18.3 Stokes 公式

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

为了便于记忆, Stokes 公式也常写成如下形式:

$$\iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z. \tag{1}$$

由两类曲面积分之间的关系式 (17.4.10), (18.3.7) 又可以写成

$$\iint_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \mathrm{d}s = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z. \tag{2}$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$ 是曲面 S 上法向量的方向余弦. 如果曲面 S 在 xy 平面上, 则公式 (18.3.7) 就是 Green 公式. 公式 (18.3.7) 与 (18.3.8) 给提供了一个求曲线积分与曲面积分的新方法.

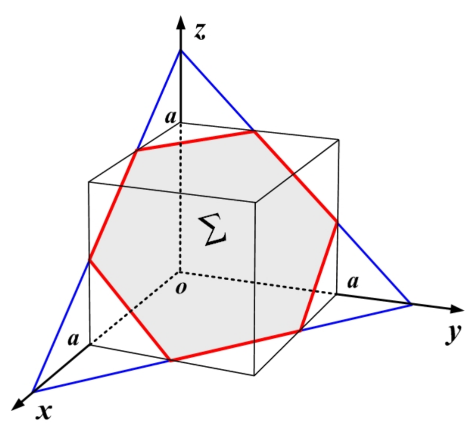

图 1:

例 1 求

$$I = \oint_C (y^2 - z^2)dx + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z,$$

其中 C 是立方体 $\{0 \le x \le a,\ 0 \le y \le a,\ 0 \le z \le a\}$ 的表面与平面 $x + y + z = \frac{3}{2}a$ 的交线, 取正向为从 x 轴正向看是逆时针方向.

分析: 见图 1, 分六段积分的计算量很大, 且 C 也不便于表示为一个统一的参数式. 因 C 为闭曲线, 且 $P=y^2-z^2$, $Q=z^2-x^2$, $R=x^2-y^2$ 连续可微, 故考虑用 Stokes 公式.

解: 令 Σ 为平面 $x+y+z=\frac{3}{2}a$ 上被 C 所围的一块, 取上侧, 则 C 的取向与 Σ 的取侧符合右手法则. 应用 Stokes 公式 (18.3.8),

$$\begin{aligned}
I &= \iint\limits_{\Sigma} \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2-z^2 & z^2-x^2 & x^2-y^2 \end{vmatrix} dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} -4(x+y+z)dS \\
&= -\frac{4}{\sqrt{3}} \iint_{\Sigma} \frac{3}{2}adS = -2\sqrt{3}a \cdot S_{\Sigma} \qquad (S_{\Sigma} \text{ 是 } \Sigma \text{ 的面积}) \\
&= -2\sqrt{3}a \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}a^2 = -\frac{9}{2}a^3.
\end{aligned}$$

□

思考题

1. 叙述曲面及其边界定向的右手法则.

解: 曲面及其边界定向的右手法则；右手四指沿着边界曲线的方向, 大拇指所指的就是曲面的正向边界. □

2. 用 (18.3.7) 或 (18.3.8) 推出 Green 公式.

解: 当公式 (18.3.7)

$$\iint\limits_{S} \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z,$$

中的 S 是 xOy 面上的平面闭区域时, $\mathrm{d}z=0$, 从而公式变为:

$$\iint\limits_{S} \begin{vmatrix} 0 & 0 & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ P & Q & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y.$$

□

习题

1. 用 Stokes 公式求积分.

(1) $\oint_C y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x+y+z=0$ 的交线, 从 z 轴正向看是逆时针方向;

(2) $\oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z$ 在 C 为 $x^2+y^2=1$ 与 $x+y+z=1$ 的交线, 从 x 轴正向看是逆时针方向;

(3) $\int_C (z^3+3x^2y)\mathrm{d}x+(x^3+3y^2z)\mathrm{d}y+(y^3+3z^2x)\mathrm{d}z$, 其中 C 是 $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 与 $x=y$ 的交线, 自 $A(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{a}{\sqrt{2}},0)$ 到 $B(-\frac{a}{\sqrt{2}},-\frac{a}{\sqrt{2}},0)$;

(4) $\int_C \mathrm{e}^{x+z}\{[(x+1)y^2+1]\mathrm{d}x+2xy\mathrm{d}y+xy^2\mathrm{d}z\}$, 其中 C 是右半柱面 $|x|+|y|=a$ $(y>0)$ 与平面 $y=z$ 的交线上从 $(-a,0,0)$ 到 $(a,0,0)$ 的一段 ($A>0$).

解: (1) 令 Σ 为平面 $x+y+z=0$ 上被 C 所围的一块, 取上侧, 则 C 的取向与 Σ 的取侧符合右手法则. 应用 Stokes 公式 (18.3.8),

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_C y\mathrm{d}x+z\mathrm{d}y+x\mathrm{d}z \\
&= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} dS \\
&= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x} \\ y & z-y & x-y \end{vmatrix} dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma \left(\left(\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial x}\right)(x-y)-\left(\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\right)(x-y)\right)\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma (-1-1-1)\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}}\iint_\Sigma -3\ \mathrm{d}S \\
&= -\sqrt{3}\iint_\Sigma \mathrm{d}S = -\sqrt{3}\pi a^2.
\end{aligned}
$$

(2) 令 Σ 为平面 $x+y+z=1$ 上被 C 所围的一块, 取上侧, 则 C 的取向与 Σ 的取侧符合右手法则. 应

用 Stokes 公式 (18.3.8),

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_C (y-z)\mathrm{d}x + (z-x)\mathrm{d}y + (x-y)\mathrm{d}z \\
&= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS \\
&= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \\ y-z & -x-y+2z & x-2y+z \end{vmatrix} dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_\Sigma \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x} \right)(x-2y+z) - \left(\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x} \right)(-x-y+2z) \right) \mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_\Sigma (-2-1-(2+1))\,\mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}} \iint_\Sigma -6\ \mathrm{d}S \\
&= -\frac{6}{\sqrt{3}} \iint_\Sigma \mathrm{d}S.
\end{aligned}
$$

其中, $\iint_\Sigma \mathrm{d}S$ 是 Σ 的面积, 由于 Σ 在 xy 面上的投影为圆 $D := (x,y)|x^2+y^2=1$, 其面积为 π, 又面 Σ 与面 xy 之间的夹角的余弦值为

$$
\cos\alpha = \frac{\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\cdot(0,0,1)}{\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}\cdot\sqrt{1}} = \frac{1}{\sqrt{3}},
$$

故 $\frac{S_D}{S_\Sigma} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, 因此得 $S_\Sigma = \sqrt{3}\pi$,

所以, $I = -\frac{6}{\sqrt{3}} \iint_\Sigma \mathrm{d}S = -\frac{6}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{3}\pi = -6\pi$

(3) 设 C_1 是从点 B 到 A 的直线段, Σ 为平面 $x=y$ 上有 C 与 C_1 围成的半圆面的前侧, 其法向量的方

向余弦为 $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)$, 由 Stokes 公式 (18.3.8),

$$\begin{aligned}
I &= \oint_{C+C_1} (z^3+3x^2y)\mathrm{d}x + (x^3+3y^2z)\mathrm{d}y + (y^3+3z^2x)\mathrm{d}z \\
&= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3+3x^2y & x^3+3y^2z & y^3+3z^2x \end{vmatrix} dS \\
&= \iint_\Sigma \begin{vmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z^3+3x^2y & x^3+3y^2z+3x^2y+z^3 & y^3+3z^2x \end{vmatrix} dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_\Sigma \left(\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \right)(y^3+3z^2x) - \frac{\partial}{\partial z}(x^3+3y^2z+3x^2y+z^3) \right) \mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_\Sigma \left(3y^2+3z^2-3y^2-3z^2\right) \mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_\Sigma 0 \ \mathrm{d}S \\
&= 0.
\end{aligned}$$

又 C_1 的参数方程为: $y=x, \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} \le x \le \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z=0$, 所以

$$\int_{C_1} (z^3+3x^2y)\mathrm{d}x + (x^3+3y^2z)\mathrm{d}y + (y^3+3z^2x)\mathrm{d}z = \int_{C_1} 4x^3\mathrm{d}y = \int_{C_1} 4x^3 \cdot 1\mathrm{d}x = x^4\Big|_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}} = 0,$$

所以, $\int_C (z^3+3x^2y)\mathrm{d}x + (x^3+3y^2z)\mathrm{d}y + (y^3+3z^2x)\mathrm{d}z = 0-0=0.$

(4) 设 C_1 是从点 $(a,0,0)$ 到 $(-a,0,0)$ 的直线段, Σ 为平面 $y=z$ 上有 C 与 C_1 围成的三角形的前侧,

其法向量的方向余弦为 $\left(0\ \frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 由 Stokes 公式 (18.3.8),

$$
\begin{aligned}
I &= \oint_{C+C_1} \mathrm{e}^{x+z}\{[(x+1)y^2+1]\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y + xy^2\mathrm{d}z\} \\
&= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{e}^{x+z}[(x+1)y^2+1] & 2\mathrm{e}^{x+z}xy & \mathrm{e}^{x+z}xy^2 \end{vmatrix} dS \\
&= \iint_{\Sigma} \begin{vmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \mathrm{e}^{x+z}[(x+1)y^2+1] & \mathrm{e}^{x+z}(2xy+xy^2) & \mathrm{e}^{x+z}xy^2 \end{vmatrix} dS \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{x+z}(2xy+xy^2)) - \left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial z}\right)(\mathrm{e}^{x+z}[(x+1)y^2+1])\right)\mathrm{d}S \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\Sigma} \mathrm{e}^{x+z}(2xy+xy^2+2y+y^2-2xy-2y-xy^2-y^2-1)\mathrm{d}S \\
&= -\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\Sigma} -\mathrm{e}^{x+z}\ \mathrm{d}S \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\Sigma} \mathrm{e}^{x+z}\ \mathrm{d}S.
\end{aligned}
$$

由于面 Σ 在 xy 面上的投影为 $D_{xy} := \left\{(x,y)\middle| 0 \le x \le a, x-a \le y \le a-x\right\}$, 所以

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{\Sigma} \mathrm{e}^{x+z}\ \mathrm{d}S &= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{D_{xy}} \mathrm{e}^{x+z(y)}\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{\sqrt{2}} \iint_{D_{xy}} \mathrm{e}^{x+y}\sqrt{1+0+1}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint_{D_{xy}} \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a \mathrm{d}x \int_{x-a}^{a-x} \mathrm{e}^{x+y}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a \mathrm{e}^{x+y}\Big|_{y=x-a}^{y=a-x}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a (\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{2x-a})\mathrm{d}x \\
&= x\mathrm{e}^a\big|_0^a - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2x-a}\Big|_0^a \\
&= a\mathrm{e}^a - \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a}\right).
\end{aligned}
$$

又 $-C_1$ 的参数方程为: $-a \le x \le a, \quad y=0, \quad z=0$, 所以

$$
\int_{-C_1} \mathrm{e}^{x+z}\{[(x+1)y^2+1]\mathrm{d}x + 2xy\mathrm{d}y + xy^2\mathrm{d}z\} = \int_{-C_1} 4x^3\mathrm{d}y = \int_{-a}^a \mathrm{e}^x\mathrm{d}x = \mathrm{e}^x\big|_{-a}^a = \mathrm{e}^a - \mathrm{e}^{-a},
$$

所以,

$$\int_C (z^3+3x^2y)\mathrm{d}x+(x^3+3y^2z)\mathrm{d}y+(y^3+3z^2x)\mathrm{d}z = a\mathrm{e}^a-\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a}\right)+\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a} = a\mathrm{e}^a+\frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^a-\mathrm{e}^{-a}\right).$$

□

---

2. 设 C 是空间任一逐段光滑的简单闭曲线在 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ 是任意连续函数. 证明

$$\oint_C [f(x)-yz]\mathrm{d}x+[g(y)-xz]\mathrm{d}y+[h(z)-xy]\mathrm{d}z=0.$$

解: 记 $P=f(x)-yz,\quad Q=g(y)-xz,\quad R=h(z)-xy$, 由于 C 是一逐段光滑的简单闭曲线, 记 C 围成的面为 S, 由 Stokes 公式 (18.3.8), 可得

$$\begin{aligned}
& \oint_C [f(x)-yz]\mathrm{d}x+[g(y)-xz]\mathrm{d}y+[h(z)-xy]\mathrm{d}z \\
= & \iint\limits_S \left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
= & \iint\limits_S (-x+x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(-y+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(-z+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

□

3. 求

$$\iint\limits_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-z & x^3-yz & -3xy^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S,$$

其中 Σ 是 $x^2+y^2+z^2=R^2$, $z\geq 0$ 的部分在 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 是 Σ 下侧的单位法向量.

证明.

$$\begin{aligned}
\iint\limits_\Sigma \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-z & x^3-yz & -3xy^2 \end{vmatrix} \mathrm{d}S &= \iint\limits_\Sigma (\cos\alpha(y-6xy)-\cos\beta(1-3y^2)+3x^2\cos\gamma)\mathrm{d}S \\
&= \iint\limits_\Sigma (y-6xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(3y^2-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y
\end{aligned}$$

■

已知面 Σ 在面 yOz 面上的投影是 $y^2+z^2\leq a^2, z\geq 0$, 故有

$$\begin{aligned}
\iint\limits_{\Sigma}(y-6xy)\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \iint_{yz}(y-6x(y,z)y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iint_{yz}(y-6\sqrt{R^2-y^2-z^2}y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iint_{yz}(y+6\sqrt{R^2-y^2-z^2}y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= -12\iint_{yz}y\sqrt{R^2-y^2-z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= -12\int_{-R}^{R}\mathrm{d}y\int_0^{\sqrt{R^2-y^2}}y\sqrt{R^2-y^2-z^2}\mathrm{d}z \\
&= -12\int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r\cos\theta\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r \\
&= -12\int_0^{\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r \\
&= 0\cdot\int_0^R r\sqrt{R^2-r^2}\cdot r\mathrm{d}r=0
\end{aligned}$$

同样的方法可计算

$$\iint\limits_{\Sigma}(3y^2-1)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0,$$

而

$$\iint\limits_{\Sigma}3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint_{xy}3x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R 3r^2\cos^2\theta\cdot r\mathrm{d}r=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^R 3r^3\mathrm{d}r=-\frac{3}{4}\pi^4.$$

因此,

$$\iint\limits_{\Sigma}\begin{vmatrix}\cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x-z & x^3-yz & -3xy^2\end{vmatrix}\mathrm{d}S=0+0-\frac{3}{4}\pi^4=-\frac{3}{4}\pi^4.$$

4. 设 C 是平面 $x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma-p=0$ 上逐段光滑的闭曲线在 C 所围内部的面积为 S 在 C 的定向与单位向量 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 成右手系, 试计算积分

$$\oint_C\begin{vmatrix}\mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z\end{vmatrix}.$$

解: 由 Stokes 公式 (18.3.8),

$$
\begin{aligned}
&\oint_C \begin{vmatrix} \mathrm{d}x & \mathrm{d}y & \mathrm{d}z \\ \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ x & y & z \end{vmatrix} \\
&= \oint_C (z\cos\beta - y\cos r)\mathrm{d}x + (x\cos - z\cos\alpha)\mathrm{d}y + (y\cos\alpha - x\cos\beta)\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_S \begin{vmatrix} \cos\alpha & \cos\beta & \cos\gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ z\cos\beta - y\cos r & x\cos - z\cos\alpha & y\cos\alpha - x\cos\beta \end{vmatrix} \mathrm{d}S \\
&= \iint\limits_S (\cos\alpha(\cos\alpha + \cos\alpha) + \cos\beta(\cos\beta + \cos\beta) + \cos\gamma(\cos\gamma + \cos\gamma))\mathrm{d}S \\
&= 2\iint\limits_S (\cos\alpha^2 + \cos\beta^2 + \cos\gamma^2)\mathrm{d}S \\
&= 2\iint\limits_S = 2S.
\end{aligned}
$$

□