Chapter 3

随机变量的数字特征

3.2 一批零件中有9个合格品与3个废品，安装机器时从这批零件中任取1 个。如果取出的废品不再放回去，求在取得合格品以前已取出的废品数的数学期望、方差与标准差。（参看习题2.3）

解： 有习题2.2，X的概率分布表如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

X的数学期望为

$$E(X) = 0 \times \frac{3}{4} + 1 \times \frac{9}{44} + 2 \times \frac{9}{220} + 3 \times \frac{1}{220} = 0.3.$$

又有

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{3}{4} + 1^2 \times \frac{9}{44} + 2^2 \times \frac{9}{220} + 3^2 \times \frac{1}{220} = \frac{9}{22}(\approx 0.4091).$$

所以X的方差为

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{9}{22} - (0.3)^2 = \frac{351}{1100}(\approx 0.3191),$$

标准差为

$$\sigma(X) = \sqrt{\frac{351}{1100}}(\approx 0.5649).$$

□

注：本题得出精确值或至少三位近似小数均判正确。

3.5 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} ax, & 0\le x<2;\\ bx+c, & 2\le x\le 4;\\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

已知X的数学期望$E(X)=2$，方差$D(X)=\frac{2}{3}$，求常数a,b,c。

解： 由已知条件得$E(X^2)=D(X)+[E(X)]^2=\frac{14}{3}$。由密度函数性质及期望的计算公式得

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_0^2 axdx+\int_2^4(bx+c)dx=2a+6b+2c=1,$$

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x)dx=\int_0^2 ax^2dx+\int_2^4(bx^2+cx)dx=\frac{8}{3}a+\frac{56}{3}b+6c=2,$$

$$E(X^2)=\int_0^2 ax^3dx+\int_2^4(bx^3+cx^2)dx=4a+60b+\frac{56}{3}c=\frac{14}{3}.$$

联立得线性方程组

$$\begin{cases} 2a+6b+2c=1,\\ \frac{8}{3}a+\frac{56}{3}b+6c=2,\\ 4a+60b+\frac{56}{3}c=\frac{14}{3}. \end{cases}$$

解之得

$$\begin{cases} a=\frac{1}{4}\\ b=-\frac{1}{4}\\ c=1. \end{cases}$$

□

3.6 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\ge 1. \end{cases}$$

求数学期望$E(X)$及方差$D(X)$。

解： X的数学期望为

$$E(X)=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0.$$

又有

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{\pi}B(\frac{3}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

所以X的方差为

$$D(X)=\frac{1}{2}-0^2=\frac{1}{2}.$$

□

3.7 （拉普拉斯分布）设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty.$$

求数学期望$E(X)$及方差$D(X)$。

解： X的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0.$$

又有

$$E(X^2)=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_{0}^{+\infty}x^2e^{-x}dx=\Gamma(3)=2.$$

所以X的方差为

$$D(X)=2-0^2=2.$$

□

3.11 设随机变量X服从二项分布$B(3,0.4)$，求下列随机变量函数的数学期望及方差：（参看习题2.27）

(2) $Y_2=X(X-2)$。

解： 已知$X\sim B(3,0.4)$，则有概率函数

$$P(x)=C_3^x(0.4)^x(0.6)^{3-x},\quad x=0,1,2,3.$$

由此得到X的概率分布表如下：

X	0	1	2	3
$p(x_i)$	0.216	0.432	0.288	0.064

(2) 由X的概率分布表及函数关系$Y_2=X(X-2)$得Y_2的数学期望为

$$E(Y_2)=0\times 0.216+(-1)\times 0.432+0\times 0.288+3\times 0.064=-0.24.$$

又有

$$E(Y_2^2)=0^2\times 0.216+(-1)^2\times 0.432+0^2\times 0.288+3^2\times 0.064=1.008.$$

所以Y_2的方差为

$$D(Y_2)=1.008-(-0.24)^2=0.9504.$$

□

3.12 设随机变量X服从指数分布$e\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$，求随机变量函数$Y=X^{\frac{1}{\beta}}$的数学期望及方差，其中$\alpha>0$, $\beta>0$都是常数。（参看习题2.30）

解： 解法一：依题意得，X的概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\alpha}e^{-x/\alpha}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

则随机变量函数$Y=X^{\frac{1}{\beta}}$的数学期望为

$$E(Y)=E(X^{\frac{1}{\beta}})=\int_0^{+\infty}x^{1/\beta}\cdot\frac{1}{\alpha}e^{-x/\alpha}dx.$$

做变量替换$t=\dfrac{x}{\alpha}$，则$x=\alpha t$, $dx=\alpha dt$，

$$E(Y)=\alpha^{1/\beta}\int_0^{+\infty}t^{1/\beta}e^{-t}dt=\alpha^{1/\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right).$$

类似可得

$$E(Y^2)=E(X^{\frac{2}{\beta}})=\int_0^{+\infty}x^{2/\beta}\cdot\frac{1}{\alpha}e^{-x/\alpha}dx=\alpha^{2/\beta}\int_0^{+\infty}t^{2/\beta}e^{-t}dt=\alpha^{2/\beta}\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right).$$

所以，Y的方差为

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\alpha^{2/\beta}\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\alpha^{2/\beta}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2.$$

解法二：由习题2.30的结论，Y的概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{\beta}{\alpha}y^{\beta-1}e^{-y^\beta/\alpha}, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

Y的数学期望为

$$E(Y)=\int_0^{+\infty}y\cdot\frac{\beta}{\alpha}y^{\beta-1}e^{-y^\beta/\alpha}dy.$$

做变量替换$t=\dfrac{y^\beta}{\alpha}$，则$y=\alpha^{\frac{1}{\beta}}t^{\frac{1}{\beta}}$，$dy=\dfrac{1}{\beta}\alpha^{\frac{1}{\beta}}t^{\frac{1}{\beta}-1}dt$，

$$E(Y)=\alpha^{1/\beta}\int_0^{+\infty}t^{1/\beta}e^{-t}dt=\alpha^{1/\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right).$$

类似可得

$$E(Y^2)=\int_0^{+\infty}y^2\cdot\frac{\beta}{\alpha}y^{\beta-1}e^{-y^\beta/\alpha}dy=\alpha^{2/\beta}\int_0^{+\infty}t^{2/\beta}e^{-t}dt=\alpha^{2/\beta}\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right).$$

所以，Y的方差为

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\alpha^{2/\beta}\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\alpha^{2/\beta}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2.$$

□

3.13 对球的直径作近似测量，设其值均匀分布在区间$[a,b]$内，求球体积的数学期望。

解： 用X表示球直径的测量值，Y表示球的体积，则$Y=\dfrac{\pi}{6}X^3$。由已知条件X服从$[a,b]$上的均匀分布，其概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\frac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因此Y的数学期望为

$$E(Y) = E(\frac{\pi}{6}X^3) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{6}x^3 f_X(x)dx = \int_a^b \frac{\pi}{6}x^3 \cdot \frac{1}{b-a}dx$$
$$= \frac{\pi}{6(b-a)}\int_a^b x^3 dx = \frac{\pi}{6(b-a)} \cdot \frac{b^4-a^4}{4} = \frac{\pi}{24}(a+b)(a^2+b^2).$$

□

3.16 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} 2, & 0<x<1,\ 0<y<1-x; \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

求随机变量$Z = X+Y$的数学期望$E(Z)$与方差$D(Z)$。

解： 记$D = \{(x,y)|\ 0<y<1-x,\ 0<x<1\} = \{(x,y)|\ 0<x<1-y,\ 0<y<1\}$。

解法一：X,Y的数学期望分别为

$$E(X) = \iint_D x\cdot 2dxdy = 2\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}dy = 2\int_0^1 x(1-x)dx = \frac{1}{3},$$
$$E(Y) = \iint_D y\cdot 2dxdy = 2\int_0^1 ydy\int_0^{1-y}dx = 2\int_0^1 y(1-y)dy = \frac{1}{3}.$$

XY的数学期望为

$$E(XY) = \iint_D xy\cdot 2dxdy = 2\int_0^1 xdx\int_0^{1-x}ydy = \int_0^1 x(1-x)^2dx = \frac{1}{12}.$$

所以X与Y的协方差为

$$\mathrm{cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{1}{12} - \frac{1}{3}\times\frac{1}{3} = -\frac{1}{36}.$$

其次由于

$$E(X^2) = \iint_D x^2\cdot 2dxdy = 2\int_0^1 x^2dx\int_0^{1-x}dy = 2\int_0^1 x^2(1-x)dx = \frac{1}{6},$$
$$E(Y^2) = \iint_D y^2\cdot 2dxdy = 2\int_0^1 y^2dy\int_0^{1-y}dx = 2\int_0^1 y^2(1-y)dy = \frac{1}{6},$$

因此X, Y的方差为

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{1}{6} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{18},$$
$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{6} - (\frac{1}{3})^2 = \frac{1}{18}.$$

故随机变量$Z = X + Y$的数学期望为

$$E(Z) = E(X+Y) = E(X) + E(Y) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

方差为

$$D(Z) = D(X+Y) = D(X) + D(Y) + 2\mathrm{cov}(X, Y) = \frac{1}{18} + \frac{1}{18} + 2(-\frac{1}{36}) = \frac{1}{18}.$$

解法二：随机变量$Z = X + Y$的数学期望为

$$\begin{aligned} E(Z) = E(X+Y) &= \iint\limits_D (x+y)\cdot 2dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2(y+x)dy \\ &= \int_0^1 \left[(y+x)^2 \Big|_0^{1-x} \right] dx = \int_0^1 [1-x^2]dx = \frac{2}{3}, \end{aligned}$$

其平方的数学期望为

$$\begin{aligned} E(Z^2) = E[(X+Y)^2] &= \iint\limits_D (x+y)^2\cdot 2dxdy = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} 2(y+x)^2dy \\ &= \int_0^1 \left[\frac{2}{3}(y+x)^3 \Big|_0^{1-x} \right] dx = \int_0^1 \frac{2}{3}[1-x^3]dx = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

故$Z = X + Y$的方差为

$$D(Z) = E(Z^2) - [E(Z)]^2 = \frac{1}{2} - \frac{4}{9} = \frac{1}{18}.$$

□

3.17 在长为l的线段上任意选取两点，求两点间距离的数学期望及标准差。

解： 设线段在数轴上对应区间$[0, l]$，随机变量X及Y分别表示在该线段上任意选取的两点的坐标，则X与Y相互独立，并且都服从区间$[0, l]$上的均匀分布，概

率密度分别是

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 \le x \le l, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 \le y \le l, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

于是，得二维随机变量(X, Y)的联合概率密度

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{l^2}, & 0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

设随机变量Z表示这两点间的距离，则有

$$Z = |X - Y|.$$

由课本公式(3.17)得

$$\begin{aligned} E(Z) = E(|X - Y|) &= \iint\limits_D |x - y| \cdot \frac{1}{l^2} dxdy \\ &= \frac{1}{l^2}\left[\int_0^l dx \int_0^x (x - y)dy + \int_0^l dx \int_x^l (y - x)dy\right] \\ &= \frac{1}{l^2}\left[\frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{6}\right] = \frac{l}{3}, \end{aligned}$$

其中积分区域$D = \{(x, y)|\ 0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l\}$。又有

$$\begin{aligned} E(Z^2) = E(|X - Y|^2) &= \iint\limits_D (x - y)^2 \cdot \frac{1}{l^2} dxdy \\ &= \frac{1}{l^2} \int_0^l dx \int_0^l (x - y)^2 dy = \frac{1}{l^2} \cdot \frac{l^4}{6} = \frac{l^2}{6}. \end{aligned}$$

所以X的方差为

$$D(Z) = \frac{l^2}{6} - \left(\frac{l}{3}\right)^2 = \frac{l^2}{18},$$

标准差为

$$\sigma(Z) = \sqrt{\frac{l^2}{18}} = \frac{l}{3\sqrt{2}}.$$

□

3.19 设随机变量$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立，并且服从同一分布，数学期望为μ，方差为σ^2，求这些随机变量的算术平均值$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$的数学期望及方差。

解： 由已知条件，

$$E(X_i) = \mu, \quad D(X_i) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

则$\overline{X}_n$的数学期望为

$$E(\overline{X}_n) = E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \frac{1}{n}\cdot n\mu = \mu.$$

又因为$X_1, X_2, \cdots, X_n$独立，所以$\overline{X}_n$的方差为

$$\begin{aligned} D(\overline{X}_n) &= D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\ &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} D(X_i) = \frac{1}{n^2}\cdot n\sigma = \frac{\sigma^2}{n}. \end{aligned}$$

□

3.20 N个人同乘一辆长途汽车，沿途有n个车站，每到一个车站时，如果没有人下车，则不停车。设每个人在任一站下车是等可能的，求停车次数的数学期望。

解： 设随机变量X_i表示这辆长途汽车在第i个车站的停车次数，则

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{如果在第}i\text{个车站无人下车}, \\ 1, & \text{如果在第}i\text{个车站有人下车}. \end{cases}$$

其中$i = 1, 2, \cdots, n$。按题意，这辆长途汽车上的N个乘客中每人在第i个车站下车的概率都等于$\frac{1}{n}$，不下车的概率都等于$\frac{n-1}{n}$。于是，N 个乘客在第i 个车站都不下车，从而这辆汽车在第i个车站不停车的概率等于$\left(\frac{n-1}{n}\right)^N$；$N$个乘客中至少有一个人下车，从而这辆汽车在第$i$个车站停车的概率都等于$1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^N$。所以，随机变量$X_i(i = 1, 2, \cdots, n)$的概率分布如下：

X_i	0	1
$p(x)$	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^N$	$1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^N$

X_i的数学期望为

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 0 \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^N + 1 \times \left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^N\right] \\ &= 1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^N, \qquad i = 1, 2, \cdots, n. \end{aligned}$$

设随机变量Y表示这辆长途汽车在沿途各站停车的总次数，则有

$$Y = \sum_{i=1}^n X_i.$$

所以，Y的数学期望为

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right) = \sum_{i=1}^n E(X_i) = n\left[1 - \left(\frac{n-1}{n}\right)^N\right].$$

□

3.23 计算均匀分布$U(a,b)$的k阶原点矩与k阶中心距。

解: 设随机变量$X \sim U(a,b)$，则有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \le x \le b, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

X的k阶原点矩为

$$\begin{aligned} \nu_k(X) &= \int_a^b x^k \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b x^k dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{k+1}(b^{k+1} - a^{k+1}) = \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}. \end{aligned}$$

因为$E(X) = \dfrac{a+b}{2}$，则X的k阶中心矩为

$$\begin{aligned} \mu_k(X) &= \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^k \cdot \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{b-a} \int_a^b \left(x - \frac{a+b}{2}\right)^k dx \\ &= \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{k+1} \left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1} - \left(\frac{a-b}{2}\right)^{k+1}\right] \\ &= \frac{[1 - (-1)^{k+1}]}{(k+1)(b-a)} \left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}, \end{aligned}$$

所以

$$\mu_k(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{k+1}\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^k, & k\text{为偶数},\\ 0, & k\text{为奇数}.\end{cases}$$

□

3.24 求习题2.35中随机变量X与Y的数学期望、方差、协方差及相关系数。

解： 在习题2.37中已求得二维随机变量(X,Y)的联合概率分布

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0

X的边缘概率分布

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

及Y的边缘概率分布

Y	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

故X的数学期望为

$$E(X)=0\times\frac{8}{27}+1\times\frac{12}{27}+2\times\frac{6}{27}+3\times\frac{1}{27}=1,$$

X^2的数学期望为

$$E(X^2)=0^2\times\frac{8}{27}+1^2\times\frac{12}{27}+2^2\times\frac{6}{27}+3^2\times\frac{1}{27}=\frac{5}{3},$$

X的方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{2}{3}.$$

同理可得，Y的数学期望与方差分别为

$$E(Y)=1,\quad D(Y)=\frac{2}{3}.$$

又由

$$E(XY)=(1\times 1)\times\frac{6}{27}+(1\times 2)\times\frac{3}{27}+(2\times 1)\times\frac{3}{27}=\frac{2}{3}$$

得X与Y的协方差为

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{2}{3}-1\times 1=-\frac{1}{3}.$$

X与Y的相关系数为

$$R(X,Y)=\frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}}=-\frac{1}{2}.$$

□

3.25 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}3x, & 0\le y\le x<1,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

求(1)数学期望$E(X)$及$E(Y)$; (2)方差$D(X)$及$D(Y)$; (3)协方差$cov(X,Y)$及相关系数$R(X,Y)$.

解:

(1) X的数学期望为

$$E(X)=\iint\limits_D x\cdot 3xdxdy=3\int_0^1 x^2dx\int_0^x dy=3\int_0^1 x^3dx=\frac{3}{4}$$

Y的数学期望为

$$E(Y)=\iint\limits_D y\cdot 3xdxdy=3\int_0^1 xdx\int_0^x ydy=\frac{3}{2}\int_0^1 x^3dx=\frac{3}{8}$$

(2) 由于

$$E(X^2)=\iint\limits_D x^2\cdot 3xdxdy=3\int_0^1 x^3dx\int_0^x dy=3\int_0^1 x^4dx=\frac{3}{5}$$

$$E(Y^2) = \iint\limits_D y^2 \cdot 3x dx dy = 3\int_0^1 x dx \int_0^x y^2 dy = \int_0^1 x^4 dx = \frac{1}{5}$$

因此X的方差为

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{3}{5} - (\frac{3}{4})^2 = \frac{3}{80}$$

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \frac{1}{5} - (\frac{3}{8})^2 = \frac{19}{320}$$

(3) XY的数学期望为

$$E(XY) = \iint\limits_D xy \cdot 3x dx dy = 3\int_0^1 x^2 dx \int_0^x y dy = \frac{3}{2}\int_0^1 x^4 dx = \frac{3}{10}$$

所以X与Y的协方差为

$$cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{3}{10} - \frac{3}{4} \times \frac{3}{8} = \frac{3}{160}$$

X与Y的相关系数为

$$R(X,Y) = \frac{cov(X,Y)}{\sqrt{D(X)\sqrt{D(Y)}}} = \frac{\frac{3}{160}}{\sqrt{\frac{3}{80}}\sqrt{\frac{19}{320}}} = \sqrt{\frac{3}{19}}$$

□

3.26 设二维随机变量$(X.Y)$的联合概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{8}(x+y), & 0 < x < 2, 0 < y < 2, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

求(1)数学期望$E(X)$及$E(Y)$；(2)方差$D(X)$及$D(Y)$；(3)协方差$cov(X,Y)$及相关系数$R(X,Y)$。

解： 记区域$D = \{(x,y)|\ 0 \le y \le 2,\ 0 \le x \le 2\}$。

(1) X,Y的数学期望分别为

$$E(X) = \iint\limits_D x \cdot \frac{1}{8}(x+y) dx dy = \frac{1}{8}(\int_0^2 x^2 dx \int_0^2 dy + \int_0^2 x dx \int_0^2 y dy) = \frac{7}{6},$$

$$E(Y) = \iint\limits_D y \cdot \frac{1}{8}(x+y) dx dy = \frac{1}{8}(\int_0^2 x dx \int_0^2 y dy + \int_0^2 dx \int_0^2 y^2 dy) = \frac{7}{6}.$$

(2) 由于

$$E(X^2)=\iint\limits_D x^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy=\frac{1}{8}(\int_0^2 x^3dx\int_0^2 dy+\int_0^2 x^2dx\int_0^2 ydy)=\frac{5}{3},$$
$$E(Y^2)=\iint\limits_D y^2\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy=\frac{1}{8}(\int_0^2 xdx\int_0^2 y^3dy+\int_0^2 dx\int_0^2 y^2dy)=\frac{5}{3}.$$

因此X,Y的方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36},$$
$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{5}{3}-(\frac{7}{6})^2=\frac{11}{36}.$$

(3) XY的数学期望为

$$E(XY)=\iint\limits_D xy\cdot\frac{1}{8}(x+y)dxdy=\frac{1}{8}(\iint\limits_D x^2ydxdy+\iint\limits_D xy^2dxdy)=\frac{4}{3},$$

所以X与Y的协方差为

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=\frac{4}{3}-\frac{7}{6}\times\frac{7}{6}=-\frac{1}{36},$$

X与Y的相关系数为

$$R(X,Y)=\frac{\operatorname{cov}(X,Y)}{\sqrt{D(X)\sqrt{D(Y)}}}=\frac{-\dfrac{1}{36}}{\sqrt{\dfrac{11}{36}}\sqrt{\dfrac{11}{36}}}=-\frac{1}{11}.$$

□

3.30 为了确定事件A的概率，进行10000次重复独立试验。利用切比雪夫不等式估计：用事件A在10000次试验中发生的概率$f_n(A)$作为事件A的概率的近似值时，误差小于0.01的概率。

解： 设随机变量X表示事件A在$n=10000$次重复独立试验中发生的次数，则$X\sim B(n,p)$，并且有

$$E(X)=np,\quad D(X)=np(1-p).$$

于是，按切比雪夫不等式得

$$P\{|f_n(A)-p|<0.01\}=P\left\{\left|\frac{X}{n}-p\right|<0.01\right\}=P\{|X-np|<0.01n\}$$
$$\geq 1-\frac{np(1-p)}{(0.01n)^2}=1-\frac{p(1-p)}{0.0001n}.$$

又$n=10000$，$p(1-p)\leq 0.25$，所以有

$$P\{|f_n(A)-p|<0.01\}\geq 1-p(1-p)\geq 0.75.$$

□