目 录

数学中的符号1	
数码符号的引进 5	
进位制的由来9	
古人对分数的应用14	
珠算的产生和发展19	
电子计算机的发展23	
负数的引入29	
导出单位的应用33	
学习因式分解的必要性36	
数学方程式是从哪里来的?40	
π和 e 的实际意义44	
函数概念的形成与发展49	
几种函数的实际应用53	
垛积术与等差级数57	
对数的产生62	
行列式的作用66	
矩阵的应用70	
虚数不虚77~	
"无穷"的实际意义·······81	
数学归纳法的作用84	

,

为什么要研究近似计算?	•• ••	• • •	• • •	• • • •	•••	•••	•••	89
古算中的求积问题		· • • •		• • • •	•••	••••	٠,.	94
长度单位的确定	• • • •			• • • •	•••	•••		99
关于欧几里得几何学	• • • •			· · · · ·		• • •	••	103
关于公理的评价			• • •	• • • •	••••	•••		107
角的概念的扩展				• • • •	•••		••	111
几何变换的现实模型及应用					• • • •		••	116
三角学的形成						••••	41	120
圆锥曲线的简史								123
什么是算图?	••••		• • •		•••			127
概率论是社会实践的产物			• . •	• • • •				131
模糊数学								
运筹学的起源自发展								
微积分的产生			• • •					145
					٠.			
								- 1
•								•
								· <u>.</u>
			٠	127			· .	· ::

and the second of the second

·.

数学中的符号

人们在长期实践中,由于研究的需要,创造了大量的数学符号,来代替和表示某些数学概念、运算和关系,简化了数学研究工作,促进了数学的发展。

在中学数学中,常见的数学符号有以下六种:

一、数量符号 如 $\frac{3}{4}$,3.142, $\sqrt{7}$,i,2+ $\sqrt{3}i$,

自然对数底 ε,圆周率π, a, x, ∞等。

二、运算符号 如加号(+),减号(-),乘号(×或·),除号(÷或一),两个集合的并集(U)、交集(\cap),根号(\checkmark),对数(\log , \lg , \ln),差(\sim),比(:),微分(d),积分(\int)等。

四、结合符号 如圆括号(),方括号[],花括号{ },括线——。

五、性质符号 如正号(+)、负号(-), 绝对值符号([i)

等。

六、省略符号 如三角形(\triangle),正弦(\sin),x的函数[f(x)],极限(\lim),因为(\because),所以(\therefore),总和(Σ),连乘(\prod),从n个元素中每次取出「个元素所有不同的组合数(C_{*}),幂(a^{**}),阶乘(\prod ,或1)等。

六种数学符号的产生,首先来源于文字的缩写。如平方根 号"√一"中的"√"是从拉丁字 Radix 的第一个字母 r 演变而 来。虚数单位"i"是引用 imaginary number (虚数)的第一个 字母。微分、积分符号"d"、"ʃ"也是分别引用了 derivative (导数、微商)、Summation(求和法)的第一个字母。对数符 号"log"系 logarithm (对数)的缩写, 自然对数符号"ln"系 natural logarithm (自然对数)的缩写。相似符号"∞"是把拉 丁字母 S 横过来写, 而 S 是 Similar (相似)的第一个字母。正 弦符号"sin"是 sine (正弦)的缩写。极限符号 "lim"是 limit (极限)的缩写。其次来源于象形,实际上是缩小的图形。如平 行符号" // "是两条平行的直线;垂直符号" 工"是互相垂直的 两条直线;三角形符号"△"是一个缩小了的三角形;符号"⊙" 表示一个圆,中间加一点表示圆心,以免与数0或字母〇混 淆。第三,来源于会意。如用两条长度相等的线段"="并列在 一起,表示等号;加一条斜线"ヤ",表示不等号;用符号">"表 示大于(左侧大,右面小),"<"表示小于(左侧小,右面大),意 义不难理解;用括号"()"、"[]"、"{ }"把若干个量结合 在一起,也是不言而喻的。第四,还有大量的符号是人们经过 规定沿用下来的。当然这些符号也不是一开始就都是这种形 状,是有一个演变过程的,这里就不一一赘述了。

美国数学家斯特洛伊克(Dirk J. Struik)说过,新的合适

的数学符号的出现,"它就带着自己的生命出现,并且它又创 造出新生命来。"数学符号的产生,为数学科学的发展提供了 有利的条件。首先,提高了计算效率。古时候,由于缺少必要的 数学符号,提出一个数学问题和解决这个问题的过程,只有用 语言文字叙述,几乎象做一篇短文,难怪有人把它称为"文章 数学"。这种表达形式非常不便,严重阻碍了数学科学的发展。 当数量、图形之间的关系用合适的符号表达后,抽象的数量关 系和空间形式能够用看得见的数学表达式表示, 人们就可以 在此基础上,根据自己的需要,深入进行推理与计算,因而能 更迅速地得到问题的解答或发现新的规律。其次,缩短了学习 时间。初等数学发展至今已有两千多年历史,内容丰富,而其 主要内容今日能在小学和中学阶段学完,这里数学符号是起 一定作用的。例如,我们的祖先开始只有1、2少数几个数字 的概念,而今天幼儿园的小朋友就能掌握几十个这样的数。究 其原因,除了古今实践条件不同,人们的见识相异而外,今天 已有一套完整的记数符号,人们容易掌握。第三,推动了深入 的研究。我们研究数学概念和规律,不仅需要简明、确切地表 达它们,而且对其内部复杂的关系,需要深入地加以探讨,没 有数学符号的帮助,进行这样的研究是十分困难的。例如,当 我们将"以 a 为底 x 的对数等于 y"这句话用符号" $\log_a x = y$ " 表示后,就显得简明扼要,便于从这个表达式出发,深入讨论 对数的性质和应用, 进面建立对实际计算有重要意义的对数 理论。同样,只有将图形及其关系用文字和其它一些数学符号 表示出来(如用 AB 表示直线和线段、用 $\triangle ABC$ 表示某个 三角形等),才便于进行逻辑推理,进一步发现根据直观不易 得到的定理。

所以,数学符号的应用,是多快好省地研究数学科学的重要途径。我国宋朝著名科学家沈括曾经说过,数学方法应该"见繁即变,见简即用"。数学符号正是适应这种变"繁"为"简"的实际需要而产生的。

数学符号不仅随着数学发展的需要而产生,而且也随着数学的发展不断完善。比如,古代各民族都有自己的记数符号,但在长期使用过程中,印度——阿拉伯数码记数方法显示出更多的优点,因而其它的数码符号逐渐淘汰,国际上都采用了这种记数方法。数学符号不是纯粹形式的东西,而是以客观世界一定物质为基础的。清朝阮元在所著《续畴人传序》中说:"……天元、四元、大衍等名,皆用假判真,借虚课实,……"意思是说,古代人在列方程解应用题时所用的天元、四元等数学符号看来很抽象,但它们都代表着客观真实的数量。可见,数学符号是客观事物在数量及图形关系方面的抽象概念的具体表现形式,是进行推理计算的有力工具。

数码符号的引进

数的概念产生于计数的需要。原始时期,人类对数的认识往往是和实物联系在一起的。例如,有些民族用"我"或"月亮"表示"1";用"眼睛"、"耳朵"或"鸟的翅膀"表示"2",这是因为人有两只眼睛和两只耳朵的缘故。在西藏文中"2"有"翼"的意思,因为鸟有两只翅膀;用手表示"5",因为手有五指。佛教语的"5"与波斯语的"手"就相近;用"人"表示"20",因为人有十个手指和十个脚趾。我国古代的"一"就是"余"、"二"就是"尔"的假借,因为它们的音近似。罗马人在文化发展的初期,是用手指作为计数工具的。譬如他们表示1、2、3、4个物体,就分别伸出1、2、3、4个手指头,5个物体就伸出一只手;10个物体就伸出两只手。为了记录这些数,就把它们写在木板或羊皮上,用1、11、11来代替手指的数;要表示一只手时,就写成"V"形,表示大拇指与食指张开的形状,表示两只手时,就画成 V V 形,后来又写成一只手向上,一只下向下的"X"形,这已是数码的雏形。

数码符号的引进,是人类对数学认识的一大进步,它表示着"数"已从各种具体事物中抽象出来,具有"独立"的地位。例如,数"2"不仅表示"两个人","两只老虎"或"两条鱼"等,它已经把这些具体事物的其它属性撒开,注意到它们所具有的数量的共性。这样,数字只有一个,而所能表达的具体事物却是无穷的。人类的这种初级的数学抽象能力,是长期在实践中

归纳、类比和概括出来的。正如恩格斯指出,"为了计数,不仅要有可以计数的对象,而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其它一切特性而仅仅顾到数目的能力,而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果。"(《自然辩证法》240页)各民族都有自己独特的数码符号。这些数码符号的书写方法,都有一个发展过程。就拿我们通常讲的"阿拉伯数字"来说吧,开始是印度人先用的,后来由印度传到阿拉伯,又从阿拉伯传到欧洲,但都不完全是现在的这种写法。经过好几个世纪的演变,才逐渐形成现在通用的阿拉伯数字。

我国是世界上文化发达最早的国家之一。我国数码产生的确实年代,虽难以考查,但是在纪元前一两千年左右,就有数码的写法,这是毫无疑问的。譬如在《世本》(汉刘向撰,是记载器物最初的创作者及姓氏来源的一本书)中曾有这样一句话:"黄帝时,隶首作数。"《易系辞》(是文王周公所作的辞,公元前一千年左右)中说:"上古结绳而治,后世圣人易之以书契。"《释名》(汉刘熙撰,是解释名称、辨别物件的书)这本书中说:"契,刻也,刻识其数也。"这里"契"与"锲"通,就是刻划的意思。由此可知,我国古代文化发展初期,是从上古结绳记事,

逐渐发展到在兽皮或树木上刻划记事,数码是在此基础上产生的。根据考古学家的考证和有关史料的记载,我国表数的古代书契有上面一些。唐宋以后,又以壹、贰、叁、肆、伍、陆、柒、捌、玖、拾、佰、仟为一至千的商业用数字。

这里需要对零这个数码特别加以说明。零作为数码被引入比较迟,这是因为它最初的意义表示"没有",在古印度文中,零就是"空的"意思。正因为它表示空的意思,什么"没有",所以也就不必过早地给以独立的符号,而用不写或空位的办法解决。可是,在十进位记数系统中,零的意义有了发展,它已不再仅仅表示"没有"了。0可以表示界限,如寒暑表中的0°.0可以表示起点,如发射火箭时的口令."9,8,7,6,5,4,3,2,1,0——发射!"0可以表示新生状态,如打算盘前先要猜盘,使算珠处于0即新生的状态,我们现在常讲的"一切从零开始",也是这个意思。在物理里,0还表示平衡状态。在数学中,当"0"添在"1"的后面而成"10"时,"0"的意义不仅表示个位数字上"没有",而且它和1一起组成"十",其数量比1扩大十倍。当正负数引入后,0作为中性数、分界点,它的意义就更丰富了。

我国目前主要采用国际通用的阿拉伯数字,但也还有采用其它数码的。如票证单据上仍常采用我国古写的商用大写数字,因其字体较繁,不易涂改,可防弊端。中医处方用药量的;标数,原来一直采用明清商用暗码,现在已改用克为单位,以阿拉伯数码记录。至于罗马数码,在有些书籍标明章节及钟表面上,仍有使用的。

人类有了自然数的同时,也就有了自然数的运算。例如, 澳大利亚有的部族把三叫做二一,四叫做二二,五叫做二三, 数码的个数是有限的,如在十进位制中,阿拉伯数码只需要十个。由少数几个数码,再配以其它的一些数学符号,就可以表示出千千万万个多种多样的数来。在这里,数码对于数来说,其作用犹如化学元素和化合物一样,它是组成各种数的基本"元素",是我们研究数及其发展的基础。

进位制的由来

上古时候,人们为了数出物体的个数,便产生了自然数的观念。但是,如何读出和记出这些数呢?由于自然数有无限多个,如果每一个都用一个独立的名称和记号来表示,这显然是不可能的。有人做了一个统计,在莎士比亚的著作中,有一万七千个不同的词,即使一个英文程度很好的人,在阅读这位作家的著作时,也需要有一本专门词典来帮助。文字是如此的复杂,数字要是没有一种简化的方法去表示,也象文字这样复杂,那在表达数量关系时所出现的困难,是很难设想的。实践的需要促使进位制的产生。早在有文化的初期,多数民族由于实际生活的需要,都或多或少地创造出一定的进位制,但是,用专门数码来表示数的书写方法,却产生得很晚,甚至象古代希腊、罗马这样有高度文化的民族,用数码来表示数的书写方法也是极不完整的。直到纪元初年,人们才初步应用数码,并按一定的进位制来表示数。

国际上通用的是十进制读数与记数方法,即较低位上的十个单位组成较高位上的一个单位。在我国,很早就运用了这种进位制。如周代《易经》中表示数量时曾有"万有一千五百二十"的记载,说明早在二千多年前,我国就有了十进位制。后来,甄鸾在他的《数术记遗》(公元六世纪的书)中还有下面一段话:"黄帝为法,数有十等,及其用也,乃有三焉。十等者:亿,兆,京,垓,秭(音紫),壤,沟,河,正.载。三等者,谓上中下也。

其下数者,十十变之,若言十万日亿,十亿日兆,十兆日京也。中数者,万万变之,若言万万日亿,万万亿日兆,万万兆日京也。上数者,数穷则变,若言万万日亿,亿亿日兆,兆兆日京也。"从这段话我们可以看出,当时虽采用了十进制,但缺乏统一的规定,主要原因是那时的生产力不发达,人们在实际生活中还不迫切需要用很大的数去记载。

根据易勒斯(W.C.Eels)的调查,美国原始亚美利加各族的 307 种计数系统中,有 146 种是十进位的,106 种是五进位、十进位和二十进位的。可见,十进位制在历史上为人们所普遍采用。人类为什么喜欢采用土进位制呢? 根据语言学家对世界各进化民族和多数原始民族语言的研究,这是由于人类的手有十个手指,可以自由伸屈,是一个很好的天然计数工具,因而不谋而合地都采用了十进位制。在英文中,"dight"这个单词既可以当"手指"讲,又可以当"数字"讲,这与人们长期用手指表示数字,可能是有联系的。另外,十进位制比较简单,所以传播也就最广。十八世纪晚期,法兰西大革命使很多旧的文物和制度都摧毁了,但十进位制不仅丝毫没有变动,反而比过去更巩固了。由此可见,十进位制真是根深蒂固。

当然,除了十进位制外,还有其它进位制。实际上除 0 和 1 以外,任何自然数都可以用来作为进位制的基础数。例如,有二进位制、三进位制、五进位制、七进位制、八进位制、十一进位制、十二进位制、二十进位制和六十进位制等。 象北美的印地安人,中美、南美的少数民族,西伯利亚的北部民族及非洲人等,常用五进位制和二十进位制。 1937 年在维斯托尼斯(罗马尼亚境内)发现旧石器时代的一根幼狼的桡骨,七时长,上面有着五十五个刻痕,前面二十五个是五个一组地排列着,

5

随后一个刻痕是原来长的两倍,作为这一列的结束。这是五进位制应用的一个证明。巴比伦人最初使用六十进位制,直到现在我们还在使用这种进位制,如一小时等于六十分钟,一分钟等于六十秒,圆周角等于三百六十度,一度等于六十分等。其它如十二进位制也是比较方便的。因为十二进位制的基础数"十二"能被2、3、4、6 所整除,用十二进位制做除法,能整除的机会较多。据传说,古代瑞典国王查理第十二就主张用十二进位制。他在快死时,还念念不忘在他统辖的区域,把十进制改为十二进位制。但后来没有实现。十二进位制今天还在应用,如一年有十二个月,一天是二十四小时(钟表面上仍只用十二)等,其它从英文中也可明显地看出十二进位制的痕迹。英文从1到19这十九个数字是:one,two,three,four,five,six,seven,eight,nine,ten,cleven,twelve,thirteen,fourteen,fifteen,sixteen,seventeen,eighteen,nineteen。这里面从1到12,这十二个数字是独立的,13以后才有一个统一的构成法。

任何一种基数 r 的进位制中,数的写法具有下列形式。

$$a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + a_{n-2} r^{n-3} + \dots + a_2 r + a_{+\bullet}$$

这里, a_1 是个位数字, a_2 是十位数字, a_3 是百位数字, 依此类推。如十进位数 3872, 可写为:

$$3872 = 3 \cdot 10^3 + 8 \cdot 10^2 + 7 \cdot 10 + 2$$
.

科学技术发展到今天,很多问题的解决都需要进行大量的计算。在许多情况下计算速度要求很高,必需使用自动控制。有些数学问题计算工作的量很大,如建筑巨型水力发电站的拦河坝工程,就需要进行极为繁杂的计算。这里遇到的联立方程已经不是两三个未知数,而是十个、几十个乃至几百个未知数,其计算的艰难复杂程度可想而知。堤坝的设计不仅是整

个工程的关键,而且直接关系到千百万人民的生命财产的安全,要求计算准确、迅速,这些都促使计算技术不断发展,以保证计算工作自动化,能用最短的时间解决各种复杂的数学题。为了适应这样的需要,人们发明了二进位制,用0和1两个符号,就可以把一切自然数表示出来。如

自然数 一、二、三、四、五、六、七、八、九、十、……

十进制 1、2、3、4、5、6、7、8、9、10、……

二进制 1、10、11、100、101、110、111、1000、1001、1010、……

为了区别不同的进位制,我们常常用括号加注的办法。如,在十进位制里,数 101 表为(101)₁₀,在二进位制里,数 101 表为(101)₂。

把二进位制所记的数化成十进位制所记的数的方法是: 把二进位数第 n 位数上的数字乘以 2"~1,然后求它们的和,便 是所求的十进位数。例如

$$(101)_{2} = 1 \times 2^{3-1} + 0 \times 2^{2-1} + 1 \times 2^{4-1}$$

$$= 1 \times 2^{2} + 0 \times 2 + 1 = (5)_{10}.$$

$$(11010)_{2} = 1 \times 2^{5-1} + 1 \times 2^{4-1} + 0 \times 2^{3-1} + 1 \times 2^{2-1} + 0$$

$$= 1 \times 2^{4} + 1 \times 2^{5} + 0 \times 2^{2} + 1 \times 2 + 0 = (26)_{10}.$$

把十进位制所记的数化成二进位制所记的数的方法,是 逐次用2来除.用2除原数,再用2除第一个商,又用2除第 二个商,这样继续下去,直到商等于1为止。如此依次所得的 余数和最后的商1,就是二进位制所记的数从右到左各位数 上的数字。例如

 $4 \div 2 = 2 \cdots$ $\Rightarrow 0$ $2 \div 2 = 1 \cdots$ $\Rightarrow 0$ ∴ $(17)_{10} = (10001)_2$.

由于二进位制只需要两个数字,人们就把电路的"开"、 "关"分别表示 0 和 1 这两个数码,进行复杂的运算,这就是电 子计算机的简单原理。应用电子计算机进行具体计算时,首先 要把我们通常用的十进位数化为二进位数,并由输入装置将 事先编好的计算步骤输入到存贮器存放起来,然后,在控制器 的控制下,计算机按"计算程序"自动操作;最后,将计算结果 打印在纸上,工作就告结束。

古人对分数的应用

分数起源于"分"。例如,在原始社会中,人们集体狩猎,打死一只大的野兽,众人分配猎物,逐渐产生了分数的概念。随着社会实践的复杂化,在土地计算、制订历法、土木建筑、水利工程和机械制造时,都要用到测量。而在测量过程中,当所选长度单位不能量尽所量线段时,就产生了分数。

我国史书上,很多有关分数的记载,都是直接和当时社会 实践紧密相联的。如春秋《左传》"隐公"条中,关于国王封地诸 侯有如下的规定:"大都不过三国之一,中五之一,小九之一。" 这是说,根据当时的制度,诸侯都城不要过大,最大的不得超 过周文王国都的三分之一,中等的不得超过五分之一,小的不 得超过九分之一。又如公元前四世纪写成的《管子・地员》篇 中有讨论管乐的记载,说把"宫"音管长"三分而益之以一"便 得着"徵"音管的长度。"宫"和"徵"都是当时表音的名称。古代 把音分为五种,即宫、商、角、徵、羽,不象我们今天分为七音, 1、2、3、4、5、6、7。原意是说,把发出宫音乐器管子的长度 取三分之一,便可得到徵音管的长。又如战国时期(公元前三 世纪)《考工记》中,常用简单分数表示手工业产品各部分尺寸 的比。表示长度的单位有"十分之一谓之枚"的说法,意思是说 一寸的十分之一叫做枚,这里的"枚"就是我们讲的"分"。又如 秦始皇时期颛顼历(公元前246年),拟定一年的天数是"三百 六十五,四分之一天",即 $365\frac{1}{4}$ 天,因而叫做四分历法。又拟 定一年的月数是"一十二,十九分之七月",即12<u>7</u>月,这就是十九年七闰的方法。并由此计算出每月平均日数,写成今天的形式就是。

$$365\frac{1}{4} \div 12\frac{7}{19} = \frac{1461}{4} \div \frac{235}{19} = \frac{1461}{235} \times \frac{19}{4}$$
$$= \frac{27759(周天)}{940(日法)} = 29\frac{499}{940}(天).$$

再如,公元前104年《三统历法》计算木星的平均速度有:

$$33\frac{3334734}{7398711} \div 398\frac{5163102}{7308711} = \frac{145}{1728}$$
等算式,已经知道把

繁分数化简为单分数了。另外,我国古数书中对于 $\frac{1}{3}$ 、 $\frac{1}{2}$ 、 $\frac{2}{3}$ 、

 $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{3}{4}$ 等常用分数都有固定名称,把 $\frac{1}{3}$ 称为"少半", $\frac{1}{2}$ 称为

"半", $\frac{2}{3}$ 称为"太半", $\frac{1}{4}$ 称为"弱半", $\frac{3}{4}$ 称为"强半"。如《史记·

项羽本记》中说"汉有天下太半。""吴韦昭曰:凡数三分有二为太半,有一为少半。"《淮南子》卷六说:"斩艾百姓,殚尽太半。"又如《后汉书·食货志》(卷二十四)上记载:"收泰半之赋。""师古曰:泰半三分取二。"从以上大量史料可以清楚地看到,分数是在实践中产生的,我们祖先对分数早有广泛的应用。

到了汉朝,随着生产发展的需要,对分数中的约分、通分和四则都总结了运算法则,如《九章算术·方田章》关于分数加法法则是这样叙述的:"母互乘子,并以为实,母相乘为法,实如法而一。"古代把除数称为"法",被除数称为"实",被除数为除数所除叫"实如法而一"。翻译成今天的式子就是,

$$\frac{b}{a} + \frac{d}{c} = \frac{a \times d + c \times b}{a \times c}.$$

关于分数减法法则是这样叙述的:"母互乘子,以少减多,余 为实,母相乘为法,实如法而一。""以少减多"就是从较大的数 减去较小的数,和现在的说法恰好相反。翻译成今天的式子 就是:

$$\frac{b}{a} - \frac{d}{c} = \frac{b \times c - a \times d}{a \times c} - \frac{a \times d}{a \times c}$$

关于分数乘法法则是这样叙述的:"母相乘为法,子相乘为实,实如法而一。"和今天分数乘法的法则完全一致。分数除法法则是"法分母乘实(为实),实分母乘法(为法,实为法而一)。""法分母乘实",就是用除式的分母乘被除式的分子,"实分母乘法",就是被除式的分母乘以除式的分子,以前者为分子,后者为分母,相除即得。译成今天的式子就是,

$$\frac{b}{a} \div \frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{c}{d} = \frac{b \times c}{a \times d}.$$

对于约分的方法,也有不少的记载。如《九章算术·方田章》说:"可半者半之。"意思是说,分数的分子、分母如都能被2整除,就可以用2来约它。《张邱建算经》的序中说:"耦者半之。"这里,"耦"就是我们今天的"偶",意思是说一个分数的分子、分母如都为偶数,就可以用2来约简。又如《夏侯阳算经》卷上中说:"五者倍而折之。"意思是说一个分数的分子、分母的末位数字如果是5,就可以把分子、分母分别用2乘以后再用10除。如:

$$\frac{25}{35} = \frac{25 \times 2}{35 \times 2} = \frac{50}{70} = \frac{5}{7}$$
.

《九章算术》中引用的实例很多,现举两则如下。

例1 "今有程耕,一人一日发(翻土)七亩,一人一日耕(犁田)三亩,一人一日耰(yōu读优)种(播种)五亩。今令一人一日自发、耕、耰种之,问治田几何?"

这个题目是问,如果一个人又翻土,又犁田,还要播种,一 天能治田多少亩?它的解答是:

$$1 \div \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) = 7 \times 3 \times 5 \div (3 \times 5 + 7 \times 5 + 7 \times 3)$$
$$= 105 \div 71 = 1\frac{34}{71} (\vec{n}).$$

例 2 "今有竹九节,下三节容四升,上四节容三升,问中 间二节欲均容,各多少?"

假定竹子上细下粗,各节的容量成等差数列。以 $\frac{4}{3}$ 升为下三节每节容量的平均数,也就是下第二节的容量。以 $\frac{3}{4}$ 升为上四节容量的平均数。 $9-\frac{3}{2}-\frac{4}{2}=5\frac{1}{2}$ (节)。上下相离 $5\frac{1}{2}$ 节,两节容量的差数是 $\frac{4}{3}-\frac{3}{4}=\frac{7}{12}$ (升)。以 $5\frac{1}{2}$ 除 $\frac{7}{12}$ 升得相邻二节容量的差数 $\frac{7}{66}$ 升,也就是等差数列的公差。因而得下一节容量。为 $\frac{4}{66}$ 1、递减 $\frac{7}{66}$ 1升得依次各节的容量为 $1\frac{22}{66}$ 1升, $\frac{15}{66}$ 1升, $\frac{8}{66}$ 1升, $\frac{1}{66}$ 1升, $\frac{60}{66}$ 1升, $\frac{53}{66}$ 1升, $\frac{46}{66}$ 1升, $\frac{39}{66}$ 1升。

在外国,有关分数的最早记录,见之于公元前1700年左右

世界最古老的数学文献——阿姆斯纸草①(Ahmes Papyrus)中,已有一种表示分数的符号。它的方法是把分数化为单位分数——即分子为1的分数。由于单位分数的分子都是1,所以略去不写,而在整数上面加上一点,以表示此数的倒数。如

$$\frac{2}{5}$$
 记作 3 15, p $\frac{2}{5} = \frac{1}{3} + \frac{1}{15}$,

又如
$$\frac{2}{13}$$
记作 8 52 104,即 $\frac{2}{13} = \frac{1}{8} + \frac{1}{52} + \frac{1}{104}$.

不过这时分数还没有形成理论。到欧几里得时,把分数理解为两个可通约量的比,但并未把这个比值当作一个数。直到公元300年时,达·芬奇开始使用分数,这时分数才作为算术数出现。

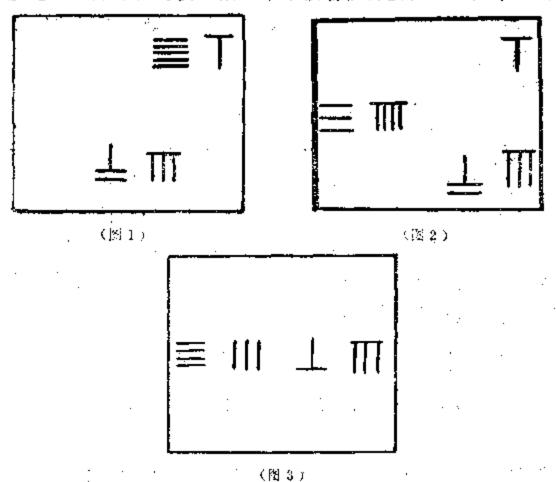
珠算的产生和发展

早在十四世纪,我国就有关于算盘的记载。十六世纪前后,出现了许多介绍珠算的实用书籍,说明那时珠算方法已在全国流传。

在发明算盘以前,古人是用算筹来记数和进行加、减、乘、除等数字计算工作的。《说文解字·竹部》中"算"字下面解释说:"算,从竹从具"。而"算"字在古时也叫做"筹",它是一种竹制(亦有木制、象牙制的)数字计算工具。使用算筹计算时,五以下的数目,用几根筹表示几,6、7、8、9四个数目用一根筹放在上面表示五,余下来的数,每一根筹表示一。表示数目的算筹有纵横两种方式。

若要表示一个多位数,象现在用数码记数一样,把各位的数字从左到右横列,但各位数字的筹式需要纵横相间,个位数字用纵式表示, 十位数字就用横式表示, 依此类推。《孙子算经》中把它概括成"十六字筹算法",即"一纵十横,百立千僵,千十相望, 万百相当。"所讲的就是这个意思。例如6614用算筹表示出来, 就是上下一川。运用算筹进行数的加、减、乘、除四则运算的法则和后来算盘运算方法是一样的。例如78×56,先布置

算筹如图 1,下数末位 [[和上数首位 三对齐。用上数首位 三乘下数首位 上,念"五七三十五",即置 三 [[[(3500) 于上、下数的中间。又以 三乘下数第二位 [[],念"五八四十",即以 [[(400) 并入前面已得的 三 [[],得 三 [[]。 去掉上数首位 三,将下数向右边移过一位,如图 2。以上数下乘下数各位,先得"六七四十二",



并入中间已得的数,得三川二,次得"六八四十八",并入已得的数,得三川上川。这时上下数可以完全去掉,只剩中间的4368,就是所求的乘积,如图 3。由上例可知,用算筹表数并进行运算,是比较麻烦的。

唐朝中叶以后,随着经济的发展,社会上实用算术的知识相当普及。由于我国数字都是单音节字,"九九"和"归除"等乘

除法口诀简明易记,运用方便,而在实际运用时,一方面口决念起来很快,另一方面手中的算筹用起来却不太灵便。算筹开始用时的长度约14厘米,摆一个上就占地约200平方厘米。南北朝时缩为4寸(约13厘米);隋朝时3寸(约10厘米);宋元间缩至1一3寸(约3.3厘米至10厘米)。一缩再缩,应用仍嫌太烦,正如懒真子所说,"算子约百余,布地上几丈长余。"如乘除法需要布列出三道筹码才能算出结果,往往是口算速度比它快。因此,在计算过程中,就产生"得心不能应手"的矛盾,筹算已不能适应形势发展的需要。人们根据这种情况,在实践中才逐步创造出算盘这样的工具来。

有关珠算最早的记载,见于公元 1366 年元末陶宗仪著的 《南村辍耕录》。在这本书的"井珠"条中记有这样的话:"凡纳 婢仆,初来时曰擂盘珠,言不拨自动。稍久曰算盘珠,言拨之则 动。既久日佛顶珠,言终日凝然,虽拨亦不动。此虽俗谚,实切 事情。"我们从中可以看到著者地主阶级的反动立场,同时也 可以估计到,元朝末年算盘已在江浙一带流行了。十五世纪 《鲁班木经》一书中记有制造算盘的规格:"算盘式:一尺二寸 长,四寸二分大。框六分厚,九分大,起碗底。线上二子,一寸一 分,线下五子,三寸一分。长短大小,看子而做。"然而,最早对 珠算进行系统介绍的是公元 1573 年明代徐心鲁的《盘 珠 算 法》, 公元 1578 年明代柯尚迁的《数学通轨》, 但以公元 1592 年明代程大位的《直指算法统宗》一书的内容较为丰富和完 整,流传也最广。关于算盘的构造,我国明代初年的算盘左边 有十四档,右边有十档,中间有一档空格,每档横梁上二珠代 表十,横梁下五珠代表五,这与现在所用算盘相比,仅仅档数 不同,其它则完全一样。如果单从十进制来说,在算盘横梁上

ø

仅需置一珠,横梁下仅需置四珠便足够了。之所以横梁上置二珠,横梁下置五珠,其主要原因之一是便于进行斤、两的计算。因为旧制1斤=16两,横梁上下算珠可以表示出十五两,如果再加一两,就可进位成斤。

由于算盘制作简单,计算迅速,普及到全国各地区、各阶层,在西洋笔算法没有传入我国以前,珠算是我国主要的计算方法。十七世纪初期(明代晚期)西洋笔算传入我国,当时并未引起人们的重视,十九世纪末废科举、兴学堂,笔算才得普遍推行。但因为珠算速度远胜于笔算,加减法甚至超过手摇计算机,所以现在珠算仍然是经常使用的算法,为人们广泛应用,在银行财贸各行业计算中更占优势。1980年3月20日,在北京召开的中国科学技术协会第二次全国代表大会上,有人表演了一种新的"电子算盘",把算盘和电子计算器的长处集于一体,做加、减法时,发挥算盘的作用;做乘、除法时,又利用电子计算器的作用。这是一种土洋结合、方便实用的新型的计算工具。

电子计算机的发展

自有人类以来,到处都离不开计算。为了计算,就得有一定的计算工具,人类的两只手就是一种原始的天然的计算工具。随着计算较大数字的需要,进位制又产生了,只靠两只手来计算就显得不够了,于是人们发明了筹算。但是,算筹由于摆弄不便,又为算盘所代替。这些,本书在前面已经谈到。

十五世纪以后,欧洲资本主义的发展,航海、天文、力学中 的计算问题日趋复杂,促使人们重视计算工具的研究和改革, 以加快计算的速度,减轻繁重的工作量。随着钟表业的产生和 发展,人们从中受到启发,钟表装置可以用齿轮传动来完成, 能不能用这种装置来制造计算工具? 1623 年, 法国人什卡尔 特在给开普勒的信中,详细介绍了他设计的一种计算机。加减 法分别由带有十个齿轮与相应的传动装置来进行,乘法要用 绕在转轴上的乘法表:除法则化成重复加减:进位机构是连接 轴上只有一个齿的辅助齿轮。可惜,什卡尔特设计的样机模型 还没有完成就被烧毁了。他的设计思想很少为人所知。公元 1642年,巴斯卡用一个个齿轮表示数字,并且经过适当地搭 配,使得表示较低位数字的齿轮每转动十圈,较高位数字的齿 轮就转动一圈,从而解决了进位的问题,制成了一台能做加、 减法运算的机器,这就是世界上第一台数字计算机。巴斯卡发 明手摇计算机,除了社会上的需要外,也受到家庭的影响。他 的父亲是家乡税务所的一个课税员,每天要处理大量帐目,计 算十分繁杂,这就促使巴斯卡设想制造一台计算机。1694年,莱布尼兹改进了巴斯卡的机器,使它不仅能做加减法,而且能做乘除法。

这种税额计算机以及后来经过改进出现的电动计算机, 使计算速度有了相当的提高,但是它们还存在着弱点,由于每 一个四则运算都离不开计算人员的亲自操作, 使得计算速度 的提高受到限制。而客观实际中所遇到的计算问题逐渐复杂、 运算量逐渐增大,运算的速度也要求提高,因而这种计算机已 经不适应形势的需要了。怎样改变这种手工操作的状况呢? 九世纪,英国数学家倍倍琪作出设想,并首先解决了这个问 题。傍傍琪从两件事中受到启发。第一件事,当时法国经过 大革命,已转入国内建设阶段,准备统一全国的度量衡,推广 土进制,打算改革的范围很广,甚至连周角也想从360°改为 400°、这样一来,原来很多数学用表都得重编。这个工作量很 大, 也很复杂。法国政府先请来好几位数学家, 研究制订编表 的方案,具体而细致地拟定了计算的程序和步骤;然后雇用上 百个计算人员,按照数学家设计的方案和程序进行计算,比较 顺利而迅速地完成了编表任务。倍倍琪想,是不是可以事先把 那些冗长繁复的运算程序规定好,先做什么,后做什么,然后让 机器代替人力,按照这样的规定逐步做下去,从而使计算自动。 化?第二件事,他从纺织工业的机械化中得到启示。人们身上 穿的花衣裳和床单上各种美丽的图案是怎样织出来的呢?原 来织布厂先把需要织的图案花纹刻在一张张卡片上,并把这 些卡片编成一条条链袋, 当链袋顺序通过纺织机的一个阅读 装置时, 机器就根据卡片上穿孔的位置在布匹上织出所需要 的图案。这里,卡片就代替了织布4产中的程序。倍倍琪借用。 这种方法研究和设计了用穿孔卡片来控制计算机的问题。倍 倍琪从十九世纪二十年代到三十年代,坚持不懈地研究了十 几年, 画了好几百张图纸,终于做出了一个机器模型。虽然当 时设计这个机器模型所用的原理是正确的,但由于技术条件。 的限制,这个机器模型始终运转不起来,最后被送进英国康辛 顿博物馆里,直到现在还在那儿展览;1890年,霍勒力斯根据 倍倍琪的这种设计,制造了一台机器,并把它用于美国人口 的普查工作。公元 1880 年,美国有五千万人口,当时还没有这 种计算机,因此普查用了七年半时间,统计还没有完毕; 1890 年,美国人口增长到六千二百万人,使用了霍勒力斯这台机器 加工有关数据,结果只用了两年时间就完成了任务,这确实是 一个很大的进步。到了二十世纪四十年代,这种程序控制的计 算机已发展到相当水平,如美国的 MARK I 计算机计算每 10 位数字的乘法只要 0.4 秒,比台式机快 25-40 倍。但是,由于 它们还是用电动机械装置,而不是电子装置,因此计算速度的 提高仍然受到很大的限制。

二十世纪四十年代中期,由于空间技术和原子能技术等近代科学的发展很快,出现的计算问题更为复杂,原有的数字计算机已不能满足需要。这时,电子理论、自动控制和近代工业技术有了高速发展,这就使研制电子计算机不仅有迫切的需要,而且客观上也有了可能。1945年,世界上第一台电子数字计算机"埃尼阿克"(ENIAC)诞生了,它每秒钟可以做5000次加法,或者500次乘法,或者50次除法,比起以前的计算机,效率提高了约1000倍。用原来最快的机电式计算机计算两小时的工作量,用"埃尼阿克"只要3秒钟就可以完成。当年12月这台机器开始运行,1946年2月就正式交付使用。"埃尼

Ð

阿克"的出现,在计算机的发展史中是一个突破,但是矛盾还是存在的。首先,它没有真正的内存储器,只能存储处理 20 个数字,计算结果无处可存,只得把数据输出以后穿在卡片上重新再输入。这样,计算一道题虽然只需要 2 分钟,但穿卡片却要花去 28 分钟,浪费的时间太多。其次,"埃尼阿克"机身庞大,共有 18000 个真空管,70000 个电阻,10000 个电容,6000个开关,体积达 90 立方米,有六个房间那么大,重 30 吨,运行耗电达 140 千瓦。大量的计算要由人象搭积木一样搭成各种解题布局,每换一道题就要重新来搭,这样很费时间。因此,如何能使计算程序自动化,则是进一步突破电子计算机计算速度的一个急待解决的问题。

人们经过研究,对"埃尼阿克"进行了改造,采用一种设备做内存储器,使大量存储信息成为可能。并且设计了运算器和控制器两种部件。控制器负责查阅已存在内存储器中的程序,判断计算人员要计算机做些什么事,然后逐件交给计算机各部件去处理,其中有关计算部分就交给运算器去处理。把程序存储在计算机里,这是一个很大的改革。

近三十年来,电子数字计算机的发展大约经历了四个阶段,通常称为"四代"。第一代从1946年到1956年,是电子管数字计算机时代。第二代从1956到1962年,是晶体管数字计算机时代。第三代从1962年开始,称集成电路数字计算机时代。第四代从七十年代初期开始发展,称为大规模集成电路数字计算机时代。根据1977年美国《新科学杂志》(1048期)登载的消息,美国"ENIACIV"型超大规模计算机运算的速度是每秒1亿5000万次,据说最好的可工作到每秒3亿次。这种超大规模计算机正用于跟踪深海潜艇以及从假目标中找到

真正的导弹。除这些军事应用外,还能考虑用于研究全球天气模型、等离子物理等方面。

美国是目前世界上电子计算机工业最发达、技术最领先的国家。世界最大的电子计算机系统,安装在美国贝尔电话公司,它所承担的工作量要由美国的三分之一人口才能完成。美国现在应用电子计算机的领域已超过三千个。有人估计,美国现在电子计算机完成的工作量,需要四千亿人才能完成,而且有些由电子计算机完成的工作,人工根本是无法进行的。

我国党和政府十分重视电子计算机的研制和生产工作。1956年,在十二年科学发展规划中,就把计算机的研制列为重点内容。1958年试制成功了我国第一台数字计算机,速度是每秒1万次,填补了我国计算机工业的空白。1959年又生产了DJS-2型大型电子管数字计算机。电子工业的发展,把电子计算机的研制和生产推向一个新的阶段。1934年起,先后研制并生产了多种晶体管数字计算机,速度达每秒10万次。从此,我国电子计算机跨进了第二代。1971年研制成功每秒运算速度为10多万次的集成电路数字计算机,标志着我国计算机技术进入了第三代。1973年,我国又研制了每秒100万次数量级的DJS-11和TQ-6大型集成电路数字计算机。1974年,进而研制成DJS-130小型多用高级台式电子计算机。现在,我国的计算机研制正朝着系列化的方向前进。

目前,不论是宇宙航行、热核爆炸、气象预测、资源勘探、工业设计、水力利用、机械制造、自动控制,以及制订经济、科研计划和工厂、企业管理等方面,无不需要用到电子计算机。电子计算机在国民经济和科学研究事业中越来越发挥它的重要作用。最近,我国著名数学家吴文俊在应用电子计算机进行

数学论证的研究方面,取得重要成果,受到国际数学界的普遍重视。电子计算机在已经解决数学中繁杂运算的基础上,又将为解决数学中另一难点——推理论证作出贡献。

负数的引入

现在,小学五年级学生学习"有理数"并没有太大的困难,因为在现实生活中,负数有着广泛的应用。例如,世界最高处是喜马拉雅山珠穆朗玛峰,它的高度是8848米,世界最低处是太平洋西部的马里亚纳海沟,它的深度是11034米。如果以海平面的高度为0,则珠穆朗玛峰的高度可写成+8848米,马里亚纳海沟的深度可用-11034米表示。又如,下表是某粮站某月上旬十天粮食进出的数字,(单位,斤)

Ħ	期	1	2	3	4	5	6	
读	入	+ 18000						
呰	莊	-2100	- 2360	- 1860	- 2000	- 2200	- 1900	
日	期	7	8	9	10	小	ग ि	
ų́с	入	+ 13000				+ 31000		
售	. Щ	- 1800	- 2300	- 2000	- 2100	- 20500		

这里,"+"表示进仓的粮食斤数,"-"表示售出的粮食斤数。 从表中可以清楚地看出每天粮食的流动状况,要想知道结存 数也是很容易的。我们还可以举出很多这样的例子。

今天,负数的应用是如此广泛。但是,古时负数的引入,并不是一帆风顺的,在国外却经历了半个多世纪艰难曲折的过程。公元十二世纪,印度一些数学家在计算中已采用负数。如公元1150年,印度人巴斯卡洛(Bhaskara)在求根时就用到负

数。当时,人们对计算财产的收益与负债,计算相反方向的距离等具有相对意义的正负量,已有所了解,并有所运用。但尽管如此,负数并没有作为一种数为大家普遍承认,计算中一遇到负数,往往就被"另眼看待",最后被摒弃于数的大家庭之外。在欧洲,文艺复兴时期,负数也开始被采用,但人们对它的看法仍有不同意见。例如,十六世纪法国著名数学家韦达(1540—1603年)遇到方程式的负根也都弃去。德国人斯梯弗尔在1544年把负数称为"荒谬",他说:自零减去零上实数所得为"无稽的零下"。直到1637年,由于生产的发展对变量研究的需要,法国数学家笛卡儿发明了解析几何学,创立了坐标的观念,负数、零与正数所组成的有序实数对与平面上的点建立了对应关系,使抽象的负数获得实际的解释。从此,确立了负数在数学中的地位,它逐渐为人们所公认。

我国历史上对负数的研究有着独特的、光辉的成就,在《九章算术》这部古老的数学书中,就记有正、负数的概念和有理数的加减法运算法则。在"方程"章中,刘徽有这样一个"注解":"两算得失相反,要令'正'、'负'以名之。"意思是说,在布列方程时,由于所给数量可能具有相反的意义,因而引起正负数的概念。例如,"方程"章第四题就引入了负数:"今有上禾五粮,损实一斗一升,当下禾七秉……。"这里,"损"就是"损失","当"就是"相当"的意思。假设x、y分别为上禾、下禾各一秉的升数,根据题意便可列得方程

5x - 11 = 7y.

移项即得

5x - 7y = 11.

这里就出现了负数。古时布列方程和解方程都用算筹计算。刘

徽在注解中对算筹的颜色和布列的位置又给以明确的规定, 区分正数和负数。他说:"正算赤,负算黑,否则以邪(斜)正为异。"意思是说,用红色的算筹表示正数,用黑色的算筹表示负数。或者用正列的算筹表示正数,斜列的算筹表示负数。

《九章算术》中不仅引入了负数的概念,对有理数的加、减法法则也规定得很清楚:"正、负术日,同名相除,异名相益。正无入正之。其异名相除,同名相益。正无入正之,负无入负之。"这里,"同名"、"异名"就是我们今天所说的"同号"、"异号","除"和"益"就是"减"和"加"。书中后四句是讲有理数的加法法则。意思是说:两数相加时,若二数同号,则和数的绝对值等于二数绝对值的和,二数异号时,则和数的绝对值等于二绝对值的差。二数异号时,对数取负号。书中前四句是讲有理数的减法法则。意思是说:两数相减时,若二数同号,则差数的绝对值等于二数绝对值的差;二数异号时,则差数的绝对值为二数绝对值的和。减去的数如是正数而大于被减数,差数得负号;减去的数如是负数而绝对值大于被减数的绝对值,差数得正号。

刘徽注《九章算术》的时间是公元 263 年,当时,由于解方程的实际需要,就提出了正负数的概念和有理数的加减法法则,比外国最早出现负数概念还要早八九百年,这在数学发展史上实在是一个非常伟大的成就。

<u>ج</u>ہ ج

到了元朝,数学家朱世杰在《算学启蒙》(公元 1299 年)这本书中,对有理数运算法则又有了发展。他说:"明正负术:其同名相减,则异名相加,正无入负之,负无入正之;其异名相减,则同名相加,正无入正之,负无入负之。"朱世杰在这里把

《九章算术》中有理数加减法法则里的"除"字改为"减"字,"益"字改为"加"字,与我们今日文字更近,使人看了明白易懂。朱世杰还提出有理数乘除法法则:"同名相乘为正,异名相乘为负。""同名相除所得为正,异名相除所得为负。"和我们今天的说法也基本上相同。

导出单位的应用

"数学是数量的科学"。(恩格斯《自然辩证法》)客观世界里存在着多种多样、千奇万变的量,为了研究这些量以及它们之间的关系,首先得学会如何度量这些量,这就需要确定各种单位,作为度量这些量的标准。古往今来,不同的国家、不同的民族,曾经创造了很多单位,以满足人们实践的需要。随着科学的发展,生产力的提高,交通的发达,人类的生活空间"缩小"了,交往关系逐渐密切了,那种在单位制应用中表现出来的各自为政、各行其是的状况,必须改变。1948年,第九届国际计量大会责成国际计量委员会研究制定一整套计量单位规则。1954年,第十届国际计量大会决议将长度、质量、时间、电流强度、热力学温度和发光强度等六个量的单位规定为"实用单位制"的基本单位。1960年,第十一届国际计量大会决议,把这种实用单位制的名称定为国际单位制。到了1971年第十四届国际计量大会上,又决定增加"物质的量"这个单位,使"国际单位制"增加到七个。现将这七个基本单位列表简介如下:

国际单位制基本单位

量	名 称	代 号
长度	*	m
质量	千克(公斤)	kg
时间	秒	S
电流强度	安培	A

热力学温度

开尔文

К

物质的量

摩尔

mol

发光强度。

坎德拉

 cd

有了单位,量的计量问题解决了。但是,量与量之间又往往不是孤立存在的,它们之间存在着直接与间接的联系。反映在数学上,就常常需要将两个或两个以上的量相乘除,这就出现了导出单位的问题。所谓导出单位,又叫做诱导单位,是指两个或两个以上具有可乘性或可除性的量,经过乘或除后产生的新的复合单位。

导出单位日常应用很多。如"工作日"是指一人一天所做的工;"吨公里"表示一吨物质移动一公里所做的功;"千瓦小时"是指一小时能作一千瓦特的功的电量,平常我们讲的"1度电"就相当于一千瓦的用电器工作一小时所消耗的电能;其它如"人次"、"架次"等导出单位也是常见的,不少数学书中都介绍过。

随着科学技术目渐发达,对导出单位的需要越来越多,导出单位的内容和形式也越来越复杂。与规定国际基本单位一样,又逐渐产生一个如何在国际范围内统一导出单位的问题。在 1960 年国际第十一届计量大会上, 根据这种客观需要,制定了由基本单位根据选定的联系相应量的代数式组合起来构成的导出单位。它的内容可以分为以下三种;

第一种 由国际基本单位表示的国际单位制导出单位。 如面积,单位名称为"平方米",代号是 m³;体积,单位名称为 "立方米",代号是 m³。面积、体积这两个国际导出单位是数 学中常用的求积单位,其中体积单位是三个同类量相乘的结 果。其它如速度,名称为"米每秒",代号为 m/s,是"距离" 与"时间"两个量的商;加速度,名称为"米每平方秒",代号为m/s²,是"速度"与"时间"的商,是经过两次除法运算得到的单位,密度,名称为"千克(公斤)每立方米",代号为kg/m°等等。这些导出单位都是中学物理中常用的单位。

第二种 具有专门名称的国际单位制导出单位。如压力,名称为"帕斯卡",是每平方米上受力的牛顿数,用符号 N/M²表示,功率,名称为"瓦特",是指单位时间里所做的功,它的单位往往用 kg·m/s 表示,这些都是物理学中常用的单位。

第三种 是由上述"专门名称"表示的国际单位制导出单位。如比热,名称是"焦尔每千克摄氏",是指单位质量的某种物质在温度升高1℃时所吸收的热量,它的单位是卡/克·度(读做卡每克每度)和于卡/公斤·度(读做于卡每公斤每度)。其它如"力矩"(牛顿·米,N·M),"电场强度"(伏特每米,V/m)等等,也都是物理学中常用的单位。

人类对客观世界的认识是无止境的,新的量以及作为度量这些量的标准的单位将不断地产生,导出单位的需要也将越来越多。

建国以来,我国计量工作有了很大的发展。1955年成立了国家计量局。1959年,国务院发布了《统一计量制度的命令》,计量制度基本上达到了统一,改变了旧中国计量制度的混乱局面。1977年5月27日,国务院颁发的《中华人民共和国计量管理条例(试行)》的通知中,明确规定我国基本计量制度是米制,并逐步采用国际单位制。1979年,经国务院批准,我国成立了"国际单位推行委员会",进一步宣传和推行颁布的"条例",使计量工作更好地为四个现代化服务。

学习因式分解的必要性

因式分解虽然"以极度抽象的形式出现",不易直接联系实际,但"这只能在表面上掩盖它起源于外部世界的事实"。(恩格斯《反杜林论》)它所表现的代数式的恒等变形,是客观世界数量关系的抽象反映;所得出的规律,就是适应数量运算的需要,因而最终也是为实践服务的。

因式分解最重要的用处是约分和通分。

例如,当
$$x = -\frac{7}{10}$$
, $y = \frac{1}{2}$ 时,求分式 $\frac{5x^3 + x^2y}{25x^2 + 10xy + y^2}$

的值。解时,应先化简分式:

$$\frac{5x^3 + x^2y}{25x^2 + 10xy + y^2} = \frac{x^2(5x + y)}{(5x + y)^2} = \frac{x^2}{5x + y}.$$

然后代入计算

$$\frac{5x^{3} \div x^{2}y}{25x^{2} + 10xy + y^{2}} = \frac{x^{2}}{5x + y}$$

$$= \frac{\left(-\frac{7}{10}\right)^{2}}{5\left(-\frac{7}{10}\right) + \frac{1}{2}} = \dots = -\frac{49}{300}.$$

显然,如果不先将分子、分母因式分解,进行约分,直接将×、 y值代入,运算是很繁的。

再如,分式加减,需要通分,而通分首先要将分母因式 分解。如

$$\frac{5}{x^2 + 4 - 4x} + \frac{8}{4x - x^3} - \frac{5}{x^2 - x - 6}$$

$$= \frac{5}{(x - 2)^2} - \frac{8}{x(x + 2)(x - 2)} - \frac{5}{(x + 2)(x - 3)}$$

$$= \frac{5x(x + 2)(x - 3) - 8(x - 2)(x - 3) - 5x(x - 2)^2}{x(x + 2)(x - 2)^2(x - 3)}$$

$$= \frac{7x^2 - 10x - 48}{x(x + 2)(x - 2)^2(x - 3)}$$

$$= \frac{(x + 2)(7x - 24)}{x(x + 2)(x - 2)^2(x - 3)}$$

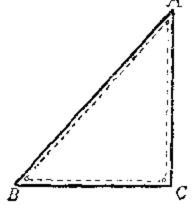
$$= \frac{7x - 24}{x(x - 2)^2(x - 3)}$$

因式分解还可以用于速算。

如右图零件上 A、B 两孔的距离为 59.8mm,B、C 两孔的距离为 40.2mm, $\angle ACB$ 是直角,加工时需计算 AC 的长,由勾股定理可推得

$$AC^2 = 59.8^2 - 40.2^2$$

= $(59.8 + 40.2)(59.8 - 40.2)$
= $1960.$



查平方根表,得 AC 的长为 44.3 毫米。这类问题是常见的。 在这里,运用因式分解进行速算的优越性是明显的。

解高次方程,有时应用因式分解比较方便。 例如,要解方程 x³=8,可以移项、因式分解,得

$$(x-2)(x^2+2x+4)=0$$
.

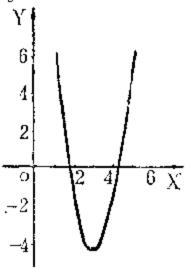
由
$$x-2=0$$
, 得 $x_1=2$.

由
$$x^2 + 2x + 4 = 0$$
, 得 $x_2 = -1 + \sqrt{3}i$, $x_3 = -1 - \sqrt{3}i$.

讨论函数时,有时也需要因式分解。

如欲讨论函数 $y = 3x^2 - 17x + 20$ 中自变量 x 的取值范围,使(1) y > 0, (2) y < 0,可以先将 $3x^2 - 17x + 20$ 因式分解,然后很容易看出所求数值的范围。

$$y = 3x^{2} - 17x + 20$$
$$= 3\left(x - 1\frac{2}{3}\right)(x - 1).$$



] x = 1 ² / ₃	x - 4	$2\left(\left x+1\right ^{2}_{3}\right)\left(\left x-a\right \right)$
$x < 1^{\frac{2}{3}}$	<u>-</u>	-	+
$1 \cdot \frac{2}{3} < x < 4$		·	
x > 4	! +	+	+

求分式函数的极限,需要先化简分式。

如要求 $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$. 不能直接把 x=3 代入分式,因为 当 x=3 时,分式的分子分母均为 0,分式属不定型。需要先将 分母因式分解,经过约分,然后才能代入。 即

$$\lim_{n \to 3} \frac{x-3}{|x|^2 - 9} = \lim_{n \to 3} \frac{x-3}{(x+3)(x-3)}$$
$$= \lim_{n \to 3} \frac{1}{|x+3|} = \frac{1}{6}.$$

这里和上面所讲简化分式运算情况不同。前例x、y为常量,直接代入仍可以算,不过繁杂一些而已。而本例 x 为变量,不能直接代入,否则分式就出现不定型了。

在求分式的积分时,如果分式可以化为若干个部分分式 的和,则往往先要进行这样的变化,然后再求其积分。

例 求
$$\int_{-x^3+4x}^{4dx}.$$

$$\mathbf{R}$$
 \diamond $\frac{4}{x^3+4x} = \frac{4}{x(x^2+4)} = \frac{a}{x} + \frac{bx+c}{x^2+4}$.

两边去分母,得 $4 = a(x^2 + 4) + (bx + c)x$.

再分別令
$$x=1,-1$$
,代入得方程组 $\begin{cases} b+c=-1,\\ -b+c=1. \end{cases}$

解之、得 b=-1, c=0.

将 a 、b 、c 的值代入,得所求部分分式为 $\frac{1}{x} = \frac{x}{x^2+4}$.

我们还可以举出不少类似的例子,说明因式分解的重要性。由此可知,大量数学计算的实践向我们提出如何使计算更加正确、迅速与合理的问题,因式分解正是适应这种需要而产生的一种数学计算方法。

数学方程式是从哪里来的?

数学方程式是从哪里来的?客观世界中存在着各种各样的物质运动,人们在实践中逐渐认识了这些物质运动规律,而这些运动规律反映在数量关系上,就常常需要应用数学方程式来解决问题。所谓"古典代数"这个名称,主要就是研究方程的解法。甚至"代数"这个名字的出现,也是和解方程不可分割的。公元九世纪,在花剌子模数学家和天文学家穆罕默德·伊本·穆斯·阿里一花剌子模的著作中,把"代数"称作"al-Jabrw-al Mugabalab"。这里,"al-Jabrw"意思是"整理","al-Mugabalab"意思是"对比",两词合在一起,就是把方程中的负项移至方程的另一边,并把两边相同的项消去的意思。阿拉伯字"al-Jabr"翻译成拉丁文就是 Algebra,寻求方程的解法,促使古典代数的不断发展。近世代数所研究的某些集合元素的运算,也是和解方程与方程组紧密关联的。因此,数学方程式是研究物质运动中数量关系的产物,它是解决生产中很多实际问题的一种有力的工具。

根据史书的记载,方程最初的产生是和农业生产紧密联系的。我国最古老的算经之一《九章算术》第八章"方程",第一个问题就是计算粮食的问题:"今有上禾三乘,中禾二乘,下禾一乘,实三十元斗,上禾二乘,中禾三乘,下禾一乘,实三十四斗;上禾一乘,中禾二乘,下禾三乘,实二十六斗。问上、中、下禾实一乘各几何?"这里,"禾"指的是黍米,一"乘"指的是

一捆黍米,"实"是打下来的黍米谷子。那时一"斗"的量约等于现在的两升。这实际上就是今天的解三元一次方程组问题。宋杨辉《田亩比类乘除捷法》(公元 1275 年)书中有一题,"直田积八百六十四(方)步,只云阔不及长一十二步。问阅及长各几步?"这实际上就是今天的解一元二次方程问题。

隋唐统一中国后,展开了修长城、开运河等大规模的工程 建设,对于数学知识和计算技能提出了比以前更高的要求。当 时数学家王孝通总结了土木工程中计算土方、容量等的经验 所写成的《缉古算经》(公元626年后几年的著作),应用了三次 方程来解决工程上存在的问题,取得了辉煌的成就。该书第二 题是建筑天文台的问题,其第一部分是"假令太史造仰观台, 上广袤少,下广袤多,上下广差二丈,上下袤差四丈,上广袤差 三丈,高多上广一十一丈。甲县差一千四百一千八人,乙县差 三千二百二十二人,夏程人功常积七十五尺,限五日役台毕。 问台道广高袤及县别给高广袤各几何?"原意是说:"掌理历法 的官要造一座天文台,这台的下底和上底都是长方形,下底的 长和阔大于上底的长和阔。上下两阔的差为2丈,上下两长的 差是 4 丈, 上长和上阔的差是 3 丈, 高比上阔多 11 丈。这台由 甲、乙两县建造,甲县派 1418 人,乙县派 3222 人,夏天每人可 造成75立方尺的体积,在限期 5 日内恰巧造完。问这座天文台 的高、上阔、下阔、上长、下长各多少?"设上底阔为×,则上底 长及下底阔与长与棱台的高分别为x+3、x+2、x+7、x+11, 应用求积公式得三次方程式:

$$x^3 + 170x^2 + 7166\frac{2}{3}x = 1677666\frac{2}{3}$$
.

解得上阁x = 70尺,下阁为70尺 + 20尺 = 90尺,上长70尺

+ 30尺 = 100尺,下长 100尺 + 40尺 = 140尺,高 70尺 + 110尺. = 180尺。

公元 1248 年,宋朝数学家李冶在他的《测圆海镜》卷七的 第二题中,提出一个用四次方程解的问题:"假令有圆城一所,

不知周径。或问丙出南门直行一百三十五步而立,甲出东门直行十六步见之。问径几何?"

设 EA=a, FB=b, 依题意列得方程

$$-x^{4} + 4abx^{2} + 2ab(a+b)x + (ab)^{2}$$

= 0,

以 a=135, b=16 代入得

$$-x^4 + 8640x^2 + 652320x - 4665600 = 0$$
.

E

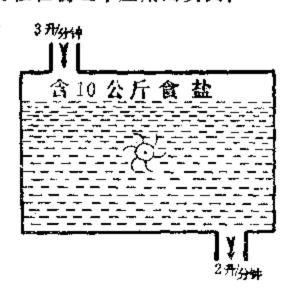
解这个方程,求出它的正根 x = 120 步,即城的半径。

随着生产的发展,人们对高次方程的研究越来越复杂。公元1801年,新世纪的第一天,意大利人皮雅齐在帕勒莫发现了谷神星,引起德国数学家高斯对天文学的兴趣。高斯为了计算出谷神星的运行轨道,对它进行了观测和研究,并由此得出一个八次方程需要解决。

十七世纪,资产阶级为了掠夺殖民地,在欧洲和美洲之间进行着频繁的远洋航行,在一望无际的海洋上,船舶的位置难以确定,曾因此发生多起海难事故。于是航海定位问题便引起普遍的重视。当时人们发现,观测月球的位置,可以帮助解决这个问题。为此,就需要精确地计算出月球运行的轨道,这就推动了天体力学的研究,提出了质点在引力作用下的运动轨道间题,从而引出了微分方程式的问题。当时,除了天体力学

中的问题之外,在钟摆的研究和望远镜透镜的设计中,也都提出了微分方程的问题。所以,和其它方程式一样,微分方程也是从实践中产生的。在现代的科学技术中,从飞机设计到桥梁建造,从矿藏勘探到气象预报,从缓慢燃烧到热核反应,从电子运动到星体演化,都需要用到微分方程式,从数量上作出分析。下面,我们举一个微分方程在物理中应用的实例。

设一容器内有 100 升溶液,其中含10公斤净盐。岩以 每分钟 3 升的均匀速度把涂 每分钟 3 升的均匀速度把淡 水注入容器内使溶液冲均匀速 度使溶液出。在溶液均匀度 度使溶液出。在溶液内可 以认为溶液的浓度在任何时 刻都是均匀的。现在要求过



程开始一小时后溶液内还有多少净盐?这就是一个微分方程的问题,用初等数学是不能解决的。设任一瞬时 t (第 t 分钟)容器内含盐量为 x 公斤,根据微分知识,可以得到微分方程

$$\frac{dx}{dt} = -\frac{2dt}{(100+t)^3}.$$

解这个微分方程,得 $x = \frac{c}{(100+t)^2}$.

当 t = 0 (即开始)时, x = 10(公斤), $c = 10^5$.

以
$$t = 60$$
 代入,得 $x = \frac{10^5}{(100+t)^2} = \frac{10^5}{160^2} \approx 3.9$ (公斤)。

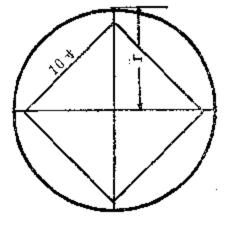
二 当过程开始后一小时,溶液内还有 3.9 公斤盐。

π和e的实际意义

古时候,人们在治水防洪、架桥建屋、制造工具等实践过 程中,往往需要研究一些几何图形的性质,尤其是直角三角形 的性质,这是无理数概念导入的根源。公元前550年,希腊数 学家毕达哥拉斯(Pythagras)发现在直角三角形中,两直角边 的平方和等于斜边的平方,西方把它称为毕氏定理(即我国更 早就发现的勾股定理)。传说毕达哥拉斯发现此定理时十分高 兴,曾杀猪宰牛,广宴宾客,以志庆贺。在应用勾股定理求直角 三角形的某一边时,必然要把一个数开平方,而开平方可能开 得尽,也可能开不尽,开不尽就出现了无理数。不过那时对无 理数的研究还局限于几何方面,至于无理数的普遍概念则并 未建立。公元十六世纪后期,人们在研究小数时,发现有理数 化小数,不外有限小数和无限循环小数两种。很自然就想到, 无限不循环小数属什么数?进而用无限不循环小数来表达无 理数。既然无理数是无限不循环的小数,在运用时我们不可能 取"无限"位小数,因而又需要进一步研究用有限小数近似表 示无理数的问题。十九世纪中叶,数学家玛洛(M'eray)、 威尔 斯特拉斯(Weierstrass)、戴地金(Dedekind)、康托(Contor) 先后以不同的形式研究了无理数,这时无理数的理论基础才 开始奠立。

无理数分根数与超越数两种,下面我们简单介绍一点中 学数学中的两个重要的超越数—— π 和 e 的实际意义。 我国历史上对圆周率式的研究,是有卓越成就的。根据历史学家的考证,早在夏代以前原始部落时期,就有圆形的建筑物,它如制作车轮和一些圆形器皿,都需要研究圆周长和直径的关系。但秦汉以前,人们在运用中一直取"径一周三",把圆周率看成是3。后人在长期实践中发现,以3作为圆周率误

差过大,认识到"圆径一而周三有余",但"余"多少?需要进一步研究。西汉末年,王莽命刘歆(公元前50—23年)议订度量的新标准。刘歆于公元1—5年仿照周礼制作了一种铜斛,叫做"律嘉量斛"。斛上面写着:"律嘉量斛,方尺而圆其外,施



(tiāo 音佻)旁九厘五毫,幂百六十二寸,深尺,积千六百二十寸,容十斗。"这里,"庣"的定义是:"庣者,内方斜径与外圆径之较也。"即:圆直径减去正方形的对角线,等于两倍庣长。根据刘歆的说明,可以作如下的推算。(单位为尺)

斛的直径 = $\sqrt{2} + 2 \times 0.0095 = 1.4332(尺)$,已知圆的面积为 1.62 (平方尺),设圆半径为 r ,则有

$$\pi r^2 = 1.62$$
, $\mathbb{P} \left(\frac{1.432}{2} \right)^2 = 1.62$,

$$\pi = \frac{1.62 \times 4}{(1.4332)^2} = 3.1546645 \cdots = 3.1547.$$

刘歆所得数值的精确度不高,但却是我国圆周率发展史上与古率"径一周三"最早不同的记载。三国时,魏人刘徽于公元 263年用圆内接正多边形逐渐接近圆的方法,依次求得 圆的 正六、十二、二十四、四十八、九十六、一百九十二边形的 面 刘徽的这个数值比之刘歆所得要精确,他在应用时还特别声明:"此率尚微少",意思是π的不足近似值。刘徽对π的推算是对人类的一大贡献,后人为了纪念他,就把这个数值称之为"徽率"。到了南北朝,伟大的数学家祖冲之(公元429—500年)对π的推算,在国际上达到空前的高峰。他的推算结果是

$$3.1415926 < \pi < 3.1415927.$$

并得密率 $\pi = \frac{355}{133}$,约率 $\pi = \frac{22}{7}$ 。在世界上,计算圆周率精确到小数七位的,祖冲之是第一人。后人称为"祖率"。外国对圆周率研究的成果,要比祖冲之迟一千多年。

在近代,计算π的值是用微分学的知识,将反正切函数表为幂级数的形式:

arctg
$$x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + \dots$$

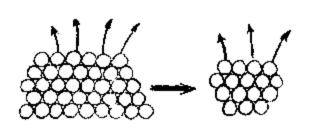
我们知道arctg 0 = π。这就是说,在等式中, x 的取值越小,所得 π 的值越精确。公元 1873 年, 英国人向克斯就是利用无穷级数的方法, 把 π 算到小数点后 707 位数值。当时还没有计算机, 这项工作几乎消磨了他的一生时光, 这种精神和毅力是令人钦佩的。在他死后, 人们在他的墓碑上刻着 π 的 707 位值, 以纪念他的功绩。后来, 人们在电子计算机上, 只花了 8 个多小时就算出 π 的 十万位小数。

α的超越性,首先是由 1882年德国数学家林德曼 (Ferdinard Lindemann)证明的。而自然对数底 e 的超越性,则在这以前,1873年由浩密特(Hormite)给出的。下面我们

介绍一点有关e的实际意义的资料。

放射性元素是热核爆炸中需要用到的一种材料。由于放

射性元素不断放射出原子核 里面的各种微观粒子,变成 其它原子,所以它本身的原 子数也就不断减少,这种原 条则衰变。放射性元素经过 衰变,其原子减少的数量和 时间长短存在以下的函数关 系:



t 时,放射性元素 共有N个原子

1+△1財,还有 N-λN△t个原子

放射性元素衰变示意图

$$N = N(I)$$
.

这里 t 表示时间,N 表示原子数。由实验知道,在极短的一段时间($\triangle t$)内,原子数N的变化($\triangle N$),与这时的原子数N以及这段时间 $\triangle t$ 成正比,即

$$\triangle N = -\lambda N \triangle t.$$

这里, λ 叫做衰变常数,它所以取负号,是因为放射性元素经过衰变,原子数不断减少, $\triangle N$ 应该是负值。

现在计算经过时间 t 后,放射性元素还有多少原子。设开始时原素有 N。个原子,并把时间 t 分为 n 等分,分别求出时

间
$$\frac{1}{n}t, \frac{2}{n}t, \frac{3}{n}t, \dots t$$
 时原子的数目。则

$$N_{1} = N_{0} + \triangle N_{0} = N_{0} - \lambda N_{0} \triangle t = N_{0}(1 - \lambda \triangle t),$$

$$N_{2} = N_{1} + \triangle N_{1} = N_{1} - \lambda N_{1} \triangle t = N_{1}(1 - \lambda \triangle t)$$

$$= N_{0}(1 - \lambda \triangle t)^{2},$$

$$N_{3} = N_{2} + \triangle N_{4} = N_{2} - \lambda N_{2} \triangle t = N_{2}(1 - \lambda \triangle t)$$

$$= N_{0}(1 - \lambda \triangle t)^{3},$$

 $N_n = N_{n-1} + \triangle N_{n-1} = N_{n-1} - \lambda N_{n-1} \triangle t$ = $N_{n-1}(1 - \lambda \triangle t) = N_0(1 - \lambda \triangle t)^n$.

现在我们来求当 $n \rightarrow \infty$ 时, N_n 的极限:

$$\lim_{n \to \infty} N_{n} = \lim_{n \to \infty} N_{0} (1 - \lambda \triangle t)^{n} = N_{0} \lim_{n \to \infty} (1 - \lambda \triangle t)^{n}$$

$$= N_{0} \lim_{n \to \infty} \left(1 - \lambda \frac{t}{n}\right)^{n} = N_{0} \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n}$$

$$= N_{0} \lim_{n \to \infty} \left[\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda t}}\right]^{-\frac{\lambda t}{\lambda t}}$$

$$= N_{0} \left\{\left[\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-\frac{n}{\lambda t}}\right]^{-\frac{\lambda t}{\lambda t}} = N_{0} e^{-\frac{\lambda t}{\lambda t}}.$$

这里用到数学分析中的一个重要极限 $\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$ 。因而得到放射性元素衰变的基本规律是 $N(t) = N_0 e^{-\lambda t}$ 。所以,e和 π 一样,也是从生产过程和科学实验的大量实际问题中抽象出来的。

函数概念的形成与发展

在封建社会里,由于生产水平不高,人们对数学的需要停 留在常贵数学范围内。到了十六、十七世纪,随着资本主义国 家的兴起,机械、天文、航海和弹道学的大量实践活动纷纷对 数学提出新的要求,常量数学已经远远不能满足客观需要了。 加上当时欧洲的一些资本主义国家,为了积累资本,不满足于 剥削本国的劳动人民,竭力发动侵略战争,向外扩张,掠夺殖 民地。要向海外发动侵略战争,首先需要发展造船、军火等工 业以及航海事业。据说在十八世纪, 法国海军之所以强大, 就是由于造船家在制造巡洋舰和主力舰时充分运用了数学原 理。当时欧拉的很多研究成果就被直接应用到陆军和海军中 去。为了发展航海事业,迫切需要确定船只在大海中的位置, 船只在地球上的经纬度,就推动了对天体运行的研究,要进 行战争,也需要研究如何才能使炮弹打得准确的问题,这就 促使对"弹道学"的研究。当时象意大利、英格兰、荷兰等资本 主义比较发达的西欧国家,相继出现了一批著名科学家,他们 以劳动人民生产实践经验为基础,结合实际提出的具体任务, 进行科学实验研究工作。如达·芬奇和伽利略等研究了斜面 与一般静力学问题:卡但、伽利略等研究了自由落体和抛射运 动,斯台汶、伽利略、托里拆利等研究了流体、空气力学:伽利 略研究了天体运动规律。总之,社会多方面的实践需要人们 对各种"运动"进行研究,对各种运动中的数量关系进行研究, 这就为函数概念的产生提供了客观上实际的基础。后来,留卡儿引入了变数,解析几何创始了,并随之由牛顿和莱布尼兹完成了微积分的学说。这时,反映和刻划数量关系的函数已大量消现,但函数的一般定义尚未形成。

十七世纪末,莱布尼兹首先用了"function"一调。不过, 当时这个词是用来表示"幂"、"坐标"以及"切线长"等概念, 意义是含糊的。到 1718年,函数被看成是用以由主变量的值 求出因变量的值的解析式子。当时达朗贝尔就是这样下定义 的:"所谓变量的函数,就是指由这些变量和常量所组成的解 析表达式。"1748年欧拉又把函数定义为几何上"能用曲线表示的"这一属性,即:"函数就是一条随意可以描画的曲线"。以上两种定义就是我们现在中学代数中函数的解析法和图象 法。它们都没有揭示函数的本质,还停留在现象上。人们继续对各种函数关系进行研究,逐渐用"变化"和"运动"的观点来认识函数概念,终于在 1775年出现了新的定义:"如果某一个量依赖于另一个量,使后一个量变化时,前一个量也随着变化,那么就把前一个量称为后一个量的函数"。这里揭示了变量之间的相依变化关系,是一个进步。但这个定义只是函数概念的维型。

函数概念缺乏科学的定义,引起理论与实践的尖锐矛盾。例如,偏微分方程在工程技术中有广泛的应用,但是由于没有函数的科学定义,就影响到偏微分方程理论的建立,也就影响了有关工程技术的发展。公元 1833 年至 1834 年,高斯开始把注意力转向物理学。他在和 W·威伯尔 合作发明电报的过程中,作了许多关于地磁的实验工作,提出了"力与距离的平方成反比例"这个重要的理论,使位函数作为数学的一个独立分

支而出现了。实际的需要促使人们对函数的定义进一步进行 研究。十九世纪,人们对函数概念的认识飞跃到一个新的阶 段, 函数的两个本质定义出现了。1834 年的函数定义是这样 下的:"x的函数是这样一个数,它被每一个x所给出,且与 x 一起变化,函数式可以用公式表达出来,也可用某种条件给 出,这种条件指出怎样把所有的数加以验算。函数关系可以存 在而关系本身可以不知道。"这个定义叫做"列表定义"。因为 从一个x值可以给出一个函数值y,就好象我们中学代数中 列表表示函数值的方法一样,表中一栏是x值,和它对应的一 栏就是 y 值。这里建立了变量与函数之间的对应关系,是对函 数概念的一个重要发展,因为"对应"是函数概念的一种本质 属性与核心部分。1837年,又把函数下了这样的定义:"如果对 于任意x的值,相应地有完全确定的y值与之对应,那么称y为 x 的函数。在此用什么方法建立对应是完全不重要的。"函 数的这个定义的优点,是直截了当地强调与突出了"对应"关 系,但它的缺点是,把生动的函数变化思想省略和简化掉了。

生产实践和科学实验的进一步发展,又引起函数概念新的尖锐矛盾。本世纪二十年代,人类开始对微观物理现象的研究。1930年,"量子力学"问世了,在量子力学中需要用到一种新的函数。例如,当汽车、火车通过桥梁时,自然对桥梁产生压力。从理论上讲,车辆的轮子和桥面的接触点只有一个,因为圆和直线、平面只能相切于一点。设车辆对轨道、桥面的压力为一个单位,这时在接触点 $\alpha=0$ 处的压强是

$$P(0) = -\frac{\mathbf{E} \mathbf{D}}{\mathbf{接触面}} = \frac{1}{0} = \infty.$$

在其余点 $x \neq 0$ 处,因无压力,故无压强,即 P(x) = 0. 另外,

我们知道压强函数的积分等于压力,即

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x) dx = 1.$$

综上所述,函数 P(x) 符合下列条件

$$P(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ \infty, & x = 0 \end{cases}$$
 $\coprod \int_{-\infty}^{\infty} P(x) dx = 1.$

我们把具有这样条件的函数叫做 8 一函数。

 δ 一函数的出现,引起了人们的激烈争论。按照函数原来的定义,只允许数与数之问建立对应关系,而没有把" ∞ "作为数。另外,对于自变量只有一点不为0的函数,其积分却不等于0,这也是不可想象的。一些有名望的数学家不承认这种函数,他们坚持从老的函数定义出发,去套现实中新发现的函数关系。但是,实践是检验真理的唯一标准,由于量子力学运用了这个函数,成功地解决了许多科学问题,从而迫使人们不得不去研究它。函数概念就在这样的历史条件下能动地向前发展,产生了新的现代函数定义:"若对集合M的任意元素x,总有集合N确定的元素y与之对应,则称在集合M上定义了一个函数,记为 y=f(x)。元素x 称为自变元,元素y 称为因变元。"

新的函数定义与老的函数定义从形式上看,只相差几个字,如把"数"改成"元素",讨论的对象从"数的范围"进入到"一般集合"。实质上并非几字之差,而是概念上的重大发展,是数学发展道路上的重大转折,近代的"泛函分析"可以作为这种转折的标志,它研究的是一般集合上的函数关系。根据近代函数定义,我们可以说,线段的长度是线段的函数,在这里自变元是线段,因变元是数。至此,函数的概念就更加一般化了。

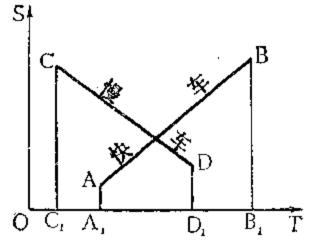
几种函数的实际应用

生产和科学技术的发展,往往向数学提出新的课题要求解决,而数学如果一旦突破了这个课题,形成了新的理论和方法,就会在更广泛的领域里,为更多的生产和科学技术项目服务。并且在反复的实践中,使这些理论不断地得到检验、丰富和发展。

函数的概念和理论来自实践。中学数学中所学的几种初等函数,就是从大量实际问题中提炼出来,并且回过来为更多的实践服务的。在这一篇里,我们将介绍它们在实际中的几个应用。

首先,介绍函数概念在列车调度中的一些应用。我们想坐 火车到某一个地方去,就要找一张火车时刻表来看看。火车时 刻表,就是用列表法表示函数关系。从表中我们可以清楚地看 出,车站站名和列车到达的时间之间的对应关系。这种时刻表

表示列车运行的时间和地 Si 点,旅客看起来一目了然, Si 在确方便。但对于铁路工作人员调度列车,就不太 作人员调度列车运行图来 方便用,非用列车运行图来 解决不可。为了在把客车 Ci 发挥在自天,货车安排在 Ci Ci



黑夜。另外,火车不可能象汽车那样在公路上自由交错,一条线路上同时只允许一列火车单轨运行,这里就有个调度的问题。进行调度时,首先要知道两列火车什么时候在什么地点交会,然后设法把交会的地点移到火车站去。设快车自 A点发出至B点、慢车自C点发出至D点。列车运行成一次函数,由A、B两点的坐标可求得直线 AB 的方程。 $S_1 = a_1t + b_1$,同理可求得直线 CD 的方程为 $S_2 = a_2t + b_2$,然后解方程组

$$\begin{cases} S_1 = a_1 t + b_1, \\ S_2 = a_2 t + b_1. \end{cases}$$

就可以得到快车与慢车交会的时间和地点。

下面我们介绍几个经验公式,说明二次函数在实际中的一些应用。声波在不同介质中的传播速度是不同的:在同一介质中,由于介质的温度、压力及其它参数的不同,其速度也随着这些因素的变化而变化。例如在海水中,由于海水的温度、含盐度和静压力的变化,声速也随之变化。一般说来,温度越高,声速越大,含盐量和静压力的增加也会引起声速的增大。在海水中,声速约为 1450—1550米/秒,其经验公式是

 $C = 1450 + 4.21 T - 0.037 T^2 + 1.14(S - 35) + 0.175 P.$ 其中C表声速(米/秒),T表海水温度(℃),S表海水的含盐 变(%。),P表海水的静压力(大气压)。另外,在化学反应中, 残存物质的质量M与时间T之间的关系,也可以用二次函数 $M = \alpha_0 + \alpha_1 T + \alpha_2 T^2$

逼近(其中 α₀、α₁、α₂是常数)。还有,根据稻麦田间试验的结果表明,稻麦蘖数变化的前一阶段也符合二次函数的规律。

$$y = y_0 + K_1(1 - a_1y_0)t - K_2(1 + a_2y_0)t^2$$
.

式中 y 为稻麦的蘖数, y。为原有的苗数, t 为时间, 其余均

为参数,且 $K_i(1-a_iy_0)>0$ (i=1,2)。

反比例函数在围河造田中时常应用到。现在要将原有堤坝加宽提高修固,若旧堤横断面面积 $S \approx 46 (m^2)$, 新堤横断面面积 $S \approx 67.5 (m^2)$,新堤修成后长 32 米,筑1 米长的河堤需挖河沙体积是

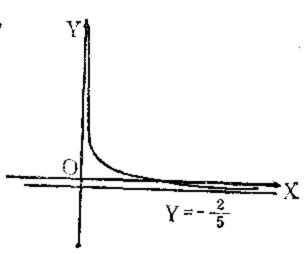
$$V = (S_2 - S_1) \times 1 = (67.5 - 46) \times 1 = 21.5(\%^3).$$

又测得河沙坪干沙的平均深度为 0.4(米)。设挖沙的宽度为 x 米,挖沙的深度为(0.4+y)米,依题意得

$$x (0.4 + y) \cdot 1 = 21.5,$$

$$y = -\frac{43}{2x} - \frac{2}{5}.$$

这说明挖沙深度与挖沙宽度之间成反比例函数,它的图象是双曲线。第一象限的一个分支和x轴相交,其交点为 x=53.75 米, y=0。



这就是说,如果挖沙的宽度为 53.75 m,那么把 53.75 米以内的干沙挖完就够了。由图象可知,当 0< x < 53.75 时, y>0。 也就是说,若宽度不足 53.75 米时,光挖干沙是不够的,还要挖湿沙。到底挖干沙、湿沙深度多少才够用?根据经验,挖湿沙的深度只要不超过 0.2 m,施工都比较容易。即

的
$$0 \le y \le 0.2.$$
(1)
由 (1) 式得 $0 \le \frac{43}{2x} - \frac{2}{5} \le 0.2.$

解这个不等式,得

$$35\frac{5}{6} \leqslant x \leqslant 53\frac{3}{4} \cdot \cdots (2)$$

(1)、(2)两式就是挖沙深度和宽度的范围。

我们在《 π 和 e 的实际意义》一文中,曾介绍了超越数 e 在研究放射性元素蜕变中的应用。实际上,以 e 为底的指数函数在实际问题中是大量存在的。如工作热处理时,先把工件加热,再让它在空气中冷却到 $730 \, \mathbb{C}$,然后放到温度为 $20 \, \mathbb{C}$ 的溶液中冷却。根据实验和理论分析知道,在溶液温度可以看作不变的情形下,工件温度 T 随时间 t 的变化规律为

 $T = 20 + 730e^{-\kappa t}$,其中 K(>0)是常数。

又如,电容器的充放电过程,也是按以 e 为底的指数规律变化的。以电容器的放电为例,电容器的电压变化是随时间 t 作指数衰减的,即

$$V_c = V_o e^{-\frac{t}{R}c}.$$

此外,在反映某些生物的增长率、细菌的繁殖、人造卫星飞行中某一时刻的重量和原来重量的关系等问题中,也都存在以 e 为底的指数函数关系。

最后,我们再介绍一个对数函数在测定地震震级上的应用。设地震的震级为M,A,是地动位置,则它们之间的关系为 $M=\operatorname{ig} A$, $+R(\triangle)$.

这里 $\lg A_{\mu}$ 以微米计算, $R(\triangle)$ 为量规函数,是常量,可查表求得。 A_{μ} 可从地震记录图上量出地震波的最大单振幅,然后根据地震仪的放大倍数,把量出的单振幅换算成实际的大小——即地动位移。

从大量实践中总结出一个数学理论或方法,而这个数学理论或方法又可以回过来指导着更多的具体实践。实践就是理论的源泉,实践也是理论的归宿。

垛积术与等差级数

人类对等差级数的研究已有约五千年的历史。公元前三千年,古埃及象形文字中记载有下面的问题:"把十斗大麦分给十个人,使每相邻两人所得大麦都相差 $\frac{1}{8}$ 斗。"这是所发现的最古老的一个等差级数问题。

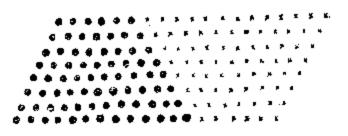
在我国,公元前100年以前,人们从天、测量过程中,就开始对等差级数有了认识。据最古老的数学书籍《周髀算经》记载,当时有人在平地上立一根八尺高的标竿,分别于一年的二十四节气中的日中时间测量竿影的长,测得冬至影长1丈3尺5寸,以后每一节气递减9寸9¹/₆分,到夏至时竿影最短,只有1尺6寸。以后每一节气又递增9寸9¹/₆分。这样就得到两个等差数列,前一个是递降的,后一个是递升的。其后,在很多其它的数学书中,都陆续记载有不少有关等差级数的问题。如《九章算术·衰分》章中的第一题,是按照5:4:3:2:1的比把"5"分做五份,答数顺次是1²/₃、1¹/₃、1、²/₃,成一等差数列。《九章算术·均输》章中提出"今有金簉长五尺,新本一尺重四斤,新末一尺重二斤。问次一尺各重几何?"这里,"本"是第一尺,"末"是第五尺。这是一个已知首项、宋项和项数求

公差的问题。再如南北朝《张邱建算经》中又提出"女子善织布,逐目所织的布以问数递增"的问题,也得到一个等差级数。从这几个例子可以清楚地看出,等差级数的产生完全是由于 生产实际的需要。

宗朝以后,等差级数的理论有了很大的发展。当时数学家杨辉观察了农民堆草的情形,看到有的把草束堆成尖垛,自下而上逐层少一,顶层是一束,呈三角柱状,他把这种垛积叫"圭垛";有的把草堆成"梯垛",和"圭垛"差不多,所不同的是顶层不止一束,星"梯形"状。现举该书所列"梯垛"一例如下:

"今有梯垛草一堆, 顶上6束,底阔13束。 问共几束?答,76束。"

原书的解法是设想 有另一同样的梯垛,把



它倒过来,与原梯垛拼成右上图的形状。所得图形每层草束数 都相等,即等于上下草束的和 6+13=19。因此,原梯垛数是

$$19 \times 8 \div 2 = 76$$
.

其中所用求和公式,就是我们今天等差级数求和公式:

$$S_n = \frac{(a+l) \cdot n}{2}$$

另外,宋朝卓越的自然科学家沈括看到酒店把酒瓮层层堆积,底层排成一个长方阵,以上各层的长阔各减少一,堆成长方台的形状,要想求这些酒瓮的总数。他经过研究。假定这些瓮堆成的长方垛底层广a个,长b个,顶层广p个,长q个,计有h层,求总数(S)的算法译成如下的公式:

$$S = \frac{h}{b} [(2q+b)p + (2b+q)a + (b-q)]_*$$

我们可以证明这个公式如下:

证明:

$$S = pq + (p+1)(q+1) + (p+2)(q+2) + \cdots$$

$$+ (p+h-1)(q+h-1).$$

$$= pq + [pq+1(p+q)+1^2] + [pq+2(p+q) + 2^2] + \cdots + [pq+(h-1)(p+q) + (h-1)^2]$$

$$= h \times pq + (p+q)[1+2+\cdots + (h-1)]$$

$$+ [1^2+2^2+\cdots + (h-1)^2]$$

$$= hpq + (p+q) \cdot \frac{h}{2}(h-1)$$

$$+ \frac{1}{b}(h-1)h[2(h-1)+1]$$

$$= \frac{h}{b}[bpq+3(p+q)(h-1) + (h-1)(2h-1)]$$

$$= \frac{h}{b}[bpq+3p(b-q)+3q(a-p) + (b-q)(2a-2p+1)]$$

$$= \frac{h}{b}[(2q+b)p+(2b+q)a+(b-q)].$$

其中 h=a-p+1, h=b-q+1.

我们不知道沈括是怎样证得这个公式的,但既然杨辉能提出 自然数平方和的公式,即

$$1^{2} + 2^{2} + 3^{2} + \dots + n^{2} = \frac{1}{3}n(n+1)\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

沈括当时证出这个公式当然是可能的。

上述级数逐项差数并不相等,但逐项差数的差数是相等的,这就是今天我们代数里的二阶等差级数。到了元朝,朱世

杰在他的《四元玉鉴》(公元 1303 年)这部书里,用到四阶等差级数求和公式来解决问题。如该书的第五题是:

"今有官司依立方招兵,初(日)招方面三尺,次(日)招方面转多一尺。……已招二万三千四百人。……问招来几日?"这个题目是说,第一天招了 $3^3 = 27(人)$,第二天招了 $4^3 = 64(人)$,第三天招了 $5^3 = 125(人)$,等等,问几天以后共招到 23400人。

他先将有关数据列成下表:

表内的 $S_0 = 0$, $S_1 = 27$, $S_2 = 27 + 64$, $S_3 = 27 + 64 + 25$, …

上差:
$$S_1 - S_0 = 27$$
, $S_2 - S_1 = 64$, $S_3 - S_2 = 125$, ...

二差。
$$64-27=37$$
, $125-64=61$, $216-125=91$,…

三差:
$$61-37=24,91-61=30,127-91=36,\cdots$$

下差:
$$30-24=6$$
, $36-30=6$, $42-36=6$.

下差是常数,是最后的差数。把所得数据代入当时的公式,得

$$S_n = 27n + 37 \cdot \frac{n(n-1)}{2!} + 24 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}$$

$$+6 \cdot \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4!}$$

这里各项的系数 27、37、24、6 分别是表内上差、二差、三差、下 差各行的第一个数字。

朱世杰设 m=n-3,代入上式得

$$27(m+3) + \frac{37}{2}(m+3)(m+2) + 4(m+3)(m+2)(m+1)$$
$$+ \frac{1}{4}(m+3)(m+2)(m+1)m = 23400,$$

化简后得 $m^4 + 22m^3 + 181m^2 + 660m - 92736 = 0$. 解之得 m = 12, 即 n = 15(日)。

由以上例子可以知道,到了宋元时期,我国对等差级数的研究,已经达到比较高的水平,而欧洲直到十七世纪才解决用高阶等差级数方法计算自然数立方和的问题,比中国迟了三四百年。

对数的产生

十七世纪以前的欧洲,宗教统治着一切,那时的自然科学家常常被宗教的教义束缚,不少先进学者为了维护科学真理而遭受教堂法庭的迫害,最后被处死在火刑柱上。宗教教义的统治严重地束缚了数学科学的发展。加上当时生产水平落后,不能充分暴露与提供数学研究的素材,也没有进行繁杂计算的需要。

到了中世纪,随着资本主义的发展,自然科学也迅速地得到发展。科学的这种发展必然要突破宗教的束缚。例如,著名的波兰天文学家哥白尼发表了他的不朽著作《天体运行论》,提出了太阳中心说,以反对腐朽的适应宗教教义的地球中心说,使自然科学逐步从神学中解放出来,迅速地向前发展。同时期,哥仑布发现了新大陆。在解决这些天文、航海问题时,常常需要进行大量繁杂的计算,花费人们很多时间和精力,如何简化这些计算,就成为迫切需要解决的问题。对数就是在这样历史条件下产生的。

那么,对数方法的原理是如何形成的呢?对数方法的正式 形成是比较迟的,但对数的原始思想的出现却很早。在公元前 200 多年,阿基米德在他的《论数砂》一文中,曾提出以下两个 数列

阿基米德发现了幂的运算与指数运算之间的关系,从而用加减法代替乘除法,使运算大大简化。但是,阿基米德没有明确提出对数概念,也没有完成造表的任务,甚至以后 1700 年内数学家也没有完成这个任务,到了十六世纪苏格兰地主耐普尔(公元 1550—1617 年)通过研究直线运动得出对数的概念。设 AB 为一定长线段。一点 P 自 A 向 B 作减速运动,当 P 到达任意点(如 P_2)时,

它的速度与剩余距离(如 A P_1 P_2 P_3 P_4 P_4 P_4 P_4 P_4 P_4 P_4 P_4 P_5 P_5

速度 V = AB 自 A向 B 运动,第一瞬时,它行过 1 个单位距离 AP_1 ,到达 P_1 点时的速度 为 $P_1B = AB - AP_1 = V - 1 = V\left(1 - \frac{1}{V}\right)$,第二瞬时,它行过的距离 $P_1P_2 =$ 到达 P_1 点时

的速度x自 P_1 行至 P_2 所需的时间= $(V-1)\cdot\frac{1}{V}$,它到达

 P_2 点时的速度为 $P_2B = P_1B - P_1P_2 = V - 1 - (V - 1)\frac{1}{V}$

 $= (V-1)\left(1-\frac{1}{V}\right) = V\left(1-\frac{1}{V}\right)^2; 第三瞬时, 它行过的距离$

 $P_z P_3 =$ 到达 P_z 点时的速度 x 自 P_z 行至 P_s 所需的时间

=
$$V\left(1-\frac{1}{V}\right)^{2}\frac{1}{V}$$
,它到达 P_{3} 点时的速度为 $P_{3}B=P_{2}B-P_{2}P_{3}$

$$=V\left(1-\frac{1}{V}\right)^{2}-V\left(1-\frac{1}{V}\right)^{2}\frac{1}{V}=V\left(1-\frac{1}{V}\right)^{3};$$
它到这 P_{V} 点

时的速度为 $P_{VB} = V \left(1 - \frac{1}{V}\right)^V$,也就是第V 瞬时的速度。现在,我们可以把质点的每一瞬时末的速度依次排成如下的数

列:

$$V = V\left(1 - \frac{1}{V}\right)^{0}, V\left(1 - \frac{1}{V}\right)^{1}, V\left(1 - \frac{1}{V}\right)^{2},$$

$$V\left(1 - \frac{1}{V}\right)^{3}, \dots, V\left(1 - \frac{1}{V}\right)^{V}, \dots (a)$$

次设 CD 为一射线。点Q自C向D作匀速运动,并设 V = AB。 因速度V一定,且时间 t 恒为 $\frac{1}{V}$,故从静止开始 连续行进的距离(自起点计)可排成一数列如下:

$$0,1,2,3,\cdots,V,\cdots(b)$$

个数列中二数之积与第二个数列中对应二数之和之间存在着一种简单的关系,从而可以把乘法简化为加法做。耐普尔称数列(b)中各项为数列(a)中对应各项的对数。

有了对数,乘方、开方可以化为乘、除法来做,乘、除又可以转化为加、减法来做,从而使较高级的运算转换为转低级的运算,这就大大简化了运算过程。但是,怎样求一个数的对数?这是新的矛盾。为了代替实际工作中需要进行的大量繁杂的计算,人们研究了制造对数表的问题。我们应该把造出第一张对数表归功于约勃特·标尔格(公元1552—1632年)和章·涅别尔(公元1550—1617年)两人。标尔格是瑞士人,他是一个聪明能干的钟表匠和天文仪器的技师。他没有在学校受过系统的数学教育,但由于实际工作的需要,经过自己勤奋的劳动,在对数研究上取得了成就。他和发现行星围绕太阳运动的规律的著名天文学家开普勒在一起工作,大量艰巨繁杂的计算

迫使他去寻求快速的计算方法,为造表作出了有益的贡献。芬兰人涅别尔也不是职业数学家,是一个天文学和数学的爱好者。他怀着崇高目的,克服了重重困难,用了二十年的时间,造出了第一张对数表,用自己长期辛勤的劳动,给后人的计算提供了很大的方便。

为什么当时造一张对数表要花那么长的时间?那是因为当时还没有高等数学,只能用初等数学的方法来进行计算,而且当时又缺乏先进的计算工具,主要靠笔算,所以很费时间。后来有了高等数学,有了级数的理论,计算起来就比较便利。特别是电子计算机的发明,大大提高了计算的精确性和速度。如果涅别尔当时有这种计算机,那么他花二十年功夫才制成的对数表,只要几个小时就可以完成了。

恩格斯对于对数的发明给以很高的评价:"……最重要的数学方法基本上被确定了:主要由笛卡儿制定了解析几何,由耐普尔制定了对数,由莱布尼兹,也许还有牛顿制定了微积分。"为什么恩格斯把对数的发明视为十七世纪数学的三大成就之一,评价如此之高呢?这是因为对数方法对社会和人类有着巨大的贡献,它可以使运算化繁为简,大大缩短工作时间,加快科学实验和生产的进程。正如法国数学家拉普拉斯所说:"对数算法使得好几个月的劳力缩短为少数几天,它不仅可以避免了冗长的计算与或然的误差,而且实际上使得天文学家的生命延长了好多倍。"

行列式的作用

我们已经介绍了数学方程式产生的实际意义,它是数学计算中一种有力的工具。随着社会实践的丰富,人们认识的不断深入,在研究的某一问题中涉及的数量越来越多,反映到方程中,就引出多元方程组问题,尤其是多元线性方程组,在实际生活中应用很广。对多元线性方程组解法的研究,构成了高等代数的一部分重要内容,而其中行列式理论占有很重要的位置。

我们先从中学二元一次方程组的解法谈起。二元一次方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y = c_1, \\ a_2 x + b_2 y = c_2. \end{cases}$$

在中学数学教材中,关于它的基本解法介绍了两种:一是代入法,二是加减法。这两种方法的实质都是把二元方程转化为一元方程,求出一个未知数的值后,再求出另一个未知数的值,从而得到原方程组的解。由于二元一次方程组是最简单的线性方程组,方程的变形、运算一般比较简单,因而代入法和加减法就成为解二元一次方程组的基本方法。

有的数学教材中还介绍了图象法和行列式法 这 两 种 解 法。图象法需要先分别画 出 直 线 L_1 : $a_1x+b_1y+c_1$ 和 L_2 : $a_2x+b_2y=c_2$, 然后求出二直线的交点(P)的坐标, 就得到原 方程组的解。这种方法需要先画出两条直线, 且所得的解是近

似值,有时误差较大。行列式法是先求三个二阶行列式的值, 然后用除法求得原方程组的解。即

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}, \quad 这里, \quad \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{pmatrix} \neq 0.$$

上面讲了,对于二元一次方程组,代入法和加减法是两种基本解法。但是在解三元一次方程组中,情况就不同了。三元一次方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_1 x + b_1 y + c_1 z = d_1, & \text{(i)} \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = d_2, & \text{(z)} \\ a_3 x + b_3 y + c_3 z = d_3. & \text{(3)} \end{cases}$$

若用加減法解,需先由方程组的某两个方程(如①、②)中消去一个未知数(如z),得到一个二元一次方程(④);再由方程组中另两个方程(如②、③)中消去同一个未知数(z),得到另一个二元一次方程(⑤)。然后联立④、⑤,解这个方程组,得到未知数(x,y)的值。最后把所得两个未知数(x,y)的值代入原方程组中的某一个方程中去,求得第三个未知数的值。这里,为了解三元一次方程组,需要解有关的三个方程组的过程相当复杂。若用代入法亦复如此,运算非常繁琐。至于用图象法解三元一次方程组,不仅超出了中学数学范围,需用空间解析几何,理论上三个平面的交点的坐标是原方程组的解,实践上画图是困难的,所以这种方法在中学也用不上。人们为了找到一种比较简便的方法,探讨了能不能用行列式来解三元一次方程组的问题。

行列式的名字溯源于勾犀(1812年)。所谓 n 阶行列式,是

指一个含有 n! 项的代数和,它的每一项是矩阵

$$a_{11} \ a_{12} \cdots a_{1n}$$
 $a_{21} \ a_{22} \cdots a_{2n}$
 $\cdots \ \cdots$
 $a_{n1} \ a_{n2} \cdots a_{nn}$

中每一行和每一列任取一个且唯一个元素所成的积。把每一项的因子按照第一个下标数字的自然顺序书写后,如果第二个下标数字所成的顺列的反序(即较大的数字排列在较小数字之前)数是 t,这一项的符号就令它等于(-1)'。经过研究,得到用三阶行列式來求三元一次方程组的解。

$$x = \begin{vmatrix} d_1b_1c_1 \\ d_2b_2c_2 \\ \hline a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ \hline a_3b_3c_3 \end{vmatrix}, y = \begin{vmatrix} a_1d_1c_1 \\ a_2d_2c_2 \\ \hline a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix}, z = \begin{vmatrix} a_1b_1d_1 \\ a_2b_2d_2 \\ \hline a_3b_3d_3 \\ \hline a_1b_1c_1 \\ a_2b_2c_2 \\ a_3b_3c_3 \end{vmatrix}.$$

这里,
$$\begin{vmatrix} a_1b_1c_1\\a_2b_2c_2\\a_3b_3c_3 \end{vmatrix} \Rightarrow 0.$$

在中学数学教材里,详细地介绍了如何用"对角线法"展 开三阶行列式,从而使三元一次方程组用行列式来解成为可 能。这时,行列式法在解三元一次方程组中的优越性就开始 显示出来了。

随着生产和科学技术的发展,人们需要研究的变量越来越复杂,一个问题涉及到的变量的个数也越来越多。对于多元的线性方程组,应该怎样解呢?这时,图解法在实践上不可能,

代入法或加减法又繁不胜繁。在这里,用新的方法来解多元线性方程组的必要性已经很明显了。人们设想,既然三阶行列式能计算出来,解决了三元一次方程组解的问题,那么四阶、五阶、六阶以至更高阶的行列式是否可以计算,从而找到多元线性方程组的一般解法?基于这样的需要,人们系统地研究了行列式的理论,并从理论上解决了用行列式解任意元线性方程组的问题。

从以上叙述,我们可以清楚地看到,行列式理论是因解线性方程组的需要而产生的,它是直接为解方程服务的。

矩阵的应用

我们在上一篇讲了行列式的作用。行列式的理论是由于 解线性方程组的需要而产生的。行列式理论的发展,从理论上 解决了一般线性方程组的求解问题。但是,实际运用行列式来 解线性方程组时,矛盾还是存在的。

首先,计算很繁琐。我们知道,用行列式来解线性方程组,关键在于展开行列式。但行列式的展开,一般说来,需要把它化为较低阶的行列式,即应用子行列式的概念,按照行列式的某几行(列)展开。这样的降阶,往往需要二、三次乃至多次才能完成。因而一个行列式在展开过程中,"子孙繁衍",能引出很多较低阶的行列式。虽然对展开后的每一个行列式来讲,其阶数都较原来为低,比较简单了,但由于行列式很多,所以,从整体来说,计算起来还是很繁琐的。

其次,对于某些线性方程组,行列式失去作用。我们知道, 线性方程组元的个数与方程组中方程的个数并不一定相等。 方程的个数可以少于未知数的个数,也可以多于未知数的个数。当方程的个数与未知数的个数不等时,由未知数的系数所排成的方阵,行和列是不等的,显然,这时不成其为行列式,因而方程组也就不能用行列式来解了。但并不能说,由于行列式不存在,原方程组就无解了。那么,在这种情况下,方程组又应该如何解呢?

为了简化求解过程,并当方程的个数与元数不等时,解线

性方程组也成为可能,人们研究了矩阵的理论。所谓矩阵,就是指由m行和n列个元素排成的方阵。由于这个方阵的行和列并不一定相等,一般呈矩形,所以人们把它简称为"矩阵"。行列式是行和列相等的矩阵,所以可以把行列式看成是一种特殊的矩阵。矩阵一般用下面的符号表示:

$$\begin{pmatrix} a_{1\,1}a_{1\,2}a_{1\,3}\cdots a_{1\,n} \\ a_{2\,1}a_{2\,2}a_{2\,3}\cdots a_{2\,n} \\ \cdots & \cdots \\ a_{m\,1}a_{m\,2}a_{m\,4}\cdots a_{m\,n} \end{pmatrix}$$

这里,m表示行数,n表示列数, a_{ij} ($i=1,2,3\cdots m,j=1,2,3\cdots m$)叫做矩阵的元素。例如,对于线性方程组:

$$\begin{cases} x + y + z + u = 11, \\ x + 2y + 3z + 4u = 34, \\ 2x + 3y + 4z + u = 25, \\ 3x + 4y + 2z + u = 22. \end{cases} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 34 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 25 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 22 \end{pmatrix}.$$

我们可以把它未知项的系数和常数项用上面的矩阵表示。

要用行列式来解线性方程组,首先要掌握行列式的性质。同样,要用矩阵来解线性方程组,也必需先学习矩阵的性质。 矩阵的主要的基本性质有以下几条:

- 1. 矩阵中的任意二行可以交换;
- 2. 可以用一个不为零的常数去乘矩阵的某一行;
- 3. 可以把矩阵的某一行乘以一个常数后加到另一 行上去。

其中性质 1,实际上是指方程组中任意两方程位置交换, 所得方程组与原方程组当然同解。性质 2就是用一个非零的 数去遍乘某一方程的各项,这也不影响方程的解。性质 3 是把 方程组中某一方程各项遍乘某一非零数以后,和方程组中另一个方程相加,根据方程组的同解性,这也不影响方程组的解。所以,矩阵的这几条性质,实际上就是方程组同解变形的反映,根据矩阵的这几条性质,将矩阵进行变形,就可求出方程组的解。下面我们就运用矩阵来解上述四元一次方程组,

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 34 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 25 \\ 3 & 4 & 2 & 1 & 22 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 23 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -11 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -14 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 & -12 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 0 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & -3 & -1 & -14 \end{pmatrix}$$

第3行和第4行交换。第4行各项除以一3。

第1行+第3行=第1行,

第1行+第4行×
$$\frac{5}{3}$$
= 第1行,

第2行+第3行×(-2)=第2行, 第2行+第4行×
$$\left(-\frac{7}{3}\right)$$
=第2行, 第4行各项+(-4)=第4行。 第3行+第4行× $\left(+\frac{1}{3}\right)$ =第3行。

我们只要稍为仔细分析一下,就可以看出,上面矩阵变形的过程,实际上就是将原方程组应用加减消元法求解的过程,只不过略去了表示未知数的文字、等号等符号,把方程的变形简化为系数(常数)的变形,形式简单而已。最后得到的矩阵里,除最后一列外,其余各行、各列仅有一数非零。从第1行得×=1;从第2行得 y=2,从第3行得 z=3,从第4行得 u=5。所以

原方程组的解是
$$\begin{cases} x=1, \\ y=2, \\ z=3, \\ u=5. \end{cases}$$

一般说来,对于一个线性方程组,不论未知数的个数和方程的个数是否相等,要确定这个方程组是否有解,若有解,解之数唯一还是无限,需要对由方程组各项系数和常数项构成的矩阵进行研究。这里涉及向量、平直相关、秩数等一系列概念和性质。如果掌握了这些概念和性质,讨论上述问题是并不困难的。例如对于方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2, \\ 3x_1 - x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_5 = 6, \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 = 8. \end{cases}$$

由于系数矩阵
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

和增广矩阵
$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -1 & 2 & 2 \\ 3 & -1 & 5 & -3 & -1 & 6 \\ 2 & 1 & 2 & -2 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

的秩数不等,就可以判定原方程组是矛盾方程组,也就是说,这个方程组无解。不过,由于我们略去了这些理论,所以这里就不可讲清这些道理了。又如对线性方程组

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 1, \\ x_1 - x_2 - x_3 + x_4 = 0, \\ x_1 - x_2 - 2x_3 + 2x_4 = -\frac{1}{2}, \end{cases}$$

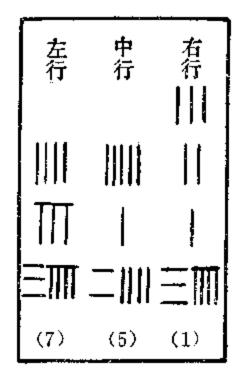
$$\begin{cases} x_1 = x_1, \\ x_2 = x_1 - \frac{1}{2}, \\ x_3 = x_4 + \frac{1}{2}, \\ x_4 = x_4. \end{cases}$$

我国古算书中,虽未提过"矩阵"这个名称,但这种思想和方法很早就用了。现以本书"数学方程式是从哪里来的"一篇中所引《九章算术·方程》章中求"禾实"一题为例,比较一下古筹算解法与今矩阵解法的异同。

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 & (1) \\ 2x + 3y + z = 34 & (2) \\ x + 2y + 3z = 26 & (3) \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc}
1 & 2 & 3 \\
2 & 3 & 2 \\
3 & 1 & 1 \\
26 & 34 & 39
\end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 & (1) \\ 5y + z = 24 & (4) \\ 4y + 8z = 39 & (5) \\ 3(2) - 2(1) 得(4) \\ 3(3) - (1) 得(5) \end{cases}$$



$$\left(\begin{array}{ccc} 0 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 2 \\ 8 & 1 & 1 \\ 39 & 24 & 39 \end{array}\right)$$

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 39 & (1) \\ 5y + z = 24 & (4) \\ 4z = 11 & (6) \end{cases}$$

$$[5(5) - 4(4)] \div 94(6)$$

$$\begin{bmatrix} 5(5) - 4(4) \end{bmatrix} \div 94(6) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 4x = 37 & (7) \\ 4y = 17 & (8) \\ 4z = 11 & (6) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 4(4) - (6) \end{bmatrix} \div 54(8) \\ 4(1) - 2(8)4(7) \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & + & + \\ 7 & + \\ 7 & - \\ 11 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & - & + \\ 7 & - \\ 7 & - \\ 7 & - \\ 6 & (8) & (7) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -1 & - & + \\ 6 & (8) & (7) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 5 & 2 \\ 4 & 1 & 1 \\ 11 & 24 & 39 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 11 & 17 & 37 \end{bmatrix}$$

不难看出,早在一千七百年以前,我们祖先所使用的筹码方阵和今日的矩阵形式、原理是基本一致的。

虚数不虚

"虚数"这个名词给人一种"虚无缥缈"的感觉。其实,它一点也不"虚",用处可大哩!

随着生产实践的发展,人们需要计算一些复杂物体的体积,从中引出方程式的求解问题。在应用方程式求根公式解方程时,常常需要把数开平方或开立方。从当时计算水平来看,如果被开方数是非负数,可以计算出要求的根,如果被开方数是负数,怎样求出方程的根呢?实践向我们提出,必须解决负数开偶次方的矛盾。恩格斯在《反杜林论》中指出:"√-1在许多情况下毕竟是正确的数学运算的必然结果;不仅如此,如果不准用√-1来运算,那么数学,无论是初等数学或高等数学,将怎么办呢?"公元1545年,意大利数学家卡尔丹(Cardan)首先运用了虚数。在讨论是否有可能把10分成两部分,而使这两部分的乘积为40时,他解了方程,并且证明了数5+√-15适合这个方程,即

$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=40.$$

卡尔丹给这个数起了个名字叫"虚数",这是虚数概念的萌芽。 当时,由于生产水平的限制,人们虽然接触到虚数,也开始用 到虚数,但由于认识一时还跟不上,很长时期对虚数都不理 解,甚至把它看成是妖魔鬼怪。莱布尼兹在公元 1702 年就曾 说:"虚数是美妙而奇异的神灵的隐蔽所,它几乎是既存在又 不存在的两栖物。"说明当时对虚数的认识是非常模糊的。直 到十八世纪,这种认识虽还没有完全得到澄清,但逐步有所进展。公元 1730 年,数学家棣美弗求出今天中学数学教材中著名的"棣美弗公式":

 $(\cos \theta + i \sin \theta)^n = \cos n \theta + i \sin n \theta$:

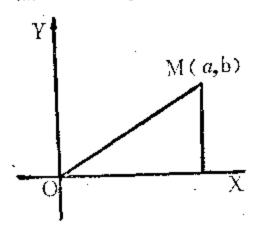
1748年,数学家欧拉发现著名的关系式

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

他们把虚数与三角函数联系起来,是一重要进步。直到十九世纪,德国数学家高斯创立虚数的图解法,虚数的意义才逐渐明确,人们对它的疑虑才逐渐消除。

客观世界中有些量,如力、位移、速度、电场强度等物理量,不仅有大小,而且有方向。要想用一个单一的实数去表示这些量,是不可能的。有了虚数的图解法以后,我们就可以建立向量OM和复数z=a-bi之间的对应关系。

使复数可以表示力、位移、速度和 电场强度等向量,有了实际意义, 才可能为人们广泛承认。后来,人 们逐渐系统地建立了复数理论。 并且开始把复数的理论应用到水 力学和地图学上。到了十九世纪 以后,复变函数的理论得到蓬勃



发展,它在流体力学、热力学等方面有了很多的应用。十九世纪末到二十世纪初,被誉为"俄罗斯航空学之父"的著名俄罗斯航空学家儒可夫斯基教授,利用复变数函数的理论,对飞机翅膀的形状作了深入的剖析,预测了高级飞行技术中翻筋斗的可能性。其后,俄国中尉涅斯崔可夫根据儒可夫斯基的理

论,实现了飞机第一次在空中翻筋斗——"打环圈"的壮举(即飞机在铅直平面内打圈)。这是复数理论在航空学上最早的应用。二十世纪以来,复变函数论被广泛应用在理论物理、弹性理论、天体力学等方面。虚数在实践中越来越多的找到了它的原型,虚数之"虚",只剩下历史上的意义了。

下面,我们举两个虚数在实际中应用的例子。如简谐振动的复数表示是

 $A(t) = A[\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi)] = Ae^{i(w t + \varphi)}$ 这里, A为振幅, ω 为角频率, φ 为初相。又如交流电问题, 也可用下列复数表示出来。

$$\dot{\varepsilon} = \varepsilon_{\pi} [\cos(\omega t + \varphi) + i\sin(\omega t + \varphi)];$$

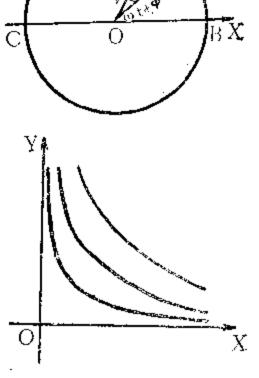
$$\dot{I} = I_{\pi} [\cos(\omega' t + \varphi') + i\sin(\omega' i + \varphi')],$$

意和 I 都是复向量,由它们的模数和幅角完全确定了电压和电流变化的规律。

我们再简单地介绍一下复变 (数函数在流体力学中的应用。飞机、轮船、汽车都是在流体 (空气或水) 里运动的,空气、河水又绕着高山、堤岸等障碍物流动。在研究这些复杂的问题时,复变数面 数是重要的工具。例如,一条很宽的河流在直角转弯处流动的复变数是

$$w = z^2$$
.

其中w和 2 均为复变数(w=u



+vi, u, v 均是实数〕。在研究复变数函数w 和 z 的关系时,往往可以转化为研究 x, y 和 u, v 之间的实函数关系。在本例中,将 z=x+yi 代入 $w=z^2$,就可以得到

$$u + vi = x^2 - y^2 + 2xyi$$
.

比较虚部的关系, 得流线方程是

$$2xy=v$$
, 或者 $xy=\frac{v}{2}$.

当v = 0时,这个方程所刻画的流线是等边双曲线的一支;当v = 0时,得x = 0或 y = 0,流线恰好是河岸。__

"无穷"的实际意义

"无穷"就是"无限"的意思。人们在实践中,总是从对有限的认识开始,发展到对无限的认识,视野逐渐扩大,认识不断加深。

人类对宇宙的认识,就是一个永无穷尽地从有限扩大到 无限的过程。最初,由于认识水平的限制,在人们的视野中, "宇宙"似乎是一个天圆地方的大帐篷,所谓"苍天如圆盖,陆 地如棋局",就是这种具体、直观的描绘。其实人们开始看到的 地球表面,只是地球球面上一个有限的范围。后来,经航海学 家的实践证明,大地不是平面,而是球形,并且算出地球的半 径大约是 6370 公里。从当时人们认识的范围来说,这 6370 公 里确实是一个很大的数目了。所以,那时就把"宇宙"理解为地 球,日月星辰不过是地球周围的装饰品。

到了十八世纪,人们借着光学望远镜的帮助,视线超出了太阳系,扩展到了银河系。银河系的直径已经很难用公里来表示,而是十万光年,相当于9,3312×10¹⁷公里。这个数字确实

大得惊人,如果太阳在银河系中运转一周,大约需要二亿年,与银河系比较,太阳又是沧海一栗了。

到现代,由于生产实践和科学技术的发展,由于射电望远镜的运用,人们眼里的"宇宙"又冲破了银河系的界限,扩大到由千千万万个银河系所组成的星系团、超星系团以至于总星系。这些星系有多大?以本超星系团来说,它的半径可能大到一亿光年,自转一周可能需要一百亿光年之久。这个范围不能说不大了。但是,"在绝对的总的宇宙发展过程中,各个具体过程的发展都是相对的,因而在绝对真理的长河中,人们对于在各个一定发展阶段上的具体过程的认识只具有相对的真理性。"所以,不管这个总星系多么巨大,它对于整个宇宙来讲,也不过是一粒沙子而已。

这种从有限到无限的认识过程,反映在数学上,就得到无穷大的概念。它的定义是这样下的:不论给定任意大的正数 G,变量 f(x)在变化过程中,只要变化过程进行得充分长久,总会而且一直满足

$$|f(x)| > G$$
,

我们就把变量f(x)叫做无穷大量,写成

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty \mathbf{g} f(x) \to \infty,$$

"大世界"没有个边,"小世界"也没有个底。就拿氢原子来说吧,它的直径只有10⁻³ 厘米,而它的原子核则更小,只有10⁻¹³ 厘米,小了十万倍。如果把氢原子放大到一个大剧场那么大,原子核就象剧场中央的一粒芝麻,不为不小矣!然而原子核还可以分为质子、中子、……,可以无穷尽地分下去。但不论怎样分法,正如韩非子说的:"有形则有短长,有短长则有大

小",它的大小总不会为零的。反映在数学上,如果一个变量 f(x)以零为极限,也就是 $f(x) \rightarrow 0$,我们就把变量 f(x)叫做无穷小量。

由此可见,无穷大量和无穷小量都可以在实践中找到"原型",它们都是实践的产物。

在全日制于年制学校高中数学课本第一册中,在学到正切函数 y = tgx 的性质时,当 $x \rightarrow n\pi \pm \frac{\pi}{2}$ 时,函数 y 的绝对值 无限变大,即 $tgx \rightarrow \pm \infty$ 。在学到数列极限时,也要用到" ∞ "的概念。到学微分、积分时,"无穷大"、"无穷小"则成为微分学和积分学中的最基本的重要概念了。所以"无穷"这个概念是很重要的,必须正确理解和掌握。

数学归纳法的作用

人们在不断参加社会实践的过程中,经过认识上的飞跃,产生了概念。进而使用判断和推理的方法,产生出各种合乎论理的结论来。这是人类认识客观事物的规律。所以,正确地进行推理,是我们认识世界必须掌握的重要方法。常用的推理方法有两种,一是演绎法,一是归纳法。在数学中,定理的证明、公式的推导、习题的解答,都是离不开这两种基本方法的。

就人类认识事物的秩序来说,总是由认识个别的和特殊的事物,逐步扩大到一般的事物。归纳法就是从个别到一般的推理方法。它的本质就是从某些特殊的事例中摸索出一般的规律来。

我们在日常生活和研究自然科学中,常用归纳法进行推理。例如,通过长期的天文观测和计算,发现太阳系中的行星在运动时,具有下面的规律,

水星是按椭圆轨道围绕太阳运转的; 金星是按椭圆轨道围绕太阳运转的; 地球是按椭圆轨道围绕太阳运转的; 火星是按椭圆轨道围绕太阳运转的; 木星是按椭圆轨道围绕太阳运转的; 土星是按椭圆轨道围绕太阳运转的; 天王星是按椭圆轨道围绕太阳运转的; 海王星是按椭圆轨道围绕太阳运转的; 冥王星是桉椭圆轨道围绕太阳运转的。

而水星、金星、地球、火星、木星、土星、天王星、海王星、冥王星是太阳系所有的大行星。因此,可以下结论:太阳系所有大行星都是按椭圆轨道围绕太阳运转的。又如,古今中外,入们看见的乌鸦都是黑色的,并没有见过别的颜色的乌鸦,于是又归纳出一个结论:"天下乌鸦一般黑。"前例是对所论问题中一切对象都经过判断才作出的推断,这种归纳法叫做完全归纳法。后例只是对所论问题中某些对象经过判断就作出了一般的推论,这种归纳法叫做不完全归纳法。

列宁在《哲学笔记》中指出:"以最简单的归纳方法所得到的最简单的真理,总是不完全的,因为经验总是未完成的。"(《列宁全集》第38卷 191 页)不完全归纳法得到的结论只是或然的结果,而不是必然的结果,因而这样的结论可能是错误的。生活中不乏这方面的事例。例如,原来人们认为棉花都是白色的,但随着农业科学的发展,农业工人和农学家培养出了红色的棉花,这一判断就不正确了。又如,动物学家在发现独洲之前,曾断定地球上的天鹅都是白色的,但澳洲出现了黑色的天鹅就推翻了这一结论。在物理学里,人们经过实验,发现铜号受热后会伸长。对铁、金等不同质料的针进行同样实验,发现也有这种性质。于是就下了这个结论:一切物质都会热胀冷缩。但是这个性质并不正确。根据实验证明,当水从0℃加热到4℃这个过程中,它的体积不但不增长,反而缩小。当水的温度高于4℃时,它的体积才会随着温度的升高而膨胀。

历史上,数学工作者在这方面所犯的错误也是不少的,下 面略举几个例子。

例1 法国数学家比尔・费尔马(公元1601-1665年)

研究过形式如

$$f(n) = 2^{2n} + 1$$

的数。当n=0,1,2,3,4时,f(n)都是质数。事实上,

$$f(0) = 2^{2^{0}} + 1 = 2 + 1 = 3,$$

$$f(1) = 2^{2^{1}} + 1 = 4 + 1 = 5,$$

$$f(2) = 2^{2^{2}} + 1 = 16 + 1 = 17,$$

$$f(3) = 2^{2^{3}} + 1 = 2^{3} + 1 = 256 + 1 = 257,$$

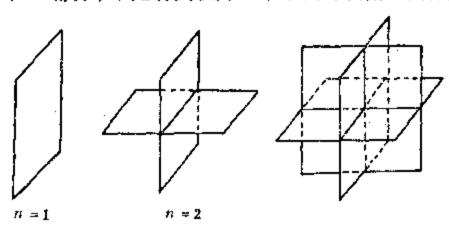
$$f(4) = 2^{2^{4}} + 1 = 2^{16} + 1 = 65536 + 1 = 65537.$$

这里 3、5、17、257、65537 都是质数。费尔马于是猜想,一切这样形式的数都是质数。他相信自己这样的猜想是正确无疑的。可是, 欧拉后来却证明 f(5)是合数, 因为

 $f(5) = 2^{2^5} + 1 = 4,294,967,297 = 641 \times 6,700,417$ 。 后来又有人证明 n = 6,7,8,9 时,f(n) 也都是合数。费尔 马在这里犯了不完全归纳的错误。

例 2 *n* 个平面都经过一点,但其中任何三个平面都不 共线。问这 *n* 个平面把空间分成多少部分?

经过分析,一个平面把空间分成两部分,即 2¹ 部分;两个平面把空间分为四部分,即 2² 部分;三个平面把空间分为八部分,即 2³ 部分;于是有人认为 n 个平面可以把空间分为 2¹



个部分。这个答案并不具有普遍性。事实上,当n=4时,最多只能把空间分为十四个部分,而不是 $2^4=16$ 部分。后来,人们证明,正确的答案应该是n(n-1)+2。

由此可知,对某些个别现象作不完全的考察,即使考察的次数再多一些,所得出的结论可靠性大一些,但还不能说一定是正确的。因为,不管怎样,我们的考察毕竟是不全面的。一方面需要考察全面,但另一方面客观上要考察的对象往往是无穷的,要想全面考察又是不可能的,这是人们需要解决的一个矛盾。数学归纳法就是适应这种需要而产生的一种数学推理方法,它的产生是符合人们认识规律的。

那么,数学归纳法又是怎样产生的呢? 幼儿识数,先从一起,然后二、三、……,学到十,产生一个飞跃。十这一关突破后,又比较顺利地学下去,直到二十、三十、……一百。到小学二、三年级,孩子学会比较大的数,但并不是按自然数的顺序一个一个地学下去,而是飞跃前进:千、万、亿……。数到一定程度,人们领悟到数自然数的规律,感到不管多大的自然数,都会数了。这一飞跃,使人们对自然数的认识从有限到无限。总结以上的识数规律,第一,是从头数起,也就是从自然数1数起;第二,是一个一个按次序往下数,而且数到某一个数后,不愁下一个数不会数。有了这两条,自然数列中任何一个都可以用它前面一个数来决定。于是,我们能数任何数了。设想一下,如果我们不掌握这样数数的规律,一个一个挨次序去数那无穷无尽的自然数,真是一辈子也数不完。类似这样的思想方法在日常生活中是常见的。这样原理和方法应用到数学中去,就是数学归纳法。应用数学归纳法证明问题,其主要步骤是:

1. 证明当 n=a(α 为自然数,是既定问题的第一个数)

时,论断是正确的;

2. 假设当n=k时,论断是正确的,证明当n=k+1时,这个论断也是正确的。

根据以上两步证明,我们便可以断言,对于一切 $n \ge a$ 的自然数,原命题是正确的。下面是应用数学归纳法证题的一个例子:

用数学归纳法证明, 当 n 是任意自然数时, n³+5n 是 6 的倍数。

证明:(1)当n=1时, $n^3+5n=1^3+5\cdot 1=6$,是 6 的倍数。 (2)设n=k时, n^3+5n 是 6 的倍数,就是假设 k^3+5k 是 6 的倍数。那么

$$(k+1)^3 + 5(k+1) = k^3 + 3k^2 + 3k + 1 + 5k + 5$$
$$= k^3 + 5k + 3k(k+1) + 6.$$

由假设, $k^3 + 5k$ 是 6 的倍数, 3k(k+1)中, k 和 (k+1)必有一为偶数, 亦即 k(k+1)必为 2 的倍数, 因而 3k(k+1)必为 6 的倍数, 又, 6 必然是 6 的倍数, 因此, $k^3 + 5k + 3k(k+1) + 6$ 亦必为 6 的倍数。这就是说, 当 n = k+1 时, $n^3 + 5n$ 也是 6 的倍数。

由以上(1)、(2)两方面的证明可知,对于一切自然数n, n^3+5n 都是6的倍数。

数学归纳法大大地帮助我们认识客观事物,由简到繁,由有限到无限。它是数学推理中的一种有力工具,尤其在高等数学中有着广泛的用途。

为什么要研究近似计算?

随着工农业生产发展和国防建设的需要,科学技术不断向数学提出大量数值计算的问题。在用数值表达一个量以及进行有关这些数值的计算时,所用的数据和方法,有时可得到准确值,但一般都只能得到近似值。如表示一个班级的学生数,我们可以肯定这个班级有五十个学生,这是精确值;但如果要在某一规定时间,计算出一个国家的人口数目,那就很难得出准确的数字。我们常讲我国有九亿人口,这就是一个大概的数目,是一个近似数。那么,在进行数值计算时,为什么会产生误差呢?产生误差的原因主要有以下四个方面:

一、自然现象和社会现象往往是错综复杂的,研究某一问题涉及的因素可能很多,但其中有的因素对这一问题的影响不大,在用数学方法来描述这一问题中的数量规律时,有时就可以略去这些次要因素,使问题理想化。如热学中的波义尔——马略特定理 PV = C(C为常量)是反映温度不变时气体的体积和压强之间的关系。实际上,由于分子本身占有一定的空间,加上分子之间有相互吸引力,因而随着压强的增高,气体浓度变大(即单位体积里的分子数变多),分子间相互吸引力增大,这样,就减小了分子对器壁的压强,从而使 PV 的值并不准确地等于C了。因此,波义尔——马略特定律只是在气体压强较小时才适用,这时,我们略去了分子之问吸引力等这些次要因素。当然,经过这样理想化了的数学模型必然是近

似的,也就是说,数学模型本身往往是包含误差的。人们把这种实际现象本身与它的数学描述之间的误差,叫做描述误差。

二、在研究某一既定问题时,所给数据往往是通过观察而得到的。如时间, 需要用表来记录: 长度, 需要用尺来度量; 等等。在实际测量某一个量时, 有时因为使用工具的精确度有一定的限制, 有时由于测量者的经验不足或视力的限制, 以致不能得到准确的数据, 只能得到一定的近似值, 因而产生误差, 人们把这种误差叫做观察误差。

四、对于无穷小数的计算,总是用有穷小数来代替它们, 有时甚至对有穷小数也要用位数较少的来代替,这样产生的 误差叫做舍入误差。

既然误差是客观存在的,那么又应该怎样去确定误差呢? 为了确定误差,需要研究近似值的绝对误差和相对误差这两个概念。假如某项建设工程预算需建筑材料 16871.492 立方米,如购入 16872 立方米,就有 0.508 立方米的多余材料。我们把一个数的精确值与它近似值的差叫做绝对误差。但在很多情况下,确定绝对误差是不可能的,因为实际上常常不可能 得到精确值。但是,如果能保证绝对误差不超过一定的范围,也就能满足要求了。如我们说某种零件的误差范围是0.1mm,也就是说,如果零件精确数值是 amm,只要产品的数值 x 满足下列不等式,就是合格的。

$$a - 0.1 \le x \le a + 0.1.$$

在这种情况下,我们就把这个误差范围叫做绝对误差。

3

告诉你某两个数值的绝对误差,并不能由此就确定这两个数值中哪一个更精确一些。例如,称 30 克重的一个零件,绝对误差是 0.5 克;称 5500 克重的一个物件,绝对误差是 50 克;并不能因为前者的绝对误差较后者小,从而就确定前者数值要较后者精确。要能正确地比较出哪次度量的结果比较精确,需要用到相对误差这个概念。用绝对误差做分子,零件和物体的重量做分母,第一个误差是物体的 $\frac{0.5}{30} = \frac{5}{300} = \frac{1}{60}$,第二

个误差是该物体的 $\frac{50}{5500} = \frac{1}{110}$,不难看出第二个误差的准确性较强。我们把绝对误差与精确值的比叫做相对误差。

在进行近似数的计算时,需要把数截取到某一指定的数位,其方法则根据具体条件和不同目的而决定。通常有以下三种方法,

一是"去尾法"。即当某一具体问题需要取原数的不足近似值,就把原数写到第 n 个数位,以后数位上的数字皆含去。例如,若用 10 丈布裁制每套 1.4 丈的制服,问最多能做几套?用 10 丈除以 1.4 丈得 7.14…(套)。这就是说,做 7 套布有多余,做 8 套布又不足;依题意自然只能取商的完整到个位的不足近似值,而略去其尾数 0.14…,也就是说最多可以做 7 套

衣服,用去尾法截取到的近似数,其误差的绝对值总不超过第 n个数位上的一个单位。

二是"收尾法"。即当某一具体问题需要取原数的过剩近似值,就把原数第 n+1 位起的数字皆舍去,写到第 n个数位,并且在第 n个数位上加上一个单位(只要所含去的数字非0)。例如,一辆客车最多可以装 55 个乘客,现在有 240 人,问需要几辆客车? 用 240 人除以 55 人得 4.36…(辆)。 这就是说,4 辆客车不够,5 辆客车多余,依题意自然只能取商的完整到个位的过剩近似值 5, 而略去其尾数 0.36…。用收尾法截取到的近似数,所产生的误差,其绝对值不超过第 n 个数位上的一个单位。

三是"四舍五入法"。这是一种最常用的方法。即把一个数截取到第 n 个数位,若第 n+1 个数位上的数字小于 5,就把原数写到第 n 个数位,舍去第 n 个数位以后的尾数,最后一个数位上的数不变;若第 n+1 个数位上的数字等于或大于 5,就把原数写到第 n 个数位,舍去第 n 个数位以后的尾数,并在最后一个数位上加上一个单位。例如,汽车 3 小时行140公里;欲求其速度(精确到 0.1)。用 140 公里除以 3 小时,得速度为 46.66 ···公里/小时。据题意,要求答案精确到 0.1,取商完整到十分位的不足近似值 46.6 公里,由于其尾数的首位有效数字 6 大于 5,故将 46.6 的末位数字 6 加 1,即得所求速度为 46.7 公里/小时。

近似计算的问题有两种类型。已经知道计算中所含近似数的误差界限,要求出计算结果的误差界限,这是第一种类型的问题。已经给出计算结果所容许的误差界限,要求确定在计算所含的近似数可以容许的误差界限,使计算结果满足预定

的要求。

关于近似计算问题,有以下的计算法则:

法则1 近似数相加(加数不超过10个)或相减时,以小数位数最少的那个近似数为准,其它的近似数比它多保留一位,舍去多余的部分;在计算结果里应保留的小数位数和原来近似数里的小数位数最少的那个相同。反过来,如果预定结果要有几位小数,那么原始数据应该取到有n+1位小数,然后用四舍五入法算出需要的结果。

法则2 两近似数相乘除时,有效数字较多的近似数只要比有效数字较少的那个数多保留一个,舍去其余部分;在计算结果里从第一个不是零的数字起应保留的数字的个数,和原来近似数里有效数字较少的那个相同。反过来,如果预定结果要有几个有效数字,那么原始数据应取到有n+1个有效数字。

由于篇幅的限制,这里对上述近似计算的法则的证明和 应用就从略了,读者可以在一般教材里找到这方面的内容。

近似计算在现实生活中有重要的意义,我国政府重视这方面理论的研究。如中国计量科学研究院于1977年9月在江苏无锡召开了全国《误差与数据处理》学术座谈会,研究了部分误差名词术语的定义与名词统一的问题;误差的合成问题;国内外误差与数据处理的现状,今后工作的建议。大家一致认识到误差与数据处理对科研和生产部门的重要性,决心更好地开展研究工作,为实现我国四个现代化作出更多的贡献。

古算中的求积问题

四千多年以前,人类处于新石器时代的晚期,我们的祖先 开始由游牧生活转向定居,从事农业生产。在耕作过程中,人 们需要知道各种形状土地面积的大小。开始,只能掌握长方 形、正方形等少数几种规则田亩的计算方法。到了奴隶社会 末期,奴隶起义猛烈地打击了奴隶制,当时的土地制度"井田 制"开始崩溃。公元前 594 年,鲁国实行"初税亩",中原各诸侯 国也相继效法。这时,统治者要求"履亩而税",奖励垦者开荒, 出现很多不规则形状的田地,原有面积计算方法已远远不够 用了,必须掌握其它形状的私田面积的计算方法。经过总结研 究,把劳动人民创造的多种求积方法用来为他们实行的初税 亩制服务。《九章算术・方田》章中就系统地记载了这方面的 内容。它不仅讲了长方形、正方形田亩的求法,并且讲了三角 形、梯形、圆形和球冠形等田亩的面积求法。 那时把三角形的 田叫"圭田",求积方法是"半广以乘正从"。这里"广"是三角形 底边的长,"正从"是说和底边垂直的高。把直角梯形的田叫做 "邪田",面积求法是"并两斜而半之以乘正从"。这里"两斜"即 梯形的两底,"正从"即梯形的高。一般梯形的田叫"箕田",可 分为两个"邪田"做。此外,还载有"圆田"、"宛田"(球冠形田)、 "弧田"(弓形田)面积的求法。公元三世纪,《五曹算经》中又提 出一些近似求积公式。如"鼓田"与今天腰鼓形相似。若鼓田上 广为a,下广为c,中间广为b,高为h,则面积

斧

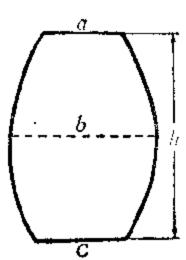
...

$$\mathcal{A} = \frac{1}{3}(a+b+c)h.$$

还有"四不等田",即任意四边形的田亩。设四边长依次为a、b、c、d,则面积

$$A = \frac{a+c}{2} \cdot \frac{b+d}{2}.$$

用这两个近似公式计算田亩, 误差较



大。南宋秦九韶的《数书九章·田域》类里有"三斜求积"术、就是我们今天所讲的已知三角形三边求三角形面积的方法。设三角形三边为 a、b、c,面积为 s,秦九韶推得的公式是

$$s^{2} = \frac{1}{4} \left[a^{2}b^{2} - \left(\frac{a^{2} + b^{2} + c^{2}}{2} \right)^{2} \right].$$

把这个公式稍加化简即得现在通常所讲的"秦九韶——海仑公式"。宋沈括又从求弓形田亩面积引出弧长求法,是我国科学史上第一个由弦和矢长求弧长的近似公式。这些都说明,我们的祖先研究田亩求积问题历史悠久,成绩卓著。

和面积一样,体积概念和计算方法也是随生产实践的需要而产生和发展的。我国劳动人民不仅很早就会筑城、治水,而且还会建造大型粮仓、舟车和雄伟的宫殿楼阁。如魏国西门豹主持修建的引漳灌邺工程,使大片良田沃土得到灌溉,粮食连年丰收,为统一战争的胜利提供了雄厚的物质基础。为了防止我们北方少数民族匈奴奴隶主贵族的侵扰,秦始皇建筑了驰道、城塞,并把战国时期燕、赵、秦各国所修的长城连在一起,修成了举世闻名的万里长城。《九章算术·商功》一章,正是对这一时期工程建筑中数学知识的科学总结,它涉及到的

全是对修筑城、垣、堤、堑、渠、窖大型工程土方量的计算和科学安排劳动力的问题。如筑堤、开沟等土方的计算,按底面是

梯形的直棱柱来求,公式是

$$v = \frac{1}{2} (a_1 + a_2) h l.$$

这里 a1、a2 分别是堤坝、沟渠剖

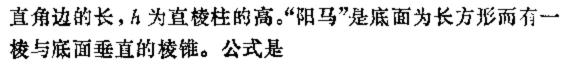
面梯形上、下底的边长, h 为梯形的高, l 为工程一段的长。

"堑堵"为两底面是直角三角形的

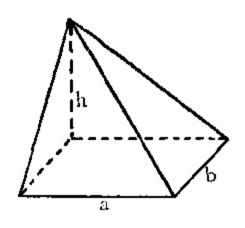
直核柱,公式是

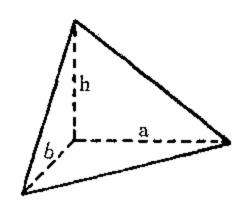
$$v = \frac{1}{2}abh.$$

这里 a、b 是底面直角三角形两



$$v = \frac{1}{3}abh.$$





这里 a、b 是长方形的长与宽, h 是棱锥的高。"鳖臑(nào闹)" 是底面为直角三角形而有一侧棱与底面垂直的三棱锥。公式 是

$$v = \frac{1}{6} abh_{\bullet}$$

这里 a、b 是直角三角形的两直角边, h 为棱锥的高。"方亭" 是正四棱台体,公式是

$$v = \frac{1}{3}(a^2 + ab + b^2)h_{\bullet}$$

这里 a、b 分别是棱台上、下底的边长, h 为高。"圆垛(同堡) 铸"是圆柱,公式是

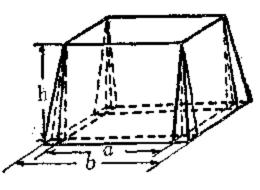
$$v = \frac{1}{12} p^2 h$$
.

这里 *p* 是底面圆周长, h 为圆柱的高。显然,式中π值取 3,误差较大。"圆锥"和今日名称完全一样,公式是

$$v = \frac{1}{36} p^2 h$$
.

这里 2 是圆锥底面周长, λ 为圆锥的高, π 仍取 3。"商功"章

中还详细研究了各种几何体之间 的关系,从而使较复杂的几何体 转化为较简单的几何体来求。如 "方亭"可分解为一个正四棱柱, 四个"堑堵"和四个"阳马"。故体 积为



$$v = a^{2}h + 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{b - a}{2} ah + 4 \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{b - a}{2}\right)^{2} h$$

$$= \frac{1}{3} [3a^{2} + 3a(b - a) + (b - a)^{2}]h$$

$$= \frac{1}{3} (a^{2} + b^{2} + ab)h.$$

隋唐以后,王孝通在《缉古算经》一书中又广泛应用了这些求积公式,解决一些大规模的建筑工程问题,在本书《数学方程式是从哪里来的?》一节中已作过介绍。

长度单位的确定

计量是科学的生命线,没有它,科学就不可能发展。例如, 汽车和机床都是由许多部件构成的。设计时,这些部件的尺寸 必须十分准确,装配才能吻合无误。同样,在日常生活中,长度 单位也起着重要的作用,路程的远近,人体的高矮,布匹的长 短,都离不开长度的计量。

人们在实际 度量中需要确定单位。

在人类文化发展的初期,长度单位往往是从人们生活环境中取定的。如以人体某部分的长度作为单位:以肘或成年人的足长作为一英尺;手指关节间的长作为一英寸;我国古时有以于步作为一里等。又据古书《小尔雅》记载,我国先秦时期以蚕丝的粗为忽,十忽为一秒,十秒为一毫,十毫为一厘,十厘为一分。此外,在历史上也还出现过以"一箭之遥"、"一日的行程"等作为长度单位的。这些天然的度量方法,显然是不够科学的。如,肘、足、步和手指关节的长因人而异,长度很不固定。根据有关科学家的研究,不同民族肘的长短一般在40cm至55cm之间,相差达15cm之多。用这种天然的单位进行度量,准确性不能令人满意,这就需要找到比较科学的长度单位。

此外,随着生产力的发展,人类贸易往来逐渐密切,需要统一各种不同的长度单位。如我国在实行市制前,长度单位有二进的,有四进的,也有八进、十进、十二进、十六进的,名称也很复杂,尺就有营造尺(又名鲁班尺)、裁尺、市尺等之分,十分

紊乱。世界各国也都有自己规定的长度单位,真是五花八门,各有千秋。这样形形色色的度量,不仅容易产生错误和混乱,而且确实严重影响国际、国内之间正常的贸易往来,阻碍了生产力的进一步提高。

基于这些原因,人们对长度单位的科学性和统一性提出 了新的要求。可是,这个问题的解决,没有一定的社会基础,是 不可能实现的。公元 1789 年, 法国大革命胜利了, 这就给资本 主义的发展创造了有利的条件。生产关系的改变又解放了生 产力。从而,建立一套新长度单位的条件逐步成熟了。公元 1790年5月8日,法国国民议会决定选择一套能适合全世界。 人民的度量制度。他们成立了一个以科学家拉格朗日、蒙日、 康多塞为首的委员会,这个委员会决定采用巴黎子午线的长 度的四千万分之一作为基本单位,并且把实际测量子午线弧 长的任务交给科学家达兰贝尔和梅森去做。当时,由于国内战 争和武装干涉,条件极度困难。但科学家们没有被困难吓倒, 仍然认真地执行了委托给他们的任务,测量了巴塞罗那与敦 刻尔克之间十度的弧长。直到公元1799年, 在著名数学家拉普。 拉斯的领导下,终于完成了一切测量和拟定的工作。人们准备 了标准白金模型,在棒上刻了两条细线,0℃ 时两条细线之间 的距离就叫做 1 米。"米"是由希腊字μξγρογ来的,它的意思 就是度量。后来,这个国际米原器就保存在法国度量局内。国 际长度单位"米"出现后,长期以来一直为各国所通用。可是, 后来人们发现,由于地球的自转,它的经度圈在缓慢地缩短, 不能长期保持公布生效时的长度,所以也就失去作为基本单 位的条件。公元1960年,第十一届国际计量大会将公元1889。 年公布生效并于公元 1927 年严格规定的国际铂铱原器的米、

政为由充氦气的特别制灯泡中所发出的光线的波长来定义。

我国在秦以前,长度单位十分紊乱。公元前221年秦朝统一以后,政权稳定,生产力有所提高,中央政权根据实际的需要颁布"一法度,衡石,丈尺"的法令,并发给度量衡的标准器,命令人民一体遵用,全国长度单位开始统一。西汉平帝元始年间(公元1年到5年),对长度单位作了修正。当时的长度单位是:

1 引 = 10 丈 = 100 尺 = 10000 寸 = 10000分。(1 尺约等于 现在的 0.69 市尺)

选用长度单位, 娶视具体情况而定。例如,南京到北京, 火车的全程是1134公里。这时,用"公里"作为长度单位是比 较恰当的。可是,如仍用公里表示星际之间的距离,那就显得 太小了。例如,比邻屋是离地球最近的一颗恒星, 但距离就有 40,000,000,000,000公里,写起来已经很不方便了,如果要表 示那些离地球较远的恒星的距离,那就更为麻烦了。后来,人 们发现光的速度最快,每秒钟可走 299792.5 公里,约 30 万公 里,一年可以走 94605 亿公里。于是,就把光一年所走的路程 叫做"光年",以它作为天文学上的一种单位。若以光年为单 位,比邻星离我们 4.24 光年, 牛郎星离我们 16 光年, 织女星 离我们27光年。目前已发现的离我们最远的天体距离是100亿 光年,象这么大的数字是很难用公里来表示清楚的。"光年"单 位虽大, 但衡量太阳系范围内的距离时,它又嫌小了,于是又 有"秒差距"这个单位出现(一个秒差距约等于3,262光年)。大 单位有大单位的用处,小单位也有小单位的用处,表示很小的 长度,就要用到小的单位。如预测地震是一项很重要的工作, 要测出地震震级的大小,就需要用专门的仪器来记录地震波

的强弱。它以微米($\frac{1}{1000}$ mm)为单位,用来表示离开震中 100

公里处的地震仪记录纸上的振幅。如要表示极微物质的长度,用微米还嫌太大。人们用一毫米的一千万分之一为一"埃",以埃为单位,生物细胞的每层胞膜厚度是二十五埃;金原子的直径是二埃到三埃。随着人类对微观世界认识的不断深入,"埃"已经不够用了。现在,世界上最小的长度单位是atto-meter,相当于1厘米的1.0×10⁻¹⁶。1979年年底,参加广州粒子物理讨论会的美国麻省理工学院陈敏副教授与中国科学院高能物理研究所王祝翔和霍安祥副教授作了有关实验物理的学术报告。陈敏副教授在会上报告了马克捷小组(由丁肇中教授领导,我国高能研究所研究人员参加)利用汉堡一台目前世界上能量最大的正负电子加速器,测得电子和两个重电子的尺度小于1个atto-meter。这是单位"atto-meter"最新的运用。

1977年5月27日,国务院发布"中华人民共和国计量管理条例(试行)",其中规定我国的基本计量制度是"米制"(即"公制"),今后逐步采用国际单位制。目前保留的市制,要逐步改革。关于英制,除因特殊需要经有关部门批准外,一律不准使用。这样,随着我国现代化建设的迅速发展,加强了对计量工作的领导,计量工作就能更好地为工农业生产、国防建设、科学技术和国内外贸易服务。

关于欧几里得几何学

几何学起源于测高量距、计算面积和体积。埃及人称它为 勠地学,不是没有道理的。我国《九章算术》中"方田"、"商功" 等章,也都是研究有关面积和体积的测算问题。

几何概念开始都是和具体的事物联系在一起的。如满月、车轮、圆形的建筑都给我们以"圆"的形象,但这些都还是一些感性认识,不能反映图形的本质属性。"科学就在于用理性方法去整理感性材料。"(马克思:《神圣家族》)科学知识积累到一定阶段以后,客观上就要求科学工作者对这些具体的、片新的知识进行科学总结。人类在长期测量计算过程中,随着所接触图形的增多,对这些图形性质的认识也逐渐全面深刻,迫切需要形成有关的概念,并对总结出的种种规律,给予超出经验的理论证明,这是数学发展的必然趋势。

人们在长期实践和研究过程中,发现几何概念和性质不是孤立存在的,而是紧密联系的。于是从中选择出一些最基本的要素(如直线、平面)作为基本概念,又把少数经过长期实践被大家公认的客观规律作为公理。从基本概念和公理出发,通过逻辑推理,推引和推导出其它一系列的概念和定理,逐渐形成一门具有严密理论系统的几何学。直到公元前三世纪,希腊数学家欧几里得总结了前人的经验,完成了这项任务,他所写出的《几何原本》,被人们称之为欧几里得几何学。

欧氏几何学的形成,是有一定的社会背景的。公元前七世

纪,古希腊的手工业得到独立的发展,生产力逐步提高,物质财富的剩余日益增加,为数学科学的发展提供了物质基础。政治上又出现了反对奴隶主贵族的手工业主与商人阶级。他们为了能取得和奴隶主贵族斗争的胜利,非常关心发展生产力,迫切地追求科学知识。由于经商和外界接触增多,他们有机会学习埃及与巴比伦的科学文化,由于社会剩余财富的增加,他们有足够的物质条件和闲暇时间从事科学研究工作。

公元前五世纪,希腊统治阶级内部发生分裂,互相争夺。他们由于自己的阶级地位,思想上越来越厌恶体力劳动,工作上越来越脱离实际。他们企图从哲学与伦理学的研究找到某些论点来巩固他们的统治。哲学家柏拉图在他的哲学著作《共和国》(大约写于公元前 360 年左右)中,提出了一个具有浓厚的唯心主义色彩的"共和国方案",说什么"客观存在的世界是变幻无常的,不真实的,只有纯粹以理念为基础的世界才是永恒的,真实的。"柏拉图散布这些言论,目的就是使人们安于脱离实际的现状,供他们奴役,从而维持他们行将崩溃的反动政治。

希腊几何学的思想和柏拉图"理想国"的思想是一致的,柏拉图的这种思想追使几何学的发展纳入他的思想轨道,为他的政治理想服务。他规定,共和国的士兵必须学习算术和几何学。他这里所指的"算术",不是应用于商业手工业上的比较实用的数字计算,而是纯粹理论的推导;这里所指的"几何学",正如他自己所说的"不是应用于测量的学问,而是具有严密系统的理论"。他把理论和实际割裂开来,鄙视实践,提倡人们研究象"几何三大作图题"那样徒劳无益的游戏式的纳容。

欧几里得几何学就是在这样的社会背景下产生的。欧几 里得是古希腊的一个奴隶主, 由于他的阶级出身和社会上反 动政治思潮的影响,他把理论几何知识看成是至高无上的东 西,对《原本》体例十分自得,而把与生产实际直接联系的知识 叫做"奴隶的数学。"整个《原本》中没有一个解决实际问题的 内容,全部是抽象的定义、公理和定理。《原本》问世以后,引 起人们的兴趣,经过两百年左右的时间,直到第五世纪, 许多 数学工作者对它进行了大量注释和评论。但是到了罗马帝国 时期,由于罗马统治者关心的是廉价的奴隶劳动,以及适应这 种劳动的科学技术,《原本》没有受到重视。公元六世纪,《原 本》传到印度,印度学者对它也不感兴趣。到了公元九世纪以 后,学术中心移到阿拉伯,希腊数学又受到很大重视,《原本》 得到许多研究。十二世纪以后,并被采用为大学教本。由此 可见, 欧儿里得几何学在历史上并非一贯受到人们重视的。 人们所以重视它,由于它有严谨的理论体系,在数学教育和数 学研究上有一定价值,有些人轻视它,主要是认为书中讲的都 是理论,实用价值不大。

我们认为,公理方法作为理论思维的一种具体的科学方法,对于数学研究是有作用的。从这个意义上来看,欧几里得随着社会发展的需要,总结了前人的经验,写出了历史上理论严密、系统完整的第一部数学著作《原本》,其作用是应该予以充分肯定的。在印刷术发明以前,欧几里得几何学的手抄本曾控制了几何教学,印刷术发明以后,他的《原本》出现了一千多种版本,其发行数量与传播之广,仅次于"圣经",成为西方世界历史中翻版和研究最广的书。直到今天,欧氏几何学新传下的一部分精华,仍然是我国中学数学教学中培养学生

逻辑推理能力必不可少的有独特作用的内容,我们在造屋、建 桥、求积、修路等实践中,运用欧几里得几何学能比较准确地 求得要算的结果。清朝学者徐光启对《原本》十分推崇、翻译了 这本书,并对这本书提出"四不必"和"四不可得"的观点,即 "不必疑,不必揣,不必试,不必改","欲脱之不可得,欲驳之不 可得,欲减之不可得,欲前后置之不可得"。对《原本》的评价极 高。实际上,任何反映客观真理的科学都是相对的。随着人 类所认识的空间逐渐扩大,用欧几里得几何学计算的结果就 不够精确了。就以我们生活的地球来说吧, 教室里天花板上 挂着两盏电灯,我们通常认为这两根电线是平行的,因为它们 同垂直于天花板。但是,如果我们把这两根电线理解为两条直 线, 显然它们是不平行的,而是相交于地心。又比如,两只轮 船在同一纬度上同时同谏向北"平行"航行,我们可以发现,它 们之间的距离并非"处处相等",而是越来越近,最后相会于北 极。因为地球的表面不是平面,而是球面。所以,对欧氏儿何 应该一分为二,它在较小范围内是正确的,但在较大的空间内 就有问题了。我们要对它进行历史的唯物主义的科学分析,分 清精华与糟粕,批判其唯心主义和形而上学的体系,继承其科 学内容和方法。在中学几何教学中,按照教学大纲和教材的 规定,把有关的基础知识学好。同时,应注意联系实际,对逻 辑推理论证部分,应由浅入深,由生动的说明逐步进入理论证 明,使理论与实际较好地结合起来。

关于公理的评价

我们在谈欧氏几何学的形成时,已经提到过数学公理。什么是数学公理呢?恩格斯说:"数学上的所谓公理,是数学需要用作自己的出发点的少数思想上的规定。"(《自然辩证法》)这是关于数学公理的本质的精辟的论述。大家知道,任何自然科学都离不开逻辑推导的,数学尤其是如此,当人们在整理、加工千万年实践中获得的丰富而繁杂的数学知识时,通过抽象概括和逻辑分析,逐渐形成表述有关概念的数学定义以及表达有关规律的数学命题,并从大量数学概念中提炼出少数基本概念作为一切数学概念的逻辑出发点,从大量数学命题中提炼出少数基本命题作为一切命题的逻辑出发点,这是必要的,也是合理的。因此,数学公理就是对数学理论进行逻辑推导的出发点,是整个数学科学的理论基础。

人们从长期实践中积累的大量感性材料到总结出一组数学公理,初步形成公理化的理论系统,标志着认识由感性阶段到理性阶段的飞跃。当一组公理一经确定之后,这一门数学理论就可以这组公理为基础,按照逻辑规律推导出一系列新概念、新命题。因此,我们说,公理不仅是人类整理已有感性知识的产物,而且也是进一步获得新知识的一种手段。所以,公理方法对数学理论研究的积极意义是应该予以充分肯定的,它不但在代数、泛函、拓扑等等数学分支的研究中起着重要作用,而且越来越广泛地渗入其它学科。例如,数理逻辑就是在

公理方法影响下形成的一门崭新的数学分支,它不仅推动了数学基础问题的研究,而且也为数学应用于现代科学技术开辟了新的前景。电子计算机的出现就是重要的一例。电子计算机是由许多元件构成的复杂机器。这些元件虽然只能完成最基本的逻辑运算。但是,各种元件经过合理组合,并运用数理逻辑的原理,就能用基本的逻辑运算表示出复杂的逻辑运算,从而使电子计算机能够迅速、合理、准确地完成各种繁杂的数学计算。在这里,公理方法的积极作用不是很明显么?

公理方法虽然在数学研究中有一定的作用,在科学技术 中有重要的应用,但是我们又不能把数学公理和逻辑推理的 作用过分夸大。有人认为,既然公理是从实际中抽象出来的, 从公理出发推导出来的命题就是符合真理的认识,无需再到 实践中去检验。这种把数学公理和逻辑推导与实践隔绝开来 的看法,是唯心主义、形面上学的观点。唯物辩证法认为,人类 的一切认识都是相对的,任何数学公理和由它出发建立的数 学理论,只能是在一定历史条件下从一定的、有限的具体背景 出发做出的理论概括,因而它对客观世界中形和数的规律性 的反映必然也只能是有限的、相对的、近似的。只有在实践中 不断地加以检验,才能逐步充实、完整。非欧几何的产生,就是 一个很好的说明。历史上,欧氏几何体系是概括前人在生产实 践中所获得的几何知识的结果,从当时人类对空间形式的认 识水平看,欧氏几何学的内容具有相对的真理性。即使在我们 现实生活中,运用欧氏几何学的理论还是能够满足我们一般 需要的。但是,随着人类社会实践的发展,对空间认识的范围 逐渐开拓,欧氏几何的局限性就逐渐地暴露出来。当航海事业 日渐发达,人们在进行大范围的测量时,发现宇宙间很大的三

角形三内角之和并不是一百八十度,这与长期应用的欧氏几何关于三角形三内角之和等于一百八十度的结论产生了矛盾。是观察有错误、测量工具不精密,还是因为欧氏几何有关理论已不适用于大范围内的几何特性?人们经过反复实践,逐步认识到欧氏几何的理论需要发展。在这样的历史条件下,罗巴切夫斯基总结了两千多年来许多人试图用纯粹逻辑推理说明欧氏几何的第五公设而不能成功的教训,大胆地摆脱欧几里得几何的传统束缚,提出了同欧氏几何第五公设不同的新的科学假设。几乎同时,高斯和波里埃亦有相同的想法。稍后,黎曼又提出了另一种不同于罗氏的新的科学假设。这就产生了各种不同的非欧几何学。

在如何对待公理方法的问题上,历来存在着唯物论与唯心论、辩证法与形而上学的斗争。唯物辩证法认为,数学公理不论多么抽象,都是人类长期社会实践中概括总结出来的理论,是有一定的客观物质基础的,它的自明性是人们世代相传继承下来,而决不是先验的。甲提的鱼比乙多,乙提的又比两多,甲的就一定比丙的多。对这一类千万年中无数次实践证明了的事实,难道还会怀疑么?资产阶级唯心论者却编造公理先验的谎言,把公理歪曲成人的理智的自由创造物或天赋神授的东西。杜林就认为,数学公理是"按照纯粹逻辑的观点既不可能也不需要论证的";唯心主义的数学家庞加莱也认为"几何学公理,这原来是一些公约。"他们否认和回避公理的实践基础,把它单纯作为理性的需要,目的就是为数学脱离社会实践找借口,为唯心主义哲学找根据。

中学数学是整个数学科学的基础,在进行必要的基础知识数学和基本技能训练时,引用一定的公理作为理论推导的

基础,这是必要的。例如,在解方程时,需要用到等量公理;在作图时,需要用到关于确定直线与平面位置的公理;在学平行线理论时,需要用到平行线的公理,等等。但是,这些公理的引入,应建立在学生已有感性认识的基础上;其数量也不必求全,以常用者为主;而以公理为基础进行推导论证时,亦需防止繁琐哲学,着眼于提高学生的分析问题和解决问题的能力。近两年来,为了适应删繁更新的需要,新数学教学大纲和教材对几何公理的数目有所增多,这是必要的。因为不这样,旧的不简化,新的进不来,就不能提高中学数学教学的程度。但是,公理的扩大也要注意控制,不然,对培养学生逻辑推理能力不利。总之,我们一定要根据中学的特点,坚持少而精和理论联系实际的原则,使公理在中学数学教学中能够发挥更好的作用。

角的概念的扩展

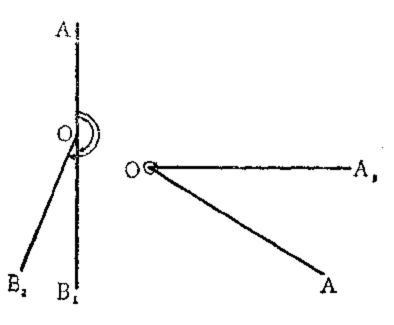
中学生从一开始接触平面几何,到学习三角形、多边形,直线、平面的位置关系,各种多面体,一直到解析几何,都离不开"角"这个概念。角是中学几何中常见的,也是很重要的一个概念。系统地研究一下它的产生与扩展,对于我们深入理解与全面掌握有关的几何知识来说,是完全必要的。

和其它数学概念一样,角的概念的产生,也是由于生产实践的需要。早在上古时期,人们为了兴修水利、防治洪水,需要研究地形、水势;为了测量田亩、建筑房屋,需要研究各种图形;为了研究天文、确定方向,需要研究星体位置,再如制造农具、车辆、兵器、乐器,需要按一定的角度来装配,这些都离不开角,都是产生角这个概念的实际基础。我国古代齐人所写的工艺书《考工记》中,把90°的角叫"矩",45°的角叫"宣",135°的角叫"磬折"。这里,"矩"、"宣"、"磬折"都是有关实物的名称。"宣",《考工记》中的记载是"半矩谓之宣",矩的一半成45°的

角。"磬"是一种用玉石做的乐器(右图),博面短的一端叫做股,狭而长的一端叫做鼓。"磬折"形容一个人身偻、折如同磬背一样,这些都说明角的概念是和当时工艺的发展联系在一起的。

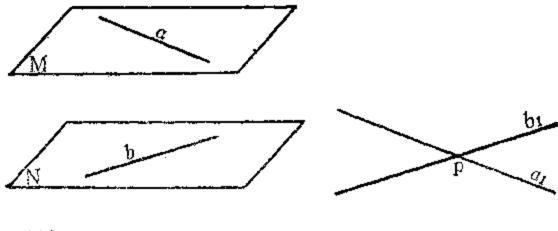
随着测量事业的发展,原有角的静止的定义以及锐角、直角、钝角等概念已经不能满足需要了。角的概念需要扩展。当

ş



超出周角的情况。为了区分动径顺时针、逆时针两个不同方向,又需要把角当作矢量,从而引出负角的概念。到此,建立起平面角的大小与实数之间的对应关系。平面角概念的一般化,为我们研究三角函数并进一步把三角函数的知识应用到物理和其它科学技术中去,创造了必要的条件。

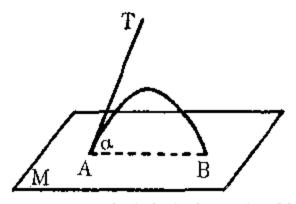
异面直线的客观存在,向我们提出发展平面角概念的需要。因为,要表示空间两条异面直线的位置,就需要用到角的概念。于是,人们把异面直线的夹角与平面角的概念联系起来,用平面角的大小来表示空间异面直线夹角的大小。也就是



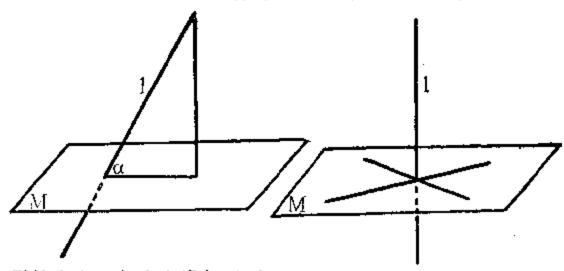
说,过空间一点分别作二异面直线的平行线,这两条直线的夹角就是二异面直线的夹角。异面直线的夹角有了定义,空间直线夹角的概念就一般化了。

研究斜抛体,需要知道初速与夹角。这里的"夹角"实际上就是抛射方向与地面的夹角,在立体几何中即直线与平面的

夹角问题。砌墙立柱,需要 先定铅垂线,这就是直线与 平面垂直的问题。实践又向 我们提出需要研究直线与平 面的夹角的问题。为了定义 直线与平面的夹角,引入直



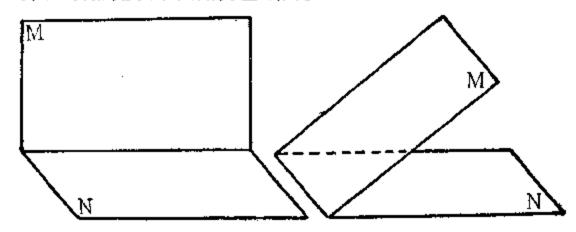
线在平面内的射影的概念是必要的。把直线与它在平面的射



影的夹角定义为直线与平面的夹角。特殊地,当直线与平面垂直时,定义它们所成的角为90°;当直线与平面平行时,定义它们所成的角为 0°。可见,直线与平面夹角的

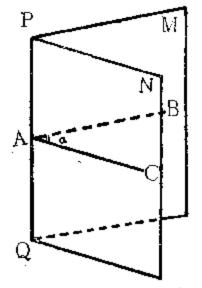


表示,仍然是以平面角为基础的。



斜坡面与水平面,铁斧二斜面形成的劈,黑板所在平面与地面,均构成二面角。斜坡角度多大?铁斧利钝如何?墙面与地板是否垂直?回答这些问题又必需涉及平面与平面的夹角,也就是立体几何中二面角的问题。怎样表示二面角的大小?人们

仍然用平面角的大小来表示它。也就是,自二面角棱上一点(A),分别在二面角(M-PQ-N)的两个面(M,N) 内作棱(PQ)的垂线(AB,AC),二垂线所成之角 $(\angle BAC,\angle\alpha)$ 就是二面角(M-PQ-N)的平面角。这样,两平面的夹角,可以用二面角的平面角来表示。特别的,当两平面平行时,它们的夹角为 0° 。



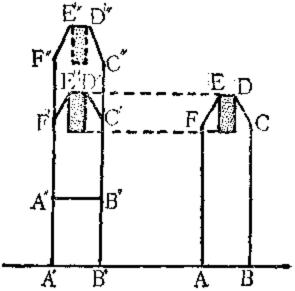
教室的壁角是交于一点,两两互相垂直的三个部分平面 组成的图形。埃及金字塔顶部是交于一点的四个部分平面组 成的图形。正五边形凉亭顶部是交于一点的五个部分平面所 组成的图形。一把撑开的伞,顶部是由交于一点的若干个部分 平面所组成的图形。以上诸例说明,客观世界中存在着很多这 样的图形,从一点出发,引出若干条不在同一平面内的射线,这些射线以及每两条相邻射线间的部分平面所组成的图形,就叫做多面角。多面角是构成多面体的基本原素,而多面体是我们日常生活中常见的几何体。这样,多面角就成为研究多面体的基础,尤其是关于"多面角所有面角之和小于 360°"等有关定理在正多面体概念中的应用,非常重要。因为正多面体的概念在自然科学中很有用处,不少矿物和结晶体都呈正多面体状。

如上所述,角的概念产生于生产的需要,而它的涵义又不是僵死不变的。随着人类对空间形式认识的扩大与深化,角的概念又需要不断扩展,这是一个由简单到复杂、由低级到高级的发展过程。但不论怎样发展,都以最简单的平面角的概念为基础。不论那种角的大小,归根到底都离不开平面角这个角的原始概念,这里孕育着深刻的辩证思想,启发我们进一步去思考和研究。

几何变换的现实模型及应用

几何学中充满着图形的变换。对于任何一已知图形,按照某种法则使另一图形与之对应,前面图形一经给定了,后面的图形就能跟着完全确定。而且反过来也对。这种对应叫做几何变换。由于物质运动有不同形式,因而反映在几何变换上是多种多样的。平移、反射、旋转、位似就是我们在中学数学中学过的几种几何变换。它们都是来源于客观实际,反过来又为实际问题服务的。

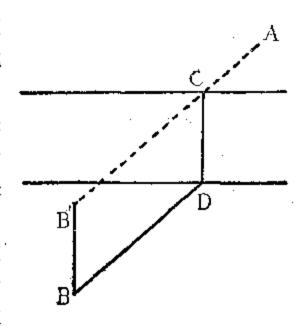
车床上的刀架向左移动 20毫米,刀架上的刀具 ABCDEF 平移至A'B'C'D'E'F'。若继续向前移动 4毫米,则又移至A"B"C"D"E"F"。一般来说,一个图形G朝着某一方向移动某一距离;也就是说,图形G上各点朝着同一方向移动某一



距离,形成图形 G'。这种从 G 到 G' 的变换叫做平行移动,简称平移。下面这个例题是平移理论在实际中的应用。

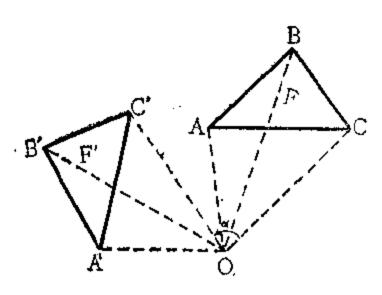
例 有两个居民点位于河道两侧A、B处,近河段很直, 两河岸可以看作平行,河宽可以看成是一个常量。现在要修建 防空地道,以联结这两个居民点,为了便于施工,地道穿过河 床时方向与河岸垂直,问应 在何处穿过河床,才能使地 道全程最短?

设地道在 C、D 两点处 穿过河床,则地道全程等于 BD+DC+CA,因 DC是 一个常量(等于河宽),所以, 当 BD+CA为最短时,地道 的全程最短。设想将 BD沿 DC方向平移至 B'C处,这



时 B'C+CA为最短。显然,要使 B'C+CA 为最短,只有当 B'、C、A 三点在一直线上时才成立。因此,问题在于可以先自 B 点作河宽的平行线,找到 B' 点,然后 C 点不难确定,从而 CD 也就可以得到了。

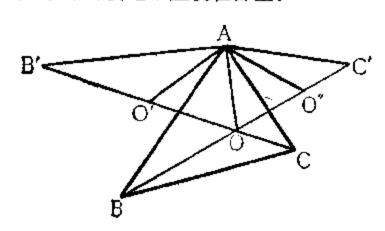
地球在太空中绕太阳运行,机床中皮带盘、齿轮不停地旋转,发电机转子、飞机推进器、脱粒机的滚筒等等,都是在作旋



转中心。下面这个例题是旋转理论在实际中的应用。

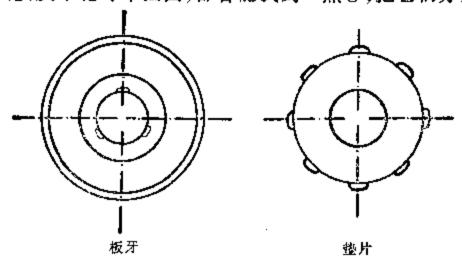
例 在平原上建设火力发电站,向三个村镇(A,B,C) 发电,要使输电的总干线最短,发电站应设在哪里?

假设发电站设在 O 处,则要求 OA+OB+OC 最小。为了使这三线 小。为了使这三线 投依次相接成折 线,我们将 $\triangle ABO$ 以 A 为中心旋转



 60° 到 $\triangle AB'O'$ 位置。由于 AO = AO', $\angle OAO' = 60^{\circ}$, 故 $\triangle AOO'$ 是等边三角形,则 OO' = OA,从而 CO + OO' + O'B' = CO + OA + OB。而在两定点B'与C之间的最短路径是直线段,因此CO、OO'、O'B' 应在一直线上,即 O又应在CB'上。同理,把 $\triangle ACO$ 以 A为中心旋转 60° 到 $\triangle AC'O''$,则 O又应该在 BC'上,于是O就是 CB'与 BC'的交点。如此,得到选择发电站的作法。

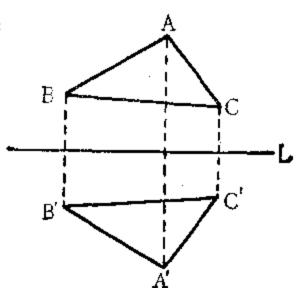
在自然界和生产实践中,如油菜花、板牙、垫片、星形捏手,齿轮、皮带轮等平面图,都各能找到一点O,把它们分别绕



点O转一个适当角度 α ,旋转后的图形与原来的图形能完全重合,即图形保持不变,我们把这种图形叫做旋转对称图形。

除平移、旋转两种变换 外,反射也是常见的一种几 何变换。由反射引出中学几 何中所学过的轴对称图形的 概念及性质。

图形经过平移、旋转和 反射,其线段长短和角的大 小均不发生变化。我们把这 种情况叫保长和保角。它所



反映的物理模型是钢体运动。除这一类变换外,还有位似变换。这种变换是保角的,虽然对应边的长改变了,但比值保持不变,它所反映的物理模型,就是各向均匀的放大或缩小。关于位似形的概念,在中学数学教材中有所涉及,本书"相似形和位似形"一节中也谈到一点,这里就不展开叙述了。

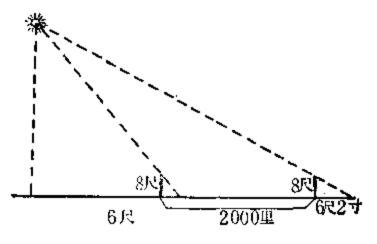
三角学的形成

三角学的产生与天文学的发展有着密切的联系。随着生产力的提高,人类生产的东西逐渐丰富,需要交换产品,这就促使商业贸易的产生。商业贸易又推动了旅行事业的发展,一队队商人开始穿过那荒无人烟的草原,或航行在一望无际的海洋上。怎样才能迅速、正确而平安地到达目的地?这是旅行者迫切需要解决的问题。人们为了不走错路,逐步学会在长途旅行时,沿途作出一些路标。可是,在那荒凉的草原和茫茫无际的大海上,用什么做标志比较可靠呢?在长期的实践中,人们发现太阳和星星正是指引正确方向的最好的路标。

为了能正确地运用太阳和星星指引旅行的方向,人们就得学会进行天文观测,研究星体的相关位置。由于这些原因,原始的三角知识就很自然地开始萌芽了。当时,还谈不上作为数学独立分支的三角学,甚至连"三角学"这个名称也还未出现。三角知识同现在的三角学比较,形式和内容都很不同,它

只是天文观测中的 一个计算工具。

我国对三角知识的研究渊源很早。公元前3000年 左右,最古老的数学书籍《周髀算经》



一书中,曾记载从地面一点到太阳的距离。陈子在周城(周成王所建的都城洛邑,即今河南洛阳)立8尺高的竿。在某一天正午,测得竿影的长是6尺,又在北方相距2000里的地方立同样高的竿,测得影长是6尺2寸。应用相似三角形的原理,可以求得周城到日下地的距离是 秦

$$\frac{2000 \times 60}{62 - 60}$$
里=60000里,太阳离地面_目

的高是 $\frac{2000 \times 80}{62 - 60}$ 里 = 80000 里。然后 高

在外国,三角学的形成也是和天文学家密切相关的。

古代希腊三角学的发展已到达一个新的阶段:即寻求三角形各元素之间的相互关系。也就是研究如何通过三角形已知的三个元素(至少有一个是线段)来确定其它元素。这时,已用到圆内接正多边形的边长与半径的关系,来确定已知角的正弦。公元前二世纪,希腊天文学家希巴尔奇和波托雷梅由于天文测算的需要,制成了第一张弦表。

公元五世纪到十二世纪,印度人进一步发展了三角学。他 们提出了一些三角关系式:

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$
, $\cos(90^\circ - \alpha) = \sin \alpha$,

$$1-\cos\alpha=2\sin^2\frac{\alpha}{2},$$

 $\sin(\alpha \pm \beta) = \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta$.

由于这些关系式的帮助,他们能比较迅速而准确地造出三角函数表。

公元九世纪,阿拉伯天文学家阿尔一阿塔尼,从太阳的各个不同高度观察物体的长度同影长之比,引进一个新的量。他把这个新的量叫做"影",实际上就是我们现在讲的正切。第十世纪末,阿拉伯几何学家阿布·里·维发造出第一张正切表,而且还引进正割与余割这两个新的量。到了第十三世纪,阿塞拜疆人那西列金·图西在他的《完全四边形论文》一书中,系统地整理了前人有关的三角知识,从代数上阐述了三角量之间的关系,把三角知识作为数学的一个特殊部分独立出来。他还根据实际测量中解斜三角形的需要,证明了正弦定理和正切定理,为三角测算作出新的贡献。

到了十八世纪,三角学才开始具有现代的特征。著名数学家欧拉把三角函数和指数函数联系起来,发现了有名的欧拉公式. $\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}$, $\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$.

这里 e 是自然对数的底, i 是虚数单位。欧拉给三角学以解析的解释,打破了以前从图形引入三角定理的做法,而是通过恒等变换建立全部三角公式系统,这就大大地丰富了三角量之间的关系。

微积分的发展,使我们能够把三角函数展开为幂级数:

$$\sin x = x - \frac{x^3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{x^5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{x^7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7} + \cdots,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{1 \cdot 2} + \frac{x^4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - \frac{x^6}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6} + \cdots.$$

有了这两个级数,辅以近代计算工具,三角函数表的造表工作就便利得多了。

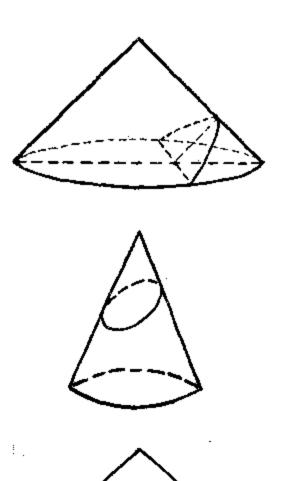
圆锥曲线的简史

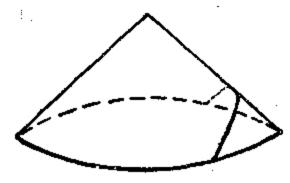
在中学解析几何和代数教材中, 比较系统地介绍了抛物线、圆、椭圆和双曲线等圆锥曲线的知识, 以及它们的实际应用。圆锥曲线的产生, 也有它一段简单的历史。

公元十七世纪初期,由于生产的需要,促使了天文学、力学和光学的发展,从而向数学提出了许多迫切需要解决的课题,有关圆锥曲线的计算就是其中之一。例如,公元1609年,德国天文学家开普勒发现天体运行的轨道是椭圆,意大利物理学家伽利略(公元1564—1642年)由抛掷石子推出弹道是抛物线。法国学者迈多尔日(公元1585—1647年)发展了圆锥曲线的性质,并在光学中加以运用。天体运行、弹道轨迹、光学应用等实际需要,促使人们加快地研究和建立有关圆锥曲线的理论,同时努力把这些理论应用于实际。

若要追溯人类对圆锥曲线研究的历史,那就更早了。远在古希腊,就有很多人热衷于研究几何三大作图问题,竟相寻求这些问题的解答,而在求解过程中,就要用到圆锥曲线。如希腊学者蒙爱启玛斯(约公元前 375—325 年)在研究"二倍立方问题"的解法时,就涉及圆锥曲线。他取三个项角分别为直角、锐角和钝角的正圆锥,然后各作一个平面分别垂直于三个圆锥的一条母线,并与圆锥相截,他把所得三条截线分别称之为"直角圆锥截线"、"锐角圆锥截线"和"钝角圆锥截线",实际上就是今天我们所说的抛物线、椭圆、一支等轴双曲线;这

是圆锥曲线最早的名称。他 用两条抛物线的交点或一条 抛物线与一条双曲线的交点 解决了二倍立方问题。后来, 阿婆罗尼(公元前 260-170 年)曾写了八篇关于圆锥曲 线的论文, 一直钻研到圆锥 曲线的新屈线的讨论。他在 《圆锥曲线》一书中。采取了 不同的方法处理三种圆锥曲 线。他只用一个圆锥, 而所 做三个截面与轴 的 位 置 不 同,就产生三种曲线。当 截面垂直于圆锥的轴时,他 还特别提出,截线是圆。此 外,他还发现双曲线是有心 曲线, 并有两个分支。公元 九世纪初,人们应用二次曲 线解三次方程问题。如用双





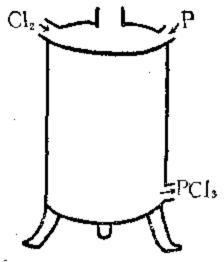
曲线 $xy = c^2$ 及抛物线 $y^2 = cx + a$ 解 $x^3 + ax^2 = c^3$,用双曲线 $x(b\pm y) = bc$ 及圆 $y^2 = (x\pm a)(c-x)$ 解 $x^3 \pm ax^2 + b^2x = b^2c$ 。这种方法一直延续使用了数百年之久。不过当时这些纯理论的研究,没有能够形成圆锥曲线系统的理论。

由此可知,人类对圆锥曲线的研究,已有两千多年的历史,但圆锥曲线理论的迅速形成并在实践中有了广泛的应用,这仅仅是十七世纪的事。这充分说明,数学理论的产生与发展

是以生产的发展为基础的,实践的需要正是数学发展的动力。

我国对圆锥曲线的研究也有相当的历史,很多史书均有 这方面的记载。如于七世纪三十年代《测量全义》一书中把椭 圆称为"椭圆形",《恒星质指》一书中既有椭圆的名称,有时又 把它叫做"斜圆",《交食历指》一书中则把椭圆称为"长圆"。 《测天约说》一书中关于"长圆"曾有如下的解释,"长圆形者, 一线作圈,而首至尾之径大于腰间径;亦名曰瘦圈界,亦名曰 椭圆。"应该说明,这些书不是把椭圆看作圆锥的截线,而是圆 柱的斜截线。如《测天约说》中说:"或问此形从何生? 答曰:如 一长圆柱,横断之,其断处两面皆圆形。若断处稍斜,其两面 必稍长,愈斜愈长;或称卵形,亦近似,然卵两端大小不等, 非 其类也。"但在《测量全义》中既记载了椭圆产生于圆柱,也记 载了圆锥曲线得自圆锥,"截圆角体法有五,从其轴,平分盲 截之,所截两平面为三角形,一也。横截之,与底平行,截面为 平圆形,二也。斜截之,与边平行,截面为圭窦形(顶不锐,近 底之两腰稍平行),三也。直截之,与轴平行,截面为陶丘形, 四也。无平行,任斜截之;截面为椭圆形,五也。"最后的叙述 和我们今天所讲的是相同的。

圆锥曲线在实践中有广泛的应用。现仅举一例以说明之。吉林师大数学系师生曾把椭球体求积理论应用到化工生产中去,解决了实际问题,促进了生产。某农药厂生产敌百虫和敌敌畏等农药时,需用三氯化磷这种中间原料。三氯化磷(PC1₃)是用黄磷和氯



气(Cl_2)投入反应罐化合而成。实际生产时,根据已装在反应罐中的黄磷多少,按 29:100投入氯气。这就要预先估计罐中黄磷的数量。如果估计太多,这样生产出来的不是 PCl_3 ,而是 PCl_3 ,它是一种易爆炸的化合物,可能引起反应罐的爆炸,造成重大事故;如果估计太少,生产出来的 PCl_3 就会掺杂一些黄磷,而黄磷的燃点较低,见空气就着火,这样容易烧伤工人或引起火灾。为了提高产品质量和确保生产安全,这个学校的师生和工人研究后在反应罐里设一浮标,由浮标刻度就能准确地看出罐中黄磷的数量。为了算出罐内黄磷的重量,首先要算出它的体积。设黄磷的高度为 $y_1(o < y_1 < b)$,则反应罐椭圆封头表面,是平面 xoy 上的椭圆曲线

$$\frac{x^{2}}{a^{2}} + \frac{(y-b)^{2}}{b^{2}} = 1$$
的第一象限部分
$$x = a\sqrt{1 - \frac{(y-b)^{2}}{b^{2}}} \quad (o < y \le y_{1}),$$

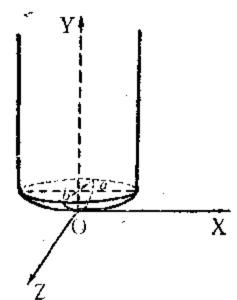
 ϕ のy 轴旋转形成的椭球曲面 与平面 $y = y_1$ ($0 < y_1 \le b$) 所围成的体积 $v(y_1)$ 。

$$v(y_1) = \int_{a}^{y_1} \pi x^2 dy$$

$$= \pi \int_{a}^{y_1} \left(\sqrt{1 - \frac{(y - b)^2}{b^2}} \right) dy$$

$$= \frac{a^2 \pi}{3b^2} (3b - y_1) y_1^2.$$

根据这个公式,可以计算出不同 y₁ 时反应罐椭圆封头相应部分的体积。



若依此公式制成数表,应用时一查即得,不必计算,颇为方便。

什么是算图?

算图又称诺模图,它的名称是由 νὸμοζ 和 γραφω 这两个希腊字组成的。前一个字读成"诺模斯",是规律的意思,后一个字读成"格拉浮",是描绘的意思。两个字合在一起,翻成为"诺模图",表示规律的图示的意思。算图是根据一定的数学原理,把某一个公式中所含变量的函数关系,绘制成几条图尺组成的一种图形。利用这种特殊的图形,可以由某几个变量已知的值,在图上直接量得另一变量对应的数值。运用算图求解,使用简便,避免大量繁杂运算,可节约时间;而且答案具有一定准确度。正因为算图有这样一些优越性,所以它是一种很好的计算工具,在工农业生产和科学技术中有着广泛的应用。

我们先举个例子来说明。化工厂工人经常需要根据下面 的公式来计算某类碳氢化合物在给定温度下的压强:

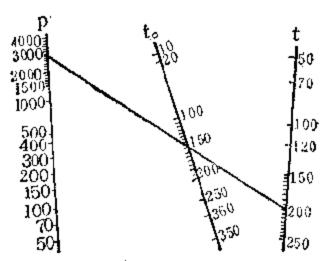
$$\log \frac{P}{760} = \frac{1.8t_o + 414}{0.3091 - 0.0001165(1.8t_o + 414)} \times \left[\frac{1}{1.8t_o + 414} - \frac{1}{1.8t + 414} \right].$$

这里, P表示压强, t。表示这种碳氢化合物在一个大气压下的沸点, 而 t 是对应的温度。

显然,这样的运算是非常麻烦的。为了求出P的近似值,需要作12次运算,其中有些是笔算,也有些是心算,还要查对数表和反对数表,计算过程中稍有错误,结果也就不可靠了。

但是,如果我们能够把上面的公式制成算图,那么全部

计算就可以用算图来代 替。当给定t。和t时, 只要用一根直尺,一头 按在t尺上t点处,另 一头按在t。尺上t。 处,那么直尺与P尺的 交点P的数标就是所求 的压强。例如t=200、



t。= 145 时,我们可以量得 P = 2800。这样量一下只需要几秒钟就可以代替 12 步计算,而且所得答数具有一定的精确度。

算图的优越性是很明显的,但如何绘制算图,却是一个难点。要绘制诺模图,首先要能确定点在平面上的位置,应用坐标法画出对应函数的图象。例如要绘制 u 图尺

$$x = 2(10u - u^2 + 12),$$

先列表求出变量 u 和函数 x 之间的关系:

и	- 2	- 1	0			
x	- 24		24			

按照一定的比例在毫米刻度尺上, 依次找出u=-1, u=0, u=1, u=2, u=3, u=4 等各点的正坐标值。然后再把毫米刻度尺掉转过来, 作出所有负坐标。根据坐标把所有各点

都作出之后,就可以绘制出如图的形式。我们还可以按同样的比例,画出

间隔中的小分划,这些点之间的距离也是不等的。有时,为了 简化绘图手续,假设各小分划间隔是均匀的,虽然有些误差, 但随着分点的增多,这种误差就越来越小。

图尺并不一定都是直线形,也可能是曲线形。例如要根据下列方程,绘制变量 u 的图尺:

$$x = 5 u$$
, $y = u^2$.

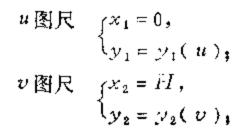
其中, "可以在0至10之间变动。计算出各点的坐标如下:

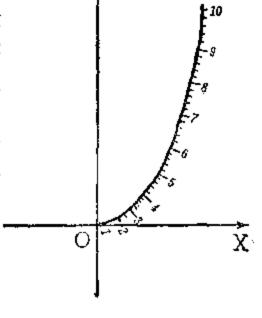
и	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
у	0	1	4	9	16	25	36	49	64	81	100

在直角坐标系中描出各点,连成一根平滑曲线,并将各段间隔划分为若干等分,便得到变量 u 的图尺。

我们已经会绘制变量的图尺,下面再来研究如何将几个

变量的图尺配在一起,构成一个完整的诸模图。设方程中的变量用 u、v、w表示,并把 u 图尺作为纵坐标,把 v 图尺的轴和纵坐标,把 的距离用 H表示,把 函尺和 u、v 两图尺距离之比作为 m: n。于是可得三个图尺的方程如下,





w图尺
$$\begin{cases} x_3 = \frac{m}{m+n} H, \\ y_3 = y_3(w). \end{cases}$$

这里加:n的比值,决定w图尺在 u、v 两图尺之间的位置。

概率论是社会实践的产物

自然界里有许多现象在一定条件下必然发生。例如,纯水在标准大气压、温度 100℃ 的情况下就要沸腾,在导体的两端加上电压后,就会有电流通过等等。我们把这些在一定条件下必然发生的现象叫做必然事件。当然,也有些现象在具备某些条件下必然不会发生,这就叫做不可能事件。

自然界里也存在许多现象,在一定条件下可能发生,也可能不发生。例如,1985年1月1日南京天气是晴天,从某厂产品中抽取一件是次品,等等,都是在相应条件下的随机事件。

概率论就是从数量方面研究偶然性与必然性关系的一门数学科学,在现实生活中有着重要的应用。如在工业生产中,为了剔除废品和次品,需要对产品进行检查。怎样检查产品的质量呢?全面检查的办法,对于大规模近代化工业生产往往是办不到的。因为大规模工业生产产品的数量太大,而且有些检查对产品具有破坏性,这就需要考虑采用所谓"抽样检查"的方法,也就是抽查部分产品,来估定废品率,从而及时断定该厂的生产状况。为了合理地进行抽样,正确地作出估定,就需要用到概率论这门科学理论和分析方法来作为依据。

概率论产生于资本主义社会的初期,从它的诞生开始,这 门科学就成为资产阶级获取最大利润, 巩固资产阶级专政的 工具。

中世纪的欧洲处于封建社会阶段,生产水平低,对数学的

需要只限于常量的范围,当时没有必要也不可能揭示出偶然性事件中所蕴含的规律。到了资本主义社会,随着商业贸易的广泛发展,海上交通的日益扩大,加之税收、征兵和人口统计等事业的发展,向数学不断提出了新的要求。人们在对这些问题进行研究的过程中,发现在一定条件下,大量偶然事件的出现并不是杂乱无章、毫无规律的,它是有相对稳定的频率的。经过长期观察、分析和研究,从中逐渐认识了"概率"这一概念,并且要求对某种事件发生的概率作出数量估计。

十四世纪,随着航海事业的发展,意大利出现了海上保险事业。到了十六世纪,已扩展到欧洲其它国家许多巨大的商业中心,并用于水灾、火灾等保险事业。资本家为了保证保险公司的赢利,也要使参加保险的人愿意参加保险,就需要计算分析偶然现象的规律,估计出现事故的概率,并确定应收保险金的百分率。例如,当时规定海上保险金为货物价值的12%一15%,内陆运输则为6%一8%。这些概率都是从大量有关事件中分析计算出来的。后来,有的国家还进行了出生、结婚、死亡及其它方面的人口统计工作,紧跟着社会上就出现了人寿保险,进一步促进了人们对概率的研究。此外,这一时期自然科学发展中也需要考虑偶然性影响问题,如估计测量结果偶然偏差的影响问题,也对概率论的发展提出新的要求。

十七世纪到十九世纪初,一些在概率论方面有成就的数学家,也大都是参加了有关的社会实践,做了许多实际的工作,才获得一定成果的。如丹尼尔·贝努里(Daniel Bernoulli 1700—1782年)就是从研究观察误差理论中,才提出了后来用贝叶斯公式解决的问题,当欧洲开始大规模种 痘 而 产 生一些副作用甚至引起死亡时,他根据大量的统计资料作出了

种痘能延长人类平均寿命三年的结论,来回答一些人的恐惧 和怀疑,肯定了种痘对维护人类健康的作用。彼得堡科学院院 士欧拉(1707-1783年)研究了人口统计和保险后,写出了《关 于死亡率和人类增长问题的研究》和《关于孤儿保险》等文章, 在概率论方面获得成就。普哇松(1781-1840年)研究过射击 方面的各种问题,写成了《打靶概率研究报告》,对军事技术作 出了贡献。再如德国数学家高斯(1777-1855年)、达朗贝尔 在大地测量问题中,法国数学家拉普拉斯(1749-1827年)在 天文观测问题中,相继总结出了最小二乘法的理论,并从误差 分析中发现了正态分布律。最后,拉普拉斯由于在人口统计、 观察误差、天文观测等多方面都作过大量考查与研究,甚至收 集了法国邮局历年由于地址不清而无法投递的信件的统计数 字,发现这类信件在全部信件中占有相当稳定的比例。他总 结了社会实践的成果,写出了这一阶段概率论较系统的代表 作之一---《分析概率论》,为概率论的发展作出阶段性的总 结。

概率论的应用几乎渗透到每一个领域中。

在经济建设中,经常遇到的问题之一是合理设计和最优化:既要合乎规格,又要注意节约,这就需要充分、适当地考虑各种有关因素的影响。例如,在桥梁设计中,就必须研究最大洪水量的分布,这就是一个典型的概率问题。又如气象、降水、地震、病虫害、人口等等预报工作,都需要用到概率统计方法。它如产品实验设计、质量控制等,也都广泛使用概率方法。

在自然科学中,概率论被应用于微观世界的偶然现象。如 人们在研究粒子的运动规律时,由于粒子的数量极其巨大,不 可能追踪每个粒子单独的运动,必须采取概率的方法来作整 体的考察。它如生物学中研究遗传、群体增长、疾病传染,化学中的反应动力学、高分子的统计性质,天文学中研究银河亮度起伏以及星系的空间结构等等问题,都离不开概率论的知识。

在先进技术和国防建设中,现代自动控制需要考虑随机的干扰,可以用概率论中随机微分方程来描写状态的转移。在通讯技术中排除随机噪音,核反应堆中研究中子的减速过程,都需要用到概率论。二次世界大战后,概率论在加强指挥能力和部队间的协作、充分发挥武器的作用和制订合理的战斗策略的研究工作中,都发挥了积极的作用。

模 糊 数 学

数学离不开计算,而计算首先要求精确。如果你算一道题,态度认真,速度很快,可是结果不正确,或者达不到一定的精确程度,那我们就要说,你的计算不合要求。不仅计算要求精确,我们中小学数学中,每一个概念或定理、公式等规律,无不非常明确而严密,没有模棱两可、含混不清的情况。

可是,在日常生活中,确有大量模糊不清的概念存在着。例如,当你走进一所学校,只见操场上有400米的跑道,足、篮、排球场齐全,下午课后,千余师生进行各种体育锻炼,场上并不感到拥挤。因此,脑子里产生一个印象:这所学校场子真大!若是另一所学校操场只有一个篮球场那么大,师生连做广播操都要分两批,边边角角到处都是人。于是,脑子里又产生一个印象:这所学校场子太小了!这里,到底多大的场子才叫做"大",多小的场子才叫做"小",客观上并没有明确的标准。又如,什么样的人可以算"老年人"?这也没有明确的界限。七十岁的人自然是老年了,六十岁也可以算老年,五十岁的人算不算老年?这就很难说。其它如胖、瘦,高、矮,浓、淡,明、暗,冷、暖等等,都没有绝对的界限。

对于各种清晰、明确的概念,需要从数量上来进行分析研究,这就构成我们所熟悉的经典数学的内容。对于这些模糊不清的概念,同样需要从数量上来对它们进行研究,通过定量的分析,来判断它们的性质,从而使模糊的概念清晰化。模

糊数学就是一门以客观世界的模糊性为研究对象的新的数学分支。

模糊数学又名弗晰数学,它从诞生到今天只有十五年的历史。1965年,美国学者柴德最早提出"模糊集合"的概念,首创了模糊数学。十五年来,模糊数学的发展很快,现在世界各国研究这门学科的数学工作者日渐增多。

模糊数学的诞生,是科学技术发展到一定阶段的必然产 物。人类对数学概念和规律的认识,并非一开始就是十分明确 的,而是有一个从模糊到清晰的发展过程,每一数学概念和规 律都有这么一段"发展史"。如本书前面"函数概念的形成和发 展"一节,说明函数的原始概念是极不严密的。其后随着生产 的发展和实际的需要,函数概念不断发展,日趋完善, 这就是 一个从模糊到清晰的发展过程。但是,时至今日,只有精确这 一面已经不够了。在反映模糊概念时,数学中这种精确的特点 反而成为一种障碍。人们在进行某种逻辑判断时,比如判断击 过来的人是谁吧!平常总是把来人的高矮、胖瘦、走路姿势、说 话声音高低等与自己大脑中储存的样本进行比较,作出判断。 一般说来,这并不是困难的事。即使久别的老友,经过片刻思 考,就可以得出正确的结论。可是,如果让我们习惯用的电子 计算机来代替人脑的功能, 进行这种逻辑判断时, 那可复杂 了。它先要测量来人的高矮、体重、手臂摆动角度, 鞋底对地面 的正压力、摩擦力、速度、加速度以及声音的频率等等数据,而 且非要精确到小数点后几十位小数才肯罢休。如果来人近来 稍瘦了一点,计算机就"翻脸不认人"了。因此,要想使电子计 算机能够模拟人脑的功能,对一些模糊概念进行正确的判断。 就必须找到用数量表达模糊概念的恰当方法。

起初,人们把"模糊"理解为"近似",用近似计算、误差理 论等近似的理论来研究模糊概念,取得不少的成果。后来,人 们又把"模糊"和"偶然性"联系在一起, 用随机变量、随机过程 等概率论和数理统计等数学理论来研究模糊概念,也取得了 不少的成果。可是,人们逐渐发现,上面这些方法并没有捉住 模糊概念的主要特征。因为模糊概念特点并不是"近似",也不 是"偶然性",所以用近似理论和概率论、数理统计来研究模糊 概念,不是最好的方法。那么,到底什么是模糊概念的特征呢? 模糊概念最根本的特征就是,有些事物是否包括在这个概念 中,并不太明确。人们经过研究,终于找到一种比较切合实际 的方法来表示模糊概念:用数量表示一个事物属于某个模糊 概念的"资格",从而说明这个事物能否包括在所论的模糊概 念之中。这样,人们就把模糊概念和"资格表"联系起来,表上 列出了要研究的每一事物属于这个概念的资格,从而判断此 事物是否属于这个模糊概念。例如,下面是某班学母高个子的 资格表:

概念;莱班学生的高个子

		- 1 - 2	
赵	,	明	0.75
钱	Φ	艼	0
孙		M	1
李	维	弧	0.4

从表中可以看出,在列出的四人中,孙刚的个子最高。他的"资格"是 1,赵明其次,李维强第三,钱小宁最矮。

对不同的模糊概念,资格表也不同。下面是该班学生胖子 资格表:

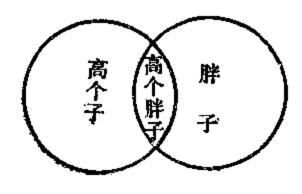
概念。某班学生的胖子

· · · · · · · · · · · · · · · · · · ·				
赵		明		0.75
銭	亦	宁		0.2
孙		例		0
李	维	强		0.9
•	•••		Į	******

我们从表中可以看出,李维强最胖,他的资格是 0.9; 赵明次之,钱小宁第三,孙刚最瘦。

模糊数学就是以这种资格表为基本材料,来进行研究的。有时,需要研究一些比较复杂的模糊概念,就可以根据几个比较简单的资格表面组成。例如,"该班高个胖子"就是一个比较

复杂的模糊概念,所指的是 该班既属于"高个子"、又属 于"胖子"这两组同学中的公 共部分。按照集合的观点来 讲,所指对象就是这两个集 合的交集。



怎样来制作"该班高个胖子"的资格表呢? 方法是取该班 "高个子"资格表与该班"胖子"资格表中较小的一个资格数据,作为相应的资格数据。下面是该班"高个胖子"的资格表:

概念:该班高个胖子

وراجي ورووه بمواجعت		
赵	明	0.75
铋	小 宁	0
孙	瞬	o ·
₹	维 强	0.4
	• • • •	*****
		1

综合以上诸表,我们可以看出:赵明有 0.75 的资格当高个子,又有 0.75 的资格当胖子,所以他有 0.75 的资格当高个胖子。钱小宁又矮又瘦,没有资格当高个胖子。孙刚很高,但太瘦,所以也没有资格当高个胖子。李维强相当胖(0.9 的资格),但只有 0.4 的资格叫做高个子,所以他只有 0.4 的资格叫高个胖子。

模糊数学通过资格表,用精确的数量关系来表达模糊概念,从而使模糊概念清晰化。

随着电子计算机的发展,模糊数学的应用越来越广,模糊 聚类分析可用于科学上的分类,如植物分类、人类体型分类; 模糊模型识别可用于机器识别文字、辨认卫星照片、识别癌细 胞,模糊综合判别可用于环境综合评价等。

运筹学的起源和发展

实现四个现代化,不仅要提高生产水平,而且要提高管理 水平。

要实行科学管理,数学是非常重要的。分析任何生产过程,总不外乎是由下列六个要素组成的,即:人力;物资;设备;财力;任务指标;信息(如数据、图纸、报表、规章、决策等等)。对于这些要素,如何周密地计划,合理地使用,妥善地安排,对是否能提高生产力有很大关系。运筹学就是为这个目的服务的一个数学分支,它研究经济活动和军事活动中能够用数量来表达的有关运算、筹划与管理等问题。运筹学是运用数学方法,把所要研究的问题作出综合性的统筹安排和对策,以达到最经济地使用人力、物力和最优地收到总体效果的一门科学,这就是运筹学的基本内容。

我国史书上,记载着许多运用运筹思想解决水利、交通、建筑、造船等实际问题的生动事例,宋仁宗庆历年间(公元1041—1049年),黄河又在河北决口,虽然反复施工,始终未能堵塞。河工高超积极提出自己的见解,认为缺口堵塞不住,是因为"埽(sāo)身太长,人力不能压,埽不至水底,故河流不断,而绳缆多绝。"这里"埽"是古时河工上用来护堤补缺的材料,一般用七分柳枝和三分稻草捆扎而成,后来也有用秫秸来代替的。他建议把三百尺长的埽身分为三节,每节一百尺,"中间以索连属之,先下第一节,待其至底,方压第二、第三。"这样

逐节下压,可以省工省料,事半功倍。但当时主持治水的官吏 不肯采纳这个意见,坚持用旧法施工,结果缺口非但没有堵 住,反而更加历害,那个主持治水的官吏也因此被罢免。最后 还是采用了高超的建议,决口才被堵塞。高超敢于创新,所提 意见体现了方案比较、权衡利弊的初步运筹思想。

宋神宗元丰 4 年(公元 1081 年), 西夏引兵西犯, 沈括领 兵出征,击溃了西夏乱兵七万之众,取得辉煌胜利。在出征中, 他根据作战的需要,运用运筹思想研究了军粮供应与用兵进 退的关系,这是运筹学在军事上应用的一个典范实例。沈括 所著的《梦溪笔谈》一书的第 205 条,就记载着这个实例的内 容。"凡师行,用粮于敌,最为急务。运粮不但多费,而势难行 运。予尝计之,人负米六斗,卒自携五日于粮,人饷一卒,一去 可十八日, 若计复回,只可进九日。二人饷一卒,一去可二十 六日; 若计复回, 止可进十三日。三人饷一卒, 一去可三十一 日;计复回,止可进十六日。三人饷一卒,极矣。若兴师十万, 辎重三之一,止得驻战之卒七万人,已用三十万人运粮,此外 难复加矣。运粮之法,人负六斗,此之总数率之也。其间队长不 负,樵汲减半,所余皆均在众夫。更有死亡疾病者,所负之米又 以均之。则人所负,常不啻六斗矣。故军中不容冗食,一夫冗 食,二三人饷之,尚或不足。若以畜乘运之,则驼负三石,马骡 一石五斗,驴一石。比之人运,虽负多而费寡,然刍牧不时,畜 多瘐死。一畜死,则并所负弃之。较之人负,利害相半。"此例 文字虽长,但意思不难明白。

沈括还用战国时期斗马术的运筹思想,研究围棋的下法,与我们今天运筹学中的一部分"对策论"的基本思想是一致的。可以看出,我国古代在运筹学中分析方法方面的发展已达

到相当高的水平,这是我们中华民族应引以为自豪的。

在外国,运筹学也是完全由于实际的需要而产生的。十九世纪末,煤矿资本家为了最大限度地榨取工人的剩余劳动,用统计的方法研究了挖煤用的铲子。如果铲子过小,工效必然很低,如果铲子太大,每铲铲的煤虽然较多,但工人精力难以持久,结果,一天之内反而不能挖出最多的煤。到底铲子应该多大,工效才能最高,资本家才能获取最大的利润?这一类急需解决的实际问题,促使运筹学开始生根发芽了。

二十世纪初,通讯事业发展很快,但自动电话占线影响正常通讯。人们为了解决这个矛盾,研究占线次数及其分布的时刻,从而设计有关线路应该通多少对电线才最适当。在解决这个问题的基础上,逐渐形成了"排队论",这是运筹学的一个组成部分。公元1939年后,为了研究如何合理、迅速地解决交通运输的问题,人们开始对线性规划的研究,出现了"规划论",成为运筹学的另一组成部分。后来,由于生产的进一步发展,线性规划已不能满足客观上的需要,于是又提出了非线性规划、动态规划的问题,这就充实了规划论的内容。第二次世界大战初,英国一些数学工作者把二十世纪开始发展起来的"博弈论"引伸应用于战争,变成"策略论",并与数理统计、排队论等学科配合起来,用于对希特勒德国的作战。他们把这些学科配合起来的这个数学分支称为运筹学。这时,运筹学才作为一门独立的数学分科出现。

我国大规模开展运筹学的研究和应用,起始于1958年。由于工农业生产的高速度发展,对交通运输提出新的要求。我国运输工作者为了更好地适应形势的需要,深入实际,从群众的经验中总结出一些行之有效、独具我国风格的方法——"图上

作业法"、"邮递员巡回路线奇偶点方法"等等。后来,逐渐地把规划论广泛应用于物资调运、汽车调度、火车运行组织、石油开发、生产过程用电子计算机实现最优控制以及电子线路设计等方面。又开展了推广应用统筹方法的群众运动,使得工程或产品工序的安排更为合理,避免了工序脱节和窝工等现象,最大限度地发挥人力、物力,加速生产进度。

目前,国际上运筹学发展迅速,内容越来越丰富,大体包括以下八个方面,

第一,线性规划。在经营管理中,根据一定的约束条件,可以把问题中各因素列成线性等式和线性不等式,这样的统筹规划问题就叫做线性规划。线性规划在财贸计划管理、交通运输管理、工程建设、生产计划安排等方面得到应用。

第二,非线性规划。若根据约束条件所列出的式子并不全是线性的,所考虑的规划问题就是非线性规划。工程设计、运筹学、过程控制、经济学以及数学领域中其它许多定量问题,都可以表示为非线性规划问题。

第三,博弈论。这是一种用来研究对抗性竞争局势的数学 模型,探索最优的对抗策略的数学方法。在这种竞争局势中, 对抗各方都有一定策略可供选择,而且各方的利益是相互矛 盾的。

第四,排队论。是一种用来研究公用服务系统工作过程的数学理论和方法。它通过对每个个别的随机服务现象的统计研究,找出反映这些随机现象平均特性的规律,从而改进服务系统的工作能力。

第五,搜索论。这是一种数学方法,用来研究在寻找某种对象(如石油、矿物、潜水艇等)的过程中,如何合理地使用搜

索手段(如用于搜索的人力、物力、资金和时间),以便取得最好的搜索效果。

第六,库存论。是一种数学方法,用来研究在什么时间、以什么数量、从什么地方来补充储备,使库存和补充采购的总费用最少。

第七, 决策论。在经营管理中, 人们要研究各种状态信息, 应选取怎样的策略, 还要综合研究由于选取了这些策略可能产生的后果, 从而按照某种衡量准则选择一个最优策略。这是运筹学最新发展的一个重要分支。

第八,可靠性理论。如何将可靠性较低的元件组成可靠性较高的系统,是可靠性理论的重要课题之一。

现在已经形成的"系统工程",是一门运用数学、电子计算机对企业等系统进行控制和管理的综合自动化的科学。正如数学、物理是工程技术的基础一样,运筹学则是"系统工程"的基础。最近,我国高等学校已开设了这样的专业,为祖国四个现代化培养专门人才。

微积分的产生

微积分是近代自然科学和工程技术中广泛应用的一种基本数学工具。它出现于十七世纪后半叶的西欧,是适应当时社会生产发展的需要而产生的。

公元1492年, 哥仑布发现了新大陆, 证实了大地是球形的 观念:1543年,哥白尼发表了《天体运行论》:凯普勒在1609年, 提出了有关行星绕日运动的第一与第二定律,1618年又提出 了第三定律,1609年,伽里略用自制的望远镜观察了月亮、金 星、木星等星球,把人们的视野引向谣远的地方。这些科学实 践拓展了人们对世界的认识,引起了人类思想上的激变。十六 世纪, 西欧封建社会逐渐没落, 出现资本主义的生产萌芽, 产 生了新的生产关系,社会生产力有了很大的发展。例如,随着 集中的手工工场的相继出现,纺织技术有了很大进步。原来用 的手摇纺车,为自动纺车所取代:原来用人力搓洗呢绒,改用 水轮牵动的木槌打净漂洗。在采矿和冶金工业中,也出现利用 人力、畜力、风力或水力牵引的各种机械装置,当时,有的水力 锤重达一吨多。随着航海事业的发展,船身加大,需要更好地 研究浮体的规律,这就促使流体力学的发展。为了发动战争, 要广泛使用枪炮,不断改进武器装备,要求更精确地掌握抛射 体的运动规律,这就推动了运动学和动力学的发展。

上面所说航海、生产和军事技术大量的实践告诉我们,整个自然界都是处于永恒的产生和消灭过程中,处在毫不间断

¥ 44 14

的运动和变化中。而反映在数量上,就需要人们去研究一个量如何与另一个量相依而变的规律。也就是说,这时人们大量接触到的已经不是常量,而是各种各样的变量。从常量到变量,这是数学发展史中的一个重要转折,正如恩格斯所说。"数学中的转折点是笛卡儿的变数。有了变数,被分和积分也就立刻成为必要的了。"变量进入数学以后,对数学研究的方法也提出了新的要求。十七世纪三十年代,出现了笛卡儿和费尔马的解析几何。在解析几何里,可以用字母表示流动坐标,用代数方程刻划一般平面曲线,用代数演算代替对几何量的逻辑推导,从而把对几何图形性质的研究转化为对解析式的研究,使数与形紧密地结合了起来。这种新的数学方法取代了古老的欧几里得几何的综合方法。这种数学发展中的质变,为十七世纪下半叶微积分算法的出现准备了条件。

1638年,费尔马首次引用字母表示无限小量,并运用它来解决极值问题。稍后,他又提出了一个与现代求导过程实质相同的求切线的方法,并用这种方法解决了一些切线问题和极值问题。费尔马的这些成果,标志着微积分方法的产生。后来,英格兰学派的格里果利、瓦里斯继续费尔马的工作,用符号"0"表示无限小量,并用它来进行求切线的运算。1684年,莱布尼兹在一篇文章中谈到量的微分概念,提出量的和、差、积、商、根、幂的微分公式,以及微分方法在求切线、求极值等几何问题上的应用。以后又陆续发表了一些文章,提出了诸如指数、对数的微分公式和微分的进一步的应用。这样,在十七世纪七十年代中期,莱布尼兹通过研究几何问题,建立了与流数法实质一样的微积分算法。莱布尼兹所引业的微积分符号

"d。」"比牛顿用的符号更灵活,更能反映微积分的本质,这些符号一直沿用到今天,在促进微积分方法发展方面起了积极作用,这是莱布尼兹的又一贡献。

随着微分概念的引入,定积分思想也逐渐产生。定积分的思想产生于求面积和体积、求曲线弧长以及各类物理量计算的问题。后来象 x "、x ? 之类的代数函数的积分问题也能够解决了,又进一步研究了超越函数(如 y = sinx)的积分问题。在费尔马、瓦里斯的工作中,作为定积分思想的无限细分、以直代曲、积零为整、最后由直向曲过渡这几个主要环节也已经大体明确。

在这一阶段中,无限展开方法进入了数学,得到越来越广泛的应用。运用无穷级数和别的无穷运算步骤的个别例子在数学史上是较早的。英国数学家瓦里斯在《无限算术》一书中,提出了圆周率π的无穷乘积展开式。稍后,有人引进了π的无穷连分数展开形式。哥里果利找出了圆弧通过切线表示的无限展开式,这就是反正切函数的幂级数展开。莱布尼兹提出用无穷级数表示单位圆面积的公式。

圆面积的四分之一=
$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\left(\frac{\pi}{4}\right)$$
.

这便是著名的莱布尼兹交错级数。稍后,他又得到一个更一般的公式。

$$ax \operatorname{ctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots$$

幂级数的出现和应用,对于牛顿完成微积分算法,使之普遍化,是起了重大作用的。

微积分的产生和发展过程中,存在着唯心主义和唯物主

义两种认识论的斗争。莱布尼兹在建立微积分学方面建立" 不朽的功勋,他的成就是不可抹煞的。但是,从世界观来看, 的一些观点是唯心的。例如他把微积分说成是"仅仅是一种 有用的虚构",这就是把微积分看成是纯粹思维的产物,否定 它的客观实在性。恩格斯从力学、分子和原子物理、化学等各 种不同的物质运动形式中列举了大量例证,深刻地证明了:微 积分学中所反映的各种数量关系,并不是什么人类精神的纯 粹的"自由创造物和想象物",而是"情形恰恰相反,自然界对 这一切想象的数量都提供了原型。"(《自然辩证法》)他从自然 界物质的变化中列举了生动的例证,深刻地阐明了自然界不 仅仅对数学中的无限数量,而且对无限量的运算规律都提供 了原型。他指出:"自然界运用这些微分即分子时所使用的方 式和所依据的规律,完全和数学运用其抽象的微分时的方式 和规律相同……"。他举了硫磺蒸气凝结的例子后,指出:"蒸 发的情形也是一样,……和微积分完全类似的过程,还不仅在 从液态到气态或从气态到液态的转变中发生……。"(《自然辩 证法》)恩格斯通过这些生动的事实,深刻地阐明了微积分运 算律是客观世界中现实事物的固有规律性的反映, 彻底打冲 了莱布尼兹的神秘主义。

> ±**≥£** ≣...

> > : 継