数学反演思想及其发展

刘建忠[1,3]，刘心蓉[2]
（1. 云南省软件工程重点实验室，昆明 650091;
2. 北京语言大学，北京 100083;
3. 云南昆船设计研究院，昆明 650051）

摘要：讨论了反演变换、级数反演、反演理论、关系映射反演方法和反演集合理论的思想差异和相互之间关系，指出：关系映射反演方法思想包含级数反演思想，级数反演思想包含反演变换思想，在有限集上关系映射反演方法和反演理论可以统一为反演集合。并举例说明了反演集合理论在反演理论(联合反演)中的应用。

关键词：反演集合；反演思想；关系映射反演方法；反演理论；级数反演；反演变换
中图分类号：O144; P223

Inversion Thoughts in Mathematics and Its Development

LIU Jianzhong[1,3], LIU Xinrong[2]
(1. Key Laboratory in Software Engineering of Yunnan Province, Kunming 650091, China;
2. Beijing Language and Culture University,Beijing 100083;
3. Kunming Shipbuilding Design & Research Institute,Yunnan Kunming 650051,China)

Abstract: In this thesis, the author intends to discuss the ideological differentiae and mutual relations among the inversion transformation, the series reversion, the inverse problem theory, the method of relation mapping inversion, and the inversion set theory. The author points out that method of relation mapping inversion comprises series reversion, while series reversion includes inversion transformation, therefore, method of relation mapping inversion and inverse problem theory could unified into inversion set theory within finite set. The author also illustrates the applications of inversion set theory in the inverse problem theory (joint inversion).

Key words: Inversion Set; Inversion Thoughts; Method of Relation Mapping Inversion; Inverse Problem Theory; Series Reversion; Inversion Transformation

0 引言

反演源于对称破缺。反演思想起源很早，从考古史料来看，早在五千年前的仰韶文化时期，人们在绘制图案时，就刻意让一些对称破缺(见图 2c)。

事物的反演关系是客观世界中普遍存在的一种真实关系。研究反演的重要性在于：真实的客观事物都是以反演关系、而不是以对称关系存在的。正如李政道所说[1]21：“所有的对称原理，均基于下述假设：某些基本量是不可能观测到的。这些量将称之为‘不可观测量’；反之，只要某个不可观测量变成可观测量，那么，我们就有对称性的破坏”。

反演思想有五个重要的发展节点，反映了反演思想发展轨迹。它们分别是：1830年瑞士数学家施泰纳 (Jakob Steiner)提出的几何学中的反演变换(Inversion Transformation)[2]145；1901年德国数学家内托 (E.Netto)在出版的组合学教科书中对级数反演(Series Reversion)的整理发表[3]2；1967年美国地球物理学家Backus和应用数学家Gilbert提出的反问题理论(inverse problem theory)[4][5][6]；1983年徐利治在数学方法论中提出的关系映射反演方法(Method of Relation Mapping Inversion)[7]24；及1994年刘建忠为统一数学中的反演思想而提出

作者简介：刘建忠(1955-)，男，研究员，主要研究方向：人工智能，图像识别，反演集合理论及其应用. E-mail: liujianz6655@126.com

的反演集合理论(Inversion Set Theory)[8]7。

本文中我们首先论述了集合上的反演与对称之间的关系，指出反演源于对称破缺，然后论述了五种反演思想方法之间关系如图1所示。

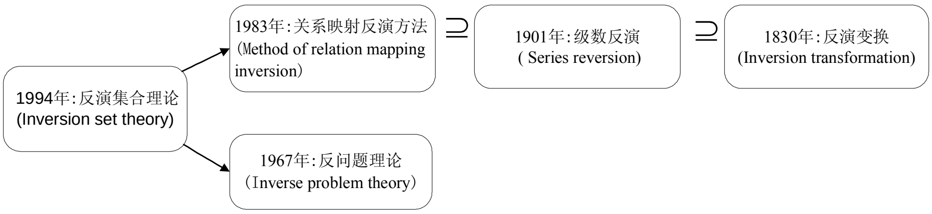


图1 各种反演思想之间的关系
Fig.1The relationship among inversion thoughts

数学的价值在于应用。文中最后举例说明了反演集合理论在反问题理论(联合反演)中的简单应用。

1 集合上的反演与对称

对称性概念是人类在观察自然界各种事物的几何形状空间变换时形成的[9]175。例如，人的面部器官在左右两边的分布基本相同，就说它是对称的[10]488。

把图形从一个状态变到另一个状态的过程叫做“变换”。使图形不变形地变到与自身重合的变换，称为这个图形的对称变换[11]12。所谓对称，就是图形在变换下的不变性[12]。例如，平面几何图形中的轴对称、平移对称、n 次中心对称、滑动反射对称[13]18，都是图形经过(反射、平移、旋转、滑动反射)变换后能够与原图形重合。这些变换有一个共同的特点：都是保距变换，保持图形上任意两点的距离在变换前后不变，使得图形经过对称变换后，图形中每一点原来附近有些什么，现在附近还是什么[14]1。

平面图形的对称变换含有三个特征：

1) 对称变换是一一变换；
2) 变换后的图形能够与原图形重合；
3) 图形的任一真子图形变换后能够与原子图形重合。

从集合论角度看，任一平面图形都可以看作是整个平面点集的子集，任一客观事物都可以看作是一个更大的客观事物中的一部分。在这种意义下，文献[13]45 中给出了子集的对称变换定义：

定义 1： 设 N 是 X 的子集，f 是 X 上的非恒等一一变换，若 $f(N)=N$，则称 f 是 N 的对称变换。

由于任一客观事物都可以看作是某一个集合 X 的子集 N，因此任何事物的对称都是子集的对称的特例。

但是，满足定义 1 条件的对称变换，不一定满足平面图形对称变换的特征 3。这是因为 N 的对称变换 f，并不是保持 N 中的每个元素都不变，而只是把 N 看作一个子集时，f“从整体上”保持 N 不变，$f(N)=N$ 表达的意思是：f 能保持 N 整体上不变，但不能保证 N 的任意子集不变。

平面图形是赋予结构的集合。所谓结构[15]207，就是元素(或它们的集合)和元素之间的关系。对于抽象的集合，元素和元素之间除了它们有共同从属于该集合这种共性之外，彼此之间没有关系。一旦有了关系，结构就产生了。一个集合如果没有被赋予结构，它的每个元素

都是互不相关、彼此独立的，并且各个元素一律平等。集合除了最简单的性质之外，没有太多可研究的问题[16]246。

定义 1 涉及到子集合 N 上的结构。在数学中，集合上的变换是指集合到自身的变换。定义 1 中的 $f(N)=N$ 表达是集合 N 的结构在对称变换后可以和原结构重合，而不是指一群互不相关、彼此独立、相互平等、离散的元素变换后相等，任何集合到自身的一一变换元素都是相等，这没有讨论意义。

文献[11]8 也给出了一个赋予结构的集合的对称变换定义：

定义 2：一个具有某些关系的集合到自身的保持这些关系不变的变换，称为对称变换。

在客观事物中，一般来说，关系概念所指很泛，事物整体具有的关系，事物局部不一定能具有。因此，我们有必要从集合角度给出与平面图形对称变换更吻合的定义。

我们赋予子集合 N 一个结构，文献[2]570 中将"有规则结构的对象"命名为"构形"。我们借用此名称，赋予结构的集合 N 的元素组成一个构形。这样，N 的幂集 P(N)中的每一元素 $u\in$ P(N)都是 N 的子构形($u\subseteq N$)。

定义 3：设 N 是 X 的赋予结构的子集合，f 是 P(N)上的非恒等一一变换，对任一 $u\in$ P(N)都满足 $f(u)=u$，则称 f 是 N 的对称变换。

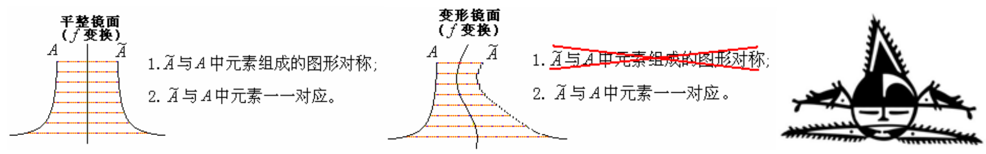
定义3与定义1的区别在于：不仅 N 在 f 变换下"又回到自身"，N 任一子集在 f 变换下也是"又回到自身"。定义3含有两个特征：

1) 集合 N 的任一子集的构形在 f 变换后都与原构形重合(N 是自身的假子集)；

2) f 是一一变换。

由定义3可知：若两个集合 A 与 $\tilde{A}$ 对称，则两个集合的构形(或称两个集合中各自元素组成的图形，见图2a)可以重合，并且两个集合元素之间一定存在有一一对应函数 f 。

如果破坏掉 A 与 $\tilde{A}$ 之间的对称(即对称性破缺)，仅保留 A 与 $\tilde{A}$ 之间元素一一对应(见图2b)，此时 A 与 $\tilde{A}$ 之间就是反演关系。对称关系是反演关系的特例。



a)对称 b)反演 c)人面鱼纹彩陶盘图案

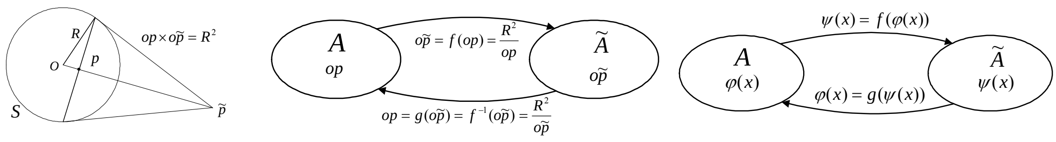
图2 对称是反演的特例

Fig.2 Symmetry is a special case of inversion

2 反演变换、级数反演和关系映射反演方法三者之间关系

2.1 集合观点下的反演变换

反演一词首次出现在1830年施泰纳提出的反演变换中，反演变换几何意义如图3a所示。



a) b) c)

图3 反演变换和级数反演

Fig.3 Inversion Transformation and Inversion of Sequences

设所有 op 组成集合 A，所有 $\widetilde{op}$ 组成集合 $\widetilde{A}$(见图 3b)，A 中元素 op 与 $\widetilde{A}$ 中元素 $\widetilde{op}$ 之间是按规则 $op \times \widetilde{op} = R^2$ 一一对应，任意 $op \in A$，都有 $\widetilde{op} \in \widetilde{A}$ 与 op 一一对应，反之亦然。

在数学中，我们将两个同构的事物看作是同一类。在反演变换中，$\widetilde{A}$ 与 A 互为反演并不能保证它们之间同构。例如，令 A 到 $\widetilde{A}$ 的一一映射为 f：$f(op) = R^2 / op = \widetilde{op}$，则对任意 $op_1, op_2 \in A$：$f(op_1 * op_2) = R^2 / (op_1 * op_2)$，而 $f(op_1) * f(op_2)$ $= (R^2 / op_1) * (R^2 / op_2)$， 即 $f(op_1 * op_2) \neq f(op_1) * f(op_2)$， 故 A 与 $\widetilde{A}$ 不同构。

2.2 集合观点下的级数反演

级数反演亦称序列反演(inversion of sequences)，它是根据两个序列 $\{\varphi(n)\}$ 和 $\{\psi(n)\}$ 所满足的特殊关系，给出它们的相互表示方法，即把一个序列用另外一个序列表示出来。具体来说，为了得到某个 $\varphi(n)$，我们首先设法求出相应序列 $\{\varphi(n)\}$ 所满足的(累计)关系式

$$\psi(n) = \sum_{k=0}^{n} C_{n,k} \varphi(k) = f(\varphi(n)) \qquad (1)$$

其中 $\psi(n)$ 是已知序列，然后从中解出

$$\varphi(n) = \sum_{k=0}^{n} d_{n,k} \psi(k) = g(\psi(n)) \qquad (2)$$

(1)、(2) 两式互为反演公式。

其思想是先用不熟悉的东西去表示熟悉的东西，然后再将不熟悉的东西从中反解出来。例如：如果 $\{\psi(n)\}$ 易算，$\{\varphi(n)\}$ 难算，先建立 $\psi(n)$ 由 $\{\varphi(n)\}$ 的表达公式 (1)，然后反演得到用 $\{\psi(n)\}$ 表示 $\varphi(n)$ 的公式 (2)，从而求出 $\varphi(n)$。

级数反演方法在数论[17]121，积分变换[18]311，拉普拉斯变换[18]408等众多数学邻域中都有应用。常见的反演公式有二项式反演、Stirling反演、Möbius反演、Langrange反演等。

从集合论角度看级数反演(见图3c)，可描述为：设所有 $\varphi(x)$ 值组成 A，所有 $\psi(x)$ 值组成 $\widetilde{A}$，函数 f：$A \to \widetilde{A}$；函数 g：$\widetilde{A} \to A$；若 f 与 g 互为反演公式，且如果已知 $\psi(x)$ 值，则可从 $\varphi(x) = g(\psi(x))$ 中解出 $\varphi(x)$；反之，如果已知 $\varphi(x)$ 值，则可从 $\psi(x) = f(\varphi(x))$ 中解出 $\psi(x)$。

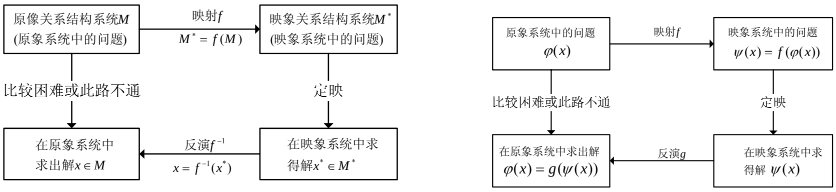
2.3 反演变换 $\subseteq$ 级数反演

在反演变换中，如果设 A 到 $\widetilde{A}$ 的一一映射 f 为：$f(x) = R^2 / x$，设 $\widetilde{A}$ 到 A 的一一映射 g 为：$g(x) = R^2 / x$，若已知 $op \in A$，则由 $\widetilde{op} = f(op) = R^2 / op$ 可求得 $\widetilde{op}$；反之若已知 $\widetilde{op} \in \widetilde{A}$，则由 $op = g(\widetilde{op}) = R^2 / \widetilde{op}$ 可求得 op，即此时 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互为反演公式(见图3b)。故级数反演思想包含反演变换思想。

2.4 集合论观点下的关系映射反演方法

如果一个数学解 x 在现有领域(关系结构) M 中求解难度太大，我们可寻找一个 f 将 M 映射到另一个求解相对容易的“弱”领域(关系结构) $M^* = f(M)$ 中解决，在 M^* 求得目标映象解 $x^* = f(x)$ 后，再用 f^{-1} 将求的解 x^* 反演回现有邻域(关系结构) M 中来，从而得到在

M 中的解 $x = f^{-1}(x^*)$。这就是所谓关系映射反演方法。具体如图4a所示：



a) b)

图4 关系映射反演方法

Fig.4 The Relationship Mapping Inversion Method

2.5 级数反演$\subseteq$关系映射反演方法

如图4b所示，级数反演方法可纳入关系映射反演方法框架之中，故我们说关系映射反演方法思想可包含级数反演思想。

3 反问题(反演)理论与关系映射反演方法之间的关系

3.1 反问题理论

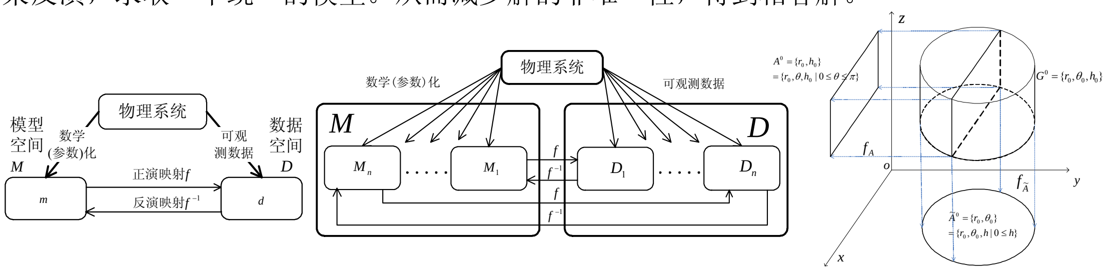
反问题理论(inverse problem theory)被国内文献大多翻译为“反演理论”。我们认为译成“反问题理论”更能确切表达其理论的思想。

地球表面为坚硬的岩石所覆盖，没有人能看到15公里以下的岩石在原位是什么样子，人们也不可能清楚地观察到炼钢炉内部发生的冶炼过程细节，而只能在局限的时空内观察到这些不可及过程的一些信息，通过这些受局限的观察信息求取地表15公里以下的岩石样子和炼钢炉内部发生的细节，就是反问题理论中的“反演”问题。

自然界的客观事物都可以看成是一个物理系统。一个物理系统可以抽象为一个数学(参数化)模型，该模型参数所构成的空间我们称为模型空间 M ,我们定义可直接观测数据所构成的空间为数据空间 D。反问题理论的目的是根据数据空间 D 中的观测数据求取模型空间 M 中的参数。

在离散反演中，若模型参数的维数大于观测数据的维数，则反演不唯一。在连续反演中，无论怎样增加观测量，它也只能为有限个数据，而连续函数的参数可以是无限维，用有限个数据反演无限维模型参数总是非唯一的。理论上讲，低维空间到高维空间的映射必然会产生映射值不唯一，反演解的非唯一性是反演所固有的问题，是不可避免的。

联合反演[19]方法是减小解的非唯一性的有效方法之一。所谓联合反演，就是反演时联合应用由测量原理迥然不同的仪器测量的、具有不同含义的两组以上的观测数据进行相互约束反演，求取一个统一的模型。从而减少解的非唯一性，得到相容解。



a) b) c)

图5 单一反演与联合反演的关系

Fig.5 The relationship between the joint inversion and inversion

用以描述一个物理系统的数学模型的选择不是唯一的，从不同的角度分析物理系统可描述出不同的数学模型。例如，可以用地球内部各点密度来描述“地球”形成数学模型M_1；也可以用各点弹性性质来描述“地球”形成数学模型M_2，等等(见图5b中的$M_1,\cdots,M_n$)。虽然$M_1,\cdots,M_n$互不相同, 但它们来源于同一物理系统(同源)，它们反映了物理系统的模型空间M的不同侧面。$M_1,\cdots,M_n$对应有各数据空间$D_1,\cdots,D_n$也是来源于同一物理系统。

例如，设有三维模型空间$M=G^0=\{r_0,\theta_0,h_0\}$，几何意义见图5c，现有二组观测数据：$D_1$、$D_2$在$M$中的反演结果为，$M_1=A^0=f^{-1}(D_1)=\{r_0,h_0\}=\{r_0,\theta,h_0\,|\,0\le\theta\le\pi\}$，由于$0\le\theta\le\pi$，$M_1$有无穷多个；$M_2=\widetilde{A}^0=f^{-1}(D_2)=\{r_0,\theta_0\}$ $=\{r_0,\theta_0,h\,|\,0\le h\}$，由于$0\le h$，$M_2$也有无穷多个。$M_1$、$M_2$是$M$的不同侧面，$M\subseteq M_1\bigcap M_2$。

3.2 关系映射反演方法与反问题理论之间的关系

二者要解决的问题不同：

关系映射反演方法是已知关系M中的参数，需要找到一个映射f满足$M^*=f(M)$，并从M^*中将x^*确定出来后，再通过反演把$x=f^{-1}(x^*)$确定出来。

反问题理论是不知道模型空间M中的参数，只能通过间接手段获得与模型参数相关的可观测量(数据空间D)后，再通过这些可观测量来反演出$M=f^{-1}(D)$中的参数。

换言之，关系映射反演方法重点寻找f，反问题理论重点寻找f^{-1}。

二者的困难点不同：

关系映射反演方法的难点是寻找映射f，难点在于是否$M^*=f(M)$较M更容易把握和处理。

反问题理论的难点是通过可观测量来寻找反演映射f^{-1}，难点在于是否能排除观测数据中的噪音、解决反演的非线性和非唯一性。

4 各种反演思想在有限集上的统一——反演集合理论

由上述讨论我们已经知道：关系映射反演方法$\supseteq$级数反演$\supseteq$反演变换。下面我们在有限集合上将关系映射反演方法与反问题理论这两种反演思想进行统一。

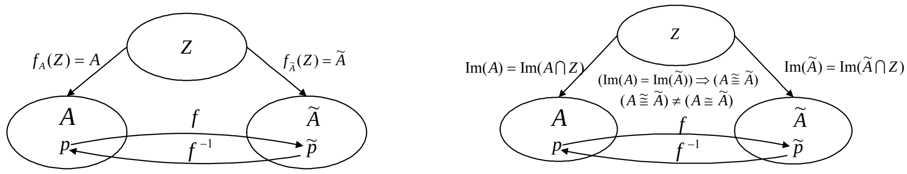
4.1 关系映射反演方法和反问题理论的统一——反演集合

反问题理论中之所以能从D中求取M，是因为D与M “同源”，它们源于同一物理系统，且满足$M=f^{-1}(D)$。

关系映射反演方法中之所以能将M^*中的值反到M中，是因为M^*与M同源，即$M^*=f(M)$。

我们限定在有限集合上讨论，数学中有限集合到自身的一一映射叫做置换。这样，D和M^*就都是M的置换。一个有限集合上的全体置换构成一置换群[20]47[21]117。

每一物体自身都存在一个完整的结构。当物体处于变化状态时，不同的时间、不同的方法测量物体，往往得到的是物体完整结构的不同侧面。设置换群表示物体的完整结构，则置换群中的每一置换表示物体完整结构的不同侧面。



a) b)

图6 各种反演思想的统一数学模型——反演集合理论
Fig.6 Inversion set theory :the general mathematical model for inversion thoughts

设置换群为集合 Z，置换群中的任意两个置换分别为互为反演的集合 A 和 $\tilde{A}$，几何意义见图 6a，则可归纳出如下反演集合定义：

反演集合[8]7 **(Inversion set)**定义

设 $S=(Z,(A,\tilde{A}),(f_A,f_{\tilde{A}}))$ 是一个反演集合，其中 f_A 和 $f_{\tilde{A}}$ 是一对一一映射，且满足 f_A：$Z\to A$，$f_{\tilde{A}}$：$Z\to\tilde{A}$，式中 A 称为正集合，$\tilde{A}$ 称为反集合，A 与 $\tilde{A}$ 互为反演集合，Z 称为反演基。

4.2 反演集合的一些性质

为了叙述简单，我们仅讨论有三个元素的有限集合 $G=\{a_1,a_2,a_3\}$，我们将集合中元素 a_i 与真、假值对应：

$$\mathrm{a_i}=\begin{cases}1 & \mathrm{a_i}=\text{特征值}\\ 0 & \mathrm{a_i}\neq\text{特征值}\end{cases}\qquad(3)$$

则得到集合 $G=\{a_1,a_2,a_3\}$ 在各种情况下的真值表如表 1。

表 1 集合元素真值表

种类	真值表	反演测度	反演同构类	反演集合
T_7	1,1,1	$\mathrm{Im}(T_7\cap T_7)=3$	IIC_3^3	⇒Z(反演基)=完整结构
T_6	1,1,0	**$\mathrm{Im}(T_7\cap T_6)=2$**	IIC_3^2	$\Rightarrow A$ 或 $\tilde{A}$ (完整结构的不同侧面)
T_5	1,0,1	**$\mathrm{Im}(T_7\cap T_5)=2$**	IIC_3^2	
T_4	1,0,0	$\mathrm{Im}(T_7\cap T_4)=1$	IIC_3^1	
T_3	0,1,1	**$\mathrm{Im}(T_7\cap T_3)=2$**	IIC_3^2	
T_2	0,1,0	$\mathrm{Im}(T_7\cap T_2)=1$	IIC_3^1	
T_1	0,0,1	$\mathrm{Im}(T_7\cap T_1)=1$	IIC_3^1	
T_0	0,0,0	$\mathrm{Im}(T_7\cap T_0)=0$	IIC_3^0	

1. 反演基 Z= T_7 。
2. 集合 G 的真值表可分种类多少由集合中元素 a_i 数量决定。由于集合 G 中元素个数是 3，故真值表可分种类为 2^3=8 种，即: T_0，T_1，…，T_7 。
3. T_0，T_1，…，T_7 可归纳为 4 个反演同构类，IIC_3^3=3!/3!=1 个；IIC_3^2=3!/(2!1!)=3 个；IIC_3^1 =3!/(1!2!)=3 个；IIC_3^0=3!/(0!3!)=1 个。式中：$IIC_{m(\text{表示集合中元素}a_i\text{数量})}^{n(\text{表示}T_i\text{的测度值})}$。

每一物体自身都存在一个完整的结构，如果我们将表 1 真值表中的 $T_7=\{1,1,1\}$ 看成是物体的一个完整结构，则 T_0，T_1，…，T_6 都是完整结构 T_7 的不同侧面。T_0，T_1，…，T_7 可归纳为 4 个反演同构类(见表 1)，可以证明[22]，每一反演同构类是一个自同构置换群。

反演集合测度(Inversion set measure) 定义：

设集合 A 中的真值数量为集合 A 的反演集合测度值，简称反演测度，记为 $\mathrm{Im}(A)$ (见表 1)。

在反演集合 $S=(Z,(A,\widetilde{A}),(f_A,f_{\widetilde{A}}))$ 中，集合 A 的反演测度 $\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Im}(Z\cap A)$，集合 $\widetilde{A}$ 的反演测度 $\mathrm{Im}(\widetilde{A})=\mathrm{Im}(Z\cap\widetilde{A})$。

反演集合同构(Inversion set isomorphism) 定义：

所谓 A 与 $\widetilde{A}$ 是反演同构，是指 A 与 $\widetilde{A}$ 的真值表同属于一个自同构置换群，即它们具有相同的结构——反演测度相同，记为 $A\approxeq\widetilde{A}$ (几何意义见图 6b)。

在真值表中，若 $\mathrm{Im}(A)=\mathrm{Im}(\widetilde{A})$，则称 A 与 $\widetilde{A}$ 基于反演基 Z 同构，或简称 A 与 $\widetilde{A}$ 反演同构。

在反演集合中，A 与 $\widetilde{A}$ 反演同构，是指两个集合的真值表属于同一自同构置换群。但这并不能保证 A 与 $\widetilde{A}$ 中元素不是真假值时两个集合同构，即：$(A\approxeq\widetilde{A})\neq(A\simeq\widetilde{A})$。换言之，两个不同构的集合其真值表有可能同属于一个自同构置换群，此时它们是反演同构。

但反之，我们能够证明[22]，若 A 与 $\widetilde{A}$ 同构，则 A 与 $\widetilde{A}$ 一定反演同构。即：同构 $\subseteq$ 反演同构。

反演集合有效数据(Inversion set valid data)

从表 1 中红色数据可看出，集合 G 中元素 a_i 的数量是 3 时，只有反演测度：$\mathrm{Im}(T_3)$、$\mathrm{Im}(T_5)$、$\mathrm{Im}(T_6)$ 分别大于 $\mathrm{Im}(T_7)$ /2，且有：

$$T_7=T_3\cup T_5\cup T_6 \tag{4}$$

这一性质我们可以用来判断采集的数据是否是反演集合的有效数据。

反演集合有效数据定义[22]：

设有一组数据 $T=\{T_0, T_1, \ldots\ldots, T_{m-1}, T_m\}$，若对于任意 $T_i,T_j\in T$，都存在 $T_i\cap T_j\neq\phi$，则 T 是一组反演集合有效数据。

5 反演集合在联合反演中的应用

5.1 反演集合在联合反演中的应用

荷兰华沙科学院院士斯坦尼斯劳· 贞尼兹克说:历史上有过很美的数学，但脱离现实的数学，是没有用的，不久就会死掉。反演集合的价值在于应用。下面举例说明反演集合在联合反演中的简单应用。

在地层观测中，设有测量原理迥然不同的仪器测量的、具有不同含义的 n 组观测数据 $\{D_1,D_2,\ldots,D_n\}$，我们的目的是通过这 n 组观测数据求出地层下的真实数据。步骤如下：

5.1.1 求数据组$\{D_1, D_2, ..., D_n\}$的真值表

由反演集合的性质，我们可分别求出D_i的真值表D_i'，则有$\{D_1', D_2', ..., D_n'\}$。

5.1.2 数据有效性判定

由反演集合有效数据定义可知，在$\{D_1', D_2', ..., D_n'\}$中，若任意$D_i'$、$D_j'$都满足$\mathrm{Im}(D_i' \cap D_j') \neq 0$（$i, j = 1,2,3,...,n$），则$\{D_1, D_2, ..., D_n\}$是有效数据组。

5.1.3 数据冗余性判定

若存在有D_i'、D_j'不满足$\mathrm{Im}(D_i' \cup D_j') > \max(\mathrm{Im}(D_i'), \mathrm{Im}(D_j'))$，则$D_i$、$D_j$是冗余数据(同一置换)，$D_i$、$D_j$应该合并成一个置换。

5.1.4 数据完备性判定

如果测度$\mathrm{Im}(D_1' \cup D_2' \cup ... \cup D_n') < \mathrm{Im}(D')$，则$\{D_1, D_2, ..., D_n\}$是不完备数据组，即仅靠这$n$组有限数据不能求出$D$(即$D = D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_n$不能成立)。

5.1.5 基于反演同构的联合反演方法

如果$\{D_1', D_2', ..., D_n'\}$是有效的、非冗余的和完备的，则有$D' = D_1' \cup D_2' \cup ... \cup D_n'$，对应反演解$M = f^{-1}(D) \;= f^{-1}(D_1 \cap D_2 \cap ... \cap D_n)$。

5.2 应用举例

例1，设有三维模型空间$M = \{r_0, \theta_0, h_0\}$，几何意义如图5c所示。现有观测数据组$D_1 = \{r', h'\}$，$D_2 = \{r_1', \theta_1'\}$，$D_3 = \{r_2', \theta_2'\}$，现用基于反演集合的联合反演方法求观测数据组$\{D_1, D_2, D_3\}$的反演解$M$。

5.2.1 求数据组$\{D_1, D_2, D_3\}$的真值表

已知M为三维，$M' = \{1,1,1\}$，故$D_1 = \{r', h'\} = \{r', \theta, h' \mid 0 \le \theta \le \pi\}$，$D_2 = \{r_1', \theta_1'\} = \{r_1', \theta_1', h \mid 0 \le h\}$，$D_3 = \{r_2', \theta_2'\} \;= \{r_2', \theta_2', h \mid 0 \le h\}$。根据反演集合性质有：$D_1' = \{1,0,1\}$，$D_2' = \{1,1,0\}$，$D_3' = \{1,1,0\}$。

5.2.2 数据有效性判定

不难验证$\mathrm{Im}(D_i' \cap D_j') \neq 0$，($i, j = 1,2,3$)；故$\{D_1, D_2, D_3\}$是有效数据。

5.2.3 数据冗余性判定

$\mathrm{Im}(D_2' \cup D_3') = \mathrm{Im}(\{1,1,0\} \cup \{1,1,0\}) = \mathrm{Im}\{1,1,0\} = 2$，$\max(\mathrm{Im}(D_2'), \mathrm{Im}(D_3')) = \max(\mathrm{Im}\{1,1,0\}, \mathrm{Im}\{1,1,0\}) = 2$，不满足$\mathrm{Im}(D_i' \cup D_j') > \max(\mathrm{Im}(D_i'), \mathrm{Im}(D_j'))$，故$D_2'$和$D_3'$是冗余数据，应该去掉一个(或合并为一个)。我们去掉D_3'。

5.2.4 数据完备性判定

$\mathrm{Im}(D_1' \cup D_2') = \mathrm{Im}(\{1,0,1\} \cup \{1,1,0\}) = \mathrm{Im}\{1,1,1\} = 3$，又$\mathrm{Im}(M') = \mathrm{Im}\{1,1,1\} = 3$，故

D_1'， D_2' 两个可组成完备数组。

5.2.5 基于反演同构的联合反演

若单独反演则有：

$M_1 = f^{-1}(D_1) = f^{-1}\{r',h'\} = \{f^{-1}(r'), f^{-1}(h')\} = \{r_0, h_0\} = \{r_0, \theta, h_0 \mid 0 \le \theta \le \pi\}$，其中 $\{0 \le \theta \le \pi\}$ 有无穷多个，是非唯一解；

$M_2 = f^{-1}(D_2) = f^{-1}\{r_1', \theta_1'\} = \{f^{-1}(r_1'), f^{-1}(\theta_1')\} = \{r_0, \theta_0\} = \{r_0, \theta_0, h \mid 0 \le h\}$， 其中 $\{0 \le h\}$ 有无穷多个，也是非唯一解。

若基于反演同构的联合反演，则有：

$D' = D_1' \cup D_2' = \{1,0,1\} \cup \{1,1,0\} = \{1,1,1\}$，对应：

$$M = f^{-1}(D) = f^{-1}(D_1 \cap D_2) = f^{-1}(\{r', \theta, h' \mid 0 \le \theta \le \pi\} \cap \{r_1', \theta_1', h \mid 0 \le h\})$$
$$= f^{-1}\{r' \cap r_1', \theta \cap \theta_1', h' \cap h \mid 0 \le \theta \le \pi, 0 \le h\} = f^{-1}\{r' \cap r_1', \theta_1', h'\}$$
$= \{f^{-1}(r') \cap f^{-1}(r_1'), f^{-1}(\theta_1'), f^{-1}(h')\} = \{r_0 \cap r_0, \theta_0, h_0\} = \{r_0, \theta_0, h_0\}$ 是唯一解。

6 结论

本文中，我们论述了集合上的反演与对称之间的关系，指出反演源于对称破缺，分别讨论了数学中的反演思想的五个重要的发展节点：反演变换，级数反演 ，反问题理论，关系映射反演方法和反演集合理论它们的特点、差异、以及它们相互之间的关系，指出关系映射反演方法 $\supseteq$ 级数反演 $\supseteq$ 反演变换，并在有限集合上关系映射反演方法与反问题理论可统一为反演集合。举例说明了反演集合方法在联合反演中的应用。

[参考文献] (References)

[1] 李政道. 对称与不对称[M]. 清华大学出版社, 暨南大学出版社, 2000.
[2] 谷超豪主编. 数学词典[M]. 上海:上海辞书出版社, 1992.
[3] 李建军. 组合学史若干问题研究[D]. 西安:西北大学, 2003.
[4] Backus,G.E.,and Gilbert,J.F.,1967,Numerical application of a formulism for geophysical problem[J], Geophys. J.R. astr. Soc., 13, 247-276.
[5] Backus, G.E., and Gilbert, J.F., 1968, The resolving power of gross earth data[J]. Geophys.J.R. astr.Soc.,16, 169-205.
[6] Backus, G.E., and Gilbert, J.F., 1968, The resolving power of gross earth data[J]. Geophys.J.R. astr. Soc., 16,169-205.
[7] 徐利治. 数学方法论选讲[M]. 武汉:华中工学院出版社, 1983.
[8] 刘建忠. 反演集合理论及其应用[M]. 昆明:云南科技出版社, 1999.
[9] 中国大百科全书:哲学卷[M].北京:中国大百科全书出版社,1987.
[10] 辞海[M].上海:上海辞书出版社,2000.
[11] 陈辉.群的结构与对称性[M].杭州:浙江大学出版社,2008.
[12] 王骁勇,刘树勇.对称性理论的发展[J].首都师范大学学报(自然科学版),2000,(04):40-47.
[13] 顾沛.对称与群[M].北京:北京大学出版社,2008.
[14] 唐有祺.对称性原理[M].北京:科学出版社,1977.
[15] 胡作玄.20 世纪数学思想[M].济南:山东教育出版社,1999.
[16] 胡作玄.数学是什么[M].北京:北京大学出版社,2008.
[17] 华罗庚. 数论导引[M]. 北京:科学出版社, 1979.
[18] 中国大百科全书:数学卷[M]. 北京:中国大百科全书出版社, 1988.
[19] Vozoff, K, Jupp, D.L.B.Effective search for a buried layer: An approach toexperrimental design in geophysics[J]. Expl. Geophys., 1977, 8(1):6-15.
[20] 张禾瑞. 近世代数基础[M]. 北京:人民教育出版社, 1978.
[21] [美]I.格拉斯曼, W.迈格努斯著, 胡复, 唐松译. 群和它的图象表示[M]. 北京:科学普及出版社, 1981.
[22] 刘建忠. 哲学观点下的反演同构[J]. 昆明学院学报, 2011, 33(4): 39-42.