非阿基米德分析

--------对称性在正交基与正交补中的应用

作者：程天任

非阿基米德分析是一门新兴的学科，它是一门研究更强范数上的抽象分析的学科，又被称为 p-adic 分析。本文研究的是非阿基米德分析中的正交基与正交补的性质。值得一提的是，本文中所有用到的工具均取材于数学家 kubzdela 在这方面的两篇文章。下面，我们从范数的对称性入手，来讨论这些问题。

首先，我们来看两个关于λ的例子。

例 1：

定理 1：

令$\dim E=2,$且e_1,e_2是E的非零，线性独立元素。取$\lambda\in K,|\lambda|>1$，有：$\|c_1e_1+c_2e_2\|_3=\max\{|(1+\frac{1}{\lambda^2})c_1-c_2|,|c_1-(1+\frac{1}{\lambda})c_2|\}$是$E$的范数，当$\|e_1\|_3=\|e_2\|_3=1$，$\|e_1+e_2\|_3=\frac{1}{\lambda}<1$。$[e_1+e_2,e_2]$是$E$的正交基。

定理 2：

令$\dim E=2$,存在E上的三个范数$\| \|_1,\| \|_2,\| \|_3$。这三个范数有正交基。但是，没有E的基与它们正交。

主要结果：

1. $\|e_1+e_2+ae_2\|_3=\max\{\left|(1+\frac{1}{\lambda^2})-(1+a)\right|,\left|1-(1+\frac{1}{\lambda})(1+a)\right|\}$

$$=\max\{\left|\frac{1}{\lambda^2}-a\right|,\left|\frac{1}{\lambda}+a+\frac{a}{\lambda}\right|\}$$

$$=\max\{\left|\frac{1}{\lambda^2}\right|,|a|\}$$

$$=\max\{\|e_1+e_2\|_3,\|ae_2\|_3\}$$

2.如果$a_1<\frac{\|e_2\|_1}{\|e_1\|_1}<1$，

$$\|u\|_3=\max\{\left|(1+\frac{1}{\lambda^2})a_1-1\right|,\left|a_1-(1+\frac{1}{\lambda})\right|\}=1$$

$$\left\|u+\frac{1}{b_1}w\right\|_3=\|e_1+e_2+ae_2\|_3$$

$$=\max\{\left|(1+\frac{1}{\lambda^2})(a_1+1)-1\right|,\left|a_1+1-(1+\frac{1}{\lambda})\right|\}$$

$$=\max\{\left|(a_1+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{a_1}{\lambda^2})\right|,\left|a_1-\frac{1}{\lambda}\right|$$

$$<1=\|u\|_3$$

3. 如果$a_1 < \frac{\|e_2\|_1}{\|e_1\|_1} < 1, |b_1| > 1$

$$\left\|u+\frac{1}{b_1}w\right\|_3 = \left\|a_1e_1+e_2+\frac{1}{b_1}(b_1e_1+e_2)\right\|_3$$

$$= \left\|(a_1+1)e_1+(1+\frac{1}{b_1})e_2\right\|$$

$$=\max\{\left|(1+\frac{1}{\lambda^2})(a_1+1)-(1+\frac{1}{b_1})\right|,\left|a_1+1-(1+\frac{1}{\lambda})(1+\frac{1}{b_1})\right|\}<1$$

推论：

因为，$\|c_1e_1+c_2e_2\|_3 = \max\{\left|(1+\frac{1}{\lambda^2})c_1-c_2\right|,\left|c_1-(1+\frac{1}{\lambda})c_2\right|\}$

$$1+\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda}(\lambda+\frac{1}{\lambda})<\frac{1}{\lambda}(\lambda+1)=1+\frac{1}{\lambda}$$

$$u=e_1+a_2e_2$$

$$w=b2e_2$$

$$\left\|u+\frac{1}{b_2}w\right\|_3=\|e_1+e2+a_2e_2\|_3$$

如果，$1>a_2>\frac{1}{\lambda^2}$

$$\max\{\left|(1+\frac{1}{\lambda^2})c_1-c_2\right|,\left|c_1-(1+\frac{1}{\lambda})c_2\right|\}=$$

$$\max\{\left|(1+\frac{1}{\lambda^2})c_1-c_2\right|,\left|(1+\frac{1}{\lambda^2})c_2-c_1\right|\}>$$

$$\left|(1+\frac{1}{\lambda^2})(1+\frac{1}{\lambda^2})-1\right|=\left|\frac{1}{\lambda^4}+\frac{2}{\lambda^2}\right|$$

所以，$\left|\frac{1}{\lambda^4}+\frac{2}{\lambda^2}\right|<\left\|u+\frac{1}{b_2}w\right\|_3=\left\|e_1+e2+a_2e_2\right\|_3<1=\left\|u\right\|_3$

即，$\left|\frac{2}{\lambda^2}\right|<1$

另一方面，如果$0<a_1<\frac{1}{\lambda}$

$$\left\|a_1e_1+e1+e_2\right\|_3=\left\|a_1(u-a_2e_2)+(u-a_2e_2)+\frac{1}{b_2}w\right\|$$

$$=\left\|(a_1+1)(u-a_2e_2)+\frac{1}{b_2}w\right\|$$

因为，$\sqrt{(a_1+1)^2+1}>\sqrt{a_2{}^2+1}$

所以，$\left\|a_1e_1+e1+e_2\right\|_3>\left\|u\right\|_3=1$

$$\max\{\left|(1+\frac{1}{\lambda^2})c_1-c_2\right|,\left|c_1-(1+\frac{1}{\lambda})c_2\right|\}<$$

$$\max\{\left|(1+\frac{1}{\lambda})c_1-c_2\right|,\left|(1+\frac{1}{\lambda})c_2-c_1\right|\}=$$

$$\left|(1+\frac{1}{\lambda})(1+\frac{1}{\lambda})-1\right|>1$$,即：

$$\left|\frac{1}{\lambda^2}+\frac{2}{\lambda}\right|>1$$

即，$\left|\frac{2}{\lambda}\right|>1$

如果，$a_1=\frac{1}{\lambda},a_2=\frac{1}{\lambda^2}$

因为，

$$\|e_1+e2+a_2e_2\|_3<1=\|u\|_3$$

$$\|a_1e_1+e1+e_2\|_3>1=\|u\|_3$$

所以，

$$\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^3}=1$$

下面，来考虑$|b_2|>1$的情况：

因为，

$$\left\|u+\frac{1}{b_1}w\right\|_3=\left\|a_1e_1+e_2+\frac{1}{b_1}(b_1e_1+e_2)\right\|_3$$

$$=\left\|(a_1+1)e_1+(1+\frac{1}{b_1})e_2\right\|$$

所以，

$$\left\|u+\frac{1}{b_2}w\right\|_3=\left\|e_1+a_2e_2+\frac{1}{b_2}(b_2e_2+e_1)\right\|_3$$

$$=\left\|(a_2+1)e_2+(1+\frac{1}{b_2})e_1\right\|$$

$$=\max\{\left|(1+\frac{1}{\lambda^2})(1+\frac{1}{b_2})-(a_2+1)\right|,\left|(1+\frac{1}{b_2})-(1+\frac{1}{\lambda})(a_2+1)\right|\}$$

$$=\max\{\left|\frac{1}{b_2}(1+\frac{1}{\lambda^2})\right|,\left|\frac{1}{b_2}-1\right|\}$$

$$=1$$

所以，

$\left|\frac{1}{b_2}(1+\frac{1}{\lambda^2})\right|=1$，即

$$1+\frac{1}{\lambda^2}=b_2$$

我们考虑n个基底的情况：$e_1,e_2,......,e_n$。构造范数：

$$\|c_1e_1+c_2e_2+......c_ne_n\|_3=\max\{\left|(1+\frac{1}{\lambda^2}+\frac{1}{\lambda^3}+......)c_1-c_2-c_3-......\right|,$$

$$\left|(1+\frac{1}{\lambda}+\frac{1}{\lambda^3}+......)c_2-c_1-c_3-......\right|,......\}$$

其中，$0<\frac{1}{\lambda^{n+1}}<a_{2n}<a_{2n-1}<\frac{1}{\lambda^n}<......<\frac{1}{\lambda^2}<a_2<a_1<\frac{1}{\lambda}<1$

$$1>\frac{1}{\lambda}>\frac{\|e_2\|_1}{\|e_1\|_1}>\frac{1}{\lambda^2}>......$$

$$1<1+\frac{1}{\lambda^n}<\frac{\left\|e_n{}'\right\|_2}{\left\|e_1\right\|_2}<\ldots\ldots$$

其中，$a_2{}'=a_2+1, a_4{}'=a_4+1, a_6{}'=a_6+1\ldots\ldots$

$$\|u\|_3=\|(a_2+a_4+\ldots)e_1+e_n\|_3=\|(a_1+a_3+\ldots)e_n+e_1\|_3$$

$$b_n=1+\frac{1}{\lambda}+\ldots\ldots+\frac{1}{\lambda^{n-1}}$$

是否具有同样性质呢？

例 2：

定理：

$|\lambda|>1$,定义三种范数：

1.$\|(x_1,x_2,x_3)\|_1=\max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\}$

2. $\|(x_1,x_2,x_3)\|_2=\max\{|\lambda x_1|,\left|\frac{x_2}{\lambda^2}\right|,|\lambda x_3|\}$

3.$\|(x_1,x_2,x_3)\|_3=\max\{\left|\frac{x_1}{\lambda^3}\right|,\left|\frac{x_2}{\lambda^3}\right|,|x_3|\}$

则E有正交基。但是子空间$u=\lambda e_1+e_2+e_3$，$w=e_1+\lambda^2 e_2+e_3$

没有正交基。

主要结果：

1.$\|u+\lambda_0 w\|_1=\max\{|\lambda+\lambda_0|,|1+\lambda_0\lambda^2|,|1+\lambda_0|\}>=|\lambda|=\|u\|_1$

2. $\|u+\lambda_0 w\|_2=\max\{|\lambda|*|\lambda+\lambda_0|,\left|\frac{1}{\lambda^2}+\lambda_0\right|,|\lambda||1+\lambda_0|\}>=|\lambda^2|=\|u\|_2$

3. $\|u-w\|_3 = \max\{\left|\frac{\lambda-1}{\lambda^3}\right|,\left|\frac{1-\lambda^2}{\lambda^3}\right|,|1-1|\} < 1 = \|u\|_3$

4.如果$|\mu_2| >= |\lambda| > 1$，令$\lambda_0 = -\mu_2/(\beta_1+\beta_2)$

$\|u+\mu_2 w+\lambda_0(\beta_1 u+\beta_2 w)\|_3 = \|u+\mu_2 w\|_3 = |\mu_2|$

推论：

首先，我们来看范数：

$$\|(x_1,x_2,x_3)\|_2 = \max\{|\lambda x_1|,\left|\frac{x_2}{\lambda^2}\right|,\left|\frac{x_3}{\lambda^2}\right|\}$$

$$\|(x_1,x_2,x_3)\|_3 = \max\{\left|\frac{x_1}{\lambda^3}\right|,\left|\frac{x_2}{\lambda^3}\right|,\left|\frac{x_3}{\lambda^3}\right|\}$$

令$u = \lambda e_1 + e_2 + e_3$

$w = e_1 + \lambda^2 e_2 + e_3$

取$\lambda_0 = \pm 1/(\beta_1+\beta_2)$ ，$\mu_2 = \lambda_0$

由已知条件得：

$$\|\lambda_0(\beta_1 u+\beta_2 w)\|_3 = \left\|\frac{\beta_1}{\beta_1+\beta_2}u+\frac{\beta_2}{\beta_1+\beta_2}w\right\|_3$$

令$\alpha = \max\{\beta_1,\beta_2\}$，

$\|\lambda_0(\beta_1 u+\beta_2 w)\|_3 = \|au+(1-a)w\|_3 = 1$

对于$\|u-w\|_3$，我们可以分两种情况：

情况 1：

令，$\lambda_0 = -n < 0$。其中，$|\lambda| > n$，$\beta_1+\beta_2 = \pm 1/n$，$\beta_1 * \beta_2 < 0$。

因为，

$$\|u-nw\|_1=\max\{|\lambda-n|,|1-n\lambda^2|,|1-n|\}$$

$$=\max\{|\lambda||\lambda-n|,\left|\frac{1}{\lambda^2}-n\right|\}$$

$$\|u-nw\|_2=\max\{|\lambda||\lambda-n|,\left|\frac{1}{\lambda^2}-n\right|,\left|\frac{1-n}{\lambda^2}\right|\}$$

$$=\max\{|\lambda||\lambda-n|,\left|\frac{1}{\lambda^2}-n\right|\}$$

$$\|u-nw\|_3=\max\{\left|\frac{\lambda-n}{\lambda^3}\right|,\left|\frac{1-n\lambda^2}{\lambda^3}\right|,\left|\frac{\lambda-n}{\lambda^3}\right|\}$$

当$\lambda_0=-1,\lambda\in(-1,-2)$时，

$$\|u-w\|_3=\left|\frac{\lambda-1}{\lambda^3}\right|=\frac{\|u-w\|_1}{|\lambda^3|}=\frac{\|u-w\|_2}{|\lambda^4|}<\left|\frac{1}{\lambda}\right|$$

同理，在其它条件下有：

$$\|u-nw\|_3=\left|\frac{1-n\lambda^2}{\lambda^3}\right|$$

$$<\left|\frac{n}{\lambda}\right|<1$$

所以，$\|u+\mu_2w+\lambda_0(\beta_1u+\beta_2w)\|_3<1$

下面，我们来看两个例子，

例 1：

取$\lambda_0=-1$，

考虑：$\left\|u+\mu_2 w+\lambda_0(\beta_1 u+\beta_2 w)\right\|_3$

取$\lambda_0=-1/(\beta_1+\beta_2)$ ，$\mu_2=\lambda_0$

$\lambda_0=-1$时，$\beta_1+\beta_2=1$

$$\left\|u-w\right\|_3<\left|\frac{1}{\lambda}\right|$$

令$\alpha=\max\{\beta_1,\beta_2\}$，

所以，$\left\|u+\lambda_0 w+\lambda_0(\beta_1 u+\beta_2 w)\right\|_3<1+\left|\frac{1}{\lambda}\right|$

当$\lambda>0$ ($\left|\lambda\right|>1$)时，考虑以下不等式组：

则，

$$\left|\frac{\lambda-1-(\beta_1\lambda+\beta_2)}{\lambda^3}\right|<1+\left|\frac{1}{\lambda}\right|$$

$$\left|\frac{1-\lambda^2-(\beta_1+\beta_2\lambda^2)}{\lambda^3}\right|<1+\left|\frac{1}{\lambda}\right|$$

解这两个不等式：

$\left|\lambda-1-(\beta_1\lambda+\beta_2)\right|<\lambda^3+\lambda^2$

取$\alpha=\max\{\beta_1,\beta_2\}=\beta_1$

$2+a\lambda-a-\lambda<\lambda^3+\lambda^2$

$$a<\frac{\lambda^3+\lambda^2+\lambda-2}{\lambda-1}$$

取$\alpha=\min\{\beta_1,\beta_2\}=\beta_2$

$(1-a)\lambda+a+1-\lambda<\lambda^3+\lambda^2$

$$a>\frac{\lambda^3+\lambda^2-1}{1-\lambda}$$

考虑$\lambda<0$的情况，我们用第二个不等式。

$\alpha=\max\{\beta_1,\beta_2\}=\beta_2$

$\alpha=\min\{\beta_1,\beta_2\}=\beta_1$

$$a<\frac{-\lambda^3}{\lambda^2-1}\text{..................}*$$

$$a>\frac{-\lambda^3-\lambda^2+1}{1-\lambda^2}\text{..........}*$$

那么，λ_0，λ，a的联系是怎么样的呢？

例 2：

我们取$\lambda_0=-2$。

$$\left|\frac{\lambda-2-2(\beta_1\lambda+\beta_2)}{\lambda^3}\right|<1+\left|\frac{1}{\lambda}\right|$$

$$\left|\frac{1-2\lambda^2-2(\beta_1+\beta_2\lambda^2)}{\lambda^3}\right|<1+\left|\frac{1}{\lambda}\right|$$

同样的讨论，

考虑$\lambda>0$的情况：$\beta_1+\beta_2=1/2$

$\alpha=\max\{\beta_1,\beta_2\}=\beta_1$

$$a<\frac{\lambda^3+\lambda^2+\lambda-3}{2\lambda-2}$$

$$a > \frac{\lambda^3+\lambda^2-2}{2-2\lambda}$$

考虑$\lambda < 0$的情况，我们用第二个不等式。

$$\alpha = \max\{\beta_1, \beta_2\} = \beta_2$$

$$\alpha = \min\{\beta_1, \beta_2\} = \beta_1$$

也有同样的结论

情况 2（同理）：

令，$\lambda_0 = n > 0$

其中，$|\lambda| > n$，$\beta_1 + \beta_2 = \pm 1/n, \beta_1 * \beta_2 < 0$

则由$\|u+\lambda_0 w+\lambda_0(\beta_1 u+\beta_2 w)\|_3 < 1+\left|\frac{1}{\lambda}\right|+\left|\frac{1}{\lambda^3}\right|$

注：在这里，我们通过让不等式右边加上或者减去$\left|\frac{a}{\lambda^{n0}}\right|$的方法来估计$\alpha$的界限。（其中，$a < \lambda$）

例如，我们取右边等于：

$$1+\left|\frac{1}{\lambda}\right|-\left|\frac{n}{\lambda}\right|$$

或者，

$$1+\left|\frac{1}{\lambda^2}\right|-\left|\frac{n}{\lambda}\right|$$

解答：根据例 2，我们可以看出：要估计出α,β的最值。

当$\lambda<0$，我们取右边为$1+\left|\frac{1}{\lambda}\right|$；反之，$\lambda>0$我们取右边为：

$1+\left|\frac{1}{\lambda}\right|-\left|\frac{n}{\lambda}\right|$。现在，我们来考虑下面的问题：在什么条件下，

$\beta_1+\beta_2=\pm 1/n, \beta_1 * \beta_2<0$。当$n\to\infty$，以上的估计方法是最佳的？这里，我们应用例 1 中的推广：$1>\frac{1}{\lambda}>\frac{\|e_2\|_1}{\|e_1\|_1}>\frac{1}{\lambda^2}>......$

$n\to\infty$时，$\beta_1+\beta_2=0$。根据带*的式子，我们得到这个条件：

$\|e_1\|_1=\|e_2\|_1=\|e_3\|_1=...........$

例 3：

定理 1：

令$[x_0]$是E的多重正交补，如果$D\subset E$是x_0在E中的多重正交补。则存在$\lambda_0\in K$,或者$x_d\in D$,

$$\max\frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}=\frac{\|x_d\|_2}{\|x_d\|_1} \quad \max\frac{\|x\|_2}{\|x\|_1}=\frac{\|x_0\|_2}{\|x_0\|_1}$$

定理 2：

有等价条件：

1. $\frac{\|e_1\|_1}{\|e_1\|_2}=......=\frac{\|e_n\|_1}{\|e_n\|_2}=p$

2.对于每一个非零的 $x \in E$, $\dfrac{\|x\|_1}{\|x\|_2} = p$

3.对于每个 E 的两维线性子空间，有正交基（对于三种范数）

4.对于每个 E 的三范数，有基础正交基。

主要结果：

1. $\|x_1\|_1 = \left\|\sum_1^n a_i e_i\right\|_1 = \max\{|a_i|\|e_i\|_1\} = \max\{|a_i|p\|e_i\|_2\}$

$$= p\max\{\|a_i e_i\|_2\} = p\left\|\sum_1^n a_i e_i\right\|_2 = p\|x\|_2$$

2. $\dfrac{\|x_1\|_1}{\|x_2\|_1} > \dfrac{\|x_1\|_3}{\|x_2\|_3} > \dfrac{\|x_1\|_2}{\|x_2\|_2}$

$$\frac{\|x_1\|_1}{\|x_2\|_1} > \frac{|b|}{|a|} > \frac{\|x_1\|_2}{\|x_2\|_2}$$

3. $\|ax_1 + bx_2 + \lambda(c_1 x_1 + c_2 x_2)\|_3 = \left\|bx_2 - a\dfrac{c_2}{c_1}x_2\right\|_3 < \|ax_1\|_3$

$$\|ax_1 + bx_2 + \lambda(c_1 x_1 + c_2 x_2)\|_3 = \left\|a(x_1 - \mu x_2) + bx_2 - \frac{a\mu}{c_2}c_1 x_1\right\|_3 < \|ax_1\|_3$$

推论：

如果 $\|ax_1\|_3 > \|bx_2\|_3$， $\lambda = -\dfrac{a}{c_1}$

$$\left|\frac{a}{b}\right|\frac{\|x_1\|_3}{\|x_2\|_3}>1$$

若$\frac{\|x_1\|_3}{\|x_2\|_3}<\left|\frac{a}{b}\right|$

$$\left|\frac{a}{b}\right|\frac{\|x_1\|_3}{\|x_2\|_3}<\left|\frac{a}{b}\right|^2$$

则$a>b$

如果$\|ax_1\|_3<\|bx_2\|_3$，

$$\left|\frac{b}{a}\right|\frac{\|x_2\|_3}{\|x_1\|_3}>1$$

若$\frac{\|x_2\|_3}{\|x_1\|_3}<\left|\frac{b}{a}\right|$

$$\left|\frac{b}{a}\right|^2>1$$

则，$b>a$

取第一种情况：

因为，$\|ax_1+bx_2+\lambda(c_1x_1+c_2x_2)\|_3=\left\|bx_2-a\frac{c_2}{c_1}x_2\right\|_3<\|ax_1\|_3$

所以，取另一个λ

$\lambda=-\frac{b}{c_2}$，则

$$\left\|ax_1+bx_2+\lambda(c_1x_1+c_2x_2)\right\|_3=\left\|ax_1-b\frac{c_1}{c_2}x_1\right\|_3$$

如果，$\left|\frac{c_1}{c_2}\right|\in(0,\frac{a}{b})$

$$\left\|ax_1+bx_2+\lambda(c_1x_1+c_2x_2)\right\|_3=\left\|ax_1\right\|_3$$

$$\left|\frac{c_1}{c_2}\right|\in(\frac{a}{b},n)$$

$$\left\|ax_1+bx_2+\lambda(c_1x_1+c_2x_2)\right\|_3=\left\|b\frac{c_1}{c_2}x_1\right\|_3$$

如果$\left\|ax_1\right\|_3<\left\|bx_2\right\|_3$，

则，$b>a$

$$\left\|ax_1+bx_2+\lambda(c_1x_1+c_2x_2)\right\|_3=\left\|bx_2-a\frac{c_2}{c_1}x_2\right\|_3>\left\|ax_1\right\|_3$$

如果，$\left|\frac{c_2}{c_1}\right|\in(0,\frac{b}{a})$

$$\left\|ax_1+bx_2+\lambda(c_1x_1+c_2x_2)\right\|_3=\left\|bx_2\right\|_3$$

$$\left|\frac{c_2}{c_1}\right|\in(\frac{b}{a},n)$$

$$\left\|ax_1+bx_2+\lambda(c_1x_1+c_2x_2)\right\|_3=\left\|a\frac{c_2}{c_1}x_2\right\|_3$$

考虑：

$$\left\| ax_1+bx_2+\lambda(c_1x_1+c_2x_2)\right\|_3=\left\| a(x_1-\mu x_2)+bx_2-\frac{a\mu}{c_2}c_1x_1\right\|_3<\left\| ax_1\right\|_3$$

也有类似的结果。

其中，

$$\lambda_1=-\frac{a\mu}{c_2}$$

$$\lambda_2=-\frac{b\mu}{c_1}$$

那么，a 与 b 是怎么影响 c_1,c_2 甚至范数的大小呢？

例 4：

定理：

继续这个定理，考虑范数：

$$\left\| x\right\|_3=\max\{\left|(1+p^2)x_1-\mu x_n\right|\left\| e_1\right\|_2,\left|x_1-\mu(1+p)x_n\right|\left\| e_1\right\|_2$$

$$\left\| x_2e_2\right\|_2,\ldots\ldots,\left\| x_{n-1}e_{n-1}\right\|_2\}$$

$$u_0=\lambda(e_1+\frac{1}{\mu}\lambda_2e_n+a_2e_2+\ldots\ldots+a_{n-1}e_{n-1})$$

$$u=\lambda(a_1e_1+\frac{1}{\mu}\lambda_2e_n+a_2e_2+\ldots\ldots+a_{n-1}e_{n-1})$$

$$\max\{\left|(1+p^2)-\mu\frac{\lambda_2}{\mu}\right|,\left|1-\mu(1+p)\frac{1}{\mu}\lambda_2\right|\}=\left|p\right|$$

$$\frac{\|u_0\|_1}{\|u_0\|_3}=\frac{\max\{\|e_1\|_1,\left\|\frac{1}{\mu}(1+\varepsilon)e_n\right\|_1,\|a_2e_2\|_1,.......,\|a_{n-1}e_{n-1}\|_1\}}{|p|\|e_1\|_2}$$

$$=\frac{\|e_1\|_1}{|p|\|e_1\|_2}$$

$$\frac{\|u\|_1}{\|u\|_3}<\frac{\max\{\|e_1\|_1,\left\|\frac{1}{\mu}(1+\varepsilon)e_n\right\|_1,\|a_2e_2\|_1,.......,\|a_{n-1}e_{n-1}\|_1\}}{\|a_je_j\|_2}$$

$$\frac{\|u\|_1}{\|u\|_3}<\frac{\|e_1\|_1}{|p|\|e_1\|_2}$$

推论：

如果：$|p|\|e_1\|_2=\max\|a_ie_i\|_2$

$$1=\frac{\|u\|_1}{\|u_0\|_1}=\frac{\|u\|_1}{\|u\|_3}*\frac{\|u\|_3}{\|u_0\|_3}*\frac{\|u_0\|_3}{\|u_0\|_1}$$

如果，$\frac{\|u\|_1}{\|u\|_3}<\max\{\frac{\|e_1\|_1}{\|a_je_j\|_2},\frac{\|a_ke_k\|_1}{\|a_ke_k\|_2}\}$

$$\frac{\|u\|_1}{\|u\|_3}*\frac{\|u_0\|_3}{\|u_0\|_1}<1$$

所以，

$$1 < \frac{\|a_j e_j\|_2}{|p|\|e_1\|_2}$$

$$|p| < \frac{\|a_j e_j\|_2}{\|e_1\|_2}$$，矛盾。

继续，

$$\|x\|_3 = \max\{|(1+p^2)x_1 - \mu x_n|\|e_1\|_2, |x_1 - \mu(1+p)x_n|\|e_1\|_2$$
$$\|x_2 e_2\|_2, \ldots\ldots, \|x_{n-1}e_{n-1}\|_2\}$$
$$\|x\|_3 < \max\{|1+p-1|\|e_1\|_2, |1-(1+p)|\|e_1\|_2, \|a_2 e_2\|_2, \ldots\ldots\}$$
$$= \|a_j e_j\|_2$$

即，

$$\|a_i e_i\|_2 < \|a_j e_j\|_2$$

因为，

$$\frac{\|e_1\|_2}{\|e_1\|_1} < \frac{\|a_i e_i\|_2}{\|a_i e_i\|_1}$$

所以，

$$\frac{\|e_1\|_2}{\|e_1\|_1} < \frac{\|a_j e_j\|_2}{\|a_i e_i\|_1}$$

$$\frac{\|a_j e_j\|_2}{\|a_i e_i\|_1} = \left|\frac{a_j}{a_i}\right| * \frac{\|e_j\|_2}{\|e_i\|_1}$$

设：

$$\delta = \frac{\|e_1\|_2}{\|e_1\|_1} \le \frac{\|e_2\|_2}{\|e_2\|_1} \le \ldots\ldots \le \frac{\|e_n\|_2}{\|e_n\|_1}$$

则，

$$\delta < \left|\frac{a_j}{a_i}\right| * \frac{\|e_j\|_2}{\|e_i\|_1}$$

$$\frac{\|e_j\|_2}{\|e_i\|_1} > \delta \left|\frac{a_i}{a_j}\right|$$

另一方面，

$$\|a_k e_k\|_2 < \|a_j e_j\|_2$$

而且，

$$\frac{\|a_k e_k\|_1}{\|a_k e_k\|_2} < \frac{\|e_1\|_1}{\|a_j e_j\|_2}$$

所以，当$\varepsilon > p$时

$$\|a_k e_k\|_1 < \|e_1\|_1$$

$$\frac{\|e_1\|_2}{\|e_1\|_1} < \frac{\|e_1\|_2}{\|a_k e_k\|_1} < \frac{\|a_j e_j\|_2}{\|a_k e_k\|_1}$$

所以，

$$\delta < \frac{\|a_j e_j\|_2}{\|a_k e_k\|_1}$$

相反的，在什么条件下有$\frac{\|e_n\|_2}{\|e_n\|_1} > \frac{\|a_j e_j\|_2}{\|a_k e_k\|_1}$呢？

解答：首先，根据例 3 我们得到$\frac{\|x_1\|_3}{\|x_2\|_3}$与 1 的大小关系。然后，考虑例 4 中的第一个问题：$|p|<\frac{\|a_j e_j\|_2}{\|e_1\|_2}$，矛盾。同理，我们构造对称的范数。也可以得到类似的问题：$|p|<\frac{\|a_k e_k\|_1}{\|e_1\|_1}$。

这样，我们就把$\frac{\|e_1\|_2}{\|e_1\|_1}$与$\frac{\|a_j e_j\|_2}{\|a_k e_k\|_1}$的问题转化为关于 p 的问题，即例 3 中的问题。

例 5：

定理：

令 $K=C_p$，则存在序列（C_k）$_k \subset K^n$，当 $C_k=(c_k^1,c_k^2,...,c_k^n)$，$|c_k^1|=|c_k^2|=...=|c_k^n|=1,$ 以至于（四个等价条件）

1.（略）

2.（略）

3.对于每一个 $i\in[1,...,n]$，$\lambda,\lambda_j\in K,(j=1,...,n,j\neq i)$ 有 $k_0\in N$ 以至于$\left|c_k^i-\sum_{1,j\neq i}^{n}\lambda_j c_k^j-\lambda\right|>r_{k0}$（$k>k_0$）

4.如果 $x_1,x_2,......,x_n\in\overline{K}/K$, $x_i\in\bigcap_k B_{rk}(c_k^i)_k$，则：

$$dist(x_i,[x_1,...,x_{i-1},x_{i+1},...,x_n,1])=r$$

主要结论：

1. $dist \le \max\{\max_{j\ne i}\left|c_{nk}^j - c_{nk}^j\right|, \left|c_{nk}^i - \sum_{j\ne i}^{n}\lambda_j c_{nk}^j - \lambda\right|\} \le r_k$

2. $\left|\sum_1^n \lambda_j x_j + \lambda_0\right| = \left|\sum_1^n \lambda_j (x_j - c_k^j) + \sum_1^n \lambda_j c_k^j + \lambda_0\right| < r$

$$\left|\sum_1^n \lambda_j c_k^j + \lambda_0\right| > r_0 \max\left|\lambda_j\right| > r$$

$$\left|\sum_1^n \lambda_j (x_j - c_k^j)\right| > r_0 \max\left|\lambda_j\right|$$

推论：

因为，

$$\left|c_{nk}^i - \sum_{j\ne i}^{n}\lambda_j c_{nk}^j - \lambda\right| < r_k$$

所以，

$$\left|\sum_{j\ne i}^{n}\lambda_j c_{nk}^j + \lambda - c_{nk}^i\right| < r_k$$

$$\left|\lambda + \sum_{j\ne i}^{n}\lambda_j (c_{nk}^j - x_j) + \sum_{j\ne i}^{n}\lambda_j x_j - c_{nk}^i\right| < r_k$$

如果$\lambda=1$，$\sum_1^n \lambda_j c_{nk}^j > \sum_1^n \lambda_j x_j$ 则

$$\left|\sum_{j\neq i}^{n}\lambda_j(c_{nk}^{j}-x_j)+\sum_{j\neq i}^{n}\lambda_j x_j\right|<r_k$$

$$\left|\sum_{j\neq i}^{n}\lambda_j x_j+r_0\max\left|\lambda_j\right|-(c_{nk}^{i}-x_i)\right|<r_k$$

$$\left|\sum_{j\neq i}^{n}\lambda_j(x_j-c_k^j)+\sum_{j\neq i}^{n}\lambda_j c_k^j+r-(c_{nk}^{i}-x_i)\right|<r_k$$

$$\left|2r+\sum_{j\neq i}^{n}\lambda_j c_k^j\right|<r_k$$

$$\left|2r+\sum_{j\neq i}^{n}\lambda_j c_k^j+\lambda_0-\lambda_0\right|<r_k$$

$$\left|3r-c_k^i-\lambda_0\right|<r_k$$

$$\left|3r-\lambda_0-1\right|<r_k$$

$$(\sum_{1}^{n}\lambda_j c_k^j<\sum_{1}^{n}\lambda_j x_j)$$

解答：考虑本例中最后一个结果：$\left|3r-\lambda_0-1\right|<r_k$。这是关于闭球半径增长的一个结论，而且恰恰是模 n 余 k 的增长方式。我们把它跟另一篇文章（笛卡尔空间正交性）中的推论 3 与推论 4 联系起来。根据推论 4，再结合本例，我们得到一个

结果：$\sum_{1}^{n}\lambda_j c_k^j < \sum_{1}^{n}\lambda_j c_{nk}{}^j$

考虑到c_k^j与$c_{nk}{}^j$的极限相等，我们可以得到：在极限的意义下$\beta < \frac{\lambda_x - \lambda_0}{\left|\sum_{2}^{k0}\lambda_i c^j\right|} \Rightarrow \beta > 1 (k \to \infty)$

例 6：

定理：

存在C_p上的四维赋范空间有两维非正交补，严格 HB 子空间。

主要结果：

$$\inf\|w_2 - kw_1\| = \lim\max\{|b_1+\lambda_n|, \left|\frac{b_2+\mu_n}{a_2}\right||a_1+\nu_n|\}$$

$$\lim|b_1+\lambda_n| = |b_1+\lambda_0|$$

$$|b_1+\lambda_0||a_2| = |b_2+\mu_0||a_1+\nu_0|$$

$$|b_1+\lambda_0+k(a_1+\nu_0)| = \lim|b_1+\lambda_n+k(a_1+\nu_n)|$$

$$\max\{|\lambda_0-\lambda_n|, |k||\nu_0-\nu_n|\} < |\lambda_n+b_1+ka_1+k\nu_n|$$

$$|b_2+\mu_0+ka_2|\left|\frac{a_1+\nu_0}{a_2}\right| < d_0$$

$$\left|b_1+\lambda_0-\frac{(b_2+\mu_0)(a_1+\nu_0)}{a_2}\right| = d_0$$

推论：

因为，

$$|b_1+\lambda_0||a_2|=|b_2+\mu_0||a_1+\nu_0|$$

所以，

$$|b_1+\lambda_0|<|b_2+\mu_0|$$

$$|b_2+\mu_0+ka_2|>(\frac{b_1+\lambda_0}{a_2}+k)(a_1+\nu_0)$$

$$(\frac{b_1+\lambda_0}{a_2}+k)(a_1+\nu_0)=(\frac{b_1+\lambda_0+ka_2}{a_2})(a_1+\nu_0)$$

$$b_1+\lambda_0+ka_2>b_1+\lambda_0+ka_1+k\nu_n$$

$$b_1+\lambda_0+ka_1+k\nu_n>\max\{|\lambda_0-\lambda_n|,|k||\nu_0-\nu_n|\}$$

$$|b_2+\mu_0+ka_2|>\max\{|\lambda_0-\lambda_n|,|k||\nu_0-\nu_n|\}\frac{a_1+\nu_0}{a_2}$$

因为，

$$d_0>|b_2+\mu_0+ka_2|\left|\frac{a_1+\nu_0}{a_2}\right|$$

所以，

$$d_0>\max\{|\lambda_0-\lambda_n|,|k||\nu_0-\nu_n|\}\left|\frac{a_1+\nu_0}{a_2}\right|^2$$

因为，

$$\left|b_1+\lambda_0-\frac{(b_2+\mu_0)(a_1+\nu_0)}{a_2}\right|=d_0$$

所以，

$$\left|b_1+\lambda_0-\frac{(b_2+\mu_0)(a_1+\nu_0)}{a_2}\right|>\max\{|\lambda_0-\lambda_n|,|k||\nu_0-\nu_n|\}\left|\frac{a_1+\nu_0}{a_2}\right|^2$$

$$\left|(b_2+\mu_0)(1-\frac{a_1+\nu_0}{a_2})\right|>\max\{|\lambda_0-\lambda_n|,|k||\nu_0-\nu_n|\}\left|\frac{a_1+\nu_0}{a_2}\right|^2$$

$$|b_2+\mu_0|>\max\{|\lambda_0-\lambda_n|,|k||\nu_0-\nu_n|\}\left|\frac{a_1+\nu_0}{a_2}\right|^2/(1-\frac{a_1+\nu_0}{a_2})$$

设$\left|\frac{a_1+\nu_0}{a_2}\right|=t$，

$$|b_2+\mu_0|>\max\{|\lambda_0-\lambda_n|,|k||\nu_0-\nu_n|\}\frac{t^2}{1-t}$$

因为，

$$\frac{b_1+\lambda_0}{b_2+\mu_0}=t$$

所以，

$$\begin{aligned}\inf\|w_2-kw_1\|&=\lim\max\{|b_1+\lambda_n|,\left|\frac{b_2+\mu_n}{a_2}\right||a_1+\nu_n|\}\\&=|b_2+\mu_0|*t\\&>\max\{|\lambda_0-\lambda_n|,|k||\nu_0-\nu_n|\}\frac{t^3}{1-t}\end{aligned}$$

那么，关于$\inf\|w_1-kw_2\|$的情况是怎么样的呢？

例 7：

主要结果：

$$\|f\| = \sup\frac{|f|}{\|x\|} = \sup\frac{|a_1\lambda_1 + a_4\lambda_4|}{\|a_1\lambda_1 + a_4\lambda_4\|} = \lim\frac{|\lambda_1\|k + \lambda_4 / \lambda_1|}{|k + \nu_n|} = \lim\frac{|\lambda_4 - \lambda_1\nu_n|}{r}$$

$$\frac{|f_0|}{\|x\|} \le \lim\frac{|a_1\lambda_1 + a_3\lambda_3 + a_4\lambda_4|}{|a_1 + a_3\lambda_n + a_4\nu_n|} \le \lim\frac{|\lambda_4 - \lambda_1\nu_n|}{r}$$

推论：

$$\lim\frac{|a_1\lambda_1 + a_3\lambda_3 + a_4\lambda_4|}{|a_1 + a_3\lambda_n + a_4\nu_n|} > \frac{|f_0|}{|a_1 + a_3\lambda_n + a_4\nu_n|}$$

$$\ge \frac{|f_0|}{|a_3\lambda_n| + |a_1 + a_4\nu_n|}$$

$$|f_0| \le \lim\frac{|\lambda_4 - \lambda_1\nu_n|}{r}(|a_3\lambda_n| + |a_1 + a_4\nu_n|)$$

$$= \lim\frac{|\lambda_4 - \lambda_1\nu_n|}{r}(|a_3\lambda_n| + \frac{|a_1\lambda_1 + a_4\lambda_4|}{\|f\|})$$

$$= \lim(|a_1\lambda_1 + a_4\lambda_4| + |a_3\lambda_n|\|f\|)$$

相反的，

$$\lim\frac{|a_1\lambda_1 + a_4\lambda_4|}{|a_1 \ + a_4\nu_n|} < \frac{|f|}{|a_1 + a_3\lambda_n + a_4\nu_n| - |a_3\lambda_n|}$$

$$\left|f\right|>\lim\frac{\left|\lambda_4-\lambda_1\nu_n\right|}{r}(\left|a_1+a_3\lambda_n+a_4\nu_n\right|-\left|a_3\lambda_n\right|)$$

$$\left|f\right|>\lim\left\|f_0\right\|(\left|a_1+a_3\lambda_n+a_4\nu_n\right|-\left|a_3\lambda_n\right|)$$

$$\left|f\right|>\lim\left\|f_0\right\|(\frac{\left|a_1\lambda_1+a_3\lambda_3+a_4\lambda_4\right|}{\left\|f_0\right\|}-\left|a_3\lambda_n\right|)$$

如果，

$$\max\{\left|a_1+a_3\lambda_n+a_4\nu_n\right|,\left|a_2+a_3\mu_n\right|\}=\left|a_1+a_3\lambda_n+a_4\nu_n\right|$$

我们得到关系：

$$\left|f_0\right|\leftrightarrow\left|a_1\lambda_1+a_4\lambda_4\right|+\left|a_3\lambda_n\right|(\left|a_1\lambda_1+a_3\lambda_3+a_4\lambda_4\right|-\left\|f_0\right\|a_3\lambda_n\left.\right|)$$

同理，可得$\left|f\right|$。

解答：根据例 6，我们可以写出：$\inf\left\|w_2-kw_1\right\| >C\frac{t^3}{1-t}$

同理，$\inf\left\|w_1-kw_2\right\|$也有类似结果。

接下来我们看例 7：同样的方法固定：$\left\|f\right\|=\lim\frac{\left|\lambda_4-\lambda_1\nu_n\right|}{r}$。

同时，$\left\|f_0\right\|\lim(\left|a_1\lambda_1+a_4\lambda_4\right|+\left|a_3\lambda_n\right|\left\|f\right\|)<\lim\frac{\left|\lambda_4-\lambda_1\nu_n\right|}{r}$

应用这种方法，$\left|f_0\right|=\left\|f_0\right\|\left\|x\right\|<$

$=\left|a_1\lambda_1+a_4\lambda_4\right|+\left|a_3\lambda_0\right|\left\|f\right\|$。根据$\left\|f_0\right\|<\left\|f\right\|$，我们得到：

$\left|a_1\lambda_1+a_4\lambda_4\right|=0$，$\left|a_3\lambda_0\right|/\|x\|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$。再根据例 6 的结果，我们

得到：$\dfrac{1-t}{t^3}\bullet\dfrac{1}{C}\left|a_3\lambda_0\right|<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$,即：$\sqrt{2}\dfrac{1-t}{t^3}\bullet\left|a_3\lambda_0\right|<C$

其中，$C=\max\{\left|\lambda_0-\lambda_n\right|,\left|k\right|\left\|v_0-v_n\right\|\}$

$\|x\|=\|w_1-kw_2\|$

参考文献

1.on orthocomplemented subspaces in p-adic banach spaces 2005

A.kubzdela

2. on multi-orthogonal bases in finite-dimensional non-archimedean normed spaces 2007

A.kubzdela

联系邮箱：pqrs008@126.com