集合问题100例

韩文法 编

广东教育出版社

责任编辑：蔺光仪

封面设计：陈钧生

书号 7449·140

定 价 1.30 元

集合问题100例

韩 文 法 编

广 东 教 育 出 版 社

集合问题100例

韩文法编

*

广东教育出版社出版

广东省新华书店发行

广州红旗印刷厂印刷

787×1092毫米32开本　7.875印张　151,000字

1986年7月第1版　　1986年7月第1次印刷

印数 1—6,800册

书号 7449·140　定价 1.30元

前　言

集合的概念和方法已渗透到数学的一切领域，数学各个分支的体系无不是采用集合概念而构成。从逻辑观点看，全部数学就是集合论和它的一系列推论，毫无疑问在中学的数学教学中，集合也占有重要地位。

本书以教学大纲和教材为依据，并稍有提高，且与现代数学相联系，力图把一些抽象内容和概念写得浅显、通俗、生动些．便于读者阅读，目的是扩大教师和学生的知识领域，培养和发展学生的能力与智力，为提高和加强基础教学服务。

全书以叙述、论证方式进行编写，多从熟悉的概念出发，间有疑难问题时，为照顾读者水平，不作复杂的论证，凡具有初中以上数学水平的读者，均可看懂．对于中学师生，将是一本有益的补充读物。

限于编者水平，错误之处，欢迎批评指正。

编者　1984年6月

目　次

1．什么是集合论？

集合论是研究集合一般性质的数学分支，属于纯数学领域。作为独立的学科出现，约在十九世纪末到二十世纪初这个时期．目前它已经构成了全部现代数学的基础，可以说对任何数学分支的发展，都是不可缺少的．

集合论是从“集合”这个基本概念开始，利用几条基本原则，建造起整个理论体系的。核心部分是基数和序数理论，连续统假设、选择公理、力迫法、可构成性、马丁公理等等问题几乎变成了数学一切分支的基本概念了．

集合论的产生和发展，经历了一百多年的漫长时间，康托(G·Cantor)十七岁时就开始研究数学，他发展了超穷基数的理论，把有穷集推向无穷集，开创了一个崭新的数学领域。1882年他提出连续统假设问题，一直到他去世，未能解决这个疑难问题，但这丝毫不影响他作为集合论创始人的卓越形象。

德国数学家策梅罗(E·Zermelo) 1904年提出了一个选择公理问题，利用这个公理，可以证明一切集合都可以变成正序集，从而在选择公理的合理性上展开了长期的争论。直到1914年德国数学家豪斯道夫《集合论基础》一书出版，康托的工作才受到重视，这个时期，人们对选择公理的等价

性、相容性、独立性展开了广泛的讨论。奥地利数学家哥德尔(K·Gödel)在1938年提出了可构造集合的概念，证明了选择公理和连续统假设是相容的，从而在选择公理上的争论才告一段落。

七十年代以后，在各种公理、原理、命题的等价性、相容性研究方面取得大量成果，选择公理的等价命题发展到几十个之多。

1963年美国著名数学家科恩(J·Cohen)利用力迫法，证明了选择公理和连续统假设相互之间是独立的。力迫法是一个强有力的工具，人们利用它解决了很多疑难问题，从而使集合论的研究进入了一个高潮时间，一些重要成果如雨后春笋，成倍增长。

2. 集合是什么？

集合是什么？这是我们随时随地都会碰到，而又无法定义的基本概念。

在集合论的研究中，一开始人们就想对集合的概念加以定义，譬如有以下说法：

若干个事物的总体，叫做集合；

把一个个东西汇集起来，成为一个整体，这就叫形成一个集合；

把一堆东西，收集起来，当成一个单体来考虑，这便是一个集合；

一些具有某种性质的对象全体，叫做一个集合；

……………………………

等等。

我们说，这些说法都不能当成集合的定义。

如果把上述这些说法当成集合的定义，那是不正确的，因为总体、整体、单体、全体等概念未能说明任何问题，它们本身的意义也是含混不清的，事实上，它们和集合是自相定义。

在集合论产生的初期，就有人把集合定义为：

“所有满足某条件的事物全体”。

若P(X)指符合条件P的一切X，

则 $\{X \mid P(X)\}$ 或 $\{X : P(X)\}$ 即为所说的集合。不久，英国著名数学家罗素(Russell,B)提出了一个悖论，意思说：

设 $Z=\{X \mid X \notin X\}$

如果Z是集合，显然Z是一个事物，因此，$Z \in Z$和$Z \notin Z$不能同时都成立。

若$Z \in Z$，那么Z应满足$X \notin X$，因此，

$Z \notin Z$，自相矛盾；

若$Z \notin Z$，那么Z满足条件$X \in X$，因此，

$Z \in Z$，又自相矛盾。

罗素悖论实际成为对以$\{X \mid P(X)\}$为集合定义的明显否

定。

集合论的创始人、德国数学家康托(G·Cantor 1845—1918)曾给集合下过这样的定义：

"集或集合是我们的直观或我们的思维中被看作一个整体的确定的、相异的对象的总体"。

"对象称为集的元素，集包含它的元素，或者元素属于集"。

这个定义也不能算是对集合的完美无缺的科学定义，因为在这个定义中，所说的"我们的直观或我们的思维的对象"、"看作一个整体的对象的集合"、"确定的、相异的"等等概念都是含混不清的，都未能确切说明究竟什么是集合。

在对集合的概念无法定义的情况下，人们只能沿用上述种种说法，来描述集合的意义了。

对集合概念，运用时有以下规定：

1° 集合（或集）一般用$A,B,C,\cdots\cdots$表示。组成集合A的每一个对象，叫A的元素（或元），用$a,b,c,\cdots\cdots$表示。

把所有属于集合A的元素，用花括号括起来，这叫枚举法，例如

$$A=\{1,2,3,4,5\}$$

把集合元素的特征表示出来，叫描述法。

例如　$B=\{$等腰三角形$\}$。

2° 具体的事物也好，抽象的事物也好，既有具体事

物，又有抽象事物也好，都可以当作元素构成集合。集合元素的性质可以是相同的，也可以是不同的。不仅同一个集合的元素之间，而且集合与集合的元素之间也允许有不同性质的元素。

例如可以把桌子，画报，素数 7，孔子的教育思想作为元素构成一个集合。

3° 凡由有限多个事物组成的集合，叫有限集；由无限多个事物组成的集合叫无穷集。有限集和无穷集的运算法则有很大差别，不能混同使用。

例如有限集

$A=\{a,b,c\}$有三个元素。

$B=\{l,m,n,p\}$有四个元素。

显然 $A+B$有 $3+4=7$ 个元素。

但对无穷集，情况就不同了。

若$C=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$有 $\aleph_0$ 个元素。

$D=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$有 $\aleph_0$ 个元素。

那么 $C+D$有$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$个元素。

4° 对一个集合说，某个事物属于它，不属于它是非常明确的，不能是含混不清，模棱两可的。

例如 “很大的数”就不是一个集合，因为100、1000、10000等等，究竟哪个数是很大的数呢？谁也说不清楚。

5° 在一个集合中，相同的事物，不能当作不同元素对待，例如集合$\{1,1,1,2,3\}$和集合$\{1,2,3\}$是相同的，因为它们有相同的元素 1、2、3。

6° 包含一个元素的集合叫单元集，单元集$\{a\}$和a的含意是不相同的。

例如 若$a=\{1,2,3\}$，则

$\{a\}$包含一个元素a，而

a却包含三个元素1，2，3。

这里，应当知道：把集合当成元素的集合也是存在的，例如北京市学校学生的集合为：

A_1、A_2、A_3，……，An。

则北京市全部学校集合为

$B=\{A_1、A_2，\cdots An\}$。

但是，要特别注意，以所有集合为元素的集合却是不存在的。因为若S为以所有集合为元素的集合，那么S又成为S的一个元素。这就无法想象，这样的集合究竟是什么样子？

为了得到所有集合，人们曾设想过所谓的集合的分层问题。

把自身不是集合的事物汇集起来，叫原子集合V_0，于是建立

$V_0\subseteq V_1\subseteq V_2\subseteq\cdots\cdots$

这里V_1是包含原子集合及其幂集合，

即 $V_1=V_0\cup P(V_0)$

同样，$V_2=V_1\cup P(V_1)$

推广有 $V_{n+1}=V_n\cup P(V_n)$

对于α，有$V_{\alpha+1}=V_\alpha\cup P(V_\alpha)$

每一个集合都出现在这个无穷层次中，换句话说，集合就是这个层次中某一层的元。

虽然这样，集合分层可以包含无穷多个集合，但仍然不能找到以所有集合为元素的集合甚至集合$\{\phi、\{\phi\}、\{\{\phi\}\}、\cdots\cdots\}$就不在这个无穷层次中。

3. 什么是子集合？

集合M的部分元素所构成的集合N，叫做M的子集合，M叫N的扩集。

当N是M的子集合时，我们记为

$N\subseteq M$，这表示N的每一个元素，必须同时也是M的元素。

例如：

$\{2,3,4\}\subseteq\{1,2,3,4,5\}$.

$\{\{3\}\}\subseteq\{4,5,\{3\},2\}$.

$\{a,b,c\}\subseteq\{a,b,c\}$.

很明显，$M\subseteq M$，这意思是说，任何一个集合，必定是这个集合本身的子集合.

如果 $N\subset M$且$N\neq M$，则N叫M的真子集。这意思是说，N的所有元素，都是M的元素；但M至少要有一个元素不属于N。

当然，任何一个集合，都不可能是它自己的真子集。

N为M的真子集和M为N的真子集，两者不能同时成立。

任何一个集合，往往它的子集合有许多个，例如集合$\{a, b, c\}$的子集合有八个，即

$\{a\}$，$\{b\}$，$\{c\}$，$\{a, b\}$，$\{a, c\}$，$\{b, c\}$，$\{a, b, c\}$和空集合ϕ.

要特别注意，虽然集合的元素数比真子集的元素数要多些，但有些集合的元素和它的真子集的元素又可以是对等的。

例如 $A=\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\}$

$B=\{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots\}$

显然$B\subset A$，但$A\sim B$.

对任意集合A，B，C，我们有：

1° $\subseteq$的自反性，即$A\subseteq A$，

这由子集合的定义，直接得到。

2° $\subseteq$的反对称性，即

若$A\subseteq B$，且$B\subseteq A$，则$A=B$。

证： 因为$A\subseteq B$

若$X\in A$，则$X\in B$

又因$B\subseteq A$，即若$X\in B$ 则$X\in A$，

两者合起来，有

$A=B$.

3° $\subseteq$的传递性，即

若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$。

证：若 $X\in A$，由于 $A\subseteq B$，

所以 $X\in B$。

又由于 $B\subseteq C$，从而有 $X\in C$

两者合起来 $A\subseteq C$。

在区分“元素”和“子集”时，必须十分注意$\subset$和$\in$的运用．$\subset$表示集合和集合之间的包含关系，$\in$表示元素和集合之间的隶属关系。例如

$0\in\{0\}$表示0是属于$\{0\}$的元素；

$\{3\}\not\subset\{\{3\},4,2\}$表示集合$\{3\}$不是$\{\{3\},4,2\}$的子集；

$\{1,3\}\subset\{0,1,3\}$表示$\{1,3\}$是$\{0,1,3\}$的子集；

$\{1,3\}\notin\{0,1,3\}$表示$\{1,3\}$不是$\{0,1,3\}$的元素；

$\{3\}\in\{\{3\},4,2\}$表示$\{3\}$是集合$\{\{3\},4,2\}$的元素。

4．什么是空集？

把一个有限集合的元素逐个取走，最后剩下的集合叫空集合，换句话说，不含任何元素的集合，叫空集合，空集合也叫零集合，通常记为ϕ（读为空集）。没有任何元素为什么也能构成一个集合呢？因为有许多事物，往往我们不知道

它是否有元素，出于方便，人们规定没有元素的集合叫空集合。空集合里有零个元素，例如任何一个大的偶数表示成两个素数之和，这个问题的解集就是空集合。因为迄今人们还未证明这个猜想。

再如若R为实数集，那么

$\{x|x^2+1=0\}$也是空集合。

空集合是一个特殊的集合，它有一些重要性质，应当特别注意，以免发生错误：

1° 空集合ϕ是一切集合的子集合。

证明 S为任意一个集合，

若$\phi\not\subset S$，那么必有一个元素X，使$X\in\phi$，且$X\notin S$

显然这是不可能的，因为ϕ中没有任何元素。

这就是说，ϕ是一切集合的子集合。

从而知道：

$$\phi\subset\phi,\ \phi\notin\phi;$$

$$\phi\subset\{\phi\},\ \phi\in\{\phi\};$$

$$\{\phi\}\subset\{\phi\},\ \{\phi\}\notin\{\phi\};$$

$$\phi\subset\{\phi,\{\phi\}\},\ \phi\in\{\phi,\{\phi\}\}.$$

……………

2° 空集合只有一个。

因为假若有两个不同的空集合ϕ，ϕ_1，而ϕ，ϕ_1中却没有不同元素，所以

$$\phi=\phi_1.$$

3° 空集合可以定义自然数。

因为 $0=\phi$，

所以有 $1=\{0\}=\{\phi\}$。

$2=\{0,1\}=\{\phi,\{\phi\}\}$。

$3=\{0,1,2\}=\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}$。

……………………

这里应当注意的是：

{ }，ϕ，0 都可以看成是不含任何元素的空集合，但{{ }}，{ϕ}，{0}并不相等，也都不是空集合，它们的元素分别是{ }，ϕ，0。

5．什么是幂集合？

由集合 S 的一切子集组成的集合，叫 S 的幂集合。记为 $P(S)$ 或 US。

这是一个极其重要的概念，有着广泛的应用。对于任何一个集合，我们总是可以求出它的幂集合来的。

例如 $\{1\}$ 的幂集合为 $\{\phi,\{1\}\}$

$\{1,2\}$ 的幂集合为 $\{\phi,\{1\},\{2\},\{1,2\}\}$

$\{1,2,3\}$ 的幂集合为：

$\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。

……………………等等。

若集合 S 的元素个数为 $\overline{\overline{S}}$，$P(S)$ 的元素个数为 $\overline{\overline{P(S)}}$。

则 $\overline{\overline{P(S)}} = 2^{\overline{\overline{S}}}$。

我们用 $A(n)$ 表示这个命题，可以看出

$A(0)$ 是成立的。

因为 $\overline{\overline{S}} = 0$，$2^{\overline{\overline{S}}} = 1$

而 $\overline{\overline{P(S)}} = 1$；

$A(1)$ 也是成立的，

因为 $\overline{\overline{S}} = 1$，所以 $\overline{\overline{P(S)}} = 2$；

假设 $A(n)$ 也是成立的，即

S 有 n 个元素，$\overline{\overline{P(S)}} = 2^n$

若 S_1 有 $n-1$ 个元素时，有 $\overline{\overline{P(S_1)}} = 2^{n+1}$ 就算证明了我们的问题。

若 $a \in S_1$，$a \notin S$

且 $S_1 = S \cup \{a\}$，则有

$$\overline{\overline{P(S_1)}} = 2 \cdot \overline{\overline{P(S)}},$$

所以 $\overline{\overline{P(S_1)}} = 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}$。

这个命题等价于：

n 个元的集合含有 m 个元的子集有 $\binom{n}{m}$ 个。显然，一切子集共有：

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots\cdots + \binom{n}{n} = 2^n \text{ 个。}$$

这里，我们论证一下著名的康托定理：

“幂集合的元素数永远大于集合的元素数”

若S的元素数为$\overline{\overline{S}}$，

$P(S)$的元素数为$\overline{\overline{P(S)}}$，

定理表示为：$\overline{\overline{P(S)}}>\overline{\overline{S}}$。

证明：$\overline{\overline{P(S)}}$和$\overline{\overline{S}}$的比较有三种可能：

(1) $\overline{\overline{P(S)}}<\overline{\overline{S}}$；

(2) $\overline{\overline{P(S)}}=\overline{\overline{S}}$；

(3) $\overline{\overline{P(S)}}>\overline{\overline{S}}$。

首先，可以看出(1)是不可能成立的，因为把S的每个元素看成一个子集合时，就能得到这个结论。

现在来证明(2)也不能成立：

若 $\overline{\overline{P(S)}}=\overline{\overline{S}}$

则S的元素x和$P(S)$的元素X必然能够一一对应。我们考虑S的一个元素x，$x\notin X$，即x不属于它对应的X，令Y是S中所有这样元素作成的子集，那么Y必和S中一个元素y对应，由Y的定义知道：

应 $y\notin Y$时，y又属于Y；

当$y\in Y$时，y又不属于Y。

这种矛盾说明 $\overline{\overline{P(S)}}\neq\overline{\overline{S}}$。

从而得到(3)成立的结果。

6. 集合论中有哪些常用符号？

集合论中常用符号有以下这些：

A、B、C，……X、Y、Z，……表示集合，

例 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{a,b,c\}$，

$X=\{x \mid x^2+x+1=0\}$，等等。

a、b、c、……表示集合的元素，

例 $\{a,b,c\}$是$\{a,b,c,d,e\}$的子集合。

$x\in X$表示x是集合X的元素，或说

x属于X。

$x\notin Y$（或$x\overline{\in}Y$）表示x不是Y的元素，或说

x不属于集合Y。

$A\subseteq X$（或$A\subset X$）表示集合A被集合X包含，

例 若$A=\{1,3,5,7,9,\cdots\cdots\}$，

$B=\{1,2,3,4,\cdots\cdots\}$，则

$A\subset B$

$A\nsubseteq X$（或$A\not\subset X$）表示集合A不被集合X包含，

例 $A=\{1,2,3\}$，

$B=\{4,5,6\}$， 则

$A\nsubseteq B$。

N 表示自然数集合。

Z 表示整数的集合。

Q 表示有理数集合。

R 表示实数的集合。

C 表示复数的集合。

ϕ，0，V，{} 表示空集合（或零集合）。

例 $\{x \mid x \neq x\} = \phi$，

$\{x \mid x \in N,\ x^2 + 1 = 0\} = \phi$。

X'（或 CX）表示集合X的补集，或称X的余集。

例 全集$U = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$，

$X = \{1,3,4,8\}$，

则$X' = \{2,5,6,7,9\}$。

xRy（或$\langle x,y\rangle \in R$）表示x，y有关系R。

P(x,y) 表示点x和点y之间的距离。

P(s)，Us 表示集合s的幂集合。

例 若 $S = \{a,b,c\}$，

则$P(s) = \{\phi,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\{a,c\},$
$\{b,c\},\ \{a,b,c\}\}$。

$\forall x$ 表示对所有的x。

$\exists x$ 表示存在某一个x。

$\wedge$表示并且。

$\vee$表示或者。

$\sim$表示等势关系。

例 若 $A = \{1,2,3\}$，

$B = \{\triangle,\ *,\ \odot\}$

则 $A\sim B$。

$\prec$表示次序关系。

例 $x\prec y$ 表示 x 在 y 前面，或 x 小于 y。

$A\to B$表示集合 A 到集合 B 的映射。

$\Rightarrow$表示蕴涵（或“当…则…”）

例 $A\subset B\wedge B\subset C\Rightarrow A\subset C$

$\Leftrightarrow$表示等价（或当且仅当）

$\neg$ 表示否定，

例 $\neg(x>2)\Leftrightarrow x\leqslant 2$。

$f(X)$ 表示集合 X 通过 f 的象。

$f^{-1}(X)$ 表示原象集。

7. 古典集合论建立在什么原则上？

所谓古典集合论，就是朴素的集合论，它建立在三个基本原理上，就是：

（1）外延原理

如所周知，一个概念的外延是指适合这个概念的一切对象的全体而言。对一个集合说，我们可以枚举它的元素，换句话说，集合由它的元素所决定。但相等的集合是什么意义呢？用外延的方式说，两个集合有相同的元素叫做相等。

外延原理可表述为：两个集合S_1，S_2是相等的，如果它们的元素完全相同。

用符号表示，即

$$\forall x(x\in S_1\leftrightarrow x\in S_2)\rightarrow S_1=S_2.$$

意思是说，对所有x，x属于S_1，当且仅当x属于S_2时，S_1，S_2就是相同的集合。

例如 $\{1,2,3\}=\{3,2,1\}$.

$\{3,4,5\}\neq\{3,5,6\}$.

$\{3,\{2,5\}\}\neq\{5,\{3,2\}\}$.

（2）概括原理

用一个条件，或一个性质定义集合的方法，叫做概括原则，利用这个原理，能够定义许多集合。例如 S_1，S_2的并集为

$$S_1\cup S_2=\{x\mid x\in S_1\vee x\in S_2\}.$$

S_1，S_2的交集为

$$S_1\cap S_2=\{x\mid x\in S_1\wedge x\in S_2\}.$$

空集为$\phi=\{x\mid x\neq x\}$.

概括原理有一定缺陷，例如罗素悖论就是在这个原理基础上产生的：

罗素假设 $T=\{x\mid x\notin x\}$，

则由$T\in T$推出$T\notin T$；由$T\notin T$又推出$T\in T$。

（3）选择公理

这个公理是1904年*Zermelo*提出来的，意思是说：对

于任一由不空的两两不交的集合组成的集系，我们可以从它的不空的两两不交的集合中同时各取一个元素组成集系的一个新的集合。

虽然对这个公理的应用还存在着争议，但它对数学理论发展的重要性是不能否定的。自七十年代 Cohen 创造力迫法，证明选择公理和连续统假设均独立于 ZF 系统以来，各种等价命题和独立性结果层出不穷，不满足选择公理的模型里，如分球奇论那样的“怪”定理也时有出现，这就充分表明选择公理在数学基础发展上的巨大意义。

总之，上述三个原则迄今还在影响着集合论的发展。

8. 集合如何进行运算？

集合的运算有以下几种：

1° 和（也叫并）

若 A，B 为集合，二集的和表为

$A\cup B$（或 $A+B$），

即以 A，B 所有元素为元素组成的集合。如图 8·1 的阴影部分所示。

和满足交换律和结合律，即：

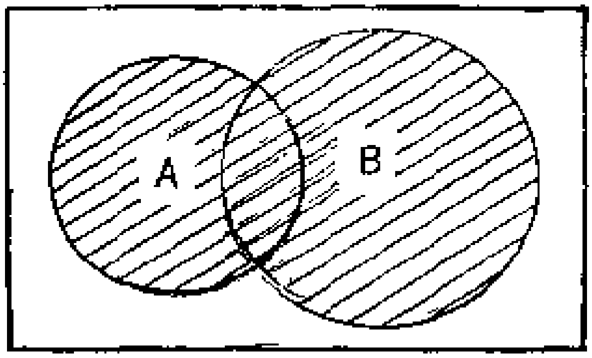


图 8·1

$A\cup B=B\cup A$,

$A\cup B\cup C=A\cup(B\cup C)$。

若集合多于两个时，它们的和以$\cup Xi$，ΣXi表示。

例1 若

$A=\{1,3,\cdots\cdots 2n-1,\cdots\cdots\}$，

$B=\{2,4,\cdots\cdots 2n,\cdots\cdots\}$，则

$A\cup B=\{1,2,3\cdots\cdots n\cdots\cdots\}$。

例2 若

$A=\{x|x\in Z,\ 0<x<3\}$，

$B=\{x|x\in Z,\ 2<x<6\}$，则

$A\cup B=\{x|x\in Z,\ 0<x<3\}\cup\{x|x\in Z,\ 2<x<6\}$

$=\{1,2,3,4,5\}$。

2° 交

若A，B为二集，其交为：

$A\cap B$或$A\cdot B$（即AB），即同时属于A，B的元素构成的集合。如图8·2阴影部分所示：

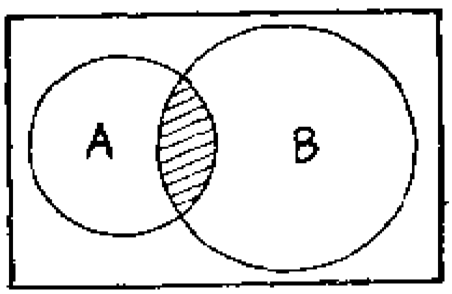


图8·2

交满足结合律和交换律，即：

$A\cap B\cap C=A\cap(B\cap C)$，

$$A\cap B=B\cap A,$$

当集合多于两个时，它们的交可用

$$\cap Ai,\ \Pi Ai$$ 表示。

例1　若 $A=\{1,2,3,4,5\}$，

$B=\{2,4,6,8,10\}$，

则$A\cap B=\{2,4\}$。

例2　若 $A=\{2,4,6\}$，

$B=\{1,3,5\}$，

则 $A\cap B=\phi$。

例3　求 $\begin{cases} x-y+1>0 \\ 2x+y-2<0 \end{cases}$ 的解集。

解：二不等式的解集分别是：

$S_1=\{(x,y)\mid x-y+1>0\}$，

$S_2=\{(x,y)\mid 2x+y-2<0\}$。

可看出，S_1 表示 $x-y+1=0$ 的右侧区域，

S_2 表示 $2x+y-2=0$ 的左侧区域，

则 $S=S_1\cap S_2$ 为图 8·3 的斜线部分。

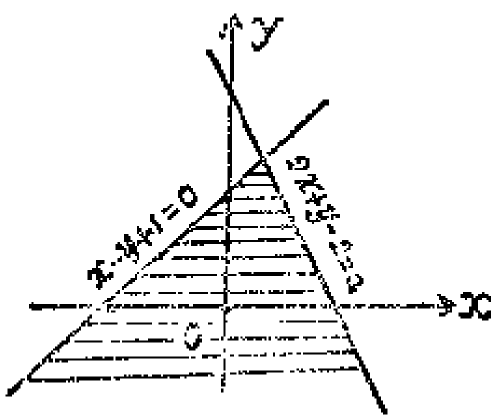


图8·3

3° 差

若 A，B 为任意两个集合，由所有属于 A 而不属于 B 的那些元素组成的集，称为 A、B 之差集，记为 $A\setminus B$ 或 $A-B$。

例 若 $A=\{1,2,3,4,5\}$，

$B=\{2,4,6,8\}$，

则 $A\setminus B=\{1,3,5\}$。

当 $A\subset B$ 时，

$$A\setminus B=\phi.$$

差集表示如图8·4

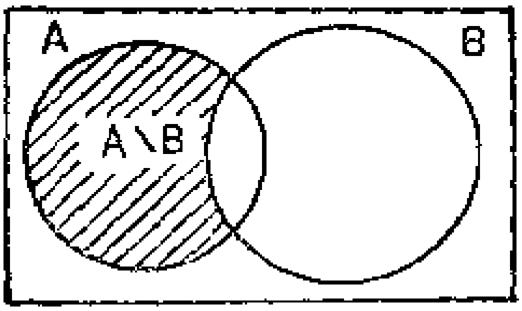


图8·4

4° 积

按一定次序并立的两个元 (a, b) 叫有序元偶，(a,b) 和 $\{a, b\}$ 不同，前者允许两个元素相同、后者假定两个元素不同。

若两集 A，B 作成一个有序集偶 (A, B)，

当 $(a, b)\in(A, B)$

且 $a\in A$，$b\in B$。

于是(A,B)称为A,B之积，

显然$(A,B)\neq(B,A)$。

积表示如图8·5

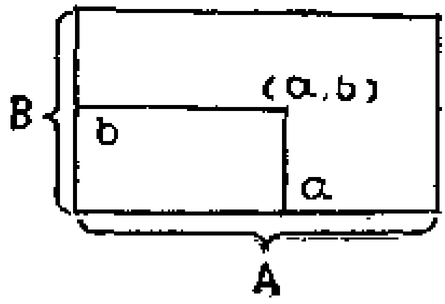


图8·5

例1 若$A=\{a,b\}$，

$B=\{1,2,3\}$，则

$(A,B)=\{(a,1),(a,2),(a,3),$

$(b,1),(b,2),(b,3)\}$

$(B,A)=\{(1,a),(1,b),(2,a),$

$(2,b),(3,a),(3,b)\}$

当$A=B$时，$(A,B)=A^2$

例2 若$A=\{1,2,3\}$，则

$A^2=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(2,1)$

$(3,1),(3,2),(3,3)\}$。

(A,B)的元(a,b)和(B,A)的元(b,a)是不同的，但却是对应的，即

$(A,B)\neq(B,A)$，而$(A,B)\backsim(B,A)$。

9．什么叫对称差集？

若A，B为二集，我们定义$(A-B)\cup(B-A)$为A、B的对称差集，记为$A\Delta B$。即

$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$。

可以看出，$A\Delta B$是由属于A或B，但不同时属于A，B

二集的元素所构成的集合。

现在介绍对称差集的一些性质：

1° $A\Delta B=A\cup B-A\cap B$。

证明： $A\cup B-A\cap B$

$=(A\cup B)\cap(A\cap B)'$

$=(A\cup B)\cap(A'\cup B')$

$=[(A\cup B)\cap A']\cup[(A\cup B)\cap B']$

$=(A\cap A')\cup(B\cap A')\cup(A\cap B')\cup(B\cap B')$

$=(B\cap A')\cup(A\cap B')$

$=(A-B)\cup(B-A)$

$=A\Delta B$。

2° $A\Delta A=\phi$

证明：

$A\Delta A=(A\cup A)-(A\cap A)$

$=A-A$

$=\phi$。

3° 若$A\cap B=\phi$，则$A\Delta B=A\cup B$

证明： 因为$A\Delta B=A\cup B-A\cap B$，

题设$A\cap B=\phi$，

所以$A\Delta B=A\cup B$。

4° 若$A\Delta B=\phi$，则$A=B$

证明： $A\Delta B=(A\cap B')\cup(A'\cap B)$，

因为$A\Delta B=\phi$，

所以$A\cap B'=\phi$，$A'\cap B=\phi$。

于是$A\subset B$，$B\subset A$，

所以$A=B$。

5° $A\Delta B=B\Delta A$

证明：因为$A\Delta B=(A-B)\cup(B-A)$

$=(B-A)\cup(A-B)$

$=B\Delta A$。

6° $(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$

证明：

$\because(A\Delta B)\Delta C=A\Delta B\Delta C$，

$\therefore(A\Delta B)\Delta C=A\Delta(B\Delta C)$。

7° $C\cap(A\Delta B)=(C\cap A)\Delta(C\cap B)$

证明：

$$\begin{aligned}C\cap(A\Delta B)&=C\cap[(A-B)\cup(B-A)]\\&=[C\cap(A-B)]\cup[C\cap(B-A)]\\&=[(C\cap A)-(C\cap B)]\cup[(C\cap B)\\&\quad-(C\cap A)]\\&=(C\cap A)\Delta(C\cap B)。\end{aligned}$$

8° $A\cup(A\Delta B)=A\cup B$。

证明：

$$\begin{aligned}A\cup(A\Delta B)&=A\cup[(A-B)\cup(B-A)]\\&=A\cup(A-B)\cup(B-A)\\&=A\cup(B-A)\\&=A\cup B。\end{aligned}$$

10. 怎样证明集合的运算规律?

众所周知，运算律对于数学是极其重要的，可以说，没有运算律，就不会有代数学．同样的若无运算律，集合论也无法建立．

1° 交换律

集合的交、并都适合交换律：

$A\cap B=B\cap A$,

$A\cup B=B\cup A$.

现在证明前者．即

$A\cap B=B\cap A$

要证明这个问题，需证明两点：

1) 若 $x\in A\cap B$，则

$x\in A$、且 $x\in B$ 即

$x\in B$，且 $x\in A$，

$\therefore\quad x\in B\cap A$.

$\therefore\quad A\cap B\subseteq B\cap A$.

2) 再设 $x\in B\cap A$ 则有

$x\in B$，且 $x\in A$，

即 $x\in A$，且 $x\in B$，

$\therefore\quad x\in A\cap B$,

$\therefore \quad B\cap A\subseteq A\cap B$,

由1)，2)知

$$A\cap B=B\cap A.$$

2° 结合律

集合的和、交对结合律都是适合的。

即 $A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$,

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$.

我们证明前者

1) 先证 $A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$

设 $x\in A\cup(B\cup C)$,

则

$x\in A$ 或 $x\in(B\cup C)$

$\Downarrow$

$x\in(A\cup B)$ $\quad$ $x\in B$ 或 $x\in C$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$x\in(A\cup B)\cup C$ $\quad$ $x\in(A\cup B)$ $\quad$ $x\in(A\cup B)\cup C$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$x\in(A\cup B)\cup C$ $\quad$ $x\in(A\cup B)\cup C$

所以 $A\cup(B\cup C)\subseteq(A\cup B)\cup C$.

2) 再证

$(A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C)$

设 $x\in(A\cup B)\cup C$,

$\Downarrow$

$x\in(A\cup B)$ 或 $x\in C$

$x\in A$ 或 $x\in B$ $\quad$ $x\in A\cup(B\cup C)$

$\Downarrow$ $\quad$ $\Downarrow$

$x\in A\cup(B\cup C)$ $\quad$ $x\in(B\cup C)$

$\Downarrow$

$x\in A\cup(B\cup C)$

$$\therefore \quad (A\cup B)\cup C\subseteq A\cup(B\cup C),$$

由1)，2)知

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C.$$

3° 分配律

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$$

我们证明前者，

$$\begin{array}{l}
\text{设}\quad a\in A\cap(B\cup C)\\
\Downarrow\\
a\in A \ \text{且}\ a\in(B\cup C)\\
\Downarrow\\
a\in B \ \text{或}\ a\in C\\
\hline
\Downarrow\\
a\in A\cap B \ \text{或}\ a\in A\cap C\\
\Downarrow\\
a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)
\end{array}$$

$$\therefore \quad A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C);$$

再设

$$\begin{array}{l}
a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)\\
\Downarrow\\
a\in(A\cap B)\text{或}a\in(A\cap C)\\
\Downarrow\\
a\in A\text{且}a\in B\text{或}a\in A\text{且}a\in C\\
\hline
a\in A\text{且}a\in B\cup C\\
\Downarrow\\
a\in A\cap(B\cup C)
\end{array}$$

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$$

所以 $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$.

4° 对偶律

1) $(A\cup B)'=A'\cap B$

2） $(A\cap B)'=A'\cup B'$

我们证明前者：

设 $a\in(A\cap B)'\Rightarrow a\overline{\in}A\cap B$

$\Rightarrow a\overline{\in}A$且$a\overline{\in}B$

即 $a\in A'$且$a\in B'$

$\Rightarrow a\in A'\cap B'$

$\therefore\ (A\cap B)'\subseteq A'\cap B'$；

再设 $a\in A'\cap B'\Rightarrow a\in A'$且$a\in B'$

即 $a\overline{\in}A$，且$a\overline{\in}B$

$\Rightarrow a\overline{\in}A\cup B$

即 $a\in(A\cup B)'$

$A'\cap B'\subseteq(A\cap B)'$

所以 $(A\cup B)'=A'\cap B'$。

5° 德·摩根(De Morgan)律

$C-(A\cup B)=(C-A)\cap(C-B)$

$C-(A\cap B)=(C-A)\cup(C-B)$

我们证明前者：

设 $x\in C-(A\cup B)$ 则 $x\in C$

同时，$x\notin A$，且$x\notin B$

故 $x\in C-A$ 且 $x\in C-B$

可见，$x\in(C-A)\cap(C-B)$；

再设 $x\in(C-A)\cap(C-B)$

则 $x\in C-A$ 且 $x\in C-B$

即 $x\in C$，同时$x\notin A$，且$x\notin B$

故　$x \in C$　同时$x \notin A \cup B$

即　$x \in C-(A \cup B)$

因此，$C-(A \cup B)=(C-A) \cap (C-B)$。

6° 以下一些运算律，也是常常用到的，我们不再证明。

幂等律：$A \cup A=A$,

$A \cap A=A$;

复原律　$(A')'=A$;

互余律　$A \cup A'=I$,

$A \cap A'=\phi$;

吸收律　$A \cup (A \cap B)=A$，$A \cap (A \cup B)=A$。

11. 什么叫对偶原理?

在集合的运算公式中，许多是成对出现的，若有集合的并、交、补的某一关系存在，如把∪换成∩，∩换成∪，⊂换成⊃，⊃换成⊂，I换成ϕ，ϕ换成I，每个集合换成它的补集，等号不变，则新的关系依然成立，这就叫对偶原理。如：

(1) $\begin{cases} A \cap B=B \cap A \\ A \cup B=B \cup A \end{cases}$

(2) $\begin{cases}(A\cup B)'=A'\cap B'\\(A\cap B)'=A'\cup B'\end{cases}$

(3) $\begin{cases}(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)\\(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)\end{cases}$

(4) $\begin{cases}(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)\\(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)\end{cases}$

(5) $\begin{cases}(A\cup B)\cap A=A\\(A\cap B)\cup A=A\end{cases}$

(6) $\begin{cases}A\cap A=A\\A\cup A=A\end{cases}$

(7) $\begin{cases}A\cap\phi=\phi\\A\cup U=U\end{cases}$

(8) $\begin{cases}U'=\phi\\\phi'=U\end{cases}$

(9) $\begin{cases}A\cap U=A\\A\cup\phi=A\end{cases}$

(10) $\begin{cases}A\cap A'=\phi\\A\cup A'=U\end{cases}$ 等等都有对偶关系。

在(1)至(4)的公式，我们在集合运算规律证明中已经阐述过。现在，我们利用对偶原理由第一公式推导出第二公式：

1° 若$A\cap B=B\cap A$，则显然有

$A' \cap B' = B' \cap A'$，利用对偶原理，

有 $A'' \cup B'' = B'' \cup A''$

即 $A \cup B = B \cup A$。

2° 因为 $A' \cap B' = (A \cup B)'$

所以 $A'' \cup B'' = (A \cap B)''$

因此，$A \cup B = A \cap B$。

取补集 $A' \cup B' = (A \cap B)'$。

3° 若 $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$

所以 $(A' \cup B') \cap C' = (A' \cap C') \cup (B' \cap C')$

利用对偶原理，有

$(A'' \cap B'') \cup C'' = (A'' \cup C'') \cap (B'' \cup C'')$

所以 $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$。

4° 若 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

则 $(A' \cap B') \cap C' = A' \cap (B' \cap C')$

所以 $(A'' \cup B'') \cup C'' = A'' \cup (B'' \cup C'')$

因此，$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$。

12. 什么是伯恩斯坦定理？

伯恩斯坦（*F* • *Bernstein*）是德国著名数学家，他证明的两个集合对等关系的定理，是集合论中有着广泛应用的重要定理。

这个定理是：

若两个集合的每一个，皆与另一集合的一个子集对等，则这两个集合彼此是对等的。

现在，我们作如下证明：

若　A对等B的子集B_1，

　　B对等A的子集A_1，

用"～"表示对等，有

$$A \sim B_1 \subset B$$

$$B \sim A_1 \subset A.$$

因为 $B \sim A_1$，

所以对于B_1，A_1必有子集A_2与之对应。

$$\text{显然有：}\left.\begin{array}{l} A \supset A_1 \supset A_2 \\ A\text{对等于}A_2 \\ B\text{对等于}A_1 \end{array}\right\}$$

如果我们能够证明A_1对等A，（或A_2）

定理就算得到证明了。

设A在A_2上的一一映射为f，

由于f，A映射于A_2之上，

$A_1(\subset A)$映射于$A_3(\subset A_2)$之上，

$A_2(\subset A_1)$映射于$A_4(\subset A_3)$之上，

$A_3(\subset A_2)$映射于$A_5(\subset A_4)$之上，

…………………

再由于f，有：

A/A_1映射于A_2/A_3之上，

A_1/A_2映射于A_3/A_4之上，

A_2/A_3映射于A_4/A_5之上，

A_3/A_4映射于A_5/A_6之上，

A_4/A_5映射于A_6/A_7之上。

……………………

由此知

$$\left.\begin{array}{l}(A/A_1)\cup(A_2/A_3)\cup(A_4/A_5)\cup\cdots\cdots\\ \text{和}(A_2/A_3)\cup(A_4/A_5)\cup(A_6/A_7)\cup\cdots\cdots\end{array}\right\}(1)$$

是对等的。

若$D=A\cap A_1\cap A_2\cap A_3\cap\cdots\cdots$

则：

$$A=D\cup(A/A_1)\cup(A_1/A_2)\cup(A_2/A_3)\cup(A_3/A_4)\cup\cdots$$

$$A_1=D\cup\qquad(A_1/A_2)\cup(A_2/A_3)\cup(A_3/A_4)\cup\cdots$$

又写成：

$$A=[D\cup(A_1/A_2)\cup(A_3/A_4)\cup\cdots]\cup[(A/A_1)\cup(A_2/A_3)\cup\cdots]$$

$$A_1=[D\cup(A_1/A_2)\cup(A_3/A_4)\cup\cdots]\cup[(A_3/A_3)\cup(A_4/A_5)\cup\cdots]$$

可看出，上边二等式的第一括弧所括的是同一集，第二括弧所括的是(1)，

因此，$A\sim A_1$。

13. 有穷集的元素个数如何计算？

若有穷集合为 A，则有穷集合 A 的元素个数记为 $n(A)$。

当 A，B 为有穷集时，因为 $A\cup B$ 的元素中，属于 $A\cap B$ 的元素，既属于 A，又属于 B，所以有：

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B) \qquad (1)$$

当 $A\cap B=\phi$ 时，显然有 $n(A\cap B)=0$。

因此，有 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)$。 (2)

假设 U 为全集合，A 为其子集，$\overline{A}$ 为其补集，则有

$n(U)=n(A)+n(\overline{A})$，即

$$n(A)=n(U)-n(\overline{A})。 \qquad (3)$$

现在推广如下：

$$n(A\cup B\cup C)=n((A\cup B)\cup C)$$
$$=n(A\cup B)+n(C)-((A\cup B)\cap C)$$

但 $n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

且 $((A\cup B)\cap C)=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

因此 $n((A\cup B)\cap C)=n(A\cap C)\cup(B\cap C)$

$$=n(A\cap C)+n(B\cap C)-n((A\cap C)\cap(B\cap C))$$
$$=n(A\cap C)+n(B\cap C)-n(A\cap B\cap C)$$

代入得：

$$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$$
$$-[n(A\cap B)+n(B\cap C)+n(C\cap A)]$$
$$+n(A\cap B\cap C) \qquad (4)$$

例一 若 $A=\{x|x$ 是20以下2的倍数$\}$

$B=\{x|x$ 是20以下3的倍数$\}$

则$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$

$=10+6-3$

$=13$。

例二 在一个班级中，爱打乒乓球者35人，爱下象棋者32人，还知道两种爱好都具备的10人，那么爱打乒乓球或爱下象棋的共有多少人？

若爱打乒乓球学生的集合为 A，

爱下象棋学生的集合为 B，则

$n(A)=35$，$n(B)=32$

$n(A\cap B)=10$，

所以 $n(A\cup B)=35+32-10=57$(人)。

例三 在50个学生的班级中，爱好数学的35人，爱好语文的30人，爱好生物的20人．又知道数学和语文，数学和生物，语文和生物爱好者分别为22人，18人，12人，且数学、语文、生物三者均爱好的有10人，问三科均不爱好的有多少人？

若数学爱好者集合为 A，

语文爱好者集合为 B，

生物爱好者集合为C，

全班学生集合为U.

则　$n(A)=35$，$n(B)=30$，$n(C)=20$

$n(U)=50$.

又 $n(A\cap B)=22$

$n(A\cap C)=18$

$n(B\cap C)=12$

又 $n(A\cap B\cap C)=10$

所以　$n(A\cup B\cup C)=35+30+20-22-18-12+10$

$=85-52+10$

$=43$.

$n(\overline{A\cup B\cup C})=n(U)-43=7$（人）

14. 什么是函数?

随着数学的发展，函数的定义也经历了一个不断完善和发展的过程。这里，我们必须用集合的观点来介绍它。

若A、B为两个非空集合，f为A，B之间的一个对应关系，f满足：

1° 对任一个$a\in A$，总存在$b\in B$，

使　$(a,b)\in f$；

2° 对任一个$a\in A$，若$b,b'\in B$，

使　$(a,b)\in f$，且$(a,b')\in f$

则　$b=b'$

我们称f为A到B的一个函数。

记为　$f: A\to B$，

当　$(a,b)\in f$，其中$a\in A$，$b\in B$，

当f是A到B的函数时，

A叫函数的定义域，

A的所有元素的函数值组成的集合，叫函数的值域，记为$f(A)$，即

$f(A)=\{b \mid b=f(a),\ a\in A\}$

这里，$f(a)$是集合B中的一个元素，而$f(A)$却是B的一个子集，即

$$f(A)\subset B。$$

定义域、值域、对应关系称为函数的三要素，由于定义域和对应关系往往决定值域，所以定义域和对应关系在三要素中尤其重要。显而易见，没有定义域的函数是不存在的。

应当注意，在函数$f: A\to B$的定义中，对每一个$a\in A$，必须有某一个$b\in B$与之对应。

如果A中某一个元a，没有$b\in B$与之对应，或A中某一个元a，对应$b,b'\in B$，都不能称为函数。

在函数定义中，我们不要求B中的所有元素都被对应，即$f(A)\subset B$，但$f(A)\neq B$。

如果出现$f(A)=B$，f称为映上函数，

当$f(A)$是B的真子集时，则f称为映入函数。

在$f: A\to B$中，对任意$a,a'\in A$，

如果$a\neq a'$，有$f(a)\neq f(a')$，则f叫一一对应函数，反之就叫非一一对应函数。

一个函数也是一个集合，因之两个函数f和g恒等当且仅当它们有相同的元，即指f和g的定义域是相同的，且$f(x)=g(x)$。

15. 什么是映射？

映射(Mapping)是函数概念的拓广，就其本质意义来说，映射和函数是相同的。所不同之处就在于：函数讨论的是数集，而映射讨论的却是一切对象的集合。不仅如此，甚至包括现代数学的其他一些概念，如对应、算子、变换等和映射也有着同样的含义。

我们定义映射如下：

若在集合A，B之间，存在着一个元素间的对应关系f，对于A中任一元素a，B中必有唯一元素b与之对应，我们就称f为A到B的一个映射，记为

$$f: A\to B \quad (\text{或 } A\xrightarrow{f}B)$$

在映射f下，B中与A的元素a对应的元素b称为a的象，记为$f(a)=b$，a称为b的原象。

集合A称为映射f的定义域，集合

$\{f(a) \mid a \in A\}$称为映射 f 的值域，记为 $f(A)$，它是B的一个子集。

对于上述的映射定义，我们需要有以下说明：

1° 在 $f: A \to B$中，A, B 可以是相同的集合，也可以是不相同的集合。

2° 对于 A的每一个元素，B 中必有唯一的一个元素与之对应，在映射定义中，我们不要求 B 的每一个元素在 A中都必须有原象。

应当注意 A到B内和 A到B上映射的差别：

在 $f: A \to B$中，若 $f(A) \subset B$，则称 f 为 A 到 B 内的映射。

若$f(A) = B$，则称 f 为 A到B上的映射．也叫满射。

3° A中不同元素的象，可能是相同的，也可能是不相同的。

当 $f: A \to B$是一个映射，而且只要有

$X_1 \neq X_2$，就有$f(X_1) \neq f(X_2)$时，则 f 称为 A到B的单映射。

4° 在 A到 B上的映射下，对于 B 的每一个元素，集合 A有唯一元素和它对应，这种映射称为 A到 B 上的一一映射，也叫双射。一一映射是应用最广泛的一种映射。

5° 当 f 为一一映射时，不仅有

$f: A \to B$，同时也有

$f^{-1}: B \to A$，则 f^{-1} 称为 f 的逆映射，显然 f 也是 f^{-1}的逆映射。

即 $(f^{-1})^{-1}=f$。

6° 当A中的一个元素，对应B中两个以上元素时；或A中有某个元素，而在B中却没有对应元素时，均不能称为映射。

7° 两个映射相等，是指两个映射的定义域完全一样，而且对定义域中的每一个点，在两个值域中的象也是相同的。即若f和g都是A到B的映射，如果对A中每个元素a，有

$f(a)=g(a)$，则f和g是相等的。

8° 若 $f: A\to B$, $g: B\to C$，

则我们用$h(a)=g(f(a))\qquad(a\in A)$

来表示 $h: A\to C$。

h称为f和g的结合，记为

$$h=g\circ f.$$

9° 若$A_1\subset A$，并有

$f: A\to B$,

$g: A_1\to B$，如果对所有的

$a_1\in A_1$，有$f(a_1)=g(a_1)$

则称f为g的扩大，g为f的缩小，

记为 $g=f\mid A_1$。

16. 映射有些什么特殊形式？

映射有多种特殊形式，下边介绍两种：

1° 变换

一个集合到它自身的映射，叫作这个集合的变换。也就是说，

在映射$f: A \to B$中，当$A=B$时，

f称为A的变换。

显然，A的变换也有A到A上和A到A内两种变换，有满射变换、单射变换和一一变换的区别。

最简单的变换是恒等变换，这种变换是使集合中所有元素都对应着它们自身的一种映射。恒等变换常常记为ε_A。

例如 置换$\begin{pmatrix} a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{pmatrix}$

就是恒等变换，这是因为在集合$\{a,b,c,d\}$到它自身的映射中，

$a \to a$，$b \to b$，$c \to c$，$d \to d$。

如果σ与τ是集合A的变换，对于任意$a \in A$，我们规定

$\tau\sigma(a) = \tau(\sigma(a))$，则

$\tau\sigma$为τ，σ的乘积，表示先施行变换σ，再施行变换τ的变换。

变换的乘积，一般说来，适合结合律，不适合交换律，若σ_1，σ_2，σ_3为三个变换，

则有 $(\sigma_1\sigma_2)\sigma_3=\sigma_1(\sigma_2\sigma_2)$

$$\sigma_1\sigma_2\neq\sigma_2\sigma_1.$$

2° 代数运算

如所周知，实数四则运算是一种特殊形式的映射。这是因为：

加法 $(a,b)\to a+b$

减法 $(a,b)\to a-b$

乘法 $(a,b)\to ab$

除法 $(a,b)\to\dfrac{a}{b}$.

现在，我们定义代数运算如下：

若A是一个集合，如果对这个集合中任意两个有序元素a,b，由运算法则"o"唯一确定A中一个元素c与之对应，即

$$aob=c,$$

我们称o为A的代数运算。

若把A中两个有序元素a,b，看成$A\times A$中的一个元素(a,b)，

这就是说，$A\times A$到A的映射叫A的代数运算。

即映射$f: A\times A\to A$叫做代数运算。

17. 映射的基本性质是什么？

为了研究集合的并与交的运算在映射下的变化，我们必须熟悉映射的基本性质：

1° 两集合的并集的原象，等于两集合原象的并集，即

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$$

证明：分两方面：

首先，若 $x\in f^{-1}(A\cup B)$，

则 $f(x)\in A\cup B$，

即 $f(x)\in A$ 或 $f(x)\in B$

于是，x 至少属于 $f^{-1}(A)$ 与 $f^{-1}(B)$ 中的一个。

所以 $x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$，

即 $f^{-1}(A\cup B)\subseteq f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$；

其次，若 $x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$，

则 x 至少属于 $f^{-1}(A)$ 与 $f^{-1}(B)$ 中的一个，

因此，$f(x)$ 至少属于 A，B 中的一个，

即 $f(x)\in A\cup B$，

所以 $x\in f^{-1}(A\cup B)$

即 $f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(A\cup B)$

由以上证明，得

$$f^{-1}(A\cup B)=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B).$$

2° 两集合的交集的原象，等于两集合的原象的交集，即

$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$$

证明：分两方面：

首先，若 $x\in f^{-1}(A\cap B)$，则

$f(x)\in A\cap B$，

即 $f(x)\in A$，且 $f(x)\in B$

所以 $x\in f^{-1}(A)$，且 $x\in f^{-1}(B)$，

所以 $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$

因此，$f^{-1}(A\cap B)\subseteq f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$；

其次，若 $x\in f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$，

则 $x\in f^{-1}(A)$，且 $x\in f^{-1}(B)$。

所以 $f(x)\in A$，且 $f(x)\in B$

即 $f(x)\in A\cap B$，

因此 $x\in f^{-1}(A\cap B)$，

所以 $f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(A\cap B)$。

由以上证明，得

$$f^{-1}(A\cap B)=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B).$$

3° 两个集的并集的象，等于两个集的象的并集。即

$$f(A\cup B)=f(A)\cup f(B).$$

证明：如果 $y\in f(A\cup B)$，则有

$y=f(x)$，其中 x 至少属于 A，B 之一，

所以 $y=f(x)\in f(A)\cup f(B)$。

反之，如果 $y\in f(A)\cup f(B)$，则有

$y=f(x)$，其中 x 至少属于 A、B 两集之一，

即 $x\in A\cup B$，因而

$$y=f(x)\in f(A\cup B).$$

4° 两集合的交集的象是两集合的象的交集的子集，即

$$f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2).$$

证明：若 $y\in f(A_1\cap A_2)$，则 $y=f(x)$，且 $x\in A_1\cap A_2$，

所以 $x\in A_1$，且 $x\in A_2$

因而 $y=f(x)$ 既属于 $f(A_1)$，又属于 $f(A_2)$

所以 $y=f(x)\in f(A_1)\cap f(A_2)$

故 $f(A_1\cap A_2)\subseteq f(A_1)\cap f(A_2)$.

这里，要注意，由于映射的定义规定：对于 A 中的每个元素，在集合 B 中有唯一的元素和它对应；对于 B 中每个元素，并不要求 A 中只有一个元素与之对应．所以一般情况下，

$$f(A_1\cap A_2)\neq f(A_1)\cap f(A_2).$$

18．什么叫复合映射？

若有两个映射：

f：$A\to B$，（或记为 $A\xrightarrow{f}B$）．

g：$B\to C$，（或记为 $B\xrightarrow{g}C$）．

显然，对A的任一元素a，在 B 中必有一象：

$$b=f(a)\text{。}$$

那么，对于B中的元素$b=f(a)$，在C中必有一个象：

$$c=g(b),$$

这就表明，对于A中的元素a，经过B中的b，总可在C中找到一个元素c和它对应．从而得到从A到C 的另一个映射：

h：$A\to C$，即有

$$c=g(b)=g(f(a))$$

我们把h记为$f\circ g$，h称为f和g的复合映射，或叫积．

对复合映射，应当注意的问题是：

1° 两个映射的复合

$h=g\circ f$ 中，开始的映射f要写在右边，其后的映射g要写在左边．

复合映射不适合交换律，即

$$f\circ g\neq g\circ f.$$

2° 两个映射的复合，事实上是另一个新的映射：

$$g\circ f=h: A\to C.$$

3° 复合映射适合结合律，即

若 $A\xrightarrow{f}B\xrightarrow{g}C\xrightarrow{h}D$，

我们有 $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$．

4° 复合映射也可以具有

$f\circ f$的形式，简写为f^2．

5° 若$A_1\subset A$，且有映射：

$$f: A\to B$$

$g: A_1 \to B$

如果对于所有的 $a_1 \in A_1$，有

$f(a_1) = g(a_1)$，则

f为 g 的扩大，或 g 为 f 的缩小，

记为　$g = f \mid A_1$。

19．什么叫直积集合？

若A，B为两个集合，当 a 遍历A，b 遍历B时，(a, b)的全体组成的集合，叫A与B的直积集合，记为$A \times B$。即

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}.$$

现在我们作以下说明：

1°　形如(a, b)的有序对，叫元偶（或序偶），可表示为$\langle a, b \rangle$或$\{\{a\}, \{a, b\}\}$。(a, b)中a，b的次序不能颠倒。

2°　直积集合不适合交换律，即

$$A \times B \neq B \times A.$$

因为 $A \times B$ 也是集合，显然可以进行并、交运算。直积集合对于并、交有分配律成立，即

$$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C),$$

$$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A),$$

$$A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C),$$

$$(B \cap C) \times A = (B \times A) \cap (C \times A).$$

3° 直积和交与并在概念上不同，不能混同使用。例如

$$A=\{1,\ 2\},$$

$$B=\{a,\ b,\ c\}，则有$$

$$A\times B=\{(1,a),\ (1,b),\ (1,c),\ (2,a),\ (2,b),\ (2,c)\}$$

而$A\cap B=\phi$.

$$A\cup B=\{1,2,a,b,c\}.$$

4° 当$A=B$时，

$$A\times B=A^2,$$

例如$A=\{1,2,3\}$，则

$$A^2=\{(1,1),\ (1,2),\ (1,3),\ (2,1),\ (2,2),\ (2,3),\ (3,1),\ (3,2),\ (3,3)\}$$

5° 若A，B，C为三个集合，且$a\in A$，$b\in B$，$c\in C$，则有序三元(a,b,c)的全体组成的集合，叫A，B，C的直积集合，即

$$A\times B\times C=\{(a,b,c);\ a\in A,\ b\in B,\ c\in C\}$$

例如若$A=\{a_1,b_1\}$，$B=\{a_2,b_2\}$，$C=\{a_3,b_3\}$.

则 $$A\times B\times C=\{(a_1,a_2,a_3),\ (a_1,a_2,b_3),\ (a_1,b_2,a_3),\ (a_1,b_2,b_3),\ (b_1,a_2,a_3),\ (b_1,a_2,b_3),\ (b_1,b_2,a_3),\ (b_1,b_2,b_3)\}.$$

我们将直积集合推向一般情况，有

假设集合$M=\{m,n,p,\cdots\cdots\}$

对于每个$m\in M$，有A_m与之对应.

依M中元素的次序，从诸A_m中各取一元素a_m，

则$(a_m, a_n, a_p, \cdots\cdots)$叫元复合，所有元复合组成的集合，叫集复合，记为

$$\prod_{m\in M} A_m = A_m \times A_n \times A_p \times \cdots\cdots,$$

当M为可数集时，$M \sim N$，这时，

集复合就是直积集合，记为

$$\prod_{i=1}^{\infty} A_i.$$

20. 什么叫"关系"？

众所周知，在数的运算中，=、<、>、≤、≥等等都是一些重要关系。任意两个数a、b之间，要么$a<b$，要么$a \nless b$，二者必居其一，若$a<b$，我们就说a、b有"<"关系；

若$a \nless b$，我们说a和b无"<"关系。

现在，我们以集合的观点，来介绍"关系"问题。

首先，我们阐述两个重要概念：

1° 有序对（或称序偶）：

设A、B为两个集合，

按一定次序并列的两个元$\langle a,b\rangle$叫有序对，其中$a\in A$，$b\in B$。

a叫$\langle a, b\rangle$的第一坐标，

b 叫 $\langle a, b\rangle$ 的第二坐标。

应当注意，$\langle a, b\rangle$ 和 $\langle b, a\rangle$ 是两个不同的有序对。我们说 $\langle a, b\rangle$ 和 $\langle b, a\rangle$ 是相等时，只能在

$a=b$ 时才成立。

两个有序对 $\langle x_1, y_1\rangle$ 和 $\langle x_2, y_2\rangle$ 相等时，

当且仅当：

$x_1=x_2$ 和 $y_1=y_2$ 时才成立。

有序对 $\langle a, b\rangle$ 和集合 $\{a, b\}$ 在概念上也是不同的，

前者的元是有次序的，且 a，b 可以相同；后者的元没有次序，而且 a，b 不可相同。

例 $\{1,2\}=\{2,1\}$，

但 $\langle 1,2\rangle \neq \langle 2,1\rangle$。

有序对还可用以下形式来表示：

$\langle a,b\rangle=\{\{a\}, \{a,b\}\}$。

2° 笛卡尔积集：

笛卡尔积集就是在集合的运算中，我们已经谈过的积集。意思说：

若 A，B 为两个集合，当 $a\in A$，$b\in B$ 时，

以全体有序对 $\langle a, b\rangle$ 作为元素组成的集合，叫笛卡尔积集．记为

$$A\times B=\{\langle a,b\rangle \mid a\in A, b\in B\}$$

在一般情况下，$A\times B\neq B\times A$

例如 $A=\{a, b\}$，$B=\{1,2\}$

则 $A\times B=\{\langle a,1\rangle, \langle a,2\rangle, \langle b,1\rangle, \langle b,2\rangle\}$

而 $B\times A=\{\langle 1,a\rangle, \langle 1,b\rangle, \langle 2,a\rangle, \langle 2,b\rangle\}$

在 $A\times B$ 中，若 $B=A$，则笛卡尔积集为 $A\times A$。

例 若 $A=\{1,2,3\}$ 则

$$A\times A=\{\langle 1,1\rangle, \langle 1,2\rangle, \langle 1,3\rangle, \langle 2,1\rangle, \langle 2,2\rangle, \langle 2,3\rangle, \langle 3,1\rangle, \langle 3,2\rangle, \langle 3,3\rangle\}$$

现在，我们解答什么是"关系"这个问题：

两个非空集合 A，B，$A\times B$ 的任何一个子集 R 称为 A 与 B 间的一个关系。也就是说：一个关系就是一个集，它的每个元是一个序对。

若 R 是一个关系，且 $\langle a,b\rangle\in R$，我们称 a 和 b 有关系 R，记为 aRb；当 $\langle a,b\rangle\notin R$ 时，称 a 和 b 没有关系 R，记为 $a\overline{R}b$。

R 的定义域 $=\{a$：对每个 b，$\langle a,b\rangle\in R\}$

R 的值域 $=\{b$：对每个 a，$\langle a,b\rangle\in R\}$

关系 R 的逆是指对调属于 R 的每个序对而得到，用 R^{-1} 表示。即

$$R^{-1}=\{\langle x, y\rangle : \langle y, x\rangle\in R\}$$

也就是说，当且仅当 $yR^{-1}x$ 时，有 xRy。

这就可以看出：关系 R 的值域为 R^{-1} 的定义域，关系 R 的定义域恰为 R^{-1} 的值域。

如果有两个关系 R，S，它们的合成 RoS 定义为：对于某个 y，使 $\langle x, y\rangle\in S$，且 $\langle y, z\rangle\in R$ 的所有序对 $\langle x, z\rangle$ 之集。

关系的合成一般也是不能交换的。

例如　$R=\{\langle 1,2\rangle\}$，且 $S=\{\langle 0,1\rangle\}$

则 $R \circ S=\{\langle 0,2\rangle\}$，而 $S \circ R=\{\ \}$

显然 $R \circ S \neq S \circ R$。

若 R 是一个关系，A 是一个集，所有与 A 中的点有 R 关系的点所构成的集 $R〔A〕$定义为

$\{y$：对于 A 中的某个 x，$xRy\}$，如果 A 是 R 的定义域，则 $R〔A〕$是 R 的值域。对于任意 A，集 $R〔A〕$被包含在 R 的值域中。

如果 R 与 S 是两个关系，且 $R \subset S$，则对于每个 A，总有 $R〔A〕\subset S〔A〕$。

21．“关系”有些什么性质？

如所周知，“关系”的定义是：

两个非空集合 A，B，称 $A\times B$ 的任何一个子集 R 为 A，B 间的一个关系。或说成：一个关系是一个集，它的每个元是一个有序对。

如果 R 是一个关系，且 $\langle x, y\rangle \in R$，则称 x，y 有关系 R，记为 xRy；当 $\langle x, y\rangle \notin R$ 时称 x，y 没有关系 R，记为 $x\overline{R}y$。

现在，我们讨论 R 的一些性质：

（1）自反性 (Reflexive)

R为A上一个关系，如果对于任何元素$x\in A$，均有xRx，则称R具有自反性。

(2) 非自反性 (Irreflexive)

R为A上一个关系，如果对于任何元素$x\in A$，均有$x\overline{R}x$，则称R具有非自反性。

(3) 传递性 (Transitive)

R为A上一个关系，如果对于x，y，$z\in A$，有$(xRy)\wedge(yRz)\Rightarrow xRz$，则称$R$具有传递性。

(4) 非传递性 (atransitive)

R为A上一个关系，如果对于x，y，$z\in A$，有$(xRy)\wedge(yRz)\Rightarrow x\overline{R}z$，则称$R$具有非传递性。

(5) 对称性 (symmetric)

R为A上一个关系，如果对于x，$y\in A$，有$xRy\Rightarrow yRx$，则称R具有对称性。

(6) 非对称性 (asymmetric)

R为A上一个关系，如果对于$x,y\in A$，有$xRy\Rightarrow y\overline{R}x$，则称$R$具有非对称性。

(7) 反对称性 (anti-symmetric)

R为A上一个关系，如果对于$x,y\in A$，有$xRy\wedge yRx\Rightarrow x=y$，则称$R$具有反对称性。

(8) 连通性 (connectedin)

R为A上一个关系，如果对于x，$y\in A$。

若有$x\in A\wedge y\in A\wedge x\neq y\Rightarrow xRy\vee yRx$，则称$R$具有连通性。

一个关系 R 并不都是具有上述一切性质，因为那是不可能的。往往只具有上述性质的某几个：例如当关系 R 具有自反性、对称性、传递性时，这种关系叫等价关系；

当关系 R 具有非自反性、传递性、非对称性时，这种关系叫次序关系；

当关系 R 具有自反性、传递性、反对称性时，这种关系叫部分序关系；

当关系 R 具有自反性、传递性、非对称性时，这种关系叫偏序关系，等等。

22．什么叫RMI原则？

RMI 原则是关系映射反演原则的简称，是分析处理解决问题的一种原则。即使在日常生活中，人们也会不自觉地应用它。

现在介绍 *RMI* 原则的基本内容：

若 R 表示原象关系结构，其中包含着待确定的原象 x；

M 表示一种映射，假若通过映射，R 被映成映象关系结构 R^*，其中包含 x 的映象 x^*。

如果有办法把 x^* 确定下来，则通过反演 I（即 M 的逆映射），可相应地把 x 确定下来。

在利用这个原则时，关键的一点是选择合适的映射 M，

以便使 x^* 比较容易的确定下来，因而得到 x。

RMI 原则在数学中有广泛的应用，例如我们把集合称为无关系结构，如果在集合的元素间，存在某种关系。就称为关系结构。

若 φ 是一个映射，S 是一个关系结构，φ 将 S 映射为 S^*，记为：

$$S^* = \varphi(S).$$

若 S 中包含一个未知对象 x，则称 x 为目标原象，显然

$x^* = \varphi(x)$ 称为映象。

假定我们能通过确定的数学方法，从 S^* 中确定出 x^*，那么 φ 叫可定映映射。

根据上述，可以概述 *RMI* 原则如下：

含有目标原象 x 的关系结构 S，如果能找到一个映射 φ，φ 将 S 映入或映满 S^*，则可从 S^*，通过一定的方法，把目标映象

$x^* = \varphi(x)$ 确定下来。从而通过反演，即逆映射 φ^{-1}，把

$x = \varphi^{-1}(x^*)$ 确定出来。

RMI 原则的框图（如56页所示）。

但是 *RMI* 原则不是万能的，例如从映象关系中确定目标映象的属性，往往是比较困难的。就是在反演中，如果逆映射是解析变换的逆变换，那么求目标原象也会有一定的难度。

$$
\begin{tikzcd}
\boxed{S} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \boxed{S^*} \arrow[d] \\
\boxed{X} & \boxed{X^*} \arrow[l, "\varphi^{-1}"']
\end{tikzcd}
$$

23. 包含关系有些什么性质?

集合之间的关系中，包含关系是比较重要的一种，我们常常用“$\subset$”表示包含关系。

如所周知，若 $x\in A$，必有 $x\in B$，就说 $A\subset B$。若 $A\subset B$，表示 A 包含在 B 内，或者说 B 包含 A，在这种情况下，也称 A 是 B 的子集合。

包含关系有以下性质：

(1) $A\subset A$，叫自反性。

(2) 若 $A\subset B$，$B\subset C$，则有

$A\subset C$，这叫传递性。

(3) 若 $A\subset B$，$B\not\subset A$，表示$\subset$没有对称性。在这种情况

下，B 中至少有一个元素不属于 A。

如果 A，B 不相等，$A\subset B$，$B\subset A$ 至少有一个不成立。

若$A\subset B$，则有时$B\subset A$ 也可能成立。

例如$A=\{1,2,3\}$，$B=\{3,2,1\}$，显然有

$A\subset B$，也有$B\subset A$。

(4) 若有$A\subset B$，且$B\subset A$，则$A=B$，这叫反对称性。

(5) 任何两个集的交必被任何一个集所包含。即

$(A\cap B)\subset A$，$(A\cap B)\subset B$。

(6) 任何两个集的并必包含两个集之中的任何一个。即

$(A\cup B)\supset A$，$(A\cup B)\supset B$。

(7) 任何两个集的并包含它们的交，

即　$(A\cap B)\subset(A\cup B)$

(8) A，B的补集记为A'，B'

若　$A\subset B$，

则有　$A'\supset B'$

(9) A为任意集合，则有

$\phi\subset A$。

(10) 若U为全集合，A为任意集合，

则有　$A\subset U$。

(11) 若 $A\subset B$，则有

$A\cap B=A$。

(12) 若 $A\subset B$，则有 $A\cap B'=\phi$

(13) 若 $A\subset B$，则$A-B=\phi$

(14) 若 $A\subset B$，则

$$A \cup B = B$$

(15) 若 $A \subset B$，则

$$A' \cup B = U$$

(16) $A - B \subset A$

(17) 若 $A - B = \phi$，则有

$$A \subset B$$

(18) 若 $B \subset A$，则有

$$(A - B) \cup B = A$$

以上性质均可用韦恩图加以验证。

24. 什么叫等价关系？

若 S 为一个集合，S 中有关系 R，那么 S 内任何二元素 x、y，可以判定有关系 R，或没有关系 R，有关系记为 xRy，没关系记为 $x\overline{R}y$。如果关系 R 满足：

(1) 自反性，即对 S 内任何元素 x，

均有 xRx；

(2) 对称性，对 S 内任何元素 x，y，

如果有 xRy，则必然有 yRx；

(3) 传递性，对 S 内任意元素 x，y，z，

如果有 xRy，yRz，则有 xRz。

我们称 R 为 S 内的一个等价关系。等价关系 R 常常用～

表示。例如$x \sim y$就表示 x，y有等价关系。

例1 若S为整数集，对S中任何二元素a,b，能够判定"a和b之差是偶数"是对的或者不对，我们说"a和b之差是偶数"是一个等价关系。这是因为

1° 对任何数$a \in S$，

$a-a=0$是偶数。

所以有自反性。

2° 对任意a，$b \in S$，

若$a-b$是偶数，$b-a$必然也是偶数。

所以有对称性。

3° 对a，b，$c \in S$，若

$a-b$是偶数，

且$b-c$是偶数，则

$a-c$必然也是偶数。

所以有传递性。

因此，"a和b之差是偶数"在S内是等价关系。

例2 若A是任意非空集合，

$P(A)$为A的幂集合。

∵对于任意S，$T \in P(A)$

$S \subseteq T$或$S \nsubseteq T$有且只有一种情况成立，

所以$\subseteq$是$P(A)$中的一个关系。

但$\subseteq$中有自反性，传递性，而没有对称性

所以$\subseteq$在$P(A)$中不是等价关系。

例3 在实数集内，"$\geqslant$"是一个关系，因为任何两个数

a，b，可以判定

$a \geqslant b$ 或 $a \ngeqslant b$。

但"$\geqslant$"仅满足：

1°自反性

2°传递性

而不满足3°对称性。例如

有 $3 \geqslant 2$，但 $2 < 3$

所以实数集内，"$\geqslant$"不是等价关系。

例4 若 n 是固定正整数，

在整数集 A 中，我们规定

aRb，当且仅当 $n \mid a-b$ 时。

则 R 是等价关系。

因为 $a, b \in A$，$a-b$ 能否被 n 整除是唯一确定的，

故知 R 是一个关系。

因为 1° $n \mid a-a$ aRa（自反性）

2° aRb，bRc 即

$n \mid a-b$，$n \mid b-c$

$\therefore n \mid a-c$。

$\therefore aRc$（传递性）

3° 如果 aRb，$n \mid a-b$

则 $n \mid b-a$

所以 bRa（对称性）

所以 R 为等价关系。

25. 什么是等价类？

若～是集合 A上的等价关系，对每一个$a\in A$，所有与a等价的元素所组成的集合，叫a的一个等价类，记为

$$[a]=\{x \mid x\sim a, x\in A\}.$$

等价类是一个重要概念，现在我们对它的一些性质进行以下解析：

1° 任何一个等价类$[a]$，至少包含一个元素 a,所以等价类都不可能是空集。

集合 A中任一元素，必须在一个等价类中：若x为任一元素，因为

$x\sim x$，所以

$x\in[x]$.

因此，我们称A被等价类覆盖。

2° 同属一个等价类的两个元素，它们必然是等价的。因为假设 a, b 同属等价类$[x]$，

显然 $a\sim x$, $b\sim x$.

由于 $b\sim x$,

所以 $x\sim b$.

又因 $a\sim x$, $x\sim b$,

所以有 $a\sim b$.

3° 若 a, b 不等价，则

$$[a]\cap[b]=\phi.$$

用反证法：若$[a]\cap[b]\neq\phi$，

则必有一元素 $c\in[a]\cap[b]$，

即 $c\in[a]$，$c\in[b]$

显然有 $c\sim a$，$c\sim b$，

因为 $c\sim a$，

所以 $a\sim c$。

又因 $a\sim c$，$c\sim b$

所以 $a\sim b$，

这个结果和题设是矛盾的，

所以 $[a]\cap[b]=\phi$。

4° 如果 $a\sim b$，则 $[a]=[b]$。

证明 若 $x\in[a]$，则

$$x\sim a$$

因为 $a\sim b$

所以 $x\sim b$

即 $x\in[b]$

所以 $[a]\subset[b]$

同理得 $[a]\supset[b]$

因此得 $[a]=[b]$。

5° $[a]=[b]$的充要条件是 $a\sim b$。

证明

(1) 因为 $a\in[a]$，且$[a]=[b]$

所以　$a\in[b]$，

但　$b\in[b]$

所以　$a\sim b$。

（2）对任一$x\in[a]$

因　$x\sim a$，$a\sim b$，

所以　$x\sim b$

即　$x\in[b]$

所以　$[a]\subset[b]$

同理　$[b]\subset[a]$

所以　$[a]=[b]$

从而，我们从$[a]=[b]$只能得到$a\sim b$，而不能得到

$a=b$。

6° 商集

对一个集合 A，若其中一个等价关系为～，

～将 A分成许多不同的等价类：

$[x]$，$[y]$，$[z]$……

以这些不同的等价类为元素组成的集合，叫 A的商集。

记为$A/\sim=\{[x],\ [y],\ [z],\ \cdots\cdots\}$。

商集的元素可能是有限的，也可能是无限的。

7° 划分

若 A为非空集，

E_1，E_2，E_3，$\cdots E_n$是 A的真子集，

若$E_1\cup E_2\cup E_3\cup\cdots\cup E_n=A$，

且$E_i\cap E_j=\phi(i\neq j\quad i,j=1,2,3\cdots n)$

则称E_1，E_2，$E_3 \cdots E_n$为A上的一个划分。

利用等价类的定义，A的关于～的全部等价类正是A的一个划分。

那么，A上一个划分能否确定A上一个等价关系～呢？答案是肯定的。我们证明以下定理：

设$\{A_1, A_2 \cdots An\}$是A的一个划分，则这个划分可确定A上的等价关系～。

因为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup An = A$,

$Ai \cap Aj = \phi (i \neq j \quad i, j = 1.2, \cdots n)$

现在定义关系R为

$xRy \Leftarrow\Rightarrow x, y$同属某个$Ai$

我们证明R是等价关系～。

（1）对任一$x \in A$，总有某个i，

使 $x \in Ai$

显然 xRx

（2）若xRy，由R定义知有i

使 $x, y \in Ai$,

亦即 $y, x \in Ai$

所以 yRx

（3）若xRy，yRz，显然

$x, y \in Ai$，$y, z \in Ai$

当$i \neq j$时，由划分知$Ai \cap Aj = \phi$

所以y不可能同时属于Ai、Aj

因此 $i = j$ 即$Ai = Aj$

于是　$x \in Ai$，$z \in Ai$

所以　xRz

由(1),(2),(3)知R为等价关系～。

26. 什么是基数？

集合以其所含元素的多少分为两类，一类为有穷集合，一类为无穷集合。顾名思义，前者包含的元素个数是有限的；后者包含的元素个数是无限的。有穷集合元素的个数可以用自然数表示，如何表达无穷集合元素的个数，这就出现了基数概念的问题。

什么是基数呢？我们定义如下：

两个集合A,B的元素之间，若存在着一一对应关系，则这两个集合叫等势。所有与集合A等势的集合所作成的集合叫A的基数。或者说，一切等价集合的共同特征叫基数。

基数，势，浓度有相同的意义，都是对集合的一种度量。

集合A的基数表示为$\overline{\overline{A}}$。空集合的基数为零。有穷集合的基数叫有穷基数，用自然数表示。例如

$\{a,b,c\}$的基数为3。

$\{\Delta,*,\circ,\square,\phi\}$的基数为5。

$\{1,2,3,4,5,6,7\}$的基数为7。

无穷集合的基数叫超穷基数，超穷基数也有大小之别，这个问题以后要专门讨论。现在我们先介绍超穷基数里边最小的一个所谓的可数集基数。

全体有限基数组成的集合

$\{1,2,3,\cdots\cdots\}$叫自然数集合。这个集合的基数叫可数集基数，记为$\aleph_0$（阿列夫零）。凡是能够和自然数集等势的集都是可数集，可数集的基数都是$\aleph_0$。例如集合

$\{1,10,100,1000,\cdots\cdots\}$

$\{10,10^{10},10^{10^{10}},\cdots\cdots\}$

$\{\cdots-5,-4,-3,-2,-1,0,1,2,3\cdots\}$

的基数都是$\aleph_0$。

在对基数进行运算时，应用以下方法：

加法：两个集合的并集的基数，称为两个集合的基数之和。

若集合A,B的基数为a,b，则

$A\cup B$的基数$c=a+b$。

例 $A=\{1,2,3\}$

$B=\{2,3,4,5\}$

有 $\overline{\overline{A}}=3$，$\overline{\overline{B}}=4$，

显然$\overline{\overline{A\cup B}}=5$。

乘法：若$N=A\times B$，则

(x,y)　$x\in A$，$y\in B$　所成集合的基数

$$c = ab$$

例 $A = \{1,2,3\}$,

$B = \{a,b\}$

则 $A \times B = \{(1,a),\ (1,b),\ (2,a),\ (2,b),(3,a),(3,b)\}$

即 $\overline{\overline{A}} = 3$. $\overline{\overline{B}} = 2$

$$\overline{\overline{A \times B}} = 3 \times 2 = 6$$

但要特别注意，在运算上，超穷基数和有限基数有很大差别，例如：

$$\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$$

$$\aleph_0 + \aleph_0 + \aleph_0 + \cdots = \aleph_0$$

$$5 \times \aleph_0 = \aleph_0$$

$\aleph_0 \times \aleph_0 = \aleph_0$ 等等。

27. 可数集有什么重要性质?

我们已经知道：凡能够和自然数集合等势的集合，都叫可数集。而可数集的基数为$\aleph_0$。现在我们来讨论可数集的一些重要性质：

（1）具有基数$\aleph_0$的可数集

例 1 一切$\gtreqless 0$的整数所组成的集为可数集，这是因为

1,2,3,4.……

0，

-1，-2，-3，-4，……

可以排成以下顺序：

0,1，-1,2，-2,3，-3，……

显然这个集合是可数的。

例 2 一切自然数偶所组成的集合是可数的。

一切自然数偶为：

$$\begin{tikzcd}
(1,1) \arrow[r] & (1,2) \arrow[r] \arrow[dl] & (1,3) \arrow[dl] & \cdots\cdots \\
(2,1) & (2,2) \arrow[dl] & (2,3) \arrow[dl] & \cdots\cdots \\
(3,1) & (3,2) & (3,3) & \cdots\cdots
\end{tikzcd}$$

……………………………………………………

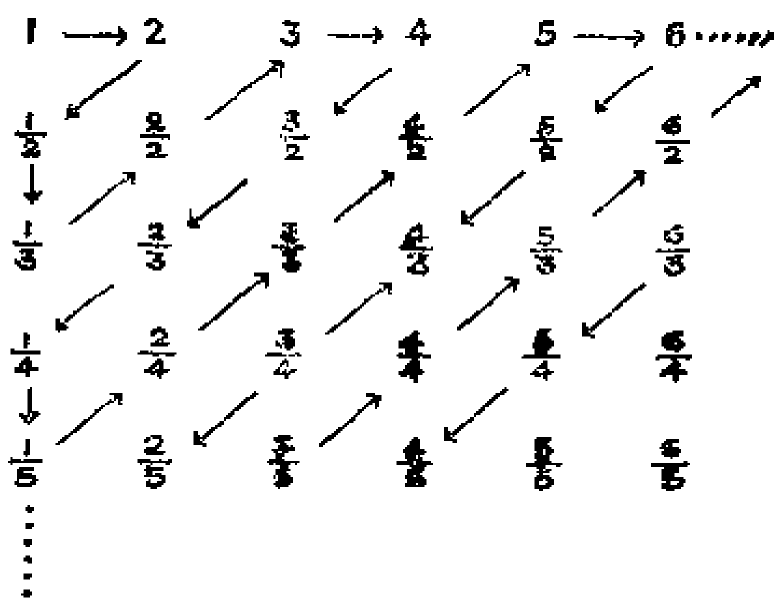
从(1,1)开始，按箭头所指方向排列，即

(1,1)，(1,2)，(2,1)，(1,3)，(2,2)……

显然可知，自然数偶为可数集。

例 3 有理数集是可数集

所有正有理数可排成：



按箭头所示方向排列，除去重复的数后，得

$$1,\ 2,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 3,\ 4,\ \frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ \cdots\cdots$$

故为可数集。

例 4 全体整系数多项式的集合为可数集。

若整系数多项式为

$$(a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1}) + \cdots + a_0$$

$$(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots;\ a_n \neq 0)$$

那么，0次多项式的集就是全体整数

即 $P_0=\{0,\ 1,\ -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3\cdots\}$

显然这是可数集。

一次多项式集合P_1由下列集合Q_1，Q_{-1}，Q_2，Q_{-2}……的并组成：

$$Q_1=\{x,\ x+1,\ x-1,\ x+2,\ x-2,\ \cdots\}$$
$$Q_{-1}=\{-x,-x+1,-x-1,-x+2,-x-2\cdots\}$$
$$Q_2=\{2x,\ 2x+1,\ 2x-1,\ 2x+2,\ 2x-2,\ \cdots\}$$
$$Q_{-2}=\{-2x,\ -2x+1,\ -2x-1,\ -2x+2,$$
$$-2x-2,\ \cdots\}.$$

……………………………………………………

Q_m 是首项系数为m的一次多项式的集，而每个 Q_m 都是一个可数集合。所以

$P_1=\bigcup Q_m$是一个可数集合。

同理，P_2，P_3，$\cdots P_n$也都是可数集合。

因此，$P=P_0\cup P_1\cup P_2\cdots,\ \cup P_n$是可数集合。

例5 全体代数数的集合是可数集合.

这是因为全体整系数的多项式集为可数集，而每一个多项式只有有限个根，所以n次多项式的根的全体是可数集.（$n=0,1,2\cdots\cdots$）因而代数数的集是可数集。

（2）每一个无穷集合含有一个可数子集

若A是无穷集，因为它是不空的，

显然可选一元$a_1\in A$，而

$A-\{a_1\}$仍为无穷集。

再选一元$a_2\in A-\{a_1\}$，则

$A-\{a_1,\ a_2\}$仍为无穷集，继续作下去，即得可数子集：

$\{a_1, a_2, a_3, \cdots\cdots\}$.

（3）可数集的任何无限子集是可数子集

若$A=\{a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots\}$为可数集，

设B是A的真无限子集，且B为非空。

则在A中，一定有B的元，

既然B是A的子集，故

若 $x\in B$，则 $x=a$

对自然数i，假设在

$\{a_1, a_2\cdots a_{i-1}\}$中有$k$个$B$中的元。

$(k\leqslant i-1)$

令$b_{k+1}=x=a_i$，于是B是无限集

故B可写成：

$B=\{b_1, b_2, \cdots b_k, \cdots\}$ 其中k为自然数。

所以B为可数集。

（4）可数个两两不相交的可数集合的并是可数集

若A_1，A_2，A_3，…是可数个两两不相交的可数集合：

$A_1=\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\}$

$A_2=\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots\}$

$A_3=\{a_{31}, a_{32}, a_{33}, \cdots\}$

……………………………………

令 $S=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}A_n$，将 S 的元素如下排列

$$
\begin{array}{cccc}
a_{11}\rightarrow & a_{12} & a_{13}\rightarrow & a_{14}\ \cdots\cdots \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\
\downarrow & & & \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\
a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \\
\downarrow & & & \\
\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots
\end{array}
$$

所以 $\{a_{11},\ a_{12},\ a_{21},\ a_{31},\ a_{22},\ a_{13},\ \cdots\}$为一可数集.

（5）如果一个函数的定义域是可数的，则函数的值域也是可数的.

显然，通过一一对应的形式，可知值域必为可数的.

28. 无穷集的主要特征是什么？

康托的不朽功绩是创立了集合论，而集合论中他全力讨论的是无穷集，可以说如果没有无穷集理论的建立，集合论决形不成一个学科.

我们已经知道，最简单的无穷集的例子就是自然数集．和自然数集对等的无穷集叫可数集．显然可数集也是无穷集，但它是最小的无穷集．可数集的一些性质不能适用一切无穷集，因此，我们有必要专门谈谈无穷集的主要特征：

(1) 无穷集必含一个可数无穷子集

因为若A为无穷集，

从A中取出一元a_0，

则A中必还有元素a_1，否则A就不能成为无穷集了．

若k为一个自然数，

A中取出a_0，a_1，…，a_k后，必还有元素a_{k+1}，所以A含有可数无穷子集：

a_0，a_1，a_2，……

(2) 无穷集必对等于它的某一个真子集

若M为一无穷集，根据(1)知道它有一个可数无穷子集M_1，设M_1的元素为：

a_1，a_2，…a_n…

从M中除去a_1，得真子集p，显然如能证明$M\sim p$就可以了．

我们考虑：

令M_1的元素a_n，对应p中的元素a_{n+1}，M中不属于M_1的元素a，对应p中的a，这就得到$M\sim P$．

这里，我们要指出，有穷集就不具备特征(2)，即

（3）有穷集不能对等于它的任何一个真子集

若M_n表示最初n个自然数之集，

M_n'表示最初n'个自然数之集，

且$n'<n$。

我们用归纳法证明M_n'不对等M_n：

显然M_2不对等M_1，

设k是一个自然数，在M_k不与它的任何真子集对等下，证明M_{k+1}也如此就行了。

若M'适合

$$M'\subset M_{k+1},\ M'\sim M_{k+1}$$

那末M_{k+1}的元素$k+1$对应M'中的一个元素l。

而l不会是$k+1$，因为从M_{k+1}和M'里分别去掉$k+1$和l，得M_k和M''，且

$$M''\subset M_k,\ M_k\sim M''$$

显然这是不能成立的，所以$l\neq k+1$。

这就是说，M'可能不含$k+1$，则有

$$M'\subseteq M_k$$

此时从M_{k+1}除去$k+1$，从M'中除去l得M''，

又有$M''\subset M_k$，$M_k\sim M''$。

这就是说，$k+1$必属M'，M'中的$k+1$对应M_{k+1}中的某元素p，现作以下对应：

M_{k+1}中的$k+1$对应M'中的$k+1$。

M_{k+1}中的p对应M'中的l。

其余元素的对应仍如前，这样M_{k+1}与M'仍有对应关系。如上所述，这是不可能的。

综上知道，无穷集和有穷集的根本差别，就在于：无穷集能够和它的一个真子集对等①，而有穷集不可能作到这一点。

29．什么叫 Borel 集？

我们先引述以下定义：

1° 直线上任何非空开集为可数个闭集之和，这是因为每个开集都是不超过可数个区间之和的缘故。表示为：

$$(a,b)=\bigcup_{(n)}\left[a+\frac{1}{n},\quad b-\frac{1}{n}\right],$$

$$(a,\ +\infty)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left[a+\frac{1}{n},\ a+n\right].$$

2° 直线上任何闭集为可数个开集之交，因为开集$R'\setminus F$能变为可数个闭集ϕ_n之和，所以F是可数个开集$R'\setminus\phi_n$之交。凡成为可数个闭集之和的集，叫F_σ型的集，或说开集是F_σ型的集；凡成为可数个开集之交的集叫G_δ型的集，或说闭集是G_δ型的集。

---

① 德国迪里赫勒内把这个特征作为无穷集的定义。

推广上述定义，则有：

可数个G_δ型的集之和的集叫$G_{\delta\sigma}$，可数个F_σ型的集之交的集叫$F_{\sigma\delta}$．凡是可数个$F_{\sigma\delta}$型的集之和叫$F_{\sigma\delta\sigma}$型的集，凡是可数个$G_{\delta\sigma}$型的集的交的集叫$G_{\delta\sigma\delta}$型的集．

若用σ表示可数加法，δ表示可数相交法，我们可以定义：$G_{\delta\sigma\delta\sigma}$，$F_{\sigma\delta\sigma\delta}$；$G_{\delta\sigma\delta\sigma\delta}$，$F_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma}$等型的集．

现在把上述各型的集改成以下形式：

把闭集称为$(0,\delta)$型的集，开集称为$(0,\sigma)$型的集，这两种集称为O型的集．

假定$n-1$型的集建立完成，我们称凡成可数个$n-1$型的集之和的集为(n,σ)型的集．而凡成可数个$n-1$型的集之交的集为(n,δ)型的集，(n,σ)型和(n,δ)型的集共同建成n型的集．

因而 O型$\begin{cases}(0,\sigma)=\text{开集}\\(0,\delta)=\text{闭集．}\end{cases}$

1型$\begin{cases}(1,\sigma)=F_\sigma\text{型}\\(1,\delta)=G_\delta\text{型}\end{cases}$

2型$\begin{cases}(2,\sigma)=G_{\delta\sigma}\text{型}\\(2,\delta)=F_{\sigma\delta}\text{型}\end{cases}$

3型$\begin{cases}(3,\sigma)=F_{\sigma\delta\sigma}\text{型}\\(3,\delta)=G_{\delta\sigma\delta}\text{型．}\end{cases}$

……………………………………

若α是任意一个第二级的超限数，则

(α,σ)或(α,δ)型的集统称为α型的集，

这样，所得到各种各样α型的集，就叫Borel集．

30．为什么逻辑演算中的所有公式的集是可数的，而定义在公式集上的，取公式为值的函数集是不可数的？

1° 首先介绍一些基本概念：

在逻辑演算中，用字母作符号，一串符号就叫做公式，公式所用符号的数目叫公式的长度．例如 a，b是符号；

a，b，$aabb$，$ababab$叫公式，它们的长度分别为 1，1，4，6．

公式的长度可以是 0，这种公式叫空公式，记为$\odot$．

把二个公式X、Y并列起来XY仍是一个公式，对任何公式X，显然有

$$\odot X = X\odot = X.$$

如果公式X是公式Y的部分，或者说有

$$X_1XX_2 = Y,$$

则X叫Y的子公式．

例如 对$ababab$说，a，ab，aba，bab，$abab$都是子公式，而aa，bb不是子公式．

2° 现在证明逻辑运算中所有公式的集是可数的．

我们容易知道，逻辑演算的符号集是可数的，若B_n是所有长度是$n(n>1)$的公式的集，

则B 和A^n有一一对应关系。

因为A^n是可数的，所以B_n也是可数的。

若a_{n1}，a_{n2}，a_{n3}，…是B_n的一个枚举，

那么逻辑演算中公式的集就是

B_1，B_2，B_3，…这些集的并，再加上⊙，

因此可以把所有公式枚举出来：

⊙，a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{13}，a_{22}，a_{31}，a_{14}……

3° 若在公式集上定义的，取公式为值的函数集为F，现在证明F是不可数的：

若a_0，a_1，a_2，…是公式A的一个枚举。

又设f_0，f_1，f_2…是F的任意一个枚举，　　(1)

令$f_i(a_j)=a_{ij}$　$(i=0,1,2\cdots j=0,1,2\cdots)$　　(2)

我们构造矩阵：

$$\begin{array}{ccccc}
a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} & \cdots \\
a_{10} & a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\
a_{20} & a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\
a_{30} & a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \searrow
\end{array} \qquad (3)$$

对角线元为：

a_{00}，a_{11}，a_{22}，……

令a是一个不空公式，即

$a \neq \odot$

作函数f，使

$$f(ai) = aiia = f_i(ai)a \qquad (4)$$

$$(i = 0, 1, 2, \cdots)$$

这样f在公式集上有定义，且取公式为值的函数，

所以$f \in F$。

但f不在(1)中，因为若f在(1)中，必有$f = f_n$. 那么对任何$x \in A$，都有

$$f(x) = f_n(x)$$

所以$f(a_n) = f_n(a_n) \qquad (5)$

由(2)，(5)知

$$f(a_n) = a_{nn} = a_{nn}\odot \qquad (6)$$

由(4)，有 $f(a_n) = a_{nn}a \qquad (7)$

故由(6)、(7)得

$$a_{nn}\odot = a_{nn}a$$

所以$a = \odot$，这和题设矛盾，

故f不在(1)中，

即不在F的任何一个枚举中，

所以F是不可数的.

31．什么是连续统基数？

所谓连续统是指既连通又列紧的集合说的：如果M是一个集合，把它任意分为两个子集A和B，即$M=A\cup B$，至少在两个子集的一个中，可以找到一个点是另一个子集的极限点，这时M叫连通集，

如果R为一集合，它的一切无穷子集M在R中都有极限点，那么R叫列紧集。

例如闭区间$[0, 1]$就是一个连续统。

连续统的基数记为$\aleph$，而且

$$\aleph_0<\aleph.$$

下面我们来证明这个问题：

假设X为全体十进小数的集，小数表示为：

$0.a_1a_2a_3\cdots\cdots a_k$，其中$a_k$是0，1，2……9中的任一个。

若X为可数集，那么它的元素可写成：

X_1，X_2，X_3，……X_n，而X_k的形式是

$0.a_{k1}a_{k2}a_{k3}\cdots\cdots a_{kn}$，而$a_{kn}$是

0，1，2，……9中的任何一个。

现在定义一个小数为：

$$0.b_1b_2\cdots\cdots b_k,$$

对任一个k，

若 $a_{kk}=1$，取 $b_k=2$；

若 $a_{kk}\neq 1$，取 $b_k=1$。

可以看出：$0\cdot b_1b_2\cdots\cdots b_k$ 决不是任何一个 X_k，

因为 $a_{kk}\neq b_k$

但由定义知道：

$0\cdot b_1b_2\cdots\cdots b_k\in X$

两结果的矛盾，证明了X是不可数的。

从而得到

$\aleph_0<\aleph$。

但由幂集合知道：

$\aleph_0<2^{\aleph_0}$。

这就产生了$\aleph$和$2^{\aleph_0}$是否相同的问题。

如果把一切无穷集基数依大小次序排列起来，显然有：

$\aleph_0$，$\aleph_1$，$\aleph_2\cdots\cdots\aleph\cdots\aleph_\alpha$，$\aleph_\beta\cdots\cdots$

对任意序码$\alpha<\beta$，则有

$\aleph_\alpha<\aleph_\beta$。

在这个基数序列中，$\aleph_1$是大于$\aleph_0$的最小基数。那么$2^{\aleph_0}$究竟在哪个位置上呢？

康托曾断言：

$2^{\aleph_0}=\aleph_1$。

但这个问题始终未曾得到证明，这就是著名的连续统假设问题，简称CH。

目前集合论研究中广泛应用的公理系统是 ZFS 公理系

统，1938年奥地利数学家Kurt Gödel证明连续统假设和ZFS公理系统是形式地协调的。1963年美国数学家Paul Cohen又证明了连续统假设的否定命题和ZFS公理系统是协调的。所以连续统假设在ZFS中，既不能证明，也不能否证。

究竟$2^{\aleph_0}$等于什么？目前仍然是一大难题。

32．什么是大基数？

大基数就是无穷基数，目前由于大基数研究工作的深入发展，它已经形成了独特的理论。这里我们只作一些简单介绍：

（1）没有最大的基数

我们知道，自然数集的基数$\aleph_0$是无穷基数中最小的一个基数，从$\aleph_0$开始，把无穷基数排列出来，就得到：

$\aleph_0$，$\aleph_1$，$\aleph_2$，$\aleph_3$，……$\aleph_w$……

继续排下去，得

$\aleph_w$，$\aleph_{w+1}$，$\aleph_{w+2}$，$\aleph_{w+3}$……$\aleph_{w+w}$……

把$\aleph_{w+w}$记为$\aleph_{w2}$，得：

$\aleph_{w2}$，$\aleph_{w2+1}$，$\aleph_{w2+2}$，……$\aleph_{w2+w}$……

同理又有：

$\aleph_{w3}$，$\aleph_{w3+1}$，$\aleph_{w3+2}$，$\aleph_{w3+3}$……$\aleph_{w3+w}$……

进而有$\aleph_{\omega 4}$，$\aleph_{\omega 5}$，$\aleph_{\omega 6}$……$\aleph_{\omega\omega}$

把$\aleph_{\omega\omega}$记为$\aleph_{\omega^2}$，

又得到：$\aleph_{\omega^2+1}$，$\aleph_{\omega^2+2}$，$\aleph_{\omega^2+3}$……$\aleph_{\omega^2+\omega}$……

继得：$\aleph_{\omega^2+\omega}$，$\aleph_{\omega^2+\omega 2}$，$\aleph_{\omega^2+\omega 3}$，$\aleph_{\omega^2+\omega 4}$……$\aleph_{\omega^2+\omega\omega}$……

又得 $\aleph_{\omega^2 2}$，$\aleph_{\omega^2 3}$，$\aleph_{\omega^2 4}$……

从而有$\aleph_{\omega^\omega}$，

又可得$\aleph_{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$.

这就表明了，永远不存在最大的基数。我们知道有穷基数（即自然数）有无穷多个。但这同无穷基数的无限性是根本不能相比的。全体有限数，我们能够用十进位记数法来表达，而无穷基数却根本不能用有限观点去理解。因此，有穷基数和无穷基数不能组成“全体基数的集合”。

（2）大基数公理

假定大基数存在的公理称为大基数公理。若把自然数集基数（即$\aleph_0$）记为ω，即ω有三个特点：

1° ω不是后继基数，因为它前边没有紧跟着的基数。

2° ω不是少于ω个更小基数的并，因为任何自然数的并，仍然是自然数，而不会是无穷基数。

3° 对所有小于ω的基数n，有

$$2^n<\omega$$

那么除了ω，其他的无穷基数有没有这些特点呢？我们说，大基数就具备这些特点：

大于ω的非后继基数，我们称为极限基数，若α是极限基数，则ω_α一定也是极限基数。

若λ是极限基数，且λ不等于少于λ个更小的基数的并集，我们称λ为弱不可达基数，这就是一个大基数。

对弱不可达基数$\omega_a{}'$，必有$\omega_a = a$。

但有上述性质的最小的基数并不是弱不可达基数。

如令$\lambda_0 = \omega$

$\lambda_{n+1} = \omega_{\lambda n}$，则

$\lambda = \bigcup\limits_{n \in \omega} \lambda_n$ 就是具有上述性质的最小基数。显然有

$$\lambda_0 = \omega$$

$$\lambda_1 = \omega_w$$

$$\lambda_2 = \omega_{w_w}$$

…………

类推下去，$\lambda = \omega_{\omega_{\omega_{\cdots\cdots}}}$

这个基数就是一个大基数，但λ不具有正规性，所以它还不是弱不可达基数。

ZFC 公理系统不能证明存在弱不可达基数，也不能证明 *ZFC* 公理系统和弱不可达基数是相容的。因此我们常常把弱不可达基数作为一条公理加入 *ZFC* 公理系统中去。

又根据　$2^n < \omega$，

若　$\lambda > \omega$，且有正规性，

并有$\forall k < \lambda\ (2^k < \lambda)$

即对任何小于λ的基数K，它的幂集合基数2^K仍然小于λ，则λ称为强不可达基数。强不可达基数必然是弱不可达基数。但最小的强不可达基数则不小于最小的弱不可达基数。

33. 如何计算$\aleph_0^{\aleph_0}$?

我们知道，基数可以排成次序：

$$\aleph_0,\ \aleph_1,\ \aleph_2,\ \cdots\cdots\aleph_n\cdots\cdots\aleph_\alpha,\ \cdots\aleph_\beta\cdots\cdots$$

而且熟悉基数的加法和乘法运算，例如：

$$\aleph_0+\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0,$$

$$n\aleph_0=\aleph_0,$$

$$\aleph_0^2=\aleph_0\aleph_0=\aleph_0,$$

$$\aleph_0^n=\aleph_0\aleph_0\aleph_0=\aleph_0,$$

$$\aleph=\aleph^2=\aleph^3=\cdots=\aleph^{\aleph_0}，等等。$$

但如何计算$\aleph_0^{\aleph_0}$？这是一个难题。下面我们作一些介绍：

有$\aleph_0$个元素集合的子集个数为$2^{\aleph_0}$。但

$$2^{\aleph_0}>\aleph_0,$$

若 $2^{\aleph_0}=\aleph_1$，则有：

$$\aleph_1\cdot\aleph_1=2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph_1.$$

$$\aleph_1\cdot\aleph_2=2^{\aleph_0}\cdot 2^{\aleph_1}=2^{\aleph_0+\aleph_1}=2^{\aleph_1}=\aleph_2.$$

因为$\aleph_0<2^{\aleph_0}$,

所以有 $\aleph_0^{\aleph_0}<2^{\aleph_0^2}$

即 $\aleph_0^{\aleph_0}<2^{\aleph_0}$

另一方面，因为$\aleph_0>2$，又有$\aleph_0^{\aleph_0}>2^{\aleph_0}$

从而得 $\aleph_0^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}$.

那么．$\aleph_1^{\aleph_2}=?$ 我们可得：

$$\aleph_1^{\aleph_2}\leqslant 2^{\aleph_1\aleph_2}=2^{\aleph_2}=\aleph_3$$

另方面 $\aleph_3=2^{\aleph_2}\leqslant\aleph_1^{\aleph_2}$，

所以 $\aleph_1^{\aleph_2}=\aleph_3$.

但 $\aleph_2^{\aleph_1}=(2^{\aleph_1})^{\aleph_1}=2^{\aleph_1\aleph_1}=2^{\aleph_1}=\aleph_2$.

再看 $\aleph_2^{\aleph_0}=(2^{\aleph_1})^{\aleph_0}=2^{\aleph_1\aleph_0}=2^{\aleph_1}=\aleph_2$.

现在，我们计算下面问题：

$$\aleph_4^{\aleph_4}=?$$

因为 $\aleph_4^{\aleph_4}\leqslant 2^{\aleph_4^2}=2^{\aleph_4}=\aleph_5$，

另一方面，

$$2^{\aleph_4}\leqslant\aleph_4^{\aleph_4}，$$

因此，$\aleph_4^{\aleph_4}=2^{\aleph_4}=\aleph_5$.

$\aleph_3^{\aleph_4}=?$ 我们有：

$$\aleph_3^{\aleph_4}\leqslant 2^{\aleph_3\aleph_4}=2^{\aleph_4}=\aleph_5，$$

另一方面，$\aleph_5=2^{\aleph_4}\leqslant\aleph_3^{\aleph_4}$

$$\therefore \aleph_3^{\aleph_4}=\aleph_5.$$

$\aleph_5^{\aleph_2}=(2^{\aleph_4})^{\aleph_2}=2^{\aleph_4}=\aleph_5$

综上所述，$\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$的计算问题就无规律可循了，迄今未能作出令人满意的结果，甚至可以说在 ZFC 公理系统中，都不能解决。

但是它的概念是清楚的：即

$\aleph_\beta$，$\aleph_\alpha$ 为二基数，

则 $\aleph_\alpha^{\aleph_\beta}$为$A^M$ 的基数。

这里 A的基数为$\aleph_\alpha$，

M的基数为$\aleph_\beta$。

34. 什么叫次序关系？

在一个集合中，对任何两个元素，我们规定一个在前，一个在后，这就叫次序关系。用——< 表示。大小关系是次序关系，而次序关系绝不单单指大小关系而言。

对一个集合 A，在某些元素之间有——<，且对任意a，b，$c \in A$，有

(1) 自反性，即 a——<a。

(2) 反对称性，即

a——<b，且 b——<a 必然有 $a=b$。

(3) 传递性，即

a——<b 且 b——<c，则 a——<c。

我们称——< 为 A中一个部分序关系。A叫部分序集。

若A是一个部分序集，对任意a，$b\in A$，总可以确定a——$\prec b$，或b——$\prec a$时，——$\prec$ 叫次序关系（或全序关系），A叫序集。

任何一个集合的所有元素，经过编序可以变为有序集。但同一个集合，可以变为多种不同的有序集。

例如自然数集，可以成为以下不同的有序集。

1° $\{1, 2, 3\cdots\cdots\}$

2° $\{\cdots\cdots 3, 2, 1\}$

3° $\{1, 3, 5\cdots\cdots 2, 4, 6\cdots\cdots\}$

4° $\{1, 3, 5\cdots\cdots 6, 4, 2\}$

5° $\{\cdots\cdots 5, 3, 1, 2, 4, 6\cdots\cdots\}$

6° $\{\cdots\cdots 5, 3, 1\cdots\cdots 6, 4, 2\}$

当两个有序集的元素完全相同时，而且元素之间的前后次序完全一致时，才叫相等。

例1 任何集合A的幂集合$P(A)$，在A的子集之间的包含关系"$\subset$"下，是一个部分序集。

因为关系$\subset$满足自反性、反对称性、传递性三个条件，且任何两个元（A的两个子集合）可能没有包含关系，所以$\subset$是一个部分序关系，不是一个序关系。

例2 全部英语字母 $A=\{a, b, c\cdots\cdots x, y, z\}$是一个全序集，因为任何两个字母，都能判定它们的先后次序。

例3 自然数集在整除关系"$|$"下，构成一个部分序集。

例4 若τ是实数轴上所有开区间组成的集合，对其中两个开区间，如果$O_1\subset O_2$，就说O_1——$\prec O_2$，则——$\prec$ 是τ

的部分序关系，而不是一个全序关系。

因为(0,1),(2,3)之间既无(0,1)——<(2,3)，又无(2,3)——<(0,1)。

35. 什么是有序集？

顺序是数学中的一个重要概念，对于一个集合的元素说，我们可以按照各种标准规定它们的顺序。例如自然数集可编成以下各种不同顺序的有序集：

$1,2,3,\cdots\cdots n,n+1,\cdots\cdots$

$1,3,5,\cdots\cdots 2,4,6,\cdots\cdots$

$\cdots\cdots n+1,n,\cdots\cdots 4,3,2,1.$

$\cdots\cdots 5,3,1,2,4,6,\cdots\cdots$

$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$

由此看出，顺序关系不是仅仅指大小关系而说，而大小关系只是顺序关系的一种。

两个元素的顺序关系，用“——<”表示，

例如 a 先于 b，记为：

$$a——<b.$$

一个集合M，它的任意元素 a,b,c，

有 $a——<b$或 $b——<a$，

而且：

1° $a \mathrel{-\!\!-\!\!<} a$ 不成立，

（反自反性）

2° $a \mathrel{-\!\!-\!\!<} b$ 和 $b \mathrel{-\!\!-\!\!<} a$ 不同时成立

（非对称性）

3° 若 $a \mathrel{-\!\!-\!\!<} b$，$b \mathrel{-\!\!-\!\!<} c$，

则 $a \mathrel{-\!\!-\!\!<} c$

（传递性）

4° 若 $a \mathrel{-\!\!-\!\!<} b$，$a=a'$，$b=b'$

则 $a' \mathrel{-\!\!-\!\!<} b'$

我们称M为有序集。

除了自然数集以外，一切整数的集，一切有理数的集，甚至一切实数的集，都是有序集。

任意一个集合，原来不是有序集，对它的元素经过编序，可以成为有序集。

有序集的任意元素 a,b，三种关系

$$a=b,$$

$$a \mathrel{-\!\!-\!\!<} b,$$

$b \mathrel{-\!\!-\!\!<} a$，有且只有一种成立。

若M为有序集，$a\in M$，对任意元素m都有 $a \mathrel{-\!\!-\!\!<} m$。则 a 叫首元素。

若M为有序集，$b\in M$，对任意元素m

都有 $m \mathrel{-\!\!-\!\!<} b$，则 b 叫末元素。

有序集可以有首元素和末元素，也可以没有首元素和末元素，也可以只有其中之一。

如果两个有序集之间有单义可逆关系，且顺序不变，即在X内有 x——$<x'$，则在Y内有

$$f(x) \text{——} < f(x')\text{时，}$$

我们称这两个有序集是相似的。

记为 $X \simeq Y$。

36. 什么叫序型?

若A、B为两个有序集，f是从A到B上的一个一一映射，对A中任意二元素a_1，a_2，

如果当 a_1——$<a_2$ 时，

有 $f(a_1)$——$<f(a_2)$

则f叫A到B上的相似映射，

A，B叫相似有序集，记为

$$A \simeq B.$$

用一符号表示相似有序集的共同特征，这个符号叫序型。

每个有序集都有自己的序型，相似的有序集具有相同的序型，显然两个相似的有序集是彼此对等的，或者说有相同的势。

例如 $A = \{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots n \cdots\cdots\}$

$B = \{2, 4, 6, 8, \cdots\cdots 2n \cdots\cdots\}$

因为：

$$
\begin{array}{ccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & \cdots\cdots & n & \cdots\cdots \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
2 & 4 & 6 & 8 & \cdots\cdots & 2n & \cdots\cdots
\end{array}
$$

所以 $A \simeq B$。

因而 A，B 的序型是相同的。

再如 $A = \{1, 2, 3 \cdots\cdots n \cdots\cdots\}$

$A^* = \{\cdots\cdots n \cdots\cdots 3, 2, 1\}$

因为 A和A^*不相似，

所以 A，A^*的序型是不相同的。

有序集 A叫有序集 B 的有序子集，如果 A的每个元都是 B 的元，而且 A内的关系 a——$\langle a'$与 B 内的关系 a——$\langle a'$ 完全相同。

如果有序集的每个非空子集都有首元素的话，这样的有序集叫正序集。

但要注意的是，任意非空的正序集都有首元素，而有首元素的集，未必都是正序集，这是因为这个集的任何非空子集都有首元素时，才称为正序集的缘故。

显然，有限的有序集都是正序集。

一切自然数的集是正序集中最有代表性的正序集，它的序型记为ω，即

ω型：$\{1, 2, 3, \cdots\cdots n,\ n+1, \cdots\cdots\}$

显然和其相似的集，如

$$\{1, 4, 9, \cdots\cdots n^2, (n+1)^2, \cdots\cdots\}$$

$$\left\{\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\cdots\cdots\frac{n}{n+1},\frac{n+1}{n+2},\cdots\cdots\right\}$$

$$\left\{10,\ 10^{10},\ 10^{10^{10}},\ \cdots\cdots\right\}$$

等等序型都是ω。

有$\omega+1$型的集和ω型的集是不能相似的，因为前者有末元素，后者没有末元素。

逆序自然数集的序型记为ω^*，即

ω^*型：$\{\cdots\cdots n+1, n\cdots\cdots 3,2,1\}$

由一元组成的集，其序型为1；空集的序型为0；有限集$\{1,2,3\cdots\cdots n\}$的序型为n。这就是说有限集的基数和序型用同一个记号表示。

37. 基数和序型有何关系?

如所周知，每个型都有一个确定的基数，基数a的一切不同的型构成一个型类$T(a)$，要得到这个型类，只须将一固定的具有基数a的集用一切可能方式编序即可，当然不同的序不必提供不同的型，例如$T(n)$只有一个型n，而$T(\aleph_0)$却有无穷多个型，ω、$\omega+1$、$\omega+2\cdots\cdots\omega+\omega$、$\omega^*$等等都是。

若一集合A，其基数为a，但A的型可以有多种，以这

些型为元素构成的集合，即型类$T(a)$。我们来证明关系：

$$\overline{\overline{T(a)}}\leqslant 2^{a^2}.$$

我们令 $S=A\times A$ 为所有元素(x,y)构成的集合，

其中 $x,y\in A$。

S 的幂集合$=P(S)$，

假定 $T(a)$为非空集，

若σ 为$T(a)$的任一序型，且$\sigma=\overline{M}$，

显然M和 A有相同基数。

根据M中元素的次序关系，在A中定义一个"$\leqslant$"关系，使 A成为一个序集，序型为σ。因 A中这种关系是由M，从而由σ中引出来的，故记为$\leqslant\sigma$。

同理，若 τ是 $T(a)$另一个序型，可得另一次序关系$\leqslant_\tau$，等等。

若Ω为 A中所有可能定义的次序关系组成的集合，那么$T(a)$元素和Ω的某些元素之间能建立一一对应关系：

$$\sigma\longleftrightarrow\leqslant_\sigma.$$

所以 $\overline{\overline{T(a)}}=\overline{\overline{\Omega}}$

在Ω中任取一个元素"$\leqslant$"，显然它是 A中的一个次序关系，A在此关系下成为一个序集。

现在考虑：

$S=A\times A$ 中的元素(x, y)，它适合$x\leqslant y$（在 A 中），所有这些元素成为S 的一个子集，记为S（$\leqslant$）。

如果"$\leqslant$"与"$\leqslant^*$"是Ω中两个不同元素，则S（$\leqslant$）与S（$\leqslant^*$）必不相同，因为"$\leqslant$"与"$\leqslant^*$"是A中两个

不同的次序关系，所以在A中至少有两个元素x_1，y_1，在此二关系下有不同的次序，比如

$$x_1 < y_1,\ y_1 <^* x_1,$$

在这种情况下，(x_1, y_1)应在$S(\leqslant)$中，而不在$S(\leqslant^*)$中，因此$S(\leqslant)$和$S(\leqslant^*)$是S的不同子集。

从而知道，Ω中不同元素对应S的不同子集，

所以$\overline{\overline{\Omega}} = \overline{\overline{P(S)}}$。

因A的基数为a，所以S的基数为a^2，

但$P(S)$的基数为2^{a^2}，所以有

$$\overline{\overline{T(a)}} \leqslant \overline{\overline{\Omega}} \leqslant \overline{\overline{P(S)}} = 2^{a^2}.$$

38．序型是怎样运算的？

若有序集A、B的序型分别为α、β，则有序集$A+B$的序型就是$\alpha+\beta$，而在$A+B$中，对任意二元素x，y的关系“$\leqslant$”有以下规定：

如果x，$y \in A$，且在A中有

$$x \leqslant y;$$

或x，$y \in B$，且在B中有

$$x \leqslant y$$

又或者　　$x \in A$，$y \in B$，

在 $A+B$ 中，有 $x\leqslant y$，

显然 $A+B$ 为一有序集，其序型为 $\alpha+\beta$。

序型的加法没有交换律：

因为 $1+\omega=\omega\neq\omega+1$

$n+\omega=\omega\neq\omega+n$。

由有序集所组成的有序集之和的概念，我们作以下定义：

假定任意非空的有序集 A，其元素是互不相交的有序集 $B\zeta$，把一切集 $B\zeta\in A$ 的和

$S=\bigcup\limits_{B\zeta\in A}B\zeta$ 作成一个有序集，

用

$\sum\limits_{B\zeta\in A}B\zeta$ 表示在 S 内的顺序规定：

各集 $B\zeta$ 内的元素之间，保持 $B\zeta$ 内原有顺序。

但如果 $x\in B\zeta$，$x'\in B'\zeta$

而在 A 内

$B\zeta\prec B'\zeta$ 时，就设

$x\prec x'$

有序集 $\sum\limits_{B\zeta\in A}B\zeta$ 叫做由有序集 $B\zeta$ 所组成的有序集 A 的和。

如 $b\zeta$ 是 $B\zeta$ 的型，a 是 A 的型，则

有序集 $\sum\limits_{B\zeta\in A}B\zeta$ 的型叫序型 $b\zeta$ 按型 a 之和。

若一切B_ξ具有同一序型b，这时它们按型a之和的序型用ba表示。

例如：

$$\omega\cdot\omega=\omega\cdot 2\neq\omega.$$

$$\omega+\omega+\omega=\omega\cdot 3$$

$$\omega+\omega+\cdots(n\text{个}\omega\text{相加})=\omega\cdot n.$$

但 $2\cdot\omega=\omega=2+2+\cdots(\omega\text{个}2\text{相加})$

$$3\cdot\omega=\omega.$$

所以 $2\cdot\omega\neq\omega\cdot 2$

$$3\cdot\omega\neq\omega\cdot 3.$$

取集叙列

A_1，A_2，$\cdots A_n\cdots$的和

各集都是ω型的有序集，有

$$\omega\cdot\omega=\omega^2=\omega+\omega+\omega+\cdots(\omega\text{个}\omega\text{相加})$$

同样，叙列

A_1，A_2，$\cdots A_n\cdots$的和

如其各集都有序型ω^2，则

$$\omega^2\cdot\omega=\omega^3.$$

仿此，可得ω^n，

当$\omega+\omega^2+\cdots+\omega^n+\cdots=\sum^{\omega}\omega^n$时，序型记为$\omega^\omega$。

同样，可建立以下序型：

$\omega^\omega+1$，$\cdots$，$\omega^\omega+n$，$\cdots$，$\omega^\omega+\omega$，$\cdots$，

$\omega^\omega+\omega\cdot 2$，$\cdots$，$\omega^\omega+\omega\cdot n$，$\cdots$，

$\omega^{\omega}+\omega\cdot\omega=\omega^{\omega}+\omega^{2}$, $\cdots$, $\omega^{\omega}+\omega^{n}$, $\cdots$,

$\omega^{\omega}+\omega^{\omega}=\omega^{\omega}\cdot 2$, $\cdots$, $\omega^{\omega}\cdot n$, $\cdots$, $\omega^{\omega}\cdot\omega=\omega^{\omega+1}$,

$\cdots$, $\omega^{\omega+1}+1$, $\cdots$, $\omega^{\omega+1}+\omega^{\omega}$, $\cdots$, $\omega^{\omega+1}+\omega^{\omega}\cdot 2$,

$\cdots$, $\omega^{\omega+1}+\omega^{\omega}\cdot n$, $\cdots$, $\omega^{\omega+1}+\omega^{\omega+1}=\omega^{\omega+1}\cdot 2$,

$\cdots$, $\omega^{\omega+1}\cdot n$, $\cdots$, $\omega^{\omega+1}\cdot\omega=\omega^{\omega+2}$, $\cdots$,

$\omega^{\omega+n}$, $\cdots$, $\omega^{\omega+\omega}=\omega^{\omega\cdot 2}$, $\cdots$, $\omega^{\omega\cdot n}$,

$\cdots$, $\omega^{\omega\cdot\omega}=\omega^{\omega^{2}}$, $\cdots$, $\omega^{\omega^{n}}$, $\cdots$, $\omega^{\omega^{\omega}}$, $\cdots$,

$\underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot^{\cdot}}}}}_{n\text{重}}$,

当和 $\omega^{\omega}+\omega^{\omega^{\omega}}+\cdots+\underbrace{\omega^{\omega^{\omega^{\cdot}}}}_{n\text{重}}+\cdots$ 用 ε 表示时.

显然可得：

$\varepsilon+1$, $\cdots$, $\varepsilon+\omega$, $\cdots$, $\varepsilon+\varepsilon=\varepsilon\cdot 2$, $\cdots$,

$\varepsilon\cdot\varepsilon=\varepsilon^{2}$, $\cdots$, 永远不会结束.

每一个序型 α 都有一个确定的势 a，势 a 的一切不同型构成一型类 $T(a)$，要得这个类，只要将一固定的具有势 a 的集 A，用一切可能方式编序即可，有限势 n 的型类 $T(a)$ 只有一个型 n，但 $T(\aleph_0)$ 却有无穷多个型.

39．什么叫序数？

当有序集的任何非空子集均有首元素者，这种有序集称为良序集（或叫正序集、整序集）。

例如　有序集

$N=\{1, 2, 3, 4, \cdots\cdots\}$就叫良序集．因为它的任何非空子集合

$$\{2, 3, 4, \cdots\cdots\}$$

$$\{4, 5, 6, \cdots\cdots\}$$

$$\{n, n+1, n+2, \cdots\cdots\}$$

都有首元素．

但有序集不一定都是良序集．

例如　$N^*=\{\cdots\cdots n, \cdots\cdots 3, 2, 1\}$就不是良序集。

良序集的序型，叫序数。

显然，

任何一个有限集都是良序集，而且自然数1，2，3，……就是它们的序数．

例如

有限集$\{1, 2, 3, \cdots\cdots n\}$的序数是$n$．

自然数集$\{1, 2, 3, \cdots\cdots\}$的序数为$\omega$。

集合$\{1, 3, 5, \cdots\cdots 2, 4, 6, \cdots\cdots\}$的序数为$\omega+\omega$．

空集ϕ也是良序集，它的序数为0。

若N^*的序型记为ω^*．我们知道：有序集不成良序集的充要条件是它有ω^*型的子集。

若M为一个良序集，A是M的一个子集，可以证明A也是一个良序集：

若$A=\phi$，显然A是良序的。

若$A\neq\phi$，$B\subseteq A$，则$B\subseteq M$。

因为M是良序集，所以

B在M中有一个首元素。这个首元素也是B在A中的首元素，所以A是良序集。

若A，B为有序集，$A\simeq B$，如果A是良序集，则B也是良序集。

我们作以下证明：

若B_0是B的一个非空子集，

f是从A到B上的近似映射，

B关于f在A中的原象是$A_0=f^{-1}(B_0)$

显然f也是A_0到B_0上的相似映射。

因$B_0\neq\phi$，所以$A_0\neq\phi$。

因A为良序集，所以A_0有首元素a_0，

若$f(a_0)=b_0$，

则b_0是B_0的首元素。

因为如果b_0不是B_0的首元素，

则在B_0之前，一定还有B_0的元素，

取这样一个元素$b'\in B_0$，

设 $b'=f(a')$

则 $a'\in A_o$,

因 $b'\prec b_o$,

所以 $a'\prec a_o$。

这就和 a_o 是 A_o 的首元素相矛盾,

所以 b_o 是 B_o 的首元素,

因而 B 是良序集。

和序型一样,序数也有加法和乘法运算,也能比较大小:

若 A是良序集,$a\in A$,A中所有前于 a 的一切元素所成的集,叫 A的由 a 所截的截片,记为 A_a,即

$$A_a=\{x\mid x\in A,\ x\prec a\}$$

若 A, B 为两个良序集,其序数分别为 α,β。

如果 $A\simeq B$,则 $\alpha=\beta$,

如果 $A\simeq B_b$,则 $\alpha<\beta$,

如果 $A_a\simeq B$,则 $\alpha>\beta$。

若 α,β 为任意二序数,那么

$\alpha=\beta$,

$\alpha<\beta$,

$\alpha>\beta$

有一种且只有一种成立。

证明:

如果 $A\simeq B$,则 $\alpha=\beta$。

如果 A和 B 不相似,

若 $A \simeq B_b$，则 $\alpha < \beta$，

如果不存在 B_b，则会有 A_a

使　$A_a \simeq B$，

那么，有 $\alpha > \beta$

这就是说，任意两序数都是可以比较大小的。

40．序数能够进行比较吗？

我们知道，正序集的序型叫序数。但序数能够进行比较吗？答案是序数可以进行比较，现在我们来论证这个问题。

（1）先定义有序集的相似

假设A,B为两有序集，且$A \sim B$，

若有一一映射$f: A \to B$，

使对任何$a, a' \in A$，有$a \prec a'$，

就一定有　$b = f(a) \prec b' = f(a')$ 时，

我们就称A与B相似，记为

$$A \simeq B,$$

而 f 叫A到B的相似映射。

显然可以看出，两个相似的有序集，它们的序型是相同的。

(2) 引理

1° 若映射 f 是从正序集A到其子集$A_1\subseteq A$的相似映射，则对于任何$a\in A$，都有 $f(a)\geqslant a$。

假若 $f(a)\geqslant a$ 不成立，

则A必有a，使$f(a)<a$，

记 $f(a)=a_1$，

显然有 $a_1 \prec a$。

因为 f 是相似映射，

所以 $f(a_1)\prec f(a)=a_1$，

记 $f(a_1)=a_2$，则有

$a_2\prec a_1\prec a$

同理，令$f(a_2)=a_3$，则有

$a_3\prec a_2\prec a_1\prec a$，

继续下去，A 必有子集

$\{\cdots\cdots a_3, a_2, a_1, a\}$。

这与A是正序集的题设是相矛盾的。

所以得证。

2° 正序集不与其任何截段相似

若正序集A和它的某截段A_a（即前于a的一切元素）有相似映射f。

由1°知道，必有 $f(a)\geqslant a$

但 $f(a)\in A_a$，

由截段A_a的定义知，

$$f(a) \prec a$$

这也产生了矛盾，所以正序集不与其任何截段相似。从而推知，正序集上任何两个截段都不能相似。

（3）序数比较定理

若A,B为两个有序集，则它们的关系有且只有下列三种情况之一：

1° A与B相似；

2° A和B的某截段相似；

3° B和A的某截段相似。

证明：A,B之间关系，显然有以下四种：

（Ⅰ） A的任一截段与B的一个截段相似，

B的任一截段与A的一个截段相似；

（Ⅱ） A的任一截段与B的一截段相似，

B有一截段不与A的任何截段相似；

（Ⅲ） A有一截段不与B的任何截段相似，

B的任一截段与A的一截段相似；

（Ⅳ） A有一截段不与B的任何截段相似，

B有一截段不与A的任何截段相似.

若（Ⅰ）成立，则对任意$a \in A$，必有一个元素$b \in B$，

使 $A_a O B_b$，

因若 $b' \neq b$，则$B_{b'} \not\simeq B_b$。

所以b是唯一的。

将A和B对换，此理也是成立的。

这就是说，对任意$a\in A$，对应唯一$b\in B$，反之，对任一$b\in B$，也对应唯一$a\in A$

所以　$A\sim B$。

若　$a\prec a_1$是A的任意二元素，分别对应b，b_1，

则必有　$b\prec b_1$，

假定不然，有$b_1\prec b$，

由　$A_{a_1}\simeq B_{b_1}$知

$a\in A_{a_1}$必对应$b_2\in B_{b_1}$，

且　$b_2\prec b_1\prec b$

$A_a\simeq B_{b_2}\subset B$

然而　$A_a\simeq B_b$，

故　$B_b\simeq B_{b_2}$，这是不可能的，

因此，若　$a\prec a_1$，就有$b\prec b_1$。

所以　$A\simeq B$。

当（Ⅱ）成立时，则有B_b不与A的任一截段相似，

所有这种b构成B的非空子集

由B_0的正序性知，有首元素b_0

显然，在B中适合$b_1\prec b_0\prec b_2$的b_1，b_2都有B_{b_1}与A的一截段相似，而B_{b_2}及B_{b_0}

不与A的任何一截段相似。

但A的任一截段$A_{a'}$必与B的一截段$B_{b'}$相似。

因此，$b'\prec b_0$，即$B_{b'}$也是B_{b_0}的截段，

这样A与B_{b_0}的关系符合（Ⅰ）

所以$A\simeq B_{b_0}$。

(Ⅲ)类似(Ⅰ)，当(Ⅲ)成立时，有$A_{\gamma_0}\simeq B$。

(Ⅳ)这种情况不可能出现，否则，必有不与B任一截段相似的A ，又有不与A任一截段相似的B_b，由正序集定义知道，

所有a必有最前一个a_0，所有b必有最前一个b_0，

A_{a_0}与B_{b_0}将不再含这种元素了，

因此，A_{a_0}与B_{b_0}属于(Ⅰ)，

所以 $A_{\gamma_0}\simeq B_{b_0}$。

但这和a_0是a之一，b_0是b之一相矛盾。

故(Ⅳ)不会发生。

由上述证明可得：

若α、β为任意两个序数，那么下面三种情况有一种，且只有一种成立：

(i)$\alpha=\beta$，(ii)$\alpha<\beta$，(iii)$\alpha>\beta$。

41．什么是正序定理？

正序定理的本意是说：任何一个集合，经过编排，都可以使它成为正序集。

我们的证明是在承认选择公理的基础上进行的。现在分两步来证明：

（1）任何集合的最小链$\mathfrak{R}_0$，可以编成正序集

我们已经知道，任何集合都有一个最小链$\mathfrak{R}_0$，在$\mathfrak{R}_0$中任何两个不同的元素P_1与P_2，必然存在着关系：

$P_1 \subset P_2$或$P_2 \subset P_1$，

如果我们把“$\subset$”看成“$\prec$”，则$\mathfrak{R}_0$中的一切元素都在“$\prec$”顺序之中，这就是说，$\mathfrak{R}_0$是个有序集，而空集ϕ是它的首元素。

我们对$\mathfrak{R}_0$作任意有序剖分，即

$\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_1 \cup \mathfrak{R}_2$　使$\mathfrak{R}_1 \prec \mathfrak{R}_2$。

若　$P_\lambda \in \mathfrak{R}_1$，$P^* \in \mathfrak{R}_2$，

则　$P_\lambda \subset P^*$

但对$\mathfrak{R}_1$中所有P_λ的并集

$$P = \bigcup_\lambda P_\lambda,$$

必有　$P_\lambda \subseteq P \subseteq P^*$

所以P是$\mathfrak{R}_2$的首元素，或$\mathfrak{R}_1$的尾元素，

如果P是$\mathfrak{R}_1$的尾元素，

显然P_+就是$\mathfrak{R}_2$的首元素

这表明$\mathfrak{R}_0$的任意子集$\mathfrak{R}_2$必有首元素，

因此，得到$\mathfrak{R}_0$是一个正序集。

(2) 任何集合都可编成正序集

设任意集合A的最小链为$\mathfrak{R}_0$，

因为$\mathfrak{R}_0$是正序集，所以我们能证明

$P\in\mathfrak{R}_0$与$a\in A$一一对应就行了。

若 f为一映射，

使 $f(P)=a$（其中$P\in\mathfrak{R}_0$，$a\in A$）

即 a是P的后继元。

现在证明f为一一映射：

1° 若P_1，P_2为$\mathfrak{R}_0$任意二元素，

a_1，a_2为相应的后继元，

则可得到：

$$P_1\neq P_2\Rightarrow a_1\neq a_2$$

因 $f(P_1)=a_1$，$f(P_2)=a_2$

若 $P_1\subset P_2$，则有

$$(P_1)_+\subseteq P_2$$

由后继元定义，知

$$a_1\in P_2\text{，而}a_2\notin P_2$$

所以 $a_1\neq a_2$。

2° 每个$a\in A$，只能是一个P的后继元，

对A的一个确定元素a，

若令P是$\mathfrak{R}_0$中一切不含a的P_λ的并集，

则有 $f(P)=a$

否则 $P_+\supset P$也不含a，这和P的定义相矛盾，

故a是P的后继元，且是唯一的。

从而得f是A和$\mathfrak{N}_0$之间的一一映射。

那么当诸P的顺序映射到诸a时，

A就编成了正序集。

42．什么是第二级序数？

自然数和零称为第一级序数，它们都是有限正序集的序型。可数正序集的序型叫第二级序数，第二级序数有以下性质：

（1）在任意有限个或可数个的第二级序数 α_1、α_2、α_3、……、α_n……之后的第一个序数α仍是第二级序数。

现在，我们证明这个性质：

1° 若α_1，α_2，…α_n…中有最大的一个序数，记为α_m，显然α_m+1仍为第二级序数，而且是在α_1，α_2，……，α_n……后的第一个，

2° 若α_1，α_2，……，α_n……中没有最大的序数，我们用α表示在这一切数之后的第一个序数，若W（α）表示是由α组成的正序集，

则有

$$W(\alpha)=\bigcup_{n=1}^{\infty}W(\alpha_n)$$

事实上，由$W(\alpha)$定义知

$$W(\alpha)\supset\bigcup_{n=1}^{\infty}W(\alpha_n)$$

现在我们证明：

$$W(\alpha)\subset\bigcup_{n=1}^{\infty}W(\alpha_n)$$

令$\xi\in W(\alpha)$，因为α是继α_n之后的第一个序数，显然

$\xi<\alpha$，

所以有 $\alpha_n>\xi$，即

$\xi\in W(\alpha_n)$

因此，$W(\alpha)$是可数的．而α是$W(\alpha)$的序型，即可数正序集的序型．

（2）一切第二级序数的集是不可数的

若一切第二级序数是可数的，利用（1）知道，在一切第二级序数之后，还应有第二级序数存在，于是

$\alpha>\alpha$，这是不能成立的．

从而知道，一切第二级序数的集是不可数的．

43. 什么是有序集的敛尾性？

这个问题，包含两层意思：

(1) 有序集X的子集为A，在X内一切元素$x\in A$之后，若不再有元素时，就叫X对于A是敛尾的，显然当有序集X有末元素时，X对于x就是敛尾的；

(2) 若X是按序型ξ排列的集，对于它的子集A(α型排列的)是敛尾的，这时，我们称ξ对于α是敛尾的，很明显，当以序型ξ为型的有序集有尾元素时，ξ对1是敛尾的。

有序集和序型的敛尾性有传递性质，就是说，若有序集X对其子集A是敛尾的，而A对自己的子集B又是敛尾的，则X对B也是敛尾的。

显而易见，若X对于集X_1是敛尾的，则X_1对X不是敛尾的，因此没有对称性质。

下面，我们介绍有序集敛尾性的有关性质：

1° 一切第一级与第二级的序数的集，对于它的任何有限或可数子集不是敛尾的。

我们采用反证法，假若是敛尾的，那么可以求到一个有限的或可数的第二级序数之集，在它们之后不再有任何第二级序数，此与在第二级序数之后仍有第二级序数相矛盾。

2° 超限数ω_1对于任何较小的超限数不是敛尾的。

这是因为，在每个序数$\alpha<\omega_1$之后，紧接着$\alpha+1<\omega_1$，都是第一种数。因为第一级数和第二级构成W_1，所以W_1对于一切第一种数构成的子集是敛尾的，因而这个子集是不可数的，且有序型ω_1。但每个$\alpha<\omega_1$之后继随着极限数，故知道W_1对于一切第二级的极限超限数构成的子集是敛尾的，这样，最后的集是非可数的，且序型为ω_1。

3° 任何第二级极限超限数，对于数ω是敛尾的。

因为任何自然数对于1是敛尾的，而任何第二级超限数，要么对1敛尾，要么对ω敛尾。

44. 什么是集合序列的极限？

和数列的极限相类似，一些集合序列也有极限，含义是说，一列集合，当项数增多时，集合趋近于一个定集，这个定集就叫集合序列的极限。

如果$\{A_n\}_{n\geq 1}$是一个集合序列，

当$A_1\subset A_2\subset A_3\cdots\subset A_n\subset\cdots$时，这个序列叫上升的序列，记为$A_n\uparrow$；

当$A_1\supset A_2\supset A_3\cdots\supset A_n\supset\cdots$时，这个序列叫下降序列，记为$A_n\downarrow$。

对每个正整数n，我们用

$$B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k \text{表示}\{A_k\}_{k\geqslant n}\text{的并，}$$

$$\text{用}C_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k \text{表示}\{A_k\}_{k\geqslant n}\text{的交，}$$

显然有$B_n\downarrow$，$C_n\uparrow$。

$$\text{我们称}\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\text{为}\{A_n\}_{n\geqslant 1}\text{的上极限，}$$

$$\text{记为}\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n\text{。}$$

$$\text{称}\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k\text{ 为}\{A_n\}_{n\geqslant 1}\text{的下极限，记为}$$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n\text{。}$$

现在，我们证明集合序列极限的一个重要性质：

$\{A_n\}_{n\geqslant 1}$是一个集合序列，

1° 若$A_n\uparrow$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\text{；}$$

2° 若$A_n\downarrow$，则

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n\text{。}$$

证明：

(1) 若$A_n\uparrow$，则对任何$n\geqslant 1$，

$$\text{有}B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k=B_1,$$

$$\text{且}C_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=A_n$$

从而有：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=B_1$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n;$$

(2) 若$A_n\downarrow$，则对任何$n\geqslant 1$，

有：

$$B_n=\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=A_n;$$

$$C_n=\bigcap_{k=n}^{\infty}A_k=\bigcap_{k=1}^{\infty}A_k=C_1$$

从而有：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}B_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}A_n=C_1$$

$$=\bigcup_{n=1}^{\infty}C_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}A_n$$

若 $\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n = \underline{\lim_{n\to\infty}} A_n$,

则$\{A_n\}_{n\geq 1}$的极限存在,

记为 $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$。

显然，一般情况下，有

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} A_n \subset \overline{\lim_{n\to\infty}} A_n.$$

因而，上述性质成为：

当$A_n\uparrow$时，

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n;$$

当$A_n\downarrow$时，

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

45．什么是集合系？

我们已经知道，集合的元素可以是任何事物．因此把一些集合当成元素，组成新的集合，也是允许的，为和原集合相区别，这种新的集合叫做集合系（或称集合类，集合族），简称系。

用数学语言说，就是：

设Λ为一个集合，对于Λ的每个元素λ，均有一个集合A_λ与之对应，当遍经集合Λ时，便得到一个集合系：

$$\mathcal{A}=\{A_\lambda:\lambda\in\Lambda\}$$

集合Λ称为$\mathcal{A}$的下标集。

如果$\Gamma\subset\Lambda$，则

$$\mathcal{B}=\{A_\lambda:\lambda\in\Gamma\subset\Lambda\}$$

称为$\mathcal{A}$的子系。

例 M_n表示$[a_n, b_n]$（$n=1, 2\cdots$）

其中a_n，b_n是实数，把M_n当成一个元素，

则$\{M_1, M_2, M_3, \cdots\cdots\}$便是一个集合系。

显然，如果把一个集合的每个子集都看成一个元素，则这些子集的全体就构成一个系。换句话说，一个集合的幂集合就是一个系。

子系与集的子集的系有着不同的概念，

例如　若$A=\{1, 2\}$

则A的子集的系为：

$$P(A)=\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$$

而$P(A)$的子系有：

ϕ；

$\{\phi\}$，$\{\{1\}\}$，$\{\{2\}\}$，$\{\{1,2\}\}$；

$\{\phi, \{1\}\}$，$\{\phi, \{2\}\}$，$\{\phi, \{1,2\}\}$，

$\{\{1\}, \{2\}\}$，$\{\{1\}, \{1,2\}\}$，$\{\{2\}, \{1,2\}\}$；

$\{\phi, \{1\}, \{2\}\}$，$\{\{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$，

$\{\phi, \{2\}, \{1,2\}\}$，$\{\phi, \{1\}, \{1,2\}\}$；

$\{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,2\}\}$十六个．

系也有并与交的运算，分别表示为：

并集：$\cup\{A_\lambda : \lambda\in\Lambda\}=\{a : 存在\lambda\in\Lambda，使a\in A_\lambda\}$

交集：$\cap\{A_\lambda : \lambda\in\Lambda\}=\{a : 对每个\lambda\in\Lambda，a\in A_\lambda\}$

在系中任意二集的并与交仍属于这个系时，这个系叫做环，换句话说，环是一种最大的集合系．

当一个系中任意二集的并、交与差仍属于这个系时，这种系叫做体．

一个体必然是一个环，但环未必是体．

46．什么叫链？

首先，我们介绍以下概念以作准备：

若A为任一集合，P为它的真子集，

则$Q=A-P$为非空子集，应用选择公理，从Q中，可选取元素$a\in Q$，即对于A的每个真子集P，选取一个不属于P的元素a与P对应，换句话说，有映射f，使

$$f(P)=a\in A-P=Q.$$

$a=f(P)$叫集合P的后继元素，而$P\cup\{a\}$叫P的后继集，简记为P_+．

下面，我们讨论链的有关问题：

若由A的子集组成的集合系$\mathfrak{K}$，满足

1° 含有空集；

2° 含有任意多个集合时，也含有它们的并集；

3° 含有$P\subset A$时，亦含有P_+时，则$\mathfrak{K}$称为A的一个链。

任何一个集合，链总是存在的，因为一切

$\subseteqq A$的集所组成的系，就是一个链。任意多个链的交仍是一个链。集合A的所有链的交，是A的最小链，最小链包含在A的一切链中。

P是最小链中任意一个集合，若对最小链中一切集合X，恒有

$$P \substack{\subset \\ = \\ \supset} X \quad \text{三者之一，}$$

则P叫正规集合。

现在证明如下定理：

(1) 若$P\subset A$是正规的，则

一切集X要么$\subseteqq P$，或者$\supseteqq P_+$。

证明 A的最小链记为$\mathfrak{K}_0$，满足$\subseteqq P$，或$\supseteqq P_+$的X组成系$\mathfrak{K}_P$，

则$\mathfrak{K}_P$构成一个链

因为1° $\phi\subseteqq P$，空集是一个X，

2° 任意多X的和是一X，

设$S=\bigcup X_m$：

要么，每一$X_m\subseteqq P$

从而$S\subseteqq P$；

或者至少有一$X_m \supseteqq P_+$，

从而有$S \supseteqq P_+$.

3° 每个$X \subset A$的后继者是一X.

当$X \supseteqq P_+$时，则$X_+ \supset P_+$；

当$X = P$时，$X_+ = P_+$.

当$X \subset P$时，必有$X_+ \subseteq P$；

否则，若$X_+ \supset P$，则

$X_+ - X = (X_+ - P) + (P - X)$含二个元素，

这和后继者的定义是矛盾的.

这就证明了$\mathfrak{K}_p$是一个链.

显然$\mathfrak{K}_p$和最小链$\mathfrak{K}_0$之间，有

$$\mathfrak{K}_0 \subseteqq \mathfrak{K}_p,$$

但$\mathfrak{K}_p$的任何元素X都是$\mathfrak{K}_0$的元素，

所以又有$\mathfrak{K}_p \subseteqq \mathfrak{K}_0$，

从而得　$\mathfrak{K}_p = \mathfrak{K}_0$，

所以$\mathfrak{K}_0$中一切X要么$\subseteqq P$，或者$\supseteqq P_+$.

(2) 最小链中的一切集都是正规的

把$\mathfrak{K}_0$中正规集合的全体记为$\mathfrak{K}$，

显然$\mathfrak{K} \subseteqq \mathfrak{K}_0$，

要得到$\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_0$，必须证明$\mathfrak{K}$是一个链.

1° 空集是正规的，$\phi \in \mathfrak{K}$

2° 任意多正规集的和是正规的，

设$P = \cup P_m$为正规集的和，

X为任意一集合，

因而$P_m \overset{\subseteq}{\supseteq} X$，要么每一$P_m \subseteq X$.

从而$P \subseteq X$，或者至少有一$P_m \supset X$

从而$P \supset X$,

故P与每一X都可比较.

3° 每个正规集$P \subset A$的后继者P_+是正规的,

由(1)知道，对任何X，或者$X \subseteq P$,

或者$X \supseteq P_+$ 即有

$X \subset P_+$ 或$X \subseteq P_+$

所以P_+是正规的.

47. 什么是集合的加标族?

如所周知，我们把由组成的集叫集族（即本书曾谈过的集系），一般的集族用

$\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 表示,

其中A_α是一个给定集S合的子集，α是标号，I是标号族，以I的元素为下标的S的子集的全体，称为S的子集的加标族. I的基数可能是有限的，可能是可数的，也可能是超穷的. 对于只含有穷多个集的集族，可取I为自然数集的一个子集{1，2，3…，n}. 如果族中恰含可数多个集，则用自然数集N作标号族.

有了子集加标族的概念，就可以推广并集和交集的有关

公式。

若$\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$是集合$S$的子集的加标族，则它的并集记为：

$\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$，这是至少有一个$\beta\in I$，

使$x\in A_\beta$的所有元素$x\in S$的集合。

如果$I\subset N$，则有

$$\bigcup_{i\in N}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n.$$

加标族的交集记为$\bigcap_{\alpha\in I}A_\alpha$，这是对于每一个$\beta\in I$，使得$x\in A_\beta$的所有元素$x\in S$的集合，

当$I\subset N$时，有

$$\bigcap_{i\in N}Ai=A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n.$$

很明显，若I只包含两个不同的指标，那么α遍及I的A_α的并集，就是我们已经知道的两个集合之并，即

$$\bigcup_{\alpha\in\{i,j\}}A_\alpha=Ai\cup Aj.$$

类似的有交

$$\bigcap_{\alpha\in\{i,j\}}A_\alpha=Ai\cap Aj.$$

对于集合S的任一组取定了的子集，它的加标族概念可以使我们定义这些子集的并集和交集。我们只需要构造适当的指标集就成了，如果子集的集合是有限的，选取正整数的有限集合{1，2，…n}就是适当的指标集。

48. 什么是最大(小)元与极大(小)元?

我们分两点来谈这个问题:

(1) 对有序集(E, ≤)

在有序集(E, $\leqslant$)中，若有一元素a_0，对所有的$a\in E$，有$a\leqslant a_0$，则a_0叫E的最大元。

对所有$a\in E$，都有$a_0\leqslant a$时，称a_0为E的最小元。

若有一个$b_0\in E$，对任一$a\in E(a\neq b_0)$，不可能有$b_0\leqslant a$时，b_0叫E的极大元。

反之，对任一$a\in E(a\neq b_0)$，不可能有$a\leqslant b_0$时，则b_0叫E的极小元。

显然,最大(小)元必为极大(小)元,而反之则不一定成立。

有序集可以没有最大元，如果有最大元，至多只能有一个。同样的情况，最小元至多也只能有一个。

现在我们证明后者:

若$a\in E$，对所有$x\in E$，都有$a\leqslant x$，则a为最小元。

假设还有另一个最小元b，

因为$a\leqslant b$，而且$b\leqslant a$，则必有

$$a=b,$$

即表示最小元只有一个.

应当注意的是，极大（小）元如果存在时，可以不止一个，而有许多个.

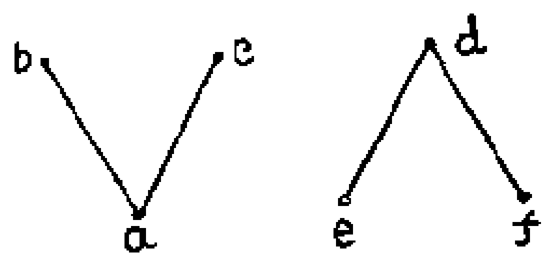
例如　若$E=\{a,b,c\}$，如图，

b，c都是（E，$\leqslant$）的极大元，

但不是最大元；a既是最小元也是极小元.

若$D=\{d,e,f\}$，如图，

d是D的最大元，又是极大元；e，f为极小元，但不是最小元.



（2）对集系$\mathscr{A}$

若$\mathscr{A}$为一个集系，A大于$\mathscr{A}$中所有其他元，则A叫$\mathscr{A}$的最大元；当A被包含在每个元中时，A称为$\mathscr{A}$的最小元.

当且仅当$\mathscr{A}$中没有元真正包含A时，A称为$\mathscr{A}$的极大元；当且仅当$\mathscr{A}$中没有元真正被A所包含时，A称为$\mathscr{A}$的极小元.

在集系中，显然最大元与最小元也是唯一的，同(1)相似，在没有最大（小）元的情况下，却可以有极大（小）元.

49. 什么叫极大原理？

这里，我们将阐述原大原理方面三个著名定理，现在先介绍两个概念以作准备：

套：A,B为集系的两元，若不是$A\subset B$，便是$B\subset A$，这时集系称为一个套。

有限特征：当且仅当集系中元的每个有限子集都是集系的元时，则集系叫具有有限特征的。

（1）Hausdorff极大原理：

对于集系$\mathscr{A}$中的每个套，$\mathscr{A}$中有一元包含此套的所有元，则$\mathscr{A}$必有一个极大元。

证明：在$\mathscr{A}$中选一个极大套m，并令A是$\mathscr{A}$中的一个极大元。因为若A真正被包含在$\mathscr{A}$的一个元B内，则$m\cup\{B\}$是$\mathscr{A}$中一个套，它却包含m，从而和m是极大套矛盾。

（2）Zorn引理：

如果在部分序集中的每个链，都有上确界，则此集存在一个极大元。

证明：若部分序集S不含极大元素，则对S的任何元素x，恒存在另一元素$\beta>x$。特别地对S的任何单线子集A，

恒存在元素$\beta>A$的上界，于是$\beta>A$中所有元素．对S的每个单线子集A均取定这样一个元素，记为β_A，显然$\beta_A\notin A$。而且$A\cup\{\beta_A\}$仍为S的一个单线子集，记为A^+，从而定义S的标准子集如下：

设N是S的一个单线子集，如果N具有性质“当A是序集N的一个真前段时，A^+也必为N的一个前段”，则说N是S的一个标准子集。

对于S的标准子集，有以下命题：

1° 如果N是S的标准子集，则N^+亦然。

2° S的任意两个标准子集中，必有一个是另一个的前段。

3° S的所有标准子集的并集，仍为S的一个标准子集。

现在出现矛盾，由3°知，S的所有标准子集的并集U为S的最大标准子集，但由1°知U^+也为S的一个标准子集。

从而Zorn引理得到证明。

(3) Tukey引理：

每个具有有限特征的集系，必有一个极大元。

证明：令$\mathcal{A}$为一个具有有限特征的集系，n为$\mathcal{A}$中的一个套，并使

$A=\cup\{N:N\in n\}$，A的每个有限子集F必为n的某个元的子集，因为可取n的一个有限子系，使它的并包含F，且此有限子系有一个最大元包含F，从而$A\in\mathcal{A}$，由(1)知存

在一个极大元。

50．什么是超滤集？

现在作如下定义：

N的某一子集类$\mathscr{F}$，

$$\mathscr{F}=\{S \mid S\subset N,\ N-S\text{为有限集}\},$$

且有三个性质：

1° $\phi\notin\mathscr{F}$，

这是因为$N-\phi$不是有限集，所以空集不属于$\mathscr{F}$。

2° 如果S_1，$S_2\in\mathscr{F}$，则

$$S_1\cap S_2\in\mathscr{F}.$$

$N-S_1$与$N-S_2$均为有限集

若S_1自S_1'后和N相同，S_2自S_2'后和N相同，若$S_1'<S_2'$，则$S_1\cap S_2$自S_1'后和N相同，

所以 $S_1\cap S_2\in\mathscr{F}$。

3° 如果$S\in\mathscr{F}$，而$S\subset T\subset N$，

则$T\in\mathscr{F}$。

因为$S\in\mathscr{F}$，所以$N-S$为有限集

若$T=S+m$，则

$N-(S+m)$仍为有限集。

所以$T\in\mathscr{F}$。

则$\mathscr{F}$叫N上的一个滤集。我们应当注意的是，N 上的滤集不止一个。例如x为N的一个子集，N中包含x的一切子集所成的类。

$\{S\subset N \mid S\supset x,\ x\neq\phi\}$ 也是 N 上一个滤集。

如果一个滤集$\mathfrak{U}$具有性质：对每个子集$S\subseteq N$，或者$S\in\mathfrak{U}$，或者$(N-S)\in\mathfrak{U}$，两者必居其一，那么$\mathfrak{U}$叫做超滤集。

取$\mathfrak{U}=\{N$上的滤集$\mathscr{F}'\mid\mathscr{F}'\supset\mathscr{F}\}$，则$\mathfrak{U}$就是$N$上的一个超滤集。

若$\mathfrak{U}$不是N上的超滤集，则应有N的非空子集S，适合

$$S\notin\mathfrak{U}\text{和}(N-S)\notin\mathfrak{U},$$

这时，N一定有子集$T\in\mathfrak{U}$，使$S\cap T=\phi$。

否则，对任意$T\in\mathfrak{U}$，有$S\cap T\neq\phi$。则有

$\mathfrak{U}'=\{x\subset N \mid x\supset S\cap T$，对每个$T\in\mathfrak{U}\}\in\mathfrak{U}$。

且$\mathfrak{U}'\supset\mathfrak{U}$，这与$\mathfrak{U}$是极大元相矛盾。

类似的，有一个N的子集$T_1\in\mathfrak{U}$，使

$$(N-S)\cap T_1=\phi,$$

于是得：

1° $T_1\subset S$，

$T_1\cap T\subset S\cap T=\phi$

所以 $T_1\cap T=\phi$

2° $T_1\cap T\in\mathfrak{U}$，从而

$\phi\in\mathfrak{U}$，与滤集定义相矛盾，

所以 $\mathfrak{U}$是N上一个超滤集。

51．什么是选择公理？

选择公理是1904年策梅罗为证明正序定理而首先提出来的，从此选择公理成为集合论中热烈争论的重要问题之一。

选择公理简记为AC，它的等价命题有二十三个之多．现在我们将选择公理叙述如下：

如果子是两两不相交的非空集组成的集合系，则可从子的每个集合中，各选一个元素组成新的集合。

这个公理表面看来，似乎是理所当然的，毫无疑问的，但是当集合系包含无穷多个集合时，就会显得从每个集合中选择出来的元素构成的集合，到底包含些什么，是模糊不清的。

当然，如果集合系子所含的非空集是有限多个，那么从每个集合中选出一个元素，组成新集是完全可以办到的。

即使子的元素是无穷多个，如果子中每个集合都按某种方式存在着正序，那么也不需要什么选择公理了。

策梅罗的正序定理发表以来，数学家们对选择公理有过激烈的争论，反对这个公理的主要根据是说，选择公理只断言选择出来的元素可以构成集合S，但S的元素是什么样子，如何构造S就不清楚了．换句话说，S是不能定义的．利用选择公理使人难于接受的是有一个分球定理，分球定理是说：

任意闭球体W可分为两个不交子集u，v之并，使W与u，v的一个均能有限分割而叠合。这等于说，可以把一个球分成两个和原球同样大小的球。

反之，如果丢掉选择公理行不行呢？事实上这也是行不通的。因为如果没有选择公理，现代数学分支的许多内容就要被抛弃，甚至连“可数个可数集的并集仍是一个可数集”就无法证明。

不仅如此，没有选择公理，可以证明出许多怪定理，它们“怪”的程度更甚于分球定理。

1938年哥德尔证明了选择公理对ZF公理系统的相容性，他用所谓哥德尔运算，在ZF中构造了可构造集，全体可构造集(L)是全体集合(V)的一部分。证明了ZF所有公理加上$V=L$，在L中都成立，即L是ZF“可构造公理”的模型。

$ZF+$“可构造公理”是相容的，但可构造公理可推出选择公理，所以

$$ZF+AC+GCH\text{也是相容的，}$$

因此，由ZF证明选择公理不成立是不可能的。

52. 什么是ZFC公理系统？

众所周知，由于悖论的产生，截至目前，人们不能给集

合以精确定义。但集合论的迅猛发展并没有因此而停滞不前，相反，数学家们采用公理化方法对集合概念作了一些规定，使公理化集合论成为一个引人关注的重要课题。于是，许多种不同的集合论公理系统应运而生。例如策梅罗(E·Zermelo) 和弗兰克尔 (A·Frenkel) 建立的 *ZFC*公理系统；罗素(B·Russell) 建立的类型论；贝尔纳斯 (P·Bernays)、冯·诺伊曼(Von Neumann)和哥德尔(K·Gödel) 建立的*BNG*公理系统等等都是。而在这些公理系统中，使用方便、应用广泛的是*ZFC*公理系统。因为这个公理系统有限制地使用概括原则，阻止了悖论的发生。

但人们发现，一个命题在甲公理系统中是真的，在乙公理系统中却可能是假的，甚至在丙公理系统中又可能是不可判定的。对于任何一个公理系统，它本身是否代表了全部客观真理，目前还不能证明。

*ZFC*公理系统是策梅罗首先提出来的，后来经过弗兰克尔和斯科伦(Skolem) 的改进，才最后形成的。*ZFC*公理系统也称 ZF 公理系统。这个公理系统未能把集合论中的所有集合都规定在内，因此，虽然它是公认的公理系统，但不是最完善的。

*ZFC*公理系统包括以下公理：

(1) 外延公理

这个公理的意思是说，一个集合完全由它的元素所决定。对两个具有完全相同元素的集合，则定义它们相等。

（2）空集合公理

这个公理是说，存在一个集合，它没有任何元素。而且由外延公理知道，空集合是唯一的。记为ϕ。

（3）对偶公理

这个公理是说，对于任何集合u和v，存在一个恰以u，v为元素的集合。

（4）并集公理

这个公理是说，对于任何集合A，存在一个集合B，它恰以A的元素的元素为它的元素。

（5）幂集合公理

这个公理是说，对任意集合x，存在一个以x的子集为其元素的集合$P(x)$。

（6）无穷集公理

这个公理是说，存在一个集合A，它有无穷多个元素。

（7）选择公理

这个公理是说，假定有一个集合系$\{A_h \mid h\in H\}$其中每个$A_h\neq\phi$，那么存在一个定义在这个系里的变换f，使对所有$h\in H$，有

$$f(A_h)=x_h \subset A_h$$

(8) 替换公理

这个公理是说，假定X是一个集，如果对每个$x\in X$作为第一坐标，都有一个且只有一个y与x结成$\langle x, y\rangle$，所有这种有序对的第二坐标y的全体也是一个集y。

把每个$\langle x, y\rangle$看作有序对$\langle x, \langle x, y\rangle\rangle$的第二坐标，再用替换公理，就知$\langle x, y\rangle$的全体也是一个集合。

替换公理可推出子集合公理模式。

(9) 正则公理

这个公理是说，任何一个不空的集合A，一定包含一个元素a，A的任何一个元素都不是a的元素。

根据正则公理知道，对于任何集a说，a和$\{a\}$是不同的。

53. CH的独立性是什么？

连续统假设在集合论中占有重要地位，它的意义是说，若自然数集N的基数为$\overline{\overline{N}}$，N的一切子集$P(N)$的基数为$\overline{\overline{P(N)}}$，是否存在一个基数$\aleph_x$，使

$$\overline{\overline{N}}<\aleph_x<\overline{\overline{P(N)}}?$$

这个问题是康托在1882年提出来的，而且他断言不存在$\aleph_x$这个基数，鉴于未能证明它，故叫连续统假设。简记为CH。然而迄今为止，数学家们仍未彻底解决它。

但是1938年奥地利数学家哥德尔(Göde L, K)却证明了ZF系统和CH是相容的，从而证明了CH不能否证；1963年美国科学家科恩(Cohen, P, J.)利用力迫法证明了ZFC系统和$\neg CH$（$\neg$表示否定）是相容的。从而知道CH在ZFC系统中是不可判定的。换句话说，CH独立于ZFC系统。

哥德尔所用的方法是：假定ZF系统是协调的，则有一个模型V，称为全域，所有集合都是V的元素，然后在V中去掉一块，剩余部分仍是一个论域，使ZF系统在其中成立，CH在其中也成立，AC（选择公理）在其中也成立。这样，不仅证明了CH，AC和ZF系统的协调性，从而证明了CH和ZFC系统的协调性。

在哥德尔模型L中，$ZF+AC+CH$都是真的，条件是ZF系统是协调的，L是不可数的，能否有一个可数模型M，使$ZF+AC+CH$在其中，也同时成立呢？这是完全可以办到的。因为$ZF+AC+CH$作为语句的集合是可数的。就是说，在M中，ZFC系统是真的，CH也是真的，也就是

$\overline{\overline{P(N)}}=\aleph_1$，$2^{\aleph_0}=\aleph_1$，这里的$\aleph_1$和$L$中的$\aleph_1$是不同的。

因为M是可数模型，所以在M外还有很多N的子集合，能否把不在M中的N的子集增加进去一些，变成一个新模型

M'，使在 M' 中，ZFC 系统成立。而 $2^{\aleph_0} > \aleph_1$ 呢？当然这种 SCN 并非都可增加进去，不然 M' 就不是 ZFC 的模型了。

科恩利用力迫法，挑选了 SCN，使得把它们增加到 N 中，获得的 M' 仍然是 ZFC 的模型，增加的 S 是那么多，以致在 M' 中 N 的子集合数目超过 $\aleph_1$，甚至于对于每一 M 中的基数 $\aleph_2$，

只要 $cf(\aleph_\alpha) \neq \omega$，都有 M'，使在 M' 中，$2^{\aleph_0} = \aleph_\alpha$

力迫法是一种增加新集合来扩充模型的方法，使得新模型仅有增加新集合所力迫的性质，而新集合与原模型的相互影响保持到最小限度。

54. 什么是力迫法？

力迫法（Forcing）是科恩创造的一种强有力的构造模型的方法，用它构造了 $\neg CH$ 在其中成立的模型，从而得到连续统假设独立性的结果。

这里我们摘引孙文祯、王元元同志一文中的一段〔载《自然》杂志，1983年3期〕，作简要介绍：

如果 ZFC 有模型，可假定有一个可数模型 M，在 M 中加入一些新集合 a，把 M 扩张为新模型 N，使 N 为 $ZFC+\neg CH$ 的模型，这要求：

（1）加入的新集不破坏M的结构，保证N仍能成为ZFC的模型。

（2）新集a应能使N中有$2^{\omega}\geqslant\omega_2$的性质，（即$\neg CH$成立）。

根据这两个要求，设计一个特别的偏序集P，$G\subseteq P$称为M上的通有集，它有性质：

（1）G是P的滤子。

（2）如D是P的稠密子集，且$P\in M$，

则　$G\cap D\neq\phi$。

可以证明G是M中没有的新元素。

现在把M中和P有关的一部分元素，指定为P—名，并用每一个P—名，根据G按一定法则创造一个N的新元素。

对P的通有集G，这样构造的N仍是ZFC的模型，并含有G为它的一个新元素。N为M的扩张模型，记为$M[G]$。可证明如果G是P的通有集，$\cup G$便是从ω到$\{0,1\}$中的函数，以此为特征函数的ω的子集在M中原来没有的，所以$M[G]$的子集比M中要多。

力迫法就是这样一次次扩张模型，使ω的子集不断增加，而模型中的基数保持不变，这就可在新模型中，使$2^{\omega}\geqslant\omega_2$，即$\neg CH$成立。

这里，基数不变是主要的，虽然我们构造了一个ω的子集增多的扩张模型。

$N(M[G])$，使在其中的 2^{ω} 变大了，但是并未说明ω_2在N中是否也变了，要是变了，$2^{\omega}\geqslant\omega_2$ 在 N 中仍可能不成立。然而可以证明 ω_2 在扩张过程中是不变的。

科恩引进了“力迫”概念，称P中元素p为力迫条件，定义“p 力迫语句σ”为“对任一通有集$G\subseteq P$，只要$p\in G$，则σ在$M[G]$中真”。当p力迫σ时，p就迫使σ在某些扩张模型中成立。

直观地说，由于M中没有$\cup G$，所以我们只看到$\cup G$的各级近似。如果我们能在M中，看到被近似物p所“扭曲”的事实成立，那么可断定σ在$M[G]$成立，所以ω_2在N中不变就得到了证明。

55. 什么是可构成集？

可构成集也是一种集，不过这种集属于和一切集组成的全域有同样大小的每个 ZFC 模型，在这种情况下，ZFC 的一切公理仍然是真的。或者说，可构成集组成了 ZFC 的一个模型，用L来表示这个模型，在这种新的解释下，集论中用集定义的概念，意义要有相应的变化；意义不会改变的概念称为绝对的。那么可构成集这个概念就是绝对的。因为可构成集不仅是可构成的，而且在新的意义下，也是可构成的，换句话说，“一切集是可构成的”在L中是真的。所以

可以看出，在模型L中，ZFC的各公理和可构成性公理都是成立的。这就表明：可构成性公理和集论的其他公理是协调的。

一个重要的问题是，可构成性蕴含CH和AC，因为可构成性公理在模型L中是真的，所以CH在L中也是真的。换句话说，如果把集解释为“可构成集”，CH就变成真的。哥德尔在ZFC中加上CH，从而证明了CH对于ZFC是协调的。科恩给一个ZFC的模型，在其中CH是假的，这就证明了$\neg$CH的协调性。这就表明CH独立于集合论的其他公理。意思是说它不是其他公理的逻辑推论。科恩还给了一个ZFC模型，在其中，可构成性公理是假的。因而可构成性公理的真或假是不知道的。

虽然可构成性公理是真是假仍不知道，但借助于可测基数这样的大集合，完全可以加深对这个问题的理解。

现在令MC表示可测基数存在的假设，在MC假设和可构成性公理之间，Dana Scoff首先发现了一个重要关系，这就是：MC蕴含着不可构成集的存在性。

随后Rowbottom进一步加强了这个结果。他甚至证明了可测基数的存在性，蕴含着整数不可构成集的存在性。他得到的最好结果是证明了MC蕴含只有可数无穷多个整数的可构成集。

由于MC假设加深了我们对可构成性公理的理解，人们产生希望：MC假设会有助于理解CH。1964年这个希望被消除了。耶路萨冷的Azriel Levy和普林斯顿的Robert Solovay 分别证明了：即使我们在 ZFC 公理外加上 MC 假设和选择公理，仍不能证明连续统假设，同时也不能否证它。

这就表明：MC 虽加深了对可构成性公理的理解，但却无助于理解 CH。因此 CH 仍是一个未解决的难题。

自然会提出，在 ZFC 中 MC 的协调性如何呢？这又是一个未解决的问题。

56. 什么是分球定理？

分球定理是波兰数学家巴拿赫（S· Banach）和塔尔斯基（A· Tarski）1924 年提出并加以论证的，所以也称巴拿赫塔尔斯基定理。

我们先介绍等可分解概念：

假设 A 和 B 是 n 维空间中的子集，若 A 可分解为两两不相交的子集：

$$A_1,\ A_2,\ A_3,\ \cdots\cdots A_n,$$

$$\text{且}\quad \bigcup_{k=1}^{n} A_k = A,\ n<\infty,$$

同样，B 可分解为两两不相交的子集：

$$B_1,\ B_2,\ B_3,\ \cdots\cdots B_n,$$

$$\text{且}\quad \bigcup_{k=1}^{n} B_k = B,$$

如果A_i和B_i彼此全等，则称A和B是等可分解。等可分解不必一定是几何等可分解，因为A和B分出的子集A_k和B_k可以千奇百怪，根本不成为几何图形。

例如区间(0,1)可分为分数集和大于0小于1的无理数集，也可分成有理点集以及非有理点集，分解的复杂程度远远超出了几何图形的分割方法。

在等可分解概念中，A和B被分割成一些子集，而子集是否有面积？这是集合测度所讨论的问题。

现在我们不加证明地叙述：

巴拿赫塔尔斯基定理

如$n \geqslant 3$，那么R^n中的任何两个具有非空内点的有界子集都是等可分解的*。

这个定理发表后，震动了数学界，因为球含有内点，正方形含有内点，它们都是有界限的，根据这个定理，任何球都可以和正方形等可分解。

但是这个定理没有对子集的“体积”作出要求。它只要有内点，有界就可以，不管它们的大小。这就是说，一个半径很大的球和一个半径很小的球能够等可分解，一个半球和一个整球等可分解，一个球可以分成和它自己同样大的两个球，等等。这就是著名的所谓“分球奇论”。

因此，要深入探讨等可分解性，还要研究集合的测度，在R^1和R^2中，任意子集都有测度这是众所周知的，而在R^3的

---

* 证明见谢邦杰著《超穷数与超穷论法》P88。

子集上，我们就不能定义其测度了。

利用选择公理，可以证明分球定理是成立的，从而在是否允许使用选择公理上，展开了长时间的论战。

事实上，在承认选择公理的条件下，两个球的体积不同是一回事，两个球等可分解是另一回事，混为一谈，显然要出现“怪论”。

57. 什么是计数基本原理？

计数基本原理主要是指加法原理和乘法原理而言，它有着广泛的应用，排列和组合的法则即依据于此。

（1）加法原理

加法原理可表述如下：

做一件事，完成它可以有 n 类办法，在第一类办法中有 m_1 种方法，在第二类办法中有 m_2 种方法，……，在第 n 类方法中有 m_n 种方法，那么完成这件事共有

$$N = m_1 + m_2 + \cdots\cdots + m_n \text{ 种方法。}$$

用集合论观点来叙述，加法原理就是：

如果物体的集合 S 分为不相交的子集 S_1，S_2，S_3，……，S_m，那么S的元素个数，由 S_1，S_2，S_3，……，S_m 每个集合中元素的个数相加而得，即

$$|S| = |S_1| + |S_2| + |S_3| + \cdots\cdots + |S_m|.$$

如所周知，如 S 分成子集 S_1，S_2，…… S_m，且这些子集两两不相交，$S = S_1 \cup S_2 \cup \cdots \cup S_m$，则$S_1$，$S_2$,$S_3$，……，称为 S 的一个分划，

例如　从甲地到乙地，有火车、汽车、轮船三种交通工具，每天，火车有 4 个班次，汽车有 2 个班次，轮船有 3 个班次，那么从甲地到乙地共有

$4+2+3=9$种不同的走法。

一般说，把集合 S 分成 S_1，S_2，……S_m，它们不是两两不相交的，在这种情况下，如何求 $|S|$？有容斥原理来解决。

把集合 S 分成子集 S_1，S_2，……S_m，即

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cdots\cdots \cup S_m.$$

我们有：

$$\begin{aligned}|S| &= |S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \cdots\cdots \cup S_m| \\ &= \sum_{1 \le i \le m} |Si| - \sum_{1 \le i < j \le m} |Si \cap Sj| + \sum_{1 \le i < j < k \le m} |Si \cap Sj \cap S_k| + \\ &\quad \cdots\cdots + (-1)^{m-1} |S_1 \cap S_2 \cap \cdots\cdots \cap S_m|.\end{aligned}$$

（2）乘法原理

若 A是 p 个物体的集合，B 是 q 个物体的集合，则有序对(a,b)的个数等于$p \times q$，

$$(a \in A,\ b \in B)$$

推广有：

A是 p 个物体集合，

B 是 q 个物体集合，

C 是 r 个物体集合，

…………………

则有序 n 元$(a,b,c,\cdots\cdots)$的个数等于

$$p\times q\times r\times\cdots\cdots\cdots\cdots(a\in A,\ b\in B,\ c\in C\cdots\cdots)$$

乘法原理也可叙述为：

若第一个物体有 p 种选法，第二个物体有 q 种选法，则同时选取第一个和第二个物体有

$p\times q$种选法。

例如　从 5 个男人，6 个女人，2个男孩和 4 个女孩中，选一个男人、一个女人、一个男孩、一个女孩的方法数是 $5\cdot6\cdot2\cdot4=240$种。

乘法原理是组合论的一个基本原理，可以证明一系列组合公式。

加法原理和乘法原理是两个重要原理，在应用它们时，要弄清楚两者的区别，在加法原理中，每一种方法都是平行的、独立的；而在乘法原理中，每一种方法都不是独立的，它只是完成全部过程的一个步骤。

58. 什么是集合的排列？

若集合 S 有 n 个元，r 为一正整数，则集合 S 的一个 r —

排列，就是从 n 个元素中取出 r 个组成的一个有序集。平常用 p_n^r 表示 n 元集合 S 的 r —排列的个数。

当 $r>n$ 时，则 $p_n^r=0$；

当 $r=n$ 时，则 S 的一个 n —排列简称为 S 的一个排列；

当 $r<n$ 时，有：

$$p_n^r=n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)。$$

这个道理是明显的，因为在构造 n 元集合的一个 r —排列时，第一位置上的元素选择有 n 种方法；第二位置上的元素选择有 $(n-1)$ 种方法；……；第 r 位置上的元素选择有 $n-r+1$ 种方法。

因此有 $p_n^r=n(n-1)\cdots\cdots(n-r+1)$。

或者写成：

$$p_n^r=\frac{n!}{(n-r)!}。$$

当 r —排列为环状时，就叫环状 r —排列，n 元集合的环状 r —排列数为：

$$\frac{p_n^r}{r}=\frac{n!}{r(n-r)!}。$$

这是因为线性 r —排列可分成 r 组，同一组内的每个线性排列可引出同一个环状 r —排列。因为线性 r —排列有 p_n^r 个，所以环状 r —排列个数为 $\frac{p_n^r}{r}$。

集合 S 若有相同元素，则 S 为多重集，例如 $S=\{a,a,$

$a,b,b,c,d,d,d,d\}$就是多重集，多重集简写为$S=\{3\cdot a,2\cdot b,1\cdot c,4\cdot d\}$

多重集的r—排列也可以求出：

1° 若S是一个k种不同元素的多重集，每种元素的重复数是无限的。

在构造r—排列时，第一位置有k个选择方法；第二位置也有k种方法；……；第r位置也有k种选择方法。

r个位置有k^r种选择方法，即r—排列数为k^r。

2° 若S为多重集，有有限的重复数

n_1，n_2，n_3，……，n_k，

且 $n=n_1+n_2+\cdots\cdots+n_k$，则

S 的排列数为：

$$\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}.$$

59. 什么是集合的组合？

n元集合S的一个r—组合，就是从S的n个物体中选r个的一个无序选择，换句话说，S的一个r—组合，是S的一个r元子集。我们用C_n^r表示n元集合S的r—组合数。

当 $r>n$时，$C_n^r=0$；

当 $n=0$时，

若 $r \neq 0$，则 $C_0^r = 0$；

若 $r = 0$，则 $C_0^0 = 1$；

当$r = 0$时，$n \neq 0$时，

$$C_n^0 = 1;$$

当 $r = 1$时，$C_n^1 = n$；

当 $r = n$时，$C_n^n = 1$。

当 $r < n$时，我们有：

$$p_n^r = r! \cdot C_n^r,\ \text{即}$$

$$C_n^r = \frac{p_n^r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!}.$$

这是因为：

若S是一个n元集合，则每个r—组合都有

$p_r^r = r!$种方法给出顺序，

而S的一个r—排列恰是S的一个有序r—组合，因此，

$$p_n^r = r! C_n^r.$$

所以有$C_n^r = \dfrac{p_n^r}{r!} = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$。

在集合的组合运算中，我们常常用到以下两个公式：

(1) $C_n^r = C_n^{n-r}$；

(2) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \cdots\cdots + C_n^n = 2^n$。

和多重集的排列相类似，多重集也有组合问题：

1° 设S是一个有k种元素的多重集，每个元素的重复数是无限的，则

S 的 r—组合数为：

$$C_{k-1+r}^{r}.$$

2° 若 S 是一个有 k 种不同元素重复数无限的多重集，则 S 的每种元素，至少出现一个的 r—组合数等于 C_{r-1}^{k-1}。

60. 什么叫抽屉原理？

抽屉原理是组合数学里的一个重要组成部分，虽然这个原理是如此简单，以致于任何一个中学学生一经指点即会完全明白，但是它在解决各种各样疑难问题，证明某些存在性定理问题上，却是非常有用的。抽屉原理有各种不同的名称，如鸽笼原理、重迭原理、鞋盒原理等等都是指这个原理而说的。

抽屉原理有两种形式表现：

1° 简单形式："把 $n+1$ 个物体放入 n 个盒子里，则至少有一个盒子里有两个或更多个物体"。

这个道理是十分明显的，因为如果 n 个盒子的每一个都是至多只有一个物体，那么物体总数最多只有 n 个，这就和原题设有了矛盾。

2° 一般形式

"q_1，q_2，……，q_n 为正整数，如果把 $q_1+q_2+\cdots\cdots+q_n-n+1$ 个物体放入 n 个盒子，则或者是第一个盒子内至少

放入q_1个物体．或者是第二个盒子至少放入q_2个物体，……，或者是第n个盒子至少放入q_n个物体”．

对这个原理，我们可以证明如下：

假设把$q_1+q_2+\cdots\cdots+q_n-n+1$个物体放入$n$个盒子里．

如果对每个$i=1,2,\cdots\cdots,n$；第i个盒子里的放入物体个数小于q，显然所有盒子内的物体总数不会超过

$$(q_1-1)+(q_2-1)+\cdots\cdots+(q_n-1)$$

$$=q_1+q_2+\cdots\cdots+q_n-n.$$

由于这个数比放入盒子里的物体数少1，所以我们断定对

$i=1,2,\cdots\cdots,n$，第i个盒子至少有q_i个物体．但是如果将$q_1+q_2+\cdots+q_n-n$个物体放进n个盒子，使对每个

$i=1,2,\cdots,n$，第i个盒子所含物体个数少于q_i，这是可能的．我们只需要把q_1-1个物体放入第一个盒子，把q_2-1个物体放入第二个盒子，……等等，就能办到．

当然，把个数多于$q_1+q_2+\cdots+q_n-n+1$的物体放入n个盒子，抽屉原理的一般形式，仍然是成立的．

如果$q_1=q_2=q_3=\cdots=q_n=r$，那么上述一般形式变为：

“把$n(r-1)+1$个物体放入n个盒子，则至少有一个盒子，有r个或更多个物体”．

3° 无限多个元素分成有限多个组，则至少有一个组包含无限多个元素．

用反证法就可以得到这个原理的证明．

61. 抽屉原理有什么应用？

我们举例来说明这个问题：

例一 任意13个人，其中必有二个人的生日在同一个月份里。

分析：因为一年有十二个月份，我们可设十二个抽屉，十三个人作为物体，放入抽屉，明显地物体数多于抽屉数，因此至少有一个抽屉要放入两个物体，这就是说，必须有二个人的生日是在同一个月份里。

例二 任意四个自然数分别除以 3，则至少有两个自然数的余数相同。

分析：用 3 除任何自然数，余数只有 0，1，2 三 种，我们设三个抽屉，但四个自然数被 3 除的余数有四个，因此至少有一个抽屉要放两个余数。换句话说，至少有两个自然数有相同的余数。

例三 任取11个自然数，那么至少有两个数的差是10的倍数。

分析：11个自然数被10除时，余数只有十个，即：

0，1，2，3，……，9，我们设 10 个抽屉，若把11个自然数放入抽屉，至少有两个自然数放入同一个抽屉，这就是说，有两个自然数的余数是相同的。

例如$A=10a+r$

$B=10b+r$

显然有 $A-B=10(a-b)$。

例四 在一个二十多万人口的城市里，至少有两个人的头发根数相同。

分析：一般说，一个人的头发不会超过二十万根，那么我们设二十万个抽屉，把这个城市里的人都放入抽屉中，显然，至少有一个抽屉里有两个人，这就是说，至少有两个人的头发根数相同。

例五 从1到200间的自然数中，选取101个，则选出的数中，必有两个数，其中一个可以整除另一个。

分析：任何一个自然数都可写成 $2^k\cdot a$ 的形式，（其中 $k\geqslant o$，a 为奇数）。

对于1至200间的自然数，a 只会是1，3，5，…199这一百个数中的一个，选出的101个数写成 $2^k\cdot a$ 形式，必有两个数具有相同的 a，记为

$2^r\cdot a$ 和 $2^s\cdot a$，则

当 $r\leqslant s$ 时，有 $2^r\cdot a|2^s\cdot a$；

当 $r>s$ 时，有 $2^s\cdot a|2^r\cdot a$。

例六 在边长为1的正方形内，放置5个点，则至少有两个点的距离不大于$\frac{\sqrt{2}}{2}$。

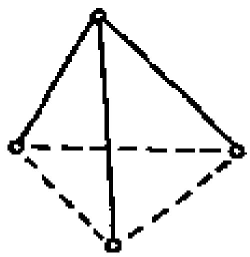
分析：将正方形对边的中点连起来，则构成四个小正方形，把每个小正方形当作一个抽屉，显然必有一个小正方形

内有两个点，但小正方形的对角线长为$\frac{\sqrt{2}}{2}$，故得证。

例七 空间有六个点，其中任何三个点都不共线，任何四个点都不共面，在每二点之间连起的线段，涂上红色或蓝色，则不论如何涂法，一定有一个三边颜色相同的三角形。

分析：从一点开始，到其他五点可连5条线段，这五条线段分别被红蓝二色所染，若红蓝各代表一个抽屉。那么就变成5个物体放入两个抽屉问题，显然必有一个抽屉至少有三个元素。

如图，若三条实线为红色，则三条虚线必全为蓝色，不然的话，除虚线三角形外，必有三边同时为红色的三角形。



例八 证明每个由n^2+1个实数组成的序列

a_1，a_2，……，a_{n^2+1}，包含一个长为$n+1$的递增子序列，或包含一个长为$n+1$的递减子序列。

分析：若不存在长为$n+1$的递增子序列，我们将证明必存在长为$n+1$的递减子序列。

对每个$k=1,2,\cdots\cdots,n^2+1$，若m_k为始于a_k的最长递增子序列的长度，且$m_k\leqslant n$，$k=1,2,\cdots\cdots,n^2+1$，即没有长

为$n+1$的递增子序列。

由于 $m_k \geqslant 1$，$k=1,2,\cdots$，n^2+1，所以 m_1，m_2，……m_{n^2+1} 是 n^2+1个 1 到 n 之间的整数，运用

$r=n+1$的抽屉原理，则

m_1，m_2，……，m_{n^2+1}中必有 $n+1$个是相等的，记为

$m_{k_1}=m_{k_2}=\cdots\cdots=m_{k_{n+1}}$

这里 $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots\cdots < k_{n+1} \leqslant n^2+1$。

若对 $i=1,2,\cdots\cdots$，n，

$$a_{k_i} < a_{k_{i+1}},$$

由于 $k_i < k_{i+1}$，故得始于$a_{k_{i+1}}$的最长递增子序列。

将 a_{k_i} 放在它的前面，得始于 a_{k_i}的递增子序列

即 $m_{k_i} > m_{k_{i+1}}$，此与 $m_{k_i}=m_{k_{i+1}}$矛盾

所以 $a_{k_i} \geqslant a_{k_{i+1}}$，

当 $i=1,2,\cdots,n$时，有

$a_{k_1} \geqslant a_{k_2} \geqslant \cdots\cdots \geqslant a_{k_{n+1}}$，即

a_{k_1}，a_{k_2}，……$a_{k_{n+1}}$为递减子序列。

62. 什么叫置换？

如果 A是由 n 个元组成的有限集，集合 A到自身上的任何一一映射 f，叫做 n 阶置换。

置换可表示为：

$$f=\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3\cdots\cdots i_n \\ k_1 & k_2 & k_3\cdots\cdots k_n \end{pmatrix}$$

其中（$i_1\ i_2\ i_3\cdots\cdots i_n$），（$k_1\ k_2\ k_3\cdots\cdots k_n$）是集合 A的 n 个元素的两种排列。

同一个置换可以写成其他多种形式：

例如 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & i_3\cdots\cdots i_n \\ k_1 & k_2 & k_3\cdots\cdots k_n \end{pmatrix}$ 可写成：

$$\begin{pmatrix} i_2 & i_1 & i_3\cdots\cdots i_n \\ k_2 & k_1 & k_3\cdots\cdots k_n \end{pmatrix},\cdots\cdots,\begin{pmatrix} i_n & i_{n-1}\cdots\cdots i_3 & i_2 & i_1 \\ k_n & k_{n-1}\cdots\cdots k_3 & k_2 & k_1 \end{pmatrix},$$

等等。

置换 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2\cdots\cdots x_n \\ x_1 & x_2\cdots\cdots x_n \end{pmatrix}$ 称为恒等置换。以 1 表之。

n 个不同文字的置换总数为：

$$n!=n(n-1)(n-2)\cdots\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

两个同阶置换可以进行乘法或除法运算。

例如

若 $S=\begin{pmatrix} x_1 & x_2\cdots\cdots x_n \\ x_\alpha & x_\beta\cdots\cdots x_v \end{pmatrix}$，$t=\begin{pmatrix} x_\alpha & x_\beta\cdots\cdots x_v \\ x_{\alpha'} & x_{\beta'}\cdots\cdots x_{v'} \end{pmatrix}$ 均为 n 阶置换，则它们的积为：

$$S\cdot t=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3\cdots\cdots x_n \\ x_\alpha & x_\beta & x_\gamma\cdots\cdots x_v \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} x_\alpha & x_\beta & x_\gamma\cdots\cdots x_v \\ x_{\alpha'} & x_{\beta'} & x_{\gamma'}\cdots\cdots x_{v'} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3\cdots\cdots x_n \\ x_{\alpha'} & x_{\beta'} & x_{\gamma'}\cdots\cdots x_{v'} \end{pmatrix}$$

在运算中，应注意：

1° 置换的乘法或除法中，只有同阶置换才有意义。

2° 当 $n \geqslant 3$ 时，置换乘法未必适合交换律，即有：

$$S \cdot t \neq t \cdot S$$

3° 置换积适合结合律，即有：

若 S，t，v 为同阶置换，

$$St \cdot v = S \cdot (t \cdot v)$$

4° 置换也可以幂的形式表示：

如 $S \cdot S = S^2$，

$S \cdot S \cdot S = S^3$，

$S^m \cdot S^n = S^{m+n}$，等等。

5° 若有一置换 S，则必有另一置换 S'，使 $SS' = 1$，而 S' 叫 S 之逆置换，S 的逆置换常常以 S^{-1} 表示。

显然 $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 \cdots\cdots i_n \\ k_1 & k_2 \cdots\cdots k_n \end{pmatrix}$ 的逆置换为 $\begin{pmatrix} k_1 & k_2 \cdots\cdots k_n \\ i_1 & i_2 \cdots\cdots i_n \end{pmatrix}$。

6° 置换积等式中因式的消去：

即若 $St = Sr$，或 $tS = rS$，

则有 $t = r$。

7° 形如 $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 & x_4 \\ x_3 & x_1 & x_4 & x_2 \end{pmatrix}$ 的置换叫轮换，对于轮换，可以单列形式表示：例如

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_2 & x_3 & x_1 \end{pmatrix} = (x_1 \ x_2 \ x_3)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_3 & x_2 \end{pmatrix} = (x_1)(x_2\ \ x_3)$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 \\ x_3 & x_6 & x_5 & x_4 & x_1 & x_2 \end{pmatrix} = (x_1\ \ x_3\ \ x_5)(x_2\ \ x_6)(x_4).$$

63. 什么叫二元运算?

在一个集合S中，对有序对(a, b)有法则 $*$，使$a*b=c$，$c\in S$，则$*$就叫S上的一个二元运算。

运算$*$可以是加法、减法、乘法、除法，取最大，二数平方和等等任何一种结合。

例如　在整数集中，若$*$表示加法，对于$(3, 5)$，有$3*5=8$。

若$*$表示取最大数，则对于$(8, 5)$，有$8*5=8$

若$*$表示取平均数，则对于$(6, 8)$，有$6*8=7$

若$*$表示取二数平方和，对于$(5, 3)$有　$5*3=5^2+3^2=34$，等等。

因此，二元运算也就是，在一个集合中，有一种运算，使一个数对应一个有序对。

运算是一个非常一般、非常广泛的概念，对任何集合的元素都能使用，而且不限制集合的元素必须是数

由集合 S 和运算 $*$ 组成的序对，叫运算系，记为（S，$*$）。

对于运算系（S，$*$），常常具有以下特征：

（1）交换性

若对任意元素 a，$b \in S$，

有 $a * b = b * a$

则 $*$ 叫具有交换性。

（2）结合性

若对于 S 中任意元素 a，b，c，

有 $(a * b) * c = a * (b * c)$

则 $*$ 叫具有结合性。

（3）单位元

若 e 是 S 的一个元素，

对每个 S 中的元 a，有

$a * e = e * a = a$，

则 e 称为（S，$*$）的单位元。

（4）逆元

若 e 是（S，$*$）的单位元，

如果 $a * b = b * a = e$

则 a，b 叫互为逆元。

(5) 消去律

若在（S，$*$）中，

由　$a*c=b*c$

推出 $a=b$，

则（S，$*$）叫有消去律。

由上述知道：

1° S的任意二元素，都有运算结果

$$a*b=c.$$

2° c在S中，且是唯一的。

64. 什么是群？

一个集合，如果它满足以下四个条件，这个集合就叫做群。

(1) 有闭合的结合法，就是说集合G中任意两元a，b的结合c仍然是G的元。即

若 a，$b\in G$，则 $a*b=c$，$c\in G$。

一般说，$a*b\neq b*a$。

(2) 集合G的结合$*$适合结合律，就是说，任意三元a，b，$c\in G$，有

$$(a*b)*c=a*(b*c).$$

(3) 对任意元$a\in G$，在G中（最少）有一个（左）单位元e，满足$ea=a$。

(4) 对于任意元$a\in G$，在G中（最少）有一个满足$a^{-1}a=e$的（左）逆元a^{-1}。

一个集合如果只满足(1)，叫乘集；只满足(1)、(2)时，叫半群。

在群中，单位元是唯一的；每个元素的逆元也是唯一的。

例一 全体正实数的集，对于乘法说，是一个群。

因为1° 任何两个实数的积，仍是一个实数。

2° 乘法适合结合律。

3° 有单位元1。

4° 每个元素都有逆元素，即它们的倒数。

例二 $\{-1, 1\}$对乘法是一个群。

因为1° 任意二元的积仍是这个集的一个元素：

$$(-1)(1)=-1;\ (-1)(-1)=1;\ (1)(1)=1.$$

2° 结合律成立，如

$$(1)[(1)(-1)]=[(1)(1)](-1).$$

3° 有单位元1。

4° 每个元素的逆元素，即它本身。

例三 整数集对于加法是一个群。

因为1° 任何两个整数的和，仍然是一个整数。

2° 适合结合律。

3° 有单位元0。

4° 任何一个元 a 的逆元为 $-a$，即 $a+(-a)=0$。

例四 集合{0，1，2，3…}对于加法不是一个群。

因为1° 具有封闭性。

2° 有结合性。

3° 单位元是 0 。

4° 每个元均无逆元。

所以{0，1，2，3，…}对于加法不能形成群。

65. 什么叫环?

在集合 R内，定义两种结合法，一种叫加法 +，另一种叫乘法 ·，并且满足：

1° （ R， + ）成可换群，

2° （ R， · ）为半群，

3° 乘法关于加法适合分配律，即对 R中任意元素 a，b，c，有

$$a(b+c)=ab+ac,$$

$$(b+c)a=ba+ca,$$

这样的集合 R就叫环，记为（ R， +， · ）。

换个说法，环是具有两种运算的代数系，其中任意两元对于加、减、乘三个结合法能够任意施行，两个代数系通过分配律相联系着，环的每个元素既是加群中的成员，又是乘

半群中的成员。因此如果没有分配律，那就不是什么含有两个运算的代数系了。

环中可换群（R，$+$）称为环的加群，其单位元叫环的零元，记为 o，元素 a 的逆元称为 a 的负元，记为 $-a$。

零元和负元在加法中由加群性质决定，它们在乘法中，有：

$$a\in R,\ a\cdot o=o\cdot a=o$$

$$(-a)b=a(-b)=-ab$$

$$(-a)(-b)=ab$$

$$a,\ b,\ c\in R,\ a(b-c)=ab-ac$$

$$(b-c)a=ba-ca.$$

应当说明的是，一个环只存在一个零元。它与任何元素 a 的和，仍等于 a。而环中每一个元素 a，都有一个负元 $-a$。且 $a+(-a)=o$。

一个环的元，若满足乘法交换律，即

$a\cdot b=b\cdot a$ 时，这个环叫可换环。

环 R 的子集，若对环的两种运算也形成环，那么这个子集叫 R 的子环。R 叫子环的扩环。

含有有限个元的环叫有穷环，显然一个有穷环，只能有有限个子环。当然环也可以看成是它本身的子环，异于自身的子环叫真子环。任意环都有一个零形成的零环为其真子环。

环中元的乘法，不一定都是可交换的，除法不一定可以施行。即

从$a \cdot b = a \cdot c$或$b \cdot a = c \cdot a$中，当$a \neq 0$时，不一定得到$b = c$，

从$a \cdot b = 0$中，不一定得到$a = 0$，或$b = 0$。

a是环R的元，在R中有$b \neq 0$，使$a \cdot b = 0$，那么a叫R的左零因子，一个元如果是左零因子，同时又是右零因子，就叫零因子。

在一个环$(R, +, \cdot)$中，一般情况下，半群不一定有单位元，若半群中有单位元，则说R是一个有单位元的环。环有单位元，它的子环不一定有单位元。如果子环有单位元，这两个单位元未必一致。

在有单位元的环中，左单位元也就是右单位元，也就是单位元。而且是唯一的；在没有单位元的环中，右单位元，左单位元不能同时存在。可能，一个环有不只一个左单位元，而没有右单位元。也可能有不只一个右单位元，而没有左单位元。

在有单位元的环中，每一元未必都有逆元，有逆元的元，叫可逆元。例如零元就没有逆元，单位元e的逆元就是它自己，零因子同样也没逆元。

66. 什么叫体？

一个环F，含有非零的元，并且所有非零的元对乘法形

成群，F就叫体。一个可交换体称为域。

体有加法、乘法两种运算，并且所有元对加法成加群，所有非零元对乘法也成群，但不一定是可换群，联系加法和乘法的是分配律，因而体中任意两元能够施行加减乘除。当然零元不能除任何元。

一个体至少包含两个元，一个是加群的零元，另一个是乘群的单位元。每个非零的元都有逆元。所以它不是零因子。于是体是无零因子环。

体有以下性质：

1° 元数大于 1 的有穷无零因子环就是一个体。

这是因为环中非零元满足乘法消去律，而且它对除法也是闭合的。因此环中所有非零元对乘法成群。故知这环成为体。

2° 环成体的充要条件是：对于R中任意两元$a \neq 0$，b，方程$ax=b$（或$xa=b$）在R中有解。

必要性很明显，现在只证明充分性：

若a，b是R中任意非零的两元，

从$ax=b$，$by=x$，有

$$aby=ax=b,$$

于是$ab \neq 0$，

这就是说，R中任意非零的两元之积，仍然是非零的元。因此，R是无零因子环。

又从$ae=a$，有

$$a(e^2-e)=0,$$

$e^2 = e$，所以 e 是 R 的单位元。

再从 $aa' = e$，所以 a' 是 a 的右逆元。

但 R 是无零因子环，所以 a' 也是 a 的逆元。

于是 R 中所有非零元对乘法成群，

所以 R 是体。充分条件成立。

67. 数集都能构成数环吗？

根据环的定义，数环就是一个数集，它的任意两数的和、差、积仍属于这个数集者。凡不符合上述条件者，不能构成数环。所以不是所有数集都能构成数环。

现在，我们对以下数集判别如下：

1° 零集是一个数环：

因为 $0 + 0 = 0$

$0 - 0 = 0$

$0 \cdot 0 = 0$

所以零集是个数环，而且是最小的数环。

2° 整数集 Z 是一个数环：

因为若 a，b 为整数，则

$a + b$，$a - b$，ab 均为整数。

所以 Z 是一个数环。

3° 有理数集 Q 是一个数环。

若 a，$b\in Q$，则

$$(a+b)\in Q,\ (a-b)\in Q,\ ab\in Q.$$

所以Q为数环。

4° 实数集R是一个数环。

若a，$b\in R$，

则$(a+b)\in R$，

$(a-b)\in R$

$ab\in R$，

所以R为数环。

5° 复数集C是一个数集，那么也是一个数环。

证明：若任意二复数：

$$x=(a,\ b)$$

$$y=(c,\ d)$$

显然$x+y=(a+c,\ b+d)\in C$

$$x-y=(a-c,\ b-d)\in C$$

$$xy=(ac-bd,\ ad+bc)\in C$$

所以C为一个数环。

6° 若a，b为整数，则形如$a+b\sqrt{5}$的数集为一个数环：

若 $a_1+b_1\sqrt{5}$、$a_2+b_2\sqrt{5}$为这个数集中的任意两个数，显然它们的和，差，积

$$(a_1+a_2)+(b_1+b_2)\sqrt{5},$$

$$(a_1-a_2)+(b_1-b_2)\sqrt{5},$$

$$(a_1a_2+5b_1b_2)+(a_1b_2+a_2b_1)\sqrt{5}$$

仍属于这个数集，故$a+b\sqrt{5}$为一个数环。

但是，有一些数集并不构成数环，例如

7° 自然数集不是数环。

若x，y为任意自然数，

虽然$x+y$，xy仍为自然数。

但$x-y$不一定为自然数。

所以自然数集不是数环。

8° 无理数集不是数环：

若a，b为无理数，显然

$a+b$，$a-b$均为无理数，

但ab不一定为无理数。

所以无理数集不是数环。

68．什么叫格？

若半序集为S，它的一个子集为H，H有上界u ($u\in S$)，其性质为：

对于H中每个元素h，都有

$$h<u.$$

若H的任一个上界V，适合$u<v$。则u叫H的最小上界，记为$Lub\ H$。

类似的，我们有：若l是H的下界，对任意一个下界

m，适合 $m < l$，则 l 叫 H 的最大下界，记为 $glb\ H$。

如果一个半序集 L，它的任意两个元素，都有一个最小上界和一个最大下界，则 L 叫格。

$\cup$、$\cap$ 称为格 L 的代数运算。

$\cup$、$\cap$ 有以下运算规律：

1° 交换律：

$a \cup b = b \cup a$。

$a \cap b = b \cap a$。

2° 结合律：

$a \cup (b \cup c) = (a \cup b) \cup c$。

$a \cap (b \cap c) = (a \cap b) \cap c$。

3° 吸收律：

$a \cup (a \cap b) = a$

$a \cap (a \cup b) = a$。

4° 幂等律：

$a \cup a = a$

$a \cap a = a$

正因为格有上述运算规律，格也可另定义如下：

一个集 L，如果在其元素之间，有运算 $\cup$ 和 $\cap$，即对 L 中任意元素 a，b，总有

$a \cup b$，$a \cap b$，且对任意元 a，b，c，交换律、结合律、吸收律、幂等律均成立，

则 L 叫格。

若在 L 中，除了上述运算律外，还适合：

$$a\cup(b\cap c)=(a\cup b)\cap(a\cup c)$$

$$a\cap(b\cup c)=(a\cap b)\cup(a\cap c).$$

这时，L叫分配格，有补的分配格叫布尔格。

69. 什么叫集合的同构？

如所周知，每个集合都包含一组元素，在一般情况下，这些元素没有什么结构，但当集合中引进了运算或变换时，集合就有了结构。结构规定着元素之间的关系。

法国布尔巴基(Bourbaki)学派是结构概念的创始者，他们用公理化方法，把数学分支中最基本最重要的出发点分离出来，加以比较，形成了结构概念。他们把结构分为三类：即包有群、环、体、线性空间的代数结构；包有半序、全序、良序等的序结构；以及包有距离、紧性、连通性等的拓扑结构三种，这三种结构叫母结构，每类母结构又有一些子结构。

从结构的观点来分析问题，就出现了集合同构的概念。由于具有同构性质的一些结构，本质上是同一种结构，因此，同构概念在集合论中占有重要地位。

若两个集合M、N，它们对分别定义的运算$\circ$和$*$各满足同一组公理，如果有一一对应法则φ，使M和N中的元素

及各自的运算结果都能一一对应起来，即：

$$x \in M, \ x \longleftrightarrow y = \varphi(x) \in N,$$

且 $x_1, \ x_2 \in M$,

$$x_1 \circ x_2 \in M, \ x_i \longleftrightarrow y_i = \varphi(xi) \in N$$

$$(i = 1, 2)$$

$$x_1 \circ x_2 \longleftrightarrow y_1 * y_2 = \varphi(x_1 \circ x_2) \in N$$

这时，我们称

$\{M; \circ\}$与$\{N; *\}$是同构系统。M和N叫同构的集合。

换句话说，两个集合之间存在着一一对应，这种对应关系使它们的结构也对应起来，则这样的集合叫同构的。

直观上看，集合的同构是说，在M内的运算$\circ$与N内的运算$*$，实质上是一样的。

70．什么是数学归纳法？

数学归纳法是数学中从特殊到一般的推理方法，它的基本思想是：

如果验证一个命题结论对自然数 1 正确，而且由对某一自然数 k 正确，能推导出对$k+1$也正确，那么就可以推出对一切自然数，命题结论都正确。

数学归纳法的证题步骤是：

1° 验证命题对于$n=1$成立；

2° 在假定对 $n=k$ 成立的条件下，论证命题对于 $n=k+1$ 也成立。

因为命题当 $n=1$ 成立，由2°知命题对 $n=2$ 也成立，再由2°知，命题对 $n=3$ 也成立，继续下去，可得命题对一切 n 都成立。

例如　利用数学归纳法，求证

$$(1+a)^n \geqslant 1+na.$$

证明： 1°当 $n=1$ 时，命题成立。

2°假定 $n=k$ 时，命题成立，即

$$(1+a)^k \geqslant 1+ak,$$

两边乘 $(1+a)$，得

$$(1+a)^{k+1} \geqslant 1+ak+a+a^2k$$

显然 $(1+a)^{k+1} \geqslant 1+a(k+1)$

所以命题对任意 n 均成立。

这里应十分注意，数学归纳法的两个步骤是不能分割的，缺少任何一条都是不允许的。1°是推证的基础，2°是推证的依据，对任何一个命题，只验证1°，不能证明命题的普遍性，当然只证明2°，不验证1°也是不正确的。

例如　有命题“任何自然数都大于在它后面的一个自然数”。

这个命题显然是错误的，但如果只证明2°，不验证1°，就有：

设命题对 k 是正确的，即

$$k>k+1,$$

两边加1，有$k+1>k+2$

所以命题对$k+1$也是正确的，从而错误地得到"命题对一切自然数都是正确的"的结论。

同样的道理，有的命题，只验证1°，不证明2°，仍然得不到正确的结论。

例如 $S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$.

若$S_n=\frac{n+1}{3n+1}$,

当$n=1$时，命题是正确的，

但从$S_k=\frac{k+1}{3k+1}$却不能推证

$$S_{k+1}=\frac{k+2}{3k+2}.$$

数学归纳法，允许有不同的表现形式，如：

当$n=k_0$时，命题是正确的，从假设 $n=k(\geqslant k_0)$命题是正确的，推出$n=k+1$命题也是正确的，那么$n\geqslant k_0$时都正确。

例 求证当$n>-4$时，

$(n+3)(n+4)\geqslant 0$.

证明：1°当 $n=-4$时，命题成立。

2°假设 $n=k(k\geqslant-4)$时，命题成立。

由$[(k+1)+3][(k+1)+4]=(k+4)(k+5)$

$=(k+3)(k+4)+2k+8$

$\geqslant(k+3)(k+4)$

（$k\geqslant-4$时，$2k+8\geqslant 0$）

所以命题对 $n=k+1$ 成立，

即得所证。

71. 什么是超穷归纳法？

我们已经知道，数学归纳法是在自然数集范围内对命题进行论证的。作为一种推广，在整序集范围内论证命题时，有超穷归纳法。

超穷归纳法的基本思想是：

W 为一个整序集，p 为一个性质；

如果命题"若 $x<\beta$ 时，x 有性质 p，则 β 也有性质 p"

成立时，则 W 的所有元素都有性质 p。

现在，我们作以下证明：

若 W 中有元素不具有性质 p，把这种元素组成 W 的一个子集，设 β 为其极小元素。

β 不具有性质 p，而小于 β 的元素均有性质 p。显然这和命题所设矛盾。

因此得：W 中所有元素都具有性质 p。

换句话说，要证明 W 的所有元素，都具有性质 p，只须在 $x<\beta$ 时，x 具有性质 p 的条件下，证明 β 也具有性质 p 就够了。

若 β_0 为 W 的起始元素，因为 W 中无元素小于 β_0，所以可

以认为$x<\beta_0$时，x具有性质p，因而β_0具有性质p。

超穷归纳法可以用序数来表述：即p为一个性质，如果“当小于σ的所有序数均具有性质p时，σ就具有性质p”成立，则任何序数均具有性质p。

例 证明整序集的序数$\geqslant$子集的序数。

证：若对序数小于σ的整序集命题成立，

则对序数为σ的任一整序集W，命题也成立，用反证法，若命题不成立，

则W必含一个子集，其序数大于σ，若这个子集为A，序数为$\sigma+1$，因为$\sigma+1$不是极限数，于是A必有极大元β，

令A^*为A中所有小于β的元素作成的集合，显然A^*为整序集，且序数为σ。

但A^*应含于W的真前段$A(\beta)$中，

而$A(\beta)$的序数应小于序数σ，

故有假设知：

$A(\beta)$的任何子集的序数恒$\leqslant A(\beta)$的序数。

特别的有

$$\overline{\overline{A^*}}\leqslant\overline{\overline{A(\beta)}}$$

从而得

$$\sigma=\overline{\overline{A^*}}\leqslant\overline{\overline{A(\beta)}}<\overline{\overline{W}}=\sigma$$

此矛盾表明：

对序数为σ的整序集，有

整序集的序数$\geqslant$子集的序数。

72. 为什么下面各例不能构成集合?

(1) 很大的数的全体

很大的数是一个不确定的概念,究竟大到什么程度算很大的数,是不清楚的。例如:100,1253,85000,50亿,……等等都不知道是不是属于这个全体。因此不能构成集合。

(2) 某个班级中高个子学生的全体

高个子学生是不确定的概念,从这个班级中任选一个学生,都没法判断这个学生是不是高个子,身高175厘米,身高182厘米,身高190厘米都不能说是高个子的标准。

(3) 比较小的正整数的全体

显然1是最小的正整数,但比较小的正整数不清楚是哪些,随意从1,2,3,…中取一个数,无法判断它是不是比较小的。

(4) 接近于零的数的全体

这也是个不确定的概念,怎样接近零,含义不明确,所以也不能构成集合。

(5) $\sqrt{2}$的近似值的全体

$\sqrt{2}$的近似值是不确定的,是随主观标准而取值的,例如2可以作$\sqrt{2}$的近似数,也可以不作$\sqrt{2}$的近似数,所以$\sqrt{2}$的近似值的全体不能构成集合。

(6) **大厅内美观图形的全体**

美观没有标准，含义不清，所以不能构成集合。

(7) **细长的长方形的全体**

一切长方形的全体可以构成集合，但细长的长方形是不确定的概念，它们的全体不能构成集合。

(8) **城市里老年人的全体**

这是不确定的概念，是说六十岁以上的人，还是七十岁以上的人，标准不清楚。

如果改为七十岁以上的老年人，那么显然可以构成集合了。

(9) **北京市气温较高的日子**

这里有两处是不明确的：一是较高的概念不明确，是平均气温超过40℃算较高，还是超过39℃叫较高？另一处是考虑问题的时间不明确，是一年内的气温较高日子，还是一月内的气温较高日子？

因此，我们没法统计出气温较高日子，即不能构成集合。

若把问题改成：

1984年6月份，北京市气温超过37℃的日子，那就可以构成集合了。

(10) **一切事物**

一切事物不能构成集合，因为这个集合的元素是无法想象的。

综合上述，可以看出，集合虽然没有完善的定义，但要

构成集合，必须要有确定的内容，换句话说，任何事物属于或不属于它是非常明确的。

73. 有理数集有什么性质？

有理数集记为Q，它有以下性质：

（1）有理数集关于加减乘除运算是封闭的。

意思是说，任意二数a，$b\in Q$，

则有 $a+b$，$a-b$，ab，$\frac{a}{b}(b\neq 0)$均属于Q，这就叫有理数集对加减乘除是封闭的。

显然有理数集既是数环，又是数体。

（2）任意两个正有理数p，q∈Q，必有自然数n，使n·p>q。

若 $p=\frac{a}{b}$，　$q=\frac{c}{d}$，令$n>bc$，

则有　$n\cdot p=n\cdot\frac{a}{b}>bc\cdot\frac{a}{b}$

所以有　$n\cdot p>ca$。

但 $ca\geqslant C$，$C\geqslant\frac{c}{d}$，

所以 $n\cdot p>\frac{c}{d}$，

即 $n\cdot p>q$。

（3）有理数集是有序集。

任意有理数a，b，$c\in Q$，有以下通性：

1° $a<b$，$a=b$，$a>b$中有一个，且只有一个成立。

2° 如果$a<b$，则有$b>a$；

如果$a>b$，则有$b<a$。

3° 若$a<b$，$b<c$，则$a<c$。

4° $a=a$

5° 若$a=b$，那么$b=a$。

6° 若$a=b$，$b=c$，则$a=c$。

（4）有理数集有稠密性。

意思是说，任意两个有理数之间，有无穷多个有理数。不失一般性，我们证明

$$a<\frac{a+b}{2}<b \text{ 就够了。}$$

若　$a<b$，则

$$a-\frac{a+b}{2}=\frac{a-b}{2}<0$$

所以 $a<\frac{a+b}{2}$．

同理有：

$$\frac{a+b}{2}-b=\frac{a-b}{2}<0$$

所以有 $\frac{a+b}{2}<b$，

故有

$$a<\frac{a+b}{2}<b.$$

（5）有理数集是可数集①**．**

74．实数集有什么性质？

有理数和无理数合起来统称为实数，实数集记为 R，它有以下主要性质：

（1）实数集对加减乘除运算是封闭的．

即若 α，$\beta\in R$，则 $\alpha+\beta$，$\alpha-\beta$，$\alpha\beta$，$\frac{\alpha}{\beta}(\beta\neq 0)$均属于$R$．

① 这个问题在可数集中谈过，故证明省去。

显然，实数集既是一个数环，又是一个数体。

（2）实数集是有序集。

即任意二实数α，β，

$\alpha<\beta$，$\alpha=\beta$，$\alpha>\beta$有且只有一个成立。

（3）实数集是阿基米德数体。

即在实数集中，阿基米德公理成立：

若有二实数α，β，且$\alpha<\beta$，那么有两个有理数a，b，使$a<\alpha$，$\beta<b$，

但$na>b$，

所以有 $n\alpha>\beta$，n为自然数。

（4）实数集是稠密的。即

若α，β为二实数，在α，β之间有无穷多实数。

证明：设$0\leqslant\alpha<\beta$，

$$\alpha=P_0.P_1P_2\cdots P_n\cdots$$

$$\beta=q_0.q_1q_2\cdots q_n\cdots$$

比较有穷十进小数：

$$P_0;\ P_0.P_1;\ P_0.P_1P_2;\ \cdots\cdots$$

$$q_0;\ q_0.q_1;\ q_0.q_1q_2;\ \cdots\cdots$$

因为$\alpha<\beta$，在上序列中，可依次找到

$P_0.P_1P_2\cdots P_k$小于下序列中

$$P_0.P_1P_2\cdots P_{k-1}=q_0.q_1q_2\cdots q_{k-1}$$

但$P_k<q_k$.

作十进小数　$m=P_0.P_1P_2\cdots P_kL_{k+1}L_{k+2}\cdots$

其中小数点后前k位数码和α相同，无论$L_{k+1}L_{k+2}$如何，总有$m<\beta$.

若　$P_{k+1}\neq 9$，则作为L_{k+1}可取大于P_{k+1}的任意数.

这时对L_{k+2}，L_{k+3}　有$\alpha<m$.

若　$P_{k+1}=9$，$P_{k+2}\neq 9$

我们令 $L_{k+1}=9$，L_{k+2}为大于P_{k+2}的任意数，而任意选择其余数码，这样因为P_{k+1}，$P_{k+2}\cdots$不全是9

所以总可选择数m，适合$\alpha<m$

故　$\alpha<m<\beta$,

数码 L_{k+1}，$L_{k+2}\cdots$从某一地方开始，可任意选择，因此在α，β之间，有数m的无穷集合．m可以是有理数，也可以是无理数.

(5) 实数集是不可数的.

有理数集是可数的，但实数集是不可数的，这是它们的根本区别，现在证明如下：

若　$M=\{x\mid 0<x<1\}$，那么M中一切实数可表示为：$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$其中a_i取自0，1，2，…，9，

若M是可数的，有

$M=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\alpha_n\}$

作$\beta=0.b_1b_2\cdots b_n$ 使 $bi\neq aii$,

则$\beta\notin M$与$\beta\in M$矛盾，故得证.

75. 复数集有什么性质?

形如 $a+bi$ 的数叫复数.(其中 a, b 为实数，$i=\sqrt{-1}$)一切复数构成的集合，叫复数集，记为

$$C=\{x \mid x=a+bi\}$$

复数集有以下性质:

(1) 复数集对加减乘除运算是封闭的.

若有二复数:

$\alpha_1=a_1+b_1i$

$\alpha_2=a_2+b_2i$　其中 a_1, a_2, b_1, b_2 均为实数.

1° $\alpha_1+\alpha_2=(a_1+a_2)+(b_1+b_2)i$

因为 a_1+a_2, b_1+b_2 为实数

所以 $\alpha_1+\alpha_2\in C$.

2° $\alpha_1-\alpha_2=(a_1-a_2)+(b_1-b_2)i$

因为 a_1-a_2, b_1-b_2 为实数

所以 $\alpha_1-\alpha_2\in C$.

3° $\alpha_1\cdot\alpha_2=(a_1a_2-b_1b_2)+(a_2b_1+a_1b_2)i$

因为 $a_1a_2-b_1b_2$, $a_2b_1+a_1b_2$ 为实数

所以 $\alpha_1\cdot\alpha_2\in C$.

4° $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}=\frac{a_1+b_1i}{a_2+b_2i}=\frac{(a_1a_2+b_1b_2)+(a_2b_1-a_1b_2)i}{a_2^2+b_2^2}$

因为 $\frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$ $\frac{a_2b_1-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}$ 为实数

所以 $\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\in C$

从以上运算知道，C是一个环，也是一个体。

（2）复数集的元素没有大小关系。

这里，我们首先引述元素之间有大小关系数集的性质：
若R诸元素之间，有关系“$<$”，且
1° 如果 $a<b$，则 $a\neq b$。
2° 如果 $a\neq b$，则 $a>b$，或 $a<b$。
3° 如果 $a<b$，$b<c$，则 $a<c$。
4° 如果 $a<b$ 则 $a+c<b+c$。
5° 如果 $0<a$，$0<b$，则 $0<ab$。
现在我们证明复数集不能满足上述条件：
若C为有序集，它的二个元素i，0 有

$0<i$ 或 $i<0$

如果 $0<i$

则 $0\cdot i<i^2$

即 $0<-1$

显然 $0\cdot(-1)<(-1)(-1)$

即 $0<1$

所以有 $0+1<-1+1$

即 $1<0$，

这种矛盾说明 $0<i$ 不能成立，

同理 $i<0$ 也不能成立。

所以 C 是无序的，即复数没有大小关系。

76．什么叫计算复杂性？

（1）算法

计算机算题，必须要有一个算法，粗略地说，算法就是一步一步解决问题的程序。例如解方程组所用的消去法，就叫一个算法。一个算法是不是有价值与它所需要的计算时间长短有密切关系，由于各种计算机的结构不同，它们计算问题所用的时间也会有长有短。我们通常把基本运算（加、减、乘、除，比较大小等）的次数作为每个算法所需计算时间的尺度。

众所周知，一个算法往往可用于规模大小不同的许多问题，譬如有 n 个数，按大小顺序排列，现在另有一个数，想插到 n 个数里去，方法是把它和 n 个数一一比较，直到发现比它小的数为止，然后把它插在这个数的前面，很明显，若

$n=10$，要作十次运算(比较大小)；若$n=100$，要作100次运算，等等。

这样，一个算法所需要的运算次数，可看成是问题规模的一个函数，我们称这个函数叫这个算法的计算复杂性。

(2) 两种计算复杂性

一个算法的计算复杂性，直接决定着这个算法可以应用到多大规模的问题上。例如甲算法的计算复杂性是n^3，乙算法的计算复杂性是3^n，我们用100万次的计算机计算，当$n=60$时，甲法用0.2秒，乙法却需要用10^{16}年。我们称n^3为多项式复杂性，称3^n为指数复杂性。一般说，一个算法对于任何问题的规模，它的计算时间不大于这个规模的某一个多项式函数，就叫多项式复杂性；而指数复杂性是指用一个算法去解决问题，所用时间是问题规模的一个指数函数。

两种计算复杂性有极大差别，一个问题如果没有多项式复杂性，就必然是指数复杂性。指数复杂性叫难解型问题，平常要断定一个问题是不是难解型问题，也不是一件十分容易的事。例如一个问题一百年内没有找到多项式复杂性算法，但一百年后就有可能找到这种算法。

(3) P和NP问题

本来，人们已经公认，计算机计算的标准是递归性，但只有当计算机存储量无界的大，计算时间无界的长时才能实现，显然现有的计算机都无法实现这个要求。现在提出一个

理论，如果存储量和计算时间是输入的长度的多项式复杂性算法，那么便可实现计算机计算，否则就不能计算。

在研究中，人们用图灵机[①]代表抽象化的计算机，还设计了一种实际不可能实现的非决定性图灵机，一个问题如果用图灵机工作时，有多项式复杂算法，就归于 P 类；用非决定性图灵机工作时，有多项式复杂性算法，就归于 NP 类。一个问题的答案有多项式复杂法算法检验时，这个问题就属于 NP 类，由于一些实际问题找答案难，检验答案并不难，所以多数问题属于 NP 类。这就产生了一个问题，对多项式有界的计算机说，两种计算机是否力量相同？这就叫著名的“$P=NP$？”问题。

（4）NP完全类

1972年，Karp提出，NP 类中有一小类问题，具有性质：迄今没有找到多项式复杂性算法、一旦其中有一个问题，找到这种算法时、就可以断定 $P=NP$。通常把这类问题叫 NP 完全类问题。事实上属于这一类问题的问题很多，但都找不到多项式复杂性算法，所以许多人猜想 $P\neq NP$。

① 图灵(A. M. Turing，1912—1954)英国数学家。

77. 你了解集合论创始人康托吗?

康托(G·cantor)是集合论的创始人，1845年3月3日出生在俄国的彼得堡（即现在的列宁格勒），他的父亲和母亲都是犹太人。父亲出生在丹麦的哥本哈根。因为父亲生病，康托十一岁时，迁移法兰克福居住，康托一生的大部分时间住在德国。康托十五岁时，已显示出他的数学才能，他立志要当数学家，他父亲坚持不让他从事数学研究，想让康托将来干有优厚待遇的工程师职业。当然这对康托是不愉快的。但是康托越来越显示出自己的非凡数学才能，以第一名数学优秀成绩在高中毕业。十七岁时父亲才同意康托从事数学研究，康托升入区利希大学，开始了正规数学学习。当康托十八岁时，父亲去世，于是康托转到柏林大学学习。二十二岁时因研究整数论获得柏林大学授予的学位，二十四岁时被任命为哈勒大学讲师，二十五岁被任命为副教授，三十四岁时任命为哈勒大学正教授。

康托1870年开始出版著作，1874年发表了无限集合的文章，1883年发表了《一般集合论基础》一文。在这些文章中，康托系统深入地研究了无限集合，创立了超穷序数，基数新概念，并把最低的超穷基数ω赋予可数集，给连续统更高的超穷数。还建立了一整套有关的基本定理。

康托的工作和人们的习惯是如此格格不入，例如他说从地球到月球上的线段和一厘米长线段上的点一样多。有时连康托自己也很难接受，一次康托写信给一位数学家说："我发现了它，但是我不相信它"。

康托的卓越贡献不仅在于无理数论，重要的在于他创建了集合论。正是在这个问题上，一开始他就受到攻击和非难，例如许瓦兹(A.Schwarz)看到康托《关于超穷理论的推导》一文后，写信说："我可以坦白地说，那只不过是一团令人困惑的混乱罢了，……，但愿人们能以具体问题控制住这个不幸的年轻人"。

当时反对集合论的还有康托的老师、权威数学家克隆尼克(L.Kronecher)，他认为康托创立的集合论不是数学，而是神秘主义，说康托向传统数学挑战。使康托失去了到所向往的柏林大学教学的机会。

虽然1901年勒贝格以测度论充实集合论，康托的集合论才被公认了，但康托终因遭受压抑、排挤、攻击和非难，1884年出现精神失常症状，时好时犯，直到1918年1月6日，最终死在哈勒的精神病院里。

73. 什么叫布尔代数？

在集合的运算中，已知道以下基本定律：

(1) 交换律：

1° $A\cup B=B\cup A$

2° $A\cap B=B\cap A$

(2) 结合律：

1° $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

2° $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

(3) 分配律：

1° $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

2° $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

(4) 吸收律：

1° $A\cup(A\cap B)=A$

2° $A\cap(A\cup B)=A$

(5) 基元律：

1° $\phi\cup A=A$

2° $I\cup A=I$

3° $\phi\cap A=\phi$

4° $I\cap A=A$

(6) 补元律：

1° $A \cup A' = I$

2° $A \cap A' = \phi$

在一个数学系统E中，如果有三个运算：

并∪，交∩，补′，而这三个运算满足上面列举的六个规律，并且允许任何一个元可以用它的等价元代替，那么这个系统叫布尔代数，这个名称是由于英国G·Boole首次引用这种代数的概念和性质而来。布尔代数也叫集合代数，∪、∩、′叫布尔运算。

现在介绍布尔代数的一些重要性质：

（一） 任一公式，若把∪与∩，ϕ与I，′与′互换，所得的公式叫原公式的对偶式。任一定理的对偶式，仍是一条定理。

（二） 若$f(A)$为由A及别的变元和常项作成的布尔公式，则有

$f(A) = [f(I) \cap A] \cup [f(\phi) \cap A']$

$f(A) = [f(\phi) \cup A] \cap [f(I) \cup A']$

前者叫并交式，后者叫交并式。

（三） 若$f(A)$与$g(A)$为两个布尔式，

如果 $f(\phi) = g(\phi)$

$f(I) = g(I)$

则对任何 A，必有

$f(A) = g(A)$

这就是说，两个布尔式$f(A)$，$g(A)$是否相等，只要看它们对空集(ϕ)，全集(I)是否相等就可以了。

（四） 两个布尔代数之间，若保持∪，∩，′一一对应，称它们为布尔同构。

79. 什么是模糊集合？

在日常生活中，随时随地都会遇到模糊集合，如“高个子”集合，“胖人”集合，“年青人”集合，等等都是。这些模糊概念用数学语言来描述，用数学方法来计算，通过定量分析来判断它们的性质。这就是学习模糊集合的任务。

经过研究，人们找到了一种切合实际的方法来描述这种模糊现象。根据一个事物的模糊现象，划出一个范围，这个范围叫闭区间，用一定实数描述模糊现象的不同程度。这个实数叫“隶属度”或“隶属函数”。

在集合论中，元素x是否属于集合S，有两种可能，若$x\in S$，则不能有$x\notin S$；

若$x\notin S$，就不能有$x\in S$。

用特征函数e_S表示，有

当$x\in S$时，$e_S(x)=1$；

当$x\notin S$时，$e_S(x)=0$。

显然，e_S的定义域是全集u，值域的集合是$\{0, 1\}$，这叫二值逻辑。

对于一些模糊现象，用二值逻辑来表示就远远不够了。

用隶属函数来表示，就出现了多值逻辑。

例如要说明一个人是不是高个子，若超过180厘米是高个子，但不超过180厘米的却不能叫低个子。这就是一个模糊概念。我们用隶属函数$\mu_A(x)$表示为：

$$\mu_A(x)\begin{cases} 0.01 & x\leqslant 140 \\ 0.20 & 140<x\leqslant 150 \\ 0.50 & 150<x\leqslant 160 \\ 0.80 & 160<x\leqslant 170 \\ 0.90 & 170<x\leqslant 180 \\ 1 & x>180 \end{cases}$$

$\mu_A(x)$表示x对于集合A的隶属程度，$\mu_A(x)$越接近1，x隶属A的程度越高，$\mu_A(x)$越接近0，隶属程度越低，当$\mu_A(x)=0$时，表示x不隶属于A。

总之，$\mu_A(x)$可以是0，0.01，0.2，

0.95，0.90，0.80，…… 1中的任一个，它们分别表示属于高个子集合的不同程度，高个子集合就叫模糊集合。

模糊集合是美国学者查德(L·A·Zadeh)首创的。十多年来，发展极快，已经成为一门崭新的数学分支。在各方面的应用，充分显示出这门新兴学科的强大生命力。但是这个年轻学科还需要不断丰富、充实、完善、发展。

80. 什么叫悖论？

悖论（Paradox，Antinomy）也叫"逆论"或"反论"，它包含一切与我们日常经验或直觉相矛盾的数学结论。

我们从集合的定义谈起：康托给集合下的定义是：把一定的并且可以明确识别的东西（直观的对象或思维的对象），放在一起，叫做集合。根据上述定义，英国数学家罗素（B.Russell）1902年提出一个问题，这个问题就是著名的罗素悖论。

罗素说，集合分为两类：

第一类是：集合本身不是集合的元素，

即 $M \notin M$；

第二类是：集合本身是集合的一个元素，

即 $M \in M$

罗素推断，任何一个集合，不属于第一类集合，便属于第二类集合，二者必居其一。

接着罗素问道：把所有本身不是它的元素的那些集合汇总起来，组成一个集合 Q，那么 Q 属于哪一类集合呢？

显然，可以看出 Q 不论属于哪一类集合，都是矛盾的，因为：

1° 假若 Q 是第一类集合，按 Q 的定义，显然有 $Q \in Q$，

但这又成了第二类集合；

2° 若Q是第二类集合，自然有 $Q\in Q$，但Q的元素都是第一类集合，所以Q又成了第一类集合。

在罗素悖论出现之前，人们也曾发现过悖论，但均未引起人们的足够重视，只是在罗素悖论出现后，才震动了数学界。

目前悖论流行的定义方法有多种，例如：

“悖论是一种导致逻辑矛盾的命题，这种命题如果承认它是真的，那么它又是假的；如果承认它是假的，那么它又是真的”。

“悖论是指一个命题A，从A出发，找到一个语句B，然后假定B真，可推出B假；若假定B假，又可推出B真”。

“一个命题构成一个悖论，如果由它的真可推出它的假，而由它的假，又可以推出它的真”。

……等等。

上述这些定义方法，都不是完善的，因为

1° 任何一个悖论都相对地被包含在某个理论体系中，换句话说，悖论都相对于某个理论体系。

2° 并非每个悖论都能陈述为一个命题，有的悖论要有一个推理过程来表现。

3° 一些悖论不完全归结为“肯定等价否定”，常常可用在一个系统中两个并存的互相矛盾的命题来表述。

为了补充上述定义的不足，A.A.Fraenkel 和 Bar-Hillel 对悖论作了比较完善的定义：

如果某一理论的公理和推理原则看上去是合理的，但在这个理论中却推出了两个互相矛盾的命题，或者证明了这样一个复合命题，它表现为两个互相矛盾命题的等价式，那么，我们就说这个理论包含了一个悖论。

应当指出的，有一类命题和悖论十分近似，人们常常会把它们误认成悖论，而事实上它们并不是悖论。例如：

1° 一个克里特人说：“所有的克里特人，所说的每一句话都是谎话”。

如果这句话是真的，因为是一个克里特人说的话，所以这句话又必须是假的；

反之，若这句话是假的，则并不导致任何矛盾。

2° 一个人说：“上帝是全能的，全能就是胜过一切”。

这句话真假如何？

若是真的，那么上帝可以创造一个击败自己的对手。这样上帝又不是全能的了；如果上帝不能创造出击败自己的对手来，那么上帝自然又不是全能的了。

即这句话若是假话，则不产生任何矛盾。

所以上述二例均不能构成悖论。

81．常见的悖论有哪些？

悖论是属于领域广泛、定义严格的数学分支的一个组成部分。不少数学家都研究过这一类问题。欧拉对七桥问题的分析，希尔伯特对切割几何图形定理的证明，冯·诺伊曼莫基的博奕论，等等都涉及到悖论问题。

现在我们介绍一些常见的悖论如下：

（1）康托悖论

若 u 是所有集合组成的集合，$P(u)$是 u 的一切子集合构成的幂集合，那么 u 和$P(u)$哪个集合的势大呢？

显然，由康托定理知道，

$$\overline{\overline{u}} < \overline{\overline{P(u)}}$$

另一方面，因为 u 是所有集合组成的集合，而 $P(u)$ 是 u 的幂集合，所以

$$P(u) \subseteq u,$$

因此又有 $\overline{\overline{P(u)}} \leqslant \overline{\overline{u}}$，

这就构成了一个悖论。

（2）黑板上的错句

在黑板上标出三个有错误的句子：

1° $2+2=4$

2° $3\times 6=17$

3° $8\div 4=2$

4° $13-6=5$

5° $5+4=9$

一方面看出，只有2°和4°是错误的，所以“有三个句子错了”的断语是错误的。

另方面，这个断语本身也是一个错句。

（3）理发师悖论

这个悖论是罗素提出来的：有一个理发师写着告示，规定来理发的人的条件是：

凡是自己不给自己理发的人，理发师就给他理发；凡是自己给自己理发的人，理发师不给这样的人理发。

现在问这位理发师的头发该由谁去理呢？

显然，不论谁给这位理发师理发，都产生矛盾，因为：

1° 若理发师自己理自己的头发，按规定，他属于自己给自己理发的人，那么理发师不应该去给（他自己）理发。

2° 若理发师不给自己理发，按规定，他属于自己不给自己理发的人，这样理发师又要给（他自己）理发。

（4）无穷的倒退悖论

鸡和鸡蛋，到底先有哪个？

如果说先有蛋，不行，因为蛋是鸡生下来的；如果说先

有鸡，也不行，因为鸡是从蛋里生出来的。

这就陷入了无穷的倒退之中。

（5）鳄鱼的矛盾

一条鳄鱼从母亲手中抢走了一个小孩，它对母亲说：我会不会吃掉你的孩子？若你答对了，我就把孩子送还给你。

母亲回答：你要吃掉我的孩子。

于是鳄鱼陷入矛盾，因为如果把孩子还给母亲，那说明母亲答错了，显然鳄鱼应当吃掉小孩；反之，如果不把孩子还给母亲，这表明母亲答对了，鳄鱼应当把孩子还给母亲。

（6）两人悖论

若A、B二人，A说B的话是假的；B说A的话是真的，那么到底谁说的话是真的呢？

若A说的话是真的，则B说的话应当是假的，显然B说的话又必须是假的；

若A说的话是假的，则B说的话应当是真的，显然A说的话又必须是真的。

不论哪一种情况都导致矛盾。

（7）电梯悖论

一幢大楼，电梯运行在每层停留时间是相等的。甲靠近顶层，乙靠近底层，而甲所遇到停下的电梯，都是上楼的，而乙遇到停下的电梯，多数是下楼的。

这是什么原因呢？因为对甲说，上楼的概率高于下楼的概率；对乙说，下楼的概率多于上楼的概率。

（8）记数悖论

要记出一个数，需要最低限度的时间，而在有限时间内，有限多的人，只能记出有限多个数；但数是无限多的。显然在二十世纪内，地球上的人，不能记出所有的数，在没有记出的数中必有一个最小的，然而这个数在二十世纪内又记出来了。因此出现一个数，又记出又没记出。

（9）未知的宇宙

一个宇宙飞船发射出去，沿着一条直线飞行，它将离地球越来越远吗？

答案是：未必如此。

我们可以想象：

点世界：只有一个点，维数为零。

线世界：线是无限长的，可向两端永远走下去．维数是1。

如果线是封闭的，就成为一个无端点的线，不管怎样，会回到原处。

面世界：维数为2，可以向任何方向走下去，如果是有限的、无边界的曲面，不管向哪个方向走，只要线是直的，就会回到原点上。

体世界：维数为3，有可能所有方向都是无限的，

也有可能，是弯曲的，无边界的、有限的宇宙，因此会回到出发点。

（10）选举悖论

甲、乙、丙为候选人，民意测验为：选民中$\frac{2}{3}$的人愿意选甲，不愿意选乙；$\frac{2}{3}$的人愿意选乙，不愿意选丙，是不是愿意选甲，不愿意选丙的人多？

这也是一种悖论，它产生的原因是把对候选人的好恶关系当成传递的。

（11）基诺悖论

一个跑步人，到达终点之前，必须经过中点，然后到$\frac{3}{4}$处，再经过$\frac{1}{4}$的中点、中点无穷多，所以永远达不到终点。

这是不对的，因为每跑一半不是都用一分钟时间，而是用前一段时间的一半，两分钟就可以到达终点。

常见的和新的悖论还可以举出许多，但想排除这些悖论，并不都是轻而易举的。

82. 什么是划分公理?

划分公理是策梅罗(Zermelo)为消除悖论而提出来的，这个公理是说：

设L为任一集合，$R(\theta)$是与L的变元θ有关的一句话，则L中的θ，使$R(\theta)$成真话的全体$L_{R(\theta)}$为L的一个子集。

应用这个公理，可以证明以下定理：

"任何一集L必具有一子集不是L的元素"。

证明 设$\theta\notin\theta$，我们来证明$L_{R(\theta)}\notin L$，

用反证法，若$L_{R(\theta)}\in L$，

则$L_{R(\theta)}$必使

$\theta\notin\theta$为真，

或使$\theta\notin\theta$为假，

因而 $L_{R(\theta)}\in L_{R(\theta)}$与

$L_{R(\theta)}\notin L_{R(\theta)}$必有一个成立。

若 $L_{R(\theta)}\in L_{R(\theta)}$成立，

因$L_{R(\theta)}$中的每一个元均使$\theta\notin\theta$为真，

于是$L_{R(\theta)}$应使$\theta\notin\theta$为真，

所以有 $L_{R(\theta)}\notin L_{R(\theta)}$，

若 $L_{R(\theta)}\notin L_{R(\theta)}$，这表示

L的一元$L_{R(\theta)}$使$\theta \notin \theta$为真。

所以又推出　$L_{R(\theta)} \in L_{R(\theta)}$

从而知道$L_{R(\theta)} \in L$不能成立，

故有　$L_{R(\theta)} \notin L$，但$L_{R(\theta)} \subseteq L$。

有了这个定理，策梅罗断言，一切本身不是它自己元素的集，不能称为集合，从而排除了罗素悖论。但是只有划分公理，却不能排除一切悖论。

例如　由划分公理知道：一切集合所组成的集合$\mathfrak{A}$不是集合。否则若$\mathfrak{A}$为一集合，则应有一个A子集不是$\mathfrak{A}$的元素。因$\mathfrak{A}$为集合，则A必为集合，而$A \notin \mathfrak{A}$表示$\mathfrak{A}$不是一切集合所组成的集合，至少A就没有包括进去。

另一方面，由概括原理知道，一切集合所组成的集合为一集合，因为

若　$\mathfrak{A} = \{S \mid S\text{为一集合}\}$

显然$\mathfrak{A}$又为一集合。

上述矛盾表明，划分公理也不是十分完善的，因为它只是概括原理的一种推论。

即若把$R(\theta)$作为L的一种性质，那么$L_{R(\theta)}$显然是一个集合。

由此可见，概括原理本身就是矛盾的，它不能排除一切悖论，当然由概括原理推导出来的划分公理也不能排除一切悖论。仅就排除罗素悖论而言，划分公理必须和一些原始概念、推理原则和基本原理结合进行才能有效。换句话说，划分公理必须要有它的公理系统。

83. 所有集合为元素的集合存在吗？

人们常常问：所有集合为元素的集合存在吗？回答是否定的。

现在我们看下面矛盾：

(1) 所有集合为元素的集合不是集合。

如若不然，假设这个集合为E；则E有一子集M不是E的元素，因为E为集合，M也必为集合。$M \notin E$表示E不是所有集合的集合，至少M丢掉了，从而和E的定义相矛盾；

(2) 所有集合为元素的集合是一个集合。

这是明显的，令集合S为一性质，即有

$$E = \{S \mid S\text{为一集合}\}.$$

这个矛盾的发生，根本原因是由于用集合定义的对象又作为这个集合的元素而造成的。集合用集合的元素来定义，往往导至悖论的产生，例如若S是所有集合为元素的集合，显然S又是S的一个元素。

为了得到所有集合，我们再来研究集合的分层问题。

把自身不是集合的事物汇集起来，叫做原子集合V_0。在此基础上，我们建立无穷的层次

$$V_0 \subseteq V_1 \subseteq V_2 \subseteq \cdots\cdots$$

这里，V_1包含原子集合及其幂集合，

即　$V_1 = V_0 \cup p(V_0)$，

V_2包含原子集合V_0，V_1及它们的幂集合，

即　$V_2 = V_1 \cup p(V_1) = V_0 \cup p(V_0) \cup p(V_1)$

推广有　$V_{n+1} = V_n \cup p(V_n)$。

但是，这个无穷的层次也包含不完所有集合。

为此，我们取

$$V_\omega = V_0 \cup V_1 \cup \cdots\cdots,$$

且$V_{\omega+1} = V_\omega \cup p(V_\omega)$，

继续下去，对于α，有

$$V_{\alpha+1} = V_\alpha \cup p(V_\alpha),$$

所以，每一个集合都出现在这个无穷层次中的一个位置上。

这样虽然无穷分层可以包含无穷多个集合，但仍然不能找到以所有集合为元素的集合，因为这是无法想象的。

这个问题启示我们，当我们想得到一类事物的全体时，往往是办不到的。我们面临着：好象已经有了一切时，其实并不是一切的矛盾。

84. 什么叫区间?

介于两个实数之间的实数集合叫区间，两个实数叫区间的端点。

若a，$b\in R$，$a<b$，则

$[a, b]=\{x\in R \mid a\leqslant x\leqslant b\}$叫以$a$，$b$为端点的闭区间；

$]a, b[$①$=\{x\in R \mid a<x<b\}$叫以a，b为端点的开区间；

$$[a, b[=\{x\in R \mid a\leqslant x<b\}$$

或$]a, b]=\{x\in R \mid a<x\leqslant b\}$叫以$a$，$b$为端点的半闭区间。

以a，b为端点的开、闭、和半开区间统称为有限区间。a叫下端点，b叫上端点。通常$b-a$叫区间的长。

我们令：

$$[a, +\infty[=\{x\in R \mid x\geqslant a\},$$

$]-\infty, b]=\{x\in R \mid x\leqslant b\}$分别叫以$a$或$b$为端点的无穷闭区间；且

$]a, +\infty[=\{x\in R \mid x>a\}$

$]-\infty, b[=\{x\in R \mid x<b\}$分别叫以$a$或$b$为端点

① 是布尔巴基的记号。

的无穷开区间。

实数 R 可表示为：

$R=\,]-\infty，+\infty[$，这也叫无穷区间，它既是闭的，又是开的。

所有无穷开区间与无穷闭区间统称为无穷区间。

所有有限区间和无穷区间统称区间。

当 $a=b$ 时，

$]a，b[$，$[a，b[$，$]a，b]$ 都是空集，这种区间也称有限区间。

但 $[a，a]$ 却是一个单元集 $\{a\}$，是一个退化区间，长度为零。

根据上面定义，显然有以下要求：

1° 若 $a<b$，则 a 端在左，b 端在右，不能颠倒，即只能写成 $[a，b]$，$]a，b[$，不能写成 $[b，a]$，$]b，a[$。

2° 若为无穷区间，应注意 $\pm\infty$，

若为 $+\infty$，则写在右端。

若为 $-\infty$，则写在左端。

例如区间 $]-2+\infty[$，不应写成 $]+\infty，-2[$，而且 $[2，+\infty[$ 不应写成 $[2，+\infty]$。

85. 什么叫度量空间?

A是一个集合，A中任意两元素x，y，对应一个实数$\rho(x, y)$。如果对于任意x，y，$z\in A$，有：

(1) $\rho(x, y)\geqslant 0$，并且$\rho(x, y)=0$，当且仅当$x=y$。

(2) $\rho(x, y)=\rho(y, x)$。

(3) $\rho(x, z)\leqslant\rho(x, y)+\rho(y, z)$。

则集合A和ρ，叫作一个度量空间，记为(A, ρ)。ρ叫作(A, e)的距离函数。$\rho(x, y)$叫作两点x，y之间的距离。

自点a的距离小于给定的$\varepsilon>0$的一切点的集，叫a的邻域，也叫ε邻域，ε叫邻域的半径。

在直线上点a的ε邻域，就叫区间$(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$。在平面上点$a$的邻域，具有中心$a$，半径$\varepsilon$的圆的内部，我们用$U(a, \varepsilon)$表示$a$的$\varepsilon$邻域。

点a叫集合M的接触点，如果点a的每个邻域至少含有集M的一个点的话。

集合M的一切接触点的集叫M的闭包，用$[M]$表示，显然有$M\subseteq[M]$。

点a是M的接触点，分两种情况：

1° 点的每个邻域皆含有集合 M 的无穷多个点，此时 a 叫 M 的极限点；

2° 仅包含集合 M 的有穷多个点的邻域 $U(a, \varepsilon)$，此时，a 属于此集合，并存在不包含集合 M 的任何不同于 a 的点的邻域 $U(a, \varepsilon')$。

集合 M 中，那些不是 M 的极限点的点，叫做 M 的孤立点。

点 $a\in M$ 成为孤立点的充要条件是：

它有一个邻域，除 a 外，不含 M 的任何点。

集合 M 的一切极限点的集，叫 M 的导集，用 M' 表示。

所以 $[M]=M\cup M'$

集合 M 的极限点 x 和 M 有两种关系：

若 $x\in M$，则 M 叫闭集合；

若 $x\notin M$，则 M 叫开集合。

86. 什么是波魏定理？

波魏定理即 *Bolzano—Weierstrass* 定理，这个定理是说：任何直线上的有界无限点集，至少有一个极限点。

我们引叙波魏二人的证明如下：

令 E 是直线上的有界无限点集，因为 E 有界，所以 E 一定在某个间隔 $[a, b]$ 中，把这个间隔平分一下，因为 E 是无

限点集，所以平分的两个间隔中至少有一个包含无限多个 E 的点，记这个间隔为l_1（如果两个间隔都有无限多个E的点，可任取一个为l_1）．然后再把 l_1 平分成两个相等的间隔，在这两个间隔中，至少有一个包含无限多个E 的点，记这个间隔为 l_2,按上述方法继续作下去,每次在平分的两个间隔中取包含无限多个 E的点的那个小间隔，显然可得到l_1，l_2，l_3，……，l_n 叙列。这个叙列有以下性质：

1° 每个间隔 l_{n+1}都包含在它前面的那个间隔 l_n中．

2° 每个间隔都包含无限多个 E 的点,由叙列构造可以证明这一点．

3° $[a, b]$的长度为 l，l_n 的长度为$\frac{l}{2^n}$.

$$\text{所以}\ \lim_{n\to\infty} l_n = 0$$

因而存在一个 x，属于所有间隔 l_n.

现在证明 x 是E 的极限点：

若 δ 是任一个包含 x 的区间，

则 δ 必含有无限多个点集 E 的点，

因为每一个 l_n 都包含着 x，而 ln 又趋近于 0，所以n充分大时，l_n 必整个包含在 δ 中．

由于 l_n 包有无限多个 E 的点，所以 x 是 E 的极限点．

仿上述证明，同样可以得到平面上的波魏定理证明．

87. 闭集和开集有些什么性质？

它们的主要性质有：

（1）两个闭集合的和集是闭集合。

证明：若F_1、F_2为两个闭集合，

则x不属于$F_1 \cup F_2$时，

x既不属于F_1，也不属于F_2。

因为F_1，F_2为闭集合，

那么有ε_1，使F_1中没有一个点与x的距离小于ε_1，也存在ε_2，使F_2中没有一个点与x的距离小于ε_2，

如果$\varepsilon_1 < \varepsilon_2$，那么

无论在F_1或F_2中，都没有一个点与x点的距离小于ε_1，这样，x就不是$F_1 \cup F_2$的极限点。

所以$F_1 \cup F_2$是闭集合。

（2）任意个闭集的交集，仍然是闭集。

证明：若一族闭集合$\{F_\alpha\}$，它们的交为F，

设x不属于F，则

x至少不属于$\{F_\alpha\}$中的某一个集合，譬如F_{α_0}，

因为F_{α_0}为闭集，故有ε，使

F_{α_0}中没有一点和 x 点的距离小于 ε。

显然 F 中没有一个点与 x 的距离小于 ε，

因而F为一闭集。

(3) 两个开集G_1，G_2的交集$G_1 \cap G_2$是开集。

证明： 若 $x \in G_1 \cap G_2$，

则 $x \in G_1$

而G_1为开集，

所以存在 $\delta_1 > 0$，使

满足$|x-y| < \delta_1$的y都属于G_1，

同理，存在$\delta_2 > 0$，使满足$|x-y| < \delta_2$的y都属于G_2。

取 $\delta = min\{\delta_1, \delta_2\}$，$\delta > 0$

若$|x-y| < \delta$，则y同属于G_1、G_2

即y属于$G_1 \cap G_2$。

这里，应特别注意的是：有穷个开集的交集虽是开集，但任意多个开集之交就不是开集了。

例如 $G_n = \{-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\}$　　$n \in N$

显然只有 $x = 0$ 是它们的公共点。

但只含一个点的集不是开集。

(4) 任意开集系的和集是开集。

证明： 设U是$\mathscr{Y}$的并集，$x \in U$

则存在集 $G\in\mathscr{Y}$，使 $x\in G$，

由于G是开集，存在$\delta>0$，使

$|x-y|<\delta$的y都属于G。

因而属于U（因为$G\subset U$）

所以U是开集。

（5）开集的余集是闭集，闭集的余集是开集。

证明：G为开集，我们证明$R'-G$为闭集。

若$x\in G$，存在$\delta>0$，使

$|x-y|<\delta$时，$y\in G$。

由于不存在$y\in R'-G$，使$|x-y|<\delta$

所以x不可能是$R'-G$的闭包点。

这样，$R'-G$含有它的全部闭包点。

因此是闭集。

另方面，设F为闭集，$x\in R'-F$，

由于x不是F的闭包点，故存在$\delta>0$，

使满足$|x-y|<\delta$的$y\in F$不存在。

于是，若$|x-y|<\delta$，则

$y\in R'-F$，$R'-F$为开集。

（6）若E的每个无限子集有属于E的极限点，则E是有界闭集。

证明：

若E不是有界的，则E含有点x_n，使对$n=1$，2，…

有$|x_n|>n$，

由这些x 组成的集S是无穷集，而且没有极限点在R'中，因而也不在E中，所以E是有界的。

若E不是闭的，则存在$x_0\in R'$，它是E的极限点，

但不属于E，对$n=1$，2，…存在点$x_n\in E$，

$$使\ |x_n-x_0|<\frac{1}{n},$$

设S是这些x_n之集，则S为无穷集。

S以x_0为极限点，但没有其他极限点，

在R'中，因为若

$y\in R'$，$y\neq x_0$，则除有限个n外，

$$\begin{aligned}|x_n-y| &\geqslant |x_0-y|-|x_n-x_0|\\ &\geqslant |x_0-y|-\frac{1}{n}\\ &\geqslant \frac{1}{2}|x_0-y|.\end{aligned}$$

即y不是S的极限点，因而

S没有属于E的极限点。

这说明，只要E的每个无穷子集有极限点在E中，

E就是闭的。

（7）任何集合M的闭包〔M〕是闭集。

证明：如x是〔M〕的极限点，

我们证明 $x\in[M]$ 就可以了，

那么邻域 $S(x,\varepsilon)$ 总包含 $[M]$ 的点 y，

y 或属于 M，或是 M 的极限点。

在后一种情况，y 点的任何 δ 邻域总包含 M 的一个点 z，把 δ 取得如此之小，

使 $S(y,\delta)\subset S(x,\varepsilon)$

那么 z 将属于 $S(x,\varepsilon)$

所以在 x 点的任何邻域中，恒包含 M 的某个点，

于是 $[M]$ 的极限点也是 M 的极限点。

即 $x\in[M]$。

88. 什么叫导集？

一个点集，它的一切极限点所构成的集合，叫这个点集的导集。若点集为 E，它的导集记为 E'。

如所周知，

E 的闭包为 $E\cup E'$；

$E-E'$ 中的点叫 E 的孤立点；

当 $E\supseteq E'$ 时，E 叫闭的；

当 $E\subseteq E'$ 时，E 叫自密的；

当 $E=E'$ 时，E 叫完全的，换句话说，没有孤立点的闭集叫完全集。

导集具有以下性质：

1° 因为空集没有极限点，所以有

$$\phi' = \phi.$$

2° 对任一点p，$\{p\}'$是空的，所以有

$$p \notin \{p\}'.$$

3° 若$A \subset B$，则显然有

$$A' \subset B'$$

4° 若A''表示A的导集的导集，

令$P \in A''$，那么

所有开集$U \in P$，

$U \cap (A' - \{p\}) \neq \phi$，

因此有一点$q \in U \cup A'$，

由于$q \in A'$，$U \ni q$，

所以$U \cup A \neq \phi$，

$P \in A \cup A'$，

因而有$A'' \subset A' \cup A$。

5° $(A \cup B)' = A' \cup B'$。

证明 由于$A \subset A \cup B$，

显然有$A' \subset (A \cup B)'$

$B' \subset (A \cup B)'$

所以$A' \cup B' \subset (A \cup B)'$，

另一方面，

取 $a \in (A \cup B)'$

则 $a \in A' \cup B'$

假若不然，必有

$a\notin A'\cup B'$，即

$a\notin A'$，且 $a\notin B'$

因而有 a 的某邻域 (α_1, β_1)，其中不含 A 中除 a 以外的任何点；

同时有 a 的某一邻域 (α_2, β_2)，其中不含 B 中除 a 以外的任何点。

令 $(\alpha, \beta)=(\alpha_1, \beta_1)\cup(\alpha_2, \beta_2)$，则 (α, β) 为 a 的邻域，其中不含 $A\cup B$ 中除 a 以外任何点，这表明 a 不是 $A\cup B$ 的极限点，故与题设矛盾。

所以 $(A\cup B)'\subset A'\cup B'$

由上述论证，可得：

$$(A\cup B)'=A'\cup B'.$$

89. 直线上的点集有什么特性？

众所周知，凡元素为点的集合，叫点集合，简称点集。这里我们只介绍直线上的点集。

直线上的点集有一些特殊的性质，例如两个点之间有距离，直线上的点集是正序的。

直线上的点集有以下记号：

区间 (a, b) 表示满足

$a<x<b$ 的点的集合；

间隔$[a, b]$表示满足

$a\leqslant x\leqslant b$ 的点的集合；

半区间$[a, b)$、$(a, b]$分别表示

$a\leqslant x<b$ 和 $a<x\leqslant b$ 的点的集合.

直线上的点集E，或者是由与原点相距不超过某一正常数的点所组成的；或者它具有与原点相距超过任意大的常数的点，前者叫有界集合，后者叫无界集合。

一个点集E有界的充要条件为：

对于任何 $x\in E$，x 与定点 a 的距离不超过一正常数。

若E为直线上点集，在直线上存在一个点A，使E的任何点x都位于A的左方，我们称E有上界；类似的，若直线上有一点a，使E的任何点都位于a的右方，则称E有下界。

当直线上的集合E有上界和下界时，集合E为有界的。

若E是有上界的集合，那么在直线上存在着点A，在其右方没有集合E的任何点，在诸A中，有一个位于最左端，那么这个点叫E的确上界。

同样，有下界的集合可以有确下界。

若E为点集，x是直线上的任意点，则有以下情况：

(1) 点x及与x充分接近的点都不属于E；

(2) 点x不属E，但不论与x距离多近，都有另外的E的点；

(3) 点x属于E，而与x距离小于某一常数的点，都不属E；

(4) 点 x 属于 E，而不论距 x 多近，都有 E 的另外的点。

在(1)中的 x，叫集合 E 以外的点，(3)中的 x 叫 E 的孤立点，(2)(4)中 x 叫集合 E 的极限点。应当注意的是，E 的极限点，可以属于 E，也可以不属于 E。

如果点 x 及与 x 距离小于某一给定正常数的点都属于 E，那么 x 叫集合 E 的内点，若点 x 既非 E 以外的点，又非 E 的内点，则 x 叫 E 的界点。

90. 开集是怎样构造的？

这里，我们只就直线上的有界集来说明这个问题。

若 G 是有界开集，任取 $x_0 \in G$，则

必有开区间 (x, y)，使

$$x_0 \in (x, y) \subset G.$$

很显然，这种开区间有无穷多个，把它们的并记为 U，那么，

U 是含有 x_0 的开区间中的最大者。令 $U=(\alpha, \beta)$，则有

1° $(\alpha, \beta) \subset G$

2° $\alpha \notin G$，$\beta \notin G$

由上边的论述知道，1°成立是明显的，我们来证明2°。

假若$\alpha \in G$，则必有

$\delta > 0$，使

$(\alpha - \delta, \alpha + \delta) \subset G$，

从而$(\alpha - \delta, \beta) \subset (\alpha, \beta)$

可看出，这是不可能的．所以$\alpha \notin G$

同理，$\beta \notin G$。

我们把在G中具有性质1°、2°的区间称为G的构成区间，那么我们有以下重要定理来表示开集的构造．

有界非空开集G，可表成至多可列个互不相交的构成区间的并：

$$G = \bigcup (\alpha_k, \beta_k)$$

由以上讨论知道，G的每一点都对应一个构成区间，所以G可表成一些构成区间的并．

G的任意两个构成区间，若有公共点，则必重合，否则就不会相交，因而G可表示成一些互不相交的构成区间之并．

因为每个区间类和有理数集的一个子集对等，所以区间的个数至多是可列的．

对于无界开集，我们也可以当成有界开集来对待，只需要把$(-\infty, \infty)$，$(-\infty, \alpha)$，(β, ∞)看成构成区间就可以了．

91. 康托三分集是什么样子？

康托三分集是著名的古典问题之一，应用极其广泛，它的构造是：

将间隔〔0，1〕三等分，去掉中间区间（$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$），把剩下的两个间隔〔0，$\frac{1}{3}$〕、〔$\frac{2}{3}$，1〕各再三等分，再把它们中间的两个区间（$\frac{1}{9}$，$\frac{2}{9}$）、（$\frac{7}{9}$，$\frac{8}{9}$）去掉，剩下间隔〔0，$\frac{1}{9}$〕、〔$\frac{2}{9}$，$\frac{1}{3}$〕、〔$\frac{2}{3}$，$\frac{7}{9}$〕、〔$\frac{8}{9}$，1〕，再分别三等分这些间隔，再去掉它们的中间区间。

如此等等，以至无穷，最后剩下的点集叫康托三分集，记为 P。

康托三分集有许多奇特性质，现叙述如下：

(1) 若每次从〔0，1〕中去掉的区间的并集为 G，则 $P=$〔0，1〕$-G$ 不是空集，因为 0，1 及每个区间的端点都属于 P。

(2) 康托三分集是完全集。

凡自密的闭集，就叫完全集。而康托三分集：

1° 是自密集，这个点集的任何一个点都是极限点，不包括任何一个孤立点；

2° 因为P是一个下降的闭集合序列的交集，所以也是一个闭集。

从而知道，康托三分集是完全集。

(3) P不包含任何线段为其子集。

因为不论P的点x和ε怎样，可找到一点y，它和x点的距离小于ε，且属于被去掉的区间。

把n取得如此大，使

$$\frac{1}{3^n}<\varepsilon.$$

因每个n级线段的长度$<\frac{1}{3^n}$，

所以可找到一点y，使$|x-y|<\varepsilon$，

而y属于被去掉的n级区间。

(4) 康托三分集具有连续统的势。

我们用三进制数表示$[0,1]$中的小数，则区间$\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)$中每个点$x$可以表示成

$x=0.1x_2\ x_3\cdots\cdots$（$x_2$，$x_3\cdots\cdots$是0，1，2中任一数字）

区间的端点采用

$$\frac{1}{3}=0.0222\cdots\cdots,\quad \frac{2}{3}=0.2000\cdots\cdots$$

区间（$\frac{1}{3^2}$，$\frac{2}{3^2}$），（$\frac{7}{3^2}$，$\frac{8}{3^2}$）中的点x可表示成

$$x=0.01x_3\ x_4\cdots\cdots \text{或}\ x=0.21x_3\ x_4\cdots\cdots$$

（x_3，x_4，……是0，1，2中任一数字）

$$\frac{1}{3^2}=0.0022\cdots\cdots,\quad \frac{7}{3^2}=0.2022\cdots\cdots$$

$$\frac{2}{3^2}=0.0200\cdots\cdots,\quad \frac{8}{3^2}=0.2200\cdots\cdots$$

等等。

可看出，G中的点的三进表示中必有一位数字是1，且只有这样的点才属于G。因而P与

$$A=\{0.x_1x_2x_3\cdots \mid \text{每个 } xi\in\{0,2\}\}$$一一对应，

但A与$[0,1]$对等，所以A的势为$\aleph$，从而知道P的势也为$\aleph$。

（5） P的测度为零。

由P的构造知道，

先从$[0,1]$中去掉的区间长度为$\frac{1}{3}$；

再去掉两个长度为$\frac{1}{9}$的区间；

再去掉四个长度为$\frac{1}{27}$的区间；

一般说，去掉 2^{n-1} 个长度都是 $\frac{1}{3^n}$ 的区间。

于是，去掉区间总长度为

$$S = \frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{3^n} + \cdots$$

$$= \frac{\frac{1}{3}}{1 - \frac{2}{3}}$$

$$= 1$$

因而 P 的测度为 $mP = 1 - mG = 0$。

92．集合的测度是什么？

所谓集合的测度问题，实质上就是谈点集的“长度”定义问题，也是对点集的一种度量，集合测度的定义是法国数学家勒贝格（Lebesgue H.L）提出来的，这个定义正是积分概念的基础。

（1）开集和闭集的测度。

我们已经知道：若 G 为非空开集，

则 $G = \bigcup\limits_{k} (\alpha_k, \beta_k)$ 表示 G 的互不相交的构成区间，

现在规定，开集G的一切构成区间长度的和，**叫做开集G的测度**，记为

$$mG = \sum_k (\beta_k - \alpha_k).$$

若F为闭集，任取一个包含F的开区间(a,b)

令$G = (a,b) - F$，

显然G为有界开集，因而F的测度为：

$$mF = (b-a) - mG.$$

开集和闭集的测度，有以下重要性质：

1° 若 G_1，G_2为两个有界开集，且 $G_1 \subset G_2$，

则有 $mG_1 \leqslant mG_2$。

2° 若有界开集G是有限个或可数个开集 G_1，$G_2 \cdots$的并集，则

$$mG \leqslant \sum_k mG_k$$

如诸 G_k 互不相交，则 $mG = \sum_k mG_k$。

3° 若F为闭集，G为开集，且 $F \subset G$，

则 $m(G-F) = mG - mF$。

（2）可测集。

设E是一有界集，所有包含E的开集的测度的下确界称为E的外测度，记为

$$m^*E = \inf_{G \supset E} mG.$$

所有含于E中的闭集的测度的上确界，叫E的内测度，记为：

$$m_*E = \underset{p\subset E}{Sup}\ mF,$$

若E为有界集，当$m_*E = m^*E$时，

则E是可测的，这时E的外测度和内测度统称E的测度．记为 mE。

可测集有以下性质：

1° 有界集E为可测的充要条件是：

对于任意 $\varepsilon>0$，存在开集$G\supset E$与闭集$F\subset B$

使 $m(G-F)<\varepsilon$。

2° $X=(a,b)$为基本集，若E可测，

则E关于X的补集 εE 也可测。

3° 若E_1，E_2可测，则

$E_1\cup E_2$，$E_1\cap E_2$，E_1-E_2均可测

4° 若 E_1，E_2是可测集，且 $E_1\subset E_2$。

则 $mE_1\leqslant mE_2$。

93．什么叫连通集？

若M是一个点集，把它分为两个子集A，B，且$M=A\cup B$，若 $A\cap B\neq\phi$，或在 A，B的一个中，至少可找到一

个点是另一个的极限点，我们就叫 M 为连通集。

连通集有以下性质：

1° 如果 A，B 是闭集或开集，且

$A\cap B=\phi$，$M\subset A\cup B$，则有

$M\subset A$，或 $M\subset B$

证明：

因为 $M\subset A\cup B$，所以

$$M\subset(M\cap A)\cup(M\cap B)$$

但 A，B 同时为闭集或开集，所以 $M\cap A$ 和 $M\cap B$ 中没有一个包含着另一集的极限点，

因为 M 为连通集，所以两集合中的一个应为空集，若 $M\cap B$ 为空集，显然有

$$M\subset A.$$

2° 若集合 R 的任意两点 x，y，都属于某个连通集 C_{xy}，那么 R 就是连通集。

证明：

若 R 不是连通集，显然可表示为两个无公共点的非空闭集 F_1，F_2 的和集，

在 F_1 中取一点 x，在 F_2 中取一点 y，可用 C_{xy} 连通这两个点，因为 F_1，F_2 为无公共点的闭集，所以 C_{xy} 应包含在 F_1 中或 F_2 中，这个矛盾说明了 R 是连通的。

3° 如果两个连通集 A，B 至少有一个公共点 x，那么和集 $S=A\cup B$ 也是连通集。

证明：

若S不是连通集，那么显然可表示为两个无公共点的非空闭集 F_1，F_2之和集，

$$S=F_1\cup F_2.$$

假定A和B的公共点x属于F_1，

于是A，B都包含在F_1中，所以F_2是空集，

即 $S=A\cup B$ 为连通集。

4° 若连通集M与开集G及闭集$F=R\setminus G$皆有公共点，那么M必与G的边界相交（这里G和F是R中互余的两个集合）。

证明：

因为 $T\rho(G)^*=\overline{G}\setminus G$

所以R可表示为三个互无公共点的集合的和集 $R=G\cup\Gamma\rho(G)\cup(R\setminus\overline{G})$

如果M不与G的边界相交，那么

M 包含在G与$R\setminus\overline{G}$的和集中，也就是说，M或包在G中，或包在$R\setminus\overline{G}$中，显然这是不可能的。

94. 什么叫列紧集?

若集合R的一切无穷子集M，在R中都有极限点，那么R就叫列紧集。

---

* 表示边界。

列紧集有以下性质：

1° 列紧集中的闭集仍是列紧集。

证明：若列紧集 R 中的闭集为 F，我们将证明 F 也是列紧集。

令 M 为 F 的任一个无穷子集，

因为 $F\subset R$，所以 $M\subset R$

但 R 为列紧集，

所以包含在 R 中的无穷集 M 有极限点 x，$x\in R$，

点 x 是 M 的极限点，显然也是 F 的极限点，但 F 为闭集，所以 $x\in F$，

所以 F 中的无穷集 M 有极限点 x，$x\in F$，所以 F 为列紧集。

2° 列紧集 R 中的闭集降序列

$F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$ 有非空交集。

证明：

假定 $F_1\supset F_2\supset\cdots\supset F_n\supset\cdots$　　(1)

中的所有集合皆不相同，那么在 F_1 中可找一个点 x_1

$x_1\notin F_2$；

在 F_2 中可找到一点 x_2，$x_2\notin F_3$；

一般有，在 F_n 中可找一个点 x_n，$x_n\notin F_{n+1}$。

因为 R 为列紧集，所以序列

x_1，x_2，x_3，…，x_n 有极限点 x　　(2)

x 点属于(1)的每个集合，例如 $x\in F_n$

因为 $F_n\supset F_{n+1}\supset F_{n+2}\supset\cdots\cdots$

从x开始，(2)的所有点皆属F_n，

因为序列

$$x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2},\ \cdots \qquad (3)$$

和(2)仅差有穷个点，所以(2)的极限点x也是(3)的极限点。而F_n的所有点皆包含在F_n中，

所以x是F_n的极限点，且由于F_n是闭集，

所以 $x\in F_n$

这就是说，找到了属于(1)的所有集合的点x，

因此，(1)的交集是非空集合。

3° 如果集F_n的直径随着n的增大，而趋近于零，那么$F_1\cap F_2\cap\cdots\cap F_n\cap\cdots$由一点构成。

证明：若(1)的交集包含两个点x,y，

那么这两点属于(1)的每个集合。

对于所有n，我们有

$$\delta(F_n)>\rho(x,y)$$

这就是说集合的直径不能随n增大而趋近于零，

因此和题设矛盾，

故知(1)的交集由一点构成。

95. 曲线是什么？

历史上，数学家们费了很大精力来定义曲线，都未获得

成功，因为各种各样的定义，未能描述出曲线的本质特征。

到了十九世纪七十年代，德国数学家康托创立了集合论，用点集的观点定义曲线，许多问题迎刃而解。康托定义曲线就是连续统．即由连通的、有界的闭集所构成，在连续统的任何一点的邻域里有不属于这个连续统的点存在。按照这个定义，可以作出三个区域的共同边界来，虽然这个边界很难想象，但它却是存在的。还可以看以下例子：把平面上一个正方形分成9个相等的较小的正方形，然后挖掉中心正方形的一切点；再把剩下的8个小正方形，每个再分为9个相等的更小一些的正方形，再挖掉它们当中的那个正方形的一切点，这就剩下$8^2=64$个更小一些的正方形。循此继续作下去，最后剩下的部分就是曲线。

迄今对曲线作出最完善定义的，应当数苏联拓扑学家乌利松，他定义曲线为连通的、列紧的集合，也就是康托说的连续统，在连续统上的每个点都是一维的。这是二十世纪六十年代对曲线的最新解释。

所谓连续统上的每个点都是一维的是指：

1° 连续统R的任一点x，无论正数ε怎样，总可以找到半径小于ε的开集G，G包含x，而边界或者是空集，或者是0维度集。

2° 存在这样的数δ，在所有包含x点而直径小于δ的开集的边界上，至少有一个点。

如果只限于条件1°，那么0维度的集合及一维度的集合都适合它．因此它表示出使R在x具有小于或等于1的条件；

条件2°是说 R 在 x 的维度不是 0 。

有了这个定义，诸如正方形、立方体就不能叫曲线了。虽然它们是连续统，但不是一维的。

96．什么叫凸集？

若M是线性空间的一个集，连结M任何两个点的线段，总包含在M里边，这时M就叫凸集。

现在先介绍线性空间这个概念：

若集合$R=\{x,y,z,\cdots\}$满足以下三个条件：

(1) 对任意两个元素 $x,y\in R$，$x+y$ 唯一确定了另一个元素 z，即有加法

$$x+y=z,\quad z\in R.$$

在这个加法运算中，还适合

1° 交换律：$x+y=y+x$.

2° 结合律：$x+(y+z)=(x+y)+z$.

3° 存在一个元素 0 ，对一切元素 $x\in R$，有$x+0=x$.

4° 对每一个$x\in R$，存在一个元素$-x$，使$x+(-x)=0$.

(2) 对任何数α及元素 $x\in R$，确定了一个元素 $\alpha x=y$. 且符合：

1° 结合律 $\alpha(\beta x)=(\alpha\beta)x$.

2° $1\cdot x=x$.

(3) 在加法和乘法之间，有

1° $(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x$。

2° $\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y$。

这样，集合R就叫线性空间。

有了凸集的定义后，我们证明凸集的以下性质。

1° 凸集的闭包还是凸集

证明：设M是凸集，

$[M]$是M的闭包，

x,y是$[M]$的任意两点，

ε 是任意正数。

在M中取a,b，使

$\rho(a,x)<\varepsilon$，

$\rho(b,y)<\varepsilon$，于是对满足

$\alpha+\beta=1$的非负实数α，β，总有

$\rho(\alpha x+\beta y,\ \alpha a+\beta b)<\varepsilon$。

因为M是凸的，所以$\alpha a+\beta b\in M$。

既然ε是任意的，所以

$\alpha x+\beta y\in[M]$。

因而$[M]$也是凸的。

2° 任意多个凸集的交集仍是凸集

证明：设$M=\bigcap\limits_{\alpha}M_\alpha$，其中$M_\alpha$都是凸集，$x,y$为$M$中任意二点，显然这两点属于一切的$M_\alpha$，

于是连结x,y的线段必在每一个M_α内，因而也必含在M

内，所以

M是凸集。

97. 什么叫覆盖？

我们定义覆盖如下：

有两点集A、B，若A的每个点都属于B时，就叫做B覆盖A；如果A的点不全属于B时，说成B不覆盖A。显然如果B覆盖A，必有：

$A\subset B$，就是说，A为B的子集。

假若两个点集A、B，A覆盖B，B也覆盖A，则必有：

$$A=B.$$

如果两个平面点集A、B，其中一个例如A，经过平移、旋转、反射或它们有限次的组合，变到A'的位置，这时B可以覆盖A'，我们可以说，B能够覆盖A。假若不存在这种变动，叫B不能够覆盖A。

在一个点集中，任意两点距离的最大值，叫这个点集的直径，当点集A能够覆盖B时，显然A的直径大于B的直径。显然若B的直径大于A的直径时，那么A就不能覆盖B。

若点集A能被一个圆覆盖，那么A叫有界点集。在覆盖A的圆中，最小的一个叫最小覆盖圆。最小覆盖圆的半径称为A的覆盖半径。

和覆盖有关的另一个概念是嵌入，若点集A能覆盖点集B，我们就说，点集B嵌入点集A中。

若点集A_1，A_2，$\cdots A_n$满足

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \subset B$$

且　$A_i \cap A_j$为空集$(i,j=1,2\cdots n \quad i\neq j)$

则　A_1，A_2，$\cdots A_n$嵌入B中。

若点集A_1，A_2，$\cdots A_n$能经过平移、旋转、反射或它们的组合后，成为A_1'，$A_2'\cdots A_n'$，满足

$A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_n' \subset B$，且

$A_i' \cap A_j'$为空集$(i,j=1,2\cdots n, i\neq j)$

那么叫A_1，A_2，$\cdots A_n$能够嵌入B中。

若A_1，A_2，$\cdots A_n$为有界闭集，且

满足：

$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \subset B$，

且Ai的内部和Aj的内部没有公共点

$(i,j=1,2,\cdots n, \quad j\neq i)$，

则A_1，A_2，$\cdots A_n$叫无重迭地嵌入B。

若A_1，A_2，$\cdots A_n$为有界闭集，经过平移、旋转、反射以及它们的组合后，变为

A_1'，A_2'，$A_3'\cdots A_n'$，且满足

$A_1' \cup A_2' \cup \cdots \cup A_n' \subset B$，

且A_i'的内部与A_j'的内部没有公共点，

$(i,j=1,2,\cdots n, \quad i\neq j)$

那么就叫A_1，A_2，$\cdots A_n$能够无重迭地嵌入B中。

98．什么叫无向图？

若$P=\{v_1, v_2, \cdots v_n\}$是空间$n$个点的集合，$l=\{e_1, e_2, \cdots e_m\}$是$m$条线的集合，如果

(1) P不是空集合；

(2) l中的每一条线e_i以P中两个不同点v_s，v_t为端点；

(3) l的任意两条线，除端点之外，没有其他公共点，

则由P和l所构成的图形，叫无向图，记为 $G=(P, l)$。P的元素v_1，v_2，$\cdots v_n$叫G的顶点；l的元素e_1，e_2，$\cdots e_m$叫G的边。

由上述定义中，可以看出，一个无向图必须具备三个要素，即：

1° 有一个顶集合，

2° 有一个边集合，

3° 每边以两个顶点为端点。

我们常常用$P(G)$表示G的点集，用$l(G)$表示G的边集。

如果G、H为两个无向图，且

$$P(H)\subseteq P(G)$$

$$l(H)\subseteq l(G)$$

则H叫G的子图，G叫H的母图。

如果H是G的子图，且

$$P(H)=P(G),$$

则H是G的支撑子图。

如果两个图G、H的点集之间存在一个保持邻接性的一一对应，就称这两个图是同构的。

一个图的基本性质是它是否连通。现在我们定义以下概念：

通道：所谓图的通道就是点和线的一个交替序列，例如以v_0开始，以v_n结束的通道为$v_0e_1v_1\cdots v_{n-1}e_nv_n$。

若$v_0=v_n$，通道叫闭的，

若$v_0\neq v_n$，通道叫开的。

若一个通道的线都不相同，这种通道叫迹。

若一个通道的点都不相同，这种通道叫道路。

若一条道路是闭的，且它的n个点都不同，$n\geqslant 3$，则称为一个圈。

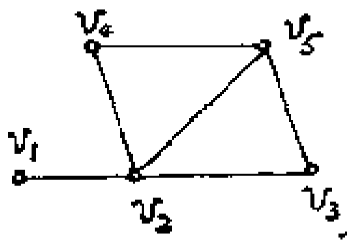
如下图中，

$v_1v_2v_5v_2v_3$是一个通道。但不是一个迹。

$v_1v_2v_5v_4v_2v_3$ 是一个迹。但不是一条道路。

$v_1v_2v_5v_4$是一条通路。

$v_2v_4v_5v_2$是一个圈。



99. 什么叫树？

树有广泛的应用，在集论中也是一个重要概念。现在我们用图来定义它。

若$G=(p,\ l)$是一个无向图，如果它具有性质：

1° 连通，

2° 没有圈，

我们就称G为一个树。

如所周知，$G=(p,\ l)$的支撑子图指的是G的一个子图$G_1=(p_1,\ l_1)$，其中$p_1=p$．这就是说，G_1是由G的全部顶点和一部分边组成的。当然对我们说，重要的是图G的那些形成树的支撑子图。

若$G=(p,\ l)$是一个无向图，如果

$T=(p,\ l_1)$是G的支撑子图，并且T是树，则称T是G的一个支撑树。

是否每个图都有支撑树呢？答案是否定的。

显然，若G不连通，则G不会有支撑树。但连通的图一定有支撑树。

现在我们介绍树的有关定理：

1° 若$T=(p,\ l)$是一个树，若T有m条边，n个顶点，则 $m=n-1$。

证明 我们把图中，过一个顶点的边数叫这个顶点的次数，次数为 1 的顶点叫悬挂点。

若$T=(p, 1)$是树，如果T只有两个顶点，定理显然成立。

若T有不止两个顶点，那么它必有悬挂点，设v_i为悬挂点，显然只有一个边和它相连，这个边设为e_j，

那么由T中去掉v_i和e_j后，仍是一个树T_1，所以只要证明T_1的边数比顶数少 1 就可以了。

因为T_1是一个树，它必然有悬挂点，仿上述方法，再去掉一个顶点和一个边。仍得到一个树，这样不断作下去，一直到得到一个树T'，只有一条边，两个顶点为止，从而定理得到证明。

2° 若图G是连通的，且边数等于顶数减 1，那么G是一个树。

3° 若图G没有圈，且边数等于顶数减 1，则G是一个树。

上述 1°，2°，3° 三个定理合在一起，就有（1）连通；（2）没有圈；（3）边数等于顶数减 1．从而知道（1）、（2）、（3）任何两条都可以作为树的定义。

4° 若连通图G一个点v的离心率$e(v)$是对G中所有u取$\max d(u\cdot v)$，半径$r(G)$是各个点中最小的离心率，对于一个点v，若$e(v)=r(G)$则v是一个中心点。从而知道，每个树必有一个点或两个邻接的点组成的中心。

100．学习集合论有什么意义？

（代结束语）

目前，集合论已经成为全部数学的基础，为了说明学习集合论有什么意义，我们摘引著名数学家和数学工作者对这个问题的一些论述，作为本书的结束语。

（1）概率论著名的第二次公理化的提出人 Kolmogorov 1933年评论集合论说：“康托的不朽功绩，在他敢于向无穷大冒险迈进，他对似是而非之论，流行的成见，哲学的教条，以及最大数学家的信念作了内外的斗争，由此使他成为一门新学科的创造者，这门学科已在今日成了全部数学的基础”。

（2）$A\cdot C$ 巴尔霍民柯在《曲线是什么》一书中说：“康托在他的一系列论文中，把集合论观点很清楚地形成了，集合论所有概念都归之于他，数学问题用集合论来论述是科学上一个重大的进展，特别，用集合论来论述，使把曲线概念的定义问题大大地向前推进了”。

（3）$F\cdot$ 豪斯道夫在《集论》（科学出版社）一书中说：“从有限集推进到无限集是康托的不朽功绩，这是通过一系列内心的和外界的斗争而后完成的：对表面上显现的矛盾，对因袭的成见，哲学上的武断，以及对普遍存在着的怀

疑，而这就连当代的大数学家也不例外，康托由此成为一门崭新科学集论的缔造者，于今集论已构成全部数学的基础了”。

(4) Л·С亚历山大罗夫在《集与函数的泛论初阶》一书中说：“集论对数学最近半世纪的发展上的巨大影响，今日已是举世公认的事实，因而自然地，不论是在大学或在高等师范学校的数学教学中，集论的思想都已占了极其重要的位置”。

(5) 河田敬义在《集合，拓扑，测度》一书中说：“集合的概念已成为现代数学最基本的概念，不论读者已学过的代数学和几何学，抑或是即将要学的拓扑学和测度理论，它们的完整体系都是先取集合，从而设定其元素及子集的性质和运算的公理来构成的”。

(6) 王浩在《数理逻辑通俗讲话》中说：“对集合论的进一步发展，所给予的最强有力的影响，来自P. J. Cohen在1963年对连续统假设的独立性证明，且不说这结果的重要性，其所用方法也表现出有很广的应用范围，……还出现了对集合论其他方面兴趣的普遍高涨，例如决定性公理包括它和大基数的关系，以及它们和描述集合论的关系，D.A.Martin、Solovay、H. Friedman和其他一些人曾作了大量工作。Jensen和其他人比较细致地考察了可构成集的结构，划分性质和不可分辨的对象由Bowbottom，Silver和其他人广泛地加以研究”。

(7) 李佛奇、叶景梅在《集合论导引》一书中说：“自

康托在1895年发表其研究成果后，至今不过八十余年，但集合论的概念和方法已经渗透到所有的数学分支，并且改变了它们的面貌，现在泛函分析、微分方程、概率统计、函数论、代数学、几何学、拓扑学等分支中的许多概念和基本理论都必须借助于集合论的知识。因此，不熟悉集合论的原理，就不可能对近代数学获得正确的理解”。

（8）应制夷在《初等数学论丛(7)》著文说：“时至今日，无论什么数学分支，越来越离不开集合，似乎已经是大势所趋的了，法国的布尔巴基学派把集合论作为数学的基础结构，在集合这个基础上分别增添一些不同的条件，就产生了序、代数、拓扑三大母结构。在各种母结构上再补充一些不同条件，就得到许许多多子结构与交叉结构”。

附：

主要参考书目

1. 王浩：《数理逻辑通俗讲话》科学出版社，1983.
2. 张锦文：《集合论与连续统假设浅说》上海教育出版社，1982.
3. 谢邦杰：《超穷数与超穷论法》吉林人民出版社，1979.
4. F·豪斯道夫：《集论》张义良、颜家驹译 科学出版社，1960.

5. П.С亚历山大罗夫《集与函数的泛论初阶》杨永芳译　高等教育出版社，1959。
6. 孙文植、王元元：《集合论简史和近况》（《自然杂志》1983年3期）。
7. 李养成：《集和映射》　湖南人民出版社 1981.
8. 张鸿顺：《集合和数》　科学出版社　1982。
9. 熊全淹：《近世代数》　上海科技出版社 1979.
10. 李孝传、陈玉清：《一般拓扑学导引》人民教育出版社　1983。
11. 凯莱：《一般拓扑学》　吴从炘、吴让泉译　科学出版社　1982。
12. 徐利治：《数学方法论选讲》华中工学院出版社 1983。
13 P.J.Cohen，《Set theory and the Continuum Hypothesis》　纽约，1966。
14. Hand Book of mathematical Logic　纽约，1977。