MÉMOIRE

SUR

LES GROUPES KLEINÉENS

PAR

H. POINCARÉ
À PARIS.

§ 1. *Substitutions imaginaires.*

Dans un mémoire antérieur, j'ai étudié les groupes discontinus formés par les substitutions linéaires à coëfficients réels. Dans le présent travail, j'ai l'intention d'exposer quelques résultats relatifs aux groupes de substitutions linéaires à coëfficients imaginaires. Ces substitutions se classent naturellement en quatre catégories, comme on va le voir.

Soit:

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

une substitution quelconque, où je suppose toujours:

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Si on a:

$$(\alpha + \delta)^2 = 4$$

la substitution peut se mettre sous la forme:

$$\left(\frac{1}{z - a}, \quad \frac{1}{z - a} + K\right)$$

a et K étant des constantes. On dit alors qu'elle est *parabolique*.

Si on a:

$$(\alpha + \delta)^2 \lesseqgtr 4$$

la substitution peut se mettre sous la forme:

$$\left(\frac{z-a}{z-b}, \quad K\frac{z-a}{z-b}\right)$$

a, b, K étant des constantes.

Si

$$(\alpha + \delta)^2 \text{ réel positif et } > 4$$

K est réel positif et la substitution est *hyperbolique*.

Si

$$(\alpha + \delta)^2 \text{ réel positif et } < 4$$

K est imaginaire ou négatif et a pour module 1, la substitution est *elliptique*.

Si enfin $(\alpha + \delta)^2$ est imaginaire ou négatif, K est également imaginaire ou négatif et la substitution est *loxodromique*.

Une propriété commune à toutes ces substitutions linéaires c'est de transformer les cercles en cercles. Représentons en effet, à l'exemple de M. Hermite, les quantités imaginaires conjuguées de u, v, ... par la notation u_0, v_0, ...

La substitution

$$(1) \qquad \left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

peut s'écrire:

$$\left(z_0, \frac{\alpha_0 z_0 + \beta_0}{\gamma_0 z_0 + \delta_0}\right).$$

L'équation générale d'un cercle s'écrit d'ailleurs

$$(2) \qquad Azz_0 + Bz + B_0 z_0 + C = 0$$

A et C étant essentiellement réels, et il est clair qu'on retombera sur ce cercle (2) en appliquant la substitution (1) au cercle dont voici l'équation:

$$A(\alpha z + \beta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0) + B(\alpha z + \beta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0)$$
$$+ B_0(\gamma z + \delta)(\alpha_0 z_0 + \beta_0) + C(\gamma z + \delta)(\gamma_0 z_0 + \delta_0) = 0$$

ou bien:

$$(3) \quad \begin{aligned} & zz_0(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\gamma\alpha_0 + C\gamma\gamma_0) \\ & + z(A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\gamma\beta_0 + C\gamma\delta_0) \\ & + z_0(A\beta\alpha_0 + B\beta\gamma_0 + B_0\delta\beta_0 + C\delta\delta_0) \\ & + (A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\delta\beta_0 + C\delta\delta_0) = 0. \end{aligned}$$

Ecrivons maintenant l'équation d'une inversion par rapport au cercle (2), c'est à dire de l'opération qui consiste à changer un point quelconque z en son transformé par rayons vecteurs réciproques, en prenant pour pôle de la transformation le centre du cercle (2) et pour paramètre de la transformation le carré du rayon de ce cercle. Voici cette équation.

Soit t le transformé de z par cette inversion, on aura:

$$t + \frac{B_0}{2A} = \frac{\sqrt{4AC - BB_0}}{2Az_0 + B}.$$

Soient C_1 et C_2 deux cercles quelconques, et appelons I_1 et I_2 les inversions opérées respectivement par rapport à ces deux cercles. Si nous faisons subir à un point quelconque l'inversion I_1 puis l'inversion I_2, l'opération résultante que l'on pourra représenter par la notation $I_1 I_2$, sera une substitution linéaire comme il est aisé de s'en assurer. Cette substitution sera parabolique si les deux cercles C_1 et C_2 se touchent, elliptique s'ils se coupent et hyperbolique s'ils ne se coupent pas.

Supposons qu'on étudie la résultante non plus de deux, mais de plusieurs inversions successives. Si ces inversions sont en nombre pair, la résultante sera une substitution linéaire; si elles sont en nombre impair, la résultante sera une opération plus complexe qui pourra être regardée comme une substitution linéaire suivie d'une inversion. De plus *toute substitution linéaire peut être regardée d'une infinité de manières comme la résultante d'un nombre pair d'inversions.*

Le groupe obtenu en combinant de diverses manières les différentes inversions imaginables contient donc toutes les substitutions linéaires.

Posons:

$$z = \xi + \eta\sqrt{-1}$$

ξ et η seront les coordonnées d'un point représentatif de z dans son plan.

Considérons maintenant un point quelconque, non plus dans le plan $\xi\eta$, mais dans l'espace et soient ξ, η, ζ ses coordonnées; je supposerai ζ positif de telle façon que le point considéré soit au dessus du plan des $\xi\eta$. On a vu que la substitution (1) change un point quelconque ξ, η du plan des $\xi\eta$ en un autre point de ce même plan. Nous allons étendre la définition de la substitution (1) de façon à ce qu'on puisse appliquer cette substitution, non seulement à un point du plan $\xi\eta$, mais à un point quelconque de l'espace. La substitution (1), nous l'avons vu, peut être regardée comme la résultante d'un certain nombre d'inversions faites successivement par rapport à certains cercles du plan des $\xi\eta$ que j'appelle C_1, $C_2, \ldots C_n$. Soient Σ_1, $\Sigma_2, \ldots \Sigma_n$ les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles. Considérons l'opération qui consiste à effectuer n inversions successivement par rapport aux sphères Σ_1, $\Sigma_2, \ldots \Sigma_n$. Cette opération, si on l'applique à un point du plan des $\xi\eta$ ne diffère pas de la substitution (1). On pourra donc définir encore ainsi la substitution (1) quand il s'agira de l'appliquer à un point de l'espace situé en dehors du plan des $\xi\eta$.

Une inversion par rapport à l'une des sphères Σ_1, $\Sigma_2, \ldots \Sigma_n$ transforme les sphères en sphères; elle transforme en lui-même le plan des $\xi\eta$; elle conserve les angles; elle transforme toute figure infiniment petite en une figure infiniment petite semblable; toutes ces propriétés appartiennent donc à leur résultante, c'est à dire à la substitution (1) généralisée.

Supposons que l'inversion par rapport au cercle C_1 par exemple, change un certain cercle K du plan des $\xi\eta$ en un autre cercle K_1 de ce même plan. Soient S et S_1 les sphères qui ont même centre et même rayon que K et K_1; il est clair que l'inversion par rapport à la sphère Σ_1 changera S en S_1. Si donc la substitution (1) change le cercle K en un certain cercle K_n, et si S et S_n sont les sphères qui ont même rayon que K et K_n, la substitution (1) généralisée changera S en S_n. En effet la substitution (1) équivaut à n inversions opérées respectivement par rapport aux cercles C_1, $C_2, \ldots C_n$; ces inversions changent successivement le cercle K en K_1 puis en $K_2, \ldots$ puis enfin en K_n. Soit S_i la sphère qui a même rayon et même centre que K_i. La substitution (1) généralisée équivaudra à n inversions opérées respectivement par rapport aux sphères Σ_1, $\Sigma_2, \ldots \Sigma_n$ et ces inversions changeront successivement la sphère S en S_1, puis en $S_2, \ldots$ puis enfin en S_n. C. Q. F. D.

Pour justifier la définition précédente, il faut établir ce qui suit:

La substitution (1) peut être regardée *d'une infinité de manières* comme la résultante d'un nombre pair d'inversions opérées par rapport à divers cercles du plan des $\xi\eta$. Les cercles C_1, $C_2, \dots C_n$ ne sont donc pas parfaitement déterminés. Il faut faire voir que la substitution (1) généralisée est cependant une opération parfaitement déterminée. Supposons en effet que la substitution (1) puisse être regardée:

1° d'une part comme la résultante de n inversions opérées par rapport aux cercles C_1, $C_2, \dots C_n$

2° d'autre part comme la résultante de p inversions opérées par rapport à p autres cercles C'_1, $C'_2, \dots C'_p$.

Soit Σ'_i la sphère qui a même centre et même rayon que C'_i.

Soit maintenant un point P quelconque de l'espace; appliquons lui successivement les inversions par rapport aux sphères Σ_1, $\Sigma_2, \dots \Sigma_n$; nous obtiendrons un certain point Q. Appliquons maintenant au point P successivement les inversions par rapport aux sphères Σ'_1, $\Sigma'_2, \dots \Sigma'_p$, nous obtiendrons un certain point Q'. Appelons ces deux opérations (P, Q), (P, Q'); elles satisfont toutes deux à la définition de la substitution (1) généralisée, il faut donc démontrer que les deux points Q et Q' coïncident. Eh bien, nous pouvons faire passer par le point P trois sphères S, S', S'', ayant leurs centres dans le plan des $\xi\eta$ et coupant ce plan suivant trois grands cercles K, K' et K''.

La substitution (1) changera ces trois grands cercles en trois autres cercles K_1, K'_1 et K''_1 du plan des $\xi\eta$. Soient S_1, S'_1 et S''_1 les sphères qui ont même centre et même rayon que ces cercles; l'opération (P, Q) de même que l'opération (P, Q') change S, S' et S'' en S_1, S'_1 et S''_1. Le point Q, de même que le point Q' se trouve donc à l'intersection des trois sphères S_1, S'_1 et S''_1. Donc ces deux points coïncident. Donc la substitution (1) généralisée est une opération parfaitement déterminée.

C. Q. F. D.

Il reste à trouver les équations de cette opération. Pour définir un point P de l'espace, nous emploierons les trois coordonnées suivantes:

$$z = \xi + i\eta \qquad z_0 = \xi - i\eta. \qquad \rho^2 = \xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = zz_0 + \zeta^2;$$

ζ étant supposé positif, ces trois coordonnées suffisent pour définir complètement le point P.

Soient ρ'^2, z' et z'_0 les trois coordonnées du point Q transformé de P par la substitution (1) généralisée. Exprimons que le point P se trouve sur la sphère qui a même centre et même rayon que le cercle (3); j'ai à écrire:

$$\begin{aligned} &\rho^2(A\alpha\alpha_0 + B\alpha\gamma_0 + B_0\gamma\alpha_0 + C\gamma\gamma_0) \\ &+ z(A\alpha\beta_0 + B\alpha\delta_0 + B_0\gamma\beta_0 + C\gamma\delta_0) \\ &+ z_0(A\beta\alpha_0 + B\beta\gamma_0 + B_0\delta\alpha_0 + C\delta\gamma_0) \\ &+ (A\beta\beta_0 + B\beta\delta_0 + B_0\delta\beta_0 + C\delta\delta_0) = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Si le point P est sur la sphère qui a même centre et même rayon que le cercle (3), le point Q devra se trouver sur la sphère qui a même centre et même rayon que le cercle (2) transformé de (3) par la substitution (1), d'où l'équation:

$$A\rho'^2 + Bz' + B_0z'_0 + C = 0. \tag{5}$$

Ces deux équations, si on y regarde A, B, B_0 et C comme les inconnues doivent être équivalentes. On a donc:

$$\rho'^2 = \frac{\rho^2\alpha\alpha_0 + z\alpha\beta_0 + z_0\beta\alpha_0 + \beta\beta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}$$

$$z' = \frac{\rho^2\alpha\gamma_0 + z\alpha\delta_0 + z_0\beta\gamma_0 + \beta\delta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}$$

$$z'_0 = \frac{\rho^2\gamma\alpha_0 + z\gamma\beta_0 + z_0\delta\alpha_0 + \delta\beta_0}{\rho^2\gamma\gamma_0 + z\gamma\delta_0 + z_0\delta\gamma_0 + \delta\delta_0}.$$

Telles sont les équations de la substitution (1) généralisée.

Passons aux propriétés générales de cette substitution.

Si la substitution (1) est elliptique, elle change en eux-mêmes tous les points du cercle C qui passe par les deux points doubles, qui a son centre dans le plan des $\xi\eta$ au milieu de la droite qui joint ces deux points doubles, et dont le plan est perpendiculaire au plan des $\xi\eta$. Elle change également en eux-mêmes une infinité de cercles dont la propriété caractéristique est que toutes les sphères qui passent par ces cercles coupent orthogonalement le cercle C précédemment défini. Nous appellerons ce cercle C, cercle double de la substitution elliptique.

Si la substitution (1) est hyperbolique, il n'y a que deux points de l'espace qui ne sont pas altérés par la substitution, ce sont les deux points doubles situés dans le plan des $\xi\eta$. La substitution change en elles-mêmes toutes les circonférences et toutes les sphères qui passent par ces deux points.

Si la substitution (1) est parabolique, il n'y a qu'un seul point double inaltéré par cette opération qui change d'ailleurs en elles-mêmes toutes les circonférences et toutes les sphères qui sont tangentes au point double à une certaine droite du plan des $\xi\eta$.

Supposons enfin que la substitution (1) soit loxodromique; elle n'altérera pas le cercle C qui a pour diamètre la droite qui joint les points doubles et dont le plan est normal au plan des $\xi\eta$. Mais à l'exception des points doubles, elle altérera tous les points de ce cercle.

En résumé, toute substitution qui n'altère pas un point situé en dehors du plan des $\xi\eta$ est elliptique.

Nous avons vu plus haut que le substitution (1) généralisée transforme toute figure infiniment petite en une figure infiniment petite semblable. Cherchons le rapport de similitude. Si l'on considère une inversion unique, il est évident que les dimensions homologues de deux figures infiniment petites transformées l'une de l'autre, seront entre elles comme les coordonnées ζ des centres de gravité de ces figures. Il en sera donc de même quand au lieu d'une inversion unique on envisagera la résultante de plusieurs inversions, c'est à dire la substitution (1) généralisée.

Si donc on appelle ds, dw ou dv un arc de courbe infiniment petit, ou une aire plane ou courbe infiniment petite, ou un volume infiniment petit, et si ζ est la distance de cet arc, de cette aire ou de ce volume au plan des $\xi\eta$, si on appelle ds', dw' ou dv' les transformés de ds, dw ou dv par la substitution (1) généralisée et si ζ' est la distance de ds', dw' ou dv' au plan des $\xi\eta$, on aura:

$$\frac{ds}{\zeta} = \frac{ds'}{\zeta'}, \qquad \frac{dw}{\zeta^2} = \frac{dw'}{\zeta'^2}, \qquad \frac{dv}{\zeta^3} = \frac{dv'}{\zeta'^3}. \tag{6}$$

Nous dirons que deux figures sont *congruentes* lorsqu'elles seront transformées l'une de l'autre par une opération telle que la substitution (1) généralisée.

Nous appellerons L d'un arc, l'intégrale:

$$\int \frac{ds}{\zeta}$$

étendue aux différents éléments de cet arc. Nous appellerons S d'une aire plane ou courbe, l'intégrale

$$\int \frac{dw}{\zeta^2}$$

étendue aux divers éléments de cette aire et enfin nous appellerons V d'un solide, l'intégrale

$$\int \frac{dv}{\zeta^3}$$

étendue aux divers éléments de ce solide.

Il résulte des équations (6) que deux arcs congruents ont même L, que deux aires congruentes ont même S et deux solides congruents même V.

Supposons maintenant que l'on enlève aux mots droite et plan leur signification pour appeler droite ou plan toute circonférence ou toute sphère qui coupe orthogonalement le plan des $\xi\eta$. Supposons aussi qu'en-levant aux mots longueurs, surfaces et volumes leur signification, on appelle ainci ce que nous venons d'appeler L, S et V. Supposons enfin qu'on conserve aux mots circonférence, sphère et angle leur signification habituelle. On reconnaîtra alors qu'interprétés de la sorte, tous les théorèmes de la géométrie non-euclidienne de Lobatschewski, c'est à dire de la géométrie qui n'admet pas le postulatum d'Euclide, sont parfaitement exacts. On voit aussi quel lien il y a entre la théorie des substitutions linéaires et la géométrie non-euclidienne. C'est de ce même lien que M. Klein a fait usage pour trouver tous les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire.

§ 2. *Groupes discontinus.*

Je me propose de former les groupes discontinus qui sont dérivés d'un nombre fini de substitutions linéaires à coëfficients imaginaires. Mais avant d'aller plus loin, il y a lieu de faire une distinction qui n'avait pas de raison d'être dans la théorie des groupes fuchsiens, mais qui est ici d'une importance capitale. Cette distinction a été très nettement établie par M. KLEIN (Mathematische Annalen, Bd XXI, page 176).

Nous appellerons substitution infinitésimale toute substitution linéaire telle que les modules de $\alpha - 1$, β, γ, $\delta - 1$ soient infiniment petits.

Si un groupe contient une substitution infinitésimale, c'est à dire si l'on peut trouver dans ce groupe des substitutions telles que les quatre modules cités plus haut soient plus petits que toute quantité donnée sans être nuls, le groupe est continu.

Mais parmi les groupes qui ne satisfont pas à cette condition, c'est à dire parmi les groupes discontinus, il y a lieu de distinguer deux classes, que nous appellerons les groupes proprement et improprement discontinus.

Un groupe sera improprement discontinu dans le voisinage d'un point z, si dans un domaine D enveloppant le point z, on peut trouver une infinité de transformés de ce point par les substitutions du groupe, et cela quelque petit que soit le domaine D.

Le groupe sera proprement discontinu dans le cas contraire.

Si par exemple il s'agit d'un groupe de substitutions appliquées à une quantité réelle z, on pourra prendre pour le domaine D le segment de droite compris entre le point $z - \varepsilon$ et le point $z + \varepsilon$; s'il s'agit de substitutions appliquées à une quantité imaginaire z ou à un point z du plan, le domaine D sera un cercle ayant pour centre le point z; s'il s'agit d'un point P de l'espace, D sera une sphère ayant P pour centre, etc.

Pour éclaircir ce qui précède par un exemple simple, considérons le groupe formé par les substitutions:

$$\left(z, \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

où α, β, γ, δ sont des entiers réels, tels que $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Il est clair que ce groupe ne contient pas de substitution infinitésimale, il est donc discontinu. On voit de plus que si z est réel, on peut choisir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ de telle façon que

$$\operatorname{mod}\left(z - \frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right)$$

soit aussi petit que l'on veut, sans être nul; tandis que cela est impossible si z est imaginaire. Le groupe est donc improprement discontinu pour z réel et proprement discontinu pour z imaginaire.

Ce qui fait que nous n'avons pas eu à faire cette distinction dans le cas des groupes fuchsiens, c'est que tout groupe discontinu formé de substitutions réelles est proprement discontinu toutes les fois que z est imaginaire. C'est ce que je vais démontrer ici; car la démonstration que je veux donner de ce fait permettra de comprendre plus facilement ce qui se rapporte au cas plus général qui nous occupe dans ce mémoire.

Soit G un groupe quelconque formé de substitutions réelles, soit z un point imaginaire quelconque; supposons que dans tout domaine D entourant le point z il y ait une infinité de transformés de ce point par des substitutions de G, je dis que ce groupe contiendra des substitutions infinitésimales.

En effet je dirai qu'une quantité qui dépend d'une variable ε est de l'ordre de ε si elle s'annule avec cette variable et qu'une substitution est de l'ordre de ε si $\alpha - 1$, $\delta - 1$, β et γ s'annulent avec ε. Cela posé:

1° Toute substitution Σ qui change z en $z + \zeta$, ζ étant une quantité infiniment petite de l'ordre de ε, peut être regardée comme la résultante d'une substitution elliptique S qui admet le point z comme point double et d'une substitution hyperbolique s qui est infinitésimale et de l'ordre de ε. Nous écrirons:

$$\Sigma = Ss.$$

2° Si s et s_1 sont deux substitutions de l'ordre de ε leur résultante ss_1 sera aussi infinitésimale et de l'ordre de ε.

3° Si s est une substitution de l'ordre de ε et S une substitution finie, la résultante de la substitution inverse de S, de s et de S, résultante que nous écrirons $S^{-1}sS$ (1) sera infinitésimale et de l'ordre de ε.

(1) Nous désignerons suivant l'usage par la notation S^{-1} la substitution inverse de

4° Si S et S_1 sont deux substitutions elliptiques ayant le point z pour point double, elles seront permutables, c'est à dire que l'on aura:

$$(1) \qquad SS_1 = S_1 S, \qquad S_1 = S^{-1} S_1 S.$$

Maintenant par hypothèse nous avons dans le groupe une infinité de substitutions qui changent z en $z + \zeta$, $z + \zeta_1, \ldots$; ζ, $\zeta_1, \ldots$ étant des quantités de l'ordre de ε. Soient Σ et Σ_1 deux quelconques d'entre elles. On aura

$$\Sigma = Ss, \qquad \Sigma_1 = S_1 s_1$$

S et S_1 admettant le point z comme point double, s et s_1 étant infinitésimales.

La substitution

$$\Sigma \Sigma_1 \Sigma^{-1} \Sigma_1^{-1}$$

fera partie du groupe; elle ne se réduira pas à la substitution identique (z, z) parce qu'en général Σ et Σ_1 n'auront pas même point double.

Je dis qu'elle sera infinitésimale. En effet elle peut s'écrire:

$$SsS_1 s_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1} S_1^{-1}$$

ou en vertu de la relation (1)

$$SsS^{-1} S_1 S s_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1} S_1^{-1}.$$

Or en appliquant les principes 2° et 3° de la page 58, on verrait successivement que SsS^{-1}, que $s_1 s^{-1}$, que $S(s_1 s^{-1})S^{-1}$, que $(Ss_1 s^{-1} S^{-1})s_1^{-1}$, que $S_1(Ss_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1})S_1^{-1}$, et enfin que

$$(SsS^{-1})(S_1 S s_1 s^{-1} S^{-1} s_1^{-1} S_1^{-1})$$

sont infinitésimales et de l'ordre de ε.

Le groupe contient donc une substitution infinitésimale, il est continu.

Mais si un groupe de substitutions réelles ne peut être improprement discontinu dans le voisinage d'un point z imaginaire, il peut au contraire être improprement discontinu dans le voisinage d'un point z réel. En effet les groupes fuchsiens de la 1ère, de la 2e et de la 5me familles,

---

S, par la notation SS_1 la résultante de S et de S_1, par la notation S^m la résultante de m substitutions S successives.

c'est à dire ceux dont les polygones générateurs n'ont pas de côté de la 2e sorte, sont improprement discontinus dans le voisinage de tous les points z réels. Au contraire les groupes fuchsiens des autres familles sont proprement discontinus dans le voisinage des points réels qui appartiennent à un côté de la 2e sorte du polygone générateur ou d'un de ses transformés; ils ne sont improprement discontinus que dans le voisinage des points singuliers.

Revenons à l'étude des groupes formés de substitutions imaginaires ou plutôt des substitutions plus générales définies dans le paragraphe précédent.

Je dis qu'un pareil groupe ne peut être improprement discontinu dans le voisinage d'un point P situé en dehors du plan des $\xi\eta$. Soit en effet un pareil point P situé au dessus du plan des $\xi\eta$ et un domaine D entourant ce point P. Supposons que quelque petit que soit ce domaine D, il contienne une infinité de transformés du point P par les substitutions du groupe; je dis que le groupe sera continu. En effet:

1° Soit Σ une substitution qui change P en P', la distance PP' étant infinitésimale de l'ordre de ε; je dis qu'on pourra écrire:

$$\Sigma = Ss,$$

S étant une substitution elliptique dont le cercle double passe par P et s étant une substitution hyperbolique infinitésimale de l'ordre de ε. En effet la substitution Σ^{-1} changera P' en P. Il existera une substitution hyperbolique infinitésimale qui changera P' en P puisque les points P' et P sont infiniment voisins. Je l'appelle s^{-1} et je pose:

$$\Sigma^{-1} = s^{-1}S^{-1} \quad \text{d'où} \quad \Sigma = Ss.$$

La substitution S n'altérera pas le point P; donc d'après les principes du paragraphe précédent, ce sera une substitution elliptique dont le cercle double passe par P. C. Q. F. D.

2° et 3°: Les principes 2e et 3e de la page 58 subsistent ici, cela est évident.

4° Si S et S_1 sont deux substitutions elliptiques ayant même cercle double, on aura:

$$SS_1 = S_1S, \qquad S_1 = S^{-1}S_1S.$$

5° Si S_1 est une substitution elliptique ayant pour cercle double C_1; si C_1' est un cercle orthogonal au plan des $\xi\eta$, et rencontrant le cercle C en un point P sous un angle infiniment petit, on pourra poser:

$$S_1 = S_1'\sigma$$

S_1' étant une substitution elliptique admettant C_1' pour cercle double et σ étant une substitution elliptique infinitésimale.

Cela posé, nous avons par hypothèse dans le groupe une infinité de transformations Σ, Σ_1, $\Sigma_2, \dots$ qui changent P en des points infiniment voisins. On aura:

$$\Sigma = Ss, \ \Sigma_1 = S_1 s_1, \ \Sigma_2 = S_2 s_2, \dots$$

$s, s_1, \dots$ seront infinitésimales pendant que S, S_1, $S_2, \dots$ seront des substitutions elliptiques dont les cercles doubles passeront par P. On aura donc une infinité de substitutions elliptiques dont les cercles doubles passeront par P. Il faut de toute nécessité que l'on puisse trouver parmi elles deux substitutions S et S_1 dont les cercles doubles C et C_1 se coupent sous un angle nul ou infiniment petit. On pourra alors poser:

$$S_1 = S_1'\sigma$$

σ étant infinitésimale ou se réduisant à la substitution identique et S_1' admettant même cercle double C que S de telle façon que l'on ait:

$$S_1' = S^{-1}S_1's.$$

Considérons donc ces deux substitutions S et S_1 et les substitutions correspondantes Σ, Σ_1. La substitution

$$\Sigma\Sigma_1\Sigma^{-1}\Sigma_1^{-1}$$

fera partie du groupe; je dis qu'elle sera infinitésimale. En effet elle peut s'écrire:

$$SsS_1s_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1}S_1^{-1}$$

ou bien

$$SsS_1'\sigma s_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1}\sigma^{-1}S_1'^{-1}$$

ou enfin:

$$T = SsS^{-1}S_1'S\sigma s_1s^{-1}S^{-1}s_1^{-1}\sigma^{-1}S_1'^{-1}.$$

Or en	vertu	du	principe	3°	$T_1 = SsS^{-1}$	sera	infinitésimale,
»	»	»	»	2°	$T_2 = \sigma s_1 s^{-1}$	»	»
»	»	»	»	3°	$T_3 = ST'_2 S^{-1}$	»	»
»	»	»	»	2°	$T_4 = T_3 s_1^{-1} \sigma^{-1}$	»	»
»	»	»	»	3°	$T_5 = S'_1 T_4 S'^{-1}_1$	»	»
Enfin »	»	»	»	2°	$T = T_1 T_5$	»	»

C. Q. F. D.

Ainsi donc si nous envisageons un groupe discontinu, il sera proprement discontinu pour tout point P situé en dehors du plan des $\xi\eta$. Il résulte de là que toute la partie de l'espace située au dessus de ce plan sera divisée en une infinité de régions R_0, $R_1, \dots R_i, \dots$; qu'à chacune de ces régions correspondra une des substitutions du groupe, à la région R_i par exemple la substitution S_i, et de telle façon que cette substitution S_i change R_0 en R_i. C'est tout à fait la même chose que ce que nous avons observé pour les groupes fuchsiens.

Mais ce que nous nous proposons, c'est d'obtenir des groupes de substitutions imaginaires proprement discontinus même pour les points du plan des $\xi\eta$. Ce sont ceux-là seuls en effet qui peuvent être utiles dans la théorie des fonctions.

Eh bien, rappelons-nous ce que nous avons observé pour les groupes fuchsiens. Ces groupes sont tous proprement discontinus pour les valeurs imaginaires de z, de sorte que la partie du plan située au-dessus de l'axe des quantités réelles, se trouve divisée en une infinité de polygones R_0, $R_1, \dots R_i, \dots$. Comment voit-on alors si le groupe reste proprement discontinu pour les valeurs réelles de z? Si le polygone R_0 n'a pas de côté de la 2e sorte, c'est à dire s'il est tout entier au dessus de l'axe des quantités réelles, le groupe est improprement discontinu pour les valeurs réelles de z; il est proprement discontinu, au contraire, si R_0 a un côté de la 2e sorte, c'est à dire si tout un côté de ce polygone appartient à l'axe des quantités réelles.

C'est la même chose ici; si la région R_0 définie plus haut est toute entière au dessus du plan des $\xi\eta$, ou n'a avec ce plan qu'un point commun ou une ligne commune, le groupe est improprement discontinu pour les points du plan des $\xi\eta$; il est proprement discontinu, au contraire, si une portion de la surface de la région R_0 appartient à ce plan.

§ 3. *Polygones générateurs.*

Considérons un groupe de substitutions imaginaires proprement discontinu, même pour les points du plan des $\xi\eta$.

Nous dirons que c'est un groupe kleinéen. Un pareil groupe subdivisera une partie du plan des $\xi\eta$ en une infinité de régions $R_0, R_1, \ldots R_i, \ldots$, de telle façon qu'à chaque région R_i corresponde une substitution S_i du groupe qui change R_0 en R_i. Considérons la région R_0 et une autre région quelconque R_1 limitrophe de R_0; elles seront séparées par une portion du périmètre de R_0 qui leur servira de frontière commune et que j'appellerai *côté* de R_0. Maintenant un pareil côté pourra être une courbe fermée ou un arc de courbe limité à deux points qui seront des *sommets* de R_0. Soit C un quelconque des côtés de R_0, il y aura toujours un autre côté C' de R_0, tel qu'une des substitutions du groupe change C en C'. Les côtés C et C' seront dits conjugués.

La subdivision du plan ou d'une partie du plan en une infinité de régions R peut se faire d'une infinité de manières. (Cf §§ 4 et 9 du Mémoire sur les groupes fuchsiens.) Commençons par donner quelques définitions. La région R_0 s'appellera polygone générateur du groupe; je dirai que deux régions R et R'' sont équivalentes par rapport à un groupe G quand on peut passer de l'une à l'autre de la façon suivante: décomposons R en un certain nombre de parties r'_1, $r'_2 \ldots r'_p$. Soit r''_i la transformée de r'_i par une substitution S_i du groupe G. L'ensemble des régions partielles r''_i devra former la nouvelle région R''. Il est clair que si R_0 est un polygone générateur du groupe G, on pourra prendre aussi pour polygone générateur de ce groupe, toute région équivalente à R_0. Supposons en particulier qu'on retranche de R_0 une portion quelconque P_0 de sa surface et qu'on ajoute à R_0 la surface P'_0 transformée de P_0 par une quelconque des substitutions du groupe. On obtient ainsi une région $R'_0 = R_0 + P'_0 - P_0$ équivalente à R_0, et on pourra par conséquent remplacer le polygone générateur R_0 par le polygone R'_0.

Nous pouvons profiter de cette circonstance pour simplifier la région R_0. En effet, soit C un côté quelconque de R_0 et C' son conjugué. Si

C est un côté fermé, il en est de même de C'; si au contraire C est un côté ouvert ab, C' sera aussi un côté ouvert $a'b'$. Dans le premier cas appelons K un cercle quelconque; dans le second, K sera un arc de cercle limité aux deux sommets a et b du côté C. Soit maintenant K' le transformé de K par celle des substitutions du groupe qui change C en C'. Dans le premier cas, K' sera, comme K, un cercle fermé; dans le second cas, K' sera un arc de cercle limité aux deux sommets a' et b' du côté C'. Appelons P_0 la portion du plan comprise entre K et C; P'_0 la portion comprise entre K' et C'. P'_0 sera la transformée de P_0 par une des substitutions du groupe. Nous pourrons donc remplacer la région R_0 par $R'_0 = R_0 - P_0 + P'_0$. Dans la nouvelle région R'_0, les côtés C et C' sont remplacés par les côtés K et K' qui sont des arcs de cercle.

Il est bon de remarquer que la région R'_0 n'est pas ainsi entièrement définie, car le cercle K n'est pas absolument déterminé par les conditions que nous lui avons imposées.

En opérant de même sur chacun des côtés de R_0, on finira par arriver à remplacer R_0 par une région analogue dont tous les côtés seront des cercles ou des arcs de cercle.

On peut rencontrer ici la même difficulté que nous avons observée dans le § 4 du Mémoire sur les groupes fuchsiens. Il peut se faire que la région P_0 telle que nous l'avons définie ne fasse pas tout entière partie de R_0. Dans ces conditions on arriverait à une région R'_0 concave, au sens donné à ce mot dans le paragraphe cité; on tournerait la difficulté comme dans ce paragraphe.

Nous pouvons donc toujours supposer que la région R_0 est un polygone limité par des cercles et des arcs de cercle; mais il peut se faire que ce polygone ne soit pas simplement connexe, mais présente une connexion d'un ordre plus élevé.

Reportons-nous en effet au cas des groupes fuchsiens, à ceux de la 3^e^ famille, par exemple. Le polygone R_0 tel que nous l'avons défini dans le Mémoire des *Acta Mathematica 1* est simplement connexe et limité par des côtés de la 1^ère^ et de la 2^e^ sorte, mais si on adjoint au polygone R_0, le polygone R'_0 symétrique de R_0 par rapport à l'axe des quantités réelles, la région totale $R_0 + R'_0$ qui est l'analogue de la région R_0 étudiée ici, sera multiplement connexe.

Nous serons conduits, ici comme dans le § 5 du Mémoire sur les groupes fuchsiens, à distribuer en cycles les sommets de R_0, mais comme nous n'avons ici rien d'analogue aux côtés de la 2^e sorte, nous n'aurons que des cycles *fermés* et pas de cycles *ouverts*. Soit A_0 un sommet quelconque de R_0; soient $A_1, A_2, \dots A_{n-1}$ les sommets qui appartiennent au même cycle que A_0, écrits dans l'ordre où on les rencontre en appliquant la règle du paragraphe cité. Décrivons autour de A_0 un contour infiniment petit et supposons qu'en suivant ce contour on rencontre successivement les polygones $R_0, R_1, R_2, \dots R_{n-1}, R_n, \dots$. Si $i < n$, le sommet A_0 considéré comme appartenant à R_i sera l'homologue de A_i; considéré comme appartenant à R_n, il sera l'homologue de A_0. Il suit de là que la substitution qui change R_0 en R_n admet A_0 pour point double. Elle peut être d'ailleurs elliptique, parabolique ou hyperbolique, mais non loxodromique. Cette quatrième hypothèse doit être rejetée.

En effet soit $K = \rho e^{i\omega}$ le multiplicateur d'une substitution loxodromique; soit p un nombre entier assez grand pour que $p\omega > 2\pi$. Désignons par Σ_0 l'ensemble des polygones $R_0, R_1, \dots R_{n-1}$; par Σ_1 l'ensemble des polygones $R_n, R_{n+1}, \dots R_{2n-1}$, c'est à dire la transformée de Σ_0 par notre substitution loxodromique; soit ensuite Σ_2 la transformée de Σ_1; Σ_3 celle de Σ_2, etc. Il est aisé de voir que Σ_p recouvrira partiellement l'une des régions $\Sigma_0, \Sigma_1, \dots \Sigma_{p-1}$, ce qui est absurde puisque le groupe est supposé proprement discontinu.

Reste à examiner les trois premières hypothèses.

Dans le 1^er cas, nous dirons que le cycle est elliptique [1]; la somme des angles du cycle devra être une partie aliquote de 2π.

Dans le 2^d cas, le cycle sera parabolique.

Tous les angles du cycle seront nuls.

Dans le 3^e cas, nous aurons un cycle hyperbolique, tous les angles du cycle seront encore nuls. Nous verrons dans le paragraphe suivant qu'on peut toujours remplacer le polygone R_0 par un autre équivalent et n'admettant pas de cycle hyperbolique [2].

---

[1] Les cycles que nous appelons ici elliptiques, paraboliques et hyperboliques sont analogues respectivement aux cycles de la 1^ère catégorie, de la 3^e sous-catégorie et de la 4^e sous-catégorie du Mémoire sur les groupes fuchsiens.

[2] Nous avons vu déjà aux §§ 9 et 11 du Mémoire sur les groupes fuchsiens et au § 2 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, que tout groupe du 2^d ordre de la 2^e,

Je dis maintenant qu'on peut toujours supposer qu'un cycle donné se compose d'un seul sommet. En effet, reprenons le polygone R_0, le sommet A_0 de ce polygone et les sommets $A_1, A_2, \ldots A_{n-1}$ qui appartiennent au même cycle. Considérons aussi le contour infiniment petit que nous avons décrit autour de A_0 et les polygones $R_1, R_2, \ldots$ que l'on rencontre successivement en suivant ce contour. Soit S_i la substitution qui change R_0 en R_i. Décomposons le polygone R_0 en n polygones partiels $r_0, r_1, r_2, \ldots r_{n-1}$, de telle façon que le polygone partiel r_i admette le sommet A_i et n'admette aucun des autres sommets $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$. Soit maintenant r'_i le transformé de r_i par S_i. Alors r'_0 ne différera pas de r_0; l'ensemble des régions partielles $r'_0, r'_1, \ldots r'_{n-1}$ formera un polygone R'_0 qui sera équivalent à R_0 et qui pourra par conséquent servir de polygone générateur pour notre groupe. Mais R'_0 admet le sommet A_0, et de telle façon que le cycle dont fait partie A_0 ne se compose que de ce seul sommet.

§ 4. *Polyèdres générateurs.*

Considérons maintenant la moitié de l'espace située au dessus du plan des $\xi\eta$ et la subdivision de cette portion de l'espace en une infinité de régions $P_0, P_1, \ldots P_i, \ldots$, telles que la substitution S_i de notre groupe change P_0 en P_i.

Considérons la région P_0 et une région quelconque P_1 limitrophe de P_0; elles seront séparées par une portion de la surface de P_0 que j'appellerai une *face* de P_0; je dirai que ce sera une face de la 1ère sorte. Si une portion du plan des $\xi\eta$ fait partie de la superficie de P_0, ce sera une face de la 2e sorte. Ces dénominations sont tout à fait analogues à celles que nous avons employées dans la théorie des groupes fuchsiens.

de la 4e, de la 6e ou de la 7e familles, est identique à un groupe de la 3e ou de la 5e familles, ou à un groupe du 1er ordre de la 6e ou de la 7e familles. En d'autres termes, si le polygone générateur d'un groupe fuchsien admet un cycle de la 4e sous-catégorie, on peut toujours par le procédé du § 9 le remplacer par un autre polygone n'admettant pas de cycle de cette catégorie. Il en est de même ici.

Deux faces limitrophes de P_0 seront séparées par une *arête.* Cette arête sera de la 1ère sorte si elle sépare deux faces de la 1ère sorte et de la 2e sorte si elle sépare une face de la 1ère sorte et une de la 2e sorte. Les faces de la 1ère sorte seront conjuguées deux à deux, de telle façon que chacune de ces faces soit changée en sa conjuguée par l'une des substitutions du groupe. Il résulte de là que deux faces conjuguées sont congruentes.

De même que les faces se répartissent en paires, de même les arêtes se répartissent en cycles à la façon des sommets des polygones générateurs. Soit A_0 une arête quelconque de la 1ère sorte; voici comment on trouvera les arêtes du même cycle. Soit F_0 l'une des faces que sépare l'arête A_0; F_0' sa conjuguée; les faces F_0 et F_0' sont congruentes. Soit A_1 celle des arêtes de F_0' qui est homologue de A_0; elle séparera la face F_0' d'une autre face F_1. Nous opérerons sur la face F_1 et sur l'arête A_1 comme nous avons opéré sur la face F_0 et l'arête A_0. Nous obtiendrons ainsi une suite de faces $F_0, F_1, F_2, F_3, \ldots,$ et une suite d'arêtes $A_0, A_1, A_2, A_3, \ldots$ et nous nous arrêterons quand nous retomberons sur l'arête A_0. Toutes les arêtes ainsi obtenues feront partie d'un même cycle.

Soient $A_0, A_1, \ldots A_{n-1}$ ces arêtes que je suppose au nombre de n. Supposons qu'autour de l'arête A_0 nous décrivions un contour infiniment petit; en décrivant ce contour on traversera successivement q régions P_0, $P_1, \ldots P_{q-1}$. Si $i<n$, l'arête A_0 considérée comme appartenant à P_i sera l'homologue de A_i; considérée comme appartenant à P_n, elle sera l'homologue de A_0. Ainsi la substitution qui change P_0 en P_n n'altère pas A_0. Il suit de la:

1° que $\frac{q}{n}$ est un nombre entier.

2° que la substitution qui change P_0 en P_n est elliptique et a pour multiplicateur $e^{2i\pi\frac{n}{q}}$.

3° que *l'arête A_0 est un cercle symétrique par rapport au plan des $\xi\eta$.*

4° que la somme des dièdres relatifs aux différentes arêtes du cycle est une partie aliquote de 2π.

Ainsi toutes les arêtes de la 1ère sorte sont des circonférences dont le plan est perpendiculaire au plan des $\xi\eta$ et dont le centre est dans ce plan.

Les extrémités des arêtes s'appelleront des sommets. Parmi les sommets nous distinguerons:

1° ceux qui sont en dehors du plan des $\xi\eta$, auxquels aboutissent trois ou plusieurs arêtes de la 1ère sorte.

2° ceux qui sont sur le plan des $\xi\eta$, auxquels aboutiront une ou plusieurs arêtes de la 1ère sorte et deux arêtes de la 2e sorte.

3° Il faut ajouter aussi les *sommets isolés.* Si deux faces sont tangentes entre elles, le point de contact peut être en effet regardé comme un sommet et cependant il n'appartient à aucune arête.

Il est clair que l'on peut remplacer, comme dans le paragraphe précédent, la région P_0 par toute autre région P'_0 *équivalente.* Je dis qu'on pourra toujours s'arranger de telle façon que P'_0 soit un polyèdre limité par des sphères ou par des portions de sphères. Toutes les faces de la 1ère sorte seront des sphères ou portions de sphères ayant leur centre dans le plan des $\xi\eta$; toutes les arêtes seront des circonférences ou des arcs de cercle.

Soit en effet F une face quelconque de la première sorte, F' sa conjuguée; S la substitution qui change F en F'. Plusieurs cas sont possibles:

1° ou bien la face F est limitée par une arête de la 2e sorte et cette arête est une courbe fermée. On appellera alors F_1 une demi-sphère quelconque ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$, et Q_0 la région limitée par F et F_1; la substitution S' changera alors F_1 en une autre demi-sphère F'_1 et Q_0 en Q'_0 région limitée par F' et F'_1. Les régions P_0 et $P'_0 = P_0 - Q_0 + Q'_0$ seront alors équivalentes.

2° ou bien la face F est limitée par deux arêtes dont une de la 1ère sorte et admet deux sommets. On raisonnera de la même façon; on devra seulement s'astreindre à faire passer la sphère F_1 par l'arête de la 1ère sorte, qui est une circonférence d'après ce qu'on a vu plus haut.

3° ou bien la face F admet plusieurs arêtes de la 1ère sorte situées sur une même sphère Σ qui a son centre dans le plan des $\xi\eta$. Dans ce cas la sphère F_1 devra être la sphère Σ.

4° ou bien enfin les différentes arêtes de la 1ère sorte de la face F ne sont pas sur une même sphère ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$. Dans ce cas, nous pourrons partager la face F en plusieurs autres f, f', f''. Je supposerai par exemple que la face partielle f

n'est contigüe qu'à la face f', que f' n'est contigüe qu'à f et à f''; f'' à f' et à f''', etc. Je supposerai que la face partielle f est séparée de la face f' par une ligne α', dont les extrémités sont β' et γ'; que la face f' est séparée de la face f'' par une ligne α'' dont les extrémités sont β'' et γ'', etc. Je supposerai que toutes les arêtes de la 1$^{\text{ère}}$ sorte contenues dans f et les sommets β' et γ' sont sur une même sphère f_1 ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$; que les arêtes de la 1$^{\text{ère}}$ sorte contenues dans f' et les sommets β', γ', β'', γ'' sont sur une même sphère f'_1 ayant son centre dans le plan des $\xi\eta$, etc. et ainsi de suite. On envisagera la portion de f_1 limitée par les arêtes de la 1$^{\text{ère}}$ sorte de f et par l'intersection de f_1 et de f'_1; la portion de f'_1 limitée par les arêtes de la 1$^{\text{ère}}$ sorte de f' et par les intersections de f'_1 avec f_1 et f''_1, etc. L'ensemble de ces portions de surfaces sphériques formera la nouvelle face F_1 sur laquelle on raisonnera comme plus haut.

Dans tous les cas on aura remplacé la région P_0 par une autre équivalente, mais où les faces F et F' seront remplacées par les faces F_1 et F'_1 formées de portions de sphères ayant leurs centres dans le plan des $\xi\eta$. En opérant de même sur toutes les faces de la 1$^{\text{ère}}$ sorte de la région P_0, on remplacera cette région par une autre équivalente dont toutes les faces de la 1$^{\text{ère}}$ sorte seront formées de pareilles portions de surfaces sphériques.

En résumé nous pourrons toujours supposer que notre région P_0 est un polyèdre dont toutes les faces de la 1$^{\text{ère}}$ sorte sont des portions de sphères ayant leurs centres dans le plan des $\xi\eta$. Nous l'appellerons polyèdre générateur du groupe.

On voit aisément qu'un pareil polyèdre ne peut avoir de *sommet isolé* en dehors du plan des $\xi\eta$.

Les faces de la 2$^{\text{e}}$ sorte du polyèdre générateur P_0 seront des polygones limités par des arcs de cercle, et ces arcs de cercle seront les traces des faces de la 1$^{\text{ère}}$ sorte sur le plan des $\xi\eta$. Ces polygones peuvent être regardés comme les polygones générateurs d'un groupe kleinéen.

Supposons que notre polyèdre P_0 ait n faces de la 2$^{\text{e}}$ sorte F_0^1, $F_0^2, \ldots F_0^n$; le polyèdre homologue P_i aura aussi n faces de la 2$^{\text{e}}$ sorte F_i^1, $F_i^2, \ldots F_i^n$. Si l'on excepte certains points ou certaines lignes singulières, tout point du plan des $\xi\eta$ appartient à l'une des faces F_i^k de l'un des polyèdres P_i, et il ne peut d'ailleurs appartenir qu'à l'une d'elles, puisque aucun point de l'espace n'appartient à plus d'un polyèdre P_i.

Le groupe est donc proprement discontinu même pour les points du plan des $\xi\eta$, si l'on excepte toujours les points et les lignes singulières dont il a été question plus haut.

Le groupe considéré est donc kleinéen.

Le plan des $\xi\eta$ sera partagé en n régions $R^1, R^2, \ldots R^n$; la région R^k se subdivise elle-même en une infinité de polygones $F_0^k, F_1^k, F_2^k, \ldots F_i^k, \ldots$ telles que la substitution S_i change F_0^k en F_i^k.

Ainsi on peut prendre pour polygone générateur du groupe, l'une quelconque des faces de la 2e sorte du polyèdre générateur, c'est à dire un polygone ayant pour côtés les cercles qui ont même centre et même rayon que les sphères qui forment les faces de la 1ère sorte de ce polyèdre.

La réciproque n'est pas vraie. Considérons un groupe kleinéen quelconque, et soit R_0 l'un des polygones que l'on peut choisir pour son polygone générateur; construisons les sphères qui ont même centre et même rayon que les arcs de cercle qui servent de côtés à ce polygone et envisageons le polyèdre P_0 limité par ces sphères. En général ce ne sera pas un polyèdre générateur du groupe. En effet dans un polyèdre générateur deux faces conjuguées doivent être congruentes. Or considérons un côté quelconque bc de R_0, les côtés adjacents ab et cd, le côté conjugué $b'c'$, les côtés adjacents $a'b'$ et $c'd'$. Construisons les sphères S_1, S_2, S_3, S_4, S_5, S_6 correspondant respectivement à ces six côtés. A chaque côté de R_0 correspondra une face de P_0. Au côté bc correspondra la portion de la surface de S_1 qui est limitée par l'intersection de cette sphère avec S_2 et S_3; au côté $b'c'$ correspondra la portion de la surface de S_4 qui est limitée par l'intersection de cette sphère avec S_5 et S_6. Ce devraient être là deux faces conjuguées de P_0; or ces deux faces ne seront pas en général congruentes.

Pour que le polyèdre P_0 soit un polyèdre générateur du groupe, il faut et il suffit que ses faces conjuguées soient congruentes, et pour cela, voici quelle est la condition nécessaire et suffisante.

Soit encore bc un côté de R_0, ab et cd les côtés adjacents, $b'c'$ le côté conjugué, $a'b'$ et $c'd'$ les côtés adjacents. Prolongeons les cercles dont font partie ces six côtés. Soit b_1 le second point d'intersection des cercles ab et bc, et de même c_1, b'_1, c'_1 les intersections respectives de

bc et de cd; de $a'b'$ et de $b'c'$; de $b'c'$ et de $c'd'$. Le rapport anharmonique des quatre points bcb_1c_1 doit être égal à celui des quatre points $b'c'b'_1c'_1$.

Parmi les polygones équivalents à R_0, qui sont en nombre infini et qui peuvent être choisis comme polygones générateurs, il y en a toujours qui remplissent cette condition, puisque tout groupe kleinéen est proprement discontinu pour les points non situés sur le plan des $\xi\eta$ et admet par conséquent un polyèdre générateur. Nous supposerons toujours que le polygone R_0 a été choisi de façon à satisfaire à cette condition.

A chaque côté de R_0 correspondra alors une face de P_0; à deux côtés conjugués, correspondront deux faces conjuguées. A chaque sommet de R_0 appartenant à un cycle elliptique correspondra une arête de P_0 et aux divers sommets d'un même cycle, correspondront les diverses arêtes d'un même cycle; à un sommet de R_0 appartenant à un cycle parabolique ou hyperbolique correspondra un sommet isolé de P_0. On voit ainsi que les sommets isolés de P_0 se répartissent en cycles.

Je dis maintenant qu'on peut toujours supposer que R_0 et par conséquent P_0 n'admettent pas de cycle hyperbolique. En effet supposons que P_0 admette un sommet isolé appartenant à un cycle hyperbolique, je dis qu'on pourra remplacer ce polyèdre par un autre équivalent n'admettant pas de cycle hyperbolique. En effet, d'après ce qu'on a vu à la fin du paragraphe précédent, on peut toujours supposer que ce cycle hyperbolique se compose d'un seul sommet A.

Le sommet A est un sommet isolé de P_0, c'est à dire qu'il est le point de contact de deux faces de la 1ère sorte de P_0, tangentes l'une à l'autre, et que j'appellerai F et F'. Ces deux faces sont conjuguées; car si elles ne l'étaient pas, le cycle dont fait partie A devrait contenir encore d'autres sommets. Une des substitutions du groupe, que j'appelle S, changera F en F', et elle sera hyperbolique, par hypothèse. La face F ne sera limitée par aucune arête, ou bien elle le sera par une seule arête, ou bien par plus d'une arête. Je dis d'abord qu'on peut toujours supposer que le troisième cas ne se présentera pas. En effet s'il se présentait, on tracerait sur la face F une demi-circonférence, dont le plan devrait être perpendiculaire au plan des $\xi\eta$, et qui devrait être assez petite pour être toute entière contenue dans la face F; cela est toujours possible. Cette demi-circonférence partagerait la face F en deux autres F_1 et F_2; F_1 contiendrait par exemple le sommet A; la face F' congruente à F se diviserait de même en deux autres F_1' et F_2' congruentes respectivement à F_1 et à F_2. Le sommet A fera alors partie de deux faces F_1 et F_1' qui ne seront limitées que par une seule arête.

Supposons donc que la face F admette au plus une arête. Construisons une sphère Φ peu différente de F. Si la face F admet une arête, j'assujettirai la sphère Φ à passer par cette arête. La substitution hyperbolique S changera Φ en une autre sphère Φ', et l'on aura toujours pu choisir Φ de telle facon que ces deux sphères ne se coupent ni ne se touchent. Il suffit pour cela que la sphère Φ diffère suffisamment peu de F et que, si A et B sont les deux points doubles de la substitution S, ces deux points soient l'un intérieur, l'autre extérieur à Φ. Soit p_0 la portion de l'espace comprise entre Φ et F, p_0' la portion comprise entre Φ' et F'. La substitution S changera p_0 en p_0'. Le polyèdre $P_0' = P_0 - p_0 + p_0'$ est donc équivalent à P_0; donc il peut servir de polyèdre générateur. Mais il ne possède plus le sommet hyperbolique A, puisque les sphères Φ et Φ' ne se coupent pas.

Nous pouvons donc toujours supposer que notre polygone R_0 et notre polyèdre P_0 ne présentent pas de cycle hyperbolique; c'est ce que nous ferons désormais.

§ 5. *Existence des groupes kleinéens.*

Supposons un polyèdre générateur P_0 satisfaisant aux conditions énoncées dans le paragraphe précédent: ses faces conjuguées sont congruentes, ses arêtes de la 1ère sorte se répartissent en cycles elliptiques, de telle façon que la somme des dièdres correspondant aux arêtes d'un même cycle soit une partie aliquote de 2π. Le groupe correspondant à ce polyèdre est entièrement défini. Il reste à démontrer que ce groupe est discontinu, c'est à dire que les polyèdres transformés de P_0 remplissent toute la partie de l'espace située au-dessus du plan des $\xi\eta$ et ne se recouvrent pas mutuellement.

La démonstration est tout à fait la même que dans le cas des groupes fuchsiens.

Soit en effet A un point quelconque intérieur à P_0, B un point situé au dessus du plan des $\xi\eta$. Joignons A à B par un arc de courbe AMB ne coupant pas ce plan. Cet arc sortira du polyèdre P_0 par une face de la 1[ère] sorte, on pourra construire le polyèdre P_1 limitrophe de P_0 le long de cette face; l'arc AMB sortira de P_1 par une certaine face, on construira le polyèdre P_2 limitrophe de P_1 le long de cette face, et ainsi de suite.

Voici ce que nous avons à démontrer:

1° Qu'après un nombre fini d'opérations on arrive à un polyèdre P_n à l'intérieur duquel se trouve le point B.

2° Que si le point B se confond avec le point A, de telle façon que l'arc AMB se réduise à un contour fermé AMA, le polyèdre P_n se confond avec P_0.

Le premier point s'établit comme dans la théorie des groupes fuchsiens.

La L de l'arc AMB étant une longueur finie L, je dis que cet arc ne pourra rencontrer qu'un nombre fini de polyèdres P, ou, ce qui revient au même, un nombre fini de faces F de la 1[ère] sorte appartenant à ces polyèdres. En effet, on établit aisément les lemmes suivants.

I. On peut trouver un nombre entier v assez grand pour que v polyèdres P quelconques et v faces F quelconques ne puissent avoir d'autre point commun qu'un sommet parabolique.

II. Si v faces n'ont pas de sommet parabolique commun et n'ont par conséquent aucun point commun, et si un arc de courbe traverse ces v faces, la L de cet arc est supérieure à une certaine limite λ.

III. Tout arc qui ne rencontre pas le plan des $\xi\eta$, ne peut traverser qu'un nombre fini de faces F ayant un sommet parabolique commun. (Voir §§ 1 et 6 du Mémoire sur les groupes fuchsiens.)

Il résulte de là que quand l'arc AMB aura traversé $\frac{vL}{\lambda}$ faces F, il ne pourra plus traverser que des faces ayant un sommet parabolique commun, et en vertu du lemme III, il n'en traversera qu'un nombre fini.

Le premier point une fois démontré, le second s'établit sans peine. En effet on voit immédiatement qu'il suffit de le démontrer pour un contour AMA infiniment petit. Or le théorème est évident pour un pareil contour, soit qu'il ne tourne pas autour d'une arête de la 1$^{\text{ère}}$ sorte, soit même qu'il tourne autour d'une pareille arête, puisque par hypothèse, cette arête fait partie d'un cycle dont la somme des dièdres est une partie aliquote de 2π.

Pour les détails de la démonstration, je renverrai au § 6 du Mémoire sur les groupes fuchsiens.

Ainsi les polyèdres P_i ne se recouvrent pas mutuellement; si P_0 admet une face de la 2$^{\text{e}}$ sorte R_0 dont les transformées sont les faces R_i des polyèdres P_i, ces faces R_i ne se recouvrent pas non plus mutuellement. Ainsi notre *polygone générateur et ses transformés ne se recouvrent pas.*

C'est ce point que je voulais établir, et, pour y parvenir, j'ai eu recours à un artifice dont je ne pouvais guère me dispenser dans le cas général; j'ai dû passer du plan à l'espace, et des polygones R aux polyèdres P. Mais si ce détour est nécessaire dans le cas le plus général, on peut s'en affranchir dans un grand nombre de cas particuliers; c'est ce que nous verrons plus loin.

§ 6. *Classification.*

Parmi les groupes kleinéens, il en est qui doivent attirer particulièrement l'attention à cause de leur importance au point de vue des applications. Ce sont ceux dont les groupes fuchsiens sont des cas particuliers, de telle sorte qu'on peut passer d'un pareil groupe kleinéen à un groupe fuchsien en faisant varier d'une *façon continue* certains paramètres. Ce seront les groupes de la 1$^{\text{ère}}$ espèce.

Ceux de la 2$^{\text{e}}$ espèce seront ceux qui ne jouiront pas de cette propriété.

On peut classer aussi les groupes kleinéens en genres. Nous définirons le genre du polygone générateur R_0 comme dans le § 8 du Mémoire sur les groupes fuchsiens et le genre d'un groupe sera celui de son polygone générateur.

Voici maintenant quelque chose d'analogue à la classification en familles.

Nous classerons d'abord les polyèdres générateurs d'après le nombre de leurs faces de la 2^e^ sorte. C'est là en effet un point fort important; car si un polyèdre P_0 a n faces de la 2^e^ sorte, le plan des $\xi\eta$ se trouve divisé en n parties et chacune de ces parties en une infinité de polygones R de telle façon qu'à chaque substitution du groupe corresponde un polygone R et un seul.

Nous classerons ensuite les polyèdres qui admettent un même nombre de faces de la 2^e^ sorte en familles, selon qu'ils admettent ou n'admettent pas des cycles elliptiques, ou des cycles paraboliques.

Donnons le détail de cette classification pour les groupes les plus importants qui sont ceux de la 1^ère^ espèce, en conservant aux familles les mêmes numéros que dans la théorie des groupes fuchsiens.

1° Polyèdres admettant 2 faces de la 2^e^ sorte.

1^ère^ famille. Admettent des cycles elliptiques.
2^e^ famille. Admettent des cycles paraboliques.
6^e^ famille. Admettent des cycles elliptiques et paraboliques.

2° Polyèdres admettant 1 face de la 2^e^ sorte.

3^e^ famille. Polyèdres dont toutes les faces de la 1^ère^ sorte sont des demi-sphères complètes, ne se coupant ni ne se touchant mutuellement et qui n'admettent ni cycle elliptique, ni cycle parabolique.
4^e^ famille. Admettent des cycles paraboliques.
5^e^ famille. Admettent des cycles elliptiques.
7^e^ famille. Admettent des cycles elliptiques et paraboliques.

§ 7. *Troisième famille.*

Voici quel est le mode de génération des groupes de la 3^e^ famille.

Considérons $2n$ cercles qui ne se coupent ni ne se touchent; je supposerai, pour fixer les idées, que ces $2n$ cercles soient tous extérieurs les uns aux autres. Le polygone R_0 sera la portion du plan qui est extérieure à la fois à tous ces cercles. J'appelle ces cercles $C_1, C_2, \ldots C_n$; $C'_1, C'_2, \ldots C'_n$. Je suppose que les cercles C_i et C'_i soient conjuguées.

Soit S_i une substitution qui change C_i en C'_i et de telle façon que l'extérieur de C_i se change dans l'intérieur de C'_i. S_i est alors une substitution hyperbolique ou loxodromique dont un point double est intérieur à C_i et l'autre à C'_i.

Le groupe dérivé des substitutions S_i est alors un groupe kleinéen de la 3^{me} famille.

Pour démontrer que ce groupe est discontinu, il n'est pas nécessaire d'avoir recours à la marche détournée du § 5. En effet, construisons le polygone R_i limitrophe de R_0 le long de C'_i, c'est à dire le transformé de R_0 par la substitution S_i; il sera tout entier à l'intérieur de C'_i. L'ensemble des polygones R_0 et R_i se compose alors de la partie du plan extérieure à la fois à $4n - 2$ cercles (extérieurs les uns aux autres) qui servent de côtés à ces deux polygones. Soit C_k l'un de ces cercles; si l'on veut construire le polygone R_k limitrophe de R_0 ou de R_i le long de C_k, ce polygone sera tout entier intérieur à C_k et ainsi de suite. On voit aisément en continuant de la sorte que les polygones ainsi construits ne peuvent se recouvrir mutuellement, et par conséquent que le groupe est discontinu.

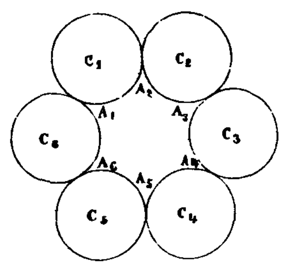
Quelles sont maintenant les conditions imposées aux substitutions S_i? Ces n substitutions doivent être telles que l'on puisse trouver n cercles $C_1, C_2, \dots C_n$, de telle façon que ces n cercles et leurs transformés respectifs $C'_1, C'_2, \dots C'_n$ soient tous extérieurs les uns aux autres. Ce ne sont là que des conditions d'inégalité; ainsi le groupe dérivé de n substitutions est discontinu, pourvu que les coëfficients de ces substitutions satisfassent à certaines inégalités.

Parmi les groupes de la 3^{me} famille il en est qui méritent une mention particulière. On peut supposer que le polygone R_0 est symétrique par rapport à un certain cercle C_{n+1}, de telle façon que les cercles conjuguées C_i et C'_i soient symétriques l'un de l'autre, et que toutes les substitutions du groupe puissent s'obtenir en combinant les inversions par rapport aux cercles $C_1, C_2, \dots C_n, C_{n+1}$. Nous dirons alors que le groupe est symétrique.

§ 8. *Deuxième Famille.*

Supposons que $2n$ cercles C_1, C_2, ... C_n, soient situés de telle sorte 1° qu'ils soient tous extérieurs les uns aux autres; 2° que le cercle C_i touche extérieurement les cercles C_{i-1} et C_{i+1}; 3° que le cercle C_{2n} touche extérieurement les cercles C_{2n-1} et C_1. Appelons A_i le point de contact des cercles C_{i-1} et C_i et A_1 le point de contact des cercles C_n et C_1. Le plan se trouve divisé en trois parties: 1° le polygone R_0 extérieur à chacun des cercles C et intérieur à la figure formée par l'ensemble de ces cercles; ce sera notre polygone générateur; 2° le polygone R'_0 extérieur à la fois à tous ces cercles et à la figure formée par leur ensemble; 3° enfin l'intérieur des divers cercles C.

Fig. 1



Si nous formons le polyèdre générateur P_0, ce polyèdre présentera $2n$ faces de la 1ère sorte formées par les surfaces des sphères qui ont même centre et même rayon que les cercles C; 2 faces de la 2e sorte qui seront les polygones R_0 et R'_0 et $2n$ sommets isolés A_1, A_2, ... A_{2n}. Je supposerai que les faces C_i et C_{2n+1-i} sont conjuguées et que le polyèdre admet $n + 1$ cycles paraboliques, formés respectivement des sommets A_1; A_2 et A_{2n}; ... A_i et A_{2n+1-i}; ...; A_n et A_{n+2}; A_{n+1}. Cela suppose que nous avons entre les sommets A la relation:

$$(A_2 - A_1)(A_4 - A_3) \ldots (A_{2n} - A_{2n-1}) = (A_3 - A_2)(A_5 - A_4) \ldots (A_1 - A_{2n}).$$

Ici, comme dans le paragraphe précédent, la discontinuité du groupe peut se démontrer directement, sans qu'il soit besoin de recourir à l'artifice du § 5. On voit que le plan se décompose en deux domaines D et D'; le premier est recouvert par le polygone R_0 et ses transformés, le second par le polygone R'_0 et ses transformés. Ces deux domaines sont séparés par une ligne L, si l'on peut appeler cela une ligne.

Supposons que l'on ait construit un certain nombre de polygones R_0, R_1, ... R_n et les polygones correspondants R'_0, R'_1, ... R'_n. On sera certain: 1° que tout point faisant partie de l'un des polygones R appartiendra au domaine D; 2° que tout point faisant partie de l'un des polygones R' appartiendra au domaine D'; 3° que tout sommet de l'un des polygones R appartient à la ligne L.

Les sommets de divers polygones R forment *eine unendliche Punktmenge* [1] P et pour obtenir la ligne L, il faut ajouter à cette *Punktmenge* son *erste Ableitung* P'. On voit que la ligne L est *eine perfecte und zusammenhängende Punktmenge.* C'est dans ce sens que c'est une ligne. Mais nous allons voir qu'elle ne jouit pas de toutes les propriétés que nous sommes habitués à attribuer aux lignes.

Cherchons d'abord si cette ligne possède une tangente. A ce point de vue nous devons distinguer les points de la *Punktmenge* P et ceux qui appartiennent à son *Ableitung* P' sans appartenir à P. Envisageons d'abord un point de P; je dis qu'en ce point il y aura une tangente. D'abord nous pouvons supposer que ce point est un sommet de R_0, car rien ne distingue R_0 des autres polygones R_i; nous pouvons supposer que ce point est précisément A_1, car ce qui distingue A_1 des autres sommets de R_0, c'est que le cycle dont fait partie A_1 ne contient pas d'autre sommet; or nous avons vu à la fin du § 3 que l'on peut toujours supposer qu'un cycle donné ne se compose que d'un seul sommet. Le groupe envisagé contiendra alors une certaine substitution parabolique S qui aura A_1 pour point double. Soit

$$\left(\frac{1}{z - A_1}, \frac{1}{z - A_1} + h\right)$$

cette substitution. Soit N un point tel que:

$$\arg (N - A_1) = -\arg h.$$

Joignons A_1N, je dis que A_1N sera tangente à notre ligne L. Voici ce que j'entends par là. Supposons que ρ et ω soient les coordonnées polaires d'un point de L en prenant A_1 pour pôle et A_1N pour axe polaire; je dis que quand ρ tendra vers 0, ω tendra vers 0, de telle façon que A_1N sera la limite d'une sécante A_1B_1 de la ligne L, lorsque le point B_1 se rapprochera indéfiniment de A_1.

Pour démontrer cela, je vais construire deux cercles K et K' se

---

[1] Pour le sens précis des diverses expressions allemandes que je vais employer, voir CANTOR: *Grundlagen einer Mannichfaltigkeitslehre.* Leipzig, Teubner 1883. Voir aussi la traduction française de ce mémoire: *Acta mathematica.* **2**, pag. 381—408.

touchant extérieurement en A_1 et tangents tous deux à $A_1 N$. Je choisirai le cercle K de telle façon qu'il coupe les côtés $A_1 A_2$ et $A_1 A_{2n}$ du polygone R_0 et ne coupe aucun autre côté de ce polygone. De même le cercle K' devra couper les côtés $A_1 A_2$ et $A_1 A_{2n}$ du polygone R'_0 et ne couper aucun autre côté de ce polygone. Soit r_0 la partie de R_0 qui est intérieure à K et r'_0 la partie de R'_0 qui est intérieure à K'. Il est clair que les transformés successifs de r_0 par les puissances positives et négatives de la substitution S rempliront tout ce cercle K, de sorte que ce cercle fait tout entier partie du domaine D. De même le cercle K' fera tout entier partie du domaine D'. Il en résulte que la ligne L est tout entière dans la portion du plan extérieure à la fois aux deux cercles K et K'. Cela suffit pour démontrer le théorème énoncé.

Toutefois la ligne $A_1 N$ ne jouit pas des mêmes propriétés que les tangentes aux lignes ordinaires. On voit aisément en effet, que si l'on joint par une droite BC deux points B et C de la *Punktmenge* P, et que l'on fasse tendre B et C simultanément vers le point A_1, la limite de la droite BC n'est pas en général la tangente $A_1 N$. Considérons en effet deux points B_0 et C_0 de la *Punktmenge* P, choisis de telle sorte que le cercle $A_1 B_0 C_0$ ne soit pas tangent à $A_1 N$. Considérons les transformés successifs $B_1 C_1$, $B_2 C_2, \ldots$, $B_n C_n$ de $B_0 C_0$ par les puissances positives de S. Quand n croîtra indéfiniment B_n et C_n se rapprocheront de A_1 et l'angle de $B_n C_n$ avec $A_1 N$ tendra vers une limite finie. De plus j'ai tout lieu de croire qu'il n'y a pas de tangente aux points de L qui ne font pas partie de P.

Je dis maintenant que la ligne L n'a pas de cercle osculateur. Je dis que si on mène un cercle k tangent en A_1 à la droite $A_1 N$ et passant par un point B_1 de L, ce cercle ne tendra pas vers une limite déterminée lorsque le point B_1 se rapprochera du point A_1. Menons en effet deux cercles k' et k'' tangents tous deux en A_1 à la droite $A_1 N$ et passant respectivement par deux points B'_0 et B''_0 de la ligne L. Soient B'_1, $B'_2, \ldots$, B'_n les transformés successifs de B'_0 par les puissances de S. Ils seront tous sur k' et deviendront infiniment rapprochés de A_1 quand n deviendra infini.

Donc si le cercle osculateur existait ce devrait être le cercle k'. Mais ce devrait être en même temps le cercle k''. Donc le cercle osculateur n'existe pas.

J'en ai dit assez, je pense, pour faire comprendre à quel point la ligne L diffère d'une ligne analytique.

§ 9. *Groupes symétriques.*

Considérons un polygone Π_0 limité par $n+1$ arcs de cercle A_1A_2, $A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n, A_nA_{n+1}, A_{n+1}A_1$ se coupant en $n+1$ points A_1, $A_2, \ldots, A_{n+1}$ qui sont les sommets de ce polygone. Construisons les polygones Π symétriques de Π_0 par rapport à ses divers côtés, puis les polygones symétriques des $n+1$ polygones Π par rapport à leurs divers côtés et ainsi de suite. Si les divers polygones ainsi construits ne se recouvrent pas mutuellement, on aura un groupe kleinéen.

Soit Π'_0 le polygone symétrique de Π_0 par rapport au côté $A_{n+1}A_1$; le polygone $\Pi_0 + \Pi'_0 = R_0$ sera le polygone générateur du groupe; il admettra $2n$ côtés, à savoir les n côtés $A_1A_2, A_2A_3, \ldots, A_{n-1}A_n$ de Π_0 et les côtés symétriques de Π'_0. Deux côtés symétriques seront d'ailleurs conjugués.

La première condition évidemment nécessaire pour que le groupe soit discontinu, c'est que tous les angles $A_1, A_2, \ldots, A_n, A_{n+1}$ du polygone Π_0 soient nuls ou soient des parties aliquotes de π; ils sont donc tous droits ou aigus.

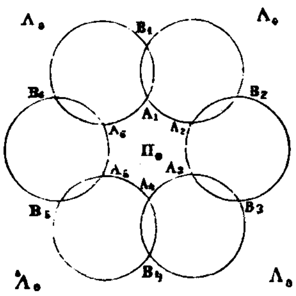
Supposons cette condition remplie et construisons le polyèdre P_0 générateur du groupe. Pour cela construisons les sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n+1}$ qui ont même centre et même rayon que les arcs de cercle A_1A_2, A_2A_3, $\ldots, A_{n+1}A_1$. Ces sphères limiteront un certain polyèdre K_0. On construira ensuite le polyèdre K'_0 symétrique de K_0 par rapport à la sphère Σ_{n+1}. Le polyèdre $P_0 = K_0 + K'_0$ sera alors le polyèdre générateur du groupe.

Les sphères Σ_{n+1} et Σ_1 se couperont suivant une circonférence C_1 qui coupera le plan des $\xi\eta$ en deux points A_1 et B_1 dont le premier est un sommet de Π_0. De même les sphères Σ_{i-1} et Σ_i se couperont suivant une circonférence C_i qui coupera le plan des $\xi\eta$ en deux points A_i et B_i dont le premier est un sommet de Π_0.

Cela posé, on peut faire diverses hypothèses.

1° On peut supposer que les sphères Σ n'ont pas d'autre intersection que les circonférences $C_1, C_2, \ldots C_{n+1}$. C'est ce qui arrive par exemple dans le cas de la figure 2. Dans ce cas le polyèdre K_0 admet deux faces de la 2[e] sorte Π_0 et Λ_0. La face Λ_0 est formée dans le cas de la figure 2 de la portion du plan extérieure au contour polygonal curviligne $B_1 B_2 B_3 \ldots B_{n+1}$. Le polyèdre K_0 admet en outre $n + 1$ faces de la 1[ère] sorte qui sont les portions des sphères $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_{n+1}$, limitées respectivement par les circonférences C_1 et C_2, C_2 et $C_3, \ldots C_{n+1}$ et C_1, et $n + 1$ arêtes de la 1[ère] sorte qui sont ces circonférences elles-mêmes. Le polyèdre $P_0 = K_0 + K_0'$ admet de même 2 faces de la 2[e] sorte, $2n$ faces de la 1[ère] sorte et $2n$ arêtes de la 1[ère] sorte.

Fig. 2.



Les conditions de discontinuité du groupe sont remplies et nous avons un groupe kleinéen. De plus il est de la 1[ère] espèce, car on peut en déformant d'une manière continue le polygone Π_0 passer au cas où les côtés de ce polygone sont orthogonaux à une circonférence, c'est à dire au cas des groupes fuchsiens. Le plan est divisé en deux domaines D et D', le premier rempli par le polygone R_0 et ses transformés, le second par le polygone Λ_0 et ses transformés.

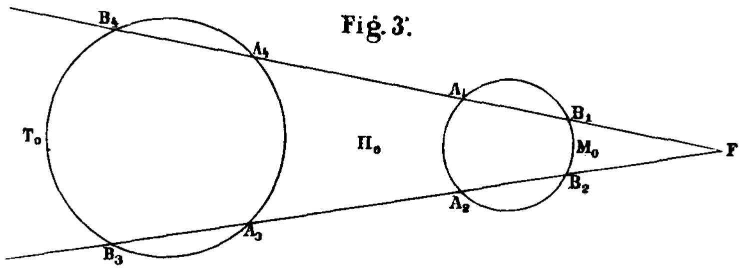
2° On pourrait supposer aussi que les sphères Σ admettent d'autres intersections que les circonférences $C_1, C_2, \ldots C_{n+1}$, qu'elles se coupent par exemple suivant d'autres circonférences $k_1, k_2, \ldots k_p$; mais que ces circonférences restent tout entières extérieures au polyèdre K_0, de telle façon qu'elles ne soient pas des arêtes de ce polyèdre. Mais il est aisé de voir que cette supposition est incompatible avec l'hypothèse que nous avons faite que les angles de Π_0 sont tous droits ou aigus.

3° On peut supposer que le polyèdre K_0 admet comme arêtes, outre les circonférences C, une ou plusieurs des circonférences k et que les angles dièdres correspondants ne sont pas des parties aliquotes de π. Il est clair alors que le groupe n'est pas discontinu.

4° Il peut arriver enfin que le polyèdre K_0 admette comme arêtes, outre les circonférences C, une ou plusieurs des circonférences k et que les dièdres correspondants soient des parties aliquotes de π. Dans ce cas le groupe est discontinu, mais on ne peut passer au cas des groupes fuchsiens en déformant le polygone Π_0. Le groupe est donc de la 2^e espèce.

Prenons comme exemple le cas de la figure 3. Le polygone Π_0 est

Fig. 3.



un quadrilatère $A_1A_2A_3A_4$ dont deux côtés opposés A_1A_4 et A_2A_3 sont des lignes droites qui prolongées vont se couper en F. Je suppose de plus que les angles A_1, A_2, A_3, A_4 et F sont des parties aliquotes de π. Le polyèdre K_0 n'admet alors que des dièdres égaux à des parties aliquotes de π. Il a trois faces de la 2^e sorte, Π_0, M_0 et T_0; il a quatre faces de la 1ère sorte faisant partie respectivement des sphères A_1A_2 et A_3A_4 et des plans A_1A_4 et A_2A_3. Le groupe G considéré est donc discontinu.

Si l'on prend le polyèdre K_0' symétrique de K_0 par rapport à la droite A_2A_3, l'ensemble de ces polyèdres sera P_0 et aura pour faces de la 2^e sorte $\Pi_0 + \Pi_0'$, $M_0 + M_0'$ et $T_0 + T_0'$ en appelant Π_0', M_0' et T_0' les polygones symétriques de Π_0, M_0 et T_0. Le plan des $\xi\eta$ va se trouver divisé en trois domaines D, D' et D'' recouverts respectivement par les transformés de $\Pi_0 + \Pi_0'$, par ceux de $M_0 + M_0'$ et par ceux de $T_0 + T_0'$.

Etudions d'abord le domaine D'. Supposons qu'on construise les triangles symétriques de M_0 par rapport à ses trois côtés, puis les triangles symétriques de ceux-ci par rapport à leurs divers côtés et ainsi de suite. Tous les triangles ainsi construits recouvriront un certain cercle H qui a pour centre F et qui coupe orthogonalement le cercle $A_1A_2B_1B_2$. Ce cercle H sera donc une partie du domaine D', mais une partie seulement. En effet, le cercle H est recouvert par les transformés de $M_0 + M'_0$ par certaines substitutions du groupe G. Ces substitutions s'obtiennent en combinant de toutes les manières possibles les trois inversions par rapport aux cercles FB_1, FB_2 et B_1B_2, de telle façon que le nombre total des substitutions combinées soit pair. Ces substitutions forment un groupe g qui est fuchsien et qui est un sous-groupe du groupe kleinéen G. Pour avoir les autres transformés du quadrilatère $M_0 + M'_0$ et par conséquent les autres parties du domaine D', il faut prendre les symétriques du cercle H par rapport au cercle A_3A_4 et à ses transformés. On obtient ainsi une infinité de cercles H_1, $H_2, \dots$ dont l'ensemble constitue le domaine D'. Ce domaine n'est donc pas d'une seule pièce.

Il en est de même de D''. En effet on démontrerait de même qu'en construisant les triangles symétriques de T_0 par rapport aux trois côtés de ce triangle, puis les triangles symétriques de ceux-ci par rapport à leurs divers côtés, et ainsi de suite, on obtient tous les transformés de $T_0 + T'_0$ par les substitutions d'un sous-groupe fuchsien g_1 du groupe kleinéen G. Ces transformés recouvrent la portion du plan extérieure à un certain cercle J et cette portion du plan ainsi que l'intérieur des divers cercles J_1, $J_2, \dots$ symétriques de J par rapport au cercle A_1A_2 et à ses transformés, constituent le domaine D''.

Au contraire le domaine D est d'une seule pièce. Si en effet nous construisons les polygones symétriques de Π_0 par rapport aux côtés de ce quadrilatère, puis les polygones symétriques de ceux-ci par rapport à leurs divers côtés, et ainsi de suite, nous obtenons évidemment tous les transformés de $\Pi_0 + \Pi'_0$ et par conséquent tout le domaine D. Mais la figure ainsi formée par ces polygones que l'on construit successivement à côté les uns des autres est d'une seule pièce. Il en est donc de même de D.

Ce domaine D est d'ailleurs limité par les circonférences H, H_1, $H_2, \dots$, J, J_1, $J_2, \dots$; *il n'est donc pas simplement connexe.* Cette circonstance aurait rendu presque impossible la démonstration directe de la discontinuité du groupe et nécessitait l'emploi de l'artifice dont nous avons fait usage.

L'existence de ces domaines limités par un nombre infini de cercles a été signalée pour la première fois par M. Klein.

§ 10. *Première famille.*

Dans le § 11 du Mémoire sur les groupes fuchsiens, nous avons envisagé (page 56) un hexagone $ABCDEF$, dont les côtés AB et CD, CD et DE, EF et FA sont conjugués et dont les angles B, D, F et $A+C+E$ sont des parties aliquotes de 2π. Déformons cet hexagone de façon que ses angles continuent à satisfaire à cette condition, mais que ses côtés ne soient plus orthogonaux à un même cercle fondamental et cherchons à quelle condition il restera le polygone générateur d'un groupe kleinéen.

Considérons donc le groupe engendré par notre hexagone déformé $ABCDEF$. Il sera évidemment dérivé de trois substitutions elliptiques S_1, S_2 et S_3 qui ont respectivement pour points doubles B et B', D et D', F et F' et pour multiplicateurs $e^{i\beta}$, $e^{i\delta}$, $e^{i\varphi}$, β, δ et φ désignant les angles B, D et F.

S_1 change BA en BC

S_2 » DC en DE

S_3 » FE en FA.

La combinaison

$$S_1S_2S_3 = S_4$$

est aussi une substitution elliptique qui a pour points doubles A et A' et pour multiplicateur $e^{-i\alpha}$, α désignant l'angle $A+C+E$.

Les combinaisons

$$S_2S_3S_1 = S_5 \quad \text{et} \quad S_3S_1S_2 = S_6$$

ont aussi pour multiplicateurs $e^{-i\alpha}$ et elles ont respectivement pour points doubles C et C', E et E'.

Voyons maintenant quelles relations doivent avoir lieu entre ces points doubles et ces multiplicateurs.

Soient z_1 le transformé de z par S_1, z_2 celui de z_1 par S_2, z_3 celui de z_2 par S_3; z_3 sera par conséquent le transformé de z par S_4 et nous aurons les relations:

$$
(1)\qquad
\begin{aligned}
\frac{z_1 - B}{z_1 - B'} &= e^{i\beta}\frac{z - B}{z - B'}\\[2mm]
\frac{z_2 - D}{z_2 - D'} &= e^{i\delta}\frac{z_1 - D}{z_1 - D'}\\[2mm]
\frac{z_3 - F}{z_3 - F'} &= e^{i\varphi}\frac{z_2 - F}{z_2 - F'}\\[2mm]
\frac{z_3 - A}{z_3 - A'} &= e^{-i\alpha}\frac{z - A}{z - A'}.
\end{aligned}
$$

En différentiant les relations (1), on trouve:

$$
(2)\qquad
\begin{aligned}
\frac{dz_1}{(z_1 - B')^2} &= e^{i\beta}\frac{dz}{(z - B')^2}, &\quad \frac{dz_1}{(z_1 - B)^2} &= e^{-i\beta}\frac{dz}{(z - B)^2}\\[2mm]
\frac{dz_2}{(z_2 - D')^2} &= e^{i\delta}\frac{dz_1}{(z_1 - D')^2}, &\quad \frac{dz_2}{(z_2 - D)^2} &= e^{-i\delta}\frac{dz_1}{(z_1 - D)^2}\\[2mm]
\frac{dz_3}{(z_3 - F')^2} &= e^{i\varphi}\frac{dz_2}{(z_2 - F')^2}, &\quad \frac{dz_3}{(z_3 - F)^2} &= e^{-i\varphi}\frac{dz_2}{(z_2 - F)^2}\\[2mm]
\frac{dz_3}{(z_3 - A')^2} &= e^{-i\alpha}\frac{dz}{(z - A')^2}, &\quad \frac{dz_3}{(z_3 - A)^2} &= e^{i\alpha}\frac{dz}{(z - A)^2}.
\end{aligned}
$$

Parmi les relations (2) envisageons les trois premières de la seconde colonne et la dernière de la première colonne et faison y, $z = A$ d'où $z_1 = C$, $z_2 = E$, $z_3 = A$; il viendra en combinant les relations ainsi obtenues de manière à éliminer dz, dz_1, dz_2, dz_3:

$$\frac{(A - B)^2(C - D)^2(E - F)^2}{(C - B)^2(E - D)^2(A - F)^2} = e^{i(\alpha - \beta - \delta - \varphi)}$$

ou:

$$(3)\qquad \frac{(A - B)(C - D)(E - F)}{(B - C)(D - E)(F - A)} = \pm e^{i\frac{\alpha - \beta - \delta - \varphi}{2}}$$

Une discussion facile montre que c'est le signe $+$ qui convient.

Dans le cas où les quatre angles α, β, δ et φ sont nuls, c'est à dire dans le cas où la groupe se réduit à la 2[e] famille la relation (3) devient:

$$(A-B)(C-D)(E-F)=(B-C)(D-E)(F-A).$$

Supposons donc qu'on se donne, outre les angles α, β, δ, φ, six points doubles A, B, C, D, E, F de façon à satisfaire à la relation (3). Les trois points doubles B', D' et F' sont alors déterminés par les équations:

$$\frac{C-B}{C-B'}=e^{i\beta}\frac{A-B}{A-B'},\quad \frac{E-D}{E-D'}=e^{i\delta}\frac{C-D}{C-D'},\quad \frac{A-F}{A-F'}=e^{i\varphi}\frac{E-F}{E-F'}$$

et les trois points doubles A', C' et E' par les relations:

$$\frac{C'-B}{C'-B'}=e^{i\beta}\frac{A'-B}{A'-B'},\quad \frac{E'-D}{E'-D'}=e^{i\delta}\frac{C'-D}{C'-D'},\quad \frac{A'-F}{A'-F'}=e^{i\varphi}\frac{E'-F}{E'-F'}.$$

Il n'arrivera pas en général que les quatre points A, B, A', B' seront sur un même cercle. Il en sera de même des points B, B', C et C'; C, C', D et D' etc. Il résulte de là que si nous construisons le polyèdre P_0 générateur du groupe, la face de la 2[e] sorte de ce polyèdre ne sera pas en général l'hexagone $ABCDEF$, mais un dodécagone, ainsi qu'on va le voir:

Voici en effet comment on peut construire le polyèdre P_0.

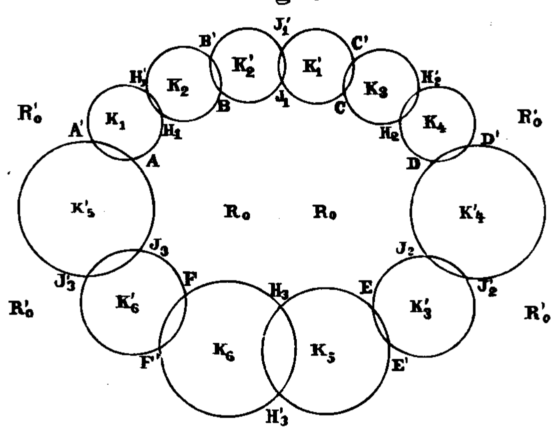
Considérons 6 cercles K_1, K_2, ... K_6 passant respectivement par A et A', par B et B', par C et C', par D et D', par E et E', par F et F'. Les deux premiers se couperont en H_1 et H_1', les deux suivants en H_2 et H_2', les deux derniers en H_3 et H_3'. Soient maintenant K_1' et K_2' les transformés de K_1 et K_2 par S_1; ils passeront, le premier par C et C', le second par B et B' et ils se couperont en J_1 et J_1'.

Soient de même K_3' et K_4' les transformés de K_3 et de K_4 par S_2; K_5' et K_6' les transformés de K_5 et de K_6 par S_3. Ces quatre cercles passeront respectivement par E et E', par D et D', par A et A', par F et F' et ils se couperont les deux premiers en J_2 et J_2', les deux derniers en J_3 et J_3'.

Je suppose que ces différents cercles n'aient pas d'autre point d'intersection que ceux que je viens d'énumérer et que la position relative de ces divers cercles et points soit celle qui est indiquée par la figure 4.

Dans ce cas construisons les sphères Σ_i et Σ'_i qui ont même centre et même rayon que les cercles K_i et K'_i. Puis envisageons le polyèdre P_0 formé par la portion du plan extérieure à ces douze sphères. Ce po-

Fig. 4.



lyèdre aura deux faces de la 2^e^ sorte, R_0 et R'_0 qui seront respectivement les portions du plan intérieure et extérieure à l'anneau formé par les douze cercles K_i et K'_i; il aura douze faces de la 1^ère^ sorte formées par des portions des sphères Σ_i et Σ'_i; ces douze faces seront conjuguées deux à deux de telle façon que la face Σ'_i soit conjuguée de Σ_i. Le polyèdre P_0 admettra douze arêtes de la première sorte formées par les intersections deux à deux des sphères Σ_i et Σ'_i; ces arêtes se répartiront en 7 cycles ainsi que l'indique le tableau suivant.

Numéro du cycle	Arêtes faisant partie du cycle	Somme des dièdres du cycle
1	AA', CC' et EE'	α
2	BB'	β
3	DD'	δ
4	FF'	φ
5	$H_1H'_1$ et $J_1J'_1$	2π
6	$H_2H'_2$ et $J_2J'_2$	2π
7	$H_3H'_3$ et $J_3J'_3$	2π

Aux quatre premiers cycles correspondent les substitutions elliptiques S_4, S_1, S_2 et S_3; aux trois derniers la substitution identique. Si donc les cercles K_i et K'_i sont dans la situation relative indiquée par la figure 4, le groupe considéré, dont le polyèdre générateur sera P_0, sera discontinu.

Notre groupe sera donc kleinéen, pourvu que les points doubles A, B, C, D, E, F satisfassent non-seulement à la relation (3) mais à des inégalités exprimant que les douze cercles K_i et K'_i sont dans la situation relative indiquée par la figure 4.

Le plan se trouve partagé en deux domaines limités par une ligne L. Voici comment on peut trouver la génération de la ligne L: on considère l'ensemble des points doubles de toutes les substitutions hyperboliques ou loxodromiques du groupe. Ces points doubles forment une *Punktmenge* P; si on y adjoint son *erste Ableitung* P', on aura la ligne L.

§ 11. *Fonctions kleinéennes.*

Soit G un groupe kleinéen quelconque et soient

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

les diverses substitutions de ce groupe. Formons comme dans la théorie des fonctions fuchsiennes la série suivante:

$$(1) \qquad \theta(z) = \sum H\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

l'algorithme $H(z)$ représentant une fonction rationnelle de z dont aucun infini ne se confond avec un point singulier du groupe, et m désignant un entier plus grand que 1.

Cette série est convergente. Dans le § 1 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, nous avons donné deux démonstrations de la convergence de cette série. La première de ces démonstrations subsiste dans le cas qui nous occupe; il n'en serait pas de même de la seconde.

A tout groupe kleinéen correspondent donc une infinité de fonctions thétakleinéennes $\theta(z)$ et de fonctions kleinéennes $F(z)$ jouissant des propriétés

$$\theta\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = \theta(z)(\gamma_i z + \delta_i)^{2m}$$

$$F\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) = F(z).$$

Ces fonctions jouissent des mêmes propriétés que les fonctions fuchsiennes et thétafuchsiennes. Par conséquent toutes les fonctions kleinéennes s'expriment rationnellement à l'aide de deux d'entre elles, x et y, entre lesquelles il y a une relation algébrique

$$f(x, y) = 0 \tag{2}$$

dont le genre est égal à celui du groupe G. Quand ce genre est nul, toutes les fonctions kleinéennes s'expriment rationnellement à l'aide de l'une d'entre elles que j'appelle x.

Si je pose:

$$v_1 = \sqrt{\frac{dz}{dx}}, \qquad v_2 = z\sqrt{\frac{dz}{dx}}$$

v_1 et v_2 sont deux intégrales de l'équation linéaire:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v \tag{3}$$

qui se réduit à

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x)v \tag{3'}$$

dans le cas où le genre est nul (Cf § 4 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes); dans ces équations φ désigne une fonction rationnelle.

Examinons quelques cas particuliers, et d'abord reprenons l'équation (3') des paragraphes 5 et 7 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes:

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \frac{P(x)}{Q^2(x)}v$$

où

$$Q(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n).$$

Le polynôme $P(x)$ est de degré $2n - 2$ et je suppose qu'il satisfait aux $n + 1$ conditions suivantes

$$(4)\qquad \begin{aligned} &P(a_i) = -Q'^2(a_i)\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_i^2}\right) \\ &\text{coefficient de } x^{2n-2} \text{ dans } P(x) = -\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{4\beta_{n+1}^2}\right) \end{aligned}$$

Les nombres $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{n+1}$ sont des entiers positifs qui peuvent devenir infinis.

Nous avons vu que si le polynôme $P(x)$ (outre les $n + 1$ conditions (4) qui sont *complexes* et qui par conséquent équivalent à $2n + 2$ conditions réelles) satisfait à $2n - 4$ autres conditions réelles et transcendantes, la variable x est une fonction fuchsienne du rapport des intégrales.

Il résulte de la théorie précédente que si le polynôme $P(x)$ satisfait non seulement aux conditions (4), mais à certaines *inégalités,* la variable x sera une fonction kleinéenne du rapport des intégrales. Supposons en effet les conditions (4) remplies; appelons z le rapport des intégrales de l'équation (3); quand x reviendra à sa valeur initiale, après avoir décrit un contour fermé C_i, z se changera en $\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$ et les substitutions

$$\left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right)$$

formeront un groupe G.

Si ce groupe est kleinéen, x sera une fonction kleinéenne de z. Or ce groupe G, comme on le voit aisément est dérivé de n substitutions elliptiques ou paraboliques $S_1, S_2, \ldots S_n$, ayant respectivement pour multiplicateurs

$$e^{\frac{2i\pi}{\beta_1}},\ e^{\frac{2i\pi}{\beta_2}},\ e^{\frac{2i\pi}{\beta_3}}, \ldots\ e^{\frac{2i\pi}{\beta_n}}.$$

La combinaison

$$S_1 S_2 \ldots S_n$$

sera aussi une substitution elliptique ou parabolique qui aura pour multiplicateur:

$$e^{-\frac{2i\pi}{\beta_{n+1}}}$$

Or nous avons vu au paragraphe précédent qu'il suffit de certaines inégalités imposées aux coëfficients d'un pareil groupe G pour qu'il soit discontinu. Il suffira donc aussi d'imposer certaines inégalités aux coëfficients de $P(x)$ pour que x soit fonction uniforme de z.

Reprenons de même l'équation (3) du paragraphe 6 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \qquad \psi(x, y) = 0.$$

J'appelle a_i, b_i les points analytiques différents de c_i, d_i et pour lesquels la fonction φ devient infinie. Je suppose que la fonction φ satisfasse aux conditions suivantes:

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\lim (y - d_i)^2 \left(\frac{dx}{dy}\right)^2 \varphi(x, y) = -\frac{3}{4} \qquad (\text{pour } x = c_i,\ y = d_i) \\ &\lim (x - a_i)\varphi(x, y) = \frac{1 - \beta_i^2}{4\beta_i^2} \qquad (\text{pour } x = a_i,\ y = b_i). \end{aligned}$$

Les nombres β_i sont encore ici des entiers positifs qui peuvent devenir infinis.

Nous avons vu que si la fonction φ satisfait en outre à certaines conditions transcendantes, x est fonction fuchsienne du rapport z des variables. De même si cette fonction φ satisfait non seulement aux équations (5) mais à certaines inégalités, x sera fonction kleinéenne de z. La démonstration serait tout à fait analogue à celle qui précède.

Ainsi pour que dans l'équation (3) x exprimé en fonction de z soit une fonction kleinéenne de la 1ère, de la 2e, ou de la 6e familles, il suffit de certaines *égalités algébriques* et de certaines *inégalités*. Nous n'avons pas à nous imposer *d'égalité transcendante*. Il n'en est pas de même pour les fonctions des autres familles. Si nous voulons par exemple que dans l'équation (3) x soit fonction kleinéenne de la 3ème famille du rapport z des intégrales, il faudra nous imposer certaines égalités transcendantes.

Reprenons en effet l'équation (3) du paragraphe 8 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes

$$\frac{d^2v}{dx^2} = \varphi(x, y)v, \qquad \psi(x, y) = 0$$

en supposant que la fonction φ satisfait aux conditions énoncées à la page 278 de ce paragraphe (lignes 30 et suivantes). Soit n le genre de la relation $\psi = 0$; le groupe kleinéen de notre équation (3) devra être de genre n et dépendra par conséquent de $3n - 3$ paramètres complexes; c'est à dire précisément d'autant de paramètres qu'il y a de modules dans la relation $\psi = 0$. Quand on se donnera cette relation $\psi = 0$, le groupe kleinéen sera donc entièrement déterminé; il en sera donc de même de la fonction φ. Il résulte de là que cette fonction est assujettie, indépendamment des conditions algébriques de la page 278 du Mémoire sur les fonctions fuchsiennes, à n conditions transcendantes, puisque ces conditions algébriques ne suffiraient pas pour la déterminer.

§ 12. *Historique.*

C'est M. SCHOTTKY qui a le premier remarqué la discontinuité de certains groupes kleinéens (Journal für reine und angewandte Mathematik, Bd 83, page 346), à savoir des groupes symétriques de la $3^{ème}$ famille. Depuis, M. KLEIN a approfondi la théorie de ces groupes dans diverses notes insérées aux Mathematische Annalen (Tomes XIX, XX et XXI) et dans un mémoire plus étendu inséré dans le XXI^e volume de ces mêmes annales et intitulé: Ueber RIEMANNsche Functionentheorie.

J'avais moi-même dans deux notes que j'eus l'honneur de présenter à l'Académie des Sciences de Paris le 27 Juin et le 11 Juillet 1881 (voir Comptes Rendus, Tomes 92 et 93) énoncé succinctement la plupart des résultats exposés dans le présent mémoire.

Paris 19 Mai 1883.