《概率与统计》内容总结与习题：数字特征

课本例题、习题分类：

1. 数学期望、随机变量的函数的期望、方差、常见分布的期望与方差：§3.1例1-4，§3.2例1-4、例6（解法二），§3.4例1-4、例7-8、例10；习题三3.1-3.19
2. 矩：§3.6例1；习题三3.20-3.22
3. 协方差与相关系数：§3.7例1-2、例4；习题三3.23-3.27
4. 切比雪夫不等式与大数定律：§3.8定理2的证明，自学例题；习题三3.28-3.31

补充习题（本部分习题未涵盖本章的全部主要内容，仅为课本例题、习题的补充）：

1. 判断以下论述正确与否：

   (1) 随机变量X的可能值为数列$\{x_k\}_{k\geq 1}$，对每个k，$P\{X=x_k\}=p_k$。如果级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k p_k$收敛，则该级数的和为$X$的数学期望；（ ）

   (2) 若两个随机变量相互独立，则这两个随机变量的相关系数为零。（ ）

   (3) 若两个随机变量的相关系数为零，则这两个随机变量相互独立。（ ）

   (4) 两个随机变量X与Y不相关当且仅当$D(X+Y)=DX+DY$。（ ）

   (5) 两个随机变量X与Y不相关当且仅当$E(XY)=EX\cdot EY$。（ ）

   (6) 两个随机变量X与Y不相关当且仅当$E(X+Y)=EX+EY$。（ ）

2. 选择题

(1) 已知随机变量ξ具有如下分布律

ξ	1	2	3
P	k	0.1	j

且$E\xi^2=5.3$，则$j=$

(A) 0; (B) 0.1; (C) 0.2; (D) 0.5.

(2) 设随机变量X的期望为μ，则对任意常数c，

(A) $E[(X-c)^2]=E(X^2)-c^2$; (B) $E[(X-c)^2]=E[(X-\mu)^2]$;

(C) $E[(X-c)^2]<E[(X-\mu)^2]$; (D) $E[(X-c)^2]\geq E[(X-\mu)^2]$.

(3) 对于随机变量X和Y，若$D(X+Y)=DX+DY$，则

(A) X和Y一定独立; (B) X和Y一定不独立;

(C) $D(XY)=DX\cdot DY$; (D) $E(XY)=EX\cdot EY$.

(4) 连续随机变量X的数学期望<u>不存在</u>，若其概率密度为

(A) $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{x}}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它};\end{cases}$ (B) $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它};\end{cases}$

(C) $f(x)=\begin{cases}\frac{2}{\pi(1+x^2)}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0;\end{cases}$ (D) $f(x)=\begin{cases}\frac{6x}{\pi^2(e^x-1)}, & x>0,\\ 0, & x\leq 0.\end{cases}$

(5) 设随机变量X的概率分布为

$$P\{X=n\}=P\{X=-n\}=\frac{1}{2n(n+1)},\quad n=1,2,\cdots,$$

则$EX=$

(A) 0; (B) 0.5; (C) 1; (D) 不存在.

(6) 设随机变量X和Y相互独立，方差分别为4和2，则随机变量$3X-2Y$的方差为

(A) 8; (B) 16; (C) 28; (D) 44.

(7) 设随机变量X服从参数为0.5的指数分布，Y服从参数为3的泊松分布，则下列等式<u>不成立</u>的是

(A) $E(X+Y)=5$; (B) $E(Y^2)=12$;

(C) $D(X+Y)=7$; (D) $E(X^2)=8$.

(8) 对任意的随机变量X和Y，与命题"X和Y不相关"<u>不等价</u>的是

(A) $E(XY)=EX\cdot EY$; (B) $\mathrm{cov}(X,Y)=0$;

(C) $D(XY)=DX\cdot DY$; (D) $D(X+Y)=DX+DY$.

(9) 在n重伯努利试验中，事件A每次发生的概率为p。分别用X和Y表示n次试验中事件A成功与失败的次数，则X和Y的相关系数为

(A) -1; (B) 0; (C) 0.5; (D) 1.

(10) 设随机变量X服从区间$[-1,1]$上的均匀分布，则$\arcsin X$和$\arccos X$的相关系数为

(A) -1; (B) 0;

(C) 0.5; (D) 1.

(11) 设随机变量X和Y独立同分布，则随机变量$X+Y$和$X-Y$一定

(A) 独立; (B) 相关; (C) 不独立; (D) 不相关.

(12) 设随机变量X和Y的方差存在，则$D(X+Y)=DX+DY$是X和Y

(A) 不相关的充分但不必要条件; (B) 不相关的充分必要条件;

(C) 独立的充分但不必要条件; (D) 独立的充分必要条件.

(13) 设随机变量X和Y的联合密度为

$$f(x,y)=\begin{cases} x+y, & 0\le x,y\le 1, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

则

(A) $EX=EY=\dfrac{3}{2}$; (B) $D(X-Y)=\dfrac{11}{72}$;

(C) $EX=EY=\dfrac{7}{12}$; (D) $D(X+Y)=\dfrac{11}{72}$.

(14) 设$D(X+Y)=D(X-Y)$，则

(A) X和Y独立; (B) X和Y不相关;

(C) $D(XY)=DX\cdot DY$; (D) $D(X-Y)=0$.

3. 证明：任意二维随机变量(X,Y)的协方差阵为半正定矩阵。

4. 简答题：简述辛钦大数定律、伯努利大数定律的意义。

5. 利用切比雪夫不等式证明以下定理:

(a) 辛钦大数定律：设有独立同分布的随机变量序列$\{X_n\}_{n\ge1}$，其数学期望及方差均存在:

$$EX_n=\mu,\quad D(X_n)=\sigma^2,\quad n=1,2,\cdots.$$

则对任意正数ε,

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\mu\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

(b) 伯努利大数定律：在独立实验序列中，记事件A的概率为p。以$f_n(A)$表示前n次试验中事件A发生的次数，则

$$\frac{f_n(A)}{n}\xrightarrow{P}p,$$

即对任意正数ε,

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{f_n(A)}{n}-p\right|<\varepsilon\right\}=1.$$