目　录

第 1 章

一般迭代理论

所谓迭代，可看作同一个运算或操作的多次重复. 自然数的乘法 $a \times k$，即 k 个 a 的累加

$$\underbrace{a+a+\cdots+a}_{k}$$

可看作加法运算或函数 $f(x)=x+a$ 的迭代. 同样，乘方也可以理解为迭代. 我们熟悉的等差数列和等比数列显然也是迭代产生的. 迭代是自然科学乃至人类生活的一个普遍现象. 在实验中，我们常常通过对初始状态到当前状态的记录，来分析系统运动的规律. 有时，从一个状态到下一状态的变化遵从同一个规则，一旦这一规则被发现，我们就可以确定和预测系统的演变，这就是所谓确定性系统的思想. 例如生态学中研究的昆虫种群量模型

$$x_{n+1}=x_n(a-bx_n), \quad 0 \le x_n \le a/b,$$

可看作函数 $f(x)=x(a-bx)$ 的迭代. X - 射线的透射可看作射线衰减率的迭代. 在流体渗流、传热和其他动力学模型中，还可举出很多迭代的例子. 在数学和计算机科学研究中，我们常常用数值方法把微分方程化为迭代，以便设计计算程序. 也常常通过讨论相空间上庞加莱（ J.-H.Poincaré ）映射的迭代，来分析向量场的周期性和混沌性. 就连循环语句的计算程序也是一个迭代. 在经济生活中，我们时常计算贷款的本利和. 如果本金 P 以利率 r 借贷 n 年，按单利结算，其总和为 $A_n=P(1+nr)$；若按复利结算，其总和应为 $A_n=P(1+r)^n$. 显然，A_n 分别是函数 $a(x)=x+rP$ 和 $a(x)=x(1+r)$ 的迭代. 研究迭代的规律显然非常重要.

§ 1 复合函数

首先从一个简单概念说起. 若 y 是 u 的函数, 即 $y=f(u)$, 而 u 又是 x 的函数, 即 $u=g(x)$, 则称 y 为 x 的 **复合函数**, 记为 $y=f(g(x))$ 或 $y=f\circ g(x)$. 例如: $f(x)=\sin x$, $g(x)=x^2$, $f(g(x))=\sin x^2$. 一些简单的初等函数经过复合, 会变得十分复杂.

复合函数是数学分析的基本概念, 我们可以回顾复合函数的许多性质:

单调性: f, g 都递增, 则复合函数 $f\circ g$ 递增; f, g 都递减, 则复合函数 $f\circ g$ 递增; f 递增而 g 递减, 或 f 递减而 g 递增, 则复合函数 $f\circ g$ 递减; f 和 g 的单调性都严格时, 复合函数 $f\circ g$ 的单调性也严格.

奇偶性: f, g 都是奇函数, 则复合函数 $f\circ g$ 是奇函数; f, g 都是偶函数, 则复合函数 $f\circ g$ 是偶函数; f 或 g 有一个是偶函数而另一个是奇函数, 则复合函数 $f\circ g$ 是偶函数.

连续性: g 在区间 $[a,b]$ 上连续而 f 又在包含 g 的值域的区间上连续, 则复合函数 $f\circ g$ 也在区间 $[a,b]$ 上连续.

可微性: $g(x)$ 在 $x=x_0$ 可微, 而 $f(u)$ 又在 $u=g(x_0)$ 可微, 则复合函数 $f\circ g(x)$ 在 $x=x_0$ 可微, 且在 $x=x_0$ 有 $(f\circ g(x))'=f'(g(x))g'(x)$.

如果函数 $y=f(u)$ 和 $u=g(x)$ 都有 n 阶导数, 我们还有复合函数的高阶导数公式

$$\frac{d^n}{dx^n}(f\circ g(x))=\sum_{i,i_k\in A}\frac{n!f^{(i)}}{i_1!i_2!\cdots i_n!}\left(\frac{g^{(1)}}{1!}\right)^{i_1}\left(\frac{g^{(2)}}{2!}\right)^{i_2}\cdots\left(\frac{g^{(n)}}{n!}\right)^{i_n},$$

其中 $f^{(i)} := f^{(i)}(g(x))$，求和条件 A 为

$$1 \le i \le n, \quad \sum_{k=1}^{n} i_k = i, \quad \sum_{k=1}^{n} k\, i_k = n.$$

建立在函数复合基础上有两个熟知的定理. 由于它们非常基本而且在许多教科书上都能见到, 在此我们仅叙述结果而不给证明.

定理 1 (隐函数定理) 函数 $F(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域上连续, 对邻域内任一固定的 x 函数 $F(x,y)$ 关于 y 连续可微, 而且

$$F(x_0,y_0)=0, \quad F'_y(x_0,y_0)\neq 0,$$

那么在 x_0 的一小邻域 $B(x_0)$ 上存在唯一的连续函数 ϕ, 满足

$$F(x,\phi(x))=0 \quad \forall x\in B(x_0), \quad \phi(x_0)=y_0.$$

ϕ 称为 F 的隐函数. 进而, 若 F 连续可微, 则 ϕ 也是连续可微的, 且在 x_0 附近

$$\phi'(x) = -\frac{F'_x(x,y)}{F'_y(x,y)}.$$

定理 2 (反函数定理) 函数 $f(x)$ 在点 $x=x_0$ 的邻域上连续可微, 且

$$f(x_0)=y_0, \quad \frac{d}{dx}f(x_0)\neq 0,$$

那么在 y_0 的一小邻域 $B(y_0)$ 上存在唯一的连续可微函数 ψ，满足

$$f(\psi(y))=y. \qquad \forall y\in B(y_0),\ \psi(y_0)=x_0$$

ψ 称为 f 的反函数, 记为 f^{-1} . 进而, 在 y_0 附近 $\psi'(y)=1/f'(x)$.

同一个函数 $f(x)$ 的多次复合, $f(f(x))$, $f(f(f(x))),\cdots$，称为函数 $f(x)$ 的迭代. 为简便起见, 记为 $f^2(x)$, $f^3(x),\cdots$. 函数的迭代通常是复杂的, 尤其是非线性函数的迭代. 例如, 看似简单的函

数 $f(x)=\mu-x^2$ 和 $f(x)=\sin x$ ，不仅其 n 次迭代的函数性质十分复杂，而且当 $n\to\infty$ 时的极限行为还会出现许多意想不到的事情. 非线性函数的复杂性常常通过迭代而被放大了. 往后我们将看到，由函数的复合运算可以构筑一个多姿多彩的世界.

§2 初 等 迭 代

函数迭代在初等数学中就已经接触到. 通过一些简单的例子，我们可以对迭代产生更多的感性认识. 首先来看一个来自于日常生活的初等问题.

一个容积为 0.5 升的杯子盛满刚沏好的茶，通常“喝完”的习惯是喝掉 $\frac{2}{3}$ 后再加满开水. 加 10 次水后认为是喝淡了. 如果能测定此时茶质和水的比例为 a ，简称茶水比，问最初的茶水比是多少？

我们的解法是：设最初的茶水比是 x . 那么，喝完一次并加满水后的茶水比是

$$f(x)=\frac{(x/(x+1))\times 0.5/3}{0.5/3-(x/(x+1))\times 0.5/3+0.5\times 2/3}=\frac{x}{2x+3}.$$

这样，问题化成了：已知 f 的 10 次迭代 $f^{10}(x)=a$ ，求 x . 直接计算，或利用将要给出的例 2 的结果，可得到

$$f^{10}(x)=\frac{x}{(3^{10}-1)x+3^{10}}.$$

从 $x/((3^{10}-1)x+3^{10})=a$ 易解得

$$x=\frac{3^{10}a}{1-(3^{10}-1)a}.$$

显然，计算 f 的 10 次迭代是解决这一问题的关键.

计算函数的迭代不仅重要，而且有趣. 对一般给定的函数，我

们希望计算其迭代的表达式，尤其是一般的 n 次迭代式. 例如，通过直接计算可以求得

$$
\begin{aligned}
&\text{如 } f(x)=x+b\text{，} && \text{则 } f^n(x)=x+nb;\\
&\text{如 } f(x)=cx\text{，} && \text{则 } f^n(x)=c^n x;\\
&\text{如 } f(x)=x^k\text{，} && \text{则 } f^n(x)=x^{k^n}.
\end{aligned}
$$

然而，对稍微复杂一点的初等函数，我们就会感到直接计算迭代式是件非常困难的事情. 以下我们介绍两种方法.

不动点法

如果能断定一个函数 f 迭代式的基本代数形式，如线性式、线性分式、多项式等等，我们可以设置待定常数，并用函数 f 的不动点来确定这些常数. 如果 $x_0 \in I$, $f(x_0)=x_0$, x_0 称为 f 的不动点.

[例 1]　$f(x)=ax+b,\quad a,b\in\mathbf{R},\ a\neq 1$.

首先，f 是线性的，可以肯定 f^n 也是线性的，不妨设

$$f^n(x)=a^n x+B,$$

其中 B 待定. 从 $f(x)=x$ 解出 f 的不动点 $x_0=\frac{b}{1-a}$. 由 $f(x_0)=x_0$ 必然 $f^n(x_0)=x_0$ ，这一关系表明

$$a^n\frac{b}{1-a}+B=\frac{b}{1-a},$$

从中解得 $B=\frac{1-a^n}{1-a}\cdot b$, 从而

$$f^n(x)=a^n x+\frac{1-a^n}{1-a}\cdot b.$$

共轭相似法

直观地讲，如果存在可逆函数 $h(x)$ ，使函数 f 与 g 满足

$$f=h^{-1}\circ g\circ h,$$

就称 f 与 g **共轭**，或说 **相似**，记为 $f\sim g$．它是一种等价关系，即满足：(1) 自反性：$f\sim f$; (2) 对称性：$f\sim g\ \Rightarrow\ g\sim f$; (3) 传递性：$f\sim\phi,\ \phi\sim g\ \Rightarrow\ f\sim g$．尤其是 $f\sim g\ \Rightarrow\ f^n\sim g^n$，即从 $f=h^{-1}\circ g\circ h$ 可导出

$$f^n=h^{-1}\circ g^n\circ h.$$

我们常常利用这一性质，设法把一个复杂的函数迭代化成一较简单的函数迭代.

我们再考虑例 1．取 $h(x)=x+\frac{b}{a-1}$，易见 $h^{-1}(x)=x-\frac{b}{a-1}$．则

$$f(x)=h^{-1}(ah(x))=a\Big(x+\frac{b}{a-1}\Big)-\frac{b}{a-1}.$$

从而

$$\begin{aligned}f^n(x)&=h^{-1}(a^nh(x))=a^n\Big(x+\frac{b}{a-1}\Big)-\frac{b}{a-1}\\&=a^nx+\frac{a^n-1}{a-1}\cdot b.\end{aligned}$$

这同样得到了刚才的结果.

[例 2]　考虑有理分式

$$f(x)=\frac{ax+b}{x+c},\tag{2.1}$$

其中 $a,b,c\in\mathbf{R}$, $ac-b\neq0$．我们有结论:

$$f^n(x)=s+\frac{(a-s)^n(x-s)}{((a-s)^n-(s+c)^n)x_0(x-s)+(s+c)^n},$$

其中 s 是二次方程 $s^2-(a-c)s-b=0$ 的一个根，$x_0=1/(a-c-2s)$．

事实上，令 $h(x)=1/(x-s)$，易见 $h^{-1}(x)=\frac{1}{x}+s$．由 s 的定义知它是 f 的一个不动点，从而

$$f(h^{-1}(x))=\frac{a+asx+bx}{1+sx+cx}=\frac{a-s}{1+(s+c)x}+s,$$

并且

$$h(f(h^{-1}(x))) = \frac{1}{f(h^{-1}(x)) - s} = \frac{1+(s+c)x}{a-s}$$
$$= \Big(\frac{s+c}{a-s}\Big)x + \frac{1}{a-s}.$$

上式右端记为 $g(x)$，从而建立了共轭关系 $h(f(h^{-1}(x))) = g(x)$．由 g 的简单形式可算出

$$\begin{aligned} g^n(x) &= \Big(\frac{s+c}{a-s}\Big)^n x + \frac{1}{a-s}\sum_{k=0}^{n-1}\Big(\frac{s+c}{a-s}\Big)^k \\ &= \Big(\frac{s+c}{a-s}\Big)^n x + \frac{1}{a-s}\Big(\Big(\frac{s+c}{a-s}\Big)^n - 1\Big)\Big/\Big(\frac{s+c}{a-s} - 1\Big) \\ &= \Big(\frac{s+c}{a-s}\Big)^n (x - x_0) + x_0, \end{aligned}$$

其中 $x_0 = 1/(a-c-2s)$．于是,

$$\begin{aligned} f^n(x) = h^{-1}(g^n(h(x))) &= \Big(g^n\Big(\frac{1}{x-s}\Big)\Big)^{-1} + s \\ &= s + \frac{(a-s)^n(x-s)}{((a-s)^n - (s+c)^n)x_0(x-s) + (s+c)^n}, \end{aligned}$$

从而证实了结论.

有些看来复杂的函数，其迭代其实很简单.

[例 3]　$f(x) = x/\sqrt[k]{1+ax^k}$．

令

$$h(x) = x^k, \quad g(x) = \frac{x}{1+ax}.$$

易见，$f(x) = h^{-1}\circ g\circ h(x)$．直接计算，或利用例 2 的结果，知 $g^n(x) = \frac{x}{1+nax}$，从而

$$f^n(x) = \frac{x}{\sqrt[k]{1+nax^k}}.$$

上述例子中，我们常常用共轭相似法把函数化成 $g(x)=cx$ 或 $g(x)=x+b$. 这是典型的哈特曼 - 格诺曼线性化思想 [88] . 要确定共轭变换 $h(x)$ ，就要解函数方程

$$h(f(x))=c\,h(x),$$

或

$$h(f(x))=h(x)+b.$$

这正是著名的施罗德方程和阿贝尔方程. 由此可见, 除了对一些特殊类型的函数外，无论用什么方法求解迭代式，都是一件困难的事.

§ 3 迭代估值

计算初等函数的迭代是十分复杂的. 事实上，并非所有的初等函数的迭代都有初等的表达式，例如 $f(x)=\sin x$ 的迭代. 因此我们发展了一套对迭代式进行估计的方法.

定理 1 设 f,ϕ,ψ 都是定义在区间 I 上且可以迭代的函数，如果 ϕ,ψ 都递增，而且对一切 $x\in I$ 有 $\phi(x)\le f(x)\le\psi(x)$ ，则必有 $\phi^n(x)\le f^n(x)\le\psi^n(x)$.

证明 $n=1$ 时显然. 设结论在 $n=k$ 时成立, 易见 $\phi(f^k(x))\le f(f^k(x))\le\psi(f^k(x))$ ，由 ϕ,ψ 都递增,

$$\phi(f^k(x))\ge\phi(\phi^k(x))=\phi^{k+1}(x),$$
$$\psi(f^k(x))\le\psi(\psi^k(x))=\psi^{k+1}(x).$$

因此，$\phi^{k+1}(x)\le f^{k+1}(x)\le\psi^{k+1}(x)$. 从而用数学归纳法证明了这一结果. □

这个简单的事实告诉我们: 可以用两个简单的、便于迭代计算的函数 ϕ 和 ψ 来估计迭代的上、下界.

[例 1]　$f(x) = \sin x$, $f^n(x) = \underbrace{\sin\sin\cdots\sin}_{n} x$.

首先，由显然的几何事实 $\sin x < x < \tan x$, $\forall x \in (0, \pi/2)$ 知

$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < \cos\frac{x}{2}.$$

注意到当 $0 \le x < \pi/4$ 时，

$$\cos^2 x = 1 - \sin^2 x \ge 1 - x^2 > \frac{1}{1+3x^2},$$
$$\cos^2\frac{x}{2} = 1 - \sin^2\frac{x}{2} \le 1 - \frac{x^2}{4}\cos^2\frac{x}{2} < 1 - \frac{x^2}{5} \le \frac{1}{1+x^2/5}.$$

于是，当 $0 \le x < \pi/4$ 时，

$$\frac{x}{\sqrt{1+3x^2}} < \sin x < \frac{x}{\sqrt{1+x^2/5}}.$$

再利用 §2 的例 3 的结论和上述定理 1， 得

$$\frac{x}{\sqrt{1+3nx^2}} < f^n(x) < \frac{x}{\sqrt{1+nx^2/5}}.$$

我们可以证明一些较一般的结果，它们分别对应于函数在不动点处导数的绝对值 < 1, $= 1$ 和 $= 0$ 的情形.

定理 2　设 $f(x) = qx(1 + r(x))$, $x \in [0, c)$ ，其中 $0 < |q| < 1$, $|r(x)| < M|x|^\delta$, $M > 0$, $\delta > 0$. 则当 $|x|$ 足够小，使 $1 + r(x) > 0$, $|(1 + M|x|^\delta)q| \le p < 1$ 时， f 的迭代有估计

$$\exp\left\{\frac{-M|x|^\delta}{(1-M|x|^\delta p^\delta)(1-p^\delta)}\right\}q^n x \le f^n(x) \le \exp\left\{\frac{M|x|^\delta}{1-p^\delta}\right\}q^n x.$$

定理 3　设 $f(x) = x - \lambda x^{k+1} + r(x)$, $x \in [0, c)$ ，其中 $\lambda > 0$, $k \in \mathbf{Z}^+$ 且 $|r(x)| \le \varepsilon x^{k+1}$, $0 < \varepsilon < \lambda$. 则当 $0 < k(\lambda \pm \varepsilon)c^k < 1$

时， f 的迭代有估计

$$\frac{x}{\sqrt[k]{1+nax^k}} \le f^n(x) \le \frac{x}{\sqrt[k]{1+nbx^k}},$$

其中 $a = k(\lambda+\varepsilon)/(1-k(\lambda+\varepsilon)c^k)$, $b = k(\lambda-\varepsilon)(1-(k-1)(\lambda-\varepsilon)c^k/2)$.

定理 4 设 $f(x) = \lambda x^k M(x)$, $x \in [0,c)$ ，满足 $0 < f(x) < x$, $\forall x \neq 0$ ，其中 $\lambda > 0$, $k > 1$ 且 $1/(1+\varepsilon) \le M(x) \le 1+\varepsilon$. 则 f 的迭代有估计

$$e^{-\varepsilon k^n/(k-1)} \lambda^{(k^n-1)/(k-1)} x^{k^n} \le f^n(x) \le e^{\varepsilon k^n/(k-1)} \lambda^{(k^n-1)/(k-1)} x^{k^n}.$$

例如，在定理 2 的情形下，

$$\begin{aligned}|f(x)| = |qx(1+r(x))| &\le |q(1+|r(x)|)| \cdot |x| \\ &\le |q(1+M|x|^\delta)| \cdot |x| \le p|x|.\end{aligned}$$

显然可归纳地获得一个粗略的估计

$$|f^n(x)| \le p|f^{n-1}(x)| \le p^n|x|.$$

为做进一步估计，我们注意到

$$\begin{aligned}1 + r(f^k(x)) &\le 1 + M|f^k(x)|^\delta \\ &\le 1 + M|x|^\delta p^{k\delta} \le e^{M|x|^\delta p^{k\delta}},\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}1 + r(f^k(x)) &\ge 1 - M|f^k(x)|^\delta \\ &\ge 1 - M|x|^\delta p^{k\delta} = 1/\Big(1 + \frac{M|x|^\delta p^{k\delta}}{1 - M|x|^\delta p^{k\delta}}\Big) \\ &\ge e^{-\frac{M|x|^\delta p^{k\delta}}{1-M|x|^\delta p^{k\delta}}} \ge e^{-\frac{M|x|^\delta p^{k\delta}}{1-M|x|^\delta p^\delta}},\end{aligned}$$

这里用到一个基本事实 $e^x \geq 1+x, \forall x \geq 0$. 由于从 $f(x)$ 的表达式可迭代递推地得到

$$
\begin{aligned}
f^n(x) &= qf^{n-1}(x)(1+r(f^{n-1}(x))) \\
&= q^n x(1+r(x))(1+r(f(x)))\cdots(1+r(f^{n-1}(x))),
\end{aligned}
$$

利用上述关于 $1+r(f^k(x))$ 的上下界估计及

$$
1+p^\delta+p^{2\delta}+\cdots+p^{(n-1)\delta} \leq \frac{1}{1-p^\delta},
$$

显然可推出定理 2 的估计式. 其他两个定理的证明，可参见 [74] 和 [75] .

如果函数 f 的迭代序列 $\{f^n(x)\}$ 在某处收敛，则该迭代在此处的估值问题变得十分简单.

定理 5 函数 $f: I=[a,b] \to I$ 连续，且 $x \in I$ 使得 $f^n(x)$ 当 $n \to +\infty$ 时收敛，那么其极限点 x^* 必为方程 $f(x)-x=0$ 的解.

事实上， I 为闭区间，则 $x^* \in I$. 由连续性,

$$
f(x^*) = \lim_{n\to+\infty} f(f^n(x)) = x^*.
$$

[例 2] $f(x)=\frac{1}{m}((m-1)x+\frac{a}{x^{m-1}}$, $x>0$ ，其中 $a>0$ 而 $m>1$ 是正整数. 对 $\forall x \geq \sqrt[m]{a}$ ，显然 $x \geq \frac{a}{x^{m-1}}$ ，因而

$$
\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{m-1}{m} - \frac{(m-1)a}{mx^m} \geq 0, \\
x &= \frac{1}{m}((m-1)x+x) \geq \frac{1}{m}\left((m-1)x+\frac{a}{x^{m-1}}\right) = f(x),
\end{aligned}
$$

故对固定的 $x \geq \sqrt[m]{a}$ ，序列 $\{f^n(x)\}$ 单调递减. 进而，用平均不等式可见

$$
\frac{1}{m}((m-1)x^m+a) \geq (ax^{m(m-1)})^{1/m} = a^{1/m}x^{m-1}.
$$

从而，
$$f(x)=\frac{1}{m}\Big((m-1)x+\frac{a}{x^{m-1}}\Big)\geq\sqrt[m]{a}>0.$$
这样，序列 $\{f^n(x)\}$ 必然有下界. 因此，对固定的 $x\geq\sqrt[m]{a}$ ，这个序列是收敛的. 按定理 5 ， 这个极限值 x_0 可从
$$f(x_0)=\frac{1}{m}\Big((m-1)x_0+\frac{a}{x_0^{m-1}}\Big)=x_0$$
中解出. 由简单计算可见，
$$\lim_{n\to+\infty}f^n(x)=x_0=\sqrt[m]{a},\qquad\qquad \forall x\geq\sqrt[m]{a}$$
自然能得到 $f(x)$ 迭代的渐近估值. 事实上，这个例子给出了一个开方的计算方法.

§ 4 迭代的基本问题

迭代并不局限于函数. 对迭代有了感性认识后，我们再对它给出一般的定义.

定义 1 设 $f:X\to X$ 是集合 X 到自身的一个映射，记
$$f^0(x)=x,\qquad f^n(x)=f\circ f^{n-1}(x),$$
n 为正整数，称 $f^n(x)$ 为 $f(x)$ 的 n 次 **迭代** ，并称 n 为 f^n 关于 f 的 **迭代指数** .

从定义可见，
$$f^0=\mathrm{id},$$
$$f^m\circ f^n=f^{m+n},$$
其中 id 表示恒同映射. 映射的迭代构成了一个半群. 如果 f 是拓扑空间 X 上的连续映射，其迭代被认为是构成了一个离散半动力

系统 $\{f^n : n \in \mathbf{Z}_+\}$. 如果 f 在 X 上同胚，其迭代构成了一个离散动力系统 $\{f^n : n \in \mathbf{Z}\}$.

关于映射迭代的研究,至少可追溯到一百多年以前施罗德 [52] 、阿贝尔 [1] 、巴贝奇 [16] 等数学家的工作. 由于迭代运算与代数运算的迥然不同，研究工作艰难曲折. 到了近代，在物理学、化学、天文学、力学等学科的推动下，非线性动力系统的研究成了世界范围内的学术热点并不断作出重大发现，如关于周期性的沙尔可夫斯基序、关于分岔的费根鲍姆现象、关于运动复杂性的斯梅尔马蹄等等. 这些工作促进了微分方程和迭代函数方程的发展，尤其对现代迭代理论是具有奠基性的，而且影响深远.

关于迭代，有如下三个基本问题:

1. n 次迭代 $f^n(x)$ 的计算或估计及其极限的收敛性. 这里，极限的收敛性是要研究动力系统轨道 $\mathrm{Orb}_f(x) = \{f^n(x) : n = 0, 1, 2, \cdots\}$ 的长期行为，如 ω - 极限集等.

2. 确定 f 使之第 n 次迭代是一个已知映射 F . 即求解函数方程 $f^n(x) = F(x), \forall x \in X$ ，这里 f 称为 F 的一个 n 次迭代根.

3. 将 f 的离散动力系统嵌入流，甚至要找出一个 X 上的向量场 $V(x)$ ，使得 $f(t, x)$ 满足 $\frac{d}{dt}f(t, x) = V(x)$, $t \in \mathbf{R}$, $x \in X$, 而且 $f(n, x) = f^n(x)$, $n \in \mathbf{Z}^+$.

第一个问题在本章已经论及，人们从直觉上首先要关心这个问题. 尤其是在科学实验中人们非常关心运动的终极状态，即运动轨道的极限状态，因为终极状态往往是稳定、长效且可观测的. 有关的内容将在第 2 章作介绍. 另一方面，人们也关心运动的详细过程. 事实上，当人们通过研究离散动力系统而对整数次迭代有了深刻认识后，总希望进一步了解在整数次迭代之间所能发生的事情，想知道迭代能否是分数次的甚至是任意实数次的，这就是所谓迭代根和嵌入流的问题. 这些问题直接关系到对微分方程和差分方程解的深入研究，关系到对运动过程和终极状态的全面掌握，也关系到对实

验数据的分析处理方法. 在有了动力系统基础知识以后, 从第 3 章起我们将进入对第二个问题和第三个问题的讨论. 我们将发现, 迭代根和嵌入流问题的关键, 是研究

$$f^n(x) = F(x)$$

和

$$h(F(x)) = ch(x)$$

等有关的迭代函数方程.

§ 5 迭代方程基本形式

迭代函数方程是函数复合与迭代的产物, 和微分方程一样都是函数方程的一特殊类型. 准确地讲, **迭代函数方程** 就是由未知函数和复合运算构成的恒等式. 通常, 在不至发生混淆时, 也将它简称为 **函数方程** . 自从有了运算就有了方程的问题, 而且方程的求解往往在理论上更复杂、在技术上更困难、在应用上更广泛. 对于迭代也是这样.

迭代函数方程形式多种多样. 由未知函数 f 的自复合 (迭代) 构成的方程, 包括简单的巴贝奇方程

$$f^n(x) = x,$$

比迭代根问题更广泛的多项式型方程

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_n f^n(x) = F(x),$$

甚至更一般的方程

$$G(f(x), f^{n_1}(x), \cdots, f^{n_k}(x)) = F(x),$$

它们通常可直接简称为 **迭代方程**．由未知函数 h 同已知函数的复合构成的方程，包括线性化的施罗德方程 $h(F(x)) = ch(x)$ 和阿贝尔方程 $h(f(x)) = h(x) + b$、幂函数化的保特切 (Böttcher) 方程

$$h(F(x)) = (h(x))^p$$

以及一般的拓扑共轭关系

$$h(F(x)) = G(h(x)),$$

甚至还有更一般的形式

$$F(x, h(x), h(f_1(x)), \cdots, h(f_n(x))) = 0.$$

函数方程还可以是多变元的，例如关于未知函数 $f(x,y)$ 的方程

$$f(x, G(x)) = F(x).$$

应该指出的是，有许多函数方程是出自动力系统研究的，除了上述关于拓扑共轭的以外，还例如与费根鲍姆现象有关的费根鲍姆方程

$$\begin{cases} g(x) = -\dfrac{1}{\lambda} g(g(-\lambda x)), \\ g(0) = 1,\ -1 \le g(x) \le 1,\ \forall x \in [-1, 1]. \end{cases}$$

稳定流形的存在性实际上就是一个函数方程解的存在性．此外，相应的函数不等式问题也是具有特殊意义的研究课题．

迭代函数方程伴随着迭代理论的发展，从巴贝奇 [16]、阿贝尔 [1] 等数学家开始至今，已经形成了一个理论体系．在大量的文献专著里概括了这一领域的成就，如波兰库其玛等人的 [32]、[33]、[19] 和加拿大阿克采等人的 [2]~[5] 等等．它已成为与微分方程、差分方程和动力系统紧密相关的现代数学分支，在实验科学和工程科学研究中越来越起着重要的作用．

第 2 章

迭代动力学

动力系统基本知识是研究迭代方程和嵌入流问题的基础，同时也展现函数迭代下的丰富内涵.

定义 一个映射 $\phi(t,x):\mathbf{R}\times X\to X$ 称为集合 X 上的一个**流**，如果对 $\forall t_1,t_2\in\mathbf{R},x\in X$，满足

(i) $\phi(0,x)=x$，

(ii) $\phi(t_1+t_2,x)=\phi(t_1,\phi(t_2,x))$.

如果上述仅在 $\mathbf{R}^+$ 上定义，则称 $\phi(t,x)$ 为一个**半流**.

定义中的集合 X，可以是一实线段 (区间)$I=[a,b]$，可以是高维欧氏空间上一区域，也可以是一拓扑空间. 如果 X 是拓扑空间，而 $\phi(t,x)$ 连续，则称之为**连续流**(或**连续半流**). 这时，我们常常也称 ϕ 为 X 上一个**连续 (半) 动力系统**. 如果 X 上有 C^r 微分结构 (例如 C^r 流形)，且 $\phi(t,x)$ 是 r 次连续可微的，则称之为 **C^r 流**. 若上述定义的 t, t_1, t_2 在 $\mathbf{Z}$(或 $\mathbf{Z}^+$) 中考虑，X 是拓扑空间，而 $\phi(t,x)$ 关于 x 连续，则称 ϕ 为 X 上一个**离散 (半) 动力系统**.

流是动力系统的重要概念，它具有很强的实际意义. 例如把 t 作为时间变量，把 x 作为某物理过程的状态变量，那么 $x_1=\phi(T,x_0)$ 可以理解为当 $t=0$ 时处于初始状态 x_0 的系统在 $t=T$ 时将达到状态 x_1. 如果强度为 x 的射线穿过厚度为 t 的均匀介质层后强度

减弱为 y，则 y 和 x, t 的关系 $y=\psi(t,x)$ 确定了一个流. 对一个流 $\phi(t,x)$, $t\in\mathbf{R}$, 每隔一定间隔 τ 进行离散采样:

$$\cdots,\phi(-2\tau,x),\phi(-\tau,x),\phi(0,x),\phi(\tau,x),\phi(2\tau,x),\cdots,$$

所得的映射 $f(\cdot)=\phi(\tau,\cdot):X\to X$ 成为一个离散动力系统. 这样的采样方法在实验中是经常使用的. 流是一个决定性过程的数学刻划, 知道系统当前状态后我们可以预测未来, 甚至还可以推断过去.

§6 不变集与等价性

这一节将介绍若干动力系统的基本概念.

§6.1 不变集

设 f 为拓扑空间 X 上一个同胚, f^k 为 f 的 k 次迭代, 分别称集合

$$\begin{aligned}\mathrm{Orb}_f(x)&=\{f^k(x):\ k\in\mathbf{Z}\},\\ \mathrm{Orb}_f^+(x)&=\{f^k(x):\ k\in\mathbf{Z}^+\},\\ \mathrm{Orb}_f^-(x)&=\{f^{-k}(x):\ k\in\mathbf{Z}^+\}\end{aligned}$$

为离散动力系统 f 过 $x\in X$ 的 **轨道**、**正半轨** 和 **负半轨**. 显然, $\mathrm{Orb}_f(x)=\mathrm{Orb}_f^+(x)\cup\mathrm{Orb}_f^-(x)$.

如果存在自然数 p, 使得 $f^p(x)=x$, 则称 x 为 f 的 **周期点**. 满足这一关系的最小自然数 p 称为 x 的 **周期**. 这时

$$f^p(x)=x,\quad f^k(x)\neq x,\qquad\qquad \forall k=1,2,\cdots,p-1$$

直接称 x 为 p-**周期点**. 特别地, 当 $p=1$ 时, $f(x)=x$, 称 x 为 f 的 **不动点**. $\mathrm{Per}(f)$ 和 $\mathrm{Fix}(f)$ 分别记 f 在 X 上所有周期点和不

动点的集合. 显然， $\mathrm{Fix}(f) \subset \mathrm{Per}(f)$. 过周期点的轨道称为 **周期轨道** ，它必定是有限轨道，反之亦然.

集合

$$\omega(x) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \overline{\{f^k(x):\ k \geq n\}},$$
$$\alpha(x) = \bigcap_{n\in\mathbf{N}} \overline{\{f^{-k}(x):\ k \geq n\}}$$

和 $L(x) = \omega(x) \cup \alpha(x)$ 分别称为轨道 $\mathrm{Orb}_f(x)$ 的 ω -**极限集**、α -**极限集** 和 **极限集**. 易见, 在度量空间中对任意 $x_0 \in \omega(x)$ 或 $x_0 \in \alpha(x)$ ，存在序列 $n_i \to +\infty$ ，使 $\lim\limits_{i\to\infty} f^{n_i}(x) = x_0$ 或 $\lim\limits_{i\to\infty} f^{-n_i}(x) = x_0$.

点 $x \in X$ 称为是 f 的 **游荡点** ，如果存在 x 的邻域 U ，使得

$$f^k(U) \cap U = \varnothing, \quad \forall k \in Z \backslash \{0\}.$$

不是游荡点的点 x 称为 **非游荡点**. 这时, 对 x 的任意邻域 U ，都有整数 $k \neq 0$, 使 $f^k(U) \cap U \neq \varnothing$. 非游荡点的集合记为 $\Omega(f)$. 可以证明: $\omega(x)$, $\alpha(x)$, $L(x)$, $\Omega(f)$ 都是闭集, 而且 $\omega(x) \subset \Omega(f)$, $\alpha(x) \subset \Omega(f)$, $\forall x \in X$ ，特别地，当 X 是紧空间时， $\omega(x)$, $\alpha(x)$ 和 $\Omega(f)$ 都非空.

集合 $\Lambda \subset X$ 称为 f 的 **不变集**, 如果 $f(\Lambda) = \Lambda$. 这时 $\mathrm{Orb}_f(x) \subset \Lambda$, $\forall x \in \Lambda$. 容易验证， $\mathrm{Orb}_f(x)$, $\omega(x)$, $\alpha(x)$, $\mathrm{Per}(f)$, $\mathrm{Fix}(f)$, $\Omega(f)$ 都是 f 的不变集. 进一步, 如果 X 上定义了距离 d , 且不变集 Λ 还满足吸引性, 即存在 Λ 的开邻域 $U \subset X$ 使得对 $\forall x \in U$ 当 $n \to +\infty$ 时有 $d(f^n(x), \Lambda) \to 0$ ，则称 Λ 为 f 的 **吸引子** .

§6.2 拓扑共轭

拓扑空间 X 上的同胚 f 和拓扑空间 Y 上的同胚 g 称为是 **拓扑共轭** 的，简记为 $f \sim g$ ，如果存在同胚 $h: X \to Y$ ，使得

$$h \circ f = g \circ h.$$

这种关系在上一章关于函数迭代式的计算法中被用到过. 拓扑共轭是一种等价关系, 它把 f 的轨道变成 g 的轨道, 即

$$h(\mathrm{Orb}_f(x)) = \mathrm{Orb}_g(h(x));$$

把 f 的极限集变成 g 的极限集, 即

$$h(\omega_f(x)) = \omega_g(h(x)), \quad h(\alpha_f(x)) = \alpha_g(h(x));$$

把 f 的 n - 周期轨道变成 g 的 n - 周期轨道; 把 f 的非游荡集变成 g 的非游荡集; 把 f 的不变集变成 g 的不变集. 总之, 拓扑共轭的两个动力系统具有相同的轨道拓扑结构, 我们认为它们具有相同的动力学性质. 进而, f 在点 $p \in X$ 和 g 在点 $q \in Y$ 称为是 **局部拓扑共轭** 的, 如果存在 p, q 的开邻域 $U \subset X$, $V \subset Y$ 和同胚 $h : U \cup f(U) \to V \cup g(V)$, 使得 $h(p) = q$, $h(U) = V$ 且 $h \circ f|_U = g \circ h|_U$.

C^r 流形 X 上的动力系统 f 称为是 C^r **结构稳定** 的, 如果存在 f 在 C^r 拓扑中的邻域 $\mathcal{U}$, 使得任意 $g \in \mathcal{U}$ 都与 f 拓扑共轭. C^1 结构稳定性通常直接简称为 **结构稳定性** . 进而, 设 $U \subset X$ 是开集, 且 $f \in C^r(U, X)$ 是到其象集的 C^r 同胚. f 在 $p \in U$ 处称为是 C^r **局部结构稳定** 的, 如果存在 p 点邻域 $V \subset U$ 及 f 在 $C^r(U, X)$ 中的邻域 $\mathcal{V}$, 使得任意 $g \in \mathcal{V}$ 都在某点 $q \in V$ 处与 f 在 p 点处局部拓扑共轭.

非结构稳定的系统经扰动后将出现分岔 (bifurcation) . 设拓扑空间 X 上的动力系统族 f_μ 关于参数 $\mu \in \mathbf{R}$ 连续, $f_0(x_0) = x_0$. f_μ 称为当 $\mu = 0$ 时在不动点 $x_0 \in X$ 处 **分岔** , 如果对任意小的 $\varepsilon > 0$ 都存在 $\mu \in \mathbf{R}$, $0 < |\mu| < \varepsilon$, 使得 f_μ 在 x_0 附近与 f_0 在 x_0 附近不是局部拓扑共轭的.

§6.3 双曲性

设 f 为 $C^r(r \geq 1)$ 巴拿赫流形 X 上的 C^r 动力系统, $f(x_0) = x_0$. 不动点 x_0 称为 **双曲的**, 若其切映射 $A = Df(x_0) : T_{x_0}X \to$

$$A_0^{1,2}=\mathrm{diag}(2,2,\cdots,2),\qquad A_0^{3,4}=\mathrm{diag}(-2,2,\cdots,2),$$

$$A_m^{1,3}=\mathrm{diag}\Big(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}\Big),\quad A_m^{2,4}=\mathrm{diag}\Big(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\cdots,\frac{1}{2}\Big),$$

其中 $i=1,2,\cdots,m-1$ ， $\mathrm{diag}(\cdots)$ 简记对角矩阵. $\mathbf{R}^m$ 上任何双曲线性映射都与上述 $4m$ 种标准形之一局部拓扑共轭.

往下我们研究双曲不动点的局部性质，所以只需直接假设 X 为巴拿赫空间.

定理 2 设 X 是巴拿赫空间， $U\subset X$ 是 O 的开邻域. 若 O 是 $f\in C^1(U,X)$ 的双曲不动点，则 f 在 O 处是局部结构稳定的.

定理 3 (阿达玛 - 佩隆稳定流形定理) 设 X 是巴拿赫空间， $U\subset X$ 是 O 的开邻域， $f\in C^r(U,X)$ 是从 U 到 $f(U)$ 的 C^r 同胚， $r\geq 1$. 若 O 是 f 的双曲不动点，则存在 O 的邻域 $V\subset U$ ，使得集合

$$W_V^s(0)=\{x\in\bigcap_{k=0}^{+\infty}f^{-k}(V):\ \lim_{k\to+\infty}f^k(x)=0\},$$

$$W_V^u(0)=\{x\in\bigcap_{k=0}^{+\infty}f^{k}(V):\ \lim_{k\to+\infty}f^{-k}(x)=0\}$$

均为 C^r 映射的图象，从而具有 C^r 流形结构. 进而，

$$T_0W_V^s(0)=E^s,\quad T_0W_V^u(0)=E^u.$$

这里 $W_V^s(0)$, $W_V^u(0)$ 分别称为系统的 **局部稳定流形** 和 **局部不稳定流形** .

§7 周 期 轨 道

因为是研究一维迭代，我们将主要考虑 $X=\mathbf{R}$ 甚至区间 $X=I$ 上的离散情形. §6 对一般情形介绍了周期点和周期轨道的概念，

并指出，动力系统的一条轨道是周期轨道的充分必要条件是它为有限轨道. 自然， p - 周期轨道中只有 p 个不同的点，而且所有点都是 p - 周期点. 然而，在研究函数 $f: I \to I$ 的迭代时，我们常常会遇到 f 不是同胚的情形. 这时 f 生成的离散半动力系统可能出现非周期的有限轨道，例如某个点 $x \notin \mathrm{Per}(f)$ 但存在正整数 m 使 $f^m(x) \in \mathrm{Per}(f)$ ，即 x 被迭代到第 m 步后方呈现出周期性，我们称这样的 x 和它轨道为 **终于周期点** 和 **终于周期轨道** . 以下结果的证明是简单的.

定理 1 x_0 为 f 的 p - 周期点. 如果正整数 q 满足 $(p,q)=d$ ，则 x_0 是 f^q 的 m - 周期点， $m=p/d$. 特别地，当 q 与 p 互素时，x_0 也是 f^q 的 p - 周期点. 反过来，如果 x_0 既是 f 的 p - 周期点又是 f^q 的 m - 周期点，那么 $p=m(p,q)$.

为讨论方便，我们引入 "f - 覆盖" 的概念. 设 $f: I \to I$ 连续， $I \subset \mathbf{R}$ 是一个区间. 如果闭子区间 $I_1 \subset I$ 和 $I_2 \subset I$ 满足 $f(I_1) \supset I_2$ ， 即 $I_2 \subset [\min\limits_{x\in I_1} f(x), \max\limits_{x\in I_1} f(x)]$ ， 则称 I_1 f -**覆盖** I_2 ，并记为 $I_1\ f :\Rightarrow I_2$ ，或直接简记为 $I_1 \Rightarrow I_2$.

定理 2 f 和 I 假设同上，如果 $I_1 \subset I$ 为闭子区间，使得 $I_1 \Rightarrow I_1$ ，则 f 在 I_1 上必有不动点. 如果 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 为 I 的闭子区间，使得

$$I_1 \Rightarrow I_2 \Rightarrow \cdots \Rightarrow I_{n-1} \Rightarrow I_n \Rightarrow I_1,$$

则存在 $x_0 \in I_1$, 使 $f^n(x_0)=x_0$, 且 $f^{k-1}(x_0) \in I_k,\ k=1,2,\cdots,n$.

证明 第一个结论是布劳韦尔不动点定理的结果. 事实上, 可从连续函数的介值定理推出. 关于第二个结论, 由于 $f(I_k) \supset I_{k+1},\ k=1,\cdots,n$, 其中 I_{n+1} 记 I_1 , 由连续性, 必存在闭子区间 $J_k \subset I_k,\ k=1,\cdots,n$ ， 使

$$f(J_k)=J_{k+1} \subset I_{k+1},\ k=1,2,\cdots,n-1, \quad f(J_n)=I_1.$$

因此 $f^n(J_1) \supset J_1$, 从而，由第一个结论可推出第二个结论. □

定理 3 (李 - 约克定理) 区间 I 上的连续自映射 f 如果存在 3 - 周期点，则对任意正整数 n ， f 具有 n - 周期点.

证明 设 $x_0 < x_1 < x_2$ 是 f 的一个 3 - 周期轨道，那么 $f(x_1) = x_0$ 或 $f(x_1) = x_2$ 必有一个成立．不妨只考虑第一种情形，这时必有

$$f(x_1) = x_0, \quad f(x_0) = x_2, \quad f(x_2) = x_1. \tag{7.1}$$

令 $K_1 = [x_0, x_1]$, $K_2 = [x_1, x_2]$ ，显然有 f - 覆盖关系 $K_1 \Rightarrow K_1 \cup K_2$ ，从而

$$K_1 \Rightarrow K_1, \quad K_1 \Rightarrow K_2, \quad K_2 \Rightarrow K_1.$$

对任意正整数 $n \neq 3$ ，令

$$I_1 = I_2 = \cdots = I_{n-1} = K_1, \quad I_n = K_2,$$

易见闭子区间 $I_1, I_2, \cdots, I_n$ 满足定理 2 的条件，从而存在 $y_0 \in I_1 = K_1$ ，使 $f^n(y_0) = y_0$ ，且

$$f^k(y_0) \in K_1, \qquad k = 0, 1, 2, \cdots, n-2 \tag{7.2}$$

$$f^{n-1}(y_0) \in K_2. \tag{7.3}$$

进一步，为证明 y_0 是 f 的 n - 周期点，只需证 $y_0, f(y_0), \cdots, f^{n-1}(y_0)$ 两两不同. 否则 y_0 周期小于 n ，即 $f^{n-1}(y_0)$ 是 $y_0, f(y_0), \cdots, f^{n-2}(y_0)$ 中的一个，因而

$$f^{n-1}(y_0) \in K_1. \tag{7.4}$$

由 (7.3) 和 (7.4) ， $f^{n-1}(y_0) \in K_1 \cap K_2 = \{x_1\}$ ，因此

$$y_0 = f^n(y_0) = f(f^{n-1}(y_0)) = f(x_1) = x_0,$$

这表明 n 是 3 的整倍数. 由于预先取 $n \neq 3$ ，故 $n \geq 6$, $n-2 \geq 4$ ，从而由 (7.1) 和 (7.2) ，

$$x_2 = f(x_0) = f(y_0) \in K_1 = [x_0, x_1],$$

这显然与 $x_1 < x_2$ 的假设矛盾. $\square$

前苏联数学家沙尔可夫斯基在 1964 年对自然数重新作了一个排序:

$$
\begin{aligned}
&3 \lhd 5 \lhd 7 \lhd \cdots \lhd 2n+1 \lhd 2n+3 \lhd \cdots \\
&\quad \lhd 2\times 3 \lhd 2\times 5 \lhd \cdots \lhd 2\times(2n+1) \lhd 2\times(2n+3) \lhd \cdots \\
&\quad \lhd 2^2\times 3 \lhd 2^2\times 5 \lhd \cdots \lhd 2^2\times(2n+1) \lhd 2^2\times(2n+3) \lhd \cdots \\
&\quad \cdots\ \cdots\ \cdots\ \cdots \\
&\quad \lhd 2^m\times 3 \lhd 2^m\times 5 \lhd \cdots \lhd 2^m\times(2n+1) \lhd 2^m\times(2n+3) \lhd \cdots \\
&\quad \lhd 2^l \lhd 2^{l-1} \lhd \cdots \lhd 16 \lhd 8 \lhd 4 \lhd 2 \lhd 1.
\end{aligned}
$$

我们称之为 **沙尔可夫斯基序** 或 "S **序**". 这个序给出了比定理 3 更广泛的结果, 全面揭示了一维映射迭代周期性的规律.

定理 4 (沙尔可夫斯基定理) 设 f 为区间 I 上的连续自映射, 且有 m - 周期点, 如果 $m \lhd n$, 则 f 必有 n - 周期点.

证明沙尔可夫斯基定理的关键, 是证明: f 若有非不动点的奇数 $(2n+1)$ - 周期轨道 $\{x_k = f^k(x_0) : k = 0, 1, \cdots, 2n\}$, 并设 x_0 为诸 x_k 由小到大排列时正中间的一个 (即第 $n+1$ 个), 则该轨道必有下列之一的排序

(i) $x_{2n} < x_{2n-2} < \cdots < x_2 < x_0 < x_1 < x_3 < \cdots < x_{2n-1}$,

(ii) $x_{2n-1} < x_{2n-3} < \cdots < x_3 < x_1 < x_0 < x_2 < \cdots < x_{2n}$.

这样, 记

$$
\begin{aligned}
&I_1 = [x_0; x_1],\ I_2 = [x_0; x_2],\ I_3 = [x_1; x_3], \cdots, \\
&I_{2n-1} = [x_{2n-3}; x_{2n-1}],\ I_{2n} = [x_{2n-2}; x_{2n}],
\end{aligned}
$$

其中 $[a; b]$ 表示闭区间 $[\min\{a,b\}, \max\{a,b\}]$, 我们容易得到覆盖关系:

$$I_1 \Rightarrow I_1;$$

$$
\begin{aligned}
&I_k \Rightarrow I_{k+1}, &&k = 1, 2, \cdots, 2n-1;\\
&I_{2n} \Rightarrow I_i, &&i = 2n-1, 2n-3, \cdots, 5, 3, 1.
\end{aligned}
$$

从而推论出定理的结论，详见 [88], [70] 和 [75]．下一个定理肯定地回答了沙尔可夫斯基周期轨道的稳定性，即 f 的小扰动将不改变定理 4 所刻划的性质.

定理 5 设 f 为区间 I 上的连续自映射，且有 m - 周期点，则存在 $\varepsilon > 0$ ，使得对一切满足条件

$$
|g(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad \forall x \in I
$$

的连续自映射 $g : I \to I$ ，当 $m \lhd n$ 时 g 必有 n - 周期点.

反过来，对给定的正整数 n ，是否存在某区间上的连续自映射 f ，使得它具有 n - 周期点，而对一切 $m \lhd n$ ，它都没有 m - 周期点？答案也是肯定的.

定理 6 任意给定形如 $N(m) = \{n \in \mathbf{Z}^+ : \ m \lhd n, \text{或}\ n = m\}$ 或者 $N(2^\infty) = \{2^k : \ k = 0, 1, 2, \cdots\}$ 的正整数子集 $\mathbf{N}^*$ ，存在 $[0,1]$ 上的连续自映射 f ，使得其所有周期点的周期之集 $\mathrm{PP}(f) = \mathbf{N}^*$.

这两个定理的证明见 [75] .

§ 8 稳定性与分岔

在 §5 已介绍了结构稳定的概念，即动力系统在小扰动下仍会保持轨道的拓扑性质不变. 我们知道，动力系统在双曲不动点附近是结构稳定的. 那么，哪些动力系统才是结构稳定的呢？

紧致 C^r ($r \geq 1$) 流形 X 上的 C^r 微分同胚 f 构成的动力系统称为是 **莫尔斯 - 斯梅尔系统** ，或简称 **MS系统** ，如果：

(i) $\Omega(f)$ 是有限集，

(ii) 所有周期点都是双曲的，

(iii) 周期点的稳定流形与不稳定流形横截相交.

定理 1 X 上全体 C^r 的 MS 系统的集合 $\mathrm{MS}^r(X)$ 是全体 C^r 动力系统（按 C^r 拓扑）的空间 $\mathrm{Diff}^r(x)$ 的一个开集. C^r 的 MS 系统是 C^r 结构稳定的.

以上结果是帕利斯 (J.Palis) 和斯梅尔 (S.Smale) 等人得到的. 如果 X 是二维的, M.Peixoto 还得到进一步的结论.

定理 2 设 X 是紧致的 C^r（$r \geq 1$）的二维可定向曲面, X 上的 C^r 动力系统 f 是 C^r 结构稳定的, 当且仅当 f 是 MS 系统. 而且, X 上全体 C^r 的 MS 系统的集合 $\mathrm{MS}^r(X)$ 是全体 C^r 动力系统（按 C^r 拓扑）的空间 $\mathrm{Diff}^r(x)$ 的一个开稠集.

这些关于结构稳定的知识可以帮助我们理解动力系统是如何产生分岔的. 如 §5 所指出, 如果动力系统结构不稳定, 即使一个小扰动也会改变轨道的拓扑性质. 往下我们通过一些区间自映射的结果来理解分岔现象 [12].

设 $x_0 \in I$ 是区间自映射 $f: I \to I$ 的不动点. 易见, 当 f 导数的绝对值 $|f'(x_0)| < 1$（或 > 1）时 x_0 是**稳定的**（或**不稳定的**）不动点, 这时在 f 迭代的作用下 x_0 将吸引（或排斥）它附近的点. x_0 在这两种情形下都是双曲, 因此 f 在它附近是结构稳定的. 分岔问题将出在非双曲的情形, 即当 $|f'(x_0)| = 1$ 的时候. 对一般的周期点, 也有同样的分析.

考虑映射族 $f_\lambda(x) = \lambda x(1-x)$ 在 $I = [0,1]$ 的迭代, 即

$$x_{n+1} = \lambda x_n(1 - x_n),$$

其中 $\lambda \in [0,4]$ 为参数. 这个平方映射也称为罗吉斯蒂映射, 并记为 $f(x, \lambda)$. 它因为描述了无世代交叠的昆虫逐年的种群量（虫口）的变化规律而被人们重视. 易见 f_λ 的不动点为

$$x_1^* = 0, \quad x_2^* = 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

计算导数 $f'(x^*) = \lambda(1-2x^*)$ 知:

当 $\lambda < 1$ 时，只有一个稳定不动点 $x_1^* = 0$.

当 $1 < \lambda < 3$ 时， x_1^* 变成不稳定的，而 x_2^* 成为稳定不动点.

当 $\lambda > 3$ 时， x_2^* 变成不稳定不动点，同时

$$x = f(f(x)) = \lambda\lambda x(1-x)(1-\lambda x(1-x))$$

有解 $x_{\pm}^* = \frac{1}{2\lambda}(1+\lambda \pm \sqrt{(\lambda+1)(\lambda-3)})$ ，即 f 出现两个 2 - 周期点 x_+^* 和 x_-^* . 容易验证，当 $\lambda < 1+\sqrt{6}$ 时 x_+^* 和 x_-^* 是稳定的.

如此继续下去，用数值计算可以发现一个规律： 1 - 周期点（不动点）失稳后出现二个稳定的 2 - 周期点，每个 2 - 周期点失稳后又出现二个稳定的 4 - 周期点，每个 4 - 周期点失稳后再出现二个稳定的 8 - 周期点， …… 这种现象称为 **倍周期分岔** . 每次产生这种“突变”的参数临界值叫做 **分岔点** ，例如一分为二的分岔点 $\lambda_1 = 3$ 、二分为四的分岔点 $\lambda_2 = 1+\sqrt{6} \approx 3.449\cdots$ 、四分为八的 $\lambda_3 \approx 3.449\cdots$ 、 …… 等等，这些分岔点的序列 $\{\lambda_k\}$ 由下面的关系确定:

$$f^{2^{k-1}}(x^*, \lambda_k) = x^*, \quad \frac{d}{dx} f^{2^{k-1}}(x^*, \lambda_k) = -1.$$

这里我们关心稳定周期点的出现，因为它在物理上具有可观测性.

通过计算，还可以发现一个更有趣的现象:

1. $\{\lambda_k\}$ 收敛，且 $\lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k = \lambda_\infty = 3.569945672\cdots$;

2. 比例 $\frac{\lambda_k - \lambda_{k-1}}{\lambda_{k+1} - \lambda_k}$ 收敛，且趋于 $\delta = 4.669201609\cdots$.

尤其是 δ 具有普适性，它与区间上光滑自映射族的具体形式无关. 我们同样地研究另一些单峰函数族，仍会看到类似的现象和相同的常数 δ . 这个现象首先在 1978 年被美国物理学家费根鲍姆观察到，

因此称为 **费根鲍姆现象**，常数 δ 称为 **费根鲍姆常数**. 人们甚至将它誉为是继 $\pi = 3.14159\cdots$ 和 $e = 2.71828\cdots$ 之后的第三个重要的常数.

如果我们不仅仅考虑稳定周期轨道的分岔，而要进一步考虑超稳定周期轨道，我们将发现它们在单峰函数族中随参数变化分岔出现的顺序与沙尔可夫斯基序有关 [70]. 不动点 $x_0 \in I$ 的 **超稳定性** 是一种特殊的稳定性，它进一步要求映射 f 的导数的绝对值 $|f'(x_0)| = 0$. 对周期轨道，也有类似的定义. 函数族 $f_r : [a_r, b_r] \to [a_r, b_r]$, $r \in [\alpha, \beta]$, 称为 **C^1-单峰族**，如果

1° 对任意 $r \in [\alpha, \beta]$，导数 $f_r'(x)$ 连续;

2° 对任意 $r \in [\alpha, \beta]$, $f_r(a_r) = f_r(b_r) = a_r$;

3° 对任意 $r \in [\alpha, \beta]$, 存在 $c_r \in (a_r, b_r)$, 使 $f_r'(c_r) = 0$, $f_r(c_r) \in [a_r, b_r]$，并且当 $x \in [a_r, c_r)$ 时 $f_r'(x) > 0$, 而当 $x \in (c_r, b_r]$ 时 $f_r'(x) < 0$;

4° $a_r, b_r, f_r(x), f_r'(x)$ 都是 r 的连续函数.

特别是当 $f_r(x)$ 还满足 $f_\alpha(c_\alpha) < c_\alpha$, $f_\beta(c_\beta) = b_\beta$ 时，称之为“满的 C^1-单峰族”.

定理 3 设 $f_r(x)$ 是满的 C^1-单峰族. 那么，对任意正整数 n，必存在参数 r_n，使 $f_{r_n}(x)$ 有超稳定 n-周期轨道. 进而，如果按沙尔可夫斯基序 $n \lhd m$，则 r_n 的最小值必大于 r_m 的最小值.

定理的证明参见 [12]、[70] 和 [75].

§ 9 混 沌

在上述费根鲍姆现象中，当参数 λ 小于 $\lambda_\infty = 3.569945672\cdots$ 而又不断增大时，区间自映射族不断产生倍周期分岔. 然而，当参数 λ 超过 λ_∞ 后系统会发生什么现象呢？另外，在 §7 的沙尔可夫

斯基序中，包含奇因子的周期数和纯粹偶周期数之间有何关系呢？以下由李 (T.-Y.Li) 和约克 (J.A.Yorke) 在 1975 年给出的结果 [36] 解释了这些问题.

定理 1 区间 I 上的连续自映射 f 如果存在 3 - 周期点，则

(i) f 所有的周期数之集 $\mathrm{PP}(f)=\mathbf{Z}^+$;

(ii) 存在不可数集合 $S\subset I\backslash \mathrm{Per}(f)$ ，满足

$$
\begin{aligned}
&\text{(a)} \quad \lim_{n\to\infty}\sup|f^n(x)-f^n(y)|>0, \quad \forall x,y\in S,\ x\neq y;\\
&\text{(b)} \quad \lim_{n\to\infty}\inf|f^n(x)-f^n(y)|=0, \quad \forall x,y\in S;\\
&\text{(c)} \quad \lim_{n\to\infty}\sup|f^n(x)-f^n(x_0)|>0, \quad \forall x\in S,\ x_0\in \mathrm{Per}(f).
\end{aligned}
$$

这个定理表明系统处于一个十分复杂的状态: S 中任意两个点的轨道时而远离时而又无限地接近，而且不趋近于任何周期轨道. 这种由映射迭代构成的决定性系统所产生的“敏感依赖性”和“不稳定性”被称为 **混沌** (chaos). 具体地说，上述定理的 ii 所定义的集合 S 称为 **混沌集** ，而具有这种混沌集的动力系统称为是 **李 - 约克混沌** 的. 定理 1 表明，周期 3 蕴含混沌.

[例] 令 $\phi:[0,1]\to[0,1]$ 定义为

$$
\phi(x)=\begin{cases} 2x, & \text{当 } 0\leq x\leq \dfrac{1}{2} \text{ 时;}\\ 2(1-x), & \text{当 } \dfrac{1}{2}<x\leq 1 \text{ 时.}\end{cases}
$$

取 $x^*=6/7$ ，易验证 $\phi(x^*)=2/7,\ \phi^2(x^*)=4/7,\ \phi^3(x^*)=6/7=x^*$ ，即 x^* 是 3 - 周期点. 除了定理 1 的结论外，我们还可以看到 ϕ 的周期点集 $\mathrm{Per}(\phi)$ 的稠密性. 首先把 $x\in[0,1]$ 表示成二进制小数

$$
x=0.a_1a_2\cdots a_k\cdots=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{2^k}. \qquad a_k\in\{0,1\}
$$

那么，ϕ 可表示成

$$\phi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{|a_1-a_{k+1}|}{2^k}$$
$$=\begin{cases}0.a_2a_3\cdots a_k\cdots, & \text{当 } a_1=0 \text{ 时;}\\ 0.\tilde{a}_2\tilde{a}_3\cdots\tilde{a}_k\cdots, & \text{当 } a_1=1 \text{ 时,}\end{cases}$$

其中 $\tilde{a}_k=1-a_k$. 对任意正整数 m, 令

$$x_1=0.a_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_ka_1a_2\cdots a_k\cdots,$$
$$x_2=0.a_1a_2\cdots a_k\tilde{a}_1\tilde{a}_2\cdots\tilde{a}_ka_1a_2\cdots a_k\tilde{a}_1\tilde{a}_2\cdots\tilde{a}_k\cdots.$$

它们至少有一个是周期 $\le k$ 的周期点, 而且 $|x-x_i|<\frac{1}{2^k}$, $i=1,2$, 因此取 $k\ge m$ 即可. 此外, ϕ 的非周期点在 $[0,1]$ 上也是稠密的, 因为 $(0,1]$ 中的二分有理点是稠密的，它们形如 $x=0.a_1a_2\cdots a_k000\cdots$ 或 $x=0.a_1a_2\cdots a_k111\cdots$. 显然，$\phi^k(x)=0$ 或 $\phi^{k+1}(x)=0$, 因此 x 一定不是周期点.

进一步，我们还可以证明以下结论.

定理 2 区间 I 上的连续自映射 f 当且仅当具有非 2 方幂的周期时存在混沌集 $S\subset\Omega(f)\backslash\mathrm{Per}(f)$.

事实上，f 一旦具有非 2 方幂的周期，其某次迭代就具有 3 - 周期点. 从而按定理 1, f 具有混沌集. 从这个结论看出，在费根鲍姆现象中，当参数 λ 超过 λ_∞ 后，系统将出现混沌.

混沌是描述比周期或概周期运动更加复杂的运动方式. 由于这些运动方式的纷繁，使人们难于作出一个统一而严格的定义. 其众多的定性描述或定义在不同的意义下有不尽相同的内涵. 一个广为人们接受的概念是著名的斯梅尔马蹄 [88]，它是美国数学家斯梅尔构造的一个特殊的平面微分自同胚. 它在其不变集上拓扑共轭于一个双边符号空间

$$\Sigma(2)=\prod_{j=-\infty}^{+\infty}S_j,\quad S_j=\{0,1\}$$

的移位映射

$$\sigma:(\cdots,s_{-2},s_{-1};s_0,s_1,s_2,\cdots)\mapsto(\cdots,s_{-2},s_{-1},s_0;s_1,s_2,\cdots),$$

其不变集具有康托三分集结构. 我们从一个一维映射的例子可以看出其构造原理.

考虑映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,

$$x\mapsto -3x^2+\frac{4}{3}.$$

所定义的半动力系统. 这个映射把线段 $I=[-1,1]$ 拉长（两倍以上）再折叠覆盖于 I 上. 事实上， $f^{-1}(I)$ 是两段不相交的子线段 U_0 和 U_1 的并集，即

$$f^{-1}(I)=U_0\cup U_1,\quad |U_i|<\frac{1}{2}|I|=1,\ i=0,1,$$

而且

$$f(U_0)=f(U_1)=I\supset U_0\cup U_1.$$

同理，在 U_0 和 U_1 中也各有不相交的子线段 U_{00},U_{01} 和 U_{10},U_{11} ，满足

$$f(U_{00})=f(U_{01})=U_0,\quad f(U_{10})=f(U_{11})=U_1,$$

并且

$$|U_{ij}|<\frac{1}{2}|U_i|<\frac{1}{2}.\qquad i,j=0,1$$

依次类推. 对正整数 k ，定义

$$U_{s_0s_1\cdots s_k}=U_{s_0}\cap f^{-1}(U_{s_1})\cap\cdots\cap f^{-k}(U_{s_k}),$$

这里 $s_0,s_1,\cdots,s_k\in\{0,1\}$. 对单边符号空间 $\Sigma_+(2)=\prod\limits_{j=0}^{+\infty}S_j$, $S_j=\{0,1\}$, 上任意点 $s=(s_0,s_1,s_2,\cdots)$ ，记

$$U(s)=\bigcap_{j=0}^{\infty}f^{-j}(U_{s_j})=\bigcap_{j=0}^{\infty}U_{s_0s_1\cdots s_k}.$$

可以证明

$$\Lambda = \bigcap_{j=0}^{\infty} f^{-j}(I) = \bigcup_{s\in\Sigma_+(2)} U(s)$$

是 f 的一个紧致的不变集，$f|_\Lambda$ 拓扑共轭于移位映射 $\sigma:\Sigma_+(2)\to\Sigma_+(s)$，而且 f 在不变集 Λ 上是结构稳定的. 关于 Λ 的结构，我们不难想象形成 $U_{s_0}, U_{s_0 s_1}, \cdots, U_{s_0 s_1\cdots s_k}$ 的“一生二、二生四”的过程，这正是康托三分集的构造过程.

有结论表明：动力系统稳定流形和不稳定流形横截相交的“同宿点” (homoclinic point) 或“异宿点” (heteroclinic point) 的存在性蕴含斯梅尔马蹄型混沌，而斯梅尔马蹄型混沌蕴含李 - 约克混沌.

§ 10 分 形

不变集是动力系统研究的重要内容. 在 §5 我们引入了一种称为吸引子的特殊的不变集，其吸引性使我们在物理实验或数值模拟中能够具体观测到. 这些吸引子中有的是简单规则的几何形态，如点、直线、圆周、环面等等，而有的则呈现出复杂的不规则性，或称“奇异性”，如著名的洛伦兹吸引子、艾侬 (M. Hénon) 吸引子和前述的康托三分集结构的吸引子. 对这些观测结果的好奇，驱使我们深入研究它们的几何结构，“分形”因此成了动力系统的一个重要话题 [72].

分形(fractal)的概念是 1975 年由曼德勃罗特 (B.B.Mandelbrot) 引入的. 它是指那种“支离破碎”的集合. 其几何特征是：几乎其每个点的每个邻域里所包含该集合的点的分布是零落散乱疏稠无规的；在其每个点上没有切线.

豪斯多夫维数是描述集合规模的整体性尺度，其值基本上反映了集合内部点分布的规则，或不规则程度. 考虑欧氏空间 $\mathbf{R}^n$，其

子集 U 的直径指 $|U| = \sup\{|x-y| : x, y \in U\}$．一子集族 $\{U_i\}$ 称为子集 E 的一个 δ-**覆盖**，如果 $0 < |U_i| \le \delta$, $\forall i$, 且 $E \subset \cup_i U_i$．对 $\delta > 0$, $s \ge 0$，定义 $H_\delta^s(E) = \inf\{\sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s : \{U_i\}_{i=1}^{\infty}$ 为 E 的 δ-覆盖$\}$．令 $H^s(E) = \lim_{\delta \to 0} H_\delta^s(E)$．可以证明：对任意集合 $E \subset \mathbf{R}^n$，都相应存在唯一的实数 s_0，满足

$$\begin{array}{ll} H^s(E) = \infty, & 0 \le s < s_0, \\ 0 < H^s(E) < \infty, & s = s_0, \\ H^s(E) = 0, & s_0 < s < \infty. \end{array}$$

这个实数 s_0 称为集合 E 的**豪斯多夫维数**，记为 $\dim E = s_0$．$H^s(E)$ 称为**豪斯多夫 s-测度**，当 $s = n$ 为整数时（除一个常数因子外）它相当于 E 的 n 维体积 (勒贝格测度). §9 提到的康托三分集是一个非整数维集合，容易计算标准康托集的豪斯多夫维数为 $\frac{\log 2}{\log 3}$，两个康托集在平面上乘积的豪斯多夫维数为 $\frac{\log 4}{\log 3}$．

设子集 $E \subset \mathbf{R}^n$ 具有维数 $\dim E = s$．集合 E 在点 $x \in E$ 的**稠密度**（upper density）和**稀疏度** (lower density) 分别定义为

$$\overline{D}^s(E, x) = \limsup_{r \to 0} \frac{H^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s},$$
$$\underline{D}^s(E, x) = \liminf_{r \to 0} \frac{H^s(E \cap B_r(x))}{(2r)^s},$$

其中 $B_r(x)$ 是 x 以 r 为半径的开邻域. 如果 $\overline{D}^s(E, x) = \underline{D}^s(E, x)$，则称 x 为**规则点**．否则，称为**不规则点**．集合 E 称为**规则的**，如果其 H^s-几乎所有的点是规则点. 集合 E 称为**不规则的**，如果其 H^s-几乎所有的点是不规则点. 可以证明 [17]：

定理 1　子集 E 具有非整数的豪斯多夫维数，必然在几乎 E 的每个点上都没有切线，而且 E 不规则.

定理 2　设 $E \subset \mathbf{R}^n$, $\dim E \le 1$，则 E 不规则当且仅当 E 完全不连通.

如果 E 具有整数维数，它仍有可能是不规则的.

定理 3　设 $E \subset \mathbf{R}^2$, $\dim E = 1$，则 E 不规则当且仅当 E 在两个或两个以上不同方向的投影的勒贝格测度为 0 .

现实生活中有许多分形现象, 如植物的生长、海岸线的曲折、地表面的起伏等等. 在物理实验中, 我们也遇到粒子布朗 (R.Brown) 运动、分子扩散、流体湍流、固体材料断裂等现象提出的分形问题. 我们常常还要推测降雨区的边界、地下储油区的范围、甚至股市价格的波动. 从数学上用映射迭代的极限集来模拟这些不规则现象, 是解决这些问题的常用而有效的方法.

自相似是许多分形的重要特征. 粗略地讲, 如果一个图形的每个局部都可以放大为整个图形, 则称这个图形是 **自相似的** . 康托集是典型的自相似分形. 柯赫雪花曲线也具有自相似性, 这从它一步步迭代生成的过程可以看到: 从一个正三角形源图开始, 将每条线段三等分并将中间一份替换成向外的折线, 该折线与原来的那段直线恰构成一小正三角形; 将形成的新图形再做上述操作, 即将每条线段三等分并将中间一份同样方法替换成折线; …… 如此继续. 这样得到的极限曲线是连续而每点不可切的, 可以计算它的豪斯多夫维数为 $\frac{\log 4}{\log 3}$. 这种从一个源图不断作相似变换的迭代从而递归产生自相似分形集的方法简称 **迭代法** , 其极限图形就是这一相似变换的不变集, 其豪斯多夫维数由变换的比例因子决定. 自然数的沙尔可夫斯基序也具有自相似性, 这个序结构的每个片断理解为每一点按 $\lhd$ 的后继, 显然每一片断在一相似变换 (除以 2^k 因子) 后又得到完整的沙尔可夫斯基序, 除非这个片断是有限的.

值得指出的是, 有一大类动力系统的分形来源于复平面 $\mathbf{C}$ 上解析映射的迭代. 设 $f : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ 是解析函数. f 的 n - 周期点 $z_0 \in \mathbf{C}$ 称为 **吸性周期点** , 或 **稳定周期点** , 如果导数 $\lambda := (f^n)'(z_0)$ 满足 $0 \leq |\lambda| < 1$. $z_0 \in \mathbf{C}$ 称为 **斥性周期点** 或 **不稳定周期点** , 如果 $|\lambda| > 1$. $z_0 \in \mathbf{C}$ 称为 **中性周期点** , 如果 $|\lambda| = 1$. 记 $F(f) = \{z \in \mathbf{C}$: 存在 z 的开邻域 U 使$\{f^n|_U :\ n = 1, 2, \cdots\}$ 等度连续$\}$, 并称之为 f 的 **法图**(P.J.L.Fatou)**集** . $J(f) = \mathbf{C} \backslash F(f)$ 称为 f 的 **朱利亚**

集. 从而按 F 的迭代可把复平面 $\mathbf{C}$ 分成两部分，法图集是开集而朱利亚集是闭集. 我们有以下基本结果 [72].

定理 4 $J(f)$ 等于所有斥性周期点之集的闭包.

定理 5 如果 f 是有理函数，那么

(i) $J=J(f)$ 是非空的不变集，即 $f^{-1}(J)=J=f(J)$；

(ii) J 的内部 $\mathrm{int}J=\varnothing$，除非 $J=\mathbf{C}$；

(iii) J 是完全集;

(iv) $J=\overline{\bigcup\limits_{n\geq 0} f^{-n}(z)}$, $\forall z\in J$.

定理 6 如果 f 是有理函数，那么 $J(f)=\mathbf{C}$ 当且仅当 f 有一个在 $\mathbf{C}$ 中稠密的轨道.

有理函数 f 的朱利亚集 $J(f)$ 除可能 $J(f)=\mathbf{C}$ 外，可以分成三类：光滑的约当曲线、分形性的约当曲线、完全不连通集. 最后一类实为康托集. 显然，后两类具有分形特征.

关于整函数的朱利亚集，最典型的研究是讨论指数映射 $E_\lambda: z\mapsto \lambda e^z$. 可以证明：当 $\lambda>\frac{1}{e}$ 时，其朱利亚集 $J(E_\lambda)=\mathbf{C}$；当 $0<\lambda<\frac{1}{e}$ 时，$J(E_\lambda)$ 是曲线的康托集.

迭代函数系统可以作为产生和分类分形集的统一方式. 朱利亚集和其他许多分形集都可以看成某些迭代函数系统的吸引集. 设 $w_i: K\to K$, $i=1,2,\cdots,d$, 是紧致度量空间上的连续自映射，集值映射 $w: 2^K\to 2^K$ 定义为

$$w(X)=\bigcup_{i=1}^{d} w_i(X),$$

并简记 $w(x)=w\{x\}$, $\forall x\in K$. 称 $\{K;w_1,w_2,\cdots,w_d\}$ 或 $\{K;w\}$ 为一个 **迭代函数系统**. x 在 $\{K;w\}$ 下的 **吸引集** 定义为

$$A(x)=\lim_{n\to\infty} w^n(x).$$

显然，$a \in A(x)$ 当且仅当对 a 的任意邻域 U 都存在无穷多个 n 使 $U \cap w^n(x) \neq \varnothing$．如果 $A(x)$ 与 x 的选择无关，就称 $A = A(x)$ 为迭代函数系统 $\{K; w\}$ 的 **吸引集**．它是 K 的紧子集且 w-不变. 迭代函数系统 $\{K; w\}$ 的 **逆** 定义为 $w^{-1}(X) = \{x \in K :\ w(x) \in X\}$，$\{K; w\}$ 的 **排斥集** 指 $\{K; w^{-1}\}$ 的吸引集. 例如有理函数 $f: \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ 可作为紧度量空间 $\bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C} \cup \{\infty\}$ 上的自映射. 由于 f 的逆至多有限个分支，其吸性不动点至多有限个，可以证明 f 的朱利亚集就是迭代函数系统 $\{\bar{\mathbf{C}}; f\}$ 的排斥集.

迭代函数系统 $\{K; w\}$ 称为 **双曲** 的, 如果存在常数 $0 \leq s < 1$，使

$$|w_i(x) - w_i(y)| < s|x - y|. \qquad \forall x, y \in K,\ i = 1, 2, \cdots, d$$

关于迭代函数系统，我们有以下重要结果.

定理 7 设 $\{K; w\}$ 是双曲迭代函数系统，那么它有唯一的吸引集 A，而且还存在康托集到 A 上的一个连续映射. 进而，如果 $w = \{w_1, w_2, \cdots, w_d\}$ 还满足 $w_i(A) \cap w_j(A) = \varnothing,\ 1 \leq i \neq j \leq d$，则 $w^{-1}|_A \approx \sigma|_{\Sigma_d}$，即 d 个符号的单边无穷序列集上的移位映射. 特别地，当 $K \subset \mathbf{R}^n$ 时，如果还存在常数 $0 < s_i \leq \tilde{s}_i < 1$，使

$$s_i|x - y| \leq |w_i(x) - w_i(y)| \leq \tilde{s}_i|x - y|, \quad \forall x, y \in A,\ i = 1, 2, \cdots, d$$

则 A 的豪斯多夫维数满足 $\min\{n, l\} \leq \dim A \leq u$，其中 l, u 是方程 $\sum\limits_{i=1}^{d} s_i^l = 1 = \sum\limits_{i=1}^{d} \tilde{s}_i^u$ 的正数解.

尤其是我们可以用迭代函数系统来重构或逼近某一给定的分形.

定理 8 $A \subset \mathbf{R}^n$ 是紧致自相似集, 则存在线性映射 $L_1, L_2, \cdots, L_p : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ 使迭代函数系统 $\{K; L_1, L_2, \cdots, L_p\}$ 的吸引集就是集合 A，这里 K 是包含 A 的某个球.

定理 9 (拼贴定理) 设 $A \subset \mathbf{R}^n$ 是紧致集合. 如果存在包含 A 的球 $K \subset \mathbf{R}^n$ 和具有压缩常数 $0 \leq s < 1$ 的压缩映射 $w_1, w_2, \cdots, w_d : K \to K$ ，满足

$$h(A, \bigcup_{i=1}^{d} w_i(A)) < \varepsilon,$$

其中 $\varepsilon > 0$ 是预先给定的常数而 $h(\cdot,\cdot)$ 是集合的豪斯多夫距离，那么迭代函数系统 $\{K; w_1, w_2, \cdots, w_d\}$ 的吸引集 A^* 满足

$$h(A^*, A) < \frac{\varepsilon}{1-s}.$$

下面我们给出一个产生分形的迭代函数系统的例子.

[例] 考虑 $\{\mathbf{C}; A, B\}$ ，其中

$$\begin{aligned} A: \quad & z \mapsto 1 + 2i - \frac{1+i}{2} z, \\ B: \quad & z \mapsto -1 + 2i - \frac{1-i}{2} z. \end{aligned}$$

设源图为以原点为中心边长为 2 的正方形 Q . 变换 A 相当于以 $1+i$ 为中心旋转 $-\frac{3}{4}\pi$ 后再缩小成 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍，变换 B 相当于以 $-1+i$ 为中心旋转 $\frac{3}{4}\pi$ 后再缩小成 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ 倍. 这样，每迭代一次就把正方形的顶边作为底边向外延伸一个等腰直角三角形，然后以此三角形的两直角边为底边分别向外再作二个小正方形. 如此重复，将生成一个美丽的图案，这个极限图形叫做毕达哥拉斯 (Pythagoras) 树，它是一个分形.

第 3 章

迭代根理论

我们已经知道，只要函数 f 的值域不超过其定义域，对任意正整数 n 都可以定义 F 的 n 次 **迭代**

$$F^n(x) = F \circ F^{n-1}(x)$$
$$= \underbrace{F \circ F \circ \cdots \circ F(x)}_{n}.$$

正整数 n 称为 **迭代指数**.

迭代指数与乘幂指数有一些相似的运算性质:

1° $F^n \circ F^m = F^{n+m}$,

2° $(F^n)^m = F^{nm}$,

3° $F^0(x) = x$.

如果 F 的定义域和值域相同，且有唯一确定的反函数 F^{-1}，那么迭代 $F^n(x)$ 的指数 n 可推广到一切整数并保持上述三条性质. 一个有趣的问题是：能否像乘幂指数一样把迭代指数从整数推广到全体实数呢？这首先要完成向有理数的推广，或者说，要定义分数的迭代指数.

在实际应用中，我们常常要考察某个连续变化的过程. 由于客观条件的限制，我们往往只能通过实验来获得一些时间离散的数据(或图象). 例如每隔同一时间间隔 τ 采集一次数据. 能不能从这些离散资料中找出因果关系，从而得到关于整个发展过程的更系统的

知识，这属于动态模式识别的问题．在数学上，就是要将离散动力系统嵌入连续流，至少要确定每两个数据采集时刻之间的数据，亦即在已经获得 $\{x(k\tau):\ k=0,1,2,\cdots\}$，$x((k+1)\tau)=F(x(k\tau))$ 的情况下，确定满足这一变化规律 F 的中间过程 $x((k+\alpha)\tau)$，$0<\alpha<1$，$k=0,1,2,\cdots$．这首先就要确定 F 的分数次迭代．

要确定 F 的 $\frac{1}{n}$ 次迭代，就必须求解迭代方程

$$f^n(x)=F(x)$$

的未知函数 f，即所谓函数的迭代根问题．在第 1 章已经指出，迭代根是动力系统理论的基本问题之一．

迭代根是一个古老的问题，早在百年以前，巴贝奇 [16] 、阿贝尔 [1] 等数学家就开始了这一研究．迭代根又牵动着动力系统这一现代数学分支的发展，多年来一直被人们关注． 1950 年艾萨克斯 (R.Isaacs)[28] 在一篇精辟的论文中完成了一个奠基性的工作，给出了抽象集上自映射的迭代根存在的充分必要条件．关于复函数，在寇宁斯 (G.Koenigs)[31] 局部结果的基础上， 1950 年克尼瑟 (H.Kneser)[30] 做出了整函数 e^z 的二次迭代根的全局结果，之后莱斯 [49] 等人做了进一步的工作．关于实函数，波狄瓦特 [10] 、佛特 (Jr.M.K.Fort)[18] 、库其玛 [32] 等人的工作具有开创性，近年来这方面工作又有不断的推进 [73] ．

我们将主要关心实函数的迭代根问题．首先从直观上，我们必须回答：一个函数 F 在什么条件下具有 n 次迭代根 f ？在什么条件下迭代根是唯一的？像一个正数有多个实平方根而一个负数没有实平方根一样，迭代根是否有类似的性质？此外，我们还要回答迭代根作为函数的基本性质，如单调性和光滑性等等．

§ 11　单调函数迭代根

令 $I=[a,b]$ ，记 $\mathrm{CI}(I,I)$ 为从 I 映入自身的、保持端点不变

用归纳法可证明 $h_i(x)$ 和 $h_{-i}(x)$ 连续递增且满足

$$h_i(x_i) = y_i, \qquad h_i(x_{i+1}) = y_{i+1}; \tag{11.8}$$

$$h_{-i}(x_{-i}) = y_{-i}, \quad h_{-i}(x_{-i+1}) = y_{-i+1}. \tag{11.9}$$

最后定义

$$h(x) = \begin{cases} x, & x = a,\ b; \\ h_i(x), & x \in [x_i, x_{i+1}],\ i = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \end{cases} \tag{11.10}$$

易验证 $h \in \mathrm{CI}(I, I)$ 且满足 $h(f(x)) = F(h(x))$, $\forall x \in I$. □

上述定理中的 h 不是唯一确定的，它依赖于初始函数 h_0 的选择. 选择 h_0 的实质性要求是 (11.5) , 在区间 $(x_0, f(x_0))$ 内连续递增函数 h_0 的定义具有很大的随意性，完全不必是线性形式 (11.4) . 上述证明中用到的所谓 **逐段定义法** 对构造迭代根十分有用.

定理 2 (哈代 - 波狄瓦特定理) 对任意正整数 n ， $\mathrm{CI}(I, I)$ 中的函数必有 $\mathrm{CI}(I, I)$ 中的 n 次迭代根.

证明 设 $F \in \mathrm{CI}(I, I)$. 由定理 1 ， 存在函数 $h \in \mathrm{CI}(I, I)$, 满足

$$F(x) = h^{-1}(F^n(h(x))). \qquad \forall x \in I \tag{11.11}$$

令

$$f(x) = h^{-1}(F(h(x))). \tag{11.12}$$

易见 $f(a) = a$, $f(b) = b$ ，而且 f 也是 I 上连续递增函数. 因为

$$f^n(x) = h^{-1}(F^n(h(x))) = F(x),$$

所以 f 是 F 的 n 次迭代根. □

从定理证明可看出，迭代根 f 取决于函数 h ，而定理 1 证明表明 h 由初始函数 $h_0(x)$, $x \in [x_0, x_1]$ 决定，它有无穷多个选择，因

而迭代根通常不唯一. 这个定理还可通过在子区间 $[x_i, x_{i+1}]$, $i = 0, \pm1, \pm2, \cdots$ 上逐段定义 $f^i(x)$ 来证明 [10],[75]，其中区间满足

$$\bigcup_{i=-\infty}^{\infty} [x_i, x_{i+1}] = I.$$

推论 若 $F: [a,b] \to [a,b]$ 连续递增，则对任意自然数 $n \geq 2$ 和使得 $a < A < B < b$ 的实数 A, B, F 都存在 $[a,b]$ 上的 n 次连续迭代根 f，满足

$$F(a) \leq f(A) < f(B) \leq F(b). \tag{11.13}$$

证明 不妨设 F 在 (a,b) 上没有不动点，否则我们可以分别在每个以不动点为端点而内部无不动点的区间上考虑 F 的连续递增迭代根，然后再逐段拼接起来. 如果 a, b 都是不动点，则 $F \in \mathrm{CI}(I,I)$, $I = [a,b]$. 定理 2 已经给出了结果. 由于迭代根 $f \in \mathrm{CI}(I,I)$ 且 $F(a) = a$, $F(b) = b$，故所要求的不等式 (11.13) 自然成立.

如果 a, b 不全是不动点，则首先考虑 $F(a) = a$, $F(b) < b$ 的情形. 任取 $c > b$ 并令

$$F_1(x) = \begin{cases} F(x), & x \in [a,b), \\ \dfrac{F(b)}{b-c}(x-c) + \dfrac{c}{c-b}(x-b), & x \in [b,c]. \end{cases} \tag{11.14}$$

易见 $F_1 \in \mathrm{CI}(I_1, I_1)$, $I_1 = [a,c]$. 应用定理 2，存在 $f_1 \in \mathrm{CI}(I_1, I_1)$ 使得 $f_1^n = F_1$. 从而限制在 $I = [a,b]$ 上 $f := f_1|_I$ 是 F 的 n 次连续迭代根.

关于不等式 (11.13)，由于 $f_1(A) \geq a = F(a)$，我们只要证明命题: $f_1(B) \leq F(b)$. 我们将利用迭代根不唯一性在逐段定义过程中适当选择初始函数. 我们不妨设

$$B \in (F(b), b),$$

否则 $B \le F(b)$，而 $F(b) < b$ 的假设决定了 (11.14) 构造的函数满足 $F_1(x) < x, \quad x \in (a,c)$，因而从 (11.12) 知 $f_1(x) < x,\ x \in (a,c)$，易见此时不等式 (11.13) 自然成立. 在定理 1 证明中令 $x_0 = b$ 并选择在 $[F_1(b), b]$ 上连续递增的初始函数 h_0 使

$$h_0(b) = F_1(b), \quad h_0 \circ F_1(b) = F_1^{n+1}(b),$$

并且

$$h_0(B) = F_1^n(b) - \varepsilon, \quad 0 \le \varepsilon < \frac{F_1^n(b) - F_1^{n+1}(b)}{2}.$$

这样我们可以确定一个 $[a,c]$ 上连续递增的函数 h 满足 $h(x) = h_0(x),\ x \in [F_1(b), b]$ 和 (11.11)，即 $F_1(x) = h^{-1} \circ F_1^n \circ h(x),\ \forall x \in [a,c]$. 由递增性，易见

$$F_1 \circ h(B) = F_1(F_1^n(b) - \varepsilon) \le F_1^{n+1}(b) = F_1^n \circ h(b) = h \circ F_1(b),$$

即 $f_1(B) = h^{-1} \circ F_1 \circ h(B) \le F_1(b) = F(b)$，从而命题得证. 注意到 $f_1(x) \le x$，故 $f_1([a,b]) \subset [a,b]$.

此外，关于 $F(a) > a,\ F(b) = b$ 和 $F(a) > a,\ F(b) < b$ 的情形，同理可证. □

如果 F 离开了递增性，或说具有单调递减的成分，情况就大不相同了.

定理 3 $F \in C(I,I)$ 有唯一不动点 $x_0 \in I$. 如果在小邻域 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 中，$F(x) > x_0,\ \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$ 且 $F(x) \le x_0,\ \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$，那么对任何偶正整数 $2m$，函数 F 在 $C(I,I)$ 上都不存在 $2m$ 次迭代根. 进而，严格递减函数没有连续的 $2m$ 次迭代根.

证明 实质上只需证 $m = 2$ 的情形. 如果 F 存在 2 次连续迭代根 $f: I \to I$，易见 F 的不动点 x_0 一定也是 f 的不动点. 由连续性，可取足够小的 $\delta_1,\ 0 < \delta_1 < \delta$，使 $|f(x) - x_0| < \delta,\ \forall x \in [x_0 - \delta_1, x_0 + \delta_1]$. 令 $M_f = \max\{f(x) : x \in [x_0 - \delta_1, x_0]$. 如果 $M_f \le x_0$，可取充分小的 δ_2 使 $f^2(x) \le M_f \le x_0, \forall x \in [x_0 - \delta_2, x_0]$，

与定理假设矛盾. 如果 $M_f > x_0$, 必有 $f(x) > x_0, \forall x \in (x_0, M_f]$, 否则不能保证 $F(x) = f^2(x) > x_0$, $\forall x \in [x_0 - \delta_1, x_0)$. 因而, 可取充分小的 δ_3 使 $f^2(x) > x_0$, $\forall x \in (x_0, x_0 + \delta_3]$. 然而这又与定理假设矛盾. □

定理 4 设 $F \in C(I, I)$ 是满射且有一极值点 $c \in I$, F 在 $[a, c]$ 和 $[c, b]$ 都严格单调. 那么对任何正整数 $n \geq 2$, 函数 F 都不存在连续的 n 次迭代根.

该定理的证明将在下一节给出.

§ 12 非单调函数迭代根

离开了递增性, 迭代根问题都十分复杂. 而离开了单调性, 迭代根问题将会更加麻烦. 本节只是讨论一种特殊的非单调函数情形, 即严格逐段单调连续函数的情形.

定义 1 $x_0 \in (a, b)$ 称为函数 $F: I \to I$ 的 **单调点** , 如果 $F(x)$ 在 x_0 的一个邻域上严格单调. 否则, x_0 称为 **非单调点** .

定义 2 $F \in C(I, I)$ 称为 **严格逐段单调连续函数** , 或简称 "**S-函数**" , 如果 $F(x)$ 在 I 上仅有有限个极值点而在每相邻两个极值点之间严格单调. 我们用 $S(I, I)$ 记这类函数的全体.

显然, $F \in S(I, I)$ 当且仅当 $F \in C(I, I)$, 且 F 仅有有限多个非单调点. $F_1, F_2 \in S(I, I)$, 则 $F_2 \circ F_1 \in S(I, I)$; 反之, 若 $F_2 \circ F_1 \in S(I, I)$, 则 $F_1 \in S(I, I)$. 从而我们有 $F^n \in S(I, I)$ 当且仅当 $F \in S(I, I)$.

令 $N(F)$ 表示 S - 函数 F 在 I 上极值点的个数. 显然

$$0 = N(F^0) \leq N(F^1) \leq N(F^2) \leq \cdots \leq N(F^m) \leq \cdots. \tag{12.1}$$

特别是当 F 在 I 严格单调时 $N(F) = 0$. $H(F)$ 记满足 $N(F^m) =$

$N(F^{m+1})$ 的最小正整数 m . 注意到, $H(F)=\infty$ 意味着序列 $\{N(F^m)\}$ 严格递增, 而当 $H(F)=m<\infty$ 时对任意自然数 k 有 $N(F^m)=N(F^{m+k})$, 并且

$$H(F^k)=[m/k]+\mathrm{sgn}(m/k-[m/k]). \tag{12.2}$$

事实上, 令 $r=[m/k]+\mathrm{sgn}(m/k-[m/k])$, $F_1=F^k$, 显然 $k(r-1)<m\le kr<k(r+1)$, 故 $N(F_1^{r-1})=N(F^{k(r-1)})<N(F^m)=N(F^{kr})=N(F_1^r)=N(F^{k(r+1)})=N(F_1^{r+1})$, 从而证实了 (12.2) .

定理 1 设 $F\in S(I,I)$ 且 $H(F)>1$, 那么对任意整数 $n>N(F)$, 函数 F 没有连续的 n 次迭代根.

证明 假设 F 有 n 次迭代根 $f\in C(I,I)$. 自然地, $f\in S(I,I)$. 由于 $H(F)>1$, 必然 $N(F^2)>N(F)$, 即 $N(f^{2n})>N(f^n)$, 这意味着 $H(f)>n$ 且 $0=N(f^0)<N(f)<N(f^2)<\cdots<N(f^n)$. 因此, $N(f^n)=N(F)\ge n$, 这与定理对 n 的假设矛盾. □

易见 §11 的定理 4 是这一定理的一个推论. 满足 §11 定理 4 条件的函数 F 称为区间 I 上的 **单峰函数** (若极值为极大值) 或 **单谷函数** (若极值为极小值). 显然, $N(F)=1$. 由于 F 是满射, 不妨设 $F(c)=b$, $F(a)=a$, 分别取最大值和最小值. 由连续性, 在 c 的小邻域 $B(c,\delta)$ 里 $c<F(x)<b$. 由于在 $[c,b]$ 上 F 一定是严格递减的, 所以 $F^2(x)>F(b)=F^2(c)$, $\forall x\in B(c,\delta)$, 即 $F^2(c)$ 是一极小值. 然而, $F^2(a)=a$ 是最小值, 因此 F^2 必还有另一个极值点 $c'\in(a,c)$. 这意味着 $N(F^2)\ge 2>N(F)$, 即 $H(F)>1$. 从而由上述定理可导出 §11 的定理 4 .

定义 3 设 $F\in S(I,I)$ 且 $H(F)\le 1$. 令 $A=\min\{F(x):x\in I\}$, $B=\max\{F(x):x\in I\}$. 称 $[a',b']$ 为 F 的 **特征区间** , 如果 a' 和 b' 为 F 在 I 的两个相邻极值点, 而且 $[A,B]\subset[a',b']\subset[a,b]$.

$H(F)\le 1$ 即 $N(F)=N(F^2(x))$, 这当且仅当 F 在 $[A,B]$ 上严格单调. 事实上, 如果 F 有极值点 $c\in[A,B]$, 由连续性, 必存

在单调点 $x_0 \in (a,b)$ 使得 $F(x_0)=c$. 因此 x_0 是 F^2 的另一个极值点, 从而 $N(F^2)>N(F)$, 给出了与基本假设矛盾的说法. 这表明上述定义是合理的. 显然, F 在特征区间 $[a',b']$ 上是严格单调的.

定理 2 $F \in S(I,I)$ 且 $H(F) \leq 1$. 假设 (i) F 在其特征区间 $[a',b']$ 上递增, 并且 (ii) 如果 $F(a') \neq a'$ 且 $F(b') \neq b'$, 则函数 F 在 I 不能达到 a' 和 b' . 那么对任意整数 $n \geq 2$, 函数 F 有连续的 n 次迭代根. 另外, 这些条件对整数 $n > N(F)+1$ 还是必要的.

为证明定理 2, 我们需要以下引理.

引理 1 $F \in S(I,I)$ 且 $H(F) \leq 1$. 函数 F 有连续的 n 次迭代根 f , 整数 $n \geq 2$. 那么

(i) F 在其特征区间 $[a',b']$ 上严格单调且映入自身;

(ii) F 所有的周期点在 $[a',b']$ 内;

(iii) f 所有的周期点在 $[a',b']$ 内;

(iv) f 在 $[a',b']$ 上严格单调且映入自身;

(v) $f^n = F(x),\ \forall x \in [a',b']$;

(vi) 如果整数 $n > N(F)+1$ 且 $x' \in I$ 使得 $F(x') = a'$ 或 b' , 则 $x' \in [a',b']$.

证明 令 $m_i = \min\{F^i(x) : x \in I\}$, $M_i = \max\{F^i(x) : x \in I\}$. 显然, 序列 $\{m_i\}$ 和 $\{M_i\}$ 分别是单调不减和单调不增的. 注意到 $[m_1,M_1] \subset [a',b']$, 由特征区间的定义可直接得到结论 (i) . 设 $x_0 \in I$ 为 F 的 k- 周期点, 则 $x_0 = F^k(x_0) \in [m_k,M_k] \subset [m_1,M_1] \subset [a',b']$, 结论 (ii) 得证. 由于所有 f 的周期点都是 F 的周期点, 从而结论 (iii) 得证.

根据 (i) 的结论, 注意到 $f^n \in S(I,I)$ 当且仅当 $f \in S(I,I)$, 可以直接推论 (iv) 的单调性结论. (iv) 的另一半是要证明 $f([a',b']) \subset$

$[a',b']$. 当 f 在 $[a',b']$ 上递增时，如果 $f(a')<a'$ ，则根据 $f(a)\geq a$ 和连续性知存在 $x_1\in[a,a')$ 使 $f(x_1)=x_1$ ，这表明 f 在 $[a',b']$ 外有周期点，从而与 (iii) 结论矛盾. 因此 $f(a')\geq a'$. 同理可证 $f(b')\leq b'$. 当 f 在 $[a',b']$ 上递减时，也不难证明同样的结果. 显然，(v) 由 (iv) 直接推出.

注意到 $n>N(F)+1>N(F)$ 意味着 $H(f)<n$. 否则，$0=N(f^0)<N(f)<N(f^2)<\cdots<N(f^n)$ ，从而给出一个荒谬的说法 $N(f^n)\geq n>N(F)$. 因此我们得到 $N(f^{n-1})=N(F)$ ，进而 $N(f^{n-1})=N(f^{n-1}\circ f^{n-1})$ ，即 $H(f^{n-1})\leq 1$. 由于 f^{n-1} 与 $f^n=F$ 有共同的非单调点，而且

$$[\min f^{n-1},\ \max f^{n-1}]\supset[m_1,M_1],$$

故 $[a',b']$ 也是 f^{n-1} 的特征区间，并且 f^{n-1} 将 I 映入 $[a',b']$. 因此，$F=f\circ f^{n-1}$ 在 I 上达到 a'（或 b' ）意味着 f 在 $[a',b']$ 上也达到 a'（或 b'). 由 f 的单调性，当递增时显然 $f(a')=a'$ （或 $f(b')=b'$ ），从而 $F(a')=a'$ （或 $F(b')=b'$). 当递减时也不难证明 (vi) 的结论. □

引理 2 $F\in S(I,I)$ 且 $H(F)\leq 1$. F 的特征区间为 $I'=[a',b']$ ，m,M 记函数 F 在 $I=[a,b]$ 的最小值和最大值，m',M' 记 F 在 I' 的最小值和最大值. 如果限制在 I' 上函数 F 有连续的 n 次迭代根 f_1 ，整数 $n\geq 2$, 而且 f_1 把 I' 映入自身并把 $[m,M]$ 映入 $[m',M']$ ，那么存在连续函数 $f:I\to I$, 满足

(i) $f(x)=f_1(x),\ \forall x\in I'$;

(ii) $f^n=F(x),\ \forall x\in I$.

证明 令 F_1 为 F 在 I' 上的限制, 由引理 1 给出的单调性知, $F_1^{-1}:[m',M']\to I'$ 是连续的. 令

$$f=F_1^{-1}\circ f_1\circ F.$$

由于对 $x\in I$ 有 $F(x)\in[m,M]\subset I'$ ，而且对 $y\in[m,M]$ 有

$f_1(y) \in [m', M']$ ，上述 f 在 I 的定义是合理的，而且 $f: I \to I'$ 是连续的. 易见

$$f^n(x) = F_1^{-1} \circ f_1^n \circ F(x) = F_1^{-1} \circ F_1 \circ F(x) = F(x), \qquad \forall x \in I$$

从而引理得证. □

定理 2 的证明 由哈代 - 波狄瓦特定理 (§11 定理 2) 及其推论， F 在特征区间 $I' = [a', b']$ 上有 n 次连续迭代根 f_1 ，它满足 $m' = F(a') \le f_1(m) < f_1(M) \le F(b') = M'$. 根据引理 2 ， f_1 可以延拓为 F 在整个 I 上的 n 次连续迭代根 f . 另外，对于 $n > N(F) + 1$ ，由引理 1 的 (vi) 知定理 2 的条件 (ii) 是必要的，由 §11 定理 3 知定理 2 的 条件 (i) 也是必要的. □

在其他情形下，张景中和杨路还证明了以下重要结果 [68] .

定理 3 设 $F \in C(I, I)$ 严格递增，具有不动点 $x_0 \in (a, b)$ ，且或者 $F(a) = a,\ F(b) = b$ ，或者 $a < F(x) < b,\ \forall x \in I$. 令 E' 由 F 在 $[a, x_0]$ 的不动点组成， E'' 由 F 在 $[x_0, b]$ 的不动点组成. 假设 (i) 存在一个反向一一对应 $D: E' \to E''$ ，亦即 $D(p) = p'$ ，当 $e_1 < e_2$ 时 $e_1' > e_2'$ ，并且 (ii) 如果 $F(x) - x$ 在 (e_1, e_2) 是正 (负) 的，则它在 (e_1', e_2') 上是负 (正) 的. 那么对任意偶数 $2m \ge 2$ ，函数 F 有连续递减的 $2m$ 次迭代根.

定理 4 设 $F \in C(I, I)$ 严格递减，且或者 $F(a) = b,\ F(b) = a$, 或者 $a < F(x) < b,\ \forall x \in I$. 那么对任意奇数 $2m + 1 \ge 3$ ，函数 F 有连续递减的 $2m + 1$ 次迭代根.

定理 5 $F \in S(I, I)$ 且 $H(F) \le 1$. 假设 (i) F 在其特征区间 $[a', b']$ 上递减，并且 (ii) 或者 $F(a') = b',\ F(b') = a'$ ，或者 $a' < F(X) < b',\ \forall x \in I$. 那么对任意奇数 $n > 0$ ，函数 F 有连续的 n 次迭代根.

何连法等 [27] 还进一步给出了圆周 S^1 上的结果.

定理 6 $F: S^1 \to S^1$ 连续且 $\deg(F) = 0$. 那么对任意奇数

$n \geq 2$，函数 F 有连续的 n 次迭代根，当且仅当 F 有一个特征区间 $[a', b'] \subset S^1$ 且 F 在上面严格递增.

定理 7 假设 $F: S^1 \to S^1$ 连续且 $\deg(F) = 0$，并且 F 有一个特征区间 $[a', b'] \subset S^1$ 使 F 在上面严格递减. 那么，对偶数 n，函数 F 没有连续的 n 次迭代根；对奇数 n，如果或者 $F(a') = b'$, $F(b') = a'$，或者 $a' < b'$ 且 $F(b') > a'$，则函数 F 有连续的 n 次迭代根.

有关结果还可参见 [86]. 这里尚有两个问题有待解决：当 $N(F) < N(F^2)$ 和 $n \leq N(F)$ 时函数 F 有没有 n 次迭代根？当 $N(F) = N(F^2)$, $n \leq N(F) + 1$ 且 F 在 I 上可以达到 a', b' 而在特征区间 $[a', b']$ 上不能时，函数 F 有没有 n 次迭代根？当考虑扩张自映射时，对第一个问题还有进一步的结论 [65],[66].

$f \in C([a, b])$ 称为 **扩张**，如果存在 $\alpha > 1$，使得

$$|f(x_1) - f(x_2)| \geq \alpha |x_1 - x_2|. \qquad \forall x_1, x_2 \in [a, b]$$

如果将 $[a, b]$ 分成有限个子区间时 f 在每个子区间上扩张，则称 f **逐段扩张**. 记 $I = [0, 1]$，$\mathrm{SE}(I, I)$ 表示 I 上极值都等于 0 或 1 的逐段扩张自映射之集. 显然，$\mathrm{SE}(I, I) \subset S(I, I)$. 可以证明：$\mathrm{SE}(I, I)$ 上两个映射 f 与 g 拓扑共轭的充分必要条件是 $N(f) = N(g)$ 且 $g(0) - g(1) = f(0) - f(1)$.

通常我们把 $\mathrm{SE}(I, I)$ 分成四类，$\mathrm{SE}(I, I) = \bigcup_{i=1}^{4} \mathrm{SE}_i(I, I)$，其中

$$\begin{aligned}
\mathrm{SE}_1(I, I) &= \{f \in \mathrm{SE}(I, I) : f(0) = f(1) = 0\}, \\
\mathrm{SE}_2(I, I) &= \{f \in \mathrm{SE}(I, I) : f(0) = f(1) = 1\}, \\
\mathrm{SE}_3(I, I) &= \{f \in \mathrm{SE}(I, I) : f(0) = 0, f(1) = 1\}, \\
\mathrm{SE}_4(I, I) &= \{f \in \mathrm{SE}(I, I) : f(0) = 1, f(1) = 0\}
\end{aligned}$$

互不相交. [65] 证明了下列结果.

定理 8　若 $F \in \mathrm{SE}_i(I,I)$, $i=1,2,3$，则对任意自然数 n，函数 F 有 n 次迭代根的充分必要条件是存在自然数 k，使得 $N(F)=k^n+1$．若 $F \in \mathrm{SE}_4(I,I)$，则对任意自然数 n，当 n 为偶数时，函数 F 无 n 次迭代根；当 n 为奇数时，函数 F 有 n 次迭代根的充分必要条件是存在自然数 k，使得 $N(F)=k^n+1$．

该结果还可推广到更一般的函数类 $\mathrm{SGE}(I,I)=\{f \in C(I,I):$ $f(\{0,1\}) \subset \{0,1\}$，存在划分 $0=x_1<x_2<\cdots<x_{2n}=1$，使得 $f([x_{2i},x_{2i+1}]) \subset \{0,1\}$，$f$ 在 $[x_{2j-1},x_{2j}]$ 上扩张，$i=1,2,\cdots,n-1$, $j=1,2,\cdots,n\}$，参见 [66]．

§ 13　迭代根局部光滑性

首先，一个经典结果表明 [10]，区间上严格递增且无不动点的光滑自映射必有光滑迭代根.

定理 1　(波狄瓦特定理)　$F \in C^\infty(I,I)$, $F(x)>x$ 且导数 $F'(x)>0$．那么对任意整数 $n \geq 2$，函数 F 在 $C^\infty(I,I)$ 中必有 n 次迭代根.

这个结果是直观的，而且按上述逐段定义法思想，其证明也是不难的．问题将出在映射的不动点附近．本节我们要讨论的迭代根在不动点附近的局部光滑性．往下 $C^k(I,I)$ 记 C^k 函数 $F: I \to I$ 的全体.

定理 2　区间 $I \subset \mathbf{R}$．假设 (i) $F \in C^1(I,I)$, $F'(x)>0$, $\forall x \in I$；(ii) F 在 I 有唯一的不动点 x_0, 并且 $F'(x_0) \neq 1$；(iii) $F''(x_0)$ 有定义．那么，对任意整数 $k>1$，函数 F 在 $C^1(I,I)$ 有唯一严格递增的 k 次迭代根 f．

定理 2 给出了在双曲不动点附近存在 C^1 迭代根的条件，它表明这种存在性是唯一的．我们先证明一个引理，其结果比哈特曼 -

格诺曼线性化定理 (§6 定理 1) 要强，因为得到的共轭关系是 C^1 的.

引理 1 在定理 2 条件下，存在 I 上严格单调的连续可微函数 $h(x)$ ，满足

$$h'(x_0) \neq 0, \quad h(F(x)) = F'(x_0)h(x). \qquad \forall x \in I \tag{13.1}$$

这样的 h 虽不必唯一，但只相差一个非 0 常数因子.

证明 首先考虑 $F'(x_0) < 1$ 的情形. 由于 $F''(x_0)$ 存在，故存在 $\delta > 0$ ，使 $|x - x_0| < \delta$ 时有

$$|F(x) - F(x_0)| < q|x - x_0|, \tag{13.2}$$

$$|F'(x) - F'(x_0)| < M|x - x_0|, \tag{13.3}$$

其中 $q = (1 + |F'(x_0)|)/2 < 1$, $M = |F''(x_0)| + 1$. 简记 $c = F'(x_0)$, 考虑序列

$$h_n(x) = c^{-n}(F^n(x) - x_0). \qquad n = 0, 1, 2, \cdots.$$

我们指出，无穷级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(h_{n+1}(x) - h_n(x)) \tag{13.4}$$

在 x_0 的充分小邻域上一致收敛并逐项可导. 事实上，$h_n(x_0) = 0$ ，由连续性，$|h_{n+1}(x) - h_n(x)|$ 在 x_0 的某邻域上不超过一个小于 1 的常数，从而级数局部一致收敛. 进而，当 $|x - x_0| < \delta$ 时由 (13.2) 和 (13.3) ，

$$\begin{aligned}
|h'_{n+1}(x) - h'_n(x)| &= |c^{-(n+1)}| \left| \frac{d}{dx}F^{n+1}(x) - c\frac{d}{dx}F^n(x) \right| \\
&= |c|^{-(n+1)} \left| \frac{d}{dx}F^n(x) \right| |F'(F^n(x)) - F'(x_0)| \\
&= \frac{1}{|c|^{n+1}}(|c| + M\delta)^n M|F^n(x) - x_0| = \frac{M\delta}{|c|}\left(\frac{q(|c| + M\delta)}{|c|}\right)^n.
\end{aligned}$$

由于可取 $\delta > 0$ 充分小，使 $q(|c| + M\delta)/|c| < 1$ ，用柯西判别法知该级数逐项求导后仍局部一致收敛. 令

$$h(x) = (x - x_0) + \sum_{n=0}^{\infty}(h_{n+1}(x) - h_n(x)),$$

它在 x_0 附近连续可微，而且易计算 $h'(x_0) = 1$. 显然

$$\begin{aligned} h(x) &= h_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty}(h_{n+1}(x) - h_n(x)) \\ &= \lim_{n\to+\infty} h_n(x) = \lim_{n\to+\infty} c^{-n}(F^n(x) - x_0), \end{aligned}$$

从而在 x_0 附近

$$h(F(x)) = \lim_{n\to+\infty} c^{-n}(F^{n+1}(x) - x_0) = ch(x),$$

即验证了 (13.1) .

进一步，我们尚须把 h 的局部结果连续可微地开拓到整个 I 上去. $|F'(x_0)| < 1$ 表明 x_0 为稳定不动点，它必吸引附近的点. 而 x_0 是 I 上唯一不动点，并且 F 严格递增，易见

$$\lim_{n\to+\infty} F^n(x) = x_0. \qquad \forall x \in I \quad (13.5)$$

于是，对任意 $x \in I$, 总有一个整数 $n \geq 0$, 使 $F^n(x)$ 进入 x_0 的充分小邻域，这样 $h(F^n(x))$ 就有定义了. 令

$$h(x) = c^{-n}h(F^n(x)),$$

从而完成了 h 在整个 I 上的开拓.

最后证明严格单调性. 若不然，存在 $x_1 \neq x_2$ 使 $h(x_1) = h(x_2)$ ，由 (13.1) 知 $h(F^n(x_1)) = h(F^n(x_2))$. 因为 F 严格单调, $F^n(x_1) \neq F^n(x_2)$ ，而由 (13.5) 知 h 在 x_0 附近不是严格单调的. 这显然与 h 在 x_0 附近连续可微且 $h'(x_0) = 1$ 矛盾.

注意到，在 (13.1) 中取 $x = x_0$，得 $ch(x_0) = h(F(x_0)) = h(x_0)$，由 $c \neq 1$ 知 $h(x_0) = 0$，即 $h^{-1}(0) = x_0$．因此，对满足 (13.1) 的任意两个 h_1, h_2, 显然有

$$\begin{aligned}\frac{h_1(x)}{h_2(x)} &= \frac{h_1(F^n(x))}{h_2(F^n(x))} \\ &= \lim_{n\to+\infty}\left(\frac{h_1(F^n(x)) - h(x_0)}{F^n(x) - x_0}\right)\left(\frac{F^n(x) - x_0}{h_2(F^n(x)) - h(x_0)}\right) \\ &= \frac{h_1'(x_0)}{h_2'(x_0)}.\end{aligned}$$

故这样的 h 虽不必唯一，但只相差一个非 0 常数因子.

关于 $F'(x_0) > 1$ 的情形，由不动点的唯一性，必定 F 映满，即 $F(I) = I$．令 $G = F^{-1}$，它显然为 I 上自映射且 $G'(x_0) < 1$，从而，按上一情形，可得到满足 (13.1) 的 h. 易见 h 对 F 也满足同样的关系. □

定理 2 的证明 由引理 1，存在 I 上严格单调的连续可微函数 $h(x)$, 满足 $F(x) = h^{-1}(ch(x))$，其中 $0 < c = F'(x_0) \neq 1$．对给定的正整数 k, 取

$$f(x) = h^{-1}(c^{1/k}h(x)).$$

易验证 $f^k(x) = F(x)$．由于 $h'(x_0) \neq 0$，故 f 连续可微.

此外，对 F 任意一个 C^1 的 k 次光滑迭代根 f，有

$$F \circ f(x_0) = f^{k+1}(x_0) = f \circ F(x_0) = f(x_0).$$

然而 F 只有一个不动点，故 $f(x_0) = x_0$. 从而在不动点 x_0 处有

$$f'(x_0) = (F'(x_0))^{1/k} = c^{1/k}.$$

令
$$G(x) = h \circ f \circ h^{-1}(x).$$

在 (13.1) 中取 $x = x_0$, 得 $ch(x_0) = h(F(x_0)) = h(x_0)$. 由 $c \neq 1$ 知 $h(x_0) = 0$，即 $h^{-1}(0) = x_0$．因此 $G(0) = 0$ 且 $G'(0) = f'(x_0) = c^{1/k}$.

由于

$$\begin{aligned} cG(x) &= h\circ h^{-1}(ch\circ f\circ h^{-1}(x)) = h\circ F\circ f\circ h^{-1}(x) \\ &= h\circ f\circ F\circ h^{-1}(x) = h\circ f\circ h^{-1}\circ h\circ F\circ h^{-1}(x) \\ &= G(cx), \end{aligned}$$

那么 $c^n G(x) = G(c^n x)$. 从而

$$G(x) = \frac{G(c^n x)}{c^n} = \left(\lim_{n\to+\infty}\frac{G(c^n x)}{c^n x}\right)x = G'(0)x = c^{1/k}x.$$

因此

$$f(x) = h^{-1}\circ G\circ h(x) = h^{-1}(c^{1/k}h(x)).$$

该形式由 h 唯一确定. 引理 1 指出, h 虽不必唯一但只相差一个非 0 常数因子, 那么对另一个 $h_1 = \lambda h$, 显然有

$$h_1^{-1}(c^{1/k}h_1(x)) = h^{-1}(\lambda^{-1}c^{1/k}\lambda h(x)) = h^{-1}(c^{1/k}h(x)).$$

故唯一性得证. □

蒋星耀进一步研究高阶可微性, 证明了下列结果 [29] .

定理 3 令 $I=[a,b]$, $r\ge 2$. 函数 $F\in C^r(I,I)$ 有唯一不动点 $x_0\in I$ 且 $F'(x)\ne 0$, $\forall x\in I$, $F'(x_0)=c$, $0<c<1$. 那么, 对任意整数 $n>0$, 函数 F 在 $C^r(I,I)$ 有唯一递增的 n 次迭代根.

§ 14 局部光滑性推广

定义 1 $G(x,t)$ 称为 $I=[a,b]$ 上的 **正规迭代族** , 如果对 $t\in \mathbf{R}^+$,

(i) $G(x,t)$ 连续, 且 $G(x,0)=x$, $G(G(x,t_1),t_2) = G(x,t_1+t_2)$,

(ii) $G(x_1,t) < G(x_2,t)$, 如果 $x_1 < x_2$,

(iii) $a < x < G(x,t) < b$, $\forall x \in (a,b)$.

例如, $G_0(x,t) = x+t$, $x \in \mathbf{R}$; $G_1(x,t) = a^t x$, $x \in \mathbf{R}^-$, $0 < a < 1$; $G_2(x,t) = x^{2^t}$, $1 < x < +\infty$; $G_3(x,t) = x/\sqrt{1+tx^2}$, $-1 < x < 0$ 等都是正规迭代族. 易见, 对正规迭代族 $G(x,t)$, 都存在连续函数 $t = T(x,y)$, 它对 y 递增, 而对 x 递减, 并满足 $y = G(x,T(x,y))$. 我们称之为 G 的 **过渡时间函数** .

定义 2 设 $G(x,t)$ 为 $I=[a,b]$ 上的正规迭代族, $T(x,y)$ 是 G 的过渡时间函数, 连续函数 $F:(a,b)\to(a,b)$ 称为是 G -**可度的** , 如果

(i) 在 b 的一个邻域上 $F(x) \geq x$,

(ii) 当 $x \to b$ 时 $T(x,F(x))$ 收敛于一正数 α_F , 该数称为 F 的 G -**指标** .

进而, F 称为是"**下** G **-可度的**", 如果 $F_1(x) := (b+a)-F(b+a-x)$ 是 G - 可度的; F 称为是"**逆** G **-可度的**"(或"**逆下** G **-可度的**"), 如果 $F^{-1}(x)$ 是 G - 可度的(或下 G - 可度的).

利用这些概念, 张景中、杨路证明了以下事实.

定理 1 设 $G(x,t)$ 为 $I=[a,b]$ 上的正规迭代族, $T(x,y)$ 是 G 的过渡时间函数. 又设函数 $F:(a,b)\to(a,b)$ 连续递增且 G - 可度, $F(x) > x$. 那么下列命题相互等价:

(i) 存在序列 $\{m_i\} \subset \mathbf{Z}^+$, $m_1 < m_2 < \cdots < m_i < \cdots$, 使得对任意自然数 i, 函数 F 有一个连续的 m_i 次迭代根 f_i , 它是 G - 可度的, 且当 $i \to +\infty$ 时趋于 x .

(ii) 对任意自然数 m , 函数 F 有一个唯一的 G - 可度的连续 m 次迭代根 f .

(iii) 当 $n \to +\infty$ 时 $P_n(x,y) := T(F^n(x),F^n(y))$ 在区域 $\{(x,y) : a < x < b,\ x \leq y < b\}$ 上收敛于一个连续递增函数 $P(x,y)$.

(vi) 如果函数 $g:(a,b)\to(a,b)G$- 可度，则 $H_n(x):=F^{-n}\circ g\circ F^n(x)$ 趋于一个 G - 可度函数 $H(x)$, 且满足 $\alpha_H=\alpha_g$, $P(x,H(x))=\alpha_H$.

(v) 对任意常数 $c\in(0,+\infty)$, 存在一个唯一的函数 $g(x,c)$ ，它对 $x\in(a,b)$ 单调且 G - 可度， $\alpha_{g(x,c)}=c$ ，且满足 $g(F(x),c)=F(g(x,c))$.

限于篇幅，我们略去定理的长篇证明，而让细心的读者去认真阅读文献 [67]．关于下 G - 可度、逆 G - 可度、逆下 G - 可度，也有相应结果．我们将看到，这一结果包含了比 §13 更多的内容.

利用定理 1 可以简单推出 §13 定理 2．为简便起见，只讨论 $x_0=0$ 且 $F'(0)=c<1$ 的情形．考虑正规迭代族 $G(x,t)=c^t x$ ，它的过渡时间函数为

$$T(x,y)=\frac{1}{\ln c}\ln\frac{y}{x}.$$

$0<c<1$ 意味着不动点 x_0 的双曲性，也意味着 F 是 G - 可度的，因为此时

$$\lim_{x\to 0_-}T(x,F(x))=\lim_{x\to 0_-}\frac{1}{\ln c}\ln\frac{F(x)}{x}=\frac{\ln F'(0)}{\ln c}>0.$$

往下只要验证定理 1 中的命题 (iii)．由等价性，从命题 (ii) 可断定对任意自然数 k 函数 F 有一个唯一的 G - 可度的连续 k 次迭代根 f ，从而给出了 §13 定理 2 的结论．注意到，在不动点 0 处 $F''(0)$ 有定义，由 §13 引理 1 ，存在 I 上严格单调的连续可微函数 $h(x)$, 满足 $h(F(x))=ch(x)$ 且 $h'(0)\neq 0$ ，则 $h(F^n(x))=c^n h(x)$ ，进而

$$\begin{aligned}h(x)&=\frac{h(F^n(x))}{c^n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{h(F^n(x))}{c^n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{h(F^n(x))}{F^n(x)}\right)\frac{F^n(x)}{c^n}=h'(0)\lim_{n\to+\infty}\frac{F^n(x)}{c^n},\end{aligned}$$

因此 $\lim\limits_{n\to+\infty} F^n(y)/F^n(x)=h(y)/h(x)$, 从而给出了

$$P_n(x,y):=T(F^n(x),F^n(y))=\frac{1}{\ln c}\ln\frac{F^n(y)}{F^n(x)}$$

当 $n\to+\infty$ 时的收敛性. 定理 1 中的命题 (iii) 得证.

利用定理 1 还可以推出非双曲不动点情形的结论.

定理 2 $F:[-1,0]\to[-1,0]$ 连续递增且 $F(x)\geq x$ ，其中等号当且仅当 $x=0$ 时成立. 假设 $F'(0)=1$ 且在 $x=0_-$ 函数 F 有展开式

$$F(x)=x-c\,x^{k+1}+o(x^{k+1}),\qquad k\in\mathbf{Z}_+,\ (-1)^k c>0 \quad (14.1)$$

那么下列命题相互等价:

(i) 存在序列 $\{m_i\}\subset\mathbf{Z}^+$, $m_1<m_2<\cdots<m_i<\cdots$, 使得对任意自然数 i 函数 F 有一个连续的 m_i 次迭代根 $f_i:[-1,0]\to[-1,0]$ ，它满足 $f_i'(0)=1$, $f_i(x)$ 在 $x=0_-$ 有 $k+1$ 阶广义导数，而且 $f_i(x)$ 当 $i\to+\infty$ 时趋于 x .

(ii) 对任意自然数 m ，函数 F 有一个唯一的 m 次连续迭代根 f ，它具有 $k+1$ 阶广义导数.

(iii) 当 $n\to+\infty$ 时 $P_n(x,y):=(F^n(y))^{-k}-(F^n(x))^{-k}$ 在区域 $\{(x,y):-1<x<0,\ x\leq y<0\}$ 上收敛于一个连续单调函数 $P(x,y)$.

事实上，考虑正规迭代族 $G(x,t)=\frac{x}{\sqrt[k]{1+atx^k}}$ ，其中 k 为自然数， $(-1)^k a>0,\ x\in(-1,0)$. 它的过渡时间函数为

$$T(x,y)=\frac{1}{a}\left(\frac{1}{y^k}-\frac{1}{x^k}\right).$$

可以证明： F 是 G - 可度的，当且仅当 F 在 $x=0_-$ 处有如下形式的展开式

$$F(x)=x-\frac{a\alpha_F}{k}x^{k+1}+o(x^{k+1}),$$

其中 α_F 为 F 的 G - 指标. 用定理 1 可以推出结论.

§ 15 迭代根全局光滑性

本节我们将具体讨论在两个不动点之间的区间上 C^1 光滑的问题 [78]. 我们将发现尽管迭代根在远离不动点处可以是光滑的, 但在区间两端点不动点附近却很难同时光滑.

令 $I=[0,1]$, $A^1(I)$ 为满足 $F'(x)>0,\forall x\in I$, $F(x)\neq x,\forall x\in(0,1)$ 且使得对端点 $y=0,1$, $F(y)=y,F'(y)\neq 1$, $F''(y)$ 有定义的 C^1 函数 $F:I\to I$ 全体. $E^1(I;m,M)$ 为满足 $f(0)=0,f(1)=1$ 且 $m\leq f'(x)\leq M$, $|f'(x_1)-f'(x_2)|\leq M$, $\forall x,x_1,x_2\in I$ 的 C^1 函数 $f:I\to I$ 全体. 其中 $0<m<M$ 为常数. 关于 C^1- 范数 $\|\cdot\|_1$ 的诱导距离, $A^1(I)$ 和 $E^1(I;m,M)$ 是 $C^1(I,I)$ 的子空间, 而且 $E^1(I;m,M)$ 还是闭子空间. 张伟年证明了如下事实 [83].

定理 1 给定整数 $k\geq 2$. $A^1(I)$ 中的 C^1- 光滑函数通有地不具有 $E^1(I;m,M)$ 上的光滑 k 次迭代根.

注意到, 在距离空间 X 中命题 P 称为**通有的**, 如果 P 在 X 的可数个稠密开子集的交集上成立.

引理 1 假设 $F\in C^1(I,I)$, 满足

(i) 导数 $F'(x)>0$, $\forall x\in I$;

(ii) F 在 I 仅有两个不动点 0 和 1, $F'(0)\neq 1$, $F'(1)\neq 1$;

(iii) $F''(0)$ 和 $F''(1)$ 有定义,

那么, 对任意整数 $k>1$, 必存在正常数 $\delta<1$, 使函数 F 在小邻域 $[0,\delta)$(或 $(1-\delta,1]$) 有唯一的 k 次连续可微迭代根.

更一般地说, 由 §13 定理 1, 对任意整数 $k>1$, 函数 F 在 $C^1[0,1)$(或 $C^1(0,1]$) 有唯一的 k 次连续可微迭代根.

证明 事实上，如果 $F'(0)<1$ ，必存在小邻域 $J=[0,\delta)$ 使 F 将它映入自身，因此 $F\in C^1(J,J)$ 满足 §13 定理 2 的条件. 另一方面，如果 $F'(0)>1$ ，则 $(F^{-1})'(0)=1/F'(0)<1$ 且 $(F^{-1})''(0)=-F''(0)/F'(0)^3$ 有定义，因此 F^{-1} 把一个小邻域 $J=[0,\delta)$ 映入自身，从而 $F^{-1}\in C^1(J,J)$ 满足 §13 定理 2 的条件. 将 F^{-1} 在 $J=[0,\delta)$ 唯一的 k 次连续可微迭代根记为 g ，并且令 $f=g^{-1}$. 由于 g 严格递增， $f\in C^1(J,J)$ 也严格递增，且

$$(f^k)^{-1}=(\underbrace{g^{-1}\circ g^{-1}\circ\cdots\circ g^{-1}}_{k})^{-1}=\underbrace{g\circ g\circ\cdots\circ g}_{k}=F^{-1}, \quad (15.1)$$

亦即 $f^k(x)=F(x)$. 在 1 的邻域上同样地讨论. □

定理 1 的证明 简记 $A^1(I)$, $E^1(I;m,M)$ 为 A^1, E^1 . 令 W 为 A^1 中在 E^1 上不具有 k 次迭代根的函数全体. 我们要证明 W 是 A^1 的稠密开子集.

第一步，证明 W 为开子集，即证明任意 $F\in W$ 都有小邻域 $V(F)$ 含于 W . 兹作反证法假设：在每个邻域 $B_i\equiv B(F,d/2^i)$, $i=1,2,\cdots,d>0$, 都存在函数 G_i 属于 $A^1\backslash W$. 按 W 定义， G_i 有 k 次迭代根 $g_i\in E^1$, $i=1,2,\cdots$. 显然，当 $i\to+\infty$ 时按 $\|\cdot\|_1$ 序列 G_i 趋于 F . 另一方面，不难验证 $\{g_i\}$ 一致有界且等度连续，注意到 E^1 是闭的，由阿斯科里 - 阿克采引理知 $\{g_i\}$ 有子序列（不妨记为它本身）按 $\|\cdot\|_1$ 收敛于一个函数 $f\in E^1$. 归纳地可证明

$$\lim_{i\to+\infty} g_i^k(x)=f^k(x), \qquad \forall x\in I \quad (15.2)$$

其中 k 为迭代指数. 因此

$$f^k(x)=\lim_{i\to+\infty} g_i^k(x)=\lim_{i\to+\infty} G_i(x)=F(x), \qquad \forall x\in I$$

这表明 $F\notin W$. 从而证明了 W 为开子集.

第二步，证明 W 在 A^1 稠密. 即对任意 $F\in A^1$ 和任给的 $d>0$, 在邻域 $B(F,d)$ 内必有 W 中的元素 G . 不失一般地，设 $F\in A^1\backslash W$ ，按 W 定义， F 有 k 次迭代根 $f\in E^1$.

按 A^1 定义，不妨只讨论 $F(x)>x,\ x\in(0,1)$ 的情形，另一情形可通过 $F_1(x)=1-F(1-x)$ 来化成这一情形. 在这种情形下，由于 F 在 E^1 的迭代根 f 是严格递增的，必有 $f(x)>x,\ x\in(0,1)$. 任选 $c\in(0,1)$, 并构造 F 的小扰动

$$G(x)\begin{cases} >F(x), & x\in B(c,\delta), \\ \\ =F(x), & x\notin B(c,\delta), \end{cases} \tag{15.3}$$

其中 $\delta>0$ 充分小，使得 $\delta<\min\{(f(c)-c)/2,\ (c-f^{-1}(c))/2\}$, 并且 $G\in A^1$, $\|G-F\|_1<d$. 为了用反证法证明 $G\in W$ ，我们假设 $G\in A^1\backslash W$ ，即 G 有 k 次迭代根 $g\in E^1$. 由于在 0 和 1 的小邻域上 $G(x)=F(x)$ ，由引理 1 给出的唯一性知，在 0 和 1 的小邻域上也有 $f(x)=g(x)$.

另一方面，我们如下可在 I 上唯一地构造 g . 考虑一充分小邻域 $B(0,\varepsilon)$ 和 $x_0\in B(0,\varepsilon)$, 使 $F(x_0)\in B(0,\varepsilon)$. 令

$$\begin{aligned} &x_i=f^i(x_0), && i=0,1,\cdots,k; \\ &x_{k+i}=F(x_i),\ x_{-i}=F^{-1}(x_{k-i}), && i=1,2,\cdots. \end{aligned}$$

因为 f 严格递增，显然 $x_0<x_1<\cdots<x_{k-1}<x_k=f^k(x_0)=F(x_0)$. 我们逐段地定义

$$g_i(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[x_i,x_{i+1}), \\ & i=0,1,\cdots,k-2; \\ G\circ g_{i-k+1}^{-1}\circ\cdots\circ g_{i-2}^{-1}\circ g_{i-1}^{-1}(x), & x\in[x_i,x_{i+1}), \\ & i=k-1,k,\cdots; \\ g_{i+1}^{-1}\circ g_{i+2}^{-1}\circ\cdots\circ g_{i+k-1}^{-1}\circ G(x), & x\in[x_i,x_{i+1}), \\ & i=-1,-2,\cdots, \end{cases} \tag{15.4}$$

并定义 $g(x)=g_i(x),\ x\in[x_i,x_{i+1}),\ i=0,\pm1,\pm2,\cdots$. 显然 g 严格递增且 $g(x)>x$, $g^k(x)=G(x)$, $\forall x\in I$. 进而，由关于 δ 的假设, $f^{-1}(c)\notin B(c,\delta)$ 且 $f^{-1}(c)<c$. 再由 (15.4) ， $g^{-1}(c)=f^{-1}(c)$. 从而

$$f^{k-1}(c)=F\circ f^{-1}(c)=G\circ g^{-1}(c)=g^{k-1}(c), \tag{15.5}$$

该常数记为 c_0 . 显然 $c_0 > c$ 且 $c_0 = f^{k-1}(c) \geq f(c)$. 因为关于 δ 的假设也表明 $f(c) \notin B(c,\delta)$, 因此 $c_0 \notin B(c,\delta)$. 从而对任意整数 $i > 0$,

$$f^{ki}(c_0) = F^i(c_0) = G^i(c_0) = g^{ki}(c_0), \tag{15.6}$$

该常数记为 c_i . 由于 $F(x) > x$ 且端点 1 为一个稳定不动点, 显然序列 $\{c_i\}$ 满足 $c < c_0 < c_1 < \cdots < c_i < c_{i+1} < \cdots \to 1$. 注意到 $G(c) = g^k(c) > g^{k-1}(c) = c_0$, 即 $G(c) \notin B(c,\delta)$. 由 (15.3) ,

$$\begin{aligned} f(c_i) &= f \circ f^{ki}(c_0) = f \circ f^{ki} \circ f^{k-1}(c) = F^{i+1}(c) = F^i \circ F(c) \\ &< F^i \circ G(c) = G^i \circ G(c) = G^{i+1}(c) = g(c_i). \end{aligned} \tag{15.7}$$

这与上一段给出的 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 1 的小邻域上相等的结论矛盾. 从而定理得证. □

如果函数 F 有更多的不动点, 由于单调递增性的假定, F 必定将每相邻两个不动点的区间映入自身. 因此逐段限制 F 并逐段地讨论, 即可得到相应的结果.

第 4 章

嵌 入 流 理 论

上一章已经指出，我们希望定义分数次迭代，甚至把迭代指数从分数推广到全体实数. 寻求迭代根是定义分数次迭代的基础. 尽管在许多情形下我们已经证明自映射 F 有任意正整数 n 次迭代根，然而，通常情况下映射 F 的 n 次迭代根是不唯一的，尚不能合理地定义分数次迭代 $F^{1/n}$ ，因为这种不确定性使得 $F^{1/n}$ 不能满足指数运算律：

$$F^{\frac{1}{m}} \circ F^{\frac{1}{n}} = F^{\frac{m+n}{mn}}.$$

有个思路可以避免这种不确定性. 例如对 $F \in \mathrm{CI}(I,I)$ ，由 §11 的定理 2 ，我们可以取定 F 的某一个连续递增的二次迭代根，并记为 $F^{1/2}$ ，同理再取定 $F^{1/2}$ 的某一个连续递增的二次迭代根，并记为 $F^{1/4}$ ，如此沿着同一个线索递归地定义了连续递增的函数序列 $\{F^{1/2^n} : n = 0,1,2,\cdots\}$. 因为对任给的实数 $\alpha > 0$ ，由二进制表示的原理，总可以找到有理数列 $\alpha_k = m_k/2^{n_k}$ 趋近于 α . 在连续性的保证下，我们可以定义出分数次甚至任意实数次迭代 F^{α} .

尤其是，把迭代指数推广到实数不仅具有重要的理论价值，而且具有很强的实际意义. 通过这样的推广，把一些时间离散的数据连接起来，以求更完整地掌握系统的变化规律，这就是将离散动力系统嵌入流的动机. 如果我们能够证实 F 的某种迭代根具有唯一性，或者 F 可嵌入流（或半流），那么定义 F 的分数次迭代是完全可行的.

§ 16　分数次迭代与嵌入流

定义 1　映射 $F: I \to I$. 如果存在 I 上的流(或半流) $\phi(t,x)$, 使得

$$\phi(1,x) = F(x), \qquad \forall x \in I$$

则称 F 可 **嵌入流** ，或可 **嵌入半流** $\phi(t,x)$.

在第 2 章我们已经知道了流 (半流) 的概念， $\phi(1,x)$ 称为流 ϕ 的时间 1- 映射. 从一个流通过离散采样必可产生一个离散动力系统；然而，一个离散动力系统是否能嵌入一个流却是个问题. 如果 F 可嵌入流 (或半流) $\phi(t,x)$ ，令

$$F^{\alpha}(x) = \phi(\alpha, x),$$

这就给出了 F 的 α 次迭代， α 可取遍实数 $\mathbf{R}$ (或 $\mathbf{R}^+$), 特别是可以是分数. 例如 $F^{1/n}$ 就是 F 的 n 次迭代根. 由流的定义，这样确定的分数次迭代就可以满足上述指数运算律. 显然，映射可嵌入流 (半流), 成为映射可定义分数次迭代的充分条件.

问题是，什么样的映射才能嵌入流 (或半流) 呢？在 §2 有许多例子都可以嵌入流. 例如 $F(x) = x+b$, $F^n(x) = x+nb$, $n \in \mathbf{Z}$. 把 n 连续化, 可得到流 $\phi(t,x) = x+tb$, $t \in \mathbf{R}$. 例如 $F(x) = x^k$, $F^n(x) = x^{k^n}$, $n \in \mathbf{Z}^+$. 从而可得到半流 $\phi(t,x) = x^{k^t}$, $t \in \mathbf{R}^+$. 我们可以一般地证明如下结论.

定理 1　$F \in \mathrm{CI}(I,I)$, $I = [a,b]$, 则 F 可以嵌入 I 上的连续流.

证明　证明的思想是建立 F 与 $x+1$ 的共轭关系. 任取函数 $h_1 : (a,b) \to \mathbf{R}$ 连续且严格单调. 令

$$G(x) = h_1^{-1}(h_1(x) + 1), \qquad x \in (a,b)$$

显然 G 共轭于 $x+1$，它自然在 (a,b) 上无不动点. 由连续性，可补充定义 $G(a)=a$, $G(b)=b$，从而 $G\in \mathrm{CI}(I,I)$. 我们往往采用 §11 的逐段定义法证明 G 与 F 共轭.

首先考虑 $F(x)>x$, $G(x)>x$ 的情形. 任取 $x_0\in(a,b)$，在 $[x_0,F(x_0)]$ 上定义函数

$$r_0(x)=F(x_0)+\frac{G(F(x_0))-F(x_0)}{F(x_0)-x_0}(x-x_0). \tag{16.1}$$

显然，$r_0(x)$ 连续递增，$r_0(x_0)=F(x_0)$，且满足 $r_0\circ F(x_0)=G\circ F(x_0)=G\circ r_0(x_0)$. 事实上，满足这一关系的 r_0 有多种定义法. 令

$$x_i=F^i(x_0),\ y_0=F(x_0),\ y_i=G^i(y_0),\quad i=0,\pm1,\pm2,\cdots \tag{16.2}$$

在递增函数 F, G 的当前假设情形下，序列 $\{x_i\}$ 和 $\{y_i\}$ 都递增，且当 $i\to-\infty$ 时都趋于 a; 而当 $i\to+\infty$ 时都趋于 b. 如上已定义 $r_0(x)$, $x\in[x_0,x_1]$，再对 $i=1,2,\cdots$ 递归地定义

$$r_i(x)=G\circ r_{i-1}\circ F^{-1}(x),\qquad x\in[x_i,x_{i+1}], \tag{16.3}$$

$$r_{-i}(x)=G^{-1}\circ h_{-i+1}\circ f(x),\qquad x\in[x_{-i},x_{-i+1}]. \tag{16.4}$$

用归纳法可证明 $r_i(x)$ 和 $r_{-i}(x)$ 连续递增且满足

$$r_i(x_i)=y_i,\qquad r_i(x_{i+1})=y_{i+1}; \tag{16.5}$$

$$r_{-i}(x_{-i})=y_{-i},\qquad r_{-i}(x_{-i+1})=y_{-i+1}. \tag{16.6}$$

最后定义

$$h_2(x)=\begin{cases} x, & \text{当 } x=a,\ b \text{ 时};\\ r_i(x), & \text{当 } x\in[x_i,x_{i+1}],\ i=0,\pm1,\pm2,\cdots\text{时}.\end{cases} \tag{16.7}$$

易验证 $h_2\in\mathrm{CI}(I,I)$, 且满足 $h_2\circ F(x)=G\circ h_2(x)$, $\forall x\in I$.

关于 $F(x)<x$, $G(x)<x$, $\forall x\in(a,b)$ 的情形，可如上讨论 $\tilde F(x)=-F(-x)$, $\tilde G(x)=-G(-x)$, $x\in(-b,-a)$, 而得到相应结

论. 关于 $F(x) > x$, $G(x) < x$, $\forall x \in (a,b)$ 的情形, 可任取严格递减且映满的连续函数 $p:(a,b) \to (a,b)$, 令 $\tilde{G}(x) = p^{-1} \circ G \circ p(x)$, 按上述讨论过程, 必有连续递增函数 $q(x)$, 使 $q \circ F(x) = \tilde{G} \circ q(x) = p^{-1} \circ G \circ p \circ q(x)$, 从而 $h_2(x) := p(q(x))$ 满足要求. 关于 $F(x) < x$, $G(x) > x$, $\forall x \in (a,b)$ 的情形也是相似的.

以上证明了 G 与 F 共轭, 即存在严格单调且映满的连续函数 h_2, 使得 $h_2 \circ F(x) = G \circ h_2(x)$, $\forall x \in I$. 令 $h = h_1 \circ h_2$, 易见

$$F(x) = h_2^{-1} \circ G \circ h_2(x) = h_2^{-1} \circ h_1^{-1}(h_1 \circ h_2(x) + 1) = h^{-1}(h(x)+1),$$

从而我们建立了 F 与 $x+1$ 的共轭. 易验证 $\phi(t,x) = h^{-1}(h(x)+t)$, $t \in \mathbf{R}$, $x \in I$, 是 I 上的流, 而且 $F(x) = \phi(1,x)$, 即 F 可嵌入连续流 ϕ . □

上述定理中, 如果 $F(I) \subset I$ 为真子集, 我们也有相应结论, 但 F 嵌入的只是半流而不是流. 我们的结果表明, 映射嵌入连续流方式不必是唯一的, 但无论哪种方式的嵌入, 都可以定义出映射的分数次迭代 [18] .

有时, 映射嵌入流的方式可以是唯一的.

定理 2 在 §13 的定理 2 条件下, 映射 F 能嵌入 J 上的一个 C^1 半流 $\phi(t,x)$, 甚至当 $F(I) = I$ 时可嵌入一个 C^1 流 $\phi(t,x)$, 而且嵌入方式是唯一的.

证明 事实上, 用 §13 的引理 1 所确定的函数 h 来定义连续可微函数

$$\phi(t,x) = h^{-1}(c^t h(x)), \quad c = F'(x_0),$$

易见 $\phi(1,x) = h^{-1}(ch(x)) = F(x)$, 即 ϕ 就是 F 所能嵌入的半流. 当 $F(I) = I$ 时 F 为 I 上的自同胚, 如此定义的 ϕ 必为流.

为证明唯一性, 设 $\Phi(t,x)$ 也是 F 可嵌入的连续可微半流, 令

$$\Psi(t,x) = h(\Phi(t, h^{-1}(x))),$$

它显然也是连续可微半流. 从 (13.1) 知

$$\Psi(1,x)=h(\Phi(1,h^{-1}(x)))=h\circ F\circ h^{-1}(x)=cx,$$

即 $G(x)=cx$ 可嵌入 Ψ . 由半流的定义,

$$\begin{aligned}\Psi(t,cx)&=\Psi(t,G(x))=\Psi(t,\Psi(1,x))\\&=\Psi(t+1,x)=G(\Psi(t,x))=c\Psi(t,x).\end{aligned}$$

设 $\frac{d}{dx}\Psi(t,x)|_{x=0}=\alpha(t)$, 易见

$$\begin{aligned}\Psi(t,x)&=\frac{\Psi(t,cx)}{c}=\frac{\Psi(t,c^nx)}{c^n}\\&=\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{\Psi(t,c^nx)}{c^nx}\right)x=\alpha(t)x.\end{aligned}\tag{16.8}$$

注意到

$$\underbrace{\Psi(1/n,\Psi(1/n,\cdots,\Psi}_{n}(1/n,x)\cdots))=\Psi(1,x)=G(x)=cx,$$

两边在 $x=0$ 处求导, 得到 $\alpha(1/n)^n=c$. 同理, $\alpha(1/2n)^2=\alpha(1/n)$, 即 $\alpha(1/n)>0$, 从而 $\alpha(1/n)=c^{1/n}$. 这就证明了对一切有理数 $p>0$ 有 $\alpha(p)=c^p$. 由连续性知, 对一切实数 $t>0$, 有 $\alpha(t)=c^t$. 对实数 $t<0$, 由 $\Psi(-t,\Psi(t,x))=x$ 知 $\alpha(t)=(\alpha(-t))^{-1}=c^t$. 从 (16.8) 得 $\Psi(t,x)=c^tx$. 再由 $\Psi(t,x)$ 的定义, $\Phi(t,x)=h^{-1}(c^th(x))=\phi(t,x)$, 因此嵌入是唯一的. □

§ 17 嵌入连续半流

除了研究自同胚产生的动力系统嵌入流和光滑自映射嵌入光滑半流等问题以外, 我们自然想知道一般连续自映射所生成的半动力系统能否嵌入连续半流.

引理 1 连续映射 $F: I=[a,b]\to I$ 满足 $F(a)=a$, $F(b)=b$, $F(x)>x$, $\forall x\in(a,b)$; 而且存在 $c\in(a,b]$ 使得 $F|_{[a,c]}$ 严格递增而 $F|_{[c,b]}$ 恒为常值, 那么 F 可嵌入连续半流.

证明 当 $c=b$ 时, $F\in \mathrm{CI}(I,I)$ 为自同胚, 从而 §16 定理 1 已给出嵌入连续流的结论. 往下讨论 $c<b$ 的情形. 易见 $[0,1]$ 上的连续自映射

$$g(x)=\begin{cases}2x, & x\in[0,1/2],\\[2ex] 1, & x\in[1/2,1],\end{cases}$$

可嵌入连续半流 $\phi:\mathbf{R}^+\times[0,1]\to[0,1]$,

$$\phi(t,x)=\begin{cases}2^t x, & x\in[0,1/2^t],\\[2ex] 1, & x\in[1/2^t,1].\end{cases}$$

我们只要证明 F 与 g 拓扑共轭即可. 事实上, 对 $x\in[c,b]$ 取 $h(x)$ 为任意满足 $h(c)=1/2$, $h(b)=1$ 的严格递增连续函数, 例如

$$h(x)=\frac{1}{2}\left(\frac{x-c}{b-c}+1\right),\quad c\le x\le b.$$

由于 $F|_{[a,c]}$ 严格递增, 令 $x_0=c$, $x_{n+1}=F^{-1}(x_n)$, $n=0,1,2,\cdots$, 显然 $x_{n+1}<x_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$. 那么, 在 $[x_1,x_0]$ 上任取 $h(x)$ 为满足 $h(x_1)=1/4$, $h(x_0)=1/2$ 的严格递增连续函数. 对 $\forall n\ge 1$, 设在 $[x_n,x_{n-1}]$ 上已经定义了严格递增连续函数 $h(x)$, 满足

$$h(x_n)=1/2^{n+1},\ h(x_{n-1})=1/2^n,$$

则用

$$h(x)=g^{-1}\circ h\circ F(x),\qquad\qquad x\in[x_{n+1},x_n]$$

可归纳地定义下一段 $[x_{n+1},x_n]$ 上的 $h(x)$ 值. 最后令 $h(a)=0$, 这样定义的 $h:[a,b]\to[0,1]$ 显然是个同胚, 而且满足 $h^{-1}\circ g\circ h=F$. 拓扑共轭关系得证. □

我们可以证明一个更一般的结果 [63] .

定理 1 区间 I 上连续自映射 F 可嵌入连续半流的充分必要条件是: (i) F 在 I 上单调不减, 而且 (ii) 如果 $x_1 \neq x_2$, 使 $F(x_1) = F(x_2) = x^*$, 则 x^* 是 F 的不动点.

下述引理揭示了可嵌入半流的半动力系统的若干性质.

引理 2 假设连续映射 $F: I \to I$ 可嵌入连续半流 $\phi(t,x) = F^t(x)$, $t \in \mathbf{R}^+$, $x \in I$, 那么

(i) F 的一切周期点都是 F 的不动点;

(ii) ϕ 的一切周期点都是 F 的不动点, 反之亦然; 特别是, x_0 是 ϕ 的不动点, 当且仅当 x_0 是 F 的不动点;

(iii) 如果 $x_0 \in I$ 且 $F(x_0) > x_0$ (或 $< x_0$), 则 $\phi(\cdot, x_0)$ 单调不减 (或不增); 进而, 如果 $p = \min\{x > x_0 :\ F(x) = x\}$(或 $p = \max\{x < x_0 :\ F(x) = x\}$), 或者当这种最小 (大) 值不能取到时 p 为区间 I 的右 (或左) 端点, 则当 $\phi(t,x_0) < p$ (或 $> p$) 时 $\phi(t,x_0)$ 关于 t 严格递增 (或递减), 而且 $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi(t,x_0) = p$.

证明 设 $x_0 \in I$ 是 F 的 k- 周期点, $k > 1$. 考虑半流的轨道 $J = \{y :\ y = \phi(t,x_0),\ t \geq 0\}$, 显然 $J \subset I$, $\phi(t,J) \subset J$. 对任意 $y = \phi(t,x_0) \in J$,

$$\begin{aligned} F^k(y) &= \phi(k,y) = \phi(k,\phi(t,x_0)) = \phi(k+t,x_0) \\ &= \phi(t,F^k(x_0)) = \phi(t,x_0) = y, \end{aligned}$$

从 $F(y_1) = F(y_2)$ 可推出 $y_1 = F^{k-1}(F(y_1)) = F^{k-1}(F(y_2)) = y_2$, 易见 F 在集合 J 上严格单调, 于是 $F^{\frac{1}{2}} := \phi(\frac{1}{2},\cdot)$ 在 J 上也严格单调, 否则与上节非单调点的理论矛盾. 因为 $F^{\frac{1}{2}}(J) \subset J$, $F^{\frac{1}{2}} \circ F^{\frac{1}{2}} = F$, 故 F 在 J 上严格递增, 显然 F 在 J 上只能有 1- 周期点 (即不动点). 这与 x_0 的假设矛盾, 因此 (i) 结论得证.

上述推理也表明, 若 $\phi(t,x_0) = x_0$ 必有 $\phi(t/2^n,x_0) = x_0$, $n =$

$1,2,\cdots$. 令 $\frac{1}{t}$ 的二进制表达式为

$$\frac{1}{t}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n},$$

其中 a_0 为非负整数, $a_n=1$ 或 0. 于是由连续性, 对任意正整数 m 有

$$F(x_0)=\phi(1,x_0)=\lim_{m\to\infty}\phi\left(\sum_{n=0}^{m}\frac{a_n t}{2^n},x_0\right)=x_0.$$

从而 (ii) 结论得证, 其中结论的另一面通过交换 $\phi(1,x_0)$ 与 $\phi(t,x_0)$ 的地位同理可证.

关于 (iii), 假设 $F(x_0)>x_0$, 另一关于 $F(x_0)<x_0$ 的情形同理可证. 如果存在 $t_1>0$, 使 $\phi(t_1,x_0)<x_0$, 由连续性, 必存在 $t_2>0$ 使 $\phi(t_2,x_0)=x_0$, 由 (ii) 的结论知 $F(x_0)=x_0$, 这与假设矛盾. 因此

$$\phi(t,x_0)>x_0. \qquad \forall t>0 \quad (17.1)$$

我们讨论的第一种情况是 $\phi(t,x_0)$ 对某个 t 会等于或超过 p, 按 p 的假设和连续性, 必存在 t^* 使 $\phi(t^*,x_0)=p$. 我们可以肯定

$$\phi(t,x_0)=p. \qquad \forall t\ge t^* \quad (17.2)$$

因为 $F(p)=p$, 由 (2°) 知 $\phi(t^*+t,x_0)=\phi(t,p)=p,\ \forall t\ge 0$. 往下再考虑第二种情况: $x_0\le\phi(t,x_0)<p,\ \forall t\in[0,+\infty)$, 这时 F 在 $[x_0,p)$ 上是连续自映射且无不动点, $F(x)>x,\ \forall x\in[x_0,p)$. 同证明 (17.1) 一样, 可见

$$\phi(t,x)>x. \qquad \forall t>0,\ x\in[x_0,p)$$

那么, 对 $\forall\delta>0$ 有 $\phi(t+\delta,x)=\phi(\delta,\phi(t,x))>\phi(t,x)$, 从而对所有 $x\in[x_0,p)$, 函数 $\phi(t,x)$ 关于 t 严格递增. 显然, 在以上两种情形下, $\phi(t,x_0)$ 关于 t 至少单调不减. 进而, 在第二种情况下我

们有单调的严格性，事实上，若不然，则有 $t_2 > t_1$ 使 $\phi(t_2,x_0) = \phi(t_1,x_0) \in [x_0,p)$ ，令 $y_0 = \phi(t_1,x_0)$, $s = t_2 - t_1 > 0$ ，这样我们有 $\phi(s,y_0) = y_0$ ，由 (ii) 知 $F(y_0) = y_0$ ，这与 F 在 $[x_0,p)$ 内无不动点矛盾. 最后，由这种严格递增性， $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi(t,x_0) = z_0 \le p$ ，显然 $f(z_0) = \lim\limits_{t\to+\infty} \phi(t+1,x_0) = z_0 \le p$ 但 $[x_0,p)$ 上无不动点，故 $z_0 = p$. 特别，在第一种情况下，这个极限结果是平凡的. □

定理 1 的证明 先证必要性. 令 E 是 F 全体不动点之集，则 $I\backslash E$ 由一些互不相交的区间 Δ 构成. 由引理 2 知， $F(x) - x$ 在每个 Δ 上不变号，且 $F(\Delta) \subset \bar{\Delta}$. 现在考虑 $x_2 > x_1, \in \Delta$ ，当 $F(x) - x > 0, \forall x \in \Delta$ （或 $F(x) - x < 0, \forall x \in \Delta$ ）时必有 $\tau > 0$ 使 $\phi(\tau,x_1) = x_2$（或 $\phi(\tau,x_2) = x_1$ ），从而 $F(x_2) = F(\phi(\tau,x_1)) \ge F(x_1)$ （或 $F(x_1) = F(\phi(\tau,x_2)) \le F(x_2)$ ），即 F 单调不减. 注意到，上述不等式中的等号仅当 $F(x_1)$（或 $F(x_2)$ ）是 F 的不动点时成立.

再证充分性. 不妨设 I 的两端点皆 F 不动点，否则可开拓 F 的定义域使两端点皆不动点，嵌入某个流后再取其限制. 在此假设下， $I\backslash E$ 的每个构成区间 Δ 之两端点皆 F 的不动点，而且 F 只能在 Δ 的至多一个端点附近取常值. 如果 $F(x) - x > 0, \forall x \in \Delta$ ，由引理 1，它显然可以在 Δ 上嵌入连续半流. 如果 $F(x) - x < 0, \forall x \in \Delta = [u,v]$ ，则 $\tilde{F}(x) = u + v - F(u + v - x)$ 满足引理 1 的要求并可嵌入 Δ 上连续半流，从而 F 也可. 最后，很容易将每段 Δ 上的连续半流拼接成 I 上的连续半流. □

§ 18 嵌入拟半流

由 §17 的定理 1 可见，可嵌入连续半流的连续自映射十分特殊，它除了在不动点的某邻域可能取常值外，在其他点都是严格递增的，这是因为半流定义是很强的要求. 事实上，映射可嵌入流 (半流) 只是映射可定义分数次迭代的充分条件. 若 F 可嵌入半流 ϕ ，

$F(x)=\phi(1,x)$，令

$$f(x)=\phi\left(\frac{1}{n},x\right),$$

仅由第 2 章关于半流定义的条件 (ii)，就可以得到 $f^n(x)=F(x)$．因而对于确定分数次迭代来说，半流定义的条件 (ii) 才是重要的.

定义 1 只满足半流定义中条件 (ii)，即

$$\phi(t_1+t_2,x)=\phi(t_1,\phi(t_2,x)) \qquad \forall t_1,t_2\in\mathbf{R}^+$$

的映射 $\phi(t,x):\mathbf{R}^+\times X\to X$, 称为集合 X 上的一个 **拟半流**．

显然，只要 F 能嵌入连续拟半流，它就一定有任意 n 次迭代根. 利用上一章的结果，可以进一步对逐段单调连续函数给出嵌入半流和拟半流的条件 [71]．

定理 1 $F\in S(I,I)$, $I=[a,b]$，则 F 可嵌入 I 上连续半流的充分必要条件是：F 在 I 上严格递增.

定理 2 $F\in S(I,I)$, $I=[a,b]$，记 $A=\inf\{F(x):x\in I\}$, $B=\sup\{F(x):x\in I\}$，则 F 可嵌入 I 上连续拟半流的充分必要条件是：存在子区间 $[\tilde a,\tilde b]\subset I$, 使 F 在 $[\tilde a,\tilde b]$ 上严格递增，且 $\tilde a\le F(\tilde a)=A<B=F(\tilde b)\le\tilde b$．

记 U_t 为连续拟半流 $\phi(t,x)$ 关于 x 的单调点之全体构成的集合，A_t, B_t 分别为半流 $\phi(t,x)$ 在 $x\in[a,b]$ 的下确界和上确界. 易见,

$$U_{t_1}\supset U_{t_2},\quad A_{t_1}\le A_{t_2}\le B_{t_2}\le B_{t_1}. \qquad \forall t_2>t_1\ge 0 \tag{18.1}$$

引理 1 $\phi(1,x)\in S(I,I)$, $I=[a,b]$，则对每个固定的 $t>0$，$U_t=U_1$, $\phi(t,x)\in S(I,I)$．进而，还存在子区间 $[\tilde a,\tilde b]\subset[a,b]$ 使对每个固定的 $t>0$，$\phi(t,x)$ 在子区间 $[\tilde a,\tilde b]$ 上严格递增而且 $\tilde a\le A_t<B_t\le\tilde b$．

证明 令 $F=\phi(1,x)$ ， F 能嵌入连续拟半流，因此它就有任意正整数 n 次连续迭代根．由 §12 的定理 1 ， $H(F)\le 1$ ，即 $N(F)=N(F^2)$ ．易见

$$N(F)=N(F^2)=N(F^4)=\cdots=N(F^{2^n})=N(\phi(2^n,x)).$$

又根据 $\phi(1/2,\phi(1/2,x)) = F(x)$ 知 $\phi(1/2,x)\in S(I,I)$. 同理，$\phi(1/2,x)$ 有任意正整数 n 次连续迭代根，同样由 §12 的定理 1 得到 $N(\phi(1/2,x))=N(F)$ ，于是推出

$$N(\phi(2^{-n},x))=N(F)=N(\phi(2^n,x)). \qquad n=0,1,2,\cdots$$

由 (18.1) 可推出该引理的第一个结论.

我们已经证明对每个固定的 $t>0$ ， $\phi(t,x)\in S(I,I)$ ．显然 $\phi(t,x)$ 有任意正整数 n 次连续迭代根，由上一章关于逐段单调函数迭代的特征区间理论，必存在子区间 $[\tilde{a}_t,\tilde{b}_t]\subset[a,b]$, 使 $\phi(t,x)$ 对 $x\in[\tilde{a}_t,\tilde{b}_t]$ 严格递增, 在 $\tilde{a}_t$ 、$\tilde{b}_t$ 处取到极值, 且 $\tilde{a}\le A_t<B_t\le\tilde{b}$. 上一结论已表明, 对一切 $t>0$, $\phi(t,x)$ 在 $[a,b]$ 上的极值点集都相同, 故对 $t_1\ne t_2$, 或者 $(\tilde{a}_{t_1},\tilde{b}_{t_1})=(\tilde{a}_{t_2},\tilde{b}_{t_2})$, 或者 $(\tilde{a}_{t_1},\tilde{b}_{t_1})\cap(\tilde{a}_{t_2},\tilde{b}_{t_2})=\varnothing$. 由 (18.1) ， (A_{t_1},B_{t_1}) 与 (A_{t_2},B_{t_2}) 不可能不交，因此只能有第一种可能性存在. □

定理 1 的证明 充分性由 §17 的定理 1 给出. 往证必要性. 设 F 可嵌入 I 上的连续半流 $\phi(t,x)$, 则 $\phi(0,x)=x$, 从而 $A_0=a$, $B_0=b$. 因连续半流也是连续拟半流, 由引理 1 , 存在子区间 $[\tilde{a},\tilde{b}]\subset[a,b]$, 使 F 在子区间 $[\tilde{a},\tilde{b}]$ 上严格递增，而且 $\tilde{a}\le A_t<B_t\le\tilde{b}$. 令 $t\to 0$ 得 $\tilde{a}\le A_0<B_0\le\tilde{b}$ ，必然 $\tilde{a}=a$, $\tilde{b}=b$ ，因而 F 在 I 上严格递增. □

定理 2 的证明 设 F 可嵌入 I 上的连续拟半流 $\phi(t,x)$ ，按定义，对 $0\le t\le 1$ 有 $F(x)=\phi(1,x)=\phi(1-t,x)\phi(t,x)$ ．由引理 1 ，存在子区间 $[\tilde{a},\tilde{b}]\subset[a,b]$, 使 F 在子区间 $[\tilde{a},\tilde{b}]$ 上严格递增,

$\tilde{a} \le \phi(t,x) \le \tilde{b}$ ，而且 $\phi(1-t,x)$ 对 $x \in [\tilde{a},\tilde{b}]$ 严格递增. 因此

$$\phi(1-t,\tilde{a}) \le F(x) \le \phi(1-t,\tilde{b}), \qquad x \in [a,b]$$

尤其令 $t \to 0$ 得 $F(\tilde{a}) \le F(x) \le F(\tilde{b})$ ，必要性得证.

为证充分性，在定理条件下记 $G := F|_{[\tilde{a},\tilde{b}]}$. 由 §17 的定理 1, G 可嵌入 $\tilde{I} = [\tilde{a},\tilde{b}]$ 上的连续半流 $\psi(t,x)$. §17 的引理 2 的结论 iii 表明 $\psi(t,\tilde{a})$ 单调不减而 $\psi(t,\tilde{b})$ 单调不增，而且 $\psi(t,x)$ 作为 x 的函数有反函数 $\psi(-t,x)$ ，当 $0 \le t \le 1$ 时这个反函数的定义域 $I_t = [\psi(t,\tilde{a}),\psi(t,\tilde{b})]$ 包含了 $\tilde{I}$ 的子区间 $I_1 = [F(\tilde{a}),F(\tilde{b})]$. 因而，我们可以将 ψ 开拓为映射 $\phi : \mathbf{R}^+ \times I \to I$ ，

$$\phi(t,x) = \psi(t-n, F^n(x)), \qquad x \in I,\ t \in [n-1,n),\ n = 1,2,\cdots$$

注意到 $t-n \in (0,1]$ 而 $F^n(x) \in [F(\tilde{a}),F(\tilde{b})]$ ，故 ϕ 的定义是合理的. 进而，当 $t-n \to 0_-$ 时 $\phi(t,x) \to F^n(x) = \phi(n,x)$ ，故 ϕ 连续. 此外，不难验证 $\phi(t_1+t_2,x) = \phi(t_1,\phi(t_2,x))$. 从而确定了 F 可嵌入的连续拟半流. □

§ 19 嵌入流问题推广

同迭代根问题一样，通常可被映射 F 嵌入的流或半流具有极大的任意性. 例如， $\mathbf{R} = (-\infty,+\infty)$ 上的自同胚 $F(x) = x+1$ 自然地可嵌入流 $\phi(t,x) = x+t$ ，但它也可以嵌入到另一个流

$$\Phi(t,x) = G^{-1}(G(x)+t),$$

其中 $G(x) = x+g(x)$, 而 $g(x)$ 是任意一个具有小于 1 的 Lipschitz 常数且周期为 1 的连续函数. 易验证 $\Phi(t,x)$ 是流, 且 $\Phi(1,x) = x+1$. 为消除这种任意性，我们需要从众多可嵌入的流 (半流) 中挑选出唯一的 “最好” 的一个. 通常的做法是增加可微性或其他极限条件

而且，$H : B \to M$ 的等值面 $S_{x_0}(H) = \{x \in M :\ H(x) = x_0\}$, $x_0 \in M$, 是 M 的一维连通子流形. 其中 H 称为 F 关于 ϕ 的 **轨道分解** . 进而，称 F 可 **渐近嵌入流** ϕ ，如果 F 在 B 上关于 ϕ 渐近同轨，而且存在实数 $s \geq 0$, 使得对任意紧子集 $B_1 \subset B$ 当 n 足够大时一致地有

$$\lim_{n \to +\infty} (T_W(F^{n+1}(x)) - T_W(F^n(x))) = s, \qquad \forall x \in B_1$$

其中 s 称为 F 关于 ϕ 的 **渐近嵌入指数** .

例如上一章关于迭代根局部光滑性的研究中，我们讨论了满足 $F(0) = 0$, $0 < F'(0) < 1$ 的区间自映射 F ，易验证它在 $x = 0$ 的某邻域上渐近嵌入于流 $\phi(t, x) = c^t x$, $0 < c < 1$.

定义 2 B 上的流 $\Phi(t, x)$ 称为是 **渐近** 于 ϕ 的流，如果对 $\forall \delta > 0$, 映射 $F^\delta : B \to B$, $F^\delta(x) = \Phi(\delta, x)$, 可渐近嵌入 ϕ ，并且 F^δ 有非零的渐近嵌入指数 $s(\delta)$, 使得对任意紧子集 $B_1 \subset B$ 和闭区间 $I \subset \mathbf{R}^+$ 一致地有

$$\lim_{n \to +\infty} (T_W(F^{(n+1)\delta}(x)) - T_W(F^{n\delta}(x))) = s(\delta). \quad \forall (\delta, x) \in I \times B_1$$

定义 3 设 F 是 $B \subset M$ 的同胚，如果存在紧子集 $E \subset B$, 使得

$$B = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} F^k(E), \quad \sum_{k=-n}^{n} F^k(E) \subset \operatorname{int} \sum_{k=-(n+1)}^{n+1} F^k(E),$$

则称 B 关于同胚 F 可以 **紧致生成** . E 叫做 B 关于 F 的 **紧致生成集** .

一般说来，对给定的映射去寻求它可嵌入的流是困难的，然而，寻求它可以渐近嵌入的流却相对容易一些. 关于渐近嵌入与嵌入的关系，我们有以下结果 [69] .

定理 1 设 ϕ 是 M 上的连续流，Q 是 ϕ 的游荡点集，ϕ 限制在 $A \subset Q \subset M$ 上有截面 W．F 是 $B \subset M$ 的同胚且 B 关于同胚 F 可以紧致生成. 如果 F 在 B 上可渐近嵌入流 ϕ，并且渐近嵌入指数为 $s > 0$, 而轨道分解为 H，那么 F 在 B 上可嵌入一个渐近于 ϕ 的连续流之充分必要条件是存在 $T(x,y)$, 使

$$\lim_{n\to+\infty}(T_W(F^n(y)) - T_W(F^n(x))) = T(x,y)$$

在 $B^* = \{(x,y) \in B \times B : H(x) = H(y)\}$ 的任意紧子集上一致地成立，而且 $T(x,y) \neq 0$, $\forall (x,y) \in B^*, x \neq y$.

进而，我们可以得到关于嵌入流唯一性的结论 [69]．

定理 2 设 F 在 B 上可嵌入连续流 Φ 和 Φ^*，而 Φ 和 Φ^* 都渐近于连续流 ϕ, 则存在常数 $\alpha > 0$ 使得 $\Phi(t,x) = \Phi^*(\alpha t, x)$, $x \in B$，即这两个流仅有一常数因子的差别.

这些结果还被推广到多参数流, 这时流 $\phi(t,x)$ 中的 $t \in \mathbf{R}^m$, $m \geq 2$．我们可以通过一定方式将这种流限制成单参数流，例如

$$\psi(s,x) := \phi(\underbrace{s,\cdots,s}_{m}, x). \qquad s \in \mathbf{R}$$

文献 [61] 给出了一类高维收缩映射可嵌入多参数流的充分必要条件.

第 5 章

迭代方程基础

迭代根问题是求解最基本的一类迭代方程. 我们一般要研究更广泛的多项式型迭代方程

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_n f^n(x) = F(x), \quad x \in I = [a, b] \quad \text{(ITn)}$$

其中 f^i 表示 f 的第 i 次迭代, 即 $f^0(x) = x, f^{i+1}(x) = f(f^i(x))$. 通常我们假设 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$, 即所谓 **规范化假设** . 事实上, 我们只要对方程除以因子 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i(x)$ 就可以自然地作出这样的假设.

多项式型迭代方程是函数方程的一种基本形式. 它较迭代根问题要复杂得多, 其单调递增的连续解甚至难以用逐段定义法构造, 许多基本问题如存在性、光滑性、单调性等一直没有完整地解决. 就像函数论研究中人们对多项式的青睐一样, 这类迭代方程也深得重视. 在近代, 波兰学派的库其玛等人 [32],[33],[19] 、加拿大学派的阿克采等人 [2]~[5] 、法国学派的当布勒斯等人 [15] 、日本学派的那贝亚等人 [45] 等等在这一领域的研究十分活跃, 并已做出了大量奠基性的工作, 使这个古老的问题成为当今学术界关心的热点. 甚至到了 1989 年, 马特可夫斯基 (J. Matkowski) 等人还明确强调研究这类方程的重要性并指出许多公开问题 [41] .

近年来, 这方面工作不断取得进展. 从逐段定义到函数列逼近, 直到在泛函空间中寻求不动点, 在方法上不断突破了过去. 方法的革新推动了结果的深入. 人们从二次迭代问题深入到了一般 n

次迭代问题，从简单特殊的线性问题 (如已知函数为 $F(x) \equiv x$) 深入到了非线性问题. 这些进展不断丰富了迭代方程理论.

§ 20　二次迭代方程

法国数学家当布勒斯 [15] 在 1977 年就讨论过

$$f^2(x) = af(x) + (1-a)x. \tag{20.1}$$

1983 年赵立人 [87] 对更一般的已知函数研究

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) = F(x), \qquad x \in I = [a,b] \quad \text{(IT2)}$$

用级数逼近法证明了

定理 1　设函数 $F(x)$ 在 $a \le x \le b$ 上定义、连续且单调不减, $F(x) \ge x$, $a \le x \le b$, 而且系数满足条件: $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. 那么存在唯一的、单调不减的连续函数 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 上使方程 (IT2) 成立, 且满足 $x \le f(x) \le F(x)$, $\forall x \in [a,b]$.

定理中把条件 $F(x) \ge x$ 改为 $F(x) \le x$ 后仍有相应结论. 进一步, 还可推广如下.

推论 1　设函数 $F(x)$ 在 $a \le x \le b$ 上连续且单调不减, 而且 $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$, $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. 那么存在唯一的、单调不减的连续函数 $f(x)$ 在 $a \le x \le b$ 上使方程 (IT2) 成立, 且满足 $|f(x) - x| \le |F(x) - x|$, $\forall x \in [a,b]$.

定理 1 的证明　首先定义两个序列 $\{\phi_n(x)\}$, $\{\psi_n(x)\}$ 使得对 $n = 0, 1, 2, \cdots$, $a \le x \le b$,

(i) $\phi_n(x)$, $\psi_n(x)$ 在 $a \le x \le b$ 上连续且单调不减;

(ii) $\phi_n(x) \ge \phi_{n+1}(x)$, $\psi_n(x) \le \psi_{n+1}(x)$;

(iii) $x \le \psi_n(x) \le \phi_n(x) \le F(x)$;

(iv) $\lambda_1 \psi_n(x) + \lambda_2 \phi_n \circ \psi_n(x) = F(x)$,
$\lambda_1 \phi_{n+1}(x) + \lambda_2 \psi_n \circ \phi_{n+1}(x) = F(x)$.

事实上，取 $\phi_0(x) = F(x)$, $x \in [a,b]$ ，我们来解方程

$$\lambda_1 y + \lambda_2 \phi_0(y) = F(x). \tag{20.2}$$

分别令 $y = x$ 和 $y = F(x)$, 从上式左端可得

$$\lambda_1 x + \lambda_2 \phi_0(x) = \lambda_1 x + \lambda_2 F(x) \le F(x),$$
$$\lambda_1 F(x) + \lambda_2 \phi_0(F(x)) = \lambda_1 F(x) + \lambda_2 F^2(x) \ge F(x).$$

由连续性，必存在 $y = \psi_0(x)$, 满足 $x \le \psi_0(x) \le F(x) = \phi_0(x)$, $x \in [a,b]$ 和 (20.2), 即

$$\lambda_1 \psi_0(x) + \lambda_2 \phi_0 \circ \psi_0(x) = F(x). \qquad a \le x \le b$$

由单调性，这样的 $\psi_0(x)$ 唯一地确定. 同理考虑方程

$$\lambda_1 y + \lambda_2 \psi_0(y) = F(x), \qquad y \in [\psi_0(x), \phi_0(x)]$$

可证明存在唯一的 $y = \phi_1(x)$, 使得 $\psi_0(x) \le \phi_1(x) \le \phi_0(x)$, 且

$$\lambda_1 \phi_1(x) + \lambda_2 \psi_0 \circ \phi_1(x) = F(x). \qquad a \le x \le b$$

可以验证所构造的函数 ψ_0 和 ϕ_1 是连续且单调不减的. 进而，归纳地假设满足上述四条要求的序列 $\{\phi_n(x)\}$, $\{\psi_n(x)\}$ 对 $n = 0, 1, 2, \cdots k-1$ 已定义好. 类似方法考虑方程

$$\lambda_1 y + \lambda_2 \psi_{k-1}(y) = F(x), \qquad y \in [\psi_{k-1}(x), \phi_{k-1}(x)]$$

可证明它有唯一单调不减的连续解 $y = \phi_k(x)$. 同样可证明方程

$$\lambda_1 y + \lambda_2 \phi_k(y) = F(x), \qquad y \in [\psi_{k-1}(x), \phi_k(x)]$$

有唯一单调不减的连续解 $y=\psi_k(x)$. 如此归纳地完成了序列的定义.

进一步证明上述定义的两个序列 $\{\phi_n(x)\}$, $\{\psi_n(x)\}$ 在 $a\le x\le b$ 都是一致收敛的. 事实上, 可以归纳地证明

$$0\le \psi_n(x)-\psi_{n-1}(x)\le\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n(b-a),$$
$$0\le \phi_n(x)-\phi_{n+1}(x)\le\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n(b-a),$$

对 $n=1,2,\cdots$ 和 $x\in[a,b]$ 都成立. 而 $0<\frac{\lambda_2}{\lambda_1}<1$, 从而两个序列都一致收敛.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}\phi_n(x)=f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty}\psi_n(x)=g(x)$. 显然 $f(x)$, $g(x)$ 在 $[a,b]$ 连续、单调不减, 且

$$x\le\psi_n(x)\le g(x)\le f(x)\le\phi_n(x)\le F(x).$$

由序列定义的第 iv 条件, 取 $n\to\infty$ 的极限, 得

$$\begin{aligned}\lambda_1 f(x)+\lambda_2 g\circ f(x)=F(x),\\ \lambda_1 g(x)+\lambda_2 f\circ g(x)=F(x).\end{aligned}\tag{20.3}$$

现在只需证明: $f(x)\equiv g(x)$, $x\in[a,b]$. 事实上, 由 (20.3) ,

$$\begin{aligned}0\le f(x)-g(x)&=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(f\circ g(x)-g\circ f(x))\\ &\le\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(f\circ f(x)-g\circ f(x))\\ &=\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2(f\circ g\circ f(x)-g\circ f\circ f(x))\\ &\le\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^2(f\circ f\circ f(x)-g\circ f\circ f(x)).\end{aligned}$$

如此继续，可归纳地证得

$$\begin{aligned}0 \le f(x) - g(x) &\le \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n (f \circ f^n(x) - g \circ f^n(x)) \\ &\le \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n (b-a).\end{aligned}$$

上式右端当 $n \to \infty$ 时趋于 0，从而证得 $f(x) \equiv g(x)$. 再由 (20.3)，知 $f(x)$ 满足方程 (IT2)，且 $x \le f(x) \le F(x)$.

最后证明唯一性. 设 $f_1(x)$, $f_2(x)$ 为方程 (IT2) 的两个连续解，不妨设对某个 $x \in [a,b]$ 有 $f_1(x) > f_2(x)$. 易见

$$f_1(x) - f_2(x) = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(f_1^2(x) - f_2^2(x)),$$

而且对任意整数 n 有

$$\begin{aligned}&f_1^{n+1}(x) - f_2^{n+1}(x) \\ &\quad = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1}(f_1^{n+2}(x) - f_2^{n+2}(x)) + \frac{1}{\lambda_1}(F \circ f_1^n(x) - F \circ f_2^n(x)).\end{aligned}$$

用这些关系，可归纳地证得对 $k = 1, 2, \cdots$,

$$f_1^n(x) - f_2^n(x) \begin{cases} \ge 0, & n = 2k-1; \\ \le 0, & n = 2k, \end{cases}$$

进而，归纳地证得

$$|f_1^n(x) - f_2^n(x)| \le \frac{\lambda_2}{\lambda_1}|f_1^{n+1}(x) - f_2^{n+1}(x)|.$$

从而

$$\begin{aligned}f_1(x) - f_2(x) &\le \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n |f_1^{n+1}(x) - f_2^{n+1}(x)| \\ &\le \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n (b-a), \qquad n = 2, 3, \cdots\end{aligned}$$

由于上式右端当 $n\to\infty$ 时趋于 0，从而证得 $f_1(x)=f_2(x)$，与当初 x 的假设矛盾，故唯一性得证. □

上述方法还可用于讨论形如

$$\lambda_1 f(x)+\lambda_2 f^n(x)=F(x) \qquad n\geq 3$$

的 n 次迭代方程，并得到类似的结果.

§ 21 一般方程解存在性

对一般 n 次迭代方程 (ITn)，用级数逼近的方法很难奏效. 1986 年张伟年 [76] 用不动点理论使这一问题得到推进. 往下对方程 (ITn) 均假设

$$\text{(H)} \quad \lambda_1>0, \lambda_i\geq 0,\ i=2,3,\cdots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i=1.$$

定理 1 (存在性) $F:I\to I$ 连续，$F(a)=a, F(b)=b$，且 $0\leq F(x_1)-F(x_2)\leq M(x_1-x_2),\ \forall x_1>x_2\in I$，其中 $M\geq 1$. 那么方程 (ITn) 存在连续解 $f:I\to I$，它满足 $f(a)=a, f(b)=b$ 和 $0\leq f(x_1)-f(x_2)\leq \frac{M}{\lambda_1}(x_1-x_2),\ \forall x_1>x_2\in I$.

我们只需对 $I=[0,1]$ 证明定理. 事实上，如果 $[a,b]\neq[0,1]$，令

$$h(t)=a+t(b-a), \qquad \forall\, 0\leq t\leq 1$$

并记 $g=h^{-1}\circ f\circ h,\ G=h^{-1}\circ F\circ h,\ \mu_i=\lambda_i\circ h,\ i=1,2,\cdots,n.$ 易见，方程 (ITn) 等价地化成

$$\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t)g^i(t)=G(t). \qquad \forall t\in[0,1] \quad (21.1)$$

为方便起见，令 $I=[0,1]$，并采用记号： $C(I)$ 为定义在 I 上的连续实函数的全体， $X=\{f\in C(I):0=f(0)\le f(t)\le f(1)=1,\forall t\in I\}$, $X(m,M)=\{f\in X:m(y-x)\le f(y)-f(x)\le M(y-x),\ \forall 0\le x\le y\le 1\}$, 其中 $0\le m\le 1\le M$． $C(I)$ 关于范数 $\|f\|=\max\{|f(t)|:t\in I\}$ 是一个巴拿赫空间.

引理 1 给定 $0\le m\le 1\le M$． $X(m,M)$ 是 $C(I)$ 的一个紧凸子集.

证明 显然， $X(m,M)$ 是 $C(I)$ 的有界闭凸子集. 容易验证在 $X(m,M)$ 内的函数是一致等度连续的. 根据阿斯科里 - 阿克采引理， $X(m,M)$ 为 $C(I)$ 的紧凸子集. □

引理 2 设 $0<m\le 1\le M$, 且 $f,g\in X(m,M)$, 那么

(i) $\|f^n-g^n\|\le \sum_{j=0}^{n-1}M^j\|f-g\|,\quad \forall n=0,1,2,\cdots;$

(ii) $f^{-1}\in X(M^{-1},m^{-1})$;

(iii) $\|f-g\|\le M\|f^{-1}-g^{-1}\|$;

(iv) $\|f^{-1}-g^{-1}\|\le m^{-1}\|f-g\|$.

证明 当 $n=0$ 或 $n=1$ 时， (i) 是平凡的. 如果 (i) 对 $n=k$ 成立，

$$\begin{aligned}|f^{k+1}(x)-g^{k+1}(x)|&=|f(f^k(x))-g(g^k(x))|\\&\le|f(f^k(x))-f(g^k(x))|+|f(g^k(x))-g(g^k(x))|\\&\le M\|f^k-g^k\|+\|f-g\|\\&\le M\left(\sum_{j=0}^{k-1}M^j\right)\|f-g\|+\|f-g\|\\&=\left(\sum_{j=0}^{k}M^j\right)\|f-g\|,\end{aligned}$$

用归纳法可证得 (i)．

因此 $Lf \in X(\lambda_1, M_0)$ ，且为 I 上的保向同胚. 由引理 2, 其逆 $\mathcal{I}Lf \in X(M_0^{-1}, \lambda_1^{-1})$. 最后定义映射 $\Pi : X(0, M/\lambda_1) \to C(I)$ 使得

$$\Pi f(x) = \mathcal{I}Lf \circ F(x). \qquad \forall f \in X(0, M/\lambda_1) \tag{21.5}$$

易见， $\Pi f(0) = 0, \Pi f(1) = 1$ ，且对 $x_1 > x_2$ ，

$$\begin{aligned} 0 &\le \Pi f(x_1) - \Pi f(x_2) = \mathcal{I}Lf \circ F(x_1) - \mathcal{I}Lf \circ F(x_2) \\ &\le \frac{1}{\lambda_1}(F(x_1) - F(x_2)) \le \frac{M}{\lambda_1}(x_1 - x_2). \end{aligned}$$

因此 $\Pi(X(0, M/\lambda_1)) \subset X(0, M/\lambda_1)$. 进而, 对 $f_1, f_2 \in X(0, M/\lambda_1)$, 用引理 2 ,

$$\begin{aligned} \|\Pi f_1 - \Pi f_2\| &= \|\mathcal{I}Lf_1 \circ F - \mathcal{I}Lf_2 \circ F\| = \|\mathcal{I}Lf_1 - \mathcal{I}Lf_2\| \\ &\le \lambda_1^{-1}\|Lf_1 - Lf_2\| \le \lambda_1^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\|f_1^i - f_2^i\| \\ &\le \lambda_1^{-1}\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\sum_{j=0}^{i-1}M^j\|f_1 - f_2\|. \end{aligned} \tag{21.6}$$

因此， Π 是 $X(0, M/\lambda_1)$ 上的连续映射. 由引理 1, $X(0, M/\lambda_1)$ 是 $C(I)$ 的一个紧凸子集，根据绍德尔 (J.P. Schauder) 不动点定理，存在 $f \in X(0, M/\lambda_1)$, 使得 $f(x) = \Pi f(x)$ ，即 $Lf \circ f(x) = F(x)$. 从而 f 为 (ITn) 的一个连续解. □

该定理可简述为：设方程 (ITn) 满足条件 (H), 且 $M \ge 1$ ，如果 $F \in X(0, M)$ ，那么方程 (ITn) 存在连续解 $f \in X(0, M/\lambda_1)$.

[例] 考虑迭代方程

$$\lambda f(x) + (1 - \lambda)f^2(x) = F(x), \quad x \in I = [a, c],\ 0 < \lambda < 1 \tag{21.7}$$

其中 $F(x) = \alpha e^x - \alpha,\ 0 < \alpha < 1,\ c = \alpha(e^c - 1) > 0$. 易见 $\alpha \le F'(x) = \alpha e^x \le e^c$. 令 $M = e^c$ ，那么 F 满足定理 1 条件，从而 (21.7) 有连续解.

§ 22 唯一性与稳定性

定理 1 (**唯一性**) 假设 §21 的定理 1 条件满足，此外，

$$\lambda_1 > \frac{1}{1+\left(\sum_{j=1}^{n} M^{j-1}\right)^{-1}}, \tag{22.1}$$

那么方程 (ITn) 在 $X(0, M/\lambda_1)$ 有唯一解.

证明 由 (21.6)，

$$\begin{aligned} \|\Pi f_1 - \Pi f_2\| &\leq \lambda_1^{-1} \sum_{i=1}^{n-1} \lambda_{i+1} \sum_{j=0}^{i-1} M^j \|f_1 - f_2\| \\ &\leq \gamma \|f_1 - f_2\|, \end{aligned} \tag{22.2}$$

其中 (22.1) 意味着

$$\gamma := \lambda_1^{-1}(1-\lambda_1) \sum_{j=1}^{n} M^{j-1} < 1. \tag{22.3}$$

因此 Π 是闭子集 $X(0, M/\lambda_1)$ 上的压缩映射，从巴拿赫不动点定理可给出唯一性. □

用巴拿赫压缩映象原理证明唯一性的过程，实际上给出了一个对方程 (ITn) 解的递推近似计算法. 事实上，由映射 Π 的定义，对任意选定的初函数 $f_0 \in X(0, M/\lambda_1)$，我们如下

$$f_{k+1}(x) = \mathcal{I} L f_k \circ F(x)$$

定义函数序列 $\{f_{k+1}(x)\}$. 可以证明它一致收敛.

定理 2 (**稳定性**) 在定理 1 条件下，方程 (ITn) 的解 f 连续地依赖于已知函数 F.

证明 令 $F,G\in X(0,M)$. 由定理 1, 方程 (ITn) 分别对应已知函数 F,G, 唯一地确定解 $f,g\in X(0,M/\lambda_1)$, 即 $f(x)=\mathcal{I}Lf\circ F(x)$, $g(x)=\mathcal{I}Lg\circ G(x)$. 因而, 由 §21 的引理 2 (iv) ,

$$\begin{aligned}\|f-g\| &= \|\mathcal{I}Lf\circ F-\mathcal{I}Lg\circ G\|\le\|\mathcal{I}Lf\circ F-\mathcal{I}Lg\circ F\|\\ &\quad+\|\mathcal{I}Lg\circ F-\mathcal{I}Lg\circ G\|\le\|\mathcal{I}Lf-\mathcal{I}Lg\|+\lambda_1^{-1}\|F-G\|\\ &\le\lambda_1^{-1}(\|Lf-Lg\|+\|F-G\|)\\ &\le\lambda_1^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\|f^i-g^i\|+\|F-G\|\right)\\ &\le\lambda_1^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_{i+1}\sum_{j=0}^{i-1}M^j\|f-g\|+\|F-G\|\right)\\ &\le\gamma\|f-g\|+\lambda_1^{-1}\|F-G\|.\end{aligned}$$

由 (22.1) 和 (22.3) , $\gamma<1$, 因此

$$\|f-g\|\le\frac{1}{(1-\gamma)\lambda_1}\|F-G\|. \tag{22.4}$$

从而稳定性得证. □

注: 从稳定性定理也可直接推论出唯一性, 这从 (22.4) 中取 $F=G$ 可以得出.

如果已知函数严格递增, 具体地说, 如果 $F\in X(\delta,\lambda_1M)$, 其中 $\delta>0$, $M>0$, $\lambda_1M>\delta$, 还可给出另一种唯一性条件 [76]: 当

$$\lambda_1\ge1-\delta/\left(\sum_{i=1}^{n-1}M^i\right)$$

时, 方程 (ITn) 在 $X(0,M)$ 存在唯一解, 且该解连续依赖于已知函数. 特别是对 $n=2$ 的情形, 唯一性条件是一个容易验算的表达式: $\lambda_2\le\delta/M$.

作为例子, 我们考虑 [44] 所考虑的方程

$$\lambda_2f^2(x)+\lambda_1f(x)+\lambda_0x=0,\qquad x\in I=[0,1] \tag{22.5}$$

其中 $\lambda_0+\lambda_1+\lambda_2=0,\ \lambda_1>\lambda_2>0$. 利用唯一性定理可以证明：方程 (22.5) 保持端点不动的连续递增解只有平凡解 $f(x)\equiv x$. 事实上，令 $\mu_i=-\lambda_i/\lambda_0,\ i=1,2$ ，显然 $\mu_1+\mu_2=1$ ，从而方程 (22.5) 等价于 (ITn)，其中 $n=2$ ，系数为 μ_1,μ_2 ， $F(x)\equiv x$. 取 $\delta=1,\ M=-\lambda_0/\lambda_1>1$ ，因为 $F'(x)\equiv 1$ ，故 $F\in X(\delta,\mu_1 M)$. 由于

$$\mu_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}<\frac{\lambda_1}{\lambda_1+\lambda_2}=\frac{\delta}{M},$$

故上述唯一性条件满足, 方程在 $X(0,M)$ 有唯一解. 然而, $f(x)\equiv x$ 显然是平凡解, 从而证实了结论.

§ 23 变系数问题

以上讨论的是常系数问题, 本节将进一步讨论变系数形式的方程

$$\lambda_1(x)f(x)+\lambda_2(x)f^2(x)+\cdots+\lambda_n(x)f^n(x)=F(x), \qquad \text{(VITn)}$$

其中 $x\in I=[0,1]$, 连续函数 $F:I\to I$ 满足 $F(a)=a,\ F(b)=b$, 系数 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n:I\to[0,1]$ 是连续函数, 且满足规范化条件 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i(x)=1,\ \forall x\in I$. 我们将看到, 讨论这类方程要用到多元分析的方法.

定理 1 假设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n:I\to I$ 连续, $\lambda_1(x)\ge c,\ \lambda_k(x)\ge 0,\ \forall x\in I,\ k=2,3,\cdots,n$ ，且对 $\forall k=1,2,\cdots,n,$

$$\mathrm{Lip}\lambda_k:=\sup\left\{\frac{|\lambda_k(y)-\lambda_k(x)|}{y-x}:0\le x<y\le 1\right\}\le\beta,$$

其中 $c,\ \beta$ 为实常数, $0<c<1$ 且 $\beta\le\frac{1}{n}$. 如果 $F\in X(\delta,M)$ ，其中 $\delta\le 1\le M,\ \delta\ge n\beta$ ，那么迭代方程 (VITn) 在 $X(0,\frac{M+n\beta}{c})$ 中存在解.

证明 记 $M_1 := (M + n\beta)/c$. 对固定的 $x \in I$, 定义映射 $L_x : X(0, M_1) \to C^0(I \times I)$, 使得对 $\forall f \in X(0, M_1)$,

$$\begin{aligned} L_x f(u) : &= L(x, u; f) \\ &= \lambda_1(x)u + \lambda_2(x)f(u) + \cdots + \lambda_n(x)f^{n-1}(u). \quad (23.1) \end{aligned}$$

显然, $L_x f(0) \equiv 0, L_x f(1) \equiv 1$, 且 $L(\cdot, \cdot; f)$ 把 $I \times I$ 映入 I . 对 $x < y,\ u < v, \in I$, 由 §21 的引理 2,

$$\begin{aligned} L_x f(v) - L_x f(u) &= \lambda_1(x)(v-u) + \sum_{i=2}^{n} \lambda_i(x)(f^{i-1}(v) - f^{i-1}(u)) \\ &= \begin{cases} \geq \lambda_1(x)(v-u) \geq c(v-u) > 0, \\ \leq \Big(\sum_{i=1}^{n} M_1^{i-1}\Big)(v-u), \end{cases} \end{aligned} \quad (23.2)$$

而且

$$\begin{aligned} L_y f(u) - L_x f(u) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda_i(y) - \lambda_i(x)) f^{i-1}(u) \\ &= \begin{cases} \geq -\sum_{i=1}^{n} \beta(y-x) = -n\beta(y-x), \\ \leq \sum_{i=1}^{n} \beta(y-x) = n\beta(y-x). \end{cases} \end{aligned} \quad (23.3)$$

由 (23.2) 的第一式知 $L_x f(\cdot)$ 可逆, 且对 $u < v, \in I$,

$$\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} M_1^{i-1}}\right)(v-u) \leq (L_x f)^{-1}(v) - (L_x f)^{-1}(u) \leq \frac{1}{c}(v-u). \quad (23.4)$$

另一方面, 对任意固定的 $v \in I$, $L_x f \circ (L_x f)^{-1}(v) = v$,

$\forall x \in I$. 由 (23.2) 和 (23.3) ， $\forall y > x, \in I$,

$$\begin{aligned} 0 &= L_y f \circ (L_y f)^{-1}(v) - L_x f \circ (L_x f)^{-1}(v) \\ &= L_y f \circ (L_y f)^{-1}(v) - L_y f \circ (L_x f)^{-1}(v) \\ &\quad + L_y f \circ (L_x f)^{-1}(v) - L_x f \circ (L_x f)^{-1}(v) \\ &= \begin{cases} \geq c((L_y f)^{-1}(v) - (L_x f)^{-1}(v)) - n\beta(y-x), \\ \leq \left(\sum\limits_{i=1}^{n} M_1^{i-1}\right)((L_y f)^{-1}(v) - (L_x f)^{-1}(v)) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad + n\beta(y-x), \end{cases} \end{aligned} \tag{23.5}$$

因此， $\forall y > x, \in I$, $\forall v \in I$,

$$(L_y f)^{-1}(v) - (L_x f)^{-1}(v) \begin{cases} \geq -\left(\dfrac{n\beta}{\sum\limits_{i=1}^{n} M_1^{i-1}}\right)(y-x), \\ \leq \dfrac{n\beta}{c}(y-x). \end{cases} \tag{23.6}$$

最后定义映射 $T : X(0, M_1) \to C^0(I)$,

$$Tf(x) \;=\; (L_x f)^{-1} \circ F(x). \quad \forall x \in I, f \in X(0, M_1) \tag{23.7}$$

显然， $Tf(0) = 0$, $Tf(1) = 1$. 由 (23.4) 和 (23.6) ，对 $y > x, \in I$,

$$\begin{aligned} Tf(y) - Tf(x) &= (L_y f)^{-1} \circ F(y) - (L_x f)^{-1} \circ F(x) \\ &= (L_y f)^{-1} \circ F(y) - (L_x f)^{-1} \circ F(y) \\ &\qquad + (L_x f)^{-1} \circ F(y) - (L_x f)^{-1} \circ F(x) \\ &= \begin{cases} \geq -\left(\dfrac{n\beta}{\sum\limits_{i=1}^{n} M_1^{i-1}}\right)(y-x) \\ \qquad + \left(\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n} M_1^{i-1}}\right)(F(y) - F(x)), \\ \leq \dfrac{n\beta}{c}(y-x) + \dfrac{1}{c}(F(y) - F(x)) \end{cases} \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} \geq \dfrac{\delta - n\beta}{\sum\limits_{i=1}^{n} M_1^{i-1}}(y-x) \geq 0, \\ \leq \dfrac{M + n\beta}{c}(y-x) = M_1(y-x), \end{cases} \tag{23.8}$$

因此 $Tf \in X(0, M_1)$. 进而，映射 T 是连续的. 事实上，对 $f_1, f_2 \in X(0, M_1)$ ，由 §21 的引理 2 和 (23.4),

$$\begin{aligned} \|Tf_2 - Tf_1\| &= \max_{x \in I} |(L_x f_2)^{-1} \circ F(x) - (L_x f_1)^{-1} \circ F(x)| \\ &\leq \max_{x \in I} \|(L_x f_2)^{-1} - (L_x f_1)^{-1}\| \leq \max_{x \in I} \frac{1}{c} \|L_x f_2 - L_x f_1\| \\ &= \frac{1}{c} \max_{x \in I} \left\| \sum_{i=2}^{n} \lambda_i(x)(f_2^{i-1} - f_1^{i-1}) \right\| \\ &\leq \frac{1}{c} \max_{x \in I} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{j+1}(x) \|f_2^j - f_1^j\| \\ &\leq \frac{1}{c} \max_{x \in I} \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{j+1}(x) \left(\sum_{k=1}^{j} M_1^{k-1} \right) \|f_2 - f_1\| \\ &\leq \frac{1-c}{c} \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{M + n\beta}{c} \right)^{k-1} \|f_2 - f_1\|. \end{aligned} \tag{23.9}$$

由 §21 的引理 1, 映射 T 连续地把紧凸子集 $X(0, M_1)$ 映入自身. 由绍德尔不动点定理，必存在函数 $f \in X(0, M_1)$, 满足方程 (VITn) . 定理证毕. □

对变系数方程 (VITn), 也有唯一性和稳定性结论 [82] .

定理 2 设定理 1 的条件满足，而且常数 $c \in (0, 1)$ 满足

$$\gamma := (1-c) \sum_{j=1}^{n-1} (M + n\beta)^{j-1} / c^j < 1. \tag{23.10}$$

那么方程 (VITn) 有唯一解 $f \in X(0, \frac{M+n\beta}{c})$ ，而且 f 连续地依赖

于函数 F 和 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$.

§ 24 方程形式的推广

方程 (ITn) 的形式可以推广为

$$G(f(x), f^{n_1}(x), \cdots, f^{n_k}(x)) = F(x), \quad x \in I = [a, b] \quad \text{(GITn)}$$

其中 $n_i \geq 2$, $i = 1, \cdots, k$, $f^0(x) = x$, $f^k(x) = f \circ f^{k-1}(x)$. 当 G 是线性的，即

$$G(y_0, y_1, \cdots, y_k) = \lambda_1 y_0 + \lambda_2 y_1 + \cdots + \lambda_{k+1} y_k$$

且 $n_i = i + 1$, $i = 1, 2, \cdots, k$ 时，方程 (GITn) 成为 (ITn) 形式，即

$$\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) + \cdots + \lambda_{k+1} f^{k+1}(x) = F(x).$$

司建国 [56],[57] 研究了 (GITn) 解的存在性、唯一性和稳定性.

基本假设如下：

(H1) $G : I^{k+1} = I \times \cdots \times I \to I$ 连续， $G(a, \cdots, a) = a, G(b, \cdots, b) = b$;

(H2) 存在常数 $c_0 > 0$, $c_i \geq 0$, $i = 1, 2, \cdots, k$ 和 $C_i > 0$, 使得对任意 $y_i \geq \tilde{y}_i$, $i = 0, 1, \cdots, k$, 有

$$\sum_{i=0}^{k} c_i(y_i - \tilde{y}_i) \leq G(y_0, y_1, \cdots, y_k) - G(\tilde{y}_0, \tilde{y}_1, \cdots, \tilde{y}_k)$$
$$\leq \sum_{i=0}^{k} C_i(y_i - \tilde{y}_i).$$

像前面在 $[0,1]$ 上定义记号 $X(\delta,M)$ 一样，记 $X(I;\delta,M)$ 为在 $I=[a,b]$ 上满足类似条件的函数集.

定理 1 设方程 (GITn) 满足假设 (H1) 和 (H2)，常数 $M>0$. 若 $F\in X(I;0,c_0M)$，那么方程 (GITn) 存在连续解 $f\in X(I;0,M)$. 进而，如果 $\sum_{i=1}^{k} C_i\Big(Q(n_i-1)\sum_{j=1}^{n_i-2}M^j+1\Big)<c_0$，其中 $Q(1)=0$，$Q(s)=1$，$s=2,3\cdots$，那么上述解唯一确定，并连续依赖于已知函数 F 和 G.

证明 定义 $L:X(I;0,M)\to C(I)$，使对 $\forall f\in X(I;0,M)$，有

$$L_f(x)=G(x,f^{n_1-1}(x),\cdots,f^{n_k-1}(x)),\quad x\in I=[a,b] \tag{24.1}$$

并简记 Lf 为 L_f. 显然，$L_f(a)=a$，$L_f(b)=b$，

$$\begin{aligned}
L_f(x_1)-L_f(x_2) &= G(x_1,f^{n_1-1}(x_1),\cdots,f^{n_k-1}(x_1))\\
&\quad -G(x_2,f^{n_1-1}(x_2),\cdots,f^{n_k-1}(x_2))\\
&\geq c_0(x_1-x_2)+\sum_{i=1}^{k}c_i(f^{n_i-1}(x_1)-f^{n_i-1}(x_2))\\
&\geq c_0(x_1-x_2)>0.
\end{aligned}$$

同理

$$\begin{aligned}
L_f(x_1)-L_f(x_2) &= G(x_1,f^{n_1-1}(x_1),\cdots,f^{n_k-1}(x_1))\\
&\quad -G(x_2,f^{n_1-1}(x_2),\cdots,f^{n_k-1}(x_2))\\
&\leq C_0(x_1-x_2)+\sum_{i=1}^{k}C_i(f^{n_i-1}(x_1)-f^{n_i-1}(x_2))\\
&\leq C_0(x_1-x_2)+\sum_{i=1}^{k}C_iM^{n_i-1}(x_1-x_2)\\
&= M_0(x_1-x_2),
\end{aligned}$$

其中 $M_0:=C_0+\sum_{i=1}^{k}C_iM^{n_i-1}>0$. 因此 $L_f\in X(I;c_0,M_0)$ 且为 I

上的保向同胚. 由 §21 的引理 2, 其逆 $L_f^{-1} \in X(I; M_0^{-1}, c_0^{-1})$. 最后定义映射 $\Pi : X(I; 0, M) \to C(I)$, 使得

$$\Pi f(x) = L_f^{-1} \circ F(x). \qquad \forall f \in X(I; 0, M). \tag{24.2}$$

易见, $\Pi f(a) = a$, $\Pi f(b) = b$, 且对 $x_1 > x_2$,

$$\begin{aligned} 0 \le \Pi f(x_1) - \Pi f(x_2) &= L_f^{-1} \circ F(x_1) - L_f^{-1} \circ F(x_2) \\ &\le \frac{1}{c_0}(F(x_1) - F(x_2)) \le M(x_1 - x_2), \end{aligned}$$

故 Π 将 $X(I; 0, M)$ 映入自身. 进而, 对 $f_1, f_2 \in X(I; 0, M)$, 用 §21 的引理 2,

$$\begin{aligned} \|\Pi f_1 - \Pi f_2\| &= \|L_{f_1}^{-1} \circ F - L_{f_2}^{-1} \circ F\| \\ &= \|L_{f_1}^{-1} - L_{f_2}^{-1}\| \le c_0^{-1}\|L_{f_1} - L_{f_2}\| \\ &\le c_0^{-1} \max_{x \in I} |G(x, f_1^{n_1-1}(x), \cdots, f_1^{n_k-1}(x)) \\ &\quad - G(x, f_2^{n_1-1}(x), \cdots, f_2^{n_k-1}(x))| \\ &\le c_0^{-1} \sum_{i=1}^{k} C_i \|f_1^{n_i-1} - f_2^{n_i-1}\| \\ &\le c_0^{-1} \sum_{i=1}^{k} C_i \Big(Q(n_i - 1) \sum_{j=1}^{n_i-2} M^j + 1\Big) \|f_1 - f_2\|, \end{aligned} \tag{24.3}$$

其中 $Q(1) = 0$, $Q(s) = 1$, $s = 2, 3, \cdots$. 因此 Π 是 $X(I; 0, M)$ 上的连续映射. 由 §21 的引理 1, $X(I; 0, M)$ 是 $C(I)$ 的一个紧凸子集, 从而绍德尔不动点定理保证了 Π 在 $X(I; 0, M)$ 中有不动点 f , 即 $L_f \circ f(x) = F(x)$, 从而 f 为 (GITn) 的一个连续解.

定理的唯一性条件由 (24.3) 给出. 事实上, 当

$$c_0^{-1} \sum_{i=1}^{k} C_i \Big(Q(n_i - 1) \sum_{j=1}^{n_i-2} M^j + 1\Big) < 1$$

时，映射 Π 是压缩映射．用同前类似的方法，可证明唯一性条件也是稳定性条件． □

[例] 考虑迭代方程

$$\frac{9}{10}f(x)+\frac{1}{10}(f(f(x)))^2=F(x), \tag{24.4}$$

其中 $x\in I=[0,1]$，$F(x)=\ln(1+x)+x(1-\ln 2)$．取

$$G(y_0,y_1)=\frac{9}{10}y_0+\frac{1}{10}y_1^2,$$

易见 $G(y_0,y_1)\in C(I^2)$，且 $G(0,0)=0$，$G(1,1)=1$，而且对任意 $y_i\geq\tilde{y}_i$，$\in I$，$i=0,1$，有

$$\begin{aligned}G(y_0,y_1)-G(\tilde{y}_0,\tilde{y}_1)&=\frac{9}{10}(y_0-\tilde{y}_0)+\frac{1}{10}(y_1+\tilde{y}_1)(y_1-\tilde{y}_1)\\&\leq\frac{9}{10}(y_0-\tilde{y}_0)+\frac{1}{5}(y_1-\tilde{y}_1),\end{aligned}$$

而且

$$\begin{aligned}G(y_0,y_1)-G(\tilde{y}_0,\tilde{y}_1)&=\frac{9}{10}(y_0-\tilde{y}_0)+\frac{1}{10}(y_1+\tilde{y}_1)(y_1-\tilde{y}_1)\\&\geq\frac{9}{10}(y_0-\tilde{y}_0).\end{aligned}$$

令 $c_0=\frac{9}{10}$，$c_1=0$，$C_0=\frac{9}{10}$，$C_1=\frac{1}{5}$．显然 G 满足定理 1 的基本假设，从而方程 (24.4) 在 $X(I;0,M)$ 中有解，这里 $M=10(2-\ln 2)/9$．进一步，可以验证定理唯一性条件，即

$$\sum_{i=1}^{k}C_i\Big(Q(n_i-1)\sum_{j=1}^{n_i-2}M^j+1\Big)=C_1=\frac{1}{5}<c_0,$$

因此这个解是唯一和稳定的．

利用哈代 - 波狄瓦特定理 (§11 定理 2)，方程 (ITn) 还有其他形式的推广 [84]．

第 6 章

迭代方程性质

上一章仅仅回答了多项式型迭代方程 (ITn) 及相关形式的方程解的存在性和唯一性等基本问题. 尽管唯一性定理实质上给出了一个算法, 但计算只能是近似的, 而且唯一性条件也是苛刻的.

对于大多数情形我们很难直接对方程给出解析形式的解, 因此不能对确定的函数去研究其函数性质以及其迭代产生的动力系统性质. 我们需要直接从方程的基本形式出发进一步研究解的函数性质, 如光滑性、解析性、对称性等等, 甚至建立特征刻划来分析方程的特征根和特征解, 从而给出方程一般解的性质.

§ 25 解的光滑性

考虑迭代方程 (ITn) 并仍假设 (H) 成立, 即 $\lambda_1 > 0,\ \lambda_i \geq 0,\ i = 2,3,\cdots,n,\ \sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$.

定理 1 (光滑性) $F: I \to I$ 连续可微, $F(a) = a, F(b) = b$, 且

$$\delta \leq F'(x) \leq \lambda_1 M, \qquad \forall x \in I$$

$$|F'(x_1) - F'(x_2)| \leq M'|x_1 - x_2|, \qquad \forall x_1 > x_2,\ \in I$$

其中 δ, M 为正数, λ_1 为方程中已给定的系数. 如果方程系数满足

$$\lambda_1 > K_0 M^2, \quad K_0 := \sum_{j=1}^{n-1}\lambda_{j+1}\left(\sum_{i=j-1}^{2j-2} M^i\right),$$

[例] 考虑迭代方程

$$\lambda f(x)+(1-\lambda)f^2(x)=F(x),\qquad x\in I=[a,c],\ 0<\lambda<1\quad(25.1)$$

其中 $F(x)=\alpha e^x-\alpha,\ 0<\alpha<1,\ c=\alpha(e^c-1)>0$.

易见 $F(0)=0,\ F(c)=c,\ 0\le F(x)\le c,\ \forall x\in I$. 由于

$$\alpha\le F'(x)=\alpha e^x=F''(x)\le\alpha e^c,$$

取 $\delta=\alpha,\ M=\alpha e^c/\lambda,\ M'=\alpha e^c$ ，那么定理 1 给出了 C^1 - 光滑解的存在条件:

$$\lambda>(1-\lambda)\frac{\alpha^2e^{2c}}{\lambda^2}.$$

显然存在正常数 $\Lambda_1<1$ 使上式对 $\forall\lambda\in(\Lambda_1,1)$ 成立. 进而，可以算出

$$\begin{aligned}
E_1&=\max\left\{\frac{\alpha e^c}{\lambda}+\frac{(\lambda^2+(1-\lambda)\alpha e^c)\alpha^2e^{2c}}{\alpha(\lambda^3-(1-\lambda)\alpha^2e^{2c})};\frac{\alpha^2e^{2c}}{\lambda^2}\right\},\\
E_2&=\frac{1}{\alpha}+\left(\lambda+\frac{1-\lambda}{\lambda}\alpha e^c\right)\frac{e^c}{\alpha^2},\\
E_3&=\lambda_2E_3^{(1)}=1-\lambda.
\end{aligned}$$

令 $E(\lambda):=E_1E_2E_3$ ，它包含因式 $1-\lambda$ ，显然 $E(1)=0$. 因此存在正常数 $\Lambda_2<1$ 使 $E(\lambda)<1,\ \forall\lambda\in(\Lambda_2,1)$. 令 $\Lambda=\max\{\Lambda_1,\ \Lambda_2\}$ ，当 $\lambda\in(\Lambda,1)$ 时定理 2 条件满足，这时可断定方程 (25.1) 有唯一的 C^1 - 光滑解.

此外还有其他形式的光滑性条件，例如 [79]，还可以进一步给出 C^2 - 光滑性的条件 [53] .

定理 3 $F\in C^2(I,I),\ F(a)=a,F(b)=b$ ，且存在常数

$M>0$, $\delta>0$ ，使 $\forall x,x_1,x_2\in I$, $x_1>x_2$, 有

$$
\begin{aligned}
&\delta\le F'(x)\le\lambda_1 M,\quad \frac{K_1K_2M^2}{\lambda_1}\le F''(x)\le\lambda_1 M,\\
&K_1\left(\frac{3K_2M^2}{\lambda_1}+\frac{K_1^2K_3M^3}{\lambda_1^3}\right)(x_1-x_2)\\
&\quad\le F''(x_1)-F''(x_2)\\
&\quad\le\left(\lambda_1 M-\frac{K_1K_2^2M^3(2\lambda_1+K_1)}{\lambda_1^3}\right)(x_1-x_2),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\begin{aligned}
K_1&=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i M^{i-1},\\
K_2&=\sum_{i=2}^{n}\lambda_i\Bigg(\sum_{j=i-1}^{2i-3}M^j\Bigg),\\
K_3&=\lambda_2 M\ +\ Q(n-1)\sum_{i=3}^{n}\lambda_i\Bigg\{M^{3i-5}+M^{i-1}\\
&\quad+2\sum_{j=i-2}^{2i-5}M^{i+j-1}+\sum_{j=i-1}^{2i-4}M^{j+1}+Q(i-2)\sum_{j=1}^{i-3}\Bigg(M^{i+2j-1}\\
&\quad+\sum_{s=i-1}^{2i-j-4}M^{2j-s+1}+2\sum_{s=j}^{2j-1}M^{i+s-1}\Bigg)\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

那么方程 (ITn) 存在 C^2 解 $f:I\to I$, 它满足 $f(a)=a, f(b)=b$ 且对 $\forall x,x_1,x_2\in I$, $x_1>x_2$, 有

$$
\begin{aligned}
&0\le f'(x)\le M,\qquad 0\le F''(x)\le M,\\
&0\le F''(x_1)-F''(x_2)\le M(x_1-x_2).
\end{aligned}
$$

一般 C^r 光滑性的讨论十分复杂，关于 $n=2$ 的情形见 [54]，对一般形式的方程的结果还鲜见. 迭代的高阶导数导致庞大的表达式，有关估计式的处理需要更多的技巧或另辟蹊径.

§ 26 解的解析性

关于迭代方程 (ITn) 解的解析性研究，是在复数域中展开的. 考虑方程

$$\lambda_1 f(z)+\lambda_2 f^2(z)+\cdots+\lambda_n f^n(z) = F(z), \qquad z\in \mathbf{C} \quad \text{(CITn)}$$

其中 f^i 表示 f 的第 i 次迭代， $\lambda_i \in \mathbf{C}$ 不全为 0, $i=1,2,\cdots,n$.

定理 1 (**解析性**) 设 $F(0)=0$, $F'(0)=s$, $F(z)$ 在 $|z|<r_1$ 上解析，其幂级数展开式为

$$F(z) = sz+\sum_{m=2}^{\infty} c_m z^m.$$

α 是代数方程

$$\lambda_1 z+\lambda_2 z^2+\cdots+\lambda_n z^n - s = 0$$

的根，且有正数 β 使得对任意自然数 $m\geq 2$ 有

$$|\lambda_1\alpha^m+\lambda_2\alpha^{2m}+\cdots+\lambda_n\alpha^{nm}-s|\geq \beta.$$

那么存在 $r>0$ 使方程 (CITn) 在 $|z|<r$ 内存在解析解.

证明 首先证明非线性函数方程

$$\lambda_1\phi(\alpha z)+\lambda_2\phi(\alpha^2 z)+\cdots+\lambda_n\phi(\alpha^n z) = F(\phi(z)) \tag{26.1}$$

在 $z=0$ 的某邻域内存在形如

$$\phi(z) = \eta z+\sum_{m=2}^{\infty} b_m z^m \qquad \eta\in \mathbf{C}\backslash\{0\} \tag{26.2}$$

的单参数解析解族.

我们不妨设 $|c_m| \le 1$, $m = 2, 3, \cdots$. 事实上，因为 $F(z)$ 的幂级数展开式在 $|z| < r_1$ 上收敛，必存在 $p > 0$ 使 $|c_m| \le p^{m-1}$, $m = 2, 3, \cdots$. 如下引入新函数

$$\psi(z) = p\phi\left(\frac{z}{p}\right), \quad G(z) = pF\left(\frac{z}{p}\right). \tag{26.3}$$

由 (26.1) 得到与之同类型的方程

$$\lambda_1\psi(\alpha z) + \lambda_2\psi(\alpha^2 z) + \cdots + \lambda_n\psi(\alpha^n z) = G(\psi(z)). \tag{26.4}$$

由 $F(z)$ 的幂级数展开式得到 $G(z)$ 的展开式

$$G(z) = sz + \sum_{m=2}^{\infty} \frac{c_m}{p^{m-1}} z^m = \sum_{m=1}^{\infty} d_m z^m,$$

其中 $|d_m| = |c_m/p^{m-1}| \le 1$, $m = 2, 3, \cdots$.

设 (26.1) 的形式幂级数解为 $\phi(z) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} b_m z^m$. 将它和 $F(z)$ 的展开式代入方程 (26.1) 得

$$\sum_{m=1}^{\infty}(\lambda_1\alpha^m + \lambda_2\alpha^{2m} + \cdots + \lambda_n\alpha^{nm})z^m = \sum_{m=1}^{\infty}\Big(\sum_A c_t b_{l_1} b_{l_2} \cdots b_{l_t}\Big) z^m,$$

其中简记 $c_1 = s$, 求和条件 $A: t = 2, 3, \cdots, m,\ l_1 + \cdots + l_t = m$. 比较系数，得

$$\begin{cases} (\lambda_1 z + \lambda_2 z^2 + \cdots + \lambda_n z^n - s)b_1 = 0, \\ (\lambda_1\alpha^m + \lambda_2\alpha^{2m} + \cdots + \lambda_n\alpha^{nm} - s)b_m = \sum\limits_A c_t b_{l_1} b_{l_2} \cdots b_{l_t}, \end{cases} \tag{26.5}$$

其中 $m = 2, 3, \cdots$. 由定理条件对 α 的规定，可任取 $b_1 = \eta \in \mathbf{C}\backslash\{0\}$. 其余系数 $b_2, b_3, \cdots$ 由 (26.5) 递推地唯一确定. 从而形式地获得方程 (26.1) 的单参数级数解族 (26.2). 往证该级数的收敛性.

为构造优级数，我们考虑满足关系

$$w(z)=|\eta|z+\frac{1}{\beta}\frac{(w(z))^m}{1-w(z)}=|\eta|z+\frac{1}{\beta}\sum_{m=2}^{\infty}(w(z))^m \tag{26.6}$$

的函数 $w(z)$. 从上述的二次方程可解出

$$W(z)=\frac{1}{2(1+\beta)}\{\beta(1+|\eta|z)-\sqrt{\beta^2-(4+2\beta)\beta|\eta|z+\beta^2|\eta|^2z^2}\},$$

它显然在 $|z|<r_2:=\frac{1}{\beta|\eta|}(2+\beta-2\sqrt{1+\beta})$ 上解析. 令 $W(z)$ 的级数展开式为

$$W(z)=\sum_{m=1}^{\infty}u_m z^m, \tag{26.7}$$

它必在同样的邻域内收敛. 将它代入 (26.6) 的级数式，并比较系数，得

$$\begin{cases} u_1=|\eta|, \\ u_m=\dfrac{1}{\beta}\sum\limits_{A}u_{l_1}u_{l_2}\cdots u_{l_t}. \qquad m=2,3,\cdots \end{cases} \tag{26.8}$$

现在我们来证明 (26.7) 是 (26.2) 的优级数，即

$$|b_m|\le u_m. \qquad m=1,2,\cdots \tag{26.9}$$

事实上， $m=1$ 时显然成立. 假定这个不等式对 $1,2,\cdots,m-1$ 都成立，注意到 $|c_m|\le 1$, $m=2,3,\cdots$, 那么

$$\begin{aligned}\beta|b_m| &\le |\lambda_1\alpha^m+\lambda_2\alpha^{2m}+\cdots+\lambda_n\alpha^{nm}-s||b_m| \\ &\le \sum_A |c_t||b_{l_1}||b_{l_2}|\cdots|b_{l_t}| \\ &\le \sum_A u_{l_1}u_{l_2}\cdots u_{l_t}=\beta u_m,\end{aligned}$$

即 (26.9) 得证. 这表明 (26.2) 的形式级数解 $\phi(z)$ 在 $z=0$ 附近，即在 $|z|\le r_3:=\min\{r_1,r_2\}$ 上解析.

最后，由于上述取得的 ϕ 满足 $\phi'(0)=\eta\neq 0$ ，所以存在常数 $r\in(0,r_3]$, 使得当 $|z|<r$ 时 $\phi^{-1}(z)$ 存在且解析. 令

$$f(z)=\phi(\alpha\phi^{-1}(z)), \tag{26.10}$$

则对 $|z|<r$ 有

$$\begin{aligned}&\lambda_1 f(z)+\lambda_2 f^2(z)+\cdots+\lambda_n f^n(z)\\&=\lambda_1\phi(\alpha\phi^{-1}(z))+\lambda_2\phi(\alpha^2\phi^{-1}(z))+\cdots+\lambda_n\phi(\alpha^n\phi^{-1}(z))\\&=F(z),\end{aligned}$$

即上面构造的 $f(z)$ 是迭代方程 (CITn) 在 $|z|<r$ 的解析解. □

这个定理的证明采用了 优级数法，它回答了解的局部解析性问题. 关于这一问题，在 [55] 还有另一些结果. 作为特例，我们可以推论迭代根的解析性.

推论 1 设 $F(z)$ 在 $z=0$ 的某邻域上解析, $F(0)=0$, $F'(0)=s$, $|s|>\frac{1+\sqrt{5}}{2}$. 那么对任意自然数 n ，函数 $F(z)$ 在 $z=0$ 的某邻域上存在解析的 n 次迭代根 $f(z)$.

事实上，类似地构造满足 $\phi(sz)=F(\phi(z))$ 的形如 (26.2) 的级数解 $\phi(z)$. 令 $f(z)=\phi(\alpha\phi^{-1}(z))$ ，其中 $\alpha^n=s$. 显然对 $\forall m\geq 2$ 有 $|\alpha^{nm}-s|=|s^m-s|\geq(|s|^m-|s|)\geq(|s|^2-|s|)\geq 1$. 取 $\beta=1$, $\lambda_i=0$, $i=1,2,\cdots,n-1$, $\lambda_n=1$. 由定理 1 可得推论结论.

[例] 考虑方程 $f^2(z)-f(z)=z$. 易见 $F(z)=z$ 在整个复平面上解析，且 $F(0)=0$, $F'(0)=1$. 显然 $\alpha==\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是方程 $z^2-z-1=0$ 的根，且 $\forall m\geq 2$,

$$\begin{aligned}&\left|\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{2m}-\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m}-1\right|\\&\qquad\geq\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m}\left|\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{m}-1\right|-1\geq 1.\end{aligned}$$

取 $\beta=1$ ，则方程满足定理 1 条件，方程有形如

$$f(z)=\phi\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\phi^{-1}(z)\right)$$

的解析解，其中 $\phi(z)$ 由

$$\phi\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^2 z\right)-\phi\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}z\right)=\phi(z)$$

决定. 为给出 $f(z)$ 的表达式，将 $\phi(z)$ 的形式级数代入上式，并比较系数，可得到 $\phi(z)=\eta z$ ，其中 $\eta\neq 0$ 可以任取. 从而得到

$$f(z)=\eta\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot\frac{z}{\eta}\right)=\frac{1+\sqrt{5}}{2}z.$$

§ 27 解的对称性

对称性通常用集合对线性变换的不变性来描述. 为了描述映射的对称性，哥拉比茨基 (M.Golubitsky) 等人 [22],[23] 使用了等变性的概念. 设 Γ 线性空间 X 上的一些线性变换组成的紧 Lie 群，如果映射 $f:X\to X$ 满足

$$f(\gamma x)=\gamma f(x),\qquad \forall x\in X,\ \ \gamma\in\Gamma$$

则称 f 是 **Γ-等变的** . 显然恒同映射 id 总是 Γ- 等变的. 特别是，迭代保持等变性，即如果 $f:X\to X$ 是 Γ- 等变的，则迭代 f^i 也是 Γ-等变的. 考虑 $X=\mathbf{R}^N$ ，点 $x\in\mathbf{R}^N$ 的 **迷向子群**(isotropy group) Σ_x 定义为 Γ 中保持 $\gamma x=x$ 的 γ 组成的子群. 由连续性 Σ_x 是 Γ 的闭子群. 关于群论的知识可参见 Fuchs[20],Hall[25] 和 Kuroš[34] . 由于现在研究的是一维迭代，因此我们首先要了解一维对称性.

我们将研究实直线 $\mathbf{R}$ 上平移变换之外的可逆线性变换. 显然它们都形如 $x \mapsto \gamma x$, 其中 $0 \neq \gamma \in \mathbf{R}$, 因此这类变换构成的 Lie 群同构于 $\mathrm{GL}(\mathbf{R})$ 的一个子群. $\mathrm{GL}(\mathbf{R})$ 是非零实数的乘法拓扑群, 因此可简记为 $\mathbf{R}_0 = \mathbf{R}\backslash 0$, 它是一个交换群. 设子群 $\Gamma \subset \mathrm{GL}(\mathbf{R})$ 的生成元集合为 $V \subset \mathbf{R}_0$, 称 V 为 Γ 的 **生成集**, 并记 $\Gamma = \langle V \rangle$. 如果 V 是有限集, 则称 Γ 是 **有限生成** 的. 如果 V 没有真子集能生成 Γ, 则 V 称为是 **极小** 的. 不难证明: 有限生成的群必有极小生成集; 如果 V 极小, 则 $1 \notin V$, 并且对 $\gamma \in V$ 必定 $\gamma^i \notin V$, $i \neq 1$. 以下引理是显然的.

引理 1 设 V 是子群 $\Gamma \subset \mathrm{GL}(\mathbf{R})$ 的生成集, 那么 (i) 如果 $V = [1/c, c]$, 其中 $c > 1$, 则 $\Gamma = (0, \infty)$; (ii) 如果 V 包含一个元素 γ, 使得 $|\gamma| \neq 1$, 则 Γ 是无穷的集合; (iii) 如果 $V = \{-1\}$, 则 $\Gamma = \mathbf{Z}_2 = \{-1, 1\}$, 它是 $\mathrm{GL}(\mathbf{R})$ 中唯一的紧子群.

令 $I = [-1, 1]$. 对子群 $\Gamma \subset \mathrm{GL}(\mathbf{R})$, 记 $\mathcal{F}_\Gamma(I)$ 为 $C(I)$ 中对 $\forall \gamma \in \Gamma$, $x, \gamma x \in I$ 满足 $f(\gamma x) = \gamma f(x)$ 的函数 f 的集合.

引理 2 设 Γ 有限生成, 那么 $\mathcal{F}_\Gamma(I)$ 是 $C(I)$ 的闭凸子集.

证明 对 $\forall \gamma \in \Gamma$, 令

$$\mathcal{F}_\gamma(I) = \{f \in C(I) | f(\gamma x) = \gamma f(x), \forall x \in I \cap \gamma^{-1} I\}. \tag{27.1}$$

往下只需证明

(i) $\mathcal{F}_\gamma(I)$ 闭凸;

(ii) $\mathcal{F}_{\gamma^{-1}}(I) = \mathcal{F}_\gamma(I)$;

(iii) $\mathcal{F}_\gamma(I) \cap \mathcal{F}_\sigma(I) \subset \mathcal{F}_{\gamma\sigma}(I)$;

(iv) $\mathcal{F}_\Gamma(I) = \bigcap_{i=1}^{k} \mathcal{F}_{\gamma_i}(I)$, 其中 $V = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_k\}$ 是 Γ 的有限生成集.

令 $f, g \in \mathcal{F}_\gamma(I)$ 且 $a, b \in \mathbf{R}$, 考虑 $h = af + bg$. 显然 $h \in C(I)$, 而且对 $\forall x \in I \cap \gamma^{-1} I$, 我们有 $f(\gamma x) = \gamma f(x)$, 且 $g(\gamma x) = \gamma g(x)$. 由

h 的定义, $h(\gamma x) = \gamma h(x)$, 从而 $h \in \mathcal{F}_\gamma(I)$, 凸性得证. $\mathcal{F}_\gamma(I)$ 显然是闭的. (i) 得证. 注意到 $\gamma \neq 0$, 采用变量替换 $y = \gamma x$, 容易证得 (ii) .

往下在 $|\gamma\sigma| \leq 1$ 情形下证明 (iii) . 因为 $|\gamma\sigma| > 1$ 的情形可以同样的方式讨论 $\mathcal{F}_{\sigma^{-1}\gamma^{-1}}(I)$, 并用 (ii) 的结果来证明. 在 $|\gamma\sigma| \leq 1$ 情形, 考虑 $f \in \mathcal{F}_\gamma(I) \cap \mathcal{F}_\sigma(I)$, 显然

$$
\begin{aligned}
f(\gamma x) &= \gamma f(x), & \forall x \in I \cap \gamma^{-1}(I)\\
f(\sigma x) &= \sigma f(x). & \forall x \in I \cap \sigma^{-1}(I)
\end{aligned}
$$

任取 $y \in I \cap (\gamma\sigma)^{-1}(I)$, 自然 $y \in I$ 且 $(\gamma\sigma)y \in I$. 由于 $|\gamma\sigma| \leq 1$ 且 Γ 可交换, 不妨设 $|\sigma| \leq 1$. 令 $x = \sigma y$, 易见 $x, \sigma x, y, \sigma y \in I$, 因而

$$f(\gamma\sigma y) = \gamma f(x) = \gamma f(\sigma y) = \gamma\sigma f(y),$$

即 $f \in \mathcal{F}_{\gamma\sigma}(I)$.

最后, 由 $\mathcal{F}_\Gamma(I)$ 和 $\mathcal{F}_\gamma(I)$ 的定义, $\mathcal{F}_\Gamma(I) = \bigcap_{\gamma\in\Gamma} \mathcal{F}_\gamma(I)$. 由 (ii) 和 (iii) 的结论, 它显然等于 $\bigcap_{\gamma\in V} \mathcal{F}_\gamma(I)$, 从而 (iv) 得证. 由于 V 有限, $\mathcal{F}_\Gamma(I)$ 必为闭凸子集. □

同第 4 章一样, 对区间 $J = [a, b]$ 和常数 $M \geq 1 \geq m \geq 0$, 记

$$
\begin{aligned}
X(J; m, M) = \{ \quad & f \in C(I) : f(a) = a, f(b) = b,\\
& m(y-x) \leq f(y) - f(x) \leq M(y-x), \forall y > x \in J\},
\end{aligned}
$$

并关于区间 $I = [-1, 1]$ 记

$$\mathcal{F}_\Gamma(I; m, M) = X(I; m, M) \cap \mathcal{F}_\Gamma(I).$$

引理 3 如果子群 $\Gamma \subset \mathrm{GL}(\mathbf{R})$ 有限生成, 那么 $\mathcal{F}_\Gamma(I; m, M)$ 是 $C(I)$ 的紧凸子集.

证明 在 §21 的引理 1 中已证明 $X(I;m,M)$ 是 $C(I)$ 的紧凸子集. 由引理 2, $\mathcal{F}_\Gamma(I;m,M)$ 作为 $X(I;m,M)$ 的闭子集, 必也是紧集. □

在引理 3 条件下, $\mathcal{F}_\Gamma(I;m,M)$ 是非空的, 例如它包含恒同映射. 我们将通过实例来说明 $\mathcal{F}_\Gamma(I;m,M)$ 是怎样刻划对称性的.

[例 1] 考虑 $\Gamma = \mathbf{Z}_2$, 一个 Γ- 等变函数 f 正是一个奇函数, 即满足 $f(-x) = -f(x)$. $\mathcal{F}_{\mathbf{Z}_2}(I;m,M)$ 中的函数可以从第 4 章在 $[0,1]$ 上讨论的函数按奇函数的规则延拓到 $I=[-1,1]$ 而得到.

[例 2] 考虑 $\Gamma = \langle V\rangle$,其中 $V=\{\frac{1}{2}\}$. 对任意 $f\in\mathcal{F}_\Gamma(I;m,M)$, 易见 $f(\frac{1}{2}x)=\frac{1}{2}f(x)$, $\forall x\in I$. 注意到 $f(1)=1$, $f(-1)=-1$, 因而

$$f\Big(\pm\frac{1}{2^k}x\Big)=\pm\frac{1}{2^k}f(x). \qquad k=0,1,2,\cdots$$

只要对上式在 $x=\pm1$ 赋值, 我们就可以绘出 f 的草图. 由连续性, 必定 $f(0)=0$. 另外, $-1\notin\Gamma$, 所以 Γ 在 $J=[0,1]$ 和在 $J'=[-1,0]$ 上的作用是互不相干的. 因此, 在研究这类函数时只需讨论 $\mathcal{F}_\Gamma(J;m,M)$.

有了对一维对称性的理解和描述, 我们可以得到下列结论. 我们仍考虑迭代方程 (ITn) , 其中系数满足假设 (H) , 即 $\lambda_1>0,\lambda_i\geq 0$, $i=2,\cdots,n$, 且 $\sum\limits_{i=1}^{n}\lambda_i=1$.

定理 1 假设 Γ 是作用在 $\mathbf{R}$ 上的一个有限生成的 Lie 群, $M>1$. 如果函数 $F\in\mathcal{F}_\Gamma(I;0,M)$, 那么迭代方程 (ITn) 存在一个解 $f\in\mathcal{F}_\Gamma(I;0,\frac{M}{\lambda_1})$. 换言之, 方程 (ITn) 存在与已知函数 F 具有同样对称性的连续解.

证明 定义映射 $L:\mathcal{F}_\Gamma(I;0,\frac{M}{\lambda_1})\to C(I)$,

$$Lf(x)=\lambda_1x+\lambda_2f(x)+\cdots+\lambda_nf^{n-1}(x), \qquad \forall\in I$$

其中 $f\in\mathcal{F}_\Gamma(I;0,\frac{M}{\lambda_1})$. 显然 Lf 和 f 一样都是 Γ- 等变的. 作 §21 定

理 1 类似的估计，我们可以证明 $L:\mathcal{F}_\Gamma(I;0,\frac{M}{\lambda_1})\to\mathcal{F}_\Gamma(I;\lambda_1,M_0)$，其中 $M_0:=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\Big(\dfrac{M}{\lambda_1}\Big)^{i-1}$．由 § 21 引理 2, L 是连续的.

再对 $M\geq 1\geq m>0$ 定义 $\mathcal{F}_\Gamma(I;m,M)$ 上的 **反演** $\mathcal{I}$， $\mathcal{I}f=f^{-1}$．由 § 21 引理 2, $\mathcal{I}:\mathcal{F}_\Gamma(I;m,M)\to\mathcal{F}_\Gamma(I;M^{-1},m^{-1})$ 而且 $\mathcal{I}$ 是李普希茨的．由 § 21 引理 3, $\mathcal{I}\circ L:\mathcal{F}_\Gamma(I;0,\frac{M}{\lambda_1})\to\mathcal{F}_\Gamma(I;M_0^{-1},\lambda_1^{-1})$ 且连续.

进而定义映射 $\mathcal{K}:\mathcal{F}_\Gamma(I;M_0^{-1},\lambda_1^{-1})\to C(I)$， $\mathcal{K}h=h\circ F$．由 § 21 引理 3， $\mathcal{K}:\mathcal{F}_\Gamma(I;M_0^{-1},\lambda_1^{-1})\to\mathcal{F}_\Gamma(I;0,\frac{M}{\lambda_1})$ 且连续．最后，令 $\mathcal{T}=\mathcal{K}\circ\mathcal{I}\circ L$．显然 $\mathcal{T}:\mathcal{F}_\Gamma(I;0,\frac{M}{\lambda_1})\to\mathcal{F}_\Gamma(I;0,\frac{M}{\lambda_1})$ 且连续．由于群 Γ 是有限生成的，引理 3 表明 $\mathcal{F}_\Gamma(I;0,\frac{M}{\lambda_1})$ 是巴拿赫空间 $C(I)$ 的一个紧凸子集．因此可用肖德尔不动点定理给出方程 (ITn) 在 $\mathcal{F}_\Gamma(I;0,\frac{M}{\lambda_1})$ 上解的存在性. □

类似地，我们还可以讨论这类对称解的唯一性和稳定性.

§ 28 特 征 理 论

方程 (ITn) 的一个特殊形式是

$$f^n(x)=a_{n-1}f^{n-1}(x)+a_{n-2}f^{n-2}(x)+\cdots+a_0x.\quad x\in\mathbf{R}\qquad\text{(SITn)}$$

许多函数方程都可化成 (SITn)．例如方程 $f(2x-f(x)/m)=mx$ 就可以化成 $h^2(x)=2h(x)-x$，只要令 $g(x)=f(x)/m$, $h(x)=g^{-1}(x)$．方程 (SITn) 还与差分方程

$$x_{k+n+1}=a_nx_{k+n}+\cdots+a_1x_{k+1}+a_0x$$

有关，而且还是迭代根问题最直接的推广．因此方程 (SITn) 十分重要，并被广泛地研究．如 Nabeya[45]、 Matkowski 和张伟年 [42]

研究过 $n=2$ 的情形, Mukherjea 和 Ratti[44] 研究过一般 n 次的情形. 通过研究它的特征根, 可以掌握方程的很多性质.

我们形式地考虑方程 (SITn) 的一个线性解

$$f(x)=rx, \qquad x\in\mathbf{R} \quad (28.1)$$

其中 $r\in\mathbf{C}$ 待定. 代入方程, 可得到

$$r^n-a_{n-1}r^{n-1}-\cdots-a_1r-a_0=0. \quad (28.2)$$

我们称 (28.2) 为方程 (SITn) 的 **特征方程** , 其左边的多项式称为 **特征多项式** 并记为 $P_n(r)$, 其根为 **特征根** , 对应的解 (28.1) 称为 **特征解** . 下面的结果刻划了特征根与迭代方程解的关系.

定理 1 假设多项式

$$Q(r)=r^k-b_{k-1}r^{k-1}-\cdots-b_1r-b_0,$$
$$P(r)=r^n-a_{n-1}r^{n-1}-\cdots-a_1r-a_0,$$

$r\in\mathbf{C}$, $k\le n$, 满足 $Q|P$, 即 Q 整除 P . 如果函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是迭代方程

$$f^k(x)=b_{k-1}f^{k-1}(x)+b_{k-2}f^{k-2}(x)+\cdots+b_0x \qquad x\in\mathbf{R} \quad (28.3)$$

的解, 那么 f 也必为迭代方程

$$f^n(x)=a_{n-1}f^{n-1}(x)+a_{n-2}f^{n-2}(x)+\cdots+a_0x \qquad x\in\mathbf{R} \quad (28.4)$$

的解.

根据多项式根与系数的关系, 方程 (SITn) 可等价地写成

$$f^n(x)-\Big(\sum_{i=1}^n r_i\Big)f^{n-1}(x)+\Big(\sum_{i<j}^n r_ir_j\Big)f^{n-2}(x)+\cdots$$
$$+(-1)^n r_1r_2\cdots r_nx=0, \quad (28.5)$$

其中 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 是多项式 $P_n(r)$ 的 n 个复根. 简记 (28.5) 左端的函数为 $F_n(r_1, r_2, \cdots, r_n)f(x)$, 并简称为方程 (28.5) 的 n-**形式**，它被 n 个复数 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 唯一地确定.

引理 1 对固定的复数 $r_1, r_2, \cdots, r_n$ 和 r_{n+1}, 若 $F_n(r_1, r_2, \cdots, r_n)f \equiv 0$, 那么 $F_{n+1}(r_1, \cdots, r_n, r_{n+1})f \equiv 0$.

证明 $F_n(r_1, r_2, \cdots, r_n)f \equiv 0$ 表明 f 满足方程 (28.5)，故

$$\begin{aligned} f^{n+1}(x) &= f^n(f(x)) \\ &= \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) f^n(x) - \left(\sum_{i<j}^{n} r_i r_j\right) f^{n-1}(x) + \cdots \\ &\quad + (-1)^{n+1} r_1 r_2 \cdots r_n f(x). \qquad x \in \mathbf{R} \qquad (28.6) \end{aligned}$$

这样，对所有 $x \in \mathbf{R}$, 如上定义的 $(n+1)$ - 形式满足

$$\begin{aligned} &F_{n+1}(r_1, \cdots, r_n, r_{n+1})f(x) \\ =& f^{n+1}(x) - \left(\sum_{i=1}^{n+1} r_i\right) f^n(x) + \left(\sum_{i<j}^{n+1} r_i r_j\right) f^{n-1}(x) \\ &+ \cdots + (-1)^{n+1} r_1 r_2 \cdots r_{n+1} x \\ =& \left(\sum_{i=1}^{n} r_i - \sum_{i=1}^{n+1} r_i\right) f^n(x) - \left(\sum_{i<j}^{n} r_i r_j - \sum_{i<j}^{n+1} r_i r_j\right) f^{n-1}(x) \\ &+ \cdots + (-1)^{n+1} r_1 r_2 \cdots r_{n+1} x \\ =& -r_{n+1} f^n(x) + r_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) f^{n-1}(x) \\ &- r_{n+1}\left(\sum_{i<j}^{n} r_i r_j\right) f^{n-2}(x) + \cdots + (-1)^{n+1} r_1 r_2 \cdots r_{n+1} x \\ =& -r_{n+1}\left(\left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right) f^{n-1}(x) - \left(\sum_{i<j}^{n} r_i r_j\right) f^{n-2}(x)\right. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\cdots+(-1)^{n+1}r_1r_2\cdots r_nx\Big)\\
&+r_{n+1}\left(\sum_{i=1}^{n}r_i\right)f^{n-1}(x)-r_{n+1}\left(\sum_{i<j}^{n}r_ir_j\right)f^{n-2}(x)\\
&+\cdots+r_{n+1}(-1)^{n+1}r_1r_2\cdots r_nx\\
=&0.
\end{aligned}
$$

□

定理 1 的证明 令 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 为 P 的 n 个复根. 由于 $Q|P$，不妨设 $r_1,\cdots,r_k$, $k\le n$, 是 Q 的 k 个根. 如果函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是迭代方程 (28.3) 的解，则

$$F_k(r_1,r_2,\cdots,r_k)f=0.$$

根据引理 1, f 也满足

$$F_{k+1}(r_1,\cdots,r_k,r_{k+1})f=0.$$

从而归纳地证明了 $F_n(r_1,r_2,\cdots,r_n)f=0$, 即 f 满足方程 (28.4). □

注记 1 如果 $Q|P$ 而 $Q\neq P$, n 次方程 (28.4) 确有可能存在不满足 k 次方程 (28.3) 的解. 事实上，如果 P 的所有根 $r_1,r_2,\cdots,r_n$ 都是实根且 $r_1,r_2,\cdots,r_k$ 是 Q 的根，$k<n$，那么 $f(x)=r_ix$, $x\in\mathbf{R}$, $i=k+1,\cdots,n$ 都是满足 (28.4) 但都不是 (28.3) 的解.

注记 2 如果 r_0 是 P 的复根，分别记 $\mathrm{Re}\,r_0$, $|r_0|$ 为 r_0 的实部和模，则二次实迭代方程 $f^2(x)=2\mathrm{Re}\,r_0f(x)-|r_0|^2x$ 的一切解都满足 (28.4)．事实上，此时 P 必有另一个共轭复根 $\bar{r}_0$，从定理 1 可得到这个结论.

另一方面，不难验证：如果方程 (SITn) 中 $a_0\neq 0$，方程的解 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 一定是一对一的；如果 $a_0\neq 0$ 且 f 连续，则 f 严格单调且满射. 显然，当 $a_0\neq 0$ 时由多项式根与系数的关系知，方程

(SITn) 无零特征根. 因而方程的等价形式 (28.5) 也等价于

$$f^{-n}-\left(\sum_{i=1}^{n}s_i\right)f^{-(n-1)}+\left(\sum_{i<j}^{n}s_is_j\right)f^{-(n-2)}$$
$$+\cdots+(-1)^n s_1s_2\cdots s_n f^0=0, \tag{28.7}$$

其中 f^{-k} 记 f^{-1} 的第 k 次迭代, $s_i=r_i^{-1}$, $i=1,2,\cdots,n$. 方程 (28.7) 称为 (28.5) 的 **对偶方程** .

令 $F_{n-1}(r_1,\cdots,\check{r_k},\cdots,r_n)f(x)$ 表示由方程 (28.5) 的 $n-1$ 个特征根 $r_1,\cdots,r_{k-1},r_{k+1},\cdots,r_n$ 确定的 $(n-1)$- 形式. Matkowski 和张伟年在 [43] 进一步证明了下列结果.

定理 2 设特征方程 (28.2) 有 n 个不同的实根 $r_1<r_2<\cdots<r_n$ 且 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是迭代方程 (SITn) 的一个解, 那么对任意整数 $m\geq 0$,

$$f^{n+m}=\frac{A_{11}}{\Delta}r_1^{m+1}g_1+\frac{A_{21}}{\Delta}r_2^{m+1}g_2+\cdots+\frac{A_{n1}}{\Delta}r_n^{m+1}g_n, \tag{28.8}$$

其中 $g_i:=F_{n-1}(r_1,\cdots,\check{r_i},\cdots,r_n)f$, $i=1,2,\cdots,n$, 分别记 Δ 和 A_{i1}, $i=1,2,\cdots,n$, 为矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 1 & -\sum\limits_{i\neq 1}r_i & \sum\limits_{i<j,\neq 1}r_ir_j & \cdots & (-1)^{n-1}r_2r_3\cdots r_n \\ 1 & -\sum\limits_{i\neq 2}r_i & \sum\limits_{i<j,\neq 2}r_ir_j & \cdots & (-1)^{n-1}r_1r_3\cdots r_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & -\sum\limits_{i\neq n}r_i & \sum\limits_{i<j,\neq n}r_ir_j & \cdots & (-1)^{n-1}r_1r_2\cdots r_{n-1} \end{pmatrix}$$

的行列式和代数余子式.

定理 3 设方程 (SITn) 中 $a_0\neq 0$ 且满足定理 2 的条件. 那么对任意整数 $m\geq 0$,

$$f^{-(n+m)}=\frac{\tilde{A}_{11}}{\tilde{\Delta}}s_1^{m+1}\tilde{g}_1+\frac{\tilde{A}_{21}}{\tilde{\Delta}}s_2^{m+1}\tilde{g}_2+\cdots+\frac{\tilde{A}_{n1}}{\tilde{\Delta}}s_n^{m+1}\tilde{g}_n, \tag{28.9}$$

其中 $\tilde{g}_i, \tilde{\Delta}$ 和 $\tilde{A}_{i1}$ 的定义类似于定理 2 中的 g_i, Δ, A_{i1}, $i=1,2,\cdots,n$; 只是 r_j 换成 s_j, $j=1,2,\cdots,n$; f 换成 f^{-1} .

上述定理给出了方程 (SITn) 解的一般迭代表达式，利用它们可以证明方程解的许多性质. 往下假设 $a_0 \neq 0$ 且方程 (SITn) 有 n 个不同的实特征根 $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$, 而且方程 (SITn) 有连续解 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

推论 1 1° 如果 $-1 < r_1 < r_n < 1$ ，那么 f^k 当 $k \to +\infty$ 时趋于 0； 2° 如果 $r_1 > 1$ 或 $r_n < -1$ ，那么 f^k 当 $k \to -\infty$ 时趋于 0； 3° 两种情形下， 0 都是 f 的唯一不动点.

证明 1° 的结果和 2° 的结果分别由 (28.8) 在 $m \to +\infty$ 下求极限和 (28.9) 在 $m \to -\infty$ 下求极限直接得到. 往下证明 3° . 用反证法. 假设 $f(x_0) = x_0$, $x_0 \neq 0$. 由 (28.5) ,

$$x_0 - \left(\sum_{i=1}^{n} r_i\right)x_0 + \left(\sum_{i<j}^{n} r_i r_j\right)x_0 + \cdots + (-1)^n r_1 r_2 \cdots r_n x_0 = 0,$$

即 $\prod_{i=1}^{n}(1-r_i) = 0$, 从而至少有一个 r_i 等于 1, $i=1,2,\cdots,n$. 这与结论 1° 和 2° 中的假设矛盾，因此 0 是 f 在 $\mathbf{R}$ 唯一可能的不动点.

进而，由于 $a_0 \neq 0$ 且 f 连续，在引进对偶方程 (28.7) 时已经指出 f 严格单调且满射. 如果 f 递减， f 一定有不动点，如上所说，它必为 0 . 另一情形是 f 递增，此时如果 $f(0) \neq 0$ ，我们将推出矛盾. 在此不妨只讨论 $f(0) > 0$ 的情形，即 $f^{-1}(0) < 0$ ，显然当 $k \to +\infty$ 时

$$0 < f(0) < f^2(0) < \cdots < f^k(0) \not\to 0,$$
$$0 > f^{-1}(0) > f^{-2}(0) > \cdots > f^{-k}(0) \not\to 0.$$

从而得到的结论分别与 1° 和 2° 的结果矛盾. 因此 $f(0) = 0$. □

推论 2 如果 $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 严格递增，则有如下结论:

1° 若 $-1 < r_1 < \cdots < r_{n-1} < 1 < r_n$（或 $r_1 < -1 < r_2 < \cdots < r_n < 1$），且若 $f(x) < x, \forall x > 0$ 并且 $f(x) > x, \forall x < 0$，那么 f 满足 $F_{n-1}(r_1, \cdots, r_{n-1})f = 0$（或 $F_{n-1}(r_2, \cdots, r_n)f = 0$）.

2° 若 $< r_1 < \cdots < r_{n-1} < -1 < r_n$（或 $r_1 < 1 < r_2 < \cdots < r_n$），且若 $f(x) > x, \forall x > 0$ 并且 $f(x) < x, \forall x < 0$，那么 f 满足 $F_{n-1}(r_1^{-1}, \cdots, r_{n-1}^{-1})f^{-1} = 0$（或 $F_{n-1}(r_2^{-1}, \cdots, r_n^{-1})f^{-1} = 0$）.

证明 类似于上一推论，我们可证明在两种情形下 0 都是 f 在 $\mathbf{R}$ 的唯一不动点. 在 1° 的条件下我们只讨论 $x > 0$, $-1 < r_1 < \cdots < r_{n-1} < 1 < r_n$ 的情形，其余情形可同理推论. 由于 f 递增，当 $k \to +\infty$ 时，$x > f(x) > f^2(x) > \cdots > f^k(x) \to 0$. 根据定理 2，由于其迭代公式中 $|r_i|^k \to 0$, $i = 1, 2, \cdots, n-1$ 而 $|r_n|^k \not\to 0$，所以 g_n 必为 0，即证明了 $F_{n-1}(r_1, \cdots, r_{n-1})f = 0$. 对 2°，我们可从定理 3 的 (28.9) 用类似的方法得出结论，只是推导中要用 f^{-1} 和 r_i^{-1} 替换 f 和 r_i, $i = 1, 2, \cdots, n$. □

§ 29 二次迭代的讨论

在建立特征理论的基础上，本节我们来具体讨论方程 (SITn) 当 $n = 2$ 的情形. 这种情形相对简单，而已获得的结论相对丰富. 考虑迭代方程

$$f^2(x) = a_1 f(x) + a_0 x, \qquad a_0, a_1 \in \mathbf{R},\ a_0 \neq 0,\ x \in \mathbf{R} \quad \text{(SIT2)}$$

按上节的理论，我们可以考虑其特征根 r_1, $r_2 \in \mathbf{C}$, 并分不同情况讨论.

（A）当没有实根的情形

定理 1 如果没有实特征根，那么方程 (SIT2) 在 $\mathbf{R}$ 上没有连续解.

证明 作反证法假设：方程 (SIT2) 有连续解 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$, 且有一对共轭复特征根

$$r_1=a-ib=S\exp(-i\theta),\quad r_2=a+ib=S\exp(i\theta),$$

其中 $a,b\in\mathbf{R}$, $b>0$, $S>0$, $\theta\in(0,\pi)$. 由连续性及方程系数 $a_0\neq 0$ 易推出 f 的单调性，从而 f^2 严格递增. 进而可以证明方程 (SIT2) 的解若有非零不动点则必有一特征根等于 1 ，因此对 $x\neq 0$ 有 $f(x)\neq x$, 这表明对固定的 $x\neq 0$, 序列 $\{f^{n+1}(x)-f^n(x)\}$ 各项的符号是一样的，当 f 递增 (递减) 时符号为负 (正). 另一面，从 §28 的定理 2 当 $n=2$ 的情形知

$$\begin{aligned}f^n(x)&=\frac{r_2^n}{r_2-r_1}(f(x)-r_1x)+\frac{r_1^n}{r_2-r_1}(r_2x-f(x))\\&=b^{-1}S^n\sin\theta\cdot f(x)-b^{-1}S^{n+1}\sin(n-1)\theta\cdot x,\end{aligned}$$

从而

$$f^{n+1}(x)-f^n(x)=r_2^nU(x)+r_1^nV(x),$$

其中

$$U(x)=\frac{r_2-1}{r_2-r_1}(f(x)-r_1x),\ V(x)=\frac{r_1-1}{r_2-r_1}(r_2x-f(x)).$$

显然 $\bar{U}(x)=V(x)$ ，故对任意固定的 $x\neq 0$, 我们可以令

$$U(x)=T\exp(it),\quad V(x)=T\exp(-it),$$

其中 $T\geq 0$, $t\in[0,\pi)$. 所以,

$$\begin{aligned}f^{n+1}(x)-f^n(x)&=S^nT\{\exp(i(n\theta+t))+\exp(-i(n\theta+t))\}\\&=2S^nT\cos(n\theta+t).\end{aligned}$$

由于 $S>0$ ，当 $T>0$ 时从上式可推出与序列 $\{f^{n+1}(x)-f^n(x)\}$ 各项同号相矛盾的结论；当 $T=0$ 时 $U(x)=V(x)=0$ ，从而

$f(x)=r_1x=r_2x$, $\forall x\neq 0$, 即 $r_1=r_2$, 这显然不可能. 因此定理得证. □

(B) 当 $r_1r_2>0$ 的非临界情形

显然, 如果方程有实特征根, 则两个特征根都是实的. 按映射动力系统理论, r_1, r_2 是非临界实特征根意味着 $|r_1|\neq 1$ 且 $|r_2|\neq 1$, 此时对应的特征解在不动点处具有双曲性. 在当前情形下, 我们可分作六种情况来讨论:

(1) $1<r_1<r_2$,　　(2) $0<r_1<1<r_2$,

(3) $0<r_1<r_2<1$,　　(4) $r_1<r_2<-1$,

(5) $r_1<-1<r_2<0$,　　(6) $-1<r_1<r_2<0$.

定理 2 在 $1<r_1<r_2$ 的情况下, 如果 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是方程 (SIT2) 的连续解, 则 $f(0)=0$, f 严格递增且满足"双边" Lipschitz 条件 $r_1\leq (f(x)-f(y))/(x-y)\leq r_2$, $\forall x\neq y,\in\mathbf{R}$. 反过来, 方程 (SIT2) 存在连续解.

文献 [42] 证明了这一结论, 并指出: 对 $\forall x_0>0$, $x_1>0$, $r_1x_0\leq x_1\leq r_2x_0$ 和使

$$f_0(x_0)=x_1,\quad f_0(x_1)=(r_1+r_2)x_1-r_1r_2x_0,$$
$$r_1\leq (f_0(x)-f_0(y))/(x-y)\leq r_2,\qquad \forall x\neq y,\in[x_0,x_1]$$

成立的任意初选函数 $f_0:[x_0,x_1]\to\mathbf{R}$, 存在唯一连续函数 $p:(0,\infty)\to(0,\infty)$, 满足方程 (SIT2) 且 $p|[x_0,x_1]=f_0$. 进而, 对任何两个像 f_0 一样的初选函数 f_{01}, f_{02} , 用其相应的 p_1, p_2 定义函数

$$f(x):=\begin{cases} p_1(x), & x>0,\\ 0, & x=0,\\ -p_2(-x), & x<0,\end{cases}$$

它是方程 (SIT2) 的连续解, 而且 (SIT2) 的所有连续解都是这样的形式. 通过考虑方程的对偶方程, 从这一结论可直接推出关于 $0<r_1<r_2<1$ 情况的结论.

定理 3 在 $0<r_1<1<r_2$ 的情况下，如果 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是方程 (SIT2) 的连续解，则 f 严格递增；此外，若 f 还有不动点，则当 $x\geq 0$ 时 $f(x)=r_ix$ ，而当 $x<0$ 时 $f(x)=r_jx$ ，这里 i,j 为 1 或者 2．反过来，方程 (SIT2) 存在连续解．

定理 4 在 $r_1<-1<r_2<0$ 和 $r_1<r_2<-1$ 的情况下，方程 (SIT2) 的每个连续解 f 严格递减，0 是其唯一的不动点，而且 $r_1\leq (f(x)-f(y))/(x-y)\leq r_2,\ \forall x\neq y,\in\mathbf{R}$.

从这一结论可直接推出关于 $-1<r_1<r_2<0$ 情况的结论．

（C）当 $r_1r_2<0$ 的非临界情形

定理 5 在 $r_1<0,\ r_1\neq -1,\ r_2>0,\ r_2\neq 1$ 且 $r_2\neq -r_1$ 的情形，如果 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是方程 (SIT2) 的连续解，则 $f(x)=r_1x$ 或 $f(x)=r_2x,\forall x\in\mathbf{R}$.

（D）当 $|r_1|=|r_2|$ 的情形

定理 6 在 $r_1=r_2=r\neq 0$ 的情况下，如果 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是方程 (SIT2) 的连续解，那么

(i) 若 $r\neq 1$, 则 $f(x)=rx$;

(ii) 若 $r=1$, 则存在 $c\in\mathbf{R}$, 使 $f(x)=x+c$.

在 $r_1=-r,\ r_2=r,\ r>0$ 的情况下，方程 (SIT2) 即迭代根问题 $f^2(x)=r^2x$ ，它既有递增的连续解，又有递减的连续解．

（E）临界情形

在临界情形下，至少有一个特征根的绝对值等于 1．

定理 7 在 $r_2=1,\ 0<r_1\neq 1$ 的情况下，如果函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是方程 (SIT2) 的连续解，则它必为下列形式之一：

$$f(x)=x,\qquad\qquad x\in\mathbf{R};$$

$$f(x)=\begin{cases} x, & x\leq a, \\ r_1x+(1-r_1)a, & x>a; \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} r_1x+(1-r_1)a, & x\leq a, \\ x, & x<a; \end{cases}$$

$$f(x)=\begin{cases} r_1x+(1-r_1)a, & x<a, \\ x, & a\leq x\leq b, \\ r_1x+(1-r_1)b, & x>b, \end{cases}$$

其中 $a,b\in\mathbf{R}$, $a<b$. 反过来，所有上述的函数都是 (SIT2) 的连续解.

定理 8 在 $r_2=1$, $-1\neq r_1<0$ 的情况下，如果 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是方程 (SIT2) 的连续解，则 $f(x)=x$, $x\in\mathbf{R}$, 或对某个常数 $c\in\mathbf{R}$ 有 $f(x)=r_1x+c$, $x\in\mathbf{R}$.

定理 9 在 $r_1=-1$, $0<r_2\neq1$ 的情况下，如果 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是方程 (SIT2) 的连续解，则 $f(x)=-x$, $x\in\mathbf{R}$ 或 $f(x)=r_2x$, $x\in\mathbf{R}$.

定理 10 在 $r_1=-1$, $-1\neq r_2<0$ 的情况下，方程 (SIT2) 有连续解 $f(x)=-x$, $x\in\mathbf{R}$ 和 $f(x)=r_2x$, $x\in\mathbf{R}$.

以上结论的证明，详见 [42] . 有关结果还可参阅文献 [40] .

第 7 章

若干具体问题

从迭代根问题开始，我们已经讨论了多项式型迭代方程及有关推广形式. 从已有的方法和结论来看，我们的研究工作仍是在许多特定的限制条件下进行的，如总是假设函数的单调性甚至递增性、总是对方程系数作特殊要求. 一旦放开这些条件，许多已有的结论将仅仅变成猜想或公开问题. 由此可见，从迭代运算产生的问题的确非常复杂.

一般的迭代函数方程问题是一个广泛的研究主题. 由于理论和应用的背景不同，我们所遇到的函数方程形式各异，问题的提法多样，相应的结果也是十分丰富的. 事实上，在第 3 章讨论迭代根局部光滑性的时候，我们同时研究了施罗德方程

$$h(F(x)) = ch(x),$$

§13 的引理 1 给出了其解的存在性结果. 在第 4 章研究嵌入流时，我们建立了区间上保向自同胚与 $x+1$ 的拓扑共轭关系，在 §16 的定理 1 的证明过程中实际上讨论了阿贝尔方程

$$h(f(x)) = h(x) + b.$$

这些函数方程都不同于上述迭代方程的形式. 除此之外还有许多特殊类型的函数方程，其研究结果可参见 [32]、[33]、[19] 和 [2]~[5] 等文献.

本章将在前面论述迭代方程理论的基础上讨论几个具体形式的单变元实迭代函数方程，如巴贝奇方程、费根鲍姆方程等等. 这

些特殊形式的方程在动力系统理论中扮演着很重要的角色. 作为应用, 我们将讨论一个泛函微分方程的不变曲线问题. 这个问题源于对泛函微分方程混沌的研究. 相应于迭代方程, 我们还可以研究迭代不等式问题. 此外, 我们还要介绍一些实际的函数方程模型, 从中可以看到迭代函数方程理论与现实生活的紧密关系和广阔的应用前景.

§ 30 初等求解

并非所有的函数方程问题都像前面讨论多项式型迭代方程 (ITn) 那么困难. 有的函数方程形式上看似复杂, 而实际解决起来却十分简单. 例如, 我们可以用完全初等的方法来讨论下列函数方程

$$\phi\left(\frac{x-1}{x+1}\right)+\phi\left(-\frac{1}{x}\right)+\phi\left(\frac{1+x}{1-x}\right)=\sin x. \qquad (30.1)$$

设 $f(x)=\frac{x-1}{x+1}$, 则

$$f^2(x)=-\frac{1}{x}, \quad f^3(x)=\frac{1+x}{1-x}, \quad f^4(x)=x,$$

从而方程可改写为

$$\phi(f(x))+\phi(f^2(x))+\phi(f^3(x))=\sin x.$$

把其中的 x 换成 $f(x)$, 得

$$\phi(f^2(x))+\phi(f^3(x))+\phi(x)=\sin f(x).$$

再把其中的 x 换成 $f(x)$, 得

$$\phi(f^3(x))+\phi(x)+\phi(f(x))=\sin f^2(x),$$

$$\phi(x)+\phi(f(x))+\phi(f^2(x))=\sin f^3(x).$$

由上述四个式子可解出

$$3\phi(x)=\sin f(x)+\sin f^2(x)+\sin f^3(x)-2\sin x,$$

即

$$\phi(x)=\frac{1}{3}\left(\sin\frac{x-1}{x+1}-\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1+x}{1-x}-2\sin x\right).$$

更一般地说，对函数方程

$$\phi(f(x))+\phi(f^2(x))+\cdots+\phi(f^n(x))=K(x), \tag{30.2}$$

我们可以用同样的方法给出结论：如果 $f^{n+1}(x)=x$，那么

$$\phi(x)=\frac{1}{n}(K(f(x))+K(f^2(x))+\cdots+K(f^n(x))-(n-1)K(x)).$$

进而，如果上述方程各项系数不为 1，即

$$a_1\phi(f(x))+a_2\phi(f^2(x))+\cdots+a_n\phi(f^n(x))=K(x), \tag{30.3}$$

而且 $f^{n+1}(x)\equiv x$，那么类似地可以得到一个线性方程组

$$\boldsymbol{Au}=\boldsymbol{b},$$

其中 $\boldsymbol{u}=(\phi(f(x)),a_2\phi(f^2(x)),\cdots,a_n\phi(f^n(x)))$，$\boldsymbol{b}=(K(f(x))-a_n\phi(x),K(f^2(x))-a_{n-1}\phi(x),\cdots,K(f^n(x))-a_1\phi(x))$，而且矩阵为

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & a_2 & \cdots & a_{n-1}\\ a_n & 0 & a_1 & \cdots & a_{n-2}\\ a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & a_{n-3}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_2 & a_3 & a_4 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

如果 $\boldsymbol{A}$ 满秩，则线性方程组有唯一解 $\boldsymbol{u}$．将它代回到原方程，就可得到 (30.3) 唯一的解 ϕ．

§ 31 巴贝奇方程

求解单位根，即寻求满足 $x^n=1$ 的 $x\in\mathbf{C}$ ，这在代数上是很重要的．如果我们对迭代半群的单位元 (恒同映射) id 考虑关于迭代的单位根问题，即求解函数方程

$$f^n(x)=x, \tag{31.1}$$

同样会发现许多有趣的事实．通常，这个方程被称为巴贝奇方程．

巴贝奇方程的问题实质上是单调递增函数的迭代根问题．第 3 章的基本结果适用于这个方程．然而，由于这个方程的特殊性，我们总希望对此知道得更多一些．

当 $n=2$ 时满足巴贝奇方程 (31.1) 的函数 f 称为**对合函数** (involution)，例如 $\frac{1}{x}$, $a-x$ 以及所有图象 $y=f(x)$ 关于直线 $y=x$ 对称的函数 $f(x)$, 都是对合函数．

定理 1 实连续 n 次单位迭代根 f 必为如下形式：$f(x)\equiv x$，或者当 n 为偶数时 f 为一严格递减的对合函数．

证明 首先证明 f 严格单调．如果不然，由连续性我们必可找到 $x_1,x_2\in\mathbf{R}$, $x_1<x_2$, 使得 $f(x_1)=f(x_2)$．由 (31.1)，

$$x_1=f^n(x_1)=f^{n-1}(f(x_1))=f^{n-1}(f(x_2))=f^n(x_2)=x_2,$$

这与 x_1,x_2 的选择矛盾．

当 f 严格递增时，$f(x)<f(y)$, $\forall x,y\in\mathbf{R}$, $x<y$，我们断言 $f(x)\equiv x$．否则，不妨设对某个 $x_0\in\mathbf{R}$, $f(x_0)>x_0$．显然，

$$x_0=f^n(x_0)>f^{n-1}(x_0)>\cdots>f(x_0)>x_0,$$

从而导致矛盾．

当 f 严格递减时， $f(x)>f(y),\quad \forall x,y\in\mathbf{R},\ x<y$. 由于 $f^n(x)=x$ 必递增，而严格递减 (增) 函数与严格递增函数的复合必严格递减 (增)，且两个严格递减函数的复合必严格递增，因此 n 必为偶数. 令 $n=2m,\ m\in\mathbf{Z}^+,\ \phi(x)=f^2(x)$ ，那么 ϕ 严格递增且满足 $\phi^m(x)=x$. 按刚才关于递增情形的讨论知 $\phi(x)\equiv x$ ，因此 $f^2(x)\equiv x$ ，即 f 严格递减时是一个对合函数. □

上述证明表明，实连续 n 次单位迭代根 f 一定是可逆的. 特别是，连续的对合函数 f 满足 $f^{-1}=f$. 不难看出，连续对合函数 $f:I=[a,b]\to I$ 的一般构造如下：

$$f(x)=\begin{cases}\alpha(x), & \text{当 } x\in I^-\text{时};\\ \alpha^{-1}(x), & \text{当 } x\in I^+\text{时},\end{cases}$$

其中 $I^-=[a,\xi],\ I^+=[\xi,b]$ ， $\xi\in(a,b)$ 为某个固定的点， α 为 I^- 与 I^+ 之间的某个反向同胚.

定理 1 中，连续性条件是重要的. 我们可以验证，尽管非连续的函数 $f(x)=\frac{2x-7}{x+1}$ 不是区间上的恒同映射，但它也满足 $f^3(x)\equiv x$.

如果 f 满足 $f^n=\mathrm{id}$ 而 $f^k\neq\mathrm{id},\ k=1,2,\cdots,n-1$ ，则称 f 为 n 次 **单位迭代原根** . 在实连续的情形下，根据定理 1, 不存在 3 次及以上的单位迭代原根. 然而，如果允许考虑不连续的情形，我们可以得到更丰富的结果.

定理 2　有理分式形式

$$f(x)=\frac{ax+b}{cx+d}\qquad ad-bc\neq 0\quad (31.2)$$

的 n 次单位迭代根具有这样的形式 $f=A\circ\hat{f}\circ A^{-1}$, 其中 $A:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$ 为相似变换， $A(x)=\alpha x+\beta,\ \alpha,\beta\in\mathbf{C},\ \alpha\neq 0$ ， $\hat{f}$ 为下列表达式之一：

(i) $\hat{f}(x)=\varepsilon x,\ x\in\mathbf{C}$ ，其中 ε 为任一 n 次单位根；

(ii) $\hat{f}(x)=\delta/x,\ x\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$ ，这类解仅当 n 为偶数时出现；

(iii) $\hat{f}(x)=\gamma-\gamma^2\dfrac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\dfrac{1}{x}$, $x\in \mathbf{C}\backslash\{0\}$，其中 $\gamma\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$, $\varepsilon\notin\{-1,1\}$ 是某个 n 次单位根.

证明 容易证明, 对任意形如 (31.2) 的有理分式 f，都存在一个相似变换 $A:\mathbf{C}\to\mathbf{C}$, 使 $\hat{f}=A^{-1}\circ f\circ A$ 具有下列形式之一：

(I) $\hat{f}(x)=\gamma x$, $x\in\mathbf{C}$,

(II) $\hat{f}(x)=x+\delta$, $x\in\mathbf{C}$,

(III) $\hat{f}(x)=\gamma+\delta\dfrac{1}{x}$, $x\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$,

其中 $\gamma\in\mathbf{C}$, $\delta\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$. 显然， f 满足方程 (31.1) 当且仅当 $\hat{f}$ 满足方程 (31.1) .

在情形 (I)， $x=\hat{f}^n(x)=\gamma^n x$ ，必然 γ 是 n 次单位根. 从而 i 得证.

在情形 (II) ， $x=\hat{f}^n(x)=x+n\delta$ ，必然 $\delta=0$. 显然 $f=A\circ A^{-1}=\mathrm{id}$ 是一个平凡的单位根.

在情形 (III)，用归纳法可得

$$\hat{f}^n(x)=\frac{k_n x+k_{n-1}\delta}{k_{n-1}x+k_{n-2}\delta},\qquad n\in\mathbf{Z}^+$$

其中系数 k_n 定义为

$$k_{-1}=0,\ k_0=1,\ k_n=\gamma k_{n-1}+\delta k_{n-2}.\qquad n\in\mathbf{Z}^+$$

再用归纳法，可证

$$k_n=\begin{cases}2^{-(n+1)}\varDelta^{-1}((\gamma+\varDelta)^{n+1}-(\gamma-\varDelta)^{n+1}), & \varDelta\neq 0,\\ (n+1)(\gamma/2)^n, & \varDelta=0,\end{cases}\qquad(31.3)$$

其中 $\varDelta=\sqrt{\gamma^2+4\delta}$. 由 $\hat{f}^n(x)=x$ 得

$$k_{n-1}(x^2-\gamma x-\delta)=0,\qquad \forall x\in\mathbf{C}$$

故 $k_{n-1}=0$. 显然 (31.3) 的第二种情形不会发生，否则必 $\gamma=0$ ，但 $\delta\neq 0$ ，即 $\Delta=\sqrt{\gamma^2+4\delta}\neq 0$ ，这与该情形的先决条件矛盾. 因此，从 (31.3) 的第一个表达式知 $(\gamma+\Delta)^n-(\gamma-\Delta)^n=0$ ，即存在 n 次单位根 ε, 使得

$$\gamma+\Delta=\varepsilon(\gamma-\Delta).$$

如果 $\varepsilon=1$ 必 $\Delta=0$ ，这与 (31.3) 第一情形的条件矛盾. 如果 $\varepsilon=-1$ 必 $\gamma=0$ ，从而

$$\hat{h}(x)=\delta\frac{1}{x}, \qquad x\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$$

它给出一个对合函数解，从而 ii 得证. 如果 ε 是非实数的 n 次单位根，则 $\Delta=\gamma(\varepsilon-1)/(\varepsilon+1)$ ，由 Δ 定义可算出 $\delta=-\varepsilon\gamma^2/(1+\varepsilon)^2$ ，从而

$$\hat{f}(x)=\gamma-\gamma^2\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\frac{1}{x}, \qquad x\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$$

iii 得证. □

从这个定理，我们甚至可以给出实的 n 次单位迭代原根. 考虑定理的 iii 所给出的函数 $\hat{f}$ ，其中非实数 ε 取为 n 次单位原根. 显然这样给出的函数 f 一定是 n 次单位迭代原根. 进而，由 $|\varepsilon|=1$ 知 $1/\varepsilon=\bar{\varepsilon}$ ，故

$$\frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}=\varepsilon+2+1/\varepsilon=\varepsilon+2+\bar{\varepsilon}$$

必为实数. 这样，这个单位迭代原根 f 可取成实的.

§ 32　费根鲍姆方程

费根鲍姆通过研究单峰函数族的迭代，发现了倍周期分岔现象，并得出了一个普适常数 $\delta=4.669201609\cdots$. 为了说明这一普

适性，费根鲍姆提出了一些涉及函数空间的基本假设，其中之一是假设迭代函数方程

$$\begin{cases} g(x) = -\dfrac{1}{\lambda}g(g(-\lambda x)), & \lambda \in (0,1); \\ g(0) = 1,\ -1 \le g(x) \le 1, & \forall x \in [-1,1] \end{cases} \tag{32.1}$$

有单峰连续偶函数解. 这个方程通常叫做费根鲍姆函数方程 [35] .

函数 $f : [a,b] \to [a,b]$ 称为 **单峰函数**(或 **单谷函数**) ，若 f 有唯一的极大 (或极小) 值点 $c \in [a,b]$, 且 f 在 (a,c) 和 (c,b) 上严格单调.

研究费根鲍姆函数方程的一个有效途径，是转而讨论另一个相关形式的方程

$$\begin{cases} \phi(x) = \dfrac{1}{\lambda}\phi(\phi(\lambda x)), & \\ g(0) = 1, \quad 0 \le g(x) \le 1, & \forall x \in [0,1] \end{cases} \tag{32.2}$$

其中 $\lambda \in (0,1)$ 待定. 这方程也称为第二类费根鲍姆函数方程 [62] . 方程 (32.2) 与方程 (32.1) 之间有下列关系:

(i) 若偶函数 $g(x)$, $x \in [-1,1]$, 是方程 (32.1) 的单峰连续解，则 $\phi(x) = |g(x)|$, $x \in [0,1]$, 是方程 (32.2) 的单谷连续解.

(ii) 若 $\phi(x)$, $x \in [0,1]$, 是方程 (32.2) 的单谷连续解，则 $\phi(x)$ 在某点 $\alpha \in (0,1)$ 处达到最小值 $\phi(\alpha) = 0$ 而且函数 $g(x) = \mathrm{sgn}(\alpha - |x|)\phi(|x|)$, $x \in [-1,1]$, 是方程 (32.1) 的单峰连续偶函数解.

事实上，直接计算可验证 (i) ，其中注意到 $g(g(x)) = g(|g(x)|)$ ，因为 g 是偶函数. 设 $\phi(x)$ 在 $\alpha \in (0,1)$ 处达到最小值，由 (32.2) 得

$$\phi(\alpha) = \frac{1}{\lambda}\phi(\phi(\lambda\alpha)) \ge \frac{1}{\lambda}\phi(\alpha), \qquad 0 < \lambda < 1$$

故 $\phi(\alpha) = 0$. 进而， $\lambda < \alpha$ ，否则取 $x_0 = \lambda^{-1}\alpha$, 我们有 $\phi(x_0) = \frac{1}{\lambda}\phi(\phi(\alpha)) = \frac{1}{\lambda}\phi(0) = \frac{1}{\lambda} > 1$ ，这与方程 (32.2) 的要求矛盾. 利用这

个不等式不难验证 (ii)．这样，问题化成了研究第二类费根鲍姆方程 (32.2) 的单谷连续解.

定理 1　对任给的 λ 和 c，$0<\lambda<c<1$，以及严格递减连续函数 $\phi_0:[0,c]\to[0,1]$，如果

(i)　$\phi_0(0)=1,\ \phi_0(\lambda)=c,\ \phi_0(c)=\lambda^2$，

(ii)　$\psi(x):=\phi_0(\lambda x)$ 在 $[0,1]$ 有唯一周期点 α，

则方程 (32.2) 存在唯一单谷连续解 $\phi(x)$，满足 $\phi(x)=\phi_0(x),\ x\in[0,c]$，而且 $\phi(\alpha)=0$ 是其最小值．反之，若 ϕ_0 是方程 (32.2) 单谷连续解在 $[0,\phi_0(\lambda)]$ 上的限制，则条件 i 、 ii 必然满足.

证明　由于 $\psi(x)$ 在 $[0,1]$ 严格递减，必 $\psi^2(x)$ 严格递增，而且 $\psi^2(0)=\phi_0(\lambda)=c>0,\ \psi^2(1)=\phi-0(\lambda c)<1$．注意到 $\psi^{2k+1}(0)=\psi^{2k}(1)$，故序列 $\{\psi^{2k}(0)\}$ 递增而 $\{\psi^{2k+1}(0)\}$ 递减．由条件 ii 及 §3

同理，在 (32.3) 中取 $x=\psi^{k+2}(0)$, 可得

$$\phi_k(\psi^{k+2}(0))=\lambda^k\phi(\psi^2(0))\lambda^k\phi(c)=\lambda^{k+2}.$$

从而

$$\phi_k(\psi^{k+2}(0))=\phi_{k+2}(\psi^{k+2}(0))=\lambda^{k+2},$$

即 ϕ_k 和 ϕ_{k+2} 在 I_k 和 I_{k+2} 的公共端点上取值一致，因此证明了 ϕ 的连续性. 单谷性从 ϕ_k 的单调性容易看出. 最后，由 (32.3) 可见 ϕ 满足方程 (32.2) .

往下再证明唯一性. 设方程 (32.2) 有两个单谷连续解 ϕ_1, ϕ_2, 满足

$$\phi_1(x)=\phi_2(x)=\phi_0(x). \qquad \forall x\in[0,c] \quad (32.4)$$

由单谷性及其最小值取值于 0, 知 ϕ_i 在 0 到最小值点的区间内部有不动点 β_i, $i=1,2$. 在方程 (32.2) 中令 $x=0$, 可见 $\phi_i(1)=\lambda<1$, 因此这个不动点是唯一的. 进而,

$$\beta_i>\lambda. \qquad i=1,2$$

否则 $\beta_i/\lambda\in[0,1]$ ，从方程 (32.2) 得 $\phi_i(\beta_i/\lambda)=\beta_i/\lambda$ ，而 $\lambda<1$ ，即 $\beta_i/\lambda\neq\beta_i$ ，这与不动点唯一性矛盾. 因此，利用 ϕ_i 的递减性知

$$a=\phi_i(\lambda)>\phi_i(\beta_i)=\beta_i>\lambda,$$

再根据 (32.4) 知道

$$\phi_1(x)\equiv\phi_2(x)=\phi_0(x). \qquad x\in[0,\lambda]$$

按如上定义的 $\psi(x)$ 和 I_k, $k=0,1,\cdots$, 我们往证命题：在任一 I_k 上有 $\phi_1(x)=\phi_2(x)$. 事实上，当 $k=0$ 时 (32.4) 保证了命题成立. 如果命题对给定的 k 成立了，由于 $\psi^{-1}(I_{k+1})=I_k$ ，故由方程 (32.2) 得

$$\phi_1(x)=\lambda\phi_1(\psi^{-1}(x))=\lambda\phi_2(\psi^{-1}(x))=\phi_2(x). \qquad x\in I_{k+1}$$

这就归纳地证明了这一命题. 进而, 在 $x=\alpha$ 处显然有 $\phi_1(\alpha)=\phi_2(\alpha)=0$, 而

$$[0,1]=\{\alpha\}\cup(\bigcup_{k=0}^{\infty}I_k),$$

因此 $\phi_1(x)=\phi_2(x),\ \forall x\in[0,1]$.

此外, 关于定理后一部分"反之 $\cdots\cdots$ "的结果, 是一件平凡的事. □

定理 1 的证明过程给出了构造第二类费根鲍姆方程单谷连续解的方法. 适当增加条件, 我们还可以得到方程 (32.2) 的可微解结论.

定理 2 对任给的 λ 和 c , $0<\lambda<c<1$, 以及函数 $\phi_0:[0,c]\to[0,1]$, 满足

(i) $\phi_0(0)=1,\ \phi_0(\lambda)=c,\ \phi_0(c)=\lambda^2$,

(ii) $\psi(x):=\phi_0(\lambda x)$ 在 $[0,1]$ 有唯一周期点 α ,

(iii) $\phi_0(x)=g(x^\tau),\ \tau>0,\ g(x)$ 在 $[0,c]$ 连续可微, $g'(x)<0,$

(iv) $\phi_0'(\lambda)\cdot\phi_0'(c)=\lambda^{1-\tau},\ |\phi_0'(\lambda\alpha)|>1,$

则方程 (32.2) 由 ϕ_0 出发按定理 1 证明过程所构造的解 $\phi(x)$ 在 $(0,1]$ 上有连续导数, 并且 $\phi'(x)$ 在 $(0,\alpha)$ 上为负, 而在 $(\alpha,1]$ 上为正. 进而, 若 $\tau\geq1$, 则可保证该解在 $[0,1]$ 上的连续可微性.

证明 证明的思想是采用定理 1 证明过程中关于 ϕ_k 和 ϕ 的构造来验证: 在 I_k 和 I_{k+2} 的公共边界点 $\psi^{k+2}(0)$ 处, ϕ_k 和 ϕ_{k+2} 有相同的导数.

当 $k=0$ 时, 从 (32.3) 易见 $\lambda\phi_0(x)=\phi_1(\psi(x))$, 故

$$\lambda^2\phi_0(x)=\phi_2(\psi^2(x)).\qquad x\in I_0=[0,c]$$

求导, 并利用 $\psi(x)=\phi_0(\lambda x),\ \phi_0(x)=g(x^\tau)$, 得

$$x^{\tau-1}g'(x^\tau)=\phi_2'(\psi^2(x))\cdot\phi_0'(\lambda\psi(x))\cdot(\lambda x)^{\tau-1}g'((\lambda x)^\tau).$$

令 $x \to 0$, 得

$$1 = \phi_2'(\psi^2(0)) \cdot \phi_0'(\lambda) \cdot \lambda^{\tau-1}.$$

由条件 iv 及 $\psi^2(0) = c$, 得

$$\phi_0'(\psi^2(0)) = \phi_2'(\psi^2(0)).$$

即 $k = 0$ 的情形得证. 假设对某个固定的 k 已有

$$\phi_k'(\psi^{k+2}(0)) = \phi_{k+2}'(\psi^{k+2}(0)), \tag{32.5}$$

往证此式换为 $k+1$ 的情形仍成立. 从 (32.3) 得

$$\begin{cases} \lambda\phi_k(x) = \phi_{k+1}(\psi(x)), & x \in I_k, \\ \lambda\phi_{k+2}(x) = \phi_{k+3}(\psi(x)), & x \in I_{k+2}. \end{cases}$$

求导后取 $x = \psi^{k+2}(0)$, 得

$$\begin{cases} \lambda\phi_k'(\psi^{k+2}(0)) = \phi_{k+1}'(\psi^{k+3}(0)) \cdot \psi'(\psi^{k+2}(0)), \\ \lambda\phi_{k+2}'(\psi^{k+2}(0)) = \phi_{k+3}'(\psi^{k+3}(0)) \cdot \psi'(\psi^{k+2}(0)). \end{cases}$$

注意到 $g'(x) < 0$ 意味着 $\psi'(\psi^{k+2}(0)) \neq 0$，由归纳法假设，得

$$\phi_{k+1}'(\psi^{k+3}(0)) = \phi_{k+3}'(\psi^{k+3}(0)),$$

从而，由 ϕ 的构造及 $[0,1] = \{\alpha\} \cup (\bigcup_{k=0}^{\infty} I_k)$，我们已经归纳地证明了 ϕ 在 $(0,\alpha)$ 和 $(\alpha,1]$ 上连续可微.

最后，我们补充证明 $\phi'(x)$ 在 $x = \alpha$ 处也连续可微. 由 (32.3) 得

$$\phi(\psi^k(x)) = \lambda^k \phi_0(x).$$

求导，得

$$\phi'(\psi^k(x)) \cdot \psi'(x)\psi'(\psi(x)) \cdots \psi'(\psi^{k-1}(x)) = \lambda^k \phi_0'(x).$$

注意到 $0<\lambda<1$ 意味着 $\lim_{k\to\infty}\lambda^k=0$，并且 $\lim_{k\to\infty}\psi^k(x)=\alpha$．而 $\psi'(x)=\lambda\phi_0'(\lambda x)$，当 $k\to\infty$ 时 $\phi'(\psi^k(x))$ 以 $\psi'(\alpha)=\lambda\phi_0'(\lambda\alpha)$ 为极限，由条件 iv, 其绝对值大于 λ．故

$$\lim_{k\to\infty}\phi'(\psi^k(0))=0. \qquad \forall x\in[0,1]$$

这蕴含 $\phi'(x)$ 在 $x=\alpha$ 连续且 $\phi'(\alpha)=0$．

定理其余结论的证明都是平凡的. □

用类似方法，经过稍多的计算并对 $\phi_0(x)$ 添加一些必要的限制，我们还可以得到第二类费根鲍姆方程 (32.2) 的 C^k 解. 值得一提的是，如此从 ϕ_0 出发所构造的 C^2 解 $\phi(x)$ 如果在极值点 $x=\alpha$ 处还满足 $\phi''(\alpha)\neq 0$，那么 ϕ 将由 ϕ_0 决定的一个极限函数确定. 事实上，不妨设 $|\phi''(\alpha)|=L>0$，并记 $\psi(x)=\phi_0(\lambda x)$．从方程 (32.2) 得 $\phi(\psi^n(x))=\lambda^n\phi(x)$，从而

$$\begin{aligned}\phi(x)&=\frac{\phi(\psi^n(x))}{\lambda^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\phi(\psi^n(x))}{|\psi^n(x)-\alpha|^2}\cdot\frac{|\psi^n(x)-\alpha|^2}{\lambda^n}\\&=\lim_{x\to\alpha}\frac{\phi(x)}{|x-\alpha|^2}\lim_{n\to\infty}\frac{|\psi^n(x)-\alpha|^2}{\lambda^n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{L|\psi^n(x)-\alpha|^2}{\lambda^n}.\end{aligned}$$

§ 33 不变曲线问题

有许多实际问题会涉及到二阶微分方程 [13]~[64]

$$x''(t)+g(x([t]))=0. \qquad t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R} \quad \text{(EPCA)}$$

它是一个具有逐段常数的变时滞泛函微分方程, 其中 $[t]$ 是 t 的整数部分，$g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 连续 (或逐段连续)．函数 $x(t)$ 称为方程 (EPCA)

在区间 $I\subset\mathbf{R}$ 上的一个解, 如果 (i) $x(t)$ 连续可微, (ii) $x''(t)$ 在 I 上有定义, 且 (iii) $x(t)$ 在每个子区间 $[n,n+1)\subset I$ 上满足 (EPCA). 人们关心其解的周期性、振动性甚至更复杂的混沌性质.

众所周知, 对 (EPCA) 稍作改动得到的二阶常微分方程

$$\frac{d^2}{dt^2}x(t)+g(x(t))=0,\qquad t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}$$

描述了一个哈密顿向量场. 它呈现仅由闭轨和鞍环组成的简单动力学性质, 并无混沌现象. 然而, 对 (EPCA) 类的泛函微分方程, 哪怕是一阶微分的, 情况就大不一样. 考虑一阶方程

$$x'(t)+g(x([t]))=0.\qquad t\in\mathbf{R},\ x\in\mathbf{R}\quad(33.1)$$

令 $x_n:=x(n)=x([t]),\ t\in[n,n+1)$. 在 $[n,n+1)$ 上对 (33.1) 积分, 得

$$x(t)=-g(x_n)(t-n)+x_n.\qquad t\in[n,n+1)$$

令 $t\to(n+1)^-$ 可见, 当 $g(x)=x^2+(1-\mu)x$ 且 $\mu>3.75$ 时, 方程 (33.1) 蕴含了一个出现李 - 约克混沌的罗吉斯蒂映射 [58]

$$x_{n+1}=\mu x_n(1-x_n).$$

这就促使人们进一步探讨二阶方程 (EPCA) 的非线性性质, 至少要弄清其蕴含的一维非线性动力学性质.

C.T.Ng 和张伟年 [46] 用迭代方程的方法讨论了其非线性不变曲线问题. 同样办法, 令

$$x_n:=x(n)=x([t]),\ x'_n:=x'(n)=x'([t]).\qquad t\in[n,n+1)$$

在 $[n,n+1)$ 上对 (EPCA) 两次积分, 得

$$\begin{cases}x'(t)=-g(x_n)(t-n)+x'_n,\\[2ex] x(t)=-\dfrac{1}{2}g(x_n)(t-n)^2+x'_n(t-n)+x_n.\end{cases}$$

其中 M,K,k 为非负常数， $k \geq K$ ， $I \subset \mathbf{R}$ 是闭区间.

定理 1 假设 $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ 是 C^1 光滑的， $g(x)=-2x+h(x)$, $\forall x\in\mathbf{R}$ ，其中 $h\in\Phi(M_1,K_1,k_1;I)$. 如果非负常数 M_1,K_1,k_1,M_2,K_2,k_2 满足

$$
\begin{aligned}
&2M_2^2+(M_1-6)M_2+M_1\leq 0,\\
&(2M_2^2+2M_2+M_1)K_2+M_2^2K_1\leq\max\{6K_2-K_1,\,6K_2-K_1\},\\
&\gamma=\frac{1}{6}\max\{2+2M_2+M_1+2M_2K_2+M_2K_1,\,4M_2+M_1\}<1.
\end{aligned}
$$

那么迭代方程 (FE) 有唯一解 $f\in\Phi(M_2,K_2,k_2;I)$.

不难看出 [46] ，当 $0<M_1<2$ 充分小时，不妨取 $K_2>K_1/6$, $k_2<k_1/6$ 和 $M_2=\frac{1}{4}(6-M_1-\sqrt{M_1^2-20M_1+36})$ ，定理条件中的不等式是可以同时成立的. 这个定理给出了迭代方程 (FE) 非线性解的存在性，因为当取 $k_1>0$ 时 k_2 就可以取成大于 0 的数.

证明 显然 $\Phi_1:=\Phi(M_1,K_1,k_1;I)$, $\Phi_2:=\Phi(M_2,K_2,k_2;I)$ 是巴拿赫空间 $C_b^1(\mathbf{R})$ 的闭子集. 考虑映射 $T:\Phi_2\to C_b^1(\mathbf{R})$ ，

$$
Tf(x)=\frac{1}{3}f(f(x))+\frac{1}{6}(h(f(x))+h(x)).\qquad f\in\Phi_2
$$

通过计算和估计，不难验证 T 把 Φ_2 映入自身. 进而对 $f_1,f_2\in\Phi_2$,

$$
\begin{aligned}
\|Tf_1-Tf_2\|&\leq\frac{1}{6}(2+2M_2+M_1)\|f_1-f_2\|,\\
\|(Tf_1)'-(Tf_2)'\|&\leq\frac{1}{6}(2M_2K_2+M_2K_1)\|f_1-f_2\|\\
&\quad+\frac{1}{6}(4M_2+M_1)\|f_1'-f_2'\|,
\end{aligned}
$$

从而 $\|Tf_1-Tf_2\|_1\leq\gamma\|f_1-f_2\|_1$. 由于 $\gamma<1$ ，故 T 是 Φ_2 上的

压缩，它在 Φ_2 内必有唯一的不动点 f，即 f 满足

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{3}f(f(x)) + \frac{1}{6}(h(f(x)) + h(x)) \\
&= \frac{1}{3}f(f(x)) + \frac{1}{6}(g(f(x)) + 2f(x) + g(x) + 2x).
\end{aligned}
$$

从中可看出，f 是方程 (FE) 的非线性 C^1 解. □

[例] 设 $M_1 = 1$, $K_1 = 6, k_1 = 5$, $M_2 = 1/4$, $K_2 = 102/70$, $k_2 = 1/6$. 令

$$
h(x) = \begin{cases}
-x - \dfrac{8}{5}, & x \in \Big(-\infty, \dfrac{4}{5}\Big), \\
\dfrac{5}{2}x^2 - 5x, & x \in I = \Big[\dfrac{4}{5}, \dfrac{6}{5}\Big], \\
x - \dfrac{18}{5}, & x \in \Big(\dfrac{6}{5}, +\infty\Big).
\end{cases}
$$

易见 $h \in \Phi(M_1, K_1, k_1; I)$. 由定理 1, 关于 $g(x) = -2x + h(x)$, 方程 (FE) 在 $\Phi(M_2, K_2, k_2; I)$ 有唯一解，该解一定是非线性的.

当函数 g 为线性函数时，易证方程 (FE) 也有线性解. 往下我们来具体讨论方程 (FE) 的二次多项式形式的非线性解.

定理 2 对给定的常数 a, b, c, $a \neq 0$，如果

$$
a\,c \geq -\frac{1}{4}, \quad 1 - \sqrt{1 + 4ac} \leq b \leq 1 + \sqrt{1 + 4ac}, \tag{33.5}
$$

那么必存在一个逐段连续函数 $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, 使得迭代方程 (FE) 有解 $f(x) = ax^2 + bx + c$.

证明 当 f 取上述二次多项式形式时，稍加整序，可见方程 (FE) 等价于

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2}g(f(x)) + a(f(x))^2 + (b-3)f(x) + \frac{1}{2}g(x) + ax^2 + (b-3)x \\
&\quad = -4x - 2c.
\end{aligned}
$$

取 $h(x)=-\frac{1}{4}(\frac{1}{2}g(x)+ax^2+(b-3)x+c)$，方程 (FE) 等价于

$$h(f(x))+h(x)=x. \tag{33.6}$$

由于 $f(x)=a(x+\frac{b}{2a})^2-\frac{\Delta}{4a}$, $\Delta=b^2-4ac$, 作变量替换 $x\mapsto a(x+\frac{b}{2a})$ 后令 $H(x)=ah(\frac{1}{a}(x+r)-\frac{\Delta}{4a})+\frac{b}{4}$, $p(x)=x^2-r$, $r=\frac{\Delta-2b}{4}$, 得

$$H(p(x))+H(x)=x. \tag{33.7}$$

显然，关于 a,b,c 的条件 (33.5) 相当于 $r\le 0$．往下只要证明函数方程 (33.7) 存在逐段连续的解 H 即可.

情形 (a): $r<-\frac{1}{4}$．这时 p 无不动点，且 $p(x)>x$, $x\in[0,+\infty)$．令 $\alpha_n=p^n(0)$, $n=0,1,2,\cdots$，其中 p^n 表示 p 的 n 次迭代. 由单调性，$0=\alpha_0<\alpha_1<\cdots<\alpha_n<\alpha_{n+1}<\cdots\to+\infty$, 且对每个 n, 映射 $p:[\alpha_n,\alpha_{n+1})\to[\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})$ 是保向同胚. 不妨任取在 $[0,-r)$ 上连续且满足 $\lim\limits_{x\to -r}H_0(x)=-H_0(0)$ 的函数 $H_0(x)$，并逐段定义

$$H(x)=\begin{cases} H_0(x), & x\in[0,-r)=[\alpha_0,\alpha_1),\\ p^{-1}(x)-H(p^{-1}(x)), & x\in[\alpha_n,\alpha_{n+1}),\quad n=1,2,\cdots \end{cases}$$

不难验证 H 在 $[0,+\infty)$ 上连续，且满足方程 (33.7)．进而，定义

$$H(x)=x-H(p(x)). \qquad x\in(-\infty,0)$$

显然，在 $(-\infty,0)$ 上 $p(x)=x^2-r>x^2+\frac{1}{4}>0$，从而 $\lim\limits_{x\to 0_-}H(x)=0-\lim\limits_{x\to 0_-}H(x^2-r)=-H(-r)=H_0(0)$，这样就把 $H(x)$ 连续地延拓到整个实数轴上了.

情形 (b): $r=-\frac{1}{4}$．这时 p 恰有一个不动点 $x_0=\frac{1}{2}$, 且 $p(x)\ge x$, $x\in[0,+\infty)$．同样办法，取

$$\alpha_0=0,\quad \alpha_n=p^n(0),\quad n=1,2,\cdots,$$
$$\beta_0=1,\quad \beta_n=p^n(1),\quad n=\pm1,\pm2,\cdots.$$

可以证明 $\lim_{n\to+\infty}\alpha_n=x_0$，$\lim_{n\to-\infty}\beta_n=x_0$，$\lim_{n\to+\infty}\beta_n\to+\infty$，且对每个 n 映射 p 是 $[\alpha_n,\alpha_{n+1})$ 与 $[\alpha_{n+1},\alpha_{n+2})$ 的保向同胚和 $[\beta_n,\beta_{n+1})$ 与 $[\beta_{n+1},\beta_{n+2})$ 的保向同胚．类似地，可以在 $[0,\frac{1}{2})$ 和 $(\frac{1}{2},+\infty)$ 上分别逐段定义连续函数 H，使之满足方程 (33.7)．进而，在 $(-\infty,0)$ 上令 $H(x)=x-H(p(x))$，把刚才在 $[0,+\infty)$ 定义的 $H(x)$ 延拓到整个实数轴上去．

关于情形 (c)，即 $-\frac{1}{4}<r<0$ 时，p 有两个不动点 $x_1=\frac{1-\sqrt{1+4r}}{2}$ 和 $x_2=\frac{1+\sqrt{1+4r}}{2}$，$0<x_1<\frac{1}{2}<x_2$，$p(x)>x$，$x\in[0,x_1)\cup(x_2,+\infty)$ 且 $p(x)<x$，$x\in(x_1,x_2)$．关于情形 (d)，即 $r=0$ 时，p 有两个不动点 $x_1=0$ 和 $x_2=1$，$p(x)>x$，$x\in(1,+\infty)$ 且 $p(x)<x$，$x\in(0,1)$．在这两种情形下我们用完全类似的方法讨论．详细过程可略去或参见 [46]．□

继续讨论 (33.7) 当 $r>0$ 的情形，我们有这样的结果．

定理 3　迭代方程 (FE) 不存在形如 $f(x)=ax^2+bx+c$ 的解，其中 a,b,c，$a\neq0$ 满足 $ac<-1$，或当 $ac\geq-1$ 时 $b<1-2\sqrt{1+ac}$，或 $b>1+2\sqrt{1+ac}$．

证明　由 r 的定义，定理关于 a,b,c 的条件相当于 $r>\frac{3}{4}$．我们只要证明方程 (33.7) 当 $r>\frac{3}{4}$ 时无解．从 $p(p(x))=x$，即 $x^4-2rx^2-x+r^2-r=(x^2-x-r)(x^2+x+1-r)=0$，可解出四个根，其中相应于因子 x^2-x-r 的两个正是 p 的两个不动点而相应于因子 $x^2+x+1-r$ 的两个根为

$$\xi=\frac{-1-\sqrt{-3+4r}}{2},\quad \eta=\frac{-1+\sqrt{-3+4r}}{2}.$$

当 $r>\frac{3}{4}$ 时，ξ 和 η 是两个不同的实数，它们构成一个 2- 周期轨道，即 $p(\xi)=\eta$，$p(\eta)=\xi$．如果方程 (33.7) 有解 $H(x)$，则 $H(\eta)+H(\xi)=\xi$ 且 $H(\xi)+H(\eta)=\eta$，这是两个相矛盾的等式．□

在 [46] 里还有关于 $0<r\leq\frac{3}{4}$ 情形的分析及其他结果的讨论．尤其在局部，我们还可以用不变流形理论 [81] 来分析．

§ 34 迭代不等式

继迭代根问题的深入，G.Brauer[11]、E.Turdza[59] 等人还研究了迭代不等式

$$\phi^n(x) \le F(x), \tag{34.1}$$

其中 ϕ^k 为 ϕ 的第 k 次迭代. 这个不等式的重要性不仅在于它从迭代根问题中派生出来，而且还与化学工程问题有关 [59]. 假设 x 表示物质的浓度，ϕ 表示化学处理过程，那么 $\phi^n(x)$ 表示从浓度 x 开始经过 n 次这样的化学处理后的浓度. 因此不等式 (34.1) 的解代表了一个化学处理过程，经过这样的 n 次处理后物质浓度从 x 变得不大于 $F(x)$.

定理 1　设 $F \in \mathrm{CI}(I,I)$, $F(x) < x$, $\forall x \in (a,b)$. f 为 F 的 n 次连续迭代根，如果连续函数 $\psi \in C(I,I)$ 满足 $\psi(x) \le x$, $\forall x \in I$, 且与 f 可交换，即 $\psi \circ f = f \circ \psi$ ，那么函数

$$\phi(x) = f(\psi(x)) \qquad \forall x \in I$$

是迭代不等式 (34.1) 在 I 的一个连续解，它与 f 可交换.

引理 1　令连续函数 $\psi, \phi : I \to I$ 满足不等式

$$\psi(x) < x, \quad \phi(x) < x, \qquad \forall x \in (a,b) \tag{34.2}$$

$$\phi(x) \le \psi(x), \qquad \forall x \in [a,b] \tag{34.3}$$

如果 ψ 或者 ϕ 在 I 递增，那么

$$\phi^k(x) \le \psi^k(x). \qquad \forall x \in [a,b], \ k = 1, 2 \cdots \tag{34.4}$$

该引理可归纳地证明，参见 [59]．

定理 1 的证明 从 §11 的定理 2 及其证明可见，迭代根 $f \in \mathrm{CI}(I,I)$，并且 $f(x) < x$，$x \in (a,b)$．由单调性及 ϕ 的定义知，$\phi(x) < x$，$\phi(x) \le f(x)$．用引理 1 得 $\phi^n(x) \le f^n(x) = F(x)$，故 ϕ 满足不等式 (34.1)．进而，由于 ψ 与 f 可交换，显然对 $x \in [a,b]$ 有

$$\phi(f(x)) = f(\psi(f(x))) = f(f(\psi(x))) = f(\phi(x)). \qquad \square$$

在研究多项式型迭代方程 (ITn) 的基础上，我们还希望讨论更广泛的迭代不等式

$$\lambda_1\phi(x) + \lambda_2\phi^2(x) + \cdots + \lambda_n\phi^n(x) \le F(x), \quad x \in I \quad (34.5)$$

其中 $I = [a,b]$，$\lambda_1 > 0$，$\lambda_i \ge 0$，$i = 2,3,\cdots,n$，且 $\sum_{i=1}^{n}\lambda_i = 1$．

引理 2 设 $F \in \mathrm{CI}(I,I)$ 满足李普希茨条件

$$|F(x_1) - F(x_2)| \le M|x_1 - x_2|, \qquad \forall x_1, x_2 \in I$$

其中 $M > 0$ 为常数，那么迭代方程 (ITn) 有严格递增的解 $f \in \mathrm{CI}(I,I)$．

证明 §21 的定理 1 已经证明，迭代方程 (ITn) 有连续解 f 满足

$$0 \le f(x_1) - f(x_2) \le \frac{M}{\lambda_1}(x_1 - x_2). \qquad \forall x_1 > x_2 \in I$$

我们只要说明该式的第一个不等式是严格的．事实上，如果存在 $x_1, x_2 \in I$，$x_1 > x_2$，使 $f(x_1) - f(x_2) = 0$，从方程容易导出 $F(x_1) = F(x_2)$，这显然与 F 的严格递增性矛盾． $\square$

引理 3 设 $F(a) = a, F(b) = b$ 且 F 在 $[a,b]$ 严格递增，并设 f 是方程 (ITn) 的严格递增连续解．如果对 $\forall x \in (a,b)$ 有 $F(x) < x$(或者 $F(x) > x$)，那么对 $\forall x \in (a,b)$ 就有 $f(x) < x$(或 $f(x) > x$)．

证明　不妨只讨论 $F(x) < x$ 的情形. 设对某个 $x_0 \in (a,b)$ 有 $f(x_0) > x_0$. 由于 f 严格递增， $f^k(x_0) > x_0, k = 1, 2, \cdots, n$， 那么

$$
\begin{aligned}
F(x_0) &= \lambda_1 f(x_0) + \lambda_2 f^2(x_0) + \cdots + \lambda_n f^n(x_0) \\
&> \lambda_1 x_0 + \lambda_2 x_0 + \cdots + \lambda_n x_0 = x_0.
\end{aligned}
$$

这样导出了一个与所讨论情形的假设相矛盾的结论. □

引理 4　设 $F \mathrm{ın}\ \mathrm{CI}(I,I)$, 且设 $F(x) < x$, $\forall x \in (a,b)$. 那么方程 (ITn) 不存在严格递减的连续解.

证明　如果方程 (ITn) 有一个严格递减的连续解 f， 作为递减连续函数，它必有一个不动点 $\xi \in (a,b)$. 进而， $f^k(\xi) = \xi$, $k = 2, 3, \cdots, n$， 而且

$$
\begin{aligned}
F(\xi) &= \lambda_1 f(\xi) + \lambda_2 f^2(\xi) + \cdots + \lambda_n f^n(\xi) \\
&= \lambda_1 \xi + \lambda_2 \xi + \cdots + \lambda_n \xi = \xi.
\end{aligned}
$$

这与假设 $F(x) < x$, $\forall x \in (a,b)$ 矛盾. □

注　显然，当考虑 $F(x) > x$, $\forall x \in (a,b)$ 的情形时，在引理 4 中我们也可得到同样的结论. 注意到，引理 2 的证明实际上表明对 $F \in \mathrm{CI}(I,I)$ 迭代方程 (ITn) 的连续解一定是严格单调的. 因此，由引理 4, 在条件 $F(x) < x$, $\forall x \in (a,b)$ 下迭代方程 (ITn) 的一切连续解都属于 $\mathrm{CI}(I,I)$.

这些引理补充第 5 章，讨论了迭代方程 (ITn) 当函数严格单调的情形. 利用这些引理，我们可以对迭代不等式 (34.5) 给出下列结论.

定理 2　设 $F \in \mathrm{CI}(I,I)$, $F(x) < x$， 函数 f 是方程 (ITn) 的一个连续解. 如果连续函数 $\psi \in C(I,I)$ 满足不等式

$$
\psi(x) \le x, \qquad \forall x \in I \quad (34.6)
$$

则 $f^{-1}(\phi(x_0)) = \psi(x_0) > x_0$ ，即 $\phi(x_0) > f(x_0)$. 归纳地可证明

$$\phi^k(x_0) > f^k(x_0). \qquad k = 1, 2, \cdots \tag{34.10}$$

事实上，在 $\phi^{k-1}(x_0) > f^{k-1}(x_0)$ 的假设下，反复利用 ϕ 与 f 的可交换性以及 ϕ 和 f 的单调性，我们可以得到

$$\begin{aligned}\phi^k(x_0) &= \phi(\phi^{k-1}(x_0)) > \phi(f^{k-1}(x_0)) \\ &= f^{k-1}(\phi(x_0)) > f^{k-1}(f(x_0)) = f^k(x_0).\end{aligned}$$

因而

$$\begin{aligned}&\lambda_1\phi(x_0) + \lambda_2\phi^2(x_0) + \cdots + \lambda_n\phi^n(x_0) \\ &\quad > \lambda_1 f(x_0) + \lambda_2 f^2(x_0) + \cdots + \lambda_n f^n(x_0) = F(x_0).\end{aligned}$$

这就给出了一个荒谬的结果： ϕ 不是不等式 (34.5) 的解. □

迭代函数不等式是非常重要的研究课题，有关结果还可参见 [33] 等文献. 同迭代方程一样，我们还可以致力于更广泛形式的不等式研究，例如

$$\lambda_1(x)f(x) + \lambda_2(x)f^2(x) + \cdots + \lambda_n(x)f^n(x) \le F(x),$$

$$G(f(x), f^{n_1}(x), \cdots, f^{n_k}(x)) \le F(x),$$

等等. 然而，当单调性甚至递增性不满足时，问题会变得复杂得多，许多情形下连存在唯一性等基本问题都有待于进一步探讨.

§ 35 有关函数方程模型

在现实生活中，我们会遇到许多迭代问题. 这些问题又常常是以方程的形式提出的. 本书一开始就提到了贷款本利计算问题. 如果贷款规模较大而实际还贷时间超过计划的整年度期限数日，在尚

无短暂超期加息的约定时，我们就要从当初协议的贷款年 (月) 利率和记息方式来推算更精细合理的加息方案，以避免争议，这就成了迭代根形式的迭代方程问题. 在射线透射、液体渗流、人口预测、计算机几何作图的反演等技术中也存在同样的迭代函数方程问题.

本节我们将从一些来自实际的、形式各异的迭代函数方程模型中看到，现实生活中包含了大量的迭代函数方程问题. 迭代函数方程理论不仅能推动数学相关领域的发展，而且还能有效地解决许多生产生活中的实际问题.

1. **决策问题**

人们在社会活动和经济活动中常常要对一些复杂事件作出最终决策. 这些事件往往涉及多个层次的多种因素，它们相互影响. 现代决策理论的思想远远超越了传统的经验决策，而是建立在定量化科学分析的基础上的. 只有对这些因素进行全面评价和比较，才能给出符合实际的决策方案. 这种对多因素评价与比较的问题就是所谓 **综合评判问题** .

70 年代美国 T.L.Saaty 等学者用两两比较的评判原则分析了影响诸决策方案的多种因素，从而对诸方案给出了量化的优劣排序. 他们的方法被称为 **AHP法** ，或 **层次分析法**[51] . 人们在综合评判时，总是要把 n 个可量化的评判结果 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 综合成为一个决定性的量 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ ，参见 [8] ，其中 x_k 可以在同一准则下通过对因素的两两比较 (比如是某种比例的估计等等) 来确定. 通常所谓 “综合函数”$F: P^n \to \mathbf{R}$ 须满足以下合理要求:

(i) $P := (a, b)$, $0 < \bar{a} < \bar{b} \le \infty$.

(ii) 分离性：各个独立的评判可分离，即

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n) = g(x_1) * g(x_2) * \cdots * g(x_n), \qquad x_k \in P$$

其中 $*$ 是区间 $Q := g(P)$ 上连续、满足结合律和消去律的算子.

(iii) 一致性：一旦所有独立评判结果都是 x, 则综合评判结

果也是 x, 即

$$F(x,x,\cdots,x)=x. \qquad x\in P$$

(iv) 交互性：有如下倒数关系

$$F\left(\frac{1}{x_1},\frac{1}{x_2},\cdots,\frac{1}{x_n}\right)=\frac{1}{F(x_1,x_2,\cdots,x_n)}.$$

阿克采的研究 ([2] pp.254~267) 表明，算子 $*$ 只能是

$$y*z=\phi^{-1}(\phi(y)+\phi(z)) \qquad y,z\in Q$$

的形式，其中 $\phi:Q\to\mathbf{R}$ 为某个连续且严格单调函数. 因此，由分离性

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\phi^{-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\phi(g(x_k))\right). \qquad x_k\in P$$

根据一致性，得 $\phi(x)=n\phi(g(x))$, $x\in P$. 从而

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\phi(x_k)\right). \qquad x_k\in P$$

只要 ϕ 确定，就能获得综合评判函数 F. 进一步，将上述 F 的表达式与交互性结合，我们得知 ϕ 将满足迭代函数方程

$$\phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\phi\left(\frac{1}{x_k}\right)\right)=1/\phi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\phi(x_k)\right). \quad x_k\in P \quad (35.1)$$

这里要求区间 P 保证每点的倒数有意义，不妨设为 $P=(1/q,q)$. 为使方程形式简化，令 $t_k=\log x_k$, $\psi(t)=\phi(\exp t)$. 方程 (35.1) 可化为

$$\psi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi(-t_k)\right)=-\psi^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi(t_k)\right), \quad t_k\in\log P \quad (35.2)$$

这里 $\log P=(-c,c)$, $c=\log q$. 易见，每个严格单调的连续奇函数 $\psi_0(t)$ 都满足方程 (35.2) . 尤其 [33] 指出，方程 (35.2) 一般的严格单调连续解都形如

$$\psi(t)=\alpha\psi_0(t)+\beta. \qquad \alpha\neq 0$$

方程的多解性正好说明决策方式的多样性. 不妨选取奇函数 $\psi_0(t)$ ，用 ψ, t_k 的定义我们可以给出一个综合评判函数

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\exp\left[\psi_0^{-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\psi_0(\log x_k)\right)\right]. \qquad x_k\in P$$

2 . **计时问题**

观察者 A 通常根据电磁波信号观测航天飞行器 B 的运动. 信号在 t 时刻从 A 发出，经 B 反射后在 $g(t)$ 时刻返回到 A . 假设在 $t=0$ 时刻飞行器 B 飞离 A ，在 $t=\xi\leq\infty$ 回到 A ，而在时间区间 $(0,\xi)$ 内处于飞行状态中. 那么，函数 g 满足下列条件:

$$g\in C(I,I),\ I=[0,\xi],\ g(0)=0,\ g(\xi)=\xi,\ g(t)>t,\ t\in(0,\xi).$$

进而，如果 B 在这段时间区间 $(0,\xi)$ 上一直具有连续的正速度，则 $g\in C^1([0,\xi])$ 且具有正导数，因而 g 严格递增. 这些假设都是自然的.

如果考虑乘坐在 B 上的另一个观察者 (宇航员)，他在 B 处观测从 A 处发出的信号. 在地面上的 A 总想知道：在 (A 时钟) t 时刻发出的信号 B 将在 (B 时钟) 什么时刻收到？这里就是所谓 **计时问题**[14] . 设 B 收到信号的时刻为 $\chi(t)$(按 B 时钟计)，且假设 B 和 A 使用同样的时钟. 那么，对等地在 (B 时钟) t 时刻从 B 发出 (或反射) 的信号也将在 (A 时钟) $\chi(t)$ 时刻到达 A . 因此，我们有

$$\chi(\chi(t))=g(t). \tag{35.3}$$

这说明，计时问题是关于迭代根的迭代函数方程问题.

应该指出， B 作匀速直线运动时计时问题是等时迭加的平凡问题. 设 B 的速率为 v 而相对于 A 的位移为 s ，那么 $g(t) = t + 2s/(c - v)$ ，其中 $c \approx 300\,000$ (千米 / 秒) 是电磁波速率. 显然 $\chi(t) = t + s/(c - v)$ 且 $\chi(\chi(t)) = (t + s/(c - v)) + s/(c - v) = g(t)$. 这时信号往返时间都是 $s/(c-v)$. 然而实际问题远远没那么简单. 上述关于 g 的条件表明 g 是非线性的，因此信号往返两程的时间完全可能不同.

在第 3 章已经研究了单调递增函数的迭代根，包括连续结果和唯一光滑结果. 这些结果给出了讨论方程 (35.3) 的方法，并回答了有关问题.

3．感觉度量问题

根据常识知道，刺激的微小变化不会导致感觉体验上的变化. 例如，两个频率 (或振幅) 相差极小的声音听起来是一样的高 (或大) . 刺激的大小是可以用某种物理量 (如频率、振幅等) 来度量的. 然而，怎样度量人们的感觉体验程度，却是心理学研究的重要问题.

设区间 $I \subset \mathbf{R}^+$ 上的数 x 是某种刺激的度量，实数 $\alpha(x)$ 是由这一刺激产生的感觉程度 (按一确定方式) 的度量. 从实验中用统计方法可以确定一个函数 $w : I \to \mathbf{R}^+$(称为 Weber 函数) ，使得一个大于 x 的刺激 y 当 $y \geq x + w(x)$ 时可以被察觉，而当 $x \leq y < x + w(x)$ 时刺激 x 和 y 视为是不可区别的. 令

$$g(x) = x + w(x). \tag{35.4}$$

这里 $w(x)$ 也称为刺激的**显著差**，以此来建立刺激标度. 通常我们作费契那 (Fechner) 假设 [37] ： *感觉标度上所有的显著差都是均等的*，亦即对 $\forall x \in I$ ， $\alpha(g(x)) - \alpha(x)$ 为一个常数，不妨设为 1 . 那么函数 $\alpha(x)$ 满足阿贝尔方程

$$\alpha(g(x)) - \alpha(x) = 1. \tag{35.5}$$

费契那假设是规范化建立感觉标度的前提.

根据感觉反应的规律，通常假设 $I=(0,\infty)$ ，函数 $w:I\to I$ 连续且严格递增， $\lim\limits_{x\to 0} w(x)=0$. 显然 (35.4) 定义的函数 $g:I\to I$ 也是连续、严格递增并且 $g(x)>x$, $x\in I$. 在这种情形下，方程 (35.5) 的讨论参见 § 16 的定理 1 的证明，其每一个解都可对物理刺激的主观感觉程度给出一个度量方式.

此外，空气动力学中还提出了方程

$$\phi(x)=A(x+c)^2\left[\phi\left(a+\frac{b}{x+c}\right)+d\right].$$

贝克 (J.A.Baker)[9] 对此作了研究，并给出了实解析解. 迭代函数方程理论在天文学 [38] 、地质学 [21] 等领域也有广泛的应用.

索　　引

词条按汉语拼音字母顺序排列

Z

科学家中外译名对照表

Abel N. H. 阿贝尔

Aczél J. 阿克采

Ascoli 阿斯科里

Babbage C. 巴贝奇

Baker J.A. 贝克

Banach S. 巴拿赫

Böedewadt U.T. 波狄瓦特

Böttcher 保特切

Brauer G. 布洛尔

Brouwer L.E.J. 布劳韦尔

Cantor G. 康托

Dhombres J.G. 当布勒斯

Fatou P.J.L. 法图

Fechner 费契那

Feigenbaum M.J. 费根鲍姆

Fort Jr.M.K. 佛特

Fuchs L. 富希

Golubitsky M. 哥拉比茨基

Grobman 格诺曼

Hadamard J. 阿达马

Hall M. 霍尔

Hardy G.H. 哈代

Hartman P. 哈特曼

Hausdorff F. 豪斯多夫

Hénon M. 艾依

Isaacs R. 艾萨克斯

Jordan C.M.E. 约当

Julia 朱利亚

Kneser H. 克尼瑟

Koenigs G. 寇宁斯

Kuczma M. 库其玛

Kuroš A.G. 库洛斯

Lebesgue H.L. 勒贝格

Li T.-Y. 李天岩

Lorenz E.N. 洛伦兹

Mandelbrot B.B. 曼德勃罗特

Matkowski J. 马特可夫斯基

Morse H.M. 莫尔斯

参考文献

[1] Abel N.H., Oeuvres complétes, Vol.II, *Christiana*, 36-39(1881).

[2] Aczél J., *Lectures on Functional Equations and Their Applications*, Academic Press. New York and London, 1966.

[3] Aczél J., *Functional Equations: History, Applications and Theory*, D.Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston-Lancaster,1984.

[4] Aczél J, *A Short Course on Functional Equations*, D.Reidel Publishing Co., Dordrecht-Boston-Lancaster,1987.

[5] Aczél J. and Dhombres J., *Functional Equations Containing Several Variables*, Encyclopedia of Math. & Its Applications, Cambridge University Press 1989.

[6] Aftabizadeh A.R. and Xu J.-M., Oscillatory and periodic properties of delay differential equations with piecewise constant arguments, *Proc.Am.Math.Soc.*, **99**:673-679 (1987).

[7] Aftabizadeh A.R. and Wiener J., Oscillatory and periodic solutions of systems of two first order linear differential equations with piecewise constant arguments, *Applicable Anal.*, **26**:327-333 (1988).

[8] Aczél J. and Saaty T.L., Procedures for synthesizing ratio judgements, *J.Math.Psychology*,**27**:93-102 (1983).

[9] Baker J.K., A functional equation from gas dynamics, *Proceedings of the Nineteenth International Symposium on Functional Equations*:10-11 (1981).

[10] Böedewadt U.T., Zür iteration realler funktionen, *Zeittsc.Math.*,**49**, 3:497-516 (1944).

[11] Brauer G., Functional inequalities, *Amer.Math.Monthly*, **68**: 638-642 (1961).

[12] Collet P. and J.-P.Eckmann J.-P., *Iterated Maps on the Interval as Dynamical Systems*, Progress on Physics, Vol.I, Birkhäuser, Boston, 1980.

[13] Cooke K.L. and Wiener J., Retarded differential equations with piecewise constant arguments, *J. Math. Anal. Appl.*, **180**(1984): 265-297.

[14] Crum M., On two functional equations which occur in the theory of clock-graduation, *Quart. J.Math.*(Oxford Ser.), **10**:155-160 (1939).

[15] Dhombres,J.G., Itération linéaire d'ordre deux, *Publ. Math. Debrecen*, **24**: 277-287 (1977).

[16] Dubbey,J.M., *The Mathematical Work of Charles Babbage*, Cambridge University Press, 1978.

[17] Falconer J.K., *The Geometry of Fractal Sets*, Cambridge Univ Press, 1985.

[18] Fort Jr. M.K., The embedding of homeomorphisms in flows, *Proceedings of Amer.Math.Soc.*,**6**:960-967 (1955).

[19] Fort,Jr. M.K., Continuous solutions of a functional equation *Ann.Polon.Math.*, **13**: 205-211 (1963).

[20] Fuchs L., *Infinite Abelian Groups*, Academic Press, New York, 1970.

[21] Gersevanov N.M., *Iterational calculus and its applications*, in Russian, Moscow,1950.

[22] Golubitsky M. and Schaeffer D.G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol.1, Appl.Math.Sci.**51**, Springer, New York, 1985.

[23] Golubitsky M., Stewart I.N. and Schaeffer D.G., *Singularities and Groups in Bifurcation Theory*, vol.2, Appl.Math.Sci.**69**, Springer, New York, 1988.

[24] Gyori I. and Ladas G., Linearized oscillations for equations with piecewise constant arguments, *Diff. and Integral Eqns.*, **2**: 123-131 (1989).

[25] Hall M., *The Theory of Groups*, Macmillan, New York, 1959.

[26] Hardy G.H. and Wright E.M., *An Introduction to the Theory of Numbers*, Clarendon Press, Oxford, 1962.

[27] 何连法、牛东晓，一类 S^1 上自同胚的迭代根，数学研究与评论，**11**, 2:305-310 (1991).

[28] Isaacs R., Iterates of fractional order, *Canad.J.Math.*, **2**:409-416 (1950).

[29] 蒋星耀，关于 Böedewadt 的一个猜想，数学杂志，**6**,4: 433-438 (1986).

[30] Kneser H., Realle analytische lösungen der gleichung $\phi(\phi(z)) = e^z$ verwandter funktional gleichungen, *J.Reine Angew Math.*, **187**:51-57 (1950).

[31] Koenigs G., Recherches sur les integrales de certaines equations fonctionelles, *Ann.de I'Ecole Norm.Sup.*, **3**:3-41 (1884).

[32] Kuczma,M., *Functional equations in a single variable*, Monografie Mat. **46**, PWN-Polish Scientific Publishing, Warszawa, 1968.

[33] Kuczma,M., Choczewski,B. and Ger,R., *Iterative functional equations*, Encyclopedia of Math. & Its Applications **32**, Cambridge University Press 1990.

[34] Kuroš A.G., *The Theory of Groups*, transl. K.A.Hirsch, vol.1, Chelsea, New York, 1960.

[35] Lanford O.E., Remarks on the accumulation of period-doubling bifurcations, *Mathematical Problems in Theoretical Physics*, Springer-Verlag, Berlin, 1980.

[36] Li T.-Y. and Yorke J.A., Period three implies chaos, *Amer.Math.Monthly*, **82**:985-992 (1975).

[37] Luce R.D. and Edwards W., The derivation of subjective scales from just noticeable differences, *Psychological Review*, **65**:222-237 (1958).

[38] Lundmark K., On the Abel-Schwarzschild functional equation and its astronomical applications, *Congr.Math.Scand.*, **9**:323-344 (1939).

[39] 麦结华，一个圆周自同胚的 N- 次迭代根的条件，数学学报， **30**: 280-283 (1987).

[40] 麦结华，关于迭代函数方程 $f^2(x) = a\,f(x) + bx$ 的通解，数学研究与评论， **17**, 1: 83-90 (1997).

[41] Matkowski J., The 26th international symposium on functional equations, Remark 35, *Aequationes Math.*, **37**: 119-120 (1989).

[42] Matkowski J. and Zhang W., Method of characteristic for functional equation in polynomial form, *Acta Math.Sinica(NS)*,**13**, 3: 421-432 (1977).

[43] Matkowski J. and Zhang W., Characteristic analysis for a polynomial-like iterative equation, *Chin.Sci.Bul.*, **43**, 3: 192-196 (1998).

[44] Mukherjea A. and Ratti J.S., On a functional equation involving iterates of a bijection on the unit interval, *Nonlinear Anal.*, **7**: 899-908 (1983).

[45] Nabeya S., On the functional equation $f(p+qx+rf(x)) = a+bx+cf(x)$, *Aequationes Math.*, **11**: 199-211 (1974).

[46] Ng C.T. and Zhang Weinian, Invariant curves for planar mappings, *J. Difference Eqns. Appl.*, **3**:147-168 (1997).

[47] Palis J. and Melo W., *Geometric Theory of Dynamical Systems*, An introduction, Springer-Verlag, New York, 1982.

[48] Peter H., Chaotic behaviour of nonlinear differential-delay equations, *Nonlinear Anal.*, **7**:1315-1334 (1983).

[49] Rice R.E., An upper bound for the order of an iterative root of function, *Notices Amer.Math.Soc.*, **23**, A-609:738-810 (1976).

[50] Rice R.E., Schweizer B. and Sklar A., When is $f(f(z)) = az^2+bz+c$? *Amer.Math.Monthly*, **87**: 252-263 (1980).

[51] Saaty T.L., *The analytic hierarchy process*, McGraw-Hill, New York,1980.

[52] Schröder E., Über iterate funktionen, *Math.Ann.*,**3**: 295-322 (1871).

[53] 司建国，关于迭代方程 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^i(x) = F(x)$ 的 C^2 类解，数学学报，**36**: 348-357 (1993).

[54] 司建国， Discussion on the C^r-solutions of the iterated equation $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) = F(x)$, *Acta Math. Sci.*,**14**,Supp: 53-63 (1994).

[55] 司建国，迭代方程 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^i(x) = F(x)$ 局部解析解的存在性，数学学报， **37**: 590-599 (1994).

[56] 司建国，关于迭代方程 $G(f(x), f^{n_1}(x), \cdots, f^{n_k}(x)) = F(x)$ 的连续解，数学研究与评论， **15**: 149-150 (1995).

[57] 司建国，一类函数迭代方程的 C^1 类解的讨论，数学学报，**39**: 247-256 (1996).

[58] Thompson J.M.T. and Stewart H.B., *Nonlinear Dynamics and Chaos*, John Wiley & Sons, 1986.

[59] Turdza E., The solutions of an inequality for the nth iterate of a Function, *Amer.Math.Monthly*, **4**: 281-283 (1979).

[60] Walther H.-O., Homoclinic solution and chaos in $\dot{x}(t) = f(x(t-1))$, *Nonlinear Anal.*, **5** :775-788 (1981).

[61] 武河、张景中、杨路，高维映射嵌入多参数流与渐近嵌入多参数流，中国科学（ A 辑）， 1: 25-34 (1988).

[62] 杨路、张景中，第二类 Feigenbaum 函数方程，中国科学， **A**,12: 1061-1069 (1985).

[63] 杨路、张景中，线段上连续自映射嵌入半流的充要条件，数学学报，**29**,2: 180-183 (1986).

[64] Zhang F., Yan J. and Qian C., Limit boundary value problems of first order equations with piecewise constant arguments, *Radovi Matematički*, **6**: 347-355 (1990).

[65] 张广远，一类线段自映射的共轭与迭代根 (I)，数学年刊，**13A**,1: 33-40 (1992).

[66] 张广远，一类线段自映射的共轭与迭代根 (II)，数学年刊，**13A**,4: 473-478 (1992).

[67] 张景中、杨路，单变元实迭代半群的存在唯一准则，北京大学学报（自然科学版），6: 23-45 (1982).

[68] 张景中、杨路，论逐段单调连续函数的迭代根，数学学报，**26**: 398-412 (1983).

[69] 张景中、杨路，同胚嵌入流和渐近嵌入流的问题，中国科学（A 辑），1: 32-43 (1985).

[70] 张景中、杨路，关于 Sarkovskii 序的一些定理，数学进展，**16**,1: 398-412 (1987).

[71] 张景中、杨路，逐段单调连续函数嵌入拟半流问题，数学学报，**30**,1: 115-119 (1987).

[72] 张景中、杨路、曾振柄，动力系统中的分形集，数学进展 **19**,2: 137-188 (1990).

[73] Zhang Jingzhong, Yang Lu and Zhang Weinian, Some advances on functional equations, *Adv.Math.China*, **24**: 385-405 (1995).

[74] 张景中、李浩，实迭代，湖南教育出版社，1991.

[75] 张景中、熊金城，函数迭代与一维动力系统，四川教育出版社，1992.

[76] 张伟年，关于迭代方程 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^i(x) = F(x)$ 解存在性的讨论，科学通报，**31**,17: 1290-1295 (1986).

[77] Zhang Weinian, Stability of the solution of the iterated equation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^i(x) = F(x)$, *Acta Math. Sci.*, **8**: 421-424 (1988).

[78] 张伟年，关于具有两端可微性的迭代根存在可能性的问题，数学季刊，**4**,2: 31-38 (1989).

[79] 张伟年，关于迭代方程 $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^i(x) = F(x)$ 可微解的讨论，数学学报，**32**,1: 98-109 (1989).

[80] Zhang Weinian, Discussion on the differentiable solutions of the iterated equation $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f^i(x) = F(x)$, *Nonlinear Anal.*,**15**: 387-398 (1990).

[81] Zhang Weinian, Generalized exponential dichotomies and invariant manifolds for differential equations, *Adv.Math.China*, **22**:1-45 (1993).

[82] Zhang Weinian, Baker J.A., Continuous solutions for a polynomial-like iterative equation with variable coefficients, *Waterloo Faculty Report* **11**, Canada, 1994.

[83] Zhang Weinian, A generic property of globally smooth iterative roots, *Science in China*, **A38**, 3: 267-272 (1995).

[84] Zhang Weinian, An application of Hardy-Böedewadt theorem to iterated functional equations, *Acta Math.Sci.*, **15**, 3: 356-360 (1995).

[85] Zhang W. and Stewart I., Equivariant solutions of a polynomial-like iterative equation, *Warwick Preprint* **10**, UK, 1996.

[86] Zhang Weinian, PM functions, their characteristic intervals and iterative roots, *Annales Polonici Mathematici*, **LXV**.2: 119-128 (1997).

[87] 赵立人，关于函数方程 $\lambda_1 f(x) + \lambda_2 f^2(x) = F(x)$ 解的存在唯一性定理，中国科技大学学报，数学专辑： 21-27 (1983).

[88] 张筑生，微分动力系统原理，科学出版社， 1987.