Chapter 3

随机变量的数字特征

第三章作业（2019.05.06交）：习题三3.1, 3.2, 3.6, 3.7, 3.11, 3.12(2), 3.13, 3.17, 3.18, 3.22, 3.23, 3.24, 3.25, 3.29, 3.31

3.1 已知100个产品中有10个次品，求任意取出的5分产品中的次品数的数学期望、方差与标准差。（参看习题2.1）

解： 设随机变量X表示任意取出的5个产品中的次品数，则X服从超几何分布$H(5, 10, 100)$，概率函数为

$$p(x) = \frac{C_{10}^{x} C_{90}^{5-x}}{C_{100}^{5}}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4, 5.$$

所以，X的（近似）概率分布表如下：

X	0	1	2	3	4	5
$p(x_i)$	0.5838	0.3394	0.0702	0.0064	0.00025	≈ 0

X的数学期望为

$$\begin{aligned} E(X) &= 0 \times 0.5838 + 1 \times 0.3394 + 2 \times 0.0702 + 3 \times 0.0064 \\ &+ 4 \times 0.00025 + 5 \times 0 = 0.5. \end{aligned}$$

又因为

$$E(X^2)=0^2\times 0.5838+1^2\times 0.3394+2^2\times 0.0702+3^2\times 0.0064 \\ +4^2\times 0.00025+5^2\times 0=0.6818,$$

所以X的方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=0.6818-(0.5)^2=0.4318.$$

X的标准差为

$$\sigma(X)=\sqrt{0.4318}\approx 0.657.$$

□

3.2 一批零件中有9个合格品与3个废品，安装机器时从这批零件中任取1个。如果取出的废品不再放回去，求在取得合格品以前已取出的废品数的数学期望、方差与标准差。(参看习题2.2)

解:　有习题2.2，X的概率分布表如下:

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

X的数学期望为

$$E(X)=0\times\frac{3}{4}+1\times\frac{9}{44}+2\times\frac{9}{220}+3\times\frac{1}{220}=0.3.$$

又有

$$E(X^2)=0^2\times\frac{3}{4}+1^2\times\frac{9}{44}+2^2\times\frac{9}{220}+3^2\times\frac{1}{220}=\frac{9}{22}(\approx 0.4091).$$

所以X的方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{9}{22}-(0.3)^2=\frac{351}{1100}(\approx 0.3191),$$

标准差为

$$\sigma(X)=\sqrt{\frac{351}{1100}}(\approx 0.5649).$$

□

注：本题得出精确值或至少三位近似小数均判正确。

3.6 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x|<1,\\ 0, & |x|\geq 1.\end{cases}$$

求数学期望$E(X)$及方差$D(X)$。

解： X的数学期望为

$$E(X)=\int_{-1}^{1}x\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx=0.$$

又有

$$\begin{aligned}E(X^2)&=\int_{-1}^{1}x^2\cdot\frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{1}\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx\\&=\frac{1}{\pi}\int_0^1 t^{\frac{1}{2}}(1-t)^{-\frac{1}{2}}dt=\frac{1}{\pi}B(\frac{3}{2},\frac{1}{2})=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\Gamma(\frac{3}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(2)}=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

所以X的方差为

$$D(X)=\frac{1}{2}-0^2=\frac{1}{2}.$$

□

3.7 （拉普拉斯分布）设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty.$$

求数学期望$E(X)$及方差$D(X)$。

解： X的数学期望为

$$E(X)=\int_{-\infty}^{+\infty}x\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=0.$$

又有

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \cdot \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx = \Gamma(3) = 2.$$

所以X的方差为

$$D(X) = 2 - 0^2 = 2.$$

□

3.11 在长为l的线段上任意选取两点，求两点间距离的数学期望及标准差。

解： 设线段在数轴上对应区间$[0,l]$，随机变量X及Y分别表示在该线段上任意选取的两点的坐标，则X与Y相互独立，并且都服从区间$[0,l]$上的均匀分布，概率密度分别是

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 \le x \le l, \\ 0, & \text{其它}, \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{1}{l}, & 0 \le y \le l, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

于是，得二维随机变量(X,Y)的联合概率密度

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{l^2}, & 0 \le x \le l,\ 0 \le y \le l, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

设随机变量Z表示这两点间的距离，则有

$$Z = |X - Y|.$$

由课本公式(3.17)得

$$\begin{aligned} E(Z) = E(|X-Y|) &= \iint_D |x-y| \cdot \frac{1}{l^2} dxdy \\ &= \frac{1}{l^2}\left[\int_0^l dx \int_0^x (x-y)dy + \int_0^l dx \int_x^l (y-x)dy\right] \\ &= \frac{1}{l^2}\left[\frac{l^3}{6} + \frac{l^3}{6}\right] = \frac{l}{3}, \end{aligned}$$

其中积分区域$D=\{(x,y)|\ 0\le x\le l,\ 0\le y\le l\}$。又有

$$E(Z^2)=E(|X-Y|^2)=\iint\limits_D (x-y)^2\cdot\frac{1}{l^2}dxdy$$
$$=\frac{1}{l^2}\int_0^l dx\int_0^l (x-y)^2dy=\frac{1}{l^2}\cdot\frac{l^4}{6}=\frac{l^2}{6}.$$

所以X的方差为

$$D(Z)=\frac{l^2}{6}-\left(\frac{l}{3}\right)^2=\frac{l^2}{18},$$

标准差为

$$\sigma(Z)=\sqrt{\frac{l^2}{18}}=\frac{l}{3\sqrt{2}}.$$

□

3.12 设随机变量X服从二项分布$B(3,0.4)$，求下列随机变量函数的数学期望及方差：（参看习题2.27）求：

(2) $Y_2=X(X-2)$。

解： 已知$X\sim B(3,0.4)$，则有概率函数

$$P(x)=C_3^x(0.4)^x(0.6)^{3-x},\quad x=0,1,2,3.$$

由此得到X的概率分布表如下：

X	0	1	2	3
$p(x_i)$	0.216	0.432	0.288	0.064

(2) 由X的概率分布表及函数关系$Y_2=X(X-2)$得Y_2的数学期望为

$$E(Y_2)=0\times 0.216+(-1)\times 0.432+0\times 0.288+3\times 0.064=-0.24.$$

又有

$$E(Y_2^2)=0^2\times 0.216+(-1)^2\times 0.432+0^2\times 0.288+3^2\times 0.064=1.008.$$

所以Y_2的方差为

$$D(Y_2)=1.008-(-0.24)^2=0.9504.$$

$\square$

3.13 设随机变量X服从指数分布$e\left(\frac{1}{\alpha}\right)$，求随机变量函数$Y = X^{\frac{1}{\beta}}$的数学期望及方差，其中$\alpha > 0, \beta > 0$都是常数。（参看习题2.30）

解： 解法一：依题意得，X的概率密度为

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

则随机变量函数$Y = X^{\frac{1}{\beta}}$的数学期望为

$$E(Y) = E(X^{\frac{1}{\beta}}) = \int_0^{+\infty} x^{1/\beta} \cdot \frac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha} dx.$$

做变量替换$t = \dfrac{x}{\alpha}$，则$x = \alpha t,\ dx = \alpha dt$，

$$E(Y) = \alpha^{1/\beta} \int_0^{+\infty} t^{1/\beta} e^{-t} dt = \alpha^{1/\beta} \Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right).$$

类似可得

$$E(Y^2) = E(X^{\frac{2}{\beta}}) = \int_0^{+\infty} x^{2/\beta} \cdot \frac{1}{\alpha} e^{-x/\alpha} dx = \alpha^{2/\beta} \int_0^{+\infty} t^{2/\beta} e^{-t} dt = \alpha^{2/\beta} \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right).$$

所以，Y的方差为

$$D(Y) = E(Y^2) - [E(Y)]^2 = \alpha^{2/\beta} \Gamma\left(\frac{2}{\beta} + 1\right) - \alpha^{2/\beta} \left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta} + 1\right)\right]^2.$$

解法二：由习题2.30的结论，Y的概率密度为

$$f_Y(y) = \begin{cases} \dfrac{\beta}{\alpha} y^{\beta-1} e^{-y^\beta/\alpha}, & y > 0, \\ 0, & y \leq 0. \end{cases}$$

Y的数学期望为

$$E(Y) = \int_0^{+\infty} y \cdot \frac{\beta}{\alpha} y^{\beta-1} e^{-y^\beta/\alpha} dy.$$

做变量替换$t=\dfrac{y^\beta}{\alpha}$，则$y=\alpha^{\frac{1}{\beta}}t^{\frac{1}{\beta}}$，$dy=\dfrac{1}{\beta}\alpha^{\frac{1}{\beta}}t^{\frac{1}{\beta}-1}dt$，

$$E(Y)=\alpha^{1/\beta}\int_0^{+\infty}t^{1/\beta}e^{-t}dt=\alpha^{1/\beta}\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right).$$

类似可得

$$E(Y^2)=\int_0^{+\infty}y^2\cdot\frac{\beta}{\alpha}y^{\beta-1}e^{-y^\beta/\alpha}dy=\alpha^{2/\beta}\int_0^{+\infty}t^{2/\beta}e^{-t}dt=\alpha^{2/\beta}\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right).$$

所以，Y的方差为

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\alpha^{2/\beta}\Gamma\left(\frac{2}{\beta}+1\right)-\alpha^{2/\beta}\left[\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\right]^2.$$

□

3.17 设随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立，并且服从同一分布，数学期望为μ，方差为σ^2，求这些随机变量的算术平均值$\overline{X}_n=\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^n X_i$的数学期望及方差。

解： 由已知条件，

$$E(X_i)=\mu,\quad D(X_i)=\sigma^2,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

则$\overline{X}_n$的数学期望为

$$E(\overline{X}_n)=E\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)=\frac{1}{n}E\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)=\frac{1}{n}\cdot n\mu=\mu.$$

又因为$X_1,X_2,\cdots,X_n$独立，所以$\overline{X}_n$的方差为

$$\begin{aligned}D(\overline{X}_n)&=D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n D(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\sigma=\frac{\sigma^2}{n}.\end{aligned}$$

□

3.18 N个人同乘一辆长途汽车，沿途有n个车站，每到一个车站时，如果没有人下车，则不停车。设每个人在任一站下车是等可能的，求停车次数的数学期望。

解： 设随机变量X_i表示这辆长途汽车在第i个车站的停车次数，则

$$X_i = \begin{cases} 0, & \text{如果在第}i\text{个车站无人下车}, \\ 1, & \text{如果在第}i\text{个车站有人下车}. \end{cases}$$

其中$i=1,2,\cdots,n$。按题意，这辆长途汽车上的N个乘客中每人在第i个车站下车的概率都等于$\frac{1}{n}$，不下车的概率都等于$\frac{n-1}{n}$。于是，N个乘客在第i个车站都不下车，从而这辆汽车在第i个车站不停车的概率等于$\left(\frac{n-1}{n}\right)^N$；$N$个乘客中至少有一个人下车，从而这辆汽车在第$i$个车站停车的概率都等于$1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^N$。所以，随机变量$X_i(i=1,2,\cdots,n)$的概率分布如下：

X_i	0	1
$p(x)$	$\left(\frac{n-1}{n}\right)^N$	$1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^N$

X_i的数学期望为

$$\begin{aligned} E(X_i) &= 0 \times \left(\frac{n-1}{n}\right)^N + 1 \times \left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^N\right] \\ &= 1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^N, \qquad i=1,2,\cdots,n. \end{aligned}$$

设随机变量Y表示这辆长途汽车在沿途各站停车的总次数，则有

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

所以，Y的数学期望为

$$E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} E(X_i) = n\left[1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^N\right].$$

□

3.22 计算均匀分布$U(a,b)$的k阶原点矩与k阶中心距。

解： 设随机变量$X\sim U(a,b)$，则有概率密度

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{otherwise.}\end{cases}$$

X的k阶原点矩为

$$\begin{aligned}\nu_k(X)&=\int_a^b x^k\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x^k dx\\&=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{k+1}(b^{k+1}-a^{k+1})=\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{(k+1)(b-a)}.\end{aligned}$$

因为$E(X)=\dfrac{a+b}{2}$，则X的k阶中心矩为

$$\begin{aligned}\mu_k(X)&=\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^k\cdot\frac{1}{b-a}dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b\left(x-\frac{a+b}{2}\right)^k dx\\&=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{k+1}\left[\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1}-\left(\frac{a-b}{2}\right)^{k+1}\right]\\&=\frac{[1-(-1)^{k+1}]}{(k+1)(b-a)}\left(\frac{b-a}{2}\right)^{k+1},\end{aligned}$$

所以

$$\mu_k(X)=\begin{cases}\dfrac{1}{k+1}\left(\dfrac{b-a}{2}\right)^k, & k\text{为偶数},\\ 0, & k\text{为奇数}.\end{cases}$$

□

3.23 求习题2.37中随机变量X与Y的数学期望、方差、协方差及相关系数。

解： 在习题2.37中已求得二维随机变量(X,Y)的联合概率分布

X \ Y	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0

X的边缘概率分布

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

及Y的边缘概率分布

Y	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

故X的数学期望为

$$E(X) = 0 \times \frac{8}{27} + 1 \times \frac{12}{27} + 2 \times \frac{6}{27} + 3 \times \frac{1}{27} = 1,$$

X^2的数学期望为

$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{8}{27} + 1^2 \times \frac{12}{27} + 2^2 \times \frac{6}{27} + 3^2 \times \frac{1}{27} = \frac{5}{3},$$

X的方差为

$$D(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{2}{3}.$$

同理可得，Y的数学期望与方差分别为

$$E(Y) = 1, \quad D(Y) = \frac{2}{3}.$$

又由

$$E(XY) = (1 \times 1) \times \frac{6}{27} + (1 \times 2) \times \frac{3}{27} + (2 \times 1) \times \frac{3}{27} = \frac{2}{3}$$

得X与Y的协方差为

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{2}{3}-1\times 1=-\frac{1}{3}.$$

X与Y的相关系数为

$$R(X,Y)=\frac{-\frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{2}{3}}\sqrt{\frac{2}{3}}}=-\frac{1}{2}.$$

□

3.24 设二维随机变量(X,Y)在区域$R: 0\le x\le 1, 0\le y\le x$上服从均匀分布，求：

(1) 数学期望$E(X)$及$E(Y)$；

(2) 方差$D(X)$及$D(Y)$；

(3) 协方差$\operatorname{cov}(X,Y)$及相关系数$R(X,Y)$。

解： 由题意，区域R的面积为$\frac{1}{2}$，所以(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2, & (x,y)\in R,\\ 0, & (x,y)\notin R.\end{cases}$$

(1) X的数学期望为

$$E(X)=\iint\limits_R x\cdot 2dxdy=2\int_0^1 xdx\int_0^x dy=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}.$$

Y的数学期望为

$$E(Y)=\iint\limits_R y\cdot 2dxdy=\int_0^1 dx\int_0^x 2ydy=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}.$$

(2) 由

$$E(X^2)=\iint\limits_R x^2\cdot 2dxdy=2\int_0^1 x^2dx\int_0^x dy=2\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{2}$$

得X的方差为

$$D(X)=E(X^2)-[E(X)]^2=\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

同样，由

$$E(Y^2)=\iint\limits_R y^2\cdot 2dxdy=2\int_0^1 dx\int_0^x y^2dy=\frac{2}{3}\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{6},$$

的Y的方差为

$$D(Y)=E(Y^2)-[E(Y)]^2=\frac{1}{6}-\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{18}.$$

(3) XY的数学期望为

$$E(XY)=\iint\limits_R xy\cdot 2dxdy=\int_0^1 xdx\int_0^x 2ydy=\int_0^1 x^3dx=\frac{1}{4}.$$

所以，X与Y的协方差为

$$\operatorname{cov}(X,Y)=E(XY)-E(X)\cdot E(Y)=\frac{1}{4}-\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{36}.$$

X与Y的相关系数为

$$R(X,Y)=\frac{\frac{1}{36}}{\sqrt{\frac{1}{18}}\sqrt{\frac{1}{18}}}=\frac{1}{2}.$$

□

3.25 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi(x^2+y^2+1)^2}.$$

求：

(1) 数学期望$E(X)$及$E(Y)$；

(2) 方差$D(X)$及$D(Y)$；

(3) 协方差$\operatorname{cov}(X,Y)$。

解：

(1) X的数学期望为

$$E(X)=\iint_{\mathbb{R}^2}x\cdot\frac{1}{\pi(x^2+y^2+1)^2}dxdy.$$

做极坐标变换$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，得

$$E(X)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta\int_0^{+\infty}\frac{r^2}{(r^2+1)^2}dr=0.$$

同理可得$E(Y)=0$。

(2) 对反常二重积分

$$\iint_{\mathbb{R}^2}x^2\cdot\frac{1}{\pi(x^2+y^2+1)^2}dxdy$$

做极坐标变换$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$，将该式化为

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta\int_0^{+\infty}\frac{r^3}{(r^2+1)^2}dr.$$

因为反常积分$\int_0^{+\infty}\frac{r^3}{(r^2+1)^2}dr$不收敛，所以$D(X)$不存在。同理可知，$Y$的方差$D(Y)$也不存在。

(3) 由于积分

$$\iint_{\mathbb{R}^2}\frac{|xy|}{\pi(x^2+y^2+1)^2}dxdy=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}|\sin\theta\cos\theta|d\theta\int_0^{+\infty}\frac{r^3}{(r^2+1)^2}dr$$

不收敛，从而反常二重积分

$$\iint_{\mathbb{R}^2}xy\cdot\frac{1}{\pi(x^2+y^2+1)^2}dxdy$$

不绝对收敛，所以X与Y的协方差$\operatorname{cov}(X,Y)$不存在。

□

3.29 为了确定事件A的概率，进行10000次重复独立试验。利用切比雪夫不等式估计：用事件A在10000次试验中发生的概率$f_n(A)$作为事件A的概率的近似值时，误差小于0.01的概率。

解： 设随机变量X表示事件A在$n=10000$次重复独立试验中发生的次数，则$X\sim B(n,p)$，并且有

$$E(X)=np,\quad D(X)=np(1-p).$$

于是，按切比雪夫不等式得

$$\begin{aligned}P\{|f_n(A)-p|<0.01\}&=P\left\{\left|\frac{X}{n}-p\right|<0.01\right\}=P\{|X-np|<0.01n\}\\&\geq 1-\frac{np(1-p)}{(0.01n)^2}=1-\frac{p(1-p)}{0.0001n}.\end{aligned}$$

又$n=10000,\ p(1-p)\leq 0.25$，所以有

$$P\{|f_n(A)-p|<0.01\}\geq 1-p(1-p)\geq 0.75.$$

□

3.31 证明马尔可夫(Markov)定理：如果不独立的随机变量$X_1,X_2,\cdots,X_n,\cdots$满足条件

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=0,$$

则对任何正数ε，恒有

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

证明： 由切比雪夫不等式，对任意的正数ε，恒有

$$P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right).$$

注意到$D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right)=\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$，得

$$1\geq P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}\geq 1-\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^n X_i\right).$$

由于

$$\lim_{n\to\infty}\left[1-\frac{1}{\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{n^2}D\left(\sum_{i=1}^{n}X_i\right)\right]=1,$$

由强迫收敛性知

$$\lim_{n\to\infty}P\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}E(X_i)\right|<\varepsilon\right\}=1.$$

□

作业情况：

1 本次作业大家完成得挺好，有部分同学未交作业，希望下次补上；

2 部分同学在3.29中计算到$1-p(1-p)$就没继续，其中$1-p(1-p)=(p-\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}\geq 0.75$；

3 其余大部分错误为计算错误，主要出现在3.1、3.2、3.7；还有部分同学没做3.25、3.31。