SUR LA TRANSFORMATION DES FONCTIONS ELLIPTIQUES;

par M. **Ch. Hermite**, à Paris.

(Extrait d'une Lettre adressée à M. S. Pincherle).

Adunanza del 26 aprile 1891

. . . .

Soit $y = \frac{U}{V}$ la formule de Jacobi pour la transformation d'ordre n, qui donne l'équation

$$\frac{dy}{\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}} = \frac{dx}{M\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}.$$

Je dis qu'en posant

$$\varphi(x) = A_0 x^{n+1} + A_1 x^{n-1} + A_2 x^{n-3} + \ldots + A_{\frac{n+1}{2}}$$

$$\psi(x) = B_1 x^{n-2} + B_2 x^{n-4} + \ldots + B_{\frac{n-1}{2}} x,$$

on peut disposer des $n+1$ coefficients $A_0, A_1, A_2, \ldots B_0, B_1, B_2,$ de manière que le polynôme entier en x

$$\varphi^2(x) - \psi^2(x)(1-x^2)(1-k^2x^2)$$

admette le facteur $U - Vy$. Remplaçons en effet, dans l'expression

$$\varphi(x) - \psi(x)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)},$$

le radical par la valeur rationnelle en x, qu'on tire de l'équation différentielle, et qui est affectée du facteur $\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}$, les $n+1$ coefficients qui entrent sous forme homogène, se déterminent en fonction rationnelle de x, en écrivant que les n racines de l'équation $U - Vy = 0$ satisfont à l'égalité

$$\varphi(x) - \psi(x)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)} = 0.$$

Vous voyez en même temps que les quantités $B_0, B_1, \ldots$ d'une part, et $A_0\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}$, $A_1\sqrt{(1-y^2)(1-\lambda^2 y^2)}, \ldots$ sont rationnelles en x et y.

Ceci posé, j'observe que la relation

$$\varphi^2(x) - \psi^2(x)(1-x^2)(1-k^2x^2) = 0,$$

ne contenant que des puissances paires de x admettra, avec le facteur $U - Vy$, un autre qui en résulte en changeant x en $-x$, c'est-à-dire : $U + Vy$. Mais elle est du degré $n+1$ par rapport à x^2, et a par conséquent cette forme :

$$A(U^2 - V^2y^2)[x^2 - \theta^2(y)] = 0,$$

où il est aisé de voir que $\theta(y)$ est une fonction rationnelle de y, on l'obtient immédiatement au moyen du théorème d'Abel.

Soit, en effet, $y = \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right)$; nous aurons, comme on sait

$$U^2 - V^2y^2 = g[x^2 - \operatorname{sn}^2 u]\left[x^2 - \operatorname{sn}^2\left(u + \frac{4\omega}{n}\right)\right] \ldots$$

$$\left[x^2 - \operatorname{sn}^2\left(u + \frac{4(n-1)\omega}{n}\right)\right],$$

ω ayant la signification donnée au § 20 des *Fundamenta*. La somme des divers arguments

$$u,\quad u + \frac{4\omega}{n}, \ldots, u + \frac{4(n-1)\omega}{n},$$

est par suite nu, en négligeant les périodes, d'où cette conclusion bien facile, que, pour

$$y = \operatorname{sn}\left(\frac{u}{M}, \lambda\right),$$

on a

$$\theta(y) = \operatorname{sn}(nu)$$

Revenons à la variable x, et soit $y = \frac{U}{V} = \lambda(x)$, la fonction rationnelle $\theta(y)$ est donc telle que $\theta[\lambda(x)]$ représente la formule de substitution qui donne la multiplication de l'argument par n, $\theta(x)$ est par conséquent l'expression correspondante à ce que Jacobi a nommé la substitution supplémentaire $y = \theta(x)$

Enfin je remarque qu'en faisant

$$\theta(x) = \frac{U_1(x)}{V_1(x)}, \qquad \lambda(x) = \frac{U(x)}{V(x)}$$

on a la relation suivante.

$$[U^2(x) - y^2 V^2(x)][U_1^2(y) - x^2 V_1^2(y)]$$

$$= \varphi^2(x, y)(1 - y^2)(1 - \lambda^2 y^2) - \psi^2(x, y)(1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$

où $\varphi(x, y)$ et $\psi(x, y)$ sont des quantités rationnelles et entières en x et y C'est ce polynôme,

$$F(x, y) = \varphi^2(x, y)(1 - y^2)(1 - \lambda^2 y^2) - \psi^2(x, y)(1 - x^2)(1 - k^2 x^2),$$

dont il serait bien important d'obtenir un mode de formation purement algébrique, j'ai seulement fait la remarque qu'en posant les équations

$$F(z, x) = 0, \qquad F(z, y) = 0,$$

l'élimination de z conduit à une expression de y en x qui est la formule pour la multiplication

Paris, 20 avril 1891

Ch. Hermite