College Mathematics Guidance Series

大学数学学习辅导丛书

工程数学 矢量分析与场论（第四版）学习辅导与习题全解

谢树艺

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

ISBN 978-7-04-035655-7
9 787040 356557 >
定价 9.50元

大学数学学习辅导丛书

工程数学
矢量分析与场论
（第四版）
学习辅导与习题全解

Shiliang Fenxi yu Changlun(Di-si Ban)
Xuexi Fudao yu Xiti Quanjie

谢树艺

高等教育出版社·北京
HIGHER EDUCATION PRESS BEIJING

内容提要

本辅导书依据《矢量分析与场论》从第三版到第四版内容的变动修订而成，除了对教材的内容作了一些扼要解释和补充一些示范性例题外，还增补了教材各章节的全部习题解答，为读者提供一种可参考的解题思路和方法。本次修订对书中各部分内容作了适当的修改和增删，并将教材中的一些基本公式汇集于附录，以便读者查用。本书可供使用主教材的师生教学参考之用。

图书在版编目(CIP)数据

工程数学：矢量分析与场论（第四版）学习辅导与习题全解/谢树艺编. —北京：高等教育出版社，2012.7

ISBN 978-7-04-035655-7

Ⅰ.①工… Ⅱ.①谢… Ⅲ.①工程数学-矢量-分析-高等学校-教学参考资料 ②工程数学-场论-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.①TB112

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2012)第 141155 号

策划编辑 于丽娜　责任编辑 张晓丽　封面设计 于 涛　版式设计 马敬茹
插图绘制 尹 莉　责任校对 殷 然　责任印制 朱学忠

出版发行	高等教育出版社	咨询电话	400-810-0598
社　　址	北京市西城区德外大街4号	网　　址	http://www.hep.edu.cn
邮政编码	100120		http://www.hep.com.cn
印　　刷	涿州市京南印刷厂	网上订购	http://www.landraco.com
开　　本	850mm×1168mm 1/32		http://www.landraco.com.cn
印　　张	4.625	版　　次	2012年7月第1版
字　　数	110千字	印　　次	2012年7月第1次印刷
购书热线	010-58581118	定　　价	9.50元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换

物 料 号 35655-00

修订版前言

本书是在《矢量分析与场论(第三版)学习辅导与习题全解》的基础上进行修订的。主要是依据教材《矢量分析与场论》从第三版到第四版内容的变动而作的相应修订。同时又对原书的内容进行了认真的审核，在书中的各个部分，如内容释要、解题示例、习题全解，均作了适当的修改和增减变动，务使其愈臻完善。此外，我们还将教材中的一些基本公式作了汇集，并作为附录置于书末，以便查用。

限于编者水平，书中仍难免存在缺点或不当之处，诚望读者批评指正!

编　者

2011 年 11 月于重庆大学

前　言

本书是在原《矢量分析与场论学习指导书》的基础上，并根据工程数学《矢量分析与场论(第三版)》教材进行改编的。其中除了对教材的内容作一些扼要解释和补充一些示范性例题外，还增补了教材中各章节的习题全解，以帮助读者在独立做题之后，或遇到困难而又深思不得其解时参考使用。

此外，对教材中用到的某些命题，因其推证过程已超出本课程的教学要求，因而教材上未予给出。如在管形场中，计算矢势量的公式，以及在正交曲线坐标系中，坐标曲线上的切线单位矢量的导数公式等，在本书中，给出了它们的推证，以供有兴趣的读者参阅。

限于编者水平，本书一定存在不少缺点和错误，诚望读者批评指正。

编　者

2004 年 7 月

目　　录

绪论 …………………………………………………… 1
第一章　矢量分析 ………………………………………… 2
一、内容释要 ……………………………………………… 2
二、解题示例 ……………………………………………… 3
三、习题全解 ……………………………………………… 8
习题 1　解答 ……………………………………………… 8
第二章　场论 ……………………………………………… 17
一、内容释要 ……………………………………………… 17
二、解题示例 ……………………………………………… 29
三、习题全解 ……………………………………………… 45
习题 2　解答 ……………………………………………… 45
习题 3　解答 ……………………………………………… 50
习题 4　解答 ……………………………………………… 57
习题 5　解答 ……………………………………………… 62
习题 6　解答 ……………………………………………… 68
第三章　哈密顿算子 ∇ …………………………… 77
一、内容释要 ……………………………………………… 77
二、解题示例 ……………………………………………… 79
三、习题全解 ……………………………………………… 83
习题 7　解答 ……………………………………………… 83
*第四章　梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线坐标系
中的表示式 ………………………………………………… 88
一、内容释要 ……………………………………………… 88
二、解题示例 ……………………………………………… 93

三、习题全解 …………………………………………………… 100
习题 8　解答 ……………………………………………… 100
习题 9　解答 ……………………………………………… 112
附录(一)　正交曲线坐标系中坐标曲线的切线单位矢量的导数公式 …………………………………… 117
附录(二)　梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线坐标系中的表示式的又一种推导法 ………………… 124
附录(三)　基本公式汇集 ………………………………… 128

绪　论

工程数学《矢量分析与场论(第四版)》的主要内容有：矢量分析；场论的基本知识；哈密顿算子；正交曲线坐标的概念；梯度、散度、旋度与调和量在一般正交曲线坐标系中的表示式，以及它们在柱面坐标系和球面坐标系中的表示式；附录中还介绍了若干种正交曲线坐标系.

学习本课程，必须具有高等数学的知识. 特别是其中的曲线积分与曲面积分的概念、理论和计算方法对于顺利地学习本课程尤为重要. 若在学习过程中，遇到曾经学过的知识记不清甚至忘记了的时候，就要及时查阅复习，不要轻易放过.

学习本课程的方法和学习其他数学课程一样，对教材要仔细阅读，循序渐进地深入钻研每章、每节的内容. 弄清并熟悉每个概念，掌握好每个命题(定理或公式)，弄清该命题的证明或推导过程，弄清每个例题的解题思路和解法步骤. 在此基础之上，还要认真地做习题来巩固所学内容，并加深理解. 做题时，要独立思考，并按照规范的格式来书写. 文字要通顺扼要，务使逻辑步骤清楚，卷面整洁醒目. 这样做，既能避免错误，又能培养认真踏实的好习惯. 待习题做完后，还应小结一下自己的做题经验.

第一章 矢量分析

一、内容释要

1. 这一章矢量分析，不仅是后面场论部分的基础知识，同时也是研究其他许多学科的有用工具. 其中的几个主要概念，如矢性函数及其极限、连续以及有关导数、微分、积分等概念，都和高等数学中研究过的数性函数的相应概念完全类似，可以看成是这些概念在矢量分析中的推广. 注意到这一点，这一章的主要内容，将是不难掌握的.

2. 本章所讨论的，仅限于一个自变量的矢性函数 $\boldsymbol{A}(t)$，但在后面场论部分所涉及的矢性函数，则全是二个或三个自变量的多元矢性函数 $\boldsymbol{A}(x,y)$ 或 $\boldsymbol{A}(x,y,z)$. 对于这种多元矢性函数及其极限、连续、偏导数、全微分等概念，完全可以仿照本章将高等数学中的多元数性函数及其有关的相应概念加以推广而得出. 为简单起见，就不作专门讨论了.

3. 本章的重点是矢性函数的概念及其微分法. 特别要注意导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$ 的几何意义，即 $\boldsymbol{A}'(t)$ 是位于 $\boldsymbol{A}(t)$ 的矢端曲线上的一个切向矢量，其起点在曲线上对应 t 值的点处，且恒指向 t 值增大的一方.

如果将自变量取为矢端曲线的弧长 s，即矢性函数成为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(s)$，则 $\boldsymbol{A}'(s)=\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}s}$不仅是一个恒指向 s 增大一方的切向矢量，而且还是一个单位切向矢量. 这一点在几何与力学上都很重要.

4. 应注意到：矢量 $\boldsymbol{A}(t)$ 保持定长的充分必要条件是，$\boldsymbol{A}(t)$

与其导矢 $\boldsymbol{A}'(t)$ 互相垂直. 因此，单位矢量与其导矢互相垂直. 比如 $\boldsymbol{A}'(s)$ 为单位矢量，故有 $\boldsymbol{A}'(s)\perp\boldsymbol{A}''(s)$，又如圆函数 $\boldsymbol{e}(t)$ 为单位矢量，故有 $\boldsymbol{e}(t)\perp\boldsymbol{e}'(t)$，即 $\boldsymbol{e}(t)\perp\boldsymbol{e}_1(t)$.

还应注意：若单位矢量 $\boldsymbol{A}^\circ(t)$ 的自变量 t 不是其矢端曲线的弧长时，其导矢 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}^\circ}{\mathrm{d}t}$ 虽然与 $\boldsymbol{A}^\circ(t)$ 垂直，但它一般不再是单位矢量.

5. 在矢性函数的积分法中，要注意两个矢性函数的数量积和两个矢性函数的矢量积的分部积分公式是有所不同的，二者依次为

$$\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\int\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}'\mathrm{d}t,$$

$$\int \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\int\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}'\mathrm{d}t.$$

前者与高等数学中数性函数的分部积分公式一致，后者的不同之处，在于其右端的两项是以加号“+”相连，这是因为矢量积服从于“负交换律”之故.

6. 在矢量代数中，当引进了矢量的坐标以后，一个空间矢量就和三个数量(坐标)构成一一对应的关系，而且有关矢量的一些运算，如两个矢量的和、差以及数量与矢量的乘积等都可以转化为对三个数量坐标的相应运算. 同样，在矢量分析中，若矢性函数采用其坐标表示式，则一个矢性函数，就和三个数性函数(坐标)构成一一对应的关系，而且有关矢性函数的一些运算，如计算极限、求导数、求积分等亦可转化为对其三个坐标函数的相应运算.

二、解 题 示 例

例 1　已知矢量 $\boldsymbol{A}(t)=(2t-t^3)\boldsymbol{i}+3t^2\boldsymbol{j}+(2t+t^3)\boldsymbol{k}$，计算

(1) $\lim\limits_{t\to1}\boldsymbol{A}(t)$； (2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)$；

(3) $\int\boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t$； (4) $\int_0^1\boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t$.

解 (1) $\lim\limits_{t\to1}\boldsymbol{A}(t)=\lim\limits_{t\to1}(2t-t^3)\boldsymbol{i}+\lim\limits_{t\to1}3t^2\boldsymbol{j}+\lim\limits_{t\to1}(2t+t^3)\boldsymbol{k}$

$$=\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

(2) $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}(t)=\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t-t^3)\boldsymbol{i}+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(3t^2)\boldsymbol{j}+\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(2t+t^3)\boldsymbol{k}$

$$=(2-3t^2)\boldsymbol{i}+6t\boldsymbol{j}+(2+3t^2)\boldsymbol{k}.$$

(3) $\int\boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t=\int(2t-t^3)\,\mathrm{d}t\boldsymbol{i}+\int3t^2\,\mathrm{d}t\boldsymbol{j}+\int(2t+t^3)\,\mathrm{d}t\boldsymbol{k}$

$$=\left(t^2-\frac{1}{4}t^4+C_1\right)\boldsymbol{i}+(t^3+C_2)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(t^2+\frac{1}{4}t^4+C_3\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\left(t^2-\frac{1}{4}t^4\right)\boldsymbol{i}+t^3\boldsymbol{j}+\left(t^2+\frac{1}{4}t^4\right)\boldsymbol{k}+\boldsymbol{C},$$

其中 $\boldsymbol{C}=C_1\boldsymbol{i}+C_2\boldsymbol{j}+C_3\boldsymbol{k}$ 为任意常矢.

(4) $\int_0^1\boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^1(2t-t^3)\,\mathrm{d}t\boldsymbol{i}+\int_0^1 3t^2\,\mathrm{d}t\boldsymbol{j}+\int_0^1(2t+t^3)\,\mathrm{d}t\boldsymbol{k}$

$$=\frac{3}{4}\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+\frac{5}{4}\boldsymbol{k}.$$

例 2 证明 $\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{e}(\alpha)+(t^2+1)\boldsymbol{e}_1(\alpha)$ 的图形为一抛物线（α 为非零常数）.

证 旋转坐标轴，使 Ox 轴与 $\boldsymbol{e}(\alpha)$ 重合且同向，此时 Oy 轴就与 $\boldsymbol{e}_1(\alpha)$ 重合且同向. 这样，所论图形的矢量方程就成为

$$\boldsymbol{r}(t)=t\boldsymbol{i}+(t^2+1)\boldsymbol{j},$$

其对应参数方程为

$$x=t,\qquad y=t^2+1.$$

消去 t，得

$$y=x^2+1.$$

可见，所论图形为一抛物线.

例 3 求曲线 $\boldsymbol{r}(\theta)=2\cos\theta\boldsymbol{i}+2\sin\theta\boldsymbol{j}+4\theta\boldsymbol{k}$ 在 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 处的切线方程和法平面方程.

解 $$\boldsymbol{r}'(\theta)=-2\sin\theta\boldsymbol{i}+2\cos\theta\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

当 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 时，有

$$\boldsymbol{r}\left(\frac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}+\pi\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}\boldsymbol{i}+\sqrt{2}\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}.$$

由于 $\boldsymbol{r}'\left(\frac{\pi}{4}\right)$ 为在曲线 $\boldsymbol{r}(\theta)$ 上对应于 $\theta=\frac{\pi}{4}$ 处的切向矢量，故所求切线方程为

$$\frac{x-\sqrt{2}}{-\sqrt{2}}=\frac{y-\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{z-\pi}{4},$$

法平面方程为

$$-\sqrt{2}(x-\sqrt{2})+\sqrt{2}(y-\sqrt{2})+4(z-\pi)=0,$$

或 $$x-y-2\sqrt{2}z+2\sqrt{2}\pi=0.$$

例 4 一曲线的矢量方程为 $\boldsymbol{r}(t)=(t^2+1)\boldsymbol{i}+(4t-3)\boldsymbol{j}+(2t^2-6t)\boldsymbol{k}$，求在 $t=2$ 处的单位切向矢量 $\boldsymbol{\tau}$.

解 曲线上对应于 t 值的点处的切向矢量为

$$\boldsymbol{r}'(t)=2t\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+(4t-6)\boldsymbol{k}.$$

在 $t=2$ 处有 $$\boldsymbol{r}'(2)=4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

其模 $$|\boldsymbol{r}'(2)|=\sqrt{4^2+4^2+2^2}=6.$$

故所求的单位切向矢量

$$\boldsymbol{\tau}=\boldsymbol{r}'(2)/|\boldsymbol{r}'(2)|=\frac{2}{3}\boldsymbol{i}+\frac{2}{3}\boldsymbol{j}+\frac{1}{3}\boldsymbol{k}.$$

例 5 求与 $\boldsymbol{A}=3\cos t\boldsymbol{i}+3\sin t\boldsymbol{j}+4\boldsymbol{k}$ 相垂直的单位矢量.

解 将 $\boldsymbol{A}$ 写成 $\boldsymbol{A}=3\boldsymbol{e}(t)+4\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{A}'=3\boldsymbol{e}_1(t).$$

而 $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{3^2+4^2}=5$. 说明 $\boldsymbol{A}$ 为定长矢量. 因此有 $\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{A}'$.

易见 $\boldsymbol{A}'/\!/\boldsymbol{e}_1(t)$，所以有

$$\boldsymbol{A}\perp\boldsymbol{e}_1(t).$$

可见，$\pm\boldsymbol{e}_1(t)$ 即为与 $\boldsymbol{A}$ 相垂直的单位矢量.

例 6 计算积分 $\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\mathrm{d}\varphi \quad (a\neq 0)$.

解 用分部积分法

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\mathrm{d}\varphi &= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)-\frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}_1(b\varphi)\mathrm{d}\varphi\\ &= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)-\frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}_1(b\varphi)-\frac{b^2}{a^2}\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\mathrm{d}\varphi,\end{aligned}$$

由此可得

$$\int \mathrm{e}^{a\varphi}\boldsymbol{e}(b\varphi)\mathrm{d}\varphi = e^{a\varphi}\frac{a\boldsymbol{e}(b\varphi)-b\boldsymbol{e}_1(b\varphi)}{a^2+b^2}+\boldsymbol{C}.$$

若记 $\boldsymbol{C}=C_1\boldsymbol{i}+C_2\boldsymbol{j}$，并将字母 φ 改为 x，再分别令上式等号两端矢量的对应坐标相等，便得到数性函数中的两个不定积分公式：

$$\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\frac{a\cos bx+b\sin bx}{a^2+b^2}+C_1,$$

$$\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{ax}\frac{a\sin bx-b\cos bx}{a^2+b^2}+C_2.$$

例 7 已知矢量 $\boldsymbol{A}=t\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j}+\ln t\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B}=\mathrm{e}^t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}-3t\boldsymbol{k}$，计算积分 $\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t$.

解 用分部积分法

$$\begin{aligned}\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t &= \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}-\int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}'\mathrm{d}t\\ &= t\mathrm{e}^t-2t\sin t-3t\ln t-\int(\mathrm{e}^t-2\sin t-3)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$$= te^t - 2t\sin t - 3t\ln t - e^t - 2\cos t + 3t + C$$
$$= (t-1)e^t - 2(t\sin t + \cos t) + 3t(1 - \ln t) + C.$$

例 8 已知矢量 $\boldsymbol{A} = t\boldsymbol{i} + 2t\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{B} = \cos t\boldsymbol{i} + \sin t\boldsymbol{j} + e^{-t}\boldsymbol{k}$, 计算积分 $\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}'\mathrm{d}t$.

解 用分部积分法

$$\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}'\mathrm{d}t = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \int \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}'\mathrm{d}t,$$

其中

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ t & 2t & 0 \\ \cos t & \sin t & e^{-t} \end{vmatrix} = 2te^{-t}\boldsymbol{i} - te^{-t}\boldsymbol{j} + (t\sin t - 2t\cos t)\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}' = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos t & \sin t & e^{-t} \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -2e^{-t}\boldsymbol{i} + e^{-t}\boldsymbol{j} + (2\cos t - \sin t)\boldsymbol{k},$$

$$\int \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}'\mathrm{d}t = 2e^{-t}\boldsymbol{i} - e^{-t}\boldsymbol{j} + (2\sin t + \cos t)\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C},$$

所以

$$\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}'\mathrm{d}t = 2(t+1)e^{-t}\boldsymbol{i} - (t+1)e^{-t}\boldsymbol{j}$$
$$+ [(t+2)\sin t + (1-2t)\cos t]\boldsymbol{k} + \boldsymbol{C}.$$

例 9 设 $\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{e}_1(\theta) + b\boldsymbol{k}$, 求 $\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}')\mathrm{d}\theta$.

解 $\boldsymbol{r}' = -a\boldsymbol{e}(\theta)$,

$$\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}' = [a\boldsymbol{e}_1(\theta) + b\boldsymbol{k}] \times [-a\boldsymbol{e}(\theta)] = a^2\boldsymbol{k} - ab\boldsymbol{e}_1(\theta)$$

[其中 $\boldsymbol{e}_1(\theta) \times \boldsymbol{e}(\theta) = -\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{e}(\theta) = \boldsymbol{e}_1(\theta)$]. 于是

$$\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{r}')\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}[a^2\boldsymbol{k} - ab\boldsymbol{e}_1(\theta)]\mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{1}{2}[a^2\theta\boldsymbol{k} - ab\boldsymbol{e}(\theta)]_0^{2\pi} = \frac{1}{2}(2\pi a^2\boldsymbol{k} - \boldsymbol{0}) = \pi a^2\boldsymbol{k}.$$

例 10 一质点沿曲线 $\boldsymbol{r}(t)=\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{i}+2\cos 3t\boldsymbol{j}+2\sin 3t\boldsymbol{k}$ 运动. 其中 t 为时间.

(1) 求质点运动的速度 $\boldsymbol{v}(t)$ 和加速度 $\boldsymbol{w}(t)$;

(2) 求在 $t=0$ 时的速度和加速度的大小.

解 (1) 速度

$$\boldsymbol{v}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=-\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{i}-6\sin 3t\boldsymbol{j}+6\cos 3t\boldsymbol{k}.$$

加速度

$$\boldsymbol{w}(t)=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\mathrm{e}^{-t}\boldsymbol{i}-18\cos 3t\boldsymbol{j}-18\sin 3t\boldsymbol{k}.$$

(2) 在 $t=0$ 时,

$$\boldsymbol{v}(0)=-\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k},\quad \boldsymbol{w}(0)=\boldsymbol{i}-18\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}.$$

所以, 在 $t=0$ 时,

速度的大小为 $|\boldsymbol{v}(0)|=\sqrt{(-1)^2+6^2}=\sqrt{37}$,

加速度的大小为 $|\boldsymbol{w}(0)|=\sqrt{1^2+(-18)^2}=\sqrt{325}$.

三、习 题 全 解

习题 1 解答

1. 写出下列曲线的矢量方程, 并说明它们是何种曲线.

(1) $x=a\cos t$, $y=b\sin t$;

(2) $x=3\sin t$, $y=4\sin t$, $z=3\cos t$.

解 (1) 矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=a\cos t\boldsymbol{i}+b\sin t\boldsymbol{j},$$

其图形是 xOy 平面上之椭圆;

(2) 矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=3\sin t\boldsymbol{i}+4\sin t\boldsymbol{j}+3\cos t\boldsymbol{k},$$

其图形是平面 $4x-3y=0$ 与圆柱面 $x^2+z^2=3^2$ 之交线, 是

一椭圆.

2. 设有定圆 O 与动圆 C，半径均为 a，动圆与定圆外切且滚动(如图 1). 求动圆上一定点 M 所描曲线的矢量方程.

[提示:(1)设开始时点 M 与点 A 重合;(2)取 $\angle COA=\theta$ 为参数;(3)$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}$.]

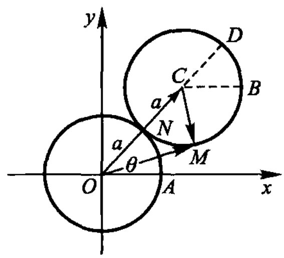

图 1

解 根据提示，如图 1. 所求方程是

$$\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$$

的具体表示式. 由于

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}.$$

其中 $\overrightarrow{OC}=2a\cos\theta\boldsymbol{i}+2a\sin\theta\boldsymbol{j}$.

为了求 $\overrightarrow{CM}$ 的表示式，延长 OC 至 D，并过 C 作 $CB//x$ 轴，则 $\overrightarrow{CM}$ 与 x 轴正向的夹角为 $-\angle BCM$. 而

$$\angle BCM=\pi-\angle DCB-\angle MCO.$$

其中 $\angle DCB=\angle COA=\theta$(同位角相等).

又设 N 为两圆的切点. 则有 $\overset{\frown}{AN}=\overset{\frown}{MN}$. 于是有

$\angle MCO=\angle COA=\theta$(等圆上等弧所对的圆心角相等).

从而 $\angle BCM=\pi-2\theta$.

由此得 $\overrightarrow{CM}$ 与 x 轴正向的夹角为 $-(\pi-2\theta)$.

于是有
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CM}&=a\cos[-(\pi-2\theta)]\boldsymbol{i}+a\sin[-(\pi-2\theta)]\boldsymbol{j}\\&=-a\cos2\theta\boldsymbol{i}-a\sin2\theta\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

据此，即得所求曲线的矢量方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CM}\\&=(2a\cos\theta-a\cos2\theta)\boldsymbol{i}+(2a\sin\theta-a\sin2\theta)\boldsymbol{j}.\end{aligned}$$

3. (1) 证明 $\boldsymbol{e}(\varphi)\times\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\boldsymbol{k}$;

(2) 证明 $\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)=\boldsymbol{e}(\varphi)\cos\alpha+\boldsymbol{e}_1(\varphi)\sin\alpha$.

证

(1) $$\boldsymbol{e}(\varphi)\times\boldsymbol{e}_1(\varphi)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \cos\varphi & \sin\varphi & 0\\ -\sin\varphi & \cos\varphi & 0\end{vmatrix}$$

$$=(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k};$$

(2) $$\begin{aligned}\boldsymbol{e}(\varphi+\alpha)&=\cos(\varphi+\alpha)\boldsymbol{i}+\sin(\varphi+\alpha)\boldsymbol{j}\\ &=(\cos\varphi\cos\alpha-\sin\varphi\sin\alpha)\boldsymbol{i}\\ &\quad+(\sin\varphi\cos\alpha+\cos\varphi\sin\alpha)\boldsymbol{j}\\ &=\cos\alpha(\cos\varphi\boldsymbol{i}+\sin\varphi\boldsymbol{j})\\ &\quad+\sin\alpha(-\sin\varphi\boldsymbol{i}+\cos\varphi\boldsymbol{j})\\ &=\cos\alpha\boldsymbol{e}(\varphi)+\sin\alpha\boldsymbol{e}_1(\varphi).\end{aligned}$$

4. 求曲线 $x=t$，$y=t^2$，$z=\frac{2}{3}t^3$ 的一个切向单位矢量 $\boldsymbol{\tau}$.

解 曲线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+\frac{2}{3}t^3\boldsymbol{k},$$

则
$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2t^2\boldsymbol{k}$$

为曲线的切向矢量，其模

$$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\sqrt{1+4t^2+4t^4}=1+2t^2.$$

于是

$$\boldsymbol{\tau}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big/\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+2t^2\boldsymbol{k}}{1+2t^2}$$

即为所求的一个切向单位矢量.

5. 设 $\boldsymbol{a}(t)$三阶可导，证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]=\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right).$$

证 $$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]$$

$$=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)+\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)+\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right).$$

由于在三个矢量的混合积 $\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})$ 中，若有两个矢量相等时，此混合积为零，故有

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left[\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^2\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^2}\right)\right]=0+0+\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right)$$
$$=\boldsymbol{a}\cdot\left(\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t}\times\frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{a}}{\mathrm{d}t^3}\right).$$

6. 求曲线 $x=a\sin^2 t$，$y=a\sin 2t$，$z=a\cos t$ 在 $t=\frac{\pi}{4}$ 相应点处的一个切向矢量.

解 曲线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=a\sin^2 t\boldsymbol{i}+a\sin 2t\boldsymbol{j}+a\cos t\boldsymbol{k},$$

则

$$\boldsymbol{r}'=a\sin 2t\boldsymbol{i}+2a\cos 2t\boldsymbol{j}-a\sin t\boldsymbol{k}.$$

以 $t=\frac{\pi}{4}$ 代入，即得所求的一个切向矢量为

$$\boldsymbol{r}'\Big|_{t=\frac{\pi}{4}}=a\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}-\frac{\sqrt{2}}{2}a\boldsymbol{k}=a\boldsymbol{i}-\frac{\sqrt{2}}{2}a\boldsymbol{k}.$$

7. 求曲线 $x=t^2+1$，$y=4t-3$，$z=2t^2-6t$ 在对应于 $t=2$ 的点 M 处的切线方程和法平面方程.

解 曲线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}(t)=(t^2+1)\boldsymbol{i}+(4t-3)\boldsymbol{j}+(2t^2-6t)\boldsymbol{k}.$$

曲线的切向矢量为

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=2t\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+(4t-6)\boldsymbol{k}.$$

在点 M 处有

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\Big|_M=4\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}=2(2\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}).$$

由于点 M 的坐标为 $(5,5,-4)$，故所求的切线方程为

$$\frac{x-5}{2}=\frac{y-5}{2}=\frac{z+4}{1}.$$

法平面方程为

$$2(x-5)+2(y-5)+(z+4)=0,$$

或
$$2x+2y+z-16=0.$$

8. 求曲线 $\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}$ 上这样的点，使该点的切线平行于平面 $x+2y+z=4$.

解
$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k}$$

为曲线的切向矢量，当其与所给平面平行时，必与此平面的法矢量

$$\boldsymbol{n}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$$

相垂直，即有

$$\boldsymbol{r}'\cdot\boldsymbol{n}=0,$$

即
$$1+4t+3t^2=0 \quad 或 \quad (1+t)(1+3t)=0,$$

由此解得 $t=-1$ 与 $t=-\frac{1}{3}$. 将此依次代入 $\boldsymbol{r}$，即得所求之点的矢径

$$\boldsymbol{r}\big|_{t=-1}=-\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}$$

及
$$\boldsymbol{r}\big|_{t=-\frac{1}{3}}=-\frac{1}{3}\boldsymbol{i}+\frac{1}{9}\boldsymbol{j}-\frac{1}{27}\boldsymbol{k},$$

故所求点之坐标为$(-1,1,-1)$与$\left(-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27}\right)$.

9. 证明圆柱螺旋线 $\boldsymbol{r}=a\boldsymbol{e}(\theta)+b\theta\boldsymbol{k}$ 的切线与 Oz 轴之间成定角.

证 切向量 $\boldsymbol{r}'=a\boldsymbol{e}_1(\theta)+b\boldsymbol{k}$.

今以 φ 表示 $\boldsymbol{r}'$与 Oz 轴之间的夹角，即切线与 Oz 轴之间的夹角，则有

$$|\boldsymbol{r}'|\cos\varphi=b,$$

$$\cos\varphi=\frac{b}{|\boldsymbol{r}'|}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},$$

所以
$$\varphi=\arccos\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=常数.$$

10. 计算 $\int \varphi^2 \boldsymbol{e}(\varphi) \mathrm{d}\varphi$.

解 用分部积分法

$$\begin{aligned}
\int \varphi^2 \boldsymbol{e}(\varphi) \mathrm{d}\varphi &= -\varphi^2 \boldsymbol{e}_1(\varphi) + 2\int \varphi \boldsymbol{e}_1(\varphi) \mathrm{d}\varphi \\
&= -\varphi^2 \boldsymbol{e}_1(\varphi) + 2\varphi \boldsymbol{e}(\varphi) - 2\int \boldsymbol{e}(\varphi) \mathrm{d}\varphi \\
&= -\varphi^2 \boldsymbol{e}_1(\varphi) + 2\varphi \boldsymbol{e}(\varphi) + 2\boldsymbol{e}_1(\varphi) + \boldsymbol{C} \\
&= 2\varphi \boldsymbol{e}(\varphi) + (2 - \varphi^2) \boldsymbol{e}_1(\varphi) + \boldsymbol{C},
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为常矢.

11. 已知 $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{X}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{P} \times (\boldsymbol{Q}\cos 2t + \boldsymbol{R}\sin 2t)$ ($\boldsymbol{P}, \boldsymbol{Q}, \boldsymbol{R}$ 为常矢), 求 $\boldsymbol{X}$.

解

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{X} &= \int \boldsymbol{P} \times (\boldsymbol{Q}\cos 2t + \boldsymbol{R}\sin 2t) \mathrm{d}t \\
&= \boldsymbol{P} \times \left(\boldsymbol{Q}\int \cos 2t \mathrm{d}t + \boldsymbol{R}\int \sin 2t \mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{2}\boldsymbol{P} \times (\boldsymbol{Q}\sin 2t - \boldsymbol{R}\cos 2t) + \boldsymbol{C},
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为常矢.

12. 已知 $\boldsymbol{A}(t)$ 有二阶连续导数, $\boldsymbol{B}(t) = 3\boldsymbol{A}'(t)$, 求 $\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}' \mathrm{d}t$.

解 由条件知 $\boldsymbol{B}$ 与 $\boldsymbol{A}'$ 平行, 故有 $\boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}' = \boldsymbol{0}$. 从而

$$\begin{aligned}
\int \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}' \mathrm{d}t &= \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \int \boldsymbol{B} \times \boldsymbol{A}' \mathrm{d}t \\
&= \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \int \boldsymbol{0} \, \mathrm{d}t = \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C},
\end{aligned}$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 为常矢.

13. 设 $\boldsymbol{A} = t\boldsymbol{i} - 3\boldsymbol{j} + 2t\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$, $\boldsymbol{C} = 3\boldsymbol{i} + t\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$, 计算 $\int_1^2 (\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}) \cdot \boldsymbol{C} \mathrm{d}t$.

解 $$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} t & -3 & 2t \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & t & -1 \end{vmatrix}=14t-21,$$

故

$$\int_1^2(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}\mathrm{d}t=\int_1^2(14t-21)\mathrm{d}t=0.$$

14. 一质点沿曲线 $\boldsymbol{r}=r\cos\varphi\boldsymbol{i}+r\sin\varphi\boldsymbol{j}$ 运动，其中 r，φ 均为时间 t 的函数.

(1) 求速度 $\boldsymbol{v}$ 在矢径方向及其垂直方向上的投影 v_r 和 v_φ；

(2) 求加速度 $\boldsymbol{w}$ 在同样方向上的投影 w_r 和 w_φ.

[提示：使用圆函数 $\boldsymbol{e}(\varphi)$，则 $\boldsymbol{e}(\varphi)$ 及 $\boldsymbol{e}_1(\varphi)$ 之方向即为矢径方向及与之垂直的方向.]

解 将 $\boldsymbol{r}$ 写成 $\boldsymbol{r}=r\boldsymbol{e}(\varphi)$，则

(1) $$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}(\varphi)+r\boldsymbol{e}_1(\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

由此可知 $$v_r=\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t},\quad v_\varphi=r\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t};$$

(2) $$\begin{aligned}\boldsymbol{w}&=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\boldsymbol{e}(\varphi)+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{e}_1(\varphi)\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}+r\boldsymbol{e}_1(\varphi)\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}-r\boldsymbol{e}(\varphi)\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\\&=\left[\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2\right]\boldsymbol{e}(\varphi)+\left[r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right]\boldsymbol{e}_1(\varphi),\end{aligned}$$

所以 $$w_r=\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}-r\left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}\right)^2,w_\varphi=r\frac{\mathrm{d}^2\varphi}{\mathrm{d}t^2}+2\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t}.$$

15. 求等速圆周运动 $\boldsymbol{r}=R\cos\omega t\boldsymbol{i}+R\sin\omega t\boldsymbol{j}$ 的速度矢量 $\boldsymbol{v}$ 和加速度矢量 $\boldsymbol{w}$，并讨论它们与 $\boldsymbol{r}$ 的关系.

解 将 $\boldsymbol{r}$ 写成 $\boldsymbol{r}=R\boldsymbol{e}(\omega t)$，则

$$\boldsymbol{v}=\boldsymbol{r}'=R\omega\boldsymbol{e}_1(\omega t),\quad \boldsymbol{w}=\boldsymbol{r}''=-R\omega^2\boldsymbol{e}(\omega t).$$

由于$|\boldsymbol{r}|=R$为常数，即$\boldsymbol{r}$为定长矢量，故必与$\boldsymbol{r}'$，即与$\boldsymbol{v}$互相垂直.

又
$$\boldsymbol{w}=-R\omega^2\boldsymbol{e}(\omega t)=-\omega^2\boldsymbol{r},$$
说明$\boldsymbol{w}$与$\boldsymbol{r}$平行，但指向相反.

*16. 已知$\boldsymbol{A}(t)$和一非零常矢$\boldsymbol{B}$恒满足$\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}=t$，又$\boldsymbol{A}'(t)$和$\boldsymbol{B}$之间的夹角$\theta$为常数，试证明$\boldsymbol{A}'(t)\perp\boldsymbol{A}''(t)$.

证 在$\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}=t$的两边对$t$求导，得$\boldsymbol{A}'(t)\cdot\boldsymbol{B}=1$，即
$$|\boldsymbol{A}'(t)||\boldsymbol{B}|\cos\theta=1.$$
由于θ为常数，且由此式知$\cos\theta\neq0$，故有
$$|\boldsymbol{A}'(t)|=\frac{1}{|\boldsymbol{B}|\cos\theta}=\text{常数},$$
说明$\boldsymbol{A}'(t)$为定长矢量，故必与其导矢$\boldsymbol{A}''(t)$互相垂直，即有
$$\boldsymbol{A}'(t)\perp\boldsymbol{A}''(t).$$

*17. 设$\boldsymbol{A}(t)=\frac{1}{2}\left[(1-\cos t)\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}+2\cos\frac{t}{2}\boldsymbol{k}\right]$.

(1) 证明$\boldsymbol{A}(t)$为单位矢量；

(2) 验证$\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=0$；

(3) 求出$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right|$以说明单位矢量的导矢一般不再是单位矢量.

解 (1) 由于
$$\begin{aligned}|\boldsymbol{A}(t)|&=\frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos t)^2+\sin^2t+4\cos^2\frac{t}{2}}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{1-2\cos t+\cos^2t+\sin^2t+2(1+\cos t)}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{2(1-\cos t)+2(1+\cos t)}=1.\end{aligned}$$
所以$\boldsymbol{A}$为单位矢量；

(2) $\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{2}\left(\sin t\boldsymbol{i}+\cos t\boldsymbol{j}-\sin\frac{t}{2}\boldsymbol{k}\right)$.

于是有

$$\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{1}{4}\left[(1-\cos t)\sin t+\sin t\cos t-2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}\right]$$

$$=\frac{1}{4}(\sin t-\sin t)=0.$$

(3) $$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right|=\frac{1}{2}\sqrt{\sin^2 t+\cos^2 t+\left(-\sin\frac{t}{2}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{1+\sin^2\frac{t}{2}}.$$

可见$\left|\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\right|\neq 1$. 这说明单位矢量的导矢一般不再是单位矢量.

*18. 对函数 $\boldsymbol{A}(t)=\cos t\boldsymbol{i}+\sin t\boldsymbol{j}+t^2\boldsymbol{k}$ 在区间$[0,2\pi]$上验证拉格朗日中值定理的正确性.

证 函数$\boldsymbol{A}(t)$在$[0,2\pi]$上是连续的，且在$(0,2\pi)$内是可导的. 故它满足拉格朗日中值定理的条件. 现在来考察是否在区间$(0,2\pi)$内至少存在三点ξ_1，ξ_2，ξ_3使下面拉格朗日公式成立.

$$\boldsymbol{A}(2\pi)-\boldsymbol{A}(0)=(2\pi-0)[A_x'(\xi_1)\boldsymbol{i}+A_y'(\xi_2)\boldsymbol{j}+A_z'(\xi_3)\boldsymbol{k}],$$

即 $$0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+4\pi^2\boldsymbol{k}=2\pi[(-\sin\xi_1)\boldsymbol{i}+\cos\xi_2\boldsymbol{j}+2\xi_3\boldsymbol{k}].$$

比较此式两端，即可看出，在$(0,2\pi)$内确实可找到三点：

$$\xi_1=\pi,\ \xi_2=\frac{\pi}{2},\ \xi_3=\pi.$$

使上述拉格朗日中值公式成立. 由于ξ_1，ξ_2，ξ_3的存在，这就验证了所给函数在区间$[0,2\pi]$上的拉格朗日中值定理的正确性.

第二章 场 论

一、内 容 释 要

1. 这一章是本课程的主要内容，按其特点，可划分为三部分：第一部分为本章之第一节，其中除介绍场的概念外，主要讨论了如何使用等值面(线)和矢量线这种几何形象从宏观方面体现场的分布规律；第二部分为本章之第二、三、四节，其内容主要从微观方面揭示场的一些重要特性；第三部分为本章之第五节，主要介绍几种具有某种特性而又为常见的矢量场. 这三部分中的第二部分，为本章之重点，应注意掌握好.

2. 空间数量场的等值面和平面数量场的等值线以及矢量场的矢量线等，都是为了能够形象直观地体现所考察的数量$u(M)$或矢量$\boldsymbol{A}(M)$在场中的分布状况而引入的概念.

比如温度场中的等温面，电位场中的等位面，都是空间数量场中等值面的例子；而地形图上的等高线，即为平面数量场中等值线的一个例子，如图2，其中数字表示海拔的高度. 我们从图中

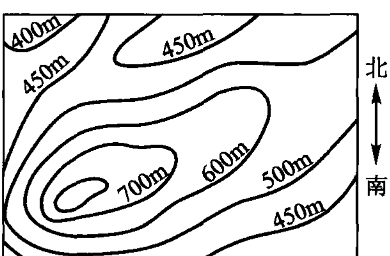

图 2

等高线分布的疏密状况以及所标出的海拔高度，就可以宏观地看出该地区西北部偏低，东北部偏于平缓，而西南部则偏高且陡峭.

在矢量场中，其矢量线既可以体现场矢量的分布状况，又能体现场矢量的走向. 如电场中的电力线和流速场中的流线，都同时体现了场强 $\boldsymbol{E}$ 及流速 $\boldsymbol{v}$ 的分布状况和它们的走向.

此外，由于矢量场中的每一点都有一条矢量线通过，因此，对于场中的任一条曲线 C(非矢量线)，在其上的每一点也皆有一条矢量线通过，这些矢量线的全体，就构成一曲面，称为**矢量面**，如图 3. 特别，当 C 为封闭曲线时，则矢量面就成为一管形曲面，又称之为**矢量管**，如图 4.

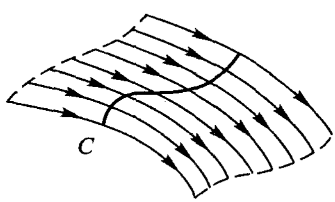

图 3

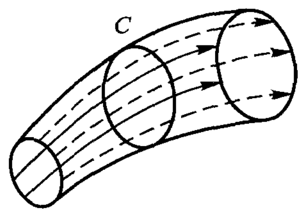

图 4

3. 有一种空间场(矢量场或数量场)具有这样一种几何特点：就是在场中存在一族充满场所在空间的平行平面，场在其中每一块平面上的分布，都是完全相同的(若是矢量场,其场矢量同时也平行于这些平面). 对于这种场，只要知道场在其中任一块平面上的特性，则场在整个空间里的特性就知道了. 因此，可以将这种场简化为在这族平行平面中的任一块平面上来研究. 因而，把这种场称为**平行平面场**.

通常为了方便，就把取来用于研究的这块平面作为 xOy 平面. 此时，在平行平面矢量场中，场矢量就可表示成为平面矢量

$$\boldsymbol{A} = A_x(x,y)\boldsymbol{i} + A_y(x,y)\boldsymbol{j},$$

在平行平面数量场中，其数量就可表示成为二元函数

$$u = u(x, y).$$

这样研究的结果，适用于任何一块与 xOy 面平行的平面.

4. 数量场中函数$u(M)$的方向导数是一个数量，它表示在场中的一个点处函数$u(M)$沿某一方向的变化率. 详细点说：其绝对值的大小，表示沿该方向函数变化的快慢程度，其符号之为正或为负，则表示沿该方向函数的变化是增加的或是减少的.

若在点 M 处函数$u(M)$可微，则函数u 沿l 方向的方向导数由如下公式给出

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 l 方向的方向余弦. 即沿 l 方向的单位矢量 $\boldsymbol{l}^{\circ}$ 的坐标.

然而从一个点出发，有无穷多个方向. 那么，函数沿哪个方向的方向导数最大呢？其最大值又是多少呢？对这个问题的探讨，就引出了梯度的概念.

5. 数量场的梯度是一个矢量，场中的每一点都对应着一个梯度矢量. 梯度矢量有两个重要性质：

(1) 梯度在任一方向上的投影，正好等于函数在该方向上的方向导数

$$\mathbf{grad}_l u = \frac{\partial u}{\partial l}.$$

据此可以推出：梯度自身的方向，就是方向导数最大的方向，其模就是这个最大方向导数的数值.

(2) 数量场中每一点处的梯度，都垂直于此数量场过该点的等值面(平面数量场则是等值线)且指向函数值增大的一方，如图 5.

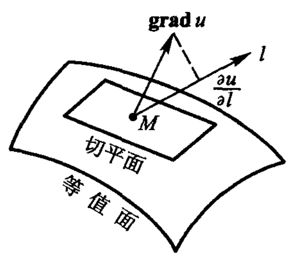

图 5

由此性质可知：等值面上任一点

处的单位法矢量 $\boldsymbol{n}^\circ$，可以通过在该点处的梯度表示为

$$\boldsymbol{n}^\circ = \pm \frac{\mathbf{grad}\ u}{|\mathbf{grad}\ u|}.$$

其中符号由 $\boldsymbol{n}^\circ$的取向来确定. 当 $\boldsymbol{n}^\circ$取向函数 u 增大的一方时，取“+”号；反之，取“-”号。

梯度的这些性质，使得它成为研究数量场的一个重要概念. 从而在实际问题中有着广泛的应用. 比如电场强度 $\boldsymbol{E}$ 等于电位 v 的负梯度 $\boldsymbol{E} = -\mathbf{grad}\ v$；热流矢量 $\boldsymbol{q}$ 与温度 u 的梯度成正比而方向相反 $\boldsymbol{q} = -K\mathbf{grad}\ u(K>0)$. 其他如液体的扩散与其浓度的梯度之间、风向和风速与气压的梯度之间……都有着紧密的关系.

数量场 $u(M)$的梯度在直角坐标系中的表示式为：

$$\mathbf{grad}\ u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

此外，从梯度运算的几个基本公式可以看出，它与一元函数中导数运算的对应公式完全类似. 这一点，可以帮助我们掌握梯度的基本运算.

6. 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中穿过某一曲面 S 的通量

$$\Phi = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

是从某些物理量，诸如流速场中的流量、电场中的电通量、磁场中的磁通量以及热流场中的热量等概念抽象出来而形成的一个数学概念. 因此，通量是具有若干物理意义的.

如果 S 是一个封闭曲面，则矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿出 S 的总通量为

$$\Phi = \oiint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

（1） 当 $\Phi>0$ 时，则 S 内必有产生通量的源头；

（2） 当 $\Phi<0$ 时，则 S 内必有吸收通量的漏洞；

这两种情况，合称为 S 内有源(源头为正源,漏洞为负源).

（3） 当 $\Phi=0$ 时，我们不能断言 S 内无源. 因为这时，在 S 内可能出现既有正源又有负源，且二者恰好相抵消呈现总通量为

零的现象.

由此可见，从穿出某个封闭曲面 S 的总通量，可以初步了解在 S 内通量产生的情况. 当然这仅仅是一种整体性的粗略了解. 为了进一步探讨产生通量的源(正的或负的)在场中各点的分布状况以及源的强弱程度等问题，就引出了矢量场中的散度概念.

7. 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$，是指在场中的一点处，矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿出一个含该点在内的微小区域 $\Delta\Omega$ 的边界曲面 ΔS 的通量 $\Delta\Phi$ 对 $\Delta\Omega$ 的体积 ΔV 的变化率，即

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\lim_{\Delta\Omega\to 0}\frac{\Delta\Phi}{\Delta V}=\lim_{\Delta\Omega\to 0}\frac{\oint\!\!\!\oint_{\Delta S}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}}{\Delta V},$$

它是一个数量，表示此矢量场在这个点处散发通量或吸收通量的强度. 具体来说，散度以其绝对值表示在该点处源的强度大小. 当其不为零时，则以其符号为正或为负表示在该点处的源为正源或为负源；当其为零时，则表示在该点处无源. 一般，将散度恒为零的矢量场称为**无源场**.

将散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ 和矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中之点一一对应起来，又得到一个数量场，称为由矢量场 $\boldsymbol{A}$ 产生的**散度场**. 由于散度场为数量场，故亦可通过其等值面、方向导数和梯度等来揭示其分布规律和变化状况.

在直角坐标系中，矢量场 $\boldsymbol{A}=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$ 在点 M 处的散度表示式为

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z},$$

由此可以得出奥氏公式的矢量形式

$$\oint\!\!\!\oint_{S}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_{\Omega}\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V.$$

此式表明了通量和散度之间的一种关系：穿出封闭曲面 S 的通量，等于 S 所围的区域 Ω 上的散度在 Ω 上的三重积分.

8. 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 沿有向闭曲线 l 的环量

$$\Gamma = \oint_{l} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

也是从某些物理量，如力场中的功、流速场中的环流以及磁场中的电流强度等概念抽象出来而形成的一个数学概念，和通量概念的形成极为类似. 通量是一个曲面积分，环量是一个曲线积分. 二者在矢量场中都是一种整体性的概念. 为了研究矢量场在每个点处与之相关的局部性质，前面曾从通量引入了散度的概念. 同样，这里又可从环量引入环量面密度的概念：

在矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中的一个点 M 处，取定一个方向 $\boldsymbol{n}$，再经过点 M 以 $\boldsymbol{n}$ 为法矢作一微小曲面 ΔS，同时以 ΔS 表其面积，其边界 Δl 之正向与 $\boldsymbol{n}$ 构成右手螺旋关系，如图6，则场 $\boldsymbol{A}$ 沿 Δl 之正向的环量 $\Delta\Gamma$ 与面积 ΔS 之比，当 ΔS 沿其自身缩向 M 点时，其极限就称为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在点 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的**环量面密度**(就是环量对面积的变化率)，即

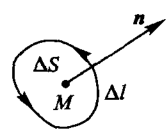

图 6

$$\mu_n = \lim_{\Delta S \to M} \frac{\Delta\Gamma}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to M} \frac{\oint_{\Delta l} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}}{\Delta S}.$$

可见，环量面密度概念和散度概念(通量的体密度)的构成是非常类似的，二者都是一种局部性的概念.

环量面密度亦有其物理意义. 例如在磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 所构成的磁场中，于一点 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度 $\mu_n = \frac{\mathrm{d}I}{\mathrm{d}S}$就是在点 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的电流密度；又如在流速场中的一点 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度 $\mu_n = \frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}S}$即为在点 M 处与 $\boldsymbol{n}$ 构成右手螺旋方向的环流密度.

设矢量场 $\boldsymbol{A} = P(M)\boldsymbol{i} + Q(M)\boldsymbol{j} + R(M)\boldsymbol{k}$，则场 $\boldsymbol{A}$ 在点 M 处

沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度在直角坐标系中的计算公式为

$$\mu_n=(R_y-Q_z)\cos\alpha+(P_z-R_x)\cos\beta+(Q_x-P_y)\cos\gamma,$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.

9. 环量面密度与散度这两个概念的构成，虽很相似，且都是一种变化率，但二者有着重要的差别. 这就是：散度和矢量场中之点能构成一一对应的关系，而环量面密度不仅与场中点的位置有关，而且还与从该点出发的方向有关，从一个点出发有无穷多个方向，对应地有无穷多个环量面密度的值. 所以，环量面密度与矢量场中的点不能构成一一对应的关系.

环量面密度和散度的上述差别，正是环量面密度和方向导数相一致的地方. 这就诱导我们去寻求一种矢量，使它在一个点处和环量面密度之间的关系恰如梯度矢量与方向导数之间的关系一样. 循此探索，就得出了旋度的概念.

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 在一个点处的旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$，是这样一个矢量，它在任一方向上的投影，就等于场 $\boldsymbol{A}$ 沿该方向的环量面密度，即有

$$\mathbf{rot}_n\,\boldsymbol{A}=\mu_n.$$

由此知：旋度的方向，就是环量面密度最大的方向，其模也就是这个最大环量面密度的数值. 如果把旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ 与矢量场 $\boldsymbol{A}$ 中之点一一对应起来，又得到一个矢量场，叫做由矢量场 $\boldsymbol{A}$ 产生的旋度场.

对于那种恒有 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$ 的矢量场 $\boldsymbol{A}$，叫做**无旋场**.

矢量场 $\boldsymbol{A}=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$ 的旋度，在直角坐标系中的表示式为

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=(R_y-Q_z)\boldsymbol{i}+(P_z-R_x)\boldsymbol{j}+(Q_x-P_y)\boldsymbol{k},$$

或写为

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ P & Q & R\end{vmatrix}.$$

由此就可以将斯托克斯公式写成矢量形式

$$\oint_l \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}=\iint_S(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S}.$$

此式表明了环量和旋度之间的一种关系：即沿有向闭曲线 l 的环量，等于旋度沿与 l 的方向构成右手螺旋的方向穿过以 l 为边界的曲面 S 的通量.

10. 旋度之所以得名，是因为在速度场 $\boldsymbol{v}$ 中各点处的旋度，除一个常数因子外，恰好等于场在该点处的旋转角速度 $\boldsymbol{\omega}$. 即

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{v}=2\boldsymbol{\omega}.$$

据此，对于由流体所产生的流速场来说，场中各点处的旋度矢量，当其不为零时，就表示流体的运动在该点处具有涡旋现象，且此涡旋的转动强度和方向就由旋度矢量的模和方向来表示；而当旋度在某点处为零时，就表示流体的运动，在该点处没有涡旋发生.

但是，我们不能误认为，在任何物理场中的旋度矢量，都表示了涡旋性. 比如，在磁场中，磁场强度 $\boldsymbol{H}$ 在一个点处的旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{H}$，乃是在该点处的一个电流密度矢量，它毫无涡旋的性质.

11. 在本章末之第五节，介绍了三种特殊的矢量场. 即有势场、管形场和调和场. 其中以有势场为重点.

矢量场 $\boldsymbol{A}$ 为有势场，是指在场中存在单值函数 $u(M)$ 满足

$$\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\,u.$$

称函数 $v=-u$ 为这个场的**势函数**. 从而矢量 $\boldsymbol{A}$ 与其势函数 v 之间有着如下关系

$$\boldsymbol{A}=-\mathbf{grad}\,v.$$

在电场中，场强 $\boldsymbol{E}$ 和电位 v 正适合此种关系

$$\boldsymbol{E}=-\mathbf{grad}\,v,$$

即电场中的电位正好就是场强 $\boldsymbol{E}$ 的势函数. 又如在热流矢量场 $\boldsymbol{q}$ 中，当内导热系数 $K=1$ 时，场中的温度 T 也正好是热流矢量 $\boldsymbol{q}$ 的势函数

$$\boldsymbol{q}=-\mathbf{grad}\,T.$$

但应注意，在某些科学领域里，也常直接把函数 u 定义为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数，如在流体力学中，大都如此.

可见有势场的势函数有两种定义法（二者相差一个符号）. 与之有关的教材，则各选取其中的一种. 因此，当我们阅读有关教材或参考资料时，首先应注意它所采用的是哪一种定义，才不致发生混乱.

12. 具有曲线积分 $\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与路径无关性质的矢量场 $\boldsymbol{A}$ 称为**保守场**. 保守场在实际中是大量存在的，很多重要的矢量场，如静电场、引力场、重力场等都是保守场. 根据教材本章第五节的定理 1 及其证明，可知：在线单连域内"场有势（梯度场）"，"场无旋"，"场保守"以及"表达式 $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 为某个函数的全微分（这个函数叫做表达式 $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的**原函数**）"这四者是彼此等价的. 一般是通过考查场 $\boldsymbol{A}$ 是否无旋，即是否有 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} \equiv \mathbf{0}$ 来判断其余三者是否成立.

由此知：若有 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} \equiv \mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 存在原函数，且此原函数就是满足 $\boldsymbol{A} = \mathbf{grad}\, u$ 的函数 $u(M)$. 它可用如下公式来算出

$$u(x,y,z) = \int_{x_0}^{x} P(x,y_0,z_0)\,\mathrm{d}x + \int_{y_0}^{y} Q(x,y,z_0)\,\mathrm{d}y + \int_{z_0}^{z} R(x,y,z)\,\mathrm{d}z + C,$$

其中 (x_0,y_0,z_0) 为场中的任一点；C 为任意常数（故函数 u 不是唯一的）.

容易看出，用上述公式求出函数 u 后，有势场 $\boldsymbol{A}$ 的势函数 $v = -u$ 也就随之得到了.

此外，若 $\boldsymbol{A}$ 为保守场，则曲线积分

$$\int_{\widehat{AB}} \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = u(M) \Big|_{A}^{B} = u(B) - u(A),$$

其中 $u(M)$ 为 $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的一个原函数，可用上述公式求出. 计算曲线积分的这个公式与计算定积分的牛顿—莱布尼茨公式完全相

似，都是通过原函数来计算，用起来很方便.

13. 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 为管形场，是指它恒有 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$，即 $\boldsymbol{A}$ 为无源场. 在管形场中存在矢量 $\boldsymbol{B}$ 满足

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A},$$

矢量 $\boldsymbol{B}$ 叫做管形场 $\boldsymbol{A}$ 的**矢势量**. 教材为了说明它的存在，直接给出了从已知管形场的场矢量 $\boldsymbol{A}=P(M)\boldsymbol{i}+Q(M)\boldsymbol{j}+R(M)\boldsymbol{k}$ 计算其矢势量 $\boldsymbol{B}=U\boldsymbol{i}+V\boldsymbol{j}+W\boldsymbol{k}$ 的如下公式

$$\begin{cases} U=\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z-\int_{y_0}^{y}R(x,y,z_0)\,\mathrm{d}y, \\ V=-\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)\,\mathrm{d}z, \\ W=C \quad (C\text{ 为任何常数}), \end{cases}$$

其中 y_0，z_0 是场中一定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 的坐标.

这里我们来给出此公式的推证：由 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$ 有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial y}-\dfrac{\partial V}{\partial z}=P, & (1) \\ \dfrac{\partial U}{\partial z}-\dfrac{\partial W}{\partial x}=Q, & (2) \\ \dfrac{\partial V}{\partial x}-\dfrac{\partial U}{\partial y}=R. & (3) \end{cases}$$

为简单起见，我们取

$$W=C \quad (C\text{ 为常数}), \tag{4}$$

然后在(1)与(2)式两边对 z 积分，得

$$V=-\int_{z_0}^{z}P\mathrm{d}z+\varphi(x,y), \tag{5}$$

$$U=\int_{z_0}^{z}Q\mathrm{d}z+\psi(x,y). \tag{6}$$

这里 φ 与 ψ 都是 x，y 的任意函数，将此二式代入(3)式，得

$$-\int_{z_0}^{z}\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}\right)\mathrm{d}z+\frac{\partial\varphi}{\partial x}-\frac{\partial\psi}{\partial y}=R.$$

再由条件 div $\boldsymbol{A}=0$，即$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$，则上式可写为

$$\int_{z_0}^{z}\frac{\partial R}{\partial z}\mathrm{d}z+\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial y}=R,$$

或 $$R(x,y,z)-R(x,y,z_0)+\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial y}=R(x,y,z),$$

即

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}-\frac{\partial \psi}{\partial y}=R(x,y,z_0).$$

为简单起见，在其中取 $$\varphi(x,y)=0, \tag{7}$$

然后在两边对 y 积分，即得

$$\psi(x,y)=-\int_{y_0}^{y}R(x,y,z_0)\mathrm{d}y+\omega(x),$$

其中 $\omega(x)$ 为 x 的任意函数. 再取 $\omega(x)=0$，就得到

$$\psi(x,y)=-\int_{y_0}^{y}R(x,y,z_0)\mathrm{d}y. \tag{8}$$

将(7)与(8)依次代入(5)与(6)再和(4)式并列，就得到所推证的公式.

从上面的推证过程，我们可以看出，如果不取 $W=C$，$\varphi(x,y)=0$，$\omega(x)=0$，而将W，φ，ω 取为别的合于条件的函数（这完全是可以的），则计算矢势量的公式就将随之而变化. 这表明同一个管形场 $\boldsymbol{A}$，存在着无穷多的矢势量，而不限于由这里所推证的公式计算出来的.

14. 若矢量场 $\boldsymbol{A}$ 恒有 div $\boldsymbol{A}=0$ 和 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为**调和场**. 简言之，调和场是一个既无源又无旋的矢量场. 在调和场中，由于有 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，故调和场也是有势场. 因此存在函数 u 满足 $\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\ u$，又由于有 div $\boldsymbol{A}=0$，即有

$$\mathrm{div}(\mathbf{grad}\ u)=0,$$

或写为

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0.$$

这是一个二阶偏微分方程，叫做拉普拉斯方程，对于满足拉普拉斯方程且具有二阶连续偏导数的函数，叫做**调和函数**. 可见，上述函数 u 以及势函数 $v=-u$ 都是调和函数.

特别应注意的是平面调和场，就是既无源又无旋的平面矢量场. 它比起空间调和场来说，有其特殊性.

设 $\boldsymbol{A}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 为平面调和场. 则有

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\mathbf{0},$$

故存在势函数 v 满足 $\boldsymbol{A}=-\mathbf{grad}\ v$. 又因其有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0,$$

此式相当于矢量场 $\boldsymbol{a}=-Q\boldsymbol{i}+P\boldsymbol{j}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{a}=\mathbf{0}$. 故存在函数 u 满足 $\boldsymbol{a}=\mathbf{grad}\ u$. 这个函数 u 叫做场 $\boldsymbol{A}$ 的**力函数**. 函数 u 和 v 可用如下公式来求出

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}-Q(x,y_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}P(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$v(x,y)=-\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\mathrm{d}x-\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\mathrm{d}y$$

(其中(x_0,y_0)为场中之任一点). 函数 u 与 v 之间还满足如下的关系式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},\tag{$*$}$$

由此可以得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0.$$

这说明函数 u 与函数 v 均为满足二维拉普拉斯方程的调和函数，因为它们由关系式(*)联系着，故又称二者为**共轭调和函数**，并称(*)式为共轭调和条件. 应用这个条件，便可从 u 与 v 中的一个求出另一个来.

此外，力函数 $u(x,y)$ 与势函数 $v(x,y)$ 的等值线

$$u(x,y)=C_1 \quad 与 \quad v(x,y)=C_2$$

依次叫做平面调和场的力线和等势线，其中力线就是场 $\boldsymbol{A}$ 的矢量线，而等势线就是与力线相互正交的一族曲线.

比如在由点电荷所产生的平面静电场中，电场强度 $\boldsymbol{E}$ 就构成一个除点电荷所在之点外的平面调和场，场中的力线和等势线，就是电场的电力线和等位线，它们是互相正交的.

二、解题示例

例 1 求数量场 $u=\ln(x^2+y^2+z^2)$ 通过点 $M(1,2,1)$ 的等值面.

解 函数在点 $M(1,2,1)$ 处的值为

$$u=\ln(x^2+y^2+z^2)\Big|_M=\ln 6,$$

故通过点 M 的等值面为

$$\ln(x^2+y^2+z^2)=\ln 6,$$

即

$$x^2+y^2+z^2=6.$$

例 2 求矢量场 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+(x+2y)\boldsymbol{k}$ 通过点 $M(2,1,1)$ 的矢量线方程.

解 矢量线所满足的微分方程为

$$\frac{dx}{1}=\frac{dy}{1}=\frac{dz}{x+2y}.$$

由 $dx=dy$ 解得

$$x=y+C_1.$$

又由

$$\frac{2x dx}{2x}=\frac{4y dy}{4y}=\frac{dz}{x+2y}$$

或

$$\frac{d(x^2+2y^2)}{2(x+2y)}=\frac{dz}{x+2y},$$

解得

$$x^2+2y^2=2z+C_2,$$

故矢量线族的方程为

$$\begin{cases} x - y = C_1, \\ x^2 + 2y^2 - 2z = C_2. \end{cases}$$

以点 $M(2,1,1)$ 代入，确定出 $C_1 = 1$，$C_2 = 4$．于是得所求矢量线方程为

$$\begin{cases} x - y = 1, \\ x^2 + 2y^2 - 2z = 4. \end{cases}$$

例 3　一无穷长直导线与 Oz 轴重合，有电流 $I\boldsymbol{k}$ 通过，产生一磁场，由物理学知在点 $M(x,y,z)$ 处磁感应强度

$$\boldsymbol{B} = \frac{2\mu I}{\rho^2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j})$$

为一平行平面矢量场（μ 为磁导率，$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$），求其磁力线（即 $\boldsymbol{B}$ 的矢量线）方程.

解　将矢量 $\boldsymbol{B}$ 写成

$$\boldsymbol{B} = \frac{2\mu I}{\rho^2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}),$$

则其矢量线所满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{0}.$$

由 $\frac{\mathrm{d}x}{-y} = \frac{\mathrm{d}y}{x}$ 解得　　$x^2 + y^2 = C_1.$

又由 $\mathrm{d}z = 0$ 解得　　$z = C_2.$

由此得所求磁力线方程为

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = C_1, \\ z = C_2. \end{cases}$$

此乃位于平面 $z = C_2$，中心在 Oz 轴上的圆族.

例 4　求函数 $u = 3x^2 + z^2 - 2yz + 2xz$ 在点 $M(1,2,3)$ 处沿矢量 $\boldsymbol{\alpha} = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$ 方向的方向导数.

解

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=(6x+2z)\Big|_M=12,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=-2z\Big|_M=-6,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=(2z-2y+2x)\Big|_M=4.$$

又 $$\boldsymbol{\alpha}\Big|_M=(yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k})\Big|_M=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},$$

其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{6}{7},\ \cos\beta=\frac{3}{7},\ \cos\gamma=\frac{2}{7}.$$

于是所求之方向导数为

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M&=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\Big|_M\\&=12\times\frac{6}{7}-6\times\frac{3}{7}+4\times\frac{2}{7}=\frac{62}{7}.\end{aligned}$$

例 5 求函数 $u=xyz$ 在曲面 $2z-xy=0$ 上的点 $M(2,3,3)$ 处沿曲面下侧法线方向的方向导数$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M$.

解

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=yz\Big|_M=9,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=xz\Big|_M=6,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=xy\Big|_M=6.$$

记 $F=2z-xy$，则此曲面在点 $M(2,3,3)$处的法线方向数为

$$F_x\big|_M=-y\big|_M=-3,\ F_y\big|_M=-x\big|_M=-2,\ F_z\big|_M=2,$$

从而曲面朝下侧的法线方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{17}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{17}},\ \cos\gamma=\frac{-2}{\sqrt{17}},$$

于是所求之方向导数

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\right|_M$$
$$=9\times\frac{3}{\sqrt{17}}+6\times\frac{2}{\sqrt{17}}-6\times\frac{2}{\sqrt{17}}=\frac{27}{\sqrt{17}}.$$

例 6 求函数 $u=3x^2y-y^2$ 在点 $M(2,3)$ 处沿曲线 $y=x^2-1$ 朝 x 增大一方的方向导数.

解 注意到函数 u 在一个点处沿曲线的某一方向的方向导数，等于函数 u 在该点处沿同一方向的切线方向导数. 而曲线 $y=x^2-1$ 在点 M 处沿所取方向切线斜率为

$$y'|_M=2x|_M=4,$$

即 $$\tan\alpha=4\quad(\alpha\text{ 为切线的倾角}),$$

从而有 $$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{17}},\ \cos\beta=\frac{4}{\sqrt{17}}.$$

又 $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=6xy|_M=36,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=(3x^2-2y)|_M=6,$$

于是所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta\right)\right|_M$$
$$=36\times\frac{1}{\sqrt{17}}+6\times\frac{4}{\sqrt{17}}=\frac{60}{\sqrt{17}}.$$

例 7 设 R 是从点 $M_0(a,b,c)$ 到任意点 $M(x,y,z)$ 的距离，求证 $\mathbf{grad}\,R$ 是在 $\boldsymbol{R}=\overrightarrow{M_0M}$ 方向上的单位矢量.

证 $$\boldsymbol{R}=\overrightarrow{M_0M}=(x-a)\boldsymbol{i}+(y-b)\boldsymbol{j}+(z-c)\boldsymbol{k},$$

则 $$R=|\boldsymbol{R}|=\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2},$$

从而 $$\mathbf{grad}\,R=\frac{\partial R}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial R}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial R}{\partial z}\boldsymbol{k}$$
$$=\frac{(x-a)\boldsymbol{i}+(y-b)\boldsymbol{j}+(z-c)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2}}$$
$$=\frac{\boldsymbol{R}}{|\boldsymbol{R}|}=\boldsymbol{R}^{\circ}.$$

由此知：当 r 是点 $M(x,y,z)$ 的矢径 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的模时，则

$$\mathbf{grad}\ r=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\boldsymbol{r}^{\circ}$$

为 $\boldsymbol{r}$ 方向的单位矢量.

例 8 已知 $\boldsymbol{\alpha}=y^2\boldsymbol{i}+2xy\boldsymbol{j}-xz^2\boldsymbol{k}$，$u=z^3-x^2y$，试在点 $M(-1,-1,1)$ 处计算

(1) $\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{grad}\ u$；　　(2) $\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{grad}\ u$.

解 $\boldsymbol{\alpha}|_M=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$，

$$\mathbf{grad}\ u|_M=(-2xy\boldsymbol{i}-x^2\boldsymbol{j}+3z^2\boldsymbol{k})|_M=-2\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$

所以在点 M 处有

(1) $\boldsymbol{\alpha}\cdot\mathbf{grad}\ u=1\times(-2)+2\times(-1)+1\times3=-1$；

(2) $\boldsymbol{\alpha}\times\mathbf{grad}\ u=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 2 & 1\\ -2 & -1 & 3\end{vmatrix}=7\boldsymbol{i}-5\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$

例 9 已知一可微的数量场 $u(x,y,z)$ 在点 $M_0(1,2,1)$ 处，朝点 $M_1(2,2,1)$ 方向的方向导数为 4，朝点 $M_2(1,3,1)$ 方向的方向导数为 -2，朝点 $M_3(1,2,0)$ 方向的方向导数为 1，试确定在点 M_0 处的梯度，并求出朝点 $M_4(4,4,7)$ 方向的方向导数.

解 记 $\boldsymbol{l}_i=\overrightarrow{M_0M_i}$　　$(i=1,2,3,4)$，则有

$$\boldsymbol{l}_1=\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{l}_2=\boldsymbol{j},\ \boldsymbol{l}_3=-\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{l}_4=3\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+6\boldsymbol{k}.$$

又记点 M_0 处的梯度为

$$\mathbf{grad}\ u=u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}+u_z\boldsymbol{k}.$$

由于方向导数等于在同一点处的梯度在该方向上的投影，即有

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathrm{grad}_l u=\mathbf{grad}\ u\cdot\boldsymbol{l}^{\circ},$$

则由条件知有

$$\frac{\partial u}{\partial l_1}=\mathbf{grad}\ u\cdot \boldsymbol{i}=u_x=4,\quad \frac{\partial u}{\partial l_2}=\mathbf{grad}\ u\cdot \boldsymbol{j}=u_y=-2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial l_3}=\mathbf{grad}\ u\cdot(-\boldsymbol{k})=-u_z=1,\ 即\ u_z=-1.$$

从而得所求的梯度为

$$\mathbf{grad}\ u=4\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}.$$

因为

$$\boldsymbol{l}_4^\circ=\frac{3}{7}\boldsymbol{i}+\frac{2}{7}\boldsymbol{j}+\frac{6}{7}\boldsymbol{k},$$

故有

$$\frac{\partial u}{\partial l_4}=\mathbf{grad}\ u\cdot \boldsymbol{l}_4^\circ=4\times\frac{3}{7}-2\times\frac{2}{7}-\frac{6}{7}=\frac{2}{7}.$$

例 10 求数量场 $u=\frac{1}{r}$ 在点 $M(1,0,0)$ 处沿过点 M 的等值面的外法线方向 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$，其中 r 为矢径 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 的模.

解 函数 $u=\frac{1}{r}$ 的等值面方程为 $\frac{1}{r}=C_1$，即

$$x^2+y^2+z^2=\frac{1}{C_1^2}=C^2.$$

而通点 $M(1,0,0)$ 的等值面，则为单位球面

$$x^2+y^2+z^2=1.$$

由此可知，其外法线方向为 r 增大的方向. 又从 $u=\frac{1}{r}$ 看出，外法线方向是指向函数 u 减小的一方. 因此，等值面沿此方向的单位法向量为

$$\boldsymbol{n}^\circ=-\frac{\mathbf{grad}\ u}{|\mathbf{grad}\ u|}.$$

于是

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\mathbf{grad}_n u=\mathbf{grad}\ u\cdot \boldsymbol{n}^\circ=-|\mathbf{grad}\ u|.$$

其中

$$\mathbf{grad}\ u=\mathbf{grad}\ \frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\mathbf{grad}\ r=-\frac{1}{r^2}\boldsymbol{r}^\circ,$$

故所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_M = -\left|\mathbf{grad}u\right|_M = -\left|-\frac{1}{r^2}\right|_M = -1.$$

例 11 设 A 和 B 为旋转椭球面的二焦点，试证明此曲面上任一点 M 处的法线平分射线 AM 和 BM 的夹角，如图 7.

证 记 $R_1(M)=\overline{AM}, R_2(M)=\overline{BM}$，则旋转椭球面方程按定义可写为

$$R_1(M)+R_2(M)=\text{常数}.$$

因此旋转椭球面可视为数量场 $u=R_1(M)+R_2(M)$ 的一个等值面，从而 $\mathbf{grad}\ u$ 就是旋转椭球面上点 M 处的一个法矢量. 由于

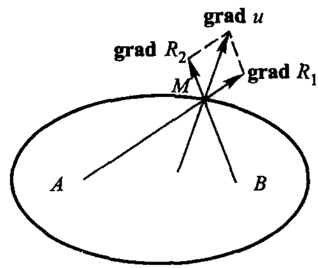

图 7

$$\mathbf{grad}\ u=\mathbf{grad}\ R_1+\mathbf{grad}\ R_2,$$

由例 7 知：$\mathbf{grad}\ R_1$ 和 $\mathbf{grad}\ R_2$ 分别表示沿$\overrightarrow{AM}$和$\overrightarrow{BM}$方向的单位矢量，按矢量加法的平行四边形法则，可知 $\mathbf{grad}\ u$ 位于以 $\mathbf{grad}\ R_1$ 和 $\mathbf{grad}\ R_2$ 为相邻边的一个菱形的对角线上. 因此，$\mathbf{grad}\ u$ 平分 $\mathbf{grad}\ R_1$ 和 $\mathbf{grad}\ R_2$ 之间的夹角. 这就是说，点 M 处的法线平分射线 AM 和 BM 的夹角.

此命题的物理意义是：光线（或声波）从焦点（比如说）A 射出，必然由旋转椭球面反射集中到点 B 处.

例 12 设 S 为由圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 及平面 $z=0$ 和 $z=h$ 所围成的封闭曲面，求 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 穿出 S 的柱面部分的通量.

解 采用补割法：以 S_1 和 S_2 分别表示闭曲面 S 的顶部圆面和底部圆面，则由奥氏公式，所求通量为

$$\Phi=\oiint_S \boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}-\iint_{S_1+S_2}\boldsymbol{r}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$= \iiint_{\Omega} \operatorname{div} \boldsymbol{r} \mathrm{d}V - \iint_{S_1+S_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_{\Omega} 3\mathrm{d}V - \iint_{D} h\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_{D} 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\pi a^2 h - \pi a^2 h + 0 = 2\pi a^2 h.$$

例 13 求矢量 $\boldsymbol{A} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k}$ 向上穿过曲面 S：$x^2 + y^2 + z^2 = 9(x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0)$ 的通量 Φ.

解　法 1 $\Phi = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + 2\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

其中曲面 S 乃球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ 在第一卦限的部分. 由对称性可知，上式右端的三个积分是相等的. 故有

$$\Phi = 4\iint_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D \sqrt{9 - x^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

用极坐标计算，则

$$\Phi = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^3 \sqrt{9 - r^2} r\mathrm{d}r = -\pi \int_0^3 (9 - r^2)^{\frac{1}{2}} \mathrm{d}(9 - r^2)$$

$$= -\frac{2}{3}\pi (9 - r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^3 = 18\pi.$$

法 2 $\Phi = \iint_S \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}^{\circ} \mathrm{d}S.$

其中 $\boldsymbol{n}^{\circ}$为曲面 S 的向上单位法矢量. 若视 S 为函数 $u = x^2 + y^2 + z^2$ 当 $u = 9$ 时的一张等值面，则

$$\boldsymbol{n}^{\circ} = \frac{\mathbf{grad}\ u}{|\mathbf{grad}\ u|} = \frac{x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$= \frac{1}{3}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}).$$

又曲面元

$$\mathrm{d}S=\sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\sqrt{1+\left(-\frac{x}{z}\right)^2+\left(-\frac{y}{z}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{3}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

于是

$$\Phi=\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}^\circ\mathrm{d}S=\frac{1}{3}\iint_S(x^2+y^2+2z^2)\frac{3}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$=\iint_S(9+z^2)\frac{1}{z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D\frac{9+(9-x^2-y^2)}{\sqrt{9-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

用极坐标计算,则

$$\Phi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^3\left(\frac{9}{\sqrt{9-r^2}}+\sqrt{9-r^2}\right)r\mathrm{d}r$$
$$=-\frac{\pi}{4}\int_0^3\left(\frac{9}{\sqrt{9-r^2}}+\sqrt{9-r^2}\right)\mathrm{d}(9-r^2)$$
$$=-\frac{\pi}{4}\left[18\sqrt{9-r^2}+\frac{2}{3}(9-r^2)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3=18\pi.$$

可以看出:“法 1”之所以简单些,主要是利用了积分的对称性.

例 14 已知

$$\boldsymbol{A}=(axz+x^2)\boldsymbol{i}+(by+xy^2)\boldsymbol{j}+(z-z^2+cxz-2xyz)\boldsymbol{k},$$

试确定 a, b, c 使得 $\boldsymbol{A}$ 是一个无源场.

解 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=az+2x+b+2xy+1-2z+cx-2xy$

$$=(a-2)z+(2+c)x+b+1$$

欲使 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$, 必须 $a-2=0$, $2+c=0$, $b+1=0$,

即 $$a=2,\ b=-1,\ c=-2.$$

例 15 求矢量场

$$\boldsymbol{A}=(3x^2-2yz)\boldsymbol{i}+(y^3+yz^2)\boldsymbol{j}+(xyz-3xz^2)\boldsymbol{k}$$

所产生的散度场通过点 $M(2,-1,1)$ 的等值面及其在点 M 处沿 Ox 轴正向的变化率.

解 $$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=6x+3y^2+z^2+xy-6xz,$$
$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}\big|_M=2.$$
故通过 M 点的等值面为
$$6x+3y^2+z^2+xy-6xz=2.$$
在点 M 处 div $\boldsymbol{A}$ 沿 Ox 轴正向的变化率为
$$\frac{\partial}{\partial x}(\operatorname{div}\boldsymbol{A})\big|_M=(6+y-6z)\big|_M=-1.$$
例 16 已知 $\mathbf{grad}\operatorname{div}f(r)\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$，其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求 $f(r)$.

解
$$\begin{aligned}\operatorname{div}f(r)\boldsymbol{r}&=f(r)\operatorname{div}\boldsymbol{r}+\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{grad}\,f(r)\\&=3f(r)+\boldsymbol{r}\cdot f'(r)\,\mathbf{grad}\,r\\&=3f(r)+\boldsymbol{r}\cdot f'(r)\boldsymbol{r}^\circ\qquad\left(\boldsymbol{r}^\circ=\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\\&=3f(r)+rf'(r),\end{aligned}$$
$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\operatorname{div}f(r)\boldsymbol{r}&=\mathbf{grad}[3f(r)+rf'(r)]\\&=[3f'(r)+f'(r)+rf''(r)]\,\mathbf{grad}\,r\\&=[4f'(r)+rf''(r)]\boldsymbol{r}^\circ,\end{aligned}$$
代入所给方程，得
$$rf''(r)+4f'(r)=0.$$
解此方程，就得到
$$f(r)=C_1r^{-3}+C_2.$$
例 17 设 $\boldsymbol{A}=xy^2z^2\boldsymbol{i}+z^2\sin y\boldsymbol{j}+x^2\mathrm{e}^y\boldsymbol{k}$，求 div $\boldsymbol{A}$ 和 **rot** $\boldsymbol{A}$.

一般在求矢量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的散度和旋度时，常使用如下的雅可比(Jacobi)矩阵
$$D\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial x}&\frac{\partial P}{\partial y}&\frac{\partial P}{\partial z}\\\frac{\partial Q}{\partial x}&\frac{\partial Q}{\partial y}&\frac{\partial Q}{\partial z}\\\frac{\partial R}{\partial x}&\frac{\partial R}{\partial y}&\frac{\partial R}{\partial z}\end{pmatrix}.$$
将此矩阵比照散度和旋度的计算公式

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

和 $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

就可以看出：矩阵 $D\boldsymbol{A}$ 的主对角线上的三个偏导数之和就构成散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$；其余六个偏导数恰好就是旋度公式中所具有的. 只要将它们在旋度公式中出现的先后顺序和它们在 $D\boldsymbol{A}$ 中所对应的位置顺序认清楚，就能方便地写出 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ 来，而且不易出错. 下面就用此法求解本例.

解 $\boldsymbol{A}$ 的雅可比矩阵为

$$D\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} y^2z^2 & 2xyz^2 & 2xy^2z \\ 0 & z^2\cos y & 2z\sin y \\ 2xe^y & x^2e^y & 0 \end{pmatrix}.$$

由此立得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=y^2z^2+z^2\cos y+0=z^2(y^2+\cos y);$$

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}&=(x^2e^y-2z\sin y)\boldsymbol{i}+(2xy^2z-2xe^y)\boldsymbol{j}+(0-2xyz^2)\boldsymbol{k}\\&=(x^2e^y-2z\sin y)\boldsymbol{i}+2x(y^2z-e^y)\boldsymbol{j}-2xyz^2\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例 18 设 $u=u(x,y,z)$，$\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$. 其中函数 u，P，Q，R 均有一阶连续偏导数，证明

(1) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{A})=u\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\mathbf{grad}\,u\cdot\boldsymbol{A}$；

(2) $\mathbf{rot}(u\boldsymbol{A})=u\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}+\mathbf{grad}\,u\times\boldsymbol{A}$.

证 $u\boldsymbol{A}=uP\boldsymbol{i}+uQ\boldsymbol{j}+uR\boldsymbol{k}$,

其雅可比矩阵为

$$D(u\boldsymbol{A})=\begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x}P+u\frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}P+u\frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}P+u\frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x}Q+u\frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}Q+u\frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}Q+u\frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial x}R+u\frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y}R+u\frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z}R+u\frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

由此可得

(1) $\operatorname{div}(u\boldsymbol{A}) = \frac{\partial u}{\partial x}P + \frac{\partial u}{\partial y}Q + \frac{\partial u}{\partial z}R + u\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)$

$$= \mathbf{grad}\ u \cdot \boldsymbol{A} + u\operatorname{div}\boldsymbol{A};$$

(2) $\mathbf{rot}(u\boldsymbol{A})$

$$= \left[\frac{\partial u}{\partial y}R - \frac{\partial u}{\partial z}Q + u\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\right]\boldsymbol{i}$$

$$+ \left[\frac{\partial u}{\partial z}P - \frac{\partial u}{\partial x}R + u\left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\right]\boldsymbol{j}$$

$$+ \left[\frac{\partial u}{\partial x}Q - \frac{\partial u}{\partial y}P + u\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{k}$$

$$= \left(\frac{\partial u}{\partial y}R - \frac{\partial u}{\partial z}Q\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}P - \frac{\partial u}{\partial x}R\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}Q - \frac{\partial u}{\partial y}P\right)\boldsymbol{k}$$

$$+ u\left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\right]\boldsymbol{k}$$

$$= \mathbf{grad}\ u \times \boldsymbol{A} + u\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}.$$

例 19 证明 $\boldsymbol{A} = (y^2 + 2xz^2)\boldsymbol{i} + (2xy - z)\boldsymbol{j} + (2x^2z - y + 2z)\boldsymbol{k}$ 为有势场，并求其势函数.

证 由 $\boldsymbol{A}$ 的雅可比矩阵

$$D\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2z^2 & 2y & 4xz \\ 2y & 2x & -1 \\ 4xz & -1 & 2x^2+2 \end{pmatrix}$$

得 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = [(-1) - (-1)]\boldsymbol{i} + (4xz - 4xz)\boldsymbol{j} + (2y - 2y)\boldsymbol{k} = \mathbf{0}$，故 $\boldsymbol{A}$ 为有势场.

一般说来，有势场的势函数，可用如下公式来计算

$$v = -u = -\int_{x_0}^{x} P(x, y_0, z_0)\,\mathrm{d}x - \int_{y_0}^{y} Q(x, y, z_0)\,\mathrm{d}y$$

$$- \int_{z_0}^{z} R(x, y, z)\,\mathrm{d}z + C.$$

此外，它还可以用不定积分的方法来求出，为了说明这种方

法，下面就用它来求本例的势函数 v：

因势函数 v 满足 $\boldsymbol{A}=-\mathbf{grad}\ v$，即有

$$v_x=-y^2-2xz^2,\ v_y=-2xy+z,\ v_z=-2x^2z+y-2z. \qquad (1)$$

将第一个方程对 x 积分，得

$$v=-xy^2-x^2z^2+\varphi(y,z), \qquad (2)$$

其中 $\varphi(y,z)$ 暂时是任意的，为了确定它，将上式对 y 求导，得

$$v_y=-2xy+\varphi'_y(y,z),$$

与(1)式中第二个方程比较，知 $\varphi'_y(y,z)=z$，

于是
$$\varphi(y,z)=yz+\psi(z).$$

代入(2)式，得

$$v=-xy^2-x^2z^2+yz+\psi(z), \qquad (3)$$

其中 $\psi(z)$ 也是暂时任意的，为了确定它，将上式对 z 求导，得

$$v_z=-2x^2z+y+\psi'(z).$$

与(1)式中第三个方程比较，即知 $\psi'(z)=-2z$，

故
$$\psi(z)=-z^2+C.$$

代入(3)式即得所求之势函数

$$v=-xy^2-x^2z^2+yz-z^2+C.$$

作为练习，读者不妨再用前述公式来计算本例之势函数，并与这里所得之结果比较.

例 20 解微分方程

$$(z^3-4xy)\mathrm{d}x+(6y-2x^2)\mathrm{d}y+(3xz^2+1)\mathrm{d}z=0.$$

解 令 $\boldsymbol{A}=(z^3-4xy)\boldsymbol{i}+(6y-2x^2)\boldsymbol{j}+(3xz^2+1)\boldsymbol{k}$,

$$D\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}-4y & -4x & 3z^2\\ -4x & 6 & 0\\ 3z^2 & 0 & 6xz\end{pmatrix},$$

于是有

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=(0-0)\boldsymbol{i}+(3z^2-3z^2)\boldsymbol{j}+[-4x-(-4x)]\boldsymbol{k}=\mathbf{0},$$

故知存在原函数 u 满足

$$\mathrm{d}u=\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(z^3-4xy)\,\mathrm{d}x+(6y-2x^2)\,\mathrm{d}y+(3xz^2+1)\,\mathrm{d}z.$$

于是，所给微分方程成为

$$\mathrm{d}u=0,$$

从而其通解为 $$u=C.$$

今取$(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$，而用如下公式求原函数 u：

$$\begin{aligned}u&=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\,\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y(6y-2x^2)\,\mathrm{d}y+\int_0^z(3xz^2+1)\,\mathrm{d}z\\&=3y^2-2x^2y+xz^3+z.\end{aligned}$$

故所求微分方程的通解为

$$3y^2-2x^2y+xz^3+z=C.$$

例 21 证明 $\boldsymbol{A}=(2xy+3)\boldsymbol{i}+(x^2-4z)\boldsymbol{j}-4y\boldsymbol{k}$ 为保守场，并计算曲线积分

$$\int_l \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

其中 l 是从点 $A(3,-1,2)$到点 $B(2,1,-1)$的任意路径.

证

$$D\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2y&2x&0\\2x&0&-4\\0&-4&0\end{pmatrix},$$

有 $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=[-4-(-4)]\boldsymbol{i}+(0-0)\boldsymbol{j}+(2x-2x)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为保守场，且 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 存在原函数 u：

$$u=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\,\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\,\mathrm{d}z.$$

今取$(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$，则

$$\begin{aligned}u&=\int_0^x 3\,\mathrm{d}x+\int_0^y x^2\,\mathrm{d}y-\int_0^z 4y\,\mathrm{d}z\\&=3x+x^2y-4yz,\end{aligned}$$

于是曲线积分

$$\int_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=(3x+x^2y-4yz)\Big|_{(3,-1,2)}^{(2,1,-1)}=14-8=6.$$

例 22 证明 $\boldsymbol{A}=yz\boldsymbol{i}+zx\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}$ 为调和场，并求出场的调和函数和矢势量各一个.

证

$$D\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0 & z & y\\ z & 0 & x\\ y & x & 0\end{pmatrix},$$

有 $$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0+0+0=0,$$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=(x-x)\boldsymbol{i}+(y-y)\boldsymbol{j}+(z-z)\boldsymbol{k}=\mathbf{0}.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为调和场.

场中的一个调和函数 u，可用如下公式求出：

$$u=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\,\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

取$(x_0,y_0,z_0)=(0,0,0)$，即得

$$u=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y 0\mathrm{d}y+\int_0^z xy\mathrm{d}z=xyz.$$

又由于调和场为无源场，故存在矢势量 $\boldsymbol{B}$. 今设 $\boldsymbol{B}=U\boldsymbol{i}+V\boldsymbol{j}+W\boldsymbol{k}$，则由公式

$$\begin{cases}U=\displaystyle\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z-\int_{y_0}^{y}R(x,y,z_0)\,\mathrm{d}y,\\ V=-\displaystyle\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)\,\mathrm{d}z,\\ W=C.\end{cases}$$

取 $y_0=0$，$z_0=0$，则

$$U=\int_0^z zx\mathrm{d}z-\int_0^y xy\mathrm{d}y=\frac{1}{2}xz^2-\frac{1}{2}xy^2,$$

$$V=-\int_0^z yz\mathrm{d}z=-\frac{1}{2}yz^2,$$

再取 $$W=0,$$

即求得一个矢势量为 $\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}x(z^2-y^2)\boldsymbol{i}-\frac{1}{2}yz^2\boldsymbol{j}$.

例 23 已知 $\boldsymbol{A}=(x^3+3y^2z)\boldsymbol{i}+6xyz\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$，其中函数 R 适合 $\frac{\partial R}{\partial z}=0$，且当 $x=y=0$ 时 $R=0$. 求 R 使矢量场 $\boldsymbol{A}$ 存在函数 u 满足 $\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\ u$，求出 u 来，并说明 $\boldsymbol{A}$ 不是管形场.

解

$$D\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}3x^2 & 6yz & 3y^2\\ 6yz & 6xz & 6xy\\ R_x & R_y & R_z\end{pmatrix},$$

有 $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=(R_y-6xy)\boldsymbol{i}+(3y^2-R_x)\boldsymbol{j}+(6yz-6yz)\boldsymbol{k}.$$

如果存在函数 u 满足 $\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\ u$，则必有 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，于是有

$$R_y=6xy,\qquad R_x=3y^2.$$

将第一个方程对 y 积分，得

$$R=3xy^2+\varphi(x).$$

$\left[\text{由于}\frac{\partial R}{\partial z}=0,\text{故不把 }\varphi(x)\text{ 写成 }\varphi(x,z).\right]$将上式再对 x 求导，得

$$R_x=3y^2+\varphi'(x).$$

与第二个方程比较，有 $\varphi'(x)=0$，则 $\varphi(x)=C_1$，所以

$$R=3xy^2+C_1$$

又由条件 $x=y=0$ 时，$R=0$ 知 $C_1=0$，从而函数

$$R=3xy^2,$$

于是矢量 $$\boldsymbol{A}=(x^3+3y^2z)\boldsymbol{i}+6xyz\boldsymbol{j}+3xy^2\boldsymbol{k}.$$

据此可以求得函数：

$$\begin{aligned}u&=\int_0^x x^3\mathrm{d}x+\int_0^y 0\mathrm{d}y+\int_0^z 3xy^2\mathrm{d}z+C\\&=\frac{1}{4}x^4+3xy^2z+C.\end{aligned}$$

又 $$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=3x^2+6xz+0\neq0,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 不是管形场.

例 24 矢量场 $\boldsymbol{A}=(x^2-y^2+x)\boldsymbol{i}-(2xy+y)\boldsymbol{j}$ 是否平面调和场？若是，求其力函数 u 与势函数 v.

解
$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=2x+1-2x-1=0,$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=(-2y+2y)\boldsymbol{k}=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为平面调和场. 其力函数

$$u=\int_{x_0}^{x}-Q(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}P(x,y)\,\mathrm{d}y.$$

取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$$\begin{aligned}u&=\int_0^x 0\mathrm{d}x+\int_0^y(x^2-y^2+x)\,\mathrm{d}y\\&=x^2y-\frac{1}{3}y^3+xy+C_1,\end{aligned}$$

势函数
$$v=-\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,\mathrm{d}x-\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,\mathrm{d}y$$

同样取 $(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$$\begin{aligned}v&=-\int_0^x(x^2+x)\,\mathrm{d}x+\int_0^y(2xy+y)\,\mathrm{d}y\\&=-\frac{1}{3}x^3-\frac{x^2}{2}+xy^2+\frac{y^2}{2}+C_2.\end{aligned}$$

三、习 题 全 解

习题 2 解答

1. 说出下列数量场所在的空间区域，并求出其等值面：

（1）$u=\dfrac{1}{Ax+By+Cz+D}$;

（2）$u=\arcsin\dfrac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

解 (1) 数量场 $u=\frac{1}{Ax+By+Cz+D}$所在的空间区域，是除去平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 以外的全部空间，场的等值面为

$$\frac{1}{Ax+By+Cz+D}=C_1$$

或 $$Ax+By+Cz+D-\frac{1}{C_1}=0 \quad (C_1\neq 0 \text{ 为任意常数}).$$

这是与平面 $Ax+By+Cz+D=0$ 平行的一族平面.

(2) 数量场 $u=\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}$所在的空间区域，是坐标满足

$$\left|\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}\right|\leqslant 1 \quad \text{或} \quad z^2\leqslant x^2+y^2 \quad (x^2+y^2\neq 0)$$

的点所组成的空间部分. 场的等值面为

$$\arcsin\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}}=C$$

或 $$z^2=(x^2+y^2)\sin^2 C \quad (x^2+y^2\neq 0).$$

当 $\sin C\neq 0$ 时，是顶点在坐标原点的一族圆锥面(除顶点外)；当 $\sin C=0$ 时，是除去原点的 xOy 平面.

2. 求数量场 $u=\frac{x^2+y^2}{z}$经过点 $M(1,1,2)$ 的等值面方程.

解 在点 $M(1,1,2)$ 处函数 $u=\frac{1^2+1^2}{2}=1$，故所求等值面方程为

$$\frac{x^2+y^2}{z}=1 \quad \text{或} \quad z=x^2+y^2 \quad (z\neq 0),$$

是除去原点的旋转抛物面.

3. 已知数量场 $u=xy$，求场中与直线 $x+2y-4=0$ 相切的等值线方程.

解 数量场 $u=xy$ 的等值线方程为

$$xy = C,$$

其斜率 $y' = -\frac{y}{x}$. 又所给直线的斜率为 $y' = -\frac{1}{2}$. 在切点处此二斜率应相等，即

$$-\frac{y}{x} = -\frac{1}{2} \quad 或 \quad x = 2y.$$

代入直线方程，解得 $y=1$，从而 $x=2$，即切点坐标为$(2,1)$. 函数 u 在这一点的对应值为 $u=2$. 故所求等值线方程为

$$xy = 2.$$

4. 求矢量场 $\boldsymbol{A} = xy^2\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{j} + zy^2\boldsymbol{k}$ 的矢量线方程.

解 矢量线应满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{xy^2} = \frac{\mathrm{d}y}{x^2y} = \frac{\mathrm{d}z}{zy^2},$$

由此有
$$x\mathrm{d}x = y\mathrm{d}y \quad 及 \quad \frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

解之，即得所求的矢量线方程

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = C_1, \\ z = C_2 x, \end{cases} \qquad C_1,\ C_2 为任意常数.$$

5. 求矢量场 $\boldsymbol{A} = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + (x+y)z\boldsymbol{k}$ 通过点 $M(2,1,1)$ 的矢量线方程.

解 矢量线应满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{(x+y)z}.$$

由$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}y}{y^2}$解得
$$\frac{1}{x} = \frac{1}{y} + C_1.$$

又按等比定理有

$$\frac{\mathrm{d}(x-y)}{x^2-y^2} = \frac{\mathrm{d}z}{(x+y)z} \quad 或 \quad \frac{\mathrm{d}(x-y)}{x-y} = \frac{\mathrm{d}z}{z},$$

由此解得
$$x - y = C_2 z.$$

故矢量线族方程为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}+C_1,\\ x-y=C_2z.\end{cases}$$

以点 $M(2,1,1)$ 的坐标代入，确定出 $C_1=-\dfrac{1}{2}$，$C_2=1$，代入上式，即得通过点 M 的矢量线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2},\\ x-y=z.\end{cases} \tag{A}$$

另法 由 $\dfrac{\mathrm{d}x}{x^2}=\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}$ 解得 $\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}+C_1$，再由此解出 $x=\dfrac{y}{1+C_1y}$，代入 $\dfrac{\mathrm{d}y}{y^2}=\dfrac{\mathrm{d}z}{(x+y)z}$ 中得

$$\frac{\mathrm{d}y}{y^2}=\frac{\mathrm{d}z}{\left(\dfrac{2y+C_1y^2}{1+C_1y}\right)z},$$

即 $$\frac{(2+C_1y)\,\mathrm{d}y}{y(1+C_1y)}=\frac{\mathrm{d}z}{z}\quad 或\quad \left(\frac{2}{y}-\frac{C_1}{1+C_1y}\right)\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}z}{z}.$$

由此解得 $$\frac{y^2}{1+C_1y}=C_2z\quad 或\quad xy=C_2z,$$

于是得矢量线族方程为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}+C_1,\\ xy=C_2z.\end{cases}$$

以点 $M(2,1,1)$ 的坐标代入，得 $C_1=-\dfrac{1}{2}$，$C_2=2$. 从而得通过点 M 的矢量线方程为

$$\begin{cases}\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{2},\\ xy=2z.\end{cases} \tag{B}$$

将方程组(B)与方程组(A)相比，虽然第二个方程不同，但

它们所表达的矢量线是一样的. 因为从(A),(B)两组方程之一可以得出其另一组来.

比如：将方程组(A)中的第一个方程改写为 $xy=2(x-y)$，再以其第二个方程 $x-y=z$ 代入，得 $xy=2z$. 将此方程与(A)的第一个方程联立，即得方程组(B).

*6. 求矢量场 $\boldsymbol{A}=0\boldsymbol{i}+2z\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k}$ 通过曲线 C：$\begin{cases}z=4,\\x^2+y^2=R^2\end{cases}$ 的矢量管方程.

解 矢量线满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{0}=\frac{\mathrm{d}y}{2z}=\frac{\mathrm{d}z}{1},$$

解之得矢量线族：

$$\begin{cases}x=C_1,\\y=z^2+C_2.\end{cases}$$

由于曲线 C 在矢量管上，故其上点的坐标满足矢量管上的矢量线方程. 因此，将 C 之方程 $\begin{cases}z=4,\\x^2+y^2=R^2\end{cases}$ 与上面矢量线族方程联立，消去 x，y，z，即得矢量管上 C_1，C_2 之间应满足的关系式

$$C_1^2+(16+C_2)^2=R^2.$$

再将此式与矢量线族方程联立消去 C_1，C_2，即得所求之矢量管方程为

$$x^2+(y-z^2+16)^2=R^2.$$

*7. 证明 $u=(x+y)^2-z$ 为平行平面数量场.

[提示:考察场中直线 l:$\begin{cases}x+y=2,\\z=1\end{cases}$ 以及与之平行的任一直线 L 上 u 的数值.]

证 在直线 l：$\begin{cases}x+y=2,\\z=1\end{cases}$ 上所有点处，恒有 $u=2^2-1=3$，

且与 l 平行的任一直线 L：$\begin{cases} x+y=C_1, \\ z=C_2 \end{cases}$ 上，同样恒有 $u=C_1^2-C_2$（常数）．因此，在任一块与 l 垂直的平面上，数量 u 的分布都是相同的．所以数量场 u 为平行平面数量场．

习题3　解答

1．求数量场 $u=x^2z^3+2y^2z$ 在点 $M(2,0,-1)$ 处沿 $\boldsymbol{l}=2x\boldsymbol{i}-xy^2\boldsymbol{j}+3z^4\boldsymbol{k}$ 方向的方向导数．

解　$\boldsymbol{l}\big|_M=4\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{4}{5},\ \cos\beta=0,\ \cos\gamma=\frac{3}{5}.$$

又
$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_M=2xz^3\bigg|_M=-4,\ \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_M=4yz\bigg|_M=0,$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}\bigg|_M=(3x^2z^2+2y^2)\bigg|_M=12,$$

故
$$\frac{\partial u}{\partial l}\bigg|_M=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\bigg|_M$$

$$=(-4)\times\frac{4}{5}+0\times0+12\times\frac{3}{5}=4.$$

2．求数量场 $u=3x^2z-xy+z^2$ 在点 $M(1,-1,1)$ 处沿曲线 $x=t$，$y=-t^2$，$z=t^3$ 朝 t 增大一方的方向导数．

解　所求方向导数，等于函数 u 在点 M 处沿曲线朝 t 增大一方的切线方向导数．于是，将曲线改用矢量方程表示为

$$\boldsymbol{r}=t\boldsymbol{i}-t^2\boldsymbol{j}+t^3\boldsymbol{k}.$$

则
$$\boldsymbol{r}'=\boldsymbol{i}-2t\boldsymbol{j}+3t^2\boldsymbol{k},$$

即为曲线上朝 t 增大一方的切向矢量．由于点 M 对应的参数为 $t=1$，则在点 M 处的切向矢量为

$$\boldsymbol{r}'\big|_M=\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}.$$

其方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\beta=-\frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$

又 $$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_M=(6xz-y)\Big|_M=7,\ \left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_M=-x\Big|_M=-1,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_M=(3x^2+2z)\Big|_M=5.$$

于是所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_M=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\Bigg|_M$$

$$=7\times\frac{1}{\sqrt{14}}+(-1)\times\frac{-2}{\sqrt{14}}+5\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{24}{\sqrt{14}}.$$

3. 数量场 $u=x^2yz^3$ 在点 $M(2,1,-1)$ 处沿哪个方向的方向导数最大？这个最大值是多少？

解 $$\mathbf{grad}\,u\Big|_M=(2xyz^3\boldsymbol{i}+x^2z^3\boldsymbol{j}+3x^2yz^2\boldsymbol{k})\Big|_M$$

$$=-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k},$$

故知函数 u 沿 $\mathbf{grad}\,u\Big|_M=-4\boldsymbol{i}-4\boldsymbol{j}+12\boldsymbol{k}$ 方向的方向导数为最大，这个最大值为 $\left|\mathbf{grad}\,u\Big|_M\right|=\sqrt{176}=4\sqrt{11}.$

4. 画出平面场 $u=\frac{1}{2}(x^2-y^2)$ 中 $u=0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2$ 的等值线，并画出场在点 $M_1(2,\sqrt{2})$ 与点 $M_2(3,\sqrt{7})$ 处的梯度矢量，看其是否符合下面事实：

(1) 梯度在等值线较密处的模较大，在较稀处的模较小；

(2) 在每一点处，梯度垂直于过该点的等值线，并指向 u 增大的方向.

解 所述等值线的方程为

$$x^2-y^2=0,\ x^2-y^2=1,$$
$$x^2-y^2=2,\ x^2-y^2=3,$$
$$x^2-y^2=4,$$

其中第一个又可以写为 $x-y=0$，$x+y=0$ 为二直线，其余的都是以 Ox 轴为实轴的等轴双曲线 $\left(\text{如图 8,图中 } \boldsymbol{G}_1=\mathbf{grad}\ u\Big|_{M_1}, \boldsymbol{G}_2=\mathbf{grad}\ u\Big|_{M_2}.\right)$

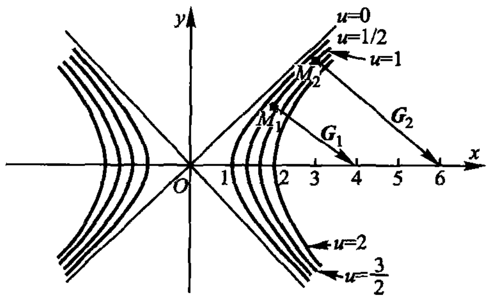

图 8

由于
$$\mathbf{grad}\ u=x\boldsymbol{i}-y\boldsymbol{j},$$
故
$$\mathbf{grad}\ u\Big|_{M_1}=2\boldsymbol{i}-\sqrt{2}\boldsymbol{j},\ \mathbf{grad}\ u\Big|_{M_2}=3\boldsymbol{i}-\sqrt{7}\boldsymbol{j}.$$
由图可见，其图形都符合所论之事实.

5. 用以下两种方法求数量场 $u=xy+yz+zx$ 在点 $P(1,2,3)$ 处沿其矢径方向的方向导数.

（1）直接应用方向导数公式；

（2）将方向导数作为梯度在该方向上的投影.

解 （1）点 P 的矢径 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k}$，其模 $r=\sqrt{14}$. 其方向余弦为
$$\cos\alpha=\frac{1}{\sqrt{14}},\ \cos\beta=\frac{2}{\sqrt{14}},\ \cos\gamma=\frac{3}{\sqrt{14}}.$$
又
$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_P=(y+z)\Big|_P=5,\ \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_P=(x+z)\Big|_P=4,$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_P=(x+y)\Big|_P=3,$$

于是所求方向导数为

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\Big|_P$$

$$=5\times\frac{1}{\sqrt{14}}+4\times\frac{2}{\sqrt{14}}+3\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{22}{\sqrt{14}}.$$

(2) $$\mathbf{grad}\ u\Big|_P=\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\Big|_P$$

$$=5\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}+3\boldsymbol{k},$$

$$\boldsymbol{r}^\circ=\frac{\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{r}|}=\frac{1}{\sqrt{14}}\boldsymbol{i}+\frac{2}{\sqrt{14}}\boldsymbol{j}+\frac{3}{\sqrt{14}}\boldsymbol{k}.$$

所以 $$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_P=\mathbf{grad}\ u\Big|_P\cdot\boldsymbol{r}^\circ$$

$$=5\times\frac{1}{\sqrt{14}}+4\times\frac{2}{\sqrt{14}}+3\times\frac{3}{\sqrt{14}}=\frac{22}{\sqrt{14}}.$$

两种方法结果相同.

6. 求数量场 $u=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$ 在点 $O(0,0,0)$ 与 $A(1,1,1)$ 处梯度的大小和方向余弦. 又问在哪些点上的梯度为 $\mathbf{0}$?

解 $\mathbf{grad}\ u=(2x+y+3)\boldsymbol{i}+(4y+x-2)\boldsymbol{j}+(6z-6)\boldsymbol{k}$,

$$\mathbf{grad}\ u\Big|_O=3\boldsymbol{i}-2\boldsymbol{j}-6\boldsymbol{k},\quad \mathbf{grad}\ u\Big|_A=6\boldsymbol{i}+3\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}.$$

其大小，即其模依次为

$$\sqrt{3^2+(-2)^2+(-6)^2}=7,\quad \sqrt{6^2+3^2+0^2}=3\sqrt{5},$$

于是 $\mathbf{grad}\ u\Big|_O$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{3}{7},\quad \cos\beta=-\frac{2}{7},\quad \cos\gamma=-\frac{6}{7}.$$

$\mathbf{grad}\ u\Big|_A$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}},\ \cos\beta=\frac{1}{\sqrt{5}},\ \cos\gamma=0.$$

现在来求使 $\mathbf{grad}\ u=\mathbf{0}$ 之点：即求坐标满足

$$\begin{cases}2x+y+3=0,\\4y+x-2=0,\\6z-6=0\end{cases}$$

之点. 由此方程组解得 $x=-2$，$y=1$，$z=1$. 故使梯度为 $\mathbf{0}$ 之点为 $(-2,1,1)$.

7. 通过梯度求曲面 $x^2y+2xz=4$ 上一点 $M(1,-2,3)$ 处的法线方程.

解 所给曲面可视为数量场 $u=x^2y+2xz$ 的一张等值面，因此，场 u 在点 M 处的梯度，就是曲面在该点的法矢量，即

$$\begin{aligned}\mathbf{grad}\ u\Big|_M&=(2xy+2z)\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+2x\boldsymbol{k}\Big|_M\\&=2\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k},\end{aligned}$$

故所求的法线方程为

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{1}=\frac{z-3}{2}.$$

8. 求数量场 $u=3x^2+5y^2-2z$ 在点 $M(1,1,3)$ 处沿其等值面朝 Oz 轴正向一方的法线方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$.

解 由 $\frac{\partial u}{\partial z}=-2<0$ 知，沿 Oz 轴正向一方，函数 u 是减小的. 因此，在点 M 处，等值面朝此方向的单位法矢量为

$$\boldsymbol{n}^\circ=-\frac{\mathbf{grad}\ u}{|\mathbf{grad}\ u|}.$$

于是所求方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_M=\mathbf{grad}\ u\cdot\boldsymbol{n}^\circ\Big|_M=-|\mathbf{grad}\ u|_M$$

$$= -\left|6x\boldsymbol{i}+10y\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}\right|_M$$

$$= -\left|6\boldsymbol{i}+10\boldsymbol{j}-2\boldsymbol{k}\right| = -2\sqrt{35}.$$

9. 设 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$,

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$

求证 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}=(\mathbf{grad}\ P\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})\boldsymbol{i}+(\mathbf{grad}\ Q\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}+(\mathbf{grad}\ R\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})\boldsymbol{k}$.

证 $\mathrm{d}\boldsymbol{A}=\mathrm{d}P\boldsymbol{i}+\mathrm{d}Q\boldsymbol{j}+\mathrm{d}R\boldsymbol{k}$,

其中
$$\mathrm{d}P=\frac{\partial P}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z$$
$$=\mathbf{grad}\ P\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

同理
$$\mathrm{d}Q=\mathbf{grad}Q\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r},\mathrm{d}R=\mathbf{grad}R\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r}.$$

所以有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{A}=(\mathbf{grad}\ P\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})\boldsymbol{i}+(\mathbf{grad}\ Q\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})\boldsymbol{j}+(\mathbf{grad}\ R\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{r})\boldsymbol{k}.$$

*10. 证明 $\mathbf{grad}\ u$ 为常矢的充要条件是 u 为线性函数：

$$u=ax+by+cz+d\quad(a,b,c,d\text{ 为常数}).$$

证 充分性：设 $u=ax+by+cz+d$,

则有
$$\mathbf{grad}\ u=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}\text{ 为常矢}.$$

必要性：设 $\mathbf{grad}\ u=a\boldsymbol{i}+b\boldsymbol{j}+c\boldsymbol{k}$ 为常矢，则有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=a,\ \frac{\partial u}{\partial y}=b,\ \frac{\partial u}{\partial z}=c.$$

由 $\frac{\partial u}{\partial x}=a$ 有
$$u=ax+\varphi(y,z).$$

两端对 y 求导，注意到 $\frac{\partial u}{\partial y}=b$，则有 $b=\varphi'_y(y,z)$，从而

$$\varphi(y,z)=by+\psi(z),$$

于是
$$u=ax+by+\psi(z).$$

两端对 z 求导，注意到 $\frac{\partial u}{\partial z}=c$，则有 $c=\psi'(z)$，从而

$$\psi(z)=cz+d,$$

所以有
$$u=ax+by+cz+d.$$

11. 若在数量场 $u=u(M)$ 中，恒有 $\mathbf{grad}\ u=\mathbf{0}$，证明 $u=$

常数.

证 因为 $\mathbf{grad}\ u=\mathbf{0}$，故有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0,\ \frac{\partial u}{\partial y}=0,\ \frac{\partial u}{\partial z}=0.$$

由$\frac{\partial u}{\partial x}=0$，有

$$u=\varphi(y,z).$$

右端的 $\varphi(y,z)$暂时是任意的. 为了确定它，将上式两端对 y 求导，并注意到$\frac{\partial u}{\partial y}=0$，即得 $\varphi_y'(y,z)=0$，从而 $\varphi(y,z)=\psi(z)$. 代入上式，得

$$u=\psi(z).$$

再将上式两端对 z 求导，并注意到$\frac{\partial u}{\partial z}=0$，即得 $\psi'(z)=0$，从而

$$\psi(z)=C,$$

代入上式，就得到 $u=C$(常数).

*12. 设函数 $u=u(M)$在点 M_0 处可微，且 $u(M)\leqslant u(M_0)$，试证明在点 M_0 处有 $\mathbf{grad}\ u=\mathbf{0}$.

证 因为函数 u 在点 M_0 处可微，故在点 M_0 处存在偏导数$\frac{\partial u}{\partial x}$，即

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

存在. 由于 $u(M)\leqslant u(M_0)$，有 $\Delta u=u(M)-u(M_0)\leqslant 0$. 于是在点 M_0 处：

当 $\Delta x>0$ 时，有$\frac{\Delta u}{\Delta x}\leqslant 0$，故有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta u}{\Delta x}\leqslant 0;$$

当 $\Delta x<0$ 时，有$\frac{\Delta u}{\Delta x}\geqslant 0$，故有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta u}{\Delta x}\geqslant 0,$$

于是有$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{M_0}=0$. 同理可得$\left.\frac{\partial u}{\partial y}\right|_{M_0}=0$，$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{M_0}=0$. 因此有

$$\left.\mathbf{grad}\ u\right|_{M_0}=\left.\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\right|_{M_0}=\mathbf{0}.$$

习题4 解答

1. 设 S 为上半球面 $x^2+y^2+z^2=a^2(z\geqslant 0)$，求矢量场 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ 向上穿过 S 的通量 Φ.

[提示:注意 S 的法矢量 $\boldsymbol{n}$ 与 $\boldsymbol{r}$ 同指向.]

解 $\Phi=\iint\limits_S\boldsymbol{r}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_S r_n\mathrm{d}S=\iint\limits_S|\boldsymbol{r}|\,\mathrm{d}S$

$$=a\iint\limits_S\mathrm{d}S=a\cdot 2\pi a^2=2\pi a^3.$$

2. 设 S 为曲面 $x^2+y^2=z(0\leqslant z\leqslant h)$，求流速场$\boldsymbol{v}=(x+y+z)\boldsymbol{k}$ 在单位时间内向下侧穿过 S 的流量 Q.

解 $Q=\iint\limits_S\boldsymbol{v}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iint\limits_S(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=-\iint\limits_D(x+y+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 为 S 在 xOy 面上的投影区域：$x^2+y^2\leqslant h$. 用极坐标计算，有

$$\begin{aligned}Q&=-\iint\limits_D(r\cos\theta+r\sin\theta+r^2)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\&=-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{h}}(r^2\cos\theta+r^2\sin\theta+r^3)\mathrm{d}r\\&=-\int_0^{2\pi}\left[(\cos\theta+\sin\theta)\frac{\sqrt{h}^3}{3}+\frac{h^2}{4}\right]\mathrm{d}\theta\\&=-\frac{1}{2}\pi h^2.\end{aligned}$$

3. 设 S 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在平面 $z=4$ 下方部分，求矢量场 $\boldsymbol{A}=4xz\boldsymbol{i}+yz\boldsymbol{j}+3z\boldsymbol{k}$ 向下穿出 S 的通量 Φ.

解 将 S 视为数量场 $u=z-\sqrt{x^2+y^2}$ 当 u 取数值 0 时的一张等值面. 由于矢量场 $\boldsymbol{A}$ 向下穿出 S 的方向，是 z 值减小同时也是函数 u 减小的方向. 故 S 朝此方向的单位法矢量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{n}^\circ &= -\frac{\mathbf{grad}\ u}{|\mathbf{grad}\ u|}\\ &=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{i}+\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\boldsymbol{j}-\boldsymbol{k}\right).\end{aligned}$$

于是所求通量

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}^\circ \mathrm{d}S=\iint_{S}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{4x^2z+y^2z}{\sqrt{x^2+y^2}}-3z\right)\mathrm{d}S\\ &=\iint_D\frac{1}{\sqrt{2}}(4x^2+y^2-3\sqrt{x^2+y^2})\sqrt{2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.\end{aligned}$$

换用极坐标计算，则

$$\begin{aligned}\Phi &= \iint_D(4r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta-3r)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\\ &=\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^4 4r^3\mathrm{d}r+\int_0^{2\pi}\sin^2\theta\mathrm{d}\theta\int_0^4 r^3\mathrm{d}r\\ &\quad-\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^4 3r^2\mathrm{d}r\\ &=\left[\pi r^4+\frac{1}{4}\pi r^4-2\pi r^3\right]_0^4=192\pi.\end{aligned}$$

4. 求下面矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的散度：

(1) $\boldsymbol{A}=(x^3+yz)\boldsymbol{i}+(y^2+xz)\boldsymbol{j}+(z^3+xy)\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{A}=(2z-3y)\boldsymbol{i}+(3x-z)\boldsymbol{j}+(y-2x)\boldsymbol{k}$;

(3) $\boldsymbol{A}=(1+y\sin x)\boldsymbol{i}+(x\cos y+y)\boldsymbol{j}$.

解 (1) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=3x^2+2y+3z^2$.

(2) $\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=0$.

(3) $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=y\cos x-x\sin y+1$.

5. 求 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$ 在给定点处的值：

(1) $\boldsymbol{A}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$ 在点 $M(1,0,-1)$处；

(2) $\boldsymbol{A}=4x\boldsymbol{i}-2xy\boldsymbol{j}+z^2\boldsymbol{k}$ 在点 $M(1,1,3)$处；

(3) $\boldsymbol{A}=xyz\boldsymbol{r}(\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})$在点 $M(1,3,2)$处.

解 (1) $\operatorname{div}\boldsymbol{A}\Big|_M=(3x^2+3y^2+3z^2)\Big|_M=6$.

(2) $\operatorname{div}\boldsymbol{A}\Big|_M=(4-2x+2z)\Big|_M=8$.

(3)
$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{A}&=xyz\operatorname{div}\boldsymbol{r}+\mathbf{grad}(xyz)\cdot\boldsymbol{r}\\&=3xyz+(yz\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k})\cdot(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\\&=6xyz.\end{aligned}$$

故
$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}\Big|_M=6xyz\Big|_M=36.$$

6. 已知 $u=xy^2z^3$，$\boldsymbol{A}=x^2\boldsymbol{i}+xz\boldsymbol{j}-2yz\boldsymbol{k}$，求 $\operatorname{div}(u\boldsymbol{A})$.

解 $\operatorname{div}(u\boldsymbol{A})=u\operatorname{div}\boldsymbol{A}+\mathbf{grad}\,u\cdot\boldsymbol{A}$，

其中
$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=2x-2y.$$
$$\mathbf{grad}\,u=y^2z^3\boldsymbol{i}+2xyz^3\boldsymbol{j}+3xy^2z^2\boldsymbol{k}.$$

故
$$\begin{aligned}\operatorname{div}(u\boldsymbol{A})&=xy^2z^3(2x-2y)+x^2y^2z^3+2x^2yz^4-6xy^3z^3\\&=3x^2y^2z^3-8xy^3z^3+2x^2yz^4.\end{aligned}$$

7. 求矢量场 $\boldsymbol{A}$ 从内穿出所给闭曲面 S 的通量 Φ：

(1) $\boldsymbol{A}=x^3\boldsymbol{i}+y^3\boldsymbol{j}+z^3\boldsymbol{k}$，$S$ 为球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$；

(2) $\boldsymbol{A}=(x-y+z)\boldsymbol{i}+(y-z+x)\boldsymbol{j}+(z-x+y)\boldsymbol{k}$，$S$ 为椭球面$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$.

解 (1)
$$\begin{aligned}\Phi&=\oiint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega\operatorname{div}\boldsymbol{A}\,\mathrm{d}V\\&=\iiint_\Omega 3(x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}V,\end{aligned}$$

其中 Ω 为 S 所围之球域：$x^2+y^2+z^2\leqslant a^2$. 今用球坐标

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\ y=r\sin\theta\sin\varphi,\ z=r\cos\theta$$

计算. 有

$$\begin{aligned}\Phi &= 3\iiint_{\Omega} r^2\cdot r^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi\\ &= 3\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{a}r^4\mathrm{d}r = \frac{12}{5}\pi a^5.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\Phi &= \oiint_S \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_{\Omega}\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}\mathrm{d}V\\ &=3\iiint_{\Omega}\mathrm{d}V = 3\times\frac{4}{3}\pi abc = 4\pi abc.\end{aligned}$$

8. 设 $\boldsymbol{a}$ 为常矢，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求

(1) $\mathrm{div}(r\boldsymbol{a})$；(2) $\mathrm{div}(r^2\boldsymbol{a})$；(3) $\mathrm{div}(r^n\boldsymbol{a})$ （n 为整数）.

解 (1) $$\begin{aligned}\mathrm{div}(r\boldsymbol{a}) &= r\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{grad}\,r\cdot\boldsymbol{a}\\ &=0+\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{a}=\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}}{r}.\end{aligned}$$

(2) $$\begin{aligned}\mathrm{div}(r^2\boldsymbol{a}) &= r^2\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{grad}\,r^2\cdot\boldsymbol{a}\\ &=0+2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=2\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}\end{aligned}$$

(3) $$\begin{aligned}\mathrm{div}(r^n\boldsymbol{a}) &= r^n\mathrm{div}\,\boldsymbol{a}+\mathbf{grad}\,r^n\cdot\boldsymbol{a}\\ &=0+nr^{n-2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=nr^{n-2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}.\end{aligned}$$

9. 求使 $\mathrm{div}\,r^n\boldsymbol{r}=0$ 的整数 n（$\boldsymbol{r}$ 与 r 同上题）.

解 $$\begin{aligned}\mathrm{div}\,r^n\boldsymbol{r} &= r^n\mathrm{div}\,\boldsymbol{r}+\mathbf{grad}\,r^n\cdot\boldsymbol{r}\\ &=3r^n+nr^{n-2}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}\\ &=3r^n+nr^n=(3+n)r^n.\end{aligned}$$

要使 $\mathrm{div}\,r^n\boldsymbol{r}=0$，必有 $3+n=0$，即 $n=-3$.

10. 设有无穷长导线与 Oz 轴一致，通以电流 $I\boldsymbol{k}$ 后，在导线周围便产生磁场，其在点 $M(x,y,z)$ 处的磁场强度为

$$\boldsymbol{H}=\frac{I}{2\pi r^2}(-y\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}),$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，求 $\mathrm{div}\,\boldsymbol{H}$.

解　$\operatorname{div}\boldsymbol{H}=\frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{Iy}{2\pi r^2}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{Ix}{2\pi r^2}\right)$

$$=\frac{Iy}{\pi r^3}\frac{x}{r}-\frac{Ix}{\pi r^3}\frac{y}{r}=0\quad(r\neq 0).$$

11. 设 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，求：

(1) 使 $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=0$ 的 $f(r)$；

(2) 使 $\operatorname{div}[\mathbf{grad}\,f(r)]=0$ 的 $f(r)$.

解　(1) $\operatorname{div}[f(r)\boldsymbol{r}]=f(r)\operatorname{div}\boldsymbol{r}+\mathbf{grad}\,f(r)\cdot\boldsymbol{r}$

$$=3f(r)+f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r}$$

$$=3f(r)+rf'(r).$$

令其为 0，得微分方程 $f'(r)+\frac{3}{r}f(r)=0$，

解之得　　$f(r)=\frac{C}{r^3}$　（C 为任意常数）.

(2) $\operatorname{div}[\mathbf{grad}\,f(r)]=\operatorname{div}\left[f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right]$

$$=\frac{f'(r)}{r}\operatorname{div}\boldsymbol{r}+\mathbf{grad}\frac{f'(r)}{r}\cdot\boldsymbol{r}$$

$$=3\frac{f'(r)}{r}+\frac{rf''(r)-f'(r)}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\cdot\boldsymbol{r}$$

$$=3\frac{f'(r)}{r}+f''(r)-\frac{f'(r)}{r}.$$

令其为 0，得微分方程 $f''(r)+\frac{2}{r}f'(r)=0$，

解之即得　$f(r)=\frac{C_1}{r}+C_2$　（C_1,C_2 为任意常数）.

12. 已知函数 u 沿封闭曲面 S 向外法线的方向导数为常数 C，Ω 为 S 所围的空间区域，A 为 S 的面积，证明

$$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}(\mathbf{grad}\,u)\,\mathrm{d}V=CA.$$

证 由奥氏公式

$$\iiint_{\Omega}\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ u)\mathrm{d}V = \oiint_{S}\mathbf{grad}\ u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S} = \oiint_{S}\mathbf{grad}_{n}u\mathrm{d}S$$

$$= \oiint_{S}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S = C\oiint_{S}\mathrm{d}S = CA.$$

习题 5 解答

1. 求一质点在力场 $\boldsymbol{F} = -y\boldsymbol{i} - z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ 的作用下沿闭曲线 l：$x = a\cos t$，$y = a\sin t$，$z = a(1-\cos t)$从 $t=0$ 到 $t=2\pi$ 运动一周时所做的功.

解 功 $W = \oint_{l}\boldsymbol{F}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{l} - y\mathrm{d}x - z\mathrm{d}y + x\mathrm{d}z$

$$= \int_{0}^{2\pi}[a^{2}\sin^{2}t - a^{2}(1-\cos t)\cos t + a^{2}\cos t\sin t]\mathrm{d}t$$

$$= a^{2}\int_{0}^{2\pi}(1-\cos t+\cos t\sin t)\mathrm{d}t = 2\pi a^{2}.$$

2. 求矢量场 $\boldsymbol{A} = -y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j} + c\boldsymbol{k}$($c$ 为常数)沿下列曲线的环量：

(1) 圆周 $x^{2}+y^{2}=R^{2}$，$z=0$；

(2) 圆周$(x-2)^{2}+y^{2}=R^{2}, z=0$.

解 (1) 令 $x = R\cos\theta$，则圆周 l：$x^{2}+y^{2}=R^{2}$，$z=0$ 的方程成为 $x=R\cos\theta$，$y=R\sin\theta$，$z=0$.
于是环量

$$\Gamma = \oint_{l}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l} = \oint_{l} - y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y + c\mathrm{d}z$$

$$= \int_{0}^{2\pi}(R^{2}\sin^{2}\theta + R^{2}\cos^{2}\theta)\mathrm{d}\theta = 2\pi R^{2}.$$

(2) 令 $x-2 = R\cos\theta$，则圆周 l：$(x-2)^{2}+y^{2}=R^{2}, z=0$ 的方程成为

$$x = R\cos\theta + 2,\ y = R\sin\theta,\ z = 0.$$

于是环量

$$\Gamma = \oint_l \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{l} = \oint_l -y dx + x dy + c dz$$

$$= \int_0^{2\pi} [R^2 \sin^2\theta + (R\cos\theta + 2)R\cos\theta] d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} (R^2 + 2R\cos\theta) d\theta = 2\pi R^2.$$

3. 用以下两种方法求矢量场 $\boldsymbol{A} = x(z-y)\boldsymbol{i} + y(x-z)\boldsymbol{j} + z(y-x)\boldsymbol{k}$ 在点 $M(1,2,3)$ 处沿方向 $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$ 的环量面密度.

（1）直接应用环量面密度的计算公式；

（2）将环量面密度作为旋度在该方向上的投影.

解 （1）$\boldsymbol{n}^\circ = \dfrac{\boldsymbol{n}}{|\boldsymbol{n}|} = \dfrac{1}{3}\boldsymbol{i} + \dfrac{2}{3}\boldsymbol{j} + \dfrac{2}{3}\boldsymbol{k}$，故 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{1}{3},\ \cos\beta = \frac{2}{3},\ \cos\gamma = \frac{2}{3}.$$

又 $\qquad P = x(z-y),\ Q = y(x-z),\ R = z(y-x),$

按公式，环量面密度

$$\mu_n\Big|_M = [(R_y - Q_z)\cos\alpha + (P_z - R_x)\cos\beta + (Q_x - P_y)\cos\gamma]_M$$

$$= \left[(z+y)\frac{1}{3} + (x+z)\frac{2}{3} + (x+y)\frac{2}{3}\right]_M$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{8}{3} + \frac{6}{3} = \frac{19}{3}.$$

（2）$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\Big|_M = [(z+y)\boldsymbol{i} + (x+z)\boldsymbol{j} + (x+y)\boldsymbol{k}]_M$$

$$= 5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k},$$

于是 $$\mu_n\Big|_M = \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\Big|_M \cdot \boldsymbol{n}^\circ = (5\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}) \cdot \left(\frac{1}{3}\boldsymbol{i} + \frac{2}{3}\boldsymbol{j} + \frac{2}{3}\boldsymbol{k}\right)$$

$$= \frac{5}{3} + \frac{8}{3} + \frac{6}{3} = \frac{19}{3}.$$

4. 用雅可比矩阵求下列矢量场的散度和旋度.

（1）$\boldsymbol{A} = (3x^2y + z)\boldsymbol{i} + (y^3 - xz^2)\boldsymbol{j} + 2xyz\boldsymbol{k}$；

(2) $A = yz^2 i + zx^2 j + xy^2 k$;

(3) $A = P(x) i + Q(y) j + R(z) k$.

解

(1) $$DA = \begin{pmatrix} 6xy & 3x^2 & 1 \\ -z^2 & 3y^2 & -2xz \\ 2yz & 2xz & 2xy \end{pmatrix},$$

故有 $$\mathrm{div}\, A = 6xy + 3y^2 + 2xy = (8x + 3y)y.$$

$$\mathbf{rot}\, A = 4xz i + (1 - 2yz) j - (z^2 + 3x^2) k.$$

(2) $$DA = \begin{pmatrix} 0 & z^2 & 2yz \\ 2xz & 0 & x^2 \\ y^2 & 2xy & 0 \end{pmatrix},$$

故有 $$\mathrm{div}\, A = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$\mathbf{rot}\, A = x(2y - x) i + y(2z - y) j + z(2x - z) k.$$

(3) $$DA = \begin{pmatrix} P'(x) & 0 & 0 \\ 0 & Q'(y) & 0 \\ 0 & 0 & R'(z) \end{pmatrix},$$

故有 $$\mathrm{div}\, A = P'(x) + Q'(y) + R'(z),$$

$$\mathbf{rot}\, A = \mathbf{0}.$$

5. 已知 $u = e^{xyz}$, $A = z^2 i + x^2 j + y^2 k$, 求 $\mathbf{rot}(uA)$.

解 $\mathbf{rot}(uA) = u\mathbf{rot}\, A + \mathbf{grad}\, u \times A$,

$$DA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2z \\ 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \end{pmatrix},$$

有 $$\mathbf{rot}\, A = 2y i + 2z j + 2x k,$$

$$u\mathbf{rot}\, A = e^{xyz}(2y i + 2z j + 2x k),$$

$$\mathbf{grad}\, u = e^{xyz}(yz i + xz j + xy k),$$

$$\mathbf{grad}\, u \times A = e^{xyz} \begin{vmatrix} i & j & k \\ yz & xz & xy \\ z^2 & x^2 & y^2 \end{vmatrix}$$

$$= e^{xyz}[(xy^2z - x^3y)\boldsymbol{i} + (xyz^2 - y^3z)\boldsymbol{j} + (x^2yz - xz^3)\boldsymbol{k}],$$

故有

$$\mathbf{rot}(u\boldsymbol{A}) = e^{xyz}[(2y + xy^2z - x^3y)\boldsymbol{i} + (2z + xyz^2 - y^3z)\boldsymbol{j} + (2x + x^2yz - xz^3)\boldsymbol{k}].$$

6. 已知 $\boldsymbol{A} = 3y\boldsymbol{i} + 2z^2\boldsymbol{j} + xy\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B} = x^2\boldsymbol{i} - 4\boldsymbol{k}$，求 $\mathbf{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})$.

解　$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 3y & 2z^2 & xy \\ x^2 & 0 & -4 \end{vmatrix}$$

$$= -8z^2\boldsymbol{i} + (x^3y + 12y)\boldsymbol{j} - 2x^2z^2\boldsymbol{k},$$

$$D(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -16z \\ 3x^2y & x^3 + 12 & 0 \\ -4xz^2 & 0 & -4x^2z \end{pmatrix},$$

故有

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = 0\boldsymbol{i} + (4xz^2 - 16z)\boldsymbol{j} + 3x^2y\boldsymbol{k} = 4z(xz - 4)\boldsymbol{j} + 3x^2y\boldsymbol{k}.$$

7. 已知 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{C}$ 为常矢，证明

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}) = 0 \text{ 及 } \mathbf{rot}(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}) = 2\boldsymbol{C}.$$

证　设 $\boldsymbol{C} = C_1\boldsymbol{i} + C_2\boldsymbol{j} + C_3\boldsymbol{k}$，则

$$\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r} = (C_2z - C_3y)\boldsymbol{i} + (C_3x - C_1z)\boldsymbol{j} + (C_1y - C_2x)\boldsymbol{k},$$

$$D(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}) = \begin{pmatrix} 0 & -C_3 & C_2 \\ C_3 & 0 & -C_1 \\ -C_2 & C_1 & 0 \end{pmatrix}.$$

由此得

$$\mathrm{div}(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}) = 0 + 0 + 0 = 0,$$

$$\mathbf{rot}(\boldsymbol{C}\times\boldsymbol{r}) = 2C_1\boldsymbol{i} + 2C_2\boldsymbol{j} + 2C_3\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{C}.$$

8. 设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，$r = |\boldsymbol{r}|$，$\boldsymbol{C}$ 为常矢，求

（1）$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{r}$；　　（2）$\mathbf{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]$；

（3）$\mathbf{rot}[f(r)\boldsymbol{C}]$；　　（4）$\mathrm{div}[\boldsymbol{r}\times f(r)\boldsymbol{C}]$.

解 (1) $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{r}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k}=\mathbf{0}$.

(2) $\mathbf{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]=f(r)\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{r}+\mathbf{grad}\,f(r)\times\boldsymbol{r}$

$$=\mathbf{0}+f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{r}=\mathbf{0}.$$

(3) $\mathbf{rot}[f(r)\boldsymbol{C}]=f(r)\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{C}+\mathbf{grad}\,f(r)\times\boldsymbol{C}$

$$=\mathbf{0}+f'(r)\frac{\boldsymbol{r}}{r}\times\boldsymbol{C}=\frac{1}{r}f'(r)(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{C}).$$

(4) $\mathrm{div}[\boldsymbol{r}\times f(r)\boldsymbol{C}]=\mathrm{div}[f(r)\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{C}]$

$$=\boldsymbol{C}\cdot\mathbf{rot}[f(r)\boldsymbol{r}]-f\ (r)\ \ \boldsymbol{r}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{C}$$
$$=\boldsymbol{C}\cdot\mathbf{0}-f(r)\boldsymbol{r}\cdot\mathbf{0}=0-0=0.$$

9. 设有点电荷 q 位于坐标原点，试证其所产生的电场中电位移矢量 $\boldsymbol{D}$ 的旋度为零.

证 由电学知 $$\boldsymbol{D}=\frac{q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r},$$

其中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$. 据前题之(2)即知有

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{D}=\mathbf{rot}\left(\frac{q}{4\pi r^3}\boldsymbol{r}\right)=\mathbf{0}.$$

10. 设函数 $u(x,y,z)$ 及矢量 $\boldsymbol{A}=P(x,y,z)\boldsymbol{i}+Q(x,y,z)\boldsymbol{j}+R(x,y,z)\boldsymbol{k}$ 的三个坐标函数都有二阶连续偏导数，证明

(1) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,u)=\mathbf{0}$；(2) $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A})=0$.

证 (1) $\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,u)=\mathbf{rot}(u_x\boldsymbol{i}+u_y\boldsymbol{j}+u_z\boldsymbol{k})$

$$=(u_{zy}-u_{yz})\boldsymbol{i}+(u_{xz}-u_{zx})\boldsymbol{j}+(u_{yx}-u_{xy})\boldsymbol{k}.$$

因函数 $u(x,y,z)$ 有二阶连续偏导数，故有

$$u_{yz}=u_{zy},\ \ u_{xz}=u_{zx},\ \ u_{yx}=u_{xy}.$$

因此有 $$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,u)=\mathbf{0}.$$

(2) $\mathrm{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A})=\mathrm{div}[(R_y-Q_z)\boldsymbol{i}+(P_z-R_x)\boldsymbol{j}+(Q_x-P_y)\boldsymbol{k}]$

$$=(R_{yx}-Q_{zx})+(P_{zy}-R_{xy})+(Q_{xz}-P_{yz}).$$

因函数 P，Q，R 均有二阶连续偏导数，故有

$$P_{zy}=P_{yz},\ \ Q_{xz}=Q_{zx},\ \ R_{yx}=R_{xy},$$

因此有 $$\operatorname{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A})=0.$$

*11. 设矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\neq\mathbf{0}$，若存在非零函数 $\mu(x,y,z)$ 使 $\mu\boldsymbol{A}$ 为某数量场 $\varphi(x,y,z)$ 的梯度，即 $\mu\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\,\varphi$，试证明

$$\boldsymbol{A}\perp\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}.$$

证 由 $\mu\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\,\varphi$，有

$$\boldsymbol{A}=\frac{1}{\mu}\mathbf{grad}\,\varphi=\frac{\varphi_x}{\mu}\boldsymbol{i}+\frac{\varphi_y}{\mu}\boldsymbol{j}+\frac{\varphi_z}{\mu}\boldsymbol{k},$$

$$D\boldsymbol{A}=\frac{1}{\mu^2}\begin{pmatrix}\mu\varphi_{xx}-\varphi_x\mu_x & \mu\varphi_{xy}-\varphi_x\mu_y & \mu\varphi_{xz}-\varphi_x\mu_z\\ \mu\varphi_{yx}-\varphi_y\mu_x & \mu\varphi_{yy}-\varphi_y\mu_y & \mu\varphi_{yz}-\varphi_y\mu_z\\ \mu\varphi_{zx}-\varphi_z\mu_x & \mu\varphi_{zy}-\varphi_z\mu_y & \mu\varphi_{zz}-\varphi_z\mu_z\end{pmatrix},$$

故 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{\mu^2}[(\varphi_y\mu_z-\varphi_z\mu_y)\boldsymbol{i}+(\varphi_z\mu_x-\varphi_x\mu_z)\boldsymbol{j}+(\varphi_x\mu_y-\varphi_y\mu_x)\boldsymbol{k}]$.

于是有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}&=\frac{1}{\mu^3}[\varphi_x(\varphi_y\mu_z-\varphi_z\mu_y)+\varphi_y(\varphi_z\mu_x-\varphi_x\mu_z)+\varphi_z(\varphi_x\mu_y-\varphi_y\mu_x)]\\&=0,\end{aligned}$$

所以 $$\boldsymbol{A}\perp\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}.$$

*12. 设矢量 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{i}+A_2\boldsymbol{j}+A_3\boldsymbol{k}$，$\boldsymbol{B}=B_1\boldsymbol{i}+B_2\boldsymbol{j}+B_3\boldsymbol{k}$.
其中 A_1，A_2，A_3 与 B_1，B_2，B_3 都是 x，y，z 的具有一阶连续偏导数的函数.

证明 $$\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}.$$

证

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\end{vmatrix}\\&=(A_2B_3-A_3B_2)\boldsymbol{i}+(A_3B_1-A_1B_3)\boldsymbol{j}+(A_1B_2-A_2B_1)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

于是

$$\operatorname{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}B_3+A_2\frac{\partial B_3}{\partial x}\right)-\left(\frac{\partial A_3}{\partial x}B_2+A_3\frac{\partial B_2}{\partial x}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}B_1+A_3\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)-\left(\frac{\partial A_1}{\partial y}B_3+A_1\frac{\partial B_3}{\partial y}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}B_2+A_1\frac{\partial B_2}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial A_2}{\partial z}B_1+A_2\frac{\partial B_1}{\partial z}\right)$$

$$=B_1\left(\frac{\partial A_3}{\partial y}-\frac{\partial A_2}{\partial z}\right)+B_2\left(\frac{\partial A_1}{\partial z}-\frac{\partial A_3}{\partial x}\right)+B_3\left(\frac{\partial A_2}{\partial x}-\frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$-\left[A_1\left(\frac{\partial B_3}{\partial y}-\frac{\partial B_2}{\partial z}\right)+A_2\left(\frac{\partial B_1}{\partial z}-\frac{\partial B_3}{\partial x}\right)+A_3\left(\frac{\partial B_2}{\partial x}-\frac{\partial B_1}{\partial y}\right)\right].$$

$$=\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}.$$

习题6 解答

1. 证明下列矢量场为有势场，并用公式法和不定积分法求其势函数.

(1) $\boldsymbol{A}=y\cos xy\boldsymbol{i}+x\cos xy\boldsymbol{j}+\sin z\boldsymbol{k}$;

(2) $\boldsymbol{A}=(2x\cos y-y^2\sin x)\boldsymbol{i}+(2y\cos x-x^2\sin y)\boldsymbol{j}$.

解 (1) 记 $P=y\cos xy$, $Q=x\cos xy$, $R=\sin z$.

则 $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ P&Q&R\end{vmatrix}$$

$$=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+[(\cos xy-xy\sin xy)-(\cos xy-xy\sin xy)]\boldsymbol{k}$$

$$=\mathbf{0}.$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为有势场. 今用两种方法求其势函数 v:

1° 公式法:

$$v=-\int_0^x P(x,0,0)\,\mathrm{d}x-\int_0^y Q(x,y,0)\,\mathrm{d}y-\int_0^z R(x,y,z)\,\mathrm{d}z+C_1$$

$$=-\int_0^x 0\,\mathrm{d}x-\int_0^y x\cos xy\,\mathrm{d}y-\int_0^z \sin z\,\mathrm{d}z+C_1$$

$$=0-\sin xy+\cos z-1+C_1$$

$$=\cos z-\sin xy+C.$$

2° 不定积分法：

因势函数 v 满足 $\boldsymbol{A} = -\mathbf{grad}\ v$，即有

$$v_x = -y\cos xy,\ v_y = -x\cos xy,\ v_z = -\sin z.$$

将第一个方程对 x 积分，得

$$v = -\sin xy + \varphi(y,z),$$

对 y 求导，得 $\qquad v_y = -x\cos xy + \varphi_y'(y,z).$

与第二个方程比较，知 $\varphi_y'(y,z)=0$，于是 $\varphi(y,z)=\psi(z)$，从而

$$v = -\sin xy + \psi(z).$$

再对 z 求导，得 $\qquad v_z = \psi'(z).$

与第三个方程比较，知 $\psi'(z) = -\sin z$，故 $\psi(z) = \cos z + C$，所以

$$v = \cos z - \sin xy + C.$$

(2) 记 $P = 2x\cos y - y^2\sin x$，$Q = 2y\cos x - x^2\sin y$，$R = 0$.

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

$$= 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + [(-2y\sin x - 2x\sin y) - (-2x\sin y - 2y\sin x)]\boldsymbol{k}$$

$$= \boldsymbol{0},$$

所以 $\boldsymbol{A}$ 为有势场. 今用两种方法求势函数 v：

1° 公式法：

$$v = -\int_0^x P(x,0,0)\,\mathrm{d}x - \int_0^y Q(x,y,0)\,\mathrm{d}y - \int_0^z R(x,y,z)\,\mathrm{d}z + C$$

$$= -\int_0^x 2x\mathrm{d}x - \int_0^y (2y\cos x - x^2\sin y)\,\mathrm{d}y - \int_0^z 0\mathrm{d}z + C$$

$$= -x^2 - y^2\cos x - x^2\cos y + x^2 + C$$

$$= -y^2\cos x - x^2\cos y + C.$$

2° 不定积分法：

因势函数 v 满足 $\boldsymbol{A} = -\mathbf{grad}\ v$，即有

$$v_x = -2x\cos y + y^2\sin x,\ v_y = -2y\cos x + x^2\sin y,\ v_z = 0.$$

将第一个方程对 x 积分，得

$$v=-x^2\cos y-y^2\cos x+\varphi(y,z),$$

对 y 求导，得 $v_y=x^2\sin y-2y\cos x+\varphi'_y(y,z)$，

与第二个方程比较，知 $\varphi'_y(y,z)=0$，于是 $\varphi(y,z)=\psi(z)$，从而

$$v=-x^2\cos y-y^2\cos x+\psi(z).$$

再对 z 求导，得 $\qquad v_z=\psi'(z)$，

与第三个方程比较，知 $\psi'(z)=0$，故 $\psi(z)=C$.

所以 $\qquad v=-x^2\cos y-y^2\cos x+C.$

2. 下列矢量场 $\boldsymbol{A}$ 是否为保守场？若是，计算曲线积分 $\int_l \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$.

(1) $\boldsymbol{A}=(6xy+z^3)\boldsymbol{i}+(3x^2-z)\boldsymbol{j}+(3xz^2-y)\boldsymbol{k}$，$l$ 的起点为 $A(4,0,1)$，终点为 $B(2,1,-1)$；

(2) $\boldsymbol{A}=2xz\boldsymbol{i}+2yz^2\boldsymbol{j}+(x^2+2y^2z-1)\boldsymbol{k}$，$l$ 的起点为 $A(3,0,1)$，终点为 $B(5,-1,3)$.

解

(1) $D\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}6y & 6x & 3z^2\\ 6x & 0 & -1\\ 3z^2 & -1 & 6xz\end{pmatrix}$,

有 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=[(-1)-(-1)]\boldsymbol{i}+(3z^2-3z^2)\boldsymbol{j}+(6x-6x)\boldsymbol{k}=\mathbf{0}$.

故 $\boldsymbol{A}$ 为保守场. 因此，存在 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的原函数 u. 按公式

$$\begin{aligned}u&=\int_0^x P(x,0,0)\,\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y,0)\,\mathrm{d}y+\int_0^z R(x,y,z)\,\mathrm{d}z\\&=\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y 3x^2\,\mathrm{d}y+\int_0^z(3xz^2-y)\,\mathrm{d}z\\&=3x^2y+xz^3-yz,\end{aligned}$$

于是

$$\int_l \boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(3x^2y+xz^3-yz)\Big|_{A(4,0,1)}^{B(2,1,-1)}=7.$$

(2) $D\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2z & 0 & 2x\\ 0 & 2z^2 & 4yz\\ 2x & 4yz & 2y^2\end{pmatrix}$,

有 $$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = (4yz-4yz)\boldsymbol{i} + (2x-2x)\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = \mathbf{0},$$
故 $\boldsymbol{A}$ 为保守场. 因此，存在 $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$ 的原函数 u. 按上面公式有

$$\begin{aligned} u &= \int_0^x 0\,dx + \int_0^y 0\,dy + \int_0^z (x^2+2y^2z-1)\,dz \\ &= x^2z + y^2z^2 - z, \end{aligned}$$

于是

$$\int_l \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l} = (x^2z+y^2z^2-z)\Big|_{A(3,0,1)}^{B(5,-1,3)} = 73.$$

3. 求下列全微分的原函数 u:

(1) $du = (x^2-2yz)dx + (y^2-2xz)dy + (z^2-2xy)dz$;

(2) $du = (3x^2+6xy^2)dx + (6x^2y+4y^3)dy$.

解 由公式

$$u = \int_0^x P(x,0,0)\,dx + \int_0^y Q(x,y,0)\,dy + \int_0^z R(x,y,z)\,dz + C,$$

$$\begin{aligned} (1)\ u &= \int_0^x x^2dx + \int_0^y y^2dy + \int_0^z (z^2-2xy)\,dz + C \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{3}z^3 - 2xyz + C \\ &= \frac{1}{3}(x^3+y^3+z^3) - 2xyz + C. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (2)\ u &= \int_0^x 3x^2dx + \int_0^y (6x^2y+4y^3)\,dy + C \\ &= x^3 + 3x^2y^2 + y^4 + C. \end{aligned}$$

4. 确定常数 a 使 $\boldsymbol{A} = (x+3y)\boldsymbol{i} + (y-2z)\boldsymbol{j} + (x+az)\boldsymbol{k}$ 为管形场.

解 $$\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{A} &= \frac{\partial}{\partial x}(x+3y) + \frac{\partial}{\partial y}(y-2z) + \frac{\partial}{\partial z}(x+az) \\ &= 1+1+a, \end{aligned}$$

由此可见，当 $a=-2$ 时，有 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$，从而场 $\boldsymbol{A}$ 为管形场.

5. 证明 $\mathbf{grad}\,u \times \mathbf{grad}\,v$ 为管形场.

证 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\,u \times \mathbf{grad}\,v)$

$$= \mathbf{grad}\ v \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ u) - \mathbf{grad}\ u \cdot \mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ v)$$
$$= \mathbf{grad}\ v \cdot \mathbf{0} - \mathbf{grad}\ u \cdot \mathbf{0} = 0,$$

所以 $\mathbf{grad}\ u \times \mathbf{grad}\ v$ 为管形场.

6. 求证 $\boldsymbol{A} = (2x^2 + 8xy^2z)\boldsymbol{i} + (3x^3y - 3xy)\boldsymbol{j} - (4y^2z^2 + 2x^3z)\boldsymbol{k}$ 不是管形场，而 $\boldsymbol{B} = xyz^2\boldsymbol{A}$ 是管形场.

证 $\operatorname{div} \boldsymbol{A} = (4x + 8y^2z) + (3x^3 - 3x) - (8y^2z + 2x^3)$
$= x^3 + x \neq 0,$

故 $\boldsymbol{A}$ 不是管形场.

而
$$\begin{aligned}\operatorname{div} xyz^2\boldsymbol{A} &= xyz^2\operatorname{div} \boldsymbol{A} + \mathbf{grad}(xyz^2) \cdot \boldsymbol{A} \\ &= x^4yz^2 + x^2yz^2 + (yz^2\boldsymbol{i} + xz^2\boldsymbol{j} + 2xyz\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{A} \\ &= x^4yz^2 + x^2yz^2 + (2x^2yz^2 + 8xy^3z^3 + 3x^4yz^2 \\ &\quad - 3x^2yz^2 - 8xy^3z^3 - 4x^4yz^2) \\ &= 0,\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{B} = xyz^2\boldsymbol{A}$ 是管形场.

7. 设 $\boldsymbol{B}$ 为无源场 $\boldsymbol{A}$ 的矢势量，$\varphi(x, y, z)$ 为具有二阶连续偏导数的任意函数，证明 $\boldsymbol{B} + \mathbf{grad}\ \varphi$ 亦为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的矢势量.

证 由条件知有 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$，于是有

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}(\boldsymbol{B} + \mathbf{grad}\ \varphi) &= \mathbf{rot}\ \boldsymbol{B} + \mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ \varphi) \\ &= \boldsymbol{A} + \mathbf{0} = \boldsymbol{A},\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{B} + \mathbf{grad}\ \varphi$ 亦为矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的矢势量.

8. 是否存在矢量场 $\boldsymbol{B}$，使得

(1) $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$;

(2) $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B} = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$?

若存在，求出 $\boldsymbol{B}$.

解 (1) 由于 $\operatorname{div}(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = 3 \neq 0$.

故 $x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 不是管形场. 从而不存在矢量场 $\boldsymbol{B}$(即矢势量)使

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{B} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.$$

(2) 由于 $\operatorname{div}(y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}) = 0$.

故 $y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$ 为管形场，从而存在满足

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}=y^2\boldsymbol{i}+z^2\boldsymbol{j}+x^2\boldsymbol{k}$$

的矢量场 $\boldsymbol{B}$(即矢势量). 比如

$$\boldsymbol{B}=U\boldsymbol{i}+V\boldsymbol{j}+W\boldsymbol{k}$$

其中 $$U=\int_{z_0}^{z}z^2\mathrm{d}z-\int_{y_0}^{y}x^2\mathrm{d}y=\frac{1}{3}(z^3-z_0^3)-x^2(y-y_0),$$

$$V=-\int_{z_0}^{z}y^2\mathrm{d}z=-y^2(z-z_0),$$

$$W=C,$$

即 $$\boldsymbol{B}=\left[\frac{1}{3}(z^3-z_0^3)-x^2(y-y_0)\right]\boldsymbol{i}-y^2(z-z_0)\boldsymbol{j}+C\boldsymbol{k},$$

其中(x_0,y_0,z_0)为场中任一点，C 为任意常数.

9. 证明矢量场

$$\boldsymbol{A}=(2x+y)\boldsymbol{i}+(4y+x+2z)\boldsymbol{j}+(2y-6z)\boldsymbol{k}$$

为调和场，并求出场中的一个调和函数.

解 $$D\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&1&0\\1&4&2\\0&2&-6\end{pmatrix},$$

有 $$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=2+4-6=0,$$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=(2-2)\boldsymbol{i}+(0-0)\boldsymbol{j}+(1-1)\boldsymbol{k}=\mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为调和场. 其调和函数 u 由公式有

$$u=\int_0^x P(x,0,0)\mathrm{d}x+\int_0^y Q(x,y,0)\mathrm{d}y+\int_0^z R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$=\int_0^x 2x\mathrm{d}x+\int_0^y(4y+x)\mathrm{d}y+\int_0^z(2y-6z)\mathrm{d}z$$

$$=x^2+2y^2+xy+2yz-3z^2.$$

10. 已知 $u=3x^2z-y^2z^3+4x^3y+2x-3y-5$，求 Δu.

[提示:$\Delta u=\mathrm{div}(\mathbf{grad}\,u)$.]

解 $$\mathbf{grad}\,u=(6xz+12x^2y+2)\boldsymbol{i}+(-2yz^3+4x^3-3)\boldsymbol{j}+(3x^2-3y^2z^2)\boldsymbol{k},$$

则
$$\begin{aligned}\Delta u &= \operatorname{div}(\mathbf{grad}\ u)\\ &= 6z + 24xy - 2z^3 - 6y^2 z.\end{aligned}$$

11. 若函数 $\varphi(x,y,z)$ 满足拉普拉斯方程 $\Delta\varphi = 0$，证明梯度场 $\mathbf{grad}\ \varphi$ 为调和场.

证 由所给条件有 $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\ \varphi) = \Delta\varphi = 0$.
又根据旋度运算的基本公式，有
$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ \varphi) = \mathbf{0},$$
所以梯度场 $\mathbf{grad}\ \varphi$ 为调和场.

12. 设 r 为矢径 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ 的模，证明

（1）$\Delta(\ln r) = \dfrac{1}{r^2}$;

（2）$\Delta r^n = n(n+1)r^{n-2}$ （n 为常数）.

证 （1）$\mathbf{grad}(\ln r) = \dfrac{1}{r}\mathbf{grad}\ r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r^2}$,
$$\begin{aligned}\Delta(\ln r) &= \operatorname{div}[\mathbf{grad}(\ln r)] = \operatorname{div}\frac{\boldsymbol{r}}{r^2}\\ &= \frac{1}{r^2}\operatorname{div}\boldsymbol{r} + \mathbf{grad}\frac{1}{r^2}\cdot\boldsymbol{r}\\ &= \frac{3}{r^2} - 2r^{-4}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}) = \frac{1}{r^2}.\end{aligned}$$

（2）$\mathbf{grad}\ r^n = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$,
$$\begin{aligned}\Delta r^n &= \operatorname{div}(\mathbf{grad}\ r^n) = \operatorname{div}\ nr^{n-2}\boldsymbol{r}\\ &= nr^{n-2}\operatorname{div}\boldsymbol{r} + \mathbf{grad}(nr^{n-2})\cdot\boldsymbol{r}\\ &= 3nr^{n-2} + n(n-2)r^{n-4}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})\\ &= [3n + n(n-2)]r^{n-2} = n(n+1)r^{n-2}.\end{aligned}$$

13. 试证矢量场 $\boldsymbol{A} = -2y\boldsymbol{i} - 2x\boldsymbol{j}$ 为平面调和场，并且

（1）求出场的力函数 u 和势函数 v;

（2）画出场的力线与等势线的示意图.

证 记 $P = -2y$，$Q = -2x$，则有

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}=0+0=0,$$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=0\boldsymbol{k}=\mathbf{0}\ ,$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为平面调和场.

(1) 由公式，并取其中$(x_0,y_0)=(0,0)$，则

$$\text{势函数 } v=-\int_0^x P(x,0)\,\mathrm{d}x-\int_0^y Q(x,y)\,\mathrm{d}y+C$$

$$=-\int_0^x 0\,\mathrm{d}x+\int_0^y 2x\,\mathrm{d}y+C=2xy+C,$$

$$\text{力函数 } u=\int_0^x -Q(x,0)\,\mathrm{d}x+\int_0^y P(x,y)\,\mathrm{d}y+C'$$

$$=\int_0^x 2x\,\mathrm{d}x-\int_0^y 2y\,\mathrm{d}y=x^2-y^2+C'.$$

(2) 分别令 u 与 v 等于常数，就得到

力线方程 $\qquad x^2-y^2=C_1,$

等势线方程 $\qquad xy=C_2.$

二者均为双曲线族，但对称轴相差$\frac{\pi}{4}$角.

如图 9 所示.

14. 已知平面调和场的力函数 $u=x^2-y^2+xy$，求场的势函数 v 及场矢量 $\boldsymbol{A}$.

解 力函数 u 与势函数 v 之间满足如下关系：

$$u_x=v_y,\ \ u_y=-v_x.$$

由 $$v_y=u_x=2x+y,$$

有 $$v=\int(2x+y)\,\mathrm{d}y=2xy+\frac{1}{2}y^2+\varphi(x),$$

由此 $$v_x=2y+\varphi'(x).$$

又由于 $$v_x=-u_y=2y-x,$$

与前式相比，即知 $\varphi'(x)=-x$，所以 $\varphi(x)=-\frac{1}{2}x^2+C$,

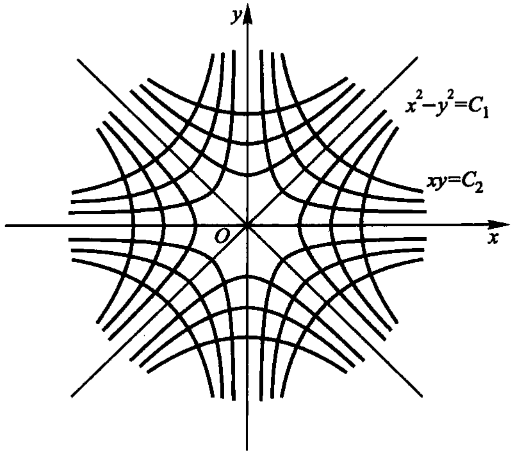

图 9

从而得势函数 $$v=2xy+\frac{1}{2}(y^2-x^2)+C.$$

于是，场矢量

$$\boldsymbol{A}=-\mathbf{grad}\ v=(x-2y)\boldsymbol{i}-(2x+y)\boldsymbol{j}.$$

第三章　哈密顿算子∇

一、内 容 释 要

1. 哈密顿算子

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

是一个矢性微分算子. 就是说，它在运算中具有矢量和微分的双重性质. 其运算规则是：

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k};$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z};$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

由此可见，场论中的三个度，即梯度、散度、旋度正好可用算子∇表示为：

$$\mathbf{grad}\ u = \nabla u, \quad \mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \nabla \cdot \boldsymbol{A}, \quad \mathbf{rot}\ \boldsymbol{A} = \nabla \times \boldsymbol{A},$$

从而场论中的一些相关公式，也可以通过算子来表示.

此外，为了在某些公式中使用方便，又用∇引进了一个数性微分算子：

$$\boldsymbol{A} \cdot \nabla = A_x \frac{\partial}{\partial x} + A_y \frac{\partial}{\partial y} + A_z \frac{\partial}{\partial z},$$

其运算规则是：

$$(\boldsymbol{A} \cdot \nabla)u = A_x \frac{\partial u}{\partial x} + A_y \frac{\partial u}{\partial y} + A_z \frac{\partial u}{\partial z} = \boldsymbol{A} \cdot \nabla u,$$

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=A_x\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial x}+A_y\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial y}+A_z\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial z}.$$

注意：这里的 $\boldsymbol{A}\cdot\nabla$ 与上面的 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 是完全不同的.

2. 教材把场论中的一些常见公式用算子 ∇ 表示，并将其汇集列出，以便于查用. 对此，读者应注意如下几组公式：

(1) 公式(1)～公式(11)

其中第(1)～(8)为最基本的公式；而第(9)～(11)则是比较常用的.

(2) 公式(15)～公式(17)

其中公式(15)表示

$$\mathrm{div}(\mathbf{grad}\ u)=\Delta u,$$

说明"梯度场的散度就是调和量". 而公式(16)与公式(17)分别表示

$$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\ u)=\mathbf{0}\quad 和\quad \mathrm{div}(\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A})=0,$$

这说明"梯度场无旋"与"旋度场无源". 我们应注意这些意义.

(3) 公式(19)～公式(21)

这是一组关于矢径 $\boldsymbol{r}$ 的基本公式，是常常用到的.

此外，公式(27)和公式(28)是奥氏公式与斯托克斯公式用算子 ∇ 表达的矢量形式，自然应当熟悉它. 其余的公式，可在必要时查用.

3. 关于算子 ∇ 的一些公式，严格说来，都应该根据 ∇ 的定义及其运算规则来一个一个地加以证明，但教材鉴于这些公式早已被严格证明过了，故就避其琐赘而从略.

然而教材为了帮助读者掌握好公式，又通过例 1～例 4 介绍了一种对公式的简易推导法，这种方法虽不是很严格，但用它得到的结果都是正确的，因而是一种可取的简易方法.

4. 教材在本章末通过例 8 介绍了三个格林公式：

格林第一公式：$\displaystyle\oint\!\!\!\!\oint_S u\,\nabla v\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega(\nabla v\cdot\nabla u+u\Delta v)\,\mathrm{d}V.$

格林第二公式：$\oint\!\!\!\!\oint_S (u\,\nabla v - v\,\nabla u)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}V.$

格林第三公式：$\oint\!\!\!\!\oint_S u\,\nabla u\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_\Omega [(\nabla u)^2 + u\Delta u]\,\mathrm{d}V.$

这三个公式，亦宜加注意.

二、解 题 示 例

例 1 证明：

(1) $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)(u\boldsymbol{C}) = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla u)\boldsymbol{C}$ （$\boldsymbol{C}$ 为常矢）；

(2) $(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} = (\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_x)\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_y)\boldsymbol{j} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_z)\boldsymbol{k}.$

证 (1)
$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)(u\boldsymbol{C}) &= A_x\frac{\partial u\boldsymbol{C}}{\partial x} + A_y\frac{\partial u\boldsymbol{C}}{\partial y} + A_z\frac{\partial u\boldsymbol{C}}{\partial z}\\
&= \left(A_x\frac{\partial u}{\partial x} + A_y\frac{\partial u}{\partial y} + A_z\frac{\partial u}{\partial z}\right)\boldsymbol{C}\\
&= (\boldsymbol{A}\cdot\nabla u)\boldsymbol{C}.
\end{aligned}
$$

(2)
$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B} &= (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)(B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k})\\
&= (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)(B_x\boldsymbol{i}) + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)(B_y\boldsymbol{j})\\
&\quad + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla)(B_z\boldsymbol{k})\\
&\xlongequal{\text{(由(1)知)}} (\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_x)\boldsymbol{i} + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_y)\boldsymbol{j}\\
&\quad + (\boldsymbol{A}\cdot\nabla B_z)\boldsymbol{k}.
\end{aligned}
$$

例 2 设 $u = x^2yz$，$v = x^2 + y^2 - z^2$，计算

(1) $\nabla\cdot(\nabla u\times\nabla v)$；　　(2) $\nabla\times(\nabla u\times\nabla v)$.

解

$$
\begin{aligned}
\nabla u\times\nabla v &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2xyz & x^2z & x^2y\\ 2x & 2y & -2z \end{vmatrix}\\
&= (-2x^2z^2 - 2x^2y^2)\boldsymbol{i} + (2x^3y + 4xyz^2)\boldsymbol{j}\\
&\quad + (4xy^2z - 2x^3z)\boldsymbol{k},
\end{aligned}
$$

$$D(\nabla u\times\nabla v)=\begin{pmatrix}-4xz^2-4xy^2 & -4x^2y & -4x^2z\\ 6x^2y+4yz^2 & 2x^3+4xz^2 & 8xyz\\ 4y^2z-6x^2z & 8xyz & 4xy^2-2x^3\end{pmatrix},$$

于是有

(1) $\nabla\cdot(\nabla u\times\nabla v)=-4xz^2-4xy^2+2x^3+4xz^2+4xy^2-2x^3=0;$

(2) $$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla u\times\nabla v)&=0\boldsymbol{i}+(-4x^2z-4y^2z+6x^2z)\boldsymbol{j}\\&\quad+(6x^2y+4yz^2+4x^2y)\boldsymbol{k}\\&=0\boldsymbol{i}+2z(x^2-2y^2)\boldsymbol{j}\\&\quad+2y(5x^2+2z^2)\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

例 3 已知速度$\boldsymbol{v}(x,y,z,t)$，其中 x，y，z 为点的坐标，且都是时间 t 的函数，证明

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}.$$

证 $$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}&=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial z}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\\&=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial y}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\frac{\partial}{\partial z}\right)\boldsymbol{v}.\end{aligned}$$

由于 $$\boldsymbol{v}=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i}+\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j}+\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k},$$

故 $$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\boldsymbol{v}}{\partial t}+(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}.$$

例 4 若 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 均为调和场，证明

$$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}[\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})].$$

证 由条件知有$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0$及$\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$. 于是由公式(12)及公式(14)有

$$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})&=\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}\\&=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A},\end{aligned}$$

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$$
$$=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}.$$

将此二式相减，得

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=2(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B},$$

即 $$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}=\frac{1}{2}[\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})-\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})].$$

例 5 已知函数 u 满足 $(\nabla u)^2=4u$ 和 $\nabla\cdot(u\nabla u)=10u$，计算曲面积分

$$\oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S,$$

其中 S 为中心在原点的单位球面，$\frac{\partial u}{\partial n}$ 为 u 沿 S 的向外单位法矢 $\boldsymbol{n}$ 的方向导数.

解 $$\nabla\cdot(u\nabla u)=u\,\nabla\cdot\nabla\,u+\nabla u\cdot\nabla u$$
$$=u\Delta u+(\nabla u)^2.$$

按已知条件，此式成为

$$10u=u\Delta u+4u,$$

即 $$\Delta u=6.$$

依此 $$\oint\!\!\!\oint_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_S \nabla u\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oint\!\!\!\oint_S \nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$
$$\xlongequal{\text{(由奥氏公式)}}\iiint_\Omega \nabla\cdot\nabla u\mathrm{d}V$$
$$=\iiint_\Omega \Delta u\mathrm{d}V$$
$$=\iiint_\Omega 6\mathrm{d}V=6\times\frac{4}{3}\pi=8\pi.$$

例 6 设 $\boldsymbol{n}$ 为闭曲面 S 的向外单位法矢. 证明

(1) $\oint\!\!\!\oint_S u\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega[u\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla u\cdot\boldsymbol{A}]\mathrm{d}V;$

(2) $\oint\!\!\!\oint_S(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega[\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$

$$-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})]\mathrm{d}V.$$

证 (1) $\displaystyle\oiint_S u\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oiint_S u\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

$$\xlongequal{(\text{由奥氏公式})}\iiint_\Omega \nabla\cdot(u\boldsymbol{A})\mathrm{d}V$$

$$\xlongequal{\text{由公式(10)}}\iiint_\Omega[u\,\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla u\cdot\boldsymbol{A}]\mathrm{d}V.$$

(2) $\displaystyle\oiint_S(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\oiint_S(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$

$$\xlongequal{(\text{由奥氏公式})}\iiint_\Omega \nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\mathrm{d}V$$

$$\xlongequal{\text{由公式(13)}}\iiint_\Omega[\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

$$-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})]\mathrm{d}V.$$

例 7 证明 $\displaystyle\oint_l u\mathrm{d}v=\iint_S(\nabla u\times\nabla v)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S,$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为曲面 S 上的单位法矢，l 为 S 的有向边界曲线，其正向与 $\boldsymbol{n}$ 符合右手法则，u 和 v 都是点 M 的函数.

证 由于 $\mathrm{d}v=\dfrac{\partial v}{\partial x}\mathrm{d}x+\dfrac{\partial v}{\partial y}\mathrm{d}y+\dfrac{\partial v}{\partial z}\mathrm{d}z=\nabla v\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l},$

故 $\displaystyle\oint_l u\mathrm{d}v=\oint_l u\nabla v\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$

$$\xlongequal{(\text{由斯托克斯公式})}\iint_S\nabla\times(u\nabla v)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\iint_S[u(\nabla\times\nabla v)+\nabla u\times\nabla v]\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\iint_S(\boldsymbol{0}+\nabla u\times\nabla v)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$=\iint_S(\nabla u\times\nabla v)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S.$$

例 8 设 S 为区域 Ω 的边界曲面，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的向外单位法矢，

若 $\boldsymbol{F}$ 和 $\boldsymbol{G}$ 在 Ω 中满足

$$\nabla\cdot\boldsymbol{F}=\nabla\cdot\boldsymbol{G},\qquad \nabla\times\boldsymbol{F}=\nabla\times\boldsymbol{G},$$

且在 S 上满足 $\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}=\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n}$,

证明在 Ω 中有 $\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}$.

证 令 $\boldsymbol{H}=\boldsymbol{F}-\boldsymbol{G}$, 则有

$$\nabla\times\boldsymbol{H}=\nabla\times\boldsymbol{F}-\nabla\times\boldsymbol{G}=\boldsymbol{0},$$

故存在函数 f 满足 $\boldsymbol{H}=\nabla f$.

又 $$\nabla\cdot\boldsymbol{H}=\nabla\cdot\boldsymbol{F}-\nabla\cdot\boldsymbol{G}=0,$$

即 $$\nabla\cdot\nabla f=0\quad 或\quad \Delta f=0.$$

由格林第三公式

$$\oiint_S u\nabla u\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega[(\nabla u)^2+u\Delta u]\mathrm{d}V$$

在其中取 $u=f$, 则有

$$\oiint_S(f\nabla f)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega[(\nabla f)^2+f\Delta f]\mathrm{d}V$$

或 $$\oiint_S(f\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}S=\iiint_\Omega(\boldsymbol{H})^2\mathrm{d}V.$$

由于 $$(f\boldsymbol{H})\cdot\boldsymbol{n}=f(\boldsymbol{H}\cdot\boldsymbol{n})=f(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}-\boldsymbol{G}\cdot\boldsymbol{n})=0,$$

故有 $\iiint_\Omega(\boldsymbol{H})^2\mathrm{d}V=0$,从而在 Ω 中有

$$(\boldsymbol{H})^2=0,\ 即\ \boldsymbol{H}=\boldsymbol{0},$$

或 $$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{G}.$$

三、习 题 全 解

习题 7 解答

1. 证明 $\nabla\times(u\boldsymbol{A})=u\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla u\times\boldsymbol{A}$.

证 $$\nabla\times(u\boldsymbol{A})=\nabla\times(u_c\boldsymbol{A})+\nabla\times(u\boldsymbol{A}_c),$$

其中 $$\nabla\times(u_c\boldsymbol{A})=u_c\nabla\times\boldsymbol{A}=u\nabla\times\boldsymbol{A},$$
$$\nabla\times(u\boldsymbol{A}_c)=\nabla u\times\boldsymbol{A}_c=\nabla u\times\boldsymbol{A},$$
所以 $$\nabla\times(u\boldsymbol{A})=u\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla u\times\boldsymbol{A}.$$

2. 证明$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$.

[提示:$\boldsymbol{c}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{b})$.]

证 $$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\nabla(\boldsymbol{A}_c\cdot\boldsymbol{B})+\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_c).$$
按提示 $$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}_c\cdot\boldsymbol{B})&=(\boldsymbol{A}_c\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}_c\times(\nabla\times\boldsymbol{B})\\&=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B}),\end{aligned}$$
$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}_c)=\nabla(\boldsymbol{B}_c\cdot\boldsymbol{A})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}),$$
所以 $$\begin{aligned}\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=&\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}\\&+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}.\end{aligned}$$

3. 证明$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}=\dfrac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{A})^2-\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$.

证 在上题中，令$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}$，得
$$\nabla(\boldsymbol{A})^2=2[\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})]+2(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A},$$
移项即得 $$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}=\frac{1}{2}\nabla(\boldsymbol{A})^2-\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{A}).$$

4. 证明$(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)u=\boldsymbol{A}\cdot\nabla u$.

证 $$\begin{aligned}(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)u&=A_x\frac{\partial u}{\partial x}+A_y\frac{\partial u}{\partial y}+A_z\frac{\partial u}{\partial z}\\&=(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k})\cdot\left(\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\\&=\boldsymbol{A}\cdot\nabla u.\end{aligned}$$

5. 证明 $\Delta(uv)=u\Delta v+v\Delta u+2\nabla u\cdot\nabla v$.

证 $$\begin{aligned}\Delta(uv)&=\nabla\cdot[\nabla(uv)]=\nabla\cdot[u\nabla v+v\nabla u]\\&=\nabla\cdot[u_c\nabla v]+\nabla\cdot[u(\nabla v)_c]\\&\quad+\nabla\cdot[v_c\nabla u]+\nabla\cdot[v(\nabla u)_c]\\&=u_c\nabla^2v+\nabla u\cdot(\nabla v)_c+v_c\nabla^2u\end{aligned}$$

$$+\nabla v\cdot(\nabla u)_c$$
$$=u\Delta v+v\Delta u+2\,\nabla u\cdot\nabla v.$$

6. 设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为常矢，$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$，证明

(1) $\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$；

(2) $\nabla\cdot(r\boldsymbol{a})=\dfrac{1}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})$；

(3) $\nabla\times(r\boldsymbol{a})=\dfrac{1}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})$；

(4) $\nabla\times[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$；

(5) $\nabla\left(|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}|^2\right)=2[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}]$.

[提示：利用拉格朗日恒等式：$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot(\boldsymbol{c}\times\boldsymbol{d})=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{c})\cdot(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{d})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{d})(\boldsymbol{b}\cdot\boldsymbol{c})$.]

证 (1) 设 $\boldsymbol{a}=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}$，则

$$\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})=\nabla(xa_x+ya_y+za_z)=a_x\boldsymbol{i}+a_y\boldsymbol{j}+a_z\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}.$$

(2) $\nabla\cdot(r\boldsymbol{a})=\nabla r\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{r}\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{r}(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})$.

(3) $\nabla\times(r\boldsymbol{a})=\nabla r\times\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{r}\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a}=\dfrac{1}{r}(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{a})$.

(4) $\nabla\times[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\times\boldsymbol{b}$.

由(1)知 $\nabla(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})=\boldsymbol{a}$，所以有

$$\nabla\times[(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}.$$

(5)
$$\begin{aligned}\nabla\left(|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}|^2\right)&=\nabla[(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r})]\\&\xlongequal{\text{(按提示)}}\nabla[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})(\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r})-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})^2]\\&=\nabla[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})r^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})^2]\\&=(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\nabla r^2-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\\&\xlongequal{\text{由(1)知}}2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})r\frac{\boldsymbol{r}}{r}-2(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}\\&=2[(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})\boldsymbol{r}-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r})\boldsymbol{a}].\end{aligned}$$

*7. 已知函数 u 与无源场 $\boldsymbol{A}$ 分别满足：

$$\Delta u = F\ (x,\ y,\ z),$$
$$\Delta \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{G}(x,y,z).$$

求证 $\boldsymbol{B} = \nabla u + \nabla \times \boldsymbol{A}$ 满足如下方程组：

$$\begin{cases} \nabla \cdot \boldsymbol{B} = F(x,y,z), \\ \nabla \times \boldsymbol{B} = \boldsymbol{G}(x,y,z). \end{cases}$$

证 $\nabla \cdot \boldsymbol{B} = \nabla \cdot (\nabla u + \nabla \times \boldsymbol{A}) = \Delta u + \nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A})$

$$\xlongequal{\text{(旋度场无源)}} \Delta u + 0 = F(x,y,z),$$

$$\nabla \times \boldsymbol{B} = \nabla \times (\nabla u + \nabla \times \boldsymbol{A}) = \nabla \times (\nabla u) + \nabla \times (\nabla \times \boldsymbol{A})$$

$$\xlongequal{\text{(梯度场无旋,及公式(18))}} \boldsymbol{0} + \nabla(\nabla \cdot \boldsymbol{A}) - \Delta \boldsymbol{A}$$

$$\xlongequal{(\boldsymbol{A}\text{ 为无源场})} \boldsymbol{0} + \boldsymbol{0} - \Delta \boldsymbol{A}$$

$$= \boldsymbol{G}(x,y,z).$$

*8. 设 S 为区域 Ω 的边界曲面，$\boldsymbol{n}$ 为 S 的向外单位法矢量，f 与 g 均为 Ω 中的调和函数，证明

(1) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S f\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S = \iiint_\Omega |\nabla f|^2 \mathrm{d}V$;

(2) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint_S g\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S.$

证 (1) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S f\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint_S f\nabla f \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint_S f\nabla f \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$

$$\xlongequal{\text{(由格林第三公式)}} \iiint_\Omega (\nabla f \cdot \nabla f + f\Delta f)\mathrm{d}V$$

$$\xlongequal{(f\text{ 为调和函数})} \iiint_\Omega (\nabla f \cdot \nabla f + 0)\mathrm{d}V$$

$$= \iiint_\Omega |\nabla f|^2 \mathrm{d}V.$$

(2) $\displaystyle\oint\!\!\!\oint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}S - \oint\!\!\!\oint_S g\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S = \oint\!\!\!\oint_S (f\nabla g - g\nabla f) \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}S$

$$= \oiint_S (f\nabla g - g\nabla f)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S}$$

$$\xlongequal{\text{(由格林第二公式)}} \iiint_\Omega (f\Delta g - g\Delta f)\,\mathrm{d}V$$

$$\xlongequal{(f,g\text{ 均为调和函数})} \iiint_\Omega 0\,\mathrm{d}V = 0,$$

所以

$$\oiint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\mathrm{d}S = \oiint_S g\frac{\partial f}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

第四章　梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线坐标系中的表示式

一、内容释要

1. 本章首先介绍的，是如下几个概念：

(1) 空间点的曲线坐标(q_1,q_2,q_3)，它们都是空间点的直角坐标(x,y,z)的单值函数

$$q_1=q_1(x,y,z),\quad q_2=q_2(x,y,z),\quad q_3=q_3(x,y,z).$$

反之，(x,y,z)也都是(q_1,q_2,q_3)的单值函数.

(2) 上面三个函数的等值面，叫做**坐标曲面**，共三族：

$$q_1(x,y,z)=C_1,\quad q_2(x,y,z)=C_2,\quad q_3(x,y,z)=C_3.$$

空间里的每一点，每族坐标曲面中，都有且仅有一块坐标曲面经过.

(3) 在各族坐标曲面之间，两两相交而成的曲线，叫做**坐标曲线**，也是三族：

$$\begin{cases}q_2(x,y,z)=C_2,\\q_3(x,y,z)=C_3,\end{cases}\quad \begin{cases}q_1(x,y,z)=C_1,\\q_3(x,y,z)=C_3,\end{cases}\quad \begin{cases}q_1(x,y,z)=C_1,\\q_2(x,y,z)=C_2,\end{cases}$$

依次叫做坐标曲线 q_1，坐标曲线 q_2，坐标曲线 q_3. 或简称为 q_1 曲线，q_2 曲线，q_3 曲线. 显然，空间里的每一点，每族坐标曲线中都有且仅有一条坐标曲线通过.

(4) 矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 依次表示坐标曲线 q_1，q_2，q_3 上的切线单位矢量. 在正交曲线坐标系中，在空间任一点 M 处它们是互相正交的，而且还构成右手坐标制. 宜注意的是，它们的方向是随点 M 的变化而变化的. 因此，它们是点 M 的矢性函数，而

不是常矢.

(5) 在正交曲线坐标系中，在一点 M 处的任一矢量 $\boldsymbol{A}$，都可以表示为

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3.$$

2. 在正交曲线坐标系中，一条曲线在其上一点处的弧微分 $\mathrm{d}s$ 与通过该点的三条坐标曲线的弧微分 $\mathrm{d}s_1$，$\mathrm{d}s_2$，$\mathrm{d}s_3$ 之间有如下关系

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}s_1^2+\mathrm{d}s_2^2+\mathrm{d}s_3^2,$$

其中
$$\mathrm{d}s_i=H_i\mathrm{d}q_i \quad (i=1,2,3),$$

$$H_i=\sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (i=1,2,3)$$

叫做拉梅系数(亦称度规因子或尺度因子).

由此又可得到正交曲线坐标系中的体积元素

$$\mathrm{d}V=\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3=H_1H_2H_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3$$

和面积元素

$$\mathrm{d}s_{12}=\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2=H_1H_2\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2,$$

$$\mathrm{d}s_{13}=\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_3=H_1H_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_3,$$

$$\mathrm{d}s_{23}=\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3=H_2H_3\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3.$$

此外，还应注意到直角坐标(x,y,z)与正交曲线坐标(q_1,q_2,q_3)的微分之间，有如下关系：

$$\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2=H_1^2\mathrm{d}q_1^2+H_2^2\mathrm{d}q_2^2+H_3^2\mathrm{d}q_3^2.$$

据此，常常可以比较方便地求出拉梅系数来.

另外，我们还看到，在坐标系为正交的条件下，关系式

$$\mathrm{d}s^2=\mathrm{d}s_1^2+\mathrm{d}s_2^2+\mathrm{d}s_3^2$$

表明 $\mathrm{d}s_i=\mathrm{d}s$ 在单位矢量 $\boldsymbol{e}_i$ 方向上的投影$(i=1,2,3)$.

3. 正交曲线坐标系中，在空间的同一点处的两个矢量

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3,\ \boldsymbol{B}=B_1\boldsymbol{e}_1+B_2\boldsymbol{e}_2+B_3\boldsymbol{e}_3,$$

其数量积与矢量积，都有类似于它们在直角坐标系中的表达式：

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_1B_1+A_2B_2+A_3B_3,$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}&=(A_2B_3-A_3B_2)\boldsymbol{e}_1+(A_3B_1-A_1B_3)\boldsymbol{e}_2+(A_1B_2-A_2B_1)\boldsymbol{e}_3\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_1&\boldsymbol{e}_2&\boldsymbol{e}_3\\A_1&A_2&A_3\\B_1&B_2&B_3\end{vmatrix}.\end{aligned}$$

这是因为，在曲线坐标系为正交的条件下，矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 与矢量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 有类似的如下性质：

(1) $\boldsymbol{e}_i\cdot\boldsymbol{e}_j=\begin{cases}1, & i=j,\\0, & i\neq j\end{cases}\quad(i,j=1,2,3).$

(2) $\boldsymbol{e}_i\times\boldsymbol{e}_i=\boldsymbol{0}\quad(i=1,2,3).$

(3) $\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2=\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1=\boldsymbol{e}_2$，

$\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_1=-\boldsymbol{e}_3$，$\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_2=-\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_3=-\boldsymbol{e}_2$.

据此，就可以仿照直角坐标系中的方法推出上述表达式.

如果在同一点处，除矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$ 外，还有一个矢量

$$\boldsymbol{C}=C_1\boldsymbol{e}_1+C_2\boldsymbol{e}_2+C_3\boldsymbol{e}_3,$$

则亦可推出这三个矢量 $\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{C}$ 的混合积，仍有类似于其在直角坐标系中的表达式：

$$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}A_1&A_2&A_3\\B_1&B_2&B_3\\C_1&C_2&C_3\end{vmatrix}.$$

4. 本章后面推出了梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线坐标系中的表示式. 在此基础上，又推出了它们在比较常用的柱面坐标系和球面坐标系中的表示式.

同时，为了在正交曲线坐标系中便于散度和旋度的计算，又引出了矢量场 $\boldsymbol{A}$ 的广义雅可比矩阵 $G\boldsymbol{A}$. 它是直角坐标系中的雅可比矩阵 $D\boldsymbol{A}$ 在正交曲线坐标系中的推广，它涵盖了 $D\boldsymbol{A}$. 因为，当正交曲线坐标系成为直角坐标系时，各拉梅系数 $H_i(i=1,2,3)$ 均为 1，此时，$G\boldsymbol{A}$ 就成为 $D\boldsymbol{A}$ 了.

5. 本章最后又介绍了在正交曲线坐标系中的势函数、全微分求积、保守场中的曲线积分和矢势量等. 其中的一个重要部分，就是介绍在有势场 $\boldsymbol{A}$ 中，用来计算满足 $\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\ u$ 的函数 u 的公式：

$$u=\int_{Q_1}^{q_1}F_1(q_1,Q_2,Q_3)\,\mathrm{d}q_1+\int_{Q_2}^{q_2}F_2(q_1,q_2,Q_3)\,\mathrm{d}q_2$$

$$+\int_{Q_3}^{q_3}F_3(q_1,q_2,q_3)\,\mathrm{d}q_3+C. \tag{4.1}$$

由于教材上对此公式未作出推证. 这里，我们来给出其推证过程，以资参阅.

在正交曲线坐标系中，设

$$\boldsymbol{A}=A_1(q_1,q_2,q_3)\boldsymbol{e}_1+A_2(q_1,q_2,q_3)\boldsymbol{e}_2+A_3(q_1,q_2,q_3)\boldsymbol{e}_3$$

为线单连域内的有势场，则存在函数 u 满足 $\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\ u$. 现在来求此函数 u：

由于在线单连域内的有势场为保守场，故场中的曲线积分 $\int_{\overset{\frown}{M_0M}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 与路径无关. 当起点 $M_0(Q_1,Q_2,Q_3)$ 固定时，积分之值就是其终点 $M(q_1,q_2,q_3)$ 的函数. 记作 $u=u(M)$. 即

$$u=\int_{M_0}^{M}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l},$$

其中 $\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\boldsymbol{\tau}\mathrm{d}s$（$\boldsymbol{\tau}$ 为曲线的切向单位矢量，$\mathrm{d}s$ 为曲线的弧微分），它在正交曲线坐标系中的表示式为

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\boldsymbol{l}&=\mathrm{d}s_1\boldsymbol{e}_1+\mathrm{d}s_2\boldsymbol{e}_2+\mathrm{d}s_3\boldsymbol{e}_3\\&=H_1\mathrm{d}q_1\boldsymbol{e}_1+H_2\mathrm{d}q_2\boldsymbol{e}_2+H_3\mathrm{d}q_3\boldsymbol{e}_3,\end{aligned}$$

H_1，H_2，H_3 为坐标系的拉梅系数. 于是

$$u=\int_{M_0}^{M}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{M_0}^{M}F_1\mathrm{d}q_1+F_2\mathrm{d}q_2+F_3\mathrm{d}q_3, \tag{$*$}$$

其中 $F_1=A_1H_1$，$F_2=A_2H_2$，$F_3=A_3H_3$.

下面来证明此函数满足 $\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\ u$，即满足

$$A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3=\frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1+\frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2+\frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3.$$

可见，只要证明

$$\frac{\partial u}{\partial q_1}=H_1A_1=F_1,\quad \frac{\partial u}{\partial q_2}=H_2A_2=F_2,\quad \frac{\partial u}{\partial q_3}=H_3A_3=F_3$$

即可. 今先证其中第一个等式. 为此，我们保持终点 $M(q_1,q_2,q_3)$ 中的 q_2，q_3 坐标不动，而给 q_1 坐标以增量 Δq_1，得到一个新点 $N(q_1+\Delta q_1,q_2,q_3)$，于是有

$$\Delta u=u(N)-u(M)=\int_M^N \boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$$

$$=\int_{(q_1,q_2,q_3)}^{(q_1+\Delta q_1,q_2,q_3)} F_1\mathrm{d}q_1+F_2\mathrm{d}q_2+F_3\mathrm{d}q_3.$$

因积分与路径无关，故此积分可选取沿 q_1 曲线上的弧段$\widehat{MN}$进行. 这时 q_2，q_3 均为常数，从而 $\mathrm{d}q_2=\mathrm{d}q_3=0$. 于是

$$\Delta u=\int_{(q_1,q_2,q_3)}^{(q_1+\Delta q_1,q_2,q_3)} F_1(q_1,q_2,q_3)\mathrm{d}q_1.$$

按积分中值定理，有

$$\Delta u=F_1(q_1+\theta\Delta q_1,q_2,q_3)\Delta q_1\quad(0\leqslant\theta\leqslant1),$$

两端除以 Δq_1 后，令 $\Delta q_1\to0$ 而取极值，即得

$$\frac{\partial u}{\partial q_1}=F_1(q_1,q_2,q_3).$$

同理可得

$$\frac{\partial u}{\partial q_2}=F_2,\quad \frac{\partial u}{\partial q_3}=F_3.$$

这说明在有势场中，（ * ）式就是一个计算函数 u 的公式. 它是一个与路径无关的曲线积分. 一般为了便于计算，将其积分路线选取为沿每段均为坐标曲线的分段曲线弧段$\widehat{M_0RSM}$. 如图 10. 其中$\widehat{M_0R}$在 q_1 曲线上，$\widehat{RS}$在 q_2 曲线上，$\widehat{SM}$在 q_3

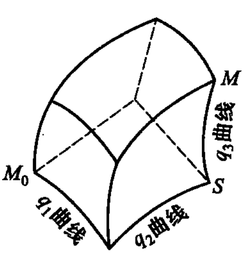

图 10

曲线上. 这样(*)式就转化成为如下的定积分了：

$$u=\int_{Q_1}^{q_1}F_1(q_1,Q_2,Q_3)\mathrm{d}q_1+\int_{Q_2}^{q_2}F_2(q_1,q_2,Q_3)\mathrm{d}q_2$$

$$+\int_{Q_3}^{q_3}F_3(q_1,q_2,q_3)\mathrm{d}q_3\,.$$

在此积分后面加一个任意常数 C，就得到教材上的(4.1)式. 它表示函数 u 的全体. 再令 $v=-u$，就得到场的全体势函数.

二、解 题 示 例

例 1 在柱面坐标系中，已知$\frac{\partial f}{\partial z}=1$，且当 $\varphi=\frac{\pi}{2}$时 $f=z$，求函数 f 使 $\boldsymbol{A}=\rho\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho+f\boldsymbol{e}_\varphi$ 满足 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$.

解 在柱面坐标系中

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\rho A_z)}{\partial z}\right],$$

以 $A_\rho=\rho\cos\varphi$，$A_\varphi=f$，$A_z=0$ 代入上式右端，并令其为 0，得

$$\frac{\partial(\rho^2\cos\varphi)}{\partial\rho}+\frac{\partial f}{\partial\varphi}=0,$$

即
$$2\rho\cos\varphi+\frac{\partial f}{\partial\varphi}=0.$$

由此解得
$$f=-2\rho\sin\varphi+g(\rho,z).$$

由条件$\frac{\partial f}{\partial z}=1$，有$\frac{\partial g}{\partial z}=1$，得 $g=z+h(\rho)$. 于是

$$f=-2\rho\sin\varphi+z+h(\rho).$$

又由 $\varphi=\frac{\pi}{2}$时，$f=z$，得 $h(\rho)=2\rho$. 代入上式，即得

$$f=2\rho(1-\sin\varphi)+z.$$

例 2 在球面坐标系中，证明 $\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r$ 为有势场，并求其势

函数 v.

证 在球面坐标系中

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}$$

以 $A_r=\dfrac{1}{r^2}$，$A_\theta=A_\varphi=0$ 代入，得

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ \dfrac{1}{r^2} & 0 & 0\end{vmatrix}=\mathbf{0},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为有势场. 因此，存在势函数 v 满足

$$\boldsymbol{A}=-\mathbf{grad}\,v,$$

即
$$\frac{1}{r^2}\boldsymbol{e}_r=-\left(\frac{\partial v}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi\right),$$

于是有

$$\frac{\partial v}{\partial r}=-\frac{1}{r^2},\quad\frac{\partial v}{\partial\theta}=0,\quad\frac{\partial v}{\partial\varphi}=0.$$

由后两个方程，知 v 与 θ、φ 均无关，仅为 r 的函数. 所以，积分第一个方程，即得势函数

$$v=\frac{1}{r}+C.$$

如果用公式法求势函数 v，由于 $\boldsymbol{A}$ 为有势场，且 $A_r=\dfrac{1}{r^2}$，$A_\theta=A_\varphi=0$，则

$$v=-\int_1^r\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r+C_1=\frac{1}{r}-1+C_1=\frac{1}{r}+C\quad(C=C_1-1).$$

例 3 在柱面坐标系中，已知矢量场

$$A=2\rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho+\left(\rho\cos\varphi-\frac{z}{\rho}\sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_\varphi+\cos\varphi\boldsymbol{e}_z,$$

试判别 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是否为全微分式，若是，求出其原函数 u.

解 在柱面坐标系中的拉梅系数为

$$H_\rho=1,\ H_\varphi=\rho,\ H_z=1.$$

于是有

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ 2\rho\sin\varphi & (\rho^2\cos\varphi-z\sin\varphi) & \cos\varphi\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\rho}(0\boldsymbol{e}_\rho+0\rho\boldsymbol{e}_\varphi+0\boldsymbol{e}_z)=\mathbf{0}.$$

故 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为全微分式. 在场中取一定点 $M_0(1,0,0)$，则所求原函数为

$$u=\int_1^\rho 0\mathrm{d}\rho+\int_0^\varphi\rho^2\cos\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_0^z\cos\varphi\mathrm{d}z+C$$

$$=\rho^2\sin\varphi+z\cos\varphi+C.$$

下面再用不定积分法求之：因已知 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为全微分式，设其原函数为 u，则有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}u&=\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}\\&=A_\rho H_\rho\mathrm{d}\rho+A_\varphi H_\varphi\mathrm{d}\varphi+A_zH_z\mathrm{d}z\\&=2\rho\sin\varphi\mathrm{d}\rho+(\rho^2\cos\varphi-z\sin\varphi)\mathrm{d}\varphi+\cos\varphi\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=2\rho\sin\varphi,\quad\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\rho^2\cos\varphi-z\sin\varphi,\quad\frac{\partial u}{\partial z}=\cos\varphi.$$

将第一个方程对 ρ 积分得

$$u=\rho^2\sin\varphi+f(\varphi,z),$$

其中 $f(\varphi,z)$ 暂时是任意的，为了确定它，将上式对 φ 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\rho^2\cos\varphi+f'_\varphi(\varphi,z),$$

与第二个方程比较，知$f'_{\varphi}(\varphi,z)=-z\sin\varphi$，于是$f(\varphi,z)=z\cos\varphi+g(z)$. 从而

$$u=\rho^2\sin\varphi+z\cos\varphi+g(z).$$

为了确定$g(z)$，将上式对z求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\cos\varphi+g'(z),$$

与第三个方程比较，知$g'(z)=0$，于是$g(z)=C$(任意常数).

这就得到原函数

$$u=\rho^2\sin\varphi+z\cos\varphi+C.$$

用两种方法求得之结果是相同的.

例 4 在柱面坐标系中，证明矢量场

$$\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)=-\frac{z}{\rho}\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho+\rho z^2\boldsymbol{e}_\varphi+\sin\varphi\boldsymbol{e}_z$$

为管形场，并求场的一个矢势量.

证 在柱面坐标系中的拉梅系数为

$$H_\rho=1,\ H_\varphi=\rho,\ H_z=1.$$

记

$$\begin{aligned}G_\rho&=H_\varphi H_z A_\rho=-z\sin\varphi,\\ G_\varphi&=H_\rho H_z A_\varphi=\rho z^2,\\ G_z&=H_\rho H_\varphi A_z=\rho\sin\varphi.\end{aligned}$$

于是有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial G_\rho}{\partial\rho}+\frac{\partial G_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial G_z}{\partial z}\right)=0.$$

故$\boldsymbol{A}$为管形场. 在场中取一定点$M_0\left(1,\ \frac{\pi}{2},\ 0\right)$，则有

$$\begin{aligned}B_\rho&=\frac{1}{H_\rho}\left[\int_0^z G_\varphi(\rho,\varphi,z)\mathrm{d}z-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}G_z(\rho,\varphi,0)\mathrm{d}\varphi\right]\\ &=\int_0^z\rho z^2\mathrm{d}z-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\varphi}\rho\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\ &=\frac{1}{3}\rho z^3+\rho\cos\varphi,\end{aligned}$$

$$B_\varphi = -\frac{1}{H_\varphi}\int_0^z G_\rho(\rho,\varphi,z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{\rho}\int_0^z z\sin\varphi\,\mathrm{d}z$$

$$= \frac{z^2}{2\rho}\sin\varphi,$$

$$B_z = \frac{C}{H_z} = 1 \quad (\text{取 } C = 1).$$

于是得场的一个矢势量为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{B} &= B_\rho \boldsymbol{e}_\rho + B_\varphi \boldsymbol{e}_\varphi + B_z \boldsymbol{e}_z \\ &= \left(\frac{1}{3}\rho z^3 + \rho\cos\varphi\right)\boldsymbol{e}_\rho + \frac{z^2}{2\rho}\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi + \boldsymbol{e}_z.\end{aligned}$$

例 5 设点 M 的矢径为 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，其中 x，y，z 均为曲线坐标 q_1，q_2，q_3 的函数. 证明

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}s_1\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}s_2\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}s_3\boldsymbol{e}_3.$$

证
$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_1}\mathrm{d}q_1 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_2}\mathrm{d}q_2 + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_3}\mathrm{d}q_3.$$

由于
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = \frac{\partial x}{\partial q_i}\boldsymbol{i} + \frac{\partial y}{\partial q_i}\boldsymbol{j} + \frac{\partial z}{\partial q_i}\boldsymbol{k} = H_i\boldsymbol{e}_i \quad (i = 1,2,3),$$

故
$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = H_1\boldsymbol{e}_1\mathrm{d}q_1 + H_2\boldsymbol{e}_2\mathrm{d}q_2 + H_3\boldsymbol{e}_3\mathrm{d}q_3.$$

又因 $H_i\mathrm{d}q_i = \mathrm{d}s_i(i = 1,2,3)$，所以有

$$\mathrm{d}\boldsymbol{r} = \mathrm{d}s_1\boldsymbol{e}_1 + \mathrm{d}s_2\boldsymbol{e}_2 + \mathrm{d}s_3\boldsymbol{e}_3.$$

例 6 证明在一般的曲线坐标系(q_1,q_2,q_3)中，体积元素为

$$\mathrm{d}V = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}\right|\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3,$$

其中
$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x}{\partial q_2} & \dfrac{\partial x}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial y}{\partial q_1} & \dfrac{\partial y}{\partial q_2} & \dfrac{\partial y}{\partial q_3} \\ \dfrac{\partial z}{\partial q_1} & \dfrac{\partial z}{\partial q_2} & \dfrac{\partial z}{\partial q_3} \end{vmatrix}$$

叫做函数行列式或雅可比(Jacobi)行列式.

证 由矢量代数知道：混合积$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$的绝对值，表示以$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$为棱的平行六面体的体积，即

$$V=|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|,$$

因此,在一般的曲线坐标系(q_1,q_2,q_3)中的体积元素

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V&=|(\mathrm{d}s_1\boldsymbol{e}_1\times\mathrm{d}s_2\boldsymbol{e}_2)\cdot\mathrm{d}s_3\boldsymbol{e}_3|\\&=|(H_1\mathrm{d}q_1\boldsymbol{e}_1\times H_2\mathrm{d}q_2\boldsymbol{e}_2)\cdot H_3\mathrm{d}q_3\boldsymbol{e}_3|\\&=\left|\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_1}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_2}\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_3}\right|\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3,\end{aligned}$$

其中 $$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_i}=\frac{\partial x}{\partial q_i}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\boldsymbol{k}\quad(i=1,2,3).$$

按混合积的行列式表示法，有

$$\left(\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_1}\times\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_2}\right)\cdot\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial q_3}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial q_1}&\frac{\partial y}{\partial q_1}&\frac{\partial z}{\partial q_1}\\\frac{\partial x}{\partial q_2}&\frac{\partial y}{\partial q_2}&\frac{\partial z}{\partial q_2}\\\frac{\partial x}{\partial q_3}&\frac{\partial y}{\partial q_3}&\frac{\partial z}{\partial q_3}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial q_1}&\frac{\partial x}{\partial q_2}&\frac{\partial x}{\partial q_3}\\\frac{\partial y}{\partial q_1}&\frac{\partial y}{\partial q_2}&\frac{\partial y}{\partial q_3}\\\frac{\partial z}{\partial q_1}&\frac{\partial z}{\partial q_2}&\frac{\partial z}{\partial q_3}\end{vmatrix}$$

$$=\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)},$$

所以 $$\mathrm{d}V=\left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(q_1,q_2,q_3)}\right|\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3.$$

特别，当坐标系(q_1,q_2,q_3)为正交时，体积元素$\mathrm{d}V$又可表示为

$$\mathrm{d}V=H_1H_2H_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3.$$

因为，此时有$(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_3=\boldsymbol{e}_3\cdot\boldsymbol{e}_3=1$，从而有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}V&=|(\mathrm{d}s_1\boldsymbol{e}_1\times\mathrm{d}s_2\boldsymbol{e}_2)\cdot\mathrm{d}s_3\boldsymbol{e}_3|\\&=|(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)\cdot\boldsymbol{e}_3|\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3\\&=\mathrm{d}s_1\mathrm{d}s_2\mathrm{d}s_3=H_1H_2H_3\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2\mathrm{d}q_3.\end{aligned}$$

此外，若(q_1,q_2)是xOy平面上的一般曲线坐标系，则类似

可证，其面积元素为

$$\mathrm{d}\sigma = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(q_1,q_2)}\right|\mathrm{d}q_1\mathrm{d}q_2,$$

其中
$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(q_1,q_2)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial q_1} & \dfrac{\partial x}{\partial q_2} \\ \dfrac{\partial y}{\partial q_1} & \dfrac{\partial y}{\partial q_2} \end{vmatrix}$$

例 7 已知曲线坐标(r,θ,φ)与直角坐标(x,y,z)的关系是

$$x = ar\sin\theta\cos\varphi,\ y = br\sin\theta\sin\varphi,\ z = cr\cos\theta,$$

其中
$$0\leqslant r < +\infty,\ 0\leqslant\theta\leqslant\pi,\ 0\leqslant\varphi\leqslant 2\pi.$$

求此曲线坐标的体积元素，并用它计算椭球$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$的体积.

解 容易验证，此曲线坐标系不是正交的. 由于

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\sin\theta\cos\varphi & ar\cos\theta\cos\varphi & -ar\sin\theta\sin\varphi \\ b\sin\theta\sin\varphi & br\cos\theta\sin\varphi & br\sin\theta\cos\varphi \\ c\cos\theta & -cr\sin\theta & 0 \end{vmatrix}$$

$$= abcr^2\sin\theta,$$

故所求体积元素为

$$\mathrm{d}V = \left|\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi = abcr^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi.$$

当 r 为常数时，此曲线坐标系有一族坐标曲面为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=r^2,$$

可见，当 $r=1$ 时，即为所给的椭球面. 于是所求椭球之体积为

$$V = \iiint_{\Omega}\mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} abcr^2\sin\theta\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}\varphi$$

$$= abc\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\pi}\sin\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{4}{3}\pi abc.$$

例 8 求椭圆$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$的面积.

解 令
$$x=ar\cos\theta,\ y=br\sin\theta,$$
视(r,θ)为引进的平面曲线坐标系，则其面积元素为
$$\mathrm{d}\sigma=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right|\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=\begin{vmatrix}a\cos\theta & -ar\sin\theta\\ b\sin\theta & br\cos\theta\end{vmatrix}\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$
$$=abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta.$$
当r为常数时，此曲线坐标系有一族坐标曲线
$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=r^2,$$
可见，当$r=1$时，即为所给的椭圆. 于是所求椭圆的面积为
$$S=\iint_D\mathrm{d}\sigma=\iint_D abr\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta=ab\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\mathrm{d}r=\pi ab.$$

三、习 题 全 解

习题 8 解答

1. 下列曲线坐标构成的坐标系是否正交？为什么？

(1) 曲线坐标(ξ,θ,z)，它与直角坐标(x,y,z)的关系是
$$x=a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\theta,\ y=a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\theta,\ z=z\quad(a>0);$$
(2) 曲线坐标(ρ,θ,z)，它与直角坐标(x,y,z)的关系是
$$x=a\rho\cos\theta,\ y=b\rho\sin\theta,\ z=z\quad(a,b>0,a\neq b).$$

解 (1) 在曲线坐标系(ξ,θ,z)中，有
$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$
$$=a\,\mathrm{ch}\,\xi\cos\theta\boldsymbol{i}+a\,\mathrm{sh}\,\xi\sin\theta\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}.$$
$$\frac{\partial\boldsymbol{r}}{\partial\xi}=a\,\mathrm{sh}\,\xi\cos\theta\boldsymbol{i}+a\,\mathrm{ch}\,\xi\sin\theta\boldsymbol{j}+0\boldsymbol{k},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -a\text{ch }\xi\sin\theta\boldsymbol{i} + a\text{sh }\xi\cos\theta\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

显然有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = 0,\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \xi}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = 0,\ \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = 0,$$

所以，曲线坐标系(ξ,θ,z)是正交的.

（2）在曲线坐标系(ρ,θ,z)中，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r} &= x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\\ &= a\rho\cos\theta\boldsymbol{i} + b\rho\sin\theta\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}.\end{aligned}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho} = a\cos\theta\boldsymbol{i} + b\sin\theta\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} = -a\rho\sin\theta\boldsymbol{i} + b\rho\cos\theta\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial z} = 0\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}.$$

由于

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \rho}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial \theta} &= -a^2\rho\sin\theta\cos\theta + b^2\rho\sin\theta\cos\theta\\ &= \rho\sin\theta\cos\theta(b^2 - a^2) \neq 0 \quad (\text{因 } a \neq b),\end{aligned}$$

所以，曲线坐标系(ρ,θ,z)不是正交的.

2. 计算前题两种曲线坐标系中的拉梅系数.

解 （1）因曲线坐标系(ξ,θ,z)是正交的，根据

$$x = a\text{ch }\xi\cos\theta,\ y = a\text{sh }\xi\sin\theta,\ z = z,$$

有

$$\begin{aligned}dx &= a\text{sh }\xi\cos\theta d\xi - a\text{ch }\xi\sin\theta d\theta,\\ dy &= a\text{ch }\xi\sin\theta d\xi + a\text{sh }\xi\cos\theta d\theta,\\ dz &= dz.\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}dx^2 + dy^2 + dz^2 &= a^2(\text{sh}^2\xi\cos^2\theta + \text{ch}^2\xi\sin^2\theta)(d\xi^2 + d\theta^2) + dz^2\\ &= a^2(\text{ch}^2\xi - \cos^2\theta)(d\xi^2 + d\theta^2) + dz^2,\end{aligned}$$

故拉梅系数为

$$H_\xi = H_\theta = a\sqrt{\mathrm{ch}^2\xi - \cos^2\theta} \xlongequal{\text{或}} a\sqrt{\mathrm{sh}^2\xi + \sin^2\theta}.$$

$$H_z = 1.$$

（2）因由线坐标系(ρ,θ,z)不是正交的，故不能用上面的方法来求. 根据

$$x = a\rho\cos\theta,\ y = b\rho\sin\theta,\ z = z,$$

按定义有

$$H_\rho^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \rho}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \rho}\right)^2 = a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta,$$

$$H_\theta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \theta}\right)^2 = a^2\rho^2\sin^2\theta + b^2\rho^2\cos^2\theta,$$

$$H_z^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial z}\right)^2 = 1,$$

由此得拉梅系数为

$$H_\rho = \sqrt{a^2\cos^2\theta + b^2\sin^2\theta},\ H_\theta = \rho\sqrt{a^2\sin^2\theta + b^2\cos^2\theta},\ H_z = 1.$$

在下列各题中，(ρ,φ,z)为柱面坐标，(r,θ,φ)为球面坐标.

3. 已知 $u(\rho,\varphi,z) = \rho^2\cos\varphi + z^2\sin\varphi$，求 $\boldsymbol{A} = \mathbf{grad}\ u$ 及 $\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}$.

解
$$\boldsymbol{A} = \mathbf{grad}\ u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z$$

$$= 2\rho\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}(z^2\cos\varphi - \rho^2\sin\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi + 2z\sin\varphi\boldsymbol{e}_z.$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho A_z)}{\partial z}\right]$$

$$= \frac{1}{\rho}\left[4\rho\cos\varphi - \frac{1}{\rho}(z^2\sin\varphi + \rho^2\cos\varphi) + 2\rho\sin\varphi\right]$$

$$= \left(2 - \frac{z^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi + 3\cos\varphi.$$

4. 已知 $\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z) = \rho\cos^2\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \rho\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$，求 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}$.

解 在柱面坐标系中

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z\end{vmatrix}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z\\ \frac{\partial}{\partial\rho} & \frac{\partial}{\partial\varphi} & \frac{\partial}{\partial z}\\ \rho\cos^2\varphi & \rho^2\sin\varphi & 0\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{\rho}[0\boldsymbol{e}_\rho+0\rho\boldsymbol{e}_\varphi+(2\rho\sin\varphi+2\rho\cos\varphi\sin\varphi)\boldsymbol{e}_z]$$

$$=(2\sin\varphi+\sin 2\varphi)\boldsymbol{e}_z.$$

5. 证明 $\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)=\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho-\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi+b^2\boldsymbol{e}_z$ 为调和场.

证 在柱面坐标系中

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial\rho}+\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\rho A_z)}{\partial z}\right],$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=\left[\frac{1}{\rho}\frac{\partial A_z}{\partial\varphi}-\frac{\partial A_\varphi}{\partial z}\right]\boldsymbol{e}_\rho+\left[\frac{\partial A_\rho}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial\rho}\right]\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\varphi)}{\partial\rho}-\frac{\partial A_\rho}{\partial\varphi}\right]\boldsymbol{e}_z.$$

已知 $A_\rho=\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi,A_\varphi=-\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi,A_z=b^2,$

代入上面二式,即得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi-\frac{1}{\rho}\left(1-\frac{a^2}{\rho^2}\right)\cos\varphi+0=0,$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}=0\boldsymbol{e}_\rho+0\boldsymbol{e}_\varphi+\frac{1}{\rho}\left[-\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi+\left(1+\frac{a^2}{\rho^2}\right)\sin\varphi\right]\boldsymbol{e}_z=\mathbf{0}.$$

所以 $\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z)$ 为调和场.

6. 求空间一点 M 的矢径 $\boldsymbol{r}=\overrightarrow{OM}$ 在柱面坐标系和球面坐标系中的表示式，并由此证明 $\boldsymbol{r}$ 在这两种坐标系中的散度都等于 3.

[提示:参看第四章第二节例 3.]

解 (1) 在柱面坐标系中

$$\boldsymbol{r}=\rho\cos\varphi\boldsymbol{i}+\rho\sin\varphi\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k},$$

又由第四章第二节例 3 中的表二知

$$\boldsymbol{i}=\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi,\ \boldsymbol{j}=\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho+\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi,\ \boldsymbol{k}=\boldsymbol{e}_z,$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\rho\cos\varphi(\cos\varphi\boldsymbol{e}_\rho-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)+\rho\sin\varphi(\sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho+\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)+z\boldsymbol{e}_z\\&=\rho\boldsymbol{e}_\rho+z\boldsymbol{e}_z.\end{aligned}$$

由此有

$$\operatorname{div}\boldsymbol{r}=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho r_\rho)}{\partial\rho}+\frac{\partial r_\varphi}{\partial\varphi}+\frac{\partial(\rho r_z)}{\partial z}\right]=\frac{1}{\rho}(2\rho+\rho)=3.$$

（2）在球面坐标系中

$$\boldsymbol{r}=r\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{i}+r\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{j}+r\cos\theta\boldsymbol{k}$$

又由第四章第二节例3中的表三知

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{i}=\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi,\\&\boldsymbol{j}=\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi,\\&\boldsymbol{k}=\cos\theta\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta,\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=r\sin\theta\cos\varphi(\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\\&\quad+r\sin\theta\sin\varphi(\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\\&\quad+r\cos\theta(\cos\theta\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\\&=r\boldsymbol{e}_r+0\boldsymbol{e}_\theta+0\boldsymbol{e}_\varphi=r\boldsymbol{e}_r.\end{aligned}$$

由此有

$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{r}&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial(r^2r_r)}{\partial r}+r\frac{\partial(\sin\theta r_\theta)}{\partial\theta}+r\frac{\partial r_\varphi}{\partial\varphi}\right]\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial r^3}{\partial r}=3.\end{aligned}$$

7. 求常矢 $\boldsymbol{C}=C_1\boldsymbol{i}+C_2\boldsymbol{j}+C_3\boldsymbol{k}$ 在球面坐标系中的表示式.

解 由前题中 $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k}$ 在球面坐标系中的表示式，就得到

$$\begin{aligned}\boldsymbol{C}&=C_1(\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta-\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\\&\quad+C_2(\sin\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_r+\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\cos\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)\\&\quad+C_3(\cos\theta\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\boldsymbol{e}_\theta)\\&=(C_1\sin\theta\cos\varphi+C_2\sin\theta\sin\varphi+C_3\cos\theta)\boldsymbol{e}_r\end{aligned}$$

$$+(C_1\cos\theta\cos\varphi+C_2\cos\theta\sin\varphi-C_3\sin\theta)\boldsymbol{e}_\theta$$
$$+(C_2\cos\varphi-C_1\sin\varphi)\boldsymbol{e}_\varphi.$$

8. 已知 $u(r,\theta,\varphi)=\left(ar^2+\dfrac{1}{r^3}\right)\sin 2\theta\cos\varphi$，求 $\mathbf{grad}\ \varphi$.

解 在球面坐标系中

$$\mathbf{grad}\ u=\frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$
$$=\left(2ar-\frac{3}{r^4}\right)\sin 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_r+2\left(ar+\frac{1}{r^4}\right)\cos 2\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta$$
$$-2\left(ar+\frac{1}{r^4}\right)\cos\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\varphi.$$

9. 已知 $u(r,\theta,\varphi)=2r\sin\theta+r^2\cos\varphi$，求 Δu.

解 在球面坐标系中

$$\Delta u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right]$$
$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}(2r^2\sin\theta+2r^3\cos\varphi)+\frac{\partial}{\partial\theta}(r\sin 2\theta)-\frac{r^2\cos\varphi}{\sin\theta}\right]$$
$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[4r\sin^2\theta+6r^2\sin\theta\cos\varphi+2r\cos 2\theta-\frac{r^2\cos\varphi}{\sin\theta}\right]$$
$$=\frac{4\sin\theta}{r}+6\cos\varphi+\frac{2\cos 2\theta}{r\sin\theta}-\frac{\cos\varphi}{\sin^2\theta}.$$

10. 已知 $\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=\dfrac{2\cos\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_r+\dfrac{\sin\theta}{r^3}\boldsymbol{e}_\theta$，求 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}$.

解 在球面坐标系中

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r}+r\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial\theta}+r\frac{\partial A_\varphi}{\partial\varphi}\right]$$
$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{2\cos\theta}{r}\right)+r\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\sin^2\theta}{r^3}\right)\right]$$
$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\left(-\frac{2\cos\theta}{r^2}\right)+\frac{\sin 2\theta}{r^2}\right]$$

$$= -\frac{2\cos\theta}{r^4}+\frac{2\cos\theta}{r^4}=0 \quad (r\neq 0).$$

11. 证明 $\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=2r\sin\theta\boldsymbol{e}_r+r\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta-\dfrac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi$ 为有势场，并求其势函数.

证 在球面坐标系中

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ 2r\sin\theta & r^2\cos\theta & -\sin\varphi\end{vmatrix}$$

$$=\frac{1}{r^2\sin\theta}(0\boldsymbol{e}_r+0r\boldsymbol{e}_\theta+0r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi)=\boldsymbol{0},$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为有势场. 今用两种方法求其势函数 v:

(1) 公式法：在场中任取一点 $M_0\left(1,\ \dfrac{\pi}{2},\ 0\right)$，则场的势函数

$$v=-\int_1^r A_r\left(r,\frac{\pi}{2},0\right)\mathrm{d}r-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}A_\theta(r,\theta,0)r\mathrm{d}\theta$$

$$-\int_0^{\varphi}A_\varphi(r,\theta,\varphi)r\sin\theta\mathrm{d}\varphi+C$$

$$=-\int_1^r 2r\mathrm{d}r-\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}r^2\cos\theta\mathrm{d}\theta+\int_0^{\varphi}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi+C_1$$

$$=-r^2+1-r^2\sin\theta+r^2-\cos\varphi+1+C_1$$

$$=-r^2\sin\theta-\cos\varphi+C \quad (C=2+C_1).$$

(2) 不定积分法：因势函数 v 满足 $\boldsymbol{A}=-\mathbf{grad}\,v$，即

$$2r\sin\theta\boldsymbol{e}_r+r\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta-\frac{\sin\varphi}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi=-\frac{\partial v}{\partial r}\boldsymbol{e}_r-\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\boldsymbol{e}_\theta-\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v}{\partial\varphi}\boldsymbol{e}_\varphi$$

由此得三个方程

$$\frac{\partial v}{\partial r} = -2r\sin\theta,\ \frac{\partial v}{\partial\theta} = -r^2\cos\theta,\ \frac{\partial v}{\partial\varphi} = \sin\varphi.$$

由第一个方程得

$$v = -\int 2r\sin\theta \mathrm{d}r = -r^2\sin\theta + f(\theta,\varphi),$$

由此 $$\frac{\partial v}{\partial\theta} = -r^2\cos\theta + f'_\theta(\theta,\varphi).$$

与第二个方程比较，知 $f'_\theta(\theta,\varphi)=0$，故 $f(\theta,\varphi)=g(\varphi)$，于是

$$v = -r^2\sin\theta + g(\varphi),$$

由此 $$\frac{\partial v}{\partial\varphi} = g'(\varphi).$$

与第三个方程比较，知 $g'(\varphi)=\sin\varphi$，故 $g(\varphi)=-\cos\varphi+C$，于是得所求之势函数为

$$v = -r^2\sin\theta - \cos\varphi + C.$$

可见，两种方法所得结果相同.

12. 在柱面坐标系中，已知矢量场

$$\boldsymbol{A}(\rho,\varphi,z) = \sin\varphi\boldsymbol{e}_\rho + \left(\cos\varphi + \frac{z^2}{\rho}\sin\varphi\right)\boldsymbol{e}_\varphi - 2z\cos\varphi\boldsymbol{e}_z,$$

试判别 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 是否为全微分式，若是，求其原函数.

解 柱面坐标系中的拉梅系数为

$$H_\rho = 1,\ H_\varphi = \rho,\ H_z = 1.$$

于是

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \sin\varphi & \rho\cos\varphi + z^2\sin\varphi & -2z\cos\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{\rho}(0\boldsymbol{e}_\rho + 0\rho\boldsymbol{e}_\varphi + 0\boldsymbol{e}_z) = \boldsymbol{0}.$$

故 $\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 为全微分式. 在场中取一定点 $M_0(1,0,0)$，则所求原函

数为

$$u=\int_1^\rho A_\rho(\rho,0,0)\,d\rho+\int_0^\varphi A_\varphi(\rho,\varphi,0)\rho\,d\varphi+\int_0^z A_z(\rho,\varphi,z)\,dz+C$$

$$=\int_1^\rho 0\,d\rho+\int_0^\varphi \rho\cos\varphi\,d\varphi-\int_0^z 2z\cos\varphi\,dz+C$$

$$=\rho\sin\varphi-z^2\cos\varphi+C.$$

下面再用不定积分法求之：设 u 为其原函数，则有

$$du=A_\rho d\rho+A_\varphi\rho d\varphi+A_z dz,$$

即有

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\sin\varphi,\ \frac{\partial u}{\partial\varphi}=\rho\cos\varphi+z^2\sin\varphi,\ \frac{\partial u}{\partial z}=-2z\cos\varphi.$$

将第一个方程对 ρ 积分，得

$$u=\rho\sin\varphi+f(\varphi,z).$$

为了确定 $f(\varphi,z)$，将上式对 φ 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\rho\cos\varphi+f'_\varphi(\varphi,z).$$

与第二个方程比较，知 $f'_\varphi(\varphi,z)=z^2\sin\varphi$，故 $f(\varphi,z)=-z^2\cos\varphi+g(z)$，从而

$$u=\rho\sin\varphi-z^2\cos\varphi+g(z).$$

为了确定 $g(z)$，将上式对 z 求导，得

$$\frac{\partial u}{\partial z}=-2z\cos\varphi+g'(z).$$

与第三个方程比较，知 $g'(z)=0$，故 $g(z)=C$（任意常数）. 由此得原函数

$$u=\rho\sin\varphi-z^2\cos\varphi+C.$$

两种方法，所得结果相同.

13. 在球面坐标系中，已知矢量场

$$\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=(2r\sin\theta+\cos\varphi)\boldsymbol{e}_r+r\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta-\frac{\sin\varphi}{\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

证明 $\boldsymbol{A}$ 为保守场，并计算曲线积分 $\int_{\overset{\frown}{AB}}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{l}$，其中点 $A=$

$\left(1,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$，点 $B=\left(2,\ \frac{\pi}{4},\ \frac{\pi}{2}\right)$.

解 球面坐标系中的拉梅系数为

$$H_r=1,\ H_\theta=r,\ H_\varphi=r\sin\theta.$$

于是有

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}&=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial\theta} & \frac{\partial}{\partial\varphi}\\ 2r\sin\theta+\cos\varphi & r^2\cos\theta & -r\sin\varphi\end{vmatrix}\\ &=\frac{1}{r^2\sin\theta}(0\boldsymbol{e}_r+0r\boldsymbol{e}_\theta+0r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi)\\ &=\mathbf{0}.\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为保守场. 此时被积表达式

$$\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(2r\sin\theta+\cos\varphi)\mathrm{d}r+r^2\cos\theta\mathrm{d}\theta-r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi$$

为全微分式. 现在来求它的一个原函数. 为此，在场中取一定点 $M_0\left(0,\ \frac{\pi}{2},\ 0\right)$，则所求原函数为

$$\begin{aligned}u&=\int_0^r(2r+1)\mathrm{d}r+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta}r^2\cos\theta\mathrm{d}\theta-\int_0^{\varphi}r\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\\ &=r^2+r+r^2\sin\theta-r^2+r\cos\theta-r\\ &=r^2\sin\theta+r\cos\varphi.\end{aligned}$$

于是有

$$\int_{\widehat{AB}}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=(r^2\sin\theta+r\cos\varphi)\Bigg|_{\left(1,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{4}\right)}^{\left(2,\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right)}=\sqrt{2}.$$

14. 在球面坐标系中，证明

$$\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=2\cos\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_r-2\sin\theta\cos\varphi\boldsymbol{e}_\theta+2r\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi$$

为管形场，并求场中的一个矢势量.

证 球面坐标系中的拉梅系数为

$$H_r=1,\ H_\theta=r,\ H_\varphi=r\sin\theta.$$

记
$$G_r=H_\theta H_\varphi A_r=r^2\sin 2\theta\cos\varphi,$$
$$G_\theta=H_rH_\varphi A_\theta=-2r\sin^2\theta\cos\varphi,$$
$$G_\varphi=H_rH_\theta A_\varphi=2r^2\cos\theta.$$

则
$$\begin{aligned}\operatorname{div}\boldsymbol{A}&=\frac{1}{H_rH_\theta H_\varphi}\left(\frac{\partial G_r}{\partial r}+\frac{\partial G_\theta}{\partial\theta}+\frac{\partial G_\varphi}{\partial\varphi}\right)\\&=\frac{1}{r^2\sin\theta}(2r\sin 2\theta\cos\varphi-2r\sin 2\theta\cos\varphi)\\&=0.\end{aligned}$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为管形场. 今求其矢势量 $\boldsymbol{B}=B_r\boldsymbol{e}_r+B_\theta\boldsymbol{e}_\theta+B_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$. 为此，在场中取一定点 $M_0(0,0,0)$有

$$\begin{aligned}B_r&=\frac{1}{H_r}\left[\int_0^\varphi G_\theta(r,\theta,\varphi)\mathrm{d}\varphi-\int_0^\theta G_\varphi(r,\theta,0)\mathrm{d}\theta\right]\\&=\int_0^\varphi-2r\sin^2\theta\cos\varphi\mathrm{d}\varphi-\int_0^\theta 2r^2\cos\theta\mathrm{d}\theta\\&=-2r\sin^2\theta\sin\varphi-2r^2\sin\theta,\\B_\theta&=-\frac{1}{H_\theta}\int_0^\varphi G_r(r,\theta,\varphi)\mathrm{d}\varphi=-\frac{1}{r}\int_0^\varphi r^2\sin 2\theta\cos\varphi\mathrm{d}\varphi\\&=-r\sin 2\theta\sin\varphi,\end{aligned}$$
$$B_\varphi=\frac{C}{H_\varphi}=\frac{1}{r\sin\theta}\quad(\text{取 } C=1).$$

于是得矢势量

$$\boldsymbol{B}=-2(r\sin^2\theta\sin\varphi+r^2\sin\theta)\boldsymbol{e}_r-r\sin 2\theta\sin\varphi\boldsymbol{e}_\theta+\frac{1}{r\sin\theta}\boldsymbol{e}_\varphi.$$

15. 计算柱面坐标系中单位矢量 $\boldsymbol{e}_\rho$，$\boldsymbol{e}_\varphi$，$\boldsymbol{e}_z$ 的各偏导数.

解 在柱面坐标系中：$H_\rho=1$，$H_\varphi=\rho$，$H_z=1$. 于是

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\rho}=-\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_\varphi}\frac{\partial H_\rho}{\partial\varphi}-\frac{\boldsymbol{e}_z}{H_z}\frac{\partial H_\rho}{\partial z}=\boldsymbol{0},$$

$$\frac{\partial\boldsymbol{e}_\rho}{\partial\varphi}=\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_\rho}\frac{\partial H_\varphi}{\partial\rho}=\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\rho}{\partial z}=\frac{\boldsymbol{e}_z}{H_\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \rho}=\mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \rho}=\frac{\boldsymbol{e}_\rho}{H_\varphi}\frac{\partial H_\rho}{\partial \varphi}=\mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi}=-\frac{\boldsymbol{e}_z}{H_z}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}-\frac{\boldsymbol{e}_\rho}{H_\rho}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \rho}=-\boldsymbol{e}_\rho,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial z}=\frac{\boldsymbol{e}_z}{H_\varphi}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}=\mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial \rho}=\frac{\boldsymbol{e}_\rho}{H_z}\frac{\partial H_\rho}{\partial z}=\mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial \varphi}=\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_z}\frac{\partial H_\varphi}{\partial z}=\mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_z}{\partial z}=-\frac{\boldsymbol{e}_\rho}{H_\rho}\frac{\partial H_z}{\partial \rho}-\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_\varphi}\frac{\partial H_z}{\partial \varphi}=\mathbf{0}.$$

16. 计算球面坐标系中单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$，$\boldsymbol{e}_\theta$，$\boldsymbol{e}_\varphi$ 的各偏导数.

解 在球面坐标系中：$H_r=1$，$H_\theta=r$，$H_\varphi=r\sin\theta$. 于是

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial r}=-\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{H_\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \theta}-\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_\varphi}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}=\mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \theta}=\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{H_r}\frac{\partial H_\theta}{\partial r}=\boldsymbol{e}_\theta,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi}=\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial r}=\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial r}=\frac{\boldsymbol{e}_r}{H_\theta}\frac{\partial H_r}{\partial \theta}=\mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \theta}=-\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_\varphi}\frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi}-\frac{\boldsymbol{e}_r}{H_r}\frac{\partial H_\theta}{\partial r}=-\boldsymbol{e}_r,$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi}=\frac{\boldsymbol{e}_\varphi}{H_\theta}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \theta}=\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi.$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial r}=\frac{\boldsymbol{e}_r}{H_\varphi}\frac{\partial H_r}{\partial \varphi}=\mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \theta}=\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{H_\varphi}\frac{\partial H_\theta}{\partial \varphi}=\mathbf{0},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi}=-\frac{\boldsymbol{e}_r}{H_r}\frac{\partial H_\varphi}{\partial r}-\frac{\boldsymbol{e}_\theta}{H_\theta}\frac{\partial H_\varphi}{\partial \theta}=-\sin\theta\boldsymbol{e}_r-\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta.$$

17. 已知 $\boldsymbol{A}(r,\theta,\varphi)=r^2\sin\varphi\boldsymbol{e}_r+2r\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta+\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$，求$\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \varphi}$.

解 $\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \varphi}=r^2\left(\cos\varphi\boldsymbol{e}_r+\sin\varphi\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi}\right)+2r\cos\theta\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi}+\sin\theta\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi}.$

由前题知：$\frac{\partial \boldsymbol{e}_r}{\partial \varphi}=\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi$，$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\theta}{\partial \varphi}=\cos\theta\boldsymbol{e}_\varphi$.

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_\varphi}{\partial \varphi}=-\sin\theta\boldsymbol{e}_r-\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta,\ .$$

故有

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial \varphi}&=r^2\cos\varphi\boldsymbol{e}_r+r^2\sin\varphi\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi+2r\cos^2\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\&\quad+\sin\theta(-\sin\theta\boldsymbol{e}_r-\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta)\\&=(r^2\cos\varphi-\sin^2\theta)\boldsymbol{e}_r-\sin\theta\cos\theta\boldsymbol{e}_\theta\\&\quad+(r^2\sin\varphi\sin\theta+2r\cos^2\theta)\boldsymbol{e}_\varphi.\end{aligned}$$

习题 9 解答

1. 在椭圆柱面坐标系中，令 $\operatorname{ch}u=\xi$，$\cos v=\eta$，$z=\zeta$，试求拉梅系数 H_ξ，H_η，H_ζ.

解 此时坐标 ξ，η，ζ 与直角坐标(x,y,z)的关系为

$$x=a\xi\eta,\ y=a\sqrt{\xi^2-1}\sqrt{1-\eta^2},\ z=\zeta.$$

$$H_\xi^2=\left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2=a^2\eta^2+\frac{a^2\xi^2(1-\eta^2)}{\xi^2-1}+0$$

$$= a^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1},$$

$$H_\eta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2 = a^2\xi^2 + \frac{a^2\eta^2(\xi^2 - 1)}{1 - \eta^2} + 0$$

$$= a^2 \frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2},$$

$$H_\zeta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \zeta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \zeta}\right)^2 = 0 + 0 + 1 = 1.$$

故拉梅系数为

$$H_\xi = a\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}},\ H_\eta = a\sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}},\ H_\zeta = 1.$$

2. 设另一种旋转抛物面坐标(ξ, η, φ)，它与直角坐标的关系为

$$x = \sqrt{\xi\eta}\cos\varphi,\ y = \sqrt{\xi\eta}\sin\varphi,\ z = \frac{1}{2}(\xi - \eta).$$

（1）求此种坐标系的坐标曲面；

（2）求拉梅系数 H_ξ，H_η，H_φ.

解 （1）容易求得坐标曲面为

$\xi =$ 常数：为绕 Oz 轴负向的旋转抛物面

$$z - \frac{\xi}{2} = -\frac{1}{2\xi}(x^2 + y^2),$$

$\eta =$ 常数：为绕 Oz 轴正向的旋转抛物面

$$z + \frac{\eta}{2} = \frac{1}{2\eta}(x^2 + y^2),$$

$\varphi =$ 常数：为以 Oz 轴为界的半平面

$$y = \tan\varphi x.$$

（2）求拉梅系数

$$H_\xi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \xi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \xi}\right)^2$$

$$= \frac{\eta}{4\xi}\cos^2\varphi + \frac{\eta}{4\xi}\sin^2\varphi + \frac{1}{4} = \frac{\eta+\xi}{4\xi},$$

$$H_\eta^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \eta}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \eta}\right)^2$$

$$= \frac{\xi}{4\eta}\cos^2\varphi + \frac{\xi}{4\eta}\sin^2\varphi + \frac{1}{4} = \frac{\xi+\eta}{4\eta},$$

$$H_\varphi^2 = \left(\frac{\partial x}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial \varphi}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial \varphi}\right)^2$$

$$= \xi\eta\sin^2\varphi + \xi\eta\cos^2\varphi + 0^2 = \xi\eta.$$

故拉梅系数为

$$H_\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{\xi}},\ H_\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{\eta}},\ H_\varphi = \sqrt{\xi\eta}.$$

3. 在前题的坐标系(ξ,η,φ)中，证明矢量场

$$\boldsymbol{A}(\xi,\eta,\varphi) = \frac{2\sqrt{\xi}\eta\sin 2\varphi}{\sqrt{\xi+\eta}}\boldsymbol{e}_\xi + \frac{2\xi\sqrt{\eta}\sin 2\varphi}{\sqrt{\xi+\eta}}\boldsymbol{e}_\eta + 2\sqrt{\xi\eta}\cos 2\varphi\boldsymbol{e}_\varphi$$

为有势场，并求场的势函数.

证 在所述坐标系中的拉梅系数为

$$H_\xi = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{\xi}},\ H_\eta = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\xi+\eta}{\eta}},\ H_\varphi = \sqrt{\xi\eta}.$$

于是有

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \frac{1}{H_\xi H_\eta H_\varphi}\begin{vmatrix} H_\xi\boldsymbol{e}_\xi & H_\eta\boldsymbol{e}_\eta & H_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi \\ \frac{\partial}{\partial\xi} & \frac{\partial}{\partial\eta} & \frac{\partial}{\partial\varphi} \\ \eta\sin 2\varphi & \xi\sin 2\varphi & 2\xi\eta\cos 2\varphi \end{vmatrix}$$

$$= \frac{1}{H_\xi H_\eta H_\varphi}(0H_\xi\boldsymbol{e}_\xi + 0H_\eta\boldsymbol{e}_\eta + 0H_\varphi\boldsymbol{e}_\varphi)$$

$$= \mathbf{0}.$$

故 $\boldsymbol{A}$ 为有势场. 在场中取一定点 $M_0(1,0,0)$，则所求势函数为

$$v = -\int_1^\xi 0\mathrm{d}\xi - \int_0^\eta 0\mathrm{d}\eta - \int_0^\varphi 2\xi\eta\cos 2\varphi\mathrm{d}\varphi + C$$

$$= -\xi\eta\sin 2\varphi + C.$$

4. 计算积分$\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}V$,其中$\Omega$是由曲面$\frac{x^2+y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$所围成的空间区域.

解 用长球面坐标，此时将所给曲面方程与此坐标系中的一种坐标曲面，即长球面方程

$$\frac{x^2+y^2}{a^2\mathrm{sh}^2u}+\frac{z^2}{a^2\mathrm{ch}^2u}=1$$

比较，可知存在常数 u_0 及 a 满足

$$a\mathrm{sh}\ u_0=3,\ a\mathrm{ch}\ u_0=4,\ a^2=4^2-3^2=7.$$

于是积分

$$\begin{aligned}
&\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}V\\
&=\iiint\limits_{\Omega}\frac{1}{a\mathrm{sh}\ u\sin v}H_uH_vH_\varphi\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\varphi\\
&=\iiint\limits_{\Omega}a^2(\mathrm{sh}^2u+\sin^2v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}\varphi\\
&=a^2\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{u_0}\mathrm{d}u\int_0^{\pi}(\mathrm{sh}^2u+\sin^2v)\mathrm{d}v\\
&=2\pi a^2\left[\int_0^{u_0}\frac{1}{2}(\mathrm{ch}\ 2u-1)\mathrm{d}u\int_0^{\pi}\mathrm{d}v+\int_0^{u_0}\mathrm{d}u\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(1-\cos 2v)\mathrm{d}v\right]\\
&=2\pi\ a^2\left[\left(\frac{1}{4}\mathrm{sh}\ 2u_0-\frac{u_0}{2}\right)\pi+\frac{\pi}{2}u_0\right]\\
&=\pi^2a^2\mathrm{sh}\ u_0\mathrm{ch}\ u_0=3\times4\times\pi^2=12\ \pi^2.
\end{aligned}$$

5. 试用旋转抛物面坐标，计算由以下两旋转抛物面

$$z+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x^2+y^2)\quad 与\quad z-\frac{9}{2}=-\frac{1}{18}(x^2+y^2)$$

所围成的空间区域的体积.

解 所给曲面方程，正好与旋转抛物面坐标系中当 $\xi=1$ 与 $\eta=3$ 时的两种坐标曲面相同. 于是所求体积为

$$
\begin{aligned}
V &= \iiint_{\Omega} \mathrm{d}V = \iiint_{\Omega} H_{\xi} H_{\eta} H_{\varphi} \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\varphi \\
&= \iiint_{\Omega} (\xi^2 + \eta^2) \xi \eta \mathrm{d}\xi \mathrm{d}\eta \mathrm{d}\varphi \\
&= \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^1 \mathrm{d}\xi \int_0^3 (\xi^3 \eta + \xi \eta^3) \mathrm{d}\eta \\
&= 2\pi \left(\int_0^1 \xi^3 \mathrm{d}\xi \int_0^3 \eta \mathrm{d}\eta + \int_0^1 \xi \mathrm{d}\xi \int_0^3 \eta^3 \mathrm{d}\eta \right) \\
&= 2\pi \left(\frac{9}{8} + \frac{81}{8} \right) = \frac{45}{2}\pi = 22.5\pi.
\end{aligned}
$$

附录(一)　正交曲线坐标系中坐标曲线的切线单位矢量的导数公式

教材上用到了坐标曲线上的切线单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 关于正交曲线坐标 q_1，q_2，q_3 的 9 个导数公式：

(1) $\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q_1}=-\dfrac{\boldsymbol{e}_2}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_2}-\dfrac{\boldsymbol{e}_3}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_3}$;

(2) $\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q_2}=\dfrac{\boldsymbol{e}_2}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_1}$;

(3) $\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q_3}=\dfrac{\boldsymbol{e}_3}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_1}$;

(4) $\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial q_1}=\dfrac{\boldsymbol{e}_1}{H_2}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_2}$;

(5) $\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial q_2}=-\dfrac{\boldsymbol{e}_3}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_3}-\dfrac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_1}$;

(6) $\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_2}{\partial q_3}=\dfrac{\boldsymbol{e}_3}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_2}$;

(7) $\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial q_1}=\dfrac{\boldsymbol{e}_1}{H_3}\dfrac{\partial H_1}{\partial q_3}$;

(8) $\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial q_2}=\dfrac{\boldsymbol{e}_2}{H_3}\dfrac{\partial H_2}{\partial q_3}$;

(9) $\dfrac{\partial \boldsymbol{e}_3}{\partial q_3}=-\dfrac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_1}-\dfrac{\boldsymbol{e}_2}{H_2}\dfrac{\partial H_3}{\partial q_2}$.

因这些公式的证明推导较繁，又超出了课程的教学要求，故教材上从略了．这里我们来给出其证明，供有兴趣的读者参考．

从上面可以看出，这些公式的结构只有两种类型．因此，下面仅取这些公式中的第(1)，(2)两个作为这两种类型的代表给

出证明，其余的可仿此类推.

公式的证明

一、首先要注意到正交曲线坐标系中的单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 与 $Oxyz$ 直角坐标系中的单位矢量 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 之间的夹角余弦关系表(即教材第四章第二节之表一).

	$\boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{j}$	$\boldsymbol{k}$
$\boldsymbol{e}_1$	α_1	β_1	γ_1
$\boldsymbol{e}_2$	α_2	β_2	γ_2
$\boldsymbol{e}_3$	α_3	β_3	γ_3

其中

$$\alpha_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial x}{\partial q_i},\ \beta_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial y}{\partial q_i},\ \gamma_i=\frac{1}{H_i}\frac{\partial z}{\partial q_i}\quad (i=1,2,3).$$

此外，还要注意到如下两个等式：

1) $$\frac{\partial x}{\partial q_i}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\boldsymbol{k}=H_i\boldsymbol{e}_i\quad (i=1,2,3).$$

2) $$H_i^2=\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2\quad (i=1,2,3).$$

二、证明公式(1)

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q_1}=-\frac{\boldsymbol{e}_2}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{\boldsymbol{e}_3}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}.$$

证

$$\begin{aligned}\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q_1}&=\frac{\partial}{\partial q_1}\left[\frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\boldsymbol{k}\right)\right]\\&=\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\boldsymbol{k}\right)\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}\boldsymbol{i}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}\boldsymbol{j}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2}\boldsymbol{k}\right)\\
=&H_1\boldsymbol{e}_1\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{1}{H_1}\right)\\
&+\frac{1}{H_1}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}(\alpha_1\boldsymbol{e}_1+\alpha_2\boldsymbol{e}_2+\alpha_3\boldsymbol{e}_3)\right.\\
&+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}(\beta_1\boldsymbol{e}_1+\beta_2\boldsymbol{e}_2+\beta_3\boldsymbol{e}_3)\\
&\left.+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2}(\gamma_1\boldsymbol{e}_1+\gamma_2\boldsymbol{e}_2+\gamma_3\boldsymbol{e}_3)\right]\\
=&-\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_1}\\
&+\frac{1}{H_1}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}\left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{H_2}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{H_3}\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\right.\\
&+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}\left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{H_2}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{H_3}\frac{\partial y}{\partial q_3}\right)\\
&\left.+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2}\left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial z}{\partial q_1}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{H_2}\frac{\partial z}{\partial q_2}+\frac{\boldsymbol{e}_3}{H_3}\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)\right]\\
=&-\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_1}\\
&+\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1^2}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2}\right)\\
&+\frac{\boldsymbol{e}_2}{H_1H_2}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2}\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)\\
&+\frac{\boldsymbol{e}_3}{H_1H_3}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}\frac{\partial x}{\partial q_3}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}\frac{\partial y}{\partial q_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2}\frac{\partial z}{\partial q_3}\right),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2}=\frac{1}{2}\frac{\partial H_1^2}{\partial q_1}=H_1\frac{\partial H_1}{\partial q_1},
$$

而

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2}\frac{\partial z}{\partial q_2}$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)$$

$$-\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial^2 y}{\partial q_1\partial q_2}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial^2 z}{\partial q_1\partial q_2}\right)$$

$$=\frac{\partial}{\partial q_1}(H_1\boldsymbol{e}_1\cdot H_2\boldsymbol{e}_2)-\frac{1}{2}\frac{\partial H_1^2}{\partial q_2}$$

$$=0-\frac{1}{2}\frac{\partial H_1^2}{\partial q_2}=-H_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}.$$

（因为 $\boldsymbol{e}_1\perp\boldsymbol{e}_2$，故有 $H_1\boldsymbol{e}_1\cdot H_2\boldsymbol{e}_2=H_1H_2\boldsymbol{e}_1\cdot\boldsymbol{e}_2=0.$）

同理可得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q_1^2}\frac{\partial x}{\partial q_3}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1^2}\frac{\partial y}{\partial q_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1^2}\frac{\partial z}{\partial q_3}=-H_1\frac{\partial H_1}{\partial q_3}.$$

所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q_1}=-\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_1}+\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1^2}H_1\frac{\partial H_1}{\partial q_1}-\frac{\boldsymbol{e}_2}{H_1H_2}H_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{\boldsymbol{e}_3}{H_1H_3}H_1\frac{\partial H_1}{\partial q_3}$$

$$=-\frac{\boldsymbol{e}_2}{H_2}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}-\frac{\boldsymbol{e}_3}{H_3}\frac{\partial H_1}{\partial q_3}.$$

三、证明公式(2)

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q_2}=\frac{\boldsymbol{e}_2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}.$$

证

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q_2}=\frac{\partial}{\partial q_2}\left[\frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\boldsymbol{k}\right)\right]$$

$$=\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\boldsymbol{k}\right)\frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1}\right)$$

$$+\frac{1}{H_1}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_2}\boldsymbol{i}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1\partial q_2}\boldsymbol{j}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1\partial q_2}\boldsymbol{k}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= H_1 \boldsymbol{e}_1 \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{1}{H_1}\right) \\
&\quad + \frac{1}{H_1}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2}(\alpha_1 \boldsymbol{e}_1 + \alpha_2 \boldsymbol{e}_2 + \alpha_3 \boldsymbol{e}_3)\right. \\
&\quad + \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2}(\beta_1 \boldsymbol{e}_1 + \beta_2 \boldsymbol{e}_2 + \beta_3 \boldsymbol{e}_3) \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2}(\gamma_1 \boldsymbol{e}_1 + \gamma_2 \boldsymbol{e}_2 + \gamma_3 \boldsymbol{e}_3)\right] \\
&= -\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} \\
&\quad + \frac{1}{H_1}\left[\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2}\left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial x}{\partial q_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{H_2}\frac{\partial x}{\partial q_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{H_3}\frac{\partial x}{\partial q_3}\right)\right. \\
&\quad + \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2}\left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial y}{\partial q_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{H_2}\frac{\partial y}{\partial q_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{H_3}\frac{\partial y}{\partial q_3}\right) \\
&\quad \left. + \frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2}\left(\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial z}{\partial q_1} + \frac{\boldsymbol{e}_2}{H_2}\frac{\partial z}{\partial q_2} + \frac{\boldsymbol{e}_3}{H_3}\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)\right] \\
&= -\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2} \\
&\quad + \frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1^2}\left(\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2}\right) \\
&\quad + \frac{\boldsymbol{e}_2}{H_1 H_2}\left(\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2}\right) \\
&\quad + \frac{\boldsymbol{e}_3}{H_1 H_3}\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3} + \frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3} + \frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_3}\right),
\end{aligned}
$$

其中

$$
\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial H_1^2}{\partial q_2} = H_1 \frac{\partial H_1}{\partial q_2},
$$

$$
\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2} + \frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2} = \frac{1}{2}\frac{\partial H_2^2}{\partial q_1} = H_2 \frac{\partial H_2}{\partial q_1}.
$$

兹证 $\boldsymbol{e}_3$ 的系数为零，即要证明

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_3}=0.$$

事实上，由于

$$\frac{\partial x}{\partial q_i}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial q_i}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial q_i}\boldsymbol{k}=H_i\boldsymbol{e}_i \quad (i=1,2,3),$$

这说明$\frac{\partial x}{\partial q_i}$，$\frac{\partial y}{\partial q_i}$，$\frac{\partial z}{\partial q_i}$为 $\boldsymbol{e}_i$ 的方向数($i=1,2,3$)，而 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 是互相垂直的，故有

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_2}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_1}\frac{\partial x}{\partial q_3}+\frac{\partial y}{\partial q_1}\frac{\partial y}{\partial q_3}+\frac{\partial z}{\partial q_1}\frac{\partial z}{\partial q_3}=0,$$

$$\frac{\partial x}{\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3}+\frac{\partial y}{\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3}+\frac{\partial z}{\partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_3}=0.$$

在第一式两端对 q_3 求偏导数，在第二式两端对 q_2 求偏导数，在第三式两端对 q_1 求偏导数，就顺次得到

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_3}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_3}\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_2 \partial q_3}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_2 \partial q_3}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=0.$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_2 \partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_2 \partial q_3}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_2 \partial q_3}\frac{\partial z}{\partial q_1}\right)=0.$$

$$\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_3}\right)$$
$$+\left(\frac{\partial^2 x}{\partial q_1 \partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1 \partial q_3}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1 \partial q_3}\frac{\partial z}{\partial q_2}\right)=0.$$

记

$$\xi=\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1\partial q_3}\frac{\partial y}{\partial q_2}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1\partial q_3}\frac{\partial z}{\partial q_2},$$

$$\eta=\frac{\partial^2 x}{\partial q_2\partial q_3}\frac{\partial x}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_2\partial q_3}\frac{\partial y}{\partial q_1}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_2\partial q_3}\frac{\partial z}{\partial q_1},$$

$$\zeta=\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_2}\frac{\partial x}{\partial q_3}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1\partial q_2}\frac{\partial y}{\partial q_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1\partial q_2}\frac{\partial z}{\partial q_3}.$$

则上面三式可写为

$$\begin{cases}\xi+\eta=0,\\ \zeta+\eta=0,\\ \zeta+\xi=0.\end{cases}$$

此乃三元线性齐次方程组，其系数行列式

$$\begin{vmatrix}1&1&0\\0&1&1\\1&0&1\end{vmatrix}=2\neq0,$$

故方程组只有零解 $\xi=\eta=\zeta=0$. 由 $\zeta=0$，即得

$$\frac{\partial^2 x}{\partial q_1\partial q_2\partial q_3}\frac{\partial x}{}+\frac{\partial^2 y}{\partial q_1\partial q_2\partial q_3}+\frac{\partial^2 z}{\partial q_1\partial q_2\partial q_3}=0,$$

所以

$$\frac{\partial \boldsymbol{e}_1}{\partial q_2}=-\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1}\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{\boldsymbol{e}_1}{H_1^2}H_1\frac{\partial H_1}{\partial q_2}+\frac{\boldsymbol{e}_2}{H_1H_2}H_2\frac{\partial H_2}{\partial q_1}+\mathbf{0}$$

$$=\frac{\boldsymbol{e}_2}{H_1}\frac{\partial H_2}{\partial q_1}.$$

附录(二)　梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线坐标系中的表示式的又一种推导法

关于梯度、散度、旋度与调和量在正交曲线坐标系中的表示式，教材上已经推导出来，其中引用了坐标曲线上的切线单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 对曲线坐标 q_1，q_2，q_3 的导数公式. 这里介绍另一种推导法，它不需引用这些自身的推导甚为麻烦的单位矢量 $\boldsymbol{e}_1$，$\boldsymbol{e}_2$，$\boldsymbol{e}_3$ 的导数公式. 兹分述如下.

1. 梯度的表示式

设曲线坐标 $q_1=q_1(x,y,z)$，我们知道，其梯度

$$\nabla q_1$$

为这样的矢量：方向垂直于等值面 $q_1(x,y,z)=$ 常数(即坐标曲面)，且指向 q_1 增大的一侧(即与 $\boldsymbol{e}_1$ 同指向)；其模 $|\nabla q_1|$ 等于函数 q_1 沿 $\boldsymbol{e}_1$ 方向的方向导数$\dfrac{\partial q_1}{\partial e_1}$，所以

$$\nabla q_1=\frac{\partial q_1}{\partial e_1}\boldsymbol{e}_1,$$

如图 11，设 $\mathrm{d}s_1$ 表示坐标曲线 q_1 的弧微分，则由教材第二章第二节定理 2 知有$\dfrac{\partial q_1}{\partial e_1}=\dfrac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}s_1}$，于是

$$\nabla q_1=\frac{\mathrm{d}q_1}{\mathrm{d}s_1}\boldsymbol{e}_1.$$

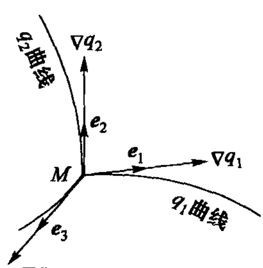

图 11

再由教材第四章第二节的(2.3) 式，有 $\mathrm{d}s_1=H_1\mathrm{d}q_1$($H_1$ 为拉梅系数).

即得

$$\nabla q_1 = \frac{1}{H_1}\boldsymbol{e}_1.$$

一般有 $$\nabla q_i = \frac{1}{H_i}\boldsymbol{e}_i \quad (i=1,2,3) \tag{1}$$

或 $$\boldsymbol{e}_i = H_i \nabla q_i \quad (i=1,2,3). \tag{2}$$

于是，对于具有一阶连续偏导数的函数 $u=u(q_1,q_2,q_3)$，其梯度

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial q_1}\nabla q_1 + \frac{\partial u}{\partial q_2}\nabla q_2 + \frac{\partial u}{\partial q_3}\nabla q_3,$$

以(1) 式代入，就得到

$$\nabla u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3. \tag{3}$$

2. 散度的表示式

设矢量 $$\boldsymbol{A} = A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3$$

(A_1,A_2,A_3 均为 q_1,q_2,q_3 的函数,且具有一阶连续偏导数)，其散度

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \nabla\cdot(A_1\boldsymbol{e}_1 + A_2\boldsymbol{e}_2 + A_3\boldsymbol{e}_3)\\ &= \nabla\cdot[A_1(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3) + A_2(\boldsymbol{e}_3\times\boldsymbol{e}_1) + A_3(\boldsymbol{e}_1\times\boldsymbol{e}_2)].\end{aligned}$$

以(2) 代入，得

$$\begin{aligned}\nabla\cdot\boldsymbol{A} &= \nabla\cdot(A_1H_2H_3\ \nabla q_2\times\nabla q_3) + \nabla\cdot(A_2H_3H_1\ \nabla q_3\times\nabla q_1)\\ &\quad + \nabla\cdot(A_3H_1H_2\ \nabla q_1\times\nabla q_2).\end{aligned} \tag{4}$$

由公式 $$\nabla\cdot(u\boldsymbol{A}) = u\,\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \nabla u\cdot\boldsymbol{A},$$

(4)式右端第一项

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(H_2H_3A_1\ \nabla q_2\times\nabla q_3) &= H_2H_3A_1\ \nabla\cdot(\nabla q_2\times\nabla q_3)\\ &\quad + \nabla(H_2H_3A_1)\cdot(\nabla q_2\times\nabla q_3).\end{aligned}$$

再用公式 $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}) = \boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) - \boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$

及公式 $$\nabla\times\nabla u = \boldsymbol{0},$$

则有

$$\nabla\cdot(\nabla q_2\times\nabla q_3) = \nabla q_3\cdot(\nabla\times\nabla q_2) - \nabla q_2\cdot(\nabla\times\nabla q_3) = \boldsymbol{0},$$

从而

$$\begin{aligned}\nabla\cdot(H_2H_3A_1\ \nabla q_2\times\nabla q_3)&=\mathbf{0}+\nabla(H_2H_3A_1)\cdot(\nabla q_2\times\nabla q_3)\\&=\Big[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1)\nabla q_1+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_2H_3A_1)\nabla q_2\\&\quad+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_2H_3A_1)\nabla q_3\Big]\cdot(\nabla q_2\times\nabla q_3)\\&=\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1)\nabla q_1\cdot(\nabla q_2\times\nabla q_3)\\&=\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1)\frac{1}{H_1H_2H_3}\boldsymbol{e}_1\cdot(\boldsymbol{e}_2\times\boldsymbol{e}_3)\\&=\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1).\end{aligned}$$

同理可得(4)式右端第二项与第三项为

$$\nabla\cdot(H_1H_3A_2\ \nabla q_3\times\nabla q_1)=\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1H_3A_2),$$

$$\nabla\cdot(H_1H_2A_3\ \nabla q_1\times\nabla q_2)=\frac{1}{H_1H_2H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3).$$

代入(4)式，就得到

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\frac{1}{H_1H_2H_3}\Big[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1)+\frac{\partial}{\partial q_2}(H_1H_3A_2)+\frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\Big].\tag{5}$$

3. 调和量的表示式

因为调和量 $\Delta u=\nabla\cdot\nabla u$，故只要按(3)式将 ∇u 视为矢量 $\boldsymbol{A}$ 代入(5)式，就得到

$$\begin{aligned}\Delta u=\frac{1}{H_1H_2H_3}\Big[&\frac{\partial}{\partial q_1}\Big(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\Big)+\frac{\partial}{\partial q_2}\Big(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\Big)\\&+\frac{\partial}{\partial q_3}\Big(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\Big)\Big].\end{aligned}\tag{6}$$

4. 旋度的表示式

同上，设矢量 $\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3$，其旋度

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla\times(A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3)$$

$$= \nabla \times (A_1 H_1 \nabla q_1 + A_2 H_2 \nabla q_2 + A_3 H_3 \nabla q_3). \tag{7}$$

由公式
$$\nabla \times (u\boldsymbol{A}) = u \nabla \times \boldsymbol{A} + \nabla u \times \boldsymbol{A},$$

(7)式右端第一项

$$\begin{aligned}
\nabla \times (H_1 A_1 \nabla q_1) &= H_1 A_1 (\nabla \times \nabla q_1) + \nabla (H_1 A_1) \times \nabla q_1 \\
&= \mathbf{0} + \nabla (H_1 A_1) \times \nabla q_1 \\
&= \left[\frac{\partial (H_1 A_1)}{\partial q_1} \nabla q_1 + \frac{\partial (H_1 A_1)}{\partial q_2} \nabla q_2 + \frac{\partial (H_1 A_1)}{\partial q_3} \nabla q_3 \right] \times \nabla q_1 \\
&= \frac{\partial (H_1 A_1)}{\partial q_2} \frac{\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_1}{H_2 H_1} + \frac{\partial (H_1 A_1)}{\partial q_3} \frac{\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1}{H_3 H_1} \\
&= \frac{\boldsymbol{e}_2}{H_1 H_3} \frac{\partial (H_1 A_1)}{\partial q_3} - \frac{\boldsymbol{e}_3}{H_1 H_2} \frac{\partial (H_1 A_1)}{\partial q_2}.
\end{aligned}$$

类似可得(7)式右端第二项和第三项为

$$\nabla \times (H_2 A_2 \nabla q_2) = \frac{\boldsymbol{e}_3}{H_1 H_2} \frac{\partial (H_2 A_2)}{\partial q_1} - \frac{\boldsymbol{e}_1}{H_2 H_3} \frac{\partial (H_2 A_2)}{\partial q_3},$$

$$\nabla \times (H_3 A_3 \nabla q_3) = \frac{\boldsymbol{e}_1}{H_2 H_3} \frac{\partial (H_3 A_3)}{\partial q_2} - \frac{\boldsymbol{e}_2}{H_1 H_3} \frac{\partial (H_3 A_3)}{\partial q_1}.$$

代入(7)式，就得到

$$\begin{aligned}
\nabla \times \boldsymbol{A} &= \frac{1}{H_2 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_2} (H_3 A_3) - \frac{\partial}{\partial q_3} (H_2 A_2) \right] \boldsymbol{e}_1 \\
&\quad + \frac{1}{H_1 H_3} \left[\frac{\partial}{\partial q_3} (H_1 A_1) - \frac{\partial}{\partial q_1} (H_3 A_3) \right] \boldsymbol{e}_2 \\
&\quad + \frac{1}{H_1 H_2} \left[\frac{\partial}{\partial q_1} (H_2 A_2) - \frac{\partial}{\partial q_2} (H_1 A_1) \right] \boldsymbol{e}_3.
\end{aligned} \tag{8}$$

或写为

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \frac{1}{H_1 H_2 H_3} \begin{vmatrix} H_1 \boldsymbol{e}_1 & H_2 \boldsymbol{e}_2 & H_3 \boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1 A_1 & H_2 A_2 & H_3 A_3 \end{vmatrix}. \tag{9}$$

上面得到的(3)式、(5)式、(6)式及(8)式与(9)式，依次就是梯度、散度、调和量及旋度在正交曲线坐标系中的表示式.

附录(三)　基本公式汇集

1. 矢性函数的导数公式

(1) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{C}=\boldsymbol{0}$　($\boldsymbol{C}$ 为常矢);

(2) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\pm\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}$;

(3) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(k\boldsymbol{A})=k\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$　(k 为常数);

(4) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(u\boldsymbol{A})=\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{A}+u\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$;

(5) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\cdot\boldsymbol{B}$,

特例: $\frac{\mathrm{d}A^2}{\mathrm{d}t}=2\boldsymbol{A}\cdot\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}$　(其中 $\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A}$);

(6) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{B}}{\mathrm{d}t}+\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}\times\boldsymbol{B}$;

(7) 复合函数求导公式: 若 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(u)$, $u=u(t)$, 则

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}t}=\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{A}}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}.$$

2. 矢性函数的不定积分公式

(1) $\int k\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=k\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$　(k 为非零常数);

(2) $\int[\boldsymbol{A}(t)\pm\boldsymbol{B}(t)]\mathrm{d}t=\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t\pm\int\boldsymbol{B}(t)\mathrm{d}t$;

(3) $\int\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}\cdot\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$　($\boldsymbol{a}$ 为非零常矢);

(4) $\int\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t=\boldsymbol{a}\times\int\boldsymbol{A}(t)\mathrm{d}t$　($\boldsymbol{a}$ 为非零常矢);

(5) 若 $\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}$, 则有

$$\int \boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{i}\int A_x(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{j}\int A_y(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{k}\int A_z(t)\,\mathrm{d}t\ ;$$

（6）矢性函数数量积的分部积分公式：

$$\int \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} - \int \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}'\mathrm{d}t\ ;$$

（7）矢性函数矢量积的分部积分公式：

$$\int \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}'\mathrm{d}t = \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} + \int \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}'\mathrm{d}t.$$

3. 矢性函数的定积分公式

（1）若在$[T_1, T_2]$上有$\boldsymbol{B}'(t)=\boldsymbol{A}(t)$，则有

$$\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{B}(T_2) - \boldsymbol{B}(T_1)\ ;$$

（2）若$\boldsymbol{A}(t)=A_x(t)\boldsymbol{i}+A_y(t)\boldsymbol{j}+A_z(t)\boldsymbol{k}$，则有

$$\int_{T_1}^{T_2}\boldsymbol{A}(t)\,\mathrm{d}t = \boldsymbol{i}\int_{T_1}^{T_2}A_x(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{j}\int_{T_1}^{T_2}A_y(t)\,\mathrm{d}t + \boldsymbol{k}\int_{T_1}^{T_2}A_z(t)\,\mathrm{d}t.$$

4. 若矢量场$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$，则其矢量线所满足的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}x}{A_x}=\frac{\mathrm{d}y}{A_y}=\frac{\mathrm{d}z}{A_z}.$$

5. 函数$u=u(M)$在点M处沿l方向的方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma.$$

其中$\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$为l方向的方向余弦.

6. 梯度 $\mathbf{grad}\ u=\frac{\partial u}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{k}.$

它与方向导数$\frac{\partial u}{\partial l}$之间有如下关系：

$$\frac{\partial u}{\partial l}=\mathbf{grad}_l u=\mathbf{grad}\ u\cdot\boldsymbol{l}^{\circ}$$

（$\boldsymbol{l}^{\circ}$为l方向上的单位矢量）.

7. 梯度运算的基本公式

(1) $\mathbf{grad}\ C=\mathbf{0}$ （C 为常数）;

(2) $\mathbf{grad}(Cu)=C\mathbf{grad}\ u$ （C 为常数）;

(3) $\mathbf{grad}(u\pm v)=\mathbf{grad}\ u\pm\mathbf{grad}\ v$;

(4) $\mathbf{grad}(uv)=u\mathbf{grad}\ v+v\mathbf{grad}\ u$;

(5) $\mathbf{grad}\ \dfrac{u}{v}=\dfrac{1}{v^2}(v\mathbf{grad}\ u-u\mathbf{grad}\ v)$;

(6) $\mathbf{grad}\ f(u)=f'(u)\mathbf{grad}\ u$;

(7) $\mathbf{grad}\ f(u,v)=\dfrac{\partial f}{\partial u}\mathbf{grad}\ u+\dfrac{\partial f}{\partial v}\mathbf{grad}\ v$.

8. 数量场 $u=u(x,y,z)$ 中，等值面 $u(x,y,z)=C$ 上任一点处的单位法矢量

$$\boldsymbol{n}^\circ=\pm\frac{\mathbf{grad}\ u}{|\mathbf{grad}\ u|}.$$

其中符号：当 $\boldsymbol{n}^\circ$的取向为函数 u 增大一方时，取“+”号；反之，取“-”号.

9. 矢量场 $\boldsymbol{A}$ 穿过曲面 S 所取一侧的通量

$$\Phi=\iint_S A_n\mathrm{d}S=\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}^\circ\mathrm{d}S=\iint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}.$$

其中 $\boldsymbol{n}^\circ$为 S 所取一侧的单位法矢量.

10. 矢量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的散度

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.$$

11. 散度运算的基本公式

(1) $\mathrm{div}(C\boldsymbol{A})=C\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}$ （C 为常数）;

(2) $\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}\pm\mathrm{div}\ \boldsymbol{B}$;

(3) $\mathrm{div}(u\boldsymbol{A})=u\mathrm{div}\ \boldsymbol{A}+\mathbf{grad}\ u\cdot\boldsymbol{A}$ （u 为数性函数）.

12. 矢量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 沿封闭曲线 l 所取方向的环量

$$\Gamma=\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\oint_l P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z.$$

13. 矢量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 在点 M 处沿方向 $\boldsymbol{n}$ 的环量面密度

$$\mu_n=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\cos\gamma.$$

其中 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 为 $\boldsymbol{n}$ 的方向余弦.

14. 矢量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的旋度

$$\begin{aligned}\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}&=\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\\&=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i}&\boldsymbol{j}&\boldsymbol{k}\\\frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\P&Q&R\end{vmatrix},\end{aligned}$$

它与环量面密度 μ_n 之间有如下关系：

$$\mu_n=\mathbf{rot}_n\boldsymbol{A}=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}^\circ.$$

其中 $\boldsymbol{n}^\circ$为与 $\boldsymbol{n}$ 同方向的单位矢量.

15. 矢量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的雅可比矩阵

$$D\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}\frac{\partial P}{\partial x}&\frac{\partial P}{\partial y}&\frac{\partial P}{\partial z}\\\frac{\partial Q}{\partial x}&\frac{\partial Q}{\partial y}&\frac{\partial Q}{\partial z}\\\frac{\partial R}{\partial x}&\frac{\partial R}{\partial y}&\frac{\partial R}{\partial z}\end{pmatrix}.$$

16. 旋度运算的基本公式

（1）$\mathbf{rot}\boldsymbol{A}(C\boldsymbol{A})=C\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}$ （C 为常数）；

（2）$\mathbf{rot}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}\pm\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}$；

（3）$\mathbf{rot}(u\boldsymbol{A})=u\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}+\mathbf{grad}\,u\times\boldsymbol{A}$ （u 为数性函数）；

（4）$\mathrm{div}(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}\cdot\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}$；

（5）$\mathbf{rot}(\mathbf{grad}\,u)=\mathbf{0}$；

（6）$\mathrm{div}(\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A})=0$.

17. 在线单连域内，若矢量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的旋度 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，则

（1）$\boldsymbol{A}$ 为有势场，从而存在满足 $\boldsymbol{A}=\mathbf{grad}\,u$ 的函数 u，令

$v=-u$即为场的势函数；

(2) 表达式 $\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}=P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 为全微分式，于是存在满足 $\mathrm{d}u=\boldsymbol{A}\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的原函数 u.

在(1)中的函数 u 与(2)中的原函数 u 是相同的，若在场中取一定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$，则原函数 u 可用如下公式求出：

$$u=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\mathrm{d}z+C$$

(C 为任意常数)，而且只需令 $v=-u$ 即成为场的势函数 v.

18. 在面单连域内，若矢量场 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 的散度 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$，则 $\boldsymbol{A}$ 为管形场. 于是存在满足 $\boldsymbol{A}=\mathbf{rot}\,\boldsymbol{B}$ 的矢势量 $\boldsymbol{B}=U\boldsymbol{i}+V\boldsymbol{j}+W\boldsymbol{k}$. 矢势量 $\boldsymbol{B}$ 不是唯一的，可用下式算出其中之一：

$$\begin{cases}U=\displaystyle\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\mathrm{d}z-\int_{y_0}^{y}R(x,y,z_0)\mathrm{d}y,\\ V=-\displaystyle\int_{z_0}^{z}P(x,y,z)\mathrm{d}z,\\ W=C(C\text{ 为任意常数}).\end{cases}$$

其中 y_0，z_0 是场中一定点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$的坐标.

19. 设 $\boldsymbol{A}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ 同时满足 $\operatorname{div}\boldsymbol{A}=0$ 及 $\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，则 $\boldsymbol{A}$ 为调和场. 于是存在满足拉普拉斯方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=0$$

的调和函数 u. 它不是唯一的，可用如下公式求出一个：

$$u=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\mathrm{d}z,$$

其中(x_0,y_0,z_0)为场中一定点 M_0 的坐标.

若引用拉普拉斯算子

$$\triangle=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

则上面拉普拉斯方程可写为

$$\triangle u=0.$$

20. 设 $\boldsymbol{A}=P(x,y)\boldsymbol{i}+Q(x,y)\boldsymbol{j}$ 为平面调和场，则场中存在力函数 $u(x,y)$ 和势函数 $v(x,y)$. 二者都是调和函数，且二者又满足关系式

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}.$$

故又称二者为共轭调和函数.

力函数 u 与势函数 v 分别有如下的计算公式：

$$u(x,y)=-\int_{x_0}^{x}Q(x,y_0)\,\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}P(x,y)\,\mathrm{d}y\ ;$$

$$v(x,y)=-\int_{x_0}^{x}P(x,y_0)\,\mathrm{d}x-\int_{y_0}^{y}Q(x,y)\,\mathrm{d}y\ .$$

其中(x_0,y_0)为场中一定点 M_0 的坐标.

21. 两个算子

（1）矢性微分算子(哈密顿算子)

$$\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k};$$

（2）数性微分算子

$$\boldsymbol{A}\cdot\nabla=A_x\frac{\partial}{\partial x}+A_y\frac{\partial}{\partial y}+A_z\frac{\partial}{\partial z}.$$

22. 梯度、散度、旋度可用∇算子表示为

$$\mathbf{grad}\ u=\nabla u,\quad \mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\nabla\cdot\boldsymbol{A},\quad \mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\nabla\times\boldsymbol{A}.$$

23. 用∇算子表示的一些常见公式(其中 u 与 v 为数性函数，$\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 为矢性函数)

（1）$\nabla(Cu)=C\nabla u$ （C 为常数）；

（2）$\nabla\cdot(C\boldsymbol{A})=C\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ （C 为常数）；

（3）$\nabla\times(C\boldsymbol{A})=C\nabla\times\boldsymbol{A}$ （C 为常数）；

（4）$\nabla(u\pm v)=\nabla u\pm\nabla v$；

（5）$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\nabla\cdot\boldsymbol{A}\pm\nabla\cdot\boldsymbol{B}$；

（6）$\nabla\times(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\nabla\times\boldsymbol{A}\pm\nabla\times\boldsymbol{B}$；

（7）$\nabla\cdot(u\boldsymbol{C})=\nabla u\cdot\boldsymbol{C}$ （$\boldsymbol{C}$ 为常矢）；

(8) $\nabla\times(u\boldsymbol{C})=\nabla u\times\boldsymbol{C}$ （$\boldsymbol{C}$ 为常矢）；

(9) $\nabla(uv)=u\nabla v+v\nabla u$；

(10) $\nabla\cdot(u\boldsymbol{A})=u\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\nabla u\cdot\boldsymbol{A}$；

(11) $\nabla\times(u\boldsymbol{A})=u\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla u\times\boldsymbol{A}$；

(12) $\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}$；

(13) $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=\boldsymbol{B}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})-\boldsymbol{A}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{B})$；

(14) $\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})$；

(15) $\nabla\cdot(\nabla u)=\nabla^2u=\Delta u$ （Δu 为调和量）；

(16) $\nabla\times(\nabla u)=\boldsymbol{0}$；

(17) $\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})=0$；

(18) $\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\Delta\boldsymbol{A}$（其中 $\Delta\boldsymbol{A}=\Delta A_x\boldsymbol{i}+\Delta A_y\boldsymbol{j}+\Delta A_z\boldsymbol{k}$）；

在下面的公式中 $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$，$r=|\boldsymbol{r}|$.

(19) $\nabla r=\boldsymbol{r}^\circ$；

(20) $\nabla\cdot\boldsymbol{r}=3$；

(21) $\nabla\times\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$；

(22) $\nabla f(u)=f'(u)\nabla u$；

(23) $\nabla f(u,v)=\dfrac{\partial f}{\partial u}\nabla u+\dfrac{\partial f}{\partial v}\nabla v$；

(24) $\nabla f(r)=f'(r)\boldsymbol{r}^\circ$；

(25) $\nabla\times[f(r)\boldsymbol{r}]=\boldsymbol{0}$；

(26) $\nabla\times(r^{-3}\boldsymbol{r})=\boldsymbol{0}$ （$r\neq0$）；

(27) 奥氏公式 $\displaystyle\oiint_S\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}=\iiint_\Omega(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\mathrm{d}V$；

(28) 斯托克斯公式 $\displaystyle\oint_l\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\iint_S(\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{S}$；

(29) 格林第一公式

$$\oiint_S (u\nabla v)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_\Omega (\nabla v\,\nabla u + u\Delta v)\,\mathrm{d}V;$$

（30）格林第二公式

$$\oiint_S (u\nabla v - v\nabla u)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_\Omega (u\Delta v - v\Delta u)\,\mathrm{d}V;$$

（31）格林第三公式

$$\oiint_S (u\nabla u)\cdot \mathrm{d}\boldsymbol{S} = \iiint_\Omega [(\nabla u)^2 + u\Delta u]\,\mathrm{d}V.$$

24. 正交曲线坐标系中的几个基本公式

（1）坐标曲线 q_i 的弧微分

$$\mathrm{d}s_i = H_i \mathrm{d}q_i \quad (i=1,2,3),$$

其中

$$H_i = \sqrt{\left(\frac{\partial x}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial q_i}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial q_i}\right)^2} \quad (i=1,2,3)$$

为拉梅系数.

（2）一般曲线的弧微分

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}s_1^2 + \mathrm{d}s_2^2 + \mathrm{d}s_3^2.$$

即 $$\mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2 + \mathrm{d}z^2 = H_1^2\mathrm{d}q_1^2 + H_2^2\mathrm{d}q_2^2 + H_3^2\mathrm{d}q_3^2.$$

在坐标系为正交的条件下，$\mathrm{d}s_i = \mathrm{d}s$ 在 $\boldsymbol{e}_i$ 方向上的投影($i=1,2,3$).

（3）设 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$，则

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i} = H_i \boldsymbol{e}_i \quad (i=1,2,3).$$

在坐标系为正交的条件下，有

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_i}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial q_j} = \begin{cases} 0, & i\neq j, \\ H_i^2, & i=j. \end{cases} \quad i,\ j=1,\ 2,\ 3.$$

25. 柱面坐标系和球面坐标系中的拉梅系数

（1）柱面坐标系中

$$H_\rho = 1,\ H_\varphi = \rho,\ H_z = 1.$$

（2）球面坐标系中

$$H_r = 1,\ H_\theta = r,\ H_\varphi = r\sin\theta.$$

26. 在正交曲线坐标系中，梯度、散度、旋度与调和量的表示式

$$\mathbf{grad}\ u = \frac{1}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\boldsymbol{e}_1 + \frac{1}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\boldsymbol{e}_2 + \frac{1}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\boldsymbol{e}_3;$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}(H_2H_3A_1) + \frac{\partial}{\partial q_2}(H_1H_3A_2) + \frac{\partial}{\partial q_3}(H_1H_2A_3)\right].$$

$$\Delta u = \frac{1}{H_1H_2H_3}\left[\frac{\partial}{\partial q_1}\left(\frac{H_2H_3}{H_1}\frac{\partial u}{\partial q_1}\right) + \frac{\partial}{\partial q_2}\left(\frac{H_1H_3}{H_2}\frac{\partial u}{\partial q_2}\right) + \frac{\partial}{\partial q_3}\left(\frac{H_1H_2}{H_3}\frac{\partial u}{\partial q_3}\right)\right].$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A} = \frac{1}{H_1H_2H_3}\begin{vmatrix} H_1\boldsymbol{e}_1 & H_2\boldsymbol{e}_2 & H_3\boldsymbol{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3} \\ H_1A_1 & H_2A_2 & H_3A_3 \end{vmatrix}.$$

27. 梯度、散度、旋度与调和量在柱面坐标系和球面坐标系中的表示式

（1）在柱面坐标系中

$$\mathbf{grad}\ u = \frac{\partial u}{\partial \rho}\boldsymbol{e}_\rho + \frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi + \frac{\partial u}{\partial z}\boldsymbol{e}_z;$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial(\rho A_\rho)}{\partial \rho} + \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{\partial(\rho A_z)}{\partial z}\right];$$

$$\Delta u = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial \rho}\right) + \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right];$$

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A} = \frac{1}{\rho}\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_\rho & \rho\boldsymbol{e}_\varphi & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial \rho} & \dfrac{\partial}{\partial \varphi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_\rho & \rho A_\varphi & A_z \end{vmatrix}.$$

（2）在球面坐标系中

$$\mathbf{grad}\ u = \frac{\partial u}{\partial r}\boldsymbol{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\boldsymbol{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u}{\partial \varphi}\boldsymbol{e}_\varphi;$$

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial(r^2A_r)}{\partial r} + r\frac{\partial(\sin\theta A_\theta)}{\partial \theta} + r\frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi}\right];$$

$$\Delta u=\frac{1}{r^2\sin\theta}\left[\sin\theta\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}\right];$$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{r^2\sin\theta}\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_r & r\boldsymbol{e}_\theta & r\sin\theta\boldsymbol{e}_\varphi\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\varphi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\varphi\end{vmatrix}$$

28. 在正交曲线坐标系(q_1,q_2,q_3)中，设有矢量场

$$\boldsymbol{A}=A_1\boldsymbol{e}_1+A_2\boldsymbol{e}_2+A_3\boldsymbol{e}_3,$$

H_1，H_2，H_3 为坐标系的拉梅系数. 引入记号

$$H=H_1H_2H_3;$$

$$F_1=H_1A_1,\quad F_2=H_2A_2,\quad F_3=H_3A_3;$$

$$G_1=H_2H_3A_1,\quad G_2=H_1H_3A_2,\quad G_3=H_1H_2A_3.$$

则有

$$\mathrm{div}\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{H}\left(\frac{\partial G_1}{\partial q_1}+\frac{\partial G_2}{\partial q_2}+\frac{\partial G_3}{\partial q_3}\right);$$

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{H}\left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial q_2}-\frac{\partial F_2}{\partial q_3}\right)H_1\boldsymbol{e}_1+\left(\frac{\partial F_1}{\partial q_3}-\frac{\partial F_3}{\partial q_1}\right)H_2\boldsymbol{e}_2+\left(\frac{\partial F_2}{\partial q_1}-\frac{\partial F_1}{\partial q_2}\right)H_3\boldsymbol{e}_3\right].$$

或

$$\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A}=\frac{1}{H}\begin{vmatrix}H_1\boldsymbol{e}_1 & H_2\boldsymbol{e}_2 & H_3\boldsymbol{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial q_1} & \dfrac{\partial}{\partial q_2} & \dfrac{\partial}{\partial q_3}\\ F_1 & F_2 & F_3\end{vmatrix}$$

及广义雅可比矩阵

$$GA=\frac{1}{H}\begin{pmatrix}\dfrac{\partial G_1}{\partial q_1} & \dfrac{\partial F_1}{\partial q_2} & \dfrac{\partial F_1}{\partial q_3}\\ \dfrac{\partial F_2}{\partial q_1} & \dfrac{\partial G_2}{\partial q_2} & \dfrac{\partial F_2}{\partial q_3}\\ \dfrac{\partial F_3}{\partial q_1} & \dfrac{\partial F_3}{\partial q_2} & \dfrac{\partial G_3}{\partial q_3}\end{pmatrix}.$$

29. 在正交曲线坐标系中的线单连域内若有 $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{A} = \mathbf{0}$，则

（1）$\boldsymbol{A}$ 为有势场，从而存在满足 $\boldsymbol{A} = \mathbf{grad}\, u$ 的函数 u. 令 $v = -u$ 即为场的势函数；

（2）表达式 $\boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l} = A_1 H_1 \mathrm{d}q_1 + A_2 H_2 \mathrm{d}q_2 + A_3 H_3 \mathrm{d}q_3$ 为全微分式，从而存在满足 $\mathrm{d}u = \boldsymbol{A} \cdot \mathrm{d}\boldsymbol{l}$ 的原函数 u.

在(1)中的函数 u 与(2)中的原函数 u 是相同的. 若记

$$F_1 = A_1 H_1,\ F_2 = A_2 H_2,\ F_3 = A_3 H_3,$$

并在场中取一定点 $M_0(Q_1, Q_2, Q_3)$，则原函数 u 可用如下公式求出：

$$u = \int_{Q_1}^{q_1} F_1(q_1, Q_2, Q_3)\,\mathrm{d}q_1 + \int_{Q_2}^{q_2} F_2(q_1, q_2, Q_3)\,\mathrm{d}q_2 + \int_{Q_3}^{q_3} F_3(q_1, q_2, q_3)\,\mathrm{d}q_3 + C$$

（其中 C 为任意常数）. 而且，只要令 $v = -u$ 即得场的势函数 v.

30. 在正交曲线坐标系中的面单连域内，若有 $\mathrm{div}\, \boldsymbol{A} = 0$，则存在满足 $\boldsymbol{A} = \mathbf{rot}\, \boldsymbol{B}$ 的矢势量 $\boldsymbol{B}$. 若记

$$G_1 = H_2 H_3 A_1,\ G_2 = H_1 H_3 A_2,\ G_3 = H_1 H_2 A_3.$$

并在场中取一定点 $M_0(Q_1, Q_2, Q_3)$，则矢势量

$$\boldsymbol{B} = B_1 \boldsymbol{e}_1 + B_2 \boldsymbol{e}_2 + B_3 \boldsymbol{e}_3,$$

其中 B_1，B_2，B_3 由下式确定：

$$B_1 = \frac{1}{H_1}\left[\int_{Q_3}^{q_3} G_2(q_1, q_2, q_3)\,\mathrm{d}q_3 - \int_{Q_2}^{q_2} G_3(q_1, q_2, Q_3)\,\mathrm{d}q_2\right],$$

$$B_2 = -\frac{1}{H_2}\int_{Q_3}^{q_3} G_1(q_1, q_2, q_3)\,\mathrm{d}q_3,$$

$$B_3 = \frac{C}{H_3}\quad（C \text{ 为任意常数}）.$$