关于笛卡尔空间正交性的几个问题

作者：程天任

背景描述：

一个赋范空间，如果它的每个有限维线性子空间有正交基，则称它是笛卡尔的。如果它的每个一维线性子空间有正交补，则称它是希尔伯特的。如果一个赋范空间是希尔伯特的，则它是笛卡尔的。但是，如果一个空间是笛卡尔的？它是希尔伯特的吗？在完备的情况下这个命题成立，但是在稠密的情况下它不一定成立。

2011 年，数学家 kubzdela 解决了这个问题。他在文章”on orthogonal of immediate extension of c0”中举出反例。虽然这个问题已经得到解决。但是，我在阅读完他的文章后，还是有几个问题。下面，一一列出。

问题 1

介绍

定理 1：设 x=（x1,x2,…）$\in l^{\infty}$ 以及 m$\in N$，定义：

M_m（x）={ n$\in N$：n>m，和 $|x_n| = \sup|x_k|$，k>m}

若 x$\in E_0$是 c0 的 immediate extension（包含在l^{∞}中）

则M_m（x）是非空的，有限的对于每个（m$\in N$）。

此外，若 x$\notin c_0$,定义$y_n = \sum_1^n x_i e_i$，则 dist(x,c0)=

lim$\|x - y_n\|$，（n$\to\infty$）。

定理 2：p_n是非负序列M_m（x）={ n∈N：n>m，和 $|p_n| = \sup|p_k|$，k>m }非空，有限。

设 x=（x1,x2,…）∈l^∞以及M_0（x）={ n∈N：n>m，和 $|X_n| > dist(x,c0)$}。若$|x_n| = p_n$（$n \in N$）。则 c0+[x]是 c0 的 immediate extension。如果 E 是 c0 中最大的 immediate extension（包含在l^∞中）。则存在 z=(z1,z2…)∈E以至于 $|z_n| = |x_n| = p_n$，n∈M_0。和$|x_n - z_n| = dist(x,c0)$。

若$i \in [1,...,n0]$，则$zi = xi - y_i$。若 i∈M_{n0}，则$zi = xi$，其他情况，$zi = 0$ 。

1. $\|x-y-z\| < \|x-y\|$
2. $\|x-y\| = dist(x,c0)$
3. $\|x-z\| \le dist(x,c0)$

定理 3（极化恒等式）：

$$（x,y）= \frac{1}{4}\{\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\}$$

推论

$$Z=X-\sum_1^{m0} x_i e_i \quad , \quad Y=\sum_1^{n} x_i e_i$$

$$(Z,Y)=(X,\sum_1^{N} x_i e_i)-(\sum_1^{m0} x_i e_i, \sum_1^{n} x_i e_i)$$

$$=\|x\|^2-(x-z,y)$$

$$=\|x\|^2-\sum_1^{m0}(x_i,e_i)\sum_1^{n}(x_{i,}e_j)$$

但是，

$$=\|x\|^2-\sum_{1}^{m0}(x,e_i)e_j$$

$$\geq 0 \quad \text{(parseval)}$$

$$\|x-y-z\|^2 \geq (\|x\|-\|y+z\|)^2$$

$$\geq \|x\|^2+\|y+z\|^2-2\|x\|\|y+z\|$$

$$=\|x\|^2+4(y,z)+\|y-z\|^2-2\|x\|\|y+z\|$$

$$\geq \|x\|^2+\|y-z\|^2-2\|x\|\|y+z\|$$

取 $z_i=x_i-y_i$ 的情况，此时 m0=n。则：

$$\|x-y-z\|^2 \geq \|x\|^2+\|y-z\|^2-2\|x\|\|y+z\|$$

$$=\|x\|^2+\|y-z\|^2-2\|x\|\|x\|$$

$$=\|x\|^2+\|y-z\|^2-2\|x\|\|y-z\|$$

$$=(\|x\|-\|y-z\|)^2$$

注：当 m0<n 时，如果 $\|y+z\|=\|y-z\|$,

则 $(\|x\|-\|y+z\|)^2 > (\|x\|-\|y-z\|)^2$

但是，$\|y+z\|=\|y-z\|$

下面继续

因为，右边括号内不小于 0。所以，

$$\|x-y-z\| \geq \|x\|-\|y-z\|$$

则有 $\|x-y\| \geq \|x\|-\|y-z\|$

$$\|z\|+\|y-z\| \geq \|x\|$$

$$\|z\|+\|y-z\| \geq \|z+y\|$$

$$\|y-z\| \geq \|z+y\|-\|z\|$$

则：$\|y-x+x-z\| \geq \|z+y\|-\|z\|$

$$\|y-x\|+\|x-z\| \geq \|z+y\|-\|z\|$$

根据定理 2;

$$2dist(x,c_0) \geq \|z+y\|-\|z\|$$

即：

$$2\|x-y\| \geq \|z+y\|-\|z\|$$

但，当$\max\{|x_1|,|x_2|,\ldots|x_n|\} > \max\{2|x_{n+1}|,2|x_{n+2}|,\}$

时：$2\|x-y\| < \|z+y\| - \|z\|$

解答：首先，我们引入等式$\|y+z\| = \|y-z\|$（见问题 1 注）。

根据这个问题，我们可以得出不等式$\|x-y-z\| \geq \|x\| - \|y-z\|$成立的条件。进而确定$\max\{|x_1|,|x_2|,\ldots|x_n|\} > \max\{2|x_{n+1}|,2|x_{n+2}|,\ldots\}$成立的条件。

问题 2

介绍

定理 1：E 是希尔伯特的，若且唯一的每一个非 0 元 x$\in E$，存在集 $\{wi\} \subset E$，以至于$\{x\} \cup \{wi\}$是 E 中一个最大正交集，且 E =[x]+D。则 D 是 wi 的最大 immediate extension。

定理 2：{wi}是 E 中正交集。若 dist(z, $\overline{xi}$)<$\|z\|$。对每一个 z / $\overline{xi}$ 成立，xi 是 E 中最大正交集。若 xi 在 E 中是最大的，则 E 是 xi 的 immediate extension。

$\|d\| \leq \|\lambda x + d\|$

定理 3：设 H 是 Hilbert 空间，E 为 H 的非空闭凸子集。则对于 H 中任意元 x,均存在唯一的 y$\in E$ 使得任取 z$\in E$ 有

$\|x-y\| \le \|x-z\|$。推出若 F 为 H 的闭子空间，则存在唯一的 x 在 F 上的最佳逼近元。

定理 4：设 Y 为内积空间的完备子空间，则 X=Y+Y^*，Y^* 是 Y 的补空间。X 中任一元可以表示成 x=y+z。(y$\in Y, y\in Y^*$)

推论

设$\lambda x = Y + Y^*$，d$\in D$。在 E 中 D 垂直于[x] 。根据定理 3，4：$d = z - \lambda x$。设 $d_1 = \inf\|z-\lambda x\|$，则存在 $y \in Y$使$Z_n \to Y$。

所以，$d_1 = \lim\|z_n - \lambda x\| = \|y-\lambda x\|$

因为，$d_1 \le d$；所以，$\|y-\lambda x\| \le d$。

由定理 3，4 知：$\lambda x-y$垂直于 Y，若 z=$\lambda x-y$

有 z 垂直于 Y。

根据定理 1，2：

$$
\begin{aligned}
\|y+z\| &= \|y-\lambda x+\lambda x+z\| \\
&= \|y-\lambda x+\lambda x+d+z-d\| \\
&\le \max\{\|y-\lambda x\|, \|\lambda x+d\|, \|z\|, \|d\|\} \\
&\le \max\{\|d\|, \|z\|\}
\end{aligned}
$$

因为，$\|z\| = \|\lambda x+d\| > \|d\|$

所以，$\|y+z\| \le \|z\|$

但是 z 垂直于 Y。

那么，$\|\lambda x\|$与$\|\lambda \mathrm{x}+\mathrm{d}\|$的关系是怎么样的呢？

解答：为非阿范数引入最佳逼近元，考虑到原题中的范数具有内积性。我们可以得出一个有用的结果：如果 Z 与 Y 正交，即$\|y+z\|=\|z\|$

问题 3

介绍

定理 1：设$x=(x1,x2,)\in l_{\hat{k}}^{\infty}$。设$x_k\in\hat{k}\backslash k,|x_k|>|x_{k+1}|$, dist($X_K$,K)

$=r$ ($k\in N$)。$\lim|x_k|=r(k\to\infty)$

如果[e1]有正交补 D 在 c0+[x]中，则

1. 存 在 $\lambda_x,\lambda_k\in k,|\lambda_k|<1,(k=2,3,\ldots)$ 以 至 于 $x-\lambda_x e_1,e_k-\lambda_k e_1\in D$

2. 对每个 k=2,3,…

$$\left|x_1-\lambda_x+\sum_2^k\lambda_i x_i\right|\le|x_{k+1}|$$

$$\left\|x-\lambda_x e_1+\sum_2^{k0}a_i(e_i-\lambda_i e_1)\right\|=\left|x_1-\lambda_x+\sum_2^{k0}\lambda_i x_i\right|$$

$$>|x_{k0+1}|$$

$$\left\|x+\sum_2^{k0}a_i e_i-\lambda_0 e_1\right\|=|x_{k0+1}|$$

定理 2（helly）：设 X 是线性赋范空间，{xn}$\subset X$ 是一列元素，$a_n\in\Phi$ $\beta>0$，则存在 f$\in X^*$ 满足 $\|f\|\le\beta,f(x_n)=a_n$

（$\forall n \geq 1$）充要条件是：

$$\left|\sum_1^n k_i a_i\right| \leq \beta \left\|\sum_1^n k_i x_i\right\|，\quad k_i \in \Phi, n \geq 1$$

推论

$$\left\|x - \lambda_x e_1 + \sum^{k0} a_i(e_i - \lambda_i e_1)\right\|$$

$$= \left\|x - \lambda_x e_1 + \sum_2^{k0} a_i e_i - \sum_2^{k0} \lambda_i a_i e_1\right\|$$

$$\leq \left\|x - \lambda_x e_1 + \sum_2^{k0} a_i e_i\right\| + \left\|\sum_2^{k0} \lambda_i a_i e_1\right\|$$

运用定理 2，继续：

$$\leq \left\|x - \lambda_x e_1 + \sum_2^{k0} a_i e_i\right\| + \|\beta\| \left\|\sum_2^{k0} \lambda_i x_i e_1\right\|$$

根据定理 1：

$$|x_{k0+1}| = \left\|x + \sum_2^{k0} a_i e_i - \lambda_0 e_1\right\|$$

$$< \left\|x - \lambda_x e_1 + \sum^{k0} a_i(e_i - \lambda_i e_1)\right\|$$

但是，如果同时满足$\left|x_1 - \lambda_x + \sum_2^{k0} \lambda_i x_i\right| > |x_1 - \lambda_0|$和

$|x_1 - \lambda_x| + \beta\left|\sum_2^{k0} \lambda_i x_i\right| < |x_1 - \lambda_0|$时，即

$$x_1 > \lambda_x > \lambda_0 > 0, \beta < \frac{\lambda_x - \lambda_0}{\left|\sum_2^{k0} \lambda_i x_i\right|}, \lambda_x + \lambda_0 > 2x_1 + \sum_2^{k0} \lambda_i x_i$$

$(\sum_2^{k0} \lambda_i x_i < 0)$时

$$\left\|x - \lambda_x e_1 + \sum^{k0} a_i (e_i - \lambda_i e_1)\right\| > \left|x_{k0+1}\right| = \left\|x + \sum_2^{k0} a_i e_i - \lambda_0 e_1\right\|$$

$$\left\|x - \lambda_x e_1 + \sum_2^{k0} a_i e_i\right\| + \beta\left\|\sum_2^{k0} \lambda_i x_i e_1\right\| < \left\|x + \sum_2^{k0} a_i e_i - \lambda_0 e_1\right\|$$

$$= \left|x_{k0+1}\right|$$

$$\max\{\left|x_2 + a_2\right|, \left|x_3 + a_3\right|, \ldots\ldots\} < \left|x_1 - \lambda_x\right|$$

解答：在这个问题中，我们得到一个等价关系：

$$\beta < \frac{\lambda_x - \lambda_0}{\left|\sum_2^{k0} \lambda_i x_i\right|} \Leftrightarrow \lambda_x + \lambda_0 > 2x_1 + \sum_2^{k0} \lambda_i x_i$$

根据这个关系：$\beta < \frac{\lambda_x - \lambda_0}{\left|\sum_2^{k0} \lambda_i x_i\right|} \Rightarrow \beta > 1$

至于这个关系的运用，可以参照我的另外一篇文章（非阿基米德分析）中的例 5。

问题 4：

介绍

定理 1：设 $x=(x1,x2,..)\in l_{\hat{k}}^{\infty}$。设 $x_k \in \hat{k}\backslash k, |x_k|>|x_{k+1}|,$

$\lim|x_k|=r(k\to\infty)$。对每个有限子集{k1,k2,…kn}

$$N\cup\{0\}, dist(xki,[xk1,...,xki-1,xki+1,xkn])$$

$\geq r(i=1,...,n)$ (x0=1)

-

1.[x]+E 不是希尔伯特的

2.[x]+E 是笛卡尔的

3. $|c_k-c_{k+1}|<\dfrac{k-1}{k+1}|c_{k-1}-c_k|$（假设 k=1,2,…,n 满足）

4. $|\lambda_{nk-1}||c_k-c_{k+1}|<\dfrac{k-1}{k+1}|c_{k-1}-c_k|$

$$<\frac{k-1}{k}|c_{k-1}-c_k|<|\lambda_{nk}||c_{k-1}-c_k|$$

推论

$|c_k-c_{k+1}|<\dfrac{k-1}{k+1}|c_{k-1}-c_k|$，两边求积得

$$\frac{|c_n-c_{n+1}|}{|c_1-c_2|}<\frac{2}{(n+1)n}$$

$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

因为$b_n=\frac{c_n-c_{n+1}}{\lambda_n}$

所以，$\frac{|b_n\lambda_n|}{|c_1-c_2|}<2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

因为$|\lambda_n|>\frac{n-1}{n}$

所以，$\frac{|b_n|}{|c_1-c_2|}<\frac{2n}{n-1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$

$$<\left(\frac{2}{n-1}-\frac{2n}{(n-1)(n+1)}\right)$$

$$\leq\left(\frac{2}{n-1}-\frac{2}{n}\right)$$

$$<\frac{1}{n}\quad（n\geq 3）$$

因为，$\lim|c_k-x_1|=r(n\to\infty)$

所以，有$r\leq|c_{n+1}-x_1|+|c_n-c_{n+1}|$

$$=\left|c_{n+1}-x_1\right|+\left|c_{n+1}-c_n\right|$$

$$=\left|c_{n+1}-x_1\right|+\left|b_n\right|\left|\lambda_n\right|$$

即，$\left|b_n\right|\geq\dfrac{r-\left|c_{n+1}-x_1\right|}{\left|\lambda_n\right|}$,又有$\left|b_n\right|<\dfrac{\left|c_1-c_2\right|}{n}$。

但是，存在$\dfrac{r-\left|c_{n+1}-x_1\right|}{\left|\lambda_n\right|}>\dfrac{\left|c_1-c_2\right|}{\left|n\right|}$的情况吗？

例如：

$$\frac{\left|c_n-c_{n+1}\right|}{\left|c_1-c_2\right|}<\frac{2}{(n+1)n}$$

$$=2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$<\frac{1}{n}\quad（n>1）$$

即$r-\left|c_{n+1}-x_1\right|+\alpha>\dfrac{\left|c_1-c_2\right|}{\left|n\right|}$的情况。

即$\dfrac{\left|c_n-c_{n+1}\right|}{\left|\lambda_n\right|}>\dfrac{\left|c_1-c_2\right|}{\left|n\right|}\quad(n=2)$即，

存在$\frac{r-\left|c_3-x_1\right|}{\left|\lambda_2\right|}>\frac{\left|c_1-c_2\right|}{2}$

即存在，$\left|c_3-x_1\right|<r-\frac{\left|\lambda_2\right|}{2}\left|c_1-c_2\right|$

但是，当$\left|c_3-x_1\right|+\frac{1}{4}\left|c_1-c_2\right|\geq 1$时，是否有$r>1$？

甚至，

$$\frac{\left|c_n-c_{n+1}\right|}{\left|\lambda_n\right|}>\frac{\left|c_1-c_2\right|}{\left|2n\right|}$$

$$\frac{\left|c_n-c_{n+1}\right|}{\left|\lambda_n\right|}>\frac{\left|c_1-c_2\right|}{\left|3n\right|}$$

那么，从中可以得到关于 r 的什么规律呢？（$n=3,4,5......$）

解答：对于 r 的变化规律，我们可以归结为闭球半径的增长。这里，我们可以引入模 n 余 k 群⊕。这个问题的应用，同样的，可以参考我的另一篇文章（非阿基米德分析）中的例 5。

问题 5

介绍

定理 1：设（kij）是无穷矩阵使得

$$\sup\sum_{j=1}^{\infty}\left|kij\right|<\infty$$

(kij)表示一个有界线性映射 F:$l^{\infty}\to l^{\infty}$

F 的定义如下：F(x)(i)= $\sum_{j=1}^{\infty}kij.x(j)$

这个级数对于每个 i>=1 和l^{∞}中的 x 收敛。

定理 2：无穷矩阵（kij）表示一个有界线性映射 F: $c \to c$

当且仅当 $\sup \sum_{j=1}^{\infty} |kij| < \infty$

$\lim \sum_{j=r}^{\infty} |kij| \quad (i \to \infty)$ 存在，$r = 1,2,\ldots$

定理 3：$d_1 := \sup \left| x_m - \sum_1^n v_i{}^m x_{ki} \right|$

$$\left| x_{m0} - \sum_1^n v_i{}^{m0} x_{ki} \right| > (1-\varepsilon) d_1$$

推论

因为 $v_j^{ki} = 1, \ldots i = j$ 如果$i \neq j$,则 ki≠kj。（j=1,2,…n）
$\ldots\ldots\ldots 0, i \neq j$

设矩阵 kij 满足定理 2 中两个条件。例如，规定 k_i与v_j^{ki}中k_i一致

$$\begin{bmatrix} k_1, \ldots 0, \ldots\ldots 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, \ldots, \ldots \frac{k_2}{2^a}, \ldots\ldots 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, \ldots\ldots 0, \ldots\ldots \frac{k_3}{2^a}, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0, \ldots\ldots 0, \ldots\ldots 0, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \frac{k_n}{2^a}, \ldots\ldots 0, \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0, \ldots\ldots 0, \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 0, \ldots\ldots 0, \ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix} \ldots \quad (K1>=1,2)$$

考虑三对角矩阵：

$$\begin{bmatrix} a_1,\ldots b_1,\ldots\ldots.0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ 0,\ldots.a_2,\ldots\ldots\ldots b_2,\ldots\ldots c_2,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ 0,\ldots.a_3,\ldots\ldots.b_3,\ldots\ldots.c_3.,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0,\ldots..0,\ldots\ldots.a_4,\ldots\ldots b_4,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.a_n,\ldots..b_n,\ldots\ldots c_n,.. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.0,\ldots\ldots.0,\ldots\ldots.0,\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.0,\ldots\ldots.0,\ldots\ldots.0,\ldots\ldots.. \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}..$$

设 di= $\sum_{j=1}^{\infty}|k_{ij}|$ ，d=supdi　(i>=1)

再设 $.x(j)=bj\ldots..,k_{ij}=0$

bj 是部分和序列，且 $bj=\frac{1}{Sn}=\frac{1}{|k_{i1}|+|k_{i2}|+\ldots\ldots+|k_{in}|}$

则 $bj=\frac{1}{Sn}=\frac{1}{k_1+\frac{1}{2^a}(k_2+k_3+\ldots..+k_n)}$

若用到三对角矩阵，用到 P_n,Q_n。定义如下：

$$\begin{vmatrix} k_1,\ldots..-1,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.0\ldots\ldots\ldots. \\ .1,\ldots..k_2,\ldots\ldots.-1\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. \\ \ldots\ldots..1\ldots\ldots.k_2\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \\ \ldots\ldots..0\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.k_{n-1},\ldots..-1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..1,\ldots\ldots.k_n \end{vmatrix}$$

$$\left|\begin{matrix} k_1,\ldots -1,\ldots\ldots\ldots 0\ldots\ldots \\ .1,\ldots k_2,\ldots -1\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots 1\ldots\ldots k_2\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots 0\ldots\ldots\ldots\ldots k_{n-1},\ldots -1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1,\ldots\ldots k_n \end{matrix}\right|$$

用追赶法把两个矩阵进行 LU 分解，得到：

$$P_n = \alpha_1 \alpha_2 * \ldots\ldots * \alpha_n$$

$$Q_n = \beta_1 \beta_2 * \ldots\ldots * \beta_n$$

设置矩阵为：

$$\begin{bmatrix} \frac{a_1}{b_1},\ldots\ldots 0,\ldots\ldots\ldots 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0,\ldots,\ldots \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2\text{-}b_2}{b_2},\ldots\ldots\ldots 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0,\ldots\ldots 0,\ldots\ldots \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}\frac{a_3\text{-}b_3}{b_3},\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ 0,\ldots\ldots 0,\ldots\ldots\ldots 0,\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots 0,\ldots\ldots 0,\ldots\ldots \frac{a_1}{b_1}\frac{a_2}{b_2}*\ldots*\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}\frac{a_n\text{-}b_n}{b_n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}..$$

则取 $bj = \dfrac{1}{k_{1j} + k_{3j} + \ldots\ldots + k_{nj}}$ 其中，$n = 2k + 1$

$$bj=\cfrac{1}{k_1+\cfrac{1}{k_2+\cfrac{1}{k_3+\cfrac{1}{\cfrac{k_4}{\cdots\cdots}}}}}$$

其中，$b_1=<k_1>$，$b_2=<k_1,k_2,k_3>$

$$b_n=<k_1,k_2,k_{3,}.....k_n> \qquad n=2k+1$$

因为，kij 表示有界映射 F: $l^\infty \to l^\infty$。所以，设 x$\in c,\lambda=\lim x(j),(j\to n)$。

给定，$\varepsilon>0,$ 存在 m 使得对所有 $j\geq m$ 有

$\left|x(j)-\lambda\right|<\varepsilon$,固定 m（$m\leq n$），设

$$u_i=\sum_{j=1}^{m-1}k_{ij}x(j)+\sum_{j=m}^{\infty}k_{ij}\lambda,$$

$$v_i=\sum_{j=m}^{\infty}k_{ij}(x(j)-\lambda)$$

则 ui+vi=F(x)(i)且对 i>=1 有

$$\left|v_i\right|\leq\sum_{j=m}^{\infty}\left|k_{ij}\right|\varepsilon\leq\varepsilon di\leq\varepsilon d$$

$$\left|x_m-x(j)\right|=\left|x_m-bj\right|$$

当 x_m>bj 时，

因为 bj$\neg\to 0$(有限)，所以

$$\left|x_m-x(j)\right|=x_m-b_j\geq\varepsilon d$$

而且，$d_1 := \sup \left| x_m - \sum_1^n v_i{}^m x_{ki} \right|$

di= $\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}|$ ，d=supdi (i>=1)

$\sum_{j=1}^{\infty} |k_{ij}| > 1$，且有 $x_0 = 1$

有 $d \geq d1$

所以，$\varepsilon d \geq \varepsilon d1$

即，$|x_m - x(j)| \geq \varepsilon d \geq \varepsilon d1$

因为，$\left| x_{m0} - \sum_1^n v_i{}^{m0} x_{ki} \right| > (1-\varepsilon) d_1$

如果，两个 ε 是等价的无穷小

则，$|x_m - x(j)| + \left| x_{m0} - \sum_1^n v_i{}^{m0} x_{ki} \right| > d1$

但是，

$$|x_m - x(j)| + \left| x_{m0} - \sum_1^n v_i{}^{m0} x_{ki} \right| - \sup \left| x_m - \sum_1^n v_i{}^m x_{ki} \right|$$

$$\leq |x_m - x(j)| + \left| x_{m0} - \sum_1^n v_i{}^{m0} x_{ki} \right| - \left| x_m - \sum_1^n v_i{}^m x_{ki} \right|$$

$$= x_m - b_j + x_{m0} - x_m$$

$$= x_{m0} - b_j$$

则， $x_{m0} > b_j$

（$m \in N / \{k1, k2, \ldots\ldots\}$）

那么，v_j^{ki}，b_j 与 x_{m0}，x_m 的联系是怎么样的呢？

当v_j^{ki}状态改变时，d_i的大小改变。让d_i递减介于不同的b_j之间（矩阵保持不变）。下面，来讨论这个问题

例如：当$b_j < x_m < di$，$b_j < b_{j-1}$时，

有，$x_{m0} > b_j$，$x_{m0} > (1-\varepsilon)di$

则，$b_j < (1-\varepsilon)di$，

若此时，$b_{j-1} > x_{m0} > (1-\varepsilon)di$

则，$\frac{b_j}{1-\varepsilon} < di < \frac{b_{j-1}}{1-\varepsilon}$

由ε的任意性

有联系：$b_j < di < b_{j-1}$

设 $f_m(x) = x_m - \sum_1^n v_i{}^m x_{ki}$

$$E = \bigcup_{j=2}^{n} \{x_m \in E, \inf\left|f_m(x)\right| > b_j\}$$

$$E_0 = \bigcup_{j=2}^{n} \{x_{m0} \in E, \sup\left|f_{m0}(x)\right| < b_{j-1}\}$$

$$m(E) + m(E_0) =$$

$$m \bigcup_{j=2}^{n} \{x_m \in E, \inf\left|f_m(x)\right| > b_j\} + m \bigcup_{j=2}^{n} \{x_{m0} \in E, \sup\left|f_{m0}\right| < b_{j-1}\}$$

$$m(E) - m(E_0) =$$

$$m \bigcup_{j=2}^{n} \{x_m \in E, \inf\left|f_m(x)\right| > b_j\} - m \bigcup_{j=2}^{n} \{x_{m0} \in E, \sup\left|f_{m0}\right| < b_{j-1}\}$$

$$m(E) + m(E_0) = \sum_2^n di - \sum_2^n b_j + \sum_1^n \varepsilon di$$

$$m(E) - m(E_0) = \sum_2^n di - \sum_2^n b_j - \sum_1^n \varepsilon di$$

$$m(E)=\sum_{2}^{n}di-\sum_{2}^{n}b_j$$

$$m(E_0)=\sum_{1}^{n}\varepsilon di$$

当$b_j<x_m$，$b_{j-1}>x_{m0}$时，

$b_j<di<b_{j-1}$，则：

$$0<m(E)<b_1-b_n$$

$$0<m(E_0)=\varepsilon\sum_{1}^{n}di\le\varepsilon\sum_{1}^{n}b_{j-1}\quad(b_1<d_1)$$

因为，两个ε是等价的无穷小。所以,

近似的有： $m(E_0)<(b_{n-1}-b_n)\sum_{1}^{n}b_{j-1}$

所以，E 是可测的，下面作一规定：

取：（ $b_n>r,b_{n+1}<r$ ）规定：d_n不能取（r,b_n）之间的值。

又例如：

设$d_n=t_n$， $x_{m0}=t_{n'}\to t_n$

$f(di)=d_i,f(x_{m0})=d_{i-1}$

令$h(x)=\inf\{(f(x)-f(y))/(x-y)\}(r\le x\le 1)$

F(x)=sup{h(x)}($r\le x\le 1$)

设$x=di,y=x_{m0}$，则 F(x)递减。

因为：$\dfrac{\left|f(di)-f(x_{m0})\right|}{\left|di-x_{m0}\right|}=\dfrac{\left|d_i-d_{i-1}\right|}{\varepsilon di}>n$

所以，F(x)无界。即$\int_{r}^{1}F(x)dx\le\sum_{1}^{\infty}n\cdot m(x\in[0,1]:n-1<F(x)\le n)$

$$=\sum_{0}^{\infty} m(x\in[0,1]:F(x)>n)$$

所以，$f(x)$ 是 L 可积的，继续：

固定 di，存在序列 $x_{m0}\to di$, 设为正数列 $ti'\to t_n$

有：$n|di-x_{m0}|\le|f(di)-f(x_{m0})|$

即：$|di-x_{m0}|\le\dfrac{|f(di)-f(x_{m0})|}{n}\le\dfrac{|b_{j+1}-b_{j-1}|}{n}$

取序列 ti'，得：

$$(t_n-t_n')\le\frac{|b_{j+1}-b_{j-1}|}{n}=\frac{1}{n}(b_{n-1}-b_{n+1})$$

因为，n 有限且 $t_n'<t_{n-1}$，所以，对 n 相加：

$$d_n=t_n\le d_1+\frac{b_1}{2n-2}+\left(-\frac{b_{n+1}}{n}-\frac{b_n}{n+1}+\frac{b_{n-1}}{n(n+2)}+\frac{b_{n-2}}{(n+1)(n+3)}+\ldots\ldots\right)$$

同理，有：

$$\lim x_{m0}=t_n'\ge\left(-\frac{b_{n-1}}{n}-\frac{b_n}{n-1}-\frac{b_{n+1}}{n(n-2)}-\frac{b_{n+2}}{(n-1)(n-3)}-\ldots\ldots\right)$$

此时，我们根据已经定义的 d_n 来求均值。

首先，找到另一个 d_n 使得：

对于某个 dn，当 $\left(\dfrac{b_{n-1}}{n(n+2)}+\dfrac{b_{n-2}}{(n+1)(n+3)}+\ldots\ldots\right)+$

$$\left(-\frac{b_{n+1}}{n(n-2)}-\frac{b_{n+2}}{(n-1)(n-3)}-\ldots\ldots\right)<0\text{ 时，}$$

$$d_1+\frac{b_1}{2n-2}+(-\frac{b_{n+1}}{n}-\frac{b_n}{n+1}+\frac{b_{n-1}}{n(n+2)}+\frac{b_{n-2}}{(n+1)(n+3)}+.......$$

$$+(-\frac{b_{n-1}}{n}-\frac{b_n}{n-1}-\frac{b_{n+1}}{n(n-2)}-\frac{b_{n+2}}{(n-1)(n-3)}-......)$$

$$<d_1+\frac{b_1}{2n-2}-\frac{b_{n+1}}{n}-\frac{b_n}{n+1}-\frac{b_{n-1}}{n}-\frac{b_n}{n-1}...$$

反之，$i>n$ 时上式左边大于 $d_1+\frac{b_1}{2n-2}-\frac{b_{n+1}}{n}-\frac{b_n}{n+1}-\frac{b_{n-1}}{n}-\frac{b_n}{n-1}$

注：这里如果用 $\frac{1}{n}(b_{n-1}-b_{n+1})$ 进行比较，可能会出现 l,l' 等于 0 的情况。那么，将无法求均值。下面，会提到这个问题。

考虑更一般的不等式：

$$d_n=t_n\leq d_{n-l}+\frac{b_{n-l-1}}{n+l}+\frac{b_{n-l}}{n+l-1}-\frac{b_{n+1}}{n}-\frac{b_n}{n+1}+$$
$$2(\frac{b_{n-1}}{n(n+2)}+\frac{b_{n-2}}{(n+1)(n+3)}+......)$$

$$d_n>t_n'>d_{n+l'}+$$
$$\frac{b_{n+l'}}{n-l'+1}+\frac{b_{n+l'+1}}{n-l'}-\frac{b_{n-1}}{n}-\frac{b_n}{n-1}+2(-\frac{b_{n+1}}{n(n-2)}-\frac{b_{n+2}}{(n-1)(n-3)}-......)$$

$$\frac{\sup(d_{n-l}+d_{n-l+1}+...+d_n)+\inf(d_{n-l}+d_{n-l+1}+...+d_n)}{2l}<$$

$$\frac{d_{n-l}+\frac{b_{n-l-1}}{n+l}+\frac{b_{n-l}}{n+l+1}-\sum_{n-l}\frac{b_n}{n+1}/l-\sum_{n-l}\frac{b_{n+1}}{n}/l+d_{n+l'}+\frac{b_{n+l'}}{n-l'+1}......}{2}$$

$$\frac{\sup(d_{n+1}+d_{n+2}+...+d_{n+l})+\inf(d_{n+1}+d_{n+2}+...+d_{n+l})}{2l}>$$

$$\frac{d_{n-l}+\frac{b_{n-l-1}}{n+l}+\frac{b_{n-l}}{n+l+1}-\sum_{n+l}\frac{b_n}{n+1}/l-\sum_{n+l}\frac{b_{n+1}}{n}/l+d_{n+l}{'}+\frac{b_{n+l}{'}}{n-l{'}+1}......}{2}$$

关于b_n的序列的分母可以取

$$\frac{b_{n+i}}{(n-i+1)(n-i-1)}$$

比较$\sum b_i/rl$与$\sup\sum_{n-l}^{n}d_i/2l+\inf\sum_{n-l}^{n}d_i/2l$的大小，得：

$$\sum_{n-l}^{n}d_i/rl<\sup\sum_{n-l}^{n}d_i/2l+\inf\sum_{n-l}^{n}d_i/2l$$

同理可得，

$$r'\sum_{n}^{n+l}d_i/l>\sup\sum_{n}^{n+l}d_i/2l+\inf\sum_{n}^{n+l}d_i/2l$$

那么，可以据此确定r,r'的取值范围。

确定r,r'的取值范围，使得：

$$\sum_{n-l}^{n}d_i/rl+r'\sum_{n}^{n+l}d_i/l>\sup\sum_{n-l}^{n}d_i/2l+\inf\sum_{n-l}^{n}d_i/2l+$$

$$\sup\sum_{n}^{n+l}d_i/2l+\inf\sum_{n}^{n+l}d_i/2l$$

因为，$\sup\sum_{n-l}^{n}d_i/2l+\inf\sum_{n-l}^{n}d_i/2l<$

$$\sup\sum_{n}^{n+l} d_i/2l+\inf\sum_{n}^{n+l} d_i/2l$$

所以，可以根据$(\frac{b_{n-1}}{n(n+2)}+\frac{b_{n-2}}{(n+1)(n+3)}+......)$ +

$(-\frac{b_{n+1}}{n(n-2)}-\frac{b_{n+2}}{(n-1)(n-3)}-......)$ 的变化的值来判断

$$\frac{\sup\sum_{n-l}^{n} d_i/2l+\inf\sum_{n-l}^{n} d_i/2l+\sup\sum_{n}^{n+l} d_i/2l+\inf\sum_{n}^{n+l} d_i/2l}{2}$$

的大小。

如果此时：

$$\frac{\sup\sum_{n-l}^{n} d_i/2l+\inf\sum_{n-l}^{n} d_i/2l+\sup\sum_{n}^{n+l} d_i/2l+\inf\sum_{n}^{n+l} d_i/2l}{2}>$$

$$\frac{d_{n-l}+\frac{b_{n-l-1}}{n+l}+\frac{b_{n-l}}{n+l+1}-\sum_{n-l}\frac{b_n}{n+1}/l-\sum_{n-l}\frac{b_{n+1}}{n}/l+d_{n+l}{}'+\frac{b_{n+l}{}'}{n-l'+1}......}{4}$$

则：$\sum_{n-l}^{n} d_i/rl+r'\sum_{n}^{n+l} d_i/l>$

$$\frac{d_{n-l}+\frac{b_{n-l-1}}{n+l}+\frac{b_{n-l}}{n+l+1}-\sum_{n-l}\frac{b_n}{n+1}/l-\sum_{n-l}\frac{b_{n+1}}{n}+d_{n+l}{}'+\frac{b_{n+l}{}'}{n-l'+1}......}{4}$$

反之，$\sum_{n-l}^{n} d_i/rl + r^{'}\sum_{n}^{n+l} d_i/l <$

$$\frac{d_{n-l}+\dfrac{b_{n-l-1}}{n+l}+\dfrac{b_{n-l}}{n+l+1}-\sum_{n-l}\dfrac{b_n}{n+1}/l-\sum_{n-l}\dfrac{b_{n+1}}{n}+d_{n+l}^{'}+\dfrac{b_{n+l}^{'}}{n-l^{'}+1}\ldots\ldots}{4}$$

继续下去：

当$\dfrac{l+l^{'}}{rl}<1, \dfrac{r^{'}(l+l^{'})}{l^{'}}>1, \dfrac{l+l^{'}}{rl}+\dfrac{r^{'}(l+l^{'})}{l^{'}}<2, r\in(0,r), r^{'}\in(r^{'},n)$

$$\sum_{n-l}^{n} d_i+\sum_{n}^{n+l} d_i/l+l^{'} > \sum_{n-l}^{n} d_i/rl + r^{'}\sum_{n}^{n+l} d_i/l^{'} >$$

$$d_{n-l}+\frac{b_{n-l-1}}{n+l}+\frac{b_{n-l}}{n+l+1}-\sum_{n-l}\frac{b_n}{n+1}/l-\sum_{n-l}\frac{b_{n+1}}{n}+d_{n+l}^{'}+\frac{b_{n+l}^{'}}{n-l^{'}+1}\ldots\ldots$$

但是，这是不能成立的。所以

$\dfrac{l+l^{'}}{rl}<1, \dfrac{r^{'}(l+l^{'})}{l^{'}}>1, \dfrac{l+l^{'}}{rl}+\dfrac{r^{'}(l+l^{'})}{l^{'}}<2$不能同时成立。

考虑$\sum_{n-l}^{n} d_i+\sum_{n}^{n+l} d_i/l+l^{'} >$（$\sum_{n-l}^{n} d_i/rl + r^{'}\sum_{n}^{n+l} d_i/l^{'})/2 >$

$$\frac{d_{n-l}+\dfrac{b_{n-l-1}}{n+l}+\dfrac{b_{n-l}}{n+l+1}-\sum_{n-l}\dfrac{b_n}{n+1}/l-\sum_{n-l}\dfrac{b_{n+1}}{n}+d_{n+l}^{'}+\dfrac{b_{n+l}^{'}}{n-l^{'}+1}\ldots\ldots}{2}$$

所以，当$\dfrac{l+l^{'}}{2rl}<1, \dfrac{r^{'}(l+l^{'})}{2l^{'}}>1$，$\dfrac{l+l^{'}}{2rl}+\dfrac{r^{'}(l+l^{'})}{2l^{'}}<2$

且，$\frac{b_{n-l-1}}{n+l}+\frac{b_{n-l}}{n+l+1}-\sum_{n-l}\frac{b_n}{n+1}/l-\sum_{n-l}\frac{b_{n+1}}{n}+......>0$ 时

$$\sum_{n-l}^{n}d_i+\sum_{n}^{n+l}d_i/l+l^{'}>\frac{d_{n-l}+d_{n+l^{'}}}{2}$$

反之，

$$\frac{l+l^{'}}{2rl}>1,\frac{r^{'}(l+l^{'})}{2l^{'}}<1,\frac{l+l^{'}}{2rl}+\frac{r^{'}(l+l^{'})}{2l^{'}}>2,r\in(r,n),r^{'}\in(0,r^{'}),$$

且 $\frac{b_{n-l-1}}{n+l}+\frac{b_{n-l}}{n+l+1}-\sum_{n-l}\frac{b_n}{n+1}/l-\sum_{n-l}\frac{b_{n+1}}{n}+......<0$ 时

$$\sum_{n-l}^{n}d_i+\sum_{n}^{n+l}d_i/l+l^{'}<\frac{d_{n-l}+d_{n+l^{'}}}{2}$$

$$m(E)=(\sum d_i-\sum b_i)>(l+l^{'})\frac{d_{n-l}+d_{n+l^{'}}}{2}-\sum b_i$$

$$m(E)=(\sum d_i-\sum b_i)<(l+l^{'})\frac{d_{n-l}+d_{n+l^{'}}}{2}-\sum b_i$$

如果 v_j^{ki} 不变，同时取其他的分割方法。如果保持 d_n 的取值范围不变。则要么 $b_{n+1}<r$，要么 d_n 无法取到 b_n 的值。如果改变 d_n 的取值范围，则根据 $d_n>b_n$ 不一定可以确定 b_n 的取值。则 $\frac{b_{n-l-1}}{n+l}+\frac{b_{n-l}}{n+l+1}-\sum_{n-l}\frac{b_n}{n+1}/l-\sum_{n-l}\frac{b_{n+1}}{n}+......$ 大小不好控制。所以必须确定 v_j^{ki} 与 b_n 的对应关系。

解答：这里，我们提出一种计算均值的方法。思路是：首先挖去区间中的有限个点。然后，根据这些挖去的点定义区间。即可以是$\frac{1}{k_{1j}+k_{3j}+.......+k_{nj}}$这种分母由整数相加的区间；也可以是由连分数组成的区间。然后，我们运用放缩法。先确定两个大小比例 r 的大小（注意：计算 r 的大小的过程中可以消除重复的项）。然后，根据这个比例来确定$\sum d_i$与$\frac{d_1+d_n}{n}$的大小关系。

参考文献

1.on non-archimedean hilbertian spaces，kubzdela，2008

2.on orthogonal properties of immediate extension of c0, kubzdela，2011

联系邮箱：pqrs008@126.com