

一个数学家的辨白  
[英] G·H·哈代

假如真的能把我的雕像塑在伦敦纪念碑上的话，我是希望这座碑高耸入云，以至人们见不到雕像呢，还是希望纪念碑矮得可以使人们对雕像一目了然呢？我会选择前一种，而斯诺博士可能会选择后一种。

序 言

我感谢 C·D·布劳德(Broad)教授和 C·P·斯诺博士对我提出的许多宝贵的批评。他们读过我的初稿。我已将他们提出的所有建议的内容实质差不多都写入了我的书中，同时删除了许多生硬晦涩的词语。

但是有一种情况我是以不同的方式处理的，那就是 § 28。这一章节是在我的一篇短文的基础上撰写的。那篇短论文是在年初我投稿到《我发现了》(此杂志是由剑桥阿基米德协会主办的学术刊物)的。对这篇不久前我曾以非常认真的态度写出的东西加以修改，我的确感到为难。再说，假如真要设法接受这些批评(即严肃地看待这些重要的评论)，那我就只得将这章节大大扩展，直至完全破坏这篇论文，使其面目全非。鉴于此，我就没改动它，而是把批评家对我论文所作的评论的要点之简述以脚注的形式加在文章最后。

G·H·哈代  
1940年7月18日

前言

这是一个极平常的基督学院高桌晚餐<sup>①</sup>，哈代应邀做客，他刚刚作为萨德莱里恩(Sadleirian)讲座教授回到剑桥。在这之前我已经从剑桥年轻一辈数学家那里听到一些他的故事，他们对哈代回来都感到非常高兴，称他是一位真正的数学家。与物理学家们常挂在嘴上的迪拉克(Dirac)和玻尔等人不同，哈代是最纯正的，他超凡脱俗，举止诡异，思想激进，而且对于任何事物急于表达自己的见解。那是 1931 年的事，当时英语中还不流行以上用语，但人们会笼统地说他才智出众。

顺着桌子看过去，我仔细地打量着哈代：他看上去五十出头，头发已灰白，皮肤上太阳斑很深，呈现出印第安人的青铜色。他的脸长得很俊秀——高高的颧骨，细鼻梁，高傲而威严，但娱乐时会像顽童般捧腹大笑。他有一对深棕色的眼睛，明亮如少女——这种眼睛在思维敏捷的人中很少见。那时剑桥有很多杰出的人，我当时想，即使如此，哈代也是最出众的。

我不记得他当时的穿着。在他的长黑袍<sup>②</sup>里面很可能是一件运动衣和法兰绒长裤。与爱因斯坦一样，他穿着总以舒适为原则；但与爱因斯坦不同的是，他会变换便服款式，穿起昂贵的丝质衬衫。

晚餐后我们坐在休息室的桌子边喝葡萄酒时，有人告诉我说，哈代想跟我谈谈板球。我

一年前负责板球队，但基督学院当时很小，即使是初级队员的角色也很快确定了。我被带到哈代身边坐下，没有人将我介绍给他。如我后来所发现的那样，在所有正式场合，他都腼腆而害羞，害怕被介绍给人。他点点头，似乎是意识到了我的存在，然后，在没有任何开场白的情况下，开始问我：

“我想你应该对板球有所了解，是吗？”“是的，”我回答，“我知道一点。”

他立刻严肃地考问我玩过板球吗？是什么风格的球员？我猜测他是因为害怕与人打交道才选择了学术界，这一圈子的人都献身于研究而从不娱乐。我煞有介事地炫耀着自己。他显示出完全不相信我的回答，接下去提出了一些战术问题：一年前（1930年）的最后一场比赛我该选谁来当队长？如果入选队员认为我可以挽救英格兰队，那么我应该采取什么战略和战术呢？（“如果你很谦虚，你可以作为非上场队长来回答。”）如此等等，全然不理会上其余的人。他完全入迷了。

正如我后来从无数次观察中所发现的那样，哈代无论是对自己还是其他人都从不轻信表面印象。按哈代的观点，了解一个人的惟一方法是考试，无论是数学、文学、哲学，还是政治……无一例外。如果谁被考问难住了，其水平也就可以确定了。在哈代那聪明、高效率的头脑中，所有的事情都是有条不紊的。

那天晚上在休息室里，哈代一定要弄清我是否是一名还过得去的板球运动员，别的他什么也不关心。最后他像孩子般地坦然笑了：通过我们之间的交谈，他充满了信心，毕竟菲尼尔球场（学校的板球场）下一季度可以利用起来了。

正如我与劳合一乔治（Lloyd George）的相识应该归功于他对倾相学的爱好一样，我与哈代的友谊应归功于我花了太多的青春在板球上，我不知其教益所在，但他给我带来了好运，这是我一生中与知识分子的最珍贵的友谊。正如我刚才所提到的，他的头脑聪明而高效，以至于在他的眼中，其他人似乎都显得有点糊涂、平淡和慌乱。他不是爱因斯坦或拉瑟福德（Rutherford）那样的大天才，凭着他一向清晰的头脑，他说，“天才”一词他无论如何配不上，充其量他也只在一个短时期内可称得上世界上第五位最纯正的数学家。他的人品如他的头脑一样绝妙、坦率，他总是宣传说，他的朋友和合作者利特伍德（Littlewood）是比他更有才华的数学家，他的门徒拉曼纽扬（Ramanujan）才真正具有一个大数学家所具有的天才素质（尽管是狭义的，但并不需要精确定义）。

当哈代谈到这些朋友的时候，大家都认为他低估了自己。的确，他人品高尚，从无忌妒之心；但是我认为如果谁不接受他对自己的评价，谁就误解了他的品质。我倾向于相信他在《一个数学家的辩白》中的论点，即既谦虚又自负：“当我失望地却又不得不听那些浮夸而令人厌倦的谈话时，我就会对自己说：‘我做了一件你从未曾做过的事，那就是与利特伍德和拉曼纽扬在某种平等条件下的合作。’”

无论如何，哈代在数学界的排名只能留给数学史专家了（尽管这是不可能的，因为他的许多优秀的研究都是与人合作的）。但有一点，哈代比爱因斯坦、拉瑟福德或其他任何大天才都要杰出，那就是任何脑力工作，重要的、不重要的或十足的游戏，他都可以使其成为艺术。我认为，正是上帝恩赐给他的这一天赋，才给了他从事脑力工作的乐趣，尽管哈代本人可能没有意识到这一点。当《一个数学家的辩白》第一次出版时，格雷厄姆·格林（Graham

Greene)在一篇书评中写到，本书及其亨利·詹姆斯的注解是对一个具有创造性的艺术家的素质的最精彩的描述。回忆一下哈代对所有他周围人的影响，我相信这是千真万确的。

哈代于 1877 年出生于一个中层职员家庭。父亲是肯兰莱学校的会计和美术教师，后来就职于一所不大的私立学校；母亲是林肯教师进修学院的教师，双亲都很有才华，特别是具有较高的数学素养。生在这样的家庭，哈代自然遗传了很多数学基因。与爱因斯坦不同的是，他在孩提时代就表现出超人的数学天赋：还在哑哑学语的时候就有极高的智商(I.Q. )；两小时就可以写出亿位数；去教堂做礼拜时，他把圣歌中的数字进行因数分解，以此为乐。从那时起他就喜欢与数字打交道，这一嗜好导致了后来发生在拉曼纽扬病床上的传奇故事。尽管这一故事已众所周知，但我不得不再次重述。

孩提时代的哈代受到良好的启蒙教育，受维多利亚文化的熏陶很深。他的父母似乎有点守旧，但非常善良。能在这样一个维多利亚家庭中度过童年，无疑他是非常幸运的，尽管智力教育受到过分的苛求。他有两个与众不同之处。首先，他很小(不到 12 岁)就有极高的自性。他的父母知道他聪颖过人，而他确实如此，在班上他所有课程都名列第一，但由此也带来他最厌倦的事情：他必须站到台前接受颁奖。有一次我们共进晚餐时，他对我说，他常常试图故意做错答案，以免受这种无法忍受的折磨，但这种蓄谋的错误总是太小，每次他还是不得不去领奖。

年龄稍大一点，他的自觉意识有所丧失，变得极具挑战性。正如他在《一个数学家的辩白》中所言，“我不记得在孩提时代对数学有过强烈的爱好，这种数学家的素质我也许具备，但我并不觉得十分惊人。我对数学的兴趣是基于应付考试和争取奖学金的需要：我必须战胜其他同学!这似乎成了我决策的动力。”遗憾的是，他不得不生活在过于棘手的世界中，他的脸皮太薄，不能有效地保护自己，因而不得不努力强化自我意识，但后来他有时又犯一意孤行的毛病；另一方面，这也使他坦率正直，勇于反省，能够用肯定、简洁的语言作出自我评价，这些与爱因斯坦截然不同。爱因斯坦常常不得不抑制自我意识，使自己保持理智状态来研究外面的世界。

我相信这种矛盾或紧张的性格是导致他行为古怪反常的原因。他是典型的反自恋主义者，他不能忍受被人拍照。据我所知，他一生只照过五次快照。他的房间不能有任何能照得见人的玻璃，连剃须用的镜子也不例外。他住进旅馆的第一件事就是用毛巾把所有的镜子都罩起来。这种行为即使对一个长相古怪的人也属反常，何况他相貌比普通人都漂亮，这种举动更显得古怪。当然，自恋与反自恋都无法改变自己在外人眼中的相貌。

这一行为看起来有些古怪，实际上也确实如此。不过，他与爱因斯坦确有一些差异。与爱因斯坦相处很久的人——如因菲尔德(Infeld)——发现与爱因斯坦相处时间越长，越感到爱因斯坦古怪，我确信我也会有同感。而哈代则相反，他的行为之古怪也与众不同，似乎是某一类上层建筑导致了这种性格。但这种性格与常人仍有类同之处，只是他更加怪癖一些。

儿童时代哈代的另一与众不同之处是更加务实，他要除去一生中所有事业上的障碍。哈代凭着他对数学无限的忠贞、执著，无人可以与他相提并论。他知道特权的优越性，也知道他曾经拥有它。他的家庭并不富裕，仅靠教师的微薄收入，但他受到了 19 世纪英格兰最好的教育。这种特殊的精神财富在这个国家永远比其他财富更有意义。奖学金总是为杰出者而

设的，关键是如何赢得它，小哈代连微小的失去奖学金的几率也没有——尽管有不少小威尔斯(Wells)或小爱因斯坦。从 12 岁起他就不得不参与竞争，他的天才也受到了人们的关注。

事实上，由于他在肯兰莱时数学上取得的一些成绩，12 岁那年他在温切斯特获得了一个奖学金。温切斯特在当时及后来相当长一段时间内是英格兰数学方面最好的学校。(附带说一下，人们会惊讶现在是否还有哪所学校能如此灵活?)他一年级在那里学习数学，他的成绩是拔尖的。后来，他承认当时在那里受到了极好的教育，但学习是被迫的。他不喜欢这所学校，但喜欢它所开设的课程。与所有公立的维多利亚学校一样，温切斯特非常简陋，有一年冬天他差点送了命。他羡慕寄住在别人家的利特伍德，他是圣·保罗学校的走读生，也羡慕在其他制度较松的普通学校的朋友们。他离开温切斯特以后再也没有走进那所学校。庆幸的是他终于离开了它，走上了正确的人生路，申请到了三一学院的公开奖学金。

他对温切斯特有一种奇特的怨情：他天生是一个球类运动员，有一双光彩夺目的眼睛。50 岁时他常常能够打败大学网球亚军，60 岁时我还看见他在板球场上令人吃惊地击球。遗憾的是，他在温切斯特从未受过正规训练，他的打球方法不大正确。他觉得，如果能够受到正规训练的话，他一定会成为一个优秀的板球击球手，即使不是一流的，也不会差很远。就像他对自己的所有评价一样，我相信他的话非常正确。奇怪的是，维多利亚高级比赛居然漏选了这样一位天才选手。我猜想无人会想到应在高级学者中寻找运动选手，这是多幼稚、愚蠢而又保守的想法。

对于他那个时代来说，一个温切斯特学院的毕业生进入新学院是很自然的，这对他的学术生涯不应该产生明显的影响(尽管他一直对牛津比剑桥更钟爱一些，他如果在牛津呆一辈子，我们中的有些人就会失去结识他的机会)。但他决定进三一学院，其理由被他在《一个数学家的辩白》中幽默而不加掩饰地解释为：“我的思想发生变化是在我 15 岁的时候(这种变化方式很特别)。有一本名叫《三一学院的一个年轻人》的书，署名为‘阿伦·圣·奥宾’(实际上是弗朗西丝·马歇尔夫人)，是一套有关剑桥生活丛书中的一本……书中有两名主人公，第一主人公叫弗劳尔斯，他几乎是完美的化身；第二主人公布朗很有些女人气质。弗劳尔斯和布朗在大学生活中遇到很多妨碍学习的情况……弗劳尔斯摆脱了所有这些麻烦，成为数学学位考试的第二名和年级第一名，自然得到了一个奖学金(正如我当时所假设的那样)。而布朗则失败了，辜负了父母的期望，开始酗酒。有一次，在暴风雨中他处于醉酒后的狂乱状态，被牧师的祷文拯救出来。他连普通学位都难以拿到，最后成为一名传教士。这些不愉快的事

情并没有影响他们间的友谊，当布朗第一次在高级职员休息室里喝着葡萄酒、吃着核桃仁的时候，弗劳尔斯对他的行为大惑不解，们却充满着爱怜之情。

现在弗劳尔斯是一个非常正直的研究员(迄今为止‘阿伦·圣·奥宾’所能找到的一个)，然而，就连我这个思想单纯的人也不认为他是聪明人。如果他能作出这些成绩，我为什么不能?给我印象最深的是休息室的最后一幕，它使我着了迷，从那时起，直到我得到三一研究基金为止，对我来说，数学就等同于三一研究基金。

22 岁时，他在剑桥数学荣誉学位第二部分考试中荣获第一名，并得到了三一研究基金。在耶期间，有两个小插曲。一个是宗教方面的，表现为高素质的维多利亚处理方法。哈代决定——我认为他在离开温切斯特以前就有此念头——不相信上帝。对于他来说，这是一个黑门分明的决定，如他脑海里的所有其他概念一样明确。礼拜仪式在三一学院是强制性的。毫

无疑，哈代以他特有的迟疑的口吻告诉教长说，他不能虔诚地参加礼拜。教长是个自命不凡的小官吏，坚持要哈代写信告诉他的父母。教长知道他的父母是正统的宗教信徒，而哈代更加清楚，这一消息会使他父母非常痛苦——对于 70 年后的我们是无法想象这一痛苦的。

哈代与他的良心抗争着，他不能世俗地放弃这一决定。他甚至不善处世到这种程度：去求教于一些老于世故的人，诸如乔治·特里维廉(George Trevelyan)和德斯蒙德·麦卡锡(Desmond MacCarthy)等，他认为他们会知道如何处理这类事，这是有一天下午在菲南尔球场他抱怨此事时告诉我的。最后他终于给父母写了信。部分是由于这件事，他对宗教一直持怀疑态度，并愈来愈甚：他拒绝参加任何学院的礼拜，即使是正式公务(如选举院长)，他也不迁就。他的朋友中也有牧师、教士，但上帝是他的敌人。所有这些有一个 19 世纪的声音在说：或许有谁错了，但对于哈代，不要用他的话反驳他。

他仍然大吵大闹地嬉戏。记得在 30 年代的一天，我看见他正为一个小的胜利而得意。故事发生在贵族学院举行的一场比赛，绅士队对公子队。这是早上的一场比赛，太阳正照在屋顶上。有一个面对着托儿所顶端的击球手抱怨说，不知从哪儿来的反光照花了他的双眼。裁判员疑惑地四处寻找反光源：汽车？不。窗户？场地的那一端一个窗户也没有。最后，带着胜利的喜悦，一个裁判终于找到了反光源——反光来自于一个高大的牧师胸前佩戴的一个大十字架。裁判彬彬有礼地要他摘掉十字架，哈代在一旁魔鬼般地笑弯了腰。午饭时，他顾不上吃饭，忙着给他的教士朋友写明信片(明信片和电报是他最喜爱的通信方式)。

在与上帝及其代理人的战斗中，胜利并不总是属于哈代。大约在同一时期，五月的一个安静而可爱的傍晚，在菲南尔球场，6 点钟的报时乐声穿过大地。“真不幸，”哈代简洁地说，“我生活中一部分最快乐时光在罗马天主教堂的钟声中度过了。”

他大学期间的第二个小烦恼是学术上的。自从牛顿以后，在整个 19 世纪，剑桥就被旧的数学荣誉学位考试制度所控制。英国人在考试竞争中总是比其他国家的人更有优势(也许除了中国人以外)。这些考试的设立是基于传统的评判标准，在考试形式上明显地显示出呆板。附带说一句，现在这种现象依然存在。当然，数学荣誉学位考试的荣耀是不可否认的。考试题目机械地看很难——但不幸的是，无法通过考试来发现考生的数学想象力、洞察力或作为一个有创造性的数学家所应具备的其他素质。考试优胜者(英文为 *Wt anglers*，数学学位考试一等荣誉学位获得者，这一术语仍沿用至今)是基于考试成绩，并严格按分数次序选拔的。如果某人的成绩为最优名列一等第一名的话，学院会举行庆祝活动，一二名或第三名立即被选为研究员。

这些都遵循着英国传统的习惯。它只有一个缺点，正如哈代以他敏锐的洞察力所指出的。当他成为一个著名的数学家后不久，他与他坚定的伙伴利特伍德一起致力于废除这一制度时就指出了这一缺点：它使英国严肃的数学一百多年来一直停滞不前。

哈代来到三一学院的第一学期还能跟上这一体系。他被训练为一匹赛马，在数学题目的领域里赛跑，还在 19 岁时，他就知道这是毫无意义的。他被送到一个有名的教师那里学习，多数有潜力成为数学学位考试最优名列一等第一名的考生都被送到他那儿。这个教师知道所有考生的障碍，知道所有考官的出题风格，而对于课程本身并不感兴趣。对于这种体系，要是换上年轻的爱因斯坦就一定会反抗：要么离开剑桥，要么在以后的三年里根本不做正规作业。但哈代生在更守旧的英国环境中(有优点，也有缺点)。在考虑更换为历史专业时，他想

到了找一个真正的数学家来教他。哈代在《一个数学家的辩白》中对他深表称颂：“我的眼界最初是由乐甫(Love)教授打开的，他只教了我几学期，却使我对分析的严谨概念有了最初的了解。我从乐甫教授那儿获益最大的是他建议我读乔丹(Jordan)著名的《分析教程》(乐甫教授毕竟首先是一名应用数学家)，我永远也不会忘记这部著作所给予我的震撼，不会忘记那本书对我这一代数学工作者的激励。读了这部著作，我第一次懂得了数学的真谛；也是从那时起，我走上了一个真正的数学家的道路，对数学树立了正确的目标，产生了真诚的激情。”

1898年，他在数学学位考试中获得第四名。他常常承认，这一结果当时使他有点恼怒。他是一个很有潜力的竞争者，尽管这种考试很荒谬，但他认为冠军应该属于他。1900年，他参加了数学荣誉学位第二部分考试，这是更权威的考试，他取得了应该属于他的好成绩，并获得奖学金。

从那时起，他的前途实际上就注定了。他很清楚他的目标是要把严密性引入英国的数学分析中。他没有偏离他认为是“生活中最大的永久的快乐”的研究。不用担心他应该做什么，无论是他自己还是别人对他的聪明才智都深信不疑。他23岁就被选人皇家学会。

哈代是那个时代的幸运儿：他不用思虑自己的前途，从23岁起他就拥有一个男人所需要的安逸，也有足够花的钱。在20世纪初，三一学院的单身教师是很惬意的，但哈代用钱很谨慎，不得已的钱他才花(有时是特殊的目的，如50英里的的士费)；可花可不花的钱，无论世俗舆论如何，他也绝不会花。他只做他愿意做的事，放纵自己的怪僻。他生活在世界上最优秀的知识分子圈子中——G·E·摩尔、怀特海、罗素、特里维廉以及三一学院的高级圈子，艺术家布卢姆斯伯里(Bloomsbury)也很快加入了三一学术圈(实际上，哈代很早就与布卢姆斯伯里私交甚好，兴趣相投)。在这个杰出人物的圈子中，哈代是最卓越的青年人之一，并且，在非正式场合，他最无拘无束。

现在我可以告诉你我后面要说的内容：哈代一直到老都保持着一个才华横溢的青年人的生活热忱和精神境界，娱乐、兴趣也都保持着一个剑桥年轻教师的热情。但是，与许多直到60岁还保持青春活力的老年人一样，他晚年的最后几年终究失去了这种活力。

当然，哈代大多数时候比我们大多数人都要快乐。他的朋友广泛得令人吃惊，这些朋友都必须通过他的私人考试：他们必须具备他称之为“螺旋”的素质(这是一个板球术语，只可意会不可言传：它暗喻某种婉转或精明的处事方法。对于当今社会名流，麦克米伦和肯尼迪可以打高分，而丘吉尔和艾森豪威尔则不及格)。但他很宽容、诚实、生气勃勃，含蓄地溺爱着他的朋友们。有一天早上我不得已去看他。早上一直是他做数学研究的保留时间，他正坐在书桌前，用一手俊秀的字体写着什么。我低声说了一些陈腐的客套话，希望我没有打扰他。他突然明白了我的意思，露出诡秘的笑容说：“就像你应该已注意到的，答案是你打扰了我。当然，我通常很高兴见到你，”16年来，我们彼此非常了解，他从未说过比这更动感情的话，除了在他临终时他说盼望我再来看他以外。

我相信他的大多数好朋友都与我有同感。但是在他一生中，也有过二三次另一种朋友关系，这种关系只是强烈的、吸引人的感情，是崇高的而非肉体的。我知道的一次是为一个小伙子，这个小伙子的性格与他自己一样脆弱。我相信其他几次也一样，尽管只是偶尔从他的谈话中捕捉到的几句信息。对于许多像我这一代人来说，这种关系既不满足也不可能实现，

而且，除非认为这是想当然的，谁也不会理解哈代这样的人的气质(这种人很少，但也不像犀牛那么稀少)，即使是他那个时代的剑桥人。他没有得到应有的满足，我们大多数人也无法帮助他得到这种满足。他知道自己与众不同，但这并没有使他感到不快。他的精神世界是他自己的，且非常富有。不幸的事最后发生了：除了他忠诚的妹妹以外，再也无人接近他。他在《一个数学家的辩白》(除了它所有高尚的精神以外，此书是一本令人绝望的悲哀的书)中带着讥讽的禁欲主义观点说，一个创造性的人已经失去了创造的能力和欲望，“这的确很令人惋惜，但在这种情况下，他已不在乎任何事情，所以为他操心是愚蠢的”。这就是他处理数学以外的个人生活的态度，只有数学才是他存在的理由。在与他交往时很容易忘记这些，就像在爱因斯坦的伦理感情中很容易忘掉他存在的正当理由是寻求物理定律一样。但他们两人从来没有忘记一点，这就是他们生活的核心所在，从年轻开始一直到死。

与爱因斯坦不同，哈代没有很快使自己闻名。他于 1900—1911 年发表的早期文章很有分量，足以使他进入皇家学会，赢得国际声望，但他并不看重这些。这不是虚伪的谦虚，而是大师的英明判断：他知道哪些工作有价值，哪些工作无价值。

1911 年他开始了与利特伍德 35 年的合作，1913 年他发现了拉曼纽扬，又开始了另一次合作。他的主要工作都是在这两人合作下进行的，多数是与利特伍德合作，这是数学史上最著名的合作。据我所知，迄今为止还没有任何一个科学，或其他领域的创造性活动像他们这么成功。他们合作发表了近一百篇文章，很多都是“布拉德曼级(Bradman class)”的。在哈代的晚年，与他接触不多、也很少打板球的数学家们坚持对哈代的最高评价是“霍布斯级(Hobbs class)”，其实不然。这很勉强，刚好他的宠物也叫霍布斯，他不得不更改荣誉的次序。我曾经收到他一张明信片，大约是 1938 年的，上面写道：“布拉德曼级超过了古往今来所有的击球手，如果阿基米德、牛顿和高斯仍在霍布斯级的话，我必须承认超过他们的可能性。这一等级我很难想象，最好从现在起进入布拉德曼级。”

对于整整一代人来说，哈代—利特伍德主宰了英国的纯数学，也在很大程度上主宰了世界的纯数学。数学家们告诉我，他们在多大程度上改变了数学分析的发展进程现在还很难说，也很难预料在今后的 100 年中他们的上作有多大的影响，但其不朽的价值是毫无疑问的。

正如我前面所说的，他们的合作一直是最伟大的，但是没有人知道他们是如何合作的，除非利特伍德告诉我们，否则无人会知晓。我已经提到过哈代对利特伍德的评价：他是两个合作者中能力更强的一个。哈代曾经写道，他知道“没有其他人能够拥有这样的心灵、技术和才智的合作”。利特伍德一直是一个比哈代更平常的人，他与哈代一样风趣，但似乎比哈代社会经验更丰富一些，他从不像哈代那样擅长于精妙的学术宣传，所以很少在学术圈的中心出现。这导致欧洲数学家们开玩笑说，哈代创造了利特伍德，以便在他们的某一定理证明有误时替哈代受过。实际上，利特伍德的个性至少与哈代一样倔强。

从表面上看，他们两人都不像是容易合作的伙伴，很难想象最初是谁先提出合作建议的。当然他们当中必定有一人先提出来，但没有人能够看出他们是如何安排的。他们合作的大部分时间并不在同一大学，据报道，哈拉尔德·玻尔(Harald Bohr)(尼尔斯·玻尔的弟弟，他本人是一个优秀的数学家)曾说他们合作的一个原则是：如果一人写信给另一人，收信人没有任何义务回复，甚至可以拒不拆信。

对此我无法作任何评论。多年来，哈代与我的谈话涉及到几乎所有能想象得到的方面，除了合作。当然，他曾经说这是他的创造生涯中很幸运的事情，他提起利特伍德时用词与我前面所描述的一样，但他从不暗示他们的合作细节。我对数学懂得不多，无法理解他们的文

章，但我学会了他们的一些语言。如果他无意中说出了任何有关他们合作的方法，我想我绝不会漏掉它们。我可以很肯定地说，秘密——对他来说并非独特，但对大多数人来说似乎至关重要——在于深思熟虑。

关于他发现拉曼纽扬，根本无秘密可言。他曾写道，这是他生活中一个传奇的小故事。无论如何，这是一个令人钦佩的故事，一个几乎让所有人(只有两个例外)信任的故事。1913年初的一个早上，在他早餐桌上的一大堆信件中，他发现了一个污皱的大信封，上面盖有印度邮戳。打开信封，里面有几页陈旧的纸，字迹不像英国人的手笔，满页都是符号。他浏览了一下信，无动于衷。这时他 36 岁，已经是世界著名的数学家，他发现著名的数学家们常常会碰到一些狂热者，他已经习惯于收到陌生人的手稿：证明金字塔的智慧预言，犹太长老的启示，或培根设在被认为是莎士比亚的作品中的密码。

所以，哈代对此比任何事都感到厌烦。他浏览了一下信，信是用不通顺的英语写的，署名为一个不认识的印度人。信中要求哈代对这些数学发现发表自己的观点。手稿上似乎都是定理，多数看起来杂乱无章或异想天开，有一两个已经是众所周知的，看上去却像是他刚发现的，没有任何证明。哈代不仅感到厌烦，而且恼怒，这看起来像一个荒谬的欺诈行为。他把信稿丢到一边，继续他一天的日常工作程序。他一生中一直都没改变这一程序，所以也许有必要重述它：早餐时他先阅读《泰晤士报》，如果有澳大利亚板球赛事的话，他会最先看此消息，并用心揣摩。

哈代的一位朋友梅纳德·凯恩斯(Maynard Keynes)也是数学大师，有一次曾数落哈代：假如哈代每天花半小时像关注板球赛事那样研究股票市场行情，他早就轻而易举发财了。

然而，从上午 9 点到下午 1 点，除非有课，他都倾心于数学研究。他常常说，对于一个数学家来说，每天四小时创造性的工作差不多是极限。午餐在餐厅，他吃得很少。午饭后，他慢跑到学校网球场打一下网球(如果在夏天，他会散步到菲南尔球场看板球)，然后再溜达回他的房间。那一天，尽管程序没有改变，但内在进展与预料的有差异。打完球后回来，他的脑子不断被那份印度手稿所困扰：杂乱的定理，他以前从未见过也未想象过的定理，一个欺诈天才？这个问题盘旋在他的脑海中。因为是哈代的脑袋，这个问题特别简练而清楚：写信人作为一个欺诈天才比一个未发现的数学天才可能性更大吗？显然，答案是否定的。回到三一学院的房间后，他又看了一下信稿，并带信给利特伍德(可能是由信使传的信，但肯定不是打电话，因为他对电话就像对所有的机械装置包括自来水笔一样，十分不信任)，说吃完饭后他们必须讨论一下。

吃完饭后，通常有片刻休息，哈代喜欢来一 葡萄酒。但是，除了“阿伦·圣·奥宾”的狂热曾唤起他富有青春活力的想象外，他发现自己并不是真的喜欢逗留在休息室里吃水果、喝葡萄酒。但利特伍德喜欢这种场合，所以他们在休息室休息了一会儿。约 9 点钟时，他们准时回到了哈代的房间，摊开信稿。

我真希望当时能到场目睹他们的讨论：哈代，集清醒、理智、高傲于一身(他很英国化，但争论时显示出拉丁人独特的性格)；利特伍德，富于想象、活力、幽默，显然讨论没有花太长时间，午夜 12 点以前，他们就肯定地认为，手稿的作者是天才。这是那晚他们所能作的最肯定的判断，只是在后来哈代断定拉曼纽扬在自然数学天才中，本可与高斯和欧拉相提并论，但由于他受教育的欠缺，加之他在数学历史舞台出世太晚，不可能作出像高斯和欧拉那么重大的贡献。



凡事说起来容易，上述判断应该早有大数学家们得出来了，但我要提到，有两个没在故事中出现的人物是不值得称赞的。出于骑士气质，哈代在所有关于拉曼纽扬的谈话和文章中都隐瞒了这一点。这两个人已经死了好多年了，所以现在是说出真相的时候了：很简单，哈代不是第一个收到拉曼纽扬的手稿的著名数学家，在这之前还有两位，都是英国人，学术声望极高，他们都把手稿退了回去，没有任何评论。拉曼纽扬出名以后，我想历史不会记载他们所说的任何话，如果有谁知道了这些也会对他们暗表同情。

第二天哈代就开始行动起来，他认为必须把拉曼纽扬带到英国来。经费不是一个主要问题，三一学院对支持非正统的天才有好的政策——学院几年后对卡皮查(Kapitsa)也做了同样的支持——一旦哈代做了决定，人事机构就无法阻挡拉曼纽扬，但是他们需要某些非人事方面的支持。

后来才知道拉曼纽扬是马德拉斯的一个穷职员，与妻子住在一起，一年只有 20 镑的收入。他是一个婆罗门教徒，通常严格按宗教仪式办事，他母亲则更加严格，他似乎不可能打破禁规越洋过海。幸好他母亲最崇拜纳马卡尔(Namakkal)女神，一天早上，拉曼纽扬的母亲宣布了一个惊人的消息：她头天晚上做了一个梦，梦中她看见她儿子在一个大礼堂里坐在一群欧洲人中间，纳马卡尔女神命令她不要阻挡她儿子为实现他的人生目标所作的奋斗。为拉曼纽扬写传记的印度作家说，这使所有关心他的人吃惊。

1914 年拉曼纽扬到达英国。以下是哈代对拉曼纽扬的考察结果(尽管在这方面我不能相信他的洞察力)：虽然冲破等级禁锢非常困难，拉曼纽扬并不信奉神学教条，除了一点模糊的行善行为以外，不比哈代更虔诚。但他肯定相信宗教仪式，当他就职于三一学院时——他在四年内成为该学院的研究员——根本没有“阿伦·圣·奥宾”的享乐，哈代常常发现他举行仪式般地换上伊斯兰教徒穿的宽松裤，在他自己的房间里非常整脚地炒素菜。

他们的合作是一个神奇的动人故事。哈代没有忘记他是在面对一个天才，但这个天才即使在数学方面也几乎没受到正规训练。拉曼纽扬没能进入马德拉斯大学是因为他英语没通过入学考试。按哈代的说法，这位印度人总是和蔼可亲，性情很好。但可以肯定，他对哈代超出数学范围的谈话几乎不懂。他听哈代说话时似乎总带着耐心的微笑，面容友善、亲切，但即使是谈论数学，由于他们受教育程度不同，用词也就有差异。拉曼纽扬是自学的，他对现代学术意义上的严谨一无所知，在某种程度上他不知道什么叫证明。有一次哈代喝醉酒以后曾经写道，如果拉曼纽扬能受到更好的教育，将少一点拉曼纽扬的特性。当他清醒以后，他说那些话是胡说，应该说如果拉曼纽扬受到了更好的教育，他将会比现在更出色。实际上，尽管拉曼纽扬已是温切斯特奖学金候选人，哈代还是不得不对他进行一些正规的数学教育。哈代说这是拉曼纽扬生活中最独一无二的经历：对于一个对数学有最深刻的洞察力、但从没有从正规书本上接触过大多数内容的人来说，现代数学看起来像什么呢？

无论怎样，他们合作发表了最高档次的五篇文章，哈代在文章中显示出极高的独创性(他们合作的细节比哈代-利特伍德合作更为人们所知一些)。慷慨和想象在这一次完全得到回报。

这是一个进取向上的故事，一旦有了好的开端，就会继续取得更大的成功。值得记住的是，英国给了拉曼纽扬可能给的最高荣誉：皇家学会在他 30 岁时选他为院士(对一个数学家来说，是非常年轻的)，三一学院也在同一年选他为研究员，他是一人获得这两个称号的第

一个印度人。对此他很感激，但不久他就病了。在战争年代，要把他转到一个气候较好的地方是很困难的。

当拉曼纽扬病重躺在普特尼的医院时，哈代常常去看他。正是在哈代探视他的一次途中发生了出租马车车号的小故事。哈代到普特尼乘的是出租马车，这是他经常选择的交通工具。哈代每次走进拉曼纽扬的病房时，总不善于恰当地开始谈话。这次他可能一句问候语也没有，第一句话就是：“我想我的出租马车车号是 1729，这对我来说似乎是一个很不太吉利的数字。”拉曼纽扬回答道：“不，哈代！不，哈代！这是一个很有趣的数，它是能够以两种方式表达为两个立方数的和的最小数。”

这件事是哈代所记载的，一定是准确的。哈代是最诚实的人，而且，可能还没有人发现这个数的奥秘。

拉曼纽扬在战后两年回到马德拉斯后死于肺结核。正如哈代在《一个数学家的辩白》中所写的，在他的数学家名单中：“伽罗瓦(Galois)21 岁去世，阿贝尔(Abel)27 岁去世，拉曼纽扬 33 岁去世，黎曼 40 岁……我不知道有哪一个重要的数学进展是由一个年过半百的人创始的。”

如果没有与拉曼纽扬的合作，1914—1918 年的战争对哈代的创伤会更重。尽管如此，它仍然给哈代留下了一个伤口，且这个伤口在二次大战中又被破开了。他一生都持激进观点，他的激进主义似乎染上了世纪转折期的启蒙色彩，对我们这一代人来说，有时就像呼吸了更轻柔、纯真的空气，而我们并未察觉。

与他的爱德华七世时代的知识界朋友一样，他对德国有强烈的感情。德国毕竟是 19 世纪的教育先驱，向东欧、俄国、美国等国家传授了研究风气。其实，哈代很少研究德国文学或德国哲学，他的品味太古典。但在很多方面，他认为德国文化，包括社会福利制度，比他自己的国家更发达。

与爱因斯坦不同，哈代对威廉统治下的德国的亲身感受不多，而爱因斯坦则在政治上受到残酷的迫害。而且，哈代是很实在的人，如果他对德国的感激之情不胜于他自己的国家的话，他似乎自觉没有人性。在这一时期，有一个很令人高兴的小故事：德国最伟大的数学家之一希尔伯特听说哈代住在三一学院一套不特别令人满意的套房里(实际上他住在惠韦尔院)，再三斟酌以后便写信提醒院长，指出哈代不仅是三一学院也是英国最优秀的数学家，因而应住最好的房间。

所以，哈代，像罗素和剑桥高层知识界的很多人一样，认为战争不应该打起来。而且，由于他对英国政治家根深蒂固的不信任，认为错方在英国。他对这一观点有很严密的理性推论，因而找不到否定这一观点的充分理由。事实上，他自愿要求为德比计划服务，但由于健康原因被拒绝了。而他在三一学院越来越感到孤独，因为多数人都是好斗的。

罗素在过分复杂的情况下被校方解雇了(哈代为了使自己在另一场战争中好受一些，25 年后才写下了当时的细节)，哈代要好的朋友都远离他去参加了战争，利特伍德正在皇家炮兵部队作为陆军少尉从事弹道学研究。由于他心甘情愿保持中立，四年战争后他仍然是一名陆军少尉。哈代与他之间的合作受到了干扰，尽管没有完全中断。在学院同事间的激烈的争

吵中，是拉曼纽扬的工作给哈代带来了安慰。

我有时想，哈代对他的同事们不够公平。由于在战争年代，有的人相当疯狂，但有些人仍长期忍受痛苦企图维持社交礼节。不管怎样，他们选举他的弟子拉曼纽扬正是学术正义占了上风。

而哈代那时仅仅与参加选举的一些人简单地交谈，而不是所有的人。

他仍然很不愉快，一旦条件许可，他就离开剑桥。1919 年他在牛津得到了一个职位，立刻享受到他一生中最快乐的时光。他与拉曼纽扬和利特伍德的合作已取得了巨大成功，但现在他与利特伍德的合作更上升到最高层次，用牛顿的话说，是“处在他发明的全盛期”，这时他四十出头。这对于一个数学家来说异常地晚了。

这种创造激情来得如此之晚使他感到永恒的青春涌动，这对他来说比大多数人都重要。他像年轻人一样充满活力，他网球比以前打得更多，技艺稳步提高(网球是一项昂贵的运动，它要花费一个教授收入的相当一部分)，他多次访问美国的大学，并爱上了这个国家；他是那个时代几乎同样喜爱美国和苏联的少数几个英国人之一；他无疑是惟一个给板球委员们写信、认真地提出其中一个比赛规则应作技术改正的英国人。20 年代对他和他那一代大多数自由人上来说是一场灾难，他恨不得把战争的痛苦全扫进历史。

他在新学院像在家一样舒适、自在，而他在剑桥却从未有过这种感觉。温暖的，家乡似的牛津气候很适合他。正是在那儿，在当时还很小但很亲切的学院里，他完善了他自己的谈话风格。放学后总有人渴望听他谈话，这些人可以接受他的古怪，他们认为他不仅是一个伟大、善良的人，而且待人热情。如果他想玩对话游戏，或实地(尽管古怪)板球游戏，他们都乐于奉陪，对他表现出异常亲切，富有人情味的关怀。尽管他以前也受到人们的赞扬和尊敬，仇没到如此程度。

有一件事似乎很可笑：几乎没有人注意到哈代的房间里有一幅很大的列宁照片。哈代的激进主义不是那么有组织的，但是真的，如前所述，他出生在一个知识分子家庭，几乎一生都生活在资产阶级阶层，但实际上他的行为更像一个贵族成员，或更确切地说像一个浪漫主义贵族。他的这种处世态度也许是受了他的朋友罗素的影响，但多数是天生固有的。在他那胆怯的性格里，他对此根本不在乎。

没有任何庇护，他与那些贫穷的、不幸和胆怯的、受种族歧视的人(发现拉曼纽扬是他命运的象征性事件)相处得很好，与那些他称之为“大瓶底”基础的人相比，他更喜欢前者。”“大瓶底”一词的来源更基于心理学而不是解剖学，在 19 世纪三一学院有一句有名的格言是亚当·塞奇威克(Adam Sedgwick)说的：“在这个世界如果没有一个‘大瓶底’谁也不可能成功。”对哈代来说，“大瓶底”意味着自信的、兴旺的、帝国主义的资产阶级英国人，他们包括大多数主教、校长、法官及所有的政治家，惟独劳合一乔治除外。

为了表示对国家的忠诚，哈代接受了一个公益事业职务。1924——1926 年两年间，他是科学工作者协会的理事长，他讥讽地说这是一个奇怪的选择，是“世界上最不实用的职业中最不实用的成员”。但对于重要的事情，他不是形同虚设，他会审慎地站出来处理。很久以后，当我回来与弗兰克·卡辛(Frank Cousins)一起工作时，我只有两个可靠的朋友，他和

G·H·哈代，他们主持了工会运动的领导工作，我为此感到非常高兴。

尽管 20 年代的夏季，牛津的气候不是异常宜人，但也足够舒适，使人不解的是他为何要回剑桥。1931 年他终于回去了。我分析有两个原因。第一个也是决定性的，他是一个伟大的科学家，剑桥在当时仍是英国的数学中心，那里的高级数学讲座教授对一个科学家来说才是最合适的地方。第二个是古怪的原因，他考虑到年纪越来越大，尽管牛津学院温暖而富有人情味，但对老人是冷酷的：如果他仍在新学院，一旦到了退休年龄他就得马上离开教授的办公室；而如果他回到三一学院，他可以终生在位直至去世，这也是影响他的重要因素。

当他回到剑桥时——也就是我开始认识他的时候——他正处在辉煌期的余辉中。他仍然很快乐，富有创造性，虽不如 20 年代，但仍足以使他觉得创造潜力还在。他精神饱满如在新学院一样，所以我们有幸看到他几乎处在最佳期。

当我们成为好朋友以后，在冬天，每两周我们就要分别在各自的学院里一起共进晚餐。夏天，我们则同意在板球场聚会。除非特殊情况，早上他仍然做数学研究，中餐以后他才到菲南尔球场。他喜欢沿着煤渣路大步、沉重地慢跑(他稍稍有些瘦，即使在五十多岁快六十岁仍身体灵活，打网球)，低着头，头发、领带、运动衫、草稿纸随风飘扬，引起了大家的注意。“那里来了一位希腊诗人，他将超过我。”一次当哈代经过记分牌时一位喝彩的农夫说。

哈代走到他最喜欢的地方，亭子的对面，那里他可以得到太阳的每一束光——他是一个向日葵。为了使太阳发光，即使在晴朗的五月下午，他也带着一个他所称的“反上帝电池”到那儿去。电池的组成是：三四件运动衫、他妹妹的伞、一个装了数学手稿(如博士论文)的文章袋、一篇他为皇家学会审查的文章，或一些荣誉学位考试答案等。他会对一个熟人解释说，上帝相信哈代预计到天气会变化，为了给他一个工作的机会，反向地安排天空仍晴朗无云。

他在那儿坐下了。在长长的下午，他为了观看板球取乐，希望阳光明媚，且有一个同伴与他同乐。球艺、战术、动作美——这对他是最大的吸引力。我不想试着解释这些，除非懂得板球的语言，否则无法表达其意义。就像哈代的某些经典格言是无法解释的一样，除非你懂得板球术语或数学理论，最好是两者皆通。幸好对于我们大多数朋友来说，他还具有普通人的幽默。

他可能是第一个否认他自己有特别的心理洞察力的人，但实际上他是最聪明的人，具有敏锐的观察力，且阅读广泛，也具有普通人的特性——身体强健、待人宽容、好讽刺人、绝对无虚荣心。他精神道德上的正直是少见的(我怀疑有谁能够比他更正直)，他对自命不凡、伪善的道德极端厌恶。现在，板球这个最美丽的运动比赛也大多穿上了伪善的外衣，球队精神最终被假设为：应该争取零分让对方赢，而不应该得 100 分让对方输(一个像哈代一样纯真公正的杰出的板球手有一次曾婉转地说他从没有此念头)。这种特殊的社会因素唤起了哈代荒谬的想法，他总是用一个平衡系列格言来回答解释问题。例如：

板球是惟一的一种正方 10 人对抗对方 11 人的比赛。如果你上场时神经紧张，那么没有任何东西能够鼓起你的勇气来看着另一人下场。

如果他的听众们运气好，他们还可听到与板球无关的评论，就像他写的文章一样锐利。

在《一个数学家的辩白》中有更多典型的例子，下面列举几个：表达一个大多数人的观点决不值得一个天才来做。根据定义，有多得很的人可以做这件事。

当我还是一个大学生时，可能会有人——如果他非常不正统——建议托尔斯泰作为一个作家来到乔治·梅瑞狄斯(George Meredith)的身边；但是，毫无疑问，没有其他人可能这样做。(这是讨论关于陶醉的方式时说的，值得一提的是他生活在几代剑桥人最辉煌的时期。)

无论为了何种严肃的目的，智力是很不重要的礼物。

年轻人应该骄傲自大，但决不能愚笨。[当某人企图说服他《芬尼根的觉醒》(Finnegans Wake)是最后的文学杰作时所说。]

有时一个人不得不说他的困难，但应该说得尽量简洁，好像别人已经知道一样。

他看板球时通常每球必看，但偶尔兴趣也会减退，随后他会要求我们玩挑选球队的游戏：骗子队、棍棒队、伪诗人队、惹人厌烦队、名字以 HA 开头的队(1 号和 2 号是 Hadrian 和 Hannibal)、名字以 SN 开头的队、三一的全日制队、基督院的全日制队，等等。我不擅长这种游戏：即让人选择一个名字以 SN 开头的著名人物队。三一队占绝对优势——克拉克·麦克斯韦 (Clerk Maxwell)、拜伦(Byron)、萨克雷(Thackeray)、丁尼生 (Tennyson)等人的位置不确定；而基督院队弥尔顿和达尔文打头很强，但从第三号开始就不行了。

他还有另一个喜爱的娱乐。“给昨晚我们遇见的男子分类”。他说，于是某人在每个分类中被记为 100 号。分类是哈代很久以来发明和定义的：刻板的、苍白的(“一个刻板的人不一定是苍白的人，但所有苍白的人毫无例外地应考虑为刻板的人”)，迟钝的、老白兰地的螺旋的，等等。刻板的、苍白的和迟钝的是不解自明的(威灵顿公爵刻板和苍白都是 100 分，迟钝为零分)。老白兰地是从一个神话人物而来，他说他从不喝任何饮料，除了老白兰地。因此，由此推论，老白兰地表示一种古怪的、深奥的但在情理之中的爱好。作为一种特性(这是哈代的观点，也是作为一个作者的观点，尽管不是我的观点)，普鲁斯特得到了老白兰地最高分，F·A·林德曼(后来的彻威尔勋爵)也一样可得到高分。

夏天过去了。在一个最短的剑桥假日过后，就是大学比赛。要安排在伦敦见他总是不容易，因为，如我前面提到的，他对机械的玩意儿有一种病态的怀疑(他从不用手表)，特别是电话。在他的三一学院的办公室里或圣乔治广场的套房里，他常常用一种不赞成的和稍带一点儿凶恶的声音说：“如果你想用电话，隔壁房间有一部。”有一次在紧急情况下他不得不拨通我的电话，愤怒的声音传到我耳朵里，“我不会听你说一句话，所以我讲完以后立刻就会把话筒挂断。你一定得在今晚 9 至 10 点钟之间到我这里来，非常重要，”随后电话就被挂断了。

他仍然准时到达了大学比赛地点，每年这时是他才智最焕发的时候。他被朋友们包围在中间，这些朋友有先生也有女士。他非常放松，没有羞怯感。他成为所有人注意的中心，但他并不讨厌这一点。有时从四分之一英里外还可听到这里的笑声。

在那些快乐的晚年时光里，他做的每一件事都是情愿的、有序的，这是他的一种风格。板球是一种优美、有序的游戏，这正是他发现它形式美的原因，我听说，他的数学，包括他

最后的创造性工作也具备这同样的审美要求。我已经得出了这样的印象：我相信他在非公开场合非常健谈，在一定程度上这无疑是对的。但是，在他称为“不平常”的场合(指对每一个参加者都很重要的场合)，他也是一个严肃、专注的听众。我在同一时期通过各种机会认识的其他著名人物中，威尔斯总的来说是一个比人们预料的还要差的听众；拉瑟福德要好得多；劳合一乔治一直是最好的听众之一。哈代不像劳合一乔治那样，从他人的言谈中获得印象和知识，但他的头脑受他人支配。在我准备写《教士》的前几年，他听到了这一消息，就盘问我，使我对他谈了很多。他提出了一些好的建议。我希望他读过这本书，我想他会喜欢它的。不管怎样，这本书我是献给他的。

在《一个数学家的辩白》的结尾他讨论了其他一些问题。有一个问题是长期争论的，有时争论的双方都很气愤。在第二次世界大战期间我们都很暴躁，但是如我稍后要说的，各人有不同的观点。对于他的观点我没有半点曲解。尽管我们隔着感情的鸿沟，无论如何，在理智上他能够理解我所说的，我与他的任何争论都是如此。

在 30 年代他仍以他自己的方式过着年轻人似的生活，但这种生活突然破碎了。1939 年他患了冠状动脉血栓，痊愈后，网球、壁球这些他喜爱的体育活动对他不再适宜。战争使他更觉压抑，就像第一次世界大战一样。对他来说这些是连成一串的精神炮弹，我们都不知所措。当事态明了、国家可以得到挽救时，他仍不能为战争服务，哪怕比在 1914 年他所做的更多一点。他的一个最好的朋友悲惨地死去了，而且——我认为毫无疑问这些不幸是有内在联系的——在他六十多岁时，他那作为数学家的创造力终于离开了他。

这就是为什么《一个数学家的辩白》一书，如果逐字认真阅读的话可以发现，是一本捕猎悲哀的书。是的，它措辞巧妙、锐利，充溢着高超的智力精神；是的，水晶般的清晰和正直仍在那儿；是的，它是一个创造性艺术家的实证。但是，此书以不充分的淡泊的方式，表达了他对以前属于他而再也不会回来的创造力的深切的痛惜。我不知道有什么作品能与这本书相比，部分原因是大多数人只知道文学作品对痛惜的表达，无法体验哈代的语言。几乎没有一个作者认为自己的作品其结局是绝对完美的。

在那些年里，我无法估计他为他的年轻人式的生活所付出的代价。这就像看见一个杰出的运动员，多年以其年轻和技艺而骄傲，比我们大家都要年轻和快乐得多，突然必须接受失去这一礼物的事实。碰见曾经杰出的——用他们的话说——已经下了山的运动员是很普通的事：很快他们的脚步就变得沉重起来(通常目光更呆板)，比赛再也不能实现。温布利大球场是一个可怕的地方，人群拥向那里是为了看其他人，那是很多运动员的观点。哈代不这样认为，他的想法有些绝望。他的身体已经复原得可以在网上击球 10 分钟，或打三一滚木球(用一套复杂的精制球具)。但通常很难唤起他的兴趣——三四年前他对每件事的兴趣都如此高涨?以至有时我们都疲倦了。“谁也不能厌烦”一直是他的一句格言。“你可以感到恐怖或憎恶，但不能厌烦。”当然，现在他经常就是那样，纯属厌烦。

正是由于那个原因，他的一些朋友，包括我，鼓励他写罗素和三一学院在 1914—1918 年战争期间的故事。不了解哈代有多么消沉的人认为，整个事件早已过去，没有必要再现。事实上，这使他快活得于什么都可以。这本书只在私下传阅，从来没有公开发表。这是一个遗憾，因为它是对科学历史的一个小补充。

我这样说服他是因为我想要他写另一本书，他在情绪好转一些后答应了我。这本书叫做

《椭圆形球场上的一天》，内容是他花了一整天时间看板球，阐述他对球赛、人性、往事、一般生活的观点和缅怀，这将是一本由古怪人写的小小的经典作，但它没有写成。

在那些最后的年月里，我无法给他很大的帮助。战争年代我被卷入白厅(英国政府)，我全神贯注地工作，经常很疲倦，到剑桥去必须努力才能实现。但我不得不悔恨地承认应该比我实际做的作更大的努力，在我们之间，虽然感情上确实没有冷淡，但有了一些间隙。在整个战争期间，他把帕克(Parker)的套间租给了我——黑暗、破烂的套间，外面是圣乔治广场花园。但他不喜欢我对战争如此全身心地投入，他认为人们不应该全身心地投入到军事行动中，他从不问我的工作，他不想谈论战争；而我，在我这一方，表现得太急躁，没有足够成熟的考虑。不管怎样，我认为，我做这件工作不是儿戏。由于我必须做这件工作，我就应该有最大的兴趣，这不是借口。

战争结束时我没有回到剑桥。1946 年我去看了他几次，他的身体仍然很差，机能已经衰退，走几码路以后就气喘，演出结束后长时间快乐的散步已经永远不可能了：我不得不叫的士送他回三一学院的家。他很高兴我已经回去写书：对一个认真的人来说创造才是惟一的生活目的。至于他自己，他渴望能够重新过一次创造性的生活，那种以前曾经有过的生活。但他自己的生活已经结束了。

我没布确切地引用他的语言，这种做法与他人不相同，我想忘记他的话，也曾试图用一种善意的反话曲解他的意思。所以我从没有确切地记住他的话，总想把它用作我自己修饰的词藻。

1947 年的初夏，我正坐在早餐桌前，电话响了，是哈代的妹妹打来的：他病得很重，问我能否立刻到剑桥去，我能否先打电话给三一学院？我没有时间领会第二句话的意义，但我照办了。那天早上在三一学院门房里找到一张她的便条：要我到唐纳德·罗们逊(Donald Robertson)的房间去，他将在那里等我。

唐纳德·罗伯逊是希腊文教授，哈代的亲密朋友。他是爱德华七世时代剑桥的又一位高层次、自由、优秀的成员。附带地说，他是称呼哈代基督教名的几个人之一，他静静地迎接我。窗外是风和日丽的早晨。他说：

“你应该知道哈罗德企图自杀。”

是的，他脱离了危险，现在他还好，如果这是恰当的用词。但唐纳德以不太直率的方式像哈代似的直接说，可惜这个企图失败了。哈代的健康状况越来越差：他在任何情况下都不会活很长，即使是从他的房间走到厅里也成了他的负担。他作了一个完全深思熟虑的选择，这样活着他无法忍受，这种生命毫无意义，他收集了足够的巴比土盐酸，试图做一件彻底的工作，于是服了太多。

我很喜欢唐纳德·罗伯逊，但我只在晚会上以及三一学院的高桌晚餐上见过他，这是第一次我们有机会亲切地交谈。他说，凭着绅士风度，我应该尽可能经常来看哈代，这是很难的，但却是应尽的义务，这种状况可能不会维持很久。我们都感到痛苦，我跟他说了声再见，以后再也没有见过他。

在伊大林疗养所，哈代躺在床上。由于药物引起呕吐，他将头撞在厕所的洗脸盆上。他喜欢自嘲：他把事情搞得一团糟，有人搞得更糟吗？我不得不进入嘲笑人的游戏。我第一次感觉到自己不太喜欢嘲笑人，但我得演戏。我谈了一些著名的自杀失败故事：第二次世界大战中的德国将军们怎么样？贝克(Beck)、斯塔普纳盖(Stulpnagel)，他们这方面都是有名的不合格者。听我自己讲这些事情真是稀奇古怪，非常难以理解的是，这似乎使他振奋起来。

从那以后，我每星期至少要去剑桥一次，我惧怕每一次访问，但他很早就说过盼望着看见我。他说话很少，几乎每次我听见他谈的都是关于死：他要得到它，他不惧怕它，哪有惧怕不存在之理？他的理智的禁欲主义又回来了，他不会再做自杀的傻事，他不擅长干这事。我准备好了等待，带着可能使他痛苦的不一致性——像他圈子的大多数人一样，他在某种程度上相信理智，这是我认为的不理智——他显示出对他的症状的好奇心的怀疑。他一直研究他的踝关节水肿：今天是胖得大一些还是小一些？

当然，多数情况下我不得不谈论板球，这是他惟一的安慰。我不得不装出对这一游戏非常热心的样子，而实际上我再也没这种感觉，在30年代这种感觉就已经冷淡下来，除非为了使他高兴。现在我不得不像我上中学时一样认真研究板球赛事。他自己不能阅读，但如果我欺骗他的话他总能识破。有时，他的高兴劲儿会持续几分钟，但如果我不能想出另一个问题或新闻，他就会躺在那儿，显示出人将快死时的那种可怕的孤寂。

有一两次我曾试图使他振奋：即使是一次冒险，是否值得我们一起再去看一次板球比赛？我的境况比过去要好些，我说。我准备把他送上的士，这是他过去熟悉的交通工具，到任何一个他喜欢的网球场去，他听到后快活起来。他说我照看的是一个死人，我说我已作好了准备。他知道，我也知道，他的死就是几个月内的事，我看到他有一个下午非常高兴。但第二次我去看他时他丧气而恼怒地摇摇头。不，他不能试，没有试的意义。

不得不谈论板球，我感到非常艰难。他的妹妹更难，这位聪明、美丽的妇人一生没有嫁人，很多时间都在照看他。用与他不同的幽默技巧，她收集了每一条她能找到的板球新闻片断，尽管她从来不懂有关板球的知识。

有一两次闹出了讽刺性的仁爱喜剧性事件。他死之前两三个星期，听说皇家学会要给他最高的荣誉：科普利勋章。他露出了恶魔般的笑容，这是我在那几个月里第一次看见他完全露出神采。“现在我知道我马上就要结束一生了，当人们给你最高荣誉的时候，就是确切下结论的时候。”

从那以后，我想我又去看了他两次，最后一次是在他逝世前四五天。有一个印度的板球队在澳大利亚表演，我们谈论了他们的情况。

在那个星期他对妹妹说：“如果我知道我会在今天死去，我想我仍然要听板球赛事。”

他每天都有类似的事情。那个星期每天晚上她离开他之前，都要读一章剑桥大学板球历史给他听。他一生中听到的最后一句话就在这本书某一章里面，因为他是在清早突然逝世的。

C·P·斯诺博士



注：①在英国的教会学院宿舍，通常每周举行一次高桌晚餐，晚餐邀请一些著名人物做客，舍监(通常是牧师等)、客人们坐在台上的桌子上，所以称高桌晚餐。——译者

②高桌晚餐时坐在高桌上的人通常都要穿教会的黑袍。——译者

## § 1

如果一个数学家发现自己在写关于数学的东西，他会感到很忧伤的。因为数学家的工作是做实事，比如证明新定理，使数学有所发展，而不是谈论自己或别的数学家干了些什么。

政治家蔑视时事评论家；画家蔑视艺术评论家；生理学家、物理学家或数学家一般都有类似的感觉。做事者对评论者的蔑视是最深刻的，总的来看也是最合理的。解释、评论、鉴赏是次等工作。

我曾与豪斯曼(Housman)有过几次认真的交谈，我能记得其中有一次我们争论过上述看法。豪斯曼在他所作的题为《诗歌的名与实》的报告中，曾非常坚决地否定他是个批评家。而在我看来，他的这种否定方式是异常偏执的。在报告中，他还表达了对文学批评的赞赏态度。这些都令我大惑不解。

在此报告的开头，他引用了 22 年前在一次演讲中的一段话：

我不能说文学批评是否为上帝从他的珍宝库中拿出来赐予我们的最好礼物，但是，好像上帝是这样认为的。因为在赠送这一礼物时，上帝的态度肯定是极为审慎、郑重的。与遍地丛生的草莓相比，演说家和诗人……是稀罕的；但与哈雷彗星的回归相比，他们就平常得多。而文学评论家可就不那么平常了。

接着他写道：在这 22 年中，我在一些方面取得了进步，而在另一些方面退步了。但是，我的进步还没使我达到成为一名文学评论家的程度，而我的退步也没有使我幻想自己已经成了一名文学评论家。

我曾认为，一位伟大学者和高雅诗人写出这些话来未免可悲。过了几个星期，我在餐厅见他就在我身旁时，便大胆地跟他说了自己的想法。我问他，他的意思是否真的希望人们非常认真地对待他说的话。我还问他，在他看来评论家与学者及诗人的生活是否可以相提并论。整个晚餐时间我们都在争论这些问题。我认为最终他还是赞成了我的看法。看来对这样一个不再反驳我的人，我没必要宣扬我所获得的胜辩。但是最后，他对第一个问题的回答是“也许不完全是”，而对第二个问题的回答则是“大概不是”。

对豪斯曼的感觉或许尚有令人怀疑之处，而且我也并不希望宣称他是站在我这边了。然而作为科学家的感觉是毋庸置疑的，我有着完全一致的感觉。假如那时我发现自己正在写的不是数学，而是“有关”数学的什么东西，那就是在声明弱点，为此我理所当然地会受到更年轻、更富有朝气的数学家的蔑视。现在我写书来谈论“关于”数学的问题，是因为我也和其他的年过六十岁的数学家一样，不再有新思想，也不再精力和耐心来继续有效地进行自己的专业工作。

## § 2

我建议对数学进行辩解。也许有人会跟我说这根本没必要，因为，不论原因如何，目前还没有哪一种学科被公认为比数学更有用、更值得称颂的。这或许是真实的。实际上，由于有了

爱因斯坦的惊人成就，星体天文学与原子物理学可能已成为普遍高度评价的科学。数学家现在不必认为自己在自卫，因为他不会遭到像布拉德雷(Bradley)在他的值得钦佩的形而

学辩护词中所描绘的那种对抗的处境，那次卓有成效的捍卫使一部介绍形而上学的书《现象与实在》(Appearance Reality)得以完成。

布拉德雷说，有人会对一个形而上学家说，形而上学知识整体而言是不可能的；即使在某种程度上是可能的，实际上它也决不是名副其实的知识。形而上学家还会听人说：“同样的问题，同样的争论，同样的彻底失败。为什么还不放弃这种知识？难道再也没有别的事值得你付出劳动了吗？”没有人会愚蠢到用同样语言讨论数学问题。数学的大部分真理都是显而易见的；数学的实际运用，如在桥梁、蒸汽机和发电机等正冲击着人们迟钝的想象。没有必要说服公众让他们相信数学是有用的。

这一切都以其独特的方式让数学家感到欣慰，而真正的数学家几乎不可能对此感到满足。任何一个真正的数学家一定会体会到，数学的真正美名并不是基于这些粗略的成就，数学之所以享有普遍的美名很大程度上是基于无知与混乱，因此，仍有必要对它进行更合理的辩解。不管如何，我有意来试试。我想这种辩解比起布拉德雷的艰难的辩白来，任务该会简单些。

接着我要问：“数学为什么值得人们进行认真的研究？一个数学家用一生的时间从事这些工作的充足理由是什么？”像人们希望一个数学家所回答的那样，在多数情况下，我会这么回答：我认为数学研究值得做，而且以数学家为职业的理由是充分的。但是同时我也要说：我对数学的辩护也是为我自己辩护。我的辩解在一定程度上是利己的。因为假如我真的把自己看作是一名失败的数学家，我就不认为对自己所研究的学科进行辩解是件值得做的事了。

在辩护中带着某种程度的利己主义的态度是难免的，我想，对这一点是用不着辩解的。我认为“谦卑”的人做不出优秀的工作。比方说，在任何一个学科里，教授的首要职责之一就是对自己这一学科的重要性以及自己本人在这一学科的重要性进行一点夸大。假如一个人总在问自己：“我所做的事是值得做的吗？”以及“我做这个合适吗？”这都会使自己永远无能而且也让别人泄气。这种人该把眼睛闭上一会儿，更多地考虑自己的学科和自己本人的情况，而不是更多地考虑学科与自己所应得的报酬。这不太困难，因为更加困难的是依靠紧闭眼睛来使自己的学科与自己本人不受他人所嘲笑。

### § 3

一个人在开始为自己的生活和活动的合理性进行辩解时，必须要认清两个问题。第一是他所做的工作是否值得做；第二则是他为什么要做这一工作，而并不在乎其价值。第一个问题常常很难且答案让人失望。而大多数人会觉得回答第二个问题却是十分容易的。如果这些人是诚实的话，他们通常会采取两种形式中的一种。第二种形式仅仅是第一种形式的更简略的变形。而第一种形式是我们需要考虑的惟一形式。

我之所以做我的事，因为这事是，而且是惟一的一件我完全可以做好的事。我是个律师，或者是一个股票经纪人，或者是一个职业板球手，这都是因为我对这一特别的工作有些真正的才能。我做律师，是因为我伶牙俐齿，而且对法律之微妙感兴趣；我做股票经纪人，是因为我对股市行情的判断迅速而准确；我做职业板球手，是因为我挥拍非同一般地好。有人说，

我做个诗人或数学家也许更好，但不幸的是，我并没有才能做这样的工作。

我并不认为大多数人能够做出上述那样的辩解，因为多数人什么工作也做不好。可是只要这种辩解说得振振有词，它就很难反驳，事实上只有少数人能进行这样的辩解：也许只有 5% 或 10% 的人可做得不错。而只有极少数人可做得真正好。而能做好两件事的人只有寥寥无几的了。假如一个人有真正的才能，他就应该乐于牺牲几乎所有的一切，以充分发挥自己的才能。

约翰逊(Johnson)博士赞成这一观点，他说：当我告诉他，我看过约翰逊(与他同名的人)骑在三匹马上，他说：“先生，这样的人应得到鼓励，因为他的表演显示了人类的能力限度……”

同样地，他会赞扬登山者，海 泗渡者，闭目下棋者。至于我的?法，我也是将这些能力统统视为非常不一般的成绩。我甚至还称道魔术家和口技者；当阿廖欣(Alekhine)和布拉德曼(Bradman)在决定破记录时，假如他们失败了，我会极为失望的。在这种情况下，约翰逊博士同我与公众的感觉是一样的。正像 W·J·特纳(Turner)曾说过的一句实话那样：只有那些自以为“博学”的人(令人产生不悦之感之称谓)，才不去赞扬“真正的名家”。

当然我们不能不考虑到以上两种工作之间价值上的不同。我宁愿做一个小说家或画家，而不愿成为政治家或诸如此类的人物。事实上，尽管有很多成名之路，但我们大部分人会因其甚为有害而宁可拒绝走这样的路。但是这种价值的不同，很少会改变一个人的择业范围，因为这种职业的选择是受着人们生就的能力限度的制约的。诗集比板球更有价值，但假如布拉德曼放弃板球去写二流小诗(我想，他不大可能会写得更好)的话，他一定是个傻瓜。假如他的板球打得并不那么超众，而诗歌却还写得好些，那么对他来说选择就更加困难了。我不知道自己是成为特朗普尔(Trumper)①还是布鲁克(Brooke)②。值得庆幸的是像这种左右为难的情况很少出现。

我还想补充说一点，他们特别不可能指望自己成为数学家。人们常常过分夸大数学家与其他人的思维过程的不同。但不容否认的是，对一个数学家来说，他的天赋是他诸多特殊才能中的一方面。数学家们作为一个阶层，并不因一般的能力和多才多艺 而格外超群出众。假如一个人成为任何意义上的真正的数学家，那么，可以说他的数学百分之九十九会比他能做的任何其他事都好得多。而假如他为了做其他领域的普通工作，而放弃了任何一次发挥自己才能的适宜的机会，那么他就是愚蠢的。这样的牺牲，只有在经济需要或年龄条件变化的情况下才是情有可原的。

#### § 4

在这里，我最好还是谈谈年龄问题，这是因为对数学家来说，年龄问题格外重要。数学家们都不应该忘记这一点：比起其他技艺或科学，数学更是年轻人的工作。举一个相对低微阶层的例子来作个浅显的说明：皇家学会的人选者的平均年龄以数学家为最小。

当然，我们还会找到比这更有力的实例。比如，我们可以考察作为世界最著名的三大数学家之一的牛顿的经历。牛顿是在 50 岁时放弃数学的。其实，在这之前很久他就已经对数学失去了热情。40 岁时，他已毫不怀疑地认识到他的富有创新精神的时期已经过去了。他所有的最伟大的思想，包括流数术和万有引力原理是他在 1666 年建立的学说，而当时他只

有 24 岁。正如他曾叙述的：“在那些日子里，我处于富有创造力的最初期，那时比以后的任何时期都更加一心一意地把数学和哲学挂在心上。”在 40 岁以前他有过不少重大发现(“椭圆形天体运行轨道”就是他在 37 岁时发现的)。而其后，他再没有作出过什么发现，而只是对原有的论文做些润色工作，使之完美化而已。

伽罗瓦 21 岁去世，阿贝尔 27 岁去世，拉曼纽扬 33 岁去世，黎曼 40 岁去世。也有些人确实是在较晚时取得伟大成就的，高斯就是在 55 岁时才发表了他的微分几何学的重要论文(但在十年前他就已经形成了他的基本思想)。我还不知道有哪一个重要的数学进展是由一个年过半百的人创始的。假如一个年长的人对数学不感兴趣而放弃了它，这种损失不论对数学本身还是他本人来说，都不十分严重。

另一方面，如果这样的人不放弃数学，那么所获得的利益也并不可能更富有实质性的意义。有关一些数学家放弃数学以后的情况记录都不特别令人欣慰。牛顿成了一个能干的造币厂主(这时他没与任何人吵架)。班乐卫(Painleve)是个不成功的法国总理。拉普拉斯(Laplace)的政治生涯却是极不光彩的，他的情况几乎算不上是一个合适的实例，因为他在政治生涯中的坏名声不是他的无能，而是因为他不诚实所造成的，而且他也向来没真正地“放弃”数学。的确很难找到一例事实来说明一个放弃了数学研究的一流的数学家却又在别的什么学科领域里取得了一流成就——帕斯加(Pascal)看来是最好的一例。也许会有这样一些年轻人，放弃了数学研究之后又东山再起成为一流数学家了，可惜我还从未听说过这样的真正可信的实例。而上述一切，全都产生于我的十分有限的经历。我所认识的每个有真才实学的年轻数学家都是潜心于数学研究的，他们忠诚于数学研究，也不乏雄心壮志，只是缺少充实的数学知识；他们已全部认识到：假如有什么通往能带来任何殊荣的人生之路的话，这条路就是数学研究之路。

## § 5

另外还有一种形式的回答，即我所称之为标准辩解的“低调变辞”。我可能会只用几句话来简略表述它。

“没什么事我可以做得格外好。我之所以做我的事，是因为它进入了我的生活之路，我的确从来未有机会做别的什么事”。我也把这一辩解看作是重要的辩解而接受。确实，大多数人什么事也做不好。因此，他们选择什么职业也无关紧要。这确实没什么更多好说的。这是个最终的明确回答，但这几乎不可能是一个具有自尊心的人所作的回答；我想象得出我们没有一个人会对这样的回答感到满意。

## § 6

现在应该考虑在 § 3 我所谈到的问题了。这个问题比第二个问题难得多。数学，即我和其他的数学家所认为的数学这一学科，是否值得研究？假如值得，理由是什么？

我一直在回顾着我的一篇讲稿的头几页(那是我于 1920 年在牛津大学就职时的首次演讲)。在那几页中我写到了有关对数学进行辩解的要点。这种辩解是不够的(只写了不足两页纸)，而且其文体风格现在看来并不使我感到特别自豪(我想，这可能是我用当时想象为“牛津”风格写成的第一篇论文)。但是我仍然觉得，不论它需要怎样改进，它还是包含了问题

的实质。这里我愿重新把原来说过的话拿来作为全面讨论的前言。

(1)首先我要强调数学的“无害性”。也就是说，“即使数学研究无利可图，但它也绝对是无害而清白的职业”。我坚持这一点，当然它需要大量的扩展和解释。

数学真的是无利可图吗？显然，在某种意义上并非如此。比如，它为不少的人带来了很大的快乐。然而我是从更狭隘的意义上考虑所谓“利益”的。数学是否有用，是否像化学和生理学等其他科学那样有直截了当的用途？这并不是一个容易回答或无可争议的问题。尽管有一些数学家和大多数外行会毫无疑问地作出肯定的回答，但我最终的回答还会是否定的。那么数学是“无害”的吗？对此，回答也是不确定的。在某种意义上我宁可回避这个问题。其理由是它提出了科学对战争的影响问题。例如，化学在这方面显然是有害的，那么是否可以说数学在同样的意义上是“无害”的？以后我一定回头再来谈这两个问题。

(2)当时我还接着说“宇宙的范围很大，所以，如果我们在浪费着自己的时间，那么浪费大学里几位名家、教授的生命决不会带来了不起的大灾大难”。这里我或许像是要采取或故意装出虚伪的谦卑态度，而这种态度是我刚刚所反对的。我确信，这种态度并不是我真正意愿中的态度，我是企图用一句话把我在§3里所谈的冗长的内容概括出来。我在想，我们这些名家、教授确实没有多少才能，而我们应尽可能地充分发挥运用这些才能才是。

(3)最后(以一些对我来说如今读起来仍感夸张的修辞)，我强调了数学成就的持久性——即使我们所做的工作也许很少，但都有着某种持久性的特点；我们所完成的任何事情，无论是一本诗集还是一条几何定理，只要能引起哪怕是最微小的但却是永久的兴趣，也就意味着已经做出了完全超出大部分人的能力的事情。

我还写道——在古代与现代研究有冲突的今天，对于某一门研究来说，一定存在某些值得一谈的东西，而这种研究并非始于毕达哥拉斯，也不会止于爱因斯坦，但它却是所有研究学科中最古老的，也是最早轻的。

所有这一切都是“言过其实”的，但在我看来，其实质仍包含着真理，对此，我可以马上进行扩展，同时又不致过早涉及我所留下的其他没有回答的问题。

## § 7

我会设想我是在为那些现在和过去都满怀雄心壮志的人写这本书的。一个人的首要任务，进一步说，一个年轻人的首要任务是能显示雄心壮志。雄心是一种可以合情合理地以许多形式表现出的一种宏大高尚的志向。阿提拉(Attila)和拿破仑的野心中就有某种高尚的志向，但最高尚的雄心壮志是在自己身后留下某种永存的价值——'

这平坦的沙滩上，

海洋与大地间，  
我该建起或写些什么，  
来阻止夜幕的降临？  
告诉我神秘的字符，  
去喝退那汹涌的波涛，

告诉我时间党 潜い？  
去规划那更久的白昼。

雄心是世上几乎所有最佳工作成果的驱动力。特别要指出的是：实际上，一切为人类谋幸福的重大贡献都是由具有雄心壮志的人所作出的。举两个著名的例子吧，利斯特(Lister)和巴斯德(Pasteur)不就是这样的有雄心壮志的人吗？还有，不像以上两位那么显赫的另外几位，吉勒特(Gillette)和威利特 (Willett)，近期有谁比得上他俩对人类所作的贡献呢？

生理学为我们提供的实例特别适宜，原因就在于这门学科对于人类所具有的益处是如此显然。我们必须提防一种在科学辩解者中所常见的谬论，那就是认为从事着对人类有益的工作的人，在做这项工作时一直想着自己的工作对人类有益。比方说，生理学家有着特别高尚的精神。事实上，一个生理学家可能确实乐意记得他的工作是为人类造福的，但是使之产生力量，受到鼓舞去做这项工作的动机与那些一流学者与数学家进行研究工作时的动机是没什么区别的。

有很多高尚的动机驱使人们进行某项研究。在这些动机中，最为重要的有三种。首先(因此必一事无成)是理智的好奇心，也就是对了解真理的渴望。其次是对自己专业工作的自豪？

，只有工作才能使自己得以满足的那种渴望。任何自尊的数学家，当他的工作与其才能不相称时，耻辱感会压倒一切。最后一个就是雄心壮志，期望得到名声、地位甚至随之而来的权力和金钱。当你的工作为他人造了福，又解脱了别人的痛苦时，你可能会自我感觉良好，但这不会是你为什么做那个工作的原因。所以，假如一个数学家，或者一个化学家，或者甚至是一个生理学家真的对我说他的工作的动力是缘于要为人类造福的愿望，我不会相信他（假使我真的相信他也并不会认为他真的有什么了不起）。在他的动机中居支配地位的就是我已叙述过的。而且可以肯定，任何一个体面的人都没有必要为有这些动机而感到耻辱。

## § 8

假如理智的好奇心、对专业工作的自豪感和雄心壮志是在研究工作中占支配地位的动机的话，那么，毫无疑问，没有哪个人比一个数学家有更好的机会来满足这些条件了。数学家的研究学科是所有学科中最令人好奇的。没有哪门学科中的真理会像数学那样奇异。数学是最精细与最富有魅力的技艺，而且数学研究提供了展示真正的专业技能的机会。最后我还要说的是，正如历史所充分证明的那样，不论数学内在的本质价值何在，其成就是一切成就中最持久的。

我们可以从半古文明中看到这一点。巴比伦和亚述的文明已毁灭，汉谟拉比(Hammurabi)、萨尔贡(Sargon)和尼布甲尼撒 (Nebuchadnezzar)也都空有其名了，但巴比伦数学依然令人感兴趣。巴比伦的 60 进制仍用于天文学中。当然希腊的情况是更有说服力的例证。

对我们来说希腊人是最早而且至今仍是“真正的”数学家。东方的数学可能是满足兴趣和好奇，而古希腊的数学则是实实在在的。希腊人率先使用了能被现代数学家所理解的数学语言。正如利特伍德曾对我说过的，希腊数学家们在校时并不是聪明的乖学生，也不是“奖学金的候选人”，而是“另一所学院的研究员”。因而希腊数学是“不朽的”，甚至比希腊的文学还要持久。当爱斯奇里斯(Aeschylus)被遗忘时，阿基米德仍将为人们铭记，因为语言文字会消

亡，而数学的思想却永不会死亡。“不朽”这个词可能不太高明，不过也许数学家与它的含义最投缘了。

数学家不必因将来会对其不公而煞有介事地忧心忡忡。不朽通常很荒唐，也很残酷：我们中很少有人愿意选择做奥格 (Og)<sup>③</sup>、安厄尼厄斯(Ananias)<sup>④</sup>、加利奥(Gallio)<sup>⑤</sup>。甚至于在数学界，历史有时也会开奇怪的玩笑：罗尔(Rolle)在初等微积分学教科书中很有名气，倒好像罗尔是位与牛顿齐名的数学家；法里(Farey)弄不懂 14 年前由哈罗斯(Haros)论证得天衣无缝的定理，然而他却永垂不朽；五位可敬的挪威人的名字至今仍长存于阿贝尔的《生活》一书中，仅仅是因为一种对他们国家最伟大的人物造成了伤害的愚蠢的尽职行为。不过，就总体而言，科学史还是公平的，数学史尤其如此。没有任何其他学科像数学那样形成了清楚而一致的评判标准。为人们所铭记的数学家中绝大多数是名副其实的。如果能用现钞评估的话，数学的名誉将是最稳定定义最可靠的投资。

## § 9

所有这些都使大学教师们深感宽慰，对数学教授们来说更足如此。律师、政客、商人们有时声称，学术生涯大多为那些谨小慎微、胸无大志的人所从事，这些人在乎的主要是舒适和稳定，这种责备毫无道理。大学教师们舍弃了许多东西，特别是舍弃了赚大钱的机会——一个教授一年很难挣上 2000 英镑；工作的稳定性自然是决定舍弃赚大钱机会的因素之一，但这并不是豪斯曼不愿成为西蒙(Simon)爵士或比布冉克(Beaverbrook)贵族的原因。豪斯曼拒绝些职业是因为他理想远大，是因为他不屑于成为一个 20 年后就被人遗忘的人。

然而，牺牲所有这些利益，一个人会感到多么痛苦。我仍记得伯特兰·罗素(Bertrand Russell)曾对我讲述过一个骇人的梦：他正在大学图书馆的最高一层，一个图书管理员正在书架间走来走去，提着一个巨大无比的桶，把书一本又一本地下，扫一眼，然后重新放回书架，或是丢进桶里。最后他发现了三卷书，辨认出是《数学原理》最后残存的复印本。他拿下其中一卷，翻了几页，似乎被那些怪异的符号迷惑了片刻，然后合上书，在自己手上掂掂，迟疑不决……

## § 10

数学家，就像画家、诗人一样，都是模式的创制者。要说数学家的模式比画家、诗人的模式更长久，那是因为数学家的模式由思想组成，而画家以形状和色彩创制模式，诗人则以言语和文字造型。一幅画或许蕴含着某种“意境”，但通常是平凡而无关紧要的；比较之下，诗意要重要得多，不过，像豪斯曼坚持认为的那样，人们习以为常地夸大了诗意的重要性。他说：“我难以确信存在诗意之类的东西……诗歌并不在于表述了什么，而在于怎样表述。”

倾江海之水，  
洗不净帝王身上的膏香御气。

还能有比这更好的诗句吗？但就诗意而言，还能有比这更平庸、荒唐的吗？意境的贫乏似乎并不影响言辞这种模式的优美，另一方面，数学家除了思想之外别无他物，因而数学家的模式更能持久，因为思想不会像语言那样快地变成陈词滥调。

正像画家和诗人的模式一样，数学家的模式也必须是优美的；正像色彩和文字一样，数学家的思想也必须和谐一致。优美是第一关：丑陋的数学在世上无永存之地。此处我不得不提到一个错误的概念，一个至今仍广泛传播的概念(尽管比 20 年前情况要好些)，这就是怀特海德所称的“书呆子”，即热爱数学，并欣赏数学美，这是“每代人中只局限于几个怪人的偏执狂”。

如今很难找到一个对数学的美学魅力无动于衷的知识分子了。可能很难定义数学的美，但任何一种美都是如此——我们也许不甚明了所谓一首诗歌的优美，但这并不妨碍我们在阅读中鉴赏。霍格本(Hogben)教授极力贬低数学美，但即便是他也不敢冒然否认数学美这一事实。

“毫无疑问，数学对于某些人有一种淡然的非自然的吸引力……这种数学中的美学魅力对于这些寥寥无几的人来说，很可能是真实的。”不过，他同样指出，这些人是“寥寥无几”的，而且他们感到“淡然”(他们的确相当可笑，在小小的所谓大学城里住着，避开广阔的部空间的清新的微风)，在这些话中，霍格本此话只不过在附和怀特海所称的“书呆子”了。

然而事实却是：没有比数学更为普及的学科了。所有的人都有一些数学鉴赏力，正如所有的人都能欣赏一首悦耳的曲调；对数学真正感兴趣的人很可能比对音乐感兴趣的要多。表面看来可能与此相反，但解释起来毫不费劲。音乐可以刺激大众的感情，而数学无能为力；不懂音乐只是有些掉面子，而所有的人都如此害怕数学这个名称，以至于每个人都由衷地强调自己没有数学细胞。

一个小小的反驳就足以揭示“书呆子”的荒谬。每一个文明国度都有成千上万的棋手(俄国，这部分人是受教育群体的全部)；每个棋手都能品味、欣赏一场棋赛或一个棋类布局。然而，一个布局问题简而言之就是一次纯数学的练习(整场比赛可能不是，因为心理也会起作用)，每一个赞叹棋类布局的人，实际上是在为数学的美而喝彩，尽管这种优美相比而言是较低档次的。棋类布局问题是数学的赞美曲。

再降低一点，不过面向更广泛的大众，我们可以从桥牌，或更低一些，从通俗报刊上的智力游戏中学到同样的内容，几乎所有这类游戏的空前流行，都归功于基础数学的吸引力。优秀的智力游戏创制者，像杜德尼(Dudeney)和卡里班(Caliban)所用的技巧除此之外别无其他。他们清楚自己的业务，公众需要的无非是小小的智力“刺激”，别的任何东西都没有数学那样的刺激性。

还要补充一点，世上没有什么事情比发现或再发现一条真正的数学定理更能使知名人士(和那些轻视数学的人)快乐得多。H·斯潘塞在他的自传中重新发表了一条他 20 岁时证明了有关圆方面的定理(他却不知道柏拉图在 2000 多年前就已论证了该定理)，索迪(Soddy)教授是新近更惊人的例子(不过他的定理倒真正是他自己的)。⑥

①特朗普尔；澳大利亚板球运动员。

②布鲁克：英国诗人。

③奥格：《圣经》中的 Bashan 之子，在位六十余年。

④安厄尼厄斯：《圣经》中人物。

⑤加利奥：罗马官员，政治家，哲学家，作家塞内加的长兄。

⑥见他关于六球链(Hexlet)的通信，《自然》，137~139 卷，(1936~1937 年)。



尽管棋类布局问题是真正的数学，但一定程度上它仅是“琐碎”的数学，尽管棋类布局充满机智，复杂诱人，尽管棋的走步富有创意，又出人意料，但它还是缺少了某些必要的东西。棋类布局问题无足轻重，最好的数学不仅仅优美，而且严肃——或者说“重要”，不过这个词有些模棱两可，而“严肃”恰巧更好地表达了我想指明的东西。

我并未考虑到数学的“实用”效果，稍后我将回到这一论题。目前，我只想说，从粗俗的意味上讲，棋类布局问题“毫无用处”，同样地，大多数最好的数学也是如此；数学极少有实用价值，而这实用的极少数，相对来讲还较乏味。数学定理的严肃性不在于其通常微不足道的实用效果，而在于它涉及的数学概念的意义。可以粗略地说，如果一个数学概念同大量形形色色的其他数学概念有一种自然而鲜明的联系，那么这种数学概念便是有意义的，这样，一条严肃的数学定理，即一条与有意义的概念相联系的定理，很可能引发数学本身甚至其他学科的大步前进。没有一个棋类布局问题能影响科学思想的普遍发展；毕达哥拉斯、牛顿、爱因斯坦都改变了各自所处时代的整个科学的前进方向。

当然，一个定理的严肃性并不在于其后果，后果不过是其“严肃性”的证据。莎士比亚对英语语言的发展产生了巨大的影响，而奥特维(Otway)的影响几近于无，但这并不能说明什么。莎士比亚是比奥特维更好的诗人。莎士比亚更好，是因为他写下了更多更好的诗篇。就像奥特维的诗劣于莎士比亚的诗一样，棋类布局问题地位较数学低，不是因为其后果，而在于其内容。

还有一点我稍后将阐明。倒不是因为这点没有趣味，而是因为它较难，也因为讨论美学的严肃性我还不够格。数学定理的美很大程度上依赖于其严肃性，而诗句的优美在某种程度上还依赖于诗歌所含思想的重要性。上文中我曾摘引了莎翁的两行诗来例证词语格律的纯粹的优美；不过下面这一行可能更优美：结束了生命的热浪，他安然地进入梦乡。

格调完美，主题明确，音调铿锵，因而我们的情感被更深地激荡了。既然在诗歌中，意境对造型的确至关重要。自然地，数学更是如此，这个问题不再详究。

## § 12

行文至此，要想再有所进展，我就必须提供为每个数学家公认为第一流的“真正的”数学定理的例证，然而此处，我却因我写的东西产生的种种约束被缚住了手脚。一方面，例子必须非常简单，没有专门数学知识的读者也能读懂，无需预先解释，读者就能跟得上清楚的阐述，跟上例子。这些限制就排除了数学中许多最优美的定理，像费马(Fermat)的“二平方”定理或二次互反律。另一方面，我的例证必须来源于“纯正”的数学，也就是专职数学家所从事的数学，这一限制又排除了大量的相对易于理解的定理，因为这些易于理解的定理虽易懂，却与逻辑和数学哲学相涉。

别无选择，我只得又回到希腊数学，这里我将阐述并证明两条著名的希腊数学定理。这两条定理从思想到运算都很简单，同时，毫无疑问，又是最高层次的。每一条定理都如同刚发现

之日一样清新，一样举足轻重——2000 年来它们一直保持着青春。再次，稍有理解力的读者可以在一小时之内掌握全部的论述和证明。

1. 其中第一个是欧几里得(Euclid)⑦关于存在无限多个素数的证明。素数，或称质数是指下列数字：

$$2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\cdots \quad (\text{A})$$

这些数字不能再分解为更小因子的整数，如 37 和 317 是素数。所有整数都由素数相乘而得，

$$666=2\times 3\times 3\times 37$$

任何一个本身不是素数的数(非质数)至少可以被一个素数 (通常可被分解为几个素数)整除。要证明素数无穷尽，也就是要证明数列(A)无穷。

先假设(A)是有限的，且

$$2, 3, 5\cdots P$$

是全部素数的序列(P 是最大的素数)；在这一假设下，让我们来考察数 Q，Q 定义为

$$Q=(2\times 3\times 5\times \cdots \times P)+1$$

显然 Q 不能被 2, 3, 5,  $\cdots P$  中的任何数整除，因为相除时余数为 1。由于不是素数的数总能被某一素数整除，而 Q 不能被任一素数整除，所以 Q 是素数。因而，总有一个素数(可能就是 Q)任一素数大，这与 P 是最大的素数的假设相矛盾，因此原假设不成立，即没有比 P 更大的素数的假设不成立。

这种证明方法称为归谬法，这一为欧几里得甚爱的归谬法⑧，是数学家们最好的武器之一。这一着比象棋中开局舍子的任何一种着数高明得多：棋手或许会牺牲一卒或一个棋子，而数学家舍掉的是整局。

## § 13

2. 第二个例子是毕达哥拉斯⑨关于 根 2 ( $\sqrt{2}$ ) 的“无理数”的证明。

“有理数”是一个分数  $a/b$ ，其中 a、b 均为整数。我们假定 a 和 b 没有公因子，如果有的话，我们可以把它消掉。根 2 是“无理数”，也可以表述为“2 不能以  $(a/b)$  平方的形式表示”，也就是说，方程

$$a^2 = 2b^2 \quad (\text{B})$$

不能被两个没有公因子的整数 a、b 所满足。这是一个纯算术运算定理，无需任何“无理数”方面的知识，也不依赖于有关无理数性质的任何理论。

再用归谬法来证明。先假设上式(B)成立，a 和 b 是没有公因子的整数。根据(B)式，a 方应是偶数(因为  $2b^2$  方能被 2 整除)，因此 a 也是偶数(因为奇数的平方是奇数)。如果 a 是偶数，那么

$$a = 2c \quad (\text{C})$$

其中  $c$  为整数，因此有

$$2b^2 = a^2 = (2c)^2 = 4c^2$$

即

$$b^2 = 2c^2$$

因此  $b$  是偶数， $b$  也是偶数(理由同上)。这就是说， $a$  和  $b$  都是偶数，因此有公因子 2，这与假设矛盾，所以假设不成立。

从毕达哥拉斯的定理可推出正方形的对角线与边长不可通约(也就是说对角线与边之比不是有理数，或者说，没有一个公共的单位，使对角线和边长可同为其整数倍)。若以边长作为长度单位，对角线的长度设为  $d$ ，则由毕达哥拉斯的勾股定理⑩

$$d^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$

故  $d$  不是有理数。

还可以从任何人都能理解其含义的数学理论中引用许多精彩的定理。例如一个所谓“算术基本定理”：任一整数都可以惟一方式分解为素数的乘积，名副其实。如  $666 = 2 \times 3 \times 3 \times 37$ ，此外没有别的分解方式了： $666$  不可能等于  $2 \times 11 \times 29$ ，或者等于  $13 \times 89$ ，或等于  $17 \times 73$ (不用相乘其结果也显而易见)。这一定理是高等算术的基础，证明过程虽不困难，却需要一定的功底，而且非职业数学家读起来可能会感到乏味。

另一著名的优美的定理是费马的“二平方”定理。素数(特殊素数 2 除外)可以归为两组数。一组为

$$5, 13, 17, 29, 37, 41 \cdots$$

这些数被 4 相除时余数为 1；另一组为

$$3, 7, 11, 19, 23, 31 \cdots$$

这些数被 4 相除时余数为 3。

任一属于第一组的素数都可表示成两个整数的平方和。如

$$\begin{array}{ll} 5 = 1^2 + 2^2 & 13 = 2^2 + 3^2 \\ 17 = 4^2 + 1^2 & 29 = 2^2 + 5^2 \end{array}$$

而 3, 7, 11, 19 都不能表示成如上形式(读者可自己检验)，这就是费马定理，非常公正地被视作最完美的定理之一。可惜，没有相当专业数学知识的人难以理解其论证过程。

“集合论”中也有许多优美的定理，像康托(Cantor)的连续的“不可数”定理。这里的困难是相反的，只要掌握了所使用的语言，证明并不困难，但必须进行适当的解释，才能把这条定理的意思弄明白。不必再赘述更多的例子了，上文给出的例子是些测试，对上述例子不能

理解的读者很可能难以欣赏任何数学的东西。

我认为数学家是概念的造型者，美和严肃是评价其造型的标准。难以相信，能理解上述两个定理的人会否认它们符合美与严肃的标准。拿上述例子与杜德尼最机智的智力游戏或与象棋大师们编排出的最妙的棋类布局问题相比，本文例子在美与严肃两方面的优势是一目了然的：毋庸置疑，其间有层次的差别——它们更加严肃，也更加美丽。我们能否更准确地说明它们的优势所在吗？

## § 14

首先，这两个数学定理在严肃性方面的优势是显而易见、绝对的。象棋布局问题是把一些想法巧妙但很有限度地交织而成的结果，它们在根本上差别不大，而且对外几乎没有任何影响：即使象棋没有发明，我们也会产生同样的思想方法。而欧几里德和毕达哥拉斯的定理影响很大，甚至在数学之外，也对人们的思想产生了深刻的影响。

欧几里德定理对算术的整个结构都至关重要。素数是算术组成的原料；欧氏定理确保了这种原料的充足性，但毕氏定理有更广泛的运用，它也提供了更好的课题。

首先，我们应看到毕达哥拉斯的论证有深远的扩展性，可以在不作原则性改变的基础上适用于“无理数”的范畴。我们可以用类似泰特托斯(Theaetetus)的方法证明  $\sqrt{3}$ ， $\sqrt{5}$ ， $\sqrt{7}$ ， $\sqrt{11}$ ， $\sqrt{13}$ ， $\sqrt{17}$  是无理数，或者超过他的方法证明  $4\sqrt{3}$  和  $4\sqrt{7}$  是无理数(→)。

欧氏定理告诉我们，有足够多的材料对整数构造一个条理分明的算术体系。毕氏定理及其扩展则告诉我们，即使我们构造出这种算术体系，也不能满足我们的需要，还会有许许多多的量要我们考虑，而这些量是整数的算术无法度量的，最明显的例子就是正方形的对角线。这个发现的极端重要性立刻被希腊数学家注意到了，他们起初假设(我猜想是按惯例)同种类的量都是可以公度的，例如任何两个长度都是某一共同单位的倍数。他们由此建立了一个基于此种假设基础上的比例理论。毕氏的发现暴露这个理论基础的薄弱性，从而使欧多克斯(Eudoxus)建立了更深刻的理论。这个理论在《原本》的第五章中有详细叙述，被许多现代数学家誉为希腊数学的最优秀成就。这个理论在数学思维上是很前沿的，可以称作无理数理论的先河，它导致了数学分析的革命，对近代哲学也有很大影响。

两个定理的“严肃性”是毫无疑问的。所以值得一提的是二者都不具实用性。在实际运用中我们只会用到相对小的数，只有天文学和量子物理涉及到小数。它们即使与最抽象的纯粹数学相比，实用性也大不了多少。我不知道工程师通常要求的最高精度是多少，10 位数恐怕会太高。那么

3.  $14159265(\pi \text{ 值保留 } 8 \text{ 位小数})$  是两数之比，即

$$(314\,159\,265) / (100\,000\,000)$$

也才 9 位数。小于 1 000 000 000 的素数有 50 847 478 个，这对工程师来说也太多了，即使不要其他素数，他也满足了。欧氏定理先谈到这里。而就毕氏的理论来说，我们都知道，显然工程师们对无理数不感兴趣，因为他们工作中只涉及近似值，而所有的近似值都是有理数。

## § 15

一个“严肃”的定理是一个包含着“有意义的”概念的定理，因此我有必要进一步分析一下数学概念有意义的特性。这项工作有些难度，而且很难说我作的分析有价值。当目睹一个“有意义的”概念时，我们是一眼能识别的，就像看我的那两个标准定理中的“有意义的”概念一样。但具备这种识别能力需高深的数学知识和长期从事数学研究工作的经验。因此我必须尝试一些数学分析，也应该有可能发掘一些具有说服力的成果。至少有两个特性是至关重要的，即一定的“普遍性”和一定的“深刻性”。但何为“普遍”、何为“深刻”还不能明确给出解释。

一个有意义的数学概念，一条严肃的数学定理从下述意义上被认为是“普遍的”。数学概念应该是许多数学构造的要素，应能应用于许多不同种定理的证明。这种定理即使一开始是以相当特殊的形式提出(如毕氏定理)，它也应能被广泛地扩展，成为与其同类型定理的典型。证明中所揭示的关系本来应该联系着许多不同的数学概念。所有这一切都还比较模糊，存在许多疑点。但显而易见的是，如果一个定理明显缺乏这些特征，这个定理就不可能是严肃的。为说明我的观点，我只需从浩瀚的代数海洋中抽取几例。下面是从劳斯·鲍尔的《数学游戏》(Mathematical Recreations)( $\square$ )摘取的两例。

(a)只有 8712 和 9801 是能表示成它们的“反置数”的整数倍的四位数。

$$8712=4\times 2178, \quad 9801=9\times 1089$$

小于 10000 的其他数不具有这个性质。

(b)大于 1 的数中只有四个数等于它们组成数字的立方和，这四个数是 153、370、371、407。

$$\begin{array}{ll} 153 = 13 + 53 + 33 & 370 = 33 + 73 + 03 \\ 371 = 33 + 73 + 13 & 407 = 43 + 03 + 73 \end{array}$$

这些实例看来多少有点奇怪，也只有外行或业余爱好者对此有兴趣。对一个数学家来说，它毫无价值，它的证明既不难懂，也不有趣，只是需要花许多时间去尝试。这些定理是不严肃的，其原因之一(也许不是重要原因)是因为其表达和证据都太局限，不具有明显的普遍性。

## § 16

“普遍性”是一个模糊而又危险的词，我们得留心不要让其占据太多的篇幅。它广泛应用于数学及有关数学的著作中。其中有一种特别的情形，它虽与我们今天的论题无关，但逻辑学家对它推崇备至。从这个意义上说，所有的数学理论都同等地和完全地是“普遍的”。

怀特海曾说：“数学的确定性取决于它完全抽象的普遍性。”( $\square$ )当我们假设  $2+3=5$  时，就

假设了一种存在于三种事物间的关系。这些事物并不是苹果或便士，或者任何一种特定的东西，而只是“事物”，任何事物都行。这种表达式的意义完全独立于具体事物的个别性。在完全抽象意义的基础上，所有的数学“对象”、“实在”、“关系”，如“2”，“3”，“5”，“+”，“=”或所有包含它们的数学命题，在完全抽象的意义下都是普遍的。实际上怀特海的话未免多余，因为在此意义上讲，普遍性就是抽象性。

普遍性的意义举足轻重，逻辑学家强调它不无道理。因为它传达的是一个真理，很多本该清楚了解它意义的人却常常忘记。如经常有天文学家或者物理学家宣称他发现了证明物理世界必须以一种特殊方式运行的“数学证据”。所有这些言论，只从字面理解，绝对是无稽之谈。就像不可能用数学去证明明天会发生日食一样。因为日食以及其他的物理现象并不是数学世界的组成部分。我想所有的天文学家该不会否认这一点吧？但是另一方面他们也确实可能正确预测日食的发生。

很明显，这种“普遍性”与我们的讨论无关。我们要寻找的是存在于各种数学定理之间的普遍性上的差别。在怀特海看来，普遍性是相同的。所以本书§15中的(a)和(b)这种小定理也和欧几里德、毕氏定理一样“抽象”和“普遍”，所以也等同于象棋布局。对象棋来说，不管棋子什么颜色、什么形状，棋手们都不会认为有什么不同，只有外行才会考虑到与棋盘的搭配问题。棋盘和棋子只是用来刺激我们思维的工具，与真正的下棋对奕相比，就好比黑板、粉笔之于数学课中的定理关系。

我们现在要寻找的并不是这种存在于所有数学定理中的“普遍性”，而是在§15中提及的更晦涩难懂的那种普遍性。对此种“普遍性”也不宜强调过分(像怀特海一样的逻辑学家们倾向于这样做)。现代数学的卓越成就并不仅仅是“普遍性的微妙的堆砌”(四)，虽然这种堆砌是现代数学的巨大成就。在任何一种高水平的定理中，都存在一定的普遍性。但如果普遍性太泛也就会导致枯燥乏味，那就成了“每个事物都是它而不是别的”。其实事物间的区别与其共性一样使人着迷。我们选择朋友并不是因为他们具备人类的所有优点，而是因为他们有本身的特点。在数学中道理亦然。因此我可以毫不夸张地引用怀特海的话来证明我的观点：“被适当的特殊性所制约的广泛的普遍性，才是富有成果的概念。”(五)

## § 17

一个有意义的定理必须具备的第二个特性就是“深刻性”。其概念也不易定义，它与“难度”有关，深刻的思想往往难以掌握，但二者也并不完全一样。毕氏定理及推广所蕴含的概念有一定的深度，但现代数学家绝不会认为它难懂。相反，一个定理可能极为肤浅，但却难以证明——如丢番图(Diophantus)的有关求方程整数解的定理。

数学理论好像分层分布，每一层的内部以及与上下层之间由错综复杂的关系网连接起来。层越往下，理论就越深，也就越难懂。因此“无理数”概念比“有理数”深，同样，毕氏定理比欧氏定理深刻。

如果注意整数之间或者任何一特定层次上的其他一些对象集合之间的关系，就会发觉有些关系一目了然，如，不需下一层次概念的任何知识，我们就可以识别并证明整数的性质。因此证明欧氏定理只用整数就行了。但整数有些定理是不能一眼看清的，还得通过挖掘和考虑深一层次的知识才能证明。

我们在素数理论中容易发现这种例子。欧氏定理重要但不深刻，我们不需任何比“可除性”更深刻的概念证明素数无限。

当取得了答案后，心中又不免萌生新的问题。素数无穷，但这种无穷的素数究竟如何分布？假定有一个很大的数  $N$ ，如  $10$  的  $80$  次方 或  $10$  的  $10$  次方的  $10$  次方 (∞)，其中有多少个小于  $N$  的素数(ℓ)。当我们问这些问题时，就发现自己的思维处在不同的层次了。我们可以用超出想象的精确性来回答这问题，只是要深入一步，不用整数，而用现代函数理论的最有力武器来解决。所以回答我们这个问题的定理比欧氏定理深刻得多。

例子是不胜枚举的。但“深刻性”甚至对一个能识别它的数学家来说也是不易说清的，因此我也不妄想还有什么妙语能解开读者的迷惑。

## § 18

在 § 11 节中我对比了象棋和“真正的数”问题，其中有一点尚未涉及。如今我们想当然认为真正的数学定理就实质内容、严肃性与重要性而言，是无与伦比的。对训练有素的天才来说，事物的“美”中也无不蕴含数学的奥妙，只是这种奥妙更难于言传。由于棋类布局问题的主要缺点就是“微不足道”，而这方面的对比交织着一些美学上的评价，同时也使这种评价受到妨碍，在欧几里得和毕达哥拉斯的定理中我们能如何区分出“纯美学”特征呢？我不敢妄加评论，只略述一下我的观点。

在两个定理中(当然也包括证明)，有一种高度的意外性、必然性和有机性。证明形式颇为奇怪，使用的工具与之达到的结果相比显然过于简单。但结论中没有任何疏漏，证明中的细节也不繁琐，一行一个个步骤。许多只有专职数学家。才能理解的更难的定理，其证明也一样简明。在证明数学定理时不需要很多“情况”，因为“列举情况”实际是数学论据的较为呆板的形式。数学证明应当如星座般清晰、明了，而不应像银河里的星束分散而模糊。

棋类布局问题也有意外性和一定的有机性。当然至关重要的是走棋要出奇制胜，每一颗棋都应尽其用。美学的效应是累积的，出了关键一着，下一着应变化多样，且每个变化都应有相应的反应(除非问题很简单，不是真正引人入胜)。“如果  $P-B_5$  ( $5$  下标)，那么  $K_t$  ( $t$  下标)  $-R_6$  ( $6$  下标)；如果……那么……；如果……那么……”，如果没有多种不同的答案？

其美中效果将会是单调、乏味的。这些都是地地道道的数学，有其自身的优点，但它仅仅是“列举证明”(而且这些情况之间并没有根本的不同)(∧)，真正的数学家对此往往不屑一顾。

我想用棋子自身的感受来加强我的论证。毋庸置疑，一个象棋大师，一个重大游戏、比赛的参与者，从心理上是很鄙视用纯粹的数学知识去下棋的，他们积累了不少经验，在紧要关头总能显露身手，“不管他怎么走，我头脑里已储存了对付的方法”。象棋首先是心理上的较量，而不仅仅是一些数学小定理的积累。

## § 19

我现在必须回到我的小津讲演上，对在 § 6 小尚未谈及的问题作一些说明。从以上论述中者可以看到，我只对把数学当作一种创造性艺术感兴趣，但有很多问题还值得考虑，尤其是数

学的“实用性”，它曾引起许多争议。此外还有必要检查一下数学是否真如我在牛津演讲中提到的那样“百利而无一害”，如果科学或艺术的发展能增加资源、方便人类，或增加人们情感上的愉悦，那么我们就可以认为它们是“有用”的。医学和生理学能减轻病痛，所以是有用的；工程设计能建筑高楼、桥梁，从而提高生活水平(当然工程设计也会带来害处，但此处暂不涉及)，所以也是有用的。依此来看，数学也必然是有用的，工程师如没有数学基础是无法进行工程设计的，数学也正开始运用于生理学中。因此我们有为数学作辩护的依据，虽说并不完备，但值得去钻研。数学应用的更高层次，即运用于各种创造性艺术中，将与我们的研究无关。数学如同诗歌、音乐一样，能训练并陶冶人的性情，所以对数学家或数学爱好者来说，沉迷于其中，其乐也融融。不过，如从这方面去论证数学的用处，只不过是更为详尽地重复我的老话，而现在要考虑的应是数学的原始的应用。

## § 20

这一切似乎是不言而喻的，但就这样也有不少争议，因为大多数“有用”的学科对我们中的多数人来说往往是学而无用的。生理学家和工程师对社会功用不小，但对常人来说，生理学和工程学并无多大用处(尽管他们的学习也许会基于其他原因)，就我自己来说，我从未发现我拥有的纯数学之外的科学知识给我带来过些微的益处。

事实上我们不得不诧异，科学知识给普通人带来的实用价值是如此之小，如此乏味，而且毫无特色，其价值似乎与其在外的功用名声成反比。如果在简单的算术上反应快，是会很有用的；懂一点法语、德语，懂一点历史、地理或经济学知识也会是有用的；但仅懂一点化学、物理或生理学，在日常生活中却毫无用处。不用知道气体的组成我们便可以知道它会燃烧；汽车坏了我们自然送到修车厂去；胃不舒服会去看医生或去药店买药。我们的生活要么自有其规律操纵，要么需要各行各业人的帮助。

然而，这只是枝节问题，一个教育的问题，只有教师们对它感兴趣，因为他们必须说服那些为自己孩子的“有用的”教育而喋喋不休的父母们。当然，我们说生理学有用，并非鼓吹大多数人去学习生理学，但如有一定数量的专家致力于生理学的发展、研究，将会使绝大多数人受益。重要的问题是，数学的有用性究竟能延及多远？哪些数学领域有用性最强？怎样才能仅仅以这种“有用性”为理由，来为认真的数学研究，即数学家们所理解的数学研究进行辩护？

⑦见《原本》第九章第二十节。很多定理的真正作者在《原本》中未注明，但似乎没有特别的理由否认这是欧几里得自己发现的定理。

⑧证明也可以不用归谬法，一些学校的逻辑学家则更钟爱归谬法。

⑨传统上这一证明归功于毕达哥拉斯，但可以肯定这是他的学派的一个成果。欧几里得提出这个定理时，其形式更一般(《原本》第十章第九节)。

⑩欧几里得，《原本》，第一章第四十七节。

(一)见哈代和赖特的《数的理论导引》(Introduction to Theory of Numbers)第四章，那里讨论了毕达哥拉斯定理的不同的推广形式，以及有关泰特托斯的历史悬案。

(二)第11版，1939(H·S·M·柯斯特修订)。

(三)《科学与现代世界》，33页。



(四)《科学与现代世界》，44 页。

(五)《科学与现代世界》，46 页。

(六)据推论宇宙的质子数大约为  $10$  的  $80$  次方。如果将  $10$  的  $10$  次方的  $10$  次方 写出来，将占据  $50\,000$  本一般篇幅的书。

(七)我在 § 14 中已提到过，小于  $1\,000\,000\,000$  的素数数量是  $50\,847\,478$  个，但这只是我们确实所知的范围。

(八)我相信，如果所考虑的问题中，一个类型有形形色色的变化，那么列举证明现在也认为有其价值。

## § 21

我将作出的结论到这里似乎是显而易见的了，所以我先武断地将它表述出来，再对之详述。不可否认，初等数学中的很大一部分——我用的“初等”一词是职业数学家使用的那种意思，它包括诸如有关微积分等应用知识——是具有一定使用价值的。数学中的这些部分整体来说是比较枯燥的，它们是最乏美学价值的部分。“真正”的数学家所研究的“真正”的数学，如费马、欧拉、高斯和阿贝尔所研究的数学，几乎是完全“无用”的。(这一点对“实用”数学和“纯”数学来说都是如此。)以“实用性”为标尺来衡量一个天才数学家的工作是不可能的。

但是这里我要纠正一个错误概念。有人认为纯数学家以其工作的无用性为荣<sup>(9)</sup>，并宣称他们的工作没有实际应用价值。这种念头是基于高斯的一句不谨慎的话，其大意是：如果数学是科学中的皇后，那么数论由于其极端无用性而成为数学中的皇后——我从没能找到这话的确切引用。我敢肯定高斯的原话(如果真的是他说的)被很粗鲁地曲解了。如果数论能够被应用于任何实用的、显赫的目的，如果它能像物理甚至化学那样直接增加人类的欢乐和减少人类的痛苦，那么高斯或其他数学家决不会愚蠢到为这种应用哀叹或后悔。但是科学可为善服务，也可为恶助纣(特别是在战争时期)，这样高斯和另一些数学家就应该庆幸有一种科学，就是他们的科学，由于其远离人类日常的活动而保留了其纯洁性。

## § 22

还有一个错误概念需要反驳。人们很自然地认为“纯数学”和“应用数学”的实用性有很大差别，这是一个假象：这两种数学之间有很大的差别(这一点我将在下面详述)，但并没对它们的实用性有很大影响。

纯数学和应用数学的区别在哪里？对于这个问题数学界有统一而明确的答案，在我的答案中丝毫没有有悖于正规的说法，但有一些需要事先阐明。

下面的两节可能带有一些哲学味，但不会很深，且对我的论点也不是必不可少的。但我在叙述中将常用到一些词，这些词有明显的哲学含义，如果我不解释为什么及怎么用这些词的话，读者也许会感到困惑的。

我经常用到“真正的”这个形容词，就像日常生活中用到它一样。我说过“真正的数学”、“真正的数学家”，就像我会说“真正的诗”和“真正的诗人”一样，而且会继续这么用它。

但我将会用到另一个词“实在”(reality)，它却有两个含义。

首先，我将谈到“物理实在”，这里我用的是一般意义上的词义。对于物理实在我指的是物质世界，昼与夜，地震和日食，也就是物理科学所描绘的世界。

我敢说直到现在，没有读者会对我的语言感到困难，但我马上要进入困难的领域了。有另一种实在性，我把它叫做“数学实在”，对于它的本质在数学界和哲学界都没有统一的认识。一些人认为它是“精神”的，某种意义上我们构造了它；另一些人则认为它是外在的，独立于我们。一个人如果能对数学实在给出一个令人信服的解释，他将可以解决形而上学中大多数难题。如果他的解释中也包括了物理实在，这些难题就都解决了。

即使我有这个能力，我也不愿在这里讨论这个问题。但为了避免小误解，我还是要申明一下我的立场。我相信数学实在存在于我们之外，我们的任务是去发现或观察它，并且，我们所证明的定理，我们夸耀称之为“创造物”的，只不过是观察记录而已。自柏拉图以来很多享有盛誉的哲学家都持有此观点，虽然形式各异。我采用的语言对持有这种看法的人来说是很自然的，读者若不喜欢这种哲学概念可改变这种语言，这对我的结论影响甚微。

## § 23

纯数学和应用数学间最大的差异也许表现在几何学方面。纯几何学(+)包括很多分支，如射影几何、欧几里得几何、非欧几何，等等。每一种几何都是一种模型，即概念构成的造型，应该按照各个独特造型的意义和美加以鉴别。几何是一幅图像，是很多方面的合成品，也是数学实在的一部分，并且是一个不完全的复本(然而，在其范围内又是准确的复本)。但是现在对我们最重要的一点是：纯几何学无论如何也不能描写物理世界的时空实体，因为地震和日食不是数学概念。

这些话对于外行来说可能有点矛盾，但对于一个几何学家来说则是真理，我可以举一个形象的例子来加以说明。假如我作一个有关几何学的讲座，例如普通的欧几里得几何，我会在黑板上画一些图形，一些直线、圆或椭圆的草图来激发听众的想象。显然，我画图的质量不会对我所证明的定理有什么影响，图形的作用只是将我的意思明白地传达给听众，如果我已做到这一点，那么让技巧高超的画师来重画一遍是毫无必要的，它们只是辅助教学的工具，不是讲座的实质内容。

让我们再进一步。我讲课的教室是物理世界的一部分，有其固定的形状。对于这种形状以及对于物理世界的一般形状的研究本身就是科学，可称之为“物理几何”。假设现在有一个高功率的发电机，或一个巨大的引力体搬进教室，物理学家就会告诉我们教室的几何结构已改变，它的整个物理造型已经轻微但确实被改变了。那么我所证明的定理是否也变得错误了？我的求证当然是没受影响的，这就像莎翁的剧作不会由于读者不小心将茶泼在某一页上而改变一样。剧本是独立于所印刷的纸张的，“纯几何”也是独立于教室或物理世界的其他部分的。

这是纯数学家的观点。应用数学家、数学物理学家自然是另一种看法，因为物理世界(含有其结构和形状)已经在他脑中先人为主了，对于这种形状我们不能像描述纯几何学那样确且描绘，但是我们能说出几点名堂来。我们可以精确或粗略地描绘出它的组成部分之间的关系，

并把这种关系与某些纯几何体系的组成间精确的关系作一个比较,这样我们也许可以找出两种关系间的相似之处,那么我们面前就会有一幅“符合物理世界的事实”的图来。几何学家给物理学家提供了一整套可供选择的图形,这当中可能某一幅图比其他的更符合事实,于是提供这幅图的几何学就成了应用数学家最重要的几何学。我可以补充一句,即使是纯数学家也会对这种几何学更加欣赏,因为还没有哪个数学家纯到对物理世界毫无兴趣的地步。但是,一旦他屈服于这种诱惑,他就放弃了他纯数学的立场。

## § 24

这里自然会使人想起我的另一番议论,物理学家会觉得它是自相矛盾的,尽管这种自相矛盾比起 18 年前已轻微得多。我将用我在 1922 年于英国科学促进协会 A 组讲演中几乎一样的语言来描述它,那时我的听众绝大多数是物理学家,为此我的话可能带有一点挑衅的意味,但我还是坚持了我的立场。

我一开始就说数学家和物理学家之间见解的差异也许并不如一般人认为的那么大。我认为最重要的一点是,数学家与实在的联系更直接一些。这似乎是自相矛盾的,因为正是物理学家们在研究所谓“实在”的那些客体,但人们稍加思索就能说明:物理实在,不管它是什么,很少或没有一般意义上被本能地赋予实在的属性。一把椅子也许是一堆旋转电子的集合体,也许是上帝脑海中的一个想法,这两种描述都有可取之处,但没有一种是与通常意义下的实在完全相符。

我接着说道,无论物理学家还是哲学家都未曾对“物质实在”作出有说服力的解释,也没有解释物理学家如何从大量混乱的事实或感觉开始来建造他所称的“实在”的物体结构的。我们并不能说我们知道物理的研究题材是什么,但这并不妨碍我们大致理解一个物理学家想干什么:他想用一些确定的、有序的抽象关系系统,来将他面临的原始的、无条理的事实现象重新联系起来,而这种系统他只能从数学家那里获得。

另一方面,数学家也在研究他自己的数学实在,对这种“实在”,正如我在 § 22 节中所说,我持“实在论”而非“唯心论”观点。在任何情况下(这是我主要的观点)这种数学的实在论观点比物理实在似乎更合理一些,因为数学的客体更接近他们所被看到的。一把椅子或一颗星星一点都不像它们看起来的那样,我们对之想得越多,感觉的迷雾就越会使它的轮廓模糊不清。但是“2”和“317”与感觉无关,我们观察得越仔细,它们的性质就越清晰。也许现代物理学最适合于唯心主义哲学框架——我不相信这一点,但有些著名的物理学家是这么说的。纯数学在我看来倒是唯心主义的绊脚石:317 是个素数,并不因为我们是这样认为,或是我们的思想是以某种特定的方式形成,而是因为它原本如此(“原本如此”有着重号),因为数学实在就是这样建立的。

## § 25

纯数学和应用数学的这些差异对它们本身很重要,但与我们关于数学“实用性”的讨论毫无关系。我 § 21 中曾谈到过费马和其他一些伟大的数学家的“真正的”数学,具有永恒美学价值的数学,如最好的希腊数学。它们之所以永恒,是因为其中的精华就像文学中的精英部分,在几千年后还能引起千万人强烈的满足感。这些数学家基本上都是纯数学家(当然

那时候两者的差异要比现在小得多)，但我考虑的不仅是纯数学方面。我把麦克斯韦、爱因斯坦、《Eddington》和迪拉克都算在“真正的”数学家之列。现在应用数学最伟大的成就就是相对论和量子力学，而这些领域现在无论在哪方面都几乎像数论一样是“无用”的，在应用数学中像在纯数学中一样，或多或少地有用的恰恰是其中最令人乏味的和最基本的部分。时间会改变这一切。无人预见到矩阵、集合论和其他纯数学理论在现代物理学中的应用，也许一些“高雅”的应用数学会以“想不到”的方式变得“有用”，但是迄今为止，无论在某一学科，实际生命是由平凡和枯燥组成的。

我还记得 6 顿举的一个有关“有用”的科学不吸引人的有趣例子。英国科学促进协会在利兹举办过一个会议，举办者以为会员们可能会想听一些科学在“厚毛纺”工业方面的应用，但出于这个目的的讲座和展示都彻底失败了。看起来与会者(无论是否利兹居民)都想得到娱乐，但“厚毛纺”完全不是一个有趣的话题。这些讲座参加者寥寥无几，而有关相对论或素数的理论却受到了听众的欢迎。

## § 26

数学中的哪些部分是有用的？

首先，中小学里大部分数学是有用的，如算术、初等代数、初等欧氏几何、初等微积分计算。但“专家”所学的一部分数学应排除在外，如投影几何。在应用数学中，力学基础是有用的(中学所教的电学应归于物理学)。

其次，大学数学中相当一部分是有用的，它大部分实际上是中学数学更完备的发展，一部分物理化的学科如电学和流体力学也是有用的。同时我们必须认识到知识的储备总是好事情，最实际的数学家的知识如果仅限于对他有用的那一点点的话，可能会遇到严重障碍，因此我们各方面都应懂一些。但我们总的结论是，这种数学只是当一个高级工程师或一个现代物理学家需要时才会有用，也就是说，这些数学没有特别的美学价值。欧几里得几何中那些死板乏味的部分是有用的——我们并不想要平行公理，或比例理论，或正五边形的构造。

于是我们得到一个很有趣的结论，就是纯数学整体上明显比应用数学有用。纯数学家似乎在实用方面和美学方面都占优势。最有用的是技术。而数学技术主要是通过纯数学来传播的。

我希望我不需要表白我不是在贬低数学物理，它是一门辉煌的、也有许多问题的学科，充满了最棒的想象。但一个普通的应用数学家的处境不是有点可怜吗？如果他想“有用”些，他就不得不单调乏味地工作，也不能够给他的想象力以充裕的空间。“想象”的宇宙比这个构造拙劣的现实世界美丽得多，而且一个应用数学家的想象力创造出的最精美的产品往往一出来就被否定了，理由粗鲁而充分：它们不符合事实。

总结论已经明白无误了。如果我们暂时同意说，有用的知识就是现在或不远的将来对人类的物质享受有贡献的知识，而与纯粹的智力满足无关，那么高等数学的大部分就都是无用的了。现代几何、现代代数、数论、集合论、函数论、相对论、量子力学——没有一样能达到这个标准，也没有一个数学家的价值可以以此标准衡量。如果以此为标准，那么阿贝尔、黎曼、庞加莱都虚度此生，他们对人类享乐毫无建树，没有他们地球依然是个乐园。

也许有人反对说我关于“用处”的概念太狭窄，我只将其定义为“快乐”和“舒适”，而忽略其“社会”效应，而后者是近年来一些作者抱着各不相同的观感都非常强调的问题。如怀特海说到“数学知识在人们生活中，在日常工作中，在社会组织中的巨大作用”，霍格本(他对我和其他数学家所说的数学是无动于衷的，不像怀特海那样心领神会)说：“如果没有数学这种大小和次序的规则，我们就不可能建造一个充满快乐、无人受穷挨饿的合理社会。”

我实在不能相信这种辩辞会给数学家们带来多大的安慰。这两位作者的语言都过于夸大其词了，而且，他们俩也都忽视了非常明显的区别。由于霍格本被公认不是一名数学家，所以上述情况对他是自然的。他指的“数学”，实质上是他所理解的数学，我们将这种数学称之为“中学”数学。这种数学有许多用处，我承认这些用处，而且，如果我们高兴的话，也可以称之为数学的“社会性”。霍格本将许多令人感兴趣的魅力用于数学发现的历史。正是这一点使这本书获得声望。因为正是这本书才使霍格本帮助了许多从来不是，而且将来也不会成为数学家的人。读者搞明白了数学中还有他们未曾料到的东西。但是，霍格本对于“真正”的数学几乎一窍不通(这一点凡是阅读过霍格本对毕达哥拉斯的定理，或欧几里德以及因斯坦的有关论述的任何人也能马上这么说)，更不用说什么心领神会了(这一点他不辞劳苦地要表现)。“真正的”数学对他来说仅仅是一个让人瞧不起的科目。

数学家怀特海的问题倒不是他不了解或不赞同这一有关数学的概念，但是在他对数学的狂热中却忽略了他所十分了解的那些特征。那种对“人们的日常爱好”和“社会体制”有巨大影响的不是怀特海的数学，而是霍格本的数学。而由一般人用于平常事物的数学是微不足道的，经济学家或社会学家们所利用的数学根本够不上“学术水准”。怀特海的数学也许深深影响了天文学和物理学，而且对哲学的影响也是相当可观的(一种有价值的思想总会影响另一种有价值的思想)。然而对于别的东西几乎没什么影响了。这种巨大影响一般并不是对普通人而言，而是对像怀特海本人那样的人而言的。

有两类数学，即真正数学家的数学和我将称之为“不重要的”数学。我之所以这样称谓，是没有比这更合适的词了。这种不重要的数学由推崇它的霍格本及其学派中的其他作者提出许多论据加以辩护。而真正的数学却得不到这样的辩护，而且，对这样的数学要是能够给予辩护的话，也是被当作一门艺术来加以辩护的。这种观点丝毫没什么荒谬或不寻常，因为它是数学家们所普遍认同的。

但是我们仍有另外一个问题要考虑。我们已得出结论，那就是，大体说来，不重要的数学是有用的，而真正的数学基本上不是有用的；从某种意义上来说，不重要的数学的确“有益”，而真正的数学却不然。但是，我们仍需问：是否两种数学中有一种有害？如果认为任何一种数学在和平时期有许多危害，这也许是令人感到不合情理，所以我们不得不考虑数学对战争的影响，现在，辩论这些问题很难不带偏见，所以我本不想谈的，然而，有些讨论看来是在所难免的，幸而这种讨论没必要搞很长时间。

有一个令人欣慰的结论让一个真正的数学家坦然，那就是，真正的数学对战争没有影响。迄今尚未有人发现数论或相对论用于任何战争目的，而且看来今后许多年也不大可能有这种

情况。确实，应用数学有许多分支。例如弹道学和空气动力学。这类学科是因为战争而特发展起来的，它们需要相当精密的技术，也许这样一来，就很难将它们视为“不重要的”数学，但它们全都不可能拥有“真正的”数学那样的头衔。它们令人厌恶，而且极其枯燥，即使是利特伍德也不可能使弹道学成为让人崇敬的学科，别人就更无能为力了。因此，一个真正的数学家是问心无愧的；他的工作的价值是无可非议的。正如我在牛津大学曾讲述的那样，数学研究是一个“无害而清白的”职业。

在另一方面，不重要的数学在现代战争中有许多应用。例如：枪支专家和飞机设计师在工作中是离不开数学的。而这些应用所产生的一般影响是清清楚楚的。数学(假如不像物理和化学那样明显)对现代化、科学化的战争起了推波助澜的作用。

由于对现代化、科学化战争存在着两种截然相反的观点，数学的作用并不像人们想象的那么简单。首要的也是最明显的观点是，科学对战争的影响是：它加剧了战争的恐怖性。从前只有少数参战的人会领略到战争所带来的痛苦，而现在这种痛苦殃及其他的群体。而霍尔丹却在他的著作《化学战争的防御》(1)中阐述了另外一种截然相反而又无懈可击的观点。他认为现代战争不像科学发展以前时代的战争那样恐怖。他认为原子弹可能比刺刀更仁慈，催泪瓦斯和芥子气也许是军事科学所设计出的最人道的武器。他还认为：传统的看法只是缺乏深思熟虑的“感情用事”(2)而已。还应强调，由科学所带来的风险的平等性可能体现在长远的利益中，也就是说一个文官的生命与一名士兵的生命是等价的，女人与男人的生命也是等价的。什么都比将凶残行为集中到一个特殊群体要好。总之，战争全面展开得越快越好。

我并不清楚以上的观点中哪一个更接近于真理，这是一个急需解决而又令人兴奋的问题。但我没有必要在这里来阐明，这一问题只与“不重要的”数学有联系，捍卫它是霍格本的事，而不是我的事。这个问题对霍格本的数学也可能是点麻烦，而对我的情况却毫无影响。

实际上，不管怎么说，因为真正的数学在战争中总有用武之地，所以还有更多情况要阐述。当世界疯狂时，一个数学家可以在数学中发现一种无与伦比的镇定剂。在所有的艺术和科学之中，数学是最严肃而且也是最细微的。同时，数学家在所有的人里应该是最容易超脱于人世的。正如罗素曾说过的那样：“至少一种冲动与不安可以从沉闷而乏味的现实中得以解脱。”很遗憾，这里必须提出一个非常严格的限制条件——这样一位数学家一定不能太老了。因为数学是一种创造性学科而不是默想的学科。没有任何人在他失去能力或者不再有创造愿望时还可以从数学这一学科中获得慰藉。而这种失去能力与创造愿望的情况可能会很快地在一个数学家身上发生。这是很可悲的，但在这种情况下，他也就不是什么重要的角色了，也用不着为他操心了。

## § 29

在这里我愿意用更具个性的方式来概括我的结论。开始我就说过，任何一个为自己的主张辩护的人都会发现他是在为自己辩护。因此作为一名职业数学家，我自然也是在为自己作某种辩护，而这一结论部分可称为我的自传的一部分。

我从不记得除了曾经想成为一名数学家以外，还想做什么。很显然，我的才能是在这一方面的。而且我的父母也从不怀疑我在这方面的天赋。我不记得在孩提时代对数学有过强烈的爱好，这种数学家的素质我也许具备，但我并不觉得十分惊人。我对数学的兴趣是基于应付考

试和争取奖学金的需要，我必须战胜其他同学!这似乎成了我决策的动力。

我的思想抱负发生急剧变化是在 15 岁的时候(这种变化方式很特别)。有一本名叫《三一学院成员》的书，作者是“阿伦·圣·奥宾”(3)，是一套有关剑桥生活丛书中的一本。这本书写得并不好。我认为这本书写得比玛丽·科雷利(Marie Corelli)所写的大部分书都差。但由于它是一本能激起一个聪明男孩想象力的书，所以也算不得一本完全坏的书。书中有两名主人公。第一主人公名叫费劳尔斯，他几乎是完美的化身。第二主人公布朗，很有些女人气质。费劳尔斯和布朗在大学生活中遇到很多妨碍学习的危险情况，其中最糟糕的是贝伦敦(Bellenden)姐妹在切斯特顿(4)开设的一家赌场。这对姐妹年轻迷人且又极端邪恶。费劳尔斯摆脱了所有这些麻烦，成为数学学位考试的第二名和年级第一名，自然得到了一个奖学金(假如我当时所假设的那样)；而布朗则失败了，辜负了父母的期望，开始酗酒。有一次，在暴雨中他处于醉酒后的狂乱状态，被牧师的祈祷文拯救出来。他连普通学位都难以拿到，最后成为一名传教士。这些不愉快的事情并没有影响他们间的友谊，当布朗第一次在高级职员休息室喝着葡萄酒、吃着核桃仁的时候，费劳尔斯对他的行为大惑不解，但却充满着爱怜之情。

现在弗劳尔斯是一个非常正直的研究员(迄今为止“阿伦·圣·奥宾”所能找到的一个)。然而，就连我这个思想单纯的人也不认为他是聪明人。如果他能作出这些成绩，我为什么不能？给我印象最深的是休息室的最后一幕，它使我着了迷，从那时起，直到我得到三一学院成员资格为止，对我来说，数学就等同于三一学院成员资格。

进入剑桥大学以后，我立刻发觉，学位奖学金意味着“创造性的工作”，而我每形成一种确定的研究思想都要花很长时间。像每一个未来数学家一样，我在读中学时，就觉得自己常常可以比老师做得更好；甚至在剑桥大学时，我也觉得有时能比老师做得更好一些，当然不像在中学叫那么经常罢了。但是，尽管当时我获得了剑桥的荣誉学位，对于我花费很大精力所研究的学科，我确实是无知的；而且我仍认为从根本上来讲，数学是一门“竞争”的学科。我的眼界最初是由乐甫教授打开的，他只教了我几个学期的课，却使我对分析的严酷概念有了最初的了解。我从乐甫教授处获益最大的是他建议我读乔丹的著名的《分析教程》(Cours d'analyse)。我永远也不会忘记这部著作所给予我的震撼，不会忘记那本书对我这一代数学家的激励。读了这部著作我才第一次懂得了数学的真谛；也是从那时起我走上了一个真正的数学家的道路，对数学树立了正确的目标，对数学有了真正的热情。

在这以后的十年里，我写了大量论文，但都无足轻重。在我的记忆中，我所满意的只不过四五篇。我的真正的职业危机是在后来的 10 年或 12 年出现的。在 1911 年我与利特伍德开始进行长期的合作。再是在 1913 年，我认识了拉曼纽扬。从那时起，我的所有成就便注定与他们不可分割，而且很明显，我与他们的合作是我一生中决定意义的事件。当我失望地却又不得不听那些浮夸而令人厌倦的谈话时，我就会对自己说：“我做了件你们从未做过的事。那就是与利特伍德和拉曼纽扬在某种平等条件下的合作。”与他们相比我显得尤其不成熟。当我成为牛津大学教授时，我处于四十刚出头的最佳时期。但就是从那时起，我的命运每况愈下，这种情况在老年人尤其是老年数学家当中是常见的。一个数学家也许可以在 60 岁时依然胜任上作，但不能指望他们产生创造性的思想。

坦率地说，我的有价值的生活已经结束，而且我小再可能做出什么事来有意识地增加我的生活价值。要沉住气是很困难的，但我认为这是一种“成功”。我已获得了与我的能力相匹配的人所应得到的奖励。我拥有了一系列令人欣慰而高贵的职位。对于大学里的较为单调乏味

的生活，我并不感到烦恼，虽然我讨厌“教书”，但还是从事少量的教学工作，这种工作几乎完全是在指导我的研究工作。我喜欢演讲，而且曾经为一些出类拔萃的班级做了很多讲座。我始终都有闲暇来进行研究工作，这些研究已成为我一生中永恒的享受。我感到自己很容易与他人合作，而且已与两个很特殊的数学家进行了多方面的合作，这使我为数学作出的贡献大大超出了我本来的期望。像其他数学家一样，我也曾遭到许多次失败，但没有哪一次失败是过分严重而令我感到特别沮丧的。假如在我只有 20 岁时，让我过这种淡泊的生活，我也会毫不犹豫地接受它的。

听起来也许很可笑，我认为自己可以“做得更好”。我没有语言和艺术方面的才能，而且对于科学实验也不太感兴趣。也许我本来可以成为一个说得过去的哲学家，但绝不会是那种具有创新头脑的哲学家。我自认为我或许可以成为一名好律师；可新闻业只是一种职业，它不属于哪种学术领域，而我对自己在学术领域的机会是充满着信心的。所以，如果以人们一般所说的成功来作为评判适合什么职业的标准的话，那么我正适合做一名数学家。

如果我想要的是一种相当舒适和快乐的生活，那么我的选择就是正确的。但是那些律师、证券经纪人和出版商们常常也过着舒适而愉快的生活。要搞明白更富的人们生存的世界是怎样的，这是很困难的。那么是否可以说我的生活比他们的生活更有意义呢？对我来说，可能答案是惟一的，那就是：是的。如果答案是惟一的，那么答案的理由也是惟一的。

我从未做过任何一件“有用的事”。我的新发现未曾，且将来也不大可能为世界增加哪怕是最低限度的舒适感，不论是直接的还是间接的，也不管是善意的还是恶意的，都做不到这一点。我也曾培训过其他数学家，但这些人与我是同样类型的数学家，他们所做的工作也同我做过的工作一样没有用处。若是以实用的标准来作评判的话，我的数学生命的价值是零；从数学之外看来，我的价值无论如何也是微不足道的。我只有一种机会免被判断为完全微不足道，那就是人们可能判定我已做出了一些有创造价值的工作。我不否认，我已做了一些创造性的工作，问题是它们的价值怎样。

对于我的一生，或者说任何一个与我类似的数学家的情况是：我所做的工作扩充了知识，并且帮助他人在这座知识的大厦上添砖加瓦；而这些添加部分与伟大的数学家们的创新，或任何其他大大小小艺术家们的作品的价值的不同仅仅在于程度而不在于种类。这些数学家和艺术家都在死后留下了某种纪念物。

(n)我曾经因有这种观点而被指责。我有一次曾说“一种科学只有当它强调社会财富的不均衡性，或直接促使人类生活的毁灭，才是有用的”，这句话写于 1915 年，几次被别人引用(或由于反对我)。这句话显然是有意识的夸大其词，尽管当时就可能言之成理的。

(+)为了讨论的目的，我们必须把数学家所谓的“解析”几何称做纯几何。

(1)J·B·C 霍尔丹，Callinicus：化学战争的防御(1924)。

(2)我并不想通过这个滥用的词来揭示这个问题；这个词在描述感情不平衡的特定状态也许会有用。当然，许多人都把“感情用事”当作骂人话来错误地指责宽宏大量的情感。而把“实事求是”当作借口，用来掩饰自己的蛮不讲理。

(3)阿伦·圣·奥宾就是弗朗西丝·马歇尔夫人，马修·马歇尔的妻子。

(4)实际上切斯特顿缺少形象生动的特征。



## 后 记

布劳德教授和斯诺博士都曾对我说过,假如我能在科学所引发的益处和邪恶之间找到平衡的话,我就不再会为科学对战争的影响而苦恼。这样一来,当我想到数学影响时,除了想到那些纯粹是毁灭性的影响外,我还必须记住科学还有着许多重要的有益影响。所以(为了写后边这一点)我必须记住:

- (a)只有通过科学方法,全人类的战争组织才可能形成;
- (b)科学大大加强了战争的宣传威力,这一威力全是用于邪恶的。
- (c)科学使“中立”成为不可能或失去意义,因此战争爆发后,不再可能存在充满安宁的“世外桃源”。

当然,所有这些观点都是倾向于反对科学的,另外一方面,即使我们把这种观点最大限度地压缩,也几乎难以支持以下的观点:由科学带来的恶肯定不重于善。比方说,假如每场战争中有一千万人丧生的话,那么科学的作用仍然是:它可以使人的平均寿命延长。总而言之,我写的§28节,是过于“多愁善感”了。

我并不想反驳这些批评的公正性。但是因为我在序言中所陈述过的那些理由,在我的书中不会再遇到这些批评了,对此我感到满意。

斯诺博士也对§8所谈的内容作了有趣的论证。即使我们承认下述观点:“阿基米德将被人们记得,而埃斯库罗斯却被人们遗忘。”难道我们不觉得数学的声誉是否仍然太微不足道了?我们仅仅从埃斯库罗斯(当然还有莎士比亚或托尔斯泰)的著作中,可以对作家本人的情况有所了解,然而阿基米德和欧多克斯留给后人的只是他们的名字而已。

当我们在特拉法尔加广场路过 尔逊将军纪念碑时,J·M·洛马斯(Lomas)先生更加形象地阐述了这一观点,假如真的能把我的雕像塑在伦敦纪念碑上的话,我是希望这座碑高耸入云,以至于人们见不到雕像了呢,还是希望纪念碑矮得可以使人们对雕像一目了然呢?我会选择前一种,而斯诺博士可能会选择后一种。