高等数学

第一章　函数与极限

第一节　函数

○函数基础（高中函数部分相关知识）（★★★）

○邻域（去心邻域）（★）

$$U(a,\delta)=\{x\mid |x-a|<\delta\}$$

$$\mathring{U}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

第二节　数列的极限

○数列极限的证明（★）

【题型示例】已知数列$\{x_n\}$，证明$\lim\limits_{x\to\infty}\{x_n\}=a$

【证明示例】$\varepsilon-N$语言

1．由$|x_n-a|<\varepsilon$化简得$n>g(\varepsilon)$，

$\therefore N=[g(\varepsilon)]$

2．即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists N=[g(\varepsilon)]$，当$n>N$时，始终有不等式$|x_n-a|<\varepsilon$成立，

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}\{x_n\}=a$

第三节　函数的极限

○$x\to x_0$时函数极限的证明（★）

【题型示例】已知函数$f(x)$，证明$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

【证明示例】$\varepsilon-\delta$语言

1．由$|f(x)-A|<\varepsilon$化简得$0<|x-x_0|<g(\varepsilon)$，

$\therefore \delta=g(\varepsilon)$

2．即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=g(\varepsilon)$，当$0<|x-x_0|<\delta$时，始终有不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，

$\therefore \lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$

○$x\to\infty$时函数极限的证明（★）

【题型示例】已知函数$f(x)$，证明$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

【证明示例】$\varepsilon-X$语言

1．由$|f(x)-A|<\varepsilon$化简得$|x|>g(\varepsilon)$，

$\therefore X=g(\varepsilon)$

2．即对$\forall\varepsilon>0$，$\exists X=g(\varepsilon)$，当$|x|>X$时，始终有不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$成立，

$\therefore \lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$

第四节　无穷小与无穷大

○无穷小与无穷大的本质（★）

函数$f(x)$无穷小$\Leftrightarrow \lim f(x)=0$

函数$f(x)$无穷大$\Leftrightarrow \lim f(x)=\infty$

○无穷小与无穷大的相关定理与推论（★★）

（定理三）假设$f(x)$为有界函数，$g(x)$为无穷小，则$\lim[f(x)\cdot g(x)]=0$

（定理四）在自变量的某个变化过程中，若$f(x)$为无穷大，则$f^{-1}(x)$为无穷小；反之，若$f(x)$为无穷小，且$f(x)\neq 0$，则$f^{-1}(x)$为无穷大

【题型示例】计算：$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]$（或$x\to\infty$）

1．$\because |f(x)|\leqslant M$ $\therefore$函数$|f(x)|$在$x=x_0$的任一去心邻域$\mathring{U}(x_0,\delta)$内是有界的；

（$\because |f(x)|\leqslant M$，$\therefore$函数$|f(x)|$在$x\in D$上有界；）

2．$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$即函数$g(x)$是$x\to x_0$时的无穷小；

（$\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=0$即函数$g(x)$是$x\to\infty$时的无穷小；）

3．由定理可知$\lim\limits_{x\to x_0}[f(x)\cdot g(x)]=0$

（$\lim\limits_{x\to\infty}[f(x)\cdot g(x)]=0$）

第五节　极限运算法则

○极限的四则运算法则（★★）

（定理一）加减法则

（定理二）乘除法则

关于多项式$p(x)$、$q(x)$商式的极限运算

设：$\begin{cases}p(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m\\ q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n\end{cases}$

则有$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{p(x)}{q(x)}=\begin{cases}\infty & n<m\\ \dfrac{a_0}{b_0} & n=m\\ 0 & n>m\end{cases}$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\dfrac{f(x_0)}{g(x_0)} & g(x_0)\neq 0\\ \infty & g(x_0)=0,\ f(x_0)\neq 0\\ \dfrac{0}{0} & g(x_0)=f(x_0)=0\end{cases}$$

（特别地，当$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}$（不定型）时，通常分子分母约去公因式即约去可去间断点便可求解出极限值，也可以用罗比达法则求解）

【题型示例】求值$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

【求解示例】解：因为 $x\to 3$，从而可得 $x\neq 3$，所以原式 $=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x+3)(x-3)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$

其中 $x=3$ 为函数 $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ 的可去间断点

倘若运用罗比达法则求解（详见第三章第二节）：

解：$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)'}{(x^2-9)'}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{2x}=\dfrac{1}{6}$

〇连续函数穿越定理（复合函数的极限求解）（★★）

（定理五）若函数 $f(x)$ 是定义域上的连续函数，那么，$\lim\limits_{x\to x_0}f\left[\varphi(x)\right]=f\left[\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)\right]$

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}$

【求解示例】$\lim\limits_{x\to 3}\sqrt{\dfrac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}}=\sqrt{\dfrac{1}{6}}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

第六节　极限存在准则及两个重要极限

〇夹迫准则（P53）（★★★）

第一个重要极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$\because\ \forall x\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\sin x<x<\tan x\ \therefore\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{\sin x}{x}}=\frac{\lim\limits_{x\to 0}1}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=1$$

（特别地，$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\sin(x-x_0)}{x-x_0}=1$）

〇单调有界收敛准则（P57）（★★★）

第二个重要极限：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$

（一般地，$\lim\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left[\lim f(x)\right]^{\lim g(x)}$，其中 $\lim f(x)>0$）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}$

【求解示例】

解：$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+3}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x+1+2}{2x+1}\right)^{x+1}=\lim\limits_{2x+1\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{2x+1}\right)^{x+1}$

$$=\lim_{2x+1\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}\cdot\frac{2}{2x+1}\cdot(x+1)}=\lim_{2x+1\to\infty}\left[\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\frac{2}{2x+1}\cdot(x+1)}$$

$$=\left[\lim_{2x+1\to\infty}\left(1+\frac{2}{2x+1}\right)^{\frac{2x+1}{2}}\right]^{\lim\limits_{2x+1\to\infty}\left[\frac{2}{2x+1}\cdot(x+1)\right]}=e^{\lim\limits_{2x+1\to\infty}\left[\frac{2}{2x+1}(x+1)\right]}$$

$$=e^{\lim\limits_{2x+1\to\infty}\left(\frac{2x+2}{2x+1}\right)}=e^1=e$$

第七节　无穷小量的阶（无穷小的比较）

〇等价无穷小（★★）

1. $U\sim\sin U\sim\tan U\sim\arcsin U\sim\arctan U\sim\ln(1+U)\sim\left(e^U-1\right)$

2. $\dfrac{1}{2}U^2\sim 1-\cos U$

（乘除可替，加减不行）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+x\ln(1+x)}{x^2+3x}$

【求解示例】

解：因为$x\to 0$,即$x\neq 0$,所以原式$=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)+x\ln(1+x)}{x^2+3x}$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\cdot\ln(1+x)}{x(x+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\cdot x}{x(x+3)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+1}{x+3}=\frac{1}{3}$$

第八节　函数的连续性

〇函数连续的定义（★）

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$$

〇间断点的分类（P67）（★）

第一类间断点（左右极限存在）$\begin{cases}\text{跳越间断点（不等）}\\\text{可去间断点（相等）}\end{cases}$

第二类间断点$\begin{cases}\cdots\cdots\\\text{无穷间断点（极限为}\infty\text{）}\end{cases}$

（特别地，可去间断点能在分式中约去相应公因式）

【题型示例】设函数 $f(x)=\begin{cases}e^{2x}, & x<0\\a+x, & x\geq 0\end{cases}$ 应该怎样选择数 a，使得 $f(x)$ 成为在 R 上的连续函数？

【求解示例】

1. $\because\begin{cases}f(0^-)=e^{2\cdot 0^-}=e^1=e\\f(0^+)=a+0^+=a\\f(0)=a\end{cases}$

2. 由连续函数定义 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=f(0)=e$

$\therefore a=e$

第九节　闭区间上连续函数的性质

〇零点定理（★）

【题型示例】证明：方程 $f(x)=g(x)+C$ 至少有一个根介于 a 与 b 之间

【证明示例】

1．（建立辅助函数）函数 $\varphi(x)=f(x)-g(x)-C$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；
2．$\because \varphi(a)\cdot\varphi(b)<0$（端点异号）
3．$\therefore$ 由零点定理，在开区间 (a,b) 内至少有一点 ξ，使得 $\varphi(\xi)=0$，即 $f(\xi)-g(\xi)-C=0$（$0<\xi<1$）
4．这等式说明方程 $f(x)=g(x)+C$ 在开区间 (a,b) 内至少有一个根 ξ

第二章　导数与微分

第一节　导数概念

〇高等数学中导数的定义及几何意义（P83）（★★）

【题型示例】已知函数 $f(x)=\begin{cases} e^x+1, & x\le 0 \\ ax+b, & x>0 \end{cases}$ 在 $x=0$ 处可导，求 a，b

【求解示例】

1．$\because \begin{cases} f'_-(0)=e^0=1 \\ f'_+(0)=a \end{cases}$，$\begin{cases} f(0^-)=e^{0^-}+1=e^0+1=2 \\ f(0^+)=b \\ f(0)=e^0+1=2 \end{cases}$
2．由函数可导定义 $\begin{cases} f'_-(0)=f'_+(0)=a=1 \\ f(0^-)=f(0^+)=f(0)=b=2 \end{cases}$

$\therefore a=1, b=2$

【题型示例】求 $y=f(x)$ 在 $x=a$ 处的切线与法线方程（或：过 $y=f(x)$ 图像上点 $[a,f(a)]$ 处的切线与法线方程）

【求解示例】

1．$y'=f'(x)$，$y'|_{x=a}=f'(a)$
2．切线方程：$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

法线方程：$y-f(a)=-\dfrac{1}{f'(a)}(x-a)$

第二节　函数的和（差）、积与商的求导法则

〇函数和（差）、积与商的求导法则（★★★）

1．线性组合（定理一）：$(\alpha u\pm\beta v)'=\alpha u'+\beta v'$

特别地，当 $\alpha=\beta=1$ 时，有 $(u\pm v)'=u'\pm v'$

2．函数积的求导法则（定理二）：$(uv)'=u'v+uv'$

3．函数商的求导法则（定理三）：$\left(\dfrac{u}{v}\right)'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$

第三节　反函数和复合函数的求导法则

〇反函数的求导法则（★）

【题型示例】求函数 $f^{-1}(x)$ 的导数

【求解示例】由题可得 $f(x)$ 为直接函数，其在定于域 D 上单调、可导，且 $f'(x)\ne 0$；$\therefore \left[f^{-1}(x)\right]'=\dfrac{1}{f'(x)}$

〇复合函数的求导法则（★★★）

【题型示例】设 $y=\ln\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)$，求 y'

【求解示例】

解：$y'=\dfrac{1}{\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\cdot\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)'$

$$=\frac{1}{\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\cdot\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\left(\sqrt{x^2-1}\right)'}{\sqrt{1-\left(x^2-1\right)}}+\frac{\left(x^2+a^2\right)'}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\cdot\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}}}{\sqrt{2-x^2}}+\frac{2x}{2\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

$$=\frac{1}{\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}+\sqrt{x^2+a^2}\right)}\cdot\left(e^{\arcsin\sqrt{x^2-1}}\cdot\frac{x}{\sqrt{x^2-1}\cdot\sqrt{2-x^2}}+\frac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}\right)$$

第四节　高阶导数

〇 $f^{(n)}(x)=\left[f^{(n-1)}(x)\right]'$（或 $\dfrac{d^ny}{dx^n}=\left[\dfrac{d^{(n-1)}y}{dx^{(n-1)}}\right]'$）（★）

【题型示例】求函数 $y=\ln(1+x)$ 的 n 阶导数

【求解示例】$y'=\dfrac{1}{1+x}=(1+x)^{-1}$，

$y''=\left[(1+x)^{-1}\right]'=(-1)\cdot(1+x)^{-2}$，

$y'''=\left[(-1)\cdot(1+x)^{-2}\right]'=(-1)\cdot(-2)\cdot(1+x)^{-3}$

……

$y^{(n)}=(-1)^{n-1}\cdot(n-1)!\cdot(1+x)^{-n}$

第五节　隐函数及参数方程型函数的导数

〇隐函数的求导（等式两边对 x 求导）（★★★）

【题型示例】试求：方程 $y=x+e^y$ 所给定的曲线 C：$y=y(x)$ 在点 $(1-e,1)$ 的切线方程与法线方程

【求解示例】由 $y=x+e^y$ 两边对 x 求导

即 $y'=x'+\left(e^y\right)'$ 化简得 $y'=1+e^y\cdot y'$

$\therefore y'=\dfrac{1}{1-e^1}=\dfrac{1}{1-e}$

$\therefore$ 切线方程：$y-1=\dfrac{1}{1-e}(x-1+e)$

法线方程：$y-1=-(1-e)(x-1+e)$

〇参数方程型函数的求导

【题型示例】设参数方程$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\gamma(t)\end{cases}$，求$\dfrac{d^2y}{dx^2}$

【求解示例】1. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\gamma'(t)}{\varphi'(t)}$ 2. $\dfrac{d^2y}{dx^2}=\dfrac{\left(\dfrac{dy}{dx}\right)'}{\varphi'(t)}$

第六节　变化率问题举例及相关变化率（不作要求）

第七节　函数的微分

〇基本初等函数微分公式与微分运算法则（★★★）

$dy=f'(x)\cdot dx$

第三章　中值定理与导数的应用

第一节　中值定理

〇引理（费马引理）（★）

〇罗尔定理（★★★）

【题型示例】现假设函数$f(x)$在$[0,\pi]$上连续，在$(0,\pi)$上可导，试证明：$\exists\xi\in(0,\pi)$，使得$f(\xi)\cos\xi+f'(\xi)\sin\xi=0$成立

【证明示例】

1.（建立辅助函数）令$\varphi(x)=f(x)\sin x$

显然函数$\varphi(x)$在闭区间$[0,\pi]$上连续，在开区间$(0,\pi)$上可导；

2．又∵$\varphi(0)=f(0)\sin 0=0$

$\varphi(\pi)=f(\pi)\sin\pi=0$

即$\varphi(0)=\varphi(\pi)=0$

3．∴由罗尔定理知

$\exists\xi\in(0,\pi)$，使得$f(\xi)\cos\xi+f'(\xi)\sin\xi=0$成立

〇拉格朗日中值定理（★）

【题型示例】证明不等式：当$x>1$时，$e^x>e\cdot x$

【证明示例】

1.（建立辅助函数）令函数$f(x)=e^x$，则对$\forall x>1$，显然函数$f(x)$在闭区间$[1,x]$上连续，在开区间$(1,x)$上可导，并且$f'(x)=e^x$；

2．由拉格朗日中值定理可得，$\exists\xi\in[1,x]$使得等式$e^x-e^1=(x-1)e^{\xi}$成立，

又∵$e^{\xi}>e^1$，∴$e^x-e^1>(x-1)e^1=e\cdot x-e$，

化简得$e^x>e\cdot x$，即证得：当$x>1$时，$e^x>e\cdot x$

【题型示例】证明不等式：当$x>0$时，$\ln(1+x)<x$

【证明示例】

1.（建立辅助函数）令函数$f(x)=\ln(1+x)$，则对$\forall x>0$，函数$f(x)$在闭区间$[0,x]$上连续，在开区间$(0,\pi)$上可导，并且$f'(x)=\dfrac{1}{1+x}$；

2．由拉格朗日中值定理可得，$\exists\xi\in[0,x]$使得等式$\ln(1+x)-\ln(1+0)=\dfrac{1}{1+\xi}(x-0)$成立，

化简得$\ln(1+x)=\dfrac{1}{1+\xi}x$，又∵$\xi\in[0,x]$，

∴$f'(\xi)=\dfrac{1}{1+\xi}<1$，∴$\ln(1+x)<1\cdot x=x$，

即证得：当$x>1$时，$e^x>e\cdot x$

第二节　罗比达法则

〇运用罗比达法则进行极限运算的基本步骤（★★）

1．☆等价无穷小的替换（以简化运算）

2．判断极限不定型的所属类型及是否满足运用罗比达法则的三个前提条件

A．属于两大基本不定型（$\dfrac{0}{0},\dfrac{\infty}{\infty}$）且满足条件，

则进行运算：$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$

（再进行1、2步骤，反复直到结果得出）

B．☆不属于两大基本不定型（转化为基本不定型）

⑴$0\cdot\infty$型（转乘为除，构造分式）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha}\cdot\ln x$

【求解示例】

$$\text{解:}\lim_{x\to0}x^{\alpha}\cdot\ln x=\lim_{x\to0}\frac{\ln x}{\frac{1}{x^{\alpha}}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'}{=}}\lim_{x\to0}\frac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x^{\alpha}}\right)'}=\lim_{x\to0}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{\alpha\cdot x^{\alpha-1}}{x^{2\alpha}}}$$

$$=-\frac{1}{a}\lim_{x\to0}x^{\alpha}=0$$

（一般地，$\lim\limits_{x\to0}x^{\alpha}\cdot(\ln x)^{\beta}=0$，其中$\alpha,\beta\in R$）

⑵$\infty-\infty$型（通分构造分式，观察分母）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$

【求解示例】

$$\text{解:}\lim_{x\to0}\left(\frac{1}{\sin x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{x\cdot\sin x}\right)=\lim_{x\to0}\left(\frac{x-\sin x}{x^2}\right)$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim_{x\to0}\frac{(x-\sin x)'}{(x^2)'}=\lim_{x\to0}\frac{1-\cos x}{2x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim_{x\to0}\frac{(1-\cos x)'}{(2x)'}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{2}=0$$

⑶$0^0$型（对数求极限法）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to0}x^x$

【求解示例】

解：设$y=x^x$,两边取对数得:$\ln y=\ln x^x=x\ln x=\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}$

对对数取$x\to0$时的极限:$\lim\limits_{x\to0}(\ln y)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\frac{1}{x}}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{x}\right)'}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}=-\lim\limits_{x\to0}x=0$，从而有$\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to0}\ln y}=e^0=1$

(4)1^∞型（对数求极限法）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to0}(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$

【求解示例】

解：令$y=(\cos x+\sin x)^{\frac{1}{x}}$,两边取对数得$\ln y=\dfrac{\ln(\cos x+\sin x)}{x}$,

对$\ln y$求$x\to0$时的极限,$\lim\limits_{x\to0}\ln y=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln(\cos x+\sin x)}{x}$

$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{[\ln(\cos x+\sin x)]'}{(x)'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x-\sin x}{\cos x+\sin x}=\dfrac{1-0}{1+0}=1$,从而可得

$\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to0}\ln y}=e^1=e$

(5)∞^0型（对数求极限法）

【题型示例】求值：$\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$

【求解示例】

解：令$y=\left(\dfrac{1}{x}\right)^{\tan x}$,两边取对数得$\ln y=\tan x\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)$,

对$\ln y$求$x\to0$时的极限,$\lim\limits_{x\to0}\ln y=\lim\limits_{x\to0}\left[\tan x\cdot\ln\left(\dfrac{1}{x}\right)\right]$

$=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln x}{\left(\frac{1}{\tan x}\right)}\overset{\frac{\infty}{\infty}}{\underset{L'}{=}}-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\ln x)'}{\left(\frac{1}{\tan x}\right)'}=-\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{\sec^2 x}{\tan^2 x}}$

$=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 x}{x}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim\limits_{x\to0}\dfrac{(\sin^2 x)'}{x'}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x\cdot\cos x}{1}=0$,

从而可得$\lim\limits_{x\to0}y=\lim\limits_{x\to0}e^{\ln y}=e^{\lim\limits_{x\to0}\ln y}=e^0=1$

〇运用罗比达法则进行极限运算的基本思路（★★）

$$\infty-\infty\xrightarrow{(1)}\begin{matrix}\dfrac{0}{0}\\[2ex]\dfrac{\infty}{\infty}\end{matrix}\xleftarrow{(2)}0\cdot\infty\xleftarrow{(3)}\begin{cases}0^0\\1^\infty\\\infty^0\end{cases}$$

(1)通分获得分式（通常伴有等价无穷小的替换）
(2)取倒数获得分式（将乘积形式转化为分式形式）
(3)取对数获得乘积式（通过对数运算将指数提前）

第三节 泰勒中值定理（不作要求）

第四节 函数的单调性和曲线的凹凸性

〇连续函数单调性（单调区间）（★★★）

【题型示例】试确定函数$f(x)=2x^3-9x^2+12x-3$的单调区间

【求解示例】

1. ∵函数$f(x)$在其定义域R上连续，且可导

∴$f'(x)=6x^2-18x+12$

2. 令$f'(x)=6(x-1)(x-2)=0$，解得：$x_1=1,x_2=2$

3. （三行表）

x	$(-\infty,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	□	极大值	□	极小值	□

4. ∴函数$f(x)$的单调递增区间为$(-\infty,1],[2,+\infty)$；

单调递减区间为$(1,2)$

【题型示例】证明：当$x>0$时，$e^x>x+1$

【证明示例】

1. （构建辅助函数）设$\varphi(x)=e^x-x-1$，（$x>0$）

2. $\varphi'(x)=e^x-1>0$，（$x>0$）

∴$\varphi(x)>\varphi(0)=0$

3. 既证：当$x>0$时，$e^x>x+1$

【题型示例】证明：当$x>0$时，$\ln(1+x)<x$

【证明示例】

1. （构建辅助函数）设$\varphi(x)=\ln(1+x)-x$，（$x>0$）

2. $\varphi'(x)=\dfrac{1}{1+x}-1<0$，（$x>0$）

∴$\varphi(x)<\varphi(0)=0$

3. 既证：当$x>0$时，$\ln(1+x)<x$

〇连续函数凹凸性（★★★）

【题型示例】试讨论函数$y=1+3x^2-x^3$的单调性、极值、凹凸性及拐点

【证明示例】

1. $\begin{cases} y' = -3x^2 + 6x = -3x(x-2) \\ y'' = -6x + 6 = -6(x-1) \end{cases}$

2. 令 $\begin{cases} y' = -3x(x-2) = 0 \\ y'' = -6(x-1) = 0 \end{cases}$ 解得：$\begin{cases} x_1 = 0, x_2 = 2 \\ x = 1 \end{cases}$

3.（四行表）

x	$(-\infty,0)$	0	$(0,1)$	1	$(1,2)$	2	$(2,+\infty)$
y'	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$
y''	$+$		$+$		$-$		$-$
y		1		$(1,3)$		5	

4. ⑴函数 $y = 1 + 3x^2 - x^3$ 单调递增区间为 $(0,1),(1,2)$

单调递增区间为 $(-\infty,0),(2,+\infty)$；

⑵函数 $y = 1 + 3x^2 - x^3$ 的极小值在 $x = 0$ 时取到，

为 $f(0) = 1$，

极大值在 $x = 2$ 时取到，为 $f(2) = 5$；

⑶函数 $y = 1 + 3x^2 - x^3$ 在区间 $(-\infty,0),(0,1)$ 上凹，

在区间 $(1,2),(2,+\infty)$ 上凸；

⑷函数 $y = 1 + 3x^2 - x^3$ 的拐点坐标为 $(1,3)$

第五节　函数的极值和最大、最小值

○函数的极值与最值的关系（★★★）

⑴设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果 $\exists x_M$ 的某个邻域 $U(x_M) \subset D$，使得对 $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_M)$，都适合不等式 $f(x) < f(x_M)$，

我们则称函数 $f(x)$ 在点 $[x_M, f(x_M)]$ 处有极大值 $f(x_M)$；

令 $x_M \in \{x_{M1}, x_{M2}, x_{M3}, \dots, x_{Mn}\}$

则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值 M 满足：

$M = \max\{f(a), x_{M1}, x_{M2}, x_{M3}, \dots, x_{Mn}, f(b)\}$；

⑵设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，如果 $\exists x_m$ 的某个邻域 $U(x_m) \subset D$，使得对 $\forall x \in \overset{\circ}{U}(x_m)$，都适合不等式 $f(x) > f(x_m)$，

我们则称函数 $f(x)$ 在点 $[x_m, f(x_m)]$ 处有极小值 $f(x_m)$；

令 $x_m \in \{x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, \dots, x_{mn}\}$

则函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上的最小值 m 满足：

$m = \min\{f(a), x_{m1}, x_{m2}, x_{m3}, \dots, x_{mn}, f(b)\}$；

【题型示例】求函数 $f(x) = 3x - x^3$ 在 $[-1,3]$ 上的最值

【求解示例】

1. $\because$ 函数 $f(x)$ 在其定义域 $[-1,3]$ 上连续，且可导

$\therefore f'(x) = -3x^2 + 3$

2. 令 $f'(x) = -3(x-1)(x+1) = 0$，

解得：$x_1 = -1, x_2 = 1$

3.（三行表）

x	-1	$(-1,1)$	1	$(1,3]$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	极小值	□	极大值	□

4. 又 $\because f(-1) = -2, f(1) = 2, f(3) = -18$

$\therefore f(x)_{\max} = f(1) = 2, f(x)_{\min} = f(3) = -18$

第六节　函数图形的描绘（不作要求）

第七节　曲率（不作要求）

第八节　方程的近似解（不作要求）

第四章　不定积分

第一节　不定积分的概念与性质

○原函数与不定积分的概念（★★）

⑴原函数的概念：

假设在定义区间 I 上，可导函数 $F(x)$ 的导函数为 $F'(x)$，即当自变量 $x \in I$ 时，有 $F'(x) = f(x)$ 或 $dF(x) = f(x) \cdot dx$ 成立，则称 $F(x)$ 为 $f(x)$ 的一个原函数

⑵原函数存在定理：（★★）

如果函数 $f(x)$ 在定义区间 I 上连续，则在 I 上必存在可导函数 $F(x)$ 使得 $F'(x) = f(x)$，也就是说：连续函数一定存在原函数（可导必连续）

⑶不定积分的概念（★★）

在定义区间 I 上，函数 $f(x)$ 的带有任意常数项 C 的原函数称为 $f(x)$ 在定义区间 I 上的不定积分，

即表示为：$\int f(x)dx = F(x) + C$

（$\int$ 称为积分号，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为积分表达式，x 则称为积分变量）

○基本积分表（★★★）

○不定积分的线性性质（分项积分公式）（★★★）

$\int [k_1 f(x) + k_2 g(x)] dx = k_1 \int f(x)dx + k_2 \int g(x)dx$

第二节　换元积分法

○第一类换元法（凑微分）（★★★）

（$dy = f'(x) \cdot dx$ 的逆向应用）

$\int f[\varphi(x)] \cdot \varphi'(x) dx = \int f[\varphi(x)] \cdot d[\varphi(x)]$

【题型示例】求 $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx$

【求解示例】

解：$\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}dx = \frac{1}{a}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}d\left(\frac{x}{a}\right) = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$

【题型示例】求 $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$

【求解示例】

解：$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}d(2x+1) = \int \frac{1}{2\sqrt{2x+1}}d(2x+1)$

$=\sqrt{2x+1}+C$

〇第二类换元法（去根式）（★★）

（$dy=f'(x)\cdot dx$ 的正向应用）

⑴对于一次根式（$a\neq 0, b\in R$）：

$\sqrt{ax+b}$：令 $t=\sqrt{ax+b}$，于是 $x=\frac{t^2-b}{a}$，

则原式可化为 t

⑵对于根号下平方和的形式（$a>0$）：

$\sqrt{a^2+x^2}$：令 $x=a\tan t$（$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$），

于是 $t=\arctan\frac{x}{a}$，则原式可化为 $a\sec t$；

⑶对于根号下平方差的形式（$a>0$）：

a．$\sqrt{a^2-x^2}$：令 $x=a\sin t$（$-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}$），

于是 $t=\arcsin\frac{x}{a}$，则原式可化为 $a\cos t$；

b．$\sqrt{x^2-a^2}$：令 $x=a\sec t$（$0<t<\frac{\pi}{2}$），

于是 $t=\arccos\frac{a}{x}$，则原式可化为 $a\tan t$；

【题型示例】求 $\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx$（一次根式）

【求解示例】

解：$\int \frac{1}{\sqrt{2x+1}}dx \xrightarrow[\substack{x=\frac{1}{2}t^2-\frac{1}{2}\\ dx=tdt}]{t=\sqrt{2x+1}} \int \frac{1}{t}\cdot tdt = \int dt = t+C = \sqrt{2x+1}+C$

【题型示例】求 $\int \sqrt{a^2-x^2}dx$（三角换元）

【求解示例】

解：$\int \sqrt{a^2-x^2}dx \xrightarrow[\substack{t=\arcsin\frac{x}{a}\\ dx=a\cos t}]{x=a\sin t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)} a^2\int \cos^2 tdt = \frac{a^2}{2}\int (1+\cos 2t)dt$

$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)+C = \frac{a^2}{2}(t+\sin t\cos t)+C$

第三节　分部积分法

〇分部积分法（★★）

⑴设函数 $u=f(x)$，$v=g(x)$ 具有连续导数，则其分部积分公式可表示为：$\int udv = uv-\int vdu$

⑵分部积分法函数排序次序：“反、对、幂、三、指”

〇运用分部积分法计算不定积分的基本步骤：

⑴遵照分部积分法函数排序次序对被积函数排序；

⑵就近凑微分：（$v'\cdot dx = dv$）

⑶使用分部积分公式：$\int udv = uv-\int vdu$

⑷展开尾项 $\int vdu = \int v\cdot u'dx$，判断

a．若 $\int v\cdot u'dx$ 是容易求解的不定积分，则直接计算出答案（容易表示使用基本积分表、换元法与有理函数积分可以轻易求解出结果）；

b．若 $\int v\cdot u'dx$ 依旧是相当复杂，无法通过 a 中方法求解的不定积分，则重复⑵、⑶，直至出现容易求解的不定积分；若重复过程中出现循环，则联立方程求解，但是最后要注意添上常数 C

【题型示例】求 $\int e^x\cdot x^2dx$

【求解示例】

解：$\int e^x\cdot x^2dx = \int x^2e^xdx = \int x^2de^x = x^2e^x-\int e^xd\left(x^2\right)$

$=x^2e^x-2\int x\cdot e^xdx = x^2e^x-2\int x\cdot d\left(e^x\right)$

$=x^2e^x-2xe^x+2\int e^xdx = x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$

【题型示例】求 $\int e^x\cdot \sin xdx$

【求解示例】

解：$\int e^x\cdot\sin xdx = -\int e^xd(\cos x) = -e^x\cos x+\int \cos xd\left(e^x\right)$

$=-e^x\cos x+\int e^x\cos xdx = -e^x\cos x+\int e^xd(\sin x)$

$=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int \sin xd\left(e^x\right)$

$=-e^x\cos x+e^x\sin x-\int e^x\sin xdx$

即：$\int e^x\cdot\sin xdx = -e^x\cos x+e^x\sin x-\int \sin xd\left(e^x\right)$

$\therefore \int e^x\cdot\sin xdx = \frac{1}{2}e^x(\sin x-\cos x)+C$

第四节　有理函数的不定积分

〇有理函数（★）

设：$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{p(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m}{q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n}$

对于有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，当 $P(x)$ 的次数小于 $Q(x)$ 的次数时，有理函数 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 是真分式；当 $P(x)$ 的次数

大于$Q(x)$的次数时，有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$是假分式

〇有理函数（真分式）不定积分的求解思路（★）

⑴将有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$的分母$Q(x)$分拆成两个没有公因式的多项式的乘积：其中一个多项式可以表示为一次因式$(x-a)^k$；而另一个多项式可以表示为二次质因式$(x^2+px+q)^l$，（$p^2-4q<0$）；

即：$Q(x)=Q_1(x)\cdot Q_2(x)$

一般地：$mx+n=m\left(x+\frac{n}{m}\right)$，则参数$a=-\frac{n}{m}$

$$ax^2+bx+c=a\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)$$

则参数$p=\frac{b}{a},q=\frac{c}{a}$

⑵则设有理函数$\frac{P(x)}{Q(x)}$的分拆和式为：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P_1(x)}{(x-a)^k}+\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^l}$$

其中

$$\frac{P_1(x)}{(x-a)^k}=\frac{A_1}{x-a}+\frac{A_2}{(x-a)^2}+\ldots+\frac{A_k}{(x-a)^k}$$

$$\frac{P_2(x)}{(x^2+px+q)^l}=\frac{M_1x+N_1}{x^2+px+q}+\frac{M_2x+N_2}{(x^2+px+q)^2}+\ldots+\frac{M_lx+N_l}{(x^2+px+q)^l}$$

参数$A_1,A_2,\ldots,A_k,\begin{cases}M_1\\N_1\end{cases},\begin{cases}M_2\\N_2\end{cases},\ldots,\begin{cases}M_l\\N_l\end{cases}$由待定系数法（比较法）求出

⑶得到分拆式后分项积分即可求解

【题型示例】求$\int\frac{x^2}{x+1}dx$（构造法）

【求解示例】

$$\int\frac{x^2}{x+1}dx=\int\frac{(x+1)x-(x+1)+1}{x+1}dx=\int\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$=\int xdx-\int dx+\int\frac{1}{x+1}dx=\frac{1}{2}x^2-x+\ln(x+1)+C$$

第五节 积分表的使用（不作要求）

第五章 定积分极其应用

第一节 定积分的概念与性质

〇定积分的定义（★）

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{\lambda\to0}\sum_{i=1}^n f(\xi_i)\Delta x_i=I$$

（$f(x)$称为被积函数，$f(x)dx$称为被积表达式，x则称为积分变量，a称为积分下限，b称为积分上限，$[a,b]$称为积分区间）

〇定积分的性质（★★★）

⑴$\int_a^b f(x)dx=\int_a^b f(u)du$

⑵$\int_a^a f(x)dx=0$

⑶$\int_a^b [kf(x)]dx=k\int_a^b f(x)dx$

⑷（线性性质）

$$\int_a^b [k_1f(x)+k_2g(x)]dx=k_1\int_a^b f(x)dx+k_2\int_a^b g(x)dx$$

⑸（积分区间的可加性）

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

⑹若函数$f(x)$在积分区间$[a,b]$上满足$f(x)>0$，则$\int_a^b f(x)dx>0$；

（推论一）

若函数$f(x)$、函数$g(x)$在积分区间$[a,b]$上满足$f(x)\le g(x)$，则$\int_a^b f(x)dx\le\int_a^b g(x)dx$；

（推论二）$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b |f(x)|dx$

〇积分中值定理（不作要求）

第二节 微积分基本公式

〇牛顿-莱布尼兹公式（★★★）

（定理三）若果函数$F(x)$是连续函数$f(x)$在区间$[a,b]$上的一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$$

〇变限积分的导数公式（★★★）（上上导－下下导）

$$\frac{d}{dx}\int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(t)dt=f[\varphi(x)]\varphi'(x)-f[\psi(x)]\psi'(x)$$

【题型示例】求$\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}$

【求解示例】

$$解:\lim_{x\to0}\frac{\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{x^2}\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim_{x\to0}\frac{\frac{d}{dx}\int_{\cos x}^1 e^{-t^2}dt}{(x^2)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^{-1}\cdot 0-e^{-\cos^2 x}\cdot(-\sin x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}}{2x}$$

$$\overset{\frac{0}{0}}{\underset{L'}{=}}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\left(\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}\right)}{(2x)'}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x\cdot e^{-\cos^2 x}+\sin x\cdot e^{-\cos^2 x}\cdot 2\sin x\cos x}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left[e^{-\cos^2 x}(\sin x+\cos x)\cdot 2\sin x\cos x\right]$$

$$=\frac{1}{2}\cdot e^{-1}=\frac{1}{2e}$$

第三节　定积分的换元法及分部积分法

○定积分的换元法（★★★）

(1)（第一换元法）

$$\int_a^b f[\varphi(x)]\cdot\varphi'(x)dx=\int_a^b f[\varphi(x)]\cdot d[\varphi(x)]$$

【题型示例】求 $\int_0^2\frac{1}{2x+1}dx$

【求解示例】

解：$\int_0^2\frac{1}{2x+1}dx=\frac{1}{2}\int_0^2\frac{1}{2x+1}d(2x+1)=\frac{1}{2}\left[\ln|2x+1|\right]\Big|_0^2$

$$=\frac{1}{2}[\ln 5-\ln 1]=\frac{\ln 5}{2}$$

(2)（第二换元法）

设函数 $f(x)\in C[a,b]$，函数 $x=\varphi(t)$ 满足：

a．$\exists\alpha,\beta$，使得 $\varphi(\alpha)=a,\varphi(\beta)=b$；

b．在区间 $[\alpha,\beta]$ 或 $[\beta,\alpha]$ 上，$f[\varphi(t)],\varphi'(t)$ 连续

则：$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$

【题型示例】求 $\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$

【求解示例】

解：$\int_0^4\frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx\xrightarrow[x=0,t=1;\ x=4,t=3]{t=\sqrt{2x+1}>0,x=\frac{t^2}{2}-\frac{1}{2}}\int_1^3\frac{\frac{t^2}{2}+\frac{3}{2}}{t}dx$

$$=\frac{1}{2}\int_1^3\frac{t^2+3}{t}\cdot t\cdot dt=\frac{1}{2}\int_1^3(t^2+3)dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3x\right)\Big|_1^3$$

$$=9-\frac{5}{3}=\frac{22}{3}$$

(3)（分部积分法）

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx=u(x)v(x)-\int_a^b v(x)u'(x)dx$$

$$\int_a^b u(x)dv(x)=[u(x)v(x)]\Big|_a^b-\int_a^b v(x)du(x)$$

○偶倍奇零（★★）

设 $f(x)\in C[-a,a]$，则有以下结论成立：

(1)若 $f(-x)=f(x)$，则 $\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$

(2)若 $f(-x)=-f(x)$，则 $\int_{-a}^a f(x)dx=0$

第四节　定积分在几何上的应用（暂时不作要求）

第五节　定积分在物理上的应用（暂时不作要求）

第六节　反常积分（不作要求）

如：不定积分公式 $\int\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x+C$ 的证明。很多同学上课时无法证明，那么在学期结束时，我给出这样一种证明方法以说明问题：

$$\int\frac{1}{1+x^2}dx\xrightarrow[t=\arctan x]{x=\tan t\left(-\frac{\pi}{2}<t<\frac{\pi}{2}\right)}\int\frac{1}{1+\tan^2 t}\cdot(\tan t)'\cdot dt$$

$$=\int\frac{1}{\sec^2 t}\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\cdot dt=\int\cos^2 t\cdot\frac{1}{\cos^2 t}\cdot dt=\int dt$$

$$=t+C=\arctan x+C$$

如此，不定积分公式 $\int\frac{1}{a^2+x^2}dx=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$ 也就很容易证明了，希望大家仔细揣摩，认真理解。

最后，限于编者水平的限制，资料中错误和疏漏在所难免，希望同学们积极指出，以便互相学习改进。