《概率与统计》内容总结与习题：假设检验

课本例题、习题分类：

1. 单个正态总体均值的检验：§7.1例1-2，§7.2例1-2；习题七7.1-7.4
2. 单个正态总体方差的检验：§7.2例3；习题七7.5, 7.6
3. 两个正态总体的比较：§7.3例1-2；习题七7.7-7.10
4. 总体分布的检验：§7.5例1-2；习题七7.13-7.16

补充习题（本部分习题未涵盖本章的全部主要内容，仅为课本例题、习题的补充）：

1. 填空题：

   (1) 假设检验中的第一类错误是指____________________________。

   (2) 假设检验中的第二类错误是指____________________________。

2. 选择题

   (1) 假设检验的显著性水平是

   (A) 第一类错误的概率;　　(B) 第一类错误概率的上界;

   (C) 第二类错误的概率;　　(D) 第二类错误概率的上界.

   (2) 设$X_1, X_2, \cdots, X_m$是取自正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$取自正态总体$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，样本平均值分别为$\overline{X}$和$\overline{Y}$，样本方差分别为S_1^2和S_2^2，则假设$H_0: \mu_1 \leq \mu_2$使用t检验的前提条件是

   (A) $\sigma_1^2 \leq \sigma_2^2$;　　(B) $S_1^2 \leq S_2^2$;　　(C) $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$;　　(D) $S_1^2 = S_2^2$.

(3) 设$X_1, X_2, \cdots, X_m$是取自正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$取自正态总体$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，样本平均值分别为$\overline{X}$和$\overline{Y}$，样本方差分别为S_1^2和S_2^2，则检验假设H_0：$\sigma_1^2 \le \sigma_2^2$

(A) 使用χ^2检验; (B) 要求$\mu_1 = \mu_2$;

(C) 使用F检验; (D) 要求$S_1^2 = S_2^2$.

3. 已知某炼铁厂的铁水含碳量服从正态分布$N(4.55, 0.108^2)$。现测定了9炉铁水，其平均含碳量为4.484。如果估计方差没有变化，可否认为铁水平均含碳量仍为4.55（$\alpha = 0.05$）?

4. 某油品公司的桶装润滑油标定重量为10千克。商品检验部门从市场上随机抽取10桶，称得它们的重量（单位：千克）分别为

$$10.2,\ 9.7,\ 10.1,\ 10.3,\ 10.1,\ 9.8,\ 9.9,\ 10.4,\ 10.3,\ 9.8.$$

假设每桶油实际重量服从正态分布。试在显著性水平$\alpha = 0.01$下，检验该公司的桶装润滑油重量是否确为10千克?

5. 假设香烟中尼古丁含量服从正态分布，现从某牌香烟中随机抽取20支，其尼古丁含量的平均值$\overline{X} = 18.6$毫克，样本标准差$S = 2.4$毫克。取显著性水平$\alpha = 0.01$，我们能否接受“该种香烟的尼古丁含量的均值$\mu = 18$毫克”的断言?

8.3 假设香烟中尼古丁含量服从正态分布，现从某牌香烟中随机抽取20支，其尼古丁含量的平均值$\overline{X} = 18.6$毫克，对$\sigma = 2.4$毫克和$S = 2.4$毫克两种情况，我们能否接受“该种香烟的尼古丁含量不超过$\mu = 17.5$毫克”的断言（显著性水平$\alpha = 0.01$）?

6. 某厂生产的瓶装纯净水要求标准差$\sigma \le 0.02$升，现从超市上随机抽取20瓶这样的纯净水，发现它们所装水量的样本标准差$S = 0.03$升。假定瓶装纯净水装水量服从正态分布，试问在显著性水平$\alpha = 0.05$下，我们能否认为它们达到了要求。

7. 比较A、B两种小麦品种蛋白质含量。随机抽取A种小麦10个样品，测得$\overline{X}=14.3, S_1^2=1.62$，随机抽取$B$种小麦5个样品，测得$\overline{Y}=11.7, S_2^2=0.14$。假定这两种小麦蛋白质含量都服从正态分布，试在$\alpha=0.01$水平下，作如下检验：

   (a) 设两类总体具有相同方差，检验两种小麦的蛋白质含量有无差异；

   (b) 上述“两类总体具有相同方差”的假设是否合理？

假设检验方法总结：

1. 单个正态总体均值的检验

条件	单个正态总体，方差σ^2已知		
原假设	$H_0: \mu = \mu_0$		
备择假设	$\mu < \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\mu > \mu_0$
统计量	$U = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}$		
拒绝域	$U \leq -u_\alpha$	$\lvert U\rvert \geq u_{\frac{\alpha}{2}}$	$U \geq u_\alpha$

条件	单个正态总体，方差未知		
原假设	$H_0: \mu = \mu_0$		
备择假设	$\mu < \mu_0$	$\mu \neq \mu_0$	$\mu > \mu_0$
统计量	$T = \dfrac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$		
拒绝域	$T \leq -t_{n-1}(\alpha)$	$\lvert T\rvert \geq t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$	$T \geq t_{n-1}(\alpha)$

2. 单个正态总体方差的检验

条件	单个正态总体，期望μ已知		
原假设	$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$		
备择假设	$\sigma^2 < \sigma_0^2$	$\sigma^2 \neq \sigma_0^2$	$\sigma^2 > \sigma_0^2$
统计量	$\chi^2 = \dfrac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma_0^2}$		
拒绝域	$\chi^2 \leq \chi_n^2(1-\alpha)$	$\chi^2 \geq \chi_n^2(\frac{\alpha}{2})$ 或 $\chi^2 \leq \chi_n^2(1-\frac{\alpha}{2})$	$\chi^2 \geq \chi_n^2(\alpha)$

条件	单个正态总体，期望未知		
原假设	$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$		
备择假设	$\sigma^2<\sigma_0^2$	$\sigma^2\neq\sigma_0^2$	$\sigma^2>\sigma_0^2$
统计量	$\chi^2=\frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2}$		
拒绝域	$\chi^2\le\chi_{n-1}^2(1-\alpha)$	$\chi^2\ge\chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})$ 或 $\chi^2\le\chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})$	$\chi^2\ge\chi_{n-1}^2(\alpha)$

3. 两个正态总体均值的比较

条件	两个正态总体，方差σ_1^2,σ_2^2已知		
原假设	$H_0:\mu_1=\mu_2$		
备择假设	$\mu_1<\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$
统计量	$U=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\sigma_1^2/m+\sigma_2^2/n}}$		
拒绝域	$U\le-u_\alpha$	$\vert U\vert\ge u_{\frac{\alpha}{2}}$	$U\ge u_\alpha$

条件	两个正态总体，方差未知但相等		
原假设	$H_0:\mu_1=\mu_2$		
备择假设	$\mu_1<\mu_2$	$\mu_1\neq\mu_2$	$\mu_1>\mu_2$
统计量	$T=\frac{\overline{X}-\overline{Y}}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}$		
拒绝域	$T\le-t_{m+n-2}(\alpha)$	$\vert T\vert\ge t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})$	$T\ge t_{m+n-2}(\alpha)$

4. 两个正态总体方差的比较

条件	两个正态总体，已知期望μ_1, μ_2		
原假设	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$		
备择假设	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$
统计量	$F = \frac{\sum_{i=1}^{m}(X_i - \mu_1)^2/m}{\sum_{j=1}^{n}(Y_j - \mu_2)^2/n}$		
拒绝域	$F \leq F_{m,n}(1-\alpha)$	$F \geq F_{m,n}(\frac{\alpha}{2})$ 或 $F \leq F_{m,n}(1-\frac{\alpha}{2})$	$F \geq F_{m,n}(\alpha)$

条件	两个正态总体，期望未知		
原假设	$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$		
备择假设	$\sigma_1^2 < \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$	$\sigma_1^2 > \sigma_2^2$
统计量	$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$		
拒绝域	$F \leq F_{m-1,n-1}(1-\alpha)$	$F \geq F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})$ 或$F \leq F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$	$F \geq F_{m-1,n-1}(\alpha)$