第 1 次讲稿

这是本学期的第 1 次讲稿, 用于 2007 年 9 月 17 日, 星期一, 3 节课.

内容包含两部分:

(1) 开场白, 其中包括: 数学的特点, 数学与有关邻近学科的关系, 数学主要分支一览, 数学分析与其他课程的关系一览, 数学分析课程的结构, 所用教材的特点, 参考书.

(2) 第一章 集合.

第一章 集 合

有关集合的基本概念在中学已经学过. 课堂上主要讲 (1) 可列, (2) 确界.

§1.1 集 合

一. 集合与元素

德国数学家 Cantor (1848–1918) 在 19–20 世纪之交创立了集合论, 现已成为各门数学的共同基础.

集合及其中的元 (或元素) 是最原始的概念, 只用普通语言描述. 给定一个集合的含义是, 对于任何对象, 能够确定它属于或不属于这个集合.

表示集合有两种方法.

(1) 列举法, 即将所有元素写出或示意性的写出; 例如 $A=\{0,1\}$ 即表示 A 是含两个元 $0,1$ 的集合, 又如,

$$\mathbb{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

表明集合 $\mathbb{N}$ 是正整数 (自然数) 全体所成集合[①] .

(2) 条件法, 即将集合写为 $\{x \mid P(x)\}$, 其中 $P(x)$ 是指 x 属于该集合所应当具有的性质. 也有将元素应当具有的部分性质写在分隔号 $\mid$ 之前的做法.

① 我们今后将正整数与自然数作为同义语, 但在阅读其他文献时需要注意, 将数 0 算作自然数的做法也不少.

现将今后常用的部分集合记号列举如下.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, \cdots, n\} = \{n \mid n \text{ 是正整数}\},\\
\mathbb{R} &= \{x \mid x \text{ 是实数}\},\\
\mathbb{Q} &= \{x \mid x \text{ 是有理数}\} = \{x = \frac{q}{p} \mid p, q \text{ 为整数}, p > 0\},\\
\mathbb{Z} &= \{x \mid x \text{ 是整数}\},\\
\mathbb{C} &= \{x \mid x \text{ 是复数}\} = \{x = a + \mathrm{i}b \mid a, b \in \mathbb{R}\},\\
\mathbb{R}^2 &= \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\},\\
\mathbb{R}^n &= \{(x_1, \cdots, x_n\} \mid x_i \in \mathbb{R}, i = 1, 2, \cdots, n\},\\
\mathbb{R}_+ &= \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\},
\end{aligned}
$$

其中 $\mathbb{R}^2$ 为二维空间, 就是坐标平面上点的全体, $\mathbb{R}^n$ 为 n 维空间, $\mathbb{R}_+$ 为正实数全体.

二. 有限集与无限集

有限集就是只包含有限个元素的集合, 无限集就是非有限集. 但什么是无限集的本质呢? 据说这一点最早是由文艺复兴时期的意大利大科学家 Galilei (1564–1642) 所发现, 我们将它叙述如下[①].

Galilei 定理 集合 S 是无限集的充分必要条件是 S 与自己的一个真子集一一对应.

德国的大数学家 Hilbert (1862–1943) 曾经举一个生动的例子来说明这个定理, 这就是著名的 Hilbert 旅馆. 设想有一个旅馆, 其中有无限多个房间, 它们的编号用完了所有的正整数, 每个房间只能住一位旅客.

有一天晚上, 旅馆已经客满, 但这时来了一位旅客要求住宿. 这对于普通的旅馆是一个没法解决的问题, 可是这家旅馆的老板却有办法. 他说, 只要请 1 号房间的客人搬到 2 号房间, 2 号房间的客人搬到 3 号房间, 如此等等, 那么原来的客人都有房间住, 而 1 号房间却空出来了, 就可以接待新来的旅客了.

不仅如此, 后来又来了一位旅客要求住宿, 并且说, 他只是打前站的一个代表, 后面还有数不清的旅客正在前来投宿. 这个问题如何能解决呢? 旅馆的老板又拿出了新招. 他说, 请 1 号的客人与上次一样搬到 2 号, 2 号的客人则搬到 4 号, 3 号的客人搬到 6 号, 如此等等, 这样就可以将所有奇数号的房间全部空出来, 再来多少个旅客也没有困难了.

我们看到, 第一次的方法就是令 n 与 $n+1$ 对应, 从而使得正整数集合 $\mathbb{N}$ 与自

① 在学习了本节内容之后读者可以思考如何证明这个定理.

己的一个真子集, 即从 2 开始的正整数全体建立一一对应. 第二次的方法就是令 n 与 $2n$ 对应, 使得 $\mathbb{N}$ 与自己的另一个真子集, 即偶数全体建立一一对应.

在有了无限集的概念之后, 我们介绍无限集中最简单的一类集合, 即可列集, 它是今后很有用的一个概念.

定义 可列集就是能与正整数全体一一对应的无限集.

由此可知, 一个可列集 A 一定可以将它的所有元素排序并表示如下:

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}, \tag{$*$}$$

其中将与 1 对应的元素记为 a_1, 将与 2 对应的元素记为 a_2, 一般地将与 n 对应的元素记为 a_n, 如此等等. 因此, 可列集就是可以将其中元素用所有正整数进行编号的集合. 将 A 写为 $(*)$ 的意义就是给出 A 与 $\mathbb{N}$ 之间的一一对应, 或者说表明这样的一一对应是存在的.

在上述 Hilbert 旅馆中的所有房间的集合就是一个可列集, 它通过编号与 $\mathbb{N}$ 一一对应. 而老板解决困难的两个方法就是将 $\mathbb{N}$ 与自己的两个真子集

$$\{n \in \mathbb{N} \bigm| n \geqslant 2\} \text{ 和 } \{2, 4, \cdots, 2n, \cdots\}$$

建立一一对应, 当然它们也都是可列集.

下面给出可列集的基本性质:

1. 任何无限集都有可列子集.
2. 可列集的无限子集为可列集.
3. 一个有限集和一个可列集的并是可列集.
4. 有限个可列集的并是可列集.
5. 可列个有限集的并是可列集.
6. 可列个可列集的并是可列集.

其中除最后的性质 6 之外都可以从可列集的定义直接推出.

下面是一个重要的可列集, 其中的证明方法称为对角线方法, 它还可以用于证明可列集的性质 6.

命题 有理数集 $\mathbb{Q}$ 为可列集.

证 先将正有理数集

$$\mathbb{Q}_+ = \{x = \frac{q}{p} \bigm| p, q \in \mathbb{N}\} = \{x \in \mathbb{Q} \bigm| x > 0\}$$

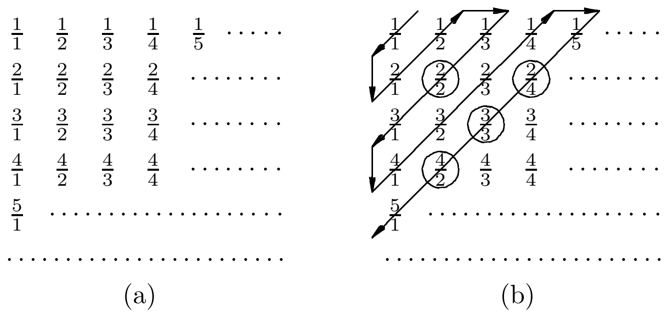


图 1: 证明 $\mathbb{Q}$ 为可列集的对角线方法.

中的元如图 1(a) 中那样按分子 q 依次排成行, 然后按图 1(b) 中的线将 $\mathbb{Q}_+$ 排序, 也就是建立它与 $\mathbb{N}$ 之间的一一对应, 但跳过此前已经出现的数, 这在图中用圆圈标出. 这就证明了集合 $\mathbb{Q}_+$ 是可列集. 这种方法称为对角线方法. 这样就有

$$\mathbb{N}_+ = \{1, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, 3, 4, \frac{3}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, 5, \cdots\},$$

然后将 $\mathbb{Q}$ 中的元排序为

$$\mathbb{Q} = \{0, -1, 1, -2, 2, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \cdots, \},$$

这样就证明了 $\mathbb{Q}$ 的可列性. $\square$

注 在这个结论确立之后, 再利用可列集的性质 2, 就知道 $\mathbb{Q}$ 的任何无限子集为可列集.

最后要指出, 存在不可列集. 例如, 实数全体所成集合 $\mathbb{R}$ 就是不可列集. 这将在本书第二章的 §2.3.10 小节中给出证明.

六. 若干逻辑符号

今后经常使用以下记号:

$$P \Longleftrightarrow Q$$

表示命题 P 成立的充分必要条件是命题 Q 成立,

$$P \Longrightarrow Q$$

表示若 P 成立, 则 Q 成立.

记号 $\forall$ 是将英文大写字母 A 绕其中心点旋转 180° 而成的一个逻辑符号, 它的意思是“每一个”,“所有”,“任意一个”.

记号 $\exists$ 是将英文大写字母 E 绕其中心点旋转 180° 而成的一个逻辑符号, 它的意思是“存在”,“有”.

例如:

$$A \not\subset B \Longleftrightarrow \exists x \in A,\ \text{使得}\ x \notin B,$$
$$A \subset B \Longleftrightarrow \forall x \in A,\ \text{有}\ x \in B.$$

注 在将 $\forall$ 理解为“任意”时, 要注意这个“任意”是指能取到“每一个”的那种任意性, 而不是随随便便“只取一个”的那种任意性. 因此建议今后尽可能将符号 $\forall$ 读为“每一个”.

§1.2 数集及其确界

在本书中, 只要没有另加说明, 则所说的数集都是指实数集 $\mathbb{R}$ 的子集, 所出现的数也都是指实数.

一. 区间与邻域

在数学分析中用得最多的数集是各种区间. 首先是有界区间 (也称为有限区间):

1. 闭区间 $[a,b]=\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$,
2. 开区间 $(a,b)=\{x \mid a < x < b\}$,
3. 左闭右开区间 $[a,b)=\{x \mid a \leqslant x < b\}$,
4. 左开右闭区间 $(a,b]=\{x \mid a < x \leqslant b\}$,

其中设 a, b 为实数, 且满足 $a \leqslant b$.

在教科书中还提出用记号 $< a, b >$ 泛指以上的四种区间. 这在有些场合确实带来方便, 例如某个论断对以上四种区间都成立时就是如此. 但需要指出, 这个记号不是数学文献中普遍使用的记号.

我们还经常要用到无界区间 (也称无限区间), 它们是

5. $[a,+\infty)=\{x \mid a \leqslant x\}$,
6. $(a,+\infty)=\{x \mid a < x\}$,
7. $(-\infty,b]=\{x \mid x \leqslant b\}$,
8. $(-\infty,b)=\{x \mid x < b\}$,
9. $(-\infty,+\infty)=\mathbb{R}$.

与前面类似, 第 5 种和第 6 种区间可以统一记为 $< a,+\infty)$, 第 7 种和第 8 种区间可以统一记为 $(-\infty, b >$.

此外, 在今后还需要使用特殊类型的区间, 即邻域. 最常用的邻域是

$$O_\delta(a) = (a-\delta, a+\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\},$$

称为点 a 的 δ 邻域. 我们称 a 为邻域 $O_\delta(a)$ 的中心, 称 δ 为邻域 $O_\delta(a)$ 的半径. 除了记号 $O_\delta(a)$ 之外, 记号 $U_\delta(a)$ 也是经常使用的, 两者完全等价. 又在邻域半径大小并不重要时, 也用 $O(a)$ 或 $U(a)$ 来表示以 a 为中心半径大于 0 的一个邻域.

注意, 以上的邻域一定是开区间. 教科书中还介绍了闭邻域和去心邻域, 这些都可以到需要用时再说.

三. 最大数与最小数

这里要注意, 书上用 $\max(a,b)$ 表示两个数 a 和 b 中较大的一个, 即两个数中的最大数, 这不是一种好的记号. 在这样的记号中容易将 (a,b) 与开区间相混淆, 因此建议今后改用记号

$$\max\{a,b\}$$

作为最大数的记号, 不要用记号 $\max(a,b)$. 这与大多数文献也是一致的. 同样建议在今后用

$$\min\{a,b\}$$

作为最小数的记号, 而不用书中的记号 $\min(a,b)$.

虽然最大数和最小数的概念是简单的, 但需要注意的重要问题是, 一个数集未必有最大数或最小数. 下面就是一个例子.

例 2　证明: 数集 $A=[0,1)$ 无最大数.

证　用反证法. 若 A 有最大数, 将它记为 β, 则有 $0 \leqslant \beta < 1$, 且 $\forall x \in [0,1)$, 成立 $x \leqslant \beta$.

令 $\alpha = \dfrac{1+\beta}{2}$, 则一方面有 $\alpha \in A$, 另一方面又有

$$\beta < \alpha = \frac{1+\beta}{2} \iff \beta < 1,$$

这与 β 是 A 的最大数相矛盾.　□

五. 上界与下界

定义　称数 M 是非空数集 A 的一个上界, 若

$$\forall x \in A, \text{ 有 } x \leqslant M;$$

称数 m 是非空数集 A 的一个下界, 若

$$\forall x \in A, \text{ 有 } x \geqslant m.$$

例如, 对数集 $A=[0,1)$ 来说, 数 1 是 A 的一个上界. 当然, 这时比 1 大的每个实数都是 A 的上界. 又可以看出, 数 0 是 A 的下界, 同时每个负数也都是 A 的下界. 对于一般的非空数集也是如此, 有一个上界就必有无限多个上界, 有一个下界就必有无限多个下界.

定义 有上界的非空数集称为上有界集, 有下界的非空数集称为下有界集, 同时有上界和下界的非空数集称为有界集. 一个不是有界集的非空数集称为无界集.

由这个定义可知, 无界集或者没有上界, 或者没有下界, 二者至少居其一. 例如, $\mathbb{N},\mathbb{Z},\mathbb{Q},\mathbb{R},\mathbb{R}_+$ 都是无界集, 其中 $\mathbb{N},\mathbb{R}_+$ 有下界而无上界, 其余几个既无上界又无下界.

下面是一个有用的命题.

命题 非空数集 A 有界 $\iff$ $\exists K>0, \forall x\in A$, 有 $|x|\leqslant K$.

证 充分性 ($\Longleftarrow$). 这时 $\forall x\in A$, 有 $-K\leqslant x\leqslant K$, 因此 $-K$ 是 A 的下界, K 是 A 的上界, 因此 A 是有界集.

必要性 ($\Longrightarrow$). 从 A 有界, 存在 m, M, 使得 $\forall x\in A$, 成立

$$m\leqslant x\leqslant M.$$

利用

$$-|m|\leqslant m\leqslant x\leqslant M\leqslant |M|,$$

可见只要取 $K=\max\{|m|,|M|\}$, 就有

$$-K\leqslant -|m|\leqslant x\leqslant |M|\leqslant K,$$

这就是 $|x|\leqslant K$, 而且对每个 $x\in A$ 成立. □

七. 上确界与下确界

确界在第一章中是一个全新的概念, 它与数学分析的其他内容有密切联系.

回顾前面的最大数和最小数, 上界和下界, 它们都是对于非空数集的刻画, 但也都有缺点. 我们已经知道, 对一个非空数集来说, 上界或下界存在时一定不惟一, 最大数或最小数一定惟一, 但不一定存在.

下面我们会看到, 这一小节引入的确界概念克服了二者的不足, 从而为数集的刻画提供了更为有力的工具.

定义 (**确界的第一定义**) 称非空数集 A 的最小上界为上确界, 记为 $\sup A$; 称非空数集 A 的最大下界为下确界, 记为 $\inf A$.

先看一个例子: $A=[0,1)$. 已知它没有最大数, 但有上界. 可以看出 1 就是 A 的最小上界, 因此 $\sup A=1$. 又可以看出, $\inf A=0$, 同时也有 $\min A=0$.

从这个例子可以看出, 如果一个数集有上界, 则一定有无限多个上界. 它们构成一个非空数集. 对 $A=[0,1)$ 而言, 它的上界全体就是数集 $[1,+\infty)$, 而上确界就是这个数集的最小数.

一般而言, 由于上确界是上界集合的最小数, 因此如果存在, 必定惟一. 对于下确界也有同样的结论. 可见确界与上界下界不一样, 若存在必定惟一.

从 $A=[0,1)$ 的讨论又可以看出, 若一个数集 A 有最小数,则就有 $\inf A=\min A$. 同样可见, 若一个数集 A 有最大数, 则就有 $\sup A=\max A$.

问题在于, 若一个非空数集没有最大数时, 是否存在上确界? 同样, 若一个非空数集没有最小数时, 是否存在下确界.

对于无上界的数集来说, 答案是清楚的. 一个数集既然没有上界, 则谈不上会有什么最小的上界. 例如 $(a,+\infty)$ 就是如此, 它没有最大数, 也没有上确界. 同样, 无下界的数集既没有最小数, 也没有下确界[①] .

余下的问题就是有上界的数集在无最大数时是否有上确界? 同样, 有下界的数集在无最小数时是否有下确界?

这个问题由下面的基本定理得到完全的解决.

确界存在定理 在实数集 $\mathbb{R}$ 中的非空数集, 若有上界, 则必有上确界; 若有下界, 则必有下确界.

目前我们还不能证明这个定理. 实际上我们以后会知道, 这个确界存在定理是实数系的基本定理之一. 目前先承认它就可以了.

小结 于是确界的存在性和惟一性问题都有了满意的答案. 其中存在性问题由确界存在定理解决, 惟一性问题则由确界的定义而保证成立. 这样确界就克服了最大数、最小数与上界、下界的缺点，而为刻画数集提供了更为有力的工具. 当然如何运用确界概念还要在今后通过许多实例才能明白.

为了运用确界概念我们还需要确界的另一个定义, 它更便于具体操作.

定义 (**确界第二定义**) 称数 β 为非空数集 A 的上确界, 如果满足以下两个条件:

(1) $\forall x\in A$, 有 $x\leqslant\beta$ (即 β 是数集 A 的一个上界);

(2) $\forall\beta'<\beta$, $\exists x'\in A$, 使得 $\beta'<x'$ (即比 β 小的数 β' 不会是 A 的上界).

也可以将条件 (2) 换为下列等价条件:

$(2)'$ $\forall\varepsilon>0$, $\exists x'\in A$, 使得 $\beta-\varepsilon<x'$ (即比 β 小的数 $\beta-\varepsilon$ 不会是 A 的上界).

同样, 称数 α 为数集 A 的下确界, 如果满足以下两个条件:

(1) $\forall x\in A$, 有 $\alpha\leqslant x$ (即 α 是数集 A 的一个下界);

(2) $\forall\alpha'>\alpha$, $\exists x'\in A$, 使得 $x'<\alpha'$ (即比 α 大的数 α' 不会是 A 的下界).

---

① 教科书 p.12 末对无上界数集 A 记 $\sup A=+\infty$. 对无下界数集 A 记 $\inf A=-\infty$, 只不过是同语反复的一种约定, 没有带给我们任何新知识.

也可以将条件 (2) 换为下列等价条件:

$(2)'$ $\forall \varepsilon > 0, \exists x' \in A$, 使得 $x' < \alpha + \varepsilon$ (即比 α 大的数 $\alpha + \varepsilon$ 不会是 A 的下界).

现在举两个例子[1].

例 1　设有非空数集 A, B, $\forall x \in A$, $\forall y \in B$, 有 $x \leqslant y$, 证明: $\sup A \leqslant \sup B$.

证　取定一个 $y \in B$, 从条件 $\forall x \in A$, $x \leqslant y$, 可见这个 y 就是数集 A 的一个上界. 根据确界存在定理, 存在 $\sup A$.

由于每个 $y \in B$ 都是 A 的上界, 而 $\sup A$ 是 A 的最小上界, 因此就有

$$\sup A \leqslant y \quad \forall y \in B. \tag{$**$}$$

由此看出, 数集 B 以 $\sup A$ 为其下界, 再次用确界存在定理, 知道存在 $\inf B$.

由于 $(**)$ 表明 $\sup A$ 是 B 的一个下界, 而 $\inf B$ 是 B 的最大下界, 因此就得到

$$\sup A \leqslant \inf B. \quad \square$$

注　在这个例题的证明中只需用确界的第一定义.

例 2　设数集 A 有上界, 又定义数集

$$B = \{x + c \mid x \in A\},$$

其中 c 是一个常数, 证明: $\sup B = \sup A + c$.

证　从确界存在定理知道存在 $\sup A$.

根据数集 B 的定义, $\forall y \in B, \exists x \in A$, 使得 $y = x + c$. 因此就有

$$y = x + c \leqslant \sup A + c.$$

这表明 $\sup A + c$ 是数集 B 的一个上界.

再用确界存在定理, 数集 B 有上确界 $\sup B$, 且满足不等式

$$\sup B \leqslant \sup A + c. \tag{$\dagger$}$$

若取 $\beta' < \sup A + c$, 则有 $\beta' - c < \sup A$. 由于 $\beta' - c$ 不是 A 的上界, 因此 $\exists x' \in A$, 使得 $\beta' - c < x'$. 这就是 $\beta' < x' + c$. 由于 $x' + c \in B$, 因此 β' 不是 B 的上界.

既然每个 $\beta' < \sup A + c$ 都不是 B 的上界, 而从 $(\dagger)$ 已经知道 $\sup A + c$ 是 B 的一个上界, 因此它就是 B 的最小上界, 即得到所要求证的结论:

$$\sup B = \sup A + c. \quad \square$$

---

[1] 由于时间不够, 这两个例子实际上是在第二次授课时才讲的.

第 2 次讲稿

第 2 次讲稿用于 2007 年 9 月 19 日, 星期三, 2 节课.

内容为第二章 数列极限的 §2.1 的下列两部分:

(1) §2.1 的 一. 引言,

(2) 三. 数列极限的定义.

在整个第二章的学习中, 要求同学同时在课外阅读《数学分析习题课讲义》上册的第二章, 其中的体系与教科书虽然不全相同, 但比较接近, 其中对于许多有关问题的讲解要比教科书更详细. 该书还提供了许多练习题和参考题, 其中部分练习题和多数参考题都是考研题.

第二章　数列极限

§2.1 数列极限

数列就是用正整数编号的一列数

$$x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots,$$

经常写为 $\{x_n\}$, 其中 x_n 称为通项.

若将数列的不同项看成为不同的元素, 则可以将 $\{x_n\}$ 看成可列集, 记为:

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\},$$

但如果将数列 $\{x_n\}$ 作为数集看待时, 则它可能只是有限集, 即只与数轴上的有限个点对应, 甚至可能只是单元集, 这就是常值数列: $c, c, \cdots, c, \cdots$, 或记为 $\{c\}$.

一. 引言

教科书中举了几个例子, 表明数列极限的直观意义. 请同学自己阅读. 这里再补充一个例子.

中国春秋战国时期的名家代表人物庄周 (约公元前 369–前 286 年) 的著作《庄子》的“天下”篇中有这样的几句话:

“一尺之捶, 日取其半, 万世不竭.”

由于在《庄子》中没有对此作进一步的解释, 我们只能按照今天的观点来猜测其中的含义.

一种理解方式是将每天所取的长度排起来形成一个数列

$$\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots,$$

其中的项当 n 无限增大时越来越接近于 0, 但永远不会变成 0 (即“万世不竭”). 这里与我们即将介绍的数列极限有密切联系.

另一种理解方式是一尺长的捶可以分成无限多个部分, 即有

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots,$$

这涉及到对无限项求和如何理解的问题, 与第二章中的无穷级数概念有直接关系.

总之, 《庄子》中的上述内容与数学分析中的极限等概念有关.

三. 数列极限的定义

定义 (**数列极限的 ε-N 定义**) 给定数列 $\{x_n\}$ 和实数 a, 若对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在正整数 N, 使得对每一个正整数 $n \geqslant N$, 成立 $|x_n - a| < \varepsilon$, 则称数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a, 称 a 是数列 $\{x_n\}$ 的极限, 记为

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a,$$

也可简记为 $x_n \to a\ (n \to \infty)$.

利用逻辑记号 $\forall$ 和 $\exists$, 可以将上述定义改写如下[①]:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, N, \forall\, n \geqslant N,\ \text{成立}\ |x_n - a| < \varepsilon.$$

注 在多数文献中数列极限的定义与我们所用的教科书中的上述定义有一些不同, 一般均将其中的 $n \geqslant N$ 改为 $n > N$. 这样在对于 $\varepsilon > 0$ 确定 N 时略有不同. 但是可以证明, 这两个定义是完全等价的. 等价的意思是说, 若按照其中一个定义成立 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则按照另一个定义也一定有相同的结论.

在对数列极限举例之前, 需要介绍今后经常使用的一个记号, 即对于给定的实数 x 取不超过它的最大整数, 记为 $[x]$. 例如有

$$[3.5] = 3, \quad [-3.5] = -4.$$

又称函数 $y = [x]$ 为取最大整数函数. 它的图像见教科书 p.57 的图 3-8.

从 $[x]$ 的定义可见成立不等式

$$[x] \leqslant x < [x] + 1, \tag{$*$}$$

① 今后若无特别声明的话, 总认为 n 和 N 是正整数, 并将 $\forall n \in \mathbb{N}$ 简记为 $\forall n$, 将 $N \in \mathbb{N}$ 简记为 N 等等.

或者等价地有

$$x-1<[x]\leqslant x.$$

今后凡是用到记号 $[x]$ 时, 这些基本关系式是不可少的.

例 1　根据数列极限的定义证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

分析　根据数列极限的定义, 对于给定的 $\varepsilon>0$, 应当按照

$$\frac{1}{n}=\left|\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon \qquad (**)$$

寻找 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时, 不等式 $(**)$ 成立.

由于不等式 $(**)$ 等价于

$$\frac{1}{\varepsilon}<n,$$

因此只要取

$$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1,$$

则当 $n\geqslant N$ 时就有

$$n\geqslant N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1>\frac{1}{\varepsilon}$$

(这里用到了 $(*)$ 的右边不等式), 因此不等式 $(**)$ 成立. 这样就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.

以上是对问题的分析过程, 即从所要证明的结论出发倒过来看如何取出合乎要求的 N, 在正式书写证明或解答时可以采取从条件开始写起的综合方式, 这样往往要简短得多. 一般文献中的证明或解答用综合方式较多. 它的缺点是读者不容易明白“这样的证明是如何想出来的”. 下面就是在上述分析基础上写成的一个证明.

证　对 $\varepsilon>0$, 取

$$N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1,$$

则当 $n\geqslant N$ 时, 就有

$$n\geqslant N=[\frac{1}{\varepsilon}]+1>\frac{1}{\varepsilon},$$

因此

$$\left|\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

根据数列极限的定义得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$.　□

例 2　对于常数 c, 证明常值数列 (或称常数数列) $\{c\}$ 的极限为 c.

这个例题请同学自学, 见教科书 p.18. 这里只提请注意, 本题中对于每一个 $\varepsilon>0$, 可以统一取 $N=1$. 这种情况是不多见的. 因为从数列极限的定义知道, N 一般要根据给定的 $\varepsilon>0$ 来取. 在取定 N 之后, 如果换一个更大的 ε, 则 N 可以不

必改动. 但如果换一个更小的 ε, 则很可能就需要改取更大的 N 才能符合极限定义中的要求了.

例 3 设常数 r 满足条件 $|r|<1$, 证明数列 $\{r^n\}$ 的极限为 0, 即有 $\lim\limits_{n\to\infty} r^n = 0$.

这个例题的证明也请同学自学, 见教科书 p.18.

下面建立确界与数列极限之间的联系, 它在今后有用.

定理 设非空数集 A 有上界, $\beta = \sup A$, 则一定存在取自 A 中的数列 $\{x_n\}$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.

证 分两种情况讨论.

(1) 若上确界 $\beta \in A$, 即 $\beta = \max A$, 则只要对每一个 n 取 $x_n = \beta$, 这样得到的常值数列就收敛于 β (参见例 2).

(2) 设 $\beta \notin A$, 则对于正整数 n 有 $\beta - \dfrac{1}{n} < \beta$. 由于上确界 β 是 A 的最小上界, 比 β 小的数 $\beta - \dfrac{1}{n}$ 就不会是 A 的上界, 因此在 A 中一定有大于 $\beta - \dfrac{1}{n}$ 的数. 将这个数记为 x_n.

对于每个正整数 n 都这样做, 就得到一个数列 $\{x_n\}$, 它的每一项都取自 A, 同时又满足条件

$$\beta - \frac{1}{n} < x_n < \beta,$$

因此就成立不等式

$$|x_n - \beta| < \frac{1}{n}.$$

由此可见 (参见例 1), 对每一个 $\varepsilon > 0$, 只要取

$$N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1,$$

就能保证当 $n \geqslant N$ 时, 满足

$$|x_n - \beta| < \frac{1}{n} < \varepsilon,$$

从而有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \beta. \quad \Box$$

注 还可以证明, 对于上述证明中的第二种情况, 即当 $\sup A = \beta \notin A$ 时, 可以在数集 A 中取到严格单调增加的数列 $\{x_n\}$, 使成立 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \beta$.

(以下补充有关确界概念的两个例题, 现将它们移到第一次讲稿末.)

第 3 次讲稿

第 3 次讲稿用于 2007 年 9 月 24 日, 星期一, 3 节课.

内容为继续讲第二章 数列极限的 §2.1 数列极限, 其中包括 3 部分:

(1) §2.1 的五. 进一步的例子,

(2) 七. 收敛数列的性质,

(3) 九. 无穷级数.

讲课之前可以指出, 今天将多次用到三点不等式

$$|a+b| \leqslant |a|+|b|,$$

而且还需要用三点不等式的一种变形:

$$|a-b| \geqslant |a|-|b|.$$

作为对于数列极限定义的复习, 一开始先讲一个命题, 它确切地回答了数列极限有什么样的几何意义的问题, 这对于我们以后思考许多有关数列的问题时是不可缺少的工具.

命题 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \{x_n\}$ 在邻域 $O_\varepsilon(a)$ 之外至多只有有限项.

证 分两步来证明.

($\Longrightarrow$) 从收敛数列定义可见, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geqslant N$, 有 $|x_n - a| < \varepsilon$. 而邻域 $O_\varepsilon(a)$ 之外的实数 x 满足的条件是 $|x-a| \geqslant \varepsilon$, 因此数列 $\{x_n\}$ 中至多只可能有 $x_1, \cdots, x_{N-1}$ 中间的项会落在邻域 $O_\varepsilon(a)$ 之外 (参见图 1)[1] .

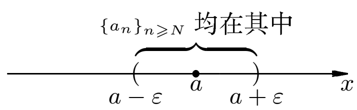


图 1. 数列极限的几何示意图.

($\Longleftarrow$) 若对于给定的 $\varepsilon > 0$, 在邻域 $O_\varepsilon(a)$ 之外有数列 $\{x_n\}$ 中的有限项, 则可以取这些项的下标中的最大值再加 1 为 N, 若在 $O_\varepsilon(a)$ 之外根本没有数列中的任何项 (对于某些 $\varepsilon > 0$ 这是可能发生的), 则简单地取 $N = 1$, 这样就保证当 $n \geqslant N$ 时, x_n 一定在 $O_\varepsilon(a)$ 之内, 即满足 $|x_n - a| < \varepsilon$. 由于对每个 $\varepsilon > 0$ 都可以如此做, 因此就得到 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. □

下面又请同学一起思考一个问题: 数列极限定义中的 N 与 $\varepsilon > 0$ 是什么关系? 在不少教科书中第一次写出数列极限定义时, 往往将 N 写成 $N(\varepsilon)$, 这里的 $N(\varepsilon)$ 是函数关系吗?

---

[1] 请思考: 这时数列 $\{x_n\}$ 在邻域 $O_\varepsilon(a)$ 之外究竟有几项? 答案: 从 0 到 $N-1$ 都是可能的. 又请回答: 这是为什么?

回答: N 一般与 ε 有关, 但仅此而已.

首先, 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 若存在满足数列极限定义中要求的 N, 则比它大的每一个正整数都满足要求, 因此有一个合适的 N, 就一定有无限多个同样合适的正整数可以取为 N. 这样在 ε 与 N 之间的对应就不是单值的函数关系了.

其次, 在数列极限定义中, 只要对于给定的 $\varepsilon > 0$ 存在一个满足要求的 N 就够了, 究竟取那一个没有任何限制, 完全是任意的. 实际上, 定义关心的只是这样的 N 的存在性, 至于给定了 $\varepsilon > 0$ 之后取什么样的 N, 那是在具体的习题中验证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ 时需要做的事情, 因为若能找到, 当然就保证了存在性. 但定义中并不要求具体计算出 N. 例如, 在上一次讲课时, 证明了有关确界与数列极限联系的一个定理, 其中并没有建立 ε 与 N 之间的具体表达式.

五. 进一步的例子 (适当放大法)

这里将教科书中的标题加一个括号, 因为这一小节的内容就是讲适当放大法. (关于这种方法的更详细的介绍, 建议阅读《数学分析习题课讲义》上册的 §2.1.3 小节.)

为了说明适当放大法, 先回顾上一次课中关于验证 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的几个例题.

对于给定一个数列 $\{x_n\}$, 又给了一个实数 a, 这几个例题的解题过程都是相同的, 具体来说就是对于给定的正数 $\varepsilon > 0$, 考虑不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$. 在那几个例题中都是将 n 看成为未知数, 然后求解不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$, 也就是得到

$$|x_n - a| < \varepsilon \Longleftrightarrow n > f(\varepsilon). \tag{$*$}$$

然后取

$$N = [f(\varepsilon)] + 1.$$

即不超过 $f(\varepsilon)$ 的最大整数加 1. 于是当 $n \geqslant N$ 时, 就有

$$n \geqslant N = [f(\varepsilon)] + 1 > f(\varepsilon),$$

因此从等价关系 $(*)$ 可见就成立 $|x_n - a| < \varepsilon$.

这种方法的成功依赖于能否得到等价关系 $(*)$, 也就是说能否求出关于未知量 n 的不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$ 的完整解. 容易看出, 这只对于简单问题是合适的, 但只要数列通项 x_n 的表达式稍稍复杂一点, 从 $|x_n - a| < \varepsilon$ 求解 n 就可能非常困难, 甚至是无法求解的难题.

另一方面, 从数列极限的定义可见, 对于每个 $\varepsilon > 0$ 只要存在一个合适的 N 就够了, 并不需要去求解不等式 $|x_n - a| < \varepsilon$.

适当放大法的内容是: 寻找非负数列 b_n, 使得对于每个 n (或者充分大的 n) 满足不等式

$$|x_n - a| < b_n,$$

另一方面, b_n 应当足够简单, 使得容易寻找 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时满足条件

$$(0 \leqslant)\, b_n < \varepsilon.$$

合并以上就可见当 $n \geqslant N$ 时就有 $|x_n - a| < b_n < \varepsilon$. 由于对每个 $\varepsilon > 0$ 都是如此, 因此得到 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.

下面举例说明适当放大法的具体用法, 同时还介绍在数列极限问题中的一些常用方法.

例 4　证明: $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{2^n} = 0$.

证　这时要对于每个 $\varepsilon > 0$ 考虑不等式

$$\left|\frac{n}{2^n} - 0\right| = \frac{n}{2^n} < \varepsilon.$$

这里要想将 n 作为未知量来求解不等式是个难以解决的问题, 而且根本没有必要. 现设法将左边适当放大, 为此考虑其中的分母 2^n. 利用二项式定理, 在 $n \geqslant 2$ 时有

$$2^n = (1+1)^n = 1 + n + \frac{n(n-1)}{2} + \cdots > n + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} > \frac{n^2}{2},$$

因此得到

$$2^n > \frac{n^2}{2},$$

而且发现这个不等式当 $n = 1$ 时也成立.

于是得到适当放大:

$$\frac{n}{2^n} < \frac{n}{n^2/2} = \frac{2}{n},$$

并从

$$\frac{2}{n} < \varepsilon$$

可以确定出

$$N = [\frac{2}{\varepsilon}] + 1,$$

使得当 $n \geqslant N$ 时成立 $\dfrac{2}{n} < \varepsilon$, 从而也就使得一开始的不等式 $|n/2^n| < \varepsilon$ 成立了. □

注　以上的写法将其中的思考过程都写出来了, 是一种分析性质的写法. 教科书上对此题的写法是一种综合性的写法, 比较简短, 但对于其中的来龙去脉交代很少. 但这是一般教科书中常用的写法, 同学在学习中需要自己思考它是如何想出来的. 我们将这个证明写在下面作为第二个证明, 以供比较.

证 2　由于

$$2^n = (1+1)^n = 1 + \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 + \cdots > \mathrm{C}_n^1 + \mathrm{C}_n^2 > \frac{n^2}{2},$$

因此 $\forall\varepsilon>0$, 当 $n\geqslant N=[\frac{2}{\varepsilon}]+1$ 时, 就有

$$\left|\frac{n}{2^n}-0\right|=\frac{n}{2^n}<\frac{2}{n}<\varepsilon,$$

这样就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0$. □

例 5 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

先进行分析, 然后再写出一个正式的证明.

对于 $\forall\varepsilon>0$, 考虑不等式

$$|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon.$$

由于 $\sqrt[n]{n}\geqslant 1$ 总是成立的, 因此上述不等式中的绝对值号可以去掉. 但即使如此, 也不能从它解出 n. 这里同样需要适当放大.

记 $y_n=\sqrt[n]{n}-1$, 我们要将 y_n 适当放大. 同样用二项式定理, 当 $n\geqslant 2$ 时有

$$n=(1+y_n)^n\geqslant\frac{n(n-1)}{2}y_n^2,$$

因此得到所要的放大:

$$y_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

为了使得右边小于 ε, 利用

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon\Longleftrightarrow n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1,$$

可见只要取

$$N=[\frac{2}{\varepsilon^2}+1]+1,$$

就可以保证当 $n\geqslant N$ 时 $y_n<\varepsilon$.

现在写出根据以上分析所得到的证明.

证 令 $y_n=\sqrt[n]{n}-1\geqslant 0$, 则从 $n=(1+y_n)^n\geqslant\dfrac{n(n-1)}{2}y_n^2$ 得到

$$y_n\leqslant\sqrt{\frac{2}{n-1}}.$$

由于

$$\sqrt{\frac{2}{n-1}}<\varepsilon\Longleftrightarrow n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1,$$

因此可取

$$N=[\frac{2}{\varepsilon^2}+1]+1,$$

使得当 $n \geqslant N$ 时有

$$|\sqrt[n]{n}-1| = y_n \leqslant \sqrt{\frac{2}{n-1}} < \varepsilon. \quad \square$$

下面给出利用平均值不等式的第二个证明.

证 2　利用平均值不等式有

$$\sqrt[n]{n} = (\sqrt{n}\cdot\sqrt{n}\cdot\underbrace{1\cdots 1}_{n-2\text{ 个 }1})^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{2\sqrt{n}+n-2}{n} = 1+\frac{2}{\sqrt{n}}-\frac{2}{n} < 1+\frac{2}{\sqrt{n}}.$$

注意: 虽然在上述推导中需要假设 $n>2$, 但最后的不等式在 $n=1,2$ 时仍然成立.

这样就得到

$$0 \leqslant \sqrt[n]{n}-1 < \frac{2}{\sqrt{n}},$$

对于 $\forall\, \varepsilon>0$, 利用

$$\frac{2}{\sqrt{n}} < \varepsilon \Longleftrightarrow n > \frac{4}{\varepsilon^2},$$

可见只要取

$$N = [\frac{4}{\varepsilon^2}]+1,$$

就保证当 $n \geqslant N$ 时成立 $|\sqrt[n]{n}-1| < \varepsilon$. $\square$

七. 收敛数列的性质

首先给出数列收敛和发散的定义.

定义　称数列 $\{x_n\}$ 收敛 (即 $\{x_n\}$ 为收敛数列), 若存在一个实数 a, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$. 如果数列 $\{x_n\}$ 不收敛, 则称该数列发散 (即 $\{x_n\}$ 为发散数列).

注　数列 $\{x_n\}$ 收敛与数列收敛于一个实数 a 是有区别的, 前者只要存在这样的 a 就可以了, 而后者则必须给出具体的 a.

下面给出收敛数列的若干性质, 它们都是非常基本的结论. 同时其中的证明方法也是需要学习的重要内容[①].

性质 1 (**数列极限的惟一性定理**)　收敛数列的极限一定惟一.

这是有关数列极限的最基本结果. 与前面类似, 我们先进行分析, 这是为了说明最后写出的证明是如何想出来的.

① 与中学数学不同, 数学分析中的许多重要方法往往就是在定理的证明中学到的. 因此学习定理时不仅要理解它的条件和结论, 而且还要学习其中的证明方法. 当然还有应用定理去解决问题的能力, 这要通过学习例题和做习题才能学到.

分析 用反证法. 若一个数列 $\{x_n\}$ 既收敛于 a, 又收敛于 b, 且 $a \neq b$, 会发生什么样的矛盾呢?

回忆今天一开始讲的那个命题, 即数列极限的几何意义, 就可以知道, 对于每个给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 N_1, 当 $n \geqslant N_1$ 时, 除了数列的前 $N_1 - 1$ 项的情况不明之外, 其余项都在点 a 为中心, ε 为半径的邻域之内. 同理存在 N_2, 当 $n \geqslant N_2$ 时, 除了数列的前 $N_2 - 1$ 项的情况不明之外, 其余项都在点 b 为中心, ε 为半径的邻域之内.

这里可以参见下面的示意图, 其中设 $a < b$.

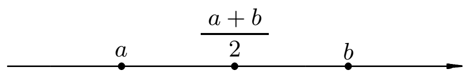


图 2. 数列极限不惟一时的示意图.

如果取

$$N = \max\{N_1, N_2\},$$

则当 $n \geqslant N$ 时, 就使得 $|x_n - a| < \varepsilon$ 和 $|x_n - b| < \varepsilon$ 同时成立[1]. 如图 2 所示, 若取 $\varepsilon \leqslant \dfrac{b-a}{2}$, 则除了有限项之外, 数列的无限多项既要在点 $\dfrac{a+b}{2}$ 的左边, 又要在 $\dfrac{a+b}{2}$ 的右边, 这是不可能的. 这样就一定出现矛盾.

现在写出正式的证明.

证 用反证法.

设同时有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$, 且不妨设 $a < b$. 取 $\varepsilon_0 = \dfrac{b-a}{2}$, 则存在 N, 使得当 $n \geqslant N$ 时, 同时成立

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{2}, \quad |x_n - b| < \frac{b-a}{2}.$$

由于

$$|x_n - a| < \frac{b-a}{2} \Longleftrightarrow a - \frac{b-a}{2} < x_n < a + \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

又有

$$|x_n - b| < \frac{b-a}{2} \Longleftrightarrow b - \frac{b-a}{2} = \frac{a+b}{2} < x_n < b + \frac{b-a}{2},$$

因此就知道当 $n \geqslant N$ 时会成立下列关系式:

$$x_n < \frac{a+b}{2} < x_n,$$

而这是不可能的. □

① 今后遇到类似情况, 我们经常跳过先取 N_1, N_2 再取 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 的这一步, 直接就说存在 N, 使得 $|x_n - a| < \varepsilon$ 和 $|x_n - b| < \varepsilon$ 同时成立.

下一个证明也是常见的.

证 2　设同时有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = b$ 成立, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geqslant N$, 同时成立

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |x_n - b| < \varepsilon.$$

于是有

$$|a - b| = |(a - x_n) + (x_n - b)| \leqslant |a - x_n| + |x_n - b| < 2\varepsilon.$$

由于 ε 可取到任意小的正数, 因此只能有 $a = b$.　□

注　还可以看教科书 p.20–21 上的证明.

现在引入今后常用的一个记号.

定义　称极限为 0 的数列 $\{x_n\}$ 为无穷小量, 并记为 $x_n = o(1)$.

性质 2　$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow x_n - a = o(1)$.

(性质 2 的证明请自己做.)

定义　若数列 $\{x_n\}$ 作为数集来看时为有界数集, 即 $\exists M > 0$, $\forall n$, 成立 $|x_n| \leqslant M$, 则称 $\{x_n\}$ 为有界数列, 并记为 $x_n = O(1)$.

性质 3 (**收敛数列的有界性定理**)　收敛数列一定有界.

证　设有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, 则对于 $\varepsilon = 1$, $\exists N$, $\forall n \geqslant N$, 成立 $|x_n - a| < 1$, 也就是

$$a - 1 < x_n < a + 1.$$

取

$$M = \max\{|x_1|, \cdots, |x_{N-1}|, |a-1|, |a+1|\},$$

就使得对每个 n 成立 $|x_n| \leqslant M$.　□

上述定理的逆否命题就是:

推论　无界数列一定发散.

注　从数列 $\{(-1)^n\}$ 发散可见有界数列也可能是发散数列.

以下是收敛数列的四则运算法则.

性质 4　设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是收敛数列, 则有

$$(1)\ \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = \lim_{n\to\infty} x_n + \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$(2)\ \lim_{n\to\infty} cx_n = c \cdot \lim_{n\to\infty} x_n\ (c\ \text{是常数}),$$

$$(3)\ \lim_{n\to\infty} x_n y_n = \lim_{n\to\infty} x_n \cdot \lim_{n\to\infty} y_n,$$

$$(4)\ \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}\ (\text{设}\ \lim_{n\to\infty} y_n \neq 0).$$

证 记 $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim_{n\to\infty} y_n = b$.

(1) 利用

$$|x_n + y_n - (a+b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b|,$$

$\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geqslant N$, 同时成立

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon.$$

因此就有

$$|x_n + y_n - (a+b)| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon.$$

这样就证明了所要求的结论: $\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b$①.

(2) 从 $|cx_n - ca| \leqslant |c| \cdot |x_n - a|$ 就可以解决, 细节从略 (请同学补足).

(3) 利用

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - x_n b + x_n b - ab| \leqslant |x_n| \cdot |y_n - b| + |b| \cdot |x_n - a|,$$

并引用收敛数列的有界性定理就可以解决, 细节从略 (请同学补足).

(4) 从 $\dfrac{x_n}{y_n} = x_n \cdot \dfrac{1}{y_n}$ 可见只要证明当 $\lim_{n\to\infty} y_n = b \neq 0$ 时, 成立

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{y_n} = \frac{1}{b},$$

然后再用法则 (3) 就可以证明所要的结论.

可以看出, 困难在于对于分母的 y_n 如何处理. 利用当 n 充分大时 y_n 将在点 b 的一个邻域中的几何意义, 而这个邻域的半径是我们可以控制的, 就可以如下处理.

对 $\forall \varepsilon$, 不妨设已满足 $\varepsilon \leqslant \dfrac{|b|}{2}$, $\exists N, \forall n \geqslant N$, 成立 $|y_n - b| < \varepsilon \leqslant \dfrac{|b|}{2}$. 利用三点不等式就有

$$|y_n| = |b - (b - y_n)| \geqslant |b| - |b - y_n| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2}.$$

于是当 $n \geqslant N$ 时就可以估计如下:

$$\left|\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|y_n b|} \cdot |y_n - b| = \frac{1}{|y_n| b} \cdot |y_n - b| \leqslant \frac{2}{b^2} \cdot \varepsilon,$$

① 在数列极限的定义中, 最后一句是 $|x_n - a| < \varepsilon$. 如将它修改为 $|x_n - a| < K\varepsilon$, 其中 K 是与 ε 和 n 无关的一个常数, 则与原定义等价. 在这里就是取 $K = 2$. 可以看出, 若取 N 使得同时成立

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2},$$

则就可以得到完全符合数列极限定义中的结论:

$$|x_n + y_n - (a+b)| \leqslant |x_n - a| + |y_n - b| < \varepsilon.$$

有了这个知识之后我们就不必每次都一定要将最后的结果凑成 ε, 这在很多情况比原来的定义更为方便.

由于在右边的 ε 前的常数与 ε 和 n 无关 (参见前面的底注), 因此已经证明完毕. $\square$

注 在商 $\dfrac{x_n}{y_n}$ 中, 我们已经证明, 当 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$ 时, 只要 n 充分大, 就保证分母 $y_n \neq 0$. 那么对于 n 不是充分大的情况, 是否允许出现 $y_n = 0$?

我们的回答是: 对于较小的下标发生 $y_n = 0$ 是可能的, 也是允许的. 理由在于数列 $\{x_n\}$ 的极限是与下标 n 充分大时的 x_n 有关的性质, 修改或增删前面的有限项并不影响数列是否收敛, 而在收敛情况下也不会影响极限值. 因此只要当 n 充分大时 x_n/y_n 有意义, 我们就可以应用所得的除法法则进行计算.

教科书中的 pp.22–23 在四则运算之后还有下面三个例子. 此外我们再补充一个例子, 它们的证明都请同学自己完成.

例 6 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{4n^3 - 5n + 2}{n^3 + 2n^2 + 3}$.

例 7 已知 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ 及 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = a \neq 0$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

例 8 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都发散, 问 $\{x_n + y_n\}$ 必发散吗?

例 9 设 $\{x_n\}$ 收敛, 证明

$$\{x_n + y_n\} \text{ 收敛} \iff \{y_n\} \text{ 收敛}.$$

九. 无穷级数

无穷级数就是将初等数学中的有限项求和推广到无限多项 (实际上总是可列项) 求和. 从下面的介绍可见, 无穷级数从概念到方法上都与数列有密切的联系,

首先引入以下名词和概念: 称

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

为无穷级数 (简称为级数). 称 u_1 为级数的第一项, u_2 为级数的第二项, $\cdots$, u_n 为级数的第 n 项等等. 又称 u_n 为级数的通项. 对于每个正整数 n, 称级数的前 n 项之和

$$S_n = u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$$

为级数的第 n 个部分和, 称 $\{S_n\}$ 为级数的部分和数列.

关于无穷级数的收敛、发散以及在收敛情况下的级数和有以下定义:

定义 称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 (发散), 如果级数的部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛 (发散). 若有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = a$, 则称该级数的和为 a (即级数收敛于 a), 且记为

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = a.$$

在级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散时, 它只是一个记号, 没有其他意义.

回忆在第二章开始时所补充的例子, 即《庄子》中“一尺之捶, 日取其半, 万世不竭”, 有一种解释是

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n} + \cdots .$$

显然其右边就是一个无穷级数. 它的部分和就是

$$S_n = \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2^n} = 1 - \frac{1}{2^n},$$

因此就有

$$\lim_{n \to \infty} S_n = 1,$$

因此级数的和确实等于 1.

下面举几个重要的例子. 第一个例子就是几何级数求和, 它在无穷级数理论中起重要作用.

例 9　讨论下列几何级数的敛散性:

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots .$$

解　从无穷级数的敛散性定义可见只需计算出级数的部分和数列 $\{S_n\}$, 然后求极限. 在 $x = 1$ 时 $S_n = n$, 因此级数发散. 在 $x \neq 1$ 时有

$$S_n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \frac{1 - x^n}{1 - x} = \frac{1}{1 - x} - \frac{x^n}{1 - x},$$

由此可见当 $|x| < 1$ 时级数收敛, 它的和就是 $1/(1 - x)$.

利用 $\{(-1)^n\}$ 发散, 可见 $x = -1$ 时级数发散. 又从 $|x| > 1$ 时 $\{x^n\}$ 为无界数列, 因此级数也发散.　□

例 10　求级数

$$\frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$$

之和.

解　计算部分和

$$\begin{aligned} S_n &= \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{n(n+1)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1}, \end{aligned}$$

可见有 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 1$, 因此级数的和为 1. $\square$

注 这个例题中所用的方法可以称为连锁消去法 (或裂项相消法等), 其英文名为 telescoping, 是级数求和中的一种基本方法.

例 11 求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n}{2^n}$ 的和.

解 不如先求更一般情况的无穷级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} nx^n$$

之和, 其中 $|x| < 1$. 最后令 $x = 1/2$ 代入即可.

这时的部分和为

$$S_n = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n,$$

因此有

$$xS_n = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots + nx^{n+1},$$

这样就有

$$S_n - xS_n = (1-x)S_n = x + x^2 + \cdots + x^n - nx^{n+1} = \frac{x(1-x^n)}{1-x} - nx^{n+1}.$$

由于 $|x| < 1$ 时有 $\lim\limits_{n\to\infty} nx^{n+1} = 0$ (请同学自己证明), 在上式两边除以 $1-x$, 再令 $n \to \infty$, 就得到

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{x}{(1-x)^2}.$$

令 $x = 1/2$ 代入就得到所求的级数和为 2. $\square$

最后补充有关无穷级数的一个重要结果.

定理 无穷级数收敛的必要条件是级数的通项趋于 0, 即有

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

证 从部分和数列的定义有

$$u_n = S_n - S_{n-1} \, \forall \, n,$$

其中设 $S_0 = 0$. 由级数收敛的定义知道部分和数列 $\{S_n\}$ 收敛. 由于数列 $\{S_n\}$ 与 $\{S_{n-1}\}$ 有相同的极限, 在上述等式两边令 $n \to \infty$, 就得到

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1} = 0. \quad \square$$

第 4 次讲稿

第 4 次讲稿用于 2007 年 9 月 26 日, 星期三, 2 节课.

内容为开始讲第二章 数列极限的 §2.2 数列极限 (续), 其中包括 3 部分:

(1) §2.2 的一. 收敛数列的性质 (续),

(2) 二. 无穷大量,

(3) 三. 不定式.

§ 2.2 数列极限 (续)

一. 收敛数列的性质 (续)

这一小节中继续介绍收敛数列的其他几个性质.

性质 1 (**比较定理**) 设 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都收敛,

(1) 若 n 充分大时有 $x_n \geqslant y_n$, 则就有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$. 特别是若 n 充分大时有 $x_n \geqslant 0$, 则就有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant 0$.

(2) 若有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, 则当 n 充分大时就有 $x_n > y_n$. 特别是若有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > 0$, 则当 n 充分大时就有 $x_n > 0$.

证 先证明 (2)[①]. 记 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$, 且有 $a > b$. 令

$$\varepsilon = \frac{a-b}{2},$$

则 $\exists N, \forall n \geqslant N$, 同时成立

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon.$$

于是就知道当 $n \geqslant N$ 时有

$$y_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < x_n.$$

再证明 (1). 用反证法. 若 $a \geqslant b$ 不成立, 则就有 $a < b$. 从刚才已经证明的 (2) 就知道, 存在 N, 当 $n \geqslant N$ 时有 $x_n < y_n$, 这与 n 充分大时 $x_n \geqslant y_n$ 的条件相矛盾. □

注 比较定理的 (1) 与 (2) 的后一半往往称为保号性定理. 简言之, 非负数列若收敛, 则其极限非负; 极限大于 0 的收敛数列至少从某项起也大于 0.

① 实际上在写这个证明之前已经做过分析, 发现从 (2) 即可推出 (1), 因此才决定先证明 (2).

注 2　还有加强形式的保号性定理: 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a > 0$, 则 $\forall c \in (0, a)$, $\exists N$, $\forall n \geqslant N$, 有 $x_n > c$.

建议同学从数列极限的定义直接证明上述加强形式的保号性定理. 当然, 它也可以看成为比较定理 (2) 的一个特例. (对不对?)

注 3　对于比较定理之 (1) 还要指出, 如果将条件加强为"若 n 充分大时有 $x_n > y_n$", 那么是否可以将结论改进为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$?

回答是不能. 这从 $x_n = 1/n \, \forall n$ 这个例子就可以说明了. 因此要记住, 对于以 $>$ 号出现的不等式, 两边取极限之后, 必须将 $>$ 改为 $\geqslant$.

性质 2 (**两面夹定理或夹逼定理**)　设有三个数列 $\{x_n\}$,$\{y_n\}$,$\{z_n\}$, 且当 n 充分大时成立

$$y_n \leqslant x_n \leqslant z_n,$$

又假设数列 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 都收敛, 且有相同的极限 a, 则数列 $\{x_n\}$ 一定收敛, 且也以 a 为极限.

证　从数列 $\{y_n\}$ 和 $\{z_n\}$ 同时收敛于 a 可知, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N$, $\forall n \geqslant N$, 同时成立

$$|y_n - a| < \varepsilon, \quad |z_n - a| < \varepsilon.$$

因此当 $n \geqslant N$ 就有

$$a - \varepsilon < y_n \leqslant x_n \leqslant z_n < a + \varepsilon,$$

即得到

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

这就是 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$.　$\square$

注　夹逼定理有效的一种常见情况是: 设有两个数列 $\{x_n\}$ 与 $\{z_n\}$, 且对每个 n, 或至少对于充分大的 n, 成立不等式

$$0 \leqslant x_n \leqslant z_n,$$

且已知有

$$\lim_{n\to\infty} z_n = 0,$$

则可以得到

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0.$$

下面是用夹逼定理的一个典型例子.

例 1　设有 p 个非负数 $a_1, \cdots, a_p$, 证明:

$$\lim_{n\to\infty} (a_1^n + \cdots + a_p^n)^{\frac{1}{n}} = \max\{a_1, \cdots, a_p\}$$

证 记 $A=\max\{a_1,\cdots,a_p\}$, 则有

$$A\leqslant(a_1^n+\cdots+a_p^n)^{\frac{1}{n}}\leqslant\sqrt[n]{p\cdot A^n}=A\sqrt[n]{p}\,.$$

利用 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{p}=1$[①], 用夹逼定理即得. □

性质 3 证明 $o(1)\,O(1)=o(1)$.

证 设有 $x_n=o(1)$, $y_n=O(1)$, 根据定义对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall n\geqslant N$, 成立 $|x_n|<\varepsilon$. 同时又有 $M>0$, $\forall n$, 成立 $|y_n|\leqslant M$. 这样就在 $n\geqslant N$ 时成立

$$|x_ny_n|<M\varepsilon,$$

由于 M 与 ε,n 均无关, 因此得到

$$\lim_{n\to\infty}x_ny_n=0,$$

也就是 $x_ny_n=o(1)$. □

二. 无穷大量

定义 称数列 $\{x_n\}$ 为无穷大量, 若

$$\forall G>0,\exists N,\forall n\geqslant N,\ \text{成立}\ |x_n|\geqslant G.$$

这时记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, 或简记为 $x_n\to\infty$.

又若当 n 充分大时 $x_n>0$, 则称 $\{x_n\}$ 为正无穷大量, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$, 或简记为 $x_n\to+\infty$; 若当 n 充分大时 $x_n<0$, 则称 $\{x_n\}$ 为负无穷大量, 记为 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$, 或简记为 $x_n\to-\infty$.

例如有

$$\lim_{n\to\infty}n=+\infty,\quad\lim_{n\to\infty}2^n=+\infty,\quad\lim_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty.$$

注意: 数列

$$\{\frac{1+(-1)^n}{2}n\}$$

在 n 为奇数时为 0, 在 n 为偶数时为 n, 因此是无界数列, 但并不是无穷大量.

注 注意: 今后称 $\pm\infty$ 为具有确定符号的无穷大量. 虽然可以将它们统记为 ∞, 但确实存在不是 $\pm\infty$ 的无穷大量, 我们称它为不定号的无穷大量. 具体例子见下面的例 2.

① 这是数列极限中的一个基本题, 见教科书 p.19 四. 练习题 7. 若利用当 $n\geqslant p$ 时的不等式 $1\leqslant p^{\frac{1}{n}}\leqslant n^{\frac{1}{n}}$, 则这个结果也可以利用教科书 p.20 上的例 5 和夹逼定理得到.

例 2　证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}=\infty$.

证　对于每一个 $G>0$, 要证明存在 N, 使得当 $n\geqslant N$ 时有 $|(-1)^n\sqrt{n}|\geqslant G$. 由于

$$|(-1)^n\sqrt{n}|=\sqrt{n}\geqslant G\Longleftrightarrow n\geqslant G^2, \tag{$*$}$$

因此只要取

$$N=[G^2]+1,$$

则当 $n\geqslant N$ 时就有

$$n\geqslant N=[G^2]+1>G^2,$$

再用 $(*)$ 就得到 $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\sqrt{n}=\infty$.　□

性质 4　(1) $\dfrac{1}{\infty}=o(1)$,

(2) $\dfrac{1}{o(1)}=\infty$, 这里要求分母上的无穷小量 $\{x_n\}$ 当 n 充分大时不等于 0.

证　(1) 设有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\infty$, 则 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N$, $\forall\,n\geqslant N$, 成立

$$|x_n|\geqslant\frac{1}{\varepsilon}.$$

因此有

$$\left|\frac{1}{x_n}\right|\leqslant\varepsilon,$$

这样就得到 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{x_n}=0$, 即 $\dfrac{1}{x_n}=o(1)$.

(2) 若 $\{x_n\}$ 是无穷小量, 且当 n 充分大时 $x_n\neq 0$, 也就是说 $1/x_n$ 有意义.

于是对于 $\forall\,G>0$, $\exists\,N$, $\forall\,n\geqslant N$, 成立

$$|x_n|<\frac{1}{G}.$$

因此有

$$\left|\frac{1}{x_n}\right|>G,$$

这就是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\infty.\quad\square$$

注　教科书上将这个性质简记为 $\dfrac{1}{\infty}=0$ 和 $\dfrac{1}{0}=\infty$, 这不值得提倡. 因为无穷小量不是什么很小很小的量, 更不是简单的一个 0, 而是极限为 0 的数列, 也就是极限为 0 的变量, 需要用特定的记号 $o(1)$ 来记, 不能简单地记为 0.

用性质 4 就可以证明下面的结果, 请同学自己完成.

例 3　已知 $|r|>1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}r^n=\infty$.

性质 5

(1) $(\pm\infty)+(\pm\infty)=\pm\infty$;

(2) $\pm\infty+O(1)=\pm\infty,\quad \infty+O(1)=\infty$;

(3) $(\pm\infty)(\pm\infty)=+\infty,\quad (\pm\infty)(\mp\infty)=-\infty,\quad \infty\cdot\infty=\infty$;

(4) 设 $O(1)$ 为非零有界量, 则 $\dfrac{\infty}{O(1)}=\infty$. 特别地, 若 $a\neq 0$, 则 $a\cdot\infty=\infty$.

证 下面只给出 (4) 的证明, 其余请同学自己证明.

(4) 设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, $y_n=O(1)$, 且 $y_n\neq 0$ (至少当 n 充分大时如此). 要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{x_n}{y_n}=\infty$.

根据条件, $\exists M>0$, $\forall n$, 有 $|y_n|\leqslant M$. 又 $\forall G>0$, $\exists N$, $\forall n\geqslant N$, 有 $|x_n|\geqslant MG$. 这样当 $n\geqslant N$ 时就有

$$\left|\frac{x_n}{y_n}\right|\geqslant\frac{MG}{M}=G,$$

从而得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\infty.\quad\Box$$

三. 不定式

上面的性质 5 之 (1) 给出了同号无穷大量相加后仍为同号无穷大量的结论, 但如果是同号无穷大量相减, 或异号无穷大量相加, 则会有什么样的结论呢?

例如下面是 $(+\infty)+(-\infty)$ 的几个例子:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}[n^2+(-n)]=\lim_{n\to\infty}n(n-1)=+\infty,\\
&\lim_{n\to\infty}[(n+1)+(-n)]=1,\\
&\lim_{n\to\infty}[(n+(-1)^n)+(-n)]=\lim_{n\to\infty}(-1)^n\ \text{无意义},\\
&\lim_{n\to\infty}[n+(-n^2)]=\lim_{n\to\infty}n(1-n)=-\infty,\\
&\lim_{n\to\infty}[(n^2+(-1)^n n)+(-n^2)]=\lim_{n\to\infty}(-1)^n n=\infty.
\end{aligned}$$

可见各种可能性都会发生. 同样, $\infty-\infty$, $(\pm\infty)-(\pm\infty)$ 也都是如此. 为简明起见, 我们将以上几种极限问题统称为 $\infty-\infty$ 型的不定式问题.

以上是第一种不定式.

第二种不定式按照习惯记为 $0\cdot\infty$[①], 这方面的例子请同学自己举出 (即举出会生成各种结果的几个不同的 $0\cdot\infty$ 的例子).

---

① 当然这里的因子 0 是指无穷小量 $o(1)$, 否则, 若 $x_n\cdot y_n$ 中 $x_n=0\,\forall n$, 或当 n 充分大时 $x_n=0$, 则只能得到 $\lim\limits_{n\to\infty}x_ny_n=0$.

第三种不定式是 $\dfrac{\infty}{\infty}$. 这方面我们举一个重要例子.

例 设数列 $\{x_n\}$ 由 $x_n = \dfrac{f(n)}{g(n)}\ \forall\, n$ 给定, 其中 f, g 都是 n 的多项式, 且分别为 p 次和 q 次:

$$f(n) = an^p + \cdots\,, \quad g(n) = bn^q + \cdots\,,$$

其中 $ab \neq 0$. 则有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \begin{cases} \dfrac{a}{b}, & p = q; \\ \infty, & p > q, \text{符号由 } \dfrac{a}{b} \text{ 确定}; \\ 0, & p < q. \end{cases}$$

为得出这些结果, 可以在 x_n 的分式表达式中将分子分母同除以 n^p 或 n^q, 细节从略, 请同学自己补足.

第四种不定式按习惯记为 $\dfrac{0}{0}$, 当然这里的分子和分母上的 0 都是指无穷小量. 这只要将上面的例子改写为

$$x_n = \frac{\dfrac{1}{g(n)}}{\dfrac{1}{f(n)}} \quad \forall\, n$$

就可以得到各种可能性.

除了以上四种不定式之外, 还有其他不定式, 以后再学.

注 注意教科书 p.30 最后一行开始的说明, 即今后也将 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$ 称为数列 $\{x_n\}$ 有无穷极限, 或者非正常极限. 又将数列 $\{x_n\}$ 有有限极限 (即正常极限) 或无穷极限 (即非正常极限) 的情况, 统称为记号 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 有意义.

因此, 今后说 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 无意义时, 它的意思是说数列 $\{x_n\}$ 不仅发散, 而且不是 (任何一种) 无穷大量.

第 5 次讲稿

第 5 次讲稿用于 2007 年 9 月 30 日, 星期日, 3 节课.

内容为讲完第二章 数列极限的 §2.2 数列极限 (续), 并开始讲 §2,3 单调数列的极限, 其中包括 3 部分:

(1) §2.2 的五. Stolz 定理,

(2) §2.3 的一. 引言,

(3) 三. 数 e.

五. Stolz **定理**

在今后的学习中我们会发现, 在求数列极限的许多问题中, 主要困难往往是如何对付各种类型的不定式.

由于 $0\cdot\infty$ 和 $\dfrac{0}{0}$ 往往可以转化为 $\dfrac{\infty}{\infty}$, 且 $\infty-\infty$ 在很多情况下也可以如此转化, 如何统一处理无穷大除无穷大的不定式就成为一个重要的问题. 幸运的是, 本小节要介绍的 Stolz 定理恰巧就是解决这类问题的有力工具 (但不是万能工具). 还应当指出, Stolz 定理可以处理比不定式 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 更广一些的极限计算问题. 具体来说, Stolz 定理的对象是求

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n},$$

其中分母为无穷大量 (关于分母的确切条件见定理中的叙述), 而对分子不作任何限制, 因此我们称它为 $\dfrac{*}{\infty}$ 型的极限问题.

注 有关 Stolz 定理的其他内容和练习题见《数学分析习题课讲义》上册的 §2.4.

定理 ($\dfrac{*}{\infty}$ 型的 Stolz 定理) 设数列 $\{a_n\}$ 为严格单调增加数列, 即满足条件

$$a_1<a_2<\cdots<a_n<\cdots,$$

且 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$, 又已知有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l,$$

则一定成立

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l,$$

其中 l 允许为三种情况: 有限数, $+\infty$ 和 $-\infty$.

证 分几步来完成这个证明.

(1) $l=0$.

这时有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=0$, 因此 $\forall\,\varepsilon>0$, $\exists\,N$, $\forall\,n\geqslant N$, 成立

$$|b_{n+1}-b_n|<\varepsilon(a_{n+1}-a_n).$$

这里已经利用了 $a_{n+1}>a_n\,\forall\,n$ 的条件.

又从 $\{a_n\}$ 为正无穷大量可知, 不妨假设 N 已足够大, 使得当 $n\geqslant N$ 时成立 $a_n>0$. 于是我们可以作如下估计

$$\begin{aligned}\left|\frac{b_n}{a_n}\right|&=\frac{|(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_{N+1}-b_N)+b_N|}{a_n}\\&\leqslant\frac{|b_n-b_{n-1}|+|b_{n-1}-b_{n-2}|+\cdots+|b_{N+1}-b_N|+|b_N|}{a_n}\\&<\frac{\varepsilon(a_n-a_{n-1})+\varepsilon(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+\varepsilon(a_{N+1}-a_N)+|b_N|}{a_n}\\&=\frac{\varepsilon a_n-\varepsilon a_N+|b_N|}{a_n}\\&=\varepsilon+\frac{|b_N|-\varepsilon a_N}{a_n}.\end{aligned}$$

注意其中使用了插项、三点不等式和连锁消去法等技巧.

由于对给定的 ε, 已经取定了 N, 因此上述最后一式的第二项的分子 $|b_N|-\varepsilon a_N$ 是一个确定的数, 而分母 a_n 当 $n\to\infty$ 时为无穷大量, 因此存在正整数 $N_1\geqslant N$, $\forall\,n\geqslant N_1$, 成立

$$\frac{|b_N|-\varepsilon a_N}{a_n}<\varepsilon.$$

综合以上可见, 当 $n\geqslant N_1$ 就成立

$$\left|\frac{b_n}{a_n}\right|<2\varepsilon,$$

因此对于 $l=0$ 的情况定理为真.

(2) 对于极限 l 为一般的有限数情况, 从以下两式

$$\begin{aligned}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}-l&=\frac{(b_{n+1}-a_{n+1})-(b_n-la_n)}{a_{n+1}-a_n},\\\frac{b_n}{a_n}-l&=\frac{b_n-la_n}{a_n},\end{aligned}$$

可以知道只要令 $\widetilde{b}_n=b_n-la_n\,\forall\,n$ 定义一个新的数列 $\{\widetilde{b}_n\}$, 就有下列等价关系:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=l&\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\widetilde{b}_n}{a_n}=0,\\\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=l&\Longleftrightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\widetilde{b}_{n+1}-\widetilde{b}_n}{a_{n+1}-a_n}=0,\end{aligned}$$

这样就实现了将有限数 l 的一般情况转化为 $l=0$ 而得到证明, 因为上面的第二个等价关系的右边成立时, 利用 (1) 知道第一个等价关系的右边也成立.

(3) $l=+\infty$. 利用前面已经学过的数列极限的性质 4, 即无穷大量与无穷小量之间的倒数关系, 我们可以观察以下等价关系是否成立:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{a_n}=+\infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=0,$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}=+\infty \Longleftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=0.$$

由于 $a_{n+1}>a_n\,\forall n$, 且 n 充分大时 $a_n>0$, 因此以上二式都成立①.

余下的问题是: 从第二式的右边成立能否推出第一式的右边也成立. 这就是说目前对于极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}$$

是否可以用 $l=0$ 情况的 Stolz 定理. 如果可以的话, 则 $l=+\infty$ 的 Stolz 定理的证明就完成了.

为此需要检查数列 $\{b_n\}$ 在 $l=+\infty$ 时是否满足定理中的条件. 利用 $l=+\infty$, 对 $G=1$, $\exists N$, $\forall n\geqslant N$, 成立

$$\frac{b_{n+1}-b_n}{a_{n+1}-a_n}\geqslant 1.$$

由于左边的分母大于 0, 因此在 $n\geqslant N$ 时它的分子也大于 0, 即有

$$b_N<b_{N+1}<\cdots<b_n<\cdots.$$

这就是说至少当 n 充分大时数列 $\{b_n\}$ 是严格单调增加的.

又在 $n\geqslant N$ 时用插项和连锁消去法得到

$$\begin{aligned}b_n-b_N&=(b_n-b_{n-1})+(b_{n-1}-b_{n-2})+\cdots+(b_{N+1}-b_N)\\&\geqslant(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_{N+1}-a_N)\\&=a_n-a_N,\end{aligned}$$

也就是有

$$b_n\geqslant a_n+(b_N-a_N),$$

由于对 $G=1$ 已经取定了 N, 右边第二项 (b_N-a_N) 为定数, 因此从 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=+\infty$ 可见有

$$\lim_{n\to\infty}b_n=+\infty.$$

① 这里还需要两个条件: 当 n 充分大时 $\{b_n\}$ 严格单调增加, 并大于 0. 它们在下面都得到解决.

这样就证明了 $l=+\infty$ 情况的 Stolz 定理.

(4) $l=-\infty$. 这时可以用 $c_n=-b_n\,\forall\, n$ 重新定义一个数列 $\{c_n\}$, 然后将问题转化为 (3) 来解决. 请同学补足这里的细节. □

下面我们将举出一系列例子来解释如何应用 Stolz 定理.

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}$.

解 这即是教科书前面 p.19 的例 4, 但还是有差别的, 那里只是验证, 而这里是求极限.

首先检查分母 2^n 确实符合定理中的条件. 于是就可以求解如下:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)-n}{2^{n+1}-2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0. \quad \square$$

注 这是使用 Stolz 定理的第一个例子, 务必提请同学注意: 最后的一连串等式在什么意义下成立.

这里的确切含义是: 如果最后求出了极限 (包括有限极限和 $\pm\infty$ 三种允许情况), 则第一个等式成立, 因此问题解决. 但如果最后不是这三种情况, 包括计算不出来的情况在内, 则就没有理由说第一个等式成立, 于是什么也没有得到.

例 2 求极限 $I=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{n}$.

解 由于分母符合条件, 即有

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\frac{\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n+1}\right)-\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)}{(n+1)-n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n+1}}{1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}=0. \quad \square\end{aligned}$$

以上两个都是教科书中已有的例子. 下面再补充一些例子.

例 3 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt[n]{n!}}$.

解 利用平均值不等式, 我们有

$$\frac{1}{\sqrt[n]{n!}}=\sqrt[n]{1\cdot\frac{1}{2}\cdots\frac{1}{n}}<\frac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{n},$$

利用上题和夹逼定理即知所求极限为 0. □

例 4 求 $I=\lim_{n\to\infty}\dfrac{1!+2!+\cdots+n!}{n!}$.

解 此题在有的教科书中列为难题. 在《数学分析习题课讲义》上册中用三种不同方法做此题, 发现用 Stolz 定理最为容易 (参见该书例 2.2.4, 例 2.3.6, 例 2.4.1), 当然其他两个方法也是有价值的.

用 Stolz 定理计算如下:

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)!-n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1. \quad \square$$

例 5 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n!}$.

解 利用上一个例子和无穷小量与无穷大量的倒数关系即知答案为 $+\infty$. 但这里给出一个独立证明. 这个方法是对数列通项取对数得到新的数列, 研究它的极限, 如果它是正无穷大量, 则原数列也是正无穷大量.

于是有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln 1 + \ln 2 + \cdots + \ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} \ln(n+1) = +\infty. \quad \square$$

例 6 求 $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$.

解 这是在教科书 p.20 上作为验证极限的重要例题. 现在我们用 Stolz 定理来做, 事先不需要知道它的极限为 1.

与上一个例题采取相同的方法, 即取对数后求极限, 则有

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(n+1)-\ln n}{(n+1)-n} = \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = 0.$$

最后一步利用了教科书 p.20 六. 练习题 3. 当然本题也可以看成是该处练习题 4 的新解法. $\square$

注 在 Stolz 定理中, 如果 l 为不定号的无穷大量, 则结论不成立. 见教科书 p.32 上的反例. 当然在 l 根本不存在时, 也谈不上使用 Stolz 定理, 但这时的极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n}$$

仍有可能存在 (同样见教科书 p.32 上的另一个反例), 当然只能用其他方法来求了.

注 2 作为 Stolz 定理的特例, 有 Cauchy 命题:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l \Longrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = l,$$

其中 l 也是允许为三种情况, 即有限数, $+\infty$ 和 $-\infty$.

这在教科书中是 p.33 的六. 中的练习题 1(3), 在《数学分析习题课讲义》上册中见 §2.4. 希望同学不仅会从 Stolz 定理推出 Cauchy 命题, 而且还能用数列极限定义对 Cauchy 命题作出独立的证明. 这是因为其中的证明方法在今后还可以用来解决许多其他问题.

§ 2.3 单调数列的极限

数列当然不一定单调, 但确实有许多重要的数列是单调的, 或者当 n 充分大时是如此. 例如前面的例题和习题中有不少数列就是如此. 对于单调数列存在非常有力的定理, 即下面要介绍的单调有界数列收敛定理. 这个定理及其应用是本节的主要内容. 此外, 包括数 e 和 π 在内的内容也是本节的重要内容.

建议阅读《数学分析习题课讲义》上册的 §2.3, §2.5, §2.6 中的有关内容.

一. 引言

这里给出了单调数列和严格单调数列的定义, 此外当数列 $\{x_n\}$ 单调增加时可记为 $x_n \uparrow$, 单调减少时可记为 $x_n \downarrow$.

二. 单调数列的极限

定理 (**单调有界数列收敛定理**)　单调有界数列一定收敛.

证　只写出对于单调增加情况的证明. 对于单调减少情况可以将数列乘以 -1 而转化为单调增加情况, 当然也可以用下面的方法给出独立的证明. 对于初学者这两种方法都是需要学习的.

现在用确界存在定理来给出证明.

设有 $x_n \uparrow$, 且有界. 这时从单调增加性质知道有

$$x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_n \leqslant \cdots ,$$

由此可见单调增加数列一定有下界 (x_1 就是数列的最大下界, 即下确界), 因此若单调增加数列有界, 则要害是它有上界, 反之也是如此.

利用确界存在定理, 数列 $\{x_n\}$ 有上界则必有上确界, 将它记为 β[①] .

从上确界的定义, 一方面有

$$\forall n, \text{ 成立 } x_n \leqslant \beta$$

(即 β 是数列的上界), 另一方面, 用上确界的第二定义, 既然 β 是数列的最小上界, 因此 $\forall \varepsilon > 0$, 由于 $\beta - \varepsilon$ 不可能是数列的上界, 因此一定存在数列中的某一项大于它, 将这一项记为 x_N (N 就是由此确定的), 就有

$$\beta - \varepsilon < x_N.$$

---

① 这里需要注意在教科书 p.11 给出了数集有界的定义, 而在 p.21 给出了数列有界的定义. 后者实际上就是将数列看成数集来对待. 这时数列虽然有可列无限多项, 但作为数集时可能只是一个有限集, 甚至可能是单点集.

再利用 $x_n\uparrow$, 当 $n\geqslant N$ 时, 便有

$$\beta-\varepsilon\leqslant x_N\leqslant x_n\leqslant\beta,$$

从而保证当 $n\geqslant N$ 时成立

$$|x_n-\beta|<\varepsilon,$$

这样就得到 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\beta$. □

上述定理完全解决了有界的单调数列的收敛问题. 那么无界单调数列会有什么结论呢? 幸运的是, 这个问题也有确定的答案.

推论 单调数列若有界则收敛, 若无界则必定是具有确定符号的无穷大量. (因此若 $\{x_n\}$ 单调, 则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 一定有意义.)

证 只需讨论无界情况. 以下只写出 $x_n\uparrow$ 且无上界情况的证明.

由于 $\{x_n\}$ 无上界, 因此 $\forall G>0$, 数列中必有一项大于 G, 将它记为 x_N, 则 $\forall n\geqslant N$, 就有 $x_n\geqslant x_N>G$, 这表明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ (也可记为 $x_n\uparrow+\infty$). □

下面举一个例子, 用以说明前面的有些问题可以用单调有界数列收敛定理得到新的解法.

例 1 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^\alpha}{a^n}$, 其中 $a>1$.

解 记 $x_n=\dfrac{n^\alpha}{a^n}$, 则有

$$x_{n+1}=x_n\cdot\frac{1}{a}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n=x_n\cdot\frac{1}{a}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^\alpha. \qquad (*)$$

由于右边最后一个因子的极限为 1, 而 $a>1$, 因此可见当 n 充分大时, $x_{n+1}<x_n$. 由于数列的极限只是 n 充分大时的性质, 而且数列的每一项大于 0, 数 0 就是它的下界, 因此对这个数列同样可以应用单调有界数列收敛定理.

从而我们知道极限 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在. 将这个极限记为 b, 并在等式 $(*)$ 两边取极限, 就得到

$$b=b\cdot\frac{1}{a}.$$

由于 $a>1$, 只能有 $b=0$. □

在《数学分析习题课讲义》第二章中提供了更多的例子. 例如, 下面的例题实际上可以作为求极限的工具来使用, 证明请同学完成.

例 2 若对于数列 $\{x_n\}$ 存在常数 c, $0<c<1$, 使得对于充分大的 n 成立不等式

$$\left|\frac{x_{n+1}}{x_n}\right|\leqslant c,$$

证明: $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

注 以上两个例子有一个共同点, 这就是观察一个数列的后项与前项之比 (或取了绝对值后的后项与前项之比), 其目的就是为了研究数列 (或取了绝对值之后的数列) 是否具有某种单调性. 当然, 观察后项与前项之差也是研究数列单调性的一种常用方法.

三. 数 e

自然对数的底 e 是高等数学中最重要的一个常数, 它在过去已经见过, 但这个数的确切定义则需要利用极限才能得到. 这就是本小节的目的.

设数列 $\{x_n\}$ 由

$$x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \ \forall\, n$$

给出, 我们将证明它是严格单调增加有上界的数列.

利用平均值不等式, 即将下式左边的 x_n “无中生有”地看成为不全相等的 $n+1$ 个非负数的乘积, 然后得到 (为什么) 具有严格不等号 $<$ 的不等式:

$$x_n = 1 \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(\frac{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + 1}{n+1}\right)^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1} = x_{n+1},$$

又类似地有

$$x_n \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} < \left(\frac{n\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2}}{n+2}\right)^{n+2} = 1,$$

可见 $\{x_n\}$ 以 4 为其上界. 应用单调有界数列收敛定理知有极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$.

定义 定义极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$ 为数 e.

在教科书中还引入了另一个数列 $\{y_n\}$, 它由

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \ \forall\, n$$

给出, 并证明它严格单调减少. 在这得到证明之后, 由于对每个 n 有

$$x_n < y_n,$$

就可见每一个 y_n 是数列 $\{x_n\}$ 的上界, 而每一个 x_n 是数列 $\{y_n\}$ 的下界, 因此它们都收敛. 又从

$$y_n = x_n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)$$

知道它们有共同的极限 e. 我们上面的证明表明不使用 $\{y_n\}$ 也可以定义数 e. 但是使用数列 $\{y_n\}$ 确实会带来新的结果, 下面就会看到这一点.

利用调和平均值-几何平均值不等式 (参见《数学分析习题课讲义》上册的 §1.3.2 练习题 3), 即“无中生有”地将下式左边看成为 $n+2$ 不全相等的正数的乘积, 就得到

$$y_n \cdot 1 = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot 1 > \left(\frac{n+2}{1+(n+1)\left(\dfrac{n}{n+1}\right)}\right)^{n+2} = \left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2} = y_{n+1},$$

即知 y_n 严格↓.

我们也可以独立证明 $\{y_n\}$ 以 2 为下界, 这不过是再用一次调和平均值-几何平均值不等式:

$$y_n \cdot \frac{1}{2} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1} \cdot \frac{1}{2} > \left(\frac{n+2}{2+(n+1)\left(\dfrac{n}{n+1}\right)}\right)^{n+2} = 1,$$

即 $\{y_n\}$ 有下界 2, 从而证明了 $\{y_n\}$ 收敛. 我们也可以用它的极限作为数 e 的定义.

由于对每个 n 有不等式①

$$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \mathrm{e} < y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

对上式取对数, 得到

$$n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < 1 < (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

加以整理, 就得到下面两个有用的不等式. 它们可以说是数学分析中最早得到的非初等不等式.

命题 对每个正整数 n 成立下列两个不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n}. \tag{†}$$

下面举出一个求极限的例题, 其中不仅用到 Stolz 定理, 而且还用到不等式 (†).

例 求 $I = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{\ln n}$.

解 用 Stolz 定理有

$$I = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\ln(n+1)-\ln n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)},$$

① 这里实际上用到了一个事实, 即若严格单调增加收敛数列 $\{x_n\}$ 的极限为 a, 则对每个 n, 必成立严格的不等式 $x_n < a$. 对于严格单调减少收敛数列有类似的结论. 请同学自己完成这两点的证明.

如果右边极限存在的话.

从不等式 (†) 得到估计

$$\frac{n}{n+1} < \frac{\dfrac{1}{n+1}}{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)} < 1,$$

用夹逼定理即知 $I = 1$. □

注 最后一步并非一定要用不等式 (†), 例如可直接用数 e 的知识作如下计算:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{I} &= \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n+1}} \\
&= \lim_{n\to\infty} (n+1)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)\cdot \lim_{n\to\infty} \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= 1,
\end{aligned}$$

因此 $I = 1$.

第 6 次讲稿

第 6 次讲稿用于 2007 年 10 月 8 日, 星期一, 3 节课.

内容为第二章 数列极限 的第 3 节 单调数列的极限 的继续, 含以下 3 部分:

(1) 四. 数 π,

(2) 五. p 级数,

(3) 六. Leibniz 型级数.

四. 数 π

这一小节是用极限方法来讲圆周率.

动机 初学者会奇怪, 为什么要这样做? 必要吗? 将圆周率定义为圆周长与直径之比不是很好吗?

实际上这不难理解. 要使得上述定义有效, 首先要证明, 任何圆的圆周长与其直径之比一定是一个常数. 否则这个定义就没有意义了. 古希腊数学家很清楚这一点. 因此在《几何原本》(约公元前三世纪) 中列出了类似的命题, 并给出了证明. 从中就可以看到, 为了处理圆周长, 或者圆面积, 离开极限是不可能的. 那时当然没有微积分, 但古希腊数学家对于与极限有关的问题发明了独特的处理方法, 本质上与今天的 ε–N 定义相当.

下面将 π 定义为单位圆的内接正 n 边形的半周长当 $n \to \infty$ 时的极限. 为此, 首先要证明这样的极限是存在的.

写出这个半周长的表达式

$$x_n = n \sin \frac{180^\circ}{n},$$

于是问题成为证明数列 $\{x_n\}$ 收敛. 从几何上可以理解, 这个数列是严格单调增加且有上界的正数列. 这样就可以用本节中已经证明的核心定理, 即单调有界数列收敛定理来解决问题.

但是要严格证明数列 $\{x_n\}$ 的单调性, 还不是非常容易的. (希望有更好的方法) 为此先建立一个引理.

引理 设 $n \geqslant 2$, 角 t 满足条件 $0 < nt < 90^\circ$ (即 nt 为锐角), 则成立不等式

$$\tan nt > n \tan t. \tag{$*$}$$

证 用数学归纳法. 对 $n = 2$, 用正切函数的倍角公式就够了:

$$\tan 2t = \frac{2\tan t}{1 - \tan^2 t} > 2\tan t,$$

这里利用了 $0 < 2t < \dfrac{\pi}{2}$ 时分母小于 1 的事实.

现设不等式 $(*)$ 对于 $n=k$ 已经成立, 则对于 $n=k+1$ 就有

$$\begin{aligned}\tan(k+1)t &= \frac{\tan t+\tan kt}{1-\tan t\cdot\tan kt} \qquad (\dagger)\\ &> \tan t+\tan kt\\ &> (k+1)\tan t,\end{aligned}$$

这样就完成了数学归纳法的证明[①]. □

定理 设 $x_n=n\sin\dfrac{180^\circ}{n}\ \forall n$, 则数列 $\{x_n\}$ 收敛.

证 首先证明 $x_n\uparrow$.

令 $t=\dfrac{180^\circ}{n(n+1)}$, 则有 $\dfrac{180^\circ}{n}=(n+1)t$, $\dfrac{180^\circ}{n+1}=nt$, 且当 $n\geqslant 2$ 时 nt 为锐角.

于是有

$$\begin{aligned}x_n &= n\sin\frac{180^\circ}{n}=n\sin(n+1)t\\ &= n\sin nt\cos t+n\cos nt\sin t\\ &= n\sin nt\cos t\left(1+\frac{\tan t}{\tan nt}\right)\\ &< n\sin nt\left(1+\frac{1}{n}\right)\\ &= (n+1)\sin nt\\ &= (n+1)\sin\frac{180^\circ}{n+1}=x_{n+1}.\end{aligned}$$

又从单位圆的内接多边形面积小于单位圆的外切正方形面积可知有

$$n\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{360^\circ}{n}=n\sin\frac{180^\circ}{n}\cos\frac{180^\circ}{n}<4,$$

从而当 $n\geqslant 3$ 时有

$$x_n=n\sin\frac{180^\circ}{n}<\frac{4}{\cos\dfrac{180^\circ}{n}}\leqslant\frac{4}{\cos 60^\circ}=8,$$

可见 $\{x_n\}$ 有上界. 从单调有界数列收敛定理得出 $\{x_n\}$ 收敛. □

定义 定义极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\dfrac{180^\circ}{n}$ 为常数 π.

由这个定义可以证明半径为 R 的圆周长为 $2\pi R$, 圆面积为 πR^2. 又用圆周上弧长等于半径时的圆心角作为角的度量单位 (弪), 这样就建立起角的弧度制度量方法. 这时角 180° 的弧度数为 π, 而定义中的极限等于 π 可改写为如下公式:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}=1. \qquad (\pi)$$

① 注意: 其中利用了 $(k+1)t$ 为锐角时, kt 也是锐角, 因此可以用归纳假设. 此外, 从 $(\dagger)$ 的左边大于 0, 右边分子的 $\tan t$ 和 $\tan kt$ 分别大于 0, 可见分母大于 0 且小于 1.

这是以后导出重要极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ 的起点[1] .

五. p 级数

首先复习一下在教材 p.23 上 §2.1.9 小节的无穷级数的基本内容如下：设无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的部分和数列为 $\{S_n\}$ (即 $\forall n$ 令 $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k$), 则有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛} &\iff \{S_n\} \text{ 收敛},\\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n=a &\iff \lim_{n\to\infty}S_n=a,\\ \sum_{n=1}^{\infty}u_n \text{ 收敛} &\implies \lim_{n\to\infty}u_n=0.\end{aligned}$$

前两点是无穷级数收敛及其和的定义, 第三点是补充内容, 它是无穷级数收敛的必要条件.

下面再补充一个内容, 并将它写为一个命题.

命题 给定一个数列 $\{x_n\}$, 一定存在一个无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, 使得这个无穷级数的部分和数列恰好就是 $\{x_n\}$.

证 为了得到

$$\begin{aligned}u_1&=x_1,\\ u_1+u_2&=x_2,\\ \cdots\cdots\ &\ \cdots\\ u_1+u_2+\cdots+u_n&=x_n,\\ \cdots\cdots\ &\ \cdots\end{aligned}$$

可见只要取 $u_1=x_1,\ u_n=x_n-x_{n-1}\,\forall n\geqslant 2$ 即可. $\square$

注 这个命题表明, 研究数列和研究无穷级数从本质上讲是一回事. 下一个定理即是一个例子. 为此先给出一个定义.

定义 称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数, 如果有 $u_n\geqslant 0\,\forall n$.

注 注意: 定义中的正项级数是习惯名称, 实际上称为非负项级数更为合理.

---

[1] 从这个公式 (π) 的推导可以看出, 只有当角 x 的度量方法采取弧度制时才成立这样的关系. 这在几何上也是明显的. 下面举一个数值例子. 例如, 1° 角的弧度数为 $\pi/180\approx 0.0174533$, 而它的正弦值为 $\sin 1^\circ\approx 0.0174524$.

正项级数的敛散性定理 正项级数的和或为有限数, 或为正无穷大量.

证 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数, 由于每个 $u_n \geqslant 0$, 而其部分和数列 $\{S_n\}$ 的前后两项之间满足关系式

$$S_{n+1} = S_n + u_{n+1} \, \forall \, n,$$

因此 $S_n \uparrow$. 如果数列 $\{S_n\}$ 有上界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 为有限数; 如果数列 $\{S_n\}$ 没有上界, 则 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = +\infty$. 根据无穷级数的和的定义可见定理的结论为真. □

这一小节主要讨论一种特殊的正项级数——p 级数的敛散性, 它在今后的无穷级数理论中将起重要作用 (见第十二章). 我们将它写成一个命题.

命题 以实数 p 为参数的 p 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

当 $p \leqslant 1$ 时发散, 而当 $p > 1$ 时收敛.

证 从正项级数的敛散性定理可见只需要研究部分和数列 $\{S_n\}$ 是否有上界.

(1) 先讨论 $p = 1$ 的情况. (这时的 p 级数是对正整数的倒数求和, 称为调和级数.) 从

$$\begin{aligned}
&S_2 = 1 + \frac{1}{2} = 1\frac{1}{2},\\
&S_4 = S_2 + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > S_2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right) = S_2 + \frac{1}{2} = 2,\\
&S_8 = S_4 + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > S_4 + 4 \cdot \left(\frac{1}{8}\right) = S_4 + \frac{1}{2} = 2\frac{1}{2},\\
&\cdots \quad \cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

可见成立以下不等式:

$$S_{2^k} > 1 + \frac{k}{2}. \tag{S}$$

实际上, 不等式 (S) 对于 $k = 1, 2, 3$ 已经成立. 若它对于 k 成立, 则对于 $k+1$ 有

$$\begin{aligned}
S_{2^{k+1}} &= S_{2^k} + \frac{1}{2^k + 1} + \frac{1}{2^k + 2} \cdots + \frac{1}{2^{k+1}}\\
&> 1 + \frac{k}{2} + 2^k \cdot \frac{1}{2^{k+1}}\\
&= 1 + \frac{k+1}{2},
\end{aligned}$$

因此不等式 (S) 成立. 由此可见数列 $\{S_n\}$ 无上界, 因此 $p = 1$ 时的调和级数发散.

(2) 对于 $p < 1$ 的情况, 这时有

$$\frac{1}{n^p} \geqslant \frac{1}{n},$$

可见 $p < 1$ 时的 p 级数的部分和数列也是无上界的, 因此级数也是发散的.

(3) 最后讨论 $p>1$ 的情况. 采用与 $p=1$ 类似的方法, 但估计的方向相反:

$$
\begin{aligned}
&S_3 = 1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p} < 1+2\cdot\left(\frac{1}{2^p}\right) = 1+\frac{1}{2^{p-1}},\\
&S_7 = S_3+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p} < S_3+4\cdot\left(\frac{1}{4^p}\right) = S_3+\frac{1}{4^{p-1}},\\
&\cdots \quad \cdots\cdots
\end{aligned}
$$

就可以看出有以下公式成立, 其中记 $r=\dfrac{1}{2^{p-1}}$:

$$
S_{2^{k+1}-1} < 1+r+r^2+\cdots+r^k. \tag{$**$}
$$

用数学归纳法来证明这个不等式. 实际上对于 $k=1,2$ 该公式已经成立. 若设对 k 成立, 则对于 $k+1$ 就有

$$
\begin{aligned}
S_{2^{k+2}-1} &= S_{2^{k+1}-1}+\frac{1}{(2^{k+1})^p}+\frac{1}{(2^{k+1}+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{k+2}-1)^p}\\
&< S_{2^{k+1}-1}+2^{k+1}\cdot\left(\frac{1}{(2^{k+1})^p}\right)\\
&= S_{2^{k+1}-1}+\frac{1}{(2^{p-1})^{k+1}}\\
&= S_{2^{k+1}-1}+r^{k+1},
\end{aligned}
$$

可见公式 $(**)$ 成立.

由于 $p>1$, 我们有 $r=\dfrac{1}{2^{p-1}}<1$, 因此从 $(**)$ 可见对于每个 n 成立不等式

$$
S_n < \frac{1}{1-r},
$$

从而当 $p>1$ 时存在有限极限 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$, 即这时的 p 级数收敛. □

以下是 $p=2$ 和 $p=\dfrac{1}{2}$ 的两个特殊情况, 它们也是经常遇到的:

$$
\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} &< +\infty,\\
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}} &= +\infty.
\end{aligned}
$$

此外, 今后还会证明

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{‡}
$$

注 1　上次讲课时在应用 Stolz 定理的例题中有一道题是

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{\ln n}=1,$$

由此也可以得到调和级数发散于正无穷大量的结论.

注 2 p 级数是收敛速度或发散速度很慢的典型例子, 因此从计算若干个部分和的方法难以猜测出它们是否收敛, 以及当收敛时的和是什么. 例如, 对于调和级数 (即 $p=1$ 的 p 级数) 来说, 有

$$S_{82}<5<S_{83}\approx 5.00207,\quad S_{12366}<10<S_{12367},$$

因此难以从近似计算"看出"调和级数是发散的. 对于收敛情况来说, 例如 $p=2$ 的 p 级数, 它的和是什么在相当长的时间中没有求出来. 即使计算出

$$S_{1000}\approx 1.64393,$$

也仍然不知道级数的和是什么 (实际上这个结果只有前 3 位数字是正确的). 这就是历史上有名的 Basel 问题. Euler 第一个求出了 $p=2$ 时的 p 级数的和 (‡). 这个级数的和与圆周率 π 有关是谁也没有想到过的.

六. Leibniz 型级数

这是与正项级数完全不同的一类常见的无穷级数, 例如以下两个有名的无穷级数都是 Leibniz 型级数:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots=\ln 2,$$
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{2n-1}+\cdots=\frac{\pi}{4},$$

定义 称无穷级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 为 Leibniz 型级数, 如果满足以下 3 个条件:

(1) $u_n=(-1)^{n-1}b_n$, 其中 $b_n\geqslant 0$;

(2) $\{b_n\}$ 为单调减少数列;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=0$.

注 定义中的后两个条件可合并写为 $b_n\downarrow 0$, 或者 $|u_n|\downarrow 0$. 又常将满足第 (1) 个条件的无穷级数称为交错级数, 因此 Leibniz 型级数就是通项绝对值单调趋于 0 的交错级数.

这一小节的内容是证明 Leibniz 型级数的收敛定理.

定理 Leibniz 型级数一定收敛.

证 记部分和数列为 $\{S_n\}$, 并考察其中由偶数项 S_{2n} 组成的一个新的数列 (今后称 $\{S_{2n}\}$ 为 $\{S_n\}$ 的偶数项子列). 从

$$S_{2n}=(b_1-b_2)+(b_3-b_4)+\cdots+(b_{2n-1}-b_{2n}),$$

利用 $b_n\downarrow$ 可见有 $S_{2n+2}=S_{2n}+(b_{2n+1}-b_{2n+2})\geqslant S_{2n}$, 因此数列 $\{S_{2n}\}$ 是单调增加数列.

另一方面, 从

$$S_{2n}=b_1-(b_2-b_3)-\cdots-(b_{2n-2}-b_{2n-1})-b_{2n}\leqslant b_1,$$

可见数列 $\{S_{2n}\}$ 有上界. 应用单调有界数列收敛定理, $\{S_{2n}\}$ 收敛. 记其极限为 b, 则有

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n}=b. \tag{L1}$$

现在再考察数列 $\{S_n\}$ 中由奇数项构成的一个新的数列 $\{S_{2n-1}\}$ (今后称为数列 $\{S_n\}$ 的奇数项子列). 这时有

$$S_{2n-1}=S_{2n}-b_{2n},$$

从 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=0$ 可见也有 $\lim\limits_{n\to\infty} b_{2n}=0$, 因此得到

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n-1}=b. \tag{L2}$$

从 (L1) 和 (L2) 可知, $\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\, N,\ \forall\, n\geqslant N$, 成立

$$|S_{2n}-b|<\varepsilon,\quad |S_{2n-1}-b|<\varepsilon.$$

令 $N_1=2N$, 则当 $n\geqslant N_1$ 时就有 $|S_n-b|<\varepsilon$, 因此得到

$$\lim_{n\to\infty} S_n=b.\quad\square$$

注 最后部分的证明过程表明: 如果一个数列 $\{x_n\}$ 的偶数项子列 $\{x_{2n}\}$ 和奇数项子列 $\{x_{2n-1}\}$ 收敛于同一个极限 a, 则就有 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

第 7 次讲稿

第 7 次讲稿用于 2007 年 10 月 10 日, 星期三, 2 节课.

内容为第二章 (数列极限) 的第 3 节 (单调数列的极限) 的继续, 含以下两部分:

(1) 先对上次已讲的内容补充两个例题,

(2) 八. 其他例子 (即迭代数列).

首先对于上次的内容补充两个例子.

例 1　设 $c_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \, \forall n$, 证明数列 $\{c_n\}$ 收敛.

证　观察该数列的前后项之差:

$$c_{n+1} - c_n = \frac{1}{n+1} - \ln(n+1) + \ln n = \frac{1}{n+1} - \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right),$$

利用在引入数 e 时建立的不等式

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n} \tag{$*$}$$

(实际上只用其中的左边不等式), 就得知 $c_n \downarrow$.

又对 $k = 1, 2, \cdots, n$ 用 $(*)$ 右边的不等式 $\ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \ln(k+1) - \ln k < \frac{1}{k}$, 就有

$$\begin{gathered} \ln 2 < 1, \\ \ln 3 - \ln 2 < \frac{1}{2}, \\ \cdots\cdots \\ \ln(n+1) - \ln n < \frac{1}{n}, \end{gathered}$$

然后将它们相加, 得到

$$\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

于是知道

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} > \ln(n+1) > \ln n,$$

由此可见 $c_n > 0 \, \forall n$, 因此数列 $\{c_n\}$ 以 0 为下界.

合并以上, 用单调有界数列收敛定理可见存在 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n$.　□

定义　称极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n\right)$ 为 Euler 常数, 记为 γ (也有记为 C 的).

注 γ 的近似值为 0.577 215 664 901.

可能人人都相信 γ 一定不会是有理数, 但没有人能给出证明. 这是直到今天还没有解决的一个著名数学难题 (Open problem).

由上述例题和定义可见, 关于调和级数 (即 $p=1$ 的 p 级数) 的部分和 (记为 H_n) 有以下公式:

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + \gamma + o(1). \tag{H}$$

这就是说, 作为无穷大量的数列 $\{H_n\}$ 与另一个相当简单的无穷大量 $\{\ln n\}$ 之间的差只是一个常数加上一个无穷小量.

公式 (H) 是一个很好的结果. 为什么这样说呢? 为此可以回顾一下前面关于 H_n 的两个结果: (1) 在讲 p 级数时, 我们证明了 $p=1$ 时的级数 (即调和级数) 发散, 也就是

$$\lim_{n\to\infty} H_n = +\infty;$$

(2) 在讲了 Stolz 定理后作为一个应用, 我们证明了

$$\lim_{n\to\infty} \frac{H_n}{\ln n} = 1.$$

可以看到, 这两点都可以从公式 (H) 推出. 这个公式本身就清楚地表明左边当 $n\to\infty$ 时是正无穷大量. 又若将两边除以 $\ln n$, 再令 $n\to\infty$, 就知道极限为 1. 由此可见, 公式 (H) 是到目前为止对于调和级数的部分和的最好结果.

下面就是应用公式 (H) 的一个好例子, 其中的 Leibniz 级数已经在上次讲课时见过.

例 2 求级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + \cdots$ 的和.

解 记 $\{S_n\}$ 为这个级数的部分和数列, 则只需求 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$. 考虑这个数列中下标为偶数的项, 则有

$$\begin{aligned} S_{2n} &= \sum_{k=1}^{2n} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \frac{1}{2n}\right) - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= H_{2n} - H_n. \end{aligned}$$

利用公式 (H), 就有

$$S_{2n} = [\ln(2n) + \gamma + o(1)] - [\ln n + \gamma + o(1)] = \ln 2 + o(1),$$

这就表明

$$\lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2.$$

回顾 Leibniz 型级数收敛定理的证明, 可见有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} S_{2n} = \ln 2. \quad \square$$

注 在上面应用公式 (H) 时, 并没有用到 γ 的具体数值是什么, 关键是 Euler 常数 的存在性, 也就是数列 $\{c_n\}$ 的收敛性. 当然, 如果要用这个公式来估计 H_n, 则 γ 的近似值还是有用的. 例如, 我们来估计一下 H_{10000} 有多大. 利用公式 (H) 就有

$$H_{10000} \approx \ln 10^4 + \gamma = 4\ln 10 + \gamma \approx 4 * 2.303 + 0.577 \approx 9.789.$$

用 Mathematica 软件可以精确计算出 $H_{10000} \approx 9.78761$, 因此用公式 (H) 得到的近似值中前 3 位有效数字都是正确的.

八. 其他例子 (由迭代生成的数列)

这一小节中的例题和方法与前面不同, 因此标题改为迭代数列或递推数列更合适. 建议在课外阅读《数学分析习题课讲义》上册的 §2.6 节 由迭代生成的数列.

定义 称数列 $\{x_n\}$ 是由迭代生成的 (简称这样的数列为迭代数列), 如果给定数列的第一项 x_1 (今后也称为初值), 并由递推关系 $x_{n+1} = f(x_n)\,\forall\, n$ 归纳地确定其他所有项.

注 迭代的英文是 iterate, 即在函数 $y = f(x)$ 将 x_1 代入得到 x_2, 将 x_2 代入得到 x_3 等等, 这样就归纳地给定了一个数列. 递推的英文是 recursive, 即从前一个推出后一个. 二者意义相近.

注 2 为简单起见, 设上述定义中的函数 f 与 n 无关, 否则问题可能更为复杂.

例 1 设 $x_1 = \sqrt{2}$, $x_{n+1} = \sqrt{2 + x_n}\,\forall\, n$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 先看书上的方法. 即用数学归纳法证明数列 $\{x_n\}$ 单调增加且有上界, 然后利用极限的存在性求出极限值.

由于数列是通过递推关系给出的, 因此为了证明数列 $\{x_n\}$ 单调增加, 使用数学归纳法是比较自然的做法.

首先证明

$$x_n < x_{n+1} \tag{$**$}$$

对每个 n 成立.

实际上, 当 $n = 1$ 时有

$$x_1 = \sqrt{2} < x_2 = \sqrt{2 + x_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}}.$$

设 $n=k$ 时不等式 $(**)$ 成立, 则当 $n=k+1$ 时就有

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}<\sqrt{2+x_{k+1}}=x_{k+2},$$

从而不等式 $(**)$ 对一切 n 成立.

现在再用数学归纳法证明

$$x_n \leqslant 2$$

对每个 n 成立.

对 $n=1$ 这就是 $x_1=\sqrt{2}<2$. 设 $n=k$ 时不等式已经成立, 则当 $n=k+1$ 时就有

$$x_{k+1}=\sqrt{2+x_k}\leqslant\sqrt{2+2}=2.$$

综合以上并用单调有界数列收敛定理, 就知道 $\{x_n\}$ 收敛. 记其极限为 a, 并在递推关系式

$$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}$$

两边令 $n\to\infty$, 就得到关于 a 的方程

$$a=\sqrt{2+a}. \tag{$\dagger$}$$

两边平方后得到二次方程 $a^2=2+a$. 它有两个根: -1 与 2. 但 -1 是求解过程中平凡运算带来的增根. 原方程 $(\dagger)$ 的左边是 a, 右边为开平方的算术根, 因此不可能有负根. 于是方程 $(\dagger)$ 只有惟一的根 2, 这就是迭代数列 $\{x_n\}$ 的极限. $\square$

回顾以上求解过程, 我们可以提出许多问题. 例如, 由于数学归纳法只是用于证明已经提出来的命题, 在以上解题过程中, 如何会事先知道这个迭代数列会是单调数列? 如何知道上界会是 2? 教科书的 p.40 第 7 行上还说"通常可先观察一下数列是否单调", 根据何在? 是普遍规律吗?

这些问题在《数学分析习题课讲义》上册的 §2.6 节中作了详细讨论. 我们在下面只将大意说一下.

首先介绍一个基本事实:

命题 设数列 $\{x_n\}$ 由迭代关系 (或递推关系) $x_{n+1}=f(x_n)$ 生成, 则当该数列收敛于极限值 a, 且满足条件①

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$$

时, 就有 $a=f(a)$.

① 今后会知道这个条件就是要求 f 在点 a 处连续, 因此是一个比较容易检验和满足的条件. 例如, 所有初等函数在其定义域中处处连续.

这个命题的证明是直截了当的, 只需在递推关系

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

的两边令 $n \to \infty$ 即可.

这个命题似乎简单, 但却很有用. 它告诉我们, 在还不知道迭代数列是否收敛时, 就不妨先求解方程

$$x = f(x),$$

这样就有可能尽早得到新的信息, 它往往有助于问题的解决.

此外, 这里又含有新的思想. 这就是下列概念.

定义 点 a 称为函数 f 的不动点, 如果成立

$$f(a) = a.$$

于是上述命题表明, 迭代数列 $x_{n+1} = f(x_n)$ 收敛时, 它的极限必定是 f 的一个不动点.

对于例 1, 由于数 2 是 $f(x) = \sqrt{2+x}$ 的惟一不动点, 因此如果 $\{x_n\}$ 收敛, 那就一定收敛于 2. 如果 $\{x_n\}$ 单调增加, 则极限值 2 就一定是数列的上界. (回顾单调有界数列收敛定理的证明可知, 2 是 $\{x_n\}$ 作为数集来看待时的上确界, 当然也是上界.)

下面研究迭代数列是否会是单调数列的问题. 为此观察图 1(a), 其中的粗黑线表示函数 $y = f(x)$ 在 $0 \leqslant x \leqslant 1$ 上的图像, $x = a$ 是其惟一不动点, 它对应于曲线 $y = f(x)$ 与直线 $y = x$ 的交点, 这就是方程 $x = f(x)$ 的几何意义.

从 x 轴上的点 x_1 出发, 作垂直线与 $y = f(x)$ 相交, 交点的纵坐标就是 $x_2 = f(x_1)$. 再从交点作水平线与直线 $y = x$ 相交, 则这个交点的纵坐标和横坐标都是 x_2. 再从这个点作垂直线与 $y = f(x)$ 相交, 其纵坐标就是 $x_3 = f(x_2)$, 如此继续下去, 就可以形象化地生成迭代数列 $\{x_n\}$. 可以看出, 在 $f(x)$ 为单调增加函数时, 若初值 x_1 小于图中的不动点 a, 则数列 $\{x_n\}$ 是单调增加的. 在图 1(b) 中表明

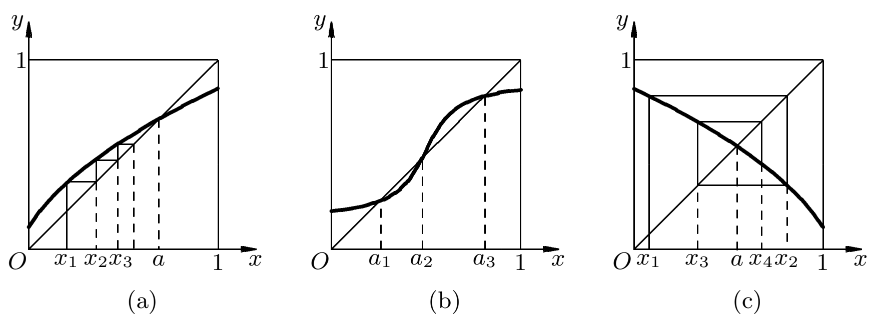


图 1: 迭代生成数列的几何意义.

当 f 有多个不动点时, 则迭代数列的极限与初值 x_1 有关.

再观察图 1(c), 它表明, 如果 f 为单调减少函数, 则迭代数列 $\{x_n\}$一般不会是单调数列, 然而它的奇数项子列 $\{x_{2n-1}\}$ 和偶数项子列 $\{x_{2n}\}$ 分别为单调数列, 而且具有相反的单调性. 这些结论的证明均可在《数学分析习题课讲义》的 §2.6 中找到.

小结 对于由 $x_{n+1} = f(x_n)$ 给定的迭代数列, 可以先作出 $y = f(x)$ 的图形, 从而知道数列 $\{x_n\}$ 属于那一种情况, 此外又可以先求出 f 的不动点, 以确定可能的极限值. 余下的问题就是将已经猜测到的事实用数学的语言写出来.

注 例 1 也可以如下求解, 其背后的理论基础见《讲义》的 §3.4.4 压缩映射原理.

例 1 的解 2 归纳地看出数列的每一项大于 0, 并从 $x = \sqrt{2+x}$ 解出其惟一的不动点 2 之后, 直接估计 x_n 与 2 的差如下:

$$\begin{aligned}|x_{n+1}-2| &= |\sqrt{2+x_n}-2| = \frac{|2+x_n-4|}{|\sqrt{2+x_n}+2|} \\ &\leqslant \frac{|x_n-2|}{2},\end{aligned}$$

由于这对每个 n 成立, 因此就有估计

$$|x_n-2| \leqslant \frac{|x_1-2|}{2^{n-1}} = \frac{|\sqrt{2}-2|}{2^{n-1}} \quad \forall\, n.$$

从夹逼定理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-2)=0$, 这就是

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 2. \quad \square$$

例 2 设 $x_1 = 3$, $x_{n+1} = \dfrac{4+x_n}{1+x_n}\ \forall\, n$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 由迭代方程可归纳看出每个 $x_n > 0$. 由于其中的函数

$$f(x) = \frac{4+x}{1+x} = 1 + \frac{3}{1+x}$$

在 $x \geqslant 0$ 时单调减少 (参见图 2), 因此需要分别考察 x_n 的奇数项子列与偶数项子列. 此外还可以从 $f(x) = x$ 求出它的惟一正根为 2, 因此若 $\{x_n\}$ 收敛, 则极限只可能是 2.

对奇数项子列 $\{x_{2k-1}\}$, 从 $x_1 > 2$ 和 f 的单调减少特性, 有 $x_2 = f(x_1) < f(2) = 2$, 又有 $x_3 = f(x_2) > f(2) = 2$. 这样继续下去, 就可以归纳地证出奇数项子列的每一项都满足 $x_{2k-1} > 2$.

同样, 从 $x_2 < 2$ 可以归纳地证出偶数项子列的每一项都满足 $x_{2k} < 2$.

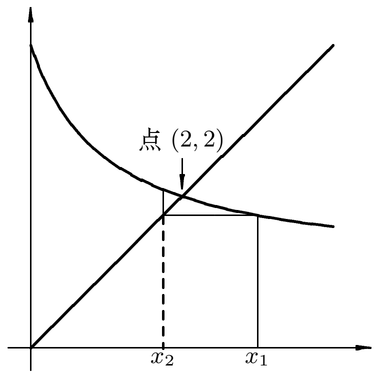


图 2: 例 2 的示意图.

为了研究这两个子列各自的单调性, 我们可以统一地研究 $x_{n+2}-x_n$. 直接计算得到

$$x_{n+2}-x_n=\frac{4+x_{n+1}}{1+x_{n+1}}-x_n=\frac{2(4-x_n^2)}{5+2x_n}, \tag{†}$$

可见当 $x_n>2$ 时, 有 $x_{n+2}<x_n$, 因此奇数项子列单调减少, 且以 2 为下界; 而当 $x_n<2$ 时, 则有 $x_{n+2}>x_n$, 因此偶数项子列单调增加, 且以 2 为上界.

综合以上讨论, 就知道奇数项子列 $\{x_{2k-1}\}$ 与偶数项子列 $\{x_{2k}\}$ 都是单调有界数列, 因此它们都收敛.

记它们的极限为 $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k-1}=\xi$, $\lim\limits_{k\to\infty}x_{2k}=\eta$. 它们都大于 0.

在 (†) 中取 $n=2k-1$, 并令 $k\to\infty$, 得到

$$0=\frac{2(2+\xi)(2-\xi)}{5+2\xi},$$

可见 $\xi=2$. 同样可以证明 $\eta=2$.

回顾在 Leibniz 型级数收敛定理证明后的注, 可见从一个数列的奇数项子列和偶数项子列同时收敛于 2 就可推出 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$. $\square$

第 8 次讲稿

第 8 次讲稿用于 2007 年 10 月 15 日, 星期一, 3 节课.

内容为结束 §2.3, 并开始 §2.4 子列, 含有以下 3 部分:

(1) (续) 八. 其他例子 (即迭代数列);

(2) 十. 闭区间套定理;

(3) §2.4 子列.

首先继续讲 §2.3 节的第八小节.

八. 其他例子(续)

迭代数列当然不一定收敛, 下面就是一个例子.

例 3 设 $x_1 = 0.5$, $x_{n+1} = 5x_n(1-x_n)$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 设该极限存在, 记为 a, 则从递推关系取极限得到 a 所满足的方程为

$$a = 5a(1-a),$$

因此有两个解: 0 与 0.8 (参见下面的图 1).

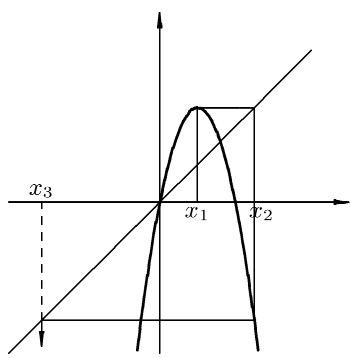


图 1: 例 3 的示意图.

另一方面, 从 $x_1 = 0.5$ 得到 $x_2 = 1.25$, $x_3 = -1.5625 < 0$. 还可以看出, 当 $x_n < 0$ 时一定有 $x_{n+1} < 0$, 而且有

$$|x_{n+1}| = 5|x_n|(1+|x_n|) \geqslant 5|x_n|,$$

可见从 x_3 开始每一项都小于 0, 而且它们的绝对值单调增加趋于无穷大, 因此上面求出的两个 a 值都不会是 $\{x_n\}$ 的极限值, 由此可知数列 $\{x_n\}$ 发散, 且是负无穷大量. 于是与上面求出的两个 a 值无关地有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty. \quad \square$$

下面是书上 p.40 的例 2, 其中的方法在以前已经用过, 即对于给定的数列研究后项与前项之比. 其实从现在的角度来看, 这种方法可以看成是研究递推关系的一种简单情况.

例 4 设 $x_n = \dfrac{(n+1)!}{(2n+1)!!} = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{3}{5}\cdot\dfrac{4}{7}\cdots\dfrac{n+1}{2n+1}\,\forall\, n$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解 将这个数列写为迭代数列的形式, 即有

$$x_1 = \frac{2}{3}, \quad x_{n+1} = x_n \cdot \frac{n+2}{2n+3},$$

可见 $\{x_n\}$ 是单调减少的正数列, 因此有极限. 将极限记为 a, 并在递推式两边取极限, 就有

$$a = \frac{a}{2},$$

因此得到 $a = 0$. □

注 在很多教科书中, 例 1 (即书上 p.40 的例 1) 以下列方式出现, 即给定数列如下:

$$\forall\, n,\ x_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 个根号}},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. 这样就与例 4 有类似之处, 即数列原来并不是递推形式, 而将它写成递推形式成为研究数列敛散性的一种手段了. 如上面已经指出的那样, 对数列研究前后项之比 (或它们之差) 只是写成递推形式的简单特例而已.

十. 闭区间套定理

这是和确界存在定理, 单调有界数列收敛定理等价的重要定理. (它们的等价性将在以后证明.)

给定可列个区间 $\{I_n\}$, 一个基本问题是在什么条件下它们的交集 $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} I_n$ 非空?

在教科书 p.13 的最后一行, 即第一章的习题 2 的 (1),(2),(3),(6) 几个小题给出了这方面的几个例子, 可见会有各种可能性.

首先引入闭区间套的概念. 设每个 I_n 是有界闭区间, 且满足条件

$$I_n \supset I_{n+1}\,\forall\, n,$$

则称 $\{I_n\}$ 为闭区间套[①]. 又用 $|I_n|$ 记区间 I_n 的长度, 则闭区间套的区间长度 $\{I_n\}$ 是单调减少的非负数列.

① 教科书 p.41 中定义闭区间套时就加上了区间长度趋于 0 的条件, 这并非必要. 因此我们将闭区间套与区间长度趋于 0 这两点分开来.

闭区间套的例子在前面已经出现过.

例如, 令 $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $y_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, 则就有 $[x_n, y_n] \supset [x_{n+1}, y_{n+1}]$, 从而就得到一个闭区间套, 记为 $\{[x_n, y_n]\}$. 我们已经知道 $x_n \uparrow \mathrm{e}$, $y_n \downarrow \mathrm{e}$, 也就是说数 e 是这个闭区间套的 (惟一) 公共点.

现在叙述并证明以下闭区间套定理.

闭区间套定理 区间长度收敛于 0 的闭区间套一定有惟一的公共点.

证 设 $\{I_n\}$ 是满足条件的闭区间套. 记 $I_n = [a_n, b_n] \,\forall\, n$, 则 $I_n \supset I_{n+1}$ 表明对每个 n 有不等式

$$a_n \leqslant a_{n+1} \leqslant b_{n+1} \leqslant b_n. \tag{$*$}$$

由此可见, 闭区间套的左端点形成的数列单调增加, 即有 $a_n \uparrow$, 而闭区间套的右端点形成的数列单调减少, 即有 $b_n \downarrow$.

另一方面, 从 $(*)$ 可以看出, 数列 $\{a_n\}$ 以 b_1 为上界 (实际上还以每个 b_n 为上界), 同时数列 $\{b_n\}$ 以 a_1 为下界 (实际上还以每个 a_n 为下界), 因此根据单调有界数列收敛定理, 存在极限

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \xi, \quad \lim_{n\to\infty} b_n = \eta.$$

从条件 $\lim\limits_{n\to\infty} |I_n| = 0$ 和 $|I_n| = b_n - a_n$ 可见成立

$$0 = \lim_{n\to\infty}(b_n - a_n) = \lim_{n\to\infty} b_n - \lim_{n\to\infty} a_n = \eta - \xi,$$

因此得到 $\xi = \eta$. 从 $a_n \leqslant \xi = \eta \leqslant b_n \,\forall\, n$ 可见

$$\xi \in [a_n, b_n] \,\forall\, n,$$

也就是说 ξ 是这个闭区间套的公共点:

$$\xi \in \bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n],$$

即交集 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} I_n \neq \varnothing$.

又若在上述交集中有两个不同点, 记为 x_1 和 x_2, 且不妨设有 $x_1 < x_2$, 则对每个 n 有

$$a_n \leqslant x_1 < x_2 \leqslant b_n,$$

因此有

$$0 < x_2 - x_1 \leqslant b_n - a_n,$$

令 $n \to \infty$ 就与条件 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n - a_n = 0$ 相矛盾. 因此只能是 $x_1 = x_2$. □

注 思考题: 若将闭区间套定理中的“闭”改成“开”, 其他保持不变, 则定理是否还成立? 也就是说, 长度趋于 0 的开区间套是否存在惟一的公共点?

闭区间套定理在今后有许多应用. 下面举一个例子, 即教科书上 p.42 的例 3.

例 证明实数集 $\mathbb{R}$ 不可列.

证 用反证法. 设 $\mathbb{R}$ 为可列集, 则可以将所有实数表示为

$$\mathbb{R} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}. \tag{†}$$

任取一个有界闭区间 $[a, b]$, $a < b$.

将 $[a, b]$ 三等分, 则所得的 3 个子区间中至少有一个子区间不含 x_1, 将这个区间取为 I_1. 然后再将 I_1 三等分, 在所得的三个子区间中至少又有一个子区间不含 x_2, 将它取为 I_2. 如此继续下去, 就归纳地得到一个闭区间套 $\{I_n\}$, 而且它们的长度满足

$$|I_n| = \frac{b-a}{3^n} \to 0.$$

因此从闭区间套定理知道存在 (惟一的) 实数 ξ, 它属于每一个 I_n, 即有

$$\xi \in I_n \, \forall \, n.$$

从闭区间套 $\{I_n\}$ 的构造过程我们知道,

$$x_n \notin I_n \, \forall \, n,$$

因此对每一个 n 都有 $\xi \neq x_n$, 这就表明已经找到了不在实数全体的可列表示 (†) 中的实数 ξ, 引出矛盾. 因此 $\mathbb{R}$ 不是可列集. □

注 今后会多次使用闭区间套定理解决许多问题. 在应用中第一个问题就是如何构造闭区间套? 因为在绝大多数的问题中原来并没有什么闭区间套. 上面的例题中使用的方法可以称为“三分法”, 很有效. 但今后我们在构造闭区间套时用得最多的方法是二分法, 下面不久就会见到.

§2.4 子　列

在前面研究 Leibniz 型级数的收敛性时, 我们考虑了部分和数列 $\{S_n\}$ 的偶数项子列和奇数项子列. 后来, 在研究迭代数列的收敛性时, 对于单调函数 f 为单调减少的情况, 同样需要分别研究偶数项子列和奇数项子列. 由此可见研究子列的重要性. 这一节将正式引进子列的概念及其有关的重要定理——Bolzano-Weierstrass 定理.

一. 子列的概念

定义　从一个数列

$$\{x_n\} = \{x_1, x_2, \cdots, x_n, \cdots\}$$

中抽取无限多项并保持其原有顺序, 将这样得到的数列记为

$$\{x_{n_k}\} = \{x_{n_1}, x_{n_2}, \cdots, x_{n_k}, \cdots\},$$

并称为原有数列 $\{x_n\}$ 的一个子列. 其中的 n_k 表示子列的第 k 项在原数列中是第 n_k 项.

具体来说, 就是对一个数列从第一项看下去, 选某一项为子列的第一项, 记为 x_{n_1}, n_1 就是这一项在 $\{x_n\}$ 中的位置. 然后从 x_{n_1+1} 开始看下去, 选某一项作为子列的第二项, 记为 x_{n_2}, n_2 就是这一项在 $\{x_n\}$ 中的位置. 如此无限继续下去就得到一个子列.

例如, 抽取奇数项得到的奇数项子列为 $\{x_{2k-1}\}$, 其中的 $n_k = 2k-1$, 也就是说子列中的第 k 项是原数列中的第 $2k-1$ 项, 即子列的第 1 项是原数列的第 1 项, 子列的第 2 项是原数列的第 3 项, 等等.

子列的概念很简单, 不难理解, 但初学者往往对于其下标会感到困惑, 因此我们要强调指出子列下标的几个基本性质.

在子列下标记号 n_k 中, k 是正整数, n_k 也是正整数, 从子列定义可以推出 n_k 具有以下 3 个基本性质:

(1)　作为数列来看, $\{n_k\}$ 是严格单调增加数列, 即

$$1 \leqslant n_1 < n_2 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots;$$

(2)　对每个 k 满足不等式

$$n_k \geqslant k,$$

也就是说, 子列的第 k 项决不可能取自原数列的前 $k-1$ 项之中 (请用数学归纳法对此不等式给出证明);

(3) 当 $k \to \infty$ 时, $\{n_k\}$ 是正无穷大量, 也就是

$$\lim_{k\to\infty} n_k = +\infty.$$

例如, 奇数项子列的 $n_k = 2k-1$, 偶数项子列的 $n_k = 2k$, 都具有这 3 个性质.

还要说明, 从定义可以看出, 数列 $\{x_n\}$ 本身也是自己的一个子列. 这时 $n_k = k$.

关于子列的基本定理是:

定理 数列 $\{x_n\}$ 收敛于 a 的充分必要条件是数列 $\{x_n\}$ 的每一个子列都收敛于 a, 也就是说有

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \Longleftrightarrow \forall\,\{x_{n_k}\},\ 成立\ \lim_{k\to\infty} x_{n_k} = a.$$

证 分两步来做.

充分性 ($\Longleftarrow$) 是平凡的, 因为数列本身就是自己的一个子列.

必要性 ($\Longrightarrow$). 这时 $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,N, \forall\,n \geqslant N$, 成立

$$|x_n - a| < \varepsilon.$$

对于 (任何一个) 子列 $\{x_{n_k}\}$, 当 $k \geqslant N$ 时, 由于子列下标的严格单调性和前述关于下标 n_k 的性质 (2), 可以推出有

$$n_k \geqslant n_N \geqslant N,$$

因此也就满足

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon.$$

这样就证明了 $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = a$. $\square$

注 书中 p.43 倒第 3 行取 k_0 使得 $n_{k_0} \geqslant N$, 并无必要. 由于 $n_k \geqslant k\,\forall\,k$, 因此 $n_N \geqslant N$ 一定成立, 因此取 $k_0 = N$ 足矣.

注 2 上述定理还可推广到 $a = \infty, \pm\infty$ 的情况, 请读者自己证明.

由子列夹逼定理还可以得到有用的推论, 它是判定一个数列发散的有力工具.

为方便起见, 将教科书上的推论拆成两个:

推论 1 若数列 $\{x_n\}$ 有两个子列收敛于不同极限, 则 $\{x_n\}$ 一定发散.

例如, 数列 $\{(-1)^n\}$ 的奇数项子列的每一项都等于 -1, 因此收敛于 -1, 而偶数项子列的每一项都等于 1, 因此收敛于 1, 从而推出 $\{(-1)^n\}$ 为发散数列.

下面一个推论要灵活一点, 因为不要求去证明两个子列收敛, 也不必求出它们的极限.

推论 2 若数列 $\{x_n\}$ 有两个子列, 它们不可能收敛于同一个极限, 则 $\{x_n\}$ 一定发散.

用下面的例子 (见教科书 p.44) 来说明如何应用上述推论 2, 以及看出与推论 1 的差别.

例 1 证明数列 $\{\sin n\}$ 发散.

证 从正弦曲线 $y=\sin x$ 的 图像可以设法构造出两个子列. 虽然我们并不知道它们是否收敛, 但却有把握知道它们 (如果收敛的话) 决不可能收敛于同一极限. 这个方法是利用函数 $y=\sin x$ 在一个周期上的几何图像.

先看图 2 中介于 $2k\pi$ 和 $(2k+1)\pi$ 之间的 (加黑的) 区间 $[2k\pi+(\pi/4), 2k\pi+(3\pi/4)]$. 由于函数 $\sin x$ 在这个区间上的取值不小于 $\sin(\pi/4)=\sqrt{2}/2$, 同时区间长度又大于 1, 因此在该区间中一定存在一个正整数, 取它为 n_k. 对每个 k 都这样做, 就得到一个子列 $\{\sin n_k\}$. 如果它收敛的话, 其极限一定不小于 $\sqrt{2}/2$.

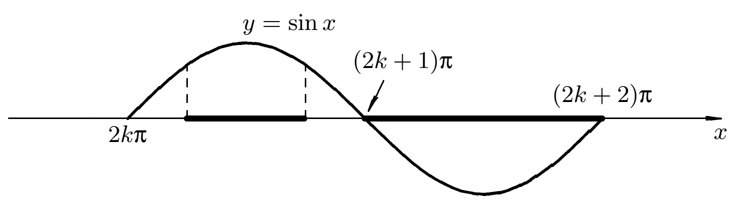


图 2: 由 $\sin x$ 的图像构造两个子列.

类似地可以在图 2 上的区间 $[(2k+1)\pi, (2k+2)\pi]$ 中选出自然数 n_k', 得到第二个子列 $\{\sin n_k'\}$. 它如果收敛的话, 极限一定不会大于 0.

因为收敛数列的每个子列都收敛于同一极限, 而现在所构造出的两个子列即使都收敛, 也不可能收敛于同一极限, 从而就推知 $\{\sin n\}$ 是发散数列. $\square$

注 这个例题就是《数学分析习题课讲义》上册 p.23 的例题 2.2.7, 那里还提供了其他证明方法.

下面是一个有用的命题, 其中的一半已经在前面讲过, 并且起了作用.

命题 数列收敛的充分必要条件是它的奇数项子列和偶数项子列都收敛, 且具有相同的极限.

注 由于必要性已经被包含在关于子列的基本定理的必要性中, 充分性在前面已经证过, 这里不再重复. 但初学者还是可以将这个命题的独立证明作为一个有用的练习来做. (所谓独立证明在这里的意思是完全从 ε-N 的定义出发进行证明, 而不利用其他现成的结论.)

第 9 次讲稿

第 9 次讲稿用于 2007 年 10 月 17 日, 星期三, 2 节课.

内容: 讲完第二章 (并对第三章作浏览). 其中含有 §2.4 子列一节的以下两部分:

(1) 三. Bolzano-Weierstrass 定理 (今后称为凝聚定理或致密性定理);

(2) 五. “否定说法”的例子.

三. Bolzano-Weierstrass 定理

前面已经讲了子列的基本定理, 并由此学到了判定一个数列发散的一种方法. 这一小节要回答的是: 一个数列是否一定会有收敛子列?

当然从子列基本定理知道, 收敛数列的每个子列收敛, 因此问题就变成: 一个发散数列是否有收敛子列? 例如, 上一次课最后的一个例子, 即数列 $\{\sin n\}$, 已经证明它是发散数列, 那么它是否会有一个收敛子列呢?

对于有界数列, 这个问题为下面的定理完全解决.

凝聚定理 (Bolzano-Weierstrass **定理**) 有界数列一定有收敛子列.

分析 初看起来, 似乎无从下手. 不知道按照什么样的原则去选子列的第一项、第二项等等.

换一个办法, 既然一开始不知道如何去找子列, 则是否可以研究作为收敛子列的极限 (今后称为原数列的极限点) 会有什么样的特征? 能否用这样的特征去找到它?

回忆数列极限的几何意义, 即从 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 可知, 在点 a 的每一个邻域外至多只有数列中的有限项. 于是可见, 在 a 的邻域内一定含有数列中的无限多项.

若点 a 是数列 $\{x_n\}$ 的子列的极限, 那么在点 a 的每一个邻域中一定含有这个子列中的无限多项, 当然也就是含有原数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项. 只不过我们不知道在邻域之外情况如何了. (如果在 a 的每个邻域外至多只有数列中的有限多项, 则 a 就是数列的极限, 这时每一个子列都收敛于 a 了.)

下面我们将用闭区间套定理来找到具有上述性质的特殊点, 这个性质就是在它的每一个邻域中应当含有数列中无限多项. 只有这样的点才有“资格”成为子列的极限. (从下面凝聚定理的证明可见, 只要找到了这样的点, 就能找到收敛与该点的子列.)

当然还有其他方法可以找到这样的点, 但饭总是要一口一口吃的, 目前先学会一个证明再说, 同时这也恰巧是学习如何应用闭区间套定理的好机会. 有兴趣的同学可以看《数学分析习题课讲义》中的第三章的有关内容.

证 以下用闭区间套定理来作出证明, 并用 Bolzano 二分法构造出所需要的闭区间套.

设给定一个数列 $\{x_n\}$, 且已知它有界, 则可以将数列的下界记为 a_1, 上界记为 b_1, 满足 $a_1 < b_1$, 使得成立

$$a_1 \leqslant x_n \leqslant b_1 \quad \forall n.$$

取闭区间 $[a_1, b_1]$ 的中点 $(a_1+b_1)/2$, 则得到两个闭的子区间:

$$[a_1, \frac{a_1+b_1}{2}] \text{ 和 } [\frac{a_1+b_1}{2}, b_1].$$

可以看出, 其中至少有一个子区间含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项. 我们取具有这个性质的子区间, 并改记为 $[a_2, b_2]$. (若上述两个子区间都含有数列中的无限多项, 则任取其一即可.) 这时当然成立包含关系:

$$[a_2, b_2] \subset [a_1, b_1],$$

而且有

$$b_2 - a_2 = \frac{b_1 - a_1}{2}.$$

对于 $[a_2, b_2]$ 再用同样的方法得到 $[a_3, b_3]$, 如此继续下去, 就可以归纳地构造出一个闭区间套 $\{[a_n, b_n]\}$[①] .

这样的闭区间套有什么特点呢? (为解决具体问题所构造的闭区间套一定有自己的特点, 否则就与问题不相干了.)

回顾以上二分法过程可见有两个特点:

(1) 对每个 n 有 $[a_n, b_n] \supset [a_{n+1}, b_{n+1}]$;

(2) 闭区间 $[a_n, b_n]$ 的长度为 $b_n - a_n = \dfrac{b_1 - a_1}{2^{n-1}}$;

(3) 每个闭区间 $[a_n, b_n]$ 中一定含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项.

注意: 前两点是闭区间套的普遍特性, 这使我们可以用闭区间套定理, 但第 (3) 点才是这个闭区间套所特有的性质.

于是根据闭区间套定理, 存在惟一的点 (也就是存在惟一的一个实数) ξ, 满足

$$a_n \leqslant \xi \leqslant b_n \quad \forall n,$$

而且我们还知道成立

$$a_n \uparrow \xi, \quad b_n \downarrow \xi.$$

到此为止, 似乎与要证明的定理的结论还没有发生关系. 但实际上距离已经不远了. 下面我们就来构造一个子列, 使得它收敛于 ξ.

① 这里实际上就是用数学归纳法证明: 上述用二分法的可列次构造过程是可行的, 也就是说构造具有所要求的特殊性质的闭区间套是能够实现的. 但我们没有将应用数学归纳法的过程全部写出, 只写了第一步. 作为初次遇到这样的构造方法, 同学可以在这里补充课上没有写全的证明过程.

首先, 在第一个闭区间 $[a_1, b_1]$ 中任取数列 $\{x_n\}$ 中的一项, 将它作为子列的第一项 x_{n_1} (取 $n_1 = 1$ 也是可以的).

然后, 在第二个闭区间 $[a_2, b_2]$ 中, 利用其中含有数列 $\{x_n\}$ 中的无限多项, 因此一定存在下标比 n_1 大的某一项, 将它取为子列的第二项, 记为 x_{n_2}, 这时有 $n_2 > n_1$.

这样继续下去, 在 x_{n_k} 取定之后, 可以利用在第 $k+1$ 个闭区间 $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ 含有数列的无限多项的特点, 一定能取到数列 $\{x_n\}$ 中的某一项, 使得它的下标 $n_{k+1} > n_k$.

这样我们就归纳地取到了数列 $\{x_n\}$ 的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 使得对每个正整数 k 成立

$$a_k \leqslant x_{n_k} \leqslant b_k. \tag{$*$}$$

由于有 $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = \xi = \lim\limits_{k\to\infty} b_k$, 在 $(*)$ 的两边令 $k \to \infty$, 根据夹逼定理, 就得到所要的结论:

$$\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi. \quad \square$$

注 最后一步, 也可以不用夹逼定理, 而如教科书中那样 (见 p.45 第一行), 从 $(*)$ 和 $a_k \leqslant \xi \leqslant b_k \,\forall\, k \in \mathbb{N}$ 看出对每个 k 有

$$|x_{n_k} - \xi| \leqslant b_k - a_k,$$

因此根据所构造的闭区间套的长度收敛于 0, 即 $\lim\limits_{k\to\infty}(b_k - a_k) = 0$, 就可以得到所要的结论: $\lim\limits_{k\to\infty} x_{n_k} = \xi$.

注 2 关于闭区间套定理, 可以阅读《数学分析习题课讲义》上册第三章 §3.2.

凝聚定理解决了有界数列中收敛子列的存在性问题, 答案是 yes. 留下来的问题就是: 无界数列是否有收敛子列?

只要看一下 $x_n = n \,\forall\, n$ 这个简单例子就可以知道, 无界数列不一定有收敛子列. 但是这里并非一无所有, 这就是下面的推论, 其中有一种情况的证明在后面给出.

推论 无界数列一定有子列发散于具有确定符号的无穷大量, 具体来说, 无上界 (下界) 的数列一定有子列发散于正 (负) 无穷大量.

注 教科书 p.45 的第 4 行的推论 2 将有界数列与无界数列是否存在收敛子列的结论统一起来, 因此与上面所写的推论不同. 但应当指出, 对于发散于无穷大量的子列我们至多只能说这样的子列有非正常极限 (在教科书 p.30 称它们为有无穷极限), 而不能简单地说它有极限. 今后, 凡是说一个数列有极限, 那还是指极限值

为有限数的正常情况. 此外, 我们还将

$$\lim_{n\to\infty} x = a$$

在 a 为有限数和无穷大量的情况统称为记号 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ “有意义”, 其他情况, 即数列 $\{x_n\}$ 发散但不是无穷大量的情况, 则称记号 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 无意义. 这与教科书 pp.30 末开始的说法是一致的.

注 2　到目前为止, 已经介绍了 4 个重要的定理, 它们的名称和推导关系如下:

确界存在定理 $\Longrightarrow$ 单调有界数列收敛定理 $\Longrightarrow$ 闭区间套定理 $\Longrightarrow$ 凝聚定理.

其中第一个定理还没有证明. 今后我们称它们为实数系基本定理, 因为它们刻画了实数的基本性质, 而在有理数系中均不成立. 这方面的有关内容可以参考《数学分析习题课讲义》上册的第三章.

五. “否定说法” 的例子

这一小节的内容可以参考《数学分析习题课讲义》上册第一章的 §1.4 逻辑符号与对偶法则.

在今后经常需要考虑某个概念、表达式、条件等等的反面 (也就是否定) 是什么. 首先看含有 4 个否定说法的例题 (教科书 p.45).

例 2

(1) “$x \geqslant 0$” 的否定是 “$x \ngeqslant 0$”, 也是 “$x < 0$”.

(2) “$x \in A$” 的否定是 “$x \notin A$”, 也是 “$x \in A^c$”.

(3) “$|x_n - A| < \varepsilon$” 的否定是 “$|x_n - a| \geqslant \varepsilon$”.

(4) “有限集” 的否定是 “无限集”.

由此看到, 在 (1) 与 (2) 中的否定都有两种表达方式, 第一种的表达方式中含有“不”, 而第二种表达方式中不需要用“不”. 这是很不一样的. 我们将不需要用“不” (以及任何其他否定词) 的表达方式称为“肯定方式”. (3) 是平凡的, (4) 则没有给出什么真正的新东西. 实际上, 不用“不”来刻画无限集的方法是存在的, 这就是我们第一次上课时介绍的 Galilei 定理 (可以试试看能否证明它). 当然这很不容易. 本小节中主要关心与例 2 中 (1),(2) 类似的否定说法如何用肯定方式表达出来.

下面看一个例题, 即为什么需要有“否定”的肯定方式的表达. 这就是上一小节最后的推论中的一部分. 为了说明问题, 先进行分析, 虽然写得比较长, 但也许对于本小节的主题, 即对偶法则的导出和理解会有帮助.

例 3　证明: 没有上界的数列一定有发散于正无穷大量的子列.

分析 设有一个数列 $\{x_n\}$, 它没有上界. 如何利用这个条件? 这是本题的主要困难.

"没有上界"就是对于"有上界"的否定. 因此我们先看有上界的定义:

$$\text{数列 } \{x_n\} \text{ 有上界} \iff \exists\, M > 0, \forall\, n, \text{ 有 } x_n \leqslant M. \tag{†}$$

问题在于, 数列 $\{x_n\}$ 没有上界能否用肯定方式的语言表达出来, 其中不出现"不"?

首先, 上面的定义一开始是 (用普通语言来说) "存在一个正数", 它是数列的上界. 那么它的反面可以说是"没有这样的一个正数", 它是数列的上界. 但这里出现了"没有", 这对我们解决这个题提供不了帮助.

换一个说法, 即是将否定的方式改为"每一个正数"都不是数列的上界. 于是 $\exists$ 换成了 $\forall$, 只是需要将后面 "M 是数列的上界"改成其反面, 即 "M 不是数列的上界". 原来是说"对每一个正整数 n, 都有 $x_n \leqslant M$", 它的否定就是"至少有一个正整数 n, 使得 $x_n > M$".

于是得到用肯定方式表达的"数列无上界"的说法如下:

$$\text{数列 } \{x_n\} \text{ 无上界} \iff \forall\, M > 0, \exists\, n, \text{ 有 } x_n > M. \tag{‡}$$

这就是上述讨论所获得的结论, 现在我们可以写出正式的证明了.

证 从数列 $\{x_n\}$ 无上界可知, $M = 1$ 不是数列的上界, 因此数列中一定有一项大于 1. 取它为子列的第一项, 于是有 $x_{n_1} > 1$.

然后取 $M = 2$, 由于它也不是数列的上界, 可见在数列中一定有一项大于 2. 然而如何使得它的下标大于 n_1? 为此, 可以从反面去想, 数列中是否只有有限项大于 2? 当然不会, 否则这个数列就会是有界数列了. 由此可知, 既然数列无界, 因此数列中一定有无限多项大于 2, 从而其中一定有下标大于 n_1 的一项, 这样就取出了子列的第二项[①].

这样继续下去, 就可以归纳地找到数列 $\{x_n\}$ 中的一个子列 $\{x_{n_k}\}$, 它满足不等式:

$$x_{n_k} > k \quad \forall\, k \in \mathbb{N}.$$

由此就可以证明这个子列发散于正无穷大量了.

① 另一种更清楚的方法是令

$$M = \max\{2, x_1, x_2, \cdots, x_{n_1}\},$$

由于这个 M 也不是数列的上界, 因此一定有数列中的某一项比这个 M 大, 当然也比 2 大, 而且它的下标一定比 n_1 大. 将它取为 x_{n_2} 即可. 这个方法的另一个好处是还得到了严格单调增加的正无穷大量, 即 x_{n_k}严格 $\uparrow +\infty \ (k \to \infty)$.

根据正无穷大量的定义, 对于 $\forall G>0$, 取 $N=[G]+1$, 则当 $k \geqslant N$ 时, 就有

$$x_{n_k}>k \geqslant N=[G]+1>G,$$

这就表明有

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k}=+\infty. \quad \square$$

注 回顾这个例题, 我们看到, 关键只有一点, 即如何将"数列有上界"的否定, 即"数列无上界", 用肯定方式表达出来. 这在今后的许多问题中都会遇到, 特别是在用反证法的证明中经常如此. 因为第一步就是将要证明的结论加以否定, 以此作为反证法的假设. 如果这个否定不能用肯定方式表达出来, 则反证法就无法做不下去.

对比"数列有上界"和"数列无上界"的两个肯定表达方式, 即前面的 (†) 与 (‡), 可以发现一个规律, 这就是在否定一个用逻辑记号表达出来的概念时, 只要将 $\forall$ 与 $\exists$ 对换, 再将最后一个不含这两个符号的条件改成相反的条件就可以了. 我们将这称为"对偶法则", 它实际上是数理逻辑中的一个法则, 但在数学分析中经常有用. 它的正确性可以用数学归纳法作出严格证明, 并不困难, 这里从略.

下面再举几个例子来说明如何用对偶法则, 它们在今后都可能有用.

例 4 已知

$$\text{数列 } \{x_n\} \text{ 收敛于 } a \iff \forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n \geqslant N, \text{ 使得 } |x_n-a|<\varepsilon,$$

因此用对偶法则就有

$$\text{数列 } \{x_n\} \text{ 不收敛于 } a \iff \exists \varepsilon_0>0, \forall N, \exists n \geqslant N, \text{ 使得 } |x_n-a| \geqslant \varepsilon_0.$$

注意: 数列 $\{x_n\}$ 不收敛于 a 包含两种可能, 或者该数列发散, 或者该数列收敛, 但其极限不等于 a. 如果不用对偶法则很容易遗漏其中的一种情况, 而用对偶法则得到的上述肯定方式则将这两种情况都包含在内了.

注 在上面的 $\exists \varepsilon_0$ 中用了记号 ε_0, 这是一种很好的习惯记法, 它强调 ε_0 是一个特定的正数, 以与"每一个 $\varepsilon>0$" 中的 ε 区别开来.

例 5 已知

$$\text{数列收敛} \iff \exists a, \forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n \geqslant N, \text{ 使得 } |x_n-a|<\varepsilon,$$

用对偶法则就有

$$\text{数列发散} \iff \forall a, \exists \varepsilon_0>0, \forall N, \exists n \geqslant N, \text{ 使得 } |x_n-a| \geqslant \varepsilon_0.$$

例 6　已知

$$\{x_n\}\text{ 是无穷大量} \Longleftrightarrow \forall G>0, \exists N, \forall n \geqslant N,\text{ 使得 } |x_n| \geqslant G,$$

用对偶法则就有

$$\{x_n\}\text{ 不是无穷大量} \Longleftrightarrow \exists G_0>0, \forall N, \exists n \geqslant N,\text{ 使得 } |x_n| < G_0.$$

例 7　已知

$$\{x_n\}\text{ 是无穷小量} \Longleftrightarrow \forall \varepsilon>0, \exists N, \forall n \geqslant N,\text{ 使得 } |x_n| < \varepsilon,$$

用对偶法则就有

$$\{x_n\}\text{ 不是无穷小量} \Longleftrightarrow \exists \varepsilon_0>0, \forall N, \exists n \geqslant N,\text{ 使得 } |x_n| \geqslant \varepsilon_0.$$

第 10 次讲稿

第 10 次讲稿, 用于 2007 年 10 月 22 日, 星期一, 3 节课.

内容是开始第四章. 这一章含 3 节. 今天讲 §4.1 函数极限, 其中包含: 一. 引言, 三. 函数极限的严格定义及连续性, 四. 例子.

第四章　函数极限和连续性

§4.1 函数极限

一. 引言

我们已经讲过, 数列实际上也是一元实函数, 即从正整数集 $\mathbb{N}$ 映入实数集 $\mathbb{R}$ 的映射. 但根据习惯, 我们平时不将数列称为函数, 而从第三章本章开始的函数一般都是以区间或区间的并为定义域的一元实函数. 因此从第四章开始的函数极限是一个需要定义的新概念.

数列极限虽然不列入到函数极限中去, 但其中的基本内容与下面的函数极限仍然相同. 因此我们要回顾一下, 数列极限从通俗的语言来说是什么样的概念. 实际上从函数角度来看, 数列极限就是研究当 $n \to \infty$ 时, x_n 的值是否有某种确定的趋势. 换言之, 就是当自变量变化时因变量的值是否出现某种确定的趋势.

函数极限也是如此. 而且我们很快会发现, 函数极限不只有一种, 而是有好多种. 下面看一些例子.

与数列极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 最为接近的是 $f(x)$ 当 $x \to +\infty$ 时的极限概念. 注意, 这里必须写明自变量 x 是趋于那一种无穷大量. 只有对于正整数 n (或者子列的 k), 我们才将 $n \to +\infty$ 简记为 $n \to \infty$ (或者 $k \to \infty$).

例如, 从几何上我们就可以写出

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0,$$

这里表明, 当 $|x| \to +\infty$ 时函数值 $1/x$ 趋于 0. 当然这又表明同时成立

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ 和 } \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0.$$

反之也对.

注　以上最后的等价关系已经与数列极限不同了, 因为在那里, 自变量只有一种趋势, 即 $n \to \infty$.

回忆反三角函数中的 $y = \arctan x$, 从它的定义, 或者更直观地从它的几何图像 (即函数曲线), 就有

$$\lim_{x\to+\infty} \arctan x = \frac{\pi}{2} \text{ 和 } \lim_{x\to-\infty} \arctan x = -\frac{\pi}{2}.$$

这样就已经出现了三种极限, 即自变量趋于 ∞, $+\infty$ 和 $-\infty$. 又可以知道

$$\lim_{x\to\infty} \arctan x$$

不存在, 即发散.

现在来看函数 $y = f(x)$ 当自变量趋于有限值时是否有极限? (这一节里我们没有极限的定义, 而是凭直觉来观察是否有什么极限. 这就是第一节引言的意图.)

现在请同学们与我一起看教科书上 p.57 页, 用类似于看图识字的方法来见识一下, 可能会有那些类型的函数极限.

图 3–6 是单位跳跃函数 $H(x)$, 即

$$H(x) = \begin{cases} 1, x \geqslant 0, \\ 0, x < 0. \end{cases}$$

于是我们可以写出

$$\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1 = H(0), \quad \lim_{n\to 0^-} H(x) = 0 \neq H(0).$$

这里我们看到, 当 x 从原点的左侧趋于它时, 函数 $H(x)$ 的值趋势明显, 但这与 $H(0) = 1$ 不相干.

这样就有了函数在点 0 处的两个单侧极限的概念. 可以记为 $H(0^-)$ 与 $H(0^+)$. 在它们不相等时, 我们说极限

$$\lim_{x\to 0} H(x)$$

不存在, 即 $H(x)$ 函数在原点处有两个单侧极限, 但没有极限. 由于 $H(0) = H(0^+)$, 因此我们又称 $H(x)$ 在 $x = 0$ 处右连续.

然后看图 3–7 上的符号函数, 即

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$$

于是我们可以写出

$$\lim_{x\to 0^+} \operatorname{sgn} x = 1, \lim_{x\to 0^-} \operatorname{sgn} x = -1,$$

可见 $\operatorname{sgn} x$ 于 $x=0$ 处存在两个单侧极限, 但两侧都不连续.

现在看教科书 p.65, 即第四章第一页上的例 1:

例 1　设有函数

$$f(x)=\begin{cases} 0, x\neq 0, \\ B, x=0. \end{cases}$$

则可以看出, 当 $|x|$ 趋于 0 但不等于 0 时函数值 $f(x)$ 始终是 0, 因此就有

$$\lim_{x\to 0} f(x)=0.$$

这与 B 是否为 0 不相干.

若 B 等于 0, 则就有

$$\lim_{x\to 0} f(x)=f(0),$$

这时我们称函数 $f(x)$ 于点 0 处连续. 显然这完全符合我们的直观.

再回顾教科书 p.57 上的图, 可见图 3–9, 图 3–10, 上的函数处处连续, 而图 3–6 上的单位跳跃函数和图 3–7 上的符号函数则除了原点处之外也是处处连续的. 不连续点今后也称为间断点.

思考题: 图 3–5 上的取最大整数函数 $y=[x]$ 在每一点的极限是什么? 那些点上连续? 那些点上不连续?

最后, 在数列极限中 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$ 是有意义的, 那么在函数极限中也需要考虑是否有这类非正常极限, 或发散于无穷大量. 当然有. 例如我们有

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^-} \tan x=+\infty, \quad \lim_{x\to-\frac{\pi}{2}^+} \tan x=-\infty.$$

还可以看教科书 p.59 上的 4 张图, 获得关于函数极限的许多直观材料.

最后, 如书上那样需要提醒同学注意, 记号 $f(a^+)$, $f(a^-)$, 以及今后还会广泛使用的 $f(+\infty)$, $f(-\infty)$, $f(\infty)$ 等都是极限记号, 而不是函数值。

三. 函数极限的严格定义及连续性

从上面可见函数极限可以有许多种类, 但基本思想是相同的, 此外, 还接触到了连续与间断的概念, 它们与极限有密切关系.

所有这些都需要有正式的定义, 这样才能为今后的理论展开做好准备.

在给出定义之前, 还要做一个小小的准备工作. 这就是从这里开始不仅需要以前已经多次使用的邻域概念, 而且还需要一种新的邻域概念, 即去心邻域 (或空心邻域) (见教科书 p.9 最后一行). 这就是

$$O_\delta(a)-\{a\}=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

称为以 a 为中心, 以 δ 为半径的去心 δ 邻域. 它没有统一的记法, 例如用 $\mathring{O}_\delta(a)$ 也是不错的选择.

注意:

$$\begin{aligned} x \in O_\delta(a) - \{a\} &\Longleftrightarrow 0 < |x-a| < \delta \\ &\Longleftrightarrow x \in (a-\delta, a) \cup (a, a+\delta). \end{aligned}$$

同样还有

$$\begin{aligned} |f(x) - A| < \varepsilon &\Longleftrightarrow f(x) \in O_\varepsilon(A), \\ |f(x) - f(a)| < \varepsilon &\Longleftrightarrow f(x) \in O_\varepsilon(f(a)). \end{aligned}$$

虽然有许多不同的函数极限, 我们还是从所谓基本类型的函数极限的定义开始, 并作较详细的介绍, 然后走举一反“N”的道路推及其他.

定义 1 (**基本类型的函数极限的** ε–δ **定义**) 设 $a, A \in \mathbb{R}$, 函数 f 在点 a 的一个去心邻域内有定义. 若对每一个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in O_\delta(a) - \{a\}$ 时, 成立 $|f(x) - A| \leqslant \varepsilon$, 则称 f 在 x 趋于 a 时有极限 A (或 f 在点 a 有极限), 并记为

$$\lim_{x \to a} f(x) = A,$$

也可简记为

$$f(x) \to A \ (x \to a).$$

(注意, 对于函数极限来说, 记号“$(x \to a)$”不能省略, 否则就完全不知道是什么了.)

用逻辑记号则可改写如下:

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in O_\delta(a) - \{a\}, \text{ 成立 } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

注 函数 f 在点 a 是否存在极限, 极限值等于什么, 都与 f 在 $x = a$ 处是否有定义, 以及在有定义情况下的 $f(a)$ 等于什么没有关系. 如果 $f(a)$ 有定义, 则一个自然的问题就是 f 在点 a 的极限是否等于 $f(a)$. 这样就产生了下列连续性概念.

定义 2 (**函数** f **在某点连续的定义**) 设 $a \in \mathbb{R}$, 函数 f 在点 a 的某个邻域中有定义, 若有

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a),$$

则称 f 在点 a 连续.

用逻辑记号则可改写如下:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a) \Longleftrightarrow \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x \in O_\delta(a), \text{ 成立 } |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

下面介绍两个定理, 它们都是第二章中数列极限的性质 1 (即惟一性定理) 和性质 3 (即有界性定理) 的平行推广.

定理 1 (**函数极限的惟一性定理**)　函数极限存在则必惟一.

证　设有 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, 又有 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = B$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall 0 < |x-a| < \delta$, 同时成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 和 $|f(x) - B| < \varepsilon$.

于是有

$$0 \leqslant |A - B| \leqslant |A - f(x)| + |f(x) - B| < 2\varepsilon.$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可取到任意小的正数, 因此只能有 $A = B$.　$\Box$

下面是数列极限的有界性定理的推广. 首先, 函数在某一点存在极限如何能推出函数有界? 所谓函数有界是指其值域 $\mathscr{R}(f)$ 有界. 这当然不可能. 但还是有下列结果:

定理 2 (**函数极限的局部有界性定理**)　若函数在某点有极限, 则函数在该点的一个去心邻域上有界.

证　设有 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 成立, 对 $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, $\forall O_\delta(a) - \{a\}$, 成立

$$|f(x) - A| < 1.$$

因此在邻域 $O_\delta(a) - \{a\}$ 上, 成立

$$|f(x)| \leqslant |f(x) - A| + |A| < 1 + |A|.\quad \Box$$

推论　若 f 在某点有极限, 且于该点有定义, 则函数在该点的一个邻域上有界.

证　重复定理 2 中的证明, 最后当 $x \in O_\delta(a)$ (而不是去心邻域) 时就有

$$|f(x)| \leqslant 1 + A + |f(a)|.\quad \Box$$

四. 例子

例 5　设有函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, x \neq 0, \\ 1, x = 0, \end{cases}$$

证明 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.

证　对 $\forall \varepsilon > 0$, 任取一个 $\delta > 0$, 则当 $0 < |x| < \delta$ 时 (也就是 $x \in O_\delta(0) - \{0\}$), 就有 $|f(x) - 0| = 0 < \varepsilon$. 这就是 $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$.　$\Box$

注　这与数列中的常值数列有类似之处. 对于 $\forall n$, $x_n = c$ 的情况, 对 $\forall \varepsilon$, 取 $N = 1$ 即可, 而与 ε 的大小无关. 这里也是如此, 对于 $\forall \varepsilon > 0$, 任取一个 $\delta > 0$ 即可, 它与 ε 的大小无关.

下面几个例子我们采用分析性的写法, 当然比较长. 教科书上则写得比较简短, 但缺乏分析, 交代也不够清楚. 请同学自己阅读比较.

例 6　证明 $y=\sin x$ 处处连续.

证 (用分析方式写)　任取 $a\in\mathbb{R}$, 我们来证明 $\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$.

为此需要用 $|x-a|$ 来估计 $|\sin x-\sin a|$. 这时和差化积公式就非常重要了. 因为我们有

$$\begin{aligned}|\sin x-\sin a|&=\left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right|\\&\leqslant 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|.\end{aligned}$$

注意: 在上面的推导中已经作了适当放大, 目的是使得表达式简化.

若 $\varepsilon>2$, 则已经有 $|\sin x-\sin a|\leqslant 2<\varepsilon$ 总是成立的, 即 $\delta>0$ 可任取. 对于 $\varepsilon\leqslant 2$, 则可以利用反正弦函数, 就有

$$2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right|<\varepsilon\iff|x-a|<2\arcsin\frac{\varepsilon}{2},$$

于是取 $\delta=2\arcsin\dfrac{\varepsilon}{2}$ 即可.　□

注　教科书中没有限制 $0<\varepsilon\leqslant 2$, 但说了要 $\varepsilon>0$ 充分小, 这就是为了使得 $\arcsin\dfrac{\varepsilon}{2}$ 有意义, 但讲得不够明白.

例 7　证明 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x(x-1)}{x^2-1}=\dfrac{1}{2}$①.

证 (用分析方式写)　观察

$$\left|\frac{x(x-1)}{x^2-1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x}{x+1}-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{x-1}{2(x+1)}\right|.$$

(由于考虑在 $x=1$ 的极限时始终有 $x\neq 1$, 因此可以约去分子和分母的公因子 $x-1$.) 这里分子的大小在今后可以通过 $|x-1|<\delta$ 加以控制 (目前 δ 尚未取定), 但如何对付分母?

可以看出, 如果取 $\delta>0$ 时加一个限制, 要求它小于 1, 则从 $|x-1|<1\iff -1<x-1<1$ 就知道有 $x>0$ (这从几何上也是明显的), 这样就知道当 $|x-1|<1$ 时有

$$\left|\frac{x-1}{2(x+1)}\right|<\frac{1}{2}|x-1|.$$

① 初学者也许会奇怪, 在本题的函数表达式中分子分母明明有公因子 $x-1$, 为什么不约去? 实际上, 如果约去这个因子, 则函数为 $\dfrac{x}{x+1}$, 它在 $x=1$ 处有定义. 而原来的函数在 $x=1$ 处没有定义. 因此两者不是同一个函数. 但从函数极限的定义来看, 一个函数在 $x=1$ 处没有定义并不妨碍我们去讨论函数在 $x=1$ 处是否有极限. 同样在本题的证明过程中, 由于总要求 $x\neq 1$, 因此分子分母的公因子 $x-1$ 可以约掉.

因此为了使得最后一式小于给定的 $\varepsilon > 0$, 只需取 $\delta = 2\varepsilon$. 再考虑到前面分析中已经要求 $\delta < 1$, 可见最后对于 $\varepsilon > 0$ 取

$$\delta = \min\{2\varepsilon, 1\}$$

即可. $\square$

注 注意到在函数极限的定义 1 中, 只要求 f 在点 a 的一个邻域中有定义, 在此邻域之外情况任何与问题无关. 而这个邻域是可以根据需要而缩小的, 在上题中就是如此. 使讨论范围首先缩小到

$$|x-1| < 1 \iff 0 < x < 2,$$

这是经常要采取的方法.

例 8 (**用分析方式写**) 证明 $y = a^x$ 处处连续, 其中 $a > 0$.

证 $a = 1$ 时 a^x 是常值函数, 与例 5 类似, 不必再讨论.

对 $a < 1$ 的情况采用代换方法可以归结到 $a > 1$ 的情况而得到解决. 假设 $a > 1$ 的情况已经得到证明, 则由于 $1/a > 1$, 令 $y = -x$, 则 $x \to x_0 \iff y \to -x_0$. 于是就有

$$\lim_{x \to x_0} a^x = \lim_{y \to -x_0} \left(\frac{1}{a}\right)^y = \left(\frac{1}{a}\right)^{-x_0} = a^{x_0}.$$

余下的问题就是 $a > 1$ 的情况如何证明. 取定 x_0, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 要寻找 $\delta > 0$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$ 时, 成立 $|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon$.

利用

$$|a^x - a^{x_0}| = a^{x_0} \cdot |a^{x-x_0} - 1|,$$

于是

$$|a^x - a^{x_0}| < \varepsilon \iff |a^{x-x_0} - 1| < \varepsilon a^{-x_0}.$$

右边是绝对值不定式, 为了解出 $|x - x_0|$, 还需要将它适当放大.

记 $t = x - x_0$, 利用 $a > 1$ 时 a^x 严格单调增加, 就有

$$a^{-|t|} - 1 \leqslant a^t - 1 \leqslant a^{|t|} - 1.$$

由于左边的绝对值

$$0 \leqslant 1 - a^{-|t|} = a^{-|t|}(a^{|t|} - 1) \leqslant a^{|t|} - 1,$$

因此有

$$|a^t - 1| \leqslant a^{|t|} - 1.$$

这样就得到适当放大

$$|a^{x-x_0}-1| \leqslant a^{|x-x_0|}-1.$$

从

$$a^{|x-x_0|}-1 < \varepsilon a^{-x_0}$$

即可解出

$$|x-x_0| < \log_a(1+\varepsilon a^{-x_0}),$$

取右边的表达式为 δ, 反推即知当 $|x-x_0|<\delta$ 时成立 $|a^x-a^{x_0}|<\varepsilon$. $\square$

注 教材中对 $a>$ 的证明只有很少的几行, 特别时没有说清楚当 $|x-x_0|<\delta$ 时, 为何成立

$$|a^{x-x_0}-1| < a^{\delta}-1,$$

实际上并不很简单. 但对于初学者来说, 却正是锻炼如何读书的一个机会.

第 11 次讲稿

第 11 次讲稿, 用于 2007 年 10 月 24 日, 星期三, 2 节课.

内容是第四章, 先讲完 §4.1 五. 其他类型函数极限的定义, 然后讲 §4.2 函数极限的性质. 其中包含: 一. 各种极限间的关系, 三. 函数极限的四则运算法则, 五. 函数极限的两面夹性. 这次课程的核心就是 Heine 归结原理.

五. 其他类型函数极限的定义

以基本类型的函数极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 为出发点, 其中 $x \to a$ 可以换为 $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to \infty$, $x \to +\infty$, 和 $x \to -\infty$. 这样自变量的变化就有 6 种.

另一方面, A 为有限数时的正常极限还可以换为以下 3 种非正常极限 ∞, $+\infty$, 和 $-\infty$. 于是因变量的趋向就有 4 种.

这样就得到了 24 种不同的函数极限, 其中包括正常极限和非正常极限在内. 我们要会写出它们的确切定义.

这时对于基本类型的函数极限中的定义需要作以下修改. 从自变量方面来看, 原来的 $0 < |x-a| < \delta$ 应当修改为:

$$\begin{aligned}
x \to a^+,&\quad a < x < a+\delta, \text{ 或 } 0 < x-a < \delta, x \in (a, a+\delta);\\
x \to a^-,&\quad a-\delta < x < a, \text{ 或 } -\delta < x-a < 0, x \in (a-\delta, a);\\
x \to \infty,&\quad |x| > M \geqslant 0;\\
x \to +\infty,&\quad x > M \geqslant 0;\\
x \to -\infty,&\quad x < 0, \text{ 且 } |x| > M \geqslant 0, \text{ 或 }, x < -M \leqslant 0.
\end{aligned}$$

从因变量方面来看, 原来的 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 应当如数列有非正常极限那样修改为

$$\begin{aligned}
A = \infty,&\quad |x| > G > 0;\\
A = +\infty,&\quad x > G > 0;\\
A = -\infty,&\quad x < -G < 0.
\end{aligned}$$

此外还引入一些更为简便的函数极限记号. 对于有限数 a, 有

$$f(a^+) = \lim_{x\to a^+} f(x), \quad f(a^-) = \lim_{x\to a^-} f(x),$$

对于 x 趋于无穷大的情况, 有

$$f(\infty) = \lim_{x\to\infty} f(x), \quad f(+\infty) = \lim_{x\to+\infty} f(x), \quad f(-\infty) = \lim_{x\to-\infty} f(x).$$

下面就是 24 种函数极限中的 3 种的定义, 请同学试试看能否写出几种其他极限的定义.

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty \iff \forall\, G > 0, \exists\, M > 0, \forall\, |x| > M,\ \text{成立}\ f(x) > G.$$
$$\lim_{x\to a^+} f(x) = A \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, 0 < x - a < \delta,\ \text{成立}\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = A \iff \forall\, \varepsilon > 0, \exists\, M > 0, \forall\, x > M,\ \text{成立}\ |f(x) - A| < \varepsilon.$$

最后再举几个例子.

例 9　证明 $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$.

证　对 $\forall\, G > 0$, 取 $\delta = \dfrac{1}{G}$, 则在 $0 < x < \delta$ 时, 就有

$$f(x) = \frac{1}{x} > G,$$

这就证明了所要的结论.　□

例 10　证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} \arctan x = \dfrac{\pi}{2}$.

证 (**用分析方式写**)　对 $\forall\, \varepsilon > 0$, 要证明有 $M > 0$, 使得 $\forall\, x > M$ 时, 成立 $|\arctan x - \dfrac{\pi}{2}| < \varepsilon$.

在 $x > 0$ 时有 $0 < \arctan x < \dfrac{\pi}{2}$, 因此有下列等价关系:

$$|\arctan x - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon \iff 0 < \frac{\pi}{2} - \arctan x < \varepsilon.$$

由此可见, 若 $\varepsilon \geqslant \dfrac{\pi}{2}$ 则已经没有问题. 而当 $\varepsilon < \dfrac{\pi}{2}$ 时则有

$$\begin{aligned} |\arctan x - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon &\iff \arctan x > \frac{\pi}{2} - \varepsilon > 0. \\ &\iff x > \tan(\frac{\pi}{2} - \varepsilon) > 0 \\ &\iff x > \cot\varepsilon > 0, \end{aligned}$$

其中利用了 $\tan x$ 在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 上的严格单调性. 于是就只要

$$x > M = \max\{0, \cot\varepsilon\},$$

就可以满足要求.　□

注　实际上取 $x > M = \cot\varepsilon$ 也够了. 因为当 $\varepsilon \geqslant \pi$ 时不等式 $|\arctan x - \dfrac{\pi}{2}| < \varepsilon$ 总是成立的, 而当 $0 < \varepsilon < \pi$ 时, 从

$$x > \cot\varepsilon$$

和反正切函数的严格单调减少特性就有

$$\operatorname{arccot} x < \varepsilon.$$

利用恒等式 (见军训期间发的小册子《大学数学基础选讲》第 9 页):

$$\arctan x + \operatorname{arccot} x = \frac{\pi}{2},$$

就得到

$$\frac{\pi}{2} - \arctan x < \varepsilon.$$

由于上式左边总是大于 0 的, 因此就是

$$|\arctan x - \frac{\pi}{2}| < \varepsilon.$$

§4.2 函数极限的性质

一. 各种极限间的关系

设 $a \in \mathbb{R}$, 则与 a 有关的函数极限有极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, 以及两个单侧极限 $f(a^+)$ 与 $f(a^-)$, 此外它们还可以是各种无穷大量.

定理 1　$\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ (有限数或无穷大) $\Longleftrightarrow f(a^+) = f(a^-) = A$.

证　只写出当 A 为有限数时的证明.

必要性 ($\Longrightarrow$). 从 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ 知道对于 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta, \forall 0 < |x-a| < \delta$, 成立

$$|f(x) - A| < \varepsilon. \tag{$*$}$$

于是在 $a < x < a+\delta$ 时 $(*)$ 也成立, 这表明有 $f(a^+) = A$; 又在 $a-\delta < x < a$ 时 $(*)$ 也成立, 因此又有 $f(a^-) = A$.

充分性 ($\Longleftarrow$). 从 $f(a^+) = A$ 知道对于 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_1 > 0, \forall a < x < a+\delta_1$, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 又从 $f(a^-) = A$ 知道对于 $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta_2 > 0, \forall a-\delta_2 < x < a$, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$.

取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 也就是当 $a-\delta < x < a+\delta$ 时, 成立 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 这就得到 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$.　□

由此即可有以下结论. 它的直观图示在前面已经看过 (p.57 图 3-7), 请同学自己做.

例 1　证明: $\lim\limits_{x\to 0} \operatorname{sgn} x$ 不存在.

下面是本章的重要定理, 它建立沟通起数列极限与函数极限的桥梁.

定理 2 (Heine **归结原理**)　函数 f 在点 a 有极限 A 的充分必要条件是对于满足 $x_n \neq a \forall n$, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$ 的每一个数列 $\{x_n\}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = A$.

(即 $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall$满足 $x_n \neq a, x_n \to a$ 的数列 $\{x_n\}$, 有 $f(x_n) \to A$.)

证 只对 a, A 为有限数的情况作出证明, 其他情况下的证明是类似的.

必要性 ($\Longrightarrow$). 从 $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ 可知 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x-a| < \delta$, 成立

$$|f(x) - A| < \varepsilon.$$

现设 $\{x_n\}$ 就是满足条件 $x_n \neq a \, \forall n$ 和 $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = a$ 的数列, 则对 $\delta > 0$ 有 N, $\forall n \geqslant N$, 成立 $0 < |x_n - a| < \delta$. 于是就有

$$|f(x_n) - A| < \varepsilon.$$

这就得到 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$.

充分性 ($\Longleftarrow$). 用反证法. 若 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x) = A$ 不成立[1]

用对偶法则, 即对于

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \Longleftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall 0 < |x-a| < \delta, \text{ 成立 } |f(x) - A| < \varepsilon$$

将符号 $\forall$ 与 $\exists$ 对换, 并否定其最后一句, 这样就得到

$$\lim_{x \to a} f(x) = A \text{ 不成立}$$

$$\Updownarrow$$

$$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall \delta > 0, \exists x \text{ 满足 } 0 < |x-a| < \delta, \text{ 成立 } |f(x) - A| \geqslant \varepsilon_0.$$

现对于 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, 将相应的 x 记为 x_n, 它满足条件

$$0 < |x_n - a| < \delta_n = \frac{1}{n}, \tag{$\dagger$}$$

且成立

$$|f(x_n) - A| \geqslant \varepsilon_0. \tag{$\ddagger$}$$

对每个 n 都这样做, 就得到一个数列 $\{x_n\}$. 由条件 ($\dagger$) 可知它满足归结原理中的两个条件:

$$\forall n, x_n \neq a, \quad \lim_{n \to \infty} x_n = a.$$

但从 ($\ddagger$) 则可见不可能成立 $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = A$. 这与定理的条件相矛盾. $\square$

下面列举 Heine 归结原理的多方面应用.

(1) 第一类应用是常见的, 即用于证明某些函数极限不存在. 这与用子列基本定理证明数列发散完全类似.

---

① 教科书的 p.75 将这一句话写为 $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq A$, 容易产生歧义, 究竟左边的极限存在不存在? 因此我们作了改动.

利用 Heine 归结原理的必要性的逆否命题, 它可以用于证明函数极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 不存在, 只要有找到两个数列 $\{x_n'\}$ 和 $\{x_n''\}$, 满足条件 $x_n' \neq a\,\forall\, n$, $x_n'' \neq a\forall\, n$, 且成立 $x_n' \to a$, $x_n'' \to a$, 但对应的两个数列 $\{f(x_n')\}$ 和 $\{f(x_n'')\}$ 不具有相同的极限.

例 2 证明: $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在.

证 观察函数 $y=\sin\dfrac{1}{x}$ 的图像 (见教科书 p.59 的图 3-14). 它在 $x=0$ 处无定义, 是奇函数. 因此只要看 $x>0$.

从函数表达式可以看到使得 $\sin\dfrac{1}{x}$ 达到最大值 1 的自变量值是$\dfrac{1}{2n\pi+\dfrac{\pi}{2}}$. 将它取为 $x_n'\,\forall\, n$, 就得到正数列 $\{x_n'\}$, 它收敛于 0, 但 $f(x_n') = 1\,\forall\, n$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n') = 1$.

类似地取 $x_n'' = \dfrac{1}{2n\pi}\,\forall\, n$, 则得到又一个正数列 $\{x_n''\}$, 它也收敛于 0, 但 $f(x_n'') = 0\,\forall\, n$, 因此 $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n'') = 0$.

于是根据 Heine 归结原理的必要性的逆否命题可知函数极限 $\lim\limits_{x\to 0}\sin\dfrac{1}{x}$ 不存在. □

(2) 下面一个例子表明如何用 Heine 归结原理计算某些函数极限 (与教科书 p. 例 3 的说法不完全相同).

例 3 设 $\lim\limits_{x\to+\infty}(a\sin x + b\cos x)$ 存在, 证明 $a=b=0$.

证 这时根据 Heine 归结原理, 对于每一个发散于 $+\infty$ 的数列 $\{x_n\}$, 对应的数列 $\{a\sin x_n + b\cos x_n\}$ 都收敛.

取 $x_n = n\pi\,\forall\, n$, 则

$$a\sin x_n + b\cos x_n = b(-1)^n,$$

可见只能 $b=0$.

类似地再取 $x_n = (n+\dfrac{1}{2})\pi$, 则只能 $a=0$.

注 当然此题很容易用普通的三角学知识求解, 在 a, b 不全为 0 时可以写成 $\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\phi)$, 因此当 $x\to+\infty$ 时是在 -1 到 1 之间摆动的周期函数, 不可能有极限.

(3) Heine 归结原理的另一类应用是从已知的函数极限可以推出许多数列收敛的结果. 例如,

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} = 0 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0,$$
$$\lim_{x\to 0} a^x = a^0 = 1 \Longrightarrow \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a} = 1.$$

虽然目前还没有多少函数极限的结果, 但在今后我们会学到求函数极限的许多有力方法 (例如在微分学中的 L'Hospital 法则), 因此往往会将求数列极限的某些问题转化为求函数极限而得到解决.

(4) 将 Heine 归结原理推广到函数的连续性概念, 就得到以下命题, 它在第五章中很有用. (其证明请同学自己完成.)

命题 (**函数连续的第二定义**) 函数 f 于点 a 连续的充分必要条件是对于收敛于 a 的每一个数列 $\{x_n\}$, 对应的数列 $\{f(x_n)\}$ 收敛于 $f(a)$.

三. 函数极限的四则运算法则

首先如何证明这些法则.

原则上有两个方法.

(1) 学习数列极限中关于四则运算法则的证明方法, 如法炮制.

(2) 用 Heine 归结原理将问题直接归之于数列极限中的四则运算法则.

以加法运算为例, 对于 a, A 均为有限数的基本类型函数极限可如下证明.

$$\lim_{x\to a} f(x) = A, \quad \lim_{x\to a} g(x) = B,$$

$$\Downarrow \quad \text{(Heine 归结原理的必要性)}$$

$$\forall \{x_n\}\ (x_n \neq a, x_n \to a),\ 有\ \lim_{n\to\infty} f(x_n) = A, \lim_{n\to\infty} g(x_n) = B$$

$$\Downarrow \quad \text{(用收敛数列的加法法则)}$$

$$\forall \{x_n\}\ (x_n \neq a, x_n \to a),\ 有\ \lim_{n\to\infty} [f(x_n) + g(x_n)] = A + B$$

$$\Downarrow \quad \text{(Heine 归结原理的充分性)}$$

$$\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = A + B.$$

本小节的内容请同学自学.

五. 函数极限的两面夹性质 (**夹逼定理**)

与上一小节相似, 也请同学自学.

只是提请注意, 对于函数极限中的 A 为非正常极限的情况, 如果是 ∞, 而且不明白它是否具有确定符号, 则不能用两面夹性质. 理由是简单的, 即从

$$|g(x)| > G, |h(x)| > G,$$

和

$$g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$$

不可能推出 $|f(x)| > G$ (即夹不住).

注 教科书 p.78 最后一行已经暗示此事, 希望同学读书到此要问个为什么?

第 12 次讲稿

第 12 次讲稿, 用于 2007 年 10 月 29 日, 星期一, 3 节课.

内容是结束第四章的 §4.2, 并开始 §4.3.

先讲 §4.2 的最后一小节: 六. 两个重要的极限, 八. 局部比较定理, 十. 复合函数的极限.

然后开始讲 §4.3 无穷小量、无穷大量和有界量. 其中含: 一. 无穷小量、无穷大量和有界量,

六. 两个重要的极限: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ **和** $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$

在众多的函数极限中一般公认上述两个最为重要, 它们的基础是前面已经得到的两个数列极限 (见教科书 p.37 与 p.35):

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}=1 \tag{J1}$$

与

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}. \tag{J2}$$

下面就以它们为出发点来证明本小节标题中的两个重要的函数极限.

命题 1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$.

证 根据本节第一小节的定理 1, 只要证明函数 $\dfrac{\sin x}{x}$ 在点 0 的两个单侧极限都是 1 即可.

先考虑在点 0 的右侧极限. 首先将变量 x 的范围限制在 $(0,\dfrac{\pi}{2})$ 内. 对于 $\forall\, x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, $\exists\, n$, 使得满足

$$\frac{\pi}{n+1}<x\leqslant\frac{\pi}{n}.$$

这也就是 $n\leqslant\dfrac{\pi}{x}<n+1$, 可见这个 n 是由

$$n=[\frac{\pi}{x}]$$

所惟一确定的正整数[1] .

这时成立两面夹的不等式:

$$\frac{n}{n+1}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}{\dfrac{\pi}{n+1}}=\frac{\sin\dfrac{\pi}{n+1}}{\dfrac{\pi}{n}}<\frac{\sin x}{x}<\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n+1}}=\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}\cdot\frac{n+1}{n}, \tag{$*$}$$

① 这里可以看出, 为什么不用 $\dfrac{\pi}{n+1}\leqslant x<\dfrac{\pi}{n}$ 来定出 n 与 x 的联系.

这里左边和右边 (以下简称两边) 是数列, 从 (J1) 可见它们具有相同的极限值 1, 但中间是函数, 因此还不能用夹逼定理. 以下直接用函数极限的定义来证.

首先, 利用已有的数列极限 (J1), 知道 $(*)$ 的两边 (即两个数列) 的极限都是 1, 因此对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall n\geqslant N$, 使得 $(*)$ 的两边的值都在 $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ 中.

取 $\delta=\dfrac{\pi}{N}$, 则在 $0<x<\delta=\dfrac{\pi}{N}$ 时, 就有

$$\frac{\pi}{x}>N.$$

因此成立

$$n=[\frac{\pi}{x}]\geqslant N.$$

这样就既使得两面夹不定式 $(*)$ 成立, 又使得其两边的值都在 $(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ 中, 于是就得到

$$\left|\frac{\sin x}{x}-1\right|<\varepsilon,$$

这就证明了

$$\lim_{x\to0^+}\frac{\sin x}{x}=1.$$

对于 $x\to0^-$ 的左侧极限, 可以作变量代换 $y=-x$, 且利用 $\sin x$ 为奇函数, 这样就有

$$\lim_{x\to0^-}\frac{\sin x}{x}=\lim_{y\to0^+}\frac{\sin y}{y}=1.$$

既然两个单侧极限具有相同极限值 1, 因此结论为真. $\square$

命题 2 $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$.

证 同样先看 $x\to0^+$ 时的右侧极限.

对 $x\in(0,1)$, 存在正整数 n, 使得 $\dfrac{1}{n+1}<x\leqslant\dfrac{1}{n}$, 这也就是 $n\leqslant\dfrac{1}{x}<n+1$, 因此 n 是由

$$n=[\frac{1}{x}]$$

所惟一确定的正整数. 于是有两面夹不等式:

$$\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^n<(1+x)^{\frac{1}{x}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1},\tag{$**$}$$

这里两边都是数列, 从已知的数列极限 (J2) 知道都收敛于 e, 但中间是函数, 因此不能用夹逼定理. 但可以同命题 1 的证明一样来处理.

利用数列极限 (J2), 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, $\forall n\geqslant N$, 使得 $(**)$ 的两边的值都落在 $(\mathrm{e}-\varepsilon,\mathrm{e}+\varepsilon)$ 之内. 另一方面, 取 $\delta=\dfrac{1}{N}$, 则当 $0<x<\delta=\dfrac{1}{N}$ 时, 就有

$$\frac{1}{x}>N,$$

因此

$$n=[\frac{1}{x}]\geqslant N,$$

这样就既使得两面夹不等式 $(**)$ 成立, 又使得其两边的值都在 $(\mathrm{e}-\varepsilon,\mathrm{e}+\varepsilon)$ 中, 从而得到

$$|(1+x)^{\frac{1}{x}}-\mathrm{e}|<\varepsilon,$$

这就证明了

$$\lim_{x\to 0^+}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

对于 $x\to 0^-$, 作代换 $y=-x$, 且设 $-1<x<0$, 即有 $0<y<1$, 则就有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}&=\lim_{y\to 0^+}(1-y)^{\frac{-1}{y}}=\lim_{y\to 0^+}\left(\frac{1}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}\\&=\lim_{y\to 0^+}\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1}{y}}\\&=\lim_{y\to 0^+}\left[\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1-y}{y}}\cdot\left(1+\frac{y}{1-y}\right)\right]\\&=\lim_{y\to 0^+}\left(1+\frac{y}{1-y}\right)^{\frac{1-y}{y}}.\end{aligned}$$

再作代换 $z=y/(1-y)$, 则在 $0<y<1$ 时,

$$y\to 0^+\Longleftrightarrow z\to 0^+,$$

因此上面的最后一式就是

$$\lim_{z\to 0^+}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}.$$

这样就证明了

$$\lim_{x\to 0^-}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}.$$

既然两个单侧极限具有相同极限值 e, 因此结论为真. □

注 两个命题的证明完全相同, 但教科书中的证明不够严谨, 因此作了改动.

注 2 以前我们在数列极限中举出过 4 种不定式. 实际上还有更多的不定式. 函数极限也是如此. 两个重要极限中第一个是 $\frac{0}{0}$ 型的不定式, 第二个则是 1^∞ 型不定式.

教科书 p.80 上的例 8 很简单, 可惜其中答案错了, 它的写法也不好, 因此要讲一下. 后面的 例 9, 例 10 请同学自学.

例 8　求 $I = \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{x}$.

解　$I = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin 2x}{2x}\cdot\dfrac{2x}{x}\right) = 2\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 2x}{2x} = 2.$　□

注　以上写法是常见的, 实际上就已经作了代换 $y = 2x$, 同时也利用了 $x\to 0 \Longleftrightarrow y\to 0$, 只是这两点没有写出来. 如书上那样写没有必要, 而且容易出错.

八. 局部比较定理

与局部有界性定理一样, 数列极限中的比较定理推广到函数极限时只能是具有局部性质的结果.

局部比较定理　设 $a\in\mathbb{R}$, 且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ 都存在 (也可以是 $+\infty$ 或 $-\infty$).

(1) 若存在 $\delta>0$ 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时成立 $f(x)\geqslant g(x)$, 则成立

$$\lim_{x\to a} f(x) \geqslant \lim_{x\to a} g(x). \tag{B1}$$

(2) 反之, 若有

$$\lim_{x\to a} f(x) > \lim_{x\to a} g(x), \tag{B2}$$

则存在 $\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$ 时有

$$f(x) > g(x). \tag{B3}$$

这个定理与收敛数列的比较定理除了局部性之外完全相同, 它的证明与前面的函数极限四则运算法则的证明一样有两个方法, 一种证明方法是模仿收敛数列的比较定理的证明, 第二种证明方法是用 Heine 归结原理. 教科书中将这两种方法都写出来了, 下面将第二种证明介绍一下.

证　对 (2) 用反证法. 设 (B2) 成立, 但结论不成立. 这就是说

$$\text{“}\exists\,\delta>0, \forall\,x(0<|x-a|<\delta),\ \text{有}\ f(x)>g(x)\text{”}$$

不成立. 对上述表达式用对偶法则, 可知

$$\forall\,\delta>0, \exists\,x(0<|x-a|<\delta),\ \text{有}\ f(x)\leqslant g(x).$$

取 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, 将满足上述条件的 x 记为 x_n. 对每个正整数 n 都这样做, 就得到一个数列 $\{x_n\}$, 满足条件

$$\forall\,n, 0<|x_n-a|<\frac{1}{n},\quad f(x_n)\leqslant g(x_n). \tag{B4}$$

另一方面, 由于存在 $\lim_{x\to a} f(x)$ 和 $\lim_{x\to a} g(x)$, 应用 Heine 归结原理的必要性部分, 对于满足 (B4) 的数列 $\{x_n\}$, 对应的数列 $\{f(x_n)\}$ 和 $\{g(x_n)\}$ 存在极限, 且有

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x), \quad \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to a} g(x).$$

对 (B4) 的 $f(x_n) \leqslant g(x_n)$ 用收敛数列的比较定理, 就得到

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{x\to a} f(x) \leqslant \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{x\to a} g(x).$$

这与条件 (B2) 矛盾. □

注 教科书 p.82 上第 8 行有错, 其中最后一个 $\leqslant$ 号应当改为 $=$ 号.

最后, 局部比较定理中需要注意之处与收敛数列的比较定理也相同. 这里重复一下:

(i) 在定理 (1) 中若条件加强为在 $0 < |x-a| < \delta$ 时成立$f(x) > g(x)$, 则是否能够得到比 (B1) 更强的结论, 即将 (B1) 中的 $\geqslant$ 改为 $>$ 号? 答案是不可能. 因此, 在今后应用比较定理时, 取极限之前为 $>$ (或 $<$) 时, 则取极限之后只能得到 $\geqslant$ (或 $\leqslant$).

(ii) 条件 (B2) 若减弱为 (B1), 则不能得到相应的结论. 实际上这就是说, 在条件

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x)$$

时不能对于在 $0 < |x-a| < \delta$ 中的 $f(x)$ 和 $g(x)$ 之间建立任何确定性的比较关系.

(iii) 比较定理的特殊情况就是保号性定理, 这与收敛数列的保号性定理也是类似的. 见教科书 p.82 的推论 1.

十. 复合函数的极限

这里要讨论的问题可概括如下: 设已知

$$\lim_{y\to A} f(y) = B, \tag{$*$}$$

作代换 $y = g(x)$, 且满足条件 $\lim_{x\to a} g(x) = A$, 问是否成立

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to A} f(y) = B. \tag{$**$}$$

这类问题在求函数极限中是经常遇到的. 在前面的两个重要极限的证明中就用了三次.

注 实际上等式 $(**)$ 中往往需要计算的是左边的 $\lim_{x\to a} f(g(x))$, 而已知的是 $(*)$. 通过代换 $y = g(x)$ 将二者联系起来. 当然需要满足条件 $\lim_{x\to a} g(x) = A$.

下面再举一个例子.

例 11　求 $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{-1}{x}}$.

解　作代换 $y=-1/x$, 则 $x\to 0^+ \Longrightarrow y\to -\infty$. 由此就有

$$\lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{-1}{x}} = \lim_{y\to -\infty} \mathrm{e}^y = 0.$$

事实上, 用代换方法计算函数极限的例子在前面已经遇到几次, 其中假定 $(**)$ 总是成立的.

但实际上并非总是如此. 下面举一个反例.

设 $g(x)\equiv 0$, $a=A=0$,

$$f(y)=\begin{cases} 1,\ y=0, \\ 0,\ y\neq 0. \end{cases}$$

则有

$$\lim_{y\to 0} f(y)=0,$$

又有 $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$, 但是 $f(g(x))\equiv 1$, 因此

$$\lim_{x\to 0} f(g(x)) = 1 \neq \lim_{y\to 0} f(y) = 0.$$

这里的问题可以作如下分析. 在条件 $(*)$ 中, $f(y)$ 在 $y=A$ 处可以没有定义, 如果有定义也不一定等于 B. 而 $x\to a$ 时 $g(x)$ 不仅趋于 A, 而且可能在 x 与 a 接近的过程中等于 A, 这就是问题所在. 也就是说, 是由于函数极限的定义中只能在去心邻域中考虑而引起的.

由此可以证明, 除了前面的条件之外, 如果还存在 $\delta>0$, 使得在 $0<|x-a|<\delta$ 时均有 $g(x)\neq A$, 则就保证 $(**)$ 成立. (这可以作为课外思考题. 也可以参考《数学分析习题课讲义》上册的第四章中有关内容.

下面给出使得 $(**)$ 成立的两个充分条件.

命题　设已知

$$\lim_{x\to a} g(x)=A,\ \lim_{y\to A} f(y)=B.$$

又设 $f(y)$ 满足以下两个条件之一:

(1) f 于点 $y=A$ 处连续,

(2) A 为无穷大, 且 $\lim\limits_{y\to A} f(y)$ 有意义,

则成立 $(**)$, 即有

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = \lim_{y\to A} f(y).$$

证 (1) 这时对于 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |y - A| < \delta$ (这就是 $y \in O_\delta(A)$), 成立

$$|f(y) - f(A)| < \varepsilon.$$

由于 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = A$, 对于上述 $\delta > 0$, $\exists \eta > 0$, $\forall 0 < |x-a| < \eta$, 成立 $|g(x) - A| < \delta$.

合并以上, 可见 $\forall \varepsilon > 0, \exists \eta$, 当 $0 < |x-a| < \eta$ 时就有

$$|f(g(x)) - f(A)| < \varepsilon.$$

这就证明了

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(A) = \lim_{y\to A} f(y).$$

(2) 这里有许多种不同情况, 我们只给出 $A = \infty$ 和极限 $\lim\limits_{y\to A} f(y) = B$ 为有限数的情况的证明. 这时有

$$\lim_{x\to a} g(x) = \infty, \quad \lim_{y\to\infty} f(y) = B,$$

要证明有

$$\lim_{x\to a} f(g(x)) = B.$$

根据 $\lim\limits_{y\to\infty} f(y) = B$ 的定义, $\forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \forall |y| > M$, 成立

$$|f(y) - B| < \varepsilon.$$

又根据 $\lim\limits_{x\to a} g(x) = \infty$ 的定义[①], 对上述 $M > 0$ 有 $\delta > 0, \forall 0 < |x-a| < \delta$, 有 $|g(x)| > M$.

合并以上, 可见在 $\forall 0 < |x-a| < \delta$ 时就有

$$|f(g(x)) - B| < \varepsilon.$$

这样就证明了 $\lim\limits_{x\to a} f(g(x)) = B$. □

注 可以看到, 这两个条件下复合函数的极限不会出现困难的理由就是它们都避免了去心邻域带来的困难.

---

① 这个证明虽说不难, 但初学者还是要注意, 为什么在写出两个条件中的函数极限的定义时要按照这样的顺序来写? 换一个顺序如何? 实际上是不行的. 不明白这个道理的话就说明还没有真懂. 如果在不看书和笔记情况下能够自己写出一个合格的证明, 那就会搞清楚上面提出的问题.

§4.3 无穷小量、无穷大量和有界量

一. 基本概念

与第二章数列极限情况类似, 我们可以引入无穷小量的记号 $o(1)$ 与有界量 $O(1)$ 的记号, 只是每次必须在后面加括号, 说明自变量趋于什么, 即从自变量角度来看是什么样的极限过程, 否则是不行的.

例如, 对同一个函数 $y=1/x$, 有

$$\frac{1}{x}=o(1)\ (x\to\infty),$$
$$\frac{1}{x}=\infty\ (x\to 0),$$
$$\frac{1}{x}=O(1)\ (x\to 1\text{ 或其他非零值}).$$

这里对于有界量记号需要作说明. 如同函数极限的局部有界性定理一样, 记号

$$f(x)=O(1)\ (x\to a)$$

的定义是: $\exists\,\delta>0, \exists\,M>0, \forall\,x\in O_\delta(a)-\{a\}$, 成立 $|f(x)|\leqslant M$. 类似地定义记号 $f(x)=O(1)\ (x\to a^+)$ 与 $f(x)=O(1)\ (x\to a^-)$.

对于 x 趋于无穷大的情况, 例如

$$f(x)=O(1)\ (x\to+\infty),$$

它的定义是 $\exists\,G>0, \exists\,M>0, \forall\,x>G$, 成立 $|f(x)|\leqslant M$. 类似地定义记号 $f(x)=O(1)\ (x\to\infty)$ 和 $f(x)=O(1)\ (x\to-\infty)$.

注 若将 ∞ 想象成一个数轴上的一个点, 且当 $x\to+\infty$ 和 $x\to-\infty$ 都达到同一个点, 又将对于每个 $M>0$ 的无界区间 $(M,+\infty)$ 和 $(-\infty,-M)$ 看成为点 ∞ 的两侧的两个邻域, 而将它们的并看成为 ∞ 的去心邻域, 则不仅可以将以上对于 $O(1)$ 的各种定义统一理解, 而且也可以将不同极限过程的函数极限统一理解.

本小节的内容不一一解说, 请同学自己阅读一遍.

只是要注意, 含有 o 与 O 的等式不是普通的代数等式, 其中有极限过程, 因此习惯上要求从左边往右边读, 而不能反过来. 例如

$$o(1)=O(1)$$

对每种极限过程都是对的, 即无穷小量必是局部有界量.

但是反过来,

$$O(1)=o(1)$$

一般不成立. 因为局部有界量, 不论是那一种极限过程, 未必是无穷小量.

第 13 次讲稿

第 13 次讲稿, 用于 2007 年 10 月 31 日, 星期三, 2 节课.

内容是结束第四章, 讲 §4.3 的三. 等价量, 五. 记号 $o(\nu)$ 和 $O(\nu)$, 七. 进一步的例子.

有时间的话可以接着讲第五章 连续函数和单调函数, 只是开一个头.

三. 等价量

下面在不写出具体的极限过程时就是表示对所有极限过程都成立.

定义　设有

$$\lim \frac{u}{v} = 1,$$

其中设 $v \neq 0$, 或更广一些, 设有

$$u = v(1 + o(1)),$$

则称 u 与 v 是等价量, 并记为 $u \sim v$.

以上是一般性的定义, 对于具体的等价关系则必须在后面加括号, 说明是哪一种极限过程.

此外, 等价量概念也可以用于数列极限中, 这时自变量为 $n \in \mathbb{N}$, $(n \to \infty)$ 可以省略.

下面是几个重要的等价关系, 它们都有明显的几何意义 (比书上多几个).

(1) $\sin x \sim x$ $(x \to 0)$, 它表明正弦函数 $y = \sin x$ 的图像在点 $x = 0$ 的邻近可以用 $y = x$ 来代替.

这只是将函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$ 换一个写法.

(2) $\ln(1 + x) \sim x$ $(x \to 0)$, 它表明函数 $y = \ln(1 + x)$ 的图像在点 $x = 0$ 的邻近也可以用 $y = x$ 来代替.

从函数极限 $\lim\limits_{x \to 0} (1 + x)^{\frac{1}{x}} = \mathrm{e}$ 取对数即得到

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1 + x)}{x} = 1,$$

其中利用了对数函数的连续性 (见教科书 p.74 练习题 2(1))[①].

---

① 这里实际上是复合函数的极限问题. 设 $f(y) = \ln y$, 则有 $\lim\limits_{y \to \mathrm{e}} \ln y = \ln \mathrm{e} = 1$, 令 $y = g(x) = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$, 则有 $\lim\limits_{x \to 0} g(x) = \mathrm{e}$. 由于 $f(y)$ 于点 e 处连续, 因此满足 §4.2.10 小节中的条件, 从而有 $\lim\limits_{x \to 0} \ln(g(x)) = \ln \mathrm{e} = 1$.

(3) $\ln x \sim x-1$ $(x \to 1)$. 它表明函数 $y=\ln x$ 在点 $x=1$ 的邻近可以用 $y=x-1$ 来代替.

这只要在 (2) 中令 $y=x+1$, 得到 $\ln y \sim y-1$ $(y \to 1)$, 再将 y 改记为 x 即可得到.

(4) $\mathrm{e}^x-1 \sim x$ $(x \to 0)$ (即教科书 p.92 的八. 练习题 1).

为此令 $y=\mathrm{e}^x-1$, 则 $x \to 0 \Longleftrightarrow y \to 0$, 因此有①

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}=1.$$

(5) 最有用的等价关系是关于阶乘 $n!$ 的 Stirling 公式:

$$n! \sim \left(\frac{n}{\mathrm{e}}\right)^n \cdot \sqrt{2\pi n}.$$

由于目前阶段的知识还不够, 要到第二学期才能作出证明.

(6) 比 Stirling 公式稍弱一点是下列公式:

$$\sqrt[n]{n!} \sim \frac{n}{\mathrm{e}}.$$

它的证明方法很多, 可以参见《数学分析习题课讲义》上册的例题 2.5.3.

在教科书 p.86 上还有几个例子, 特别是

$$x^2+x=x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)=x^2(1+o(1)) \sim x^2 \ (x\to\infty),$$
$$x^2+x=x(1+x)=x(1+o(1)) \sim x \ (x\to 0),$$

需要注意. 此外还有它的推广, 即对于多项式 $P(x)$ 来说, 当 $x\to\infty$ 时, $P(x)$ 与自己的最高次项等价, 而当 $x \to 0$ 时, $P(x)$ 与自己的最低次项等价. 这些都是很有用的结论.

下面是等价量的 5 条性质. 它们的证明都不难, 对于应用重要的是后两个性质.

需要说清楚的是什么叫"等价量代换法"? 书上是指性质 (5). 下面来看一下它的内容以及如何使用.

性质 (5): 若 $u \sim v$, 则 $\lim u$ 与 $\lim v$ 同时存在或同时不存在, 存在时, 成立

$$\lim u = \lim v.$$

① 回顾 §4.2 的十. 复合函数的极限中的内容, 可以知道, 在这个例题中 $a=A=0$, $g(x)=\mathrm{e}^x-1$, $f(y)=\dfrac{y}{\ln(1+y)}$. 由于 $g(x)$ 在 $x=0$ 的去心邻域中不会等于 0, 因此作上述代换求极限是合法的.

证明是容易的, 只要写出

$$u = v \cdot \frac{u}{v},$$

或者

$$u = v(1 + o(1))$$

即可.

在实际使用等价量代换法时, 除了用性质 5, 更主要是用性质 4.

性质 (4), 即在 $u \sim \widetilde{u}$ 时, 成立

$$uv \sim \widetilde{u}v, \quad \frac{v}{u} \sim \frac{v}{\widetilde{u}}\ (\text{若 } u \neq 0).$$

简单来说, 性质 (4) 表明, 在乘除形式中每个因子可以用等价量来代替. 这就是今后的主要应用形式. 这与其他文献, 包括《数学分析习题课讲义》中 p.119 倒数第 4 行的说法, 都是一致的.

例 1　求 $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin 3x}{\ln(1-x)}$.　(这是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式.)

解　利用 $\sin 3x \sim 3x\ (x \to 0)$ 和 $\ln(1-x) \sim -x\ (x \to 0)$, 因此

$$\frac{\sin 3x}{\ln(1-x)} \sim \frac{3x}{-x} = -3\ (x \to 0). \quad \square$$

注　使用等价量代换法容易出错, 因此还是建议详细写出为妥:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin 3x}{\ln(1-x)} = \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin 3x}{3x} \cdot \frac{-x}{\ln(1-x)} \cdot \frac{3x}{-x} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{3x}{-x} = -3.$$

即是将原来的函数表达式变成了 3 个因子的乘积, 在它们的极限分别存在的前提下, 就可以变成三个因子的极限的乘积. 由于前两个因子中的分子与分母为等价量, 它们的极限都是 1, 这样就知道答案就是由第 3 个因子的极限决定的 -3.

例 2　求 $I = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$.　(这也是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式.)

解　用等价量代换法,

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{2 \sin^2 \dfrac{x}{2}}{4 \left(\dfrac{x}{2} \right)^2} = \frac{1}{2} \lim_{x \to 0} \left(\frac{\sin \dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}} \right)^2 = \frac{1}{2}. \quad \square$$

注　公式

$$1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}\ (x \to 0)$$

也是经常有用的.

例 3　求 $I = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{x^5 - 2x^3 + x}{3x^5 - 3x - 2}$.　(这是 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型的不定式.)

解 1 用第二章中的方法, 分子分母同除以 x^5, 就有

$$I=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\dfrac{2}{x^2}+\dfrac{1}{x^4}}{3-\dfrac{3}{x^4}-\dfrac{2}{x^5}}=\frac{1}{3}.\quad\square$$

解 2 用等价量方法,

$$I=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\frac{x^5-2x^3+x}{x^5}\right)\cdot\left(\frac{3x^5}{3x^5-3x-2}\right)\cdot\frac{1}{3}\right]=\frac{1}{3}.\quad\square$$

例 4　求 $I=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\sin x-\sin a}{x-a}$.　(这是 $\dfrac{0}{0}$ 型的不定式.)

解　用等价量代换法,

$$I=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\dfrac{x-a}{2}\cos\dfrac{x+a}{2}}{2\cdot\left(\dfrac{x-a}{2}\right)}=\lim_{x\to a}\left[\left(\frac{\sin\dfrac{x-a}{2}}{\dfrac{x-a}{2}}\right)\cdot\cos\frac{x+a}{2}\right]=\cos a\quad\square.$$

例 5　求 $I=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln|x+h|-\ln|x|}{h}$, 其中 $x\neq 0$.　(这是 $\dfrac{0}{0}$ 型不定式.)

解　用等价量代换法,

$$I=\lim_{h\to 0}\frac{\ln\left|\dfrac{x+h}{x}\right|}{h}=\lim_{h\to 0}\left(\frac{\ln\left|1+\dfrac{h}{x}\right|}{\dfrac{h}{x}}\right)\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}.$$

这里要作些解释, 其中 h 是自变量, 由于 $h\to 0$, 因此当 $|h|$ 充分小时, $\left|1+\dfrac{h}{x}\right|$ 的绝对值号可以去掉, 从而可以利用 $\ln(1+t)\sim t\ (t\to 0)$.　$\square$

最后, 要提请同学注意, 等价量代换法不能滥用, 否则极易导致错误. 特别是不能在求和式 $u+v$ 的极限中随意将 u 或 v 换为等价量. 对于教科书 p.88 从第 2 行开始的说明要仔细阅读. 为此补充以下例题, 类似的错误经常发生, 请同学一定要注意. 为此补充一个例子.

补充例　在

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^3+x)-x}{x^3}=1.$$

中, 若利用等价关系

$$x^3+x\sim x\ (x\to 0),$$

而将分子中第一项 (x^3+x) 用等价量 x 替换, 则就有

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-x}{x^3}=0.$$

此外还应注意, 等价量也不能随意作其他运算. 例如, 不能从 $\sin x \sim x\ (x \to 0)$ 得出 $\sin x - x \sim 0\ (x \to 0)$, 也不能从 $1+x \sim 1\ (x \to 0)$ 得出 $(1+x)^{\frac{1}{x}} \sim 1\ (x \to 0)$, 这些都是明显的错误.

五. 记号 $o(\nu)$ 和 $O(\nu)$

这是对记号 $o(1), O(1)$ 的推广.

定义 记号 $o(v) = o(1)v$, $O(v) = O(1)v$, 也就是

$$u = o(v) \Longleftrightarrow \frac{u}{v} = o(1),$$

$$u = O(v) \Longleftrightarrow \frac{u}{v} = O(1).$$

又在 $u = o(v)$ 时记为

$$|u| \ll |v|, \text{ 或 } |v| \gg |u|.$$

称为 u 远远小于 v, 或 v 远远大于 u. 当然这都是相对于某种极限过程而言的.

这方面的重要例子如下.

例 1 设 $a > 1$, $\varepsilon > 0$, 则有

$$n^n \gg n! \gg a^n \gg n^\varepsilon \gg \ln n.$$

证 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n!}{n^n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a^n}{n!} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^\varepsilon}{a^n}$ 均见教科书 p.20 的练习题 $4, 5, 1$. 最后一个 $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln n}{n^\varepsilon}$ 当 $\varepsilon = 1$ 时即是该处的练习题 3. 对于一般的 $\varepsilon > 0$ 可从

$$\frac{\ln n}{n^\varepsilon} = \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{\ln n^\varepsilon}{n^\varepsilon} = o(1)$$

得到. □

将例 1 中的部分结果转移到函数极限上就有

例 2 设 $a > 1$, $\varepsilon > 0$, 则有

$$a^x \gg x^\varepsilon \gg \ln x\ (x \to +\infty),$$

此外还有

$$\frac{1}{x^\varepsilon} \gg |\ln x|\ (x \to 0^+).$$

注意这最后一式中两边都是无穷大量, 它们的证明均作为下一小节中的练习题.

请同学注意, 以上两个例子中的结果都是今后的基本常识, 经常有用. 这里特地将对数函数 $\ln x$ 的几个重要极限关系列举如下:

$$\ln x \sim x - 1\ (x \to 1), \text{ 也就是 } \ln(1+x) \sim x\ (x \to 0),$$

$$\ln x \ll x^\varepsilon\ \forall \varepsilon > 0\ (x \to +\infty),$$

$$\ln x \ll \frac{1}{x^\varepsilon}\ \forall \varepsilon > 0\ (x \to 0^+).$$

对于后两个关系也可以记住以下形式:

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\varepsilon}}=0;$$

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \lim_{x\to+\infty}x^{\varepsilon}\ln x=0.$$

这里应当与 $x>0$ 时的正指数幂函数 x^{ε} 和负指数幂函数 $\dfrac{1}{x^{\varepsilon}}$ 的图像联系起来理解它们的意义. 又可以说成为: 对数函数 $\ln x$ 当 $x\to+\infty$ 和 $x\to 0^{+}$ 时都是无穷大量, 但是都远远小于在这两种情况时相应的幂函数所形成的无穷大量. .

七. 进一步的例子

再举几个例子.

例 6 设 $\alpha\neq 0$, 求 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}$.

解 对于 α 为正整数的情况只要用二项式展开定理即可得到. 以下讨论一般情况.

作变量代换

$$y=(1+x)^{\alpha}-1,$$

则 $(1+y)=(1+x)^{\alpha}$, $\ln(1+y)=\alpha\ln(1+x)$, 且 $x\to 0\Longleftrightarrow y\to 0$, 因此有

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}&=\lim_{x\to 0}\frac{y}{x}\\&=\lim_{x\to 0}\left(\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\frac{\ln(1+x)}{x}\cdot\alpha\right)\\&=\alpha\cdot\lim_{y\to 0}\frac{y}{\ln(1+y)}\cdot\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}\\&=\alpha.\end{aligned}$$

当然这里又用了复合函数的极限. 从 $(1+y)=(1+x)^{\alpha}$ 可见当 $x\neq 0$ 时总有 $y\neq 0$, 因此用变量代换是合法的. □

注 这样就有

$$(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x\ (x\to 0).$$

由于其中只要求 $\alpha\neq 0$, 因此这个等价关系实际上包含了许多具体的结果. 特别取 $\alpha=1/2$, 就有

$$\sqrt{1+x}-1\sim\frac{x}{2}\ (x\to 0).$$

这就是教科书 p.67 的例 3. 那里虽然没有作严格证明, 但介绍了如何利用这个结果于平方根的近似计算. 当时课上没有讲, 请同学回过去再仔细读一遍.

下面是类型为 $\lim u^v$ 的一个例子.

例 7 求 $I = \lim\limits_{x \to 0} (\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}}$.

解 将问题改写为求

$$I = \lim_{x \to 0} \mathrm{e}^{\frac{\ln \cos x}{1-\cos x}},$$

利用指数函数的连续性, 可计算如下:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\ln \cos x}{1 - \cos x} = -\lim_{\cos x \to 1} \frac{\ln \cos x}{\cos x - 1} = -1.$$

这里利用了 $\ln y \sim y - 1 \ (y \to 1)$. 于是得到 $I = \mathrm{e}^{-1}$. □

解 2 也可以利用前面的两个重要极限中的第二个, 即 $(1+x)^{\frac{1}{x}} \to \mathrm{e} \ (x \to 0)$ 来做:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x \to 0} [1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{1-\cos x}} \\ &= \lim_{x \to 0} \left([1 + (\cos x - 1)]^{\frac{1}{\cos x - 1}} \right)^{-1} \\ &= \mathrm{e}^{-1}. \end{aligned}$$

这里实际上作了变量代换 $y = \cos x - 1$ 和 $x \to 0 \Longleftrightarrow y \to 0$. □

注 解 2 的方法是常见的, 但只有当 u^v 种的 u 以 1 为极限时才能使用.

例 8 求 $I = \lim\limits_{n \to \infty} [1 + \dfrac{1}{n} + o(\dfrac{1}{n})]^n$.

解 写为

$$I = \lim_{n \to \infty} \mathrm{e}^{n \ln(1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n}))},$$

然后计算指数的极限:

$$\lim_{n \to \infty} n \ln[1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})] = \frac{\ln[1 + \frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})]}{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})} \cdot \frac{\frac{1}{n} + o(\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}} = 1.$$

可见 $I = \mathrm{e}$. □

最后对于 $\lim u^v$ 做一个一般性的讨论. 采取前面同样的方法, 并利用指数函数的连续性, 就有

$$\lim u^v = \lim \mathrm{e}^{v \ln u} = \mathrm{e}^{\lim(v \ln u)}.$$

可见问题只在于求

$$\lim(v \ln u).$$

注意这里可能出现 $0\cdot\infty$ 型的不定式. 经过分析可知这有 3 种可能: (1) $u\to 0^+$, $v\to 0$; (2) $u\to+\infty$, $v\to 0$; (3) $u\to 1$, $v\to\infty$. 它们分别称为

$$0^0\text{ 型},\quad \infty^0\text{ 型},\quad 1^\infty\text{ 型}$$

的不定式. 与以前已经说过的 4 种不定式, 即是

$$\infty-\infty\text{ 型},\quad \frac{0}{0}\text{ 型},\quad \frac{\infty}{\infty}\text{ 型},\quad 0\cdot\infty\text{ 型}$$

不定式一起, 就得到了数列极限和函数极限中的 7 种不定式.

下面是三种新的不定式的一些例子.

0^0 型不定式:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}},\ \lim_{x\to 0}x^x.$$

∞^0 型不定式:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n},\ \lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}},\ \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!},\ \lim_{x\to+\infty}x^{\frac{1}{x}}.$$

1^∞ 型不定式:

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\ \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}},\ \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x,\ \lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{1-\cos x}}.$$

注 注意在 ∞^0 型的不定式中,

$$\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}$$

与 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$ 非常相似, 但与极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$ 没有关系.

第 14 次讲稿

第 14 次讲稿, 用于 2007 年 11 月 5 日, 星期一, 3 节课.

内容是开始第五章 连续函数和单调函数, 讲 §5.1 区间上的连续函数. 其中含: 一. 左右连续性, 三. 连续函数的四则运算, 五. 连续函数的复合运算.

第五章　连续函数和单调函数

§5.1 区间上的连续函数

在第四章中, 教科书的 p.70 上, 已经给出了函数在某一点连续的定义, 还给出了在开区间上的连续函数的定义, 就是在这个开区间上处处连续的函数. 此外, 在讲了 Heine 归结原理后我们又补充了连续性的第二定义. 这些就是我们的出发点.

此外, 还有一些可以从第四章的结果直接得到的连续函数的性质, 这就是下面的定理, 它是函数极限中的相应定理的推广, 证明从略.

连续函数的局部有界性定理和保号性定理　设 f 在点 x_0 连续,

(1) 存在 $\delta > 0$, 使得 f 在邻域 $O_\delta(x_0)$ 上有界.

(2) 又若 $f(x_0) > 0$, 则存在 $\delta > 0$, 使得 f 在邻域 $O_\delta(x_0)$ 上处处大于 0.

总的来说, 这一节只是补充一些定义, 介绍连续函数的基本运算和局部性质, 并举一些例子, 学起来并不困难. 只是在这一节的最后有一个例子很不平常, 比较困难, 因此我们改变一下讲课的顺序, 先讲这个例子.

这就是教科书 p.99 开始的例 10. 其中的函数定义本身就是非常特别的, 但与前面已经看到的 Dirichlet 函数 (教科书 p.56 的例 5) 有类似之处.

例 10　Riemann 函数的定义为[①]:

$$R(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{q}, & x = \dfrac{p}{q}\ (p, q \in \mathbb{Z}, q > 0, p, q \text{ 互素}), \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

求出 $R(x)$ 的所有不连续点.

分析　取定一个点 x_0, 由于 $R(x)$ 在每个无理点处取 0 值, 对每个正整数 n, 可以在去心邻域 $0 < |x - x_0| < \dfrac{1}{n}$ 中取一个无理点 x_n, 这样得到的数列 $\{x_n\}$ 满足 Heine 归结原理中的条件, 但 $f(x_n) \equiv 0\,\forall\, n$. 由此知道, 若存在极限 $\lim\limits_{x \to x_0} R(x)$, 则这个极限只能为 0. 这样就已经证明了 $R(x)$ 在每个有理点处不连续. 但为了知道 $R(x)$ 在无理点处是否连续, 则还需要做进一步的研究.

---

① 对于点 $x = 0$, 写出 $0 = \dfrac{0}{1}$, 因此定义 $R(0) = 1$.

在 x_0 为无理点的情况, $R(x_0)=0$. 这时是否成立 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=R(x_0)=0$? 这取决于对于每个给定的 $\varepsilon>0$, 当 $|x-x_0|$ 充分小时是否能够成立

$$|R(x)-R(x_0)|=|R(x)-0|=R(x)<\varepsilon.$$

当然这里只需考虑 x 为有理数的情况. 于是问题就变成对于 $x=\dfrac{p}{q}$, 其中 p,q 为互素的整数且 $q>0$ 时, 是否成立

$$R(\frac{p}{q})=\frac{1}{q}<\varepsilon.$$

这似乎也很难研究. 用反向思维方法, 我们问: 什么情况下它不成立? 这就是

$$\frac{1}{q}\geqslant\varepsilon \Longleftrightarrow q\leqslant\frac{1}{\varepsilon}.$$

由此可见, 会引起麻烦的分数 $\dfrac{p}{q}$ 的分母 q 是受到限制的, 即只能是

$$q\in\{1,2,\cdots,[\frac{1}{\varepsilon}]\}.$$

此外, 对于函数 $R(x)$ 在点 x_0 的极限来说, 可以一开始就将问题限制到 x_0 的一个去心邻域中去研究. 例如 $0<|x-x_0|<1$. 在这个范围内分母不超过 $[\dfrac{1}{\varepsilon}]$ 的分数 $\dfrac{p}{q}$ 的个数是有限的. 于是若取 $\delta>0$ 充分小, 就可以避开所有这些点, 从而使得在 $0<|x-x_0|<\delta$ 内的每个点满足 $|R(x)|<\varepsilon$. 这样就知道 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$. 还要看到, 以上分析与点 x_0 是有理数还是无理数是没有关系的.

现在写出正式的证明, 但与书上不一样. 那里的方法更不容易想出来, 请自学.

证 下面我们证明对每个 $x_0\in\mathbb{R}$, 都成立 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x)=0$, 从而就知道 Riemann 函数的所有不连续点恰好就是有理点全体.

在点 x_0 的半径为 1 的去心邻域

$$O_1(x_0)-\{x_0\}=(x_0-1,x_0)\cup(x_0,x_0+1)$$

中, 对于给定的 $\varepsilon>0$, 分母 q 满足条件

$$0<q\leqslant\frac{1}{\varepsilon}$$

的分数 $\dfrac{p}{q}$ 只有有限多个, 将它们全体记为

$$x_1,x_2,\cdots,x_l.$$

取

$$\delta=\min\{1,|x_1-x_0|,|x_2-x_0|,\cdots,|x_l-x_0|\}>0,$$

则当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时, 若 $x\in\mathbb{Q}$, 则 $x=\dfrac{p}{q}$ 中的分母 q 满足

$$q\geqslant[\frac{1}{\varepsilon}]+1>\frac{1}{\varepsilon},$$

从而成立

$$|R(x)-0| = R(x) = \frac{1}{q} < \varepsilon.$$

对于 $x \notin \mathbb{Q}$, 因 $R(x)=0$, 这当然也成立. 因此成立 $\lim\limits_{x\to x_0} R(x) = 0$. □

最后出几个思考题:

思考题 1　证明 Dirichlet 函数处处不连续.

思考题 2　给定 n 个点 $x_1 < x_2 < \cdots < x_n$, 构造一个在 $(-\infty, +\infty)$ 上有定义的函数, 使得它在点 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 处连续, 而在其他所有点上都不连续. (建议先解决 $n=1$ 的情况.)

下面按照书上的顺序讲.

一. 左右连续性

为了给出一般区间上的连续函数的定义, 必须给出单侧连续的定义.

定义　称函数 f 在点 x_0 左 (右) 连续, 若有

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \quad (\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)),$$

也就是

$$f(x_0^-) = f(x_0) \quad (f(x_0^+) = f(x_0)).$$

注　注意在写出 $f(x_0^-) = f(x_0)$ 时已经隐含存在 $\delta > 0$, 使得 f 在区间 $(x_0-\delta, x_0]$ 上有定义. 对于 $f(x_0^+) = f(x_0)$ 也作相应的理解.

定理 1　函数 f 在点 x_0 连续的充分必要条件是

$$f(x_0^-) = f(x_0) = f(x_0^+).$$

证　利用 f 在点 x_0 的极限存在的充分必要条件是 f 在点 x_0 的两个单侧极限存在且相等即得 (见教科书 p.74 上 §4.2 的定理 1). □

下面几个例子可以请同学一起看书.

例 1　设函数

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{2x}, & x < 0, \\ A, & x = 0, \\ (1+ax)^{\frac{1}{x}}, & x > 0, \end{cases}$$

问: 其中的 a 和 A 应当如何取才保证 f 在点 0 处连续.

(答案: 从 $f(0^-) = f(0)$ 可见 $A = 1/2$. 再从 $f(0^+) = \mathrm{e}^a = 1/2$ 可见 $a = -\ln 2$.)

例 2　设函数

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ A, & x = 0, \\ 0, & x < 0, \end{cases}$$

问: A 为何值时可使 f 在 $x=0$ 处 (1) 右连续, (2) 左连续, (3) 连续 (见教科书 p.94 上的图 5.1).

(答案: (1) $A=1$ 时右连续, (2) $A=0$ 时左连续, (3) 不可能.)

例 3 设 $f(x)=[x]$, 即取最大整数函数, n 为整数, 确定 f 在点 $x=n$ 处的连续性 (见教科书 p.57 上的图 3.8).

(答案: 对于 $n \leqslant x < n+1$, 有 $[x]=n$, 即取常值, 可见 $f(x)=[x]$ 在点 $x=n$ 处右连续. 对于 $n-1 \leqslant x < n$, 有 $[x]=n-1$, 也取常值, 因此 $[n^-]=n-1$, 可见左侧不连续.)

现在给出区间上连续函数的定义. 前面已经给出了开区间上连续函数的定义就是在开区间的每个点处连续. 对于有端点的区间上的连续函数, 还要求在端点处满足相应的单侧连续性. 下面只对于在 $[a,b]$ 上的函数, 给出以下定义. 对于其他区间上连续函数的定义可以类推.

定义 称 f 是在 $[a,b]$ 上有定义, 若 f 在每个点 $x \in (a,b)$ 处连续, 又在端点 a 处右连续, 在端点 b 处左连续, 则称 f 是在 $[a,b]$ 上的连续函数, 或 f 在 $[a,b]$ 上连续, 记为 $f \in C[a,b]$.

注 记号 $C[a,b]$ 的定义是在闭区间 $[a,b]$ 上的所有连续函数的集合. 一般地, 若区间为 I, 则用记号 $C(I)$ 表示在区间 I 上的所有连续函数的集合.

在第四章中已经证明常值函数, $\sin x$, $\cos x$, a^x $(a>0)$ 都是在 $\mathbb{R}=(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数, 又证明了 $\log_a x$ $(a>0, a\neq 1)$ 和 x^α 都是在 $(0,+\infty)$ 上的连续函数. 此外, 多项式也是在 $\mathbb{R}$ 上的连续函数 (见教科书 p.78 的四. 练习题 2).

例 4 证明: 当 $\alpha>0$ 时幂函数 $x^\alpha \in C[0,+\infty)$.

(只要再证明函数在 $x=0$ 右连续即可.)

例 5 证明: $\sqrt{x(1-x)} \in C[0,1]$.

三. 连续函数的四则运算

这里主要请同学自学, 课上只指出以下几点.

1. 从 $f \in C(I)$ 推出 $|f| \in C(I)$ 是用三点不等式得到的.

2. 从 $f, g \in C(I)$ 推出 $\min\{f,g\}, \min\{f,g\} \in C(I)$ 有两种证明方法, 第一种方法是按照对每个自变量 x 取 $f(x), g(x)$ 的最大值和最小值作出直接证明, 第二种方法是利用教科书 p.11 上第 4,5 行的两个公式.

3. 从 $|f| \in C(I)$ 一般不能推出 $f \in C(I)$. 这就是教科书 p.97 上的例 8, 其中举了一个极端例子, 即 $|f|$ 处处连续, 但 f 却处处不连续.

五. 连续函数的复合运算

定理 3 设 $y=g(x)$ 在点 x_0 连续, $f(y)$ 在点 $y_0=g(x_0)$ 连续, 则 $f(g(x))$ 在点 x_0 连续.

证 利用第四章中关于复合函数的极限中的结果, 从条件 $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=g(x_0)=y_0$, 就有

$$\lim_{x\to x_0} f(g(x))=\lim_{y\to y_0} f(y).$$

由于右边就是 $f(y_0)=f(g(x_0))$, 因此 $f\circ g$ 于 x_0 连续. □

注 直接用连续性的定义来证明也不难, 请同学作为练习题写一下.

还有, 就是初等函数的连续性问题在此得到解决. 书上讲了, 但没有列为定理, 这不妥当.

注 这里应当先回顾教科书 p.55 上对于基本初等函数和初等函数的定义.

定理 (**初等函数的连续性定理**) 初等函数在其自然定义域上处处连续.

证 这里的基础是所有基本初等函数在其自然定义域上处处连续, 而初等函数的定义是对基本初等函数用有限次四则运算和复合运算得到的函数, 因此用前面的结果就可以得到. □

注 1 取绝对值的运算可以看成是平方后再开方, 因此若 f 为初等函数, 则 $|f|$ 也是初等函数. 又从 max 和 min 的两个运算公式可知, 当 f, g 是初等函数时, $\max\{f,g\}$ 和 $\min\{f,g\}$ 也是初等函数.

注 2 由此定理可知, 初等函数的间断点一定是它没有定义的点. 例如 $\tan x$ 等就是如此.

注 3 由此可见, 教科书 pp.56–57 介绍的 6 个函数中前 4 个都是非初等函数. 后两个函数是否是初等函数请同学思考. 此外, 前面已经讲的 Riemann 函数也是非初等函数.

六. 不连续点

定义 若函数 f 在点 x_0 处不连续, 则称 x_0 为 f 的不连续点, 或间断点.

问题是如何对不连续点 (即间断点) 进行分类.

前提是 f 至少在点 x_0 的一个去心邻域中有定义, 但是允许 f 在点 x_0 处没有定义①.

总的来说是分两类.

---

① 这是一个明智的做法. 例如, 这样我们就可以说正切函数 $y=\tan x$ 等有间断点. 否则, 按照下面的初等函数在其有定义处均连续的定理, 初等函数就没有任何间断点了.

第一类不连续点 (或第一类间断点): 若在点 x_0 处存在两个 (有限的) 单侧极限, 但

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

不成立.

进一步细分, 则第一类不连续点中有一种称为可去不连续点 (或可去间断点), 即满足条件

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) \neq f(x_0),$$

其中包括 $f(x_0)$ 没有定义的情况在内. 这也就是说存在有限极限 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$, 但它不等于 $f(x_0)$, 或者 f 在点 x_0 根本没有定义.

这里“可去”的意思是清楚的, 即对 f 在点 x_0 重新定义 (若原来就有定义), 或者补充定义 (若原来没有定义), 就可以使得这样修改后的函数在点 x_0 连续. 这就是教科书 p.100 上的连续延拓原理.

连续延拓原理 设 x_0 是函数 f 的可去间断点, 则可以定义一个新的函数

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq x_0, \\ A = \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ (= \lim\limits_{x\to x_0^\pm} f(x)), & \end{cases}$$

则 $\widetilde{f}$ 在点 x_0 连续.

另一种第一类不连续点满足条件

$$f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$$

称为跳跃点. 又称

$$\delta_{x_0} = f(x_0^+) - f(x_0^-)$$

为跳跃度. (也有称 $|f(x_0^+) - f(x_0^-)|$ 为跳跃度的.)

第二类不连续点 (或第二类间断点): 两个单侧极限 $f(x_0^-)$ 和 $f(x_0^+)$ 中至少有一个不存在, 其中包括无穷大在内.

下面可请同学一起看 p.99 上的例 9, 其中有 4 个函数, 要求判断指定点的类型. 然后请当场回答其中所提的问题.

其中第一个函数 $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ 在 $x = 0$ 没有定义, 但有可去间断点, 若按照连续延拓原理中的做法, 即将定义域扩大到包含 $x = 0$, 并补充定义该点的函数值为 1, 则就得到了一个处处连续的函数:

$$\widetilde{f}(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & x \neq 0, \\ 1, & x = 0. \end{cases}$$

注 在教科书 p.100 末还对于区间端点提出了间断点的概念和分类. 在 p.101 的七. 练习题 4 中还提出了无穷型间断点, 又称为奇点.

第 15 次讲稿

第 15 次讲稿, 用于 2007 年 11 月 7 日, 星期三, 2 节课.

内容是第五章 连续函数和单调函数, §5.2 区间上连续函数的基本性质. 这次只讲其中的第一小节: 一. 零点存在定理.

§5.2 区间上连续函数的基本性质

如果说上一节中所说的连续函数的各种性质都具有局部性, 则这一节介绍的连续函数性质就是所谓的整体性质, 或者说是一种大范围性质.

这种性质实际上已经见到过. 这就是区间上定义的函数的有界性.

例如, 考虑在区间 $(0,1)$ 上定义的函数

$$y = \frac{1}{x},$$

它在每一点 $x_0 \in (0,1]$ 处连续, 因此$\exists\, \delta > 0, \exists\, M > 0, \forall\, x \in O_\delta(x_0)$, 成立 $|\frac{1}{x}| \leqslant M$.

然而, 这个函数在 $(0,1]$ 上显然是无界的. 还可以看到, 对每个正整数 $n \geqslant 2$, $y = \frac{1}{x}$ 在区间 $[\frac{1}{n}, 1]$ 总是有界的, 即有 $0 < \frac{1}{x} \leqslant n$. 可见, 说一个函数有界时, 必须说明是在什么区间上考虑, 而且不能从局部有界性推出在一个区间上有界.

下面我们逐个介绍区间上连续函数的几个重要性质.

一. 零点存在定理

设函数 $y = f(x)$ 在区间 I 上有定义, 若某个点 x_0 使得 $f(x_0) = 0$, 则称 x_0 是函数 f 的零点, 也称 x_0 是方程

$$f(x) = 0$$

的根.

如何判定一个方程有根一直是一个重要问题. 在中国古代数学中广泛使用一条原理的正是下面要介绍的零点存在定理.

连续函数零点存在定理 有界闭区间上的连续函数, 若在区间的两个端点处的函数值异号, 则一定在此区间中有根.

注 该定理也可用数学语言写出如下:

$$\text{设 } f \in C[a,b], f(a)f(b) \leqslant 0, \text{ 则 } \exists\, x_0 \in [a,b], \text{ 使得 } f(x_0) = 0.)$$

这个定理有极其明显的几何意义, 然而并非容易给出严格的数学证明. 下面我们用实数系基本定理中的闭区间套定理和确界存在定理写出两个证明.

证 1 (**用闭区间套定理为工具, 并用** Bolzano **二分法构造闭区间套**) 若条件 $f(a)f(b) \leqslant 0$ 中成立等号, 则结论已经成立. 因此以下只需在 $f(a)f(b) < 0$ 的条件下进行证明.

记 $\Delta_1 = [a_1, b_1]$, 其中 $a_1 = a, b_1 = b$, 考虑用它的中点分成的两个等长度的闭子区间 $[a, \dfrac{a+b}{2}]$ 和 $[\dfrac{a+b}{2}, b]$. 若恰好有 $f(\dfrac{a+b}{2}) = 0$, 则不必再做下去. 否则, 在这两个闭子区间中一定有一个使得函数 f 在其两端异号, 就取它为 Δ_2. 这时 $|\Delta_2| = \dfrac{1}{2}|\Delta_1|$.

然后取 Δ_2 的中点, 继续进行下去, 这时有两种可能性. 一种可能性时做了有限次后, 已经找到了 f 的零点, 于是就可以结束. 另一种可能性就是将上面的二分法过程做无限次, 归纳地得到长度趋于 0 的闭区间套 $\{\Delta_n\}$, 其中记 $\Delta_n = [a_n, b_n]$. 这个闭区间套的特征是对每个 n, 成立

$$f(a_n)f(b_n) < 0. \tag{$*$}$$

根据闭区间套定理, 存在 $\xi \in [a_n, b_n] \forall n$, 而且有

$$a_n \uparrow \xi, \quad b_n \downarrow \xi.$$

在不等式 $(*)$ 中令 $n \to \infty$, 并利用 f 在点 ξ 连续, 就得到①

$$f^2(\xi) \leqslant 0,$$

因此只能是 $f(\xi) = 0$. $\square$

注 教科书上 p.103 的证明中将函数在区间两端的函数值乘积非正称为“异号”, 从而可以不管 f 是否会在某一次的二分过程中恰好在二分点处为 0, 这样证明就可以写得比较短. 这是其优点, 但不自然, 明明已经得到了零点, 何必再做下去? 所以这又可看成是缺点. 因此上面的证明不如此写.

注 2 上述证明可以用于实际中求解方程 $f(x) = 0$, 如果能够确定 f 在某一个闭区间 $[a, b]$ 两端异号的话. 因此我们称之为“构造性证明”. 与此相反, 数学证明中另一类证明往往称为“纯粹存在性的证明”, 它只证明存在性, 但其中的方法难以实际使用. 下面的第二个证明就是如此. 实际上它也有明显的几何意义.

证 2 (**用确界存在定理为工具, 用** Lebesque **方法构造数集和确界**)

只需讨论 $f(a)f(b) < 0$ 的情况, 并不妨设 $f(a) > 0, f(b) < 0$.

定义数集

$$F = \{x \in [a, b] \mid f(x) > 0\}.$$

① 以下的做法虽然正确, 但只是一种技巧. 问题的本质还是在于 f 在点 ξ 处大于 0 或小于 0 的话, 都会从保号性定理引出与 $(*)$ 矛盾的结论.

由于 $f(a)>0$, 因此 $a\in F$, 即 F 为非空数集. (请初学者注意这是用确界定理前的必要一步.)

从 F 的定义可见它有上界 b, 因此根据确界存在定理, 存在

$$\xi=\sup F<b.$$

利用教科书 p.18 上关于确界与数列之间联系的一个定理, 存在数列 $\{x_n\}\subset F$, 使得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\xi$. 根据数集 F 的定义, 对每个 n 成立不等式

$$f(x_n)>0.$$

令 $n\to\infty$, 并利用 f 在点 ξ 处连续, 就得到

$$f(\xi)\geqslant 0.$$

最后只需要证明 $f(\xi)>0$ 是不可能的.

用反证法 (注意这种"局部"反证法在数学证明中是经常使用的). 若 $f(\xi)>0$, 则从连续函数的保号性定理, 存在 $\delta>0$, 使得 f 在邻域 $O_\delta(\xi)$ 上处处大于 0. (当然 $O_\delta(\xi)\subset[a,b]$.) 于是有

$$f(\xi+\frac{\delta}{2})>0,$$

这表明有

$$\xi+\frac{\delta}{2}\in F,$$

因此与 $\xi=\sup F$ 矛盾. 这就证明了只能有 $f(\xi)=0$. $\square$

注 在推出 $f(\xi)\geqslant 0$ 时用了确界与数列之间联系的一个定理, 这并非必要. 代替的办法是如同后面否定 $f(\xi)>0$ 的证明类似地独立证明$f(\xi)<0$ 也是不可能的. 这里写出如下.

设 $f(\xi)<0$ 成立. 则从连续函数的保号性定理, 存在 $\eta>0$, 使得 f 在邻域 $O_\eta(\xi)$ 内处处小于 0. 于是 ξ 不是数集 F 的最小上界, 引出矛盾.

零点存在定理中包含了两个条件: (1) f 在 $[a,b]$ 上连续, (2) $f(a)f(b)\leqslant 0$. 容易看到, 它们都是缺一不可的条件.

但另一方面, 定理还可以推广. 这就是教科书 p.103 底下的例 2.

例 2 (**零点存在定理的一个推广**) 设 $f\in C[a,+\infty)$, $f(a)f(+\infty)<0$ 证明: f 在 $[a,+\infty)$ 中一定有零点.

证 由于

$$f(a)f(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}f(a)f(x)<0,$$

因此存在 $M>a$, 使得 $f(a)f(M)<0$, 在有界闭区间 $[a,M]$ 上用零点存在定理即可. $\square$

证 2 (**只用极限定义的证明**) 不妨假设 $f(a)<0$, $f(+\infty)=A>0$. 则对于 $\varepsilon=A$, $\exists M>a, \forall x \geqslant M$, 成立 $|f(x)-A|<A$. 这就是

$$-A<f(x)-A<A,$$

因此 $f(M)>0$. 然后在 $[a,M]$ 上用零点存在定理.

注 条件 $f(a)f(+\infty)<0$ 不能减弱为 $f(a)f(+\infty)\leqslant 0$, 否则结论未必成立, 例如 $y=\mathrm{e}^{-x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上就是如此.

例 3 设 f 在 $[a,b]$ 上是严格单调减少的连续函数, (1) 问方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中有几个根; (2) 设参数 $k>0$, 问方程 $f(x)=kx$ 在 $[a,b]$ 中有几个根.

证 (1) 若 $f(a)f(b)\leqslant 0$, 则根据零点存在定理, $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中一定有根. 但从 f 的严格单调性, 对于不同的两个自变量, f 不可能同时等于 0, 因此方程 $f(x)=0$ 在 $[a,b]$ 中不可能有一个以上的根.

若 $f(a)f(b)>0$, 则或者有 $f(a)>f(b)>0$, 这时 $\forall x\in[a,b]$ 有 $f(a)\geqslant f(x)\geqslant f(b)>0$, 或者有 $0>f(a)>f(b)$, 这时 $\forall x\in[a,b]$ 有 $0>f(a)\geqslant f(x)\geqslant f(b)$, 因此 f 在 $[a,b]$ 中都不可能有零点.

(2) 作辅助函数

$$F(x)=f(x)-kx,$$

则 F 的零点就是方程 $f(x)=kx$ 的根. 由于我们规定了参数 $k>0$, 因此函数 F 在 $[a,b]$ 上也是严格单调减少函数, 对于 F 用已经在 (1) 中证明的结论, 可见答案也是相同的, 即方程 $f(x)=kx$ 在 $[a,b]$ 中或者没有根, 或者只有一个根. $\square$

注 还可以求出使方程有根的参数 k 的范围, 这就是要同时成立

$$F(a)=f(a)-ka\geqslant 0, \quad F(b)=f(b)-kb\leqslant 0,$$

因此得到所求的范围为同时满足条件

$$ka\leqslant f(a), \quad kb\geqslant f(b).$$

由于 $k>0$, 因此以上的条件不一定有解. 例如 $b<0, f(b)>0$, 或者 $a>0, f(a)<0$ 时就是如此.

思考题 若将例题中的条件 $k>0$ 换为 $k<0$ 会有什么样的结论.

(答案是任何可能性都存在.)

下面是与零点存在定理有密切联系而实际上是等价的一个定理. 教科书将它放在下一小节中, 而且叙述的形式不独立, 因此作了改动.

定理 2 (**连续函数的介值定理**) 区间上的连续函数的值域一定也是区间.

证 设 $f \in C(I)$, 其中 I 是一个区间 (可以是任何一种区间), 为了证明值域 $\mathscr{R}(f)$ 是区间, 只要证明 $\forall\, A, B \in \mathscr{R}(I)$, 且 $A \neq B$, $\forall\, y \in (A, B)$(这里允许 $A > B$), $\exists\, x \in I$, 使得 $f(x) = y$.

从 A, B 为值域 $\mathscr{R}(f)$ 中的两个不同点知道, 存在 $x', x'' \in I$, 使得 $f(x') = A, f(x'') = B$, 且 $x' \neq x''$.

不妨假定 $x' < x''$. 对于给定的 $y \in (A, B)$, 定义辅助函数

$$F(x) = f(x) - y.$$

则 F 也是 I 上的连续函数, 而且 $F(x') = A - y$ 与 $F(x'') = B - y$ 异号, 因此根据零点存在定理, 在 (x', x'') 中方程 $F(x) = 0$ 有根, 也就是 $y \in \mathscr{R}(f)$. $\square$

注 在叙述介值定理时出现的两个区间可以是任何一种有界区间或者无界区间, 包括退化为一个点的区间. 当然, 若函数的定义区间为一点, 则其值域也只能是一点. 一般而言, 值域为一点的情况就是常值函数的值域.

第 16 次讲稿

第 16 次讲稿, 用于 2007 年 11 月 12 日, 星期一, 3 节课.

内容是第五章 连续函数和单调函数, §5.2 区间上连续函数的基本性质. 这次讲其中的第二、三小节: 二. 值域定理, 三. 一致连续性. 但一致连续性只是开一个头, 主要内容在下一次讲, 否则难度太大.

二. 值域定理

在上次的介值定理告诉我们, 区间上连续函数的值域一定是区间. 这里的区间可以是任何一种类型, 包括退化成一个点的情况在内. 下面的值域定理则对其中的一种情况给出了非常明确的结论, 它是连续函数的最重要的定理之一.

值域定理 有界闭区间上的连续函数的值域一定是有界闭区间. 换言之, 设 $f \in C[a,b]$, 则

$$f([a,b]) = \mathscr{R}(f) = [m, M],$$

其中 m, M 分别是函数 f 在 $[a,b]$ 上的最小值和最大值.

教科书上给出了一个很简短的证明, 但不是很容易掌握的. 我们打算将值域定理分解为几个部分, 也就是几个定理, 并分别进行证明. 它们的关系如下:

$$\text{值域定理} \iff \begin{cases} \text{有界性定理} \\ \text{最值定理} \\ \text{介值定理} \iff \text{零点存在定理} \end{cases}$$

连续函数的有界性定理①

证 (用凝聚定理证明连续函数的有界性定理) 用反证法.

设 $f \in C[a,b]$, 但 f 无界. 则 $\forall G$, $\exists x \in [a,b]$, 使得 $|f(x)| \geqslant G$.

取 $G = n$, 并记点 x_n 满足 $|f(x_n)| \geqslant n$. 对每个 n 都如此做, 就得到一个数列 $\{x_n\} \subset [a,b]$.

由于 $\{x_n\}$ 是有界数列, 因此根据凝聚定理, 即教科书 p.44 的 Bolzano-Weierstrass 定理, 存在收敛子列 $\{x_{n_k}\}$. 将它的极限记为 ξ, 即有

$$\lim_{k \to \infty} x_{n_k} = \xi.$$

由于 $\forall k$, $a \leqslant x_{n_k} \leqslant b$, 因此 $\xi \in [a,b]$.

---

① 可以指出, 除了有界闭区间之外, 在其余 8 种区间上的连续函数都不一定有界. 因此今后只要说到连续函数的有界性定理, 那就一定是指有界闭区间上的连续函数.

利用 f 在点 ξ 连续, 用 Heine 归结原理 (或者连续性第二定义), 就知道有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi).$$

但另一方面, 从数列 $\{x_n\}$ 的构造过程, 我们知道对于每一个 k, 有 $|f(x_{n_k}| \geqslant n_k$. 因此只能有

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = \infty.$$

由此引出矛盾. □

再介绍一个证明.

证 2 (**用闭区间套定理证明连续函数的有界性定理**)　用反证法. 设 $f \in C[a,b]$, 但 f 无界.

记 $I_1 = [a_1, b_1]$, 其中 $a_1 = a$, $b_1 = b$.

取 I_1 的中点, 从 I_1 得到两个闭子区间, 它们的长度为 $|I_1|$ 的一半. 由于 f 在 I_1 上无界, 因此在两个闭子区间中, 至少有一个, 使得 f 在其上仍然无界. 就取它为 I_2.

如此归纳地构造出一个闭区间套 $\{I_n\}$, 其中 $I_n = [a_n, b_n]$, 它的长度 $|I_n| = b_n - a_n \to 0$, 且使得 f 在每一个 I_n 上无界.

根据闭区间套定理, 存在 $\xi \in I_n \,\forall\, n$, 且

$$a_n \uparrow \xi, b_n \downarrow \xi.$$

由于 f 在点 ξ 处连续, 因此从局部有界性定理知道, $\exists\,\delta > 0$, $\exists\, M > 0$, $\forall\, x \in O_\delta(\xi) \cap [a,b]$, 使得 $|f(x)| \leqslant M$.

由于 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 同时收敛于 ξ, 因此存在 N, $\forall\, n \geqslant N$, 成立

$$|a_n - \xi| < \delta, |b_n - \xi| < \delta.$$

于是就有

$$[a_n, b_n] \subset O_\delta(\xi) \cap [a,b],$$

这表明当 $n \geqslant N$ 时, f 在 $[a_n, b_n]$ 上有界. 这与闭区间套的构造过程中保证 f 在每一个 $[a_n, b_n]$ 上无界相矛盾. □

思考题　试用确界定理和 Lebesgue 方法证明连续函数的有界性定理.

连续函数的最值定理 有界闭区间上的连续函数一定能够取到自己的最大值和最小值.

我们同样准备给出几个证明.

证 1 (**用确界存在定理并两次用有界性定理**)

设 $f \in C[a,b]$, 根据有界性定理, f 有上界, 换言之, 值域 $f([a,b]) = \mathscr{R}(f)$ 有上界, 因此有上确界, 记为 M.

用反证法, 设 f 在 $[a,b]$ 的任何点上都取不到 M. 则可以作辅助函数

$$g(x) = \frac{1}{M - f(x)}.$$

由于分母在 $[a,b]$ 上处处不等于 0, 因此 $g \in C[a,b]$, 从而再次根据有界性定理知道 g 在 $[a,b]$ 上有上界. 将这个上界记为 μ, 则有

$$\forall\, x \in [a,b],\ 有\ g(x) = \frac{1}{M - f(x)} \leqslant \mu.$$

由于分母处处大于 0, 因此就得到

$$\forall\, x \in [a,b],\ 有\ f(x) \leqslant M - \frac{1}{\mu}.$$

但这表明比 f 的值域的上确界 M 小的一个数 $M - \dfrac{1}{\mu}$ 也是值域的上界, 这与上确界是最小上界相矛盾. 因此 f 一定能够取到值域的上确界 β. 这就是说 β 就是值域的最大值.

用类似的方法可以证明 f 也一定能取到值域中的最小值. $\square$

再给一个证明.

证 2 (**用凝聚定理**) 只写出关于最大值的证明.

设 $f \in C[a,b]$, 且 $M = \sup\{f([a,b])\}$ $(= \sup\{\mathscr{R}(f)\})$.

根据上确界的第二定义, $\forall\, \dfrac{1}{n}$, $\forall\, x_n \in [a,b]$, 使得有

$$f(x_n) > M - \frac{1}{n}. \tag{$*$}$$

对每个 n 都这样做, 就得到区间 $[a,b]$ 中的数列 $\{x_n\}$, 它的每一项满足不等式 $(*)$.

对这个数列用凝聚定理, 得到收敛子列 $\{x_{n_k}\}$, 记其极限为 ξ. 由于 $[a,b]$ 为有界闭区间, 因此 $\xi \in [a,b]$.

从 $(*)$ 得到对每个 k 成立不等式

$$(M \geqslant)\, f(x_{n_k}) > M - \frac{1}{n_k}. \tag{$**$}$$

令 $k \to \infty$, 就得到

$$(M \geqslant) \lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = f(\xi) \geqslant M.$$

因此只能是 $f(\xi) = M$. 这表明 M 是值域的最大值. $\square$

注 与零点存在定理一样, 有界性定理, 最值定理, 值域定理中的条件, 即函数必须是有界闭区间上的连续函数, 这里的两个条件一点都不能减低, 否则就可以举出反例说明结论不成立. 教科书 pp.105–106 的几个例子请同学自学.

注 2 教科书中没有正式写出介值定理, 只在 p.105 第一行提到, 然后又在 p.106 第 3 行开始证明了一个结论, 它就是我们上次所说的介值定理. 其中还用了值域定理, 这完全没有必要. 因此这样处理是不妥当的.

四. 一致连续性

这是比连续性更为精细的数学概念, 而且也不如连续性那样非常直观, 因此对于初学者是一个难点.

这里首先写出 f 在点 x_0 连续的定义:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |x - x_0| < \delta, \text{ 有 } |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

然后说明其中的 δ 不仅与 $\varepsilon > 0$ 有关, 而且与点 x_0 有关.

为了加深印象, 再作一个图, 即讲解连续性的几何意义. 这在教科书上没有, 实际上是应该讲的内容.

如图 1 所示, 其中粗黑线代表某个函数 $y = f(x)$ 的图像, 考虑 f 在点 x_0 的连续性. 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 不等式 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 就是

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x) < f(x_0) + \varepsilon,$$

也就是说函数的图像应当处于图 1 的两条水平直线

$$y = f(x_0) + \varepsilon, \quad y = f(x_0) - \varepsilon$$

之间.

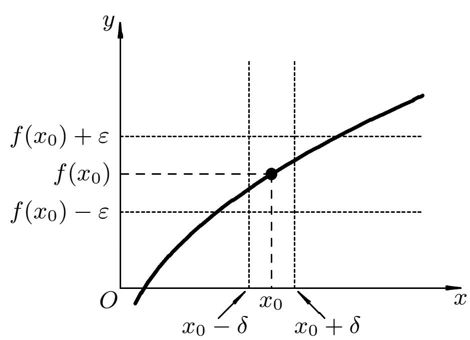


图 1: 函数连续性的几何意义.

为了使得 $f(x)$ 的图像处于上述两条水平直线之间, 当然需要对于自变量 x 的取值范围加以限制, 这就是连续性定义中的 $|x - x_0| < \delta$, 也就是

$$x_0 - \delta < x < x_0 + \delta,$$

这在图 1 上就是 x 轴上的两个点 $x = x_0 \pm \delta$ 所限制的开区间. 我们过这两个点作平行 y 轴的两条垂直线, 这样就与前述两条水平直线一起形成了一个矩形. 可以看出, 连续性表明, 在这个矩形中的函数图像, 也就是一段曲线, 应当从矩形的左右边离开这个矩形, 而不能够从矩形的上下边离开这个矩形. 这就是连续性定义的几何意义.

容易从图 1 看出, 如果 $\delta > 0$ 较大, 就不能满足上述要求.

现在可以说明, 对于不同的点 $(x_0, f(x_0))$ 来说, 对于相同的 $\varepsilon > 0$ 选出满足连续性要求的 $\delta > 0$ 时, δ 的大小与 x_0 有关系. 直观的来说, 对于比较陡的曲线部分, 则 δ 就需要取得小一些, 而对于比较平坦的曲线部分, δ 就可以取得比较大. 对于常值函数, 曲线是一条水平直线, 则对于每个 $\varepsilon > 0$, 可以随意取 δ.

我们将上述关系较为

$$\delta = \delta(\varepsilon, x_0).$$

一致连续性概念来自于下列问题: 对于在某个区间 I 上的连续函数 f, 是否可能对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在与点 x_0 无关而只与 ε 有关的 $\delta = \delta(\varepsilon)$, 使得当 $|x - x_0| < \delta$, $x, x_0 \in I$, 就成立 $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$?

如果可能, 就称 f 于 I 上一致连续.

由此可见, 一致连续性是比连续性更为精细的概念, 要求更高.

下面先按照教科书上的内容给出一致连续性的定义:

一致连续性的定义 设 f 在区间 I 上有定义①, 若有

$$\lim_{\substack{|x'-x''|\to 0\\ x',x''\in I}} |f(x') - f(x'')| = 0,$$

则称 f 在区间 I 上一致连续.

但这个定义中的极限是我们没有见过的, 因此还是采用逻辑符号再写一遍为好.

用 ε-δ 语言则可将 f 在区间 I 上的一致连续性定义写为:

$$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta > 0, \forall\, x', x'' \in I\ (|x' - x''| < \delta),\ 有\ |f(x') - f(x'')| < \varepsilon.$$

首先列举一致连续性的几个非常基本的性质:

性质 1 若 f 在区间 I 上一致连续, 则 f 一定在区间 I 上连续, 即 $f \in C(I)$.

证 从一致连续性的定义知道, 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, $\forall\, x', x''$ $(|x' - x''| < \delta)$, 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. 将 x' 取为区间 I 中的一个固定点 x_0, 又改记 x'' 为 x, 则就可以看出 f 在点 x_0 连续. 由于 x_0 可以是区间 I 的每一个点, 包括可能的端点在内, 因此 $f \in C(I)$. □

① 今后一般情况下都只讨论区间上定义的函数的一致连续性, 但在某些情况下有时也需要考虑在若干个区间的并集上有定义的函数是否一致连续, 这时的一致连续性定义只需稍加修改, 也就是将下面的区间 I 改为函数有定义的并集即可.

性质 2　若 f 在区间 I 上一致连续, 且区间 $J \subset I$, 则 f 也在区间 J 上一致连续.

(从定义即可知道, 证明从略.)

性质 3　若 f 在区间 I 上一致连续, 且区间 I 有界, 则 f 在区间 I 上有界.

证　对 $\varepsilon = 1$, $\exists\, \delta_1 > 0$, $\forall\, x', x''$ $(|x' - x''| < \delta)$, 有 $|f(x') - f(x'')| < 1$.

由于区间 I 有界, 在其中插入有限个点, 记为 $a < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < b$, 使得区间 I 中任何一个点至少与某个 x_i 的距离小于 δ. 于是有

$$|f(x)| = |f(x) - f(x_i) + f(x_i)| \leqslant |f(x) - f(x_i)| + |f(x_i)| < 1 + |f(x_i)|.$$

由此可见只要取

$$M = 1 + \max\{|f(x_1)|, |f(x_2)|, \cdots, |f(x_N)|\},$$

就可以使得 $\forall\, x \in I$ 成立 $|f(x)| \leqslant M$, 因此 f 在 I 上有界.　□

下面是教科书上的例 8.

例 8　证明: 函数 $f(x) = \dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0, 1)$ 上不一致连续.

证 1　用反证法. 设 $f(x) = 1/x$ 于 $(0, 1)$ 上一致连续, 则从上面的性质 3 知道 $f(x) = 1/x$ 在 $(0, 1)$ 上有界, 而这是错误的.　□

第 17 次讲稿

第 17 次讲稿, 用于 2007 年 11 月 14 日, 星期三, 2 节课.

内容是第五章 连续函数和单调函数, §5.2 区间上连续函数的基本性质. 这次继续讲: 四. 一致连续性.

事先提醒同学, 今天的内容从难度上达到了顶峰, 必须全神贯注才行.

(还有可以将一致连续性的 ε-δ 定义抄在一块空黑板上, 以便下面用对偶法则时容易一些.)

四. 一致连续性 (续)

上次已经介绍了一致连续性的定义和基本性质, 最后讲了例 8, 并用性质 3 给了一个证明. 但这个证明没有真正揭示事情的本质, 因此我们以下从定义出发再给出一个证明.

例 8 证明: 函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 在区间 $(0,1)$ 上不一致连续.

证 先看一下 f 的图像:

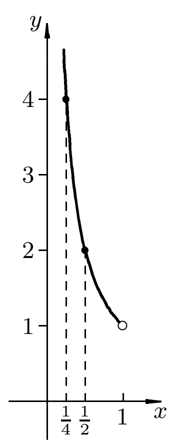


图 1: 在 $(0,1)$ 上 $f(x)=1/x$ 的示意图

用反证法. 设 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 于 $(0,1)$ 上一致连续, 则对于 $\varepsilon_0=1$, 存在 $\delta>0$, 当 $x',x''\in(0,1)$ 且 $|x'-x''|<\delta$ 时, 就成立

$$|f(x')-f(x'')|=\left|\frac{1}{x'}-\frac{1}{x''}\right|=\frac{|x'-x''|}{x'x''}<\varepsilon_0=1,$$

现取

$$x'=\frac{1}{n},\quad x''=\frac{1}{2n},$$

其中 $n\geqslant 2$, 以保证 $x',x''\in(0,1)$, 这时一方面有

$$|x'-x''|=\frac{1}{2n},$$

另一方面则有

$$|f(\frac{1}{n})-f(\frac{1}{2n})|=n\geqslant 2>1,$$

从而只要取

$$n>\frac{1}{2\delta},$$

就可以使得 $|x'-x''|<\delta$, 但 $|f(x')-f(x'')|>\varepsilon_0=1$, 从而引出矛盾. $\square$

注 教科书上 p.107 的证明只是写法有点不同.

注 2 这个例子告诉我们, 一致连续是一种非局部性质. 在说一个函数一致连续或不一致连续时, 必须首先说明目前所考虑的区间是什么. 若不说明区间是什么, 则谈不上去说一个函数一致连续或不一致连续.

教科书上的例 9 请自学.

下面讲一致连续性的几个最重要的结果, 它们是今天讲课的主要内容.

Cantor **定理** 有界闭区间上的连续函数必一致连续.

证 设 $f \in C[a,b]$, 用反证法. 设 f 在 $[a,b]$ 上不一致连续, 则对于一致连续性的 ε-δ 定义用对偶法则就有

$$\exists\, \varepsilon_0 > 0, \forall\, \delta > 0, \exists\, x', x''\ (|x' - x''| < \delta),\ \text{有}\ |f(x') - f(x'')| \geqslant \varepsilon_0.$$

取 $\delta_n = \dfrac{1}{n}$, 就有 x'_n, x''_n, 满足

$$|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}, \tag{$*$}$$

同时使得

$$|f(x'_n) - f(x''_n)| \geqslant \varepsilon_0. \tag{$**$}$$

对每个正整数 n 都这样做, 就得到了两个数列 $\{x'_n\}$ 和 $\{x''_n\}$. 它们都在有界闭区间 $[a,b]$ 内, 因此都是有界数列.

对于第一个数列 $\{x'_n\}$ 用凝聚定理, 就得到一个收敛子列, 记为

$$\lim_{k\to\infty} x'_{n_k} = \xi.$$

由于在两个数列之间存在关系 $(*)$, 因此从

$$x''_{n_k} = x'_{n_k} + (x''_{n_k} - x'_{n_k})$$

和

$$|x'_{n_k} - x''_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \leqslant \frac{1}{k},$$

可见有

$$|x''_{n_k} - \xi| \leqslant |x''_{n_k} - x'_{n_K}| + |x'_{n_k} - \xi| < \frac{1}{n_k} + |x'_{n_k} - \xi|,$$

从而得到

$$\lim_{k\to\infty} x''_{n_k} = \xi.$$

这样就得到了收敛于同一个点 ξ 的两个数列.

由于 $\xi \in [a,b]$, 而 f 在点 ξ 连续, 因此就有

$$\lim_{k\to\infty} |f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| = 0,$$

但从 $(**)$ 我们看到, 对每一个 k 成立

$$|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geqslant \varepsilon_0,$$

由此引出矛盾. □

Cantor 定理完全解决了有界闭区间上的一致连续问题, 那么对于其他区间如何? 在上次的课上已经看到了在开区间上的连续函数可以不一致连续. 那么这里有没有什么规律性的东西? 这就是下面的命题. 虽然它只是对有界开区间说的, 但可以类推到半开半闭区间上去.

(教科书上没有这个内容.)

有界开区间上的一致连续性定理 有界开区间上的连续函数为一致连续的充分必要条件是函数在两个端点处都存在单侧极限.

证 设 $f \in C(a,b)$, 其中 a, b 都是有限实数, 且 $a < b$.

充分性 ($\Longleftarrow$). 设存在 $f(a^+)$ 和 $f(b^-)$, 则可以定义一个辅助函数

$$F(x) = \begin{cases} f(a^+), & x = a, \\ f(x), & a < x < b, \\ f(b^-), & x = b. \end{cases}$$

它在有界闭区间 $[a, b]$ 上连续. 用 Cantor 定理, 可见 F 在 $[a, b]$ 上一致连续. 这表明 F 在 (a, b) 上一致连续 (用上次课上的性质 2), 而在 (a, b) 上 $F = f$, 因此 f 在 (a, b) 上一致连续.

必要性 ($\Longrightarrow$). 只写出存在 $f(a^+)$ 的证明, 关于存在 $f(b^-)$ 的证明完全相同.

在 (a, b) 任取一个数列 $x_n \to a$, 则由于 f 在 (a, b) 上一致连续, 因此 f 有界, 从而与数列 $\{x_n\}$ 对应的另一个数列 $\{f(x_n)\}$ 是有界数列.

用凝聚定理于 $\{f(x_n)\}$ 就可以得到它的一个收敛子列, 记为

$$\lim_{k\to\infty} f(x_{n_k}) = A. \tag{†}$$

当然同时也有

$$x_{n_k} \downarrow a. \tag{‡}$$

(这里利用了收敛于 a 的数列的每一个子列也收敛于 a.)

再次利用 f 在 (a, b) 上一致连续的条件, 对于 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, $\forall\, x', x''$ ($|x' - x''| < \delta$), 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

考虑满足 $a < x < a + \delta$ 的点 x. 由 (‡) 可见存在 N, 使得当 $k \geqslant N$ 时成立

$$a < x_{n_k} < a + \delta.$$

由于 x, x_{n_k} 都在区间 $(a, a + \delta)$ 内, 它们之间的距离小于 δ. 从而有

$$|f(x) - f(x_{n_k})| < \varepsilon.$$

这对一切 $k \geqslant N$ 都成立, 令 $k \to \infty$, 就从 (†) 得到

$$|f(x) - A| \leqslant \varepsilon.$$

这样就得到

$$f(a^+) = \lim_{x \to a^+} f(x) = A. \quad \square$$

留下来的问题就是在无界区间上的连续函数是否一致连续, 或者在什么附加条件下为一致连续. 这方面在大课上只能讲一个例子, 即教科书上的例 10.

例 10　设函数 $f \in C(-\infty, +\infty)$, 且有周期 T, 证明 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续.

证　对于函数 f 在区间 $[0, 2T]$ 用 Cantor 定理, 知道 f 在 $[0, 2T]$ 上一致连续. 因此对 $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists\, \delta > 0$, $\forall\, x', x'' \in [0, 2T]$, $|x' - x''| < \delta$, 成立 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

此外, 还不妨假设上述 $\delta < T$.

现在对于每一对实数 x_1, x_2, 设 $|x_1 - x_2| < \delta$, 我们要证明有 $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

不妨设 $x_1 < x_2$. 对于 x_1, 必有某个整数 n, 使得

$$x_1 \in [nT, (n+1)T].$$

这时从 $x_1 < x_2$ 和 $|x_1 - x_2| < \delta$ 知道有 $x_1 < x_2 < x_1 + \delta < x_1 + T$. 于是有

$$x_2 \in [nT, (n+2)T].$$

这时就有

$$x_1 - nT \in [0, 2T], \quad x_2 - nT \in [0, 2T].$$

同时又有

$$0 < |(x_1 - nT) - (x_2 - nT)| = |x_1 - x_2| < \delta,$$

因此就有

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1 - nT) - f(x_2 - nT)| < \varepsilon.$$

这样就证明了 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致连续. $\square$

第 18 次讲稿

第 18 次讲稿, 用于 2007 年 11 月 19 日, 星期一, 3 节课.

内容是第五章 连续函数和单调函数的最后一节, §5.3 单调函数的性质. 其中含有: 一. 不连续点的性质, 二. 值域性质, 三. 反函数存在定理, 五. 有界变差函数. 但有界变差函数只讲一个定义.

(实际上还有半节课的时间多, 用于讲第六章开头的两小节: 变化率与切线. 但没有来得及讲导数的正式定义.)

先对于数集的内点给一个正式定义, 实际上在教科书讲区间时就有此内容就好了.

定义 设 I 为实数集, 若 $x \imath I$, 且存在 $\delta > 0$, 使得 $O_\delta(x) \subset I$, 则称 x 是数集 I 的内点.

特别当 I 为区间时, I 中的点除了内点外就是端点. 在 9 种区间里, (a, b), $(-\infty, +\infty$ 没有属于自己的端点, 因此它们完全由自己的内点组成. 其他区间则至少有属于自己的一个端点.

一. 单调函数的间断点的性质

主要讲两个性质.

性质 1 在开区间 (a, b) 上定义的单调函数 f 在 (a, b) 若有间断点, 则只能是跳跃点.

证 只写出函数 f 在 (a, b) 上单调增加时的证明. 在 f 单调减少时, 则 $-f$ 单调增加, 因此结论同样成立.

设 $x_0 \in (a, b)$ 是 f 的间断点. 我们要证明在该点的两个单侧极限都存在. 先证明存在 $f(x_0^-)$①. 定义数集

$$A = \{f(x) \mid a < x < x_0\}.$$

由于 $f \uparrow$, 数集 A 以 $f(x_0)$ 为上界, 因此存在上确界 β. 由于它是 A 的最小上界, $f(x_0)$ 也是 A 的上界, 因此有

$$\beta \leqslant f(x_0).$$

① 这个证明与教科书 p.34 底下单调有界数列收敛定理的证明完全一样, 请同学复习时对照一下. 书上则写出存在 $f(x_0^+)$ 的证明. 请同学在复习时先不看书自己写一下, 然后与书比较一下是否正确. 如果完全对, 则说明对此已经理解了. 此外, 类似的内容也已经在第四章的习题 2 中做过.

又因 β 是 A 的最小上界, $\forall \varepsilon > 0$, $\beta - \varepsilon$ 不是 A 的上界, 因此存在 $x' \in (a, x_0)$, 使得

$$\beta - \varepsilon < f(x') \ (\leqslant \beta).$$

于是当 $x \in (x', x_0)$ 时, 有

$$\beta - \varepsilon < f(x') \leqslant f(x) \leqslant \beta,$$

因此有 $|f(x) - \beta| < \varepsilon$, 即已经得到

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0^-) = \beta \leqslant f(x_0).$$

类似地, 可证明也存在 $f(x_0^+)$, 且成立 $f(x_0) \leqslant f(x_0^+)$.

合并以上就得到

$$f(x_0^-) \leqslant f(x_0) \leqslant f(x_0^+).$$

由于 x_0 是 f 的间断点, 因此以上两个不等号不会同时成为等号, 从而 x_0 必是第一类间断点, 而且是跳跃点. $\square$

注 1　从证明可以看出, 开区间 (a, b) 中的 a 可以是 $-\infty$, b 可以是 $+\infty$, 证明完全不变.

注 2　当 $a = -\infty$ 时可以证明 $f(-\infty)$ 一定有意义, 当 $b = +\infty$ 时可以证明 $f(+\infty)$ 一定有意义. 这些都是属于第四章的基本题.

性质 2　单调函数的不连续点至多为可列个.

证　只对于单调增加情况作出证明.

证明的基本思想是观察单调函数的值域有什么特性. 可以画出 f 的图形, 然后关心其图形在 y 轴上的投影, 从而在 y 上得到 f 的值域的几何表示. 参看教科书 p.110 的图 5-7.

设 f 在 (a, b) 上单调增加. 设 x_0 是 f 的一个间断点. 从性质 1 可知, x_0 对应了一个开区间 $(f(x_0^-), f(x_0^+))$ (不妨称为跳跃区间). 还可以看出, $f(x_0)$ 可能在这个开区间中, 也可能不在其中.

任取 $x \in (a, x_0)$, 即有 $a < x < x_0$. 在 x 与 x_0 之间插入一个 t, 即有

$$a < x < t < x_0,$$

则从 f 单调增加知道有不等式

$$f(x) \leqslant f(t) \leqslant f(x_0).$$

固定 x 与 x_0, 并令 $t \to x_0^-$, 则就有

$$f(x) \leqslant f(x_0^-) \leqslant f(x_0).$$

同样证明只要 $x_0 < x < b$ 就成立

$$f(x_0) \leqslant f(x_0^+) \leqslant f(x).$$

这样我们就证明了开区间 $(f(x_0^-), f(x_0^+))$ 与 f 的值域 $\mathscr{R}(f) = f((a,b))$ 或者不相交, 或者只有惟一的公共点 $f(x_0)$. 这样就知道每个间断点对应的跳跃区间彼此不相交.

在每个跳跃区间中取一个有理数, 由于这些区间彼此不相交, 因此所得的有理数一定互不相同. 于是跳跃区间与有理数集 $\mathbb{Q}$ 的一个子集一一对应. 由于可列集的子集至多可列, 因此性质 2 成立. $\square$

注 在教科书 p.57 上的例 6 及其图 3-8 就是有可列个间断点的单调增加函数的例子. 在有界区间上类似的例子也存在, 请同学自己举一个例子.

注 2 从 Dirichlet 函数知道, 函数可以有不可列个间断点. Riemann 函数有可列个间断点, 但它不是单调函数.

二. 单调函数的值域性质

性质 3 若 f 为区间 I 上的单调函数, 则有

$$f \in C(I) \Longleftrightarrow \mathscr{R}(f) \text{ (即 } f(I)) \text{ 是区间.}$$

证 必要性 ($\Longrightarrow$). 用连续函数的介值定理即得.

充分性 ($\Longleftarrow$). 只需讨论 f 为单调增加的情况, 对于 f 单调减少可以用 $-f$ 来代替 f.

用反证法. 若 f 有间断点 x_0, 则当 x_0 是区间 I 的内点时, 在上述性质 2 中已经证明 f 的值域与开区间 $(f(x_0^-), f(x_0^+))$ 最多只有一个公共点, 这可以表示为

$$\mathscr{R}(f) = f(I) \subset (-\infty, f(x_0^-)] \cup f(x_0) \cup [f(x_0^+), +\infty).$$

还要注意到, 由于 $x_0 \in I$ 是内点, 因此一定存在 $x_1, x_2 \in I$, 满足 $x_1 < x_0 < x_2$, 从而 $f(x_1) \leqslant f(x_0^-)$, $f(x_0^+) \leqslant f(x_2)$, 因此一定有

$$\mathscr{R}(f) \cap \subset (-\infty, f(x_0^-)] \neq \varnothing, \quad \mathscr{R}(f) \cap [f(x_0^+), +\infty) \neq \varnothing,$$

可见值域 $f(I)$ 不是区间, 从而引出矛盾.

对于区间 I 有端点且间断点 x_0 发生在端点的情况[①], 类似地可引出矛盾. $\square$

① 具体来说, 设 f 在区间 I 上单调增加, I 有左端点 a, 且 f 在点 a 不连续, 则存在 $f(a^+)$ 且不等于 $f(a)$. 这时

$$f(a) < f(a^+) \leqslant f(x) \forall\, a < x \in I.$$

因此值域

$$f(I) = \mathscr{R}(f) \subset \{f(a)\} \cup [f(a^+), +\infty),$$

它不是区间, 从而引出矛盾.

三. 反函数存在定理

这里需要复习一下第三章中的有关内容, 其中包括: p.51 的六. 单射、满射和双射, p.53 的九. 逆映射.

一般而言, 设有映射 $f:\ X \to Y$, 且有 $X = \mathscr{D}(f)$, $Y = \mathscr{R}(f)$, 则当 f 为从 X 到 Y 的单射时, 对于每一个 $y \in Y$, 存在惟一的 $x \in X$ 与之对应, 因此就生成了从 Y 到 X 的一个映射, 称为 f 的逆映射. 记为 $f^{-1}: Y \to X$, 即以 Y 为定义域, 以 X 为值域. (但要注意记号 f^{-1} 有时可能是指 $\dfrac{1}{f}$, 这需要从上下文来区别它们.)

此外, 还有两个恒等式

$$f(f^{-1}(y)) = y\,\forall\, y \in \mathscr{R}(f)$$

与

$$x = f^{-1}(f(x))\,\forall\, x \in \mathscr{D}(f).$$

这也可以表达为

$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}$$

和

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id},$$

其中 id 是恒等映射. 当然上面两个恒等映射的定义域是不一样的.

下面要讲的性质已经在定义反三角函数和证明其连续性时用过. 教科书的安排不妥. 此外, 在定理的叙述中只说单调增加也不妥当.

性质 4 (**严格单调连续函数的反函数存在定理**) 设 f 是区间 $\langle a,b\rangle$ 上的严格单调连续函数, 则值域 $I = \mathscr{R}(f)$ 是区间, 反函数 f^{-1} 是区间 I 上的严格单调连续函数, 且与 f 具有相同的单调性.

证 只写出单调增加情况的证明.

从连续函数的介值定理知道 I 是区间[①]. 从 f 的严格单调增加可知 f 是从定义域 $\langle a,b\rangle$ 到其值域 I 的单射, 因此存在反函数 f^{-1}, 且有

$$\mathscr{D}(f^{-1}) = I, \quad \mathscr{R}(f^{-1}) = \langle a,b\rangle.$$

下面证明 f^{-1} 也是严格单调增加的. (实际上这个性质中主要就是证明这一点.)

对 f 采用记号 $y = f(x)$, 因此对 f^{-1} 写出 $x = f^{-1}(y)$. 任取两个不同的自变量 $y_1, y_2 \in I$, 并记 $x_1 = f^{-1}(y_1), x_2 = f^{-1}(y_2)$. 这就是

$$y_1 = f(x_1), \quad y_2 = f(x_2).$$

① 教科书中说是用性质 3, 但从性质 3 的证明可知实际上那里就是引用连续函数的介值定理.

由于 f 严格单调增加, 因此

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow y_1 < y_2,$$
$$x_1 = x_2 \Longrightarrow y_1 = y_2,$$
$$x_1 > x_2 \Longrightarrow y_1 > y_2.$$

这就可以看出只能是 $y_1 < y_2 \Longrightarrow x_1 < x_2$, 也就是

$$y_1 < y_2 \Longrightarrow f^{-1}(y_1) \Longrightarrow f^{-1}(y_2),$$

即 f^{-1} 为严格单调增加.

由于 f^{-1} 的定义域 I 为区间, 而值域 $\langle a, b\rangle$ 也是区间, 用性质 3 就知道 f^{-1} 连续. □

用这个定理可以直接从三角函数的连续性推出反三角函数的连续性, 或者更恰当地说, 反三角函数的定义就是在这个定理的指导下进行的.

此外还有一个例子, 请自学.

例 证明: 由 $x = y^3 + y$ 所定义的函数 $y = f(x)$ 是 $(-\infty, +\infty)$ 上的严格单调连续函数.

证 以 y 为自变量, 以 $(-\infty, +\infty)$ 为定义域的函数 $x = y^3 + y$ 是严格单调增加的连续函数, 而且值域也是 $(-\infty, +\infty)$, 因此它的反函数 $y = f(x)$ 也是如此. □

五. 有界变差函数

单调函数类有一个缺点, 即对于四则运算不封闭, 例如两个单调函数的和差未必是单调函数.

作为单调函数的推广, 有界变差函数类就没有这个困难. 当然引入这类函数还有许多其他原因. 但我们这里只介绍一下定义, 并浏览一下它的性质, 不准备详细介绍了. 今后用到不多, 主要是在 Fourier 级数中需要这类函数, 但只需要知道它的定义即可 (见教科书上册 p.396).

实际上教科书中的讲法并不好, 它避开了有界变差函数的主要定义, 不能解释什么是"有界变差", 也没有举出一个非有界变差函数的例子.

这方面的材料见菲赫金哥尔茨的《微积分学教程》第三卷第十五章第 4 节, 或者宋国柱等编写的《数学分析教程》(南京大学出版社)下册第 18 章第 1 节, 其中称这里的有界变差函数为囿变函数.

定义 若在 $[a, b]$ 上有定义的函数 f 能够表示成为两个单调增加函数 g 和 h 之差, 即

$$\forall\, x \in [a, b],\ 有\ f(x) = g(x) - h(x),$$

其中 g, h 都是 $[a, b]$ 上的单调增加函数, 则称 f 是区间 $[a, b]$ 上的有界变差函数.

第 19 次讲稿

第 19 次讲稿, 用于 2007 年 11 月 21 日, 星期三, 2 节课.

内容是第六章 导数和微分的第 1 节 导数概念. 其中含: 一. 变化率问题, 二. 切线问题, 三. 导数的定义, 四. 基本导数公式.

§ 6.1 导数概念

一. 变化率问题 (导数概念的物理来源)

设 $Q(t)$ 是随时间而变化的一个物理量, 则什么是它的变化率?

最简单的例子还是中学物理学中的质点直线运动, 设其路程 s 与时间 t 的关系为 $s = s(t)$, 则路程关于时间的变化率就是速度.

现在我们比较仔细地分析一下速度概念. 对于匀速运动, 速度 $v = \frac{s}{t}$ 是好理解的. 对于非匀速运动, 则就比较复杂了. 这里首先需要引入平均速度的概念.

平均速度可记为 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$, 其中

$$\Delta s = s(t_0 + \Delta t) - s(t_0), \quad \Delta t = (t_0 + \Delta t) - t_0,$$

这就是从某个时刻 t_0 起在一段时间 Δt 内经过的路程 Δs 除以 Δt 得到的商, 今后经常称为差商, 它代表了这一段时间上的平均速度.

显然从 t_0 到 $t_0 + \Delta t$ 这一段时间上的运动也未必是匀速运动, 于是如何刻画运动的问题仍然没有解决. 当然可以将一段时间分割成许多小段, 每一小段时间上求出一个平均速度, 这就是对于质点直线运动的一种近似描述, 但并不是精确的描述.

为了作出精确的描述, 用函数极限的语言来说, 就是需要令 $\Delta t \to 0$ 而求差商的极限, 即计算

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t},$$

也可写为

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0 + \Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}$$

或者

$$\lim_{t \to t_0} \frac{s(t) - s(t_0)}{t - t_0},$$

如果这个极限存在, 则就称之为在时刻 t_0 的速度, 记为 $s'(t_0)$ 或另记为 $v(t_0)$.

容易看出, 这都是 $\dfrac{0}{0}$ 的不定式. 如果不引入极限概念, 只从差商 $\dfrac{\Delta s}{\Delta t}$ 来看, 如果 $\Delta t \neq 0$, 则只能得到平均速度, 而 $\Delta t = 0$, 则 $\dfrac{0}{0}$ 没有意义. 因此只有极限概念才解决了速度, 或者说瞬时速度究竟是什么的问题.

对一般变量的变化率也是如此理解, 例如速度对时间的变化率就是加速度, 电量对时间的变化率就是电流等等, 但其中的自变量不一定是时间.

二. 切线问题 (导数概念的几何来源)

如何定义曲线的切线?

先看圆的切线如何定义? 当然可以将与圆恰好交于一个点的直线称为圆的切线, 或者更精确地说成是圆在该点的切线. 但这个定义难以推广到任意曲线上去. 例如, 抛物线 $f(x)=x^2$ 与 x 轴和 y 轴都只交于一个点, 但我们自然会说前者是抛物线在点 $(0,0)$ 的切线, 而不会说后者是切线. 这表明在学了圆的切线之后, 我们对于什么是曲线的切线是有一定的想法的. 古希腊数学家在确定圆锥曲线 (包括抛物线) 的切线时就是如此. 只是如何对切线给出严格的数学定义则并非容易. 从下面的分析可以看到, 这里的困难与如何定义变化率是相同的.

具体来说, 设所考虑的曲线是函数 $y=f(x)$ 的图像, 也就是二维平面中的数集

$$\{(x,y)\mid y=f(x), x\in\mathscr{D}(f)\}.$$

注 从 Dirichlet 函数和 Riemann 函数可知, 函数的图像可以与我们过去熟悉的曲线概念大不一样, 因此称上述数集为图像更为合适. 但实际上我们还经常使用曲线这个名称来称呼上述数集. 也经常将 $y=f(x)$ 的图像简称为曲线 $y=f(x)$.

考虑曲线上的点 $A(x_0,y_0)$, 其中 $y_0=f(x_0)$, 问题就是如何定义上述曲线在点 A 的切线.

方法是取 $\Delta x\neq 0$, 考虑曲线上的另一个点 $B(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta))$. 这里的 Δx 可正可负. 联接点 A 和 B 得到的直线称为曲线的割线, 它的斜率就是差商 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$.

现在令点 B 沿着曲线 $y=f(x)$ 趋于点 A, 这也就是令 $\Delta x\to 0$. 若存在极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

这就是说联接点 A 和点 B 的割线当 B 趋于 A 时存在极限位置, 则称曲线 $y=f(x)$ 在点 $A(x_0,y_0)$ 存在切线, 它的斜率就是上述差商的极限, 记为 $f'(x_0)$, 于是切线方程是

$$y=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0).$$

反之, 如果上述极限不存在, 则称曲线 $y=f(x)$ 在点 A 处没有切线.

注 约定只对 $y=f(x)$ 的连续点 x_0 才考虑是否在曲线上的点 $(x_0,f(x_0))$ 处存在切线, 否则不定义切线.

(参考教科书 p.117 上的图 6-1.)

三. 导数的定义

现在抽去上面两个例子的具体背景, 或者说进行抽象, 就得到导数的数学定义.

定义 设函数 $y=f(x)$ 于区间 $\langle a,b\rangle$ 上定义, 固定点 $x_0\in(a,b)$, 称 Δx 为自变量 x 的增量, 称 $\Delta y=\Delta f=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 为因变量 y 的增量, 称 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 或 $\dfrac{\Delta f}{\Delta x}$ 为差商. 若存在下列极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

则称此极限为 f 在点 x_0 的导数 (或者微商), 记为 $f'(x_0)$, 又称函数 f 在点 x_0 可导.

当 $f'(x_0)$ 存在时, 定义曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的切线为[1]

$$Y=f(x_0)+f'(x_0)(X-x_0),$$

特别当 $f'(x_0)=\pm\infty$ 时, 若 f 在点 x_0 连续, 则定义切线为与 y 轴平行的直线 $X=x_0$.

当 $f'(x_0)\neq 0$ 时, 定义曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0,f(x_0))$ 的法线为过该点且斜率为$f'(x_0)$ 的负倒数的直线, 即

$$Y=f(x_0)-\frac{1}{f'(x_0)}(X-x_0),$$

若 $f'(x_0)=0$, 则法线为与 y 轴平行的直线 $X=x_0$.

注 由于历史的原因, 数学中经常使用的导数记号不是惟一的. 例如以下几种都是导数的常用记号:

$$y'(x_0),\quad y'\big|_{x_0},\quad \frac{\mathrm{d}y(x_0)}{\mathrm{d}x},\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x_0},\quad Df(x_0)$$

等等.

关于导数的第一个基本结果是:

定理 若函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处可导, 则必在点 x_0 连续.

由于这个结果的重要性, 也为了复习一下函数极限的内容, 我们给出几个证明.

证 1 由于存在极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

将极限值记为 $f'(x_0)$, 就有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)+o(1)\ (\Delta x\to 0),$$

[1] 由于 x 与 y 在讨论中已经用作函数 f 的自变量和因变量, 为了避免混淆, 因此对于切线和下面的法线采用大写的 X 和 Y 作为它们的自变量和因变量.

即有

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0),$$

也就是

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + o(x - x_0)\ (x \to x_0).$$

这已经含有

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0). \quad \square$$

证 2 (这个证明来自于 $\Delta y = \dfrac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x$ 当 $\Delta x \to 0$ 时恰为$O(1)o(1)$. 下面直接用 ε-δ 语言来写.)

从存在极限 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, 用函数极限的局部有界性定理, 存在常数 $M > 0$, $\delta > 0$, $\forall\, 0 < |x - x_0| = |\Delta x| < \delta$, 成立

$$\left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| < M.$$

对于 $\forall \varepsilon > 0$, 取

$$\delta_1 = \min\{\delta, \frac{\varepsilon}{M}\},$$

则当 $0 < |x - x_0| < \delta_1$ 时, 就有

$$|f(x) - f(x_0)| = |\Delta y| = \left|\frac{\Delta y}{\Delta x}\right| \cdot |\Delta x| < M \cdot |x - x_0| < \varepsilon.$$

当 $x = x_0$ 时, 上式左边为 0, 不等式仍成立. 这样就证明了 f 在点 x_0 连续. $\square$

注 这个定理的逆定理不成立. 即从函数在某点连续不能推出函数在该处可导. 这里要举两个例子.

第一个例子是 $f(x) = |x|$ 在 $x = 0$ 处有两个单侧导数, 但不可导.

第二个例子更为重要, 它就是是下面的函数,

$$f(x) = \begin{cases} x \sin \dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

f 在点 $x = 0$ 处连续. 对于这个点有 $\Delta x = x - 0$, $\Delta f = f(x) - f(0) = f(0)$, 因此差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x)}{x} = \sin \frac{1}{x},$$

当 $x \to 0$ 时没有极限. 从几何上看, 过原点 $(0, 0)$ 和 $(x, f(x))$ $(x \neq 0)$ 的割线当 $x \to 0$ 时, 割线的斜率在 -1 到 $+1$ 之间作无限次摆动, 因此摆线没有极限位置.

注 掌握下面的一族函数的图像在数学分析学习中很有帮助:

$$f(x)=\begin{cases}x^{\alpha}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

其中 α 为参数. 用图形合成法 (见教科书的 p.58) 容易作出各种 α 值时的函数草图. 当 $\alpha=0$ 时就是 p.59 的图 3-14 (其中对于 $x=0$ 没有定义).

例 1 设 c 为常数, 证明: $c'=0$.

证 这里的函数是恒等于 c 的常值函数, 因此对任何 $\Delta x\neq 0$, 总有 $\Delta y=0$, 从而差商也总是 0, 它的极限当然是 0. □

例 2 证明 $x'=1$.

证 由于函数为 $y=x$, 因此 $\Delta y=\Delta x$, 差商始终是 1, 极限当然就是 1. □

例 3 求自由落体运动 $s(t)=\dfrac{1}{2}gt^2$ 的速度 $v(t)$ 和加速度 $a(t)$.

解 计算如下:

$$\begin{aligned}v(t)=s'(t)&=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\dfrac{g}{2}(t+\Delta t)^2-\dfrac{g}{2}t^2}{\Delta t}\\ &=\frac{g}{2}\lim_{\Delta t\to 0}\frac{2t\Delta t+\Delta t^2}{\Delta t}=\frac{g}{2}\lim_{\Delta t\to 0}(2t+\Delta t)=gt.\end{aligned}$$

然后再求

$$a(t)=v'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta v}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{g(t+\Delta t)-gt}{\Delta t}=g.\quad \square$$

注 由于函数极限定义中在求 $\Delta t\to 0$ 的极限时, 不允许 $\Delta t=0$, 因此差商的分子分母中可以约去因子 Δt. 此外, 习惯上记 $(\Delta t)^2=\Delta t^2$.

例 4 求函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 的导数, 并求出函数图像在点 $(2,\dfrac{1}{2})$ 的切线方程和法线方程.

解 先计算导数, 当然只能在 $x\neq 0$, 即函数有定义的点处计算:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x}\right)'&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{x+\Delta x}-\dfrac{1}{x}}{\Delta x}\\ &=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{-1}{(x+\Delta x)x}=-\frac{1}{x^2}.\end{aligned}$$

在 $x=2$ 时 $y'(2)=-\dfrac{1}{4}$, $y(2)=\dfrac{1}{2}$. 因此经过图像上点 $(2,\dfrac{1}{2})$ 的切线方程为

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}(x-2),$$

整理后为 $x+4y=4$. 同样得到经过点 $(2,\dfrac{1}{2})$ 的法线方程为

$$y-\frac{1}{2}=4(x-2),$$

整理后为 $4x-y=7\dfrac{1}{2}$. $\square$

最后引入单侧导数的概念, 即 $y=f(x)$ 在点 x_0 的左导数与右导数为

$$f'_-(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{\Delta y}{\Delta x},\quad f'_+(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{\Delta y}{\Delta x},$$

如果这些极限存在的话.

从前面关于基本类型的函数极限与两个单侧极限之间的关系, 就知道有

命题 导数 $f'(x_0)$ 存在的充分必要条件是存在两个相等的单侧导数 $f'_-(x_0)$ 和 $f'_+(x_0)$.

函数在一个点不可导, 但却存在两个单侧导数的情况是可能的, 例如 $y=|x|$ 在 $x=0$ 就是如此. 它的几何意义也是明显的.

四. 基本初等函数的导数公式

这一小节列出了 7 条导数计算公式, 但除了第 4 条之外 (它可归入下一节中), 都是基本初等函数的导数公式, 只是反三角函数的导数公式要到下一节中从反函数的求导法则得出.

由前面的例 1 得到第一个导数公式.

(1) $c'=0$.

$$\boxed{\textbf{公式 }1.\quad \text{常值函数的导数公式:}\quad c'=0.}$$

(2) $x'=1$ (见前面的例 2).

这不必作为一个独立的公式, 它只是下面的幂函数导数公式的一个特例.

同样, 例 3,4 得到的 $x^2=2x$, $(x^{-1})'=-x^{-2}$ 也只是下面的幂函数导数公式的特例.

(3) $(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}$ ($\alpha\neq 0$, x 为定义域的内点.)

这可看成上述几个公式的一般化, 我们将它列为

$$\boxed{\textbf{公式 }2.\quad \text{对实数 }\alpha\neq 0,\text{ 幂函数 }x^\alpha\text{ 的导数公式:}\quad (x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}.}$$

其中 x 为幂函数定义域的内点.

证 (幂函数的定义域比较复杂, 见教科书 p.55.)

若 $x \neq 0$, 则有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = x^\alpha \frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\Delta x} = x^{\alpha-1} \frac{\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)^\alpha - 1}{\dfrac{\Delta x}{x}},$$

利用第四章学到的极限 (见 p.91 之例 6)

$$\lim_{x\to 0} \frac{(1+x)^\alpha - 1}{x} = \alpha,$$

就得到

$$(x^\alpha)' = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{(x+\Delta x)^\alpha - x^\alpha}{\Delta x} = \alpha x^{\alpha-1}.$$

若 $\alpha > 0$, 则在点 $x = 0$ 处有 $\Delta x = x - 0 = x$, 于是有

$$f'(0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{x\to 0} x^{\alpha-1} = \begin{cases} 0, & \alpha > 1, \\ 1, & \alpha = 1, \\ \infty, & 0 < \alpha < 1. \end{cases}$$

由此可见, 公式 $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$ 对于 $x = 0$ 在 $\alpha > 1$ 时仍然成立, 而对于 $0 < \alpha \leqslant 1$ 则可以理解为在取极限的意义上成立.

若 $\alpha > 0$ 时 $x = 0$ 是幂函数 x^α 的定义域的端点, 则上述推导中的 $f'(0)$ 应改为 $f'_+(0)$, 即该点的右导数公式.

关于 $0 < \alpha < 1$ 时在 $x = 0$ 的导数值为无穷大可以观察几个例子.

若 $\alpha = 1/2$, 则幂函数 $y = \sqrt{x}$ 定义域为 $x \geqslant 0$, 在点 $x = 0$ 有

$$y'_+(0) = \lim_{x\to 0^+} \frac{\sqrt{x}}{x} = \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$$

由于 $y = \sqrt{x}$ 在点 $x = 0$ 右连续, 因此在该点存在垂直切线 $x = 0$.

再看 $\alpha = 2/3$ 时的幂函数 $y = x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$, 则 $x = 0$ 是其定义域的内点. 这时

$$y'(0) = \lim_{x\to 0} \frac{x^{\frac{2}{3}}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \infty.$$

若看单侧极限, 则会发现 $y'_-(0) = -\infty$ 和 $y'_+(0) = +\infty$. 这时我们仍然认为 $y = x^{\frac{2}{3}}$ 在点 $x = 0$ 处有切线 $x = 0$. □

(4) 设 u, v 是 x 的可导函数, α, β 是常数, 则有

$$(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v',$$

应当放到下节中去. 但没有它则许多题没法做了. 所以也不能不要. 它的证明不难, 无非是函数极限四则运算法则的应用, 请同学自学.

(5) 正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 的导数公式:

$$\boxed{\textbf{公式 } 3. \quad (\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x.}$$

第一个公式在教科书的 p.80 作为七. 练习题 1(5), 又在 p.88 作为例 4 出现, 这里就不证明了. 第二个公式在 p.90 作为四. 练习题 2(7). 我们在这里再证明一下.

根据导数定义计算 $(\cos x)'$ 如下:

$$\begin{aligned}(\cos x)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\cos(x+\Delta x)-\cos x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{-2\sin(x+\dfrac{\Delta x}{2})\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\sin\dfrac{\Delta x}{2}}{\dfrac{\Delta x}{2}}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}(-\sin(x+\frac{\Delta x}{2})) = -\sin x.\end{aligned}$$

利用公式 3 和下一节的求导的四则运算法则就可以得到其他三角函数的导数.

(6) 指数函数 a^x $(a>0)$ 的导数公式:

$$\boxed{\textbf{公式 } 4. \quad (a^x)' = a^x\ln a, \text{ 特别是有 } (\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x.}$$

证 这里要求的极限是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{x+\Delta x}-a^x}{\Delta x} = a^x\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x}.$$

为此用变量代换 $h = a^{\Delta x}-1$, 则

$$h\to 0 \Longleftrightarrow \Delta x\to 0,$$

而且 $h\neq 0 \Longleftrightarrow \Delta x\neq 0$, 因此根据复合函数的极限就得到

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{a^{\Delta x}-1}{\Delta x} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{\log_a(1+h)} = \lim_{h\to 0}\frac{h}{\dfrac{\ln(1+h)}{\ln a}} = \ln a,$$

其中利用了第四章中的 $\ln(1+x)\sim x$ $(x\to 0)$ (见教科书的 p.86). 合并以上就证明了公式 4. □

(7) 对数函数的导数公式:

$$\boxed{\textbf{公式 } 5. \quad (\ln|x|)' = \frac{1}{x}\ (x\neq 0).}$$

证 在 $\ln(1+x) \sim x \ (x \to 0)$ 的基础上只要作如下计算:

$$\begin{aligned}(\ln|x|)' &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln|x+\Delta x| - \ln|x|}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\Delta x} \\ &= \frac{1}{x} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\ln\left(1+\dfrac{\Delta x}{x}\right)}{\dfrac{\Delta}{x}} \\ &= \frac{1}{x}. \quad \square\end{aligned}$$

最后指出一个需要注意的问题, 即是对记号 $f'(x_0)$ 的理解. 这在前面已经讲过, 即 $f(x)$ 在点 x_0 的导数.

但实际上我们往往可以利用上述几个公式和今后的许多方法直接求出导数 $f'(x)$ 的公式, 它在某个区间上成立, 这时我们称 $f'(x)$ 为导函数, 而记号 $f'(x_0)$ 就是在一般公式 $f'(x)$ 中用 $x = x_0$ 代入的结果, 换言之, 即有

$$f'(x_0) = f'(x)\big|_{x_0}, \text{ 或 } f'(x)\big|_{x=x_0}.$$

这里要注意, 不能将 $f'(x_0)$ 错误地理解为 $[f(x_0)]'$, 后者当然是 0.

例 10 设已知 $f'(x^2) = \mathrm{e}^x$, 且 $f'(1) > 1$, 求 $f'(x)$.

解 由于

$$f'(x^2) = f'(t)\big|_{t=x^2},$$

因此就有

$$f'(x) = f'(t)\big|_{t=x},$$

这样就应当有

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\pm\sqrt{x}}, \ x \geqslant 0.$$

但 $f'(x) = \mathrm{e}^{-\sqrt{x}}$ 不能满足 $f'(1) > 1$ 的条件, 因此只能是

$$f'(x) = \mathrm{e}^{\sqrt{x}}, \ x \geqslant 0. \quad \square$$

第 20 次讲稿

第 20 次讲稿, 用于 2007 年 11 月 26 日, 星期一, 3 节课.

内容: 先讲完 §6.1 中的最后两个公式, 即指数函数和对数函数的导数公式. 还要讲例 10 (教科书 p.123).

然后讲第六章 导数和微分的第 2 节 求导法则. 其中含: 一. 四则运算法则, 三. 反函数求导法则, 五. 复合函数求导法则.

§ 6.2 求导法则

一. 四则运算法则

除了 $(\alpha u+\beta v)'=\alpha u'+\beta v'$ 在上一节讲过之外, 还需要乘除运算法则.

法则 1　设 $u(x)$ 可导, 则有 $(u^2)'=2uu'$.

证　作如下运算:

$$\begin{aligned}(u^2(x))' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u^2(x+\Delta x)-u^2(x)}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{[u(x+\Delta x)-u(x)]\cdot[u(x+\Delta x)+u(x)]}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}[u(x+\Delta x)+u(x)],\end{aligned}$$

利用存在 $u'(x)$, 又因可导时必连续, 因此就得到极限为 $2uu'$.　□

法则 2　设 $u(x),v(x)$ 均可导, 则有 $(uv)'=u'v+uv'$.

证　利用法则 1 以及恒等式

$$uv=\frac{1}{4}[(u+v)^2-(u-v)^2],$$

可作如下运算:

$$\begin{aligned}(uv)' &= \frac{1}{4}[2(u+v)(u'+v')-2(u-v)(u'-v')]\\ &= \frac{1}{2}[(uu'+vv'+u'v+uv')-(uu'+vv'-u'v-uv')]\\ &= u'v+uv'.\quad \square\end{aligned}$$

注　如何不用法则 1 而直接证明法则 2, 同时又作为它的特例导出法则 1, 可作为课外思考题.

法则 3　设 $u(x)$ 可导且 $u(x)\neq 0$, 则有 $\left(\dfrac{1}{u}\right)'=-\dfrac{u'}{u^2}$.

证

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{u}\right)' &= \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\dfrac{1}{u(x+\Delta x)}-\dfrac{1}{u(x)}}{\Delta x}\\ &= \lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{u(x+\Delta x)-u(x)}{\Delta x}\cdot\frac{-1}{u(x+\Delta x)u(x)}\right)\\ &= u'\cdot\frac{-1}{u^2}=-\frac{u'}{u^2}.\quad\square\end{aligned}$$

法则 4　设 $u(x), v(x)$ 可导且 $u(x)\neq 0$, 则有 $\left(\dfrac{v}{u}\right)'=\dfrac{v'u-u'v}{u^2}$.

证　利用法则 2 和法则 3 就有

$$\begin{aligned}\left(\frac{v}{u}\right)' &= \left(v\cdot\frac{1}{u}\right)'=v'\cdot\frac{1}{u}+v\left(\frac{1}{u}\right)'\\ &= v'\cdot\frac{1}{u}-v\cdot\frac{u'}{u^2}\\ &= \frac{v'u-u'v}{u^2}.\quad\square\end{aligned}$$

注　有时用

$$\left(\frac{v}{u}\right)'=v'\cdot\frac{1}{u}-v\cdot\frac{u'}{u^2}$$

更为方便.

下面我们来推导正切和余切函数的导数公式.

$$\boxed{\textbf{公式 } 6.\quad (\tan x)'=\frac{1}{\cos^2 x}=\sec^2 x,\quad (\cot x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}=-\csc^2 x}.$$

证

$$\begin{aligned}(\tan x)' &= \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{(\sin x)'\cos x-(\cos x)'\sin x}{\cos^2 x}\\ &= \frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}.\\ (\cot x)' &= \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)'=\frac{(\cos x)'\sin x-(\sin x)'(\cos x)}{\sin^2 x}\\ &= \frac{-\sin^2 x-\cos^2 x}{\sin^2 x}=-\frac{1}{\sin^2 x}.\quad\square\end{aligned}$$

三. 反函数求导公式

注意: 本书对反函数的介绍分三步. 第一步是在第三章的 §3.1 的九. 逆映射, 解决了反函数的存在性问题; 第二步是在 §5.3 的三. 反函数存在定理, 实际上是解决了反函数的连续性问题; 第三步就是这里, 进一步解决反函数的导数计算问题.

教科书上讲得太简单, 容易造成误解, 因此我们作了改动. 下面的定理从叙述开始就与书上不同.

定理 (反函数求导公式) 设 $y=y(x)$ 是在区间 I 上的严格单调连续函数, 又设其反函数 $x=x(y)$ 在点 y_0 处可导, 且 $x'(y_0)\neq 0$, 则 $y(x)$ 在点 $x(y_0)=x_0$ 处也可导, 且有

$$y'(x_0)=\frac{1}{x'(y_0)}.$$

若 $x'(y_0)=0$, 则有 $y'(x_0)=\infty$.

证 以下推导中的说明写在右边:

$$\begin{aligned}
&\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\ \text{(条件表明 } y_0 \text{ 为内点,从而 } x_0 \text{ 也是内点)}\\
&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}\ \text{(这是由于 } \Delta x\neq 0 \Longleftrightarrow \Delta y\neq 0)\\
&=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}\ \text{(这是由于 } \Delta x\to 0 \Longleftrightarrow \Delta y\to 0)\\
&=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta x}{\Delta y}}\ \text{(用条件 } x'(y_0)\neq 0)\\
&=\frac{1}{x'(y_0)}.
\end{aligned}$$

当 $x'(y_0)\neq 0$ 时, 则从非零无穷小量的倒数而知道 $y'(x_0)=\infty$. □

补充以下几点注意.

1. 由于 $x(y)$ 严格单调, 因此差商 $\dfrac{\Delta x}{\Delta y}$ 保号, 从而当 $x'(y_0)=0$ 时, $y'(x_0)$ 只能是有确定符号的无穷大量 $-\infty$ 或 $+\infty$.

2. x_0 与 y_0 同时为内点或端点. 对于它们为端点的情况, 定理中的导数应当改为单侧导数.

3. 在 $x'(y)$ 处处可导时, 就有公式

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y)},$$

书中简写为 $y'_x=\dfrac{1}{x'_y}$. 初学者往往难以正确理解这个公式, 公式的左边是 x 的函数, 而右边却是 y 的函数, 怎么可能呢?

实际上正确的写法是

$$y'(x)=\frac{1}{x'(y(x))}\ \text{ 或者写成 }\ y'_x=\frac{1}{x'_y}\bigg|_{y=y(x)}.$$

也就是说一定要明白在右边的分母表面上看是 y 的函数, 但其中的 y 是 x 的函数, 因此右边的分母是复合函数 $x'(y(x))$.

下列几个反三角函数的导数公式也是基本的求导公式: 这就是

$$\boxed{\text{公式 7 (1).}\quad (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},}$$

和

$$\boxed{\text{公式 7 (2).}\quad (\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2},\quad (\operatorname{arccot} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.}$$

现证明其中的两个.

对于 $y = \arcsin x$, 则其反函数为 $x = \sin y$, 定义域为 $-\dfrac{\pi}{2} \leqslant y \leqslant \dfrac{\pi}{2}$. 于是从 $x'_y = \cos y$ 可得到

$$(\arcsin x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y}\bigg|_{y=y(x)} = \frac{1}{\cos y}\bigg|_{y=\arcsin x}.$$

因 $y = \arcsin x$ 即 $x = \sin y$, 于是有 $\cos y = \sqrt{1-x^2}$, 因此

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

此外还要看到当 $x = \pm 1$ 时,

$$(\arcsin x)'\Big|_{x=\pm 1} = +\infty.$$

这里需要联系 $y = \arcsin x$ 的图像来理解这些结果.

同样对于 $y = \arctan x$ 有 $x = \tan y$ 和 $x'_y = \sec^2 y$, 于是有

$$(\arctan x)' = y'_x = \frac{1}{x'_y}\bigg|_{y=y(x)} = \frac{1}{\sec^2 y}\bigg|_{y=\arctan x},$$

因 $y = \arctan x$ 即 $x = \tan y$, 于是有 $\sec^2 y = 1 + \tan^2 y = 1 + x^2$, 即得到

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

补充:

利用反函数求导公式, 可以从指数函数的导数公式推出对数函数的导数公式, 也可以从对数函数的导数公式推出指数函数的导数公式.

设 $y = \ln x$, $x > 0$, 则有反函数 $x = \mathrm{e}^y$. 利用 $x'_y = (\mathrm{e}^y)' = \mathrm{e}^y$, 就有

$$(\ln x)' = \frac{1}{\mathrm{e}^y} = \frac{1}{x}.$$

反过来, 设 $y=\mathrm{e}^x$, 则有 $x=\ln y$, $y>0$, 从 $x'_y=\dfrac{1}{y}$, 就有

$$(\mathrm{e}^x)'=\frac{1}{\frac{1}{y}}=y=\mathrm{e}^x.$$

五. 复合函数的求导法则

这就是著名的链式法则 chain rule (或译为链导法、链规则等).

定理 (**复合函数的求导法则**) 设 $y=y(u)$, $u=u(x)$ 均可导, 则复合函数 $y=y(u(x))$ 在其定义域也可导, 且有

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x.$$

这是最为简短的记法, 其他记法有

$$\begin{aligned}
&[y(u(x))]'_x=y'_u(u(x))\cdot u'(x),\\
&(y\circ u)'(x)=y'(u(x))\cdot u'(x)=y'(u)\Big|_{u=u(x)}\cdot u'(x),\\
&\quad\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},
\end{aligned}$$

但最后一式右边第一个导数中要将 u 用 $u=u(x)$ 代入, 也就是说第一个因子实际上也是一个复合函数.

在证明链式法则之前可以先看一些例子, 学习其使用方法.

例 3 求 $(\sin 2x)'$.

解 这里要明白函数 $\sin 2x$ 是如何复合的. 它可以看成是 $y=\sin u$ 和 $u=2x$ 的复合. 因此有

$$(\sin 2x)'=(\sin u)'_u\Big|_{u=2x}\cdot(2x)'_x=(\cos 2x)\cdot 2=2\cos 2x\quad\square.$$

注 实际上平时我们只是在心中记住什么是中间变量 u, 并不将它写出来. 此题直接就可以写出

$$(\sin 2x)'=\cos 2x\cdot 2=2\cos 2x.$$

以下几题也都是如此.

例 4 求 $(\ln(1-x))'$.

解 心中记住 $u=1-x$, 直接有

$$(\ln(1-x))'=\frac{1}{1-x}\cdot(-1)=-\frac{1}{1-x}.\quad\square$$

例 5 求 $\left(\sin\dfrac{1}{x}\right)'$.

解 心中记住 $u=1/x$, 直接有

$$\left(\sin\frac{1}{x}\right)'=\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}.\quad\square$$

例 6 求 $(\sqrt{1+x^2})'$.

解 心中记住 $u=1+x^2$, 直接有

$$(\sqrt{1+x^2})'=\frac{1}{2}(1+x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}.\quad\square$$

下面来证明链式法则.

一开始要指出一种很有诱惑力的错误方法, 它有点像反函数求导法则的证明方法. 这就是

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x},\tag{$*$}$$

其中利用了 $\Delta x\to 0\iff\Delta u\to 0$ 以及乘积极限等于极限乘积的法则.

但这个证明有漏洞, 不能成立.

问题就出在基本类型的函数极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 中不允许 $x=x_0$. 从导数定义中我们已经明白这一点是必须的, 在 $\Delta x\to 0$ 的极限过程中不允许 $\Delta x=0$, 因为差商 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ 在 $\Delta x=0$ 时没有定义.

回顾上述推导过程 $(*)$, 在 $\Delta x\neq 0$ 时, 不能排除会发生 $\Delta u=0$ 的可能性. 由于 u 是中间变量, 我们无法强制规定 $\Delta u\neq 0$. 在发生 $\Delta u=0$ 时就不能成立 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\dfrac{\Delta u}{\Delta x}$. 因此上述证明不能成立.

教科书中的证明是正确的, 但写得太简单. 下面就以它为基础作出下列证明.

链式法则的证明 分几步来做.

(1) 定义 Δu 的函数 $\omega(\Delta u)$ 如下:

$$\omega(\Delta u)=\begin{cases}\dfrac{\Delta y}{\Delta u}, & \Delta u\neq 0,\\ y'_u, & \Delta u=0.\end{cases}$$

这里的目的很明白, 就是要克服差商在分母为 0 时没有定义的困难.

由于 $\lim\limits_{\Delta u\to 0}\omega(\Delta u)=\omega(0)$, 因此函数 $\omega(\Delta u)$ 在 $\Delta u=0$ 处连续.

(2) 这时成立下列等式:

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\omega(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}.\tag{$**$}$$

实际上在 $\Delta u \neq 0$ 时等式 $(**)$ 成立没有问题. 当 $\Delta u = 0$ 时, 右边为 0, 而左边的分子为

$$\Delta y = y(u(x+\Delta x)) - y(u(x)) = y(u(x)+\Delta u) - y(u(x)),$$

因此当 $\Delta u = 0$ 时也等于 0. 于是等式 $(**)$ 总是成立的.

(注意 $\Delta u = u(x+\Delta x) - u(x)$).

(3) 在等式 $(**)$ 中令 $\Delta x \to 0$, 这时 $\Delta u \to 0$, 由于 $\omega(\Delta u)$ 于 $\Delta u = 0$ 连续, 且 $\omega(0) = y'_u$, 因此就得到所要求证明的结果:

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = y'_u \cdot u'_x. \quad \square$$

注 在前面讲四则运算法则时的法则 1 和法则 3, 即

$$(u^2)' = 2u \cdot u', \quad \left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$$

都可以看成是链式法则的具体例子.

上面的证明与教科书上的证明相同, 但学生仍然难以看懂书上的证明. 现按照书上的线索再写一个. (这是讲课后再写的, 打算在下次上课前抄在黑板上.)

链式法则的证明 2 导数 y'_u 存在等价于

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + o(1) \ (\Delta u \to 0). \tag{1}$$

现在我们要将右边第二项改写为 $\alpha(\Delta u)$. 这相当于定义

$$\alpha(\Delta u) = \frac{\Delta y}{\Delta u} - y'_u, \tag{2}$$

即差商与微商之差. 它在 $\Delta u = 0$ 时无定义. 但由于 $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = 0$, 因此可以补充定义

$$\alpha(0) = 0, \tag{3}$$

(即教科书 p.100 上的连续延拓原理.) 于是由 (2) 和 (3) 联合定义的 $\alpha(\Delta u)$ 在 $\Delta u = 0$ 处连续, 且取值 0.

于是我们就可以将 (1) 改写为

$$\frac{\Delta y}{\Delta u} = y'_u + \alpha(\Delta u).$$

它在 $\Delta u \neq 0$ 时成立, 然而其右边的第二项在 $\Delta u = 0$ 时仍然有意义, 且为 0.

现在证明成立等式

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = [y'_u + \alpha(\Delta u)] \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}. \tag{4}$$

若 $\Delta u \neq 0$, 则 (4) 右边就是 $\frac{\Delta y}{\Delta u} \cdot \frac{\Delta u}{\Delta x}$, 因此成立. 若 $\Delta u = 0$, 则由于 (4) 左边的分子为

$$\Delta y = y(u(x+\Delta x)) - y(u(x)) = y(u(x)+\Delta u) - y(u(x)),$$

因此当 $\Delta u = 0$ 时 (4) 的左边等于 0. 另一方面, (4) 的右边在 $\Delta u = 0$ 时仍有意义, 由于 $\alpha(0) = 0$, 方括号内的值为 y'_u, 因此 (4) 右边也是 0. 从而 (4) 总是成立的.

最后在 (4) 两边令 $\Delta x \to 0$. 由于 $\Delta x \to 0 \Longrightarrow \Delta u \to 0$, 而 $\lim\limits_{\Delta u \to 0} \alpha(\Delta u) = \alpha(0) = 0$, 因此就得到: $y'_x = y'_u \cdot u'_x$. $\square$

第 21 次讲稿

第 21 次讲稿, 用于 2007 年 11 月 28 日, 星期三, 2 节课.

先讲完 §6.2 的两个例子与对数求导法.

然后讲第 3 节 高阶导数和其他求导法则. 其中含: 一. 高阶导数, 三. Leibniz 公式, 五. 隐函数求导法.

先讲教科书 p.130 上的两个例子.

例 7 求 $(x\sqrt{1+x^2})'$.

解 以下除了链式法则外还使用了前面学到的 $(uv)' = u'v + uv'$:

$$\begin{aligned}(x\sqrt{1+x^2})' &= \sqrt{1+x^2} + x \cdot \frac{1}{2}(1+x^2)^{-1/2} \cdot 2x \\ &= \sqrt{1+x^2} + \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} \\ &= \frac{1+2x^2}{\sqrt{1+x^2}}. \quad \square\end{aligned}$$

加一个例子, 它表明链式法则的重要性. 若没有链式法则, 则要用二项式定理展开为 101 项后求导, 还不知道如何再合并成简单的表达式.

补充例子 设 $y = (x^2+1)^{100}$, 求 y'.

解 将 x^2+1 看作为中间变量 u, 则就有

$$y' = 100(x^2+1)^{99} \cdot 2x = 200x(x^2+1)^{99}. \quad \square$$

例 8 求 $(\ln|\tan\frac{x}{2}|)'$.

解 这里遇到了多层次的复合函数, 即 $y = \ln|u|$, $u = \tan v$, $v = \dfrac{x}{2}$, 这时 $[y(u(v(x)))]'_x = y'_u \cdot u'_v \cdot v'_x$, 或写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}v}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}.$$

这样就可以计算如下:

$$\begin{aligned}(\ln|\tan\frac{x}{2}|)' &= \frac{1}{\tan\frac{x}{2}} \cdot \sec^2\frac{x}{2} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{\cos\frac{x}{2}}{2\sin\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} \\ &= \frac{1}{\sin x}. \quad \square\end{aligned}$$

在 §6.2 最后介绍对数求导法. 它首先是用于求 $(u^v)'_x$, 其中 u, v 都是 x 的可导函数, 且设 $u(x) > 0$ 成立.

对数求导法的应用有两种写法,

方法 1. $(u^v)' = (\mathrm{e}^{v\ln u})' = \mathrm{e}^{v\ln u}\cdot(v\ln u)'$
$$= u^v\cdot(v'\ln u + v\cdot\frac{1}{u}\cdot u')$$
$$= u^v v'\ln u + u^{v-1}vu'.$$

方法 2. 先对 u^v 取对数后求导, 一方面有
$$(\ln u^v)' = \frac{1}{u^v}(u^v)',$$
另一方面有
$$(\ln u^v)' = (v\ln u)' = v'\ln u + v\frac{1}{u}u',$$
因此有
$$(u^v)' = u^v v'\ln u + u^{v-1}vu'.$$

例 9 求 $y = \sqrt[3]{\dfrac{(x+1)(2x+1)^2}{x-3}}$ 的导函数.

解 先写出
$$\ln|y| = \frac{1}{3}\ln|x+1| + \frac{2}{3}|2x+1| - \frac{1}{3}\ln|x-3|,$$
因此对 x 求导就得到
$$\frac{y'}{y} = \frac{1}{3(x+1)} + \frac{4}{3(2x+1)} - \frac{1}{3(x-3)}.$$
于是有
$$y' = y(\frac{1}{3(x+1)} + \frac{4}{3(2x+1)} - \frac{1}{3(x-3)}). \quad \Box$$

注 这里还应当讨论在点 $-1, -\dfrac{1}{2}, 3$ 处的导数. 实际上有 $f'(-1) = -\infty$, $f'_-(-\dfrac{1}{2}) = +\infty$, $f'_+(-\dfrac{1}{2}) = -\infty$, 这些都可以从上述表达式的极限看出. 但在点 $x = 3$ 处函数为第二类间断点, 因此不需要讨论.

再补充一个例子.

例 求 $y = x^{\frac{1}{x}}$ 的导函数, 其中 $x > 0$.

解 取对数后求导:
$$(\ln y)' = \frac{y'}{y} = \left(\frac{\ln x}{x}\right)'$$
$$= \ln x\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right) + \frac{1}{x^2} = \frac{1-\ln x}{x^2},$$

最后

$$y' = y \cdot \frac{1-\ln x}{x^2} = x^{\frac{1}{x}-2}(1-\ln x). \quad \square$$

§ 6.3 高阶导数和其他求导法则

一. 高阶导数

若函数 $y(x)$ 可求导, 则得到导函数 $y'(x)$, 若它也可求导, 则就得到 $y(x)$ 的二阶导数, 记为 $y''(x)$. 依此类推, 就可以归纳地将 $y(x)$ 的 $n-1$ 阶导函数 $y^{(n-1)}(x)$ 的导数定义为 $y(x)$ 的 n 阶导数 $y^{(n)}(x)$, 即

$$y^{(n)}(x) = [y^{(n-1)}(x)]'.$$

经常使用的高阶导数记号还有从 $f'(x)$ 发展出来的

$$f''(x), f'''(x), f^{(4)}(x), \cdots, f^{(n)}(x), \cdots$$

和从 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 发展出来的

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \frac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3}, \cdots, \frac{\mathrm{d}^nx}{\mathrm{d}x^n}, \cdots.$$

例 2　设 $y = (x-a)^\beta$, 求 $y^{(n)}$.

解　反复用幂函数导数公式就得到

$$y^{(n)} = ((x-\beta)^\beta)^{(n)} = \beta(\beta-1)\cdots(\beta-n+1)(x-\beta)^{\beta-n}.$$

由此可见, 当 $\beta = m$ 为正整数时, 只要 $n > m$, 就有 $y^{(n)}(x) = 0$. 更进一步, 设 $p(x)$ 为 m 次多项式, 则也有同样的结论.

例 3　设 $f(x) = \sin\omega x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

先看 $\omega = 1$ 的情况. 容易看出

$$(\sin x)' = \cos x, (\sin x)'' = -\sin x, (\sin x)''' = -\cos x, (\sin x)^{(4)} = \sin x,$$

可见出现了周期 4 的循环现象. 这对于 $\cos x$ 也是如此. 记住这个现象对于不少问题有用.

但如何写出一个通式? 利用正弦函数的简化公式

$$\sin(x + \frac{\pi}{2}) = \cos x,$$

就可以解决这个问题, 即有

$$(\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2}).$$

实际上用数学归纳法就很容易验证它的正确性.

在这个基础上, 本例对于一般 ω 的答案就是 $(\sin x)^{(n)} = \omega^n \sin(x + \frac{n\pi}{2})$. □

下面补充复数计算方法, 它可以同时求出 $(\sin x)^{(n)}$ 和 $(\cos x)^{(n)}$, 而且可以看出 $n\pi/2$ 是如何生成的.

为此首先注意下面讨论的是实变复值函数, 即自变量为实数, 因变量为复数的函数. 这时它的导数用分别对实部和虚部求导的方法来定义, 即 $(u+\mathrm{i}v)'_x = u'_x+\mathrm{i}v'_x$, 其中 u, v 都是 x 的可微一元实函数. 用同样的方法又可以定义实变复值函数的高阶导数.

首先有

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})' &= (\cos x + \mathrm{i}\sin x)' \\ &= (\cos x)' + \mathrm{i}(\sin x)' \\ &= -\sin x + \mathrm{i}\cos x \\ &= \mathrm{i}\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}x}.\end{aligned}$$

于是就有 $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^{(n)} = (\cos x)^{(n)} + \mathrm{i}(\sin x)^{(n)}$, 又有

$$\begin{aligned}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}x})^{(n)} &= \mathrm{i}^n\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} = (\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}})^n\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}x} \\ &= \mathrm{e}^{\mathrm{i}(x+\frac{n\pi}{2})} \\ &= \cos(x+\frac{n\pi}{2}) + \mathrm{i}\sin(x+\frac{n\pi}{2}),\end{aligned}$$

等置实部与虚部即可同时得到

$$(\cos x)^{(n)} = \cos(x+\frac{n\pi}{2}), \quad (\sin x)^{(n)} = \sin(x+\frac{n\pi}{2}).$$

下面一个例子中的分解方法也是重要的.

例 4　求 $y = \dfrac{1}{x(x-1)}$ 的 n 阶导数.

解　采用分解方法, 从 $y = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{1}{x}$, 即有

$$\begin{aligned}y^{(n)} &= ((x-a)^{-1})^{(n)} - (x^{-1})^{(n)} \\ &= (-1)(-2)\cdots(-n)[(x-1)^{-1-n} - x^{-1-n}] \\ &= (-1)^n n!\left(\frac{1}{(x-1)^{n+1}} - \frac{1}{x^{n+1}}\right). \quad \square\end{aligned}$$

三. Leibniz 公式

这是求高阶导数的主要工具之一.

Leibniz 公式　设 $u(x), v(x)$ 都有 n 阶导数, 则有

$$(uv)^{(n)} = \mathrm{C}_n^0 u^{(0)}v^{(n)} + \mathrm{C}_n^1 u'v^{(n-1)} + \cdots + \mathrm{C}_n^n u^{(n)}v^{(0)},$$

其中 $u^{(0)}=u$, $v^{(0)}=v$.

证 $n=1$ 时即 $(uv)'=uv'+u'v$.

设 n 时公式已经成立, 则对于 $n+1$ 就有

$$(uv)^{(n+1)}=(\mathrm{C}_n^0u^{(0)}v^{(n)}+\mathrm{C}_n^1u'v^{(n-1)}+\cdots+\mathrm{C}_n^nu^{(n)}v^{(0)})'.$$

对于 $k=0,1,\cdots,n$ 有

$$(\mathrm{C}_n^ku^{(k)}v^{(n-k)})'=\mathrm{C}_n^k(u^{(k+1)}v^{(n-k)}+u^{(k)}v^{(n-k+1)}),$$

则就有

$$\begin{aligned}(uv)^{(n+1)}&=(\sum_{k=0}^n\mathrm{C}_n^ku^{(k)}v^{(n-k)})'\\&=\sum_{k=0}^n\mathrm{C}_n^k(u^{(k+1)}v^{(n-k)}+u^{(k)}v^{(n-k+1)})\\&=\sum_{k=1}^{n+1}\mathrm{C}_n^{k-1}u^{(k)}v^{(n-k+1)}+\sum_{k=0}^n\mathrm{C}_n^ku^{(k)}v^{(n-k+1)}\\&=\mathrm{C}_n^0u^{(0)}v^{(n+1)}+\sum_{k=1}^n(\mathrm{C}_n^{k-1}+\mathrm{C}_n^k)u^{(k)}v^{(n-k+1)}+\mathrm{C}_n^nu^{(n+1)}v\\&=\sum_{k=0}^{n+1}\mathrm{C}_{n+1}^ku^{(k)}v^{(n+1-k)}.\quad\square\end{aligned}$$

注意这里的证明与用数学归纳法证明二项式定理的过程完全相同. 其中将一个和式的 k 换为 $k'-1$, 因此当 k 从 0 到 n 时, k' 从 1 到 $n+1$. 然后再将 k' 记为 k. 请同学在课后将二项式定理用相同的方法证明一次.

下面是用 Leibniz 公式的两个例子.

例 5 求 $(x^2\sin x)^{(80)}$.

解 利用 $n\geqslant 3$ 时 $(x^2)^{(n)}=0$, 可见在本题中, 用 Leibniz 公式得到的 81 项中只有 3 个非零项 (也可说成只有 3 项作出了非零贡献):

$$\begin{aligned}(x^2\sin x)^{(80)}&=x^2\cdot(\sin x)^{(80)}+80\cdot 2x\cdot(\sin x)^{(79)}+\frac{80\cdot 79}{2}\cdot 2\cdot(\sin x)^{(78)}\\&=x^2\sin x+160x(-\cos x)+6320(-\sin x)\\&=(x^2-6320)\sin x-160x\cos x.\quad\square\end{aligned}$$

例 6 设 $P_n(x)=\dfrac{1}{2^nn!}\cdot\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n$, 计算 $P_n(1)$, $P_n(-1)$.

解 从

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(x^2-1)^n = \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x-1)^n(x+1)^n]$$

和 Leibniz 公式可见对 $P_n(1)$ 作出 (非零) 贡献的是不含因子 $x-1$ 的项, 因此有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x-1)^n(x+1)^n]\Big|_{x=1} = n!(x+1)^n\Big|_{x=1} = n!2^n,$$

可见 $P_n(1)=1$.

同样有

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}[(x-1)^n(x+1)^n]\Big|_{x=-1} = n!(x-1)^n\Big|_{x=-1} = (-1)^n n!2^n,$$

可见 $P_n(-1)=(-1)^n$. □

五. 隐函数求导法

这里只能对隐函数概念给出较为通俗的描述, 真正的定义和有关定理是下册第十九章的任务.

定义 由方程确定的函数称为隐函数 (implicit function), 与之相对的是显函数 (explicit function), 即明确给出定义域和映射关系的函数.

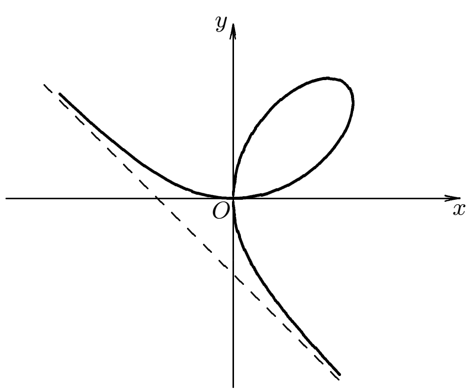


图 1: Descartes 叶线.

例如方程 $x^2+y^2=1$ 确定了 $y=\pm\sqrt{1-x^2}$, 后者称为显函数, 而未解出之前称为隐函数. 由方程确定的隐函数不一定能够解出来, 有时即使能解出来, 所得到的表达式也难以使用.

例如图 1 中所示的 Descartes 叶线就是如此. 它的方程为 $x^3+y^3=xy$. 在 x 的某些区间上该方程确定了 3 个隐函数, 它们的表达式都离不开复数, 很难作为研究的出发点.

这时我们就需要从方程直接研究隐函数. 关于什么情况下存在隐函数, 它的定义域是什么, 它是否可导等问题都要等到下册第十九章才能解决. 以下只是存在可导的隐函数前提下介绍隐函数的导数计算方法.

一般而言, 设有一个函数 $y=y(x)$ 满足方程

$$F(x,y)=0,$$

这就是表示将 $y=y(x)$ 代入之后得到恒等式

$$F(x,y(x))\equiv 0.$$

对它直接求导就有可能得到 y', 甚至求出更高阶的导数.

现在具体看一下由方程 $x^2+y^2=1$ 确定的隐函数, 用隐函数求导法得到的导数与解出为显函数后的导数什么关系.

将 $y=y(x)$ 代入方程, 得到恒等式

$$x^2+y^2(x)\equiv 1,$$

求导之后得到

$$2x+2yy'(x)\equiv 0.$$

解出 $y'(x)$ 就得到

$$y'(x)=-\frac{x}{y(x)}.,\tag{$*$}$$

只要 $y\neq 0$ 就成立. 另一方面, 从方程 $x^2+y^2=1$ 解出两个显函数, 它们的定义域为 $[-1,1]$:

$$y_1(x)=\sqrt{1-x^2},\quad y_2(x)=-\sqrt{1-x^2}.$$

它们的导数为

$$y_1'(x)=-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{y_1(x)},$$
$$y_2'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{x}{y_2(x)},$$

其中 $-1<x<1$, 也就是 $y_1,y_2\neq 0$.

比较两个方法得到的结果, 可见与用隐函数求导法得到的结果完全相同. 此外还可看出, 用隐函数求导法得到的公式对于由方程确定的多个隐函数同时适用.

注 实际上考虑到不同的定义域上相同的解析表达式代表不同的函数, 因此满足方程 $x^2+y^2=1$ 的隐函数不仅仅只有上面的 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$, 而有无限多个, 但它们的导函数都可以用统一的公式 $y'(x)=-\dfrac{x}{y(x)}$ 表达出来.

注 2 平时的隐函数求导法中往往没有写明对恒等式求导. 例如, 上述例子中, 往往只说将隐函数 $y=y(x)$ 代入方程 $x^2+y^2=1$, 然后对 x 求导, 就得到

$$2x+2yy'=0,$$

由此解得 $y'=-\dfrac{x}{y}$. 同学应当理解前面都是恒等式, 而最后一步中的 y 是 $y=y(x)$.

下面举一个例子. 教科书上没有将计算进行到底, 这是不对的.

例 7 设 $y=y(x)$ 满足方程 $x^2+xy+y^2=1$, 求 y' 和 y''.

解 从恒等式 $x^2+xy(x)+y^2(x)\equiv 1$ 对 x 求导, 得到

$$2x+y+xy'+2yy'=0,\tag{$*$}$$

解出

$$y'=-\frac{2x+y}{x+2y}.$$

这里要注意右边出现的 $y = y(x)$, 因此右边是 x 的函数.

求 $y''(x)$ 有两个方法. 第一个方法是直接用已经得到的 y' 的表达式对 x 求导, 即有

$$\begin{aligned}
y'' = (y')' &= \left(-\frac{2x+y}{x+2y}\right)' \\
&= -\frac{(2+y')(x+2y)-(1+2y')(2x+y)}{(x+2y)^2} \\
&= -\frac{3y+y'(-3x)}{(x+2y)^2} \\
&= -\frac{1}{(x+2y)^2}\cdot\left(3y+3x\cdot\frac{2x+y}{x+2y}\right) \\
&= -\frac{1}{(x+2y)^2}\cdot\frac{6y^2+6x^2+6xy}{x+2y} \\
&= -\frac{6}{(x+2y)^3}.
\end{aligned}$$

第二个方法是将恒等式 $(*)$ 对 x 再求导得到

$$2+y'+y'+xy''+2y'^2+2yy''=0,$$

解出 y'' 并作如下计算:

$$\begin{aligned}
y'' &= -\frac{2(1+y'+y'^2)}{x+2y} \\
&= -\frac{2}{x+2y}\cdot\left(1-\frac{2x+y}{x+2y}+\frac{(2x+y)^2}{(x+2y)^2}\right) \\
&= -\frac{2}{(x+2y)^3}\cdot[(x^2+4xy+4y^2)-(2x^2+5xy+2y^2)+(4x^2+4xy+y^2)] \\
&= -\frac{2}{(x+2y)^3}\cdot(3x^2+3xy+3y^2) \\
&= -\frac{6}{(x+2y)^3}. \quad \square
\end{aligned}$$

第 22 次讲稿

第 22 次讲稿, 用于 2007 年 12 月 3 日, 星期一, 3 节课.

先讲 §6.3 的最后一小节, 即六. 参数方程求导.

然后讲第六章最后一节, 即 §.6.4 微分. 其中包含: 一. 微分的定义, 三. 微分与函数增量的关系、可微性, 四. 微分的几何意义, 五. 高阶微分, 六. 一阶微分形式的不变性.

六. 参数方程求导

除了用方程来定义函数, 即隐函数之外, 用参数方程 $x = x(t), y = y(t)$ 来定义函数 $y = y(x)$ 也是一种常用方法. 具体来说, 若 $x = x(t)$ 有反函数 $t = t(x)$, 则就得到 y 为 x 的函数:

$$y = y(t(x)).$$

但在给出显式 $x = x(t)$ 时, 反函数 $t = t(x)$ 的存在性不等于有显式可以用于求导, 因此如何计算 y'_x 就是一个需要解决的问题.

参数方程的求导法则 设 $x(t), y(t)$ 均在区间 I 上定义且可导, 又设 $x'(t)$ 在 I 上没有零点, 则有

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}.$$

(也可记为 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}}$.)

证 利用后面的知识[①]可以知道 $x = x(t)$ 是严格单调的连续函数, 因此在区间 $x(I)$ 上存在反函数 $t = t(x)$, 从反函数求导法则得到

$$t'(x) = \frac{1}{x'(t)}\Big|_{t=t(x)}.$$

这时在区间 $x(I)$ 上复合函数 $y = y(t(x))$ 有定义. 按照复合函数求导法则得到

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = y'_t(t(x)) \cdot t'(x) = \frac{y'(t)}{x'(t)}\Big|_{t=t(x)}. \quad \square$$

进一步, 若 $x(t), y(t)$ 对于 t 都是二阶可导, 则还可以计算 y''_x. 这时先注意导数

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t}$$

表面上是 t 的函数, 但通过前面所说的 $x = x(t)$ 的反函数 $t = t(x)$ 而成为 x 的函数. 根据完全相同的推导, 就有

---

① 也就是说区间上的可导函数, 若导函数无零点, 则导函数保号, 从而函数严格单调. 教科书引用 p.173 §8.2 的四. 练习题 3, 这不妥当. 还没有做的习题怎么可以作为依据? 我们将在第七章解决这个问题.

$$y''_x = (y'_x)'_x = (y'_x)'_t \cdot t'_x = \frac{(y'_x)_t}{x'_t},$$

将前面的 y'_x 代入就有

$$\begin{aligned} y''_x &= \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t \cdot t'_x \\ &= \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^2_t} \cdot \frac{1}{x'_t} \\ &= \frac{y''_t x'_t - x''_t y'_t}{x'^3_t}. \end{aligned}$$

下面是书上的一个例子.

例 9　设圆的参数方程为 $x = \cos t$, $y = \sin t$, 求 y''_x.

解　先求出

$$y'_x = y'_t \cdot t'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{\cot t}{-\sin t} = -\cot t,$$

然后求

$$\begin{aligned} y''_x &= (y'_x)'_x = (-\cot t)'_x = -(\cot t)'_t \cdot t'_x \\ &= \csc^2 t \cdot \frac{1}{x'_t} = -\csc^2 t \cdot \frac{1}{\sin t} = -\frac{1}{\sin^3 t}. \quad \square \end{aligned}$$

注　在这里应当强调不要背公式, 而是学会如何使用复合函数求导法则 (即链式法则) 和反函数求导法则.

§ 6.4 微　分

在讲了导数的基础上, 我们介绍第六章的第二个重要概念: 微分.

首先看几个例子. 先看圆面积公式 $S=\pi r^2$, 其中将面积 S 作为半径 r 的函数, 则就有 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}=2\pi r$, 右边恰是圆周长公式. 又看球体积公式 $V=\dfrac{4}{3}\pi r^3$, 则就有 $\dfrac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}r}=4\pi r^2$, 恰是球面积公式. 为什么会如此? 下面还是从教科书上的正方形面积开始讲起, 但不如圆面积和球体积的例子生动.

一. 微分的定义

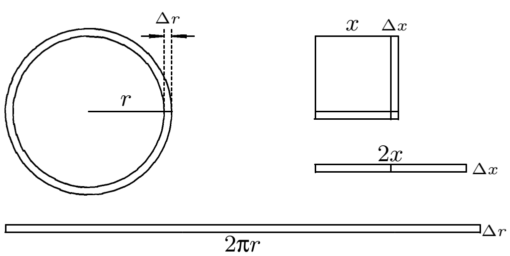


图 1: 微分的几何例子.

如图 1 所示, 设 $S(x)=x^2$ 是边长 x 的正方形面积, 在 x 变为 $x+\Delta x$ 时有

$$\begin{aligned}\Delta S &= S(x+\Delta x)-S(x)\\ &= (x+\Delta x)^2-x^2\\ &= 2x\Delta x+\Delta x^2,\end{aligned}$$

其中记号 $\Delta x^2=(\Delta x)^2$ 是习惯记法. 注意在 $2x\Delta x$ 中 $2x=(x^2)'$.

当 Δx 充分小时, 在 ΔS 的两项中第一项 $2x\Delta x$ 在数值上是主要部分. 因此往往称这一项为线性主部.

对于圆面积可作同样的观察. 设圆面积 $S=\pi r^2$ 若半径从 r 变为 $r+\Delta r$, 则有

$$\Delta S=\pi(r+\Delta r)^2-\pi r^2=2\pi r\Delta r+(\Delta r)^2=2\pi r\Delta r+\Delta r^2,$$

其中将 $(\Delta r)^2$ 记为 Δr^2 是习惯记法. 可见当增量 Δr 充分小时, ΔS 出现了关于 Δr 的线性项, 即一次项, 它的系数恰好是导数 $\dfrac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}r}$. 第二项则是 Δr 的二次项. 这与上面对正方形面积增量的情况相同.

注　若自变量为 x, 则当 $\Delta x\to 0$ 时, 我们可以用它作为标准的无穷小量, 而将 Δx^n 称为 n 阶无穷小量. 又将 $o(\Delta x)=o(1)\Delta x$ 称为比 Δx 更高阶的无穷小量. 用这样的术语就可以将以上两个例子中的因变量增量看成为两项之和, 第一项是关于 Δx 的线性项, 第二项是关于 Δx 的二阶项.

从图 1 可以理解以上分解在几何上的意义.

对于球体积公式也有同样的情况, 同学可以自己分析.

将以上两个例子的分析推广到一般情况, 这就导致本节的微分概念.

定义　设 x 是自变量, 函数 $y(x)$ 在点 x_0 可导, 则称乘积 $y'(x_0)\Delta x$ 为函数 $y'(x)$ 在点 x_0 的微分, 记为

$$\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\mathrm{d}x = \Delta x$ 称为自变量 x 的微分. 又若 $y = f(x)$ 在区间 I 上处处可导, 则就有

$$\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x,$$

这是 x 和 $\mathrm{d}x$ 的二元函数.

注 1 按照上述定义, 自变量的微分就是自变量的增量, 因变量的微分是导数与自变量的微分的乘积. 将 Δx 等同于 $\mathrm{d}x$ 的根据可以从最简单函数 $y = x$ 的微分为

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}x = (x)'\Delta x = \Delta x$$

来理解.

注 2 在引入微分概念之后, 导数记号 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ 可以看成为真正的分数, 分子是因变量的微分, 分母是自变量的微分. 换言之,

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y'(x)$$

的左边不仅仅是导数的多种记号之一, 而且确实可以看成为分式.

从微分的定义可见微分的计算是容易的. 只要将导数乘以自变量的微分即可.

下面是教科书上的几个例子,

例 1 求 $y = x^2$ 在 $x = 1$ 处的微分 $\mathrm{d}y$, 并计算 $\mathrm{d}y(1, 0.1)$.

解 从 $\mathrm{d}y = 2x\,\mathrm{d}x$ 知道在点 $x = 1$ 处 $\mathrm{d}y = 2\,\mathrm{d}x$, 又得到 $\mathrm{d}y(1, 0.1) = 2 \cdot 0.1 = 0.2$. □

注 解释一下此例题的含义. 在 $x = 1$ 的 $\mathrm{d}y$ 就是 $\Delta y = (1+\Delta x)^2 - 1^2 = 2\Delta x + \Delta x^2$ 中的线性主部. 在取 $\Delta x = 0.1$ 时, 我们看到 $\Delta y = 1.21 - 1 = 0.21$, $\mathrm{d}y = 0.2$ 是其主要部分. 如果改取 $\Delta x = \mathrm{d}x = 0.01$, 则可以看出 $\Delta y = 1.01^2 - 1 = 0.0201$, 而 $\mathrm{d}y(1, 0.01) = 2\,\mathrm{d}x = 0.02$.

以下几个例子只是公式 $\mathrm{d}y(x) = y'\,\mathrm{d}x$ 的应用.

例 2 设 c 是常数, 证明: $\mathrm{d}c = 0$.

证 这就是说常值函数的微分总等于 0. 由 $c' = 0$ 就有 $\mathrm{d}c = (c')\,\mathrm{d}x = 0$. □

例 3 对于函数 $y = x$, 求 $\mathrm{d}y$.

解 由公式 $\mathrm{d}y = x'\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}x$ 即得. 这表明对于函数 $y = x$ 来说, 自变量微分既等于自变量增量, 也等于因变量的微分. □

例 4 $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}\sin x = \cos x\,\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}\tan x = \sec^2 x\,\mathrm{d}x$.

下一个例子则有新的内容, 即已知微分求原来的函数是什么. 这是今后不定积分中的主要问题.

例 5 填充 $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\qquad)$ (只要填一个函数).

解 这就是问什么函数的导数等于 $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$? 从
$$\mathrm{d}\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} = (\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}})' \,\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x$$
可见 $-2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$ 即符合要求. □

在教科书 p.139 列出的微分法则中, 前三条只是四则运算法则, 可以从求导的对应法则推出, 只有最后一条需要讲一下它的意义.

复合函数的微分法则 设 $u(x)$ 可导, $y(u)$ 可导, 则有

$$\mathrm{d}y = [y(u(x))]'_x \,\mathrm{d}x = (y'_u(u(x)) \cdot u'_x)\,\mathrm{d}x = y'_u(u(x)) \cdot (u'_x \,\mathrm{d}x) = y'(u)\,\mathrm{d}u.$$

从复合函数 $y = y(u(x))$ 来看, 这里 x 是自变量, u 是中间变量, y 是因变量. 前几步推导只是用复合函数的求导法则, 但最后一步则有新意, 即当 $y = y(u)$ 中的 u 并非自变量, 而只是中间变量时, 公式 $\mathrm{d}y = y'(u)\,\mathrm{d}u$ 仍然成立, 就好像 u 是自变量时一样. 然而, 当 u 不是自变量时, $\mathrm{d}u$ 与 Δu 是不同的. 所以这里实际上就是下面要讲的一阶微分的形式不变性, 但这里已经出现了.

三. 微分与增量的关系、可微性

在上面已经看到了微分是因变量增量中关于自变量增量的线性部分, 但这是在可导的前提下得到的. 下面提出可微的一般性定义.

可微性的定义 若存在一个常数 k, 使得函数 $y = f(x)$ 在点 x_0 的增量
$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k\Delta x + o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0),$$
则称 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微, 称 $k\Delta x$ 是 Δy 的线性主部, 又称 $k\Delta x$ 为 $y = f(x)$ 在点 x_0 的微分, 并记为
$$\mathrm{d}y = k\mathrm{d}x,$$
其中 $\Delta x = \mathrm{d}x$.

这里立即产生一个问题, 即前面已经定义过微分为 $\mathrm{d}y = f'(x_0)\,\mathrm{d}x$, 而上面又定义一个微分, 两者是什么关系?

这个问题由下面的定理解决.

定理 $y = f(x)$ 在点 x_0 可微的充分必要条件是 $y = f(x)$ 在点 x_0 处可导, 且这时有
$$\begin{aligned}\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) &= f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0) \\ &= \mathrm{d}y + o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0).\end{aligned} \tag{$*$}$$

证 充分性 ($\Longleftarrow$). 若 $y = f(x)$ 于点 x_0 可导, 则有 $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \dfrac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0)$, 从而就有
$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + o(1)\ (\Delta x \to 0),$$

这就是

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0),$$

从而可导必可微, 且 $k = f'(x_0)$.

必要性 ($\Longrightarrow$). 因 $y = f(x)$ 于点 x_0 可微, 故存在常数 k, 使成立

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = k\Delta x + o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0).$$

于是有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = k + \frac{o(\Delta x)}{\Delta x}\ (\Delta x \to 0),$$

即得到

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = k,$$

因此 $y = f(x)$ 于点 x_0 可导, 且 $f'(x_0) = k$. 于是 $(*)$ 成立. □

注 可导与可微虽然是等价的, 但二者的意义不同. 此外在将来的多元微积分中, 多元函数的可微与可 (偏) 导是不等价的.

注 2 线性主部是一种习惯用语, 但"主部"的名称有不严格处. 若在点 x_0 处 $y'(x_0) = 0$, 则 $\mathrm{d}y = o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0)$, 其中根本没有线性主部. 只有当 $k = y'(x_0) \neq 0$ 时, 在 Δy 中的第二项与第一项之比才是无穷小量:

$$\frac{o(\Delta x)}{k\Delta x} = \frac{o(1)}{k} \to 0\ (\Delta x \to 0).$$

这时 $\mathrm{d}y$ 才是 Δy 中的主部.

从可微性的定义知道, 当 Δx 充分小时, 可以用微分 $\mathrm{d}y = y'(x_0)\Delta x$ 来代替增量 Δy. 这样所引起的误差关于 Δx 是高阶无穷小量. 由于 $\mathrm{d}y$ 是 $\mathrm{d}x$ 的线性函数, 计算特别方便, 利用

$$\Delta y \approx \mathrm{d}y$$

是许多近似计算公式的来源. 下面就是这方面的例子.

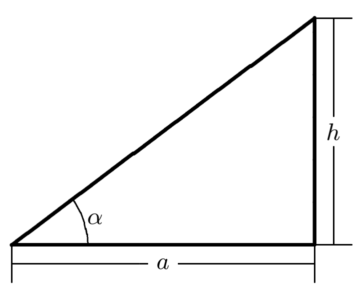


图 2: 测量误差估计.

例 6 如图 2 所示用测量仰角 α 和水平距离 a 的方法来得到高度 $h = a\tan\alpha$. 现在估计由于测量 α 时的误差而产生的影响. 这就是要估计

$$\Delta h = a\tan(\alpha + \Delta\alpha) - a\tan a.$$

当 $\Delta\alpha$ 充分小时, 可以用微分 $\mathrm{d}h$ 代替 Δh 而作出很方便的估计. 这时有

$$\mathrm{d}h = (a\sec^2\alpha)\,\mathrm{d}\alpha.$$

书里给了一个数值例子, 即当标称值 (实际读数) $\alpha = 30°$, $a = 10$ 米, $\Delta\alpha =$

$\mathrm{d}\alpha = \pm 1^\circ$, 时, 我们有 $h = 10/\sqrt{3} \approx 5.77$ 米, 而误差

$$\mathrm{d}h = 10 \cdot (\frac{2}{\sqrt{3}})^2 \cdot \frac{2\pi}{360} = \frac{2\pi}{27} \approx 0.23 \text{ 米},$$

因此最后的测量结果是

$$h = 5.77 \pm 0.23 \text{ 米},$$

或者说 $5.54 \leqslant h \leqslant 6$.

注 这里的角必须用弧度制单位来计算, 因为微积分中许多公式都离不开基本极限 $\sin x \sim x \ (x \to 0)$, 它只有在弧度制下才正确.

下面一个例子可以自学, 只要注意由于使用了微分来代替增量, 从而结果是自变量增量乘上导数值, 这样就使得计算非常简单.

例 7 已知某正方体受热后体积膨胀了 0.03%, 问每边伸长了百分之几?

解 从体积公式 $V = x^3$ 有

$$\mathrm{d}V = 3x^2 \, \mathrm{d}x.$$

已知 $\dfrac{\mathrm{d}V}{V} = 0.0003$, 则就有

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} = \frac{\mathrm{d}V}{3x^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\mathrm{d}V}{V},$$

可见每边伸长约 0.01%. □

小结 一般而言, 直接按照因变量增量的定义 $\Delta y = y(x + \Delta x) - y(x)$ 进行估计往往比较复杂, 若能求出导数 $y'(x)$, 则就可以很方便地用 Δy 中的线性主部 $y'(x) \, \mathrm{d}x$ 来估计误差. 这是导数的应用之一.

四. 微分的几何意义

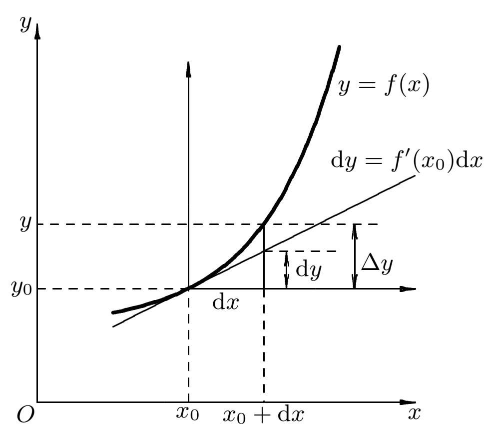


图 3: 微分的几何意义.

如图 3 所示, 考虑曲线 $y = f(x)$ 上的点 (x_0, y_0), 其中 $y_0 = f(x_0)$, 而曲线 $y = f(x)$ 上经过点 (x_0, y_0) 的切线是

$$Y - y_0 = y'(x_0)(X - x_0),$$

其中 X, Y 为流动坐标.

若将坐标系平行移动, 以点 (x_0, y_0) 为新的原点, 又以 $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ 为新的坐标, 则切线方程就成为

$$\mathrm{d}y = f'(x_0) \, \mathrm{d}x.$$

这里有重要的几何意义, 这就是当曲线 $y=f(x)$ 在点 $(x_0, f(x_0)$ 有切线时, 在 x_0 的充分小的邻域内, 曲线可以用切线来代替而不会引起很大的误差. 这就是所谓"以直代曲"的微分学思想. 如果不从几何上说, 即所谓"一次近似"或"线性近似".

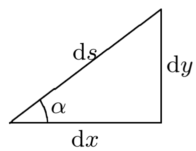


图 4: 微分三角形.

另一方面, 在图 3 上还可以看到, 取定 $\mathrm{d}x$ 时, 就得到一个以 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 为直角边的直角三角形, 今后称为微分三角形. 它的斜边在今后会知道即是曲线弧长的微分 $\mathrm{d}s$. 在图 4 中单独作出了微分三角形的示意图. 其中的角 α 满足条件

$$\tan\alpha = f'(x_0).$$

从图 3 还可以看出 $\mathrm{d}y$ 与 Δy 的关系. 但要注意, 该图中的 $\Delta y > \mathrm{d}y$ 并不具有普遍意义, 相反的情况也是可能的.

在微分三角形中, 与直角边 $\mathrm{d}y$ 对应的角若记为 α, 则就有 $\tan\alpha = y'(x_0)$, 它就是切线的斜率.

下面看一个例子. 函数 $y=x^2$ 的图像是开口向上的抛物线. 取 $x_0=0$, 我们来观察抛物线 $y=x^2$ 与抛物线在点 $(0,0)$ 的切线之间的接近程度. 如图 5 所示, 分别在区间 $[-1,1]$, $[-0.1,0.1]$ 和 $[-0.01,0.01]$ 上作出了抛物线 $y=x^2$ 的图像. 其中纵轴和横轴的标度是 1: 1.

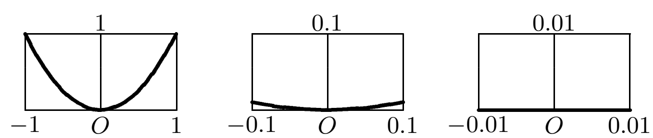


图 5: 以直代曲的例子.

可以看出, 在区间 $[-0.01, 0.01]$ 上, 在我们的作图精度范围内已经无法区分抛物线和它的过点 $(0,0)$ 的切线了. 对于一般的曲线和曲线上某点的切线, 情况也是如此. 这就是"以直代曲"的例子.

五. 高阶微分

上面的微分就是一阶微分, 现在考虑高阶微分.

设函数 $y=y(x)$ 在区间 I 上处处可导, 也就是处处可微, 则微分 $\mathrm{d}y = y'(x)\,\mathrm{d}x$ 中的 x 和 $\mathrm{d}x$ 是相互独立的变量, 因此 $\mathrm{d}y$ 是二元实函数. 在上面的例 6 中, 就是给定了 x 和 $\mathrm{d}x$ 后来计算 $\mathrm{d}y$ 的.

在固定 $\mathrm{d}x = \Delta x$ 时, 我们可以对 $\mathrm{d}y$ 再求微分, 同时规定取相同的 $\mathrm{d}x$, 这样就得到二阶微分. 在存在二阶导数 y'' 时就有

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2y &= \mathrm{d}(\mathrm{d}y) = \mathrm{d}[y'(x)\,\mathrm{d}x]\\ &= \mathrm{d}[y'(x)]\,\mathrm{d}x\\ &= y''(x)\,\mathrm{d}x^2,\end{aligned}$$

其中 $\mathrm{d}x^2 = (\mathrm{d}x)^2$.

注 这里应当将 d 理解为微分算子, 它的作用就是 $\mathrm{d}(y) = y'_x\,\mathrm{d}x$. 但要明白, 写起来很容易, 说起来比较复杂, 简单来说, 微分的作用就是是对于由自变量增量引起的因变量增量取其中的线性主部. 因此对于导函数 $y'(x)$ 有 $\mathrm{d}(y'(x)) = y''(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\mathrm{d}x = \Delta x$. 由于规定这一次的自变量增量与以前相同, 从而就得到上面的公式 $\mathrm{d}^2y = y''(x)\,\mathrm{d}x^2$.

注 2 这里需要区分以下三个记号:

$$\mathrm{d}(x^2), \quad \mathrm{d}x^2, \quad \mathrm{d}^2x.$$

其中 $\mathrm{d}(x^2)$ 是函数 $y = x^2$ 的微分, 它等于 $2x\,\mathrm{d}x$; 记号 $\mathrm{d}x^2$ 则约定为 $(\mathrm{d}x)^2$; 最后的 d^2x 则是 x 的二阶微分. 若 x 是自变量, 则因 $y = x$ 的导数为 1, 再求一次导数为 0, 因此有 $\mathrm{d}^2x = \mathrm{d}(\mathrm{d}x) = 0$.

注意上述三个记号中的 x 都可以不是自变量, 这时 $\mathrm{d}(x^2) = 2x\,\mathrm{d}x$ 在形式上仍然正确, $\mathrm{d}x^2 = (\mathrm{d}x)^2$ 也仍然如此, 但 d^2x 未必为 0.

类似地在函数 $y(x)$ 为 n 阶可导时可以定义 n 阶微分 d^ny, 且有计算公式

$$\mathrm{d}^ny = y^{(n)}(x)\,\mathrm{d}x^n,$$

其中 $\mathrm{d}x^n = (\mathrm{d}x)^n$.

六. 一阶微分的形式不变性

这里要注意与书上的标题不同, 就是说“的”这个字的位置不同. 我们认为将这个“的”放在一阶微分之后, 形式不变性之前更为确切, 即强调这只是形式上的不变, 而不是真正的不变.

现在将这种不变性写为一个定理.

定理 设 $y = y(u)$ 是 u 的可微函数, 则无论 u 是否是自变量, 都成立公式:

$$\mathrm{d}y = y'_u\,\mathrm{d}u. \tag{$*$}$$

证 若 u 是自变量, 则公式 $(*)$ 当然成立, 其中 $\mathrm{d}u = \Delta u$.

现在设 $u = u(x)$, 且可微, 其中 x 是自变量. 于是 $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $\mathrm{d}x = \Delta x$. 另一方面, 我们有 $y = y(u(x))$, 于是

$$\mathrm{d}y = [y(u(x))]'_x\,\mathrm{d}x = y'_u(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x,$$

利用 $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$, 可以将上式在形式上写为 $(*)$. 可见结论成立. 但实际上这时在 $(*)$ 中的 $y'_u = y'_u(u(x))$, 是 x 的函数, 而 $\mathrm{d}u = u'(x)\,\mathrm{d}x$ 是 x 与 $\mathrm{d}x$ 的函数. 因此这种不变性只是形式上的. □

然而, 这种形式不变性可以对于计算带来方便, 特别是在多元微分学中将会起重要作用.

下面是一个例子, 用以说明一阶微分的形式不变性的一个用处.

例 8 设 $y = \sin x$, $x = t^2$, 求 $\mathrm{d}y$.

解 先计算一阶微分. 这里可以有两种计算方法.

第一种方法就是直接写出 $y = \sin t^2$, 然后计算 $\mathrm{d}y$. 即有

$$\mathrm{d}y = \mathrm{d}(\sin t^2) = (\sin t^2)'_t\,\mathrm{d}t = 2t\cos t^2\,\mathrm{d}t.$$

第二种方法就是用一阶微分的形式不变性, 无论 x 是否是自变量, 总有

$$\mathrm{d}y = \cos x\,\mathrm{d}x,$$

然后用 $x = t^2$ 代入, 由于 $\cos x\Big|_{x=t^2} = \cos t^2$, $\mathrm{d}x = (t^2)'_t\,\mathrm{d}t = 2t\,\mathrm{d}t$, 因此得到与第一种方法相同的结果. □

最后, 我们要指出高阶微分并不具有形式不变性. 下面以二阶微分为例来说明.

一般而言, 若 $y = y(x)$ 中 x 为自变量, 则有 $\mathrm{d}^2y = y''(x)\,\mathrm{d}x^2$.

若 $y = y(x)$ 中 $x = x(t)$, t 才是自变量, 则 $\mathrm{d}y = y'(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t$, 于是

$$\begin{aligned}\mathrm{d}^2y &= \mathrm{d}[y'(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t] \\ &= [y'(x(t))x'(t)]'_t\,\mathrm{d}t^2 \\ &= [y''(x(t))x'^2(t) + y'(x(t))x''(t)]\,\mathrm{d}t^2\end{aligned}$$

利用 $\mathrm{d}x = x'(t)\,\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}^2x = x''(t)\,\mathrm{d}t^2$, 就可以将二阶微分“在形式上”改写为

$$\mathrm{d}^2y = y''(x)\,\mathrm{d}x^2 + y'(x)\,\mathrm{d}^2x,$$

可见与 x 为自变量时的二阶微分比较来说要多出一项 $y'(x)\,\mathrm{d}^2x$, 因此即使在形式上也没有不变性. 还可以看出, 对于 x 为自变量的情况, $\mathrm{d}^2x = 0$, 这一项就没有了.

注 教科书 p.143 倒数第 5 行的说法不妥, 应当理解为二阶导数记号 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ 一般来说应当作为整体来使用, 只有当 x 为自变量时才可以理解为一个分数. 为了避免错误使用这个记号, 今后只应当按照二阶导数的定义来使用这个记号, 即

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right).$$

第 23 次讲稿

第 23 次讲稿, 用于 2007 年 12 月 5 日, 星期三, 2 节课.

开始第七章 微分学基本定理与应用. §7.1 微分中值定理, 该节含以下内容: 一. Fermat 定理, 三. Rolle 定理, 五. Lagrange 定理,

这次课只能讲到第五小节,

且不会讲完.

教科书的第六、第七、第八章就是一元微分学的三章, 其中第六章是引入导数概念, 第七章是微分学的核心, 第八章则是微分学的应用.

§ 7.1 微分中值定理

一. Fermat **定理**

这里的问题与第三章 p.62 倒数第 2 行开始的最值和极值概念有关. 先复习一下, 最值即最大值和最小值, 这是容易理解的. 极值则不同, 设函数 $y = f(x)$ 定义于区间 I 上, 若 $x_0 \in I$, 且存在 $\delta > 0$, 使得 $O_\delta(x_0) \subset I$, 使得

$$f(x) \leqslant f(x_0),\ \forall\, x \in O_\delta(x_0),$$

则称 x_0 是 f 的一个极大值点, 称 $f(x_0)$ 是 f 的一个极大值. 类似地定义极小值点与极小值. 又统称极小值点与极大值点为极值点, 统称极小值与极大值为极值.

注 函数的极值点未必为最值点, 同时函数的最值点也未必为极值点. 如果函数达到最值的最值点为定义域的内点, 则这个最值点一定也是极值点.

在许多应用中需要求函数的最值, 这发展成为应用数学中的最优化方向, 它又是运筹学的组成部分.

但是最值点很不容易求, 于是退而求其次, 求极值点. 因为最值点若是内点则必是极值点. 因此不是极值点的最值点只能是定义区间的端点. 这就比较好解决. 对于在区间上定义的函数来说, 最多只有两个端点.

如何知道定义区间的内点是极值点? 在这方面 Fermat 定理是最基本的, 它只需要导数概念即可得到.

Fermat 定理 若 x_0 是函数 f 的极值点, 且存在导数 $f'(x_0)$, 则 $f'(x_0) = 0$.

证 不妨设 x_0 是 f 的极大值点, 对于极小值点的情况, 讨论 $-f$ 即可. 这时 $\exists\, \delta > 0$, $\forall\, x \in O_\delta(x_0)$, 有 $f(x) \leqslant f(x_0)$. 对于 $0 < \Delta x < \delta$, 同时利用 $f(x) \leqslant f(x_0)$, 就有

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leqslant 0.$$

对于上述差商令 $\Delta x \to 0^+$, 则从存在导数 $f'(x_0)$ 可知也存在右侧导数 $f'_+(x_0)$, 因此就得到

$$f'_+(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0^+} \frac{\Delta y}{\Delta x} \leqslant 0.$$

用同样的推导可以证明有 $f'_-(x_0) \geqslant 0$.

由于 $f'(x_0) = f'_+(x_0) = f'_-(x_0)$, 因此只能是 $f'(x_0) = 0$. □

那么如果在极值点 x_0 处 f 不可导怎么办? Fermat 定理不能提供答案. 但是有以下推论.

推论 若 x_0 是函数 f 的极值点, 则只有两种可能: 或者 f 在点 x_0 处不可导, 或者 $f'(x_0) = 0$.

下面举几个例子.

例 1 $f(x) = |x|$, $x_0 = 0$ 是极小值点, 也是最小值点. $f'_+(0) = 1$, $f'_-(0) = -1$, $f'(0)$ 不存在. 这表明极值点未必是函数的可导点.

例 2 $f(x) = x^3$ 在点 $x = 0$ 处导数为 0, 但 $x = 0$ 不是极值点. 这表明 $f'(x_0) = 0$ 不能保证 x_0 是 f 的极值点.

由此可见, Fermat 定理只是给出寻找极值点的部分答案, 然而这仍是有用的. 办法是求出所有导数等于 0 的点, 又找出所有导数不存在的点. 极值点必在其中. 若又将端点考虑进来, 则就一定可以找到最值点.

为方便起见, 今后称 $f'(x) = 0$ 的点为驻点或平稳点 (stationary point), 又将驻点和导数不存在的点一起称为极值可疑点.

注 驻点处 $\mathrm{d}y = 0$, 因此 $\Delta y = o(\Delta x)$ $(\Delta x \to 0)$. 具体来说, 即当 Δx 充分小时, Δy 是更高阶的无穷小量, 因此还要小得多. 例如, $y = x^3$, 当 $|\Delta x| \leqslant 0.1$ 时$|\Delta y| \leqslant 0.001$.

三. Rolle 定理

什么条件下会有驻点? Rolle 定理给出了一个很好的回答. 虽然这只是充分条件, 但却具有典型性, 因此经常有用, 下面我们叙述定理, 在证明之前可以先观察其几何意义.

Rolle 定理 若函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微且 $f(a) = f(b)$, 则一定存在 $\xi \in (a,b)$, 满足 $f'(\xi) = 0$.

证 分几种情况讨论.

若 f 在 $[a,b]$ 上为常值函数, 则导数处处为 0, 因此任取一个 $\xi \in (a,b)$ 即可.

若 f 在 $[a,b]$ 上取到比 $f(a) = f(b)$ 更大的值, 则由于 f 在 $[a,b]$ 上取到最大值, 可见最大值点 ξ 不会是端点, 即一定在 (a,b) 中, 也就一定是极大值点, 从而用 Fermat 定理即知 $f'(\xi) = 0$.

对于 f 在 $[a,b]$ 取到比 $f(a)=f(b)$ 更小的值的情况, 证明是类似的.

这样就对于所有可能性证明了定理的结论成立. □

注 Rolle 定理中的 3 个条件一个也不能少. 书中举了个例子, 即在 $[-1,1]$ 上的 $f(x)=|x|$, 它除了在 $x=0$ 不可导之外满足 Rolle 定理的所有其他条件, 但结论不成立. 由于其他条件不成立而导致 Rolle 定理结论不成立的例子请同学自己举.

Rolle 定理有许多用处. 书中特此写出一个推论如下.

推论 若函数 f 有两个零点 $x_1<x_2$, 又设 f 在 $[x_1,x_2]$ 上连续, 在 (x_1,x_2) 上可导, 则在 (x_1,x_2) 中一定存在导函数 $f'(x)$ 的零点.

书中 p.147 的例 1 自己看. 我们讲例 2. 这种题型是常见的, 同时其中的用语和条件都需要解释.

例 2 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 $[a,b)$ 上连续可微, 在 (a,b) 上二阶可微且 $f(a)=f'(a)=0$, $f(b)=0$. 证明: $f''(x)=0$ 在 (a,b) 中有根.

首先要说明 f 在 $[a,b)$ 上连续可微是什么意思. "连续可微" 的含义就是存在连续的导函数. 今后不要误解. 此外, 导函数在点左端点 a 存在且连续, 就是指在该点存在右导数 $f'_+(a)$, 而且满足条件

$$\lim_{x\to a^+} f'(x)=f'_+(a).$$

这也就是

$$f'(a^+)=f'_+(a).$$

注意上式左边是导函数 $f'(x)$ 在点 a 的右侧极限, 右边是 f 在点 a 的右侧导数, 两者必须区别开来.

例 2 的证明 先对 f 用 Rolle 定理, 得到点 $\xi_1\in(a,b)$, 满足 $f'(\xi_1)=0$.

然后在 $[a,\xi_1]$ 上导函数 f' 满足 Rolle 定理中的全部条件, 因此就得到 $\xi_2\in(a,\xi_1)\subset(a,b)$, 满足 $f''(\xi_2)=0$. □

注 由于前面讲切线时写出过 $f'(x_0)=\infty$, 这里对于什么叫"存在导数"需要重新说一下.

今后, 凡是说到函数可导, 也就是可微, 则一定是指导数为有限值. 也就是说, 差商存在正常极限. 但说到曲线 $y=f(x)$ 在某点有切线时, 则其中包含了 $f'(x_0)=\infty$ 的情况, 这时切线平行于纵坐标轴.

五. Lagrange 中值定理

这是 Rolle 定理的推广, 然而有更多的用处, 可以说是微分学中的主要结果, 因此经常称为微分学中值定理. 从下面的内容可见, 这里的条件与 Rolle 定理相比, 只是去掉了 $f(a)=f(b)$ 而已.

Lagrange 微分中值定理　设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 则必定存在 $\xi \in (a,b)$, 使得成立

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a).$$

在证明之前应当先看一下上式的几何意义, 这就是在点 $(\xi, f(\xi))$ 处曲线 $y=f(x)$ 的切线与连接点 $(a,f(a))$ 和 $(b,f(b))$ 的直线段平行. 显然, 如果 $f(a)=f(b)$, 则就是 Rolle 定理. 证明的方法有几种, 最简单的方法就是想法将曲线 $y=f(x)$ 减去上式直线段, 从而将问题归结为 Rolle 定理. 这也就是用第三章 p.58 的图形合成法.

微分中值定理的证明　构造辅助函数

$$F(x)=f(x)-\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x-a),$$

函数 F 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 又可计算出有 $F(a)=f(a)$, $F(b)=f(a)-(f(b)-f(a))$, 因此只要对 F 用 Rolle 定理, 就存在 $\xi\in(a,b)$, 满足 $F'(\xi)=0$. 这就是

$$f'(\xi)=\frac{f(a)-f(b)}{b-a},$$

也就是所要求证的等式 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.　□

注　由于 $a<\xi<b$, 因此可以将 ξ 表示为

$$\xi=a+\theta(b-a), \text{其中 } 0<\theta<1.$$

这样就可以将 Lagrange 微分中值定理改写为

$$f(b)-f(a)=f'(a+\theta(b-a))(b-a),$$

这也是微分中值定理的一种常用形式

第 24 次讲稿

第 24 次讲稿, 用于 2007 年 12 月 10 日, 星期一, 3 节课.

继续 §7.1 微分中值定理, 七. Cauchy 中值定理. 然后开始讲 §7.2 Taylor 展开式及其应用

上次最后的 Lagrange 微分中值定理还应当加一种常用形式. 这就是将中值 $\xi \in (a,b)$ 改写为

$$\xi = a + \theta(b-a), \quad 0 < \theta < 1,$$

又如, 对于可微函数 $y = f(x)$, 可将它的增量用 Lagrange 微分中值定理写出如下:

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0 + \theta \Delta x)\Delta x, \quad 0 < \theta < 1,$$

这个公式称为有限增量公式, 或 Lagrange 公式. 其中的增量的大小没有限制. 与之相比, 前面的公式

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x)\ (\Delta x \to 0)$$

刻画的还是一个极限过程. 这也就是只有当 Δx 充分小时才有 $\Delta x \approx \mathrm{d}y$. 因此也将上式称为无穷小增量公式. 当然其中只要存在 $f'(x_0)$ 即可, 而有限增量公式则要在一个区间上存在导函数才成立.

有限增量公式或 Lagrange 公式的缺点是其中的 θ 或 ξ 不知道, 但下面就会看到, 这并不影响它在许多问题中的应用.

六. Cauchy 中值定理

Cauchy 中值定理 设 f, g 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且 $g(a) \neq g(b)$, $[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 \neq 0\ \forall x \in (a,b)$, 则存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}.$$

若其中 $g(x) = x$, 就得到 Lagrange 中值定理, 因此 Cauchy 中值定理是 Lagrange 中值定理的推广.

这里要注意, 如果对于 $[a,b]$ 上的两个函数 f, g 分别用 Lagrange 中值定理, 则有 $\xi_1, \xi_2 \in (a,b)$, 使得

$$f(b) - f(a) = f'(\xi_1)(b-a),$$
$$g(b) - g(a) = g'(\xi_2)(b-a).$$

由于没有理由说 $\xi_1 = \xi_2$, 因此不可能将上述两式相除而得到 Cauchy 中值定理的结论.

但只要将证明 Lagrange 中值定理中所用的辅助函数加以修改即可用于证明 Cauchy 中值定理.

证 记 $\lambda = \dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$, 构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - \lambda[g(x) - g(a)],$$

其中利用了 $g(a) \neq g(b)$ 的条件.

由于 F 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且 $F(a) = f(a)$, $F(b) = f(b) - [f(b) - f(a)] = f(a)$, 用 Rolle 定理可知存在 $\xi \in (a,b)$, 使得 $F'(\xi) = 0$. 这就是

$$f'(\xi) = \lambda g'(\xi).$$

可以肯定 $g'(\xi) \neq 0$. 否则从上式又有 $f'(\xi) = 0$, 从而违反 $[f'(x)]^2 + [g'(x)]^2 \neq 0\ \forall x \in (0,a)$ 的条件. 两边除以 $g'(\xi)$ 即得到所要的结论. □

注 关于 Cauchy 中值定理的几何解释见《数学分析习题课讲义》上册 p.192 的图 7.4.

例 5 设 $x_1, x_2 > 0$, 证明: 存在 $\xi \in (x_1, x_2)$, 满足

$$x_1 e^{x_2} - x_2 e^{x_1} = (1-\xi)\, e^{\xi}(x_1 - x_2).$$

(教科书中已经作了很好的分析, 课上不必再详细讲, 只带领学生看书, 指出关键之处是将目标变形, 使得看出如何用中值定理.)

§ 7.2 Taylor 展开式及应用

一. 引 言

用 $\sin x$ 为例, 自学教科书上的内容. 注意: 从过去的一次近似发展到一般的多项式逼近. 这里包含了重要的思想. 目前用计算器或者计算机来计算各种函数时都是利用了这个思想.

二. Taylor 展开式

定理 1 (带 Peano 型余项的 Taylor 展开式) 设函数 f 在点 $x=0$ 存在 $f^{(n)}(0)$, 则成立

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + o(x^n)\ (x \to 0).$$

注 对于 $n=1$ 就有

$$f(x) = f(0) + f'(0)x + o(x)\ (x \to 0),$$

即 f 在 $x=0$ 处的无穷小增量公式.

证明 对于函数 f 引入余项 (下标的 n 省去为好):

$$r(x) = f(x) - [f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n],$$

对于 $r(x)$ 逐次求导, 对 $k = 1, 2, \cdots, n-1$ 得到[①]

① 教科书 p.152 末只有“易知”二字, 此风不可长.

$$r^{(k)}(x) = f^{(k)}(x) - [f^{(k)}(0) + f^{(k+1)}(0)x + \cdots + \frac{f^{(n)}(0)}{(n-k)!}x^{n-k}],$$

这样就有 $r(0) = r'(0) = \cdots r^{(n-1)}(0) = 0$. 又从②

$$r^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - [f^{(n-1)}(0) + f^{(n)}(0)x],$$

直接计算 $r^{(n)}(0)$ 如下:

$$\begin{aligned} r^{(n)}(0) &= \lim_{x\to 0} \frac{r^{(n-1)}(x) - r^{(n-1)}(0)}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0) - f^{(n)}(0)x}{x} \\ &= \lim_{x\to 0} \frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(0)}{x} - f^{(n)}(0) = 0. \end{aligned}$$

下面来证明 $r(x) = o(x^n)$ $(x \to 0)$. (这里有多种方法可以用. 我们现在用刚才证明的 Cauchy 微分中值定理.) 多次使用 Cauchy 微分中值定理如下:

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{x^n} &= \frac{r(x) - r(0)}{x^n - 0^n} = \frac{r'(\xi_1)}{n\xi_1^{n-1}}, \quad \xi_1 \in (0, x) \\ &= \frac{r'(\xi_1) - r'(0)}{n(\xi_1^{n-1} - 0^{n-1})} = \frac{r''(\xi_2)}{n(n-1)\xi_2^{n-2}}, \quad \xi_2 \in (0, \xi_1) \subset (0, x) \\ &= \cdots = \frac{1}{n!} \cdot \frac{r^{(n-1)}(\xi_{n-1})}{\xi_{n-1}}, \quad \xi_{n-1} \in (0, x) \\ &= \frac{1}{n!} \cdot \frac{r^{(n-1)}(\xi_{n-1}) - r^{(n-1)}(0)}{\xi_{n-1} - 0}, \end{aligned}$$

最后令 $x \to 0$, 利用 $r^{(n)}(0) = 0$ 即得到 $r(x) = o(x^n)$ $(x \to 0)$. □

用平移运算即可得到

推论 1　若 f 在点 a 存在 $f^{(n)}(a)$, 则成立

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + o((x-a)^n).$$

证　作代换 $x = t + a$, 记 $\phi(t) = f(t+a)$, 则有 $\phi^{(k)}(0) = f^{(k)}(a)$, $k = 0, 1, \cdots, n$. 对函数 ϕ 用定理 1 即可. □

注　今后称推论 1 中的公式为函数 f 在点 a 的 Taylor 公式 (或 Taylor 展开式). 由于历史原因, 当 $a = 0$ 时也称为 Maclaurin 公式 (或 Maclaurin 展开式).

三. 若干初等函数的 Taylor 展开式

以下的展开式都只是依赖于在点 $x = 0$ 处的高阶导数值.

1. 对于 $f(x) = \sin x$, 利用 $f^{(n)}(x) = (\sin x)^{(n)} = \sin(x + \frac{n\pi}{2})$, 就有

② $f^{(n)}(0)$ 的存在表明在 $x = 0$ 的某个邻域中存在 $f^{(n-1)}(x)$ 以及所有更低价的导函数. 但不能认为 f 的 n 阶导函数存在. 因此必须分别证明 $r^{(k)}(0) = 0 \,\forall\, k < n$ 和 $r^{(n)}(0) = 0$.

$$f^{(2k-1)}(0)=(-1)^{k-1},\quad f^{(2k)}(0)=0.$$

取 k 从 1 到 n 就得到

$$\boxed{\sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+o(x^{2n})\ (x\to 0).}$$

注意: 其中展开到了 x^{2n} 项为止, 余项是 $o(x^{2n})\ (x\to 0)$, 而不是 $o(x^{2n-1})\ (x\to 0)$.

2. 对于 $f(x)=\cos x$, 利用 $f^{(k)}(x)=(\cos x)^{(k)}=\cos(x+\dfrac{k\pi}{2})$, 就有

$$f^{(2k-1)}(0)=0,\quad f^{(2k)}(0)=(-1)^k.$$

取 k 从 1 到 n 就得到

$$\boxed{\cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^{n}\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n+1})\ (x\to 0).}$$

注意: 其中展开到了 x^{2n+1} 项, 余项是 $o(x^{2n+1})\ (x\to 0)$, 而不是 $o(x^{2n})\ (x\to 0)$.

注 注意函数的奇偶性在 Maclaurin 展开式中的表现. 奇函数展开式中偶次项都不出现, 偶函数展开式中奇次项都不出现.

3. 对于 $f(x)=\mathrm{e}^x$, 利用 $f^{(k)}(x)=(\mathrm{e}^x)^{(k)}=\mathrm{e}^x$, 因此对所有非负整数都有 $f^{(k)}(0)=1$, 这样就得到

$$\boxed{\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ (x\to 0).}$$

4. 对于二项式函数 $f(x)=(1+x)^\alpha$, 若指数 α 为正整数, 则就得到二项式展开. 微积分的发明人 Newton 第一个写出了 α 为有理分数时的展开式, 而有了实数理论后就得到了更为一般的展开式.

当 α 不是 0 也不是正整数时, 我们有 $f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}$, 因此 $f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdot(\alpha-k+1)=k!\,\mathrm{C}_\alpha^k$, 这里将过去的组合数记号 C_n^k 推广到 n 为不是正整数的情况. 这样就得到二项式函数的 Taylor 展开式:

$$\boxed{(1+x)^\alpha = 1+\mathrm{C}_\alpha^1 x+\mathrm{C}_\alpha^2 x^2+\cdots+\mathrm{C}_\alpha^n x^n+o(x^n)\ (x\to 0).}$$

二项式函数的 Taylor 展开式与前几个展开式不同, 其中不仅可取不同的 n, 而且还有一个参数 α, 因此实际上给出了更多的展开式.

特别要指出, 对于 $\alpha=-1$, 就得到熟知的展开式①

① 导出此式的最简单方法如下:

$$\begin{aligned}\frac{1}{1+x}-(1-x+x^2-\cdots+(-1)^n x^n)&=\frac{1}{1+x}-\frac{1-(-x)^{n+1}}{1+x}\\&=(-1)^{n+1}\cdot\frac{x^{n+1}}{1+x}=o(x^n)\ (x\to 0).\end{aligned}$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - \cdots + (-1)^n x^n + o(x^n)\ (x \to 0).$$

5. 对于 $f(x) = \ln(1+x)$, 有 $f'(x) = (1+x)^{-1}$, 因此

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \cdot (k-1)!(1+x)^{-k},$$

于是 $f^{(k)}(0) = (-1)^{k-1}(k-1)!$, 从而得到

$$\boxed{\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + o(x^n)\ (x \to 0).}$$

6. 对于 $f(x) = \arctan x$, 需要先求出

$$f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)!, \quad f^{(2k)}(0) = 0. \tag{†}$$

然后就可以得到

$$\boxed{\arctan x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{2n-1} + o(x^{2n})\ (x \to 0).}$$

下面我们来证明 (†).

从 $f(x) = \arctan x$ 出发求导, 有 $f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

将它改写为

$$(1+x^2)f'(x) = 1,$$

然后用 Leibniz 公式得到

$$(1+x^2)f^{(n+1)}(x) + n \cdot 2x \cdot f^{(n)}(x) + \mathrm{C}_n^2 \cdot 2 \cdot f^{(n-1)}(x) = 0,$$

用 $x = 0$ 代入得到

$$f^{(n+1)}(0) = -n(n-1)f^{(n-1)}(0).$$

从 $f(0) = 0$ 可以推出 $\forall k$ 成立 $f^{2k}(0) = 0$.

从 $f'(0) = 1$ 可以推出 $f'''(0) = -2!$, $f^{(5)}(0) = 4!, \cdots$, 并归纳出 $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k(2k)!$. 这样就证明了公式 (†).

四. 例子

例 1 求 $\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ 在点 0 处的 Taylor 展开式.

解 为了利用指数 $\alpha = -1/2$ 的二项式展开式, 先计算

$$\mathrm{C}_{-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{n!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(-\frac{1}{2}-n+1\right) = (-1)^n\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}.$$

然后就得到

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{(2k-1)!!}{2^k k!}x^{2k} + o(x^{2n})\ (x \to 0). \quad \square$$

例 2 求 $\sec x$ 在点 0 的 Taylor 展开式到 x^4 项.

解 利用 $\cos x$ 和 $(1+x)^{-1}$ 的展开式计算如下:

$$\begin{aligned}
\sec x = \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + o(x^5)} \\
&= 1 + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5)) + (\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + o(x^5))^2 + o(x^5) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + (-\frac{1}{24} + \frac{1}{4})x^4 + o(x^5) \\
&= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + o(x^5). \quad \square
\end{aligned}$$

例 3 求极限 $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2}}{\mathrm{e}^x \ln(1+x) - x}$.

解 分别计算分子分母如下:

$$\begin{aligned}
\text{分子} &= \sqrt{1+x} - 1 - \frac{x}{2} \\
&= 1 + \frac{1}{2}x + \frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}x^2 + o(x^2) - 1 - \frac{x}{2} \\
&= -\frac{x^2}{8} + o(x^2) \sim -\frac{x^2}{8} \ (x \to 0);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{分母} &= \mathrm{e}^x \ln(1+x) - x \\
&= [1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)] \cdot [x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)] - x \\
&= x - \frac{x^2}{2} + x^2 - x + o(x^2) \\
&= \frac{x^2}{2} + o(x^2) \sim \frac{x^2}{2} \ (x \to 0).
\end{aligned}$$

于是就有

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{8} + o(x^2)}{\frac{x^2}{2} + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{1}{8} + o(1)}{\frac{1}{2} + o(1)} = -\frac{1}{4}. \quad \square$$

在讲教科书中的 Lagrange 微分中值定理的应用之前, 先补充两个重要结果, 见《数学分析习题课讲义》的 §7.1.2. 在我们所用的教科书中它们分别是两个练习题, 即 p.151 八. 练习题 4 和 p.173 四. 练习题 3. 我们认为应当将这两个练习题作为基本内容在大课上讲. 同时也是 Lagrange 微分中值定理的应用.

导函数的介值定理 (Darboux 定理) 导函数在区间上的值域一定是区间.

证 只要证明: 若在区间 $[a,b]$ 上有 $f'(a) \neq f'(b)$, 则 f' 能够取到介于 $f'(a), f'(b)$ 之间的每个值.

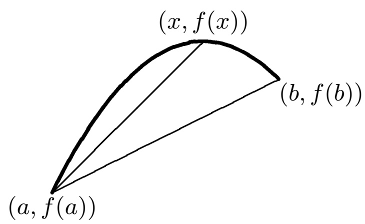


图 1: Darboux 定理的证明.

如图 1 所示, 利用割线的斜率定义辅助函数

$$g(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}, & a < x \leqslant b, \\ f'(a), & x = a. \end{cases}$$

则 $g \in C[a,b]$. 为简明起见引入记号

$$k = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

则函数 g 的值域包含区间 $[f'(a), k]$.

根据 Lagrange 微分中值定理, 当 $a < x \leqslant b$ 时 $g(x)$ 的值等于某个点上的导数值, 因此导函数 f' 可以取到区间 $[f'(a), k]$ 中的每个值.

用类似方法可以证明: 导函数 f' 也可以取到区间 $[k, f'(b)]$ 中的每个值.

合并以上, 可见无论 k 取什么值, f' 都可以取到 $[f'(a), f'(b)]$ 中的每个值. □

注 若 f' 连续, 则用连续函数的介值定理即可得到所要的结论. 因此 Darboux 定理表明导函数的介值性质与其是否连续没有关系. 此外, Darboux 定理的传统证明方法可以不用 Lagrange 微分中值定理, 见《数学分析习题课讲义》的 §7.1.2 中的命题 7.1.6.

这样我们就可以得到下列推论, 这就是教科书 p.173 的四. 练习题 3.

推论 设 $y = y(x)$ 在区间 I 上可微, 且 $y'(x)$ 处处不为 0, 则 $y(x)$ 为严格单调.

证 从 Darboux 定理知 $y'(x)$ 保号. 不妨设 $\forall\, x \in I$ 时有 $y'(x) > 0$, 则当 $x_1 < x_2$ 时, 就有 $\xi \in (x_1, x_2)$, 使得

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) > 0,$$

即 $y(x)$ 为严格单调增加函数. 同样可知若 $\forall\, x \in I$ 时 $y'(x) < 0$, 则 $y(x)$ 严格单调减少. □

导数极限定理 (见教科书 p.151 八. 练习题 4) 设函数 f 在 (a,b) 上可微, 在点 a 右连续, 若 $f'(a^+) = A$, 则 f 在点 a 存在右导数, 且有 $f'_+(a) = A$.

首先要区分记号 $f'(a^+)$ 和 $f'_+(a)$. 前者是导函数在点 a 的右极限, 后者是函数 f 在点 a 的右导数.

例如, $f(x) = \operatorname{sgn} x$ 在 $a=0$ 处有 $f'(0^+)=0$, $f'(0^-)=0$, 但 $f'(0)$ 不存在. 反之, 函数

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\dfrac{1}{x}, & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases}$$

在 $x=0$ 有 $f'(0)=0$, 但当 $x \neq 0$ 时则有

$$f'(x) = 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x},$$

可见不存在 $f'(0^+)$ 和 $f'(0^-)$. 因此 $x=0$ 是 $f'(x)$ 的第二类间断点

导数极限定理的证明　只写出 A 为有限极限情况的证明.

从条件 $f'(a^+) = \lim\limits_{x\to a^+} f'(x) = A$, 对 $\forall\,\varepsilon > 0$, $\exists\,\delta > 0$, $\forall\, a < x < a+\delta$, 成立 $|f'(x) - A| < \varepsilon$.

考虑 $a < x < a+\delta$ 时的差商 $\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$, 根据 Lagrange 微分中值定理, 存在 ξ, 满足 $a < \xi < x < a+\delta$, 使得 $f(x)-f(a) = f'(\xi)(x-a)$, 从而有

$$\left|\frac{f(x)-f(a)}{x-a} - A\right| = |f'(\xi) - A| < \varepsilon,$$

这就证明了

$$\lim_{x\to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = A,$$

即 $f'_+(a) = A$.　□

注　对于左侧情况的结论: 设函数 f 在 (a,b) 上可微, 在点 a 左连续, 若 $f'(b^-) = A$, 则 f 在点 b 存在左导数, 且有 $f'_-(b) = A$.

对于双侧情况的结论: 若 f 在 a 的邻域 $O(a)$ 内连续, 在去心邻域 $O(a)-\{a\}$ 内可微, 若存在极限 $\lim_{x\to a} f'(x) = A$, 则 f 于 a 可导, 且 $f'(a) = A$.

推论　导函数在区间上没有第一类间断点.

证　用反证法. 设 f' 在区间 I 上定义, 若 x_0 为 I 的内点, 且为 f' 的第一类间断点. 则存在两个有限的单侧极限 $f'(x_0^+)$ 和 $f'(x_0^-)$.

由于存在 $f'(x_0)$, 因此 f 在点 x_0 连续, 应用导数极限定理, 可见存在 $f'_+(x_0)$ 和 $f'_-(x_0)$, 且有

$$f'_+(x_0) = f'(x_0^+), \quad f'_-(x_0) = f'(x_0^-).$$

由于 f' 在点 x_0 的两个单侧极限不相等, 因此 f 在点 x_0 的两个单侧导数也不相等. 这与 $f'(x_0)$ 的存在性相矛盾.　□

第 25 次讲稿

第 25 次讲稿, 用于 2007 年 12 月 12 日, 星期三, 2 节课.

继续讲 §7.2 Taylor 展开式, 先证明带 Lagrange 型余项的 Taylor 展开式和两个例子. 然后回到前面, 补讲 Lagrange 中值定理的推论.

六. 带 Lagrange 型余项的 Taylor 展开式 (Taylor 微分中值定理)

定理 2 若 f 在点 a 邻域 $O_\delta(a)$ 上 $n+1$ 次可微, 则对每个 $x \in O_\delta(a)$, 存在 $\xi \in (a,x)$, 使得

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + r_n(x),$$

其中

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}.$$

注 定理 2 中的余项称为 Lagrange 型余项. 它也可以写为

$$r_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(a+\theta(x-a))}{(n+1)!} \cdot (x-a)^{n+1}, \quad 0 < \theta < 1.$$

若 $n=0$, 则定理 2 就是前面已经得到的 Lagrange 微分中值定理. 因此定理 2 是它的推广, 也可称为 Taylor 微分中值定理.

证 对于 $a=0$, 与定理 1 完全一样定义余项函数

$$r_n(x) = f(x) - [f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n].$$

重复定理 1 证明中的"易知"部分, 就得到

$$r_n(0) = r_n'(0) = r_n''(0) = \cdots = r_n^{(n)}(0) = 0.$$

然后反复用 Cauchy 中值定理处理下列商, 即 $r_n(x)$ 与 x^{n+1} 之比:

$$\begin{aligned}\frac{r_n(x)}{x^{n+1}} &= \cdots = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{r_n^{(n)}(\xi_n)}{\xi_n} = \frac{1}{(n+1)!} \cdot \frac{r_n^{(n)}(\xi_n) - r_n^{(n)}(0)}{\xi_n - 0} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} \cdot r_n^{(n+1)}(\xi), \quad \xi \in (0,x).\end{aligned}$$

(这里最后一次用的是 Lagrange 微分中值定理.) 然后利用 $r_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ 就得到 $a=0$ 时的 Lagrange 型余项. 对 $a \neq 0$ 用平移即可. □

注 恰如有限增量公式与无穷小增量公式之间的关系那样, 带 Lagrange 型余项的 Taylor 公式可以用于大范围的估计, 而带 Peano 型余项的 Taylor 公式只能在 $x \to a$ 时起作用. 因此后者主要用于极限计算, 而前者则有更多的用处. 下面就有用 Taylor 展开式于近似计算的例子, 其中只能用 Lagrange 余项.

例 4 写出函数 e^x 和 $\cos x$ 的带 Lagrange 余项的 Maclaurin 展开式.

解 利用 $(\mathrm{e}^x)^{(n+1)} = \mathrm{e}^x$, 就有

$$\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \frac{\mathrm{e}^{\theta x}}{(n+1)!} \cdot x^{n+1}.$$

对于 $\cos x$, 可以写出直到 x^{2n+1} 项的系数, 因此利用 $(\cos x)^{(2n+2)} = \cos(x + (n+1)\pi) = (-1)^{n+1}\cos x$ 就可写出

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + (-1)^{n+1} \frac{\cos(\theta x)}{(2n+2)!} \cdot x^{2n+2}. \quad \square$$

例 5 计算 e 的近似值, 要求误差小于 10^{-7}.

解 于例 4 的 e^x 的展开式中取 $x=1$, 就有①

$$\mathrm{e} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + \frac{\mathrm{e}^\theta}{(n+1)!}.$$

于是问题就变成在计算之前需要决定取多少项. 由于 e^x 中目前取 $x=1$, 因此应当从

$$\varepsilon_n = \mathrm{e} - (1 + 1 + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!}) = \frac{\mathrm{e}^\theta}{(n+1)!} < 10^{-7}$$

进行估计②. 对左边的分子可利用 $0 < \theta < 1$, 估计为 $\mathrm{e}^\theta < \mathrm{e} < 3$, 就可以从 $3/(n+1)! < 10^{-7}$ 估计出取 $n = 10$ 即符合要求. 然后计算即可得到 $\mathrm{e} \approx 2.71828181$. $\square$

注 1 由此知道两件事:

(1) 数 e 的无穷级数展开: $\mathrm{e} = 2 + \dfrac{1}{2!} + \cdots + \dfrac{1}{n!} + \cdots = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$.

(2) 用这个无穷级数的部分和 $S_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ 可以有效地计算 e 的近似值, 其中的误差是可以控制的.

注 2 从 2004 年 Brothers 的论文中可以知道用

$$B_n = 2 + \frac{4}{3!} + \frac{6}{5!} + \cdots + \frac{2n+1}{(2n+1)!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+2}{(2k+1)!}$$

计算 e 的近似值要比用 $S_n = \sum_{k=0}^{n} \dfrac{1}{k!}$ 的收敛速度快得多. 例如它们的前几项分别为:

---

① 由此得到 e 的无穷级数表示:

$$\mathrm{e} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}.$$

② 由于可以估计出

$$\varepsilon_n < \frac{1}{n!n}$$

而且可以证明 $\varepsilon_n \sim \dfrac{1}{(n+1)!}$, 因此这里的误差实际上多了一个因子 3. 采用这个估计的优点在于只需要用 Lagrange 余项即可.

$S_0=1, S_1=2, S_2=2.5, S_3=2.\dot{6}, S_4=2.708\dot{3}, S_5=2.71\dot{6}, S_6=2.7180\dot{5}$;

$B_0=2, B_1=2.\dot{6}, B_2=2.71\dot{6}, B_3=2.718253962$.

布置两个思考题:

(1) 证明: $\mathrm{e}=2+\dfrac{4}{3!}+\dfrac{6}{5!}+\cdots+\dfrac{2n+1}{(2n+1)!}+\cdots=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{2k+2}{(2k+1)!}$.

(2) 估计用这个无穷级数计算 e 时的误差.

(下面是答案)

实际上不难分析如下:

$$B_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+2}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{2k+1}{(2k+1)!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)!}$$
$$=1+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k)!}+\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)!}=\sum_{k=0}^{2n+1}\frac{1}{k!},$$

因此即可估计出

$$0<\mathrm{e}-B_n<\frac{3}{(2n+2)!}.$$

可见取 $n=4$ 就相当于在例 5 中取 $n=9$, 误差小于 8.27×10^{-7}. 具体计算如下:

$$B_4=2+\frac{4}{3!}+\frac{6}{5!}+\frac{8}{7!}+\frac{10}{9!}$$
$$\approx 2+0.\dot{6}+0.05+0.0015873016+0.0000275573$$
$$\approx 2.7182815256.$$

若用 B_5 则得到 2.7182818262, 误差小于 6.26×10^{-9}.

现在回到前面补讲 Lagrange 中值定理的推论, 即教科书 p.148 倒数第 4 行开始的内容.

六. Lagrange 中值定理的若干推论

由于 Lagrange 微分中值定理将函数的增量与导数联系起来, 因此极为有用.

推论 2　设函数 f 在区间 I 上可微, 且在 I 上 $f'(x)\equiv0$, 则 f 为区间 I 上的常值函数.

证　任取 $x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$, 则存在 $\xi\in(x_1,x_2)$, 使 $f(x_2)-f(x_1)=f'(\xi)(x_2-x_1)=0$, 可见 f 为常值函数. □

注　推论 2 中的条件可以减弱如下. 设 f 在区间 I 上连续, 除有限点外可微, 且 $f'(x)\equiv0$, 则 f 为区间 I 上的常值函数.

推论 3 (**不定积分基本定理**)　若 f,g 在区间 I 上连续, 除有限点外可微, 且 $f'(x)\equiv g'(x)$, 则存在常数 C, 使得在区间 I 上 $f(x)=g(x)+C$.

证 作辅助函数 $F = f - g$ 后用推论 2. □

注 对于上面的注和推论 3, 需要注意, 推论 2 的注中不能说函数在有限点上不可微, 而只是说不知道. 否则, 最后的常值函数当然处处可微且导数为 0. 同样, 在推论 3 中也如此说, 但有可能确实在有限点上不可微. 例如, $f(x) = |x|$ 和 $g(x) = |x| + 1$ 就是如此.

现在回顾教科书 p.139 的例 5. 即填充 $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}(\qquad)$.

这实际是问什么函数的导数是 $\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$? 这就是求导数运算的逆运算. 容易猜出答案是 $-2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}$. 在该例中注明"只要求填一个函数".

现在将该例的问题修改为: 要求出满足条件的所有函数. 这在当时没有办法解决. 现在从推论 3 就很容易解决这个问题, 这就是

$$-2\,\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + C,$$

其中 C 为任意常数.

推论 4 若 f 在区间 I 上可微, 且存在常数 L, 使得 $\forall\, x \in I$, 有 $|f'(x)| \leqslant L$, 则 $\forall\, x_1, x_2 \in I$, 有

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant L|x_1 - x_2|,$$

即 p.113 上提到的满足 Lipschitz 条件的函数. 它当然是一致连续函数.

证 用 Lagrange 微分中值定理即可. □

注 可微条件可以减弱为在端点 (如果区间 I 有端点的话) 以及其他有限点处不一定可微.

接下来的两个例子是 Lagrange 微分中值定理在证明不等式中的应用.

例 3 证明: 当 $0 < b < a$ 时成立不等式

$$\frac{a-b}{a} < \ln\frac{a}{b} < \frac{a-b}{b}.$$

证 令 $f(x) = \ln x$, 则就可以对于区间 $[b, a]$ 上的函数 f 用微分中值定理, 存在 $\xi \in (b, a)$, 使得

$$\ln\frac{a}{b} = \ln a - \ln b = \frac{1}{\xi}(a - b),$$

由于 $0 < b < \xi < a$, 因此就有所要的不等式. □

注 另一种常用形式是对于 $x > -1$ 成立以下两个不等式

$$\frac{x}{1+x} < \ln(1+x) < x.$$

对于 $x > 0$, 只要在例 3 中取 $a = 1 + x$, $b = 1$ 即可得到. 对于 $-1 < x < 0$, 也只要取 $b = 1 + x$, $a = 1$ 就可以得到.

若取 $x = 1/n$, 则就得到

$$\frac{1}{n+1} < \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) < \frac{1}{n},$$

即第二章中得到的不等式 (这是本课程中得到的第一个非初等不等式).

例 4 设 f 在 $[0,a]$ 上连续可微, 在 $(0,a)$ 上二阶可微, 且存在 $M>0$, 使得 $|f''(x)| \leqslant M \, \forall\, x \in (0,a)$, 又设 f 在 $(0,a)$ 内有驻点 c, 证明:

$$|f'(0)| + |f'(a)| \leqslant Ma.$$

证 根据 $0 < c < a$ 和 $f'(c) = 0$, 分别在 $[0,c]$ 和 $[c,a]$ 上对于 f' 分别用 Lagrange 微分中值定理, 就有

$$\begin{aligned} |f'(0)| + |f'(a)| &= |f'(0) - f'(c)| + |f'(c) - f'(a)| \\ &\leqslant M[c + (a-c)] = Ma. \quad \square \end{aligned}$$

第 26 次讲稿

第 26 次讲稿, 用于 2007 年 12 月 17 日, 星期一, 3 节课.

用两节课讲 §7.3 L'Hospital 法则及应用, 第三节补讲上一节最后的几个例子.

§ 7.3 L'Hospital 法则及应用

这里总的思路是: 函数极限计算的困难是不定式, 在 7 种不定式中主要是 $\frac{0}{0}$ 型与 $\frac{\infty}{\infty}$ 型, 其他几种不定式往往可以转化为这两种不定式. L'Hospital 法则就是解决这两种不定式的最有力手段. 这里与教科书的观点有一点差异. 即它不仅仅是弥补等价量代换法的不足的问题, 而是在今后求函数极限的首选工具. 它虽然不是万能的, 但至少可以说极其有效. 当然也不能滥用, 用得不当则也可能失败, 有时还是要用其他方法, 或者结合其他方法使用.

这一节请于课外阅读《数学分析习题课讲义》上册的 §8.1.

一. L'Hospital 法则

从以下内容可以看到 L'Hospital 法则与求数列极限中的 Stolz 定理非常相似.

L'Hospital 法则 设要求极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}$, 若满足以下两个条件: (1) 这个极限是 $\frac{0}{0}$ 型不定式, 或者是 $\frac{*}{\infty}$ 型不定式; (2) 存在极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$; 则成立

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=A.$$

下面作些补充说明:

1. 存在极限 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ 的条件已经蕴含了以下几点: (1) f,g 可微, (2) 至少在 a 的充分邻近满足 $g'(x)\neq 0$ 的条件. 由 Darboux 定理我们知道这时 $g(x)$ 在 a 的两侧分别严格单调.

2. L'Hospital 法则的使用方法实际上就是经常写为:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

它的意思与 Stolz 定理相同, 即当右边极限存在时, 这个等式成立, 从而求出了所要计算的左边极限. 反之, 如果右边没有极限, 则这个等式根本不成立. 因此这种情况下左边的极限是否存在又如何求都需要另行研究.

3. 其中的极限过程不限于 $x\to a$, a 可以是有限数, 也可以是各种无穷大量, 也可以是单侧极限. A 也可以是无穷大量.

4. $\frac{*}{\infty}$ 的意思是分母有 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$, 而对分子则不加任何限制. 此外, 由于 $g(x)$ 可微, 从而必定连续, 因此 $\lim\limits_{x\to a}g(x)=\infty$ 中的无穷大量只能是具有确定符号的无穷大量.

下面先讲如何使用 L'Hospital 法则. 同时我们还举出其他方法以资比较.

先看教科书 p.161 上的第一个例子, 我们举出三种解法, 它们代表了到目前为止我们所学到的三种求函数极限的主要方法.

例 1 求 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$.

解 1 (见教科书 p.88 的例 2) 用等价量代换法:

$$I=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{2\cdot\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{x^2}=\frac{1}{2}.\quad\square$$

解 2 用 $\cos x$ 的 Taylor 展开式:

$$I=\lim_{x\to0}\frac{1-[1-\dfrac{x^2}{2}+o(x^3)]}{x^2}=\frac{1}{2}.\quad\square$$

解 3 这是 0/0 型不定式. 连用两次 L'Hospital 法则即可:

$$I=\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to0}\frac{(\sin x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\cos x}{2}=\frac{1}{2}.\quad\square$$

教科书中接下来的例 2–4 请同学自学. 我们补充几个例子.

补充例 1 求 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos^\alpha x-\cos^\beta x}{\sin^2 x}$.

解 用 L'Hospital 法则 (用 Taylor 展开式也可以):

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\alpha\cos^{\alpha-1}x(-\sin x)-\beta\cos^{\beta-1}x(-\sin x)}{2\sin x\cos x}=\frac{1}{2}(\beta-\alpha).\quad\square$$

补充例 2 求极限 $I=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\dfrac{x}{1+x}-\ln(1+x)}{x^2}$.

错误的解法 主要是如何处理分子. 以下几种做法都是错的.

第一种是利用 $\dfrac{x}{1+x}\sim x\ (x\to0)$, $\ln(1+x)\sim x\ (x\to0)$, 于是分子成为 $x-x=0$, 所以 $I=0$.

第二种是只利用 $\dfrac{x}{1+x}\sim x\ (x\to0)$, 于是

$$I=\lim_{x\to0}\frac{x-\ln(1+x)}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-(x-\dfrac{x^2}{2}+o(x^2))}{x^2}=\frac{1}{2}.$$

第三种是只利用 $\ln(1+x)\sim x\ (x\to0)$, 于是

$$I=\lim_{x\to0}\frac{\dfrac{x}{1+x}-x}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{x-x(1+x)}{x^2(1+x)}=\lim_{x\to0}\frac{-x^2}{x^2+x^3}=-1.$$

下面列出几种正确解法.

解 1 将分子的两项分别作 Taylor 展开:

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{x[(1-x)+o(x)] - [x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)]}{x^2}$$
$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\frac{x^2}{2} + o(x^2)}{x^2} = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

解 2　用 L'Hospital 法则:

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{(1+x)^2} - \frac{1}{1+x}}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1-(1+x)}{(1+x)^2}}{2x} = -\frac{1}{2}. \quad \square$$

补充例 3　设 f 于 $(0, +\infty)$ 上可微, 且已知有

$$\lim_{x\to+\infty} [f(x) + f'(x)] = A,$$

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

解　这里要介绍乘以 e^x 的一种重要方法:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^x [f(x) + f'(x)]}{\mathrm{e}^x} = A. \quad \square$$

注　这里的 $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x f(x)}{\mathrm{e}^x}$ 的分子的性态并不清楚, 因此就属于 $\dfrac{*}{\infty}$ 型的不定式. 可见在华东师范大学教材中只讲 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 的 L'Hospital 法则是不妥当的. 此外我们也看到过不用 L'Hospital 法则解本题的方法, 非常长, 不值得学习.

二. 使用 L'Hospital 法则的注意事项

这里不需要细讲, 主要请同学自学.

(1) 只能对于 $\dfrac{0}{0}$ 和 $\dfrac{*}{\infty}$ 的不定式使用 L'Hospital 法则.

(2) 若 $\lim \dfrac{f'}{g'}$ 不存在, 并不说明原来的极限不存在, 而应当另想别法.

(3) 用 L'Hospital 法则求不出来或越求越复杂的情况也是可能的, 这时也应当另想别法.

(4) 可以与其他方法结合使用.

补充两个例子.

补充例 1　求 $I = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - \tan x}{x^3}$.

解 1　用一次 L'Hospital 法则后改用其他方法:

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \sec^2 x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin^2 x}{3x^2 \cos^2 x} = -\frac{1}{3}. \quad \square$$

解 2　用 Taylor 展开式与等价量代换:

$$I = \lim_{x\to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{6} = -\frac{1}{3}. \quad \square$$

补充例 2　求 $I = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}}$.

此题极限为 1 是明显的, 只要分子分母同除以 x 即可. 若用 L'Hospital 法则会出现以下循环情况:

$$\begin{aligned} I &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\dfrac{1}{x}}{\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \text{（原式）} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I = \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1+x^2}} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} \\ &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}}{1} = I. \end{aligned}$$

三. L'Hospital 法则的证明

只证明以下两种情况, 其余可以类推.

一. 设 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\dfrac{0}{0}$ 的不定式, 其中 a, A 均为有限数. 这时当然假设 f, g 在 a 右侧充分邻近处可微.

采取比书上更简单一些的证明方法.

从 $f(a^+) = g(a^+) = 0$, 补充 (或修改) 定义 $f(a) = g(a) = 0$. 这样就使得 f, g 在点 a 均右连续.

由于在 a 的右侧邻近 $g'(x) \neq 0$, 可以设以下所取的 $x > a$ 已经满足 $g(x) \neq g(a) = 0$ (否则违反 Rolle 定理).

从条件 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, 对于 $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0, \forall\, a < x < a+\delta$, 成立

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon.$$

然后用 Cauchy 中值定理, $\forall\, a < x < a+\delta$, 存在 $\xi \in (a, x) \subset (a, a+\delta)$, 使得

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)} - A\right| = \left|\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} - A\right| = \left|\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} - A\right| < \varepsilon.$$

这样就证明了

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)}{g(x)} = A. \quad \square$$

二. 设 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 为 $\dfrac{*}{\infty}$ 的不定式, a 为有限数, 又设 $g(a^+) = +\infty$.

这个证明要复杂一些, 我们先进行分析.

分析　从条件 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = A$, 对于 $\forall\,\varepsilon > 0, \exists\,\delta > 0, \forall\, a < x < a+\delta$, 成立

$$\left|\frac{f'(x)}{g'(x)} - A\right| < \varepsilon.$$

由于目前不能采取补充定义 $g(a^+)$ 的方法, 我们取 $a < x < x' < a+\delta$, 然后在区间 $[x, x']$ 上用 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi \in (x, x') \subset (a, a+\delta)$, 使得

$$A - \varepsilon < \frac{f(x)-f(x')}{g(x)-g(x')} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} < A + \varepsilon.$$

然而我们的目的是要估计 $f(x)/g(x)$. 这里的办法是用一个恒等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{f(x)-f(x')}{g(x)-g(x')}\right)\cdot\left(\frac{g(x)-g(x')}{g(x)}\right)+\frac{f(x')}{g(x)}.$$

利用 $g(a^+)=+\infty$, 可见若固定 x', 而令 x 充分接近 a 的右侧, 则右边第二项极限为 0, 而右边第一项的第二个因子极限为 1, 因此左边的商 $f(x)/g(x)$ 就会落到 $(A-\varepsilon, A+\varepsilon)$ 内. 这就是下面证明的依据.

这里可以回忆在第二章数列极限中, 对于给定的 $\varepsilon>0$, 有时先取定一个 N, 然后在这个 N 的基础上再取另一个更大的 N_1. 我们这里则是先取一个 $\delta>0$, 然后在它的基础上再取出第二个更小的 $\delta_1>0$.

用于 $\dfrac{*}{\infty}$ 的 L'Hospital 法则的证明

重复上述分析的开始部分, 即从条件 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$, 对于给定的 $\varepsilon>0$, $\exists\,\delta>0$, $\forall\, a<x<a+\delta$, 成立

$$A-\varepsilon<\frac{f'(x)}{g'(x)}<A+\varepsilon.$$

如前所说, 从条件 $\lim\limits_{x\to a^+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$ 可设在 $(a,a+\delta)$ 内 $g'(x)$ 无零点. 从 $g(a^+)=+\infty$ 可知 g 严格单调增加.

取 $a<x<x'<a+\delta$, 然后在区间 $[x,x']$ 上用 Cauchy 中值定理, 存在 $\xi\in(x,x')\subset(a,a+\delta)$, 使得

$$A-\varepsilon<\frac{f(x)-f(x')}{g(x)-g(x')}=\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}<A+\varepsilon.$$

现在固定 x', 且不妨设 x 与 a 已充分接近, 使得 $1-\dfrac{g(x')}{g(x)}>0$ 成立, 这里 x 与 a 的接近程度在下面定出.

利用恒等式

$$\frac{f(x)}{g(x)}=\left(\frac{f(x)-f(x')}{g(x)-g(x')}\right)\cdot\left(1-\frac{g(x')}{g(x)}\right)+\frac{f(x')}{g(x)}. \qquad (*)$$

和 $1-\dfrac{g(x')}{g(x)}>0$ 就可以将 $f(x)/g(x)$ 夹在两个函数之间:

$$\phi_0(x)<\frac{f(x)}{g(x)}<\phi_1(x),$$

其中

$$\phi_0(x)=(A-\varepsilon)\left(1-\frac{g(x')}{g(x)}\right)+\frac{f(x')}{g(x)},$$
$$\phi_1(x)=(A+\varepsilon)\left(1-\frac{g(x')}{g(x)}\right)+\frac{f(x')}{g(x)}.$$

利用 $\phi_0(a^+) = A - \varepsilon$, $\phi_1(a^+) = A + \varepsilon$, 可知存在 δ_1, 满足 $0 < \delta_1 < \delta$, 使得同时成立以下 3 个不等式:

$$\left|\frac{g(x')}{g(x)}\right| < 1, \quad \phi_0(x) > A - 2\varepsilon, \quad \phi_1(x) < A + 2\varepsilon.$$

于是当 $0 < x < \delta_1$ 时就成立

$$A - 2\varepsilon < \frac{f(x)}{g(x)} < A + 2\varepsilon.$$

这样就证明了 $\lim\limits_{x\to a^+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = A$. $\square$

注 最后部分实际上就是两面夹的推广, 见教科书第四章最后的习题 5 (p.92).

四. 其他类型的不定式极限

(教科书在 p.30 称这些为不定式, 到 p.161 称为不定型, 到这里 p.165 则称为未定型. 这是很不严肃的做法.)

例 5 求 $I = \lim\limits_{x\to 0^+} x^x$.

解 先写成

$$I = \lim_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{x\ln x},$$

利用指数函数的连续性, 只要计算

$$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} = \lim_{x\to 0^+} \frac{x^{-1}}{-x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+}(-x) = 0,$$

因此 $I = \mathrm{e}^0 = 1$. $\square$

例 6 求 $I = \lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{\ln x} - \dfrac{1}{x-1}\right)$.

解 利用 $\ln x \sim x - 1$ $(x \to 1)$, 就有

$$I = \lim_{x\to 1}\left(\frac{x-1-\ln x}{(x-1)\ln x}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{x-1-\ln x}{(x-1)^2}$$

再用 L'Hospital 法则就有

$$I = \lim_{x\to 1}\frac{1-x^{-1}}{2(x-1)} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

解 2 对解 1 的第二步也可利用 Taylor 展开式

$$\ln x = \ln(1 + (x-1)) = (x-1) - \frac{(x-1)^2}{2} + o((x-1)^2)\ (x \to 1),$$

就可以得到答案 1/2. $\square$

下面补讲上一节中的最后一小节, 其中的题有点难.

七. 进一步的例子

Taylor 展开式是微分学中的最重要结果. 有人说, 它是微分学中的顶峰. 从它出发再回顾以前的结果就有"一览群山小"之感觉.

下面讲几个例子, 但按照对当前学习的重要性改变一下顺序,

例 8 设 $f \in C^2[a,b]$ (也就是 $f'' \in C[a,b]$), 于 (a,b) 三阶可微, 且 $f(a) = f'(a) = f(b) = 0$, 证明: 对每个 $x \in [a,b]$, 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$f(x) = \frac{f'''(\xi)}{3!} \cdot (x-a)^2(x-b).$$

下面介绍两种证明方法. 第一种是构造辅助函数, 这与前面证明 Lagrange 中值定理, Cauchy 中值定理的做法类似. 第二种是用 Cauchy 中值定理, 这与前面证明两个 Taylor 定理的方法类似.

证 对于 $x = a$ 和 $x = b$, ξ 可以任取, 因此以下只需讨论 $x \in (a,b)$ 的情况.

记 $\lambda = \dfrac{6f(x)}{(x-a)^2(x-b)}$, 构造辅助函数

$$F(t) = f(t) - \frac{\lambda}{6}(t-a)^2(t-b).$$

则只需要证明存在 ξ, 使得 $F'''(\xi) = 0$.

这时有 $F(a) = F(b) = F(x) = 0$. 用两次 Rolle 定理知道有 $\xi_1 \in (a,x), \xi_2 \in (x,b)$, 使得

$$F'(\xi_1) = F'(\xi_2) = 0.$$

又因 $F'(a) = 0$, 对于 $a < \xi_1 < \xi_2$ 再用两次 Rolle 定理就知道存在 $\eta_1 \in (a,\xi_1)$, $\eta_2 \in (\xi_1,\xi_2)$, 使得 $F''(\eta_1) = F''(\eta_2) = 0$. 最后在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上再用 Rolle 定理, 就得到 ξ, 使得 $F'''(\xi) = 0$. □

证 2 令 $g(x) = (x-a)^2(x-b)$, 注意它与 f 满足相同的边界条件, 即有 $g(a) = g(b) = g'(a) = 0$.

设 $x \in (a,b)$, 用 Cauchy 中值定理, 并采用与证明 1 相同的中值记号 (以及中值所属的相同区间), 就有

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi_1)}{g'(\xi_1)} \\ &= \frac{f'(\xi_1)-f'(a)}{g'(\xi_1)-g'(a)} = \frac{f''(\eta_1)}{g''(\eta_1)},\end{aligned}$$

又有

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f(x)-f(b)}{g(x)-g(b)} = \frac{f'(\xi_2)}{g'(\xi_2)} \\ &= \frac{f'(\xi_2)-f'(\xi_1)}{g'(\xi_2)-g'(\xi_1)} = \frac{f''(\eta_2)}{g''(\eta_2)},\end{aligned}$$

再合并为

$$\begin{aligned}\frac{f(x)}{g(x)} &= \frac{f''(\eta_1)-f''(\eta_2)}{g''(\eta_1)-g''(\eta_2)} \\ &= \frac{f'''(\xi)}{g'''(\xi)}.\end{aligned}$$

由于 g 为最高次项系数为 1 的三次多项式, 因此 $g'''(\xi) = 6$, 即得所求. □

例 6 (Landau-Hadamard 不等式) 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上二阶可微, 记 $|f(x)|$, $|f'(x)|$, $|f''(x)|$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的上确界为 M_0, M_1, M_2, 证明成立不等式

$$M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0 M_2}.$$

注 在教科书的 p.158 上要求证明的是 $M_1 \leqslant \sqrt{2M_0M_2}$, 其中的技巧更高一些. 我们这里改为讲 $M_1 \leqslant 2\sqrt{M_0M_2}$, 要容易一点. 书上内容自己看.

证 写出 Taylor 展开式

$$f(x+t) = f(x) + f'(x)t + \frac{f''(\xi)}{2}t^2,$$

其中 $t \neq 0$, $\xi \in (x, x+t)$.

于是可以对一阶导函数估计为:

$$\begin{aligned}|f'(x)| &= \frac{1}{|t|}\Big|f(x+t) - f(x) - \frac{f''(\xi)}{2}t^2\Big| \\ &\leqslant \frac{2M_0}{|t|} + \frac{1}{2}|t|M_2,\end{aligned}$$

于是就得到

$$M_1 \leqslant \frac{2M_0}{|t|} + \frac{|t|}{2}M_2.$$

最后利用平均值不等式得到

$$M_1 \leqslant \min_{|t|}\Big(\frac{2M_0}{|t|} + \frac{|t|}{2}M_2\Big) = 2\sqrt{M_0M_2}. \quad \square$$

注 1 最后一步取 $|t| = 2\sqrt{M_0/M_2}$ 时达到最小值. 这个 $|t|$ 值不等于 0. 实际上, 若 $M_0 = 0$, 只能是 $f \equiv 0$, 因此 $M_1 = 0$. 若 $M_2 = 0$, 则 f 为线性函数. 为了使得 M_0 有限, f 只能是常值函数. 从而也有 $M_1 = 0$. 因此可以将 $M_0M_2 = 0$ 的情况事先排除在外. 从而上述 $|t|$ 值不等于 0.

注 2 实际上证明的是当 M_0, M_2 为有限数时, 则 M_1 必为有限数, 且满足上述不等式. 最后一步也可以从二次三项不等式

$$\frac{M_2}{2}t^2 - M_1|t| + 2M_0 \geqslant 0$$

看出判别式 $M_1^2 - 4M_0M_2 \geqslant 0$. 但还是应当如上面所说求 $\min_{|t|}(\frac{2M_0}{|t|} + \frac{|t|}{2}M_2)$ 更为清楚. 否则似乎就是一个技巧, 而背后的思想反而被忽略了.

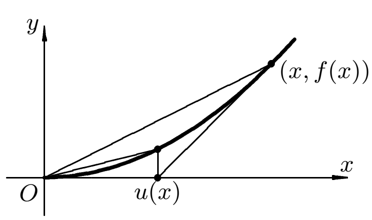


图 1: 例 7 的示意图.

例 7 设 $f \in C^2[0,+\infty)$, $f(0) = f'(0) = 0$, 且 $f''(x) > 0$ 处处成立. 又记曲线 $y = f(x)$ 在点 $(x, f(x))$ 处的切线在 x 轴上的截距为 $u(x)$, 证明

$$I = \lim_{x\to 0^+} \frac{xf(u(x))}{u(x)f(x)} = \frac{1}{2}.$$

本题有明显的几何意义. 如图 1 所示, $f(x)/x$ 是点 $(x, f(x))$ 与原点联线的斜

率, 而 $f(u(x))/u(x)$ 是点 $(u(x), f(u(x)))$ 与原点联线的斜率. I 就是二者之比的极限. 由于这两个斜率都趋于 0, 因此这个极限也是两条联线与 x 轴正向的夹角之比.

证 用带 Peano 型余项的 Taylor 展开式计算 $f(x)$, $u(x)$ 和 $f(u(x))$ 在 $x \to 0^+$ 时的性态即可.

首先有

$$f(x) = \frac{f''(0)}{2}x^2 + o(x^2) \ (x \to 0).$$

在切线方程 $Y - f(x) = f'(x)(X - x)$ 中令 $Y = 0$, 解出截距

$$u(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

然后用 $f(x)$ 的展开式和 $f'(x) = f''(0)x + o(x) \ (x \to 0)$ 代入就可以得到

$$u(x) = x - \frac{\frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)}{f''(0)x + o(x)} = \frac{1}{2}x + o(x) \ (x \to 0).$$

再求出

$$\begin{aligned} f(u(x)) &= \frac{1}{2}f''(0)u^2(x) + o(u^2(x)) \\ &= \frac{1}{8}f''(0)x^2 + o(x^2) \ (x \to 0). \end{aligned}$$

合并以上结果就得到

$$\frac{xf(u(x))}{u(x)f(x)} = \frac{\frac{1}{8}f''(0)x^3 + o(x^3)}{\frac{1}{4}f''(0)x^3 + o(x^3)} = \frac{1}{2} + o(1) \ (x \to 0),$$

可见 $I = \frac{1}{2}$. $\square$

第 27 次讲稿

第 27 次讲稿, 用于 2007 年 12 月 19 日, 星期三, 2 节课.

开始讲第八章 导数的应用. 这一章中删去 §8.3 中的五. 0.618 方法 (黄金分割搜索法) 和 §8.5 向量值函数.

实际上前面已经讲了不少应用, 例如 §7.3 中用 L'Hospital 法则求函数极限, 以及 §7.2 中的许多应用. 但本章重点是如何研究函数.

注 应当补充 L'Hospital 法则的两个应用:

(1) 用于证明导数极限定理时只要一行即可 (教科书上为 p.151 八. 练习题 4):

$$\lim_{x\to a^+}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a^+}\frac{(f(x)-f(a))'}{(x-a)'}=\lim_{x\to a^+}f'(x)=f'(a^+).$$

(今后应当放到前面, 作为 L'Hospital 法则在理论上的应用例子, 而且可能有助于对其内容的理解.)

(2) 用于证明 Taylor 展开式的第一个定理, 即带 Peano 型余项的情况, 这时不必写出余项 $r_n(x)$, 也不必先证明 $r_n^{(k)}(0)=0$ 对 $k=0,1,\cdots,n$ 成立, 而只需对表达式

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-[f(0)+f'(0)x+\cdots+\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n]}{x^n}$$

反复用 L'Hospital 法则即可. 只是要注意只能用 $n-1$ 次, 最后一次因为知知道存在 $f^{(n)}(0)$, 因此与以前相同即用导数定义即可. 这就是教科书 p.166 上练习题 2.

(这个证明的缺点在于, 若这样讲, 则带 Lagrange 型余项的定理 2 就要从头开始了.)

§ 8.1 判别函数的单调性

函数单调性是描述函数的一个基本方法, 非常有用. 过去已经专门研究过单调函数 (见 §5.3), 这里则学习用导数判定函数的单调性, 以及确定非单调函数的单调区间的方法. (教科书 p.61 出现单调区间这个名词, 可以理解为函数在其中为单调的区间. 但实际上我们希望将函数的定义区间划分为单调区间的并, 因此希望得到最大可能的单调区间.)

一. 单调性判别法

根据导数定义, 单调函数的差商保号, 因此导数也一定保号, 即单调增加函数的导数处处 $\geqslant 0$, 而单调减少函数的导数处处 $\leqslant 0$. 反之如何?

定理 1 设函数在 $f\in\langle a,b\rangle$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且处处 $f'(x)\geqslant 0$ $(\leqslant 0)$, 则 f 为单调增加 (减少) 函数.

证 只写出 $\forall x \in (a,b)$ 有 $f'(x) \geqslant 0$ 时的证明. 任取 $x_1, x_2 \in \langle a,b \rangle$, $x_1 < x_2$, 在 $[x_1, x_2]$ 上用 Lagrange 中值定理, 就有 $\xi \in (x_1, x_2)$, 成立

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1) \geqslant 0,$$

因此 f 单调增加. $\square$

注 这里要注意, 若只知道 f 于某一个点 x_0 处导数大于 0, 则不能推出 f 在 x_0 的一个邻域中单调增加. 请参考《数学分析习题课讲义》上册 p.235 的例题 8.2.1.

下面的问题是如何从导数判定函数严格单调? 在前面已经证明过, 如果导函数在一个区间上严格大于 0, 或严格小于 0, 则函数严格单调. 但这个条件过分强了一点. 例如 $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上严格单调增加, 但 $y'(0) = 0$.

下面的推论完全解决了这个问题.

推论 1 设函数 f 在 $\langle a,b \rangle$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 则 f 在 $\langle a,b \rangle$ 上严格单调增加 (减少) 的充分必要条件是: (1) 在 (a,b) 上 $f'(x) \geqslant 0$ ($\leqslant 0$) 处处成立, (2) 同时在数集 $\{x \mid f'(x) = 0\}$ 中不含有任何长度大于 0 的区间.

证 只证明严格单调增加的部分.

必要性 ($\Longrightarrow$) (1) 从单调增加性可知差商 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x} \geqslant 0$, 因此极限 $f'(x) \geqslant 0$. (2) 用反证法. 如果存在 $c < d$ 使得 $[c,d]$ 上 $f'(x) \equiv 0$, 则 f 在 $[c,d]$ 上为常值函数, 与严格单调条件相矛盾.

充分性 ($\Longleftarrow$) 从条件 (1) 用定理 1 即知 f 单调增加. 为了证明它严格单调增加, 用反证法. 若它不是严格单调增加, 则存在 $x_1 < x_2$, 使得 $f(x_1) = f(x_2)$. 这时 f 在 $[x_1, x_2]$ 上恒等于 $f(x_1)$, 于是 $(x_1, x_2) \subset \{x \mid f'(x) = 0\}$, 这与条件 (2) 矛盾. $\square$

注 这里要指出, 只有在一个区间上导函数保号才能保证函数的单调性. 仅仅在一个点上有 $f'(x_0) > 0 (< 0)$, 不能保证存在一个 $\delta > 0$, 使得 f 在 $(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ 上单调.

例 1 证明 $y = x + \sin x$ 严格单调增加.

解 从导函数 $y' = 1 + \cos x$ 的零点集合为 $\{(2n+1)\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ 和推论 1 可知. $\square$

注 思考题: 用图形合成法作出 $y = x + \sin x$ 的草图.

例 2 讨论函数 $y = 3x - x^3$ 的上升和下降情况.

解 先用图形合成法作出草图, 注意是奇函数. 其中的细节则需要用微分学来确定.

这就是要确定出在函数定义域中的所有单调区间.

为此只需要搞清楚导函数 $y' = 3 - 3x^2 = 3(1 - x^2)$ 的符号. 这里建议同学使用列表法写出答案:

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1, 1)$	1	$(1, +\infty)$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

注意: 从单调性已经可以作出函数的大致图形. 而且已经可以确定出函数 $y(x)$ 于点 -1 达到极小值 -2, 于点 1 达到极大值 2. $\square$

二. 进一步的例子

这里的前两个例子都是用单调性证明不等式. 其中的方法是需要注意学习的.

但我们先复习一下前面用 Lagrange 中值定理来证明不等式的方法. 例如在 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 时, 有

$$\sin x = \sin x - \sin 0 = \cos(\theta x)x < x,$$

其中 $0 < \theta < 1$.

又有

$$\tan x = \tan x - \tan 0 = \sec^2(\theta x)x > x,$$

其中也有 $0 < \theta < 1$.

这两个结果今天都要用到. 首先看它们的组合有意料不到的结果.

例 3 证明在 $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ 上成立不等式

$$\tan x + 2\sin x > 3x.$$

证 定义辅助函数

$$F(x) = \tan x + 2\sin x - 3x, \quad 0 \leqslant x < \frac{\pi}{2}.$$

注意定义域比题中的变量范围多了一个点 $x = 0$. 这时 $F(0) = 0$,

$$F'(x) = \sec^2 x + 2\cos x - 3.$$

如果在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 上处处有 $F'(x) > 0$, 则 $F(x) > 0$ 就成立了. 这确实如此, 因为用平均值不等式即有

$$\frac{\sec^2 x + 2\cos x}{3} \geqslant \sqrt[3]{\sec^2 x \cos x \cos x} = 1,$$

而且在 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 上一定成立严格的 $>$ 号. 这样就解决了问题.

如果想不到以上的办法, 则可以将以上方法再用一次. 这就是从 $F'(0) = 0$, 为了证明 $F'(x) > 0$ 在区间 $(0, \dfrac{\pi}{2})$ 上成立, 我们再对 F' 求导, 观察

$$F''(x) = 2\sec^2 x \tan x - 2\sin x$$

的符号. 从

$$\begin{aligned}F''(x) &= \frac{2\sin x}{\cos^3 x} - 2\sin x\\ &= 2\sin x\left(\frac{1}{\cos^3 x} - 1\right)\end{aligned}$$

可见在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 上处处有 $F''(x) > 0$, 于是在 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上 F' 严格单调增加. 再利用 $F'(0) = 0$, 可见 $F'(x) > 0$ 在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 上成立. 这表明 $[0, \frac{\pi}{2})$ 上 F 严格单调增加. 最后用 $F(0) = 0$, 因此在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 上处处有 $F(x) > 0$, 证毕. □

注 与教科书比较, 我们先建立在 $0 < x < \frac{\pi}{2}$ 上有 $\sin x < x < \tan x$, 这样本题才更有意义.

例 4 证明不等式

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1 \quad \forall\, 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

这也可以写为

$$\frac{2}{\pi}x \leqslant \sin x \leqslant x \quad \forall\, 0 < x \leqslant \frac{\pi}{2},$$

而且当 $x \in (0, \frac{\pi}{2})$ 时两个不等号都是严格成立的.

这是关于正弦函数的基本不等式, 右边的不等式在前面已经得到, 因此下面只要证左边的不等式. 它称为 Jordan 不等式,

从图形合成法可以知道它们都有明显的几何意义. 要分别画出 $\sin x$ 和 $\frac{\sin x}{x}$ 在 $(0, \frac{\pi}{2}$ 上的几何图像, 并从中思考如何证明它们.

证 1 从 $\sin x/x$ 的图像启发我们引入辅助函数

$$F(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}, & 0 < x \leqslant \dfrac{\pi}{2},\\ 1, & x = 0,\end{cases}$$

然后设法证明 F 单调减少. 为此求导得到

$$F'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2} = \frac{\cos x}{x^2}\cdot(x - \tan x),$$

利用 (前面已经建立) $\tan x > x$ 在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上成立, 就推出 $F'(x) \leqslant 0$, 即 F 单调减少. 于是在 $0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}$ 上成立

$$F(0) \geqslant F(x) \geqslant F(\frac{\pi}{2}),$$

这就是所要证明的

$$\frac{2}{\pi} \leqslant \frac{\sin x}{x} \leqslant 1. \quad \square$$

证 2 为了证明 Jordan 不等式, 利用区间 $[0, \frac{\pi}{2}]$ 上的函数 $\sin x$ 与线性函数 $y = \frac{2}{\pi}x$ 的几何图像, 我们构造辅助函数

$$\phi(x) = \sin x - \frac{2}{\pi}x, \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

于是问题变成证明在所给定的区间上处处成立 $\phi(x) \geqslant 0$. 可以看出, $\phi(0) =$

$\phi(\frac{\pi}{2})=0$. 实际上, 函数 ϕ 不是单调的, 而是先单调增加, 然后单调减少. 这从它的导函数就可以明白:

$$\phi'(x)=\cos x-\frac{2}{\pi}$$

可见有驻点 $\xi=\arccos\frac{2}{\pi}\in(0,\frac{\pi}{2})$. 由于当 x 从 0 增加到 $\frac{\pi}{2}$ 时 $phi'(x)$ 严格单调减少, 因此可以知道在 $[0,\xi]$ 上函数 ϕ 严格单调增加, 从而 $\phi(x)\geqslant\phi(0)=0$, 而在 $[\xi,\frac{\pi}{2}]$ 上函数 ϕ 严格单调减少, 从而 $\phi(x)\geqslant\phi(\frac{\pi}{2}-0$. □

注 这里对照 $\phi(x)$ 与 $\phi'(x)$ 的曲线是一个有用的方法.

例 5 确定方程 $\ln x=ax$ 的实根个数, 其中 a 为正参数.

解 从几何上可以看成是问对数曲线 $y=\ln x$ 与直线 $y=ax$ 是否相交的问题. 我们引入辅助函数

$$F(x)=\ln x-ax,\quad x>0.$$

则就将问题转化为确定 F 的零点个数, 或者说曲线 $y=F(x)$ 是否与 x 轴相交的问题. 从 F 的导函数

$$F'(x)=\frac{1}{x}-a$$

和 $a>0$ 可知函数 F 在 $(0,\frac{1}{a}]$ 上严格单调增加, 而在 $[\frac{1}{a},+\infty)$ 上严格单调减少. 由此可见问题在于 F 的极大值 (也是最大值) 的符号. 可以计算得到

$$F(0^+)=-\infty,\quad F(\frac{1}{a})=-\ln a-1,\quad F(+\infty)=-\infty,$$

其中最后一式利用了

$$F(x)=-ax(1-\frac{\ln x}{ax})=-ax(1+o(1))\ (x\to+\infty).$$

可见有三种可能性.

(1) $\ln a>-1$, 即 $a>\mathrm{e}^{-1}$, 这时 $F(x)$ 没有零点, 即原来的方程 $\ln x=ax$ 无实根.

(2) $a=\mathrm{e}^{-1}$, 则方程 $\ln x=ax$ 恰有一个实根, 即 $x=\mathrm{e}$.

(3) $0<a<\mathrm{e}^{-1}$, 则方程 $\ln x=ax$ 恰有两个实根, 且分别在点 $1/a$ 的两侧. □

§ 8.2 寻求极值和最值

一. 极值的充分性判别法

从前面关于单调性的讨论, 可见若函数在某点 x_0 两侧分别单调, 且具有相反的单调性, 则就可以确定 x_0 为极值点. 特别当 f 在 x_0 的 (去心) 邻域上可微, 则可以用导函数的符号来判定 x_0 是否为极值点. 这就是教科书 p.170 上的判别法 1.

这里要指出, 判别法 1 只是充分条件. 函数在点 x_0 达到极值并不能推出 f 在 x_0 两侧分别单调.

进一步, 若 $f'(x_0)=0$, 且存在 $f''(x_0)\neq 0$, 则当 $f''(x_0)>0$ 时 x_0 是极小值点, 而当 $f''(x_0)<0$ 时 x_0 是极大值点. 这就是判别法 2.

判别法 2 的证明 写出带 Peano 型余项的 Taylor 展开式

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2+o((x-x_0)^2)\ (x\to x_0).$$

改写为

$$f(x)-f(x_0)=\frac{1}{2}[f''(x_0)+o(1)](x-x_0)^2\ (x\to x_0).$$

由此可见 $\exists\,\delta>0,\ \forall\,x\in O_\delta(x_0)$, Δf 与 $f''(x_0)$ 具有相同的符号. 这样就得到所要的结论. □

注 教科书中不是利用上述 Taylor 展开式. 而是从 $f''(x_0)>0$ 推出当 Δx 的绝对值充分小时, 关于 $f'(x)$ 在点 x_0 的差商

$$\frac{f'(x_0+\Delta x)-f'(x_0)}{\Delta x}>0,$$

再利用 $f'(x_0)=0$, 因此 $f'(x)$ 在 x_0 右侧邻近大于 0, 从而 f 单调增加, 而在点 x_0 左侧邻近则小于 0, 从而 f 单调减少, 于是可见 x_0 为极小值点. 这当然很清楚. 但我们采用的方法则很容易推广到 $f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, 而 $f^{(n)}(x_0)=0$ 的情况 (见教科书 p.172 题 3).

注 2 在 $f'(x_0)=0$ 和 $f''(x_0)\neq 0$ 时如何记住 $f''(x_0)$ 的符号与极值类型的关系, 书上介绍的方法可以参考. 也可以记住 $y=x^2$ 在点 $x=0$ 处取极小值, 而 $y''=2>0$. 可见二阶导数大于 0 对应了极小值, 从而二阶导数小于 0 必定对应了极大值.

第 28 次讲稿

第 28 次讲稿, 用于 2007 年 12 月 24 日, 星期一, 3 节课.

继续讲第八章 导数的应用. 这一章中删去 §8.3 中的五. 0.618 方法 (黄金分割搜索法) 和 §8.5 向量值函数.

这次要讲完 §8.2 的极值最值问题, 重点是讲 §8.3 函数的凸性.

例 1 求函数 $y=(x-1)\sqrt[3]{x^2}$ 的极值点.

解 这里我们提倡用图形合成法作出草图的方法 (见教科书 p.58), 也只有经常使用才能学会这个方法.

从已知图像 $y=x-1$ 和 $y=\sqrt[3]{x^2}$ 相乘, 就已经可以看出点 $x=0$ 不可导, 且为极大值点, 而在 $(0,1)$ 之间会有一个极小值点. 以下只是用严格的数学语言将它们写出来.

计算出

$$y'=x^{\frac{2}{3}}+(x-1)\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}=x^{-\frac{1}{3}}(x+\frac{2}{3}x-\frac{2}{3})=\frac{1}{3}x^{-\frac{1}{3}}(5x-2),$$

可见 $x=0$ 是不可导点, 而 $x=2/5$ 是驻点.

与其用判别法于这两个点, 不如作单调性分析:

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,\frac{2}{5})$	$\frac{2}{5}$	$(\frac{2}{5},+\infty)$
y'	$+$		$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

可见 $x=0$ 为极大值点, $x=\dfrac{2}{5}$ 为极小值点. □

三. $f\in C[a,b]$ 时的最值点

这里的基本要点为:

(1) 从连续函数在有界闭区间上的最值定理可知一定存在最大值和最小值.

(2) 如果最值点为内点, 则为极值点.

(3) 极值点处可导则为驻点 (即 Fermat 定理), 否则就是不可导点.

(4) 因此只要求出所有极值可疑点, 然后从函数在这些可疑点上的函数值和 $f(a),f(b)$ 中取最大数和最小数即可.

教科书 p.172 上的两个例子请自学.

五. 任意区间上函数最值求法

这里的最值未必存在, 因此实际上将问题改为求确界. 如果确界能为函数取到, 则就是最值.

这里对于无上界数集 A 记 $\sup A=+\infty$, 对于无下界数集 A 记 $\inf A=-\infty$ (见 p.12 最后第二行开始的说明), 从而在任何情况下都可以用确界概念.

这里实际上还是只讨论连续函数情况, 而且除去有限点外都可微.

设 f 于 $\langle a,b\rangle$ 上连续, 其中 a,b 可以不是有限数. 这时只要求出数集

$$A=\{f(a^+),f(b^-),f(x_0),f(x_1),\cdots,f(x_n)\},$$

其中当 $a=-\infty$ 时用 $f(-\infty)$ 代替 $f(a^+)$, 当 $b=+\infty$ 时用 $f(+\infty)$ 代替 $f(b^-)$, x_i, $i=0,1,\cdots,n$, 为所有极值可疑点.

证明

$$\sup f(\langle a,b\rangle)=\max A,\quad \inf f(\langle a,b\rangle)=\min A$$

是简单的, 只要对由 x_i 划分的每个子区间应用 Darboux 定理即知 f 在每个子区间上严格单调, 从而不可能在其中取到极值.

例 4　求 $y=x+\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,+\infty)$ 中的确界和最值.

(应当先用图形合成法看出大致情况, 然后用微分学确定最后答案.)

例 5　求 $y=x^2\mathrm{e}^{-|x-1|}$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 中的确界与最值.

(应当先用图形合成法看出大致情况, 然后用微分学确定最后答案. 这里 $x=1$ 为不可导点. 其单侧导数满足 $(uv)'=u'v+uv'$, 从而知道 $y'_+(1)=3$, $y'_-(1)=1$.)

解　在 $x\neq 1$ 时可以计算出

$$\begin{aligned}y'&=2x\mathrm{e}^{-|x-1|}+x^2\mathrm{e}^{-|x-1|}\cdot(-\operatorname{sgn}(x-1))\\&=x\mathrm{e}^{-|x-1|}(2-x\operatorname{sgn}(x-1)).\end{aligned}$$

由此确定驻点 $0,\pm2$. 计算以上 4 个极值可疑点上的函数值, 再加上 $y(\pm\infty)$, 就可以解决问题.

计算结果为

$$y(-\infty)=0,y(-2)=4\mathrm{e}^{-3},y(0)=0,y(1)=1,y(2)=4\mathrm{e}^{-1},y(+\infty)=0,$$

因此 y 的最大值为 $4\mathrm{e}^{-1}$, 最小值为 0.　□

注　其中用了 $(|x|)'=\operatorname{sgn}x$, $x\neq0$. 但这并非必要. 分别讨论 $x<1$ 与 $x>1$ 也许更为清楚.

七. 应用题例子

例 6　从边长 a 的正方形铁皮的四个角去掉长 x 的四个正方形后, 做成一个无盖方盒. 问: x 为何值时方盒的体积最大?

解 1　写出体积的表达式:

$$V(x)=x(a-2x)^2,\quad 0\leqslant x\leqslant\frac{a}{2},$$

可见一定有最大值, 而且是极大值点. 当然, $x=0,\dfrac{a}{2}$ 没有实际意义, 但这样可以用有界闭区间上连续函数的最值定理.

求导得到

$$V'(x) = (a-2x)^2 + 2x(a-2x)(-2) = (a-2x)(a-6x),$$

可见只要计算点 $x = 0, \frac{a}{2}, \frac{a}{6}$ 上的体积. 当然只有最后一个是问题的解, 即

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}} V(x) = V(\frac{a}{6}) = \frac{a}{6}(\frac{2a}{3})^2 = \frac{2}{27}a^3. \quad \square$$

解 2 将 $V(x)$ 改写为

$$V(x) = \frac{1}{4} 4x(a-2x)^2,$$

可见除了因子 $1/4$ 之外, 就是三个数 $4x, a-2x, a-2x$ 的乘积. 由于这三个数之和为 $2a$, 因此用平均值不等式知道当 $4x = a-2x$ 时达到最大值. 于是

$$\max_{0 \leqslant x \leqslant \frac{a}{2}} V(x) = \frac{1}{4}(\frac{2a}{3})^3 = \frac{2}{27}a^3. \quad \square$$

评论 解 1 为利用微分学的一般性方法, 但对一个具体问题而言, 未必提供了最好的解法. 解 2 是针对具体问题的一个简单方法, 但当然不是求解最值问题的普遍有效的手段.

例 7 (**光线折射定律**) 一束光从点 $A(0, y_1)$, $(y_1 > 0)$ 出发经过界面 $y = 0$ 到达点 $B(x_2, y_2)$, $(x_2 > 0, y_2 < 0)$. 设光在介质 1 $(y > 0)$ 和介质 2 $(y < 0)$ 中的速度分别为 v_1 和 v_2, 证明折射定律

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{v_1}{v_2}$$

等价于光以最短时间从点 A 到 B, 其中 α 和 β 分别是入射角和折射角.

证 以光束与界面交点的横坐标 x 为变量计算光束从 A 到 B 所用时间, 它是 x 的函数, 然后求其最小值点, 并验证在最小值点处的入射角和折射角满足定律.

从几何上可以写出

$$t(x) = \frac{\sqrt{x^2 + y_1^2}}{v_1} + \frac{\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}{v_2},$$

求导得到

$$t'(x) = \frac{x}{v_1\sqrt{x^2 + y_1^2}} + \frac{x - x_2}{v_2\sqrt{(x_2 - x)^2 + y_2^2}}$$

这里要直接求解驻点是困难的. 但问题本身并没有要求写出解. (这就是说计算时要注意目的是什么.)

首先看出 $t'(x)$ 在区间 $[0, x_2]$ 两端反号: $t'(0) < 0$, $t'(x_2) > 0$, 因此从零点存在定理, 存在点 $\xi \in (0, x_2)$, 使得 $t'(\xi) = 0$.

写出入射角与折射角的正弦

$$\sin\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{\xi^2 + y_1^2}}, \quad \sin\beta = \frac{x_2 - \xi}{\sqrt{(x_2 - \xi)^2 + y_2^2}},$$

就可以看出有

$$t'(\xi) = 0 \Longleftrightarrow \frac{\sin\alpha}{v_1} - \frac{\sin\beta}{v_2} = 0.$$

但以上没有讨论驻点是否惟一, 也没有讨论驻点是否为极值点. 因此还没有证明问题中的路径的最优性. 为此需要研究 $t'(x)$ 的单调性. 再求导一次得到

$$
\begin{aligned}
t''(x) &= \frac{1}{v_1}\cdot\frac{\sqrt{x^2+y_1^2}-\dfrac{x^2}{\sqrt{x^2+y_1^2}}}{x^2+y_1^2}+\frac{1}{v_2}\cdot\frac{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}-\dfrac{(x-x_2)^2}{\sqrt{(x_2-x)^2+y_2^2}}}{(x_2-x)^2+y_2^2}\\
&=\frac{1}{v_1}\cdot\frac{y_1^2}{(x^2+y_1^2)^{3/2}}+\frac{1}{v_2}\cdot\frac{y_2^2}{((x_2-x)^{+}y_2^2)^{3/2}}>0,
\end{aligned}
$$

可见 $t'(x)$ 严格单调增加, 从而其驻点惟一, 而且该驻点是极小值点, 也就是最小值点. 这样就证明了折射定律的背后是光线运行服从所化时间最小的原则.

这里又可以作出 $t(x), t'(x)$ 的图形来说明问题. 实际上, 在 $[0,\xi]$ 上 $t(x)$ 严格单调减少, 在 $[\xi,x_2]$ 上$t(x)$ 严格单调增加, 因此 $\xi\in(0,x_2)$ 是极小值点, 也是最小值点. □

注 这个题有两点可以进一步说一下. (1) 物理定律是以数学语言表达出来的. 进一步可以说大自然的定律都是如此. 折射定律就是这方面的一个例子. (2) 为什么光束满足折射定律? 这不是一个数学问题, 也不是物理学能够回答的问题. 正像 Newton 力学第一定律, 即惯性定律, 若要求回答为什么物体的运动会满足惯性定律, 则从来没有答案, 可以说这类问题不是现代科学中能够讨论的问题. (对此有兴趣的同学可以去看诺贝尔物理奖获得者 Feynman 的《物理定律的本性》.)

§ 8.3 函数的凸性

凸函数是一类有良好性质的函数, 在数学中有广泛的应用. 另一方面, 凸函数也比较容易研究, 它恰好与微分学中的一阶导数和二阶导数有密切关系, 因此将它作为微分学应用的一个主题是合适的.

先给出凸函数的定义.

定义 设 f 在区间 I 上定义, 若对于 $\forall x_1,x_2\in I$, $x_1<x_2$, $\forall\lambda\in(0,1)$, 成立不等式

$$f(\lambda x_1+(1-\lambda)x_2)\leqslant(\geqslant)\ \lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2),$$

则称 f 是区间 I 上的下凸函数 (上凸函数), 统称为凸函数[①]. 又若上述不等式中成立严格 $<$ $(>)$ 号, 则称为严格下凸函数 (严格上凸函数), 统称为严格凸函数.

凸函数有强烈的几何意义. 图 1 就是一个下凸函数的示意图.

如图所示, 当 λ 从 0 到 1 变化时, 点

$$x_\lambda=\lambda x_1+(1-\lambda)x_2=x_2-\lambda(x_2-x_1)$$

① 在英文中称这里的下凸函数为 convex function, 中译名即凸函数, 又称上凸函数为 concave function, 中译名即凹函数, 因此在部分国内教材中就采用凸函数和凹函数的名称.

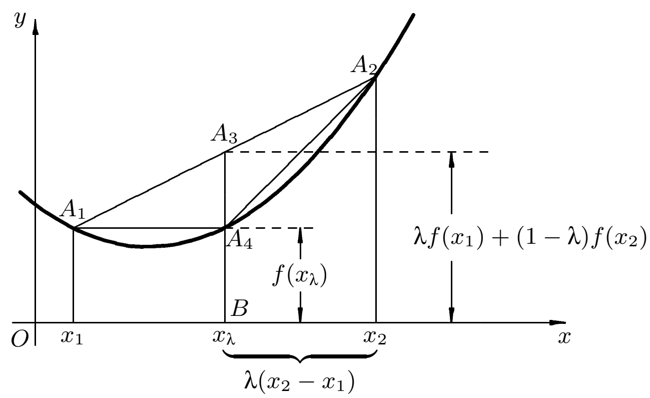


图 1: 下凸函数示意图.

从点 x_2 变动到 x_1. 下凸函数定义中的不等式就表明曲线 $y = f(x)$ 上的点 $(x_\lambda, f(x_\lambda))$ 一定在直线段 A_1a_2 的下方, 特别是在该直线段上的点 A_3 的下方, 而 A_3 的纵坐标就是定义中的 $\lambda f(x_1)+(1-\lambda)f(x_2)$.

容易看出若 f 下凸, 则 $-f$ 上凸, 因此许多讨论可以只对下凸函数 (或上凸函数) 来进行.

注 这里可以请同学看一下下凸函数的几种可能情况: 即 f 单调增加, 单调减少和先减少再增加的三个情况. 但不作证明.

从图 1 可以发现在三个直线段 A_1A_2, A_1A_4, A_4A_2 的斜率之间成立不等式

$$k(A_1A_4) \leqslant k(A_1A_2) \leqslant k(A_4A_2), \tag{$*$}$$

其中用 $k(A_1A_4)$ 表示直线段 A_1A_4 的斜率等. 对于严格下凸函数则不等式为严格不等号. 教科书中称为"三点斜率式", 而当 f 为严格下凸时则三点斜率式中均为严格不等号.

教科书上是从几何上得到三点斜率式, 但这不能代替分析证明.

三点斜率式的证明 只写出下凸情况的证明. 参考图 1, 可见在给定 x_1, x_2 和 x_λ 时可以反过来写出参数

$$\lambda = \frac{x_2 - x_\lambda}{x_2 - x_1}, \quad 1-\lambda = \frac{x_\lambda - x_1}{x^2 - x^1}.$$

这样就可以将下凸函数定义中的不等式改写为

$$(x_2 - x_1)f(x_\lambda) \leqslant (x_2 - x_\lambda)f(x_1) + (x_\lambda - x_1)f(x_2). \tag{$**$}$$

在不等式 $(**)$ 两边同时减去 $(x_2 - x_1)f(x_1)$, 就得到

$$\begin{aligned}(x_2-x_1)[f(x_\lambda)-f(x_1)] &\leqslant (x_1-x_\lambda)f(x_1)+(x_\lambda-x_1)f(x_2)\\ &=[f(x_2)-f(x_1)](x_\lambda-x_1),\end{aligned}$$

这就是 $k(A_1A_4)\leqslant k(A_1A_2)$.

又从 $(**)$ 式两边同时减去 $(x_2-x_1)f(x_2)$, 就得到

$$\begin{aligned}(x_2-x_1)[f(x_\lambda)-f(x_2)] &\leqslant (x_2-x_\lambda)f(x_1)+(x_\lambda-x_2)f(x_2)\\ &=[f(x_1)-f(x_2)](x_2-x_\lambda),\end{aligned}$$

这就是 $k(A_1A_2)\leqslant k(A_4A_2)$. $\square$

注 $(*)$ 实际含有三个不等式, 即

$$k(A_1A_4)\leqslant k(A_1A_2),\quad k(A_1A_2)\leqslant k(A_4A_2),\quad k(A_1A_4)\leqslant k(A_4A_2).$$

上面的推导实际已经证明函数 f 在区间 I 上为下凸函数的定义等价于上述三个不等式中的前两个. 为证明下凸定义与第三个不等式等价, 只需要将 $(**)$ 左边改写, 得到

$$[(x_2-x_\lambda)+(x_\lambda-x_1)]f(x_\lambda)\leqslant (x_2-x_\lambda)f(x_1)+(x_\lambda-x_1)f(x_2),$$

然后移项得到

$$(x_2-x_\lambda)[f(x_\lambda)-f(x_1)]\leqslant (x_\lambda-x_1)[f(x_2)-f(x_\lambda)],$$

这就是 $k(A_1A_4)\leqslant k(A_\lambda A_2)$.

(可以参考《数学分析习题课讲义》的命题 8.4.1 的分析部分.)

下面先讲第三小节, 它是凸函数的基本性质, 然后再讲第二小节, 即可微情况下的凸函数.

三. 凸函数的性质

性质 1 区间上定义的下凸函数 f 在每个内点 $x_0\in I$ 处连续, 存在左右侧导数, 且满足 $f'_-(x_0)\leqslant f'_+(x_0)$.

证 如图 2 的左分图所示, 考虑过点 $(x_0,f(x_0))$ 的斜率

$$\phi(x)=\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}.$$

固定某个 $k>0$, 则从三点斜率式可知, 对 $x_0-k<x_0<x_1<x_2$, 有 $\phi(x_0-k)\leqslant \phi(x_1)\leqslant\phi(x_2)$, 因此 $\phi(x)$ 在 $x>x_0$ 且单调减少时也单调减少, 且以 $\phi(x_0-k)$ 为下界. 因此存在有限极限 $\lim\limits_{x\to x_0^+}\phi(x)$, 即 f 在点存在右导数 $f'_+(x_0)$.

同样如图 2 的中分图所示, 固定某个 h, 考虑点 $x_1<x_2<x_0<x_0+h$, 就有 $\phi(x_1)<\phi(x_2)<\phi(x_0+h)$. 因此 $\phi(x)$ 在 $x<x_0$ 时单调增加, 且以 $\phi(x_0+h)$ 为上界, 因此存在极限 $\lim\limits_{x\to x_0^-}\phi(x)$, 这就是 f 在点 x_0 的左导数.

再看图 2 的右分图, 对于 $x_0-k<x_0<x_0+h$, 有 $\phi(x_0-k)<\phi(x_0+h)$, 令 $h,k\to 0$, 就得到不等式 $f'_-(x_0)\leqslant f'_+(x_0)$.

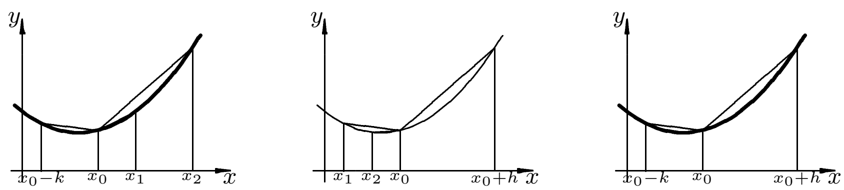


图 2: 性质 1 证明示意图.

最后, 回忆函数在某点可导必定保证函数在该点连续的定理 (见教科书 p.118), 可以从该定理的证明直接看出函数在某点单侧可导也必定保证函数在该点的 (对应的) 单侧连续, 因此 f 在点 x_0 双侧连续, 也就是在点 x_0 连续. □

注 上述证明中, 连续性是从导数存在推出, 这种情况不多见. 此外, 若区间有端点, 则凸函数在端点处可以不连续.

性质 2 设 f 是区间 I 上的下凸函数, 则当 x_0 为 I 的内点时, 过点 $(x_0, f(x_0))$ 的直线

$$y = f(x_0) + k(x - x_0),$$

只要 $f'_-(x_0) \leqslant k \leqslant f'_+(x_0)$, 就成立不等式

$$f(x) \geqslant f(x_0) + k(x - x_0), \quad \forall\, x \in I,$$

当 f 为严格下凸时, 上述不等式当且仅当 $x = x_0$ 时成立等式.

注 几何上表明经过下凸函数的图像上的每个点都至少存在一条直线, 使得下凸函数的图像在该直线的上方. 我们称该直线为过点 $(x_1, f(x_1))$ 的支撑线, 而称该点为支撑点. 支撑线可以不惟一.

证 从性质 1 的证明知道, 当 $x_0 < x \in I$ 时

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqslant f'_+(x_0),$$

乘以 $x - x_0$ 就得到不等式

$$\forall\, x > x_0, \quad f(x) \geqslant f(x_0) + f'_+(x_0)(x - x_0). \tag{1}$$

又知道当 $x_0 > x \in I$ 时,

$$\phi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqslant f'_-(x_0),$$

乘以 $x - x_0 < 0$ 就得到不等式

$$\forall\, x < x_0, \quad f(x) \geqslant f(x_0) + f'_-(x_0)(x - x_0). \tag{2}$$

合并 (1) 与 (2) 就知道, 对于满足 $f'_-(x_0) \leqslant k \leqslant f'_+(x_0)$ 的常数 k, 在区间 I 上成立不等式

$$f(x) \geqslant f(x_0) + k(x - x_0). \tag{3}$$

最后, 当 f 在区间 I 上严格下凸时, 若在不等式 (3) 中存在点 $x_1 \neq x_0$, 使等号成立, 则在区间 (x_0, x_1) 上一方面有 $f(x) \geqslant f(x_0) + k(x - x_0)$, 另一方面从下凸函数定义又有 $f(x) \leqslant f(x_0) + k(x - x_0)$, 因此只能是 f 在区间 $[x_0, x_1]$ 上就等于线性函数 $f(x_0) + k(x - x_0)$. 这与 f 严格下凸的条件矛盾. 这样就证明了对严格下凸函数来说, 不等式 (3) 在 $x \neq x_0$ 时成立严格不等式. □

二. 凸函数的判别法

这里给出用导函数判别凸性的方法, 也就是在可微条件下如何判定凸性.

定理 1 设 f 在区间 I 上可微, 则 f (严格)下凸 $\Longleftrightarrow$ f' (严格)单调增加.

证 (证明之前可以先请同学看一下几何意义, 并画出 f 单调增加, 单调减少和先减少在增加的三个情况.)

只写出严格下凸情况的证明.

充分性 ($\Longleftarrow$) 任取 $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$, $\lambda \in (0,1)$, 并令 $x_\lambda = \lambda x_1 + (1-\lambda) x_2$, 则就有 $x_1 < x_\lambda < x_2$. 于是可推导如下:

$f(x_\lambda) - \lambda f(x_1) - (1-\lambda) f(x_2)$

$= \lambda[f(x_\lambda) - f(x_1)] + (1-\lambda)[f(x_\lambda) - f(x_2)]$ (将上面的第一项 $f(x_\lambda)$ 分拆开)

$= \lambda f'(\xi_1)(x_\lambda - x_1) + (1-\lambda) f'(\xi_2)(x_\lambda - x_2)$ (用 Lagrange 中值定理)

$= \lambda(1-\lambda)[f'(\xi_1) - f'(\xi_2)](x_2 - x_1) < 0$ (因 $f' \uparrow$ 和 $\xi_1 < \xi_2$),

其中利用了 $x_1 < \xi_1 < x_\lambda < \xi_2 < x_2$, 和

$$x_\lambda - x_1 = (1-\lambda)(x_2 - x_1), \quad x_\lambda - x_2 = -\lambda(x_2 - x_1).$$

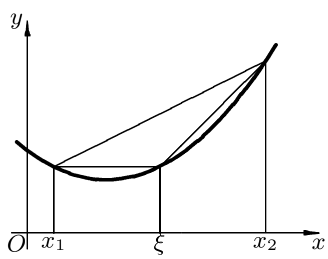


图 3: 必要性证明示意图.

必要性 ($\Longrightarrow$) 任取 $x_1, x_2 \in I$, $x_1 < x_2$. 只要证明 $f'(x_1) < f'(x_2)$.

取 $\xi \in (x_1, x_2)$, 从性质 1 的证明即有

$$f'(x_1) \leqslant \frac{f(\xi) - f(x_1)}{\xi - x_1} < \frac{f(x_2) - f(\xi)}{x_2} \leqslant f'(x_2),$$

这里中间的 $<$ 号利用了 f 的严格下凸性. 因为这时的三点斜率式中都成立严格不等号. □

第 29 次讲稿

第 29 次讲稿, 用于 2007 年 12 月 26 日, 星期三, 2 节课.

这次要讲完 §8.3 函数的凸性, 然后讲函数作图.

首先随手画几个凸函数的几何图像, 其中包括直线, 它既是下凸又是上凸. 还有由直线段组成的凸函数, 以及希腊字母 φ 和 ψ 等.

这里继续讲 §8.3 的二. 凸函数的判别法.

上次课已经讲了定理 1, 即可微函数 f 在区间上严格下凸的充分必要条件是其导函数 f' 严格单调增加.

下面讲定理 1 的推论.

推论 若 f 在区间 I 上二阶可微, 且 $f''(x) > 0 (< 0)$ 处处成立, 则 f 在 I 上严格下凸 (严格上凸).

注 在 f 二阶可微条件下, f 下凸的充分必要条件是 $f''(x) \geqslant 0$ 处处成立, 而 f 严格下凸的充分必要条件是 $f''(x) > 0$, 且 $\{x \mid f''(x) = 0\}$ 不含有长度大于 0 的区间.

这里引入一个新的概念.

定义 若 $y = f(x)$ 在内点 x_0 的两侧邻近的严格凸性相反, 则称点 $(x_0, f(x_0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点 (也称变曲点). 在 f 可微情况下, 则在拐点两侧邻近 $f'(x)$ 的单调性相反. 目前媒体上正是在这个意义上使用拐点这个名词的. 完全正确.

例如, 字母 φ 作为曲线来看没有拐点, 但字母 ψ 作为曲线则有拐点.

在 $f''(x_0)$ 存在时, 如果 $(x_0, f(x_0))$ 为拐点, 则 $f'(x)$ 在点 x_0 两侧邻近单调性相反, 因此 x_0 是 $f'(x)$ 的极值点. 从 Fermat 定理可知 $f''(x_0) = 0$.

思考题 举出 $f''(x_0) = 0$ 但 $(x_0, f(x_0))$ 不是拐点的例子.

与前面的单调性区间类似地我们使用凸性区间这个名词表示函数在其中为凸函数的区间.

例 1 确定曲线 $y = x^3 - 3x$ 的凸性区间和拐点.

解 从 $y'' = 6x$ 可见在 $(0, +\infty)$ 上 f 严格下凸, 而在 $(-\infty, 0)$ 上 f 严格上凸, 因此 $(0, 0)$ 是拐点. □

例 2 讨论函数 $\rho(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$ 的凸性区间和拐点.

解 求导得到

$$\rho'(x) = -\frac{x}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

这样就可以知道 $\rho(x)$ 在 $x \leqslant 0$ 时严格单调增加, 而在 $x \geqslant 0$ 时严格单调减少.

再求导得到

$$\rho''(x) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} + \frac{x^2}{\sqrt{2\pi}}\right) \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}(x^2-1)\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}.$$

这样就可以确定出凸性区间.

下面我们可以将所得的凸性和拐点信息列表表示:

x	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,1)$	1	$(1,+\infty)$
ρ''	$+$	0	$-$	0	$+$
ρ	下凸		上凸		下凸

再配合上 $\rho(\pm\infty)=0$, $\rho(x)>0$, $\rho(0)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$, 以及当 $x \leqslant 0$ 时 $\rho(x)\uparrow$, 当 $x \geqslant 0$ 时 $\rho(x)\downarrow$, 就可以作出函数 $\rho(x)$ 的完整图形,

注 这个函数就是概率统计中正态分布的密度函数.

其中注意有两个拐点:

$$\left(\pm 1, \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}\right).$$

现在回到教科书的 p.178, 从性质 2 继续讲下去.

首先, 上次讲性质 2 时漏掉了对最后一点的证明, 即当 f 为严格下凸时, 其图像与支撑直线只有一个公共点.

设不等式为

$$f(x) \geqslant f(x_0) + k(x-x_0), \quad \forall\, x \in I,$$

且 f 是严格下凸. 我们要证明上述不等式中除了 $x = x_0$ 之外, 均成立严格大于号.

用反证法. 若存在点 $x_1 \neq x_0$, 使得 $f(x_1) = f(x_0) + k(x_1 - x_0)$, 则在区间 $[x_0, x_1]$ 上, 利用 f 的下凸性, 有

$$f(x_0) + k(x-x_0) \geqslant f(x) \,\forall\, x \in [x_0, x_1],$$

另一方面, 从支撑直线的性质可知有相反的不等式成立. 合并起来可见在 $[x_0, x_1]$ 上 $f(x) \equiv f(x_0) + k(x-x_0)$. 但这与 f 为严格下凸矛盾. □

利用凸性可以建立许多不等式, 它们的根据是下面的性质.

性质 3 (Jensen 不等式) 设 f 在区间 I 上为下凸, 则对一切 $x_1, x_2, \cdots, x_n \in I$ 及正数列 $p_1, p_2, \cdots, p_n$, 成立不等式

$$f\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right) \leqslant \frac{p_1f(x_1)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+\cdots+p_n}.$$

若 f 严格下凸, 则上述不等式当且仅当 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ 时成立等式.

证 记 $\overline{x}=\dfrac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}$, 即加权平均值. 则除非所有 x_i 等于区间 I 的同一个端点 (这时不必讨论), $\overline{x}$ 必为 I 的内点. 因此根据性质 2, 存在常数 k, 使得

$$f(x)\geqslant f(\overline{x})+k(x-\overline{x}).$$

令 $x=x_i, i=1,\cdots,n$ 并代入欲证不等式的右边, 就有

$$\begin{aligned}\frac{p_1f(x_1)+\cdots+p_nf(x_n)}{p_1+\cdots+p_n}&\geqslant\frac{(p_1+\cdots+p_n)(f(\overline{x})-k\overline{x})+k(p_1x_1+\cdots+p_nx_n)}{p_1+\cdots+p_n}\\&=f(\overline{x})-k\overline{x}+k\overline{x}=f(\overline{x}).\end{aligned}$$

若 f 严格下凸且上述不等式成立等号, 则只能是对每个 $i=1,\cdots,n$ 成立等式

$$f(x_i)=f(\overline{x})+k(x_i-\overline{x}).$$

从性质 2 知道只能是 $x_i=\overline{x}\,\forall\, i=1,\cdots,n$. $\square$

注 1 Jensen 不等式在 $n=2$ 时就是下凸函数的定义中的不等式. 由此出发用数学归纳法就可以完成证明.

注 2 若 f 可微, 则 $k=f'(\overline{x})$, 即有

$$f(x)\geqslant f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x-\overline{x}).$$

若 f 二阶可微, 则不需要性质 2, 而可从 Taylor 展开式

$$f(x)=f(\overline{x})+f'(\overline{x})(x-\overline{x})+\frac{f''(\xi)}{2!}(x-\overline{x})^2,\quad \xi\in(x,\overline{x})$$

和 $f''(\xi)\geqslant 0$ 而直接得到所需的不等式.

例 3 证明广义平均值不等式, 即对一切 $x_i,p_i>0$, $i=1,\cdots,n$, 成立不等式

$$x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}\leqslant\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)^{p_1+\cdots+p_n},$$

其中等号成立的充要条件是 $x_1=\cdots=x_n$.

证 取 $f(x)=-\ln x$, 则 $f''(x)=x^2>0\,\forall\, x>0$, 因此 f 是 $(0,+\infty)$ 上的严格下凸函数. 用上述性质 3, 就有

$$-\ln\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)\leqslant\frac{p_1(-\ln x_1)+\cdots+p_n(-\ln x_n)}{p_1+\cdots+p_n},$$

这就是

$$\ln\left(\frac{p_1x_1+\cdots+p_nx_n}{p_1+\cdots+p_n}\right)^{p_1+\cdots+p_n}\geqslant\ln(x_1^{p_1}\cdots x_n^{p_n}),$$

去掉“ln”即可. $\square$

注 令 $p_1=\cdots=p_n=1$, 就得到初等不等式中的平均值不等式

$$\sqrt[n]{x_1\cdots x_n}\leqslant\frac{x_1+\cdots+x_n}{n},$$

其中成立等号的条件是 $x_1=\cdots=x_n$.

§ 8.4 函数作图

这在前面已经讲了不少, 主要是用两个方法: (1) 图形合成法, 用于作出草图. (2) 微分学方法, 确定各个细节.

首先补充在作图前需要计算的诸要素中还没有讲到的渐近线. 它的概念在中学已经出现, 但一般性的概念与计算则需要函数极限理论.

一. 渐近线

(1) 垂直渐近线.

若有 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$, 或 $f(a^+)=\infty$, $f(a^-)=\infty$, 则称 $x=a$ 为函数 f 的垂直渐近线.

在中学数学中已经提供了 $\dfrac{1}{x}$, $\log_a x$, $\tan x$, $\cot x$ 等具有垂直渐近线的许多例子.

(2) 斜渐近线 (包括水平渐近线为特例).

这里的极限过程也有三类, 即 $x\to+\infty$, $x\to-\infty$ 和 $x\to\infty$. 下面只讲第一类极限下的渐近线.

设 f 在 $(a,+\infty)$ 上有定义. 若存在常数 k,b, 使得成立

$$\lim_{x\to+\infty}[f(x)-(kx+b)]=0,$$

则称直线 $y=kx+b$ 是函数 f 当 $x\to+\infty$ 时的 (斜) 渐近线, 特别当 $k=0$ 时则称其为水平渐近线.

问题: 什么情况下存在斜渐近线? 如何计算?

这不难解决. 若存在斜渐近线, 则就有

$$f(x)=kx+b+o(1)\ (x\to+\infty),$$

因此就有 $\dfrac{f(x)}{x}=k+o(1)\ (x\to+\infty)$. 这就是说存在极限

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k.$$

同时又有 $f(x)-kx=b+o(1)\ (x\to+\infty)$, 因此有

$$b=\lim_{x\to+\infty}[f(x)-kx].$$

反之, 若这两个极限存在, 则就有

$$f(x)=kx+b+o(1)\ (x\to+\infty),$$

因此 $y=kx+b$ 是斜渐近线. 这样就将问题归之于两个极限的存在和计算问题. 当然, 若能有办法按定义直接证明成立 $f(x)=kx+b+o(1)\ (x\to+\infty)$, 则也就一下子求出了斜渐近线.

问题　在 $(-\infty,+\infty)$ 上定义的函数最多有几条斜渐近线? 从上面的计算方法可以知道, 根据极限惟一性定理, 至多两条.

第 30 次讲稿

第 30 次讲稿, 用于 2007 年 12 月 29 日, 星期六, 3 节课. (这是补下周一的课. 因为元旦放假为 12 月 30,31 日与 1 月 1 日共三天).

打算用两节课讲完第八章, 然后开始讲第九章 一元积分学. 计划在学期结束前讲完前两节.

上次最后讲了渐近线求法. 还提出了一个问题, 斜渐近线至多有几条?

从上次的计算方法可以知道, 只要用极限惟一性定理, 可见斜渐近线至多两条.

这里可以回顾一下极限惟一性定理. 最早是在教科书 p.20 讲了数列极限的惟一性定理. 然后在 p.70 讲了基本类型函数极限的惟一性定理.

这些理论不是做摆设的. 实际上很有用, 只是我们往往不自觉地已经用了而不知道.

例如, 函数 $y = f(x)$ 的图像在某点若有切线, 则一定惟一. 这完全依赖于极限的惟一性定理. 现在判定斜渐近线至多当 $x \to +\infty$ 和 $x \to -\infty$ 时各有一条, 这也是根据极限的惟一性定理. 因为我们已经证明, 若 $y = kx + b$ 是当 $x \to +\infty$ 时函数 $y = f(x)$ 的渐近线, 则一定有

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = k,$$

以及又有

$$b = \lim_{x \to +\infty} [f(x) - kx].$$

因此用函数极限的惟一性定理就知道当 $x \to +\infty$ 时渐近线只有一条. 对于 $x \to -\infty$ 也是如此. 若这两条渐近线重合, 例如 $y = 1/x$ 就是如此, 则只有惟一的一条斜渐近线. 否则, 就可能有两条斜渐近线.

注意, 若第一个极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x}$ 不存在, 例如 $f(x) = x^2$ 就是如此, 则当然没有斜渐近线. 但当第一个极限存在时, 还不能说一定存在斜渐近线. 例如 $y = \ln x$ 就是如此. 只有当两个极限都存在时才能说有斜渐近线.

例 1 求 $y = \sqrt{x^2 + x + 1}$ 在 $x \to \pm\infty$ 时的渐近线.

(用两个办法都可以. 在教科书 p.78 的题 4 已经求出了 $x \to +\infty$ 的渐近线. 当然现在可以用更多的手段来做. 注意有 $y^2 - (x + \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$, 因此是双曲线的上半支.)

解 1 先求 $x \to +\infty$ 时的渐近线.

按照前面的方法分别计算两个极限:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2+x+1}}{x}=1,$$
$$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-x)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{\sqrt{x^2+x+1}+x}=\frac{1}{2},$$

因此当 $x\to+\infty$ 时有渐近线 $y=x+\frac{1}{2}$. 同样可以求出当 $x\to-\infty$ 时有渐近线 $y=-x-\frac{1}{2}$. (注意: 虽然我们研究的曲线关于 $x=-\frac{1}{2}$ 对称, 但所求出的两条渐近线却是关于 x 轴为对称. 为什么? 从双曲线的两支就是如此可见这是没有错的. 而且这两条渐近线关于 $x=-\frac{1}{2}$ 也是对称的, 这从 $y=\pm(x+\frac{1}{2}$ 也可以看出.) $\square$

解 2　利用 Taylor 展开式有

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+x+1}&=x\sqrt{1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}}\quad(x>0)\\&=x[1+\frac{1}{2}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2})+o(\frac{1}{x})]\ (x\to+\infty)\\&=x+\frac{1}{2}+o(1)\ (x\to+\infty),\end{aligned}$$

可见得到与解 1 相同的结果. 同样可以求出 $x\to-\infty$ 时的渐近线, 且可以看出这时的差别只在于前面多一个负号. $\square$

例 2　求 $y=xe^{\frac{1}{x}}$ 的渐近线.

(可以求出当 $x\to0^+$ 时有一条垂直渐近线 $x=0$, 此外当 $x\to\pm\infty$ 时有斜渐近线 $y=x+1$.)

思考题　作出这个函数的图形.

补充例子 1　求函数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}$ 的渐近线.

解　可直接看出有

$$x\sin\frac{1}{x}=x\left(\frac{1}{x}+o(\frac{1}{x^2})\right)=1+o(1)\ (x\to\infty),$$

因此当 $x\to\infty$ 时就有水平渐近线 $y=1$. 注意这个函数是偶函数, 因此只有一条斜渐近线不是偶然的. $\square$

补充例子 2　求函数 $f(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$ 的渐近线.

解　先计算出

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}x\sin\frac{1}{x}=1,$$

然后计算

$$x^2\sin\frac{1}{x}-x=x^2\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{6x^3}+o(\frac{1}{x^4})\right)-x=o(1)\ (x\to+\infty),$$

可见当 $x \to +\infty$ 时的渐近线就是 $y = x$. 从函数的奇性可见它也是当 $x \to -\infty$ 时的渐近线. 用 Mathematica 作图可以看到, 实际上只有在 $|x| < 1$ 时 $f(x)$ 才表现出奇特的性态, 而当 $|x| \geqslant 1$ 时, $f(x)$ 与 $y = x$ 很接近. 究竟差多少? 这个问题可以用带 Lagrange 型余项来解决.

首先有 $(\sin x)''' = -\cos x$, 因此就有

$$\sin x = x - \frac{\cos(\theta x)}{3!}x^3, \quad \theta \in (0,1).$$

于是就有

$$|x^2 \sin\frac{1}{x} - x| = |x^2(\frac{1}{x} - \frac{\cos(\theta/x)}{6x^3}) - x| \leqslant \frac{1}{6|x|},$$

这就是函数与渐近线之间的差的估计. □

二. $y = f(x)$ 作图的一般步骤

这就是大致按照以下步骤来做.

1. 确定定义域, 观察是否有奇偶性, 周期性等.
2. 确定所有极值可疑点.
3. 求出这些点上的函数值和 (或) 单侧极限, 确定单调区间, 极值点和最值点.
4. 求出渐近线.
5. 确定凸性区间和拐点.

补充两点:

(1) 试用图形合成法观察 $y = f(x)$ 的草图,

(2) 计算函数在某些特殊点上的函数值, 例如确定截距等.

三. 例子

例 3 作函数 $f(x) = (x^2 - x + 1)\mathrm{e}^{-x}$ 的图像.

解 从表达式可见无垂直渐近线. 求导得到 $f'(x) = -(x-1)(x-2)\mathrm{e}^{-x}$, 计算出以下函数值 (或极限值):

$$f(-\infty) = +\infty, \quad f(1) = \mathrm{e}^{-1}, \quad f(2) = 3\mathrm{e}^{-2}, \quad f(+\infty) = 0,$$

因此当 $x \to +\infty$ 时有水平渐近线 $y = 0$.

从单调性分析列表如下:

x	$(-\infty, 1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
f'	$-$	0	$+$	0	$-$
f	$\searrow$	e^{-1}	$\nearrow$	$3\mathrm{e}^{-2}$	$\searrow$

可见 $x = 1$ 为极小值点, 而 $x = 2$ 为极大值点.

再计算得到

$$f''(x) = (x^2 - 5x + 2)\mathrm{e}^{-x},$$

这样就可以确定出三个凸性区间, 它们的分界点就是拐点 $x_{1,2} = \dfrac{5 \pm \sqrt{5}}{2}$. 它们的近似值为 1.382 和 3.618.

再计算出 $f(0) = 1$, 就可以作出教科书 p.187 上的图. □

注 从 Rolle 定理可知在 $(1, 2)$ 中一定有 $f'' = 0$ 的点. 同样从广义 Rolle 定理知道在 $(2, +\infty)$ 中也一定有这样的点. 以上计算表明它们在所说的区间内都是惟一的.

例 4 作 $f(x) = \dfrac{x^3}{x^2 - 1}$ 的图像.

解 首先注意 f 为奇函数, 因此以下只需对 $x \geqslant 0$ 作分析.

先将 f 分解为

$$f(x) = x + \frac{x}{x^2 - 1} = x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+1}\right),$$

这样已经可以用图形合成法作出 f 的草图. 然后计算出

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2}\right) = 1 - \frac{x^2+1}{(x^2-1)^2} = \frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2},$$

于是极值可疑点为 0, $\pm\sqrt{3}$ 和 ± 1. $x = \pm 1$ 为垂直渐近线. 确定出 $x > 0$ 的单调区间为: 在 $[0, 1)$ 和 $(1, \sqrt{3}]$ 上 $f \downarrow$, 而在 $[\sqrt{3}, +\infty)$ 上 $f \uparrow$. 点 $\sqrt{3}$ 为极小值点. 然后利用 f 为奇函数就不难作图如教科书 p.187 右下角图所示.

为了确定凸性, 还应当计算出二阶导数

$$f''(x) = \frac{1}{(x-1)^3} + \frac{1}{(x+1)^3} = \frac{2x(x^2+3)}{(x^2-1)^3},$$

这样就可以确定出凸性区间. 在 $x > 0$ 时, $[0, 1)$ 为上凸区间, $(1, +\infty)$ 为下凸区间. $(0, 0)$ 为拐点. □

五. 极坐标方程 $r = r(\theta)$ 的作图

极坐标系是除直角坐标系以外最常用的平面坐标系, 在高等数学的一元微积分和多元微积分中都有广泛的应用. 平面上点的直角坐标将平面上的每个点与有序对 (x, y) 一一对应起来, 点的极坐标也是如此, 只是有一个例外, 即当点 M 取在极点时, 它的极坐标中 $\rho = 0$, 但极角 θ 可以取任意值.

用极坐标可以很方便地表示一些常用曲线. 如圆心在原点, 半经为 $a > 0$ 的圆的极坐标方程就是 $\rho = a$; 从极点出发, 倾角为 α 的射线的极坐标方程就是 $\theta = \alpha$.

掌握极坐标和直角坐标之间的互相转换是非常重要的. 在直角坐标系的原点与极坐标系的极点相同, 直角坐标系中的 x 轴的正半轴就是极坐标中的极轴时, 点 M 的直角坐标 (x, y) 和极坐标 (ρ, θ) 之间的关系式是简单的: 从极坐标计算直角坐标的公式为

$$x = \rho\cos\theta, \quad y = \rho\sin\theta,$$

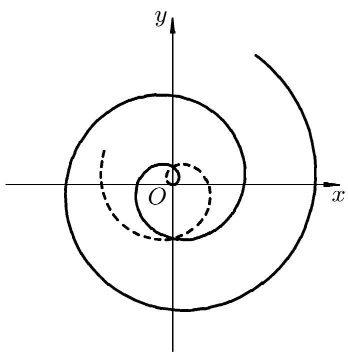
而从直角坐标计算极坐标的公式为

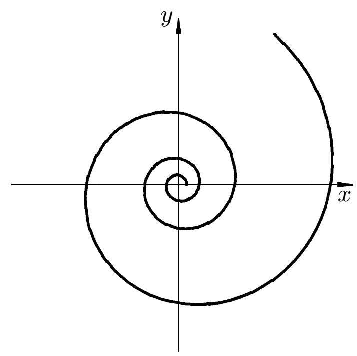
$$\rho=\sqrt{x^2+y^2}, \quad \theta=\arctan\frac{y}{x}.$$

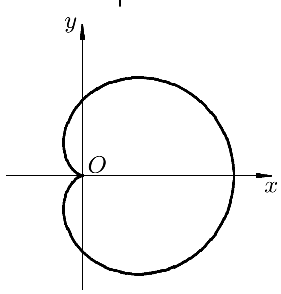
在我们所用的教科书中对于极坐标作图没有详细介绍. 事实上这里也有两个方法: (1) 作草图, (2) 用微分学方法求出 y'_x, y''_x. 教材中主要讲了第一种方法. 这就是先以 θ 为横坐标, 以 r 为纵坐标作出图像, 然后再作出极坐标下的草图.

此外, 在教科书中强调对每个 θ, 只有当 $r>0$ 时才能作图的说法不妥. 实际上其他多数文献中都指出, 允许 $r<0$, 只要利用由 θ 代表的半射线的反方向射线即可.

下面几个例子反映出极坐标对于某些曲线给出了比直角坐标更为清楚的描述.

(1)


(2)


(3)


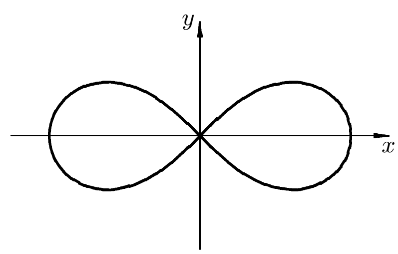
(4)


图 1: (1) Archimedes 螺线 $\rho=a\theta$, (2) Bernoulli 螺线 (对数螺线) $\rho=\mathrm{e}^{a\theta}$, (3) 心脏线 $\rho=a(1+\cos\theta)$, (4) Bernoulli 双纽线 $\rho^2=a^2\cos 2\theta$.

对下面的两个极坐标曲线则分别从它们的直角坐标方程开始研究.

例题 0.1 将圆的直角坐标方程 $x^2+y^2-y=0$ 化为极坐标方程.

解 以 $x=\rho\cos\theta,\ y=\rho\sin\theta$ 代入原方程, 得到

$$\rho^2\cos^2\theta+\rho^2\sin^2\theta-\rho\sin\theta=0,$$

即 $\rho=\sin\theta$. □

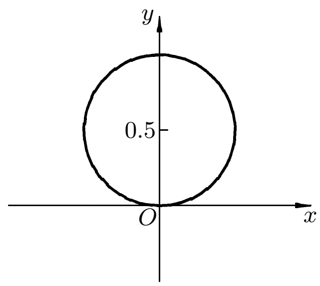


图 2: 极坐标方程 $\rho = \sin\theta$ 的图像.

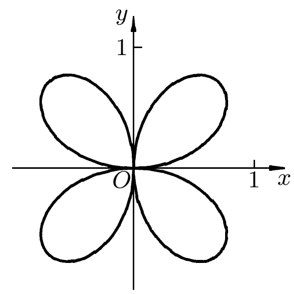


图 3: 极坐标方程 $\rho = \sin 2\theta$ 的图像.

下面一个例子表明, 其中的曲线在直角坐标系中为 6 次代数曲线, 而在极坐标系中则非常简单.

例题 0.2 将曲线的直角坐标方程 $(x^2+y^2)^3 = 4x^2y^2$ 化为极坐标方程.

解 以 $x = \rho\cos\theta,\ y = \rho\sin\theta$ 代入原方程, 得到

$$\rho^6 = 4\rho^4\cos^2 x\sin^2 x,$$

即为 $\rho = \sin 2\theta$. □

在图 2 和图 3 中分别作出了这两个例子中的曲线图形, 其中后一个称为四叶玫瑰线. 它就是教科书 p.188 的图 8–15. 由于其中限制了只作出 $r > 0$ 的部分, 因此只有两叶了.

此外, 用极坐标方程可以统一地表示出椭圆、双曲线和抛物线这三种圆锥曲线. 这可以参考本学期开始时发的小册子《大学数学基础选讲》.

六. 隐函数及参数方程的作图

这里只举一个例子, 即 Descartes 叶线的图像.

例 7 作 $x^3+y^3 = xy$ 的图像.

解 这是隐函数方程, 首先注意方程关于 x, y 对称, 因此图像关于直线 $y = x$ 对称, 这对于下面的讨论有帮助.

对于隐函数方程, 经常采用引进参数的方法, 将问题转化为参数方程作图.

令 $y = tx$, 代入得到 $x^3+t^3x^3-tx^2 = 0$, 约去 x^2 后解出

$$x(t) = \frac{t}{1+t^3}, \quad y(t) = \frac{t^2}{1+t^3}.$$

注意这里的参数 t 是图像上的点 (x, y) 与原点联线的斜率, 当 $t = -1$ 时直接从方程可以看出, 图像上除了原点之外没有其他点.

计算出

$$x'(t) = \frac{1+t^3-3t^3}{(1+t^3)^2} = \frac{1-2t^3}{(1+t^3)^2},$$
$$y'(t) = \frac{2t(1+t^3)-3t^4}{(1+t^3)^2} = \frac{2t-t^4}{(1+t^3)^2}.$$

这样就得到

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{t(2-t^3)}{1-2t^3}.$$

于是知道可疑点对应的参数值为 $t=0, \sqrt[3]{1/2}, \sqrt[3]{2}$,

下面先分别研究 $x'(t), y'(t)$ 的符号, 然后得到 y'_x 的符号, 从而可以确定 $y(x)$ 的单调区间.

t	$(-\infty,-1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0,\ \sqrt[3]{1/2})$	$\sqrt[3]{1/2}$	$(\ \sqrt[3]{1/2},\ \sqrt[3]{2})$	$\sqrt[3]{2}$	$(\ \sqrt[3]{2},+\infty)$
$x'(t)$	$+$		$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$y'(t)$	$-$		$-$	0	$+$	$+$	$-$	0	$+$
y'_x	$-$		$-$	0	$+$	∞	$-$	0	$+$

此外还需要计算一些特殊点如下:

t	$-\infty$	$(-1)_-$	$(-1)_+$	0	$\sqrt[3]{1/2}$	$\sqrt[3]{1/2}$	$+\infty$
$x(t)$	0	$+\infty$	$-\infty$	0	$\sqrt[3]{4}/3$	$\sqrt[3]{2}/3$	0
$y(t)$	0	$-\infty$	$+\infty$	0	$\sqrt[3]{2}/3$	$\sqrt[3]{4}/3$	0
	A_0	A_1	A_2	$A_3=A_0$	A_4	A_5	$A_3=A_0$

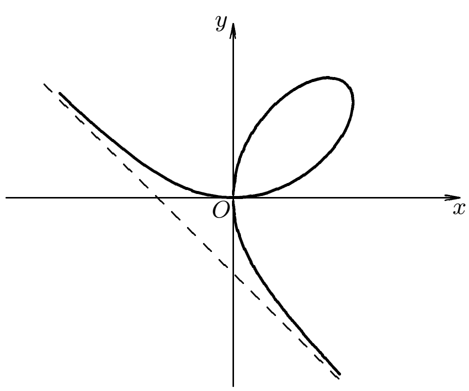


图 4: Descartes 叶线.

注意: 这里与 $y=f(x)$ 的极值点讨论有不同之处, 即不能从 $f'(x)$ 的单调区间简单地推出在单调区间的分界点上函数一定具有极值性质. Descartes 叶线为此提供了很好的例子.

如图 4 所示, $t=0$ 对应的点 $(0,0)$ 是曲线的自交点, 但从参数曲线角度看也可以看出极小值点. $t=\sqrt[3]{1/2}$ 对应的点 $(\sqrt[3]{4}/3, \sqrt[3]{2}/3)$ 是有垂直切线的点, 不是极值点. $t=\sqrt[3]{2}$ 对应的点 $(\sqrt[3]{2}/3, \sqrt[3]{4}/3)$ 为极大值点.

下面讨论 Descartes 叶线的渐近线.

从 $x(t), y(t)$ 的表达式可见只有当 $t\to -1$ 时点 $(x(t), y(t))$ 才会趋于无穷远, 因此也只有这时才可能有渐近线. 更确切地说, 有

$$\lim_{t\to -1^-} x(t) = +\infty, \quad \lim_{t\to -1^+} x(t) = -\infty.$$

因此可以从 $t\to -1$ 来计算渐近线如下.

$$
\begin{aligned}
k &= \lim_{t\to-1}\frac{y(t)}{x(t)} = -1,\\
b &= \lim_{t\to-1}[y(t)-(-1)x(t)]\\
&= \lim_{t\to-1}\frac{t+t^3}{1+t^3} = \lim_{t\to-1}\frac{t}{t^2-t+1} = -\frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

这样就知道, 对于 $x\to-\infty$ 和 $x\to+\infty$ 两个方向存在惟一的渐近线 $y=-x-\dfrac{1}{3}$, 或写为 $x+y+\dfrac{1}{3}=0$.

为了作出比较准确的图像, 还应当利用二阶导数确定凸性区间. 计算得到

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)'_t\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)'_t\cdot\frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}}\\
&= \frac{(2-4t^3)(1-2t^3)+6t^2(2t-t^4)}{(1-2t^3)^2}\cdot\frac{(1+t^3)^2}{1-2t^3}\\
&= \frac{2(1+t^3)^4}{(1-2t^3)^3}.
\end{aligned}
$$

这样就可知从参数 t 而言, 当 $t<\sqrt[3]{1/2}$ 时 $y''_x>0$, 曲线严格下凸, 而当 $t>\sqrt[3]{1/2}$ 时 $y''_x<0$, 曲线严格上凸. 但这个凸性分界点并不是拐点. 实际上它就是图像中具有垂直切线的那个点, 恰与希腊字母 φ 的情况类似.

---

§ 9.1 不定积分

一. 引　言

正如微分学中的导数概念来自运动的变化率 (即速度) 和求曲线的切线一样, 积分学起源于求平面图形的面积以及求立体形体的体积等问题. 因此我们的积分学介绍从求面积这个几何问题谈起.

虽然在中学都已经有了圆面积公式 (以及圆周长公式), 但严格来说, 初等数学中只解决了由直线段围成的图形面积的计算公式问题, 对于由一般曲线围成的平面图形, 包括圆在内, 需要留待微积分才能处理.

如图 5 所示, 考虑曲边梯形的面积计算. 其中设有连续函数 $f\in C[a,b]$, 且 $f(x)>0\,\forall\, x\in[a,b]$. 这个曲边梯形就是点集

$$\{(x,y)\;\big|\; a\leqslant x\leqslant b, 0\leqslant y\leqslant f(x)\}.$$

原来只是求以 $[a,b]$ 为底边的一个曲边梯形的面积, 现在要求以 $[a,x], a\leqslant x\leqslant b$ 为底边的无穷多个曲边梯形的面积, 这不是将问题复杂化了吗? 其实不然, 正因为将一个特殊问题放到更广泛的一个框架中去, 引进了变量, 从而可以引入下面所

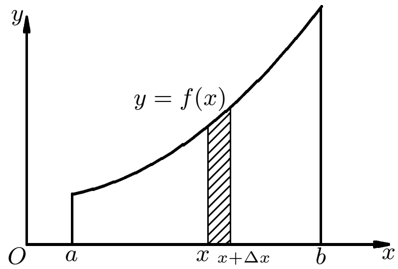


图 5: 求曲边梯形面积的嵌入法.

将这个曲边梯形的面积记为 S, 然后用嵌入法, 即取 $x \in [a,b]$, 考虑以 $[a,x]$ 为底边的曲边梯形

$$\{(t,y) \mid a \leqslant t \leqslant x, 0 \leqslant y \leqslant f(t)\}$$

的面积. 它是 x 的函数, 在区间 $[a,b]$ 上有定义, 记为 $S(x)$, 则满足 $S(a)=0$, $S(b)=S$. 这里的 S 就是原来要求的未知数.

说的微积分工具, 才使得我们能够顺利地解决原来的特殊问题. 这就是嵌入法, 它是一种非常有启发性的思想.

现在考虑 $S(x)$, $S(x+\Delta x)$ 以及它们之差. 则可以发现

$$\Delta S = S(x+\Delta x) - S(x) \approx f(x)\Delta x,$$

于是有

$$\frac{\Delta S}{\Delta x} \approx f(x),$$

今后可以严格证明, 在对于 f 加一定条件下, 就有

$$\frac{\mathrm{d}S}{\mathrm{d}x} = S'(x) = f(x).$$

由于 f 是已知的, 因此从 $f(x)$ 求 $S(x)$ 的问题就成为求导数运算的逆运算, 这就是求不定积分的计算问题.

从教科书 p.149 的推论 3 (即所谓不定积分基本定理) 已经知道, 满足 $S'(x)=f(x)$ 的 $S(x)$ 若存在一定不是惟一的, 而是彼此相差一个常数. 其中哪一个才是我们所要求的呢? 从前面知道, 这就是满足 $S(0)=0$ 的那一个. 这时, 原来要求的以 $[a,b]$ 为底边的曲边梯形面积就是 $S=S(b)$.

例 1　求由曲线 $y=x^2$, $y=0$, $x=1$ 所围成的曲边梯形的面积.

解　这时底边为 $[0,1]$. 如前用嵌入法定义 $S(x)$, $0 \leqslant x \leqslant 1$, 则满足 $S'(x)=x^3$ 的所有解为 $S(x)=\dfrac{1}{3}x^3+C$, 其中 C 待定. 从 $S(0)=0$ 可定出 $C=0$, 于是所求面积为 $S=S(1)=\dfrac{1}{3}$.　□

最后要指出, 以上类型的几何求积问题可以推广, 从而包含了极为广泛的许多问题. 例如从速度求路程, 从加速度求速度等等. 总之, 给定函数求导数是求变化率, 而目前是给定变化率求原来的函数, 这是积分学的中心问题.

二. 原函数与不定积分

定义　设 f 于区间 I 上有定义. 若有在 I 上定义的函数 F, 在区间 I 上满足 $F'(x)=f(x)$, 则称 F 为 f 在区间 I 上的一个原函数.

从可导蕴含连续可知, 原函数必须是连续函数. 对于在一个区间上给定的函数 f, 是否存在原函数, 这不是一个简单问题, 需要留待后面解决. 目前容易解决的是若存在原函数, 则有多少?

从原函数定义可知, 若 F 是 f 的一个原函数, 则加上任意常数后的 $F+C$ 也是 f 的原函数.

从教科书 p.149 的推论 3 可知, 这也就是 f 的所有原函数. 这就是下面的定理.

不定积分基本定理　若 F 是 f 的一个原函数, 则 $F+C$ 是 f 的全部原函数, 其中 C 是任意常数.

(证明请自学. 实际上与 p.149 的推论 3 的证明相同.)

由此给出以下概念.

定义　将函数 f 的原函数全体 $F+C$ 记为 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, 即有

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C,$$

其中 C 为任意常数. 称 $\int f(x)\,\mathrm{d}x$ 为 f 的不定积分, 即 f 的全部原函数所成集合. 称 f 为被积函数, x 为积分变量, $f(x)\,\mathrm{d}x$ 为被积表达式.

例 2　从 $(\sin x)' = \cos x$, 因此就有

$$\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C,$$

这里的区间 I 可以是 $(-\infty, +\infty)$ 或者它的某个子区间.

从 $(\ln|x|)' = \dfrac{1}{x}$, 就有

$$\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C,$$

其中的区间可以是 $(0, +\infty)$ 或者 $(-\infty, 0)$, 也可以是其中一个的某个子区间.

其余的例子都是如此, 请自学.

注　从关于导函数的 Darboux 定理知道, 如果 f 在区间 I 上不具有介值性质, 则 f 不存在原函数. 又从导数极限定理知道, 如果 f 在区间 I 上有第一类间断点, 则 f 也不会有原函数.

三. 基本不定积分表及其应用

教科书 p.199–200 的 16 个不定积分公式都应当记住, 只有其中的 (14), 即

$$\int \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = |x| + C$$

可以不记. 因为它就是下面两个公式:

$$\int \mathrm{d}x = x + C, \quad \int (-1)\,\mathrm{d}x = -x + C.$$

下面是这些公式的初步用法:

$$
\begin{aligned}
\int x^2\,\mathrm{d}x &= \frac{1}{3}x^3 + C,\\
\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x &= \int x^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x = 2x^{\frac{1}{2}} + C,\\
\int 2^{-x}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{2}\right)^x \mathrm{d}x = \frac{1}{\ln(1/2)}\left(\frac{1}{2}\right)^x + C = -\frac{2^{-x}}{\ln 2} + C,\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2+2} &= \frac{1}{\sqrt{2}}\arctan\frac{x}{\sqrt{2}} + C,\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x + C,\\
\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2-5}} &= \ln|x+\sqrt{x^2-5}| + C,\\
\int \sin t\,\mathrm{d}t &= -\cos t + C,\\
\int t^3\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{4}t^4 + C,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\int \frac{\mathrm{d}u}{u} &= \ln|u| + C,\\
\int \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y &= \mathrm{e}^y + C.
\end{aligned}
$$

注意积分变量可以取 x 之外的其他符号, 但所用的积分变量符号必须与原函数的自变量所用符号一致. 还有, $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,\mathrm{d}x$ 也可以记为 $\int \frac{f(x)\,\mathrm{d}x}{g(x)}$.

第 31 次讲稿

第 31 次讲稿, 用于 2008 年 1 月 2 日, 星期三, 2 节课.

上一次已经开始讲第九章 一元积分学, 用一节课讲了 §9.1 的前三小节. 这次应当讲到换元法 1.

———————————————-

在讲新的内容之前, 需要对上次的讲课做几点补充.

1. 我们给了原函数和不定积分的定义. 一个函数的不定积分就是其原函数全体所成的集合. 引进了表示不定积分的记号

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x$$

和有关术语. 求不定积分是求导数的逆运算.

2. 虽然我们还不能解决原函数的存在性问题, 但至少可以有几个否定性的结论. 这只需要利用导函数的特性. 也就是说什么样的函数才能是某个函数的导函数.

从 Darboux 定理, 即导函数的介值定理, 可见如果区间上的一个函数 f 不具有介值性, 则 f 不可能具有原函数.

从导数极限定理的推论知道, 一个区间上有定义的导函数不能有第一类间断点. 平时往往简单说成导函数没有第一类间断点. 我们举出过例子, 说明区间上的导函数可以有第二类间断点.

这两个结论都可以用于说明, 在 $(-\infty,+\infty)$ 上, 或者在包含 $x=0$ 为内点的任何区间上, 函数 $\operatorname{sgn} x$ 都不可能有原函数.

因此我们说公式

$$\int \operatorname{sgn} x\,\mathrm{d}x = |x| + C$$

实际上只能分别于 $x>0$ 或 $x<0$ 上使用.

3. 关于教科书 199–200 页的基本不定积分表中公式的一些说明.

公式 (8) 经常写为 $\displaystyle\int \sec^2 x\,\mathrm{d}x = \tan x + C$.

公式 (11) 来自于 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a}\int\Big(\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}\Big)\,\mathrm{d}x$, 再用公式 (3).

公式 (13) 也经常写为 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2\pm a^2}} = \ln|x+\sqrt{x^2\pm a^2}| + C$.

4. p.201 的例 4 表明可以选择不同的积分变量, 但两边必须一致. 这就是说, 若被积表达式中的积分变量用什么符号作为变量, 那么最后答案中也必须用同一个符号作为变量.

————————————————

五. 线性运算公式

这就是

$$\int [\alpha f(x) + \beta g(x)] \, \mathrm{d}x = \alpha \int f(x) \, \mathrm{d}x + \beta \int g(x) \, \mathrm{d}x.$$

这个公式的证明是直截了当的, 它来自于教科书 p.121 上的公式 (4):

$$(\alpha u + \beta v)' = \alpha u' + \beta v'.$$

下面是用这个公式的几个例子.

例 5 $\displaystyle\int (x^2 - 2x + 3) \, \mathrm{d}x = \frac{x^3}{3} - x^2 + 3x + C.$

(注意只要最后写出一个任意常数即可.)

例 6 $\displaystyle\int \frac{x^2}{x^2+1} \, \mathrm{d}x = \int \left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right) \mathrm{d}x = x - \arctan x + C.$

例 7 $\displaystyle\int \cos^2 \frac{x}{2} \, \mathrm{d}x = \int \frac{1 + \cos x}{2} \, \mathrm{d}x = \frac{x}{2} + \frac{1}{2} \sin x + C.$

七. 其他例子

例 8 这实际上是介绍一种方法, 即若有

$$\int f(u) \, \mathrm{d}u = F(u) + C,$$

则就有

$$\int f(ax+b) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{a} F(ax+b) + C.$$

它的证明只是用链式法则而已. 一种记忆方法是

$$\begin{aligned}
\int f(ax+b) \, \mathrm{d}x &= \frac{1}{a} \int f(ax+b) \, \mathrm{d}(ax+b) \\
&= \frac{1}{a} \int f(u) \, \mathrm{d}u \quad (\text{记住其中 } u = ax+b) \\
&= \frac{1}{a} F(u) + C \quad (\text{记住其中 } u = ax+b) \\
&= \frac{1}{a} F(ax+b) + C.
\end{aligned}$$

下面是进一步的几个例子.

例 9 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x+1} = \int \frac{1}{x+1} \, \mathrm{d}(x+1) = \ln|x+1| + C.$

例 10 $\displaystyle\int \sin 3x \, \mathrm{d}x = \frac{1}{3} \int \sin 3x \, \mathrm{d}(3x) = -\frac{1}{3} \cos 3x + C.$

例 11 $\displaystyle\int \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}x = -2 \int \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \, \mathrm{d}(-\frac{x}{2}) = -2\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} + C.$

例 12 $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 - 2x + 5} = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-1)^2 + 2^2} = \int \frac{\mathrm{d}(x-1)}{(x-1)^2 + 2^2}$

$$= \frac{1}{2} \arctan \frac{x-1}{2} + C.$$

例 13 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$

$$= \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-x^2+x}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{-(x-\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2}} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{(\frac{1}{2})^2-(x-\frac{1}{2})^2}}$$

$$= \arcsin \frac{x-\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} + C = \arcsin(2x-1) + C.$$

例 14 计算 $I = \int \frac{x^2+3}{x(x+1)(x+2)}\,\mathrm{d}x$.

这里有一个理论问题, 即如何处理有理分式函数的不定积分. 系统地讲述这个问题就是教科书 p.255 开始的 §.9.8 的主要内容. 在这个例子中只讲一种特殊情况的处理方法.

这就是分母可以分解为若干个不同的一次因式的乘积, 也就是说作为分母的多项式只有彼此不同的实零点的情况. 这时可以将真有理分式分解为若干个简单分式之代数和.

以此题为例, 则要计算分解式右边的三个待定常数:

$$\frac{x^2+3}{x(x+1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x+2}.$$

求三个待定常数的方法很多. 一种完全规范的方法是右边通分, 使得两边分母相同, 然后等置两边的分子, 根据两边同次幂的系数相等, 得到关于 A, B, C 的线性代数方程组, 然后求解. 理论上可以证明这样的解一定存在惟一. 这种方法严格, 但最后需要求解线性代数方程组, 计算量可能大一点.

另一种方法就是利用极限知识来做. 先介绍如何求 A. 将上述待定的分解式两边乘以 x, 然后令 $x \to 0$, 这样就可以发现右边等于 A, 而左边就是去掉分母中的因子 x 后用 $x = 0$ 代入的结果. 当然由于原来的有理函数于 $x = 0$ 没有定义, 因此用 $x = 0$ 代入应当说成是两边都乘 x 后令 $x \to 0$. 这样直接得到 $A = \frac{3}{2}$.

用同样的方法, 两边乘以 $x+1$ 并令 $x \to -1$, 就得到 $B = -4$.

最后, 两边乘以 $x+2$ 并令 $x \to -2$, 就得到 $C = \frac{7}{2}$.

但有了 A, B 后也可以两边乘 x 再令 $x \to +\infty$, 就得到

$$A + B + C = 1,$$

从而 $C = 1 - A - B = 1 - \frac{3}{2} + 4 = \frac{7}{2}$. 由此可见办法要比未知量多. 这往往为计算方法的选择提供了灵活性.

于是可以计算得到 (教科书中漏写了最后答案):

$$I=\int\left(\frac{3/2}{x}+\frac{-4}{x+1}+\frac{7/2}{x+2}\right)\mathrm{d}x=\frac{3}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x}-4\int\frac{\mathrm{d}x}{x+1}+\frac{7}{2}\int\frac{\mathrm{d}x}{x+2}$$
$$=\ln\frac{|x|^{\frac{3}{2}}|x+2|^{\frac{7}{2}}}{|x+1|^4}+C$$

注 这种分解在前面已经多次使用. 例如为了求 $\left(\dfrac{1}{x(x-1)}\right)^{(n)}$, 就需要先作分解

$$\frac{1}{x(x-1)}=\frac{1}{x-1}-\frac{1}{x}.$$

最近的一个作图题中, 在作函数 $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$ 的草图时, 我们先作分解

$$\frac{x^3}{x^2-1}=x+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{x-1}+\frac{1}{x+1}\right).$$

又如在上面列出的基本不定积分表中的公式 (11), 即不定积分 $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x^2-a^2}$ 可以说就是这样计算出来的. 如果你推导后发现很容易掌握, 那么这个公式就不一定要背出来.

现在将这类问题背后的一套理论作一个简要的描述. 实系数有理分式, 即两个实系数多项式之商, 若为假分式, 即分子次数大于等于分母次数的情况, 一定可以分解为一个多项式与一个真分式之和. 而一个真分式, 即分子次数小于分母次数的情况, 由于实系数多项式一定可以在实数域内因式分解为若干个一次因式和二次因式的乘积, 一定可以分解为下列两种简单分式之和:

$$\frac{c}{(x-a)^k}\ (k\geqslant 1),\qquad \frac{Mx+N}{(x^2+px+q)^n}\ (n\geqslant 1).$$

其中的 c,a,M,N,p,q 均为实数. 这两类分式有个名称, 即部分分式 (partial fraction). 而将实系数有理分式分解为部分分式的过程称为部分分式分解.

下面一个代数定理是部分分式分解的理论基础.

部分分式分解定理 实系数有理分式一定能够以惟一的方式分解为部分分式之和.

这些内容可以看教科书后面 pp.256–257 上的内容. 但目前我们只做比较简单的题.

注 需要指出, 这里恰好是分析与代数的交汇点. 用代数的部分分式分解定理解决有理分式的不定积分问题, 同时在做这个代数分解运算中又可以用分析的极限手段.

例 15 求 $I=\displaystyle\int x(1-2x)^{99}\,\mathrm{d}x$.

解 这里当然不宜展开 $(1-2x)^{99}$, 而应当将 $1-2x$ 看成为一个中间变量 u. 于是可以写出

$$x(1-2x)^{99} = (1-2x)^{100}(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2}(1-2x)^{99}.$$

然后计算如下:

$$\begin{aligned}
I &= -\frac{1}{2}\int(1-2x)^{100}\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int(1-2x)^{99}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{4}\int(1-2x)^{100}\,\mathrm{d}(1-2x) - \frac{1}{4}\int(1-2x)^{99}\,\mathrm{d}(1-2x) \\
&= \frac{1}{404}(1-2x)^{101} - \frac{1}{400}(1-2x)^{100} + C \\
&= \frac{1}{4}(1-2x)^{100}\left(\frac{1}{101}(1-2x) - \frac{1}{100}\right) + C \\
&= -(1-2x)^{100}\left(\frac{1}{202}x + \frac{1}{40400}\right) + C. \quad \square
\end{aligned}$$

§ 9.2 计算不定积分的换元法和分部积分法

这里介绍计算不定积分的主要方法. 其中有两种换元法. 第一种换元法就是前面例 8 的推广, 即从 $F'(u) = f(u)$ 就有

$$\int f(ax+b)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}F(ax+b) + C.$$

注 本节的内容请参考《数学分析习题课讲义》上册的 §9.1 中的讲解和例题.

一. 换元法 1

这就是当 $F'(u) = f(u)$, 或者说 $\int f(u)\,\mathrm{d}u = F(u) + C$ 时, 成立

$$\int f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u(x))\,\mathrm{d}u(x) = F(u(x)) + C.$$

其中当然假设函数 $u(x)$ 可微.

这里要注意两点.

(1) 换元法 1 的正确性只不过是用链式法则而已.

(2) 在不定积分记号中引入微分 $\mathrm{d}x$ 对于应用换元法很有帮助.

(3) 换元法 1 就是要将给定的不定积分题中的被积表达式凑成

$$f(u(x))u'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}F(u(x)),$$

因此也称为凑微分法. 前面的一节最后都是 $u(x) = ax+b$ 的例子.

例 1 在 $\alpha \neq 0$ 时有

$$\int f(x^\alpha)x^{\alpha-1}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\alpha}\int f(x^\alpha)\mathrm{d}(x^\alpha) = \frac{1}{\alpha}F(x^\alpha) + C,$$

其中 $u(x) = x^\alpha$.

这类例子很多, 如 $\alpha=-1$ 时有

$$\int f\left(\frac{1}{x}\right)\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x=-\int f\left(\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=-F\left(\frac{1}{x}\right)+C,$$

对 $\alpha=2$ 有

$$\int f(x^2)x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int f(x^2)\,\mathrm{d}(x^2)=\frac{1}{2}F(x^2)+C.$$

由这些例子可见, 这实际上就是作代换 $u=u(x)$, 将问题归之于计算 $\int f(u)\,\mathrm{d}u$, 在求出不定积分为 $F(u)+C$ 后再将 $u=u(x)$ 代进去.

今后称 $u=x^{\alpha}$ 为幂代换, 特别称 $u=x^{-1}$ 为倒代换.

此外, 教科书中还有

$$\int f(\ln x)\frac{\mathrm{d}x}{x}=\int f(\ln x)\,\mathrm{d}(\ln x)=F(\ln x)+C.$$

下面是几个具体的计算例子.

例 2　求 $I=\displaystyle\int\frac{1}{x^2}\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$.

解　$I=-\displaystyle\int\sin\frac{1}{x}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)=\cos\frac{1}{x}+C$.

例 3　求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$.

解　这是用倒代换的好例子.

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{x\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{x^2+1}}=-\int\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=-\int\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}}\mathrm{d}\left(\frac{1}{x}\right)\\&=-\ln\left|\frac{1}{x}+\sqrt{1+\left(\frac{1}{x}\right)^2}\right|+C\\&=\ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right|+C.\quad\square\end{aligned}$$

例 4　求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解　$I=\displaystyle\int\frac{2}{1+x}\mathrm{d}(\sqrt{x})=2\arctan(\sqrt{x})+C$.　□

例 5　求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^n)}$, 其中 n 为正整数.

解　关键在于写出 $I=\displaystyle\int\frac{x^{n-1}\,\mathrm{d}x}{x^n(1+x^n)}=\frac{1}{n}\int\frac{\mathrm{d}(x^n)}{x^n(1+x^n)}$, 于是只要计算出

$$\int\frac{\mathrm{d}u}{u(1+u)}=\int\left(\frac{1}{u}-\frac{1}{1+u}\right)\mathrm{d}u=\ln\left|\frac{u}{1+u}\right|+C,$$

就可以得到 $I=\dfrac{1}{n}\ln\left|\dfrac{x^n}{1+x^n}\right|+C$.　□

第 32 次讲稿

第 32 次讲稿, 用于 2008 年 1 月 7 日, 星期一, 3 节课.
继续讲换元法 1 的例子, 然后讲换元法 2.

例 6 求 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{x \ln x}$.

解 若看出可用 $u = \ln x$, 则就有 $I = \ln|\ln x| + C$. □

例 7 求 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}}$

解 1 利用 $(\arctan x)' = \frac{1}{x^2+1}$, 取 $u = \arctan x$, 则 $x = \tan u$, 于是有

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{1+\tan^2 u}} = \int \frac{\mathrm{d}u}{\sec u} \\
&= \int \cos u \, \mathrm{d}u = \sin u + C \text{ (到此还未结束, 必须最后得到变量为 } x \text{ 的答案)} \\
&= \sin(\arctan x) + C \\
&= \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \quad \square
\end{aligned}
$$

注 这个解法表现出三角函数的应用, 尽管原来的被积函数和最后的答案都不出现三角函数. 这种情况在不定积分计算中是常见的.

解 2 用倒代换如下:

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\mathrm{d}x}{x^3\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} = \int \frac{1}{x^2} \cdot \frac{\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x}{\left(1+\frac{1}{x^2}\right)^{3/2}} \\
&= -\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{(1+u^2)^{3/2}} \ (u = \frac{1}{x}) \\
&= -\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(1+u^2)}{(1+u^2)^{3/2}} \\
&= -\frac{1}{2}\int v^{-3/2}\,\mathrm{d}v \ (v = 1+u^2) \\
&= -\frac{1}{2} \cdot (-2)v^{-1/2} + C \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} + C = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} + C. \quad \square
\end{aligned}
$$

三. 三角函数积分的例子 (p.208)

以下都是凑微分法的应用:

$$\int f(\sin x)\cos x\,\mathrm{d}x=\int f(\sin x)\,\mathrm{d}\sin x,$$
$$\int f(\cos x)\sin x\,\mathrm{d}x=-\int f(\cos x)\,\mathrm{d}\cos x,$$
$$\int f(\tan x)\frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x}=\int f(\tan x)\sec^2 x\,\mathrm{d}x=\int f(\tan x)\,\mathrm{d}\tan x,$$
$$\int f(\cot x)\frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x}=\int f(\cot x)\csc^2 x\,\mathrm{d}x=-\int f(\cot x)\,\mathrm{d}\cot x.$$

此外还有

$$\begin{aligned}\int f(\tan x)\,\mathrm{d}x&=\int f(\tan x)\cos^2 x\,\mathrm{d}\tan x\\&=\int \frac{f(\tan x)}{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}\tan x,\end{aligned}$$

因此问题归结为能否求出 $\int \frac{f(u)}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$.

例 8　求 $I=\int\sqrt{\sin x}\cos x\,\mathrm{d}x$.

解　$I=\int\sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}\sin x=\frac{2}{3}(\sin x)^{\frac{3}{2}}+C..$　□

例 9　求 $I=\int\tan x\,\mathrm{d}x$.

解　$I=\int\frac{\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x=-\int\frac{\mathrm{d}\cos x}{\cos x}=-\ln|\cos x|+C=\ln|\sec x|+C.$　□

解 2　采用前面介绍的方法:

$$\begin{aligned}I&=\int\frac{\tan x}{1+\tan^2 x}\,\mathrm{d}\tan x=\int\frac{u\,\mathrm{d}u}{1+u^2}=\frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}(1+u^2)}{1+u^2}\\&=\frac{1}{2}\ln|1+u^2|+C=\frac{1}{2}\ln\sec^2 x+C=\ln|\sec x|+C.\end{aligned}$$　□

例 10　求 $I=\int\sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

解　$I=\int\sin x(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}x=-\int(1-\cos^2 x)\,\mathrm{d}\cos x=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x+C.$

解 2　将 $\sin^n x$ 或 $\cos^n x$ 写为倍角函数的代数和是计算它们的不定积分的一种有效方法. 这一般可以用 Euler 公式得到. 对本题而言, 则有

$$\begin{aligned}\sin^3 x&=\frac{1}{2}(1-\cos 2x)\sin x=\frac{1}{2}\sin x-\frac{1}{4}(\sin 3x-\sin x)\\&=\frac{3}{4}\sin x-\frac{1}{4}\sin 3x,\end{aligned}$$

然后就有

$$I = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos 3x + C. \quad \square$$

注 写出

$$\begin{aligned}\cos^3 x &= \frac{1}{2}(1+\cos 2x)\cos x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) \\ &= \frac{1}{4}\cos 3x + \frac{3}{4}\cos x,\end{aligned}$$

代入解 2 的答案, 可见两个答案相同.

注 2 可以用 De Moivre 公式同时计算出 $\cos 3x$ 和 $\sin 3x$ 的倍角公式.

$$\begin{aligned}\cos 3\theta + \mathrm{i}\sin 3\theta &= (\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^3 \\ &= \cos^3\theta + 3\,\mathrm{i}\cos^2\theta\sin\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta - \mathrm{i}\sin^3\theta,\end{aligned}$$

等置两边的实部与虚部, 就同时得到:

$$\cos 3\theta = \cos^3\theta - 3\cos\theta\sin^2\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta,$$

$$\sin 3\theta = 3\cos^2\theta\sin\theta - \sin^3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta.$$

例 11 求 $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x\cos x}$.

解 1 教科书上的方法很巧妙:

$$\begin{aligned}I &= \int \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\sin^3 x\cos x}\,\mathrm{d}x \\ &= \int \frac{\cos x}{\sin^3 x}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x\cos x} \\ &= \int \csc^2 x\cot x\,\mathrm{d}x + \int \frac{\sec^2 x\,\mathrm{d}x}{\tan x} \\ &= -\int \cot x\,\mathrm{d}\cot x + \int \frac{\mathrm{d}\tan x}{\tan x} \\ &= -\frac{1}{2}\cot^2 x + \ln|\tan x| + C. \quad \square\end{aligned}$$

注 当然其中第一项也可以如下计算

$$\int \frac{\mathrm{d}\sin x}{\sin^3 x} = -\frac{1}{2}\sin^{-2} x + C = -\frac{1}{2}\csc^2 x + C,$$

其中第二项也可直接用 p.200 上的基本公式 (15) 如下计算

$$2\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin 2x} = \ln|\tan x| + C.$$

解 2 本题的一般做法是化为有理分式后求不定积分.

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{\cos x\,\mathrm{d}x}{\sin^3 x(1-\sin^2 x)} \\
&= \int \frac{\mathrm{d}u}{u^3(1-u^2)}\ (u=\sin x)\ (\text{若于此就作部分分式分解则计算量较大}) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{u\,\mathrm{d}u}{u^4(1-u^2)} = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}v}{v^2(1-v)}\ (v=u^2).
\end{aligned}$$

然后作部分分式分解

$$\frac{1}{v^2(1-v)} = \frac{A}{v} + \frac{B}{v^2} + \frac{C}{v-1},$$

两边乘 v^2, 令 $v \to 0$ 得到 $B=1$; 两边乘 $v-1$, 令 $v \to 1$ 得到 $C=-1$; 两边乘 v, 令 $v \to +\infty$, 得到 $A+C=0$, 于是 $A=1$.

这样就得到

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{2}\left(\int \frac{\mathrm{d}v}{v} + \int \frac{\mathrm{d}v}{v^2} - \frac{\mathrm{d}v}{v-1}\right) \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{v}{v-1}\right| - \frac{1}{2v} + C \\
&= \frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right| - \frac{1}{2\sin^2 x} + C \\
&= \ln|\tan x| - \frac{1}{2}\csc^2 x + C. \quad \square
\end{aligned}$$

解 3 将解 1 的方法再发展一步则有

$$\begin{aligned}
I &= \int \frac{(\sin^2 x + \cos^2 x)^2}{\sin^3 x \cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= \int [\tan x + 2\cot x + \cot x(\csc^2 x - 1)]\mathrm{d}x \\
&= -\ln|\cos x| + \ln|\sin x| - \frac{1}{2}\cot^2 x + C. \quad \square
\end{aligned}$$

例 12 求 $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{A\cos^2 x + 2B\cos x\sin x + C\sin^2 x}\quad (A \neq 0)$.

解 利用 $A \neq 0$ 的条件, 分子分母同除以 $\sin^2 x$, 有

$$I = \int \frac{\csc^2 x\,\mathrm{d}x}{A\cot^2 x + 2B\cot x + C} = -\int \frac{\mathrm{d}t}{At^2 + 2Bt + C},$$

其中 $t = \cot x$.

以下对分母的二次三项式作配方, 并根据不同情况分别处理. 首先有

$$I = -\frac{1}{A}\int \frac{\mathrm{d}t}{(t+t_0)^2 + \beta},$$

其中 $t_0 = \dfrac{B}{A}$, $\beta = \dfrac{1}{A^2}(AC - B^2)$. 于是有

(1) $AC - B^2 > 0$, 则

$$I = -\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta}}\arctan\frac{\cot x + t_0}{\sqrt{\beta}} + C;$$

(2) $AC - B^2 = 0$, 则

$$I=\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{\cot x+t_0}+C;$$

(3) $AC-B^2<0$, 则

$$I=-\frac{1}{A}\cdot\frac{1}{2\sqrt{-\beta}}\ln\left|\frac{\cot x+t_0-\sqrt{-\beta}}{\cot x+t_0+\sqrt{-\beta}}\right|+C.\quad\square$$

五. 换元法 2——代入法

将换元法 1 倒过来就得到换元法 2. 它的基本思路很简单. 这就是在被积表达式 $f(x)\,\mathrm{d}x$ 中用可微函数 $x=x(t)$ 代入, 这样就得到

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=\int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t,$$

若右边的不定积分为 $F(t)+C$, 则用反函数 $t=t(x)$ 代入, 就得到原来的不定积分为 $F(t(x))+C$.

下面我们先举例说明如何应用这种新的换元法, 最后对其正确性给出证明.

例 13 求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+a^2}}$. (即教科书 p.200 的基本不定积分表中的公式 (13) 中的 $b=a^2>0$ 的情况.)

解 令 $x=a\tan t$, 并利用 p.200 的公式 (16), 则有

$$I=\int\frac{a\sec^2 t}{a\sec t}\,\mathrm{d}t=\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}=\ln\left|\tan\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4}\right)\right|+C.$$

利用恒等式 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$, 就有

$$\begin{aligned}I&=\ln\left|\frac{1-\cos(t+\pi/2)}{\sin(t+\pi/2)}\right|+C=\ln\left|\frac{1+\sin t}{\cos t}\right|+C\\&=\ln\left|\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}}{\dfrac{a}{\sqrt{x^2+a^2}}}\right|+C\\&=\ln|x+\sqrt{x^2+a^2}|+C.\quad\square\end{aligned}$$

注 书中则用 p.200 的公式 (11), 即

$$\int\frac{\mathrm{d}t}{\cos t}=\int\frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{\cos^2 t}=\int\frac{\mathrm{d}\sin t}{1-\sin^2 t},$$

但过程更长一点.

下面用换元法 2 来回顾前面的几个题.

(p.207 **的例** 3) 求 $I=\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{x^2+1}}$.

解 当时是用倒代换求解, 若看不出这条路, 则可以令 $x=\tan t$. 于是

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\tan t \sec t} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t} \\
&= \ln\left|\tan\frac{t}{2}\right| + C = \ln\left|\frac{\sin t}{1+\cos t}\right| + C \\
&= \ln\left|\frac{x}{1+\sqrt{x^2+1}}\right| + C. \quad \square
\end{aligned}
$$

(p.207 **的例** 4) 求 $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x}(1+x)}$.

解 令 $\sqrt{x} = t$, 即 $x = t^2$, 于是

$$
I = \int \frac{2t\,\mathrm{d}t}{t(1+t^2)} = 2\int \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} = 2\arctan t + C = 2\arctan\sqrt{x} + C. \quad \square
$$

(p.207 **的例** 5) 求 $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^n)}$.

解 令 $x^n = t$, 即 $x = t^{1/n}$, 这样就有

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\frac{1}{n}t^{1/n-1}\,\mathrm{d}t}{t^{1/n}(1+t)} = \frac{1}{n}\int \frac{\mathrm{d}t}{t(1+t)} \\
&= \frac{1}{n}\int \left(\frac{1}{t} - \frac{1}{t+1}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n}\ln\left|\frac{t}{t+1}\right| + C \\
&= \frac{1}{n}\ln\left|\frac{x^n}{x^n+1}\right| + C
\end{aligned}
$$

(p.207 **的例** 7) 求 $I = \displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^{3/2}}$.

解 令 $x = \tan t$, 则有

$$
I = \int \frac{\sec^2 t\,\mathrm{d}t}{\sec^3 x} = \int \cos t\,\mathrm{d}t = \sin t + C = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} + C. \quad \square
$$

(p.209 **的例** 10) 求 $I = \displaystyle\int \sin^3 x\,\mathrm{d}x$.

解 若不想用倍角公式, 则可以令 $x = \arcsin t$, 即 $t = \sin x$, 于是

$$
\begin{aligned}
I &= \int t^3 \cdot \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2}\int \frac{t^2\,\mathrm{d}(t^2)}{\sqrt{1-t^2}} \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{v\,\mathrm{d}v}{\sqrt{1-v}}\ (v = t^2) \\
&= \frac{1}{2}\int \frac{1-(1-v)}{\sqrt{1-v}}\,\mathrm{d}v = \frac{1}{2}\int [(1-v)^{-1/2} - (1-v)^{1/2}]\,\mathrm{d}v \\
&= -(1-v)^{1/2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}(1-v)^{3/2} + C \\
&= -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + C. \quad \square
\end{aligned}
$$

最后我们来证明换元法 2 的正确性.

首先, 从前面的介绍来看, 这里似乎要求比换元法 1 高, 即 $x=x(t)$ 必须有反函数. 但事实上不必如此.

定理 设在区间 I 上定义的函数 $f(x)$ 存在原函数, $x=x(t)$ 可微, 又存在 $t=t(x)$ 满足 $x(t(x))\equiv x$, 则若有

$$\int f(x(t))x'(t)\,\mathrm{d}t=F(t)+C,$$

就成立

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(t(x))+C.$$

证 问题只是要证明 $[F(t(x))]'_x=f(x)$, 而定理中没有 $t(x)$ 的可微条件, 也没有对 $t(x)$ 与 $x(t)$ 是否互为反函数作出假设. 下面的证明表明这是不需要的.

从条件知存在 $U(x)$ 满足 $U'(x)=f(x)$, 又有 $F'(t)=f(x(t))x'(t)$. 利用复合函数求导的链式法则, 有

$$\frac{\mathrm{d}U(x(t))}{\mathrm{d}t}=f(x(t))x'(t)=F'(t).$$

可见 $U(x(t))$ 与 $F(t)$ 只相差一个常数, 即是存在一个常数 C_0, 使得

$$U(x(t))=F(t)+C_0.$$

用 $t=t(x)$ 代入并利用恒等式 $x(t(x))\equiv x$, 就有

$$U(x(t(x)))=U(x)=F(t(x))+C_0,$$

这样就证明了 $[F(t(x))]'_x=U'(x)=f(x)$, 因此成立

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x=F(t(x))+C.\quad\Box$$

第 33 次讲稿 (本学期最后一次)

第 33 次讲稿, 用于 2008 年 1 月 9 日, 星期三, 2 节课.

准备结束 §9.2, 也就是本学期最后一次课. 主要内容是分部积分法及例题.

七. 分部积分法

这是求不定积分的重要方法, 它与两种换元法一起成为求不定积分的主要工具. 如果说两种换元法之间可以按照各人偏好有所选择的话, 则分部积分法却是必须熟悉的工具. 在很多情况下往往还是必须使用的手段.

换元法与复合函数求导的链式法则有密切联系. 分部积分法则来自于两个函数乘积的求导法则. (由此可见第六章中的这两个基本内容的重要性.)

设 $u=u(x), v=v(x)$ 都是可微函数, 则有 $(uv)'=u'v+uv'$, 因此就有

$$\int (u'v+uv')\,\mathrm{d}x = \int v\,\mathrm{d}u + \int u\,\mathrm{d}v = uv + C,$$

于是就得到分部积分公式

$$\int u\mathrm{d}v = uv - \int u\,\mathrm{d}v.$$

这里要注意几点: (1) 在推导中由于右边也有一个不定积分, 因此不必再写出任意常数 C 了. (2) 只有在两个不定积分, 即 $\int u\,\mathrm{d}v$ 和 $\int v\,\mathrm{d}u$ 中有一个能够求出来时, 分部积分公式才有用. 实际上分部积分公式的主要思想就是告诉我们, 这两个不定积分之和是已知的, 因此只要能够求出其中之一, 则另一个也能得到.

分部积分公式似乎不起眼, 但实际上非常有用, 往往可以解决换元法解决不了的问题.

例 14　求 $I=\int x\mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x$.

我们先举出几种不成功的尝试. 例如, 用换元法, 令 $\mathrm{e}^x=t$, 则 $x=\ln t$, $\mathrm{d}x=\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t$. 于是

$$I=\int t\ln t\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=\int \ln t\,\mathrm{d}t,$$

但不知道如何做下去.

但是这里也有收获, 即如果本题能解决, 则就可以求出 $\int \ln t\,\mathrm{d}t$.

另一个办法, 就是

$$I=\int \mathrm{e}^x\mathrm{d}(\frac{x^2}{2})=\frac{x^2}{2}\mathrm{e}^x-\int\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x).$$

这也不知道如何做下去. 但这里也有收获. 原来的困难就在于被积函数除了 e^x 之外多了一个因子 x. 通过上面的分部积分, 这个因子次数反而升高了. 可见方向错了. 若倒转方向, 就有希望解决问题. 这里就是选择 u 与 v 的问题.

解　同样用分部积分法, 有

$$I=\int x\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^x)=x\mathrm{e}^x-\int \mathrm{e}^x\,\mathrm{d}x=x\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^x+C=(x-1)\mathrm{e}^x+C.\quad\square$$

从前面的分析可知我们现在一定能够解决下列不定积分问题.

补充: 用分部积分法的一个典型例子: 求 $I=\int \ln x\,\mathrm{d}x$.

解 用分部积分法:

$$\begin{aligned}I&=x\ln x-\int x\,\mathrm{d}(\ln x)=x\ln x-\int x\cdot\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x\\&=x\ln x-\int \mathrm{d}x=x\ln x-x+C.\end{aligned}$$

例 15 求 $I=\int x\sin x\,\mathrm{d}x$.

解 从上一题的经验可知应当如何使用分部积分法消除被积函数中的因子 x:

$$I=\int x\,\mathrm{d}(-\cos x)=-x\cos x+\int\cos x\,\mathrm{d}x=-x\cos x+\sin x+C.\quad\square$$

例 16 求 $I=\int x\ln^2 x\,\mathrm{d}x$.

解 这里的问题是如何解决因子 $\ln^2 x$, 下面的办法就是按照这个思路来做的, 即先将 $\ln^2 x$ 的次数从 2 降为 1.

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int\ln^2 x\,\mathrm{d}(x^2)=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}(\ln^2 x)\\&=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\int x\ln x\,\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{1}{2}\int\ln x\,\mathrm{d}(x^2)\\&=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\int\frac{x^2}{2}\,\mathrm{d}(\ln x)\\&=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\int\frac{x}{2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{x^2}{2}\ln^2 x-\frac{x^2}{2}\ln x+\frac{x^2}{4}+C.\quad\square\end{aligned}$$

例 17 求 $I=\int\arctan x\,\mathrm{d}x$.

解 这也是用分部积分法的典型例题.

$$\begin{aligned}I&=x\arctan x-\int x\,\mathrm{d}(\arctan x)\\&=x\arctan x-\int x\cdot\frac{1}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=x\arctan x-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)+C.\quad\square\end{aligned}$$

例 18　求 $I=\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$. (将教科书中的例题作了改动, 引入两个参数.)

解　在此题计算中出现了在求不定积分过程中经常发生的循环现象.

$$\begin{aligned}
I &= \frac{1}{a}\int \sin bx\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax}) \\
&= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\int \cos bx\,\mathrm{d}(\mathrm{e}^{ax}) \\
&= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\cos bx + \frac{b}{a^2}\int \mathrm{e}^{ax}\,\mathrm{d}(\cos bx) \\
&= \frac{1}{a}\mathrm{e}^{ax}\sin bx - \frac{b}{a^2}\mathrm{e}^{ax}\cos bx - \frac{b^2}{a^2}\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{a^2}{a^2+b^2}\mathrm{e}^{ax}(\frac{1}{a}\sin bx - \frac{b}{a^2}\cos bx) + C \\
&= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\sin bx - b\cos bx) + C. \quad \square
\end{aligned}$$

例 19　求 $\int \frac{\ln\cos x}{\sin^2 x}\,\mathrm{d}x$.

解　利用 $(\cot x)' = -\csc^2 x$,

$$\begin{aligned}
I &= \int \ln\cos x\,\mathrm{d}(-\cot x) \\
&= -\cot x\ln\cos x + \int \cot x\,\mathrm{d}(\ln\cos x) \\
&= -\cot x\ln\cos x + \int \cot x\cdot\frac{-\sin x}{\cos x}\,\mathrm{d}x \\
&= -\cot x\ln\cos x - \int \mathrm{d}x = -\cot x\ln\cos x - x + C. \quad \square
\end{aligned}$$

再补充一个典型例子:　求 $I=\int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$.

解　此题也可以用换元法解 (即 p.212 的练习题 1). 这里介绍用分部积分法的解法, 其中也发生循环现象.

$$\begin{aligned}
I &= x\sqrt{1-x^2} - \int x\,\mathrm{d}(\sqrt{1-x^2}) \\
&= x\sqrt{1-x^2} - \int \frac{-x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-(1-x^2)}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \\
&= x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}} - \int\sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\arcsin x + C. \quad \square
\end{aligned}$$

最后补充一个内容. 这就是利用复数计算工具对例 18 给出一个新的解, 而且可以同时计算出两个不定积分. 其中不需要分部积分法.

例题 0.1 计算不定积分 $\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x$ 和 $\int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x$, 其中 a, b 均为实数.

解 首先利用 Euler 公式有

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx)\,\mathrm{d}x &= \int \mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x}\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{a+\mathrm{i}b}\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} + C.\end{aligned} \tag{1}$$

(这里的根据来自于对实变复值函数 $u(x)+\mathrm{i}v(x)$ 的导数定义为

$$(u(x)+\mathrm{i}v(x))' = u'(x) + \mathrm{i}v'(x),$$

并用相同方法定义实变复值函数的原函数和不定积分, 然后即可验证公式 (1) 成立.)

然后分离出 (1) 右边第一项的实部与虚部, 就有

$$\begin{aligned}\frac{1}{a+\mathrm{i}b}\cdot\mathrm{e}^{(a+\mathrm{i}b)x} &= \frac{a-\mathrm{i}b}{a^2+b^2}\cdot\mathrm{e}^{ax}(\cos bx + \mathrm{i}\sin bx) \\ &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}[(a\cos bx + b\sin bx) + \mathrm{i}(-b\cos bx + a\sin bx)],\end{aligned}$$

又写复常数 $C = C_1 + \mathrm{i}C_2$, 其中 C_1, C_2 为实常数, 这样就得到所求的答案为:

$$\begin{aligned}\int \mathrm{e}^{ax}\cos bx\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(a\cos bx + b\sin bx) + C_1, \\ \int \mathrm{e}^{ax}\sin bx\,\mathrm{d}x &= \frac{\mathrm{e}^{ax}}{a^2+b^2}(-b\cos bx + a\sin bx) + C_2. \quad \square\end{aligned}$$