数学物理方法总结

第一章 复变函数

复数的**代数式**:z=x+iy

复数的**三角式**和**指数式**: $z=\rho(\cos\varphi+\sin\varphi)$ 和 $z=\rho e^{i\varphi}$

欧拉公式:$\begin{cases}\sin z=\dfrac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})\\ \cos z=\dfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})\end{cases}$

柯西-黎曼方程(或称为柯西-黎曼条件):$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}\\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial v}{\partial y}\end{cases}$ (其中 f(z)=u+iv)

函数 f(z)=u+iv 在点 z_0 及其领域上处处可导,则称 f(z)在 z_0 点解析.在区域 B 上每一点都解析,则称 f(z)是在区域 B 上的解析函数.

解析函数的性质:**1.若函数 f(z)=u+iv 在区域 B 上解析,则** $u(x,y)=C_1, v(x,y)=C_2$

(C_1, C_2 为常数)是 B 上的两组正交曲线族.

2.若函数在区域 B 上解析,则 u,v 均为 B 上的调和函数,即

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

例题: 已知某解析函数 f(z)的实部 $u(x,y)=x^2-y^2$,求虚部和这个解析函数.

解答: 由于 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$=2;$\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}$=-2;则 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$

曲线积分法 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$=2x;$\dfrac{\partial u}{\partial y}$=-2y.根据 C-R 条件有:$\dfrac{\partial v}{\partial x}$=2y;$\dfrac{\partial v}{\partial y}$=2x.

于是 $dv=2ydx+2xdy$;

$$v=\int_{(x,y)}(2ydx+2xdy)+C=\int_{(0,0)}^{(x,0)}(2ydx+2xdy)+\int_{(x,0)}^{(x,y)}(2ydx+2xdy)+C$$

$$=\int_{(x,0)}^{(x,y)}2xdy+C=2xy+C$$

凑全微分显式法 由上式可知 $dv = 2ydx + 2xdy$

则易得 $dv = d(2xy)$

则显然 $v = 2xy + C$

不定积分法 上面已有 $\dfrac{\partial v}{\partial x}$=2y; $\dfrac{\partial v}{\partial y}$=2x

则第一式对 y 积分,x 视为参数,有 $v = \int 2xy + \varphi(x) = 2xy + \varphi(x)$.

上式对 x 求导有 $\dfrac{\partial v}{\partial x} = 2y + \varphi'(x)$,而由 C-R 条件可知 $\varphi'(x) = 0$,

从而 $\varphi(x) = C$.故 v=2xy+C.

$$f(z) = x^2 - y^2 + i(2xy + C) = z^2 + iC$$

第二章 复变函数的积分

单连通区域柯西定理 如果函数 f(z)在闭单连通区域 $\overline{B}$ 上解析,则沿 $\overline{B}$ 上任意一分段光滑闭合闭合曲线 l(也可以是 $\overline{B}$ 的边界),有 $\oint_l f(z)dz = 0$.

复连通区域柯西定理 如果 f(z)是闭复连通区域上的单值解析函数,则

$\oint_l f(z)dz + \sum_{i=1}^{n} \oint_{l_i} f(z)dz = 0$.式中 l 为区域外边界线,诸 l_i 为区域内边界线,积分均沿边界线的正方向进行.即

$$\oint_l f(z)dz = \sum_{i=1}^{n} \oint_{l_i} f(z)dz.$$

柯西公式 $f(\alpha) = \dfrac{1}{2\pi i} \oint_l \dfrac{f(z)}{z-\alpha} dz$

n 次求导后的柯西公式 $f^{(n)}(z) = \dfrac{n!}{2\pi i} \oint_l \dfrac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{n+1}} d\zeta$

第三章 幂级数展开

幂级数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \dots\dots + a_k(z-z_0)^k + \dots\dots$$

其中 $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots$ 都是复常数.

比值判别法(达朗贝尔判别法)

1.若有

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k}=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_{k+1}}{a_k}\right||z-z_0|<1$$

则 $|a_0|+|a_1||z-z_0|+|a_2||z-z_0|^2+\ldots\ldots+|a_k||z-z_0|^k+\ldots\ldots$ 收敛,

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots\ldots a_k(z-z_0)^k+\ldots\ldots$$ 绝对收敛.

若极限 $\lim\limits_{k\to\infty}|a_k/a_{k+1}|$ 存在,则可引入记号 R, $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$,于是,若 $|z-z_0|<R$,则

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots\ldots a_k(z-z_0)^k+\ldots\ldots$$ 绝对收敛.

2.若 $|z-z_0|>R$,则后项与前项的模之比的极限

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}||z-z_0|^{k+1}}{|a_k||z-z_0|^k}>\lim_{k\to\infty}\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}R=$$,即说明

$$\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k=a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots a_k(z-z_0)^k+\ldots$$ 发散.

例题: 求幂级数 $1-z^2+z^4-z^6+\ldots\ldots$ 的收敛圆,z 为复变数.

解答: 由题意可得

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|=1$$

故 $1-z^2+z^4-z^6+\ldots\ldots=\dfrac{1}{1+z^2}\quad(|z|<1).$

泰勒级数展开 设 f(z)在以 z_0 为圆心的圆 C_R 内解析,则对圆内的任意 z 点,f(z)可展为

幂级数, $f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$,其中

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_{C_{R1}}\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta=\frac{f^{(n)}(z_0)}{k!},$$

C_{R_1} 为圆 C_R 内包含 z 且与 C_R 同心的圆.

例题: 在 $z_0=0$ 的领域上将 $f(z)=e^z$ 展开

解答: 函数 $f(z)=e^z$ 的各阶导数 $f^{(n)}(z)=e^z$,而 $f^{(k)}(z_0)=f^{(k)}(0)=1$.

则 e^z 在 $z_0=0$ 的领域上的泰勒展开

$$e^z=1+\frac{z}{1!}+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\ldots\ldots\frac{z^k}{k!}+\ldots\ldots=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^k}{k!}.$$

双边幂级数 $\ldots\ldots+a_{-2}(z-z_0)^{-2}+a_{-1}(z-z_0)^{-1}+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\ldots\ldots$

洛朗级数展开 设 f(z)在环形区域 $R_2<|z-z_0|<R_1$ 的内部单值解析,则对环域上的任一点 z,f(z)可展为幂级数 $f(z)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}a_k(z-z_0)^k$.其中

$$a_k=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{f(\zeta)}{(\zeta-z_0)^{k+1}}d\zeta,$$

积分路径 C 为位于环域内按逆时针方向绕内圆一周的任一闭合曲线.

例题 1: 在 $1<|z|<\infty$ 的环域上将 $f(z)=1/(z^2-1)$ 展为洛朗级数.

解答: $\dfrac{1}{z^2-1}=\dfrac{1}{z^2}\dfrac{1}{1-\frac{1}{z^2}}=\dfrac{1}{z^2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z^2}\right)^k=\dfrac{1}{z^2}+\dfrac{1}{z^4}+\dfrac{1}{z^6}+\ldots\ldots$

例题 2: 在 $z_0=1$ 的领域上将 $f(z)=1/(z^2-1)$ 展为洛朗级数.

解答: 由题意得 $f(z)=\dfrac{1}{z^2-1}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{z+1})$

则有 z-1 的-1 次项,而

$$\frac{1}{z+1}=\frac{1}{z-1+2}=\frac{1}{2}\frac{1}{1+\frac{z-1}{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\frac{z-1}{2})^k\quad(|z-1|<2)$$

故 $f(z)=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{z-1}-\dfrac{1}{4}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(\dfrac{z-1}{2})^k$.

第四章 留数定理

留数定理 设函数 f(z)在回路 l 所围区域 B 上除有限个孤立奇点 $b_1,b_2,\ldots\ldots,b_n$ 解析,

在闭区域 $\bar{B}$ 上除 $b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n$ 外连续,则

$$\oint_l f(z)\,dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} \operatorname{Res} f(b_j) = 2\pi i\, a_{-1}.$$

其中, $a_{-1} = \operatorname{Res} f(b_j) = \lim\limits_{z \to b_j} \dfrac{1}{(m-1)!}\left\{\dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-b_j)^m f(z)]\right\}$.

推论 1: 单极点的留数为 $\operatorname{Res} f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0}[(z-z_0) f(z)]$.

推论 2: 若 f(z)可以表示为 P(z)/Q(z)的特殊形式,其中 P(z)和 Q(z)都在 z_0 点解析, z_0 是 Q(z)的一阶零点($Q(z_0)=0$). $P(z_0) \neq 0$,则

$$\operatorname{Res} f(z_0) = \lim_{z \to z_0}(z-z_0)\frac{P(z)}{Q(z)} = \lim_{z \to z_0}\frac{P(z)+(z-z_0)P'(z)}{Q'(z)} = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}.$$

上式最后一步应用了罗毕达法则.

留数定理的应用

类型一 $\int_0^{2\pi} R(\cos x, \sin x)dx$.作自变量代换 $z = e^{ix}$.则式子变为

$$I = \oint_{|z|=1} R\left(\frac{z+z^{-1}}{2}, \frac{z-z^{-1}}{2}\right)\frac{dz}{iz}.$$

例题: 计算 $I = \int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{2+\cos x}$.

解答: $I = \int_0^{2\pi} \dfrac{dx}{2+\cos x} = -i\oint_{|z|=1} \dfrac{dz}{z(2+\dfrac{z+z^{-1}}{2})} = -2i\oint_{|z|=1} \dfrac{dz}{z^2+4z+1}$,

Z 的单极点为 $z_{1,2} = \dfrac{-4+\sqrt{16-4}}{2} = -2 \pm \sqrt{3}$.

则 $\operatorname{Res}(-2+\sqrt{3}) = 2\pi i \lim\limits_{z \to -2+\sqrt{3}}(z+2-\sqrt{3})\dfrac{1}{z^2+4z+1} = \dfrac{\pi i}{\sqrt{3}}$,

由于 $-2-\sqrt{3}$ 不在圆 $|z|=1$ 内.故 $I = \dfrac{2\pi}{\sqrt{3}}$.

类型二 $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.积分区间是 $(-\infty, \infty)$;复变函数 f(z)在**实轴上没有奇点**,在**上半平面**除了**有限个奇点外是解析的**;**当 z 在上半平面及实轴上 $\to \infty$ 时,zf(z)一致地 $\to 0$.**则式子可以变为

$$I=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 2\pi i\ \{\text{f(z)在上半平面所有奇点的留数之和}\}.$$

例题：计算 $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}$.

解答：$I=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dz}{1+z^2}$ 的单极点为 $z_{1,2}=\pm i$.

$$\operatorname{Re}sf(i)=2\pi i\lim_{z\to i}(z-i)\frac{1}{z^2+1}=\pi\text{ ,故}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{1+x^2}=\pi .$$

类型三 $\int_0^{\infty}F(x)\cos mxdx$, $\int_0^{\infty}G(x)\sin mxdx$,积分区间是 $[0,+\infty]$;偶函数 F(x)和奇函数 G(x)在**实轴上没有奇点**,在**上半平面除了有限个奇点外是解析的;当 z 在上半平面或实轴上 $\to\infty$,F(z)及 G(z)一致地 $\to 0$.**则式子可以变为

$$\int_0^{\infty}F(x)\cos mx\,dx=\pi i\{F(x)e^{imx}\text{在上半平面所有奇点的留数之和}\};$$

$$\int_0^{\infty}G(x)\sin mx\,dx=\pi\{G(x)e^{imx}\text{在上半平面所有奇点的留数之和}\}.$$

若类型二,类型三的实轴上有有限个奇点,则有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)dx=2\pi i\sum_{\text{在上平面}}\operatorname{Re}sf(z)+\pi i\sum_{\text{实轴上}}\operatorname{Re}sf(z).$$

其中,在类型三中 f(x)应理解为 $F(x)e^{imz}$ 或 $G(x)e^{imx}$.

第五章 Fourier 变换

傅里叶级数 周期为 2l 的函数 f(x)可以展开为级数

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right).$$

$$\text{其中,}\begin{cases}a_k=\dfrac{1}{\delta_k l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(\xi)\cos\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\\ b_k=\dfrac{1}{l}\displaystyle\int_{-l}^{l}f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\end{cases},\quad \delta_k=\begin{cases}2(k=0)\\1(k\neq 0)\end{cases}.$$

注：积分上下限只要满足 上-下=2l 即可.

复数形式的傅里叶级数 $f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}c_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}$

$$\text{其中}\quad c_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(\xi)[e^{i\frac{k\pi x}{l}}]^{*}d\xi .$$

傅里叶积分 $f(x)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega xd\omega+\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega xd\omega$

傅里叶变换式 $\{\begin{matrix} A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\cos\omega\xi d\xi \\ B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\sin\omega\xi d\xi \end{matrix}$

复数形式的傅里叶积分 $\{\begin{matrix} f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x}d\omega \\ F(\omega)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)[e^{i\omega x}]^* dx \end{matrix}$

傅里叶变换的性质

(1) 导数定理 F[f'(x)]=iwF(w)

(2) 积分定理 F[$\int^{(x)} f(\xi)d\xi$]=$\frac{1}{iw}F(w)$

(3) 相似性定理 F[f(ax)]=$\frac{1}{a}F(\frac{w}{a})$

(4) 延迟定理 F[$f(x-x_0)$]=$e^{-iwx_0}F(w)$

(5) 位移定理 F[$e^{iw_0x}f(x)$]=$f(w-w_0)$

(6) 卷积定理 若 F[$f_1(x)$]=$F_1(w)$,F[$f_2(x)$]=$F_2(w)$,则

F[$f_1(x)*f_2(x)$]=$2\pi F_1(w)F_2(w)$.

其中 $f_1(x)*f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$ 称为 $f_1(x)$ 和 $f_2(x)$ 的卷积.

δ 函数

$$\delta(x)=\{\begin{matrix} 0(x\neq 0) \\ \infty(x=0) \end{matrix}.$$

$$\int_a^b \delta(x)dx=\{\begin{matrix} 0(a,b\text{都}<0,\text{或都}>0) \\ 1(a<0<b) \end{matrix}.$$

δ 函数的一些性质

1. $\delta(x)$是偶函数. $\begin{matrix} \delta(-x)=\delta(x) \\ \delta'(-x)=-\delta'(x) \end{matrix}$

2. $H(x)=\int_{-\infty}^{x}\delta(t)dt=\{\begin{matrix} 0(x<0) \\ 1(x>0) \end{matrix}$.

3. $\int_{-\infty}^{\infty} f(\tau)\delta(\tau-t_0)d\tau=f(t_0)$.

第六章 Laplace 变换

拉普拉斯变换 $\overline{f}(p)=\int_0^{\infty} f(t)e^{-pt}dt$

拉普拉斯变换的一些性质

(1) 线性定理 若 $f_1(t)\square\ \overline{f_1}(p)$, $f_2(t)\square\ \overline{f_2}(p)$,则

$$c_1 f_1(t)+c_2 f_2(t)\square\ c_1\overline{f_1}(p)+c_2\overline{f_2}(p).$$

(2) 导数定理 $f'(t)\square\ p\overline{f}(p)-f(0)$.

(3) 积分定理 $\int_0^t \varphi(\tau)d\tau\square\ \dfrac{1}{p}\mathscr{L}[\varphi(p)]$.

(4) 相似性定理 $f(at)\square\ \dfrac{1}{p}\overline{f}(\dfrac{p}{a})$.

(5) 位移定理 $e^{-\lambda t}f(t)\square\ \overline{f}(p+\lambda)$.

(6) 延迟定理 $f(t-t_0)\square\ e^{-pt_0}\overline{f}(p)$.

(7) 卷积定理 若 $f_1(t)\square\ \overline{f_1}(p)$, $f_2(t)\square\ \overline{f_2}(p)$,则

$$f_1(t)*f_2(t)\square\ \overline{f_1}(p)\overline{f_2}(p),$$

其中 $f_1(t)*f_2(t)=\int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$ 称为 $f_1(t)$ 和 $f_2(t)$ 的卷积.

第七章 数学物理定解问题

(1) 均匀弦的微小振动,均匀杆的纵振动,传输线方程,均匀薄膜的微小横振动,流体力学与声学方程,电磁波方程的形式为 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ **或** $u_{tt}-a^2\Delta_2 u=0$ **或** $u_{tt}-a^2\Delta_3 u=0$.

(2) 扩散方程,热传导方程的形式为 $u_t-a^2u_{xx}=0$ **或** $u_t-a^2\Delta u=0$.

(3) 稳定浓度分布,稳定温度分布,静电场,稳定电流场方程的形式为(拉普拉斯方程) $\Delta u=0$.

(4) 以上方程中 u_x **意为** $\dfrac{\partial u}{\partial x}$, u_{xx} **意为** $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$**.若以上各方程均为有源,则方程为 各方程=f(x,y,z,t).**

定解条件

初始条件 初始"位移" $u(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\varphi(x,y,z)$,

初始"速度" $u_t(x,y,z,t)\big|_{t=0}=\psi(x,y,z)$.

边界条件 第一类边界条件 $u(\vec{r},t)\big|_{\Sigma}=f(M,t)$

第二类边界条件 $\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\Sigma}=f(M,t)$

第三类边界条件 $\left.(u+H\frac{\partial u}{\partial n})\right|_{\Sigma}=f(M,t)$

衔接条件 $u(x_0-0,t)=u(x_0+0,t)$

$Tu_x(x_0+0,t)-Tu_x(x_0-0,t)=-F(t)$ **.(T 为张力)**

达朗贝尔公式 定界问题

达朗贝尔公式 $u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$ **.**

其中 $u\big|_{t=0}=\varphi(x), u_t\big|_{t=0}=\psi(x)$. $(-\infty<x<\infty)$

第八章 分离变数法

泛定方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$ (若该方程可以使用分离变量法,则可以化成

$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda$).

$X''(x)+\lambda X(x)=0$ 在不同的**边界条件**下解不同.

边界条件

(1) $\begin{cases} X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases}$, X(x)的解为 $\begin{cases} \lambda=(\frac{n\pi}{l})^2 \\ X_n(x)=C_n\sin\frac{n\pi}{l}x \end{cases}$ 其中 n=1,2,3……

(2) $\begin{cases} X'(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases}$, X(x)的解为 $\begin{cases} \lambda=[\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l}]^2 \\ X_n(x)=C_n\cos\frac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l}x \end{cases}$ 其中 k=0,1,2……

(3) $\begin{cases} X(0)=0 \\ X'(l)=0 \end{cases}$, X(x)的解为 $\begin{cases} \lambda=[\dfrac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l}]^2 \\ X_n(x)=C_n\sin\dfrac{(k+\frac{1}{2})\pi}{l}x \end{cases}$ 其中 k=0,1,2……

(4) $\begin{cases} X'(0)=0 \\ X'(l)=0 \end{cases}$, X(x)的解为 $\begin{cases} \lambda=(\dfrac{n\pi}{l})^2 \\ X_n(x)=C_n\cos\dfrac{n\pi}{l}x \end{cases}$ 其中 n=0,1,2……

T(t)的方程在有 n 且 n=0 时的解为 $T(t)=At+B$;

在 $n\neq 0$ 时的解为

$T(t)=A\sin\dfrac{n\pi a}{l}t+B\cos\dfrac{n\pi a}{l}t$;

在有 k 的情况下为

$T(t)=A\sin\dfrac{(2k+1)\pi a}{2l}t+B\cos\dfrac{(2k+1)\pi a}{2l}t$.

初始条件 将 u(x,t)=T(t)X(x)带入初始条件,确定 u(x,t)中的常数项.

欧拉型常微分方程 $\rho^2\dfrac{d^2R}{d\rho^2}+\rho\dfrac{dR}{d\rho}-m^2R=0$. 解法为做代换 $\rho=e^t$.

第九章 二阶常微分方程级数解法 本征值问题

拉普拉斯方程 $\Delta u=0$

(1) 球坐标系下 $\dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}(r^2\dfrac{\partial u}{\partial r})+\dfrac{1}{r^2\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial u}{\partial\theta})+\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0$.

分解为 $r^2\dfrac{\partial^2R}{\partial r^2}+2r\dfrac{\partial R}{\partial r}-l(l+1)R=$ 其解为 $R(r)=Cr^l+D\dfrac{1}{r^{l+1}}$.

和 $\dfrac{1}{\sin\theta}\dfrac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\dfrac{\partial Y}{\partial\theta})+\dfrac{1}{\sin^2\theta}\dfrac{\partial^2Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)=0$ (球方程, $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$)

球方程又可以分离为 $\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0$ 其中有 $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$,其方程解

为 $\begin{cases} \lambda=m^2 \\ \Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi \end{cases}$ 其中 m=0,1,2……

和 $(1-x^2)\dfrac{d^2\Theta}{dx^2}-2x\dfrac{d\Theta}{dx}+[l(l+1)-\dfrac{m^2}{1-x^2}]\Theta=0$ (连带勒让德方程).

(2) **柱坐标系下** $\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho})+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$.分解为

$\Phi''(\varphi)+\lambda\Phi(\varphi)=0$ 其中有 $\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$,其方程解为

$\{\begin{matrix}\lambda=m^2\\ \Phi(\varphi)=A\cos m\varphi+B\sin m\varphi\end{matrix}$ 其中 m=0,1,2……

和 $Z''-\mu Z=0$ 和 $\frac{d^2R}{d\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{dR}{d\rho}+(\mu-\frac{m^2}{\rho^2})R=0$.

当 $\mu=0$ 时,Z=C+Dz, $R(\rho)=\{\begin{matrix}E+F\ln\rho(m=0)\\ E\rho^m+F/\rho^m(m=1,2,3......)\end{matrix}$;

当 $\mu>0$ 时, $Z(z)=Ce^{\sqrt{\mu}z}+De^{-\sqrt{\mu}z}$,方程 R 转换为

$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}+(x^2-m^2)R=0$ ($x=\sqrt{\mu}\rho$,m 阶贝塞尔方程).

当 $\mu<0$ 时, $Z(z)=C\cos\sqrt{-\mu}z+D\sin\sqrt{-\mu}z$,方程 R 转换为

$x^2\frac{d^2R}{dx^2}+x\frac{dR}{dx}-(x^2+m^2)R=0$ ($x=\sqrt{-\mu}\rho$,m 阶虚宗量贝塞尔方程).

亥姆霍兹方程 $\Delta v+k^2v=0$.

在 $x_0=0$ **的领域上 l 阶勒让德方程的解为** $y(x)=a_0y_0+a_1y_1$ **其中**

$$y_0=1+\frac{(-l)(l+1)}{2!}x^2+\frac{(2-l)(-l)(l+1)(l+3)}{4!}x^4+...$$
$$+\frac{(2k-2-l)(2k-4-l)...(-l)(l+1)(l+3)...(l+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}+......$$

$$y_1=x+\frac{(1-l)(l+2)}{3!}x^3+\frac{(3-l)(1-l)(l+2)(l+4)}{5!}x^5+...$$
$$+\frac{(2k-1-l)(2k-3-l)...(1-l)(l+2)(l+4)...(l+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+......$$

第十章 球函数

高次项 x^l 的系数 $a_l=\frac{(2l)!}{2^l(l!)^2}$ (在乘以适当的常数之后),用递推公式改写后为

$a_k = \dfrac{(k+2)(k+1)}{(k-l)(k+l+1)} a_{k+2}$,则 $a_{l-2n} = (-1)^2 \dfrac{(2l-2n)!}{n!2^l(l-n)!(l-2n)!}$.则勒让德多项式

为 $P_l(x) = \sum\limits_{k=0}^{[l/2]} (-1)^k \dfrac{(2l-2k)!}{k!2^l(l-k)!(l-2k)!} x^{l-2k}$.$[l/2]=\{\begin{matrix} l/2(l\text{为偶数}) \\ (l-1)/2(l\text{为奇数}) \end{matrix}$.

$P_o(x) = 1$

$P_1(x) = x = \cos\theta$

$P_2(x) = \frac{1}{2}(3x^2-1) = \frac{1}{4}(3\cos 2\theta + 1)$

$P_3(x) = \frac{1}{2}(5x^3-3x) = \frac{1}{8}(5\cos 3\theta + 3\cos\theta)$

$P_4(x) = \frac{1}{8}(35x^4-30x^2+3) = \frac{1}{64}(35\cos 4\theta + 20\cos 2\theta + 9)$ ……

勒让德多项式是正交的

例题 1: 以勒让德多项式为基,在区间[-1,1]上把 f(x)= $2x^3+3x+4$ 展开为广义傅里叶级数.

解答: $2x^3+3x+4 = f_0P_0(x) + f_1P_1(x) + f_2P_2(x) + f_3P_3(x)$

$$= f_0 + f_1 \cdot x + f_2 \cdot \frac{1}{2}(3x^2-1) + f_3 \cdot \frac{1}{2}(5x^3-3x)$$

则有 $f_0 - \frac{1}{2}f_2 = 4$, $f_1 - \frac{3}{2}f_3 = 3$, $\frac{3}{2}f_2 = 0$, $\frac{5}{2}f_3 = 2$.

故有 $2x^3+3x+4 = 4P_0(x) + \frac{21}{5}P_1(x) + \frac{4}{5}P_3(x)$.

例题 2: 在半径 $r=r_0$ 的球的内部求解拉普拉斯方程使满足边界条件 $u|_{r=r_0} = \cos^2\theta$.

解答: 边界条件与 φ 无关,故选择球坐标,则有

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty}\left(A_l r^l + \frac{B_l}{r^{l+1}}\right)P_l(\cos\theta).$$

又有自然边界条件 $u|_{r=0}$ 有限 故 $B_l = 0$.则有

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta).$$

而 $u|_{r=r_0} = \cos^2\theta = \sum\limits_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) = x^2 = \frac{1}{3}P_0(x) + \frac{2}{3}P_2(x)$,则

$$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3}\frac{1}{r_0^2} r^2 P_2(\cos\theta).$$