实变函数论与泛函分析 (下册) 习题解答补

郑津畅

October 15, 2014

制作解答的初衷是复习泛函分析和练习 tex , 制作期间得到了王璟睿和尹雪元同学的不少帮助, 在此特别鸣谢, 不过由于个人时间所限, 完成期被无限延长, 希望有同学愿意承接之后的部分, 目前进度在 6.3 节. 同时由于个人水平所限, 如果有同学发现解答中的错误并愿意指出, 可以通过邮箱地址 jczheng1234@hotmail.com 联系我. 另外, 有部分习题我未能完成, 其题号如下: 4.6.4, 5.1.14(3), 5.2.10(2), 5.3.2, 5.4.15, 5.4.19, 5.5.8-5.5.11, 5.6.6, 5.6.7, 6.2.5(2), 6.2.9 的反例, 6.3.3, 6.3.5.

Contents

4 度量空间

4.1 度量空间的基本概念

习题 4.1.2. *在三位欧几里得空间考虑任一球面 S . 对于 $x, y \in S$, 规定 x, y 间的距离 $d(x,y)$ 是过 x, y 两点的大圆上以 x, y 为端点的劣弧的弧长. 证明 $d(x,y)$ 是 x, y 间的距离, 它不是欧几里得距离. 如果用 $\rho(x,y)$ 表示欧几里得距离, 那么*

$$\rho(x,y) \leq d(x,y) \leq \frac{\pi}{2}\rho(x,y).$$

从而证明: S 中点列 $\{x_n\}$ 按距离 $d(x,y)$ 收敛于 x 的充要条件是按坐标收敛于 x .

证明: 由于欧式距离为连接两点的线段长度, 自然 $d(x,y)$ 不是欧式距离. 假定该球面以 a 点为球心, 半径为 r , 并记 $x-a, y-a$ 的夹角为 $\theta : 0 \leq \theta \leq \pi$. 因此,

$$d(x,y) = r\theta,\ \rho(x,y) = 2r\sin\frac{\theta}{2}.$$

由于 $0 \leq \frac{\theta}{2} \leq \frac{\pi}{2}$, 故 $\frac{2}{\pi}\frac{\theta}{2} \leq \sin\frac{\theta}{2} \leq \frac{\theta}{2}$, 因此成立

$$\rho(x,y) \leq d(x,y) \leq \frac{\pi}{2}\rho(x,y).$$

因而两者在 S 上生成的拓扑是等价的, 故其收敛点列等价. □

习题 4.1.4. *设 $\rho(x,y)$ 为空间 R 上的距离, 证明*

$$\tilde{\rho}(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)}$$

适合距离的条件 $1^\circ, 2^\circ$, 并且按 $\tilde{\rho}$ 收敛等价于按 ρ 收敛.

证明: 由于 ρ 是距离, 因此 $\tilde{\rho}(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \geq 0$, 并且 $\tilde{\rho} = 0$ 当且仅当 $\rho(x,y) = 0$, 即 $x = y$. 故 1° 成立. 对于 2° , 由于函数 $f(x) = \frac{x}{1+x}$ 在区间 $[0, +\infty)$ 单调递增, 故

$$\tilde{\rho}(x,y) = \frac{\rho(x,y)}{1+\rho(x,y)} \leq \frac{\rho(x,z)+\rho(z,y)}{1+\rho(x,z)+\rho(z,y)} \leq \frac{\rho(x,z)}{1+\rho(x,z)} + \frac{\rho(z,y)}{1+\rho(z,y)} = \tilde{\rho}(x,z) + \tilde{\rho}(z,y).$$

假设 $\{x_n\}$ 是 R 上一点列并. 由于

$$\tilde{\rho}(x,y) \leq \rho(x,y),$$

故, 若点列关于 ρ 收敛, 则必关于 $\tilde{\rho}$ 收敛. 另一方面, 若点列关于 $\tilde{\rho}$ 收敛于点 x . 则对于任意的 $\epsilon < 1$, 存在 N 使得 $\tilde{\rho}(x_n, x) < \epsilon$ 对于任意的 $n > N$ 成立, 即

$$\tilde{\rho}(x_n,x) = \frac{\rho(x_n,x)}{1+\rho(x_n,x)} < \epsilon.$$

此时成立

$$\rho(x_n,x) < \frac{1}{1-\epsilon} - 1 = \sum_{i=1}^{\infty}\epsilon^i.$$

故, 当点列关于 $\tilde{\rho}$ 收敛时, 也必关于 ρ 收敛. 综上, 二者的收敛是等价的. □

习题 4.1.6. *对任何* $x=(x_1,\ldots,x_n), y=(y_1,\ldots,y_n)\in E^n$, *规定*

$$\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|x_i-y_i|,$$

其中 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ *是* n *个正数, 证明* ρ *是* E^n *中的距离, 并且按距离收敛等价于按坐标收敛.*

证明: 1° 成立是明显的. 对于 2° , 有

$$\begin{aligned}\rho(x,y)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|x_i-y_i| &\le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i|x_i-z_i+z_i-y_i| \\ &\le \sum_{i=1}^{n}\lambda_i|x_i-z_i|+\sum_{i=1}^{n}\lambda_i|z_i-y_i|=\rho(x,z)+\rho(z,y).\end{aligned}$$

记 $\lambda_{\max}=\max\lambda_i, \lambda_{\min}=\min\lambda_i$. 因为维度有限,故按坐标收敛等价于按度量 $d(x,y)=\sum_{i=1}^{n}|x_i-y_i|$ 收敛. 由于

$$\lambda_{\min}d(x,y)\le\rho(x,y)\le\lambda_{\max}d(x,y).$$

故二者的收敛也是等价的. □

习题 4.1.8. R *是* [0.1] *上多项式全体. 当* $P,Q\in R$ *时, 记* $P-Q=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i$, *在* R *上分别作*

$$\begin{aligned}\rho_1(P,Q)&=\max_{x\in[0,1]}|P(x)-Q(x)|,\\ \rho_2(P,Q)&=\sum_{i=0}^{n}|a_i|,\\ \rho_3(P,Q)&=|a_0|.\end{aligned}$$

证明:

1. ρ_1,ρ_2 *都是* R *上距离;*
2. *按* ρ_1 *收敛等价于多项式一致收敛于某一多项式;*
3. *按* ρ_2 *收敛可以推出按* ρ_1 *收敛, 但反之不真.*
4. ρ_3 *是拟距离, 并且按* ρ_3 *导出的商度量空间* $(\mathscr{D},\tilde\rho)$ *与一维欧几里得空间* E^1 *等距同构.*

证明:

1. ρ_1,ρ_2 满足 1° 是明显的. 对于 2° , 假定 $P-Q=\sum_{i=0}^{n}a_ix^i=P-S+S-Q=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i+\sum_{i=0}^{n}c_ix^i$, 其中 $a_i=b_i+c_i$. 那么

   $$\rho_1(P,Q)=\max_{x\in[0,1]}|P(x)-Q(x)|=\max_{x\in[0,1]}|P(x)-S(x)+S(x)-Q(x)|\le\rho_1(P,S)+\rho_1(S,Q),$$

   $$\rho_2(P,Q)=\sum_{i=0}^{n}|a_i|=\sum_{i=0}^{n}|b_i+c_i|\le\rho_2(P,S)+\rho_2(S,Q).$$

   即, ρ_1,ρ_2 都是 R 上距离.

2. 若 $\{P_n\}$ 是按 ρ_1 收敛到 $P \in R$ 的一列点列, 则对于任意的 ϵ , 存在 N 使得当 $n > N$ 时, 成立
$$\rho_1(P, P_n) = \max_{x\in[0,1]} |P(x) - P_m(x)| < \epsilon.$$
即, $\forall x \in [0,1]$, 只要 $n > N$, 就有 $|P(x) - P_m(x)| < \epsilon$, 故该收敛为一致收敛.
另一方面, 若 $\{P_n\}$ 一致收敛于 $P \in R$, 则对于任意的 ϵ , 存在 N 使得当 $n > N$ 时, 成立
$$|P(x) - P_m(x)| < \epsilon.$$
因而, $\rho_1(P, P_n) = \max_{x\in[0,1]} |P(x) - P_m(x)| < \epsilon$, 即该点列按照距离 ρ_1 收敛.

3. 只需要证明对于任意 $P, Q \in R$, 成立 $\rho_1(P,Q) \le \rho_2(P,Q)$ 即可. 该不等式成立, 因为
$$\rho_1(P,Q) = \max_{x\in[0,1]} |P(x) - Q(x)| = \max_{x\in[0,1]} |\sum_{i=0}^{n} a_i x^i| \le \max_{x\in[0,1]} \sum_{i=0}^{n} |a_i x^i| \le \sum_{i=0}^{n} |a_i| = \rho_2(P,Q).$$
对于反例, 考虑点列 $\{P_n\}$
$$P_n = \sum_{i=n+1}^{2n} (-1)^i \frac{1}{i} x^i.$$
由于 $|P_n| \le \frac{1}{n+1} x^{n+1} \le \frac{1}{n+1}$, 故可知 P_n 一致收敛于零多项式. 然而,
$$\rho_2(P_n, 0) = \sum_{i=n+1}^{2n} \frac{1}{n+1} \ge \frac{1}{2}.$$
所以, 在 ρ_2 下, 不收敛于零多项式. 若该点列在 ρ_2 下收敛于另一多项式 S , 则按照前所证. 该点列在 ρ_1 也应该收敛到多项式 S , 然而由于已知点列按 ρ_1 收敛到零多项式, 故该点列在 ρ_2 下不收敛.

4. ρ_3 为拟距离是明显的. 定义 $\mathscr{D}$ 到 E 的映射 Φ 为
$$\Phi(\tilde{P}) = a_0,$$
其中, a_0 为代表元 P 的零次项系数. 由于位于同一等价类的元素有着相同的零次项系数, 故这样的定义是良定义. 易见映射 Φ 为是一一的, 同时由于
$$|\Phi(\tilde{P}) - \Phi(\tilde{Q})| = |a_0 - b_0| = \rho_3(P,Q),$$
故映射 Φ 为等距映射. 综上, $(\mathscr{D}, \tilde{\rho})$ 与一维欧几里得空间 E^1 等距同构.

□

4.2 线性空间上的范数

习题 4.2.2. *设 a, b, p 是实数, 并且 $p \ge 1$. 证明不等式*
$$|ta + (1-t)b|^p \le t|a|^p + (1-t)|b|^p, 0 \le t \le 1.$$
特别地, 令 $t = \frac{1}{2}$, 有 $|a+b|^p \le 2^{p-1}(|a|^p + |b|^p)$.

证明: 暂时地, 先假定 $a,b\ge 0$. 由于函数 $f(x)=x^p$ 在 $[0,+\infty)$ 上为凸函数, 因而当 $a,b\ge 0$ 时成立

$$f(ta+(1-t)b)\le tf(a)+(1-t)f(b),$$

即,

$$(ta+(1-t)b)^p\le ta^p+(1-t)b^p.$$

若 a,b 同为负数, 则两边代入 $-a,-b$ 满足上式, 取绝对值即得. 若 a,b 异号, 不妨设 $a\ge 0$, 则

$$|ta+(1-t)b|^p\le|ta-(1-t)b|^p\le ta^p+(1-t)(-b)^p=t|a|^p+(1-t)|b|^p.$$

□

习题 4.2.4. *有界实数列全体所构成的赋范线性空间 l^∞ 与空间 $C(0,1]$ 的一个子空间是等距同构的.*

证明: 将区间 $(0,1]$ 分割为 $(\frac{1}{2},1],(\frac{1}{4},\frac{1}{2}],\ldots,(\frac{1}{2^n},\frac{1}{2^{n-1}}],\ldots$. 对于 l^∞ 中任意点 $\{a_n\}$, 对应于如下的连续函数 $u(x)$

$$u(x)=\begin{cases} a_m & ,\frac{1}{2^{2m-1}}<x\le\frac{1}{2^{2m-2}};\\ 2^{2m}(a_m-a_{m+1})x+2a_{m+1}-a_m & ,\frac{1}{2^{2m}}<x\le\frac{1}{2^{2m-1}}\end{cases}$$

即, 在区间 $(\frac{1}{2^{2m-1}},\frac{1}{2^{2m-2}}]$ 上等于 a_m , 在其他区间上为连接两端线段的连续函数. 由于连接的线段不会超过端点的值, 因此

$$\rho(\{x_n\},\{y_n\})=\max_n|x_n-y_n|=\max_{x\in(0,1]}|u(x)-v(x)|=d(u(x),v(x)).$$

□

习题 4.2.6. *R 是线性空间, p 是 R 上函数, 如果*

1. *$p(x)\ge 0,p(x)=0$ 等价于 $x=0$;*
2. *$p(x+y)\le p(x)+p(y)$;*
3. *$p(-x)=p(x)$, 并且 $\lim_{\alpha_n\to n}p(\alpha_n x)=0$, $\lim_{p(x_n)\to n}p(\alpha x_n)=0$ (α_n,α 是数), 称 p 是准范数, (R,p) 为赋准范空间.*
   证明在 S 空间中, 规定

$$p(f)=\int_E\frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}\,\mathrm{d}\mu,$$

p 是 S 上准范数, 因此, S 可视为赋准范空间. 类似地, $\mathscr{A}$, s 也是赋准范空间.

证明: 由于空间 S 是定义在有限测度集 E 上的可测函数等价类全体. 因此, $p(f)=\int_E\frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}\,\mathrm{d}\mu$ 存在且非负, 并且当且仅当 $f(x)$ 为零函数等价类时为零, 即 1 成立. 对于 2 , 由函数 $(x)=\frac{x}{1+x}$ 的单调性, 参考习题 4.1.4 中相关证明, 当 $ab\ge 0$ 时成立

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

若 $ab\le 0$, 不妨假设 $a>0,|a|\ge|b|$, 再次利用 $s(x)$ 的单调性, 有

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|}=\frac{a-b}{1+a-b}\le\frac{a}{1+a}\le\frac{|a|}{1+|a|}+\frac{|b|}{1+|b|}.$$

综上, 无论 a, b 取值何如, 总成立

$$\frac{|a+b|}{1+|a+b|} \leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}.$$

因此,

$$p(f+g) = \int_E \frac{|f(t)+g(t)|}{1+|f(t)+g(t)|}\,\mathrm{d}\mu \leq \int_E \frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}\,\mathrm{d}\mu + \int_E \frac{|g(t)|}{1+|g(t)|}\,\mathrm{d}\mu = p(f)+p(g).$$

对于 3 , 对称性是明显的. 若数列 $\{\alpha_n\}$ 趋于零, 那么不失一般性地, 可以假设 $|\alpha_n| < 1$, 因而此时有 $\frac{|\alpha_n f(t)|}{1+|\alpha_n f(t)|} < \frac{|f(t)|}{1+|f(t)|}$. 由控制收敛定理, 成立

$$\lim_{\alpha_n \to 0} p(\alpha_n f) = \lim_{\alpha_n \to 0} \int_E \frac{|\alpha_n f(t)|}{1+|\alpha_n f(t)|}\,\mathrm{d}\mu = \int_E \lim_{\alpha_n \to 0} \frac{|\alpha_n f(t)|}{1+|\alpha_n f(t)|}\,\mathrm{d}\mu = 0.$$

对于满足 $p(f_n) \to 0$ 的函数列 $\{f_n\}$, 断言 $\int_E |f_n(t)| d\mu \to 0$. 否则, 若存在 $\epsilon > 0$ 使得对于任意的 N , 始终存在 $n > N$ 使得 $\int_E |f_n(t)|\,\mathrm{d}\mu > \epsilon$. 那么,

$$p(f_n) = \int_E \frac{|f_n(t)|}{1+|f_n(t)|}\,\mathrm{d}\mu \geq 1 - \frac{1}{1+\epsilon},$$

这将与 $p(f_n) \to 0$ 矛盾. 所以,

$$\begin{aligned}
p(\alpha f_n) &= \int_E \frac{|\alpha f_n(t)|}{1+|\alpha f_n(t)|} - \frac{|f_n(t)|}{1+|f_n(t)|}\,\mathrm{d}\mu + \int_E \frac{|f_n(t)|}{1+|f_n(t)|}\,\mathrm{d}\mu \\
&= (|\alpha|-1) \int_E \frac{|f_n(t)|}{(1+|f_n(t)|)(1+|\alpha f_n(t)|)}\,\mathrm{d}\mu + \int_E \frac{|f_n(t)|}{1+|f_n(t)|}\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq (|\alpha|-1) \int_E |f_n(t)|\,\mathrm{d}\mu + p(f_n).
\end{aligned}$$

因此, $\lim_{p(f_n) \to 0} p(\alpha f_n) = 0$. 综上, p 为 S 上的准范数. $\mathscr{A}, s$ 类似. □

习题 4.2.8. *R 是 $[0,1]$ 上多项式全体, 对 R 中任何 $P(x) = \sum_{i=0}^n a_i x^i$, 规定 $\|P\| = \sum_{i=0}^n |a_i|$. 证明 $\|\cdot\|$ 是 R 上范数, 说明 R 按 $\|\cdot\|$ 不是严格赋范的.*

证明: $\|P\| \geq 0$ 是明显的. 并且 $\|P\| = 0$, 等价于 P 为零多项式. 对于齐次性和三角不等式, 有

$$\|\alpha P\| = \sum_{i=0}^n |\alpha a_i| = |\alpha| \sum_{i=0}^n |a_i| = |\alpha| \|P\|,$$

$$\|P+Q\| = \sum_{i=0}^n |a_i + b_i| \leq \sum_{i=0}^n |a_i| + \sum_{i=0}^n |b_i| = \|P\| + \|Q\|.$$

因此, $\|\cdot\|$ 是 R 上一个范数.
对于非严格赋范的反例, 考虑 $P(x) = 1+2x, Q(x) = 2+x$. 有

$$\|P+Q\| = 3+3 = \|P\| + \|Q\|.$$

然而, $P(x)$ 与 $Q(x)$ 线性无关. □

4.3 空间 L^p

习题 4.3.2. *设 $R_1,\dots,R_n,\dots$ 是一列赋范线性空间, $x=\{x_n\}$ 是一列元素, 其中 $x_n\in R_n, n=1,2,3,\dots$. 而且, $\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p<\infty$. 这种元素列全体记作 R, 类似通常的数列的加法及数积运算, 在 R 中引入线性运算, 证明 R 是一个线性空间. 如果又规定*

$$\|x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}(p\geq 1),$$

证明 R 按范数 $\|\cdot\|$ 成为赋范线性空间; R 是严格赋范的充要条件是每个 R_n 都是严格赋范的.

证明: 由习题 4.2.2 可知 R 关于加法封闭, 而其他线性空间的性质是明显的. 对于范数 $\|\cdot\|$, 其非负性也是明显的, 并且 $\|x\|=0$ 当且仅当诸 $\|x_i\|=0$, 即 x 为零元. 对于齐次性, 有

$$\|\alpha x\|=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|\alpha x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\left(|\alpha|^p\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\alpha|\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=|\alpha|\|x\|.$$

而对于三角不等式, 应用离散 Minkowski 不等式,

$$\begin{aligned}\|x+y\|&=\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n+y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}(\|x_n\|+\|y_n\|)^p\right)^{\frac{1}{p}}\\&\leq\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{n=1}^{\infty}\|y_n\|^p\right)^{\frac{1}{p}}=\|x\|+\|y\|.\end{aligned}$$

因而等号成立当且仅当 $\|x_n+y_n\|=\|x_n\|+\|y_n\|, \|x_n\|=\alpha\|y_n\|$ 对所有 n 成立. 所以, 当 R_n 都是严格赋范时, R 严格赋范. 反过来看, 若 R 严格赋范, 则 R_n 中元素 x_n 同时也可视作 R 中元素中元素 $x=\{0,0,\dots,x_n,0,\dots,\}$, 因此 R_n 都严格赋范. □

习题 4.3.4. *设 $(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)$ 是全有限测度空间, $1\leq p<p'$, 那么 $L^{p'}(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)\subset L^p(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)$. 当 $(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)$ 不是全有限时, 举例说明 $L^{p'}(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)\subset L^p(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)$ 未必成立.*

证明: 因为全空间测度有限, 对于任意 $f(x)\in L^{p'}(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)$, 由 Hölder 不等式, 有

$$\int_\Omega|f(x)|^p d\mu\leq\left(\int_\Omega 1d\mu\right)^{\frac{p'-p}{p'}}\left(\int_\Omega|f(x)|^{p'}d\mu\right)^{\frac{p}{p'}}=|\Omega|^{\frac{p'-p}{p'}}\|f\|_{p'}^{\frac{p}{p'}}.$$

故, $f(x)\in L^p(\Omega,\boldsymbol{B},\mu)$. 对于非全有限空间的反例, 考虑 $[1,\infty)$ 上的 Lebesgue 测度, 函数 $f(x)=\frac{1}{x}$ 平方可积, 但本身不可积. □

4.4 度量空间中的点集

习题 4.4.2. *设 F 是度量空间中的点集, $a>0$. 证明*

$$O(F,a)=\{x|\rho(x,F)<a\}$$

是开集. 问 $\{x|\rho(x,F)\leq a\}$ 是否是闭集?

证明: 断言, 对于任意的 $x \in O(F,a)$, 开球 $O(x, a-\rho(x,F)) \subset O(F,a)$. 因为任取 $y \in O(x,a-\rho(x,F))$, 由三角不等式成立

$$\rho(y,F) = \inf_{z\in F} \rho(y,z) \le \inf_{z\in F}(\rho(x,z)+\rho(x,y)) < \rho(x,F)+a-\rho(x,F) = a.$$

因此, $O(F,a)$ 是开集. 记 $G = \{x|\rho(x,F) \le a\}$. 任取 G 中一收敛于 x 的点列 $\{x_n\}$, 对于任意的 ϵ , 存在 N , 只要 $n > N$ 时, 就有 $\rho(x,x_n) < \epsilon$. 此时成立

$$\rho(x,G) = \inf_{y\in G} \rho(x,y) \le \inf_{y\in G}(\rho(x,x_n)+\rho(x_n,y)) < \rho(x_n,F)+\epsilon = a+\epsilon.$$

由于该不等式对于任何的 ϵ 都成立, 因此有 $\rho(x,G) \le a$. 即 G 是闭集. □

习题 4.4.4. *设 $\{A_\alpha|\alpha\in\Lambda\}$ 是度量空间中的一族集, 证明*

$$\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)' \subset \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A'_\alpha.$$

又证: 对于任何有限个集 $A_1,\ldots,A_n$, 有

$$(A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n)' = A'_1\bigcup A'_2\bigcup\cdots\bigcup A'_n.$$

证明: 设 $x \in \left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)'$, 则存在一组点列 $\{x_n\} \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha$ 使得 $\{x_n\} \to x$. 由于 $\{x_n\} \in A_\alpha$, 因而 $x \in A'_\alpha$. 故有 $x \in \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A'_\alpha$. 即, $\left(\bigcap_{\alpha\in\Lambda} A_\alpha\right)' \subset \bigcap_{\alpha\in\Lambda} A'_\alpha$.

若 $x \in (A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n)'$, 则存在一组点列 $\{x_n\} \in A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n$ 使得 $\{x_n\}\to x$. 考虑到无穷点列 $\{x_n\}$ 来源于有限个点集 A_i , 故必至少有一个集合有无穷个 $\{x_n\}$ 中的点. 不妨依然记该子列为 $\{x_n\}$, 位于 A_1 中. 因此, $x \in A'_1 \subset A'_1\bigcup A'_2\bigcup\cdots\bigcup A'_n$. 反过来, 若 $x \in A'_1\bigcup A'_2\bigcup\cdots\bigcup A'_n$, 则 x 必落于其中一个集合, 不妨记之为 A'_1 . 则存在一组点列 $\{x_n\} \in A_1$ 使得 $\{x_n\}\to x$. 显然这点列 $\{x_n\} \in A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n$. 故, $x \in (A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n)'$. 综上, $(A_1\bigcup A_2\bigcup\cdots\bigcup A_n)' = A'_1\bigcup A'_2\bigcup\cdots\bigcup A'_n$. □

习题 4.4.6. *设集 A 是复平面 E^2 中适合如下条件的点 z 的全体: 或是 $|z| < 1$, 或是 $1 < |z| < 2$ 但 arg z 是有理数. 求出 A 的闭包, 核, 境界和所有的外点.*

解: 闭包: $|z| \le 2$; 核: $|z| < 1$; 境界: $1 \le |z| \le 2$; 外点: $|z| > 2$. □

习题 4.4.8. *设 E 及 F 是度量空间中的两个集并且 $\rho(E,F) > 0$. 证明必有不相交的开集 O 和 G 分别包含 E 及 F .*

证明: 记 $d = \frac{1}{3}\rho(E,F)$, 则由习题 4.4.2 可知, $O = O(E,d), G = (F,d)$ 为两个分别包含 E,F 的开集. 断言二者不相交, 否则, 存在 $x \in O\bigcap G$. 根据定义, 取 $y \in E, z \in F$ 满足 $\rho(x,y) < d+\frac{1}{2}d, \rho(x,z) < d+\frac{1}{2}d$, 有

$$3d = \rho(E,F) \le \rho(y,z) \le \rho(x,y)+\rho(x,z) < 3d.$$

矛盾, 故 $O\bigcap G = \emptyset$. □

习题 4.4.10. *证明: 子空间的联络集必为全空间的联络集. 其逆真否?*

证明: 记全空间为 X . 假定结论不真, 则存在子空间 L 中的联络集 S 和全空间中的两个开集 O_1,O_2 满足

$$S = (S\bigcap O_1)\bigcup(S\bigcap O_2), (S\bigcap O_1)\bigcap(S\bigcap O_2) = \emptyset.$$

那么, 对于子空间 L , $G_1=O_1\bigcap L$, $G_2=O_2\bigcap L$ 为其中的两个开集, 且满足

$$S=(S\bigcap G_1)\bigcup(S\bigcap G_2),(S\bigcap G_1)\bigcap(S\bigcap G_2)=\emptyset.$$

如此将与 S 是子空间的联络集矛盾.

其逆命题非真, 考虑直线 E , 按欧式度量导出的拓扑, 区间 $[0,3]$ 是联络集. 但是, 对于子空间 $[0,1]\bigcup[2,3]$ 来说, 它就是非联络的. 在排除这种情况下, 对应的逆命题为真. 即, 全空间中的联络集 S , 对于子空间 L , 若成立 $S\subset L$, 则其也是子空间 L 的联络集. 证明与前面类似. □

习题 4.4.12. *设 E 是赋范线性空间 R 的线性子空间, 在 R/E 上, 令*

$$p(\tilde{x})=\inf_{y\in\tilde{x}}\|y\|,$$

证明 p 是 R/E 上的拟范数, 并指出使 $p(\tilde{x})=0$ 的 $\tilde{x}$ 全体.

证明: $p(\tilde{x})$ 的非负性是明显的. 对于齐次性, 有

$$p(\alpha\tilde{x})=\inf_{y\in\alpha\tilde{x}}\|y\|=\inf_{x_0\in E}\|\alpha x+x_0\|=\inf_{x_0\in E}\|\alpha(x+\frac{1}{\alpha}x_0)\|=|\alpha|\inf_{x_0\in E}\|x+\frac{1}{\alpha}x_0\|=|\alpha|p(\tilde{x}).$$

而对于三角不等式, 由 inf 的定义, 存在 $x_0\in\tilde{x},y_0\in\tilde{y}$ 使得 $\|x_0\|<p(\tilde{x})+\epsilon,\|y_0\|<p(\tilde{y})+\epsilon$, 那么

$$p(\tilde{x}+\tilde{y})=\inf_{z\in E}\|x+y+z\|\leq\|x_0+y_0\|\leq\|x_0\|+\|y_0\|<p(\tilde{x})+p(\tilde{y})+2\epsilon.$$

由 ϵ 的任意性, 即得 $p(\tilde{x}+\tilde{y})\leq p(\tilde{x})+p(\tilde{y})$. 倘若 $p(\tilde{x})=0$, 则存在一组 $\{x_n\}\in E$, 使得

$$\|x-x_n\|\leq\frac{1}{n}.$$

这说明 x 按范数是点列 $\{x_n\}$ 的极限点. 反过来, 如果 x 可以表示成为 E 中一点列的极限. 那么必然有

$$p(\tilde{x})=\inf_{x_0\in E}\|x+x_0\|\leq\|x-x_n\|\leq\frac{1}{n}.$$

因此可知使 $p(\tilde{x})=0$ 的 $\tilde{x}$ 全体为 $\bar{E}$. □

习题 4.4.14. *设 $g_1,g_2,\ldots,g_n$ 是赋范线性空间 R 上 n 个线性无关的元素, $x\in R$ 如果存在 $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ 使得*

$$\left\|x-\sum_{i=1}^n\lambda_ig_i\right\|=\inf_{\mu_1,\ldots,\mu_n}\left\|x-\sum_{i=1}^n\mu_ig_i\right\|,$$

其中 $\mu_1,\ldots,\mu_n$ 是任意 n 个数. 称向量 $x_0=\sum_{i=1}^n\lambda_ig_i$ 为 x 在子空间 span$\{g_1,\ldots,g_n\}$ 上的最佳逼近. 证明: 在 R 是严格赋范时, 对于 x 的最佳赋范是唯一的.

证明: 假设结论不真, 则至少存在两组不完全相同的 $\{\lambda_i^{(1)}\},\{\lambda_i^{(2)}\}$ 满足

$$\left\|x-\sum_{i=1}^n\lambda_i^{(1)}g_i\right\|=\inf_{\mu_1,\ldots,\mu_n}\left\|x-\sum_{i=1}^n\mu_ig_i\right\|=\left\|x-\sum_{i=1}^n\lambda_i^{(2)}g_i\right\|.$$

那么, 考虑两者的平均值 $\frac{1}{2}(\lambda_i^{(1)}+\lambda_i^{(2)})$, 有

$$\|x-\sum_{i=1}^n\frac{1}{2}(\lambda_i^{(1)}+\lambda_i^{(2)})g_i\|\leq\|\frac{1}{2}(x-\sum_{i=1}^n\lambda_i^{(1)}g_i)\|+\|\frac{1}{2}(x-\sum_{i=1}^n\lambda_i^{(2)}g_i)\|=\inf_{\mu_1,\ldots,\mu_n}\left\|x-\sum_{i=1}^n\mu_ig_i\right\|.$$

同时, 由于 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\lambda_i^{(1)}+\lambda_i^{(2)})g_i$ 也是一种线性组合, 因此可得

$$\|x-\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{2}(\lambda_i^{(1)}+\lambda_i^{(2)})g_i\|=\|\frac{1}{2}(x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(1)}g_i)\|+\|\frac{1}{2}(x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(2)}g_i)\|=\inf_{\mu_1,\ldots,\mu_n}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\mu_i g_i\right\|.$$

由于 R 是严格赋范的, 并且 $\|\frac{1}{2}(x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(1)}g_i)\|=\|\frac{1}{2}(x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(2)}g_i)\|$. 因此,

$$x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(1)}g_i=x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^{(2)}g_i.$$

即, 诸 g_i 线性相关, 与条件矛盾. 因此最佳赋范逼近是唯一的. □

习题 4.4.16. *C 是欧几里得空间 E^2 上单位圆周: $C=\{e^{i\theta}|0<\theta\leq 2\pi\}$. 称集 $\gamma=\{e^{i\theta}|0<\alpha<\theta<\beta\leq 2\pi\}$ 为 C 中的开弧. 证明:*

1. *开弧必定是 E^2 的子空间 C 中的开集;*
2. *C 中任何开集必定可表示称最多可列个互不相交的开弧的和, 并且这种表示是唯一的.*

证明:

1. 先考虑 $\beta-\alpha<\frac{1}{4}\pi$ 的情况, 此时开弧 $\gamma=\{(\cos\theta,\sin\theta)|0<\alpha<\theta<\beta\leq 2\pi,\beta-\alpha<\frac{1}{4}\pi\}$. 取开矩形 $O=(\min(\cos\theta),\max(\cos\theta))\times(\min(\sin\theta),\max(\sin\theta))$ (如果 $\beta=2\pi$ 那么需要适当延拓对应的矩形). 显然, 开弧 γ 落于开矩形 O 中. 反过来, 假设点 $(\cos\varphi,\sin\varphi)$ 落于开矩形 O 当中, 并且 $\varphi\leq 2\pi$, 则有

   $$\min(\cos\theta)<\cos\varphi<\max(\cos\theta);\min(\sin\theta)<\sin\varphi<\max(\sin\theta).$$

   由于在 $(0,2\pi]$ 上, sin 函数的在点 $\frac{1}{2}\pi,\frac{3}{2}\pi$ 改变单调性, cos 函数在点 π 上改变单调性. 考虑到 $\beta-\alpha<\frac{1}{4}\pi$, 这说明 sin 函数和 cos 函数中必至少有一个在 (α,β) 单调的. 不失一般地, 不妨假设 cos 函数是单调增加的, 因此由上述第一个不等式的可知

   $$\alpha<\varphi<\beta,\ \text{or}\ 2\pi-\beta<\varphi<2\pi-\alpha.$$

   再考虑 sin 函数的取值, 可知 $\alpha<\varphi<\beta$. 因此, $O\bigcap C=\gamma$, 即 γ 是 C 中的开集.
   对于一般的开弧 γ , 可以选取有限个 β_i 满足

   $$\alpha=\beta_0<\beta_1<\beta_2<\ldots<\beta_n=\beta.$$

   使得 $\beta_i-\beta_{i-2}<\frac{1}{4}\pi$. 则开弧 γ 即可被表示成有限个小开弧的并, 自然也是 C 中的开集.

2. 假设 O 是 C 中任意的开集, 为简便起见, 记 $\gamma(\alpha,\beta)=\{e^{i\theta}|0<\alpha<\theta<\beta\leq 2\pi\}$. 任取 O 中一点 θ , 考虑集合 $\{x|\gamma(x,\theta)\subset O\}$. 由于 O 是开集, 所以该集合不空, 记其下确界为 $\alpha=\inf\{x|\gamma(x,\theta)\subset O\}$. 断言, 对于任何的 $\alpha<\varphi<\theta$, 有 $e^{i\varphi}\in O$. 因为, 由下确界的定义, 存在 ζ 满足 $\alpha+(\varphi-\alpha)>\zeta$, 使得

   $$\gamma(\zeta,\theta)\subset O.$$

   由于 $\zeta<\varphi<\theta$, 故 $e^{i\varphi}\in O$. 同理可以延拓对应的上界, 记最后的结果为 $\gamma(\alpha,\beta)$. 由此, 对 O 中所有元素计算对应的 γ . 基于上下确界的性质, 这些开弧或者重合或者不交, 并且它们的并包括了 O 中的所有元素, 结合这些开弧的做法, 就有

   $$O=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\gamma_\lambda.$$

   由于每个开弧可用其包含的一个有理数代表, 因此它们至多为可列个, 即计数集 Λ 可列. □

习题 4.4.18. *设 C 是 E^2 上单位圆周. T 是 $(0,2\pi] \to C$ 的映照, $T: x \to e^{ix}$. 证明: $B^2 \bigcap C = T(B \bigcap (0,2\pi])$.*

证明: 由习题 4.4.17 可知 $B^2 \bigcap C = S(G)$. 问题即证明, $S(G) = T(B \bigcap (0,2\pi])$. 由于 T 是其定义域到值域的一一映射, 则其将 σ 集映为 σ 集. 考虑到任何的开弧 $\gamma(\alpha,\beta)$, 都可以表示为 $T((\alpha,\beta))$ (当 $\beta = 2\pi$ 时右端取等号). 因此, 由于 $S(G)$ 是由开弧生成的最小 σ 集, 成立

$$S(G) \subset T(B \bigcap (0,2\pi]).$$

反过来, 考虑 T 对应的逆映射 $T^{-1}: e^{ix} \to x$. 它同样也将 σ 集映为 σ 集. 对于任何一段 $(0,2\pi]$ 上的开区间, 总可以找到对应的开弧, 使得其像为该开区间. 由于 $(0,2\pi]$ 区间上的 Borel 集为由其开集生成的最小 σ 集. 因此有

$$B \bigcap (0,2\pi] \subset T^{-1}(S(G)).$$

两边作用 T , 即得

$$T(B \bigcap (0,2\pi]) \subset S(G).$$

综上, 即得

$$T(B \bigcap (0,2\pi]) = S(G).$$

□

4.5 连续映照

习题 4.5.2. *设 R 是赋范线性空间, 在 $R \times R$ 上赋以范数 $\|\cdot\|$ 如习题 1, 又在 $R \times R$ 上赋以范数 $\|\cdot\|_1$:*

$$\|(x,y)\|_1 = \max(\|x\|, \|y\|),$$

设 f 是 $(R \times R, \|\cdot\|)$ 到 $(R \times R, \|\cdot\|_1)$ 上映照

$$f((x,y)) = (x,y),$$

证明 f 是拓扑映照.

证明: 由于

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2} \le \max(\|x\|, \|y\|) \le \sqrt{\|x\|^2 + \|y\|^2},$$

即

$$\|\cdot\| \le \sqrt{2}\|\cdot\|_1, \text{ 并且 } \|\cdot\|_1 \le \|\cdot\|.$$

记 (x_n, y_n) 是 $(R \times R, \|\cdot\|)$ 上的收敛于 (x,y) 的点列. 则

$$\|(x_n,y_n) - (x,y)\|_1 \le \|(x_n,y_n) - (x,y)\| \to 0,$$

也就是 $\lim f((x_n,y_n)) = f((x,y))$. 由于赋范空间间的连续映射可以有点列收敛所描述, 因此 f 连续.

反过来, f 是一一的满射, 所以它的逆映射存在. 记 (x_n, y_n) 是 $(R \times R, \|\cdot\|_1)$ 上的收敛于 (x,y) 的点列. 则

$$\|(x_n,y_n) - (x,y)\| \le \sqrt{2}\|(x_n,y_n) - (x,y)\|_1 \to 0,$$

也就是 $\lim f^{-1}((x_n,y_n)) = f^{-1}((x,y))$. 所以其逆映射也连续, 故 f 为拓扑映照. □

习题 4.5.4. *设 R 是赋范线性空间, R' 为形如*

$$(\alpha, x), x \in R, \alpha \text{ 为数}$$

的元素全体, 按照线性元算和范数

$$\lambda(\alpha, x) + \mu(\beta, y) = (\lambda\alpha + \mu\beta, \lambda x + \mu y),$$
$$\|(\alpha, x)\| = |\alpha| + \|x\|$$

所成的赋范线性空间. 证明 R' 到 R 的映照 $(\alpha, x) \to \alpha x$ 是连续的.

证明: 由于 R' 和 R 都为赋范线性空间, 因此其间映照的连续性可以由点列所描述. 记 (α_n, x_n) 为 R' 上收敛到 (α, x) 的一组点列. 由于

$$\|(\alpha, x) - (\alpha_n, x_n)\| = |\alpha - \alpha_n| + \|x - x_n\| \to 0.$$

因此, $\|x - x_n\| \to 0, |\alpha - \alpha_n| \to 0$. 由于收敛列必有界, 因此

$$\|\alpha x - \alpha_n x_n\| \le |\alpha - \alpha_n| \cdot \|x\| + |\alpha_n| \cdot \|x - x_n\| \to 0.$$

所以, R' 到 R 的映照 $(\alpha, x) \to \alpha x$ 是连续的. □

习题 4.5.6. *设 R 是度量空间, A 是 R 的子空间. f 是 $A \to R$ 的映照. 如果 x_0 为 A 的孤立点, 那么 x_0 是 f 的连续点.*

证明: 记 $\{x_n\}$ 是 A 中以 x_0 为收敛点的点列. 由于 x_0 是孤立点, 因此必然从某项 N 开始, $\forall n > N, x_n = x_0$. 自然有 $\lim f(x_n) = f(x_0)$. 即 x_0 是连续点. □

习题 4.5.8. *设 R 是度量空间, A 是 R 的子空间, f 是 A 上的实函数. 证明: f 成为连续函数的充要条件是对每个实数 c , 集 $A(f(x) \le c)$ 与集 $A(f(x) \ge c)$ 是子空间 A 中的闭集.*

证明: 由于闭集关于连续函数的原像连续, 因此必要性是明显的. 对于充分性, 由习题 4.4.9 可知, 对每个实数 c , 集 $A(f(x) \ge c)$ 是子空间 A 中的闭集等价于对任意的 x_0

$$\lim_{r\to 0} \sup_{x \in O(x_0, r) \bigcap E} f(x) \le f(x_0).$$

反过来同样也有下半连续的概念, 断言对每个实数 c , 集 $A(f(x) \le c)$ 是子空间 A 中的闭集可以推出对任意的 x_0 成立

$$\lim_{r\to 0} \inf_{x \in O(x_0, r) \bigcap E} f(x) \ge f(x_0).$$

因为, 由于 $A(f(x) \le c)$ 是子空间 A 中闭集, 故 $A(f(x) > c)$ 是子空间 A 中开集. 因此, 对于任意的 x_0 和任意的 $c < f(x_0)$, 有开球 $O(x_0, r) \subset A(f_x > c)$. 故,

$$\inf_{x \in O(x_0, r)} f(x) > c.$$

由于对于任何的 $c < f(x_0)$ 都有对应的邻域使得其上的值大于 c . 因此,

$$\lim_{r\to 0} \inf_{x \in O(x_0, r) \bigcap E} f(x) \ge f(x_0).$$

结合二者, 可得

$$\lim_{r\to 0} \sup_{x \in O(x_0, r) \bigcap E} f(x) \le f(x_0) \le \lim_{r\to 0} \inf_{x \in O(x_0, r) \bigcap E} f(x).$$

即, $f(x_0) = \lim_{r\to 0, x \in O(x_0, r) \bigcap E} f(x)$. □

习题 4.5.10. *举例说明在一般度量空间中, 即使定义域是闭集的闭映照也未必是连续的.*

证明: [1]若收敛点列的像不收敛, 则一个算子仍然可以成为闭算子, 但必然不是连续的, 由此可以构造如下的反例.

设 X 为定义有范数 $\|\cdot\|$ 的任意无限维 Banach 空间, $\{x_\alpha\}$ 为它的一组模长为 1 的 Hamel 基. 构造一个新的范数 $\|\cdot\|_1$ 如下:

$$若\ x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i,\ 则\ \|x\| = \sum_{i=1}^{n} |a_i|.$$

该范数不是完备的, 因为任取 Hamel 基中的一个可列子集 $\{x_i\}$, 考虑点列

$$y_i = \frac{1}{i^2} x_i.$$

则, $\|y_n - y_m\| = \frac{1}{n^2} + \frac{1}{m^2} \to 0$, 然而 $\{y_n\}$ 并不收敛. 同时, 范数 $\|\cdot\|_1$ 强于范数 $\|\cdot\|$. 因为

$$\|x\| = \|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\| \le \sum_{i=1}^{n} |a_i| = \|x\|_1.$$

考虑恒等算子 $I : (X, \|\cdot\|) \to (x, \|\cdot\|_1)$, 它为闭算子, 因为若 $\|x_n - x\| \to 0$, 且 $\|x_n - \tilde{x}\|_1 \to 0$. 由于 $\|x_n - \tilde{x}\|_1 \ge \|x_n - x\|$, 而且收敛点唯一, 因此 $x = \tilde{x}$. 当它必然不是连续算子, 否则存在常数 c 使得 $\|x\|_1 \le c\|x\|$, 那么两个空间将拓扑同胚. 然而 Banach 空间和非 Banach 空间是不可能同胚的. □

4.6 稠密性

习题 4.6.2. *设 A 是度量空间中的可析点集, 那么 A 的势不超过 $\aleph$.*

证明: 记 $\{x_n\}$ 是 A 的一个可数稠密子集. 由于 A 中任何元素都可以表示为该可数点集中元素所组成的点列的极限, 因此 A 的势不会超过所有可能的点列的势. 所有可能的点列的势等价于取值于 N , 值域为 N 的函数的个数, 因而它的势为 $N^N = \aleph$. 故, A 的势不超过 $\aleph$. □

习题 4.6.4. *如果平面上的实值函数 $f(x,y)$ 适合如下条件: 全平面能分解成有限个或可列个互相不交的有限开矩形 $\{I_\nu\}, (I_\nu = (\alpha_\nu, \beta_\nu) \times (\gamma_\nu, \delta_\nu)$, 使得 $f(x,y)$ 在每个矩形 I_ν 上等于常数 k_ν , 那么称 $f(x,y)$ 是平面上的阶梯函数. 在平面上的阶梯函数全体记为 J . 证明: J 在 $L^p(E^2)(\infty > p \ge 1)$ 中是稠密的, 但不在 $L^\infty(E^2)$ 中稠密.*

注: 我不太清楚如何将全平面分解成有限个或可列个互相不交的有限开矩形之并. 如果有了解题意的同学, 可以发邮件告诉我.

习题 4.6.6. *证明: $C_{2\pi}$ 在 $L^p[0,2\pi](\infty > p \ge 1)$ 中稠密, 但不在 $L^\infty[0,2\pi]$ 中稠密.*

证明: 由定理 4.6.5 可知, 只要证明 $C_{2\pi}$ 在 $C[0,2\pi]$ 中按 L^p 范数稠密即可. 这是可以做到的, 因为 $C_{2\pi}$ 先对于连续函数 $C[0,2\pi]$ 来说, 只是增加了函数值在两个端点需要相等的条件. 具体地, 假设 $u(x)$ 是任意属于 $C[0,2\pi]$ 的函数, 由于它定义在紧集上, 所以其有最大值和最小值, 记它们的差为 η . 那么对于任意的 ϵ , 记 $c = \epsilon^p/\eta^p$. 构造 $u_\epsilon \in C_{2\pi}$ 如下

$$u_\epsilon(x) = \begin{cases} u(x) & ,0 \le x \le 2\pi - c, \\ \frac{u(0)-u(2\pi-c)}{c}(x-2\pi) + u(0) & ,2\pi - c < x \le 2\pi. \end{cases}$$

[1]该反例选自" 泛函分析中的反例", 汪林著.

经计算, 有

$$\|u(x)-u_\epsilon(x)\|_p=\left(\int_{2\pi-c}^{2\pi}|u(x)-u_\epsilon(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}\le\epsilon.$$

所以, $C_{2\pi}$ 在 $C[0,2\pi]$ 中按 L^p 范数稠密.

对于 $L^\infty[0,2\pi]$, 考虑函数

$$u(x)=\begin{cases}1 & ,0\le x\le\pi,\\ 0 & ,\pi<x\le 2\pi.\end{cases}$$

由于该函数在端点 $x=0,1$ 取值不同, 因此任何的 $C_{2\pi}$ 函数必然在一个端点与之取值不同, 且差异不小于 1 . 由于函数的连续性, 在不同取值处的测度不会为零. 故任何的 $C_{2\pi}$ 函数在 L^∞ 范数下, 不会逼近上述函数. 因而不在 $L^\infty[0,2\pi]$ 中稠密. □

习题 4.6.8. *$C(-\infty,+\infty)$ 表示 $(-\infty,+\infty)$ 上有界连续函数全体, 在 $C(-\infty,+\infty)$ 上规定 $\|x(t)\|=\sup_t|x(t)|$. 证明 $C(-\infty,+\infty)$ 是赋范线性空间, 但不是可析的.*

证明: $C(-\infty,+\infty)$ 是赋范线性空间的结论是明显的. 对于反例, 将 $(-\infty,+\infty)$ 分解为形如 $[n,n+1]$ 的闭区间的并. 考虑在 n 为奇数的区间上取值为 1 或者 -1 , 在偶数区间上为直线的连续函数全体. 自然这样的函数都是连续有界的, 并且它们之间的距离为 2 , 其势为 $2^N=\aleph$. 考虑以这些函数为球心, 半径为 $\frac{1}{2}$ 的开球全体, 它们是互不相交的. 如果某子集在 $C(-\infty,+\infty)$ 中稠密, 则在它们至少需在上述每个开球中有一个元素. 因而其势不小于 $\aleph$, 所以 $C(-\infty,+\infty)$ 不可能可析. □

习题 4.6.10. *$\tilde{C}(-\infty,+\infty)$ 表示在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续, 并且 $\lim_{t\to\pm\infty}x(t)$ 存在的函数 $x(t)$ 的全体, 规定 $\|x(t)\|=\sup_t|x(t)|$. 证明: $\tilde{C}(-\infty,+\infty)$ 是赋范线性空间, 并且是可析的.*

证明: $\tilde{C}(-\infty,+\infty)$ 是赋范线性空间是明显的. 对于其可析性, 记 $P[-n,n]$ 为定义在闭区间 $[-n,n]$ 上的多项式函数按下述方法延拓的全体. 若 $p(t)\in P[-n,n]$, 则定义 $\tilde{p}(t)\in\tilde{C}(-\infty,+\infty)$ 为

$$\tilde{p}(t)=\begin{cases}p(t) & ,-n\le t\le n,\\ p(n) & ,n<t,\\ p(-n) & ,t<-n.\end{cases}$$

它的势为 $\aleph_0$, 断言多项式集合 $P=\bigcup_n P[-n,n]$ 在 $\tilde{C}(-\infty,+\infty)$ 中稠密, 因而 $\tilde{C}(-\infty,+\infty)$ 可析.

对于任意一个 $x(t)\in\tilde{C}(-\infty,+\infty)$, 记 $a=\lim_{t\to-\infty}x(t),b=\lim_{t\to+\infty}x(t)$. 由极限的定义可知, 对于任意的 ϵ , 存在正整数 n 使得 $\forall t>n,|x(-n)-x(-t)|\le\epsilon,|x(n)-x(t)|\le\epsilon$. 而对于区间 $[-n,n]$, 存在定义于其上的多项式函数 $p(x)$ 使得 $\sup_{-n\le t\le n}|x(t)-p(t)|\le\epsilon$. 将该 $p(x)$ 延拓之后得到 $\tilde{p}(x)\in P[-n,n]$, 并且有

$$\sup_t|x(t)-p(t)|=\max(\sup_{t>n}|x(t)-\tilde{p}(t)|,\sup_{-n\le t\le n}|x(t)-\tilde{p}(t)|,\sup_{t<-n}|x(t)-\tilde{p}(t)|)\le\epsilon.$$

□

习题 4.6.12. *$C_0^\infty(-\infty,\infty)$ 表示 $(-\infty,+\infty)$ 上具有有界支集的无限次可微函数全体, 证明: $C_0^\infty(-\infty,\infty)$ 在 $L^p(-\infty,+\infty)(\infty>p\ge1)$ 中稠密.*

证明: 由习题 4.6.1 可知, $C_0^{(0)}(-\infty,\infty)$ 在 $L^p(-\infty,+\infty)(\infty>p\ge1)$ 中稠密. 因此, 说明 $C_0^\infty(-\infty,\infty)$ 在 $C_0^{(0)}(-\infty,\infty)$ 中按 L^p 范数稠密即可. 考虑函数

$$J(x)=\begin{cases}ke^{\frac{-1}{1-|x|^2}} & ,-1<t<1,\\ 0 & ,\text{else}.\end{cases}$$

其中 $k > 0$ 是一个使 $J(x)$ 在直线上积分为 1 的常数. 由此, 定义 $J_\epsilon(x) = \epsilon^{-1}J(x/\epsilon)$. 考虑, $J_\epsilon(x)$ 与 $C_0^{(0)}(-\infty,\infty)$ 函数 $u(x)$ 的卷积:

$$J_\epsilon * u(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} J_\epsilon(x-y)u(y)dy.$$

由于 $u(x)$ 连续且有界支撑, 因此 $J_\epsilon * u(x) \in C_0^\infty(-\infty,\infty)$. 因此只需要说明 $J_\epsilon * u(x)$, 按 L^p 范数逼近 $u(x)$ 即可. 由于

$$|J_\epsilon * u(x) - u(x)| = \left|\int_{-\infty}^{+\infty} J_\epsilon(x-y)(u(x)-u(y))dy\right| \le \sup_{|y-x|<\epsilon} |u(x)-u(y)|,$$

即得 $C_0^\infty(-\infty,\infty)$ 在 $C_0^{(0)}(-\infty,\infty)$ 中按 L^p 范数稠密. □

4.7 完备性

习题 4.7.2. *证明完备空间的闭子集是一个完备的子空间, 而任一度量空间中完备子空间是闭的子集.*

证明: 设 X 是一个完备空间, G 是它的一个闭子集, 并设 $\{x_n\}$ 是 G 中一列基本列. 那么, $\{x_n\}$ 同样也是 X 中的一列基本列, 由于 X 的完备性, 存在 $x \in X$ 为它们的极限点, 即 $\|x - x_n\| \to 0$. 由于 G 是闭子集, 所以 $x \in G$, 故 G 也完备.

设 X 是一个度量空间, K 是它的一个完备子空间, 并设 $\{x_n\}$ 是 G 中一列点列, 收敛到 $x \in X$. 由于 $\{x_n\}$ 是收敛点列, 故它必然是基本的. 因此由于 K 的完备性, 存在 $\tilde{x} \in K$, 使得 $\|x_n - \tilde{x}\| \to 0$. 故 $\|x - \tilde{x}\| \le \|x_n - \tilde{x}\| + \|x_n - x\| \to 0$, 即 $x = \tilde{x}$. 所以 K 是闭的. □

习题 4.7.4. *在习题 4.3.2 中, 若 $\{R_n\}$ 皆为 Banach 空间, 则空间 R 也是 Banach 空间.*

证明: 假设 $\{x^{(n)}\}$ 是 R 中的基本列, 考虑由其派生的 l^p 点列 $y^{(n)} = \{\|x_1^{(n)}\|, \|x_2^{(n)}\|, \ldots\}$. 由于

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|\|x_i^{(n)}\| - \|x_i^{(m)}\|\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \le \|x^{(n)} - x^{(m)}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

所以 $y^{(n)}$ 为 l^p 中基本列. 考虑到 l^p 为 Banach 空间, 因此存在 $y \in l^p$ 使得

$$\left|y_i - \|x_i^{(m)}\|\right| \le \left(\sum_{i=1}^{\infty} \left|y_i - \|x_i^{(m)}\|\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

再用一次基本列的性质, 有

$$\|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\| \le \|x^{(n)} - x^{(m)}\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} \to 0.$$

即, 对于每个分量 $\{x_i^{(n)}\}$ 来说, 它们也是基本列. 由于诸 $\{R_n\}$ 皆为 Banach 空间, 所以诸分量存在对应的极限点 x_i .

断言, 点 $x = \{x_i\}$ 是对应点列的极限点. 首先, 证明 $x \in R$. 因为 $\|x_i^{(m)}\| \to \|x_i\|$, 实数空间收敛唯一, 所以可以得到 $y_i = \|x_i\|$, 因此, $x \in R$. 现证明 $\|x - x^{(n)}\| \to 0$. 对于任意的 ϵ , 存在 N , 使得 $n, m > N$ 时, 成立

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i^{(n)} - x_i^{(m)}\|^p\right)^{\frac{1}{p}} = \|x^{(m)} - x^{(n)}\| < \epsilon.$$

任取一个 $n>N$, 由于 $x^{(n)}\in R$, 所以存在 k , 使得

$$\sum_{i=k}^{\infty}\|x_i^{(n)}\|^p<\epsilon^p.$$

结合以上二式, 可知对于任何的 $m>N$ 成立

$$\sum_{i=k}^{\infty}\|x_i^{(m)}\|^p<\sum_{i=k}^{\infty}\|x_i^{(m)}-x_i^{(n)}\|^p+\sum_{i=k}^{\infty}\|x_i^{(n)}\|^p<2\epsilon^p.$$

同时由于 $x\in R$ 所以上述不等式对于 x 也存在, 出于简便考虑, 依然记其对应的指标为 N . 另一方面, 由极限的有限可加性可知, 上面的 k 和任意的 ϵ , 存在 N' , 使得 $n>N'$ 时成立

$$\sum_{i=1}^{k}\|x_i-x_i^{(n)}\|^p<\epsilon^p.$$

现取 $M=\max(N,N')$, 则结合上面的两个等式, 当 $n>M$ 时便有

$$\|x-x^{(n)}\|=\left(\sum_{i=1}^{k}\|x_i-x_i^{(n)}\|^p+\sum_{i=k}^{\infty}\|x_i-x_i^{(n)}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<\left(\epsilon^p+\sum_{i=k}^{\infty}\|x_i\|^p+\sum_{i=k}^{\infty}\|x_i^{(n)}\|^p\right)^{\frac{1}{p}}<4^{\frac{1}{p}}\epsilon.$$

□

习题 4.7.6. *设 H 为直线上关于 Lebesgue 测度平方可积, 而且导数也是平方可积的全连续函数 f 全体, 按通常的线性运算和范数*

$$\|f\|=\sqrt{\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2\,\mathrm{d}t+\int_{-\infty}^{\infty}|f'(t)|^2\,\mathrm{d}t},$$

H 成为赋范线性空间. 证明 H 是 Banach 空间.

注: 本题我使用了 Sobolev 嵌入定理, 来证明极限函数的连续性. 如果读者有其他的简单的证法, 可以邮件告诉我.

证明: [2] 设 $\{f_n(t)\}$ 是 H 中的一列基本列, 视 $\{f_n(t)\}$ 为 $W^{1,2}(E)$ 中的点列, 它同样是基本的. 由于 $W^{1,2}(E)$ 是 Banach 空间, 所以存在 $f\in W^{1,2}(E)$ 是该点列的极限函数. 由 Sobolev 嵌入定理, 可以通过修改测度为零的一个集合, 使 f 是连续的, 因此, 可以假定 f 连续. 为证明 $f\in H$, 只需证明它的广义导数 g 几乎处处是它的常义导数 f' .

首先断言, 对于任何两点 x,y , 存在 δ,N 使得 $\rho(x,y)<\delta$ 时成立

$$|f_n(x)-f_n(y)|<\epsilon,\forall n>N.$$

这是因为,

$$\int_0^{x+1}|f_n'-f_m'|\,\mathrm{d}t\le\sqrt{x+1}\left(\int_0^{x+1}|f_n'-f_m'|^2\,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}},$$

加之 $\{f_n'\}$ 是 $L^2(E)$ 上的基本列, 所以存在 N 使得 $n,m>N$ 时, $\int_0^{x+1}|f_n'-f_m'|^2\,\mathrm{d}t<\frac{\epsilon^2}{x+1}$. 此时便有

$$\int_0^{x+1}|f_n'-f_m'|\,\mathrm{d}t\le\epsilon.$$

[2]本证明的主要思路由王奕博士提供的.

现取定 $m=N+1$, 由于 f_{N+1} 是全连续函数, 所以存在一个 δ 使得 $\forall y\in O(x,\delta)$, 成立

$$\int_y^x |f'_{N+1}|\,\mathrm{d}t=\left|V_{f_{N+1}}[x,y]\right|<\epsilon.$$

因此,

$$V_{f_n}[x,y]=\int_y^x |f'_n|\,\mathrm{d}t\le\int_y^x |f'_{N+1}|\,\mathrm{d}t+\int_y^x |f'_n-f'_{N+1}|\,\mathrm{d}t<2\epsilon.$$

由于区间 $V_f[x,y]\ge|f(x)-f(y)|$, 所以断言成立.

由于均方收敛一定有子列几乎处处收敛, 因此不妨设 f_n 几乎处处收敛到 f . 断言, 在 f 连续及 f_n 已证明的条件下, f_n 点点收敛于 f . 记 x 是任意一点不收敛的点, 由于收敛是几乎处处的, 所以在 x 的任意一个开球内, 必有收敛的点 y . 对于任意的 ϵ , 取 δ,N , 使得前证条件满足. 同时, 考虑到 f 的连续性及 $\{f_n\}$ 在 y 收敛. 如果必要, 缩小 δ 及增大 N , 使 $|f(x)-f(y)|<\epsilon,|f(y)-f_n(y)|<\epsilon$. 此时成立

$$|f(x)-f_n(x)|<|f(x)-f(y)|+|f(y)-f_n(y)|+|f_n(y)-f_n(x)|<3\epsilon.$$

即, f_n 在 x 点也收敛于 f .

最后证明结论. 由前所证, 由于对于固定的 x 成立 $\left|\int_0^x f'-f'_n\,\mathrm{d}t\right|\le\int_0^x|f'-f'_n|\,\mathrm{d}t\to0$, 所以

$$f(x)-f(0)=\lim_n\left(f_n(x)-f_n(0)\right)=\lim_n\int_0^x f'_n\,\mathrm{d}t=\int_0^x f'\,\mathrm{d}t.$$

因此, $f(x)=f(0)+\int_0^x f'\,\mathrm{d}t$. 即 $f\in H$, 所以 H 是 Banach 的. □

习题 4.7.8. *设 X 是 Banach 空间, E 是 X 的闭线性子空间, 作赋范的商空间 X/E , 证明它是完备的.*

证明: 设 $\{\tilde{x}_n\}$ 是商空间 X/E 中的基本列, 那么存在一组子列, 使得

$$\|\tilde{x}_{n_{k+1}}-\tilde{x}_{n_k}\|<\frac{1}{2^k}.$$

记 $\tilde{y}_i=\tilde{x}_{n_{i+1}}-\tilde{x}_{n_i}$, 断言这组子列 $\{\tilde{y}_i\}$ 绝对收敛, 因为

$$\sum_{i=m}^{\infty}\|\tilde{y}_i\|=\sum_{i=m}^{\infty}\|\tilde{x}_{n_{i+1}}-\tilde{x}_{n_i}\|<\sum_{i=m}^{\infty}\frac{1}{2^i}=\frac{1}{2^m}.$$

而对于每个 $\tilde{y}_i$ 存在一个它的代表元 y_i 使得

$$\|y_i\|<\|\tilde{y}_i\|+\frac{1}{2^i}<\frac{1}{2^{i-1}}.$$

因而 X 中的级数 $\sum_{i=1}^{\infty}y_i$ 绝对收敛. 断言它的前 n 项和构成了一个 Cauchy 列, 因为

$$\|\sum_{i=1}^{n}y_i-\sum_{i=1}^{m}y_i\|\le\sum_{i=m+1}^{n}\|y_i\|<\frac{1}{2^m}.$$

由于 X 是 Banach 空间, 所以存在 $x=\sum_{i=1}^{\infty}y_i$. 因而 $\tilde{x}$ 就是对应的极限, 因为

$$\inf_{z\in E}\|\tilde{x}-\sum_{i=1}^{n}\tilde{y}_i+z\|\le\|x-\sum_{i=1}^{n}y_i\|\to0,$$

而且基本列的子列收敛则收敛. □

习题 4.7.10. *完备的赋准范线性空间称为 Fréchet 空间. 证明: $S, s, \mathscr{A}$ 等是 Fréchet 空间.*

证明: 以 S 为例, 记 $\{f_n(x)\}$ 为一组按准范数 p 基本的点列, 则有

$$\int_E \frac{|f_n - f_m|}{1+|f_n - f_m|}\,\mathrm{d}x \to 0.$$

断言, 对于任何的 σ, ϵ , 存在 N , 使得当 $n, m > N$ 时

$$\mu(E(|f_n - f_m| > \sigma)) < \epsilon.$$

因为倘若上述断言不成立, 则存在某个 σ, ϵ , 使得有无穷多个 n, m , 满足

$$\mu(E(|f_n - f_m| > \sigma)) \geq \epsilon.$$

那么, 由函数 $h(x) = \frac{x}{1+x}$ 在 R^+ 上的单调性, 有

$$\int_E \frac{|f_n - f_m|}{1+|f_n - f_m|}\,\mathrm{d}x \geq \int_{E(|f_n - f_m|>\sigma)} \frac{|f_n - f_m|}{1+|f_n - f_m|}\,\mathrm{d}x > \int_{E(|f_n - f_m|>\sigma)} \frac{\sigma}{1+\sigma}\,\mathrm{d}x \geq \frac{\sigma\epsilon}{1+\sigma}$$

矛盾. 因此, $\{f_n(x)\}$ 以测度收敛, 所以存在几乎处处收敛的子列 $f_{n_\nu} \to f$, a.e . 现取定 $f_n = f_{n_\nu}$, 由 Fatou 引理有

$$\epsilon > \liminf_{\nu\to\infty} \int_E \frac{|f_{n_\nu} - f_m|}{1+|f_{n_\nu} - f_m|} \geq \int_E \frac{|f - f_m|}{1+|f - f_m|}.$$

所以 $p(f - f_m) < \epsilon$, 由 S 的线性可知 $p(f)$ 有限. 综上, f 便是对应的极限函数, S 是 Fréchet 空间. □

习题 4.7.12. *设 X 是 Fréchet 空间, E 是闭子空间, 作赋准范的商空间 X/E , 证明它是 Fréchet 空间.*

注: 该题的证明与习题 4.7.8 是完全镜像的, 请参考习题 4.7.8 . 此处便不再重复.

4.8 不动点定理

习题 4.8.2. *设 R 为完备度量空间, A 是 R 到 R 中的映照, 记*

$$\alpha_n = \sup_{x\neq x'} \frac{\rho A^n x, A^n x'}{\rho(x, x')}.$$

1. *若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n < \infty$, 则对任何一个初值 x_0 , 迭代程序 $\{A^n x_0\}$ 必收敛于映照 A 的唯一不动点, 并求出第 n 次近似解与准确解 $Ax = x$ 的逼近程度.*
2. *若 $\inf_n \alpha_n < 1$, 则 A 有唯一的不动点, 并给出一种收敛于准确解 $Ax = x$ 的迭代程序以及 n 次近似解与准确解的逼近程度.*

证明:

1. 因为非负项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ 收敛, 故存在 N , 使得当 $n > N$ 时成立有 $\alpha_n < \frac{1}{2}$. 那么, 对于任何的初始值 x_0 , 取定某个 n , 成立有

$$\frac{1}{2}\rho(x, Ax) > \alpha_n \rho(x, Ax) \geq \rho(A^n x, A^{n+1} x).$$

因此, 由定理 4.8.2 可知 $A^n x_0$ 收敛于 A 的唯一不动点. 对于逼近程度, 定义 n 的一个整数加法分解为一组不小于 1 的整数 $\{s_1, s_2, \ldots, s_k\}$ (可重复), 满足 $n = s_1 + s_2 + \ldots + s_k$. 对于 n 次近似 $A^n x$, 其可视作 k 次迭代 $A^{s_1} A^{s_2} \ldots A^{s_k} x$, 由条件既知

$$\rho(A^n x_0, x) = \rho(A^n x_0, A^{n+1} x) \leq \rho(x_0, Ax_0) \prod_{i=1}^{k} \alpha_{s_i}.$$

记 n 的所有整数加法分解集合为 S , 则逼近程度为

$$\rho(A^n x_0, x) \leq \rho(x_0, Ax_0) \min_{S} \prod_{i=1}^{k} \alpha_{s_i}.$$

2. 任取区间 $(\inf_n \alpha_n, 1)$ 中一数 c , 由下极限定义, 可知存在 $\alpha_n < c$. 那么,

$$c\rho(x, Ax) > \alpha_n \rho(x, Ax) \geq \rho(A^n x, A^{n+1} x).$$

因此, A 有唯一不动点. 记 $B = A^n$, 迭代程序只要进行 $Bx_n = x_{n+1}$ 即可, 这是一个以 α 为压缩因子的压缩映象, 其估计界为

$$\rho(x, x_n) \leq \frac{\alpha^n}{1-\alpha} \rho(x, x_1).$$

□

习题 4.8.4. *写出, 并且利用不动点原理证明, 关于方程组*

$$\frac{\mathrm{d}y_\nu}{\mathrm{d}x} = f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n), \nu = 1, 2, \ldots, n$$

的解的存在和唯一性.

证明: 求解该常微分方程组相当于求解积分方程组

$$\varphi_\nu(x) = y_\nu(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_\nu(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \,\mathrm{d}t.$$

对于上述积分方程组, 运用局部求解的方法. 假设诸 $f_\nu(t, y_1, \ldots, y_n)$ 在矩形 $D : |x - x_0| \leq h, |y_\nu - y_\nu(x_0)| \leq \lambda$ 上对诸 y_ν 满足参数为 L 的 Lipschitz 条件, 并记 $M = \max_\nu \sup_{(x, y_1, \ldots, y_n) \in D} |f_\nu(x, y_1, \ldots, y_n)|$, .

考虑连续函数空间 $C[x_0 - h, x_0 + h]$ 中满足 $(x, \varphi_\nu(x)) \in D$, 且 $\varphi_\nu(x_0) = y_\nu(x_0)$ 的函数组成的全体 $C_D^{(\nu)}$. 对于每个 ν 来说, 它是完备的. 因而, 这 n 个连续函数本身按最大模范数, 整体按向量的无穷范数所组成的 n 维向量空间 S 也是完备的. 作映射

$$A : \begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \vdots \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} y_1(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_1(t, \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n(t)) \,\mathrm{d}t \\ \vdots \\ y_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n(t, \varphi_n(t), \ldots, \varphi_n(t)) \,\mathrm{d}t \end{pmatrix}.$$

只需证明, 在 $h < \min\left(\frac{\lambda}{M}, \frac{1}{nL}\right)$ 时, A 是 $S \to S$ 的映射, 并且是压缩映射.

首先, 若 $(\phi_1, \ldots, \phi_n)^T \in S$, 则

$$\left\| A \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \vdots \\ \phi_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} y_1(x_0) \\ \vdots \\ y_n(x_0) \end{pmatrix} \right\|_\infty = \left\| \begin{pmatrix} \int_{x_0}^{x} f_1(t, \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) \,\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_{x_0}^{x} f_n(t, \phi_1(t), \ldots, \phi_n(t)) \,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \right\|_\infty \leq \left\| \begin{pmatrix} hM \\ \ldots \\ hM \end{pmatrix} \right\| < \lambda.$$

所以可知, A 是 $S \to S$ 的映射. 若记 $s_1 = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T \in S, s_2 = (\phi_1, \dots, \phi_n)^T \in S$, 则

$$\begin{aligned}
\rho(As_1, As_2) &= \left\| \begin{pmatrix} \int_{x_0}^x f_1(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) - f_1(t, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t))\,\mathrm{d}t \\ \vdots \\ \int_{x_0}^x f_n(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) - f_n(t, \phi_1(t), \dots, \phi_n(t))\,\mathrm{d}t \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&\le Lh \left\| \begin{pmatrix} \sup|\varphi_1 - \phi_1| + \dots + \sup|\varphi_n - \phi_n| \\ \vdots \\ \sup|\varphi_1 - \phi_1| + \dots + \sup|\varphi_n - \phi_n| \end{pmatrix} \right\|_\infty \\
&\le nLh\rho(s_1, s_2).
\end{aligned}$$

由条件可知, A 是压缩映射. 因此, A 存在且唯一存在不动点. 即, 有 $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)^T \in S$ 满足

$$\varphi_\nu = y_\nu(x_0) + \int_{x_0}^x f_\nu(t, \varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))\,\mathrm{d}t.$$

□

习题 4.8.6. *设 $f(x)$ 为 $0 < x < \infty$ 上的连续函数, 用定理 4.8.4 证明方程*

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x e^{x-s}\varphi(s)\,\mathrm{d}s + f(x)$$

具有唯一的连续函数解:

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{(\lambda+1)(x-s)} f(s)\,\mathrm{d}s.$$

证明: 考虑任意的有限区间 $[0, x]$, 可知题设方程满足定理 4.8.4 的条件, 因此在该区间上存在唯一解. 并且该解可以利用逐次迭代法求解. 取 $\varphi_0(x) = 0$, 有

$$\begin{aligned}
\varphi_1(x) &= f(x), \\
\varphi_2(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-y} f(y)\,\mathrm{d}y, \\
\varphi_3(x) &= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-y} f(y)\,\mathrm{d}y + \lambda^2 \int_0^x e^{x-y} \int_0^y e^{y-t} f(t)\,\mathrm{d}t\,\mathrm{d}y \\
&= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-y} f(y)\,\mathrm{d}y + \lambda^2 \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t \int_t^x e^{x-y}e^{y-t}\,\mathrm{d}y \\
&= f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-y} f(y)\,\mathrm{d}y + \lambda^2 \int_0^x e^{x-y}(x-y) f(y)\,\mathrm{d}y, \\
&\dots \\
\varphi_n(x) &= f(x) + \sum_{i=1}^{n-1} \lambda^i \int_0^x e^{x-y} \frac{1}{i!}(x-y)^i f(y)\,\mathrm{d}y, \\
&\dots
\end{aligned}$$

所以, 可以求得最终解

$$\varphi_n(x) = f(x) + \int_0^x e^{x-y} f(y) \sum_{i=1}^\infty \frac{\lambda^i (x-y)^i}{i!}\,\mathrm{d}y = f(x) + \int_0^x e^{(x-y)(\lambda+1)} f(y)\,\mathrm{d}y.$$

习题 4.8.8. *证明: 对于定理 4.8.2 的 B 及 n 以及在 R 中任意一点 x_0 有*

$$\rho(x^*, B^m x_0) \le c\frac{\alpha^{[\frac{m}{n}]}}{1-\alpha},$$

这里 $c = \max_{0\le k\le n-1} \rho(B^k x_0, B^{n+k} x_0)$, $[\frac{m}{n}]$ 表示 $\frac{m}{n}$ 的整数部分.

证明: 视 $B^m = B^{[\frac{m}{n}]}B^{m-[\frac{m}{n}]}$, 由于 B^n 是压缩映照, 记 $y = B^{m-[\frac{m}{n}]}x_0$ 有

$$\rho(x^*, B^m x_0) = \rho(x^*, B^{[\frac{m}{n}]}y) \leq \frac{\alpha^{[\frac{m}{n}]}}{1-\alpha}\rho(B^n y, y).$$

记 $k = m - [\frac{m}{n}]$, 可知 $0 \leq k < n$. 考虑到 c 的定义, 可知

$$\rho(B^n y, B^{m-[\frac{m}{n}]}x_0) = \rho(B^{n+k}x, B^k x_0) \leq c.$$

结合两个不等式便得,

$$\rho(x^*, B^m x_0) \leq c\frac{\alpha^{[\frac{m}{n}]}}{1-\alpha}.$$

4.9 致密集

习题 4.9.2. *设 K 是一个复数集, 它在实轴和虚轴上投影都是致密集, 证明 K 是致密集.*

证明: 假设 K 不是致密集, 由于在有限维空间, 致密与有界等价. 因此, K 必不有界. 则其存在一个点列 $\{\alpha_n\}$ 满足 $\|\alpha_n\| > n$. 由于 $\|\alpha_n\| = \sqrt{(\alpha_n)_x^2 + (\alpha_n)_y^2}$. 因此其实轴分量和虚轴分量中必至少有一个大于 $\frac{1}{\sqrt{2}}n$. 这样就派生有一列或是实轴或是虚轴分量的点列 $\{\beta\}_n$ 满足 $\beta_n > \frac{1}{\sqrt{2}}n$. 由抽屉原理, 该点列必包含有一组或者全是实轴分量或是全是虚轴分量的子列. 同样, 该组子列无界, 而是由于是 K 中元素的分量, 因而必包含在对应的投影中. 然而这将导致对应的投影无界, 故必不可能是致密的. 矛盾, 因此原假设不正确, 从而 K 是致密集. □

习题 4.9.4. *设 A 是欧几里得空间 E^n 的子集, $\{O_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ 是 A 的开覆盖, 证明必可从 $\{O_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ 中最多选出可列个开集 $\{O_{\lambda n}\}$, 使得 $\bigcup_{n=1}^{\infty} O_{\lambda n} \supset A$.*

证明: 由于欧几里得空间 E^n 的具有可数基 $\{O_n\}$, 例如以坐标都是有理数的点为球心, 半径为有理数的开球全体. 现考虑该可数基与 A 的交所形成的 A 的子可数开集族, 出于简便考虑, 仍记为 $\{O_n\}$, 它同样是 A 的可数基. 现如此选取 $\{O_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ 的子覆盖, 对于 $\forall O_\lambda \in \{O_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$, 若 $\exists O_n \subset O_\lambda$, 则取出 O_λ , 并从可数基中删除 O_n . 因此如此取出的子开集最多可列个, 记它们为 $\{O_{\lambda n}\}$.

断言这个子开集族覆盖了 A , 因为若该结论不真, 则存在 $x \in A$ 不被 $\{O_{\lambda n}\}$ 覆盖. 然而因为, $\{O_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$ 是 A 的开覆盖, 所以有开集 $x \in O \in \{O_\lambda|\lambda \in \Lambda\}$. 然而作为可数基, 必有开集 $O' \in \{O_n\}$ 满足 $x \in O' \subset O$, 这与子开集的选取矛盾. 所以, 这个子开集族覆盖了 A . □

习题 4.9.6. *如果将完全有界集定义中的有限 ϵ -网 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 的点要求 $x_i \in A(i = 1, \ldots, , n)$ 条件减弱为只要 $x_i \in R(i = 1, \ldots, n)$. 证明这样定义的完全有界集与原定义等价.*

证明: 从强定义推出弱定义是明显的, 因此只要证明从弱定义可以推出强定义即可. 记 $O(x_i, \epsilon)$ 为 A 的一个弱 ϵ -网. 若 $O(x_i, \epsilon) \in A = \emptyset$, 则删除该开集不产生任何影响; 当 $O(x_i, \epsilon) \in A \neq \emptyset$ 时, 任取其中一个点 $\tilde{x}_n \in A$. 断言这样的 $\tilde{x}_n$ 生成了一个 A 的强 2ϵ -网. 因为 $\forall x \in O(x_i, \epsilon)$,

$$\rho(x, \tilde{x}_i) \leq \rho(x_i, \tilde{x}_i) + \rho(x_i, x) \leq 2\epsilon.$$

即, $O(\tilde{x}_i, 2\epsilon) \supset O(x_i, \epsilon)$. 所以必然有

$$\bigcup_{\tilde{x}_i} O(\tilde{x}_i, 2\epsilon) \supset A.$$

因此, 从弱定义也可以得到强定义. □

习题 4.9.8. *设 A 是度量空间 R 中的紧集, $\{F_\lambda\}$ 是 A 的一族闭子集, 如果 $\{F_\lambda\}$ 中任意有限个 $F_{\lambda_1},\dots,F_{\lambda_n}$ 的交集都不空, 那么 $\bigcap_\lambda F_\lambda$ 也不空.*

反之, 如果集 A 具有如下性质: 对于 A 中任何相对于 A 闭的子集族 $\{F_\lambda\}$, 从任意有限交集不空必可推出 $\bigcap_\lambda F_\lambda$ 不空. 那么, A 必是紧集.

证明: 首先, 由于 $\{F_\lambda\}$ 是 A 的一族闭子集, 则 $\{A-F_\lambda\}$ 是 A 的一族开子集. 若 $\bigcap_\lambda F_\lambda$ 空, 那么意味着 $\bigcup_\lambda(A-F_\lambda)=A$. 即该开子集为 A 的一组开覆盖. 由于 A 紧, 所以必存在有限子覆盖 $A-F_{\lambda_1},\dots,A-F_{\lambda_n}$. 然而由于条件 $\bigcup_i(A-F_{\lambda_i})=A-\bigcap_i F_{\lambda_i}\neq A$, 存在矛盾. 因此, $\bigcap_\lambda F_\lambda$ 不能为空.

反过来, 由条件可知, 若 $\bigcap_\lambda F_\lambda$ 空, 则其必有一组有限子集交为空. 因此, 若 O_λ 是 A 的一族开覆盖, 由它所派生的闭子集 $A-O_\lambda$ 交为空. 所以其存在一组有限子集 $A-O_{\lambda_1},\dots,A-O_{\lambda_n}$ 交为空. 即, $O_{\lambda_1},\dots,O_{\lambda_n}$ 为 A 的有限覆盖. 所以, A 是紧集. □

习题 4.9.10. *证明无限维的 Banach 空间不能分解为可列个致密集的和.*

证明: [3] 首先, 说明无限维赋范空间中的致密集是疏朗的. 假定该结论不真, 则存在一个开球 O 属于某个致密集 $\bar{A}$, 因此 $\bar{O}\subset\bar{A}$. 由于闭球 $\bar{O}$ 拓扑同构于单位闭球, 而单位闭球是不致密的, 因此 $\bar{O}$ 不是致密的. 然而, 这将与 $\bar{A}$ 的致密性相违背. 因为 $\bar{O}$ 的任意开覆盖对应于 $\bar{A}$ 中的一族开集, 这族开集再加上开集 $\bar{A}-\bar{O}$ 便得到了 A 的一组开覆盖. 所得的有限覆盖在去掉 $\bar{A}-\bar{O}$ 的基础上便可得到 $\bar{O}$ 的有限覆盖, 这与 $\bar{O}$ 的不致密性矛盾. 因此, 无限维赋范空间中的致密集是疏朗的. 那么, 由 Baire 纲定理可知, 无限维 Banach 空间不可能由可列个致密集并成. □

习题 4.9.12. *设 $C_\alpha[a,b]$ 是 $[a,b]$ 上满足 Hölder 连续性条件*

$$|f(t)-f(t')|\le M|t-t'|^\alpha, t,t'\in[a,b],$$

而且 $f(a)=0$ 的函数全体, 这里 M,α 是正的常数, 并且 $0<\alpha\le 1$. 在 $C_\alpha[a,b]$ 中规定范围如下: 对于 $f\in C_\alpha[a,b]$, 令

$$\|f\|=\sup_{t,t'\in[a,b]}\frac{|f(t)-f(t')|}{|t-t|^\alpha},$$

写出 $C_\alpha[a,b]$ 中的点集是完全有界集的一些条件.

证明: 考虑满足如下条件的 f 的集合 S

$$|f(t)-f(t')|\le M|t-t'|^{\alpha+\epsilon},\forall f(t),t,t'\in[a,b],$$

其中 ϵ 是任意小的正实数. 断言它们是 $C_\alpha[a,b]$ 空间中的预紧集, 因而是完全有界的.

首先, 由于诸 f 满足有界和等度连续, 所以它们是 $C[a,b]$ 上按最大模范数的预紧集. 考虑到

$$\frac{|f(t)-f(t')|}{|t-t'|^\alpha}=\left(\frac{|f(t)-f(t')|}{|t-t'|^{\alpha+\epsilon}}\right)^{\frac{\alpha}{\alpha+\epsilon}}(|f(t)-f(t')|)^{\frac{\epsilon}{\alpha+\epsilon}}\le M^{\frac{\alpha}{\alpha+\epsilon}}(|f(t)-f(t')|)^{\frac{\epsilon}{\alpha+\epsilon}}.$$

对于任意属于 S 的点列 $\{f_n\}$. 由于前面已经证明, f_n 是 $C[a,b]$ 上的预紧集, 所以它有收敛的子列, 不妨仍记之为 f_n . 由上述不等式, 可知该点列 f_n 同样是 $C_\alpha[a,b]$ 上的 Cauchy 列. 因为

$$\frac{|f_m(t)-f_n(t)+f_n(t')-f_m(t')|}{|t-t'|^\alpha}\le M^{\frac{\alpha}{\alpha+\epsilon}}(2\sup_t|f_n(t)-f_m(t)|)^{\frac{\epsilon}{\alpha+\epsilon}}.$$

所以, S 是 $C_\alpha[a,b]$ 空间中的预紧集, 因而是完全有界的. □

[3]该题的证明思路由尹雪元博士提供.

习题 4.9.14. *设 X 是赋范线性空间, $g_1,\dots,g_n$ 是 X 中 n 个向量. 证明, 对任何 $x\in X$, 必存在数 $\lambda_1^0,\dots,\lambda_n^0$, 使得*

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i^0 g_i\right\|=\inf_{\lambda_1,\dots,\lambda_n}\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\right\|,$$

其中, $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 是 n 个任意数.

证明: 先对 $n=1$ 的情况进行证明. 由下确界的定义, 必定存在一组点列 $\lambda_1^{(m)}$ 使得

$$\left\|x-\lambda_1^{(m)}g_1\right\|<\inf_{\lambda_1}\|x-\lambda_1 g_1\|+\frac{1}{m}.$$

断言这组 $\lambda_1^{(m)}$ 必有界. 因为

$$\left|\|x\|-|\lambda_1^{(m)}|\|g_1\|\right|\le\left\|x-\lambda_1^{(m)}g_1\right\|<\inf_{\lambda_1}\|x-\lambda_1 g_1\|+\frac{1}{m}.$$

所以作为 E 中一组有界点列, 其必有收敛子列. 不妨仍记其为 $\lambda_1^{(m)}$, 并记其极限点为 λ_1^0 . 由于范数是连续的, 因此有

$$\inf_{\lambda_1}\|x-\lambda_1 g_1\|\le\left\|x-\lambda_1^0 g_1\right\|=\lim_{m}\left\|x-\lambda_1^{(m)}g_1\right\|\le\inf_{\lambda_1}\|x-\lambda_1 g_1\|,$$

即, $\inf_{\lambda_1}\|x-\lambda_1 g_1\|=\|x-\lambda_1^0 g_1\|$. 下面如此的构造其他剩余的 λ_i^0 , 假定第 k 个已经得到, 那么取 λ_{k+1}^0 满足

$$\left\|(x-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i^0 g_i)-\lambda_{k+1}^0 g_{k+1}\right\|=\inf_{\lambda_{k+1}}\left\|(x-\sum_{i=1}^{k}\lambda_i g_i)-\lambda_{k+1}g_{k+1}\right\|.$$

由于每次选取都是已经证明的一变元情况, 因此都是可以取到的. 下面只需要证明, 该取法取到最小值. 这是因为对于任意的 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ 有,

$$\left\|x-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i g_i\right\|=\left\|(x-\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i)-\lambda_n g_n\right\|\ge\left\|(x-\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i g_i)-\lambda_n^0 g_n\right\|\ge\dots\ge\left\|x-\sum_{i=1}^{n-1}\lambda_i^0 g_i\right\|.$$

□

5 有界线性算子

5.1 有界线性算子

习题 5.1.2. *作赋范线性空间 $l^p(\infty > p > 1)$ 中算子 T 如下: 当 $x = \{x_\nu\} \in l^p$ 时, $Tx = \{y_\mu\}$, 其中*

$$y_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} t_{\mu\nu} x_\nu, \mu = 1, 2, 3, \cdots$$

而且 $\sum_\mu \left(\sum_\nu |t_{\mu\nu}|^q\right)^{\frac{p}{q}} < \infty, \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = 1$. 证明 T 是 l^p 上有界线性算子. 又问 l^p 上有界线性算子是否都是这个形式.

证明: 由离散的 Hölder 不等式, 成立有

$$|y_\mu| = \sum_{\nu=1}^{\infty} |t_{\mu\nu} x_\nu| \le \left(\sum_\nu |t_{\mu\nu}|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_\nu |x_\nu|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

所以, 对于每个级数 y_μ 是绝对收敛的, 因此, 对于任何的 ϵ , 存在 N 使得

$$\sum_{\nu=1}^{N} t_{\mu\nu} x_\nu - \epsilon \le y_\mu = \sum_{\nu=1}^{\infty} t_{\mu\nu} x_\nu \le \sum_{\nu=1}^{N} t_{\mu\nu} x_\nu + \epsilon.$$

因此, 由于有限求和的交换性, T 是线性算子. 同时, 由于

$$\sum_\mu y_\mu^p \le \left(\sum_\nu x_\nu^p\right) \left(\sum_\mu \left(\sum_\nu t_{\mu\nu}^q\right)^{\frac{p}{q}}\right) = C\|x\|_p.$$

因此, T 是 l^p 上的有界线性算子. 然而, 并非所有 l^p 上的有界线性算子都形如 T , l^p 上的恒等算子便是最简单的反例. □

习题 5.1.4. *T 是 $C[a, b]$ 到 $C[a, b]$ 的积分算子:*

$$(T\varphi)(s) = \int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t, \varphi \in C[a, b],$$

其中 $K(s, t)$ 是 $[a, b] \times [a, b]$ 上二元连续函数. 证明

$$\|T\| = \max_{a \le s \le b} \int_a^b |K(s, t)|\,\mathrm{d}t.$$

证明: T 是线性算子, 对于任意的 $\varphi \in C[a, b]$ 有

$$\|T\varphi(s)\| = \sup_s \left|\int_a^b K(s, t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t\right| \le \|\varphi\| \sup_s \int_a^b |K(s, t)|\,\mathrm{d}t = \|\varphi\| \max_{a \le s \le b} \int_a^b |K(s, t)|\,\mathrm{d}t,$$

其中用到了在紧集上的连续函数确界可达. 因此, $\|T\| \le \max_{a \le s \le b} \int_a^b |K(s, t)|\,\mathrm{d}t$. 反过来看, 先假设 $|K(s, t)|$ 在 (a, b) 仅有限次变号, 记这些变号点为 $t_1, t_2, \ldots, t_n$. 考虑这样的一个连续函

数 $u(t)$, 在区间 $[a, t_1 - \frac{\epsilon}{2}], \ldots, [t_i + \frac{\epsilon}{2}, t_{i+1} - \frac{\epsilon}{2}], \ldots, [t_n + \frac{\epsilon}{2}, b]$ 上取值 $\mathrm{sgn}_t K(s,t)$. 而在这些区间之间的地方为连接两端点的直线, 那么 $\|u(t)\| = 1$, 且

$$\begin{aligned} Tu(s) &= \int_a^b K(s,t)u(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \int_a^{t_1-\frac{\epsilon}{2}} |K(s,t)|\,\mathrm{d}t + \int_{t_n+\frac{\epsilon}{2}}^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \int_{t_i+\frac{\epsilon}{2}}^{t_{i+1}-\frac{\epsilon}{2}} |K(s,t)|\,\mathrm{d}t + \sum_{i=1}^n \int_{t_i-\frac{\epsilon}{2}}^{t_i+\frac{\epsilon}{2}} K(s,t)u(t)\,\mathrm{d}t. \end{aligned}$$

若记 M 为 $|K(s,t)|$ 在 $[a,b]\times[a,b]$ 上的最大值. 那么, 考虑到

$$\sum_{i=1}^n \int_{t_i-\frac{\epsilon}{2}}^{t_i+\frac{\epsilon}{2}} K(s,t)u(t) - |K(s,t)|\,\mathrm{d}t \geq -Mn\epsilon - M\sum_{i=1}^n \int_{t_i-\frac{\epsilon}{2}}^{t_i+\frac{\epsilon}{2}} u(t)\,\mathrm{d}t \geq -Mn\epsilon - M\sum_{i=1}^n \int_{t_i-\frac{\epsilon}{2}}^{t_i+\frac{\epsilon}{2}} \mathrm{d}t = -2Mn\epsilon.$$

所以,

$$Tu(s) \geq \int_a^b |K(s,t)|dt - 2Mn\epsilon.$$

由于 ϵ 可以任意小, 因此 $\|T\| \geq \max_{a\leq s\leq b} \int_a^b |K(s,t)|\,\mathrm{d}t$.

倘若 $K(s,t)$ 在区间 (a,b) 上变号次数是无穷次, 那么断言其变号次数是可数次. 因为, 由于 $K(s,t)$ 是连续函数, 因此对应于每次变号, 其总有一个孤立的零点. 那么, 每个变号零点之间的区间长度是个正数, 它们的和应该不超过区间的长度. 然而, 不可列个正数求和是不可能有限的. 因此, 变号次数必须为可列次. 记这些点为 t_i , 由于级数 $\sum_i t_{i+1} - t_i$ 收敛, 存在一个指标 n 使得 $b - t_n < \epsilon$. 此时在 $[a, t_n]$ 处构造好 $u(t)$ 后, 任意保持最大值的延拓 $u(t)$ 到 $[t_n, b]$ 上, 对应积分的变化不会超过 $2M\epsilon$. 所以命题同样成立. □

习题 5.1.6. *设 T 是赋范线性空间 X 到赋范线性空间 Y 的线性算子. 如果 T 的零空间 $\mathscr{N}(T) = \{x|Tx = 0\}$ 是闭集, 问 T 是否有界? 当 T 是有界线性算子时, $\mathscr{N}(T)$ 是闭集吗?*

证明: T 的零空间 $\mathscr{N}(T) = \{x|Tx = 0\}$ 是闭集并不能保证 T 是有界的. 其反例同样可以用习题 4.5.10 中所举反例. 因为对应的恒等算子的核只有 0 , 所以必然是闭的. 然而在该例中的恒等算子不连续.

但 T 是有界线性算子时, $\mathscr{N}(T)$ 一定是闭集. 因为若 $\{x_n\} \in \mathscr{N}(T)$ 是一组收敛到 x 的点列. 由于 T 的连续性, 成立

$$0 = \lim_n T(x_n) = T(\lim_n x_n) = T(x).$$

所以, $x \in \mathscr{N}(T)$, 即 $\mathscr{N}(T)$ 是闭集. □

习题 5.1.8. *在复 $C^k[0,1]$(k 是正整数) 定义*

$$\|x\| = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=0}^k \frac{|x^{(i)}(t)|}{i!},$$

采用通常的加, 乘运算, 证明 $C^k[0,1]$ 是具有幺元的 Banach 代数.

证明: $C^k[0,1]$ 在该范数下对加法和数乘封闭是明显的. 对于其完备性, 若记 $\{x_n\}$ 是其中一列基本列, 那么对于任何的 j

$$\sup_{t\in[0,1]} \frac{|x_n^{(j)}(t) - x_m^{(j)}(t)|}{j!} \leq \|x_n - x_m\| = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=0}^k \frac{|x_n^{(i)}(t) - x_m^{(i)}(t)|}{i!} < \epsilon.$$

即, 对于它的任何 j 阶导数, 都是在复 $C[0,1]$ 空间中按最大模范数下的基本列, 因而都分别有极限 $x^{(j)} \in C[0,1]$. 同时, 由于 $x_n^{(j)}, x_n^{(j-1)}$ 都按最大模收敛, 所以二者的极限函数满足 $x^{(j)} = \frac{\mathrm{d}x^{(j-1)}}{\mathrm{d}t}$. 因此, $x \in C^k[0,1]$, 且

$$\|x - x_m\| = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=0}^{k} \frac{|x^{(i)}(t) - x_m^{(i)}(t)|}{i!} \to 0.$$

因此, $C^k[0,1]$ 是 Banach 空间.

下面来说明其对于乘法封闭, 并且满足乘法的不等式. 任取 $x, y \in C^k[0,1]$, 有

$$\begin{aligned}
\|xy\| &= \sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=0}^{k} \frac{|(xy)^{(i)}(t)|}{i!} \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \frac{C_i^j |x^{(j)} y^{(i-j)}|}{i!} = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{i} \frac{|x^{(j)} y^{(i-j)}|}{j!(i-j)!} \\
&= \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j=0}^{i} \frac{|x^{(j)}|}{j!} \sum_{i=0}^{k} \frac{|y^{(i-j)}|}{(i-j)!} = \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j=0}^{i} \frac{|x^{(j)}|}{j!} \sum_{i=0}^{k} \frac{|y^{i}|}{i!} \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j=0}^{k} \frac{|x^{(j)}|}{j!} \sum_{i=0}^{k} \frac{|y^{i}|}{i!} \\
&\leq \sup_{t\in[0,1]} \sum_{j=0}^{k} \frac{|x^{(j)}|}{j!} \sup_{t\in[0,1]} \sum_{i=0}^{k} \frac{|y^{i}|}{i!} = \|x\| \cdot \|y\|.
\end{aligned}$$

因此, 其对于乘法封闭, 并且满足乘法的不等式. 加之, $x(t) = 1$ 是对应的幺元, 所以 $C^k[0,1]$ 是含幺元的 Banach 代数. □

习题 5.1.10. *在绝对收敛级数 $a = \sum_{-\infty}^{+\infty} \alpha_n$ 全体 l_1 上, 规定" 乘法" 如下: 当 $a = \{\alpha_n\}, b = \{\beta_n\} \in l_1$ 时,*

$$ab = \left\{ \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m} \beta_m \right\}$$

加法, 数乘如通常的. 并规定 $\|a\| = \sum_{-\infty}^{+\infty} |\alpha_n|$. 证明 l_1 是具有幺元的 Banach 代数.

证明: l_1 是 Banach 空间在 4.7 节已经证明, 而且对应于乘法, 其幺元为第 0 号分量为 1 的元素: $\{\ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$, 因此只需证明其对应乘法满足的性质即可. 任取 $a, b \in l_1$, 断言 ab 的每个分量都是有限的. 因为, 每个 $|\alpha_n|$ 是有界的, 记其上界为 M , 此时 $|\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \alpha_{n-m}\beta_m| \leq M \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\beta_m|$, 是有界的.

现对于任何的正整数 N , 考虑

$$\sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{n-m}\beta_m| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\beta_m| \sum_{n=-N}^{N} |\alpha_{n-m}| = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\beta_m| \sum_{n=-N-m}^{N-m} |\alpha_n| \leq \|a\| \cdot \|b\|,$$

其中用到了绝对收敛数列可以交换求和顺序. 由于上述不等式对于所有的 N 都成立, 因此

$$\|ab\| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{n-m}\beta_m| = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} |\alpha_{n-m}\beta_m| \leq \|a\| \cdot \|b\|.$$

因此, 其对于乘法封闭, 并且满足乘法的不等式. 综上, l_1 是具有幺元的 Banach 代数. □

习题 5.1.12. *设 X 是赋范线性空间.*

1. *如果 T 是 X 上有界线性算子, 那么必有常数 λ , 对于任何正整数 $n(T-\lambda I)^n \neq 0$.*

2. *证明不存在 X 上两个有界线性算子 A, B 使得 $[A, B] = I$.*

证明:

1. 任取一个 $|\lambda| > \|T\|$, 将证明这样的 λ 就是满足题设条件的. 首先, 对于任意的 $x \neq 0, x \in X$, 有
$$\|Tx - \lambda x\| \geq |\lambda|\|x\| - \|T\|\|x\| = (|\lambda| - \|T\|)\|x\| > 0,$$
也就是说, 任何非零的元素 x 进过 $T - \lambda I$ 的作用之后依然是非零的. 所以, 根据归纳法, 任取一个非零的 x , 有
$$\|(T-\lambda I)^n x\| = \|(T-\lambda I)(T-\lambda I)^{n-1}x\| \geq (|\lambda| - \|T\|)\|T-\lambda I)^{n-1}x\| > 0.$$
因此, $n(T-\lambda I)^n \neq 0.$

2. [4] 假设结论不真, 则根据提示, 由于用 $B - \lambda I$ 替换交换子 $[A, B]$ 中的 B 不改变交换子的值. 因此, 可以假设 $\forall n, B^n \neq 0$. 现用数学归纳法证明成立关系式 $[A, B^n] = nB^{n-1}$. 首先, 根据假设条件, 可以该等式对于 $n = 1$ 的情况成立. 假设它对于 $n = k-1$ 的情况也成立, 那么
$$AB^k - B^kA = AB^{k-1}B - B^{k-1}BA = ((k-1)B^{k-2} + B^{k-1}A)B - B^{k-1}(AB - I) = kB^{k-1}.$$
即, 该等式对于 $n = k$ 也成立. 所以, $[A, B^n] = nB^{n-1}$. 然而这是不可能的, 因为
$$n\|B^{n-1}\| = \|[A, B^n]\| = \|AB^n - B^nA\| \leq 2\|A\|\|B\|\|B^{n-1}\|.$$
即 $\|A\|\|B\| \geq \frac{n}{2}, \forall n \in N^+$. 这意味着, A, B 中至少有一个是无界的, 这与假设的条件矛盾.

□

习题 5.1.14. *f 是实赋范线性空间 X 上的线性泛函, c 为实数. 证明*

1. *超平面 $L_c(f)$ 和超平面 $L_c(f)$ 决定的半空间: $\{x|f(x) \geq c\}, \{x|f(x) \leq c\}, \{x|f(x) > c\}, \{x|f(x) < c\}$ 等都是凸集;*

2. *当 f 连续时, $L_c(f), \{x|f(x) \geq c\}, \{x|f(x) \leq c\}$ 是闭的, $\{x|f(x) > c\}, \{x|f(x) < c\}$ 是开的;*

3. *$L_c(f)$ 和半空间中任何一个具有非空的核时, f 必连续.*

证明:

1. 超平面和对应的半空间是凸集, 那是因为 f 是线性算子. 以超平面 $L_c(f)$ 和半空间: $\{x|f(x) \geq c\}$ 为例. 假设 $x, y \in L_c(f)$, 那么有
$$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y) = c.$$
所以, $L_c(f)$ 是凸集. 同理, 假设 $x, y \in \{x|f(x) \geq c\}$, 那么有
$$f(tx + (1-t)y) = tf(x) + (1-t)f(y) \geq c.$$
所以, $x, y \in \{x|f(x) \geq c\}$ 是凸集.

[4]该小题的矛盾点由尹雪元博士提供.

2. 分别以 $L_c(f)$ 和 $\{x|f(x)>c\}$ 为例. 假设 $\{x_n\}$ 是 $L_c(f)$ 中的一列收敛于 x 的点列. 那么

$$f(x)=f(\lim_n x_n)=\lim_n f(x_n)=c.$$

所以, $L_c(f)$ 是闭集. 由于 f 连续, 所以其有界, 记其范数为 $\|f\|$. 任取 $x\in\{x|f(x)>c\}$, 记 $d=f(x)-c$. 断言开球 $O(x,\frac{d}{\|f\|})\subset\{x|f(x)>c\}$. 因为 $\forall y\in O(x,\frac{d}{\|f\|})$, 有

$$|f(y)-f(x)|=|f(x-y)|\le\|f\|\|x-y\|<d.$$

所以, $f(y)=f(y)-f(x)+f(x)>f(x)-d=c$. 所以 $\{x|f(x)>c\}$ 是开的

3. **注**: 我不清楚什么是一个超平面或者是半平面的核, 如果有知道的同学可以邮件联系我.

□

5.2 连续线性泛函的表示及延拓

习题 5.2.2. *将习题 1 的结论推广到 $L^p(\Omega,B,\mu)(\infty>p\ge1)$ 的情况, 此地 (Ω,B,μ) 是全 σ 有限测度空间.*

证明: 先考虑 $\mu(\Omega)<\infty$ 的情形. 此时任何可测集合 $A\in B$ 的示性函数 χ_A 是 $L^p(\Omega,B,\mu)$ 可积的. 因此对于任何的 $L^p(\Omega,B,\mu)$ 上的线性泛函 F , 可以定义一个 B 上的新集合函数 ν 满足

$$\nu(A)=F(\chi_A).$$

下面说明 ν 是 σ 可和的. 设 $\{A_n\}$ 是 Ω 可列个互不相交可测的集合, 由于全测度 $\mu(\Omega)<\infty$, 所以存在 N , 使得

$$\sum_{j>N}\mu(A_j)<\epsilon.$$

那么, 由线性泛函的有限可和性, 成立

$$\left|\nu(\bigcup_j^\infty A_j)-\nu(\bigcup_j^N A_j)\right|=\left|F(\chi_{\bigcup A_j})-\sum_{i=1}^N F(\chi_{A_j})\right|=\left|F(\chi_{\bigcup_{j=N+1}^\infty}A_j)\right|<\|F\|\cdot\epsilon^{\frac{1}{p}}.$$

两边取极限即得 ν 的可列可加性. 由于

$$\nu(A)=F(\chi_A)\le\|F\|\cdot\mu(A).$$

所以, ν 关于 μ 绝对连续. 由 Radon-Nikodým 定理, 可知存在属于 $L_1(\Omega,B,\mu)$ 的可测函数 g , 使得

$$\nu(A)=\int_\Omega g\chi_A\,\mathrm{d}\mu.$$

因此, 对于任何一个简单函数 $\varphi=\sum_{i=1}^n\alpha_i\chi_{A_i}$, 有

$$F(\varphi)=\sum_{i=1}^n\alpha_i\nu(A_i)=\int_\Omega g\varphi\,\mathrm{d}\mu.$$

因此, 断言 $g\in L^q(\Omega,B,\mu)$. 因为, 任取一组几乎处处收敛到 $|g|^q$ 的非负递增简单函数 φ_n . 有

$$\int_\Omega\varphi_n\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega\varphi_n^{\frac{1}{p}}\varphi_n^{\frac{1}{q}}\,\mathrm{d}\mu\le\int_\Omega\varphi_n^{\frac{1}{p}}|g|\,\mathrm{d}\mu=\int_\Omega\varphi_n^{\frac{1}{p}}\mathrm{sgn}(g)g\,\mathrm{d}\mu=F(\varphi_n^{\frac{1}{p}}\mathrm{sgn}(g))\le\|F\|\left(\int_\Omega\varphi_n\,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

因此, 由 Fatou 引理

$$\|g\|_q = \liminf \left(\int_\Omega \varphi_n \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{q}} \leq \|F\|.$$

对于任何的 $f \in L^p(\Omega, B, \mu)$, 存在一列简单函数 φ_n 以 $L^p(\Omega, B, \mu)$ 的范数逼近 f , 因此, 根据 F 的连续性, 得

$$F(f) = F(\lim \varphi_n) = \lim F(\varphi_n) = \lim \int_\Omega g\varphi_n \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega gf \, \mathrm{d}\mu.$$

由于, $|F(f)| \leq \int_\Omega |gf| \, \mathrm{d}\mu \leq \|g\|_q \|f\|_p$, 所以结合前证, 即得 $\|F\| = \|g\|_q$. 最后, 若记 $\tilde{g}$ 是另一个满足条件的 $L^q(\Omega)$ 可测函数, 那么

$$\int_\Omega f(g - \tilde{g}) \, \mathrm{d}\mu = 0, \forall f \in L^p(E).$$

那么按前面证明 $g \in L^q(\Omega)$ 的过程, 可得 $g = \tilde{g}, a.e.$. 所以在 $L^q(\Omega)$ 的意义下, 是唯一的.

当 $\mu(\Omega) = \infty$ 但是 全 σ 有限时, 取 A_n 为一组有限, 递增并穷尽 Ω 的集合. 对于任意的 $f \in L^p(\Omega)$, 作 $f|_{A_n}$ 如下

$$f|_{A_n} = \begin{cases} f & t \in A_n, \\ 0 & t \in \Omega - A_n. \end{cases}$$

将泛函 F 限制作用在 $f|_{A_n}$ 上, 便得到了在 A_n 上的泛函 $F|_{A_n}$. 因此, 有前所证, 有 $g_n \in L^q(A, B \bigcap A, \mu)$. 满足 $\|g_n\|_q = \|F|_{A_n}\| \leq \|F\|$, 且

$$F|_{A_n}(f) = \int_{A_n} gf|_{A_n} \, \mathrm{d}\mu.$$

将 g_n 零延拓到 $\Omega - A_n$ 上. 根据 g_n 的唯一性, 可知 $g_n = g_m, \forall n > m, a.e.$ on A_m . 所以 g_n 几乎处处收敛到一个函数 g , 并且 $\{|g_n|\}$ 不减地收敛到 $|g|$, 根据单调收敛定理, 成立

$$\|g\|_q = \lim \|g_n\|_q \leq \|F\|.$$

对于任意的 $f \in L^p(\Omega)$, 由于 $\{|fg_n|\}$ 被可积函数 $|fg|$ 控制, 所以由控制收敛定理得

$$F(f) = \lim F(f|_{A_n}) = \lim \int_\Omega f_j g \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega fg \, \mathrm{d}\mu.$$

综合前两式即得范数等价. 对于唯一性, 假设另一个 $\tilde{g}$ 满足条件. 则将其限制在 $A_1, A_{n+1} - A_n$ 上必几乎处处等于 g . 所以在全空间上也是几乎处处等于 g 的. □

习题 5.2.4. *设 L 是 Banach 空间 X 的闭线性子空间, 并且存在 X 的 n 维子空间 E , 使得 $E \bigcap L = \{0\}, X = L + E$, 这里 $L + E = \{e + l | e \in E, l \in L\}$. 证明 X 上一切在 L 上取值为零的连续线性泛函全体是 X^* 中的闭线性子空间, 并且它的维度是 n .*

证明: 首先, 由于所有有限维空间都与同维度的欧几里得空间拓扑同胚, 因此它们必然都是闭空间. 所以只要说明一切在 L 上取值为零的连续线性泛函全体的维度是 n 即可.

因为 E 是 X 的 n 维子空间, 所以其中必存在 n 个点组成的线性无关组, 记之为 $\{x_i\}$. 由于 L 是 X 的闭子空间, 且 $E' = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n\}$ 作为有限维空间, 也是闭的, 因此 $L' = L + E'$ 是闭的. 由于 $X = L + E$, 所以 $X = L' + \mathrm{span}\{x_i\}$, 并且 $L' \bigcap \mathrm{span}\{x_i\} = \{0\}$.[5] 那么, $d_i = \rho(x_i, L') > 0$, 由定理 5.2.3 可知, 存在有界线性泛函 e_i 满足

$$e_i(x) = 0, \forall x \in L', e_i(x_i) = d_i, \|e_i\| = 1.$$

[5] 如若不然, 则将存在 $s_m = y_m \square \sum_{j \neq i} a_{mj} x_j \in L' \to x_i$. 因为收敛点列必然是基本的, 故 $\|y_m - y_k + \sum_{j \neq i}(a_{mj} - a_{kj}) x_j\| \to 0$. 由于 $y_m - y_k \in L, \sum_{j \neq i}(a_{mj} - a_{kj}) x_j \in E$, 因而这意味着它们必须分别收敛. 故存在 $y + \sum_{j \neq i} a_j x_j = x_i$, 即 $y = x_i - \sum_{j \neq i} a_j x_j = 0$, 矛盾.

诸 e_i 的线性无关性是明显的, 且 e_i 在 L 上取值为零, 所以其位于所求的连续线性泛函全体中. 假设 f 是在 L 上取值为零的连续线性泛函, 由于 $x \in X$ 有唯一的分解 $x = \sum_{i=1}^n a_i x_i + y, y \in L$. 所以,

$$f(x) = \sum_{i=1}^n a_i f(x_i) = \sum_{i=1}^n a_i \frac{f(x_i)}{d_i} e_i(x).$$

因此, 所有满足条件的 f 都可以被 e_i 线性表示, 故其维度是 n , 因而是闭的. □

习题 5.2.5. *设 $\{f|f(0) = f(1) = 0, f$ 在 $[0,1]$ 上全连续, 并且 $f' \in L^2[0,1]\}$, 在 X 上规定 $\|f\| = \left(\int_0^1 |f'(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}$. 证明*

1. *$(X, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间;*
2. *当 $F \in X^*$ 时, 存在 $g_F \in X$, 对一切 $f \in X, F(f) = \int_0^1 f'(t) g_F'(t) \,\mathrm{d}t$, 并且 $F \to g_F$ 是 X^* 到 X 的保范线性同构.*

证明:

1. X 是线性空间是明显的. 假设 $\{f_n\}$ 是 X 的一列基本列. 根据定义可知

$$\|f_n - f_m\| = \left(\int_0^1 |f_n'(t) - f_m'(t)|^2 \,\mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}} \to 0.$$

视 f_n' 为 $L^2[0,1]$ 空间中的点列, 上式说明该点列是基本的, 由 $L^2[0,1]$ 的完备性可知, 存在 $g \in L^2[0,1]$ 满足 $\|f_n' - g\|_2 \to 0$. 记 $f = \int_0^t g \,\mathrm{d}s$, 如此定义的 f 是合理的, 因为 $\int_0^t |g| \,\mathrm{d}s \le \int_0^1 |g| \,\mathrm{d}s \le (\int_0^1 g^2 \,\mathrm{d}s)^{\frac{1}{2}} < \infty$. 由于 f 是全连续的, 并且 $f(0) = 0$, 只需要说明 $f(1) = \int_0^1 g \,\mathrm{d}s = 0$, 则完备性即得证. 而该论断成立, 因为

$$\left|\int_0^1 f_n' - g \,\mathrm{d}s\right| \le \int_0^1 |f_n' - g| \,\mathrm{d}s \le \int_0^1 |f_n' - g|^2 \,\mathrm{d}s \to 0.$$

2. 由于 $\forall f \in X$, f 是全连续的, 所以它几乎处处可导, 在其可导处, 极限是唯一的. 所以, 全连续函数 f 在几乎处处的意义下, 唯一的决定了它的导数 f' . 因此, 对于任意 $F \in X^*$, 可视其为定义于 $L^2[0,1]$ 的线性子空间上的连续线性泛函. 因此, 由延拓定理, 它可以延拓为一定义于 $L^2[0,1]$ 上的有界线性泛函. 因而存在 $g \in L^2[0,1]$ 使得 $\forall f \in X$, 有

$$F(f) = \int_0^1 g f' \,\mathrm{d}s.$$

现对 g 进行如下的修正, 记 $\tilde{g} = g - \int_0^1 g \,\mathrm{d}t$. 则, $\forall f \in X$, 有

$$F(f) = \int_0^1 g f' \,\mathrm{d}s = \int_0^1 g f' \,\mathrm{d}s - \int_0^1 f' \,\mathrm{d}s \int_0^1 g \,\mathrm{d}t = \int_0^1 \tilde{g} f' \,\mathrm{d}s.$$

并且, $g_F = \int_0^t \tilde{g} \,\mathrm{d}s$ 满足 $g_F(1) = 0$. 由于映射的线性是明显的, 最后考虑范数如下

$$\|F\|^2 = \int_0^1 g^2 \,\mathrm{d}s = \int_0^1 (\tilde{g} + \int_0^1 g \,\mathrm{d}t)^2 \,\mathrm{d}s = \int_0^1 \tilde{g}^2 \,\mathrm{d}s.$$

□

习题 5.2.6. *设 E 是赋范线性空间, $x_1, \ldots, x_k \in E, \alpha_1, \ldots, \alpha_k$ 是一组数, 证明在 E 上存在线性泛函 f , 适合*

1. $f(x_\nu) = a_\nu, \nu = 1, 2, \ldots, k$;

2. $\|f\| \le M$

的充要条件是: 对任意的数 $t_1, \ldots, t_k$ *都成立*

$$\left|\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu a_\nu\right| \le M \left\|\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu x_\nu\right\|^{6}.$$

注: 我个人认为 $x_1, \ldots, x_k$ 应该线性无关. 因为 f 是线性的, 若某组 x_i, x_j 线性相关, 那么对应的 α_i, α_j 也需要对应成比例才符合 f 的线性性质.

证明: 必要性是明显的, 因为倘若存在 $x = \sum_{\nu=1}^{k} t_\nu x_\nu$, 满足 $M\|x\| < \left|\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu a_\nu\right|$. 那么

$$\left|\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu a_\nu\right| = |f(x)| \le M \left\|\sum_{\nu=1}^{k} t_\nu x_\nu\right\|$$

即得矛盾.

对于充分性, 暂时局限于考虑 E 的闭线性子空间 $G = \text{span}\{x_1, \ldots, x_k\}$ 上的有界线性泛函. 对于任何的指标 ν , 考虑 $L = \text{span}\{x_1, \ldots, x_{\nu-1}, x_{\nu+1}, \ldots, x_k\}$. 由于 $d_\nu = \rho(x_\nu, L) > 0$, 所以存在有界线性泛函 e_i 满足 $e_i(x) = 0, x \in L; e_i(x_\nu) = d_\nu$. 如此, 构造 f 如下:

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{k} \frac{\alpha_\nu}{d_\nu} e_i(x).$$

由假设条件, 记 $x = \sum_{\nu=1}^{k} \beta_\nu x_\nu$, 可知

$$|f(x)| = \left|\sum_{\nu=1}^{k} \alpha_\nu \beta_\nu\right| \le M \left\|\sum_{\nu=1}^{k} \beta_\nu x_\nu\right\| = M\|x\|.$$

所以, $\|f\| \le M$. 最后, 根据 Hahn-Banach 延拓定理, 将 f 延拓于 E 上即可. □

习题 5.2.7. *设* $\{x_\alpha | \alpha \in \Lambda\}, \{f_\alpha | \alpha \in \Lambda\}$ *分别是赋范线性空间* X *以及* X^* *的两族向量如果满足* $f_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}, \alpha, \beta \in \Lambda$ *, 那么称* $\{x_\alpha\}, \{f_\alpha\}$ *是对偶族. 证明*

1. *当* $\{x_\alpha\}, \{f_\alpha\}$ *是对偶族时,* $\{x_\alpha\}, \{f_\alpha\}$ *必分别是* X, X^* *中的线性无关族;*

2. *如果* $\{x_\alpha\}$ *满足下列条件:* $x_\alpha \notin \overline{span}\{x_\beta\}_{\beta \ne \alpha}, \alpha \in \Lambda$ *, 那么必存在* $\{f_\alpha\}$ *, 使得* x_α, f_α *是对偶族.*

3. *在* X *是线性空间情况下, 对任何一组线性无关向量* $\{x_\alpha\}$ *, 必存在一组相应的线性泛函* $\{f_\alpha\}$ *, 使得* $f_\alpha(x_\beta) = \delta_{\alpha\beta}$ *, 并且* $\{f_\alpha\}$ *必也是线性无关的.*

证明:

1. 假设关于 x_α 线性无关的命题不成立, 则存在 $x_s = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu x_\nu, \nu \ne s$. 明显地, 诸 c_ν 不能同时为零, 假设 $c_j \ne 0$, 那么 $f_j(x_s) = c_j f_j(x_j) = c_j \ne 0$, 这与对偶族的定义矛盾. 反过来, 若存在 $f_s = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu f_\nu, \nu \ne s$, 那么同样存在 $c_j \ne 0$, 同时 $f_s(x_j) = c_j f_j(x_j) = c_j \ne 0$, 也与对偶族的定义矛盾.

[6]课本此处用的是绝对值, 我个人认为应该是范数符号.

2. 对于任意的 α , 因为 $x_\alpha \notin E, E = \overline{\text{span}}\{x_\beta\}_{\beta\neq\alpha}, \alpha \in \Lambda$, 则 $d_\alpha = \rho(x_\alpha, E) > 0$, 因此存在有界线性泛函 f'_α 满足
$$f'_\alpha(x) = 0, x \in E; f'_\alpha(x) = d.$$
现作 $f_\alpha = \frac{1}{d}f'_\alpha$. 则该族 $\{f_\alpha\}$ 与 $\{x_\alpha\}$ 对偶.

3. 不妨假设所有 X 中的元素都可以被线性无关的 $\{x_\alpha\}$ 有限线性表示, 因为如必要, 可以 x_α 补成一组 Hamel 基. 考虑对线性空间 X 赋以如下的范数, 若 $x = \sum_\nu c_\nu x_\nu$, 那么 $\|x\| = \sum_\nu |c_\nu|$. 那么, 在该范数下, $x_\alpha \notin E, E = \overline{\text{span}}\{x_\beta\}_{\beta\neq\alpha}, \alpha \in \Lambda$. 这是因为, 任何 $x \in E$, 必可以表示为 $x = \sum_\nu c_\nu x_\nu, \nu \neq \alpha$. 那么
$$\|x - x_\alpha\| = \|\sum_\nu c_\nu x_\nu - x_\alpha\| = \sum_\nu |c_\nu| + 1 \geq 1.$$
因此, 不可能有点列能够收敛到 x_α . 所以, 利用第 2 小题的结论, 即得线性泛函 $\{f_\alpha\}$, 使得 x_α, f_α 是对偶族, 至于 $\{f_\alpha\}$ 的线性无关性, 是第 1 小题的结论.

$\square$

习题 5.2.8. *设 $\{a_n|n = 0, 1, 2, \ldots\}$ 是一列数, 证明存在 $[a, b]$ 上有界变差函数 $\alpha(t)$, 使得*
$$\int_a^b t^n \, \mathrm{d}\alpha(t) = a_n, n = 1, 2, 3, \ldots$$
成立的充要条件为对一切多项式 $p(t) = \sum c_\nu t^\nu$, 成立着
$$\left|\sum_{\nu=0}^n c_\nu a_\nu\right| \leq M \max_{a\leq t\leq b} |p(t)|,$$
此地 M 为一常数.

证明: 条件的必要性是明显的. 因为若存在这样的有界变差函数 $\alpha(t)$, 则其唯一的确定一个右连续有界变差函数 $\beta(t) \in V_0[a, b]$, 使得
$$\int_a^b t^n \, \mathrm{d}\alpha(t) = \int_a^b t^n \, \mathrm{d}\beta(t) = a_n.$$
由于 $\beta(t)$ 以上述形式确定了 $C[a, b]$ 上的一个有界线性泛函, 而任意的多项式 $p(t) = \sum_{\nu=0}^n c_\nu t^\nu \in C[a, b]$. 所以成立有
$$\left|\sum_{\nu=0}^n c_\nu a_\nu\right| = \left|\int_a^b \sum_{\nu=0}^n c_\nu t^\nu \, \mathrm{d}\beta(t)\right| \leq \|\beta\| \max_{a\leq t\leq b} |p(t)|.$$
即, $\|\beta\|$ 便是满足条件的最小的 M .

反过来说, 暂时仅考虑多项式按最大模范数构成的空间上的有界线性泛函. $\{t^n\}$ 为该多项式空间的一组 Hamel 基. 利用习题 5.2.7 的结论, 可知存在线性泛函 f_n 为 $\{t^n\}$ 的对偶族. 因此, 作线性泛函 f
$$f(p(t)) = \sum_{\nu=0}^\infty a_\nu f_i(p(t)).$$
由于假设条件, 设 $p(t) = \sum_{\nu=0}^n c_\nu t^\nu$, 则
$$|f(p(t))| = \left|\sum_{\nu=0}^\infty a_n f_i(p(t))\right| = \left|\sum_{\nu=0}^n a_\nu c_\nu\right| \leq M \max_{a\leq t\leq b} |p(t)|.$$

所以, f 在连续函数的最大模范数下是有界的. 因此, 由延拓定理, 将 f 延拓于 $C[a,b]$ 上. 那么, 根据定理 5.2.4 可知, 存在有界变差函数 α , 使得

$$f(x)=\int_a^b x(t)\,\mathrm{d}\alpha.$$

充分性即得. □

习题 5.2.10. *1. X 是直线点集 A 上某些实函数, 但包含常数函数在内的所成实赋范线性空间. 如果存在常数 M , 对一切 $f\in X, \sup_x|f(x)|\le M\|f\|$, 则 X 上的正线性泛函 F 必是连续泛函, 并且 $\|F\|\le MF(1)$.*

2. 设 F 是实 $C_0(-\infty,+\infty)$ 上正线性泛函, 证明 F 是连续的.

注: 对于第二小问, 事实上, 任何定义在 $C_0(E^n)$ 上的正线性泛函必然可以表示成一个积分的形式, 但是我没能想出除此之外的直接证明 F 是连续的方法.

证明:

1. $\forall f\in X, f\neq 0$, 有 $\sup_x|f(x)|\neq 0$. 那么, 考虑函数 $g(x)=1-\frac{f(x)}{\sup_x|f(x)|}$. 显然, $g(x)\ge 0$. 那么, 由于 X 包含常数函数, 加上 F 是正线性泛函, 成立

$$F(g)=F(1)-\frac{F(f)}{\sup_x|f(x)|}\ge 0.$$

只需更换函数 g 中的减号为加号, 就可以镜像的得到 $F(1)\sup_x|f(x)|\ge -F(f)$. 因此, 利用 f 的最大模与范数直接的不等式, 即得

$$|F(f)|\le F(1)\sup_x|f(x)|\le MF(1)\|f\|.$$

命题结论即得.

2.

习题 5.2.12. *用 c 表示 l^∞ 中收敛序列 $x=\{x_n\}$ 全体所成的子空间, 证明*

$$c^*=\{\eta+\alpha f_0|\eta\in l^1,\alpha\text{ 是数}\}.$$

这里

$$f_0(x)=\lim_{n\to\infty}x_n, x=\{x_n\}\in c.$$

换句话说, 对每个 $f\in c^*$, 有 $\eta=\{\eta_n\}\in l^1$ 和常数 α 使

$$f(x)=\sum_{n=1}^\infty \eta_n x_n+\alpha\lim_{n\to\infty}x_n.$$

而且 $\|f\|=\|\eta\|_1+|\alpha|$.

证明: 任取 $x\in c$, 记 $\lim_{n\to\infty}x_n=x_0$, 作常数数列 $s=\{1,1,\ldots\}\in c$. 对于 $f\in c^*$ 将其限制在 c_0 上, 由习题 5.2.11 可知, 存在 $\eta\in l^1$, 使得

$$f(x-x_0s)=\sum_{i=1}^\infty \eta_i(x_i-x_0).$$

所以, 由 f 的线性, 可知

$$f(x)=\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i + x_0 F(s) - x_0\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i = \sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i + \left(F(s)-\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i\right)\lim_{n\to\infty} x_n.$$

形式即得证, 最后说明一下范数关系. 由于

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{\infty}\eta_i x_i + \alpha\lim_{n\to\infty} x_n\right| \le \|\eta\|\|x\| + |\alpha|\|x\|,$$

所以, $\|f\| \le \|\eta\| + |\alpha|$. 反过来, 对于由于 $\eta \in l^1$, 所以存在 n , 使得 $\sum_{i=n}^{\infty}|\eta_n| < \epsilon$. 考虑 $x=\{\mathrm{sgn}(\eta_1),\mathrm{sgn}(\eta_2),\ldots,\mathrm{sgn}(\eta_n),\mathrm{sgn}(\alpha),\mathrm{sgn}(\alpha),\ldots\}$

$$|f(x)| = \left|\sum_{i=1}^{n-1}|\eta_i| + \sum_{i=n}^{\infty}\eta_i + |\alpha|\right| \ge \|\eta\| + |\alpha| - 2\epsilon.$$

由 ϵ 的任意性, 及 $\|x\|=1$ 即得 $\|f\| \ge \|\eta\| + |\alpha|$. 综上,

$$\|f\| = \|\eta\| + |\alpha|.$$

□

习题 5.2.14. *设 X, Y 是两个赋范线性空间. 证明如果 $X \ne \{0\}$, 并且 $\mathcal{B}(X\to Y)$ 是 Banach 空间, 那么 Y 必是 Banach 空间.*

证明: 设 y_n 是 Y 中的基本列. 由于 $X \ne \{0\}$, 所以任取一个非零元 $x_0 \in X$, 存在 X 上的一个有界线性泛函 f 满足 $g(x_0) = \|x_0\|_X$. 规范化, 作 $f(x) = \frac{g(x)}{\|x_0\|_X}$, 并定义 $X \to Y$ 的线性算子如下:

$$B_n x = f(x) y_n.$$

B_n 的线性是明显的, 并且它是有界的, 因为 $\|B_n x\| = |f(x)|\|y_n\| \le \|f\|\|x\|\|y_n\|$. 由于 y_n 是 Y 中的基本列, 所以 B_n 也是基本的, 因为

$$\|(B_n - B_m)x\| \le \|f\|\|x\|\|y_n - y_m\|.$$

因此, 由 $\mathcal{B}(X\to Y)$ 的完备性, 可知存在 $B_n \to B$. 断言, Bx_0 便是 y_n 的极限, 因为

$$\|Bx_0 - y_n\| \le \|Bx_0 - B_n x_0 + B_n x_0 - y_n\| \le \|B - B_n\|\|x_0\|.$$

因此, Y 也是 Banach 空间. □

5.3 共轭空间与共轭算子

习题 5.3.2. *证明空间 $C[a,b]$ 中点列 $\{x_n\}$ 弱收敛于 x_0 的充要条件是存在常数 M , 使得 $\|x_n\| \le M, n=1,2,3,\ldots$, 而且对每个 $t\in[a,b]$*

$$\lim_{n\to\infty} x_n(t) = x_0(t)$$

注: 未能做出不用共鸣定理及其派生方法的上界证明.

证明: 充分性是比较明显的. 因为 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函都可以表示为一个有界变差函数所定义的广义积分的形式. 而对于任意的 $g \in V_0[a,b]$, 由控制收敛定理可知

$$\lim\int_a^b x_n\,\mathrm{d}g = \int_a^b \lim x_n\,\mathrm{d}g = \int_a^b x\,\mathrm{d}g.$$

所以, $\int_a^b x_n \,\mathrm{d}g \to \int_a^b x \,\mathrm{d}g$, 即 x_n 弱收敛于 x_0 .

反过来, 考虑有界变差函数 g_n 满足

$$g_n(t) = \begin{cases} 0, a \le t < t_0, \\ 1, t_0 \le t \le b. \end{cases}$$

由于 x_n 弱收敛于 x , 则

$$x_n(t_0) = \int_a^b x_n \,\mathrm{d}g \to \int_a^b x \,\mathrm{d}g = x(t_0).$$

点态收敛即得证. 对于一致有界,

习题 5.3.4. *证明 l^1 不是自反的.*

证明: 若 l^1 是自反的, 那么 l^1 的共轭空间 l^∞ 就必须可析, 因为由假设 l^∞ 的共轭空间是 l^1 , 而 l^1 是可析的. 然而, 实际上 l^∞ 是不可析的, 所以 l^1 不是自反的. □

习题 5.3.6. *设 A 是 $l^p(\infty > p \ge 1)$ 上有界线性算子, 如果适合 $Ae_n = e_{n+1}, n = 1, 2, 3, \ldots,$. 而 $e_n = \{0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots\}$.*[7] *证明 A 是有界的, 并求出 $\|A\|$ 以及 A^* .*

证明: $\forall x \in l^p, x = \{x_1, x_2, \ldots\}$. 由 A 的定义, 有

$$Ax = \{0, x_1, x_2, \ldots\}.$$

所以,

$$\|Ax\| = \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i^p \right)^{\frac{1}{p}} = \|x\|.$$

所以 A 有界, 而且 $\|A\| = 1$. 对于 A^* , 由于 l^p 的共轭空间为 l^q , 任取 $h \in l^q, h = \{h_1, h_2, \ldots\}$. 有

$$h(Ax) = \sum_{i=1}^{\infty} x_i h_{i+1}.$$

所以, 定义 $\tilde{h} = \{h_2, h_3, \ldots,\}$, 可知 $\tilde{h}(x) = h(Ax) = (A^*h)(x)$. 因此, $A^* : l^q \to l^q$ 为

$$A^*h = \{h_2, h_3, \ldots\}.$$

即, 右移算子的共轭为左移算子. □

习题 5.3.8. *设 $K(x, y) \in L^2[0, 1; 0, 1]$, 作 $L^2[0, 1]$ 上有界线性算子*

$$(Kf)(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) \,\mathrm{d}y, f \in L^2[0, 1],$$

求出 K^* 的表达式.

证明: 由于 $L^2[0, 1]$ 上的有界线性泛函为其本身, 因此任取 $g \in L^2[0, 1]$, 则

$$g(Kf) = \int_0^1 g(x) \left(\int_0^1 K(x, y) f(y) \,\mathrm{d}y \right) \mathrm{d}x.$$

由 Fubini 定理, 交换积分次序, 有

$$g(Kf) = \int_0^1 f(y) \int_0^1 K(x, y) g(x) \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y = (A^*g)(f).$$

因此, $A^* = A$. □

[7]书本上写的 e_n 比较奇怪, 如果 e_n 指的是第 $n+1(2)$ 个元素为 1 的向量, 那么 A_n 实际上并没有完全被确定, 所以我采用的是 e_n 为第 n 个分量为 1 的定义.

习题 5.3.10. *设 L 是赋范线性空间 X 的线性子空间, 令 $L^\perp = \{x^*|x^* \in X^*, x^*(x) = 0, x \in L\}$. 证明: $L^* = X^*/L^\perp$. 如果 L 是闭线性子空间, 那么 $(X/L)^* = L^\perp$.*

证明: $L^\perp$ 是 L^* 的闭线性子空间, 所以 $X^*/L^\perp$ 是赋范线性空间. 考虑线性映射 $T : X^*/L^\perp \to L^*, T(\tilde{f}) = f|_L$, 只需证明 T 是保范线性同构即可. 首先说明 T 是良定义的, 若 $\tilde{f} = \tilde{g}$, 则 $f - g \in L^\perp$, 那么 $T(\tilde{f}) = (f-g)|_L + g|_L = g|_L = T(\tilde{g})$, 而 T 的象是线性的是明显的, 对于有界, 之后将证明 T 是保范的.

由于 T 在零的原像是唯一的, 加之 T 线性, 所以 T 必然是单射. 对于任意的 $h \in L^*$, 由延拓定理可以得到 $\tilde{h} \in X^*$, 其在 T 下的象是 h , 所以 T 也是满射. 最后只需说明 T 是保范的. 因为 $\forall \tilde{f} \in X^*/L^\perp, h \in L^\perp$

$$\|f + h\| = \sup_{x\in X} \|f(x) + h(x)\| \geq \sup_{x\in L} \|f(x) + h(x)\| = \|f|_L\|,$$

所以 $\|\tilde{f}\| = \inf_{h\in L^\perp} \|f + h\| \geq \|f|_L\|$. 反过来, 由前所述, 对于每一个 $f|_L \in L^*$, 都有一个保范的线性延拓 $f \in X^*$. 因此, $\|f|_L\| = \|f\| \geq \|\tilde{f}\|$. 因此, $\|\tilde{f}\| = \|f|_L\|$. 综上, T 是保范线性同构, $L^* = X^*/L^\perp$.

对于第二个命题, 因为 L 是闭线性子空间, 所以其上的诱导范数是范数, X/L 是赋范线性空间. 同样考虑线性映射 $T : L^\perp \to (X/L)^*, T(f) = \tilde{f}, \tilde{f}(\tilde{x}) = f(x)$. 如此定义的 $\tilde{f}$ 是线性的, 现说明它是良定义的. 若 $\tilde{x} = \tilde{y}$, 则 $x - y \in L$, 那么, $\tilde{f}(\tilde{x}) = f(x - y + y) = f(x - y) + f(y) = f(y) = \tilde{f}(\tilde{y})$.

由于 T 在零的原像是唯一的, 加之 T 线性, 所以 T 必然是单射. 对于满射, 由于 $\forall \tilde{f} \in (X/L)^*$, 可以定义线性泛函 $f(x) = \tilde{f}(\tilde{x})$, 且对任何的 $y \in L$, $f(x + y) = \tilde{f}(\tilde{x}) = f(x)$, 可知 $f(y) = 0$, 而 f 又是有界的, 因为

$$|f(x)| = |\tilde{f}(\tilde{x})| \leq \|\tilde{f}\|\|\tilde{x}\| \leq \|\tilde{f}\|\|x\|.$$

所以 $f \in L^*, T(f) = \tilde{f}$, 即 T 是满射. 对于保范性, 由上式可知 $\|f\| \leq \|\tilde{f}\|$, 再由定义, 对任意的 ϵ , 存在 $x_0 \in \tilde{x}, \|x_0\| < \|\tilde{x}\| - \epsilon$, 因此,

$$|\tilde{f}(\tilde{x})| = |f(x_0)| \leq \|f\|\|x_0\| < \|f\|(|\tilde{x}\| - \epsilon).$$

由 ϵ 的任意性, 可知 $\|\tilde{f}\| \leq \|f\|$. 综上, $\|\tilde{f}\| = \|f\|$, T 是保范线性同构, $(X/L)^* = L^\perp$. □

习题 5.3.11. *证明 Banach 空间 X 是自反的充要条件是 X 的任何闭线性子空间是自反的.*

证明: 充分性是明显的, 因为 X 自己也是一个闭线性子空间, 因此求证必要性即可. 设 L 是 X 的一个闭子空间, 不失一般性的, 假设 $L \neq X$. 由习题 5.3.10 , 可知 $L^* = (X^*/L^\perp)$, 进而 $L^{**} = (X^*/L^\perp)^* = (L^\perp)^\perp$, 所以命题划归为证明 $L = (L^\perp)^\perp$. 由于 $\forall x \in L, \forall x^* \in L^\perp$, 成立 $x^*(x) = x(x^*) = 0$, 故, $L \subset (L^\perp)^\perp$. 反过来, 假设 $L \not\supset (L^\perp)^\perp$, 由于 X 自反, 所以 $(L^\perp)^\perp \subset X$, 存在 $x_0 \in (L^\perp)^\perp, x \notin L$. 由于 L 是闭子空间, $x_0 \notin L$, 故 $\rho(x_0, L) > d$. 所以, 根据延拓定理, 存在有界线性泛函 f , 满足 $f(x) = 0, x \in L, f(x_0) \neq 0$. 根据定义, 该泛函 $f \in L^\perp$, 然而 $f(x_0) \neq 0$. 这意味着 $x_0 \notin (L^\perp)^\perp$, 矛盾. 所以, $L = (L^\perp)^\perp$. 即, L 也是自反的. □

习题 5.3.12. *自反空间 X 中任何有界集必弱致密.*

证明: 假设 G 是自反空间中的有界集, 由于 X 自反, 所以视 $\bar{G} \subset X^{**}$, 它是 X^{**} 中的有界闭集. 断言它也是弱 $*$ 闭集. 因为若 $x_0 \notin \bar{G}$, 则不可能有点列弱 $*$ 收敛于 x_0 . 因为, $\rho(x_0, \bar{G}) > 0$. 由延拓定理, 存在有界线性泛函 f 满足 $f(x) = 0, x \in \bar{G}, f(x_0) \neq 0$, x_0 关于 f 就不会有收敛点列. 因此, 由定理 5.3.5 可知, $\bar{G}$ 弱 $*$ 紧. 所以 $\bar{G}$ 弱紧, G 弱致密. □

习题 5.3.14. *设 X 是 Banach 空间, Y 是赋范线性空间. 证明 $\mathcal{B}(X \to Y)$ 弱完备的充要条件是 Y 是弱完备的.*

注: 本题我用到了下一节的共鸣定理和弱有界等价于强有界, 如果有另外的证明方法, 可以发邮件告诉我. 另外, 我认为这题应该和习题 5.2.14 一样, 要求 $X \neq \{0\}$, 否则, 当 $X = \{0\}$ 时, $\mathcal{B}(X \to Y)$ 中只有一个元素, 自然是弱完备的. 但是 Y 可以取做任何空间.

证明: 先考虑条件的充分性. 若 $\{B_n\}$ 是 $\mathcal{B}(X \to Y)$ 中的一列弱收敛基本列. $\forall x \in X$, $B_n x$ 是 Y 中的弱收敛基本列. 由 Y 的弱完备性可知, 存在收敛点, 将其定义为 Bx . 算子 B 的线性是明显的, 现在说明 B 是有界的. 由于对于固定的 x , $B_n x$ 弱收敛, 因而弱有界, 故 $B_n x$ 强有界. 由共鸣定理, $\|B_n\|$ 一致有界. 假设 B 无界, 则存在一列 $\{x_n\}$, 满足

$$\|Bx_n\| > n\|x_n\|.$$

对于每个固定的 n , 存在有界线性泛函 f_n 满足 $\|f\| = 1, f(Bx_n) = \|Bx_n\|$. 由于 $B_m x_n$ 弱收敛于 Bx_n , 所以存在指标 M_n , 使得 $m > M_n$ 时, 有

$$\|B_m x_n\| \geq f(B_m x_n) > \frac{1}{2}\|Bx_n\| \geq \frac{n}{2}\|x_n\|.$$

适当增大 M_n , 使得 $M_1 < M_2 < \ldots < M_n < \ldots$. 如此, 就意味着 $\|B_m\| \to \infty$. 这与前面的结论矛盾. 所以 B 是有界的. 由 B 的定义可知, B_n 弱收敛于 B . 所以 $\mathcal{B}(X \to Y)$ 弱完备.

反过来, 假如 y_n 是 Y 中一列弱基本列. 任取 X 中一非零元 x_0 , 存在一个有界线性泛函 f 满足 $f(x_0) = 1$. 定义一组 $X \to Y$ 的线性算子 B_n 为 $B_n(x) = f(x)y_n$. B_n 是有界的, 因为 $\|B_n(x)\| \leq \|f\|\|x\|\|y_n\|$, 并且它们是弱基本的, 因为

$$|h(B_n x) - h(B_m x)| \leq \|f\|\|x\||h(y_n - y_m)|, \forall h \in Y^*.$$

由 $\mathcal{B}(X \to Y)$ 弱完备, 可知 B_n 存在唯一的弱极限 B . 断言 Bx_0 就是 y_n 的弱极限, 因为

$$|h(Bx_0 - y_n)| = |h(Bx_0 - B_n x_0)| \to 0, \forall h \in Y^*.$$

所以, Y 是弱完备的. □

习题 5.3.15. *设 X, Y 是两个赋范线性空间, $\{A_n\} \subset \mathcal{B}(X \to Y)$. 如果对任何 $x \in X, \{A_n x\}$ 为 Y 中基本点列, 称 $\{A_n\}$ 为强基本序列; 如果对任何 $x \in X, f \in Y^*, \{f(A_n x)\}$ 为基本数列, 称 A_n 为弱基本序列. 证明:*

1. *如果 $\{A_n\}$ 按算子范数是基本序列, 并且弱收敛, 那么 $\{A_n\}$ 必按算子范数收敛.*
2. *如果 $\{A_n\}$ 是强基本序列, 并且弱收敛, 那么 $\{A_n\}$ 必强收敛.*

注: 本题我要用到凸集分离定理, 即赋范线性空间 X 中的两个不相交非空凸集 A, B , 若 A 是开的, 那么必存在一个有界线性泛函 x^* 和实数 γ , 满足

$$\mathrm{Re} x^*(x) < \gamma \leq \mathrm{Re} x^*(y), \forall x \in A, y \in B.$$

该分解定理是由王璟睿博士提供的, 证明细节可在 Rudin 泛函分析一书中查到.

证明:

1. 记 A 为 A_n 的弱收敛极限, 若 A_n 按算子范数收敛, 由于弱收敛极限唯一, 所以 A_n 必然按算子范数收敛到 A . 现假定其反面, 则存在无穷个 n , 使得 $\|A - A_n\| > \epsilon$. 又由于 A_n 是基本的, 所以存在指标 N , 使得 $n, m > N$ 时, 成立 $\|A_n - A_m\| < \epsilon/2$. 由于 $\|A - A_n\| > \epsilon$, 故存在单位模长的点 $x \in X$, 满足 $\|Ax - A_n x\| > \epsilon$. 任意取定 $n > N$, 考虑开球 $O(A_n x, \epsilon/2)$, 它是开的凸集. 并且由条件, $\|A_m x - A_n x\| \leq \|A_m - A_n\| < \epsilon/2$, 这说明 $A_m x \in O(A_n x, \epsilon/2), \forall m > N$. 由于单点集 Ax 是凸的, 且不属于 $O(A_n x, \epsilon/2)$, 所以由凸集分离定理, 存在 x^* 分离二者, 如此, 则 $A_n x$ 不会弱收敛于 Ax . 矛盾, 因此, A_n 以算子范数收敛于 A .

2. 该小题的证明与前一小题是完全镜像的. 因为强收敛必然有弱收敛, 所以 A_n 如要强收敛则必然收敛于 A . 假定该结论不真, 则存在无穷多个 n 和某个 x , 使得 $\|Ax - A_n x\| > \epsilon$. 由于 $\|A_n x - A_m x\| \to 0$, 所以存在某个指标 N , 使得 $n, m > N$ 时, $\|A_n - A_m\| < \epsilon/2$. 之后取定 $n > N$ 再考虑 $O(A_n x, \epsilon/2)$ 这个凸开球即可.

□

5.4 逆算子定理和共鸣定理

习题 5.4.2. *设 X, Y 是两个赋范线性空间, $\{A_\alpha|\alpha \in \Lambda\}$ 是一族 $X \to Y$ 的有界线性算子. 如果对任何 $x \in X, y \in Y^*$, 数集 $\{y^*(A_\alpha x)|\alpha \in \Lambda\}$ 是有界集, 那么称 $\{A_\alpha|\alpha \in \Lambda\}$ 是弱有界. 证明: 当 X 是 Banach 空间时, 则从 $\{A_\alpha|\alpha \in \Lambda\}$ 的弱有界性必可推出 $\{A_\alpha|\alpha \in \Lambda\}$ 按算子范数的有界性.*

证明: 对每个固定的 x 和 $\forall y \in Y^*$, 由于数集 $\{y^*(A_\alpha x)|\alpha \in \Lambda\}$ 是有界集. 因此, $A_\alpha x$ 在 Y 中弱有界, 因而是强有界的. 即, $\|A_\alpha x\| < \infty, \forall x \in X$. 由共鸣定理, 即知 $\|A_\alpha\| < \infty, \forall \alpha \in \Lambda$, 即 $\{A_\alpha|\alpha \in \Lambda\}$ 按算子范数有界. □

习题 5.4.4. *证明 Gelfand 引理: 设 X 是 Banach 空间, $p(x)$ 是 X 上的泛函, 适合下面的条件.*

1. $p(x) \geq 0$;
2. α 为非负数时, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$;
3. $p(x_1 + x_2) \leq p(x_1) + p(x_2)$;
4. 当 $x \in X, x_n \to x$ 时, $\underline{\lim}_{n\to\infty} p(x_n) \geq p(x)$;

那么必有正数 M, 使得对于一切 $x \in X, p(x) \leq M\|x\|$.

注: 对于这道题, 有两种证法, 分别可以证明当第四条性质为 $\underline{\lim}_{n\to\infty} p(x_n) \geq p(x)$ 和 $\underline{\lim}_{n\to\infty} p(x_n) \leq p(x)$ 时证明题目. 这意味着第四条性质其实并不是必要的.

证明: [8] 证明 1: 作 $B_k = \{x|p(x) \leq k, k \in N^+\}$. 由于 $p(x)$ 的下连续性, 可知 B_k 为闭集, 且 $\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k = X$ 由于 X 是 Banach 空间, 所以它是第二纲集. 因此, 必存在一个闭集 B_k 含有内点. 记之为 x_0, 则 $B(y_0, \delta) \subset B_k$. 对于任何的非零元 x, $x_0 + \frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|} \in B(x_0, \delta)$. 从而, $p(x_0 + \frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}) \leq k$. 因此可以得到如下的估计式

$$\begin{aligned} p(\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|}) &= p(\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|} + x_0 - x_0) \\ &\leq p(\frac{\delta}{2}\frac{x}{\|x\|} + x_0) + p(-x_0) \\ &\leq k + p(-x_0) \end{aligned}$$

最后由其正齐次性即得 $p(x) \leq \frac{2}{\delta}(k + p(-x_0))\|x\| = M\|x\|$.

证明 2: 考虑空间 X 上的新范数 $\|x\|_1 = \|x\| + p(x) + p(-x)$. 范数 $\|\cdot\|_1$ 的非负性是明显的. 同时, 由 $p(x)$ 的正齐次性可知, $p(0) = 0$, 所以 $\|x\|_1 = 0$ 当且仅当 $x = 0$. 对于齐次性, 只需证明负齐次即可, 对于 $\forall \alpha < 0$ 有

$$\|\alpha x\|_1 = -\alpha\|x\| - \alpha p(-x) - \alpha p(x)) = |\alpha|(\|x\| + p(x) + p(-x)) = |\alpha|\|x\|_1.$$

对于三角不等式, 有

$$\|x+y\|_1 = \|x+y\|+p(x+y)+p(-x-y) \leq \|x\|+\|y\|+p(x)+p(y)+p(-x)+p(-y) = \|x\|_1+\|y\|_1.$$

所以, $\|\cdot\|_1$ 是范数, 并且 $\|x\| \leq \|x\|_1$. 下面说明 X 在范数 $\|\cdot\|_1$ 下也是 Banach 的. 假设 $\{x_n\}$ 是 X 中一列关于 $\|\cdot\|_1$ 基本的基本列. 由于 $\|\cdot\|_1$ 强于原范数, 而原范数下的 X 是 Banach 的, 所以该点列在 $\|\cdot\|$ 下收敛于某个 x. 此时, 只要能说明 $p(x - x_n) + p(x_n - x) \to 0$ 即可.

[8] 该题的第一种证法选自实分析与泛函分析习题详解, 肖建中, 朱杏华著; 第二种证法的主要思路由王璟睿博士提供.

由条件四可知, $0 \le \underline{\lim}_{n\to\infty} p(x-x_n) \le 0$. 所以, 对于 $\forall\epsilon$, 存在无穷个 x_n 满足 $p(x-x_n) < \epsilon$. 同时, 由于 x_n 在 $\|\cdot\|_1$ 下是基本的. 所以存在指标 N , 使 $n,m > N$ 时, 有

$$p(x_n - x_m) + p(x_m - x_n) + \|x_n - x_m\| < \epsilon.$$

因此, 结合上面两个结论, 任取一个 $n > N$ 有

$$p(x - x_m) \le p(x - x_n) + p(x_n - x_m) < 2\epsilon, \forall m > N.$$

同理可以得到另外半边: $p(x_m - x) < 2\epsilon$. 综上即得 $\|x - x_m\| \to 0$, X 在 $\|\cdot\|_1$ 下是 Banach 的. 由范数等价定理, 存在 M , 满足

$$M\|x\| \ge p(x) + p(-x) + \|x\| \ge p(x).$$

□

习题 5.4.6. *设 X 是赋范线性空间. 证明: 如果 P 是投影算子, 那么 L_P, L_{I-P} 都是 X 的闭线性子空间.*

反之, 当 Y, Z 是 Banach 空间 X 的两个闭线性子空间, 并且 $X = Y + Z$ 时, 那么习题 5 中所定义的算子 P_Y, P_Z 是 X 上的投影算子, 并且 $I = P_Y + P_Z$.

证明: 由习题 5.4.5 可知, 当 P 是投影算子时, $I - P$ 也是投影算子, 所以证明 L_P 是 X 的闭线性子空间即可, 同时, 由于 P 的线性, 进一步地, 证明 L_P 是闭子空间即可. 若 $\{x_n\} \subset L_P$ 是收敛到 x 的一点列, 那么由定义, 有 $P(x_n) = x_n$. 由于 P 是连续的, 所以

$$P(x) = P(\lim x_n) = \lim P(x_n) = x.$$

因此, $x \in L_P$, L_P 是 X 的闭线性子空间.

反过来, 只要证明 P_Y 是有界的即可, 其他性质是明显的. 由于 Banach 空间的闭子空间是 Banach 的, X 本身是一个闭子空间, 如能证明 P_Y 是闭算子, 那么作为 $X \to Y$ 的算子, 由闭算子定理即得 P_Y 的有界性. 若 $x_n = y_n + z_n$ 是一列收敛到 $x = y + z$ 的点列, 同时 $P_Y x_n = y_n$ 收敛到 y' . 这样的话, z_n 也有极限, 因为 $z_n = x_n - y_n$ 是基本列. 假如 $y' \ne y$, 那么由收敛点的唯一性可知, 从某项开始, 便有 $\|y_n - y\| > \epsilon_0$. 那么,

$$\lim \|x_n - x\| = \|y' - y + \lim z_n - z\| = 0.$$

然而这是不可能的, 因为上式意味着 $y' - y = z - \lim z_n$, 而 $y' - y \ne 0, y' - y \in Y, z - \lim z_n \in Z$, 所以有非零的 $y' - y \in Y \bigcup Z$, 这与直和的定义矛盾, 所以 $y = y'$. P_Y 是闭算子, 所以 P_Y 有界. □

习题 5.4.8. *设 X, Y 都是 Banach 空间, A 是 $X \to Y$ 的线性算子 ($\mathscr{D}(A) = X$) . 证明: 如果对每个 $y^* \in Y^*, y^*(Ax)$ 作为 X 空间上的泛函是连续线性泛函, 那么 $A \in B(X \to Y)$.*

证明: 考虑 X 中单位闭球 B 中元素 x , 由于 $\forall y^*, y^*(Ax) \le M\|x\| \le M, M$ 是某个与 y^* 有关的正数, 所以 Ax 是 Y 中的弱有界集, 因而是强有界的, 即 $\|Ax\| < \infty$, 所以

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\| < \infty.$$

即, $\|A\|$ 算子范数有界, 所以 $A \in B(X \to Y)$. □

习题 5.4.10. *设 X, Y 是 Banach 空间, $A \in \mathcal{B}(X \to Y)$, 并且 $AX = Y$. 证明: 存在常数 N , 对任何 Y 中收敛于 y_0 的点列 $\{y_n\}$, 必存在 $\{x_n\} \subset X$, 使得 $\|x_n\| \le N\|y_n\|$, $Ax_n = y_n, n = 1, 2, 3, \ldots$ 且 $x_n \to x_0$.*

证明: 由于 X, Y 都是 Banach 空间, 而且 A 是有界线性算子, 且 $AX = Y$. 所以由开映照原理, A 是开映照. 不失一般地, 假设诸 y_n 线性无关, 否则若某 $y_n = 0$, 则取 $x_n = 0$, 其他情况选择原像相同的线性组合即可.

若 $y_0 = 0$ 则取 x_0 为零, 否则任取一个 x_0 满足 $Ax_0 = y_0$, 这是可以做到的, 因为 A 是满射. 考虑开球 $O(x_0, \frac{1}{n})$, 由于 A 是开映照, 所以 $AO(x_0, \frac{1}{n})$ 是 Y 中包含 y_0 的开集. 考虑 $AO(x_0, \frac{1}{n}) - AO(x_0, \frac{1}{n+1})$, 由收敛的性质, 至多只有有限个 y_m 位于其中, 记它们对应的在 $O(x_0, \frac{1}{n}) - O(x_0, \frac{1}{n+1})$ 原像为 x_m . 再记这些指标中最大的是 m_1 , 最小的 m_0 . 从 m_0 到 m_1 可能有有限的间断, 对于那些可能存在的落于 $AO(x_0, \frac{1}{n+1})$ 中的间断指标 y_m , 选取 $O(x_0, \frac{1}{n+1})$ 中对应的原像, 赋以对应的指标. 这样就的到了从 m_0 到 m_1 的一个连续的指标的原像 x_n , 满足 $Ax_n = y_n, n = m_0, \ldots, m_1$, 由于 $AO(x_0, 1)$ 是开集, 所以从某个指标开始, 所有的 y_m 便都落于其中, 对于不落于其中的前面那些指标, 由 A 的满射性质, 随意选取对应的原像, 而当开球 $O(x_0, \frac{1}{n})$ 中 $n \to \infty$ 时, 不会有点被遗漏. 如此, 便得到了一组 x_n 满足 $Ax_n = y_n, x_n \to x_0$. 对于范数控制, 考虑空间 $\operatorname{span}\{x_1, x_2 \ldots\}$, 对于其中的任何元素 $x = \sum_{i=1}^{n} a_i x_{n_i}$, 其象为 $y = Ax = \sum_{i=1}^{n} a_i y_{n_i}$. 由于已经假设 y_i 线性无关, 所以 $y = 0$ 除非 $x = 0$. 因此 A 限制在赋范线性空间 $\operatorname{span}\{x_1, x_2 \ldots\}$ 到 $\operatorname{span}\{y_1, y_2 \ldots\}$ 上是一一的满射, 同时 A 还是开映射, 所以在这个子空间上的逆算子连续有界, 所以存在范数控制 N . □

习题 5.4.11. *设 $\{x_n\}$ 是 Banach 空间中一个点列, 如果对于每个 $x \in X$, 总存在唯一数列 $\{\alpha_i(x)\}$, 使得 $\lim_{n\to\infty} \|x - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\| = 0$, 称 $\{x_n\}$ 为 X 中的基, 并称 X 是具有基的 Banach 空间. 证明在有基 $\{x_i\}$ 的 Banach 空间 X 上, 展开式 $x = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i x_i$ 中的 $\alpha_i(x) \in X^*$.*

证明: α_i 的线性是比较明显的, 因此最主要的是证明其有界性. 不失一般性地, 假设诸 $\|x_i\| = 1$, 考虑新范数 $\|x\|_1 = \sup_n \|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) x_i\|$. 它是范数是比较显然的, 并且按定义, $\|x\|_1 \geq \|x\|$. 下面说明它同样使 X 成为 Banach 空间. 假设 $\{y_n\}$ 是 X 中一列以 $\|\cdot\|_1$ 基本的基本列. 那么

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}(\alpha_i(y_s) - \alpha_i(y_t))x_i\right\| \leq \|y_s - y_t\|_1 = \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n}(\alpha_i(y_s) - \alpha_i(y_t))x_i\right\| \to 0, \forall m.$$

所以, y_n 的每个分量都收敛, 记其收敛于 c_i , 作 $y = \sum_{i=1}^{\infty} c_i x_i$. 在上式中, 令 $s \to \infty$ 即得,

$$\left\|\sum_{i=1}^{m}(c_i - \alpha_i(y_t))x_i\right\| < \epsilon, \forall m.$$

这就意味着, y 的表达式收敛, 所以成立有 $\alpha(y) = c_i$. 同时, $\|y - y_t\|_1 \to 0$. 所以, y 是 y_t 的极限点. 因此, X 在 $\|\cdot\|_1$ 下也是 Banach 的. 由范数等价定理, 可知

$$|\alpha_i(x)| \leq \|x\|_1 = \sup_n \left\|\sum_{i=1}^{n} \alpha_i(x) x_i\right\| \leq M\|x\|.$$

所以, $\alpha_i(x) \in X^*$. □

习题 5.4.12. *设 $(E, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, $(F, \|\cdot\|_1)$ 是赋范线性空间, $\|\cdot\|_2$ 是 F 上第二个范数, 并且 $(F, \|\cdot\|_2)$ 成为 Banach 空间. 如果 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1$, 那么任何 $(E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|_1)$ 的有界线性算子 T 必是 $(E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|_2)$ 的有界线性算子.*

证明: 假若 $x_n \in E$ 收敛于 x_0 , $T(x_n) \in F$ 以 $\|\cdot\|_2$ 收敛于 y . 由于 $\|\cdot\|_2$ 强于 $\|\cdot\|_1$. 所以, $T(x_n)$ 同样以 $\|\cdot\|_1$ 收敛于 y . 因为线性算子 T 是 $(E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|_1)$ 上的连续算子, 所以有

$$y = \lim_n T(x_n) = T(x_0).$$

因此, T 在 $(E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|_2)$ 下是闭算子. 因为, $(E, \|\cdot\|)$ 是 Banach 空间, 并且 $(F, \|\cdot\|_2)$ 成为 Banach 空间, 所以 T 也是 $(E, \|\cdot\|) \to (F, \|\cdot\|_2)$ 上的有界线性算子. □

习题 5.4.13. *T 是 $L^2[0,1]$ 上有界线性算子. 证明: 如果 T 把 $L^2[0,1]$ 中连续函数映照成连续函数, 则 T 是 $C[0,1]$ 上有界线性算子.*

证明: 视 T 为 $C[0,1] \to C[0,1]$ 空间上的线性算子. 在 $C[0,1]$ 上, 最大模范数强于 L^2 范数, 因为

$$\|u(t)\|_{L^2} = \sqrt{\int_0^1 |u(t)|^2 \,\mathrm{d}t} \le \|u(t)\|_{C[0,1]}, \forall u(t) \in C[0,1].$$

所以, 采用习题 5.4.12 的方法, 利用 T 把按 L^2 范数是连续线性的, 可以证明 T 是 $C[0,1]$ 上的闭算子. 由于 $C[0,1]$ 是 Banach 的, 所以 T 是有界的. □

习题 5.4.14. *设 Γ 是平面上 Jordan 曲线, $f(z)$ 是定义于 Γ 上取值于 Banach 空间 X 上的抽象函数. 证明: 当 $f(z)$ 是 Γ 上连续函数时, $f(z)$ 在 Γ 的强, 弱积分都存在, 并且两个积分相等.*

注: 我个人认为这道习题上面关于强积分的定义中, $z_i \in \Gamma$ 因视为复数域 $\mathbb{C}$ 上的点. 这样抽象空间 X 上的点对于 z_i 的乘法才有定义.

证明: 当强积分存在时, 它一定也是弱积分. 因为, 设 $x^* \in X^*$, 由 x^* 的连续性, 即得

$$x^*(x) = x^* \lim_{\lambda\to 0} \sum f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1}) = \lim_{\lambda\to 0} \sum x^* f(\zeta_i)(z_i - z_{i-1}) = \int_\Gamma x^* f(z)\,\mathrm{d}z.$$

因此, 只要说明 $f(z)$ 在 γ 上的强积分存在即可. 由 $f(\zeta)$ 的连续性及 Γ 的可求长, 可知当 λ 足够小的时候, 有

$$\sum_\lambda |z_i - z_{i-1}|\, \|f(\zeta_i) - f(\zeta_i')\| < \epsilon, \forall \zeta_i, \zeta_i' \text{ 在 } z_{i-1}, z_i \text{ 对应的线段中}.$$

因此考虑类似的 Darboux 上和和 Darboux 下和

$$S = \sum \max_{\zeta_i} \|f(\zeta_i\| |z_{i-1} - z_i|,$$
$$s = \sum \min_{\zeta_i} \|f(\zeta_i\| |z_{i-1} - z_i|.$$

这样的定义是合理的, 因为在紧集上的连续函数可取最值. 记 Q 是该分法对应的任意求和方式, 由上式, 得

$$s \le Q \le S < s + \epsilon.$$

因为, 上和递减, 下和递增. 所以, $\lim s = \lim S$. 因此, 上和对应的 X 中序列为柯西列, 由于 X 是 Banach 的, 故其收敛于 x , 且任何其他求和方式同样也收敛于 x . 因此, x 即为对应的强积分. □

习题 5.4.15. *设 G 是平面上一个区域, $f(z)$ 是定义在 G 上取值于 Banach 空间 X 上的抽象函数. 证明: 如果对于每个 $x^* \in X^*, x^*(f(z))$ 是 G 上解析函数. 那么对于任何的 $\zeta \in G$*

$$\lim_{z\to\zeta} \frac{f(z) - f(\zeta)}{z - \zeta}$$

存在, 并且在 G 中每点 z_0 的近旁, $f(z) = \sum_{i=0}^\infty a_n (z - z_0)^n$ 成立, 这里 $a_n \in X$, 级数是强收敛的.

习题 5.4.16. *设 X 是线性空间, $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 分别是 X 上的范数. 如果对任何关于 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 都收敛的序列 $\{x_n\}$ 必有相同的极限点, 那么称 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是符合的.*

证明: 如果 X 分别按 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 成为 Banach 空间, 并且 $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ 是符合的, 那么 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价.

证明: 考虑 $I:(X,\|\cdot\|_1)\to(X,\|\cdot\|_2)$, 若 x_n 是一组按 $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ 都收敛的序列, 由条件可知, 它们收敛于同一极限 x . 即

$$I\lim x_n = x = \lim Ix_n.$$

所以, I 是闭算子, 由于 X 在两个范数下都是 Banach 的, 因此闭算子 I 连续, 故 $\|\cdot\|_1$ 强于 $\|\cdot\|_2$. 再由范数等价定理, 即得 $\|\cdot\|_1$ 与 $\|\cdot\|_2$ 等价. □

习题 5.4.17. *X 为线性空间, $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$ 分别是 X 上的范数. 如果凡对 $\|\cdot\|_1$ 为连续的线性泛函, 必也为 $\|\cdot\|_2$ 连续, 那么必存在数 $\alpha>0$, 使对一切 $x\in X, \|x\|_1\le\alpha\|x\|_2$.*

证明: 考虑 $I:(X,\|\cdot\|_2)\to(X,\|\cdot\|_1)$, 取 $A=\{\|x\|_2\le 1\}$. 此时, $\forall x^*\in(X^*,\|\cdot\|_1)$, 作 $x^*(Ix)$. 由于 x^* 对于 $\|\cdot\|_2$ 也连续, 所以

$$x^*(Ix)=x^*(x)\le M\|x\|_2\le M,\forall x\in A.$$

即, $Ix,\forall x\in A$ 是 $(X,\|\cdot\|_1)$ 中的弱有界集, 所以它强有界. 因此,

$$\|Ix\|_1\le M,\forall x\in A.$$

故, I 是连续算子, 所以存在 M , 使得

$$\|x\|_1=\|Ix\|_1\le M\|x\|_2.$$

□

习题 5.4.18. *设 X,Y,Z 以及 $E(\neq\{0\})$ 都是赋范线性空间, 并且 $Z=X+Y$. 显然, $Z\to E$ 的任何一个线性算子 T 必可表示成 $TZ=T_Xx+T_Yy$, 其中 $z=x+y, x\in X, y\in Y$ 而 T_X,T_Y 分别是 $X\to E, Y\to E$ 的线性算子.*

证明: $T\in\mathcal{B}(Z\to E)$ 等价于 $T_X\in\mathcal{B}(X\to E)$ 以及 $T_Y\in\mathcal{B}(Y\to E)$ 同时成立的充要条件是存在 $\alpha>0,\beta>0$, 使得对任何 $z=x+y\in Z$,

$$\beta(\|x\|+\|y\|)\le\|z\|\le\alpha(\|x\|+\|y\|).$$

证明: 由范数的不等式推出线性算子有界的等价性是比较明显的, 问题主要在于从算子有界的等价性证明范数的等价性, 因为虽然 $Z=X+Y$, 但是 X,Y 并不是 Z 的子空间, 其上的范数可能是不同的. 因此, 在证明之前, 先考虑一个这样的问题. 已知 X 是某线性空间, 其上赋有两种范数 $\|\cdot\|_1,\|\cdot\|_2$, 并且已知所有关于 $\|\cdot\|_1$ 连续的映射到非零赋范空间 E 上的线性算子 T 必然也关于 $\|\cdot\|_2$ 连续, 求证 $\|\cdot_1\|$ 弱于 $\|\cdot\|_2$.

假设 x^* 是 $(X,\|\cdot\|_1)$ 上的有界线性泛函, 任取 E 中非空元素 y_0 , 作 $T(x)=x^*(x)y_0$, 它自然是 $(X,\|\cdot\|_1)\to E$ 的有界线性算子. 由条件可知, $T(x)$ 同样是 $(X,\|\cdot\|_2)\to E$ 上的有界线性算子, 这意味着

$$\|T(x)\|=|x^*(x)|\|y_0\|_E\le M\|x\|_2.$$

即, $|x^*(x)|\le\frac{M}{\|y_0\|_E}\|x\|_2$. 所以 x^* 也是 $(X,\|\cdot\|_2)$ 下的有界线性泛函. 因此, 由习题 5.4.17 可知, 存在 $\alpha>0$, 满足 $\|x\|_1\le\alpha\|x\|_2$.

回到原问题, 倘若已知 $T\in\mathcal{B}(Z\to E)$ 等价于 $T_X\in\mathcal{B}(X\to E)$ 以及 $T_Y\in\mathcal{B}(Y\to E)$ 同时成立. 那么, 限定讨论的线性空间为 X . 有 $T_z(x)=T_x(x)$, 即 T_z,T_x 此时是相同的映射, 但是 T_z 对应 X 赋以 $\|\cdot\|_Z$ 范数, 而 T_x 对应于 $\|\cdot\|_X$ 范数. 由前结论可知, 从 T_z 的有界性可以得到 T_x 的有界性, 则存在 α_1 满足 $\|x\|_Z\le\alpha_1\|x\|_X$. 同理, 若限定讨论空间为 Y , 则有 α_2 满足 $\|y\|_Z\le\alpha_2\|y\|_Y$. 因此,

$$\|z\|_Z=\|x+y\|_Z\le\|x\|_Z+\|y\|_Z\le\max(\alpha_1,\alpha_2)(\|x\|_X+\|y\|_Y).$$

不等式右边即得证.

对于等式的左边, 考虑在 Z 上的新范数 $\|z\|=\|x\|_X+\|y\|_Y$. 在 Z 上的任何线性泛函 z^* 都可以表示为 $z^*(z)=x^*(x)+y^*(y)$. 在定义的新范数下, z^* 的有界性与 x^*,y^* 的有

界性是等价的. 因此, 任何的新范数下的有界线性泛函 z^* , 作有界线性算子 $T(z) = x^*(x)e_0 + y^*(y)e_0, e_0$ 是 E 中任意某个非零元. 因为 x^*, y^* 都是有界的, 所以 $x^*(x)e_0, y^*(y)e_0$ 是 X, Y 到 E 上的有界线性算子. 由条件, 可知 T 也是 Z 在原范数下的有界线性算子. 所以, 由前所证, Z 上原范数强于新范数, 即得

$$\beta(\|x\|_X + \|y\|_Y) \leq \|z\|_Z.$$

□

习题 5.4.19. *举例说明定理 5.4.4 (范数等价定理) 中假设范数 $\|\cdot\|_1$ 弱于 $\|\cdot\|_2$ 是必要的.*

5.5 线性算子的正则集与谱, 不变子空间

习题 5.5.1. *设 λ 为线性算子 A^n 的特征值, 那么 λ 的 n 次根 μ 中至少有一个是算子 A 的特征值.*

证明: 假设结论不成立, 记 λ 的 n 次根分别为 $\mu_1, \ldots, \mu_n$, 则

$$A^n - \lambda I = (A - \mu_1 I)(A - \mu_2 I) \ldots (A - \mu_n I).$$

记 x 为 A^n 关于 λ 的任意一个非零特征向量. 由假设, 因为 μ_i 不是 A 的特征值, 因此它们都是一一映射. 所以

$$(A^n - \lambda I)x = (A - \mu_1 I)(A - \mu_2 I) \ldots (A - \mu_n I)x \neq 0.$$

这与 x 是特征向量矛盾. 所以必有一个 μ_i 为 A 的特征值. □

习题 5.5.2. *设 A 为复 Banach 空间 X 上有界线性算子, $\lambda_0 \in \rho(A)$, 又设 A_n 为 X 上一列有界线性算子, 并适合 $\|A - A_n\| \to 0$. 证明 n 充分大后, A_n 也以 λ_0 为正则点, 而且 $\|(\lambda_0 I - A_n)^{-1} - (\lambda_0 I - A)^{-1}\| \to 0$.*

证明: 考虑 $\lambda_0 I - A_n$, 有

$$\lambda_0 I - A_n = (\lambda_0 I - A)(I + (\lambda_0 I - A)^{-1}(A - A_n)).$$

因为 $\lambda_0 I - A$ 是正则的, 因此若 $I + (\lambda_0 I - A)^{-1}(A - A_n)$ 也正则, 那么 $\lambda_0 I - A_n$ 便是正则算子. 因此, 若 1 是 $(\lambda_0 I - A)^{-1}(A_n - A)$ 的正则点, 那么结论便成立. 考虑 $(\lambda_0 I - A)^{-1}(A_n - A)$ 的谱半径如下

$$r = \lim \sqrt[n]{\|((\lambda_0 I - A)^{-1}(A_n - A))^n\|} \leq \|(\lambda_0 I - A)^{-1}(A_n - A)\| \leq \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|\|A_n - A\|.$$

所以, 当 n 足够大时, 1 将是 $(\lambda_0 I - A)^{-1}(A_n - A)$ 的正则点, 所以 λ_0 也是 A_n 的正则点. 基于这个结论, 对于范数收敛, 由级数分解可得

$$\begin{aligned}
\|(\lambda_0 I - A_n)^{-1} - (\lambda_0 I - A)^{-1}\| &= \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|\|\sum_{i=1}^{\infty}((\lambda_0 I - A)^{-1}(A_n - A))^n\| \\
&\leq \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\| \left(\sum_{i=1}^{\infty} \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|^n \|A_n - A\|^n\right) \\
&\leq \|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|^2 \frac{\|A_n - A\|}{1 - \|A_n - A\|\|(\lambda_0 I - A)^{-1}\|} \to 0.
\end{aligned}$$

□

习题 5.5.3. *设 X 是复赋范线性空间, 并且 X 是线性子空间 M, N 的直接和, 而且 M, N 都是 X 上有界线性算子 A 的不变子空间. 证明 $\sigma(A_M) \subset \sigma(A)$.*

证明: 设 $\lambda \in \sigma(A_M)$, 假设 $\lambda \notin \sigma(A)$, 考虑方程

$$(\lambda I - A)g = f, \forall f \in M.$$

由假设条件可知, 上式对于所有的 $f \in M$ 都存在解 g , 并且存在 m 满足 $\|g\| \leq m\|f\|$. 因为由于空间 $X = M + N$, 所以 $g = g_M + g_N$. 同时考虑到 M, N 是 A 的不变子空间, 那么

$$\lambda g_M - f - Ag_M = Ag_N - \lambda g_N.$$

这意味着

$$Ag_N = \lambda g_N, (\lambda I - A_M)g_M = f.$$

所以, 若 $g_N \neq 0$, 那么 g_N 便是 A 关于 λ 的特征值, 则 $\lambda \in \sigma(A)$, 产生矛盾. 若 $g_N = 0$, 那么, 由右式对于所有的 f_m 成立可知, λ 是 A_M 的正则点, 同样产生矛盾. 所以, $\sigma(A_M) \subset \sigma(A)$. □

习题 5.5.4. *设 T 是复 $C[0,1]$ 上有界线性算子: $(Tx)(t) = tx(t), x(t) \in C[0,1]$, 求出 $\rho(T), \sigma(T), \sigma_a(T)$, $\sigma_p(T), \sigma_r(T)$.*

证明: 只需要计算 $\rho(T), \sigma_a(T), \sigma_p(T)$ 即可, 其他两个可以通过关系式推出. 首先考虑计算特征值方程

$$\lambda x = tx.$$

上述方程在 $t \neq \lambda$ 处可得 $x(t) = 0$, 再根据 x 的连续性可知 $x(t) = 0$. 所以该算子没有特征值, 即 $\sigma_p(T) = \emptyset$.

对于正则点集, 考虑方程组

$$\lambda x - tx = y.$$

当 $\lambda \in [0,1]$ 时, 令 $t = \lambda$, 可知左边给出零值, 因此若右边不为零, 则方程无解. 所以此时必定不是 T 的正则点. 若 $\lambda \notin [0,1]$, 则有解 $x = \frac{y}{\lambda - t}$. 考察范数, 有

$$\|x\| = \left\| \frac{y}{\lambda - t} \right\| \leq \frac{\|y\|}{\min|\lambda - t|} = \frac{\|y\|}{\min\sqrt{(a-t)^2 + b^2}}, \forall \lambda = a + b\boldsymbol{i} \notin [0,1].$$

此时对于取定的 λ , 范数控制有上界, 所以都是正则点.

最后考察近似谱点, 由前可知, 此时 $\lambda \in [0,1]$. 断言, 所有的 $\lambda \in [0,1]$ 都是近似谱点. 不失一般地, 假设 $\lambda = \frac{1}{2}$, 其他的情况可以类似处理, 考虑单位模长的连续函数 x_n 如下:

$$x_n = \begin{cases} 0 & , 0 \leq t < \frac{1}{2} - \frac{1}{n}; \\ n(t - \frac{1}{2}) + 1 & , \frac{1}{2} - \frac{1}{n} \leq t < \frac{1}{2}; \\ -n(t - \frac{1}{2}) + 1 & , \frac{1}{2} \leq t < \frac{1}{2} + \frac{1}{n}; \\ 0 & , \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

直接计算可知

$$\max|\frac{1}{2}x_n - tx_n| = \frac{1}{4n} \to 0.$$

□

习题 5.5.5. *设 T 是 $L^2([0,1], B, g)$ 上有界线性算子:*

$$(Tx)(t) = tx(t), x(t) \in L^2([0,1], B, g).$$

求出 $\rho(T), \sigma(T), \sigma_a(T)$, $\sigma_p(T), \sigma_r(T)$.

注: 习题并没有说明 g 是什么涵义, 我将其视为一个右连续的有界变差函数.
证明: 同样只需要计算 $\rho(T), \sigma_a(T), \sigma_p(T)$ 即可. 首先, 考虑 T 的特征方程

$$\lambda x = tx.$$

上述方程在 $t \neq \lambda$ 处可得 $x(t) = 0$, 因此要使 $x(t) \neq 0$, λ 必须且只需是函数 g 在 $[0,1]$ 上的间断点, 因此 T 的特征值便是满足条件的 λ .

对于正则点集, 与习题 5.5.4 类似的, 可以证明 $\forall \lambda \notin [0,1]$, λ 是正则点. 对于 $\lambda \in [0,1]$, 考虑方程的解 $x = \frac{y}{\lambda - t}$. 考察范数, 有

$$\|x\|^2 = \left\| \frac{y}{\lambda - t} \right\|^2 = \int_0^1 (\frac{y}{\lambda - t})^2 \, \mathrm{d}g.$$

若存在包含 λ 的开球使得 g 在其上一个常数, 那么存在 M , 使得 $\|x\|^2 \leq M\|y\|^2$. 因此, 此时也是正则点. 若 g 在 λ 处连续, 但不是常数, 则对于某些 y 来说, 例如常数函数来说, 右端的积分是不存在的, 所以不是正则点.

最后考虑近似点谱. 由前讨论可知, 唯一的可能性便是 λ 为函数 g 在 $[0,1]$ 上的周围非常数的连续点. 断言这些点都是近似谱点, 因为不失一般地, 假设 $\lambda = 0$ 是 g 的连续点, 由条件可知存在一个小邻域 $[0, \frac{1}{n_0}]$ 使得 g' 有上界 M 和下界 m , 为简便说明, 假设 g' 不变号, 否则可以用分离正部和负部的方法构造类似的 x_n . 作函数 x_n 如下

$$x_n = \begin{cases} \sqrt{\frac{n}{m}}, & 0 \leq t \leq \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} < t \leq \frac{1}{n_0} \end{cases}.$$

由计算可知, $\|x\| \geq 1$. 同时,

$$\int_0^1 t^2 x^2 g' \, \mathrm{d}t \leq M \frac{n}{m} \int_0^{\frac{1}{n}} t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{M}{mn^3} \to 0.$$

□

习题 5.5.6. *证明: 对复 Banach 空间上有界线性算子 T , 成立*

$$\sigma_r(T) \subset \sigma_p(T^*).$$

证明: 断言, 当 $\lambda \in \sigma_r(T)$ 时, $\lambda I - T$ 的值域的闭包不会是全空间. 因为假如命题不成立, 那么对于任意的 $y \in X$, 存在 x_n 使得

$$\lambda x_n - Tx_n \to y.$$

由 Cauchy 列的性质和剩余点谱的性质, 存在正常数 α 使得

$$\epsilon > \|\lambda x_n - Tx_n - \lambda x_m + Tx_m\| = \|(\lambda I - T)(x_n - x_m)\| \geq \alpha \|x_n - x_m\|.$$

因此 x_n 也是 Cauchy 的, 故由于 X 完备, 所以有极限点 x_0 . 根据 $\lambda I - T$ 的连续性, 成立

$$y = \lim(\lambda x_n - Tx_n) = \lambda x_0 - Tx_0.$$

这意味着 $\lambda I - T$ 是满射, 又因为 $\lambda I - T$ 是一一的. 由逆算子定理可知, $\lambda I - T$ 的逆算子有界, 如此 λ 将成为正则点, 这与条件矛盾. 所以, $\lambda I - T$ 的值域的闭包不会是全空间. 如此, 存在非零的有界线性泛函 f , 使得 $f(x) = 0, \forall x \in \overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)}$. 因此,

$$0 = f(\lambda x - Tx) = \lambda f(x) - f(Tx) = \lambda I^* f(x) - T^* f(x).$$

即, $\lambda \in \sigma_p(T^*)$. □

习题 5.5.7. *设 A, B 是复 Banach 空间 X 上两个有界线性算子. 证明:*

1. $r(AB) = r(BA)$;
2. 当 A, B 可交换时, $r(A+B) \le r(A) + r(B)$, 并举例说明该不等式在非交换的情况下不一定成立.

证明:

1. 由谱半径公式, 有
$$r(AB) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(AB)^n\|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A(BA)^{n-1}B\|} \le \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|(BA)^{n-1}\|}.$$
反过来, 同样成立有 $r(BA) \le r(AB)$, 结合两式, 即得 $r(AB) = r(BA)$.
2. 由谱半径的定义, 可知序列 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|A^n\|}, \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\|B^n\|}$ 都是收敛数列. 因此, 存在 M , 使得对于任何的 ϵ ,
$$\|A\|^n \le M(r(A)+\epsilon)^n, \|B\|^n \le M(r(B)+\epsilon)^n, \forall n.$$
因此, 由于 AB, BA 可交换, 所以
$$\|(A+B)^n\| \le C_n^m \|A^m\|\|B^{n-m}\| \le M C_n^m (r(A)+\epsilon)^m (r(B)+\epsilon)^{n-m} = M(r(A)+r(B)+2\epsilon)^n.$$
所以, $r(A+B) \le r(A) + r(B)$. 对于反例, 考虑线性算子
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$
它们的谱半径都是零, 但是和的谱半径却不是零.

习题 5.5.8. *设 X 是复 Banach 空间, A 是 X 上有界线性算子. 设 $\{\lambda_n\}$ 为一列数*
$$|\lambda_n| > \|A\|,$$
且 $\lambda_n \to \lambda_0, |\lambda_0| > \|A\|$. 记 $M_{\{\lambda_n\}}(x)$ 是向量 $\{(\lambda_n I - A)^{-1}x\}$ 张成的闭子空间, 证明

1. *如果有另一个序列 $\{\lambda_n'\}, |\lambda' \ge \|A\|, \lambda_n' \to \lambda_0', |\lambda_0'| > \|A\|$, 那么*
$$M_{\{\lambda_n\}}(x) = M_{\{\lambda_n'\}}(x).$$
2. *$M_{\{\lambda_n\}}(x)$ 是包含 x 的关于 A 不变的闭子空间.*
3. *$M_{\{\lambda_n\}}(x)$ 是包含 x 的关于 A 不变的闭子空间中最小的.*

注: 我个人认为, 这道题或许等价于已知 $y_n = \sum_{i=0}^n \frac{A^i x}{\lambda^{i+1}}$, 反解 x , 但是我无法证明这一点.

习题 5.5.9. *设 X 是复 Banach 空间, $\mathfrak{A} \subset \mathfrak{A}(X \to X)$, 并且 $\mathfrak{A}$ 是一代数, 对任何 $y \in X, y \ne 0, \{\mathfrak{A}y\}$ 是否一定是 $\mathfrak{B}$ 的最小不变子空间?*

注: 我不清楚题设中的 $\mathfrak{B}$ 指的是什么.

习题 5.5.10. *设 T 是 $X = L^2([a,b], B, g)$ 上有界线性算子:*
$$(T\varphi)(t) = t\varphi(t), \varphi \in X,$$
证明 $\{T^n f | n = 1, 2, \ldots\}$ 所张成的线性闭子空间 $L = X$, 其中 $f(t)$ 处处不为零.

习题 5.5.11. *设 T 是复 Banach 空间 X 上有界线性算子, 并且存在 Jordan 曲线构成的围道 $\Gamma \subset \rho(T), \Gamma$ 按一定的定向, 使得 $\sigma(T)$ 分割成在 Γ 内部部分 $\sigma_1(T)$ 和外部部分 $\sigma_2(T)$. 记*

$$E_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{\mathrm{d}t}{t-T}.$$

证明下列命题成立.

1. $E_1 \in \mathfrak{B}(X \to X)$;
2. $E_1^2 = E_1$;
3. $E_1 T = T E_1$;
4. $T E_1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{t\,\mathrm{d}t}{t-T}$;
5. $\sigma(T|_{E_1X}) = \sigma_1(T)$, *这里 $T|_{E_1X}$ 表示 T 在不变闭子空间 E_1X 上的限制.*

5.6 关于全连续算子的谱分析

习题 5.6.1. *设 $K(x,y)$ 是全平面上 Lebesgue 可测函数, 而且*

$$\int\int_{-\infty}^{+\infty} |K(x,y)|^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y < \infty,$$

作 $L^2(-\infty,+\infty)$ 上线性算子 A :

$$(Af)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y,$$

问 A 是否是 $L^2(-\infty,+\infty)$ 上全连续算子.

证明: A 是 $L^2(-\infty,+\infty)$ 上的全连续算子. 因为 $K(x,y) \in L^2(-\infty,+\infty)\times(-\infty,+\infty)$, 所以存在其上的阶梯函数列 $\varphi_n(x,y) = \sum_{i=1}^n a_i\chi_i(x,y)$, 以 L^2 范数逼近 $K(x,y)$. 由于全连续算子是有界线性算子的闭子空间, 所以倘若诸 $\varphi_n(x,y)$ 所定义的类似算子 A_i 是全连续的, 那么自然 $K(x,y)$ 所定义的算子 A 也是全连续的, 因为算子的范数被对应积分核的范数所控制. 现记 $S_i(x)\times S_i(y)$ 为示性函数 χ_i 的支集, 考虑

$$A_i(f)(x) = \int_{-\infty}^{\infty}\sum_{i=1}^n a_i\chi_i(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^n a_iS_i(x)\int_{S_i(y)} f(y)\,\mathrm{d}y = \sum_{i=1}^n a_iS_i(x)F_i(f),$$

其中 $F_i(f) = \int_{S_i(y)} f(y)\,\mathrm{d}y$ 是有限秩算子. 所以 A_i 也是有限秩算子, 且其有界性是明显的, 所以它是全连续算子, 由此可知 A 也是全连续的. $\square$

习题 5.6.2. *设 A 为 l^2 上线性算子, 记 $e_n = (0,\dots,0,1,0,\dots)$ (只有第 n 个坐标为 1), $n = 1,2,3,\dots$, 作线性算子 A :*

$$Ae_k = \sum_{j=1}^\infty a_{jk}e_j,$$

设 $\sum_{k,j=1}^\infty a_{jk}^2 < \infty$. 证明: A 是 l^2 上全连续算子.

证明: 设 S 为 l^2 上的一个有界集合, 任取 $x \in S, x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, 则

$$Ax = \sum_{i=1}^{\infty} x_i A e_i = \sum_{i=1}^{\infty} x_i \sum_{j=1}^{\infty} a_{ji} e_j = \sum_{i,j=1}^{\infty} x_i a_{ji} e_j.$$

由此可见, $\|Ax\|^2 \le \sum_j (\sum_i x_i a_{ji})^2 \le \|x\|^2 \sum_{i,j} a_{ji}^2 < \infty$, 即 Ax 有界. 同时, 考虑到 $|x_i| \le \|x\|$, 因此, 有

$$\sum_{j=n}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 a_{ji}^2 \le \|x\| \sum_{j=n}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji}^2.$$

由于 a_{ji} 绝对收敛, 所以对于任意的 ϵ , 存在 n , 使得 $\sum_{j=n}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} a_{ji}^2 < \frac{\epsilon}{M}$, 其中 M 是集合 S 的上界. 因此, 它的余项一致收敛, 由定理 4.9.8 可知, AS 是致密的, 所以 A 是 l^2 上全连续算子. □

习题 5.6.3. *在 l^2 中, 取 $\{e_n\}$ 如习题 2 . 作 l^2 上线性算子 U :*

$$Ue_i = \frac{1}{i} e_{i+1}, i = 1, 2, \ldots$$

证明 U 是 l^2 上全连续算子, 并且是广义幂零算子, 当 0 不是特征值.

证明: 设 S 为 l^2 上的一个有界集合, 任取 $x \in S, x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$, 则

$$Ux = \sum_{i=1}^{\infty} x_i U e_i = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{x_i}{i} e_{i+1}.$$

Ux 的有界性是明显的, 同样考虑它的余项是否一致收敛,

$$\sum_{i=n}^{\infty} \frac{x_i^2}{i^2} \le \|x\| \sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^2}.$$

由级数 $\frac{1}{i^2}$ 绝对收敛的性质可知, 存在 n , 使得 $\sum_{i=n}^{\infty} \frac{1}{i^2} < \frac{\epsilon}{M}$, 其中 M 是集合 S 的上界. 因此, 它的余项一致收敛, 由定理 4.9.8 可知, U 是全连续算子.

0 不是 U 的特征值是明显的, 仅需证明 U 是广义幂零算子. 考虑 $U^n x$, 有

$$\|U^n x\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{x_i (i-1)!}{(n+i-1)!} \right)^2 \le \frac{1}{(n!)^2} \sum_{i=1}^{\infty} x_i^2 = \frac{1}{(n!)^2} \|x\|.$$

由上式可知, $\|U^n\|^2 \le \frac{1}{(n!)^2}$, 所以 $\sqrt[n]{\|U^n\|} = \sqrt[n]{\frac{1}{(n!)^2}} \to 0$. □

习题 5.6.4. *设 $K(x,y)$ 是正方形 $[a,b] \times [a,b]$ 上可测函数, 设 $p > 1, \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$,*

$$\int_a^b \left(\int_a^b |K(x,y)|^q \, \mathrm{d}y \right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x < \infty.$$

证明 L^p 上线性算子

$$(Af)(x) = \int_a^b K(x,y) f(y) \, \mathrm{d}y$$

为 L^p 上全连续算子.

证明: 证明基本是与习题 5.6.1 镜像的. 这里只说明 $K(x,y)$ 在混合范数下可以被由矩形的示性函数有限组合的简单函数所逼近. 首先, 可测函数 $K(x,y)$ 可以被递增可测的简单函数列所点态逼近. 而每个简单函数的支撑为有限个不相交的可测集合. Lebesgue 测度是 Radon 测度, 其上的可测集可以被开集所任意逼近. 因此, $K(x,y)$ 可以被支撑是不相交开集的简单函数所点态逼近. 更进一步地, 因为 E^2 上的开集可以被有限个半开半闭矩形所逼近, 所以 $K(x,y)$ 可以被递增的矩形的示性函数有限组合的简单函数所点态逼近. 记其为 $\varphi_n(x,y)$, 那么, 由收敛定理可知

$$\begin{aligned}\lim_n \int_a^b \left(\int_a^b |\varphi_n(x,y)-K(x,y)|^q \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x &= \int_a^b \lim_n \left(\int_a^b |\varphi_n(x,y)-K(x,y)|^q \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x \\ &= \int_a^b \left(\int_a^b \lim_n |\varphi_n(x,y)-K(x,y)|^q \,\mathrm{d}y\right)^{\frac{p}{q}} \mathrm{d}x = 0.\end{aligned}$$

□

习题 5.6.5. *设 A 是 Banach 空间 X 上有界线性算子, L 是 A 的闭不变子空间, 在 Banach 空间 $\Phi = X/L$ 上作算子 $\tilde{A} : \tilde{x} \to \widetilde{Ax}$. 证明 $\tilde{A}$ 是 Banach 空间 Φ 上有界线性算子. 如果 A 是 X 上全连续算子, 那么 $\tilde{A}$ 也是 Φ 上全连续算子.*

证明: 先验证 $\tilde{A}$ 是良定义的. 记 $\tilde{y} = \tilde{x}, y - x = s \in L$, 那么

$$\tilde{A}(\tilde{y}) = \widetilde{Ay} = \widetilde{A(x+s)} = \widetilde{Ax} = \tilde{A}(\tilde{x}),$$

所以 $\tilde{A}$ 是良定义的, 而 $\tilde{A}$ 的线性是明显的. 倘若 $\tilde{A}$ 不有界, 则存在一组 $\{\tilde{x}_n\}$, 满足 $\|\tilde{x}_n\| = 1$, 但 $\|\widetilde{Ax_n}\| > n$. 由商空间的范数的定义可知, 取 $\epsilon = \frac{1}{2}$, 存在 $\|x_n\| \le \frac{3}{2}$, 且 $\|Ax_n\| > n$. 这说明 A 是无界的, 这与条件矛盾, 所以 $\tilde{A}$ 必须有界.

当 A 是全连续算子时, 任取一有界集合 $S \in X/L$. 假如 $\tilde{A}$ 不是全连续算子, 则 $\tilde{A}S$ 中必存在一个点列 $\widetilde{Ax_n}$ 没有收敛子列, 即存在 ϵ , 使得

$$\|\widetilde{Ax_n} - \widetilde{Ax_m}\| = \|A\widetilde{(x_n - x_m)}\| > \epsilon,$$

仅对有限个 n, m 不成立. 由商空间的范数的定义可知, 取 $\epsilon = \frac{1}{2}$, 存在 $\|x_n\| \le \|\tilde{x}_n\| + \frac{1}{2}$. 因为 $\|x_n\|$ 有界, A 全连续, 所以 Ax_n 有收敛子列. 但是

$$\|A(x_n - x_m)\| \ge \|A\widetilde{(x_n - x_m)}\| > \epsilon,$$

这与 Ax_n 存在收敛子列矛盾. 所以, $\tilde{A}$ 也是 Φ 上全连续算子. □

习题 5.6.6. *设 A 是复 Banach 空间 X 上全连续算子, $\lambda_0 \ne 0$, 并且 λ_0 是 A 的谱点, 任取 $\epsilon > 0$, 使得圆 $|\lambda - \lambda_0| \le \epsilon$ 内只含有 A 的一个谱点 λ_0 , 令*

$$P_{\lambda_0} = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_0| = \epsilon} (\lambda I - A)^{-1} \,\mathrm{d}\lambda,$$

证明下列命题成立.

1. *P_{λ_0} 是全连续算子, 而且 $P_{\lambda_0}^2 = P_{\lambda_0}$;*
2. *$P_{\lambda_0}X$ 是有限维空间, 并且所有相应于 λ_0 的特征向量全包含在 $P_{\lambda_0}X$ 中;*
3. *$P_{\lambda_0}A = AP_{\lambda_0}$;*
4. *$P_{\lambda_0}^* X^*$ 是 A^* 的不变子空间, 并且 A^* 相应于 λ_0 的特征向量全包含在 $P_{\lambda_0}^* X^*$ 中;*

5. $P_{\lambda_0}^* X^* = (P_{\lambda_0} X)^*$;

6. A *相应于* λ_0 *的特征子空间的维数与* A^* *相应于* λ_0 *的特征子空间维数相等.*

习题 5.6.7. *利用全连续算子 Riesz-Schauder 理论给出全连续算子* A *的豫解式* $R(A,\lambda)$ *; 对任何* $\lambda_0 \in \sigma(A), \lambda_0$ *, 必在* λ_0 *的近旁有下列展开式*

$$R(A;\lambda) = \frac{C_{-n}}{(\lambda-\lambda_0)^n} + \cdots + \frac{C_{-1}}{(\lambda-\lambda_0)} + C_0 + \sum_{\nu=1}^{\infty} C_\nu (\lambda-\lambda_0)^\nu,$$

其中 $\{C_\nu | \nu = -n, -n+1, \ldots, 0, 1, 2, \ldots\}$ *是有界线性算子.*

习题 5.6.8. *设* X *是 Banach 空间,* B *是* X *上有界线性算子* $B \neq aI$ *, 如果存在非常数多项式* $p(t)$ *和非零全连续算子* A *, 满足* $p(B)A = Ap(B)$ *. 证明* B *必有非平凡的超不变子空间.*

证明: 由于算子 $B \neq aI$, $p(t)$ 非常数. 所以, $p(B) \neq aI$. 由定理 5.6.7 可知, $p(B)$ 有非平凡的超不变子空间. 由于所有与 B 可交换的算子必然与 $p(B)$ 可交换, 所以 $p(B)$ 的超不变子空间也是它们的不变子空间, 自然它也是 B 的超不变子空间. □

6 Hilbert 空间的几何学与算子

6.1 基本概念

习题 6.1.1. *举出五个赋范线性空间, 它们的范数都不能由内积导出.*

证明: 对于一个赋范线性空间, 它的范数是不是内积导出的, 取决于它的范数是否满足极化恒等式. 对于 l^p, L^P 空间, 当 $p \neq 2$ 的时候都不是内积空间. 例如 l^p , 考虑 $x = (1,0,0\ldots), y = (0,1,0,\ldots)$. 那么 $x+y = (1,1,0,\ldots), x-y = (1,-1,0,\ldots)$, 因此

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2^{\frac{2}{p}+1} \neq 4 = 2\|x\| + 2\|y\|.$$

对于 L^p 空间, 考虑 $L^p[0,1]$ 上的常数函数 $x(t) = 1, y(t) = t$, 那么 $x(t)+y(t) = 1+t, x(t)-y(t) = 1-t$, 因此

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = (\frac{2^{p+1}-1}{p+1})^{\frac{2}{p}} + (\frac{1}{p+1})^{\frac{2}{p}} \neq 2 + 2(\frac{1}{p+1})^{\frac{2}{p}} = 2\|x\| + 2\|y\|.$$

另外, 对于最大模范数的连续函数, 同样也不是由内积导出的. 这一点考虑 $C[0,1]$ 上的常数函数 $x(t) = 1, y(t) = x$ 即可. □

习题 6.1.2. *设* $R_1, R_2, \ldots, R_n, \ldots$ *是一列内积空间. 令* $R = \left\{\{x_n\} | x_n \in R_n, \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|^2 < \infty\right\}$ *, 当* $\{x_n\}, \{y_n\} \in R$ *时规定* $\alpha\{x_n\} + \beta\{y_n\} = \{\alpha x_n + \beta y_n\}$ *,*

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_n (x_n, y_n).$$

证明 R *是内积空间. 又设* $R_n (n = 1,2,3,\ldots)$ *都是 Hilbert 空间, 证明* R *是 Hilbert 空间.*

证明: 要证明 R 是内积空间, 只要验证其是否满足内积的三条性质即可. 由于

$$(\{x_n\}, \{y_n\}) = \sum_n (x_n, y_n) = \sum_n \overline{(y_n, x_n)} = \overline{(\{y_n\}, \{x_n\})};$$

$$(\alpha\{x_n\} + \beta\{y_n\}, \{z_n\}) = \sum_n (\alpha x_n + \beta y_n, z_n) = \sum_n \alpha(x_n, z_n) + \beta(y_n, z_n) = \alpha(\{x_n\}, \{z_n\}) + \beta(\{y_n\}, \{z_n\});$$

$$(\{x_n\}, \{x_n\}) = \sum_n (x_n, x_n) \geq 0, \text{ and if and only if all } x_n = 0, (\{x_n\}, \{x_n\}) = \sum_n (x_n, x_n) = 0$$

所以可见, R 是内积空间.

倘若诸 R_n 都是 Hilbert 空间, 那么记 $\{x_n^{(m)}\}$ 为 R 中的 Cauchy 列, 那么由于 R 的范数强于每个分量的范数, 所以 $x_n^{(m)}$ 在每个空间 R_n 中也是基本的, 记其收敛于 y_n , 断言, $\{x_n^{(m)}\}$ 收敛于 $\{y_n\}$. 因为, 对于每个固定的 m , 视 $\{\|x_n^{(m)}\|\}$ 为 l^2 中点列, 利用

$$\sum_n |\|x_n^{(m)}\| - \|x_n^{(m')}\||^2 \leq \sum_n \|x_n^{(m)} - x_n^{(m')}\|^2 = \|\{x_n^{(m)} - x_n^{(m')}\}\|^2 < \epsilon.$$

可知它是 l^2 中的 Cauchy 列. 由于 l^2 完备, 所以它收敛于数列 $\{c_n\}$. 从每个分量上看, 有 $\|y_n\| = c_n$, $\{y_n\} \in l^2$, 即 $\{y_n\} \in R$. 最后, 利用 Cauchy 列的性质和 $y_n \in R$, 可以得到 $\{x_n^{(m)}\}$ 收敛于 $\{y_n\}$. 所以, R 也是完备的内积空间. □

习题 6.1.3. *设 R 是 n 维线性空间, $\{\boldsymbol{e}_1, \ldots, \boldsymbol{e}_n\}$ 是 R 的一组基, 证明 $(\cdot,\cdot)$ 成为 R 上的内积的充要条件是存在 $n \times n$ 正定方阵 $A = (a_{\mu\nu})$, 使得*

$$\left(\sum_\nu x_\nu e_\nu, \sum_\nu y_\nu e_\nu\right) = \sum_{\mu,\nu=1}^n a_{\mu\nu} x_\mu \bar{y}_\nu.$$

证明: 倘若已知 A 是正定阵, 只需要考察由表达式导出的运算是否满足内积的三条性质即可, 这一点是比较明显的. 倘若 $(\cdot,\cdot)$ 成为 R 上的内积, 则定义 $A_{\mu\nu} = (\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu)$. 那么, 对于任意的 $\boldsymbol{x} = \sum_\mu x_\mu \boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{y} = \sum_\nu y_\nu \boldsymbol{e}_\nu$, 有

$$(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \sum_\mu x_\mu (\boldsymbol{e}_\mu, \sum_\nu y_\nu \boldsymbol{e}_\nu) = \sum_{\nu,\mu=1}^n \bar{y}_\nu x_\mu (\boldsymbol{e}_\mu, \boldsymbol{e}_\nu).$$

所以表达式成立, 由于内积的复对称性和正定性, 可知 A 是正定阵. □

习题 6.1.4. *设 H 是内积空间, $y \in H$. 证明 $x \to (x,y), x \in H$ 是 H 上的连续线性泛函, 而且它的范数是 $\|y\|$.*

证明: 首先, 如此定义的泛函的线性是明显的, 只需要证明其有界并且范数保范即可. 由 Schwartz 不等式可知

$$|(x,y)|^2 \leq \|x\|^2 \|y\|^2.$$

所以, $x \to (x,y)$ 是有界的, 且其范数不超过 $\|y\|$. 但是, 考虑到 $(y,y) = \|y\|^2$. 这说明, 它的范数不小于 $\|y\|$. 所以综上, 该线性泛函的范数为 $\|y\|$. □

习题 6.1.5. *设 H 是内积空间, $x_1, \ldots, x_n$ 是 H 中的向量, 它们满足条件*

$$(x_\mu, x_\nu) = \begin{cases} 0, & \textit{when } \mu \neq \nu; \\ 1, & \textit{when } \mu = \nu; \end{cases}$$

证明 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 是一组线性无关的向量.

证明: 倘若存在 $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ 使得

$$\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n = 0.$$

那么对上式左右两遍同时作用 $(x_i, \cdot)$, 得 $\lambda_i \|x_i\| = 0$. 由于 $x_i \neq 0$, 所以可得 $\lambda_i = 0$, 因此 $\{x_1, \ldots, x_n\}$ 是一组线性无关的向量. □

习题 6.1.6. *设 $(\cdot,\cdot)_0$ 是线性空间 H 上二元函数, 满足内积条件中的 (i),(ii) 以及 (iii) 中 $(x,x)_0 \geq 0, x \in H$. 如记 $p(x) = (x,x)_0^{\frac{1}{2}}$. 证明 $p(x)$ 是 H 中的拟范数; $\mathcal{N}(p) = \{x|p(x) = 0\}$ 线性空间. 在商空间 $H/\mathcal{N}(p)$ 上规定*

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) = (x,y)_0, x \in \tilde{x}H/\mathcal{N}(p), y \in \tilde{y} \in H/\mathcal{N}(p),$$

证明 $(\cdot,\cdot)$ 是 $H/\mathcal{N}(p)$ 上的内积.

证明: $p(x)$ 的非负性是二元函数 $(\cdot,\cdot)_0$ 性质三的直接推论. 对于齐次性和三角不等式, 有

$$p(\alpha x) = (\alpha x, \alpha x)_0^{\frac{1}{2}} = |\alpha|(x,x)^{\frac{1}{2}};$$

$$p(x+y) = (x+y, x+y)_0^{\frac{1}{2}} = ((x,x) + 2(x,y) + (y,y))^{\frac{1}{2}} \leq \left(|(x,x)| + 2\sqrt{|(x,x)||(y,y)|} + |(y,y)|\right)^{\frac{1}{2}} = (x,x)^{\frac{1}{2}} +$$

所以, $p(x)$ 是拟范数. 拟范数的核空间是线性空间, 这是因为 $x, y \in H, 0 \leq p(x+y) \leq p(x) + p(y) = 0$. 下面证明导出的二元运算为内积, 首先说明是良定义: 倘若 $\tilde{s} = \tilde{x}, \tilde{t} = \tilde{y}$ 那么, $s - x = a \in \mathcal{N}, t - y = b \in \mathcal{N}$ 因此,

$$(\tilde{s}, \tilde{t}) = (s,t)_0 = (x+a, y+b)_0 = (x,y)_0 + (a, y+b)_0 + (x,b)_0$$

再考虑到, Schwartz 不等式在仅满足非负性时也成立, 所以 $0 \leq |(a, y+b)_0| \leq p(a)p(y+b), 0 \leq (x,b)_0 \leq p(x)p(b)$, 因此是良定义. 最后验算内积的三条性质如下:

$$(\tilde{y}, \tilde{x}) = (y,x)_0 = \overline{(x,y)_0} = \overline{(\tilde{x}, \tilde{y})};$$
$$(\alpha\tilde{x} + \beta\tilde{y}, \tilde{z}) = (\alpha x + \beta y, z)_0 = \alpha(x,z)_0 + \beta(y,z)_0 = \alpha(\tilde{x}, \tilde{z}) + \beta(\tilde{y}, \tilde{z});$$
$$(\tilde{x}, \tilde{x}) = (x,x)_0 \geq 0, \text{ and } (\tilde{x}, \tilde{x}) = 0 \text{ if and only if } (x,x)_0 = 0, i.e., x \in \mathcal{N}$$

□

习题 6.1.7. *证明任何内积空间必可完备化成为 Hilbert 空间.*

证明: 由于所有的内积都可以诱导得到一个范数, 而任何的范数都可以完备化为 Banach 空间. 因此, 设内积空间为 X , 它在范数的完备化下成为 Banach 空间 Y , 满足

$$\forall x, y \in Y, \text{ exist } x_n, y_n \in X, \text{ satisfy } \|x - y\| = \lim \|x_n - y_n\|.$$

因此,

$$\forall x, y \in Y, \|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = \lim(\|x_n + y_n\| + \|x_n - y_n\|) = 2\lim(\|x_n\| + \|y_n\|). = 2\|x\| + 2\|y\|.$$

即诱导范数也满足极化恒等式, 因而 Y 是 Hilbert 空间. 而 X 是 Y 的稠密子集, 所以内积空间必可完备化成为 Hilbert 空间. □

习题 6.1.8. *设 $p(t)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上任何非负 Lebesgue 可测的实函数, H 是 $(-\infty, +\infty)$ 上 Lebesgue 可测, 并且满足 $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)|^2 p(t)\,\mathrm{d}t < \infty$ 的 $f(t)$ 全体. 证明 H 按通常函数的线性运算以及*

$$(f,g) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\overline{g(t)}p(t)\,\mathrm{d}t, f, g \in H$$

成为 Hilbert 空间.

注: 我个人认为这题需要求 $p(t)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上几乎处处大于零的可测实函数, 否则本题的内积不满足零点的唯一性.

证明: 先说明 H 构成线性空间, 因为

$$(f+g,f+g)=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)+g(t)|^2p(t)\,\mathrm{d}t\le 2\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2p(t)\,\mathrm{d}t+2\int_{-\infty}^{+\infty}|g(t)|^2p(t)\,\mathrm{d}t.$$

验算其上定义的双线性泛函为内积如下:

$$\begin{aligned}(g,f)&=\int_{-\infty}^{+\infty}g(t)\overline{f(t)}p(t)\,\mathrm{d}t=\overline{\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\overline{g(t)}p(t)\,\mathrm{d}t}=\overline{(f,g)},\\(\alpha f+\beta g,h)&=\int_{-\infty}^{+\infty}(\alpha f+\beta g)\,\overline{h(t)}p(t)\,\mathrm{d}t=\alpha(f,h)+\beta(g,h),\\(f,f)&=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2p(t)\,\mathrm{d}t\ge 0,\ \text{if and only if } f(x)=0,a.e,\ \text{then } (f,f)=0.\end{aligned}$$

倘若存在 f_n 为内积诱导范数的 Cauchy 列, 即 $\int_{-\infty}^{+\infty}|f_m(t)-f_n(t)|^2p(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}|f_m(t)\sqrt{p(t)}-f_n(t)\sqrt{p(t)}|^2\,\mathrm{d}t\to 0$. 由于 $L^2(-\infty,+\infty)$ 是 Banach 空间, 所以存在 $h(t)$ 为 $f_m(t)\sqrt{p(t)}$ 的 L^2 极限. 作 $f(t)=h(t)/\sqrt{p(t)}$, 由于 $p(t)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上几乎处处大于零的可测实函数. 所以 $f(t)$ 几乎处处有限, 并且

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)-f_m(t)|^2p(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)-f_m\sqrt{p(t)}|\,\mathrm{d}t\to 0.$$

下面只需要说明 $f\in H$ 即可, 而这是明显的, 因为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)|^2p(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}|f(t)\sqrt{p}|^2\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}|h(t)|^2\,\mathrm{d}t<\infty.$$

□

6.2 投影定理

习题 6.2.1. *证明直交的性质* $(i)-(vi)$

证明:

1. 因为内积是复对称, 所以直交是相互的.
2. 因为 $x\in H$, 所以 $(x,x)=0$, 即得 $x=0$.
3. 因为 $M\subset N$, 所以 $\forall y\in N^{\perp}$, 有 $(y,x)=0,\forall x\in M\subset N$, 即得 $y\in M^{\perp}$.
4. 若 $x\in M\subset M^{\perp}$, 那么 $(x,x)=0$, 即得 $x=0$.
5. 勾股定理成立, 因为
$$\|x+y\|^2=(x+y,x+y)=(x,x)+(x,y)+(y,x)+(y,y)=\|x\|^2+\|y\|^2.$$
6. 条件的充分性是明显的, 现考虑其必要性. 假设 $M_1\ne M_2^{\perp}$, 那么由于 M_1 直交 M_2 , 所以 $M_2^{\perp}\supset M_1$. 由假设可知, 存在 $x\notin M_1,x\in M_2^{\perp}$. 由于 H 是 M_1,M_2 的线性和, 所以 $x=y_1+y_2,y_1\in M_1,y_2\in M_2$. 再利用 $x\perp M_2$, 可知 $y_2=0$, 因此 $x=y_1\in M_1$, 与假设矛盾. 所以 $M_1=M_2^{\perp}$, 对应的半边可以类似的证明.

□

习题 6.2.2. *设 H 是内积空间, N 是 H 的线性子空间, 证明: 当 $\bar{N}$ 是完备时, $\bar{N} = (N^{\perp})^{\perp}$.*

证明: 由于 $\bar{N} \perp N^{\perp}$, 且由于 $\bar{N}$ 完备, 所以任何的 $x \in H$, 成立有 $x = x_0 + x_1, x_0 \in \bar{N}, x_1 \in N^{\perp}$. 所以空间 H 是 $\bar{N}, N^{\perp}$ 的直交和. 所以, $\bar{N} = (N^{\perp})^{\perp}$. □

习题 6.2.3. *设 H 是内积空间, $M, N \subset H$. 设 L 是 M 和 N 张成的线性子空间, 证明 $L^{\perp} = M^{\perp} \bigcap N^{\perp}$.*

证明: 首先, 由于 $L \supset M, N$, 所以 $L^{\perp} \subset M^{\perp} \bigcap N^{\perp}$. 反过来, $\forall x \in M^{\perp} \bigcap N^{\perp}$, 有 $(x, y) = 0, \forall y \in M, N$. 因此, $\forall z \in L, z = y_1 + y_2, y_1 \in M_1, y_2 \in M_2$. 成立有 $(x, z) = (x, y_1) + (x, y_2) = 0$. 因此, $x \in L^{\perp}$. 故, $L^{\perp} = M^{\perp} \bigcap N^{\perp}$. □

习题 6.2.4. *设 $(x_0^{(i)}, x_1^{(i)}, \ldots, x_n^{(i)}), i = 1, 2, \ldots, m$ 是已知实数组. 利用投影定理求实数 $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ 使得*

$$\sum_{i=1}^{m} \left(x_0^{(i)} - \sum_{j=1}^{n} x_j^{(i)} \alpha_j \right)^2$$

达到极小.

证明: 考虑 m 维实向量 $\boldsymbol{x}_j = (x_j^{(1)}, x_j^{(2)}, \ldots, x_j^{(m)}), j = 1, 2, \ldots, n$ 组成的实向量空间, 出于简便, 假设它们都线性无关, 否则只需要取出一组最大的线性无关组讨论即可. 在欧式内积下, 它是完备的闭子线性空间. 所以对于任何的 $\boldsymbol{x}_0 = (x_0^{(1)}, x_0^{(2)}, \ldots, x_0^{(m)})$, 由投影定理, 存在一组 α_j , 使得

$$\|\boldsymbol{x}_0 - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \boldsymbol{x}_j\|_2^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(x_0^{(i)} - \sum_{j=1}^{n} x_j^{(i)} \alpha_j \right)^2$$

去最小值. 至于 α_i 的取值, 可有课本 P229 的线性方程所确定. □

习题 6.2.5. *设 $(H, [\cdot, \cdot])$ 是拟不定内积空间, L 是 H 的半负 (或半正) 子空间. 证明*

1. *对任何 $x, y \in L$, 下面的 Schwartz 不等式成立*

$$|[x, y]|^2 \leq [x, x][y, y].$$

2. *当 L 不是半负 (或半正) 子空间, 而是一般线性子空间时, 举例说明上面 Schwartz 不等式不成立.*

证明:

1. 假如可以证明, 当 $[x, x] = 0$ 或者 $[y, y] = 0$, 则 $[x, y] = 0$. 那么课本 6.1 节的证明 Schwartz 不等式的方法就可以完全照搬过来, 因此在此仅证明若 $[x, x] = 0$ 或者 $[y, y] = 0$, 则 $[x, y] = 0$. 考虑 $[x + \lambda y, x + \lambda y]$ 其中 λ 是实数. 由于 L 半负, 所以

$$[x + \lambda y, x + \lambda y] = [x, x] + \lambda^2 [y, y] + 2\lambda \mathrm{Re}\{[x, y]\} \geq 0.$$

因此其判别式必小于零, 即得

$$\mathrm{Re}\{[x, y]\}^2 \leq [x, x][y, y].$$

反过来, 考虑 $[x + i\lambda y, x + i\lambda y]$ 其中 λ 是实数. 由于 L 半负, 所以

$$[x + i\lambda y, x + i\lambda y] = [x, x] + \lambda^2 [y, y] + 2\lambda \mathrm{Im}\{[x, y]\} \geq 0.$$

因此其判别式必小于零, 即得

$$\mathrm{Im}\{[x, y]\}^2 \leq [x, x][y, y].$$

综上, 倘若 $[x, x] = 0$ 或者 $[y, y] = 0$, 则 $[x, y] = 0$, 此时 Schwartz 不等式自然成立.

2.

习题 6.2.6. *证明*

1. *在拟不定内积空间* $(H,[\cdot,\cdot])$ *中,* $L_0=\{x|[x,y]=0,y\in H\}$ *必是* H *的零性子空间.*
2. *在商空间* H/L_0 *上引入不定内积: 对任何* $\tilde{x},\tilde{y}\in H/L_0$ *,*

$$[\tilde{x},\tilde{y}]_{\sim}=[x,y],x\in\tilde{x},y\in\tilde{y}$$

证明 H/L_0 *在* $[\cdot,\cdot]_{\sim}$ *下成为拟不定内积空间, 并且不存在非零* $\tilde{x}\in H/L_0$ *, 使得* $[\tilde{x},\tilde{y}]_{\sim}=0$ *对一切* $\tilde{y}\in H/L_0$ *成立.*

证明:

1. 首先, 由定义, $\forall x\in L_0$, $[x,x]=0$, 所以 L_0 中元素都是零性的. 因此只需证明 L_0 关于线性运算封闭. 设 $x,y\in L_0$, 则

$$[\alpha x+\beta y,z]=\alpha[x,z]+\beta[y,z]=0,\forall z\in H$$

所以, $\alpha x+\beta y\in L_0$. 因此, $L_0=\{x|[x,y]=0,y\in H\}$ 是 H 的零性子空间.

2. 首先验证该不定内积是良定义的. 假如 $x'\in\tilde{x},y'\in\tilde{y}$, 那么 $x-x'\in L_0,y-y'\in L_0$, 所以

$$[x,y]=[x'+x-x',y'+y-y']=[x',y']+[x-x',y'+y-y']+[x',y-y']=[x',y'],$$

因此该定义是良定义. 接下来考察其是否满足不定内积的两条性质:

$$\begin{aligned}[\tilde{x},\tilde{y}]_{\sim}&=[x,y]=\overline{[y,x]}=\overline{[\tilde{y},\tilde{x}]},\\ [\widetilde{\alpha x+\beta y},\tilde{z}]_{\sim}&=[\alpha x+\beta y,z]=\alpha[x,z]+\beta[y,z]=\alpha[\tilde{x},\tilde{z}]_{\sim}+\beta[\tilde{y},\tilde{z}]_{\sim}\end{aligned}$$

所以 H/L_0 在 $[\cdot,\cdot]_{\sim}$ 下成为拟不定内积空间. 假若存在 $\tilde{x}\in H/_{L_0}$, 使得 $[\tilde{x},\tilde{y}]_{\sim}=0,\forall H/L_0$, 那么 $[x,y]=0,\forall H,$ 如此, $x\in L_0,\tilde{x}=0$.

□

习题 6.2.7. *设* $(H,[\cdot,\cdot])$ *是不定内积空间,* M,N *是两个线性子空间, 并且* $H=M+N$ *. 如果* $M\perp N$ *. 证明线性和* $M+N$ *必是直接和* $M\dotplus N$ *, 并且* $M^{\perp}=N,N^{\perp}=M$ *. 从而* $M^{\perp\perp}=M,N^{\perp\perp}=N$ *.*

证明: 若 $M\perp N$, 为验证 $M+N$ 是直接和, 只需要证明 $\forall x\in M\bigcap N,x\equiv 0$, 因为 $M\perp N$, 所以 $x\perp M,x\perp N$, 再考虑到 $H=M+N$, 即得 $x\perp H,x\in H\bigcap H^{\perp}=0$.

下面证明 $M^{\perp}=N,N^{\perp}=M$, 由于 M,N 镜像, 故只需证明一个式子即可. 以 $M^{\perp}=N$ 为例, 由于 $M\perp N$, 所以 $N\subset M^{\perp}$. 现任取 $x\in M^{\perp}$, 因为 $H=M+N$, 故 $\exists y\in N,\exists z\in M$, 使得 $x=y+z$. 利用 $x\in M^{\perp}$, 有 $z\in M^{\perp}$. 然而, $z\in M,M^{\perp}+M=H$, 所以类似前述过程, 可得 $z=0$, 即 $x=y\in N$, 也就是说 $M^{\perp}\subset N$. 结合两个包含关系, 即得 $N=M^{\perp}$. □

习题 6.2.8. *设* L *是不定内积空间* $(H,[\cdot,\cdot])$ *的一个线性子空间, 并且是半正的 (半负的). 证明: 如果* L *中有零性向量* z *, 那么* z *必按* $[\cdot,\cdot]$ *与* L *直交.*

证明: 因为 $[z,z]=0$, 所以 $\forall\alpha\in\mathbb{C},[\alpha z,\alpha z]=0$, 即可以用任意常数倍来替换原来的 z . 现假设 $\exists x\in L,[x,z]\neq 0$, 不失一般地, 假设 $\mathrm{Re}[x,z]\neq 0$, 考虑

$$[x-z,x-z]=[x,x]-2\mathrm{Re}[x,z]\geq 0.$$

由于 x 是固定的, 所以 $[x,x]$ 为非负常数, 由于假设, 已知 $\mathrm{Re}[x,z]\neq 0$, 由于 z 可以任意常数倍的调整, 从而 $\mathrm{Re}[x,z]$ 可以为任意大的正数. 因此上述等式不可能成立, 由此即得矛盾. z 必然直交 L 中的所有向量. □

习题 6.2.9. *设 L 是不定内积空间 $(H,[\cdot,\cdot])$ 中一个有限维线性子空间, 并且是正 (负) 子空间, 那么*

1. *对于任何 $\forall x \in H$, 必存在 $x_0 \in L$, 使得*

$$[x-x_0,x-x_0]=\inf_{y\in L}\{[x-y,x-y]\},(or\ [x-x_0,x-x_0]=\sup_{y\in L}\{[x-y,x-y]\}).$$

2. *对于 (1) 中的 x_0 , 有 $x-x_0 \perp L$.*

举例说明, 当 L 是半负 (半正) 子空间时, (1), (2) 未必成立.

证明: 由于 L 是有限维线性子空间, 并且不定内积在 L 内是正定的, 因此该不定内积在 L 中成为内积, L 在诱导范数下是完备的.

1. 由下确界的定义, 在 L 中存在点列 x_n , 使得 $[x-x_n,x-x_n]\to\inf_{y\in L}\{[x-y,x-y]\}=d$. 断言 $\{x_n\}$ 是基本点列, 因为由于不定内积的性质, 类似平行四边形公式的公式成立:

$$[x+y,x+y]+[x-y,x-y]=2[x,x]+2[y,y].$$

   利用该公式, 有

$$\begin{aligned}2[\frac{x_m-x_n}{2},\frac{x_m-x_n}{2}]&=[x_m-x,x_m-x]+[x_n-x,x_n-x]-2[\frac{x_m+x_n}{2}-x,\frac{x_m+x_n}{2}-x]\\&\le[x_m-x,x_m-x]+[x_n-x,x_n-x]-2d\to 0.\end{aligned}$$

   又因为子空间 L 是正子空间, 所以可知 $\{x_n\}$ 是基本列. 从而存在点 $x_0\in L$, 使得 $x_n\to x_0$ 在 L 的诱导范数下成立. 再利用平行四边形公式, 有

$$[x-x_0,x-x_0]=2[x-x_n,x-x_n]+2[x_n-x_0,x_n-x_0]-[x-2x_n+x_0,x-2x_n+x_0].$$

   两边令 $x_n\to x_0$, 有

$$[x-x_0,x-x_0]\le 2d-d=d.$$

   即得, $[x-x_0,x-x_0]=\inf_{y\in L}\{[x-y,x-y]\}$.

2. 任取 $\lambda\in\mathbb{C},z\in L$, 考虑

$$d\le[x-x_0-\lambda z,x-x_0-\lambda z]=d-2\mathrm{Re}[\bar{\lambda}(x-x_0,z]+|\lambda|^2[z,z].$$

   现取 $\lambda=\frac{[x-x_0,z]}{[z,z]}$, 即得

$$0\le-\frac{|[x-x_0,z]|^2}{[z,z]}.$$

   考虑到 L 是正子空间, 即得

$$[x-x_0,z]=0.$$

反例待续... □

习题 6.2.10. *设 $(H,[\cdot,\cdot])$ 是不定内积空间, L 是负子空间, 如果 $\sup_{L\subset H}\{\dim L\}=k\le\infty$. 证明:*

1. *H 中任何负子空间 L_1 必可扩充成极大负子空间, 即存在负子空间 L' , 使得 $L'\supset L$, 并且不能在 L' 上增加任何新的负性向量 n , 使 $\mathrm{span}\{L,n\}$ 成为负子空间.*

2. *$\dim L'=k$.*

3. *$L'^{\perp}$ 必是正子空间, 而且 $H=L'\bigoplus L'^{\perp}$*

证明:

1. 只需证明, 对于任何的负子空间 L 和任意不在 L 中的负性向量 n, 必可以得到负性空间 $L' = \text{span}\{L, n\}$. 考虑 n_0, 使得 $n - n_0 \perp L, n_0 \in L$, 该向量的存在性由习题 9 保证. 记 $x = n - n_0$, 断言 $[x, x] < 0$, 因为

$$[x, x] = \inf_{y \in L}\{[n - y, n - y]\} \le [n - 0, n - 0] < 0.$$

即, x 是负性的. 同时由于 x 直交 L, 所以

$$[\alpha x + \beta y, \alpha x + \beta y] = \alpha^2[x, x] + \beta^2[y, y] < 0, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, y \in L.$$

即, $L' = \alpha x + \beta y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, y \in L$ 是负子空间, 而且 $L' = \text{span}\{L, n\}$.

2. 只需证明, 对于任何的负子空间 L, 只要 $\dim L < k$, 则必存在负性向量 $x \notin L$. 首先, 由上确界的定义, 必存在负子空间列 L_n, 使得 $\dim L_n \to k$, 然而, 因为线性空间的维度为整数, 故从某 n 开始, 成立有 $\dim L_n = k$. 即, 至少存在一个负子空间 $\tilde{L}$, 使得 $\dim \tilde{L} = k$. 若, $\dim L' < k$, 则必可从 $\tilde{L}$ 中抽取一个向量 x, 使得 $x \notin L'$, 因为 $\tilde{L}$ 是负子空间, 故 x 是不在 L' 的负性向量, L' 可关于 x 扩充.

3. 首先说明 $H = L' + L'^{\perp}$, 因为 $\forall x \in H, \exists x_0 \in L', x - x_0 \perp L'$ 即 $x - x_0 \in L'^{\perp}$. 因为 L' 是极大负子空间, 所以, $L'^{\perp}$ 中必不存在负性向量 x. 否则, 因为 $[x, x] \ne 0$, 故, $x \notin L'$. 即, L' 可关于负性向量 x 扩充, 这与 L' 是极大负子空间矛盾. 同时, $L'^{\perp}$ 中不存在非零的零性向量 y, 否则因为已知 $L'^{\perp}$ 是半正子空间, 由习题 8 的结论, $y \perp L'^{\perp}$, 同时, $y \perp L'$. 所以 $y \perp H$, 即 $y \perp (H \bigcap H^{\perp})$, 这与 H 是不定内积空间矛盾. 故, $L'^{\perp}$ 是正子空间, 习题 7 保证和必定是直交和.

□

6.3 内积空间中的直交系

习题 6.3.1. *令 $H_n(t)$ 为 Hermite 多项式 $(-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} e^{-t^2}$, 作*

$$\psi_n(t) = (2^n n! \sqrt{\pi})^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} H_n(t),$$

证明 $\{\psi_n(t)\}, n = 0, 1, 2, \dots$ 组成 $L^2(-\infty, +\infty)$ 中的完备就范直交系.

证明: 考虑到 Hermite 多项式 $H_n(t)$ 满足微分方程

$$H_n'' - 2tH_n' + 2nH_n = 0, \text{ or } e^{t^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{-t^2}H_n'\right] + 2nH_n = 0.$$

对上述方程乘以 m, 再减去交换 n, m 之后的方程, 得到

$$2(m-n)e^{-t^2}H_mH_n = H_m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{-t^2}H_n'\right] - H_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-t^2}H_m'].$$

再考虑到

$$\begin{aligned} H_m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{-t^2}H_n'\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[H_me^{-t^2}H_n'\right] - e^{-t^2}H_n'H_m' \\ H_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{-t^2}H_m'\right] &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[H_ne^{-t^2}H_m'\right] - e^{-t^2}H_m'H_n'. \end{aligned}$$

即得

$$2(m-n)e^{-t^2}H_mH_n = H_m\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{-t^2}H_n'\right] - H_n\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}[e^{-t^2}H_m'] = 0.$$

这意味着, 当 $m \neq n$ 时, 成立

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}H_mH_n\,\mathrm{d}t = 0.$$

这等价于 $\{\psi_n\}$ 直交. 只要证明 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}H_nH_n\,\mathrm{d}t = 2^n n!\sqrt{\pi}$, 即可证明 $\{\psi\}$ 是就范的. 而这一结果成立, 因为 Hermite 多项式有递推关系式: $H_{n+1} = 2tH_n - 2nH_{n-1}$, 因此

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}H_{n+1}H_{n-1}\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}H_{n-1}\left[2tH_n - 2nH_{n-1}\right]\mathrm{d}t,$$

所以

$$\begin{aligned}
2n\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}H_{n-1}H_{n-1}\,\mathrm{d}t &= \int_{-\infty}^{+\infty} 2te^{-t^2}H_{n-1}H_n\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} 2te^{t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}e^{-t^2}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}e^{-t^2}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}e^{-t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[e^{t^2}\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}t^{n-1}}e^{-t^2}\right]\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}e^{-t^2} - e^{t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}e^{-t^2}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}H_nH_n\,\mathrm{d}t.
\end{aligned}$$

因为 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}H_0H_0\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$, 故, $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}H_nH_n\,\mathrm{d}t = 2^n n!\sqrt{\pi}$. 最后关于完备性, 然而这是明显地, 因为 Hermite 多项式展成全多项式子空间. □

习题 6.3.2. *令 $L_n(t)$ 为 Laguerre 函数 $e^t\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}(t^ne^{-t})$, 证明*

$$\left\{\frac{1}{n!}e^{-\frac{1}{2}}L_n(t)\right\},$$

$n = 0, 1, 2, \cdots$ 组成 $L^2(\mathfrak{C}, \infty)$ 中的完备就范直交系.

注: 我不太了解 $L^2(\mathfrak{C}, \infty)$ 空间, 下面的结论是关于 $L^2(0, \infty)$ 的.
证明: 因为当 $m < n$ 时,

$$\int_0^\infty e^{-t}t^mL_n\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^m\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t = (-1)^m m!\int_0^\infty \frac{\mathrm{d}^{n-m}}{\mathrm{d}t^{n-m}}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t = 0.$$

再考虑到, L_m 是 m 次多项式, 所以题述向量系是正交的. 反过来, 当 $m = n$ 时,

$$\int_0^\infty e^{-t}t^nL_n\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty t^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}t^n}t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t = (-1)^n n!\int_0^\infty t^ne^{-t}\,\mathrm{d}t = (n!)^2.$$

再考虑到 L_n 是首一多项式, 即得题述向量系是就范的. 完备性同样因为题述向量系展成整个多项式子空间. □

习题 6.3.3. *证明 $\mathscr{F} = \{e_\lambda | \lambda \in \Lambda\}$ 是内积空间 H 中完备就范直交系的充要条件是对任何 $x, y \in H$,*

$$(x, y) = \sum_{\lambda\in\Lambda}(x, e_\lambda)\overline{(y, e_\lambda)}.$$

注: 如果任何一组元素 $\mathscr{F}=\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 满足

$$(x,y)=\sum_{\lambda\in\Lambda}(x,e_\lambda)\overline{(y,e_\lambda)}$$

似乎并不能说明 $\mathscr{F}$ 是就范直交系, 甚至连线性无关都不能说明. 因为只要任取一组完备就范直交系, 在该系中添加任新元素, 调整部分元素的模长就可以使得等式成立. 所以我并不是太理解题目的意思..

习题 6.3.4. *设 $\{\Phi_n|n=1,2,3,\cdot\}$ 是 $L^2(\Omega,B,\mu)$ 中完备就范直交系. $f=\sum_{n=1}^\infty(f,\Phi_n)\Phi_n$ 是 f 的Fourier 展开, 称 $S_n(f)=\sum_{k=1}^n(f,\Phi_k)\Phi_k(n=1,2,3,\cdots)$ 为部分和序列. 记 $E_n(\omega,\omega')=\sum_{k=1}^n\Phi_k(\omega)\overline{\Phi_k(\omega')}$. 证明*

$$S_n(f)(\omega)=\int_\Omega f(\omega')E_n(\omega,\omega')\,\mathrm{d}\mu(\omega').$$

证明: 展开计算即可

$$\begin{aligned}\int_\Omega f(\omega')E_n(\omega,\omega')\,\mathrm{d}\mu(\omega')&=\int_\Omega f(\omega')\sum_{k=1}^n\Phi_k(\omega)\overline{\Phi_k(\omega')}\,\mathrm{d}\mu(\omega')\\&=\Phi_k(\omega)\sum_{k=1}^n\int_\Omega f(\omega')\overline{\Phi_k(\omega')}\,\mathrm{d}\mu(\omega')\\&=\sum_{k=1}^n(f,\Phi_k)\Phi_k=S_n(f)(\omega).\end{aligned}$$

□

习题 6.3.5. *设 $f(z)$ 是单位圆 $|z|<1$ 中的解析函数, $f(z)=\sum_{n=0}^\infty a_nz^n,\sum_{n=0}^\infty|a_n|^2<\infty$. 这种解析函数全体记为 H^2, 证明它按通常的线性运算和内积 $(f,g)=\lim_{r\to1-0}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})\overline{g(re^{i\theta})}\,\mathrm{d}\theta$ 成为复 Hilbert 空间. 任取 H^2 中完备就范直交系 $\{e_n(z)\}$, 证明当 $|z|<1,|t|<1$ 时*

$$\sum_{n=1}^\infty e_n(z)\overline{e_n(t)}=\frac{1}{1-z\bar{t}}.$$

习题 6.3.6. *证明在任何 Hilbert 空间 H 中总存在完备就范直交系.*

证明: 考虑所有的就范直交向量集按包含关系组成的偏序集, 倘若能够证明所有的全序子集都有上界, 那么根据 Zorn 引理, 即知 H 存在一个极大的就范直交系, 因为该就范直交系是完全的, 所以在 Hilbert 空间里, 它也是完备的, 命题即证. 下面说明任意一个全序子集 $\{E_\lambda\}$ 都有上界, 考虑集合 $E=\bigcup_\lambda E_\lambda$. 断言 E 也是就范直交系, 因为就范是明显地, 对 E 中任意两个向量 x,y, 因为 E_λ 是全序的, 故必存在一个 μ, 使得 $x,y\in E_\mu$, 这说明 x,y 直交. □

习题 6.3.7. *设 $\mathscr{F}=\{x_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是 Hilbert 空间 H 上一族向量, Λ 全序集. 对任何 $\lambda_0\in\Lambda$, 记 $E_{\lambda_0}=\overline{\mathrm{span}}\{x_\lambda|\lambda\le\lambda_0\}$. 如果对任何 $\lambda\in\Lambda,x_\lambda\notin\overline{\mathrm{span}}\{x_\mu|\mu<\lambda\}$, 证明必有 H 中就范直交系 $\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 使对于任何 $\lambda,e_\lambda\notin\overline{\mathrm{span}}\{x_\mu|\mu<\lambda\}$, 但 $e_\lambda\in E_\lambda$. 并且除去绝对值为 1 的常数因子外, 具有上述性质的 $\{e_\lambda|\lambda\in\Lambda\}$ 是由 $\mathscr{F}$ 唯一确定的.*

证明: 因为 H 是 Hilbert 空间, 所以它的闭线性子空间 $\overline{\mathrm{span}}\{x_\mu|\mu<\lambda\}$ 也是完备的. 由投影定理, 因为 $x_\lambda\notin\overline{\mathrm{span}}\{x_\mu|\mu<\lambda\}$, 所以存在 $e_\lambda\perp\overline{\mathrm{span}}\{x_\mu|\mu<\lambda\},\|e_\lambda\|=1$. 即取 e_λ 为 x_λ 的单位模长的垂直 $\overline{\mathrm{span}}\{x_\mu|\mu<\lambda\}$ 的部分. 明显地, $\{e_\lambda\}$ 为满足条件的就范直交系.

对于唯一性, ?