Chapter 7

假设检验

第七章作业：习题七 7.1, 7.2, 7.3, 7.4, 7.5, 7.6, 7.7, 7.8

7.1 已知在正常生产情况下某种汽车零件的质量服从正态分布$N(54, 0.75^2)$。在某日生产的零件中抽取10件，测得质量（单位：g）如下：

$$54.0 \quad 55.1 \quad 53.8 \quad 54.2 \quad 52.1 \quad 54.2 \quad 55.0 \quad 55.8 \quad 55.1 \quad 55.3$$

如果标准差不变，该日生产的零件质量的均值是否有显著差异？（取显著水平$\alpha = 0.05$）

解： 由已给数据计算样本均值$\overline{X}$的观测值

$$\overline{x} = 54.46.$$

本问题是单个正态总体、方差已知条件下检验假设

$$H_0 : \mu = 54 \iff H_1 : \mu \neq 54.$$

检验统计量

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

在原假设H_0成立的条件下服从标准正态分布，拒绝域为$|U| \geq u_{\alpha/2}$。对给定的显著性水平$\alpha = 0.05$，相应的$u_{\alpha/2} = u_{0.025} \approx 1.96$。由于

$$|U| = \left|\frac{54.46 - 54}{0.75/\sqrt{10}}\right| \approx 1.94 < 1.96,$$

故接受原假设，即可以认为该日生产的零件质量的均值无显著差异。

□

7.2 已知某炼铁厂的铁水含碳量在正常情况下服从正态分布$N(4.40, 0.05^2)$。某日测得5炉铁水的含碳量如下：

$$4.34 \quad 4.40 \quad 4.42 \quad 4.30 \quad 4.35$$

如果标准差不变，该日铁水含碳量的均值是否显著降低？（取显著水平$\alpha = 0.05$）

解： 由已给数据计算样本均值$\overline{X}$的观测值

$$\overline{x} = 4.363.$$

本问题是单个正态总体、方差已知条件下检验假设

$$H_0 : \mu = 4.40 \longleftrightarrow H_1 : \mu < 4.40.$$

检验统计量

$$U = \frac{\overline{X} - \mu_0}{\sigma_0/\sqrt{n}}$$

在原假设H_0成立的条件下服从标准正态分布，拒绝域为$U \leq -u_\alpha$。对给定的显著性水平$\alpha = 0.05$，相应的$u_\alpha = u_{0.05} \approx 1.645$。由于

$$U = \frac{4.362 - 4.40}{0.05/\sqrt{5}} \approx -1.699 < -1.645,$$

故拒绝原假设而接受备择假设，即可以认为该日铁水含碳量的均值显著降低了。

□

7.3 化肥厂用自动打包机包装化肥。某日测得9包化肥的质量（kg）如下：

$$49.7 \quad 49.8 \quad 50.3 \quad 50.5 \quad 49.7 \quad 50.1 \quad 49.9 \quad 50.5 \quad 50.4$$

已知每包化肥的质量服从正态分布，是否可以认为每包化肥的平均质量为50kg？（取显著水平$\alpha = 0.05$）

解： 由已给数据计算样本均值$\overline{X}$与样本标准差S的观测值得

$$\overline{x} = 50.1, \quad s \approx 0.3354.$$

本问题是单个正态总体、方差未知条件下检验假设

$$H_0 : \mu = 50 \longleftrightarrow H_1 : \mu \neq 50.$$

检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

在原假设H_0成立的条件下服从$t(n-1)$分布，拒绝域为$|T| \geq t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})$。对给定的显著性水平$\alpha = 0.05$，查表得$t_8(0.025) \approx 2.31$. 由于

$$|T| = \left| \frac{50.1 - 50}{0.3354/\sqrt{9}} \right| \approx 0.894 < 2.31,$$

故接受原假设，即可以认为每包化肥的平均质量为50kg。

□

7.4 进行5次试验，测得锰的熔点（单位：$°C$）如下：

$$1269 \quad 1271 \quad 1256 \quad 1265 \quad 1254$$

已知锰的熔点服从正态分布，是否可以认为锰的熔点显著高于1250$°C$？（取显著水平$\alpha = 0.01$）

解： 由已给数据计算样本均值$\overline{X}$与样本标准差S的观测值得

$$\overline{x} = 1263, \quad s \approx 7.65.$$

本问题是单个正态总体、方差未知条件下检验假设

$$H_0 : \mu = 1250 \longleftrightarrow H_1 : \mu > 1250.$$

检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \mu_0}{S/\sqrt{n}}$$

在原假设H_0成立的条件下服从$t(n-1)$分布，拒绝域为$T \geq t_{n-1}(\alpha)$。对给定的显著性水平$\alpha = 0.01$，查表得

$$t_{n-1}(\alpha) = t_4(0.01) \approx 3.75.$$

由于

$$T = \frac{1263 - 1250}{7.65/\sqrt{5}} \approx 3.80 > 3.75,$$

故拒绝原假设而接受备择假设，即可以认为锰的熔点显著高于$1250°C$。

□

7.5 某工厂生产的铜丝的折断力（单位：N）服从正态分布$N(2820, 40^2)$。某日抽取10根铜丝进行折断力试验，测得结果如下；

2830	2800	2795	2785	2820
2850	2830	2890	2860	2875

是否可以认为该日生产的铜丝折断力的方差也是40^2？(取显著水平$\alpha = 0.05$）

说明：本题有歧义，一般该类问题要么不给出均值，要么在提问之前重新强调一下“假设均值仍为$\cdots$”，本题的说法则不够明确。因此给出两种不同理解下的解答，同学们在作业中任何一种方式的完整解答都判正确。

解： （当把本问题看作单个正态总体、均值已知时）检验假设为

$$H_0 : \sigma^2 = 40^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 \neq 40^2.$$

检验统计量

$$\chi^2 = \frac{1}{\sigma_0^2}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2,$$

在原假设H_0成立的条件下服从$\chi^2(n)$分布，拒绝域为$\chi^2 \ge \chi_n^2(\frac{\alpha}{2})$或$\chi^2 \le \chi_n^2(1-\frac{\alpha}{2})$。对给定的显著性水平$\alpha=0.05$，查表得

$$\chi_{10}^2(0.975)\approx 3.25, \quad \chi_{10}^2(0.025)\approx 20.5.$$

由于

$$\chi^2 = \frac{1}{40^2}\sum_{i=1}^{10}(X_i-2820)^2 \approx 8.047 \in (3.25, 20.5).$$

故接受原假设，即可以认为该日生产的铜丝折断力的方差也是40^2。 □

解： （当把本问题看作单个正态总体、均值未知时）检验假设为

$$H_0:\sigma^2=40^2 \;\longleftrightarrow\; H_1:\sigma^2\neq 40^2.$$

检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2},$$

在原假设H_0成立的条件下服从$\chi^2(n-1)$分布，拒绝域为$\chi^2 \ge \chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})$或$\chi^2 \le \chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})$。对给定的显著性水平$\alpha=0.05$，查表得

$$\chi_9^2(0.975)\approx 2.70, \quad \chi_9^2(0.025)\approx 19.0.$$

由已给数据计算样本方差S^2的观测值得

$$s^2 \approx 1228.$$

由于

$$\chi^2 = \frac{9\times 1228}{40^2} = 6.9075 \in (2.70, 19.0).$$

故接受原假设，即可以认为该日生产的铜丝折断力的方差也是40^2。

□

7.6 在正常情况下，维尼纶纤度服从正态分布，方差不大于0.048^2。某日抽取5根纤维，测得纤度为

$$1.32 \quad 1.55 \quad 1.36 \quad 1.40 \quad 1.44$$

是否可以认为该日生产的维尼纶纤度的方差是正常的？（取显著水平$\alpha = 0.01$）

解： 由已给数据计算样本方差S^2的观测值得

$$s^2 \approx 0.00778.$$

本问题是单个正态总体、均值未知条件下检验假设

$$H_0 : \sigma^2 \leq 0.048^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma^2 > 0.048^2.$$

检验统计量

$$\chi^2 = \frac{(n-1)S^2}{\sigma_0^2},$$

在原假设H_0成立的条件下服从$\chi^2(n-1)$分布，拒绝域为$\chi^2 \geq \chi^2_{n-1}(\alpha)$。对给定的显著性水平$\alpha = 0.01$，查表得

$$\chi^2_{n-1}(\alpha) = \chi^2_4(0.01) \approx 13.3.$$

由于

$$\chi^2 = \frac{4 \times 0.00778}{0.048^2} \approx 13.5 > 13.3.$$

故拒绝原假设而接受备择假设，即可以认为该日生产的维尼纶纤度的方差不正常。

□

7.7 对两批同类电子元件的电阻（单位：Ω）进行测试，各抽取6件，测得结果如下：

第一批：	0.140	0.138	0.143	0.141	0.144	0.137
第二批：	0.135	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

设电子元件的电阻服从正态分布，检验：

(1) 两批电子元件电阻的方差是否有显著差异。（取显著水平$\alpha = 0.05$）

(2) 两批电子元件电阻的均值是否有显著差异。（取显著水平$\alpha = 0.05$）

解：

(1) 由已给数据分别计算两批电子元件电阻的样本均值与样本方差的观测值得

$$\overline{x} = 0.1405, \quad s_1^2 = 7.5 \times 10^{-6},$$
$$\overline{y} = 0.1385, \quad s_2^2 = 7.1 \times 10^{-6}.$$

本问题是两个正态总体、均值未知条件下检验假设

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \longleftrightarrow H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

在原假设H_0成立的条件下服从$F(m-1, n-1)$分布，拒绝域为$F \geq F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})$或$F \leq F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$。对给定的显著性水平$\alpha = 0.05$，查表得

$$F_{5,5}(0.025) \approx 7.15, \quad F_{5,5}(0.975) = \frac{1}{F_{5,5}(0.025)} \approx 0.14.$$

由于

$$F = \frac{7.5 \times 10^{-6}}{7.1 \times 10^{-6}} \approx 1.06 \in (0.14, 7.15).$$

故接受原假设，即可以认为两批电子元件电阻的方差无显著差异。

(2) 计算S_ω的观测值得

$$s_\omega = \sqrt{\frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{5 \times 7.5 \times 10^{-6} + 5 \times 7.1 \times 10^{-6}}{6+6-2}}$$
$$\approx 2.70 \times 10^{-3}.$$

本问题是两个正态总体、方差未知但相等条件下检验假设

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 \longleftrightarrow H_1: \mu_1 \neq \mu_2.$$

检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_\omega \sqrt{\dfrac{1}{m} + \dfrac{1}{n}}}$$

在原假设H_0成立的条件下服从$t(m+n-2)$分布，拒绝域为$|T| \geq t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})$。对给定的显著性水平$\alpha = 0.05$，查表得$t_{10}(0.025) \approx 2.23$. 由于

$$|T| = \left| \frac{0.1405 - 0.1385}{2.70 \times 10^{-3} \times \sqrt{\dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6}}} \right| \approx 1.28 < 2.23.$$

故接受原假设，即可以认为两批电子元件电阻的均值无显著差异。

□

7.8 为了提高振动板的硬度，热处理车间选择两种淬火温度T_1及T_2进行试验，测得振动板的硬度数据如下：

T_1 : 85.6	85.9	85.7	85.8	85.7	86.0	85.5	85.4
T_2 : 86.2	85.7	86.5	85.7	85.8	86.3	86.0	85.8

设两种淬火温度下振动板的硬度都服从正态分布，检验：

(1) 两种淬火温度下振动板硬度的方差是否有显著差异。（取显著水平$\alpha = 0.05$）

(2) 淬火温度对振动板的硬度是否有显著影响。（取显著水平$\alpha = 0.05$）

解:

(1) 由已给数据分别计算两批电子元件电阻的样本均值与样本方差的观测值得

$$\begin{aligned}\overline{x} = 85.7, \quad s_1^2 = 0.04,\\ \overline{y} = 86.0, \quad s_2^2 = 0.0914.\end{aligned}$$

本问题是两个正态总体、均值未知条件下检验假设

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2 \ \longleftrightarrow\ H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2.$$

检验统计量

$$F = \frac{S_1^2}{S_2^2}$$

在原假设H_0成立的条件下服从$F(m-1, n-1)$分布，拒绝域为$F \geq F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})$或$F \leq F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})$。对给定的显著性水平$\alpha = 0.05$，查表得

$$F_{7,7}(0.025) \approx 4.99, \quad F_{7,7}(0.975) = \frac{1}{F_{7,7}(0.025)} \approx 0.20.$$

由于

$$F = \frac{0.0914}{0.04} = 2.285 \in (0.20, 4.99).$$

故接受原假设，即可以认为种淬火温度下振动板硬度的方差无显著差异。

(2) 计算S_ω的观测值得

$$\begin{aligned}s_\omega &= \sqrt{\frac{(m-1)S_1^2 + (n-1)S_2^2}{m+n-2}} = \sqrt{\frac{7 \times 0.04 + 7 \times 0.0914}{8+8-2}}\\ &\approx 0.2563.\end{aligned}$$

本问题是两个正态总体、方差未知但相等条件下检验假设

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2 \ \longleftrightarrow\ H_1 : \mu_1 \neq \mu_2.$$

检验统计量

$$T = \frac{\overline{X} - \overline{Y}}{S_\omega \sqrt{\frac{1}{m} + \frac{1}{n}}}$$

在原假设H_0成立的条件下服从$t(m+n-2)$分布；拒绝域为$|T| \geq t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})$。对给定的显著性水平$\alpha = 0.05$，查表得$t_{14}(0.025) \approx 2.14$. 由于

$$|T| = \left| \frac{85.7 - 86.0}{0.2563 \times \sqrt{\frac{1}{8} + \frac{1}{8}}} \right| \approx 2.34 > 2.14$$

故拒绝原假设而接受备择假设，即可以认为淬火温度对振动板的硬度有显著影响。

□