前　　言

“集合”，是近代数学的基本概念之一。现在中、小学新编数学课本的一个显著特点，就是处处渗透着集合的思想，并将集合论的初步知识正式编入课文。

然而，对教和学的人来说，集合给他们的初次印象是陌生的，觉得它抽象、枯燥。

其实，并非如此。集合天天在和我们打交道。一袋糖果、一盒粉笔、一张照片，一个班级、一个小组，乃至整个学校、整个国家等等，都是集合。我们生活在集合中间，集合又千姿百态地展现在我们的面前。

那么，我们为什么对集合这样陌生呢？原来是因为有一层严肃的“现代数学理论”面纱掩盖了它的真面目。

而这本科普读物，就试图借助于直观和比喻，揭开“集合”的面纱，让它以生动的形象展现在读者面前，帮助教和学的人弄明白：它的基本思想是什么？中、小学课本为什么要渗透它的思想？它与数学传统内容有什么联系？它有什么用处？

安徽师范大学雷垣、张国铮同志和张孟贤同志，曾对书稿提出过宝贵意见，在此向他们表示感谢。作者限于水平，本书缺点和错误一定不少，请读者批评指正。

胡炳生 1980.8

目　　录

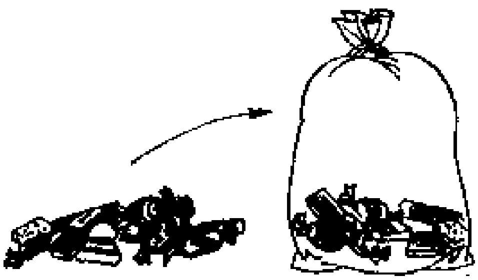
第一章　万能的口袋

“集合”这名词，听起来有点儿抽象、深奥。其实，并非那么一回事。打一个形象的比方，它就好象是一个“万能的口袋”。

1.从一袋糖果说起

把集合比做“万能的口袋”，此话从何说起？就从一袋糖果说起吧。

把一些糖果装进一个口袋里，便形成一个整体概念——“一袋糖果”。



如果用“集合”这个名词来说，这“一袋糖果”，也可以说成是：由它里面的东西（糖果）组成的一个“集合”。

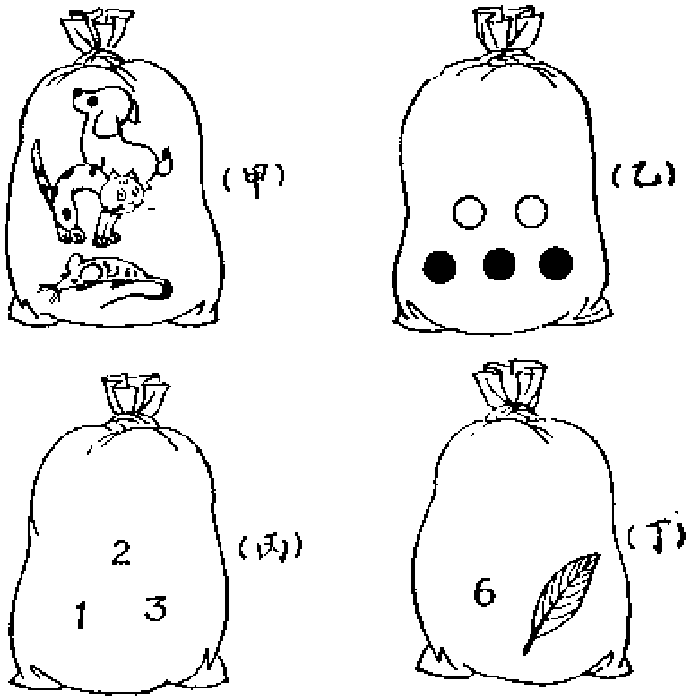
再看下面四个“口袋”，它们分别装着不同的东西。而每一个口袋，都可以看作是一个由它里面的东西组成的“集合”。于是：

口袋（甲），是由三只动物——狗、猫和鼠组成的集合。

口袋（乙），是由两个白球和三个黑球组成的集合。

口袋（丙），是由三个自然数1、2、3所组成的集合。

口袋（丁），是由一个数字6和一片树叶子组成的集合。



可见，集合的具体例子，对我们来说，并不陌生。

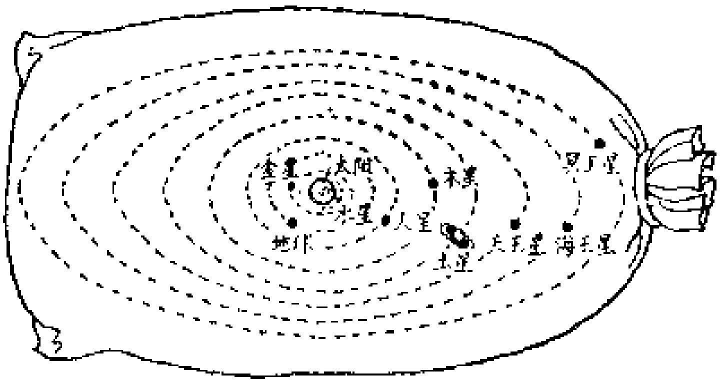
有一位集合论大师、著名的数学家豪斯道夫，曾经这样描述过集合：“把一个个东西，合起来看成一整体，便形成一集合。”

我们把集合比作“口袋”，恰好强调了集合是一个整体概念——它好象是一口袋东西，而不是个别散放着的东西。

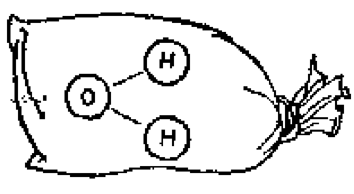
但是，这不过是一个形象的比喻。并不是说，一定要把一些东西真正装进一个口袋里，才算一个集合。这集合“口袋”，是我们假设的，不必是真实的。想象中的“口袋”可大可小，其外形也可以是这样或那样。两个集合口袋是不是相同，只能从它们各自所装的东西是否相同来辨别。

例如，可以把太阳系中的九大行星，连同太阳本身，一

起装进一个假想的大“口袋”里，形成一个太阳系中大星球的集合。



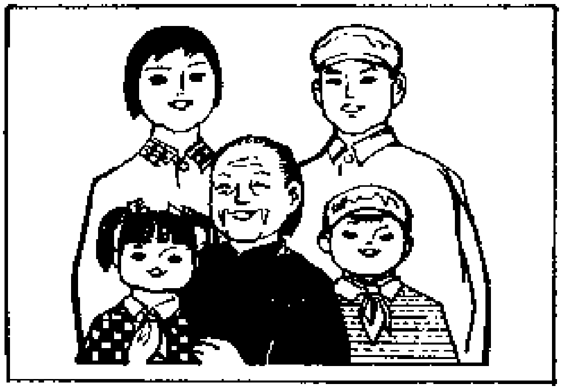
也可以把一个氧原子“O”和两个氢原子“H”，装进一个小“口袋”里，形成一个由三个原子组成的集合。



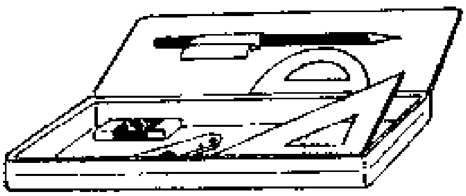
以上两个集合的差别，不在于它们的大小，而仅在于它们所装的东西不同。

从上面所举的例子中，已经看到，同一个集合里的东西，可以是同类的，也可以是毫不相关的；可以大至天体，也可以小至粒子。所以说，集合“口袋”是万能的，它什么都能装。

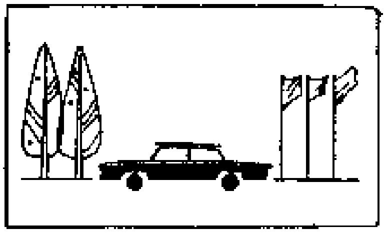
正因为这个想象中的集合“口袋”，重在内容，不在形式，所以，为了方便，有时也可以把它的外形画成别的形状，例如，可以画成一个方框、一个圆圈，或者一个盒子等。



(A) 李小明一家



(B)



(C)

上面三个图，分别表示了三个不同的集合：李小明一家，一盒文具，和由一辆汽车、两棵树、三面旗组成的集合。

集合里面的东西，在数学上，把它叫做元素，或者简称元。集合里的每一个元素，都没有双重资格，而只能算作一个。

集合里的元素是有限个的，称为有限集；若集合的元素有无限多个，称为无限集。前面列举的集合，都是有限集。下面举几个无限集的例子。

我们用文字甲、乙、丙、丁等，来表示某些集合。当然，也可以用别的文字来表示集合。按照目前数学上的惯例，已经约定：用大写英文字母A、B、C、D、M等，表示集合；

而用小写英文字母a、b、c、d、m等，表示集合的元素。

现在用A表示“501班”这个集合，用a表示李小明同学。要是李小明在501班，可以说成：李小明“属于”501班。如果用符号“$\in$”表示“属于”这个词，可以写成：$a\in A$，读作“元素a属于集合A”。

要是李小明不在501班，也可以简单地表示成：$a\notin A$。其中符号“$\notin$”读作“不属于”。它的意思是：元素a不属于集合A。

2.集合口袋的标志

假如我们只用A、B、C等英文字母来表示集合，是不能将集合里的元素都显示出来的。因而我们必须进一步给集合一个标志，使人们知道它里面究竟装了些什么东西。以下介绍三种表示集合的方法。

一、列举元素。画一个集合口袋，把它里面装的东西都画出来，这对于元素较少的集合，是最清楚的表示方法。但它有很大的缺点，就是画起来很费事，而且不便于印刷和书写。为了避免这些缺点，我们使用花括号{　　}来表示集合的范围，而把它所有的元素，填写在这花括号内。

例如，若用M表示由1、2、3三个自然数组成的集合，那么就可以写成：$M=\{1、2、3\}$。

然而对于元素较多的集合，写起来也不方便。例如，设集合B是由1—1000这一千个数字所组成的，要写出它的全部元素，那就太长了。

二、陈列“样品”。如果集合的元素太多，所有元素不可能全部摆出来，我们就选几个有代表性的元素，作为“样

品”，陈列出来；而把其它的元素加省略号，予以省略。

如上例的集合B，可以表示成：

$$B=\{1, 2, 3, \cdots\cdots 1000\}$$

所有自然数的集合N，可以表示成：

$$N=\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$$

当然，这里两个括号内的省略号，所代表的元素不完全一样。前者代表4，5，……999这有限个自然数；而后者所代表的是，从4以后的所有的自然数——有无穷多个。

如果集合的元素有一般的形式，我们也可以用这一般形式来做代表。例如，自然数的一般形式可以写成n，因此，自然数集N可以写成：$N=\{n\}$。偶数的集合$P_2=\{2,4,6,\cdots\cdots\}$，也可以写成：$P_2=\{2n\}$。

三、贴“说明书”。假如一个集合的元素很多，又无法排列，或者写不出具体的“样品”来，但它的元素具有共同的特征，那么我们可以采用贴“说明书”的办法。

例如，用A表示数轴上0—1之间的所有点(不包括两个端点)的集合。A的点虽无法列举，但它们有一个共同的特征性质：都大于0而小于1。因此，如果x是A的一个元素的话，就有：$0<x<1$。于是，我们可以把集合A写成：$A=\{x \mid 0<x<1\}$*。其中“x”是“样品”，竖线后面的“$0<x<1$”，是对x的说明。总起来，括号里面的文字式，就好象是对集合A的一张“说明书”。

又如，所有正分数的集合Q_+，可以写成：

$$Q_+=\left\{\frac{m}{n} \mid m, n\in N\right\}$$

注：*有的书上表示为$A=\{x: 0<x<1\}$

其中“$\frac{m}{n}$”是“样品”的形式，“m，$n\in N$”是对样品的说明：m 和 n 都是自然数。这样，集合 Q_+ 里究竟有哪些元素，就十分清楚了。

推而广之，我们可以把具有特性P的元素表示成$p(x)$。由所有具有特性 p 的元素组成的集合 P，便可以表示成：

$$P=\{x \mid p(x)\}$$

3.不定义之秘

我们学过的一些数学和其它学科中的概念，书上总要给它下一个“定义”。那么，集合这个概念，是不是也应该给它下一个“定义”呢？这似乎是应该的。

但是，尽管前人为此伤透了脑筋，作过许多尝试，而结果总是不太理想。

例如，有人曾给集合下过这样一个“定义”：“集合就是具有某种共同本质属性的事物的全体。”

这妥当不妥当呢？不很妥当。

第一、如前所述，同一个集合里的元素，可以千差万别，甚至毫不相干，而不必“求同排异”。例如曾经举过的例子，由数字6和一片树叶子组成的集合(丁)，若据此“定义”，它就不能算是一个集合，因为它里面的两个元素很难说有什么“共同的本质属性”。如果那样，就把集合概念的应有范围(逻辑学上称作概念的“外延”)缩小了。

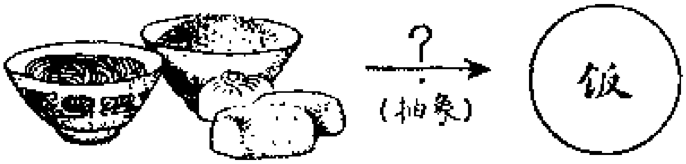
第二、就好象一袋糖果，不必将所有糖果都囊括无遗一样，一个集合，也并不要求它一定包括某种特性元素的全体。例如，集合：$M=\{1, 2, 3\}$，它的元素就是1、2、3三

个自然数，并不包括自然数“4”。但若按上述“定义”行事，那么，“4”就应该属于集合M，因为“4”和“1、2、3”都是自然数，当然具有“共同本质属性”。

总之，前述的集合“定义”，没有反映出“集合”这一概念的真正本质，因此，它不能作为“集合”的科学定义。为什么给“集合”下不好定义呢？我想主要有以下两个原因。

（1）一个概念，它概括的事物越多样、越广泛，它的抽象程度就越高，那么要给它下一个严格的科学定义，就越发困难。

比如说，我们天天吃饭，北方吃面饭，南方吃米饭，还有稀饭、汤饭、杂粮饭，等等。但是，要给“饭”下一个严格的、抽象的定义，就不那么容易。不妨大家试试看！

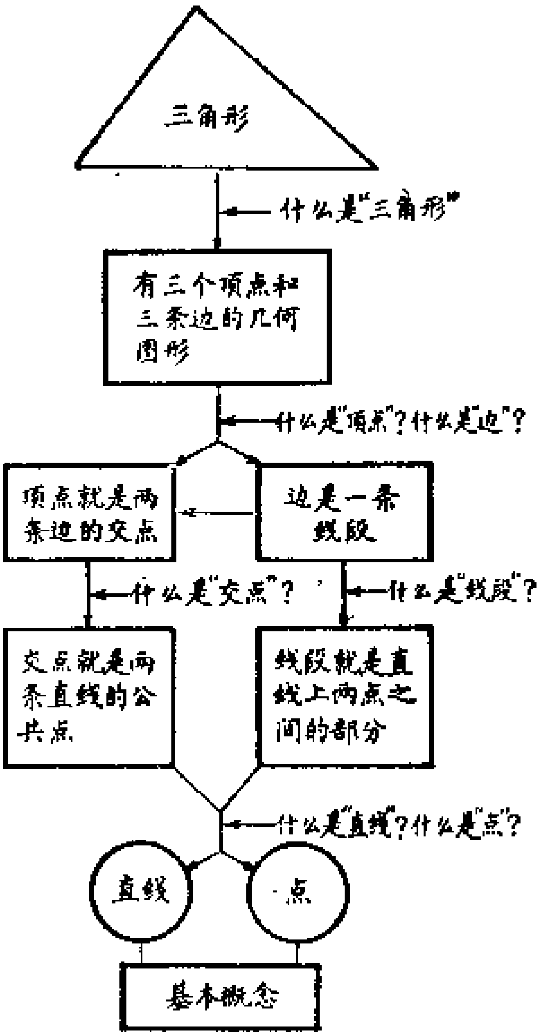


而集合，是数学中最基本、最抽象的概念之一，它概括的事物，比“饭”不知要多多少。因此，要给集合下一个“定义”，使之适合每一个具体的集合，就十分困难，所以至今还无法办到。

（2）所谓给一个概念(甲)下定义，就是要用比它更简单明白、更容易为人们所理解的概念(乙)——对“甲”来说，称作“在前”概念，来说明它、规定它。而概念(乙)，又要用“在前”的概念(丙)来说明它、规定它。(丙)是什么呢？又要用更“在前”的概念(丁)来说明它、规定它。如果打破沙锅问到底，那么，到了最后，总有一个或几个概念，再也找不到比它们更“前”的概念来加以说明和规定它们了。这些概

念就是这门学科中最基本的概念，已经不能再给它们下定义了。

我们来看一个例子：从“三角形”出发，一直追问下去，到了“点”和“直线”，便再也不能“定义”了。点和直线，就是数学中的两个基本概念。



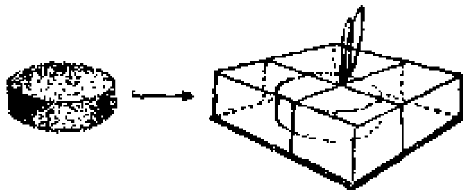
与点、直线一样，“集合”也是数学中的基本概念之一。

点、直线、集合这些基本概念，又称为不定义概念。它们虽然不加定义，但是因为它们所概括的事物极其广泛，它们的实例，或者说它们的“模型”，在我们日常生活和实际经验中到处都有，所以，对它们的理解是并不困难的。

那么前面所说：“把一个个东西合起来看成一整体，便形成一集合”的说法，算不算集合的定义呢？不能算。因为这里面使用的“东西”、“整体”等，并不比“集合”更简单明白。如果再追问一下：“东西”是什么？“整体”又是

什么？那么谁也说不清楚了。

4.盒装蛋糕和北极企鹅

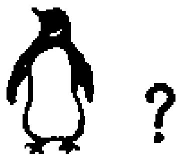


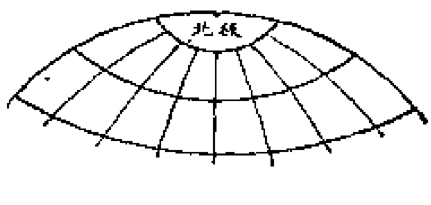
一盒蛋糕和一块蛋糕，谁都清楚，是不一样的。把一块蛋糕装进一个盒子，便成了一盒蛋糕。尽管这盒蛋糕只有一块，但它毕竟还是一盒！

与此相仿，只含有一个元素 a 的集合$\{a\}$，和一个元素a本身，也是不一样的。它们之间的关系，只能是一个“属于”一个：$a\in\{a\}$，而不能在二者之间划等号。

我们把只含有一个元素的集合，叫做单元素集。

另外，有时遇到的集合，不能立即判断出它里面是不是一定有元素存在。例如：$S=\{$北极的企鹅$\}$、$T=\{$不能表示成两个素数和的、大于2的偶数$\}$，就是这样的集合。





我们知道，企鹅生活在南极。北极有没有企鹅呢？目前还没有发现。但是，“没有发现”并不等于没有。因此，第一个集合里究竟有没有元素，现在还不能断定。

经过大量试验，许多大于2的偶数都能表示成两个素数之和。例如：

$4=2+2$、$6=3+3$、$8=3+5$、$10=5+5$、

$12=5+7$、$14=7+7$、$16=5+11$，等等。

因此，在二百多年前，德国中学数学教师哥德巴赫猜想：是不是"任何大于 2 的偶数都能表示成两个素数之和"？这就是著名的"哥德巴赫猜想"。

关于"哥德巴赫猜想"，尽管许多数学家做了长期努力，包括我国数学家取得的重大突破，但至今仍没有被完全证明。因此，上面列举的第二个集合T，是不是有元素存在，现在也还不能断定。

所以，为了使集合论的观点和方法，能在更多的领域中应用，有必要规定：什么元素也没有的空"口袋"，也算一个集合，叫做空集合。空集合也是集合，记作$\varnothing$，或$\{\ \}$。后面一个记号，更加直观。

如果有一天"哥德巴赫猜想"终于被证明，那么就相当于证明了：集合T是空集。

此外，规定空集，还有集合论理论本身的需要，这在以后可以看到。

当然，空集不是一个实在的集合，而是为了研究问题的方便，人为地规定的一个特殊的集合。

和空集相反，另一个极端的情况是，把在我们研究范围内的所有元素组成的集合，叫做全集合(全集)。

例如，班主任的主要工作范围是某一个班级，那么这个班级的全体学生组成的集合，就是一个全集——谓之"全班"。校长的主要工作范围是一个学校，全校师生员工合起来，也组成一个全集——谓之"全校"。如果我们限于研究实数，那么数轴上所有表示实数的点，就组成一个全集——谓之"整个数轴"。如此等等。

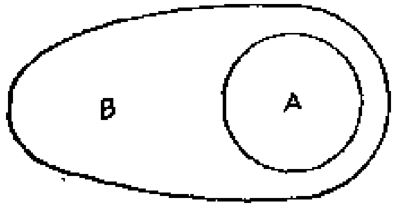
空集$\varnothing$只有一个。全集则具有相对性。全班，对于班上

每一个小组来说，是全集；但对全校来说，它只是一个部分，而不是全集了。

全集，我们常用英文字母 I 来表示。

5.母集与子集

假设A、B是两个集合，若 A 的每一个元素，也都是B 的元素，那么就说集合 A 包含于集合B，并且记为$A\subseteq B$。很明显，此时集合 A 是由集合 B 的一部分元素组成的。所以把 A 叫做 B 的部分集合，或叫做 B 的子集；而把 B 叫做 A 的母集。

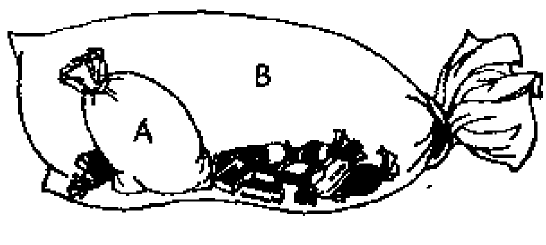


符号"$\subseteq$"读作"包含于"。"$\subseteq$"与"$\in$"的意义大不一样，不能混为一谈。前者是集合与集合之间的关系，后者是元素与集合的关系。形象地说，"$\subseteq$"是集体与集体的关系，"$\in$"是个体与集体的关系。

设A、B是两个集合。如果我们要判断关系"$A\subseteq B$"成立与否，需要检查 A 的每一个元素，看它们是不是都在集合 B 里。

如果要判断关系"$A\in B$"成立与否，则只要看一看 A 作为一个东西，是否在集合 B 中。

把 A、B 比作两袋糖，就更清楚了。若验证"$A\in B$"，只要检查一下，在 B 集合的袋子里，有 A 这个袋子就行了。



但是验证关系“$A \subseteq B$”，必须将 A 的袋子打开，检查其中每一块糖，要都在B 的袋子里才行。

两个集合 A 和B，如果关系“$A \subseteq B$”与“$B \subseteq A$”同时成立，也就是，A的元素都在B中，B的元素也都在A中，那么就称集合A与集合B相等，并用普通的等号连接起来：$A=B$。

很明显，两个相等的集合，它们的元素是完全一致的，因此，实际上就是一个集合。

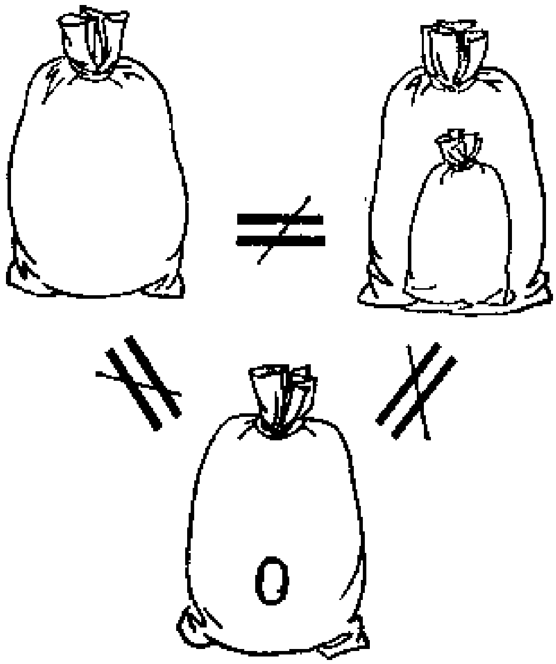
在一个确定的范围内，对任一集合 A，关系 $\varnothing \subseteq A \subseteq I$，总是成立的。

如下三个集合：$\varnothing$，$\{\varnothing\}$，$\{0\}$，是否相等？为什么？

根据集合相等的意义来检查一下它们的元素是否相同，就清楚了。

空集$\varnothing=\{\quad\}$是一个空袋子，里面什么也没有。

集合$\{\varnothing\}=\{\{\quad\}\}$，是装着一个空袋子的袋子；虽然那只空袋子里什么也没有，但它到底比$\varnothing$多装了一个空袋子！所以，$\{\varnothing\} \neq \varnothing$。



而集合$\{0\}$，它里面含有一个确定的元素数 0，所以它首先不是空集。它与$\{\varnothing\}$都是含有一个元素的单元素集，但二者所含的元素不一样，所以它们也不相等：$\{\varnothing\} \neq \{0\}$。

6.动物园里的风波

有一个动物园，饲养了羚羊、长颈鹿、象、骆驼、野猪、熊、狮、虎、狐、豺、狼、金钱豹。一位新来的主任，不经调查就主观决定，将所有动物分成如下七组，轮流送食：

(A) {有角动物}；

(B) {食草动物}；

(C) {食肉动物}；

(D) {猛兽：狮、虎、狼、豹}；

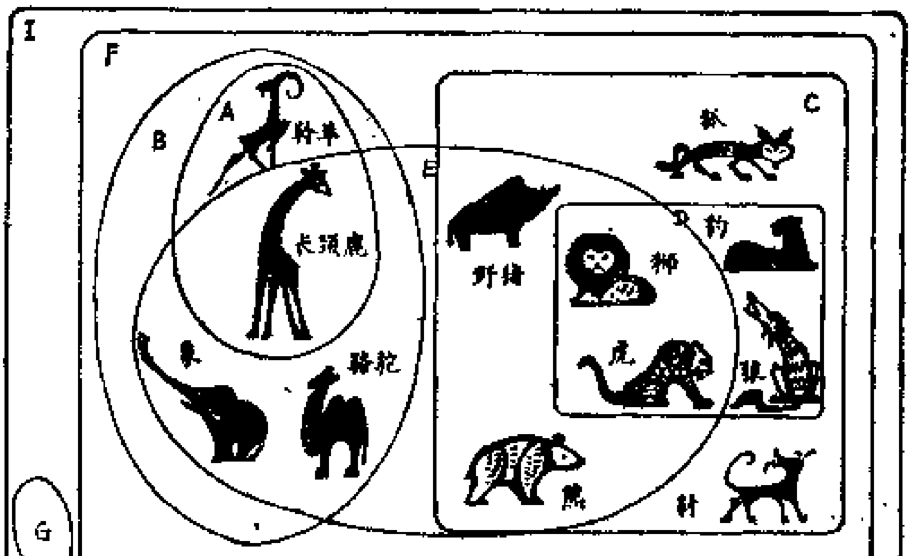
(E) {大动物(体重200公斤以上)}；

(F) {脊椎动物}；

(G) {水生动物}。

结果就乱了套了：有时送食，所有动物都来吃；有时送食，则没有动物吃。有的动物吃两次，有的则吃四次。

当然这种现象或许根本不会发生，但是，却为我们研究



子集的各种情况，提供了一个有趣的模型。

现在，我们用I表示动物园所有动物的集合，用A、B、C、D、E、F、G分别表示这七组动物的集合。于是，集合A、B、C、D、E、F、G都是I的子集。

我们把I的这些子集分为以下三类：

第一类：如集合A，它的元素都属于I，但并不包括I的全部元素，即I中至少有一个元素不在它之中（例如I中的"象"）。这样的子集，就叫做I的真子集。对于I的真子集A，我们用符号"$\subset$"代替"$\subseteq$"：$A\subset I$。

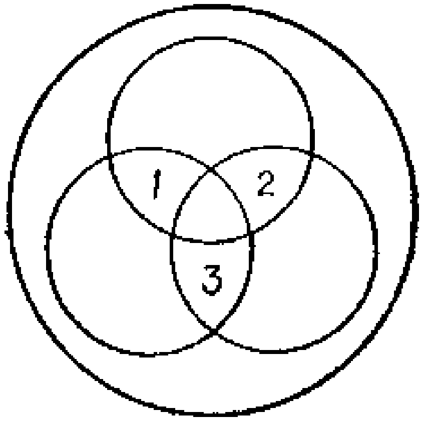
第二类：如集合$F=\{$脊椎动物$\}$。它的每一个元素都是I的元素，而且包括了I的所有元素，因为这个动物园里的每一个动物，都是脊椎动物。因此应有：$F=I$。也就是说，集合I是它自身的一个子集。这一点，对任何一个集合都是如此。

第三类：如集合$G=\{$水生动物$\}$。因为这个动物园里没有水生动物，所以实际上集合G中一个元素也没有，它是一个空集合：$D=\varnothing$。这就是说，空集可以看作是集合I的子集。这句话还可以这样来理解：如果$\varnothing$有元素的话，它一定会属于集合I。而$\varnothing$中什么元素也没有，所以这是当然成立的。

I的后两个子集：它自身和空集，称为I的当然子集。因为对任意集合M来说，它自身和空集都是其当然的子集。所以，研究一个集合的当然子集意义不大，一般我们总是着眼于真子集的研究。但当我们论及一个集合的子集时，如无特别说明，应该考虑到当然子集，而不要将此特殊情况遗漏。

下面再来看另一个例子。

设集合$M=\{1, 2, 3\}$。问：它有几个子集、几个真子集？



含一个元素的子集有三个：$\{1\}$、$\{2\}$、$\{3\}$；

含两个元素的子集也有三个：$\{1, 2\}$，$\{1, 3\}$，$\{2, 3\}$。

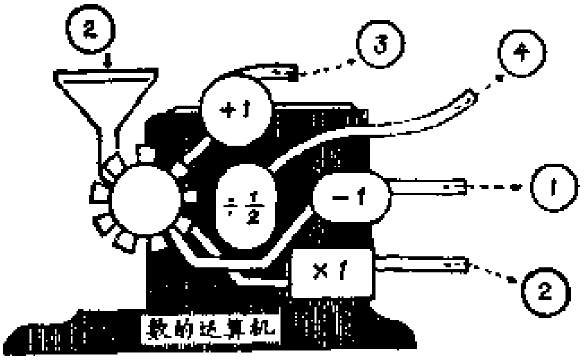
以上六个是真子集。

还有两个当然子集：$\{1, 2, 3\}$、$\{\ \ \}$。

因此，M共有8个子集。

第二章　不平常的运算

我们知道，数可以进行加、减、乘、除四种运算。两个数经过某种运算，所得到的结果还是一个数；但经过不同的运算，其结果可能不一样。



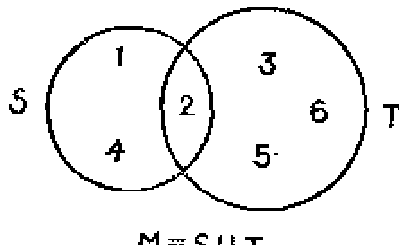
集合和集合也可以进行运算，运算的结果还是集合。不过，这种运算不同于平常数的运算。

1.　合并和相交

设有两个集合：$S=\{1，2，4\}$和$T=\{2，3，5，6\}$。我们把这两个集合的元素合并起来，组成一个新的集合：$M=\{1，2，3，4，5，6\}$。

集合M，就叫做集合S和集合T的并集，并记作：

$$M=S\cup T$$



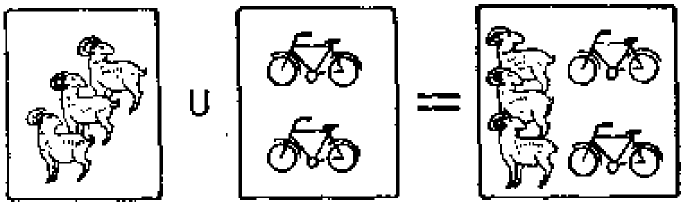
M=S∪T

集合的这种运算，叫做“并”。式中符号“∪”读作“并”。

又设集合 $P=\{$三只羊$\}$，

Q={两辆自行车}。那么这两个集合的并集便是：

$P\cup Q$={三只羊和两辆自行车}



这里有几点要注意：

第一、元素“2”既在S中，又在T中，但在并集$S\cup T$中，只能算一个元素，而不能重复计算。

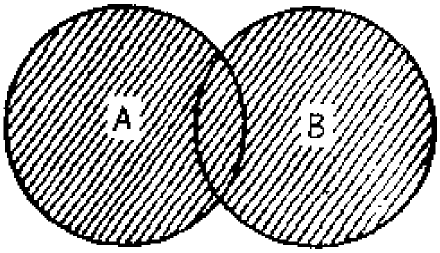
第二、两个集合进行“并”的运算时，并不要求二者的元素一定同类。不同类，照样可以合并。

第三、集合的元素并没有考虑它们的顺序，因此，一个集合，只要它的全部元素是确定的，书写时元素的排列顺序是可以变动的。

例如：$M=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$，也可以写成：$M=\{5,\ 2,\ 1,\ 4,\ 6,\ 3\}$。

一般地讲，集合A和B的并集$A\cup B$中的元素，或者是A的元素，或者是B的元素，（当然也可能是A、B的公共元素），此外不含有别的元素。即：

$A\cup B=\{x\mid x\in A或x\in B\}$。



A∪B

若把上述集合S和集合T的公共元素2取出来，组成一个集合，那么由集合S和T，又得到一个新的集合：{2}。这个新的集合，就叫做S和T的交集，并

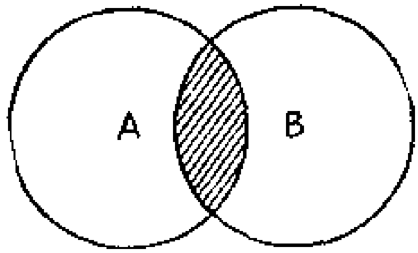
记为：$S\cap T=\{2\}$。

集合的这种运算，叫做交。符号“$\cap$”也读作“交”。

一般地讲，设A、B是两个集合，它们的交集$A\cap B$，是指由A和B的公共元素所组成的集合：

$$A\cap B=\{x\mid x\in A且x\in B\}$$

集合{三只羊}和{两辆自行车}的交集应该是什么呢？应该是由这两个集合的公共元素所组成的集合。但这两个集合没有公共元素，怎么办？好办。这时就规定它们的交集是空集：



$A\cap B$

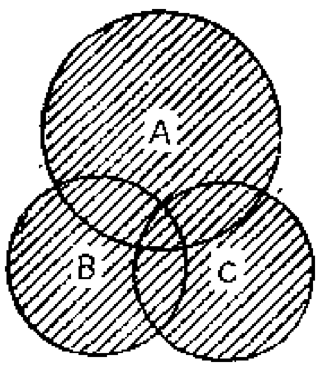
$$\{三只羊\}\cap\{两辆自行车\}=\{\quad\}$$

这里我们又看到了空集的作用。正因为规定了空集，才保证任何两个集合都能够进行“交”的运算。

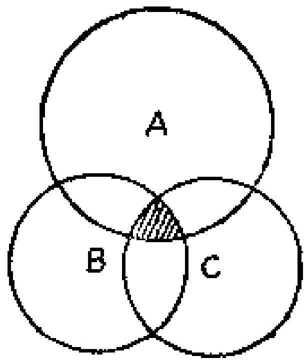
假如两个集合的交集是空集，也可说这两个集合是不相交的。

集合并和交的运算，可以毫无困难地推广到多个集合的情况。这时，和多个数的运算一样，为表示运算的先后顺序，可以加若干括号。

右边是三个集合A、B、C的并和交运算的示意图。

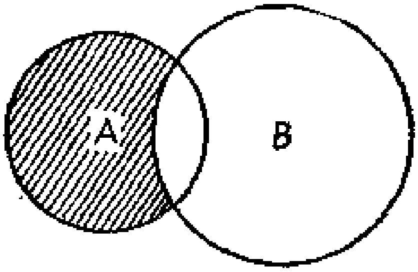


$(A\cup B)\cup C$



$(A\cap B)\cap C$

2. 相差与互补



$A \setminus B$

设 A、B 是两个集合，把属于 A、而不属于 B 的所有元素，组成一个新的集合 C：

$C=\{x \mid x\in A,\ x\notin B\}$，

那么集合 C 就叫做 A 与 B 的差集，并记作：$C=A\setminus B$。

例如：$\{1,\ 2,\ 4\}\setminus\{2,\ 3,\ 5,\ 6\}=\{1,\ 4\}$；

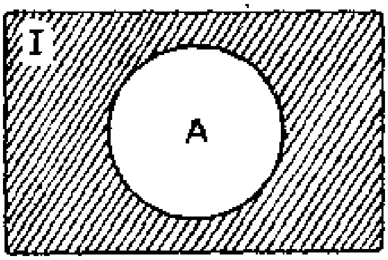
{两只狗}\{一只猫}={两只狗}；

$\{2n\}\setminus\{n\}=\{\quad\}$。

特别地把全集 I 与集合 A 的差集 $I\setminus A$，叫做 A 的补集，并记作：$\overline{A}=I\setminus A$。

由差集的规定得知，$\overline{A}$ 是由属于 I，而不属于 A 的元素组成，亦即：　$\overline{A}=\{x \mid x\in I,\ \ x\notin A\}$。

但是，在我们研究范围内，任何元素都在全集 I 之中，所以“$x\in I$”是当然成立的，故可略而不写。因此，可以将 $\overline{A}$ 写成：$\overline{A}=\{x \mid x\notin A\}$。



$\overline{A}$

这就是说，在我们研究的范围内，集合 A 的补集 $\overline{A}$，是由所有不属于 A 的元素组成的集合。

例如：以某班全体同学为全集 I，A、B 分别表示该班男生和女生的集合，那么：

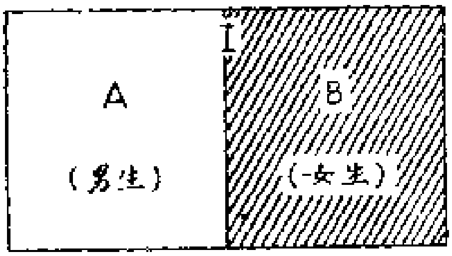
$$\overline{A}=\{x \mid x\in I,\ \ x\notin A\}=\{x \mid x\notin A\}=B$$

就是说：男生集合 A 的补集，是所有女生组成的集合 B。

反过来，女生集合 B 的补集$\overline{B}$，是全体男生组成的集合 A：$\overline{B}=A$。

因此，集合 A 和它的补集（$\overline{A}=B$），是互为补集的。

这里要注意的是，当谈到一个集合的补集时，一定是指定了全集是哪一个集合。否则，一个集合的补集的意义就不明确。例如，上述男生集合 A，对全班来说，其补集是女生集合 B；而对全校来说就不是 B 了。

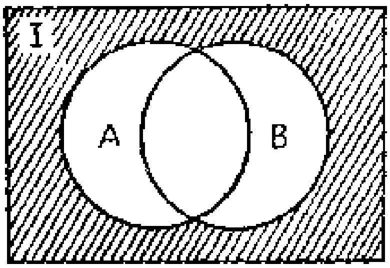


3. 运算的复合

以上讲了集合的四种运算——并、交、差、补，和数的运算一样，可以进行复合。

我们先来看一看补和并、交的复合。

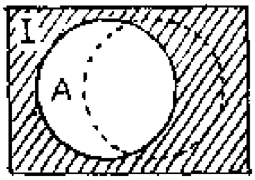
$\overline{A\cup B}$——集合 A 和 B 先并，再求补集合。我们用右图中的阴影部分，来表示经过这两次运算的结果。



$\overline{A\cup B}$

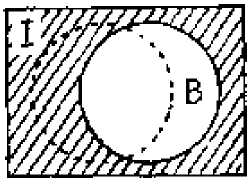
但另一方面，$\overline{A}\cap\overline{B}$——集合 A 的补集与 B 的补集的交集，和上面运算结果所得到的集合完全一致。这从下图可以看出来。

因此我们得到一个重要的公式：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$。



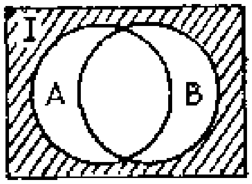
$\overline{A}$

$\cup$



$\overline{B}$

$=$



$\overline{A}\cap\overline{B}$

用同样的办法，也可以得到另一个重要公式：

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}。$$

这两个公式形式对称，可以把它们综合为一句话：在求补的符号下，并和交的符号互换。这两个公式是数学家德·摩根发现的，就叫做“德·摩根公式”，它们在逻辑代数和电子计算机理论中，起着重要的作用。

前面说过的动物园里的动物分组很不合理。现在要按如下要求来重新分组：分为6组送食；每组4个动物，每个动物吃食两次。这当然是容易办到的。但是，我们要用原来的组A、B、C、D、E，或是它们经并、交、差、补四种运算的结果来表示新组。

为简单计，我们给动物编号，并用所编号码来代替动物本身。

羚羊——1；长颈鹿——2；骆驼——3；

象——4；野猪——5；熊——6；

虎——7；狮——8；狐狸——9；

豺——10；狼——11；豹——12。

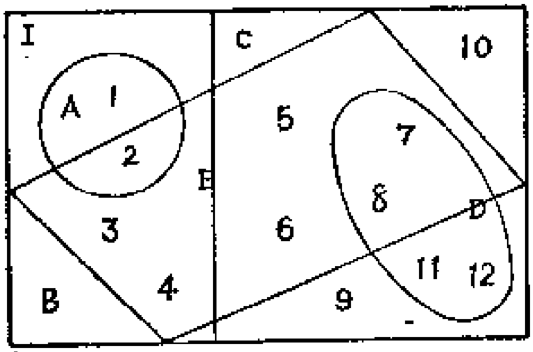
于是，$A=\{1,2\}$；

$B=\{1,2,3,4\}$；

$C=\{5,6,7,8,9,10,11,12\}$；

$D=\{7,8,11,12\}$；

$E=\{2,3,4,5,6,7,8\}$



利用集合的运算，以及运算的复合，新组可以采用如下方法组成：

第一组：$B=\{1,2,3,4\}$；

第二组：$D=\{7,8,11,12\}$；

第三组：$C\setminus E=\{9,10,11,12\}$；

第四组：$C\cap E=\{5,6,7,8\}$；

第五组：$(E\setminus D)\setminus A=\{3,4,5,6\}$；

第六组：$(\overline{D\cup E})\cup A=\{1,9,10\}\cup\{1,2\}$

$$=\{1,2,9,10\}$$

读者不难检验，这样的分组，完全符合我们开始提出的要求。

4.有益的比较

如果把集合的并，视为集合的"加法"，集合的交，视为集合的"乘法"，比较一下集合运算和数的相应运算的算律，是很有意义的。

我们知道数的加法和乘法，满足以下的算律：

(1) 加法交换律、乘法交换律；

(2) 加法结合律、乘法结合律；

(3) 乘法对加法的分配律。

集合并和交的运算，有没有类似的性质呢？有。

(1) 并和交满足交换律

设 A、B 是任意两个集合。A 和 B 的并集 $A\cup B$，与 B 和 A 的并集 $B\cup A$，二者元素是完全一样的。这就好象将两口袋的东西，往一个口袋里倒，哪一个口袋先倒，都是一样。因此应该有：$A\cup B=B\cup A$。

同样，集合 A 和 B 的公共元素，与 B 和 A 的公共元素完全一样，所以又有：$A\cap B=B\cap A$。

(2) 并和交满足结合律

设 A、B、C 是任意三个集合。把 A 的元素与 B 的元素合并之后，得到集合 $A\cup B$；再与 C 的元素合并，便得到集合 $(A\cup B)\cup C$。

也可以把 B 的元素和 C 的元素先合并起来，再和 A 的元素合并，得到 $A\cup(B\cup C)$。

这两种不同方式合并得到的两个集合，其元素并没有改变，所以它们应该相等：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。

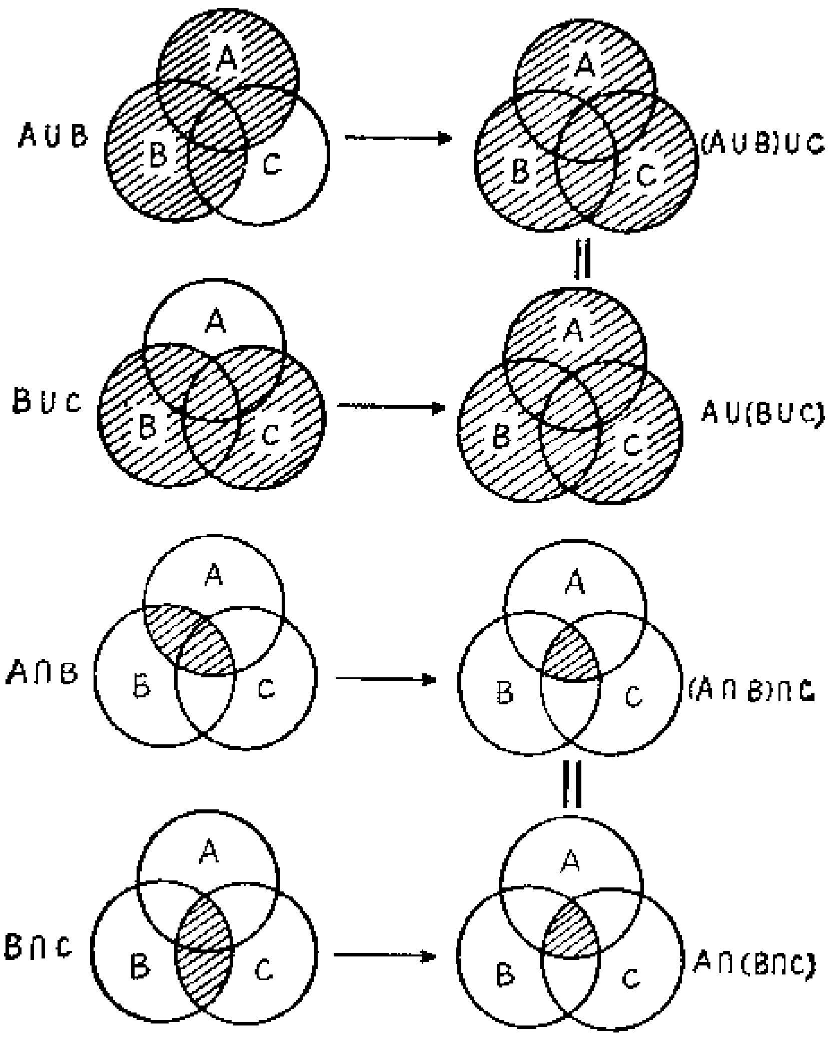
这就好象把三口袋东西合并装进一个大口袋。合并时不论按什么先后顺序，大口袋里的东西是不会改变的。

同样可以推出：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

下图可以帮助我们理解并和交的结合律。

正因为集合的并和交的运算都满足结合律，对若干集合连续施行并、交的运算时，可以随便按什么顺序进行，其结果都是一样。所以，写出表示式时可以不加括号。例如，上

述三个集合的并可写成：$A \cup B \cup C$；它们的交可以写成：$A \cap B \cap C$。



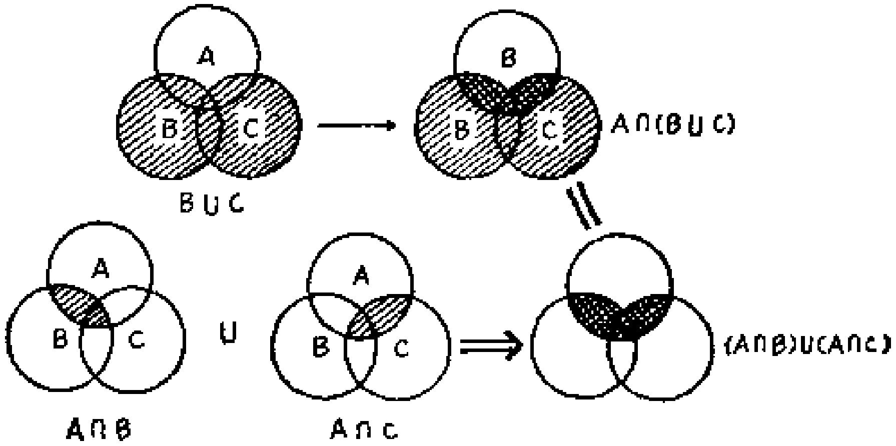
但是，在若干集合连续施行并和交的混合运算时，则与运算的顺序有关，必须加上括号。

(3) 交对并满足分配律

设 A、B、C 为任意三个集合，便有：

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

这一点，我们容易通过下面示意图来说明：



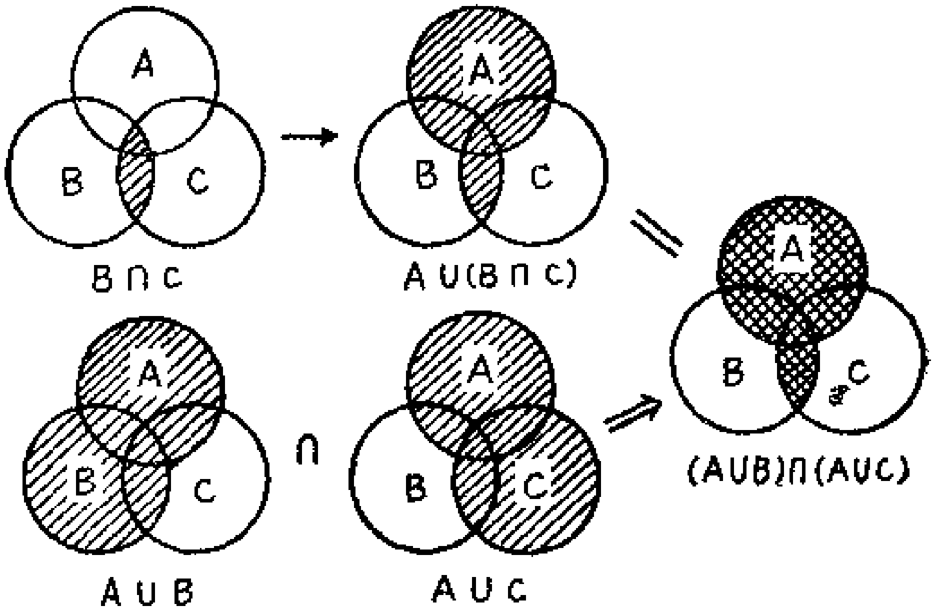
以上讲的是与数相类似的方面。但是，集合运算也有自己独特的算律，而区别于数。

（4）并对交满足分配律

对任意三个集合A、B、C，都有：

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

请看下面的图解：



这就是说，集合的分配律有两条，不仅交对并可分配，而且并对交也可分配。

但是，数的加法对乘法不可分配。例如：

$$1+(2\times3)=7,\text{而}(1+2)\times(1+3)=12$$

$$\therefore\quad 1+(2\times3)\neq(1+2)\times(1+3)$$

(5)并和交满足等幂律

对任一集合 A，都有：$A\cup A=A$；$A\cap A=A$。

这是很容易理解的。因为集合 $A\cup A$ 和 $A\cap A$ 的元素，并不比集合 A 的元素多，也不比它少。

这一条对数的加法和乘法都不成立。因为对任一数$a(\neq0)$，$a+a=2a\neq a$。对任一数$b(\neq1)$，$b\times b=b^2\neq b$。

此外，集合并和交的运算，对任意两个具体的集合都可以施行。

例如：{三支笔}∪{两本书}={三支笔和两本书}

{三支笔}∩{两本书}={ }。

但是对于有名数加法，则是有条件的：必须是同名数。若名数不同，就不能相加。例如“3支笔+2本书”，就得不出合理的结果。而有名数的乘法，则条件更严。一般只在有名数乘无名数(纯数)时，才能施行。

数0与1，在数的运算中起着特殊的作用。空集$\varnothing$与全集I，在集合的运算中，也扮演着类似的角色。若再把集合中“差”的运算，与数的“减法”相联系，把集合 A 的补集 $\overline{A}$，与数 a 的相反数$(-a)$相联系，我们来比较一下，它们在各自的运算中所起的作用，是很有趣的。

设 A 是一个集合，a 是一个数，请看下面的对照表：

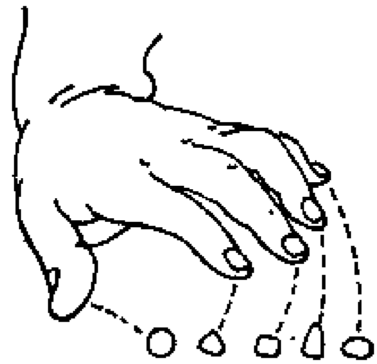
	集合运算	数的运算
相似	1. $\varnothing \cup A = A$	$0 + a = a$
	2 $\varnothing \cap A = \varnothing$	$0 \times a = 0$
	3. $I \cap A = A$	$1 \times a = a$
	4. $A \setminus A = \varnothing$	$a - a = 0$
	5. $A \setminus \varnothing = A$	$a - 0 = a$
不同	1. $I \cup A = I$	$1 + a \neq 1 (a \neq 0)$
	2. $A \setminus I = \varnothing$	$a - 1 \neq 0 (a \neq 1)$
	3. $\varnothing \setminus A = \varnothing$	$0 - a \neq 0 (a \neq 0)$
	4. $A \cup \overline{A} = I$	$a + (-a) \neq 1$
	5. $A \cap \overline{A} = \varnothing$	$a \times (-a) \neq 0 (a \neq 0)$

因为集合的运算，与数的运算存在着各自的特殊规律，所以要把二者严格地区别开来。更不能将集合$\varnothing$、I，和数0、1简单地混同起来。

第三章　广义照“相”术

现实世界中的各种事物，是互相联系的。因此，反映在数学上，必然要考察集合与集合的元素之间的关系。这就是下面所要介绍的：对应、映射和函数，可以把它们比作一种广义照“相”术。这里我们先从日常生活中大家所熟悉的事物说起。

1.从数石子说起



三、四岁的小孩，就会掰着手指头数石子。掰五个指头，他就知道有五个石子。为什么呢？因为他是把指头和石子，“一个对着一个”数的。

用集合的语言来说，这就是在{五个指头}和{五块石子}这两个集合的元素之间，建立一种“一对一”的联系。

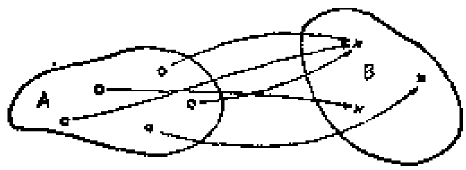
又如在学校中，如果把教师及其所教学生的关系，叫做“直接师生关系”（也是一种“对应关系”），那么在{教师}和{学生}之间就建立了一种对应关系。为简单计，下面以四位教师和四个学生为例，用列表法来表示这种关系。

这种情况比前一个例子要复杂一些。一个教师可以对应所有的学生，也可以没有学生相对应。学生对应教师的情况也是一样。

直接师生关系 老师 / 同学	李老师	汪老师	吴老师	马老师
王小华	有		有	
徐　云	有	有	有	
张　红				
刘一平		有		

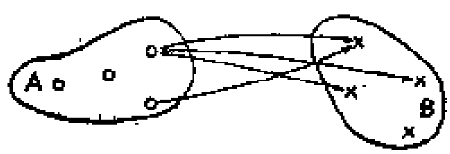
一般地设A、B是两个集合，A的某些元素(不一定是所有元素)与B的某些元素(也不一定是所有元素)之间，存在或指定某种联系，就说在集合A和B的元素之间，或在集合A与B之间建立了一种对应关系。

这种对应关系，可以多种多样。一种是集合A的每一个元素，在B中都有对应元素，这不妨叫做“完全对应”。另一种是集合A和B中都有元素不被对应到，这叫做“不完全对应”。



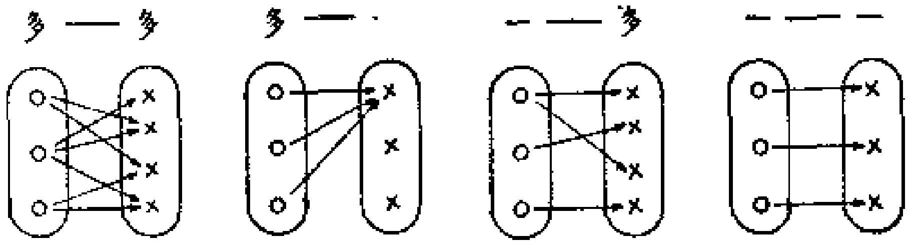
完全对应示意图

“不完全对应”的意义不大，可不去讨论它；要讨论的对应，都是指完全对应。完全对应，又可以分为



不完全对应示意图

以下四种类型：



这四种类型中，以“多——一”对应和“一——一”对应比较重要（在新编中学课本上，把这两种对应叫做单值对应），尤其是后者，即通常所说的“一一对应”，更有研究的价值。

集合A与集合B之间的一个“一一对应”关系，是这样的一个法则（可以用一个符号f来记），它满足下列三个条件：

（1）对于A中每一个元素，都在B中规定一个相对应的元素；

（2）A中不同的元素，在B中相对应的元素也不同；

（3）B中每一个元素，也都在A中有一个对应元素。

例如，在“数石子”的例中，通过“数数”（这就是一个法则），就在{五个指头}与{五块石子}之间，建立了一个一一对应的关系。

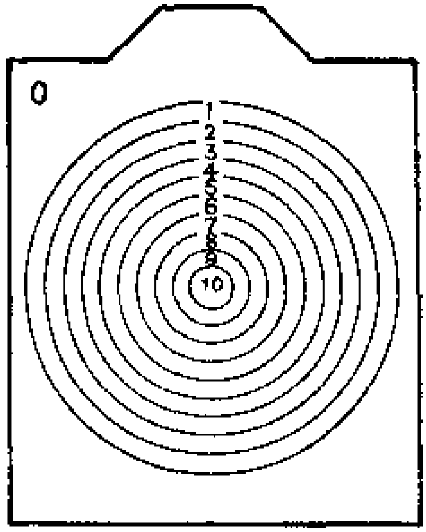
又如，在剧场满座的情况下，“对号入座”（这也是一个法则），就在{当场观众}与{剧场座位}这两个集合之间建立了一个一一对应关系。

2.箭头图和月历表

在集合A和B之间建立的一个单值对应（“多——一”

或“一——一”），也叫做集合A到集合B的映射。如用f表示这个映射，也可以写成f：$A\longrightarrow B$。

例1、6个民兵打靶，每人打一发子弹，脱靶的算“0”环。那么一次射击，就在射手集M与目标集F之间，建立了一个有向的单值对应f、



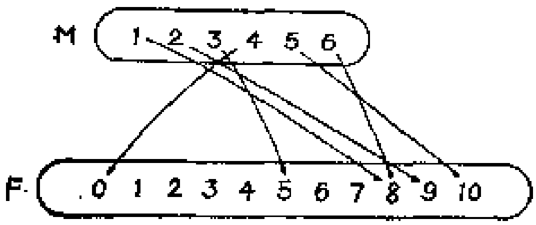
为简明计，我们将民兵按射击先后顺序编号，每个民兵打靶所得的环数假设是：

1号$\longrightarrow$8环；2号$\longrightarrow$9环；

3号$\longrightarrow$5环；4号$\longrightarrow$脱靶；

5号$\longrightarrow$10环；6号$\longrightarrow$8环。

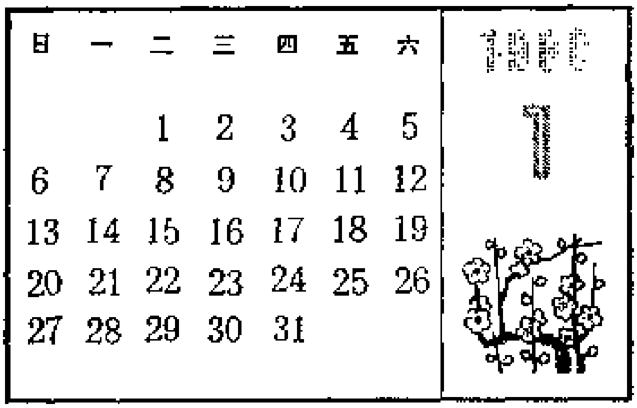
那么就得到{射手}$\longrightarrow${靶环}的一个映射。这个映射可以用右边的箭头图来表示：

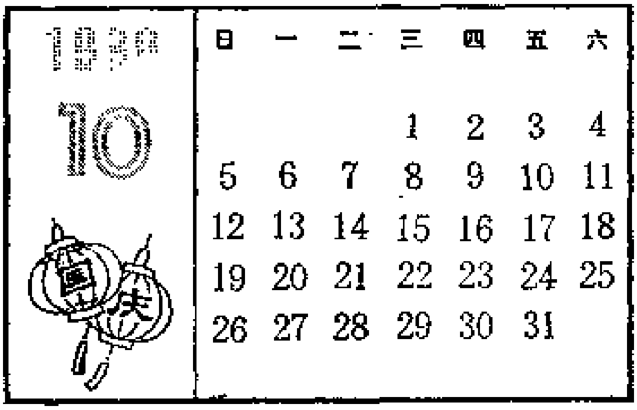


这张箭头图，就确定了从集合$M\longrightarrow F$的

一个映射 f。

例2、设$A=\{1, 2, 3, \cdots\cdots 31\}$——一个大月的日期，$B=$\{星期日，星期一，……星期六\}。





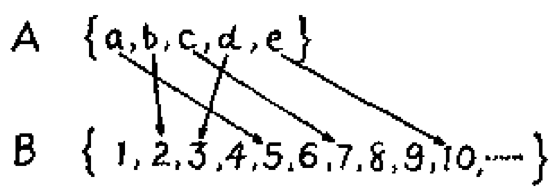
每一张大月日历表，就确定了集合 $A \longrightarrow B$ 的一个映射。如右边是八〇年元月份和十月份两张月历表，就确定了 $A \longrightarrow B$ 两个不同的映射。

例3、设：

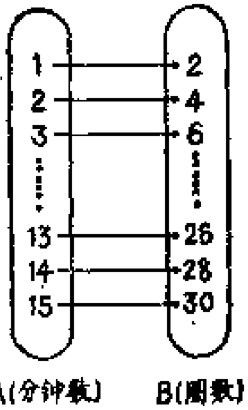
$A=$\{篮球场上某方五个运动员\}

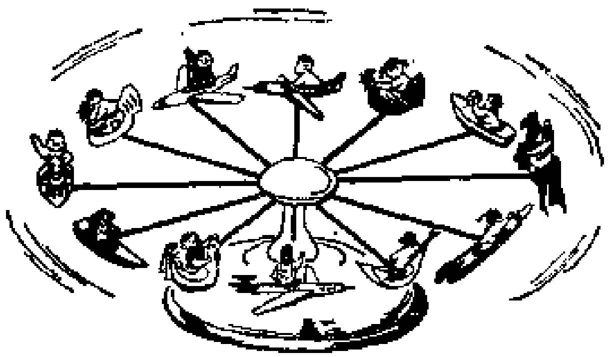
$B=\{n\}$——自然数的集合

若以 a, b, c, d, e 代表这五个运动员，每个运动员对应他球衫上的号码，那么，就得到 $A \longrightarrow B$ 的一个映射。



例4、公园里儿童游乐车，假如每分钟旋转两圈，那么旋转一刻钟，就得到集合$\{1, 2, 3, \cdots\cdots 15\} \longrightarrow \{2, 4, 6, \cdots\cdots 30\}$的一个映射。





例5、一个学校全体师生员工照集体像。

用A——表示所有人的集合；B——表示照片上所有人像的集合。每一个人对应自己的像，那么一次照相，就得到集合$A \longrightarrow B$的一个映射，或可以形象地称为映像。

其实，“映射”这个名词，正是从“射击”和“照相”这些事例抽象出来的。

集合$A \longrightarrow$集合B的映射f，可以形象地看作是给集合A的一次“集体照相”，“底片”就是集合B，像就是B的某些元素。

若A的元素a，映射到B的元素b，则我们可以记为：$a \xrightarrow{f} b$ 或 $f(a)=b$。并把b叫做a的“象”，而把a叫做b的“原象”。

不过，映射是一种特别的“照相术”。与普通照相术不同的是，A中两个不同的元素，可以对应B中同一元素（象）；而B中每一个元素，也不一定都在A中有原象。

映射f：$A \longrightarrow B$，又好象是集合A的每一个元素（射手），

都向 B 的元素(目标)射出一支箭，而构成的一张完整的箭头图。

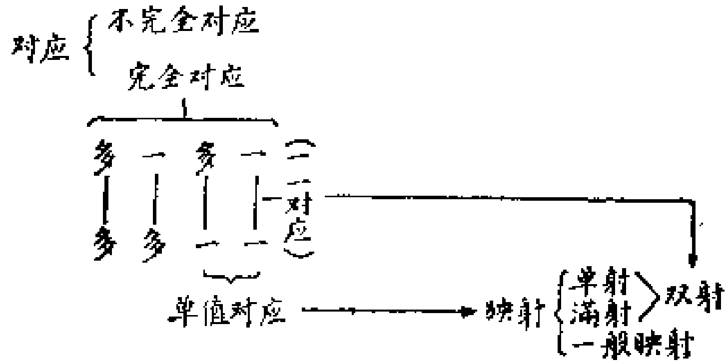
如果 B 中的每个目标都被箭射中，亦即 B 中每个元素，在 A 中都有原象，那么就称此映射为满射。如例2、4、5。

如果 A 中不同射手，射中的目标也不同，亦即A 中两个不同的元素，对应于B中的象也不同：a_1，$a_2 \in A$，且$a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$那么就称此映射为单射。如例3、4、5。

我们要注意的是：一个满射，不一定是单射；而一个单射，也不一定是满射。事实上，例2中的映射，是满射，不是单射。例3中的映射，是单射，不是满射。

如果一个映射既是单射，又是满射，那么就叫做双射。$A \longrightarrow B$的双射f，也是 A 与 B 之间的一个一一对应。如例4、5中的映射。

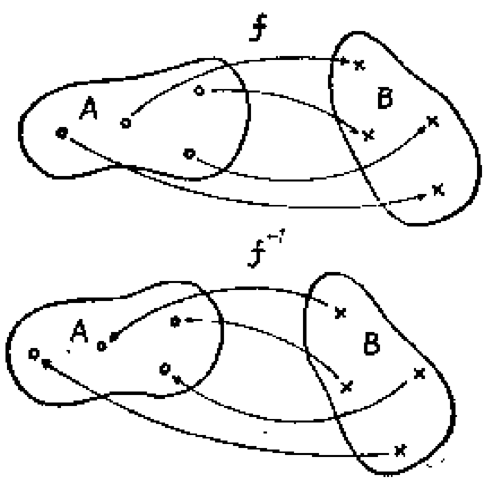
对应、映射等有关概念的关系，如下图所示：



3. 回射和透射

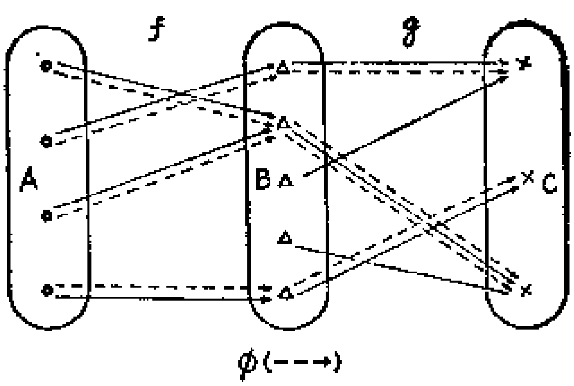
若映射f：$A \longrightarrow B$是一个双射，它确定了一张从A到B 的箭头图。如果把所有箭头都回转过来，那么就得到一张箭头

方向相反的、从B到A的箭头图。这张箭头图确定了一个$B \longrightarrow A$的映射，这个映射一般叫做f的逆映射，记为f^{-1}。



应该注意到，只有双射，才有逆映射；而且这个逆映射也是双射。任何一个双射f，又总是同时确定了一个逆映射。所以，双射总是成对出现，而且它们互为逆映射。

设A、B、C是三个集合。f是$A \longrightarrow B$的映射；g是$B \longrightarrow C$的映射。



那么，从集合A出发，从集合B"透射"过去，而达到集合C，就得到$A \longrightarrow C$的一个映射φ。

对于A的每一个元素a，$\varphi(a)$是这样确定的：$a \longrightarrow f(a) \longrightarrow g[f(a)]$，其中$f(a) \in B$，$g[f(a)] \in C$。亦即：$\varphi(a) = g[f(a)]$。

我们把映射φ：$A \longrightarrow C$，叫做映射f：$A \longrightarrow B$和映射g：$B \longrightarrow C$的复合映射，并记为：$\varphi = g \circ f$（注意式中f和g写的顺序！）。

很明显，两个单射的复合映射，仍是单射；两个满射的复合映射，仍是满射；两个双射的复合映射，仍是双射。

4.数集上的映射——函数

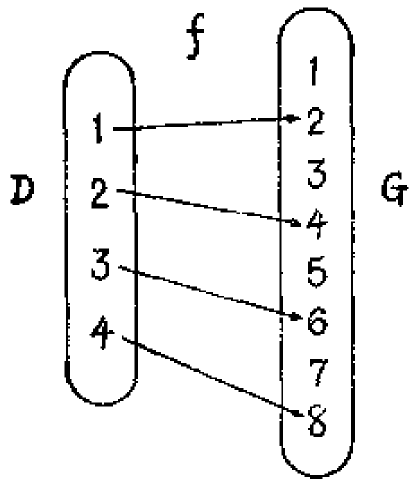
前面说的映射，所涉及的两个集合："射手"集A和"目标"集B，是一般的集合。当然，A和B都可以是数的集合(数集)。

如果集合A和B都是数集，f是从A到B的映射，那么，就把映射f：$A \longrightarrow B$叫做定义在数集A上的一个函数。

把函数理解为从一个数集到另一个数集上的映射，这是从集合论观点出发，给函数的定义。

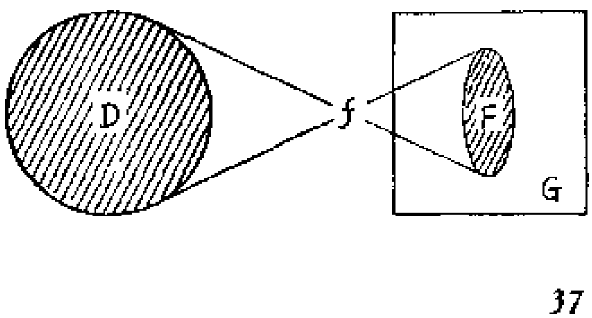
设f：$D \longrightarrow G$是定义在数集G上的一个函数，那么就把数集D(射手集)叫做函数f的定义域；把数集G(目标集)叫做函数f的取值集。

若$a \in G$，a在G中的"象"是b，那么，就把b叫做f在a所取的函数值；并记为：$f(a)=b$。



一般地说，取值集G中的数不全都被函数f取尽。例如右图所示的函数f：$D \longrightarrow G$。

我们把G中被取作函数值的那些数，组成一个集合F。那么F就叫做函数f的值域。

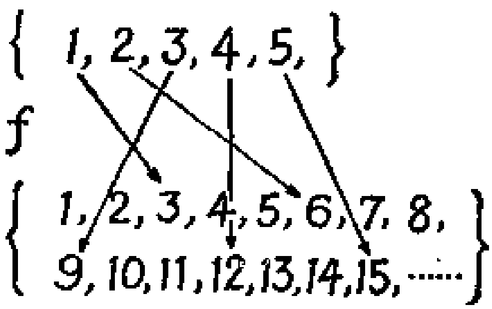


因为函数f的值域F，是D上每个元素在f"映射"下，所成"象"(属于G)的集合，所

以，又可把F写成$f(D)$：$f(D)=F$。于是，值域F，就好象是定义域D通过“照相机”f的作用，所得的一张“集体照”。

上例中，函数f的值域就是：$F=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$。

下面再举出几个函数的例子。



例1.设$D=\{1,2,3,4,5\}$，$G=\{n\}$。f的对应规律是：D中每个数x，对应x的3倍数$3x$。即f：

$x \longrightarrow 3x$ ······ * 那么就确定了定义在D上的一个函数。

例2.设$D_1=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 5$ 的有理数$\}$，$Q=\{$有理数$\}$；f_*：$x\longrightarrow 3x$。则f_*是定义在D_1上的一个函数。这个函数和上例一样，映射规律是由公式（*）给出的。公式（*）称为函数f的表达式，而有：$f_*(x)=3x$。

有了这个公式，计算函数值就方便了。例如D_1中1、$\frac{1}{2}$、$\frac{2}{3}$、$2\frac{1}{2}$、$4\frac{1}{3}$的函数值，很容易计算得到：

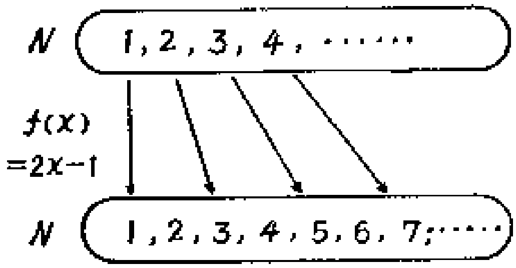
$$f(1)=3\times 1=3;\quad f(\frac{1}{2})=3\times\frac{1}{2}=1\frac{1}{2};$$

$$f(\frac{2}{3})=3\times\frac{2}{3}=2;\quad f(2\frac{1}{2})=3\times 2\frac{1}{2}=7\frac{1}{2};$$

$$f(4\frac{1}{3})=3\times 4\frac{1}{3}=13$$

不过要注意，例1和例2中函数的表达式虽然相同，但因为函数的定义域不同，所以应该看作是两个不同的函数。

例3.设$D=\{n\}$，$G=\{n\}$；$f(x)=2x-1$。



我们又确定了一个定义在自然数集N上的函数。

这个函数的值域是所有正奇数的集合 {1，3，5，7，……}。

是不是所有的函数的对应法则f，都能用一个公式来表达呢？不能。

例4.设$D=\{1, 2, 3, \cdots\cdots, 10\}$表示某月上旬的十天。$G=\{$温度度数$\}$。

假设这一旬每天的最高气温记录如下表：

日　　期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
最高气温	21°	22°	24°	23°	25°	27°	25°	26°	27°	26°

那么，这张表就确定了一个定义在D上的函数f：每一天对应当天的最高气温。

但是，这个函数只能由列表得出，而很难找出一个简单的公式来表达。

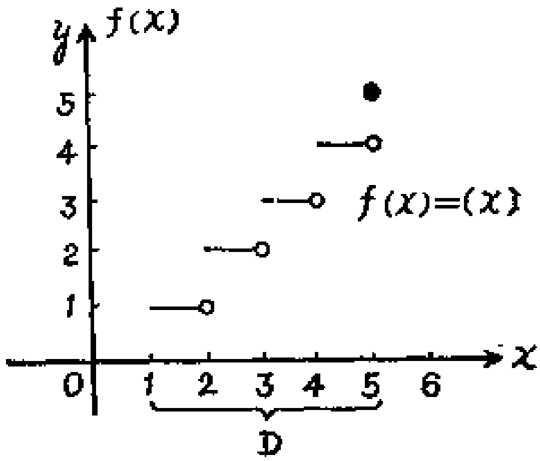
例5.设$D=\{x \mid 1\leqslant x\leqslant 5\}$，即数轴上从1到5之间的所有实数(包括1和5)的集合；$G=\{n\}$。用$[x]$表示不超过x的最大整数，那么，$f(x)=[x]$是定义在D上的一个函数。

例如：$f(1.5)=[1.5]=1$；　$f(2.05)=[2.05]=2$；

$f(3)=[3]=3$；　$f(4.9)=[4.9]=4$

这个函数既没有公式，也不能列表，因为定义域D中的数有无穷多个。但我们可以用图形来表示。

$f(x)$的图形可以这样来画：在平面画两条互相垂直的数轴，它们的交点O作为共同的零点。两个数轴取一个共同的单位长作为1；它们的方向如图所示。横轴叫x轴，纵轴叫y轴。



将定义域D表示在横轴上，D中每一点x处的函数值$f(x)$，用纵轴上的长度来表示。所有的点$(x, f(x))$就描出了函数$f(x)$的图形。

上图中阶梯状的四条横线和一点（“。”处的点应从横线上挖去），就是例5中函数的图形。

综上数例，我们可以看出，函数的表示方法有三种：

(1) 公式法（如例1、2、3）；

(2) 列表法（如例4）；

(3) 图象法（如例5）。

但是，有的函数也可能用这三种方法都表示不出来。例如有名的迪里赫勒函数，就是一个。

例6. 迪里赫勒函数。

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x \text{ 为有理数时}\\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数时}\end{cases}$$

它确实是整个实数集R、到数集$\{0,1\}$上的函数，但既没有公式，也不能列表，也画不出图形来。怎么办呢？那就用如上的“叙述”方式来表示好了。

从函数的定义和例子中，我们总结出函数概念的要素有三：

(1) 定义域D；

(2) 取值集G；

(3) 对应法则(对应规律)f。

其中(1)、(3)两项是基本的。

函数的定义域D告诉我们：这个函数对哪些数是可以求函数值的，或者说函数对哪些数有意义。

函数的对应法则f告诉我们：对于定义域D中的每一个x，它所对应的函数值$f(x)$是什么数，或者说，如何由x去确定函数值$f(x)$。

这两条对一个函数来说，缺一不可。至于说取值集G，那不是很重要的。因为定义域D和对应法则f确定以后，所有的函数值就确定了，亦即函数的值域$F=f(D)$，就自然确定了。至于说值域F包含在哪一个取值集里，是无关紧要的。

例7．用公式$f(x)=\dfrac{x}{2}+1$，在$D=\{1, 2, 3, 4\}$上定义一个函数。那么，对应的四个函数值分别是：

$$f(1)=\frac{1}{2}+1=1.5;\quad f(2)=\frac{2}{2}+1=2;$$

$$f(3)=\frac{3}{2}+1=2.5;\quad f(4)=\frac{4}{2}+1=3$$

因此，这个函数的值域是数集：

$$F=\{1.5, 2, 2.5, 3\}$$

至于说这个函数的取值集，看作是有理数集Q也好，或看作是整个实数集R也好，都没有关系。

最后还有一点要说明。虽然用公式表达的函数，只是函数中的一部分，但是，我们在中、小学课本上所碰到的初等函数，都是这一类可以用公式表达的函数。

例如：$f(x)=x^2-1$——整函数 ⎫
$f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$——分式函数 ⎭ 有理函数

$f(x)=\sqrt{x^2-1}$——无理函数

有理函数和无理函数合起来，称为基本代数函数。

$f(x)=a^x(a>0)$——指数函数

$f(x)=\log_a x(a>0,\ a\neq 1)$——对数函数

$f(x)=x^a$(a为实数)——幂函数

$f(x)=\sin x$，等——三角函数

$f(x)=\operatorname{arctg} x$，等——反三角函数

这几类函数合起来，称为基本超越函数。

以上八种基本函数，以及它们的复合，总起来称为初等函数。初等函数的性质是中学数学主要的内容之一。

第四章 “5”的来历及其它

在日常生活中，我们常常要数一数集合中元素的个数。表示个数的数字1，2，3，4，5，……，使用很广泛。比如：一只手有5个指头，书包里有3本书，铅笔盒里有5支铅笔，任某班课的有4位老师，等等。现在我们要问：什么是“个数”？或者具体一点，什么是“5”？

乍一看，这个问题好象很简单。“5”就是5个指头、5支铅笔的那个“5”。这样回答是不能令人满意的。因为“5个指头”、“5支铅笔”都是具体的事物，绝不是“5”本身；而“5”是一个脱离了具体事物的高度抽象的概念。下面我们用集合的思想来说明它。

1. “白”是什么？

这个问题与上面提出的问题相类似。

白，是一种颜色。是什么样的颜色呢？无法抽象解释，而只能借用具体的例子(模型)来说明。说“白”，就是象“白雪”、“白云”、“白糖”等等一类物体的颜色。

说得更详细一点，把所有白色物体归为一类，组成一个集合：{白雪、白云、白糖、白盐、白布……}

我们把这个集合中所有元素在颜色上的共同本质特征(其它方面不考虑)抽象出来，就是“白”。于是，我们可以给“白”下一个抽象的定义：白，就是和雪同色物体的全体，

在颜色上具有共同的本质特征。

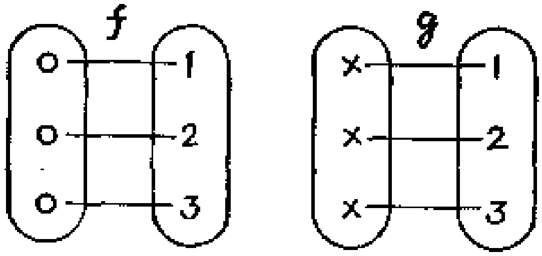
2.集合的“等价”

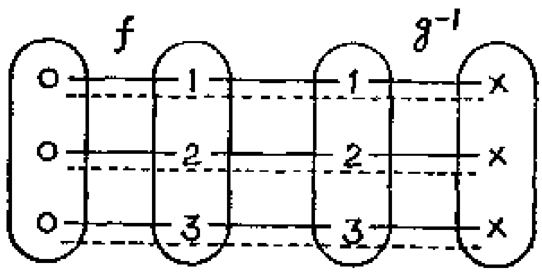
小孩掰着手指头数石子，掰了五个指头，他知道有五块石子。为什么？因为手指头和石子是“一个对一个”数的，五个指头，恰好对应五块石子。

又如，一个剧场里满座，又一人一座，那么不要数，我们就知道剧场的座位，和观众一样多。因为{观众}和{座位}两个集合是一一对应的。

总之，在人们的经验中，已经知道，如果两个集合（主要指有限集）之间建立了一一对应的关系，那么它们的元素个数就相等。

如果两个集合（可以是无限集）A、B是一一对应的，就称A与B在数量上等价，并记作$A\simeq B$。于是，对于有限集来说，等价集合的元素个数总是相等的。反过来，两个元素个数相等的有限集合，又总可以建立一一对应关系，因此，它们也一定是等价的。如图所示。





容易验证：

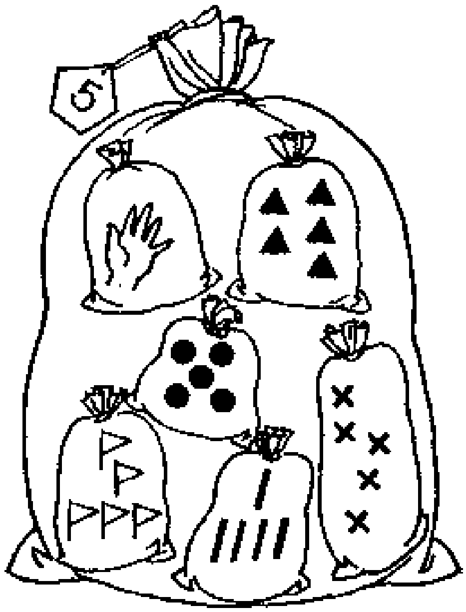
(1) 任一集合A与其自身等价：$A\simeq A$(反射性)；

(2) 若$A\simeq B$，则$B\simeq A$（对称性）；

(3) 若$A\simeq B$，$B\simeq C$，则$A\simeq C$（传递性）。

3.等价集类的标志

现在我们利用集合的等价关系，来将所有集合分类：把所有彼此等价的集合放在一起，组成一个大的集合类，叫做等价集类。它的元素是集合，它是集合的集合（这样的集类，也称作集系，或集族）。每一等价集类中的所有集合，其元素个数皆相等；而不同类中的集合的元素个数，一定不等。这样，"个数"就成了一个等价集类在数量上的特征。例如，所有与{五个指头}等价的集合，组成一个等价集类，"5"就是这个集类的数量特征。



因此，反过来，我们可以说：集合{五个指头}所在集类的数量上的特征，就叫做"5"。

一般地，我们可以给个数（基数）下一个抽象的"定义"：等价集类在数量上（不是在颜色或别的什么方面）的特征，就叫做该集类中每一集合的基数。有限集的基数，就是它元素的个数。无限集的基数，是元素"个数"的一种引伸和延拓。

集合A的基数，简记为$n(A)$。

有人可能会想：定义"个数"为什么要费这么大的事？

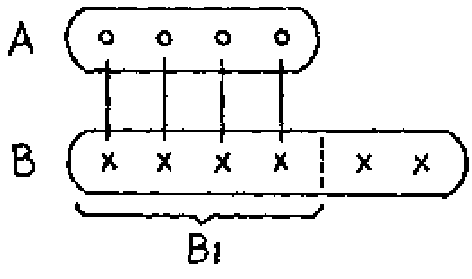
是不是在故弄玄虚？不是。我们要知道，“个数”，比如说“5”，是个极抽象的概念。1，2，3，或5，这些抽象概念的形成过程，可以说几乎和人类本身的历史一样长。直到不久前，世界上还有少数文化落后的部族，数数只能数到“一、二、三”；三以上，就是“许多”。有的部族，在语言中没有“五”这个词，只有“五只羊”、“五个人”等这样一些具体有名数的词。还有的部族，在他们的语言中，“五”就是“手”这个词。由此可见，他们至今还没有完成“5”这个概念的抽象过程哩！

因此，要给个数(1，2，3，5等)下一个具体而确切的定义，是十分困难的。除上面的办法外，实在想不出什么再好的办法了。

4.基数比较和伽利略的苦恼

小朋友数糖果，掰了四个指头，他知道糖果的个数，比手指个数少一个。亦即集合{五个指头}的基数，比集合{四块糖果}的基数大。

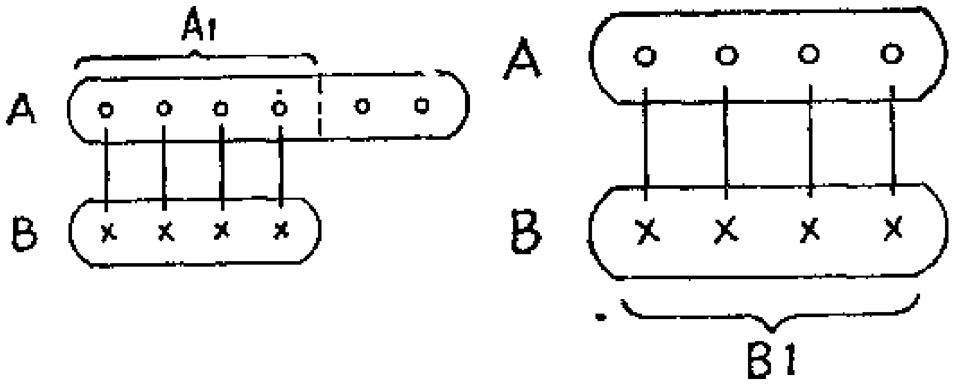
一般说，若 A、B 是两个有限集，它们的基数，按照以下方法来比较大小。



当 A 与 B 的一个真子集 B_1 等价，即 $A \simeq B_1 \subset B$ 时，$n(A) < n(B)$。

当 B 与 A 的一个真子集 A_1 等价，即 $B \simeq A_1 \subset A$ 时，$n(A) > n(B)$。

当 A 与 B 等价时，$n(A) = n(B)$。



此外再没有第四种可能的情况了。

但是，意大利的天文学家伽利略，在1638年比较自然数和自然数的平方数的个数时，却产生了很大的苦恼。

一方面，自然数的平方数，看起来，当然要比自然数少得多。这是因为自然数的平方数都是自然数，而有许多自然数不是平方数，如2，3，5，6，等等。

n:	1,	2,	3,	4,	5,	6,	7,	8,	9,	10,	11,	12,	13,	14,	15,	16,	……
n^2:	1,			4,					9,							16,	……

但是，另一方面，如果在集合$\{n\}$与集合$\{n^2\}$之间进行一场“对手赛”的话，不论$\{n\}$出哪一个元素n，$\{n^2\}$又总有一个元素n^2与它配对。

n	1,	2,	3,	4,	5,	……n,	……
	↑	↑	↑	↑	↑	↑	
	↓	↓	↓	↓	↓	↓	
n^2	1,	4,	9,	16,	25,	……n^2,	……

按我们普通的常识，这似乎说平方数又不比自然数少。因此，伽利略感到困惑不解。

“自然数究竟比平方数多，还是不多”？这个难题，二百五十年间一直无人解决。直到十九世纪末叶，才由著名数学家康托尔，从集合论观点出发，指出了问题的实质，做出了恰当的说明。

原来，伽利略的苦恼，是由于他用处理有限数的经验，去对待无限数。其实，有限和无限之间已经有了本质的不同。为了认识有限和无限的本质差异，这里先讲一个故事，或许是有益的。

假如有一个旅店，内设一百个床位，所有床位都已客满。这时来了位新客，想要住店。服务员只好说：“对不起，所有床位都住满了，请另住别处吧。”

现在设想另一家旅店，内设有无限多个床位，所有床位也住满了。这时，来了个新客要住店。意想不到的是，服务员竟一口答应，热情地说：“可以。请稍等一会，我来把旅客调整一下。”

服务员对所有住店的旅客说：“对不起，为了让一位新客人有得住，麻烦大家把床位挪一下：请每一位客人移到下一个号码的床位上休息。”这样，1号床旅客移到2号床，2号床旅客移到3号床，如此等等。于是，就把1号床位空出来让给了新来的客人。

多么奇怪呀，在有限范围内办不到的事，在无限的范围内办到了！这是什么原因呢？这是因为，无限集与有限集，有了本质的不同。因此，用比较有限数大小的办法，去比较无限数（无穷大）的大小，必然要碰壁。

这个本质的不同就是：无限集可以和它的一个真子集等价，而这对有限集来说是绝对不可能的。

例如，自然数集$N=\{n\}$和它的真子集：$M=\{2, 3, 4, 5, \cdots\cdots\}$之间，可以建立一个一一对应关系：

$$\begin{array}{lccccccc} N=\{ & 1, & 2, & 3, & 4, & \cdots\cdots & (n-1), & n\cdots\cdots\} \\ & | & | & | & | & & | & | \\ M=\{ & 2, & 3, & 4, & 5, & \cdots\cdots & n, & (n+1)\cdots\cdots\} \end{array}$$

有鉴于此，康托尔提出了比较两个集A和B(包括无限集)基数大小的新规定。这就是：

(1) 当$A\simeq B$时，$n(A)=n(B)$；

(2) 当$A\simeq B_1\subset B$，而A不与B等价时，$n(A)<n(B)$。

(3) 当$B\simeq A_1\subset A$，而B不与A等价时，$n(B)<n(A)$。

其中带着重点的文字是必须注意的，否则有可能出现$A\simeq B$的情形。

(4) 当$A\simeq B_1\subset B$，且$B\simeq A_1\subset A$时，可以证明，此时$A\simeq B$，故也应有$n(A)=n(B)$。

(1)、(2)、(3)条的规定，与有限基数(个数)比较的结果完全一致。而第(4)条，在有限集的情形是不会发生的。因此，这个新规定对于比较两个有限基数(个数)也完全适用。

根据这样的规定，只要两个无限集A和B之间能建立一个一一对应关系，就知道它们的基数相等。因此，自然数集合$\{n\}$，和平方数的集合$\{n^2\}$的基数是相等的。就是说，自然数和平方数的个数“一样多”。这样就彻底解决了伽利略的苦恼。

同样可以证明：无限集$\{2n-1\}$、$\{2n\}$、$\{2^n\}$、$\{p_n\}$——素数集等，都与自然数集等价。

因此，可以粗略地说：正奇数、正偶数、2的乘方数、素数，都和自然数的个数“一样多”！多么奇怪的结论呀！

n	1, 2, 3, 4, ……, n, ……
$2n-1$	1, 3, 5, 7, ……, $(2n-1)$, ……

n	1, 2, 3, 4, ……, n, ……
$2n$	2, 4, 6, 8, ……, $(2n)$, ……

n	1, 2, 3, 4, ……, n, ……
2^n	2, 4, 8, 16, ……, 2^n, ……

n	1, 2, 3, 4, ……, n, ……
p_n	2, 3, 5, 7, ……, p_n, ……

5.有理数和自然数“一样多”

更奇怪的是，有理数(包括所有整数和分数)竟然也和自然数“一样多”！这是为什么？

我们知道自然数集$N=\{1, 2, 3, 4\cdots\cdots n\cdots\cdots\}$的一个特点是，它的全部元素（自然数），可以排成一队，从头数起。因此，我们把自然数集以及与它等价的集合，叫做可数集，也称可列集、排队集。

假设集合A是可数集，即$A\simeq N$。这时，在A与N之间存在一个一一对应关系f。我们把A中与1对应的元素a_1，排在第一个；与2对应的元素a_2，排在第二个；……与n对应的元素a_n排在第n个；……

N	1, 2, 3, ……n, ……
A	a_1, a_2, a_3, ……a_n, ……

于是集合 A 的所有元素，也排成了一列有头而望不到尾的长队：$A=\{a_1, a_2, \cdots\cdots a_n, \cdots\cdots\}$。

反之，一个集合 A，若它所有元素可以排成有头而望不到尾的一列长队：$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots a_n\cdots\cdots\}$，那么它一定和自然数集等价，所以它一定也是可数集。

事实上，这时令 $a_1\to 1$，$a_2\to 2$，$a_3\to 3\cdots\cdots$，$a_n\to n\cdots\cdots$，就建立了集合 A 与 N 之间的一个一一对应关系：

A	a_1,	a_2,	a_3,	$\cdots\cdots a_n\cdots\cdots$
N	1,	2,	3,	$\cdots\cdots n\cdots\cdots$

因此，$A\simeq N$。

我们开始提出的问题，实际上是要证明：有理数集 Q 和自然数集 N 的基数相等，亦即证明 $Q\simeq N$。现在利用可数集的概念，可以把问题转化为：证明 Q 是可数集。

为证明 Q 是可数集，又只要能将全部有理数排成一列有头而望不到尾的长队就行了。

现在，将所有形如 $\frac{p}{q}$（p，q 为整数，$q\neq 0$）的有理数，排成如下的图阵：

⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
…−3/3	−2/3	−1/3	0/3	1/3	2/3	3/3…
…−3/2	−2/2	−1/2	0/2	1/2	2/2	3/2…
…−3/1	−2/1	−1/1	0/1	1/1	2/1	3/1…
…−3/−1	−2/−1	−1/−1	0/−1	1/−1	2/−1	3/−1…
…−3/−2	−2/−2	−1/−2	0/−2	1/−2	2/−2	3/−2…
…−3/−3	−2/−3	−1/−3	0/−3	1/−3	2/−3	3/−3…
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

其中每一横列分数的分母相同。显然，所有有理数都能写成分数形式，因此都包括在图阵之中了。但图阵中有许多数实际上相等。如1/2＝2/4，等等。

现在，将图阵中重复的数划去，得到：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & & -2/3 & -1/3 & & 1/3 & 2/3 & & \cdots \\
\cdots & -3/2 & & -1/2 & & 1/2 & & 3/2 & \cdots \\
\cdots & -3/1 & -2/1 & -1/1 & 0/1 & 1/1 & 2/1 & 3/1 & \cdots
\end{array}
$$

把剩下的数每列再“向下看齐”，得到：

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & -3/5 & -2/7 & -1/4 & & 1/4 & 2/7 & 3/5 & \cdots \\
\cdots & -3/4 & -2/5 & -1/3 & & 1/3 & 2/5 & 3/4 & \cdots \\
\cdots & -3/2 & -2/3 & -1/2 & & 1/2 & 2/3 & 3/2 & \cdots \\
\cdots & -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & \cdots
\end{array}
$$

这正好包括了所有的有理数，而且没有重复。我们将这些数从0开始，然后按箭头的方向依次排队：

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
\cdots & -3/5 & \leftarrow & -2/7 & \leftarrow & -1/4 & & \longleftarrow & & 1/4 & \leftarrow & 2/7 & \leftarrow & 3/5 & \cdots \\
 & \downarrow & & & & & & & & & & & & \uparrow & \\
\cdots & -3/4 & & -2/5 & \rightarrow & -1/3 & & \longrightarrow & & 1/3 & \rightarrow & 2/5 & & 3/4 & \cdots \\
 & \downarrow & & \uparrow & & & & & & & & \downarrow & & \uparrow & \\
\cdots & -3/2 & & -2/3 & & -1/2 & & \longleftarrow & & 1/2 & & 2/3 & & 3/2 & \cdots \\
 & \downarrow & & \uparrow & & \downarrow & & & & \uparrow & & \downarrow & & \uparrow & \\
\cdots\leftarrow & -3 & & -2 & \leftarrow & -1 & & 0 & \rightarrow & 1 & & 2 & \rightarrow & 3 & \cdots
\end{array}
$$

这样，不论是哪个有理数，都会或早或迟地加入这支无限长的数列长队。因此，把所有有理数排成了一列长队，这就证明有理数集是可数集。

如果我们记住了前面所说的，凡可数集都与自然数集N

等价，那么，有理数集 Q 与自然数集 N 等价。因此，它们的基数相等。所以应该说：有理数和自然数“一样多”。

自然数究竟有多少个呢？或者说自然数集的基数是什么？它当然不可能是任何有限数，它是一个无限基数。由于自然数集的重要作用，我们给它的基数以一个特别的记号——$\aleph_0$，读作“阿列夫——零”。

是不是所有无限集都是可数集呢？不是。数轴上所有实数的集合R，就是一个不可数的集合。R的基数用一个小写英文字母 c 来表示，它比$\aleph_0$大。

在无限基数中，$\aleph_0$是最小的一个，比它大的记作$\aleph_1$，$\aleph_2$，$\aleph_3$等等。但是无限基数中没有最大的：$\aleph_0<\aleph_1<\aleph_2<\cdots\cdots$。

关于无穷大的算术运算，是一门专门的学问，这里就不说了。

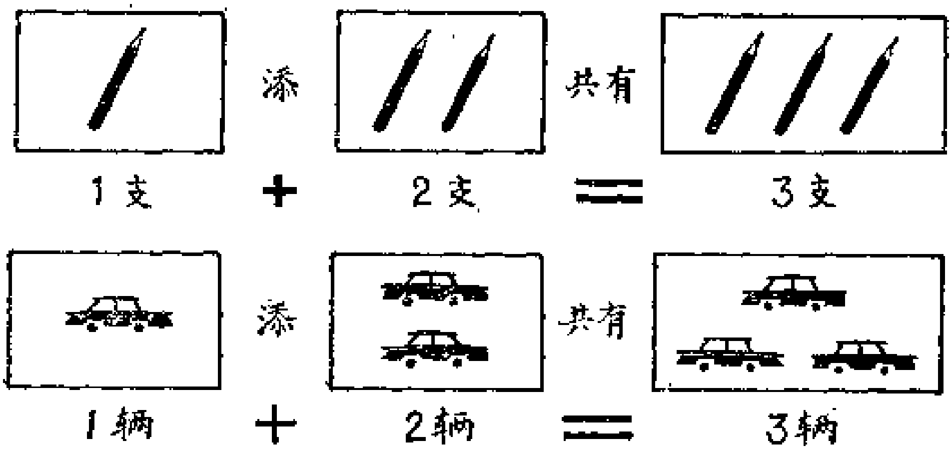
第五章　加法和乘法同源

在上一章中，我们把正整数(自然数)理解为有限集合的基数。现在，我们要从集合基数的意义上，来说明正整数的加法和乘法。

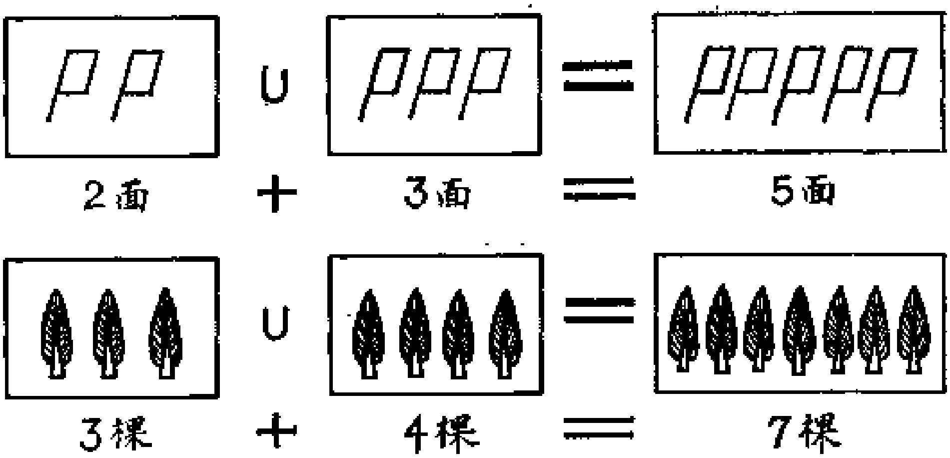
本章及以下几章中所提及的基数，除特殊申明外，都是指有限的正整数。

1.这算不算加法?

从小学一年级起，就学习正整数的加法。开始总是从一些具体的例子讲起，比如，1 支铅笔，再添上 2 支铅笔，一共 3 支铅笔；1辆汽车，又开来 2 辆汽车，一共有3辆汽车，等等。



这实际上，就是把两个集合的元素(它们同类)并起来，得到一个并集的过程。“添”的意思就是“并”。如果用前面讲过的符号，还可以写出：



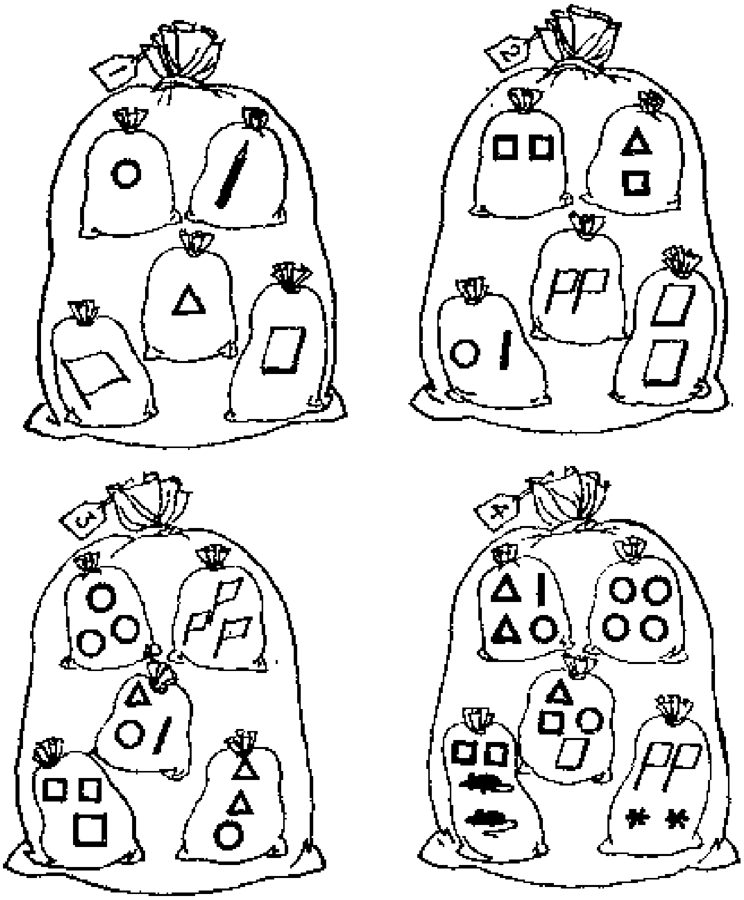
于是就学会了：“1支+2支=3支”；“1辆+2辆=3辆”；“2面+3面=5面”；“3棵+4棵=7棵”。

然而，这样能算是学会了数的加法了吗？不能算。因为，上面所说的“1辆+2辆=3辆”等等，只是有名数的加法，而不是正整数的加法。有名数加法还没有脱离具体的事物，没有达到抽象的程度，因而得不出通用的一般法则。如果对于每种具体事物相加，都要具体地进行一次合并过程，那么，这对于人们应用加法就太费事了。因为具体事物是无穷无尽的。另外，有名数加法又有很大限制：只有同名数才能相加。要是“1头+2条”，就得不出合理的结果。因此，我们需要进一步抽象，从有名数加法，过渡到无名数加法。

2.个数相加

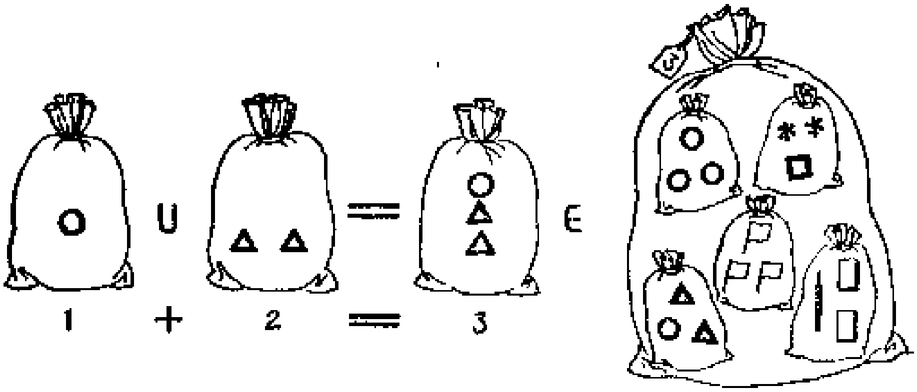
我们把元素个数(基数)相同的集合归为一类——等价集

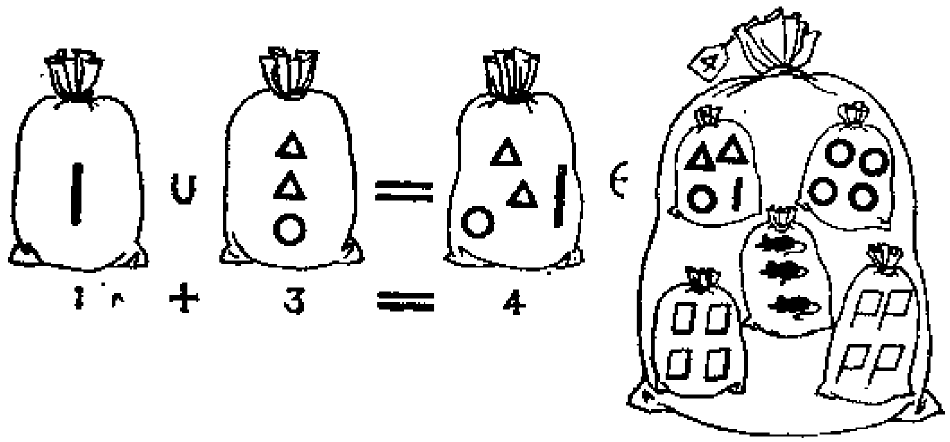
合类。每一等价集合类，可以形象地比喻成一个大“口袋”：1号袋，2号袋等等。



对于任意两个整数，例如1和2，我们用下面的方法来规定“1＋2”的“和”：从“1号袋”、“2号袋”分别取出两个集合再并起来，所得并集属于哪号袋，那只口袋的号码就是“1＋2”的“和”，于是“1＋2”的和是3，可写作1＋2＝3。

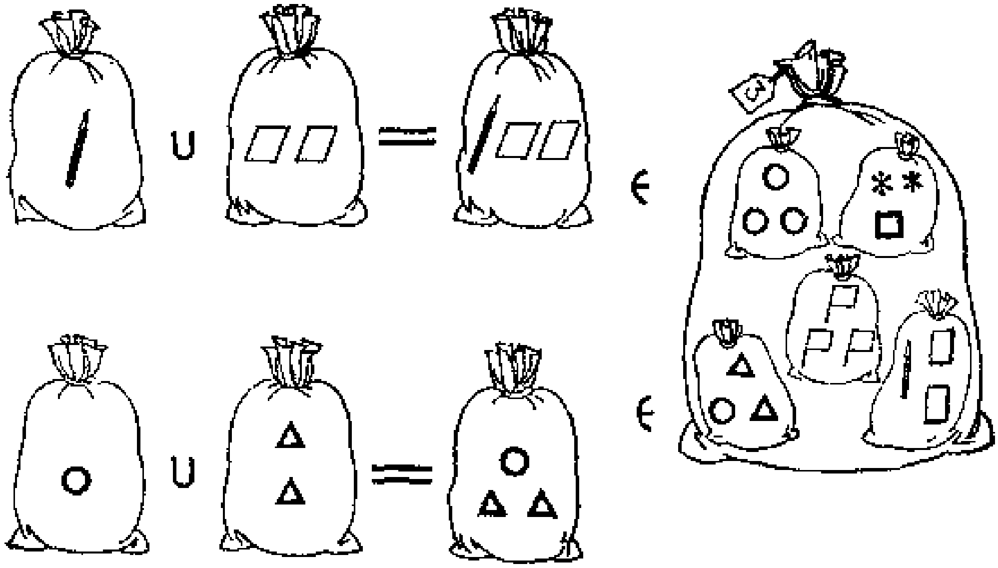
如果要计算“1＋3”，就从1号“袋”里取一个集合，与从“3号袋”里取一个集合合并，则这一并集所属的“口袋”号码“4”，就是“1＋3”的和。





如此等等。于是对任意两个正整数，都可以进行加法运算了。

我们注意到，在做加法运算“1+2=3”时，1，2，3，已不再是有名数了，它们是集合的基数，是抽象的数。而且和数“3”，不依赖于我们从“1号袋”和“2号袋”取出的是什么集合。取出的元素同类也好，不同类也好，都没有关系。“3”只是由袋子号码1和2而确定的。如果另取别的“样本”，所得到的并集，一定和已经得到的并集等价，故不会改变它们所属的大“口袋”，因而和数“3”也不会改变。



这样规定的正整数加法，是无名数加法，它的着眼点，不在于计算的对象物是些什么东西，而只是对象物的“个数”。于是，就从具体事物的合并中抽象出来，而达到了抽象的程度。正因为无名数的加法，没有具体名数的束缚，所以“$1+2=3$”、“$1+3=4$”等等，才可以到处应用，用来计算任何具体事物。至此，我们才真正学会了加法。

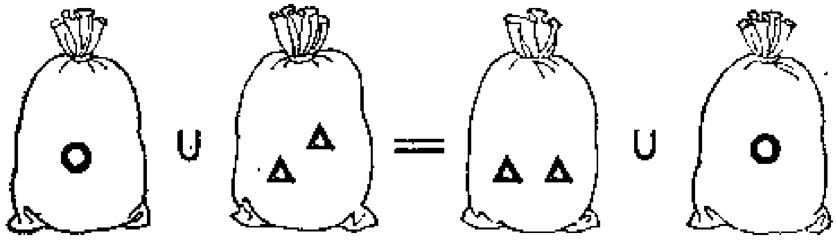
3.加法算律

根据集合并的运算律，很容易推出加法运算，满足下列运算律：

（1）加法交换律

对于任何两个正整数 n，m，都有 $n+m=m+n$。

例如，当 $n=1$，$m=2$ 时：



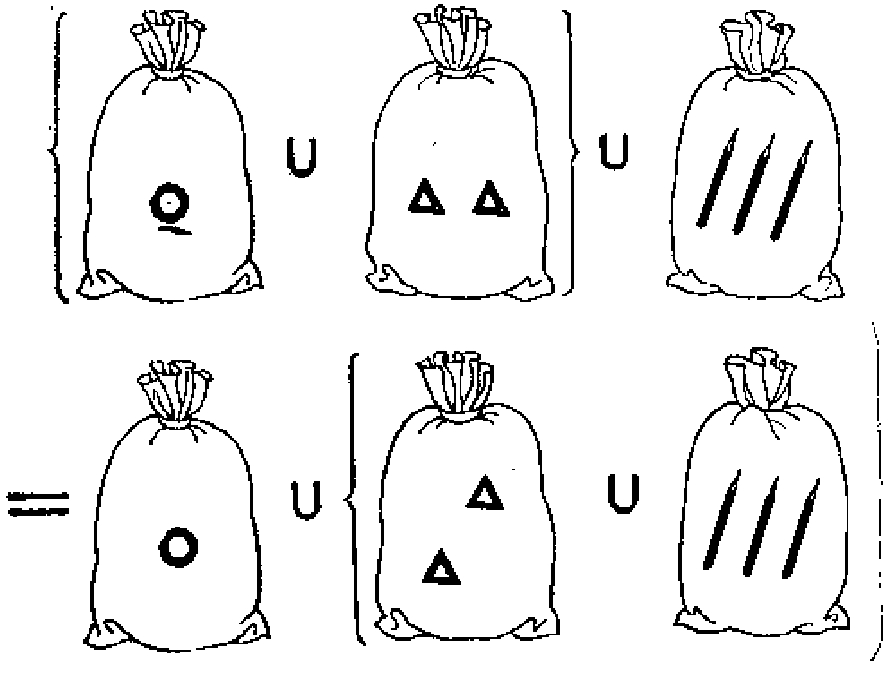
1 + 2 = 2 + 1

（2）加法结合律

对于任何三个正整数n，m，p，都有：

$$(n+m)+p=n+(m+p)$$

例如，当 $n=1$，$m=2$，$p=3$ 时：

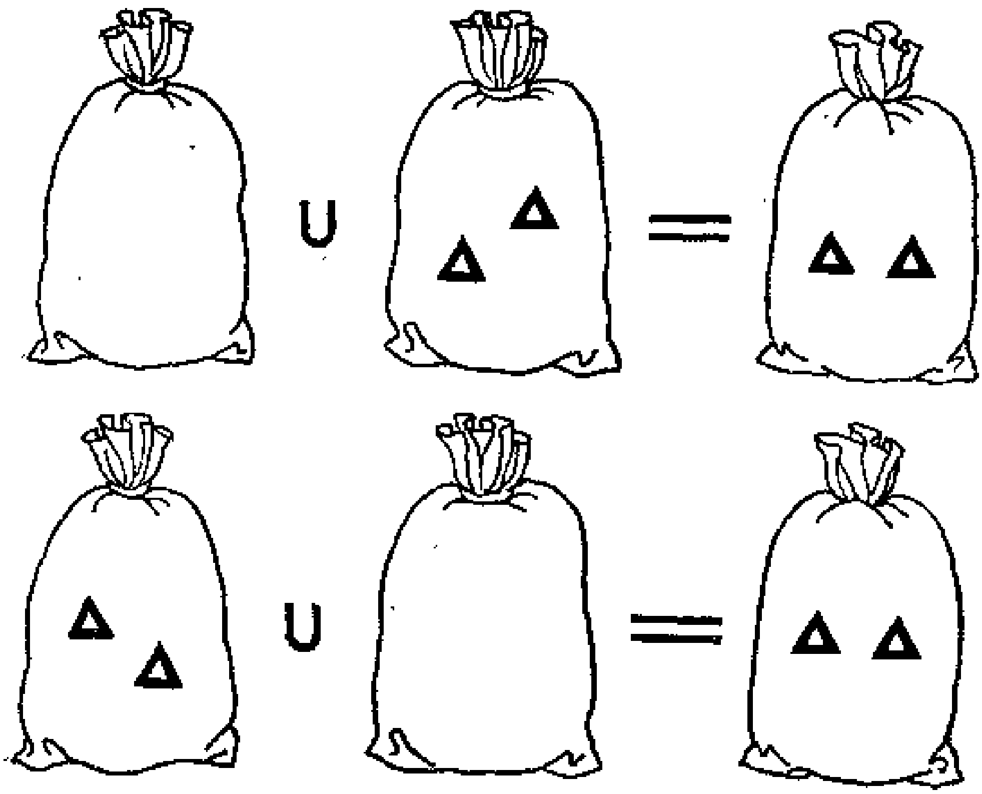


$$(1+2)+3=1+(2+3)$$

如果我们规定空集合的基数是 0，那么又可得到：

$$0+n=n+0=n$$

例如当$n=2$时：



$$0+2=2=2+0$$

4.集合的划分与倍数

若集合A可分为两个彼此不交的子集A_1，A_2($A_1\cap A_2=\phi$，$A_1\cup A_2=A$)，而A_1，A_2都与另一个集合B等价，那么，A的基数$n(A)$，就称做B的基数$n(B)$的2倍，并记作：

$$n(A)=n(B)\times 2$$

例如：设 $A=\begin{Bmatrix}000\\000\end{Bmatrix}$　　$B=\{\triangle\triangle\triangle\}$

$$\because\quad \begin{Bmatrix}000\\000\end{Bmatrix}=\{000\}\cup\{000\}$$

$A = A_1 \cup A_2$ 而 $A_1 \simeq B$, $A_2 \simeq B$

∴ 集合A的基数"6"，是集合B的基数"3"的2倍：$n(A) = n(B) \times 2$，即 $6 = 3 \times 2$

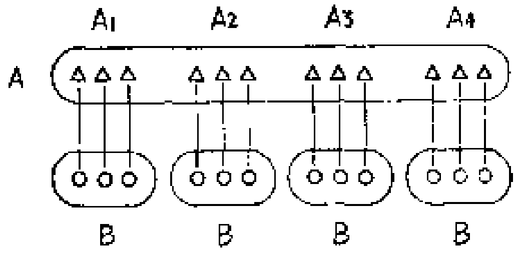
如果集合A分为k个两两不相交的子集，$A_1, A_2, \cdots\cdots A_k$之并：$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots\cdots \cup A_k$，而每一个子集都和集合$B$等价：

$$A_i \sim B(i = 1, \cdots\cdots, k)$$

那么，集合A的基数$n(A)$，就称做集合B的基数$n(B)$的k倍，并记作：$n(A) = n(B) \times k$。

注意，式中$n(A)$，$n(B)$和k，都是正整数，但它们的意义却不一样。$n(A)$和$n(B)$是集合的基数，k是倍数。

关于"倍数k"，可以这样来理解：以A中两两不相交的子集A_1，$A_2 \cdots\cdots A_k$为元素，做一集合：$\{A_1, A_2, \cdots\cdots A_k\}$（它已不再是集合$A$了！）；$k$就是该集合的基数。



如图有 $n(A) = n(B) \times 4$

若令：$M = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

则有：$n(M) = 4$

5. 乘法及其算律

现在我们来研究任意两个正整数p、q相乘的意义，并要合理地规定一个、唯一确定的正整数r，作为它们相乘的结果——积。

为简单计，以$p = 3$，$q = 2$为例来说明。

我们从"3号袋"里取出两个互相不交的集合，例如

$B_1=\{\triangle\triangle\triangle\}$　$B_2=\{0\ 0\ 0\}$，求它们的并集：$B_1\cup B_2=\left\{\begin{matrix}\triangle & \triangle & \triangle\\ 0 & 0 & 0\end{matrix}\right\}$。此并集所属“口袋”的号码——6，便规定为 3 乘以 2 的积，记为：$3\times2=6$。

这正好是倍数问题的逆问题。可以相信，这样规定的“积”，是唯一确定的。若从“3号袋”取另两个互不相交的集$C_1=\{\square\square\square\}$，$C_2=\{111\}$，则 $C_1\cup C_2=\left\{\begin{matrix}\square & \square & \square\\ 1 & 1 & 1\end{matrix}\right\}\simeq B_1\cup B_2$

故有　$n(C_1\cup C_2)=n(B_1\cup B_2)=6$

一般的从“p号袋”中取q个两两不交的集合：B_1，B_2，……B_q，其并集$B_1\cup B_2\cup\cdots\cdots\cup B_q$所在的“口袋”号码$r$，就是$p\times q$的积：$p\times q=r$。这个$r$是由$p$和$q$唯一确定的。

乘号“×”前面的p，叫被乘数；“×”后面的q叫乘数；r是积。被乘数和积，是基数；乘数是倍数。

6.乘法满足的算律

(1) 交换律：对任意两个正整数p、q，都有$p\times q=q\times p$。

下面以$p=3$，$q=2$为例加以说明：

$$\because\quad \left\{\begin{array}{c|c}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{array}\right\}=\left\{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right\}\cup\left\{\begin{matrix}0\\0\\0\end{matrix}\right\}\qquad(6=3\times2)$$

$$\|$$

$$\left\{\begin{array}{cc}0 & 0\\ \hline 0 & 0\\ \hline 0 & 0\end{array}\right\}=\{0\ 0\}\cup\{0\ 0\}\cup\{0\ 0\}\qquad(6=2\times3)$$

$$\therefore\quad 3\times2=2\times3$$

(2) 乘法对加法分配律：对任意三个正整数 p、q、r，有：$p\times(q+r)=p\times q+p\times r$。

我们只对 $p=3$，$q=2$，$r=1$ 的情况加以说明。

$$\because\quad \left\{\begin{array}{ccc}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right\}=\{000\}\cup\{000\}\cup\{000\}\text{及}2+1=3$$

$$\therefore\quad 9=3\times3=3\times(2+1)$$

$$\text{又}\because\quad \left\{\begin{array}{cc|c}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{array}\right\}=\left\{\begin{array}{cc}0&0\\0&0\\0&0\end{array}\right\}\cup\left\{\begin{array}{c}0\\0\\0\end{array}\right\}\text{及}\begin{array}{l}3\times2=6\\3\times1=3\end{array}$$

$$\therefore\quad 9=6+3=3\times2+3\times1$$

因此， $3\times(2+1)=3\times2+3\times1$

(3) 结合律：对任意三个正整数 p、q、r 可以证明：

$$(p\times q)\times r=p\times(q\times r)\cdots\cdots(*)$$

我们用数学归纳法来证明：

(i) 当 $r=1$ 时，左边 $=(p\times q)\times1=p\times q$

右边 $=p\times(q\times1)=p\times q$

$\therefore$ 左边 = 右边，因此等式($*$)成立。

(ii) 假设等式($*$)，当 $r=k$ 时成立，即：

$$(p\times q)\times k=p\times(q\times k)$$

我们来证明($*$)当 $r=(k+1)$ 时也成立。事实上就有：

$$\begin{aligned}&(p\times q)\times(k+1)\\&=(p\times q)\times k+(p\times q)\times1 &&\text{(分配律)}\\&=p\times(q\times k)+p\times(q\times1) &&\text{(归纳假设)}\\&=p\times[(p\times k)+(q\times1)] &&\text{(分配律)}\\&=p\times[q\times(k+1)] &&\text{(分配律)}\end{aligned}$$

即 ($*$)对 $r=(k+1)$ 也成立。

故由数学归纳法得知，（*）式对任何正整数 p、q、r，都成立。

以上所说正整数的加法和乘法，是在集合基数的意义上建立起来的。这正是通常人们所理解的加法和乘法的原意。

第六章　零头和零头数

1. "零头"量的产生

一个具体的集合，从数学观点来看，不仅有数的方面的表现——元素个数(基数)，还有量的方面的种种表现。

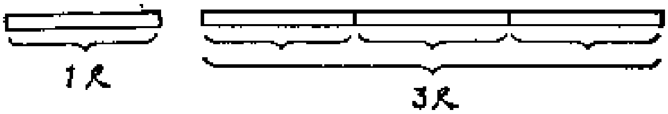
例如，一根细棒，作为点的集合，可以考虑它的基数，但有时需要量出它的长度。一块矿石，可以考虑它的分子数，也常常要称出它的重量。一块平面区域，可以研究它上面点的个数，更多的时候则是要测量出它的面积。一杯水，人们对于它的体积，通常比对它的水分子数更有兴趣。

这里所说的长度、重量、面积、体积，都是物体(某个具体的集合)在量的方面的不同表现。数(shù)，是数(shǔ)的结果。而量(Liang)，是数不出来的；量(Liang)，是量(Liang)的结果。所谓量(Liang)，就是测量。测量的结果，再用数表示出来。

量棒的长度，称矿石的重量，测量物体的面积和体积，这些都是对量的测量(或度量)。虽然它们具体的测量方法不一样，但在原则上有相同之处：都是用一个同类的标准量，来和被测的量进行比较。下面以测量长度为例，来说明一下。

要测量一根细棒的长度，我们首先要选定一根细棒——尺，作为标准长度。然后将尺放在被测的细棒上，看看细棒有几个尺长。如果恰好有三个尺那么长，我们就说：这根棒

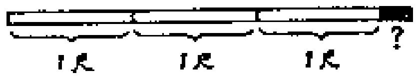
有3尺长，或说这根棒的长度是3尺。



如果细棒恰好有四个尺那么长，就说这根细棒有4尺长。

这两次测量的结果，用正整数(个数)3和4表示出来了。这里的3和4，就是前面所说的倍数。它们是以尺那么长的、彼此不重叠的小段棒为元素的集合(整根棒)基数。

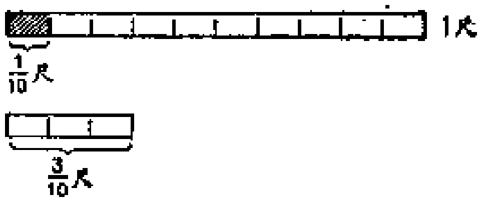
但是，事情往往不是那么凑巧。例如，一根棒比三个尺要长出一个"零头"，但这个零头，又不足一个尺长。显然，这时用3或4，已不再能表示出棒的长度了。那么如何来表示这根棒的长度呢？问题在于要知道这"零头"有多长。



因此，必须寻找测量这些"零头"的新方法，和表示测量结果的新数。于是，分数就应运而生了。

2.表示零头的数

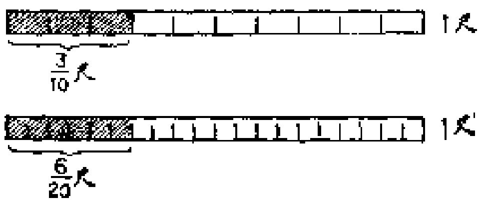
不足1尺的棒，要测量它的长度，最方便的办法是，将尺划分为较小的单位，比如分为10等分，然后再用其中的1分长做为标准，去和棒比较。



这个小单位的长度，是1尺分成10等分中的1分，简称为十分之一尺，或写成$\frac{1}{10}$尺。

若用小单位——$\frac{1}{10}$尺，量棒三次恰好量完，那么棒长便是三个$\frac{1}{10}$尺，或$\frac{1}{10}$尺的3倍，简称为1尺的$\frac{3}{10}$倍，记为$\frac{3}{10}$尺。

上例中，若把一尺分为20等分，用$\frac{1}{20}$尺去量，量得的结果，是1尺的$\frac{6}{20}$倍。人们凭长期实践经验知道，$\frac{3}{10}$倍与$\frac{6}{20}$倍是相等(同倍)的量。



一般有：$\frac{3}{10}$倍与$\frac{3\times k}{10\times k}$倍是同倍量。这个结论，不仅适用于测量长度，而且对于称重量和测量面积，也同样适用。

但是，到此为止，所得到的$\frac{3}{10}$倍，只是一个具体的量——某测量单位(例如尺)的$\frac{3}{10}$倍的量(长度)，它还不是分数。

下面来作进一步抽象。

我们把所有和"$\frac{3}{10}$倍量"等倍的量，归成一类——等倍量集合：

$$\left\{\frac{3}{10}倍，\frac{6}{20}倍\cdots\cdots\frac{3\times k}{10\times k}倍\cdots\cdots\right\}$$

其中每一个元素在量方面都是等倍的。我们把这些等倍量，在量方面的共同特征，用一个符号——"$\frac{3}{10}$"来记，这

个$\frac{3}{10}$就叫做分数。

每一个等倍量集，对应一个分数；不同的等倍量集，对应不同的分数。

$$\left\{\frac{3}{10}\text{倍},\ \frac{6}{20}\text{倍},\ \cdots\cdots,\ \frac{3\times k}{10\times k}\text{倍}\cdots\cdots\right\}\longrightarrow\frac{3}{10},$$

$$\left\{\frac{2}{3}\text{倍},\ \frac{4}{6}\text{倍},\ \cdots\cdots\frac{2\times k}{3\times k}\text{倍}\cdots\cdots\right\}\longrightarrow\frac{2}{3}\cdots\cdots$$

分数$\frac{q}{p}$(p、q都是正整数)中的p叫作分母，它表示原单位被分成的等分的分数，每一等分即为原单位的$\frac{1}{p}$倍。q叫做分子，它表示被测对象含有$\frac{1}{p}$倍量的个数。

又因为与“$\frac{4}{6}$倍”等倍的等倍量集，与“$\frac{2}{3}$倍”所在的等倍量集相同，故分数$\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$，一般有：$\frac{q\times k}{p\times k}=\frac{q}{p}$，即分数分子和分母可以“约分”。

如果说基数(正整数)是等价集类在数的方面特征的抽象；那么分数，就是等倍量集在量方面的特征的抽象。

3.给分数规定加法和乘法

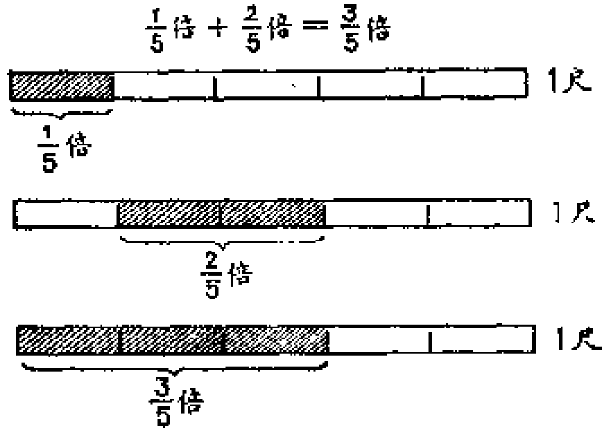
分数的加法。可以仿照规定正整数加法的办法去做，先看分母相同的分数，例如：$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}$。

首先找出这两个分数所对应的等倍集类：

$$\left\{\frac{1}{5}\text{倍},\ \frac{2}{10}\text{倍},\ \cdots\cdots\right\} \longrightarrow \frac{1}{5}$$

$$\left\{\frac{2}{5}\text{倍},\ \frac{4}{10}\text{倍},\ \cdots\cdots\right\} \longrightarrow \frac{2}{5}$$

然后来规定$\frac{1}{5}$与$\frac{2}{5}$相加的和：从$\frac{1}{5}$对应的等倍集中取出一个量，例如“$\frac{1}{5}$倍”；从$\frac{2}{5}$对应的等倍集中取出一个量，例如“$\frac{2}{5}$倍”，把这两个具体的量加起来。因为这是两个具体的量(集合)，我们会加(并)，结果是：$\frac{3}{5}$倍。



我们就把“$\frac{3}{5}$倍”所在等倍集对应的分数——$\frac{3}{5}$，规定为$\frac{1}{5}$与$\frac{2}{5}$的和，并记为：$\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$。

于是得到分数加法的一条规则：同分母的分数相加，所得的分数，分母不变，分子为原二分数分子的和。

如果两个分数的分母不同，那么可以化为同分母的分数，再相加。

例如，求 $\frac{1}{3}+\frac{1}{2}$的和。

$$\frac{1}{3}:\ \left\{\frac{1}{3}\text{倍},\ \boxed{\frac{2}{6}\text{倍}},\ \cdots\cdots\right\}$$

$\frac{1}{2}$：$\left\{\frac{1}{2}倍，\frac{2}{4}倍，\boxed{\frac{3}{6}倍}，\cdots\cdots\right\}$

从$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$各自所属的等倍集里，选出具有相同分母的倍量做代表来相加，故有：

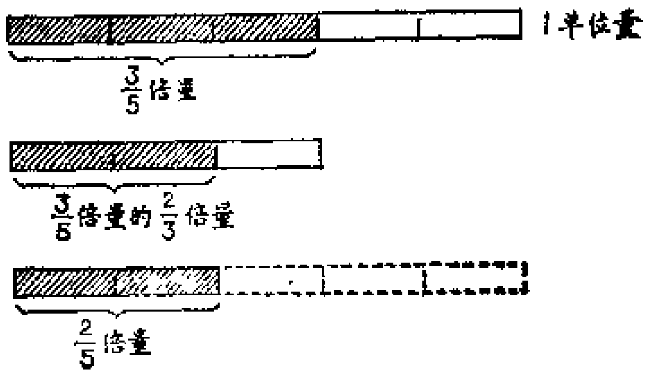
$$\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$$

因为具体量集合的相加(并)，是可以交换、可以结合的，因此，分数加法也是可以交换、可以结合的。

分数乘法。先看一种特殊情况：$\frac{q}{p}\times\frac{r}{q}$，即第二个分数的分母等于第一个分数的分子。

按正整数乘法的意义，$\frac{q}{p}\times\frac{r}{q}$可以这样来规定它们的积：分数$\frac{q}{p}$所对应的等倍集中的、一个具体量的$\frac{r}{q}$倍量所在的等倍所集对应的分数，就是$\frac{q}{p}\times\frac{r}{q}$的积。

例如：$\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}$的积应理解为一个单位量的$\frac{3}{5}$倍量的$\frac{2}{3}$倍——$\frac{2}{5}$倍量所在的等倍集，所对应的分数$\frac{2}{5}$。



因此，$\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$。同理有：$\frac{q}{p}\times\frac{r}{q}=\frac{r}{p}$。

于是得到分数乘法的一个规则：两个分数相乘，如果第一个分数(被乘数)的分子，等于第二个分数的(乘数)分母，那么所得积是一个分数，它以被乘数的分母为分母，以乘数的分子为分子。

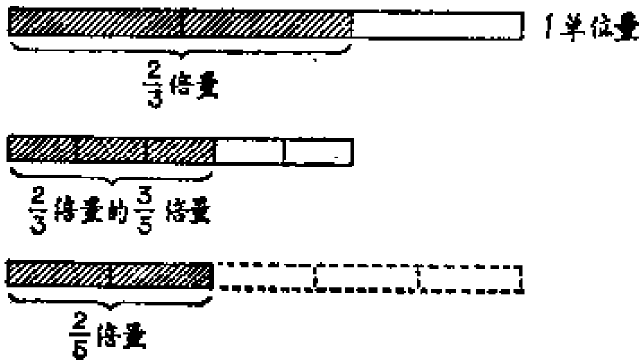
一般情况下，分数的乘法，可以先化为上述的特殊情况。

$$\text{由}\quad \frac{q}{p}:\ \left\{\frac{q}{p}\text{倍},\ \frac{q\times 2}{p\times 2}\text{倍},\ \cdots\cdots \boxed{\frac{q\times m}{p\times m}\text{倍}}\cdots\cdots\right\}$$

$$\frac{n}{m}:\ \left\{\frac{n}{m}\text{倍},\ \frac{n\times 2}{m\times 2}\text{倍},\ \cdots\cdots \boxed{\frac{n\times q}{m\times q}\text{倍}}\cdots\cdots\right\}$$

$$\text{知}\quad \frac{q}{p}\times\frac{n}{m}=\frac{q\times m}{p\times m}\times\frac{n\times q}{m\times q}=\frac{\boxed{q\times m}}{p\times m}\times\frac{q\times n}{\boxed{q\times m}}$$

$$=\frac{q\times n}{p\times m}$$



这样便得到分数乘法的一般法则：两个分数相乘，分子相乘，分母相乘。

分数乘法满足的运算律：

(1) 分数的乘法是可换的。

例如，由图可得：

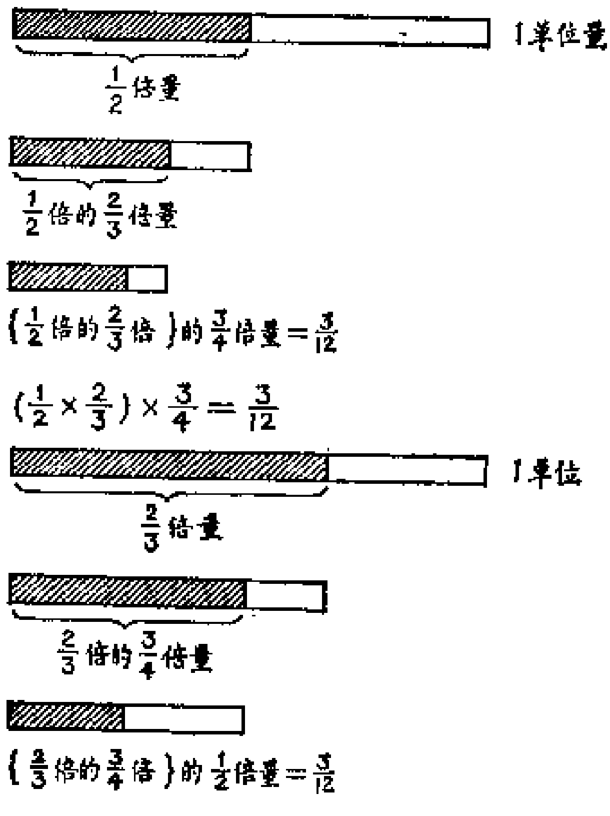
$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}=\frac{2}{5}$$

和前面“$\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{5}$”联系起来，故有：

$$\frac{3}{5}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\times\frac{3}{5}$$

（2）分数的乘法是可以结合的。

以图解$\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}$，$\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)$为例来说明。



但 $\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{2}$ （交换律）

$\therefore$ $\left(\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\right)\times\frac{3}{4}=\frac{1}{2}\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\right)$

(3) 分数的乘法对加法可以分配。

即对于任意三个分数$\frac{q}{p}$，$\frac{n_1}{m_1}$，$\frac{n_2}{m_2}$有：

$$\frac{q}{p}\times\left(\frac{n_1}{m_1}+\frac{n_2}{m_2}\right)=\frac{q}{p}\times\frac{n_1}{m_1}+\frac{q}{p}\times\frac{n_2}{m_2}$$

事实上，左边$=\frac{q}{p}\times\left(\frac{n_1\times m_2}{m_1\times m_2}+\frac{n_2\times m_1}{m_2\times m_1}\right)$

$$=\frac{q}{p}\times\left(\frac{n_1\times m_2+n_2\times m_1}{m_1\times m_2}\right)\quad\text{(加法规则)}$$

$$=\frac{q\times(n_1\times m_2+n_2\times m_1)}{p\times(m_1\times m_2)}\quad\text{(乘法规则)}$$

$$=\frac{q\times(n_1\times m_2)+q\times(n_2\times m_1)}{p\times(m_1\times m_2)}\quad\text{(正整数乘法分配律)}$$

右边$=\frac{q\times n_1}{p\times m_1}+\frac{q\times n_2}{p\times m_2}$

$$=\frac{(q\times n_1)\times m_2}{(p\times m_1)\times m_2}+\frac{(q\times n_2)\times m_1}{(p\times m_2)\times m_1}\quad\text{(约分规则)}$$

$$=\frac{q\times(n_1\times m_2)}{p\times(m_1\times m_2)}+\frac{q\times(n_2\times m_1)}{p\times(m_2\times m_1)}\quad\text{(正整数乘法结合律)}$$

$$=\frac{q\times(n_1\times m_2)}{p\times(m_1\times m_2)}+\frac{q\times(n_2\times m_1)}{p\times(m_1\times m_2)}\quad\text{(正整数乘法交换律)}$$

$$=\frac{q\times(n_1\times m_2)+q\times(n_2\times m_1)}{p\times(m_1\times m_2)}\quad\text{(分数加法规则)}$$

∴ 左边=右边，

注意：以上等式的每一步，都是根据已经知道的规定行事，而不是妄加猜测的。

4.新、老数的混合

细心的读者可能会发现，直到现在，正整数，如1，2，3 等，与分数，如$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{3}$等，它们的来源和意义是不一样的。它们有各自的加法和乘法，而各自的意义也不尽相同。那么如何将它们统一起来呢？如何进行正整数和分数的混合运算呢？例如 2 与$\frac{1}{2}$能不能相加？如果可以相加，和又是什么呢？

我们回忆一下，分数$\frac{q}{p}$表示什么意思？它是这样一个量的数学抽象：把单位量分成 p 等分，再把 q 个等分$\left(\frac{1}{p}\text{倍量}\right)$聚集起来所得到的量。特别地令$p=1$，即把单位量分为 1 分（即单位是本身），再聚集 q 个等分——即 q 个单位量——所得到的量，它对应的“分数”应该就是$\frac{q}{1}$。

而同时，把 q 个单位量合起来所得到的量，恰好包含 q 个单位量；若以一个单位量为元素，它作为一个集合，基数就是 q。

可见，$\frac{q}{1}$所对应的量，和 q 所对应的量，是完全相等的。所以，可以把正整数 q，理解为一个分数——$\frac{q}{1}$。于是，正整数和分数的混合运算就可以进行了。例如：

$$2+\frac{1}{2}=\frac{2}{1}+\frac{1}{2}=\frac{4}{2}+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}$$

$$2\times\frac{1}{3}=\frac{2}{1}\times\frac{1}{3}=\frac{2\times1}{1\times3}=\frac{2}{3}$$

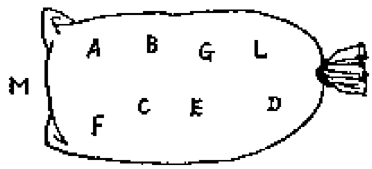
这样一来，就把正整数"溶化"到扩大了的新的数系——正分数集合里去了。而原有的加法、乘法及其运算律，都还继续保持着。由于实际需要，产生新数，把原有数系"溶化"进去，成为扩大了的、统一的新系，而保持原有数系的运算和主要算律不变。这就是人们不断扩大数系的一般法则。

第七章　“0”不该比“5”大吗？

1. 顺序是什么？

前面所讲过的集合，它的每个元素好象是集合“口袋”里的一个“东西”。元素之间并没有什么“大小”之分，大家都一律平等，没有哪个闹特殊化。

例如，集合M表示由艾华、包一平、陈红、戴芳、方明、甘小泉、洪枫和刘兴等八个同学组成的第一小组。现分别用字母：A、B、C、D、E、F、G、L 来代表每个人，那么集合M就好象是装了八个字母的口袋。这八个字母是没有次序和大小之分的。我们没有理由认为“A比B大”，或者是“C在G之前”。



然而，若将这八个同学按某种规定——例如按个子高矮排成一队：{A、B、C、D、F、G、E、L}，那么就在这个集合所有元素之间，确定了一种先后顺序。使每两个元素有了“前”、“后”之分：A在B之前，C在G之前，等等。

如果按另一种规定——期中考试成绩来排队，成绩好的排在前面，差的排在后面，那么又得到另一种排队次序：{G、D、C、L、A、F、B、E}。到了学期结束，再按成绩好坏来排队，又可能变成了：{D、G、A、C、F、B、E、L}，

如此等等。

从这个例子中，我们可以看出：

第一，在处理实际问题中，考虑集合中元素间的次序关系，是有意义的。

第二，同一个集合，可以规定出元素间的几种不同的次序关系。

第三，所谓在集合中规定了一个次序关系，或者说顺序，就是对于集合的任两个元素，都指定了哪个“在前”。若A在B之前，B在C之前，那么A一定在C之前。

由此，可以得到关于顺序的一般概念。

集合A中的一个顺序(用符号“$<$”来表示)，是指在A的元素间建立的这样一种关系：

(1) 对于A中任意两个不同的元素a、b，要么a与b有这样的关系($a<b$)，要么b与a有这样的关系($b<a$)，二者必居其一。

(2) 对于A的任意三个元素a、b、c，若：$a<b$，$b<c$，则$a<c$。即关系“$<$”有传递性。

(3) 如果a不在b之前（记为$a\nless b$），b又不在a之前($b\nless a$)，则$a=b$。

由(1)知，集合的顺序关系是不对称的，即$a<b$与$b<a$不能同时成立。所以顺序关系不是一个等价关系。

“$a<b$”，读作“a在b之前”，或说“a小于b”，也可以说“b在a之后”，或说“b大于a”。所以说，一个集合的元素之间的“大小”，都是相对于某种“顺序”来说的。

例如，两个数码5和1，哪个大？可能有人说，这还用问吗？当然是“$5>1$”。我说这不一定，要看对哪一种顺序关

系来说。

如果是对普通自然数的“自然顺序”来说，当然这是对的。要是以这些数码，表示教师的级别，那么，按级别高低的顺序，就应该有“1>5”。假若以“0”表示特级教师的级别，那么还应该有：“0>5”。

你看多奇怪呀！其实，这些已是人们的常识，只不过你没有用集合论的眼光去注意罢了。

2. 序集种种

一个集合，若规定了一个顺序关系，就称为有序集（或序集）。在一个有序集中，它的任两个元素都有大、小之分。

当说到一个序集时，同时也就指定了其元素的顺序。序集{A、B、C、D、E、F、G、L}与序集{G、D、C、L、A、F、B、E}是不同的，因为它们的元素虽然相同，但其顺序不同。

给一个集合规定一个顺序关系，使之成为有序集，这个过程称为“整序”。

一个有限集，总可以通过“数数”，将它的元素一个一个地从“口袋”里取出来，依次排成一个“单行队”。最后一个元素，排在“队伍”的末尾。因此，有限集总可以通过“整序”，使之成为有序集。

下面是几个无限有序集的例子：

(1) {1，2，3，……}；

(2) {……，3，2，1}；

(3) {1，3，5，……，2，4，6……}；

(4) {1，3，5，……，6，4，2}；

(5) $\{\cdots\cdots, 5, 3, 1, 2, 4, 6\cdots\cdots\}$;

(6) $\{\cdots\cdots, 5, 3, 1, \cdots\cdots 6, 4, 2\}$;

(7) 有理数集 Q，按在数轴上排列的顺序；

(8) 有理数集 Q，按第四章第5节所画的回转图线行进次序排列：$\{0, 1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -1, -2, -\frac{2}{3}, -\frac{2}{5}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{2}{3}, 2\cdots\cdots\}$

这八个有序集虽然都是可数集(参看第四章)，但它们元素的顺序关系却大不一样。为了刻画它们顺序的各自特点，我们先说明以下几个名词。

最先元(首元)：序集的一个元素，如果没有任何元素在它之前，就叫做最先元或首元。如序集(1)中的“1”。

最后元(尾元)：序集的一个元素，如果除它以外，所有元素都在它之前，就叫做最后元或尾元。如序集(2)中的“1”。

相邻元：序集中的两个元素 a 和 b。若不存在元素 c 满足 $a<c<b$ 或 $b<c<a$，则称 a 和 b 是相邻元。如序集(1)中的1和2。

紧跟元(“随从”)：如果 a 与 b 是相邻元，且 $a<b$，则称 b 是 a 的紧跟元或“随从”。如序集(1)中，2是1的随从，3又是2的随从。

良序集：一个序集，如果具有这样“良好”的性质：它的任何不空的子集都有首元，就叫做良序集。

于是我们可以看出：

序集(2)，只有尾元1，而无首元。

序集(3)，有首元1，而无尾元。每个元都有一个随从。1和2不是任何元的随从，而其他元都是某一元的随从。

序集(4)，既有首元1，又有尾元2。

序集(5)，既无首元，又无尾元。

序集(6)，无首元，而有尾元2。但它与序集(2)又不一样：除尾元外，(2)每个元素都有一个随从，而(6)中的1却没有随从。

序集(7)，既无首元，也无尾元。但它与(5)又不一样：(5)中有相邻元素，如3和1相邻。(7)则没有相邻元素，因为数轴上任何两个有理数a，b之间，总还存在有别的有理数。

序集(8)有首元1，而无尾元；存在相邻元素。

可见对无限序集来说，顺序的类型是很复杂的。

3. 序集的“楷模”

上面列举的八个序集，从(2)到(8)的特点都作了介绍，唯独没有提到(1)，是不是一种疏忽呢？不是。因为序集(1)特别重要，我们要作更详细的介绍，故放在最后来讲。

序集(1)称为自然数集，它有以下几个特点：

(i) 有一个首元1；

(ii) 每个元素都有一个随从；

(iii) 1不是任何元素的随从，除1以外，每个元素都是某一元素的随从；

(iv) 是良序集。

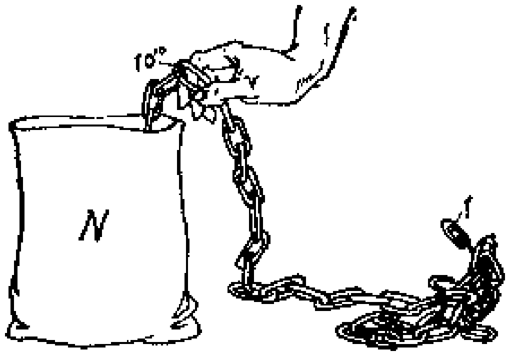
前三条都比较明显。第四条不很明显，但却很重要。关于它，有的书还有另外的表述(称“归纳公理”)，这里不细讲了。

反过来，一个集合M，若符合以上四个条件，实际上就

是自然数集。

例如：集合{1，2，3，……}，{一，二，三，……}，{Ⅰ、Ⅱ、Ⅲ，…}，都是自然数集。它们只不过是“服装”不同而已，实质却一样。

如果从直观上来形容，自然数就好象是一整条有头无尾的锁链。每一个自然数，都是这个锁链上的一环。它一环套一环，无限延伸，而没有任何单个的“环”掉队。



从自然数集的口袋里，假如我们抓住首元1，把这条链条往外拉，那么不论哪个自然数，例如10^{10}，我们相信，它一定会在某个时候被拉出口袋，——因为在它之前，只有有限个元素。

但这一点，对前面所列的几个无限序集(除去(1)、(8)外)来说，都办不到！

例如，{1，3，5……，2，4，6……}它虽然也有首元1，但从1开始，把链条往集合口袋外拉，随便怎么拉，“2”拉不出来。为什么？因为在2之前，有无限多个元素！实际上，这个序集并不象自然数集那样是一整条链条，而好象是在中间断成了两截。

正因为自然数集有这些好的性质，所以它被当作是序集的标准。我们可以用自然数来给各种东西标号：书的页码；门牌号码；年、月、日；电影院座位号码等等。我们在日常生活中，没有一天不提到它。

4．序　　数

设A是一个有限集合，要知道里面元素个数，可以通过“数数”。所谓“数数”，就是每拿一个元素，说一个数：“一、二、三，……”直到拿出最后一个元素g，说出“n”为止。

A	a， b， …， g。
$\|1，n\|$	1， 2， …， n。

通过“数数”，就在集合A与自然数片段$|1，n|$之间建立了一一对应关系，并且把A“整理”成了有序集：

$$A=\{a，b，\cdots，g\}$$

但是我们应该注意，在“数数”过程中出现的数码“一”、“二”，实际是“第一”、“第二”的意思。它们表示数到的元素a、b在序集中的顺序号码(序号)。它们在这里是序数，而不是基数了。

这就是说，每一个自然数n，既可以看作是基数，又可看作是序数，一身二任。在有些场合，它表示基数；而在另一些场合，它表示序数；有的场合，一个自然数可以同时具有基数和序数两种意义。

例如，《无穷无尽的数》这本书，封二上印着的“120,000字”，中间页码上印的“52”，末页印的“178”，这三个数码的意义就不一样。

第一个数“120,000”，表示这本书的总字数。它是集合{《无穷无尽的数》中字}的基数；它没有顺序的意思。

第二个数“52”，表示这一页是书的“第五十二”页。

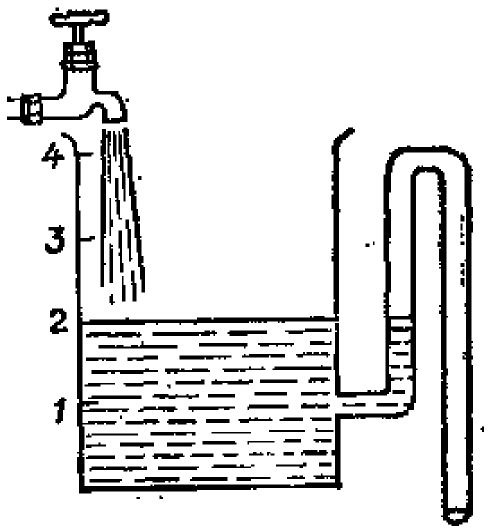
它是序数，而没有基数的意思。

第三个数“178”，既表示这最后一页是书的“第一百七十八”页，又表示这本书的总页数。故它既是这末页的序数，又是集合{《无穷无尽的数》页}的基数，同时兼有两种职能。

第八章　结合器和对称群

1．2＋2＝？

这个问题，也许有人认为提得奇怪。“2＋2”不等于“4”，还能等于什么别的东西吗？



那可不一定。请你先看一看右边的图画：

这是装有虹吸管的储水池。池壁上刻有四个刻度：1，2，3，4。

如果水池里已经装有两格水，再加上两格水，是不是有四格水呢？用数字来表示的话，即“2＋2”等于“4”吗？回答却是否定的。因为水面一升高到第四格的位置，虹吸管就接通了，水便从管口流出，直到使水面下降到第一格时才停止。因此，这里的算术就变成了：

$$\left.\begin{array}{l}2+2=1\\0+2=2\\1+1=2\\2+1=3\\3+1=1\\3+2=1\\3+3=1\end{array}\right\}(*)$$

这是怎么一回事呢？这样一来，数的加法不就没有确定性了吗？不，具体问题要具体对待。

其实这里奇怪的加法，并不是因为数的加法法则改变了，而是因为这里的“数码”1、2、3、4，以及它们的“加法”，已经不是正整数和数的加法，而另有新义了。

这里的“数码”，是指如图所绘的特种水池上的刻度。这里的“加法”，是指这种水池中水深刻度的相加。

二者意义不同，所以“运算”的方法和结果，当然不相同了。

照说，前面算式中的“+”号，应该换一个符号，比如“$\oplus$”，以示与数的加法有区别。

我们把水面可达到的深度0、1、2、3(4达不到)，组成一个集合：$M=\{0,1,2,3\}$。那么在“加法”——$\oplus$的意义上，其中每两个元素——特殊意义的“数码”——相“加”，都得到一个确定的结果——M中某一个“数码”。由于M中元素不多，我们可以把每两个“数码”相“加”的结果，全部写出来。除(＊)式已写出的以外，其余补写如下：

$$\left.\begin{array}{l}0+0=0\\0+1=1\\0+3=3\end{array}\right\}(**)$$

按说，从四个元素中每次取两个元素相“加”，应该还有十个不同的式子，例如“1+0=1”等。但因为这种“加”法，显然是“可换”的，即：1+0=0+1，1+2=2+1，1+3=3+1，所以，由(*)和(**)式，就把这种“加法”完全表示出来了。当然，这里的“+”号只是借用，其实应该写成“⊕”。

为简便起见，我们可以用表的形式，把这种“加法”表示如下：

⊕	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	1
2	2	3	1	1
3	3	1	1	1

在这个表中，“⊕”号前的元素列在竖线的左边，“⊕”号后的元素排在横线的上面，两个元素相“加”以后所得的元素，在它们所在行、列的交叉处。

例如“2⊕3”所得的结果，是表中第三行、第四列的交叉处的元素“1”。即：2⊕3=1。

这个表，叫做加法“⊕”的二元结合表。“⊕”好象是一个二元“结合器”。M中每两个元素，通过“⊕”结合以后，就得出M中的另一个元素。

2. 什么是运算？

我们学过的数的加、减、乘、除，统称为数的运算。现在要问一问：“运算”究竟是什么？我们说，数的运算，从本质上说，也是“二元结合”。数的加法“+”和乘法“×”，

不过是数的二元“结合器”。同样，可以用表的形式，给出它们的运算法则。例如，下面作出的是“十以内正整数加法”表。

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
3	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
4	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
5	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
6	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
7	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
8	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
9	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

（十以内正整数加法表）

这张表，实际上就是一张数的“二元结合”表。

但是“二元结合”，把数的运算的意义大大推广了。

第一、“二元结合”不限于数，对一般集合的元素都可以进行。

第二、“二元结合”不一定要满足数的加法、乘法的运算律。

事实上，前面所列举的“二元结合”“$\oplus$”，它就不满足结合律。

例如：$(2\oplus 2)\oplus 1=1\oplus 1=2$

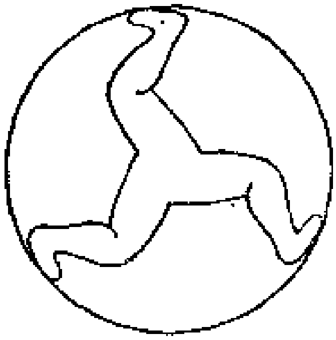
但， $2\oplus(2\oplus 1)=2\oplus 3=1$

故， $(2\oplus 2)\oplus 1\neq 2\oplus(2\oplus 1)$

因此，“二元结合”可以说是一种广义的“运算”。

下面我们再举一个非数集合的运算的例子。

例：图中画的是爱尔兰萌岛的岛徽——一个三条“跑腿”的图案。



它是一个关于圆心旋转对称的图案。很明显，旋转120°或240°，所得到的图形一定与原形重合。现在我们以I、u、v代表三个运动：

u——旋转120°的运动；

v——旋转240°的运动；

I——旋转360°(等于没有动)的运动

令 $G=\{I、u, v\}$。

现在在G中规定一个叫做“乘法”——“$\circ$”的运算如下：两个运动相“乘”的结果，就是连续进行这两个运动(旋转)的结果。例如，旋转120°以后，再旋转120°，就相当于旋转240°，所以有：$u\circ u=v$。

旋转240°以后，再进行120°旋转，结果旋转360°，等于没有动，所以有：$v\circ u=I$。

于是运算“$\circ$”的法则，就可以用下表给出：

$\circ$	I	v	u
I	I	u	v
u	u	v	I
v	v	I	u

下面证明，这个运算满足交换律和结合律。

我们把表中间的九个元素写成一个方阵的形式：

$$\begin{pmatrix} I & u & v \\ u & v & I \\ v & I & u \end{pmatrix}$$

方阵中“$I\cdots\cdots v\cdots\cdots u$”称为“主对角线”。容易看出：这条主对角线两边，在对称位置上的元素都相等。就是说，这个方阵关于主对角线是“对称”的。由此，可以判定这个运算是可交换的。

关于满足结合律，我们需要对所有情况都要加以验证，才能确认。

例如：　$(I\circ u)\circ v=u\circ v=I$

　　而　$I\circ(u\circ v)=I\circ I=I$

　　$\therefore$　$(I\circ u)\circ v=I\circ(u\circ v)$

3.单位元和逆元

在某些运算里，往往有一个特殊的元素，它与任何别的元素结合，都变成了这个被结合的元素。

例如在数的加法中，扮演这个角色的是0，对任何一个数a，都有：$a+0=0+a=a$。

在数的乘法中，扮演这个角色的是1。因为，对任何一个数b，都有：$1\times b=b\times 1=b$。

在前述$G=\{I,u,v\}$的“乘法”运算中，扮演这个角色的是I。(从结合表上即可看出)

一般说设“$\circ$”是集合G中一个运算，如果存在一个元素e，它对G中任一元素a，都满足：$e\circ a=a\circ e=a$，那么，

这个特殊的元素，就叫这个运算的单位元。

若“$\circ$”是集合G上的运算，e是单位元，a是G的一个元素。如果存在一个元素$a^{-1}\in G$，使得：$a\circ a^{-1}=a^{-1}\circ a=e$，那么$a^{-1}$就叫做$a$的逆元。

例如，整数的加法，单位元是0，n的逆元(也称负元)是它的相反数$(-n)$，因为：

$$n+(-n)=(-n)+n=0$$

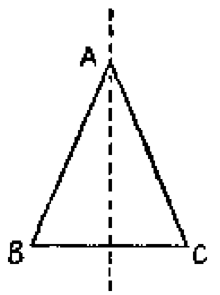
对于非零的有理数集Q_1的乘法，1是单位元，a的逆元是它的倒数：$a^{-1}=\dfrac{1}{a}$，因为：

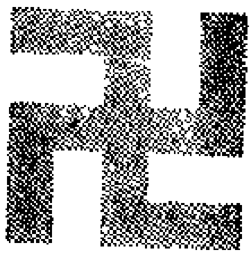
$$a\times a^{-1}=a\times\left(\frac{1}{a}\right)=\left(\frac{1}{a}\right)\times a=1$$

对$\{I,u,v\}$规定的“乘法”来说，I是单位元，且每个元素都有逆元：$I^{-1}=I$；$u^{-1}=v$，$v^{-1}=u$。

4.对称和群的概念

自然界中有许多东西是对称的。轴对称、面对称——镜象对称(或称双侧对称)；旋转对称——如荫岛的岛徽和卐。





对称的本质在于：通过某种运动，可以使图形回到原来的样子。当然，我们假定：在运动中不改变图形本身的形状。

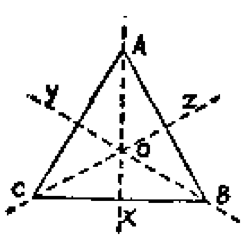
亦即我们所做的运动是刚体运动。刚体运动的基本形式有三种：平移、翻转和旋转。

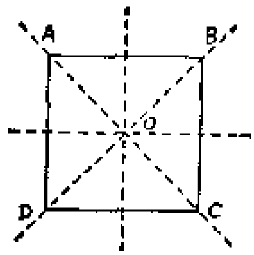
我们特别把原地不动也称作一个对称运动，叫做恒定运动。前面三条跑腿图案旋转中的I，就是一个恒定运动。

一个等腰三角形(三边不等)，只有两个对称运动：关于对称轴 X 的翻转 w 以及恒定运动I。

一个等边三角形，有六个对称运动：关于三个对称轴X、Y、Z的三个翻转x,y,z，以及三个旋转(120°、240°和恒定)u,v,I。

“卐”图案，有四个对称运动：旋转90°、180°、270°，和恒定(或360°)。





正方形，有八个对称运动，即四个对称轴的翻转，以及四个旋转。

如前面对跑腿图案做过的一样，我们把等腰三角形的对称运动w、I，组成一个集合：$\{I,w\}$。用连续进行两次对称运动，来定义对称运动的乘法：

$\circ$	I	w
I	I	w
w	w	I

这个乘法的意义是明显的。例如“$w\circ w=I$”，就是指：关于对称转轴翻转两次，等于没有动。

其中I是运算的单位元，I的逆元是自身，w的逆元也是自身——即每个元都有逆元。而且这个乘法满足结合律。

若把等边三角形的六个对称运动组成一个集合：$\{I, u, v, x, y, z\}$，那么也可类似地定义一个“乘法”：

$\circ$	I	u	v	x	y	z
I	I	u	v	x	y	z
u	u	v	I	z	x	y
v	v	I	u	y	z	x
x	x	y	z	I	u	v
y	y	z	x	v	I	u
z	z	x	y	u	v	I

例如：$u \circ x$——先关于X轴翻转，再旋转240°，结果就相当于一个关于Z轴的翻转。

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ C & & B \end{array} \xrightarrow{x} \begin{array}{ccc} & A & \\ B & & C \end{array} \xrightarrow{u} \begin{array}{ccc} & B & \\ C & & A \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} & A & \\ C & & B \end{array} \xrightarrow{z} \begin{array}{ccc} & B & \\ C & & A \end{array} \qquad \therefore \quad u \circ x = z$$

这个乘法的单位元是I。每个元都有自己的逆元，这从表中可以找出。例如$u^{-1}=v, x^{-1}=x, z^{-1}=z$，等等。

同样可以验证这个运算满足结合律。

从以上关于对称运动的讨论，我们抽象出群的概念。

关于群。设集合G中定义了一个运算“$\circ$”，叫做乘法，它满足以下三个条件：

(1) 满足结合律；

(2) 存在一个单位元e；

(3) G中每个元素a都有逆元a^{-1}。

那么，集合G和运算$\circ$合起来：$(G, \circ)$就叫做一个群。或

者说，集合 G 关于乘法“$\circ$”构成群。

上面讲过的几个对称运动的集合：$\{I,u,v\}$，$\{I,w\}$，$\{I,u,v,x,y,z\}$，关于它们各自定义的乘法，都构成群。分别称它们为三阶对称群、二阶对称群和六阶对称群。

一般地说，从一个对称图形，可以找出相应的对称群。办法是：

（1）找出这个对称图形的所有对称运动。

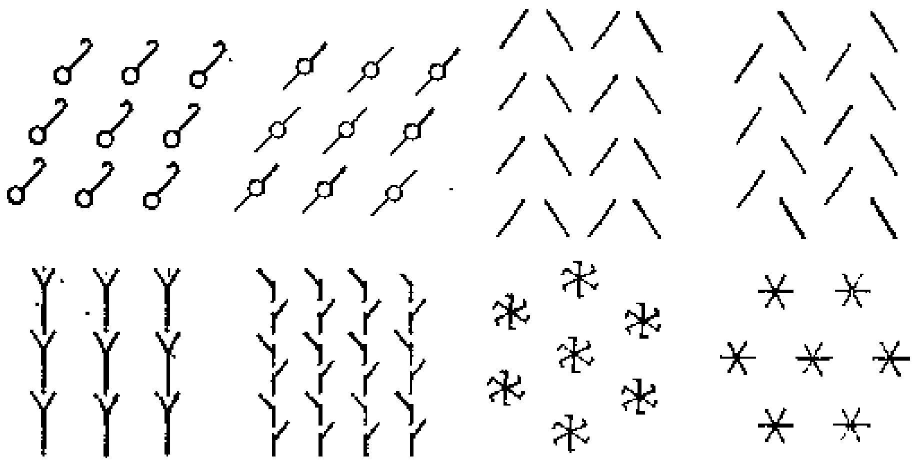
（2）规定乘法。

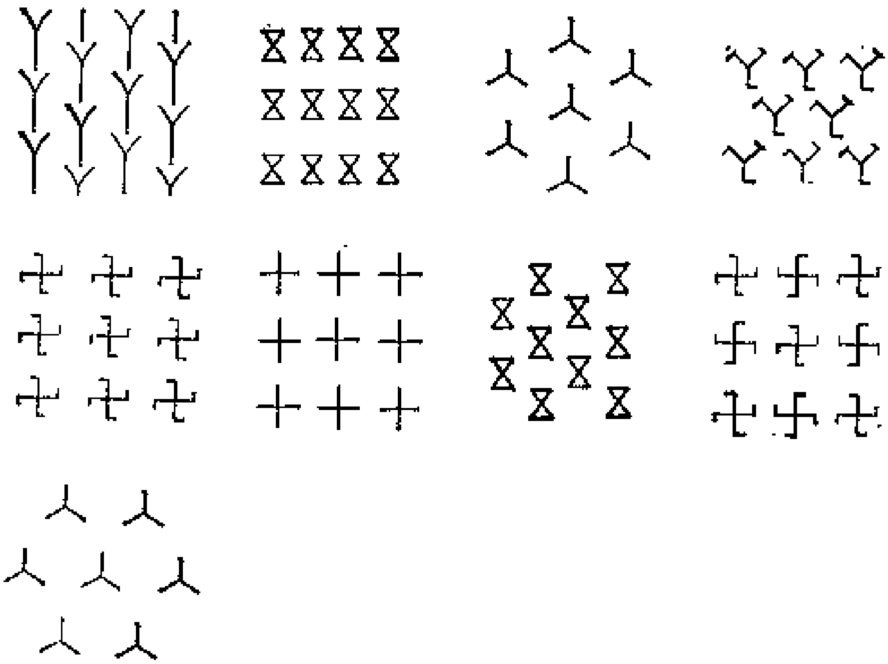
（3）验证群的条件。

反过来，人们也可以从对称群出发，去发现和研究现实世界中的对称图形和物体。这方面研究取得了巨大成功。

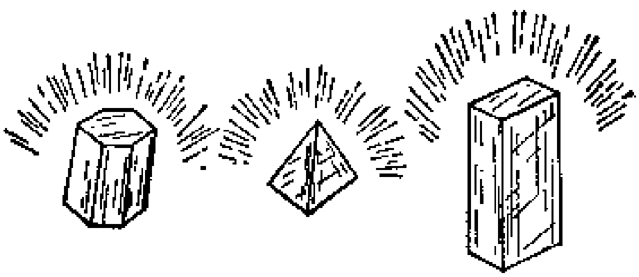
例如，平面装饰图案（糊墙纸上的图案等）的特点是，它可以向任何方向无限延伸，而基本图案不变。利用刚体运动群的分类研究，知道这种平面装饰图案总共只有17种。而这个结论，被事实所完全证实！

尽管平面装饰图案五花八门、各色各样，但如撇开它们的颜色、线条粗细、图形大小不计外，基本图案只有如下图所绘的17种。





如果用类似的方法研究空间对称体——晶体，那么得出的结论，就不再是17种，而是230种！就是说，如果撇开晶体的成



分、颜色、大小等，只考虑其“几何结构”，那么，只有230种晶体。

由此而建立的“晶体几何学”，对晶体本身的研究有很大的指导意义。它指导人们在自然界中寻找那些尚未被发现的晶体。经过几十年的努力，人们终于在自然界中，把所有

230种不同类型的晶体，全部找到了！这是数学在指导自然科学研究中取得的辉煌胜利。

群论的基本理论和基本方法，目前已被广泛应用于量子物理、量子化学等学科领域，成为原子核研究中最有力的工具之一。