抽代索引

- 群
  - 等价关系与集合的分类
    - 二元关系
    - 等价关系
    - 等价类、商集
    - 分类
    - 定理：等价关系和分类互相确定
  - 群的概念
    - 代数运算
    - 群的定义
      - 代数运算、结合律、单位元、逆元
      - +交换律：交换群/阿贝尔群/加法群
      - 有限群、无限群
    - n次单位根群Un：具有n个元素的交换群
    - 模m剩余类加群（关于乘法不构成群：0没有逆元）
    - Z的模m单位群U(m)
    - 定理：群单位元唯一、逆元唯一、消去律
    - 定理：群方程有唯一解
  - 子群
    - 子群定义：H关于G的运算构成群
    - 平凡子群
    - 真子群
    - 证明子群的3个定理
      - 定理：G的单位元、逆元是H的单位元、逆元
      - 定理：运算封闭+逆元
      - 定理：ab逆在H中
    - 特殊线性群（秩为1的n阶可逆实矩阵关于矩阵的乘法）是一般线性群（n阶可逆实矩阵关于矩阵的乘法）的子群
    - C(G)是G的中心，是G的子群，C(G)={g属于G满足xg=gx，对于任何x属于G}
    - 定理：群G的任意两个子群的交集还是G的子群
    - 生成子群
    - 由一个元素生成的子群叫做循环群
  - 群的同构
    - 同构：是映射+单+满+保持运算
    - 自同构
    - 定理
      - 群同构把单位元映到单位元
      - 把逆元映射到逆元
      - 群同构是可逆映射，逆映射也是同构映射

    - 群同构是一个等价关系
    - 对称群：非空集合的全体可逆变换关于变换的合成所构成的群
    - 变换群：对称群的任意一个子群
    - 定理：每一个群同构于一个变换群
- 循环群
    - 阶
    - 单位元的阶是1
    - 例4 涉及最小多项式那个题 还不会做
    - 定理
        - a的阶等于a逆的阶
        - a的阶为n，b的阶为m，ab=ba，n、m互素，则ab的阶为mn
    - 定理：有限群的任何一个元素的阶都是群阶数的因子
    - 循环群 生成元
    - 整数加群是无限循环群
    - 模m剩余类加群是循环群
    - n次单位根群是循环群：技巧是设w=...
    - 模n剩余类加群同构于n次单位根群
    - 模素数p剩余类加群是p-1阶循环群
    - 定理
        - 如果G是无限循环群，则生成元只有2个（生成元和它的逆元）
        - 如果G是有限循环群，则生成元个数是欧拉函数（与阶数互素的数的个数），生成元的幂次与群阶数互素
    - 循环群的任意一个子群是循环群
        - 推论 ord a=n,(n,r)=d 则a的r次生成的循环群就是a的d次生成的循环群
        - 无限循环群的全部子群为a的幂次为0，1，2，。。。
        - 有限循环群的全部子群为a的幂次d是群阶数的正因子
    - 循环群的结构定理
        - 无限循环群同构于整数加群
        - 有限循环群同构于模m剩余类加群
- 置换群与对称群
    - 定理：每一个有限群都同构于置换群
    - n次对称群的阶是n!
    - 当n>=3，对称群不是交换群
    - 传说中的命题F1
    - 轮换的定义，长度为r，这个轮换的阶就是r
    - 2轮换称为对换
    - 不相交轮换的定义
    - 任何两个不相交轮换的乘积是可以交换的

倍

    - 每一个置换可以表示为一些不相交轮换的乘积，唯一，这个置换的阶等于轮换们的阶的最大公~~因~~数
    - 每个置换都可以表示为对换的乘积，不唯一

            - 将一个置换都可以表示为对换的乘积，所用对换的个数的奇偶性是唯一的
            - 偶置换：可表示为偶数个对换的乘积的置换
            - 奇置换：可表示为奇数个对换的乘积的置换
            - 偶*偶=偶，偶*奇=奇，奇*奇=偶
            - 在全体n阶置换中，奇置换和偶置换各有n!/2个
            - 全体偶置换构成n次交代群/n级交错群
- 群的进一步讨论
    - 子群的陪集
        - 群的两个子集的乘积（注意当群是加群。。。）
        - 定理
            - A(BC)=(AB)C
            - if gA=gB或Ag=Bg，则A=B
            - if H
            - A和B是子群，则AB是子群当且仅当AB=BA
        - 陪集
            - 陪集一般不是子群
                - aH为子群 当且仅当a属于aH
            - G的两个不同元素可能生成H的同一个陪集
                - aH和bH要么完全相同，要么没有公共元素
                    - aH=bH 当且仅当 a逆b属于H
                - aH和bH阶相同
            - 左陪集一般不等于右陪集
                - 相等的话，H是正规子群
            - 定理
                - a属于aH
                - aH=H 当且仅当 a属于aH
            - 群的子群的全体左陪集的集合构成群的一个分类
            - 左陪集到右陪集的映射是一一对应
            - 子群在群中的左陪集或者右陪集个数称为子群在群中的指数，记作[G:H]
            - 拉格朗日定理 ：G的阶=H的阶*指数
                - 有限群的每个元素的阶都是群的因子
            - 费马小定理
    - 正规子群与商群
        - 定义：正规子群/不变子群 左陪集=右陪集
        - 平凡子群是正规子群
        - 交换群的一切子群都是正规子群
        - 例4 有点传递的意思
        - 若子群在群中的指数是2，则这个子群是正规子群
        - 判断正规子群的4个等价条件
            - H是G的正规子群

    - a属于G，aHa逆=H
    - a属于G，aHa逆属于H
    - a属于G，h属于H，aha逆属于H(比较方便，不需要考虑两个集合之间的关系)
  - 出现了，那个重要的群K={(1),(12)(34),(13)(24),(14)(23)}
    - K是S4的正规子群
    - 4阶群必同构于循环群或者K
  - 两个正规子群的交集、乘积都是正规子群
  - 陪集的乘法
  - 商群：正规子群，陪集组成的集合关于陪集的乘法构成群
    - 单位元，逆元
  - 若G是交换群，则商群也是交换群
  - 商群的阶=指数=群的阶/正规子群的阶
  - 有限群的商群的阶是群的阶数的因子
  - Z关于
- 群的同态和同态基本定理
  - 同态的定义：保持运算
  - 自然同态
  - 核
  - 群同态基本定理：满同态，核K，推出G/K同构于G'
  - 应用同态基本定义证明群的同构
    - 是映射
    - 满映射
    - 是同态
    - 计算核
    - 应用同态基本定理
- 群的直积
  - 外直积 两个群
    - 单位元
    - 逆元
  - 定理
    - G是有限群当且仅当G1G2都是有限群，G的阶=G1的阶*G2的阶
    - G是交换群当且仅当G1G2都是交换群
  - G1是3阶，G2是5阶，证明G是15阶循环群
  - 4阶群必同构于循环群或者K
  - ord(a,b)=[ord a,ord b]
  - G1是m阶循环群，G2是n阶循环群，G是循环群当且仅当m和n互素
  - 求Z15+Z5中5阶元的个数
  - 内直积
    - 两个正规子群H和K
    - G=HK

            - H和K的交集只有单位元

- 环论
    - 环的定义和基本性质
        - 环的定义
            - 关于加法：交换群
            - 关于乘法：结合律
            - 乘法对加法的分配律
        - 再对乘法加条件
            - 乘法交换律：交换环
            - 乘法有单位元：幺环
            - 乘法有逆元：单位群
        - 零环：唯一一个单位元=零元并且零元也可逆的环
        - 全体偶数的集合对于通常数的加法和乘法构成一个没有单位元的交换环
        - 模m剩余类环
        - 子环
            - 定义
            - 判别
                - 加法子群+乘法封闭