16.1 二重积分的概念

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 设 $D=[0,1]\times[0,1]$, 证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & (x,y)\text{为}D\text{内有理点 (即 }x,y\text{ 皆为有理数)},\\ 0, & (x,y)\text{为}D\text{内非有理点}\end{cases}$$

在 D 上不可积.

证明. 首先, 根据上面给出的可积性准则, 知道一个有界函数在 D 上不可积的定义是: 存在正数 ε_0, 使得对 D 的任意分割 T, 均有 $S(T)-s(T)\geq\varepsilon_0$.

于是, 对本题所给的函数 $f(x,y)$, 可取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$, 对 D 的任意分割 $T=\{\sigma_1$ 在 σ_2 在 $\cdots$ 在 $\sigma_n\}$, 由有理数的稠密性, 知 $M_i=1, m_i=0$, 所以

$$\begin{aligned}S(T)-s(T) &= \sum_{i=1}^{n}(1-0)\Delta\sigma_i=\sum_{i=1}^{n}\Delta\sigma_i\\ &= [0,1]\times[0,1]\text{的面积}=1>\varepsilon_0,\end{aligned}$$

所以 $f(x,y)$ 在 D 上不可积. ∎

例 2 设 $f(x,y)$ 是有界闭区域 D 上的非负连续函数, 且在 D 上不恒为 0, 则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0.$$

证明. 因为 $f(x,y)$ 在 D 上非负且不恒为 0, 所以存在 $P_0(x_0,y_0)\in D^\circ$ 使得 $f(x_0,y_0)>0$. 由连续函数的保号性, 存在正数 Δ_0, 使得 $b_{\Delta_0}(P_0)\subset D^\circ$ 且

$$f(x,y)\geq\frac{f(x_0,y_0)}{2},\ (x,y)\in B_{\Delta_0}(P_0).$$

再由 $f(x,y)$ 非负, 有

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq\iint\limits_{B_{\Delta_0}(x_0,y_0)}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\geq\frac{f(x_0,y_0)}{2}\cdot\pi\Delta_0^2>0.$$

∎

例 3 证明: 若 $f(x,y)$, 有界闭区域 D 上连续, $g(x,y)$ 在 D 上可积且不变号, 则存在一点 $(\xi,\eta)\in D$, 使得

$$\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=f(\xi,\eta)\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y. \tag{1}$$

证明. 因为 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 所以 $f(x,y)$ 在 D 上有最大值 M, 最小值 m, 于是

$$m \le f(x,y) \le M, \quad (x,y) \in D$$

由题设 $g(x,y)$ 在 D 上可积且不变号, 不妨设 $g(x,y) \ge 0, (x,y) \in D$. 于是有

$$mg(x,y) \le f(x,y)g(x,y) \le Mg(x,y).$$

由性质 **??** 和性质 **??** , 得到

$$m \iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le M \iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

如果 $\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$, 则等式 (1) 对任意的 $(\xi,\eta) \in D$ 成立. 下设 $\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0$, 那么

$$m \le \frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y} \le M.$$

因此, 由连续函数介值定理知, 存在 $(\xi,\eta) \in D$, 使得

$$f(\xi,\eta) = \frac{\iint\limits_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\iint\limits_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y}.$$

即

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi,\eta) \iint_D g(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

∎

思考题

1. 在二重积分的定义中在 d_i 表示分割 t 的小区域 σ_i 的直径, 定义 $||T|| = \max\limits_{1\le i\le n} d_i$. 问: $||T|| \to 0$ 是否与 "$\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i\} \to 0$" 等价?

解: 不等价 □

2. 设 $|f(x,y)|$ 在 D 上可积, $f(x,y)$ 是否可积?

解: 不一定可积. $f(x,y)$ 不可积的例子: 设 $D = [0,1] \times [0,1]$, 函数

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y)\text{为}D\text{内有理点 (即 } x,y \text{ 皆为有理数)}, \\ -1, & (x,y)\text{为}D\text{内非有理点} \end{cases}$$

$|f(x,y)| = 1$ 在 D 上可积, 但 $f(x,y)$ 在 D 上不可积. □

习题

1. 证明: 若函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上可积, 则 $f(x,y)$ 在 D 上有界.

证明. (反证法) 假设 f 在有界闭区域 D 上可积, 但 $f(x,y)$ 在 D 上无界, 则对 D 的任意一个分割 T 以及 $M>0$, 必存在分割下的某个小区域 δ_i, 使得 f 在 σ_i 上无界, 当 $j\neq i$ 时, 任取 $(\xi_i,\zeta_j)\in\sigma_j$, 令 $G=\left|\sum\limits_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n} f(\xi_j,\zeta_j)\triangle\sigma_j\right|, I=\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 这时, G 是个确定的值, 而由于 f 在 σ_i 上无界, 故 $\exists(\xi_i,\zeta_i)\in\sigma_i$, 使

$$|f(\xi_i,\zeta_i)|>\frac{|I|+1+G}{\triangle\sigma_i}=\frac{M+G}{\triangle\sigma_i}(\text{设}M=|I|+1)$$

从而

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} f(\xi_j,\zeta_j)\triangle\sigma_i\right| &= \left|f(\xi_i,\zeta_i)\triangle\sigma_i+\sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n} f(\xi_j,\zeta_j)\right| \\
&\geqslant |f(\xi_i,\zeta_i)\triangle\sigma_i|-\left|\sum_{\substack{j\neq i\\ j=1}}^{n} f(\xi_j,\zeta_j)\right| \\
&> \frac{M+G}{\triangle\sigma_i}\cdot\sigma_i-G=M.
\end{aligned}$$

由此可见, 对于无论多么小的细度 $\|T\|$, 按上述方法选取 $(\xi_i,\zeta_j)\in\sigma_j, j=1,2,\cdots,n$ 时, 总能使积分和的绝对值大于预先给定的正数, 这与 $f(x,y)$ 在 D 上可积矛盾, 所以则 $f(x,y)$ 在 D 上有界. ∎

2. 证明定理 1.

> **定理 1** *有界函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积的充要条件是: 对任给的正数 $\varepsilon>0$, 存在 D 的某个分割 T, 使得*
>
> $$S(T)-s(T)<\varepsilon. \tag{2}$$

证明. 由定理 16.1.4, 有界函数 $f(x,y)$ 在 D 上可积的充要条件是

$$\lim_{\|T\|\to 0} S(T)=\lim_{\|T\|\to 0} s(T),$$

$\Leftrightarrow$

$$\lim_{\|T\|\to 0}|S(T)-s(T)|=0,$$

则由极限的定义

$$\lim_{\|T\|\to 0}|S(T)-s(T)|=0\Leftrightarrow\forall\epsilon>0,\exists\delta>0,\text{存在 } D \text{ 的一个分割 } T,\text{ 当 } \|T\|<\delta \text{ 时, 有}|S(T)-s(T)|<\epsilon$$

结论得证. ∎

3. 设 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 并且对 D 内任一子闭区域 D' 有 $\iint D'f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$, 试证明 $f(x,y)\equiv 0,((x,y)\in D)$.

证明. (反证法) 假设 $f(x,y)\not\equiv 0,((x,y)\in D)$. 则 $\exists(x_0,y_0)\in D$, 使得 $f(x_0,y_0)\neq 0$, 不妨设 $f(x_0,y_0)>0$, 由 f 在点 (x_0,y_0) 的连续性可知, 存在 $U((x_0,y_0);\delta)$, 对 $\forall(x,y)\in U((x_0,y_0);\delta)\cap D$, 都有

$$f(x,y)>\frac{1}{2}f(x_0,y_0)>0,$$

记 $D_1 = U((x_0,y_0);\delta)\cap D$, 故有 $D_1 \subset D$, 所以 f 在 D_1 上可积, 而

$$\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma \geqslant \frac{1}{2}\iint_{D_1} f(x_0,y_0)\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{2}f(x_0,y_0)S_{D_1} S_{D_1} \text{ 为区间 } D_1 \text{ 的面积},$$

与题设矛盾. 所以 $f(x,y)\equiv 0, ((x,y)\in D)$. ∎

4. 判断下列函数在相应的定义域上的可积性

(1) 在 $f(x,y) = \begin{cases} x^2+\sin xy, & y>1, \\ xy, & y\le 1, \end{cases}$ 在 $D=[0,2]\times[0,2]$ 上;

(2) 在 $f(x,y) = \begin{cases} xy, & y>1, \\ 1, & (x,y)\text{为有理点且}y\le 1, \\ 0, & (x,y)\text{为无理点且}y\le 1, \end{cases}$ 在 $D=[0,2]\times[0,2]$ 上.

解: (1) $D=[0,2]\times[0,2]$ 为有界闭区域, 在 $y>1$ 时, $f(x,y)=x^2+\sin xy$ 是连续的, 且 $|f(x,y)| = |x^2\sin xy| \leqslant x^2+1\leqslant 5$,

在 $y=1$ 时, $f(x,y)=xy$ 是连续的, 且 $|f(x,y)|=|xy|\leqslant x\leqslant 2$.

所以 $f(x,y)$ 在 D 上是有界函数, 且只在 $y=1$ 间断, 则有定理 16.1.7 知, $f(x,y)$ 在 D 上可积.

(2) 设 $D=D_1+D_2$, 其中 $D_1=[0,2]\times[1,2], D_2=[0,2]\times[0,1]$, 注意到 f 在 D_1 上连续, 所以 f 在 D_1 可积的, 下面证明 f 在 D_2 上时是不可积的, 事实上, $\exists\epsilon_0=\frac{1}{2}$, 对 D_2 上的任一分割 $T=\{\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n\}$, 由有理数的稠密性知 $M_i=1, m_i=0$, 所以

$$S(T)-s(T)=\sum_{i=1}^{n}(1-0)\triangle\sigma_i=\sum_{i=1}^{n}\sigma_i=2>\epsilon_0,$$

综上, $f(x,y)$ 在 D 上不可积.

□

---

5. 设 $f(x,y)$ 在原点的邻域内连续, 求 $\lim\limits_{\rho\to 0}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

解: 由积分中值定理可得, $\exists(\xi,\zeta)\in D_\rho=\{(x,y)|x^2+y^2\le\rho^2\}$, 使得

$$f(\xi,\zeta)=\frac{1}{\pi\rho}\iint_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

则当 $\rho\to 0^+$ 时, $f(\xi,\zeta)\to f(0,0)$, 所以

$$\lim_{\rho\to 0}\iint\limits_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\lim_{\substack{\xi\to 0\\ \zeta\to 0}} f(\xi,\zeta)=f(0,0).$$

□

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积. 证明: $f(x)g(y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积且

$$\iint\limits_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^d g(y)\mathrm{d}y.$$

证明. 先证明 $f(x)g(y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 事实上, 因为 $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上可积, 则由第一道习题可知 $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上有界, 即存在 $M>0$, 使得对 $\forall y\in[c,d]$, 有

$$-M<g(y)<M,$$

因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 由定积分的定义, J 是一个确定的值, 若对 $\forall\epsilon>0,\exists\delta>0$, 使得对 $[a,b]$ 上任意分割 T, 以及其上任意选取的点集 $\{\xi_i\},i=1,2,\cdots,n$, 只要 $\|T\|<\delta$, 就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\triangle x_i-J\right|<\frac{\epsilon}{\delta M},$$

即

$$J-\frac{\epsilon}{\delta M}<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\triangle x_i<J+\frac{\epsilon}{\delta M},$$

则对于 $[c,d]$ 上与上述相同的分割 T, 以及点集 $\{\xi_j\},j=1,2,\cdots,n$ 有

$$MJ-\frac{\epsilon}{\delta}<\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_j)\triangle x_i<MJ+\frac{\epsilon}{\delta},$$

$$\delta MJ-\epsilon<\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_j)\triangle x_i\triangle y_j<\delta MJ+\epsilon,j=1,2,\cdots,n.$$

即得

$$\left|\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)g(\xi_j)\triangle x_i\triangle y_j-\delta MJ\right|<\epsilon.$$

结论得证.

再证

$$\iint\limits_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^d g(y)\mathrm{d}y.$$

事实上

用平行坐标轴的直线网 $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b,c=y_0<y_1<\cdots<y_m=d$, 将 D 分为 $m\times n$ 个小矩形 $\triangle\sigma_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$, 记 $f(x)g(y)$ 在 σ_{ij} 的上、下确界分别为 $M_{ij},m_{ij},\forall\xi_i\in[x_{i-1},x_i]$, 则

$$m_{ij}\triangle y_j\leqslant\int_{y_{j-1}}^{y_i}f(\xi_i)g(y)\mathrm{d}y\leqslant M_{ij}\triangle y_j,i=1,2,\cdots n,j=1,2,,\cdots,m,$$

对 j 求和可得

$$\sum_{j=1}^{m}m_{ij}\triangle y_j\leqslant\int_a^b f(\xi_i)g(y)\mathrm{d}y\leqslant\sum_{j=1}^{m}M_{ij}\triangle y_j,i=1,2,\cdots n,$$

乘以 $\triangle x_i$, 再对 i 求和, 得

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}m_{ij}\triangle x_i\triangle y_j\leqslant\sum_{i=1}^{n}\int_a^b f(\xi_i)g(y)\mathrm{d}y\triangle x_i\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}M_{ij}\triangle x_i\triangle y_j,i=1,2,\cdots n,$$

当 $\lambda=\max\limits_{\substack{1\leqslant i\leqslant n\\1\leqslant j\leqslant m}}\{\sigma_{ij}\text{的直径}\}\to0$ 时, $\lambda'=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\triangle x_i\}\to0$, 由于 $f(x)g(y)$ 在 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上可积, 上式左右两端, 当 $\lambda\to0$ 时, 有公共的极限值, 因此由迫敛性可得

$$\iint\limits_D f(x)g(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\int_c^d g(y)\mathrm{d}y.$$

7. 证明 Cauchy 不等式

$$\Big[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\Big]^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.$$

其中 $D=[a,b]\times[a,b]$.

证明. 对 $\forall (x,y)\in D$, 由上题可得

$$\begin{aligned}\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 &= \int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(y)g(y)\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_D [f(x)g(x)\cdot f(y)g(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

因为 $[f(x)g(x)\cdot f(y)g(y)]\leqslant\frac{1}{2}\left[f^2(x)g^2(y)+f^2(x)g^2(y)\right]$, 所以

$$\begin{aligned}\left[\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right]^2 &= \iint\limits_D [f(x)g(x)\cdot f(y)g(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\leqslant \iint\limits_D \frac{1}{2}\left[f^2(x)g^2(y)+f^2(x)g^2(y)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\iint\limits_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\iint\limits_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_D f^2(x)g^2(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y(\text{积分与变量无关})\\ &= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(y)\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

结论得证.