其中元素的顺序同前面所约定的。

不难想象，由n个元素组成的有限集可以作出$n!$个不同的全序集。

设$n\leqslant m$，由m个元素取n个的排列与由m个元素取n个的组合是两个不同的概念。前者考虑元素间的顺序，指的是有序集，后者不考虑元素的顺序，单纯指集。因此，我们可把m个元素取n个的排列定义为m个元素集中的n个元素按一定顺序组成的全序子集。

例 2 自然数集N，整数集I，实数集R按普通代数中的“$\leqslant$”

关系都是全序集。例如在N中，规定$a\leqslant b$时，$a\prec b$，称此顺序为自然顺序。若在N中另作规定：当$a\geqslant b$时，$a\prec b$，这也是一个顺序，称此顺序为逆自然顺序。显然，$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$与$\{\cdots,n,\cdots,3,2,1\}$是两个不同的全序集。

例 3　$\mathscr{U}$设是全集U的所有子集组成的集。如果子集间用包含关系"$\subset$"作为$\mathscr{U}$中某些元素间的顺序关系，即当$A,B\in\mathscr{U}$且$A\subset B$时，规定$A\prec B$(显然，关系"$\subset$"具有自反性、反称性、传递性)，此时$\mathscr{U}$是一个半序集。如果U含有不止一个元素，则$\mathscr{U}$不是全序集。

例 4　设D是所有实数对(x, y)全体。两实数对(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，若

$$x_1<x_2\ \text{或}\ x_1=x_2,\ y_1\leqslant y_2$$

则规定　$(x_1, y_1)\prec(x_2, y_2)$。

显然，这是一个全序关系，称顺序$\prec$为字典顺序（因为它和查字典类似）。

我们知道，复数可定义为实数对，因此复数集是一个全序集。但是，可以证明：不论怎样规定顺序，复数集不能成为有序体。(可参看一般的高等代数教程)。

例 5　设T为某一自然数集，A为T上的实函数全体。当$a=a(t)$，$b=b(t)\in A$，而且对每个$t\in T$，有$a(t)\leqslant b(t)$时，规定$a\prec b$，显然这种关系也是一种半序关系。当T含有不止一个元素时，A是半序集而不是全序集。

定义　设A是一个半序集，$B\subset A$。若有$a\in A$，使得对每一个$b\in B$，有$b\prec a$，即元素a在B中所有元素之后，称a为子

集 B 的一个上界。

定义 设A是一个半序集，$a\in A$。若在A中不存在别的元素$b(b\neq a)$在a后，则称a是A的一个极大元。换言之，极大元a是具有下面性质的元素：若$b\in A$且$a\prec b$，则$b=a$。

例 6 设$N=\{$自然数$\}$，$N_1=\{1,2,3,\cdots,100\}$。以自然顺序为顺序，则N中大于或等于100的每个自然数都是N_1的上界，100是N_1的极大元。

例 7 $A=(0,1)$，以自然顺序为顺序。取$B=(0,\frac{1}{2})$，则$[\frac{1}{2},1)$中的每一个数都是B的上界，但B无极大元。

注意的是，半序集A的极大元(如果存在的话)不一定是唯一的。例如两个元素a，b所组成的集$A=\{a,b\}$，其中规定$a\prec a$，$b\prec b$，则A是半序集，a和b都是A的极大元。但对于全序集，如果存在极大元，则极大元只有一个。

类似地，也有下界和极小元的概念。

佐恩(Zorn)引理 设A是一个半序集，若A的每个全序子集都有上界，则A必有极大元。

这个引理是证明别的一些定理的基础，作为关于半序集的一个公理来接受的。由于它不象别的公理如欧几里得几何学上的一些公理那样直观，因此有必要作一些简略的说明。

若A是一个半序集，任意取A中的一个元素a_1，如果它不是极大元，那末必有元素$a_2\in A$，$a_2\neq a_1$，使$a_1\prec a_2$。如果a_2不是极大元，又必有$a_3\in A$，$a_3\neq a_2$，a_1，使$a_1\prec a_2\prec a_3$。如此继续下去，得到一个全序子集$\{a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots\}$，依假设，

它必有上界a_ω。若a_ω不是极大元，必有$a_{\omega+1}$，使$a_\omega \prec a_{\omega+1}$。再继续下去，又得到全序子集

$$\{a_1, \cdots, a_\nu, \cdots, a_\omega, a_{\omega+1}, \cdots, a_{\omega+r}, \cdots\},$$

由假设，它有上界$a_{2\omega}$，这样一直做下去，总可以找到极大元。

对上述过程如果加以严格分析，就会发现已运用了另一个策墨罗(*Zermelo*)选取公理。

策墨罗选取公理　设$S=\{M\}$是集族，其元素是两两互不相交的非空集，那末存在满足下面两个性质的集L：

(1) $L \subset \bigcup\limits_{M \in S} M$，

(2) 集L与S中每一集M有且只有一个公共元素。

佐恩引理与选取公理是等价的。指出的是，当前对它们以及与它们等价的一系列公理(不过还有条件强弱之分)是否能作为公理仍然有争论。尽管如此，并不因为以它们为基础证明别的定理而产生矛盾，所以它在研究无限过程时，依然是一个有力的工具。本书附录二便用到了佐恩引理。

§6　等价关系与集的分类

一、等价关系

设集A中的关系(记为“～”)具有下列性质：

1)　自反性：$a \sim a$；

2)　对称性：$a \sim b \Rightarrow b \sim a$；

3)　传递性：$a \sim b,\ b \sim c \Rightarrow a \sim c$，

称～为A中的等价关系。

例 1　设$A=\{$三角形$\}$. 不难验证，三角形全等是一个等价关系，相似也是一个等价关系，但位似不是等价关系。

又如，设B是平面上所有直线的集合。平面上两条直线不相交或重合叫做平行，那么平行是一个等价关系。

例 2　设A是所有平面向量组成的集. 如果两个向量平行，它们的长度相等，指向相同，这两个向量叫做相等，那末平面向量的相等是一个等价关系。

例 3　设M是所有矩阵的集合，矩阵的下列变换叫做矩阵的初等变换：

1.互换矩阵的两行或两列；

2.用一个不为 0 的数乘矩阵的一行或一列；

3.用一个数乘矩阵的一行加到另一行上或乘一列加到另一列上。

假如矩阵A经有限次的初等变换化为矩阵B，我们说A与B等价，用$A\cong B$表示。易证关系“$\cong$”满足上面三个性质，所以“$\cong$”也是等价关系。

二、集的分类与商集

首先介绍集的分类。

设$R=\{$实数$\}$，我们可以把R分解为

$$R=Q\cup I,$$

其中$Q=\{$有理数$\}$，$I=\{$无理数$\}$。

显然　$Q\cap I=\varnothing$。

也可以把R作如下分解：

$$R=R^{+}\cup R^{-}\cup\{0\},$$

其中 $R^+=\{$正实数$\}$，$R^-=\{$负实数$\}$。R^+，R^-，$\{0\}$都是R的子集，彼此互不相交，例如$R^+\cap R^-=\varnothing$。

当然还可以用另外的方法将R分解为互不相交的非空子集的并集。

一般地，设A为任意一集。如果按照某一方法将集A分解为互不相交的非空子集的并集，即

$$A=\bigcup_{\alpha\in\Lambda}A_\alpha\ (\Lambda\text{为指标集}),$$

其中$A_\alpha\neq\varnothing$（对每一$\alpha\in\Lambda$），且当$\alpha_1\neq\alpha_2$（α_1，$\alpha_2\in\Lambda$）时，

$$A_{\alpha_1}\cap A_{\alpha_2}=\varnothing,$$

我们说得到了集A的一个分类，而其中的每一个A_α都叫做A的等价类。

定理 集A的一个分类决定集A的一个等价关系；反之，集A的一个等价关系也能确定集A的一个分类。

证明 1)先证定理中第一个结论。

设给定了集A的一个分类，那么A中的每一个元素属于且仅属于A中的某一等价类。

如果A中的两个元素a，b同属于某一个等价类，称a，b关于这个分类是等价的，记为$a\sim b$。现在验证关系"$\sim$"满足自反性、对称性、传递性。

A中的每一元素a与a同属一类，即对每一$a\in A$，有$a\sim a$。若a与b同属一类，那末b与a也同属这一类。即$a\sim b$，则$b\sim a$。假如a,b同属一类，b,c同属一类，那末a与c也必同属一类，即若$a\sim b$，$b\sim c$，则$a\sim c$。故"$\sim$"确是A中的一个等价关系。

2) 再证定理中第二个结论。

设～是A中的一个等价关系．任取$a\in A$，令$\tilde{a}=\{x;\ x\sim a\}$即与$a$等价的元素全体，$\tilde{a}$是$A$的一个子集，不妨叫做$A$中的一个等价类．由于自反性，每个元素属于它自己的类，因而A是所有这些类之并．我们如果能证明，A中的任意两个类$\tilde{a}$，$\tilde{b}$或是相同（此时$a\sim b$），或是互不相交（此时$a\nsim b$），那么集A就是这些互不相交的等价类的并集．而要证明这一点，只要能证明：如果A中的两个等价类$\tilde{a}$，$\tilde{b}$既使只有一个公共元素c的话，则$\tilde{a}=\tilde{b}$就行了．

假设$c\in\tilde{a}$且$c\in\tilde{b}$，于是$c\sim a$且$c\sim b$．由对称性，$a\sim c$，又由传递性，$a\sim b$．

任取$x_1\in\tilde{a}$，那末$x_1\sim a$．由传递性，$x_1\sim b$（因$a\sim b$）．于是$x_1\in\tilde{b}$这就是说$\tilde{a}\subset\tilde{b}$．

任取$x_2\in\tilde{b}$，那末$x_2\sim b$．由对称性$b\sim a$（因$a\sim b$），再由传递性，$x_2\sim a$，于是$x_2\in\tilde{a}$，从而$\tilde{b}\subset\tilde{a}$．

由$\tilde{a}\subset\tilde{b}$和$\tilde{b}\subset\tilde{a}$，得到$\tilde{a}=\tilde{b}$． ▌

因此，若A中引入了等价关系，只要把A中所有等价的元素归于一类，而不等价的元素属于不同的类，这样便得到了集A的一个分类．

例 4 设A是平面上所有点的集合．关系～规定如下：

$$a与b在同一水平直线上\Longleftrightarrow a\sim b.$$

不难验证，“～”是等价关系，此时与点a等价的所有点$\tilde{a}=\{b;\ b\sim a\}$就是过点$a$的水平直线．而这些水平直线的全体形成了

集A的分类，或者说它们将整个平面分解为互不相交的非空子集的并集。

定义 设～为集A中的一个等价关系，并设$\widetilde{A}$为集A中的等价类全体（$\widetilde{A}$中的元素为A的等价类），称$\widetilde{A}$为集A由关系～而得的商集，记为$\dfrac{A}{\sim}$。

例 4 中的商集$\widetilde{A}$＝{水平直线}。

注意 A的商集$\widetilde{A}$不是A的一个子集，$\widetilde{A}$的每一元素才是A的子集。

例 5 设I＝{整数}．取定一正整数n，那末任何一个整数a都可唯一地表为

$$a=qn+r,$$

这里q，r都是整数，且$0\leqslant r\leqslant n-1$，$r$叫做$a$被$n$除得到的余数。显然，任何一个整数$a$被$n$除得到的余数$r$是唯一的。

现在按下面方法将集I分类：把被n除得到同一余数的所有整数归于一类，这样我们把全体整数分为n个互不相交的等价类，记为c_r（$r=0$，1，2，…，$n-1$），其中c_r是由一切被n除得余数r的整数组成的集．在代数学中，称这n个等价类是以n为模的同余类（或剩余类）。

以这n个同余类c_r（$0\leqslant r\leqslant n-1$）为元素构作新集

$$\widetilde{I}=\{c_0, c_1, \cdots, c_{n-1}\}$$

就是集I的商集．

当$n=2$时，集I分为两类：一类是由所有偶数组成的集，另一类则是奇数集。

注：等价关系“～”可这样规定：

任取$a,b\in I$，若$a-b$能被n整除，即$n|a-b$，我们说对于模n，a与b同余，用记号$a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$表示。

规定 $a\sim b \iff a\equiv b(\mathrm{mod}\,n)$

不难验证：同余关系“$\equiv$”是等价关系。

三、实数集是基本有理数列全体的商集

本段对康托尔(*Cantor*)、梅赖(*Meray*)、维尔斯特拉斯(*Weierstrass*)以有理数为基础建立实数的方法作一简略分析，先介绍有关概念。

设a_1，a_2，…，a_n，…都是有理数．假如对于任意的正有理数ε，有自然数N，使得不等式

$$|a_m-a_n|<\varepsilon$$

对一切大于或等于N的自然数n和m成立，就称$\{a_n\}$是基本有理数列。

例如 $1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots,$

$$0,\ 0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots$$

是基本有理数列．又如，由$\sqrt{2}$的一切十进不足或过剩近似值作成的有理数列

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots, \qquad (1)$$

$$2,\ 1.5,\ 1.42,\ 1.415,\ \cdots \qquad (2)$$

也是基本有理数列。

设$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是两个基本有理数列。如果对于任意的正有理数ε，有自然数N，使不等式

$$|a_n - b_n| < \varepsilon$$

对一切大于或等于N的自然数n成立，就称基本有理数列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$是相等的，记为$\{a_n\}=\{b_n\}$。

如，由$\sqrt{2}$的十进不足和过剩近似值作的两个数列（1）和（2）是相等的。又如，有理数列

$$1,\ 1.5,\ 1.41,\ 1.415,\ \cdots \qquad (3)$$

也是基本有理数列（用数列（1）的第$2n-1$项作为该数列的第$2n-1$项，用数列（2）的第$2n$项作为该数列的第$2n$项），并且与数列(1)和(2)都相等。不难想象，与数列(1)（或(2)等）相等的基本有理数列有无限多个。

那末，如何来定义实数呢？

定义 称基本有理数列是一个实数。规定相等的基本有理数列是同一个实数。

这就是康托尔等关于实数的定义，现分析如下。

记$A=\{$基本有理数列$\}$。两个基本有理数列的相等，是A中的一个等价关系。显然，“=”满足自反性和对称性，现证明“=”满足传递性。设$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}\in A$，又$\{a_n\}=\{b_n\}$，$\{b_n\}=\{c_n\}$，则对于任一正有理数ε，

有自然数N_1，当 $n\geqslant N_1$时，$|a_n-b_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，

又有自然数N_2，当 $n\geqslant N_2$时，$|b_n-c_n|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

取$N=max\{N_1,\ N_2\}$，则当$n\geqslant N$时，

$$|a_n-c_n| = |(a_n-b_n)+(b_n-c_n)|$$

$$\leqslant |a_n - b_n| + |b_n - c_n|$$
$$< \varepsilon.$$

故 $\{a_n\} = \{c_n\}$.

由于"="是A中的等价关系，我们可把集A进行分类，将A中所有相等的基本有理数列归于一类，那么上面的实数定义的意思就是用A中的等价类定义实数。例如我们用与数列（1）相等（等价）的基本有理数列全体（它是A中的一个等价类）来定义无理数$\sqrt{2}$。

A中任意两个不同的等价类定义两个不同的实数。例如与数列

$$0,\ 0,\ \cdots,\ 0,\ \cdots$$

相等的基本有理数列全体以及和数列(1)

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ \cdots$$

相等的基本有理数列全体是A中的两个不同的等价类，分别定义实数 0 和$\sqrt{2}$。

以A中的等价类为元素构造的集$\widetilde{A}$定义整个实数，或说A的商集$\widetilde{A}$就是全体实数集。

要进一步了解康托尔、梅赖的实数理论可参看陈建功著《实函数论》。

四、等价关系与映射

1)设～是集A中的一个等价关系，A的商集记为$\widetilde{A}$。

作映射φ: $a \in A \longrightarrow \widetilde{a} \in \widetilde{A}$,

其中$\widetilde{a}$为a所在的等价类，即$\widetilde{a} = \{b;\ b \sim a\}$。

显然，φ 是A到$\widetilde{A}$上的映射，叫做自然映射或正规映射。

2)反之，设ψ是A到B上的映射。利用ψ来定义A的一个等价关系：如果$\psi(x_1)=\psi(x_2)$，规定$x_1\sim x_2$。用话来说，如果A中的两个元素具有相同的象，那么就说这两个元素是等价元素。因此，将A中具有相同象y的所有元素x组成一集（这是A的子集）便得到集A的一个分类；或者说，集B各元素y的完整原象$\psi^{-1}(y)$形成了集A的一个分类，于是A的商集

$$\widetilde{A}=\{\psi^{-1}(y);\ y\in B\}。$$

如果规定 $\widetilde{\psi}:\ \psi^{-1}(y)\in\widetilde{A}\longrightarrow y\in B$，

那末 $\widetilde{\psi}:\ \widetilde{A}\to B$ 是一一映射。

为解释上面所说的，我们看前面的例 5。

$$I=\{\text{整数}\},\ B=\{0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1\}$$

令ψ：$a=qn+r\to r$，

即I中每个整数与用n除得到的余数相对应，那末ψ是I到B上的映射，此时

$$\psi^{-1}(r)=c_r。$$

I的商集 $\widetilde{I}=\{c_0,\ c_1,\ \cdots,\ c_{n-1}\}$。

又令 $\widetilde{\psi}:\ c_r\to r$，

即 $c_0\to 0,\ c_1\to 1,\ c_2\to 2,\ \cdots,\ c_{n-1}\to n-1$。

显然，$\widetilde{\psi}$ 是$\widetilde{I}$到B上的一一映射。

第三章 集的势

§1 势的概念 有限集与无限集

在抽象地研究集(即对集合中元素的属性不加考虑)时，自然会想到该集含有多少元素的问题。对于有限集，表示元素多少的是该集元素的个数。空集的元素个数是零，非空有限集的元素个数是一个自然数。为了求出一个非空有限集M的元素个数，我们只要逐个地去数，数到最后一个元素看得数是多少，就知道集M所含的元素个数是多少。然而我们逐个地去数集M的元素，事实上也就是使M中的每一个元素与一个自然数相对应。比如我们数到了7，也就是从集M中挑选出一个元素与自然数7相对应。数集M中的元素的过程要求既不能重复，又不能遗漏。假如集M含有n个元素，经过这个数的过程，集$M=\{a, b, \cdots, c\}$(共n个元素)就与最初n个自然数所成之集$M_n=\{1, 2, \cdots, n\}$建立起一一对应关系。从这里又启发我们，要说明两个有限集M与M'具有同样多的元素，也可以不分别去数M与M'中的元素，只要在它们的元素之间能建立起一个一一对应关系就可以了。

例如，某学校有两个班的学生列队成单行站在一起，只要

前后左右对齐，如果排在两个班最末的学生恰好成一列，既使我们不知道这两个班的学生人数，也可以断言这两个班的学生总数相等。

至于无限集，“元素的个数”这个概念已失去意义，用前面数的办法，也已经失效。然而用建立二集元素之间的一一对应来比较两集则可以适用于无限集。

本章利用一一映射的观点来研究集的一种性质——势。

一、对等集

定义 设A、B是二集。若存在A到B上的一个一一映射φ：

$$a\in A \rightarrow b\in B,$$

称A、B是对等的，或者说A、B是等势的。记为$A\sim B$（简记为$A\sim B$）。

规定空集与自身对等。

定理 1 对等关系“$\sim$”具有下列性质：

1）自反性 $A\sim A$；

2）对称性 $A\sim B\Rightarrow B\sim A$；

3）传递性 $A\sim B$，$B\sim C\Rightarrow A\sim C$。

证明 1）因为A到A上的恒等映射e是A到A上的一一映射，所以对任意集A，都有$A\sim A$。

2）$A\sim B$，说明存在一个A到B上的一一映射φ，而逆映射φ^{-1}就是B到A上的一一映射（见第二章 § 3 定理1），故$B\sim A$。

3）由条件知，存在A到B上的一一映射φ，B到C上的一一映射ψ，因此它们的积$\psi\varphi$是A到C上的一一映射（见第二章 § 3定理2），故$A\sim C$。 ▌

定理 2 假设

1) $A = A_1 \cup A_2$, $A_1 \cap A_2 = \varnothing$;

2) $B = B_1 \cup B_2$, $B_1 \cap B_2 = \varnothing$;

3) $A_1 \sim B_1$, $A_2 \sim B_2$,

则 $A \sim B$.

证明 由条件3)，存在A_1到B_1上的一一映射φ_1，A_2到B_2上的一一映射φ_2。

对任意$a \in A$，由条件1)，a属于且仅属于A_1, A_2中的一个。现规定φ如下：

$$a \in A \to \varphi(a) = \begin{cases} \varphi_1(a), & a \in A_1, \\ \varphi_2(a), & a \in A_2. \end{cases}$$

显然这是A到B中的映射。?

映射φ是到上的。因对每一个$b \in B$，由条件2)，b属于且仅属于B_1，B_2中的一个。

如果$b \in B_1$，因φ_1是A_1到B_1上的，故有$a_1 \in A_1$，使$\varphi_1(a_1) = b$;
如果$b \in B_2$，因φ_2是A_2到B_2上的，故有$a_2 \in A_2$，使$\varphi_2(a_2) = b$。
总之，对任意$b \in B$，必有$a \in A$，使$\varphi(a) = b$。

映射φ是单一的。令a, $a' \in A$, $a \neq a'$。如果a, a'分别属于A_1，A_2中的一个，则它们的象$\varphi(a)$，$\varphi(a')$也分别属于B_1，B_2中的一个，因$B_1 \cap B_2 = \varnothing$，所以$\varphi(a) \neq \varphi(a')$。如果$a$, a'同属于A_1，A_2中的一个，例如同属于A_1。由于φ_1是单一的，所以$\varphi_1(a) \neq \varphi_1(a')$，即$\varphi(a) \neq \varphi(a')$。

从而φ是A到B上的单一映射，即一一映射，故$A \sim B$。 ▌

定理 2 可进一步推广到一般情形。

定理2′ 记$\Lambda=\{\lambda\}$为指标集。假设

1) $A=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda$，且当$\lambda\neq\lambda'$时，$A_\lambda\cap A_{\lambda'}=\varnothing$；

2) $B=\bigcup\limits_{\lambda\in\Lambda}B_\lambda$，且当$\lambda\neq\lambda'$时，$B_\lambda\cap B_{\lambda'}=\varnothing$；

3) 对每一$\lambda\in\Lambda$，$A_\lambda\sim B_\lambda$，

则 $A\sim B$。

证明 由条件3)，存在A_λ到B_λ上的一一映射φ_λ（$\lambda\in\Lambda$）。

对每一个$a\in A$，因条件1)，必有$\lambda\in\Lambda$，使得$a\in A_\lambda$，我们规定：

$$\varphi(a)=\varphi_\lambda(a)\in B_\lambda\subset B.$$

又因$A_\lambda\cap A_{\lambda'}=\varnothing(\lambda\neq\lambda')$，可见$A$中的任何元素$a$只能属于一个$A_\lambda$，从而$\varphi(a)$是唯一的。这说明$\varphi$是$A$到$B$中的映射。

映射φ是到上的。因对每一个$b\in B$，必存在$\lambda\in\Lambda$，使得$b\in B_\lambda$，由于φ_λ是A_λ到B_λ上的映射，因而存在$a\in A_\lambda$，使得$\varphi_\lambda(a)=b$。这说明对任意$b\in B$，必有$a\in A$，使$\varphi(a)=b$。

映射φ又是单一的。令a，$a'\in A$，$a\neq a'$。则必有$\lambda,\lambda'\in\Lambda$，使得$a\in A_\lambda$，$a'\in A_{\lambda'}$。

如果$\lambda=\lambda'$，则a，a'同属于A_λ。因φ_λ是单一的，由$a\neq a'$知$\varphi_\lambda(a)\neq\varphi_\lambda(a')$，即$\varphi(a)\neq\varphi(a')$；

如果$\lambda\neq\lambda'$，此时$\varphi(a)=\varphi_\lambda(a)\in B_\lambda$，$\varphi(a')=\varphi_{\lambda'}(a')\in B_{\lambda'}$，而$B_\lambda\cap B_{\lambda'}=\varnothing$，所以$\varphi(a)\neq\varphi(a')$。

总上，φ是A到B上的一一映射，故$A\sim B$。 ▮

二、有限集

前面我们说有限集是由有限个元素组成的集，可是什么叫做“有限”呢？这还是没有加以适当定义的概念，本段要给出有

限集的严格数学定义，并给出它的特征。

记M_n为最初n个自然数之集，即

$$M_n=\{1,2,3,\cdots,n\},$$

简称为自然数节。

定义 设A为一集。若A为空集或与某一自然数节对等，称A为有限集。

当$A\sim M_n$时，称n为A的计数（也就是A中元素的个数）。又规定空集的计数为0。

引理1 集M_n与其任何真子集不对等。

这在直观上是很容易理解的，现用数学归纳法证明。

***证明** 当$n=1$时，M_1的真子集只能是空集，显然$M_1\nsim\varnothing$①，所以结论成立。

今设k为一自然数，而且M_k不与其任何真子集对等，证明当$n=k+1$时，结论亦成立。

假若不然，便有M_{k+1}的真子集M'，使得$M_{k+1}\overset{\varphi}{\sim}M'$（$\varphi$是$M_{k+1}$到$M'$上的一一映射）。记$\varphi(k+1)=l$，分三种情况来讨论：

1）若$l=k+1$，此时在M_{k+1}和M'中去掉$k+1$后，φ可视为M_k到M''（$M''=M'-\{k+1\}$）上的一一映射，但$M''\subsetneq M_k$且$M_k\nsim M''$，这与归纳假设矛盾。

2）若$l\neq k+1$，但$k+1\in M'$，此时设$k+1=\varphi(m)$（$m\in M_{k+1}$），在M_{k+1}上作映射ψ如下：

---

① "$\nsim$"表示"不对等"。

$$\psi(\nu)=\begin{cases}\varphi(\nu), & \nu \neq m \text{和} k+1,\\ l, & \nu=m,\\ k+1, & \nu=k+1.\end{cases}$$

φ与ψ的区别在于将元素m，$k+1$的象彼此对调（其余元素的象相同）。由于φ为M_{k+1}到真子集M'上的一一映射，所以ψ也是M_{k+1}到M'上的一一映射，但此时ψ适合情况1)：$\psi(k+1)=k+1$，故2）也是不可能的。

3）若 $l\neq k+1$，$k+1\notin M'$。此时从M_{k+1}中除去$k+1$得到M_k，再从M'中除去l得到一个集M'''，显然可视φ为M_k到它的真子集M'''的一一映射，由归纳假设，这也是不可能的。

所以，M_{k+1}不能与其真子集对等。]

由上述引理，可证明

定理 3 有限集具有唯一的计数。

证明 用反证法。不妨设A是非空有限集。

若$A\sim M_n$且$A\sim M_m(m\neq n)$，由定理1，$M_m\sim M_n$，因$m\neq n$，不妨设$m<n$，于是M_n就和它的真子集M_m对等，但由引理1知，这是不可能的。所以任何一个非空有限集只能和一个M_n对等，从而有限集的计数是唯一的。]

推论 有限集决不与其真子集对等。

由此可知，相互对等的有限集具有同一个计数，而具有同一个计数的有限集必相互对等。计数是所有相互对等的有限集的共同特征。

设A为有限集，我们用记号$n(A)$表A的计数。如$A=\{a,b,c,d,e,f\}$，$n(A)=6$。（即A的元素个数是6）。

对于计数，我们有下列简单性质：

1°．若A，B为有限集，且 $A\cap B=\varnothing$，则

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B).$$

由定理1与定理2可推出，证明过程请读者补述。

2°．A，B为有限集，且 $B\subset A$，则

$$n(A-B)=n(A)-n(B).$$

由1°可得2°，因 $A=(A-B)\cup B$，且 $(A-B)\cap B=\varnothing$。

去掉$B\subset A$的限制，有

3°．$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$。

证明 因 $A-B=A-(A\cap B)$，

而 $A\cap B\subset A$，由2°得

$$n(A-B)=n[A-(A\cap B)]=n(A)-n(A\cap B). \quad \rbrack$$

4°．A，B为有限集，则

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

证明 $A\cup B=(A-B)\cup B$ （见第一章§3），

又 $(A-B)\cap B=\varnothing$，由1°得

$$n(A\cup B)=n(A-B)+n(B)\xlongequal{\text{由}3°}n(A)-n(A\cap B)+n(B)$$
$$=n(A)+n(B)-n(A\cap B). \quad \rbrack$$

例1 某班参加课外活动小组的学生共20人，其中数学小组的学生有9人，航模小组的学生有6人，其他小组的学生有8人，问参加数学小组而未参加航模小组的学生有几人，同时参加这两个小组的学生又有几人？

用A，B分别表数学小组与航模小组学生全体，那末

$$n(A)=9,\ n(B)=6.$$

$$n(A\cup B)=20-8=12.$$

从而 $$n(A\cap B)=n(A)+n(B)-n(A\cup B)$$
$$=9+6-12=3,$$
$$n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$$
$$=9-3=6.$$

同时参加数学与航模小组的学生有 3 人，参加数学小组而未参加航模小组的学生有 6 人。

对于4°，我们还可推广，例如

5°. 设A，B，C都是有限集，则

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$
$$-n(A\cap C)-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$

证明 $n(A\cup B\cup C)=n((A\cup B)\cup C)$

$$=n(A\cup B)+n(C)-n((A\cup B)\cap C)$$
$$=n(A)+n(B)-n(A\cap B)+n(C)$$
$$-n[(A\cap C)\cup(B\cap C)]$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)$$
$$-[n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)]$$
$$=n(A)+n(B)+n(C)-n(A\cap B)-n(A\cap C)$$
$$-n(B\cap C)+n(A\cap B\cap C).$$ ∎

例 2 某班组织了篮球、排球、乒乓球三个运动队，分别由10人、12人、5人组成，其中参加篮球与排球队的学生为4人，参加篮球与乒乓球队的有 3 人，参加排球与乒乓球队的有3人，三个队都参加的有 2 人，问这个班的运动队共有学生多少人？

记篮球队、排球队、乒乓球队的学生全体分别为A，B，

C，则

$$n(A)=10,\ n(B)=12,\ n(C)=5.$$

$$n(A\cap B)=4,\ n(A\cap C)=3,\ n(B\cap C)=3,$$

$$n(A\cap B\cap C)=2.$$

$$n(A\cup B\cup C)=10+12+5-4-3-3+2=17,$$

这个班的三个运动队由17名学生组成。

三、无限集

定义 设A是非空集，不与任何自然数节对等，称A是无限集。简单说，不是有限集的集叫无限集。

例 3 $N=\{$自然数$\}$是无限集。

证明 我们知道，有限集的特征是不与其任何真子集对等，因此要证N是无限集，只要能证明N与它的某一个真子集对等就行了。

令 $M=N-\{1\}$（即从N中去掉数1得到的集），显然M是N的一个真子集。

作N到M的映射φ如下：

$$n\in N\to n+1\in M,$$

$n+1$叫做n的继数。映射φ表示每一自然数与其继数相对应。显然φ是N到M的一一映射，从而 $N\sim M$，N是无限集。 ▌

注：要证N是无限集，不要误认为上面的证法是唯一的。例如取 $E=\{$正偶数$\}$，显然E是N的一个真子集，而映射φ：

$$n\in N\to 2n\in E$$

是N到E上的一一映射，故$N\sim E$，N是无限集。

下面讨论无限集的特征。

引理 2　在任何一个无限集里，一定能取出由互不相同的元素作成一无限叙列。

证明　设A是无限集，于是$A\neq\varnothing$。从A中任取一个元素a_1。显然$A\neq\{a_1\}$，否则$A=\{a_1\}\sim M_1$，与A为无限集矛盾。因此又可从A中取出一个元素a_2，$a_2\neq a_1$，同样$A\neq\{a_1,a_2\}$。一般来说，设已取出n个互不相同的元素

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,$$

显然$A\neq\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，从而可在$A-\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$中取一元素$a_{n+1}$，它自然不同于$a_i(i=1,2,\cdots,n)$。由归纳法，我们得出了一个由$A$中互异的元素作成的无限叙列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots. \qquad ▌$$

定理 4　无限集必与它的一个真子集对等。

证明　设A是无限集，由引理2，有一个由A中互异元素作成的无限叙列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots.$$

记　$B_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，$C_1=\{a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$，

$A_1=A-B_1$。

显然　$A=A_1\cup B_1$，且　$A_1\cap B_1=\varnothing$，

令　$A^*=A_1\cup C_1$，

A^*是A的一个真子集，事实上从A中除去a_1得A^*。我们证明$A\sim A^*$。

作B_1到C_1上的映射：$a_n\to a_{n+1}\ (n=1,2,\cdots)$，这是$B_1$到$C_1$上的一一映射（读者验证），故　$B_1\sim C_1$。又　$A_1\sim A_1$。由定理 2 知

$$A_1 \cup B_1 \sim A_1 \cup C_1,$$

即 $$A \sim A^*.$$ ∎

现在我们可以给出有限集与无限集的一个等价的定义：

不能和自己的任何真子集对等的集叫做有限集；能与自己的某个真子集对等的集叫做无限集。

例 4 一切正质数(即素数)所成的数集P是无限集。

证明 用反证法。假设P是有限集，令

$$P=\{p_1, p_2, \cdots, p_n\},$$

其中p_i为质数。作一数

$$p=p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_n+1,$$

显然 $p \neq p_i$ $(i=1,2,\cdots,n)$，因此 $p \notin P$，p不是质数，那么p应是某些质数的积。

另一方面，任何质数p_i除p，余数都是 1，因此p不能表为某些质数之积的形式。这样，便引出了矛盾，说明P必须是无限集。 ∎

作为练习，读者证明：区间$(0, 1)$是无限集。

四、势

对于有限集，计数是它的特征。根据计数是否相等就能判断两个有限集是否对等。很自然地，我们想把计数这个性质推广到无限集上去，为此引入下面的概念。

定义 设A为一集。把对等于A的一切可能的集归于同一类(自然，属于该类的所有集彼此对等)，而不与A对等的集皆不属于这一类。以记号μ来和这个类相对应，μ就叫做此类中任一集的，特别是集A的势（或基数、浓度等）。集A的势记为

$\bar{A}$, $\bar{A}=\mu$.

因此，任何两个相互对等的集具有相同的势，而不对等的两个集的势不同．势就是一切互相对等的集的共同特征．

因为计数是所有相互对等的有限集所共具的性质，因此我们把有限集的势理解为计数(集中元素的个数)．对于无限集来说，势的概念则是计数或说有限集的元素个数这一概念的推广．无限集的势又叫做超限数．下面我们将着重研究两类特殊的无限集．

§2 可数集

定义 凡能与全体自然数集N对等的集都叫做可数集（或可列集)．可数集的势记为$\aleph_0$(读作"阿列夫零")．

下面是几个可数集的例子．

$$A=\{1,3,5,7,\cdots,2n-1,\cdots\},$$

$$B=\{2,4,6,8,\cdots,2n,\cdots\},$$

$$C=\{1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots\},$$

$$D=\{10,100,1000,\cdots,10^n,\cdots\},$$

$$E=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\},$$

它们的势都是$\aleph_0$．前四个例子告诉我们：尽管它们只是全体自然数集的真子集，也不论它们在全体自然数集中分布得怎样"稀疏"(例如，还可以举出这样的集$\{10,10^{10},10^{10^{10}},\cdots\}$)，却并不比完整的自然数集具有较低的势．因此，"全量大于部分量"

这一算术公理在讨论集的势时是不成立的。

定理1 集 A 为可数集的必要充分条件是可以把它列成由互异元素组成的无限叙列形式

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \qquad (*)$$

证明 1° 必要性 A 为可数集，则必存在A到N上的一一映射φ。在映射φ下，A中的与自然数n相对应的元素记为a_n，不妨把n叫做该元素的号码。

显然，集A的每一元素都有自己的号码，并且每一自然数只能是A中某一个元素的号码，而自然数集N可列成无限叙列，因此集A可写成$(*)$的形式。

2° 充分性 设A具有$(*)$的形式，其中没有相同的项。只要将A的元素a_n对应其号码n，即令ψ：$a_n \to n$。显然，ψ是A到N上的一一映射，所以A是可数集。]

因此，可数集是这样的集：可以把它的一切元素按自然数编号。

例 1 全体整数集是可数集。

这是很明显的。因为全体整数可排成无限叙列，例如

$$0, 1, -1, 2, -2, \cdots, n, -n, \cdots.$$

定理2 任何一个无限集必含有可数子集。

证明 由本章§1引理2知。]

本定理告诉我们，可数集是"最小"的无限集。

例 2 自然数集N可分解为$\{1, 2, \cdots, n\} \cup \{n+1, n+2, \cdots\}$，其中第一加项是有限集，第二加项是可数集。这说明：

1° 可数集的子集或为有限集，或为可数集。

2° 有限集与可数集的并集是可数集，因而

$$n+\aleph_0=\aleph_0.$$

自然数集又可拆成偶数集与奇数集，二者都是可数的；或者把它拆成这样三个可数集：以3除之，余数为0，1，2的自然数各组成一可数集，即

$$N=\{3,6,9,\cdots,3n,\cdots\}\cup\{1,4,7,\cdots,3n-2,\cdots\}$$
$$\cup\{2,5,8,\cdots,3n-1,\ \cdots\};$$

还可以把N拆成n个可数集：以n除之，余数为$0,1,2,\cdots,n-1$的自然数各组成一可数集。这说明：

3° 有限个可数集的并集仍是一个可数集，因而有

$$\underbrace{\aleph_0+\aleph_0+\cdots+\aleph_0}_{n个}=n\aleph_0=\aleph_0.$$

对于N，还可以把它分解为可数个可数集，如下二表所示：

1,	3,	5,	7,	…
2,	6,	10,	14,	…
4,	12,	20,	28,	…
8,	24,	40,	56,	…
……				

（二进位表）

1,	2,	4,	7,	11,	…
3,	5,	8,	12,	…	
6,	9,	13,	……		
10,	14,	……			
15,	……				
……					

（对角线表）

因此又有

4° 可数个可数集的并集仍为可数集，且

$$\underbrace{\aleph_0+\aleph_0+\cdots+\aleph_0+\cdots}_{\aleph_0\text{个}}=\aleph_0\aleph_0=\aleph_0.$$

注　对二进位表，作如下解释。因每一个自然数，可以唯一地写成：

$$n=2^{k-1}(2m-1)\quad(k=1,2,\cdots;\ m=1,2,\cdots)$$

当$k=1$，$m=1$，2，…时，得表上第一行，

当$k=2$，$m=1$，2，…时，得表上第二行，

依此类推，得出整个表。显然，位于第k行的数恰好被2^{k-1}除尽。

结论1°—4°，都是可以证明的。

定理3　可数集的无限子集必为可数集。

证明　设A可数，则A可排成一个无限叙列

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots.$$

如果A_1是A的一个无限子集，则所有属于A_1的a的号码作成自然数集N的一个无限子集N_1。由于N的任何无限子集可按其元素的大小排成一个无限叙列，因此N_1是可数集。而$A_1\sim N_1$，所以A_1也是可数集。　　▌

推论1　从可数集A，除去一个有限子集M，所得的$A-M$仍为可数集。因而

$$\aleph_0-n=\aleph_0.$$

定理4　若A可数，B有限，$A\cap B=\varnothing$，则$A\cup B$可数。

证明　因A可数，故可排成无限叙列

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}.$$

设B中有m个元素，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_m\}$。由于$A\cap B=\varnothing$，于是

$$A\cup B=\{b_1,b_2,\cdots,b_m,a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\},$$

可见$A\cup B$可排成无限叙列形式，因而可数。 】

定理5 若A,B都可数，$A\cap B=\varnothing$，则$A\cup B$亦可数。

证明 设$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots\}$，$B=\{b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots\}$，因$A\cap B=\varnothing$，所以

$$A\cup B=\{a_1,b_1,a_2,b_2,\cdots,a_n,b_n,\cdots\}$$

可见$A\cup B$也是可数的。 】

推论2 设A可数，B有限或可数，则$A\cup B$还是可数集。

证明 令$B^*=B-A\cap B$，则$A\cap B^*=\varnothing$，此时

$$A\cup B=A\cup B^*.$$

而B^*或为有限或为可数，故由定理4或定理5知，$A\cup B$可数。】

推论2指出，定理4与定理5中条件$A\cap B=\varnothing$亦可取消。

定理6 设有一列可数集$A_1,A_2,\cdots,A_i,\cdots$，且$A_i\cap A_j=\varnothing$ $(i\neq j)$，则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$也可数。

证明 因A_i都可数，故可设

$$\begin{array}{l}
A_1=\{a_{11},\ \ a_{12},\ \ a_{13},\cdots\},\\
A_2=\{a_{21},\ \ a_{22},\ \ a_{23},\cdots\},\\
A_3=\{a_{31},\ \ a_{32},\ \ a_{33},\cdots\},\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{array}$$

由例2的启示，按对角线法，将$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$的元素进行编号（记$i+j=h$为元素$a_{ij}$ $(i,j=1,2,3,\cdots)$的高度。所谓按对角线法编

号，也就是按高度大小编号，且在同一高度中按i(或j)的大小编号)，于是

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \{a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{13}, a_{22}, a_{31}, \cdots\}$$

所以$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$是可数集。

注 1° 若把每个A_i改为有限集，其他条件不变，定理结论照样成立。也就是说，两两不相交的可数个有限集的并集是一可数集。

2° 若去掉两两不相交这一限制，A_i为可数集或有限集，则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$或为可数集或为有限集。特别，我们有

推论3 若A_i $(i=1,2,\cdots)$ 可数，则$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$可数。

证明 令$A_1^* = A_1$，$A_i^* = A_i - A_i \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{i-1})$ $(i \geqslant 2)$，则A_i^*有限或可数，$A_i^* \cap A_j^* = \varnothing\ (i \neq j)$。而$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i^*$，故$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$可数。

这就是说，可数个可数集的并集是可数集。]

例 3 所有有理数组成一个可数集。

证明 设$A_i = \left\{\frac{1}{i}, \frac{2}{i}, \frac{3}{i}, \cdots\right\}$ $(i=1,2,3,\cdots)$，则A_i是可数集，由推论3知，所有正有理数组成的集$R^+ = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$是可数的。

所有负有理数组成的集$R^- \sim R^+$，只要让每个负有理数与其绝对值相等的正有理数相对应便可知，所以R^-也是可数集。

而全体有理数集$R=R^+\cup R^-\cup\{0\}$，因此R是可数集． ∎

我们知道，有理数具有稠密性，在数轴上的任何小区间内都有有理数存在（而且有无限多个），可是全体有理数集仍是可数集，能和稀疏的自然数集对等．因此，不要因为有理数处处稠密而误认为它不是可数集．

下面证明一个较一般的定理，它使我们能判断许多重要集的可数性．

定理 7 设集A是由有限个指标决定的元素全体$\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_n}\}$，这些指标相互独立各自取可数个值① 则集$A$是可数集．

证明 应用数学归纳法证．

当$n=1$时，定理显然成立，因为这时A的元素只由一个可以取可数个值的指标来决定．

今设$n=k$时结论成立，证明当$n=k+1$时也成立．

将x_{k+1}的可数个值编号成无限叙列

$$x_{k+1}^{(1)},\ x_{k+1}^{(2)},\ \cdots,\ x_{k+1}^{(i)},\ \cdots.$$

记A中的元素，其中$x_{k+1}=x_{k+1}^{(i)}$的全体为A_i，则

$$A_i=\{a_{x_1,x_2,\cdots,x_k,x_{k+1}^{(i)}}\}.$$

因为最后一个指标$x_{k+1}^{(i)}$对A_i中所有的元素都是一样的，所以集A_i中的元素由前k个指标$x_1,x_2,\cdots,x_k$所决定，而这k个指标相互独立各自取可数个值，因此由归纳法假设，A_i是可数集．而

$$A=\bigcup_{i=1}^{\infty}A_i,$$

① "可数个值"、"集中有$\aleph_0$个元素"的意思是指具有势为$\aleph_0$的集，即可数集。

于是，作为可数个可数集的并集，A也是可数的。 ▌

例3中的R^+是可数集的另一证法。因为任一正有理数可写成既约分数$\frac{p}{q}$的形式，我们把它看成具有两个指标的元素$a_{p,q}$，其中p,q取自然数，因而$R^+=\{a_{p,q}\}$是可数的。

例4 整系数多项式

$$p_n(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

的全体为可数集。

证明 次数等于一个定数n的多项式$p_n(x)$的全体可以看成这样一个集，它的元素由$n+1$个彼此独立的指标$a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n$所决定（其中$a_0\neq 0$），而每一个指标取整数值（因而取可数个值），据定理7，这种集是可数集。

然而，多项式的次数n只能取可数个值，因此，作为可数个可数集的并集，具整系数多项式的全体组成一可数集。 ▌

设x为实数，若有整数$a_0,a_1,\cdots,a_n,a_0\neq 0$，使

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0.$$

称x为实代数数。因此，实代数数就是整系数多项式的实根。

显然，有理数一定是代数数，但代数数不一定是有理数。例如，无理数$\sqrt{2}$满足方程

$$x^2-2=0,$$

所以$\sqrt{2}$是代数数。

例5 （实）代数数的全体是一可数集。

证明 由于每一整系数多项式最多只有有限个实根，而整系数多项式全体为可数集，因此（实）代数数全体之集是可数个有限集的并集。

可数个有限集的并集或为有限集或为可数集，但实代数数全体不是有限集，因它包含全体有理数作为自己的真子集，所以实代数数全体必为可数集.]

由于有理数是处处稠密的，因此实代数数也是处处稠密的.

定理8 设A为无限集，B为有限集或可数集，则

$$\overline{\overline{A \cup B}} = \overline{\overline{A}}.$$

证明 我们只要能证明$A \cup B \sim A$就行了.

因A是无限集，由定理2，存在一可数子集$M \subset A$. 又由推论2知，$M \cup (B-A) \sim M$，又由于$A-M \sim A-M$，

$$(A-M) \cap (B-A)) = \varnothing，所以$$

$$A = (A-M) \cup M \sim (A-M) \cup (M \cup (B-A) = A \cup B. \quad]$$

该定理说，添加一个有限集或可数集到一个无限集上去，此无限集的势不变.

§3 有连续势的集

除了可数集外，还有不有不可数的无限集呢？定理1回答了这一问题.

定理1 闭区间$I=[0,1]$是不可数集.

证明 用反证法. 假设I是可数集，那末I中的一切点可排成无限叙列

$$x_1, \ x_2, \ x_3, \cdots, x_n, \cdots.$$

将区间I三等分，得

$$\left[0, \ \frac{1}{3}\right], \ \left[\frac{1}{3}, \ \frac{2}{3}\right], \ \left[\frac{2}{3}, \ 1\right],$$

其中至少有一个区间不含x_1（三个闭区间中可能有两个都不含有x_1，任取其中一个好了），记为I_1（图3.1）。再将I_1三等分，取其中不含点x_2的闭区间为I_2。

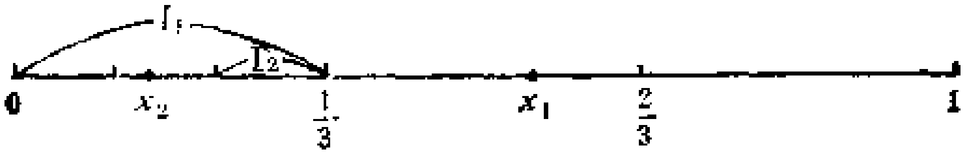


图 3.1

一般说来，设已作好了一个包含一个的闭区间

$$I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n,$$

I_k的长度为$\frac{1}{3^k}$，且$x_k \notin I_k \ (k=1,2,\cdots,n)$。将$I_n$三等分，取其中不含点$x_{n+1}$的闭区间为$I_{n+1}$。如此进行下去，我们得到一列闭区间$\{I_n\}$：

1° $I_1 \supset I_2 \supset \cdots \supset I_n \supset \cdots,$

2° I_n的长度为$\frac{1}{3^n}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$。

据闭区间套定理，有唯一的一点$x\in[0,1]$，使得$x\in I_n \ (n=1,2,\cdots)$。但另一方面，由于$x_n\notin I_n$，因此$x\neq x_n \ (n=1,2,\cdots)$，这和$\{x_n\}$为$[0,1]$中的一切点相矛盾。

故 $I=[0,1]$是不可数集。]

定义 称闭区间$[0,1]$的势为连续统的势，简称为连续势，记以$\aleph$（读做“阿列夫”）。

凡与$[0,1]$对等的集叫做有连续势的集。

定理2 任何有限闭区间$[a,b]$，开区间(a,b)，半开区间$[a,b)$，$(a,b]$的势均为$\aleph$。

证明 函数 $y=a+(b-a)x \qquad (0\leqslant x\leqslant 1)$

是$[0,1]$到$[a,b]$上的一一映射，所以

$$[0,1]\sim[a,b],$$
$$\overline{\overline{[a,b]}}=\aleph.$$

因为从一个无限集除去一个有限集，所得的集与原来的集对等，因此(a,b)，$(a,b]$，$[a,b)$的势与$[a,b]$的势相同，都是$\aleph$。 ▌

定理3 无限区间$(-\infty,+\infty)$，$(0,+\infty)$，$(-\infty,0)$ 等的势都是$\aleph$。

证明 以$(-\infty,+\infty)$ 为例。因为函数$y=\mathrm{tg}\left(\pi x-\dfrac{\pi}{2}\right)$是$(0,1)$到$(-\infty,+\infty)$上的一一映射，所以全体实数具有连续势。 ▌

推论1 无理数集的势为$\aleph$。

证明 记$B=\{$无理数$\}$，$Q=\{$有理数$\}$。显然，B是无限集，而且是不可数集。若不然，由$B\cup Q=(-\infty,+\infty)$，导致$(-\infty,+\infty)$是可数集，而这是不对的。

据§2定理8，

$$\overline{\overline{B}}=\overline{\overline{B\cup Q}}=\aleph. \qquad ▌$$

凡不是代数数的实数叫做超越数。例如，e，π都是超越数，其证明可参看闵嗣鹤 严士健编《初等数论》。类似于推论1，我们可证明。

推论2 超越数全体的势为$\aleph$。

事实上，$\overline{\overline{\{代数数\}}}=\aleph_0$，据§2定理8，有

$$\overline{\overline{\{超越数\}}}=\overline{\overline{\{超越数\}\cup\{代数数\}}}=\overline{\overline{\{实数\}}}=\aleph.$$

注 1° 推论1可形象地说成是无理数比起有理数要多得

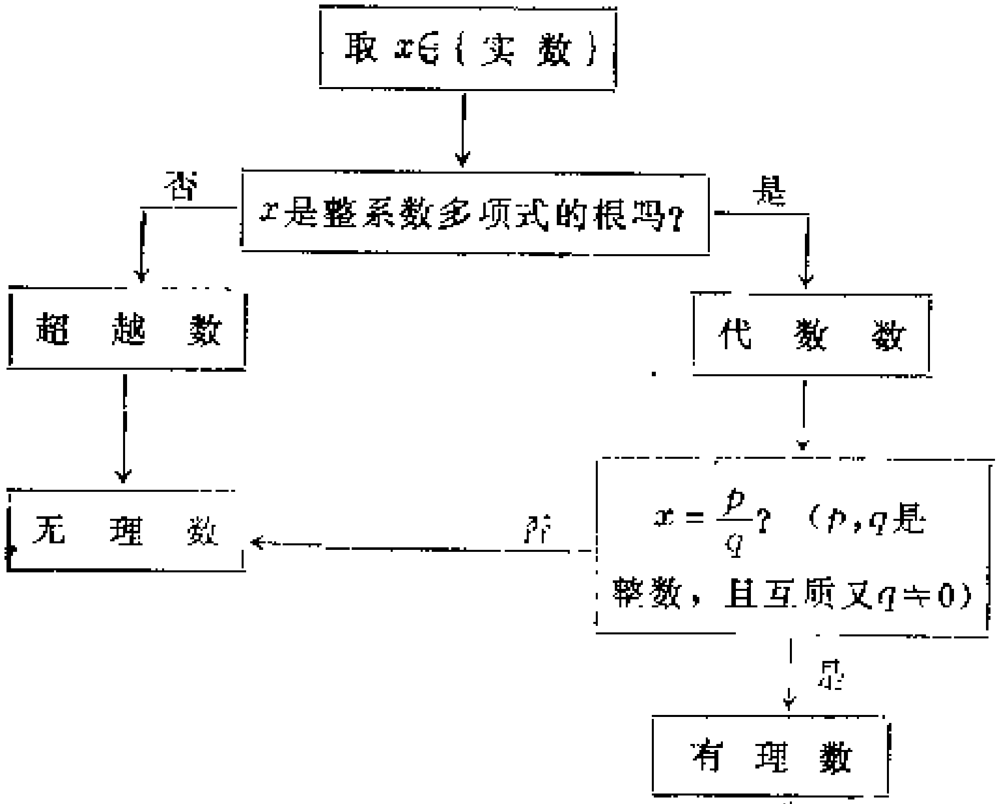
多。换句话说，尽管有理点在数轴上到处分布得很稠密，但留下的空隙（由无理点填补）多得出奇，大大超过了有理点本身。不仅如此，甚至在数轴上任一区间内所包含的无理点也比整个有理点多得多，因为含于任意区间内的无理点集是从该区间内除去所有有理点（仅构成一可数子集）而得到。由此我们得到下面更为深刻的结论：

在任意两个不同的实数之间存在有无理数，并且是非可数个，其势为$\aleph$。

2° 推论2不仅告诉我们超越数是存在的，而且远比代数数要多。

因为代数数集包括整个有理数及一部分无理数，所以超越数又可定义为不是代数数的无理数。

现列表归纳如下：



定理 4 两两不相交的有限个势为$\aleph$的并集，其势为$\aleph$.

证明 设$A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k$，$A_k\cap A_{k'}=\varnothing(k\neq k')$，又$\overline{\overline{A}}_k=\aleph$ $(k=1,2,\cdots,n)$。取$I_k=[k-1,k)$，则$I_k\cap I_{k'}=\varnothing(k\neq k')$，且$\overline{\overline{I}}_k=\aleph$ $(k=1,2,\cdots,n)$。

据本章§1定理2′，有

$$\bigcup_{k=1}^{n}A_k\sim\bigcup_{k=1}^{n}I_k,$$

而 $$\bigcup_{k=1}^{n}I_k=[0,\ n]，其势为\aleph，$$

故 $$A=\bigcup_{k=1}^{n}A_k的势亦为\aleph。$$ ▌

于是我们有

$$\underbrace{\aleph+\aleph+\cdots+\aleph}_{n\text{个}}=n\aleph=\aleph.$$

定理 5 两两不相交的可数个势为$\aleph$的并集，其势为$\aleph$。

证明 设 $A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n$，$A_n\cap A_m=\varnothing$ $(n\neq m)$，又 $\overline{\overline{A}}_n=\aleph$ $(n=1,2,\cdots)$，取 $I_n=[n-1,\ n)$，则 $I_n\cap I_m=\varnothing(n\neq m)$，且 $\overline{\overline{I}}_n=\aleph$ $(n=1,\ 2,\cdots)$。从而 $A_n\sim I_n$。

据本章§1定理2′，有

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\sim\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,$$

而 $$\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n=[0,\ +\infty)，其势为\aleph，$$

故 $$A=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n也具有连续势。$$ ▌

于是又有

$$\underbrace{\aleph+\aleph+\cdots+\aleph+\cdots}_{\aleph_0\text{个}}=\aleph\aleph_0=\aleph.$$

以后我们将证明：$\aleph\aleph=\aleph$.

*§4 p进位小数

通常我们采用十进位制表示实数。十进位数的每一数位只能取0，1，2，…，9十个不同的数字，而且它是“逢十进一”，即每一位计满十就向高位进一，“十”叫做十进位制的基数。但是十进位表数法不是唯一的方法，例如电子计算机中用到二进位、四进位、八进位等。为简单起见，现就[0，1]中的实数能否表示为p进位小数（p为大于1的自然数）进行讨论。

实数$a(0\leqslant a\leqslant 1)$用十进位小数可写为

$$a=0.\ a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

其中a_n取0，1，…，9十个数字，$n=1$，2，…；或写成级数形式

$$\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_n}{10^n}+\cdots. \qquad (1)$$

如果把(1)中所出现的“10”都换为“2”，且$b_n(n=1,\ 2,\cdots)$只能取0，1这两个数字，那么级数

$$\frac{b_1}{2}+\frac{b_2}{2^2}+\cdots+\frac{b_n}{2^n}+\cdots$$

便叫做二进位小数，简记为

$$(0.\ b_1b_2\cdots b_n\cdots)_{二},$$

“二”叫做二进位制的基数。

如果把(1)中所出现的“10”不是换为“2”，而是都换为“3”，且$c_n(n=1, 2, \cdots)$ 只能取0，1，2这三个数字，那么级数

$$\frac{c_1}{3}+\frac{c_2}{3^2}+\cdots+\frac{c_n}{3^n}+\cdots$$

叫做三进位小数，简记为

$$(0.\ c_1c_2\cdots c_n\cdots)_{三},$$

“三”叫做三进位制的基数。

一般地，设p为大于1的自然数，$t_n(n=1, 2, \cdots)$ 只能取0，1，2，…，$p-1$中的数字（共p个），称级数

$$\frac{t_1}{p}+\frac{t_2}{p^2}+\cdots+\frac{t_n}{p^n}+\cdots \tag{2}$$

为p进位小数，简记为

$$(0.\ t_1t_2\cdots t_n\cdots)_p, \tag{2'}$$

P叫做p进位制的基数。

一、现在问：p进位小数是否表〔0，1〕中的实数？换句话说，级数（2）是否收敛，如果收敛其和是否为0与1之间的一个实数呢？

因为t_n是小于p的非负整数，所以

$$0\leqslant\frac{t_n}{p^n}\leqslant\frac{p-1}{p^n},$$

而级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p-1}{p^n}=(p-1)\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots+\frac{1}{p^n}+\cdots\right]$$

是公比为$\frac{1}{p}$(<1) 的等比级数，因而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p-1}{p^n}$$

收敛，其和为1。

由正项级数比较判别法知，级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t_n}{p^n}$亦收敛，且有

$$0\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{t^n}{p^n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p-1}{p^n}\leqslant 1.$$

于是，p进位小数可表$[0,1]$中的实数。

在p进位小数(2′)中，自某一项以后t_n全为0，则该小数叫做p进位有限小数，否则叫p进位无限小数。

任何有限小数(不等于0) 必可改写成无限小数。事实上，有限小数

$$0.t_1t_2\cdots t_n00\cdots,\quad t_n\neq 0 \qquad (3)$$

可改写为无限小数

$$0.t_1t_2\cdots t_{n-1}(t_n-1)(p-1)(p-1)\cdots. \qquad (4)$$

因为

$$\begin{aligned}&0.t_1t_2\cdots t_{n-1}(t_n-1)(p-1)(p-1)\cdots\\&=\frac{t_1}{p}+\frac{t_2}{p^2}+\cdots+\frac{t_{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{t_n-1}{p^n}+\frac{p-1}{p^{n+1}}+\frac{p-1}{p^{n+2}}+\cdots\\&=\frac{t_1}{p}+\frac{t_2}{p^2}+\cdots+\frac{t_{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{t_n-1}{p^n}\\&\quad+(p-1)\cdot\frac{1}{p^{n+1}}\left[1+\frac{1}{p}+\frac{1}{p^2}+\cdots\right]\end{aligned}$$

$$=\frac{t_1}{p}+\frac{t_2}{p^2}+\cdots+\frac{t_{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{t_n-1}{p^n}+(p-1)\cdot\frac{1}{p^{n+1}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{p}}$$

$$=\frac{t_1}{p}+\frac{t_2}{p^2}+\cdots+\frac{t_{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{t_n}{p^n}$$

$$=0.\ t_1t_2\cdots t_n00\cdots.$$

例如 $(0.1584)_{十}=(0.158399\cdots)_{十}$，

$(0.0101)_{二}=(0.010011\cdots)_{二}$.

二、反过来，$[0,1]$中的实数是否可以表示为p进位小数呢？为了便于理解，就$p=2$讨论。

1) 设$x=\frac{m}{2^n}$($0<m<2^n$，m、n为自然数，且m与2^n互质)，显然$0<x<1$.

我们用逐次二等分区间的办法．第一次把区间$[0,1]$二等分，得$\left[0,\frac{1}{2}\right]$，$\left[\frac{1}{2},1\right]$．由假设知，$x$只属于其中一个，记为$\Delta_1=\left[\frac{a_1}{2},\frac{a_1}{2}+\frac{1}{2}\right]$（$a_1$取0或1)，且$x$不为区间$\Delta_1$的端点，故

$$\frac{a_1}{2}<x<\frac{a_1}{2}+\frac{1}{2}$$

或写为

$$0.a_1<x<0.a_1+\frac{1}{2}.$$

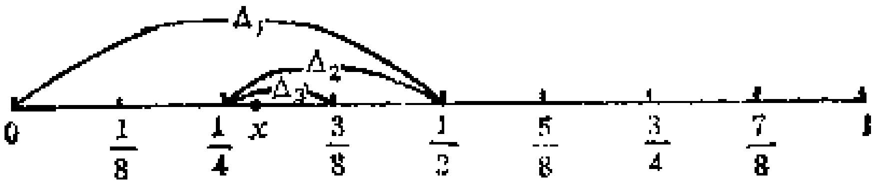


图3.2

第二次将区间[0, 1]四等分，于是Δ_1被二等分，x属于其中一个小区间，记为

$$\Delta_2=\left[\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2},\ \frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{1}{2^2}\right],\qquad (a_1,\ a_2\text{取0或1})$$

并且x不是区间Δ_2的端点，故

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}<x<\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\frac{1}{2^2}$$

或写为

$$0.a_1a_2<x<0.a_1a_2+\frac{1}{2^2}.$$

……

第n次将区间[0, 1]分成2^n等分，x只属于其中一个小区间，记为

$$\Delta_n=\left[0.a_1a_2\cdots a_n,\ 0.a_1a_2\cdots a_n+\frac{1}{2^n}\right],$$

$$(a_i\text{取0或1},\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

Δ_n包含在Δ_{n-1}内，并且x不是区间Δ_n的端点，故

$$0.a_1a_2\cdots a_n<x<0.a_1a_2\cdots a_n+\frac{1}{2^n}.$$

如此继续下去，得到一列闭区间$\{\Delta_n\}$：

1° $\Delta_1\supset\Delta_2\supset\Delta_3\supset\cdots\supset\Delta_n\supset\cdots$,

2° Δ_n的长度为$\frac{1}{2^n}$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$。

据闭区间套定理，属于一切$\Delta_n(n=1,\ 2,\cdots)$的唯一点就是x：$x\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\Delta_n$。因此

$$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

可作为(0，1)中的实数 $x\neq\frac{m}{2^n}$的二进表示

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,\tag{5}$$

并且这种表示法是唯一的。

2）设$x=\frac{m}{2^n}$($0<m<2^n$，m、n为自然数，m与2^n互质)。那么在第 n 次把[0，1]分成2^n等分时，x 一定是这2^n个小区间中某两个相邻小区间的公共端点。例如，$x=\frac{5}{8}=\frac{5}{2^3}$是第三次将[0，1]分成八等分时，为区间$\left[\frac{1}{2},\ \frac{5}{8}\right]$与区间$\left[\frac{5}{8},\ \frac{3}{4}\right]$的公共端点。

记这两个相邻小区间为

$$\Delta_n'=\left[0.a_1a_2\cdots a_{n-1},\ 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}+\frac{1}{2^n}\right]$$

和

$$\Delta_n''=\left[0.a_1a_2\cdots a_{n-1}1,\ 0.a_1a_2\cdots a_{n-1}1+\frac{1}{2^n}\right].$$

相应于左区间 Δ_n'，继续上面的等分手续，x永远是等分后的一系列小区间的右端点，此时 x 可以表示为

$$0.a_1a_2\cdots a_{n-1}011\cdots.$$

相应于右区间Δ_n''，也继续上面的等分手续，x永远是等分后的一系列小区间的左端点，这时 x 表示为

$$0.a_1a_2\cdots a_{n-1}100\cdots.$$

于是，对$x=\frac{m}{2^n}$有两种表示法：

$$x=\begin{cases}0.a_1a_2\cdots a_{n-1}011\cdots,\\0.a_1a_2\cdots a_{n-1}100\cdots.\end{cases}\qquad(6)$$

又 $0=0.00\cdots$,

$$1=\begin{cases}0.111\cdots,\\1.000\cdots.\end{cases}$$

总结上面所说的，区间[0，1]上的每一实数可表示为二进位小数：

(1) 若$x\neq\frac{m}{2^n}$ ($0<x<1$, $\frac{m}{2^n}$为既约分数)，则x可唯一地表为二进位无限小数(5)；

(2) 若$x=\frac{m}{2^n}$ ($0<x\leqslant1$, $\frac{m}{2^n}$为既约分数)，则x有两种表示法(6)，一种是二进位无限小数，一种是二进位有限小数。例如，

$$\frac{3}{8}=\begin{cases}0.010111\cdots,\\0.011000\cdots;\end{cases}\qquad\frac{5}{8}=\begin{cases}0.100111\cdots,\\0.101000\cdots.\end{cases}$$

(3) 若$x=0$，则$0=0.00\cdots$。

注 对于$x=\frac{m}{2^n}$，我们可这样考虑。因$\frac{m}{2^n}$可写为：

$$\frac{a_1}{2}+\frac{a_2}{2^2}+\cdots+\frac{a_{n-1}}{2^{n-1}}+\frac{1}{2^n},\ (a_i\text{取}0\text{或}1,\ i=1,2,\cdots,n-1)$$

也就是说 $x=0.a_1a_2\cdots a_{n-1}1$（二进位有限小数）。

在第一段中已指出，任何一个有限小数(3)可改写为无限

小数(4)，所以当$x=\frac{m}{2^n}$时，有两种二进位小数表示法(6)。

以上就$p=2$讨论，现回到一般情形。如果不是逐次二等分区间，而是三等分或十等分，则得到实数$x(0\leqslant x\leqslant 1)$的三进位或十进位小数表示。一般地，若用大于1的自然数p来逐次等分区间[0, 1]及其等分后的一系列小区间，便得到实数x的p进位小数表示，并且

(i) 当$x\neq\frac{m}{p^n}$($\frac{m}{p^n}$为既约分数)时，x可唯一地表示为p进位无限小数：

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

其中$a_n(n=1, 2,\cdots)$ 取0，1，…，$p-1$中的数字。

(ii) 当 $x=\frac{m}{p^n}$($\frac{m}{p^n}$为既约分数)时，则有两种表示法：

$$x=\begin{cases}0.a_1a_2\cdots a_{n-1}(a_n-1)(p-1)(p-1)\cdots,\\0.a_1a_2\cdots a_{n-1}a_n00\cdots.\end{cases}$$

又 $$0=0.00\cdots.$$

三、(0, 1]上的实数是否可以表示为两个不同的p进位无限小数呢？

假若有两个不同的小数

$$\frac{t_1}{p}+\frac{t_2}{p^2}+\cdots+\frac{t_k}{p^k}+\cdots$$

及

$$\frac{t_1'}{p}+\frac{t_2'}{p^2}+\cdots+\frac{t_k'}{p^k}+\cdots$$

表示同一个实数：

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_k}{p^k}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t'_k}{p^k}. \tag{7}$$

其中$\{t_k\}$和$\{t'_k\}$中的数都是0与$p-1$间的整数。必然有自然数n，使$t_n\neq t'_n$，而当$k<n$时，$t_k=t'_k$。不妨设$t_n>t'_n$。由（7）得到

$$\frac{t_n-t'_n}{p^n}=\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{t'_k-t_k}{p^k}.$$

然而上式右边不超过$\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{p-1}{p^k}=\frac{1}{p^n}$，左边不小于$\frac{1}{p^n}$.因此只有左右边都等于$\frac{1}{p^n}$才使等式成立。这时必有$t_n-t'_n=1$。又当$k>n$时，$t'_k-t_k=p-1$。但$t_k\geqslant 0$，$t'_k\leqslant p-1$，因此，当$k>n$时，$t'_k=p-1$，$t_k=0$。于是，这两个小数一个是

$$\frac{t_1}{p}+\frac{t_2}{p^2}+\cdots+\frac{t_{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{t_n}{p^n}+\frac{0}{p^{n+1}}+\frac{0}{p^{n+2}}+\cdots$$
$$=0.t_1t_2\cdots t_{n-1}t_n00\cdots,$$

另一个是

$$\frac{t_1}{p}+\frac{t_2}{p^2}+\cdots+\frac{t_{n-1}}{p^{n-1}}+\frac{t_n-1}{p^n}+\frac{p-1}{p^{n+1}}+\frac{p-1}{p^{n+2}}+\cdots$$
$$=0.t_1t_2\cdots t_{n-1}(t_n-1)(p-1)(p-1)\cdots,$$

因此不能同时为无限小数。换句话说，(0，1]上的实数不能表示为两个不同的p进位无限小数。

由上面三段的讨论，立即得到

定理 1 p进位无限小数全体的势为$\aleph$。

证明 事实上，$(0, 1]$ 对等于 $\{p$进位无限小数$\}$。而前者的势为$\aleph$，所以后者的势亦为$\aleph$。]

推论 p进位小数全体的势为$\aleph$。

证明 记$A=\{p$进位小数$\}$，$B=\{p$进位无限小数$\}$，$C=\{p$进位有限小数$\}$，

$$A=B\cup C。$$

而一切形如$\frac{m}{p^n}$($0<m<p^n$，m，n 为自然数，m与p^n互质)的数所成之集是可数集（据 §2定理7），所以$\overline{C}=\aleph_0$，从而

$$\overline{A}=\overline{B\cup C}=\overline{B}=\aleph。$$]

定理 2 设M是由两个元素x，y重复排列而成的叙列全体，则M的势为$\aleph$。

证明 作M到二进位小数全体A之间的映射 φ 如下：任取$b=\{b_n\}\in M$，作二进位小数$\varphi(b)=0.t_1t_2\cdots t_n\cdots$，其中当$b_n=x$时，$t_n=0$；而当 $b_n=y$ 时，$t_n=1$。容易看出，φ是M到A的一一映射。由定理1推论知，$\overline{A}=\aleph$，故$\overline{M}=\aleph$。]

注 该定理可推广为：若 M 是由有限个元素（不妨设p个元素）造成的元素列全体，则M的势亦为$\aleph$。

提示：仿定理2证明，作 M到p进位小数全体之间的映射，并证明该映射是双射即可。

定理 3 设Q为可数集，则 Q 的一切子集所成之集 T 的势是$\aleph$。

证明 作T 到二进位小数全体A之间的映射ψ如下：将Q中

的元素编号成

$$q_1, q_2, \cdots, q_n, \cdots.$$

对任一$t\in T$，作二进位小数$\psi(t)=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，其中当$q_n\in t$时，$a_n=1$，而当$q_n\notin t$时，$a_n=0$。显然$\psi$是$T$到$A$上的一一映射，因此

$$T=\bar{A}=\aleph. \qquad \rbrack$$

§5 贝恩斯坦(F.Bernstein)定理

贝恩斯坦定理是指：若两集中的每一集各与另一集的一个子集对等，则此两集本身也是对等的。为了简化该定理的证明，我们先给出两个引理。

引理 1 设A的一列子集$\{A_n\}$满足下列条件：

$$A\supset A_1\supset A_2\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots, \qquad (*)$$

则

$$A=(A-A_1)\cup(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup\cdots\cup(A_{n-1}-A_n)\cup\cdots\cup D,$$

其中

$$D=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n.$$

证明 很明显，

$$(A-A_1)\cup(A_1-A_2)\cup\cdots\cup(A_{n-1}-A_n)\cup\cdots\cup D\subset A,$$

为此只要证相反的包含关系成立就可以了。

设$a\in A$，或者a属于一切A_n，因而$a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=D$；或者存在第一个$A_n$，$a$虽还属于$A_{n-1}$但不再属于$A_n$及以后诸集（注意

到(*))，因而$a\in A_{n-1}-A_n$。(记$A_0=A$)。由此可知，

$$a\in(A-A_1)\cup(A_1-A_2)\cup\cdots\cup(A_{n-1}-A_n)\cup\cdots\cup D,$$

$$A\subset(A-A_1)\cup(A_1-A_2)\cup\cdots\cup(A_{n-1}-A_n)\cup\cdots\cup D.$$

因而，本引理成立。 ▮

引理 2 设$A\supset A_1\supset A_2$，$A\sim A_2\Rightarrow A\sim A_1$。

证明 不妨设A_2是A_1的真子集，A_1是A的真子集。由$A\sim A_2$知，存在A到A_2上的一一映射φ。

因为A_1是A的真子集，在映射φ下，A_1必与A_2中的一个真子集A_3对等，即

$$A_1\overset{\varphi}{\sim}A_3.\quad(A_3\subset A_2)$$

A_2作为A_1的一个真子集，在映射φ下，A_2必与A_3中的一个真子集A_4对等，即

$$A_2\overset{\varphi}{\sim}A_4.\quad(A_4\subset A_3)$$

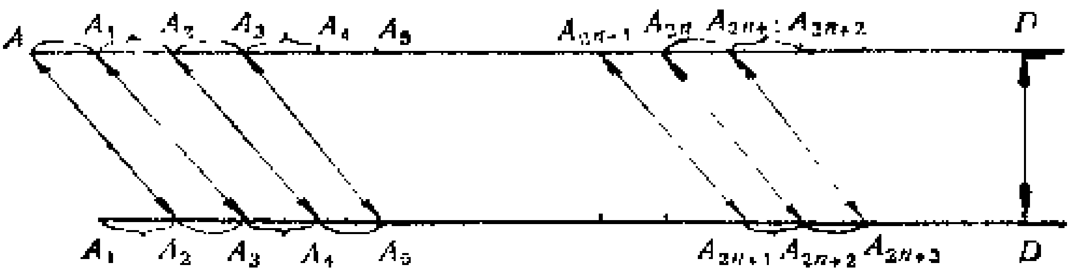


图3.3 引理 2 证明示意图

如此手续继续下去，得到A的一列子集

$$A\supset A_1\supset A_2\supset A_3\supset\cdots\supset A_n\supset\cdots,$$

在同一映射φ下，

$$A\sim A_2\sim A_4\sim\cdots,$$

$$A_1 \sim A_3 \sim A_5 \sim \cdots.$$

于是，有

$$A - A_1 \sim A_2 - A_3 \sim A_4 - A_5 \sim \cdots \sim A_{2n} - A_{2n+1} \sim \cdots.$$

由引理1，A与A_1可分解为如下的互不相交的子集之并：

$$A = (A - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4) \cup \cdots \cup D$$

$$A_1 = (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup (A_3 - A_4) \cup \cdots \cup D$$

其中 $D = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$。

现在证明$A \sim A_1$。因为

$$A - A_1 \sim A_2 - A_3$$
$$A_1 - A_2 \sim A_1 - A_2$$
$$A_2 - A_3 \sim A_4 - A_5$$
$$A_3 - A_4 \sim A_3 - A_4$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$A_{2n} - A_{2n+1} \sim A_{2n+2} - A_{2n+3}$$
$$A_{2n+1} - A_{2n+2} \sim A_{2n+1} - A_{2n+2}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\begin{array}{l} \cup) \qquad\qquad\qquad D \sim D \\ \hline (A - A_1) \cup (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup D \\ \sim (A_1 - A_2) \cup (A_2 - A_3) \cup \cdots \cup D \end{array}$$

即 $A \sim A_1$。 ∎

定理 设有A, B二集。若

$$A \sim B_1 \subset B, \quad B \sim A_1 \subset A,$$

则 $A \sim B$。

证明 若 $A_1=A$ 或 $B_1=B$，定理成立。今设 A_1 为 A 的真子集，B_1 为 B 的真子集。

由定理中的条件，存在 A 到 B_1 上的一一映射 φ_1，又存在 B 到 A_1 上的一一映射 φ_2。于是在映射 φ_2 下，B_1（作为 B 的子集）与 A_1 的子集 A_2 一一对应，即

$$A\overset{\varphi_1}{\sim}B_1,\ B_1\overset{\varphi_2}{\sim}A_2.$$

从而映射 φ_1，φ_2 之积 $\varphi_2\varphi_1=\varphi$ 是 A 到 A_2 上的一一映射，即

$$A\overset{\varphi}{\sim}A_2,$$

又 $A\supset A_1\supset A_2$。由引理2，$A\sim A_1$。再由 $B\sim A_1$，得

$$A\sim B. \qquad \rbrack$$

贝恩斯坦定理是判断两集对等的重要定理，现举例说明。

例 1 由平面上一切点所成之集 D_2 的势为$\aleph$。

证明 1° 首先证明平面上正方形点集

$$A=\{(x,\ y);\ 0<x<1,\ 0<y<1\}$$

能与直线上的开区间 $I=(0,\ 1)$ 等势。

因 $I=(0,\ 1)$ 对等于十进位无限小数全体 B($0.99\cdots$ 除外)，所以我们用十进位无限小数表示正方形点集 A 中任一点 $P(x,y)$ 的 x 和 y (这种表示法是唯一的)，

$$x=0.x_1x_2\cdots x_n\cdots,$$

$$y=0.y_1y_2\cdots y_n\cdots,$$

其中 $\{x_n\}$ 与 $\{y_n\}$ 中的数都是0与9之间的整数。

作 A 到 B 中的映射 φ：

$$P(x,\ y)\in A\longrightarrow\varphi(P)\in B,$$

其中 $\varphi(P)=0.x_1y_1x_2y_2\cdots x_ny_n\cdots$。我们证明映射$\varphi$是单一的。

若$Q(x', y')$是A中的另外一点，即

$$P(x, y)\neq Q(x', y'),$$

并将x'，y'表为十进位无限小数：

$$x'=0.x_1'x_2'\cdots x_n'\cdots,$$

$$y'=0.y_1'y_2'\cdots y_n'\cdots.$$

因为$P(x,y)\neq Q(x',y')$，故必有自然数k，使 $x_k\neq x_k'$ 或 $y_k\neq y_k'$，于是

$$\varphi(Q)=0.x_1'y_1'x_2'y_2'\cdots x_n'y_n'\cdots$$

的各位小数与

$$\varphi(P)=0.x_1y_1x_2y_2\cdots x_ny_n\cdots$$

的各位小数不全相同，因此$\varphi(P)\neq\varphi(Q)$，这就证明了φ是单一映射，从而φ是A到$\varphi(A)\subset B$上的一一映射，

$$A\overset{\varphi}{\sim}\varphi(A)\subset B.$$

又因为 $B\sim I$，所以A也对等于I的一个子集I_1，

$$A\sim I_1\subset I.$$

另一方面，A的子集$A_1=\left\{(x, y);\ 0<x<1,\ y=\dfrac{1}{2}\right\}$与$I=(0, 1)$对等，即

$$I\sim A_1\subset A.$$

由贝恩斯坦定理知 $A\sim I$。

2° 再证$D_2=\{(x,y);\ -\infty<x<+\infty,\ -\infty<y<+\infty\}$与$A$也等势。

任取$P(x,y)\in A$，令$\psi(P)=\left(\operatorname{tg}\left(\pi x-\frac{\pi}{2}\right),\ \operatorname{tg}\left(\pi y-\frac{\pi}{2}\right)\right)$，

显然ψ是A到D_2上的一一映射，所以

$$D_2\sim A.$$

由此可知：$\overline{\overline{D}}_2=\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{I}}=\aleph$。 ∎

注 1）两两不相交的$\aleph$个势为$\aleph$的集的并集，其势亦为$\aleph$。

事实上，对于每一个被加集，使其与平面XOY上平行于OX轴的直线一一对应，从而所述的并集与平面XOY一一对应，因而其势都为$\aleph$。这就证实了在§3中曾提出的

$$\aleph\cdot\aleph=\aleph.$$

2）仿照例1的证法，我们可证明三维笛氏空间D_3，一般地，n维笛氏空间D_n的势也是$\aleph$。

现在我们把n维空间D_n再加以推广。

可列无限维空间D_∞是指无限实数列全体所成之集，该空间的点为$(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)$。可列无限维空间可以看作是可列个一维空间的直幂集，即

$$D_\infty=R\times R\times\cdots\times R\times\cdots\equiv R^N,$$

其中R表实数全体，N表自然数全体。

例 2 实数列全体D_∞的势为$\aleph$。

证明 与例1一样，分两步证。

1° 记 $I=(0, 1)$，

$$A=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots),\ 0<x_n<1, n=1,2,\cdots\},$$

$$B=\{\text{十进位无限小数}\}\ (\text{除去}0.99\cdots).$$

对A中的点$x=(x_1, x_2,\cdots, x_n, \cdots)$，按十进位无限小数

表示x_n，有

$$x_1 = 0.x_{11}\,x_{12}\cdots x_{1n}\cdots,$$
$$x_2 = 0.x_{21}\,x_{22}\cdots x_{2n}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots,$$
$$x_n = 0.x_{n1}\,x_{n2}\cdots x_{nn}\cdots,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

由上述一列数$\{x_n\}$，作小数$\psi(x)$：

$$\psi(x) = 0.x_{11}x_{21}x_{12}\cdots x_{n1}x_{(n-1)2}\cdots x_{1n}\cdots$$

与点x相对应：

$$x \subset A \xrightarrow{\psi} \psi(x) \in B.$$

在A中另取一点$y=(y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n,\ \cdots)$，显然，当$x \neq y$时，$\psi(x) \neq \psi(y)$。因此，映射$\psi$是$A$到$B$中的单一映射，故$\psi$是$A$到$\psi(A)\subset B$上的一一映射，

$$A \sim \psi(A) \subset B.$$

又因为　$B \sim I$，　　所以　$A \sim I_1 \subset I$。

另一方面，A的子集

$$A_1 = \left\{\left(x_1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{2},\ \cdots\right);\ 0<x_1<1\right\}$$

与I对等，即

$$I \sim A_1 \subset A.$$

由贝恩斯坦定理，有

$$A \sim I.$$

2°　再证$D \sim A$。

任取$x=(x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots)\in A$，令

$$\varphi(x)=\left(\operatorname{tg}\left(\pi x_1-\frac{\pi}{2}\right),\ \operatorname{tg}\left(\pi x_2-\frac{\pi}{2}\right),\ \cdots,\right.$$

$$\left.\operatorname{tg}\left(\pi x_n-\frac{\pi}{2}\right),\ \cdots\right),$$

显然φ是A到D_∞上的一一映射，所以

$$D_\infty \sim A.$$

由此可知：$\overline{D_\infty}=\aleph$。]

§6 势的比较

有限集的势就是计数，计数是可以比较大小的。对于任意二集（可以为有限集或无限集），如果它们不对等，对应的势也就不相同，那么势是否也可以比较大小呢？为此先对有限集的势作一分析。

设有有限集A、B，计数分别为m与n，不妨设$m<n$。此时$A \not\sim B$，但A必然可以和B中由m个元素所成的集B_1（B的子集）对等，即 $A\sim B_1\subset B$。据此，我们很自然地引入下面的定义：

设A，B为二集。若$A\sim B_1\subset B$，且$A\not\sim B$，就称A的势小于B的势，记为$\overline{A}<\overline{B}$；或说$B$的势大于$A$的势，记做$\overline{B}>\overline{A}$。

显然，对任何有限势n，有

$$n<\aleph_0,\quad n<\aleph.$$

例 证明无限势$\aleph_0$，$\aleph$满足

$\aleph_0<\aleph$.

证明 设$N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，$I=[0, 1]$。那末

$$\overline{\overline{N}}=\aleph_0,\quad \overline{\overline{I}}=\aleph.$$

因为$N\nsim I$，但I有子集

$$I_1=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$$

适合$I_1\sim N$。据定义，有

$$\aleph_0<\aleph.$$ ▮

以下我们说明关于势的大小的定义是合理的。

定理 1 对于任何二集A与B，三个关系式

$$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}},\quad \overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}},\quad \overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$$

不能有两个同时成立。

证明 由势的大小定义，$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$与$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$不能同时成立，$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$ 与 $\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}}$也不能同时成立，所以本定理归结为证明$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$与$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$不能同时成立。

用反证法。假设$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$与$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$同时成立。由$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$，则

i) A与B不对等：$A\nsim B$；

ii) A与B的一个子集B_1对等：$A\sim B_1\subset B$。

又由$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$，有

iii) B与A的一个子集A_1对等，$B\sim A_1\subset A$。

由ii)，iii)，据贝恩斯坦定理，应有

$$A\sim B,$$

与i) 矛盾。从而$\overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$与$\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$不能同时成立。 ▮

现在问：对任意二集A和B，下面三个关系式

$$\overline{\overline{A}}=\overline{\overline{B}},\quad \overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}},\quad \overline{\overline{A}}>\overline{\overline{B}}$$

是否必有一个成立呢？回答是肯定的，上述三个关系式至少有一个成立（可参看陈建功著《实函数论》第一章），从而上面的三个关系式有且仅有一个成立，这样势的比较问题便解决了。

直到现在为止，除了有限势外，我们只知道$\aleph_0$与$\aleph$这两个无限势，那末还有没有别的无限势呢？问：

1.在$\aleph_0$与$\aleph$之间是否还有势μ，使得

$$\aleph_0<\mu<\aleph$$

呢？康托尔曾预料没有这种μ存在，但未给予证明，这就是集论中著名的连续统假设。自康托尔提出这个假设以来，经过八十多年不少人的努力，到本世纪六十年代，柯恒对此作了解答，有兴趣的读者可参看 Paul J. Cohen 著《Set theory and the continuum hypothesis》。

2.有没有大于$\aleph$的势存在？下面定理告诉我们，对于任何一个势，我们可以造一个集使其势大于所给的势。

定理 2 设M是任意一个集，$\mathfrak{M}$是由M的一切子集组成的集族，那么$\mathfrak{M}$的势大于M的势，即

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}>\overline{\overline{M}}.$$

***证明** 当M为空集时，$\mathfrak{M}$是以空集为元素的集族，即$M=\varnothing$，$\mathfrak{M}=\{\varnothing\}$。因$\overline{\overline{M}}=0$，$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}=1$，我们有$\overline{\overline{M}}<\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$。

现设$M\neq\varnothing$。由M中单独一个元素x组成的单元素集$\{x\}$的全体记为$\mathfrak{M}_1$。显然，$\mathfrak{M}_1\subset\mathfrak{M}$，且$\mathfrak{M}_1\sim M$（只要令$\{x\}\in\mathfrak{M}_1\rightarrow x\in M$便可知）。因此要证$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}>\overline{\overline{M}}$，只要证$\mathfrak{M}\nsim M$就行了。

用反证法。假设$\mathfrak{M}\sim M$，则存在$\mathfrak{M}$到M上的一一映射φ：$M^*\in\mathfrak{M}\to x\in M$。这时有两种可能的情形：或者$x\in M^*$或者$x\notin M^*$。称第一种情形中的元素$x$为$M$的第一类元素，第二种情形中的$x$为$M$的第二类元素。$M$中的每一个元素$x$必属于且只属于这两类中的一类。我们把$M$的第二类元素全体记为$M_0{}^*$，它是$M$的一个子集，故$M_0{}^*\in\mathfrak{M}$。于是在映射$\varphi$下，有$x_0\in M$与$M_0{}^*$相对应。象$M$中每一元素一样，元素$x_0$或属于第一类，或属于第二类。

若x_0属于第一类，$x_0\in M_0{}^*$。因为按$M_0{}^*$的定义，它是由M中一切第二类元素组成，故x_0必属于第二类，于是$x_0\notin M_0{}^*$，这与前面假设矛盾。因此我们只能假设x_0属于第二类，$x_0\notin M_0{}^*$。但又由$M_0{}^*$的定义，x_0就该属于M中的第一类，因而$x_0\in M_0{}^*$，这与假设x_0属于第二类相矛盾。

这样一来，M的元素x_0既不能属于第一类，又不能属于第二类，这是不可能的，这一矛盾说明$\mathfrak{M}$与M不能对等。

既然$\mathfrak{M}\nsim M$，又$\mathfrak{M}$有子集$\mathfrak{M}_1\sim M$，故

$$\overline{\overline{\mathfrak{M}}}>\overline{\overline{M}}. \qquad \rbrack$$

由$\mathfrak{M}$的一切子集又可组成一集$\mathbf{M}$，依定理2，有$\overline{\overline{\mathbf{M}}}>\overline{\overline{\mathfrak{M}}}$。由此可知，存在无限多个势，并且不可能有最大的势。

注意　若M是一个由n个元素组成的有限集，则$\mathfrak{M}$的元素个数为2^n（见第一章§1）。因此我们很自然地引入下面的定义：

若M的势为μ，而以它的一切子集组成的集$\mathfrak{M}$的势为τ，则

规定

$$\tau = 2^{\mu}.$$

定理2表示 $2 > \mu$，例如 $2^{\aleph_0} > \aleph_0$。又由§4定理3知，$\aleph = 2^{\aleph_0}$，于是$\aleph > \aleph_0$。

第四章　点　集

§1　距离　邻域

一、距离

由解析几何我们知道，直线上两点P_1，P_2间的距离定义为连接这两点的线段的长度。记P_1点的坐标为x_1，P_2点的坐标为x_2，则点P_1，P_2间的距离

$$\rho(P_1, P_2)=|x_2-x_1|. \qquad (1)$$

XOY平面上两点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$间的距离定义为

$$\rho(P_1, P_2)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}, \qquad (2)$$

它是连接平面点P_1与P_2的线段$\overline{P_1P_2}$的长度。空间内两点$P_1(x_1, y_1, z_1)$，$P_2(x_2, y_2, z_2)$间的距离定义为

$$\rho(P_1, P_2)$$
$$=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}, \qquad (3)$$

它是连接空间内两点P_1与P_2的线段$\overline{P_1P_2}$的长度。

不论是直线、平面还是空间，上述两点间的距离具有如下的共同性质：

1. $\rho(P_1, P_2)$是非负实数，当且仅当$P_1=P_2$时，$\rho(P_1, P_2)=0$。

2．对称性　$\rho(P_1, P_2)=\rho(P_2, P_1)$。

3．三点不等式　对任意的三点P_1，P_2，P_3，有

$$\rho(P_1, P_2)\leqslant\rho(P_1, P_3)+\rho(P_2, P_3)。$$

这个不等式的成立是很显然的，因为由初等几何知道，三角形两边之和大于第三边。

而直线、平面以及通常所说的空间都是第二章§1介绍的n维空间的特例。要在n维空间或者更一般的集上引入距离概念，上面的讨论给我们以启示。

定义　设X是一非空集。假如对于X中任意二元素x，y，有一个非负实数$\rho(x, y)$与之对应，且满足下面三个条件：

1）$\rho(x, y)=0\Longleftrightarrow x=y$，

2）对称性　$\rho(x,y)=\rho(y,x)$，

3）三点不等式　对任意的$x,y,z\in X$，有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z),$$

则称$\rho(x,y)$为x,y之间的距离，而称X按距离$\rho(x,y)$成为距离空间，记做(X,ρ)，简记为X。集X的元素叫做X中的点，X的任一子集叫做X中的点集。

简单说，把引入了距离概念的集叫做距离空间。

注　条件2)可由条件1)，3)推出。

事实上，在3)中取$z=x$，就有

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,x)+\rho(y,x)。$$

由1)　　$\rho(x,x)=0$，所以

$$\rho(x,y)\leqslant\rho(y,x)。$$

再于上式中将x,y互换，得到

$$\rho(y,x)\leq\rho(x,y),$$

这两式结合起来，就是2)。 ∎

例 1 实数全体，实数对(x,y)全体，以及由三个实数组成的有序数组(x,y,z)全体，依式(1)，(2)，(3)都成为距离空间，分别叫做一维、二维、三维欧几里得空间，记以E_1,E_2,E_3。

例 2 记n维空间（即所有含n个实数的有序数组之集）为E_n。

设 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in E_n$，$y=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in E_n$。规定

$$x=y\Longleftrightarrow x_i=y_i\ (i=1,2,\cdots,n)$$

现仿照例 1 来引入距离。令

$$\rho(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n-y_n)^2}$$
$$=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}. \tag{4}$$

显然，条件1)成立。今证条件3)也成立。

设$z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)\in E_n$。如果$x$，$y$，$z$三点中有两点相同，三点不等式自然成立，因此我们假定x，y，z是E_n中三个不同的点。

现证明

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}\leq\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-z_i)^2}$$
$$+\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2}.$$

记　　$u_i = x_i - z_i$，$v_i = z_i - y_i$，于是 $u_i + v_i = x_i - y_i$，

上式可改写为

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(u_i+v_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n}v_i^2} \qquad (*)$$

如果能证明(*)平方后的结果

$$\sum_{i=1}^{n}u_iv_i \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n}u_i^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n}v_i^2}$$

正确，则(*)自然成立。

因为对任意实数A、B，有

$$\left(\sum_{i=1}^{n}u_i^2\right)\cdot A^2 + 2\left(\sum_{i=1}^{n}u_iv_i\right)AB + \left(\sum_{i=1}^{n}v_i^2\right)\cdot B^2$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(u_iA + v_iB)^2 \geqslant 0,$$

记　　$\sum\limits_{i=1}^{n}u_i^2 = a$，　$\sum\limits_{i=1}^{n}u_iv_i = b$，　$\sum\limits_{i=1}^{n}v_i^2 = c$，

那么对任意实数A、B，有

$$aA^2 + 2bAB + cB^2 \geqslant 0$$

又由假设知，$a>0$，$c>0$。

而　　$aA^2 + 2bAB + cB^2 = a\left(A^2 + \frac{2b}{a}AB + \frac{c}{a}B^2\right)$

$$= a\left[\left(A + \frac{b}{a}B\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a^2}B^2\right]$$

因此，由$\left(A + \frac{b}{a}B\right)^2 + \frac{ac-b^2}{a^2}B^2 \geqslant 0$（对任意$A$、$B$），推出

$$ac-b^2\geqslant 0;$$

即 $$\left(\sum_{i=1}^{n} u_i v_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} u_i^2\right)\cdot\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^2\right)$$

从而(*)成立。

E_n按距离(4)成为一距离空间，叫做n维欧几里得空间，简称为n维欧氏空间。而这时的$\rho(x,y)$叫做欧氏距离。

例 3 闭区间上的连续函数在微积分中是经常考虑的。设X是定义在闭区间$[0,1]$上的所有连续函数之集。

若 $x(t)$，$y(t)\in X$，定义

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|. \tag{5}$$

验证$\rho(x,y)$满足条件1)，3)。

显然$\rho(x,y)\geqslant 0$，而 $\rho(x,y)=0$ 仅限于 $x(t)\equiv y(t)$。

又设$z(t)\in X$，那么对任意的$t\in[0,1]$，有

$$\begin{aligned}|x(t)-y(t)| &= |[x(t)-z(t)]+[z(t)-y(t)]|\\ &\leqslant |x(t)-z(t)|+|z(t)-y(t)|\\ &\leqslant \max_{t\in[0,1]}|x(t)-z(t)|+\max_{t\in[0,1]}|z(t)-y(t)|\\ &=\rho(x,z)+\rho(z,y),\end{aligned}$$

因而 $$\max_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y),$$

即 $$\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(z,y).$$

X按距离(5)成为一距离空间，叫做连续函数空间，记为$C[0,1]$。该空间的点是$[0,1]$上的连续函数。$C[0,1]$中两点x,y之间的距离

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[0,1]}|x(t)-y(t)|$$

是指曲线$u=x(t)$ 和 $u=y(t)$之间的最大距离（沿着u轴方向）(图4.1)。

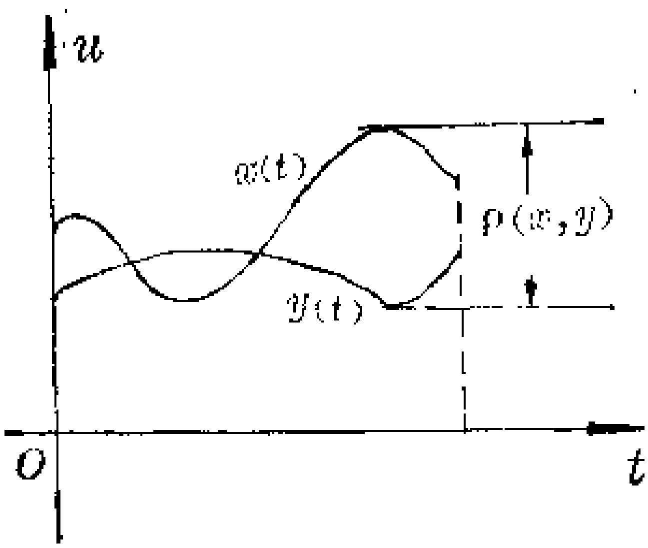


图4.1

设M是距离空间X的一个子集。对M中的任意两点，用它们在X中的距离作为在M中的距离，那么M也成为一距离空间，称M为距离空间 X 的一个子空间。

例如，设Q是全体有理数集，它是一维欧氏空间E_1(即实数直线)的一个子集，我们用公式

$$\rho(r_1,r_2)=|r_1-r_2| \quad (r_1,r_2\in Q)$$

定义距离，则Q也是一个距离空间，它是E_1的一个子空间。

二、邻域

欧氏空间的点是用实数来作坐标的。实数虽然不能用来刻划一般的距离空间的点，但能用来刻划距离空间的两点的远近。为表示距离空间内某一点附近的点，我们引入邻域的概念。为了便于理解，还是就欧氏空间讨论。

定义 E_n中所有到定点a的距离小于$\varepsilon(\varepsilon>0)$的点 x 所成之

集，叫做以 a 为心，ε 为半径的球形邻域，记为$U(a,\varepsilon)$。于是

$$U(a,\varepsilon)=E[x;\ \rho(x,a)<\varepsilon].$$

直线上点a的ε邻域就是开区间$(a-\varepsilon,a+\varepsilon)$，平面上点$a$的$\varepsilon$邻域是以点$a$为圆心，$\varepsilon$为半径的圆的内部（"开圆"），在通常的三维空间内，点a的ε邻域是以点a为球心，ε为半径的球的内部（"开球"）。至于$n>3$，E_n中的邻域则无直观的几何图形。

关于球形邻域，有下列简单性质：

1. 若$U(a,\varepsilon_1)$和$U(a,\varepsilon_2)$是点a的任意两个邻域，则必有邻域$U(a,\varepsilon)$使

$$U(a,\varepsilon)\subset U(a,\varepsilon_1),\ U(a,\varepsilon)\subset U(a,\varepsilon_2).$$

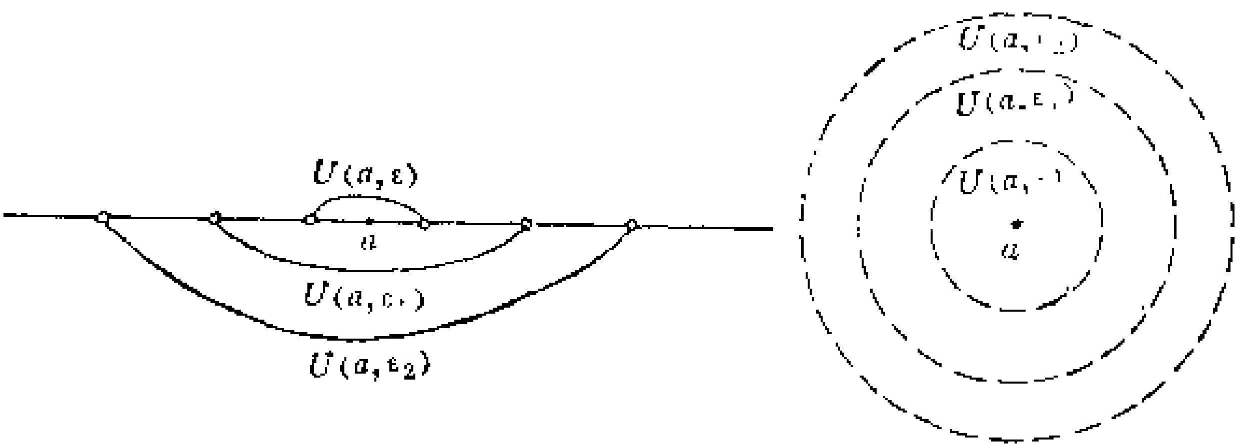


图4.2

证明 取$0<\varepsilon\leqslant\min(\varepsilon_1,\varepsilon_2)$，作邻域$U(a,\varepsilon)$。那末对于属于$U(a,\varepsilon)$的任意$x$，有

$$\rho(x,a)<\varepsilon,$$

从而 $\rho(x,a)<\varepsilon_1,\quad \rho(x,a)<\varepsilon_2,$

$x\in U(a,\varepsilon_1),\quad x\in U(a,\varepsilon_2).$

故 $U(a,\varepsilon)\subset U(a,\varepsilon_1),\quad U(a,\varepsilon)\subset U(a,\varepsilon_2).$]

2. 任给两点$a \neq b$，则必有$U(a,\varepsilon)$，$U(b,\delta)$，使

$$U(a,\varepsilon)\cap U(b,\delta)=\varnothing.$$

意思是说对不同的两点，可作两个不相交的邻域而以这两点为中心。

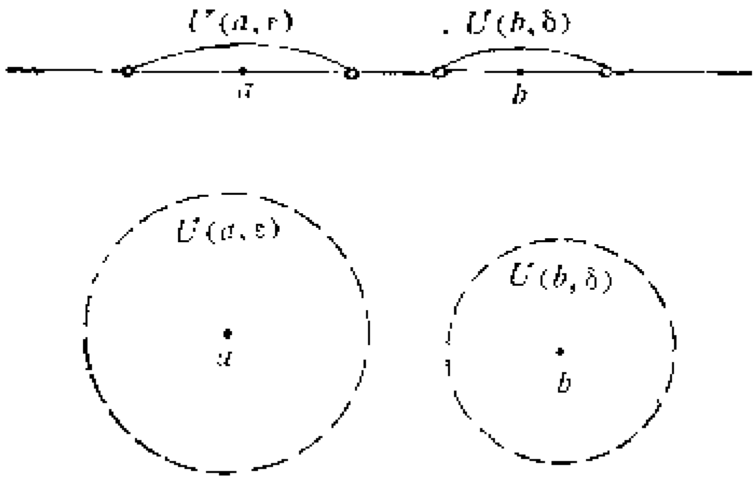


图4.3

证明 因为$a \neq b$，所以$\rho(a,b)>0$。取ε，δ使它们满足$\varepsilon+\delta\leqslant\rho(a,b)$，作邻域$U(a,\varepsilon)$，$U(b,\delta)$。

设 $x\in U(a,\varepsilon)$，则$\rho(x,a)<\varepsilon$。由三点不等式，

$$\rho(x,b)\geqslant\rho(a,b)-\rho(a,x)>\varepsilon+\delta-\varepsilon=\delta,$$

故 $x\notin U(b,\delta)$。

另一方面，若$x\in U(b,\delta)$，则$x\notin U(a,\varepsilon)$。若不然，$x\in U(a,\varepsilon)$，由前面推理知$x\notin U(b,\delta)$，这与$x\in U(b,\delta)$相矛盾，因而

$$U(a,\varepsilon)\cap U(b,\delta)=\varnothing. \quad]$$

3. 对于任意点$b\in U(a,\varepsilon)$，则必有$U(b,\delta)$，使

$$U(b,\delta)\subset U(a,\varepsilon).$$

意思是在一邻域内的任意一点，可以该点为中心作一个小

邻域完全落在原来的邻域内。

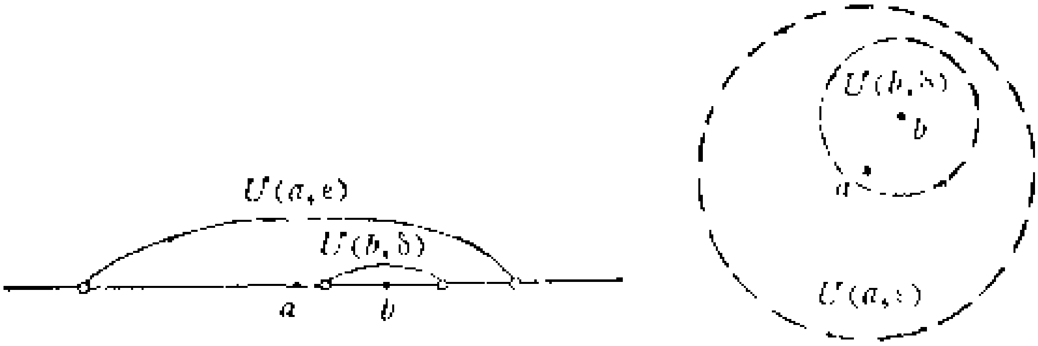


图4.4

证明 因为 $b\in U(a,\varepsilon)$，所以 $\rho(a,b)<\varepsilon$。取 $0<\delta\leqslant\varepsilon-\rho(a,b)$，作邻域$U(b,\delta)$，那么$U(b,\delta)\subset U(a,\varepsilon)$。

事实上，任取$x\in U(b,\delta)$，则$\rho(x,b)<\delta$，于是

$$\rho(a,x)\leqslant\rho(a,b)+\rho(b,x)<\rho(a,b)+\delta\leqslant\varepsilon,$$

从而 $\qquad x\in U(a,\varepsilon)$，$U(b,\delta)\subset U(a,\varepsilon)$ ▮

由上面三条基本性质又可得到

4．设 $c\in U(a,\varepsilon)\cap U(b,\delta)$，则存在$\gamma>0$，满足

$$U(c,\gamma)\subset U(a,\varepsilon)\cap U(b,\delta).$$

这式子的意思是：在两相交邻域的公共部分内的任一点，可以该点为心作一个小邻域，使其完全落在二相交邻域的公共部分内。

证明 由假设知，$\rho(a,c)<\varepsilon$，$\rho(b,c)<\delta$。取

$$0<\gamma\leqslant\min\{\varepsilon-\rho(a,c),\delta-\rho(b,c)\},$$

以c为心，γ为半径作邻域$U(c,\gamma)$。

由性质3，有

$$U(c,\gamma)\subset U(a,\varepsilon),\ U(c,\gamma)\subset U(b,\delta)$$

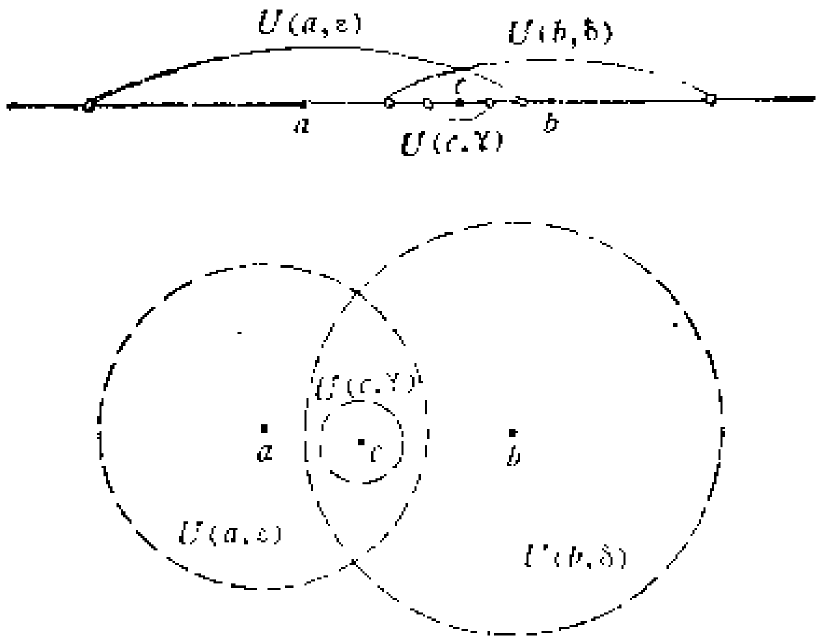


图4.5

故 $\qquad U(c,\gamma)\subset U(a,\varepsilon)\cap U(b,\delta)$. 】

除了球形邻域外，有时还用到长方形邻域. 为简单起见，就E_2讨论. 称集

$$E[(x,y);\ |x-x_0|<\delta,\ |y-y_0|<\varepsilon]$$

为以点(x_0,y_0)为心的矩形邻域(图4.6).

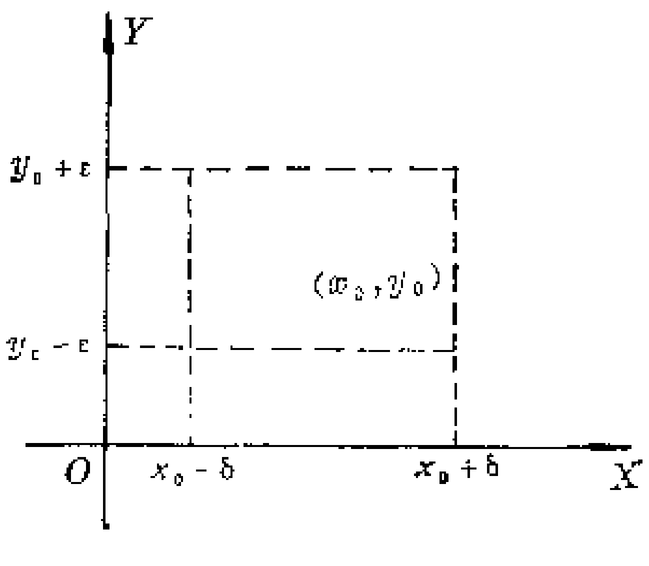


图4.6

不难验证：对于每一圆形邻域，可作一矩形邻域使其完全落在该圆形邻域内；反过来，对于每一矩形邻域，也可作一圆形邻域，使其完全落在该矩形邻域内。

对于一般的距离空间X,若$a\in X$，ε为任一正数。X中的、满足不等式$\rho(x,a)<\varepsilon$的点x的集合，叫做点a的、在X中的一个球形邻域，记以$U(a,\varepsilon)$.上面关于球形邻域的四条基本性质在一般的距离空间中也成立。以下各节，如未特别声明，讲的邻域都是指球形邻域。

§2 收敛点列

定义 设$\{a_n\}$是距离空间X中的点列，又点$a\in X$。假如当$n\to\infty$时，数列$\rho(a_n, a)\to 0$，就说点列$\{a_n\}$(按距离ρ)收敛于点a,记为

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

这时称$\{a_n\}$为收敛点列，a为$\{a_n\}$的极限。

因此，点列$\{a_n\}$以a为极限，就是说：对于任给的$\varepsilon>0$,存在自然数N，当$n>N$时，有

$$\rho(a_n,a)<\varepsilon.$$

由此可见，如果在点a的任意邻域$U(a,\varepsilon)$内，除去这个点列$\{a_n\}$的有限个点外，包含这个点列的所有点，那么点a就是点列$\{a_n\}$的极限。

例 1 我们知道，实数列$\{x_n\}$以数x_0为极限是指：对于任

给的$\varepsilon>0$，存在自然数N，当$n>N$时，有

$$|x_n - x_0| < \varepsilon.$$

而实数列$\{x_n\}$就是数直线(一维欧氏空间)上的一个点列，按照距离定义，有

$$\rho(x_n, x_0) = |x_n - x_0|,$$

因此在一维欧氏空间内依距离收敛就是通常所说的数列收敛。于是，数列 $\{x_n\}$ 以 x_0 为极限意味着动点x_n与定点x_0的距离$\rho(x_n, x_0) = |x_n - x_0|$可无限变小：$\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x_0) = 0$， 点$x_0$表示点列$x_n$的“聚集中心”(图4.7)。

图4.7

再看看二维欧氏空间E_2依距离收敛是什么意思。平面点列$\{P_n\} = \{P_n(x_n, y_n)\}$收敛于点$P_0 = P_0(x_0, y_0)$，是指 $\rho(P_n, P_0) \to 0$ $(n\to\infty)$，也就是

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(x_n - x_0)^2 + (y_n - y_0)^2} = 0$$

由此有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = y_0.$$

反之，当$n\to\infty$时，$x_n \to x_0$，$y_n \to y_0$，

又有 $\rho(P_n, P_0) \to 0$。

因此，在平面上依距离收敛就是按坐标收敛。不难看出，这一结论对于 n 维欧氏空间($n>2$)也是成立的。

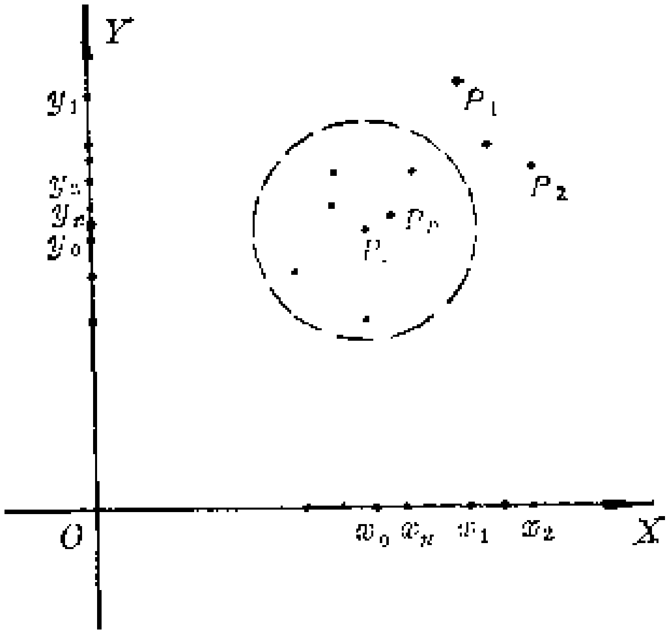


图4.8

***例 2**　讨论在连续函数空间$C[0,1]$内的收敛。设给定了空间$C[0,1]$内的一个点列$\{x_n(t)\}$(这是一个连续函数叙列)，并设这个点列收敛于点$x(t)$，因此

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\max_{t\in[0,1]}|x_n(t)-x(t)|=0.$$

于是，对于任给的$\varepsilon>0$，存在自然数N，当$n>N$时，有

$$\max_{t\in[0,1]}|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon.$$

由此可知，对于所有的$t\in[0,1]$，只要$n>N$，便有

$$|x_n(t)-x(t)|<\varepsilon,$$

这意思是说，函数叙列$\{x_n(t)\}$一致收敛于函数$x(t)$。

反之，可以证明：若叙列$\{x_n(t)\}$一致收敛于函数$x(t)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\rho(x_n,x)=0.$$

综合起来，可知空间$C[0,1]$内的按距离收敛，就是数学分析中所讲的闭区间$[0,1]$上的连续函数叙列的一致收敛。

由上面两个例子我们看出：实数列的收敛，函数列的一致收敛，看起来似乎毫无关系，但是这两种不同的极限概念可统一在距离空间内按距离收敛的概念之中。极限过程能够用距离（或者用邻域）来描述。

关于收敛点列，有下面几个一般性定理。

定理 1 收敛点列$\{a_n\}$的极限是唯一的。

证明 证法Ⅰ 设$a_n \to a$，$a_n \to b$，那么对任给的$\varepsilon>0$，只要n充分大，便有

$$\rho(a_n, a)<\frac{\varepsilon}{2}, \quad \rho(a_n, b)<\frac{\varepsilon}{2},$$

于是 $\rho(a,b)\leqslant\rho(a,a_n)+\rho(a_n,b)<\varepsilon$。

因为a与b是定点，而ε是任意的正数，所以上述不等式只有在$\rho(a,b)=0$时才成立，由此有

$$a=b.$$

证法Ⅱ 设$a_n \to a$，而b是一个与a不同的点。据邻域的性质2，必有$U(a,\varepsilon)$，$U(b,\delta)$，使

$$U(a,\varepsilon)\cap U(b,\delta)=\varnothing.$$

因$a_n \to a$，所以在$U(a,\varepsilon)$内，除点列$\{a_n\}$的有限个点外，其余的点全部落在该邻域内，因而$U(b,\delta)$最多只能含有该点列的有限个点，b不可能是点列$\{a_n\}$的极限。 ∎

定理 2 收敛点列$\{a_n\}$的任一子列$\{a_{n_k}\}(n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots)$必收敛，且具有相同的极限，即

当$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$时，$\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$。

证明 由假设，对任给的$\varepsilon>0$，存在自然数N，当$n>N$时，有

$$\rho(a_n, a)<\varepsilon.$$

因$n_k\to\infty(k\to\infty)$，故必有自然数K，当$k>K$时，$n_k>N$。从而当$k>K$时，有

$$\rho(a_{n_k}, a)<\varepsilon.$$

所以 $\lim\limits_{k\to\infty} a_{n_k} = a$。 ∎

推论 若点列$\{a_n\}$的某一子列$\{a_{n_k}\}$发散（即不收敛）；或者点列$\{a_n\}$的某两个子列$\{a_{n_k}\}$、$\{a_{n_{k'}}\}$虽收敛，但极限不相等，则$\{a_n\}$必发散。

例 3 数列$\{(-1)^n\}$：-1，1，-1，1，$\cdots$。由奇数项组成的子数列-1，-1，-1，$\cdots$收敛于-1；由偶数项组成的子数列1，1，1，$\cdots$收敛于1。故$\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n$不存在。

例 4 数列$\{a_n\}$：1，$\frac{1}{2}$，-1，$\frac{1}{2^2}$，1，$\frac{1}{2^3}$，-1，$\frac{1}{2^4}$，$\cdots$，其通项公式为

$$a_n=\begin{cases}(-1)^{k-1}, & n=2k-1,\\ \dfrac{1}{2^k}, & n=2k.\end{cases}\qquad (k=1,2,\cdots)$$

取奇数项组成的子数列1，-1，1，-1，$\cdots$，由例3知它是发散的，故原数列亦发散。

定义 设S是距离空间X中的一个点集。如果存在一点$p\in X$及常数$\lambda>0$，使得对一切$a\in S$，有

$$\rho(a,p)<\lambda,$$

则称 S 是有界集。

对于欧氏空间 E_n，特别可取 $O=(0,0,\cdots,0)$（叫做 n 维欧氏空间的原点）作为定义中的点 p，那么 E_n 的点集 S 叫做有界集，是指存在常数 $\lambda>0$，使得对一切 $x=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in S$，有

$$\rho(x,o)=\sqrt{x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2}<\lambda.$$

特例．数直线 E_1 上的点集 S_1，如果能包含在以坐标原点为中心的开区间 $(-\lambda,\ \lambda)$ 内，则 S_1 是有界集；平面 E_2 上的点集 S_2，如果包含在以原点为圆心，λ 为半径的开圆内，则 S_2 也是有界集；空间 E_3 内的点集 S_3，若能包含在以原点为球心，λ 为半径的开球内，则 S_3 也是有界集。

定理3 收敛点列 $\{a_n\}$ 必为有界点列。

证明 设 $a_n\to a$。由定义，有自然数 N，当 $n>N$ 时，

$$\rho(a_n,a)<1.$$

取 $\lambda=\max\{1,\rho(a_1,a),\ \rho(a_2,a),\cdots,\rho(a_N,a)\}$，则对一切 n，有 $\rho(a_n,a)<\lambda$，所以 $\{a_n\}$ 是有界的。 ▌

它的逆命题是不成立的。例3、例4中的点列都是有界点列，但都不收敛．对这个问题，今后还要作进一步的讨论。

在第二章§6，我们就有理数介绍过基本数列的概念，类似地，可在距离空间中引入基本点列的概念。

定义 设 $\{a_n\}$ 是距离空间 X 中的点列．假如对于任给的 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，使当 m、$n>N$ 时，有

$$\rho(a_n,a_m)<\varepsilon,$$

称 $\{a_n\}$ 是 X 中的基本点列。

定理 4 收敛点列$\{a_n\}$必为基本点列。

证明 设$a_n\to a$，那末对任意的$\varepsilon>0$，存在自然数N，当n、$m>N$时，有

$$\rho(a_n,a)<\frac{\varepsilon}{2},\ \rho(a_m,a)<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而

$$\rho(a_n,\ a_m)\leqslant\rho(a_n,\ a)+\rho(a,\ a_m)<\varepsilon.$$

故$\{a_n\}$是基本点列。 】

对于任意一个距离空间来说，上述定理的逆命题不一定成立。因为可找到这样的距离空间，在该空间中存在有不收敛于任何极限的基本点列。例如，全体有理数集Q作为一维欧氏空间E_1的子空间，它是距离空间。由$\sqrt{2}$的一切十进不足近似值组成的有理数列

$$1,\ 1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots$$

是Q中的基本点列，但在Q中无极限（因$\sqrt{2}$是无理数）。

从这一个例子可以看出，有些距离空间中的基本点列之所以不收敛，是由于这个距离空间中还缺少一些点的缘故。因此我们很自然地引入下面的定义：

在距离空间X中，如果每一个基本点列均收敛于X中的点，称X为完备空间。

由此可知，X是完备空间，则

基本点列$\Longleftrightarrow$收敛点列。

一维欧氏空间E_1是完备空间。因为柯西收敛判别法告诉我们：若$\{x_n\}$是实数数列，则$\{x_n\}$收敛的必要充分条件是：

对于任给的$\varepsilon>0$，存在自然数N，当n、$m>N$时，有

$$|x_n-x_m|<\varepsilon.$$

这就是说，在E_1中，收敛点列$\Longleftrightarrow$基本点列。通常把实数的这种性质叫做完备性或连续性，它是微积分理论的依据。而由有理数建立整个实数(添补无理数)是使不完备的距离空间完备化的一个典型范例。

注 柯西收敛判别法只是实数连续性的多种表现形式之一。例如

(i)将直线轴的点分成A和B两部分，使A中的任何点位于B中任何一点的左方，那末或是A有最右点或是B有最左点；

(ii)有上界的数集必有上确界；

(iii)有上界的单调递增数列必有极限；

(iv)闭区间套定理

等都是实数连续性的表现形式。

§3 欧氏空间中的点集

从本节开始，我们讨论欧氏空间中的点集。因为欧氏空间比起一般的距离空间来要具体些，特别是不超过三维的欧氏空间更直观，易为初学者接受；再有，我们就欧氏空间所介绍的一些概念与性质对于进一步学习一般的距离空间，甚至更为抽象的拓扑空间来说也是一个基础。基于这两点，所以着重讨论欧氏空间的点集。

一、接点与聚点

设E是n维欧氏空间E_n中的一个点集，x_0是E_n中的一个点，研究x_0与E的关系。这里有两种可能的情形：1）在点x_0附近，全无点集E的点；2）在点x_0附近，总有点集E的点。属于第一种情形的点x_0，叫做集E的外点；而把第二种情形中的点x_0叫做集E的接触点，简称为接点。确切地说，我们有下述：

定义 设$E\subset E_n$，$x_0\in E_n$。

1）若有某一个以x_0为心的邻域$U(x_0, \varepsilon)$，使在该邻域内不含集E的任何点，即

$$U(x_0, \varepsilon)\cap E=\varnothing,$$

称点x_0为集E的外点。

2）如果点x_0的每一个邻域至少含有集E的一个点，即对于任给的$\varepsilon>0$，有

$$U(x_0, \varepsilon)\cap E\neq\varnothing,$$

称点x_0为集E的接（触）点。

现在我们对接点作进一步分析。设x_0是集E的接点，这里又有两种可能的情形：

1° 点x_0的每一个邻域皆含有集E的无限多个点，这时称点x_0为集E的聚点。

2° 假设在点x_0的某一邻域$U(x_0, \varepsilon')$内，只含有集E的有限个点。记这些点中异于x_0的为

$$x_1, x_2, \cdots, x_n.$$

我们可以证明，一定存在x_0的某一邻域$U(x_0, \delta)$，除点x_0外，不含集E的任何点（图4.9）。

事实上，取

$$\delta=\min\{\rho(x_1,x_0),\rho(x_2,x_0),\cdots,\ \rho(x_n,\ x_0)\},$$

显然 $0<\delta<\varepsilon'$。因而

$$U(x_0,\ \delta)\subset U(x_0,\ \varepsilon')$$

并且 $x_k\notin U(x_0,\ \delta)\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$

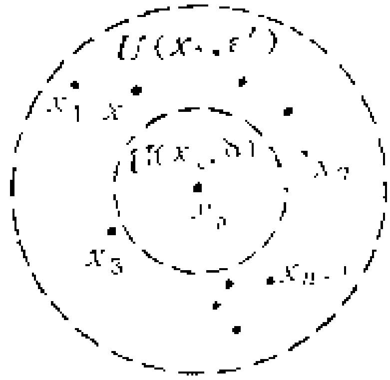


图4.9

然而点x_0是集E的接点，故

$$U(x_0,\ \delta)\cap E\neq\varnothing。$$

所以 $x_0\in E$。

注意到情形1°与2°是互相排斥的，我们有如下：

定义 设$E\subset E_n$，$x_0\in E_n$。如果在点x_0的任意邻域$U(x_0,\varepsilon)$内，包含有集E的无限多个点，称点x_0为集E的聚点（或极限点）。

而把E中不是E的聚点的点叫做E的孤立点。

定理 1 $x_0\in E$成为E的孤立点的必要充分条件是：存在某一个邻域$U(x_0,\ \varepsilon_0)$，除点x_0外，不含E的任何点，即

$$(U(x_0,\ \varepsilon_0)-\{x_0\})\cap E=\varnothing。$$

证明 由前面情形2°的讨论可知。 ▌

例 1 设直线E_1上的点集$A=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right\}$（$n$为自然数），又取$x_0=0$。对于任给的$\varepsilon>0$，只要$n$充分大，就有$\frac{1}{n}<\varepsilon$，于是在点0的任意邻域$U(0,\ \varepsilon)$内，包含集$A$的无限多个点，$x_0=0$是点集$A$的聚点，但$0\notin A$。

例 2 考察全体整数集$I\subset E_1$。显然每一个整数点都是集I的孤立点，而每一个非整数点都是I的外点。集I是由孤立点组成的无限集。

定理 2 设$E\subset E_n$，$x_0\in E_n$。那末下面三个命题是彼此等价的：

1） x_0是集E的聚点；

2） x_0的任何一个邻域$U(x_0, \varepsilon)$内必含有集E中异于x_0的一个点，即

$$(U(x_0, \varepsilon)-\{x_0\})\cap E\neq\varnothing;$$

3） 在集E中有一列互异的点$\{x_n\}$，适合$x_n\neq x_0$，而且$x_n\to x_0$。

证明 如果1)⇒2)⇒3)⇒1)，则1)⟺2)⟺3)。

1)⇒2） 设x_0是集E的聚点。由定义，x_0的任意邻域$U(x_0,\varepsilon)$内包含有E中的无限多个点，自然含有E中异于x_0的一个点。

2)⇒3） 取$\varepsilon_1=1$，在$U(x_0, \varepsilon_1)$内可选一点$x_1\in E$，使$x_1\neq x_0$，又取$\varepsilon_2=\min\left(\frac{1}{2},\rho(x_1,x_0)\right)$，在$U(x_0, \varepsilon_2)$内可选出一点$x_2\in E$，使$x_2\neq x_0$，显然$x_2\neq x_1$。一般地，设从$E$中已选出了彼此互异的点$x_k$，使$x_k\neq x_0$，且$x_k\in U(x_0, \varepsilon_k)$ $(k=1, 2, \cdots, n)$。其中$\varepsilon_1=1$，$\varepsilon_k=\min\left(\frac{1}{k}, \rho(x_{k-1}, x_0)\right)(k=2,3,\cdots,n)$。那末，取$\varepsilon_{n+1}=\min\left(\frac{1}{n+1}, \rho(x_n, x_0)\right)$，在$U(x_0,\varepsilon_{n+1})$内可选出一点$x_{n+1}\in E$，使$x_{n+1}\neq x_0$，显然$x_{n+1}$与$x_1, x_2, \cdots, x_n$彼此都不相同。如此继续下去，我们得到$E$中的点列$\{x_n\}$：

$x_n \neq x_0$，当$n \neq m$时，$x_n \neq x_m$，而且适合$x_n \in U(x_0, \varepsilon_n)$（$n=1, 2, \cdots$）。注意$\varepsilon_n \leqslant \frac{1}{n}$，所以$\rho(x_n, x_0) \leqslant \frac{1}{n}$，从而当$n \to \infty$时，$x_n \to x_0$。

3)⇒1) 于任意$U(x_0, \varepsilon)$（$\varepsilon>0$）。由假设$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$，故只要$N$充分大，当$n>N$时，有$\rho(x_n, x_0)<\varepsilon$，从而$x_n \in U(x_0, \varepsilon)$。由于$E$中的点列$\{x_n\}$由互不相同的点组成，因而在$U(x_0, \varepsilon)$内包含$E$中无限多个点，故$x_0$是$E$的聚点。 ▌

作为练习，请按1)→3)→2)→1)的顺序证明该定理。

例 3 E_1上的集B由一切形如$\frac{1}{n}$与$1-\frac{1}{n}$（$n=1, 2, \cdots$）的点组成。显然集B的聚点仅为0和1，而且这两个点都属于集B。

由例1、例3可知，一个点集的聚点（如果存在的话）可以属于该集，也可以不属于该集。

二、闭集

定义 设E是E_n中的点集，E的全体聚点所成之集叫做E的导集，记为E'。

例1、例2、例3中的点集A，I，B的导集分别为$A'=\{0\}$，$I'=\varnothing$，$B'=\{0, 1\}$，并且$A' \not\subset A$，$I' \subset I$，$B' \subset B$。

定义 设$E \subset E_n$。如果E的导集E'是E的一个子集，即

$$E' \subset E,$$

称E是闭集。

例2中的集I，例3中的集B是闭集，例1中的集A不是闭集。又如

任何有限点集都是闭集，因为这时的导集是空集；

直线上的有限区间$[a, b]$，(a, b)，$[a, b)$，$(a, b]$，它们的导集都是$[a, b]$，因此只有闭区间$[a, b]$才是闭集，而其他各种类型的有限区间都不是闭集，（这里$a<b$）。

由此可见，一个没有聚点或者聚点都属于集本身的集叫做闭集。

定理 3　n维欧氏空间E_n的闭集具有下列三个性质：

1）　E_n与空集$\varnothing$是闭集；

2）　任意个闭集的交集是闭集；

3）　有限个闭集的并集是闭集。

证明　1）　显然。

2）设　$F=\bigcap\limits_{\alpha\in A}F_\alpha$，其中$F_\alpha$为闭集，$A$为指标集。因为$F\subset F_\alpha$，所以$F^*\subset F_\alpha^*$。而$F_\alpha^*\subset F_\alpha$（由假设$F_\alpha$为闭集），因此$F^*\subset F_\alpha$，又因为此关系对于所有的$\alpha\in A$都成立，故$F^*\subset\bigcap\limits_{\alpha\in A}F_\alpha=F$，$F$为闭集。

3）设　$H=\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i$（$F_i$为闭集）。

首先证明：H的任何一个聚点必是某一个F_i的聚点。用反证法。假设$x_0\in H^*$，但$x_0\notin F_i^*$　$(i=1, 2, \cdots, n)$，那么对每一F_i，可找到x_0的一个邻域$U(x_0, \delta_i)$，它不包含集F_i中任何异于x_0的点。

令　$\delta=\min\{\delta_1, \delta_2, \cdots, \delta_n\}$。由邻域的基本性质 1 可知$U(x_0, \delta)\subset U(x_0, \delta_i)$　$(i=1, 2,\cdots,n)$，于是在邻域$U(x_0,\delta)$内不包含集$H=\bigcup\limits_{i=1}^{n}F_i$中任何异于$x_0$的点，这和$x_0$是$H$的一个聚点相矛盾。

因此，若$x_0 \in H'$，则至少有一F_i，使$x_0 \in F_i'$。但F_i是闭集，所以$x_0 \in F_i$，从而$x_0 \in \bigcup\limits_{i=1}^{n} F_i = H$，$H$是闭集。 ∎

注意：无限多个闭集的并集不一定是闭集。例如，取$F_n = \left[\frac{1}{n}, 1\right]$ $(n = 1, 2, \cdots)$，则F_n是闭集，但其并集

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n = (0, 1]$$

不是闭集。

定理 4 E'恒为闭集。

证明 要证E'是闭集，就是要证E'的导集$(E')'$是E'的一个子集，即 $(E')' \subset E'$。

不妨设$(E')'$非空。任取$x_0 \in (E')'$，因为x_0是E'的一个聚点，据定理 2，在x_0的任意邻域$U(x_0, \varepsilon)$内，有点$x_1 \in E'$，且$x_1 \neq x_0$。由$x_1 \in U(x_0, \varepsilon)$，据邻域的基本性质3，必有$U(x_1, \delta) \subset U(x_0, \varepsilon)$。因$x_1$是$E$的聚点，所以在$U(x_1, \delta)$内，有$x_2 \in E$且$x_2 \neq x_1$，而且还可以要求$x_2 \neq x_0$。从而在$x_0$的任意邻域$U(x_0, \varepsilon)$内，有$x_2 \in E$且$x_2 \neq x_0$，这就是说$x_0 \in E'$。

由$x_0 \in (E')' \Rightarrow x_0 \in E'$，故$E'$是闭集。 ∎

三、闭包

定义 设E是E_n中的点集。称集E与它的导集E'的并集$E \cup E'$为集E的闭包，记为E^0。

显然，集$E^0 = E \cup E'$中的点，要么是E的聚点，要么是E的孤立点，总之是E的接点。因此集E的闭包E^0又可定义为由集E的一切接点所成之集。

定理 5 n维欧氏空间E_n的子集与它们的闭包具有下列四个性质：

1) $\varnothing^0=\varnothing$;

2) $E\subset E^0$;

3) $(E^0)^0\subset E^0$;

4) $(E\cup F)^0=E^0\cup F^0$.

证明 1), 2)由闭包的定义立即可推出。

3) 不妨设$(E^0)^0$非空。任取$x_0\in(E^0)^0$，因为x_0是E^0的一个接点，所以在x_0的任意邻域$U(x_0, \varepsilon)$内，有点$x_1\in E^0$。由$x_1\in U(x_0, \varepsilon)$，据邻域的性质3，必有$U(x_1, \delta)\subset U(x_0, \varepsilon)$。因$x_1$是$E$的接点，所以在$U(x_1, \delta)$内，有点$x_2\in E$。从而在$x_0$的任意邻域$U(x_0, \varepsilon)$内，有$x_2\in E$，$x_0\in E^0$。

由$x_0\in(E^0)^0\Rightarrow x_0\in E^0$，故$(E^0)^0\subset E^0$。

4) 因$E\cup F\supset E$，所以$(E\cup F)^0\supset E^0$，同理有$(E\cup F)^0\supset F^0$，于是$(E\cup F)^0\supset E^0\cup F^0$。剩下要证明：$(E\cup F)^0\subset E^0\cup F^0$，即$(E\cup F)^0$的任一点$x$，如果$x\notin E^0$，则$x\in F^0$。用反证法。

设$x\notin E^0$且$x\notin F^0$，因而x有一邻域$U(x, \varepsilon_1)$不包含E的点，还有一邻域$U(x, \varepsilon_2)$不包含F的点。由邻域性质1，有$U(x, \varepsilon_0)\subset U(x, \varepsilon_1)\cap U(x, \varepsilon_2)$，因而不包含$E\cup F$的点，于是$x\notin(E\cup F)^0$，这与$x\in(E\cup F)^0$矛盾。故$(E\cup F)^0\subset E^0\cup F^0$。

总上，有 $(E\cup F)^0=E^0\cup F^0$。 ▮

推论 1 $(E^0)^0=E^0$。

证明 由性质2)，$E^0\subset(E^0)^0$。而由性质3)又有$(E^0)^0\subset E^0$，所以 $(E^0)^0=E^0$。 ▮

定理 6　E为闭集 $\Longleftrightarrow$ $E=E^0$。

证明　留给读者。　】

推论 2　对E_n中的任意集E，E^0恒为闭集。

证明　由定理 6 与推论 1 得知。　】

四、自密集、完全集和孤立点集

定义　设$E\subset E_n$。

1)　若$E\subset E^*$，称E为自密集。显然自密集中的点都是聚点，因此自密集不含任何孤立点。

2)　若$E=E^*$，称E为完全集。完全集就是自密闭集，也可以说是没有孤立点的闭集。

3)　若$E\cap E^*=\varnothing$，且$E\neq\varnothing$，称E为孤立点集，即没有聚点或聚点都在集外的非空集。因此孤立点集是全由孤立点组成的集。

为说明上面的几个概念，我们看下面一些例子。

例 4　1)　E_1上的有限区间(a, b)，$[a, b)$，$(a, b]$（这里$a<b$)都是自密集。

2)　记Q为E_1上的所有有理点之集。此时E_1上的任何一点都是Q的聚点，即$Q^*=E_1$，所以直线上的有理点全体是一自密集。同样可知，无理点全体也是E_1上的自密集。

例 5　1)　集C由直线上有限个互不相交的闭区间，例如

$$\left[0,\ \frac{1}{2}\right],\ \left[\frac{2}{3},\ \frac{3}{4}\right],\ \left[\frac{4}{5},\ \frac{5}{6}\right],\ \left[\frac{6}{7},\ \frac{7}{8}\right]$$

所组成，此时$C^*=C$，所以C是完全集。

2)　集D由直线上可列个互不相交的闭区间

$$\left[0,\ \frac{1}{2}\right],\left[\frac{2}{3},\frac{3}{4}\right],\left[\frac{4}{5},\frac{5}{6}\right],\cdots,\left[\frac{2n}{2n+1},\ \frac{2n+1}{2n+2}\right],\cdots$$

以及点 1 所组成．请验证 $D^{*}=D$，D 也是完全集．问：如果从 D 中去掉点1，$D-\{1\}$ 是否是完全集呢？

例 6 集 S 是一切形如

$$x=\frac{1}{n},\qquad (-1\leqslant y\leqslant 1)$$

的线段（平行于 Y 轴）的并集（$n=1,\ 2,\ \cdots$）。

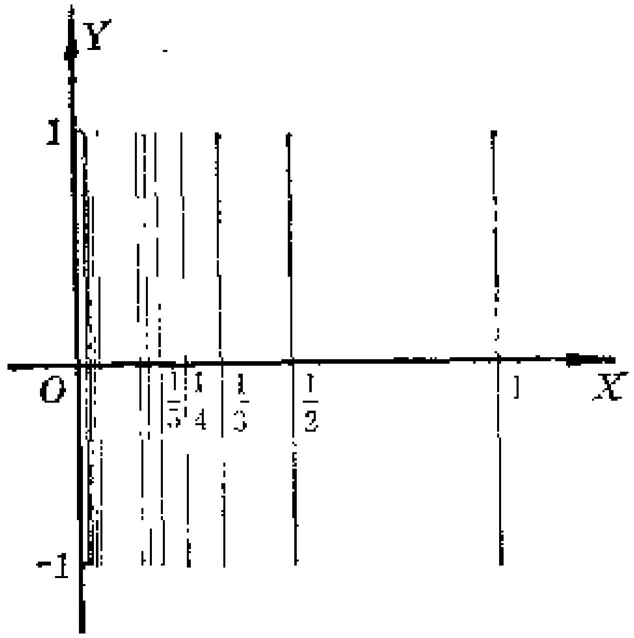


图4.10

集 S 的一切点以及 Y 轴上的线段 $-1\leqslant y\leqslant 1$ 上的一切点都是 S 的聚点，因此 S 是自密集，而不是闭集（图4.10）。

例 7 集 T 是由位于函数

$$y=\sin\frac{1}{x}\ \left(-\frac{1}{\pi}\leqslant x<0,\ \ 0<x\leqslant\frac{1}{\pi}\right)$$

的图象上的一切平面点所组成。

因为函数 $y=\sin\frac{1}{x}$ 在 $x=0$ 处产生无限次振荡(振幅为1)，从而Y轴上的线段 $-1\leqslant y\leqslant 1$ 上的每一点都是T的聚点。集T'除包含上述点外（这些点都不属于T），还包含T的一切点，所以T是自密集，而不是闭集（图4.11）。

显然，这时 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\frac{1}{x}$ 不存在。

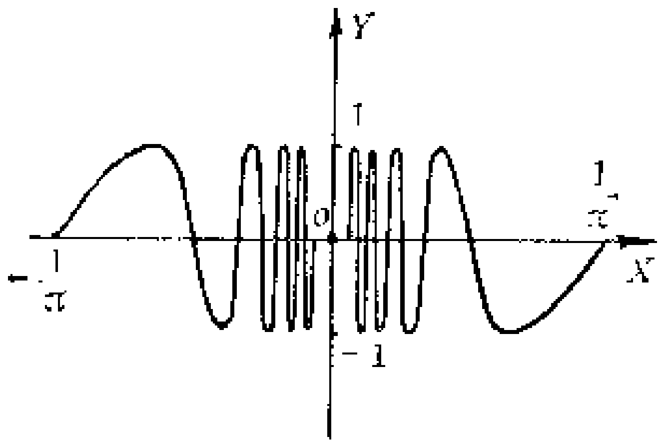


图4.11

例 8 集M是平面点$\left(\frac{1}{m},\ \frac{1}{n}\right)$的集，其中m、n为任意自然数。OX轴上的点$\left(\frac{1}{m},\ 0\right)$ $(m=1,\ 2,\cdots)$，OY轴上的点 $\left(0,\ \frac{1}{n}\right)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 以及原点(0, 0)都是集M的聚点，此外集M无别的聚点，因而

$$M\cap M'=\varnothing,$$

M是孤立点集。

又如，例1，例2中的集也是孤立点集。

§4 欧氏空间中的点集(续)

一、内点与开集

定义 设E是E_n中的点集．如果它的补集$E'=E_n-E$是闭集，则称E为开集．而把属于开集E的点叫做E的内点．

例 1 设E_1上的集$A=(0,+\infty)$，因其补集$A'=(-\infty,0]$是E_1上的闭集(而且是完全集)，按定义A是开集．

现在来看集A的内点有什么特点．任取$x_0\in(0,+\infty)$．例如，取$\varepsilon=\frac{x_0}{2}>0$，作邻域$U(x_0,\ \varepsilon)=\left(\frac{x_0}{2},\ \frac{3x_0}{2}\right)$，显然$U(x_0,\ \varepsilon)\subset A$．

这是一个特殊例子．一般来说，E_n中的开集E的内点是否也具有上面的性质呢？

定理 1 E是E_n中的开集$\Longleftrightarrow$对每一$x\in E$,有邻域$U(x,\varepsilon)$，使$U(x,\ \varepsilon)\subset E$．

证明 1) 设E是开集，则$F=E'$是闭集．不妨设E非空．任取$x\in E$，则$x\notin F$(因$F\cap E=\varnothing$)．而$F^0=F$(集F是闭的)，所以$x\notin F^0$，说明x不是F的接点，因而是F的外点．据外点定义，必存在x的邻域$U(x,\ \varepsilon)$，使$U(x,\ \varepsilon)\cap F=\varnothing$,从而有

$$U(x,\ \varepsilon)\subset E.$$

2) 反之，由定理条件知，每一$x\in E$，必为F的外点，因而F全由接点组成，即$F=F^0$，所以F是闭集，E是开集． ■

据定理1，内点与开集的定义又可换为下面的等价说法：

设$E\subset E_n$，$x\in E_n$。如果有以x为心的邻域$U(x,\ \varepsilon)$，使得

$$U(x,\ \varepsilon)\subset E,$$

那么x叫做集E的内点。

如果集E的每一点都是它的内点，则E叫做开集。换句话说，开集是全由内点组成的集。

例 2 直线E_1上的任意开区间，平面E_2上的任意开圆：$(x-a)^2+(y-b)^2<r^2$ (a, b, r为实数，且$r\neq 0$)都是开集。

E_n中的任何邻域都是开集，因为由邻域的性质 3 知，属于邻域的点都是它的内点。

注 在E_1中，(a,b)是开集，但在E_2中却不是；又如在E_2中，开圆：$x^2+y^2<1$ 是开集，但在E_3中就不是开集。由此可见，内点、开集以及聚点、闭集等概念都是相对于空间而言的。

定理 2 n维欧氏空间E_n中的开集具有下列三个性质：

1) E_n与空集$\varnothing$是开集；

2) 任意多个开集的并集是开集；

3) 有限个开集的交集是开集。

证明 由第一章德·摩根公式及本章§3定理 3 可推出，现以2)为例证明如下。

设$G=\bigcup\limits_{\alpha\in A}G_\alpha$，其中$G_\alpha$为开集，$A$为指标集。因为$G_\alpha$是开集，所以$G_\alpha'$是闭集。由§3定理 3 知

$$\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha'$$

是闭集。又据德·摩根公式，

$$\bigcap_{\alpha\in A}G_\alpha'=(\bigcup_{\alpha\in A}G_\alpha)'=G'$$

所以G'是闭集，G是开集。 ∎

注意：无限多个开集的交集不一定是开集。例如，取$G_n=\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)$ $(n=1, 2, \cdots)$，则G_n是开集，但其交集

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} G_n=\{0\}$$

不是开集。

定理 3 开集减闭集仍然是开集，而闭集减开集仍然是闭集。

证明 设$G,F\subset E_n$，又G为开集，F为闭集。于是G'为闭集，F'为开集。因为

$$G-F=G\cap F', \quad F-G=F\cap G',$$

由§3定理3与§4定理2可知本定理成立。 ∎

二、边界点与边界

例 3 平面E_2上的开圆D：$x^2+y^2<1$，它的补集D'：$x^2+y^2\geqslant 1$。它们的闭包分别为：

$$D^0: x^2+y^2\leqslant 1, \quad (D')^0: x^2+y^2\geqslant 1.$$

记
$$\begin{aligned}\Gamma(D)&=D^0\cap(D')^0\\&=\{(x,y); x^2+y^2\leqslant 1\}\cap\{(x,y); x^2+y^2\geqslant 1\}\\&=\{(x,y); x^2+y^2=1\},\end{aligned}$$

显然$\Gamma(D)$就是圆周：$x^2+y^2=1$。按照我们通常的习惯，圆周$\Gamma(D)$：$x^2+y^2=1$是开圆D：$x^2+y^2<1$的边界。

一般地，我们有下面的

定义 设E是E_n中的点集，称

$$E^0 \cap (E')^0$$

为E的边界，记为$\Gamma(E)$。E的边界中的点叫做E的边界点。

定理4 设E是E_n中的任意点集，则E的边界$\Gamma(E)$恒为闭集。

证明 因为E^0，$(E')^0$均为闭集，作为它们的交集$\Gamma(E)=E^0\cap(E')^0$也是闭集。]

为了进一步考察边界点的特性，我们回到例3。在$\Gamma(D)$：$x^2+y^2=1$上任取一点p，以该点为心作任意邻域$U(p, \varepsilon)$，那么从图4.12可见，在$U(p, \varepsilon)$内既有D中的点，又有不在D中的点。

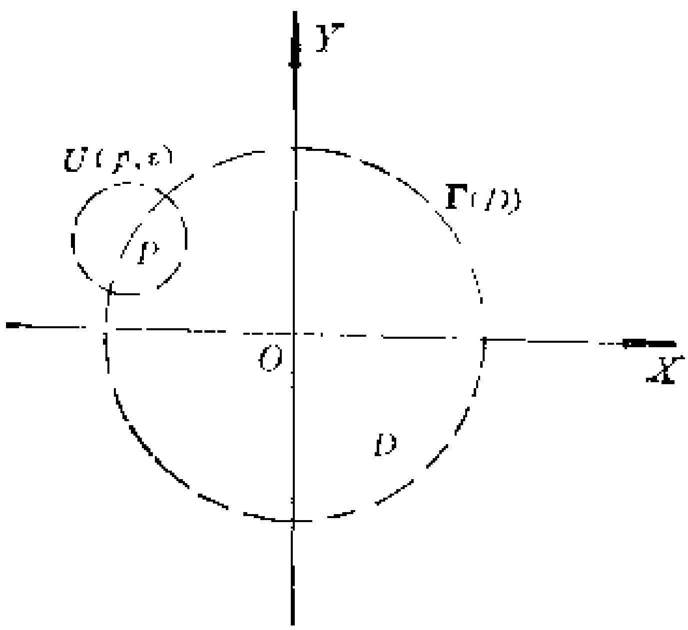


图4.12

事实上，上述结论对任意集E ($\subset E_n$) 的边界点也成立。任取$x\in\Gamma(E)$，据定义，$x\in E^0$且$x\in(E')^0$。对于x的任意邻

域$U(x, \varepsilon)$。由$x\in E^0$知，必有点$x_1\in E$，使得$x_1\in U(x, \varepsilon)$；又由$x\in(E')^0$，必有点$x_2\in E'$（从而$x_2\notin E$），使得$x_2\in U(x,\varepsilon)$。因而，在点x的任意邻域$U(x, \varepsilon)$内，既有点$x_1\in E$，又有点$x_2\notin E$。

由此可知，边界点与边界的定义可换为下面的等价说法：

设$E\subset E_n$，$x\in E_n$。如果在点x的每一邻域内，既含有E中的点，又含有不在E中的点，那么x叫做集E的边界点。

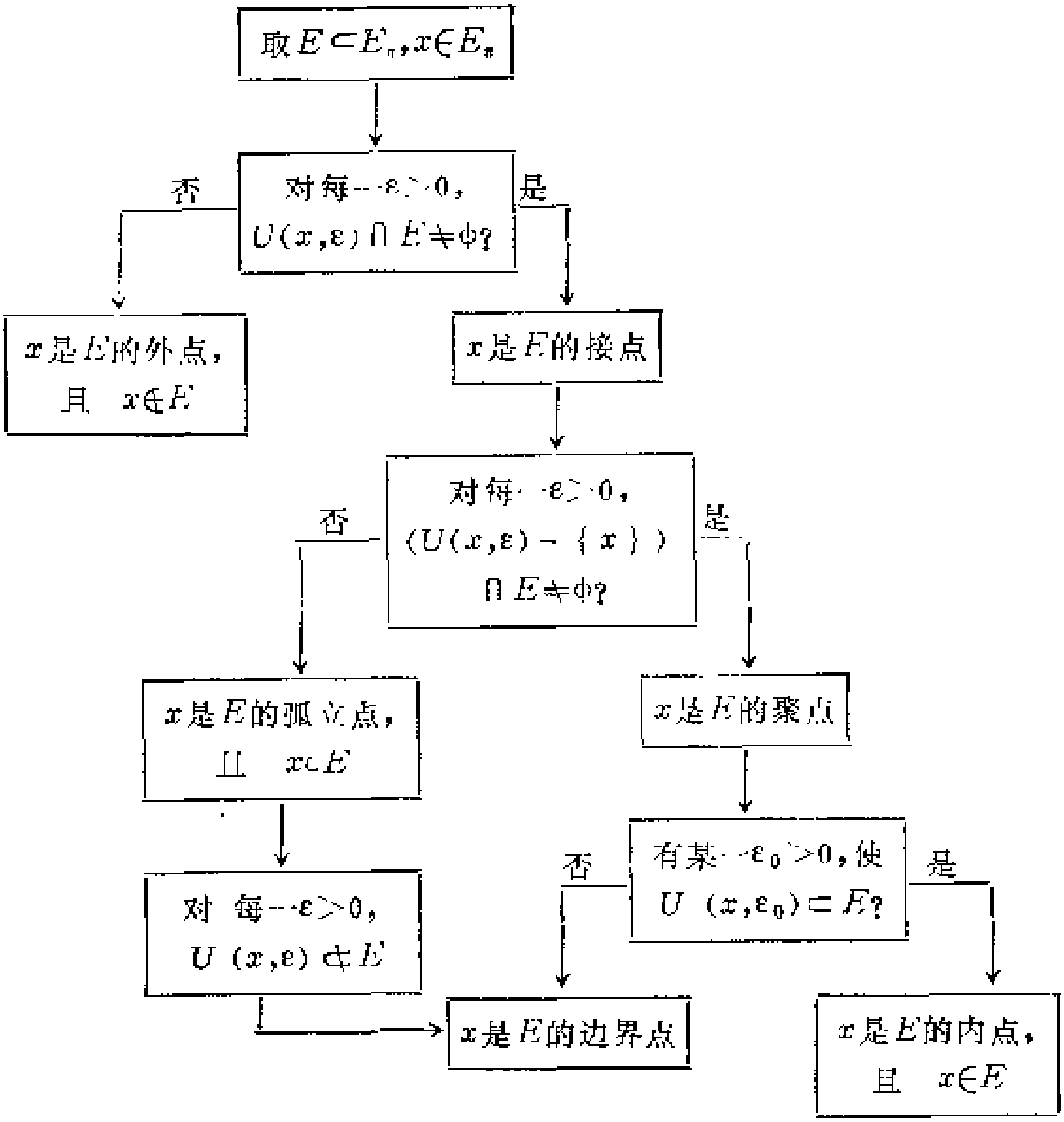
由集E的边界点所组成的集叫做E的边界。

显然，一个集的边界点必为该集的接点，但不是该集的内点。

由
$$\Gamma(E')=(E')^0\cap((E')')^0=(E')^0\cap E^0=\Gamma(E)$$
知，E的边界与其补集E'的边界是一致的。此外容易明白，点集E的外点与它的补集E'的内点这两者也是一致的。请读者结合例3予以验证。

三、小结与补充

1.在讨论E_n中的点x与点集E的关系时，我们引入了外点、接点、聚点、孤立点、内点、边界点等概念，现列表小结如下。



由上表可知，E是E_n中的点集，则E_n中的点可分为两种：E的接点，E的外点。还可分得更细些，将E_n中的点分为三种：E的内点，E的边界点，E的外点；或者E的聚点，E的孤立点，E的外点。

显然　E的内点$\Rightarrow E$的聚点，

　　　E的孤立点$\Rightarrow E$的边界点，

反之，　　E 的聚点 $\Rightarrow$ 或为 E 的内点或为 E 的边界点，

E 的边界点 $\Rightarrow$ 或为 E 的聚点或为 E 的孤立点。

集的内点、孤立点肯定属于该集，集的外点肯定不属于该集，而集的聚点、边界点（因而接点）可以属于也可以不属于该集。

2.聚点概念是一个重要概念，在讨论函数的极限时要用到。为简单起见，就一元函数的极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 说明（其中 a 为实数）。

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $\mathscr{X}$，要使 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 有意义，要求 a 一定是集 $\mathscr{X}$ 的一个聚点。现分析下面的做法

$$\lim_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{\sin\pi x-1}=\sqrt{\sin\frac{\pi}{2}-1}=0$$

是否正确。函数 $\sqrt{\sin\pi x-1}$ 的定义域 $\mathscr{X}$：$x=2k+\frac{1}{2}$（k 为整数）（图4.13）。

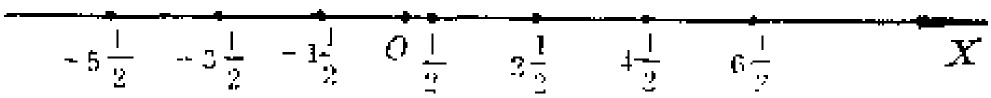


图4.13

集 $\mathscr{X}$ 是 E_1 上的孤立点集，$\frac{1}{2}\in\mathscr{X}$ 是它的一个孤立点，因而 $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\sqrt{\sin\pi x-1}$ 无意义，上面借函数的连续性求极限值的做法是错误的。

在讨论函数的极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 时，a 是否属于 $f(x)$ 的定义域 $\mathscr{X}$ 这一点并不要求，例如在极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ 中，$x=0$ 就不属于

$\frac{\sin x}{x}$的定义域。

3. 在讨论集 $E\subset E_n$ 与它的导集E'的关系时，我们引入了一些概念。

$E'\subset E$ （或$E=E^0=E'\cup E$）$\Longleftrightarrow E$是闭集，

$E\subset E'\Longleftrightarrow E$是自密集，

$E=E'\Longleftrightarrow E$是完全集，

$E\cap E'=\varnothing$且$E\neq\varnothing\Longleftrightarrow E$是孤立点集。

E是开集$\Longleftrightarrow E'$是闭集，

$\Gamma(E)=E^0\cap(E')^0$，叫做E的边界。

本章§3定理3、定理5，§4定理2是关于闭集、闭包与开集性质的重要定理。

能不能断言 E_n中的点集E一定是上述几种集中的一种呢？

例 4　设有直线E_1上的点集$E=(0,\ 1]\cup\{2\}$。

$(0,\ 1)$中的所有点都是E的内点①，显然$(0,\ 1)\subset E$。

E的所有聚点组成E的导集$E'=[0,\ 1]$。

E的所有接点组成E的闭包$E^0=[0,\ 1]\cup\{2\}$。

E的边界$\Gamma(E)=\{0,\ 1,\ 2\}$（由E的边界点0，1，2组成）。

E的孤立点仅为2。

可以逐一验证，E是E_1上的一个非开非闭的集，也不是自密集，更不是孤立点集。

4. 区域是一类特殊的点集，它的一个重要性质就是所谓开

---

① E_n中的点集E的所有内点组成的集，叫做E的开核，记做$K(E)$。可以证明，$K(E)$是开集。

集性，即区域的每一点都是它的内点，但光具备开集这一条件不能叫区域，还需补充一个称为连通性的条件。现以平面区域为例。

设 D 是平面E_2上的开集，若D中任意两点可用属于集D的一条连续曲线连接起来，则称 D为平面区域（图4.14）。

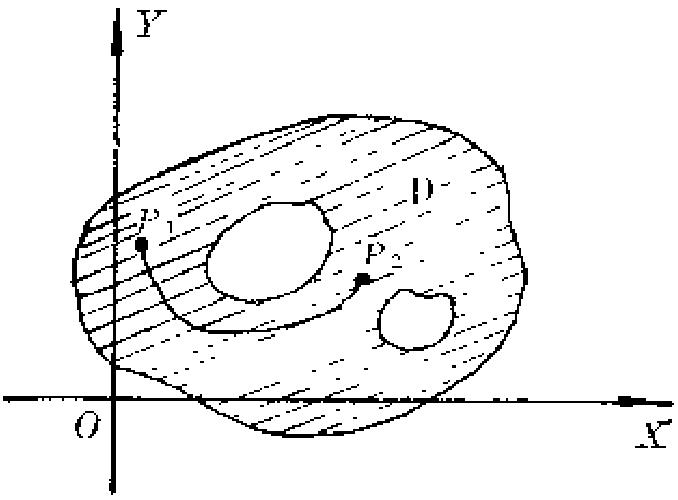


图4.14

例如开圆：$(x-1)^2+(y+2)^2<25$是区域。

至于空间区域可仿上叙述。

例 5　设平面上点集G由两个开圆

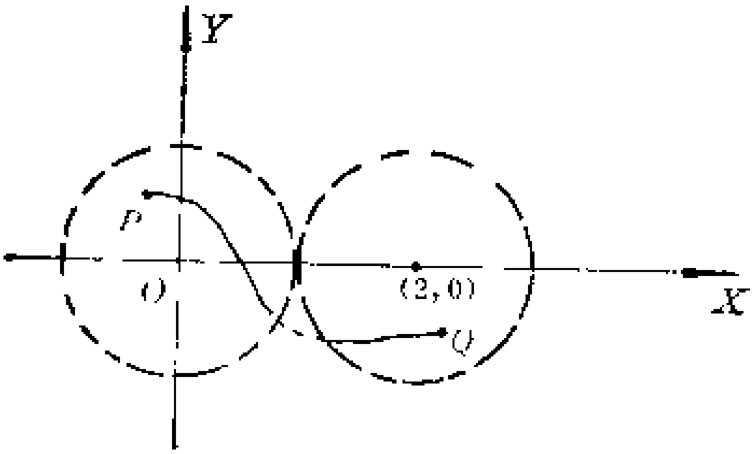


图4.15

$$x^2+y^2<1,\quad (x-2)^2+y^2<1$$

所组成（图4.15）。显然，G是开集，但不是区域。因为分别在圆$x^2+y^2=1$与圆$(x-2)^2+y^2=1$内各取一点P与Q，不可能用一条属于集G的连续曲线将点P与Q连接起来。

定义 设D是E_n中的区域。域D的点及其所有的边界点组成的集叫做闭(区)域，记为$\bar{D}$。相应地，区域D叫做开域。

因此，闭域$\bar{D}$就是开域D加上它的边界$\Gamma(D)$所得到的集：

$$\bar{D}=D\cup\Gamma(D).$$

例如闭域：$x^2+y^2\leqslant 1$就是开域：$x^2+y^2<1$与其边界：$x^2+y^2=1$的并集。

可以证明：闭域一定是闭集。

通常借不等式来表示域，举例如下。

例 6 以椭圆$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$所围成的开域$D_1$（图4.16）可表为：

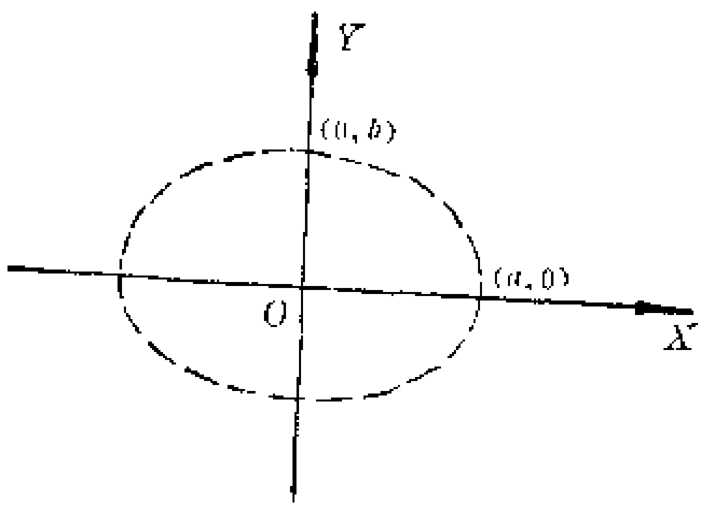


图4.16

$$\begin{cases} -\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}<y<\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \\ -a<x<a, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}<x<\dfrac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}, \\ -b<y<b. \end{cases}$$

例 7 由平面上的两条抛物线

$$y^2=x,\quad y=x^2$$

所围成的闭域$\overline{D}_2$（图4.17）可表为：

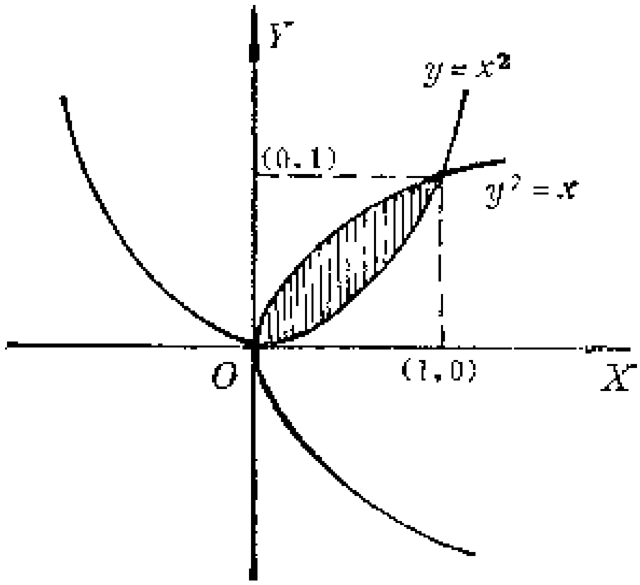


图4.17

$$\begin{cases} x^2\leqslant y\leqslant\sqrt{x}, \\ 0\leqslant x\leqslant 1, \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} y^2\leqslant x\leqslant\sqrt{y}, \\ 0\leqslant y\leqslant 1. \end{cases}$$

例 8 不等式$x\leqslant y\leqslant a+\sqrt{a^2-x^2}$，$0\leqslant x\leqslant a$确定一个闭域$\overline{D}_3$，上下由圆弧$x^2+(y-a)^2=a^2$与直线$y=x$围成，左右由直线$x=0$，$x=a$围成（图4.18）。

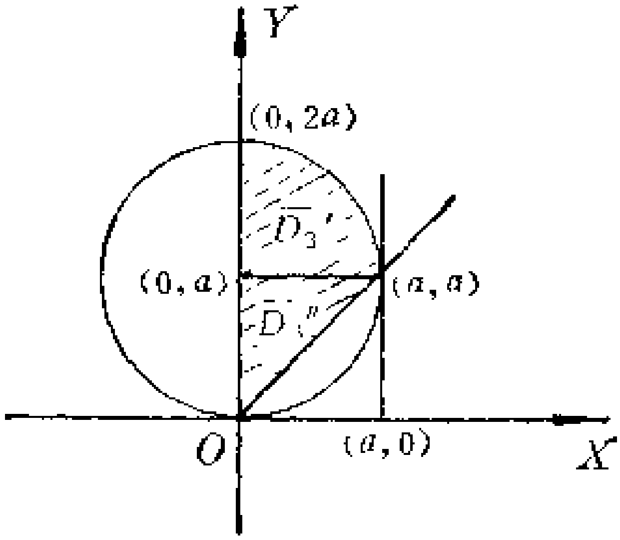


图4.18

闭域$\overline{D}_3$也可以用另外的方法表示。例如，用直线$y=a$将$\overline{D}_3$分为上、下两部分，分别记为$\overline{D}_3'$与$\overline{D}_3''$，则

$$\overline{D}_3':\ \begin{cases}0\leqslant x\leqslant\sqrt{2ay-y^2},\\ a\leqslant y\leqslant 2a;\end{cases}\qquad \overline{D}_3'':\ \begin{cases}0\leqslant x\leqslant y,\\ 0\leqslant y\leqslant a.\end{cases}$$

§5 三个重要定理

本节给出欧氏空间中的三个重要定理，以大家熟悉的闭区间套定理为出发点，先在直线上进行证明，然后再推广。为简便计，避免记号上的复杂，我们不在一般的n维空间推广，而只就平面给予推广，这样处理，将有利于初学者。

一、先在直线E_1上讨论

首先用引理的形式将闭区间套定理表述如下.

引理 设有一列闭区间 $\{I_n\}$，其中 $I_n=[a_n, b_n]$ $(n=1, 2,\cdots)$，满足下面两个条件：

1° $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$,

2° I_n的长度$|I_n|=b_n-a_n\to 0$ $(n\to\infty)$,

则有唯一的一点 a 属于一切I_n，即 $a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$.

定理1 (致密性定理)任何有界无限点集至少有一个聚点.

证明 设点集E是有界无限集，故存在$\lambda>0$，使得 $E\subset[-\lambda, \lambda]=I_0$.

使用逐次等分区间的办法，首先将I_0等分为二：$[-\lambda, 0]$，$[0, \lambda]$，则其中必有一个区间包含集E中无限多个点，记这个区间为I_1(若两个区间同时含有E中无限多个点，则任选一个)。再将I_1等分为二，如前所述，取其中含有E中无限多个点的一个闭区间为I_2，$|I_2|=\dfrac{\lambda}{2}$. 如此继续下去，得到一列闭区间 $\{I_n\}$：

1° $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$,

2° $|I_n|=\dfrac{\lambda}{2^{n-1}}\to 0$ $(n\to\infty)$,

而且

3° 每一个I_n包含E中无限多个点.

据引理，有点 $a\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}I_n$. 现在证明点 a 是集E的一个聚点. 设 $U(a, \varepsilon)$ 是点 a 的任意一个邻域（实际上就是开区间

$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$)。由2°，并注意到点$a$属于一切$I_n$，所以只要$n$取得充分大，便有

$$I_n \subset U(a, \varepsilon).$$

由3°，$U(a, \varepsilon)$也含有E中无限多个点，因而点a是E的聚点。 ▌

注 定理1中要求集E是有界的这一条件是很重要的，否则定理不能成立。例如

$$N=\{1, 2, \cdots, n, \cdots\}$$

是无界无限集，它连一个聚点也没有。

推论 任何有界数(点)列必有收敛子列。

证明 设$\{a_n\}$为有界数列，有两种可能：

1）数列$\{a_n\}$中，由不相同的数组成的集是有限集，则必有某一个数a'在此数列中，重复出现无限次，将它们从数列$\{a_n\}$中依出现的先后顺序取出来，便组成一个收敛的子数列。

2）$\{a_n\}$中由不相同的数形成一可数无限集E，由定理1知，E有聚点a。据本章§3 定理2，在E中必有一列互异的点以a为极限，记这一列点为$\{a_{n_k}\}$，$n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$。$\{a_{n_k}\}$是$\{a_n\}$的子列，且

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}=a.$$

综合1)与2)，得到本推论。 ▌

定理1及推论又称为波尔察诺—维尔斯特拉斯（Bolzano—Weierstrass）定理。

我们在本章§2讲过，任何收敛点列必为有界点列；反之，有界点列不一定是收敛点列。然而本推论却进一步指出，既使有界点列发散，也一定包含有收敛的子点列。例如发散数列

$$1,\ -1,\ 1,\ -1,\ \cdots,\ (-1)^{n-1},\ \cdots$$

有收敛子列

$$1,\ 1,\ \cdots,\ 1,\ \cdots$$

与

$$-1,-1,\cdots,-1,\cdots.$$

定理 2 （有限复盖定理）设F是有界闭集，M是一族开区间，它完全复盖住F(即，对于F中的每一点x，必有开区间$U\in M$，使$x\in U$)，则在M中一定存在有限个开区间

$$U_1,\ U_2,\ \cdots,\ U_m,$$

它们完全复盖住F。

证明 若F是有限点集，定理显然成立，因此假定F是无限集。我们用反证法来证。假若M中的任何有限个开区间都不能完全复盖住F。

因F是有界的，故存在$I_0=[-\lambda,\lambda]$，使$F\subset I_0$。如定理1证明中那样，使用逐次等分法，首先将I_0等分为二，其中必有一个包含F的一个无限子集，该子集不能被M中任何有限个开区间完全复盖。一般地，将I_n等分为二，其中必有一个包含F的一个无限子集，并且该子集不能被M中任何有限个开区间完全复盖，记这个闭区间为I_{n+1}，$|I_{n+1}|=\dfrac{\lambda}{2^n}$。如此继续下去，得到一列闭区间$\{I_n\}$：

1° $I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$，

2° $|I_n|=\dfrac{\lambda}{2^{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)$，

而且

3° 每个I_n含有F的一个无限子集，该子集不能被M中任何有限个开区间完全复盖。

据引理，有点$a\in\bigcap_{n=1}^{\infty}I_n$，并且$a$是$F$的一个聚点（证明同定理1）。

由于F是闭集，所以$a\in F$。由假设，F被M所复盖，所以$a\in F$也必为M中某一个开区间U_0所复盖，$a\in U_0$。因闭区间套叙列$\{I_n\}$退缩于点a，故当n充分大时，有

$$I_n\subset U_0,$$

因而F中包含在I_n内的那个无限子集被M中的一个开区间U_0就完全复盖了，这与3°相矛盾，定理得证。 ▌

定理2又称为海因-波莱尔-勒贝格（Heine-Borel-Lebesgue）定理，该定理可简单说成：有界闭集上的任一开复盖有一个有限的子复盖。

注 定理中要求集F是闭的并且是有界的，如果去掉其中一个条件，定理不成立。

例如，$N=\{1,\ 2,\cdots,\ n,\cdots\}$是无界闭集。设$M=\{U_n\}$，其中$U_n=\left(n-\frac{1}{4},\ n+\frac{1}{4}\right)$，$n=1,2,\cdots$。则$M$盖住了$N$，但$M$中的任何有限个$U_n$不能完全复盖住$N$。

又如，集$E=\left\{1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots\right\}$是有界的，但非闭。取$U_n$为包含$\frac{1}{n}$的小开区间，但使$U_n$不含$E$的任何其他点。$M$是由$U_n(n=1,\ 2,\cdots)$组成的开区间集，则$M$复盖住$E$，然而$M$中任何有限个$U_n$不能完全复盖住$E$。

另外，定理中要求 M 是开复盖，M中的元素是开区间；如果换为闭复盖，M 中的元素是闭区间，定理也不成立。如下面一列闭区间

$$\left[0,\ \frac{1}{2}\right],\ \left[\frac{1}{2},\ \frac{3}{4}\right],\ \left[\frac{3}{4},\ \frac{7}{8}\right],\cdots,\left[\frac{2^n-1}{2^n},\ \frac{2^{n+1}-1}{2^{n+1}}\right],$$

…及$[1,\ 2]$复盖闭区间$[0,\ 2]$，但不能从它们当中选出有限个闭区间完全复盖住$[0,\ 2]$。

二、推广到平面情形

定理 3 （闭矩形套定理）设有一列闭矩形$\{R_n\}$，其中$R_n=\{(x,\ y);\ a_n\leqslant x\leqslant b_n,\ c_n\leqslant y\leqslant d_n\}(n=1,\ 2,\ \cdots)$,满足下面两个条件：

$$1^\circ\quad R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots,$$

$$2^\circ\quad \lim_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0,\ \lim_{n\to\infty}(d_n-c_n)=0,$$

则有唯一的一点$P(\xi,\ \eta)$ 属于所有R_n，即 $P\in\bigcap\limits_n R_n$。

证明 $R_n=I_n\times J_n$，其中$I_n=[a_n,\ b_n]$，$J_n=[c_n,\ d_n]$。由条件1°，据第二章§1定理2知，区间列$\{I_n\}$和$\{J_n\}$具有下面性质：

$$I_1\supset I_2\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots,$$

$$J_1\supset J_2\supset\cdots\supset J_n\supset\cdots,$$

并且$|I_n|=b_n-a_n$，$|J_n|=d_n-c_n$，因此$\{I_n\}$和$\{J_n\}$都是闭区间套叙列，满足引理中条件，因而有

点ξ属于一切I_n，点η属于一切J_n，

于是点$P(\xi,\eta)$属于一切$R_n(n=1,2,\cdots)$。（图4.19）

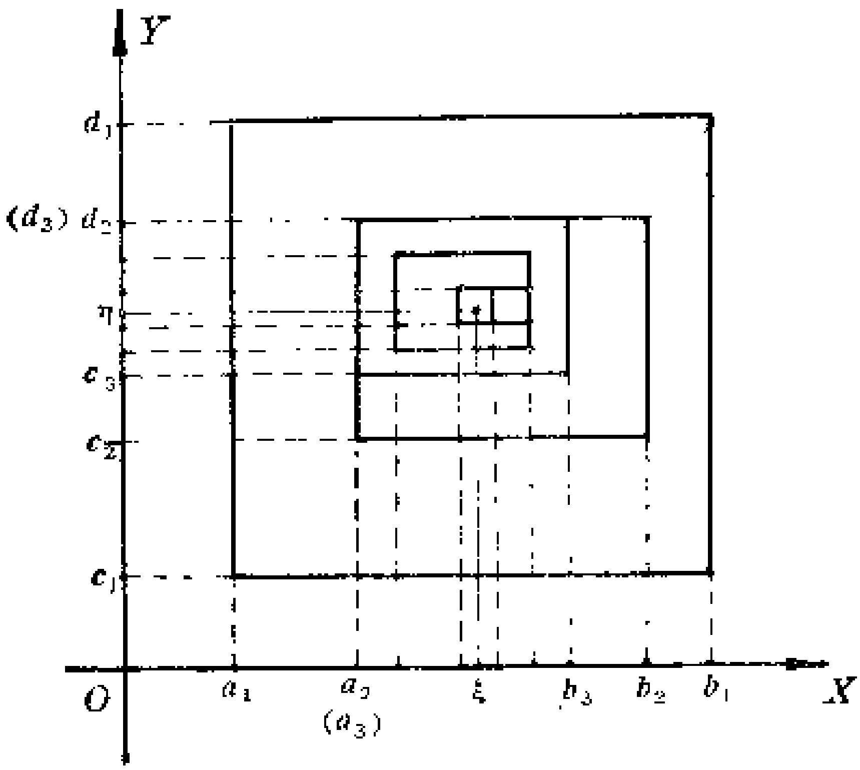


图 4.19

余下的是证明点P是属于所有R_n的唯一一点，用反证法。

设点$P'(\xi',\eta') \neq P(\xi,\eta)$也属于一切$R_n$。不妨设$\xi' \neq \xi$，于是$\xi'$与$\xi$就是$X$轴上的两个不同点，而且它们同时都属于所有$I_n$。据引理，这是不可能的，因此必有$P'=P$。]

定理1′ 设E是平面上的有界无限点集，则E至少有一个聚点。

证明 证法 I 因E有界，故有$\lambda>0$，使得$E \subset R_0=\{(x,y);|x| \leqslant \lambda,\ |y| \leqslant \lambda\}$。

用坐标轴将闭正方形R_0分为四个小闭正方形，则其中至少有一个小闭正方形包含E中无限个点，记这个小闭正方形为R_1（若有几个小闭正方形都含有E中无限个点，则任选一个），R_1的

边长为λ，再用平行于坐标轴的直线将R_1分成四个相等的小闭正方形，如前所述，选其中含有E的无限个点的小闭正方形为R_2，其边长为$\frac{\lambda}{2}$。如此继续下去，得到一列闭正方形$\{R_n\}$：

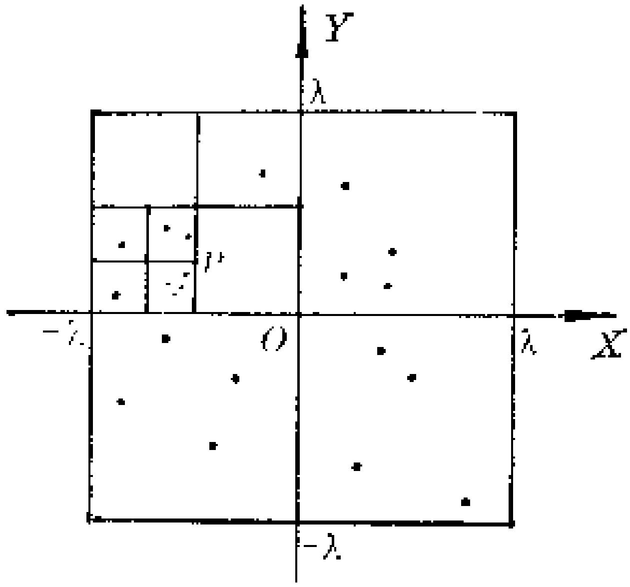


图 4.20

1° $R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots$，

2° R_n 的边长$\frac{\lambda}{2^{n-1}}\to 0$ $(n\to\infty)$，

并且

3° 每个R_n中包含E的无限个点(图4.20)。

由定理3知，有点$P\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}R_n$。余下证明点$P$是$E$的一个聚点。

设$U(p,\varepsilon)$是点P的任意一个邻域。因正方形R_n的对角线长是其边长的$\sqrt{2}$倍，因此R_n的对角线长为$\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}\lambda$， 由2° 知

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}\lambda=0$，故可取$n$充分大，使$\frac{\sqrt{2}}{2^{n-1}}\lambda<\varepsilon$。而点$P$属于一切$R_n$，所以当$n$充分大时，有

$$R_n\subset U(p,\varepsilon).$$

由3°知，$U(p,\varepsilon)$内也含有E中无限个点，从而P为集E的聚点。

证法Ⅱ　因E是平面上的有界无限集，那么E中各点的横坐标与纵坐标所成的集都是有界集，且至少有一个坐标组成无限集，不妨设E中各点的横坐标组成一有界无限集E_x。据定理1，它有聚点，记为x_0。因此在集E_x中有一列互异的点x_n，适合$x_n\neq x_0$，且$x_n\to x_0(n\to\infty)$。

在E中横坐标为x_n的平面点可能有多个，取其中一个点好了，并记为(x_n,y_n)，因此相应于$\{x_n\}$，有平面点列$\{(x_n,y_n)\}$，显然它的纵坐标亦组成有界数列。又据定理1推论，可从$\{y_n\}$中取出一收敛子列$\{y_{n_k}\}$，以y_0为极限。由此，平面点列$\{(x_{n_k},y_{n_k})\}((x_{n_k},y_{n_k})\in E)$是由一列互异的点（因第一坐标彼此不同）组成，适合$(x_{n_k},y_{n_k})\neq(x_0,y_0)$，而且以$(x_0,y_0)$为极限，故点$(x_0,y_0)$是集$E$的聚点。　　▌

推论　任何平面有界点列必有收敛子列。

（仿定理1推论证明，从略。）

定理2′　设F是有界闭集，M是一族开圆，复盖住F，则在M中一定存在有限个开圆

$$U_1,U_2,\cdots,U_m,$$

它们完全复盖住F。

证明　不妨设F是无限集，用反证法，假设M中任何有限个

开圆都不能完全复盖住F。

因F有界，故有正方形R_0，使 $F\subset R_0=\{(x,y);\ |x|\leqslant\lambda,\ |y|\leqslant\lambda\}$。用坐标轴将$R_0$分为四个相等的小正方形，其中必有一个小正方形包含$F$的一个无限子集，并且该子集不能被$M$中任何有限个开圆完全复盖，记这个小正方形为$R_1$。仿照定理1′中的作法，我们得到一列闭正方形$\{R_n\}$：

1° $R_1\supset R_2\supset\cdots\supset R_n\supset\cdots$，

2° R_n 的边长$\dfrac{\lambda}{2^{n-1}}\to 0\ (n\to\infty)$

并且

3° 每个R_n包含F的一个无限子集，该子集不能被M中任何有限个开圆完全复盖。

由定理3，有点$P\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}R_n$，并且$P$是$F$的一个聚点（证明同定理1′）。又因$F$是闭集，所以$P\in F$。类似于定理2中最后部分的证明（读者补述），最后引出矛盾，定理得证。 ▌

§6 康托尔集

康托尔集是集论中一个很著名的例子，具有许多重要性质，本节分两个问题来叙述。

一、什么是康托尔集

将直线上的闭区间〔0，1〕三等分，去掉居中的开区间

$\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$，将剩下的两个闭区间$\left[0, \frac{1}{3}\right]$，$\left[\frac{2}{3}, 1\right]$分别再三等分，并把居中的两个开区间$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$，$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$去掉．剩下四个闭区间

$$\left[0, \frac{1}{9}\right], \left[\frac{2}{9}, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{2}{3}, \frac{7}{9}\right], \left[\frac{8}{9}, 1\right]$$

又分别三等分，再去掉居中的开区间

$$\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right), \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right), \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right), \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right).$$

由此可见，每次将留下来的每个闭区间三等分，而去掉居中的开区间，如此继续下去，以至无限(图4.21)．

图 4.21

这样，从[0,1]中去掉的是可数个开区间的并集G_0：

$$G_0 = \left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \cup \left[\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right) \cup \left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)\right] \cup$$

$$\cup \left[\left(\frac{1}{27}, \frac{2}{27}\right) \cup \left(\frac{7}{27}, \frac{8}{27}\right) \cup \left(\frac{19}{27}, \frac{20}{27}\right)\right.$$

$$\left.\cup \left(\frac{25}{27}, \frac{26}{27}\right)\right] \cup \cdots.$$

留下来的点所成之集P_0叫做康托尔集，$P_0 = [0,1] - G_0$.

显然，集P_0非空．例如，0，1以及所有被去掉的开区间的

端点都属于集P_0。因此，康托尔集是所有那些永远去不掉的点所成之集。

二、康托尔集的一些性质

1．集P_0是完全集．为此我们证明：

1）P_0是闭集．因为$P_0=[0,1]-G_0$．G_0是可数个开区间的并集，据§4定理2，G_0是开集．而闭集减开集仍为闭集，所以P_0是闭集．

2）P_0是自密集，即证$P_0\subset P_0^*$．

首先注意这样一个事实：在进行第一次删去手续以后余下的两个闭区间的长度都是$\frac{1}{3}$，第二次删去后留下的四个闭区间的长度都是$\frac{1}{3^2}$，一般来说，在进行第n次删去手续后剩下的2^n个闭区间的长度都是$\frac{1}{3^n}$．

现设$x\in P_0$，以x为心作任意邻域$U(x,\varepsilon)$（实际上就是开区间$(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$）．因$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$，故只要$n_0$充分大，便有$\frac{1}{3^{n_0}}<\varepsilon$．既然$x$是永远去不掉的点，因此$x$也应该属于删去$n_0$次以后所剩下的某一个闭区间中，记这个闭区间为$I_i^{(n_0)}$．由于$I_i^{(n_0)}$的长度$\frac{1}{3^{n_0}}<\varepsilon$，所以$I_i^{(n_0)}\subset U(x,\varepsilon)$．而闭区间$I_i^{(n_0)}$的两个端点属于集$P_0$，因此在$x$的任意邻域$U(x,\varepsilon)$内至少有一异于$x_0$的点属于集$P_0$，从而$x\in P_0^*$．

由$x\in P_0\Rightarrow x\in P_0^*$，故$P_0\subset P_0^*$．

综合1)，2)，证明了集P_0是完全集。

2．集P_0是无处稠密的。为此我们先介绍直线上到处稠密集与无处稠密集（又称疏朗集）这两个概念。

平时我们说直线上的有理点处处稠密，这就是说在直线上的每一点的任意邻域内都含有有理点。除全体有理点集具有这种性质外，另外还有一些点集（例如全体无理点集）也具有这种性质。因此我们有下面的

定义　设E为直线E_1的点集。如果E_1上每一个点的任意邻域内，必含有集E中的点，则称集E在E_1上处处稠密。

由此可见，E_1中的每一个点都是E的接点。因此E在E_1上处处稠密$\Longleftrightarrow E^0=E_1$。

我们说集E在E_1上无处稠密，顾名思义，E在E_1的任何区间上都不稠密。确切地说，我们有下面的

定义　如果直线上任何开区间(α,β)中至少有一个非空的开区间不含有E中的点，就说集E是直线上的无处稠密集，或者说是直线上的疏朗集。

例如，$N=\{1,2\cdots,n,\cdots\}$和$M=\left\{1,\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$都是疏朗集。

显然，直线上的疏朗集不能含有任何一个开区间。反之，可以证明*：如果直线上的点集E的闭包E^0不包含任何一个开区间，则E一定是疏朗集。

因为若E^0不含有开区间，则直线上任一开区间(α,β)中必含有补集$(E^0)'$中的点，设y为其中的一点，即$y\in(E^0)'$且$y\in(\alpha,\beta)$，

由于E^0是闭集，$(E^0)'$便是开集，从而有y的邻域$U(y,\varepsilon)\subset(\alpha,\beta)$并且$U(y,\varepsilon)\subset(E^0)'$，即$(\alpha,\beta)$的子开区间$U(y,\varepsilon)$不含有$E^0$中的因而更不会含有$E$中的点。据定义，$E$是疏朗集。

利用这一事实，来分析集P_0。因为集P_0是闭的，所以有$P_0=P_0^0$;并且P_0(从而P_0^0)不含有任何开区间，因此P_0是疏朗集。

由性质1与性质2，称P_0为康托尔的疏朗完全集。

3. *集P_0具有连续势$\aleph$。由集P_0的生成，使我们想到用实数的三进位小数表示来证明$\overline{\overline{P_0}}=\aleph$。

在构造集P_0时，第一次被去掉的是开区间$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，属于该区间的数$x$，用三进位小数表示，

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

必须是 $a_1=1$。

而从$[0,1]$除去$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$,其余的点用三进位小数表示时，它的第一位小数一定不是1(只能取0或2)。

至于$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$的端点(属于$P_0$)，各有两种表示：

$$\frac{1}{3}=\begin{cases}0.100\cdots,\\0.022\cdots;\end{cases}\qquad \frac{2}{3}=\begin{cases}0.122\cdots,\\0.200\cdots.\end{cases}$$

第二次去掉的是开区间$\left(\frac{1}{9},\ \frac{2}{9}\right)$与$\left(\frac{7}{9},\ \frac{8}{9}\right)$，它们中的数$x$用三进位小数表示，

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

必须是 $a_1\neq1$，$a_2=1$。

余下来的四个闭区间 $\left[0,\frac{1}{9}\right]$, $\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right]$, $\left[\frac{8}{9},1\right]$中的数（除端点外），用三进位小数表示时，它的第一位与第二位小数都不为1，即只能取0或2。至于端点，如前所述，可以有两种表示法，但其中一种不出现数字1。

一般来说，在第n次去掉的2^{n-1}个开区间中的数x，用三进位小数表示，

$$x=0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$$

必须是 $a_n=1$，$a_i\neq1(1\leqslant i\leqslant n-1)$。

余下来的2^n个闭区间(除去端点)中的数用三进位小数表示时，前n位数字都不为1，即只能取0或2。至于这些小闭区间的端点用三进位小数表示时，可有两种表示法，但我们可选其中的一种，使其不出现数字1。

由此可见，属于G_0中的数用三进位小数表示，一定要出现数字1；而用三进位小数表示P_0中的数（除去被去掉的可数个开区间的端点）时，每位数字都不为1，即只能取0或2。至于上述端点，我们完全可以选定其中一种表示法，使其不出现数字1。例如，$\frac{1}{3}$，则取0.22…；$\frac{2}{3}$，则取0.200…。这样一来，构成集P_0的数用三进位小数表示时，它的每位数字只能取0或2，即

$$P_0=\{0.a_1a_2\cdots a_n\cdots\}，其中a_i=0或2。$$

根据第三章§4定理2

$$\overline{\overline{P_0}}=\aleph。$$

另外，由于被去掉的开区间是可数个，所以这些开区间的端点

组成一可数集，因而集P_0中“非端点”的集，其势也是$\aleph$。这说明集P_0中“非端点”比“端点”要多得多，显示出康托尔集难以预料的奇妙性质。

§7 直线上的零集

设I是直线上以a,b $(a\leqslant b)$为端点的区间（可以是$[a,b]$，(a,b)，$[a,b)$，$(a,b]$）。规定I的长度

$$|I|=b-a.$$

定义 设E为直线上的点集。如果对于任给的$\varepsilon>0$，存在有限个或可数个区间$I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots$，使

$$E\subset\bigcup_i I_i,$$

并且这些I_i的总长度$\sum\limits_i|I_i|<\varepsilon$，则称$E$为零集。

空集算为零集。

例 1 全体自然数集是零集。

证明 设$N=\{1,2,\cdots,n\cdots\}$。任给$\varepsilon>0$，我们取长度小于$\dfrac{\varepsilon}{2}$的区间I_1包含点1，取长度小于$\dfrac{\varepsilon}{4}$的区间I_2包含点2。一般地，取长度小于$\dfrac{\varepsilon}{2^n}$的区间I_n包含点n。如此继续下去，得到一列区间$I_1,I_2,\cdots,I_n,\cdots$，使得

$$N\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n,$$

而 $$\sum_{n=1}^{\infty}|I_n|<\varepsilon\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\varepsilon.$$

据定义，集N是零集。 】

定理 1 零集的子集必为零集。

证明 由零集的定义可得到此结论（证明过程由读者补述）。 】

定理 2 有限个或可数个零集的并集是零集。

证明 设$A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$为可数个零集。对任给的$\varepsilon>0$，由于$A_n$是零集，所以必有有限个或可数个区间$\{I_k^{(n)}\}$，$(k=1,2,\cdots)$，其并$\bigcup\limits_k I_k^{(n)}\supset A_n$，且$\sum\limits_k|I_k^{(n)}|<\dfrac{\varepsilon}{2^n}$，显然，区间集$\{I_k^{(n)}\}$，$k=1,2,\cdots,n=1,2,\cdots$最多为可数个，且并集$\bigcup\limits_{n,k}I_k^{(n)}\supset\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，而其总长度$\sum\limits_{n,k}|I_k^{(n)}|<\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$，所以$\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$是一个零集。

如果只有有限个$A_1,A_2,\cdots,A_n$，其中每一个都是零集，也可同样证明它们的并集$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$是零集。 】

推论 直线上的有限点集或可数点集都是零集。

证明 因为单独一个点的集是长度为零的闭区间（也是零集），而有限集或可数集可以看作是有限个或可数个单元素集的并集。由定理，立即得到本推论成立。 】

注 此推论可根据零集的定义，仿照例 1 所做的那样来证明。

例 2 1）点集$\left\{1,\dfrac{1}{2},\cdots,\dfrac{1}{n},\cdots\right\}$是零集，

2）直线上一切有理点之集是零集，因为它们都是可数点集。

问：是否存在不可数的零集呢？康托尔集作了回答。

例 3　康托尔集是零集。

证明　第一次从$[0,1]$中去掉开区间$\left(\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right)$，留下来的两个闭区间长度都是$\frac{1}{3}$，第二次去掉两个开区间，留下的四个闭区间，它们的长度都是$\frac{1}{3^2}$。一般地，第n次去掉2^{n-1}个开区间，留下的2^n个闭区间，其长度都是$\frac{1}{3^n}$。于是经过n次删去手续，留下的2^n个闭区间的总长度为$\left(\frac{2}{3}\right)^n$。

现在任给$\varepsilon>0$，取自然数N_0，使$\left(\frac{2}{3}\right)^{N_0}<\varepsilon$，那么经过$N_0$次删去后，留下的$2^{N_0}$个闭区间的总长度是$\left(\frac{2}{3}\right)^{N_0}<\varepsilon$，而这$2^{N_0}$个闭区间的并集包含康托尔集，因此康托尔集是零集。　】

又康托尔集的势为$\aleph$，所以不可数的零集是存在的。

又问：不可数个零集的并集是否仍为零集呢？如果将$[0,1]$看成是由不可数个单元素集组成的并集，就知道不可数个零集的并集可以不是零集（因为$[0,1]$不是零集）。

第五章　函　数

§1　连续与一致连续

连续函数不仅在理论研究上重要，而且在实际应用中又广泛，通常的数学分析基本上是以连续函数为研究对象的，所以我们首先讨论这一类函数。

一、函数在一点和一集上的连续性

回顾下一元函数连续性定义。设函数$f(x)$定义在区间(a,b)上，又$x_0\in(a, b)$。若对于任给的$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，使得当$|x-x_0|<\delta$（这里自然要求$x\in(a, b)$）时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

我们就说函数$f(x)$在点x_0是连续的。换句话说，若把$f(x)$看作是E_1中的点集(a, b)到E_1中的映射，则$f(x)$在点x_0连续的意义就是：对于$f(x_0)$的任意邻域$U(f(x_0),\varepsilon)$，必有x_0在E_1中的邻域$U(x_0, \delta)$，使得当$x\in U(x_0, \varepsilon)\cap(a, b)$时，它的象$f(x)\in U(f(x_0), \varepsilon)$（此时$\rho(f(x), f(x_0))<\varepsilon$）。

由此可见，函数$f(x)$在点x_0连续，那么在与点x_0充分接近的点x上，相应的函数值$f(x)$与$f(x_0)$的接近程度可达到我们所希望的精确度。这一反映函数连续性本质特征的叙述不仅适用

于一元函数，也适用于多元函数。

设E为欧氏空间E_n中的点集。我们把从E到E_1中的映射f：$E\to E_1$叫做E上的函数，记为$y=f(x)$，其中$x=(x_1,\cdots,x_n)\in E$。当$n=1$时，$f(x)$是一元函数；当$n>1$时，$f(x)=f(x_1,\cdots,x_n)$是$x_1,\cdots,x_n$的n元函数。

定义 设$f(x)$是$E\subset E_n$上的函数，$x_0\in E$。如果对于任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$x\in U(x_0,\delta)\cap E$时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$在点x_0连续。换句话说，如果对于$f(x_0)$为心的任意邻域$U(f(x_0),\varepsilon)$，必有x_0在E_n中的邻域$U(x_0,\delta)$，当$x\in U(x_0,\delta)\cap E$时，它的象$f(x)\in U(f(x_0),\varepsilon)$，就说$f(x)$在点$x_0$连续。

如果函数$y=f(x)$在E上的每一点都连续，则称$y=f(x)$是E上的连续函数。

由定义知，若函数$y=f(x)$在点$x_0\in E$不连续，则存在某一$\varepsilon_0>0$，对于任何$\delta>0$，在点x_0的邻域$U(x_0,\delta)$内，必可找到一点$x'\in E$，使得$|f(x')-f(x_0)|<\varepsilon_0$不成立，即$|f(x')-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0$（此时$\rho(f(x'),f(x_0))\geqslant\varepsilon_0$）。

定理1 函数$f(x)$在点$x_0\in E$连续的必要充分条件是：对于集E中任意一列收敛于x_0的点$\{x_n\}$，对应的函数值叙列$\{f(x_n)\}$收敛于$f(x_0)$，即

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0).$$

证明 1）必要性 因为$f(x)$在点x_0连续，则对任一$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，当$x\in U(x_0,\delta)\cap E$时，

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

因E中的点列$\{x_n\}$收敛于点x_0，故有自然数N，当$n>N$时，$\rho(x_n, x_0)<\delta$，从而$x_n\in U(x_0, \delta)\cap E$。于是，对于所有的$n>N$，有

$$|f(x_n)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

故 $$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x_0).$$

2）充分性　用反证法。

假若$f(x)$在点x_0不连续，则存在某一$\varepsilon_0>0$，在点x_0的邻域$U\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$内必有点$x_n\in E$，使得

$$|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0.\quad (n=1, 2, \cdots)$$

因$x_n\in U\left(x_0, \dfrac{1}{n}\right)$，$\rho(x_n,x_0)<\dfrac{1}{n}$，所以$E$中的点列$\{x_n\}$收敛于点$x_0$。然而$\{f(x_n)\}$不以$f(x_0)$为极限（从上面的不等式可知），这与定理中的条件相矛盾，故$f(x)$在点x_0必连续。 ▌

由此容易看出，E中的孤立点必为函数$f(x)$的连续点。

注　由于定理1，函数在一点连续的定义可以有两种等价的说法：一种用$\varepsilon-\delta$方法叙述，一种用序列的语言表达。前者叫做依柯西意义连续，后者叫做依海因意义连续。

仿上，读者给出函数的极限

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

的两种等价的定义（其中a为$f(x)$的定义域E的聚点，A为实数）。

例　试讨论一元函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

在$x=0$处的连续性（函数图象参看图4.11）。

取点列$\{x_n\}$，其中$x_n=\dfrac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$。显然$x_n\to 0(n\to\infty)$，而

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=\lim_{n\to\infty}\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi=1,\quad f(0)=0.$$

所以该函数在$x=0$处不连续。

定理 2 设$f(x)$定义在闭区间$[a,b]$上。$f(x)$在$[a,b]$上连续的必要充分条件是：对于任意实数c，集$A_c=\{x;f(x)\leqslant c\}$与$B_c=\{x;\ f(x)\geqslant c\}$都是$[a,b]$中的闭集。

证明* 1）必要性　先证A_c为闭集。

如果对于给定的实数c，$A_c=\varnothing$或A_c虽非空，但A_c的导集$A_c^*=\varnothing$，定理显然成立。今设$A_c^*\neq\varnothing$。任取点$x_0\in A_c^*$。

因为$A_c\subset[a,b]$，所以$A_c^*\subset[a,b]$，故$x_0\in[a,b]$。

由$x_0\in A_c^*$，在A_c中有点列$\{x_n\}$：$x_n\neq x_0$，$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x_0$。

而$f(x)$在点x_0连续，所以

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(x_0).$$

又因　$f(x_n)\leqslant c$，故$f(x_0)\leqslant c$，$x_0\in A_c$。

由$x_0\in A_c^*\Rightarrow x_0\in A_c$，所以$A_c^*\subset A_c$，$A_c$为闭集。

类似地可证B_c也是闭集。

2）充分性　用反证法。在所设的条件下，假若函数$f(x)$还有一个不连续点x_0，那末对某一$\varepsilon_0>0$，由定理1的证明可知，必有$[a,b]$中的点列$\{x_n\}$：$x_n\to x_0$，并且

$$|f(x_n)-f(x_0)|\geqslant\varepsilon_0,\quad(n=1,2,\cdots)$$

从而至少有一子列$\{x_{n_k}\}$，使得

$$f(x_{n_k})\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0$$

或 $$f(x_{n_k})\leqslant f(x_0)-\varepsilon_0.$$

设：(1) 子列 $\{x_{n_k}\}$ 使得 $f(x_{n_k})\geqslant f(x_0)+\varepsilon_0$。取$c_0=f(x_0)+\varepsilon_0$，那末 $x_{n_k}\in\{x;\ f(x)\geqslant c_0\}=B_{c_0}$。

由定理中条件，集B_{c_0}是闭的。而$x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$。所以$x_0\in B_{c_0}$。另一方面，$f(x_0)<f(x_0)+\varepsilon_0=c_0$，所以$x_0\notin B_{c_0}$。得出了矛盾，说明 (1) 不能成立。因此只能

设：(2) 子列$\{x_{n_k}\}$使得$f(x_{n_k})\leqslant f(x_0)-\varepsilon_0$，仿上又引出矛盾①。

因此，在定理条件下，函数$f(x)$连一个不连续点也不能有，即$f(x)$是$[a,\ b]$上的连续函数。 ▌

推论 设$f(x)$是$[a,\ b]$上的连续函数，则对于任意实数c，集$\{x;\ f(x)=c\}$是闭的。

证明 因为$\{x;\ f(x)=c\}=\{x;\ f(x)\leqslant c\}\cap\{x;f(x)\geqslant c\}$。据定理2，$\{x;\ f(x)\leqslant c\}$与$\{x;\ f(x)\geqslant c\}$都是闭集，作为两个闭集的交集，$\{x;\ f(x)=c\}$也是闭集。 ▌

现将定理 2 推广。设E为E_1中的点集，$f(x)$是E上的函数。

---

①我们把证明过程补叙如下：

若$\{x_n\}$有子列$\{x_{n_k}\}$使得$f(x_{n_k})\leqslant f(x_0)-\varepsilon_0$。

取 $c_0'=f(x_0)-\varepsilon_0$，那末$x_{n_k}\in\{x;\ f(x)\leqslant c_0'\}=A_{c_0'}$。

由定理中条件，集$A_{c_0'}$是闭的。而$x_{n_k}\to x_0(k\to\infty)$，所以$x_0\in A_{c_0'}$。另一方面，$f(x_0)>f(x_0)-\varepsilon_0=c_0'$，所以$x_0\notin A_{c_0'}$。得出了矛盾，说明 (2) 也不成立。

因为E可看作是E_n的一个子空间（注意：欧氏空间的子空间是一个距离空间，但不一定是欧氏空间），$f(x)$便叫做是空间E上的实函数。我们有

定理 3 定义在距离空间$E(\subset E_n)$上的实函数$f(x)$是连续的，其必要充分条件是：对于任意实数c，集$\{x;\ f(x)\leqslant c\}$与$\{x;\ f(x)\geqslant c\}$都是E中的闭集。

证明 只要将定理 2 证明中的闭区间$[a,\ b]$换为空间E，并把其中的点、点集理解为空间E中的点与点集，便得到本定理的证明。 ❙

定理 4 定义在距离空间$E(\subset E_n)$上的实函数$f(x)$是连续的，其必要充分条件是：对于任意实数c，集$\{x;\ f(x)>c\}$与集$\{x;\ f(x)<c\}$都是E中的开集。

证明 因为集$\{x;\ f(x)>c\}$与$\{x;\ f(x)\leqslant c\}$；$\{x;f(x)<c\}$与$\{x;\ f(x)\geqslant c\}$互为补集，由定理 3 得定理 4。 ❙

注 因为$(-\infty,c]$，$[c,\ +\infty)$是E_1中的闭集，$(-\infty,c)$，$(c,+\infty)$是E_1中的开集，因此定理3和定理4揭示了在$E(\subset E_n)$上定义的连续函数的特征：E_1中的任一闭集的原象是E中的闭集，E_1中的任一开集的原象是E中的开集。要想进一步了解这一事实，请参看江泽涵著《拓扑学引论》12—13页。

二、一致连续性

函数$f(x)$在区间$[a,\ b]$上一致连续是指：对于任给的$\varepsilon>0$，有正数δ，使得$[a,b]$上的任意两点x'，x''，只要$|x'-x''|<\delta$，便有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon.$$

由此可见，在一致连续的情况下，只要点x'与x''彼此充分接近，不等式$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$就成立。至于点$x'$与$x''$在$[a,b]$上究竟位于何处，则无关重要。

现在将函数在区间上一致连续的概念推广到一般点集上。

定义 设函数$f(x)$定义在集$E(\subset E_n)$上。若对于任给的$\varepsilon>0$，有$\delta>0$，当$x'\in E$，$x''\in E$且$\rho(x', x'')<\delta$时，有

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon,$$

则称函数$f(x)$在集E上一致连续（或均匀连续）。

或者叙述为：如果对于任给的$\varepsilon>0$，存在正数δ，使得对于包含在任何一点$x\in E$的邻域$U(x, \delta)$内的任意两点$x'\in E$和$x''\in E$，不等式

$$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$$

都成立，则称函数$f(x)$在集E上一致连续。

这样，如果说连续性所描述的是函数在一点的局部性质的话，那末一致连续就是描述函数在整个集上的整体性质。比较这两个概念，我们可得到下面的结论：

$f(x)$在E上一致连续$\Rightarrow f(x)$在E上连续。

事实上，任取点$x\in E$。由一致连续，对于任给的$\varepsilon>0$，存在$\delta>0$，当$x'\in E$且$x'\in U(x, \delta)$时，有

$$|f(x')-f(x)|<\varepsilon,$$

因此，函数$f(x)$在点x连续。又由于点$x\in E$是任取的，所以$f(x)$在E上连续。

这里自然会问：须添加些什么条件，就能保证集E上的连续函数一致连续呢？下一节将回答这一问题。

§2 连续函数的性质

一、在有界闭集上的连续函数性质

仿照闭区间$[a, b]$上的连续函数的性质讨论，我们有如下三个定理。

定理 1 设$f(x)$是有界闭集$F\subset E_n$上的连续函数，那末$f(x)$在集F上有界。

证明 证法 I 任取点$a\in F$。由于$f(x)$在点a连续，故存在$\delta>0$，当$x\in U(a, \delta)\cap F$时，有

$$|f(x)-f(a)|<1,$$

于是
$$|f(x)|<|f(a)|+1. \qquad (*)$$

我们对F中的每一个点a作这样的邻域，所有这种邻域的全体记为M，显然盖住了F。由有限复盖定理，从M中可选出有限个邻域

$$U_1, U_2, \cdots, U_m$$

同样也盖住F。记邻域U_i的中心为a_i，$a_i\in F(i=1,2, \cdots,m)$。由（*）知：

当$x\in U_i\cap F$时，$|f(x)|<|f(a_i)|+1$。

记$\lambda=\max\{|f(a_1)|+1, |f(a_2)|+1, \cdots, |f(a_m)|+1\}$。注意到$F$中的任何点$x$至少要属于$U_i(i=1, 2, \cdots, m)$中的某一个，于是当$x\in F$时，有

$$|f(x)|<\lambda.$$

这就证明了函数$f(x)$是F上的有界函数。

证法Ⅱ　用反证法．假设$f(x)$在F上是无界的．那末对每一自然数n，必有点$x_n\in F$，使得

$$|f(x_n)|>n.$$

因F是有界集，故$\{x_n\}$是有界点列．据波尔察诺—维尔斯特拉斯定理，必有子列$\{x_{n_k}\}$收敛于某点x_0．又因F是闭集，所以$x_0\in F$．

由于$f(x)$在点x_0连续，故

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0).$$

然而由点x_n的取法知：$|f(x_{n_k})|>n_k$，因而$\lim\limits_{k\to\infty} f(x_{n_k})$不存在．所得出的矛盾说明函数$f(x)$在集$F$上是有界的．　】

定理 2　有界闭集$F(\subset E_n)$上的连续函数$f(x)$在该集上可取得最大值与最小值．

证明　由定理1，$f(x)$在F上有界，因此与F中所有点x对应的一切函数值$f(x)$所成之集是有界数集．据确界存在定理，数集$\{f(x)\}$必有上确界（最小上界）与下确界（最大下界），分别记为M与m：

$$M=\sup_{x\in F}\{f(x)\},\quad m=\inf_{x\in F}\{f(x)\}.$$

我们证明，在集F上可找到一点x_0，使

$$f(x_0)=M.$$

事实上，由上确界定义，对于所有的$x\in F$，有

$$f(x)\leqslant M.$$

但对任意的$\varepsilon>0$，可找到点$x'\in F$使得

$$M-\varepsilon<f(x')\leqslant M.$$

令$\varepsilon=\frac{1}{n}(n=1, 2, \cdots)$，我们得到$F$中的一个点列$\{x_n\}$，使得

$$f(x_n)>M-\frac{1}{n}.$$

因F是有界集，故$\{x_n\}$是有界点列。据波尔察诺—维尔斯特拉斯定理，必有子列$\{x_{n_k}\}$收敛于某点x_0。又因F是闭集，所以$x_0\in F$。

由于$f(x)$在点x_0连续，故

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k})=f(x_0).$$

同时由点x_n的取法知：$f(x_{n_k})>M-\frac{1}{n_k}$，取极限，得$f(x_0)\geqslant M$，但$f(x_0)$不能大于$M$，因此

$$f(x_0)=M.$$

同法可以证明，在集F上可找到另一点$\bar{x}_0$，使得

$$f(\bar{x}_0)=m. \qquad \blacksquare$$

定理3 设函数$f(x)$在有界闭集$F(\subset E_n)$上连续，则$f(x)$在集F上一致连续。

证明 用反证法。假设在有界闭集F上的连续函数$f(x)$不一致连续，于是存在某一正数ε_0，对于任何$\delta>0$，都能选出两点$x'\in F, x''\in F$，适合条件$\rho(x',x'')<\delta$，但$|f(x')-f(x'')|\geqslant\varepsilon_0$。

取$\delta_n=\frac{1}{n}$。那末对于δ_n，有两点$x_n'\in F$，$x_n''\in F$，虽然$\rho(x_n',x_n'')<\delta_n$，但

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0.$$

令$n=1,2,\cdots$，得到F中两个点列$\{x_n'\}$，$\{x_n''\}$。

由于集F是有界的，据波尔察诺—维尔斯特拉斯定理，从有界点列$\{x_n'\}$中可选出收敛子列。为着不使记号太繁，就算点列$\{x_n'\}$本身已收敛，设其极限为x_0：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n'=x_0$。显然$x_0\in F$($F$是闭集)。

又因 $\rho(x_n',x_n'')<\dfrac{1}{n}$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}x_n''=x_0$。

而$f(x)$在点x_0连续，因此有

$$\lim_{n\to\infty}f(x_n')=f(x_0),\quad \lim_{n\to\infty}f(x_n'')=f(x_0),$$

$$\lim_{n\to\infty}[f(x_n')-f(x_n'')]=0,$$

显然这与

$$|f(x_n')-f(x_n'')|\geqslant\varepsilon_0\quad(\text{对一切}\ n)$$

相矛盾，故定理得证。 ▌

注 定理3不用反证法，由有限复盖定理可直接证明。

上面三个定理要求集F有界且闭这一条件是重要的，如果去掉有界性或闭集这一条件，就不能保证定理中的结论成立。

例1 $[1,+\infty)$上的函数$y=\ln x$是连续的，但是无界的(有下界但无上界)，函数在$x=1$取得最小值0，此时$[1,+\infty)$虽为直线上的闭集，但不是有界集。然而$y=\ln x$是$[1,+\infty)$上的一致连续函数。事实上，若$1\leqslant x_1<x_2$，则

$$\ln x_2-\ln x_1=\ln\frac{x_2}{x_1}=\ln\left(1+\frac{x_2-x_1}{x_1}\right)<\frac{x_2-x_1}{x_1}\leqslant x_2-x_1.\text{①}$$

因此，任给$\varepsilon>0$，取$\delta=\varepsilon$，对于$[1,+\infty)$上的任意二点x_1与x_2，只要$|x_1-x_2|<\delta$，就有

① 当$x>0$时，$\ln(1+x)<x$。

$$|\ln x_1 - \ln x_2| \leqslant |x_1 - x_2| < \varepsilon.$$

故$y = \ln x$在$[1, +\infty)$上一致连续。

例2 定义在$[1, +\infty)$上的连续函数$y = x^2$是无界的（有下界但无上界），有最小值 0(在$x = 1$处取得)。在$[1, +\infty)$上，$y = x^2$不是一致连续的。

例如取$\varepsilon_0 = 1$，不论$\delta > 0$取得如何小，只要n足够大，就有$\frac{1}{n} < \delta$，在$[1, +\infty)$可找到点$x_1 = n$和点$x_2 = n + \frac{1}{n}$，此时

$\rho(x_1, x_2) = \left| n - \left(n + \frac{1}{n}\right) \right| = \frac{1}{n} < \delta$，但

$$|x_1^2 - x_2^2| = |(x_1 + x_2)(x_1 - x_2)| = \left(2n + \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n} > 2.$$

故$y = x^2$在$[1, +\infty)$上非一致连续。

例3 定义在$(0,1)$上的函数$f(x) = \frac{1}{x}$是连续的，但是无界的(有下界无上界)，在$(0,1)$内$f(x)$不能取得最大值和最小值，并且还可证明它不一致连续。

事实上，取$\varepsilon_0 = 1$，那末不论$\delta > 0$取得如何小，只要n足够大，使得$\frac{1}{n^2} < \delta$，在$(0,1)$内可找到点$x' = \frac{1}{n}$，$x'' = \frac{1}{n+1}$，虽然

$$\rho(x', x'') = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} < \delta,$$

但同时有

$$\left| f\left(\frac{1}{n}\right) - f\left(\frac{1}{n+1}\right) \right| = |n - (n+1)| = 1,$$

因而 $f(x) = \frac{1}{x}$在$(0,1)$内不一致连续。此时区间$(0,1)$虽有界，

但不是闭集。

由此可见，尽管开区间(a,b)和闭区间$[a,b]$只相差两个端点，但它们属于不同性质的集，前者为开集，后者为闭集，因此可使定义在它们上面的连续函数表现出完全不同的性质。

二、中间值定理

中间值定理是描述连续函数特性的一个重要定理，我们先就一元函数叙述如下：设$f(x)$是$[a,b]$上的连续函数，那末$f(x)$在该区间上可取得其最小值与最大值之间的一切值。现在问：能不能将定理中的条件，即函数的定义域$[a,b]$换成任意闭集呢？不妨看一个例子。

例4 设函数

$$f(x)=\begin{cases}-1, & x\in[-1,\ 0],\\ 1, & x\in[1,2].\end{cases}$$

显然，$f(x)$是有界完全集$F=[-1,\ 0]\cup[1,2]$上的连续函数，其最小值为-1，最大值为1。然而$f(x)$在F上连最小值与最大值之中的任何一个数也不能取得，原因是集F不具有连通性。

而连续函数的中间值定理正是把函数定义域具有连通性作为条件。在直线上，具有连通性的点集只能是区间（可以是开区间，也可以是闭区间或半开（半闭）区间；可以是有限区间，也可以是无限区间），所以一元函数的中间值定理又可叙述为：

设函数$f(x)$是某一区间上的连续函数。若在这区间内的两点x_1与x_2，函数具有不相等的数值

$$f(x_1)=A,\ f(x_2)=B,$$

则对于A，B之间的任意数C，必有x_1，x_2之间的点x_3，

使得

$$f(x_3)=C.$$

因此，当连续函数从一个数值转变到另一个数值时，它必经过每一中间值至少一次。

对于多元函数，若其定义域是连通域（可开可闭；可为有界也可为无界），类似于一元函数，可写出多元连续函数的中间值定理。

至于连续函数中间值定理的证明，一般的数学分析教程上都有，在此不再赘述。

三、补充说明

前面讨论连续函数，未区分一元与多元，就它们所具有的共同特性进行了某些讨论。如果以为这样作，可以代替分别对一元与多元连续函数进行更细致的研究那就错了，现举一例说明。

设$f(x,y)$是定义在开域D上的二元函数，点$(x_0,y_0)\in D$，按照§1的定义，此时$f(x,y)$在点(x_0,y_0)连续是对变量x,y全体来说的。如果固定其中一个变量，例如y的值为y_0，就有$f(x,y)$关于变量x在点(x_0,y_0)的连续性问题。所谓函数$f(x,y)$关于x在点(x_0,y_0)连续，指的是一元函数

$$\Phi(x)=f(x,y_0)$$

在点x_0连续。

不难看出，若$f(x,y)$（关于x,y全体）在点(x_0,y_0)连续，则$f(x,y)$关于x（或y）在点(x_0,y_0)亦连续；反过来，就不一定成立。

例5 设函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2>0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

讨论在点(0,0)的连续性.

取 $x_n=y_n=\dfrac{1}{n}$，当 $n\to\infty$时，$\left(\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right)\to(0,0)$.

因为 $\lim\limits_{n\to\infty}f\left(\dfrac{1}{n},\ \dfrac{1}{n}\right)=1\neq f(0,0)$， 所以 $f(x,y)$在点(0,0)不连续.

然而 $f(x,y)$关于x（以及y）在点(0,0)是连续的，因为 $f(x,0)=f(0,y)=0$.

由此可见，$f(x,y)$对变量x,y全体的连续性与分别地对于各个变量的连续性是不同的. 显然，对一元函数不存在这样的问题. 又如，对一元函数不连续点进行分类（下一节介绍）不适用于多元函数.

因此，对于一元与多元函数，不仅要在其总体上，在其相互联系上去研究，而且有必要分别对它们进行更深入的研究. 下面两节就一元函数中两类较重要的函数予以讨论.

§3 单调函数

本节讨论的一元函数$f(x)$，其定义域$\mathscr{X}$仅限于数直线上的区间.

若对$\mathscr{X}$上的任意两点x_1,x_2，当$x_1<x_2$时，有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad (f(x_1)<f(x_2)),$$

则称$f(x)$是$\mathscr{X}$上的递增函数（严格递增函数）。

若对$\mathscr{X}$上的任意两点x_1,x_2，当$x_1<x_2$时，有

$$f(x_1)\geqslant f(x_2)\qquad (f(x_1)>f(x_2)),$$

则称$f(x)$为$\mathscr{X}$上的递减函数（严格递减函数）。递增函数与递减函数统称为单调函数。

为了讨论单调函数的不连续点，我们先介绍下：

一、函数不连续点的分类

设$f(x)$定义在区间$\mathscr{X}$上，$x_0\in x$。如果

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$$

不成立，称x_0为函数$f(x)$的不连续点。

我们知道，双边极限$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的必要充分条件是两个单边极限

$$\lim_{x\to x_0-0}f(x)\xlongequal{\text{记为}}f(x_0-0)\text{ 与 }\lim_{x\to x_0+0}f(x)\xlongequal{\text{记为}}f(x_0+0)$$

存在而且相等。

若$f(x_0-0)=f(x_0)$(或$f(x_0+0)=f(x_0)$)，称函数$f(x)$在点x_0左连续(或右连续)。因此$f(x)$在点x_0(双边)连续，等价于在该点既左连续又右连续。

设x_0为$f(x)$的一个不连续点。以$f(x_0-0)$与$f(x_0+0)$存在与否将不连续点作如下分类：

1） 若$f(x_0-0)$与$f(x_0+0)$都存在，称x_0为函数$f(x)$的第一类不连续点；

2) 若$f(x_0-0)$与$f(x_0+0)$中至少有一个不存在，则x_0叫做$f(x)$的第二类不连续点。

例 1 函数

$$f(x)=\begin{cases} x, & 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2}, \\ 2x+1, & \dfrac{1}{2}<x<1 \end{cases}$$

在区间$[0, 1)$上除点$x=\dfrac{1}{2}$外是连续的。在$x=\dfrac{1}{2}$，

$$f\left(\frac{1}{2}-0\right)=\frac{1}{2},\quad f\left(\frac{1}{2}+0\right)=2,$$

所以，$x=\dfrac{1}{2}$是$f(x)$的第一类不连续点。此外，$f(x)$在$x=\dfrac{1}{2}$左连续。

例 2 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，若$x\neq 0$；$f(0)=1$。点$x=0$是$f(x)$的第二类不连续点，因在该点，左、右极限都不存在。

例 3 函数

$$f(x)=\begin{cases} \sin\dfrac{1}{x}, & x>0, \\ x, & x\leqslant 0. \end{cases}$$

以$x=0$为第二类不连续点，因$f(0+0)$不存在。

注意到$f(0-0)=f(0)=0$，函数$f(x)$在$x=0$左连续(图5.1)。

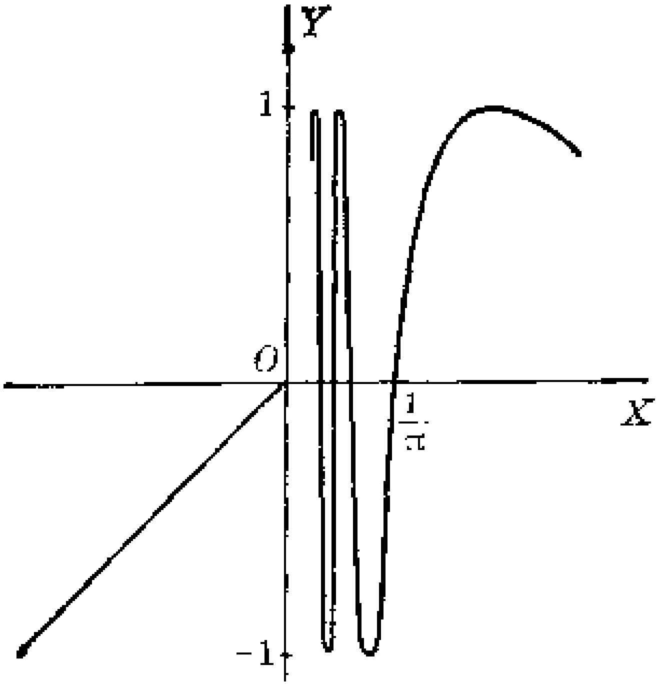


图5.1

二、单调函数的不连续点

引理 1 设$f(x)$是$[a, b]$上的递增函数，则

1） 当 $x_0\in[a, b)$时，$f(x_0+0)$存在；

2） 当 $x_0\in(a, b]$时，$f(x_0-0)$存在。

证明 我们就1)介绍两种证明方法。

证法 I 用λ表示对于$x>x_0$的一切函数值$f(x)$所成之集的下确界，即

$$\lambda=\inf_{x>x_0}\{f(x)\}.$$

(因$f(x_0)$是该集的一个下界，有下界的数集必有下确界，故λ有意义)。由下确界的定义，对于任给的$\varepsilon>0$，能求得这样的$x'>x_0$，使

$$\lambda\leqslant f(x')<\lambda+\varepsilon.$$

由于$f(x)$是递增的，那么当$x_0<x<x'$时，有

$$\lambda\leqslant f(x)<\lambda+\varepsilon.$$

因而 $$f(x_0+0)=\lim_{x\to x_0+0}f(x)=\lambda,$$

并且 $$f(x_0+0)\geqslant f(x_0).$$

证法 II 因为$x_0\in[a,b)$，所以存在自然数N，当$n\geqslant N$时，$x_0+\frac{1}{n}\in(a,\ b)$。由函数的单调性，便得到

$$f\left(x_0+\frac{1}{N}\right)\geqslant\cdots\geqslant f\left(x_0+\frac{1}{N+m}\right)\geqslant\cdots\geqslant f(x_0).$$

即序列$\left\{f\left(x_0+\frac{1}{N+m}\right)\right\}$是单调递减的且有下界，因此它有极限，记为$\lambda$。显然$\lambda\geqslant f(x_0)$，今证$\lambda=f(x_0+0)$。

任给$\varepsilon>0$，由极限λ的定义，必存在$N_0(\geqslant N)$，当$n\geqslant N_0$时，

$$0\leqslant f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-\lambda<\varepsilon.$$

因此，当$x_0<x<x_0+\frac{1}{n}$时，有

$$0\leqslant f(x)-\lambda\leqslant f\left(x_0+\frac{1}{n}\right)-\lambda<\varepsilon.$$

因而 $$\lambda=f(x_0+0).$$

类似地，可以证明，当$x_0\in(a,\ b]$时，$f(x_0-0)$存在，而且

$$f(x_0-0)=\sup_{x<x_0}\{f(x)\}\leqslant f(x_0).$$ ▌

定理 1 单调函数的一切不连续点都是第一类不连续点。

证明 1) 若$f(x)$是$[a, b]$上的递增函数，由引理1知，对于任何$x_0\in(a, b)$，$f(x_0-0)$与$f(x_0+0)$都存在，又$f(a+0)$，$f(b-0)$也存在，因此$f(x)$有不连续点的话，必为第一类不连续点，并且对任何$x_0\in(a, b)$，有

$$f(x_0-0)\leqslant f(x_0)\leqslant f(x_0+0).$$

2) 若$f(x)$是$[a, b]$上的递减函数，则$-f(x)\equiv g(x)$是$[a, b]$上的递增函数。而乘以-1不改变函数的连续性，因此$f(x)$与$g(x)$具有相同的不连续点（如果存在的话）。然而$g(x)$只可能有第一类不连续点，所以$f(x)$的不连续点也只能属于第一类，并且

$$f(x_0-0)\geqslant f(x_0)\geqslant f(x_0+0)\quad (x_0\in(a, b))$$

总之，单调函数只可能有第一类不连续点。 ▌

引理2 直线上任何互不相交的区间(长度不为0)所成之集$\mathscr{D}$一定是有限集或可数集。

证明 作集$\mathscr{D}$到全体有理数集Q的映射φ如下：当区间$d\in\mathscr{D}$时，任意取定区间d中的一个有理数作为$\varphi(d)$（因区间d的长度不为0，必有有理数属于d)。

当d_1，$d_2\in\mathscr{D}$且$d_1\neq d_2$时，则d_1与d_2互不相交（由引理条件)，因而它们的象也不相同，即$\varphi(d_1)\neq\varphi(d_2)$。这说明映射$\varphi$具有单一性。从而集$\mathscr{D}$与集$Q$的一个子集对等。

集Q是可数集，它的子集或为有限集或为可数集，因此集$\mathscr{D}$最多是一个可数集。 ▌

定理2 单调函数的一切不连续点所成之集最多是一个可数集。

证明 不妨假定$f(x)$是递增函数。如果$x_1<x_2$，显然有

$$f(x_1+0)\leqslant f(x_2-0).$$

而递增函数 $f(x)$ 的每个不连续点 x_0，在纵坐标轴上有一区间$(f(x_0-0),f(x_0+0))$与它对应；由上面的不等式可知，对于$f(x)$的不同的不连续点所对应的（在纵坐标轴上的）区间互不相交。因此，$f(x)$的不连续点所成之集与直线上某一个由互不相交的区间(长度不为0)所成之集对等。由引理2知，递增函数，从而单调函数的一切不连续点之集最多是一可数集。 】

例4 函数

$$f(x)=\begin{cases}0, & x=0\\ \dfrac{1}{n}, & \dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}\end{cases}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

是具有可数个第一类不连续点的单调递增函数，其不连续点为

$$x=\frac{1}{n}\quad(n=2,\ 3,\ \cdots).$$

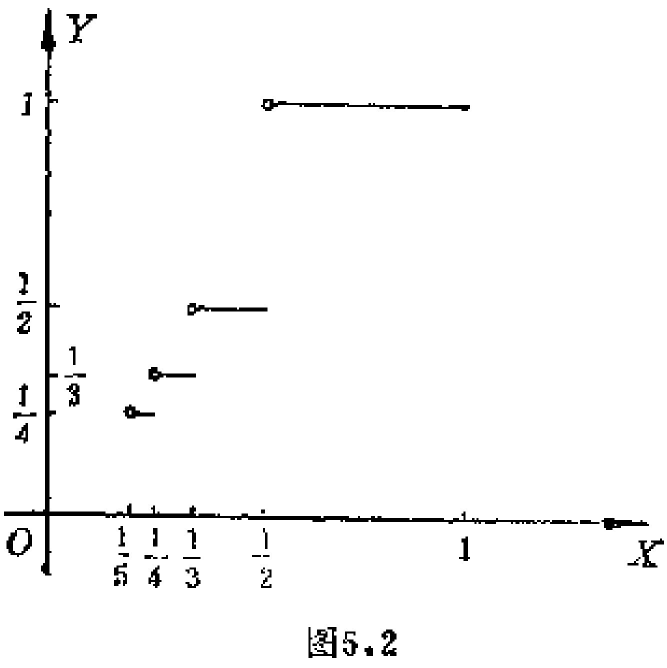


图5.2

此外，在这些不连续点，$f(x)$是左连续的，因为

$$f\left(\frac{1}{n}-0\right)=f\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n},\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

又
$$f\left(\frac{1}{n}+0\right)=\frac{1}{n-1}\quad (n=2,\ 3,\ \cdots).$$

*§4 黎曼可积函数

一、引入

设$f(x)$是闭区间$[a,\ b]$上的函数。数学分析的知识告诉我们，若$f(x)$黎曼可积，则$f(x)$必为$[a,\ b]$上的有界函数。反过来，就不一定成立。例如，迪里赫勒(Dirichlet)函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数}\end{cases}$$

是$[0,\ 1]$上的有界函数，但在该区间上不黎曼可积，这只要由黎曼可积条件就可推出。①

那么，什么样的有界函数黎曼可积呢？例如闭区间上的连续函数、分段连续函数、单调函数都是黎曼可积函数，这在一般的分析教程中都已证明了的。②进一步问：为什么上面三类函数黎曼可积，而$D(x)$又不黎曼可积呢？让我们来分析它们的不连续点所成之集。显然，对于连续函数来说，不连续点之集是空集，分段连续函数的不连续点组成一有限集，单调函数的不

①下面第二段会给出黎曼可积条件。

②本节将给出它们的另一证法。

连续点最多组成一可数集．总之，它们的不连续点集都是零集．而在〔0，1〕上的函数 $D(x)$ 却到处不连续，它的不连续点布满了区间〔0，1〕，该区间的长度等于1．由此看来，"太不连续"的函数不可能黎曼可积．本节正是从分析函数的不连续点集而得出又一个黎曼可积条件．

二、简单函数

1.定义

设$\varphi(x)$是闭区间〔a，b〕上的函数．如果〔a，b〕可以分解为有限个这样的小区间，使得在每一个小区间内，$\varphi(x)$取常数值，则称$\varphi(x)$为〔a，b〕上的简单函数．换句话说，若存在〔a，b〕上的一个分点组

$$a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_m=b,$$

使得在每一个开区间(x_i，x_{i-1})上，$\varphi(x)=c_i$(常数)($i=0,1,2,\cdots,m-1$)，则$\varphi(x)$叫做〔a，b〕上的简单函数．显然

$$\int_a^b\varphi(x)dx=\sum_{i=0}^{m-1}c_i(x_{i+1}-x_i).$$

2.简单性质

任何两个简单函数的线性组合仍然是一个简单函数．即证明：若$\varphi(x)$，$\psi(x)$是〔a，b〕上的简单函数，则$\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)$也是〔$a$，$b$〕上的简单函数(其中$\alpha$，$\beta$为任意实数)．

事实上，由假设，必存在〔a，b〕上的两组分点，使$\varphi(x)$，$\psi(x)$在这两组分点所划分成的开区间上分别为常数．将这两组分点合并成一组新的分点，在新的分点组所划分成的开区间上，$\varphi(x)$与$\psi(x)$当然同时为常数，故$\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)$是〔$a$，$b$〕上的简

单函数。

3. 利用简单函数来分析黎曼积分

设$f(x)$是$[a,b]$上的有界函数，作$[a,b]$上的一列分点组T_n：

$$a=x_0^{(n)}<x_1^{(n)}<x_2^{(n)}<\cdots<x_{m_n}^{(n)}=b,$$

并设这一列分点组中的分点是逐渐加多的（即$[a,b]$上的每一分法，除了开始第一次分法外，都是在前一分法基础上，通过添加分点而相继得到的），因而有

$$T_1\subset T_2\subset\cdots\subset T_n\subset\cdots,$$

而且假设分法是无限变细的，即当$n\to\infty$时，

$$\lambda_n=\max_k(x_{k+1}^{(n)}-x_k^{(n)})\to 0.$$

对每个分点组T_n，作大和数S_n与小和数s_n如下：

$$S_n=\sum_{k=0}^{m_n-1}M_k^{(n)}(x_{k+1}^{(n)}-x_k^{(n)}),$$

$$s_n=\sum_{k=0}^{m_n-1}m_k^{(n)}(x_{k+1}^{(n)}-x_k^{(n)}),$$

其中$M_k^{(n)}$及$m_k^{(n)}$分别表示函数$f(x)$在$[x_k^{(n)},x_{k+1}^{(n)})$中的上确界和下确界。

对应于分点组T_n，作简单函数$\psi_n(x)$与$\varphi_n(x)$如下：

$$\psi_n(x)=\begin{cases}M_k^{(n)}, x\in[x_k^{(n)},x_{k+1}^{(n)})(k=0,1,2,\cdots,m_n-1),\\ f(b),\quad x=b;\end{cases}$$

$$\varphi_n(x)=\begin{cases}m_k^{(n)}, x\in[x_k^{(n)},x_{k+1}^{(n)})(k=0,1,2,\cdots,m_n-1),\\ f(b),\quad x=b.\end{cases}$$

这里$n=1,2,\cdots$。于是

$$S_n=\sum_{k=0}^{m_n-1}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}}M_k^{(n)}dx=\sum_{k=0}^{m_n-1}\int_{x_k^{(n)}}^{x_{k+1}^{(n)}}\psi_n(x)dx$$

$$=\int_a^b\psi_n(x)dx.$$

类似地，有

$$s_n=\int_a^b\varphi_n(x)dx.$$

因此函数$f(x)$按黎曼意义可积分的必要充分条件

$$\lim_{n\to\infty}(S_n-s_n)=0, \tag{1}$$

可改写为

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b[\psi_n(x)-\varphi_n(x)]dx=0. \tag{2}$$

另外，两个简单函数列$\{\psi_n(x)\}$与$\{\varphi_n(x)\}$还具有下面的性质。

因为$T_n\subset T_{n+1}$，所以由T_{n+1}所划分的小区间$[x_i^{(n+1)}, x_{i+1}^{(n+1)})$必然含在由$T_n$所划分的某个小区间$[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})$中，因此

$$M_i^{(n+1)}\leqslant M_k^{(n)},\quad m_i^{(n+1)}\geqslant m_k^{(n)},$$

从而在$[a, b]$上有

$$\psi_1(x)\geqslant\psi_2(x)\geqslant\cdots\geqslant\psi_n(x)\geqslant\cdots\geqslant f(x), \tag{3}$$

$$\varphi_1(x)\leqslant\varphi_2(x)\leqslant\cdots\leqslant\varphi_n(x)\leqslant\cdots\leqslant f(x). \tag{4}$$

也就是说，简单函数列$\{\psi_n(x)\}$是单调递减而且有下界的函数列，$\{\varphi_n(x)\}$是单调递增而且有上界的函数列，因此它们的极限函数

$$\bar{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\psi_n(x),\quad \underline{f}(x)=\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) \tag{5}$$

在$[a, b]$上处处存在。又由

$$\varphi_n(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi_n(x)$$

知

$$\underline{f}(x)\leqslant f(x)\leqslant\overline{f}(x). \tag{6}$$

令 $T=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}T_n$。当 $x\notin T$ 即 $x\in[a, b]-T$时，称

$$\omega_x=\overline{f}(x)-\underline{f}(x) \tag{7}$$

为函数$f(x)$在点x的振幅。显然，当 $x\notin T$时，$\omega_x\geqslant 0$。

为帮助理解上面所说的，现作几何解释如下。设$f(x)$是$[a, b]$上的非负黎曼可积函数。我们知道，$\int_a^b f(x)dx$表示由曲线$y=f(x)$，X轴上的线段$[a,b]$以及平行于Y轴的直线$x=a$，$x=b$所围成的曲边梯形的面积S(图5.3)。

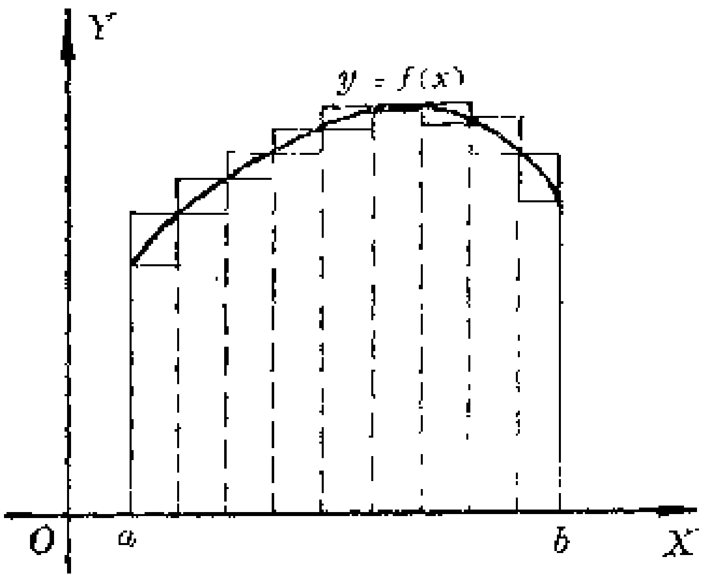


图5.3

由简单函数$\varphi_n(x)$与$\psi_n(x)$的定义，对于每一n，有

$$\varphi_n(x)\leqslant f(x)\leqslant\psi_n(x),$$

这就是说，由$y=\varphi_n(x)$所表示的曲线全部落在曲线$y=f(x)$的

下方，而由$y=\psi_n(x)$所表示的曲线整个地位于曲线$y=f(x)$的上方。

$s_n=\int_a^b\varphi_n(x)dx$表示内含于曲边梯形中的阶梯图形的面积，该阶梯图形由曲线$y=\varphi_n(x)$所决定；$S_n=\int_a^b\psi_n(x)dx$表示外接于曲边梯形的阶梯图形的面积，该阶梯图形由曲线$y=\psi_n(x)$所决定。

随着对区间$[a,b]$的分法变细，曲线$y=\varphi_n(x)$由下往上升，但总落在曲线$y=f(x)$的下方，此时由$y=\varphi_n(x)$决定的阶梯图形的面积s_n越来越接近曲边梯形的面积S，但$s_n\leqslant S$。同样地，在分法变细的过程中，曲线$y=\psi_n(x)$由上往下降，但总位于曲线$y=f(x)$的上方，此时由$y=\psi_n(x)$决定的阶梯图形的面积S_n也越来越接近面积S，但$S_n\geqslant S$。

如同把圆面积看作是内接多边形（或外切多边形）面积的极限一样，要求曲边梯形面积的精确值，必须将分法无限变细，这时阶梯图形的面积s_n与S_n无限接近于曲边梯形的面积S（只不过一个是从里面，一个是从外面而已），并且面积s_n与S_n的差以0为极限．这就是说，如果$f(x)$黎曼可积，则$\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-s_n)=0$。

反之，若$\lim\limits_{n\to\infty}(S_n-s_n)=0$，那么由$y=\varphi_n(x)$与$y=\psi_n(x)$所决定的阶梯图形就无限接近曲边梯形，不仅曲边梯形的面积存在，而且面积S就等于包含在该曲边梯形的阶梯图形的面积s_n的极限值，或者说等于外接于该曲边梯形的阶梯图形的面积S_n的极限值。既然曲边梯形的面积S存在，说明函数$y=f(x)$是黎曼可积的。

三、函数黎曼可积的又一充要条件

我们采用上面的记号，首先介绍三条引理。

引理1 令 $T=\bigcup_{n=1}^{\infty}T_n$。当$x_0\notin T$时，函数$f(x)$在点$x_0$的振幅$\omega_{x_0}=0$的必要充分条件是：$x_0$为$f(x)$的连续点。

证明 1）必要性 设 $x_0\in[a, b]-T$，且 $\omega_{x_0}=0$。此时 $\underline{f}(x_0)=\overline{f}(x_0)=f(x_0)$（据(7)，(6)二式），因而由(5)式，对于任给的$\varepsilon>0$，必有自然数N，当$n>N$时，有

$$\psi_n(x_0)-f(x_0)<\varepsilon,\ f(x_0)-\varphi_n(x_0)<\varepsilon \qquad (8)$$

因为 $x_0\notin T$，所以对$[a, b]$的任何一种分法，点x_0都不是分点，这就是说，对每一自然数n，必有自然数k，使得

$$x_0\in(x_k^{(n)},\ x_{k+1}^{(n)})$$

从而(8)式可写成

$$M_k^{(n)}-f(x_0)<\varepsilon,\ f(x_0)-m_k^{(n)}<\varepsilon.$$

那么当 $x\in(x_k^{(n)},\ x_{k+1}^{(n)})$时，

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

取 $0<\delta<\min(x_0-x_k^{(n)},\ x_{k+1}^{(n)}-x_0)$，显然 $(x_0-\delta,\ x_0+\delta)\subset(x_k^{(n)},\ x_{k+1}^{(n)})$，于是，当$|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

所以$f(x)$在点x_0连续。

2）充分性 设x_0为$f(x)$的连续点，且$x_0\notin T$。对任一$\varepsilon>0$，必有$\delta>0$，当 $|x-x_0|<\delta$时，有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

又因$x_0\notin T$，所以对每一n，必有自然数k，使$x_0\in(x_k^{(n)},\ x_{k+1}^{(n)})$。

由于对区间$[a, b]$所作的分法无限变细：$\lim\limits_{n\to\infty}\lambda_n=0$，因此

必有自然数N，当$n>N$时，$\lambda_n<\delta$。于是只要$n>N$，便有$[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})\subset(x_0-\delta, x_0+\delta)$。从而当$x\in[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})$时，更有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

因为$M_k^{(n)}$，$m_k^{(n)}$分别是$f(x)$在$[x_k^{(n)}, x_{k+1}^{(n)})$中的上确界和下确界，所以

$$M_k^{(n)}-f(x_0)\leqslant\varepsilon,\ f(x_0)-m_k^{(n)}\leqslant\varepsilon.$$

从而，当 $n>N$ 时，

$$\psi_n(x_0)-f(x_0)\leqslant\varepsilon,\ f(x_0)-\varphi_n(x_0)\leqslant\varepsilon.$$

故 $$\lim_{n\to\infty}\psi_n(x_0)=f(x_0),\ \lim_{n\to\infty}\varphi_n(x_0)=f(x_0).$$

即 $$\overline{f}(x_0)=f(x_0),\ \underline{f}(x_0)=f(x_0),$$

于是 $$\omega_{x_0}=0.$$ ▌

注　贝尔(Baire)正是把函数$f(x)$在点x的振幅ω_x是否等于0，作为函数$f(x)$在该点是否连续的定义。由引理1知，函数$f(x)$在点x依贝尔意义连续与在该点依柯西意义连续是彼此等价的。

引理 2　设

1) $\{\tilde{\varphi}_n(x)\}$是闭区间$[a,b]$上的非负简单函数所组成的单调递减序列，

2) 除去一个零集外，在区间$[a, b]$上其余的点，有

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\varphi}_n(x)=0,$$

那么，它的积分序列收敛于0，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\tilde{\varphi}_n(x)dx=0.$$

证明　由于$\tilde{\varphi}_n(x)$是简单函数，它的不连续点最多只有有

限个．设$\{\tilde{\varphi}_n(x)\}$的一切不连续点所成之集为E_1，它是可数个有限点集的并集，或为有限集或为可数集，因而集E_1是零集。

又设使$\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\varphi}_n(x)\neq 0$的点$x$全体为集$E_2$，由定理条件2)，$E_2$也是零集。

记$E_0=E_1\cup E_2$，则E_0也是零集。因此，对任意的$\varepsilon>0$，可以找到一列开区间I_1，$I_2,\cdots,I_n,\cdots$，使得

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}I_n\supset E_0,$$

而且$\sum\limits_{n=1}^{\infty}|I_n|<\varepsilon$。记$F=[a,\ b]-G$。在$F$上，有

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\varphi}_n(x)=0.$$

任取$x_0\in F$，对于$\varepsilon>0$，可找到$N=N(x_0,\ \varepsilon)$（显然N不仅与ε有关，而且与点x_0有关），当$n>N(x_0,\ \varepsilon)$时，

$$\tilde{\varphi}_n(x_0)<\varepsilon.$$

因$x_0\notin E_0$，所以x_0是$\tilde{\varphi}_n(x)$ $(n=1,2,\cdots)$的连续点。这时必有含x_0的开区间$I(x_0)$，使$\tilde{\varphi}_n(x)$在$I(x_0)$上为常数。因而当$n>N(x_0,\ \varepsilon)$时，对于$I(x_0)$上的点x，有

$$\tilde{\varphi}_n(x)<\varepsilon.$$

当x_0在F中变化时，这种$I(x_0)$的全体复盖了点集F。于是区间$I_n(n=1,2,\cdots)$与所有适合上述条件的开区间$I(x_0)(x_0\in F)$，其全体复盖了闭区间$[a,\ b]$。根据有限复盖定理，可以从中选出有限个开区间

$$I_{k_1},\ I_{k_2},\cdots,I_{k_m},\ I(x_1),\ I(x_2),\cdots,I(x_p)$$

将$[a, b]$完全复盖住。

设 $N=\max\{N(x_1,\varepsilon), N(x_2,\varepsilon),\cdots, N(x_p,\varepsilon)\}$。当 $n>N$ 且 $x\in\bigcup_{i=1}^{p} I(x_i)$时，有

$$\tilde{\varphi}_n(x)<\varepsilon.$$

再设$M=\max_{x\in[a,b]}\tilde{\varphi}_1(x)$。由定理条件 1)，

$$\tilde{\varphi}_n(x)\leqslant M.$$

由于$\left(\bigcup_{i=1}^{m} I_{k_i}\right)\cup\left(\bigcup_{j=1}^{p} I(x_j)\right)\supset[a,b]$，于是当 $n>N$时，

$$\begin{aligned}\int_a^b \tilde{\varphi}_n(x)\,dx&\leqslant\sum_{i=1}^{m}\int_{I_{k_i}}\tilde{\varphi}_n(x)dx+\int_{\bigcup\limits_{j} I(x_j)}\tilde{\varphi}_n(x)dx\\&\leqslant M\cdot\sum_{i=1}^{m}|I_{k_i}|+\varepsilon(b-a)\\&<(M+b-a)\varepsilon.\end{aligned}$$

由于ε是任给的正数，所以

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\tilde{\varphi}_n(x)dx=0. \qquad \rbrack$$

引理 2 的逆命题也正确，为此证

引理 3 设

1) $\{\tilde{\varphi}_n(x)\}$ 是$[a, b]$上的非负简单函数所成的单调递减序列，

2) $\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b\tilde{\varphi}_n(x)dx=0$，

则除去一个零集外，在区间$[a, b]$上其余的点，有

$$\lim_{n\to\infty}\tilde{\varphi}_n(x)=0。$$

证明 由条件1)，对任意 $x\in[a, b]$，$\tilde{\varphi}_n(x)\geqslant 0$，而且 $\tilde{\varphi}_n(x)\geqslant\tilde{\varphi}_{n+1}(x)$ $(n=1,2,\cdots)$，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\varphi}_n(x)$存在。记 $\tilde{\varphi}(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\tilde{\varphi}_n(x)$，显然 $\tilde{\varphi}(x)\geqslant 0$。可见只要能证明在闭区间$[a,b]$上使得

$$\tilde{\varphi}(x)>0$$

的点x所成之集F为零集就行了。

作集 $F_m=\left\{x;\ \tilde{\varphi}(x)\geqslant\dfrac{1}{m}\right\}$($m$为自然数)，那么

$$F=\{x;\ \tilde{\varphi}(x)>0\}=\bigcup_{m=1}^{\infty}F_m。$$

如果能证明每一个 F_m 都是零集$(m=1,2,\cdots)$，则F也是零集，现在我们来证明这一点。

任取F_m。由条件2)，对任一$\varepsilon>0$，可取n，使

$$\int_a^b\tilde{\varphi}_n(x)\,dx<\frac{\varepsilon}{m}。$$

由于 $\tilde{\varphi}_n(x)\geqslant\tilde{\varphi}(x)$，所以当$x\in F_m$时，有 $\tilde{\varphi}_n(x)\geqslant\dfrac{1}{m}$，因而

$$F_m^{(n)}=\left\{x;\ \tilde{\varphi}_n(x)\geqslant\frac{1}{m}\right\}\supset\left\{x;\ \tilde{\varphi}(x)\geqslant\frac{1}{m}\right\}=F_m。$$

而 $F_m^{(n)}$必为有限个互不相交的区间 I_1，$I_2,\cdots,I_r$ 的并集，其中有些区间可能退缩为一点。很明显，$\bigcup\limits_{i=1}^{r}I_i\subset[a, b]$。

由于在区间I_i上，$\tilde{\varphi}_n(x)\geqslant\dfrac{1}{m}$，故

$$\int_a^b \tilde{\varphi}_n(x)dx \geqslant \int_{\bigcup\limits_{i=1}^{r} I_i} \tilde{\varphi}_n(x)dx = \sum_{i=1}^{r}\int_{I_i} \tilde{\varphi}_n(x)dx$$

$$\geqslant \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{r}|I_i|$$

因为 $\int_a^b \tilde{\varphi}_n(x)\,dx < \frac{\varepsilon}{m}$，所以 $\sum_{i=1}^{r}|I_i| < \varepsilon$。注意到 $F_m \subset F_m^{(n)} = \bigcup_{i=1}^{r} I_i$，故$F_m$为零集。 】

定理 闭区间$[a, b]$上的有界函数$f(x)$为黎曼可积函数的必要充分条件是：$f(x)$的不连续点全体组成一个零集。

证明 1) 必要性 设 $f(x)$在$[a, b]$上黎曼可积，

则 $$\lim_{n\to\infty}(S_n - s_n) = 0, \tag{1}$$

或 $$\lim_{n\to\infty}\int_a^b[\psi_n(x) - \varphi_n(x)]dx = 0。 \tag{2}$$

其中 $\psi_n(x)$，$\varphi_n(x)$都是简单函数，因而 $\psi_n(x) - \varphi_n(x)$也是简单函数，且 $\psi_n(x) - \varphi_n(x) \geqslant 0$ $(n = 1, 2, \cdots)$。又由(3)，(4)二式，$\{\psi_n(x) - \varphi_n(x)\}$是单调递减函数列，于是$\{\psi_n(x) - \varphi_n(x)\}$是$[a,b]$上的非负简单函数所成的单调递减序列。(2)式说明它的积分序列以 0 为极限。根据引理 3，除去$[a, b]$上的一个零集E_0，在$[a, b]$上其余各点，均有

$$\lim_{n\to\infty}[\psi_n(x) - \varphi_n(x)] = 0。$$

又由(5)，(6)二式知，当 $x \notin E_0$ 时，

$$\overline{f}(x) = \underline{f}(x) = f(x),$$

即 $$\omega_x = 0。$$

再由引理1，当$x \notin E_0 \cup T$时，x为$f(x)$的连续点，其中$T = \bigcup_{k=1}^{\infty} T_k$，是可数个有限点集的并集。

由于E_0，T都是零集，因此$E_0 \cup T$也是零集，故$f(x)$的不连续点全体成一零集。

2) 充分性　设$f(x)$的不连续点全体为E，由定理条件，E是零集。根据引理1，当$x \notin E \cup T$时，有

$$\omega_x = 0,$$

即

$$\underline{f}(x) = \overline{f}(x) = f(x).$$

由(5)式得知，当$x \notin E \cup T$时，有

$$\lim_{n \to \infty} [\psi_n(x) - \varphi_n(x)] = 0.$$

此外，$E \cup T$是一零集。

又$\{\psi_n(x) - \varphi_n(x)\}$是非负简单函数组成的单调递减序列，根据引理2，有

$$\lim_{n \to \infty} \int_a^b [\psi_n(x) - \varphi_n(x)] dx = 0,$$

即

$$\lim_{n \to \infty} (S_n - s_n) = 0,$$

从而$f(x)$在$[a, b]$上黎曼可积。 ▌

"$f(x)$在$[a, b]$上除了一个零集外，在其余的点上都连续"这句话可简单说成$f(x)$在$[a, b]$上几乎处处连续，因此定理可叙述为：

$[a, b]$上的黎曼可积函数类与$[a, b]$上的几乎处处连续的有界函数类相同。

由此可知，$[a, b]$上的连续函数、分段连续函数以及单调函数都是$[a, b]$上的黎曼可积函数。

例 在$[0, 1]$上的函数$f(x)$定义如下：当x是有理数并表示为既约分数$\frac{p}{q}$时，令$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}$；当$x$为无理数以及$x=0$时，令 $f(x)=0$。

可以证明，该函数在一切无理点以及在$x=0$都连续，而任一有理点(除 0 外)都是第一类不连续点。

事实上，设$x_0\in[0,1]$。对于任给的$\varepsilon>0$，不超过$\frac{1}{\varepsilon}$的自然数q只有有限个，即使得$q\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$的自然数只有有限个，因此在区间$[0, 1]$内只能找出有限个有理点$\frac{p}{q}$，使

$$f\left(\frac{p}{q}\right)=\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon.$$

可以作点x_0的邻域$(x_0-\delta,\ x_0+\delta)$，使其不含任意这样一个点在内(或许要除去点$x_0$本身)，那末只要$x\in U(x_0,\delta)\cap[0,1]$，并且$x\neq x_0$，不论$x$是有理数还是无理数，都有

$$|f(x)|<\varepsilon.$$

因此，对任意点$x_0\in[0,1]$，有

$$f(x_0-0)=f(x_0+0)=0.$$

若x_0是无理点或$x_0=0$，则又有$f(x_0)=0$，因此函数$f(x)$在$[0, 1]$上的一切无理点以及在$x=0$都连续。

若x_0是有理点$(\neq 0)$，则$f(x_0)\neq 0$，故任一非零有理点都是函数$f(x)$的第一类不连续点。

由于$[0, 1]$上的所有有理点集是可数集，因而是零集，故函数$f(x)$是黎曼可积的。

显然，该函数既不是分段连续的，又不是单调的。由此例可明显地看到，闭区间上的黎曼可积函数类比起单调函数类、分段连续函数类来说要广泛些。

§5 函数的不连续点所成之集的结构

为简单起见，我们讨论闭区间上的任意函数。

定理1 设函数$f(x)$定义在闭区间$[a, b]$上，则$f(x)$的一切不连续点所成之集是可数个闭集的并集。

证明 按贝尔的连续性定义，若$f(x)$在点x连续，则$\omega_x = 0$；否则$\omega_x > 0$。因此$f(x)$的一切不连续点全体可表为

$$\{x;\ \omega_x > 0\}.$$

而

$$\{x;\ \omega_x > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x;\ \omega_x \geqslant \frac{1}{n}\right\}, \qquad (*)$$

事实上，等式右边的每一项都不包含使得$\omega_x = 0$的点；另一方面，任何使$\omega_x > 0$的点必包含在右边并集之中。①

① 欲证$\{x;\ \omega_x > 0\} \subset \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\left\{x;\ \omega_x \geqslant \frac{1}{n}\right\}$，设在点$x$，$\omega_x = h > 0$，那么可取自然数$n_0$，使$\frac{1}{n_0} < h$，因而

$$x \in \left\{x;\ \omega_x \geqslant \frac{1}{n_0}\right\},$$

$$x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{x;\ \omega_x \geqslant \frac{1}{n}\right\}.$$

因此，如果能证明：对于每一n，集$\left\{x;\ \omega_x\geqslant\frac{1}{n}\right\}$都是闭的，那末定理便得证。这样一来，本定理归结为证明：对任一$\varepsilon>0$，集$\{x;\ \omega_x\geqslant\varepsilon\}$是闭集。

记$E_\varepsilon=\{x;\omega_x\geqslant\varepsilon\}$，我们证明$(E_\varepsilon)^*\subset E_\varepsilon$。

设$\xi\in(E_\varepsilon)^*$。显然，$\xi\in[a,b]$，取ξ的任意一个邻域$U(\xi,\delta)$，由聚点定义，在$U(\xi,\delta)$内包含集E_ε中的无限多个点x，因此在每一点$x\in E_\varepsilon$，有$\omega_x\geqslant\varepsilon$，即$\overline{f}(x)-\underline{f}(x)\geqslant\varepsilon$（据§4(7)式）。

令函数$f(x)$在$U(\xi,\delta)$内的上确界为M，下确界为m。显然

$$M\geqslant\overline{f}(x),\qquad m\leqslant\underline{f}(x)\ (\text{其中}\ x\in E_\varepsilon),$$

故 $\qquad M-m\geqslant\varepsilon$。

这就是说，在点ξ的任意邻域$U(\xi,\delta)$内，函数$f(x)$的振幅$M-m\geqslant\varepsilon$，因此$f(x)$在点ξ的振幅ω_ξ不小于ε，即$\omega_\xi\geqslant\varepsilon$，于是

$$\xi\in E_\varepsilon=\{x;\ \omega_x\geqslant\varepsilon\}$$

由$\xi\in(E_\varepsilon)^*\Rightarrow\xi\in E_\varepsilon$，故$(E_\varepsilon)^*\subset E_\varepsilon$，$E_\varepsilon$为闭集，从而定理得证。 ▮

定理2 闭区间$[a,b]$上的任意函数$f(x)$的连续点全体是可数个开集的交集。

证明 集$\{x;\ \omega_x=0\}$与$\{x;\ \omega_x>0\}$互为补集。由定理1，有

$$\{x;\ \omega_x>0\}=\bigcup_{n=1}^{\infty}E_n,$$

其中$E_n=\left\{x;\ \omega_x\geqslant\frac{1}{n}\right\}$。据反演原理，有

$$\{x;\ \omega_x=0\}=\bigcap_{n=1}^{\infty}E_n'.$$

因为 $E_n=\left\{x;\ \omega_x\geqslant\frac{1}{n}\right\}$都是闭集（对任何自然数 n），所以E_n'便都是开集。由此可知，函数$f(x)$的一切连续点所成之集$\{x;\ \omega_x=0\}$是可数个开集的交集。 】

我们把可数个闭集的并集叫做F_σ集，可数个开集的交集叫做G_δ集。因此定理1与定理2可简单说成：$[a, b]$上的任意函数，它的一切不连续点组成一个 F_σ 集，它的所有连续点组成一个G_δ集。

作为对定理 1 的验证，我们来看两个例子。例如，闭区间$[0, 1]$上的迪里赫勒函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & x\text{为有理数},\\ 0, & x\text{为无理数},\end{cases}$$

它的不连续点布满整个区间$[0, 1]$，显然这是闭集。

又如，$[0, 1]$上的函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{q}, & x=\dfrac{p}{q}(\text{既约分数}),\\ 0, & x=0\text{及}x\text{为无理数},\end{cases}$$

由 § 4第三段例可知，函数 $f(x)$ 的不连续点为$(0, 1]$上的所有有理点。由每一个有理点组成的单元素集是闭集，$(0, 1]$上的一切有理点形成一可数集，因此$f(x)$的不连续点所成之集是可数个闭集的并集。

附录一　布尔代数的概念

本附录在有序集的基础上，介绍格的概念，进而给出布尔代数的定义与基本性质，并指出集代数和逻辑代数都是布尔代数。

§1　格

一、最小上界和最大下界

设 H 是半序集 S 的一个子集。我们知道，H 的一个上界 $u(u\in S)$ 具有下列性质：对于 H 中的每一个元素 h，都有 $h\prec u$。如果 u 是 H 的一个上界，并且 H 的任意一个上界 v 适合 $u\prec v$，则 u 叫做 H 的最小上界，记为 $\mathrm{lub}H$。

类似地，如果 l 是 H 的一个下界（此时 $l\in S$，并且对 H 中的每一个 h，都有 $l\prec h$），又 H 的任意一个下界 m 适合 $m\prec l$，则 l 叫做 H 的最大下界，记为 $\mathrm{glb}H$。

例如，设 S 为区间 $(0,1)$，以通常的大小关系"$\leqslant$"作为顺序关系"$\prec$"，那末 S 是一半序集。如果取 $H=\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，则 $\mathrm{lub}H=\frac{1}{2}$，但 $\mathrm{glb}H$ 不存在。若取 $H_1=\left(\frac{1}{2},\ 1\right)$，则 $\mathrm{lub}H_1$ 不存在，但

$\mathrm{glb}H_1=\frac{1}{2}$。由此可知，对任意一个半序集 S 的子集 H 来说，$\mathrm{lub}H$ 以及 $\mathrm{glb}H$ 可能存在，也可能不存在。然而，如果存在的话，则又是唯一的。为确定起见，假设$\mathrm{lub}H$存在，我们证明它是唯一的。事实上，若u_1，u_2都是H的最小上界，则既有$u_1\prec u_2$，又有$u_2\prec u_1$，由半序关系的反称性，有$u_1=u_2$。

类似地可证，若$\mathrm{glb}H$存在，则它也是唯一的。

二、格

如果一个半序集 L的任意两个元素有一个最小上界和一个最大下界，则集L叫做格。于是，对任意a，$b\in L$，$\mathrm{lub}(a,\ b)$与$\mathrm{glb}(a,b)$均存在且唯一。

记 $a\cup b=\mathrm{lub}(a,\ b)$，$a\cap b=\mathrm{glb}(a,\ b)$，那么

$$(a,\ b)\in L\times L\longrightarrow a\cup b\in L,$$

$$(a,\ b)\in L\times L\longrightarrow a\cap b\in L,$$

因此，$\cup$，$\cap$是 L 上的代数运算。不妨将$\cup$，$\cap$叫做并运算与交运算。

设a，b，c是格L的任意三个元素，则a，b，$c\prec(a\cup b)\cup c$，即$(a\cup b)\cup c$是由a，b，c三元素组成的集的一个上界。不但如此，如果L的一个元素v，使得a，b，$c\prec v$，则$a\cup b$，$c\prec v$，于是$(a\cup b)\cup c\prec v$，因而$(a\cup b)\cup c$是集$(a,\ b,\ c)$的最小上界，即

$$(a\cup b)\cup c=\mathrm{lub}(a,\ b,\ c).$$

类似地，有

$$(a\cap b)\cap c=\mathrm{glb}(a,\ b,\ c).$$

例1 自然数集N，整数集I，实数集R关于通常的关系“$\leqslant$”都是有序集(而且是全序集)。在N或I或R中，任取两个数a,b。令a，b中较大者为它们的最小上界，a，b中较小者为它们的最大下界，即

$$a\cup b=\mathrm{lub}(a,\ b)=\max(a,\ b),$$

$$a\cap b=\mathrm{glb}(a,\ b)=\min(a,\ b),$$

则集N，I，R都是格。

例2 由某个固定集U的一切子集所成之集族$\mathscr{U}$，以集的包含关系作为$\mathscr{U}$中的顺序关系，即规定：

若 $A, B\in\mathscr{U}$ 且 $A\subset B$， 则 $A\prec B$，

那么$\mathscr{U}$是半序集。若$A\cup B$，$A\cap B$的意义就是通常所说的集的并与交，不难验证，$\mathscr{U}$也是一个格。

现在我们进一步讨论格L里的两个代数运算$\cup$，$\cap$所具有的运算规律：

1）交换律 $a\cup b=b\cup a$， $a\cap b=b\cap a$。

证明 根据定义，有

$$\mathrm{lub}(a,\ b)=\mathrm{lub}(b,\ a),\ \mathrm{glb}(a,\ b)=\mathrm{glb}(b,\ a),$$

所以 $a\cup b=b\cup a$，$a\cap b=b\cap a$。 ▌

2）结合律 $(a\cup b)\cup c=a\cup(b\cup c)$，

$(a\cap b)\cap c=a\cap(b\cap c)$。

证明 因为

$$(a\cup b)\cup c=\mathrm{lub}(a,b,c),\ (b\cup c)\cup a=\mathrm{lub}(b,c,a)。$$

而由a，b，c三个元素组成的集的最小上界是唯一的，故

$$\mathrm{lub}(a,\ b,\ c)=\mathrm{lub}(b,\ c,\ a),$$

即 $$(a\cup b)\cup c=(b\cup c)\cup a$$
$$\xlongequal{\text{交换律}} a\cup(b\cup c).$$

同理可证

$$(a\cap b)\cap c=a\cap(b\cap c).\qquad\rbrack$$

由数学归纳法可以证明，L的任何一个有限子集H必有一个最小上界和一个最大下界。如果这个集合由a_1，a_2，……，a_n组成，则lub$H$及glb$H$分别记为

$$a_1\cup a_2\cup\cdots\cup a_n \text{ 及 } a_1\cap a_2\cap\cdots\cap a_n.$$

3）吸收律 $a\cup(a\cap b)=a$，$a\cap(a\cup b)=a$。

证明 因为$a\cup(a\cap b)$是$(a, a\cap b)$的（最小）上界，所以

$$a\prec a\cup(a\cap b).\qquad(1)$$

又因为$a\cap b$是a与b的最大下界，有$a\cap b\prec a$，再有$a\prec a$，所以a是$(a\cap b, a)$的一个上界，从而

$$a\cup(a\cap b)\prec a.\qquad(2)$$

由(1)，(2)，据半序关系的反称性，有

$$a\cup(a\cap b)=a.$$

同理有 $a\cap(a\cup b)=a$。]

总上，格L里的两个代数运算$\cup$，$\cap$满足交换律、结合律和吸收律。下一段我们将证明它的逆命题也正确。

三、格的充分条件

设集L有两个代数运算$\cup$，$\cap$，并且这两个运算满足交换律、结合律和吸收律，那么集L是一个格。

要证明这一命题成立，应该在集L中适当地引入关系“$\prec$”，然后证明L关于“$\prec$”是一个格，并且$a\cup b=\text{lub}(a, b)$，

$a\cap b=\mathrm{glb}(a,\ b)$。

证明前，先注意下列事实：

$$a\cup b=b \iff a\cap b=a.$$

事实上，任取a，$b\in L$。

$$a\cup b=b\Rightarrow a\cap b=a\cap(a\cup b)\xlongequal{\text{吸收律}}a;$$
$$a\cap b=a\Rightarrow a\cup b=(a\cap b)\cup b$$
$$\xlongequal{\text{交换律}}b\cup(b\cap a)\xlongequal{\text{吸收律}}b.$$

现定义"$\prec$"如下：

$$a\prec b \iff a\cup b=b(\text{或}a\cap b=a).$$

证明 1）关系"$\prec$"是一个半序关系，即"$\prec$"具有自反性、反称性与传递性。

1° 自反性 对任意$a\in L$，因为

$$a\cup a\xlongequal{\text{吸收律}}a\cup(a\cap(a\cup b))\xlongequal{\text{吸收律}}a,$$

所以 $a\prec a$。

2° 反称性 若$a\prec b$，$b\prec a$，则$a=b$。

事实上 $a\prec b\iff a\cup b=b$，$b\prec a\iff b\cup a=a$，

而 $a\cup b=b\cup a$， 所以 $a=b$。

3° 传递性 若$a\prec b$，$b\prec c$，则$a\prec c$。

事实上 $a\prec b\iff a\cup b=b$，$b\prec c\iff b\cup c=c$。因此

$$a\cup c=a\cup(b\cup c)\xlongequal{\text{结合律}}(a\cup b)\cup c=b\cup c=c,$$
$$a\prec c.$$

因而，L是一个半序集。

2）对任意a，$b\in L$，有

1° $a\cup b=\mathrm{lub}(a,\ b)$， 2° $a\cap b=\mathrm{glb}(a,\ b)$。

先证1°成立。因为$a\cap(a\cup b)=a$，所以$a\prec a\cup b$，同理有$b\prec a\cup b$。故$a\cup b$是$(a,\ b)$的一个上界。

今令 c 是适合$a\prec c$ 且 $b\prec c$的任意一个元素，则$a\cup c=c$，$b\cup c=c$。于是

$$(a\cup b)\cup c\overset{\text{结合律}}{=\!=\!=}a\cup(b\cup c)=a\cup c=c,$$

因而 $a\cup b\prec c$，$a\cup b$是a与b的最小上界，即

$$a\cup b=\mathrm{lub}(a,\ b)。$$

类似地可证2°也成立。因为

$$(a\cap b)\cup a\overset{\text{交换律}}{=\!=\!=}a\cup(a\cap b)\overset{\text{吸收律}}{=\!=\!=}a,$$

所以$a\cap b\prec a$。同理有$a\cap b\prec b$，故$a\cap b$是$(a,\ b)$的一个下界。

今设d是$(a,\ b)$的一个下界，则$d\prec a$，$d\prec b$。从而$d\cap a=d$，$d\cap b=d$。因为

$$d\cap(a\cap b)=(d\cap a)\cap b=d\cap b=d,$$

所以 $d\prec a\cap b$，$a\cap b$是a和b的最大下界，即

$$a\cap b=\mathrm{glb}(a,\ b)。$$ ∎

由上面两段的讨论，我们可给格的概念以另一形式的等价定义：

设L是一非空集，$\cup$，$\cap$是L中的两个代数运算。若对任意的a，b，$c\in L$，下列三个运算定律都成立：

1）交换律 $a\cup b=b\cup a$，$a\cap b=b\cap a$；

2）结合律 $(a\cup b)\cup c=a\cup(b\cup c)$，

$(a\cap b)\cap c=a\cap(b\cap c)$；

3）吸收律 $a\cup(a\cap b)=a$，$a\cap(a\cup b)=a$，

则称代数系统$\langle L,\ \cup,\ \cap\rangle$是一个格，简记格为$L$。

§2 布尔代数

一、单位元素与零元素

设半序集S的一个元素(记为1)具有这样的性质：对于每一个$a\in S$，都有$a\prec 1$，则1叫做单位元素或最大元素。换句话说，在半序集的每一个元素后面的元素叫做单位元素。

如果单位元素存在的话，必然是唯一的，这很容易证明。设1_1及1_2都是S的单位元素，则$1_1\prec 1_2$，$1_2\prec 1_1$。由反称性有$1_1=1_2$。

类似地，我们有下面的概念。在半序集S的每一个元素前面的元素叫做最小元素或零元素，记为0。因此零元素具有这样的性质：对于每个$a\in S$，都有$0\prec a$。

如果0_1，0_2是S的零元素，则既有$0_1\prec 0_2$，又有$0_2\prec 0_1$，故$0_1=0_2$。因此一个半序集的零元素也是唯一的。

一个半序集可能有、也可能没有零元素与单位元素。

例1　按照普通数的“$\leqslant$”关系，半序集$S=$区间$(0,2)$既无零元素又无单位元素。而$S_1=$区间$(0,2]$虽无零元素，但有单位元素。此时单位元素就是数2，因为2位于区间$(0,2]$上一切数之后。

例2　由集U的一切子集组成的集族$\mathscr{U}$，因为空集包含在任何集之内，所以空集$\varnothing$是零元素。而全集U是$\mathscr{U}$的单位元素。

在含有零元素与单位元素的格L里，因为对每一$a\in L$，均有$0\prec a$，$a\prec 1$，从而

$$0 \cup a = a, \quad 0 \cap a = 0,$$

$$a \cup 1 = 1, \quad a \cap 1 = a.$$

这就是说，在含有0与1的格L里，0—1律是成立的。

二、布尔代数

在引入布尔代数的定义之前，我们先介绍两种特殊的格。

定义 在含有0与1的格L里，如果对每个$a \in L$，存在有$a' \in L$，使得

$$a \cup a' = 1, \quad a \cap a' = 0, \text{①}$$

则L叫做有补格，a'叫做a的补元。

简言之，满足0—1律及求补律的格叫做有补格。

定义 设a，b，c是格L中的任意三个元素。若在L中两个分配律

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c),$$

$$a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

都成立，则L叫做分配格。简言之，满足分配律的格叫做分配格。

§1例2中的格$\mathscr{U}$是分配格。因为在$\mathscr{U}$中，并对交的分配律以及交对并的分配律均成立。然而值得注意的是，不是任何一个格都满足两个分配律。

定义 一个有补的分配格叫做布尔格，亦称布尔代数。也就是说布尔代数是一个含有零元素和单位元素的格，并且它还满足分配律和求补律。

下一段我们将证明，在布尔代数中，任意一个元素的补元

① 我们把$a \cup a' = 1$，$a \cap a' = 0$叫做求补律。

是唯一的，因此求补运算也是一种代数运算。于是上述定义与下面的定义等价。

定义 设$\mathscr{B}$是至少包含0，1两个元素的集合，又$\cup$，$\cap$，$'$，是$\mathscr{B}$上的三个代数运算。若对任意的a，b，$c\in\mathscr{B}$，下列六个基本定律都成立：

1° 交换律 $a\cup b=b\cup a$，$a\cap b=b\cap a$；

2° 结合律 $a\cup(b\cup c)=(a\cup b)\cup c$，

$a\cap(b\cap c)=(a\cap b)\cap c$；

3° 分配律 $a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c)$，

$a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c)$；

4° 吸收律 $a\cup(a\cap b)=a$，$a\cap(a\cup b)=a$；

5° 0—1律 $a\cup 0=a$，$a\cap 1=a$

（或$a\cup 1=1$，$a\cap 0=0$）；

6° 求补律 $a\cup a'=1$，$a\cap a'=0$，

则称代数系统$\langle\mathscr{B}$，$\cup$，$\cap$，$'$，0，1$\rangle$为（一般）布尔代数，简记布尔代数为$\mathscr{B}$。

这是用公理化方法给出的定义，其中的六个基本定律看作是公理，布尔代数的其他定理或公式则可由它们推导出来。

现在看下面两个重要例子。

例3 设$\mathscr{B}=\mathscr{U}(U)$，$\mathscr{U}(U)$是由非空集$U$的所有子集构成的集。显然$\mathscr{U}(U)$包含两个元素，一个是空集$\varnothing$，一个是全集$U$。并且$\varnothing$是$\mathscr{U}(U)$的零元素，全集$U$是$\mathscr{U}(U)$的单位元素。

$\cup$，$\cap$，$'$分别表示集论中的并，交、补三种运算，上述六个基本定律在$\mathscr{U}(U)$中是成立的，因此$\mathscr{B}=\mathscr{U}(U)$是布尔代数。

换句话说，集代数是布尔代数。

例4 设$\mathscr{B}=\mathscr{B}_2=\{0,1\}$，三个代数运算由下列二表给出：

a	b	$a\cup b$	$a\cap b$
0	0	0	0
0	1	1	0
1	0	1	0
1	1	1	1

a	a'
0	1
1	0

现在验证，运算 $\cup$，$\cap$，$'$ 满足布尔代数定义中的六条基本定律，例如分配律可用下面二表来证明。

a	b	c	$b\cap c$	$a\cup(b\cap c)$	$a\cup b$	$a\cup c$	$(a\cup b)\cap(a\cup c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0
0	1	0	0	0	1	0	0
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1
1	1	0	0	1	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1

a	b	c	$b\cup c$	$a\cap(b\cup c)$	$a\cap b$	$a\cap c$	$(a\cap b)\cup(a\cap c)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	1	1	0	1	1
1	1	0	1	1	1	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

由上面二表可知，分配律是成立的。这里采用的验证方法是"全代入"法，就是将 a，b，c 的全部可能的值以及这些值的全部组合代入等式的两边进行计算，从而证明等式成立。读者可仿此对其余五个定律加以验证。

由此可知，$\mathscr{B}_2$也是一个布尔代数。由于它只含两个元，所以叫二元布尔代数。这种布尔代数虽简单，但在布尔代数的理论与应用上却是很重要的。逻辑代数或开关代数，指的就是这种二元布尔代数。

三、几个基本性质

1．在布尔代数$\mathscr{B}$中，任意一个元素 a 的补元a'是唯一的。

证明 设 a 有两个补元a'和a_1，则

$$a\cup a'=a\cup a_1=1,$$

$$a\cap a'=a\cap a_1=0.$$

$$a_1=a_1\cap(a_1\cup a)=a_1\cap(a'\cup a)$$

$$=(a_1\cap a')\cup(a_1\cap a)=(a'\cap a_1)\cup(a'\cap a)$$

$$=a'\cap(a_1\cup a)=a'\cap(a'\cup a)=a'.$$ ▮

2. 对任意$a\in\mathscr{B}$，有$(a')'=a$。

证明　设a的补元为a'，那末

$$a\cup a'=1,\quad a\cap a'=0.$$

由交换律，得

$$a'\cup a=1,\quad a'\cap a=0.$$

由此知，a也是a'的补元，但补元是唯一的，所以

$$a''\equiv(a')'=a.$$ ▮

3. $0'=1$，$1'=0$，

证明　证法同2。由0—1律及交换律，有

$$1\cup 0=1,\quad 1\cap 0=0.$$

因而0是1的补元，而补元是唯一的，所以

$$0=1',$$

从而　$$0'=1''=1.$$ ▮

4. $(a\cup b)'=a'\cap b'$，$(a\cap b)'=a'\cup b'$。(反演律)

证明　我们证第一个公式．

因为
$$\begin{aligned}(a\cup b)\cup(a'\cap b')&=[(a\cup b)\cup a']\cap[(a\cup b)\cup b']\\&=[(a\cup a')\cup b]\cap[a\cup(b\cup b')]\\&=(1\cup b)\cap(a\cup 1)\\&=1\cap 1=1.\\(a\cup b)\cap(a'\cap b')&=(a'\cap b')\cap(a\cup b)\\&=[(a'\cap b')\cap a]\cup[(a'\cap b')\cap b]\\&=[(a\cap a')\cap b']\cup[a'\cap(b\cap b')]\\&=(0\cap b')\cup(a'\cap 0)\end{aligned}$$

$$=0\cup 0=0,$$

因而　$a'\cap b'$是$a\cup b$的补元．而补元是唯一的，所以

$$(a\cup b)'=a'\cap b'.$$

第二个公式留给读者证明．　　　　　　　　　　　　　　　　　▌

这两个公式也叫做德·摩根公式．

5．对偶定理

布尔代数定义中的六组基本定律，每一组都是成对出现的，每一对中的一个叫做同对中另一个的对偶．对偶的特点是，若对其中一个公式中的$\cup$、$\cap$运算和0、1元，施行如下的对偶变换：

$$\begin{array}{cccc}\cup & \cap & 0 & 1\\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow\\ \cap & \cup & 1 & 0\end{array}$$

就得到另一个公式．例如

$$\begin{array}{c}a\cup(a\cap b)=a,\\ \downarrow\quad\ \downarrow\\ a\cap(a\cup b)=a.\end{array}$$

又如

$$\begin{array}{cc}a\cup 0=a, & a\cup a'=1,\\ \downarrow\ \downarrow & \downarrow\qquad\downarrow\\ a\cap 1=a; & a\cap a'=0.\end{array}$$

对由这六组基本公式推导出来的公式（简称为导出公式）施行对偶变换，就可得到它的对偶式．问：导出公式的对偶式是否也正确呢？

对偶定理　若某导出公式成立，则其对偶公式亦成立．

证明　只要对导出公式的每一步证明改成其对偶，即得对

偶公式的证明。 ∎

例如，我们已证得$(a\cup b)'=a'\cap b'$，它的对偶式是$(a\cap b)'=a'\cup b'$，据对偶定理它也是正确的。作为练习，读者依对偶定理证明中所指示的，证明$(a\cap b)'=a'\cup b'$成立。

又如，我们在第一章§2例13中证明了

1) $(A\cap B)\cup(A\cap B')=A$,

2) $A\cup(A'\cap B)=A\cup B$,

3) $(A\cap B)\cup(A'\cap C)\cup(B\cap C)=(A\cap B)\cup(A'\cap C)$,

4) $((A\cap B)\cup(A'\cap C))'=(A\cap B')\cup(A'\cap C')$.

它们的对偶式分别为：

1)′ $(A\cup B)\cap(A\cup B')=A$,

2)′ $A\cap(A'\cup B)=A\cap B$,

3)′ $(A\cup B)\cap(A'\cup C)\cap(B\cup C)=(A\cup B)\cap(A'\cup C)$,

4)′ $((A\cup B)\cap(A'\cup C))'=(A\cup B')\cap(A'\cup C')$.

由对偶定理，1)′—4)′都是正确的。

对偶定理的好处是，使布尔代数里有关公式的证明省略一半，因此该定理是重要的。

注　本段中所有结论自然适用于集代数；反之，在第一章§2中依据六个基本公式所证得的定理与公式在一般布尔代数中也成立，只是形式上稍加改变就行了，例如把那里的A，B，U，$\varnothing$换成这里的a，b，1，0。这一工作留给读者完成。

最后我们指出，所给的布尔代数公理体系具有完备性（即所有的定理都可由它们推导出来），无矛盾性（即相互之间不能矛盾），但不具独立性。例如在六个基本定律中，去掉结合律和吸

收律，余下的四个也组成布尔代数的公理体系。关于布尔代数的公理体系，可参看R·L·古德斯坦因著《布尔代数》，本附录不再进一步讨论。

附录二　超实数理论

§1　引　言

通常我们所学的数学分析是属于柯西体系的微积分理论，它是在实数连续统的基础上，运用极限方法即 $\varepsilon—\delta$ 方法建立起来的。这种理论比十七、十八世纪牛顿、莱布尼兹等人的微积分理论前进了一大步。一百多年来，柯西的这一套体系已成为微积分基本理论的唯一体系，人们一提到微积分，自然以这套体系为标准，所以称为“标准分析”。在以 $\varepsilon—\delta$ 方法表达的极限理论中，无穷小量只是作为以0为极限的一种特殊变量，现代数学称之为“潜无穷小”，也就是说，柯西体系的标准分析以 $\varepsilon—\delta$ 方法取代了牛顿、莱布尼兹所提出的无穷小量推理方法。本世纪六十年代以来，美国数理逻辑家A·鲁滨逊（Abraham Robinson）重新提出了湮没已久的无穷小量推理方法，他把分析的论域由实数系 R 扩大到超实数系 $^*R$，允许无穷小（大）量作为 $^*R$ 中的一员参加运算，从而不用 $\varepsilon—\delta$ 方法而把分析的基本概念，如连续、导数、积分等重新给以定义。这种理论显然与“标准分析”不同，鲁滨逊称它为“非标准分析”。

鲁滨逊在1960年，用数理逻辑的方法证明了超实数系 $^*R$ 的

存在，并且给出了$^*R$的一系列性质。$^*R$叫做分析的一个非标准模型，这样的模型也可以由超幂的形式来构造。本附录采用后者的方法来介绍超实数系$^*R$。这样做，只用较少的数理逻辑知识，而且与康托尔、梅赖等由基本有理数列建立实数的办法相类似，便于对照起来学习。

在第二章§6我们讲过用基本有理数列定义实数。设A是全体基本有理数列所成之集，A中的两个基本数列$\{a_n\}=\{b_n\}$，是指对任意的正有理数ε，存在自然数n_0，当$n\geqslant n_0$时，有

$$|a_n-b_n|<\varepsilon.$$

在那里，我们证明了“$=$”是A中的等价关系。按照等价关系“$=$”，将A进行分类，以A的等价类定义实数，A的商集$\tilde{A}$就是全体实数所成之集。

按照我们所熟知的极限定义，如果$\{a_n\}=\{b_n\}$，那么数列$\{a_n-b_n\}$以0为极限，简称为零序列。因此，对基本有理数列全体A进行分类，是以零序列作基准的。也就是说，对集A以零序列为模分类作商而得到实数集R。

因为数列可看作定义在自然数集N上的函数，所以数列$\{a_n\}$又可记为$\{f(n)\}$，$\{g(n)\}$等。数列

$$f(n)=\frac{1}{n},\qquad n=1,\ 2,\ \cdots,$$

$$g(n)=\begin{cases}(-1)^n, & 1\leqslant n\leqslant 1000,\\ \dfrac{1}{n}, & n>1000,\end{cases}$$

$$h(n)=\frac{1}{2^{n-1}},\qquad n=1,\ 2,\ \cdots;$$

$$I(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & 1\leqslant n\leqslant 10^{10},\\[2ex] \dfrac{1}{2^{n-1}}, & n>10^{10}\end{cases}$$

都是零序列，或者说上面四个（整序）变量都是无穷小量，在 $n\to\infty$ 的过程中，它们的变化结果都是0。但是进一步考察它们的变化过程，发现它们之间存在着差异。例如：

$\{f(n)\}$与$\{g(n)\}$，尽管它们前面一千个相应的项彼此都不同，但从第 1001 项起，对应的项相等，即当 $n\geqslant 1001$ 时，$f(n)=g(n)$。

$\{h(n)\}$与$\{I(n)\}$，使得$h(n)\neq I(n)$的n是从3到10^{10}的一切自然数，尽管 $10^{10}-2$ 这个数目很大，但使$h(n)\neq I(n)$的自然数n仍然只形成一有限集，而使$h(n)=I(n)$的n是1，2以及大于10^{10}的所有自然数。

然而对于$\{f(n)\}$与$\{I(n)\}$，情况就不同了。使得$f(n)=I(n)$的n只取1到10^{10}之间的一切自然数，而使得$f(n)\neq I(n)$的 n 为满足不等式$n>10^{10}$的所有自然数，显然这是一无限集。

按照超实数理论，$\{f(n)\}$与$\{g(n)\}$（以及$\{h(n)\}$与$\{I(n)\}$）看作是相等的零序列，而$\{f(n)\}$与$\{I(n)\}$（以及$\{f(n)\}$与$\{h(n)\}$等）看作是不同的零序列。显然，在实数系R内，是找不到数来描述这些零序列的异同的，因此，需要将R进行扩张。而要做到这一点，上面的讨论告诉我们，必须考察与此密切相关的自然数集N的子集所成的集，这就是下节介绍的内容。

§2 超　滤　子

考虑N的子集所成之集$\mathscr{F}$（$\mathscr{F}$的元素是N的子集），定义如下：

$$\mathscr{F}=\{S\subset N|N-S\text{为有限集}\}.$$

显然　$N\in\mathscr{F}$，因为$N-N=\varnothing$（空集是有限集）。又如$S=\{1, 4, 9, 15, 16, 17, \cdots\}\in\mathscr{F}$，因为$N-S=\{2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14\}$是一有限集。

不难验证，$\mathscr{F}$满足以下三个性质：

(i) $\varnothing\notin\mathscr{F}$，即空集不属于集$\mathscr{F}$；

(ii) 如果S_1，$S_2\in\mathscr{F}$，则$S_1\cap S_2\subset\mathscr{F}$；

(iii) 如果$S\in\mathscr{F}$，而$S\subset T\subset N$，则$T\in\mathscr{F}$。

我们称满足性质 (i)，(ii)，(iii) 的 N 的子集类是 N 上的一个滤子。注意的是，N上的滤子不止$\mathscr{F}$这一个。例如，设X是N的一个非空子集，N中包含X的一切子集所成的集

$$\{S\subset N|S\supset X,\ X\neq\varnothing\}$$

也是N上的一个滤子（读者不难验证它满足性质(i)，(ii)，(iii)）。

联系到实数列，或定义在N上的函数，我们有下述

定义　如果 $S=\{n\in N|f(n)\text{ 有性质}P\}\in\mathscr{F}$（也就是使得$f(n)$ 不具有性质P的自然数n形成的集 $N-S$ 是有限集），我们说以 N 为定义域的函数 f 有性质 P。

例如，设$\{f(n)\}$是一个零序列，那末对任给的$\varepsilon>0$，有自

然数n_0，当$n \geqslant n_0$时，

$$|f(n)|<\varepsilon.$$

于是，对任给的$\varepsilon>0$，有

$$\{n \in N \mid |f(n)|<\varepsilon\} \in \mathscr{F}.$$

这也是$\{f(n)\}$为零序列的表示法，特别，若$f(n)=\frac{1}{n}$，则对任意的$\varepsilon>0$，有

$$\left\{n \in N \mid \frac{1}{n}<\varepsilon\right\} \in \mathscr{F},$$

因此$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是零序列。

由该定义，滤子$\mathscr{F}$的性质可译成下列的逻辑性质：

(i)如果没有$n \in N$，使$f(n)$有性质P（此时S为空集），则f没有性质P；

(ii)如果f有性质P和性质Q，那么f有性质$P \wedge Q$（等于"P并且Q"，即P和Q的逻辑合取）；

(iii)如果f有性质P，而P能推出Q，则f有性质Q。

对于(iii)，举例说明如下。设$f(n)=\frac{1}{n}$，显然

$$\left\{n \in N \mid \frac{1}{n}<\frac{1}{100}\right\} \in \mathscr{F}.$$

而"$f(n)<\frac{1}{100}$" $\Rightarrow$ "$f(n)<\frac{1}{10}$"，

故 $$\left\{n \in N \mid \frac{1}{n}<\frac{1}{100}\right\} \subset \left\{n \in N \mid \frac{1}{n}<\frac{1}{10}\right\} \in \mathscr{F},$$

f也具有性质“$f(n)<\frac{1}{10}$”。

由上可见，滤子能反映上述的逻辑性质，但还有美中不足的地方。例如取

$$f(n)=\begin{cases}1, & n\text{为奇数,}\\ -1, & n\text{为偶数.}\end{cases}$$

我们希望确定是否有$f\geqslant 0$或$f<0$，但显然两者都不成立，这就与逻辑上的一条基本定律相抵触，该定律（排中律）要求：如果给出一个性质P和一个函数 f，或者f有性质P，或者f有性质“非P”，二者必居其一。为弥补这一缺陷，我们采用N上的这样的滤子$\mathscr{U}$，它除了满足性质(i)，(ii)，(iii)外，还具有性质

(iv)对于每一$S\subset N$，或者$S\in\mathscr{U}$或者$N-S\in\mathscr{U}$，[①]这样的滤子$\mathscr{U}$称为N上的超滤子。

不难看出：超滤子比起滤子来，显得更“精细些”，它使得我们能对一切定义在N上的函数是否具有某一性质作出判断。并且，假如存在N上的超滤子，它应该包含$\mathscr{F}$作为它的一个子集。

现在我们证明：至少有一个N上的超滤子$\mathscr{U}$，它包含$\mathscr{F}$为其子集。

直观上看，N上的一个包含$\mathscr{F}$的超滤子，应该是N上的一个包含$\mathscr{F}$为其子集并且由尽可能多的元素（即N的子集）所构成的滤子，因此我们取

$$F=\{N\text{上的滤子}\mathscr{F}' \mid \mathscr{F}'\supset\mathscr{F}\}.$$

① 由性质(i)和(ii)，集S与N－S不能同时属于$\mathscr{U}$。

在F中规定滤子之间用包含关系"$\subset$"作为F中某些元素之间的顺序关系，即当$\mathscr{F}_1', \mathscr{F}_2' \in F$且$\mathscr{F}_1' \subset \mathscr{F}_2'$时，规定$\mathscr{F}_1' \prec \mathscr{F}_2'$。显然，$F$非空，因$\mathscr{F} \in F$。此时$F$是一个半序集。$F$的每一个全序子集在$F$中有上界，而且上界就是该全序子集中各元素（$N$上的滤子）的并集（请验证，它也是$N$上的一个滤子，并且按$F$中规定的顺序关系，位于该全序子集一切元素之后）。所以由佐恩引理，推出F中必有极大元，记为$\mathscr{U}$。我们说$\mathscr{U}$就是N上的一个超滤子。

用反证法。假若$\mathscr{U}$不是N上的超滤子，则应有N的一个非空子集S，适合$S \notin \mathscr{U}$及$N-S \notin \mathscr{U}$。这时一定存在N的一个子集$T \in \mathscr{U}$，使得$S \cap T = \varnothing$。不然的话，对任意$T \in \mathscr{U}$，有$S \cap T \neq \varnothing$，则有

$$\mathscr{U}' = \{X \subset N \mid X \supset S \cap T, \text{ 对某个} T \in \mathscr{U}\} \in F$$

而且$\mathscr{U}' \supset \mathscr{U}$（并且$\mathscr{U}$是$\mathscr{U}'$的一个真子集，因为$S \notin \mathscr{U}$，但$S \in \mathscr{U}'$），这与$\mathscr{U}$是$F$的极大元相矛盾。类似地，有一个$N$的子集$T_1 \in \mathscr{U}$，使得$(N-S) \cap T_1 = \varnothing$。于是又得出

1) $T_1 \subset S$，$T_1 \cap T \subset S \cap T = \varnothing$，故 $T_1 \cap T = \varnothing$。

2) $T_1 \cap T \in \mathscr{U}$。（据滤子性质(ii)）

从而$\varnothing \in \mathscr{U}$，与滤子性质(i)矛盾。所以$\mathscr{U}$是$N$上的一个超滤子。

以下，记号$\mathscr{U}$表示N上的一个（任意取定的）含有$\mathscr{F}$为其子集的超滤子。

§3 超幂 $^*R$

一、$^*R$的建立

第三章§5中指出，R^N代表全体实数列所成之集，因为每

一实数列可看作是定义在自然数集N上的函数，所以R^N又可说成是由所有定义在N上的实函数组成的集。

我们在R^N中引入等价关系。设f，$g\in R^N$，如果

$$\{n\in N\mid f(n)=g(n)\}\in\mathscr{U},$$

则说$f=g$。现在证明关系"$=$"具有自反性、对称性和传递性。

1）自反性　对任一$f\in R^N$，因为$N\in\mathscr{U}$，我们有

$$\{n\in N\mid f(n)=f(n)\}=N\in\mathscr{U},$$

所以　$f=f$。

2）对称性　设f，$g\in R^N$，且$f=g$。因为

$$\{n\in N\mid g(n)=f(n)\}=\{n\in N\mid f(n)=g(n)\}\in\mathscr{U},$$

据定义，$g=f$。

3）传递性　设f，g，$h\in R^N$，且$f=g$，$g=h$。记

$$A=\{n\in N\mid f(n)=g(n)\},\ B=\{n\in N\mid g(n)=h(n)\},$$

$$C=\{n\in N\mid f(n)=h(n)\}.$$

那么　$A\in\mathscr{U}$，$B\in\mathscr{U}$。由滤子性质(ii)，有

$$A\cap B\in\mathscr{U}.$$

而　$A\cap B\subset C\subset N$，据滤子性质(iii)，又有　$C\in\mathscr{U}$，

因此　$f=h$。

把R^N按照等价关系"$=$"进行分类，以R^N的等价类定义超实数，从而R^N的商集$\widetilde{R^N}$（R^N的所有等价类组成的集）便是整个超实数系，记为$^*R$。

我们把$^*R$中包含$f\in R^N$的等价类记为$\langle f\rangle$。R^N中的任意两个等价类$\langle f\rangle$，$\langle g\rangle$或者相同，即$\langle f\rangle=\langle g\rangle$；或者互不相交，即$\langle f\rangle\neq\langle g\rangle$。因此$\langle f\rangle=\langle g\rangle$的充要条件是：$\{n\in N\mid f(n)=g(n)\}$

$\in \mathscr{U}$（或$f = g$）。

$^*R$ 之所以称为超幂，是因为对直幂集R^N，以超滤子$\mathscr{U}$为模，分类作商而得到。在这里，超滤子（形象地说）相当于一个很精细的“过滤器”。通过它，例如可使一切零序列（对应于实数系 R 中的数 0）更细致地加以区分，使得相等的零序列聚集在一起，而不同的零序列则使之分离。例如§1中的$\{f(n)\}$与$\{g(n)\}$，$\{l(n)\}$与$\{h(n)\}$便分别归于一类，而$\{f(n)\}$与$\{l(n)\}$则属于不同的两类。

二、$^*R$的性质

在建立了$^*R$以后，接着的是应该给超实数合理地规定代数运算以及建立大小顺序关系，使得$^*R$具有很好的代数结构。首先我们考虑代数运算及其性质。

1. $^*R$是一个域

为此必须在$^*R$中定义加法和乘法。设$\langle f\rangle, \langle g\rangle \in {^*R}$，规定

$$\langle f\rangle + \langle g\rangle = \langle f+g\rangle, \quad \langle f\rangle \cdot \langle g\rangle = \langle fg\rangle.$$

我们要证明超实数按上述规定，进行加法与乘法运算是合理的，也就是证明运算的结果与等价类中代表元素的取法无关。

设 $\langle f\rangle = \langle f'\rangle$，$\langle g\rangle = \langle g'\rangle$，则

$$A = \{n \in N \mid f(n) = f'(n)\} \in \mathscr{U},$$

$$B = \{n \in N \mid g(n) = g'(n)\} \in \mathscr{U}.$$

而
$$A \cap B \subset \{n \in N \mid f(n) + g(n) = f'(n) + g'(n)\} \subset N,$$

$$A \cap B \subset \{n \in N \mid f(n)g(n) = f'(n)g'(n)\} \subset N.$$

由滤子性质(ii)知 $A \cap B \in \mathscr{U}$。再由滤子性质(iii)知

$$\{n \in N \mid f(n) + g(n) = f'(n) + g'(n)\} \in \mathscr{U},$$

$$\{n\in N \mid f(n)g(n)=f'(n)g'(n)\}\in \mathscr{U}.$$

从而　$\langle f+g\rangle=\langle f'+g'\rangle$，$\langle fg\rangle=\langle f'g'\rangle$.

故当　$\langle f\rangle=\langle f'\rangle$，$\langle g\rangle=\langle g'\rangle$时，

$$\langle f\rangle+\langle g\rangle=\langle f'\rangle+\langle g'\rangle,\quad \langle f\rangle\cdot\langle g\rangle=\langle f'\rangle\cdot\langle g'\rangle.$$

因此，若$\langle f\rangle$，$\langle g\rangle$为两个超实数，则称超实数

$$\langle f+g\rangle,\quad \langle fg\rangle$$

为$\langle f\rangle$加$\langle g\rangle$的和，$\langle f\rangle$乘$\langle g\rangle$的积，分别记作

$$\langle f\rangle+\langle g\rangle,\quad \langle f\rangle\cdot\langle g\rangle\ (\text{或}\langle f\rangle\langle g\rangle).$$

定理 1　超实数全体 $^*R$ 按照上述的加法及乘法成为一个域。

证明　由代数学关于域的定义，就是要证明

1）$^*R$按照加法成一交换群，即证

1° 当$\langle f\rangle$，$\langle g\rangle\in{}^*R$时，$\langle f\rangle+\langle g\rangle\in{}^*R$.

事实上，按定义，加法是一代数运算。

2° 具有可结合性：若$\langle f\rangle$，$\langle g\rangle$，$\langle h\rangle\in{}^*R$，则

$$\langle f\rangle+(\langle g\rangle+\langle h\rangle)=(\langle f\rangle+\langle g\rangle)+\langle h\rangle.$$

事实上　$\langle f\rangle+(\langle g\rangle+\langle h\rangle)=\langle f\rangle+\langle g+h\rangle=\langle f+(g+h)\rangle$，

$$(\langle f\rangle+\langle g\rangle)+\langle h\rangle=\langle f+g\rangle+\langle h\rangle=\langle (f+g)+h\rangle.$$

因为对R来说，加法具有可结合性，所以

$$\langle f+(g+h)\rangle=\langle (f+g)+h\rangle$$

（详细过程请读者补述），故$^*R$的加法满足结合律。

3° 具有可交换性，若$\langle f\rangle$，$\langle g\rangle\in{}^*R$，则

$$\langle f\rangle+\langle g\rangle=\langle g\rangle+\langle f\rangle$$

仿2°证明，从略。

另外，对任何$x\in R$，令 $x(n)=x$（对一切n），得实数列

$$\{x, x, \cdots, x, \cdots\}\in R^N.$$

把它仍记为x，即$x=\{x, x, \cdots, x, \cdots\}$。将$^*R$中包含$x\in R^N$的等价类记为$\langle x\rangle$，于是可知

4° 存在零元$\langle 0\rangle$，对一切$\langle f\rangle\in{}^*R$，显然有

$$\langle f\rangle+\langle 0\rangle=\langle f\rangle.$$

5° 对任一$\langle f\rangle\in{}^*R$，有负元$-\langle f\rangle=\langle -f\rangle\in{}^*R$，使得

$$\langle f\rangle+(-\langle f\rangle)=\langle 0\rangle.$$

2） $^*R$去掉$\langle 0\rangle$后按照乘法成一交换群，即证

1° 当$\langle f\rangle$，$\langle g\rangle\in{}^*R$时，$\langle f\rangle\langle g\rangle\in{}^*R$。

由乘法定义可知它是一代数运算。

2° 可结合性：若$\langle f\rangle$，$\langle g\rangle$，$\langle h\rangle\in{}^*R$，则

$$\langle f\rangle\cdot(\langle g\rangle\cdot\langle h\rangle)=(\langle f\rangle\cdot\langle g\rangle)\cdot\langle h\rangle.$$

3° 可交换性：若$\langle f\rangle$，$\langle g\rangle\in{}^*R$，则

$$\langle f\rangle\cdot\langle g\rangle=\langle g\rangle\cdot\langle f\rangle.$$

（2°，3°证明从略）

4° 存在单位元$\langle 1\rangle$，对一切$\langle f\rangle\in{}^*R$，有

$$\langle f\rangle\cdot\langle 1\rangle=\langle f\rangle.$$

5° 若$\langle f\rangle\neq\langle 0\rangle$，则必有逆元$\langle f\rangle^{-1}\in{}^*R$，使得

$$\langle f\rangle\cdot\langle f\rangle^{-1}=\langle 1\rangle.$$

事实上，若$\langle f\rangle\neq\langle 0\rangle$，则$\{n\in N\mid f(n)=0\}\notin\mathscr{U}$。因$\mathscr{U}$是超滤子，所以

$$\{n\in N\mid f(n)\neq 0\}=N-\{n\in N\mid f(n)=0\}\in\mathscr{U}.$$

我们定义

$$g(n)=\begin{cases}\dfrac{1}{f(n)}, & 当 f(n)\neq 0,\\ 0, & 当 f(n)=0.\end{cases}$$

因为 $\{n\in N \mid f(n)g(n)=1\}=\{n\in N \mid f(n)\neq 0\}\in\mathscr{U}$，故

$$\langle fg\rangle=\langle 1\rangle,$$

或

$$\langle f\rangle\cdot\langle g\rangle=\langle 1\rangle.$$

令 $\langle f\rangle^{-1}=\langle g\rangle$，于是有

$$\langle f\rangle\cdot\langle f\rangle^{-1}=\langle 1\rangle,$$

称 $\langle f\rangle^{-1}=\langle g\rangle$ 为 $\langle f\rangle$ 的逆元，从而结论5°成立。

3）乘法对加法的可分配性：若 $\langle f\rangle$，$\langle g\rangle$，$\langle h\rangle\in{}^*R$，则

$$\langle f\rangle\cdot(\langle g\rangle+\langle h\rangle)=\langle f\rangle\cdot\langle g\rangle+\langle f\rangle\cdot\langle h\rangle.$$

事实上，

$$\begin{aligned}\langle f\rangle\cdot(\langle g\rangle+\langle h\rangle)&=\langle f\rangle\cdot\langle g+h\rangle\\&=\langle f(g+h)\rangle\\&=\langle fg+fh\rangle\\&=\langle fg\rangle+\langle fh\rangle\\&=\langle f\rangle\cdot\langle g\rangle+\langle f\rangle\cdot\langle h\rangle.\end{aligned}$$ ▮

在证明了 ${}^*R$ 是一个域后，我们引入“差”与“商”的概念，

记 $\langle f\rangle+(-\langle g\rangle)=\langle f\rangle-\langle g\rangle$，称为 $\langle f\rangle$ 减 $\langle g\rangle$ 的差。当 $\langle g\rangle\neq\langle 0\rangle$ 时，记 $\langle f\rangle\cdot\langle g\rangle^{-1}=\dfrac{\langle f\rangle}{\langle g\rangle}$，称为 $\langle g\rangle$ 除 $\langle f\rangle$ 的商。

2 ${}^*R$ 是一个有序域

为此先在 ${}^*R$ 中引入顺序关系。设 $\langle f\rangle,\langle g\rangle\in{}^*R$，规定当

$$\{n\in N|f(n)\leqslant g(n)\}\in\mathscr{U}$$

时，$\langle f\rangle\leqslant\langle g\rangle$。我们可证明这样的规定是合理的。因为若 $\langle f\rangle\leqslant\langle g\rangle$，并且$\langle f\rangle=\langle f'\rangle$，$\langle g\rangle=\langle g'\rangle$时，有

$$A=\{n\in N|f(n)=f'(n)\}\in\mathscr{U},$$

$$B=\{n\in N|g(n)=g'(n)\}\in\mathscr{U},$$

$$C=\{n\in N|f(n)\leqslant g(n)\}\in\mathscr{U}.$$

又因 $A\cap B\cap C\subset\{n\in N|f'(n)\leqslant g'(n)\}$，由滤子性质 (ii)，(iii)，得到

$$\langle f'\rangle\leqslant\langle g'\rangle.$$

这就说明我们的规定与等价类中代表元素的取法无关。

不难验证，$\langle f\rangle\leqslant\langle g\rangle$ 且 $\langle f\rangle\neq\langle g\rangle$ 的必要充分条件是：$\{n\in N|f(n)<g(n)\}\in\mathscr{U}$。这时记作$\langle f\rangle<\langle g\rangle$。

定理 2 设$\langle f\rangle$，$\langle g\rangle\in{}^*R$，则三个关系

$$\langle f\rangle=\langle g\rangle,\quad \langle f\rangle<\langle g\rangle,\quad \langle g\rangle<\langle f\rangle$$

必有一个成立，而且也只有一个成立。称超实数的这一性质为三歧性。

证明 1) 先证上述三个关系必有一个成立。

令 $A=\{n\in N|f(n)=g(n)\}$，$B=\{n\in N|f(n)<g(n)\}$，

$$C=\{n\in N|g(n)<f(n)\}.$$

因为在R中，三歧性是成立的，所以

$$A\cup B\cup C=N,$$

且 $$A\cap B=B\cap C=A\cap C=\varnothing.$$

由于$\mathscr{U}$是超滤子，A，B，C中至少有一个必须是u的元素：若$A\in\mathscr{U}$，结论成立；否则$A\notin\mathscr{U}$，A的补集$B\cup C\in\mathscr{U}$。今若$B\in\mathscr{U}$，

结论也已真；否则 $B\notin\mathscr{U}$，那么它的补集$A\cup C\in\mathscr{U}$，从而$C=(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)\in\mathscr{U}$。

2）再证上述三个关系式只有一个成立。用反证法，不妨设其中有两个成立，例如 $\langle f\rangle=\langle g\rangle$ 与 $\langle f\rangle<\langle g\rangle$ 同时成立。于是 $A\in\mathscr{U}$, $B\in\mathscr{U}$。据滤子性质(ii)，$A\cap B\in\mathscr{U}$。然而$A\cap B=\varnothing$，故$\varnothing\in\mathscr{U}$与滤子性质（i）相矛盾，所以$\langle f\rangle=\langle g\rangle$与$\langle f\rangle<\langle g\rangle$不能同时成立。

同理可证$\langle f\rangle=\langle g\rangle$与$\langle g\rangle<\langle f\rangle$以及$\langle f\rangle<\langle g\rangle$与$\langle g\rangle<\langle f\rangle$都不能同时成立。 ▮

我们按$^*R$中元素的大小关系作为顺序关系，很显然 $^*R$ 是一个有序域。

定理 3 设$\langle f\rangle$，$\langle g\rangle$，$\langle h\rangle\in{}^*R$。

1）若 $\langle f\rangle<\langle g\rangle$，则 $\langle f\rangle+\langle h\rangle<\langle g\rangle+\langle h\rangle$，

2）若 $\langle 0\rangle<\langle h\rangle$，则 $\langle f\rangle\cdot\langle h\rangle<\langle g\rangle\cdot\langle h\rangle$。

特别，$\langle 0\rangle<\langle f\rangle$与$-\langle f\rangle<\langle 0\rangle$等价。

证明 留给读者。

3．R是$^*R$的一个真有序子域

设$x\in R$，如定理1中所指出的，将$^*R$中包含$x=\{x, x, \cdots, x,\cdots\}\in R^N$的等价类记为$\langle x\rangle$，称$\langle x\rangle$是相应于实数$x$的超实数。记 $\widetilde{R}$ 为相应于实数的超实数全体。显然 $\widetilde{R}$ 是$^*R$的一个真子集。

设$\langle x\rangle$，$\langle y\rangle\in\widetilde{R}$。根据$^*R$的加法和乘法定义，我们有

$$\langle x\rangle+\langle y\rangle=\langle x+y\rangle\in\widetilde{R},$$

$$\langle x\rangle\cdot\langle y\rangle=\langle xy\rangle\in\widetilde{R}.$$

因此，对于每一实数$x\in R$，令$\langle x\rangle$与它对应，

$$x\in R\to\langle x\rangle\in\widetilde{R}.$$

显然，这一映射是R与$\widetilde{R}$之间的一一映射．在该映射下，代数运算及大小关系保持不变，即

$$x+y\to\langle x\rangle+\langle y\rangle,\quad x\cdot y\to\langle x\rangle\langle y\rangle,$$

并且

若$x<y$，则$\langle x\rangle<\langle y\rangle$。

因此我们说这一映射是R与$\widetilde{R}$间的一个同构映射，而且是相似映射，换句话说，R与$\widetilde{R}$同构，并且还是保序的．既然R是一个有序域，所以$\widetilde{R}$也是一个有序域，并且还是$^*R$的一个真有序子域．而两个同构的集合其代数性质是一样的，可以把它们看成是相同的集合，更何况R与$\widetilde{R}$是相似集．因此我们可以把$\widetilde{R}$看成是实数域，把$\langle x\rangle$看成是实数x，此时记$\langle x\rangle$为x：$\langle x\rangle=x$。这样一来，域$^*R$的确是R的一个真扩张。

定义 设$\langle f\rangle\in{}^*R$，规定$\langle f\rangle$的绝对值

$$|\langle f\rangle|=\langle h\rangle,$$

其中 $h(n)=|f(n)|$。①

若存在实数$x>0$，使得$|\langle f\rangle|\leqslant x$，称$\langle f\rangle$为有限数．把$^*R$中不是有限数的其他数叫做无穷大。显然，$\langle f\rangle$为无穷大的必要充分条件是：对一切实数$x$，有 $x<|\langle f\rangle|$。

例如取$f(n)=n$，则$\langle f\rangle$是无穷大．因为对每个$x\in R$，

$$\{n\in N\,|\,f(n)>x\}\supset\{m,m+1,m+2,\cdots\},$$

其中m是适合$x\leqslant m$的任一自然数。

① $\langle f\rangle$的绝对值也可定义为

$$|\langle f\rangle|=\begin{cases}\langle f\rangle, & 若\ 0\leqslant\langle f\rangle,\\ -\langle f\rangle, & 若\langle f\rangle<0.\end{cases}$$

而　　$\{m, m+1, m+2, \cdots\} \in \mathscr{F} \subset \mathscr{U}$,

所以　$\{n \in N \mid f(n) > x\} \in \mathscr{U}$，$\langle f \rangle$为无穷大。

在有限数中，有一类特别值得注意的数——无穷小。$\langle f \rangle$ 是无穷小，是指对于一切正实数 x，都有 $|\langle f \rangle| < x$。也就是说，绝对值比一切正实数都要小的数叫做无穷小。0 是无穷小。又如取 $f(n) = \frac{1}{n}$，则 $\langle f \rangle$ 也是无穷小，且 $\langle f \rangle \neq 0$。显然，若 $\langle g \rangle$ 是无穷大，则 $\frac{1}{\langle g \rangle}$ 是无穷小，且 $\frac{1}{\langle g \rangle} \neq 0$。

我们把 R 中的实数叫做标准实数，而把属于 $^*R - R$ 中的数叫做非标准实数。非零无穷小和无穷大都是非标准实数。

正因为无穷小已经是 $^*R$ 中的数，因而由鲁滨逊所建立的 $^*R$，可以说把无穷小量由“潜无穷”又变为“实无穷”，从而给非标准分析广泛运用无穷小量推理方法提供了严密的逻辑基础。

4. $^*R$是非阿基米德域

我们知道，R是阿基米德域，而 $^*R$是非阿基米德域，这是 R与 $^*R$之间的一点很重要的区别。R具有阿基米德性是指：对于任意的两个实数 a 和 b $(a>0)$，一定存在自然数n，使得$na>b$。而 $^*R$不具阿基米德性，可由下而事实证实。

设 $\langle f \rangle$ 是正无穷小，那末对任何自然数n，都有

$$0 < \langle f \rangle < \frac{1}{n},$$

从而　　$n\langle f \rangle < 1$。

而这正与我们知道的任何有限个无穷小量的和仍然是无穷小量的认识相一致。由此可知，无穷小是一个非阿基米德数。

5. ${}^*R$具有连续势$\aleph$.

由超幂${}^*R$的构造，显然有

$$\overline{{}^*R}\leqslant \overline{R^N}$$

而 $\overline{R^N}=\aleph$，所以 $\overline{{}^*R}\leqslant\aleph$.

另一方面，${}^*R\supset R$，于是$\overline{{}^*R}\geqslant\aleph$. 因此

$$\overline{{}^*R}=\aleph.$$

记 ${}^*R$ 中无穷小的全体为 M_1，$M_1\subset{}^*R$. 我们把${}^*R$中包含 $f_\lambda(n)=\dfrac{1}{n^\lambda}$（$\lambda$为正实数）$\in R^N$的等价类记为 $\langle f_\lambda\rangle$. $\langle f_\lambda\rangle$ 是无穷小，并且当$\lambda_1\neq\lambda_2$时，$\langle f_{\lambda_1}\rangle\neq\langle f_{\lambda_2}\rangle$.

记　　$M_\lambda=\{\langle f_\lambda\rangle\,|\,\lambda$为正实数$\}$,

于是　　$M_\lambda\subset M_1\subset{}^*R$.

而　　$\overline{M_\lambda}=\aleph$，$\overline{{}^*R}=\aleph$,

所以　　$\overline{M_1}=\aleph$.

这就是说，${}^*R$中无穷小的全体M_1也具有连续统的势.

三、${}^*R$的几何表示

超实数系${}^*R$，如通常的实数系R一样，可以按照数的大小顺序，展布在一条几何直线上，形成一条非标准的实数轴. 为了进一步了解这一事实，我们讨论${}^*R$的另一个重要性质.

记${}^*R$中有限数全体为M_0，显然 $M_1\subset M_0$，其中M_1表${}^*R$中无穷小全体.

设$\langle f\rangle,\langle g\rangle\in M_0$. 若$\langle f\rangle-\langle g\rangle\in M_1$，即 ${}^*R$ 中的两个有限数 $\langle f\rangle$，$\langle g\rangle$ 相差一无穷小时，称$\langle g\rangle$无限接近$\langle f\rangle$，记为$\langle f\rangle\simeq\langle g\rangle$. 关系“$\simeq$”是等价关系，请读者补证.

按照等价关系“$\simeq$”，将全体有限数集M_0进行分类，把M_0

中互相无限接近的诸数归于一类，也就是说对 M_0，以M_1为模分类作商，于是得到一个与R同构的域。现证明如下。

令A是M_0中模M_1的任一等价类，则A不可能含有两个不同的标准实数x_1和x_2。用反证法。假若A含有两个标准实数x_1，x_2，且$x_1 \neq x_2$，那么$x_1 - x_2 \in M_1$。然而$|x_1 - x_2|$不会是无穷小（因不小于标准正实数$m = |x_1 - x_2|$），故 $x_1 - x_2 \notin M_1$，与$x_1 - x_2 \in M_1$矛盾，得证。

另一方面，A必须至少含有一个标准实数。令$\langle f\rangle$是A的任意一个元素，若$\langle f\rangle$是标准实数，那就不用再证了。假若$\langle f\rangle$不是标准实数，则把标准实数系R分割成集D_1和D_2，这里D_1包含小于$\langle f\rangle$的所有标准实数，D_2包含大于$\langle f\rangle$的所有标准实数。显然D_2非空（因为存在标准实数$m>0$，使$\langle f\rangle \leqslant |\langle f\rangle| < m$），$D_1$也非空（因为对于标准实数$m>0$，由$|\langle f\rangle| < m$，有$-m < -|\langle f\rangle| \leqslant \langle f\rangle$）。另外，若$x' \in D_1$，$x'' \in D_2$，则$x' < \langle f\rangle$，$\langle f\rangle < x''$，于是$x' < x''$。因此集$D_1$，$D_2$组成实数系$R$的一个狄德金(Dedekind)分割 $D_1|D_2$，它确定一个标准实数x，并且这个x要么是D_1中的最大数，要么是D_2中的最小数。我们将证明，不论哪一种情况，$\langle f\rangle - x$都是无穷小，从而$x \in A$。

首先假定x是D_1中的最大数，于是$0 < \langle f\rangle - x$。若$\langle f\rangle - x$不是无穷小，则存在一正的标准实数δ，使得$\delta \leqslant \langle f\rangle - x$，所以$x + \frac{\delta}{2} < \langle f\rangle$，这表明标准实数$x + \frac{\delta}{2} \in D_1$，与$x$是$D_1$的最大数的假定相矛盾，因而$\langle f\rangle - x$是无穷小。

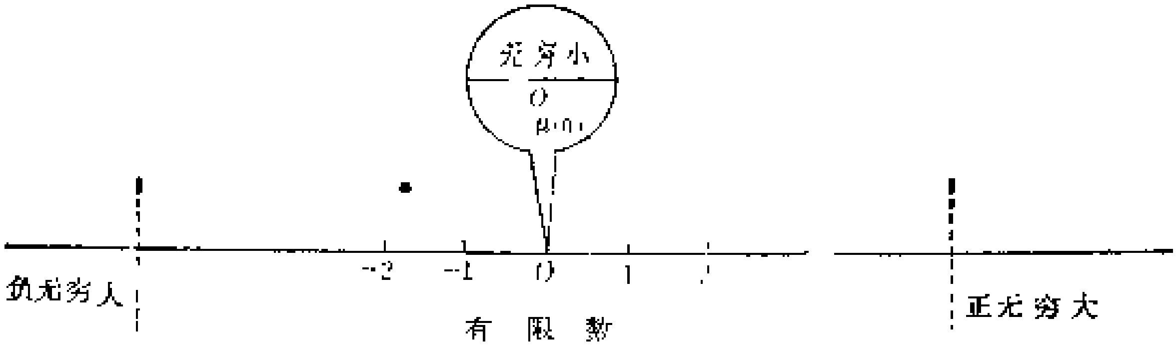
其次，假设x是D_2中的最小数，则$0 < x - \langle f\rangle$。若$x - \langle f\rangle$

不是无穷小，则必有标准正数δ，使得$\delta\leqslant x-\langle f\rangle$，所以$\langle f\rangle<x-\frac{\delta}{2}$，于是$x-\frac{\delta}{2}\in D_2$，与$x$是$D_2$的最小数的假设相矛盾，因而$\langle f\rangle-x$也是无穷小。这样就证明了不论哪种情况，$\langle f\rangle-x$都是无穷小，因而$x\in A$。

对应关系$A\to x$建立了M_0（模为M_1）的商集$\widetilde{M}_0$与实数集R之间的一一对应。通过这一对应，M_0中模M_1的每一等价类被映射到含在这个等价类中的一个标准实数上。我们还可以证明这一映射是$\widetilde{M}_0$与R之间的同构映射（从略），因而$\widetilde{M}_0$与R同构。

M_0中模M_1的每一等价类又称为一个单子(monad)。由上可知，每一个单子中包含有无限多个非标准实数，同一个单子中的任何两个数相差一无穷小；而且每一个单子中仅包含一个标准实数，该单子里其他数则可分为两部分：一部分为标准部分，一部分为无穷小部分，换句话说，每一有限非标准实数可唯一地表为标准实数＋无穷小的形式。包含标准实数x的单子记为$\mu(x)$，因此$\mu(x)$是由标准实数x和无限多个与它相差一无穷小的非标准实数所组成。特别，所有非零无穷小就是在实数0的单子$\mu(0)$内的那些非标准数。

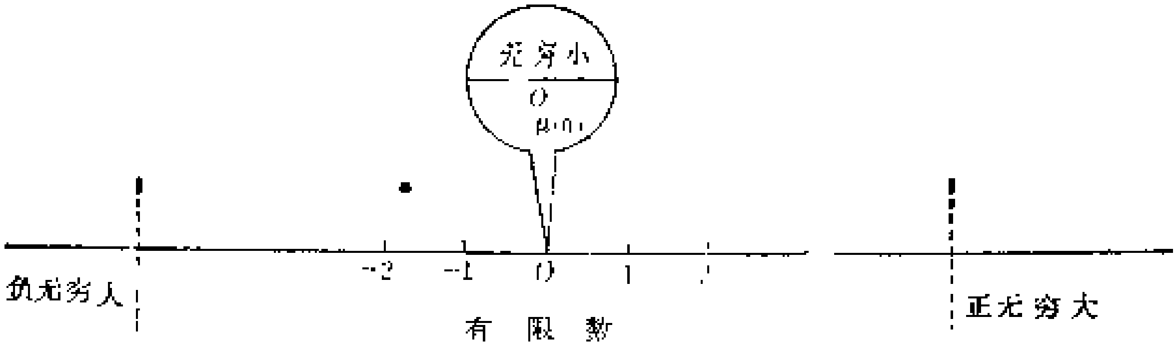
非标准实数轴，从外观上看，与标准实数轴并不呈现什么两样，但在微观结构上就表现不同了。在标准实数轴上一个点的地方，现在变成了一个单子。$^*R$可以大略地用下图形象表示：



这里要指出的一点是：单子本身没有边界。就原点的单子$\mu(0)$来看，显然$\mu(0)$非空而且有界，例如每一个正标准实数都是它的上界。我们证明，$\mu(0)$无最小上界。用反证法。

假设$\langle t\rangle$是$\mu(0)$的最小上界，那么只可能出现两种情况：$\langle t\rangle$是某一个正无穷小，或者$\langle t\rangle$大于某一个正标准实数x。在前一种情况下，$2\langle t\rangle$也是无穷小，故$2\langle t\rangle\in\mu(0)$，但$\langle t\rangle<2\langle t\rangle$，因而$\langle t\rangle$不可能是$\mu(0)$的上界；在后一种情况下，$x$本身就是$\mu(0)$的上界，故$\langle t\rangle$不可能是$\mu(0)$的最小上界。总之，$\mu(0)$无最小上界。

同理可证，$\mu(0)$无最大下界。读者不难证明：在包含任意标准实数x的单子$\mu(x)$内，既无最小上界，又无最大下界。所以在非标准实数轴上，单子里面的数尽管可以按照大小顺序展布在一定的有限范围内，但是在它的左、右两侧，并无确定的边界点。



这里要指出的一点是：单子本身没有边界。就原点的单子$\mu(0)$来看，显然$\mu(0)$非空而且有界，例如每一个正标准实数都是它的上界。我们证明，$\mu(0)$无最小上界。用反证法。

假设$\langle t\rangle$是$\mu(0)$ 的最小上界，那么只可能出现两种情况：$\langle t\rangle$是某一个正无穷小，或者$\langle t\rangle$大于某一个正标准实数x。在前一种情况下，$2\langle t\rangle$也是无穷小，故$2\langle t\rangle\in\mu(0)$，但$\langle t\rangle<2\langle t\rangle$，因而$\langle t\rangle$不可能是$\mu(0)$ 的上界；在后一种情况下，x本身就是$\mu(0)$的上界，故$\langle t\rangle$不可能是$\mu(0)$的最小上界。总之，$\mu(0)$ 无最小上界。

同理可证，$\mu(0)$无最大下界。读者不难证明：在包含任意标准实数x的单子$\mu(x)$内，既无最小上界，又无最大下界。所以在非标准实数轴上，单子里面的数尽管可以按照大小顺序展布在一定的有限范围内，但是在它的左、右两侧，并无确定的边界点。