Sur la généralisation des fractions continues algébriques.

(*Par M.* Ch. Hermite, *membre de l'Institut, à Paris.*)

[Extrait d'une lettre à M. Pincherle (*).]

. . . . . . Le problème que j'ai en vue est lo suivant: Etant donné n séries $S_1, S_2, \ldots S_n$ procédant suivant les puissances d'une variable x, déterminer les polynômes $X_1, X_2, \ldots X_n$ des degrés $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ de manière à avoir

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \cdots + S_n X_n = S x^{\mu_1+\mu_2+\cdots+\mu_n+n-1},$$

où S est une série de même nature que S_1, S_2, etc. La question ainsi posée est entièrement déterminée, et une remarque de calcul intégral en donne la complète solution dans le cas particulier où les séries sont de simples exponentielles. C'est ce que je vais montrer, je me proposerai ensuite de faire sortir, en vue du cas général, les enseignements que contient cette solution.

Soit

$$J = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{e^{zx}\,dz}{(z-\zeta_1)^{\mu_1+1}(z-\zeta_2)^{\mu_2+1}\cdots(z-\zeta_n)^{\mu_n+1}},$$

l'intégrale étant prise le long d'une ligne fermée C qui comprend à son intérieur toutes les constantes $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$. Cette quantité s'obtient d'après le théorème de Cauchy, au moyen des résidus de la fonction placée sous le signe d'intégration dont le calcul est facile. En considérant le pôle $z = \zeta_1$, pour fixer les idées, je pose $z = \zeta_1 + \varepsilon$, puis en développant suivant les puissances

(*) « Sono lieto di presentare al Direttore degli *Annali* le seguenti interessantissime « ricerche dell'illustre prof. Hermite, colle quali viene ad essere appagato il desiderio « da me espresso nell'introduzione alla mia Memoria: *Sulla generalizzazione delle fra-* « *zioni continue algebriche,* pubblicata nella Serie 2.ª, tom. 19 di questi *Annali*, che i « risultati ottenuti in questo campo dall'esimio analista abbiano a venire in breve alla « luce. »

croissantes de ε,

$$\frac{1}{(\zeta_1-\zeta_2+\varepsilon)^{\mu_2+1}\cdots(\zeta_1-\zeta_n+\varepsilon)^{\mu_n+1}} = A + A_1\varepsilon + \cdots A_{\mu_1}\varepsilon^{\mu_1} + \cdots$$

On a aussi

$$e^{(\zeta_1+\varepsilon)x} = e^{\zeta_1 x}\left(1 + \frac{\varepsilon x}{1} + \cdots + \frac{\varepsilon^{\mu_1}x^{\mu_1}}{1\cdot 2\cdots\mu_1} + \cdots\right)$$

cela étant la valeur cherchée, abstraction faite du facteur $2i\pi$, sera le coefficient de ε^{μ_1} dans le produit des deux séries. C'est un polynôme entier en x de degré μ_1; je le désigne par X_1, en posant

$$X_1 = A + A_1\frac{x}{1} + A_2\frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + A_{\mu_1}\frac{x^{\mu_1}}{1\cdot 2\cdots\mu_1}\cdot$$

Les autres résidus s'obtiennent de même, et l'on conclut l'expression suivante

$$J = X_1 e^{\zeta_1 x} + X_2 e^{\zeta_2 x} + \cdots + X_n e^{\zeta_n x},$$

où X_i est du degré μ_i en x. Développons maintenant l'intégrale suivant les puissances croissantes de x, et soit

$$J = J_0 + J_1\frac{x}{1} + J_2\frac{x^2}{1\cdot 2} + \cdots + J_p\frac{x^p}{1\cdot 2\cdots p} + \cdots,$$

on aura

$$J_\mu = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{z^\mu\,dz}{(z-\zeta_1)^{\mu_1+1}\cdots(z-\zeta_n)^{\mu_n+1}}\cdot$$

L'intégrale d'une fraction rationnelle prise le long d'un contour qui renferme tous les pôles est nulle lorsque le degré du dénominateur surpasse le degré du numérateur de deux unités, nous pourrons donc écrire en désignant par S une série entière en x,

$$J = Sx^{\mu_1+\mu_2+\cdots\mu_n+n-1}.$$

Ce résultat établit la propriété caractéristique des polynômes X_1, X_2,… X_n qui est l'objet de notre attention; leur étude en faisant connaître les relations qui les lient pour diverses valeurs des exposants μ_1, μ_2,… μ_n ouvre la voie à la généralisation de la théorie des fractions continues algébriques; voici à cet égard un premier point.

Je considère les cas particuliers où l'un des exposants est nul, pour fixer les idées je suppose $\mu_1 = 0$, et j'écris

$$J_1 = \frac{1}{2i\pi}\int_C \frac{e^{zx}\,dz}{(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)^{\mu_2+1}\cdots(z-\zeta_n)^{\mu_n+1}}\cdot$$

En désignant par ζ l'une quelconque des quantités $\zeta_2, \zeta_3, \ldots \zeta_n$ et par $\mu + 1$ l'exposant du facteur $z - \zeta$, je remarque qu'un moyen de la décomposition en fractions simples, on obtient facilement l'égalité:

$$\frac{1}{(z-\zeta_1)(z-\zeta)^{\mu+1}} = \frac{M}{(z-\zeta_1)(z-\zeta)} - \frac{M_1}{(z-\zeta)^2} - \cdots - \frac{M_\mu}{(z-\zeta)^{\mu+1}}$$

où l'on a

$$M = M_1 = \frac{1}{(\zeta_1-\zeta)^\mu}, \qquad M_2 = \frac{1}{(\zeta_1-\zeta)^{\mu-1}}, \ldots \qquad M_\mu = \frac{1}{\zeta_1-\zeta}.$$

Soit encore $G(z) = (z-\zeta_2)^{\mu_2+1} \cdots (z-\zeta_n)^{\mu_n+1}$, en omettant le facteur $(z-\zeta)^{\mu+1}$, on en conclut l'expression suivante:

$$J_1 = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_C \frac{M e^{zx}\,dz}{(z-\zeta_1)(z-\zeta)G(z)} - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_C \frac{M_1 e^{zx}\,dz}{(z-\zeta)^2 G(z)} - \cdots$$
$$\cdots - \frac{1}{2i\pi}\int\limits_C \frac{M_\mu e^{zx}\,dz}{(z-\zeta)^{\mu+1} G(z)}.$$

C'est une formule de réduction qui donne de proche en proche la valeur cherchée. Le premier terme en effet est une intégrale J_2 dans laquelle μ et μ_1 sont nuls, et les suivants ne contiennent plus ζ_1. Ils s'expriment au moyen des polynômes X'_i, en nombre de $n-2$, qui se rapportent à l'approximation maximum de la quantité

$$X'_2 e^{\zeta_2 x} + X'_3 e^{\zeta_3 x} + \cdots + X'_n e^{\zeta_n x}.$$

En regardant comme des éléments connus ces polynômes, ainsi que ceux qui concernent les fonctions linéaires d'un nombre moindre d'exponentielles, l'application repétée de la formule conduira en dernier lieu à l'intégrale

$$J_{n-1} = \frac{1}{2i\pi}\int\limits_C \frac{e^{zx}\,dz}{(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n)^{\mu_n+1}}.$$

Soit pour un moment

$$F(z) = (z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n),$$

nous aurons

$$J_{n-1} = \frac{e^{\zeta_1 x}}{(\zeta_1-\zeta_n)^{\mu_n} F'(\zeta_1)} + \frac{e^{\zeta_2 x}}{(\zeta_2-\zeta_n)^{\mu_n} F'(\zeta_2)} + \cdots + X_n e^{\zeta_n x},$$

où X_n est le résidu correspondant au pôle $z = \zeta_n$ de la fonction $\frac{e^{zx}}{(z-\zeta_n)^{\mu_n+1} F(z)}$.
Mais on obtient une expression plus explicite en remarquant que J_n contient

en facteur x^{μ_n+n-1}; il en résulte qu'après avoir multiplié les deux membres de cette égalité par $e^{-\zeta_n x}$ on peut négliger le produit $J_{n-1}e^{-\zeta_n x}$, et omettre aussi dans le développement des exponentielles les puissances dont l'exposant est supérieur à μ_n, ce qui donne:

$$\begin{aligned} X_n = & -\frac{1}{(\zeta_1-\zeta_n)^{\mu_n}F'(\zeta_1)}\left[1+\frac{(\zeta_1-\zeta_n)x}{1}+\cdots+\frac{(\zeta_1-\zeta_n)^{\mu_n}x^{\mu_n}}{1\cdot 2\cdots \mu_n}\right] \\ & -\frac{1}{(\zeta_2-\zeta_n)^{\mu_n}F'(\zeta_2)}\left[1+\frac{(\zeta_2-\zeta_n)x}{1}+\cdots+\frac{(\zeta_2-\zeta_n)^{\mu_n}x^{\mu_n}}{1\cdot 2\cdots \mu_n}\right] \\ & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ & -\frac{1}{(\zeta_{n-1}-\zeta_n)^{\mu_n}F'(\zeta_n)}\left[1+\frac{(\zeta_{n-1}-\zeta_n)x}{1}+\cdots+\frac{(\zeta_{n-1}-\zeta_n)^{\mu_n}x^{\mu_n}}{1\cdot 2\cdots \mu_n}\right]. \end{aligned}$$

J'arrive maintenant à un second point dans l'étude de la fonction

$$X_1e^{\zeta_1 x}+X_2e^{\zeta_2 x}+\cdots+X_ne^{\zeta_n x}$$

qui nous conduira à des relations récurrentes entre les polynômes X_t.

Soit comme tout-à-l'heure

$$F(z)=(z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n),$$

puis

$$f(z)=(z-\zeta_1)^{\mu_1}(z-\zeta_2)^{\mu_2}\cdots(z-\zeta_n)^{\mu_n},$$

de sorte que l'on ait

$$J=\frac{1}{2i\pi}\int\limits_C\frac{e^{zx}\,dx}{f(z)F(z)}\,.$$

Comme remarque préliminaire, j'établirai qu'en désignant encore par ζ l'une quelconque des quantités $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$, on peut déterminer un polynôme $\Phi(z)$ de degré $n-1$ et une constante c, de manière à avoir

$$\int\frac{e^{zx}\,dz}{(z-\zeta)f(z)F(z)}=\int\frac{e^{zx}\Phi(z)\,dz}{f(z)F(z)}-\frac{c\,e^{zx}}{(z-\zeta)f(z)}\,.$$

La différentiation nous donne en effet, après avoir chassé le dénominateur ainsi que le facteur exponentiel, l'égalité suivante

$$1=(z-\zeta)\Phi(z)-cxF(z)+c\left[\frac{F(z)}{z-\zeta}+\frac{f'(z)F(z)}{f(z)}\right].$$

Les termes $\dfrac{F(z)}{z-\zeta}$ et $\dfrac{f'(z)F(z)}{f(z)}$ sont entiers en z, le second membre est donc un polynôme de degré n, et nous avons donc avec les n coefficients de $\Phi(z)$ et la constante c, le nombre nécessaire d'indéterminées égal à $n+1$, pour rendre la relation identique.

Posons, pour abréger, $F_1(z) = \frac{f'(z)F(z)}{f(z)}$, et soit d'abord $z = \zeta$, on trouve facilement

$$F_1(\zeta) = \mu F'(\zeta)$$

où μ désigne l'exposant de $z - \zeta$ dans $f(z)$; nous en concluons immédiatement

$$c = \frac{1}{(\mu + 1)F'(\zeta)}.$$

Je fais ensuite $z = \zeta_i$, ζ_i étant différent de ζ; il vient ainsi:

$$1 = (\zeta_i - \zeta)\Phi(\zeta_i) + c\mu_i F'(\zeta_i),$$

d'où l'on tire, en écrivant pour plus de clarté $\Phi(z, \zeta)$ au lieu de $\Phi(z)$ afin de mettre en évidence la quantité ζ,

$$\Phi(\zeta_i, \zeta) = \frac{1}{\zeta_i - \zeta}[1 - c\mu_i F'(\zeta_i)] = \frac{1}{\zeta_i - \zeta}\left[1 - \frac{\mu_i F'(\zeta_i)}{(\mu + 1)F'(\zeta)}\right].$$

On remarquera que cette valeur est indépendante de x, mais il n'en est pas de même de $\Phi(\zeta, \zeta)$ qui nous reste à obtenir. Prenons pour cela la dérivée de l'équation

$$1 = (z - \zeta)\Phi(z, \zeta) - cxF(z) + c\left[\frac{F(z)}{z - \zeta} + F_1(z)\right]$$

et supposons $z = \zeta$, on a ainsi,

$$0 = \Phi(\zeta, \zeta) - cxF'(\zeta) + c\left[\frac{1}{2}F''(\zeta) + F'_1(\zeta)\right]$$

ce qui donne l'expression du premier degré en x:

$$\Phi(\zeta, \zeta) = \frac{x}{\mu + 1} - \frac{F''(\zeta) + 2F'_1(\zeta)}{2(\mu + 1)F'(\zeta)}.$$

Après avoir ainsi determiné le polynôme $\Phi(z, \zeta)$ de manière à satisfaire à la relation considérée, nous en concluons en intégrant le long de contour C,

$$\int\limits_C \frac{e^{yx}dz}{(z - \zeta)f(z)F(z)} = \int\limits_C \frac{e^{zx}\Phi(z, \zeta)dz}{f(z)F(z)};$$

voici les conséquences de ce résultat.

Désignons par J_{ζ_i} et $J^1_{\zeta_i}$ les intégrales

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{zx}dz}{(z - \zeta_i)f(z)}, \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_C \frac{e^{zx}dz}{(z - \zeta_i)f(z)F(z)},$$

qui sont de formes semblables, la première donnant la seconde en augmentant d'une unité les nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$. En décomposant $\frac{\Phi(z, \zeta)}{F(z)}$ en fractions simples, la formule élémentaire

$$\frac{\Phi(z, \zeta)}{F(z)} = \Sigma \frac{\Phi(\zeta_i, \zeta)}{(z - \zeta_i) F'(\zeta_i)} \qquad (i = 1, 2, \ldots n)$$

conduit à l'égalité

$$J_\zeta^1 = \Sigma \frac{\Phi(\zeta_i, \zeta)}{F'(\zeta_i)} J_{\zeta_i}.$$

Attribuons maintenant à ζ les valeurs $\zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$, on en tire les relations de récurrence auxquelles je me suis proposé de parvenir, qui expriment $J_{\zeta_1}^1, J_{\zeta_2}^1, \ldots J_{\zeta_n}^1$ en fonction linéaire des quantités analogues $J_{\zeta_1}, J_{\zeta_2}, \ldots J_{\zeta_n}$. Qu'on change ensuite dans ces relations les nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, en les augmentant d'une unité, et l'on aura pareillement au moyen de $J_{\zeta_1}^1, J_{\zeta_2}^1, \ldots J_{\zeta_n}^1$, les n intégrales

$$J_\zeta^2 = \frac{1}{2 i \pi} \int\limits_C \frac{e^{zx} dz}{(z - \zeta) f(z) F^2(z)}.$$

Et il est clair qu'en continuant ainsi de proche en proche on arrivera à la détermination, pour une valeur quelconque de l'entier ν, de

$$J_\zeta^\nu = \frac{1}{2 i \pi} \int\limits_C \frac{e^{zx} dz}{(z - \zeta) f(z) F^\nu(z)}.$$

Enfin nous remarquerons la formule,

$$\frac{1}{2 i \pi} \int\limits_C \frac{e^{zx} dz}{f(z) F^{\nu+1}(z)} = \Sigma \frac{1}{F'(z)} J_\zeta.$$

$$(\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n).$$

Supposons en particulier les nombres $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ égaux à zéro, on a alors $J_{\zeta_i} = e^{\zeta_i x}$, $f(z) = 1$, et nous obtenons, par un algorithme régulier, l'expression de l'intégrale

$$J = \frac{1}{2 i \pi} \int\limits_{(c)} \frac{e^{zx} dz}{F^{\nu+1}(z)},$$

où les polynômes multiplicateurs des exponentielles sont tous de même degré égal à ν.

L'exemple le plus simple de nos relations récurrentes s'offre pour $n = 2$; un calcul facile nous donne dans ce cas:

$$(\mu_1 + 1)(\zeta_1 - \zeta_2)^2 J^1_{\zeta_1} = [(\zeta_1 - \zeta_2)x - \mu_1 - \mu_2 - 1] J_{\zeta_1} + (\mu_1 + \mu_2 + 1) J_{\zeta_2},$$
$$(\mu_2 + 1)(\zeta_1 - \zeta_2)^2 J^1_{\zeta_2} = (\mu_1 + \mu_2 + 1) J_{\zeta_1} - [(\zeta_1 - \zeta_2)x + \mu_1 + \mu_2 + 1] J_{\zeta_2}.$$

On est ainsi amené à un nouveau mode de calcul, entièrement différent de l'algorithme élémentaire de la théorie des fractions continues, pour obtenir les polynômes entiers qui donnent l'approximation maximum de l'expression $X_1 e^{\zeta_1 x} + X_2 e^{\zeta_2 x}$, lorsque leurs degrés diffèrent d'une unité. Nous allons montrer que le nouveau système d'opérations ne s'applique pas seulement aux exponentielles $e^{\zeta_1 x}$, $e^{\zeta_2 x}$, et qu'il s'étend de lui même à deux séries quelconques ordonnées suivant les puissances d'une variable.

Posons

$$S = \alpha + \beta x + \gamma x^2 + \cdots,$$
$$S' = \alpha' + \beta' x + \gamma' x^2 + \cdots,$$

nous déterminerons deux binômes de premier degré A et B, et deux constantes a, b, de manière à avoir

$$SA + S'a = S_1 x^2,$$
$$Sb + S'B = S'_1 x^2,$$

en représentant par S_1 et S'_1 deux nouvelles séries de même forme que les proposées. Soit ensuite

$$S_1 A_1 + S'_1 a_1 = S_2 x^2,$$
$$S_1 b_1 + S'_1 B_1 = S'_2 x^2,$$

et continuons le même système de relations de manière à déduire de S et S' successivement les séries

$$S_1, \quad S_2, \ldots \quad S_{n+1},$$
$$S'_1, \quad S'_2, \ldots \quad S'_{n+1}.$$

On aura en dernier lieu

$$S_n A_n + S'_n a_n = S_{n+1} x^2,$$
$$S_n b_n + S'_n B_n = S'_{n+1} x^2,$$

les quantités A_i, B_i étant des binômes du premier degré, a_i et b_i des constantes. Éliminons S_1, S'_1, S_2, $S'_2, \ldots$ S_n, S'_n, on obtient facilement les relations suivantes

$$SP + S P' = S_{n+1} x^{2n+2},$$
$$SQ + S' Q' = S'_{n+1} x^{2n+2},$$

où P, P', Q, Q' sont des polynômes entiers en x, des degrés $n+1$, n, n, $n+1$. Ajoutons les après les avoir multipliées par des constantes p, q choisies de manière à faire disparaître le terme indépendant de x dans la série $pS_{n+1}+qS'_{n+1}$, et soit:

$$Pp+Qq=X, \qquad P'p+Q'q=X_1.$$

On voit que le développement de la fonction linéaire $SX+S'X_1$ commencera par un terme en x^{2n+3}; nous avons donc, au moyen des polynômes X et X_1, de même degré égal à $n+1$, l'ordre d'approximation le plus élevé de cette fonction, tel que le donnerait la théorie des fractions continues.

Nous pouvons aller plus loin et chercher encore les polynômes de degrés inégaux μ et μ_1, pour lesquels l'ordre d'approximation est representé par la puissance $x^{\mu+\mu_1+1}$. Je supposerai le degré de X supérieur de m unités au degré de X_1. En désignant alors par E la partie entière arrêtée au terme en x^{m-1} du développement de $\frac{S'}{S}$, de sorte qu'on ait

$$SE-S'=S_0x^m,$$

j'appliquerai l'algorithme qu'on vient de voir à S_0 et S. On formera ainsi les égalités

$$SP+S_0P'=S_{n+1}x^{2n+2},$$
$$SQ+S_0Q'=S'_{n+1}x^{2n+2},$$

et nous en conclurons en introduisant S au lieu de S_0

$$S(Px^m+P'E)-S'P'=S_{n+1}x^{m+2n+2},$$
$$S(Qx^m+Q'E)-S'Q'=S^0_{n+1}x^{m+2n+2}.$$

Ajoutons encore membre à membre après avoir multiplié par des constantes p et q de manière à introduire le facteur x dans la série $S_{n+1}p+S'_{n+1}q$, et posons

$$X=(Pp+Qq)x^m+(P'p+Q'q)E,$$
$$X_1=-P'p-Q'q,$$
$$S'_{n+1}x=S_{n+1}p+S^0_{n+1}q.$$

Ces polynômes sont, le premier du degré $\mu=m+n+1$, le second du degré $\mu_1=n+1$, et la relation

$$SX+S'X_1=S'_{n+1}x^{m+2n+3}=S'_{n+1}x^{\mu+\mu_1+1},$$

montre qu'ils donnent l'ordre voulu d'approximation maximum. Je remarquerai encore que si l'on élimine successivement S et S' entre les deux égalités précédentes, on en tire

$$S\,(PQ' - QP') = (S_{n+1}\,Q' - S'_{n+1}\,Q)\,x^{2n+2},$$
$$S'\,(PQ' - QP') = (S'_{n+1}\,P - S_{n+1}\,P')\,x^{2n+2}.$$

Il en résulte que le déterminant $PQ' - QP'$ est divisible par x^{2n+2}, sous la condition qu'on doit admettre, que S et S' ne contiennent pas en même temps le facteur x. Nous avons par suite

$$PQ' - QP' = cx^{2n+2},$$

en désignant par c une constante, puisque le premier membre est du degré $2n + 2$. Ces polynômes ont déjà été considérés par M. Padé qui les a introduits dans la théorie des fractions continues algébriques, et en a fait une étude approfondie dans une thése de doctorat présentée à la Faculté des Sciences de Paris. Nous allons bientôt en trouver une application en cherchant à étendre cette théorie à la fonction linéaire

$$SX + S'X_1 + S''X_2,$$

question difficile dont j'essayerai de donner la solution.

Il s'agit alors de trouver pour X, X_1, X_2 des polynômes de degrés μ, μ_1, μ_2, tels qu'on ait, en représentant par S_1 une série entière en x, comme S, S' et S'':

$$SX + S'X_1 + S''X_2 = S_1\,x^{\mu+\mu_1+\mu_2+2}.$$

Cette condition fait dépendre leurs coefficients de la résolution d'un système d'équations homogènes du premier degré au nombre de $\mu + \mu_1 + \mu_2 + 2$, qui les déterminent sauf un facteur commun. Mon but est de donner un algorithme qui conduise au résultat cherché sans avoir d'équations à résoudre.

Je me fonderai pour cela sur la première remarque que j'ai faite en considérant le cas où les trois séries sont des exponentielles. Elle conduit à supposer d'abord que l'un des polynômes multiplicateurs se réduit à une constante. Nous avons vu en effet qu'on prenant pour auxiliaires les éléments de la théorie des fractions continues, on est ramené au cas fort simple et dont la solution est immédiate, où deux de ces polynômes sont indépendants de la variable.

Supposons X_2 constant, X et X_1 devant être des degrés m et n. J'emploierai la partie entière, que je désigne par E, du développement de $\frac{S''}{S}$

jusqu'au terme en x^m, puis parmi les fractions convergentes qui se tirent de $\frac{S'}{S}$, le groupe de celles où les dénominateurs sont de même degré égal à m, les degrés des numérateurs étant la série des entiers de zéro à n. Représentons les par $\frac{N_i}{D_i}$, N_i étant de degré i et D_i de degré m pour $i = 0, 1, 2, \ldots n$; on aura les relations suivantes où $s_0, s_1, \ldots s_n$ sont des séries entières: en premier lieu

$$SE - S'' = S_1 x^{m+1},$$

puis,

$$\begin{aligned} SD_0 - S'N_0 &= s_0 x^{m+1}, \\ SD_1 - S'N_1 &= s_1 x^{m+2}, \\ &\ldots\ldots\ldots \\ SD_n - S'N_n &= s_n x^{m+n+1}. \end{aligned}$$

Cela posé, déterminons la constante α_0 de manière à faire disparaître le terme constant dans $S_1 - s_0\alpha_0$, et soit en conséquence

$$S_1 - s_0\alpha_0 = S_2 x.$$

Opérons de même sur S_2 et s_1, et posons

$$S_2 - s_1\alpha_1 = S_3 x,$$

nous continuerons pareillement jusqu'à parvenir à l'égalité

$$S_{n+1} - s_n\alpha_n = S_{n+2} x,$$

et on verra facilement qu'on à ainsi

$$S_1 - s_0\alpha_0 - s_1\alpha_1 x - \cdots - s_n\alpha_n x^n = S_{n+2} x^{n+1}.$$

Posons ensuite

$$\begin{aligned} X &= E - D_0\alpha_0 - D_1\alpha_1 - \cdots - D_n\alpha_n, \\ X_1 &= N_0\alpha_0 + N_1\alpha_1 + \cdots + N_n\alpha_n, \end{aligned}$$

ces deux polynômes dont le premier est du degré m et le second du degré n donnent le résultat cherché, comme le montre la relation

$$SX + S'X_1 - S'' = S_{n+2} x^{m+n+2},$$

qui découle immédiatement des égalités précédentes (*).

(*) Cette question a été le sujet des recherches de M. Tchebichef qui en a donné la solution par une méthode entièrement différente de cette que j'ai suivie dans le tom. 30 des *Mémoires de l'Académie des Sciences de S.t Petersbourg;* une traduction française du travail de l'illustre géomètre *Sur les expressions approchées, linéaires par rapport à deux polynômes,* a paru dans le *Bulletin des Sciences mathématiques,* tom. 1, pag. 289. Année 1877.

Ce point obtenu, je reviens encore au cas où les séries sont des exponentielles, et en supposant $n = 3$, aux relations récurrentes qui donnent les quantités désignées par J'_{ζ_1}, J'_{ζ_2}, J'_{ζ_3} au moyen de J_{ζ_1}, J_{ζ_2}, J_{ζ_3}. Posons pour simplifier

$$\alpha = \zeta_2 - \zeta_3, \qquad \beta = \zeta_2 - \zeta_1, \qquad \gamma = \zeta_1 - \zeta_2,$$

on conclut aisément des formules générales

$$\begin{aligned}
(\mu_1 + 1)\alpha\beta^2\gamma^2 J'_{\zeta_1} &= [(\mu_2 + \mu_3 + 1)\beta - (\mu_1 + \mu_3 + 1)\gamma - \beta\gamma x]\, J_{\zeta_1} \\
&\quad + [(\mu_1 + 1)\beta^2 - \mu_2\alpha\beta]\, J_{\zeta_2} \\
&\quad + [(\mu_1 + 1)\gamma^2 - \mu_3\alpha\gamma]\, J_{\zeta_3}, \\
(\mu_2 + 1)\alpha^2\beta\gamma^2 J'_{\zeta_2} &= [(\mu_2 + 1)\alpha^2 - \mu_1\alpha\beta]\, J_{\zeta_1} \\
&\quad + [(\mu_2 + \mu_3 + 1)\gamma - (\mu_1 + \mu_2 + 1)\alpha - \alpha\gamma x]\, J_{\zeta_2} \\
&\quad + [(\mu_2 + 1)\gamma^2 - \mu_3\beta\gamma]\, J_{\zeta_3}, \\
(\mu_3 + 1)\alpha^2\beta^2\gamma J'_{\zeta_3} &= [(\mu_3 + 1)\alpha^2 - \mu_1\alpha\gamma]\, J_{\zeta_1} \\
&\quad + [(\mu_3 + 1)\beta^2 - \mu_2\beta\gamma]\, J_{\zeta_2} \\
&\quad + [(\mu_1 + \mu_3 + 1)\alpha - (\mu_2 + \mu_3 + 1)\beta - \alpha\beta x]\, J_{\zeta_3}.
\end{aligned}$$

La principale remarque à faire sur ces résultats, c'est que les quantités J_{ζ_1}, J_{ζ_2}, J_{ζ_3} y représentent de trois manières pour trois systèmes différentes de polynômes, le même ordre d'approximation maximum de la fonction

$$X_1 e^{\zeta_1 x} + X_2 e^{\zeta_2 x} + X_3 e^{\zeta_3 x}$$

et qu'il en est de même pour J'_{ζ_1}, J'_{ζ_2}, J'_{ζ_3}, l'ordre se trouvant alors augmenté de trois unités. D'après cela je considère pareillement pour le cas général les trois relations

$$\begin{aligned}
SP + S'P' + S''P'' &= S_1 x^n, \\
SQ + S'Q' + S'Q'' &= S'_1 x^n, \\
SR + S'R' + S''R'' &= S''_1 x^n,
\end{aligned}$$

où les degrés des polynômes multiplicateurs étant donnés dans le tableau suivant

$$\begin{array}{ccc}
m & m' - 1 & m'' - 1 \\
m - 1 & m' & m'' - 1 \\
m - 1 & m' - 1 & m'',
\end{array}$$

on a $n = m + m' + m''$. Nous obtienons donc dans chaque égalité l'approximation maximum, et je conviendrai de donner au système des coefficients la désignation de polynômes associés d'ordres (m, m', m''). Déterminons maintenant trois binômes de premier degré A, B, C et six constantes, a, a_1, b, b_1, c, c_1, de manière à avoir

$$\begin{aligned} S_1 A + S_1' a + S_1'' a_1 &= S_2 x^3 \\ S_1 b + S_1' B + S_1'' b_1 &= S_2' x^3 \\ S_1 c + S_1' c_1 + S_1'' C &= S_2'' x^3, \end{aligned}$$

en indiquant par S_2, S_2', S_2'' des séries entières en x. Il est évidemment possible de satisfaire à de telles conditions, chaque égalité renfermant sous forme homogène quatre indéterminées qui permettent d'annuler le terme indépendant ainsi que les coefficients de x et x^2. Cela étant, on trouve en éliminant S_1, S_1', S_1'', les équations suivantes,

$$\begin{aligned} &S(PA + Qa + Ra_1) + S'(P'A + Q'a + R'a_1) \\ &\qquad + S''(P''A + Q''a + R''a_1) = S_2 x^{n+3} \\ &S(Pb + QB + Rb_1) + S'(P'b + Q'B + R'b_1) \\ &\qquad + S''(P''b + Q''B + R''b_1) = S_2' x^{n+3} \\ &S(Pc + Qc_1 + RC) + S'(P'c + Q'c_1 + R'C) \\ &\qquad + S''(P''c + Q''c_1 + R''C) = S_2'' x^{n+3}, \end{aligned}$$

où les degrés des coefficients de S, S', S'' sont

$$\begin{matrix} m+1, & m', & m'' \\ m, & m'+1, & m'' \\ m, & m', & m''+1. \end{matrix}$$

Nous avons obtenu par conséquents les polynômes associés d'ordres $(m+1, m'+1, m''+1)$ au moyen des polynômes associés d'ordres (m, m', m''), par une loi de formation que nous continuerons en posant les nouvelles égalité:

$$\begin{aligned} S_2 A' + S_2' a' + S_2'' a_1' &= S_3 x^3, \\ S_2 b' + S_2' B' + S_2'' b_1' &= S_3' x^3, \\ S_2 c' + S_2' c_1' + S_2'' C' &= S_3'' x^3. \end{aligned}$$

On en conclura les polynômes d'ordres $(m+2, m'+2, m''+2)$, et de proche en proche, en poursuivant les mêmes calculs, nous parviendrons par un algorithme régulier aux polynômes associés des ordres $(m+p,\ m'+p,\ m''+p)$ où p est un entier arbitraire.

Nous avons maintenant les éléments nécessaires pour la solution de la question générale de l'approximation maximum de la fonction

$$SX+S'X_1+S''X_2,$$

en admettant que X, X_1, X_2 soient de degrés μ, μ_1, μ_2. Je suppose pour fixer les idées que μ_2 soit le plus petit de ces trois nombres, je ferai

$$\mu-\mu_2=m, \qquad \mu_1-\mu_2=m',$$

m et m' étant positifs et pouvant être nuls, et j'appliquera l'algorithme précédent aux quantités que je vais définir.

Soit $\frac{P}{P'}$ et $\frac{Q}{Q'}$ des fractions convergentes tirées de $\frac{S'}{S}$ et telles que les degrés de P et Q soient $m+1$ et m, ceux de P' et Q', m' et $m'+1$. Les deux premières S_1 et S'_1 résulteront des égalités suivantes

$$SP-S'P'=S_1x^{m+m'+2}$$
$$SQ-S'Q'=S'_1x^{m+m'+2},$$

et la troisième S''_1 sera donnée par la relation que nous savons former, où R et R' sont des polynômes de degrés m et m', à savoir

$$SR+S'R'-S''=S''_1x^{m+m'+2}.$$

Cela étant, nous obtiendrons les polynômes associés d'ordres $(m+2,\ m'+2,\ 1)$, $(m+3,\ m'+3,\ 2)$, etc. par le calcul de S_2, S'_2, S''_2; S_3, S'_3, S''_3, etc. et ces mêmes opérations continuées jusqu'à ce qu'on parviene à S_{μ_2}, S'_{μ_2}, S''_{μ_2} donneront en dernier lieu les polynômes d'ordres $(m+\mu_2,\ m'+\mu_2,\ \mu_2)$, c'est à dire $(\mu,\ \mu_1,\ \mu_2)$; c'est le résultat auquel il s'agissait d'arriver.

La méthode que je viens d'exquisser repose principalement sur l'emploi des polynômes associés; j'ajouterai à leur égard les remarques suivantes qui se tirent des équations de définition,

$$SP+S'P'+S''P''=S_1x^n,$$
$$SQ+S'Q'+S''Q''=S'_1x^n,$$
$$SR+S'R'+S''R''=S''_1x^n.$$

En les résolvant par rapport à S, S' S'' et désignant par D le déterminant

$$\begin{vmatrix} P & P' & P'' \\ Q & Q' & Q'' \\ R & R' & R'' \end{vmatrix},$$

on obtient d'abord la relation

$$D = cx^n,$$

où c est une constante.

Je les ajoute après les avoir multipliées par des indéterminées p, q, r dont je dispose de manière à avoir

$$S_1 p + S_1' q + S_1'' r = sx^2,$$

et je pose

$$\begin{aligned} X &= Pp + Qq + Rr \\ X_1 &= P'p + Q'q + R'r \\ X_2 &= P''p + Q''q + R''r, \end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$SX + S'X_1 + S''X_2 = sx^{m+2},$$

et par conséquent l'ordre d'approximation maximum, avec les degrés m, m', m'' des trois polynômes.

La recherche de cette approximation maximum peut encore être considérée sous un second point de vue bien distinct de celui au quel je me suis placé jusqu'ici. Au lieu de séries ordonnées suivant les puissances croissantes d'une variable, j'envisagerai n développements de la forme

$$\frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x^3} + \cdots,$$

et en les désignant par S_1, $S_2, \ldots$ S_n, je me proposerai d'obtenir des polynômes X_1, $X_2, \ldots$ X_n de degrés μ_1, $\mu_2, \ldots$ μ_n tels que la fonction linéaire

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \cdots S_n X_n,$$

ne contienne aucun des termes en $\frac{1}{x}$, $\frac{1}{x^2}$, $\ldots$ $\frac{1}{x^{\mu_1+\mu_2+\cdots\mu_n+n}}$.

Soit pour abréger $m = \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_n$, représentons aussi par E le groupe des termes entiers en x dans cette fonction, on aura l'égalité suivante

$$S_1 X_1 + S_2 X_2 + \cdots + S_n X_n - E = \frac{\varepsilon}{x^{m+n}} + \frac{\varepsilon'}{x^{m+n+1}} + \cdots$$

et nous remarquerons que les polynômes multiplicateurs, ainsi que la partie entière E, se trouvent d'après la condition posée, complétement déterminés, sauf une constante qui entre en facteur commun. Le calcul intégral offre un exemple intéressant de ce mode nouveau d'approximation que j'ai déjà indiqué (*Journal de Crelle*, tom. 79) et que je rappellerai succinctement. Il se tire de cette nouvelle expression, semblable à celle que j'ai considérée en commençant,

$$J = \int_x^\infty \frac{(z-x)^\nu \, dz}{(z-\zeta_1)^{\mu_1+1}(z-\zeta_2)^{\mu_2+1}\cdots(z-\zeta_n)^{\mu_n+1}},$$

mais ou l'intégrale est rectiligne lorsque les exposants $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$, ayant pour valeur commune μ, on a $\nu = \mu$. Si nous posons encore

$$F(z) = (z-\zeta_1)(z-\zeta_2)\cdots(z-\zeta_n),$$

on aura plus simplement

$$J = \int_x^\infty \frac{(z-x)^\mu \, dz}{F^{\mu+1}(z)},$$

c'est l'intégrale d'une fonction rationelle, et l'on trouve facilement

$$J = X_1 \log \frac{x-\zeta_1}{x-\zeta_n} + X_2 \log \frac{x-\zeta_2}{x-\zeta_n} + \cdots + X_{n-1} \log \frac{x-\zeta_{n-1}}{x-\zeta_n} - E.$$

Dans cette formule, $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$ sont des polynômes du degré μ, l'un quelconque d'entre eux X_i étant le résidu de la fraction rationelle $\frac{(z-x)^\mu}{F^{\mu+1}(z)}$ qui correspond au pôle ζ_i. Soit enfin en développant suivant les puissances décroissantes de z,

$$\frac{(z-x)^\mu}{F^{\mu+1}(z)} = \frac{\alpha}{z^{(n-1)\mu+n}} + \frac{\beta}{z^{(n-1)\mu+n+1}} + \cdots,$$

on en tire la série

$$J = \frac{\alpha'}{x^{(n-1)\mu+n-1}} + \frac{\beta'}{x^{(n-1)\mu+n}} + \cdots,$$

dont le premier terme montre que le système de ces $n-1$ polynômes conduit en effet à l'approximation maximum.

Ce résultat m'avait donné l'espoir que la considération des deux intégrales

$$\int_C \frac{e^{zx}\, dz}{f(z)\,F(z)}, \qquad \int_x^\infty \frac{(z-x)^\nu \, dz}{f(z)\,F(z)},$$

où j'ai posé
$$f(z) = (z - \zeta_1)^{\mu_1} (z - \zeta_2)^{\mu_2} \cdots (z - \zeta_n)^{\mu_n},$$
me servirait également pour éclairer la question des deux modes d'approximation que j'avais en vue. Mais si l'étude en est toute semblable, les conclusions à tirer sont bien différentes, ainsi qu'on va le voir.

En employant les dénominations dont j'ai déjà fait usage, j'ai d'abord remarqué qu'on peut déterminer le polynôme $\Phi(z)$ du degré $n-1$ et une constante c, de manière à avoir
$$\int \frac{(z-x)^\nu dz}{(z-\zeta) f(z) F(z)} = \int \frac{(z-x)^{\nu-1} \Phi(z)\, dz}{f(z) F(z)} - \frac{c(z-x)^\nu}{(z-\zeta) f(z)}.$$
Nous en tirons en effet cette égalité
$$z - x = (z-\zeta)\Phi(z) - \nu c F(z) + c(z-x)\left[\frac{F(z)}{z-\zeta} + F_1(z)\right],$$
et en raisonnant comme nous l'avons déjà fait, on en conclut d'abord
$$c = \frac{1}{(\mu+1) F'(\zeta)},$$
puis, si l'on écrit $\Phi(z, \zeta)$ au lieu de $\Phi(z)$, les valeurs suivantes:
$$\Phi(\zeta_i, \zeta) = \frac{\zeta_i - x}{\zeta_i - \zeta}\left[1 - \frac{\mu_i F'(\zeta_i)}{\mu + 1 F'(\zeta)}\right],$$
$$\Phi(\zeta, \zeta) = \frac{\nu}{\mu+1} - \frac{\zeta_i - x}{(\mu+1) F'(\zeta)}\left[\frac{1}{2} F''(\zeta) + F'(\zeta)\right],$$
qui contiennent l'une et l'autre la variable x au premier degré. Cela posé, l'intégration nous donne en admettant que l'exposant ν soit inférieur au degré de $(z-\zeta) f(z)$
$$\int_x^\infty \frac{(z-x)^\nu dz}{(z-\zeta) f(z) F(z)} = \int_x^\infty \frac{(z-x)^{\nu-1} \Phi(z)\, dz}{f(z) F(z)}.$$
Remplaçons maintenant $\dfrac{\Phi(z)}{F(z)}$ par la somme
$$\Sigma \frac{\Phi(\zeta_i, \zeta)}{(z-\zeta_i) F'(\zeta_i)},$$
et posons
$$J_\zeta = \int_x^\infty \frac{(z-x)^{\nu-1} dz}{(z-\zeta) f(z)}, \qquad J'_\zeta = \int_x^\infty \frac{(z-x)^\nu dz}{(z-\zeta) f(z) F(z)},$$
on obtient pour les valeurs $\zeta = \zeta_1, \zeta_2, \ldots \zeta_n$, les relations
$$J'_\zeta = \Sigma \frac{\Phi(\zeta_i, \zeta)}{F'(\zeta_i)} J_{\zeta_i}, \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots n).$$

Après avoir remarqué que l'on a encore en général

$$\int_x^\infty \frac{(z-x)^{\nu-1}\,dz}{f(z)\,F(z)} = \Sigma\,\frac{1}{F'(\zeta_i)}\,J_{\zeta_i}, \qquad (i = 1,\ 2, \ldots\ n),$$

je vais considérer le cas particulier où $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n$ sont égaux à μ et ν à $\mu+1$, ce qui donne

$$J_\zeta = \int_x^\infty \frac{(z-x)^\mu\,dz}{(z-\zeta)\,F^\mu(z)}, \qquad J'_\zeta = \int_x^\infty \frac{(z-x)^{\mu+1}\,dz}{(z-\zeta)\,F^{\mu+1}(z)}.$$

On passe de la première intégrale à la seconde par le changement de μ en $\mu+1$, nous voyons par suite qu'en supposant en premier lieu $\mu = 1$, les relations trouvées conduisent par un algorithme régulier à la détermination pour toute valeur entière de μ des quantités J_ζ, et par conséquent des polynômes $X_1, X_2, \ldots X_{n-1}$ dans l'égalité

$$\int_x^\infty \frac{(z-x)^\mu\,dz}{F^{\mu+1}(z)} = X_1 \log\frac{x-\zeta_1}{x-\zeta_n} + \cdots + X_{n-1}\log\frac{x-\zeta_{n-1}}{\zeta_{n-1}-\zeta_n} - E.$$

Pour ne pas trop m'étendre je ne jetterai qu'un rapide coup-d'oeil sur cet algorithme; je me contenterai de remarquer que la partie trascendante de J_ζ se présente sous la forme suivante,

$$X'_1(x-\zeta_1)\log\frac{x-\zeta_1}{x-\zeta} + X'_2(x-\zeta_2)\log\frac{x-\zeta_2}{x-\zeta} + \cdots + X'_n(x-\zeta_n)\log\frac{x-\zeta_n}{x-\zeta},$$

où $X'_1, X'_2, \ldots X'_n$ sont des polynômes de degré $\mu - 1$. J'observerai encore qu'en développant suivant les puissances descendantes de x, nous trouvons,

$$J_\zeta = \frac{\alpha}{x^{\,n-1)\mu}} + \cdots$$

On est donc encore amené avec le système de ces coefficients à une approximation maximum, mais qui se rapporte à une autre expression que la proposée. Les polynômes auxiliaires auxquels donne naissance le nouvel algorithme, sont ainsi d'une nature toute différente de ceux auxquels nous avons précédemment donné le nom d'associés. Devant les grandes difficultés qui s'offrent maintenant pour saisir dans ces circonstances le moyen de passer du cas particulier que nous venons de considérer au cas général où les logarithmes sont remplacés par des séries quelconques, j'ai du poursuivre dans une autre direction la recherche que j'ai entreprise; voici en peu de mots ce que j'ai obtenu.

Soit S et S' deux séries de la forme $\frac{g}{x}+\frac{g'}{x^2}+\frac{g''}{x^3}+\cdots$, je désignerai par P, P'; Q, Q'; R, R', des polynômes dont les degrés sont donnés par ce tableau,

$$\begin{array}{cc} m, & m' \\ m+1, & m' \\ m, & m'+1, \end{array}$$

et tels qu'en posant $n=m+m'+2$, on ait les égalités suivantes qui sont caractéristiques de l'approximation maximum, à savoir,

$$\begin{aligned} SP+S'P'-E &= \frac{\alpha}{x^n}+\frac{\alpha'}{x^{n+1}}+\cdots, \\ SQ+S'Q'-E' &= \frac{\beta}{x^{n+1}}+\frac{\beta'}{x^{n+2}}+\cdots, \\ SR+S'R'-E'' &= \frac{\gamma}{x^{n+1}}+\frac{\gamma'}{x^{n+2}}+\cdots. \end{aligned}$$

Cela posé, je forme ces combinaisons linéaires ou A et B sont des binômes du premier degré, a, a', b, b', des constantes,

$$(SP+S'P'-E)A \quad (SQ+S'Q'-E')a+(SR+S'R'-E'')a'=$$
$$=\left(\frac{\alpha}{x^n}+\frac{\alpha'}{x^{n+1}}+\cdots\right)A+\left(\frac{\beta}{x^{n+1}}+\frac{\beta'}{x^{n+2}}+\cdots\right)a+\left(\frac{\gamma}{x^{n+1}}+\frac{\gamma'}{x^{n+2}}+\cdots\right)a'$$
$$(SP+S'P'-E)b+(SQ+S'Q-E')B+(SR+S'R'-E'')b'=$$
$$=\left(\frac{\alpha}{x^n}+\frac{\alpha'}{x^{n+1}}+\cdots\right)b+\left(\frac{\beta}{x^{n+1}}+\frac{\beta'}{x^{n+2}}+\cdots\right)B+\left(\frac{\gamma}{x^{n+1}}+\frac{\gamma'}{x^{n+2}}+\cdots\right)b'$$
$$(SQ+S'Q'-E')c+(SR+S'R'-E')c'=$$
$$=\left(\frac{\beta}{x^{n+1}}+\frac{\beta'}{x^{n+2}}+\cdots\right)c+\left(\frac{\gamma}{x^{n+1}}+\frac{\gamma'}{x^{n+2}}+\cdots\right)c'.$$

J'observe maintenant qu'au moyen des coefficients indéterminés contenus dans A, B et des constantes a, a', b, b', on peut faire disparaître dans les seconds membres des deux premières égalités, les termes en $\frac{1}{x^n}$, $\frac{1}{x^{n+1}}$, $\frac{1}{x^{n+2}}$ et enfin au moyen de c et c' dans la troisième le seul terme en $\frac{1}{x^{n+1}}$. Soit donc

$$\begin{aligned} P_1 &= PA+Qa+Ra', & P'_1 &= P'A+Q'a+R'a', \\ Q_1 &= Pb+QB+Rb', & Q'_1 &= P'b+Q'B+R'b', \\ R_1 &= Pc+Qc', & R'_1 &= P'c+Q'c', \end{aligned}$$

nous aurons les nouvelles égalités toutes semblables aux précédentes,

$$SP_1 + S'P'_1 - E_1 = \frac{\alpha_1}{x^{n+3}} + \frac{\alpha'_1}{x^{n+4}} + \cdots$$

$$SQ_1 + S'Q'_1 - E'_1 = \frac{\beta_2}{x^{n+3}} + \frac{\beta'_1}{x^{n+4}} + \cdots$$

$$SR_1 + S'R'_1 - E'_1 = \frac{\gamma_1}{x^{n+2}} + \frac{\gamma_1}{x^{n+3}} + \cdots$$

Chacune d'elle correspond encore à un ordre d'approximation maximum, les degrés des coefficients étant

$$\begin{array}{ll} m+1, & m'+1 \\ m+2, & m'+1 \\ m+1, & m'+2, \end{array}$$

et l'on voit que par la relation de récurrence on parviendra de proche en proche à trois fonctions linéaires dont l'ordre d'approximation sera de même le plus élevé possible, avec des coefficients des degrés

$$\begin{array}{ll} m+n, & m'+n \\ m+n+1, & m'+n \\ m+n, & m'+n+1, \end{array}$$

n étant un entier quelconque. Supposons en particulier $m = 0$, $m' = 0$, nous aurons la solution de la question que nous avions vue, dans les trois cas où les degrés des polynômes facteurs de S et S' seront

$$\begin{array}{cc} n, & n \\ n+1, & n \\ n, & n+1. \end{array}$$

Voici un autre résultat. Je pars des relations

$$SP + S'P' - E = \frac{\alpha}{x^n} + \frac{\alpha'}{x^{n+1}} + \cdots,$$

$$SP_1 + S'P'_1 - E_1 = \frac{\alpha_1}{x^{n+1}} + \frac{\alpha'_1}{x^{n+2}} + \cdots,$$

$$SP_2 + S'P'_2 - E_2 = \frac{\alpha_2}{x^{n+2}} + \frac{\alpha'_2}{x^{n+3}} + \cdots,$$

dans les quelles P, P_1, P_2 sont des degrés m, $m+1$, $m+2$, P', P'_1, P'_2 du même degré m' et où j'ai fait $n = m + m'$. Ajoutons les membre à membre après avoir multiplié la première par, une constante c, les deux autres par des binômes du premier degré A_1 et A_2. Posons maintenant cette première condition que dans le coefficient de S', c'est-à-dire, $P'c + P'_1 A_1 + P'_2 A_2$, le terme du degré le plus élevé disparaisse. Il restera encore quatre arbitraires, et il sera possible d'annuler dans l'expression

$$\left(\frac{\alpha}{x^n} + \frac{\alpha'}{x^{n+1}} + \cdots\right)c + \left(\frac{\alpha_1}{x^{n+1}} + \frac{\alpha'_1}{x^{n+2}} + \cdots\right)A_1 + \left(\frac{\alpha_2}{x^{n+2}} + \frac{\alpha'_2}{x^{n+3}} + \cdots\right)A_2,$$

les coefficients des termes en $\frac{1}{x^n}$, $\frac{1}{x^{n+2}}$, $\frac{1}{x^{n+2}}\cdot$ Soit donc,

$$\begin{aligned} P_3 &= Pc \;\; + P_1 A_1 + P_2 A_2, \\ P'_3 &= P'c + P'_1 A_1 + P'_2 A_2, \\ E_3 &= Ec \;\; + E_1 A_1 + E_2 A_2, \end{aligned}$$

nous pourrons écrire,

$$SP'_3 + S'P_3 - E_3 = \frac{\alpha_3}{x^{n+3}} + \frac{\alpha'_3}{x^{n+4}} + \cdots,$$

P_3 étant du degré $m+3$ et P'_3 du degré m'. C'est une nouvelle relation de même forme que les précédentes, et nous avons ainsi une relation de récurrence semblable à celle de la théorie des fractions continues pour obtenir de proche en proche l'approximation maximum pour le cas où les coefficients de S et S' sont des degrés $m+p$, et m', p étant un entier arbitraire. Supposons en particulier $m' = 0$, le premier sera du degré p, le second une constante, en admettant qu'un sache obtenir ce polynôme et cette constante, l'algorithme donnera les multiplicateurs de S et S' qui sont de degrés $n+p$ et p.

Flanville (Lorraine), 12 octobre 1893.