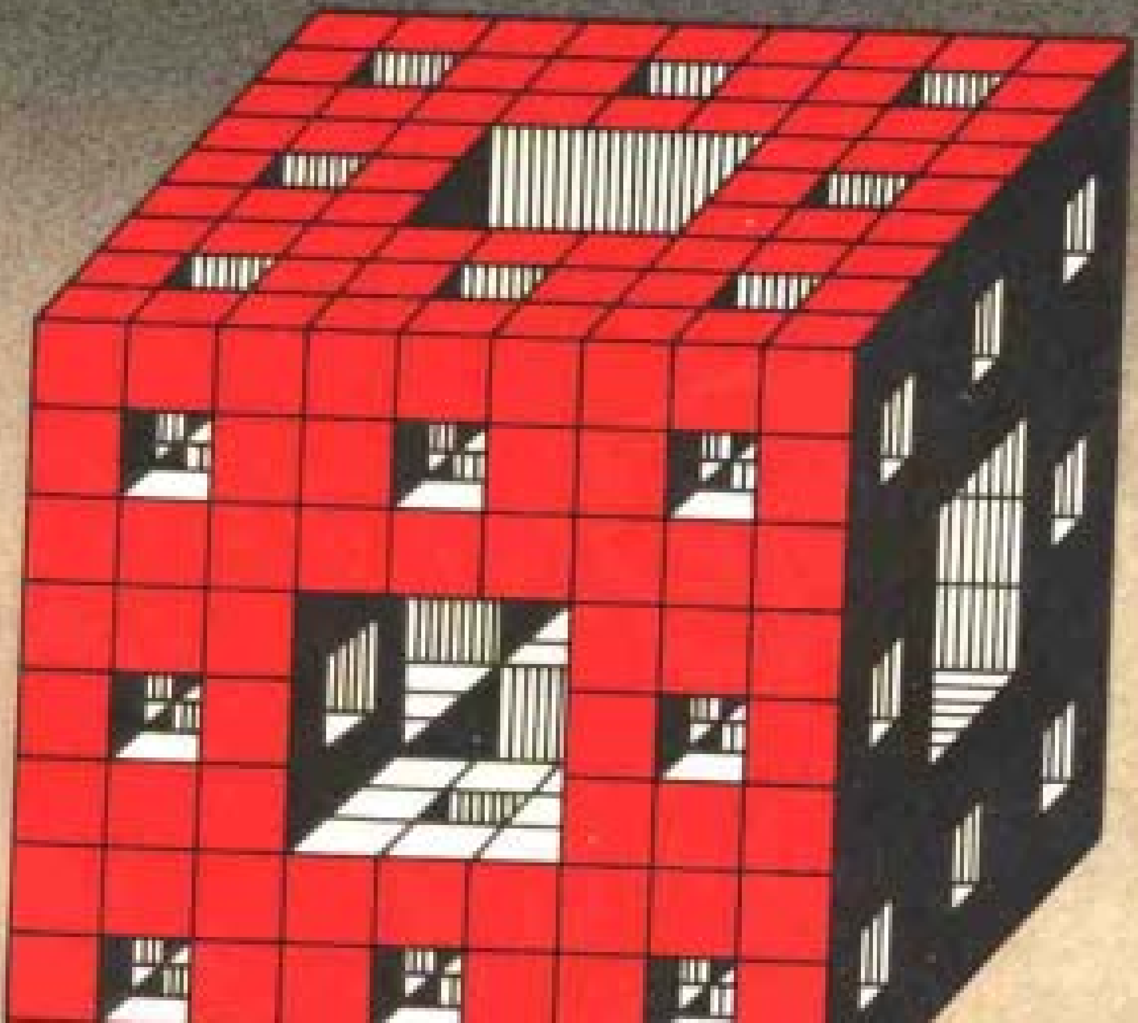
李鍾蓀譯・商務印書館

集的故事

STORIES ABOUT SETS



集的故事

本書作者用講故事的方式介紹了現代數學中的一個重要內容——集論，同時通過形象而生動的實例敘述了有關無限、函數、曲線、面、維數等重要的數學概念和特性。

閱讀本書並不需要高深的數學基礎。全篇沒有枯燥而冗長的公式演算，但是卻能由淺入深地引導讀者對複雜的抽象的數學問題有較爲清晰的認識。讀完本書以後，你將會感到數學並不是想象的那麼艱深難懂。

本書對於中學高年級和大學低年級的學生和教師，以及各行各業對數學感興趣的人都有參考價值。

ISBN 962 07 2044 X
Published & Printed in Hong Kong H.K.$8.00

李鍾蓀譯・商務印書館

集的故事

STORIES ABOUT SETS

N.Ya.Vilenkin 著

集的故事

譯　者——李鋳蓀

出版者——商務印書館香港分館

香港鰂魚涌芬尼街2號D僑英大廈五樓

印刷者——中華商務聯合印刷(香港)有限公司

香港九龍炮仗街75號

版　次——1979年1月初版

1984年1月重印

ISBN 962 07 2044 X

譯者語

對一位初次接觸數學上有關無限的問題的讀者來說，本書確實爲他提供了許多有趣而又令人驚奇的例子。然而，本書的最引人入勝的地方並不在於此。

作者在介紹過無限及其有關的一些有趣性質後，立即爲研究這些性質的步署提出了一連串的一個比一個深刻的問題。圍繞着這些問題，作者精彩而具體地描繪了數學的發展過程。讀者可以清楚地看到，數學上一些重要的概念，例如：集、基數、函數、曲綫、面、維數等等是如何在錯綜複雜的具體情況下逐步抽象出來的。

本書所用到的數學技巧是初等的，只要有中四或以上的程度就够用了。但由於本書作者的重點放在概念發展的描述上，讀者在閱讀本書時，需要的是：嚴謹、仔細、思考和耐心。如果讀者在概念方面要求嚴謹，本書將會把他引進一個新天地。

譯者在一些地方加入了註釋以幫助讀者理解。顯著的錯誤都盡可能改正了。單位都已改爲公制。

由於水平有限，錯誤在所難免。希望讀者們熱心指正。

原　序(節譯)

我最初有機會聽到集論是在一個由蓋爾芳德爲學童而舉辦的講座裏。那時他剛剛開始他的教學生涯。在兩小時的課堂中，他爲我們講了一些在我們看來是完全不可能的東西：自然數跟有理數一樣多，而一個區間和一個正方形有相同數目的點。

當我在大學還是一個數學力學系學生的時候，我就對集論的認識得到了進一步的發展。除了上課聽講和參加研討會外，我們有自己的，不是教授們所能猜測得到的學習方法。課後（我必須承認，有時甚至在內容不是特別有趣的上課時間），我們在大樓走廊裏漫步，討論有趣的問題、離奇的例子以及巧妙的證明。在這些交談裏，一年級學生們從他們那些更富經驗的同學中學到了許多東西。比如，如何作一條曲綫去填滿一個正方形，如何找一個到處都沒有導數的函數等等。

誠然，那些交談，是屬於"範圍以外"的；而且，如果你在聽完這些討論後就去考試，還算得上是一種不可饒恕的輕佻舉止。因爲，那裏根本沒有關於考試的話題——據課程規定，還有兩年我們才需學習"實變函數"。然而這個"走廊"上的先修，對於瞭解講義和考試有多麼大的幫助！對每一條定理，我們都可以回想起一些先前討論過的有趣的問題、一些感性的類比以及直觀的例子。

我想用"走廊"式的學習方式，爲讀者講講集論。所以，我們

把注意力主要集中在清楚的表達問題，討論意外的出奇的例子上，不時亦會引入一些矛盾的"樸素"討論。我們將發現：實變函數論就全部都是充滿了這些東西。如果一個高中學生或大專學生在讀完本書後，希望深入一步研究集論或實變函數論，筆者就認爲本書可以算是成功了。

書末列有一些實變函數論的習題；試一試去解決它們，一定會對讀者有幫助的。

目　錄

1. 無限集的一些奇異性質

如果說全部數學是由無限這觀念推衍出來的，這並不算誇張。在數學中，我們通常並不是對個別的東西（數字，幾何圖形）感到興趣，而着重於這樣的一類東西：**所有**的自然數，**所有**的三角形等等。然而這樣的集合就包含了**無限**多個個體。

基於這個理由，數學家和哲學家歷來對無限這觀念很有興趣。而這個興趣正是產生在人們開始認識到每個自然數都有一個後繼數時，也就是認識到數序是無限的時候。可是，在剛開始試着處理無限的問題時，就引出了許多反論。

例如，希臘哲學家芝諾曾經用無限的概念去證明運動是不可能的！他說：要把箭射到靶就得要那箭先走完射程的一半，但在走完一半之前，它一定要走過路程的四分之一、八分之一，等等。由於分半過程是無法終止的(無限在這裏出現了！)，那末箭就永遠不會離開弓弦。他同樣地證明了敏捷的亞奇里斯跑不過緩慢的烏龜①。

---

① 譯註：芝諾的論據是這樣的：首先，在亞奇里斯未起步時，龜在他前頭爬着，設位置爲 S_0。當他進到龜的原來位置 S_0 時，不論龜爬得多慢，它一定已經離開原有位置，而且在亞奇里斯到達 S_0 之前。設這時龜的位置爲 S_1。但當亞奇里斯走到 S_1 時，龜已經走到新的位置 S_2。如此下去，雖然 $S_0, S_1, \cdots, S_n, \cdots$ 愈來愈接近，但龜始終在亞奇里斯之前（相距 $S_n - S_{n-1} > 0$）。芝諾從而論證了亞奇里斯永遠追不到龜。

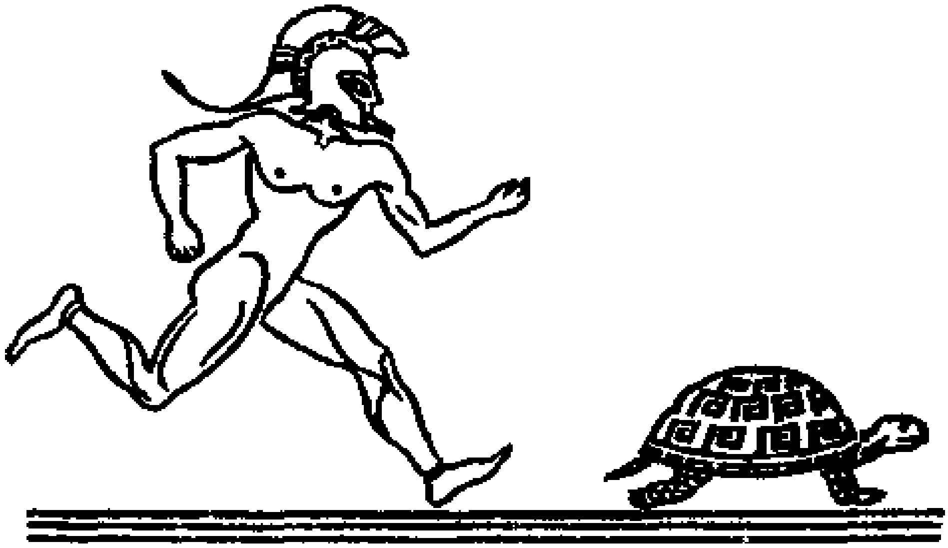


圖 1　亞奇里斯和龜

既然有這些反論和詭辯，古希臘的數學家就避開任何與無限的概念有關的東西，將它排斥於數學論證之外。他們假定所有幾何圖形都由有限數目的、細小而不可分割的部分（原子）組成。不過，從這個假設出發却又引出了不可能的事，比如說，要平分一個圓① ——但圓心只能屬於其中的一個等份，然而，這跟等分的意義就產生了矛盾。

中世紀時，關於無限的問題主要集中於這樣的爭論：能够坐在針尖上的天使的集是不是一個無限集。十七世紀數學分析建立起來後，無限集的概念才開始得到較爲廣泛的應用。諸如“無限大量”和“無限小量”都用於數學的每一步論證裏。然而，當時還未探討包含無限個元的集；所研究的是終極可以大過任何給定數字的變量，這樣的量當時稱爲“潛在性無限大”，意思是任你喜歡多大就多大〔潛在性(Potential)，即可能性〕。

只有到了十九世紀中葉，有關一個無限大數目的元組成的無

① 譯註：指圓周及其內部。

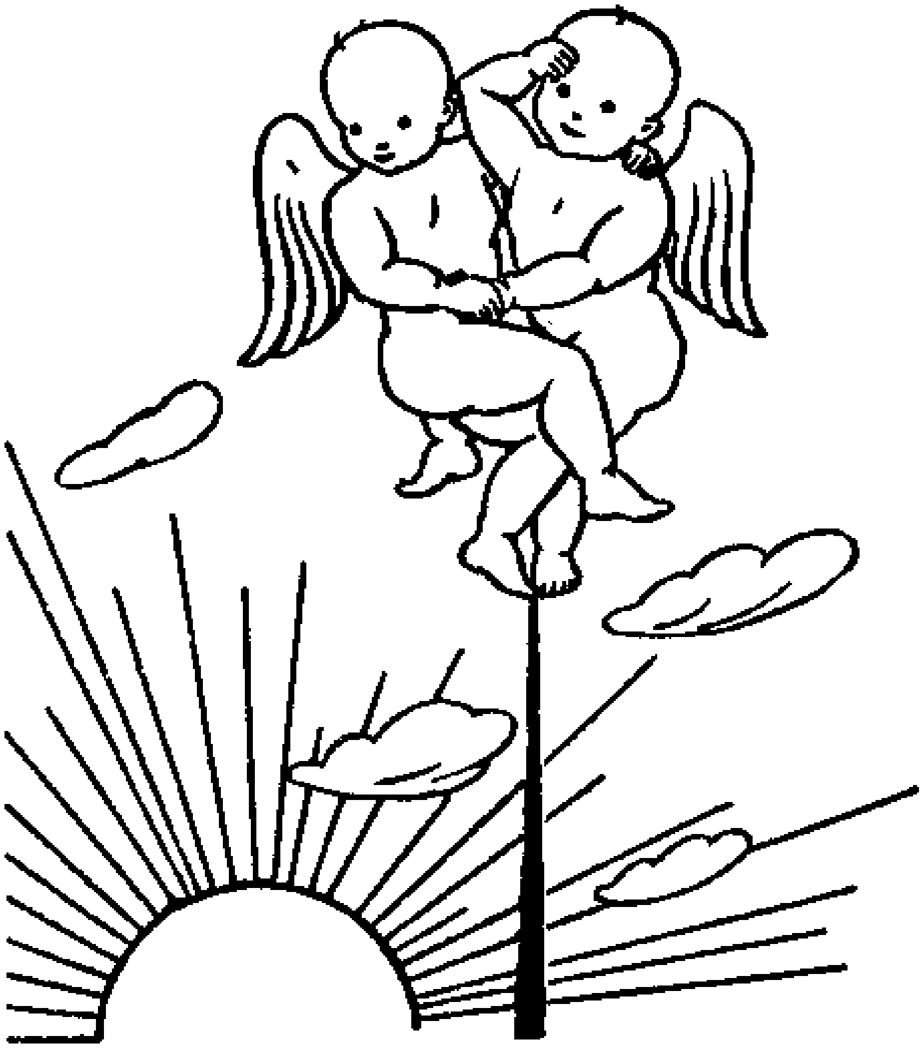


圖 2　有多少天使能坐在針尖上

限集的研究才開始出現在無限概念的分析中。無限集的數學理論的創始人是捷克學者波爾查諾（不幸直到他死後許多年，1848 年他的主要著作才發表）和德國數學家哥爾·康托爾。令人驚奇的是他們都很熟習學院派的科學①。然而却能在學院派的基礎上向

① 譯註：學院派由卡路里時期（第九世紀）至笛卡兒哲學興起時（第十七世紀）止，統治了西方基督教文明。其哲學結構和思考傾向源自古老的，神秘的，直覺的傳統，初期特別受奧古斯丁派哲學影響，以後則以亞里士多德爲宗師。

前進展，將集論變成數學一個重要部分。

波爾查諾和康托爾的主要成就是對於無限集性質的研究。有限集的性質早已爲他們的前人所熟識了。他們證明了無限集的性質跟有限集的性質毫不相像，許多對有限集不可行的運算，對於無限集竟能輕易地完成。比方，試圖從一個客滿的酒店裏找空房，並假定每間房不許住一人以上。這當然不行！原因是酒店房間的數目有限！但如果有無限個房間呢，……這樣的酒店却可以在星際旅行家——文靜的離子——的故事裏找到。這是波蘭幻想小說家史丹尼斯羅夫·雷姆寫的《星際送奶人——文靜的離子》一書中的主角。

怪酒店——文靜的離子的第一千零一次旅程

我參加仙女座星雲俱樂部的叙會，一直延續至深夜，回家時已相當遲了。整晚我受着惡夢折磨。我夢見我吞下一個巨大的庫爾度，又夢見再踏足於杜秩多大行星上，我不曉得怎樣逃避一個可怕的能將人變爲六角形的機器；然後呢……人們通常勸告老年人不要與味濃的蜜酒打交道。一個意外的電話把我帶回現實。原來是我的老朋友和星際旅伴達蘭托教授打來的。

"有件急事，親愛的離子，"我聽見他說，"太空人發現了宇宙裏有一個奇異物體——一道神秘黑綫由一個銀河系伸到另一個中，誰也不知道是什麼回事。甚至最好的望遠鏡和火箭上的無綫電望遠鏡亦無法找出結果。我們最後求助於你，請立即依星雲 ACD—1587 的方向飛去。"

翌日我由修理店取回我的舊光子火箭，裝配上我的時間加速

器和電子機械人。它通曉所有語言和關於星際旅行的故事，它能使我至少在五年長的旅程中得到娛樂。然後我就出發去處理那件急事。

正當電子機械人剛講完他所有的故事，正在開始重複時（沒有比第十次重聽那些老話更煩了），我的旅程目的地就在不遠處出現。遮着那條神秘綫的銀河都在我後面，前面就是……宇宙酒店。不久前我爲那些星際流浪者建造了一個小行星，可是他們把它拆開了，結果一個庇護所也没有了。之後，他們在另外一個銀河系決定終止流浪，並建造一所壯觀建築物——爲所有宇宙旅客而設的酒店，這間酒店幾乎跨越過所有的銀河。我說“幾乎所有”，原因是流浪者們拆掉了一些無人住的銀河系，同時帶走了餘下的每個銀河中某些位置不好的星團。

然而，他們把建築酒店的工作做得極好，每間房都裝有供應冷、暖等離子體的龍頭，如果你願意，你可以在晚上分散爲原子，明早服務員會把你合回原形。

但是，最重要的是酒店有**無限個**房間。流浪者希望没有人再聽到那句在他們流浪時經常困擾他們的話：“没有空房”。

話雖如此，我的運氣却不好。進入門廊時第一眼就看到一個牌，參加宇宙動物學家會議的代表請上 127 樓登記。

由於所有銀河都派來了宇宙動物學家，因此代表有無限個，於是，與會者佔用了所有房間。没有我的地方。真的，經理試圖勸服一些代表兩人用一房，使得我可以與其中一人共用房間。可是當我知道一個同房要吸氟氣，另一個則認爲 860 °C 室溫方才正常時，我只得婉言拒絶這些“好”鄰居。

僥倖的是酒店的總管曾經是個流浪者，還記得我幫過他和他

的朋友。他想替我在酒店找個地方。畢竟在太空過夜，會染上肺炎的。幾經思量之下，他就對經理說：

“送他去一號。”

“那我把一號房客安置在何處？”

“送他去二號。二號房的房客搬往三號，三號的去四號，依此類推。”

就是從這點我才開始領悟到酒店的特殊性。如果只是有限個房間，排在最後號碼的房客便要搬到太空去。正因爲有無限個房間，於是人人都有地方了，而我亦無須剝奪宇宙動物學家們的房間。

次早，詫異得很，他們要求我搬到一百萬號。原來，VSK—3472 銀河來了一批遲到的宇宙動物學家，酒店又得騰空 999,999 個房子給他們。但是，逗留到第三天我到經理處付賬時，很震驚地見到經理的窗外竟排着長龍，一直排到馬哲倫星雲。就在這個時候，我聽到一個聲音：

“我想出兩個仙女座星雲的郵票換取一個天狼星的郵票。”

“誰人有宇宙紀元 57 年的厄比安郵票？”

我迷惑地轉身問那個經理：

“這是什麼人？”

“這是星際集郵家會議。”

“很多人嗎？”

“是個無限集——每個銀河有一代表。”

“但你怎樣找房子呢，到明天以前宇宙動物學家是不會遷出的。”

“不知道了，我正要找總管談幾分鐘。”

不過，發覺這次問題複雜得多；他們由幾分鐘講上一個小時。最後，經理離開總管的辦公室，進行他的新安排。首先他叫一號房客搬去二號；對我來說很出奇，因爲憑我的經驗，那樣只會空出一個房間，而他却要找出不少於集郵家的無限集的空房。然而經理繼續發令：

"把二號房客搬進四號，三號的去六號；總括來說，住在 n 號的房客到 2n 號去。"

現在他的計劃清楚了；用這個法則，他可以空出奇數號房組成的無限集，去安置集郵家。而讓宇宙動物學家佔用偶數號房，集郵家則佔用奇數號房。（我沒有提及自己——三日來我與動物學家相處得很友好，以致我被選作名譽代表去參與會；所以同所有的宇宙動物學家一樣，我也要搬房間，由一百萬號搬去二百萬號。）我的一個集郵家朋友，他排在第 574 位，得到了 1147 號房。總之，排第 n 位的集郵家得到 2n－1 號房。

次日，房間問題緩和了——宇宙動物學家會議結束，他們要起程回家。我搬進總管住所，他住所那裏有間空房。但是對住客是好的事並不常使管理人開心，幾天後我那慷慨的主人有點愁悶了。

我問他："有什麼不妥？"

"半數房間都空了，我們的經濟計劃不能完成。"

其實我不太了解他說的是什麼經濟計劃，無論如何，他已收過無限個房間的租金，不過我還是向他建議：

"好吧，何不把客人們安置得緊密點；四處搬動他們使得所有的房間住滿爲止。"

這倒是易事。集郵家住的是單數號房：1，3，5，7，9 等等。

他們不動 1 號，將 3 號房客搬去 2 號，5 號去 3 號，7 號去 4 號等等。最後，即使沒有新客到，所有房間却又再次住滿了。

雖然如此，總管的愁悶依然沒有過去。原來流浪者並不滿足單單建立宇宙酒店，他們毫不疲倦地建造無限間酒店，每間都有無限個房間。爲此，他們拆了很多個銀河，使得銀河間的平衡破壞了，這會產生嚴重的後果。所以人們要求除了我們住着的那間外，其餘所有的都要關閉，把所用的材料放回原處。可是剛好全部酒店（包括我們那間在內）都已住滿了，這個命令很難執行。他受命要將無限間酒店的房客（其中每間都有無限位房客）都搬到我們這裏，但這裏早已住滿了！

“我受够了！”總管叫着。“我首先安置好多出的一位，接着是另外 999,999 位新客，然後甚至是一個旅客們的無限集；如今他們竟然要我去爲無限個多的無限位住客的集安排房間。這不行，酒店不是橡皮造的，隨便他們怎樣安置好了。”

然而命令終究是命令，他們有五日時間去準備迎接新房客。在這五日中，酒店無人工作——人人都思量如何解决才好。爲此，他們宣佈舉行一個競賽——獎品是遊覽某銀河；可惜所有提出的解答都沒有成功，後來有個正在受訓的厨子建議：不須動 1 號房客，2 號的搬到 1001 號，三號的則去 2001 號等等。之後將第二間酒店的房客安置在我們的 2 號，1002 號，2002 號等等，第三間的則入住 3 號，1003 號，2003 號等。這個辦法被否定了，因爲我們不知如何給第 1001 間酒店的房客找地方；然而，依此法，最初 1000 間酒店所有的房客都有房住。這使我們想起這樣的故事：奴性十足的羅馬元老院提議改稱九月爲梯伯里亞斯，以此榮耀皇帝（七、八兩個月已分別命名爲朱里安斯和奥古斯脫

斯），不料梯伯里亞斯刻薄地問他們，“那麼，對第十三位羅馬皇帝你們能做些什麼？”

酒店的簿記員提出頗爲精彩的變通方法，他說我們可以利用一個幾何級數的特性來安排客人：第一間酒店的人住 2，4，8，16，32 等號房(這些數字組成一個公比爲 2 的幾何級數)，第二間的則住 3，9，27，81 等號，他們是一個公比爲 3 的幾何級數的各項。他建議用同法處置其他酒店的客人。但總管問他：

“是否我們對第三間酒店採用一個公比爲 4 的幾何級數？”

“這個當然。”

“那不成，前頭 4 號房已被來自第一間酒店的佔着。如此，我們怎樣處置第三間的人呢？”

輪到我開口了，至少我是在恆星學院修過五年數學的人，並非一無所用。

“用質數罷。把第一間酒店的客人搬到 2，4，8，16…號，第二間的去了 3，9，27，81…號，第三間的去 5，25，625…號，第四間的去 7，49，343…號。”

總管問道：“會不會發生兩人同房呢？”

“不，如果我們取兩個質數，没有一個他們的整數冪能相等。如果p，q 是質數，$p\neq q$，且 m，n 是正整數，那末 $p^m\neq q^n$。”

總管同意我的見解，並立即根據我提出的方法進行改良，在那裏，只需用到質數 2 和 3。即是說：他將第 n 間酒店的 m 號房客遷進 $2^m 3^n$ 號房。這樣能行，因爲如果 $m\neq p$ 或 $n\neq q$，$2^m 3^n\neq 2^p 3^q$。故没有一房會有兩人佔用。

這建議很受歡迎，它是一個人們認爲不可解的問題的答案。然而總管和我都不是得獎者；如果我們的解法得到採用，就會有

許多房間剩下不用。（根據我的方法——空出了如 6，10，12 號房間，總之是所有非質數冪的號數的房間，而根據總管的——則空出了所有不能寫成 $2^m 3^n$ 形式的號數。）還是其中一個集郵家提出最佳的解決方法，他是天鵝銀河系的數學學院院長。

他建議我們去作一個方表，其中橫列出現酒店號數，直行則出現房間號數。例如，第四列與第六行交滙處將出現第四間酒店的 6 號房。以下就是這個方表（事實上只是其中的左上角，我們不得不這樣做，否則我們要寫上無限多的行和列）：

$$
\begin{array}{cccccccc}
(1,1) & (1,2) & (1,3) & (1,4) & (1,5) & \cdots & (1,n) & \cdots \\
(2,1) & (2,2) & (2,3) & (2,4) & (2,5) & \cdots & (2,n) & \cdots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & (3,4) & (3,5) & \cdots & (3,n) & \cdots \\
(4,1) & (4,2) & (4,3) & (4,4) & (4,5) & \cdots & (4,n) & \cdots \\
(5,1) & (5,2) & (5,3) & (5,4) & (5,5) & \cdots & (5,n) & \cdots \\
 & & & & \vdots & & \vdots & \\
(m,1) & (m,2) & (m,3) & (m,4) & (m,5) & \cdots & (m,n) & \cdots \\
 & & & & \vdots & & \vdots &
\end{array}
\tag{1·1}
$$

“現在可依方表去安置客人了。”

“怎麼辦？”總管並不明白。

“用方形排法。將(1,1)即第一間酒店 1 號房客安置於 1 號，(1,2)即第一間酒店 2 號房客安置於 2 號；(2,2)即第二間酒店第二號房客安置於第 3 號；至於入住 4 號的，應是(2,1)即是第二間酒店 1 號房客。這樣，位於左上角邊長爲 2 的正方形所有房客，都一一安置好了。之後，將(1,3)的房客安置於 5 號，(2,3)於 6 號，(3,3)於 7 號，(3,2)於 8 號，(3,1)於 9 號(這些房間組成邊長爲 3 的正方形)。按此法我們繼續進行下去：

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small, row sep=small]
(1,1) & (1,2) \arrow[d] & (1,3) \arrow[d] & (1,4) \arrow[d] & (1,5) \arrow[d] & \cdots & (1,n) \arrow[d] & \cdots \\
(2,1) & (2,2) \arrow[l] & (2,3) \arrow[d] & (2,4) \arrow[d] & (2,5) \arrow[d] & \cdots & (2,n) \arrow[d] & \cdots \\
(3,1) & (3,2) \arrow[l] & (3,3) \arrow[l] & (3,4) \arrow[d] & (3,5) \arrow[d] & \cdots & (3,n) \arrow[d] & \cdots \\
(4,1) & (4,2) \arrow[l] & (4,3) \arrow[l] & (4,4) \arrow[l] & (4,5) & \cdots & (4,n) \arrow[d] & \cdots \\
(5,1) & (5,2) \arrow[l] & (5,3) \arrow[l] & (5,4) \arrow[l] & (5,5) \arrow[l] & \cdots & (5,n) \arrow[d] & \cdots \\
(m,1) & (m,2) \arrow[l] & (m,3) \arrow[l] & (m,4) \arrow[l] & (m,5) \arrow[l] & \cdots \arrow[l] & (m,n) \arrow[l] & \cdots \\
 & & & & & \vdots & & \vdots
\end{tikzcd}
\tag{1·2}
$$

“真的够房給所有人用嗎？”總管有些疑惑。

“當然啦，根據這個法則，我們將來自第一個 n 間酒店的第一個 n 房間的旅客安置於第一個 n^2 間房，因此或遲或早，每位都得到一間房。例如，如果我們談到來自第 136 號酒店的 217 號的房客，他會在第 217 步得到房間。我們甚至很容易算出哪一間房是他的。它會有房號 216^2+136。一般而言，如果房客住於第 m 間酒店的 n 號房，若 $n \geqslant m$，則他佔用 $(n-1)^2+m$ 號；若 $n<m$，則佔用 m^2-n+1 號。”

這個建議的方案被認爲是最好的——所有酒店的房客都能在我們的酒店找到地方，而沒有一個空位。這個集郵家兼數學家獲獎了——遊覽 LCR—287 號銀河系。

爲了慶祝這樣成功的解答，總管組織招待會邀請所有客人。然而，招待會也有它的問題。住偶數號房客來遲了半小時，而當他們到達時，所有的椅都用了，雖則好客的總管原本預算好一人一椅的。他們只好等別人移好位置，騰出足够的空椅來才入坐。（當然，並沒有另外搬進新的椅子來。）後來雪糕上桌時，竟然

發現每人都有雙份，而厨子却只準備好一人一份。我希望現在讀者自己能够想出其中究竟。

招待會結束後，我就走進我的光子火箭，起程返回地球。我要把宇宙裏的新庇護站的情況告訴地球的太空人。除此之外，我想請教一些傑出的數學家與及我的朋友達蘭托教授，問問關於無限集的特性。

作者語

到此暫時離開我們的主角。許多他的故事引起了疑問——無論如何，據相對論的定律，傳送訊號不能超過每秒 186,000 哩。甚至是最初那個命令，總管執行起來也需無限長的時間。不過我們還是不要對文靜的離子的事問得太多了——在他的旅程中甚至還有着更不可能的遭遇。

本書以後集中講集論，雖然事件不再發生在星際間的太空，而是在〔0,1〕區間或單位邊長的正方形內，但其中有許多事件似乎依然是不尋常的①。

---

① 譯註：作者引入這些離奇怪誕的故事並不是故作有趣，而是別有深意的。對於長期習慣於物質是由“不可分”的原子所組成的概念的人來說，無限的現實意義，或許在遼闊的宇宙中可以得到些啓示。

2. 集及其運算

集一詞有什麼意思？

討論無限集特性之前，我們必須熟悉集一詞的含意以及能用於集的運算的種類。可惜我們還不能够給出這個理論的基本概念的嚴格定義——集的概念。誠然，一個集可以稱爲一羣、一組、一個整體、一族、一個系統、一類等等。但這不能作爲一個數學上的定義，只能算是語言中大量同類詞的濫用。

爲了對一個概念下定義，首先必須指出它是某一個更廣泛的概念的特殊情形。對集這概念來説，這却是不可能的；因爲這個概念已經是如此的廣泛，使得它不可能是另外概念的特殊情形。

所以，我們將直截地舉例説明集的性質，而不是給出集概念的定義。

人們經常需要説出具有某些共同屬性的各種事物。例如，我們要提及一間房子裏的椅的集，木星裏的全部原子的集，人體中所有細胞的集，某個袋裏的所有薯仔的集，海洋中所有的魚的集，平面上所有正方形的集，某個已知圓上的所有點的集，等等。

組成一個已知集的事物叫做它的元。一個由多個元 x 組成的已知集 A 通常用下式表示：

$$A = \{x\} \tag{2·1}$$

括號表示多個元 x 聯合成一個新的整體——集 A。用符號：$x \in A$ 表示元 x 屬於集 A。如果元 x 不屬於集 A，則記作 $x \notin A$。譬如，A 表示所有偶數組成的集，則 $6 \in A$ 而 $3 \notin A$。

這樣，當我們提及一個集時，就把很多事物聯合成一個新的整體，即聯合成一個由這些事物組成的集。集論的始創者康托爾曾經這樣強調過：

集就是以一個來表達的一羣。

爲了得到深入的集的概念，魯津提出用下述方法表達一個集。設想有一不可滲透的透明殼，好像一個緊閉的透明袋。我們假設殼内包含了集 A 所有的元，此外不含他物。就是這樣的一個不包含任何其他東西，只包含所有元的透明殼，較好地表達了把所有元 x 聯合起來組成集 A 的操作①。

如果集含有有限個元，我們稱之爲**有限集**；如果集含有無限多個元，我們稱之爲**無限集**。譬如森林中樹木組成的集是有限的，而圓上所有的點的集則是無限集的。

如何確定一個集

確定一個集當然有許多方法。其中之一是完全列出組成該集的元。譬如某班的學生所組成的一個集，是由該班點名册中的名

① 譯註：這只是一個很形象化的表達方式。事實上，必須注意，當我們講一個由三十歲到五十歲的男人所組成的集時，並不存在一個實在的操作，把世界上所有這樣的男人抽出來站在一邊，然後用一個透明殼包着他們。雖則他們散佈於世界各地，但我們仍然把他們的整體當作是一件東西——集。

單所決定，世界各國的集則在地圖上列出，而人體各種骨骼的集則在解剖學教科書中列出。

然而我們僅能在有限集中用這個方法，甚至即使在有限集中，也不是全體都適用。比方，取海中的魚的集，它是有限的，然而逐一列出幾乎是不可能的。定義無限集更不能用列表開始，例如，試圖爲所有自然數作一個表，大家都清楚這個表永遠不能完成。

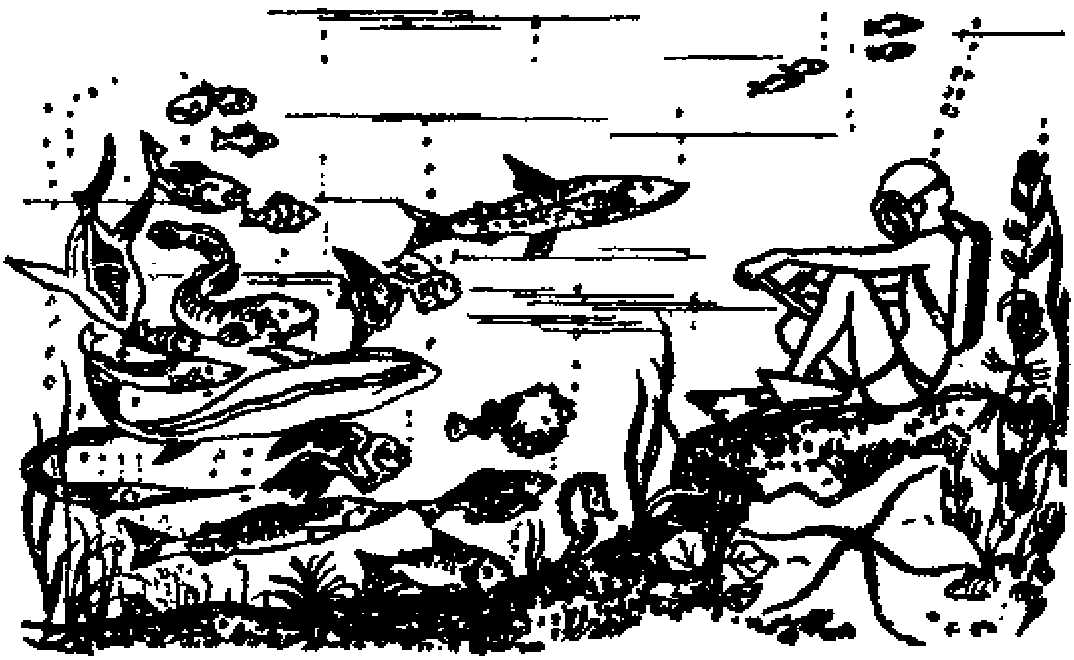


圖 3　魚類大調查

在不能用表確定集的情況下，我們借助一些僅屬某個集的元所特有的，而爲他物所無的特性去決定它。例如，我們可以談及所有的自然數的集合。很清楚，數 73 屬於此集，而 3/4 或一條鱷魚則不屬於此集。同理，$\sqrt{2}$ 和土星都不屬於全部有理數組成的集，而 7/15 則屬於這個集合。

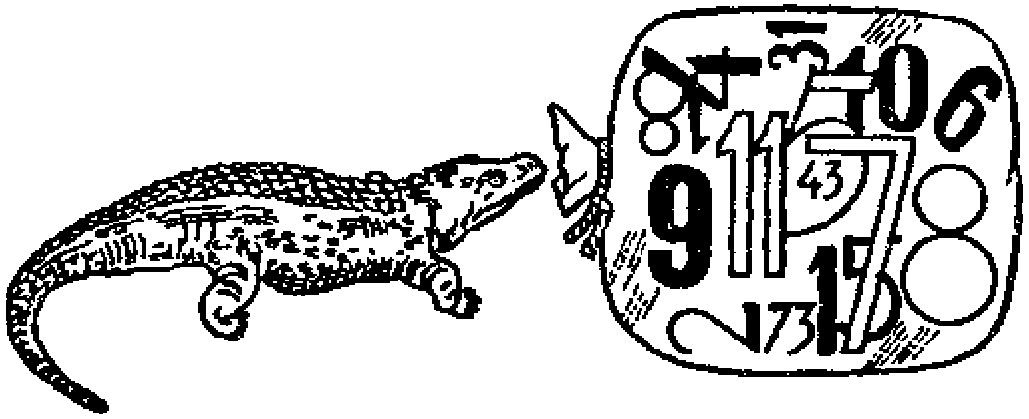


圖 4　鱷魚不屬於自然數集

要留意，用刻劃特性的方法來確定一個集時，實際上經常由於語言的含糊而產生困難。把屬於某集的元與其他不屬這集的元分離的工作，時常由於有很多中間類型的事物而變得困難。例如，假設我們談及地球上的樹木所組成的集時，首先我們必須决定我們指的是現存的還是將要出現的，或是在某個期間內存在的（比方是 1967 年 5 月 1 日至 9 月 1 日這一段時期）。如果在這個時期間，有一些樹木被砍掉，情況又如何？而且，樹木與其他種類植物之間還有着一系列中間類型，所以我們必須决定哪些屬於這個集，哪些不屬於。

同樣，當我們討論 1967 年出版的所有詩句所組成的集時，我們便遇到大量介於詩和散文之間各種不同形式的作品（押韻散文，無韻詩等等）。確定在蘇聯享有免費乘火車的人組成的集並不太困難，不過，這個集還包括所有五歲以下的小童。但可能某個小童乘客在旅程中剛巧是五足歲生日，那他是否還屬於這個集就不太清楚了。（我們不妨說，會有一個一絲不苟的父親，用秒錶去精確地計算，從兒子五足歲那一刻開始還餘下的路程所要求付的費用。）

類似這些的微妙地方甚至在更簡單的例子中，也會出現。例如，設集A包含著名長詩《歐根·奧涅金》①頭一句話的字母。這個定義可以用兩種方法去理解。一方面，我們可以討論由句中所有的字母所組成的集。於是每個字母在集中出現的次數同它在該句出現的次數一樣多（爲了把字母區分出來，我們可以用數字標號）：

$$М_1, О_1, Й_1, Д_1, Я_1, Д_2, Я_2, С_1, А_1, М_2,$$
$$Ы_1, Х_1, Ч_1, Е_1, С_2, Т_1, Н_1, Ы_2, Х_2, П_1,$$
$$Р_1, А_2, В_1, И_1, Л_1 \qquad (2\cdot 2)$$

但是也可以認爲我們談的是這樣的集：它由出現於句中的不同的俄語字母表中的字母所組成。在這種情況下，我們不要任何重複的字母，於是集要由下列字母組成：

$$М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т, Н, П, Р, В, И, Л \qquad (2\cdot 3)$$

很淸楚，(2·2)，(2·3)是兩個不同的集。

剃還是不剃？

確定一個集的困難並非全都與語言的不足有關。有時候有更加深刻的原因。當然，集本身不是這個集的元（例如，所有自然數組成的集不是一個自然數，所有三角形組成的集不是一個三角形，等等）。但總的說，一個集的元的特性是十分任意的，而且

---

① 俄國詩人普希金名著。

没有人禁止我們討論包含集自身做爲元的集。由於這樣的集只在很稀有的情況下才會討論，我們稱之爲**例外**集，而其餘的一律稱爲**常見**集。

我們現在討論包含所有常見集的集A。一眼看來，並不覺得這定義有什麼不妥。正如不清楚爲什麼“包含所有三角形的集”一詞有什麼不妥一樣，也不清楚爲什麼“包含所有常見集的集”一詞會有什麼不妥。但是，我們在這裏確實陷入了一個嚴重的邏輯上的矛盾。讓我們弄清楚爲什麼集A是常見的同時又是例外的。如果是常見集，則本身便是集中一元（畢竟，我們收集了所有的常見集），但據定義，它一定是例外的。如果是例外的，由例外集的定義得知，它一定是本身的一元，然而集A所有的元却都是常見的；這樣我們終究没有得到一個例外集。

我們得出一個不能解決的邏輯矛盾：集A既不是常見的，也不是例外的。此外更簡單的例子也會出現這樣的邏輯矛盾。某士兵受命只給他本人所屬排中的那些自己不剃自己鬍子的兵士剃鬍子。問題在於他應否剃自己的鬍子。如果他剃了，他便屬於自己剃鬍子的一羣，而他就没有權去剃那些兵士了；如果他不剃，他就屬於不剃自己鬍子的一羣，然而據命令又應由他自己去剃自己的鬍子。

還有許多關於集的著名例子，初看會覺得定義妥當，但仔細考察的結果，竟然是定義得十分不好，甚至可以說，這些集簡直未有定義。例如，設A是至多用二百個英文字即能定出的實數的集（這裏，我們包括了“zero”，“one”，“two”等字）。

由於所有英文字的集是有限的（簡單起見，我們不妨假設我們只選取《韋氏字典》中的字及其派生詞），那末所有這樣的實

圖 5　剃還是不剃?

數的集是有限的，這表示這個集是可以列出來的。讓我們假設這個排列已經實現，又讓我們定義數字N有如下形式：

$$N = 0, n_1 n_2 n_3 \cdots n_k \cdots \qquad (2\cdot4)$$

讓我們考察在所列出的集A表中，在第 k 個單字位置上出現的第 k 個數字。如果這個數字不是 1，便規定 $n_k = 1$；如果第 k 個數字是 1 的話，則規定 $n_k = 2$。

因此，N不屬於集A中的第 k 個數字，因爲它們在第 k 個位置上與其相異。因爲 k 是任意的，因此導出N不能等於集A裏任

何一數，因而不屬於集A。然而，N一定要屬於集A，因爲在它的定義中，我們用字不超過二百個。這個反論與下述有密切關係：

不能用一個少於二百個英文字的句子來描述的最小整數是什麼？

這樣的一個數是存在的。因爲在英語中的單字數是有限的，所以必然存在不能用少於二百個字的句子來描述的數，而且，在這些數字中當然必定有一個最小的。

另一方面，這個數不能存在，因爲它的定義蘊涵了矛盾。事實上，上述黑體字句子字數少於二百個，却定義了那個數，而據定義這個數字不可能由這樣的句子定出。

在集論中常會遇到許多定義是自相矛盾的集。研究在什麽條件下會發生這種情形則是邏輯上的深入問題。這些問題的考慮完全改變了這個課題的面貌。很多這些研究的結果後來都用來建立電子計算機的理論、自動機的理論等等。由於這類探討應屬於數理邏輯方面，我們就不再涉及它了。

以後，我們只談定義妥當的集以及用在這方面沒有問題的方式定義的集(諸如所有自然數的集，平面上所有正方形的集等等)。

空　集

“集”一詞會使我們覺得任何集必定有很多元(至少兩個)。事實並非如此，數學中有時需要考察只含有一個元的集，有時甚至是完全不包含元的集，這個集叫做**空集**，記作ϕ。

爲什麼我們會對空集有興趣？

首先，我們注意到這樣的一個事實：當一個集由某些特性來

決定時，並非時常預先曉得究竟那裏有沒有這些性質的元。例如，設集A包含所有這樣的四邊形，其中：

(a)它們的四角都是直角，

(b)兩條對角綫有不等的長度。

如果有人不懂得幾何，他就不會看出這些條件中的矛盾。不過，根據矩形兩對角綫相等這個定理，可以斷定所有這樣的四邊形的集是空的。同理，內角和不等於180°的三角形組成的集也是空的，有兩個根以上的二次式所組成的集也同樣是空集。推而廣之，很多數學命題可以用某集的空集的陳述來表示。（試用這個方法寫出畢達哥拉斯定理。）

此外還有些在性質上不屬於數學的空集：所有年齡300歲以上的人所組成的集，所有能在地上過活的鯉魚的集，所有繞天狼星而轉的太陽系行星的集。

有些集我們不曉得是不是空的。譬如，目前仍不知道當 $n>2$，同時滿足方程式

$$x^n+y^n=z^n \qquad (2\cdot5)$$

的所有自然數n的集是否是空集。（這是著名的費爾馬問題）人們亦不知道 π 的十進小數展開式中，出現不超過有限次的數字所組成的集是不是空的（雖然 π 的十進小數展開式已經做到幾千位了，但是否其中所有的數字都將出現無限次，還是其中某些數字只出現有限次，到現在仍未清楚）。

我們也不知道地球上所有活着的恐龍所組成的集是不是空的——如果尼斯湖的水怪真的是條恐龍，那麼這個集便不是空的了。

集論和初等數學

一個集可以由許多不同的元素所組成：魚、房子、正方形、數字、點，等等。這正好説明了集論及其在各門知識（數學、力學、物理學、生物學、語言學，等等）裏的應用是非常廣泛的。對於數學而言，當然是由"數學對象"組成的集担任了極其重要的角色；其中如幾何圖形、代數方程式、函數、等等。其中有些是關於初等數學的，然而在那裏"集"一詞通常並不出現。（要解釋這點很簡單，我們知道最"現代"的初等數學形成於十七世紀末，而集論於十九世紀時還不過是個嬰孩。）

事實上，在初等數學裏，我們處處碰到集。尤其經常遇到數字的集，即是由數字所組成的集。作爲這樣的集的例子，我們可以取：

(a) 所有自然數的集，

(b) 所有整數（正、負和零）的集，

(c) 所有有理數的集，

(d) 所有實數的集，

(e) 所有複數的集。

在幾何裏有兩類集。首先，我們時常談到某些幾何圖形的集的特性，例如平行四邊形對角綫互相等分，這一定理就關係到所有平行四邊形的集。其次，幾何圖形本身是圖形上的點所組成的集。因此，我們可以談及某已知圓的所有的點的集，某已知圓錐體内所有點的集，等等。

在代數裏，我們會碰到例如所有兩個變數的多項式的集，所

有二次方程式的集，某已知方程式的所有根的集等等。換言之，初等數學裏幾乎每部分都以這樣或那樣的方式與集論有關。

子　集

人們發現在數學中，集的概念十分有用。原因就是在於集的元可以有極其多樣的性質。同是一個用集來表示的命題，可以解釋爲一個關於幾何圖形的點的命題，或者爲一個關於自然數的命題，或者爲一個關於動物或植物的命題，甚至爲一個關於原子和分子的問題。集論的概念和定理有着廣泛的普遍性。我們將討論其中一些。首先，我們要熟習**子集**的概念。當考慮到一個不僅本身是個集，而且還是第一個較大集的一部分時，子集的概念就產生了。如果集B中每個元都是集A的一個元，我們就說集B是集A的一個子集。記爲：$B \subset A$。

以某中學爲例，二年級生的集是全校學生的集的一個子集。同理，這間中學全體學生的集是所有學生的集的子集。

在幾何裏，我們也時常處理某些幾何圖形的集的子集。例如，考慮下列各集：

(a) 集A包含所有四邊形，

(b) 集B包含所有梯形，

(c) 集C包含所有平行四邊形，

(d) 集D包含所有矩形，

(e) 集E包含所有正方形。

在這個表中，每個幾何圖形都是前者的特殊情形（梯形是四邊形的一種，平行四邊形又是梯形的一種，等等）。這就是說，

每個集是前者的一個子集：

$$A \supset B \supset C \supset D \supset E \tag{2·6}$$

同樣，下表中每一個集是前者的一個子集：

(a) 所有複數的集，

(b) 所有實數的集，

(c) 所有有理數的集，

(d) 所有整數的集，

(e) 所有自然數的集。

在許多情況下，爲了由一個已知的集中抽出某個子集，只需要用某種方法特別指明它的特性，或者給出一些額外的條件即可。譬如，在整數集裏加入條件 $n>0$，即可得出自然數子集。

宇　集

我們幾乎不會有機會同時討論所有複數的集與及海洋裏所有鯨魚的集（當然，我們不能排除這樣的可能性；複變函數論或許可能應用於研究鯨魚在水中的運動）。一般的情況是，在討論中所涉及的所有的集都是某一個固定集 I 的子集。在這種情況下，我們稱 I 爲**宇集**。

例如，在算術裏，宇集是所有正有理數的集，在代數裏，它是所有複數和代數函數的集，在數學分析裏，它是所有單實變量的實值函數的集，而在幾何裏，它是歐幾里德空間的所有的點的集。自然，任何幾何圖形都是歐幾里德空間所有的點的集的子集。

交　集

在數學的應用裏，我們時常要收集一些集的某些元，這些元在所收集的每個集中都存在。由這些元組成的一個新集，就叫這些已知集的**交集**或它們的（**集**）**積**。形成新的集的運算，則稱爲“將那些集**相交**或**相乘**”。因此，把集A、B、C、……等相交就得出一個新集，它只包含那些在每一個集A、B、C、……中出現的元。

“交集”一詞的起源是當我們把兩個幾何圖形的點的集相交時，就得出一般字面意義下的圖形的交點。圖 6 顯示一條直綫交一個圓① 於弦 AB，這條弦的點集便是直綫的點集與圓的點集的**交集**。

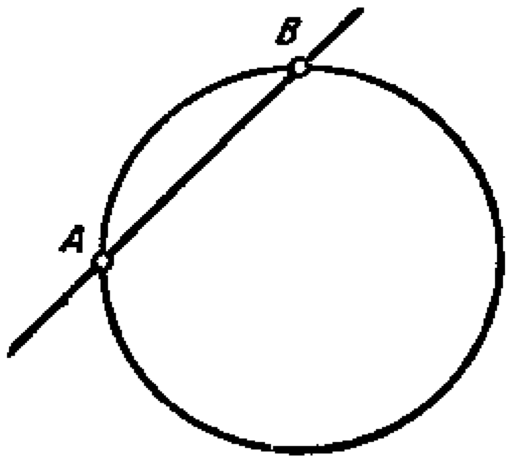


圖 6　一條直綫交一個圓於弦 AB

不過交集的概念不單應用於幾何圖形。譬如，假使某校的學生參加四項運動：足球、游泳、象棋和拳擊，每類參加者的集的交集就包含了所有全能的運動員，他們都懂得玩足球，游泳，拳擊和象棋等運動。

我們有時要取幾何圖形或數字的集的交集。比方，正方形的集是長方形的集與菱形的集的交集，直角三角形的集是三角形的

① 譯註：這裏的圓不僅包含圓周上的點，而且包含了圓內所有點。

集與一含直角的多邊形的集的交集，被 2 盡除的自然數集與被 3 盡除的自然數集的交集是被 6 盡除的自然數集。

集 A 和 B 的交集一般記作 AB 或 $A \cap B$。交集的運算的性質和乘數的運算相似，就是說，它滿足交換律和結合律：

$$AB = BA \tag{2·7}$$

以及

$$(AB)C = A(BC) \tag{2·8}$$

空集在交集時所担當的角色，類似於乘數時零扮的角色。事實上，對任何集 A，我們有等式

$$A0 = 0 \tag{2·9}$$

類似於等式 $a \cdot 0 = 0$

宇集類似於 1 所担任的角色，對 I 的任何子集 A，我們有等式

$$AI = A \tag{2·10}$$

類似於等式 $a \cdot 1 = a$

然而，集乘法中有些性質跟數字乘法不類似。例如，若 B 是 A 的子集，$B \subset A$，則我們有 $BA = B$。因為在這個情況下，B 所有的元（而且只有這些元）同屬於 A 和 B。

特別是對於任何集 A，我們有等式

$$AA = A \tag{2·11}$$

和　集

我們現在討論集的合併，即把幾個集總的合併成一個新的集。集 A，B，……等的和集是這樣的新集，這個新集只是由那

些至少在所討論的一個集中出現的元所組成的。兩個集A和B的和集通常記作A+B或A∪B。

必須記住，儘管某些元有可能在一個以上的所討論的集中出現，它們仍然只能在和集中出現一次，因此，如果所包括的集都是有限的，那麼就有可能出現這種情況，和集中的元的數目少於各個單獨集的元的數目之和。例如，設第一個集是在《歐根·奧涅金》中第一行出現的所有俄文字母的集，而第二個集是由這篇詩中第二行出現的字母組成。我們寫下第一個集，它由18個字母組成：

М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т,

Н, П, Р, В, И, Л (2·3)

第二個集由13個字母組成：

К, О, Г, Д, А, Н, Е, В, Ш, У, Т, З, М (2·12)

這兩個集的合併是23個字母的組合：

М, О, Й, Д, Я, С, А, Ы, Х, Ч, Е, Т,

Н, П, Р, В, И, Л, К, Г, Ш, У, З (2·13)

在這兩個集的交集中字母О，Д，А，Н，Е，В，Т，М只在和集中出現一次，因此在和集中只有23個字母而不是18+13=31個。

再舉另外一個例子，其中個別的（被併聯的①）集共有某些元。某班中所有學生的集是下列三個集的和集：

(a) 及格學生的集，

(b) 班中女生的集，

(c) 不及格男生的集。

---

① 譯註："被併聯的"爲譯者所加。

顯然，班裏每個學生至少屬於這三個集中的一個。然而，這些集有公共元：及格的女生屬於第一個和第二個集。

有時，合併也在一個集的無限個集合中進行。例如，令 A_n 表示所有以 n 爲分母的正分數的集：

$$A_1=\left\{\frac{m}{1}\right\},\quad A_2=\left\{\frac{m}{2}\right\},\ \cdots,\ A_n=\left\{\frac{m}{n}\right\},\ \cdots \tag{2·14}$$

集 A_1，A_2，……，A_n，……的和集是所有正分數的集，即全部有 m/n 類型的分數的集，其中 m 和 n 是自然數。

令 A_3 表示所有直角三角形的集，A_4 表示所有含直角的四邊形的集，A_5 包括所有含直角的五邊形的集，等等。那末這些集的和集 A 就包括所有含直角的多邊形。

和集亦在代數裏出現。如果 A 是方程式

$$f(x)=0 \tag{2·15}$$

所有的根的集，B 是方程式

$$\varphi(x)=0 \tag{2·16}$$

所有根的集，則方程式

$$f(x)\cdot\varphi(x)=0 \tag{2·17}$$

的所有根的集就是 A + B（這裏我們不計根的重數①）。

將集合併這一個運算有很多性質，類似於數的加法。有交換律和結合律：

---

① 譯註：一個多項方程式 $f(x)=0$ 有重數爲n的根 α，如果有 $f(x)=(x-\alpha)^n g(x)$，而沒有 $f(x)=(x-\alpha)^{n+1}h(x)$，其中 $g(x)$, $h(x)$ 是某個多項式。例如 $f(x)=(x-1)^2(x-3)=0$ 中，1 的重數是 2，3 的重數是 1。

$$A + B = B + A \qquad (2\cdot18)$$

以及

$$A + (B + C) = (A + B) + C \qquad (2\cdot19)$$

而空集在合併時則起着零的作用；無論所取的集A是什麼，下列等式成立：

$$A + 0 = A \qquad (2\cdot20)$$

不過宇集不再起數字加法中1的作用。對於任何集A。我們有

$$A + I = I \qquad (2\cdot21)$$

一般說，如果B是A的一個子集，則B + A = A。在特殊情況中，對任何集A，等式A + A = A成立。

集的加法和乘法服從分配律：

$$A(B + C) = AB + AC \qquad (2\cdot22)$$

爲了證明它們服從這個定理，我們一定要證明：等式左邊的任一元都在右邊出現，反之亦然。

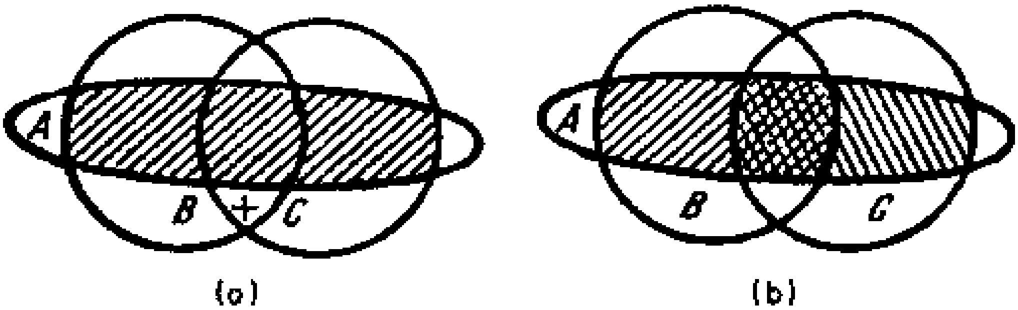


圖 7　等式(2·22)的說明

對這個定理進行嚴格的證明並不困難，但其中細節却有點冗長煩悶。因此，我們只用兩個圖形，簡單地說明等式(2·22)。圖7a的陰影部分是集A跟集B + C的交集，圖7b則顯示了A和B

及A和C兩個交集。由圖十分易見，等式(2·22)成立。此外，對集而言，有另外一個分配律，並不在數字運算中成立。它由下列公式表示：

$$A+BC=(A+B)(A+C) \tag{2·23}$$

根據公式(2·22)展開右邊，同時注意到 AB 和 AC 都是 A 的子集，即可簡單地證明公式；於是有：$AC\subset A$，$AB\subset A$。此外，$AA=A$，所以

$$AA+AC+BA+BC=A+BC \tag{2·24}$$

集的分解

一般而言，在一個和集中的被合併集會有公共的元。但是，我們有時會碰到這樣的一個集，它是由它本身的子集合併的，而其中任兩個子集都沒有公共元（或者，如一般所說，其中沒有兩個相交）。在這種情況下，我們說集A有一個**不相交子集的分解**。

在事物的分類中，時常出現分解爲子集的情況。例如：在編製圖書館目錄時，首先將書分爲文學類，政治和社會科學類，自然科學類等。之後，每一個所得的子集再細分爲一羣更小的子集：文學類分爲散文和詩歌，政治和社會科學類分爲哲學、政治經濟學等，自然科學類分爲數學、物理學等。這樣的細目分類方便於找尋任何所需要的書。

當然，同一個集可以有不同的方法分解爲不相交的子集。在同一間圖書館裏，當依照字母排列去編制索引時，首先把書分類爲作者姓名拼音以A爲首的一個子集，作者姓名拼音以B爲首的

另一個子集，等等。跟着，每一個子集又依作者姓名拼音的第二個字母再分，等等。

元的等價概念時常用於集的分解。首先必須對“x 元等價於 y 元”這句話的意思下定義，然後才能把所有等價的元合併成一個子集。不過並不是任意的等價概念對分解都用得上。舉例說，如果兩個人互相認識，我們可以說這兩個人等價。但也可能有這樣的情況：x 和 y 相識，y 和 z 相識，然而 x 跟 z 不認識。那末，我們必定把 x 和 y 放在同一個子集内（因爲他們相識），然後，z 也必定在其中（因爲他與 y 相識），於是我們發現在這個子集裏，有互不相識的人：x 和 z。爲了避免這種不希望有的情況，等價的概念必須滿足下列三個條件：

(a) 每一個元與其本身是等價的，

(b) 如果 x 元與 y 元等價，則 y 元亦與 x 元等價，

(c) 如果 x 元與 y 元等價，y 元與 z 元等價，則 x 元與 z 元亦等價。

可以證明，爲了能使A集分解爲含有互相等價的元的子集（而且不同的子集沒有公共元），那麼滿足這三個條件就是必要的也是充分的。

例如，我們可以說，如果兩個整數 x 和 y 的差是個偶數①。它們就是等價的。很容易證明，這個等價定義滿足所有的三個條件(a)－(c)。如果把所有互相等價的整數組成一個子集，也就是把所有整數的集分解爲兩個子集：偶數集和奇數集。

① 譯註：即是說 x 和 y 是等價的，如果它們同是奇或偶的。

集的相減

有了加法的概念，通常就能够找到減法的概念。集亦不例外。集 A 和 B 的差集是一個新集 A － B，其中出現所有屬於 A 而不屬於 B 的元。這裏不要求 B 一定是集 A 的一個子集。如果 B 不是 A 的子集，從 A 減去 B 可以化簡爲從 A 除去 A 和 B 的公共部分：

$$A - B = A - AB \tag{2·25}$$

例如，如果 A 是在圖 8 中第一個圓周內的點集，而 B 是第二個圓周內的點集，則其差是陰影部分的彎月形的點集（除去弧 MN）。如果 A 是某校某班所有學生的集，B 是在該校就讀的所有女生的集，那末，A － B 就是那一班所有男生的集。

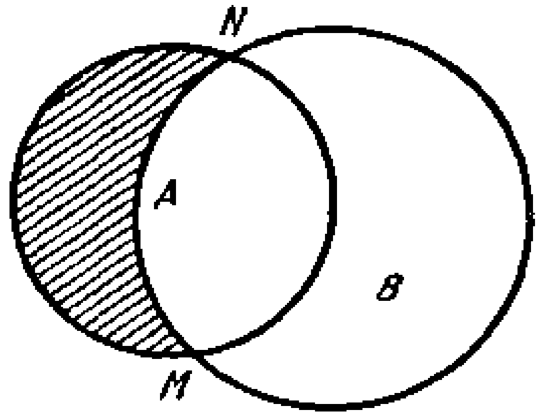


圖 8

如果 B 是 A 的子集，則 A － B 稱爲集 B 對 A 的**餘集**，記爲 $B_{A'}$（當然，相對於含有 B 集的不同的 A 集同一個 B 集便有不同的餘集）。例如，對整數集而言，偶數集的餘集是奇數集。在矩形集裏，正方形集的餘集是兩鄰邊不等的矩形集。另一方面，在菱形集裏，同樣的正方形的集，其餘集就是對角綫不等的菱形的集。

如果所討論的有關集都是某宇集 I 的子集，那麽談到 B 的餘集時，我們通常理解爲 B 對 I 的餘集。這時，我們寫作 B' 而不用 $B_{I'}$。

由於在幾個被加集中出現的元只能在其和集中出現一次，又由於不包含於被減集內的這樣一個集才可以被減去，有好幾條算術公式就不再適用於集的減法。比如，有時會有

$$(A+B)-C \neq A+(B-C) \tag{2·26}$$

事實上，如果三個集恰好重合，A = B = C，那麼上式的左邊是個空集，而右邊卻等於集A。

集的代數

我們已經熟悉集的運算以及它的一些特性。除此之外，我們將討論一系列其他的性質。現在把所有集運算的一般性質表列如下（表中 0 表示空集，I 表示宇集，A′ 表示 A 對宇集的餘集）：

[1] $A \subset A$

[2] 如果 $A \subset B$，同時 $B \subset A$，則 $A = B$

[3] 如果 $A \subset B$，同時 $B \subset C$，則 $A \subset B$

[4] $0 \subset A$

[5] $A \subset I$

[6] $A + B = B + A$

[7] $AB = BA$

[8] $A + (B + C) = (A + B) + C$

[9] $A(BC) = (AB)C$

[10] $A + A = A$

[11] $AA = A$

[12] $A(B + C) = AB + AC$

[13] $A + BC = (A + B)(A + C)$

[14] $A + 0 = A$

[15] $AI = A$

[16] $A + I = I$

[17] $A0 = 0$

[18] $A \subset B$ 關係與 $A + B = B$ 或 $AB = A$ 是等價的

[19] $A + A' = I$

[20] $AA' = 0$

[21] $0' = I$

[22] $I' = 0$

[23] $(A')' = A$

[24] $A \subset B$ 關係與 $B' \subset A'$ 關係是等價的

[25] $(A + B)' = A'B'$

[26] $(AB)' = A' + B'$

與我們在普通代數中對數字所進行的運算一樣，利用這些性質[1—26]，就可以對集進行運算。事實上，比之普通代數，某些公式有更簡單的形式。例如，二項定理可以化簡爲以下等式：

$$(A + B)^n = A + B \qquad (2\cdot27)$$

這個可以用性質[11]立即驗證。

我們不打算用像以前處理[12]一樣的方式對[1—26]一一加以證明。事實上，他們都可以用圖形（范恩圖）去驗證。只是[25]，[26]的證明較爲複雜些。

誠然，要記熟性質[1—26]並不容易。但這並不必要，而只要熟悉兩種基本運算就够了：把集相加以及取餘集。這兩種運算必須滿足下列三個關係：

$$A + B = B + A \qquad (2\cdot28)$$

$$(A+B)+C=A+(B+C) \tag{2·29}$$

$$(A'+B')'+(A'+B')'=A \tag{2·30}$$

現在可以用下列公式對 AB 乘法運算以及 $A\subset B$ 牽制關係下定義：

$$AB=(A'+B')' \quad (\text{據定義}) \tag{2·31}$$

$$A\subset B \text{ 意思就是 } A+B=B \tag{2·32}$$

那麼，所有的性質〔1—26〕都可以由公式(2·28)—(2·32)推得。

我們現在要指出下面一個奇特的"對偶定理"。在〔1—26〕的每一個性質中，若調換符號

$\subset$ 和 $\supset$

0 和 I

$+$ 和 $\cdot$

則每次調換的結果就得到上述各種性質之一。譬如，用此法處理性質〔6〕，結果得到性質〔7〕；如果處理性質〔12〕，則得到性質〔13〕，等等。

由此可知，每當某定理能用性質〔1—26〕證出時，由調換有關的符號而得到的對應"對偶定理"也是正確的。

布爾代數

除了集外，我們也會遇到其他的數學對象，對於它們具有〔1—26〕性質的加、乘運算是有定義的。這類數學對象首先由英國數學家布爾在 1847 年加以研究。因此這些系統稱之爲**布爾代數**。

一個有趣的布爾代數的例子是數 30 的所有因子：M = {1,2,

3, 5, 6, 10, 15, 30}。這裏“加法”的運算就是形成最小公倍數，而“乘法”則是形成最大公約數。譬如 $2\oplus 5=10$，$6\odot 15=3$（我們把加和乘的符號都畫上圈子，爲的是要把它們同尋常的數字加法和乘法區別開）。關係式 $a\subset b$ 的意思是 a 是 b 的一個因子。0 元的角色由數 1 充任，而 I 元的角色則由數 30 充任。作爲除數 a 的餘集，我們必定要取數 $a'=30/a$。例如 $10'=3$。

當然，無需驗證所有的性質［1—26］都保持有效；就像我們在前面已經提過的，只需證明性質(2·28)—(2·32)能够滿足這個系統就可以了。

3. 集的基數

集的相等

到目前爲止，我們已經討論過有限集和無限集共有的性質。現在讓我們把注意力放到無限集特有的那些性質上。我們已經在文靜的離子的故事中知道這些性質跟有限集非常不同——在有限集不可能的事，竟然能在無限集裏變得可能。

第一個我們要討論的問題是決定兩個無限集何時才算相等。就最廣泛類型的有限集而言，總能够指出那個集包含較多數目的元。對無限集來說，這個問題可就複雜得多了。例如：在自然數集和有理數集之間、有理數集與實數集之間到底哪一個集比較大？是否整條直綫上的點比一個綫段上的多？一個正方形内的點，又是否比一條直綫上的點多？

這些問題初看之下似乎很簡單。無論如何，自然數集只是有理數集的一部分，而一個綫段也只是直綫的一部分。因此，似乎很明顯：自然數比有理數少，而綫段上的點亦比整個正方形爲少。但事實並非如此。當我們從有限集轉到無限集時，由前者的研究所得的定律並不能完全保持正確；例如，像“部分少於全體”的定律就是如此。首先，試圖把一個是另外一個的一部分這個標準用做無限集相等的基礎是注定要失敗的。舉例來說：在正方形和整條無限的直綫中，哪個裏面有較多的點？畢竟在直綫中不能

包含着正方形，而在不折斷的情况下，亦不能把直綫放在正方形內。當然，我們可以把直綫截斷成與正方形的邊一樣長的綫段，然後把綫段放在正方形內，使得它們互不相交。但我們怎麼知道我們能够找出一個方法，去把一個正方形切開，而使得每一部分都能沿着直綫排列而沒有重叠？何况更有多少個無限集，它們彼此都不是對方的一部分！在一個平面上的正方形所組成的集，以及在同一平面上的圓的集甚至連一個公共元也沒有。那麼我們怎樣比較它們呢？我們又怎樣知道宇宙裏的氮原子是否比氧原子多？

我們現在已經提出了問題。首先探討一下，什麼條件下才可以說：一個集與另一個集包含同樣多的元。換句話說，我們要研究在什麼條件下，兩個無限集有元的“相同的度量”的元①。

在舞池中

對有限集來說，比較問題是很容易解決的。爲了要知道兩個集的元的數目是否相同，只需將他們計數。如果我們得到相同的數目，這就表示兩個集大小一樣。但這個步驟並不適用於無限集；因爲開始數一個無限集的元的數目時，我們就得担着一輩子都不能完成的風險。

而且，計數這個方法，即使對有限集說，通常也不是很方便的。例如，當我們走進一個舞廳時。我們怎樣才能知道這裏的

① 譯註：在集論中，子集與宇集的比較跟集中元數目的比較是兩個不同的概念。“部分少於全體”只能對前者適用，而完全不適用於後者。

男、女孩子的數目是否相同？當然，我們可以叫所有的男孩子都站在一邊，女孩子站在另一邊，然後對兩組人計數。但是這樣做是多餘的也是困難的。首先我們只想知道男女的數目是否相同，對他們究竟有多少並沒有興趣。而且，這些青年人是來跳舞的，不是站在一旁來等候我們計數的。

那麼，怎麼做呢？我們滿足他們的願望，請樂隊演奏一隻人人都會跳的曲子。那末，男孩子們就會去請女孩子們跳舞……我們的問題也就解決了——如果發現所有的男、女孩子都在跳舞，即所有的年青人都成雙成對，那麼，很明顯，舞池裏的男、女孩子一樣多。

我們可以利用同樣的方法，去找出一間戲院中的觀衆的數目是否與座位數目相同。如果在開場後，所有座位都有人，通道上也沒有站立的人，而且每一個坐位上都坐着一個人，那麼，我們就可以肯定觀衆與座位的數目一樣多。

當人們在雨天行街時，人數同雨衣數一樣；因爲每人只穿一件雨衣，而且沒有人不穿雨衣冒雨行街。

此消彼長

我們已經説過，怎樣可以不用計數而知道兩個有限集具有一樣多的元。我們也可以將這個方法應用於無限集。不過，這裏我們不能再靠樂隊幫助了。我們自已要將兩個需要比較的集中的元分配成對。

假設我們有兩個已知的集 A 和 B，在它們之間能建立起一個一一對應的條件是這些集的元都已組成了對子（a, b），其中，

(1) 元 a 屬於集 A，元 b 屬於集 B；

(2) 這兩個集中每一個元，都出現於一對而且只出現於一對中。

例如，如果集 A 包含了所有在舞池中的男孩子，而集 B 則包含所有的女孩子，那末對子 (a, b) 就由正在共舞的男女所組成。如果集 A 包含戲院中所有的觀衆，而集 B 包含其中所有的座位，則對子 (a, b) 就是由觀衆和他的座位所組成。最後，如果 A 是街上行人的集，B 是他們的雨衣的集，則對子 (a, b) 是由行人及其雨衣所組成。

當然，並不是每個集與集之間的對應都是一對一的。如果集 A 包含世界上所有的樹，而集 B 則包含了這些樹上所有的果子，那麼我們可以在這兩個集間建立如下的對應：我們把樹對應於長在樹上的果子。但這並非是個一一對應：在某些樹上有很多果子生長，而有些樹木根本不生果子，於是有些元 a (樹) 會在很多對子中出現，而另外一些元 a 則不在任何對子中出現。

對於兩個有限集，說他們之間有一個一一對應，或它們有相同數目的元，意思都是一樣的。當康托爾決定用同樣方法去比較無限集時，集論就有了根本性的轉折。

換句話說，當康托爾說兩個集 A 和 B (可能是無限的) 有相同數目的元時，就是指能在它們之間建立一個一一對應。

數學家通常不說："集 A 和 B 有相同的數目"；他們說："A 和 B 有相同的基數"，或"集 A 和 B 是等價的"。

因此，對無限集而言，基數這個名詞同有限集的"元的數目"一詞是同樣的東西。

除康托爾外，捷克學者波爾查諾亦獨立地得出一一對應這個

概念。可是，由於碰到了困難，他没有進一步去研究這個概念。下面我們將看到，一旦接受了用一一對應作爲比較無限集的原則，就不得不放棄許多已經十分熟悉和喜歡用的思考習慣。

部分能否等於全體?

我們必須去掉在數學發展初期所得出的一個教條：**部分少於全體**。對於有限集來說，無可爭辯這句話是正確的。但當我們用於無限集時，它就失去力量了。讓我們回憶一下怪酒店的總管怎樣將宇宙動物學家們移去偶號房；他將所有 n 號房的住客搬到 2n 號房。換句話來說，他根據下列法則去遷移他們：

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & 3 & \cdots & n & \cdots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & \\ 2 & 4 & 6 & \cdots & 2n & \cdots \end{array} \qquad (3\cdot 1)$$

但是這個法則就在自然數集

$$1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots \qquad (3\cdot 2)$$

和這個集的一部分——偶數集

$$2,\ 4,\ 6,\ \cdots,\ 2n,\ \cdots \qquad (3\cdot 2a)$$

之間建立起了一個一一對應。

可是我們同意這樣的假設：如果能在兩個集間建立起一個一一對應，那這兩個集就包含了同樣多的元。這表示自然數集跟它的一個子集——偶數集——包含同樣多的元!

用完全相同的方法，我們可以在自然數集與具有下列形式的數字集

$$10,\ 100,\ 1000,\ 10000,\ \cdots \qquad (3\cdot 3)$$

之間建立起一個一一對應。

爲此，只需把自然數 n 對應於數字 10^n 即可：

$$n \longrightarrow 10^n \tag{3·4}$$

這樣就建立起所要求的一一對應。用同樣方法，我們可以在自然數集與自然數平方的集之間，

$$n \longrightarrow n^2 \tag{3·5}$$

與自然數的立方的集之間，

$$n \longrightarrow n^3 \tag{3·6}$$

建立起一一對應，以此類推。

一般說，在自然數集和它的任意一個無限子集之間都可以建立起一個一一對應。爲此，我們只要將這個子集中的數字寫成一個序列就行了。

可 數 集

我們稱與自然數集有同樣多的元的集爲**可數集**。換句話說，如果一個集是無限的，而它的元可以用自然數計數這個集就稱爲可數的。例如：偶數集，奇數集，質數集……，概括說，自然數集中任意一個無限子集，都是可數集。

有時，我們要頗費心思，才能證明這個或那個集是可數的。取整數（正和負）集作例：

$$\begin{array}{l} \cdots,\ -n,\ \cdots,\ -3,\ -2,\ -1,\ 0, \\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ \cdots \end{array} \tag{3·7}$$

如果我們從某個指定的位置開始數的話，我們會發覺這種數法不可能完成；因爲所有排在這個指定位置之前的數字都沒有數

過。爲了不遺漏任何數字，我們必須把這個集分兩行寫：

$$\begin{matrix} 0, & 1, & 2, & 3, & 4, & 5, & 6, & \cdots \\ -1, & -2, & -3, & -4, & -5, & -6, & -7, & \cdots \end{matrix} \qquad (3\cdot8)$$

同時，按列去數。這裏指定 0 爲 1，－1 爲 2，1 爲 3，－2 爲 4…，等等。換句話說，零和所有正整數都用奇數去數，而所有負整數則用偶數去數。這與酒店總管把集郵家安置在已經住滿太空動物學家的酒店裏的方法相似。

但是證明整數集是可數的還較容易，而對有理數集的同樣證明就難得多了。有理數畢竟是很稠密地分佈的：在任意兩個有理數之間，我們仍然能够找出無限多個有理數。所以究竟我們應該怎樣去數它們實在令人費解；似乎在任意兩個數之間，我們仍然要數一個無限集，而且這個步驟永不完結。而事實上人們並不可能把有理數寫成其中每個數字都比排在它前面的一個大的這樣一個序列。

然而，如果不計較序列中數字的大小，就可以成功地去數出它們。首先寫出所有分母爲 1 的正分數，然後是所有分母爲 2 的正分數，再就是分母爲 3 的，等等。我們得到一個如下的表：

$$\begin{matrix} \frac{1}{1}, & \frac{2}{1}, & \frac{3}{1}, & \frac{4}{1}, & \frac{5}{1}, & \cdots \\ \frac{1}{2}, & \frac{2}{2}, & \frac{3}{2}, & \frac{4}{2}, & \frac{5}{2}, & \cdots \\ \frac{1}{3}, & \frac{2}{3}, & \frac{3}{3}, & \frac{4}{3}, & \frac{5}{3}, & \cdots \\ \frac{1}{4}, & \frac{2}{4}, & \frac{3}{4}, & \frac{4}{4}, & \frac{5}{4}, & \cdots \end{matrix} \qquad (3\cdot9)$$

$$\frac{1}{5},\ \frac{2}{5},\ \frac{3}{5},\ \frac{4}{5},\ \frac{5}{5},\ \cdots$$

……

很明顯，每個正有理數都會在這個表中出現，而且不只一次。例如，數字 3 就會以 3/1，6/2 和 9/3 的分數形式出現。

現在開始計數。爲此，我們先重溫一下怪酒店的總管怎樣爲無限間酒店的客人找到了地方。爲了達到目的，他利用正方形排法去數。我們如法炮製，但是有個麻煩——需要除去一些分數（例如，既然 1/1 被賦予數字 1，我們就要删去 2/2， 3/3 等分數，因爲它們都代表同一個數字）。於是得出下列正有理數的排法：1，2，1/2，3，3/2，2/3，1/3，4，4/3，3/4，1/4，…。

因此，我們能够數出所有的正有理數。那麼現在就容易解釋應該怎樣去數所有的有理數（正與負）了。需要把它們分成兩個表，用偶數去數其中一個表，而用奇數去數另外一個。（記得爲零保留一個位置。）

一般來說，如果我們取可數個可數集的和集，我們仍然得出一個可數集。我們可以用同樣的正方形排法去證明。

代 數 數

直到目前爲止，所有我們列舉的例子，實際上都是一個定理的特殊情況。這是因爲在那些例子中，集的元都可以用有限個自然數來指定。例如，任意整數 n（除了零外）都可以寫成下列形式：

$$(-1)^k|n| \qquad (3\cdot10)$$

其中$|n|$是這個數的絶對值，並且如果$n<0$則k是1，如果$n>0$則k是2。那末整數n就由一對自然數（k，$|n|$）所決定。用同樣的方法，我們可以將任何一個有理數寫成最簡分數m/n，或者也可用自然數對子（m，n）去表示同樣的東西。

下面列出有關的一般定理：

定理 3·1　如果一個集內的每一個元都可以用一個有限的自然數組來指定，那這個集就是有限的或可數的。

證明定理3·1的基本思想和酒店總管用以解決最棘手的問題的方法十分相似，不過，細微地方可要複雜得多。

我們首先取出所有質數2，3，5，7，11，13，等等，把它們寫作p_1，p_2，…，p_n，…。如果集A的元x是由一組自然數$\{m_1, \cdots, m_n\}$來決定的，那麼，我們讓它對應自然數

$$N_x = p_1^{m_1} \cdots p_n^{m_n} \tag{3·11}$$

根據自然數分解爲質數乘積的唯一性定理，集A中的不同元要對應不同的自然數。所以列出$x \to N_x$，就是在集A和自然數的一個子集之間建立了一個一一對應。

以後我們還會證明任何自然數的無限子集都是可數的①，因此，在綜合了這個事實以及上述結果後，我們可以看出：集A或者是有限的，或者是可數的。

例如，借助於這個定理，可以證明，所有代數數的集是可數的。

代數數是整數係數a_0，…，a_n的代數方程式：

---

① 譯註：其實已經在頁42證明了。

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (3\cdot12)$$

的根。例如，$\sqrt[4]{5}$是一個代數數，因爲它是方程式

$$x^4 - 5 = 0 \qquad (3\cdot13)$$

的一個根。

不是代數數的數叫做**超越數**。

每個 n 次方程式只有 n 個根①。所以任何代數數都是由一組整數

$$\{k,\ a_0,\ a_1\cdots,\ a_n\} \qquad (3\cdot14)$$

所决定的，其中 a_0，…，a_n 是方程式 (3·12) 的係數，k 是根的指標，數 a_0，…，a_n 可以取任意整數值，而 k 則是 1 與 n 之間的自然數。如果我們現在應用定理 3·1，我們可以看出，代數數的集是可數的②。

不 等 集

我們已經解釋了“兩個集有同樣多的元”的意思是什麼。現在我們來解釋，“一個集含有比另一個集更多的元”這句話究竟是什麼意思。這一條對有限集來說是不用一一數數的辦法就很容易弄清的。讓我們回憶一下那個有關舞池的例子。在樂隊奏起音樂後，男孩們已經邀請女孩們跳舞，那時如果仍然有些男孩子倚牆

① 譯註：這裏的證明是對所有的代數數（不論是實數的還是複數的）而言。由於實代數數集是代數數集的一個無限子集，所以如果我們考慮實代數數集時，它也是可數的。

② 原註：要求數 a_0，…，a_n 是整數而不是自然數，這不會引起任何問題，因爲整數也是可數的。

而立，那麼很明顯，是男孩子多了；反過來說，如果我們看見有些女孩子可憐兮兮地望着她們的朋友跳舞，很明顯，是女孩子多了。

(a)

(b)他沒有舞伴

圖 9

在這些例子中，我們做了以下的事：我們試圖在第一個集和第二個集的一部分之間建立起一個一一對應。如果成功，則第二個集就比第一個有較多的元。例如應用這個方法，可以證明，海洋裏的魚比地球上的原子少（雖然這兩個集都是有限的，但幾乎都不可能把它們數出）。可以這樣地證明它：讓每條魚對應於組成它的身體的原子的其中一粒。這就在所有魚的集與及地球上所有原子的集的一部分之間建立了一個一一對應。

可惜，這個簡單的步驟對無限集不適用。事實上，我們剛指出過一個集，它可以跟它的一部分有同樣多的元。因此，我們不

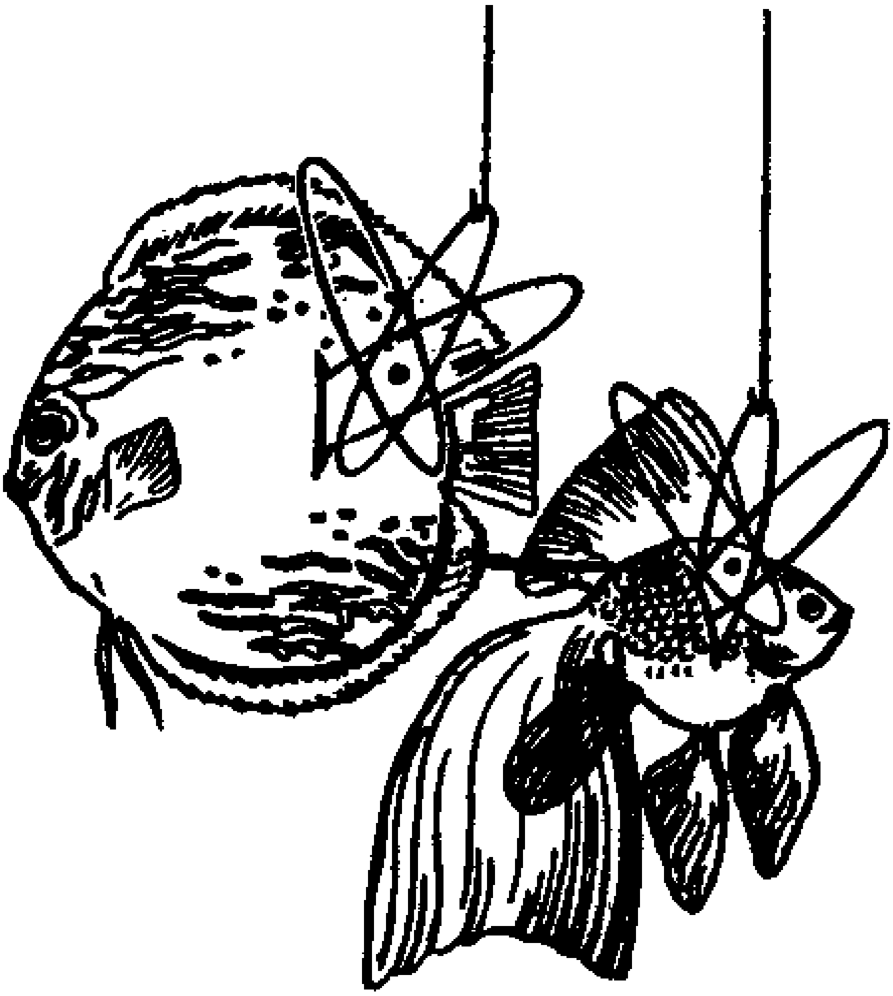


圖 10 從每條魚中取出一粒原子

能只根據集 A 與集 B 的一部分有相同的數目的元，就下結論說，集 A 的元比集 B 的少。

如果把我們的要求放寬，即，如果我們能够在集 A 和集 B 的一部分之間建立一個一一對應，則集 B 就有**不少於**集 A 的元。我們可以證明，這個關係具有不等式的所有基本性質：

（1）每個集 A 都有不少於它自己的元。

（2）如果集 A 有不少於集 B 的元，而集 B 有不少於集 C 的元，則集 A 就有不少於集 C 的元。

(3) 如果A有不少於B的元，而B有不少於A的元，那它們就有一樣多的元（即是，我們可以在這兩個集的元之間建立一個一一對應）。

有可能集B有不少於集A的元，而這些集並不等價。換言之，在集A和集B的一部分B_1之間，有可能存在一個一一對應，而在A和整個B之間則沒有一個一一對應能存在。這就是：B有比A多的元的情況。

可數集——最小的無限集

我們已經說過，自然數的任意無限子集都是可數的。意思是：不可能有一個基數比可數集的基數更少的無限集。現在要證明：任何無限集都包含一個可數子集。我們可以由此而得出結論：可數集的基數不大於任何無限集的基數，即是說，這個基數是最小的無限基數。

我們可以用以下方法從一個無限集A中選出一個可數子集：因爲集A是無限的，而且一定不是空集，我們就可以取任意的元x。很明顯，取出元x後，我們並沒有取盡A集的元，我們可以繼續取出第二個元x_1，以後，再取出第三個元x_2等等。這樣我們從集A中抽出了一個有指標的元的可數子集X：

$$X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\} \tag{3·15}$$

將論據稍作更改，可以使得抽出一個可數子集後，還餘下一個無限集。我們所需要做的，只是把X中附有偶指標的那些元放回A內。其結果是抽出了一個可數子集：

$$Y = \{x_1, x_3, x_5, \cdots\} \tag{3·16}$$

而集的剩餘部分依然包含一個無限子集：$\{x_2, x_4, x_6, \cdots x_{2n}, \cdots\}$（可能還有其他元）。

證明下列各定理也不困難：

定理 3·2　一個無限集在附加上一個可數集後，其基數並不改變。

定理 3·3　從一個不可數集中抽出一個可數子集後，其基數並不改變。

定理 3·2 和 3·3 再次說明：可數集是最小的無限集。

不可數集

到目前爲止，所有我們作出的集都是可數的。這樣自然產生一個問題：是否所有無限集都是可數的。果然如此，則數學家就省心了：假如所有無限集都有一樣多的元，就無需對無限作進一步的分析了。但實在情況比這複雜得多；不可數集是存在的，而且它們的基數超過一個。我們已經熟悉了一個不可數集——一條直綫上所有點的集。然而，與其談及這個集，我們不如先討論一個同它有密切聯系的集——在那個能够佔用怪酒店房間的方法中的集 A。

必須注意，通常證明一個集是不可數的並不容易；而想證明一個集是可數的，只要想出一種對其中元做計數的方法。如果要證明一個集是不可數的，那就一定要證明不存在這種計數的方法，也就是說，不論我們用何種方法，集中一些元都會被漏數。康托爾想出了一個很聰明的方法，稱之爲對角綫法（其實，我們在 19

頁已見過它），可以證明集的不可數性。康托爾的證明方法，可以用下面關於文靜的雛子的故事來弄清楚。

永遠不能進行的人口普查

到目前爲止，我們已經談過怪酒店的總管的成就——關於他怎樣在已住滿客人的酒店中，替無限個新客人安排房間，後來他又如何更進一步安插來自無限多個這類怪酒店的客人。不過，有一次，就是這位天才也失敗了。

一道命令從管轄所有宇宙酒店的專員傳下來，他要求盡快把酒店房間所有不同的佔用方法滙編成册。要用表格的形式表示出來，其中每行反映每種不同的佔用方法。住了人的房間用1表示，空的房間則用零。例如，序列

$$101010101010\cdots \tag{3.17}$$

的意思是所有奇號房都住了人，而偶號房則是空的。序列

$$11111111111\cdots \tag{3.18}$$

的意思是整間酒店都住滿了，而序列

$$000000000000\cdots \tag{3.19}$$

則表示一個收入上的損失——所有房間都是空的。

總管爲了減輕過於繁重的工作，想出了一個簡單方法。他吩咐在每層樓值班的人，把只屬於他管理的房間的佔用方法列出一個表來。並要求表中沒有任何兩種方法是相同。數日後，這些表都呈交給總管，而他把它們合併成一個表。

我問總管說："你肯定這個表是完滿的嗎？再没有別的佔用房間方法嗎？"

“我不知道。”他答道。“已經列出了無限多種方法，但我不懂得怎樣去試驗這張表的完滿性。”

忽然間我靈機一動（順便提一下，或許我高估了自己的才能，但我跟達蘭托教授關於無限集的討論，尚未全部在我腦海中消失）。

“我保證這張表不是完滿的。我能够找出一個肯定是被漏數的方法。”

“我同意這個表可能是不完滿的。但你不能找出一個沒有列入的方法；畢竟，這裏已經列出無限種方法了。”

我們爲此打賭。我提議用這樣的方法去贏取賭注：把每一個序列釘在與之對應的房門上（讀者們會記得，列出的方法與酒店房間數一樣多①）。然後，我以一個很簡單的方式進行工作。當走到第一間房間的門口時，我見到與它對應的序列出現的是數字0。我立即在拍紙簿上寫上數字1；這就是我要做的序列的第一個位數。

當我走到第二個房間的門口時，我並不對那個序列的第一個位數感興趣；因爲我已經在我的序列上有了第一個數。因此，我把我的注意力轉移到第二個數目上。見到它是1時，我就在我的簿上記下0。同樣，當我見到第三間房間釘上的序列的第三個數也是1時，我再次在我的簿上記下0；一般地說，當我發現第n個序列中第n個數是0時，我就在我的簿上第n個位記下1，但如

① 譯註：凡是能夠列出的東西一定是有限或可數的。現在據說有無限個序列，因此序列的個數是可數的。所以與酒店房間的基數一樣多。

果第 n 個序列的第 n 個數是 1，我就要記下 0。

當我走遍了整間酒店所有的房間後①，一個 0 和 1 的數列已經在我的簿上記下了。

在去到總管的辦公室時，我說：

“就在這裏，欣賞一下這個漏了的序列吧。”

“而你怎會知道它是漏了的？”

“它不可能是第一個，因爲它有不同的第一個數。它不能是第二個，因爲它有不同的第二個數。一般地說，它不會是第 n 個，因爲它有不同的第 n 個數。”

我贏了，於是我得到免費隨時入住酒店的特權。

從而，立即很清楚地說明，無論你選取哪個序列的可數集，總會有一個序列不在表內（你隨時能够把它們掛在房門上）。這表示佔用酒店的方法的集是不可數的，因而交給總管做的工作，是一件不能落實的工作。

我們決定發出一個電報，講講這個情況。我要指出，怪酒店所用的電報本身也是與衆不同的——它可以發出由點和畫的無限個集組成的電報（更準確地說，一個可數集），例如，電報可能有這樣的形式：

—·——·———· 等等　　(3·20)

我很快就了解了下列事實：所有這種電報的集也是不可數的；無論如何，你可以用零和 1 去代替點和畫，於是，具有可數個信號的電報，同所有佔用酒店的方法的集之間，根本沒有分別。

---

① 原註：唔，他用去多少時間？

發出電報後，我就與酒店總管道別，然後起程前往銀河RGC—8067，在那裏，我要進行一次天體位置的測量。

連續統（閉聯集）的不可數性

現在可以毫無困難地證明直綫上所有點的集是不可數的。由於綫上每點都對應一個實數，我們可以代之而討論所有實數的集，反之亦然。

所有實數都可以用無限十進小數的形式給出：

$$a.a_1a_2a_3\cdots a_n\cdots \qquad (3\text{-}21)$$

有些甚至可以有兩個展開式，例如：0.500000…和0.4999999…都代表同一個數字。爲了簡便起見，我們將用有許多零的展開式。

假設我們用了某些方法，已經能够排列出所有的實數。爲了證明這是不可能的，只需證明有些數字沒有被排列上。我們採用文靜的離子的步驟以下列形式進行：

我們首先寫下0，隨後是小數點。然後取出我們的排列的第一個數字，考察它在小數點後第一個位置(即十分位)。如果它不是1，我們就在想作出的數字的小數點後第一個位上寫下1；但如果它是1，我們就在小數點後寫2。之後，我們取出我們的排列的第二個數字，同時考察它在小數後的第二個位置，同樣如果這個數字不是1，就在我們的數字的百分位上，寫下1，如果它是1，就用2。用這種方法繼續下去，每次都考察我們的排列的第n個數字中的第n個小數位。作爲這些操作的結果，我們得出了某些數字，例如：

$$N = 0.1121211\cdots \qquad (3\cdot22)$$

很明顯，這個數字不會是那些被排列過的數字之一：它不同於第一個小數位中的第一個數字；不同於第二個小數位中的第二個數字；也不同於第 n 個小數位中的第 n 個數字，等等（比較 52 頁）。

爲了使讀者更清楚我們如何決定我們的數字跟所有已經排好的都不同，假設在已給出的排法中，最先的五個數字是：

$$\begin{array}{r} 4.27364\cdots \\ -1.31226\cdots \\ 7.95471\cdots \\ 0.62419\cdots \\ 8.56280\cdots \end{array} \qquad (3\cdot23)$$

於是，那個不在排列中的數字要由下列小數位開始：

$$0.12121\cdots \qquad (3\cdot24)$$

當然，這不是唯一不在排列中的數字（我們可以把所有不是 2 的小數位數用 2 代替，而 2 則用 7 代替，或者選擇別的法則）。但是我們只需要確定存在着一個不在排列中出現的數字，就可以顯示假設的實數排列是不可能存在的。

超越數的存在

如果有些數字並不是下列形式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \qquad (3\cdot25)$$

的任何整係數方程式的根，這些數字被稱爲**超越數**①。

而是這些方程式的根的數字則稱爲**代數數**。

在數學的歷史上，在一段長時期內都只涉及代數數，例如 7/15，$\sqrt[5]{10}$，$\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}$ 等等。法國數學家劉維爾做出了很大的努力才於 1844 年發現了一些超越數。到了 1882 年，林德曼證明了 π 是超越數。這是數學界的一件大事，跟着而得出的結果是：化圓爲方是不可能的。這時，人們突然發現以前在數學上每一步都遇到的代數數其實是很稀少的，而那些很難才作出來的超越數，才是常見的數字。我們已經知道，代數數只組成一個可數集；但我們剛才證明過實數集却是不可數的。這意味着實數集同代數數集的差集，即超越數集，一定是不可數的。

在 1873 年康托爾給出了超越數存在的證明，這震撼了整個數學界。事實上，康托爾只是用一般的推理就能够論證了超越數的存在，而不需要作出一個具體的例子。但康托爾證明的優點同時也是它的缺點。我們不能根據康托爾的論據，推導出一個法則去作出那怕只是一個超越數，或者講出一個諸如 π 或 $2^{\sqrt{2}}$ 這類數的超越性的試驗。正如數學家所説的，他的論據只構成了一個純粹存在性的證明。

長、短綫段都有同樣數目的點

除了那些對無限集的特性非常熟悉的讀者外，任何人對“一公尺長的綫段和一公里長的綫段哪個有較多點?”這個問題一定會毫無疑問地回答：一公里長的綫段有較多的點，它不是長了 1000 倍嗎？然而到目前爲止，讀者們可能已經了解，要小心避免作出

① 譯註：這個定義包含了實的和複的超越數。

不加思索的斷語——無限集的性質與我們在日常生活所得出的想法太不相同了。

實際上，不論長或短的綫段都有同樣多的點！換句話說，人們可以在這兩條綫段上的點之間建立起一個一一對應。圖 11 畫出了最簡單的做法。

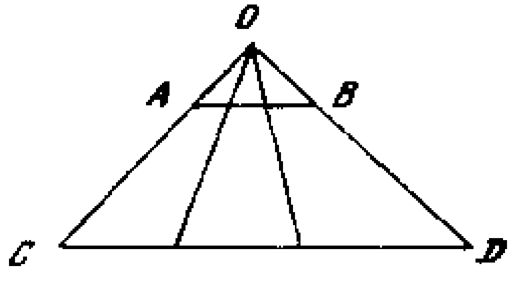


圖 11

對於這樣的想法實在難以自圓其說：一百萬光年長的路竟與一個原子核半徑所有的點一樣多！

更出乎意料的是，整條無限長的綫甚至也不比一條綫段上的點多，也就是說，可以在直綫上的點集與綫段上的點集間建立一個一一對應。

我們甚至不需要整條綫段，可以放棄它的兩個端點（即是，用開區間）。從圖 12 中可以淸楚地看到怎樣在區間和直綫間建立一個一一對應。很明顯，這個區間內每一點都對應於直綫上的正好是一個點，而直綫上每一點也在區間內有一個對應。

而且這對應也可以借助一條正切曲綫（函數 $y=\tan x$ 的

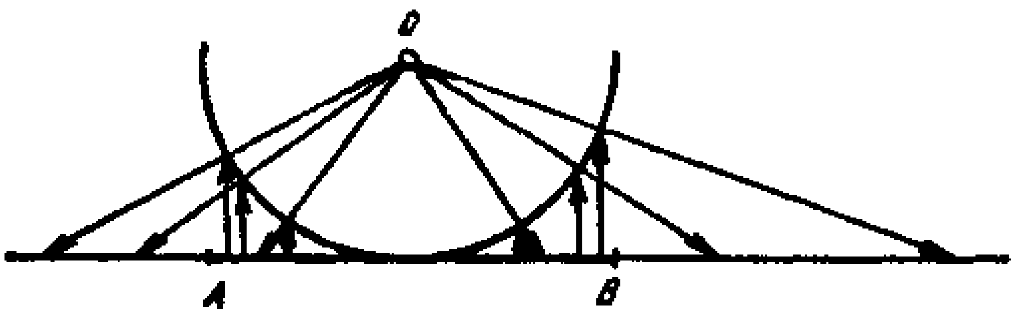


圖 12

圖形）用另外一個方法去建立（圖 13）。

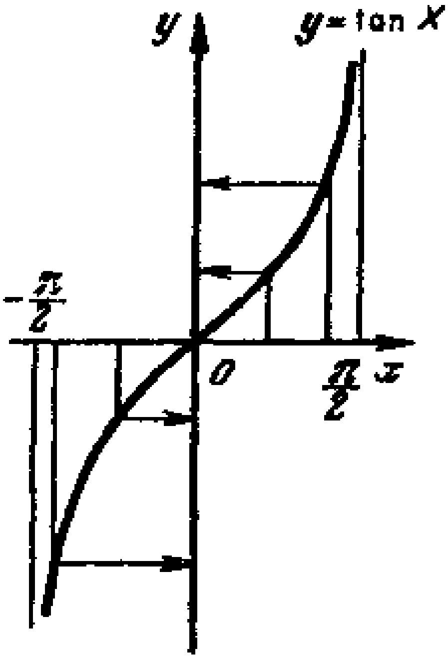


圖 13

綫段和正方形

數學家勉強地接受了這個事實：綫段與無限長的直綫有同樣多的點。但以下一個康托爾結論更加出乎意料。爲了要找出一個比綫段有更多點的集，他把注意力轉向正方形的點集，他毫不懷疑以下的結果——綫段終究只是正方形的其中一邊，而組成這個正方形的所有綫段的集，有連續統的基數。

康托爾研究了三年（1871 至 1874），他想要證明：在綫段的點與正方形的點間不可能建立一個一一對應。

一年一年地過去了，但仍然不能得到所希望的結果。然後，完全出乎意外的事發生了。他却成功地建立了那個他以爲不可能的對應！他在寫給數學家戴德金的信中說："我發現了，但我不相信！"

但我們不得不尊重這個事實：原來綫段和正方形有完全一樣多的點，於是我們的直覺在這裏再次使我們碰壁。因爲數字的小數展開式不是唯一的，所以這個結論的嚴謹證明會變得較爲複雜。所以我們只是粗略地描繪一下康托爾的證明。

取綫段〔0，1〕以及邊長爲 1 的正方形。假設那個正方形的

位置如圖 14 所示，必須在綫段和正方形的點間建立一個一一對應。如果把正方形的點投影到綫段 AB 上，那將無濟於事。因爲實際上，在投影下，一個正方形中的無限點集都投射到綫段上的一點（例如，綫段 DA 上的所有點都投影到A綫上）。

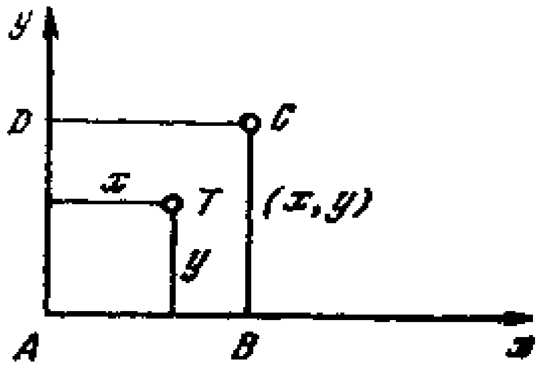


圖 14

這個問題可以這樣解決：對正方形 ABCD 內任意一點 T，都可以用兩個數字，坐標 x，y（或者，更簡單地說，即沿 AB 及 AD 邊的距離）來决定。這些數字可以寫成無限十進小數。因爲 x 和 y 都不大於 1，這些小數有以下形式：

$$x=0.\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n\cdots \tag{3·26}$$

$$y=0.\beta_1\beta_2\cdots\beta_n\cdots \tag{3·27}$$

（爲了簡便起見，我們不取正方形邊上的點，而只取裏面的點。）以下就是 x，y 這兩數字的十進小數，比如，如果 $x=0.63205\cdots$，$y=0.21357\cdots$，則 $\alpha_1=6$，$\alpha_2=3$，$\alpha_3=2$，等等，又 $\beta_1=2$，$\beta_2=1$，$\beta_3=3$，等等。

現在在綫段 AB 上選取對應於 T 的點 Q。這只要說出綫段 AQ 的長度就可以了。取這個長度等於數字 z，其十進展開式是把 x，y 的十進展開式"梅花間竹"地混合而得出，換句話說，我們把（3·26）和（3·27）這兩個展式的小數合成第三個展式：

$$z=0.\alpha_1\beta_1\alpha_2\beta_2\alpha_3\beta_3\cdots\alpha_n\beta_n\cdots\cdots \tag{3·28}$$

例如：如果

$$x = 0.515623\cdots \tag{3·29}$$

而

$$y = 0.734856\cdots \tag{3·30}$$

即有：

$$z = 0.571354682536\cdots \tag{3·31}$$

z 這點在綫段〔0,1〕內，而且很明顯，正方形內不同的點對應於綫段上不同的點。事實上，如果 T 和 T′ 這兩點並不相同，則 x 和 x′，或 y 和 y′ 的十進展開式中最少會有一個位數不相等。但這就使 z 和 z′ 這兩個數字有不同的十進展開式。較詳細的分析可以證明這些對應點也不會重叠。

於是，我們已經在正方形的點和綫段〔0,1〕的點的一部分之間建立起一個一一對應。這就證明了正方形的點集並不比綫段的點集有更大的基數。當然，它的基數亦不會更小，於是這些基數必定是一致的。

不單只是正方形，立方體也與綫段有相同數目的點。一般說，任何一個最少包含一個綫段的幾何圖形都與綫段有相同數目的點。這種集叫做有**連續統基數**的集（連續統，來自拉丁文 continuum——不可分離的）。

不知怎麼地，還有一個問題未能解決！

暫時我們已經熟悉了兩種無限集。一種是與自然數集有相同數目的元，而另一種則與直綫的點集有相同數目的元。已經證明在第二種集中有更多的元。現在，我們很自然地會問這個問題：

“有沒有一些‘中間集’，它比自然數集有較多的元，而比直綫點集有較少的元？”這個問題被命名爲**連續統問題**。很多出色的數學家都曾探討過這個問題，包括康托爾自己在內，但直到最近，這個問題一直未能得到解决。

蘇聯著名的數學家魯津，是實變函數論的蘇聯學派的奠基人，曾經花費許多年思考過連續統問題，但解答依然好像沙漠中的海市蜃樓一樣難以捉摸。（但是在思考這個問題時，魯津却解答了一連串集論中最困難的問題，並創立了數學中另一個分支——描述集論。）

一天，一個15歲的男孩子施尼雪曼被帶到魯津面前。人們說他具有特別的數學才能。爲了想測驗一下這位年青數學家的能力，魯津提議讓他解答三十個非常困難的問題。他做了29題，只除了一個——連續統問題。一個月之後，這個年青數學家又找魯津，難過地對他說：“不知怎麼地，還有一個問題未能解决！”

解决連續統問題嘗試的失敗並不是偶然的。這情况令人想起平行公理的歷史。二千年以來，不斷有嘗試去用幾何的其他公理去推導這一公理。經過羅巴契夫斯基，希爾伯特與及其他數學家的努力，人們已經清楚：它與其他公理並不抵觸，但却不能由它們推導出來。同樣地，經過哥德爾，諾維科夫，科恩與及其他人的努力，人們已經清楚：沒有中間基數的集這一個陳述並不抵觸集論的其他公理，但亦不能由這些公理推導出來。

有沒有最大基數的集？

到目前爲止，我們熟悉的最大基數是直綫的點集所具有的，

亦即是連續統的基數。正方形和立方體的點的集都沒有大於它的基數。或許連續統的基數就可能是所有基數中最大的？但事實並非如此。其實，並沒有一個有最大基數的集。給出任意一個集A，往往又有一個集，其基數比A的基數更大，可以用以下方法做出它：把集A的每一個點a，同函數 $f_a(x)$ 相聯系，條件是它在這點取值1，在其餘的點則取值0。很明顯，不同的點將給出不同的函數，例如，如果集A包含點1，2，3，則點1對應的函數在這點取值1；而點2對應的函數在點1則取值0，所以這兩個函數是不同的。我們取集B作爲在A上所有取值於0，1的函數的集。

於是B集的基數並不比A集的基數小。現在證明：這兩個基數並不相等，即是，不能找到集A和B的元間的一一對應。實際上，却假設這個對應是存在的。

把對應於A的元a的函數叫做 $f_a(x)$，並記住所有函數 $f_a(x)$ 都只取兩個值，0與1。

再用方程式

$$\varphi(x)=1-f_x(x) \tag{3·32}$$

來定義一個新的函數 $\varphi(x)$。

爲了決定函數 $\varphi(x)$ 在A的某點a的數值，我們首先要找出對應這點的函數 $f_a(x)$，並從1減去它在 $x=a$ 的值，現在很清楚，函數 $\varphi(x)$ 是在集A上定義的，而且只取值於0與1。因此 $\varphi(x)$ 是集B的一個元。但據我們的假設，$\varphi(x)$ 對應A中的某點b；即是

$$\varphi(x)=f_b(x) \tag{3·33}$$

根據方程式（3·32）和（3·33），對於A中所有的x

$$1-f_x(x)=f_b(x) \tag{3·34}$$

在這個方程式中，取 $x=b$。於是有

$$1-f_b(b)=f_b(b) \tag{3·35}$$

所以
$$f_b(b)=\frac{1}{2} \tag{3·36}$$

但這與函數 $f_b(b)$ 的值必須爲 0 和 1 的要求矛盾。我們得出的矛盾表示在集 A 和 B 間並沒有一一對應。

這樣，給出任何集 A 後，都可以作出一個有更大基數的集 B。因此，最大基數集是不可能存在的。

注意，集 B 也可以由其他方法作出。例如，B 可以是集 A 的所有子集的集。事實上，設 C 爲 A 的某一個子集，我們選取一個定義於 A 上的函數 $f(x)$，如果 $x\in C$，取值爲 1，如果 $x\notin C$，取值爲 0。很明顯，不同的子集將給出不同的函數。另一方面，每個取值於 0 和 1 的函數 $f(x)$ 對應於這樣的 A 的子集：它是由使函數值爲 1 的元 x 所組成的。於是我們在定義於集 A 並且取值 0 與 1 的函數的集，以及集 A 所有的子集的集之間建立了一個一一對應。

無限的算術

我們已經研究過關於各種集基數的一些問題。基數這個概念，正如我們較早時所說的一樣，是有限集元的數目這個概念的推廣。我們現在可以進行自然數中的某些算術運算——我們可以把它們加，減和乘。這些運算可以當作平行於集的某些運算。例如：自然數的相加對應於兩個不相交有限集的相加。如果一個集有 m 個元，另一個有 n 個元，則它們的和會有 m＋n 個元。

基數的運算的定義也是類似的。這裏，我們要利用特別的符號去代表基數。例如，以 $\aleph_0$ 來代表可數集的基數（$\aleph$ 是希伯來字母的第一個，讀作：aleph），以 $\mathfrak{c}$（歌德體 c）代表連續統的基數，而以 $\mathfrak{f}$ 來代表所有定義於實數軸上的函數集的基數，等等。

我們可以把基數相加，一如把自然數相加一樣。即是，如果一個集 A 的基數爲 $\mathfrak{m}$，而集 B 的基數爲 $\mathfrak{n}$，其中集 A 和 B 並不相交，則 $\mathfrak{m}+\mathfrak{n}$ 就代表了集 A+B 的基數，根據集相加的性質，有

$$\mathfrak{m}+\mathfrak{n}=\mathfrak{n}+\mathfrak{m} \qquad (3\cdot 37a)$$

$$\mathfrak{m}+(\mathfrak{n}+\mathfrak{p})=(\mathfrak{m}+\mathfrak{n})+\mathfrak{p} \qquad (3\cdot 37b)$$

然而，許多無限基數相加的規則，同一般的算術規則很不相同。但這並不奇怪，因爲我們已經知道無限集與有限集的性質是非常不同的。例如，在無限基數的算術裏，我們有如下的恆等式：

$$n+\aleph_0=\aleph_0 \qquad (3\cdot 38)$$

$$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0 \qquad (3\cdot 39)$$

$$\aleph_0+\mathfrak{c}=\mathfrak{c} \qquad (3\cdot 40)$$

$$\mathfrak{c}+\mathfrak{c}=\mathfrak{c} \qquad (3\cdot 41)$$

$$\mathfrak{c}+\mathfrak{f}=\mathfrak{f} \qquad (3\cdot 42)$$

第一個法則告訴我們：有限集與可數集的和是可數集；第二個告訴我們，兩個可數集的和是可數集；而第三個則告訴我們：當有連續統基數的集上附上一個可數集時，會得到一個有連續統基數的集。現在讀者們可以很容易地解釋餘下的恆等式了。

其次，讓我們看看無限基數怎樣相乘。首先，我們得決定哪個集的運算跟自然數的乘法有關。假設 A 是一個含有 m 個元的有

限集，而B是含有n個元的有限集。我們組成一個新集 $A\times B$，其元爲所有可能的對子 (a, b)，其中 $a\in A$，$b\in B$。如果我們以 $a_1, \cdots, a_m$ 代表第一個集的元，而 $b_1, \cdots, b_n$ 代表第二個集的元，則這些對子可以用列表的方式排列如下：

$$\begin{matrix} (a_1, b_1) & \cdots & (a_1, b_n) \\ & \vdots & \\ (a_m, b_1) & \cdots & (a_m, b_n) \end{matrix} \tag{3·43}$$

從表中可清楚地知道共有 mn 個這樣的對子，即是，它們的數目跟數字 m 和 n 的乘積相等。

讓我們把這個運算推廣到無限集上。假設A和B是無限集，其元爲所有可能的對子 (a, b)，$a\in A$，$b\in B$ 的集就稱爲它們的直積，以 $A\times B$ 表之。例如，設A是綫段 $[0,1]$ 的點集，而B是綫段 $[1,3]$ 的點集，則我們可以用圖15中所繪的矩形内的點的集來表示 $A\times B$。事實上，矩形内每點都對應於它在軸上的兩個投影。

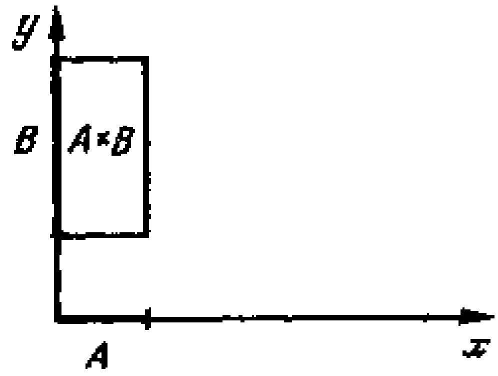


圖 15

如果集A的基數爲m，而集B的基數爲n，則 mn 代表集 $A\times B$ 的基數。我們有以下的基數相乘的法則：

$$mn = nm \tag{3·44}$$

$$(mn)p = m(np) \tag{3·45}$$

$$m(n+p) = mn + mp \tag{3·46}$$

而且，我們有恆等式

$$\aleph_0\aleph_0 = \aleph_0 \tag{3·47}$$

$$\aleph_0 c = c \tag{3·48}$$

$$cc = c \tag{3·49}$$

第一個恆等式表示如果 A 和 B 是可數集，則所有對子 (a,b)，$a \in A$，$b \in B$ 的集也是可數的。這是可數個可數集的和本身是一個可數集的陳述的另一種表達形式。而恆等式 $cc = c$ 則表示區間內的點的數目同正方形的一樣。因爲 c 是區間內的點的數目，而 cc 則是正方形內的點的數目。

無 限 指 數

由於我們已經懂得如何把基數相乘在一起，因此我們可以把一個基數的冪提升到任何自然數。但現在我們要解釋當指數是無限時，怎樣去取基數的冪，即是如何去解釋符號 n^m 的意義。爲此我們一定要回到有限集，談談一個有 n^m 個元的集。

可以這樣進行：假設集 A 包含 m 個元，而集 B 包含 n 個元，B^A 代表定義於集 A，取值於集 B 的所有可能的函數的集。換句話講，集 B^A 中每一個元都給出一個法則，根據它從 B 中分派 $b = f(a)$ 使對應於 A 中的每一個 a 。例如，設集 A 包含 1, 2, 3 三個數，而集 B 包含兩個元：點和畫，則集 B^A 的元是由 $f(1) = \cdot$，$f(2) = \cdot$，$f(3) = —$，或 $f(1) = —$，$f(2) = \cdot$，$f(3) = \cdot$ 的函數所組成。這些“函數”可以簡便地寫成一些點及畫的序列，每個序列有三個符號。顯然，總共有八個這樣的序列，即 2^3。即是，以下

的序列：

· · ·　　· · —　　· — ·　　· — —

— · ·　　— · —　　— — ·　　— — —　　(3·50)

我們發覺有 $8=2^3$ 個序列。這並不是偶然的。我們建議讀者自己去證明一下。如果集 A 包含 m 個元，集 B 包含 n 個元，則 B^A 包含 n^m 個元。

現在我們可以解釋，當 m 和 n 是無限基數時，n^m 這個符號的意義是什麼。也就是說，我們取一個基數爲 m 的集 A，以及一個基數爲 n 的集 B；我們假設 B^A 代表所有這樣的"函數"的集：定義在 A 上而取值於 B。n^m 就是這個集的基數。

我們先前證明過，對於任何集 A，所有定義在 A 上而取值於 0 和 1 的函數的集，其基數比集 A 的基數大，這表示對於任何基數，將有下列不等式：

$$2^m > m \tag{3·51}$$

此外，還可寫出下式：

$$c = 2^{\aleph_0} \tag{3·52}$$

事實上，我們以前已經見到：所有無限的電報的集都有連續統的基數。但任何無限的電報只不過是這樣的一個函數：它定義於自然數集上，而且只取兩個值：點和畫。於是，所有無限的電報所組成的集有基數 $2^{\aleph_0}$。這就證明了等式(3·52)。

數的編序

集的基數只做了自然數一半的工作。無論如何，自然數不單

可以用來回答問題："有多少？"它亦可以用來回答問題："它來自哪裏？"換句話說，我們不單講"二"，"五"，"二十"，同時亦講"第二"，"第五"，"第二十"。但基數並不能提供任何與元的次序有關的事情。雖然自然數集跟整數集有同樣多的元，但它們是在完全不同的方法下編序的。自然數集有第一個元，而整數集却沒有第一個元。

因此，基數不能爲研究一個集中的元的編序提供充分的資料；爲此我們需要新的概念。我們首先引入**有序集**的概念。如果可以在一個集的每對元上定義一個有下列性質的不等關係：

(1) 如果 $a<b$，則 $a\neq b$；

(2) 如果 $a<b$ 以及 $b<c$，則 $a<c$；

那麼這個集就是有序的。

我們可以很容易地把所有實數的集、所有有理數的集、所有自然數的集等等進行編序。所有複數的集亦可以進行編序。也就是說如果 $a<c$，或者 $a=c$ 而 $b<d$，就有：$a+bi<c+di$。例如：$2+15i<3+10i$，$2+4i<2+5i$①。所有多項式的集亦可以類似地編序。當然，同一個集可以引入不同概念的編序。

例如，當考慮在本書出現過的所有不同的字的集時，這個集可以這樣編序：拿起這本書，然後在閱讀時，根據你遇到它們的次序記下所有的字。在這種情況下，我們可以把編序的法則規定如下：如果在閱讀本書時，字A比字B早些遇到，字A就前於字B。

---

① 譯註：這個編序並不在一般意義下協調於複數的乘法，例如 $3i<4i$，$0<i$，但 $(3i)i \nless (4i)i$。

然而，也可以用另外的方法進行，因爲在字母表編序中字A前於字B，所以字A就應該前於字B。很明顯，這只是同一個集的兩種不同的編序方法。

如果可以在兩個有序集A和B之間建立一個一一對應，並保持元的編序，這兩個集A和B就有相同的序型。換言之，如果 $a_1 \leftrightarrow b_1$ 和 $a_2 \leftrightarrow b_2$，則 $a_1 < a_2$ 蘊涵 $b_1 < b_2$。

例如，任意的兩段實綫上的綫段都有相同的序型。圖11的投影保持了點的次序。圖12中，整條綫到開區間(除了端點的綫段)上的投影也是保持編序的，但綫段①與實綫却有不同的序型。雖然我們在它們間建立一個一一對應，但這個對應一定會擾亂了次序——畢竟，綫段有起點和終點，但直綫却沒有。

完全有序集

甚至是可數集也可以用許多不同的方法去編序。事實上，自然數集、整數集以及有理數集都是可數的，而所有這些集都有很不同的編序，自然數集有一個最初元(數字1)，而不論是整數集或有理數集都沒有最初元，另一方面，在自然數集和整數集裏，我們都可以指出許多對的元，其間並不出現集中其他元(例如，數字5和6)，但在有理數集中，我們却時常能够在任何兩個元間找出無限多個集中的元。

爲了要研究一些跟這些不同編序有關的性質，康托爾選出一種特別的有序集，其中一些性質跟自然數的非常相似。如果我們

---

① 譯註：指閉區間。

在自然數集中選取一個不空的子集，則我們時常可以從它的元當中找出一個最小的，或最靠左的元。康托爾把有這種性質的集稱爲**良序集**，換句話說，一個有序集A稱爲良序集的條件是它的每一個不空的子集都有一個最初的元。

正如我們已經指出，良序集的最簡單例子是自然數集。我們可以用半直綫（0，∞）上的點1，2，3，…去表示它。現在，圖12中由直綫到開區間的投影保持了點的次序。它把半直綫(0，∞)投影到區間（0，1）裏。所以，我們可以在區間（0，1）內選取點，而不取點1，2，3，…。於是我們得到一個收斂於點1的無限點集 a_1，a_2，…，a_n，…（圖16 a）。

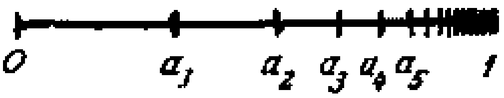


圖 16 a

現在考慮點1。我們不能用一般的數字去標記這一點——我們已經在數 a_1，…，a_n，… 時用盡了它們。所以我們需要一個新的數字去標記這一點，而不是自然數。因爲點1在所有我們能用自然數去作標記的點之外，所以我們稱這個新的數字爲"超窮的"（超窮，拉丁文 transfinite，意思是"有限之外"），符號 ω 是用來代表緊跟在自然數1，2，3，… 之後的超窮數，因此我們用 a_ω 來代表1，所有 a_1，…，a_n，…，a_ω 的點集A也是一個良序集。（試證明！）

現在我們把所有集A的點向右移1個單位。點 a_1 於是變成 $a_1' = a_1 + 1$，點 a_2 變成點 $a_2' = a_2 + 1$，等等。結果我們得到一個由點 a_1'，…，a_n'，…，a_ω' 組成的集B。要證明集 A＋B 是良序的並不

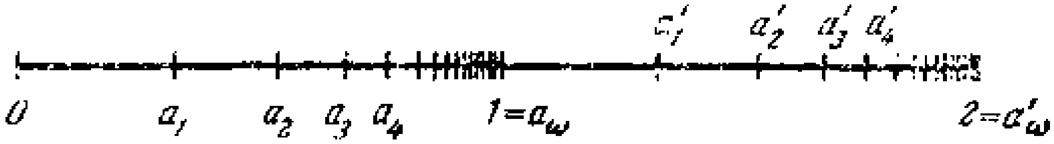


圖 16 b

困難。讓我們嘗試去標記它的元。我們已經知道了如何去標記集A的點，由於點 a'_1 是直接在點 a_ω 之後的 (圖 16b)，所以很自然地，以超窮數 $\omega+1$ 去標記，即是點 $a'_1=a_{\omega+1}$。用同樣方法，可以很自然地去標記跟着的點，即是 a'_2 用超窮數 $\omega+2$，等等。現在點 a'_ω 是在所有點 $a_{\omega+1},\cdots,a_{\omega+n},\cdots$ 之後，所以我們用超窮數 2ω 來表示：

$$a'_\omega=a_{2\omega} \tag{3·53}$$

爲了得到必須以超窮數 $2\omega+1$，…，$2\omega+n$，…，3ω 標記的新點，讀者們可能已經猜到了我們現在會把集A的點向右移兩個單位。這樣繼續下去，就可以得到一個由超窮數所標記的點所組成的良序集。其形式爲：$k\omega+n$，k 和 n 是自然數。

但這並未作出所有超窮數。我們已再次得出一個分散在半直綫 (0,∞) 上的集，而且我們的集中，在各個 [n, m + 1] 的綫段上，有無限多點。讓我們現在再次把半直綫 (0,∞) 投影到區間 (0, 1) 上，就得到一個收斂於點 1 的點集。我們再次需要一個新的超窮數來標記點 1，這次它應該是 ω^2。我們現在可以繼續作出超窮數 $\omega^2+1,\cdots,\omega^3,\cdots,\omega^n,\cdots$，甚至是 ω^ω。甚至會有超窮數：

$$\omega^{\omega^{\omega^{\omega^{\omega}}}}$$

但我們不準備再逗留在這些問題上了。

謎樣的公理

我們已經說過，有些集可以用不同的方法去編序。但是否時常可以把一個已知集編序？如果是的話，是否一定可以把那個集編成良序集？很多數學家都曾就這個問題下過功夫——無論如何，假如答案是肯定的，那麼任何集都可以利用超窮數來標記。

在 1904 年由策墨羅發表了一個出乎意料的簡短的解答——他能夠證明任意集都可以編爲良序的(康托爾已經在 1883 年猜到了這個結果)。然而，策墨羅的證明並未能使所有數學家滿意。問題是：證明需要依賴於一個連它的作者和其他人都認爲不太明白的假設。這個假設叫做**選擇公理**或**策墨羅公理**，可以說明如下：

假設在你的面前有幾堆蘋果。很明顯，你可以在每堆中選取一個蘋果，再把它們放在新的一堆內。現假設每堆有無限多個蘋果，而且有無限多堆，那麼看來也可以進行同樣的操作。這樣就構成了選擇公理：

如果給出無限個無限集，事前並不給出任何選擇規則，就可以從每個集中取出一個元。

說實在的，所有麻煩都是來自最後幾個字——選擇公理導致完全非推理性的證明：例如，你可以用它證明，每一個集都可以編爲良序，但它並不能提供任何有關如何去進行的資料。

數學家應用了選擇公理很多年，都認爲它是完全明白的。但當他們開始更深入地思考它時，它就開始變得愈來愈神秘了。很多需用選擇公理的幫助才得到證明的定理，跟我們的數學直觀完

全矛盾。因此，知名數學家貝爾傳特・羅素談及這個公理時說：

“起先它似乎是明白的，但你愈多思考它，由這公理得出的推論就好像變得愈奇怪；最後，你完全不明白它的意思到底是什麼了”。

然而，大部分的數學家在他們的研究中都毫無疑慮地應用選擇公理。

一個蘋果變成兩個

讓我們談談選擇公理其中一個最叫人驚奇的推論。可能每一個人都已經看過高明的魔術師在舞台上的表演。起先他把一個空袋給觀衆看，然後他在袋中放下一個球，然後抽出……兩個；放下兩個球，然後他抽出四個；放下這四個，然後他抽出八個。當

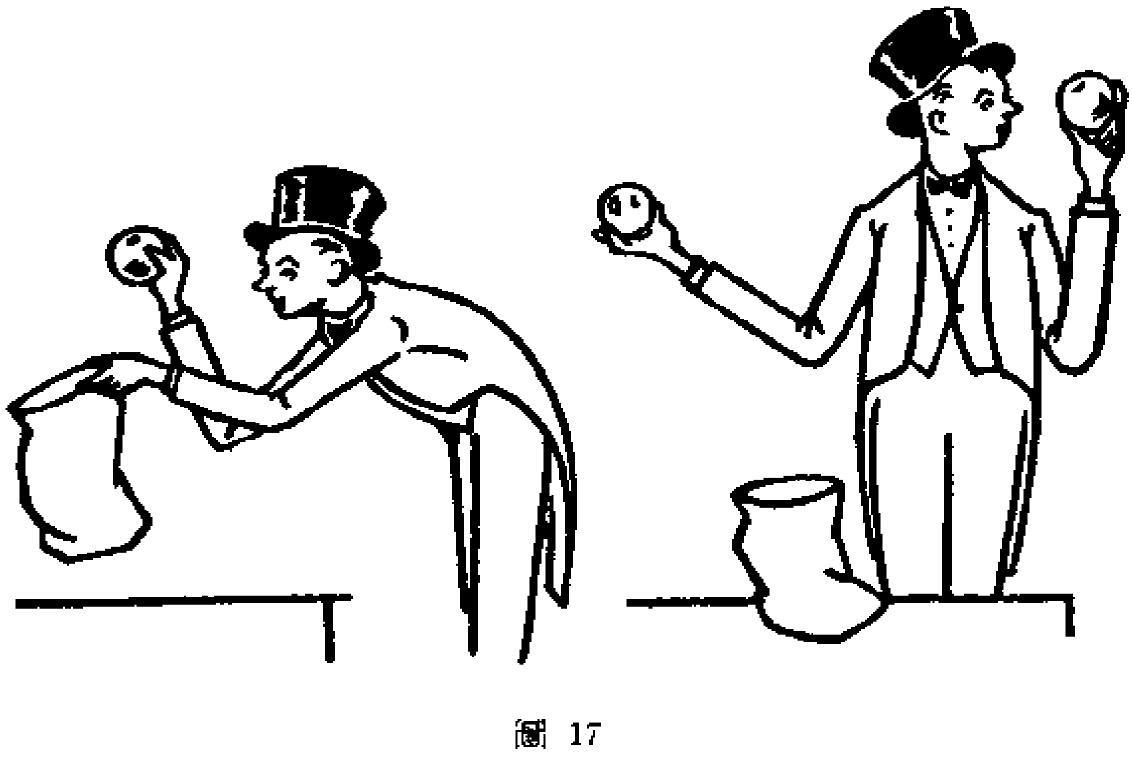


圖 17

然，人人都知道這並不是什麼奇迹，而只是純粹的"障眼法"。然而，這樣的奇迹都可以在集論中出現。

我們取一個普通的蘋果，把它隨意地分成四塊。很明顯，如果我們只取其中兩塊，用它們去合成一個完整的蘋果，看來是不可能的（同樣地，如果你吃了半個橙，你也不能用餘下的來合成一個完整的橙）。

然而，數學家却可以這樣地把一個球分作四等份，使得其中兩份可以合成一個相同半徑的完整球體，而不需要用任何方法去補充它們，只要簡單地把它們轉化爲剛體就行了。另一個完全一樣的球體則可以用餘下的兩份去組成。於是，我們可以由一個球體得出兩個不同的球體。可惜的是，這問題只能在理論上解決，否則，我們就可以把一個蘋果變成兩個，然後四個，然後八個，等等。當然，這個問題是不能在現實世界中解決的——它會抵觸物質不滅定律。

把球體如此地分爲四部分是根據選擇公理的。

現時，我們將不再進一步談及這個公理的其他的同樣奇怪的推論。

4. 奇特的函數和曲綫——在一個數學藝術博物館中遊歷

函數的概念是怎樣發展的？

大部分的數學概念都經過了一個長時期的發展過程。首先它們是從日常經驗產生的直觀觀念中引伸出來的。在逐步除去個別的和非本質的方面以後，這些直觀觀念最終凝成精確的數學定義。然而，我們時常會發現這些定義不單適用於爲了形成定義本身所研究過的事物上，而且還能適用於早先從未考慮過的其他事物上。於是就開始了這些新事物的研究，因而抽象過程就更向前推進一步，然後在這些研究的基礎上引伸出原定義的推廣。數學概念具有更廣泛的意義；它們包括了愈來愈廣闊的，在更多的不同數學領域中出現的各種類型的事物。

例如，數字的概念，便經過了很長的一段發展期，史前人只懂得數"一，二，多"，到我們的時代已有：自然數，分數，負數，複數，四元數，超複數，……。然而必須承認，這個或那個概念的新推廣並不是每次都受到所有數學家的熱烈接受。例如，在一個長時期中，不單是複數，甚至是負數還未能爲許多數學家所承認。

函數的概念也經過了一條迂迴曲折的道路。在古代希臘科學中已明顯地出現了兩個互相倚賴的量的概念。但那時，量只限於

一些幾何性質。甚至，數學分析的始創人之一牛頓，在他討論相關的量時亦只限於使用幾何語言。雖然函數概念自費爾馬與笛卡兒時代以來，已確實使用過，但"函數"這名詞本身在 1694 年才首先出現在德國數學家萊布尼玆的著作中。他與牛頓共同是微積分的創立者。但萊布尼玆的函數概念非常狹義；他命名了曲綫上一點的橫坐標，縱坐標，次切綫和次法綫，曲率半徑以及與曲綫上確定的點有關的其他綫段。他指出在這些量的任何兩個之間都存在着某種相關性。這樣，萊布尼玆把函數過分地限制在幾何領域中。一直到 1718 年萊布尼玆的學生伯努利才給出了一個脫離幾何語言的函數定義：

一個變量的函數就是由該變量與一些常數在某種方式下所形成的量。

伯努利的傑出的學生歐拉對函數概念做了第二步發展。在他的《微分法》一書中，對函數做了下述的定義：

函數是與另外的量相關的量，當第二個量變化時，第一個量也相應地變化。

然而，歐拉以及同時代的其他數學家要求函數必須由一個算式表達出來。根據十八世紀數學家的觀點，下列表達式：

$$y = \begin{cases} x, & 若\ x<0 \\ x^2, & 若\ x>0 \end{cases} \tag{4·1}$$

不是定義了一個，而是兩個函數。

不久，人們弄清楚了，事情本來要複雜得多。伯努利在解決振弦問題時，他獲得一個稱爲"**三角量數**"形式的解。在這裏我們不討論這點，僅指出振弦的形狀是由單一算式給出的（雖然是一個包括了無窮項的式子）。

法國數學家達朗貝爾也解出了這個同樣的振弦問題。達朗貝爾的解的形式與伯努利的完全不同。其中，最重要的是，其解對於不同的自變數值可用不同的算式給出。

看來，一個不可解決的矛盾擺在十八世紀的數學家面前：對同一個問題有兩種解，一種解是所有的數值都可用同一算式表示，而另一種解則用許多算式表示。大家懷疑伯努利的解，認爲他並未得出此問題的所有的解，而只是得到了那些能用單一算式表達出來的解。於是，所有十八世紀的卓越數學家如歐拉，達朗貝爾等都加入了這一場激烈的爭論。

這次辯論，本質上是圍繞着函數的概念進行的，同時也圍繞着函數的相關性與用一個算式表達這種相關性的可能性之間的連系而進行的。在十九世紀初，這個問題得到了明確的解答。當時，法國數學家傅立葉證明了在不同的區間中，無窮三角函數級數之和可用不同的算式表達。於是，他給出一個新的函數定義，强調對於函數，要點是指定數值；至於這種指定是否由單一算式所給出並不重要。

德國數學家狄利克雷更將傅立葉的結果加以精煉，他證明了任何已知曲綫都是三角級數和的圖形。只要求曲綫上的極大值與極小值的數目是有限的，而且，曲綫是有限的，並以幅度爲界。狄利克雷亦改善了傅立葉函數的定義，同時給以一個至今仍採用的形式（勒克萊斯，羅巴切夫斯基等等在狄利克雷之前曾給出很相似的定義）。以下是狄利克雷的定義：

若對每一個變量 x 之值，總有唯一的變量 y 之值與其對應，變量 y 就是變量 x 的函數。

稍後，“屬於某些集”這些字眼附加到了“每一個變量 x 之值”

上（畢竟，這個函數並不一定對所有的 x 值有定義）。

這個定義極爲廣泛：沒有一字提及給出的函數需要在整個定義域上用單一函數表示。它甚至完全不需由任何算式給出，只要用文字來定義便行。例如，狄利克雷本人研究的這個函數：

$$f(x)=\begin{cases}0, & \text{若 } x \text{ 爲無理數}\\ 1, & \text{若 } x \text{ 爲有理數}\end{cases} \tag{4·2}$$

依照十八世紀數學家的觀點，這個定義並未能規定一個函數；因爲沒有給出任何一個算式，能够使人計算出狄利克雷函數值①。然而，這定義完全決定了該函數。十分明顯，例如：$f(\frac{3}{4})=1$ 而 $f(\sqrt{2})=0$。

狄利克雷的定義，在本質上，是定義在自變數值上的數值函數（在上述的修正意義下）。進一步的發展包括了考慮函數可定義於任意集並取值於任意集。事實上，假設給出兩個集 A 與 B，並假設把 B 中的每一個元 b 與 A 中的每一個元 a 對應。那麼，我們便說這函數定義在集 A 而取值於集 B。在這十分廣義的形式下，函數概念便與對應，投影與變換等概念融合在一起。

例如，從這觀點出發，一個三角形的面積是一個定義於所有三角形的集的函數，而且假定其值在正數的集中。同時，一個三角形的內接圓是定義於所有三角形的集的函數，而且三角形的值在圓的集中。但是，在這裏我們不用這麽廣義的觀點，只將我們的興趣集中在那些定義於數集的函數，並假定是數字值。

---

① 譯註：如果允許極限在式子中出現，則狄利克雷函數可以用下列算式表達：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left\{\lim_{m\to\infty}[\cos(n!\,\pi x)]^{2m}\right\}$$

妖怪從瓶中走出來了

狄利克雷的定義容許函數有十分奇特的性質。從前，如果要作一個具有某些不平凡性質的函數，人們必須花一段很長的時間去結合不同的算式，但現時工作已變得十分簡單。現在可以作出並研究不同函數，而不必担心它們能否用公式表示出來。在上世紀下半葉已經作出了許多與那些“行爲良好”的函數性質完全不同的函數。其實，就算狄利克雷他自己也不會相信這些“怪物”能够存在。

前面已經談過，狄利克雷自己的函數已經是不尋常了。畢竟即使在 x 軸最小的區間都存在有無限個有理數與無理數。但狄利克雷函數值對有理數爲 1，而對無理數爲 0。因此，當我們沿着 x 軸移動，函數值不斷地從 0 與 1 之間跳上跳落。沒有可能畫出這個函數，因爲它在每一點都不連續。

就算在那些連續函數當中，也有許多意料不到的性質。例如，在一個有限的區間内一個連續函數能否有無限多極大值與極小值？第一眼看來似乎沒有可能。這曲綫畢竟要從一個極大值下降至極小值，然後再上升至極大值，等等。在一個有限區間内，這如何能做到呢？然而，這些奇特的函數確實存在，並且十分容易作出的。

我們將在綫段 $[0,1]$ 上作出這樣的函數。首先將這綫段分割成兩份，在左半邊作一等邊三角形。現在，再將右半邊分成二等份並在綫段 $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$ 作第二個等邊三角形。我們將上述程序進行

無限次。結果，我們得到一山脈，帶有無限個山峯連綿下降至 1 這點（圖 18）。我們將所得的曲綫作爲函數 f(x) 的圖像。因此，除了在端點 1，這函數在綫段 [0, 1] 每點都有定義。在這裏，我們設 $f(1)=0$。

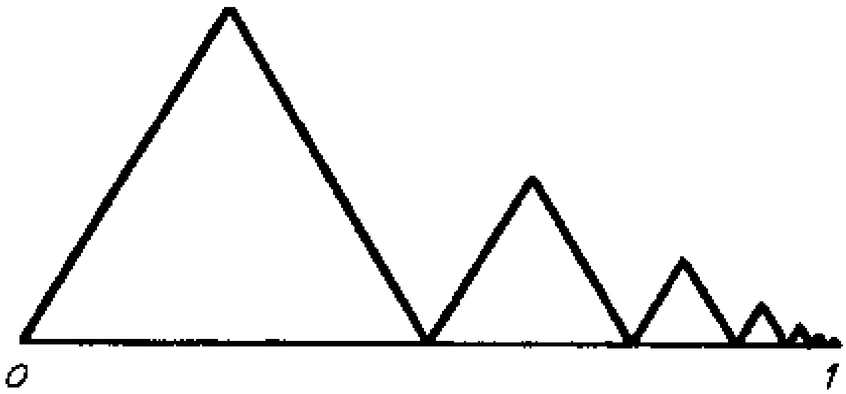


圖 18

因爲當 x 趨於 1 時，山峯的高度趨於 0，我們得到在綫段 [0,1] 上所有的點都連續的一個連續函數。但在這區間中的極大值與極小值的數目爲無限!

爲了作出這樣奇異的函數，一位十八世紀數學家不得不花費大量的時間去合併函數，才能猜測到這個函數：

$$f(x)=\begin{cases} x\cos\dfrac{\pi}{x} & \text{若 } x\neq 0 \\ 0 & \text{若 } x=0 \end{cases} \qquad (4\cdot 3)$$

在綫段 [0, 1] 上有無限多極大值與極小值（圖 19）。

但是，對數學家來說，無限多個極大值與極小值的函數只不過是第一個不希望有的意外而已。妖怪只不過剛剛從瓶中走出來。

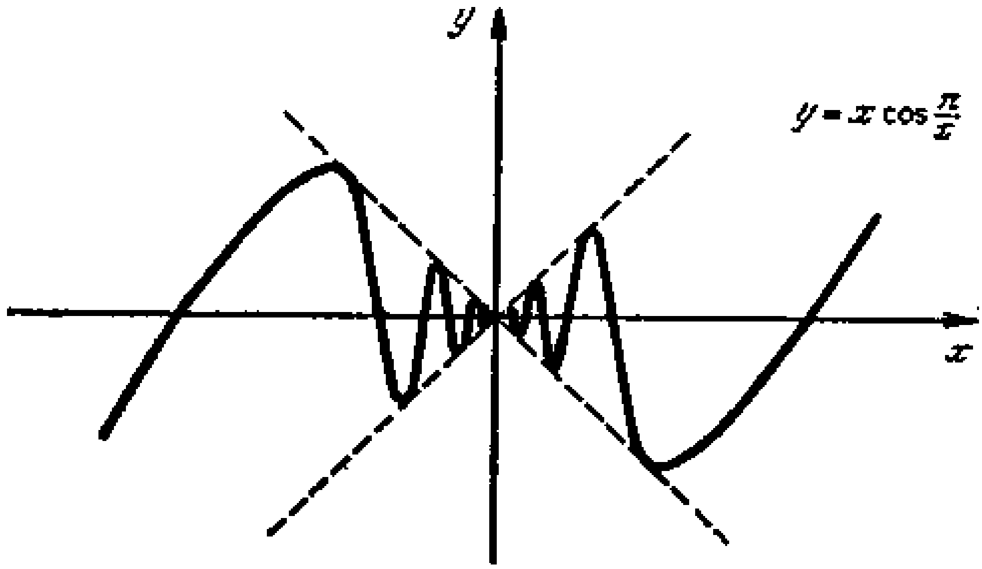


圖 19

濕　點

在前節，我們所作出的函數只有這樣的一點，在這點周圍有無限多個極大值與極小值，這點就是 1 。現在我們將作出另一個有更多這類點的函數。

假想雨下降在 x 軸上的綫段 [0,1] 中。我們要用以下的方式建立避雨亭，將綫段 [0,1] 分成三等份，並在中央部分以一等邊三角形的形狀豎立一帳幕。它遮蔽所有中央部分的點免受雨淋（除了端點外，即 $\frac{1}{3}$ 與 $\frac{2}{3}$ 點）。

現在將每一剩餘的部分分成三部分，並作出同一形狀的帳幕（但闊度只有一半①）遮蔽中央部分。我們現在得到圖 21 所繪

① 譯註：應為三分之一。

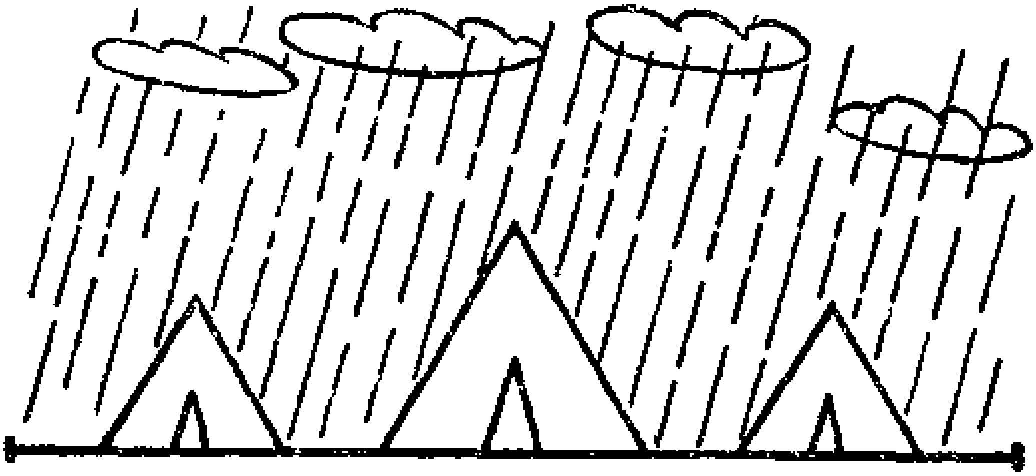


圖 20

圖 21

的曲綫。在第三步，我們豎立四個帳幕，然後八個，等等。

現在我們碰到這樣的一個問題：是否所有綫段上的點都已經被鋸齒段曲綫所遮蔽，抑或還有餘點被雨點弄濕？很容易指出還有某些濕點——這些是被遮蔽的綫段的端點（如$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{7}{9}$，$\frac{8}{9}$等）。當對應的帳幕豎立時，所有這些點都剩下來未被遮蔽，同時，亦未被以後的帳幕所遮蔽。很容易看出，這種端點有無限多個，但它們仍然只組成一可數集。

結果，竟然發現了除此以外還有一個不可數的“濕”點的

集①。用三進制表示法來描述它們比較方便。我們知道，三進制數字組成的方法與十進制的一樣，不同之處就是數字逢三進一而不是逢十進一。因此，在三進制，我們只用三個數 0,1,2 寫出數字，而不是一般所用的十個數。

很容易學會怎樣把下個數字的三進表示做轉換

0.020202⋯

在十進制中，它可以用無窮幾何級數表示出來：

$$\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\cdots \qquad (4\cdot4)$$

級數的和是 1/4 ②。因此

$$\frac{1}{4}=0.020202\cdots \qquad (4\cdot5)$$

現在我們可以很精確地指出在所有遮蔽帳幕豎立後，那些點會仍然是濕的。第一個帳幕遮蔽所有在$\frac{1}{3}$與$\frac{2}{3}$之間的點。但這些

---

① 譯註：用三進表示法來描述，上述的可數集包括所有能用**有限的**三進小數表示而（1）其中沒有 1 出現**或**（2）1 只出現於最末位數的有理點。不可數集包括所有能用**無限**三進小數表示而（3）其中沒有 1 出現**以及**（4）沒有無限的 222⋯ 出現於數尾的點。

② 譯註：幾何級數的和 $S=a+ar+ar^2+\cdots$，$|r|<1$

可用下法求出：$rS=ar+ar^2+\cdots$

所以 $(1-r)S=a$，即 $S=\frac{a}{(1-r)}$

因此 $\frac{2}{3^2}+\frac{2}{3^4}+\frac{2}{3^6}+\cdots=\frac{\frac{2}{3^2}}{1-\frac{1}{3^2}}=\frac{1}{4}$。

點的三進制表示都有以下形式：

$$0.1\cdots \tag{4·6}$$

式中的點可以代表任何位數 0,1,2 的組合（同理，所有十進制數字以位數 1 開始的點，即是具有 0.1⋯ 的形式的，都會在$\frac{1}{10}$與$\frac{2}{10}$兩點之間）。

在第一步後仍然漏的點是這樣的點，其三進制表示爲

$$0.0\cdots ① \tag{4·7}$$

或

$$0.2\cdots \tag{4·8}$$

我們可以用同樣方法證明，在第二步的兩個帳幕豎起之後，那些仍然是漏的點，其三進制表示必定由下面四種形式之一開始：

$$\begin{array}{l} 0.00\cdots \\ 0.02\cdots \\ 0.20\cdots \\ 0.22\cdots \end{array} \tag{4·9}$$

因此，在任何點的三進制表示中必定②有 1 出現的，而且必定會在某階段被遮蔽。最後，在所有點中，其三進制表示中不必用 1 表示者，必定維持着漏的。例如，點

$$\frac{1}{4}=0.020202\cdots \tag{4·10}$$

以及

---

① 譯註：1/3＝0.1 可以寫成 0.0222⋯。

② 譯註："必定"一詞是譯者所加。

$$\frac{3}{4}=0.202020\cdots \tag{4·11}$$

仍然是漏的。

現在就應該清楚了，漏點集爲什麼會有連續統的基數。歸根到底，這集能與“無限的電報碼”的集［見(3·20)］一一對應。爲此，我們可以把每一個形式，如：

$$0.20220200\cdots \tag{4·12}$$

的點與“無限的電報碼”作出一一對應，將0用點代替，而2用綫代替，按照這個程序，不同數字對應於不同電報碼。我們已經知道無限的電報碼的集有連續統的基數，因此，漏點的集亦有此基數。

我們所稱爲漏的點集首先由康托爾作出，現在稱爲康托爾集。在帳幕的作法中，很清楚地知道鋸齒段的曲綫在接近每一個康托爾集的點都有無窮多個極大值與極小值。

鬼 樓 梯

此外還有另一個與康托爾集有關的有趣函數。其定義如下：我們首先將綫段［0,1］分成三等份，同時規定我們的函數在中間的三分之一中每一點都等於$\frac{1}{2}$。然後再將左與右的三分一再分成三等份，並規定函數從$\frac{1}{9}$至$\frac{2}{9}$間等於$\frac{1}{4}$，從$\frac{7}{9}$至$\frac{8}{9}$間則爲$\frac{3}{4}$。此時，還有四個綫段上的函數尚未有定義：

$$\left[0,\frac{1}{9}\right],\left[\frac{2}{9},\frac{1}{3}\right],\left[\frac{2}{3},\frac{7}{9}\right],\left[\frac{8}{9},1\right] \tag{4·13}$$

我們將其每一段都分成三等份，並規定四段的中央部分的函數分別等於$\frac{1}{8}$，$\frac{3}{8}$，$\frac{5}{8}$，$\frac{7}{8}$。

繼續進行這個過程，我們就獲得一個定義於所有“乾”點的函數，即是所有不屬於康托爾集的點。同時，在這集的點上定義函數並不困難，只要使它在綫段[0,1]上變成連續的和非下降的函數即可。圖22表示所得函數的近似圖形。其形狀爲一條有無限級的樓梯（圖中並沒有畫出所有梯級）。

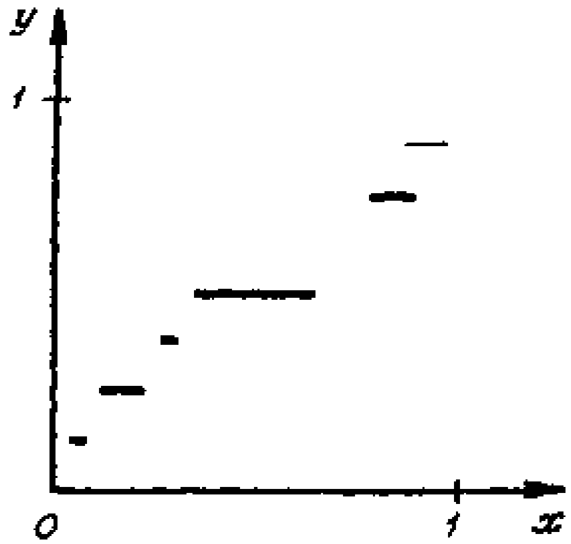


圖 22

當然，在認識了有無限多個極大值與極小值的曲綫後，我們當然不會對一條有無限級的樓梯感到驚奇。但這裏還是有些值得驚奇的東西。現在來計算梯級的總長度。第一級有長度$\frac{1}{3}$，跟着的兩級的長度各爲$\frac{1}{9}$，再跟着的四級的長度各爲$\frac{1}{27}$等等。因此，所有梯級的總長度可以用一個無窮幾何級數表示：

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots \tag{4·14}$$

級數和爲

$$\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1 \tag{4·15}$$

因此，梯級的總長度爲1。然而，這函數在所有這些梯級上

完全没有增加，所有的上升均集中於康托爾集的點上。但即使它的基數爲連續統，其長度爲 0，也只有很“少”的點落在這個集内（綫段[0,1]的長度爲 1 而梯級總長度爲 1）。因此，我們的函數無論怎樣也能使值由 0 上升到 1，雖然它只在一長度爲零的集上增加並且没有發生任何“跳躍”！這是不是使人驚奇呢？

多刺的曲綫

在超過幾世紀的一段長時間中，數學家只是處理在曲綫上每一點都能作出切綫的曲綫，如果有例外出現，那麼最多只在幾點上出現罷了。看來曲綫好像在這些點上折斷，因此這些點被稱爲**斷點**。在圖 23（a）有兩個斷點，而在圖23（b）則有十個斷點。

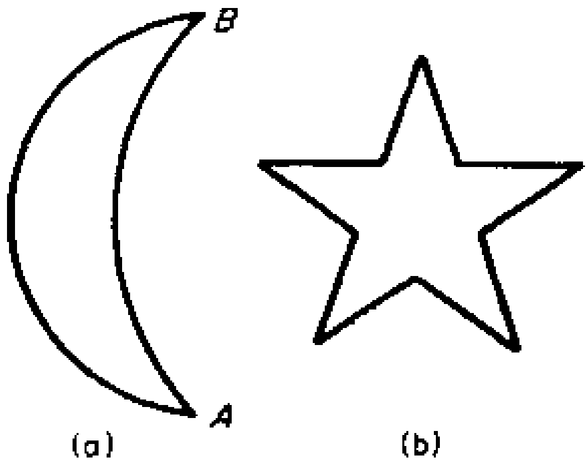


圖 23

但我們剛才作出的曲綫已經有無限斷點：圖 19 中的曲綫有一個這些點所組成的可數集，而在圖 20 中的曲綫更有整個連續統基數之多。它在康托爾集中每一點折斷，此外，在每個三角形的山峯上折斷。然而，即使在圖 21 中的曲綫，它也只在一個比較“小”的點集上折斷：集的長度爲零。

長久以來，没有數學家相信能够存在一條全部由“鋸齒”、“斷點”和“刺”所組成的連續曲綫。因此，數學家對於有人能成功地

作這樣的曲綫，而且函數的圖形有如刺籬笆感到十分吃驚。首先這樣做的是捷克數學家波爾查諾。但他的著作過了許久仍未出版。第一個發表的倒是德國數學家維爾斯特拉斯的例子。然而，我們在這兒給出維爾斯特拉斯的例子較爲困難，因爲它是以三角級數理論爲基礎的。

現在，我們在加上少許變動後，討論波爾查諾的例子。首先將綫段 [0, 1] 分爲四等份，在中央兩份作上一個等腰直角三角形〔圖 24 (a)〕，所得出的曲綫是以 $y=f_1(x)$ 表達某函數的圖形。其次我們把四份中的每一份再分爲四等份，並對應地多作四個等腰直角三角形〔圖 24 (b)〕。這樣，我們得到第二個函數 $y=f_2(x)$ 的圖形。若我們將這兩個函數相加，其和 $y=f_1(x)+f_2(x)$ 的圖形有如圖24 (c) 所描繪的形狀。很清楚，這曲綫已經有較多的折斷，並且這些折斷分佈較爲密集。下一步，我們將每一份分成四份，然後作出 16 個等腰直角三角形，然後將對應的函數 $y=f_3(x)$ 加於函數 $y=f_1(x)+f_2(x)$ 上。

將這個過程繼續下去，我們得到愈來愈多的折斷的曲綫。在極限的情況下，我們就得到每點都是折斷的一條曲綫，並且沒有一點能有切綫。

荷蘭數學家瓦爾登亦作出一個相似的例子，在

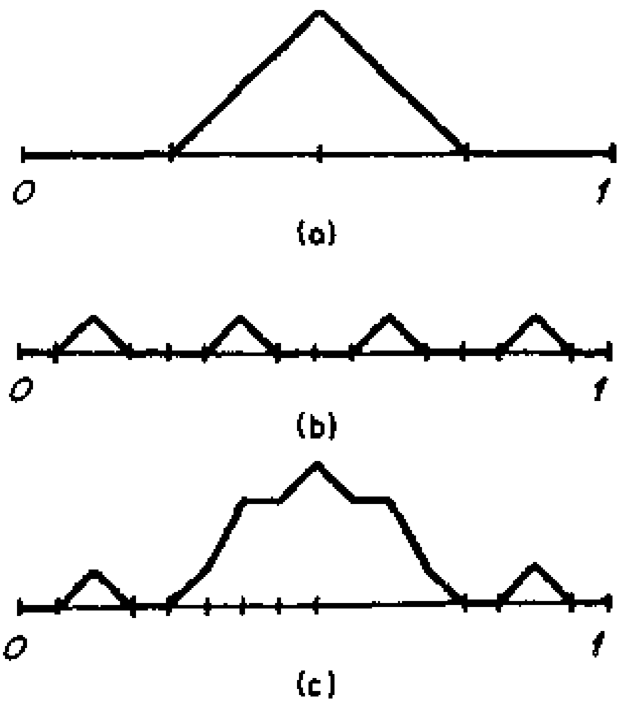
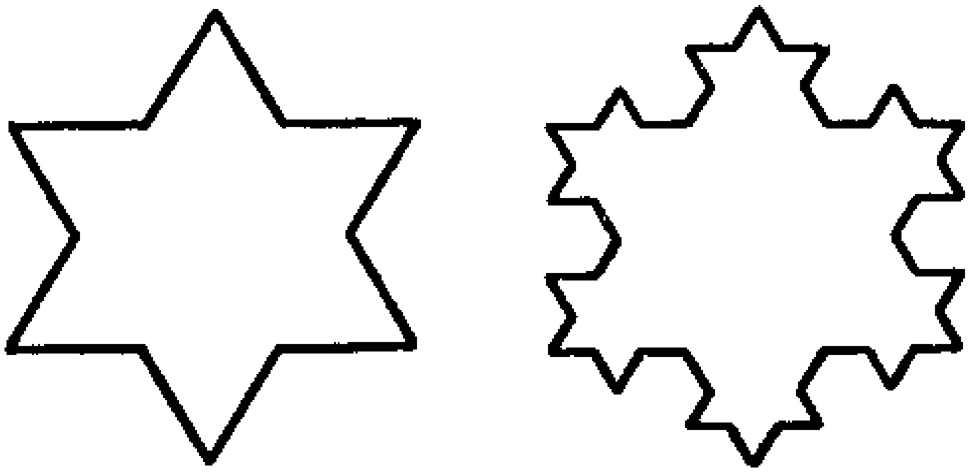


圖 24

曲綫上沒有一點能作出切綫。他取一個等邊三角形，將每邊分成三等份，然後在每邊的中央部分作新的頂點向外的等邊三角形。這樣，他得到一個六角星形〔圖 25 (a)〕，然後他繼續將這個星形的十二邊的每一邊分成三等份，重複作出等邊三角形。於是得到一個更爲多刺的曲綫，如圖 25(b)所示。經過無限次分割並作出正三角形，最終他得到一條曲綫，其中每一點都是一個折斷或刺尖。



(a) (b)

圖 25

數學家作出很多圖形上沒有一點有切綫的連續函數，於是開始研究其性質。這些性質與他們當時所處理過的"行爲良好"的平滑函數沒有相似的地方。受着傳統訓練的數學家對這些新函數的驚異是不足爲奇的。甚至連經典分析學的出色代表人物埃爾米特給他的朋友——一個荷蘭數學家斯梯階也寫道：

"我對連續函數的這些使人遺憾的"麻煩"感到厭惡——它竟

然連一個點都没有導數①！”（即指我們稱爲處處有刺的曲綫。）

著名的法國數學家龐加萊也說：

“過去的日子裏，在尋找新函數的背後有着某些實用的目的，但現時的函數只不過是爲了填塞我們的先驅者的思維間的空隙；除此之外，不能引出其他結論。”

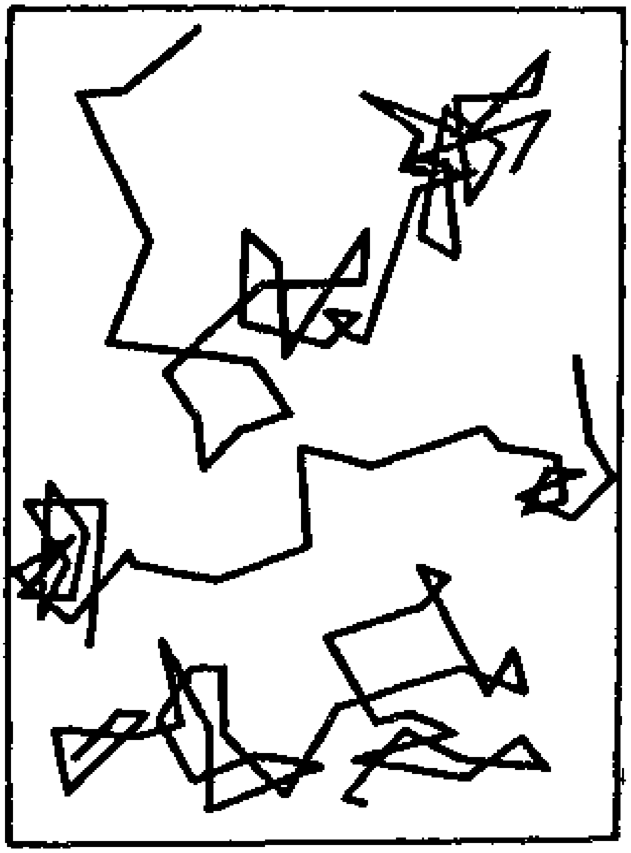


圖 26

但後來科學的發展證明龐加萊是錯的。我們在物理學中就遇到了一些曲綫，使人强烈地回憶起那些有刺的瓦爾登以及其他曲綫。這些曲綫是粒子在做由分子碰撞而產生的布朗運動的軌迹。法國科學家貝平作了一個這些質點運動的草圖。他每隔30秒觀察它們的位置並把所得的點用直綫段連起來。結果得到纏結在一起的一團折綫，如圖26所示。但不

① 譯註：一點的導數就是在該點的切綫的斜率。一個函數 $f(x)$ 在 a 點的導數是極限 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$。在有折點的地方，由於左右極限 $\lim\limits_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$，$\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ 不同，導數是不存在的。

要以爲這些質點在兩次觀察之間真正地作直綫運動。若貝平每半秒鐘而非每半分鐘觀察一次，那麼他要用一條比圖 26 中的更加複雜的折綫來代替每一直綫段。如果兩次觀察的時間愈短，折綫會變得愈加複雜和多刺。美國數學家維恩納曾證明，如果進行布朗運動的質點足够小，使得他們的惯性可以忽略，則他們會沿着一條在任何點都没有切綫的曲綫上移動。

無限長的閉曲綫

我們時常遇到無限長的曲綫：直綫，抛物綫，等等，它們都有無限的長度。所有這些曲綫都伸向無限遠，因此，它們有無限長度並不令人驚奇。然而，作出一條完全包含在平面上的有限區域，同時又有無限長度的曲綫並不困難。爲此，我們可以取一個圓，然後繞上無限圈數的螺綫（圖 27）。由於圈數是無限的，而且每圈的長度又大於圓周，因此螺綫的長度一定是無限大。

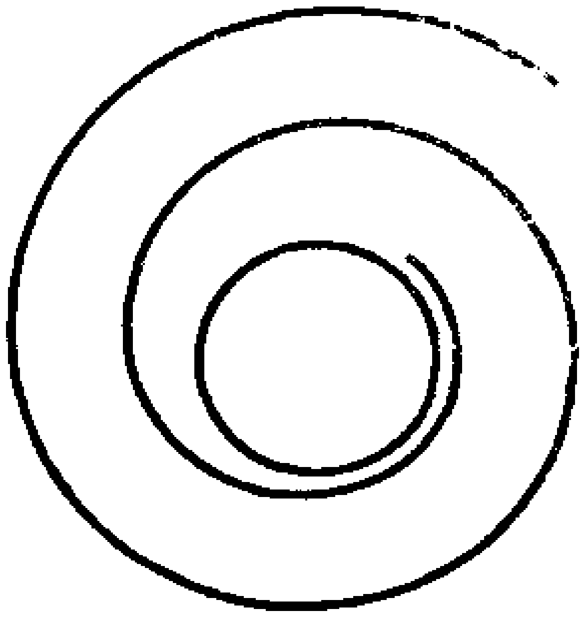


圖 27

但我們能否作出一個無限長的閉曲綫？一般的閉曲綫：圓、橢圓、心形綫（圖28）全部都是有限長。然而瓦爾登的多刺曲綫的長度是無限的。

事實上，原來的三角形周界是 3。很容易算出，第一步所得

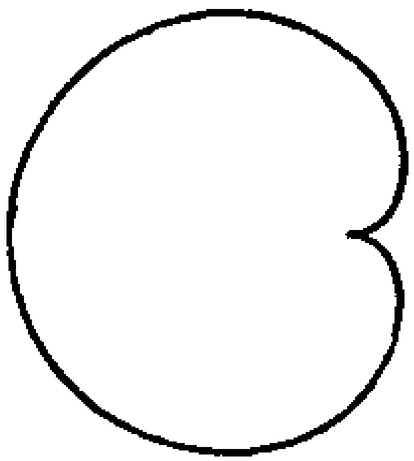


圖 28

的星形有長度 4。同時，在下一步中，我們得到由 48 段，每段長爲$\frac{1}{9}$的綫段所組成的曲綫。因此，周長爲 48/9。跟着，我們可得到一條長爲 192/27 的曲綫，等等。一般來說，在第 n 階段所得的曲綫，周界的長度爲 $3\left(\frac{4}{3}\right)^n$。但當 n 增加時，這個式子趨於無限大，因此瓦爾登曲綫的長度是無限大的。

此外還有其他無限長的曲綫。我們用下面所述曲綫爲例，我們把綫段 [0,1] 分爲兩半，並在左半作一高爲 1 的等腰三角形。然後我們將另一半$\left[\frac{1}{2}, 1\right]$分爲兩等份，在最左部分$\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right]$作高爲$\frac{1}{2}$的等腰三角形，我們再在綫段$\left[\frac{3}{4}, \frac{7}{8}\right]$上作下一個等腰三角形，高亦爲$\frac{1}{2}$，跟着亦作出四個三角形，其高爲$\frac{1}{4}$等等。（圖29）

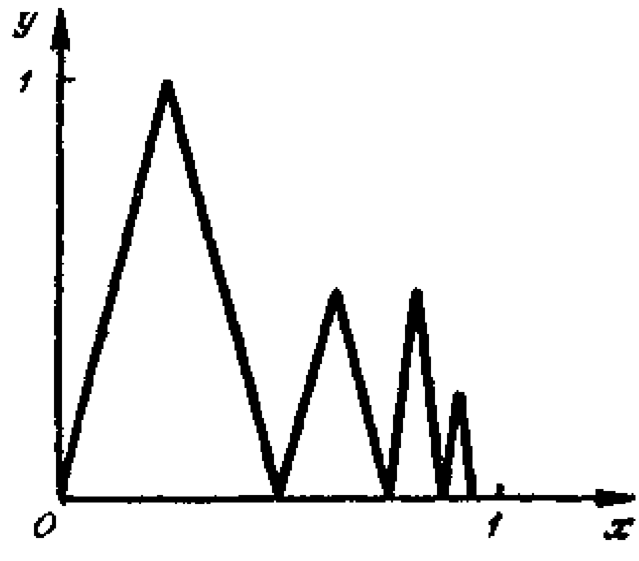


圖 29

我們再次得到一列下降的山脈，如圖 18 所示。但在這裏，山脈下降得十分緩慢。很清楚，第一個三角形的每個腰長大於 1，第二與第三個的腰長則大於$\frac{1}{2}$，而第四，五，六，七的大於$\frac{1}{4}$等

等(腰長永遠大於高)；故此折綫的長度不小於下列無窮級數之和：

$$2+\left(\frac{2}{2}+\frac{2}{2}\right)+\left(\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}+\frac{2}{4}\right)+\cdots \qquad (4\cdot16)$$

但每一括號內數字和爲 2，而括號的數目爲無限；因此級數與我們的曲綫長都是無窮大的。

數學地氈

有個故事說：有一次嘉捷蓮二世詢問她的一個將軍：臼炮和榴彈炮有什麼不同。那個尷尬的將軍答道："你知道啦，女王陛下，臼炮是一件東西，而榴彈炮則是另外的東西。"如果我們向一個對數學沒有多大認識的人問：曲綫，平面，與立體有何分別。我們可能會獲得同上面一樣的回答。並且，他更會奇怪我們怎會問這樣明顯的東西。十分清楚，曲綫，面與及立體是完全不同的東西，更沒有人將圓稱爲面或者將球稱爲曲綫。

但一位機智的棋藝大師講過，大師與生手的分別是生手的每一着都清楚地裝在腦海中，對大師來說，每一着都是一個謎。這和我們的問題情況相同。當然，當我們談及幾何圖形，如正方形或圓，沒有人會懷疑那個是曲綫，那個是平面。但在數學發展過程中，由於康托爾集的發現，出現了許多奇怪的幾何圖形，使得即使是一位有經驗的，博學的教授，更不要說是學生了，都不能够恰當地決定它們是曲綫，面還是立體。

我們將介紹一部分這種圖形。取綫段〔0，1〕，把它分成兩份，在綫段中央竪立一條長度爲$\frac{1}{2}$的垂直綫。我們再次將每一半

份平分爲兩份，並在每一份分點上豎立垂直的綫，並以高度爲$\frac{1}{4}$。然後，我們再次將所得各份分爲兩部，並在分點豎立長度爲$\frac{1}{8}$的垂直綫。

經過五個這樣的步驟後，我們獲得如圖 30 所示圖形。但我們不會在五步後便停下來，而是將我們的程序繼續無限次。結果得到某一幾何圖形①。好了，究竟這是什麼，一條曲綫還是一塊面？我們最終豎立了無限多條垂直綫。他們是否充實並填滿接近綫段[0, 1]的一小塊平面？並不大容易回答這個問題。

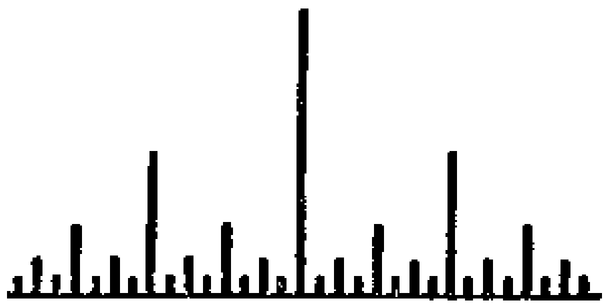


圖 30

這裏還有另外一個例子。我們取一個邊長爲 1 的正方形，並分之爲 9 等份。然後捨去中央部分（保留所除去正方形的邊）。此後，我們再將每個剩餘的正方形分爲 9 等份，並再捨去其中央部分。再經過一次這樣的操作，我們得到如圖 31 所示的圖形(捨去的正方形圖上陰影）。很明顯，圖 31 中的圖形仍是一個平面。但我們不停留在第三步驟上；將正方形繼續無限多次地分爲 9 等份而每次都將中央部分揚棄。最後我們得到一個幾何圖形，稱爲**席爾賓斯基地氈**，以紀念設計它的波蘭數學家席爾賓斯基。

---

① 譯註：圖形是由所有這樣的點 (x, y) 所組成的集：

$x=0.a_1a_2\cdots a_{n-1}1$（2 進），$a_1\cdots$，$a_{n-1}=0$ 或 1，

$0\leqslant y\leqslant 0.\underbrace{00\cdots0}_{n-1\text{個}0}1$（2 進）。

這個圖形看來好像由一個瘋癲的織工織出來的布。四周圍來的綫，結構以及緯綫交織成爲一個非常對稱和美麗的圖形。但做出來的地氈充滿了洞——其中沒有一塊是完整的，就算是最細小的方塊，其中央部分都要被割去。這地氈究竟是曲綫還是平面是不太明顯的。然而，從一方面說，它並不藏有任何一塊的實心部分，故此不能稱之爲面；但從另一方面來說，組成它的綫能織成這樣複雜的圖案，使得任何人都會毫不躊躇地稱席爾賓斯基地氈爲曲綫。在任何情形下，要畫出這條"曲綫"是十分困難的。

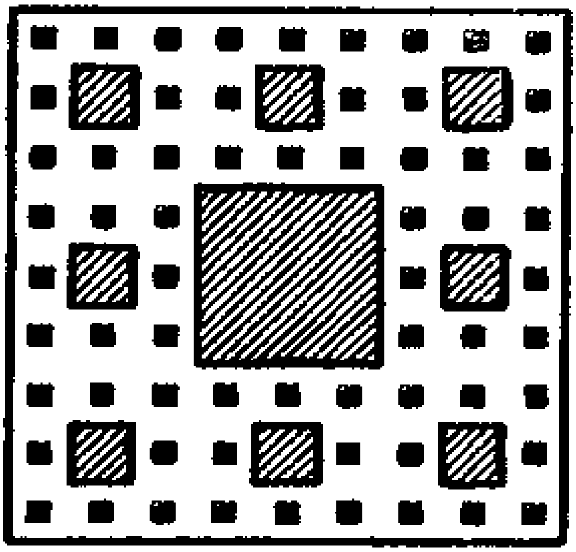


圖 31

但席爾賓斯基地氈還不是個最複雜的幾何圖形。我們可以取一個正立方體，將之分爲 27 個細小相等的正立方體，並捨棄正中央的正立方體分成 27 份，並再次進行清除中央部分的操作（經過兩次這種操作後，餘下的部分如圖 32 所示）。假設這種操作已經進行了無限多

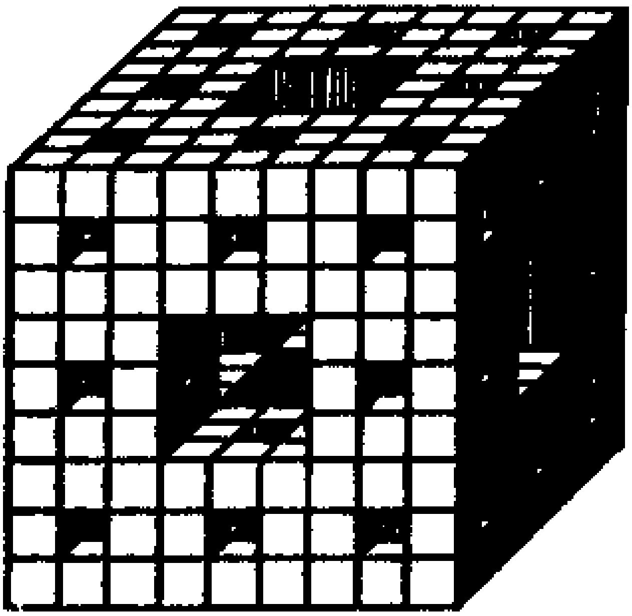


圖 32

次，當所有部分都已被揚棄後，我們所得的究竟是哪一類圖形——曲綫，平面還是立體？

歐幾里德並不倚賴於歐幾里德

當一個複雜的幾何問題放在早期的數學家面前時，他們首先要考察歐幾里德對這問題如何講法。畢竟，差不多二千多年以來，歐幾里德就是數學嚴謹性的標準以及幾何知識的百科全書。值得注意的是，甚至哲學家，爲了避免對於他們的議論的嚴謹性的指責，也求助於歐幾里德的語言，並且將他們的陳述歸結爲公理，引理與及定理。

但就我們的問題而言，歐幾里德所寫的每一件事都是萬分含糊的。歐幾里德的《幾何原本》的開頭數行是：

1. 點就是沒有大小的東西。
2. 曲綫有長度而無闊度。
3. 曲綫的極端就是點。
4. 面就是只有長度與闊度的東西。
5. 面的邊界是一條曲綫。
6. 邊界就是某東西的邊。
7. 圖形就是包在某些東西內或某些邊界內的東西。

現在看來，無論和上述的相似與否，它們都不是嚴謹的數學定義。一個不知道什麼是點，曲綫或面的人從這些"定義"得到些很有用的信息是很困難的，真使人容易想起那個尷尬的將軍的答案：曲綫是一種東西而面則是另外的東西。在任何情況下，我們都不能用這定義成功地決定究竟席爾賓斯基地氈是綫還是面，即只

有長度而沒有闊度，還是長度闊度二者兼備。

然而，如同席爾賓斯基地氈這麼複雜的圖形，在歐幾里德時代還沒有人知道，而對於簡單的圖形來說，定義並不是真正需要的——任何人都能從圖形指出哪個是曲綫，哪個是面。似乎歐幾里德自己也覺得所有他的基本概念的定義都是不對的。無論如何，把這些定義在書開頭陳述過後，他便完全忘記了它們，在他以後的著作中，甚至連一次也沒有用過。

嚴謹的定義是否需要?

歐幾里德的權威屹立了二千年而沒有人追究。從任何方面去懷疑他的說話都會致命地，無可挽回地傷害數學本身的地位。一位十九世紀最偉大的數學家高斯，在羅巴契夫斯基之前甚至就已經形成非歐幾何的概念，但他沒有發表他的發現，據他寫信給一個朋友說，爲的是害怕比奧西亞人① 的尖叫聲。最後，這一點却成爲了俄國大幾何學家羅巴契夫斯基的功蹟，他真的不顧那些不通的專家的嘲笑而發表了他的發現，爲世界帶來了非歐幾何。

在羅巴契夫斯基的著述出現後，就明顯地存在着兩種幾何學，兩者都無何爭辯地合乎邏輯，但得到完全不同的定理。如果如此，所有對於幾何直觀性的要求就完全失去其價值。每一個幾何命題，現在必須基於嚴謹的定義以及無懈可擊的邏輯推論之上。從而，現在要給出關於曲綫，圖形，立體的確切定義就更顯得十分重要，而不能再是“這是一樣東西，那是另外一樣”那一

① 原註：一個衆所周知的希臘的遲鈍的種族。

類。

在牛頓，萊布尼茲，歐拉，拉格朗日和其他十七，十八世紀偉大的數學家的著作基礎上形成的微積分學的幫助下，科學家已能成功地解決了大部分的各類不同的問題，由計算炮彈的軌迹到預測行星與彗星的運動。但達成這些顯著成就所用到的基本概念的定義都是極不嚴謹的。在那時代的數學分析是基於無限小量的概念的，就是些介乎存在與不存在之間的東西；一些似乎像零，但並非真正爲零的東西。從而，十八世紀的數學家被迫用“去做吧， 你終於會相信的。”這句話來鼓勵他們那些猶疑不決的學生。

但事實上數學並不是宗教，它不能只建立於信心上。而且更重要的是，能够在大師手中做出出色結果的方法，被他們的較笨拙的學生用時，却開始引出錯誤以及似是而非的東西。大師們由於他們完美的數學直覺而能够避免錯誤，那些下意識的感覺時常會比長篇大論的邏輯推理來得更快地導致正確的答案。但學生們並未具有這種直觀，於是在十八世紀末期出現了一個前所未有的醜聞——到處充塞着比印刷它們的紙張還不值錢的公式，與及應用範圍完全不清楚的有問題的定理。

因此，就像小孩子要打破美麗的玩具以求看看它怎樣操作一樣，十九世紀數學家對到那時爲止的所有概念都進行了嚴厲的批評，並開始在一個嚴謹定義的基礎上重建數學。訴諸直覺被排斥，代之而起的是最嚴謹的邏輯①。人們發現，在分析學課程所

① 原註：在實際上，他們經常趨向削足就履。在二十世紀，許多被拋棄的數學重新變成爲科學的很多部分。

遇到的簡單術語是缺乏邏輯的。例如：

“考慮由閉曲綫Γ所圍的區域G。”

閉曲綫是什麽？它爲什麽是一個區域的邊界？閉曲綫將平面分爲多少部分？而所討論的是哪一部分？

十八世紀的數學家並沒有答覆這些問題。他們只是畫一個蛋形曲綫便認爲這是所要講的話。但到了十九世紀，再沒有人會相信圖形。“曲綫是什麽？”這個問題只不過是分析學家所面對的重要問題之一。

但在他們對這個問題成功地給出一個全面的解答以前，又經過了一個長的時期。

曲綫是一個動點的軌迹

爲了要得到一個曲綫的嚴謹定義，必須要擺脱那些形成這個數學概念的具體對象，如長的、細的綫，光綫，長而窄的路，等等。在所有這些情況下，長度是這樣地遠遠大於闊度，使得後者可以被忽略。經過數學的理想化後，我們得到有長無闊這個概念。

法國數學家約當首先嘗試給曲綫下一個嚴謹的定義。他從這個事實開始，一件十分細小物件的運動軌迹可以用一條長而窄的管子來代表，當我們減小物件的大小，這管子變得愈來愈窄，而其極限變成爲一個動點的軌迹。於是約當在他的曲綫定義上用了一條没有闊度的曲綫這個假設。因此，他稱一動點的軌迹爲曲綫。在這裏，點是以連續狀態運動的，並不作任何跳躍。

約當的定義可以更準確地叙述如下，爲了確定一動點的位

置，在運動過程的每一個時刻，它的坐標都要給出。因爲運動發生於一個有限時間區間，我們可以概括地假設這個區間爲[0,1]。換句話說，這點在作爲觀測起點的某一時刻開始運動，經過某一單位時間（如一秒，一分，一年等）後終結其運動。對於過去的區間的每一時刻 t，都給出動點的坐標。因此，點的坐標依賴於時刻 t，是 t 的函數，我們將以 $f(t)$ 及 $g(t)$ 表示這些函數：

$$x=f(t),\qquad y=g(t) \tag{4·17}$$

要求這點作連續運動，即是要求函數 $f(t)$ 及 $g(t)$ 在綫段[0,1]上每點都是連續的。粗略地說，當變量 t 有細微變化時，就會引導函數 $f(t)$ 和 $g(t)$ 的細微變化。更精確地說，如果 $t_1,\cdots,t_n,\cdots$ 趨向於一個數值 t，$\lim\limits_{n\to\infty}t_n=t$，則我們有等式

$$\lim_{n\to\infty}f(t_n)=f(t) \tag{4·18}$$

及

$$\lim_{n\to\infty}g(t_n)=g(t) \tag{4·19}$$

後來發現約當的定義是一個頗爲成功的定義。直到當時爲止，所有數學家所處理的曲綫都是在約當定義下的曲綫，即是所謂**約當曲綫**。以一個半徑爲 1 的圓爲例，圓的長度爲 2π。於是點要在單位時間內，以速度 2π 運動才能完成這個圓。因此，在時間 t 內，它將走過弧綫 $2\pi t$。

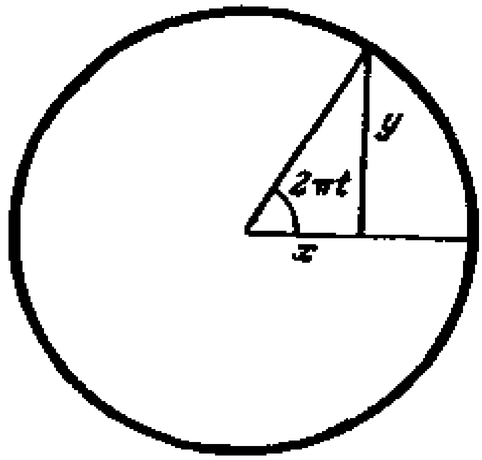


圖 33

由圖 33 清楚地知道，點在時間 t 時，它的坐標由下列公式給

出：

$$x = \cos 2\pi t \qquad (4\cdot 20)$$
$$y = \sin 2\pi t$$

此方程式稱爲圓的参數方程式。在圖 34 中所描繪的曲綫（稱爲星形綫），其参數方程式的形式如下：

$$x = \cos^3 2\pi t \qquad (4\cdot 21)$$
$$x = \sin^3 2\pi t$$

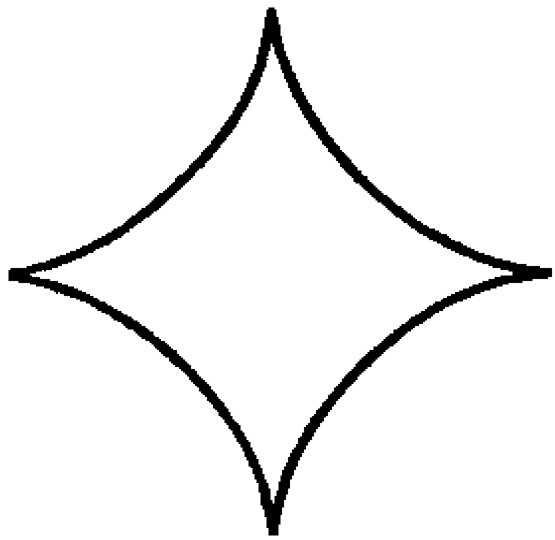


圖 34

約當曲綫可由 n 個不同的曲綫所組成，我們以一個半圓的周綫爲例，它由半徑爲 1 的半圓和一條直徑組成（圖35）。我們讓動點在一半時間內經過半圓，餘下一半時間經過直徑。我們已經知道沿一個圓作運動的坐標表達式。在沿直徑作運動時，當 x 變化由 －1 至 ＋1，y 保持爲 0。

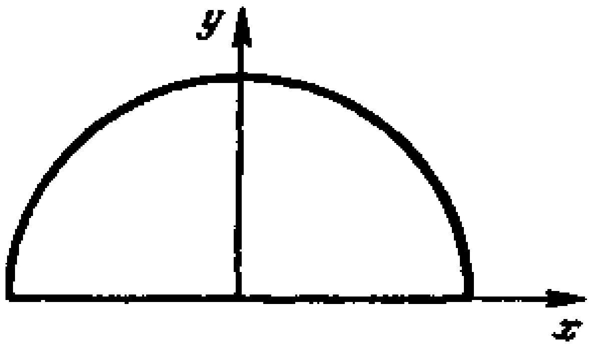


圖 35

結果，我們所得到的周綫的参數方程式如下：

$$x = \begin{cases} \cos 2\pi t & \text{如果} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ 4t - 3 & \text{如果} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \qquad (4\cdot 22)$$

$$y = \begin{cases} \sin 2\pi t & \text{如果} \quad 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2} \\ 0 & \text{如果} \quad \frac{1}{2} \leqslant t \leqslant 1 \end{cases} \qquad (4\cdot 23)$$

定理是明白的，但證明却不是

約當應用他的曲綫概念，成功地對我們較早所提及的，以分析學課本抽出來的一句話“設閉曲綫 Γ 包着區域 G”，給出了一個精確的定義。一條封閉的約當曲綫就是這樣的一條曲綫，它在 $t=1$ 時正好經過它在 $t=0$ 時已經經過的點。只要在 0 與 1 之間沒有兩個時間值 t_1 與 t_2 對應於曲綫上同一個點，這曲綫就不與自己相交。

約當證明了下面的定理：

定理　**一條不與本身相交的封閉約當曲綫 Γ 將平面分爲兩部分。在同一部分內的兩點可以用一條與曲綫 Γ 不相交的折綫相連，但在不同部分的兩點，則不可以用這種折綫相連；任何連結在不同部分的兩點的折綫必與曲綫 Γ 相交**（圖 36）。

這個定理看來是完全明白的。然而，它的證明却要求十分精

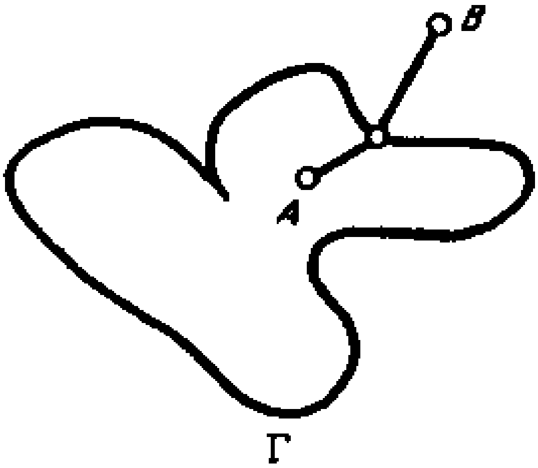


圖 36

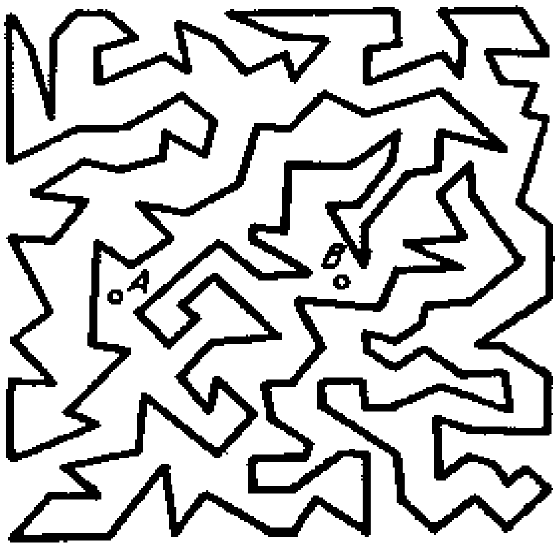


圖 37

細的推論。就算曲綫 Γ 是一條多邊形的邊界，證明依然是十分複雜的。在圖 37 中，看看你能否迅速地決定 A，B 兩點是否能用一條與周綫 Γ 不相交的折綫相連。

封閉的約當曲綫把平面分割成兩部分，稱之爲曲綫所包着的外域與內域。至此，閉曲綫所圍的區域的概念，有了精確的定義。

經過正方形所有點的曲綫

最初，在約當給出他的曲綫定義後，似乎目標已經達到——可以使用一個嚴謹的曲綫概念而不必倚靠直觀性。但很快就發覺，事情並不如所料——約當的定義不單只包括數學家一般所稱的曲綫，並且包括了沒有人認爲是曲綫的幾何圖形。數學家無論怎樣都可以協調那些處處有刺的曲綫使其自圓其說，但從沒有人喜歡稱正方形爲曲綫。但後來證明，正方形，三角形與及圓（不計圖形的邊界，而在每個情况下，只計圖形本身的內點），竟然是約當意義下的曲綫。這是由意大利數學家皮亞諾所證明的。

我們已經提過，康托爾在綫段上的點與正方形上的點之間作出一個一一對應，即是說，他證明了綫段上點的數目與正方形上的一樣多①。但他的對應並不是連續的。當點沿綫段上移動，它在正方形的對應點並不像一隻甲蟲般爬行，却像蚤子一般四處跳躍。事實上，讓我們在綫段上取點：

$$0.50000000\cdots，0.49999990000000\cdots \qquad (4\text{·}24)$$

---

① 譯註：見 58 頁。

這兩點十分接近。但正方形上對應點却相距很遠。因爲第一點的對應點爲（0.50000…，0.0000…），位於正方形的底部，而第二點的對應點却是（0.4999000…，0.9999000…）位於正方形的最高部分。並且當我們增加第二點中 9 字的數目，使之接近第一點，在正方形上的對應點却並沒有開始接近。

因此，康托爾的由綫段到正方形的投影，雖然是一對一，但並不是連續的，從而並不給出一條約當曲綫。皮亞諾成功地作出一個由綫段上的點到正方形上的點的投影，並將綫段上相鄰的點投影至正方形上相鄰的點。換句話說，皮亞諾能够作出一條曲綫（在約當意義下）經過正方形上每一點！

當然，我們不能够畫出皮亞諾曲綫，除非我們摹仿抽象派畫家，畫出一個黑色的正方形。但是，這個正方形畢竟是均勻的，因此我們不能看出曲綫由哪裏開始，哪裏結束，以及如何經過這個正方形。因此，我們寧願跟從物理學家貝平的例子，而不跟從抽象派畫家，並利用綫段去描繪動點的位置。每兩次觀察的時間區間愈短，所得到的折綫將會更加準確地代表皮亞諾曲綫。

首先每$\frac{1}{4}$秒我們觀察一次動點的位置。換句話說，我們在它剛開始運動時，開始運動後$\frac{1}{4}$秒時，$\frac{1}{2}$秒時，$\frac{3}{4}$秒時，和運動終結時觀察它的位置。這樣，我們得到 5 個點。將它們連接起來，我們得到如圖 38(a) 所示的綫 ABCDE。

自然，這條曲綫並不經過曲綫上所有點。現今我們減少每一次單獨觀察相隔的時間區間，每隔$\frac{1}{10}$秒觀察點的位置，現在曲綫會更加扭曲，折斷數目增加了，其形式如圖 38(b) 所示。若我們觀察動點位置的次數更多，我們將會得到在圖 38(c) 所示的曲

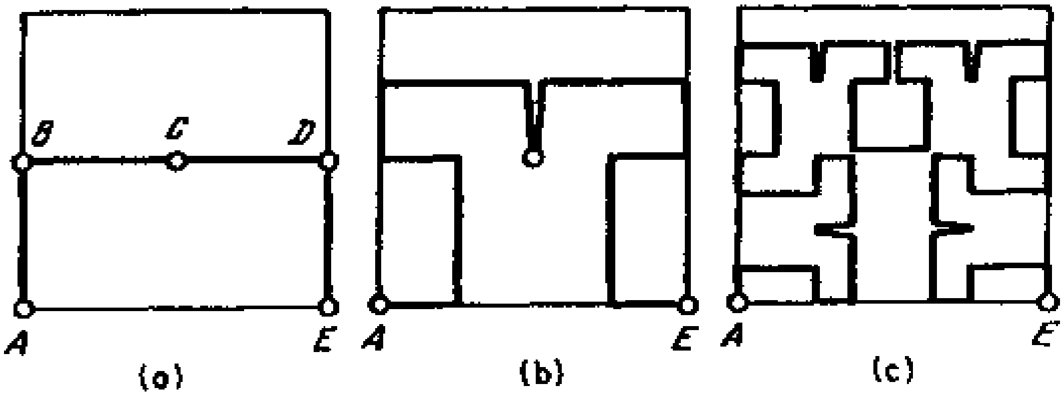


圖 38

綫。我們看到這曲綫愈來愈稠密地塡塞正方形，並且愈來愈接近正方形上每一點。在極限情形下，我們不斷地觀察這個動點，我們將會得到一條曲綫，它沒有例外地經過正方形上所有的點。

值得注意的是，皮亞諾比康托爾有利的地方是他的曲綫是連續的，然而他在別的性質上也有不足之處。他的曲綫不再是一個由綫段至正方形的一一對應；它經過正方形上某些點多次。後來，才有人證明了一一對應與連續是不相符合的：並不存在一條正好一次就經過正方形上所有點的約當曲綫。

翻天覆地

很難用文字去表達皮亞諾的結果對數學界的影響。似乎什麼都完了，所有基本的數學概念全部失去它們的意義：綫與面、面與體的分別不再那麼淸楚了（當時仍然不知道表明綫段與正方形間不可能有一一連續對應的結果）。法國知名數學家亨利·龐加萊痛苦地驚呼：

“爲什麼直觀竟可能這樣欺騙我們？”

很快便弄清楚了，約當的定義有它的缺點。一方面，它太廣義：皮亞諾曲綫適合這個定義；但另一方面它又太狹義：並非所有我們直觀地稱爲曲綫的圖形都能滿足這個定義。例如在 91 頁圖 27 所描繪的曲綫（那個連同包着它的螺綫的圓）並不是約當曲綫。還有，發現了隱藏得更深入的，約當定義的弱點——畢竟，這個定義不單只涉及曲綫，而且涉及產生曲綫的點的移動速率。例如，如果有一個跑步者在$\frac{1}{4}$分鐘内完成首半圓，以後他疲倦了，要花$\frac{3}{4}$分鐘來完成另外一半。很明顯，我們在這情况下所得的參數方程式與（4·20）完全不同。

並且，動點可以用無數的不同方式經過這個圓，有時加快，有時放慢。因此，對同一個圓有很多不同的參數方程式。很難猜出方程式

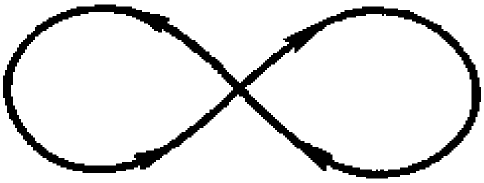
$$x=\frac{1-t^2}{1+t^2},\qquad y=\frac{2t}{1+t^2} \tag{4·25}$$

與方程式

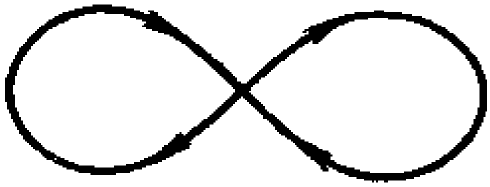
$$x=\cos 2\pi t,\qquad y=\sin 2\pi t \tag{4·26}$$

是描述同一個圓。同時，人們很容易被較複雜的曲綫所迷惑。例如：二葉玫瑰。我們可以依據圖 39（a）或圖 39（b）所示掃過這條曲綫。據約當的觀點來說，我們得到是兩個完全不同的曲綫；其實我們如何掃過這曲綫是不要緊的——曲綫依然是一樣的。

於是又出現了問題：曲綫是什麼，而它與面有什麼分別？這個答案與康托爾在幾何圖形的全面研究有關。



(a)



(b)

圖 39

如何創作雕像

自從建立了集論後，康托爾把他的注意力轉移到這個問題：**一個幾何圖形是什麼？**這個問題最廣義的答案是：一個幾何圖形就是在空間中的任何點集。如果這個集是在平面上的，那麼我們會得到一個平面幾何圖形。但是這個答案可能太廣義了——這意義下的"圖形"將沒有現實意義的性質。這種圖形的幾何學差不多沒有定理。

因此，首先必須限制所研究的集的種類，抽出那些與普通幾何圖形的性質相近的集。

爲了抽出這類圖形，我們必須決定，哪些是這些一般圖形，如正方形、圓、綫段、星形綫等，所共有的東西後來發現：可以用單一程序去作出這些圖形。

據說，有人問著名的雕刻家羅定，他如何能創作出這樣出色的雕像時，他答道："我選擇一塊雲石，然後將我所不需要的砍去。"

我們可以用同樣方法得到任何有界平面幾何圖形：取一個包着這個圖形的正方形，然後砍去那些我們不要的。當然，我們不會一下子砍去所有部分，而是逐步進行，每一步都除去一些圓形部分。在這兒，我們除去圓的內部，而它的邊界——圓周——則

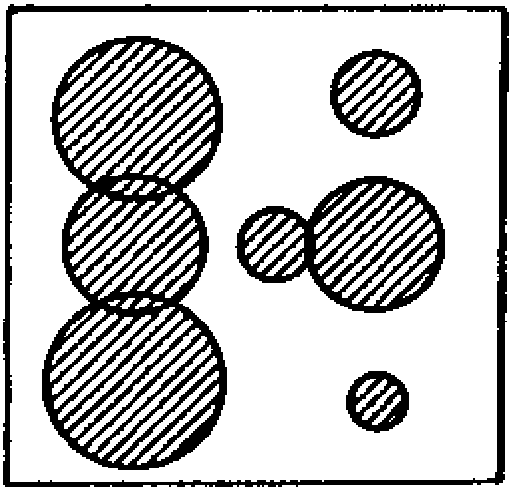


圖 40

保留在圖形上。

最初，我們以爲這個程序只能產生如圖 40 的圖形①。但秘訣在於我們不單只除去一兩個圓盤，而是一個圓盤的可數集。如果允許我們除去可數個圓盤，我們可以得到任何我們喜歡的圖形。爲此，我們以下列方式進行：取所有圓心的兩個坐標以及半徑皆爲有理數，由 45 頁定理 3.1，這樣的圓的集是可數的。然後，由平面上除去所有我們集中的那些圓，其內部不包含這個幾何圖形的點。

很明顯，經過這個程序後，只有幾何圖形本身會留下來，而所除去的圓的數目不多於可數的數②。

然而，我們不一定要除去圓盤。我們可以代之而除去正方形、矩形、橢圓，要注意只將內點除去，而邊界仍然保留。

連續統

用揚棄圓盤(或正方形的內域等等)的可數集的方法，除了普

---

① 譯註：陰影部分已被除去。

② 譯註：例如，爲了要作出圓盤(連周界) $x^2+y^2\leqslant 1$，首先用正方形 $|x|=|y|=2$ 封閉圓盤，然後除去正方形內與及可數個這樣的圓內的公共點：圓心爲 (x,y)，半徑爲 $r<(\sqrt{x^2+y^2}-1)$，其中 x，y，r 是有理數，$r\geqslant 0$。

通幾何圖形外，亦可以得到與原來幾何圖形十分不同的其他集，而且依然具有許多有趣的性質。例如，我們已經詳細地討論過的席爾賓斯基地氈，可以由下述方法得出：從邊長爲 1 的正方形中，一個接着一個地除去細小的正方形，留下它們的邊。

此外，我們還可以用這個揚棄過程獲得一些不是由一單個小片所組成的圖形。例如：

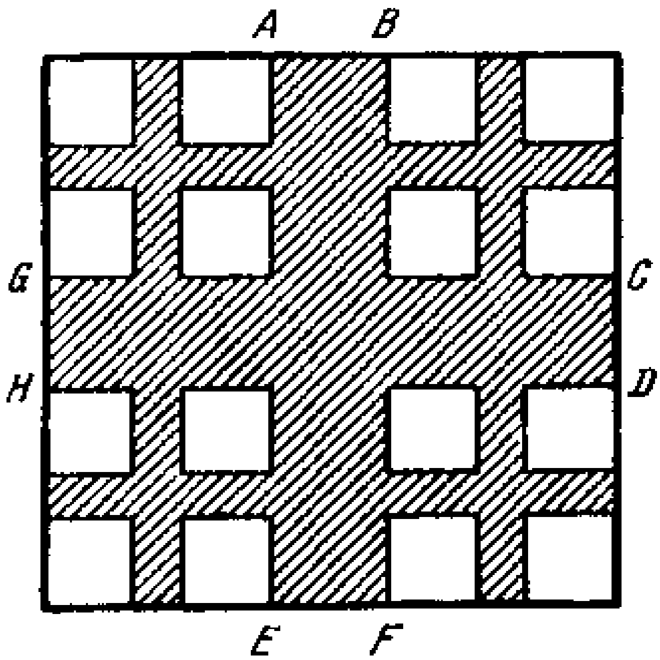


圖 41

如果我們除去"十字形"①（如圖所示），最後我們將得到一個一塊充實的小片也不包含的集（稱之爲**完全不聯通的**）。因此，我們作以下的規定：在每次揚棄的手續後，必須餘下一個只包括一單個小片的集。這樣，經過所有的揚棄後，仍然有一個這樣的集留下，即由一單個小片所組成（即是數學家所稱的**聯通集**）。所得的集也是有界的，即，它完全包括在某正方形內。

一個集 F 如果滿足下面三個條件：

(1) 集 F 得自一個正方形②；除去一個由圓盤（或正方形等）所組成的可數集，而餘下它們的邊界。

---

① 原註：包括末端綫段，如綫段 AB，CD，EF，GH。

② 譯註：即指正方形的邊界，連同其內域。

（2）集 F 由一整塊所組成（連通的），

（3）集 F 是有界的，

就被康托爾稱之爲**連續統**（連續統在拉丁文裏，continuum 即是不可分離的意思）。後來發現連續統是一個仍然擁有與一般幾何圖形相似的性質的最廣義的集。

康托爾曲綫

現在我們要回答這個問題，平面曲綫是什麼？因爲平面曲綫一定是幾何圖形，很明顯我們一定要由連續統中找尋出來。但正方形和圓①都是連續統而我們又肯定不願意稱這些圖形爲曲綫。因此我們必須附加另外一些條件以除去這些圖形。

要注意到圓與正方形二者都包括平面上"充實"的部分。但曲綫不可能包括平面上"充實"的部分；無論我們取如何小的正方形，一定會有些在正方形內的點是不屬於曲綫的（圖 42）。

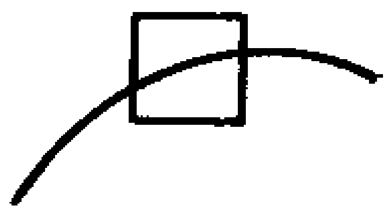


圖 42

因此，以下就是我們需要的補充條件：

在康托爾意義下的平面曲綫是在平面上的一個連續統，它不能填滿平面上任何"充實"的部分（即是，在每個正方形中都有些點不屬於這條曲綫）。

例如，綫段，三角形的邊界，圓周，四葉玫瑰綫等全部都是曲綫。席爾賓斯基地毯亦是一條曲綫；因爲在作圖中我們在所有

---

① 譯註：指其內域，連邊界。

由分割而產生的正方形中鑽洞，因而它沒有包括平面任何實的部分在內。其他的康托爾曲綫包括繞着螺綫的圓以及圖 43 中連同在 y 軸上的綫段 [0, 1] 在内的鋸齒形的曲綫，一般來説，所有我們直覺上覺得是曲綫的圖形都是在康托爾意義下的曲綫，而任何包括平面上，就算是一片實心的部分的圖形，都不屬於康托爾曲綫類。

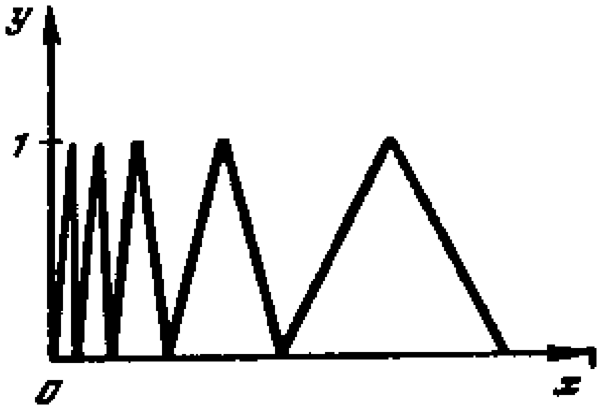


圖 43

但就算是在康托爾曲綫中，仍然有些曲綫，其性質與一般曲綫十分不相同。我們現在要討論其中一些。

曲綫的面積能否異於零？

現在，讀者對通過正方形内所有點的曲綫已有所認識。自然，他對於這個問題毫不驚異。話雖如此，一條曲綫能有面積嗎？無論如何，歐幾里德曾説曲綫有長無闊。我們怎能由沒有闊度的東西獲得面積呢？康托爾的曲綫定義也説，曲綫不能包着平面上任何一塊實心部分。我們在這種情况下哪裏找到面積呢？讓我們不要過早地妄下斷語。

在我們考慮這個問題前，我們必須理解我們所用的詞彙的正確意義。“一曲綫的面積爲零”或者“一曲綫的面積不爲零”究竟是什麽意思？考慮一條最常見的曲綫——一直綫段。由於它的寬度爲零，我們可以把它放入一個面積任意小的矩形中；我們只需選

擇一個闊度充分小的矩形就行了。同樣，我們可以把一個圓周放入一個面積爲任意小的多邊形裏。只要在圓內作一個邊數很多的內接正多邊形，然後在圓外作一個相似的外切多邊形就行了。在兩多邊形之間的區域可以有很小的面積（多邊形的邊數愈多，而積就愈小），而圓周則完全給這區域所包圍（圖 44）。

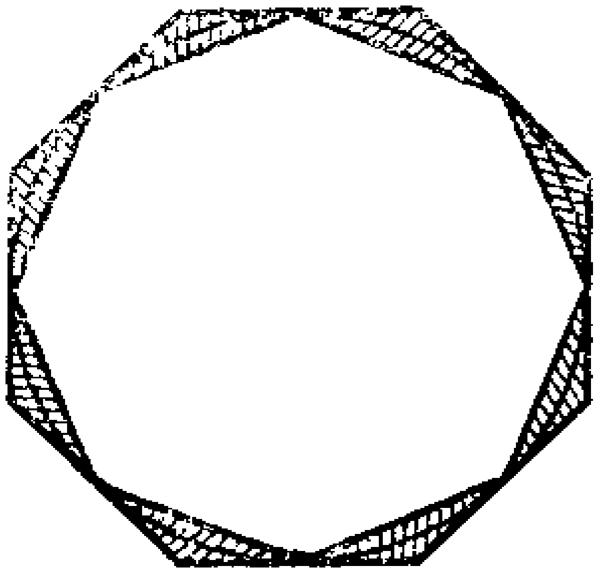


圖 44

現在，“曲綫的面積爲零”的意義清楚了。這就是說無論取一個如何小的正數 ε，我們都能找出一個包含着這曲綫的由多邊形所包圍的區域，而其面積小於 ε。如果我們不能找出這樣的區域，曲綫的面積就不爲零①。

爲了把定義弄得更清楚，我們考慮一個比直綫段或圓更複雜的曲綫。席爾賓斯基地氈當然是一條很複雜的曲綫。現在要找它的面積。首先，回憶起整個正方形的面積是 1。第一步，我們除去面積爲$\frac{1}{9}$的中央正方形。於是，我們得到一個多邊形的區域，面積爲$\frac{8}{9}$。第二步，我們除去 8 個小正方形，面積爲$\frac{1}{81}$。這樣，

① 譯註：這裏所講的面積，其實是外測度的概念。嚴格地說：如果上述的區域不存在，我們僅稱外測度不爲零。當內外測度一致而又不爲零時，我們才稱面積不爲零。（見 116 頁譯註）

餘下一個多邊形區域，面積爲

$$\frac{8}{9}-\frac{8}{81}=\frac{64}{81}=\left(\frac{8}{9}\right)^2 \quad (4\cdot27)$$

很明顯，在第三步後將會有一串多邊形區域餘下，面積爲 $\left(\frac{8}{9}\right)^3$，$\left(\frac{8}{9}\right)^4$，等等。然而，如果你把一個真分數的冪次不斷昇高，極限將會爲零，如果 $0<q<1$，則

$$\lim_{n\to\infty} q^n=0 \quad (4\cdot28)$$

具體說，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{8}{9}\right)^n=0$。然而由極限的定義，表示對於任意 $\varepsilon>0$，我們都能找到一個 n 使得 $\left(\frac{8}{9}\right)^n<\varepsilon$。這說明 n 步以後，我們可得一多邊形區域，其面積小於 ε。而這區域覆蓋着席爾賓斯基地氈。結論就是：席爾賓斯基地氈的面積是零。

似乎，這標誌着歐幾里德定義的完全勝利。一條複雜如席爾賓斯基地氈的曲綫的面積也是零。但是，現在就慶祝這個勝利還爲時過早。畢竟，沒有人强迫我們一定要揚棄那麼大塊東西。爲了簡化起見，讓我們把正方形分爲 25 等份，代替以往的 9 等份（例如：把每邊分成 5 份）。除去中央的正方形，其面積明顯地是 $\frac{1}{25}$。可能讀者又想將餘下的 24 小塊的每

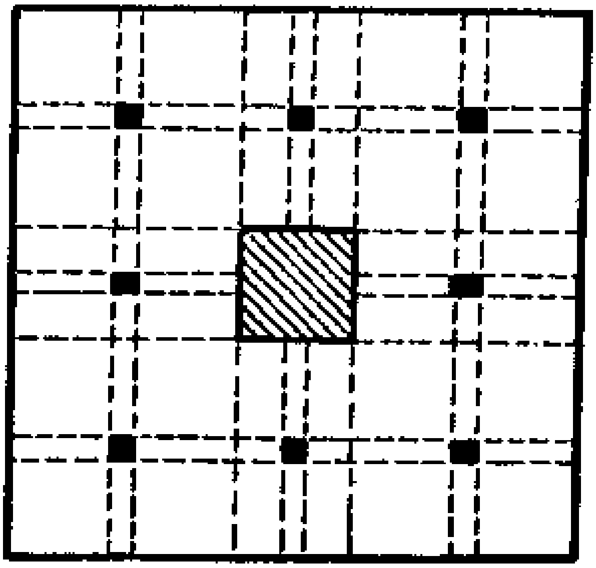


圖 45

一塊再分成 25 份，又除去中央部分。然而，這方法使計算很繁。我們代之以延長已揚棄的正方形的邊，直至與大正方形的邊相交爲止。這樣，共得到 4 個正方形（在四角）和 4 個矩形。

在每一個正方形和矩形中，我們作上十字形，其闊爲 $\frac{1}{25}$，然後除去每個中央部分。由於中央部分的面積是 $\frac{1}{625}$，第二步所揚棄的正方形的總面積是 $\frac{8}{625}$。繼續往下做，第三步我們揚棄了 64 個小正方形，總面積爲 $\frac{64}{25^3}=\frac{64}{15,625}$ ①，等等。所揚棄的正方形的總面積由下列幾何級數給出：

$$\frac{1}{25}+\frac{8}{25^2}+\frac{64}{25^3}+\cdots \tag{4·29}$$

其公比是 $\frac{8}{25}$。級數和是 $\frac{1}{17}$。然而，這是什麼意思？這表示，在每一步中，未揚棄的部分有不小於 $\frac{16}{17}$ 的面積。因此，沒有一個面積小於 $\frac{16}{17}$ 的多邊形區域可以覆蓋餘下的部分。最後，好像席爾賓斯基地氈一樣，餘下的是一條曲線（在康托爾意義下）——其中每一個正方形和矩形都有一孔，沒有一個實心的矩形和正方形餘下。

這樣，得出了一條在康托爾意義下的曲綫可以有非零的面積的結果！

---

① 譯註：在圖 45 中，第二步後餘下的正方形和矩形共有 64 個，在每一個正方形和矩形中，作十字形，其闊爲 $\frac{1}{5^3}$。除去每個的中央部分，總共除去的面積爲 $64\cdot\left(\frac{1}{5^3}\right)^2=\frac{8^2}{25^3}$。

沒有面積的區域

雖然如此，上述例子還是不太使人信服：我們所得的曲綫怎麽能處處與自己相交，又不圍上任何區域。因此就產生了問題：一條不與自己相交的"好"曲綫，能不能有非零的面積？事實竟然可能！

稍爲改變一下上述的作圖，我們即可作出這條曲綫。首先，我們作出這樣的一個集，其中不但没有一塊實心的正方形，甚至連一段連通的曲綫段也沒有。爲了達到這要求，我們要揚棄整個十字形而不是中央的正方形，如圖 46 所示。這裏，我們選擇這樣的十字形大小，使得第一個除去的十字形是$\frac{8}{25}$，第二步所除去的十字形總面積是$\frac{64}{625}=\left(\frac{8}{25}\right)^2$，第三步所除去的十字形總面積是$\left(\frac{8}{25}\right)^3$等等。於是，被揚棄的十字形的總面積是下列幾何級數的和：

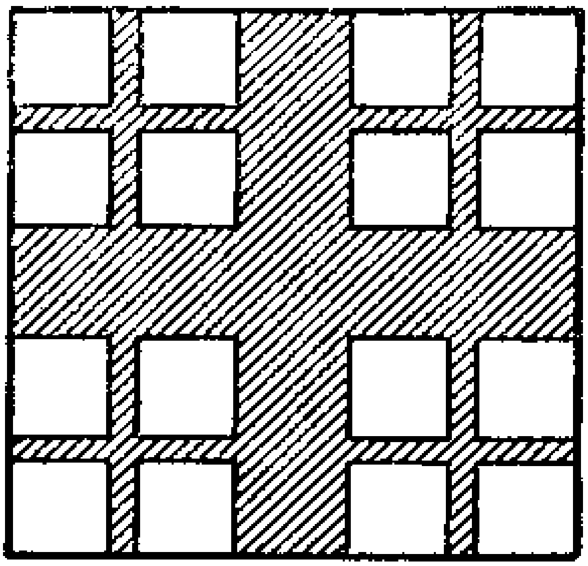


圖 46

$$\frac{8}{25}+\left(\frac{8}{25}\right)^2+\left(\frac{8}{25}\right)^3+\cdots \qquad (4\cdot30)$$

即是：$\frac{8}{17}$。它小於原面積的一半。這表示有原面積的$\frac{9}{17}$餘下。在作出這個集的過程中，我們除去了整個十字形，把正方形無情地撕開。其中沒有兩點能爲一曲綫——甚至連一條在康托爾定義下

的曲綫——所連接。點與點之間的聯系全部斷絶。數學家稱這餘下的集爲完全不連通集。雖然這集没有包含着一塊面或一段曲綫，其面積却不等於零；你不能够用一個小於$\frac{9}{17}$的多邊形區域去覆蓋這個集。

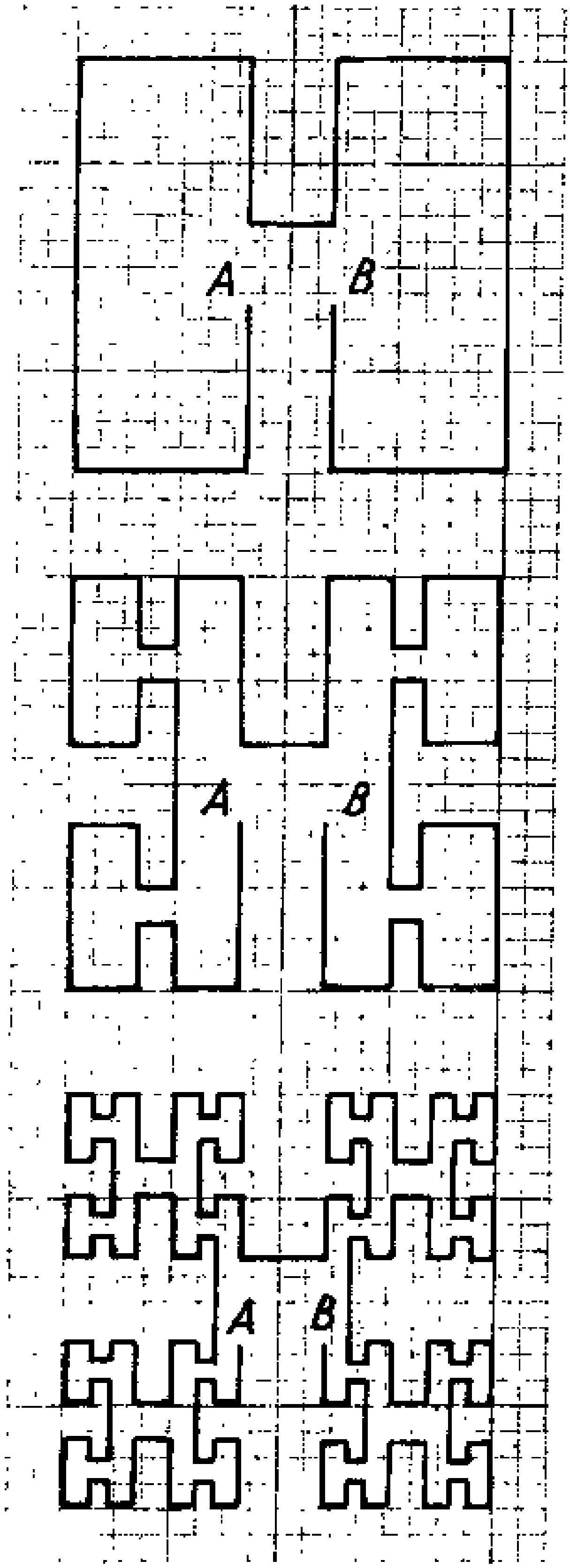
現在，作一條不與自己相交而面積不爲零的閉曲綫是很容易的事了。爲了達到這目的，只要連結我們剛才作出的點就行了，情况就像我們作一曲綫經過正方形上所有的點時一樣。由於每次都要揚棄整個的十字形，我們的曲綫不與自已相交（在這點它與皮亞諾曲綫不同）。由於它經過集的所有點，而集的面積至少是$\frac{9}{17}$，因此曲綫的面積至少是$\frac{9}{17}$①。

現在，要作出一個没有面積的區域就完全没有困難了。爲此，只要把曲綫上兩點A，B與另一條曲綫接上，可能是一個半圓周。那麼我們就得到，圍着某一個區域G的一條曲綫。然而它的面積是什麼？答案取决於我們有没有包括區域的邊界——因爲無論如何邊界本身有着至少爲$\frac{9}{17}$的面積。很明顯，我們的區域並没有一個在一般意義下的面積。在數學中，這樣的没有一般意義下的面積的區域被稱爲不可鑲嵌的②。

---

① 譯註：這裏講得不太清楚。圖 47 給出這曲綫的一種作法的先前三步。無限制地繼續下去，我們可得出一個連續的曲綫，經過集的每一點。

② 譯註：一般來說，給出一個閉區域G，如果$s_1, s_2, \cdots$是任意的一串閉的正方形，互不相交，而且$s_1, s_2, \cdots \subset G$，定義G的內測度爲各個可能和數$s_1+s_2+\cdots$的極大值。如果內外測度的大小一致，則稱其公共値爲G的面積。如果不一致，則稱G沒有面積。



(a)

(b)

(c)

圖 47

某些奇異的例子

自從皮亞諾曲綫出現後，數學家大概都已肯定地認爲他們在函數與曲綫的非常世界中已經見盡所有“奇迹”了。然而，他們的幾何直觀再次使他們失望。由於康托爾曲綫與衆不同的性質，使得重温下述故事是有教益的。

二十世紀初，一個著名的數學家索恩弗賴斯出版了一系列的著作，討論曲綫的各種不同性質，區域的邊界等等。在這些文章中，索恩弗賴斯常常依賴於“幾何直觀”。然而，數年之後，一個年青的荷蘭數學家包路華出版了一篇短文（僅十二頁）。其中包括若干意料之外的例子，證明了索恩弗賴斯的一個結論是完全錯的，而其他雖然没有錯，但其證明却是不嚴格的。事實上，索恩弗賴斯的“幾何直觀”被一些惡作劇所玩弄。

包路華作了一個開區域，其邊界却不是一個連續統。爲此，他把一個“瓶”的頸拉長，繞在一個圓上（圖 48）。

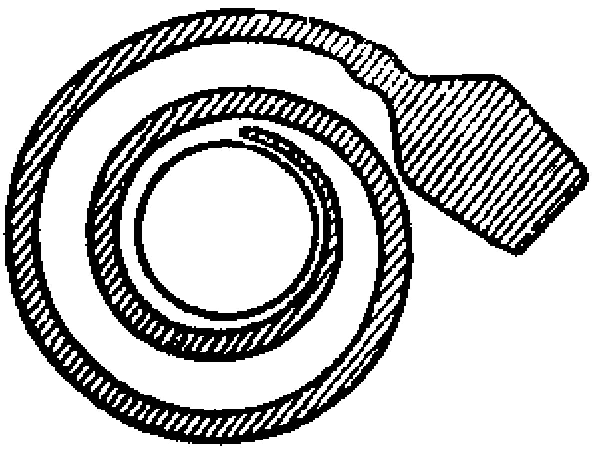


圖 48

結果，他獲得一個由兩個螺綫和一個"瓶"所包圍的區域。但它的邊界却不是一個連續統，爲了要得到一個連續統，我們必須加上螺綫所圍着的圓周。

區域與邊界

我們已經討論過區域與邊界。讓我們再在這停留一下，以便把這些概念精確化。人們發現曲綫的約當定義終究不太成功，因此我們要對區域給出一個新的定義。

一個由除去邊界的圓盤所組成的集，我們稱之爲**開集**。一個具體的例子是任何一個平面上的連續統的補集是一個開集。所有常見的平面區域(圓的内部，正方形的内部，三角形的内部等等)都是開集（限在平面上）。此外，這些集都是連通的，任意集内兩點可以由一條不離開這區域的折綫所連接。這些都是定義一個平面上的區域的性質。

一個平面上的區域是一個平面上，由除去了邊界的圓盤的和集所組成的連通點集。

這裏，圓盤的數目是任意的。然而，我們可以證明任何區域可以由可數個圓盤所組成[①]。

如果每個 a 的鄰域同時包含着G的點和G外的點（圖 49），那麼點 a 稱爲區域G的**界點**。

在空間中的開集，區域，界點是由同樣方法定義的。不同的就是用除去邊界的球代替除去邊界的圓盤。

---

① 譯註：見 108 頁。

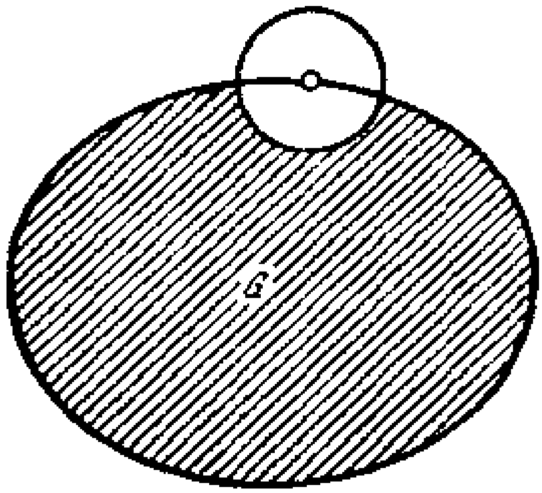


圖 49

除了點(平面上或空間上)的鄰域概念外，我們還需要集A內點的**相對鄰域**這個概念。其實這是指點的鄰域而又屬於集A的點集，即是點的一般鄰域與集A的相交。例如，如果A是圖50中的曲綫，而G是點a的一個鄰域，則這點的相對鄰域是b與c之間的曲綫段。如果集A包含若干點，則每一點都是本身的一個相對鄰域。爲了瞭解這點，我們只需取點的一般鄰域而又不包含集的其他點即可(圖51)。

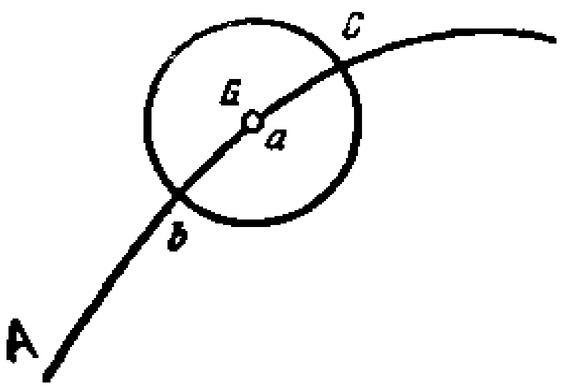


圖 50

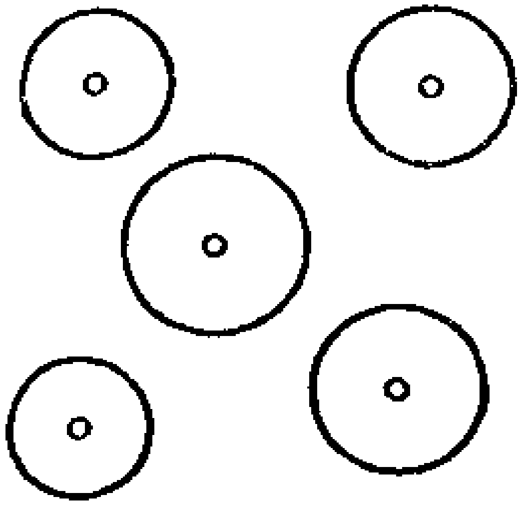


圖 51

一個大型的灌溉工程

我們現在要講第二個，更加出乎意料之外的包路華例子。讓

我們畫出一個國家及其鄰國的地圖。幾乎每個邊界點都屬於而且僅屬於本國以及另一鄰國這兩國。在地圖上，有一些點則是三國相聚的（圖 52）。三個邊疆守衛共同站在這些點上。然而地圖上這些點是有限的。看來很明顯，這些點不能佔掉一國的全部邊界，即是說，不會有三個區域(三國)共用同一邊界。換句話說，似乎很明顯：三個邊疆守衛不可能站在邊界的每一點上。

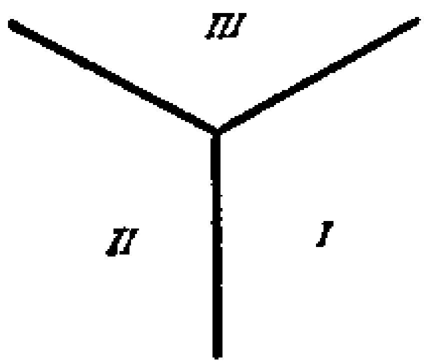


圖 52

然而包路華却作出了這樣的三個區域。爲了明白他的例子，設想在大海中有一小島，島上有兩湖淡水。一湖是涼的，一湖則是暖的。現在，我們進行以下的灌溉工程。第一日，我們由大海和由每一個湖都挖出一條運河，但每一條運河都是“死口”的（即是說：只是每個水庫的引水道），每條運河在任何地方都不相連，同時，當我們完成後，乾地上的每一點與海水湖水相距都小於 1 公里（圖 53）。

第二日的前半日，我們引長這些運河，使得他們仍然和以往一樣是“死口”的，不相互接觸，而乾地上的每點與三運河的距離則小於$\frac{1}{2}$公里。爲此，運河當然要比以前狹窄。在以後的四分之一日，我們繼續幹，使得乾地上的每點與每運河的距離小於$\frac{1}{4}$公里，等等。當我們將這個過程繼續下去，運河變得更加彎曲和狹窄。經過兩日的工作後，全島被三條運河滲透了，從而變成了一條康托爾曲綫。無論我們站在曲綫上的某一點，我們可以隨意由

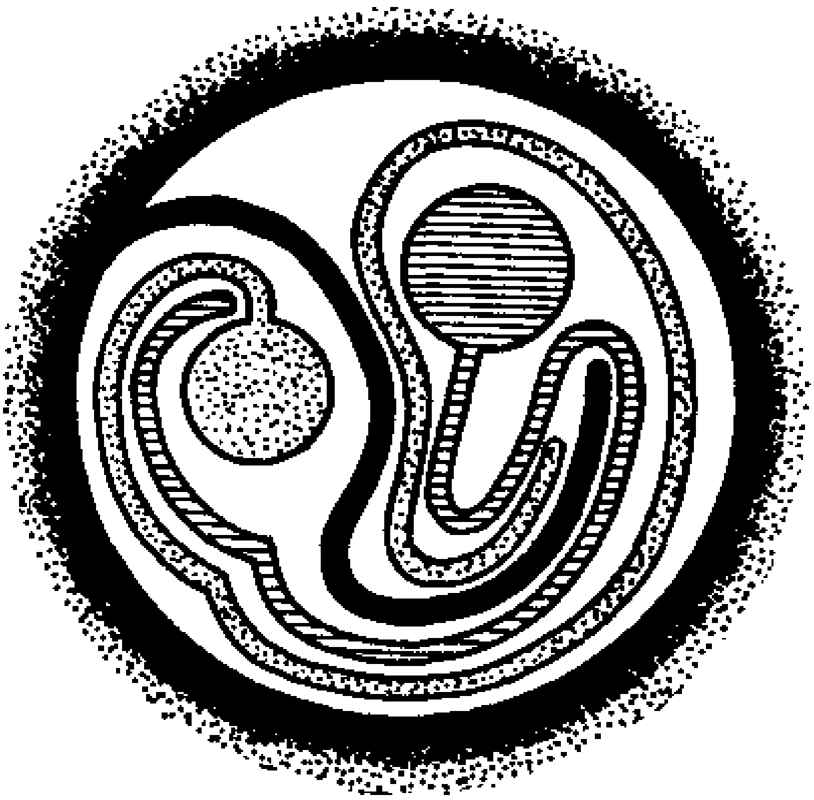


圖 53

取鹹水，暖水或冷水。因爲工程是這樣安排的，它使得各種水不互相混合。如果我們用三個國家去代替海洋和湖，就可以得到一個我們剛才所講的特別的地圖——三個邊疆守衛，每人出自一個國家，而可以站在邊界上的每一點。

一項“不能寫論文”的課題

我們曾經指出，康托爾的定義有一個缺點① ——對於在空間的曲綫，它完全不合適。然而，什麼才是空間的面呢？没有人知

① 譯註：事實上，作者並未指出過。

道。1921 年，蘇聯數學家耶果羅夫教授向他的學生烏理桑提出了這個問題——如何決定空間的曲綫和面。（很明顯，他正在想着一大堆這個問題的數學意義，或者，在現代有時會這樣說，想着爲這個問題寫論文的可能性——這是最困難的問題之一。）

烏理桑很快就理解到耶果羅夫的問題不過是一個更廣泛的問題的一個特殊情况：幾何圖形的維數是什麽，即是說，什麽圖形的特徵才使我們說一綫段或一圓周的維數是 1，正方形的維數是 2，立方體或球體的維數是 3？烏理桑的一個摯友亞歷山特洛夫，這樣回憶道："整個 1921 年的夏天都花在找尋一個(維數的)'新'定義；烏理桑不斷把他的注意力由這處移去那處，不斷地建立例子説明爲什麽這個或那個要除去。他花了整整兩個月在沉思。最後，八月尾的一個早晨，烏理桑帶着他現已馳名的維數的歸納定義的最後形式起床了……。那一個早晨，當我們在克拉耶斯馬洗澡時，烏理桑對我們講起他的維數定義。在那裏，長達幾小時的討論中，一個完整的由一系列定理組成的維數定理已經勾劃出來；那些定理當時只不過是假設，他還不知道怎樣證明。幾個月後，這些定理一個接一個地證明出來了。以後，我再没有參與過或見過像那個八月早晨一樣的充滿新觀念的數學討論。當時勾劃出的整個大綱就在 1921年 的冬天實現了；到了 1922 年的春天，整個維數理論已經成熟了……。"

維數的烏理桑定義的基本想法包括下面幾點。兩點或更多的點就足够把曲綫的一部分同其他分開來（圖 54 中的四葉玫瑰的中央部分可以用八點就同其他部分分開）。然而，移去幾點是不可能把面上的一塊分離出來的——爲此，你一定要用一條完整的曲綫——無論你取去面上多少點，但總是可以繞過它們。同樣，

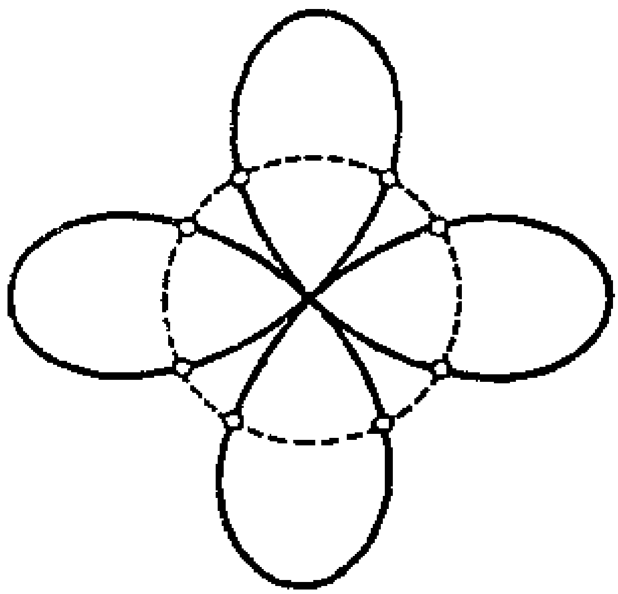


圖 54

要把三維空間的一部從其他部分畫出來，一塊面是必需的。

所有這些仍需要精確化；要分離開一些曲綫的某一部分，需要一個無限點集，然而這些點的總體仍然不會組成一條曲綫。烏理桑成功地爲所需定義給出一個精密的表達形式。就某方面來說，他的定義使人回憶起歐幾里德定義（曲綫的端點是點，面的邊緣是曲綫）。但是，這些相似僅僅像原始人的獨木舟和現代郵船的相似一樣。

維數的歸納定義

現在，讓我們更精確地討論一下烏理桑如何對一個幾何圖形的維數下定義。一個標準的零維集就是一個僅有一點的集，或者，就最壞打算，一個有有限點的集。然而，對於這些集，其中每點都有一個帶有空界的相對鄰域——即這點本身（見圖 51）。烏理桑就是用這個性質作爲零維集的定義。

更精確地說，他的定義就是：

集 F 是零維的如果其中每點都有一個任意小的，帶有空界的相對鄰域。

在大多數的情形下，可以證明，一個集有零維如果其中的每

點都可以選擇出一個其邊界不含任何集F中的點的任意小的一般鄰域（這時，相對鄰域的邊界必然是空的）。但是，對一些三維空間中的零維集而言，其中點是沒有這些一般鄰域的。

"任意小"一詞在定義中插入是有下列原因的。如果那裏沒有這詞，那我們就可以找到一個足够大的圓盤，包着整個正方形，使得正方形內沒有一點在圓的邊界上。因此，如果這詞不在定義內，我們會發覺正方形的維數該是零，而不是其眞正的維數等於2。

除有限集外，很多無限集都有零維。比方說，在x軸上取坐標爲0，1，$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$，…，$\frac{1}{n}$，…的點集。很明顯，這個集內的任何點都有一個任意小的鄰域其中不含這個集內的任何點。只有0點的情況可能引起一些疑慮。然而，如果我們取一個半徑爲α的鄰域，其中α是一個無理數，則沒有集內的一個點會在這個鄰域的邊界上出現。

在一直綫上的有理點集Q也是零維的。爲了明瞭這點，只需取一個長度爲無理數的區間，其中心是Q的中點a，用它作爲a點的鄰域。康托爾集也是零維（見85頁）。由正方形中除去各個十字形所得的集（見109頁），與及其他很多的集也是零維集。

同樣，我們可以作出三維空間中的零維集（爲此，我們當然要取空間的鄰域作爲點的鄰域）。

在給零維集下定義後，烏理桑繼續給1維集下定義，即什麼是曲綫。這裏，不再有空界的小鄰域(見圖54)。然而，在常見曲綫的情況下，鄰域的邊界只和曲綫交於幾點。但一個含有有限點的集的維數是零。烏理桑推廣了這種情況，給一個一維集做了下述的定義：

集F如果不是零維，而且其中每一點有一個任意小的鄰域，其邊界與F集交於一個零維集，那集F就有維數1。實際上證明，不但所有一般的曲綫（圓，綫段，橢圓等等），而且所有的康托爾曲綫都具有烏理桑意義下的一維。現在，我們可以給平面與空間中的曲綫下定義了。

一條曲綫就是一維的連續統。

於是對面、三維立體以至一般說對任何維數的集該如何定義都變得很明白了。由於定義是順數字次序而進行的，首先定義零維集，然後一維集，然後二維集，等等，所以烏理桑的維數定義是稱爲**歸納法**。

論文是要來刊登，不是要來審查!

烏理桑證明了很多和他引入的維數概念有關的有趣定理。但他没有找到證明一個很重要的定理的方法，他不能證明一個普通的立方體有維數3。經過相當長久的努力，他終於找出一個擺脫困境的方法，孕育出一個維數的新定義。我們不去詳細討論這個定義，而用很簡單的圖形來說明它。

如果我們取一截綫段或一個圓周，把它分成任意小的小片段，使得每一點最多屬於兩個片段（圖55）。這裏我們是連同邊界取小片段(即是連端點)。然而

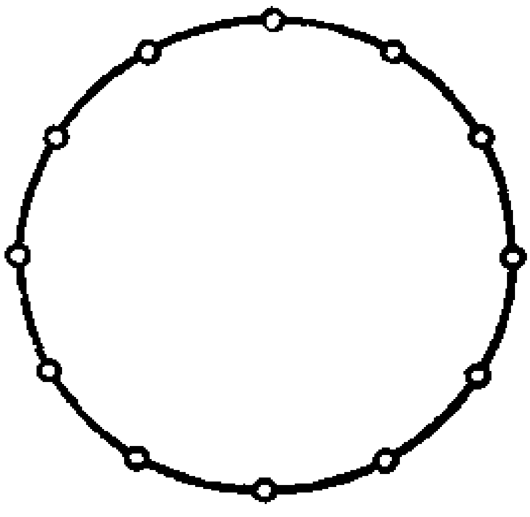
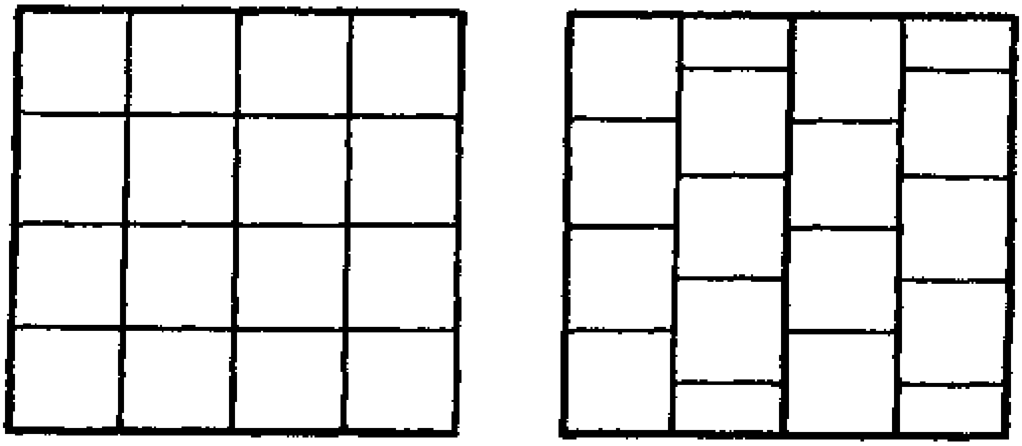


圖 55

一個正方形不能用此法定義。似乎第一眼就可以看出，如果我們要把正方形分成小片，就會有很多點同屬於四個片段〔圖 56 (a)〕。但如果我們把小片段用建築行業中的砌磚方法排列，就能使每點屬於最多三塊不同的小片段〔圖 56 (b)〕。同樣，我們可以如此分一個立方體爲小平行四面體，使得每點最多屬於四個平行四面體。



(a)　　(b)

圖 56

烏理桑就是取這個性質作爲他的維數新定義。一個圖形稱爲有維數 n，如果它能被分割成任意小的封閉部分而使得没有一點屬於 n + 2 個不同部分，但對於一個足够細微的分割，就會有屬於 n + 1 不同部分的點。

圖形被分割後的小片段不是完全任意的；他們的補集一定是開集（這些部分稱之爲閉的）。

用了這個維數的定義，烏理桑就證明了正方形的維數是 2，正立方體的維數是 3 等等。然後他證明了這個定義與最先給出的定義是等價的。

烏理桑的維數理論給了數學界一個很大的影響。有這樣一個小插曲。在一次出國的旅行中，烏理桑把他的結果在哥廷根整理成報告。當時，哥廷根大學是一個先進的數學中心。整理後，哥廷根數學學派的首腦希爾伯特認爲這結果應當發表於《數學學報》（Mathematische Annalen）——當代一份最受尊敬的數學期刊之一。幾個月後，烏理桑再次在哥廷根遞上一篇報告。希爾伯特追問《數學學報》的主編柯朗，烏理桑的論文刊登了没有。後者回答說：論文正在審查中。希爾伯特大聲地說："但我很清楚地說過，論文是要來刊登的，不是要來審查！"經過這次斬釘截鐵的聲明後，論文很快就刊登了。

在跟着的三年中，烏理桑開展了無可比擬的深度和强度的數學研究（這段時間内，他共發表了八十四篇論文）。然而一個意外的悲劇突然地結束了他的生命——1924 年 8 月 17 日，他在卑斯開灣游泳時發生了風暴，不幸淹死了。在死前一天，他剛好完成他最後一篇數學論文。

烏理桑死後，仍然留下很多未發表的草稿和大綱。他的摯友（他的許多論文的合作者）雪吉維·亞歷山特洛夫終止了一段時期他自己的研究，整理好這些論文去發表，使得這些烏理桑的額外結果可以爲所有數學家所知。維數的理論現時已經成爲數學的一個重要課題。

結　論

無限集擁有很特別的性質。在研究這些性質中，數學家不斷改進他們的推理，同時將數學邏輯向前發展。曾經有一段很長的

時期，集論和數理邏輯被認爲是抽象的科學，沒有實用。但在電子計算機發明後，數理邏輯竟然成了它們的運算程序的基礎。而很多以前曾經被認爲遠離實際應用的研究獲得了很大的實用意義（這種情況時常在科學史上發生——甚至在 1930 年代初期還出版說“鈾沒有實用”的書）。

現在，集論對很多數學領域，如泛函分析，拓撲學，一般代數學等等是很基本的。深入的研究仍然在集論本身中進行。這些研究與數學基礎有關連。在這些研究中，人們已經清楚，我們在本書所用的“樸素的”集概念是遠遠不够用的。把集的概念公理化是必須的。然而，這些研究遠遠在本書所計劃的範圍以外。

習題，例題

1. 集 A 只包含可以被 4 除盡的整數，集 B 只包含可以被 10 除盡的整數，集 C 只包含可以被 75 除盡的整數。集 ABC 有什麽數？
2. 一所圖書館有各種不同的理科和文科書籍。設 A 是所有在這圖書館中的書的集，B 是所有數學書的集（不一定只是圖書館裏的書）。試描述集 A－B。
3. 應用邏輯代數的法則，化簡下式：

$$(A+B+C)(A+B)-[A+(B-C)]A$$

4. 基數 $2^{\aleph_0 c}+\aleph_0 c$ 是什麽？
5. 在綫段[0，1]與區間（0，1）(即是在綫段[0，1]除去 0，1 的集）的點之間建立一個一一對應。
6. 證明坐標爲有理數的平面上的點集是可數的。

7. 試證明不能在平面上找到多過可數個互不相交的圓。

8. 在平面上，找出一個由互不相交的圓周所組成的連續統。

9. 證明不能在平面上找到多過可數個互不相交的 8 字形。

10. 證明不可能在一個平面上找到多過可數個有 T 字形形狀的曲綫。

11. 假設我們已經把所有在綫段 [0,1] 間的有理數排好。我們得到一個點列 r_1，r_2，…，r_n，…。我們作一個以 r_1 爲圓心，半徑爲 $\frac{1}{10}$ 的鄰域，一個以 r_2 爲圓心，半徑爲 $\frac{1}{20}$ 的鄰域，一個以 r_3 爲圓心，半徑爲 $\frac{1}{40}$ 等等。我們把所有獲得的鄰域並起來。這樣所得的集M是否與整個綫段一致？

12. 假設有理點以在 43—44 頁（3·9）的方式列好。舉一個不在習題 11 的集M中的點的例子。

13. 我們稱實數列（x_1，…，x_n，…）（其中 $0 \leqslant x_n \leqslant 1$）所組成的集爲可數維的立方體。證明這個立方體的點集有連續統的基數。

14. 作一個連續函數，使得在每一個綫段中都有無限個極大值和極小值。

15. 集M包括所有綫段 [0,1] 的點，使得其十進表示中沒有 3 和 8 出現。描述一個用除去綫段中的區間以獲得這個集的過程。

16. 對於十進表示中不含 38 組合（在已給定的次序中）的點做同樣事情。

17. 一點 a 稱爲集M的極限點，如果在它的每一個鄰域中都有無限個在此集中的點。證明所有康托爾集（見 85 頁）的極限

點都在此集中。相反，證明所有康托爾集的點都是極限點。對於此集做習題 15，16 中同樣東西。

18．證明綫段[0,1]的每一點都是所有有理數（其中 $0\leqslant r\leqslant 1$）所組成的集的極限點。

19．整數集有沒有極限點？

20．證明平面上的開集的補集包含了所有補集的極限點。

21．證明如果一個集包含着所有它的極限點，它的補集是一個開集。

點都在此集中。相反，證明所有康托爾集的點都是極限點。對於此集做習題 15，16 中同樣東西。

18. 證明綫段[0,1]的每一點都是所有有理數（其中 $0\leqslant r\leqslant 1$）所組成的集的極限點。

19. 整數集有沒有極限點?

20. 證明平面上的開集的補集包含了所有補集的極限點。

21. 證明如果一個集包含着所有它的極限點，它的補集是一個開集。