丘成桐院士演講——
廿一世紀數學挑戰

主講：丘成桐
記錄：蘇信豪
時間：民國89年5月29日
地點：清華大學

林長壽教授:

很高興請到哈佛大學的丘成桐教授來給我們演講。丘成桐教授是中央研究院院士, 也得過數學界的 Fields Medal (費爾茲獎), 以及無數多的各種不同的大獎。他的生平不用我再來介紹。我們歡迎他今天來給我們演講, 他的演講題目是:「21世紀數學的挑戰」, 歡迎他。

丘成桐教授:

今天講這個題目, 是因爲我在上海剛講過, 是楊振寧先生的父親楊武之先生的紀念講座。他們叫我講個通俗的演講, 結果就用了這個題目。一方面是希望讓更多的人來聽, 一方面也是正好看到了一篇文章, 就將這個名字劃下來。

我們先來看看數學的分支以及數學和科學之間的關係。數學跟三個主要的、不同的科學有關, 一個跟社會有關, 一個跟工程有關, 一個跟物理有關, 同時也知道它們互相之間也有交流。

現代的知識在不同的層面上都跟數學有直接的關係。與社會科學有關的數學包括訊息數學、網路數學、統計數學等等, 文獻整理、歷史研究跟統計學有很密切的關係。都市的規劃和人口的流動也大量的使用數學, 尤其中國大陸的人口多得不得了, 人口流動跟人口調查是非常重要的一個問題。選舉的時候民意調查也很重要, 不然會猜測錯誤。病歷調查跟生物統計調查是很重要的科學, 而經濟金融跟保險估值, 在經濟上起了很大的作用, 很多數學家到金融界去做這些相關的工作。這些都說明了數學在社會科學上的重要性。

那我們來看看工程方面的數學, 這就多了! 流體科學可以講是最典型的應用數學題目, 但是重要的問題越來越難解決, 我們希望應用數學能夠慢慢的發展到解決這方面重要的問題。航空力學是個古典的氣流問題, 這裡面有 wave equation (波動方程), 也有 shock wave 等等不同的數學問題。而在生物

學中, 血流是一個基本的問題, 就是生物體液流動的問題。這是個很困難的問題, 因爲液體跟固體之間的交互作用是非常複雜的。氣象科學方面有太空、大氣、海洋、湍流問題, 這些都是很難的問題。fusion(核融合) 是能源方面重要的問題, 在這方面美國政府花了很多錢, 但還是沒能解決。油管科學是石油公司希望油管中的油能夠流得更快以降低成本產生的科學, 是流體問題。固體科學當然有很多不同的結構, 本身跟微分幾何、微分方程有很大的交流。量子工程學、分子結構、半導體都有很重要的近代數學的應用。計算機科學、圖像識別跟密碼問題這些種種不同的科學, 都可以看到數學的應用。

在物理方面, 我們當然看到很多不同的基本問題, 基本粒子、量子場論、量子力學、廣義相對論、電磁理論、古典力學、多體問題、量子多體問題跟弦理論, 這可都是跟數學有著密切的關係。在這些物理現象裡面, 也產生了很多跟工程學有直接關係的問題。

基本上, 工程科學是社會科學的基礎, 而理論物理是工程科學的基礎, 數學又是理論物理的基礎。因此數學是所有科學的基礎, 這個我想是沒有人可以否認的。但是怎麼發揮數學的能力, 是一個很重要的問題。我們曉得數學家所研究的問題多的不得了, 我剛才舉的至少有幾十個不同的學科都要用到數學, 所以數學在二十一世紀會變成一個很重要的學問。工程科學和社會科學應用上的可說是數學對社會需求的一個交代。數學確是存實用價値的。可是理論物理對數學本身有根本的影響, 而數學又是它的基礎。我們今天講的是從基礎講起, 從數學家的觀點來看二十一世紀的數學應當走的重要的方向, 是一個大方向, 不是找幾個分支來講。譬如來講, 圖像處理是應用數學重要的分枝, 可是它不是數學的主流, 我今天要講的是, 從我的個人的看法來看, 數學以後幾個主流是什麼樣子。我個人以爲, 在瞭解數學的基本方向以後, 才能夠在應用方面發揮數學的大能。

我們先看看幾個近代理論物理學的主流。近代理論物理的一個夢想就是「統一場論」, 統一場論是由愛因斯坦所提出來的一個遠景, 在愛因斯坦發現廣義相對論以後, 他一直就想做這個統一場論。但是直到他去世爲止, 他在統一場論上做不出很重要的工作。這當然不是由於他不夠聰明, 而是由於當時知道的數據、知道的數學、知道的理論不夠。

宇宙間我們現在講的力場有四個, 電磁場、weak interaction (弱力)、strong interaction (強力) 跟 gravity (重力) 這四個不同的場, 這是到目前爲止, 觀察得到的力場。物理學的 Standard model (標準模型), 自從經過許多出名的物理學家將它們整合以後, 已經成功的將電磁場、weak interaction (弱力) 跟 strong interaction (強力) 互相連合起來。電磁場本身就是一個統一場論, 將電場和磁場統一起來, 它們互爲因果 。楊先生的規範場論是將電磁場、weak interaction (弱力) 跟 strong interaction(強力) 連合起來的最重要的一個工具。我們發覺這三種力基本上是規範場, 這是楊先生很重要的貢獻。

人類的科技越來越進步, 到了二十世紀後期, 我們發現了對很多科學家來講是既新

奇又繁複的難題。譬如來講, turbulence 問題 (湍流問題), 是一個很重要的大問題, 還有 black hole (黑洞) 問題也是。可是到目前爲止, 理論物理學家所發覺能夠主宰所有變化的只是幾個少數的基本定律。例如: 之前提及的 Standard model (標準模型), 統一了前面三個主要的場, 而且已經能夠解釋很多重要的現象。

可是, 重力場是個很重要的場, 從古到今科學家對重力場都看得很重要。重力場是從大師阿基米德以來, 到牛頓, 再到愛因斯坦, 都很重視。可是至今, 重力場和這三個場還沒能統一。有一次我遇到陳先生, 他講這四個場好好的, 爲什麼要統一它們? 可見有些人認爲這四個不同的場不見得一定要統一。

可是, 事實上從古到今很多哲學家或者是宗教家的思想中都隱含統一的觀念。以我們中國來講有:「太極生兩儀, 兩儀生四象」, 也有孔子所講的:「吾道一以貫之」, 因爲所有理論裡面, 都有個基本的原則, 有一條中心思想將它連合起來, 這是統一場論的基本看法。但是統一場論的假設, 如果沒有很重要的實驗來印證的話, 也只是憑空想像而已。

我們先來看唯一一個還沒被統一進去的場 — 重力場。古典力學最重要的一個應用就是對於星體運行的描述, 星體的運行當然就是重力場的結果。當狹義相對論 (Special Relativity) 被發現以後, 愛因斯坦再將狹義相對論 (Special Relativity) 跟牛頓的 Newtonian Mechanics (牛頓力學) 統一起來, 就成爲廣義相對論。所有我認識的物理學家都認爲這是愛因斯坦對物理學偉大的貢獻, 因爲這實在是個美妙的創作。

我們來談談愛因斯坦方程式

$$R_{ij} - \frac{R}{2} g_{ij} = T_{ij},$$

其中 g_{ij} 是測度張量、T_{ij} 是物質張量、而 R_{ij} 是 Ricci 曲率張量。愛因斯坦方程式的左手邊是時空的描述, 右手邊則是物質分布的張量。愛因斯坦方程式是用來描述宇宙的時空幾何, 這是個很漂亮的方程。整個方程式說明了時空的幾何是有直接物理意義的, 這也是愛因斯坦最富有想像力的一個看法。從前, 牛頓力學的時空是不變的, 自從愛因斯坦的理論被提出來之後, 我們就說時空是跟著重力場來改變的。愛因斯坦方程式的右手邊是表示物質的分布, 譬如來講: 電磁場或者流體的分佈會引起時空的幾何變化。所以時空是由幾何來決定的, 而幾何的度量方法則可以由物質來影響的。這是一個很巧妙的方程, 物質可以影響時空, 可是物質並不是影響時空唯一的原因, 在眞空的狀態下, 時空自己本身還是會有變化的。重力場自己會影響自己, 這是因爲非線性方程式的緣故, 這是一個很巧妙的方程式。

剛才講過, 前面三個場都是規範場, 而事實上愛因斯坦方程式也是個規範場, 因爲 g_{ij} 本身也是個規範場, 只不過它的規範群是個比較非線性的無限維群。愛因斯坦說過, 他的這個方程式, 左手邊是金子做的, 右手邊則是泥巴做的。左手是金子做的, 右手是泥巴做的, 這個講起來像是玩笑話的解釋, 事實上你可以從裡面慢慢地去體會。方程式的左手邊是很漂亮的一個方程式, 一個字都不能改, 它

影響到時空的幾何。假如你將它改變的話, 加多這個方程式的某個部分, 或減少這個方程式的其他部分, 就變得很難看, 這是第一點。第二點則是準確。至於方程式的右手邊, 雖然到目前爲止, 愛因斯坦方程式基本是對的, 可是就這樣子叫它等於左手邊, 有點人工化, 不太自然。愛因斯坦一直期望這整個方程可以從最基本的觀念推導出來, 這個想法影響到 Kaluza 和 Klein 這兩個物理學家, 進而從這邊發展出他們的 model(模型)。這兩位物理學家在一九二幾年, 就是廣義相對論剛出現沒多久的時候, 將這個方程式推廣到高維度空間。從前是三加一維四維空間裡面的一個方程式, Kaluza 和 Klein 將這個方程式變到五維, 而讓方程式的右手邊等於零。之後, 我們發覺整個方程式變得很漂亮, 就是右手邊會等於零, 而且還是可以描述這個方程式本身的意義。爲什麼呢? 這是因爲多了一維之後就可以增加更多變數來表述物質分佈。這是 Kaluza 和 Klein 的一個想法, 這個想法影響到目前的統一場論, 而且影響很大。

爲什麼我要談這個方程呢? 因爲照我的看法, 這個方程式會將幾何學跟很大量的微分方程統一起來。我們發覺這個方程式本身包含了很多種不同的數學方程式, 而這些方程式的研究, 我想在二十一世紀裡面會產生很大的作用。這個方程式, 不是個 elliptic (橢圓) 的方程式, 因爲 g_{ij} 本身不是正定的, 它的 signature 是

$$\begin{bmatrix} +1 & & & \\ & -1 & & \\ & & -1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

所以這個非線性既有橢圓形, 又有雙曲形和拋物形方程的特性, 研究重力方程對微分幾何和微分方程會有很大的影響, 我希望這個情況發生後, 可以看到這方程式的更深入的一面。

弦 (string) 理論企圖統一重力場和其他所有的場。我的看法是在二十一世紀時, 基本數學也會遇到同樣的挑戰, 這就是基本數學也會有大統一, 跟基本物理的大統一差不多。基本數學中有很多不同的分支, 基本數學也會遇到跟物理上同樣的挑戰。基本數學的大統一可以將各門分支很自然的統一起來。各門分支在統一時, 會產生很漂亮的火花, 同時統一以後才能夠對每一門分支的本質了解得更徹底。這是一個看法, 就好像電磁場的統一, 電場假如沒有磁場是不完美的一個理論, 磁場沒有電場也不是個完美的理論。Maxwell (馬克士威) 方程式的兩邊都統一起來以後, 對磁學或電學有了很根本的了解。所以基本上來講, 我認爲數學的統一是二十一世紀裡很重要的一個方向, 在統一以後才能夠對數學產生本質上的了解。

而數學最後的統一會比物理上的更基本, 也因爲它更基本, 它會受到物理上統一場論很大的影響, 物理上的統一場論有很多觀念會影響到數學的發展。近代弦理論的發展, 已經成功的將數學的幾個分支: 微分幾何、代數幾何、群表現理論、數論跟 Topology (拓樸), 相當大的部分很自然的統一起來了。假如不是由於弦理論的話, 我們大概想不到能有這樣自然的橋樑將它連起來。我們可以企

圖用數學的觀念, 將它統一, 但往往比較人工化而不成功, 這是因爲沒有一個很好的物理背景, 但是在自然的物理背景下所得到的數學果實都是相當好的。

我們再仔細討論一下。統一場論跟數學的統一, 會遇到什麼問題呢? 我們舉幾個重要的例子。基本物理上有所謂 Hierarchy 的問題, 我們曉得重力場是很微弱的, 這個交互作用非常非常地弱, 跟強作用和弱作用裡面的作用場相差的 scale (數量級) 是十的二十多次方。這裡所提出物理上所謂的 Hierarchy 問題, 在幾十年前 Dirac 就提出過。爲什麼有些場的能量可以跟其他的場相差那麼遠? 就像一個地球的質量比一個 atom (原子) 的質量相差不知道多少倍, 這是一個難以回答的問題, 也是一個 scale (數量級) 的問題。這個 scale (數量級) 的問題, 越來越多的基本物理學家在問這個問題, 重力場和其他場統一。scale (數量級) 的問題一定要解決, 爲什麼有的場那麼重有的場卻那麼輕?

剛好在我們數學上有個同樣的大問題, 也是 scale (數量級) 的問題。在微分幾何也好, 尤其在微分方程裡邊, 或者是不同的 Analysis (分析學) 裡邊, 會產生同樣的問題, 怎樣將不同的 scale (數量級) 融合在一起的問題。這個問題就是怎麼將它們從大範圍的觀點統合起來。研究微分幾何的一個方向也是從小區域的幾何, 來控制大範圍的幾何, 這是微分幾何這幾十年來的主要方向, 所以這 scale (數量級) 是很重要的。很小很小的 scale (數量級), 就如某個幾何的奇異點 (singularity), 如何局限大範圍的現象是極有意思的問題。

如何用很基本的方法來處理不同 scale (數量級) 的問題, 也是應用數學裡面一個很重要的問題, 很可能是最重要的問題。因爲應用數學裡邊有很多微分方程式, 微分方程式裡邊往往出現很多不同的 scale (數量級), 你怎麼樣將它融合在一起? 就和湍流問題是一個 scale (數量級) 跟 scale (數量級) 的相交所產生的一個問題。

純數學裡邊也同樣有這個問題。純數學應當是 scale analysis 中的重要工具。怎麼研究這個問題呢 ? 在近代統計物理跟量子場論中有很多這方面的研究。姚鴻澤 (註: 姚鴻澤教授, 紐約大學庫朗研究所教授, 美國 Mac Arthur 獎得主, 專長統計力學) 現在人在這裡, 你們可以問他關於統計物理跟 scale analysis 之間的關係。scale analysis 是數學跟物理中遇到的一個大問題, 所以一定要了解。

微分幾何的張量分析, 在這個 multi-scale (多數量級) 的分析中勢必會有很大的應用。可是, 到目前爲止我們還沒有充份利用到它, 因爲微分幾何中 curvature (曲率) 的觀念是用張量來描述不同方向的。怎麼樣將它用到 scale analysis , 是個很有意思的問題。舉例來講, 一個 graph (圖) 在逼近一個幾何圖形的時候, 這個 scale (數量級) 的逼近方法是個很有意思的問題。我考慮過這個問題, 這個問題對一個微分幾何學家來講是很有趣的, 對一個 graph (圖論) 學家來講, 也是個很有趣的問題。graph (圖) 方面

我們也做了很多分析, 也產生了很多的數學。最後的問題就是圖形跟微分圖形接近的時候, continuous (連續的) 跟 discrete (離散的) 的圖之間究竟有什麼聯繫, 這裡有不同 scale (數量級) 的時候, 要怎樣做逼近? 尤其是幾何圖形有奇異點時, 怎樣得到圖形的主要精神? 這些問題, 無論對純數學或是應用數學都是個重要的事情。

關於 scale (數量級) 方面, 我還要講的是在近代弦理論裡面發現一個很有意思的現象, 這十多年來我們都在研究這個現象。我們發現 R 跟 $\frac{1}{R}$ 的 scale (數量級) 剛好相反, R 跟 $\frac{1}{R}$ 分別是一小一大。但是存在這兩種數量級的 isomorphic (同構) 的量子場論, 也就是說不同的 quantum field theory (量子場論) 可以互相同構, 然而它的 scale (數量級) 卻剛好相反。這是小的 scale (數量級) 跟大的 scale (數量級) 之間的 isomorphic (同構)。這是個很奇妙的發現, 因爲一個量子場論有 coupling constant 的問題。在 strong coupling constant 的時候, 是個很難很麻煩的問題, 量子場論在 strong coupling constant 的時候根本沒辦法去計算。可是因爲有 isomorphism (同構), 所以 strong coupling constant 跟 weak coupling constant 的量子場論是可以同構。在 weak coupling constant 的時候, 我們就有一些可用的漸近方法來解決它。所以最近這幾年發現, 很多量子場在很強的 coupling constant 的時候, 還是可以解決的, 因爲它跟 weak coupling constant 是 isomorphic (同構的)。這表示我們所謂 scale (數量級) 的問題, 在二十一世紀經過量子場論的處理以後, 有著很深刻的發展。這個現象基本上是跟 Fourier analysis(富立葉分析)

$$e^{i\sum_i k_j x_j}$$

有關, 富立葉分析中包含了波的變動。假如我們在 k_j 這邊乘一個 constant (常數), 而在 x_j 這邊除同樣的 constant (常數), 基本上是上面所述的同構。我想在二十一世紀, 對整個 scale analysis (數量級分析) 這個重要的問題, 無論在數學上或是在物理上都要有重要的發現。

另外一個重要的觀念, 就是自古就重視的 symmetric (對稱) 的觀念, 從古到今最簡單的是一個對稱, 就是 mirror symmetry (鏡像對稱)。你看鏡子, 這邊照過去跟那邊照過來就是個鏡子的對稱, 這個對稱群是 Z_2, 而雪花的對稱則是六角形對稱, 我們在大學時學過很多對稱群。連續群到了十九世紀開始發展, 在微分幾何上跟物理上有很重要的用途, 在二十世紀 non-compact discrete group (非緊緻的離散群) 在數論跟幾何上有很重要的用途, 最近在物理上也起很大的作用。再來是無限維的 local symmetry, 這是規範場裡面的規範群, 是無限維的。這當然是楊氏父子的拿手東西, 是楊先生在二十世紀物理的大貢獻, 這是他在二十世紀後半期的理論。規範群是理論物理中的一個基本對稱群。剛才講的 symmetry (對稱), 在這最近十多年更推伸出去, 就是 duality (對偶), 其內容比一般的 symmetry (對稱) 更廣一點。一個不同的理論, 它的基本結構是可以同

構的, 就像剛才講不同的量子場論可以同構, 這只不過是其中一個例子。在弦理論, 發覺有很多不同的量子場論是相互對偶的, 因此得到數學家驚異的結果。我們剛才講過的在 strong coupling constant 時沒辦法算的一個量子場論, 可以用 duality (對偶) 算出來, 這是個壯觀的進展。我們可以猜測, 在二十一世紀的至少前五十年大概會有很多這種 duality (對偶) 的理論會出現。我們要好好的對它做全盤的了解, 爲什麼這麼多不同的理論可以互相對偶?

對稱的觀念事實上是一個不容易掌握的觀念, 可是如果用得正確的話, 就會有很大的威力。所以就看你所學習的基本工具跟基本能力有多成功, 好像楊先生就對對稱的工具掌握得很好, 而解決很多物理上重要的問題, 現代數學家如 Weyl 和 Atiyah 就善於利用對稱群來解決幾何問題。可是, 另外一個基本科學中很重要的基本命題, 是怎麼將對稱的物理學基本現象跟非對稱的世界聯合起來? 這個世界上所有的現象在最後看到的時候, 基本上都不是對稱的。假如我們相信基本物理的話, 那基本的物理現象都是 perfect symmetry (完美的對稱) 的。在最開始的時候, 也是最高能的時候物質是完全對稱的, 從完全對稱到非對稱的現象界在物理上叫做 symmetry breaking, 爲什麼世界上我們所看到的現象能夠由完美對稱的物質產生? 基本物理沒有辦法很好的來解決這個問題。當然我們曉得在 Standard model (標準模型) 裡邊有所謂的 Higgs mechanism 的方法。可是很多人對 Higgs mechanism 並不滿意, 因爲這個理論不夠自然。剛才講的統一場論, 在弦理論裡邊, supersymmetry 是個比普通 symmetry (對稱) 更強的一個觀念。supersymmetry 的 breaking 在弦理論裡邊可能是最重要的一個問題, 就是怎麼從 supersymmetry 到普通的我們熟悉的理論物理? 這也是爲什麼很多理論物理學家會對弦理論抱觀望態度的一個原因, 就是它們不懂得怎麼 symmetry breaking, 從一個很基本的對稱達到非對稱的現象界, 在很多非線性方程理論中, 亦應當產生類此現象, 同時會極有意義, 應當從最基本的物理來探討。

第二個很基本的物理定律是 time symmetry (時間對稱), 很多基本物理的定律, 像 Einstein equation (愛因斯坦方程式), 假如我們將時間變成相反方向的時候, 整個方程式並沒有改變。又譬如普通的微分方程式

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}-\Delta=0,$$

此處 $\Delta=\sum\limits_i\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$ 爲 Laplace 算子, 當時間變成負時間

$$t\to -t$$

的時候, 它本身並沒有改變, 在這些基本的物理定律下面, 時間向前和向後是沒有分別的。可是我們卻擔憂時光會消失, 就好像我開始老了 (聽衆: 哈哈哈)。這是個很重要的問題, 時間爲什麼向前走? 這是很重要的, 在弱交互作用裡面有所謂 CP violation 的問題, 就說到時間在弱場不對稱, 這個問題在物理上很重要, 在數學上也會很重要。

現今唯一能夠解釋時間向前走的問題, 只有 second law of thermodynamics (熱

力學第二基本定律)。熱力學中的 entropy 是跟著時間來增加的, entropy 是用來量度整個物理系統的 randomness 行為, 這是很炫麗的一個定理。從很多方面來講, 這還不是被徹底了解的一個命題, 姚鴻澤是這方面的專家, 可是我還是繼續講下去 (聽衆: 哈哈哈)。這個 entropy 的問題, 在微分方程, 在量子力學中應用到我們每天的生活裡邊, 種種的問題都會遇到 entropy。entropy 在數學上究竟能不能夠有更重要的發揮, 同時在微分方程上, 有沒有辦法將它在更大的範圍中組合起來, 變成一個系統化的研究, 我想這是一個很重要很有意思的命題。

這個 entropy 的觀念, 在微分方程上除了有幾個人用過以外, 真正用上的情形還不是很多。用上 entropy 很出名的文章之一是 John Nash(見上期「有朋自遠方來 — 訪問 J. J. Kohn」附註) 在 1958 年的時候寫的, 我看了五遍還是對它不很了解。我希望做微分方程的人, 能好好的將這篇文章仔細地再看一看。John Nash 在他生病以前, 寫了兩篇很出名的文章, 他這個文章可以解決我們看到的很多重要的物理上的現象, 文章裡就是用 entropy 的方法來解決問題。我猜測 entropy 的研究在數學上會有很大的很重要的貢獻, 因為它有效地處理時間向前走的問題。時間的箭頭在廣義相對論中是一個很重要的物理量, 因為當我們想用宇宙學的方法 (big bang 大爆炸理論) 來研究世界的時候, 我們要研究大爆炸產生後, 現象界是怎麼來的? 因為剛才講過廣義相對論裡面是 time symmetry (時間對稱) 的, 當時間 t 變成 $-t$ 的時候, Einstein 方程式是完全 symmetric (對稱) 的。由於這樣, 我們並沒有在方程式中看到時間的箭頭, 可是基本上時間是有箭頭的。Roger Penrose 和 Hawking 這兩個很出名的廣義相對論物理學家, 他們花了很多時間去討論在廣義相對論中的時空上的 entropy 的觀念。時空的 entropy 是個很有意思的題目。Roger Penrose 在他的書裡邊討論到這個問題, 你們可以去看看。他有個建議, 時空裡面的 entropy 是跟所謂空間的一個 Weyl tensor 有關。它是用來量度時空的曲率的, 到如今, 大家都還沒有普遍地接納他的建議。我認為很多自然界的現象所產生的方程如 turbulence(湍流) 問題裡面也有同樣的困難。

我們曉得基本物理學是用數學的形式來表現的, 是用等式的形式來表達的。所有的基本物理現象, 我們可以用一個方程式來表示, 可是往往在研究這種方程式的時候, 我們做分析的或者做應用數學的要曉得不等式是很重要的一個工具, 估值問題在分析跟應用數學裡邊, 是最重要的一個工具。應用數學家們常有很多不同的天馬行空的描述, 但是最後如果沒有一個很好的方法來估值的話, 這些描述大部份都是不實際的。這是近代很多應用數學家最大的問題, 沒有將估值做好, 就繼續向前進。就舉個例子來講, 波浪的重疊, 最後發生的可能是個很光滑的波。你看一道光這樣走 在投影片上畫兩個波形 , 一道光是這樣走, 就算是考慮 Quantum Mechanics (量子力學) 效應時也是同樣, 當兩個波疊加起來時, 也會產生一個很平滑的波。這表示什

麼東西呢? 表示這中間有很多 cancellation (相消)。往往一個表達式, 我們不曉得中間有一些 cancellation (相消)。這裡不但是研究 cancellation (相消), 不同的數學, 不同的波, 不同的分支裡面出現的量, 怎麼 cancel (消去), 這是個很大的問題。在二十一世紀的前幾十年, 假如我們想對應用數學有很好的研究的話, 我想估值是一個重要的問題。

接下來我們來談一談應用數學, 我認爲應用數學的最健康的一個走法是: 對要應用的對象做一個 model (模型), 而這個 model (模型) 是要從實驗而來, 因此發展出實際應用時的解決方法。實驗就是從實驗物理裡邊發現的一些現象, 例如用顯微鏡看或是用望遠鏡看到的。而從數字計算、工程、資訊或統計出來的經驗, 也可以算是個實驗。對這些實驗做分析, 一定要有好的組合數學的方法, 微分方程的方法或者是統計的方法, 並加上物理、化學或是生物理論的幫忙, 來解釋實驗, 如此所得出的結果就可以成爲一個理論或者一個新的方法, 便可以到應用的層面上去, 之後再觀察應用之後的結果, 就會發現更多的現象, 有了更多的現象以後, 再去重新去做 model (模型), 這是一個循環。但是很不幸的, 很多物理學家及應用數學家, 主要的貢獻是在數字計算的實驗, 我們近代的 computer (電腦) 威力太強大了, 很多應用數學家只是單方面做 computer modeling (電腦模型模擬), 而沒有去做很仔細的分析。一個好的大學或者一個好的應用數學系應該朝著能發揮這整個循環威力的方向來進行, 才能夠全面瞭解應用數學。

一般來說 natural phenomena (自然現象) 提供了很多重要的數學模型, 很多重要的模型都是從實驗觀察來的, 這是很自然的, 因爲我們打開眼睛看的就是大自然。但是, 數學家還會再使用本身的想像力, 在觀察的基礎上創造出新的結構, 這是個重要的事實。數學家有自己的看法, 能夠將我們從自然界觀察而來的工作, 放在自己的思想裡邊, 並再重新構造新的結構, 這是一個好的數學家成爲一個大數學家的原因。深的、好的、很成功的數學結構, 往往是好幾代的數學家共同貢獻出來的, 不是一個兩個人就能做出來的, 往往是由幾個世紀所累積的數學工作, 合併之後而產生出來漂亮的火花。就像 Andrew Wiles 做的工作, 是數學上好幾個重要的理論, elliptic curve (橢圓曲線)、automorphic form (自守形式) 跟表示理論, 的大合併。這些理論都是發展了很多年, 都是分別被發展出來的, 而且發展了五十年甚至一百年的功夫, 最後才能夠有 Andrew Wiles 解決大問題的一個成果出來, 並不是一朝一夕可以將它完成的。所以, 我們現在不同的領域, 原本會有不同的應用, 但是到最後合併的時候, 會產生出一些很重要成果。

總結來說, 在整個數學發展裡面, 我們認爲大合併以幾何和數字爲先。幾何和數字可以講是最直觀的數學觀念, 我們看到的幾何現象及數字, 尤其是整數, 都可以說是大自然中很直觀的現象。二十世紀的數論學家通過代數幾何的方法, 將整數方程的一部份跟幾何混合在一起, 而產生了「算數幾何」。而群

表示理論亦逐漸地跟數論與幾何學融合在一起。所以「融合」這件事在整個二十世紀裡面不停的發生, 而且還沒有全部完成。剛剛所舉的幾個例子, 都還沒有全部完成, 但是經過這幾年的變化, 慢慢開始有大的變化。

從另一個方面來看, 這二十年來 Topology (拓樸) 跟幾何在很多方面都已經融合在一起了, 尤其是三維空間跟四維空間的研究, 就非懂得幾何不可。古典的 Topology (拓樸) 的方法在三維空間及四維空間時無能爲力, 而這二十年來的發展, 藉著幾何的發展才將它重新發揮起來。其中重要的例子, 就是二十年前Thurston 的一個猜測。Thurston 這個猜測是個很偉大的理論。在三維空間裡面他構造一個幾何結構, 就是剛才我講的, 要有大的能力, 大的智慧, 才能夠在一個比較粗淺的基礎上, 構造深的結構, 這是一個劃時代的貢獻。這個就像十九世紀時, 黎曼跟很多出名的學者, 例如: Poincaré, 他們引用了 Riemann surface (黎曼曲面) 的概念來研究 complex analysis (複變分析), 這對整個數學有基本上的改變。Thurston 的理論大概也是會有很大的貢獻, 可是現在的問題是 Thurston 的猜想還沒有全部被證明是對的。在二十一世紀裡邊, 我想這會是一個很重要的方向。

而四維空間又比三維空間複雜的多, 在四維空間中, 我們連一個好的猜測都沒有。雖然 Donaldson 理論和 Seiberg-Witten 理論中對四維空間有相當大的幫忙, 可是在四維空間中我們連一個好的猜測都找不到, 因爲我們根本沒辦法引進一個好的深入的結構, 所以這是一個很具挑戰性的問題。而且, 了解四維空間是個很重要的問題, 因爲四維空間是時空的一部份, 時空是四維的, 所以物理學家很想了解四維空間的結構。我們在代數幾何中, 或在微分幾何中, 也很想了解四維空間。四維空間的研究, 我想是整個二十一世紀都會花心思去研究的課題。這不但對 Topology (拓樸) 有重要的貢獻, 對微分幾何, 對量子場論, 對群論, 都會有很大的貢獻。爲什麼提群論? 因爲如果你對群論沒有很深入了解的話, 你不可能全部了解四維空間的拓樸, 所以四維空間是比三維空間困難得多的一個問題。不論是四維空間也好三維空間也好, 可能還是免不了要跟分析跟幾何的融合有關, 因爲要解決這些問題, 微分方程是一個最重要的工具。在看了很多不同的方法以後, 我認爲微分方程還是最重要的工具, 因爲在瞭解深入的結構時, 用直觀的幾何方法, (也就是 Thurston 的看法), 往往是不夠用。所以, 需要用到分析的方法, 才能解決問題。到目前爲止, 微分方程在幾何結構上最大的功用是用在複幾何上面 — complex structure (複結構), 以後希望能夠在實幾何, 也就是普通的幾何上, 也有很大的貢獻。

我想當微分幾何跟微分方程、幾何和組合數學, 融合時, 應用數學也將會有很大的進步。我認爲好的數學家會將不同的數學統一起來, 再發現它的大應用。在整個大統一的前提上面, 將會創造很多深入的結構, 來了解不同的數學分支。也只有在這個路途上, 我們才能夠眞正了解不同數學的分支, 也才能得出不同數學分支的眞正意義。所以我想在二十

一世紀, 數學最後會產生大合併的一個現象。因此, 我鼓勵, 尤其是年輕的數學家, 能夠朝這個方向來發展。

我在飛機上想了一首詩:

弱水三千　　豈非同源
萬象歸一　　心物並存
時乎時乎　　逝何如此
物乎物乎　　繁何如斯 (原文見附錄)

來做個結束。今天我就講到這裡, 不再多講技術性的東西, 因爲今天是通俗的演講。(啪啪啪······)

林長壽教授:

我們謝謝丘院士給我們精采的演講。(啪啪啪······)

附錄

時空統一頌

時乎時乎　　逝何如此
物乎物乎　　繁何如斯
弱水三千　　豈非同源
時空一體　　心物互存

時兮時兮　　時不再歟
天兮天兮　　天何多容
亙古恆遷　　黑洞冥冥
時空一體　　其無盡耶

大哉大哉　　宇宙之謎
美哉美哉　　眞理之源
時空量化　　智者無何
管測大塊　　學也洋洋

—本文主講者丘成桐教授爲中央研究院院士, 記錄者蘇信豪先生爲清華大學數學系助教—