17.1 第一型曲线积分

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 设 $\Gamma : x^2+y^2=a^2(x\geq 0)$, 计算 $\int_\Gamma |y|\mathrm{d}s$, 其中 $A>0$.

解法 1 曲线 Γ 的参数方程是

$$\begin{cases} x=a\cos\theta, \\ y=a\sin\theta, \end{cases} \theta\in\Big[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\Big],$$

由公式 (??),

$$\begin{aligned}\int_\Gamma |y|\mathrm{d}s &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} |a\sin\theta|\sqrt{a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}\mathrm{d}\theta \\ &= 2a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\mathrm{d}\theta = 2a^2.\end{aligned}$$

□

解法 2 以 y 为参数, 则 Γ 对应的参数方程为

$$\Gamma : \begin{cases} x=\sqrt{a^2-y^2}, \\ y=y, \end{cases} y\in[-a,a],$$

则

$$x'(y)=-\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}},$$

由公式 (??),

$$\begin{aligned}\int_\Gamma |y|\mathrm{d}s &= \int_{-a}^{a}|y|\sqrt{1+\frac{y^2}{a^2-y^2}}\mathrm{d}y = \int_{-a}^{a}|y|\sqrt{\frac{a^2}{a^2-y^2}}\mathrm{d}y \\ &= 2a\int_0^a\frac{y}{\sqrt{a^2-y^2}}\mathrm{d}y = -2a\sqrt{a^2-y^2}\Big|_0^a = 2a^2.\end{aligned} \qquad \square$$

□

例 2 设有空间曲线

$$\Gamma : \begin{cases} x=a, \\ y=at, \quad (a>0, t\in[0,1]), \\ z=\frac{1}{2}at^2, \end{cases}$$

曲线线密度 $\rho(x,y,z)=\sqrt{\frac{2z}{a}}$, 求 Γ 的质量.

解: Γ 的质量

$$\begin{aligned} M &= \int_{\Gamma}\rho(x,y,z)\mathrm{d}s = \int_0^1\sqrt{\frac{2\cdot\frac{1}{2}at^2}{a}}\sqrt{a^2+a^2t^2}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 at\sqrt{1+t^2}\mathrm{d}t = \frac{a}{3}(2\sqrt{2}-1). \end{aligned} \quad \square$$

$\square$

例 3 求 $I=\oint_C x^2 ds$, 其中 C 为

$$\begin{cases} x^2+y^2+z^2=R^2, \\ x+y+z=0. \end{cases}$$

注 1 符号 $\oint_C$ 中的圆圈表示曲线 C 是闭曲线. 这个圆圈也可以不写.

解法 1 (常规方法) 先写出曲线 C 的参数表达式. 由于 C 是球面 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 与经过球心的平面 $x+y+z=0$ 的交线, 因此是空间的一个圆周. 它在 xy 平面上的投影为一个椭圆, 这个椭圆方程可从两个曲面方程中消去 z 得到. 即以 $z=-(x+y)$ 代入 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 中, 得

$$x^2+xy+y^2=\frac{R^2}{2}.$$

将左边配方成平方和

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}x\right)^2+\left(\frac{x}{2}+y\right)^2=\frac{R^2}{2}.$$

令

$$\frac{\sqrt{3}}{2}x=\frac{R}{\sqrt{2}}\cos t,\quad \frac{x}{2}+y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t,\quad t\in[0,2\pi].$$

即得到参数表示

$$x=\sqrt{\frac{2}{3}}R\cos t,\quad y=\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t,\quad t\in[0,2\pi].$$

代入 $z=-(x+y)$ 中, 得

$$z=-\frac{R}{\sqrt{6}}\cos t-\frac{R}{\sqrt{2}}\sin t,\quad t\in[0,2\pi].$$

由此得

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s &= \sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t \\ &= R\sqrt{\frac{2}{3}\sin^2 t+\left(\frac{\cos t}{\sqrt{2}}+\frac{\sin t}{\sqrt{6}}\right)^2+\left(\frac{\sin t}{\sqrt{6}}-\frac{\cos t}{\sqrt{2}}\right)^2}dt \\ &= Rdt. \end{aligned}$$

故有

$$\oint_C x^2\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}\frac{2}{3}R^3\cos^2 t dt=\frac{2}{3}\pi R^3.$$

$\square$

解法 1 (利用对称性) 由对称性有

$$\oint_C x^2 \mathrm{d}s = \oint_C y^2 \mathrm{d}s = \oint_C z^2 \mathrm{d}s,$$

则

$$\oint_C x^2 \mathrm{d}s = \frac{1}{3}\oint_C (x^2+y^2+z^2)ds = \frac{1}{3}R^2 \oint_C \mathrm{d}s = \frac{2}{3}\pi R^3.$$

利用第一型曲线积分除了可以求曲线的弧长, 质量之外, 还可以用来求曲线的重心坐标. $\mathbb{R}^3$ 中的曲线 Γ 的重心坐标 (x_0, y_0, z_0) 由下面的公式确定:

$$x_0 = \frac{1}{m}\int_\Gamma x\rho(x,y,z)\mathrm{d}s, y_0 = \frac{1}{m}\int_\Gamma y\rho(x,y,z)\mathrm{d}s, \quad z_0 = \frac{1}{m}\int_\Gamma z\rho(x,y,z)\mathrm{d}s, \tag{1}$$

其中 $m = \displaystyle\int_\Gamma \rho(x,y,z)\mathrm{d}s$ 为曲线的质量. □

思考题

1. 在第一型曲线积分的定义中并没有要求曲线光滑, 在计算第一型曲线积分时 (定理 17.1.1) 为什么要求曲线光滑?

解: 因为在第一型曲线积分的定义, 已经要求 Γ 是简单可求长平面曲线, 且在极限定义中利用了弧长参数. 而在在计算第一型曲线积分时 (定理 17.1.1), 利用到了参数方程表示的曲线可求弧长的公式. (见 <<数学分析 (二)>> 第 75 页注 (2): 每一光滑曲线是可求长的).

但是注意, 曲线光滑并是定理 17.1.1 的充分必要条件. □

2. 为什么第一型曲线积分与定积分有相同的 5 条性质?

解: 因为在第一型曲线积分的定义式中, 其极限和式

$$\lim_{||T||\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i, \eta_i)\Delta s_i$$

与定积分中的极限和式

$$\lim_{||T||\to 0}\sum_{i=1}^{k} f(\xi_i)\Delta x_i$$

相仿, 只是前者和式是二元函数与弧长的乘积, 后者和式是一元函数与区间长度的乘积, 但都是线性关系. □

习题

1. 计算下列第一型曲线积分.

(1) $\displaystyle\int_\Gamma (x+2y+3z)\mathrm{d}s$, 其中 Γ 为螺旋线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt$ $(0 \le t \le 2\pi)$ 的一段;

(2) $\displaystyle\int_\Gamma xy\mathrm{d}s$, 其中 Γ 是曲线 $x = t, y = \dfrac{2}{3}\sqrt{t^3}, z = \dfrac{1}{4}t^2$ $(0 \le t \le 1)$ 的一段;

(3) $\displaystyle\int_\Gamma (x+3y)\mathrm{d}s$, 其中 Γ 为连接点 $O(0,0), A(3,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形;

(4) $\displaystyle\int_\Gamma (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s$, 其中 Γ 是以原点为中心, R 为半径的右半圆周;

(5) $\int_{\Gamma} xy\mathrm{d}s$, 其中 Γ 为椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 第一象限中的部分;

(6) $\int_{\Gamma} \sqrt{x^2+2y^2}\mathrm{d}s$, 其中 Γ 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x=y$ 相交的圆周.

解: (1) 由第一型曲线积分公式 (17.1.6), 有

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma}(x+2y+3z)\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi}(x(t)+2y(t)+3z(t))\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}(a\cos t+2a\sin t+3bt)\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}(a\cos t+2a\sin t+3bt)\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\left(a\sin t-2a\cos t+\frac{3b}{2}t^2\right)\Bigg|_{t=0}^{t=2\pi} \\
&= \sqrt{a^2+b^2}\left(-2a+\frac{3b}{2}\cdot 4\pi^2+2a\right) \\
&= 6\pi^2 b\sqrt{a^2+b^2}.
\end{aligned}$$

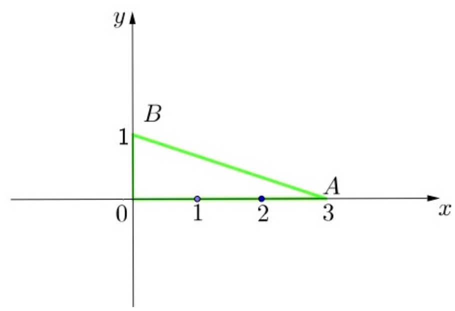
(2) 由第一型曲线积分公式 (17.1.6), 有

$$\begin{aligned}
\int_{\Gamma} xy\mathrm{d}s &= \int_0^1 x(t)y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 t\cdot\frac{2}{3}\sqrt{t^3}\sqrt{(1)^2+(t^{\frac{1}{2}})^2+\left(\frac{1}{2}t\right)^2}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{2}{3}t^{\frac{5}{2}}\sqrt{1+t+\frac{1}{4}t^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^1 \frac{2}{3}t^{\frac{5}{2}}\left(\frac{1}{2}t+1\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 t^{\frac{7}{2}}\mathrm{d}t+\frac{2}{3}\int_0^1 t^{\frac{5}{2}}\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{3}\cdot\frac{2}{9}t^{\frac{9}{2}}\Bigg|_{t=0}^{t=1}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{7}t^{\frac{7}{2}}\Bigg|_{t=0}^{t=1} \\
&= \frac{2}{27}+\frac{4}{21}=\frac{50}{189}.
\end{aligned}$$

(3) 因为 Γ 是分段光滑的闭曲线, 如图 1 所示, 所以需要先分段计算, 再做和.

在线段 $\overline{OA}$ 上, 其参数方程为: $0\le x\le 3, y=0$, 故由第一型曲线积分公式 (17.1.4), 有

$$\begin{aligned}
\int_{\overline{OA}}(x+3y)\mathrm{d}s &= \int_0^3(x+3\cdot 0)\sqrt{1^2+0^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}x^2\Bigg|_0^3=\frac{9}{2}.
\end{aligned}$$



,

图 1: 积分曲线 Γ

在线段 $\overline{AB}$ 上, 其参数方程为: $0 \le x \le 3, y = -\dfrac{1}{3}x + 1$, 故由第一型曲线积分公式 (17.1.4), 有

$$
\begin{aligned}
\int_{\overline{AB}} (x+3y)\mathrm{d}s &= \int_0^3 (x - x + 3)\sqrt{1^2 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^3 3 \cdot \frac{\sqrt{10}}{3}\mathrm{d}x = 3\sqrt{10}.
\end{aligned}
$$

在线段 $\overline{AB}$ 上, 其参数方程为: $0 \le y \le 1, x = 0$, 故由第一型曲线积分公式 (17.1.4), 有

$$
\begin{aligned}
\int_{\overline{OB}} (x+3y)\mathrm{d}s &= \int_0^1 (0+3y)\sqrt{0^2+1^2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{3}{2}y^2\Big|_0^1 = \frac{3}{2}.
\end{aligned}
$$

综上所述, 有

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (x+3y)\mathrm{d}s &= \int_{\overline{OA}} (x+3y)\mathrm{d}s + \int_{\overline{AB}} (x+3y)\mathrm{d}s + \int_{\overline{OB}} (x+3y)\mathrm{d}s \\
&= \frac{9}{2} + 3\sqrt{10} + \frac{3}{2} = 6 + 3\sqrt{10}.
\end{aligned}
$$

(4) 曲线 Γ 的参数方程是

$$
\begin{cases} x = R\cos\theta, \\ y = R\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right],
$$

故由第一型曲线积分公式 (17.1.4), 有

$$
\begin{aligned}
\int_{\Gamma} (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}s &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x(\theta)^2 + y(\theta)^2)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(R^2\cos^2\theta + R^2\sin^2\theta\right)^{\frac{1}{2}}\sqrt{(-R\sin\theta)^2 + (R\cos\theta)^2}\mathrm{d}\theta \\
&= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} R \cdot R\,\mathrm{d}\theta = \pi R^2.
\end{aligned}
$$

(5) 解法一: 曲线 Γ 的参数方程是:

$$
\begin{cases} x = a\cos\theta, \\ y = b\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right],
$$

由公式 (17.1.4), 得

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma xy\mathrm{d}s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} a\cos\theta\cdot b\sin\theta\cdot\sqrt{x'(\theta)^2+y'(\theta)^2}\mathrm{d}\theta \\
&= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sin\theta\sqrt{a^2\sin^2\theta+b^2\cos^2\theta}\mathrm{d}\theta \\
&= ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta\sqrt{a^2+(b^2-a^2)\cos^2\theta}\mathrm{d}\cos\theta \quad (\text{令} \quad t=\cos\theta) \\
&= ab\int_0^1 t\sqrt{a^2+(b^2-a^2)t}\mathrm{d}t = \frac{2}{3}ab\frac{\frac{1}{2}(a^2+(b^2-a^2)t)^{\frac{3}{2}}}{b^2-a^2}\Bigg|_0^1 \\
&= \frac{a^3b(b^3-a^3)}{3a^2(b^2-a^2)} = \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)},
\end{aligned}$$

其中倒数第二行利用了如下公式 (<< 数学分析 (二) >> 第 227 页附录不定积分表 8)

$$\int x^n\sqrt{a+bx}\mathrm{d}x = \frac{2}{b(2n+3)}\cdot\left[x^n(a+bx)^{\frac{3}{2}} - na\int x^{n-1}\sqrt{a+bx}\mathrm{d}x\right]) + C.$$

解法二: 曲线 Γ 的参数方程是

$$\begin{cases} x = x, \\ y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}, \end{cases} \quad x\in[0,a],$$

由公式 (17.1.7),

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma xy\mathrm{d}s &= \int_0^a \frac{b}{a}x\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1^2+(y')^2}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^a \frac{b}{a}x\cdot\sqrt{a^2-x^2}\sqrt{1+\frac{b^2x^2}{a^2(a^2-x^2)}}\ \mathrm{d}x \\
&= \frac{b}{2a}\int_0^a \sqrt{a^2-x^2+\frac{b^2}{a^2}x^2}\ \mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{b}{2a^2}\int_0^a \sqrt{a^4-(a^2-b^2)x^2}\ \mathrm{d}x^2 \\
&= \frac{b}{2a^2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{[a^4-(a^2-b^2)x^2]^{\frac{3}{2}}}{-a^2-b^2}\Bigg|_0^a \\
&= \frac{b}{3a^2}\cdot\frac{[a^4-(a^2-b^2)a^2]^{\frac{3}{2}}-(a^4)^{\frac{3}{2}}}{-a^2-b^2} \\
&= \frac{b}{3a^2}\cdot\frac{a^3b^3-a^6}{-a^2-b^2} \\
&= \frac{a^3b(b^3-a^3)}{3a^2(b^2-a^2)} \\
&= \frac{ab(a^2+ab+b^2)}{3(a+b)}.
\end{aligned}$$

(6) 联立 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 与 $x=y$ 得积分曲线 Γ 为圆 $2y^2+z^2=a^2$, 其参数方程为:

$$\Gamma:\begin{cases} x=\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}\sin t, \\ y=\dfrac{|a|}{\sqrt{2}}\sin t, \quad t\in[0,2\pi], \\ z=|a|\cos t, \end{cases}$$

由第一型曲线积分公式 (17.1.6), 有

$$\begin{aligned}
\int_\Gamma \sqrt{x^2+2y^2}\mathrm{d}s &= \int_0^{2\pi}\sqrt{x^2(t)+2y^2(t)}\cdot\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\sin t\right)^2+2\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\sin t\right)^2} \\
&\quad\cdot\sqrt{\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2+\left(\frac{|a|}{\sqrt{2}}\cos t\right)^2+(-|a|\sin t)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\sqrt{\frac{3}{2}a^2\sin^2 t}\cdot\sqrt{a^2\cos^2 t+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{6}}{2}a^2|\sin t|\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{6}a^2\int_0^{\pi}\sin t\mathrm{d}t \\
&= \sqrt{6}a^2\left(-\cos t\right)\big|_0^{\pi} \\
&= \sqrt{6}a^2(-\cos\pi+\cos 0)=2\sqrt{6}a^2.
\end{aligned}$$

□

2. 已知一条非均匀金属线 Γ 的方程为 $x(t)=\mathrm{e}^t\cos t, y(t)=\mathrm{e}^t\sin t, z=\mathrm{e}^t, t\in[0,1]$, 它在每点的线密度与该点到原点的距离的平方成反比, 而且在点 $(1,0,1)$ 处的线密度为 1, 求它的质量 M.

解: 由题意可设金属线的密度函数为:

$$\rho(x,y,z)=\frac{k}{x^2+y^2+z^2}=\frac{k}{(\mathrm{e}^t\cos t)^2+(\mathrm{e}^t\sin t)^2+(\mathrm{e}^t)^2}=\frac{k}{2\mathrm{e}^{2t}},$$

其中 k 为常数.

由 $\rho(1,0,1)=1$, 代入上式可得 $\dfrac{k}{2}=1$, 即 $k=2$, 所以, $\rho(x,y,z)=\mathrm{e}^{-2t}$.

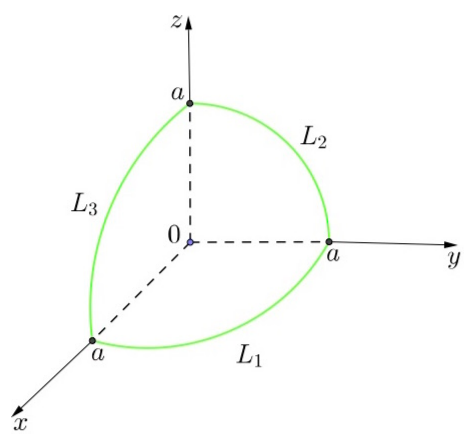
因此, 由第一型曲线积分公式 (17.1.6) 可求出金属线的质量 M 为:

$$\begin{aligned} M &= \int_\Gamma \rho(x,y,z)\mathrm{d}s \\ &= \int_0^1 \rho(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2} \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-2t}\sqrt{\mathrm{e}^{2t}(\cos t-\sin t)^2+\mathrm{e}^{2t}(\cos t+\sin t)^2+\mathrm{e}^{2t}}\mathrm{d}t \\ &= \int_0^1 \mathrm{e}^{-2t}\cdot\sqrt{3}\mathrm{e}^{t}\mathrm{d}t \\ &= \sqrt{3}\int_0^1 \mathrm{e}^{-t}\mathrm{d}t \\ &= -\sqrt{3}\,\mathrm{e}^{-t}\Big|_0^1 \\ &= \sqrt{3}(1-\mathrm{e}^{-1}). \end{aligned}$$

□

3. 计算质量均匀分布的球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$, 第一卦限部分的边界的重心坐标 (x_0,y_0,z_0).

解: 边界如图 2 所示,



,

图 2: 边界 $L=L_1\cup L_2\cup L_3$

边界长度 L 为

$$L=3\int_{L_1}\mathrm{d}s=3\cdot\frac{2\pi a}{4}=\frac{3\pi a}{2}.$$

依题意, 不妨设球面的密度函数 $\rho(x,y,z)=\rho_0$, 其中 ρ_0 为常数, 则边界质量为:

$$m=3\int_{L_1}\rho_0\mathrm{d}s=\frac{3\pi a}{2}\rho_0.$$

由对称性可知, 重心坐标

$$\begin{aligned} x_0=y_0=z_0 &= \frac{1}{m}\int_{L_1\cup L_2\cup L_3}\rho_0 x\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{m}\left(\int_{L_1}\rho_0\ x\mathrm{d}s+\int_{L_2}\rho_0 x\mathrm{d}s+\int_{L_3}\rho_0 x\right)\mathrm{d}s \quad \left(\text{其中}\int_{L_2}\rho_0 x\mathrm{d}s=0\right) \\ &= \frac{2}{m}\int_{L_1}\rho_0 x\mathrm{d}s \\ &= \frac{2}{m}\rho_0\int_{L_1}x\mathrm{d}s. \end{aligned}$$

又 L_1 的参数方程为: $\begin{cases} x=a\cos\theta \\ y=b\sin\theta \end{cases}$, 其中 $0\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}$, 于是可得

$$\begin{aligned} \int_{L_1}x\mathrm{d}s &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos\theta\cdot a\mathrm{d}\theta \\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\mathrm{d}\theta \\ &= a^2\sin\theta|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= a^2. \end{aligned}$$

故有

$$x_0=y_0=z_0=\frac{2}{m}\rho_0\cdot a^2=2a^2\rho_0\cdot\frac{2}{3\pi a\rho_0}=\frac{4a}{3\pi}.$$

综上所述, 所求的重心坐标为 $\left(\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi},\frac{4a}{3\pi}\right)$. □

---

4. 求曲线 Γ:

$$\begin{cases}(x-y)^2=3(x+y), \\ x^2-y^2=\frac{9}{8}z^2\end{cases}$$

从 $O(0,0,0)$ 到 $A(x_0,y_0,z_0)$ 的弧长, 其中 $x_0>0$.

解: 令 $x-y=t$, 代入第一个方程可得到 $x+y=\frac{1}{3}t^2$. 联立上述两个方程, 可得到曲线 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{3}+t\right) \\ y=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{3}-t\right) \\ z=\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}2}t^{\frac{3}{2}} \end{cases}$$

令 $x=\frac{1}{2}\left(\frac{t^2}{3}+t\right)=x_0$, 解得 $t=\frac{-3+\sqrt{9+24x_0}}{2}$, 故 $0\leqslant t\leqslant\frac{-3+\sqrt{9+24x_0}}{2}$, 由第一型曲线积

分公式 (17.1.6), 可得

$$\begin{aligned}
l_{\overset{\frown}{OA}} &= \int_0^{\frac{-3+\sqrt{9+24x_0}}{2}} \sqrt{\left(\frac{1}{2}(\frac{2}{3}t+1)\right)^2+\left(\frac{1}{2}(\frac{2}{3}t-1)\right)^2+\left(\frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}\cdot\frac{3}{2}t^{\frac{1}{2}}\right)^2}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{-3+\sqrt{9+24x_0}}{2}} \sqrt{\frac{1}{2}+\frac{2}{9}t^2+\frac{2}{3}t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\frac{-3+\sqrt{9+24x_0}}{2}} \left(\frac{\sqrt{2}}{3}t+\frac{1}{\sqrt{2}}\mathrm{d}t\right) \\
&= \left(\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{\sqrt{2}}t\right)\Bigg|_0^{\frac{-3+\sqrt{9+24x_0}}{2}} \\
&= \frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\left(\frac{-3+\sqrt{9+24x_0}}{2}\right)^2+\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\left(\frac{-3+\sqrt{9+24x_0}}{2}\right) \\
&= \sqrt{2}x_0.
\end{aligned}$$

□

5. 求摆线 $\begin{cases} x=a(t-\sin t), \\ y=a(1-\cos t), \end{cases}$ $(0\le t\le\pi)$ 的重心, 设其质量分布是均匀的.

解: 依题不妨设球面的密度函数 $\rho(x,y,z)=\rho_0$, 其中 ρ_0 为常数, 则边界质量为:

$$\begin{aligned}
m &= \int_\Gamma \rho_0\mathrm{d}s \\
&= \int_0^\pi \rho_0\sqrt{a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t}\mathrm{d}t \\
&= \int_0^\pi \rho_0 2a\cdot\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t \\
&= 2a\rho_0\int_0^\pi \cdot\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t \\
&= 2a\rho_0\ (-2\cos\frac{t}{2})\Big|\, t_0^\pi \\
&= 4a\rho_0,
\end{aligned}$$

故重心坐标为

$$\begin{aligned}
x_0 &= \frac{1}{m}\int_0^\pi \rho_0 a(t-\sin t)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{m}\int_0^\pi \rho_0 a(t-\sin t)\ \cdot 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{a}{2}\int_0^\pi t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t-\frac{a}{2}\int_0^\pi \sin t\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t \\
&= -at\cos\frac{t}{2}\Big|_0^\pi+a\int_0^\pi\cos\frac{t}{2}\mathrm{d}t+\frac{a}{4}\int_0^\pi(\cos\frac{3t}{2}-\cos\frac{t}{2})\mathrm{d}t \\
&= 0+2a\sin\frac{t}{2}\Big|_0^\pi+\frac{a}{4}\left(\frac{2}{3}\sin\frac{3t}{2}-2\sin\frac{t}{2}\right)\Big|_0^\pi \\
&= \frac{4}{3}a.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
y_0 &= \frac{1}{m}\int_0^{\pi}\rho_0 a(1-\cos t)\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{m}\int_0^{\pi}\rho_0 a(1-\cos t)\ \cdot 2a\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{a}{2}\int_0^{\pi}(1-\cos t)\sin\frac{t}{2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{a}{2}\int_0^{\pi}2\sin^3\frac{t}{2}\mathrm{d}t \\
&= 2\cdot\frac{a}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\sin^3 t\mathrm{d}t \\
&= \frac{4}{3}a.
\end{aligned}
$$

综上所述, 故所求的重心坐标为 $\left(\frac{4}{3}a, \frac{4}{3}a\right)$.

□