

怎样把中国建为数学大国?*

陈 省 身

一、引 言

先从我个人说起：我1926年入天津南开大学，1930年数学系毕业。那时我的老师姜立夫先生是极少数有博士学位的人。现在听说在台湾的数学博士在二百人以上，全世界的中国数学博士当超过千人。在这样的基础上，如何使中国的数学发展，使在廿一世纪的数学史上，中国是一个重要的区域，自然值得我们深思。

今年一件值得庆祝的事，是中国在国际数学竞赛 (International Mathematical Olympiad) 获得第一 (第二, 三名依次为苏联及美国)。不但如此，中国总分超出第二名苏联甚远。参加者中，有四人得满分，其中两个是中国人。中国参加这竞赛不久，1988年得第二名，去年 (1989) 也是第一名。

这项竞赛是高中程度，不包括微积分。但题目需要思考，我相信我是考不过这些小孩子的。因此有人觉得，好的数学家未必长于这种考试，竞赛胜利者也未必是将来的数学家。这个意见似是而非。数学竞赛大约是在百年前在匈牙利开始的；匈牙利产生了同它的人口不成比例的许多大数学家！

在最高深最活跃的数学方面，中国数学家亦有许多杰出的工作，无法尽举，简述若干如下：(一) 1983年丘成桐教授因为 Calabi 猜想及普通相对论的正质量猜想的证明，获得国际数学会议的 Fields 奖章，这是一个重要的国际数学奖。(二) 美国数学会每年选择一个最活动的专题，作为暑期节目 (Summer Institute) 的中心课题，集国际上这方面的专家，举行为期约三周的工作营。1988和1990的题目分别是“多复变函数”和“微分几何”。这两科目里中国数学家是突出的。微分几何会丘成桐是主持人之一。两会中作特约演讲者有萧荫堂、莫毅明、田刚、项武义、李伟光等。中国这方面的人数，超过百人。其中才智之士，即将脱颖而出者，不可胜数。举莫毅明教授为例， he 现在是巴黎大学教授。巴黎是二十世纪大数学家庞加莱 (Henri Poincaré) 的根据地。莫毅明班门弄斧，令人佩服。(三) 项武义教授最近解决了球装 (Sphere Packing) 的问题。这问题有近四百年的历史，是一项富有历史意义的工作。

这个单子还可继续写下去。近年来中国数学家的贡献，是不可忽视的。

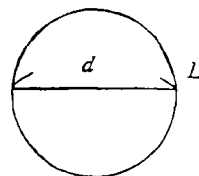
数学是什么？数学家究竟做些什么事？一个严格的定义会引我们进入一死胡同。大致说

* 1990年10月26日在台湾成功大学，10月29日在中兴大学演讲。本文将收录至《陈省身文选》(台湾联经出版社出版)。

** 应《陈省身文选》编者张洪光同志之请，陈省身教授将本文于1990年12月10日寄给他供工作之用，我们按张洪光同志的供稿刊出。——本刊编者

来, 数学和其他科学一样, 它的发展基于两个原因: (一) 奇怪的现象; (二) 数学结果的应用。一个例子是以下的“幻方”, 其中的九个不同的数目, 横加、直加, 和沿两条对角线的和都是15。可惜幻方只是一个奇迹, 没有什么应用。另外的一个奇迹, 圆周长 L 对直径 d 的比率, $L/d = \pi$, 是一个常数。这个结果可是重要了! π 这个数渗透了整个数学!

4	3	8
9	5	1
2	7	6



杨振宁先生讲过这样的故事: 我们都知道, 德国大数学家高斯(C.F. Gauss, 1777—1855) 在读小学的时候, 老师出了一个题目: 求 $1 + 2 + 3 + \dots + \text{某数}$ 的和。同学们都用死算, 高斯却获得一个公式, 可以立刻求得答案。方法是命

$$S = 1 + 2 + 3 + \dots + n。$$

将各项倒过来写, 则得

$$S = n + (n - 1) + (n - 2) + \dots + 1。$$

由此可见每列两个数的和都是 $n + 1$ 。因有 n 列, 得

$$2S = n(n + 1) \quad \text{即} \quad S = n(n + 1)/2。$$

杨振宁把这算法讲给他的孩子听, 大家都了解和欣赏。但一年后问起这个问题, 却都忘了。杨振宁、陈省身同比我们更聪敏的人不同的地方, 是我们了解这个推论的美, 的力量, 听过之后, 永远不忘。

谈到数学的欣赏, 让我再讲一个故事: 当代有名的数论大家 Atle Selberg (1917—) 曾经说, 他喜欢数学的一个动机, 是以下的公式:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots。$$

这个公式实在美极了; 单数1, 3, 5, ... 这样的组合可以给出 π 。对于一个数学家来说, 此公式正如一幅美丽的图画或风景。凡读过初等微积分的人大多应碰到这个公式。如果只因为考试而背诵它, 这个人便不必读数学。

二、数学史上的几件大事

不管数学是什么, 数学家在继续推展它的范围。最奇妙的, 是新数学得到不能想像的应用。数学工作的主要目的, 是了解新数学的性质, 尤其是它与传统数学不同的地方。结果把奥妙变为常识, 复杂变为简单, 数学便成为科学的有力而不可缺少的工具。

兹举数学在历史上的若干进展为例:

(一) 一本划时代的书是欧几里得 (Euclid, 约300 BC) 的“几何原本”。它把空间的几何性质, 从一组公理出发, 用逻辑推得。欧书范围其实不限于几何。这本书把数学建为一项系统的学问, 不再是一堆汇集的问题。历史上有一段时间, 欧书也用来练习推理, 成为一本通俗的教科书。

(二) 欧氏讨论的范围, 限于平面上的直线、圆周、和空间的 相当图形。等到 Descartes (1596—1650) 引进解析的方法, 便可研究平面上由任意方程

$$F(x, y) = 0$$

所定的曲线。几何的范围扩大了! 但任意曲线或任意函数的研究要等 Newton (1642—1727) 和 Leibniz (1646—1716) 的微积分的发现, 才特别有效。这个时期另一个重要的数学家是 Fermat (1601—1665)。他同时发现了许多解析几何和微积分的观念, 可惜他在生前未曾发表。

(三) 微积分的一个基本新观念是无穷: 无穷大或无穷小。由无穷便引到极限。澄清这些观念不是一件容易的事, 费了数学家约两百年的时间。它牵涉到实数系统、拓扑和数学的基础。一个关键的人物是 Cantor (1845—1918)。他的点集论独创新意, 高瞻远瞩, 为数学立了基础。

(四) 数学上另一个基本概念是群。最早的问题是解代数方程, 要把任意方程

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

的根表为系数的只含根号的函数。要回答这个问题, 需要群的观念。最先认清这个关系的, 是法国的年轻数学家 Galois (1811—1832)。群的观念从此深入到每个数学领域。

在几何方面有变换群。欧氏空间的全体运动组成一个群。其他还有投影变换群, 等角变换群等等。这种群是无限的, 他的元素组成一个空间。他们都是李群的特例。创始人 Lie (1842—1899) 是挪威的数学家。李群是数学上一个基本的概念。

有限群的研究是很困难的。要了解它们的结构, 数学家把它们分解为单群。但是单群并不“简单”; 有许多极大的有限单群。当代领袖的代数学家说: 有限的单群已经完全确定了。可是这个定理的证明, 需要二千页, 也还没有人把它完全写下来。

(五) 上面说过, 解析几何推广图形的范围。最普通的一个情形, 是在 n 维空间 R^n 内, 讨论一组方程式

$$F_i(x_1, \cdots, x_n) = 0, \quad i = 1, \cdots, m,$$

其中 x_1, \cdots, x_n 是 R^n 的坐标。这是一个内容极为丰富的课题。如果 F_i 是多项式, 这是代数几何。高斯当年研究了 $n=3, m=1$ 的情形, 即欧氏空间的曲面论。他的一篇论文是微分几何奠基的文章。他注重于曲面的参数表示。这个想法引到流形的基本观念, 在近代数学占有中心的位置。

流形把空间的观念扩大了。在微分流形上可以用微积分的工具, 实施种种运算。这个发展使微分几何成为数学的一个中心领域。

(六) 请容许我谈一些同我个人工作有关的一个方面, 即所谓纤维丛和联络。我们有种种特殊的空间, 如欧氏空间、矢量空间、仿射空间等等。我们也有一般的拓扑空间。前者有深刻的性质, 后者富于普遍性。纤维丛是把两者串连起来的一个观念。它是一个自然的发展, 也十分有用。它有局部的性质和整体的性质。前者容易描写和度量, 后者选出重要的性质。纤维丛的现象出现于数学的各部门, 和理论物理。

物理上有四种力: 核力、电磁力、引力、和弱力。现在大家公认: 这四种力的能都是规范场。纤维丛的联络是规范场论的数学基础。

三、当前的数学界

二十世纪数学的一个现象,是职业数学家人数的大量增加。美国几个数学会的全体会员录列五万六千多人,其中绝大多数是有博士学位的。

数学成为一个社会现象,大约发生于一百年前。今年德国数学会庆祝成立一百周年。前年则有美国数学会成立百年纪念。国际数学家会议的首次会于1897年在瑞士 Zürich 举行,会期三天。第一个演讲者是法国的庞加莱,题目是“纯分析同数学物理的关系”(庞氏因病未能出席,演讲由人代读)。值得注意的是这题目今天仍适用,但“分析”似应改为“几何”。国际数学会会议每四年举行一次,今年八月在日本京都。1994年将回到 Zürich 开会。

另一个现象是计算机的侵入。计算机引发了许多新的课题,如 Recursive Functions, 如 Complexity, 如 Fractals 等等。它对于许多数学工作有用,也使若干问题改观。但究竟影响有多大,则是一个聚讼的问题。数学天地虽小,也是很热闹的。

计算机的立刻的影响,恐怕是数学教育。从前需要学习的某些方法,现在不再需要,至少应该改变。这种讨论对于数学的发展是健康的。

第二次世界大战以后,科学受到重视,数学研究也得到社会的支持。有些人可靠做研究生活。这个情形的一个效果,是使得数学工作者同相类的工作者有相类的待遇,因此能吸收有才能的新人进入工作的行列。

一个发展是研究所的成立。最早而最有名的是 Princeton 的 Institute for Advanced Study。这个故事值得一讲!二十年代美国纽约的大百货公司 Macy 公司的老板 Louis Barm-burger 决定捐一大笔款办理科学事业,问计于教育家 W. Flexner。F 先生的建议说:“你的捐款数目很大,但是不足以办一个第一流的试验科学研究所。如果侧重数学,则可能是第一流的”。B 先生听了他的话。恰好德国希特勒于 1933 取得政权,IAS 请到爱因斯坦、Hermann Weyl 等教授。不出十年,Princeton 成了世界数学研究的中心。

IAS 的主要节目,是网罗年轻有为的数学家,给他们优良的环境和工作机会。作者第一次在那里,是 1943—45,完成了我一生最重要的工作。此恩令人难忘。以后我还去过三次(短期访问不计),都给我愉快的回忆。

继起的研究所有:巴黎的 Institut des Hautes Etudes, 英国 Warwick 的 Mathematics Institute, 日本京都的 Mathematical Sciences Research Institute, Bonn 的 Max Planck Institut, 以及巴西,墨西哥等研究所。最近成立的有苏联列宁格勒的研究所,和正在计划中的英国剑桥的牛顿研究所。这些研究所都有著名的常任研究人员,广泛的节目,也十分欢迎合格的访问数学家。

讲到研究所,自然应提到 Berkeley 的 MSRI,因为我曾经起过若干作用。这是美国国家基金会支持的,是美国第一个政府办的数学研究所。在一个民主的国家,这种事要经过长期的酝酿。等到决定举办以后,它的地点更是大家争逐的目标。我同 I. Singer 及 C. C. Moore 送进一份计划书以后,没有做过任何争取的努力。我可以想像 Berkeley 计划的优点,获选并非偶然。1982 年成立以来,备受好评。

尽管大家鼓吹交流和合作,我相信数学研究主要靠个人。一个人的创见是努力和灵感的结晶,不是同一群人讨论的结论。数学是一个广泛而复杂的学问,自然需要吸收各方面的知

识和观点。但更要紧的是要有个人的风格。

数学的研究与其他科学相比,有一个显著的不同的地方:它是向多方面发展的。当今的物理科学和生物科学往往有几个主题。但数学的研究方向比较可随个人自由选择。所以工作不必集中于几个大的中心,研究人员可较分散。一个有能力有决心的人,可以随不同的途径,完成他的志愿。

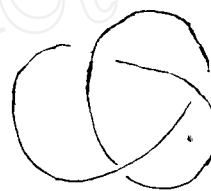
二十世纪是数学的一个黄金时代。

四、纯粹数学与应用数学

数学上一个极大的谜是:为什么数学会有用?

上面所讲的圆周率 π 遍见于数学公式。因为要使每个二次方程式都有解,我们引进复数 $i = \sqrt{-1}$ 。没有复数就没有电学,就没有近代文明!

近来一种风气,是在数学机构上,加“应用”两字。其实纯粹数学与应用数学是很难划界的。再举一个例:代数拓扑中有所谓“结”论(knot theory),问空间绳子的结,是否可不经剪断而解开。例如下图的梅花结就解不开。这个问题在分子生物学DNA的结构研究中,极为重要。所以生物学家需要学微分几何与代数拓扑。柏克菜的 V. Jones 教授因为“结”论与算子代数的工作,获国际数学会的1990年 Fields 奖。他引进了结的新的不变式,现称为 Jones 多项式。



科学的发展需要数学。但是历史告诉我们,他们所需要的数学,往往为数学家所已发展。这是数学家值得自豪的,也是一件十分神秘的事实。

我相信数学是有内容的,不完全是逻辑。廿世纪数学中的菩萨包括黎曼(Riemann)、庞加莱。大致说来,黎曼把数学建立在流形的观念上,庞加莱则发展高维的数学。流形不必光滑,非紧致的流形将有更多几何性质,若干无限维流形会有美丽的现象,这些都是可以期望的远景。

两千年的数学发展是连续的。这个现象当可继续。不过廿一世纪的数学将是一个新的天地。世变不可知,可引以自慰的是数学是一个坚固的结构。我想有人类就有数学!

五、结 论

中国数学的发展已具有充分的条件,不妨考虑一下当前有些什么事可做:

(1) 要有信心。千万把自卑的心理放弃,要相信中国会产生许多国际第一流的数学家。也没有理由中国不能产生牛顿、高斯级的数学家。

法国文学家 Romain Roland 写过一本书,记载中古时代德国音乐家在罗马的故事。罗马人笑他们,这种野蛮的人,如何懂音乐?没有多少年德国出了 Bach, Beethoven。我做学生的时候,曾经看见日本人写的文章,说中国人只能习文史,不能念科学。这种荒谬的说法当时也可言之成理。

中国应建立若干基地,交流仍是必要的,但应求逐渐对等。

(2) 希望社会能认识中国成为数学大国是民族的光荣,而予以鼓励和支持。例如:不要把数学家看成“怪人”。中国没有出牛顿、高斯这样伟大的数学家是社会的、经济的现象。中国的大数学家,如刘徽、祖冲之、李治等都生逢乱世。我想治世时聪敏人都去求功名做官去了。这情形现在并没有改变。要提倡数学,必须给数学家适当的社会地位和待遇。

愿中国的青年和未来的数学家放大眼光展开壮志,把中国建为数学大国!

(1990年11月于美国加州)