17.3 第二型曲线积分

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 *求质点 P 在外力 $\boldsymbol{F}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 作用下沿平面曲线 $\Gamma=\overset{\frown}{AB}$ 从 A 点移动到 B 点时, 外力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功.*

解: 如果 $\boldsymbol{F}$ 是常力, $\overset{\frown}{AB}$ 是直线段, 则 $\boldsymbol{F}$ 所作的功 $W=\boldsymbol{F}\cdot\overrightarrow{AB}$. 当 $\boldsymbol{F}$ 是变力时, 对 Γ 作分割 T:

$$A=M_0,M_1,M_2,\cdots,M_n=B.$$

记 $M_i=M_i(x_i,y_i)$, Δs_i 是 $M_{i-1}\overset{\frown}{\,}M_i$ 的弧长, $||T||=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta s_i\}$. 在每一段弧 $M_{i-1}\overset{\frown}{\,}M_i$ 上, 可以近似地认为 $\boldsymbol{F}$ 是常力在 $M_{i-1}\overset{\frown}{\,}M_i$ 是直线段, 则质点 P 从 M_{i-1} 移动到 M_i 时, 外力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功

$$\begin{aligned} W_i &\approx \boldsymbol{F}(\xi_i,\eta_i)\cdot\overrightarrow{M_{i-1}M_i}\\ &= P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i, \end{aligned}$$

其中 (ξ_i,η_i) 是 $M_{i-1}\overset{\frown}{\,}M_i$ 上任一点. 于是 $\boldsymbol{F}$ 所作的功

$$W=\sum_{i=1}^n W_i\approx\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+\sum_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i,$$

如果

$$\lim_{||T||\to 0}\sum_{i=1}^n P(\xi_i,\eta_i)\Delta x_i+\lim_{||T||\to 0}\sum_{i=1}^n Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

存在, 则定义此极限值为 $\boldsymbol{F}$ 所作的功. □

例 2 *计算第二型曲线积分*

$$I=\int_\Gamma xy\mathrm{d}x+(x-y)\mathrm{d}y+x^2\mathrm{d}z,$$

*其中 Γ 是螺旋线: $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ 从 $t=0$ 到 $t=\pi$ 上的一段 (图 **??**).*

解: 由公式 (**??**),

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi(-a^3\cos t\sin^2 t+a^2\cos^2 t-a^2\sin t\cos t+a^2b\cos^2 t)\mathrm{d}t\\ &= \left[-\frac{1}{3}a^3\sin^3 t-\frac{1}{2}a^2\sin^2 t+\frac{1}{2}a^2(1+b)(t+\frac{1}{2}\sin 2t)\right]_0^\pi\\ &= \frac{1}{2}a^2(1+b)\pi. \end{aligned}$$ □

□

例 3 计算积分

$$I=\int_{\Gamma}(x^2+2xy)\mathrm{d}y,$$

其中 Γ 是逆时针方向的上半椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$.

解法 1 利用上半椭圆的参数方程

$$x=a\cos t, y=b\sin t, 0\le t\le\pi,$$

按指定方向 t 从 0 变到 π. 将 x,y 用 t 的表达式代入, 并用 $b\cos t\mathrm{d}t$ 代替 $\mathrm{d}y$, 则

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi}(a^2\cos^2 t+2ab\cos t\sin t)b\cos t\mathrm{d}t \\ &= a^2b\int_0^{\pi}\cos^3 t\mathrm{d}t+2ab^2\int_0^{\pi}\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t=\frac{4}{3}ab^2. \end{aligned}$$

∎

解法 2 用直角坐标求解. 选 x 为参数, 则 Γ 的参数方程是

$$x=x, y=\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, -a\le x\le a.$$

特别注意的是, 按指定方向 x 从 A 变到 $-a$, 因此

$$\begin{aligned} I &= \int_a^{-a}\left(x^2+2x\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\right)\frac{b}{a}\frac{-x}{\sqrt{a^2-x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \int_{-a}^{a}\left(\frac{b}{a}\frac{x^3}{\sqrt{a^2-x^2}}+\frac{b^2}{a^2}2x^2\right)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

被积函数的第一项是奇函数, 在对称区间上的积分为零. 因此

$$I=\frac{2b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_{-a}^{a}=\frac{4}{3}ab^2.$$

∎

例 4 计算 $\int_{\Gamma}2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y$, 这里 Γ: *(1)* 沿抛物线 $y=x^2$, 从 $O(0,0)$ 到 $b(1,1)$; *(2)* 沿抛物线 $x=y^2$, 从 O 到 B ; *(3)* 沿折线 OAB.

解: (1) 选 x 为参数,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma}2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y &= \int_0^1(2x\cdot x^2\mathrm{d}x+x^2\cdot 2x\mathrm{d}x) \\ &= 4\int_0^1 x^3\mathrm{d}x=1. \end{aligned}$$

(2) 选 y 为参数,

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma}2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y &= \int_0^1(2y^2\cdot y\cdot 2y\mathrm{d}y+y^4\mathrm{d}y) \\ &= 5\int_0^1 y^4\mathrm{d}y=1. \end{aligned}$$

(3) 在 OA 段上选 x 为参数在 $y=0, \mathrm{d}y=0$, 在 AB 段上选 y 为参数在 $x=1, \mathrm{d}x=0$, 于是

$$\begin{aligned}\int_\Gamma 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y &= \int_{OA} 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y+\int_{AB} 2xy\mathrm{d}x+x^2\mathrm{d}y \\ &= \int_{AB} x^2\mathrm{d}y=\int_0^1 1^2\mathrm{d}y=1.\end{aligned}$$ □

□

例 5 *求在力 $\boldsymbol{F}=(y,-x,x+y+z)$ 作用下,*

(1) 质点由 A 沿螺旋线 L_1 到 B 所作的功 (图 17.4), 其中 $L_1: x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$;

(2) 质点由 A 沿直线 L_2 到 B 所作的功.

解: 如本节开头所述, 在空间曲线 Γ 上力 $\boldsymbol{F}$ 所作的功为

$$\boldsymbol{W}=\int_\Gamma \boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}=\int_\Gamma y\mathrm{d}x-x\mathrm{d}y+(x+y+z)\mathrm{d}z.$$

(1) 由于 $\mathrm{d}x=-a\sin t\mathrm{d}t, \mathrm{d}y=a\cos t\mathrm{d}t, \mathrm{d}z=b\mathrm{d}t$, 所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{W} &= \int_0^{2\pi}(-a^2\sin^2 t-a^2\cos^2 t+ab\cos t+ab\sin t+b^2 t)\mathrm{d}t \\ &= 2\pi(\pi b^2-a^2).\end{aligned}$$

(2) L_2 的参数方程为

$$x=a, y=0, z=t, 0\le t\le 2\pi b.$$

由于 $\mathrm{d}x=0, \mathrm{d}y=0, \mathrm{d}z=\mathrm{d}t$, 所以

$$\boldsymbol{W}=\int_0^{2\pi b}(a+t)\mathrm{d}t=2\pi b(a+\pi b).$$

□

思考题

1. 为什么第二型曲线积分不具有单调性, 也不满足积分中值定理?

解: 第二型曲线积分 $\int_\Gamma \boldsymbol{F}(x,y,z)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}$ 是向量值函数 $\boldsymbol{F}(x,y,z)$ 沿有向曲线 Γ 的积分,

(1). 第二型曲线积分不具有的单调性, 这是由于一方面向量值函数不能比较大小; 另一方面向量值函数在小弧段上的积分还与弧段方向与向量方向之间的夹角有关.

(2) 第二型曲线积分不满足同定积分一样的积分中值定理是因为定积分只是第二型曲线积分的特例. □

2. 计算第二型曲线积分的公式与计算第一型曲线积分的公式有什么差别?

解: 第一型曲线积分的被积表达式是函数值与曲线 Γ 的弧长的乘积, 它与曲线 Γ 的方向无关; 而第二型曲线积分的计算要考虑曲线 Γ 的方向. □

3. 将第二型曲线积分的公式化为定积分计算时, 它的上、下限是怎样确定的?

解: 第二型曲线积分的公式化为定积分计算时，将积分曲线的起点和终点分别代入其参数方程, 解出终点对应的参数 t 的值即为积分上限, 解出起点对应的参数 t 的值即为积分下限. □

习题

1. 计算第二型曲线积分:

(1) $\displaystyle\int_\Gamma xy\mathrm{d}x + ye^x\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是以 $(0,0),(2,0),(2,1),(0,1)$ 为顶点的矩形, 逆时针方向为正向;

(2) $\displaystyle\int_\Gamma y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是从 $(0,0)$ 到 $(1,1)$ 的抛物线 $y = x^2$;

(3) $\displaystyle\int_\Gamma \frac{x}{y}\mathrm{d}x + \frac{1}{y-a}\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是摆线 $x = a(t-\sin t), y = a(1-\cos t)$ 对应于 $t = \frac{\pi}{6}$ 到 $t = \frac{\pi}{3}$ 的一段;

(4) $\displaystyle\int_\Gamma x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z$, 其中 Γ 是从 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,1)$ 的曲线 $x = t, y = t^2, z = t^3$;

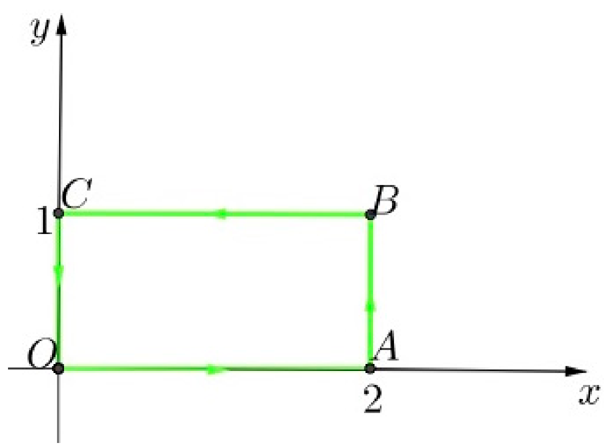
(5) $\displaystyle\int_\Gamma y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$ 在 Γ 为球面上的曲线

$$x = R\sin\phi\cos\theta, y = R\sin\phi\sin\theta, z = R\cos\phi,$$

$$R > 0, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi,$$

其中 R,ϕ 为常数在 θ 增大的方向为曲线的正向.

解: (1) 积分曲线 Γ 为图 1 中的矩形 $OABC$, 方向为逆时针,



,

图 1: 积分曲线 Γ

由第二型曲线积分的积分路径可加性 (性质 17.3.2), 有于是

$$\begin{aligned}\int_\Gamma xy\mathrm{d}x + ye^x\mathrm{d}y &= \int_{OA} xy\mathrm{d}x + ye^x\mathrm{d}y + \int_{AB} xy\mathrm{d}x + ye^x\mathrm{d}y \\ &\quad + \int_{BC} xy\mathrm{d}x + ye^x\mathrm{d}y + \int_{CO} xy\mathrm{d}x + ye^x\mathrm{d}y \qquad (1)\end{aligned}$$

在 OA 段上选 x 为参数, $y = 0, \mathrm{d}y = 0$, 则有

$$I_1 = \int_{OA} xy\mathrm{d}x + ye^x\mathrm{d}y = 0. \qquad (2)$$

在 AB 段上选 x 为参数, $x=2, \mathrm{d}x=0$, 则有

$$I_2=\int_{AB} xy\mathrm{d}x+y\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=\int_{AB} y\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=\int_0^1 y\mathrm{e}^2\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^2}{2}y^2\Big|_0^1=\frac{\mathrm{e}^2}{2}. \tag{3}$$

在 BC 段上选 x 为参数, $y=1, \mathrm{d}y=0$, 则有

$$I_3=\int_{BC} xy\mathrm{d}x+y\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=\int_{BC} xy\mathrm{d}x=\int_2^0 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Big|_2^0=-2. \tag{4}$$

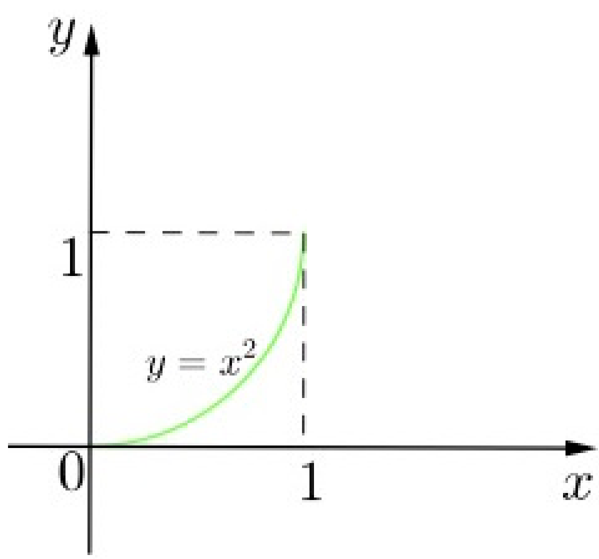
在 CO 段上选 x 为参数, $x=0, \mathrm{d}x=0$, 则有

$$I_4=\int_{CO} xy\mathrm{d}x+y\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=\int_{CO} y\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=\int_1^0 y\mathrm{d}y=\frac{1}{2}y^2\Big|_1^0=-\frac{1}{2}. \tag{5}$$

最后, 把 (2)-(5) 代入 (1), 有

$$\int_\Gamma xy\mathrm{d}x+y\mathrm{e}^x\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{e}^2}{2}-2-\frac{1}{2}=\frac{\mathrm{e}^2-5}{2}.$$

(2) 积分曲线 Γ 为图 2 中一段抛物线, 选 x 为参数, 于是



,

图 2: 积分曲线 Γ

$$\begin{aligned}\int_\Gamma y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y &= \int_0^1 (x^2\mathrm{d}x+x\cdot 2x\mathrm{d}x)\\ &= 3\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\\ &= x^3\Big|_0^1\\ &= 1.\end{aligned}$$

(3) 由求第二型曲线积分的计算公式 (17.3.2), 有

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \frac{x}{y}\mathrm{d}x + \frac{1}{y-a}\mathrm{d}y &= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{x(t)}{y(t)}x'(t) + \frac{1}{y(t)-a}y'(t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left(\frac{a(t-\sin t)}{a(1-\cos t)}a(1-\cos t) + \frac{1}{a(1-\cos t)-a}a\sin t\right)\mathrm{d}t \\
&= a\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}}(t-\sin t)\mathrm{d}t - \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{\sin t}{\cos t}\mathrm{d}t \\
&= a\left(\frac{1}{2}t^2 + \cos t\right)\Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} - (-\ln\cos t)|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \\
&= a\left(\frac{\pi^2}{24} + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \ln\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

(4) Γ 是从 $(0,0,0)$ 到 $(1,1,1)$ 时, t 从 0 到 1, 由求第二型曲线积分的计算公式 (17.3.2), 有

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y + z\mathrm{d}z &= \int_0^1 (x(t)x'(t) + y(t)y'(t) + z(t)z'(t))\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (t + t^2\cdot 2t + t^3\cdot 3t^2)\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 (t + 2t^3 + 3t^5)\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{2}t^4 + \frac{1}{2}t^6\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{3}{2}.
\end{aligned}$$

(5) 由求第二型曲线积分的计算公式 (17.3.2), 有

$$\begin{aligned}
&\int_\Gamma y\mathrm{d}x + z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z \\
&= \int_0^{2\pi} (y(\theta)x'(\theta) + z(\theta)y'(\theta) + x(\theta)z'(\theta))\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (R\sin\phi\sin\theta\cdot R\sin\phi(-\sin\theta) + R\cos\phi\cdot R\sin\phi\cos\theta + R\sin\phi\cos\theta\cdot 0)\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{2\pi} (-R^2\sin^2\phi\sin^2\theta + R^2\sin\phi\cos\phi\cos\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= R^2\sin^2\phi\int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta + R^2\sin\phi\cos\phi\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= R^2\sin^2\phi\int_0^{2\pi}\frac{\cos 2\theta - 1}{2}\mathrm{d}\theta + R^2\sin\phi\cos\phi\int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta \\
&= R^2\sin^2\phi\left(\frac{1}{4}\sin 2\theta - \frac{1}{2}\theta\right)\Big|_0^{2\pi} + R^2\sin\phi\cos\phi\sin\theta|_0^{2\pi} \\
&= R^2\sin^2\phi\cdot(-\pi) + 0 \\
&= -\pi R^2\sin^2\phi.
\end{aligned}$$

□

2. 设逐段光滑闭曲线 Γ, 光滑曲面 $z=f(x,y)$ 上, 曲线 Γ 在 xy 平面上的投影曲线为逐段光滑闭曲线 γ, 函数 $P(x,y,z)$, Γ 上连续, 则

$$\oint_{\Gamma} p(x,y,z)\mathrm{d}x=\oint_{\gamma} p(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x,$$

其中 γ 的定向与 Γ 的定向一致.

证明. 由于 γ 是逐段光滑闭曲线, 故它可由有限段由 x 作为参数或由 y 作为参数的光滑曲线 $\gamma_1,\gamma_2,\cdot,\gamma_n$ 组成, 此时逐段光滑闭曲线 Γ 也由对应的光滑曲线 $\Gamma_1,\Gamma_2,\cdot,\Gamma_n$, 其中 γ_i 是 $\Gamma_i(i=1,2,\cdots,n)$ 在 xy 平面上的投影曲线.

故下面分两种情形讨论:

(1) γ_i 可以由 x 作为参数, 即其参数方程可设为

$$\begin{cases} x = x, \\ y = y(x), \end{cases} \quad x\in[a,b]$$

其中 a,b 为常数.

此时, 分别在 γ_i 和 Γ_i 上利用第二型曲线积分的计算公式, 有

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_i} p(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x &= \int_a^b p(x,y(x),f(x,y(x)))\mathrm{d}x,\\ \int_{\Gamma_i} p(x,y,z)\mathrm{d}x &= \int_a^b p(x,y(x),f(x,y(x)))\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

即证得

$$\int_{\gamma_i} p(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x=\int_{\Gamma_i} p(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

(2) γ_i 可以由 y 作为参数, 即其参数方程可设为

$$\begin{cases} x = x(y), \\ y = y, \end{cases} \quad x\in[a,b]$$

其中 a,b 为常数.

此时, 分别在 γ_i 和 Γ_i 上利用第二型曲线积分的计算公式, 有

$$\begin{aligned}\int_{\gamma_i} p(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x &= \int_a^b p(x(y),y,f(x(y),y))\mathrm{d}x(y),\\ \int_{\Gamma_i} p(x,y,z)\mathrm{d}x &= \int_a^b p(x(y),y,f(x(y),y))\mathrm{d}x(y).\end{aligned}$$

即证得

$$\int_{\gamma_i} p(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x=\int_{\Gamma_i} p(x,y,z)\mathrm{d}x.$$

最后, 注意到

$$\begin{aligned}\int_{\gamma} p(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\gamma_i} p(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x,\\ \int_{\Gamma} p(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\Gamma_i} p(x,y,f(x,y))\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

结论得证. ∎

---

3. 计算沿空间曲线的第二型曲线积分.

(1) $\int_\Gamma xyz\mathrm{d}z$, 其中 $\Gamma: x^2+y^2+z^2=1$ 与 $y=z$ 相交的圆, 其方向按曲线依次经过 1, 2, 7, 8 卦限;

(2) $\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z$, 其中 Γ 为球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的边界曲线, 其方向按曲线依次经过 xy 平面部分在 yz 平面部分和 zx 平面部分.

解: (1) 由 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 $y=z$ 联立, 得 $x^2+2y^2=1$, 于是得到积分曲线 Γ 在 xy 面上的投影的参数方程为:

$$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta, \end{cases} \quad \theta\in[0,2\pi],$$

带入 $y=z$, 则可得 Γ 的参数方程为:

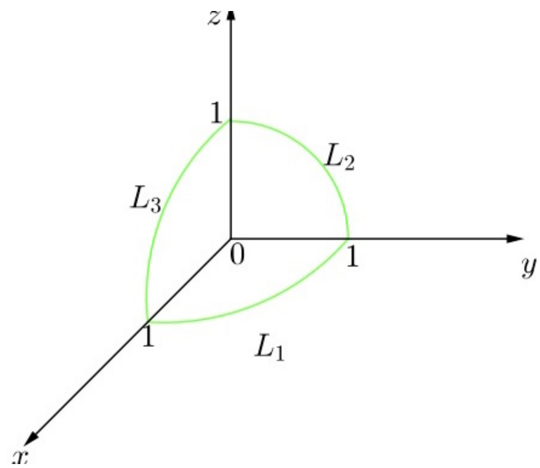
$$\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta, \\ z=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta, \end{cases} \quad \theta\in[0,2\pi],$$

当 θ 从 0 增加到 2π 时, 点依次经过 1，2，7，8 卦限, 故

$$\begin{aligned} \int_\Gamma xyz\mathrm{d}z &= \int_0^{2\pi} x(\theta)y(\theta)z(\theta)z'(\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\cos\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\theta\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{2}}{4}\sin^2\theta\cos^2\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{32}\int_0^{2\pi}(1-\cos4\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{32}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin4\theta\right)\bigg|_0^{2\pi} \\ &= \frac{\sqrt{2}}{16}\pi. \end{aligned}$$

(2) 记球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 与 xy 平面的交线为 L_1, 与 yz 平面的交线为 L_2, 与 zx 平面的交线为 L_3, 如图 3 所示, 则

$$\begin{aligned} &\int_\Gamma (y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z \\ &= \int_{L_1}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z \\ &\quad +\int_{L_2}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z \\ &\quad +\int_{L_3}(y^2-z^2)\mathrm{d}x+(z^2-x^2)\mathrm{d}y+(x^2-y^2)\mathrm{d}z \\ &= I_1+I_2+I_3, \end{aligned}$$



,

图 3: 积分曲线 Γ

不难得出, 曲线 L_1, L_2 和 L_3 的参数方程分别是:

$$L_1 : \begin{cases} x = \cos\theta, \\ y = \sin\theta, \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ z = 0, \end{cases} \qquad L_2 : \begin{cases} x = 0, \\ y = \cos\phi, \quad \phi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ z = \sin\phi, \end{cases} \qquad L_3 : \begin{cases} x = \sin\varphi, \\ y = 0, \quad \varphi \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \\ z = \cos\varphi, \end{cases}$$

进而计算出,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{L_1} (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^2\theta - 0)(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta + (0 - \cos^2\theta)\cos\theta\mathrm{d}\theta + 0 \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\theta + \cos^3\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta\mathrm{d}\theta - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\mathrm{d}\theta \\ &= -\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = -\frac{4}{3}. \end{aligned}$$

同理,

$$I_2 = \int_{L_2} (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\phi + \cos^3\phi)\mathrm{d}\phi = -\frac{4}{3};$$

$$I_2 = \int_{L_2} (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin^3\varphi + \cos^3\varphi)\mathrm{d}\varphi = -\frac{4}{3}.$$

因此, 有

$$\int_\Gamma (y^2 - z^2)\mathrm{d}x + (z^2 - x^2)\mathrm{d}y + (x^2 - y^2)\mathrm{d}z = -\frac{4}{3} - \frac{4}{3} - \frac{4}{3} = -4.$$

□