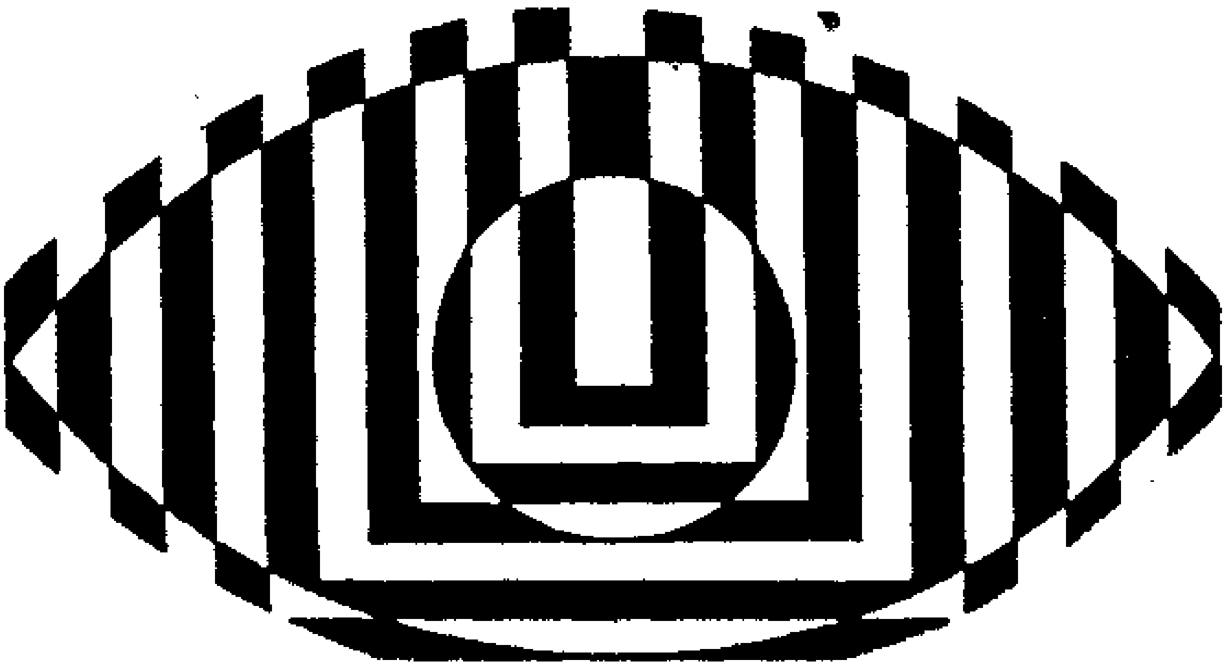


A. Gardiner 著

发现的数学

——数学研究的艺术

四川教育出版社

一九九〇年·成都

责任编辑：皮俊中
封面设计：何一兵

发现的数学——数学研究的艺术

四川教育出版社出版发行　　（成都盐道街三号）
四川省新华书店经销　攀枝花新华印刷厂印刷

开本 850×1168 毫米 1/32 印张 8.75 插页 2 字数 180 千
1990 年 10 月第一版　　1990 年 10 月第一次印刷
印数：1—800 册

ISBN7-5408-1337-7/G·1296　　定价：3.50 元

有人断言，引入了启发式的方法就需要重写所有的教科书，而且还会使教科书长得没有人能读到底，……对这种陈腐的议论，我们的回答是：试试看吧！

拉卡托斯：《证明和反驳》

●●序

> 教师应该教给学生求解问题的方法。但是，若他自己都不知道如何求解问题，又怎能使人昭昭呢？……学校的课程安排，应当在一个适当的水平上为创造性活动提供一席之地。
>
> ——G. 波利亚：《数学发现》（第一卷）

我写本书的目的，是想给读者提供一种帮助，使他们能够仅仅依靠自己的努力就能独立地解决那些带有挑战性然而也是初等的数学问题。本书由两大篇构成，这两篇形成了一种逻辑上的自然接续关系。这样安排是因为我从写作一开始（在第一篇）就一直对准着最后的目标——说服尽可能多的读者完整地解决第二篇中的至少一个广泛深入的研究问题。过去一向认为，这些广泛深入的研究问题对高中学生中那些机敏的高材生也是一种挑战。当然迎接这种挑战的结果，能使学生领悟实际地处理数学问题的精髓。多年来，各种中学数学小组在其活动中一直都在利用这些带有挑战性的问题作为学习的材料；而似乎大专院校的学生们还用得更有成效。一届又一届的学生们，对挑战性问题的反应，表现了出人意料的新奇感和强烈的兴趣。挑战使他们兴奋，他们积极地投入应战之中，并在这个过程中显示出他们的丰富想像力和创造才能。这些材料也受到在职培训中的许多教师的欢迎，以及专业数学工作者的欣赏。

大多数学生都相当缺乏研究的习惯。一般学生对于数学的看法本质上都是消极被动的，在他们的头脑里对学习形成了一种框框，这就是：首先必须教给他们某些标准的方法，然后他们就可以自由地运用这些方法去求解某些标准问题——当然，主要是通过模仿。他们只是在这样的范围内使用着自己的心智。殊不知这有极大的局限性。本书从与之完全不同的视角去考察数学问题。至于阅读本书所需要的基本数学技巧，大多是为人们所熟知的，而且无论怎么说也完全是初等的，故读者几乎不会感到有任何困难。于是，我们就能够把注意力集中在如下两个方面：

一是途径——探索和开发这类初等素材的途径；

二是方略——解决看起来似乎简单，而其解答却并不显然的问题的方略。

这就是说，我们注重的是方法，而这种对方法的强调也就是要勾勒出数学本身和数学思想两者的本质特征的非常真切的图画。

第一篇包含了许多“简短”的研究问题。它们都是从一般的“数学游戏”跨升到第二篇中正式而重要的数学（问题）的“踮脚石”。在“数学游戏”问题中，一个清楚地陈述出的问题解决后，常常就把它放在一边而不再管。而对于第二篇中那些重要的数学问题，我们往往是从某个令人感兴趣的观察或疑问出发，并从几个不同的角度不断地研究它、追踪它，直到得出或多或少满意的结果为止，然后就设法对整个过程作出解释。有了处理第一部分简短研究问题的经验，有助于那些没有实力直接阅读第二部分的读者建立起信心和培养起耐力。第一篇的内容也可以作为未

来的教师和实习教师的问题研究课程的材料*。

本书第二篇包括了两个详尽地叙述的扩展研究问题，以及同类的几个问题的概要。就它们所涉及的数学内容来说，都是初等的，但要解答它们却绝非易事。每一个问题研究的过程都较长，可能比大多数读者曾经遇到过的长得多（这也是我之所以把第一部分内容纳入本书的原因之一）。但是，我很讲究材料的处理方式，以至于使得读者要最终弄懂它们，主要地只依赖于其坚持性，而并不要求只有部分读者才具备的某些特殊能力。若读者从头至尾地完成了一个或几个这种扩展了的研究问题，就一定会发现：它们之所以这么长是完全有道理的，而他们为之付出的努力也是完全值得的。

数学研究本身并不是目的，它是揭示和理解重要的数学模式和数学关系的手段。一本好的教科书应能做到：当引进一个新的论题时，它的最重要的特征应是清晰可见和容易理解的。但是，在实际问题中，要界定一个问题最有意义的特征又是相当困难的；而且，在这些特征最后被捕捉到以前，还可能需要做大量艰苦的探测性工作。数学的最引人注目的特征之一就是：对那些初看起来似乎是枯燥无味的或难于下手的问题，通过坚持不懈的和深思熟虑的数学分析，常常会得到完全出乎意料的深刻洞察。

鉴于本书的篇幅和类型，任何一个理智的学生都应该能够读完它，并且，至多只要很少一点帮助就能完成所有练习题。许多练习题都补充给出了提示。在各章的后面也可以找到这些练习题的解答。但是真正成文的东西，无论是教材内容本身、练习题、

---

* 请参看我的另一本书《数学迷宫》（牛津大学出版社，1987）。该书以类似的但更简单的方式给出了许多具有挑战性的数学游戏题和研究问题。

提示还是解答，都是很有限的。所以，可以通过安排学生与学生或者学生与教师间的互教互学，来补充通读本书所获得的体验。本书在详尽地给出的研究问题后面，列出了"进一步拓广的研究问题"。对于打算把本书作为课堂教学材料的教师们，这些"进一步拓广的研究问题"可作为课外活动的材料，当然它们也为一般读者提供了进一步钻研的材料。在这些"进一步拓广的研究问题"前面，我们先给出了显示出明确结构的研究过程。读者可以利用在此过程中所包含的要旨去探究这些"进一步拓广的研究问题"。

我衷心地感谢给我提建议、出主意，给予我启示和鼓励的人们。（我们经常看到，一种意见或一种想法被有些人天真地看成是有独创性的，但却原来在另一个地方有它的根。）一九八一年在我访问 Deakin 大学和 Melbourne 大学时就已开始构思这本书了。但若没有 Derek Holton 的满腔热情的支持，恐怕此书也难于问世，一九八一年以来不少朋友和学生一直都在评论本书的初稿和各次修改稿，我对他们所有的人致以衷心的感谢。同时，我要特别提到 Tom Beldon，他的评论和"天真"的提问在整个成书过程中一直都在鞭策着我。

A. 加德纳，1987.7 于伯明翰

不要咬我的手指，
看看它指向哪里。

W. 麦克库洛奇：《变化的纲领》

目 录

引　论

> 哪里有问题，哪里就有生活。
>
> ——A.A.泽诺维也夫：《光辉前程》

本书旨在帮助读者凭自己个人的努力，从事一些富有挑战性，然而又是初等的数学研究。第一篇包含四个短小的研究。在这四个小研究中，其挑战性在于，它需要你探究和解释所发生的问题，而不是只是求出正确答案。第二篇由两个广泛而深入的研究组成。它们较之第一篇的小研究有更高的要求，不过，其数学内容仍然完全是初等的。读者选择从那一篇着手阅读，每一篇究竟要花多少时间，取决于读者已有的数学经验。然而，我要劝告读者，你至少要仔细透彻地研讨第二篇中的一个广泛而深入的研究。

每一篇都选出一些数学问题加以专门研讨。在正文中，每一个这样的问题都是借助于设计好了的系列习题来引进并进行研讨。每一个设计好的研究之后都附有一系列“引伸问题”，它们同样要你独立地去尝试，去解答。

材料中广泛地使用了中学数学的基本方法。但是，研讨的一些特殊问题，以及它们的研讨方法超出数学教学大纲的最高要

求。这些问题均有其自身的内在意义，因而不在乎问题本身是否全都重要。重要的是这些问题的研究方法，特别是我已设法以对读者有帮助的方式来叙述：

（1）发展解答数学问题的策略，

（2）训练天才地猜想和验证猜想的艺术，

（3）懂得证明的必要，

（4）领会概括思维怎样导致原问题的变更，而变更后的问题更易于解答，

（5）一有可能就应用来之不易的结论和方法去解相关问题，

（6）懂得研究数学必须要训练并持之以恒。

所以，书中的问题虽已经过仔细筛选，它们仍旧主要是一种导出结论的方法，而且结论是：

培养研究数学的艺术

※　　　　※　　　　※

第一篇中的某些小研究来源于解答叙述清晰的游戏题或问题，其余的产生于某些奇妙的数学现象的实验研究。每一种情况你都应该认真探究，直至你不仅知其然，而且也知其所以然。

第二篇的两个研究的研讨可以不考虑谁先谁后。后一个的长处是，其主要猜想基于极其简单的计算即可提出。但是，这方法不能维持多久，很快就必须引入其它思想。前一个研究虽不可由类似的十分简单的方法着手，但是，它的优点在于，开始的朴实的方法能用相当长久。虽然它最终也需补之以更强有力的方法，然而却决不会被实际取代。

第 I 篇　短小研究

告读者

> 要学会游泳，就得下深水
>
> ——G．波利亚：《数学发现》卷 I

研究都从问题开始（第一、第三两个研究是解游戏题的结果；第二个研究源于对一个奇妙的算术现象的实验研讨；第四个研究致力于将一个熟悉的几何公式由二维推广到三维），然后通过散见于正文中的设计好的系列习题，探讨原来的问题。无论哪种情况，我都设法使读者认真思考，直到你认为自己不仅知其然，而且也知其所以然。

习题犹如数学砖石。它们提供你所需的基本经验，帮助你发现隐藏于原问题中的有趣的数学。正文如同将这些数学砖石粘结在一起的水泥灰浆。某些习题有提示，提示排印在有关研究之后，引伸问题之前。习题的解答排印在每章之末。

正文和习题提出了处理原问题的一种方法。它们仅能作为一种导引，不要成为束缚。仅当你能自如地把正文作为一种开端，并开始提出你自己的课题，或用你自己的方式探讨原问题时，我才算成功了。

第一章　博奕分析

> 无法逃避的情境。
>
> ——G．戈登：《略土木日记》

1·1　引言

分析博奕，思考如何取胜，不失为数学的丰富源泉。然而，思考需要聚精会神的努力，而博奕被看作“娱乐”。因此，人们容易无视努力能够成为娱乐这一事实，从而以漫不经心的方式来分析这类博奕（例如，许多人打牌时，甚至没有去记住已经出过的牌）。

本章的主要目的是让你研究一组简单的二人博奕。这些博奕也可以完全同样地作为三人，或更多人的博奕，当然，对一方应采用怎样的玩法才能取胜的分析将不再有效。在你开始进行研讨之前，我将设法介绍这些博奕，讲讲分析它们以得出某种一般联系的方法。

多数博奕都基于如下简单思想。人们从一个程序着手，而这程序在由单个人执行时是完全可预计的。由于竞赛双方需要交替地采取步骤，人们还得巧妙地加以发挥。每一方都要设法先发制人，而不是以尽可能有效地合作的方式来完成程序。例如，每一

方采用的策略将取决于：

(a) 下出最后一步的一方是赢还是输；

(b) 博奕双方的步骤能区分开（如在"零和十字"中），或者不能加以区分（如在"有效直尺博奕"中，见1·3节引伸问题9）。

关于这类简单的博奕，那些能产生最有趣的玩法的变种，总是值得考虑的。当你开始分析下面例题时，应当记住这点。

(1) 零和十字

若果博奕双方不相互竞争，或者双方的做法无法区别开（"0和0"），无论在哪种情况，先手几乎肯定会获胜），那么，让三个对手进入比赛就不会带来任何新的问题。

(2) 欧几里得博奕（见1·3节，引伸问题7）

这博奕的艺术在于选取每次减去较小数的准确倍数。它赋予最常规的算法以新意，从而得出一个优秀的竞赛实例。获胜的策略出乎意料，也简单得令人兴奋。

(3) 十五博奕（见1·3节，引伸问题8）

这是一个人人都会遇到的博奕。它貌似平常，但是不要上当。

(4) 有效直尺博奕（见1·3节，引伸问题9）

给了一根长为（譬如说）15cm的空白木尺。为了能直接测量从1到15的每一整数厘米的长度，需要标出的刻度的最少个数是多少？这是一个有趣的问题。要简单地检验一组刻度是否足够，需要仔细观察，这观察本身就是一种有价值的思维训练（见图1·1）。这博奕的基本程序虽然远未定型，但是，由博奕双方需要交替地标刻度的竞争所产生的变化仍会出现有意义的结果。然而，双方都必须超越每一着法的直接效果去思考一下，每一新刻度给对手提供的种种可能性。

对这类博奕进行数学分析，有几种不同的“水平”。为简单起见，我仅区分为三种水平。它们可扼要叙述如下。

水平1：局部推理

水平2：探求全局法则

水平3：绝对证明

三种水平都重要。但是，从数学的观点看，只要有可能，就一定要达到水平3。这是我们的宗旨。

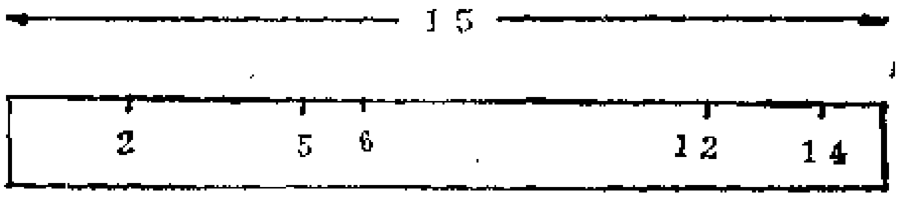


图1.1　有效的直尺吗？

水平1　我们每给出一个着法，都该提出，这着法很可能会有什么直接后果：“若果我走那里，他（或她）会……”。因这类推理每一次仅仅能用于博奕的一小阶段，被称为局部推理。局部推理虽然不注重长期效用，仍然值得重视。一步着法从局部看可能是正确的，但从最终效果看却可能是败着。

水平2　全局法则或者策略，是指能影响全局的博奕方法。这些法则最初只不过是“经验法则”。例如“零和十字”中的策略，这策略仅提出了单独一个着法，但却同时产生了几乎是完整的两套着法。然而，完善的全局法则远比经验法则更可靠，虽然如此，全局法则依然经常都要基于经验、观察、猜测，而不是基于证明。

水平3　许多人都相当喜欢发现似乎是有效的全局策略。而且，值得努力作得更好的理由有二。第一，最初的猜测常常不足以描述全局，它只不过提出了怎样发现全局的实际情况，以控制

博奕局势（前面的例题（2）和（3）即为这种情况的范例）。第二，从数学观点看，只是“猜想”还不够，无论有再多的可以证实猜想正确的证据也还不够。需要的是策略的某种证明，从数学上证明它的确如人们设想的那样真正能控制博奕。

1·2 第一个小研究

现在你该作点事了，即不要只读，而要思考！你将研究一个特殊的博奕，其内容相当简单明瞭，但它引进了若干有用的思想，以后在解答一些极为困难的问题时会用到这些思想。

问题 博奕双方A和B有一个装有九张卡片的袋。他们轮流从袋里取出1、2或者3张卡片，而且谁也不能取出与对方前次所取数目相同的卡片数。先取出最后一张卡片或者使对方无法取出卡片者获胜。谁获胜？

袋里的卡片不是愈来愈少，直至某一方取出最后的卡片为止，就是出现一方无法有效地取出的局面。无论哪种情况，都必有一方获胜。哪一方获胜呢？

先手A可在三种取法中选择一种。他能否通过仔细地选择这首次取法来保证他总是能赢？或者后手B总是能通过选择正确的应着，而以某种方式夺回控制权？

习题1 玩几次博奕（如有必要，可与一个想像的对手玩），并努力观察所发生的情况。

习题2 仅当A方取出的卡片数恰到好处，使B方处于绝境，他才能保证获胜。

(i) 假设A方首次取走3张卡片，B方要保证能获胜应该怎么办呢？

(ii) 假设A方首次取出2张卡片，B方仍能保证获胜吗？

(iii) 假设A方首次只取1张卡片，这一次B方能肯定赢吗？

原题使用有9张卡片的袋，其长处在于对应的博奕极易于分析。但是若果你要向你的朋友挑战，那么从卡片更多点的袋开始会更有趣。若果从有21张卡片的袋开始，会出现什么情况呢？或者从通常的52张扑克牌开始，或者甚至从多达999张卡片的袋开始，会出现什么情况呢？先手每次都仍能以某种方法保证获胜吗？

为使博奕更有趣，需要从多于9张卡片开始，但也不要多得使博奕费时太长。然而时间尚不是在考虑变更袋中卡片数会出现什么情况时，值得考虑的唯一理由。原题袋中有9张卡片，我们注意到，仅当先手取出卡片的张数恰到好处，使对手处于绝境时，他才能保证获胜。一开始，A方可能不知道应取出卡片的正确张数。但是，无论他取出多少张卡片，他总是使B方“在更少的卡片数的博奕中”处于先手地位，所以A方必须选择他的最佳取法，以保证使B方虽在更少卡片数的博奕中为先手，却无法获胜。这样看来，A方若要在9张卡片的博奕中获得成功，那么他似乎必须清楚，以更少的卡片数开始的博奕情况是怎样的。

习题3 (i) 在6张卡片的博奕中，先手能保证获胜吗？

(ii) 在7张卡片的博奕中，先手能保证获胜吗？

(iii) 在8张卡片的博奕中，先手能保证获胜吗？

(iv) 在9张卡片的博奕中，若果你是先手，那你首次将选择怎样的取法？为什么？

读者可能已注意到，我们明显地忽略了一个小小的难点。若果先手A只取出一张卡片，那么在8张卡片的博奕中B方并非完完全全地处于先手的地位，因为不允许他取出对手已取的一张卡片。

习题4 (i) 哪一方没有8张卡片的博奕？若果只允许先手第一次取2或3张卡片(而不是1、2或3张卡片)，那么他还会没有8张卡片的博奕吗？

(ii) 对于7张卡片的博奕，哪一方能赢？若果第一步只允许先手取出1或者3张卡片(而不是1、2或3张卡片)，那么他也能赢吗？

(iii) 对于6张卡片的博奕，哪一方能赢？若果第一步只允许先手取出1或2张卡片(而不是1、2或3张)，他也能赢吗？

即使博奕从很大数目卡片的袋开始，A方发现，当一次又一次轮到他时，他每次都在卡片数愈来愈少的博奕中处于先手。所以，A方弄清楚从卡片数不多的袋开始的博奕的情况仍然是重要的。

习题5 (i) 假设A方总是作为先手。若果袋中只有一张卡片，A方取出它并获胜。若果开始时，袋中有2张，3张等等直至13张卡片，试自己判断会出现什么结果，将结果填入图1·2的表中。

袋中卡片数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
谁能保证赢？	A												

图 1.2

(ii) 当袋中开始有15张卡片时，你认为谁会赢？第一次应取出多少卡片？这样取为什么能保证获胜？

(iii) 当袋中开始有16张卡片时，你认为谁会赢？第一次应取出多少张卡片？

(iv) 当袋中开始有52张卡片时，你认为谁会赢？若果开始袋中有999张卡片，又会怎样？

现在回过头来实际玩一玩数量各异的卡片袋博奕，直至你肯定自己已经清楚地知道每次的最佳取法。然后，邀一朋友进行比赛！有时，你也可能从不利的局面开始比赛（例如，若果袋中卡片数已定，那么可能必须掷硬币来决定谁作先手，或者用掷硬币的方法，让猜中的一方选择袋中卡片的张数，而未猜中的一方选择先手或后手）。即使你处于不利局面开始比赛，只要你的对手尚没有发现怎样获胜的规则，通常你都能通过采取正确的步骤而夺回控制权。

1·3 引伸问题

1. 博奕双方轮流从原题的卡片袋中取出1或者3张卡片，谁取出最后一张卡片谁赢。谁能保证获胜？说明为什么（以及怎样获胜）。

2. (i) 博奕双方轮流从原题的卡片袋中取出1、2或4张卡片。取出最后一张卡片的算赢。谁能保证获胜？说明理由（以及怎样获胜）。

(ii) 若果允许取出1、2或5张卡片（而不是1、2或4张），会有什么结果？

(iii) 若果允许取出1、2或者6张卡片，又会有什么结果？

3. (i) 博奕双方轮流从原题的袋中取出1、3或者4张卡片，取出最后一张卡片的算赢。谁能保证获胜？说明为什么（以及怎样获胜）。

(ii) 若果博奕双方谁也不允许取出与对方上次已取数目相同的卡片，谁能保证获胜？

4. 博奕双方轮流从原题的卡片袋中取出1、2或者3张卡片，但是双方相继两次所取卡片数之和决不能刚好等于4（这就是说，若一方取出3张，另一方就不允许只取1张卡片）。取出最后一张卡片，或者使对方无法取出卡片者为胜。谁能保证获胜？说明为什么（以及怎样获胜）。

5. *Nim* 博奕　博奕从几堆火柴开始。双方轮流从任何一堆火柴中喜欢取出多少就取出多少火柴，而且每次只能从一堆火柴中取出。取出最后的火柴的一方为胜。什么情况下先手能保证获胜？要获胜，他应当怎样取法？

6. **Wythoff** 博奕　博奕从两堆火柴开始。双方轮流或者从任一堆火柴中取出（正的）任意数量的火柴，或者从两堆火柴中取出相同数量的火柴。取出最后的火柴的一方为胜。在什么情况下，先手能保证获胜？为了获胜，他应当怎样取法？

7. 欧几里德博奕　博奕的每一方都选出一个正整数并秘密地记录下来。然后，在双方透露所选数（譬如说 a 和 $b(a\leqslant b)$）之前，掷硬币以决定谁作先手，先手再从较大的数减去较小数的任意倍数，改变数对(a, b)的值，产生新的数对(a', b')。不许出现负数。后手用同样的方法改变新数对（a', b'）的值，如此继续下去，先使所得数对的两数之一为零的一方为胜。什么情况下先手能保证获胜？为了获胜，他应当怎么做？

8. 十五博奕　人们从给九个一排的正方形标上数字1到9开

始，博奕双方轮流每次标出一个空白正方形。先占有三个其标出数字之和为15的一方为胜。哪一方能保证获胜？为了获胜，他应当怎么办？

9. 有效直尺博奕　博奕双方从没有刻度的一根（比如说）15cm长的木尺开始。双方轮流在直尺上的可测量整数厘米的十四个点之一作标记。最先得出可直接测量从1直到15cm的每一个整数厘米长度的"刻度尺"的一方为胜。哪一方能赢？

引伸问题的提示和参考文献

【提示】

1—3. 见参考文献8，*P*131—136。

4. 见参考文献8，*P*264—266。

5. 若果只有一堆火柴，先手立即能赢。探讨仅有两堆火柴的博奕可能有助于着手。见参考文献1，*P*42—44；文献7，*P*36—38；文献8，*P*137—154；文献9，*P*20和*P*103—105。

6. 见参考文献1，*P*62和*P*76—77；文献5，*P*101—105；文献6，*P*46—49；文献7，*P*39；文献9，*P*20和*P*105—112。

7. 见参考文献2，*P*41—42和*P*47—48；文献6，*P*1—4。

8. 你在其它地方已见到过从1到9的三个相加得15的数吗？见文献3，*P*116。

9. 对2cm长的木尺博奕进行分析，再分析3cm长的木尺博奕，如此等等，可能有助于着手解原题。此题的关键不在于一定要出现某一明显的模式！但是，这些更简单的问题将使你有机会发现一些策略，这些策略将帮助你分析更长的直尺博奕。见参考文献4，第十五章。

【参考文献】

1. E. R. Berlekamp, J. H. Conway and R. K. Guy Winning ways vol. 1. Academic Press, London, 1982.

2. A. Gardiner Infinite processes, Springer, New York, 1982.

3. M. Gardner Aha? insight, scientific American, New York, 1978.

4. M. Gardner Wheels, life, and other mathematical amusements, W. H. Freeman, New York, 1983.

5. R. Honsberger Ingenuity in mathematics, Mathematical Association of America, Washington, 1970.

6. J. Roberts Elementary number theory, MIT Press, Cambridge, MA, 1977.

7. W. W. Rouse—Ball and H. S. M. Coxeter Mathematical recreations and esays, university of Toronto Press, Toronto, 1974.

8. F. Schuh, The master book of mathematical problems with elementary solutions, Vol. 2, HoldenDay, San Francisco, 1967.

9. A. M. Yaglon and I. M. Yaglon, Challenging mathematica problems with elementary solutions, Vol. 2. HoldenDay. San Francisco, 1967.

1·4 1·2节练习解答

习题2 (i) B不能取出 3 张卡片，若B取出 2 张卡片，则A必定取 1 或 3 张卡片，那么B能获胜。若果B取出 1 张卡片，A必定取2或 3 张卡片，B仍然获胜。

(ii) 若果B取出 1 张卡片，那么给 A 留下 6 张卡片的袋，所以，A能使用(i)中 B 的策略，取出 2 张卡片而获胜。因而，B 要赢，就必须取出 3 张卡片，给 A 留下 4 张卡片的袋。那么，A就输了（为什么?）。

(iii) 若果 B 取走 2 张卡片，那么给A留下 6 张卡片的袋，所以A能使用(i)中B的策略，取出 1 张卡片而获胜。因而，若果 B 要想获胜，就更要设法取出 3 张卡片：然后 A 取出 1 张卡片（为什么?）。B 就输了。

习题3 (i)能。这正是练习 2(i)中 B 所作的。

(ii) 能。这正是练习 2(ii)中 B 的作法。

(iii) 练习 2(iii)已给出的答案是"不能"。但是，为了证实，你必须检验一下。若果先手取出 1 张卡片，会产生什么结果，那么将给后手留下 7 张卡片的袋，后手能使用练习 2(ii)中 B 的策略（即取出 3 张卡片）。

(iv) 仅取出 1 张卡片。那么练习 2(iii)表明，后手输了。

习题 4 (i)先手一方。能有。

(ii) 先手一方。能（这就是练习2(ii)）。

(iii) 先手一方。能（这就是练习2(i)）。

习题 5 (i)

袋中卡片数	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
获胜方	A	A	A	B	A	A	A	B	A	A	A	B	A

(ii) A。取出 3 张卡片：那么 B 成为有12张卡片的博奕的先手（处于不允许在第一次取出 3 张卡片的极为不利的条件下），而后手A总是能赢得这12张卡片的博奕。

(iii) B。B 总能设法给A 留下为 4 的倍数的卡片张数的袋，

若A为了设法防止出现这种情况，第一次取出2张卡片，那么B只取1张卡片（然后，A必定取出2或者3张卡片，而B分别对应地取出3或者2张卡片，就给A留下8张卡片的袋）。

(iv) B（使用(iii)中同样的策略）。A（取出3张卡片，给B留下有$996=4\times 249$张卡片的袋）。

第二章　韵律美到推理美

数学中没有白痴.

——D. 希尔伯特——

2·1　引言

一切精湛的数学都蕴含有奇妙之处。数学中的出乎意料而又能贯彻始终的模式，可算是最简单的奇妙之处。一些模式清楚地摆在你的眼前；另一些模式就远没有如此明显，在你花去一段时间最终解决了问题之前，你对它们可能毫无印像。有时仅管有足够的理由认为存在有模式，可是却根本求不出它（在2.3节第一个引伸问题中，你会发现它牵涉到所有三种模式）。

对于数学来说，简单地辨认出模式还不够。学生就能极为擅长于识别这类模式，但却不懂得，最有趣的数学来源于对艰深难懂的模式的锲而不舍的探索，起因于对这些模式为什么会存在的千方百计的解释。不仅能认识"韵律"而且也能洞察隐藏于其后的"推理"，那才算得上是一种数学美。

本章的小研究以及其后的引伸问题碰巧全都只牵涉到数，而且的确只是碰巧只涉及数，因为重要的不在于此，而在于这些问题全都是一些需要加以解释的奇妙现象。要弄清楚发生的现象，

每次都费不了多少时间，真正艰深奥妙的还是需要千方百计去发现它是怎样发生的，或者为什么会发生。

2·2 第二个小研究

问题 (i) 取一个三位数，它的首位和末位数字不同。

$$a\ b\ c$$

将这三位数的数字次序翻转，得出另一个三位数。

$$c\ b\ a$$

从两个三位数中较大的数减去较小的数，又得出一个新的三位数（若果得出二位数 ef，那么把它写成首位数字为 0 的三位数“$0ef$”）。

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ -\,c\ b\ a \\ \hline d\ e\ f \end{array}$$

再将新的三位数的数字次序翻转（若果新的三位数“$0ef$”的首位数字是零，那么翻转得出末位数字为 0 的三位数“$fe0$”）。

$$f\ e\ d$$

最后将新的三位数“$d\,e\,f$”和它的翻转数“$f\,e\,d$”相加，将得出什么答案？

$$\begin{array}{r} d\ e\ f \\ +\,f\ e\ d \\ \hline \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}$$

(ii) 另取一个三位数“abc”，重复同样的步骤。这次又得出什么样的答案？

(iii) 让你的朋友秘密地取一个三位数，仍然按(i)题中同样的指令行事，但要保证答案保密，而且在公布答案之前装着私下进行了计算。

(iv) 现在，设法弄清楚为什么总是得到同一答案 1089.

当你遇到这样一个游戏题时，不应该满足于仅仅把答案看作"奇妙的数"就够了。相反，应该总是千方百计地弄清楚为什么会出现这奇妙的数。我们将在下面的习题 3 里，回过头来考虑这问题.(在第Ⅱ篇中，你会发现，还有比你所见到的更多的奇特的"魔数")。

要弄懂上述问题中出乎意料的结果有什么意义，一种方法是通过考虑密切相关的问题，设法把它放到某种数学联系中去。习题 1 和 2 考虑了其它进制数（其它基底）中所出现的情况。习题 4 考虑了若果从二位数或者四位数着手，而不是从三位数着手，又会发生什么情况。习题 3 具有挑战性之处在于，要你说明你在上述问题中观察到什么，以及你在习题 1 和 2 中发现了什么。

对于其它进制（其它基底）的数的算术运算，你可能没有多少实践经验。所以有必要先介绍有关基底的一两个要点知识。其基本思想十分简单。例如

$$二百零六 = 2\times10^2+0\times10+6。$$

所以，简记为

$$二百零六 = 206（基底10）。$$

但是，

$$\begin{aligned}二百零六 &= 2\times9^2+4\times9+8\\ &= 248（基底9）\end{aligned}$$

这样看同样正确.

进行基底 9(9 进制)的加、减运算时，只需简单地摸仿十进制的情况：仅有的区别是在基底 9 中，不是逢十进位，而是按九的倍数进位。例如8＋3＝12（基底 9),27（基底 9）＋63（基底9）＝101（基底9）。

习题 1 本题是前一问题的直接摸仿。不过这次所有的都是九进制数。

(i) 取一个三位数(基底 9)

248(基底9)

将这数的数字次序翻转,

842(基底9)

由较大数减去较小数,

$$\begin{array}{r} 842 \\ -248 \\ \hline 583 \end{array} \quad (\text{基底}9)$$

将答案的数字的次序翻转,再相加,又得出什么答案?

$$\begin{array}{r} 583 \\ +385 \\ \hline \underline{\qquad} \end{array} \quad (\text{基底}9)$$

(ii) 在九进制中的答案怎样与十进制中的答案一致呢?

习题 2 在基底 7 的数制中,你预料会得出什么答案?重复做习题 1,不过这次用的是基底为 7 的三位数,得出的答案与预期的一致吗?

为什么在原问题中数1089会不断地被提到?你即使难以作出解释也应该感觉到,早就该作出解释了。如果你想设法圆满地给出原问题的(iv)小题的答案,那么就应该依据你在习题 1 和 2 中所得出的结果对这答案进行修正。

习题 3 (i)数1089 是原问题(基底10)的唯一可能的答案吗?如果是这样,那么说明为什么,如果不是,那就完整地列出所有可能的答案。

(ii) 就(i)小题的答案，写出在基底 9 中的对应答案，这个结果可解释你在习题 1 的解答吗？

(iii) 就(i)小题的答案，设法写出基底 b 的对应答案，这将揭示出在基底 b 中（对任何数值 b）所产生的结果吗？

要给出习题 3 所要求的一种解释或者证明可能有困难，每当出现这种情况，就去寻找一个可利用的同类问题，这总是有价值的。

习题4 (i) 重复做以10为基底的原问题，不过，这次从二位数“ab”开始，将得出什么答案？无论从怎样的二位数开始，都会得出同一答案吗？若是这样，说明为什么；若不是这样，那就完整地列出所有可能的答案，并解释答案为什么没有遗漏。

(ii) 如果在习题 3(i)中，你难以说明为什么数 1089 是唯一可能的答案，那么设法更改你在上述二位数字的问题中所作出的解释，从而改进你对习题 3(i)的原有答案。

即使习题 3 对于你来说毫无困难，那也要继续询问一下，为什么原问题要从三位数开始，而不是二位数、四位数，或者二十一位数？你可能认为，二位数的问题难以有效地体现出一种技巧，就因为在习题 4 中出现的数99显得有些特殊。可是在最终放弃原问题之前，研究从四位数着手时，会发生什么情况，还是值得的。

习题5 重复做基底10的原问题，不过这次从四位数“$abcd$”着手，将会得出什么答案？重复若干次，每次都从不同的四位数

着手，你总是得出同一答案吗？完整地列出一切可能的答案，并设法证明，你的答案是没有遗漏的。

在第Ⅱ篇里，读者将再一次看到这类翻转数。

2·3 引伸问题

1. 图2·1给出巴斯卡三角形和一种变化了的形式。三角形中的每一项都是它正上方的两数之差。这一数字三角形有什么样的有趣特性？你能对多少条特性作出解释？

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 0 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \\
 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \\
1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 1
\end{array}
$$

图 2.1

2. 下面是一个简单程序，执行这一程序会得出什么结果？

步骤1. 选一个四位数（譬如说7380）

步骤2. 重排这个数的四个数字，尽可能得出最大的数（8730），然后得出尽可能为最小的数（0378）

步骤3. 由大数减去小数，得出一个新的四位数（8730－0378＝8362）

步骤4 对于新的四位数重复步骤1和2（8632－2368＝6264）

继续执行这一程序，直到出现一些有趣的结果。再试另一个四位数，设法推断，在一般情况下会产生什么结果，而且需要执行

程序多少次。然后证明你的推断。

3. 有一个著名的"数学魔术"，其进行过程如下：

魔术师：任选一个小于一千的数，而且把它秘藏于心里。

观众：（心里想：72）

魔术师：我所要你告诉我的仅是用7、11和13去除你想的数，所得的三个余数 r、s 和 t，然后我就能说出你所想的数。

观众：$r=2$，$s=6$，$t=7$。

魔术师：（心里想：$715r+364s+924t=715\times2+364\times6+924\times7=10082$，减去 $7\times11\times13=1001$ 的最大可能的倍数，如像 $10082-10\times1001=72$ 所给出的结果）你想的数是72。

诀窍为什么正好以这种形式出现，这点并不清楚。除数7、11、13较小，比较方便，但是，你所用以推算出原数的"译码"数 $a=715$，$b=364$，$c=924$ 都太大，计算很不方便。因此，有两条极好的理由来说明，为什么有必要找出同一诀窍的更简单的形式。第一，诀窍所依据的原理是非常一般的原理。通过观察在简单的实例中所发生的情况，就可发现这原理。第二，如果你用译码数完整地进行心算，诀窍应当非常有效。下面的（i）和（ii）题叙述了原诀窍的两种简单形式。在(i)题里，给出了三个译码数 a、b、c，要想方设法发现这些数是怎样选出来的，并用以求出(ii)题中的译码数。反复练习上述两条诀窍，直到你每次都能进行必要的心算为止，再与你的朋友试验一下。

(i) 魔术师：选一个小于一百的数，而且把它秘藏于心里。

观众：（心里想73）

魔术师：我所要你告诉我的只是用2、3和17去除你所想的数，所得的三个余数 r、s、t，然后我就能说出你想的数。

观众：$r=1$，$s=1$，$t=5$。

魔术师：（心里想：如果我选取三个译码数$a=51$，$b=34$，$c=18$，那么，无论r、s、t是什么数，将数$N=ar+bs+ct$用2、3和17去除时，一定得出余数r、s和t。如果$r=1$，$s=1$，$t=5$，则$N=51\times1+34\times1+18\times5=175$，由这个数减去$2\times3\times17=102$的可能的最大的倍数，得$175-1\times102=73$）。你想的数是73。

（ii）魔术师：任选一个小于一百的数，而且把它秘藏于心里。

观众：（心里想：74）

魔术师：我所要你告诉我的只是用3、5和7去除你想的数，所得的三个余数r、s、t，然后我就能说出你想的数。

观众：$r=2$，$s=4$，$t=4$。

魔术师：（心里想，我需要有三个译码数a、b、c，使得$N=ar+bs+ct$分别被3、5和7除时，所得的余数总是r、s和t，而且无论r、s和t取值如何都如此。那么，让我们考虑……，好了，想出了！这种情况下，有$N=2a+4b+4c=284$，由284减去$3\times5\times7=105$的尽可能大的倍数，得出$284-2\times105=74$）你想的数是74。

4.（i）任选一个三位数，譬如说327。它的首位和第二位数字相差1，它的二、三位数字相差5，它的三位和一位数字相差4，用这一方法，可得出一个新的三位数154。反反复复地重复这一步骤。得出一个数列

327→154→413→321→112→011→101→110→……

到这里，你还是停止为好。为什么？

（ii）从数508开始重复上述步骤。并对大量的其它三位数试试，你发现什么？你能解释这是为什么吗？

（iii）从一些二位数开始，用同一步骤试试，你发现什么？

你能解释吗？你的解释对三位数也有效吗？

（iv）关于四位数又如何呢？五位数呢？如此等等。

（v）叙述你认为在一般情况也成立的结论。但是不要到此为止！接下去要么设法证明你的猜测是正确的，要么找出反例，它说明你的猜测有时会导致错误。

5．任选一个你想选的任意位数的数，譬如说654321，将每个数字平方，并求出所有平方数之和：$6^2+5^2+4^2+3^2+2^2+1^2=91$。用这一方法得出新数91，再对新数91施行同样的步骤：$9^2+1^2=82$。反反复复重复这一步骤，产生一数列：

$$654321\to91\to82\to68\to100\to1\to1\to\cdots\cdots$$

到这里应该停止了。

（i）对1到9的每一个数，采用同一程序，它们之中的哪些会产生以一长串1结尾的数列？由其它的数所得出的数列又有什么共同之处？

（ii）从10到99中的每一个数开始验证。每一个数都能导致（i）题中的两种类型的数列之一吗？

（iii）若果你总能证明，由大于或等于100的数开始，每一个都产生一个数列，这数列最终会有一个小于或等于99的数，那么你就能断定，每一个数列都将以这两种方式之一结尾。你能对大于或等于100的每一数开始进行检验吗？（初看起来这似乎是毫无可能之举，但真是这样吗？）

6．像7、121、33、76567这样的数，顺读倒读都一样，称为"迴文数"。

（i）从687（基底10）开始，翻转数字的次序得出新数；将新数与开始数相加，你的答案是什么？它是迴文数吗？

再把这个新数作为开始数，翻转它的数字的次序，并同前面

一样相加，将得出什么样的答案？它是迴文数吗？再一次重复这一程序，这次应该得出一个迴文数。

(ii) 从数79（基底10）开始，重复同一程序，你最终会得出迴文数吗？这要重复多少次才行呢？

(iii) 大多数二位数至多重复两次就产生迴文数。求出例外情况，它们需要重复多少次？

(iv) 有一个二位数需要重复20次以上才产生迴文数，它是什么数？它需要重复多少次？

(v) 对于100到149之间的数又会怎么样？这些数中任何一个都需要重复两次以上吗？

(vi) 对于150到199之间的数又怎么样？这些数中的哪个数产生迴文数需要重复最多的次数？(你应该能够在计算出它实际需要重复的次数之前识别出这个数)

(vii) 二位数89要产生回文数所费时间长得令人诧异。它比其它任何二位数都费时得多。如果你轻视了(vi)题中的忠告，那么就会发现，数196更是迟迟难以得出迴文数，甚至你会开始怀疑这程序是否最终一定能产生迴文数。怎样才能证明，它总会产生迴文数？或者有时就会不产生迴文数？(或许196最终仍会产生迴文数，但是怎样才能证明它必定产生迴文数呢？)没有容易的解答。但是你一开始怀疑这程序并不总是有效时，那就值得广为寻找支持你的怀疑的，或者对你的怀疑进行挑战的证据。你应向何处去寻找呢？

(viii) 毫无迹象说明我们的程序仅对十进制（以10为基底）的数成立，而对其它进制（其它数为基底）的数不成立。为什么不用其它基底的数对它进行试验呢？最简单的基底是什么呢？对二进制（以2为基底）的一切一位数，二位数，三位数，四位数，

五位数进行试验，第一个需要重复两次以上的程序才产生迴文数的数是什么呢？它需要重复多少次才行呢？下一个数比它要多重复一次。再后面的一个数本身就是迴文数，但是，更后面的数又怎样呢？仔细观察它所产生的数列。

7. 一些分数是有限小数。例如，$\frac{1}{2}=0.5$.其它所有的分数为循环小数，即以若干数字的节（循环节）无限地重复下去的小数，例如，$\frac{1}{11}=0.0909090\cdots$。对于循环小数 $\frac{1}{11}=0.0909090\cdots$，$\frac{12}{110}=0.10909090\cdots$，$\frac{10}{11}=0.9090909\cdots$，在某种意义上它们都恰好有同一循环节“09”（或者，若果你愿意也可以是“90”）。类似地，对于循环小数$\frac{1}{7}=0.1428571428571\cdots$，$\frac{3}{7}=0.4285714285714\cdots$，$\frac{2}{7}=0.2857142857142\cdots$，都有无限重复的循环节“142857”(或者“428571”，或者“285714”)。

(i) 求出分母为11的分数的一切不同的循环节。你应该发现，恰好有五个不同的循环节，而且在这五个循环节中每一个数字 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 都恰好只出现一次。

(ii) 现在，求出分母为21的分数的一切不同的循环节。考察你求出的结果，然后猜测一下，若果要求分母为31的分数的一切不同循环节时，你预料会有什么结果？验证你的猜想，必要时可多次进行修正，直到你的猜想与事实相符合为止，然后设法证明你的猜想成立。

(iii) 分母为 9 的分数仅有的循环节是“1”，“2”，“3”，“4”，“5”，“6”，“7”，“8”$\left(\frac{9}{9}=0.999999\cdots=1\right.$，所以$\frac{9}{9}$为有限小数$\left.\right)$。

于是，对于分母为 9 的分数，每一个数字1，2，3，4，5，6，7，8都仅在循环节中出现一次，而数字 0 和 9 根本不会出现在循环节中。因此不能期望这一模式对其它分母成立，如像对分母11，21，31，…成立。但是有没有类似的模式呢？（你必须考虑哪样的一些分母呢？一旦你决定集中考察那一些分母，那就要一直试验到你认为你已经领悟了所发生的事情为止，然后再设法证明它）。

引伸问题的提示和参考文献

【提示】

2．参看文献 5，P73和P78—80；文献 8，P65—73 ．

3．参看文献 1，P31—37；文献 7，P7—8．

4．（v）假设开始的数 N_1 有 d 位数字，而且你利用已给程序得出一个相当长的数列：

$$N_1 \to N_2 \to N_3 \to N_4 \to N_5 \to \cdots\cdots$$

这数列的每一项都有 d 位数字，你能用某种方法证明如下一点吗？即N_1中最大的数字最终几乎总是变为较小的数字。这一结果有何帮助呢？参看文献 5，P73—74和P80—84；文献 6，P160和P299．

5．参看文献 3，P23—35；文献 5，P74和P83—84；文献6，P161和P299—300．

6．（iii）实际上需要将程序重复两次的第一个二位数是哪一个？这数后面紧接的九个数和你已经研讨过的数完全一样。所以，你必须试验的第二个二位数是什么？实际上，你可以仅仅对八个二位数进行试验，就找出一切例外情况。那么，有哪些例外情况呢？

(v) 需要将程序重复一次以上的第一个这样的数是什么？你真要对它进行试验的下一个这样的数又是什么？

(viii) 特别仔细地观察数列中的第5，第9，第13等项。你能证明这一规律能继续下去吗？参看文献4，P242—244。

7. (ii) 要做到这点，必须识别是什么决定了在两个循环节中都出现的同一数字是“没有区别的”，或者是“有区别的”。在 $\frac{1}{21}=0.476\underset{\sim}{1}90476190\cdots$ 中的循环节中的数字“1”为什么会与 $\frac{4}{21}=0.\underset{\sim}{1}904761904761\cdots$ 中的数字“1”一样，恰好导致同一循环节“190476”？在这两个节出现的数字“1”与在 $\frac{3}{21}=0.\underset{\sim}{1}428571428571\cdots$ 的循环节中出现的“1”的差别是什么？

(iii) 为什么不值得为形如 $10\times n$ 的分母费心？你有理由可不加以考虑的其它分母又有哪些？因此你又只须致力于考虑哪样一些分母呢？参看文献2，P34。

【参考文献】

1. A. H. Beiler Recreation in the theory of numbers. Dover, New York, 1966.

2. T.Beldon Recurring decimals. Mathematics teaching 70, 1975.

3. J. K. Bidwell Some functions on the digits of a number. Maths in School 11, 1982.

4. M. Gardner Mathematical circus Pelican, Harmondsworth, Middx, 1981.

5. R. Honsberger Ingenuity in mathematics, Mathematical Association of America, Washington, 1970.

6. B. A. Kordemsky. The Moscow Puyyle. Pelican, Harmondsworth, Middx, 1975.

7. W. W. Rouse—Ball and H. S. M. Coxeter, Mathematical recreation and essays university of Toronto Press, Toronto, 1974.

8. P. J. van Albada and J. H. van Lint, On a Recurring Process in Arithmetic Nieuw Archief voor Wiskunde (3), IX, 1961.

2·4　2·2节习题解答

习题 1　(i) 1078(基底 9)(当然，若果不从迴文数开始，在迴文数的情况，你将得出的答案是000(基底 9))。

习题 2　1056(基底 7)。是一致的。

习题 3　(i) 是唯一可能的。若果 $a>c$，那么 $abc-cba=(a-c)\times10^2+(c-a)=(a-c-1)\times10^2+9\times10+(10+c-a)=def$，所以 $d=a-c-1$，$e=9$，$f=10+c-a$。于是 $def+fed=[(a-c-1)\times10^2+9\times10+(10+c-a)]+[(10+c-a)\times10^2+9\times10+(a-c-1)]=1089$(基底10)。(另一方面，舍去9可证明，$abc$和 cba 用 9 去除时，所得的余数相同，所以，$abc-cba=def$ 是 9 的倍数。但是，中间的数字 e 等于9，所以 $d+f$ 是 9 的倍数。因为显然不可能有 $d=f=9$，于是必有 $d+f=9$。同时又有 $def+fed=(d+f)\times10^2+2e\times10+(d+f)=1089$)。

(iii)在(i)中给出的两种证明方法对任何基底 b 都有效。还可证明，总能得出答案 $1\times b^3+0\times b^2+(b-2)\times b+(b-1)$。

习题 4　(i) 99。是的。若果 $a>b$，则 $ab-ba=(a-b)\times10+(b-a)=(a-b-1)\times10+(10+b-a)=cd$，所以 $cd+dc=$

$=99$。

习题5 根据你开始的数 $abcd$ 的情况，有五种可能的答案。(a) 若果 $abcd$ 是迴文数($a=d$ 且 $b=c$)，那么答案显然为 0000。(b) 若果 $a=d$ 而 $b>c$，则 $abcd-dcba=0\times10^3+(b-c-1)\times10^2+(10+c-b)\times10+0=efgh$，且 $efgh+hgfe=0990$。(c) 若果 $a>d$ 且 $b=c$，则 $abcd-dcba=(a-d-1)\times10^3+9\times10^2+9\times10+(10+d-a)=efgh$，且 $efgh+hgfe=10989$。(d) 若果 $a>d$ 且 $b>c$，则 $abcd-dcba=(a-d)\times10^3+(b-c-1)\times10^2+[9-(b-c)]\times10+[10-(a-d)]=efgh$，且 $efgh+hgfe=10890$。(e)若果 $a>d$ 且 $b<c$，则 $abcd-dcba=(a-d-1)\times10^3+(10+b-c)\times10^2+(c-b-1)\times10+(10+d-a)=efgh$，且 $efgh+hgfe=9999$。

第三章 洞彻事理

> 当人们向牛顿请教他的研究方法时，要不是他一惯时问题都总是反复地深思熟虑就难以给出如下答复，……科学家和艺术家全都推崇坚持不懈的艰苦劳动。
>
> ——E.马赫《发明与发现的机遇》

3·1 引言

“问题在何种情况会不算问题?”回答只能是“当它过于简易时”。但是，在实践中，遇到不熟悉的，或者稍微有点迷惑不解的问题，学生（也有其它人）都容易采取回避态度，因为它们似乎太难了。这第三个小研究中的问题可能就会引起许多学生产生这类反应。我们完全理解这一点，因为，之所以产生这类反应是基于对数学含意的误解。对此我将简要地加以解释。

多数人学习数学时，都把数学看作一套一套的标准方法。在解标准问题时可按固定方式套用这些方法。这样，方法就是重要的。而且，如同运动员和乐师一样，数学学生为了发展其方法就必须进行基本训练。但是，运动员为比赛而训练，乐师为演奏乐曲而练琴。同样，数学家以解难题的方式为“研究数学”而需要方法。

乍看起来，一首新曲可能像一堆杂乱无章的音符。然而，当

乐师一次一节地演奏时，它逐渐显露出先前被忽视的内在联系，展示出它自身的优美旋律。这一点同样适用于陌生的数学问题。初初看到一个陌生的数学问题，你甚至可能不理解其含意，如堕雾中。但是，当你煞费苦心地弄懂它时，你就会发现，迷雾开始逐渐消散。

当人们努力设法解一个从未遇到过的问题时，刚开始会感到困惑。这样的感受决不仅仅限于初学者。它是数学本性的一部分，也是人类研究数学途径中的必然现象。数学巨匠高斯常“告诉他的朋友，如果其它人也能像他那样深入并持之以恒地思考数学真理，那么他们也会作出他那样的发现。高斯说，他经常夜以继日地沉思一项研究而找不出解答，只是在不眠之夜之后，他才终于弄清问题的解法”(《C. F. 高斯：科学巨人》G. N. Dunnington，纽约哈夫纳出版公司，1955)。

3·2 第三个小研究

一些语句具有对它本身精确地加以描述的奇妙性质，请看下面语句：

这句子含有三十六个字母（This sentence contains thirty six letters）。

这句子用了三十个符号（This sentence uses thirty symbols）。

编造这类语句纯粹像游戏，与研究数学毫不相关。然而，造句时务必要用到的思维类型却相当数学化。构造专门的，能描述其自身的（数学）语句的方法对20世纪期间数学的某些重大发展曾产生过影响。第三个小研究就从一个这样的游戏题开始。读者在阅读这游戏题后的正文之前，应努力完完全全地解答它。

问题 一个有八个整数的数行

n_0, n_1, n_2, n_3, n_4, n_5, n_6, n_7

具有性质：

n_0 = 这数行中数 0 出现的次数；

n_1 = 1在这数行中出现的次数，

如此等等。求这数行，你求出的数行是合乎题意的唯一的数行吗（若果是，说明理由，若果不是，求出其它的解答）？

这问题的叙述方式易使人把它看成一个孤立的游戏题。然而，有一系列的理由说明，值得考虑考虑另外的同类游戏题。也许你发现这游戏题是如此含糊困惑，以至你压根儿不能解出它，或者，你业已成功地求出了一个这样的数行，但是却不能令人信服地证明它是唯一可能的解。这两种情况都值得去考虑一个同类问题的更简单的变形。然而，即使你设法完整地给出了问题的解法，你作为一个数学家也应该对这一事实多少感到好奇：为什么求的是 8 个整数的数行，而不是 7 个，或者 9 个，或者 634 个整数的数行呢？因此，我们将以考虑同类问题的最最简单的形式开始进行研讨，而且还将问一问，是否可能构造出具有同样性质的，但数字更少的数行？

习题1 求只有一个整数n_0的数行，它具有性质：n_0等于 0 在这数行中出现的次数。

习题2 求刚好有两个整数n_0和n_1的数行，它具有性质：n_0是数行中 0 出现的次数，n_1是 1 出现的次数。

习题3 求有三个整数 n_0、n_1 和 n_2的数行，它具有性质：n_0是数行中 0 出现的次数，如此等等。

此刻，你或许已经开始怀疑，原问题要求所求数行有8个整数，是否有充足的理由．尽管如此，在匆忙下结论之前，似乎还应当再继续考虑数字稍微多点的数行。

习题4 求一切可能的有四个整数n_0，n_1，n_2和n_3的数行。它具有性质：n_0是数行中0出现的次数，如此等等（至少有两个不同的数行！）。

好了，到了现在，你可以怎么做呢？毫无疑问，可以无终止地，一次增加一个数地继续下去，而且满怀希望，希望能先求出有5个整数的所有数行，然后求出有6个整数的所有数行，如此等等。或许，你运气好，会纯属偶然地发现某种模式．但是，你更有可能一开始就弄错，因为随着数行的长度增加，求出一切可能的数行会变得愈来愈困难，而且也更加难以保证不会有遗漏。

这时，你应该换一种什么样的方式去做？你无能怎么做，都应该始终注意一般原则，始终注意那些新见解。你最终会认定，求出一切有5个数的数行，一切有6个数的数行，毕竟是一个好主意．但是，在这样做之前，你可能需要有一些能简化计算的新思想。下一习题建议读者回过头去，从新的角度审视原问题，探索它的解法，以便能寻求这类新思想。

习题5 设n_0，n_1，n_2，n_3，n_4，n_5，n_6，n_7是未知的具有同样性质的8个整数的数行。因此，每一数n_i“计算出”数i在数行中出现的次数。

(i) n_4，n_5，n_6和n_7都能为零吗？

(ii) n_4，n_5，n_6和n_7有多少个可以不为零？

(iii) n_4，n_5，n_6和n_7中那些数$\geqslant 2$？

(iv) 现在已经知道 n_4，n_5，n_6 和 n_7 中确有一个等于 1。因此 $n_1 \geqslant 1$。实际上，n_1 能等于 1 吗？

(v) 假如 $n_1 = 2$，那会得出什么结果？能有 $n_1 = 3$ 吗？能有 $n_1 \geqslant 4$ 吗？

你可能已经察觉到，习题 5 中所用的一些思想仿佛也适用于任何数行，而不管这数行有多长.

习题6 设 n_0，n_1，n_2，…，n_{99} 是具有同样性质的 100 个整数的数行，即每一 n_i 都等于数"i"在数行中出现的次数。

(i) n_{50}，n_{51}，n_{52}，…，n_{99} 能全为零吗？

(ii) n_{50}，n_{51}，n_{52}，…，n_{99} 中有多少个能大于或等于1？

(iii) n_{50}，n_{51}，n_{52}，…，n_{99} 中哪些能大于或等于 2？

(iv) 关于数 n_0，能指出些什么？对于数 n_1，又能指出些什么？

(v) 关于数 n_2，n_3，…，n_{49}，究竟又能指出什么呢？

对于任何这样的数行，你似乎应该能够弄清楚它后半行的各数，而且对于数行为首的第一个数应知道得更清楚。然而，到目前为止，对于数行的前半行的其它数是什么样的数，你却所知甚少。因此，有极为充分的理由值得立刻回到前面的系统性的探索上去，这系统探索在习题 4 之后就毫无道理地被中断。现在，你已经发现了一些使计算相当简易的一般方法，而且还知道了一些必须知道的特殊事项。例如，数行的后半行的那一个数能等于1？每一数行的前半行是些什么样的数？

将一种新方法应用于你已采用另外的方法解决了的问题，通

常都是检验新方法的有效办法。所以，为什么不去完完整整地求出有四个整数的一切可能的数行呢！

习题7　设 n_0，n_1，n_2，n_3 是未知的有 4 个整数的具有同样性质的数行。

(i) n_2 和 n_3 二者都能为零吗？

(ii) n_2 和 n_3 二者都能 $\geqslant 1$ 吗？

(iii) 证明，若果 $n_3 \geqslant 1$，则 $n_2 = 0$ 且 $n_3 = 1$。然后求n_0和n_1。

(iv) 证明，若果 $n_2 \geqslant 1$，则 $n_2 = 1$ 或者 $n_2 = 2$。

(v) 当 $n_2 = 1$，求 n_0、n_1；当 $n_2 = 2$，求n_0、n_1。

习题8　设 n_0，n_1，n_2，n_3，n_4 是具有同样性质的 5 个整数的数行。

(i) 有无明显的理由说明，n_3 和 n_4 不能都为零。n_2，n_3 和 n_4 都能为零吗？

(ii) n_2，n_3和n_4中有几个能同时$\geqslant 1$？

(iii) n_3 还是 n_4 能$\geqslant 2$？能有 $n_2 \geqslant 2$ 吗？

(iv) 能有 $n_4 = 1$吗？能有 $n_3 = 1$ 吗？能有 $n_4 = n_3 = 0$ 吗？

习题9　设 n_0，n_1，n_2，n_3，n_4，n_5是具有同样性质的 6 个整数的数行。

(i) n_3，n_4和n_5都能为零吗？

(ii) n_3，n_4和n_5中有多少个能同时$\geqslant 1$？

(iii) n_3，n_4和n_5中有哪些能$\geqslant 2$？

(iv) 能有$n_5 = 1$吗？能有$n_4 = 1$吗？能有$n_3 = 1$吗？

现在，你可能认为，即便不太动脑筋也能求出一切有 7 个数的数行。但是，还是聚精会神的好。因为，到目前为止尚无任何

一般模式的迹象，而且你已经知道的确还需要求具有同样性质的8个整数的数行，所以数行的数必然还要增加。

习题10 设n_0，n_1，n_2，n_3，n_4，n_5，n_6是具有同样性质的7个整数的数行。

(i) n_4，n_5和n_6都能为零吗？n_3，n_4，n_5和n_6都能为零吗？

(ii) n_3，n_4，n_5和n_6中有多少个能同时$\geqslant 1$？

(iii) n_4，n_5和n_6中哪些能$\geqslant 2$？能有$n_3 \geqslant 2$吗？

(iv) 能有$n_6 = 1$吗？能有$n_5 = 1$吗？能有$n_4 = 1$吗？能有$n_3 = 1$吗？

(v) 写出一切可能的数行n_0，n_1，n_2，n_3，n_4，n_5，n_6。有多少个不同的数行？

读者在习题10中求出有7个整数的数行，在习题5中求出有8个整数的数行之后，可能认为，已经能够看出这两个数行之间的某些内在联系，但是对这些联系还心存疑虑。因此，求出一切有9个整数的数行，以及10个整数的数行，以验证这种联系，将是明智之举。

习题11 设n_0，n_1，n_2，n_3，n_4，n_5，n_6，n_7，n_8是具有同样性质的9个整数的数行。

(i) 试猜测一下，在你求合乎题意的一切可能的数行时，会求出什么样的数行？

(ii) 然后，利用习题10中同一方法认真进行计算，看看你的猜测是否正确。

习题12 (i) 基于习题10和11的经验，推测一下，在你求具

有同样性质的10个整数的一切可能的数行时，你可能求出什么样的数行？

(ii) 然后，认真进行计算。你的推测对吗？

习题13 你是否认为，你已经懂得怎么继续往下作。按照图3·1，依次写出你已经求出的具有7、8、9、10个整数的数行

	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9
7个整数的数行										
8个整数的数行										
9个整数的数行										
10个整数的数行										

图 3.1

现在，你应该感觉到，你已经知道怎么继续往下做。但是，究竟怎么保证能永远按这一模式做下去，而且对每一长度 ≥7 都只有一个数行呢？你应当自己解决这个问题，而且经过长期思考，也应该能解出最后两个习题。

习题14 设 n_0，n_1，n_2，…，n_{2m-1} 是 $2m\geqslant 8$ 的偶数长度的数行。

(i) n_m，n_{m+1}，…，n_{2m-1} 能都为零吗？n_m，n_{m+1}，…，n_{2m-1} 中能有多少个同时≥1？n_m，n_{m+1}，…，n_{2m-1} 中哪些能≥2？

(ii) 能有 $n_{2m-1}=1$ 吗？能有 $n_{2m-2}=1$ 吗？能有 $n_{2m-3}=1$吗？

(iii) 能有 $n_{2m-4}=1$吗？若果 $n_{2m-4}=1$，那么数“2m－4”在数

行中必定只出现一次，它出现在何处呢?若果 $n_{2m-4}=1$，那么数“1”在数行中至少出现一次。所以 n_1 必须是什么样的数？这足以决定整个数行吗?

(iv) 现在你必须研究余下的仅有的可能性：即数 n_m，n_{m+1}，n_{m+2}，…，n_{2m-5} 之一不为零。

习题15 设 n_0，n_1，n_2，…，n_{2m} 是奇数长度≥7 的数行。改进习题14所提出的方法，并用以证明，对于 m 的任一值，确有一个这样的数行。

若果你善长于代数变换，你就会乐于找出一个简单的代数证明，用以证明，对任何长度≥7，都仅可能有一个数行。

部分习题的提示

5. (i) 假设它们全都为零。这会使 n_0 有多大?

(ii) 若果 n_4 不为零，那么数行中确有出现 4 次的数。若果 n_4 和 n_5 都不为零，那么会出现什么错误?

14. (iii) 数“$2m-4$”能作为 n_1 的值出现吗?它能作为 n_2 的值出现吗？它一定是什么样的数？为什么不能有 $n_1=1$ 呢?

(iv) 在数行的后半行里，仅有一个数不为零，而且它必定是某一 n_{2m-4-k}，其中 $k\geq 1$。其次，因为 $n_{2m-4-k}=1$，所以数“$2m-4-k$”在数行的前半行确实出现一次，那它一定在何处出现呢？这时，再观察数行的前半行。前半行中有多少个零？设 j 是 $\leq m-1$，且使 $n_j\neq 1$ 的最大数，那么在数行中必有出现 j 次的数。在 n_0 和 n_j 之间仅有 $j-1$ 个空隙可填进数，利用这一事实证明，$n_1=j$，从而求出 j。

3·3 引伸问题

1. 你能否构造一个无限的整数数行

$$n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4,\ n_5,\ \cdots,\ n_k,\ \cdots$$

它具有性质：每一 n_i 都计算出数"i"在数行中出现的次数？

2. 打算将图3·2中的数字三角形永远扩展下去，使添入的每个数都等于它上面一行的正上方的三个数字之和。第二行以后的各行都至少含有一个偶数吗？

3. (i) 证明，为至少有4项的，0和1的数列中，总有某些数字，或者某些数字串连续出现两次。

(ii) 你能否构造一个0和1的任意长的数列，数列中没有一个数字，也没有一个数字串连续出现三次？若果你认为你能办到，那么证明，你构造的数列具有所需求的性质。若果你判定你做不到，那就说明为什么。

(iii) 你能否构造0、1、2和3的任意长的数列，在数列中没有一个数字，也没有一个数字串连续出现两次？

(iv) 你能否构造0、1和2的任意长的数列，数列中没有一个数字，也没有一个数字串连续出现两次？

4. 从任何一个已有的数行 $n_0,\ n_1,\ n_2,\ n_3,\ n_4, n_5, n_6, n_7$ 开始，然后按如下要求逐步改造你的数行。

(1) 重要规定 n_0：n_0 = 在"—，n_1，n_2，n_3，n_4，n_5，n_6，n_7"这一数行中数字0出现的次数；

(2) 重新规定 n_1：n_1 = 在"n_0，—，n_2，n_3，n_4，n_5，n_6，n_7"这一数行中数字1出现的次数；

(3) 重新规定 n_2：n_2 = 在"n_0，n_1，—，n_3，n_4，n_5，n_6，n_7"这一数行中数字2出现的次数；

(4) 重新规定 n_3：n_3 = 在"n_0，n_1，n_2，—，n_4，n_5，n_6，

n_7” 这一数行中数字 3 出现的次数；

（5）重新规定 n_4：n_4＝在“n_0，n_1，n_2，n_3，—，n_5，n_6，n_7” 这一数行中数字 4 出现的次数；

（6）重新规定 n_5：n_5＝在“n_0，n_1，n_2，n_3，n_4，—，n_6，n_7” 这一数行中数字 5 出现的次数；

（7）重新规定 n_6：n_6＝在“n_0，n_1，n_2，n_3，n_4，n_5，—，n_7” 这一数行中数字 6 出现的次数；

（8）重新规定 n_7：n_7＝ 在“n_0，n_1，n_2，n_3，n_4，n_5，n_6，—” 这一数行中数字 7 出现的次数。

一再重复这一系列步骤，直至得出一个不变的数行为止。（例如，若果从数行“99，43，76，181，6，17，29，62”开始，那么在完成(1)—(8)的系列步骤一遍之后，应得出“0，3，2，1，0，0，1，0”；再完成两遍，就会得出你熟悉的数行。你再继续实施同一系列步骤，数行都不会改变）。无论你从怎样的数行开始，这程序都一定“收敛”到一个不变的数行吗？这最后的“不变的”数行就是3·2节中问题的解吗？这程序能改进吗？

1

1 1 1

1 2 3 2 1

1 3 6 7 6 3 1

1 4 10 16 19 16 10 4 1

· · · · · · · · · · ·

图 3.2

引伸问题3的参考文献

3. *A·M·Yaglom and I·M·Yaglom*高难度问题的初等解法，卷2 *P*12和*P*90—98。

3·4 3·2节习题解答

习题1 不可能有这样的数行（因为n_0为数行中"0"出现的次数。所以n_0不能为0，而且也不可能大于零，否则"0"将出现在数行里）。

习题2 不可能有这样的数行（同上题一样，n_0不能为0。而且若果$n_0=1$，则"0"必定出现在数行中，所以$n_1=0$。这与"1"总是会在数行中出现的假设矛盾）。

习题3 不可能存在这样的数行（n_0不能为0。若$n_0=1$，则n_1不能等于1，所以$n_1=2$。然则，$n_2\geqslant1$，这与假定"0"在数行中出现的事实矛盾。最后，若$n_0=2$，则$n_2\geqslant1$，且数行里没有出现两个零的空位）。

习题4 n_0不能为0。首先假定$n_0=1$，则$n_1\geqslant1$且n_1不能等于1，所以$n_1=2$或者$n_1=3$。但是n_1不能等于3，因为具有三个1和一个3的数行就再没有0的位置，这与$n_0=1$矛盾。因此$n_1=2$。所以数行包含一个0，两个1且至少有一个2。因此，$n_0=1$，$n_1=2$，$n_2=1$，$n_3=0$。其次假设$n_0=2$，则$n_2\geqslant1$。若$n_2=1$，则$n_1\geqslant1$。既然每一个n_i计算出数"i"在数行中出现的次数，那在数行中的确总共有四个数，所以$n_0+n_1+n_2+n_3=4$。因此，若$n_0=2$，$n_2=1$且$n_1\geqslant1$，那么n_1实际上必定等于1。这与数行中有两个1的事实矛盾。若$n_2\geqslant2$，则$n_0+n_1+n_2+n_3=4$，所以$n_0=2$，$n_1=0$，$n_2=2$，$n_3=0$。因此本题仅能有两解。

习题5 (i) 不能（若n_4，n_5，n_6，n_7全为零，则$n_0\geqslant4$。但

是，另一方面，这实际上是说，数行中至少有一个数≥4.所以，n_4，n_5，n_6，n_7不能全为零)。

(ii) 至多有一个。(若n_i和n_j两个都不为0，那么，在数行里至少必有一个"i"和一个"j"，譬如说$n_r=i$，$n_s=j$。但是，每一n_k都计算出k在数行中出现的次数。而数行的确总共包含8个数，所以$i+j=n_r+n_s\leqslant n_0+n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_6+n_7=8$。因此$i$和$j$不能两个都≥4)

(iii) 没有。((ii)小题的推理证明，n_5，n_6和n_7不能≥2，而且若果$n_4\geqslant 2$，则$n_4=2$。然而若果$n_4=2$，则有两个4和至少有一个2，以至一切n_i之和至少是10)。

(iv) 不能。

(v) n_4，n_5，n_6，n_7中确有一个等于1，其余为0，所以$n_0\geqslant 3$。根据(iv)小题，已知$n_1\geqslant 2$。若$n_1=2$，则它既告诉我们$n_2\geqslant 1$，又告诉我们数行里必含有两个1。所以，要么n_2，要么n_3必定等于1。若果$n_2>1$，则$n_3=1$，且一切n_i之和至少为9。因此$n_2=1$且$n_3\neq 1$，所以，$n_3=0$，$n_0=4$，$n_4=1$，$n_5=n_6=n_7=0$。若果$n_1\geqslant 3$，则我们至少要有两个以上的1，所以唯一可能的是，$n_1=3$，$n_2=n_3=1$，但另一方面$n_0=3$，且数行至少有两个3，与$n_3=1$矛盾。

习题6 (i) 不能。(若$n_{50}=n_{51}=n_{52}=\cdots\cdots=n_{99}=0$，那么$n_0\geqslant 50$，所以数行中至少有一个数≥50。因而$n_{50}$，$n_{51}$，$n_{52}$，…，$n_{99}$不能全都为0)。

(ii) 至少有一个数(根据习题5(ii)同一理由)。

(iii) 没有。(根据习题5(iii)同样的理由)。

(iv) n_{50}，n_{51}，…，n_{99}中确有49个数为0，所以$n_0\geqslant 49$。这些数中又确有一个等于1，所以$n_1\geqslant 1$。而$n_1=1$是不可能的，

所以$n_1 \geqslant 2$，

(v) 这些数的大多数似乎都必定是0，所以n_0相当大。然而要进一步将它说得更准确就不容易了。

习题7 (i) 不能。

(ii) 不能。

(iii) 若果$n_3 \geqslant 1$，则由题(ii)，$n_2 = 0$，而且$n_3 \geqslant 2$不成立。这是根据习题5(iii)中$n_4 \geqslant 2$不成立同样的理由，所以$n_3 = 1$。现在$n_1 \geqslant 2$（同习题6(iv)一样，而且$n_0 \geqslant 1$，所以$n_0 = 1, n_1 = 2$，$n_2 = 0$，$n_3 = 1$。

(iv) 根据习题6(iv)中$n_4 \geqslant 2$不成立，同样的理由，$n_2 \geqslant 3$不成立，所以$n_2 = 1$，或者$n_2 = 2$。

(v) $n_0 \geqslant 1$。若果$n_2 = 1$，则$n_1 \geqslant 2$（同习题6(iv)中一样），且由题(ii)$n_3 = 0$。所以$n_0 = 1$，$n_1 = 2$，$n_2 = 1$，$n_3 = 0$。若果$n_2 = 2$，那么由(ii)，$n_3 = 0$。但是$n_0 + n_1 + n_2 + n_3 = 4$，所以数行的确包含有两个2和两个0。因此$n_0 = 2$，$n_1 = 0$，$n_2 = 2$，$n_3 = 0$。

习题8 (i) 初看似乎都能为0．但是却不可能．

(ii) 仅有一个。

(iii) 不能．假设$n_2 \geqslant 2$，则$n_2 = 2$（否则，数行将会至少含有3个2，所以一切n_i之和就会太大）。若果$n_2 = 2$，那么由(ii)，$n_3 = n_4 = 0$，所以$n_0 \geqslant 2$且我们必有$n_0 = 2$，$n_1 = 1$，$n_2 = 2$，$n_3 = 0$，$n_4 = 0$。

(iv) 若果$n_4 = 1$，那么数行中必有某一数出现四次，但是$n_1 \geqslant 1$且由(ii)，$n_2 = n_3 = 0$，所以，$n_0 \geqslant 2$且没有一个数能在数行中出现四次。若果$n_3 = 1$，那么某一数必在数行中出现三次。但是$n_1 \geqslant 1$且由(ii)$n_2 = n_4 = 0$，所以$n_0 \geqslant 2$且没有一个数能在数行中出现三次。若果$n_3 = n_4 = 0$，则由(ii)$n_2 \geqslant 1$。若果$n_2 \geqslant 2$，那

么将得出(iii)中的数行.假定 $n_2=1$，则 $n_3=n_4=0$，所以$n_0\geqslant 2$。因为数行中没有出现数 3 和 4，所以 $n_0=2$。然而 n_1出现错误(因为数行中至少有一个 1，故 $n_1\geqslant 1$ 且 $n_1=1$。所以因为数行未含有数字 3 或者 4，故必有 $n_1=2$，因而数行中会含有二个 2，与 $n_2=1$矛盾)。

习题9 (i) 不能。

(ii) 仅有一个。

(iii) 不能。

(iv) (a)若果 $n_5=1$，则某数必在数行中出现 5 次。但是，$n_1\geqslant 1$ 且由(ii) $n_3=n_4=0$，所以 $n_0\geqslant 2$，且一个数能在数行中出现 5 次。(b) 若果 $n_4=1$，那么某一数的确必定在数行中出现 4 次。然而 $n_1\geqslant 1$ 且由(ii) $n_3=n_5=0$，所以 $n_0\geqslant 2$ 且没有一个数能在数行中出现 4 次。(c) 若果 $n_3=1$，则某一数必会在数行中的确出现 3 次，由(ii)也有 $n_4=n_5=0$，所以 $n_0\geqslant 2$ 且 $n_1\geqslant 1$，但 $n_1\neq 1$，所以 $n_1\geqslant 2$。然而数行中至少有二个 1 的唯一方法是根本不含有 3。

习题10 (i) 都能。不能。(ii) 仅有一个。

(iii) 不能。不能。(假定 $n_3\geqslant 2$，那么或者 $n_3\geqslant 3$ 且数行里至少含有三个 3，或者 $n_3=2$且数行里至少含有两个 3 和一个2，两种情况的无论哪种情况都使一切 n_i之和太大)。

(iv) n_6 不能为 1 (根据习题 9(iv)(a)同样的理由)。n_5 不能为 1 (根据习题 9(iv) (b) 同样的理由)。n_4不能为 1 (根据习题 9(iv)(c)同样的理由)．最后，假定 $n_3=1$，则 $n_4=n_5=n_6=0$，所以 $n_0\geqslant 3$. 又因为数行里未含有数字 4、5、6，必有$n_0=3$。因为 $n_3=1$，必有 $n_1\geqslant 1$，且 $n_1\neq 1$，所以 $n_1\geqslant 2$. 但仅允许有一个 3，所以 $n_1=2$。因此 $n_2=1$，且得出的数行是：$n_0=3, n_1=2, n_2=1$，

$n_3=1$，$n_4=n_5=n_6=0$。

(v) 仅有一个（见(iv)）。

习题11 (ii) n_4，n_5，n_6，n_7，n_8 中确有一个等于1且余下的全为0（为什么不能有 $n_4=2$ 呢？）于是，$n_0\geqslant4$ 且 $n_1\geqslant2$，所以 $n_1=2$ 或者 $n_1=3$。因为在数行中未曾留有足够的空位可使一个数字能出现6次，故 $n_6\neq1$。同理，$n_7\neq1$，$n_8\neq1$。若果 $n_5=1$，则 $n_4=n_6=n_7=n_3=0$。若果 $n_1=2$，则 $n_2=1$，$n_3=0$，$n_0=5$。若果 $n_1=3$，则$n_2=0$，$n_0=0$ 且数行中决不可能如所设那样含有三个1。最后，假定 $n_4=1$，则 $n_5=n_6=n_7=n_8=0$，所以 $n_0\not\geqslant5$。因此 $n_0=4$，所以 n_2 和 n_3 都不能为0。但是这样的话，数行含有一个4，至少两个1，至少一个2，至少一个3，以致，一切 n_i 之和太大了。

习题13

	n_0	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9
7个整数的数行	3	2	1	1	0	0	0			
8个整数的数行	4	2	1	0	1	0	0	0		
9个整数的数行	5	2	1	0	0	1	0	0	0	
10个整数的数行	6	2	1	0	0	0	1	0	0	0

习题14 (i) 不能。确有一个，没有。

(ii) 不能。不能。不能。

(iii) 能有 $n_{2m-4}=1$。若 $n_{2m-4}=1$，则一切 n_i 之和中 $2m-4$ 出现一次，且某一另外的数出现 $2m-4$ 次。因为这和必定等于 $2m$，故出现 $2m-4$ 次的数必定是0。因此 $n_0=2m-4$，也有$n_1\geqslant1$且 $n_1\neq1$，所以 $n_1\geqslant2$。这样的话，一切 n_i 之和中 $2m-4$出现一次，数1至少出现两次，数2至少出现一次。因为这个和应等于

$2m$，故必有 $n_1=2$，$n_2=1$，$n_3=n_4=\cdots=n_{2m-5}=0=n_{2m-3}=n_{2m-2}=n_{2m-1}$。

(iv) 假定某一 $n_{2m-4-k}=1$，其中 $k\leqslant m-4$，则数 $2m-4-k$ 出现在数行的前半行，所以，数 0，1，…，$m-1$ 中的一个，譬如说 j，将出现 $2m-4-k$ 次。于是，一切 n_i 之和中，$2m-4-k$ 出现一次，另一数 j 出现 $2m-4-k$ 次。这样一来，$j=0$ 且 $n_0=2m-4-k$（否则，一切 n_i 之和将太大了）。设 p 是 $\leqslant m-1$ 且使 $n_p\neq 0$ 的最大数。现在 $n_1\geqslant 2$（因为 $n_{2m-4-k}=1$，故 $n_1\geqslant 1$ 且 $n_1=1$，这本身就互相矛盾），所以 p 必定 $\geqslant 2$。因为 $n_p\neq 0$，某一数 i 将在数行中的确出现 p 次。若果 $i>1$，则数 i 在 n_1 和 n_p 之间总共在 p 个不同的位置出现，这显然是不可能的。因而，$i=1$ 且 $n_1=p$。所以数 1 必定在数行中出现 p 次。然而仅有一个大于 n_p 的不为 0 的数，因而所有 $p-1$ 个数 n_2，n_3，n_4，…，n_p 必定都等于 1。因此 $p=2$。最后，由于一切 n_i 之和等于 $2m$，故得出 $k=0$。

第四章　提出问题

> 已知多边形的一个性质，就想方设法去发现多面体的类似性质，这是构想发展性问题的有利良机。
>
> ——G. 波利亚《数学发现》

4·1　引言

大多数学生认为数学就是解题。然而，这只是"讲授式"教育过程的特点，并不是数学本身的特征。本章准备给你揭示数学的另一面，即是说，当你开始自己提出问题时会怎么样？我将以两个你以前认真琢磨过的中学数学问题来作为研究的序幕。

1．(a) $y=x^2$ 的图像关于 y 轴对称，其它的二次函数，如 $y=2x-4+x^2$，也总是关于通过曲线上的最低点（或最高点）的轴对称。这结论肯定对吗？为什么？

(b) $y=x^3$ 的图像关于原点对称(绕原点转半圈)。你可能已经注意到，其它的三次曲线，如 $y=x^3-x$ 或者 $y=7x^2-x+x^3+2$，通常都关于曲线上的最大值点和最小值点之间连线的中点对称（即绕中点转半圈）。这一定成立吗？为什么？

(c) 对次数更高的曲线有什么结论呢？

2．(a) 半径为 r 的圆的周长公式 $2\pi r$，与它的面积公式 πr^2 之间有什么关系？球的表面积与体积公式之间有无类似关系？为什

么？

(b)为什么同一常数π既出现在圆（二维）的面积公式中，又出现在球（三维）的体积公式中？半径为r的四维球的"内部"有多大？对应的公式中含有π吗？(关于"半径为r的一维球"又怎样呢？)

前述问题中的有的问题，虽然尚不知道怎样解答它们，但是问题都十分清晰明白（一切三次曲线都成中心对称吗？四次曲线都关于过顶点的轴对称吗？)。另一些问题能以更带有思考性的词汇"若果……会怎么？"来着手探讨、扩充各种数学知识及其关系。这样的问题开初必然朦胧不清，或者极为混淆("半径为r的四维球"究竟是什么？怎样测量它的"内部"?）尽管如此，它们可能仍是提出问题的好方法。

但是，设法要回答的问题无论属于清晰明白的，还是朦胧混淆的，认真琢磨一个更易于解的相关的问题的解法，总不失为一种下手的方法。(为什么二次曲线总是关于过顶点的轴对称？可否将同一思想用于三次曲线、四次曲线？基于半径为r的一维、二维、三维"球"的"内部"公式，能提出"半径为r的四维球"的"内部"公式吗？有没有一种推导三维球的体积公式的方法，它能给出怎样由三维扩充到四维的线索？)特别地，对任何"灵感"都要用经过仔细选择的范例加以检验，看看是否正确。(例如，$y=x^4$和$y=x^4-x^2$完全可能关于过顶点的轴对称，但对于$y=x^4-x^3$又怎样呢？)

4·2 第四个小研究

可按如下方法作平行四边形：

(i) 先作两条相等的平行线段（图4.1(i)）；

(ii) 连接两线段对应的端点（图4.1(ii)）。

如果开始作的平行线段长为 a，那么所有与这二条线段平行的横截线段长度都是 a，如果所作两条线段之间的距离是 h，则平行四边形的面积由公式 $A=a\times h$ 给出。

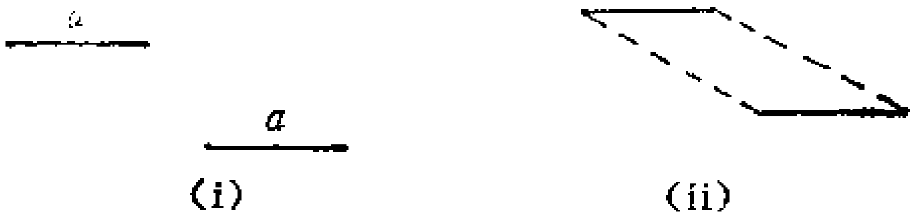


图 4.1

用类似的方法也可作梯形。

(i) 先画两条平行线段（这时，它们的长度不必相等）(图4.2(i))，

(ii) 再连接对应的端点（图4.2(ii)）。

习题1 (i) 假设平行线段的长为 a 和 b，它们之间的距离为 h(图4.2(ii))。试用 a、b 和 h 表示梯形的面积公式。

(ii) 若果 a 为零而 b 不为零，那么会得出什么样的图形？这

图 4.2

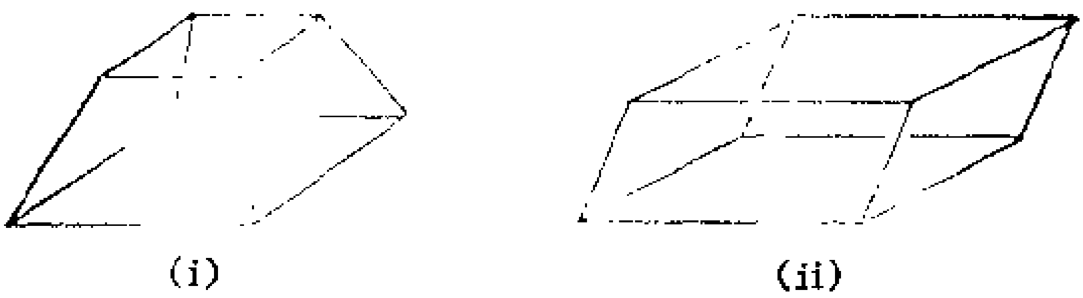


图 4.3

时面积公式成立吗？若果 a 和 b 同时为零，面积公式仍能成立吗？

现在把本章要研究的问题叙述如下：

问题 关于梯形的面积公式，有无很自然地扩充到三维的公式？

乍一看，不太清楚这样设问含意是什么？显而易见应把体积设想为面积的三维推广。然而，把什么样的立体看作"梯形"在三维的自然推广却颇费琢磨。

几乎不会有人把球算作"梯形的三维推广"。但是，方棱台（图4.3(i)）如何呢？肯定会有它与梯形类似的感觉。平行六面体（图4.3(ii)）又如何呢？平行四边形毕竟是特殊梯形，因而平行六面体是"平行四边形的三维推广"。

习题2 设法画出另外三个熟悉的，你认为值得把它称作"梯形的三维推广"的立体。是什么理由使你能把方形棱台、平行六面体和你画出的另外三个熟悉的立体都看作"梯形的三维推广"呢？

没有呆板现成的判定方法，能用以判断什么值得或不值得被看作"梯形的三维推广"。应该牢牢记住，正文中梯形的作法是，先画平行的两边。因此，似乎宜于假定应把先画两个平行的面，再用某种方法将它们连接而成的立体看作"梯形的三维推广"。然而，这两个面应当是什么图形呢？应当怎样连接它们才恰当呢？

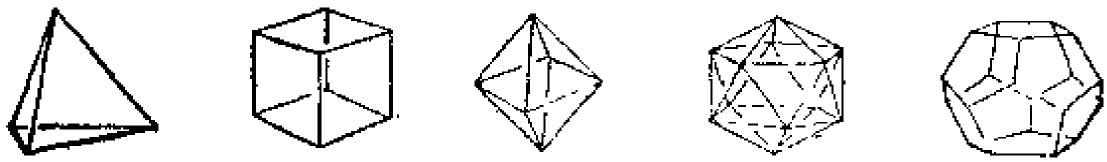
一开始你就必须初步猜测一下，什么立体能够，什么立体不

能够被看作“梯形的三维推广”.然后,你应回头检验这第一次的猜测，看它是否具备应具备的性质,尤其应该检验一下,它是否使你能够证明梯形面积公式$A=\frac{1}{2}(a+b)\times h$的三维推广。检验的结果可能出现,或者第一次的猜测限制太多,因而业已排除了一些立体，而这些立体经过再三考虑之后，理应被算入推广之列；或者猜测过于宽泛，包括了一些不应列入的异已。在两种情况，你都需要完善或者改进你作出的初次猜测，检验和改进初次猜测的过程必然会重复多次，直到你认为已经得出了正确的推广为止。

习题3 (i) 试叙述你认为值得被称为“梯形的三维推广”的立体的定义；

(ii) 现在对定义进行第一次简单的验证，习题2中熟知的五个立体满足定义吗？

(iii) 图4.4中的五种柏拉图立体哪些能满足定义？



(a)　(b)　(c)　(d)　(e)

图 4.4

定义本身并非终极目的，定义仅是对一些重要的数学思想加以准确描述的一种尝试。你现在就打算准确描述的数学思想有哪些呢？假定按我的定义能把正八面体(图 4.4(c)) 真的看作“梯形的三维推广”,而按你的定义却不行(你的定义的确把正八面体排除在外吗？你能肯定吗?)在你我的两个竞争的定义中，我们能作怎样的决择呢？尚无严格的选择原则，要知梨滋味，亲自尝一

尝，在本章正文中，梯形的本质特征源于如下事实。

(i) 它有两条平行边；

(ii) 它的面积公式非常简单。

正是用这两条性质，可以把更复杂的图形分割为梯形，从而简捷地计算出它们的面积(例如，计算复杂形状区域或者其它形状的土地的面积时，可以用梯形法近似地计算曲线图形的面积)。因此，这两个特征的三维类比在你的定义中应有确切的描述。

没有必要草率地决定，什么立体能够，什么立体不能够视为"梯形的三维推广"。应先退一步考虑一个特殊情况。这是个好办法。矩形和平行四边形是两种特殊梯形，这两种图形一开始作的两条平行边都具有同一长度 a，因而矩形或平行四边形的面积公式为

$$A=\frac{1}{2}(a+b)\times h=a\times h$$

与梯形面积的公式相比更加简单，以下三个习题及其后所附正文谈及哪些立体值得看作"矩形的三维推广"的问题。它们应当有助于你从新的角度审视你原来对习题 3 的解答。

习题4 设想平行四边形的作法是，先画出它两条等长的平行边，再连接对应的端点。这样的作图程序在哪种情况下实际会得出长方形？

习题5 (i) 你可能习惯于认为长方形的面积公式是：

面积 = 长 × 宽

这一公式的自然的"三维推广"是什么？按这一观点，"长方形的三维推广"自然的解释是什么？

(ii) 在本章中，矩形是一种特殊的梯形，其作图法是先画两

条等长的平行边，一条在另一条的正上方。所以，按本章的观点，矩形面积公式的正确解释是：

面积＝（等长的平行边的长度）×（这两条平行边间的垂直距离） (4.1)

这将提示什么样的公式作为"矩形的三维推广"的体积公式呢？按这一观点，"矩形的三维推广"的表述应怎样解释才适当呢？

在习题 5(ii)中，即使准确地猜测出了"矩形的三维推广"的体积公式的类型，也仍然不容易看出最后一问的答案。如果视（二维的）矩形的作图法为，先画出两条等长的平行边，一条在另一条的正上方，然后再连接它们，那么，似乎就应认为"矩形的三维推广"的适当的作图法是，先画出两个等大的平行面，一个在另一个正上方，然后再把它们连接起来，按习题 5(i) 中的观点，（它也是本章中的观点）似乎又对这两个面的形状未加任何限制，只是要求这两个面"等大"，且"一个在另一个正上方"。前一要求（"等大"）暗示两个面应有同一面积 A；第二个限制（"一个在另一个的正上方"）则似乎意味着两平行面实际上能彼此全等，而且还应"位置相似"（即是说，上顶面不应相对于下底面有任何转动）。

两平行面不仅必须全等，而且也必须位置相似，这种想法似乎应该用某种方式加以检验。如果上底面与下底面相比较产生转动，可能出什么差错？记住，我们要把"矩形的三维推广"定义为这样一种立体。它的体积由公式(4.1)的三维推广给出，即是说，我们规定体积要用公式 $V=A\times h$ 来计算。

习题6 按如下作图法画一个立体：作两个长与宽之比为2:1的平行矩形，一个在另一个的正上方，但上顶面相对于下底面转动了90°(图4.5)。求它的体积V。体积V等于、大于、还是小于$A\times h$?

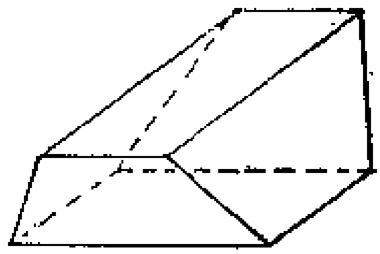


图 4.5

所以，在本章里，"矩形的三维推广"的表述似乎应取这样的含义：**它是一个立体，这立体有两个平行且全等、位置一致的面，这两个面按显而易见的方式加以连接。**这样的立体称为直棱柱。除了要求两平行面全等，且位置一样之外，对这两个面的形状毫无限制。你不难证明，它们的体积由公式$V=A\times h$给定，这一点作为下一习题的求证。

习题7 假定已知长方体(或长方形盒子)的体积是由公式"$V=$长$\times$宽$\times$高"给定。

(i) 用这个公式证明，当直棱柱的上顶面与下底面都是面积为A的矩形时，棱柱的体积由公式$V=A\times h$给出；

(ii) 用(i)证明，当直棱柱的上顶面和下底面都是面积为A的平行四边形时，棱柱的体积V由公式$V=A\times h$给出；

(iii) 用(ii)证明，当直棱柱的上、下底面均是面积为A的三角形时，棱柱的体积V由公式$V=A\times h$来计算；

(iv) 用(iii)证明，当直棱柱的上、下底面都是面积为A的n边形时，棱柱的体积V由公式$V=A\times h$来计算；

(v) 怎样利用(iv)小题来证明，圆柱的体积仍能由公式$V=A\times h$来计算。

若果我们现在回到原问题，设想要求出梯形面积公式的三维推广，那么自然期望一切直棱柱（即是矩形的每一种三维推广）应当是“梯形的三维推广”的特殊情况。

习题8 修改习题7前的“直棱柱”的定义，给出你所期望的“梯形的三维推广”的定义。

有理由认为，你解习题8时所得的定义，仍然有少许毛病。例如，直棱柱的定义对它的两个平行面的形状未加任何限制，只要求两平行面“能全等，一个在另一个的正上方”即可。特别地，有一种“显而易见的”方法将直棱柱的上、下底面连接起来（沿两个面的边，在对应点之间作垂直线段）。但是，如果上底面是椭圆，而下底面是三角形将怎么办呢？哪些点应与哪些点连接呢？如果你思考片刻，你将会看出，这决不是庸人自扰。

求梯形面积公式的三维推广，较之于求矩形面积公式的三维推广必定会更困难，而且，任何时候从简单题转到难题，都应当考虑能否有一种好办法对题中的限制进行某种简化。至少第一步应如此考虑。对于两平行面的形状有无某种自然限制，这限制将以某种方式影响上、下底面的连接？幸运的是，有这样的限制。所以，我们首先解释“梯形的三维推广”的表述的含意：

它是一个立体，这立体有两个平行的多边形面，它们的角与角的顶点之间以这样的方式用直线段棱连棱起来，使所得的立体是多面体（即是说，它所有的面都是平面）。

任何这样的立体都称为“平截头棱锥体”。

早在习题1中我们就强调，如果梯形平行的两边之一或者两边都缩为一点，那么面积公式仍然适用。所以，把三角形也看成

特殊梯形是合理的。按同样精神，两平行面之一，或者两个面都缩为棱，甚至缩为一点的立体，都理应视为平截头棱锥体。

习题9 图4.6中的几何体，每一个都有两个平行的面 E 和 F（阴影部分），这些立体中除两个之外都是平截头棱锥体。哪两个立体在剔除之列？

习题10 (i) 用你所能想到的任何方法，计算图4.6中的7个平截头棱锥体的体积（例如，每一个都能分割为几块，使每一块不是(1)长方体，或者长方体的一半，就是(2)四面体或者棱锥，所以，只需掌握长方体、四面体和棱锥的体积计算法）。

(ii) 求这7个平截头棱锥体的两平行面 E、F 的面积 A、B，及其间的垂直距离（本章其余地方字母 A、B 均有相同的意义）。

习题11 梯形的面积由公式 $A=\frac{1}{2}(a+b)\times h$ 给出，其中 a、b 是两平行边的长，h 是它们之间的垂直距离。

(i) 对这一公式的三维推广做出显而易见的第一猜测。

(ii) 检验你猜出的公式，看它对图4.6中的7个平截头棱锥体是否成立。

有证据说明，古代埃及的某些数学家就已经确信，应把公式 $A=\frac{1}{2}(a+b)\times h$ 解释为“两平行边长的算术平均数乘高”。所以，他们常常使用它的“显而易见”的三维推广 $V\times\frac{1}{2}(A+B)\times h$，来计算方棱台的体积。

习题12　方棱台(图 4.7)高为 h，两平行的正方形底面边长

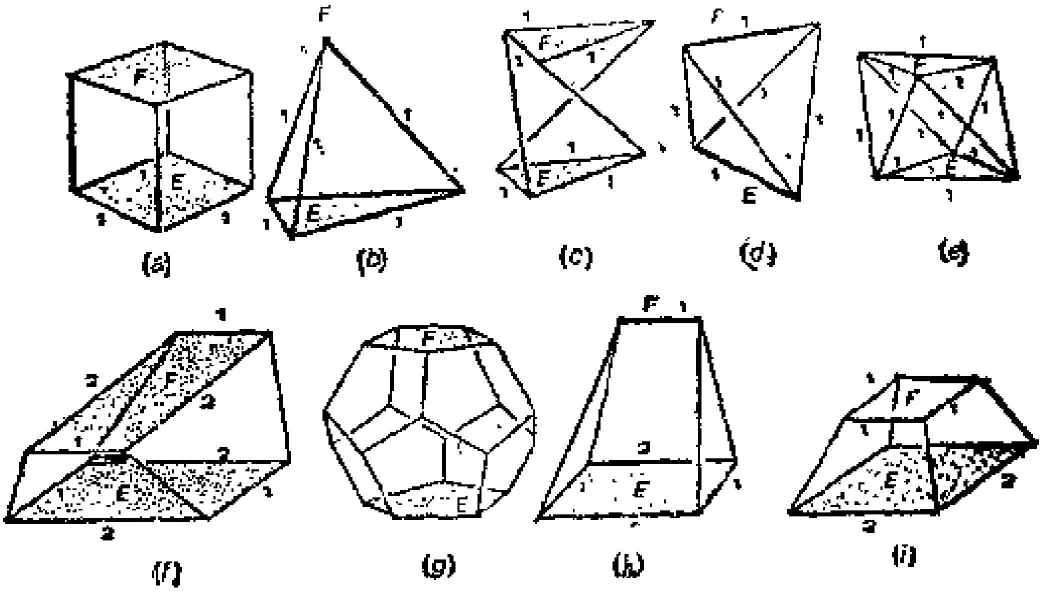


图 4.6

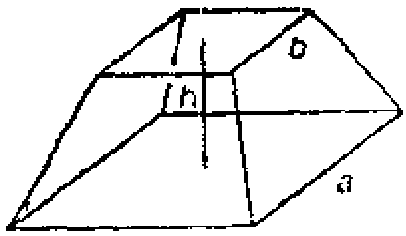


图 4.7

分别为 a 和 b，求它的体积公式。你得出的公式看起来与 $\frac{1}{2}(a^2+b^2)\times h$ 有点相似吗？

可把四面体或者棱锥的体积公式作为第二个粗略的猜测，即公式 $A=\frac{1}{2}(a+b)\times h$ 的三维推广可能是 $V=\frac{1}{3}(A+B)\times h$。这公式对于四面体和棱锥(这时，$B=0$ 而 $V=\frac{1}{3}A\times h$) 显然成立，但是对于立方体和其它所有的直棱柱(这里 $A=B$ 且 $V=A\times h$)，或者对于习题 12 中的平截头棱锥体，这公式不成立。

习题13　说明为什么仅仅与两平行面 E、F 的面积 A、B 有关的体积公式，决不能对一切平截头棱锥体成立。

习题14　梯形(图 4.8)的面积公式还能用另外的方式解释，即

面积＝梯形的中位线的长×高

（i）叙述梯形面积公式的这一解释的三维推广；

（ii）这公式对于习题12中的方棱台成立吗？它对于图 4.6的平截头棱锥体中的哪些立体能成立呢？

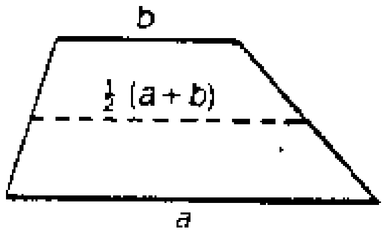


图 4.8

如果 a 和 b 为梯形两平行边的长，$c=\frac{1}{2}(a+b)$ 是它的中位线的长，那么习题 11 和 14 是基于对公式 $A=\frac{1}{2}(a+b)\times h=c\times h$ 的观察．这几个习题还说明，这些公式中的任何一个都不能加以推广，以得出平截头棱锥体的体积公式。然而，$c=\frac{1}{2}(a+b)$ 这一事实，意味着用 a、b、c 和 h 表示公式 $A=\frac{1}{2}(a+b)\times h$ 的方法不是只有两种，而是有无数多种不同的方法。因此，不要放弃这一思考线索，应再观察这公式的两种其它表达形式。这样做是会有价值的。

习题15 （i）下面是用 a、b、h 和 c 表示梯形的面积公式的两种最简单的方式，试求后面的三个最简单的表达形式：

$$A=\frac{1}{2}(a+b)\times h=\frac{1}{3}(a-c+b)\times h=\cdots\cdots$$

（ii）现在，看看我对(i)题的解法，尽可能断言我们谈的是同样的表达形式，这些公式的每一个的三维推广将用高 h，上、下底面 B、A，和上、下底面之间正中的横截面 C 来表示它的体积。检验公式的每一个三维推广是否对于任意直棱柱都成立。

(iii) 说明，为什么这些公式中至多有一个对一切平截头棱锥体成立？

(iv) 证明，这些公式中确有一个对于习题 12 中的方棱台成立，这同一公式对图 4.6 中的其它的平截头锥体成立吗？它对于直棱柱成立吗？它对于四面体和棱锥成立吗？

现在你应该能得出一个对大量的各种各样的平截头棱锥体都成立的体积公式。但是，这公式的确对一切平截头棱锥都成立吗？就假定它成立吧。然而究竟怎样证明，公式对一切平截头棱锥体（无论其形状多么复杂）都成立呢？

习题16 (i) 说明，顶点数$\leqslant 3$ 的平截头棱锥体总有 $A=B=C=V=0$。由此证明，你的公式对任何这样的平截头棱锥体成立。

(ii) 说明 4 个顶点的平截头棱锥体只有两个不同的“类型”，一种类型（图4.6(b)）具有$B=0, A\neq 0\neq C, V\neq 0$（或者 $A=0$, $B\neq 0\neq C$, $V\neq 0$）；另一类型（图 4.6(d)）具有 $A=B=0$, $C\neq 0$, $V\neq 0$）。证明你的公式对于一切 4 个顶点的平截头棱锥体成立。

(iii) 用(ii)证明，你的公式对于任何平截头棱锥体（无论其形状多么复杂）都成立。

部分习题的提示：

6。设法把立体分割为更简单的几块（图 4.9）。

7。(ii) 把棱柱切为两块，并重新把它们拼在一块，组成一个直棱柱，它的上、下底面都是面积为 A 的矩形。

(iii) 把已知的两个相同的三棱柱复合成一个直棱柱，它的上、下底面都是面积为 $2\times A$ 的平行四边形。

(iv) 把已知棱锥切为几个三棱柱，然后利用(iii)小题。

9. 一种形状甚至不是多面体。

10. (i) (a)、(b)没有问题，(d)你已经解决了，(e)底面贴底面的两个底面为正方形的棱柱，(f)习题6，(h)两个棱锥和半个长方体，(i)两个棱锥的差。

13. $A=B=0$ 的平截头棱锥体可能有 $V=0$（例如，若果 E 和 F 二个面都缩为一点），但是也可能出现 $V\neq 0$（如图 4.6(d)）。

15. (iii) 如果对于一切平截头棱锥体，有

$$V=\frac{1}{m}[A+(m-2)C+B]\times h=\frac{1}{n}[A+(n-2)C+B]\times h,$$

那么对于一切平截头棱锥体，有

$$(m-n)(A+B)=(m-n)\times 2C.$$

16 (ii) 应用四面体的体积公式，

(iii) 说明，如果顶点数$\geqslant 4$的平截头棱锥体的上、下底面为 F 和 E，那么能够把它切割为若干个确有四个顶点的平截头棱锥体，它们的上底面可拼合成面 F，下底面可拼合成面 E，它们的上、下底面之间的中截面的面积和为 C，然后用 (ii) 解之。

4·3 引伸问题

1. (i) 能否以正方形点阵的点为顶点，作等边三角形（图4.10(i)）？

(ii) 能否以正方形点阵的点为顶点，作正方形（图4.10(i)）？

2. (i) 能否以（等边）三角形点阵的点为顶点，能作哪几种正多边形？（图4.10(ii)）

(ii) 以等边三角形点阵的点为顶点，能作哪几种正多边形？

3. (i) 已知三角形 ABC，沿它的边 BC、CA、AB 的 $\frac{1}{3}$ 处取点 X、Y、Z，再连 AX、BY、CZ（图 4.11），中心的阴影三角形是整个三角形 ABC 的面积的几分之几？（先看看特殊的情况，然后利用一些简单方法，得出所希望的答案的某种猜想，哪怕你利用的方法对于一般的三角形并不成立也没关系）。

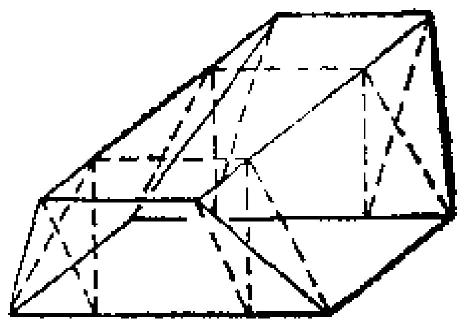
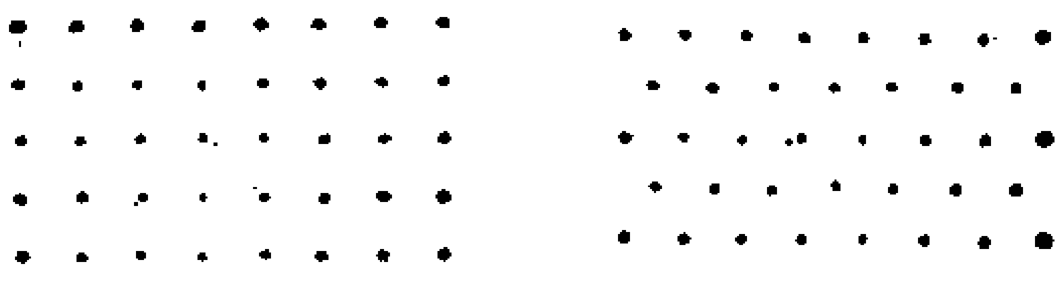


图 4.9

(ii) 已知三角形 ABC，每一个顶点都顺次与其对边的 $\frac{1}{3}$ 的点连接，这三条线围成一个中心三角形，这中心三角形的面积是三角形 ABC 的面积的几分之几？当 $n=2$ 时，会出现什么情况？如果 $n<0$，会出现什么结果？当 $n\to\infty$ 时，又会出现什么结果？

(iii) 对于四边形，你能提出类似的结论吗？（自然，开始也应先看看某些特殊的四边形。然而，进到某一阶段你就必须判定，是否有希望求出对一切四边形都成立的统一的结论，若果没有，就必须判定，在本题中什么是"三角形"的正确推广）。



(i) (ii)

图 4.10

4. (i) 能在图 4.12(i) 中的直角型弯带内设法加以转动的

直线段的最大长度是多少？

(ii) (a)在如图 4.12(i)里那样的直角型弯带内，能设法加以转动的二维图形的最大面积是多少？(这显然比(i)小题困难得多。要使本题易于下手，可附加什么样的假设？在你已决心这么做时，可试试一些熟知的图形。能加以转动的最大矩形是什么？你还能试一试的其它熟知的图形又有那些呢？)

(b) 你能圆满地回答(a)题吗？你能求出能在这类角尺内转动的图形的大小的一些显然的“上界”(用以对图形的大小进行限制的)吗？(换句话说，你能否求出一个数 X，使任何能成功地在角尺内转动的图形的面积均 $\leqslant X$？)

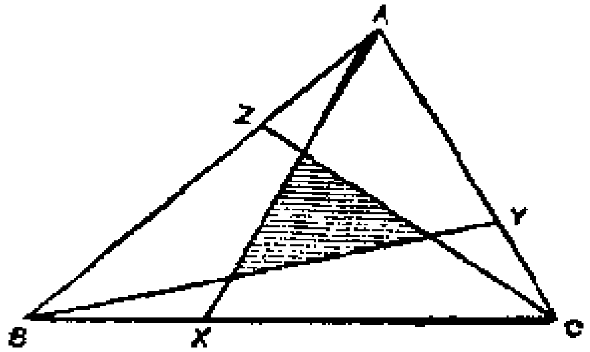
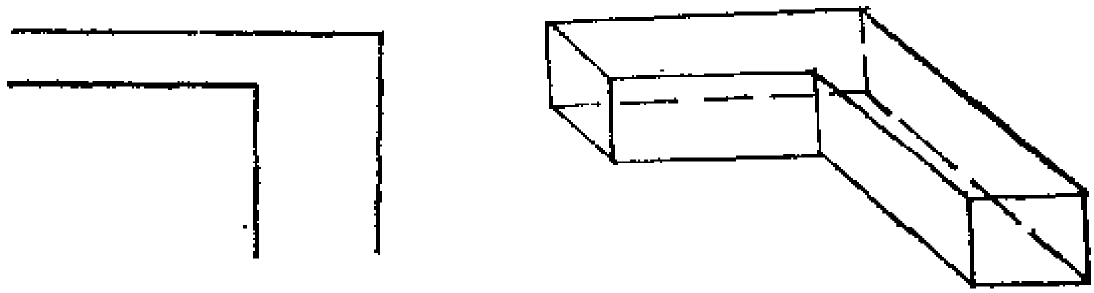


图 4.11

(iii) (a)能在图 4.12(ii)中的三维直角型弯尺内设法加以转动的直棍的最大长度是多少？

(b) 在像图 4.12(ii) 里那样的直角形角尺内能设法加以转动的图形的最大体积是多少？



(i) (ii)

图 4.12

5. 直径为 D 的圆是宽度 D 为常数的最典型范例。

(i) 由三条半径为 D 的60°圆弧组成的三角形称为 Reuleaux*

* F.Reuleaux，德国几何学家。——译者注

三角形（图 4.13(i)）。证明，它确为宽度 D 为常数的曲线，它的周长是多少？它的面积是多少？

(ii) 50 便士的英国硬币由七条相等的圆弧构成（图 4.13 (ii)）。它是一条等宽度 D 的曲线。它的周长是多少？它的面积是多少？

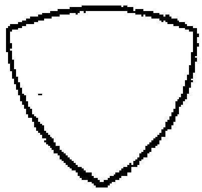
(iii) 图 4.13(iii)中的曲线由六条圆弧构成，相对的两条弧的半径之和都等于 D。它是一条等宽度 D 的曲线，它的周长是多少？它的面积是多少！

(iv) 考虑一切等宽度 D 的曲线，你认为它们能有最大和最小周长吗？你能指出这类曲线的最小和最大面积吗？

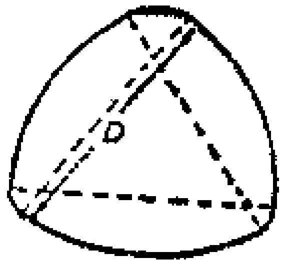
(v) 设 γ 是任意等宽度 D 的曲线。

(a) 曲线 γ 与它的切线只有一个交点。

(b) 若果 a 和 b 分别为与曲线 γ 切于点 A 和 B 的平行直线。证明，AB 与直线 a 和 b 都垂直。它能给出 AB 的长度是什么吗？


(i)

(ii)



(iii)

图 4.13

(c) 当直径 AB 转过角度 $\delta\theta$ 时，直径的端点垂直于 AB 而移动，其轨迹是具有同一瞬时中心的无限小圆弧，这两条圆弧合起来的弧长是多少；

6. 半径为 r 的四维球的“内部”有多大？五维球呢？

7. 一个圆硬币，中心有一个小孔，把它垂直地竖放在水平

桌上，能安放一个光源，使硬币在桌上的阴影为圆形吗？如果能办到，那么光源可能的位置的轨迹是什么？小孔的像永远处于这圆形阴影的中心吗？若果办不到，那么为什么办不到呢？

8.（i）已知一个三角形，它的阴影三角形能是些什么形状的三角形呢？能用这方法得出一切类型的三角形吗？

（ii）已知一个三棱锥（可无限延伸），它的横截面能得哪几种三角形？能用这方法得出一切形状的三角形吗？

9．由一个四边形的阴影能得出哪几种四边形？能用这方法得出一切类型的四边形吗？

（ii）作一个已知方棱锥（可无限延伸）的横截面，能得出那几种四边形？

10．为了把一个多面体整个地摊平为一整块，必须切开它的几条棱？能有多少种方法做到这一点？

11．（i）你大概熟知 n 边形的内角和公式。你能说出图4.14(i)中的五角星的五个顶角之和是多少吗？

（ii）如果不是只有五个角，（如同五角形那样）而是有 n 个角的 n 角星形（每一个顶点不是顺着与下一顶点而是隔一个顶点与下一顶点互相连接）又会怎么样呢？这样的图形的 n 个顶角之和又等于多少呢？

（iii）如果每一顶点不是隔一顶点（相距两步远）而是隔两个顶点（相距三步远）与其它顶点连接（如图4.14(ii)）又会怎么样呢？你能求出这类图形的 n 个顶角的求和公式吗？

（iv）如果每一顶点相距 k 步远与其它顶点连接，得出一个 n 角星形，你能求出它的一般的求和公式吗？

引伸问题的参考文献

3. H.S.M.Coxeter Introduction to geometry, P211—212, Wiley, 1969.

5. H.Rademacher and O.Toeplity The enjoyment of mathematics, P163—177, Princeton University Press, 1970.

R. Honsberger Ingenuity in mathematics, P157—164, Mathematical Association of America, 1970.

6. A. Gardiner, Infinite processes, P230—231, Springer, 1982.

4·4 4·2节习题解答

习题1 (i) 有许多种表示法,例如,两平行边之正中的线段 XY 的长度为$\frac{a+b}{2}$。若果你沿 XY 把梯形切为两块,将上半块绕 Y 点旋转180°就会得出一个高为$\frac{1}{2}h$,一边长为$(a+b)$的平行四边形。这个平行四边形及其原梯形的面积都是:$A=\frac{1}{2}(a+b)\times h$。

(i) (ii)

图 4.14

(ii) 如果 $b=0$,将得出面积 $A=\frac{1}{2}a\times h$ 的三角形,所以同一公式成立,若果 $a=b=0$ 将得出面积为0的一条线段,同一公式仍成立。

习题2 由开始所作的两个平行面既能作方棱台，又能作平行六面体，而且还可用另外一些方法连接它们

习题3 (i)一开始就应把习题 2 的解法中所提到的特征列入"梯形的三维推广"的定义之中。

(ii) 答案取决于定义。但是正四面体看起来更像是有两个平行面的立体，因为可以认为它的一个平行面缩为一点。立方体是特殊的平行六面体。关于正八面体又如何呢？

习题4 当平行而等长的两边之一的确"在另一边的正上方"时。

习题5 (i) 体积=长×宽×高，由这一观点，"矩形的三维推广"大概就是长方体。

(ii) 体积=（两个相等的平行的面的面积）×（这两个平行面之间的距离）。按这一观点，"矩形的三维推广"大概是这样作出的立体，先画两个平行且全等的面，一个在另一个的正上方，然后再设法用某种方法将它们连接起来。

习题6 提示已说明怎样将已知立体切割为：(a)一个$1\times1\times h$的长方体；(b) 四角上的四个四面体，它们每一个的底面均为面积是$h\times\frac{1}{2}$的直角三直形，高为$\frac{1}{2}h$；(c)四个楔形，它们每一个的底面均是面积为$1\times\frac{1}{2}$的矩形，高为h。所以，整个体积是

$$h+4\times\left(\frac{h}{24}\right)+4\times\frac{h}{4}=\frac{13h}{6}>A\times h.$$

习题7 (i)上下底面均是矩形的直棱柱就是长方体。因为矩形面积由公式"$A=$长×宽"给出，长方体的体积公式"$V=$长×宽×高"可表示为：$V=A\times h$。

(ii) 仔细选择适当的垂直切割，把原立体切为两块，可重

新将这两块拼合为一个底面为矩形的直棱柱，其底面矩形的面积等于原平行四边形底面的面积，由于重新拼成的立体体积为 $A\times h$，所以原立体的体积也是 $A\times h$。

(iii) 用两个已给的三棱柱，可拼合成一个上下底面的面积均为 $2A$ 的平行四边形的直棱柱。因为这直棱柱的体积等于 $2A\times h$，所以原立体的体积必等于 $A\times h$。

(iv) 可把 n 边形分割为 $n-2$ 个三角形，用同一方法可把上下底面均为 n 边形的直棱柱，经过 $n-2$ 次垂直切割，分为上下底面都是三角形的 $n-2$ 个三棱柱。这 $n-2$ 个三角形的面积之和就等于原 n 边形的面积，所以原立体的体积应等于 $A_1\times h+A_2\times h+\cdots+A_{n-2}\times h=A\times h$。

(v) 用圆内接正多边形来逼近圆形底面。设 A_n 为圆形底面的圆内接正 2^{n+1} 边形的面积，V_n 是对应的以这正 2^{n+1} 边形为底面的直棱柱的体积，由(iv)得 $V_n=A_n\times h$，随着 n 的增大，$A_n\to A$，且 $V_n\to V$，所以 $V=A\times h$。

习题8 “具有两个平行底面，并以某种方法连接这两平行底面而成的立体”。(但是，怎么连接呢？)

习题9 (c)不是多面体，因为连接上下底面的“面”不是平面，而是扭转的面。(g)是多面体，但不是平截头棱锥体，因为上下底面的顶点并不直接互相连接。

习题10 (i) (a) $V=A\times h=1$。(b) $V=\frac{1}{3}(A\times h)=\frac{1}{3}\times\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\times\sqrt{\frac{2}{3}}\right)=\frac{1}{6\sqrt{2}}$。(d)它和(b)中的立体完全相同，是一个正四面体，所以 $V=\frac{1}{6\sqrt{2}}$。(e)这正八面体可分割为两个正方形底

面的棱锥，每个棱锥的体积是$\frac{1}{3}(1\times h')$，其中$h'=\frac{1}{\sqrt{2}}$，所以$V=\frac{\sqrt{2}}{3}$。(f)由习题6知，$V=\frac{13h}{6}$。(h) 这立体可分割成一个体积为$\frac{1}{2}(1\times h)$的楔形（等于半个长方体）和两个矩形底面的棱锥，每个棱锥的体积是$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\times h\right)$，所以$V=\frac{1}{2}h+\frac{1}{3}h=\frac{5h}{6}$。(i) 这立体可分割成更简单的几块。然而，另一种方法是把它视作横截棱锥处理，因为上底面的棱长正好为下底面棱长的一半，故原棱锥的高必定为横截棱锥高的两倍，所以$V=\frac{1}{3}(4\times 2h)-\frac{1}{3}(1\times h)=\frac{7h}{3}$。

(ii) (a) $A=1$，$B=1$，$h=1$。(b) $A=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$B=0$，$h=\sqrt{\frac{2}{3}}$。(d) $A=0$，$B=0$，$h=\frac{1}{\sqrt{2}}$。(e) $A=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$B=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$h=\sqrt{\frac{2}{3}}$。(f) $A=2$，$B=2$，h。(h) $A=2$，$B=0$，h。(i) $A=4$，$B=1$，h。

习题11 (i) $\frac{1}{2}(A+B)\times h$。

(ii) 对(a)成立，而对其余的立体不成立。

习题12 已知的棱台是由高为$\frac{ha}{a-b}$方棱锥切去高为$\frac{hb}{a-b}$的顶部而成。因此$V=\frac{1}{3}\left[a^2\times\frac{ha}{a-b}-\frac{1}{3}\times\left(b^2\times\frac{hb}{a-b}\right)\right]=\frac{1}{3}\times(a^2+ab+b^2)\times h$。

习题13 提示已指出一个理由，你可能已注意到，仅与A和B

有关的公式无法分辨出习题6中体积为$\frac{13h}{6}$的立体，与对应的体积为$2h$的长方体之间的差别。

习题14 (i) 体积＝(中截面的面积)×高。

(ii) 不成立(因为中截面是一个边长为$\frac{a+b}{2}$的正方形)。公式对于任何直棱锥成立，所以对于立体(a)成立，但是，它对于图4.6中其余的平截头棱锥体都不成立。

习题15 (i)$A=\frac{(a+b)h}{2}=\frac{1}{3}(a+c+b)h=\frac{1}{2}(a+2c+b)h$

$=\frac{1}{5}(a+3c+b)h=\frac{1}{6}(a+4c+b)h=\cdots$。

(ii) 在直棱柱中，$A=B=C$，所以

$$V=\frac{(A+B)\times h}{2}=\frac{(A+C+B)h}{3}=\cdots.$$

(iii) 假设这些公式中有两个对某一特殊平截头棱锥体成立，譬如说，$V=\frac{[A+(m-2)C+B]h}{m}=\frac{[A+(n-2)C+B]h}{n}$，那么$\frac{[A+(m-2)C+B]}{m}=\frac{[A+(n-2)C+B]}{n}$，$\therefore$ $A+B=2C$。换言之，中截面的面积等于上下底面面积的算术平均。对于直棱柱，这显然成立(因为$A=B=C=\frac{A+B}{2}$)，所以它对于图4.6中的立体(a)成立；但是，对于图4.6中其余的六个平截头棱锥体却不成立。

(iv) 对于习题12中的方棱台，有$A=a^2$，$B=b^2$，$C=\frac{(a+b)^2}{4}$，$V=\frac{1}{3}(a^2+ab+b^2)h$。需要证明的是，确有一个整数

m，使公式$\frac{a^2+ab+b^2}{3}=\frac{\left[a^2+(m-2)\times\frac{(a+b)^2}{4}+b^2\right]}{m}$对于 a、b 一切可能的值成立。前面的题（iii）说明，这至多对 m 的一个值成立（因为 $C=\frac{(a+b)^2}{4}\neq\frac{a^2+b^2}{2}=\frac{A+B}{2}$），而且当 $m=6$ 时，等式一定成立。因此，m 确有一个值使等式成立（另一方面，若果等式对 a、b 的一切可能的值成立，那么，当 $a=1$、$b=0$ 时，它必定成立，所以，$\frac{1}{3}=\frac{m+2}{4m}$，$m=6$）。

上述解法说明，应当检验公式 $V=\frac{A+4C+B}{6}h$是否对其余所有的平截头棱锥体也成立。对于一切直棱柱它显然成立。因为对于直棱柱，$A=B=C$，所以公式等价于 $V=A\times h$。公式对于四面体和棱锥也成立，因为对于四面体和棱锥来说，$B=0$，$C=\frac{A}{4}$，所以公式化简为 $V=\frac{2Ah}{6}=\frac{1}{3}A\times h$。为了验证公式对图 4.6中其它的平截头棱锥体是否成立，必须计算两平行面之间的中截面的面积。(d) 它的中截面是边长为$\frac{1}{2}$的正六边形，所以 $C=\frac{1}{4}$。因为 $A=B=0$，所以得$\frac{(A+4C+B)h}{6}=\frac{h}{6}=\frac{1}{6\sqrt{2}}$，这正是在习题 10 中求出的体积值。(e) 它的中截面是边长为$\frac{1}{2}$的正六边形，所以 $C=\frac{3\sqrt{3}}{8}$。因为$A=B=\frac{\sqrt{3}}{4}$，得 $\frac{(A+4C+B)h}{6}=\frac{2\sqrt{3}h}{6}=\frac{h}{\sqrt{3}}$。这正是习题 10 中求出的体积值。(f) 它的中截面是边长为

$\frac{3}{2}$的正方形，所以 $C=\frac{9}{4}$。因为 $A=B=2$，得 $\frac{(A+4C+B)h}{6}=\frac{13h}{6}$。这正是习题6中求出的体积值。(h) 它的中截面是$1\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}$的矩形，所以 $C=\frac{3}{4}$。因为 $A=2$，$B=0$，得$\frac{(A+4C+B)h}{6}=\frac{5h}{6}$。这正是习题 10 中求出的体积值。

习题16 (i) 如果平截头棱锥体只有一个顶点，则"两平行面" E 和 F 都重合于这单独的一点，且 $A=B=C=V=0$。若果平截头棱锥体有两个顶点，那么或者(a)"两平行面" E 和 F 不同，每一个都由一个单独的顶点组成，或者(b)"两平行面" E 和 F 重合（所以 $h=0$)，且都由连接两顶点的线段组成；在这两种情况都有 $A=B=C=V=0$。若果平截头棱锥体有三个顶点，那么，或者(a)"两平行面" E 和 F 不同，一个是单独的顶点，而另一个由连接余下两顶点的线段组成；或者(b)"两平行面" E和 F 相重合（所以$h=0$)，它们都是由这平截头棱锥体的三个顶点所构成的三角形。在前一种情况，$A=B=C=V=0$。而在后一种情况，$h=V=0$。所以，对每一种情况，都有 $V=\frac{(A+4C+B)h}{6}$。

(ii) 容易检验公式对前一种有四个顶点的平截头棱锥体成立。这种平截头棱锥体的两平行面之一，比如说E是三角形，另一个面 F 是一个点：因为那样就有 $B=0$ 和 $C=\frac{A}{4}$，所以表达式 $\frac{(A+4C+B)h}{6}$ 可化简为熟知的$\frac{1}{3}A\times h$，后一类有四个顶点的平截头棱锥体要麻烦些。它的两平行面分别为长是 a 和 b 的线段。E 和 F 的面积 A 和 B 都显然为 0，E 和 F 之间的中截面是一个边

长为$\frac{1}{2}a$和$\frac{1}{2}b$的平行四边形（为什么?）且这平行四边形两边所成的角刚好是线段 E 和 F 的方向所成的角。大概要用A、B、C 和 h 表示这平截头棱锥体的体积，最简单的方法是先采用水平移动，使棱 F 的中点处于棱 E 的中点的正上方。这种变换对它的体积、高和中截面的面积均无影响(为什么不会有影响?)。这样就可设想这平截头棱锥体位于一个直棱柱内部，这直棱柱的底面是对角线长为 a 和 b 的平行四边形（图 4.15)，底面面积正好为 $2C$。所以直棱柱的体积等于 $2C\times h$。将这直棱柱切去体积和为$\frac{4Ch}{3}$的四个四面体，得出题中的平截头棱锥体，所以原平截头棱锥体的体积

$$\frac{2Ch}{3}=\frac{(A+4C+B)h}{6}.$$

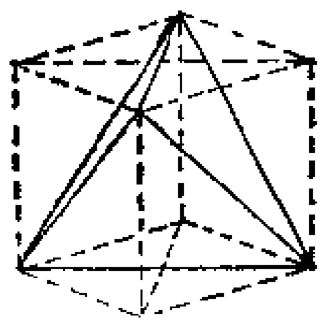


图 4.15

(iii) 提示应能让你独立地证明这题。

第II篇　广泛深入的研究

告读者

> 若果一本书浅显得不费吹灰之力，那么就理应因为它毫无教育意义而被付之一炬。教育如同其它事业一样，沉迷享乐会误入歧途。
>
> ——A·怀特黑德《思维结构》

第Ⅱ篇包括两个广泛深入的初等数学研究。可以按任意次序研读这两个研究。后一个研究（邮票问题）的长处是，基于非常简单的数值计算即可提出主要猜想。然而，这前进不了多远，必须很快引进其它的思想。前一个研究（翻转数）虽不能以如此极为简单的不费思索的方式下手，却有如下好处：最初的简朴方法能贯彻始终。仅管它最终也需要补之以更强有力的方法，但是决不会为它们完全取代，

每一个研究都专注于单一的一个初等数学问题，并以散布于正文中的系列习题的方式进行研讨。正文和习题经过仔细安排，以便读者自己研讨原问题及其自然分支。这些系列习题也提供了研讨原问题的一种方法。如果读者完完全全地解决了这些习题，并查阅了书中的提示和解答，那么应该有办法解决每一研究的核心问题。不过书中概述的研究思路只能作为导引，而不应成为束

绩，仅当读者能把正文用作起点，开始自己提出课题，研讨自己的思想时，我才算取得成功。读者在第Ⅱ篇的末尾能看到一组引伸问题。它们很值得用像研讨翻转数问题和邮票问题那样的精神思想来加以研究。

每一个研究的核心问题都是按照如下五个标准进行挑选的。

(1) 问题应当既使读者容易理解，又使读者有充分兴趣去解答它。

(2) 解法应当并不浅显，而是颇费心思的。

(3) 解决问题的努力将引出一些有趣的数学。

(4) 解问题的方法应当是完全初等的。

(5) 最后，也是最重要的一点，从正确表述问题到问题的最终解决，整个过程体现出一种数学研究方法，而且这种方法也就是当数学家（假定他仅仅熟悉中学数学）来解这同一问题时所用的数学研究方法。

读者有两项任务需要分开去做。

Ⅰ 做所有的习题。

Ⅱ 阅读正文。

Ⅰ．习题犹如数学建筑的砖石。它们提供读者所需要的经验，帮助读者发现隐藏于原问题中的有趣的数学，也有助于读者将习题的解答加以综合。

第一个注意事项　读者或许想迅速地不费多少思索地浏览习题。宛如通读教科书而把主要目标放在尽可能快地看完它一样，要慢慢来！从头至尾都要思考一下，你在做什么，你为什么要这么做。在开始解答习题之前，你应当认真地想一想，要你做的是什么，并千方百计地弄明白，习题是有助于你发现某种新事项

呢，还是只是验证你认为你已经知道的事情。在你解完习题之后，应该问一问自己，你所得的结论与你曾经设想的是否一致？

每一个习题都经过认真编排，使之有助于读者从某一侧面思考主要问题，并使你有希望能逐步地构造出自己的解答。如果你不假思索地瞎冲乱闯，那就无法体验到自己解决了问题的满足，而且迟早都会发现，你已经不再能理解面对的问题。

Ⅱ　正文如同将这些数学习题粘结在一块儿的水泥灰浆。

第二个注意事项　读者或许想跳过习题后的正文，匆忙地去解答习题。要慢慢来！请仔细阅读正文。有的时候，正文往往对研究进展到目前为止加以小结。其时，应验证一下，正文的结论与你所发现的是否一致。另一些时候，正文又常常引入一些新思想，因而读者在草率地解答下一习题之前，应先保证已理解了这些思想，并检讨我们为什么要朝向多多少少未曾预料到的方向进行下去。因而若果你没有想通隐藏于这种方向变更之后的动机，那紧跟其后的习题对你就没有多少意义。

相对而言，正文较简短。但是如果你不认真阅读正文，那就可能误失迷津，就会去做（或者要设法去做）一些在目前情况还根本不理解其意义的事情。

当读者自己努力进行研究时，必然有时会遇到困难而无法前进。这时，习题有提示，它们排印在每一章的末尾的解答之前，正文之后。

第三个注意事项　在教学中，解一道习题的方法往往有多种。读者应以找出自己的解法为目标。你得出的解法可以不同于本书的解法。若果读者仍处于设法寻求自己的解法的阶段，那么查阅书中的提示就有可能使你过于轻率地放弃你自己的解题思

路。不过，书中的提示和解答对读者总会有所助益，在需要的时候应毫无顾虑地查阅它们。

一些习题标有星号。它们及其解答对于后面内容的理解至关重要。如果读者无法解这些习题，甚至在查阅对应的提示之后也无法解答，那么显而易见要做的事情是，在继续解下去之前，先设法弄清书中的解法。如果你不会解标有星号的习题，那么如下策略可以效仿，即继续阅读下一段正文，并以极为关注新思想的方式试解紧跟着的几个习题。这些新思想对于你独自努力解决那使人困惑的习题将大有裨益。然而，一当在正文中遇到标示出间隔的，像如下这样的“米花线”：

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

就到了总结反思之时，到了判断你是否已经完全掌握了那些带星号的习题之时。当然，如果有必要，也可查阅书中的解答。

对于多数读者来说，这将是你们第一次碰上这样广泛而深入的数学研究。在你开始对所发生的事情进行评估时，可能已花去好几个小时，因而你得勉励自己。当你终于开始揭示出隐藏于原问题背后的出乎意料的数学时，你就能体会到，先前的努力并未白费，而是很有价值。尽管本书要求读者经过训练并能持之以恒，但是它还是既具有挑战性，又能使人愉悦。所以如果你在一特殊习题陷于泥淖，那就把它放在一边，继续往下阅读。因为相继的正文和习题通常都会解决你的大多数困难。

最后，这两项研究并不是要么全读，要么不读的非此即彼的事情。如果你只完成了部分研究，毫无疑问地你会错过某些知识，失去一些方法。但是，我是以这样的方式来设计和安排每一个研究的：无论你在何处停止研讨，你仍然能从已有的经验中获

得一些有价值的东西。所以，只要你认为你已经足够了，就可以在你研讨的任何阶段停止研讨。你会错过某些东西，但是我断言，你仍会发现所得甚多。

研究Ⅰ　翻转数

第五章　九倍翻转数

她做完了一件事后，说道：
"它看起来相当美，
理解起来却很难！"
（你知道，她从不愿意承认，
——哪怕是对她自己，
她无法彻底解决它。）

——艾丽斯《用镜子来观察》

在第二章中我们研究了一些"数学魔术"。若你还没有做过下述问题，现在就应该做一做了。

习题1　(i) 选一个3位数 abc，其中第一个数字 a 不等于最后一个数字 c：

$$a\ b\ c$$

将这3个数字的顺序颠倒，就得到另一个3位数：

$$c\ b\ a$$

从 abc 和 cba 中的较大者减去较小者，就得到一个新的3位数 def（若结果是一个2位数，则在左边第一个数字的位置添上

一个 0，使之成为一个 3 位数$0ef$）。

$$\begin{array}{r} a\ b\ c \\ -)\ c\ b\ a \\ \hline d\ e\ f \end{array}$$

将 def 的 3 个数字的顺序颠倒，得到 fed（若新得到的数为 $0\,ef$，即第一个数字为 0，则颠倒了顺序后的 3 位数为 $fe\,0$，即最后一个数字为 0），再将它们相加。你所得到的结果是什么呢？

$$\begin{array}{r} d\ e\ f \\ +)\ f\ e\ d \\ \hline \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \hline \end{array}$$

（ii）再选另一个 3 位数 abc，重复上述过程。这次你所得到的结果又是什么呢？

（iii）让你的朋友自己秘密地选择一个 3 位数，让他遵循上述过程，并不让你知道他的答案，你能猜出他的结果吗？

（iv）你能不能解释为什么结果总是为同一个数，即 1089 呢？

现在这个问题研究要从 1089（以 10 为基底，即为十进位）的另一个有趣的特征开始着手。

习题2* （i）计算 1089×9。对于计算结果你注意到了什么吗？

（ii）尽量去寻找出别的这类 4 位数，它们要具有 1089 乘以 9 时所表现出的特点。

若 N 为一个正整数（以 10 为基底），且 $9\times N$ 与 N 有相同的数字，但与 N 的数字的顺序相反，则简称 N 为 9 倍翻转数。

在习题 2(i)中，你已证明 1089 是有 4 个数字的 9 倍翻转数。而习题 2(ii)则对你是一种挑战，要求你找出有 4 个数字的其它9倍翻转数。可能你已发现，这是一项相当困难的任务。你找到了某个符合条件的数了吗？也许，1089 是唯一的有 4 个数字的 9倍翻转数。是这样的吗?如果确实如此的话，那么，对于不管有多少个数字的情况，又是不是有希望能找出所有的 9 倍翻转数呢?

在我们匆匆忙忙地要去找出有 5 个数字的 9 倍翻转数、有 6 个数字的 9 倍翻转数等等之前，值得先回头看看有 1 个数字、2 个数字和 3 个数字的 9 倍翻转数的情形。

习题3* 是否存在 1 个数字的 9 倍翻转数?

习题4* 是否存在 2 个数字的 9 倍翻转数?

习题5* 找出所有 3 个数字的 9 倍翻转数?

解答习题 4 的方法之一是逐一计算 9×10、9×11、9×12, …, 9×99。换言之，可以通过依次检验每一个 2 位数，看它们是不是 9 倍翻转数。这种方法肯定是有效的，但显得太笨拙，因而没有实用性。我们所需要的是一种简单有效的方法，它不仅能找出 5 个数字的 9 倍翻转数，而且也能找出 50 个数字、500 个数字的 9 倍翻转数。在继续往前阅读时，可看看习题 4 和习题 5 的提示(若有必要可看我给出的解答)。

※ ※ ※

现在你应该能通过填出下述习题中的细节，把你在习题 2(ii)中得到的解答作出改进。

习题6 设 a、b、c、d 是 9 倍翻转数 $abcd$（以 10 为基底）的 4 个数字。试利用右边的提示回答下列问题。

（i）在千位数上的数字 a 必须取什么值？从而 d 应该取什么值？

（ii）现你已知数字 a 和 d。乘以 9 后有多少个千从百位进到千位？b 可以取哪 2 个可能的值？

（iii）证明：在 b 的 2 种可能的取值中，实际上只能取其中的一个值。

（iv）你既知 a、b 和 d 的取值。试找出所有可能的 c 值，从而找出所有 4 数字的9倍翻转数。

$$
\begin{array}{rcccc}
 & \boxed{a} & b & c & d \\
\times) & & & & 9 \\
\hline
 & \boxed{a} & c & b & a
\end{array}
$$

有多少个万从千位上进到万位上？

你已知 $a=1$，$d=9$，而且已知从没数字从百位进到千位上，

若 $b=1$，那么 $c=$ ____，并且…

现在，你应该用同样的方法去找出有 5 个数字的全部 9 倍翻转数。

习题7 设 a、b、c、d、e 是 9 倍翻转数 $abcde$（以 10 为基底）的 5 个数字。

$$
\begin{array}{rccccc}
 & \boxed{a} & b & c & d & e \\
\times) & & & & & 9 \\
\hline
 & \boxed{e} & d & c & b & a
\end{array}
$$

（i）数字 a 必须等于多少？e 必须等于多少？

（ii）b 能取哪两个可能的值？试证明实际上只能取其中的一

个值。

(iii) 找出有5个数字的所有9倍翻转数。

迄至目前，你已知道不存在只有1个数字、2个数字和3个数字的9倍翻转数，而4个数字的9倍翻转数只有1个；并且，若你已完成了习题7，也就知道了5个数字的全部9倍翻转数。但是，所有这些结果在数学上的意义是什么呢?

通常，通过做一些初步的运算，把你的方法引进问题求解之中，作一点规律性的探索，是一个好主意。但是，你迟早都必须决定是作更多的计算来进行探索呢，还是暂时停下来，代之以思考，想想你应该往里走去? 既然你已做了9倍翻转数的某些初步计算，也许现在应去确定哪些问题似乎值得作一番研究了。事实上，下面两个问题就是应研究的问题的例子。

问题 A 能不能准确地说出 n 个数字的9倍翻转数有多少个?

问题 B 是否能以某种方式列出 n 个数字的全部9倍翻转数?

在某种意义上，你已经在开始回答问题 A 和 B 了。在习题3－7中，你已找到最多有5个数字的9倍翻转数。很显然下一步要做的就是，找出有6个数字、7个数字等等的所有9倍翻转数。

习题8* （仅对未能完成习题7的情况适用）找出所有5个数字的9倍翻转数。

习题9* 利用习题6中给出的方法，找出6个数字的全部9

倍翻转数。

习题 8 和 9 的解答对后面是非常有用的．但是，随着我们不假思索地运用一种笨方法直接从求 4 个数字的 9 倍翻转数数目，到求 5 个数字的 9 倍翻转数数目，再从求 5 个数字的 9 倍翻转数数目，到求 6 个数字的 9 倍翻转数数目，就可能会出现两个方面的失误。

第一，你可能是完全针对有 6 个数字、7 个数字、8 个数字、9 个数字，甚至 10 个数字的情形来解答问题 A 和 B 的，但这对于有 100 个数字、1000，000 个数字的情形解答问题 A 和 B，不会有什么帮助。

第二，当你针对有 5 个数字的情形解答 A 和 B 时，你可能已注意到，你仅仅是在多次重复有 4 个数字的情形时所做的事(图 5·1)。所以，当你对有 4 个数字、5 个数字、6 个数字、7 个数字或 8 个数字的情形进行仔细地计算时，不能仅仅满足于“得到了正确的答案”．你必须始终留心能帮助你发现一般模式的线索。

$$\begin{array}{rccccc} & \overset{1}{a} & b & c & d & \overset{9}{e} \\ \times) & & & & & 9 \\ \hline & \underset{9}{e} & d & c & b & \underset{1}{a} \end{array}$$

提示

$a=1$，所以 $e=9$

$\therefore$ $b=0$ 或 $b=1$ 等等

图 5.1

问题 A 和问题 B 还仅仅是个开端，在我们有把握说：“已经掌握了有关 9 倍翻转数的数学内容”之前，我们还要回答另一些有趣的问题，下面几个就是这类问题的例子。

问题C 关于 8 倍翻转数、7 倍翻转数，等等，情况会怎么样呢？你能把它们都找出来吗？

问题D 当我们研究的数不是以 10 为基底时，情况又会怎么样呢？例如，若所有的数都以 9 为基底，那么是否存在任何 8 倍翻转数呢？若存在，你能将它们全都找出来吗？

问题E 习题 1 和习题 2 之间是否有某种联系呢？为什么两个地方会出现同一个数呢？

习题提示

2 (i) 回过头仔细地看你的计算结果。

(ii) 设 a、b、c、d 是 0 与 9 间的数字，且 $a\neq 0$。

$$\begin{array}{rcccc} & a & b & c & d \\ \times) & & & & 9 \\ \hline & d & c & b & a \end{array}$$

关于 a 你能看出什么吗？关于 d 呢？

4. $9\times a$ 要得到一个不进位的单个数字，故 $a=$____，而 $b=$____。

$$\begin{array}{rcc} & a & b \\ \times) & & 9 \\ \hline & b & a \end{array}$$

5. $9\times a$ 要得到一个没有进位的单个数字，故 $a=$ ____，而 $c=$____。

$$\begin{array}{rccc} & a & b & c \\ \times) & & & 9 \\ \hline & c & b & a \end{array}$$

解答

习题1 参看第二章习题3的解答。

习题2 (i) 得到将1089反序排出的数字9801。

习题3 答案与你是否把"0"看成一个数字有关。

习题4 没有(提示已经表明：若 ab 为一个9倍翻转数，那么 $a=1$ 而 $b=9$，但是，$9\times19\neq91$，故19不是9倍翻转数。)

习题5 没有。(提示表明：若 abc 是一个9倍翻转数，则 $a=1$ 而 $c=9$。但，因为乘9后不能有十位上的数字进到百位上，故 $b=0$ 或 $b=1$。然而，$9\times109\neq901$，$9\times119\neq911$，故109和119都不是9倍翻转数。)

习题6 (i) $a=1$，$d=9$。

(ii) 一个也没有。从而 $b=0$ 或 $b=1$。

(iii) 若 $b=1$，则 $9\times c+8$ 的末尾必为1，故 $9\times c$ 的末尾一个数必为3，从而，$c=7$。但是，$9\times1179\neq9711$，故 b 不能取1。

(iv) 因而 $b=0$，而 $9\times c+8$ 的末尾一个数只能为0，故 $9\times c$ 的末尾一个数必为2。于是，$c=8$。从而 $abcd=1089$。这是唯一的一个4个数字的9倍翻转数。

习题7 (i) $a=1$，$e=9$。

(ii) $b=0$ 或 $b=1$。若 $b=1$，则 $9\times d+8$ 的末尾一个数必为1，于是 $9\times d$ 的末尾一个数必为3。因此，$d=7$，而数字7必定会进到百位上。那么，$9\times c+7$ 的末尾一个数字必定为 c。而这是不可能的，故 $b=1$ 是不可能的。

(另一种证明方法是：若 $b=1$ 且没有数字从千位进到万位，则 $d=9\times b+?=9+?=9$。但是，从十位上我们看到 $9\times d+8$ 的末尾一个数字必为 $b=1$。)

(iii) $a=1$，$e=9$，$b=0$。从十位上看，$9\times d+8$ 的末尾一个

数为 0，故 $d=8$，且数字 8 必定要进行到百位上。于是 $9\times c+8$ 必定以 c 为末尾一个数，而且必须将 8 进到千位上，故 $c=9$。从而 $abcde=10989$。又，$9\times 10989=98901$。故 5 个数字的 9 倍翻转数只有 1 个，即 10989。

习题8 参看习题 7(iii)的解答。

习题9 设 $abcdef$ 是一个 9 倍翻转数。于是，如习题 7 所示，可得 $a=1$，$f=9$，$b=0$，$c=8$。在千位上，$9\times c+?$ 必定要将 8 进到万位上，故 $c=8$($?=8$，故 $d=0$)或 $c=9$。但若 $d=0$，则就没有数字进到千位上，于是 $?=0$。因而，只有 $c=9$，且 $9\times d+8$ 的末尾数字为 9。于是 $d=9$。从而，$abcdef=109989$。易知 $9\times 109989=989901$。故这是唯一的 6 个数字的 9 倍翻转数。

第六章 猜测的艺术

> 达到真理比找出一个错误困难得多。
>
> ——伽利略

再考察问题 B

问题 B 是否能以某种简单的方式列出所有的 9 倍翻转数呢？

一个乐观主义者可能更愿意直接用一个有挑战性的问题来取代这个带有尝试性的问题。

习题 B 试找出所有 9 倍翻转数。

乍一看，习题 B 与已经解决了的几个问题非常类似。例如：

习题 6 (iv) 找出 4 个数字的所有 9 倍翻转数。

习题 7(iii) 找出 5 个数字的所有 9 倍翻转数。

习题9 找出 6 个数字的所有 9 倍翻转数。

但是，习题 B 与习题 6、7、9 之间有巨大的差别。在习题 6中你只考察了一个未知的 9 倍翻转数 $abcd$，证明了：

第一，$a=1$，而 $d=9$；

第二，$b=0$ 或 $b=1$；

第三，$b=1$ 实事上不成立，故 $b=0$；

最后，$c=8$，故 $abcd=1089$。

求出5个数字、6个数字的所有9倍翻转数，只是计算稍稍长一点，而绝对不会难到无法写出全部答案的程度。但是，对习题B，一个完整的解答就必须做到：不仅告诉我们有关4个数字、5个数字、6个数字的9倍翻转数的情况，而且还必须告诉我们有关400个数字、5000个数字、6000000个数字等等的9倍翻转数的情况。所以，你不能指望能用解答习题6的方法，去解答习题B。

习题6和习题B的差异部分地是由如下事实引起的：习题6仅仅提出了一项有限的任务，而问题B似乎是一项"无限"的任务。为了找出4个数字的全部9倍翻转数，我们可以通过试算从1000到9999的每一个数，即分别用9乘每个数，看结果是不是个9倍翻转数。这虽然并不是找出4个数字的所有9倍翻转数的一种满意的方法，但它确实是有效的。习题6给出的方法，在某种意义上可以说仅仅是检查从1000到9999的所有数的一种巧妙的方法。但是，若我们要找出全部9倍翻转数，而不是仅仅局限在4个数字的情形，那就必须找到一个非常巧妙的方法，能去检查每一个正整数。

数学家会怎样来着手解决这个一个问题呢？像习题B这样，问题的答案并不是明显的时，一种有效的方式是：不要从正面直接着手去解决这个问题，而是设法巧妙地一步一步地走向最后解决的目的。

在现实生活中，当你要走向一个目标时，你只需采用两种不同的步骤："左脚向前和右脚向前"。但是，你只要不断地重复这两个步骤，就能走到需要到达的地方。我们走向解决习题B的方式，也仅仅是基于两个步骤，只要简单地重复这两个步骤，最后就能找到问题B的完整的答案。在寻求习题B的答案时，我们

要反复用到的步骤就是：

习题B：步骤1　猜测！利用所有你喜欢用的方法去猜测：完整地列出所有9倍翻转数的清单会象什么样了。

习题B：步骤2　验证你的猜测！以某种方式检验你的猜测，从而找出（如果存在的话）其中的错误。

当你一次又一次地重复上述两个步骤时，你会感到你自己是在一步一步地迈向你的目的。

步骤1　作出有理性的猜测。猜测完整地列出所有9倍翻转数会像什么样子。

步骤2　设法找出你在第一次列出9倍翻转数时漏掉的9倍翻转数。

重复步骤1　改进你的初步猜测，这时必须考虑到你在步骤2中新找出的9倍翻转数。

重复步骤2　再设法找出你在第二次（改进后）列出的9倍翻转数中漏掉的9倍翻转数。

再重复步骤1　……

小心地避免直接从正面着手解决习题 B，而代之以一次次地重复上述两个步骤的意义是什么呢？

这种“猜测-验证-再猜测-再验证…”的过程，当然还不足以给出习题 B 的解答。但它是着手解决问题的一种极好的方式。至少，它给你提供了一种机会——走向解决初看上去完全不知从何下手的问题的机会。正如前面所说它是开辟道路，并一点点地

前进直到走向问题的完整解答的一种方式。

当你最终认为，你已经绝对有把握肯定，列出全部9倍翻转数必定会是什么样的时，就是你应该考虑步骤的时候了。

习题 B：步骤3　证明！给出一种令人信服的数学证明，表明你列出的9倍翻转数确实就是全部9倍翻转数。

但是，“猜测-验证-再猜测-再验证-…”这一过程的全部目的，就是要把考虑步骤的时间，推迟至已经围绕问题研究了一阵子、并且已经抓住了某些似乎会成立的结论之后。

现在是时候了！看看所有这些思想将会怎样帮助你研究解决问题 B。这里，就让我们从步骤1开始吧！

步骤1　猜测！对于全部列出9倍翻转数将会像什么样子的问题，作出一个理性的初步猜测。

在前一章中，你已找出了最多6个数字的9倍翻转数。图6.1

数字的数目	列出全部 9倍翻转数
1	没有(习题3)
2	没有(习题4)
3	没有(习题5)
4	1089(习题6)
5	10989(习题7、8)
6	109989(习题9)
7	?
⋮	⋮

图 6.1

表中给出了迄今已知的结果。试初步地猜猜，这个表将会怎样继续下去。这似乎并不需要多少想像力。

习题10 按你的猜测，表中下面几个数应是什么呢？将你的猜测填入图 6.2 的表中。

数字的数目	猜测的全部 9 倍翻转数
7	?
8	?
9	?
10	?
11	?

图 6.2

虽然，你只填出了直到 11 个数字的全部 9 倍翻转数，但是你可能对列出全部 9 倍翻转数会像什么样子，已有了非常清晰的想法了。然而，你不要忘记了，你的这种想法仅仅是一个初步的猜测。因此，你还必须进到步骤 2。

步骤 2 验证猜测：以某种方式检验你的猜测：找出（如果存在的话）猜测中包含的错误。

事实上，检验关于所有 9 倍翻转数的猜测，需要做两件事。

习题11 首先，要检验你填进图 6.2 的表（习题10）中每一个数，看其是不是 9 倍翻转数。请完成这种检验。

若你填进表中的某个（些）数原来并不是 9 倍翻转数，那么你就必须回过头来寻找一个更好的猜测（再做步骤 1）。而若表中的

数确实都是9倍翻转数，那又说明了什么呢？是不是意味着你的猜测是完全正确的呢？你可能会倾向于认为你的猜测是完全正确的。但是，你错了！因为你尚未完成第二件事，也是更重要的一件事，即检验你猜得了全部9倍翻转数。

步骤2 验证猜测！你怎样知道，你猜测列出的9倍翻转数，包括了所有可能的9倍翻转数呢？你怎样知道你没有漏掉某个9倍翻转数呢？

并不存在一种简单的方法，能够确定你猜测列出的9倍翻转数，是否漏掉了某个(些)9倍翻转数。但是，你至少可以这样来开始你的验证工作，即检验你列出的9倍翻转数中，是否包括了(比如说)7个数字、8个数字、或9个数字的全部9倍翻转数。

习题12* (i) 利用习题6中给出的方法，找出7个数字的全部9倍翻转数。

(ii) 回头再看你在习题10中猜测列出的9倍翻转数，将(i)中得到的结果与之对比。你的猜测是完整的吗？

习题13* (i) 利用习题6中给出的方法，找出8个数字的全部9倍翻转数。

(ii) 将(i)的结果与习题10中的猜测对比，你的猜测是完整的吗？

习题14* (i) 找出9个数字的所有9倍翻转数。

(ii) 与习题10的猜测对比，你的猜测是完全的吗？

猜测的目的并不是要一下子就猜到正确的结果。若你正在设

法解决的问题非常困难，初步猜测几乎总是不正确的。但不要因此而停止猜测。恰恰相反，应再设法作出尽可能合理的猜测。猜测的真正价值在于，它使得如下一点成为可能：不是直接去对付一个一般的问题，它可能太复杂以至无法彻底解决，如像：

习题 B 找出所有 9 倍翻转数，

而是代之以解决一组更容易解决的、更特殊的问题，如像：

习题 B：步骤2 猜测得出的 7 个数字的 9 倍翻转数是完全的吗？猜得的 8 个数字的 9 倍翻转数是完全的吗？猜得的 9 个数字的 9 倍翻转数是完全的吗？

一个有理性的猜测，其作用犹如照相机的镜头把焦距对准了某个特殊的对像。考察某个特殊情况（如像习题 12、13 和14）几乎总会比考察一般情况（如像习题 B）容易得多。

在结束本章之前，你应试着独立地完成习题 B。当然，后面我们还要回过头来考察这个问题，所以，即使你未能完成习题 B，也不用太着急。

你对习题 13 和 14 的解答，应使你自己相信，有必要改进你的初步猜测。例如，当你利用习题 6 中给出的方法去找出 8 个数字的全部 9 倍翻转数时，你大概会像这样开始：

$$\begin{array}{rcccccccc} & a & b & c & d & e & f & g & h \\ \times) & & & & & & & & 9 \\ \hline & h & g & f & e & d & c & b & a \\ \hline \end{array}$$

容易知道：

第一，$a=1$，而 $h=9$；

第二，$b=0$ 或 $b=1$；

第三，$b=1$ 实际上是不可能的，故 $b=0$；

第四，$g=8$，故必须将 8 从十万位进到百万位；

从而，$c=8$ 或 $c=9$。若 $c=9$，你便得到了预期的那个 9 倍翻转数。但若 $c=8$，你也可得到一个 9 倍翻转数。这个 9 倍翻转数很可能在习题 10 中作第一次猜测时被漏掉了。你一经发现了这个不曾料到的“入侵者”，就应该设法改进你的第一次猜测。在作第二次猜测时，就应考虑到刚刚那个发现。也许习题 14 的解答又表明你的第二次猜测仍是不正确的。那么，你就必须再改进你的猜测。

试试看你能否具体地完成“猜测和验证”，直到确实地知道习题 B的答案，即使是你还不知道如何证明你的猜测(步骤3)。

习题15* (i) 利用习题13和14的结果，填写图 6.3 中的表。

数字的数目	列出所有 9 倍翻转数
4	1089
5	10989
6	109989
7	1099989(习题 12)
8	(习题 13)
9	(习题 14)

图 6.3

(ii) 猜测后面几项是什么，并将你的猜测填入图 6.4 的表中。

数字的数目	猜测的所有 9 倍翻转数
10	
12	
13	

图 6.4

(iii) 运用习题 6 的方法，求出有 10 个数字的全部 9 倍翻转数；并检验你的猜测，看你是否漏掉了某个(些)9 倍翻转数。然后，对 11 个数字、12 个数字、13 个数字的情况作同样的研究。

(iv) 具体地实行“猜测”(步骤 1)和“验证猜测”(步骤 2)的过程，直到你确信你已发现了一个真正简单的“决窍”，这个“决窍”能告诉你如何写出(比如) 24 个数字的所有 9 倍翻转数。

(v) 设法找到令人信服的数学解释，说明你的“决窍”不会漏掉任何一个 9 倍翻转数。

习题提示

14. (*i*) 利用习题 6 中给出的方法就能全部找出它们。

15. (v) 利用曾在习题 6、8、9 中都有效的方法。但这次是从形如

$$abcd\cdots wxyz$$

的 9 倍翻转数开始着手，对这个数并未指出数字的具体的数目。首先设法决定出最“外边”的两个数字 a 和 z。然后有规则地对“里边”的数字运用你的方法。

$$\begin{array}{rccccccc}
 & \overset{1}{\cancel{a}} & b & c & d\cdots w & x & y & \overset{9}{\cancel{z}} \\
\times) & & & & & & & 9 \\
\hline
 & \underset{9}{\cancel{z}} & y & x & w\cdots d & c & b & \underset{1}{\cancel{a}}
\end{array}$$

解答

习题12 (i) 现在你应能把你在习题6、7和9中使用的推证过程，扩大运用到7个数字的情形，证明1099989是唯一的7个数字的9倍翻转数。

习题13 (i) 设 $abcdefgh$ 是有8个数字的9倍翻转数。那么，照例有 $a=1$，$h=9$，$b=0$，$g=8$。于是 $9\times c+?$ 必定要把8进到百万位，从而 $c=8$(且? $=8$，故 $f=0$)，或 $c=9$。若 $c=9$，则 $f=d=e=9$，这样，就得到了预期的9倍翻转数。若 $c=8$，那么 $f=0$，$d=9$，$e=1$，你得到一个未曾料到的9倍翻转数，即10891089。

习题14 (i) 设 $abcdefghi$ 是有9个数字的9倍翻转数。那么，照例有 $a=1$，$i=9$，$b=0$，$h=8$。$9\times c+?$ 必定要把8进到下一位，故 $c=8$ (且? $=8$，所以 $g=0$)，或 $c=9$。若 $c=9$，则 $g=d=f=e=9$，于是得到预期的9倍翻转数109999989。若 $c=8$，则 $g=0$，$d=9$，$f=1$，$e=0$，于是得到一个未曾料到的9倍翻转数，即108901089。

习题15 (iv)、(v) 在现阶段我不打算给出解答。请继续仔细考虑这个问题。后面，我们将会再回过头来研究这个问题(例如，在习题24、30中会再研究它)。

第七章 其它翻转数

> 科学家们一直都在注视着这样一类事件：
> 它们并不是容易理解的，
> 然而人们的一系列有理性的步骤，
> 可以完全掌握它们，控制它们；
> 科学家也有能力采取这些步骤。
>
> ——S.托尔明《预见和理解》

你可能会问：我们为什么要从9倍翻转数开始讨论，而不是从7倍翻转数、4倍翻转数或者别的翻转数开始讨论呢？其实，在第五章末尾提出的问题之一也正是涉及到了这一点。

问题C 关于8倍翻转数、7倍翻转数等等，情况会怎么样呢？你能把它们都找出来吗？

既然你已成功地找出了所有9倍翻转数，那么值得一试的是，用同样的方法去找出所有其它翻转数，不要因为这看起来很长很费事而却步。实际上，你在第五章和第六章已完成了所有困难的工作，你可能会发现，你会以快得令你自己吃惊的速度阅读完这一章。

象123454321这样的数，就是一个1倍翻转数，它的特点是向前和向后读出的结果都是相同的。这种数称为“对称数”，数学中许多地方不时出现这种对称数。但这里我们不去特别研究它。

这一章里需要做的事是：找出所有8倍翻转数、7倍翻转数、6倍翻转数，…，2倍翻转数。

习题16* 找出有4个数字的所有8倍翻转数。

只要你完成了习题16，就应该没有任何困难地找出全部8倍翻转数。

习题17* 找出全部8倍翻转数。

当你成功地找出了所有8倍翻转数后，你就应能用同样的方法找出所有6倍翻转数。

习题18* (i) 找出有4个数字的全部6倍翻转数。

(ii) 找出全部6倍翻转数。

用类似的思路，你应能找出所有7倍翻转数、5倍翻转数，乃至4倍翻转数、3倍翻转数和2倍翻转数。

习题19* (i) 找出有4个数字的所有7倍翻转数。

(ii) 找出所有7倍翻转数。

习题20 (i) 找出有5个数字的所有5倍翻转数。

(ii) 找出所有的5倍翻转数。

习题21* 找出有4个数字的所有4倍翻转数。

在去设法找出全部4倍翻转数以前，显然你必须更努力地作一些思考。当然，在第五章和第六章中，当你设法去找出全部9倍翻转数时所作的研究，应该对如何着手进行的问题，为你提供了相当清晰的概念。

习题22 (i) 找出有1个数字的所有4倍翻转数。

(ii) 找出有2个数字的所有4倍翻转数。

(iii) 找出有3个数字的所有4倍翻转数。

习题23* 找出有5个数字的所有4倍翻转数。

当你回答了习题21、22和23后，你也许已经感觉到你是在熟路上驾轻车。现在，你应能对有6个数字、7个数字、8个数字、9个数字和10个数字的4倍翻转数的情况，作出有理性的初步猜测。

习题24 (i) 利用习题21、22和23的结果完成图7.1中的表。

数字的数目	列出所有4倍翻转数
1	
2	
3	
4	
5	

图 7.1

(ii) 请你猜测，上表的接下来几项是什么呢？请将你的猜测填入图 7.2 中的表。

数字的数目	猜测的所有 4 倍翻转数
6	
7	
8	
9	
10	

图 7.2

(iii) 请验证你的每一个猜测。

(iv) 试给出一种简单的“决窍”，要求是：它能告诉你如何写出（比如说）34个数字的所有 4 倍翻转数。

(v) 试找出一种令人信服的数学解释，说明你的“决窍”为什么不会漏掉任何一个 4 倍翻转数。

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

也许你还没有注意到，9 倍翻转数和 4 倍翻转数之间存在一种令人惊异的关系。这正是下一个练习题要研究的主题。

习题25 (i) 4 个数字的 9 倍翻转数只有一个(1089)，而4个数字的 4 倍翻转数也只有一个(2178)。这两个数相互有什么关联吗？

(ii) 5 个数字的 9 倍翻转数只有一个(10989)，5 个数字的4倍翻转数只有一个(21978)。这两个数有什么关系吗？

(iii) 写出有 8 个数字的两个 9 倍翻转数，有 8 个数字的两个 4 倍翻转数。这些数相互有什么联系吗？

(iv) 你能解释为什么 9 倍翻转数和 4 倍翻转数会以你指出

的那种方式相互联系吗？

为了使"其它翻转数"这一章完整，还应该考察完成3倍翻转数、2倍翻转数的研究。

习题26 （i）找出有4个数字的所有3倍翻转数。

（ii）找出所有3倍翻转数。

习题27 （i）找出有4个数字的所有2倍翻转数。

（ii）找出所有2倍翻转数。

习题提示

16．你可以利用习题6给出的方法．但是，还存在一种更迅速的方法。个位的第一列对于 a 向你提供了什么信息呢？

$$
\begin{array}{rrrr}
 & a\ b\ c & \boxed{d} \\
\times) & & \boxed{8} \\
\hline
 & d\ c\ b & \boxed{a}
\end{array}
$$

17．读习题16的提示。

18．（i）用习题16的提示，只是以"6"取代"8"。

19．（i）关于 a 你能说出什么结果吗？个位列能对 d 提供什么信息呢？

$$
\begin{array}{rcccc}
 & \boxed{a} & b & c & d \\
\times) & & & & 7 \\
\hline
 & d & c & b & a
\end{array}
$$

（ii）再读对(i)的提示。

20．(i) 用“5”取代习题19的提示中的“7”。

21．从个位列上，你会知道：a 是 $d\times4$ 的个位数字，故 a 必为偶数。从千位列上，你能看出：$a=1$ 或 $a=2$。

22．(ii) 再看习题 4 的提示。

(ii) 再看习题 5 的提示。

24．(v) 在你考虑 4 倍翻转数时，要记住你在第五章和第六章中所发现的有关 9 倍翻转数的结果。

解答

习题16 设 $abcd$ 是有 4 个数字的 8 倍翻转数。那么 $8\times d$ 的末尾一个数字为 a，故 a 必为偶数。但，当 $a\geqslant2$ 时，$8\times a+?$ 必会将某个数字进到万位上。故不存在 4 个数字的 8 倍翻转数。

习题17 用习题16中的推论方法可以证明：不管 n 为多大，都不存在 n 个数字的 8 倍翻转数。

习题18 (i) 用“6”取代习题16的解答中的“8”。

(ii) 用“6”取代习题17的解答中的“8”。

习题19 (i) 设 $abcd$ 是4个数字的7倍翻转数。于是，照例有 $a=1$。这样 $7\times d$ 必以 1 为末尾一个数字。从而 $d=3$。然而，$7\times 16c3$ 必大于 7000，而不可能等于 $3cb1$。

(ii) 用(i)中使用的推论方法可以证明：不存在任何 7 倍翻转数。

习题20 (i) 设 $abcd$ 是 4个数字的 5 倍翻转数。照例有 $a=1$，故 $5\times d$ 的末尾数字必为 1。然而，这是不可能的。

(ii) 利用(i)中使用的推论方法可以证明：不存在任何 5 倍翻转数。

习题21 提示表明 $a=2$，于是 $4\times2+?=d$，故 $d=8$(且 $?=$

0，故 $b\leqslant 2$)，或 $d=9$．但是，$4\times d$ 的末尾数字为 2，故 $d=3$ 或 $d=8$．从而，$d=8$．$4\times c+3$ 的末尾一个数字为 b，故 b 必为奇数，因而 $b=1$，而 $c=2$ 或 $c=7$．但，当 $c=2$时，百位上的数字就会出错，故只有 $c=7$，从而 $abcd=2178$．又，$4\times 2178=8712$，故这是唯一的 4 个数字的 4 倍翻转数．

习题22 (i) 完全依赖于你是否把"0"看作只有1个数字的数．

(ii) 不存有 2 个数字的 4 倍翻转数．(提示表明，若 ab 是 4 倍翻转数，则 $a=2$，$b=8$．但是，$4\times 28\neq 82$，故 28 不是 4 倍翻转数．)

(iii) 不存在 3 个数字的 4 倍翻转数．(提示表明，若 abc 是4倍翻转数，则 $a=2$，$c=8$．于是 $4\times b+3$ 的末尾数字必为 b，从而 $b=9$，但这是不可能的；因为不可能会有数进到百位上去)．

习题23 设 $abcde$ 是 5 个数字的 4 倍翻转数．于是，照例有 $a=2$，$e=8$．而 $b=1$（参看习题 21 的解)，故 $d=7$．这样，$4\times c+3$ 的末尾数字就必为 c，故 $c=9$．从而 $abcde=21978$．又，$4\times 21978=87912$，故，这是唯一的有 5 个数字的 4 倍翻转数．

习题24 (iv) 0，2178，21978，219978，2199978，…是基本的 4 倍翻转数．只要按下述规则，它们可以按任何方式排在一起而构成新的 4 倍翻转数：第一组与最后一组、第二组与倒数第二组等等，如此配对，每一对的两个数完全相同．例如：

219978 000 2178 0 21978 2199978 0 2199978 21978 0 2178 000 2199978

(v) 在习题30(ii)的解答中，我们将回到这个议题上，即为

什么以上述方法可以得出所有 4 倍翻转数（以 10 为基底）。

习题25 (i) $2178=2\times1089$。

(ii) $21978=2\times10989$。

(iii) $21999978=2\times10999989$，$21782178=2\times10891089$。

(iv) 初等代数表明：以 b 为基底，就有

$$[1\times b^3+0\times b^2+(b-2)\times b+(b-1)]\times(b-1)$$
$$=(b-1)\times b^3+(b-2)\times b^2+0\times b+1,$$
$$[1\times b^3+0\times b^2+(b-2)\times b+(b-1)]\times2$$
$$=2\times b^3+1\times b^2+(b-3)\times b+(b-2),$$

所以，$10(b-2)(b-1)$（以 b 为基底）是 $(b-1)$ 倍翻转数（以 b 为基底）；并且

$$10(b-2)(b-1)(\text{以 } b \text{ 为基底})\times2$$
$$=20(b-3)(b-2)(\text{以 } b \text{ 为基底})$$

于是，

$$[2\times b^3+0\times b^2+(b-3)+(b-2)]\times\frac{1}{2}(b-2)$$

$$=(b-2)\times b^3+(b-3)\times b^2+1\times b+2$$

故，若 b 是大于或等于 4 的偶数，那么，

$$20(b-3)(b-2)(\text{以 } b \text{ 为基底})$$

就是 $\frac{1}{2}(b-2)$ 倍翻转数。

习题26 (ii) 设 $3\times(a\cdots z)=z\cdots a$，写成竖式为

$$\begin{array}{r} a\cdots z \\ \times)\quad 3 \\ \hline z\cdots a \end{array}$$

从最左边的一列可知 $a\leqslant3$；并且，当 $a=1$ 时，$3\leqslant z\leqslant5$，当 $a=$

2时，$6\leqslant z\leqslant 8$，当 $a=3$时，$z=9$。而从最右边的一列可知，若 $a=1$，则 $z=7$，若 $a=2$，则 $z=4$，若 $a=3$，则 $z=1$。由是可知，不存在3倍翻转数。

习题27 （ii）设 $2\times(a\ldots z)=z\ldots a$。写成竖式，从右边一列可知 a 为偶数。从左边一列可知 $a\leqslant 4$，故 $a=2$ 或 $a=4$，并且，若 $a=2$，则 $4\leqslant z\leqslant 5$，若 $a=4$，则 $8\leqslant z\leqslant 9$。但是，右边一列又显示：若 $a=2$，则 $z=1$ 或 $z=6$；若 $a=4$，则 $z=2$ 或 $z=7$。于是，不存在2倍翻转数。

第八章 其它基底的翻转数

> 倘若事情的枝节能为我们带来新知，
> 我们就要问问：为什么它们会给我们造成麻烦？
> 我们怎么才能知道，会不会从中出现新奇的东西——
> 它们都比原先得到的结论有趣得多？

通常，数都以 10 为基底写出．但你可能已经知道，它们也能以其它基底写出，在第五章末尾我们提出的问题之一是：

问题 D 当我们研究的数不是以 10 为基底时，情况会怎么样呢？例如，若数的基底为 9，是否存在任何 8 倍翻转数呢？若存在，你能将它们都找出来吗？

我们对以10为基底的数非常熟悉，因此，很自然地会首先考虑以10为基底的数的翻转数．但是，考察一下以其它数为基底的情形，常常是很有意义的．

然而，我们尚无以其它数为基底进行算术运算的大量实践．当然，基本概念是很简单的，例如

$$二百零六 = 2\times10^2+0\times10+6,$$

于是，将它简写为

$$二百零六 = 206（以10为基底）.$$

但是，若写成

$$\text{二百零六} = 2 \times 9^2 + 4 \times 9 + 8$$
$$= 248 \text{（以 9 为基底）}$$

也是成立的。

当你用 9 为基底做数学运算时，加和减的运算与 10 为基底的情况一样。但必须记住，现在的数是以 9 为基底写出的，故必须逢 9 进 1(不像以 10 为基底那样逢 10 进 1)。于是，$8+3=12$(以 9 为基底)，37(以 9 为基底)+63(以9为基底)=101(以 9 为基底)。

即使你不习惯于以非 10 的数为基底作运算，也值得努力去得到可能的结果，甚至是超过这一短章中所包含的内容。当然，后面两章的内容并不依赖于这一章的结果)，因此，若你实在感到有困难，可跳过本章，直接阅读第九章。

习题28 (i) 试找出一个有 4 个数字的 8 倍翻转数(以 9 为基底)。

(ii) 将这个 8 倍翻转数(以 9 为基底)与唯一的有 4 个数字的 9 倍翻转数(以 10 为基底)作比较。

(iii) 通过猜测找出一个可能的有 4 个数字的 7 倍翻转数(以 8 为基底)，并检验之。

(iv) 同样的想法是不是对各种基底都有效呢？对以 61 为基底的情形有效吗？对以 734 为基底的情形有效吗？对以 6 为基底的情形呢？

习题29 (i) 在习题 28 中你已找出了一个有 4 个数字的 8倍翻转数(以 9 为基底)。试问：是否存在其它 4 个数字的 8 倍翻转数(以 9 为基底)呢？或者，这样的 8 倍翻转数唯一地只有你找出的哪个吗？

(ii) 你能否猜出任何一个有5个数字的8倍翻转数(以9为基底)? 验证你的猜测! 5个数字的8倍翻转数(以9为基底)唯一地只有这一个吗? 或者，还存别的吗?

习题30 (i) 你现在应能填出图8·1中的表3:

数字的数目（以9为基底）	列出全部8倍翻转数（以9为基底）
1	
2	
3	
4	
5	

图 8.1

(ii) 你能猜测出后面几项是什么吗? 将你的猜测填入图8·2的表中，然后检验你的猜测是否正确。

数字的数目（以9为基底）	猜测列出所有8倍翻转数（以9为基底）
6	
7	
8	
9	
10	

图 8.2

(iii) 试给出一种简单的方法，它能生成所有8倍翻转数(以9为基底)。

(iv) 找出令人信服的数学解释，说明你的数学方法为什么是生成了所有8倍翻转数,(以9为基底)而不会有任何遗漏。

习题31 在以10为基底的情形，我们只找出了一个有4个数

字的 4 倍翻转数，即 2178。

(i) 这个 4 倍翻转数(以 10 为基底)是否对于有 4 个数字的“?倍翻转数”(以9为基底)提示了任何可能的候选者呢? 仔细地检验你猜测的结果。

(ii) 这个唯一的有 4 个数字的 4 倍翻转数(以 10 在基底)是不是对有 4 个数字“?倍翻转数”(以 8 为基底)提示了任何可能的候选者呢? 仔细地检验你猜测的结果。

(iii) 按同样的要求考察以7为基底、6 为基底的情况。

下述问题与前面几个练习题稍有不同，你并没有被准确地告知要做的事。但你现在已经积累了这么多的经验，以至不会有太大的困难就能设计出你自已着手解决问题的方法。

研究项目　设 $b\geqslant 2$。试找出所有以 b 为基底的翻转数。

习题提示

28. (i) 模仿习题 6，但这次以 9 为基底来计算，而且是用 8 来乘之。

(iv) 以 b 为基底作运算，并利用初等代数。

30. (iv) 回头看看你对习题 15 和习题 24 的解答。

31. (i) 4 倍翻转数(基底为10)$\longleftrightarrow$? 倍翻转数(基底为 9)。

(ii) 4 倍翻转数(基底为 10)$\longleftrightarrow$?倍翻转数(基底为 8)。

研究项目　习题31已提示了：当 b 为偶数（基底为 8、10、12 等等)时的情形，与当 b 为奇数(基底为 9、7、11 等等) 时的情形有一些差别。

解答

习题28 (i) 1078(以9为基底)

(ii) 1067(以8为基底)

(iv) 在习题 25 (iv)的解答中，我们已经看到：$(1\times b^3+0\times b^2+(b-2)\times b+(b-1))\times(b-1)=(b-1)\times b^3+(b-2)\times b^2+0\times b+1$，故 $10(b-2)(b-1)$(b 为基底)是$(b-1)$ 倍翻转数（以b为基底)。

习题29 (i) 设$abcd$(9 为基底)是 8 倍翻转数(以 9 为基底)，如同习题 16 中一样，$8\times d$ 的末尾数字必为 a。但我们现在以9为基底，故不再能肯定"a 必为一偶数"(例如 $8\times 2=17$(基底为9)。于是，我们需回到习题 6 所使用的方法上。$(8\times a+?)$(9 为 基底)不能将任何数字进到下一位，故$a=1$，$?=0$，且 $d=8$。于是，不可能有数字从第三位进到第四位上，从而$b\leqslant 1$，若$b=1$，则因第二位不可能有数字进到第三位，故有 $8\times b=c=8$；但是在第二位上却出了问题，因为这时 $8\times c+7$ 不可能以 $b=1$ 为末尾数字。从而，$b=0$；并且，因 $8\times c+7$ 的末尾数字为 b，故 c 必为7。于是 $abcd=1078$(以 9 为基底)。

(ii) 只有一个，即 10878。

习题30 (iii) 基本的 8 倍翻转数是 0，1078，10878，108878，…。只要每一组数都以某个中心对称排出，就可以以任何方式将它们排成一串，如像

10780010888780108781078010781087801088878001078

当我们考察了一个没有确切地指出数字数目的未知 8 倍翻转数(9为基底)，上述的 8 倍翻转数(以 9 为基底)是仅有的 8 倍翻转数(9为基底)这一事实就会清楚了。

$$
\begin{array}{rcccccccccccccc}
 & 1 & 0 & & & & & & & & & & 7 & 8 \\
 & \underline{a} & \underline{b} & c & d & e & f\cdots u & v & w & x & & & \underline{y} & \underline{z} \\
\times) & & & & & & & & & & & & & 8 \\
\hline
 & \underline{z} & \underline{y} & x & w & v & u\cdots f & e & d & & c & & \underline{b} & \underline{a} \\
 & 8 & 7 & & & & & & & & & & 0 & 1
\end{array}
$$

照例，我们会得到$a=1$，$z=8$，$b=0$，$y=7$，并且$c=7$或$c=8$。若$c=7$，则$x=0$，$d=8$，$w=1$，我们未知的8倍翻转数就有形式1078$ef\cdots uv$1078。这时，中间部分$ef\ldots uv$比原始数的数字就少些了，而且满足$8\times(ef\ldots uv)=vu\ldots fe$。若$c=8$，则$x=8$，$d=7$或$d=8$。若$d=7$，则$w=0$，$e=8$，$v=1$，未知的8倍翻转数就有形式10878$f\ldots u$10878。这时，中间部分$f\ldots u$的数字少于原始数，且满足$8\times(f\ldots u)=u\ldots f$。若$d=8$，则$w=8$，$e=7$或$e=8$。……不断地继续这个过程，我们会看到未知的8倍翻转数有形式1088…8…8…8878。前面的一串8(即$cd\ldots$)可能延续到直接与后面的一串8(即$\cdots wx$)相联接，也可能在这两串8联接起来以前，前面一串8就完结了。在第一种情形，我们就得到了基本的8倍翻转数108888…88878。在第二种情形，前面的一串8后面紧接着是一个7，然后，后面又是一个8；而后面的一串8的前面是0，然后是1。即是说8倍翻转数有形式：1088… 878$jk\cdots pq$1088…878。中间的部分$jk\cdots pq$比原始数的数字少，而且满足$8\times(jk\cdots pq)=qp\cdots kj$。我们可以把同样的推论过程运用到$ef\cdots uv$，或$f\cdots u$，或$jk\cdots pq$上；当然，同时我们应知道，并不排斥中间部分的第一个数字取0的情况。

习题31　在习题25(iv)的解答中，我们已经看到，4倍翻转数2178(10为基底)仅是下述一般情形的一个特例：

即 21$(b-3)(b-2)$(b 为基底)总是一个$\frac{1}{2}(b-2)$倍翻转数(b 为基底)。

(i) 于是，当 $b=9$时，4 倍翻转数 2178(10为基底) 对应到“$3\frac{1}{2}$倍翻转数”2167(9 为基底)。也许你想研究一下“当 x 不是整数时的 x 倍翻转数”. 但是请注意，我们使用的“翻转数”一词，一直都是针对整数而言的。

(ii) 当 $b=8$ 时，4 倍翻转数 2178(10 为基底)对应于 3 倍翻转数 2156(8 为基底)。

(iii) 当 $b=6$ 时，我们得到一个 2 倍翻转数 2134(6为基底)；当 $b=4$ 时，得到一个 1 倍翻转数 2112(4 为基底)。

第九章 计算有n个数字的九倍翻转数

抵御疾病秘密，
一半在于清洁卫生，
而另一半在于不干不净。

——艾宋

现在，也许你已经感觉到了，只要你能解决有关9倍翻转数（以10为基底）的问题，你就能解决所有对应的以任何数为基底的翻转数问题。在习题15和习题24(iv)中，你可能曾提出了你自己的巧妙方法，以叙述的方式给出了所有9倍翻转数和4倍翻转数（均以10为基底）。这也许足以使你能够写出所有（比如说）16个数字的9倍翻转数(10为基底)。但这对我们来说仍然还是不够的。例如，对于我们在第五章中提出的那个很初步的一般问题——问题 A，它就不可能给出一个满意的解答。

问题 A 能否准确地说出有 n 个数字的9倍翻转数有多少？

这个拓广的研究问题的最后三章就是用于研究问题 A，以及为了满意地解答问题 A 所需要用到的数学知识的。

习题32 (i) 写出有10个数字的所有9倍翻转数（10为基底）。

(ii) 写出有 11 个数字的所有 9 倍转翻数(以 10 为基底)。

(iii) 写出有 12 个数字的所有 9 倍转翻数(以 10 为基底)。

(iv) 写出有 24 个数字的所有 9 倍转翻数(以 10 为基底)。

(v) 写出有 44 个数字的所有 9 倍翻转数(以 10 为基底)。

你可能对习题 32(iv)就感到有些困难了，当然就更不用说习题(v)了。但是，若能按照你在习题 15 中给出的简单而巧妙的方法去构造出所有 9 倍翻转数(以 10 为基底)，那么就肯定能找到一种简便的方法算出图 9.1 中那个序列的第 24 项、第 44 项，以至一般地，第 n 项来。而这正好是我们要在这一章和下章解决的问题。

数字的数目	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	·
9倍翻转数数目	1?	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3	5	?	?	?	?	·

图 9.1

为了节省时间和篇幅，我们需要用一种简洁的方法来表达

“n 个数字的 9 倍翻转数数目”

这一数量。我们约定用 f_n 来表示它。

习题35* 填出图 9.2中的表

n	有 n 个数字的全部 9 倍翻转数	f_n
1	0	
2		
3		
4		
5		

续表

6	
7	
8	
9	
10	
11	
12	
13	
14	

图 9.2

只有当填出的表能对更大的 n 值提示了某种更有效地计算 f_n 的方法，填写这种表才是有意义的。你在习题 33 中实际所用的方法，就像是在做一件十分吃力的工作。首先，你必须一个个地写出有 n 个数字的全部 9 倍翻转数，然后再一一地计数，算出 n 个数字的 9 倍翻转数的数目。实际上，你现在仅仅是要知道 n 个数字的 9 倍翻转数有多少个，而并不是想要把它们一一列出来。所以，采用上述方法会有很大的浪费。更为不利的还是，随着 n 的增大，列出 9 倍翻转数的清单渐渐变长，就越来越容易不知不觉地犯某种错误（或者是漏掉某些翻转数，或者是把一个翻转数计数了一次以上）。例如，24个数字的 9 倍翻转数共有 89 个，34个数字的 9 倍翻转数有 988 个，44 个数字的 9 倍翻转数有 10947 个。除非是你有某更好的方法去计数它们，否则就难免漏掉 1 个或若干个。并且，更严重的是你无法知道你是不是有所遗漏。

用普通的语言叙述出 f_n 的值是什么，是一件容易的事，即"f_n 等于 n 个数字的 9 倍翻转数数目"。这种描述给出了 f_n 的无限

序列，每个 n 值对应着一项：

$$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7, f_8, f_9, f_{10}, f_{11}, f_{12}, f_{13}, \cdots$$

你已经求出了前 14 个数，即该序列的前 14 项。但是，你还必须通过列出 n 个数字的全部 9 倍翻转数，来找出其它各项。这是一条非常困难的道路。实际上所要的是一种简便的“诀窍”或者说一个公式，以使你能够只做很少的计算就可得到 f_n 的任何一项。

我们怎样才能找到一种更有效的方法，来计算 n 值较大时的 f_n 呢？一种常常有效的方法是寻求一个公式(或者一个方程)，它能显示出，在知道了第 n 项前面的各项后，怎样计算出序列

$$f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, \cdots, f_n, \cdots$$

的第 n 项来。换言之，为了有效地计算出 f_{15}，你要设法找到一个公式：

$$f_{15}=\text{“包含 } f_{14}, f_{13}, f_{12}\cdots \text{的某个表达式”},$$

为了有效地计算出 f_n，你需要一个方程：

$$f_n=\text{“包含了 } f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3}, \cdots \text{的某个表达式”}.$$

这种表达式，我们称之为“序列 f_1, f_2, f_3, …的递推关系”。只要找出了序列 f_1、f_2、f_3，…的递推关系，就能立即算出 f_{15}，而不再需要首先列出有 15 个数字的全部 9 倍翻转数，仅仅只要把 f_{14}，f_{13}，f_{12}…(它们都是你已知道的)代入递推关系

$$f_{15}=\text{“包含了 } f_{14}, f_{13}, f_{12}\cdots \text{的某个表达式”}$$

的右边，就能求得 f_{15}。从而，只要把 f_{15}，f_{14}，f_{13}，…(都是你已知道的)代入递推关系

$$f_{16}=\text{“包含了 } f_{15}, f_{14}, f_{13}, \cdots \text{的某个表达式”}$$

的右边，就能得到 f_{16}。一次次地重复这个过程，就能算出 f_{17}，f_{24}，f_{34}，f_{44}，，以及一般地对任何 n，计算出 f_n。

下一个习题与问题 A 没有直接的联系。但是，若你以前从

未碰到过任何递推关系，这个习题将会给你一次实践的机会，让你熟悉一下有关内容。

习题34 假设你并不知道（或者已经忘记了）求有 n 个顶点的多边形内角和的公式。你怎样才能找出这样一个公式呢？首先，你要用一个很简洁的方式来表达“n 个顶点的多边形内角和”，我们将这个量记为 a_n。

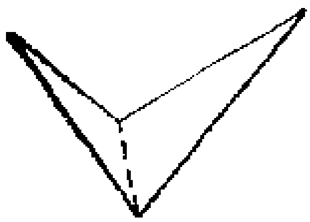
(i) 当 $n=3$ 时，结果会是什么呢？这时的 n 个顶点的多边形就是一个三角形。故 a_3 就是三角形内角和，为 180°。当 $n=4$ 时，结果又会是什么呢？这时的 n 个顶点的多边形就是四边形。也许，你已知道四边形内角和为 360°，即 $a_4=360°$。但现在假定你并不知道这个结果。你会怎样利用已知的结论来求出这一结果呢？一种可用的方法就是把四边形变成两个三角形（如图 9.3 (i)）。显然四边形内角和等于两个三角形内角和：

$$a_4=a_3+a_3=a_3+180.$$

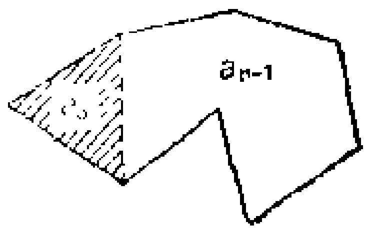
(ii) 当 $n\geqslant 5$ 时，情况又会怎么样呢？我们可以把任何有 n 个顶点的多边形分为两部分，一部分是一个三角形，另一部分是有 $n-1$ 个顶点的多边形（图 9.3(ii)）。这样，就显然有

$a_n=$ (n 个顶点的多边形内角和)

$=$ ($n-1$ 个顶点的多边形内角和) $+$ (三角形内角和)



(i)



(ii)

图 9.3

$$\therefore \quad a_n = a_{n-1} + 180.$$

(iii) 我们已找到了序列 a_3，a_4，a_5，…的递推关系。试利用这个递推关系完成图 9．4 中的表。

多边形顶点数 $=n$	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
多边形内角和 $=a_n$											

图 9.4

(iv) 在(ii)中我们已找出基本的递推关系 $a_n = a_{n-1} + 180$。但是，你若要计算 a_{1089}(即有 1089 个顶点的多边形内角和)，那么，现在这个递推关系就显得不那么有效了；因为，要求 a_{1089}，就必须先求 a_{1088}，而为了求 a_{1088}，你需要知道 a_{1087}，如此等等，这是一个很长的过程。如果有一个只用 n 表出 a_n 的公式，那么求 a_{1089} 就容易得多了。试找出仅用 n 表示出 a_n 的公式。

本章中余下的其它练习题和下面两章的练习题，均意在为你提供一种机会，让你通过利用递推公式来回答问题 **A**，即对每一个 n 求出对应的 f_n。

在习题 15 中你应已注意到，几乎所有的 9 倍翻转数都可以通过把较短的 9 倍翻转数“粘接”在一起而得到，事实上当 $n \geqslant 4$ 时，只有一个 9 倍转翻数不能由这种方式得到，它就是

$$10\underbrace{99\cdots99}_{\text{都为9}}89$$

其余的 9 倍翻转数都有如下形式：

1089…1089， 或 10989…10989， 或 109989…109989，或…

然而，且慢！这并不是能够帮助我们找到形如

$$f_n = \text{“包含了 } f_{n-1}, f_{n-2}, f_{n-3}, \cdots \text{的某个表达式”}$$

的递推关系的那种类型的结果。

现在，我们要通过对某些特殊 n 值的仔细计算，来考察一下上述观察结果。让我们首先看看 $n=10$ 个数字时的9倍翻转数(见图9·5)。

有10个数字的9倍翻转数(描述)	9倍翻转数	数目
(1) 只有一个不能由"粘接"得到的9倍翻转数，即1099999989。	1099999989	1
(2) 只有一个9倍翻转数在开始和末尾都是1089，即1089001089。	1089001089	1
(3) 只有一个9倍翻转数在开始和末尾都是1098910989。	1098910989	1
		$f_{10}=3$

图 9.5

习题35* 现轮到由你来对 $n=14$ 的情形做同样的工作？试

14个数字的9倍翻转数(描述)	9倍翻转数	数目
(1) 只有一个9倍翻转数不能由"粘接"得到，即	________	1
(2) 有3个9倍翻转数在开始和末尾都是1089，即	1089——1089 1089——1089 1089——1089	3
(3) 有____个9倍翻转数在开始和末尾都为10989，即		——
(4) 有____个9倍翻转数，在开始和末尾都是109989，即		——
(5) 有____个9倍翻转数，在开始和末尾都是1099989，即		——
		$f_{14}=$

图 9.6

填写完成图9·6中的表。

这两个例子提示了一种计数 n 个数字的9倍翻转数数目的方法。在习题35中，你利用下述的等式算出了 f_{14}:

f_{14}=（不能由粘接较短的9倍翻转数而得到的9倍翻转数数目）
+（开始和末尾为1089的9倍翻转数数目）
+（开始和末尾为10989的9倍翻转数数目）
+（开始和末尾为109989的9倍翻转数数目）
+（开始和末尾为1099989的9倍翻转数数目）。

现在，我们可以利用同样的想法，计算出其它 n 值所对应的 f_n 了，即用下述公式：

f_n=（不能由粘接较短的9倍翻转数而得到的9倍翻转数数目）
+（开始和末尾都为1089的9倍翻转数数目）
+（开始和末尾都为10989的9倍翻转数数目）
+（开始和末尾都为109989的9倍翻转数数目）
+…

但是，只有当我们能找出一种简便的方法来算出右边各项值时，这个公式才是有意义的。

算出第一项的值是容易的：对每一个 n，只存在一个9倍翻转数，不能由较短的9倍翻转数构造出来。但是后面各项就不是那么明显了。我们究竟怎样才能算出开始和末尾都为1089，或10989，或109989，或……的9倍翻转数数目呢？

习题36* （这个练习题没有显然的答案。请对习题中提出的问题作认真的思考，尽力去解答它们。然后再往下阅读。）

(i) 设 $n \geqslant 8$。你能否找到某种方法，来计数下述 n 个数字的 9 倍翻转数：它们的开始和末尾都为 1089，即形如

$$1089\underbrace{\text{———}\cdots}_{n-8\text{ 个数字}}1089$$

的 9 倍翻转数？

(ii) 设 $n \geqslant 10$。你能否找到某种方法去计数下述 n 个数字的 9 倍翻转数：它们的开始和末尾都为 10989，即形如

$$10989\underbrace{\text{————}}_{n-10\text{ 个数字}}10989$$

的 9 倍翻转数？

为了计数开始和末尾都为 1089 的 9 倍翻转数：，即形如

$$1089\,abc\cdots z\,1089$$

的 9 倍翻转数数目，只需要考虑中间的 n-8 个数字，即 $abc\cdots z$。看它们可能以多少种不同的方式被填写在开始的 1089 和末尾的 1089之间，使

$$\begin{array}{rr} & 1089\,|\,abc\cdots z\,|\,1089 \\ \times) & 8 \\ \hline & 9801\,|\,z\cdots cba\,|\,9801 \end{array}$$

成立，于是，数 $abc\cdots z$ 本身必须满足

$$\begin{array}{rr} & a\ b\ c\cdots z \\ \times) & 9 \\ \hline & z\cdots c\ b\ a \end{array}$$

这似乎就是说中间的 n-8 个数字构成的数 $abc\cdots z$，它本身必须是一个 n-8 个数字的 9 倍翻转数。若这一点成立，那么，开始和末尾都为 1089 的 n 个数字的9倍翻转数数目，就一定会等于 n-8 个数字的 9 倍翻转数数目。

习题37* 可惜这是不正确的，你能找出错误之所在吗？

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

让我们回头看看整个推理过程。为了计数有 n 个数字、且开始和末尾都为 1089 的 9 倍翻转数，即形如

$$1089\,abc\cdots z\,1089$$

的 9 倍翻转数数目，只要计数中间$(n-8)$个数字能被填入的方式数就行了。而中间的 $n-8$ 个数字构成的数 $abc\cdots z$ 一定要满足

$$\begin{array}{rr} & a\ b\ c\cdots z \\ \times) & 9 \\ \hline & z\cdots c\ b\ a \end{array}$$

于是，就好象 $abc\cdots z$ 必须是一个 9 倍翻转数。不过，且慢！我们一开始就假定了：唯一一个以 0 开头的"真正的"(或者说"严格意义上的") 9 倍翻转数是只有一个数字的 9 倍翻转数 0。但是却并没有限制一个数的中间部分 $abc\cdots z$ 的第一个数 a 不能取 0。例如，当我们在列出 10 个数字的全部 9 倍翻转数时，我们知道只有一个 9 倍翻转数是以 1089 开始，并以 1089 结尾的，即

$$1089001089,$$

中间的 $n-8$ 个数字，在这里就是 00。因此，为了计数中间$(n-8)$个数字能被填入的方式数，就必须把"不严格的"（或者说"广义的"）9 倍翻转数 $abc\cdots z$（它们可以以 0 开头）也计算在内，而不仅仅是把严格的 9 倍翻转数 $abc\cdots z$（只有当 $n-8=1$时，才能以0开头）计算在内。当我们说"$abc\cdots z$ 是广义的 9 倍翻转数"时，就只是意味着用 9 乘它得到的积，与原数的数字相同而它们的排序相反，即

$$\begin{array}{rr} & a\ b\ c\cdots z \\ \times) & 9 \\ \hline & z\cdots c\ b\ a \end{array},$$

而不管第一个数字是不是 0。于是，特别地有：若 $a=0$，则 $z=0$（为什么?）；若 $a=b=0$，则 $y=z=0$（为什么?），等等。请注意：虽然一个广义的 9 倍翻转数可以以 0 开头，但也不是一定要以 0 开头，例如，10989，0109890 108901089，0010890108900 都是广义的 9 倍翻转数。于是，每个严格的 9 倍翻转数都视为一个广义的 9 倍翻转数。

若你要想找出某种简易的方法来计数"有 n-8 个数字的广义 9倍翻转数的数目"，首先需要用一种简洁的方式来表示这个量。我们用 i_n 表示"n 个数字的广义 9 倍翻转数的数目"。

值得做一做的是：画一张表，其中包含了较小的一些 n 值，你被要求列出对应于这些 n 值的所有广义 9 倍翻转数。这可以帮助你真正掌握广义 9 倍翻转数这一概念。

习题38 试对图 9·7 中的表，填出 $n=7$，8，9 和 10 时的所有广义 9 倍翻转数。

n	i_n	n 个数字的所有广义 9 倍翻转数
1	1	0
2	1	00
3	1	000
4	2	0000, 1089
5	2	00000, 10989
6	3	000000,010890,109989
7	·	
8	·	
9	·	
10	·	

图 9.7

现在，我们能够回到计算 n 个数字的（严格）9 倍翻转数数目的公式上来了。

f_n =（不能由粘接较短的 9 倍翻转数而得到的严格 9 倍翻转数数目）

+（开始和末尾都为 1089 的严格 9 倍翻转数数目）

+（开始和末尾都为 10989 的严格 9 倍翻转数数目）

+（开始和末尾都为 109989 的严格 9 倍翻转数数目）

+ …

习题39* (i) 上面关于 f_n 的公式是用普通语言表达的。试将该公式改写成只含有符号 f_n、i_{n-8}，i_{n-10}，i_{n-12}，…的表达式。

(ii) 写出 f_{n-2} 的对应公式。

(iii) 从而导出只含有 3 个量 f_n，f_{n-2}，i_{n-8} 的表达式

习题40 你在习题39(iii)中得到的公式告诉你：只要知道了 f_{n-2} 和 i_{n-8}，便可直接算出 f_n 来，利用这个公式及图 8·9 中的表所提供的数据，填出 f_9 的值。然后，将你在习题38中得到的 i_2，i_3 …，i_{10} 的值填入表中，利用它们计算出直到 $n=18$ 时的 f_n 的值，并将结果填入表中。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	
i_n	1												
f_n	0	0	0	1	1	1	1	2					

图 9.8

你正在寻找一个一般的递推公式：

f_n =“包含了 f_{n-1}，f_{n-2}，f_{n-3}，…的某个表达式”。

但是，到目前为止你所得到的最接近目标的结果是等式

$$f_n=f_{n-2}+i_{n-8}.$$

只可惜这个公式中包含了量 i_{n-8}，而它并不是序列 f_1，f_2，f_3，… 中的一项。因而仅当你能找到一种方法，可以方便地对较大的n计算出 i_{n-8} 时，这个公式才是很有用的。

习题41* (i) 你用于找出公式 $f_n=f_{n-2}+i_{n-8}$ 的方法，也可用来找出 i_n 的公式。试模仿你在习题 39 中对 f_n 所用过的方法，去找出表示 i_n 的一个类似的公式。

(ii) 将你在(i)中得到的解答过程与提示中给出的方法作一番对比。

习题42* 现在你已得到了两个公式：一个将 f_n 表示成 f_{n-2} 与 i_{n-8} 之和，另一个将 i_n 表示成 f_n 与 i_{n-2} 之和。利用这两个公式，将图 9·9 中的表扩展到 $n=25$。

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	…
i_n	1	1	1	2	·	·	·	·	·	·	·	·	·	
f	0	0	0	1	1	1	1	2	2	·	·	·	·	

图 9.9

习题43 在本章开始时，我们曾断言：

$$f_{24}=89,\ f_{34}=988,\ f_{44}=10947.$$

但是，其中至少有一个是错误的。试找出正确的值。

现在这个计算 f_n 的方法，显然是对你原来那种方法的一种极大的改进。在原方法中你必须首先找出所有 9 倍翻转数，然后再一一计数，看你一共得到了多少个 9 倍翻转数。但是，现在这种改进仍然还只是部分地回答了问题 A。若你是以手算来完成习

题43，那么你可能已经注意到，改进后的方法还有它自己的缺点。在讨论这些不足以前，我们先考察一个例子。

假设你要计算 f_{100} 或 f_{1000}。当然，肯定可以用手算得到 f_{100}，但需要用很长的时间，而且在这个过程中又很难避免不知不觉地犯计算上的错误。用计算器可以避免计算的错误，但仍需要较长的时间，如果用一个可编程的计算器来计算就不需要花太多的时间了。

习题44 利用一个可编程的计算器，并由你自己写出计算 f_n 的简单程序，然后算出 f_n。

对于利用递推公式来计算 f_n 的想法，现在应该很清楚了，你现在已有了一种作了很大改进的计算方法。但你的方法仍然有两点不尽如人意之处。试考察上面提到的求 f_{100} 的例子。

（1）若是用手算，必须首先求出95个数，即

$$f_2,\ f_4,\ f_6,\ f_8,\ \cdots,\ f_{96},\ f_{98},$$

和

$$i_2,\ i_4,\ i_6,\ i_8,\ \cdots,\ i_{90},\ i_{92}.$$

而它们并不是你真正需要的。算出这95个数需要很长的时间，而且可能会使你不知不觉地出现计算上的错误。

（2）若你使用可编程的计算器，以避免花太多的时间及计算错误。但计算器也必须首先计算出这95个并不是你要求的数，并且这些数随下标的增大很快地增大，以至不能在计算器上准确地给出来。

当然，若你能找到一个 f_n 的"纯粹的"递推关系，即不包含 i_{n-8} 这个量以及任何 i 的项，只包括 f 的项，那么第一个不满意之处就会减弱许多。

习题45* 你已用一种稍微有点迂回的形式，即首先证明

$$f_n = 1 + i_{n-8} + i_{n-10} + i_{n-12} + \cdots,$$

然后用 f_n 的表达公式减去 f_{n-2} 的对应表达式：

$$f_{n-2} = 1 + i_{n-10} + i_{n-12} + i_{n-14} + \cdots,$$

就得到公式

$$f_n = f_{n-2} + i_{n-8}.$$

仔细地考察公式 $f_n = f_{n-2} + i_{n-8}$，设法找到不用任何中间步骤，立即直接证明它的方法。

(ii) 对公式 $i_n = f_n + i_{n-2}$ 作同样的考察。

(iii) 利用这两个公式导出序列 f_1, f_2, f_3, …的“纯粹的”递推公式，要求这个递推公式只包含4项：f_n, f_{n-2}, f_{n-4}, f_{n-8}。

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

你在习题45(iii)中得到的递推关系表明：不再需要考虑到不严格的 9 倍翻转数了，如果你是很聪明的，或者一向都是很幸运的，也许你早就注意到了这一点。对此，我持保留态度。事实上，若你没有让你自己引入不严格的 9 倍翻转数并以它为台阶，那么，应该设法去证明 f_n 满足这个非常简单的递推关系这一点，本身就不会是完全明确的了。

[此刻，可能你已猜测 f_1, f_2, f_3, …实际上满足一个比习题45(iii)中得到的递推关系更简单的关系。但是，即便是你作出了这种猜测，也仍有可能无法证明，这个更简单的递推关系对每个 n 都是成立的。所以，我们暂时不要丢开习题45(iii)中得到并已证明的递推关系。然而，若你确实认为 f_1 f_2, f_3, …, 应满足一个更简单的递推关系，你就应该睁大你的眼睛，去寻找能帮助你验证你的猜测是否正确的进一步的证据]。

习题提示

32. (i) 一共有 3 个。

(ii) 一共有 3 个。

(iii) 一共有 5 个。

34. (iv) $a_5=a_4+180=(a_3+180)+180=a_3+2\times180=3\times\times180$。

$$a_8=a_6+180=\cdots。$$

36. (i) 能以多少不同的方式将中间的 n-8 个数字填进去?

(ii) 能以多少不同的方式将中间的 n-10 个数字填进去?

37. 设

$$\begin{array}{rr} & 1089\,a\,b\,c\cdots z\,1089 \\ \times) & 9 \\ \hline & 9801\,z\cdots c\,b\,a\,9801 \end{array},$$

对于 a 你能说出有什么特点吗?

39. (i) 不能由较短的 9 倍翻转数构造出的严格 9 倍翻转数数目 = ________。

开始和末尾都为1089的严格9倍翻转数数目 = ________。

开始和末尾都为10989的严格9倍翻转数的数目 = ________。

等等，因而

f_n = ________________。

41. (i) i_n = (n 个数字的广义 9 倍翻转数数目)

= (第一个数字不为 0 的广义 9 倍翻转数数目)

+ (开头一个数字为 0 的广义 9 倍翻转数数目)

+ (开头两个数字为 0 的广义 9 倍翻转数数目)

+ ⋯

(a) 首先找出上式右边每个括号内的值，从而得到 i_n 的表达

式。

(b) 然后，写出 i_{n-2} 的对应的表达式，从而得到包含了 i_n，i_{n-2} 和 f_n 的表达式。

44. 若你要利用等式 $f_{100}=f_{98}+i_{92}$ 来求出 f_{100}，那么必须首先求出 f_{98} 和 i_{92}。而为了求 f_{98}，你需先求出 f_{96} 和 i_{90}，如此等等。于是，你必须利用计算器按下述程序进行，

开始： $\boxed{i_2=1,\ f_4=1,\ f_6=1,\ f_8=2,}$

$\downarrow$

接着计算： $\boxed{i_4=f_4+i_2=1+1=2,\ f_6=1,\ f_8=2,\ f_{10}=f_8+i_2=2+1=3}$

$\downarrow$

再计算： $\boxed{i_6=f_6+i_4=1+2=3,\ f_8=2,\ f_{10}=3,f_{12}=f_{10}+i_4=3+2=5}$

$\downarrow$

$\vdots$

45. (i) f_n=(第一组和最后一组数都是1089的9倍翻转数数目)

+(第一组数中间至少有一个9的9倍翻转数数目)

(iii) 第一个公式给出了 $f_{n-2}=f_{n-4}+i_{n-10}$；第二个公式给出了 $i_{n-8}=f_{n-8}+i_{n-10}$。

解答

习题32 (i) 1099999989，1089001089，1098910989。

(ii) 10999999989，10890001089，10989010989。

(iii) 109999999989，108900001089，108910891089，109890010989，109989109989。

(iv)、(v) 在后面我们将回过头来研究它们。

习题33 $f_1=1$，$f_2=0$，$f_3=0$，$f_4=1$，$f_5=1$，$f_6=1$，$f_7=1$，$f_8=2$，$f_9=2$，$f_{10}=3$，$f_{11}=3$，$f_{12}=5$，$f_{13}=5$，$f_{14}=8$。

习题34 (iii)

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
a_n	180	360	540	720	900	1080	1260	1440	1620	1800	1980

(iv) $a_r=(n-2)\times 180$

习题35 $f_{14}=8$。

习题36 设

$9\times(1089\,abc\cdots z\,1089)=9801\,z\cdots cba\,9801$。不可能有任何数字从 $9\times a$ 进到下一位上，故 $a=0$ 或 $a=1$。而实际上不存在方法可以排除 $a=0$ 的可能性，故我们只得简单地接受中间这部分 $abc\cdots z$ 可能以一个 0 开始，也可以多于一个 0 开始。虽然 $abc\cdots z$ 有 $n-8$ 个数字，并且满足 $9\times(abc\cdots z)=z\cdots cba$，但只要 $a=0$，它就不是一个严格的 9 倍翻转数。

习题38 $i_7=3$，$i_8=5$，$i_9=5$，$i_{10}=8$。

习题39 (i) $f_n=1+i_{n-8}+i_{n-10}+i_{n-12}+\cdots$。

(ii) $f_{n-2}=1+i_{n-10}+i_{n-12}+\cdots$

(iii) $f_n-f_{n-2}=i_{n-8}$。

习题41 (i) 利用提示，可得 $i_n=f_n+f_{n-2}+f_{n-4}+\cdots$，故 $i_{n-2}=f_{n-2}+f_{n-4}+\cdots$，而 $i_n-i_{n-2}=f_n$。

习题42

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
i_n	1	1	1	2	2	3	3	5	5	8	8	13	13	21	21	34	34	55	55	89	89	144	144	233	233
f_n	1	0	0	1	1	1	1	2	2	3	3	5	5	8	8	13	13	21	21	34	34	55	55	89	89

习题43 $f_{24}=89$，$f_{34}=987$，$f_{44}=10946$。

习题44 $f_{100}=7778742049$。(在得到 f_{100} 以前，你的计算器可能已经开始舍去末尾的数字了，因为它容不下这么大的数。)

习题45 （i）若有n个数字的严格9倍翻转数的开始和末尾都为1089，那么，将这两组数字移去，就得到了有$n-8$个数字的广义9倍翻转数，故有i_{n-8}个像这样的n个数字的9倍翻数转。若n个数字的9倍翻转数的第一组数字不是1089，那么它以109…开始，而最后一组数字是…989，于是我们可以移去第三个数字(9)和倒数第三个数字(9)，而得到有$n-2$个数字的严格9倍翻转数。从而，有f_{n-2}个像这样的n个数字的严格9倍翻转数。因此，$f_n=i_{n-8}+f_{n-2}$。

（ii）若有n个数字的广义9倍翻转数的第一个数字是0，那么它的最后一个数字也是0。移去第一个数字和最后一个数字0，就得到$n-2$个数字的广义9倍翻转数。于是，有i_{n-2}个像这样的n个数字的广义9倍翻转数。若广义9倍翻转数不是以0开头的，那么它是一个严格9倍翻转数，故，有f_n个像这样的n个数字的广义9倍翻转数，从而$i_n=i_{n-2}+f_n$。

（iii）$f_n=i_{n-8}+f_{n-2}$，且$f_{n-2}=i_{n-10}+f_{n-4}$，故，$f_n-f_{n-2}=i_{n-8}+$ $+f_{n-2}-i_{n-10}-f_{n-4}$。但由(ii)，$i_{n-8}-i_{n-10}=f_{n-8}$ 故$f_n=2f_{n-2}-$ $-f_{n-4}+f_{n-8}$。

第十章 递推关系

我还是不得不去注意所有的问题，
哪怕它们都很复杂；
只要我用正确的方法去考察，
它们就不会变得更加棘手。

——P.安德森：《新科学家》，1969

若你能证明序列 f_1，f_2，f_3，…能满足某个简单得令人惊异的递推公式，那当然是很有意义的事。但这还没有为我们提供一个计算诸如 f_{1000} 或 $f_{1000000}$ 的非常有效的手段。我们所需要的并非仅仅是某个递推关系（即使它可能是简单的），而是

只用 n 表示 f_n 的公式。

只要有了这种公式，我们就能简单地把 $n=1000$ 代入公式中，很快地计算出 f_{1000} 来。

在练习题 34 中，a_n 表示有 n 个顶点的多边形内角和。在那里，当要求 a_n 时正好也有相同的想法。我们首先得到了递推关系

$$a_n=a_{n-1}+180.$$

虽然利用这个递推关系去计算 a_{1000} 并不困难，但在最后求出 a_{1000} 以前，必须首先求出

$$a_4,\ a_5,\ a_6,\ a_7\cdots,\ a_{998},\ a_{999}.$$

在实际中，大概没有人会愿意用这种办法去计算a_{1000}。因为，很容易就能得到一个只用 n 表示出 a_n 的公式来取代上述那个递推公式。这个公式就是：

$$a_n=(n-2)\times180.$$

这样，只需把 $n=1000$ 代入公式，即能得到

$$a_{1000}=998\times180.$$

这个简单的例子显示了如下重要事实：只用 n 表示出 a_n 的公式比仅仅是一个递推公式有用得多。但是，这个例子太简单，容易引起误解，似乎递推关系都能容易地化成仅用 n 表示出的公式。对于有n个数字的9倍翻转数的数目，递推关系

$$f_n=2f_{n-2}-4f_{n-4}+f_{n-8},$$

是我们迄今已经设法证明了的最简单的递推关系。它比递推关系 $a_n=a_{n-1}+180$——有 n 个顶点的多边形内角和——显然要复杂得多。把 a_n 的递推关系转化成公式 $a_n=(n-2)\times180$ 已经比较容易地解决了。但对 f_n 却是另一回事。因为 f_n 的递推关系式更复杂，故不能指望把它转化为只用 n 表示出 f_n 的公式时也会那么容易。

我们首先考察一个具体的序列，希望能通过这一考察，从中获得有关下述两个方面的一些启示：一是对我们正在寻求那类公式，二是对找出公式的方法。这个序列比多边形内角和序列 a_3, a_4, a_5,…要更复杂，但比 9 倍翻转数序列稍稍简单一些。它就是著名的斐波那契(Fibonacci)数列：

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, …

习题46 试猜猜这个数列的后面 5 项。

我们需要一种能直接得到斐波那契数列第 n 项的简要方法。设 F_n 表示此数列第 n 项(其中 F 就是 Fibonacci 的第一个字母，下标 n 表示第 n 项)，则

$$F_1=0,\ F_2=1,\ F_3=1,\ F_4=2,\ F_5=3,\ F_6=5,\ F_7=8,\cdots$$

为要正确地解答习题46，须看出(或已经知道)：

斐波那契数列中的每一项等于它的前面两项之和。

若用递推关系的语言，这一点可以简单地表述为：斐波那契数列的项满足递推关系

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \tag{10.1}$$

习题47 事实上满足递推关系(10.1)式的序列无限多。

(*i*) 下面6个数列都满足(10.1)式，试写出各数列的后面3项：

(*a*) 0, 0, 0, 0, 0, ___, ___, ___, …

(*b*) 0, 1, 1, 2, 3, 5, ___, ___, ___, …

(*c*) 1, 0, 1, 1, 2, 3, ___, ___, ___, …

(*d*) 1, 3, 4, 7, 11, 18, ___, ___, ___, …

(*e*) −1, −1, −2, −3, −5, −8, ___, ___, ___, …

(*f*) 0, 2, 2, 4, 6, 10, ___, ___, ___, …

(*ii*) 设$a=(1+\sqrt{5})/2$, $b=(1-\sqrt{5})/2$，试证明下面两个序列(*g*)和(*h*)都满足递推关系(10.1)式：

(*g*) $1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ \cdots$

(*h*) $1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5,\ \cdots$

任何满足(10.1)式的序列，只要给出了最初两项，整个序列就完全确定了：第3项等于最初两项之和，第4项等于第2项与

第3项之和，等等。于是，斐波那契数列完全由如下两点所确定：

(1) $F_1=0$ 和 $F_2=1$；

(2) 给出了第 n 项的递推关系式(10.1)。

两个特殊的序列，

$1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, \cdots$

$1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, \cdots$

对我们格外重要。这不仅因为它们满足(10.1)式，还因为

这两个序列的第 n 项都由一个只含有 n 的算术表式给出，即

$$\text{第 } n \text{ 项 } a^{n-1}=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1},$$

$$\text{第 } n \text{ 项 } b^{n-1}=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

那么，这两个数 a 和 b 的特殊意义又是什么呢？是否可以断言，对任何碰巧满足递推关系(10.1)式的序列 $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \cdots$都会有与它们相同的结果呢？

习题48 设序列 $1, x, x^2, x^3, x^4, x^5, \cdots$ 满足递推关系(10.1)式，试求出所有可能的 x 值。

现在我们要说明如何利用序列 $1, a, a^2, a^3, a^4, a^5, \cdots$和 $1, b, b^2, b^3, b^4, b^5, \cdots$去推出只用 n 表示出斐波那契数列第 n 项的表达式。关键的概念包含在下面两个练习题中。

习题49 习题47中的每个序列都满足递推关系式(10.1)，

(i) 请注意到：在习题47中用2乘斐波那契数列(b)的各项，就可以得到数列(f)。设序列u_1，u_2，u_3，…满足递推关系(10.1)式，c为常数，试证序列cu_1，cu_2，cu_3，…(用c乘u_1，u_2，u_3，…所得的序列)也满足(10.1)式。

(ii) 请注意到：在习题47中，把(d)和(e)的对应项相加，也可以得到(f)。设序列u_1，u_2，u_3，…和序列v_1，v_2，v_3，…都满足递推关系(10.1)式，试证它们对应项之和u_1+v_1，u_2+v_2，u_3+v_3，…也满足(10.1)式。

序列1，a，a^2，a^3，…和1，b，b^2，b^3，…都满足递推关系(10.1)式．若x、y是两个确定的数，那么由习题49(i)，用x、y分别乘序列1，a，a^2，a^3，…和序列1，b，b^2，b^3，…所得的序列

$$x,\ xa,\ xa^2,\ xa^3,\ \cdots$$

$$y,\ yb,\ yb^2,\ yb^3\cdots,$$

都满足(10.1)式．由习题49(ii)，把它们的对应项相加所得的序列

$$x+y,\ xa+yb,\ xa^2+yb^2,\ xa^3+yb^3,\ \cdots$$

也满足递推关系(10.1)式．

变化x和y的取值，就可以得到无限多个不同的序列，它们每一个都满足递推关系式(10.1)．那么，试问：是否可以选出x、y的某个值，使序列

$$x+y,\ xa+yb,\ xa^2+yb^2,\ xa^3+yb^3,\ \cdots$$

完全与斐波那契数列F_1，F_2，F_3，F_4，…等同呢？若这是可能的，那么就可以找到一个只用n表示出斐波那契数列第n项的公式，即

$$F_n = xa^{n-1} + yb^{n-1} = x\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1} + y\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}.$$

习题50* 前面已经述及，斐波那契数列完全由下面两个特征所确定：

(1) $F_1=0$ 和 $F_2=1$；

(2) 满足递推关系式(10.1)。

而无论 x，y 取什么值，序列 $x+y$，$xa+yb$，xa^2+yb^2，…都满足(10.1)式。所以，只要取 x 和 y 使特征 (1) 得到满足，即是说，只要取 x，y 的值，使 $x+y=F_1=0$，$xa+yb=F_2=1$，则这个序列就完全等同于斐波那契数列了。

(i) 利用 a 和 b 的值已知的事实，求满足方程 $x+y=0$ 和 $ax+by=1$ 的 x、y 的值，

(ii) 从而写出只用 n 表示出斐波那契数列第n项的公式。

现在回到我的最初的问题——求只用 n 表示出 f_n（有 n 个数字的 9 倍翻转数的数目）的公式。我们将以一步步地模仿刚才用过的方法——推导出只用 n 表示出第 n 个斐波那契数的公式的方法——来完成找出这个公式的过程。

对于序列 f_1，f_2，f_3，……我们有递推关系

$$f_n = 2f_{n-2} - f_{n-4} + f_{n-8}.$$

由此可知，编号为偶数的项（即序列中的第偶数项）f_{2n} 满足方程

$$f_{2n} = 2f_{2(n-1)} - f_{2(n-2)} + f_{2(n-4)}.$$

所以，此序列的项 f_{2n} 仅与该项前面的编号为偶数的项 $f_{2(n-1)}$、$f_{2(n-2)}$、$f_{2(n-4)}$ 有关，而与编号为奇数的项无关。类似地，编号

为奇数的项 f_{2n-1} 满足方程

$$f_{2n-1}=2f_{2(n-1)-1}-f_{2(n-2)-1}+f_{2(n-4)-1}.$$

故 f_{2n-1} 只与它前面的编号为奇数的项 $f_{2(n-1)-1}$、$f_{2(n-2)-1}$、$f_{2(n-4)-1}$ 有关，而与编号为偶数的项无关。于是，我们分别考虑编号为偶数的项和为奇数的项构成的两个序列

$$f_2,\ f_4,\ f_6,\ f_8,\ f_{10}\cdots\text{和}\ f_1,\ f_3,\ f_5,\ f_7,\ f_9,\ \cdots$$

后面给出的几个练习题目的在于帮助读者找出编号为偶数的项的序列 f_2，f_4，f_6，f_8，f_{10}，…的第 n 项的公式（注意，序列 f_2，f_4，f_6，…的第 n 项不是 f_n 而是 f_{2n}）。我把求编号为奇数的项的序列 f_1，f_3，f_5…第 n 项的公式留给读者自己去完成（习题57）。

序列 f_2，f_4，f_6，…的第 n 项 f_{2n} 满足递推关系

$$f_{2n}=2f_{2(n-1)}-f_{2(n-2)}+f_{2(n-4)},$$

换言之，这个序列的第 n 项、第$(n-1)$项、第$(n-2)$项和第$(n-4)$项满足递推关系

$$u_n=2u_{n-1}-u_{n-2}+u_{n-4}. \tag{10.2}$$

事实上，有无限多个不同的序列都满足这个递推关系。但每个这样的序列一经给出它的前 4 项 u_1、u_2、u_3 和 u_4，整个序列就完全确定了。

现在我们就是要寻求一个这样的公式：它仅用 n 表示出序列 f_2，f_4，f_6，…的第 n 项 f_{2n}。在前面我们已经看到了通过适当地构造两个满足递推关系(10.1)式的幂序列 1，a，a^2，a^3，…和1，b，b^2，b^3，…的组合，得到了表示斐波那契数列的第 n 项 F_n 的这种公式。所以，要想求得仅用 n 表示出 f_{2n} 的公式，似乎首先应该找出哪些幂序列 1，x，x^2，x^3，x^4，…（即当 x 取哪些具体值时，序列）满足递推关系(10.2)式。

为此，必须求解一个有复数根的二次方程，若读者已懂得求

解取复根的二次方程，并会做复数的加法和乘法运算，则可以跳过下面几段，直接进到习题51。

在实数范围讨论问题时，说“4的平方根”、“2的平方根”都是有意义的；但“-3的平方根”、“-1的平方根”就没有意义了，因为任何一个数的平方都不可能是-3或-1。因此，在实数范围内可以求解诸如$x^2=4$、$x^2=2$这样的方程，但我们说方程$x^2=-3$、$x^2=-1$无解。

这给数学带来极大的不便。在四百多年前数学家们就已经有了紧迫感，要构造一个新数$\sqrt{-1}$，其平方为-1，即$(\sqrt{-1})^2=-1$。在很长一段时间里，没有人能完全肯定是否确实应该把这个新数$\sqrt{-1}$当作一个实实在在的数，所以就把它称为“虚数”。

由这个其平方为-1的新数$\sqrt{-1}$，又衍生出了许多别的新数，如像

(i) $2\times\sqrt{-1}$，它的平方为$(2\times\sqrt{-1})^2=2^2\times(\sqrt{-1})^2=4\times(-1)=-4$；

(ii) $\sqrt{3}\times\sqrt{-1}$，它的平方为$(\sqrt{3}\times\sqrt{-1})^2=(\sqrt{3})^2\times(\sqrt{-1})^2=3\times(-1)=-3$；

(iii) $1+\sqrt{-1}$，它的平方也容易算出；若假定熟知的公式$(p+q)^2=p^2+2pq+q^2$对这些新数也成立，则

$$\begin{aligned}(1+\sqrt{-1})^2&=1^2+2\times1\times\sqrt{-1}+(\sqrt{-1})^2\\&=1+2\sqrt{-1}+(-1)=2\times\sqrt{-1}.\end{aligned}$$

这些由实数和虚数组合在一起的数称为“复数”。

创造出复数的好处之一是：每个二次方程$ax^2+bx+c=0$都是完全可以求解的了。例如，$x^2-x+1=0$没有实数根；但是，若应用熟知的二次方程求根公式，则可以得到

$$x=(1+\sqrt{1-4})/2=(1+\sqrt{-3})/2$$

和

$$x=(1-\sqrt{1-4})/2=(1-\sqrt{-3})/2.$$

在实数范围内，我们不能接受这两个数为方程的根，因为其中包含了在实数范围内没有意义的符号$\sqrt{-3}$。但是，若把$\sqrt{-3}$理解为$\sqrt{3}\times\sqrt{-1}$，那么，我们就看到，实际上由熟知的求根公式得到了两个"复数"根：$\frac{1}{2}\pm\frac{1}{2}\sqrt{-3}$。读者可以自己验算一下，这两个复数确实是二次方程 $x^2-x+1=0$ 的两个根。例如，

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+2\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\sqrt{-3}+\left(\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}+\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3},$$

故有

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)+1$$

$$=\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)-\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)+1$$

$$=0.$$

这里我们仅说明了复数的一些简单的运算。也许读者希望更多地了解复数及其运算。但是，若读者愿意仅止于前面介绍的有关复数的内容，而把进一步的学习放到以后去实施，那么也能完

全理解目前这个问题研究的全部内容。

习题51 设 1, x, x^2, x^3, x^4, …是满足递推关系(10.2)式的序列。

(i) 试证明：$x^4=2x^3-x^2+1$；

(ii) 把 x^4-2x^3+x-1 分解为两个二次因式的乘积；

(iii) 从而求出方程的 4 个解。

习题52 令$c=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$, $d=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$。

(i) 证明：$c^2=-d$, $cd=1$；

(ii) 证明：$c^3=d^3=-1$；

(iii) 证明：$1+c-c^2=1+d-d^2=2$；

(iv) 证明：$c+c^2=-(d+d^2)$。

习题51(iii)中，满足方程 $x^4=2x^3-x^2+1$ 的 x 的 4 个值就是曾多次碰到过的 $a=(1+\sqrt{5})/2$, $b=(1-\sqrt{5})/2$ 以及复数 c 和 d（见习题 52）。因此 4 个序列

$$1,\ a,\ a^2,\ a^3,\ a^4,\ a^5,\ \cdots,$$

$$1,\ b,\ b^2,\ b^3,\ b^4,\ b^5,\ \cdots,$$

$$1,\ c,\ c^2,\ c^3,\ c^4,\ c^5,\ \cdots,$$

$$1,\ d,\ d^2,\ d^3,\ d^4,\ d^5,\ \cdots$$

都满足递推关系(10.2)式。若用确定的 w、x、y 和 z 分别乘上述 4 个序列，即用 w 乘第一个序列各项，用 x 乘第二个序列的各项，用 y 乘第三个序列的各项，用 z 乘第四个序列的各项，就可得到 4 个新序列

$$w,\ wa,\ wa^2,\ wa^3,\ wa^4,\ wa^5,\ \cdots,$$

$$x,\ xb,\ xb^2,\ xb^3,\ xb^4,\ xb^5,\ \cdots,$$
$$y,\ yc,\ yc^2,\ yc^3,\ yc^4,\ yc^5,\ \cdots,$$
$$z,\ zd,\ zd^2,\ zd^3,\ zd^4,\ zd^5,\ \cdots.$$

这 4 个序列都满足(10.2)式。把这 4 个序列的对应项相加，就会得到满足(10.2)式的另一个序列

$$w+x+y+z,\ wa+xb+yc+zd,\ wa^2+xb^2+yc^2+zd^2,$$
$$wa^3+xb^3+yc^3+zd^3,\ \cdots.$$

变化 w、x、y 和 z 的取值，就可以得到无限多个不同的序列，其中每一个都满足递推关系(10.2)式，而且每一个序列都由它的前 4 项所完全确定。因而，只要适当地选取 w、x、y 和 z 的值，使前 4 项 $w+x+y+z$，$wa+xb+yc+zd$，$wa^2+xb^2+yc^2+zd^2$，$wa^3+xb^3+yc^3+zd^3$ 分别等于 f_2，f_4，f_6，f_8，就可以得到一个完全等同于序列

$$f_2,\ f_4,\ f_6,\ f_8,\ f_{10},\ \cdots$$

的序列。于是，就只需要选取 w、x、y 和 z 的值，使它们满足方程

$$w+x+y+z=f_2=0,$$
$$wa+xb+yc+zd=f_4=1,$$
$$wa^2+xb^2+yc^2+zd^2=f_6=1,$$
$$wa^3+xb^3+yc^3+zd^3=f_8=2.$$

即只要求出满足这 4 个方程的 w、x、y 和 z，也就找到了我们需要的公式——只用 n 表示出 f_{2n}（有 $2n$个数字的 9 倍翻转数的数目）的公式，它就是

$$f_{2n}=wa^{n-1}+xb^{n-1}+yc^{n-1}+zd^{n-1}.$$

习题53* (i) 利用 a、b、c 和 d 的已知值以及习题 52 中已

证明的 c 和 d 的关系，求满足上述 4 个方程的 w、x、y 和 z 的值；

(ii) 从而具体写出只用 n 表示出 f_{2n} 的公式。

习题提示

47。(ii)(g)证明 $1+a=a^2$，然后多次应用这个结果。

48。第 3 项 x^2 必定等于前面两项之和 $1+x$。

53。(i) 把前两个方程相加，用所得之和去减第 3 个方程。关于 $1+a-a^2$ 和 $1+b-b^2$ 你知道些什么呢？回过头来看看习题 52(iii)。眼下对于 $y+z$ 的值它能告诉你些什么呢？然后利用习题 52 (ii) 去化简第 4 个方程。末了把第 2 个方程和第 3 个方程相加，再将所得的和减去化简后的第 4 个方程。关于$a+a^2-a^3$和 $b+b^2-b^3$ 你知道些什么呢？再回过头来看习题 52(iv)。对于$y-z$ 的值它会告诉你些什么呢？

解答

习题46。233，377，610，987，1597。

习题47。(i) (*a*) 0，0，0； (*b*) 8，13，21； (*c*) 5，8，13； (*d*) 29，47，76； (*e*) -13，-21，-34； (*f*) 16，26，42。

(ii) a，$b=(1\pm\sqrt{5})/2$，碰巧就是方程 $x^2=x+1$ 的两个根，故 $1+a=a^2$，$1+b=b^2$，用 a^{n-1} 和 b^{n-1} 分别乘这两式，就有 $a^{n-1}+a^n=a^{n+1}$ 和 $b^{n-1}+b^n=b^{n+1}$ 对所有 $n\geqslant1$ 成立。因此序列(g)和(*h*)都满足递推关系(10.1)式。

习题48。第 3 项必须等于前面两项之和，故 $1+x=x^2$。从而 $x=(1\pm\sqrt{5})/2$，所以 $x=a$ 或 $x=b$。

习题49. (i) $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$，故 $cu_n=cu_{n-1}+cu_{n-2}$；

(ii) $u_n=u_{n-1}+u_{n-2}$，$v_n=v_{n-1}+v_{n-2}$，故$(u_n+v_n)=(u_{n-1}+v_{n-1})+(u_{n-2}+v_{n-2})$。

习题50. (i) $x+y=0$，故 $x=-y$。将此代入 $xa+yb=1$，则得 $x(a-b)=1$，从而 $x=1/\sqrt{5}$，$y=-1/\sqrt{5}$；

(ii) $F_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.

习题51. (i) 第5项必须等于"2倍第4项减去第3项，加上第1项"，故 $x^4=2x^3-x^2+1$；

(ii) $x^4-2x^3+x^2-1=(x^2-x-1)(x^2-x+1)$；

(iii) 由(i)，$x^4-2x^3+x^2-1=0$，而由(ii)，$x^2-x-1=0$，或 $x^2-x+1=0$。若 $x^2-x-1=0$，则得 $x=a$ 或 $x=b$；而由 $x^2-x+1=0$，则得$x=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}$，或 $x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}$.

习题52. (i) $c^2=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}=-d$,

$cd=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)\times\left(\frac{1}{2}-\sqrt{-3}\right)=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2=1$；

(ii) $c^2=-d$，故 $c^3=-cd=-1$；类似地，$d^2=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}\right)^2=-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\sqrt{-3}=c$，故 $d^3=-cd=-1$；

(iii) $1+c-c^2=1+c+d=2$；$1+d-d^2=1+d+c=2$；

(iv) $c+c^2=c-d=-(d-c)=-(d+d^2)$.

习题53. (i) 前面的提示表明 $y+z=0$。因 $c^3=d^3=-1$，故第4个方程可化简为 $wa^3+wb^3=2$。把第2个方程与第3个方程相加，再减去第4个方程的化简结果，就得 $(c+c^2)y+(d+d^2)z=0$；从而，由$c+c^2=-(d+d^2)\neq 0$，可得 $y-z=0$。因此，$y=$

$z=0$，并且原来的 4 个方程就只剩下两个，即 $w+x=0$ 和 $wa+xb=1$。而它们又恰好与我们在习题 50(i) 中曾解过的方程完全相同。于是，$w=1/\sqrt{5}$，$x=-1/\sqrt{5}$，$y=0$，$z=0$；

(iii) $f_{2n}=wa^{n-1}+xb^{n-1}+yc^{n-1}+zd^{n-1}=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$.

第十一章　道路的尽头

> 一个人发现了某个真理，
> 又用艰辛的劳动证实了它；
> 待到人们仔细地评说他的发现时，
> 他常会意识到，
> 他煞费苦心作出的发现，
> 可轻而易举地为人们领悟。
>
> ——伽利略：《论运动》

在从事数学工作中，我们常常碰到一种现象：当你做了大量的研究后，发现了某个令人惊异的事实；但是，如果你早些注意到它，它本来可以使所有的事情都变得极其简单的。

倘若习题53的解答并没有把你所需要的东西都揭示出来，那么最好是认真完成下面的练习题。

习题54　(i) 利用递推关系式$f_{2n}=2f_{2(n-1)}-f_{2(n-2)}+f_{2(m-4)}$完成图11.1中的表。以前你曾在哪里碰到过这个序列？

n	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20	22	24	26	28	30
f_{2n}	0	1	1	2											

图 11.1

(ii) 将 f_{2n} 的公式(已在习题53(ii)中得到)与 F_n 的公式（已在习题50(ii)中得到)对比，你注意到了什么吗？

所有这些都强烈地提示我们：序列 f_2，f_4，f_6，…满足一个比（10.2）式简单得多而且也可能是更为熟知的递推关系。实际上，习题50(ii)和53(ii)的解答就已证明了 $f_{2n}=F_n$。

好了！正好在你的这一研究工作结束时，你发现并证明了序列 f_2，f_4，f_6，…完全与斐波那契数列 F_1，F_2，F_3，…相同。然而，你是以前述那种迂回的方式发现这个非常简单的事实的。所以，很自然就想要寻求一个更简单更直接的解释方式。

习题55 假若你现在是要使别人相信，有 $2n$ 个数字的9倍翻转的数目等于如下两项之和：有 $(2n-1)$ 个数字的9倍翻转数的数目与有 $(2n-2)$ 个数字的9倍翻转数的数目之和。试对这一事实作出简单而直接的解释。

这样，经过艰苦的努力，你终于发现了，对问题*A*只需用非常简短的证明，就能得到一个简单解答。实际上，若早在第九章开始的时候就把习题55给出来，本来是可以节约你很多的精力和时间的。但是，这样就会使你失去一种实际的体验——摸索通向你自己的解答的道路的体验。数学是一种人类的活动，也是一种探索的方法（并且是一种极为有效的方法）。所以，无论学习别人已经发现的数学知识对你来说是多么重要，而你若要想真正理解数学到底是什么，你就必须实际地参加到花费时间的研究工作中，去寻找你自己的解答，此外别无捷径。

在习题53(ii)已得到的公式

$$f_{2n}=\frac{1}{\sqrt{5}}(a^{n-1}-b^{n-1})$$

实际上还可以稍稍作点简化。

习题56 (i) 利用计算器填写图11.2中的表：

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
f_{2n}															
$a^{n-1}/\sqrt{5}$															
$b^{n-1}/\sqrt{5}$															

图 11.2

(ii) 证明：对所有 $n\geqslant1$，f_{2n} 是最接近 $a^{n-1}/\sqrt{5}$ 的整数；

(iii) 试问：$a^{n-1}/\sqrt{5}$ 与 f_{2n} 的实际接近程度如何？利用计算器求当 $n=37$ 时它们的差：

$$b^{n-1}/\sqrt{5}=(a^{n-1}/\sqrt{5})-f_{2n}.$$

现在轮到读者自己来完成一个类似的研究，即求出只用 n 表示出编号为奇数的项构成的序列 f_1，f_3，f_5，…的第 $(n+1)$ 项 f_{2n-1} 的公式。

习题57 试找出仅用 n 表示出 f_{2n+1} 的公式。 ■

我就在此驻笔了。但对读者来说还有尚须考虑的问题，例如：

问题E. 习题 1 和习题 2 之间是否有某种联系呢？为什么同

一个数不期然地在两处都出现了呢？

习题提示

55．有$2n$个数字的9倍翻转数有两种不同的类型．第一种类型由全部的所谓“跨越者”组成；每一个这类9倍翻转数都有一个中心数组跨骑在中点（第n个数字和第$n+1$个数字间）．第二种类型是所谓“非跨越者”；它们都从中点分为两半（每半各有n个数字）．分别考虑两类不同的9倍翻转数．

解答

习题54(i)．序列f_2，f_4，f_6，…等同于斐波那契数列F_1，F_2，F_3，…；

(ii)两个公式完全一样．

习题55．利用**提示**．令S_{2n}=有$2n$个数字的“跨越者”的数目，N_{2n}=有$2n$个数字的“非跨越者”的数目．于是，$f_{2n}=S_{2n}+N_{2n}$．而S_{2n}=（中心数组的长度=4的“跨越者”数目）+（中心数组的长度>4的“跨越者”的数目）．若中心数组的长度=4，则它为1089；而当我们把这个数组从数中移去时，就得到一个有$(2n-4)$个数字的“非跨越者”．从而，给出S_{2n}的第一个括号中的数目就等于N_{2n-4}了．若中心数组的长度>4，则在其中间的9的个数必为一偶数，当把中间的两个9移去后，就得到一个有$(2n-2)$个数字的“跨越者”．于是，第二个括号中的数目就等于S_{2n-2}．从而，$S_{2n}=N_{2n-4}+S_{2n-2}$．按同样的精神，我们会看到有N_{2n}=（中间两个数字为00的“非跨越者”的数目）+（中间4个数字为8910的“非跨越者”的数目）．若中间两个数为00，那么，我们可以移去这两个零而得到一个有$2n-2$数字的“非跨越者”；

这样，给出 N_{2n} 的第一个括号中的数目就等于 N_{2n-2}。若中间的4个数字为8910，则我们可以移去这4个数字而得到一个有$(2n-4)$个数字的“跨越者”；于是，第二个括号中的数目就等于S_{2n-4}。从而，$N_{2n}=N_{2n-2}+S_{2n-4}$。故我们有

$$\begin{aligned}f_{2n}&=S_{2n}+N_{2n}\\&=(N_{2n-4}+S_{2n-2})+(N_{2n-2}+S_{2n-4})\\&=(N_{2n-4}+S_{2n-4})+(N_{2n-2}+S_{2n-2})\\&=f_{2n-4}+f_{2n-2}.\end{aligned}$$

习题56.（i）

n	1	2	3	4	5
f_{2n}	0	1	1	2	3
$a^{n-1}/\sqrt{5}$	0.4472	0.7236	1.1708	1.8944	3.0652
$b^{n-1}/\sqrt{5}$	0.4472	-0.2736	0.1708	-0.1056	0.0652
n	6	7	8	9	10
f_{2n}	5	8	13	21	34
$a^{n-1}/\sqrt{5}$	4.9597	8.0249	12.9846	21.0095	33.9941
$b^{n-1}/\sqrt{5}$	-0.0403	0.0249	-0.0154	0.0095	-0.0059
n	11	12	13	14	15
f_{2n}	55	89	144	233	377
$a^{n-1}/\sqrt{5}$	55.0036	88.9978	144.0014	232.9991	377.0005
$b^{n-1}/\sqrt{5}$	0.0036	-0.0022	0.0014	-0.0009	0.0005

（ii）$f_{2n}=a^{n-1}/\sqrt{5}-b^{n-1}/\sqrt{5}$ 总为一整数，$|b^{n-1}/\sqrt{5}|$ 是 $a^{n-1}/\sqrt{5}$ 与这个整数间的距离；而这个距离总是小于$\frac{1}{2}$（因为$\frac{1}{2}$

$>|b^0\sqrt{5}|>|b^0/\sqrt{5}|>b^2/\sqrt{5}\cdots$；

(ii) 如果读者是用计算器来计算，那么这个数可能无法与零区别开来；即在计算器上的读数会为0。

习题57。与第 n 项为 f_{2n} 的序列 f_2，f_4，f_6，…一样，第 n 项为 f_{2n+1} 的序列 f_3，f_5，f_7，…完全满足递推关系(10.2)式。每个满足（10.2）的序列，只要知道了它的前 4 项，就完全确定下来了。但这个编号为奇数的项的序列，其前 4 项（$f_3=0$，$f_5=1$，$f_7=1$，$f_9=2$）与编号为偶数的项的序列之前 4 项（$f_2=0$，$f_4=1$，$f_6=1$，$f_8=2$）完全相同，故两序列是等同的，即 $f_{2n}=f_{2n+1}$（$n\geqslant 1$）。（另一种可用的方法是：有 $2n+1$ 个数字的 9 倍翻转数，在其中心位置上是一个 9 或者 0；将这个数字移去就得到一个有$2n$个数字的 9 倍翻转数，因而，对一切 $n\geqslant 1$，$f_{2n+1}=f_{2n}$。）

附　记

对于一个数学问题，即使你已得到了一个看起来似乎满意的解答，你也可以完全相信，一定还存在着别的许多方法能用来考察和解决这一问题；也许其中某些方法比你先前采用的方法更好。当我写完这个扩展了的研究问题的第一稿后，自认为已相当透彻地理解了这个问题。但我错了：几星期后我收到 G.McCauley的来信，我感谢他同意我把他的信转录于此。

托尼

我刚刚读完了整个翻转数问题，度过了一个愉快的晚上。也许你有兴趣知道，你相当成功地把我引导到了一种新的解答——一种与你的解答方法稍有不同的解答。下面给出的就是这一解答

的过程。

第二章的问题1和问题2曾促使我围绕如何利用余数去解决不同基底（即不同的进位）的问题考虑了许多东西。由第二章的习题5得到某种启示，我就倾向于用记号“一把”（即“$\bar{}$”这个记号使人想起对数的一种老式记法），把数1098写作$11\bar{1}\bar{1}$；$11\bar{1}\bar{1}$是以任何数$b(b\geqslant 2)$为基的$1\bar{1}$倍翻转数。

可惜，一直到习题21，对于基为10的情况（第五章、第六章和第七章的前半部分）我都没有使用这一记号。用这一记号写出2178花去我差不多5分钟；但一经弄清它为$22\bar{2}\bar{2}$，我便明白可以轻而易举地走下了。这样一直到了习题33。

我用心地循着你的思路一直前进到习题45（可以说是十分用心，因为我不必担心可编程序的计算器不够用），发现这个题相当困难，以至于最后在习题54中出现的问题变得难于驾驭了。然而，夹在习题45和习题54中的材料实际上完全是一些标准的内容。我坐下来认真作了一番研究并最终特别提出如下的内容。

翻转数是“反对称”的数串，它们由成对的1，0和成对的$\bar{1}$构成；而且，两个1和两个$\bar{1}$是交替出现的。例如

$11\bar{1}\bar{1}$，$110\bar{1}\bar{1}01101\bar{1}\bar{1}$，$1100\bar{1}\bar{1}110\bar{1}\bar{1}011\bar{1}\bar{1}0110\bar{1}\bar{1}1100\bar{1}\bar{1}$。

一个有$(2n+1)$个数字的翻转数，中心位置上有一个0，将这个0移去，则得一有$2n$个字数的翻转数，故$f_{2n+1}=f_{2n}$。这正如我们前面已看到的那样。一个有$2n$个数字的翻转数，若中心有两个0（或多于两个0），将这两个0移去，就得到一个有$(2n-2)$个数字的翻转数；否则若中心为一数串$11\bar{1}\bar{1}$或$\bar{1}\bar{1}11$，则将它们移去就得到一个有$(2n-4)$个数字的翻转数。因而$f_{2n}=f_{2n-2}+f_{2n-4}$。这样就不需要去区别“跨越者”和“非跨越者”了。从另一角度看，计数可以看成像一窝小母猪的繁衍：小母猪从$11\bar{1}\bar{1}$长到$1100\bar{1}\bar{1}$，然后长到

$110000\overline{11}$，这时它成熟并产下子一代的母猪，即$11\overline{11}11\overline{11}$。每一年上一代都产下子一代，而子一代在第二年成熟。我猜想 f_{2n+1}就是这个模型中猪在冬季的数目。

格雷厄姆

研究Ⅱ　邮票问题

第十二章　坚持走下去

我们从一个古老的数学游戏开始吧!

问题　现有装 8 品脱和 5 品脱的罐子以及水龙头。试说明如何利用它们得到 1 品脱的水。

这个问题就是要从两个量（8 品脱和 5 品脱）而得出一个特指的量（1 品脱）。此问题的一个解答可用下式表出：$1=(8+8)-(5+5+5)$。换言之，首先注满 8 品脱的罐子两次，总共可得 16品脱，然后把这些水转倒进 5 品脱的罐子里，如是 3 次，就倒走了$(5+5+5)$，即 15 品脱，剩下的正好是 1 品脱。这里既用了加法也用了减法。下面这个研究问题的起点稍有不同。当然仍是把整数组合起来去得出另外的整数，但这次不能用到减法运算。

习题1*　设有无限多张 5 分和 8 分的邮票。

(1) 下面列出的量中，哪些能够仅用 5 分和 8 分两种邮票而得到：

23分，42分，76分，951分，13632分，27分，17分，11分，14分，26分，28分；

(ii) 列出从1分到99分中不能仅用5分和8分得出的量。

习题2* 设有无限多张5分和13分的邮票。

(i) 下面列出的量中，哪些能够只用5分和13分两种邮票而得到：

23分，24分，25分，26分，73分，872分，351642分；

(ii) 列出从1分到99分中不能仅用5分和13分得出的量。

习题2和习题3只是某个数学问题的特例。

问题 设有两种邮票，每张a分和每张b分，且各有无限多张。试问：仅用这两种邮票可得出哪些量？而哪些量不能仅由它们得出？

这个问题正是我们要引导读者去探索的问题。

读者当然很愿意知道，一经告知了可以使用的两种邮票的值（a和b），怎样能够立即判断哪些量能仅由它们得出，哪些量不能够仅由它们得出。显然，两个量a和b与能够仅由它们组合起来而得到的量之间必然有某种联系。但目前还不清楚我们所要找的究竟是哪种类型的联系。探究这种问题的方法之一是

试验，并以一种有系统性的方式记录所得的结果，以期能够初步发现某种模式。

若你真要采用这种方法，你就会选择某些a和b的值，试试看什么情况会发生，并且要不断地做下去。当然，在你决定了要这样地做试验后，你总是会试图以一种有系统性的方式来选择a和b的值，因为，否则你会发现要找出任何一种模式都是极其困难的。按照这种思路，我们首先让a取一固定的值5，并试着先取$b=2$，然后取$b=3$，4，等等。

习题3* 完成并扩展图12.1中的数表，直到你认为你已能准确地知道哪些量能仅用5分和2分的邮票得到，而什么量不能仅用5分和2分的邮票得到为止。

总　量	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
能得到	√		√									
不能得到		×										

图 12.1

习题4* 完成并扩展图12.2中的数表，直到你认为你已准确地知道哪些量能仅用5分和3分的邮票得到，而什么量却不能仅由它们得出为止。

总　量	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
能得到	√			√							
不能得到		×	×								

图 12.2

稍嫌不便的是，我们不得不一次又一次地提到“能够仅用 a 和 b 得到的量”和“不能仅用 a 和 b 得到的量”。为了简化叙述，我们作一种约定。设 a 和 b 是要用到的两种邮票的值。若一个数能仅用 a 和 b 的组合而得到，就称这个数是“合适的”；若一个数不能仅用 a 和 b 的组合而得到，就称这个数是“不合适的”；按这种约定，习题3中的3和4是合适的，而习题4中的4是不合适的，6是合适的。

习题5* 设仅有5分和4分的两种邮票。试完成图12.3中的数表，并将其扩展直到你认为已能准确地说出什么数是合适的，

什么数是不合适的为止。

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
合适的													
不合适的													

图 12.3

习题6* 设仅有 5 分和 6 分的邮票，请画出如习题 5 中图 12.3 那种数表，并将它扩展，直到你能说出什么数是合适的，什么数是不合适的。

习题7* 设仅有 5 分和 7 分的两种邮票，作出图12.3中那种数表并将它扩展，直到你能准确说出什么数是合适的，什么数是不合适的。

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

至此，对于仅有 5 分和 8 分两种邮票，或仅有 5 分和 9 分两种邮票的情形，极有可能出现什么结果，你应有一个相当清晰的概念了。对于每一种情形，看起来都存在一个“截断点”，在这里，不合适的数就像是达到了终点，即这一点后面就没有不合适的数了。迄今，可能存在一个截断点的看法还仅仅是一种猜测。当然这个有趣的猜想是值得继续去研究一番的。

对任何一个猜想，首先要做的一件事就是验证。验证上述存在截断点的猜想，最笨的方法是：选一些尚未试过的 a 和 b 的值，检验上述猜想是否对这些 a 和 b 的值也成立。若猜想经受住了这一初步的检验，接着就应寻求某种令人信服的数学解释，或者说，证明它。这就是要表明你的猜想事实上的确是正确的。

现在，让我们首先验证上述那个猜想，即总是存在一个截断

点，在这个点以后就再没有不合适的数了。

习题8* (i) 利用习题3—7的解答完成图12.4中的数表；

a	5	5	5	·	5	5	
b	2	3	4	·	6	7	
看起来可能的截断点(若存在)	3/4	7/8					

图 12.4

(ii) 对下面的每一对 a、b 的值，作一个类似图12.3中的那种数表：

(a) $a=5$, $b=8$；(b) $a=5$, $b=9$；(c) $a=5$, $b=10$；

(d) $a=5$, $b=11$；(e) $a=5$, $b=12$；(f) $a=5$, $b=13$；

(iii) 利用(ii)的结果把图12.4中的数表扩展到 $b=13$。

在匆匆地作出太多的结论以前，显然还应该对 $a\neq5$ 的一些值验证一下这个猜想是否成立。当然出发点还是这个猜想似乎多多少少有些正确性，至少当 $a=5$ 时是这样。在迄今所考察过的a和b的数对中，只有一对值没有切断点，它们是 $a=5$，$b=10$。这一明显的例外不应使你感到惊讶。因为，若a和b都是的倍数，则由a和b的组合而得到的任何数，都只能是5的倍数。而任何不是5的倍数的数，就总是不合适的，故不合适的数就决不可能到达一个结束点。

可能读者一直在试图找出列在习题8的数表中“看起来可能的截断点”的某种模式。若读者确实在这么做，那么可能已经注意到：习题8的数表提示了原始截断点概念的一种改进的形式。由这一改进了的形式似乎能准确地猜到截断点会在哪里出现；至少

对于$a=5$的情形会是这样。

习题9* (i) 再考察习题8中所列出的“看来是可能的截断点”。试找出一种模式，要求它能帮助你猜出 $a=5$，$b=14$ 时的截断点；

(ii) 对 $a=5$，$b=14$ 作出如习题5中的数表，从而验证你的猜测；

(iii) 对 $a=5$，$b=15$ 猜测可能的截断点，然后验证其正确性；

(iv) 对 $a=5$，$b=16$ 猜测可能的截断点，然后验证它的正确性。

习题10* (i) 设 $a=5$ 而 b 不是5的倍数，试猜测以 b 表示出截断点的公式，然后验证该公式的正确性；

(ii) 设 a 为任一常用到的数（不一定是5），试猜测用 a 和 b 表示出截断点的公式；若能猜出，试用下述几对值验证该公式的正确性；

(a) $a=6$，$b=7$；(b) $a=6$，$b=8$；(c) $a=6$，$b=9$。

习题提示

9. (i) 3/4，7/8，11/12，…，19/20，23/24，27/28，31/32，…，39/40，43/44，…。

解答

习题1. (i) 23，42，76，951，13632，26，28（27分，17分，11分，14分不能得到）；

(ii) 1，2，3，4，6，7，9，11，12，14，17，19，22，

27。

习题2. (i) 23, 25, 26, 73, 872, 351642, 84, 36, 48, 49 (24分, 17分, 37分, 47分不能得到);

(ii) 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, 9, 11, 12, 14, 16, 17, 19, 21, 22, 24, 27, 29, 32, 34, 37, 42, 47。

习题3. 可能只有1分和3分不能得到.

习题4. 可能只有1分、2分、4分和7分不能得到。

习题5. 可能只有1, 2, 3, 6, 7和11是不合适的。

习题6. 可能只有1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14是19不合适的。

习题7. 可能只有1, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 16, 18和23是不合适的。

习题8.

a	5	5	5	—	5	5	5	5	—	5	5	5
b	2	3	4	—	6	7	8	9	—	11	12	13
看起来可能的截断点(若存在)	3/4	7/8	11/12	—	19/20	23/24	27/28	31/32	—	39/40	43/44	47/48

习题10. (i) 猜测的公式: 截断点在 $4b-5$ 与 $4(b-1)$ 之间;

(ii) 猜测的公式: 截断点在 $ab-(a+b)$ 与 $(a-1)(b-1)$ 之间; 验证的结果显示出肯定这个猜测; 例如, 当 $a=4$ 和 $b=7$ 时, 可能的截断点在17和18之间:

$$4\times7-(4+7)=17,\ (4-1)\times(7-1)=18.$$

第十三章　退回来，寻求证明

我们现在正在我们自己的前头奔跑着！现在也许读者已很有把握的能准确地断定，当 $a=5$ 而 b 取任何值时哪里会出现一个截断点；甚至可能认定已有了一个普遍适用的公式，它可以对任意的数对 a、b 预言哪里会有一个截断点。然而，你是怎么断言公式总是有效的呢？直到现在甚至尚未解释为什么总是存在一个截断点。并且，即使你能设法说服自己相信截断点的存在性，也仍需解释为什么截断点恰好会出现在你认为它要出现的地方。既然有某个事情有解释说明的价值，那么你当然可以（而且应该）追溯到它的起点——在寻求某类数学解释（或者说证明）时的出发点。

习题11* 在习题 3 中，我们曾经要求读者准确地确定出当 $a=5$ 而 $b=2$ 时，什么数是合适的，什么数是不合适的(图31.1)。

数	0	1	2	3	4	5
合适的	√		√		√	√
不合适的		×		×		

图 13.1

实际上，每当遇到接连两个合适数，你就可以停下来不用继

续做了。在这里，有

$$4=0\times5+2\times2,\quad 5=1\times5+0\times2,$$

4 和 5 是接连两个合适数。知道了 4 和 5 都是合适数后，要说明大于或等于 4 的数都是合适的（这样，3 就是最后一个不合适的数），就很容易了。试解释这是为什么。

习题12* 在习题4中曾要求读者准确地确定出当 $a=5$ 而 $b=3$ 时，什么数是合适的，什么数是不合适的(图13.2)

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
合适的	√			√		√	√		√	√	√
不合适的		×	×		×			×			

图 13.2

(i) 用 $x\times5+y\times3$ 的形式写出 8，9 和 10；

(ii) 在习题 4 中，实际上当你遇到接连 3 了个合适的数（即 8，9 和 10)时，本来就可以停下来了。因为这时很容易说明大于或等于 8 的任何数都是合适的（于是，7 是最后这一个不合适的数)。试对此作出解释。

习题13* (i) 设现在需要准确地确定当 $a=5$ 而 $b=4$ 时，哪些数是合适的，哪些数是不合适的。试问：当接连找出了多个合适数后就可以停下来了吗？在完成习题 5 时，你是在什么时候停下来的？

(ii) 设现在需要确定当 $a=5$ 而 $b=6$ 时，哪些数是合适的，哪些数是不适的。试问：必须接连找出多少个合适数后才能停下来？在完成习题 6 时，你是在什么时候停下来的？

(iii) 在完成习题 7 时，你是在什么时候停下来的？

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

这样，若实际上确实存在一个"最后"的不合适数，那么现在在知道了 a 和 b 的值后，已有办法立即求出这个不适合的数了。例如，$a=5$，b 是任意一个不等于 5 的倍数的数（比如可令 $b=23$，或 2233，…），那么，只需要去逐一地检验 0，1，2，3，4，…直到找出接连5个合适数即可。

习题14 （i）证明：当 $a=5$，$b=23$ 时，接连 5 个数115，116，117，118，119都是合适的数；

（ii）由（i）可知：当 $a=5$，$b=23$ 时，每个大于或等于 115 的数都是合适的，故必定存在一个最后的不合适数，并且它必定小于或等于114，试求出这个最后的不合适数。

这种方法，对于通常的猜测是一个重大的改进。但仍然存在不能令人满意之处。首先，即使是固定 a（比如取 $a=5$），但随着 b 值的增大，必须检验的数的数量也不断增大，这就带来很大的不便。其次，更成问题的是：现在仍不能完全肯定，总是存在一个截断点，只要超过了它，所有的数都是合适的了。这样，到目前止，就我们所知而言，就可能受到一种困扰——不得不检查越来越大的数，但并没有找到 5 个接连的合适数，也却不能肯定一定能找到接连的 5 个合适的数。因此，我们暂时让 a 取固定值 5，并设法证明：无论 b 取何值，我们都可以找到接连 5 个合适的数。

我们把"b"的尚未具体地给出的值就记为b，则利用初等代数就可以写出接连 5 个合适的数。在习题 10（i）中读者可能已确定，当 $a=5$ 时截断点看来会在 $4b-5$ 和 $4b-4$ 之间出现。于

是，我们希望能证明

$4b-5$ 总是不合适的，

而

$4b-4$，$4b-3$，$4b-2$，$4b-1$ 和 $4b$ 总是合适的。

习题15 (i) 设 $a=5$，$b=21$。请验证：$4b-5$ 是不合适的；

(ii) 设 $a=5$，$b=201$。请验证：$4b-5$ 是不合适的；

(iii) 设 $a=5$，$b=2001$。请验证：$4b-5$ 是不合适的。

习题16 设 $a=5$，b 不为 5 的倍数。试证明 $4b-5$ 总是不合适的。

于是，现在我们必须做的全部工作就是证明：当 $a=5$，b 不是 5 的倍数时，接连 5 个数 $4b-4$，$4b-3$，$4b-2$，$4b-1$ 和 $4b$ 都是合适的。然后便可以完全肯定所有大于或等于 $4b-4$ 的数都是合适的，从而，习题 16 就保证了 $4b-5$ 是最后一个不合适的数。

因为 $4b$ 显然是合适的($4b=0\times5+4\times b$)，故只需讨论另外 4 个数：$4b-4$，$4b-3$，$4b-2$ 和 $4b-1$。在证明它们都是合适的以前，也许读者需要下述简要的提示。

提示：将 b 写作 5 的倍数与一个余数 $r(r\leqslant4)$ 之和：$b=5g+r$。因 b 不是 5 的倍数，故 $r\neq0$。于是 r 只能取 4 个可能的值：$r=1$，$r=2$，$r=3$，或 $r=4$。下面的练习就依次考虑了每一种情形。读者必须运用某些初等代数的知识去解决它们。但是，若仍感困难，不妨看看本章末尾的提示。

习题17 (i) 设 $r=1$，于是 $b=5g+1$。

(a) 验证 $4b-4$ 是合适的；(b) 验证 $4b-3$ 是合适的；(c) 验证 $4b-2$ 是合适的；(d) 验证 $4b-1$ 是合适的；

(ii) 设 $r=2$，于是，$b=5g+2$。

(a) 验证 $4b-3$ 是合适的；(b) 验证 $4b-1$ 是合适的；(c) 验证 $4b-4$ 是合适的；(d) 验证 $4b-2$ 是合适的；

(iii) 设 $r=3$，于是 $b=5g+3$。

(a) 验证 $4b-2$ 是合适的；(b) 验证 $4b-4$ 是合适的；(c) 验证 $4b-1$ 是合适的；(d) 验证 $4b-3$ 是合适的；

(iv) 设 $r=4$，于是 $b=5g+4$。

(a) 验证 $4b-1$ 是合适的；(b) 验证 $4b-2$ 是合适的；(c) 验证 $4b-3$ 是合适的；(d) 验证 $4b-4$ 是合适的。

习题 16 和 17 的解答已表明，早在习题10(i)中所作的猜测的确是成立的——当 $a=5$，b 不是 5 的倍数时，$4b-5$ 是最后一个不合适的数。

开始时我们决定固定 a 的取值，让它取了确定的值 5。这只是我们以一种有系统性的方式研究我们的主要问题的一部分。在从习题1到习题 8 中，我们完成了对 $a=5$ 的情形的系统讨论。而让 a 保持固定使得能在习题10(i)找出一种模式变得容易得多。并且这还意味着在习题 16 和 17 中所需要的代数运算不会太困难。然而，当 a 不等于 5 时，情况又会如何呢？我们在习题 16 和 17 中用过的方法还会有效吗？

习题 18 设 $a=6$。

(i) 证明：若 b 是 2 的倍数，则不存在最后的不合适数，从

而就根本不存在截断点；

(ii) 证明：若 b 为 3 的倍数，则不存在最后的不合适数，从而不存在截断点

习题 19 设 $a=6$，b 既不是 2 的倍数也不是 3 的倍数，但并未具体指出是多少。

(i) 证明：$5b-6$ 总是不合适的；

(ii) 将 b 记作 $b=6g+r$，其中 $r\leqslant 5$。

(a) 证明：r 只能为 1 或为 5；

(b) 证明：当 $r=1$ 时，数 $5b-5$，$5b-4$，$5b-3$，$5b-4$，$5b-1$ 都是合适的；

(c) 证明：当 $r=5$ 时，数 $5b-5$，$5b-4$，$5b-3$，$5b-2$，$5b-1$ 都是合适的；

(iii) 证明：$5b-6$ 总是最后一个不适的数。

只要 a 固定，看来就有可能利用初等代数证明前述那个猜想的正确性了。但是，且慢！当 $a=5$ 时，你曾把 b 写作 $5g+r(r\leqslant 4)$；然后，必须依次一一考察 r 的 4 个可能的取值：$r=1$，$r=2$，$r=3$，$r=4$；而对每一个 r，又必须证明 $4b-1$，$4b-2$，$4b-3$，$4b-4$ 这4个数都是合适的。显然，对于一个较大的 a，例如 $a=101$，若要采用完全一样的方法，就必须作大量的计算。即是说必须把 b 记为 $b=101g+r$，其中 $r\leqslant 100$，然后依次一一考察 100 种可能的情形：$r=1$，$r=2$，…，$r=100$；并且对每一个 r，又必须证明 $100b-1$，$100b-2$，$100b-3$，…，$100b-100$ 都是合适的。显然，完成这一过程需要做大量的计算工作。但是，这种方法也许并不像它在 $a=101$ 的例子中所显得的那么不中用。

设 a 和 b 代表两个未具体指定的数。若 a 和 b 都是偶数，即

都是2的倍数，则每一个合适的数 $xa+yb$ 都是2的倍数，而任一奇数都是不合适的，故不存在最后一个不合适的数。类似地，若 a 和 b 都是某个数 c 的倍数，则每一个合适的数 $xa+yb$ 也是 c 的倍数，而不是 c 的倍数的数就都是不合适的。这样，也就不可能有一个最后的不合适数。从而，在习题10(iii)中所作的猜测——"每个大于或等于 $(a-1)(b-1)$ 的数是合适的，而 $ab-(a+b)$ 是最后一个不合适数"——除非 a 和 b 没有公因数，否则就不能成立。于是，要证明前述猜测的正确性，则总是与 a 和 b 没有公因数这一点联系起来的。

这里，正好是一个转机，有可能推广我们在前面曾使用过的方法。这个方法对 $a=5$（习题16和17）以及 $a=6$（习题19）时，曾被用来有效地证明了"$ab-(a+b)$ 总是一个不合适的数（只要 a 和 b 没有公约数）"。这里所需的代数运算要比前面的更复杂。当然，也要看读者在推广前面用过的方法时能走多远了。若读者感到有些困惑，下面的提示可以给予一些帮助；若读者觉得实在迷惑不解，就立即进到下一章。我们将在稍后不久还要回过头来以不同的方式再考察这个问题。

证明方案　设 a 和 b 是没有公因素的正整数，且 $a<b$。

(i) 证明 $ab-(a+b)$ 必是不合适的；

(ii) 记 $b=ga+r$，$r\leqslant a-1$，

(a) 证明：a 和 r 没有公因数；

(b) 证明：无论 r 取什么值，数 $(a-1)(b-1)$，$(a-1)(b-1)+1$，$(a-1)(b-1)+2$，…，$(a-1)b$ 都是合适的；

(iii) 证明：$ab-(a+b)$ 必定是最后一个不合适的数。

习题提示

11．$4=0\times5+2\times2$ 是合适的；$5=1\times5+0\times2$ 是合适的；

$6=4+2=0\times5+3\times2$ 是合适的；$7=5+2=1\times5+1\times2$ 是合适的；$8=6+2=0\times5+4\times2$ 是合适的；$9=7+2=1\times5+2\times2$ 是合适的；$10=8+2=\cdots$是合适的；$11=9+2=\cdots$是合适的。

12．(ii) $8=1\times5+1\times3$ 是合适的；$9=0\times5+3\times3$是合适的；$10=2\times5+0\times3$是合适的；$11=8+3=1\times5+2\times3$ 是合适的；$12=9+3=0\times5+4\times3$是合适的；$13=10+3=2\times5+1\times3$ 是合适的；$14=11+3=1\times5+3\times3$ 是合适的；$15=12+3=0\times5+5\times3$ 是合适的；$16=13+3=2\times5+2\times3$ 是合适的；等等。

14．(ii) 在习题10(i)中曾猜测可能的截断点会在$4(b-1)-1$和$4(b-1)$之间出现．当$b=23$时，必须验证：

(*a*) $4(b-1)-1$ 确实是不合适的；

(*b*) 所有大于或等于$4(b-1)=88$的数都是合适的．

15．(i) 假定$4b-5=79$能够由$a=5$和$b=21$结合而得到，即是说$79=5x+21y$。可以用多少个21呢？逐一地检验4个可能的y值．

(ii) 假设 $4b-5=799$ 能够由结合 $a=5$和$b=201$而得到，即$799=5x+201y$。有多少个201可用呢？逐一地考察y的 4 个可能的值。

16．设 $4b-5=5x+by$。y能取哪4个可能的值？依次考察其每一个值．

17．(i) (*a*) $4b-4=4(5g+1)-4\cdots$；

(*b*) $4b-3=4(5g+1)-3=?\times(5g+1)+?\times5$；

(ii) (*a*) $4b-3=4(5g+2)-3=\cdots$；

(*b*) $4b-1=4(5g+2)-1=\cdots$．

19．(i) 设 $5b-6=6x+by$。y能取哪5个可能的值？逐一地

考察每一个值。

(ii) (a) 证明：若$r=0$，2，3，4，那么b为2的倍数或3的倍数；

(b).(c) 仿习题17的解答，但是这一次是用$a=6$代替了$a=5$，而r只取两个可能的值($r=1$和$r=5$)，而不像习题中那样取4个值。

证明方案 (i) 设 $ab-(a+b)=ax+by(x,\ y\geqslant 0)$。证明：$y\leqslant a-2$。为什么这与$b(a-1-y)=a(x-1)$相矛盾？

(ii) (b) 数$(a-1)b$显然是合适的，因而你的任务只是证明：当k取$a-1$，$a-2$，$a-3$，…，1时，数$(a-1)b-k=(a-1)(ga+r)-k=(a-1)ga+[(a-1)r-k]$总是合适的。完成这一点的方法之一，就是证明方括号中的数$[(a-1)r-k]$总能写作a的倍数加上b的倍数。

解答

习题11．$a=5$，$b=2$。若n是合适的，那么，对于某个x，$y\geqslant 0$，有$n=5x+2y$，于是$n+2=5x+2(y+1)$，$n+4=5x+2(y+2)$，$n+6=5x+2(y+3)$，…都是合适的；若$n+1$是合适的，那么，对某个u，$v\geqslant 0$，有$n+1=5u+2v$，于是$n+3=5u+2(v+1)$，$n+5=5u+2(v+2)$，$n+7=5u+2(v+3)$，…都是合适的。从而，所有大于或等于n的数都是合适的了。

习题12．(i) $8=1\times 5+1\times 3$，$9=0\times 5+3\times 3$，$10=2\times 5+0\times 3$；

(ii) $a=$ ，$b=3$。若n是合适的，则有$n=5x+3y(x,y\geqslant 0)$。从而$n+3=5x+3(y+1)$，$n+6=5x+3(y+2)$，$n+9$…都是合适的。若$n+1$是合适的，则$n+1=5u+3v(u,\ v\geqslant 0)$，从而$n+4=5u+3(v+1)$，$n+7=5u+3(v+2)$，$n+10=$…都是合适的。若

$n+2$也是合适的，则$n+2=5s+3t(s, t\geqslant 0)$。从而，$n+5=5s+3(t+1), n+8=5s+3(t+2), n+11=\cdots$都是合适的。于是，若$n$、$n+1$和$n+2$是合适的，那么所有大于或等于$n$的数就都是合适的。

习题13 (i) $b=4$是数a和b中的较小者，因此，你所需做的唯一的一件事就是找出接连的4个合适的数。在习题5中你可在数15处就停下来（因为12，13，14和15都是合适的，故所有大于或等于12的数就都是合适的）；

(ii) $a=5$是a和b中较小的一个数，故，所需做的只有一件事，即找出接连5个合适的数。在习题6中你可在数24处就停下来（因为20，21，22，23和24都是合适的，故所有大于或等于21的数就都是合适的）；

(iii) 在习题7中$a=5$是a和b中的较小者，故只需找出接连5个合适的数即可。从而，你可在数28处停下来（因为24,25,26，27和28都是合适的，故所有大于或等于24的数就都是合适的）。

习题14. (i) $115=0\times 5+5\times 23$，$116=14\times 5+2\times 23$，$117=5\times 5+4\times 23$，$118=19\times 5+1\times 23$，$119=10\times 5+3\times 23$。

(ii) 在习题10(i)中，你曾猜测截断点会出现在$4b-5=87$和$4(b-1)=88$之间。为了检验这个猜测的正确性必须做两件事：(*a*) 证明87是不合适的；(*b*) 证明每个大于或等于88的数都是合适的。(*a*) 设87是一合适的数，则有$87=5x+23y(x, y\geqslant 0)$。于是$y\leqslant 3$(因为$87<23\times 4$)。若$y=0$，则$x=18/5$；若$y=1$，则$x=64/5$；若$y=2$，则$x=41/5$；若$y=3$，则$x=18/5$。所有这些情形，$x$都不取整数。因此87不可能是合适数，故必为不合适的数。(*b*) 为了证明每一个大于或等于88的数都是合适的，只需检验$88=1\times 23+13\times 5$，$89=3\times 23+4\times 5$，$90=0\times 23+18\times 5$，$91=2\times 23+9\times 5$和$92=4\times 23+0\times 5$都是合适的。

习题15．(i) 设$4b-5=79$是合适的，则有$79=5x+21y(x, y\geqslant 0)$. 从而$y=3$．若$y=0$，则$x=79/5$；若$y=1$，则$x=58/5$；若$y=2$，则$x=37/5$；若$y=3$，则$x=16/5$．没有一种 情况，$x$会取整数，故79必为一个不合适的数；

(ii) 设$4b-5=799$是合适的，则有$799=5x+201y(x,y\geqslant 0)$。于是$y\leqslant 3$．若 $y=0$，则$x=799/5$；若$y=1$，则$x=598/5$；若$y=2$，则$x=397/5$；若$y=3$，则$x=196/5$．没有一种情形x 会取整数，故799必为一不合适的数；

(iii) 设$4b-5=7999$，则有$7999=5x+2001y(x, y\geqslant 0)$．从而$y\leqslant 3$，而$x$不可能取整数．故7999必为一不合适的数．

习题 16．设 $4b-5$ 是合适的，则 $4b-5=5x+by(x,y\geqslant 0)$．于是$y\leqslant 3$（因为$4b-5<b\times 4$）．若$y=0$，则$x=(4b-5)/5$；若 $y=1$，则$x=(3b-5)/5$；若$y=2$，则$x=(2b-5)/5$；若$y=3$，则$x=(b-5)/5$．没有一种情形x会取整数．(为什么不会取整数?)故$4b-5$必为一不合适的数．

习题17．(i) (a) $4b-4=4(5g+1)-4=20g=4g\times 5+0\times b$；

(b) $4b-3=4(5g+1)-3=20g+1=3g\times 5+1\times b$；

(c) $4b-2=4(5g+1)-2=20g+2=2g\times 5+2\times b$；

(d) $4b-1=4(5g+1)-1=20g+3=g\times 5+3\times b$；

(ii) (a) $4b-3=4(5g+2)-3=20g+5=(4g+1)\times 5+0\times b$；

(b) $4b-1=4(5g+2)-1=20g+7=(3g+1)\times 5+1\times b$；

(c) $4b-4=4(5g+2)-4=20g+4=2g\times 5+2\times b$；

(d) $4b-2=4(5g+2)-2=20g+6=g\times 5+3\times b$；

(iii) (a) $4b-2=4(5g+3)-2=20g+10$

$= (4g+2)\times 5 + 0\times b$;

(b) $4b-4=4(5g+3)-4=20g+8=(4g+1)\times 5+1\times b$;

(c) $4b-1=4(5g+3)-1=20g+11=(2g+1)\times 5+2\times b$;

(d) $4b-3=4(5g+3)-3=20g+9=g\times 5+3\times b$;

(iv) (a) $4b-1=4(5g+4)-1=20g+15$

$= (4g+3)\times 5+0\times b$;

(b) $4b-2=4(5g+4)-2=20g+14=(3g+2)\times 5+1\times b$;

(c) $4b-3=4(5g+4)-3=20g+13=(2g+1)\times 5+2\times b$;

(d) $4b-4=4(5g+4)-4=20g+12=g\times 5+3\times b$.

习题18. (i) 若$a=6$而$b=2n$是偶数，那么每一个合适的数$xa+yb$都是偶数，而所有奇数都是不合适的，故没有最后一个不合适的数；

(ii) 若$a=6$而$b=3n$是3的倍数，那么每一个合适的数都是3的倍数，而所有不是3的倍数的数都是不合适的．故没有最后的不合适的数．

习题19. (i) 设$5b-6=6x+by$，则$y\leqslant 4$．若$y=0$，则$x=(5b-6)/6$；若$y=1$，则$x=(4b-6)/6$；若$y=2$，则$x=(3b-6)/6$；若$y=3$，则$x=(2b-6)/6$；若$y=4$，则$x=(b-6)/6$．在所有情况下，x都不会取整数，故$5b-6$必为一不合适的数；

(ii) (a) $b=6g+r(r\leqslant 5)$．若$r=0,2$或4，则b为2的倍数；若$r=3$，则b为3的倍数．因此$r=1$或5．

(b) 设$r=1$，则$5b-5=5(6g+1)-5=30g\times 6+0\times b$，$5b-4=5(6g+1)-4=30g+1=4g\times 6+1\times 6$；$5b-3=5(6g+1)-3=30g+2=3g\times 6+2\times 6$；$5b-2=5(6g+1)-2=30g+3=2g\times 6+3\times b$，$5b-1=5(6g+1)-1=30g+4=g\times 6+4\times b$；

(c) 设$r=5$，则$5b-5=5(6g+5)-5=30g+20=g\times6+4\times b$，$5b-4=5(6g+5)-4=30g+21=(2g+1)\times6+3\times b$，$5b-3=5(6g+5)-3=30g+22=(3g+2)\times6+2\times b$，$5b-2=5(6g+5)-2=30g+23=(4g+3)\times6+1\times b$，$5b-1=5(6g+5)-1=30g+24=(5g+4)\times6+0\times b$；

(iii)由(i) $5b-6$肯定是不合适的；由(ii)，$5b-5$，$5b-4$，$5b-3$，$5b-2$，$5b-1$这6个数都总是合适的，故所有大于或等于$5b-5$的数就总是合适的。

证明方案 (i) 设$ab-(a+b)=ax+by(x,\ y\geqslant0)$，则$ab-(a+b)<(a-1)b$，故$y\leqslant a-2$。于是，$0<b(a-1-y)=a(x-1)$。从而$a$和$b$必定有一个公因子(因为$1\leqslant a-1-y\leqslant a-1$，故$a$不能整除$a-1-y$)。因而实际上一定是不合适的数。

(ii) (a) 若a和r都是c的倍数，那么，$b=ga+r$，这与a和b没有公因子的假定相矛盾。

(b) 注意到r，$2r$，$3r$，…，$(a-1)r$没有一个能被a整除，而且当它们除以a时，没有任何两个数会有相同的余数(若$i<j$，而ir和jr有相同的余数，那么$(j-i)r$就将会是a的倍数)。并且只有$a-1$可能的余数，故每个余数就只出现一次。于是，若$1\leqslant k\leqslant a-1$，那么某个$mr(1\leqslant m\leqslant a-1)$的余数就恰好为$k$：$mr=na+k$。从而$(a-1)b-k$是合适的。这是因为$(a-1)b-k=(a-1)(ga+r)-k=(a-1)ga+(a-m-1)r+mr-k=(a-m-1)(ga+r)+(mg+n)a=(a-m-1)b+(mg+n)a$。这样，我们就证得了$(a-1)b$，$(a-1)b-1$，$(a-1)b-2$，…，$(a-1)b-(a-1)$都是合适的。

(iii) 由(i) $ab-(a+b)$必为不合适的数，而由(ii)它后面的a个数：$ab-(a+b)+1$，$ab-(a+b)+2$，…，$ab-(a+b)+a$都是合适的。

第十四章　一幅图画抵得上一百句话

> 一个几何问题可用算术方式处理，
> 故一个代数问题也可用几何方法解决。
>
> ——D.格雷戈里：《备忘录》，1706

在邮票问题中，读者曾被要求把两个给定的数（例如$a=5$，$b=8$）结合起来去得出另外某个数（例如26）。从表面上看这很像只是一个算术问题。当读者在第十二章和第十三章中设法去解决这个问题时，可能或多或少地认为，理所当然地应该用算术的语言和方法。但是，一经越过了单纯的算术的界限，即首先让b，尔后又让a和b是未具体指定的数，就实际上用到了推广的算术——它被称之为代数。这种笨方法初看起来还是相当有效的(习题1一19)。但真正认真地尝试解决第十三末尾的“证明计划”的人可能已经感觉到，代数方法也变得有点失去效力——它太繁琐了。

这一章要解决的问题与前一章完全一样：说明为什么似乎一定存在一个截断点，越过这个值，所有的数都为适合的数了（只要a和b没有公因数）。然而，在这一章我们要找出这一命题的一个“显然的”解释。根据需要，我们可以用一种全新的方式来考察这个问题。在M．加德纳有关数学游戏的几本书中，有一本是

《啊哈！原来如此》(由"科学的美国人"1978年出版)．他力图在这本书中说明，只要找到了考察问题的正确方法，一个看起来相当困难的问题，也可能变得非常容易．只要可能，我们就要找出邮票问题的这样一个"啊哈"解来．"考察问题的正确方法"经常只不过是"形像地表示出问题的一种简单方式"的另一种表述方式而已。如果读者是艰难地通过了第十二章和第十三章的话，那么当被告知：这一点乍听起来似乎并没有什么，但实际上其中大有文章时，你是不会感到惊异的。任何一件事，在有了正确的观点以后，都有可能看起来是显然的。但是要得到这个正确的观点通常都要经历一场硬仗．为了了解要得到正确的观点可能会多么困难，请试试回答下面两个问题，并让你的朋友也试试。

习题20* 图14.1表示了什么？

图 14.1 取自P·B·Porter(《美国心理月刊》1954年67卷，550页)

习题21* 图14.2代表了什么？

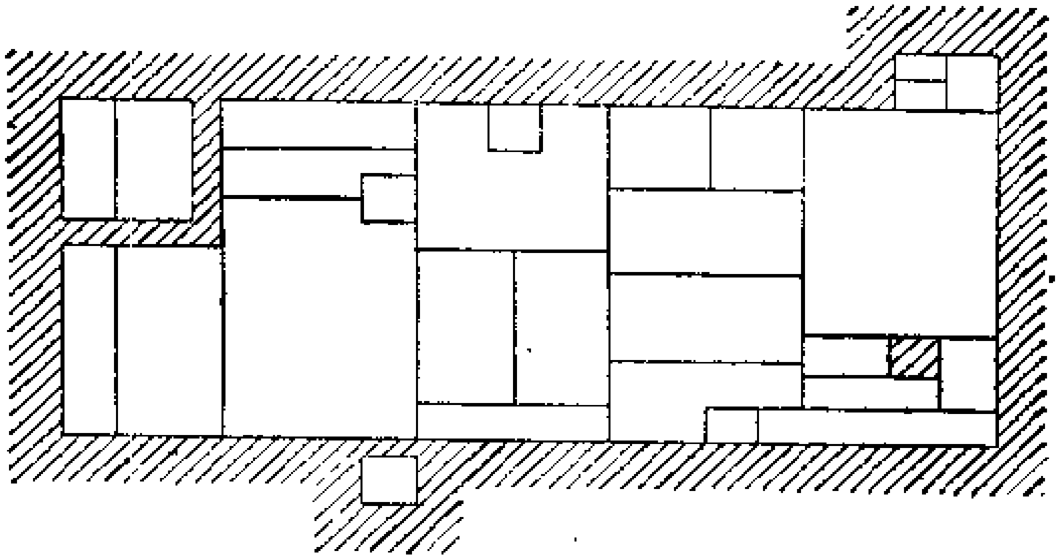


图 14.2

下面两个练习题中引进了"方格点阵"，并需要用到如图14.3所示的方格点纸片。

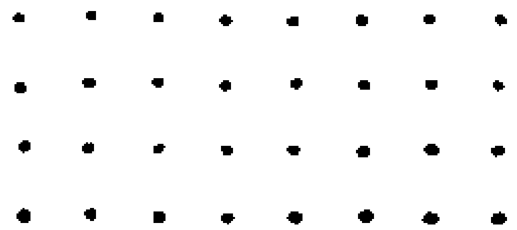


图 14.3

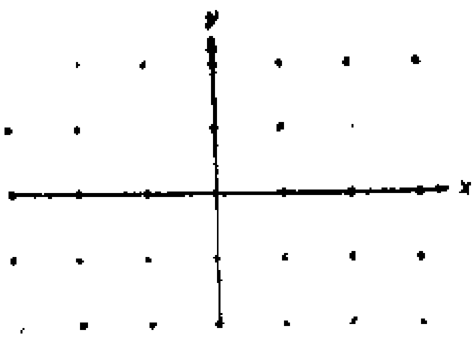


图 14.4

习题22* 取一张方格点纸片。设$a=3$，$b=7$。

(i) 证明：11是不合适的，16是合适的；

(ii) 在方格点纸片上画出x轴和y轴(如图 14.4)，然后作出直线$3x+7y=11$和$3x+7y=16$；

(iii) (i)中已证明11是不合适的，这会告诉你有关第一条直

线的什么信息呢？在(i)中还证明了16是合适的，这对第二条直线可为你提供什么信息呢？

习题23* 取一张干净的方格点纸片。设$a=4$，$b=7$。

(i) (a) 16是合适的还是不合适的？

(b) 17是合适的还是不合适的？

(c) 18是合适的还是不合适的？

(d) 19是合适的还是不合适的？

(ii) 在方格点纸上作出下列直线：

(a) $4x+7y=16$；　　(b) $4x+7y=17$；

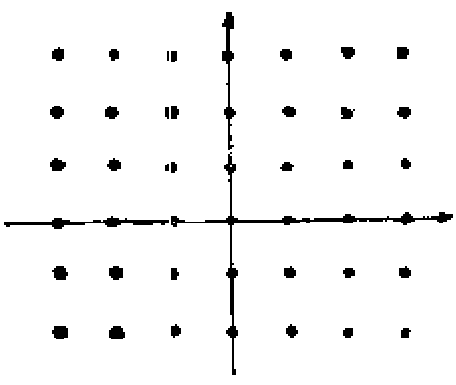
(c) $4x+7y=18$；　　(d) $4x+7y=19$；

(iii) 把(i)中每个问题的回答解释为对(ii)中各对应直线的说明。

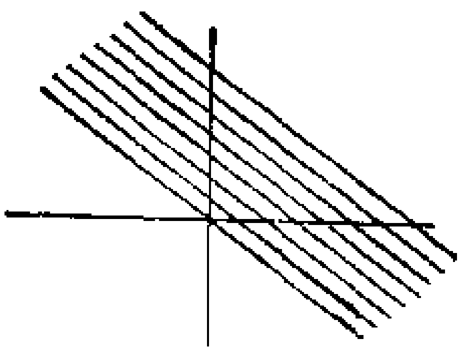
※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

我们将要采用的方法，利用了下述几何概念间的关系。

(I) 必须记住的第一个几何概念是格点。平面上x和y坐标都为整数的点称为格点(图14.5,(i)。我们感兴趣的是格点的集合，特别是x，$y\geqslant 0$的格点(x，y)的集合，我们称这些点为正象限中的格点。



(i)



(ii)

图 14.5

(2) 必须记住的第二个几何概念是平行线簇。$ax+by=c$(a,b 是确定的整数，而 c 是任意的非负整数)就表示一簇平行线(图14.5(ii))。

将这两个概念结合起来，我们就会明白："c 是合适的"意味着"直线 $ax+by=c$ 过正象限中的某个格点 (x, y)"。下面两个练习题将表明，这个几何解释是怎样对特殊的 a 和 b 值有效的。

习题24 设 $a=5, b=2$。在方格点线上作两条互相垂直的轴，然后作出5条直线：$5x+2y=0$，$5x+2y=1$，$5x+2y=2$，$5x+2y=3$ 和 $5x+2y=4$。

(i) 这5条直线中哪些会通过正象限中的1个格点或多个格点？

(ii) 0，1，2，3，4这5个数中哪些是合适的数？

习题25 设 $a=5, b=3$。在方格点纸上作好坐标轴，然后作出10条直线：$5x+3y=0$，$5x+3y=1$，$5x+3y=2$，$5x+3y=3$，$5x+3y=4$，$5x+3y=5$，$5x+3y=6$，$5x+3y=7$，$5x+3y=8$ 和 $5x+3y=9$。

(i) 这10条直线中，哪些要通过正象限中的1个或多个格点？

(ii) 0，1，2，3，4，5，6，7，8，9 这10个数中，哪些是合适的？

我们在本章中的任务，就是要为如下问题找到一个直观、显然的原因，即所谓"啊哈"原因：为什么超过了某个点的所有数就都是合适的数？在探求这个原因的第一步，我们并不关心截断点的准确位置，而只满足于说明我们的几何方法是怎样样提供了一个简单的"啊哈"原因——为什么事实上一定总是存在截断点

的原因。在本章中，我们是通过证明“所有大于或等于ab的数都是合适的”来完成这一点的。在下一章，我们将回到求截断点的准确值上来。

要证明所有大于或等于ab的数都是合适的，只要证明ab，$ab+1$，…，$ab+(a+1)$都是合适的即可。事实上，我们将要证明的还超过了这个范围。我们将证明ab个数

$$ab,\ ab+1,\ ab+2,\ \cdots,\ 2ab-1$$

都是合适的。我们如何来完成这个证明呢？我们将采用的方式是通过证明ab条直线，$ax+by=ab$，$ax+by=ab+1$，$ax+by=ab+2$，…，$ax+by=2ab-1$每一条都要过正象限中的至少一个格点。

在我们证明这一点以前，必须首先讨论一下有关格点的一个问题。设直线$ax+by=c$通过不止一个格点，试问：这些格点在此直线上相互接近的程度如何？现在，我们暂时撇去只考虑正象限中格点的限制，而把考虑的范围拓广到整个平面上。这是因为，如果我们考虑整个平面上的所有格点$(x,\ y)$（其中x，y为任意整数——正的、负的和零），则回答刚刚提到的那个问题就容易得多。

习题26* 设$a=5$，$b=2$。

(i) (a) 求出所有位于直线$5x+2y=0$上的格点$(x,\ y)$；

(b) 当沿直线$5x+2y=0$移动时，直线上的每个格点与它相邻的后一个格点间的距离为多少？

(ii) (a) 求出位于直线$5x+2y=10$上的所有格点$(x,\ y)$；

(b) 当沿直线$5x+2y=10$移动时，直线上每个格点与它相邻的后一个格点间的距离为多少？

(iii) (a) 求出位于直线$5x+2y=11$上的所有格点$(x,\ y)$；

(*b*) 当沿直线$5x+2y=11$移动时，直线上每个格点与它相邻的后一个格点间的距离为多少？

习题27* 设$a=5$，$b=3$。

(i) (*a*) 求出位于直线$5x+3y=0$上的所有格点(x, y)；

(*b*) 当沿直线$5x+3y=0$移动时，直线上每一个格点与它相邻的后一个格点间的距离为多少？

(ii) (*a*) 求出位于直线$5x+3y=15$上的所有格点(x, y)；

(*b*) 当沿直线$5x+3y=15$移动时，直线上的每个格点与它相邻的后一个格点间的距离为多少？

(iii) (*a*)求出位于直线$5x+3y=14$上的所有格点(x, y)；

(*b*) 当沿直线$5x+3y=14$移动时，直线上的每个格点与它相邻的后一个格点间的距离为多少？

现在，我们应该能回答有关直线$ax+by=c$上格点间距离的问题了。读者将在习题29发现有一个非常简单的答案。这个答案就是我们需要揭示的为什么所有大于或等于ab的数都是合适的数的一个“啊哈”理由（习题32）。

习题28 设a和b是没有公因数的正整数。

(i) (*a*) 求出所有位于直线$ax+by=0$上的格点(x, y)；

(*b*) 当沿直线$ax+by=0$移动时，直线上每个格点与它相邻的后一个格点间的距离为多少？

(ii) (*a*) 求出所有位于直线$ax+by=ab$上的格点(x, y)；

(*b*) 当沿直线$ax+by=ab$移动时，直线上相邻格点间的距离为多少？

习题29* 设a和b是没有公因数的正整数。试证明：直线

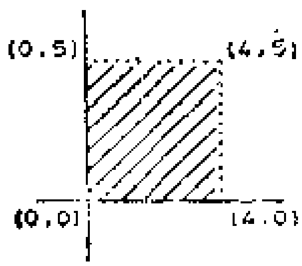
$ax+by=c$上相邻两格点间的距离必定大于或等于$\sqrt{a^2+b^2}$。

现在，我们要说明的是：上述这个简单的事实是怎样导致了正在寻求的那个"啊哈"解的。读者将会看到，在考虑一般情形之前，先考察一两个特例是会很有帮助的。

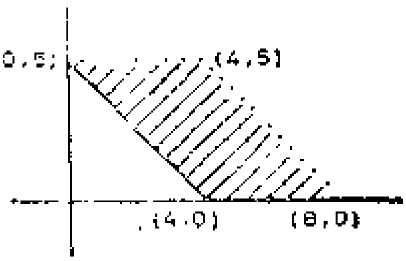
习题30 设$a=5$，$b=4$。

(i) 在顶点为(0，0)，(4，0)，(4，5)和(0，5)的长方形中，若把底边和左侧的一条边包括在内，而把顶边和右侧一条边排除在外，会共有多少个格点(图14.6(i))?(注意：特别是顶点(0，5)和(4，0)都没包括在内。)

(ii) 在一个顶点为(4，0)，(8，0)，(4，5)和(0，5)的平行四边形中，若把底边和左侧一条边包括在内，而把顶边和右侧一条边排除在外，会共有多少个格点(图14.6(ii))?



(i)



(ii)

图 14.6

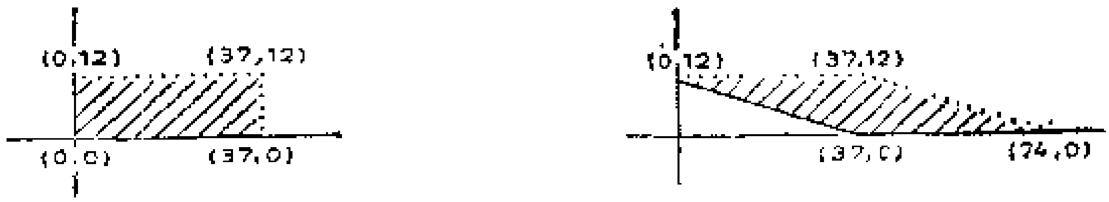
(iii) 对于哪些c值，直线$5x+4y=c$会与这个平行四边形相交?(记住：右侧的边是排除在外的!)

(iv) 设$5x+4y=c$是与图14.6(ii)中的平行四边形相交的一条直线。试问：有多少个格点既在直线上又在平行四边形内?(记住：平行四边形的顶边是排除在外的!)

(v) 通过对比平行四边形中的格点数和与该平行四边形相交的直线数，证明20，21，22，…，39都是合适的。

习题31　设$a=12$，$b=37$。

(i) 在以(0，0)，(37，0)，(37，12)和(0，12)为顶点的长方形中，若把底边和左侧一条边包括在内而把顶边和右侧一条边排除在外，有多少个格点(图14.7(i))？



(i)　　(ii)

图 14.7

(ii) 在以(37，0)，(74，0)，(37，12)和(0，12)为顶点的平行四边形中，若把底边和左侧一条边包括在内，而把顶边和右侧一条边排除在外，有多少个格点(图14.7(ii))？

(iii) 对哪些整数c，直线$12x+37y=c$能与上述平行四边形相交？

(iv) 设$12x+37y=c$是与上述平行四边形相交的直线，试问：有多少个格点既在平行四边形内又在直线上？

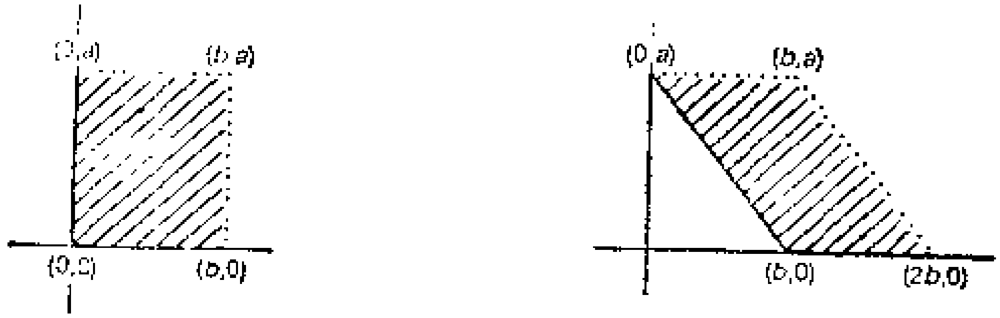
(v) 证明：数$444=12\times37$，$12\times37+1$，$12\times37+2$，…，$2\times(12\times37)-1=887$都是合适的。

很显然，在习题30和31中，数$a=5$，$b=4$和$a=12$，$b=37$并没有任何特殊之处。下面一个练习题就是考虑一般的情形了。

习题32*　设a和b是没有公因数的正整数。

(i) 在以(0，0)，(b，0)，(b，a)，(0，a)为顶点的长方形

中，若把底边和左侧一条边包括在内，而把顶边和右边一条边排除在外，会有多少个格点（图14.8(*i*)）？



(i)　　　　(ii)

图 14.8

(ii) 在以$(b,0)$，$(2b,0)$，(b,a)和$(0,a)$为顶点的平行四边形中，若把底边和左侧一条边包括在内，而把顶边和右侧一条边排除在外，会有多少个格点（图14.8(ii)）？

(iii) 对于哪些c值，直线$ax+by=c$与上述平行四边形相交？（记住：右侧的一条边是排除在外的！）试证明：每条直线最多只通过上述平行四边形中的一个格点。

(iv) 通过比较平行四边形中的格点数和与平行四边形相交的直线数，证明：数ab，$ab+1$，$ab+2$，…，$2ab-1$都是合适的。

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

值得去做一做的是：再仔细地检查整个解答，看是否可以把它称之为"则价"解。假若你要想记住这个解答，当然就要弄清它到底包含些什么东西。既然你已知道了正确的观点和方法，那么还有多少新的技巧需要记住？这里列出本章中所采用过的（也是必须采用的）步骤。

第一步　首先，必须认识到："c是合适的数"与"直线$ax+by=c$通过正象限中的某个格点(x,y)"有完全相同的含义。

读者既已知道，代数方程$ax+by=c$就是一条直线的方程，故这里唯一的新概念就是"格点"，即其坐标x,y都为整数的点(x,y)。然而，虽说这个概念是新的，但它实际上只不过是邮票问题的另一种表述而已（邮票问题所涉及到的是邮票的整数）。一经习惯于这个概念，就几乎不会忘记它了。

第二步　当a和b没有公因数时，必须证明（习题29）：直线$ax+by=c$上任何两个格点的距离大于或等于$\sqrt{a^2+b^2}$。

这是必须要记住的一件事。然而它只是一个比上述那些言辞要简单得多的事实。实际上它只是简单地表明了："若(x,y)是直线上的一个格点，那么，右边与它相邻的格点为$(x-b,y-a)$，左边与它相邻的格点为$(x-b,y+a)$，等等"（见图14.9）。（当a和b没有公因数时，每条直线$ax+by=c$都要通过无限多个格点。这一点是真确的，但目前尚无法证实它。所以，有必要强调：仅就第一步和第二步来说，可能存在许多个c值，直线$ax+by=c$并不通过任何一个格点。）

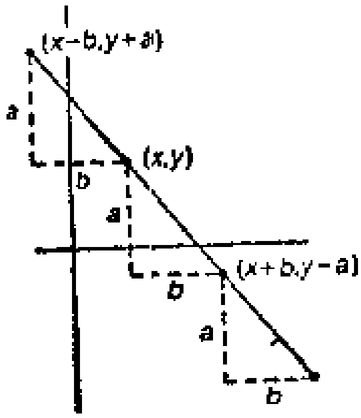


图14.9

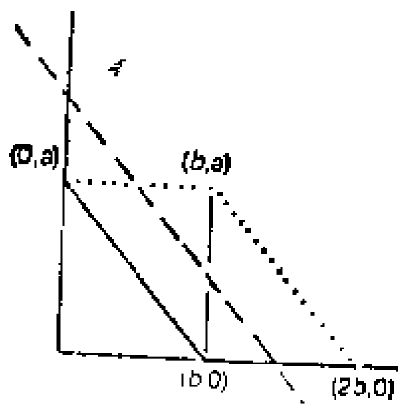


图 14.10

现在确实不需要还知道别的什么新东西了。当理解了第一步和第二步以后，所需做的全部事情就是：

(i) 集中考察有一平行四边形的图形，这个平行四边形的顶

点为$(b,0)$，$(2b,0)$，(b,a)和$(0,a)$，其顶边和右侧一边不包括在内（图11.10）；

(ii) 要弄清这个平行四边形恰好包含了ab个格点；

(iii) 要认识到直线$ax+by=ab$构成了这个平行四边形的左侧边，而直线$ax+by=2ab$构成了被排除的那条右侧边；这样，就正好有ab条直线$ax+by=c$（c为整数）与这个平行四边形相交，即直线$ax+by=ab$，$ax+by=ab+1$，$ax+by=ab+2$，…，$ax+by=2ab-1$与平行四边形相交；

(iv) 要注意到：这些直线中每一条直线与这个平行四边形的相交部分是一条很短的线段，以至于一条直线最多通过这个平行四边形里ab个格点中的一个。

只要这ab条直线的每一条都最多只能通过平行四边形中的一个格点，那么这ab个格点能全部被用完的唯一方式就是：直线$ax+by=ab, ax+by=ab+1, ax+by=ab+2, \cdots$，$ax+by=2ab-1$的每一条都恰好通过一个格点。由于这些格点都位于正象中，故ab，$ab+1$，$ab+2$，…，$2ab-1$全都是合适的，从而大于或等于ab的数都是合适的。

这里几乎没有需要去记住的东西，仅需记住：

(1) 现在要去证明的是：ab，$ab+1$，$ab+2$，…，$2ab-1$都是合适的；

(2) 这可通过计算某个平行四边形内的格点数来完成。

于是，就只需要作出一个适当的平行四边形，便不会误入歧途了。

不管怎样，现在能绝对肯定地说：总是存在着最后一个不适的数，而且它总是小于或等于$ab-1$。在下一章我们将准确地找出这最后一个不适的数，并将发现邮票问题仍还有一两个令人惊

异的问题尚待揭示。

习题提示

20. 你能看出他的眼睛吗？你能看出他下巴的胡子吗？

21. （见习题3、32的提示之后。）

26. (i) 若$5x+2y=0$，则$y=-5x/2$。当x取哪些值时，y为整数？

(ii) 若$5x+2y=10$，则$y=(10-5x)/2$。当x取哪些值时，y为整数？

(iii) 若$5x+2y=11$，则$y=(11-5x)/2$。当x取哪些值时，y为整数？

27. (iii) 若$5x+3y=14$，则$y=(14-5x)/3$。证明：当x比3的倍数多1，即$x=3m+1$时，y为整数。

28. (i) 若$ax+by=0$，则$y=-ax/b$。对哪些x的值，y能为整数？（记住：a和b没有公因数。）画出直线$ax+by=0$，并在直线上标出所有的格点。

(ii) 若$ax+by=ab$，则$y=(ab-ax)/b$，x为何值时，y为整数？

29. 设(s, t)和(u, v)是直线$ax+by=c$上的两个格点（图14.11）。

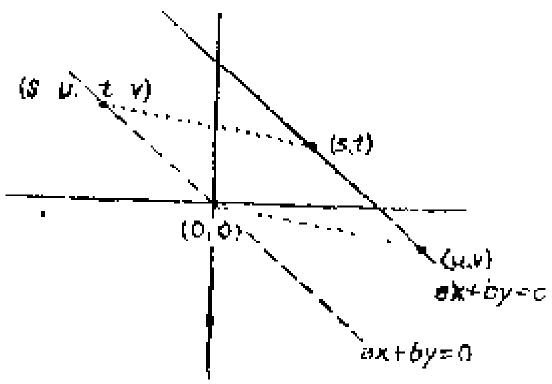


图 14.11

(i) 证明：$(s-u, t-v)$是直线$ax+by=0$上的格点；

(ii) 证明：直线$ax+by=c$上的两个格点(s, t)和(u, v)间的距离，等于直线$ax+by=0$上两个格点$(s-u, t-v)$和$(0, 0)$

间的距离。

30．(ii) 把(i)中的长方形沿对角线截成两部分，然后用这两部分拼成所要求的平行四边形；

(iii) 直线$5x+4y=20$是包括在平行四边形中的一条边，而直线$5x+4y=40$是排除在平行四边形外的一条边；

(iv) 利用习题29。

(v) 存在20个格点和20条直线，而且每条直线至多通过一个格点。所以，…。

31．仿照习题30的解答。

32．仿照习题30的解答。

21．这是一张欧洲地图，试标出国家来。

解答

习题20．见图14．12．

图 14.12

习题21．见图14．14．

习题22．(i) 设$11=3x+7y$，于是$y\leqslant 1$．若$y=0$，则$x=11/3$；若$y=1$，则$x=4/3$．无论哪种情形，x都不为整数，故11是不适的．$16=3\times 3+1\times 7$，是合适的．

(iii) 直线 $3x+7y=11$ 不通过正象限中的任何格点；直线

$3x+7y=16$通过正象限中至少一个格点（例如(3，1))。

习题23. (i) (a) 合适的； (b) 不合适的； (c) 合适的；(d) 不合适的；

(iii) (a) $4x+7y=16$通过正象限中至少一个格点，即(4,0)；(b) 直线$4x+7y=17$不通过正象限中的任何一个格点；(c) 直线$4x+7y=18$通过正象限中至少一个格点，即(2，1)；(d) 直线$4x+7y=19$通过正象限中的至少一个格点，即(3，1)。

习题24. (i) 直线$5x+2y=0$，$5x+2y=2$和$5x+2y=4$通过正象限中一个格点；直线$5x+2y=1$，$5x+2y=3$不通过正象限中的任何格点；

(ii) 0、2、4是合适的，1、3是不合适的。

习题25 (i)直线$5x+3y=0$，$5x+3y=3$，$5x+3y=6$，$5x+3y=8$和$5x+3y=9$都至少通过正象限中的一个格点，直线$5x+3y=1$，$5x+3y=2$，$5x+3y=4$和$5x+3y=7$不通过正象限中的任何格点；

(ii) 0、3、5、6、8、9都是合适的，1、2、4、7都是不合适的。

习题26. (i) (a) 若$5x+2y=0$，则$y=-5x/2$。仅当x为偶数时，y才能为整数。故$x=2m$，而$y=-5m$。从而，直线$5x+2y=0$上的格点就是$(2m,\ -5m)$(这里，m是任意的整数，正的、负的或0)。(b) 直线上相邻的两个格点$(2m,\ -5m)$和$(2m+2,\ -5m-5)$间的距离为$\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$。

(ii) (a) 若$5x+2y=10$，则$y=(10-5x)/2$。要y为整数，x就必须取偶数。于是$x=2m$，$y=5-5m$。因此，在直线$5x+2y=10$上的格点就只是点$(2m,\ 5-5m)$(这里m为任意的整数)。(b) 直线上相邻两个格点$(2m,\ 5-5m)$和$(2m+2,\ -5m)$间的距离为

$\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$。

(iii) (a) 若$5x+2y=11$，则$y=(11-5x)/2$。要y为整数，x就必须取奇数，即$x=1+2m$，$y=3-5m$。因此，直线$5x+2y=11$上的格点就只有点$(1+2m, 3-5m)$（m为任何整数）。(b) 相邻两点$(1+2m, 3-5m)$和$(3+2m, -2-5m)$间的距离是$\sqrt{2^2+5^2}=\sqrt{29}$。

习题27 (i) (a) 若$5x+3y=0$，则$y=-5x/3$。仅当x为3的倍数时，y取整数，即$x=3m$，$y=-5m$。因此，直线$5x+3y=0$上的格点就只有$(3m, -5m)$（m为整数）。(b)两个相邻格点$(3m, -5m)$和$(3m+3, -5m-5)$间的距离为$\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$。

(ii) (a) 若$5x+3y=15$，则$y=(15-5x)/3$。因而，直线$5x+3y=15$上的格点就只有$(3m, 5-5m)$（m为整数）。(b) 相邻两点$(3m, 5-5m)$和$(3m+3, -5m)$间的距离为$\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$。

(iii) (a) 若$5x+3y=14$，则$y=(14-5x)/3$。因而，直线$5x+3y=14$上的格点就只有$(1+3m, 3-5m)$（m为整数）。(b)相邻两个格点$(1+3m, 3-5m)$和$(4+3m, -2-5m)$间的距离是$\sqrt{3^2+5^2}=\sqrt{34}$。

习题28 (i) (a) 若$ax+by=0$，则$y=-ax/b$。仅当x为b的倍数时，y才取整数（因a和b没有公因数），即$x=bm$，$y=-am$；直线$ax+by=0$上的格点就只有$(bm, -am)$（其中m为任何整数）。(b) 相邻两格点$(bm, -am)$和$(b(m+1), -a(m+1))$间的距离为$\sqrt{b^2+a^2}$。

(ii) (a) 若$ax+by=ab$，则$y=(ab-ax)/b$。仅当x为b的倍数时，y才取整数，即$x=bm$，$y=a-am$。因而，直线$ax+by=ab$上的格点就只有$(bm, a-am)$（其中m为任何整数）。(b) 相邻两格点$(bm, a-am)$和$(b(m+1), -am)$间的距离为$\sqrt{b^2+a^2}$。

习题29 设(s, t)和(u, v)是直线$ax+by=c$上的两个格点，则有$as+bt=c$，$au+bv=c$，从而$a(s-u)+b(t-v)=0$。由此可知$(s-u, t-v)$就是直线$ax+by=0$上的格点。(s, t)，(u, v)，$(s-u, t-v)$和$(0, 0)$这4个点就构成了平行四边形的顶点。于是(s, t)和(u, v)间的距离就等于点$(s-u, t-v)$和$(0, 0)$间的距离。$(s-u, t-v)$和$(0, 0)$都是直线$ax+by=0$上的格点，由习题28(i)可知，它们间的距离大于或等于$\sqrt{b^2+a^2}$。

习题30 (i) 有5行，每行有4个格点，故共有$5\times4=20$个格点。

(ii) 恰好与顶点为$(0, 0)$、$(4, 0)$、$(4, 5)$和$(0, 5)$的长方形中的格点数相等（见图14.13(i)），即$5\times4=20$。

(iii) 仅当$c=20$，21，22，…，39时。

(iv) 每一条与平行四边形相交的直线都有一条长度为$\sqrt{5^2+4^2}$的线段与该平行四边形相交，而该线段的较低的一个端点不在内。习题29又已证明：每一条线段至多只通过一个格点。

(v) 一方面，平行四边形恰好包括了$5\times4=20$个格点(x, y)；每一个格点又位于某条直线$5x+4y=c$（c为某个整数）上。另一方面，恰好存在20个整数c，使得直线$5x+4y=c$与平行四边形相

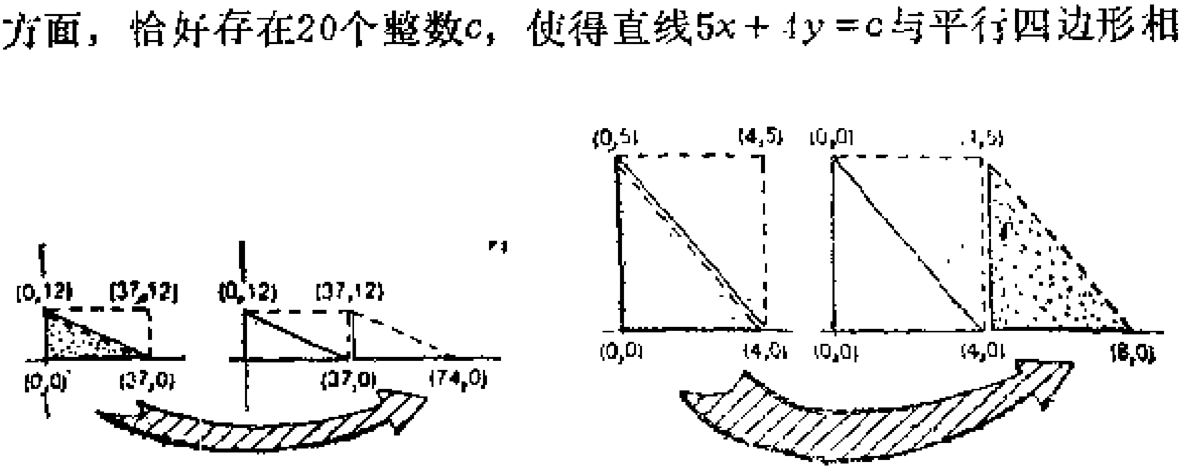


图 14.13

交；而每一条直线又至多通过平行四边形内20个格点中的一个格点。要使这两方面都得以满足的唯一方式是：每一条直线$5x+4y=20$，$5x+4y=21$，…，$5x+4y=39$恰好通过平行四边形中的一个格点。因为所有这些格点都在正象限中，故数20，21，22，…，39都是合适的。

习题31 （i）有12行，每行37个格点，故共有$12\times37=444$个格点。

（ii）恰好与顶点为(0，0)、(37，0)、(37，12)和(0，12)的长方形中的格点数相等（见图14.13(ii)），即$12\times37=444$。

（iii）仅当$c=12\times37$，$12\times37+1$，$12\times37+2$，…，$2(12\times37)-1$。

（iv）与平行四边形相交的每条直线都有长度为$\sqrt{12^2+37^2}$一条线段与之相交，而较低的端点未包括在内。由习题29，每条线段通过至多一个格点。

（v）一方面，平行四边形恰好包括了$12\times37=444$个格点(x,y)，每个格点位于某条直线$12x+37y=c$（c为某个整数）上。另一方面，恰有12×37个整数c，使直线$12x+37y=c$与平行四边形相交，且每条直线至多通过平行四边形中的一个格点。要使这两方面得以满足的唯一方式是：$12x+37y=12\times37$，$12x+37y=12\times37+1$，…，$12x+37y=2(12\times37)-1$中每一条恰好通过平行四边形中的一个格点。因所有格点都在正象限内，故12×37，$12\times37+1$，…，$2(12\times37)-1$都是合适的数。

习题32 （i）a行，每行b个格点，故共有$a\times b$个格点。

（ii）恰好与顶点为(0，0)、$(b，0)$、$(b，a)$和$(0，a)$的长方形中的格点数相同。

（iii）仅当$c=a\times b, a\times b+1$，…，$2(a\times b)-1$时。每条这样的

直线都与平内四边形交于长度为$\sqrt{b^2+a^2}$的一条线段，该线段的较低的端点未包括在内。习题29已证明，每条这样的线段至多只通过一个格点。

(iv) 平行四边形恰好包括了$a\times b$个格点(x, y)，而每个格点位于某条直线$ax+by=c$（c为某个整数）上。恰好存在$a\times b$个整数c使直线$ax+by=c$与平行四边形相交，每条直线至多通过平行四边形内$a\times b$个格点中的一个格点。因而，$ax+by=ab$，$ax+by=ab+1$，…，$ax+by=2ab-1$中的每条直线就恰好通过平行四边形中的一个格点。于是，数ab，$ab+1$，…，$2ab-1$都是合适的。

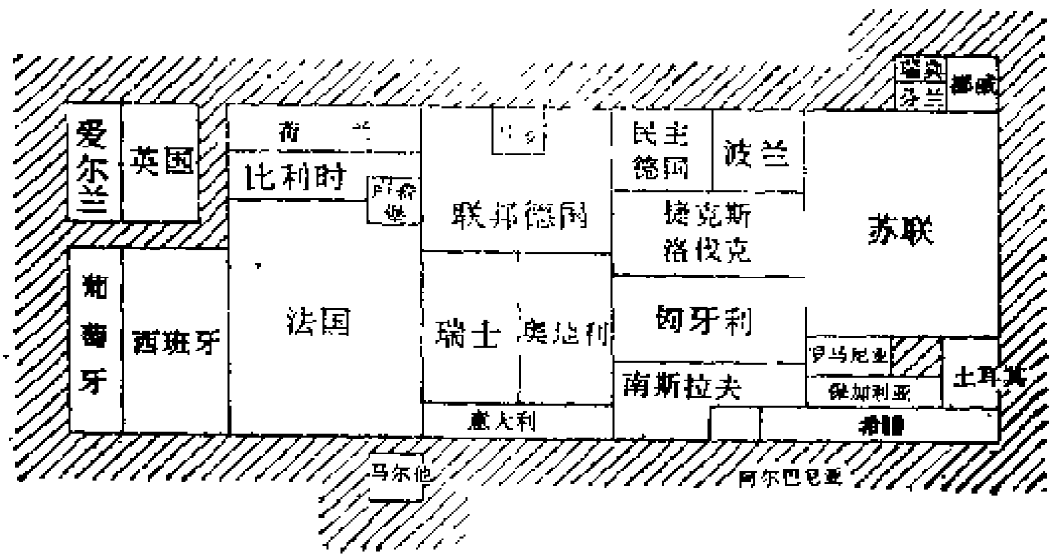


图 14.15

第十五章 最后的征服

在前一章中，我们已经找到一种直接的方式，证明了：只要 a 和 b 没有公因数，则所有大于或等于 ab 的数都合适的。在这一章里，我们想要在此基础上作进一步的改进，要去证明（若可能的话）曾在习题10(iii)中所作的猜测是正确的，即最后一个不合适的数一定是 $ab-(a+b)$。

现在，我们需要一种考察问题的新观点。请反复地对习题3、4、5中所得到的有关合适数和不合适数的资料作仔细地考察（图15.1）。

a＝5，　b＝2

数	0	1	2	3	4	5
合适的？	√		√		√	√
不合适的？		×		×		

a＝5，　b＝3

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
合适的？	√			√		√	√		√	√	√
不合适的？		×	×		×			×			

$a=5$,　$b=4$

数	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
合适的？	√				√	√			√	√	√		√	√	√	√
不合适的？		×	×	×			×	×				×				

图15.1

习题33* (i)你已经知道：当出现了接连 b 个记号√时，就已经过了截断点，但是，你是否能看出，直到截断点的所有合适数和不合适数的分布有什么令人惊异之处呢？

(ii) 在习题6、7和8中，你已就下列各对数字，画出了如图15.1的数表：

$a=5$，$b=6$；　$a=5$，$b=7$；　$a=5$，$b=8$；

$a=5$，$b=9$；　$a=5$，$b=10$；　$a=5$，$b=11$；

$a=5$，$b=12$；　$a=5$，$b=13$。

在这些表中，数 0 与截断间点的合适数和不适数的分布是否显示出了那种令人惊异的同样的模式呢？

(iii) 设$a=7$，$b=11$，，试画出如习题5中的那种数表；并请回答：0和截断点间的合适数和不合适数的分布，是否显示了同样的分布模式？

在习题3、4和5中，每个表格都是从考察数0开始的。在那时，你可能已经感到这种方式有点笨拙。0总是合适的，故没有必要每次都把0写出来。若把0略去，是不是会确有什么妨碍呢？例如，若从已完成的习题5中的数表里将0删除，是不是会产生什么差别呢(图15.2)？也许，不会有太大的差别。

$a=5, \quad b=4$

数		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
合适的?					√	√			√	√	√		√	√	√	√
不合适的?		×	×	×			×	×				×				

图 15.2

要准确地说出习题33(i)中所指的那种模式是相当困难的。但是，这个模式部分地是明显的。而一当你注意到这一明显的部分，你就不得不把0放回去，以使得合适数和不合适数的对称形式是完整的。我们似乎应该设法解释为什么数0（它总是第一个合适数）看上去与数$ab-(a+b)$（我们猜测它总是最后一个不适的数）是配对的——从对称的角度看是配对的。

习题34 设$a=5$，$b=4$。试问：哪一个数会与11配对？哪一个数与12配对？哪一个数与13配对？…

你尚未证明，0与截断点之间的合适数和不合适数总是要以这种对称的方式出现。但这种观点与你已证明了的结果有相当好的一致性。因为你在第十四章中已证明了：一定存在一个最后的不合适数，而且它总是小于ab。现我们记这个最后的不合适数为B。于是，B是不合适的，而所有大于B的数都是合适的。另一方面，0显然是合适的，而所有小于0的数显然是不合适的。这样，实际上你就已经证明了小于或等于0和大于或等于B的合适数和不合适数之间的对称性（见图15.3）。这与你关于0和B之间的合适数和不合适数具有对称性的猜测，有非常满意的一致性。

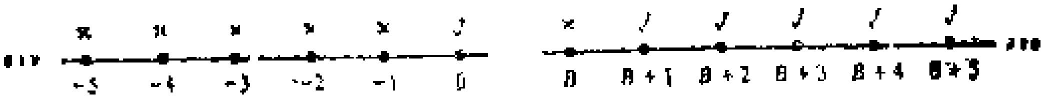


图 15·3

然而，且慢！你所想要证明的是：最后一个不合适数 B 一定等于 $ab-(a+b)$。那么，又为什么要引入关于合适数和不合适数间的对称性这样一大堆“废话”呢？这两件事之间毕竟没有什么明显的联系。但是，你确实需要某种新的观念，而且，一经你注意到了如像这个完全出乎预料的对称性那样的令人吃惊的事情，你就很难相信它是完全毫不相干的。只要有时机，你就可能抓住一个更好的主意。但是，把你现在已有的想法深入地发掘下去也是显得很有价值的。

现在你要想证明的到底是什么呢？当 a 和 b 是没有公因数的正整数时，你要想证明的是：

（Ⅰ）最后一个不合适数等于 $ab-(a+b)$；

（Ⅱ）0 和 $ab-(a+b)$ 间的合适数和不合适数在下述意义下是对称出现的：“若 c 是合适数，则 $ab-(a+b)-c$ 是不合适数；而若 c 是不合适数，则 $ab-(a+b)-c$ 是合适数。”

我们并不是劈头盖脑地一下子就直接着手这两个问题，而是从容易的地方下手，一口一口地逐步啃完它。例如，你需要证明“$ab-(a+b)$ 一定是不合适数。”对此，有两种方法可用。

习题35 （i）第一种方法。证明格点 $(-1,\ a-1)$ 和 $(b-1,\ -1)$ 都在直线 $ax+by=ab-(a+b)$ 上；计算这两点间的距离；从而证明：直线 $ax+by=ab-(a+b)$ 不通过任何正象限中的格点。从而可以推断 $ab-(a+b)$ 是不合适数。

(ii)第二种方法。假设能够求出满足 $ab-(a+b)=ax+by$ 的非负整数x、y。首先证明 x 和 y 一定会满足 $x\leqslant b-2$，$y\leqslant a-2$。把方程 $ab-(a+b)=ax+by$ 变形为

$$a(b-1-x)=b(y-1)。$$

然后利用 $0<y+1<a$ 的事实去证明：a和 b 必有一个公因数，从而可以推断，只要 a 和 b 没有公因数，$ab-(a+b)$ 就是不合适的。

同样的思路可以用来证明(Ⅰ)的另一半，也是更容易的一半。

习题36 (i)设 c 为 0 和$ab-(a+b)$间的任一数。证明：若 c 是合适的，则 $ab-(a+b)-c$ 是不合适的。

(ii)从而推证：0与$ab-(a+b)$之间的数至多一半为合适数。

习题37 现假设：已设法证明了0与$ab-(a+b)$之间恰好有一半数是合适的。试利用这个结论去证明：若 c 是不合适的，则 $ab-(a+b)-c$ 是合适的，即(Ⅱ)的另一半结论。

迄今，你已有了两种方法来计数合适数了。第一种是首先把它们全部写出来，然后一个一个地数；第二种是以通过了正象限中的格点的直线来考察合适数，然后以某种巧妙的方式来计数直线和格点。在前一章中，你在证明所有大于或等于ab的数都是合适数时，利用格点的概念。现在我们要再一次利用这个概念去计数小于或等于ab的合适数的数目。设N代表小于或等于ab的合适数的数目。

习题38[*] 你已经知道，满足$0\leqslant c\leqslant ab-(a+b)$的数 c中，至

多一半是合适数。现在你要想简单地通过计算出N而立刻证明两件事：

(i)0与$ab-(a+b)$之间恰好一半数是合适的。

(ii)满足$ab-(a+b)<c\leqslant ab$的所有c都是合适的。

你希望N取什么样的值呢？

我们用来计算N的方法异常简单，也许你会对此感到吃惊。下面一个练习题就是当$a=5$和$b=4$时，如何使用这种方法的示例。

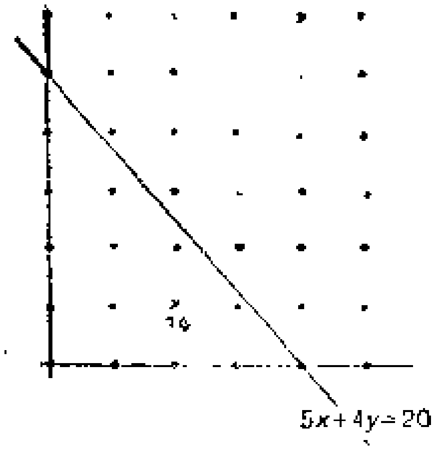
习题39* 设$a=5$，$b=4$。

(i) 每个合适数$c<ab=20$，都能写成$c=5x+4y$的形式（其中，x，$y\geqslant 0$）。试证明：每个合适数$c<ab=20$只能以一种方式写成上述形式。

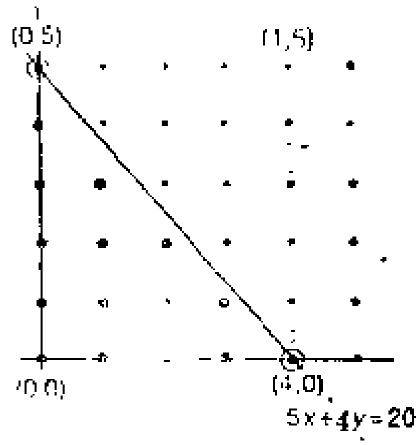
(ii)证明：合适数$c=ab=20$只能以两种不同的方式写成$20=5x+4y(x,\ y\geqslant 0)$的形式。

(iii)因为$5x+4y=14$通过正象限中的一个格点，即格点(2，1)，故14是合适数。从而，当你把14计数为合适数时，可以代之以计数直线$5x+4y=14$为一条合适线。而且你在(i)中已证明，这条合适线只通过正象限中的一个格点[即格点(2，1)]。于是，就可以利用计数格点(格点(2，1))来替代计数合适线(直线$5x+4y=14$)了。这个点在图15.4(i)中用一个“×”标示出来，并标明“14”。试在正象限中标出代表小于20的合适数的其它格点，并标明它所代表的合适数。

(iv)试标出代表了合适数$ab=20$的两个格点。



i



ii

图 15·4

(v)最后，通过计数代表了小于20的合适数的所有格点和代表了合适数20的两个格点中的一个，计算出N。

如果碰巧没有注意到如下简单事实的话，计数格点而不是直接计数合适数本身就显得没有什么优点了。这个事实就是：代表了小于$ab=20$的合适数的格，与代表了等于ab的合适数20的两个格点之一结合在一起，就恰好用完了顶点为(0, 0)、(4, 0)、(4, 5)和(0, 5)的长方形中格点的一半。只要你注意到了这一点，那么，要求出N的值就无需去一个个地计数格点了。在上述那个长方形中格点的数目，显然是$(4+1)\times(5+1)=30$。所以，我们一定有

$$N=\frac{1}{2}(4+1)\times(5+1)=15.$$

习题40* 设$a=5$，$b=6$。

(i)证明：每一个合适数$c<ab=30$，仅能以一种方式写成$c=5x+6y$(其中，x，$y\geqslant 0$)的形式。

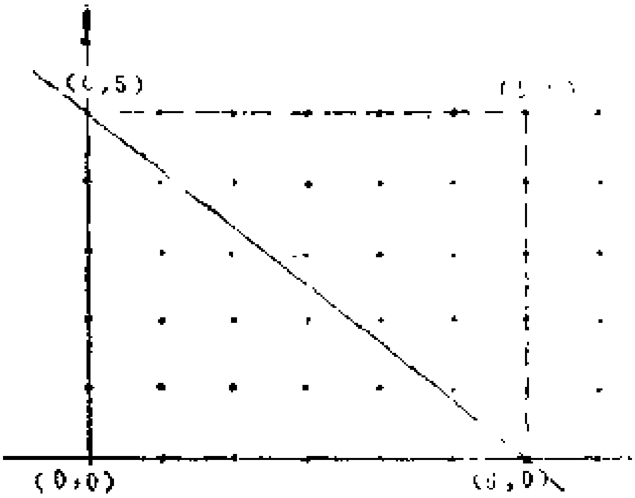


图 15.5

(ii)证明：合适数 $ab=30$ 只能以两种不同的方式写成 $30=5x+6y(x,\ y\geq 0)$ 的形式。

(iii)现在，每个合适数 $c<30$ 能唯一地用正象限中位于直线 $5x+6y=c$ 上的一个格点 $(x,\ y)$ 来代表。试在图15.5中找出代表了合适数17的唯一格点，以及代表了30的两个格点。

(v)求出 N。

既然你已经完成了习题39(即 $a=5$，$b=4$ 的情形）和习题40(即 $a=5$，$b=6$ 的情形)，那么，你处理一般情形应该没有什么困难了。

习题41* 设 a 和 b 是没有公因数的正数。

(i)证明：每个合适数 $c<ab$ 只能以一种方式写成 $c=ax+by$ $(x,\ y\geq 0)$ 的形式。

(ii)证明：合适数 $c=ab$ 只能以两种不同的方式写成 $c=ax+by$ $(x,\ y\geq 0)$ 的形式。

(iii)证明：$N=\frac{1}{2}(a+1)\times(b+1)$。

在习题38中你已确认了 N 值能使你一举证明：

(i)0与 $ab-(a+b)$ 间的数恰好一半是合适的；

(ii)所有满足 $ab-(a+b)<c\leq ab$ 的 c 都是合适数。

然后你在习题41(iii)中证明了K正好准确地等于这个值。于是，现在你应能证明：

(Ⅰ)$ab-(a+b)$是最后一个不合适数；

(Ⅱ)0和$ab-(a+b)$之间的合适数和不合适数是对称地出现的。

习题42* (i)利用$N=\frac{1}{2}(a+1)\times(b+1)$证明，每个满足$ab-(a+b)<c\leqslant ab$的$c$都是合适的，从而推知$ab-(a+b)$是最后一个不合适数。

(ii)证明：满足$0\leqslant c\leqslant ab-(a+b)$的$c$中，正好一半是合适数，从而推证：合适数和不合适数在下述意义上是对称的："c是合适数的充分必要条件是$ab-(a+b)-c$是不合适数"。

习题提示

33. (i)首先向前，然后向后写出0与截断点的所有数。

$a=5$，$b=2$时，

向前：合适-不合适-合适-不合适；

向后：不合适-合适-不合适-合适。

$a=5$，$b=3$时，

向前：合适-不合适-不合适-合适-不合适-合适-合适-不合适；

向后：不合适-合适-合适-不合适-合适-不合适-不合适-合适。

36. (i)第一种方法。将顶点为$(0,\ 0)$、$(-1,\ a-1)$、$(b-1,\ -1)$和$(b,\ -a)$的平行四边形绕其中心旋转180°。这样，就

把直线$ax+by=c$转到了直线$ax+by=ab-(a+b)-c$上。于是，若直线$ax+by=c$通过正象限中的格点P，则直线$ax+by=ab-(a+b)-c$就必定通过P点旋转了半周后的象点。试问：为什么这就意味着$ab-(a+b)-c$是不合适的呢？

第二种方法．这里所用到的代数稍微复杂一点，但也并不那么可怕，若c是合适的，则必定能将c写成$c=ax+by$（其中x、y是非负整数）．若你还知$c\leqslant ab-(a+b)$，则x和y不可能很大。事实上，你一定会有$0\leqslant x\leqslant$___，$0\leqslant y\leqslant$___．而$0\leqslant ab-(a+b)-c\leqslant ab-(a+b)$．故，若$ab-(a+b)-c$也是合适数，则与前面一样，可记$ab-(a+b)-c=ua+vb$，其中，$0\leqslant u\leqslant$___，$0\leqslant v\leqslant$___。然后设法证明这将导致一个矛盾的结果（如像"a和b必定有一个公因子"）。从而可以肯定$ab-(a+b)-c$不是合适数。

37．0和$ab-(a+b)$之间的整数成对出现：c和$ab-(a+b)-c$为一对。在习题36中你已证明每一对中至多一个合适数。

39．(i)设某个数$c<ab=20$是合适数，能用两种方式写出：$c=5x+4y$，$c=5u+4v$。因$v<20$，故有$0\leqslant x, u\leqslant 3, 0\leqslant y, v\leqslant 4$。然后证明，除非$x=u$和$y=v$，否则将会导出矛盾．

(ii)你已知$c=20$是个合适数，它至少可以用两种方式表出：$20=5\times4+4\times0$，$20=5\times0+4\times5$。若20还能用其它方式表出：$20=5x+4y$，那么，$1\leqslant x\leqslant 3$，$1\leqslant y\leqslant 4$．证明这样导致不可能的结果。

40．仿习题39的证明。

41．仿习题39的证明。

42．(i) $\frac{1}{2}(a+1)(b+1)=N$

=（满足$0\leqslant c<ab$的合适数c的数目）

$=$(满足$0\leqslant c\leqslant ab-(a+b)$的合适数$c$的数目)+(满足$ab-(a+b)<c\leqslant ab$的合适数$c$的数目)

$$\leqslant\frac{1}{2}(ab-(a+b)+1)+(ab-[ab-(a+b)])=\cdots$$

解答

习题33 (i)0与截断点间正好一半数字是合适的，另一半是不合适的。更令人吃惊还是："合适数"和"不合适数"向前的序列与"不合适数"和"合适数"的序列完全相同。

习题34。11与0配对，12与-1配对，13与-2配对，14与-3配对，等等。12，13，14，…是合适数，-1，-2，-3，…是不合适数。

习题35 (i)$(-1,\ a-1)$和$(b-1,\ -1)$都位于直线$ax+by=ab-(a+b)$上，但在正象限以外，而它们间的距离为$\sqrt{a^2+b^2}$。于是，由习题29，在直线$ax+by=ab-(a+b)$上没有格点位于这两点之间。从而，这条直线不可能通过正象限中的任何格点。因此，数$ab-(a+b)$是不合适的。

(ii)若$ax+by=ab-(a+b)$，那么，$x<b-1$，将方程移项整理，可得$a(b-1-x)=b(y+1)$，这样，b就是左边那个数的一个因子。由于a和b没有公因数，故b必定能除尽$(b-1-x)$，而这是不可能的，这是因为$0<b-1-x\leqslant b-1$。从而$ab-(a+b)$不可能为合适数。故必为不合适数。

习题36 (i)遵循提示。第一种方法：与顶点为$(0,\ 0)$、$(-1,\ a-1)$、$(b-1,\ -1)$和$(b,\ -a)$的平行四边形相交的每一条直线$ax+by=c$，与该平行四边形相交部份为长$\sqrt{a^2+b^2}$的线段。由习题29，每一条这种线段或者通过至多一个格点，或者通

过两个格点，其中一个为线段的端点。令 c 是 0 与 $ab-(a+b)$ 之间的任一数，而设 P 是位于正象限且在直线 $ax+by=c$ 上的一个格点。上述平行四边形的中心是点 $((b-1)/2,\ -\frac{1}{2})$，故 P 点绕这个中心旋转180°的像点是另一格点，而直线 $ax+by=c$ 的像是直线 $ax+by=ab-(a+b)-c$。若 P 位于正象限，则其像点就不在正象限。（为什么呢？）因而直线 $ax+by=ab-(a+b)-c$ 就不通过正象限的任何格点。（为什么呢？）于是，$ab-(a+b)-c$ 是不合适数。

第二种方法：对某个 $x\geqslant 0$ 和 $y\geqslant 0$，$c=ax+by$，而对某个 $u\geqslant 0$ 和 $v\geqslant 0$，$ab-(a+b)-c=au+bv$。那么 $ab-(a+b)-(ax+by)=ua+vb$。于是，$a(b-(u+x+1))=b(v+y+1)$。这样，b 必定能整除上式左边的数，故 b 必定能整除 $(b-(u+x+1))$（因 a 和 b 没有公因数）。但是，因 $0<b-(u+x+1)<b$，故这是不可能的。

(ii) 0 和 $ab-(a+b)$ 之间的数成对出现：c，$ab-(a+b)-c$ 为一对。每一对中，至多一个数是合适的。因此，0 和 $ab-(a+b)$ 之间的数至多一半为合适数。

习题37　若 0 与 $ab-(a+b)$ 之间恰有一半数是合适数，那么每一对数 c 和 $ab-(a+b)-c$ 中恰只一个数是合适的。从而，若 c 是不合适的，则 $ab-(a+b)-c$ 是合适的。

习题38　你已认定 ab，$ab-1$，$ab-2$，…，$ab-(a+b)+1$ 这 $a+b$ 个数都是合适的，也已认定 $0,1,2,\cdots,ab-(a+b)$ 这 $(a-1)(b-1)$ 个数中恰好有一半数是合适的。因而，你就要去证明：$N=(a+b)+\frac{1}{2}(a-1)(b-1)=\frac{1}{2}(a+1)(b+1)$。

习题39 (i)设$c<ab=20$是一个合适数，且能用两种方式表出：$c=5x+4y=5u+4v$。那么，$0\leqslant x$，$u\leqslant 3$，$0\leqslant y$，$v\leqslant 4$，$5(x-u)=4(v-y)$。于是5就能整除$v-y$，而这是不可能的。

(ii)数$c=20$是能用至少两种方式表出的合适数：$20=5\times 4+4\times 0=5\times 0+4\times 5$。若20能用另外某种方式表出，比如，$20=5x+4y$，那么$1\leqslant x\leqslant 3$，$1\leqslant y\leqslant 4$，且$5(4-x)=4y$。于是5能整除$y$，然而这是不可能的。

(v)计数了的格点正好是顶点为(0，0)、(4，0)、(4，5)和(0，5)的长方形中格点的一半（将图15．4(ii)中标出了点的三角形绕长方形中点旋转180°就得到另一半)。因而，$N=\frac{1}{2}(4+1)(5+1)$。

习题40 (i)设$c<ab=30$是合适数，且能用两种方式表出：$c=5x+6y=5u+6v$。那么$0\leqslant x$，$u\leqslant 5$，$0\leqslant y, v\leqslant 4$，且$5(x-u)=6(v-y)$。于是，5必定能整除$v-y$，然而，这是不可能的。

(ii)数$c=30$当然是合适的，且能用两种方式表出：$30=5\times 6+6\times 0=5\times 0+6\times 5$。若30还能用另外某种方式表出，比如，$30=5x+6y$。那么，$1\leqslant x\leqslant 5$，$1\leqslant y\leqslant 4$，且$5(6-x)=6y$。于是5必定能整除$y$，而这是不可能的。

(iv)计数了格点正好是顶点为(0，0)、(6，0)、(6，5)和(0，5)的长方形中格点的一半。因而，$N=\frac{1}{2}(6+1)(5+1)$。

习题41 (i)设$c<ab$是能用两种方式表出的合适数：$c=ax+by=au+bv$，那么，$0\leqslant x$，$u\leqslant b-1$，$0\leqslant y$，$v\leqslant a-1$，且$a(x-u)=b(v-y)$。于是a必定能整除$v-y$，而这是不可能的。

(ii)数$c=ab$显然是合适的，且能用两种方式表出：$ab=a\times b$

$+b\times 0=a\times b+b\times a$。若 ab 还能以另外某种方式表出，比如 $ab=ax+by$，则 $1\leqslant x\leqslant b-1$，$1\leqslant y\leqslant a-1$。于 $a(b-x)=by$，于是 a 必定能整除 y，然而这是不可能的。

(iii)被计数了的格点正好是顶点为 $(0,\ 0)$、$(b,0)$、(b,a) 和 $(0,\ a)$ 的长方形中格点的半，故 $N=\frac{1}{2}(a+1)(b+1)$。

习题42 对(i)的提示表明：$\frac{1}{2}(a+1)(b+1)=N=$（满足 $0\leqslant c\leqslant ab-(a+b)$ 的合适数 c 的数目）+（满足 $ab-(a+b)<c\leqslant ab$ 的合适数 c 的数目）$\leqslant\frac{1}{2}(ab-(a+b)+1)+(ab-(ab-(a+b)))=\frac{1}{2}(a+1)(b+1)$。故最后必有等号成立。

(i)特别地，满足 $ab-(a+b)<c\leqslant ab$ 的合适数 c 的数目，实际上必定为 $ab-(ab-(a+b))=a+b$，故 ab，$ab-1$，$\cdots$，$ab-(a+b)+1$ 都是合适数。

(ii)满足 $0\leqslant c\leqslant ab-(a+b)$ 的合适数 c 的数目必定等于 $\frac{1}{2}(ab-(a+b)+1)=\frac{1}{2}(a-1)(b-1)$。习题36表明，若 c 是合适的，那么 $ab-(a+b)-c$ 是不合适的。而习题37又证明了，若 c 是不合适的，那么，$ab-(a+b)-c$ 是合适的。

第十六章 硬币问题

很少有教科书明确地提到邮票问题。但它与出现在每一本数论和抽象代数教科书中的一个基本问题密切相关（这个基本问题也支配着度量问题；我们在第十二章开始时叙述的问题就是一个度量问题），不考察一下这个有关的重要问题就结束问题研究Ⅱ，是令人遗憾的，所以，我们要在最后这个很短的一章中来讨论它。

在一个只有 5 分的 8 分邮票的国家中，所有寄信的邮费都必须是合适数。所以，就不可能（比如说）寄一封信要收22分。但是，同一国家若是只有 5 分和 8 分的硬币，则一个店主就不会受到这样的限制了，倘若一个小商品值22分（这是一个不合适数），那么这个店主可以收 6 个 5 分的硬币，然后找补一个 8 分的硬币给顾客。

习题43* 设你是在只有 5 分和 8 分硬币的国家中的一个店主。一个价格称为可付的，只要有充分多硬币的顾客，在你愿意找补的条件下能准确地支付出这一数量；否则，称为不可支付的。0分、5分和8分显然是可支付的；而 3 分也是可支付的（收8分，补5分）。

(i)完成图16.1中的表。

数 量	0分	1分	2分	3分	4分	5分	6分	7分	8分	9分	10分
可支付的											
不可支付的											

图 16.1

(ii)下列价格中，哪些是可支付的：

749分，62717分，7312465978分

习题44* 现在你搬到了另一个国家，这个国家只有5分和9分的硬币；你又开设了一家商店。你必须要做的第一件事，就是要弄清楚在这个国家中，哪些价格是可支付的，哪些是不可支付的，画出如图16.1中那样一个表，并把它扩展到你认为你能准确地说出哪些价格是可支付的，哪些是不可支付的为止。

习题45* 你又搬到了只有5分和10分的硬币的国家。在这个国家中，哪些价格是可支付的，哪些是不可支付的？

习题46* 几年以后你再度搬家。这次是搬到只有5分和11分硬币的国家。

(i)试猜测：哪些价格是可支付的，哪些是不可支付的。

(ii)画出如习题43中那样的表，并把它扩展，直到你认为你能准确地说出哪些价格是可支付的，哪些是不可支付的为止。

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

在习题43-46中，硬币的最小值都是5分，所以，只要你在表中接连得到了5个“√”(即5个可支付的价格)，那么你就能够完全肯定：所以有更大的数都是可支付的了(与邮票问题的情形一样)。

在习题45中，虽然，只有5分的倍数才是可支付的，而其它几个练习题相当强烈地提示了：若一个国家只有 a 分和 b 分的硬

币，那么，只要 a 和 b 没有公因数，每一价格都是可支付的。把这个猜测变成代数语言，就是：通过拿出适当数量的 a 分硬币和适当数量的 b 分硬币(比如说 $sa+tb$)，并收到一定的找补(比如说 $ua+vb$)，就能得到任何数(比如说 N)。但是，若支付 N 分可以通过拿出 $sa+tb$ 并收到 $ua+vb$ 的找补(其中，$s、t、u、v\geqslant 0$)来实现，那么就有

$$N=(sa+tb)-(ua+vb),$$

故 N 可写成 $N=ax+by$ 的形式，其中 $x=s-u$，$y=t-v$。

硬币问题与邮票问题的主要区别在于：虽然 $s、t、u、v$ 都是非负的，但是 $x、y$ 中可以有一个是小于 0 的。于是，一个数可能是可支付的，但却不是合适的。然而，你将感到硬币问题与邮票问题又是很类似的，因为你会有适当的机会能够利用你所知道的关于邮票问题的知识，去证明在硬币问题中你疑惑其真确性的命题。

习题47* 设 a 和 b 是没有公因数的正整数。试证明：在只有 a 分和 b 分硬币的国家中，每一个整数都是可支付的。

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

什么数是最重要的可支付数？在习题47中你证明了，只要 a 和 b 没有公因数，每一个数 N 都可以写成 $N=ax+by$ 的形式。但是(在某种意义上)最重要的是，数"1"能够用这种形式表示出来。因为，只要你知道了 $1=ax+by$，你就能立刻用 a 和 b 写出其它任何数 N：$N=(Nx)a+(Ny)b$。不幸的是，虽然你已在习题47中证明了，通过适当地选择 x 和 y 的值，你总能以 $1=xa+yb$ 的形式写出数 1 来，但是，你尚无具体地找出适当的 x 和 y 的值

的一种满意方法。

习题48* (i)(*a*)求出整数 x 和 y，使 $12x+7y=1$。

(*b*)利用(*a*)的结果，通过使用一个12品脱和7品脱的水罐，去得到1品脱的水。(这个问题与钱无关，而是已知两个容器的容积分别为12品脱和7品脱，用它们去度量水；但基本思想与有12分和7分硬币的硬币问题完全一样。)

(ii)求出整数 x 和 y，使 $89x+55y=1$。

(*b*)利用(*a*)的结果，使用89品脱和55品脱的水罐去得出1品脱的水。

※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※※

习题48 (ii)使我们清楚地看到：虽然从理论上说，找出适当的 x 和 y 的值总是可能的，但在实际中要具体地找出它们似乎并不那么容易，巧妙地试求并不断地修正错误，可能是初学者唯一合用的方法，但是，显然我们希望有一个更简便更可靠的方法来求出适当的 x 和 y 的值，下面就给出这个方法，以作为本章之结尾。

当 $a=12$，$b=7$时，容易看出 $3a=36$，$5b=35$，故$3a-5b=1$。这种考虑方法也可用于 $a=89$，$b=55$的情形。但这次你必须计算很多个89的倍数，并依次检验它们。图16.2给出了另一种可供选用的方法。在那里是以 $a=12$，$b=7$ 为例子来说明方法的。初看上去，这种方法似乎很冗长，但它有两个显著的优点。第一，它是以反复进行减法运算为基础，而减法运算比乘法运算更简单迅速。第二，它以重复进行一种简单的运算为基础，所以很容易完成(用一个可编程的计算器就能完成)。当你把这种方法用于习题

49—51中的数对 a 和 b 时，这些都会变得很显然。

$a=12,\quad b=7$

第一步 在目前，所得到的两个最小的数是12和7．在能进行运算的范围内（即差值不为负），用两者中较大的一个减去较小者的尽可能大的倍数，在这里，有 $12-1\times7=5$。

第二步 这今所得到的两个最小的数是7和5．只要能进行运算，就用较大者减去较小者的尽可能大的倍数，于是可得 $7-1\times5=2$。

第三步 迄今所得到的两个最小的数是5和2，只要能进行运算，就用较大者减去较小者的尽可能大的倍数，于是可得 $5-2\times2=1$。

第四步 通过把5和2组合起来已得到1．把第二步中2的表达式带入第三步中的式中，得 $5-2\times(7-1\times5)=1$，即 $3\times5-2\times7=1$。

第五步 现已通过把7和5组合起来得到了1；将第一步中5的表达式带入第四步中的式子，可得 $3\times(12-1\times7)-2\times7=1$，即 $3\times12-5\times7=1$。从而，由12和7的组合得到了1．这正是所需要的．

图 16.2

习题49 设 $a=19$，$b=17$。利用上述过程求满足 $19x+17y=1$ 的整数 x 和 y 的值。

习题50 设 $a=34$，$b=21$。利用上述过程求满足 $34x+21y=1$ 的整数 x 和 y 的值。

习题51 设 $a=89$，$b=55$。利用上述过程求满足 $89x+55y=1$ 的整数 x 和 y 的值。

你多次运用的上述过程称为“欧几里德算法”。它最早出现在欧几里德的著作《原本》中．虽然这是早在二千多年前就已发现的算法，但今天仍然是一个重要的数学工具，你也许会多次碰到它。

习题提示

47．若 N 是任一正整数，那么你知道 ab 和 $N+ab$ 都是合适数。故 $ab+N=sa+tb$，$ab=ua+vb(s, t, u, v\geqslant 0)$。因而，$N=$ …。

解答

习题43 所有给出的数都是可支付的。

习题44 所有给出的数都是可支付的。

习题45 所有 5 分的倍数都是可支付的，而其余的数都是不可支付的。

习题46 (i)猜测：所有价格都是可支付的。

(ii)只要找出了接连 5 个可支付数，便可立刻得出结论：所有更大的数都是可支付的（这与邮票问题中的习题11—13完全相同）．于是，为了检验你的猜测，你只需要说明前 5 个数 0、1、2、3、4 都是可支付的即可。

习题47 提示表明：可得出$N=(s-u)a+(t-v)b$，N可作为xa和yb的组合，故 N是可支付的。

习题48 这里的每个问题都有无限多个解。

(i) (a)这里最显然的解是 $12\times3+7\times(-5)=1$．（不过，一当我们知道了直线$12x+7y=1$通过格点 $(3, -5)$，那么我们也知道，它也必过$(3+7m, -5-12m)$，这里m可以是任何整数。）

(b)灌满12品脱的罐子3次，然后用这些水去灌满7品脱的罐子5次(每次灌满7品脱的罐子后便倒去）。

(ii) (a)这里，因数字相当大，没有一个解是显然的，最小解是$89\times(-21)+55\times34=1$。

(b) 灌满55品脱的罐子33次，并用这些水去灌满89品脱的灌

子21次(每次灌满后即行倒掉)。

习题49 $\underline{19}-1\times\underline{17}=\underline{2}$，$\underline{17}-8\times\underline{2}=\underline{1}$。因而，$\underline{17}-8(\underline{19}-1\times\underline{17})=\underline{1}$，于是有$\underline{19}\times(-8)+\underline{17}\times 9=\underline{1}$。

习题50 $\underline{34}-1\times\underline{21}=\underline{13}$，$\underline{21}-1\times\underline{13}=\underline{8}$，$\underline{13}-1\times\underline{8}=\underline{5}$，$\underline{8}-1\times\underline{5}=\underline{3}$，$\underline{5}-1\times\underline{3}=\underline{2}$，$\underline{3}-1\times\underline{2}=\underline{1}$。因而，

$$
\begin{aligned}
\underline{1}&=\underline{3}-1\times\underline{2}=\underline{3}-1(\underline{5}-1\times\underline{3})=(-1)\times\underline{5}+2\times\underline{3}\\
&=(-1)\times\underline{5}+2(\underline{8}-1\times\underline{5})=(-3)\times\underline{5}+2\times\underline{8}=(-3)\\
&\quad(\underline{13}-1\times\underline{8})+2\times\underline{8}\\
&=5\times\underline{8}-3\times\underline{13}=5(\underline{21}-1\times\underline{13})-3\times\underline{13}=5\times\underline{21}-8\times\underline{13}\\
&=5\times\underline{21}-8(\underline{34}-1\times\underline{21})=13\times\underline{21}+(-8)\times\underline{34}.
\end{aligned}
$$

习题51 $\underline{89}-1\times\underline{55}=\underline{34}$，$\underline{55}-1\times\underline{34}=\underline{21}$，$\underline{34}-1\times\underline{21}=\underline{13}$，…。你现在正在简单地重复习题50中的那些步骤，故你可以利用你在那儿所发现的东西，即

$$
\begin{aligned}
\underline{1}&=13\times\underline{21}+(-8)\times\underline{34}\\
&=13(\underline{55}-1\times\underline{34})+(-8)\times\underline{34}\\
&=13\times\underline{55}+(-21)\times\underline{34}\\
&=13\times\underline{55}+(-21)(\underline{89}-1\times\underline{55})\\
&=(-21)\times\underline{89}+34\times\underline{55}.
\end{aligned}
$$

附　注

在研究邮票问题的过程中，我们一直排它地把注意力集中在下述问题，即：哪些数能够仅用两类邮票(a分和b分的邮票)表示出来。但是，并不存在明显的理由要把注意力限制在仅有两类邮票的问题上，为什么不可以对有3类、4类或n类不同邮票的

情形提出同样的问题呢？也许，从考虑两类邮票的情形着手是个好主意，但既然对只有两类不同邮票的问题，找到了几种不同的解决方法，那么现在就处于一种非常有利的地位，能够去研究邮票问题的更困难、更复杂的情形了。

两类邮票问题的一个特别有趣的变异形式是所谓“西尔弗硬币游戏”。这个问题在贝勒凯姆，康威和盖伊的著作《获胜的方法》一书的第十八章中，作了详尽的讨论（该书由学术出版社一九八二年出版——译者）。这个附注只是介绍了一种不同的方法，以期使读者能自己着手发掘有3类不同邮票的问题。

设你有无限多张3类不同的邮票：a分、b分和c分的邮票。只利用这3类邮票，你能得出哪些数？是否存在“最后的”不合适数？若存在，它是怎样地依赖于a、b和c的值的？

为方便起见，设a是a、b、c三个数中的最小者，c是最大者，在邮票问题的目前这种情形，若一个数d能写成$d=ax+by+cz$（其中x、y、$z\geqslant 0$，为整数）的形式，则称d是合适的。若a、b、c有公因数f，那么，每一个合适数自然就是f的倍数。因此，似乎有理由假设：1是a、b、c的唯一公因数。下面几个练习题意在让你着手邮票问题的目前这种情形的研究。

习题52 设$a=2\leqslant b\leqslant c$，且1是$a$、$b$、$c$的唯一公因数。

(i)试证明：b或c是奇数。

(ii)若b是奇数，则$b-2$是最后一个不合适数，试证之。

(iii)若b是偶数(从而c是奇数)，则$c-2$是最后一个不合适数。试证之。

习题53 设$a=3\leqslant b\leqslant c$。

(i)若b是3的倍数(从而c不是3的倍数)，此时是否存在一

个最后的不合适数？若存在，它是多少？

(ii)若 c 是 3 的倍数(从而 b 不是 3 的倍数)，此时是否存在一个最后的不合适数？若存在，它是多少？

(iii)若 b 和 c 都不是 3 的倍数，试找出求最后的不合适数的公式。

习题54 设 $a=4$。

(i)若 b 是偶数(从而 c 是奇数)，此时是否存在一个最后的不合适数？若存在，它是多少？

(ii)若 c 是偶数(从而 b 是奇数)，此时是否存一个最后的不合适数？若存在，它是多少？

(iii)若 b 和 c 都是奇数，最后的不合适数为多大？

习题55 设 a、b、c 是满足 $a\leqslant b\leqslant c$ 的任意三个数，且 1 是它们唯一的公因数。试找出整数 G，使所有大于等于 G 的数都是合适的。

习题55的结果表明，总是存在一个最后的不合适数 B，而且有 $B<G$。但是，实际的 B 值通常比习题55中求得的 G 值小得多。

习题56 (i)当 $a=5$，$b=6$，$c=7$ 时，求 B 的值。将这个值与你按习题55找出的 G 相比较；并与 $ab-(a+b)$，即只有 a 分和 b 分两类邮票时的最后的不合适数相比较。

(ii)当 $a=5$，$b=6$，$c=8$ 时，求出 B，并作上述那样的比较。

(ii)当 $a=5$，$b=6$，$c=8$ 时，求出 B，并作上述那样的比较。

(iii)当 $a=5$，$b=6$，$c=9$ 时，求出 B，并作上述那样的比较。

习题57 (i)当 $a=6$，$b=10$，$c=15$ 时，求出 B，并将这个值与你在习题55中求得的值相比较。

(ii)当$a=7$，$b=8$，$c=9$时，求出B，并作上述那种比较。

(iii)当$a=7$，$b=10$，$c=13$时，求出B的值，并作上述那种比较。

习题52—57提示我们：求最后的不合适数的公式，有三类邮票的情形，并不象只有两类邮票时那么简单，只有两类邮票时的公式是$ab-(a+b)$。也许，回过头来考察你在习题52—54中得到的结果，并首先找出当$a=2$时的公式，然后找到$a=3$，$a=4$，…的公式，从而可能得到一个求B的准确值的公式。不过这次要作很大范围内的试验和计算。若你未能找到求B的准确值的公式，那么你可以返回到习题55，并找出改进G的值，使之更靠近B的准确值的方法。在你已经找到了自己的解决这个问题的方法以后，也许你愿意读一读C. Smory´nski的文章《Frobenius问题的Skolem解》，此文刊于《数学信使》1981年第3卷第3期123—132页。

习题提示

53. (i)因$a=3$，而b是3的倍数，故你可以置b于不顾。于是，这个问题实质上就是只有两类邮票(a分和c分)的问题了。

(ii)再看(i)的指示。

(iii)若$c-b$是3的倍数，那么可不再考虑c，而只集中考虑a和b。这样，实际上就分别有两种情形：(a)$c-b$是3的倍数；(b) $c-b$不是3的倍数。

54. (i)分别考虑两种情形：(a)$b=4b'$，b是4的倍数；(b) $b=4b'+2$，b不是4的倍数

(ii)看(i)的提示。

(iii)若$c-b$是 4 的倍数，那么就可以不再考虑 c 了，若 $c-b$ 是偶数但不是 4 的倍数，那么，分别考虑两种情形：$c>3b-4$，$c\leqslant 3b-4$。

55．你已知道了只有两类邮票时问题的全部结果。将这些知识首先运用于数对a、b，然后运用于数对…．但要小心，a、b 这两个数可能有公因数！

56．(i) 画出如习题 5 中那样的表格，检查每一个数，直到接连有 5 个($a=5$)合适数为止。

解答

习题52 (i)$a=2$，且 a、b、c 不能都是 2 的倍数，故 b 和 c 中至少有一个是奇数。

(ii)因为 $a<b<c$，故小于 b 的适合数必为 a 的倍数。若$a=2$而 b 是奇数，则 $b-2$ 是奇数，从而不是合适数；$b-1$ 是偶数，从而是合适数；而 b 显然是合适的。故 $b-2$ 是最后一个不合适数。

(iii)若 b 是偶数，则 c 是奇数，且每一个合适数都能只用 a 和 c 表出。于是，根据只有两类邮票的情形的结果，可知$ac-(a+c)=c-2$ 是最后一个不合适数。

习题53 (i)若 b 是 3 的倍数，则 c 不是 3 的倍数，这时，每个合适数都能仅用 a 和 c 表出，因此 $ac-(a+c)=2c-3$ 是最后一个不合适数。

(ii)若 c 是 3 的倍数，则 b 不是 3 的倍数，这时，每个合适数都能仅用 a 和 b 表出。因此，$ab-(a+b)=2b-3$ 是最后一个不合适数。

(iii) (a)若$c-b$是3的倍数，那么，每个合适数都能仅用a($a=$

3)和b而得出，从而$ab-(a+b)=2b-3$是最后一个不合适数。(b)若$c-b$不是3的倍数，那么存在两种情形：$c>ab-(a+b)=2b-3$，以及$c\leqslant 2b-3$。在第一种情形，c可以由a和b的组合表出，从而可以不再考虑它；因此最后的不合适数就是$2b-3$。在第二种情形，c不能由a和b的组合而得到（若$c=ax+by$，则$y\leqslant 1$；但$y\neq 0$，因为c不是3($a=3$)的倍数；且$y\neq 1$，因为$c-b$不是3的倍数)，所以$c-3$也不能由a和b的组合而得到。从而$c-3$是不合适的。但$c-2$和$c-1$中有一个是3的倍数，而另一个等于“b加上3的倍数”，故$c-2$和$c-1$都是合适数。因为c显然是合适的，故$c-3$是最后一个不合适数。

习题54 (i)(a)若$b=4b'$是$a=4$的倍数，则每一个合适数都能只用a和c表示出。故最后一个不合适数是$ac-(a+c)=3c-4$。(b)若$b=4b'+2$不是$a=4$的倍数，则每个大于或等于$b-2$的偶数都合适的。类似地，所有大于或等于$b+c-2$的奇数都是合适的。从而大于或等于$b+c-3$的数都是合适的。不难证明$b+c-4$是不合适的。故$b+c-4$是最后一个不合适数。

(ii)若c是偶数，则b是奇数，可记$b=2b'+1$。因此，$2b=4b'+2$，故每个大于或等于$2b-2$的偶数都是合适的。(a)若$c=4c'$是$a=4$的倍数，那么每个合适数都能只用a和b表示出。于是，$ab-(a+b)=3b-4$是最后一个不合适数。(b)若$c=4c'+2$不是$a=4$的倍数，那么每个大于或等于$c-2$的数都是合适的。$3b$显然是合适的，$3b-1$和$3b-3$是偶数，因而是合适的。$3b-2=b$ $b+2b-2$)也是合适的。若$c\geqslant 2b$，则$3b-4$是不合适的，于是$3b-4$是最后的不合适数；若$c<2b$，则$c\leqslant 2b-4$，每个大于或等于$b+c-2$的奇数都是合适的，而$b+c-4$是不合适的，故$b+c-4$是最后一个不合适数。

(iii)所有大于或等于$2b-2$的偶数都是合适的，而$2b-4$是不合适的，所有大于或等于$3b-2$的奇数也是合适的。(a)若$c-b$是4的倍数，则所有大于或等于$c-2$的奇数都是合适的。故，若$c\geqslant 3b$，则$3b-4$是最后的不合适数；但若$c<3b$，则$c-4$是最后的不合适数。

习题55 存在很多可能的答案，这里只给出其中的一个。若a和b没有公因数，则可选$G=(a-1)(b-2)$。若b和c，或者c和a没有公因数，也有类似的结果。一般地，令d是a和b的最大公因数，那么，$a=a'd$，$b=b'd$，且a'和b'没有公因数。从而，所有大于或等于$(a'-1)(b'-1)$的数都能写成$a'x+b'y(x,y\geqslant 0)$的形式、于是，所有大于或等于$(a'-1)(b'-1)d$的d的倍数就可以写成$ax+by(x, y\geqslant 0)$的形式。设ed是与c没有公因数的、第一个满足这个条件的d的倍数（因为d和c没有公因数，故$ed<(a'-1)(b'-1)(d+cd)$，则所有大于或等于$(ed-1)(c-1)$的数都可以写成$ew+cz(w, z\geqslant 0)$的形式，从而写成$ax+by+cz(x, y, z\geqslant 0)$的形式。故可选$G=(ed-1)(c-1)$。

习题56 (i)9是不合适的，而10，11，12，13，14是合适的，故$B=9$是最后一个不合适数。（若你只用到$a=5$和$b=6$，则$ab-(a+b)=19$是最后一个不合适数，故$G=20$。若你利用我给出的习题55的解答，你会得到$d=1$，$(a'-1)(b'-1)=20=ed$，$G=19\times 6=114$。）

(ii)9是不合适的，而10，11，12，13，14是合适的，故$B=9$是最后的不合适数。（若你只用到$a=5$，$b=6$，则如(i)，$G=20$若利用我所给出的习题55的解答，则$d=1$，$(a'-1)(b'-1)=20$，$ed=21$，$G=20\times 7=140$。）

(iii)13是不合适的，而是14，15，16，17，18是合适的，故

$B=18$是最后一个不合适数。（若你只用到 a 和 b，则和前面一样 $G=20$。若你利用我所给出的习题55的解答，则 $d=1$，$(a'-1)(b'-1)=20=ed$，$G=19\times8=152$）。

习题57 (i) $B=29$，$G=15\times14$（因为 $d=2$，$a'=3$，$b'=5$，$(a'-1)(b'-1)=8$，$ed=16$）。

(ii) $B=20$，$G=41\times8$（因为 $d=1$，$a'=7$，$b'=8$，$(a'-1)(b'-1)=42$，$ed=42$）。

(iii) $B=82$，$G=58\times12$（因为 $d=1$，$a'=7$，$b'=10$，$(a'-1)(b'-1)=54$，$ed=54$）。

第十七章 拓广的研究问题

> 解决困难问题的最好方式，
> 是去求解容易得出结果的特款，
> 这样做会给予我们许多启示，
> 从而找到问题的一般情形的解答。
> 艾萨克·牛顿爵士说：
> 他用这种方式克服了最艰巨的困难。
> ——D．格雷戈里：《备忘录》，1075

17·1 引言

什么是数学？本书一直在从一种独特的观点——其视角不是把眼光集中在最优秀的数学家们的给人深刻印象的成就上，而是集中在让读者自己着手去解决的一些初等问题上——不断地触及到这个古老的问题。按照这种路子所运用和发现的数学本身可能意义不大。但是它对于“数学来自哪里？”和“它是怎样被发现的？”等问题，给出了一种更加清晰的观念。但愿如此！

本书中反复出现的两个主题之，一是领悟（无论是领悟一个特殊的数学问题，还是领悟一般的哲理，诸如“数学是怎样被发现的？”一类）总是植根于“行动”（计算、推理、作出图形等等）之中的。另一个反复出现的主题是行动需要引导，而最好的引导是反思。若你仅仅是计算，而不去思考你在做什么，你为什么要做它，以及你已经发现了什么，那么你的行动就可能失去它目的

和方向上的意义，反过来，若你只是尽力地去思考，却不实际地参与复杂的计算，那么你就有可能失去与实际的联系。

对大多数读者来说，解决拓广了的研究问题的经验是将要获得的新鲜经验。所以，我避免涉及太多的“如何从事数学研究”的方法学上的说教。不过，有几个一般的原则本来就应该很明确地给出的；并且，现在也是把我们已经使用过的某些十分显然的策略加以总结的好时机了。

在本章的6个例子中，每个都是从试验或计算一种特别容易的特款开始的。这样做通常可以从两个方面获得好处，一个是方法方面的，另一个是心理方面的。首先，这些计算给我们提供了“试验的数据”，这样的数据常常在后来都被明证是有用的。而一个并非不重要的事实是：这些想法简单的初步计算，帮助你更好地理解了问题。在这些初步计算中所用的方法都稍稍有些粗糙。但你不要因此而踌躇，因此而受到困扰，因为它们总会在以后得到改进。

我也一直在强调，到了一定的阶段就停下来，回过头去反思那些初始的证据。只要有可能，你应尽力对“看起来什么可能会发生”作出有理性的猜测，然后用某种方法验证你的猜测。既是没有一种显然的模式可循，重要的一点也是：不要毫无思考地做不断的计算，而要利用你已有的经验去判断下一步做什么。总之，要特别记住：只有用某种系统性的方式去探究问题，你才可能发现什么将会发生。

对于如何解决本章中的6个拓广了的研究问题，读者自然希望能在书中获得某些指引。因为不同的人可能会采用完全不同的方法去解决同一个问题，故他们将几乎不可能指望“提示”会适用于每一个人的思考方式。即使如此，他们也仍希望得到某种指

导。当你正在完全靠你自己研究解决一个问题时，你会发现：你挖空心思提出的很多办法，或迟或早都陷入困境。其中某些办法确实走进了“死胡同”，而另外一些则几乎一定能得到结果，只是需要锲而不舍地做下去。至于哪个办法属于前者，哪个办法属于后者，你得作出自己的判断。

为了不让你失去由你自己来解决每一个问题的机会，我很审慎地把问题的叙述与问题解答的大要分开了。在7.2节仅给出了6个拓广了的问题，在7.3节给出了我自己的一种可能的解决方法的大要（并附有提示）。倘若你只是想浏览一下这本书，或者想要自己着手解决拓广了的研究问题，那么你就应只看7.2节。只有当你想要自己解决7.2节中的问题，并又确实被难住了时，才去参看7.3节中我所给出的解答大要。这个大要比第一章到第十六章的叙述简略得多，而有多得多的工作留给了读者自己去安排、完成和检验。而且，关于你能够指望发现什么，也几乎没有提供任何线索。不过，每一个问题的解答大要都由一系列步骤构成，并且每个后面的步骤都给出了前面步骤应该得到的结果（这个结果本来应该由你自己在前面的步骤中发现的）。所以，当你循着我的解答大要去进行时，要尽力设法完成每一个步骤，否则不要进到下一个步骤。对于某些步骤，我还给出了提示。这些提示都编在每个解答大要的末尾，而在后一个问题的解答大要前面。

我一直在试图选择这样一些问题：它们是初等的，但是包含着丰富的思想和许多令人惊异的东西。在广为流传的各种数学文献中，有许多这样的问题。但是，同时我也一直在力图避免简单地照抄众所周知的例子，以期训练有素的老师们能重新体验一下他们在学校当学生时碰到的那类挑战。所有问题都并不存在任何规定的标准解答。问题的目的仅在于让读者尽可能多地去探索、发

现和解释，并要使读者不会感到被限制在狭小的圈子中，仅仅是驱使他去重新发现某个规定的标准答案。

17·2 引伸问题

1. 一个众所周知的问题是：在一段度量为 $2\times n$ 的路面上，铺设 n 个铺路石块，每个石块的度量为 2×1，一共可有多少种不同的铺设方式？若用度量为 2×1 的石块铺设一段 $3\times n$ 的路面，又可有多少种不同的铺设方式？

2. 斐波那契数列 0，1，1，2，3，5，8，…的哪些项能被项序数 n 整除？

3. 用七巧板的所有块小板能构造起什么样的三角形和四边形？能构造起什么样的凸多边形？

4. 传统的河内塔游戏有3根木桩。一个由尺寸逐步减小的若干圆环堆成的塔放置在其中一根木桩上。现在的问题是：要把这个由圆环堆成的塔转移到另一根木桩上，并限定每次只能移动一个圆环，而且不允许把较大的圆环放置在较小的圆环上面。在这些限制下完成这个塔的转移，至少要移动多少次？若木桩数多于3根，完成塔的转移最少需要移动多少次？

5. 在"计程车几何学"中，当你从 A 点到 B 点旅行时，只允许沿轴的平行方向移动，故你必须按"向前和向上"(或者"向上和向前"，或者，…)的方式行走，不能取捷径(如斜向上或斜向下)行走。这样，$A=(x_1,\ y_1)$ 和 $B=(x_2,\ y_2)$ 间的最短路程就是：

$$d((x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2))=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|.$$

(a) 在"计程车几何学"中，大家熟知的二次曲线的"焦点-准线"定义会给出什么样的轨迹呢？"焦点-焦点"定义又给出了什么轨迹？这两簇轨迹是相互关联的吗？(若是，它们是怎样相关联的

呢？若不是，又是为什么呢？）

(b) 这些轨迹是否以某种方式与一个（计程车几何的）圆锥的平面截线相关联呢？

6. 是否存在支配着任意正整数为底的翻转数的一般模式？

17·3 解答大要和提示

在阅读这一节内容之前，请首先阅读17·1节的内容。

> 1. 一个众所周知的问题是：在一段度量为2×n的路面上，铺设n个铺路石块，每个石块的度量为2×1，一共可有多少种不同的铺设方式？若用2×1的石块铺设一段度量为3×n的路面，又有多少种不同的铺设方式？

解答大要

(1.1) 首先要确信你能找出用2×1的石块铺设2×n的路面的所有可能的方式。（先对小的n值作试验——见图17.1中的表；然后设法找到对一般的n值计数所有不同方式总数的简便方法；最后尽力设法找到仅用n表出的求不同铺设方式总数的公式。）

n	0	1	2	3	4
用2×1的石块铺设2×n路面的不同方式总数					

图 17·1

(1.2) 现着手解决用2×1的石块铺设一段3×n路面的问题。正如在(1.1)中一样，你需要一种简明的手段来表达“用2×1的铺路石块铺设一段3×n路面的所有不同方式的总数”。我们用P_n来表示之。

要想得到对一个问题的看法，获得对问题的感受，一个有效的办法是动手试验——试验问题的最容易得到结果的特款。按照这种想法，我们首先对较小的 n 值求出 P_n 的准确值来（见图17.2)。

路面的长度$=n$	0	1	2	3	4	5	6
"用 2×1 的石块铺设 $3\times n$路面的所有不同方式数"$=P_n$							

图 17·2

(1.3) 当你对于一个奇数值 n，试图用 2×1 的石块铺设一段 $3\times n$ 的路面时，你不得不至少留下一个 1×1 的缺口。这就有点像是要用一个度量为 1×1 的石块和$(3n-1)/2$个度量为2×1的石块来铺设这段路面。这可能会是一个有趣的问题。但是，当 n 是偶数时，情况就显得完全不一样了。这时，我们仅需用2×1的石块就填满了 $3\times n$ 的路面，因此，紧紧抓住 n 是偶数的情形似乎是有道理的。至少，可以先从这种情况开始考察。这样，你可以把注意力集中于当 n 为偶数时所对应的 P_n 上(图17.3)

n	0	2	4	6
P_n				

图 17·3

(1.4) 若你已设法满意地解决了(1.1)(不管是用到了还是没有用到提示)，那么你就可能会同意 $P_0=1$。看出 $P_2=3$ 也并不困难：所有 3 个石块都"沿着"路面铺为一种方式，一个石块"沿着"路面铺，两个石块"横着"路面铺有两种方式。求 P_4 就已经变得很复杂了。如你并没有设计出某种巧妙的计数铺设方式的办法，要求出 P_6 就会有很大的困难。在这种情况下你就无法肯定你在

(1.2)中得到的值是不是正确的。所以，尽力设法准确地求出P_6、P_8和P_{10}的值，虽然看起来是一件困难的工作，但却是一个好主意。而只要这能迫使你自己去找到某种更好地计数铺设方式的方法就好了。现在我们就来做这件事。(若你是想要找到一种很巧妙的方法，去求出P_{500}或P_{1000}，或对一般的m，求出P_{2m}，就显然地需要一种改进了的计数铺设方式的方法。)

(1.5) 检查你在(1.4)中用来求出P_6、P_8和P_{10}的方法，再试着运用同样的思想去写出一个递推关系——只要知道了P_0、P_2，…，P_{n-4}，P_{n-2}，它就能使你计算出P_n(n为偶数)。

(1.6) 你的第一个递推关系可能稍稍有点复杂。但是，对于有n个数字的9倍翻转数的数目，你所找出的第一个递推关系不也是很复杂的吗(第九章，习题39)！试运用你在化简n个数字的9倍转数数目的递推公式时，曾用过的同类方法(第九章，习题45)，设法化简你在(1.5)中得出的递推公式。

(1.7) 然后，运用在第九章中所使用过的同一方法，去得出仅用n表出P_n(n为偶数)的公式。

(1.8) 当你自认为已成功地解决了一个问题后，就把这个问题放在一边了。这是很自然的，但常常仍存在一些有趣的残留问题，例如：

(i) $3\times n$问题本来是作为另一个问题(铺设一段$2\times n$的路面)的自然推广而提出来的。而这两问题又是怎样联系起来的呢？

(ii) 当时你就把n为奇数时，铺设一段$3\times n$路面的问题搁置下来了。

(1.9) 于是，又回过头来考虑n为偶数时的$2\times n$问题。设P_n表示"用2×1的石块铺设$2\times n$路面的所有不同方式的总数"。利用

你在(1.1)的解答，填写出图17.4中的表格。

n	0	2	4	6	8	10	12
P_n							

图 17.4

设法找出求 P_n 的递推公式(n 为偶数，它应在一定的程度上与你在（1.5）中得到的第一个递推公式是一致的，或者与你在(1.6)中得到的简化了的递推公式是一致的。这对于求 2×1 的石块铺设 $4\times n$ 的路面的所有不同方式总数的问题(n 为偶数)，会有什么启示呢?

(1·10) 检验你的猜测——用 2×1 的石块铺设 $4\times n$ 的路面的所有不同方式总数的递推关系（n 为偶数）.若检验表明它似乎是正确的，就证明之；若不正确，就修正你的猜测，以求找出一个正确的递推关系。

(1·11) 然后，再回过头来考虑当 n 是奇数时，铺设一段 $3\times n$ 的路面的问题(用 $(3n-1)/2$ 个铺路石块，每个的度量为 2×1)。

提示

(1·1) 这时你应该认识到，你需要一个简要的记号去表达“用 2×1 的石块铺设一段 $2\times n$ 的路面的不同方式的总数”。我们用 P_n 表示它(P 是 paving——“铺设”的第一个字母)。这是一个相当容易的问题——用一些小的 n 值作试验，将可能对一般的 P_n 是什么给出令人信服的“初步猜测”.(然而，你必须努力地思索，看哪种情形显得是最容易的。用 2×1 的石块铺设一段 2×0 的路面，有多少不同的方式? 有人可能会说，这是无法实现的，故完成它的方式数必定为 0。但另一些人可能会振振有词地宣称：铺

设 2×0 的路面的方式，准确地说只有一种，即坐下来，根本不用做任何事。你认为这两种观点哪一种会为数学家所接受？哪一种能最好地与你求得的P_1，P_2，P_3，P_4，…的值有规律上的一致性？）

然后，你须找到对一般的 n 值求出 P_n 的某种巧妙的方法。这种方法将能显示出你的初步猜测实际上是不是正确的。

（1·4）若你设法满意地解决了(1·1)，那么你实际上就已经在寻找这样一些方法，它们可能最终帮助你找到计算P_n的简单的递推关系。若你在(1·2)中明智地小心行事，那么你应该充分自信：你的P_4的值是正确的。从而，再思考如何通过利用你已知道的事实$P_2=3$(以及$P_0=1$)，就能很简单地计算出P_4来。铺设一段 3×4 的路面，有两种完全不同的方法。一种与P_2密切相关，而另一种则完全不同，即并不依赖P_2。试试看你是否能由自己来区别出这两类方法，并对每类方法计数出不两的铺设方式数，然后再往下阅读。

可以推知，与P_2密切相关的一种铺设方法必定要涉及到一段 3×2 的路面。这就提示我们，应当区别如下两种类型：(i) 存在一条“断裂线”把 3×4 的路面分成了两段单独的 3×2 路面时的铺设方式，和(ii)不能按这种方式分成两部分时的铺设方式。分别计数这两类铺设方式，并把两类铺设方式数结合起来，其总和就是P_4的值。现可把同样的思想用于求P_6、P_8和P_{10}的值。

（1·9）设 n 为偶数。你知道$P_{n+2}=P_{n+1}+P_n$，$P_{n+1}=P_n+P_{n-1}$，及$P_n=P_{n-1}+P_{n-2}$。你能把这些等式结合起来而得到一个用P_n和P_{n-2}表示出P_{n+2}的递推关系吗？用P_n和P_{n-2}表示出P_{n+2}的对应递推关系又是什么呢？这对 $4\times n$ 问题又给出了什么提示呢？

（1·10）记住：你对 $4\times n$ 问题（n 为偶数）的递推关系的猜

测，最多只是一个相当好的初步猜测。所以，当你发现需要对它作某种修改，或者必须从根本上修正时，是不应感到吃惊的。

为了检验你的初步猜测，你可以从仔细地计算图17.5中表里的前几项着手进行（利用你已知道的铺设 $2\times n$ 和 $3\times n$ 的路面的不同方式数。）

n	0	1	2	3	4	5	6
用2×1的石块铺设4×n的路面的不同方式数							

图 17.5

你首先关心的事可能是检验你所猜测的 $4\times n$ 问题（n 为偶数时）的递推公式。但是，当 n 是一个居中的奇数时，铺设一段 $4\times n$ 的路面的不同方式数，在很多方面都可能是有用的。例如，你可能会发现，在你试图求出铺设 4×4 或 4×6 的路面的不同方式数时，它们会是有帮助的。设法填出这些值，然后再往下读去。

当你求出了铺设 4×0、4×2 和 4×4 的路面的不同方式数后，就提出了对你猜想的递推关系作首次检验的任务。可以推知，这些数值的第一个，与 2×0 和 3×0 问题的情况一样，都为 1；而第二个值与（1·1）中求得的 2×4 的路面的情形相同。只有 4×4 的情形才会提出某些问题。但是，铺设一段 4×4 路面的不同方式总数中，自然应该包括下述情况中的铺设方式：有一条“断裂线”跨过这段路面的中央，把这段路面分成了两段 4×2 的路面。这类特殊的铺设方式数有可能大到足以表明你所猜测的递推关系是错误的。（若你已经注意到了，一个类似的递推关系不仅对 $2\times n$ 的路面和 $3\times n$ 的路面是满足的，而且对用 2×1 的石块铺设一段 $1\times n$ 的路面（n 为偶数）的情形也是满足的，那么这一点可能显得特别

令人遗憾。然而，这种观察与我们要想得到的结果毫不相干。因为，对于用 2×1 的石块铺设 $1\times n$ 的路面的情形，总是只有一种铺设方式，而序列 1，1，1，1，…能被作成符合各种递推的要求。$1\times n$ 问题的最简单的递推关系（即 $P_{2n}=1$）仅仅涉及到了这个序列的一项。$2\times n$ 和 $3\times n$ 问题（n 为偶数）的递推关系涉及到了它们各自序列的恰好 3 项。所以，人们可能会预测 $4\times n$ 问题的最简递推关系会复杂得多。也许，会涉及到序列的 5 项。）

我们从目前的地方出发应前进到哪里去呢？一种可能是继续坚持设法找出 $4\times n$ 问题（n 为偶数）的正确的递推关系。另一种可能是作出判断：你对 $4\times n$ 问题（n 为偶数）所猜测的递推关系不正确，可能反映了这样一个事实，即一开始就把 n 为偶数的 $2\times n$ 问题与 n 为奇数的 $2\times n$ 问题分别开来，是不对的。若把 $2\times n$ 问题同时对所有 n 值（无论是偶数还是奇数）一起考虑，那么，也许对 $2\times n$ 问题成立的结果，对 $4\times n$ 问题也是成立的了。你一旦决定这么做，并且有准备地引入两个另外的序列作为中间桥梁（这两个序列就有点像翻转数问题中的 i_n），那么，要得到一个 P_n（铺设 $4\times n$ 路面的不同方式数）的递推关系就并不困难了（图17·6）

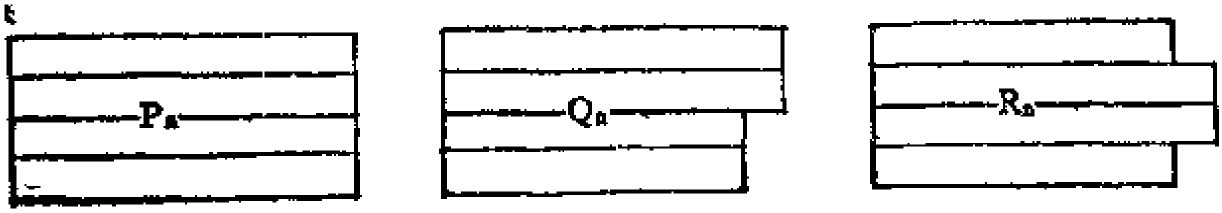


图 17.6

于是，我们可以得出涉及到 3 个序列的 3 个递推公式，并能利用它们设法消去对应于两个辅助序列的项，从而得到只涉及 P_n 的递推公式（实际上包括了 P_n 的 5 项）。

因为（1·10）是从 $4\times n$ 问题（n 为偶数）的递推关系的初步猜

测出发的，故把P_n，P_{n-1}，P_{n-2}，P_{n-3}，P_{n-4}的递推关系结合起来去消掉P_{n-1}，P_{n-3}，P_{n-5}和P_{n-7}，从而得出只包含P_n，P_{n-2}，P_{n-4}，P_{n-6}和P_{n-8}的递推关系，是有价值的。

(1·11) 若你把一段 $3\times n$ 的路面看作象棋盘一样由黑白两种小方块构成，它可能有助于你知道如何下手。这将告诉你哪儿可能会出现一个 1×1 的缺口，哪儿不会出现。

设 S_{2n+1} 表示 $3\times(2n+1)$ 的路面能用 $3n+1$ 个石块来铺设的方式数（剩下一个 1×1 的缺口）。找出一种有系统的方式，算出 $n=0$，1，2，3 时的 S_{2n+1} 的值。然后设法找出 S_{2n+1} 的一个递推关系。（这一点并不太困难，只要你能有准备地由生成包括两个"中间桥梁"序列 P_{2n-2} 和 T_{2n-1} 的递推关系开始着手，就可望找到 S_{2n+1} 的递推关系。这里的 P_{2n-2} 就是在(1·2)中曾用过的序列，而 T_{2n-1} 就是铺设图 17·7中那段路面的不同方式数。）

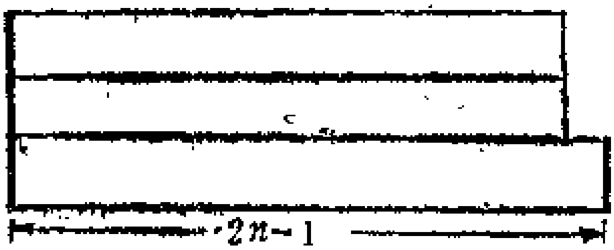


图 17.7

> 2. 斐波那契数列0，1，1，2，3，5，8，…的哪些项能被项序数整除。

解答大要

(2·1) (*a*) 斐波那契数列 0，1，1，2，3，5，8，…中的哪些项是偶数？请试验、猜测、检验之；然后证明你的猜测的正确性。

(*b*) 第 9000 项是偶数吗？第 9001 项呢？

(2·2) 若把斐波那契数列的初始项 0 看作第 0 项（即 $F_0=$

0)，这样，$F_1=1$，$F_2=1$，$F_3=2$，$F_4=3$，等等；那么你对(2·1)(a)的解答本来还可以更简单一些．在本问题后面的讨论中，我们要一直坚持使用这里给出的记号。

(a) 用上述新记号重新表述你对(2·1)(a)的解答．斐波那契数列 $F_0=0$，$F_1=1$，$F_2=1$，$F_3=2$，…的哪些项能被 2 整除？

(b) 斐波那契数列的哪些项能被3整除？试验、猜测、检验，…；然后，证明你的猜测的正确性。

(c) 斐波那契数列的哪些项能被 5 整除？

(2·3) (a) 斐波那契数列的哪些项能被 6 整除？试说明之(利用(2·2)的结果)。

(b) 哪些项能被 10 整除？试说明之。

(c) 哪些项能被 15 整除？试说明之。

(d) 若 $n=p\times q$，p、q 是两个相异的素数，那么，只要你知道了哪些项能被 p 整除，哪些项能被 q 整除，你就可知道哪些项能被 n 整除了。为什么这就足以使你得到这样的结果呢？

(e) 哪些项能被 5 整除？哪些项能被 7 整除？从而你可预知哪些项能被 35 整除。试检验你的预测，看其是否正确。

(2·4) (a)设对每个整数 n，你要想知道斐波那契数列的哪些项能被 n 整除，只要集中考虑 n 是素数幂的情形就足够了。为什么呢？

(b) 哪些项能被 2 整除？能被 2^2，2^3，2^4 整除？在这里你能发现某种有规律的模式吗？你猜猜哪些项能被 2^5 整除？试检验你的猜测是否正确。

(c) 2常常被看成稍有点特殊的素数。所以，现考察 3 的幂。哪些项能被 3 整除？哪些项能被 3^2、3^3 整除？在这里，你能看出有某种模式吗？

(*d*) 哪些项能被 5 整除，能被 5^2 整除？哪些项能被7 整除，能被 7^2 整除？

(2·5) 步骤(2·4)(*c*)和(2·4)(*d*)提出了某种期待——若你能知道哪些项能被素数整除，你就处理好素数的幂。(虽然，你还不能对你在(2·4)中发现的模式作出解释。)

若当 n 能被 3 整除时，一个斐波那契数 F_n 能被 2 整除，则我们称：在斐波那契数列中，2 的倍数以 3 为周期出现。完成图17.8中的数表，直到素数 $p=37$。

素数 p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37
周期												
p 与它周期的关系												

图 17.8

一个特别的素数显得有些与众不同——虽然目前还不完全清楚其原因。而其余的素数就可自然地分成各个类别。试设法把素数分类——分为看上去像是它们天然应归属的类别，并对每一类作出描述。再利用你已有的结果，去猜测对 $p=43$ 和 $p=47$ 时你所希望得到的结果。然后检验你的猜测的正确性。

(2·6) 现检验素数 $p=61$，$p=89$ 和 $p=233$ 时的情形。这就有可能要迫使你修改有关素数归类的想法。但这时仍显示出有两种不同类型的素数。(你在(2·1)中所注意到的那个特殊的素数不包括在内。)

(2·7) 起初，你可能仅仅能确定哪个素数 p 属于哪一类。但这并不足以告诉你斐波那契数列的哪些项能被 p 整除。不断地修正你的猜测，直到你得出某种结果，它使你相信这是真确的。

(2·8) 当你已尽你所能研究了素数 p 的倍数出现的周期，就

回头去认真考察素数幂的倍数。设p^r是素数p的r次幂。试设法确定p的倍数出现的周期与p^r的倍数出现的周期之间是否确实存在某种简单的关系，这正如你在(2·4)中就开始有所怀疑的那样。倘若简单的关系一般地看上去似乎是存在的，那么就设法证明它。若你怀疑这种表面上简单的关系的真确性，或者因太困难而无法证明它，那么，修改从(2·4)得出的很显然的初步猜测，直到你能得出某个结果，你认为它一般地是真确的，而且你自认能证明它。然后证明之。

提示

(2·1) (a) 0，1，1，2，3，5，8，13，21，34，55，89，144，…

假设你已知道数列的前两项分别为一偶数和一奇数，而其余各项都为该项的前两项之和，那么这个数列将会如何继续下去呢？

偶数，奇数，____，____，____，____，____，____，…

(2·2) (b) 假设你已知道一个数列的前面项分别是"3的倍数"和"3的倍数加1"，而其余各项都由它的前两项相加而得到。于是，此数列的第3项必定是"3的倍数加1"，第4项是"3的倍数加2"，等等。这个数列将会如何进行下去？

3的倍数，(3的倍数)+1，(3的倍数)+1，(3的倍数)+2，…

(2·4) 斐波那契数的一个异常的特征是：无法区别出$2^2=4$和$2^3=8$之间的差别，任一能被4整除的项，也一定能被8整除(你能证明这一点吗？)。在现阶段，尚不清楚这一点对2的其它幂是否也成立，但却清楚地显示出，2^2的倍数出现的周期与2的倍

数出现的周期是有关的，其关联方式与2^4的倍数出现的周期和2^3的倍数出现的周期相关联的方式相同。

(2·7) 很可能你只得满足于一个并不完整的结果，至少在开始时是如此，若你真的这么想，那么你会相信：若一个素数在某一类中，则它的周期能整除p的某个函数；若它在另一类中，则它的周期能整除p的另一个函数。也许，第一件工作就是设法证明这一点。在后面你将可以回过头来把准确的周期明确地找出来。

(2·8) 设$F_n = kp$是p的整数倍，则F_{2n}，F_{3n}，…，F_{pn}也都是p的整数倍。考察斐波那契数列的项关于模p^2的余数。(*a*) 对于项F_{n-1}，F_{2n-1}，F_{3n-1}…，F_{pn-1}你看出了什么吗？(用某些小的p值来试试看！)若$F_{n-1} \equiv a$(模p^2)，你是能就F_{rp-1}(模p^2)说出什么有价值的东西吗？(*b*)对于项F_{n+1}，F_{2n+1}，F_{3n+1}，…，F_{pn+1}，你又发现了什么呢？(用某些小的p值试试看！)你是否能对F_{pn+1}(模p^2)谈出什么有价值的东西呢？(记住：我们一直都假定了有$F_n = kp$) (*c*) 你是否对F_{pn}(模p^2) 发现了什么吗？(*d*) 再回过头看看哪些是你能证明的。(*e*) 设$F_n' = k'p^2$，你能对F_{pn}'(模p^3) 说出任何有价值的东西吗？

> 3. 用七巧板的全部7块小板能构造出什么样的三角形和四边形？能构造出什么样的凸多边形？

解答大要

(3·1) 在一张硬纸片上画出边长为10厘米的正方形，并按图17.9(*i*) 画好线条。然后沿这些线条剪开，于是你就得到了一付自己的七巧板，在传统的七巧板游戏中，都给出了某些形状，然后要求设法以某种方式将7块小板拼在一起去得到给定的形状。这种想法说起来简单，但玩起这种游戏可能会十分困难。(试拼出

图17.9(ii)的图形1)有很多优秀的图书中列出了可能用七巧板拼出的有趣的图形。而数学所要研究的又是什么呢?

(i)　　图17.9　　(ii)

组装这7块小板的方式之多,使得几乎不可能绘出全部能够拼出的形状。但是,若我们只集中考虑某几类特殊的形状,那么其变化的情况就受到了极大的限制。七巧板的7块小板都是多边形,而能由它们拼成的形状本质上都是多边形。最简单的多边形是三角形和四边形。所以,首先研究哪些三角形和四边形能由七巧板构造出来,似乎是有道理的。

(3·2) 试找出所有能由七巧板的全部7块小板构造出的三角形,并解释为什么你已列出了全部可能的三角形。

(3·3) 你是用剪开一个正方而得到一副七巧板的。其它还有哪些四边形能用这7块小板的全部拼出来?列出所有可能的四边形,并证明你确实列出了全部可能得到的四边形.(即使你真的被难住了,在着手解决(3.6)—(3.10)以前,也不要看提示。)

(3·4) 在(3.3)中,你可能在试图构造四边时碰到了很大的困难,或者在证明"构造一个有3个45°的角和一个225°的角的四边形是不可能的"时,碰到了很大的困难。在传统的七巧板游戏中,允许构造出"下凹"的形状。这就使得七巧板游戏有了更大的伸缩性。但是,在你要设法找出某种类型的所有可能的形状时,你并不喜欢要这种伸缩性。一个多边形,若没有一个角指向

其内部，就称之为凸多边形(图17.9(ii)的多边形就不是一个凸多边形)。

(3·5) 试列出所有能用全部7块小板构造出的凸多边形。证明你确实列出了所有可能的凸多边形。(先试试看你能找出多少凸多边形，然后设计出一种系统性的方法。若你被难住了，也不要在着手解决(3.6)—(3.10)以前看提示。)

(3·6) 尽管容易明白你必须做什么，并且7块小板为具体试验提供了广阔的余地，但是，(3.3)和(3.5)中的问题是相当难的。很可能性你会从尽可能多地构造出所要求的那类形状的图形着手。在(3.2)中你本应最终认识到：第一，唯一可能的三角形必须有两个45°的角和一个90°的角，第二，这个三角形的面积与作成七巧板的正方形(图17.9(i))面积相等。于是，问题就归结为判断这样的三角形能不能用七巧板的所有7块小板构造出来。这就不太困难了。但是，要在(3.3)和(3.5)中，从问题的初始考察前进到一个满意的完整解答，要完成这一步却并不是容易的。

这里存在两个困难：第一个就是要找到一种简单的系统性的方法，只要用这种方法就可望找出全部要求的那类形状的图形；第二是必须绝对有把握没有漏掉任何一个图形。

每当你碰到这类障碍时，值得一试的一种方法是：考察一个同类型的但却更简单的问题，以期从较简单的问题的求解过程中，发掘解决这类问题的思想，并用这些思想来帮助你解决先前的问题。考察一个更简单的同类问题也有心理方面的收益，即若你设法成功地解决了这个简单问题，通常就会使你产生信心，使你劲头十足地去攻克先前那个更困难的问题。

(3·7) 在一张硬纸板上，画一个边长为10厘米的等边三角形，并依图17.10所示画出线条，然后按所画直线剪开，就得到

一副"泛七巧板"。

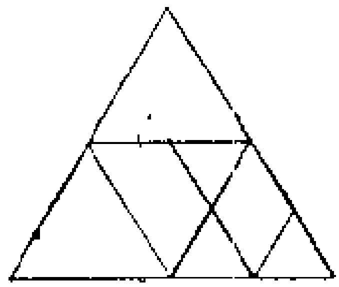


图17.10

(3·8) 找出能用这7块小板构造出的所有可能的三角形，并解释为什么你所得到的三角形是全部可能的三角形。

(3·9) 找出能用这7块小板构造出的所有四边形，并证明你所得到的确实是全部可能的四边形。

(3·10) 找出能用这7块小板构造出的所有凸多边形，并证明你所得到的是全部可能的凸多边形。

当你完成了(3.8)、(3.9)和(3.10)后（若确实被难住了，可参看提示），请回过头再试试解决(3.5)中的问题。

提示

(3·2) 利用七巧板的7块小板可以拼出什么角？从而，对于七巧板拼成的三角形的三个角，你能说得出什么吗？具有这样的角并与原始正方形(图17.9(i))面积相等的三角形有多少种呢？试设法拼出一个这样的三角形？

(3·3) 由七巧板拼成的四边形的四个角，它们的取值有几种可能性？有4种不同的可能性！而且每种可能性又对应着0、1或几类不同的四边形。请找出这4种角，然后再往下读。

眼下，一种笨拙的办法就是去依次地考察这4种角。

(i) 假定这4个角都相等。这时，你一定知道这种图形的一个例子——原始的正方形(图17.9(i))。你可能还想着手找出另外的图形的例子(例如，将你在(3.2)中得到的三角形仅仅移动一块板，就能得到一个长方形)。但是，到了一定的阶段，你应该提出某个具有系统性的方法，这种方法能够没有任何遗漏地构造出所

有可能的长方形。你能用什么办法来简化这个系统性的方法吗？请试试看能否回答这些问题，然后再往下看。

我们将概述一种方法，若把原始的方块看成边长为2个单位，从而面积为4个平方单位的正方形，情况就会变得容易些。这时，你用七巧板拼成的长方形面积都为4，即已告诉你边长的积为4。利用这个事实的方式之一是：注意到长方形的每条边必定由七巧板的边构成，而七巧板的边长又是很特别的。将七巧板的所有7块板的边长的特征弄清楚（记住：原始正方形的边长为2）。从而你就可以知道，把七巧板的边组合起来，能得到哪些类型的长度。试找出乘积为4的所有可能的数对。结果你将会发现只有4组可能的数对。然后你必须找出某种方式，以确定其中哪些数对对应了真正由七巧板构成的长方形。完成这一点后再往下看。

在你试图确定哪些数对是与真正的七巧板长方形相对应时，你可能已经发现了另外一点有用的知识，即七巧板的两个大三角形必定要以某种方式拼在一起。这立即就排除了高小于1的长方形。实际上，以这种想法入手（而不需要管边长为多少），再回过头来考虑一个大三角形的两种可能的方位（为什么只有两种不同的方位？），会更为容易些。

还有别的合用的方法。也许，你在构造一个1×4的长方形时，能自己发现它。假设你想要构造一个给定了高h（例如$h=1$）的梯形或长方形。这就会迫使你将几块板按某种特定的方位拼起来（例如，小正方形就必当作一个菱形拼进图中）。于是，按这种特定的方式规定了方位的每一块小板，都要对高为$\frac{1}{2}h$处的截痕贡献一个特定的量。若每个小板对这个截痕的贡献量之和太大，那么实际上就构造不出这种图形来。（例如，对一个1×4的长方

形，七巧板中的两个大三角形、小正方形和平行四边形对$\frac{1}{2}h$处的截痕的贡献各为1，而那个中等大小的三角形贡献了另外$\frac{1}{2}$，它们加在一起就至少为$4\frac{1}{2}$了。）

（ii）你已知道了4个事实：总面积；两个大的三角形必须拼在一块儿；一个图形的高或别的某个量，常常决定了某些小板拼在一起的方式；而这会使你能估计出另外的量的长度——如像$\frac{1}{2}h$处的截痕的长度。将这4个事实中的任意3个结合起来，你就能够针对对应于梯形的两组角中的每一组角、对应于平行四边形的一组角，排除所有明显地不可能的四边形和构造出所有明显地可能的四边形来。

（iii）但是，如何利用这4个事实中的第二点和第三点，去排除或构造出具有3个45°角和1个225°角的四边形，却并不是很清楚的。而若我们要想利用第四点（即把七巧板的边组合在一起只能得到某些特殊的边长），那么需要特别小心；因为在225°角处相交的两条边，不可能由七巧板的所有边组成。（为什么不能呢？）然而，有另外两条边却必须由七巧板的所有边构成。于是，一种笨办法就是把如下两点结合起来：一是我们已知道的图形的总面积；二是我们在早些时候已观察到的：把七巧板的边组合在一起所能得到的边只有长度为$m+n(1/\sqrt{2})$的边（其中，m和n都是整数）。由平面几何学可知，这类四边形的面积可由这样的两条边的长度以一个简单的公式表出；而且还可以利用m和n都是整数的事实。

（3·5）（i）一个凸多边形不可能有指向内部的角，故其每个

角都必须小于 180°. 而只有 3 个小于 180° 的角能用七巧板拼出来。它们是什么角?

(iii)你已知道了凸 n 边形的内角和公式（第九章习题34),故你能得到凸 n 边形内角大小的平均值，即内角和的$\frac{1}{n}$，你还可能知道，在一个由七巧板构造出的凸多边形中，没有一个内角能够大于你在 (i) 中得到的最大的角。若设由七巧板构造出的凸多边形有 n 条边，试找出 n 的所有可能的值。

(iii)现依次地考虑每个 n 值。在(3.2)和(3.3)中你已找出了全部有 3 条或 4 条边的凸多边形。而要证明：表面上看去可能的最大 n 值（你在前面的(ii) 中找出的）实际上不可能出现（因为几乎所有的角都需要一块有一个 90° 角的小板，但却没有足够的这种小板以供分配使用),并不太困难，更困难的是处理看上去可能取的第二大的 n 值。为了有说服力地完成这一点，也为了检查其余两个 n 值，你必须设计出一种巧妙的有系统性的方法；这种方法必须要能检验每一种可能性，而且确保不遗漏任何一个值。但这是从用各种 n 值作试验开始着手进行的.（你不仅是在了解哪些凸多边形能构造出来，哪些不能构造出来；还应设法弄清楚是什么原因使得某些凸多边形能构造出来，而另一些却不能构造出来。你在设计一种有系统性的方法能够去找出所有可能的凸多边形而不会有任何遗漏时，就需要利用对这些问题的回答。）

(3·8) 在一个由泛七巧板拼成的三角形中，三个角有哪些可能的取值类型？具有这样的三个角并且面积与泛七巧板原始三角形面积相等的三角形有多少个？

(3·9) (i)把泛七巧板的小板拼在一起能得到什么角？一个泛七巧板构造出的四边形的 4 个角，可能取值的类型有哪些？

(ii)若一个四边形有两个较大的（等）角和两个较小的（等）角，那么这两个较大的角可能是相邻的，或者是相对的。你必须依次地考察这些可能性。

(iii)知道了角也就知道了你在寻找的四边形的类型了，但还不知道四边形的准确形状。你已知道四边形的面积必定是多少，而对于它的边长、它的高等等，你又知道多少呢？不管你想构造什么形状的图形，一个十分重要的事实是：7 块小板中的两个大三角形必须以某种方式拼在一起。这就为你提供了图形"高"的最小值——一个大三角形任一底边上的高。另一个很有用的事实是：各块板的边长仅仅只能是最小三角形边长的倍数。于是，若你规定最小三角形（它们是等边三角形）的边长为 1，那么，你能构造出的任何一个四边形的边长必定为整数。而一个更为有用的事实是：7 块小板中的每一块，都仅能由整数个最小三角形组成。(后面，我们把这种最小三角形称为"最小单位"。）从而，能拼出的每个图形都恰好由 16 个最小单位构成。只要你谨慎地利用这些事实，你就能设计出系统性的方法，这种方法不仅能产生出所有可能的四边形，同时还能证明你没有漏掉一个图形。

(3·10)(i)对一个凸多边形，不可能有角指向其内部，所以它的每个角都小于 180°。利用泛七巧板只能得到两个小于 180°的角。它们是什么样的角呢？

(ii)你已知道求 n 边形内角和的公式（第九章习题34）。所以你能求出 n 边形内角的平均值为内角和的$\frac{1}{n}$，而且还可知道凸n边形中没有一个内角会大于(i)中求得的最大角。因此，你能列出全部 n 值，即这样的 n 值：对这样的 n，存在能用泛七巧板的全部 7 块小板拼成的n凸边形。这些可能的 n 值有哪些呢？

(iii)现依次逐个考虑每个这样的 n 值。你已在(3.8)和(3.9)中找出了凸三边形的四边形。

在往下读之前，先设法找出所有的凸五边形和六边形。若设用泛七巧板的 7 块小板拼成一个凸五边形是可能的，那么，它的角必须为多大呢？当你知道了它的角后，你就能勾画出这个图形，而且会看出，它一定是从一个平行四边形切下一个等边三角形而获得的。试问：这个被切下的等边三角形的面积A可能为多大呢(按“最小单位”量度)？我们能构造出哪些平行四边形，其面积为$16+A$个最小单位？

最后，若构造出六边形是可能的，那么它的角应是多大呢？而这对于六边形的三对对角，又会给你提供什么信息呢？试证明：没有一条边长能大于2个单位。有几条边恰有2个单位长呢？有几条边只能有 1 个单位长？利用这些问题的结果去构造出所有能用 7 块泛七巧板拼出的凸六边形。

4. 传统的“河内塔游戏”有3根木桩，有一个由尺寸逐步减小的若干圆环堆成的塔放置在其中一根木桩上。现在的问题是：要把这个圆环堆成的塔转移到另一根木桩上，并限定每次只能转移一个圆环，而且不允许把较大的圆环放在较小的上；在这些限制下要完成转移最少要移动多少次？若有多于 3 根木桩，完成塔的转移，最少需要移动多少次？

解答大要

(4·1) 首先，你要确信自己能够找出在 3 根木桩问题中所要求的最少移动次数，而且能够证明这个数确系最少移动次数。[你应自己做出一个尺寸减小的圆环堆成的塔；可用硬纸片或硬币作成。并想象有 3 根木桩 —— 左、中、右3根；可用三张平板代替

之。然后对不同数目的圆环堆成的塔作试验，直到你自认为已经知道了最少移动次数——按照前述要求把圆环塔从原来的木桩上（或平板上）移到另一根木桩（或平板）上的最少次数。填写图17.11中的表，至少直到$r=7$。设法找出一个用圆环的数目r表出的最

环的数目$=r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
最少移动次数$=m$									

图 17.11

少移动次数m的公式。并解释为什么你的公式确实给出了最少移动次数。

（4·2）现在试验有4根木桩（或平板）的情形。填写图17.12中的表，至少到$r=7$。

环的数目$=r$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
你能达到的最少移动次数									

图 17.12

（4·3）通过试验，发现错误，再试验……去寻找结果，显然不是一个很好的方法。4根木桩的问题比只有3根木桩的情形复杂得多；而要确认“你能达到的最少移动次数”实际上就是所要求的最少移动次数，几乎是不可能的。所以，你多多少少都不得不求助于一种“猜测—检验—修正你的猜测—再检验—…—证明”的过程。你应该不会以你在上表中填写出的数字为基础，从猜测$r=8$时所要求的最少移动次数开始；因为，我们毕竟已经注意到：超过$r=5$或$r=6$后，那些填出的数字可能并不是准确的了。

也许，作为一种替代，更好的选择是：首先考虑寻找把任何数量的圆环从一根木桩移到另一根木桩的一般方法——这个方法至少能得出与你在图17.12中得到的同样好的结果(也可能更好些)。现我们就来找出这个方法。

(4·4) 要用一种简单的方式来检验你得出的一般方法，并不是容易的事。例如，假定你那个方法预测出移动8个圆环的最少次数是33，它甚至还能告诉你如何实际用33次移动完成8个圆环的转移。但是，你怎么才能坚信，无论如何也不可能仅用31次移动来完成8个圆环的转移呢？(注意：所要求的最少移动次数只取奇数值。你知道这是为什么吗？)把转移8个圆环的所有可能的方式都作一番检验，就超出了我们问题的范围。那么，我们又该如何下手呢？

你需要做的第一件事就是要澄清你的那个一般的方法，使它显得可信。接着，你可以问自己一个问题：你的一般方法所需要的基本步骤是否就是为了尽可能高效率地转移 r 个圆环的塔所必须做出的那类移动？

(4·5) 你要做的另一件有意义的事，就是将你用一般方法预测得到的4根木桩问题的最少移动次数，与你在(4.1)中所知道的3根木桩问题的最少移动次数相比较。若你能看出3根木桩问题的最少移动次数的模式与4根木桩问题中你用一般方法预测的最少移动次数的模式间有某种联系，那么，你就可能会开始感觉到你是在正确的方向上前进。于是你就可能会有了足够的信心去设法证明你的猜测的正确性。现在，试填出图17.13中的表格至少到 $r=20$，并看看你是否能指出3根木桩问题中最少移动次数的模式与你用一般方法预测得到的4根木桩问题的最少移动次数的模式间的某种联系。

圆环数目＝r	三根木桩问题所需要的最少移动次数＝$M_3(r)$	四根木桩问题所需要的最少移动次数＝$M_4(r)$
0	0	0
1	1	1
2	3	3
3	7	
4	15	
5	31	
6		

图 17.13

（4·6）你解决有 r 个圆环的 4 根木桩问题的一般方法，可能利用了你已知道了解答的 3 根木桩问题和少于 r 个圆环的 4 根木桩问题的全部结果。那么，推广这个一般的方法到有 r 个圆环的 5 根木桩问题（图17.14），是并不困难的。你当然希望有一个预测 5 根木桩问题的最少移动次数的模式，并希望这种模式与你在（4.5）中所观察得到的模式是一致的。

（4·7）一当你对 4 根木桩问题得到了一种方法，用这种方法可以预测将 r 个圆环从一根木桩转移到另外一根木桩上的最少移动次数，并确信这绝对是最少次数，你就要设法证明：要进一步改进这个方法是不可能的。

圆环数目＝r	三根木桩问题的最少移动次数	四根木桩问题中预测的最少移动次数	五根木桩问题中预测的最少移动次数
0	0	0	0
1	1	1	1

续表

圆环数目＝r	三根木桩问题的最少移动次数	四根木桩问题中预测的最少移动次数	五根木桩问题中预测的最少移动次数
2	3	3	3
3	7	5	
4	15	9	
⋮			
16			

图 17.14

提示

(4·1) 当$r=0$，1，2，3 或 4 时，求得正确的m值不应有困难。再设法对$r=5$求得正确的m值。若你还不能找出一种模式，就请填出图17.15中稍有变化的一个表。

圆环数目＝r	0	1	2	3	4	5
(最少移动次数)＋1＝m＋1	1	2				

图 17.15

试猜测一个有关$m+1$的公式，然后说明它为什么总是正确的。(假设你想将r个圆环从木桩A移至木桩B，在某个时候，你就必须将最大的一个圆环从木桩A移至木桩B，当你在作这个移动时，其余$r-1$个圆环在哪里呢？将它们置于哪儿，需要作多少次移动呢？)

(4·3) 你的“用最少的移动次数将r个圆环从一根木桩转移到另一根木桩上的一般方法”可能会与什么有关呢？你一定知道

了在3根木桩问题中转移任何数目的圆环所需要的最少移动次数；而且，对4根木桩问题中r个圆环情形下的方法，显然可以利用已得出的少于r个圆环时的结果。

（4·5）当你试图理解一个数列，或者将两个数列作比较时，很自然地要做的一件工作就是考察相邻两项间的差异（见图17.16）。

$M_3(r)$：　0　1　3　7　15　31　63　·　·

　　　　　　1　2　4　8　16　32

四根木桩时的预测值：　0　1　3　5　9　·　·　·

　　　　　　1　2　2　4　?

图 17.16

（4·6）阅读提示直到(4.5)。

（4·7）迄至目前为止，下述各点应该很清楚了：将$r+1$个圆环从一根木桩转移到另一根木桩上的过程总是具有相同的基本结构：(1)将顶部的r个圆环从原来的木桩上移开，并（最后）让某一根木桩上没有任何圆环；(2)将最大的圆环转移到空着的那根本桩上；(3)将其余r个圆环转移到这个最大的圆环上面。第(1)步和第(3)步所需要的最少移动次数是有密切联系的；你能看出它们是如何相联系的以及为什么会有这种联系吗？在你认识到了这些以后，所需做的全部事情就仅仅是找出完成（1）的最有效的方式。

于是，解决“利用p根木桩，转移$r+1$个圆环”的这一主要问题的关键，就在于解决一个“中间问题”——转移顶部的r个圆环到$p-2$根木桩上（有一根木桩要保持空着，有一根木桩被最大的圆环占据着）所需的最少移动次数。使得3根木桩问题($p=3$)是如此地吸引人（而同时又是潜在地很容易引人误入歧途）之点在于：

在这种情形我们有$p-2=1$；这样，为了尽可能有效地转移$r+1$个圆环，我们需要解决的“中间问题”就恰恰正是同一个问题，仅仅只是用r取代了$r+1$。然而，当木桩的数目是4根或多于4根时，支配了我们原问题的中间问题就显得很不同了。所以，你得暂时把原问题搁一下，而首先把精力集中在中间问题：“已知在p根木桩中的某一根上有r个圆环，现要将这r个圆环转移到$p-2$根木桩上，而要让另外两根木桩保持空着，试求完成这一转移所需的最少移动次数。”

5.（a）在“计程车几何学”中，众所周知的二次曲线的“焦点—准线”定义会给出什么轨迹？“焦点—焦点”定义又会给出什么轨迹呢？这两族轨迹是互相联系的吗？（若是，它们是怎样关联的呢？若不是，那是为什么呢？）

（b）这些轨迹是否以某种方式与计程车几何学中圆锥的截平面有关联？

解答大要

（5·1）也许，首先应该做的一件事是复习在通常的欧几里德几何学中“焦点—准线”和“焦点—焦点”定义是怎样起作用的，以及为什么它们产生出同样的轨迹。若这些内容你还记得很清楚，就直接进到（5.2）。相反，你对欧几里德几何学中的圆锥曲线论不甚了解，则应仔细地做下面一组练习；并且，若有必要还应结合着阅读几何学教科书。你若能阅读*H*．*S*．M．考克斯特尔著的《几何学引论》（威利父子出版公司，1969）以及R．柯朗和H．罗宾所著的《数学是什么？》（*PP*.198～201；牛津大学出版社，1961），特别是后者，你将会发现这两本书的有关内容对你是非常有用的。

二次曲线的“焦点—准线”定义

(i)作一条直线l，并在直线l上取一点 P。

(a)试作出与直线l 和点P 等距离的点的轨迹。此轨迹称之为**抛物线**；P是它的焦点，而l为它的准线。

(b)已给出的直线 l和点P 提示了选取两条轴的方式，即一条为l本身（作为y轴），一条为过P点并垂直于l 的直线（作为x轴)，它交l于O点（为原点）.P点与O点间的中点在抛物线上，所以，很自然，把O与P的距离视为$2a$（a为某个值)，从而P的坐标为（$2a$，0)．试求出该轨迹的方程.

(c)将一条通过原点的直线绕x轴旋转，可以得一个二重无限的、中空的、顶点在原点的圆锥。位于圆锥上的任一条直线，称为**母线**；用平行于母线的平面去截圆锥，就得到了一条截面曲线r，它只在圆锥的一个截片上，但它的两端伸向无穷远。想象有一个球在圆锥中，被置于截平面与顶点之间，然后向球里充气，直到该球紧紧地充实于圆锥之内并与截平面在一点P处切触.该球沿一个圆C与圆锥切触。过C 的平面与原截平面交于直线l。试证明：曲线 r 是以 P 为焦点以 l 为准线的 抛 物 线（见R．柯朗和H． 罗宾：《数学是什么?》pp.199～201).

(ii)在平面上作一条直线l和l外一点P.

(a)试作出到P点的距离等于到直线 l 的距离之一半的点的轨迹。这个轨迹被称为离心率 $e=\frac{1}{2}$的椭圆；P 为该椭圆的焦点，l是它的准线．若$0<e<1$,那么，所有到P点的距离等于到直线l的距离的e倍的点形成的轨迹，是一个离心率为e的椭圆.

(b) 给定的直线 l 和点 P 提示了两条自然会选到的轴：直 线 l 本身（为 y 轴）和过 P 点且垂直于 l 的直线（为 x 轴)；此轴交

l 于 O 点（为原点）。将 OP 按比例 $1:e$ 分为两段的点在椭圆上，所以，很自然地可以认为 O、P 的距离等于 $c(1+e)$（这里，c 为某个常数）。于是 P 的坐标就可写成 $(c(1+e),\ 0)$。试求出上述轨迹的方程，然后用两个变量 $(x-c)/(1-e)$ 和 y 重写你得到的方程。（实际上，这个方程只包含了这两个变量的平方项。这个事实显示了：椭圆不仅以 x 轴而且以直线 $x=c/(1-e)$ 呈反射对称；故存在第二个焦点 $(c(1+e^2)/(1-e),\ 0)$ 和第二条准线 $x=2c/(1-e)$。）

(c) 试用一个平面去截一个无限的、中空的圆锥，以得出一条封闭的截面曲线；解释为什么这条截面曲线是一个椭圆，并求出它的离心率（用圆锥的半角和截平面的倾角表示）。

(iii) 作一条直线 l 和直线外一点 P。

(a) 试作出到 P 的距离等于到直线 l 之距离的两倍的点的轨迹。这个轨迹被称为离心率 $e=2$ 的双曲线，P 是双曲线的焦点，l 是双曲线的准线。若 $e>1$，则所有到 P 点的距离是到直线 l 的距离的 e 倍的点的轨迹，就是离心率为 e 的双曲线。

(b) 给定的直线 l 和点 P 提示了两条自然的轴，即直线 l 本身（作为 y 轴）和过 P 且垂直于 l 的直线（作为 x 轴）；此轴交 l 于 O 点（为原点）。将 OP 分为 $1:e$ 两段的点位于双曲线上，所以，很自然地可把 P、O 间的距离看作等于 $c(1+e)$（其中，c 为某个常数）。于是 P 的坐标为 $(c(1+e),\ 0)$。试求出上述轨迹的方程；然后以两个变量 $(x+c)/(e-1)$ 和 y 重新写出你所得到的方程。（实际上，这个方程只含有这两个变量的平方项。这个事实显示了：双曲线不仅以 x 轴，而且还以直线 $x=c/(1-e)$ 呈反射对称。故还存在第二个焦点 $(c(1+e^2)/(1-e),\ 0)$ 和第二条准线 $x=2c/(1-e)$。

(*c*) 用一个平面去截一个双重无限的、中空的圆锥(曲面)，该平面要既与圆锥的向上部分又要与向下部分相交。于是，截平面上的交线就有两支。试解释此交线就是双曲线，并求出其离心率(用圆锥的半角和截平面的倾角表出)。

附注 你也许已经注意到了(ii)和(iii)的情形，除了在(ii)中我们假定了$0<e<1$，而在(iii)中假定了$e>1$外，是完全一样的。而(i)则稍有不同，这部分地是因为当$e=1$时，所有分母为$(1-e)$的表达式都没有意义。

(*a*) 但是，若设：固定准线l和焦点P，而考虑其离心率e越来越靠近1的那些椭圆。于是，另一个焦点的坐标为$(c(1+e^2)/(1-e),\ 0)$；其中分子$c(1+e^2)$总是大于c，分母$1-e$总是保持大于0，但越来越靠近0。这就是说，第二个焦点沿x轴很快地向$+\infty$移动(方程为$x=2c/(1-e)$的第二条准线也是很快地向$+\infty$移去)。这样，若直线l和点P固定，那么，当e趋向于1时，我们得到了整个椭圆族，它们趋向于只有一个(有限远的焦点P，只有一条(有限远的)准线l的曲线，即具有焦点P和准线l的抛物线。

(*b*) 类似地，若固定准线l和焦点P，而考虑其离心率e越来越接近1的双曲线，那么另一个焦点的坐标就为$(c(1+e^2)/(1-e),\ 0)$，并且这个焦点随e趋于1而很快地沿x轴的负方向移向$-\infty$(另一条方程为$x=2c/(1-e)$的准线以及位于此准线左侧的那支双曲线也都一样地移向$-\infty$)。这样，若直线l和点P固定，那么，当e越向于1时，我们得到了整个双曲线族——它们趋近于只有一个分支、一个有限远焦点P和一条准线l的曲线，即焦点为P、准线为l的抛物线。

(c) 考虑一个平面，用它去截一个双重无限的、中空的圆锥(曲面)．当这个平面是以垂直于此圆锥(曲面)的轴的方向去截它时，截面上的截线就是一个圆．而当平面偏离这个方向去截圆锥曲面时，截线就变为一个椭圆．随着偏离角度的增大，椭圆也变得越来越大，直到最后平面沿平行于母线的方向去截圆锥曲面时，截痕变为一条抛物线．若平面再继续偏斜，并开始与双重无限的锥面的向上部分相截时，就得到了有两个分支的曲线，即双曲线．

附注(a)、(b)和(c)提示我们：应该把抛物线($e=1$，截平面与圆锥的轴的夹角等于锥面的母线与轴的夹角)看作是这样的一条曲线，即它居于椭圆($e<1$，截平面与轴的夹角大于母线与轴的夹角)与双曲线($e>1$，截平面与轴的夹角小于母线与轴的夹角)之间．

二次曲线的"焦点-焦点"定义

(ii) (a) 设 P 和 Q 是椭圆的两个焦点(此椭圆的方程你已在前面的(ii)中求得)．若 X 是椭圆上的任一点，试证明此点到 P 点和 Q 点的距离之和 $|PX|+|QX|$ 一定等于 $2ec/(1-e)$．

(b) 在平面上给定任意两点 P' 和 Q'，以及一个数 $d>|P'Q'|$．试作出所有满足 $|P'X'|+|Q'X'|=d$ 的点 X' 的轨迹，并解释为什么这个轨迹就是一个椭圆，为什么 P'、Q' 必定是此椭圆的两个焦点(参看R．柯朗和H．罗宾著《数学是什么?》pp．199-201)．然后求出此椭圆的离心率 e，以及每个焦点到与之关联的准线间的距离 $c(1+e)$．

(iii) (a) 设 P 和 Q 是双曲线的两个焦点(你在前面的(iii)中已找出了此双曲线的方程)．若 X 是双曲线上任一点，试证明

此点到 P 点和 Q 点的距离之差的绝对值 $||PX|-|QX||$ 一定等于 $2ec/(e-1)$。

(b) 在平面上给定任意两点P'和Q'以及一个数$d<|P'Q'|$，试作出所有满足 $||P'X'|-|Q'X'||=d$的点 X' 的轨迹，并解释为什么这个轨迹是双曲线，以及为什么P'和Q'一定是双曲线的焦点；然后求出双曲线的离心率 e，以及每个焦点到与之有关联的准线的距离 $c(1+e)$。

(5·2) 在这个问题研究的其余部分中，你可能会发现，利用图 17.17 中那种方形点是很有帮助的。任选一点 P，然后画出以 P 为中心，以 1、2、3、4 为半径的（计程车几何学）圆。

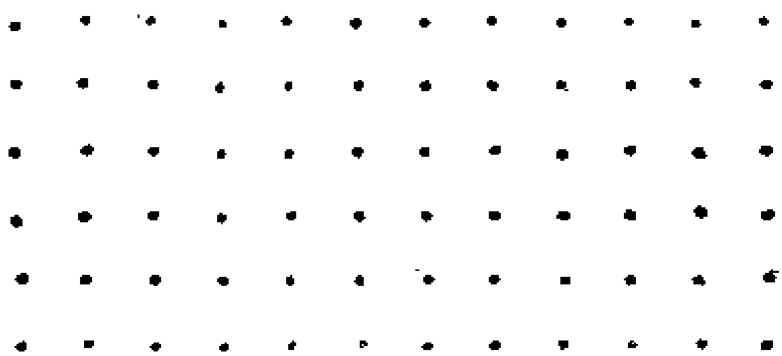


图 17.17

(5·3) **焦点-准线** 在欧几里德几何学中，焦点的选择和准线的选择对轨迹形状没有影响，唯一影响轨迹形状的是离心率e和焦点与准线的距离 $c(1+e)$。在计程车几何学中，选哪一点为焦点没有影响；但是在这种特殊的几何学中，距离的定义（“向前并向上”，或“向上并向前”，或…）却把平行于 x 轴的直线和平行于 y 轴的直线挑选出来作为特别的直线对待了。于是你可能会想到准线的方位要影响到具有“焦点-准线”性质的轨迹的形状。

(i) 任选一点 P 为焦点，选“垂直的”直线l 为准线，例如，相对于 P 为原点，此直线有方程 $x=-6$。

(a) 试作出以 P 为焦点、l 为准线，而离心率分别为$e=\frac{1}{2}$和$e=\frac{1}{3}$的两个“椭圆”。

(b) 试作出以 P 为焦点、l 为准线，而离心率 $e=1$ 的“抛物线”。

(c) 试作出以 P 为焦点、l 为准线、而离心率为别为 $e=2$ 和 $e=5$ 的“双曲线”(你应想到，每条双曲线都有两个支)。

(ii) 任选一点 P 为焦点，选择斜率为2的直线 l 为准线，例如，相对于 P 为原点，此直线有方程 $y=2x+12$。

(a) 试作出以 P 为焦点、以l 为准线，离心率分别为 $e=\frac{1}{2}$和$e=\frac{1}{5}$的“椭圆”。

(b) 试作出以 P 为焦点、以 l 为准线，离心率 $e=1$ 的“抛物线”。

(c) 试作出以 P 为焦点、以 l 为准线，离心率分别为 $e=2$和$e=5$的“双曲线”。

(iii) 任选一点 P 为焦点，而选斜率为 1 的直线 l 为准线，例如相对于 P 为原点，此直线方程为 $y=x+6$。

(a) 试作出以 P 为焦点，以 l 为准线，而离心率分别为 $e=\frac{1}{2}$和$e=\frac{1}{5}$的“椭圆”。

(b) 试作出以 P 为焦点，以 l 为准线，离心率为 $e=1$ 的“抛物线”。

(c) 试作出以 P 为焦点、以 l 为准线，离心率分别为 $e=2$和$e=5$的“双曲线”。

(iv) 在什么意义上，(i)、(ii)、(iii)中准线的三种方位代

表了所有可能的情形？

(v) 在(i)(a)中，以 P 为焦点，以 l 为准线，离心率 $e=\frac{1}{2}$ 和“椭圆”过点$(-2, 0)$。考虑所有以 P 为焦点，有一条垂直的准线并且过点$(-2, 0)$的“椭圆”(相对于 P 为原点)。当 l 的方程为 $x=-n$ 时，这样的椭圆就有离心率 $e=2/(n-2)$；当 $n\to\infty$ 时，这些椭圆将会出现什么情况呢？(这表明了“椭圆”的焦点——准线定义中包括了(5·2)中的“圆”——它仅为“椭圆”的一种极限情形)。

(5·4) **焦点-焦点** 在(5·3)中你已经看出，在计程车几何学中不同方位的准线是怎样产生出了不同形状的圆锥曲线的。以同样的方式，你可能预期对以“焦点-焦点”定义给出的曲线得到同样的结论，即具有“焦点-焦点”特性($|PX|+|QX|=$常数或$||PX|-|QX||=$常数)的轨迹的形状与连接两个焦点的直线 PQ 的方位有关。

现选任一点 P 为第一个焦点。

(i) 选坐标为$(4, 0)$(相对于 P 为原点)的点 Q 为第二个焦点。

(a) 试作出满足 $|PX|+|QX|=6$ 的点 X 的轨迹；所有满足 $|PX|+|QX|=7$ 的点 X 的轨迹；所有满足 $|PX|+|QX|=8$ 的点 X 的轨迹。这些“焦点-焦点”曲线是否与你在(5·3)中利用“焦点-准线”特征而得到的某个“椭圆”很相像呢？

(b) 试作出所有满足 $||PX|-|QX||=3$ 的点 X 的轨迹，满足 $||PX|-|QX||=2$ 的点 X 的轨迹，满足 $||PX|-|QX||=1$ 的点 X 的轨迹。这些“焦点-焦点”曲线是否像你在(5·3)中利用“焦点-准线”的特征而得出的某一条“双曲线”呢？

(ii) 选择坐标为(3, 1)(相对于 P 为原点)的 Q 为第二个为焦点。

(a) 试作出满足 $|PX|+|QX|=6$ 的点 X 的轨迹；满足 $|PX|+|QX|=7$ 的点 X 的轨迹；满足 $|PX|+|QX|=8$ 的点 X 的轨迹。这些"焦点-焦点"曲线是否象你在(5·3)中利用"焦点-准线"特征得到的某个"椭圆"呢?

(b) 试作出满足 $||PX|-|QX||=3$ 的点 X 的轨迹；满足 $||PX|-|QX||=2$的点 X 的轨迹；满足 $||PX|-QX||=1$的点 X 的轨迹。这些"焦点-焦点"曲线是否像你在(5·3)中利用"焦点-准线"特征得到的某条"双曲线"呢?

(iii) 选 Q 为第二个焦点，相对于原点为 P、Q 的坐标为(2, 2)。试作出所有满足 $|PX|+|QX|=6$的点 X 的轨迹；满足 $||PX|-|QX||=2$的点 X 的轨迹。这些"焦点-焦点"曲线是否像你在(5·3)中利用"焦点-准线"特征而得到的某个"椭圆"或"双曲线"呢?

(iv) 将第二个焦点 Q 选为重合于点 P，试作出满足 $|PX|+|QX|=4$ 的点 X 的轨迹，试将这条"焦点-焦点"曲线与你在(5·2)中得到的曲线相比较，并与你在(5·3)(V)中得到的当 $n\to\infty$ 时的极限曲线相比较。

(v) (i)~(iii)提示我们：对于计程车几何学的圆锥曲线，"焦点-焦点"特征并没有以任何明显的方式表现与(5·3)中的"焦点-准线"特征相一致。但是(iv)又显示：当两个焦点重合时，就完全与熟知的圆的定义相吻合了。你是否已经看出，在某种意义上，所有"焦点-焦点"曲线都仅仅是圆的推广?

(5·5) 就迄今所知而言，在计程车几何学中，具有"焦点-准线"特征的曲线和"焦点-焦点"特征的曲线间，并没有明显的

联系。然而，若你理解了(5·4)(b)所传达的意思，你就会同意具有“焦点-焦点”特征的曲线，看起来就只像是圆的推广。在欧几里德几何学中，具有“焦点-准线”特征（或“焦点-焦点”特征）的曲线，能由作为一个双重无限的立直的圆锥的平面截线而得到。在计程车几何学中，具有“焦点-准线”特征的曲线，或者“焦点-焦点”特征的曲线与一个双重无限的（计程车几何）圆锥之间是否也存在某种联系呢？

(i) 在计程车几何学中，一个圆是什么？由此，在这种几何学中，哪些熟知的对象扮演了“圆锥”的角色？

(ii) 在欧几里德几何学中，影响一个给定圆锥的平面截线的形状的唯一因素是截平面的倾斜角度.（对直立轴保持同一倾斜角度、但上下移动的截平面，只能影响截痕（线）的大小，而不会影响其形状。类似地，若将截平面绕圆锥的轴旋转，则因圆锥的对称性而不会对截痕（线）产生任何影响.）在计程车几何学中，圆锥却并没有这种轴对称性。若将截平面绕圆锥的直立轴旋转，就会得到不同形状的圆锥截线.

(*a*) 对一个双重无限的（计程车几何）圆锥，若截平面正好横截过此圆锥的无限延伸的一个部分而得到一条封闭的曲线，则称此圆锥平面截线是“椭圆形的”试作出当截平面以圆锥的轴为轴旋转时所得到的各种椭圆形截线。这些椭圆形曲线是否多少有点象你在(5·3)(i)(*a*)、(5·3)(ii)(*a*)、(5·3)(iii)(*a*)中所得到的曲线呢？

(*b*) 现请你对（计程车几何）圆锥的“抛物线形”的截线完成同样的工作。你所得到的曲线是否多少有点象你在(5·3)(i)(*b*)、(5·3)(ii)(*b*)、(5·3)(iii)(*b*)中所得到的曲线呢？或者象你在(5·4)(*i*)(*b*)、(5·4(ii)(*b*)、(5·4)(iii)中所得到的曲线呢？

(c) 请对“双曲线形”的截线作同样的工作。

(5·6) 若你准确地作出了(5·5)中的截线，那么你就能认识到：虽然它们的一般形状都与具有“焦点-准线”特征的曲线相类似，但它们不完全相同。

(i) 例如，你决不可能得到一条计程车几何圆锥的平面截线，它完全与你在(5·3)(iii)(b)中所得出曲线具有同样的形状。这是为什么呢？

(ii) 其它的曲线——它们具有“焦点-准线”特征，这个特征使得它们稍不同于圆锥截线——又怎么样呢？

(5·7) 尽管具有“焦点-准线”特征的曲线与你在(5·5)中得到的（计程车几何）圆锥截线之间存在差异，但它们之间的类似性也是引人注目的，值得进一步研究。下面几个问题可以作为这种进一步研究的起点。

(i) 假设你试图用丹德林球的方法来识别二次曲线的“焦点”和“准线(这条二次曲线是与计程车几何圆锥的截线相关联的)（参看R. 柯朗和H. 罗宾：《数学是什么》pp200～201）。那么，在计程几何学中，球又是什么呢？若你想以一种巧妙的方式将球放入圆锥里，这对于圆锥的顶角会向你提示什么呢？这个球会在哪里触及到截平面呢？

(ii) 在(5·5)(ii)(b)中若截平面平行于圆锥的一个面，那么我们就会得到一条“抛物线形”的截线，它类似于(5·3)(iii)(b)中的“抛物线”，有两个相等的“角”，但它们显著地小于(5·3)(iii)(b)中的135°的角。

(a) 作一个什么样的很自然的变换，就会把“抛物线形”的截线变换成(5·3)(iii)(b)意义下的“抛物线”？

(b) (5·3)(iii)(b)中的“抛物线”的两个无限长的“臂”会

在哪儿相交？上述“抛物线形”的截线的两条无限长的“臂”又会在哪儿相交呢？

(iii) (5·3)中的“椭圆”的对边在哪儿相交？(5·5)(i)中的“椭圆形”截线的对边又在哪儿相交呢？

提示

(5·2)半径为1的（计程车几何）圆必过 N、S、E、W 四点，这4个点分别在 P 点的上、下、左、右，且距 P 点1个单位。但这个圆也必过 X 点，此 X 在 P 点右边半个单位，且在P的上边半个单位$\left(\text{因为}\ \frac{1}{2}+\frac{1}{2}=1\right)$

(5·3) 要求你作出的每条“曲线”都由线段组成。请密切注意有下述特点的点：在这些点处，斜率突然改变。这些“角点”是与焦点和准线有关的吗？

(5·5) (i) 参看(5·2)。

(ii) 这些曲线并不是与你前面曾碰到过的那些曲线完全相同的，但它们以某种方式与那些曲线有明显的关系(参看(5·6))。

(5·7) (i)你当然希望这个（计程车几何）球在（计程车几何）圆锥内部“舒适地”被安放在圆锥顶部。

(ii) (*a*)将“抛物线形”的截线投影到过圆锥顶点的水平平面上。

6. 是否存在着一种一般模式，它支配着以任何数为基底的翻转数？

解答大要

虽然，从第七章和第十章的内容，你对于以10为基底的翻

转数，已知道了所有结果；但是对以其它数为基底的情形，却了解甚少。你在第八章中已发现，以10为基底的翻转数，仅仅是以任何数为基底的翻转数的一般模式中的特款（参看第七章末尾习题25(iv)的解答）。但是，除非你是相当认真地研究了第八章末尾的那个"研究项目"，否则你很可能就不会去追究这个一般的模式是否能够说明以任何数为基底的所有翻转数。于是，现在你就可能必须从一个个地列出翻转数开始着手进行，即对于 b 的某些较小的值，列出以 b 为基底的所有翻转数来。为了使这件事做起来简便，一个好的想法是：开始只集中考虑不超过 4 个数字的翻转数，然后，把你发现的结论推广到多于 4 个数字的情形，当然，在作这种推广以前，你必须对你希望得到什么结果有一个明确的概念。

(6·1) 假定我们不管诸如 $01\times2=10$（以 2 为基底）这样的情形（至少在开始时不考虑它们），试找出所有以 2 为基底的翻转数。

(6·2)(i)试找出以 3 为基底的仅有 2 个数字的所有翻转数。

(ii) 找出所有以 3 为基底的 3 个数字的翻转数。

(iii) 找出所有以 3 为基底的 4 个数字的翻转数。

(6·3) 对以 4 为基底的情形，重复(6·2)中所做的工作。

(6·4) 对以 b 为基底，b 的值取 5、6、7、8 和 9 的情形，重复(6·2)中所做的工作。

(6·5) (i) 若以 11 为基底，你预测会找到什么样的翻转数？

(ii) 对以 11 为基底的情形，重复(6·2)中所做的工作。

(6·6) 到现在，你应该是已经作了充分的思考。也许，首先分别考察 2 个数字、3 个数字和 4 个数字的情形，看它们各自在取

所有不同的数为基底时会发生什么结果，然后再考察多于4个数字的情形，确实是一个好主意。从理论上讲，给定了一个基底（比如说基底 b）后，你就需要有一种构造出以 b 为基底的，有 n 个数字的所有翻转数的诀窍，并且你也想要知道到底 n 个数字的翻转数有多少。在你设法去弄明白这些问题的时候，另外的两个问题会出现在你的面前，这两个问题也是我们在第八章所注意到了的。第一个问是关于以两个不同的数为基底的翻转数间的联系（参看第七章末尾习题 25(iv)的解答）；第二个问题是有关"x 倍翻转数，这里的 x 不为整数"（参看第八章末习题31的解答）。

提示

(6·1) 首先集中考虑小于 b 的"乘数"似乎是合理的（虽然，你以后有可能把 $01\times2=10$（以2为基底）看作一般模式的一个例子）。

(6·2) (i)也许，暂时排除对称的数（如象32823一类的数）是合适的；因为每一个这样的数都是一个以任何数为基底的1倍翻转数（即使以后你有可能要把诸如 $11\times1=11$（以3为基底）也看作一个很特殊的对称数）。

(6·4) 因(6·1)、(6·2)和(6·3)都没有产生任何意外的结果，并且你已经完全掌握了以10为基底的情形，这可能诱使你"偷工减料"，请一定不要这样！这里的每一个 b 都会为你提供某些东西的。

(6·5) (i)在对以11为基底的情形作出某种猜测之前，一定没法弄清：你在(6·4)中发现的令人吃惊的结果，为什么当 $b=10$ 时没有出现呢？

所有不同的数为基底时会发生什么结果，然后再考察多于4个数字的情形，确实是一个好主意。从理论上讲，给定了一个基底（比如说基底b）后，你就需要有一种构造出以b为基底的，有n个数字的所有翻转数的诀窍，并且你也想要知道到底n个数字的翻转数有多少。在你设法去弄明白这些问题的时候，另外的两个问题会出现在你的面前，这两个问题也是我们在第八章所注意到了的。第一个问是关于以两个不同的数为基底的翻转数间的联系（参看第七章末尾习题25(iv)的解答）；第二个问题是有关"x倍翻转数，这里的x不为整数"（参看第八章末习题31的解答）。

提示

(6·1) 首先集中考虑小于b的"乘数"似乎是合理的（虽然，你以后有可能把$01\times2=10$（以2为基底）看作一般模式的一个例子）。

(6·2) (i)也许，暂时排除对称的数（如象32823一类的数）是合适的；因为每一个这样的数都是一个以任何数为基底的1倍翻转数（即使以后你有可能要把诸如$11\times1=11$（以3为基底）也看作一个很特殊的对称数）。

(6·4) 因(6·1)、(6·2)和(6·3)都没有产生任何意外的结果，并且你已经完全掌握了以10为基底的情形，这可能诱使你"偷工减料"，请一定不要这样！这里的每一个b都会为你提供某些东西的。

(6·5) (i)在对以11为基底的情形作出某种猜测之前，一定设法弄清：你在(6·4)中发现的令人吃惊的结果，为什么当$b=10$时没有出现呢？