目　　录

第一章　群论的初步知识

为了研究伽罗华理论，需要对群论的有关内容进行讨论。本章对群的基本概念作一概括介绍，着重讨论置换群、可解群、可迁群等。

§1·1　群的基本概念

1·1·1 定义　一个具有叫做乘法的代数运算的非空集合G叫做一个群，若是以下条件被满足：

1）乘法满足结合律，即对于G中任意元素a、b、c来说，都有

$$(ab)c = a(bc)。$$

2）存在一个元素$e \in G$，对于任意$a \in G$，均有

$$ae = ea = a,$$

把具有上述性质的e，叫做G的单位元。

3）对于任意元素$a \in G$，存在一个元素$a^{-1} \in G$，具有性质

$$aa^{-1} = a^{-1}a = e,$$

把具有上述性质的a^{-1}，叫做a的逆元。

不难证明，群G的单位元和G中每一个元素a的逆元是唯一的。

如果群G的代数运算还满足交换律，那么就把G叫做一个可换群或阿贝尔(Abel)群。

如果一个群G只含有限个元素，则称G为有限群，元素的个数称为G的阶，记为$|G|$。

设a是群G的一个元素，能使

$$a^m = e$$

的最小正整数m称为a的阶；若这样的m不存在，则称a是无限阶的。

1·1·2 定义　群G的一个子集H叫做G的一个子群，假如H对G的乘法来说作成一个群，记为$H \leqslant G$。

一个群G的一个非空子集H作成G的一个子群的充要条件是：

$$a,\ b \in H \Rightarrow ab^{-1} \in H$$

若群G中的每个元素都是G中某个固定元素a的整数方幂a^n，则称G是由a生成的循环群，记为$G=(a)$。此时，称a是G的一个生成元。由无限阶元生成的循环群称为无限循环群。否则，称为有限阶循环群。

显然，循环群的子群仍为循环群。

对群G的任意两个子集合A，B，规定

$$AB = \{ab \mid a \in A,\ b \in B\}$$

称为A与B的乘积，易知这种群子集的乘法满足结合律。

1·1·3 定理　设A和B是群G的子群，那么，AB是G的子群当且仅当$AB = BA$成立。

证明　假定 $AB \leqslant G$，任取 $ba \in BA$，由$A \leqslant G$ $B \leqslant G \Rightarrow a^{-1}b^{-1} \in AB$，因而 $(a^{-1}b^{-1})^{-1} = ba \in AB$ 所以$BA \subseteq AB$。再由$AB \leqslant G$，AB的任一元有形式$ab = ((ab)^{-1})^{-1}$。但AB的任一元ab的逆元$(ab)^{-1} = b^{-1}a^{-1} \in BA$，所以$AB \subseteq BA$。故 $AB = BA$，

反之，假定$AB = BA$，对任a_1b_1，$a_2b_2 \in AB$，我们有

$(a_1b_1)(a_2b_2)^{-1}=a_1(b_1b_2^{-1}a_2^{-1})=a_1a_3b=ab\in AB$. 所以

$$AB\leqslant G$$

1·1·4 定义　设H是群G的一个子群，且$x\in G$，

$$Hx=\{hx\mid h\in H\}\text{和}xH=\{xh\mid h\in H\}$$

分别称为H在G中的右陪集和左陪集。

1·1·5 定理　群G中子群H的任意两个右(左)陪集，或者不相交，或者恒同、且$Hx=Hy\Leftrightarrow xy^{-1}\in H$。当$G$的右陪集的个数有限时，$G$可分解为

$$G=H\cup Hx_2\cup\cdots\cup Hx_t$$

这里t代表H在G中右陪集的个数，当G的右陪集的个数无限时，我们也形式地写为$G=\overset{\infty}{\underset{i=1}{\cup}}Hx_i$。

H在G中的诸左陪集和诸右陪集有相同的基数ν，称ν为H在G中的指数，记为$\nu=|G:H|$。

由以上事实及H和Hx有相同基数便得

1·1·6 Lagrange定理　设G为有限群，$H\leqslant G$，则

$$|G|=|G:H|\cdot|H|。$$

特别地，$|H|$和$|G:H|$都是$|G|$的因子。

1·1·7 定义　群G的一个子群N叫做一个不变子群，如果对于G的每一元a来说，都有$Na=aN$，用$N\trianglelefteq G$表示N是G的不变子群。

1·1·8 定理　设G是一个群，下列三个条件等价：

1）N是G的不变子群；

2）$a\in G$，$n\in N\Rightarrow ana^{-1}\in N$；

3）对于G中的每个元素a都有$aNa^{-1}=N$。

一个群至少有两个不变子群，一个是它自身，一个是单位元群，它们称为平凡不变子群。

1·1·9 定义　不含非平凡不变子群的群，叫做单纯群，简称单群。

显然，单位元群和阶数为素数的群，都是单群。对于可换群，我们有

1·1·10 定理　可换群G为单群的充要条件是 G 的阶为1或是一个素数。

证明　充分性是显然的。现在证明必要性。设 G 是无限群。取 $a\in G$，且 $a\neq e$，若 a 的阶有限，则 $H=(a)$ 就是 G 的一个非平凡不变子群。若 a 的阶无限，则 $H=(a^2)$ 就是 G 的一个非平凡不变子群，故无限阶的可换群皆不是单群。

设 G 为有限群，且设阶为合数 n，取 $a\in G$ 且 $a\neq e$，若 a 的阶为 $m<n$，则 $H=(a)$ 就是 G 的一个非平凡不变子群。若 a 的阶 $m=n$，则 $G=(a)$。因为 n 为合数，可设 $n=n_1n_2$，而 $1<n_1<n$，$1<n_2<n$，则 $H=(a^{n_1})$ 是 G 的一个阶为 n_2 的非平凡不变子群。故阶为合数的有限可换群也不是单群。

非可换单群的例子，我们将在§1·2中给出。

下面我们介绍共轭类的概念。

1·1·11 定义　群 G 中两个元素 a，b 称为共轭的，记为 $a\sim b$，如果在 G 中存在元素 x 使得 $b=xax^{-1}$。

共轭关系具有以下性质：

1）反身性：$a\sim a$，a 为 G 中任意元；

2）对称性：$a\sim b\Rightarrow b\sim a$；

3）传递性：$a\sim b$，$b\sim c\Rightarrow a\sim c$。

由此可见，共轭关系是一个等价关系，从而一个群可以按共轭分为共轭类。

设 $a\in G$，由 a 所决定的共轭类记为

$S_a=\{xax^{-1}\mid a$ 为 G 中一个固定元，$\forall x\in G\}$。易得

1·1·8中(2)的一个等价说法：

N是G的不变子群的充分必要条件是：若$a\in N$，则$S_a\subseteq N$（S_a表示a在G中的共轭类）。

若令

$$Z_a=\{x\in G\mid xa=ax\},\quad Z=\{x\in G\mid xa=ax\ \ \forall a\in G\}$$

易见Z_a和Z都是G的子群，称Z_a为a在G中的中心化子，Z为G的中心。

1·1·12 定理 S_a所含元素的个数等于Z_a在G中的指数。

证明 令L表示Z_a在G中左陪集的集合，定义

$$f:\ S_a\to L$$

$$xax^{-1}\mapsto xZ_a$$

我们有 $xax^{-1}=yay^{-1}\Rightarrow(y^{-1}x)a=a(y^{-1}x)^{-1}\Rightarrow y^{-1}x\in Z_a\Rightarrow xZ_a=yZ_a$，所以$f$是$S_a$到$L$的一个映射，易证$f$是单射和满射，因此有

$$|S_a|=|G:Z_a|.$$

设$|G|=m$，那么$|G:Z_a|\mid m$，从而S_a的元素的个数是m的因子，因此有

1·1·13 推论 设G为有限群，其阶为m，那么每一共轭类中元素的个数是m的因子。

设群G中心Z的阶为z，除Z外G共有r个共轭类S_1，S_2，…，S_r，且S_i所含元素个数为d_i，则有

$$m=z+d_1+\cdots+d_r \tag{1}$$

易见，如果G是非交换群，则$d_i\neq 1$，且$d_i\mid m$。

如果群G的阶为p^n，这里p是素数，则称G是一个p-群。我们有以下

1·1·14 定理 设G是p-群，则G的中心$Z\neq\{e\}$。

证明 设G的阶$m=p^n$，由(1)可知m与d_i($i=1,2,\cdots$

r），都被p整除，所以$p|z$，从而$z>1$，即$Z\neq\{e\}$。

习　　题

1．设A是群G的子集，$A^{-1}=\{a^{-1}|a\in A\}$。证明：若A，B为群G的子集，则$(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$。

2．设G是有限群，且$A\leq G$，$B\leq G$。证明：

$$|AB|=\frac{|A||B|}{|A\cap B|}$$

3．证明指数为2的子群必为不变子群。

4．设G是群，$A\trianglelefteq G$，$B\trianglelefteq G$，且$A\cap B=\{e\}$，证明：对 $\forall x\in A$，$\forall y\in B$等式$xy=yx$成立。

5．设P为素数，试证：P^2元群为可换群。

§1.2　置　换　群

这一节主要介绍置换群的基本概念和n次交代群的单性。置换群是最重要的群，因为所有的有限群都可以用之表示。在研究伽罗华理论时，置换群更占有重要地位。

我们知道，一个包含n个元素的集合上的全体置换对置换乘法作成一个群叫做n次对称群，记为S_n。S_n的每一个元素叫做一个n级置换，一般记为

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2\cdots n\\ i_1 & i_2\cdots i_n\end{pmatrix},$$

容易证明，$|S_n|=n!$。

下面介绍一种简单的表示置换的方法，先约定一个记号

$$(a_1a_2\cdots a_m)=\begin{pmatrix}a_1 & a_2\cdots a_{m-1} & a_m & a_{m+1}\cdots a_n\\ a_2 & a_3\cdots a_m & a_1 & a_{m+1}\cdots a_n\end{pmatrix},\quad (m\leqslant n),$$

$(a_1a_2\cdots a_m)$叫做m=循环置换，简称m-循环。例如5级置换

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\4&3&1&5&2\end{pmatrix}=(1\ 4\ 5\ 2\ 3),\quad \begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\5&2&3&1&4\end{pmatrix}=(1\ 5\ 4)$$

分别是5-循环和3-循环。而$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\3&1&2&5&4\end{pmatrix}=(1\ 3\ 2)(4\ 5)$是3-循环和2-循环之积。循环(1 5 4)中2、3不出现，表示2和3保持不变，即(1 5 4)=(154)(2)(3)。

实际上，m-循环$(a_1a_2\cdots a_m)$只与元素相邻状况有关，而与哪个元素为首无关，比如(1 2 3)=(2 3 1)。如若两个循环$(a_1a_2\cdots a_l)$和$(b_1b_2\cdots b_m)$，没有相同的文字，则称为不相交的。不相交两循环的乘积可以交换。

例如(1 3 2)(4 5)=(4 5)(1 3 2)。

1·2·1 定理 任意一个n级置换，都可表成若干个不相交的循环置换的乘积。

证明 对已知置换

$$\sigma=\begin{pmatrix}1&2&3&\cdots&n\\i_1&i_2&i_3&\cdots&i_n\end{pmatrix},$$

从1开始搜索，如$1\to a_1\to a_2\to\cdots\to a_k\to 1$，则得一循环$(1a_1a_2\cdots a_k)$，如若$(1a_1a_2\cdots a_k)$包含了1，2，…，$n$的所有文字，则搜索停止。否则在余下的文字中任意确定一个，如法进行，又得一个循环。如此反复进行直到所有元素都"取"完为止，这样便得到若干个不相交的循环，σ就等于这些不相交的循环的乘积。除了循环次序可以任意交换外，这种表示是唯一的。

显然k=循环的阶为k，我们有

1·2·2 定理 任意置换σ的阶等于它的不相交循环置换的阶的最小公倍数。

证明　设$\sigma=\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_s$，$\sigma_1$，$\sigma_2$，$\cdots\sigma_s$为不相交的循环置换。因为当$i\neq j$时，$\sigma_i\sigma_j=\sigma_j\sigma_i$，于是$\sigma^n=\sigma_1^n\sigma_2^n\cdots\sigma_s^n$，所以$\sigma^{(n)}=(1)$当且仅当$\sigma_i^n=(1)$，$i=1$，$2$，$\cdots$，$s$。

设σ的阶为k，σ_1，σ_2，$\cdots$，σ_s的阶分别为k_1，k_2，$\cdots$，k_s，且k_1，k_2，$\cdots$，k_s的最小公倍数为l。现在证明，$k=l$。由以上事实，显然有$k|l$。又因为由$\sigma^k=(1)$可得$\sigma_i^k=(1)$，因而$k_i|k$，$i=1$，2，$\cdots$，s。根据整数的性质，$l|k$，所以$k=l$。

由于$(i_1i_2\cdots i_k)=(i_1i_2)(i_1i_3)\cdots(i_1i_k)$，所以每一个$n$级置换都可以表成为若干个对换的乘积，但表法不是唯一的。例如

$$\begin{pmatrix}1&2&3&4&5\\2&1&3&5&4\end{pmatrix}=(1\ 2)(4\ 5)=(1\ 2)(3\ 4)(4\ 3)(4\ 5).$$

但是，我们有

1·2·3 定理　把一个n级置换表为对换的乘积，其对换个数的奇偶性不变。

证明　设n级置换

$$\tau=\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\i_1&i_2&\cdots&i_n\end{pmatrix}$$

有两种方法表成对换之积，如

$$\tau=(j_1^{(1)}j_2^{(1)})(j_1^{(2)}j_2^{(2)})\cdots(j_1^{(s)}j_2^{(s)})$$

及

$$\tau=(k_1^{(1)}k_2^{(1)})(k_1^{(2)}k_2^{(2)})\cdots(k_1^{(t)}k_2^{(t)}),$$

前者对换的个数为s，后者的个数等于t，现在作n个字母x_1，x_2，$\cdots$，x_n的范德蒙行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

我们把置换τ看作是将D的第1列变为第i_1列，第2列变为第i_2列，…，第n列变为第i_n列，于是将置换τ施行在D上便得到

$$D^{\tau}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_{i_1} & x_{i_2} & \cdots & x_{i_n} \\ x_{i_1}^2 & x_{i_2}^2 & \cdots & x^2{}_{i_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_{i_1}^{n-1} & x_{i_2}^{n-1} & \cdots & x_{i_n}^{n-1} \end{vmatrix}$$

而把τ中每一对换(ij)看作使D中第i、j两列互换，则从τ的前一种用s个对换之积表示，可知连续施行这s个对换于D上，就使D变成$(-1)^s D$，而从τ的后一种用t个对换之积表示，又使D变为$(-1)^t D$。但这两个结果都等于D^{τ}，因而有$(-1)^s D=(-1)^t D$，由于D不恒等于零，故有$(-1)^s=(-1)^t$，即s与t有相同奇偶性。

我们把表为偶数个对换乘积的置换叫做偶置换，表为奇数个对换乘积的置换叫做奇置换。

1·2·4 **定理** S_n的所有偶置换的集合A_n，作成S_n的一个不变子群(叫做n次交代群)。

证明 A_n含有单位元，故不空；两个偶置换的乘积仍是偶置换；由于$(ij)^{-1}=(ij)$，易见偶置换的逆元仍是偶置

换，故A_n是S_n的一个子群。设α是偶置换，不论β是奇是偶，$\beta\alpha\beta^{-1}$总是偶置换，故A_n是S_n的一个不变子群。

以下我们对于不同的n详细讨论A_n。

1）当$n=2$时，偶置换只有(1)，即$A_2=\{(1)\}$，故A_2是单群。

2）当$n=3$时，偶置换有$\frac{3!}{2}$个，即$A_3=\{(1),(1\ 3\ 2),(1\ 2\ 3)\}$。由于3为素数，所以，$A_3$为单群。

3）当$n=4$时，偶置换有$\frac{4!}{2}=12$个。即

$A_4=\{(1),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3),(1\ 2\ 3),(1\ 2\ 4),(1\ 3\ 2),(1\ 3\ 4),(1\ 4\ 2),(1\ 4\ 3),(2\ 3\ 4),(2\ 4\ 3)\}$。

容易证明$B_4=\{(1),(1\ 2)(3\ 4),(1\ 3)(2\ 4),(1\ 4)(2\ 3)\}$是$A_4$的一个不变子群，故$A_4$不是单群。其次，$C=\{(1),(1\ 2)(3\ 4)\}$是$B_4$的一个不变子群，故$B_4$也不是一个单群。$C$不是$A_4$的不变子群，即一个不变子群的不变子群不一定是原来群的不变子群。

B_4叫做克莱因(Klein)四元群，任一含4个元素的非循环群均与B_4同构。

4）当$n\geqslant 5$时，A_n为单群。

为了证明这个结果，我们先来证明一个引理。

1·2·5 引理 如果群$A_n(n\geqslant 5)$的不变子群N含有一个3-循环，则$N=A_n$。

证明 设N含有一个3-循环，例如(1 2 3)，令

$$\gamma=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\cdots\\ i & j & k & l & m\cdots\end{pmatrix}$$

若γ不是偶置换，则另取$\gamma(lm)$代替γ。容易算出$\gamma^{-1}(123)\gamma=(ijk)\in N$，因此$N$包含一切3-循环。另一方面，由于$A_n$的每一元均可表为偶数个对换的乘积，而任意两个对换的乘积均可写成一个3-循环或两个3-循环的乘积：

$$(ab)(ac)=(abc),$$

$$(ab)(cd)=(ab)(ac)(ca)(cd)=(abc)(cad).$$

因之A_n的每一元均可表为若干个3-循环的乘积。由于N包含一切3-循环，故N包含一切3-循环之积，即$N\supseteq A_n$，因之$N=A_n$。

此引理对$n=3$，4亦是成立的，证明留做练习。

1·2·6 **定理** n次交代群$A_n(n\geqslant 5)$是单群。

证明 设N是A_n的一个不变子群，且$N\neq\{(1)\}$，我们要证明$N=A_n$。为此只需证明N含有一个3-循环即可。

假设N不含3-循环。考虑N中$\neq(1)$的使最多个号码保持不动的置换α。由于α是偶置换，故不能只使二个号码变动，α至少要使三个或三个以上号码变动，若α不是3-循环，则α只能有如下两种形式：

$$\text{I}\quad \alpha=(1\ 2\ 3\cdots)(\ \ )\cdots,$$

或

$$\text{II}\quad \alpha=(1\ 2)(3\ 4)\cdots.$$

在第一种情形，α至少还应使另外两个号码(例如说，4，5)变动，因α不是奇置换$(1\ 2\ 3k\ )$。令$\beta=(3\ 4\ 5)$，于是$\beta^{-1}\alpha\beta=\alpha_1\in N$。如果$\alpha$有I的形式，容易算出，

$$\alpha_1=(1\ 2\ 4\cdots)(\ \ )\cdots$$

如果α有II的形式，那么

$$\alpha_1=(1\ 2)(4\ 5)\cdots$$

如果α使号码$i>5$不动，则α_1也使这个号码i不动。因之，$\alpha_1\alpha^{-1}$也使i不动，$\alpha_1^{-1}\alpha\in N$。当α有I形式时，$\alpha_1\alpha^{-1}$使1不

动，当α有Ⅱ形式时，$\alpha_1\alpha^{-1}$使1和2不动。总之，$\alpha_1\alpha^{-1}$比α能保持更多的号码不动。这与我们对α的选择相矛盾。此矛盾说明N必须含有一个3-循环。因之，$N=A_n$。即A_n没有非平凡的不变子群，故A_n为单群。

当$n\geqslant 4$时，A_n是非可换群，这样我们就得到一批非可换的有限单群的例子。

最后，我们介绍求一个置换的共轭置换的方法。

设σ，$\tau\in S_n$，写

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots n\\ i_1 & i_2 & \cdots i_n\end{pmatrix},\qquad \tau=\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots n\\ j_1 & j_2 & \cdots j_n\end{pmatrix}.$$

我们可以把τ的第一行数字连同它的象，作适当的排列，将τ写成为如下形式

$$\tau=\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_n\\ i_1^\tau & i_2^\tau & \cdots & i_n^\tau\end{pmatrix}$$

于是

$$\tau^{-1}\sigma\tau=\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_n\\ 1 & 2 & \cdots & n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2 & \cdots & n\\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}i_1 & i_2 & \cdots & i_n\\ i^\tau & i^\tau & \cdots & i^\tau\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}j_1 & j_2 & \cdots & j_n\\ i_1^\tau & i_2^\tau & \cdots & i_n^\tau\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1^\tau & 2^\tau & \cdots & n^\tau\\ i_1^\tau & i_2^\tau & \cdots & i_n^\tau\end{pmatrix}$$

此即

1·2·7 定理 在S_n中置换σ的共轭置换$\tau^{-1}\sigma\tau$可以这样得到，即把置换σ的上下两行文字同时施行置换τ。

若将置换σ写为不相交的循环置换的乘积，如

$$\beta=(k_1k_2\cdots k_s)(l_1l_2\cdots l_t)\cdots,$$

则同样可得

$$\tau^{-1}\sigma\tau=(k_1^\tau k_2^\tau\cdots k_s^\tau)(l_1^\tau l_2^\tau\cdots l_t^\tau)\cdots,$$

即把σ的各循环中每个数字k都换成k^τ，就得到$\tau^{-1}\sigma\tau$。这样

1·2·7　定理可以叙述为

1·2·8 定理　在置换群中，置换σ的共轭置换 $\tau^{-1}\sigma\tau$ 可以这样得到，即先把σ 写为不相交的循环置换之积，再将各循环置换中每个数字k都换成k^{τ}即可。

由σ和$\tau^{-1}\sigma\tau$的循环表示，还可以看出它们所包含的s-循环、t-循环等等的个数都分别相等，象这样的置换叫做同型的置换。由1·2·8知二共轭置换是同型的。反之，设σ与τ为二同型置换，写为循环表示应有

$$\sigma=(i_1 i_2\cdots i_s)(j_1 j_2\cdots j_t)\cdots$$

$$\tau=(i'_1 i'_2\cdots i'_s)(j'_1 j'_2\cdots j'_t)\cdots$$

此时取

$$\rho=\begin{pmatrix} i_1 i_2\cdots i_s j_1 j_2\cdots j_t\cdots \\ i'_1 i'_2\cdots i'_s j'_1 j'_2\cdots j'_t\cdots \end{pmatrix}\in S_n,$$

则由1·2·8即得$\rho^{-1}\sigma\rho=\tau$，即σ与τ为共轭置换，故得

1·2·9 定理　n次对称群中二置换σ和τ是共轭的（在S_n内）当且仅当它们是同型的置换。

习　　题

1。试证任一n阶有限群都和一个n次置换群同构。

2。试证对称群S_4的不变子群除自身及单位元群外，只有交代群A_4及克莱因四元群B_4。

3。试证当$n\neq 4$时，对称群S_n除平凡不变子群外，只有A_n是它的唯一不变子群。

4。写出S_5的各共轭类元素(用循环置换表示)。

§1.3 同态和同构定理

同态和同构是研究群的两个重要概念，这一节我们介绍同态定理和同构定理。

设G，H是两个群，φ：$x\mapsto\varphi(x)$是G到H内的一个映射。若对任x，$y\in G$，都有

$$\varphi(xy)=\varphi(x)\varphi(y)$$

则称φ是G到H内的同态映射，简称同态。同态φ称为满同态，如果φ是一个满射；而同态φ称为同构，如果φ是一个满单射。满同态记为$G\sim H$，同构记为$G\cong H$。

如果两个群同态，则单位元对应单位元，一个元的逆元对应该元的象的逆元，子群对应子群。

1·3·1 **定理** 设$N\trianglelefteq G$，G关于N的所有陪集所成集合$G/N=\{Nx\mid x\in G\}$，对于群子集乘法来说作成一个群，叫做G关于N的商群。

显然，φ：$a\mapsto Na$ $\forall a\in G$是G到G/N的满同态，称此φ为自然同态。

假定φ是一个群G到另一个群$\overline{G}$的一个同态满射，$\overline{G}$的单位元$\overline{e}$在φ之下的所有逆象所作成G的子集叫做同态满射φ的核。

1·3·2 **定理** 假定G和$\overline{G}$是两个群，且

$$G\sim\overline{G}$$

那么这个同态的核N是G的一个不变子群，并且

$$G/N\cong\overline{G}$$

1·3·2 定理通常称为同态基本定理。利用上述这些性质

我们来研究群的同构定理。

下面是第一同构定理，它表示一个群中两个子群的积与它们的交之间的同构关系。

1·3·3 **定理** 假设$H\trianglelefteq G$，$K\leqslant G$，那么$K\cap H\trianglelefteq K$，并且

$$KH/H\cong K/K\cap H.$$

证明 因为 $G\sim G/H=\overline{G}$，假定K在$\overline{G}$中的象是$\overline{K}$，则$K\sim\overline{K}$，并且同态核是 $K\cap H$ ，故 $K\cap H$ 是K的不变子群，且$K/K\cap H\cong\overline{K}$。又因为 $G\sim\overline{G}$的同态核是H，且在这个同态下有$KH\sim\overline{K}$，于是就有$\overline{K}\cong KH/H$。故

$$KH/H\cong K/K\cap H.$$

例如 $K=((1\ 3\ 2\ 4))$，$H=B_4$(克莱因四元群)。

$KH=((1\ 2),(1\ 4)(2\ 3))$,$K\cap H=\{(1),(1\ 2)(3\ 4)\}$

由计算容易得知KH/H及$K/K\cap H$都是阶为 2 的循环群，所以它们同构。

特别，当$K\cap H$是单位元群时，我们即得

$$KH/H\cong K$$

也就是说，这时我们简直可以把H消去。

下面是第二同构定理，它表示两个同态群间商群的同构关系。

1·3·4 **定理** 假定 G，$\overline{G}$是群，$G\sim\overline{G}$，$\overline{H}\lhd\overline{G}$，那么$\overline{H}$在$G$中的完全逆象($\overline{H}$的所有元的逆象做成之集合)$H$是$G$的不变子群，并且

$$G/H\cong\overline{G}/\overline{H}$$

证明 因为 $G\sim\overline{G}$，$\overline{G}\sim\overline{G}/\overline{H}$，所以 $G\sim\overline{G}/\overline{H}$。由$G\sim\overline{G}/\overline{H}$，我们得知 $G/\overline{H}$的单位元在$\overline{G}$中的完全逆象是$\overline{H}$。由假设，H在G中的完全逆象是H，因此$\overline{G}/\overline{H}$的单位元在 G中

的完全逆象就是H，也就是说$G\sim\overline{G}/\overline{H}$时，同态核是$H$。于是由同态基本定理，$H$是$G$的不变子群，并且$G/H\cong\overline{G}/\overline{H}$。

此定理显然是同态基本定理的推广，因为假如$\overline{H}=\{\overline{e}\}$，那么，$\overline{G}/\overline{H}\cong\overline{G}$，而$H$就是$\overline{e}$的完全逆象，即$H$是$G\sim\overline{G}$的核。

假如$G\sim\overline{G}$，H是G的不变子群，$\overline{H}$是H在G中的象，由同态对应关系，我们容易得知$\overline{H}$是$\overline{G}$的不变子群。要注意的是这时H不一定是$\overline{H}$的完全逆象。因此G/H和$\overline{G}/\overline{H}$一般是不同构的，但是它们是同态的，这一点在下一节我们给出证明。

假如K，H是群G的不变子群，并且$K\supseteq H$，因为$G\sim G/H$，而K在G/H中的象是K/H，所以K/H是G/H的不变子群，又因为K/H在G中的完全逆象是K，由1·3·4我们有

$$G/K\cong G/H/K/H$$

这就是第二同构定理的另一种形式。

下面我们证明下节将要用到的一个定理，为此先介绍一个概念。

1·3·5 定义　不变子群N称为群G的一个极大不变子群，若是不存在G的不变子群N_1，使$N\subset N_1\subset G$。

1·3·6 定理　设G是群，$H\leqslant G$，K是H的一个极大不变子群，而$N\trianglelefteq G$。若$H\cap N\neq K\cap N$，则

$$H/K\cong H\cap N/K\cap N$$

证明　显然有K是$(N\cap H)K$的一个子群，而$(N\cap H)K$是H的一个不变子群。因为K是H的极大不变子群，所以，$K=(N\cap H)K$或$(N\cap H)K=H$。若$K=(N\cap H)K$，则$N\cap K=(N\cap H)K\cap N=N\cap H$与$H\cap N\neq K\cap N$，导致矛盾。所以，

$(N\cap H)K=H$。于是由第一同构定理得

$$H/K=(N\cap H)K/K\cong N\cap H/K\cap(N\cap H)=N\cap H/N\cap K$$

习　　题

1．试用第一同构定理，证明对称群S_4关于B_4的商群与S_3同构、

2．用同样的方法证明：如果某个置换群，不是完全由偶置换组成的，那么它里面的偶置换组成一个指数为2的不变子群。

3．设G是群，H，K，N如1·3·6所设，证明若$H\cap N=K\cap N$，则$H/K\cong HN/KN$。

§1·4　正规群列与合成群列

在研究不是单群的群时，常常要考虑它的不变子群。因此常常引用由不变子群及不变子群的不变子群组成的不变子群列，这节我们就来讨论这种重要的子群列。

1·4·1 定义　群G的一个正规群列（简称正规列），是指适合下述条件的G的子群的有限列：

(1)　$$G=G_0\trianglerighteq G_1\trianglerighteq\cdots\trianglerighteq G_{i-1}\trianglerighteq G_i\trianglerighteq\cdots\trianglerighteq G_s=\{e\},$$

而　G_{i-1}/G_i叫做正规列的因子，$i=1,2,\cdots s$。

(1) 叫做一个无重项的正规列，如果对于任意i，均有$G_{i-1}\supset G_i$。无重项正规列的因子个数叫做该正规列的长度。这样，每一个无重项的正规列均有一个确定的长度，而对有重项的正规列，长度没有定义。注意：无重项正规列的长度并不是群列(1)中的项的个数，而是因子G_{i-1}/G_i的个数。

例如，$S_4\triangleright A_4\triangleright B_4\triangleright\{(1)\}$是$S_4$的一个长度为3的正规列；$S_4\triangleright A_4\triangleright\{(1)\}$是$S_4$的一个长度为2的正规列。

由上面例子可以看出，一个群的正规列，一般来说并不

是唯一的。

设G是有限群，G的正规列的每一因子均为有限群，我们说，这个事实的逆命题也是正确的。

1·4·2 **定理** 若G的正规列(1)的每一因子均为有限群。则G亦为有限群。并且，若G_{i-1}/G_i的阶为n_i，则G的阶$n=n_1n_2\cdots n_s$。

证明 不妨假定(1)是无重项的正规列，我们对正规列的长度s用数学归纳法。

当$s=1$时，定理显然成立。

假定对$s-1$，定理成立。我们考虑G_1，因G_1是有长为$s-1$的正规列，由归纳假设知G_1的阶为$n_2n_3\cdots n_s$。故G的阶为$n_1n_2\cdots n_s$，即定理对任意s均成立。

以下我们讨论正规列的同态以及完全逆象的问题。

1·4·3 **定理** 设φ是群G到群$\overline{G}$的一个满同态，(1)是G的一个正规列，则

$$(2)\qquad \overline{G}=\varphi(G_0)\supseteq\cdots\supseteq\varphi(G_{i-1})\supseteq\varphi(G_i)\supseteq\cdots\supseteq\varphi(G_s)$$

是$\overline{G}$的一个正规列，并且

$$G_{i-1}/G_i\sim\varphi(G_{i-1})/\varphi(G_i),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ s.$$

证明 因G_i是G_{i-1}的不变子群，故$\varphi(G_i)$是$\varphi(G_{i-1})$的不变子群，由于$G_s=\{e\}$，故$\varphi(G_s)=\{\overline{e}\}$，即(2)确为$\overline{G}$的一个正规列。

从G_{i-1}/G_i中任取一元x，则$x=G_ia$，$a\in G_{i-1}$，令$\varphi_i(x)=\varphi(G_i)\varphi(a)$，则$\varphi_i(x)\in\varphi(G_{i-1})/\varphi(G_i)$，并且，当$G_ia=G_ib$时，有$ab^{-1}\in G_i$，由此得，$\varphi(ab^{-1})\in\varphi(G_i)$，即$\varphi(G_i)\varphi(a)=\varphi(G_i)\varphi(b)$，故$\varphi_i$是$G_{i-1}/G_i$到$\varphi(G_{i-1})/\varphi(G_i)$的一个映射。

其次，从$\varphi(G_{i-1})/\varphi(G_i)$中任取一元$y$，则$y=\varphi(G_i)\times\varphi(a)$，$a\in G_{i-1}$，于是，存在$x\in G_{i-1}/G_i$，$x=G_ia$，$\varphi_i(x)=y$。这就是说$\varphi_i$是$G_{i-1}/G_i$到$\varphi(G_{i-1})/\varphi(G_i)$的满射。

再次，$\varphi_i(G_iaG_ib)=\varphi_i(G_iab)=\varphi(G_i)\varphi(ab)=\varphi(G_i)\times\varphi(a)\varphi(b)=\varphi(G_i)\varphi(a)\cdot\varphi(G_i)\varphi(b)=\varphi(G_ia)\cdot\varphi(G_ib)$.故$\varphi_i$是$G_{i-1}/G_i$到$\varphi(G_{i-1})/\varphi(G_i)$的满同态，即

$$G_{i-1}/G_i\sim\varphi(G_{i-1})/\varphi(G_i)。$$

1·4·4 定理 设φ是G到$\overline{G}$的满同态，且设

(3) $\overline{G}=\overline{G_0}\triangleright\overline{G_1}\triangleright\cdots\triangleright\overline{G_{i-1}}\triangleright\overline{G_i}\triangleright\cdots\triangleright\overline{G_s}=\{\overline{e}\}$

是$\overline{G}$的一个无重项的正规列，命$\varphi^{-1}(\overline{G_i})=G_i$，则有

(4) $G=G_0\underline{\triangleright}G_1\underline{\triangleright}\cdots\underline{\triangleright}G_{i-1}\underline{\triangleright}G_i\underline{\triangleright}\cdots\underline{\triangleright}G_s$，

并且，

$$G_{i-1}/G_i\cong\overline{G}_{i-1}/\overline{G}_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ s。$$

当$\varphi^{-1}(\overline{e})=\{e\}$时(即$\varphi$是同构对应)，(4)是$G$的无重项的正规列。

证明 由第二同构定理直接得到。

对于任意群G，G的正规列总是存在的，例如，$G\triangleright\{e\}$便是，我们把长为1的正规列叫做平凡正规列，长不为1的正规列叫做非平凡的正规列。容易证明下述事实：

G有非平凡正规列的充要条件是：G不是单群。

以下我们介绍加细正规列的概念。

1·4·5 定义 设G有一个无重项的正规列，

(5) $G=G_0\triangleright G_1\triangleright\cdots\triangleright G_{i-1}\triangleright G_i\triangleright\cdots\triangleright G_s=\{e\}$

若(5)有一个因子G_{i-1}/G_i不是单群，则G_{i-1}/G_i有一个非平凡的正规列。

(6) $G_{i-1}/G_i = K_{i,0} \triangleright K_{i,1} \triangleright \cdots \triangleright K_{i,j-1} \triangleright K_{i,j} \triangleright \cdots \triangleright K_{i,t} = \{e\}$。

命φ_i是G_{i-1}到G_{i-1}/G_i的自然同态，则由1·4·4得

(7) $G_{i-1} = \varphi_i^{-1}(K_{i,0}) \triangleright \cdots \triangleright \varphi_i^{-1}(K_{i,j-1}) \triangleright \varphi_i^{-1}(K_{i,j}) \triangleright \cdots \triangleright \varphi_i^{-1}(K_{i,t}) = G_i$

将(7)插入(5)，得出 G 的一个较(5)更长的正规列，称之为(5)的加细。

由上述事实可知，G的一个正规列不能加细的充要条 件为：每一个因子群都是单群。

1·4·6 定义　G的一个不能加细的无重项正规群列 叫 做G的一个合成群列(简称合成列)，合成列的因子叫做合 成 因子。

例如，在S_4中群列

$$S_4 \triangleright A_4 \triangleright B_4 \triangleright C = \{(1),\ (1\ 2)(3\ 4)\} \triangleright \{(1)\}$$

就是S_4的一个合成列。

注意1　并不是每一个群都有合成列，例如，G 是整 数加群，则G没有合成列，因为，对于G的任一正 规 列 (5) 来说，$G_{i-1}/G_i \cong G_{i-1}$均不是单群之故。

注意2　一个群如果有合成列，其合成列也未必是 唯 一的。例如，G是阶为 6 的循环群，其生成元为a，则G有两个合成列：

$$(a) \triangleright (a^2) \triangleright \{e\}$$
$$(a) \triangleright (a^3) \triangleright \{e\}$$

但是可以证明：G的任意两个合成列，其长度必然相同。 并且，可以适当调换合成因子的次序，使对应因子是同构的。

1·4·7 定义　群G的两个合成列

(8) $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright \cdots \triangleright G_{i-1} \triangleright G_i \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{e\}$

和

(9) $G=N_0\triangleright N_1\triangleright\cdots\triangleright N_{i-1}\triangleright N_i\triangleright\cdots\triangleright N_s=\{e\}$

称为同构的，如果$n=s$，且存在一个在$\{1, 2, \cdots, n\}$上的置换σ使得

$$G_{i-1}/G_i\cong N_i{}^{\sigma}{}_{-1}/N_i{}^{\sigma}\quad i=1, 2, \cdots, n.$$

1·4·8 Jordan-Holder 定理 如果群G有合成列，那么这个群G的任意两个合成列是同构的。

证明 设(8)和(9)是群G的两个合成列，我们对(8)的长度n用数学归纳法。

当$n=1$时，即$G=G_0\triangleright G_1=\{e\}$是合成列，于是$G$为单群，这时$G$只有唯一的一个合成列，论断自然成立。

下面设$n\geqslant 2$，假设对于长度$<n$的合成列来说，结论成立。区别以下两种情况讨论之。

(Ⅰ)$G_1=N_1$

考虑G_1的合成列$G_1\triangleright G_2\triangleright\cdots\triangleright G_n=\{e\}$，它的长度为$n-1$，因为$G_1=N_1$，所以

$G_1=N_1\triangleright N_2\triangleright\cdots\triangleright N_s=\{e\}$也是$G_1$的合成列，由归纳假设$n-1=s-1$，因而$n=s$以及存在一个在$\{1, 2, \cdots, n\}$上的置换$\sigma$使$1^{\sigma}=1$，且

$$G_{i-1}/G_i\cong N_i{}^{\sigma}{}_{-1}/N_i{}^{\sigma}$$

(Ⅱ) $G_1\neq N_1$

令$K_2=G_1\cap N_1$，因为G_1和N_1是G的不变子群，所以G_1N_1是G的不变子群，又因$G_1\neq N_1$，所以$G_1N_1\supset G_1$，因而$G_1N_1=G_0$，这样由第一同构定理知

$$G_0/G_1=G_1N_1/G_1\cong N_1/G_1\cap N_1=N_1/K_2$$

同理 $N_0/N_1\cong G_1/K_2$，且

(10) $K_2=G_0\cap K_2\trianglerighteq G_1\cap K_2\trianglerighteq\cdots\trianglerighteq G_n\cap K_2=\{e\}$

是K_2的一个正规列，因为G_{i-1}/G_i为单群，故G_i是G_{i-1}的极大不变子群。由1·3·6知，若

$$G_{i-1}\cap K_2 \neq G_i \cap K_2,$$

则 $$G_{i-1}/G_i \cong G_{i-1}\cap K_2/G_i \cap K_2$$

于是将(10)去掉重复项后，就得到K_2的一个合成列，设其为

(11) $$K_2 \triangleright K_3 \triangleright \cdots \triangleright K_t = \{e\}$$

又因为N_1/K_2和G_1/K_2为单群，这样我们就得到如下四个合成列：

(i) $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_n = \{e\}$

(ii) $G = G_0 \triangleright G_1 \triangleright K_2 \triangleright \cdots \triangleright K_t = \{e\}$

(iii) $G = N_0 \triangleright N_1 \triangleright K_2 \triangleright \cdots \triangleright K_t = \{e\}$

(iv) $G = N_0 \triangleright N_1 \triangleright N_2 \triangleright \cdots \triangleright N_s = \{e\}$

对于(i)和(ii)，由(Ⅰ)知$n = t$，而且存在一个置换η，使

$$G_{i-1}/G_i \cong K_i{}^{\eta}{}_{-1}/K_i{}^{\eta}$$

这里$K_0 = G_0$，$K_1 = G_1$。对于(iii)和(iv)类似地可以得$t = s$，而且适当调换因子的次序，使对应因子彼此同构，对于(ii)和(iii)，因为

$$G_0/G_1 \cong N_1/K_2 \qquad N_0/N_1 \cong G_1/K_2$$

且从第三个因子开始完全相同，所以(ii)和(iii)的因子也是彼此同构的。于是，我们得到$n = s$，且存在一个在{1，2，3，…，n}上的置换σ，使

$$G_{i-1}/G_i \cong N_i{}^{\sigma}{}_{-1}/N_i{}^{\sigma}$$

这样情形(Ⅱ)也成立。

习　题

1．决定阶为12的循环群的所有合成列。

2．在S_4中，写出包含B_4以及(1　2)的最小子群H的所有合成列。

3. 设G是阶为2^n的循环群，证明G只有一个合成列。

4. 证明：若可换群G有合成列，那么G是有限群。

§1·5 可 解 群

为了给第四章讨论伽罗华理论的应用做准备，我们在这一节来介绍可解群。可解群也是群论中一类极其重要的群。

1·5·1 定义 群G的一个正规列

$$G=G_0\triangleright G_1\triangleright\cdots\triangleright G_{i-1}\triangleright G_i\triangleright\cdots\triangleright G_s=\{e\}$$

叫做一个可解列，如果G_{i-1}/G_i，$i=1,2,\cdots,s$，都是可换群。具有可解列的群G叫做一个可解群。

例1 可换群都是可解群。

例2 S_3和S_4是可解群。

因为$S_3\triangleright A_3\triangleright\{e\}$是$S_3$的一个可解列，而$S_4\triangleright A_4\triangleright B_4\triangleright\{e\}$是$S_4$的一个可解列。

例3 设G是一个单群，但G不是可换群，则G不是可解群。由此得出$A_n(n\geqslant 5)$不是可解群。后面我们将证明$S_n(n\geqslant 5)$不是可解群。

设G为群，对任意$a,b\in G$，$aba^{-1}b^{-1}$叫做a,b的换位子，群G中所有换位子生成的群，叫做G的换位子群，记作$G^{(1)}$。

1·5·2 定理 设$G^{(1)}$是群G的换位子群，则

1) $G^{(1)}$是G的不变子群；

2) $G/G^{(1)}$是可换群；

3) 如果N是G的不变子群，且G/N是可换群，则$N\supseteq G^{(1)}$。

证明 1) e是有限个换位子的乘积：$e=eee^{-1}e^{-1}$，故

$e\in G^{(1)}$。又因为

(有限个换位子的乘积)·(有限个换位子的乘积)= 有限个换位子的乘积。故$G^{(1)}$对G的乘法是封闭的。

由于$(aba^{-1}b^{-1})^{-1}=bab^{-1}a^{-1}$是换位子，故有限个换位子的乘积的逆仍为有限个换位子的乘积，即 $c\in G^{(1)}$ 有 $c^{-1}\in G^{(1)}$。

故$G^{(1)}$是G的子群。

设$c\in G^{(1)}$，$g\in G$，由于$gcg^{-1}c^{-1}\in G^{(1)}$，$(gcg^{-1}c^{-1})c\in G^{(1)}$，即$gcg^{-1}\in G^{(1)}$，所以$G^{(1)}$是$G$的不变子群。

2) 任取 $aG^{(1)}$、$bG^{(1)}\in G/G^{(1)}$，a、$b\in G$，于是 $a^{-1}b^{-1}ab=c\in G^{(1)}$，$ab=bac$，从而$(ab)G^{(1)}=baG^{(1)}$，即 $(aG^{(1)})(bG^{(1)})=(bG^{(1)})(aG^{(1)})$，所以，$G/G^{(1)}$是可换群。

3) 因为，G/N是可换群，所以，

$(aN)(bN)=(bN)(aN)$，$(ab)N=(ba)N$，$ab\in baN$，从而，$a^{-1}b^{-1}ab=n\in N$。又由于N是子群，所以 N 包含有限个换位子的乘积，即$N\supseteq G^{(1)}$。

为了更好地刻划可解群的特征，下面引入G 的各级换位子群：

$G^{(1)}$ = 由G的一切换位子生成的群。

$G^{(2)}=(G^{(1)})^{(1)}$，

.....

$G^{(l)}=(G^{(l-1)})^{(1)}$，

.....

我们把$G^{(l)}$叫做群G的l级换位子群。

于是我们有下面的

1·5·3 定理　群G是可解群的充分必要条件是存在一个

正整数k使得$G^{(k)}=\{e\}$。

证明　设G是可解群，则G有一个可解列

$$G=G_0\triangleright G_1\triangleright\cdots\triangleright G_{i-1}\triangleright G_i\triangleright\cdots\triangleright G_k=\{e\}$$

其中G_{i-1}/G_i都是可换群。

因为G/G_1可换，知$G_1\supseteq G^{(1)}$，又因G_1/G_2可换，知$G_2\supseteq G^{(1)}_1\supseteq(G^{(1)})^{(1)}=G^{(2)}$。一般我们有$G_i\supseteq G^{(i)}$，所以，由$G_k=\{e\}$，于是有$G^{(k)}=\{e\}$。

反之，假如有一个正整数k使$G^{(k)}=\{e\}$，则我们得到

$$G\supseteq G^{(1)}\supseteq G^{(2)}\supseteq\cdots\supseteq G^{(i-1)}\supseteq G^{(i)}\supseteq\cdots\supseteq G^{(k)}=\{e\}$$

其中$G^{(i)}$是$G^{(i-1)}$的不变子群，并且$G^{(i-1)}/G^{(i)}$是可换群，即G有一个可解列，于是G为可解群。

关于可解群，我们有以下诸定理。

1·5·4 定理　1）可解群G的同态象$\overline{G}$是可解群；

2）可解群G的子群H是可解群。

证明　1)设

$$G=G_0\triangleright G_1\triangleright\cdots\triangleright G_{i-1}\triangleright G_i\triangleright\cdots\triangleright G_s=\{e\}$$

是G的一个可解列，则有

$$\overline{G}=\varphi(G_0)\triangleright\varphi(G_1)\triangleright\cdots\triangleright\varphi(G_{i-1})\triangleright\varphi(G_i)\triangleright\cdots\triangleright\varphi(G_s)$$
$$=\{\overline{e}\}$$

因正规列的同态象仍是正规列，且

$G_{i-1}/G_i\sim\varphi(G_{i-1})/\varphi(G_i)$，又由于$G_{i-1}/G_i$可换，所以，$\varphi(G_{i-1})/\varphi(G_i)$也是可换群，因而$\overline{G}$是可解群。

2）因为G是可解群，所以存在一个正整数k使$G^{(k)}=\{e\}$，又因H是G的一个子群，所以

$H^{(1)}\subseteq G^{(1)}$，$H^{(2)}=(H^{(1)})^{(1)}\leqslant(G^{(1)})^{(1)}=G^{(2)}$，…，一般有$H^{(k)}\leqslant G^{(k)}=\{e\}$，于是$H^{(k)}=\{e\}$，所以$H$是可解群。

1·5·5 推论　当$n\geqslant 5$时，S_n不是可解群。

1·5·6 推论　可解群的正规列的每一因子是可解群。

上述结果的逆命题也是正确的。即

1·5·7 定理　如果群G有一个每一因子均为可解群的 正规列，则G是一个可解群。

证明　设G的正规列

(1)　$$G=G_0\triangleright G_1\triangleright\cdots\triangleright G_{i-1}\triangleright G_i\triangleright\cdots\triangleright G_s=\{e\}$$

的每一因子G_{i-1}/G_i均可解，于是G_{i-1}/G_i有可解列

$$G_{i-1}/G_i=K_{i,0}\triangleright K_{i,1}\triangleright\cdots\triangleright K_{i,j-1}\triangleright K_{i,j}\triangleright\cdots\triangleright K_{i,t}$$

$$=\{\overline{e}\}$$

又$G_{i-1}\overset{\varphi_i}{\sim}G_{i-1}/G_i$，则由1·4·4知

(2) $$G_{i-1}=\varphi_i^{-1}(K_{i,0})\triangleright\varphi_i^{-1}(K_{i,1})\triangleright\cdots\triangleright\varphi_i^{-1}(K_{i,j-1})\triangleright\varphi_i^{-1}(K_{i,j})\triangleright\cdots\triangleright\varphi_i^{-1}(K_{i,t})=G_i$$

且$\varphi_i^{-1}(K_{i,j-1})/\varphi_i^{-1}(K_{i,j})\cong K_{i,j-1}/K_{i,j}$，因而，$\varphi_i^{-1}(K_{i,j-1})/\varphi_i^{-1}(K_{i,j})$是可换群。

这样利用(2)将(1)加细，得到加细正规列是可解列。故G是可解群。

由1·5·7又可得

1·5·8 推论　若G的不变子群H是可解群，且G/H 也是可解群，则G是可解群。

证明　由题设条件，G有正规列

$$G\triangleright H\triangleright\{e\}$$

每一因子G/H，H均为可解群，由1·5·7知G为可解群。

下面我们研究一类有限群是可解群的例子。由1·1·14易得

1·5·9　定理　p-群是可解群。

证明　设p-群G的阶为p^n，今对n应用数学归纳法。

当$n=1$时，p-群是含有p个元的循环群，论断自然成立。

假设对$<n$来说，p-群是可解群，今证对n来说p-群亦为可解群。

设Z是G的中心，因为$Z\neq\{e\}$，则G/Z的阶为p^k，而$k<n$，由归纳假定，G/Z是可解群；又Z是可解群，由1·5·8，知G为可解群。

最后，我们证明关于有限群G为可解群的一个重要性质。

1·5·10 **定理** 设G为有限群，且G可解，则G必有一个合成列，而这个合成列的每个因子群的阶都是素数。

证明 因为G可解，则G有可解列

$$G=G_0\triangleright G_1\triangleright\cdots\triangleright G_{i-1}\triangleright G_i\triangleright\cdots\triangleright G_s=\{e\}$$

其中G_{i-1}/G_i是可换群，若G_{i-1}/G_i的阶不是素数，则G_{i-1}/G_i有真因子群$\overline{H}$，于是$G_{i-1}/G_i\supset\overline{H}\supset\{\overline{e}\}$，利用$G_{i-1}\overset{\varphi_i}{\sim}G_{i-1}/G_i$和1·4·4可以将上述可解列加细，这样一直做下去，必然得到因子群是阶为素数的单群，即群G有一个合成列，这个合成列的每个因子群的阶都是素数。

习 题

1．假如H，K都是群G的子群，并且K是不变子群，如果H，K都是可解群，那末HK也是可解群。

2．利用第一同构定理证明可解群G的子群仍是可解群。

*3．设G为群，再设H_1，H_2是G的子群，用$[H_1, H_2]$表示所有H_1中元素a与H_2中元素b的换位子所生成的子群，我们利用归纳法定义

$$G_0=G,\ G_1=[G,\ G_0],\ \cdots,\ G_n=[G,\ G_{n-1}],\ \cdots$$

显然有

$$G_0\geq G_1\geq\cdots\geq G_n\geq\cdots$$

若是存在一个正整数m使$G_m=[G, G_{m-1}]=\{e\}$，那么，G叫做幂零群。

证明：幂零群是可解群。

§1·6 可 迁 群

可迁群是指S_n的一类特殊子群。

设S_n作用在集合$M=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$上，$\alpha\in S_n$，$\alpha$可表为

$$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots a_n \\ a_{i_1} & a_{i_2} & \cdots a_{i_n} \end{pmatrix}$$

我们说a_i经α作用后变为a_{i_j}，记为$a_i=a_{i_j}$。

1·6·1 定义 S_n的一个子群G叫做在M上可迁，或称n次可迁，如果对于任意a_i，a_j存在$\alpha\in G$使得$a_i^{\alpha}=a_j$。

如果群G在M上不是可迁的(非可迁群)，则集合M将分解为许多可迁区，即那样一些子集，它们被群中的置换变成其自身，而在每个这样的集合上群是可迁的。这种子集可以这样来确定：M中两元素a_i和a_j属于同一个子集，当且仅当G中可以找到一个置换α使得$a_i^{\alpha}=a_j$。

例1 S_n本身显然是一个可迁群，$A_n(n>2)$也是一个可迁群。因为，当$n=2$时，$A_2=\{(1)\}$。故非可迁；当$n>2$时，对任意$a_i, a_j, a_i\neq a_j$，命$\alpha=(a_i a_j)(a_i a_k)$，$k\neq i, j$，则$\alpha\in A_n$且$a_i^{\alpha}=a_j$。

例2 $B_4=\{(1), (1\ 2)(3\ 4), (1\ 3)(2\ 4), (1\ 4)(2\ 3)\}$是四次可迁群。而$C=\{(1), (1\ 2)(3\ 4)\}$，则不是四次可迁群。因为$C$中没有置换能将1变到3。

例3 $G=\{(1),(1\ 2)(3\ 4\ 5),(3\ 4\ 5),(1\ 2)(3\ 5\ 4),$

〈1 2)，(3 5 4)}不是五次可迁群。因为 G 中没有置换能将1变到3。

1·6·2 定理　设G是n次可迁群，那么G 中所有使a不变的置换的全体

$$G_a=\{\sigma\in G\mid a^\sigma=a\}$$

作成G的一个子群(叫做关于a的稳定子群)，并且对任意$\tau\in G$有$G_a{}^\tau=\tau^{-1}G_a\tau$。

证明　σ，$\tau\in G_a$，由$a^{\sigma\cdot\tau}=(a^\sigma)^\tau=a^\tau=a$得$\sigma\tau\in G_a$，所以$G_a$是$G$的一个子群。

设σ，$\tau\in G$，如果，$\sigma\in G_a$，则$(a^\tau)^\sigma=a^\tau\Rightarrow a^{\tau\sigma\tau^{-1}}=a\Rightarrow\tau\sigma\tau^{-1}\in G_a\Rightarrow\sigma\in\tau^{-1}G_a\tau$，故$G_a{}^\tau\subseteq\tau^{-1}G_a\tau$。将上面推导过程逆推回去可得$\tau^{-1}G_a\tau\subseteq G_a{}^\tau$，所以$G_a{}^\tau=\tau^{-1}G_a\tau$。

1·6·3 定理　设p是素数，在p个文字上的可迁群G的不变子群$H\neq\{e\}$，仍是p次可迁群。

证明　设$\{1，2，\cdots，k\}$为 H 的一个可迁区。因为$H\neq\{e\}$，故$k>1$，于是这k个数字中每个数字在H的作用下变成为另一个数字，而除这 k 个数字外，其它数字不能再为这k个数字的象。现在令j为任一数字，因为 G 是可迁的，故有一个置换$\sigma\in G$使$1^\sigma=j$。由$\sigma^{-1}H\sigma=H$知$j^H=j^{\sigma^{-1}H\sigma}=1^{H\sigma}$。但由于 1 在$H$的作用下变为从1到$k$的全部数字，故

$$1^{H\sigma}=\{1^\sigma，2^\sigma，\cdots，k^\sigma\}$$

因此，j会在这k个数字的某一个可迁区里，故知$k\mid p$。但是p是素数，而$k>1$，故$k=p$，所以H是p次可迁的。

最后我们证明第四章将要用到的一个定理。

1·6·4 定理　设p是素数，G是p次可迁群，且G含有一个对换，则$G=S_p$。

证明　设$(a_1a_2)\in G$，命(a_1a_2)，(a_1a_3)，…，(a_1a_i)是

G 中所有含 a_1 的对换，并命 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_l\}$，由于 $(a_1a_2)\in G$，故 $l>1$。

首先证明 $l=p$。若 $l<p$，则存在 $b_1\in\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$，而 $b_1\notin A$。因 G 可迁，故存在 $\alpha\in G$，$a_1^{\alpha}=b_1$。设

$$\alpha=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\cdots a_l & u_1 & u_2\cdots u_{p-l} \\ b_1 & b_2\cdots b_l & v_1 & v_2\cdots v_{p-l} \end{pmatrix}$$

命 $B=\{b_1, b_2, \cdots, b_l\}$ ($b_1b_2, \cdots, b_l$ 互异)，则 $A\cap B=\phi'$。这是由于 $b_1\notin A$，若 $b_i\in A(2\leqslant i\leqslant l)$ 则 $(a_1b_i)\in G$，由此得

$$(a_1b_i)\alpha^{-1}(a_1a_i)\alpha(a_1b_i)=(a_1b_1)\in G.\quad 矛盾.$$

集合 $A\cup B$ 含有 $2l$ 个不同数字，又皆在 $\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$ 中，故 $2l\leqslant p$。但 p 为素数，且 $l>1$，故只能是 $2l<p$，即 $A\cup B\neq\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$。

任取 $c_1\notin A\cup B$，$c_1\in\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$。因 G 可迁，故存在 $\beta\in G$，$a_1^{\beta}=c_1$，设

$$\beta=\begin{pmatrix} a_1 & a_2\cdots a_l & s_1 & s_2\cdots s_{p-l} \\ c_1 & c_2\cdots c_l & t_1 & t_2\cdots t_{p-l} \end{pmatrix}$$

命 $C=\{c_1, c_2, \cdots, c_l\}$ ($c_1, c_2, \cdots c_l$ 互异)。与前面证明类似，知 $A\cap C=\phi$，并且，可证明 $B\cap C=\phi$。因为已经知道 $c_1\notin B$，假定有 $c_i\in B$，$2\leqslant i\leqslant l$。设 $c_i=b_j$，则 $a_i^{\beta\alpha^{-1}}=c_i^{\alpha^{-1}}=b_j^{\alpha^{-1}}=a_j$，若 $\beta\alpha^{-1}$ 变 a_1 为不属于 A 的数字，则 $\beta\alpha^{-1}$ 必然把 a_i 变为不属于 A 的数字(证明与前面第一步类似)，矛盾。故 $a_1^{\beta\alpha^{-1}}=a_k\in A$，因之 $a_1^{(\beta\alpha^{-1})\alpha}=a_k^{\alpha}=b_k$。又 $a_1^{(\beta\alpha^{-1})\alpha}=a_1^{\beta}=c_1$，于是 $c_1=b_k\in B$，与 c_1 的取法不合，$B\cap C=\phi$。于是 $A\cup B\cup C$ 含有 $3l$ 个不同数字，同样有 $3l<p$。如此下去，得 $4l<p$，$5l<p$，…，这是不可能的。故 $l=p$。

其次，可证 G 含有任一对换。

由于$l=p$，知$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_p\}$，于是知$(a_1a_2)$，$(a_1a_3)$，$\cdots$，$(a_1a_p)\in G$.因之

$$(a_ia_j)=(a_1a_i)(a_1a_j)(a_1a_i)\in G$$

这样G含有任一对换，但又知S_p由对换生成，所以，$G=S_p$。

习　题

1．设G是S_n的一个子群，并且对于任意 a_j，存在 $\alpha\in G$，使得 $a_1^{\alpha}=a_j$.证明：G是可迁群。

2．假如G是m次可迁群，G的阶为n，试证m整除n。

第二章 域、扩域

伽罗华理论是利用群论的方法来研究代数方程的根号解，而要研究代数方程的根号解，不仅需要群论的有关内容，而且还需要对域作进一步的研究。这一章主要讨论域的基本概念、扩域、有限扩域、代数扩域、多项式的分裂域和有限域等。

§2·1 域的基本概念

2·1·1 定义 设R是一个具有叫做加法和乘法的两个代数运算的集合，如果

1）R对于加法作成交换群(通常称为加群)

2）R的乘法满足结合律：

$$(ab)c=a(bc),\ \forall a,\ b,\ c\in R$$

3）乘法关于加法满足两个分配律

$$\left.\begin{aligned}a(b+c)&=ab+ac\\(b+c)a&=ba+ca\end{aligned}\right\}\quad\forall a,\ b,\ c\in R$$

那么称R对于所给的加法和乘法作成一个环。

如果R对乘法还满足交换律：

$$ab=ba,\ \forall a,\ b\in R$$

则称R为交换环

如果R中有一个元e对于任意$a\in R$都有

$$ae=ea=a$$

则称e为R的单位元。容易证明一个环R如果有单位元，那么单位元是唯一的。环的单位元记为1。

2·1·2 定义　环R的一个非空子集I叫做一个理想子环，简称理想，如果

1）若a，$b\in I$，则$a-b\in I$，

2）若$a\in I$，$r\in R$，则ra，$ar\in I$。

如果R是一个有单位元1的交换环，在R中任取元a，那么一切ra，$(r\in R)$所组成的集合

$$I=\{ra|r\in R\}$$

作成R的一个理想，记为$I=(a)$，称为由a生成的主理想。

2·1·3 定义　交换环R称为整环，如果R具有单位元并且没有零因子。

例1　整数环Z是一个整环。

例2　域F上一元多项式环$F[x]$是一个整环。

2·1·4 定义　如果一个整环F的每一个非零元都有逆元，则称F是一个域。

由此定义可以看出来，域F对加法来说作成一个加群，所有非零元的集合F^*对乘法来说作成一个可换群。加法和乘法被分配律联系着。

例3　设p是素数，用Z_p表示整数模p的剩余类所组成的集合：

$$Z_p=\{\overline{0},\ \overline{1},\ \cdots,\ \overline{p-1}\}$$

那么Z_p对剩余类的加法和乘法作成一个域，其加法表和乘法表如下：

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\cdots$	$\overline{p-1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\cdots$	$\overline{p-1}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\cdots$	$\overline{0}$
$\overline{2}$	$\overline{2}$	$\overline{3}$	$\overline{4}$	$\cdots$	$\overline{1}$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\overline{p-1}$	$\overline{p-1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\cdots$	$\overline{p-2}$

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\cdots$	$\overline{p-1}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\cdots$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{2}$	$\cdots$	$\overline{p-1}$
$\overline{2}$	$\overline{0}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$	$\cdots$	$\overline{p-2}$
$\vdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$	$\cdots$
$\overline{p-1}$	$\overline{0}$	$\overline{p-1}$	$\overline{p-2}$	$\cdots$	$\overline{1}$

例4　令$F[x]$表示域F上的一元多项式环，$p(x)$为$F[x]$中一个不可约多项式，令$E=F[x]/(p(x))$，而E中每个元具有形式：$\overline{f(x)}=f(x)+(p(x))$，则$E$对于如下定义的加法和乘法

$$\overline{f(x)}+\overline{g(x)}=\overline{f(x)+g(x)},\qquad \forall \overline{f(x)},\ \overline{g(x)}\in E,$$
$$\overline{f(x)}\ \overline{g(x)}=\overline{f(x)g(x)},$$

作成一个域。

容易验证E对于加法和乘法作成一个整环。因此欲证E是一个域只需证明E中非零元有逆元。事实上，任意取$\overline{f(x)}\in E$，并且$\overline{f(x)}\neq\overline{0}$，即$p(x)\nmid f(x)$，由于$p(x)$是不可约多项式，所以$(f(x),\ p(x))=1$，于是在$F[x]$中存在$u(x)$，$v(x)$，使得

$$f(x)u(x)+p(x)v(x)=1$$

即

$$f(x)u(x)=1-p(x)v(x)$$

由此可得

$$\overline{f(x)}\ \overline{u(x)}=\overline{1}$$

即

$$\overline{f(x)}^{-1}=\overline{u(x)}$$

所以E中非零元都有逆元，故E是一个域。

2·1·5 定义　如果域E的一个非空子集F对于E的加法和乘法作成一个域，则称F为E的一个子域。

如果F是域E的子域，称E是F的一个扩域，记为E/F。

任意域都有子域，因为自身是一个子域。一个域除去自身之外，如果还有子域的话，则称其为真子域。

如何判别子域，我们有

2·1·6 定理　设F是域E的一个子集，F含有非零元。F是E的子域的充分必要条件是

1）若$a, b\in F$，则$a-b\in F$；

2）若$a, b\in F$，且$b\neq 0$，则$ab^{-1}\in F$。

由此即得

2·1·7 定理　设E为域，F表示E的一切子域的交，则F是E的一个子域。

易见，这个子域不含真子域，事实上若F含有子域F_1，则F_1也是E的子域，由F的构成知$F_1\supseteq F$，这与F_1是F的真子域矛盾，所以F不含真子域。

2·1·8 定义　不含真子域的域称为素域。

例如有理数域Q为素域。

为了研究素域的类型，我们介绍域的特征，为此我们先证明

2·1·9 定理　任意域F的非零元在加群中有相同的阶。

证明　如果F的非零元在加群中都是无限阶元，定理成立。假设F的某一个非零元a的阶为n，在F中任取非零元b，则有

$$\begin{aligned}(na)b&=(a+a+\cdots+a)b=ab+\cdots+ab\\&=a(b+b+\cdots+b)=a(nb)\end{aligned}$$

由于 $na=0$ 可得 $a(nb)=(na)b=0$。又因为 $a\neq 0$，所以 $nb=0$，b的阶$\leqslant a$的阶n，同理可证a的阶$\leqslant b$的阶，所以b的阶$=n$。

由以上定理我们知道，域的所有非零元在加群中的阶都等于域的单位元 1 在加群中的阶。

2·1·10 定义　域F的单位元 1 在F的加群中的阶称 F 的特征，记为$\mathrm{char}F$。

设F是域E的子域，由F与E有相同的单位元和零元，所以我们有

2·1·11 定理　如果F是域E的子域，则有 $\mathrm{char}F=\mathrm{char}E$。

2·1·12 定理　域F的特征或为∞，或为素数。

证明　若F的单位元 1 在加群中的阶是无限，则$\mathrm{char}F=\infty$。

若$\mathrm{char}F=p$，p为有限正整数.如果p是合数，则$p=mn$，$1<m<p$，$1<n<p$，于是

$$0=p1=(mn)1=(m1)(n1)$$

因而$m1=0$或$n1=0$，这与域的特征的定义矛盾。所以p 是素数。

显然，任何数域的特征皆为∞，Z_p的特征为p。

2·1·13 定义　设F和$\overline{F}$是两个域，映射σ：$F\to\overline{F}$ 称为同构映射，如果

1）σ是满单射；

2）$(a+b)^\sigma=a^\sigma+b^\sigma$，$(ab)^\sigma=a^\sigma b^\sigma$，$\forall a$，$b\in F$。

如果$\overline{F}=F$则称σ是域F的自同构。

为了方便，我们把域的同构映射的符号写在a的右上角，即用a^σ以代替$\sigma(a)$。

设F是一个域，由2·1·7和2·1·8可知，域F必含有一个素域Δ。又由2·1·11，$\mathrm{char}\Delta=\mathrm{char}F$，而$\mathrm{char}F$或为$\infty$，或为素数。我们将看到，$\Delta$的结构完全决定于它的特征。下面分别加以讨论。

（i）当$\mathrm{char}\Delta=\infty$时，令

$$\Delta_1=\{(n1)(m1)^{-1}\mid m,\ n\in Z,\ 1\text{是}\Delta\text{的单位元}\}$$

利用2·1·6可以证明Δ_1是Δ的一个子域，但是Δ是素域，所以$\Delta_1=\Delta$。如果我们定义映射

$$\sigma:\ Q\longrightarrow\Delta$$

$$\frac{n}{m}\longmapsto(n1)(m1)^{-1},\ m\neq 0\qquad\forall\frac{n}{m}\in Q$$

可以验证σ是一个同构映射，即$Q\cong\Delta$。

（ii）当$\mathrm{char}\Delta=p$时，令

$$\Delta_1=\{0=p\cdot 1,\ 1,\ 2\cdot 1,\ \cdots,\ (p-1)\cdot 1\}$$

这里1为Δ的单位元。易证Δ_1是Δ的一个子域，从而$\Delta_1=\Delta$，我们定义映射

$$\tau:\ Z_p\longrightarrow\Delta$$

$$\bar{i}\longmapsto i\cdot 1,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ p.$$

可以验证τ是一个同构映射，即$Z_p\cong\Delta$。

总结以上讨论，我们可以得到

2·1·14 **定理** 设F是一个域，那么

1）若$\mathrm{char}F=\infty$，则F包含一个与有理数域同构的素域；

2）若$\mathrm{char}F=p$，则F包含一个与Z_p同构的素域。

最后，我们简要地介绍一下整环的商域。

设R是一个整环，作集合

$$A=\{(a,\ b)\mid a,\ b\in R,\ \text{且}b\neq 0\}$$

在A中定义关系～如下：

$$(a, b)\sim(c, d)\Leftrightarrow ad=bc$$

可以证明，“～”满足

1° 反身性：$(a, b)\sim(a, b)$

2° 对称性：若$(a, b)\sim(c, d)$，则$(c, d)\sim(a, b)$

3° 传递性：若$(a, b)\sim(c, d)$，$(c, d)\sim(e, f)$，则

$$(a, b)\sim(e, f)$$

事实上1° 和2° 显然成立，只需证3°。如果$(a, b)\sim(c, d)$，$(c, d)\sim(e, f)$，那么$ad=bc$，$cf=de$，于是$adf=bcf=bde$，$(af-be)d=0$，因为R中无零因子，而$d\neq 0$，所以$af=be$，$(a, b)\sim(e, f)$，因此～是一个等价关系。

这样，由等价关系～，将A分成若干个等价类，所有等价类作成一集合，记为F。今以$\frac{a}{b}$表示(a, b)所在的类。

在F中定义加法和乘法：

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{ad+bc}{bd}$$

$$\frac{a}{b}\ \frac{c}{d}=\frac{ac}{bd}$$

首先，由于(a, b)，$(c, d)\in A$，$b\neq 0$，$d\neq 0$，所以$bd\neq 0$，又$ad+bc\in R$，$ac\in R$，因而$(ad+bc, bd)$，$(ac, bd)\in A$。所以上两式右端属于F。

其次证明这样定义是良好的，即与代表选择无关。

设$(a_1, b_1)\sim(a, b)$，$(c_1, d_1)\sim(c, d)$，则$a_1b=b_1a$，$c_1d=d_1c$，于是$a_1bd_1d=b_1ad_1d$，$c_1db_1b=d_1cb_1b$，将此两式相加得

$$a_1bd_1d+c_1db_1b=b_1ad_1d+d_1cb_1b$$

或

$$(a_1d_1 + c_1b_1)bd = b_1d_1(ad + bc)$$

所以

$$(a_1d_1 + c_1b_1, b_1d_1) \sim (ad + bc,\ bd)$$

即

$$\frac{a_1}{b_1} + \frac{c_1}{d_1} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}.$$

类似地可证

$$\frac{a_1}{b_1}\ \frac{c_1}{d_1} = \frac{a}{b}\ \ \frac{c}{d}.$$

F对于加法作成加群：

1) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$.

2) 因$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \frac{a}{b} + \frac{cf + de}{df} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}$

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{ad + bc}{bd} + \frac{e}{f} = \frac{adf + bcf + bde}{bdf}$$

故$\frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right) = \left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f}$.

3) $\frac{0}{b} + \frac{c}{d} = \frac{bc}{bd} = \frac{c}{d}$.

4) $\frac{a}{b} + \frac{-a}{b} = \frac{0}{b}$.

F^*作成一个交换群：

5) 乘法满足交换律和结合律。

6) $\frac{a}{a}$是单位元。

7) $\frac{a}{b}(a\neq 0)$的逆元是$\frac{b}{a}$。

易验证乘法对加法适合分配律。

这样，F作成一个域。

在$\frac{ac}{c}=a(c\neq 0)$的假定下(这样的假定是合理的)，域F含有R作为其自己的子环，同样在$\frac{c}{bc}=b^{-1}(c\neq 0)$的假定下，域$F$是含有$R$的最小域。

按照以上方法所得到的域F称为整环R的商域。于是有

2·1·15 定理　任何整环必存在一个商域。

例 5　有理数域Q是整数环Z的商域。

例 6　设F是域，$F[x]$是整环，则$F[x]$也存在一个商域，称为一元有理分式域，记为$F(x)$，且有

$$F(x)=\left\{\frac{f(x)}{g(x)}\middle|\ f(x),\ g(x)\in F[x],\ g(x)\neq 0\right\}$$

例 7　设F是域，$F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$是整环，则$F[x_1, x_2, \cdots, x_n]$也存在一个商域，称为n元有理分式域，记为$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$，且有

$$F(x_1, \cdots, x_n)=\left\{\frac{f(x_1, \cdots, x_n)}{g(x_1, \cdots, x_n)}\middle|\ f(x_1, \cdots, x_n),\ g(x_1, \cdots, x_n)\in F[x_1, \cdots, x_n], g(x_1, \cdots, x_n)\neq 0\right\}$$

以上两例中的“有理”二字指的是分子分母都是多项式。

习　题

1．令Δ是素域，$\mathrm{char}\Delta=\infty$，设$\Delta_1=\{(n1)(m1)^{-1}|m,\ n\in Z,\ m\neq 0$，1是$\Delta$的单位元$\}$，证明$\Delta_1$是$\Delta$的子域．

2．证明2.1.7定理．

3．在特征为p的域中，证明

1) $(a+b)^p=a^p+b^p$；

2) $(a-b)^p=a^p-b^p$

4．在Z_{11}中，计算

1) $\overline{3}\times\overline{6}-\overline{4}\times\overline{8}$；

2) $\overline{2}\times\overline{3}^{-1}+\overline{5}\times\overline{7}^{-1}$．

5．证明下列数集作成域：

1) $F=\{a+b\sqrt{3}|a,\ b\in Q\}$；

2) $F=\{a+bi|a,\ b\in Q,\ i^2=-1\}$．

§2·2　有限扩域、代数扩域

从本节开始，我们主要研究代数扩域的结构，特别是有限扩域的结构．

首先介绍扩域的次数．

设E是F的一个扩域，那么对于E的加法和$F\times E$到E的纯量乘法，E作成F上的一个向量空间，于是E作为F上的向量空间就有维数的概念，我们有

2·2·1 定义　如果域F的一个扩域E作成F上的向量空间有有限维数n(n为正整数)，那么n叫做扩域E在F上的次数，记作$[E:F]$，这时E叫做域F的有限扩域，否则E叫做域F的一个无限扩域．

例1　设

$$F=\{a+b\sqrt{2}\mid a,\ b\in Q\}$$

那么F属于实数域R，容易证明F是R的一个子域，并且F是Q的一个扩域。由于F中任意元可以表为

$$a1+b\sqrt{2}$$

进一步，可以证明$1,\sqrt{2}$在Q上线性无关.事实上，假设

$$a1+b\sqrt{2}=0$$

这里$a,\ b\in Q$。今断言$b=0$，假如$b\neq 0$，则有$\sqrt{2}=-\frac{a}{b}$,而$-\frac{a}{b}$是有理数，这就导致矛盾。于是由$b=0$即得$a=0$。所以$1,\sqrt{2}$是F在Q上的一个基。故$[F:Q]=2$，即F是Q的二次扩域。

例2　设F如例1所述，令

$$E=\{(a+b\sqrt{2})+(c+d\sqrt{2})i\mid a,\ b,c,d\in Q,\ i^2=-1\}$$

易证E是复数域C的一个子域，且有

$$Q\subseteq F\subseteq E$$

可以证明$1,\ i$是E在F上的一个基，所以$[E:F]=2$。E也是Q的一个扩域，$1,\sqrt{2},\ i,\ \sqrt{2}i$是$E$在$Q$上的一个基，$[E:Q]=4$。于是

$$[E:Q]=[E:F][F:Q]$$

这个结论对任意有限扩域是否成立呢？回答是肯定的。

2·2·2 定理　设E是F的有限扩域，K是E的有限扩域，则K是F的有限扩域，且有

$$[K:F]=[K:E][E:F]$$

证明　设$[E:F]=m$，$[K:E]=n$，而$\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_m$是$E$在域$F$上的基，$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\ \beta_n$是$K$在域$E$上的基。今证

$$\alpha_i\beta_j,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

是K在域F上的基。任取$\alpha\in K$，则

$$\alpha=\sum_{j=1}^{n}b_j\beta_j,\ b_j\in E$$

同样 $b_j=\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\alpha_i \qquad j=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\quad a_{ij}\in F$。所以

$$\alpha=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\ \alpha_i\ \beta_j$$

即α可由$\alpha_1\beta_1,\ \cdots,\ \alpha_1\beta_n,\ \cdots,\ \alpha_m\beta_1,\ \cdots,\ \alpha_m\beta_n$线性表示。

现证$\alpha_1\beta_1,\ \cdots,\ \alpha_1\beta_n,\ \cdots,\ \alpha_m\beta_1,\ \cdots,\ \alpha_m\beta_n$在$F$上线性无关，假设

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\alpha_i\beta_j=0,\ a_{ij}\in F$$

上式可写为

$$\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\ \alpha_i\right)\beta_i=0,$$

$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\alpha_i\in E,\ j=1,\ \cdots,\ n$。由$\beta_1,\ \cdots,\ \beta_n$在$E$上线性无关，所以$\sum_{i=1}^{m}a_{ij}\alpha_i=0,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$。

又因为$\alpha_1,\ \cdots,\alpha_m$在$F$上线性无关，故

$$a_{ij}=0,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ m,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

从而$\alpha_1\beta_1,\ \cdots,\ \alpha_1\beta_n,\ \cdots\alpha_m\beta_1,\ \cdots,\ \alpha_m\beta_n$是$K$在$F$上的基，

于是，$[K:F]=mn$，即

$$[K:F]=[K:E][E:F]。$$

2·2·3 推论 令$F_0,\ F_1,\ \cdots,\ F_s$都是域且F_i是F_{i-1}的有限扩域，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ s$，则F_s是F_0的有限扩域，且有

$$〔F_s : F_0〕=〔F_s : F_{s-1}〕〔F_{s-1} : F_{s-2}〕\cdots〔F_1 : F_0〕.$$

设K是E的扩域，E是F的扩域，则称E是K和F的中间域。

2·2·4 推论 设K是F的扩域，$〔K : F〕=n$，E是K和F的中间域，则$〔E : F〕$是n的因子。

由2·2·4可知，当$〔K : F〕=n$是素数时，E是K和F的中间域，那么或者$E=K$或者$E=F$。

下面介绍单代数扩域的概念，它在代数扩域理论中占有很重要的地位。

设E是F的一个扩域，α是E的一个元。

2·2·5 定义 α称为F上的代数元，如果在$F〔x〕$中存在一个非零多项式$f(x)$使得$f(\alpha)=0$，否则称α为F上的超越元。

例3 设Q表示有理数域，由于$\sqrt{2}$是$Q〔x〕$中$f(x)=x^2-2$的一个根，所以$\sqrt{2}$是Q上的代数元。

例4 π是实数域R上的代数元，但不是Q上的代数元，这是因为π不是$Q〔x〕$中任何非零多项式的根。

由此可见，当我们说α是代数元还是超越元时，必须指明是在哪个域上。

如果α是域F上的代数元，那么在$F〔x〕$中存在一个多项式$f(x)$以α为根，从而在$F〔x〕$中有无穷个多项式以α为根。这无穷个多项式中必有一个次数最低者，我们有

2·2·6 定义 设α是域F上的一个代数元，$F〔x〕$中一个多项式$p(x)$称为α在F上的极小多项式，如果$p(x)$是首项系数为1并且$p(x)$是$F〔x〕$中以α为根的多项式中的次数最低者。

2·2·7 定理 设$p(x)$是α在域F上的极小多项式，那么

1) $p(x)$是$F〔x〕$中不可约多项式；

2）若$f(x)\in F[x]$，且$f(\alpha)=0$，则$p(x)|f(x)$；

3）$p(x)$是唯一的。

证明 1）由于$p(x)$是α的极小多项式，所以$p(x)\neq 0$且$\partial^\circ(p(x))\geqslant 1$。若$\partial^\circ(p(x))=1$，则$p(x)$显然不可约。若$\partial^\circ(p(x))>1$，假设$p(x)$可约，则$p(x)=p_1(x)p_2(x)$，$p_1(x)$，$p_2(x)$均为$F[x]$中的多项式，且$1\leqslant\partial^\circ(p_1(x))<\partial^\circ(p(x))$，$1\leqslant\partial^\circ(p_2(x))<\partial^\circ(p(x))$，由于$p(\alpha)=p_1(\alpha)p_2(\alpha)=0$，所以$p_1(\alpha)=0$，或$p_2(\alpha)=0$，这与$p(x)$是$\alpha$的极小多项式矛盾，故$p(x)$不可约。

2）$f(x)$，$p(x)\in F[x]$，且$p(x)\neq 0$，由多项式的带余除法可得

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

这里或者$r(x)=0$或者$0\leqslant\partial^\circ(r(x))<\partial^\circ(p(x))$。我们断言$r(x)=0$，如若不然，将$\alpha$代入上式得$r(\alpha)=0$，这是不可能的。所以$p(x)|f(x)$。

3）假设$p(x)$与$p_1(x)$都是α的极小多项式，由2)可得

$$p(x)|p_1(x),\ p_1(x)|p(x)$$

又因为$p(x)$与$p_1(x)$的首项系数都是1，所以$p_1(x)=p(x)$，即α的极小多项式是唯一的。

2·2·8 推论 设$p(x)$是$F[x]$中首项系数为1的不可约多项式，且$p(\alpha)=0$，则$p(x)$是α在F上的极小多项式。

证明 假设$p_1(x)$是α在$F[x]$中的极小多项式，由2·2·7，$p_1(x)|p(x)$，而$\partial^\circ(p_1(x))\geqslant 1$，$p(x)$不可约，且它们的首项系数都是1，所以$p(x)=p_1(x)$，从而$p(x)$是$\alpha$的极小多项式。

设E是域F的扩域，$\alpha\in E$并且α是F上的代数元，考虑E中包含F与α的子域，用$F(\alpha)$表示一切这样子域的交。于是$F(\alpha)$

也是E的一个子域，它是E中包含F和α的最小子域，因而$F(\alpha)$刚好包含一切形如下列的元素。

$$\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)} \tag{1}$$

这里$f(x)$，$g(x)\in F[x]$，且$g(\alpha)\neq 0$。一方面，因为$F(\alpha)$是包含F和α的一个子域，它必然含有一切形式为(1)的元，另一方面，E中一切可以表为形式(1)的元的集合作成一个包含F和α的子域。因此有

$$F(\alpha)=\left\{\frac{f(\alpha)}{g(\alpha)}\,\middle|\, f(x),\ g(x)\in F[x],\ g(\alpha)\neq 0\right\}$$

我们称$F(\alpha)$为在F上添加α得到的扩域(扩张)。

2·2·9 定义 添加一个代数元α于域F所得的扩域$F(\alpha)$叫做F的一个单代数扩域(扩张)。

下面我们研究单代数扩域的存在性和结构。首先介绍在单代数扩域的研究中起着非常重要作用的一个定理：

2·2·10 定理 设$p(x)$是$F[x]$中首项系数为1的不可约多项式，则$\overline{E}=F[x]/(p(x))$是一个域，并且在与$\overline{E}$同构的一个域中$p(x)$有根。反之设域L是域F的扩域，$p(x)$在L中有根α，则$F[\alpha]\cong F[x]/(px)$。

证明 由于$p(x)$是$F[x]$中不可约多项式，由§2·1的例4知道$\overline{E}$是一个域。

在自然同态

$$\pi:\ F[x]\longrightarrow F[x]/(p(x))$$

之下，令$F^{\pi}=\overline{F}$，于是，映射

$$\pi|_F:\ F\longrightarrow\overline{F}$$
$$a\longmapsto\overline{a}$$

是满射，又因为如果$\overline{a}=\overline{b}$，即$p(x)|a-b$，则有$a=b$，所以$\pi|_F$是单射，$\pi|_F$显然保持运算，即

$$\overline{a+b}=\overline{a}+\overline{b},\ \overline{ab}=\overline{a}\ \overline{b}$$

所以 $F\cong\overline{F}$

显然 $F\cap\overline{E}=\phi$，今作一集合E：

$$E=(\overline{E}\setminus\overline{F})\cup F$$

这里$\overline{E}\setminus\overline{F}$表示$\overline{F}$在$\overline{E}$中的补集。我们定义

$$\varphi:\ E\longrightarrow\overline{E}$$

$$f\longmapsto\overline{f}=\begin{cases}f & \text{若 } f\in\overline{E}\setminus\overline{F}\\ \overline{f} & \text{若 } f\in F\end{cases},\quad\forall f\in E$$

由于 $F\cong\overline{F}$ 且 $F\cap\overline{E}=\phi$，所以φ是满单射。

在E中我们如下规定加法和乘法运算：

$f+e=h$，如果$\overline{f}+\overline{e}=\overline{h}$；

$fe=h$，如果$\overline{f}\ \overline{e}=\overline{h}$。

于是有

$$(f+e)^\varphi=h^\varphi=f^\varphi+e^\varphi,\ (fe)^\varphi=h^\varphi=f^\varphi e^\varphi$$

因此 $E\cong\overline{E}$

令α是$\overline{x}$在φ之下的原象，设

$$p(\alpha)=\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_0$$

因为$\overline{p(x)}=\overline{0}$，即

$$\overline{x}^n+\overline{a}_{n-1}\overline{x}^{n-1}+\cdots+\overline{a}_0=\overline{0}$$

这里$\overline{a}_0$，…，$\overline{a}_{n-1}\in\overline{F}$，于是有

$$\alpha^n + a_{n-1}\alpha^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

即$p(\alpha)=0$，而$\alpha\in E$.

设L是F的扩域，$\alpha\in L$，且$p(\alpha)=0$，由2·2·8知$p(x)$是α在F上的极小多项式，定义映射

$$\varphi:\ F[x]\longrightarrow L$$

$$f(x)\longmapsto f(\alpha)$$

显然φ是从$F[x]$到$F[\alpha]\subseteq L$ 的同态映射，由环的同态基本定理可得

$$F[\alpha]\cong F[x]/I$$

这里$I=\{f(x)\in F[x]\mid f(\alpha)=0\}$. 由 2·2·7，任取$f(x)\in I$，都有$p(x)\mid f(x)$，所以$I=(p(x))$，即得

$$F[\alpha]\cong F[x]/(p(x)).$$

由以上的证明，可以把 $F[\alpha]$ 的结构说得更具体一些. 令$\partial^\circ(p(x))=n$，任取$f(\alpha)\in F[\alpha]$，则有 $f(x)\in F[x]$，根据多项式的带余除法，

$$f(x)=p(x)q(x)+r(x)$$

这里 $r(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$. 由于$p(\alpha)=0$，于是

$$f(\alpha)=a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$$

即$F[\alpha]$中每个元都可以表成$1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}$的线性组合. 我们还可以证明$1,\alpha,\cdots,\alpha^{n-1}$在$F$上必线性无关.事实上，假设在$F$中有不全为零的元$a_0,a_1,\cdots,a_{n-1}$，使得

$$a_0 1+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}=0,$$

即在$F[x]$中有非零多项式

$$g(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_{n-1}x^{n-1}$$

以 α 为根，则$p(x)\mid g(x)$，而 $\partial^\circ(g(x))<\partial^\circ(p(x))$，所以 $g(x)=0$，即$a_0=a_1=\cdots=a_{n-1}=0$，这就导致矛盾，所以

$1, \alpha, \cdots \alpha^{n-1}$在$F$上线性无关. 因而, $f(\alpha)$可以唯一地表为$1, \alpha, \cdots, \alpha^{n-1}$的线性组合.

2·2·11 推论 设F是一个域, α是F上的代数元, $p(x)$是α在F上的极小多项式, 且$\partial^\circ(p(x))=n$, 那么

1) $F[\alpha]$中每个元可以唯一地表为

$$a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$$

这里$a_i\in F$, $i=0, 1, 2, \cdots, n-1$.

2) $F[\alpha]$中运算法则如下:

(i) 设$f(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^i$, $g(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1}b_i\alpha^i$, 则

$$f(\alpha)+g(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1}(a_i+b_i)\alpha^i;$$

(ii) 设$f(\alpha)$, $g(\alpha)\in F[\alpha]$, $f(x)g(x)=p(x)q(x)+r(x)$, 则$f(\alpha)g(\alpha)=r(\alpha)$;

(iii) 设$f(\alpha)=\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^i\neq 0$, 当$f(\alpha)\in F$, 则$f(\alpha)^{-1}=1/f(\alpha)$.

当$f(\alpha)\notin F$, $\partial^\circ(f(x))\geqslant 1$, 存在$u(x), v(x)\in F[x]$使得

$f(x)u(x)+p(x)v(x)=1$, 且$\partial^\circ(u(x))<\partial^\circ(p(x))$,

$\partial^\circ(v(x))<\partial^\circ(f(x))$, 则$f(\alpha)^{-1}=u(\alpha)$.

2·2·12 推论 设α是域F上的代数元, 则$F(\alpha)=F[\alpha]$.

证明 由2·2·10, $F[\alpha]$是一个域, 而且$F[\alpha]$包含F和α, 从而$F[\alpha]\supseteq F(\alpha)$. 又显然有$F(\alpha)\supseteq F[\alpha]$, 所以

$$F(\alpha)=F[\alpha].$$

由2·2·11立得

2·2·13 推论 设α是域F上的代数元, α在F上的极小多项式为$p(x)$, 且$\partial^\circ(p(x))=n$, 则

1）$F(\alpha)$中每个元可以唯一地表为

$$a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$$

这里$a_i\in F$，$i=0$，1，…，$n-1$。1，α，…，α^{n-1}称为$F(\alpha)$在F上的通常基。

2）$[F(\alpha):F]=\partial^\circ(p(x))$

2·2·14 定理 设$F(\alpha)$和$F(\beta)$是域F上两个单代数扩域，并且α和β在F上有相同的极小多项式$p(x)$，那么$F(\alpha)\cong F(\beta)$。

证明 设$\partial^\circ(p(x))=n$，那么$F(\alpha)$的元可唯一地表为

$$\sum_{i=1}^{n-1}a_i\alpha^i \qquad a_i\in F,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$$

$F(\beta)$的元可唯一地表为

$$\sum_{i=1}^{n-1}a_i\beta^i \qquad a_i\in F,\ i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1。$$

定义

$$\varphi:\ F(\alpha)\longrightarrow F(\beta)$$

$$\sum_{i=0}^{n-1}a_i\alpha^i\longmapsto\sum_{i=0}^{n-1}a_i\beta^i$$

由2·2·11容易验证φ是一个同构映射，即

$$F(\alpha)\cong F(\beta)。$$

由以上讨论自然想到这样一个问题：$F(\alpha)$是单代数扩域，F中的元当然是F上的代数元，α也是F上的代数元，那么$F(\alpha)$中除去F和α外，其余的元是否为F上的代数元呢？为了回答这个问题，需要引入以下概念。

2·2·15 定义 设E是域F的扩域，如果E的每一个元都是F上的代数元，那么E叫做F的一个代数扩域(扩张)。

2·2·16 定理 如果E是F的有限扩域，那么E是F的代数

扩域。

证明　设$[E:F]=n$，任取$\alpha\in E$，则

$$1,\ \alpha,\ \alpha^2,\ \cdots,\ \alpha^n$$

必在F上线性相关，即F中存在不完全为零的元a_0，a_1，$\cdots$，a_n使得

$$a_0+a_1\alpha+\cdots+a_n\alpha^n=0$$

即α是$F[x]$中非零多项式

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

的根，从而α是F上的代数元，所以E是F的代数扩域。

由2·2·13立得

2·2·17 推论　域F的单代数扩域$F(\alpha)$是F的代数扩域。

既然在域F上添加一个代数元α_1得到的单代数扩域$F(\alpha_1)$是代数扩域，那么在$F(\alpha_1)$上再添加$F(\alpha_1)$上的代数元α_2得到$F(\alpha_1)$上的单代数扩域$F(\alpha_1)(\alpha_2)$。由于$[F(\alpha_1):F]$与$[F(\alpha_1)(\alpha_2):F(\alpha_1)]$皆有限，故$[F(\alpha_1)(\alpha_2):F]$有限，$F(\alpha_1)(\alpha_2)$是$F$的代数扩域，从而$\alpha_2$是$F$上的代数元，对于$F(\alpha_2)(\alpha_1)$也可以作同样的讨论，自然想到，$F(\alpha_1)(\alpha_2)$与$F(\alpha_2)(\alpha_1)$有什么关系？

设扩域E/F，α_1，α_2是F上的代数元，α_1，$\alpha_2\in E$，令$F(\alpha_1,\ \alpha_2)$表示E中包含F和α_1，α_2的最小子域，于是

$$F(\alpha_1,\ \alpha_2)=\left\{\frac{f(\alpha_1,\alpha_2)}{g(\alpha_1,\alpha_2)}\ \middle|\ f(x_1,\ x_2),\ g(x_1,\ x_2)\in F[x_1,\ x_2],\ g(\alpha_1,\ \alpha_2)\neq 0\right\}$$

由于$F(\alpha_1)(\alpha_2)$是包含F，α_1，α_2的域，而$F(\alpha_1,\ \alpha_2)$是包含F,α_1,α_2的最小子域，于是$F(\alpha_1)(\alpha_2)\supseteq F(\alpha_1,\ \alpha_2)$，又因为$F(\alpha_1,\ \alpha_2)$是包含$F(\alpha_1)$与$\alpha_2$的域而$F(\alpha_1)(\alpha_2)$是包含

$F(\alpha_1)$，α_2的最小子域，所以$F(\alpha_1, \alpha_2) \supseteq F(\alpha_1)(\alpha_2)$，这样就得到$F(\alpha_1, \alpha_2) = F(\alpha_1)(\alpha_2)$，同理可得

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = F(\alpha_2)(\alpha_1)$$，于是

$$F(\alpha_1, \alpha_2) = F(\alpha_1)(\alpha_2) = F(\alpha_2, \alpha_1)$$

推广这个结果可得

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = F(\alpha_{i_1})(\alpha_{i_2})\cdots(\alpha_{i_n})$$

这里$i_1, i_2, \cdots, i_n$是1，2，$\cdots$，n的一个排列，而

$$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) = \left\{ \frac{f(\alpha_1, \alpha_2, \cdots \alpha_n)}{g(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)} \middle| \right.$$

$$\left. f(x_1, x_2, \cdots, x_n), g(x_1, \cdots, x_n) \in F[x_1, \cdots, x_n] \right\}$$

$$g(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \neq 0$$

由以上讨论，利用2·2·3可得

2·2·18 定理 设F是域，α_1是F上的代数元，而α_i是$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1})$上的代数元，$i = 2, \cdots, n$，则$\alpha_2, \cdots, \alpha_n$皆为$F$上的代数元，且$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是$F$的代数扩域。

2·2·19 推论 设F是域，α_1，α_2，$\cdots$，α_n是F上的代数元，则$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是$F$的有限扩域，因而是代数扩域。

上述结论，反过来也是正确的。

2·2·20 定理 设E是F的有限扩域，则E必是F的有限次添加代数元的扩域：$E = F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，$\alpha_i$都是$F$上的代数元。

证明 设$[E : F] = n$，α_1，α_2，$\cdots$，α_n是E在F上的基，显然$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n) \subseteq E$。任取$\alpha \in E$，则

$$\alpha = \sum_{i=1}^{n} a_i \alpha_i \in F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$，而$E \subseteq F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，

所以$E = F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$。

由2·2·19可得

2·2·21 定理 设α，β是域F上的代数元，则$\alpha\pm\beta,\alpha\beta$，$\alpha\beta^{-1}(\beta\neq0)$是$F$上的代数元。

由此可知，设E是域F的一个扩域，在E中F的全体代数元作成E的子域并且是F的代数扩域。例如有理数域Q上的在复数域C中全体代数元组成集合A作成C的一个子域。A中的每个元都是Q〔x〕中某个非零多项式的根。A是Q的代数扩域有趣的是A不是Q的有限扩域。事实上，$\sqrt[n]{2}\in A$，n为任意正整数，我们有 $Q\subseteq Q(\sqrt[n]{2})\subseteq A$,〔$Q\sqrt[n]{2}$ ：Q〕$=n$，而由n的任意性可知，A不是Q的有限扩域，即A是Q的无限扩域。这就是说，代数扩域是比有限扩域更广泛的一类扩域。但是代数扩域也有类似于2·2·3的性质，就是如下：

2·2·22 定理 设E是F的代数扩域，K是E的代数扩域，则K是F的代数扩域。

证明 设α是K中任意元，则α是E〔x〕中一个非零多项式$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$的根。由于$a_0$，$a_1$，…，$a_n\in E$，所以它们是$F$上的代数元，由2·2·18$F(a_0$，$a_1$，…，$a_n)$是$F$的有限扩域，从而$F(a_0$，$a_1$，…，$a_n)(\alpha)$是$F$的有限扩域，因此是$F$的代数扩域，$\alpha$是$F$上的代数元，即$K$中每个元都是$F$上的代数元，$E$是$F$的代数扩域。

习 题

1．试求[$Q(\sqrt{2})$：Q]，[$Q(\sqrt{2},\sqrt{3})$：Q]。并给出各扩域的一个基。

2．设K是Z_p的扩域，[K：Z_p]$=n$，试确定K所含元素的个数。

3．设Q是有理数域，α是 $f(x)=x^3-6x^2+9x+3$ 的实根，试求[$Q(\alpha)$：Q]，并将α^4，$3\alpha^5-\alpha^4+2$，$(\alpha+1)^{-1}$用$Q(\alpha)$在Q上的通常基表示出来。

4．设 E，F是域K的子域，$F\subseteq E$，且[K：E]$=$[K：F]，试证

$E \doteq F$.

5. 设E是F的有限扩域，$[E:F]=p$，p是素数，试证E是 F 的单代数扩域.

6. 设扩域E/F，$\alpha \in E$ 是 F 上的代数元并且次数是奇数（即$[F(\alpha):F]$为奇数），试证 α^2 也是 F 上的奇数次代数元，并且$F(\alpha)=F(\alpha^2)$.

7. 设扩域E/F，α，$\beta \in E$，α，β在F上分别是m次和 n 次代数元，试证

(1) $[K(\alpha, \beta):K] \leq mn$.

(2) 若$(m, n)=1$，则$[K(\alpha, \beta):K]=mn$.

8. 设扩域E/F，$\mathrm{char}F \neq 2$并且$[E:F]=4$. 试证存在一个满足条件$F \subset L \subset E$的F的二次扩域L的充分必要条件是$E=F(\alpha)$，而α在F 上的极小多项式是x^4+ax^2+b.

§2·3 多项式的分裂域

在有限扩域的研究中，除单代数扩域外，多项式的分裂域也特别重要.

让我们先看一个例子.

例 1　$f(x)=x^2-2$是$\mathbf{Q}[x]$ 中的一个多项式，因为$f(x)$在$\mathbf{Q}[x]$中不可约，所以$f(x)$在$\mathbf{Q}[x]$中不能完全分解，而$f(x)$在$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$中能分解为一次因式的乘积：

$$f(x)=x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$$

由于$[\mathbf{Q}(\sqrt{2}):\mathbf{Q}]=2$为素数，由2·2·4可知$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$与$\mathbf{Q}$之间的中间域只有它们自己，因此$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 没有真子域使得$f(x)$能分解为一次因式的乘积，也就是说$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$是使得$f(x)$能够分解为一次因式乘积的$\mathbf{Q}$ 的最小扩域，像这样的扩

域在$f(x)$的因式分解和求根中占有特殊的位置。

本节所谈及的多项式总假定首项系数为1，这是因为域上多项式的首项系数对多项式的因式分解和根都没有影响。

2·3·1 定义 设$f(x)$是$F[x]$中的一个n次多项式，域F的扩域E称为$f(x)$在F上的分裂域，如果$f(x)$在E中能分解成一次因式的乘积：

$$(1)\qquad f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),\ \alpha_i\in E$$

但在E的任一真子域中，$f(x)$不能分解成一次因式的乘积。

这里“分裂”的含义指的是，$f(x)$能在这个域中分解成一次因式的乘积。由例1我们可以看到，同一多项式看作不同域上的多项式时分裂域可能不同，如$f(x)=x^2-2$看作$R[x]$中多项式时，其分裂域就是R，而看作$Q[x]$中多项式时，其分裂域为$Q(\sqrt{2})$，因此在谈到多项式的分裂域时必须指明是在哪个域上的分裂域。另外，不能把分裂域与在其上能够完全分解的域等同起来，例如，虽然$Q[x]$中多项式$f(x)=x^2-2$在R中能够完全分解，但R不是$f(x)$的分裂域，因为R不是使得$f(x)$分解为一次因式的乘积的Q的最小扩域。

由多项式的分裂域定义我们看到$f(x)$的所有根α_1，α_2，…，α_n都包含在分裂域E中，于是

$$F\subseteq F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)\subseteq E$$

在$F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$上$f(x)$可以分解成(1)的形式，而$E$是使得$f(x)$能够分解成形式(1)的$F$的最小扩域，于是

$$E=F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n).$$

这样我们得到

2·3·2 定理 设E是域F上多项式$f(x)$的一个分裂域，令

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n),\ \alpha_i\in E$$

那么$E=F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$。

根据这个定理，如果域F上的多项式$f(x)$的分裂域E存在，那么E恰好是把$f(x)=0$所有根添加于F所得到的扩域。因此我们也把多项式的分裂域叫做方程$f(x)=0$的根域。

由2·3·2，如果E是$f(x)$在F上的分裂域，则E是F的有限扩域，从而是F的代数扩域。

下面我们证明一个多项式的分裂域的存在性，先通过一个例子加以说明。

例2 设$f(x)=x^4-5x^2+6$是$\mathbf{Q}[x]$中的多项式，求$f(x)$在$\mathbf{Q}$上的分裂域。

解 首先在$\mathbf{Q}[x]$中将$f(x)$分解为不可约多项式的乘积：

$$f(x)=(x^2-2)(x^2-3)$$

由于x^2-2，x^2-3在$\mathbf{Q}$中无根，所以它们都是$\mathbf{Q}[x]$中不可约多项式。根据2·2·10，存在$\mathbf{Q}$的单代数扩域$E=\mathbf{Q}(\alpha)\cong\mathbf{Q}[x]/(x^2-2)$，这里$E=\mathbf{Q}(\alpha)=\{a+b\alpha|a,\ b\in\mathbf{Q}\}$。$\alpha$是$x^2-2$的一个根，因而包含$x^2-2$的所有根。而$x^2-3$在$E[x]$中仍为不可约多项式。事实上，若$x^2-3$在$E[x]$中可约，则$x^2-3$在$E$中有根，设为$a+b\alpha$，$a$，$b\in\mathbf{Q}$。我们断言 a,b 全不为零（读者自证），于是$(a+b\alpha)^2-3=0$，经整理得

$$\alpha=\frac{3-a^2-2b^2}{2ab}$$

从而$\alpha\in\mathbf{Q}$，这与$\alpha\notin\mathbf{Q}$矛盾。因此x^2-3在E上不可约。再利用2·2·10，可作出E的单代数扩域L，$L=E(\beta)\cong E[x]/(x^2-3)$，这里$E(\beta)=\{(a+b\alpha)+(c+d\alpha)\beta|a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{Q}\}$，$\beta$是$x^2-3$的根；从而$L$包含$x^2-3$的两个根。于是$L$含$f(x)$的所有根，且$[L:\mathbf{Q}]=4$。由以上证明知，$L$是包含$f(x)$的

所有根的Q的最小扩域，L是$f(x)$在Q上的分裂域。

将例2的方法推广到一般情形，便得到

2·3·3 定理 设F是一个域。$F[x]$中任一$n(n\geqslant 1)$次多项式$f(x)$一定存在$f(x)$在F上的分裂域。

证明 当$n=1$时，F即是$f(x)$在F上的分裂域。

当$n\geqslant 2$时，首先把$f(x)$在$F[x]$中分解为不可约因式的乘积：

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$$

作F的单代数扩域$F(\alpha_1)$，使α_1在F上的极小多项式为$p_1(x)$。

在$F(\alpha_1)$上，把$f(x)$分解为不可约因式的乘积：

$$f(x)=(x-\alpha_1)\varphi_2(x)\cdots\varphi_s(x)$$

再作$F(\alpha_1)$的单代数扩域$F(\alpha_1)(\alpha_2)=F(\alpha_1,\ \alpha_2)$，使$\alpha_2$在$F(\alpha_1)$上的极小多项式是$\varphi_2(x)$。

按照这种方法逐步做下去，最后得到

$$E=F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$$

且多项式$f(x)$在E上能分解成一次因式的乘积：

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

由2·3·2知，E是$f(x)$在F上的一个分裂域。

2·3·3解决了域F上一个多项式的分裂域的存在性，但是一个多项式可能由于使用方法不同而得到不同的分裂域，那么它们在同构的意义下是否唯一呢？为了解决这个问题需要同构开拓的概念。

2·3·4 定义 设E和$\overline{E}$分别是域F和$\overline{F}$的两个扩张，σ是域F和$\overline{F}$间的同构映射。如果σ'是E与$\overline{E}$间的同构映射，使得

$$a^{\sigma'}=a^{\sigma},\ \forall a\in F$$

则σ'是σ的同构开拓。

设

$$\sigma: F \longrightarrow \overline{F}$$

$$a \longmapsto \overline{a}$$

是域F与$\overline{F}$间的同构映射. 设

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

是$F[x]$中多项式，那么$\overline{F}[x]$中多项式

$$\overline{f}(x)=\overline{a}_b x^n+\overline{a}_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\overline{a}_1 x+\overline{a}_0$$

称为$f(x)$在σ之下的对应多项式，而$f(x)$也称为$\overline{f}(x)$在σ之下的对应多项式.

容易验证，映射

$$f(x)\longmapsto \overline{f}(x),\ \forall f(x)\in F[x]$$

是$F[x]$与$\overline{F}[x]$间的同构映射. 此即

2·3·5 引理 设F，$\overline{F}$为域且$F\cong\overline{F}$，则

$$F[x]\cong\overline{F}[x].$$

2·3·6 定理 设F，$\overline{F}$为域且$F\cong\overline{F}$，$p(x)$是$F[x]$中不可约多项式，则$p(x)$对应多项式$\overline{p}(x)$为$\overline{F}[x]$中不可约多项式.又设$F(\alpha)$和$\overline{F}(\overline{\alpha})$分别是$F$和$\overline{F}$的单扩域，满足条件$p(\alpha)=0$和$\overline{p}(\overline{\alpha})=0$，则$F(\alpha)\cong\overline{F}(\overline{\alpha})$可以是$F\cong\overline{F}$的同构开拓，它将$\alpha$映为$\overline{\alpha}$.

证明 先证$\overline{p}(x)$在$\overline{F}[x]$中不可约. 事实上，假设$\overline{p}(x)$在$\overline{F}[x]$中是可约的：

$\overline{p}(x)=\overline{p_1}(x)\overline{p_2}(x)$，其中$\partial^\circ(\overline{p_1}(x))$，$\partial^\circ(\overline{p_2}(x))<\partial^\circ(\overline{p}(x))$，$\overline{p_1}(x)$与$\overline{p_2}(x)$在$\sigma$之下对应$F[x]$中多项式为

$p_1(x)$，$p_2(x)$，在$F[x]$中有

$p(x)=p_1(x)p_2(x)$，其中 $\partial^\circ(p_1(x))$，$\partial^\circ(p_2(x))<\partial^\circ(p(x))$。这与$p(x)$在$F[x]$中不可约矛盾。

假设σ：$F\longrightarrow\overline{F}$，$a\longmapsto\overline{a}$是$F$与$\overline{F}$间的同构映射。

设$\partial^\circ(p(x))=n$，则$\partial^\circ(\overline{p(x)})=n$。于是$F(\alpha)$中的元可唯一地表为

$$a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}$$

$\overline{F}(\overline{\alpha})$中的元可唯一地表为

$$\overline{a_0}+\overline{a_1}\,\overline{\alpha}+\cdots+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha}^{n-1}$$

定义

$$\sigma'：\ F(\alpha)\longrightarrow\overline{F}(\overline{\alpha})$$

$$a_0+a_1\alpha+\cdots+a_{n-1}\alpha^{n-1}\longmapsto\overline{a_0}+\overline{a_1}\alpha+\cdots+\overline{a_{n-1}}\,\overline{\alpha}^{n-1}$$

易证σ'是$F(\alpha)$与$\overline{F}(\overline{\alpha})$间的满单射。并且

(2) $\alpha^{\sigma'}=(0+1\alpha)^{\sigma'}=\overline{0}+\overline{1}\ \overline{\alpha}=\overline{\alpha}$。

(3) $a^{\sigma'}=\overline{a}=a^\sigma$，$\forall a\in F$。

又因为$F(\alpha)$与$\overline{F(\alpha)}$元素的运算，除了横线之外是完全一样的，因而σ'是$F(\alpha)$与$\overline{F}(\overline{\alpha})$间的同构映射，且由(3)，$\sigma'$是$\sigma$的一个同构开拓，且有$\alpha^{\sigma'}=\overline{\alpha}$。

2·3·7 定理 设F，$\overline{F}$是域，且有$F\cong\overline{F}$，$f(x)\in F[x]$，$\overline{f}(x)$是$\overline{F}[x]$中在σ之下与$f(x)$对应的多项式，则$f(x)$在F上的分裂域与$\overline{f}(x)$在$\overline{F}$上的分裂域同构，并且这个同构映射是σ的同构开拓。

证明 设$f(x)$在F上分解成不可约因式之积：

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_r(x)$$

如果在σ之下，$p_1(x)$，$p_2(x)$，…，$p_r(x)$分别对应$\overline{p_1}(x)$，$\overline{p_2}(x)$，…，$\overline{p_r}(x)$，则有

$$\overline{f}(x)=\overline{p_1}(x)\,\overline{p_2}(x)\cdots\overline{p_r}(x)$$

是$\overline{f}(x)$在$\overline{F}$上的不可约因式分解。不妨设α_1与$\overline{\alpha_1}$分别是$p_1(x)$与$\overline{p_1}(x)$的根，由2·3·6，σ可以开拓成$F(\alpha_1)$与$\overline{F}(\overline{\alpha_1})$的同构映射$\sigma_1$，并且有$\alpha_1{}^{\sigma_1}=\overline{\alpha_1}$

在$F(\alpha_1)$上的$f(x)$的不可约因式分解为

$$f(x)=(x-\alpha_1)\varphi_2(x)\cdots\varphi_s(x)$$

在σ_1之下，$\varphi_2(x),\cdots,\varphi_s(x)$分别对应$\overline{\varphi_2}(x)$，…，$\overline{\varphi_s}(x)$，则有

$$\overline{f}(x)=(x-\overline{\alpha_1})\,\overline{\varphi_2}(x)\cdots\overline{\varphi_s}(x)$$

是$\overline{f}(x)$在$\overline{F}(\overline{\alpha_1})$上的不可约因式分解。于是可令$\alpha_2$和$\overline{\alpha_2}$分别为$\varphi_2(x)$与$\overline{\varphi_2}(x)$的根。再由2·3·6，$F(\alpha_1)$与$\overline{F}(\overline{\alpha_1})$的同构映射$\sigma_1$可以开拓成$F(\alpha_1,\alpha_2)$与$\overline{F}(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2})$的同构映射$\sigma_2$，并且$\alpha_2{}^{\sigma_2}=\overline{\alpha_2}$。

如此继续下去，便得到σ的同构开拓σ'：

$$F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)\cong\overline{F}(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\cdots,\overline{\alpha_n})$$

并且$\alpha_i{}^{\sigma'}=\overline{\alpha_i}$，$i=1,2,\cdots,n$。

特别地，当$F=\overline{F}$，σ为恒等自同构时我们有

2·3·8 定理 $F[x]$中任一多项式$f(x)$在F上的任意两个分裂域都同构，且使F的元素保持不变。

习　题

1．设Q为有理数域，$f(x)=x^3-2$是$Q[x]$中的多项式，求$f(x)$在Q上的分裂域L和$[L:Q]$。

2．求证：域F上的一个n次多项式在F上的分裂域关于F的次数至多是$n!$。

3．设$f(x)=x^p-1$，p为素数，E为$f(x)$在Q上的分裂域，求证$[E:Q]=p-1$。

4．设$p_1(x)$，$p_2(x)$，$\cdots p_s(x)$是域F上s个首项系数为1的不可约多项式，求证存在F的有限扩域$F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s)$，其中$\alpha_i$在$F$上的极小多项式是$p_i(x)$，$i=1, 2, \cdots, s$。

§2·4 有限可分扩域的单纯性

本节我们利用一个多项式的分裂域理论研究一种特殊类型的有限扩域。关于有限扩域，§2·2给出一个很好的结果：E是域F的有限扩域，当且仅当$E=F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，其中$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$F$上的代数元。然而这类扩域的结构还远未解决，但是这类扩域的一种特殊情形，即单代数扩域的结构问题已经得到彻底解决。自然，我们会提出这样的问题：对于域F的一般的有限扩域E，能否选择一个适当的元素β，使得

$$E=F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)=F(\beta)$$

这样就可以使很多问题的研究简单化。我们还是先从一个具体问题谈起。

例如，在§2·3例2中，$f(x)=x^4-5x+6$在Q上的分裂域$L=Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$，不难看出

(1) $\quad Q\subseteq Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})\subseteq Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$。

如果令$x=\sqrt{2}+\sqrt{3}$，通过实际计算可得$x^4-10x^2+1=0$，即$\sqrt{2}+\sqrt{3}$是$Q[x]$中的多项式$p(x)=x^4-10x^2+1$的一个根。我们说$p(x)$是$Q[x]$中不可约多项式。事实上，多项式$p(x)$在$Q(\sqrt{2}, \sqrt{3})$中可以分解为$p(x)=(x-\sqrt{2}-$

$\sqrt{3})(x-\sqrt{2}+\sqrt{3})(x+\sqrt{2}-\sqrt{3})(x+\sqrt{2}+\sqrt{3})$，易见，$p(x)$的每一次因式及每次取两个因式的积都不是有理系数多项式，故$p(x)$是$\mathbf{Q}[x]$上不可约多项式。由2·2·8，$p(x)$为$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 在$\mathbf{Q}$上的极小多项式。$[\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3}):\mathbf{Q}]=4$，而由例2，$[L:\mathbf{Q}]=4$，再考虑到(1)，$L=\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$。也就是说，$\mathbf{Q}$的有限扩域$L=\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$是一个添加$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 于$\mathbf{Q}$的单代数扩域。

为了研究一般情形，我们引入如下概念。

2·4·1 定义 设E是F的一个代数扩域，$\alpha\in E$。如果α在F上的极小多项式没有重根，则称α是F上的一个可分元。如果E中每一个元都是F上的可分元，那么称E为F的一个可分扩域，否则称E为F的一个不可分扩域。

例1 $L=\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$是$\mathbf{Q}$的可分扩域。事实上$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$在$\mathbf{Q}$上的极小多项式分别为$x^2-2$和$x^2-3$，因为数域上的不可约多项式都没有重根(指在多项式的分裂域中)，所以x^2-2和x^2-3没有重根，故$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$都是$\mathbf{Q}$上的可分元。又$L=\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$中每个元都是$\mathbf{Q}$上的代数元，于是每一个元在$\mathbf{Q}$上都有一个极小多项式，并且每个极小多项式都没有重根，所以$L=\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$中每个元都是$\mathbf{Q}$上的可分元。故$L=\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$是$\mathbf{Q}$上的可分扩域。

由前面的讨论，$L=\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})=\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$，这个结论可否推广到一般情形，回答是肯定的。我们首先把数域上不可约多项式没有重根的结果加以推广。

2·4·2 定理 设F是一个域，$\mathrm{char}\,F=\infty$，$f(x)$是$F[x]$中的一个不可约多项式，则$f(x)$没有重根。

证明 $f(x)$有重根当且仅当$f(x)$与它的导数$f'(x)$在

$F[x]$中有次数$\geqslant 1$的公因式．由于 $f(x)$ 不可约，因此这个条件只有在$f'(x)=0$时才能被满足．设

$$f(x)=a_n x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1 x+a_0$$

则

$$f'(x)=na_n x^{n-1}+(n-1)a_{n-1}x^{n-2}+\cdots+a_1$$

假设$f(x)$有重根，则$f'(x)=0$，由于$\mathrm{char}\,F=\infty$，所以必有

$$a_n=a_{n-1}=\cdots=a_1=0$$

于是$f(x)=a_0$，这与$f(x)$不可约矛盾．故$f(x)$没有重根．

由2·4·1立得

2·4·3 推论 特征为∞的域上任何代数扩域都是可分扩域．

利用分裂域的理论可以证明如下重要的结论．

2·4·4 定理 设F是域，$\mathrm{char}\,F=\infty$，那么域F的任一有限扩域是单代数扩域．

证明 设E是F的有限扩域，根据2·2·20，$E=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是$F$上的代数元．

我们用数学归纳法来证明．先考虑添加两个元素的情形：$E=F(\alpha,\beta)$，α,β是F上的代数元．由2·4·3，E是F的可分扩域．令$f(x)$，$g(x)$分别是α，β在F上的极小多项式．作多项式$f(x)g(x)$在E上的分裂域L，在L上有

$$(2)\qquad f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_s)$$

$$(3)\qquad g(x)=(x-\beta_1)(x-\beta_2)\cdots(x-\beta_t)$$

这里$\alpha_1=\alpha$，$\beta_1=\beta$．

在F中任意选定某个非零元c使得

$$(4)\qquad c\neq\frac{\alpha-\alpha_i}{\beta_i-\beta},\ \forall i=2,\cdots,s,\ \forall j=2,\cdots,t$$

由于β是F上的可分元，所以$\beta_j-\beta\neq 0$，又由于$\frac{\alpha-\alpha_i}{\beta_j-\beta}$这种

充最多有$(s-1)(t-1)$个，而F有无限多个元，所以这样的c可以取到。令

$$\theta=\alpha+c\beta$$

由于$c\in F$，所以$F(\theta)\subseteq F(\alpha,\ \beta)$。欲证$F(\theta)=F(\alpha,\ \beta)$，只需证$F(\theta)\supseteq F(\alpha,\ \beta)$。为此作多项式

$$h(x)=f(\theta-cx)\in F(\theta)[x]$$

这里$f(\theta-cx)$表示把$f(x)$中的文字x换成$\theta-cx$而得到的新多项式。因为$F(\theta)\subseteq L$，所以$h(x)\in L[x]$。由(2)有

$$\begin{aligned}(5)\qquad h(x)&=(\theta-cx-\alpha_1)(\theta-cx-\alpha_2)\cdots(\theta-cx-\alpha_s)\\&=(-1)^s[c(x-\beta_1)][c(x-\beta_1)-(\alpha_1-\alpha_2)]\\&\quad\cdots[c(x-\beta_1)-(\alpha_1-\alpha_s)]\end{aligned}$$

显然$h(\beta_1)=0$，由于c的取法可知，$h(\beta_j)\neq 0$，$j=2,\ \cdots,\ t$，又由于$\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_s$互不相同，$\beta_1,\ \cdots,\ \beta_t$也互不相同，比较(3)和(5)知，$\beta$是$h(x)$与$g(x)$的唯一的公根，因此$x-\beta$是$h(x)$与$g(x)$在$L[x]$中的最大公因式。又因为$L$是$F(\theta)$的扩域，所以$h(x)$与$g(x)$在$F(\theta)$上的最大公因式也是$x-\beta$，从而$\beta\in F(\theta)$，而$\alpha=\theta-c\beta$，$c\in F$，所以$\alpha\in F(\theta)$，故$F(\alpha,\ \beta)\subseteq F(\theta)$。于是$F(\theta)=F(\alpha,\ \beta)$。

假定在$n-1$时定理成立。于是可令

$$F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{n-1})=F(\alpha),$$

那么在n时，

$$\begin{aligned}&F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{n-1},\ \alpha_n)=F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_{n-1})(\alpha_n)\\&=F(\alpha)(\alpha_n)=F(\alpha,\ \alpha_n)=F(\theta).\end{aligned}$$

这就是说，在n时定理也成立。于是定理得证。

与2·4·4的证明方法完全类似，可得如下

2·4·5 定理　设F是一个含有无限个元素的域，$E=F(\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_n)$是$F$的有限扩张，而$\alpha_1,\ \alpha_2,\cdots,\alpha_n$都是$F$

上的可分元，则E是F的一个单代数扩张。

由2·4·4立得

2·4·6 定理 设F是一个域，$\mathrm{char}F=\infty$，则$F[x]$中的任一n次多项式$f(x)$在F上的分裂域$E=F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$是单代数扩域，即

$$E=F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)=F(\theta)。$$

这里$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$为$f(x)$的根。

2·4·4的证明也告诉我们对于α，β如何求c，当c求出后便得到了θ。特别，对α，β若能求到$c=1$(在很多情况下可以取到)，则必有$F(\alpha, \beta)=F(\alpha+\beta)$，例如，我们所做过的，$\mathbf{Q}(\sqrt{2}, \sqrt{3})=\mathbf{Q}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$，经验证取$c=1$完全满足条件(4)。

对于特征为p的域的代数扩域确实有可分扩域和不可分扩域。限于本教材所讨论的内容，这方面问题就不做进一步讨论了。

习　题

1．求证有理数域Q上多项式$f(x)=x^4+1$在Q上的分裂域是一个单代数$Q(\alpha)$，其中α是$f(x)$的一个根。

2．设Q为有理数域。

(1) 求θ，使得$Q(\sqrt{3}, \sqrt[3]{2})=Q(\theta)$

(2) 求θ，使$Q(\alpha, \beta)=\mathbf{Q}(\theta)$，其中$\alpha$是$x^2+x+1$的根，$\beta$是$x^2+4$的根

3．在$Q(\sqrt{2}+\sqrt{3})$中，用$\sqrt{2}+\sqrt{3}$将$\sqrt{2}$和$\sqrt{3}$在Q上表示出来。

4．设域F的所有扩域都是可分的，求证F的任意代数扩域的所有扩域也是可分的。

§2.5 有 限 域

有限域是一类很重要的域，这一节我们来讨论有限域的结构。

2·5·1 定义 一个只含有限个元素的域称为有限域。

例如，Z_p是有限域，从而特征为p 的素域皆为有限域。

有限域E的特征一定是一个素数p。如若不然，E 的特征为∞，则E包含一个与有理数域Q同构的素域Δ，而 Δ含有无限多个元，这与E的元素个数有限相予盾。

这样，关于有限域所含元的个数，我们有

2·5·2 定理 有限域E 中元素个数是其特征的正整数方幂。

证明 设 $\mathrm{char}E=p$，E 所含素域为 Δ，根据 2·1·14，$\Delta\cong Z_p$，因而Δ含有p个元素。E是Δ的有限扩域，设$[E:\Delta]=n$，则E中每个元可唯一地表示：

$$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_n\alpha_n$$

这里a_1，a_2，$\cdots$，$a_n\in\Delta$，α_1，α_2，$\cdots$，α_n是E在Δ 上的一个基。由于每个a_i可以独立地取Δ中p个不同元素，所以E 中共有p^n个不同的元。

2·5·3 定理 设E 是有限域，$\mathrm{char}E=p$，E所含素域为Δ，E有$q=p^n$个元，则E是多项式

$$x^q-x$$

在Δ上的分裂域。

证明 因为E含有q个元，所以E的乘法群E^*的阶为$q-1$。从而

$$a^{q-1}=1,\quad a\in E^*$$

这里 1 为E的单位元。又因为$0^q=0$，所以

$$a^q=a,\ a\in E$$

也就是说，E中每个元都是Δ上多项式

$$x^q-x$$

的根。因此，若用a_1，a_2，…，a_q表示E的元，则在$E[x]$里

$$x^q-x=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_q)$$

于是x^q-x在Δ上的分裂域L为

$$L=\Delta(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_q)$$

显然$\Delta\subseteq L\subseteq E$，又有$E\subseteq L$，所以

$$E=\Delta(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_q)$$

即E是多项式x^q-x在Δ上的分裂域。

利用一个多项式的分裂域的唯一性，可以证明

2·5·4 定理 两个元素个数相等的有限域必同构。

证明 设E_1和E_2是两个有限域，它们所含的元素个数分别为$p_1^{n_1}$和$p_2^{n_2}$，p_1和p_2为素数，由于$p_1^{n_1}=p_2^{n_2}$，所以$p_1=p_2$，从而$n_1=n_2$。这样E_1和E_2所含的素域同构。E_1和E_2分别是多项式$xp_1^{n_1}-x$在两个同构的素域上的分裂域，因此$E_1\cong E_2$。

由此可见，元素个数相同的有限域在同构意义下是唯一的。

由2·4·4知道，特征为∞的域上的一个多项式的分裂域都是单代数扩域，既然有限域都是它所含素域上的多项式x^q-x(q为有限域的元的个数)的分裂域，那么有限域是否为所含素域的单代数扩域呢？为了回答这个问题，我们需要研究有限域的非零元所作成的乘法群的一个重要性质。为此，先考虑有限交换群的一个性质。

设G是一个有限交换群，则G中每个元的阶皆有限。故G

中的元的阶必有最大的，不妨设为$a\in G$，a的阶为s，且G的任意元x的阶不超过s，我们断言，G中任意元的阶必定整除s。事实上，设$b\in G$，b的阶为t，则必有$t\leqslant s$，假如$t\nmid s$，则存在素数p使得：

$$s=p^{k}r_1,\quad t=p^{l}r_2,\quad (p,\ r_1r_2)=1且l>k$$

于是a^{p^k}的阶是r_1，b^{r_2}的阶是p^l，但$(p^l,\ r_1)=1$，所以$a^{p^k}b^{r_2}$的阶为$p^lr_1>s$，这说明G中还有元$a^{p^k}\ b^{r_2}$的阶大于s，这与s为G中元的阶的最大者矛盾，所以$t\mid s$。故得

2·5·5 引理 有限交换群中每个元的阶必为其元素的阶数中的最大者之因数。

由2·5·5，就有 。

2·5·6 定理 设E是有限域，则E的非零元作成的乘法群E^*是循环群。

证明 设E所含元的个数为q，则E^*的阶为$q-1$，E^*是有限交换群，令m是G的元的阶中的最大者，由2·5·5，对于任意$a_i\in E^*$都有

$$a_i^m=1$$

即E^*中所有元都是$E[x]$中多项式x^m-1的根，这就说明x^m-1在E中至少有$q-1$个不同的根。从而$q-1\leqslant m$，而m为群E^*中某个元的阶，又$m\leqslant q-1$，于是$m=q-1$，这就是说E^*中有一元a它的阶是$q-1$，即$E^*=(a)$，E^*是一个循环群。

由2·5·3和2·5·6立得

2·5·7 定理 一个有限域E是它的素域Δ的一个单代数扩域。

证明 因为E的乘法群E^*是循环群，所以E^*由一个元a生成，即$E^*=(a)$，于是$E=\Delta(a)$。

根据2·5·7的证明得到，任何有限域E是它的素域Δ添加

循环群E^*的生成元而得到的单代数扩域。但反之不真。

由 2·2·10，$E=\Delta(\alpha)\cong\Delta[x]/(\varphi(x))$，这里 $\varphi(x)$ 是 $\Delta[x]$中首项系数为 1（1 为 Δ 的单位元)的不可约多项式且 $\varphi(\alpha)=0$。又因为α是Δ上多项式$x^{p^n}-x$的根，根据 2·2·7，$\varphi(x)|(x^{p^n}-x)$。由此得

2·5·8 推论 设$\varphi(x)$为$\Delta[x]$的n次不可约多项式，这里Δ是特征为p的素域，则$\varphi(x)|(x^{p^n}-x)$。

为证明有限域的存在，我们先来研究$\Delta[x]$中不可约多项式的一些性质。

2·5·9 引理 设Δ是特征为p的素域，则 $\Delta[x]$ 中多项式 $x^{p^n-1}-1$不可能有次数大于n的不可约多项式为其因式。

证明 设$g(x)$(不妨设其首项系数为 1)是$\Delta[x]$中一个r次不可约多项式且$r>n$。则$\Delta[x]/(g(x))$是含p^r 个元的有限域，记$E=\Delta[x]/(g(x))$。

假设$g(x)|x^{p^n-1}-1$，则 $x^{p^n-1}-1=0$，即$x^{p^n-1}=1$，$\overline{x}^{p^n}=\overline{x}$。由2·5·3，任一$a\in\Delta$，则有 $a^p=a$。E中任一元可唯一表示为

$$a_0\overline{1}+a_1\overline{x}+\cdots+a_{r-1}\overline{x}^{r-1}\quad a_i\in\Delta$$

而

$$(a_0\overline{1}+a_1\overline{x}+\cdots+a_{r-1}\overline{x}^{r-1})^{p^n}$$

$$=a_0{}^{p^n}\overline{1}{}^{p^n}+a_1{}^{p^n}\overline{x}{}^{p^n}+\cdots+\overline{a}{}_{r-1}^{p^n}(\overline{x}^{r-1})^{p^n}$$

$$=a_0\,1+a_1x+\cdots+a_{r-1}x^{r-1}$$

这就是说E中任一元α都有$\alpha^{p^n}=\alpha$，故$\alpha\neq0$时，$\alpha^{p^n-1}=1$，即E^*的每个元的阶$\leqslant p^n-1$。但由$n<r$可得$p^n-1<p^r-1$，由此推出E^*设有p^r-1阶元，即E^*非循环群，这与2·5·6的结果

矛盾。因此$\Delta[x]$的多项式$x^{p^{n-1}}-1$不可能有次数大于n的不可约多项式为其因式。

2·5·10 **引理** 对任意素数p，不论n为任何自然数，$\Delta[x]$恒有n次不可约多项式，这里Δ是特征为p的素域。

证明 当$n=1$时，$x-a(a\in\Delta)$显然为$\Delta[x]$中一次不可约多项式。此时定理成立。

下面假定$n>1$。

我们考查$\Delta[x]$中$x^{p^{n-1}}-1$的次数$<n$的不可约多项式。令$t<n$，设$g_1(x)$，…，$g_s(x)$是$\Delta[x]$中首项系数为1且彼此互异的t次不可约多项式的全体。由2·5·8，$g_i(x)|(x^{p^t-1}-1)$，$i=1,2,\cdots,s$。但要除掉$t=1$时及这时某唯一的$g_i(x)=x$这个例外情况。而且当$i\neq j$时$(g_i(x),g_j(x))=1$，所以$\prod_{i=1}^{s}g_i(x)|(x^{p^t-1}-1)$。故在$t>1$有

$$\partial^\circ(g_1(x)\cdots g_s(x))=\sum_{i=1}^{s}\partial^\circ(g_i(x))\leqslant p^t-1$$

由于$p\nmid p^t-1$，所以x^{p^t-1}无重因式，故在$x^{p^{n-1}}-1$的不可约因式的分解中，次数小于n的一切不可约因式的次数的和最多等于

$$\begin{aligned}&p+(p^2-1)+(p^3-1)+\cdots+(p^{n-1}-1)\\&=(1+p+p^2+\cdots+p^{n-1})-(n-1)\\&=\frac{p^n-1}{p-1}-(n-1)<\frac{p^n-1}{p-1}\leqslant p^n-1\end{aligned}$$

即小于$x^{p^{n-1}}-1$的次数，故$x^{p^n-1}-1$的不可约因式中必有次数大于或等于n的不可约多项式。但由2·5·9，$x^{p^{n-1}}-1$没有次数大于n的不可约因式。因此$x^{p^{n-1}}-1$一定有次数等于n的不可约因式，即$\Delta[x]$必有n次不可约多项式。

由此即得

2·5·11 定理 设Δ是特征为p的素域，而$q=p^n(n\geqslant 1)$，那么在$\Delta[x]$中必存在一个 n 次不可约多项式 $\varphi(x)$，因而$\Delta[x]/(\varphi(x))$即为含有q个元的有限域。

此即为有限域的存在定理。

由2·5·11和 2·5·4 我们得到如下结论，任意给定一个素数p和正整数n，必存在一个恰含p^n个元的有限域，而且在同构意义下是唯一的。

当然有限域的存在性定理也可以利用一个多项式的分裂域的存在定理得到，这里不再叙述了。

解决含有p^n个元的域的存在性关键是在$\Delta[x]$中必有n 次不可约多项式。上面只说了存在性，如何去找呢？任何一次多项式当然是不可约的，因此关键是怎样去找$n(>1)$次的不可约多项式。

由2·5·8，n次不可约多项式必整除$x^{p^n}-x$，而当$n>1$，易得n次不可约多项式必整除$x^{p^{n-1}}-1$，而由 2·5·10 的证明中又知，$x^{p^{n-1}}-1$至少必有一个n次不可约因式，于是这就告诉我们，n次不可约多项式永远可在$x^{p^{n-1}}-1$ 的不可约因式中找到。

例 1　求作含2^2个元的域。

解　设Δ是特征为 2 的素域，为方便计，令$\Delta=\{0,\ 1\}$。

在$\Delta[x]$中求 $x^{2^2-1}-1=x^3-1$ 的二次不可约因式。在$\Delta[x]$中x^3-1分解为：

$$x^3-1=(x-1)(x^2+x+1)$$

而x^3-1又必有一个二次不可约多项式。故 x^2+x+1 即为$\Delta[x]$中一个二次不可约多项式。于是$\Delta[x]/(x^2+x+1)$就是含 2^2个元的域。由2·2·10的证明

$$\Delta[x]/(x^2+x+1)=\{a\overline{1}+b\overline{x}\mid a,\ b\in\Delta\}$$
$$=\{\overline{0},\ \overline{1},\ \overline{x},\ \overline{1}+\overline{x}\}$$

它的加法表和乘法表如下：

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}+\overline{x}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}+\overline{x}$
$\overline{1}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}+\overline{x}$	$\overline{x}$
$\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{1}+\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$
$\overline{1}+\overline{x}$	$\overline{1}+\overline{x}$	$\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{0}$

	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}+\overline{x}$
$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$	$\overline{0}$
$\overline{1}$	$\overline{0}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$	$\overline{1}+\overline{x}$
$\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{x}$	$\overline{1}+\overline{x}$	$\overline{1}$
$\overline{1}+\overline{x}$	$\overline{0}$	$\overline{1}+\overline{x}$	$\overline{1}$	$\overline{x}$

由 §2·2可得$E=\Delta(\alpha)\cong\Delta[x]/(x^2+x+1)$，$E\supseteq\Delta$，$\alpha$为$x^2+x+1$的根，则

$$E=\{a+b\alpha\mid a,\ b\in\Delta\}$$

E的加法表和乘法表与$\Delta[x]/(x^2+x+1)$完全相同(不计元素的表示形式)。

习　　题

1．设F是一个有限域，且$F=\Delta(a)$，a是否必须是F^*的一个生成元？

2．试作特征为3的含有 9个元的有限域，并写出它的加法表和乘法表。

3．设E是一个含有q^n个元的有限域，求证对于n的每个因数$m>0$，存在并且只存在E的一个有p^m个元的子域F。

第三章　伽罗华理论初步

本章先介绍正规扩域。然后引入正规扩域的自同构群的概念，使域与群发生映射关系。最后在这个基础上介绍伽罗华理论的基本定理。这个定理主要在一个域的若干扩域与一个群的若干子群间建立一种映射，根据这种映射，可以由群的某些性质推测域的某些性质，反之亦然，它在代数中有很多应用。

为了讨论简便起见，从本章开始，我们只对特征为∞的域进行讨论。

§3·1　正规扩域

正规扩域和多项式的分裂域有着密切的关系，它是伽罗华理论的主要研究对象之一。为了研究正规扩域，我们先研究一个多项式的分裂域的一个重要性质。看一个具体例子。

设Q是有理数域，当添加 $p(x)=x^2-2$ 的一个根 $\sqrt{2}$ 于Q而得到Q的单代数扩域 $Q(\sqrt{2})$ 时，不难看出，$-\sqrt{2}$ 也含于其中，这就是说 $p(x)$ 在 $Q(\sqrt{2})$ 上可分解为一次因式的乘积：

$$p(x)=x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}),$$

那么 $Q(\sqrt{2})$ 对于Q上其他的不可约多项式是否也有这样的性质呢？回答是肯定的。设 $f(x)$（不妨假定首项系数为

1）是Q上任意一个不可约多项式，今证明$f(x)$只要在$Q(\sqrt{2})$中有一个根，$f(x)$的所有根就含于$Q(\sqrt{2})$。我们说$f(x)$的次数不能大于2，否则，设$Q(\sqrt{2})$含$f(x)$的根为α，由$\partial^\circ(f(x))>2$可得，$[Q(\alpha):Q]>2$。但是，由$Q(\sqrt{2})\supseteq Q(\alpha)$可知，$[Q(\alpha):Q]\leqslant[Q(\sqrt{2}):Q]=2$，这是一个矛盾。因之，$\partial^\circ(f(x))\leqslant 2$。当$\partial^\circ(f(x))=1$时，显然$Q(\sqrt{2})$含有$f(x)$的所有根；当$\partial^\circ(f(x))=2$时，$2=[Q(\sqrt{2}):Q(\alpha)][Q(\alpha):Q]=[Q(\sqrt{2}):Q(\alpha)]2$，所以$Q(\sqrt{2})=Q(\alpha)$，$\alpha\in Q(\sqrt{2})$，于是在$Q(\sqrt{2})$上有$f(x)=(x-\alpha)f_1(x)$，$\partial^\circ(f_1(x))=1$，因此$f(x)$的另一个根也含于$Q(\sqrt{2})$中，故$Q(\sqrt{2})$含有$f(x)$的全部根。

实际上，一个多项式的分裂域就有$Q(\sqrt{2})$这样的性质，我们有

3·1·1 定理 令E是多项式$f(x)$在F上的分裂域，而β是E中任意元，那么β在F上的极小多项式在E里分解成一次因式的乘积。

证明 设$f(x)$在域F上的分裂域$E=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，$\beta$在$F$上的极小多项式为$g(x)$。

假设$g(x)$不能在$E[x]$里分解为一次因式的乘积，那么在$E[x]$中，

$$g(x)=(x-\beta)p_1(x)\cdots p_s(x) \tag{1}$$

这里$p_i(x)$，$i=1,2,\cdots s$，都是$E[x]$中首项系数为1的不可约多项式，且它们的次数不能皆为1，从它们中选一个次数最高者，设为$p(x)$，其余的$s-1$个多项式的乘积记为$g_1(x)$，则(1)式可写为

$$g(x)=(x-\beta)p(x)g_1(x)$$

我们假定$\partial^\circ(p(x))=m>1$。作E的单代数扩域

$$E(\beta') = F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)(\beta')$$
$$= F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \beta')$$

使得 $p(\beta') = 0$. 则有

(2) $\quad [E(\beta') : E] = [F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n, \beta) : E] = m$

由于

$$g(\beta') = (\beta' - \beta)p(\beta')g_1(\beta') = 0,$$

由2·2·14,

$$F(\beta) \cong F(\beta'),$$

再由2·3·5, 可得

$$F(\beta)[x] \cong F(\beta')[x],$$

并且在这个同构映射之下,

$$f(x) \longmapsto f(x),$$

这样, 根据2·3·7, $f(x)$ 在 $F(\beta')$ 上的分裂域与 $f(x)$ 在 $F(\beta)$ 上的分裂域同构. 但 $F(\beta', \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是 $f(x)$ 在 $F(\beta')$ 上的一个分裂域, 而 $F(\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ 是 $f(x)$ 在 $F(\beta)$ 上的一个分裂域, 所以

$$F(\beta', \alpha_1, \cdots, \alpha_n) \cong F(\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_n),$$

$$[F(\beta', \alpha_1, \cdots, \alpha_n) : F] = [F(\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) : F]$$

由于 $F(\beta', \alpha_1, \cdots, \alpha_n) = E(\beta')$, 再根据(2)式可得

$$[F(\beta', \alpha_1, \cdots, \alpha_n) : F] = [E(\beta') : E][E : F]$$
$$= m[E : F]$$

而

$$[F(\beta, \alpha_1, \cdots, \alpha_n) : F] = [E : F]$$

由此得 $m = 1$, 这与 $m > 1$ 矛盾. 故 $g(x)$ 在 $E[x]$ 里可以分解为一次因式的乘积.

根据2·2·8, 我们有

3·1·2 推论 令 E 是多项式 $f(x)$ 在 F 上的分裂域,

$p(x)$ 是 $F[x]$ 中任意不可约多项式。如果 $p(x)$ 在 E 中有一个根，那么 E 包含 $p(x)$ 的所有根。

具有 3·1·2 所述性质的代数扩域是非常重要的，它在伽罗华理论的研究中扮演着重要角色，我们引入如下概念。

3·1·3 定义 设N是域 F 的有限扩域。N 称为 F 的一个正规扩域，如果对于 F 上的任一不可约多项式 $f(x)$，只要 $f(x)$ 在 N 中有一个根，那么就有 N 含有 $f(x)$ 的分裂域。

域 F 的一个正规扩域简称为 F 的正规域，也称为 F 的伽罗华扩域。

例 1 设 Q 是有理数域，则 Q 是 Q 的一个正规域。事实上，设 $f(x)$ 是 Q 上任一不可约多项式，只要 $f(x)$ 在 Q 中有一个根，由于 $f(x)$ 不可约，则必有 $\partial^\circ(f(x))=1$，因而 Q 就是 $f(x)$ 在 Q 上的分裂域，故 Q 是 Q 的正规域。

例 2 $Q(\sqrt{2})$ 是 Q 的正规域。

例 3 实数域 R 不是有理数域 Q 的正规域，因为 R 不是 Q 的有限扩域。同样，复数域 C 也不是 Q 的正规域。

根据3·1·2，域 F 上的一个多项式在 F 上的分裂域是 F 的正规域。反之也真。事实上，设 N 是 F 的正规域，因为N是 F 的有限扩域，所以 $N=F(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$，$\alpha_1, \cdots, \alpha_s$为 F 上的代数元。设 α_i 在 F 上的极小多项式为 $p_i(x)$，则 $p_i(x)$ 在 F 上不可约，令

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x),$$

由于 $p_i(x)$ 在 N 中有根 α_i，所以 $p_i(x)$ 在 N 中完全分解，故 N 包含 $f(x)$ 在 F 上的分裂域 P。另一方面，因为$P\supseteq F$，P 含有 $\alpha_1, \cdots, \alpha_s$，所以 $p\supseteq F(\alpha_1,\cdots,\alpha_s)=N$，故$N=P$，$N$ 是 $f(x)$ 在 F 上的分裂域。于是有

3·1·4 定理 设 N 是域 F 的扩域，则 N 是 F 的正规域的

充分必要条件是 N 为 F 上某个多项式的分裂域。

利用3.1.4很容易判断 $Q(\sqrt{2})$ 是 Q 的正规域，因其为多项式 $f(x)=x^2-2$ 在 Q 上的分裂域。

例 4　$Q(\sqrt{3}, i)$ 是 Q 的一个正规域，因其为 Q 上多项式 $f(x)=x^4-2x^2-3$ 的分裂域。

最后，我们再给出一个域是正规域的充分必要条件。设 E 是域 F 的扩域，α，$\beta\in E$，我们有如下

3·1·5 定义　域 F 上的两个代数元 α 和 β 称为在 F 上共轭，如果 α 和 β 在 F 上的极小多项式相同。

3·1·6 定理　设 N 是域 F 的有限扩域，那么 N 是 F 的正规域的充分必要条件是：若 $\alpha\in N$，则 α 的共轭元 $\beta\in N$。

证明　设 N 是 F 的正规域，β 与 α 在 F 上共轭，α，β 在 F 上的极小多项式为 $p(x)$，若 $\alpha\in N$，由 3·1·3，N 含有 $p(x)$ 的分裂域，因之 $\beta\in N$。

反之，设 $\alpha\in N$，α 在 F 上的极小多项式为 $p(x)$，而 $p(x)$ 的其余的根皆为 α 在 F 上的共轭元，从而均含于 N 中，因之 N 含有 $p(x)$ 的分裂域，故 N 是 F 的正规域。

例 5　复数域 C 是实数域 R 的正规域。事实上，已知 $C=R(i)$，而 $[C:R]=2$。设 $\alpha=a+bi\in C$，这里 a，$b\in R$，则 α 的共轭元 $a-bi\in C$，所以 C 是 R 的正规域。

例 6　$Q(\sqrt[3]{2})$ 不是 Q 的正规域。因为 $\sqrt[3]{2}$ 在 Q 上的共轭元 $\sqrt[3]{2}\omega\notin Q(\sqrt[3]{2})$，这里 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$。

习　题

1。设 Q 是有理数域，E 为 Q 的任意一个二次扩域，则 E 必有如下形式：

$$E=Q(\sqrt{m})$$

这里 $m=-1$ 或 $m=\pm p_1p_2\cdots p_s$，p_i 为素数且当 $i\neq j$ 时，$p_i\neq p_j$。

2．举出有理数域Q的一个三次域和一个四次域不是 Q 的正规域的例子。

3．设 $P_2\supset P_1\supset F$，P_2，P_1，F 皆为域，证明，若 P_2 是 F 的正规域，则P_2也是P_1的正规域。若P_2是F的正规域，是否有P_1 也是 F 的正规域？

§3·2 伽罗华群

由一个域的所有自同构作成的集合是一种特殊的一一变换的集合，我们可以证明它对于变换的乘法作成一个群。而我们更感兴趣的是，正规域的一些特殊的自同构所作成的群，即所谓伽罗华群。它是伽罗华理论的主要研究对象。

设 F 是一个域，F 的所有自同构作成一个集合，记为 $\mathrm{Aut}\,F$。

任取 τ_1，$\tau_2\in\mathrm{Aut}\,F$，规定

$$\sigma:\ F\longrightarrow F$$

$$a\longmapsto(a^{\tau_1})^{\tau_2},\quad \forall a\in F$$

由于 τ_1，τ_2 是 F 上的双射，所以 σ 也是 F 上的双射。由变换的乘法可知 $\sigma=\tau_1\tau_2$，并且有

$$(a+b)^\sigma=((a+b)^{\tau_1})^{\tau_2}=(a^{\tau_1}+b^{\tau_1})^{\tau_2}$$

$$=(a^{\tau_1})^{\tau_2}+(b^{\tau_1})^{\tau_2}=a^\sigma+b^\sigma$$

$$\forall a,\ b\in F,$$

$$(ab)^\sigma=((ab)^{\tau_1})^{\tau_2}=(a^{\tau_1}b^{\tau_1})^{\tau_2}$$

$$=(a^{\tau_1})^{\tau_2}(b^{\tau_1})^{\tau_2}=a^\sigma b^\sigma$$

我们有

3·2·1 定理 设F是一个域，则$\mathrm{Aut}\,F$对变换的乘法作成一个群，称之为F的自同构群。

证明 我们证明$\mathrm{Aut}\,F$对上述的乘法满足1·1·1中的三个条件。

1）乘法满足结合律：

任取τ_1，τ_2，$\tau_3\in\mathrm{Aut}\,F$，$a\in F$，由于

$$a^{(\tau_1\tau_2)\tau_3}=(a^{\tau_1\tau_2})^{\tau_3}=((a^{\tau_1})^{\tau_2})^{\tau_3},$$

$$a^{\tau_1(\tau_2\tau_3)}=(a^{\tau_1})^{\tau_2\tau_3}=((a^{\tau_1})^{\tau_2})^{\tau_3}$$

所以$(\tau_1\tau_2)\tau_3=\tau_1(\tau_2\tau_3)$。

2）$\mathrm{Aut}F$中有单位元：

设ε表示F的恒等自同构，即$a^{\varepsilon}=a$，$\forall a\in F$。对于任意$\tau\in\mathrm{Aut}\,F$显然有

$$\tau\varepsilon=\varepsilon\tau=\tau$$

即ε为$\mathrm{Aut}\,F$的单位元。

3）$\mathrm{Aut}\,F$的每个元有逆元：

任取$\tau\in\mathrm{Aut}F$，令τ^{-1}表示τ的逆映射，即若$a^{\tau}=\overline{a}$，则$\overline{a}^{\tau^{-1}}=a$。于是由

$$\overline{a}+\overline{b}=a^{\tau}+b^{\tau}=(a+b)^{\tau},\quad \overline{a}\,\overline{b}=a^{\tau}b^{\tau}=(ab)^{\tau}$$

可得

$$(\overline{a}+\overline{b})^{\tau^{-1}}=a+b=\overline{a}^{\tau^{-1}}+\overline{b}^{\tau^{-1}},$$

$$(\overline{a}\,\overline{b})^{\tau^{-1}}=ab=\overline{a}^{\tau^{-1}}\overline{b}^{\tau^{-1}}.$$

所以$\tau^{-1}\in\mathrm{Aut}\,F$，且$\tau^{-1}\tau=\tau\tau^{-1}=\varepsilon$。

故$\mathrm{Aut}\,F$对自同构的乘法作成群，称为F的自同构群。

设 σ 是 $\mathrm{Aut}F$ 中的任意元，则 $1^\sigma=1$，由 F 的素域的结构可知，$a^\sigma=a$，a 为 F 的素域 Δ 中任意元，即 σ 限制在 Δ 上是恒等自同构，因而有

例1　有理数域 $\mathbf{Q}$ 的自同构群只含一个元素 ε。

例2　设 $E=\mathbf{Q}(\sqrt{2})$，$\mathbf{Q}(\sqrt{2})$ 中每个元可唯一地表为

$$a+b\sqrt{2},\qquad a,\ b\in\mathbf{Q}$$

任取 $\tau\in\mathrm{Aut}E$，则

$$(a+b\sqrt{2})^\tau=a^\tau+b^\tau(\sqrt{2})^\tau=a+b(\sqrt{2})^\tau$$

设 $(\sqrt{2})^\tau=\alpha$，则 $((\sqrt{2})^\tau)^2=\alpha^2$，$\alpha^2=2^\tau=2$，于是 $\alpha=\pm\sqrt{2}$。这样，我们有

1）当 $\sqrt{2}^\tau=\sqrt{2}$ 时，$\tau=\varepsilon$：$a+b\sqrt{2}\longmapsto a+b\sqrt{2}$；

2）当 $\sqrt{2}^\tau=-\sqrt{2}$ 时，τ：$a+b\sqrt{2}\longmapsto a-b\sqrt{2}$。

因此 $\mathrm{Aut}E=\{\varepsilon,\ \tau\}$，这里 $\tau^2=\varepsilon$。

例3　设 θ 是 $f(x)=x^4+x^3+x^2+x+1$ 的一个根。令 $N=\mathbf{Q}(\theta)$。由于 $x^5-1=(x-1)f(x)$，所以 $\theta^5=1$，且 $\theta\neq1$。又由于 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约，显然，θ^2，θ^3，θ^4 是 θ 在 $\mathbf{Q}$ 上的全部共轭元。N 中每个元可唯一表成

$$a_0+a_1\theta+a_2\theta^2+a_3\theta^3,\ a_i\in\mathbf{Q}$$

设 $\tau\in\mathrm{Aut}N$，则

$$(a_0+a_1\theta+a_2\theta^2+a_3\theta^3)^\tau=a_0+a_1\theta^\tau+a_2(\theta^\tau)^2+a_3(\theta^\tau)^3$$

令 $\theta^\tau=\beta$，则易证 β 是 θ 的共轭元，于是 β 是 θ，θ^2，θ^3，θ^4 之一，对于 β 的四种取法我们有

$$\tau_1=\varepsilon:\ a_0+a_1\theta+a_2\theta^2+a_3\theta^3\longmapsto a_0+a_1\theta+a_2\theta^2+a_3\theta^3,$$

$$\tau_2: \quad a_0+a_1\theta+a_2\theta^2+a_3\theta^3 \longmapsto a_0+a_1\theta^2+a_2\theta^4+a_3\theta^6,$$

$$\tau_3: \quad a_0+a_1\theta+a_2\theta^2+a_3\theta^3 \longmapsto a_0+a_1\theta^3+a_2\theta^6+a_3\theta^9,$$

$$\tau_4: \quad a_0+a_1\theta+a_2\theta^2+a_3\theta^3 \longmapsto a_0+a_1\theta^4+a_2\theta^8+a_3\theta^{12}.$$

所以 $\mathrm{Aut}N$ 恰含四个元 $\tau_1=\varepsilon$, τ_2, τ_3, τ_4, 其乘法表如下:

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
τ_2	τ_2	τ_4	τ_1	τ_3
τ_3	τ_3	τ_1	τ_4	τ_2
τ_4	τ_4	τ_3	τ_2	τ_1

易见 $\mathrm{Aut}N\cong Z_5^*$.

现在我们讨论域 P 的特殊的自同构。

3·2·2 定义 设 P 是域 F 的扩域, P 的一个自同构 τ 称为 P 在 F 上的自同构, 如果对于任意 $a\in F$, 都有 $a^\tau=a$。

3·2·3 定理 P 在 F 上的一切自同构的集合 H 作成 P 的自同构群 $\mathrm{Aut}P$ 的一个子群。

证明 由于 $\mathrm{Aut}P$ 的单位元 ε 是 P 在 F 上的自同构, 所以 H 有单位元 ε。设 σ, $\tau\in H$, 则对于任意 $a\in F$ 均有 $a^{\sigma\tau}=(a^\sigma)^\tau=a^\tau=a$, 故 $\sigma\tau\in H$, 再者, $a^{\sigma^{-1}}=(a^\sigma)^{\sigma^{-1}}=a^\varepsilon=a$, 故 $\sigma^{-1}\in H$, 所以 H 是 $\mathrm{Aut}P$ 的一个子群。

3·2·4 定义 设 N 是 F 的正规域, N 在 F 上的所有自同构作成的子群称为 N 在 F 上的伽罗华群, 并用符号 $\mathrm{Gal}N/F$ 表示。

值得注意的是，我们说到 N 在 F 上的伽罗华群时，N必须是 F 的正规域，伽罗华群只对正规域定义。

以下我们证明伽罗华群的一个重要定理，为此先证明一个引理。

3·2·5 引理 设 τ 是 N 在 F 上的一个自同构，$\alpha\in N$，令 $\beta=\alpha^{\tau}$，则对于 $F[x]$ 中一个多项式 $f(x)$，如果 $f(\alpha)=0$，就有 $f(\beta)=0$。

特别，α 与 β 在 F 上的极小多项式相同。

证明 设

$$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0,\ a_i\in F$$

由 $f(\alpha)=0$ 可得

$$a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0=0$$

$$(a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0)^{\tau}=0$$

$$a_n^{\tau}(\alpha^{\tau})^n+a_{n-1}^{\tau}(\alpha^{\tau})^{n-1}+\cdots+a_1^{\tau}\alpha^{\tau}+a_0^{\tau}=0$$

但 $a_i^{\tau}=a_i$，$i=0,1,\cdots,n$，$\alpha^{\tau}=\beta$，于是

$$a_n\beta^n+a_{n-1}\beta^{n-1}+\cdots+a_1\beta+a_0=0,$$

即

$$f(\beta)=0.$$

3·2·6 定理 设 N 是域 F 的正规域，则

$$|Gal N/F|=[N:F].$$

证明 由于 N 是 F 的正规域，根据 3·1·4 定理，N是 F 上多项式 $f(x)$ 的分裂域，$N=F(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，进一步有 $N=F(\theta)$，θ 是 F 上 m 次不可约多项式 $g(x)$ 的根，再由 3·1·6定理，θ 在 F 上的共轭元均属于 N。设 $g(x)$ 的 m 个根为 $\theta_1=\theta,\theta_2,\cdots,\theta_m$，对于 N 中任意元

$$\alpha=a_0+a_1\theta+\cdots+a_{m-1}\theta^{m-1},\ a_i\in F,$$

规定

$$\alpha^{\tau_i} = a_0 + a_1\theta_i + \cdots + a_{m-1}\theta_i^{m-1},\ i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m,$$

则 τ_i 是 N 到 N 的子域 $F(\theta_i)$ 的满射，但 θ_i 是 F 上 m 次不可约多项式 $g(x)$ 的根，故

$$[F(\theta_i) : F] = m,$$

因之 $F(\theta_i) = N$，$i = 1,\ 2,\ \cdots,\ m$。即 τ_i 是 N 到自身的满射。

设 $\alpha = \sum_{j=0}^{m-1} a_j\theta^j$，$\beta = \sum_{j=0}^{m-1} b_j\theta^j$，则 $\alpha^{\tau_i} = \sum_{j=0}^{m-1} a_j\theta_i^j$，

$\beta^{\tau_i} = \sum_{j=0}^{m-1} b_j\theta_i^j$。若 $\alpha^{\tau_i} = \beta^{\tau_i}$，就有 $\sum_{j=0}^{m-1}(a_j - b_j)\theta_i^j = 0$，

也就是说 θ_i 是 F 上的一个多项式

(1) $\quad (a_0 - b_0) + (a_1 - b_1)x + \cdots + (a_{m-1} - b_{m-1})x^{m-1}$

的根。而 θ_i 是 F 上 m 次不可约多项式 $g(x)$ 的根，因而 $g(x)$ 与 θ_i 在 F 上的极小多项式至多相差一个 F^* 中的元，所以 $g(x)$ 必整除(1)，故(1)必须是零多项式，从而

$$a_i - b_i = 0,\ i = 0,\ 1,\ \cdots,\ m-1,$$

或

$$a_i = b_i \quad i = 0,\ 1,\ \cdots,\ m-1,$$

于是 $\alpha = \beta$，故 τ_i 是 N 到自身的单射，因之 τ_i 是 N 到自身的双射。容易验证 τ_i 是同构映射，并且对于任意 $a \in F$，有 $a^{\tau_i} = a$，即 τ_i 是 N 在 F 上的自同构。

因为当 $i \neq j$ 时，$\theta_i \neq \theta_j$，故 $\tau_i \neq \tau_j$，因之 $|\mathrm{Gal}N/F| \geqslant m$。

以下证明 $\mathrm{Gal}N/F$ 除 τ_i 外不含其它 N 在 F 上的自同构。设 $\sigma \in \mathrm{Gal}N/F$，因为对于 F 中任意元 a 都有 $a^\sigma = a$，所以对于 N 中任意元 $\alpha = \sum_{j=0}^{m-1} a_j\theta^j$，都有 $\alpha^\sigma = \sum_{j=0}^{m-1} a_j(\theta^\sigma)^j$，

换言之，σ 由 θ 的象 θ^{σ} 唯一确定，但由3·2·5，若 $g(\theta)=0$，则 $g(\theta^{\sigma})=0$，即 θ^{σ} 是 $g(x)$ 的根，因之 $\theta^{\sigma}=\theta_i$，故 $\sigma=\tau_i$。于是

$$|\mathrm{Gal}N/F|=m=[N:F].$$

例4　例3中 $Q(\theta)$ 是 Q 的正规域，$|\mathrm{Gal}Q(\theta)/Q|=4$。

例5　$Q(\sqrt[3]{2})$ 不是 Q 的正规域，由实际验证可知 $Q(\sqrt[3]{2})$ 在 Q 上的自同构群的阶为1，而 $[Q(\sqrt[3]{2}):Q]=3$。

我们说，3·2·6的逆命题也是正确的，即

3·2·7 **定理**　设 N 是域 F 上的有限扩域，$[N:F]=m$。如果 N 在 F 上的自同构群的阶为 m，则 N 是 F 的正规域。

证明　由于 $[N:F]=m$，根据2·4·4，$N=F(\alpha)$，α 在 F 上的极小多项式 $p(x)$ 为 m 次的。令 N 在 F 上的自同构群为 G，因 $|G|=m$，故可设

$$G=\{\tau_1=\varepsilon,\ \tau_2,\ \cdots,\ \tau_m\}.$$

因为 $p(\alpha)=0$，根据3·2·5，$p(\alpha^{\tau_i})=0$，$i=1,2,\cdots,m$。显然，$\alpha^{\tau_i}\in N$，且当 $i\neq j$ 时，$\alpha^{\tau_i}\neq\alpha^{\tau_j}$，因而 $\alpha^{\tau_1}=\alpha$，$\alpha^{\tau_2},\cdots,\alpha^{\tau_m}$ 恰为 $p(x)$ 的 m 个不同的根，于是 $N\supseteq F(\alpha^{\tau_1},\cdots,\alpha^{\tau_m})$，而 $N=F(\alpha)$，故 N 是 $p(x)$ 在 F 上的分裂域。由3·1·4，N 是 F 的正规域。

习　题

1．设 N 是 F 的正规域，τ 是 N 到自身的一个映射，并且对于 F 中的任意元 a 都有 $a^{\tau}=a$。求证，如果 $(a+b)^{\tau}=a^{\tau}+b^{\tau}$，$(ab)^{\tau}=a^{\tau}b^{\tau}$，$\forall a,b\in N$，则 $\tau\in\mathrm{Gal}N/F$。

2．设 $N=Q(\sqrt{5}, \omega)$，$\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，找出 N 的自同构群 AutN 及 N 在 $Q(\sqrt{5})$ 上的自同构群(要求列出乘法表)。

3．证明，$N=Q(\sqrt[3]{2}, \omega)$ 是 Q 的正规域，找出 N 在 Q 上的伽罗华群。

§3·3 方程的伽罗华群

我们的目标是研究方程的根号解，为此，我们需要讨论方程的伽罗华群。

3·3·1 **定义** 设 $f(x)$ 是域 F 的一个多项式，而 N 是它在 F 上的分裂域，则 N 在 F 上的伽罗华群称为方程 $f(x)=0$ 在 F 上的伽罗华群。

由3·3·1可以看出，F 上方程 $f(x)=0$ 的伽罗华群就是它的根域在 F 上的伽罗华群。在确定方程的伽罗华群时，3·2·5起着很重要的作用，利用 3·2·5，再考虑到 3·2·6，可以求出一些形式比较简单的方程的伽罗华群。这里值得提出的有以下两个问题：

1° 设 $f(x)\in F[x]$，且 $\partial^\circ(f(x))\geqslant 1$，根据域上多项式因式分解定理，我们有

$$f(x)=p_1^{r_1}(x)p_2^{r_2}(x)\cdots p_s^{r_s}(x)$$

这里 $p_1(x)$，…，$p_s(x)$ 为 $F[x]$ 中互不相同的不可约多项式，$r_i\geqslant 1$，$i=1, 2, \cdots, s$。$f(x)$ 与 $p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$ 在 F 上的分裂域是相同的。因为 $\mathrm{char}\,F=\infty$，所以 $p_i(x)$无重根，从而 $p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$ 也无重根。这样，研究方程的伽罗华群时可以只研究没有重根的方程的伽罗华群。

2°设 $f(x)\in F[x]$，不妨设 $f(x)$ 的首项系数为 1，

$f(x)$ 在 F 上的分裂域为 N。若 $f(x)$ 在 $F[x]$ 可以分解为互不相同的不可约多项式的乘积：

$$f(x)=p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x),$$

设 α 是 $p_i(x)$ 的根，对某个 i，则 $p_i(x)$ 是 α 在 F 上的极小多项式。任取 $\tau\in \mathrm{Gal}N/F$，由3·2·5，α 与 α^τ 的极小多项式相同，因此 $p_i(\alpha^\tau)=0$。而 α 与 α^τ 在 F 上的极小多项式是唯一的，所以 α^τ 只能是 $p_i(x)$ 的根。这也就是说，设 α，β 分别为 $p_i(x)$ 和 $p_j(x)$ 的根 $(i\neq j)$，若一变换 σ，使得 $\alpha^\sigma=\beta$，则 $\sigma\notin \mathrm{Gal}N/F$。

现在我们研究几个例子。

例1　设 $f(x)=(x^2-2)(x^2-3)$ 是 $\mathbf{Q}[x]$ 中一个多项式，$f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的分裂域为 $N=\mathbf{Q}(\sqrt{2},\sqrt{3})$。$f(x)$ 在 N 中有根 $\pm\sqrt{2}$，$\pm\sqrt{3}$。任取 $\tau\in \mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}$，由于 x^2-2 在 $\mathbf{Q}$ 上不可约，则 τ 必须把 x^2-2 的根变为它的根，同样，τ 必须把 x^2-3 的根变为它的根。又因为 $[N:\mathbf{Q}]=4$，所以 $\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}$ 恰由4个元素组成，列表说明为下：

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
$\sqrt{2}\mapsto$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$
$-\sqrt{2}\mapsto$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
$\sqrt{3}\mapsto$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$-\sqrt{3}\mapsto$	$-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$

$\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}=\{\tau_1=\varepsilon,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4\}$ 即为方程 $f(x)=0$ 的伽罗华群。如果把方程的四个根 $\sqrt{2}$，$-\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$ 依次标为1，2，3，4，则 τ_1，τ_2，τ_3，τ_4 分别对应于(1)，(12)，(34)，(12)(34)。于是 $\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}$ 与 S_4 的子群

克莱因四元群B_4同构，即

$$\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}\cong B_4=\{(1),(12),(34),(12)(34)\}.$$

例2　在§3·2的例3中 $\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}=\{\tau_1,\tau_2,\tau_3,\tau_4\}$，这里 $\tau_1:\ \theta\mapsto\theta$；$\tau_2:\ \theta\mapsto\theta^2$；$\tau_3:\ \theta\mapsto\theta^3$；$\tau_4:\ \theta\mapsto\theta^4$，注意到$\theta^5=1$，我们可以列表如下：

		τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
θ	$\mapsto$	θ	θ^2	θ^3	θ^4
θ^2	$\mapsto$	θ^2	θ^4	θ	θ^3
θ^3	$\mapsto$	θ^3	θ	θ^4	θ^2
θ^4	$\mapsto$	θ^4	θ^3	θ^2	θ

$\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}$即为方程$x^4+x^3+x^2+x+1=0$的伽罗华群。如果把θ，θ^2，θ^3，θ^4依次标为1，2，3，4，那么τ_1，τ_2，τ_3，τ_4分别对应于(1)，(1243)，(1342)，(14)(23)。易知

$$H=\{(1),(1243),(14)(23),(1342)\}$$

是由(1243)生成的循环群。显然$\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}\cong H$，$H$是$S_4$的一个子群。

例3　求方程$x^3-2=0$在$\mathbf{Q}$上的伽罗华群G。我们知道$f(x)=x^3-2$在$\mathbf{Q}$上的分裂域是$N=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\ \omega)$，这里$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，由3·3·1，$G=\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}$。

因为 $N=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\ \omega)=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}+\omega)$，$[N:\mathbf{Q}]=6$，所以$\sqrt[3]{2}+\omega$在$\mathbf{Q}$上极小多项式必为6次，因而$N$中每个元可唯一表成

$$a_0+a_1\alpha+\cdots+a_5\alpha^5$$

这里 $\alpha=\sqrt[3]{2}+\omega$，$a_i\in\mathbf{Q}$，$i=0,1,\cdots,5$。任取 $\tau\in G$，则

$$(a_0+a_1\alpha+\cdots+a_5\alpha^5)^\tau=a_0+a_1\alpha^\tau+\cdots+a_5(\alpha^\tau)^5.$$

因此只需确定 α^τ，而 $\alpha^\tau=(\sqrt[3]{2}+\omega)^\tau=(\sqrt[3]{2})^\tau+\omega^\tau$。由于 $\sqrt[3]{2}$ 在 τ 元下只有3种可能：$\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{2}\omega$，$\sqrt[3]{2}\omega^2$；ω 的象只有两种可能：ω，ω^2。因此共有6种可能的组合。又因为 $|G|=[N:\mathbf{Q}]=6$，所以 G 恰含6个元，现将这6个自同构列表如下：

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6
$\sqrt[3]{2}\mapsto$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$
$\omega\mapsto$	ω	ω	ω	ω^2	ω^2	ω^2

这6个自同构作用在 $x^3-2=0$ 的三个根上的结果如下表所示：

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6
$\sqrt[3]{2}\mapsto$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$
$\sqrt[3]{2}\omega\mapsto$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\omega$
$\sqrt[3]{2}\omega^2\mapsto$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$	$\sqrt[3]{2}$

于是 $G=\{\tau_1=\varepsilon,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4,\ \tau_5,\ \tau_6\}$，如果把 $\sqrt[3]{2}$，$\sqrt[3]{2}\omega$，$\sqrt[3]{2}\omega^2$ 依次标为1，2，3，则 τ_1，τ_2，τ_3，τ_4，τ_5，τ_6 分别对应于(1)，(123)，(132)，(23)，(12)，(13)。故 $G\cong S_3$。

例4　求 $x^4-2=0$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的伽罗华群 G。这个方程在

Q 上的根域为 $N=Q(\sqrt[4]{2}, i)$，这里 $i^2=-1$。仿例3的讨论可知 G 由8个元素组成。设 $\sqrt[4]{2}=\alpha$，G 的8个元列表如下

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6	τ_7	τ_8
$\alpha \mapsto$	α	$-\alpha$	αi	$-\alpha i$	α	$-\alpha$	αi	$-\alpha i$
$-\alpha \mapsto$	$-\alpha$	α	$-\alpha i$	αi	$-\alpha$	α	$-\alpha i$	αi
$\alpha i \mapsto$	αi	$-\alpha i$	$-\alpha$	α	$-\alpha i$	αi	α	$-\alpha$
$-\alpha i \mapsto$	$-\alpha i$	αi	α	$-\alpha$	αi	$-\alpha i$	$-\alpha$	α

这里 α，$-\alpha$，αi，$-\alpha i$ 为方程 $x^4-2=0$ 的4个根，若把它们依次标为1，2，3，4，则

$\tau_1 \mapsto (1)$，$\tau_2 \mapsto (12)(34)$，$\tau_3 \mapsto (1324)$，

$\tau_4 \mapsto (1423)$，$\tau_5 \mapsto (34)$，$\tau_6 \mapsto (12)$，

$\tau_7 \mapsto (13)(24)$，$\tau_8 \mapsto (14)(23)$

这8个置换构成 S_4 的子群，记为 H，且 $G \cong H$。

从这四个例子可以看出，尽管各例中方程 $f(x)=0$ 的伽罗华群的阶数和结构各有不同，但它们都与 $f(x)=0$ 的根集上某个置换群同构。不难证明，这个结果对于一般情形也是正确的。

3·3·2 定理 域 F 上一个没有重根的 n 次方程 $f(x)=0$ 的伽罗华群 G 与 n 次对称群的一个子群同构。

证明 令 N 是 $f(x)=0$ 在 F 上的根域，$N=F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 是 $f(x)=0$ 的根。在 N 中

$$f(x)=a_n(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

任取 $\tau \in G$，则 $\alpha_1^\tau, \alpha_2^\tau, \cdots, \alpha_n^\tau$ 仍为方程 $f(x)=0$ 的 n 个根，而且当 $i \neq j$ 时 $\alpha_i^\tau \neq \alpha_j^\tau$。因此给定 τ，就可以唯一确

定

$$P_\tau=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\cdots\alpha_n\\ \alpha_1^\tau & \alpha_2^\tau\cdots\alpha_n^\tau\end{pmatrix}$$

令

$$G_0=\left\{P_\tau\,|\,P_\tau=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2\cdots\alpha_n\\ \alpha_1^\tau & \alpha_2^\tau\cdots\alpha_n^\tau\end{pmatrix},\ \tau\in G\right\}$$

我们断言 $G\cong G_0$.事实上，定义

$$\varphi:\ \tau\mapsto P_\tau,$$

则 φ 是 G 到G_0的满射.为证 φ 是单射，先注意到$N=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)=F(\alpha_1)(\alpha_2)\cdots(\alpha_n)$，由单代数扩域的结构可知，$N$ 中任意元都可以表示为系数属于F的关于α_1，α_2，$\cdots$，α_n的一个多项式

$$g(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots\alpha_n).$$

假定 $P_\tau=P_\lambda$，τ；$\lambda\in G$，就是说

$$\alpha_i^\tau=\alpha_i^\lambda,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\tag{1}$$

对于任意 $\alpha\in N$，α 可以表示为

$$\alpha=g(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)\tag{2}$$

这里 $g(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$ 是系数属于 F 的关于 α_1，α_2，$\cdots$，α_n 的多项式。则

$$\alpha^\tau=(g(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n))^\tau=g(\alpha_1^\tau,\ \alpha_2^\tau,\ \cdots,\ \alpha_n^\tau),\tag{3}$$

$$\alpha^\lambda=(g(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n))^\lambda=g(\alpha_1^\lambda,\ \alpha_2^\lambda,\ \cdots,\ \alpha_n^\lambda),\tag{4}$$

由(1)，(3)，(4)，$\alpha^\lambda=\alpha^\tau$，从而 $\tau=\lambda$。因此 φ 是单射，故 φ 是 G 到 G_0 的双射。

我们可以把 P_λ 写成如下形式

$$P_\lambda=\begin{pmatrix}\alpha_1^\tau & \alpha_2^\tau & \cdots & \alpha_n^\tau\\ \alpha_1^{\tau\lambda} & \alpha_2^{\tau\lambda} & \cdots & \alpha_n^{\tau\lambda}\end{pmatrix}\tag{5}$$

那么

$$P_\tau P_\lambda = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_1^{\tau\lambda} & a_2^{\tau\lambda} & \cdots & a_n^{\tau\lambda} \end{pmatrix} = P_{\tau\lambda}$$

因此 $G \cong G_0$，G_0 是 n 次对称群的一个子群。

这样，我们就可以把任意伽罗华群都理解为某方程的根的置换群，置换群是具体的而且容易计算，因而使我们的讨论更加方便。

一般说，n 次方程 $f(x)=0$ 的伽罗华群 G 与 S_n 的子群同构。我们要向：什么样的 n 次方程的伽罗华群恰与 S_n 同构呢？为此我们研究 n 次一般方程的伽罗华群。

3·3·3 定义 令 u_1，u_2，$\cdots$，u_n 是某一域 K 上的 n 个无关未定元，方程

$$x^n - u_1 x^{n-1} + u_2 x^{n-2} - \cdots + (-1)^n u_n = 0$$

称为 K 上 n 次一般方程。

由此定义我们看出方程的系数 u_i 不在 K 内，而在 $K(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 内，这个定义与我们一般了解的意义是一样的。比如我们解二次方程 $x^2+ax+b=0$，在解的过程中只把 a，b 看成符号，它们是没有关系的，实际上 a，b 就是无关未定元，在解方程时，当然不能从有理数域 Q 出发，而从 $F=Q(a, b)$ 出发，至于式于中出现的正负号，只是为我们计算方便罢了。

3·3·4 引理 令

$$f(x) = x^n - u_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n u_n = 0$$

是域 K 上的 n 次一般方程，而 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 是方程的 n 个根，则 a_1，a_2，$\cdots$，a_n 是 K 上无关未定元。

证明 设 N 是 $f(x)=0$ 在 $F=K(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 上的根域，在 N 中

$$f(x) = (x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n),$$

$$u_1=\sum\alpha_i,\ u_2=\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j,\ \cdots,\ u_n=\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_n,$$

令 $\overline{N}=K(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$，$x_i$ 是 K 上无关未定元（这里 $K(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$ 可以理解为 n 元多项式环 $K[x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n]$ 的商域）。作 $\overline{f}(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\theta_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\theta_n$，这里 $\theta_1=\sum x_i$，$\theta_2=\sum_{i\neq j}x_ix_j$，$\cdots$，$\theta_n=x_1x_2\cdots x_n$。比较

$$K\subseteq\overline{F}=K(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_n)\subseteq\overline{N}=K(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)$$

$$K\subseteq F=K(u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n)\subseteq N=K(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)$$

首先证明 $\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_n$ 是 K 上无关未定元。若

$$g(\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_n)=0,$$

g 是以 K 的元为系数的 n 元多项式。于是

$$g(\sum x_i,\ \sum_{i\neq j}x_ix_j,\ \cdots,\ x_1x_2\cdots x_n)=0$$

$$g(\sum\alpha_i\sum_{i\neq j}\alpha_i\alpha_j,\ \cdots,\ \alpha_1\alpha_2,\ \cdots\alpha_n)=0$$

$$g(u_1,\ u_2,\cdots u_n)=0$$

由于 $u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n$ 是 K 上无关未定元，所以 g 的所有系数皆为零，故 $\theta_1,\ \theta_2,\ \cdots,\ \theta_n$ 是 K 上无关未定元。所以 $K[\theta_1,\ \cdots,\ \theta_n]\cong K[u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n]$，因而

$$F\cong\overline{F}$$

在此同构映射之下，K 的元不动，$\theta_i\mapsto u_i$，$f(x)\mapsto\overline{f}(x)$，但 N 是 $f(x)$ 在 F 上的分裂域，$\overline{N}$ 是 $\overline{f}(x)$ 在 $\overline{F}$ 上的分裂域，因而

$$N\cong\overline{N}$$

在此同构映射之下，K 的元不动，$x_i\mapsto\alpha_i$，$i=1,\ \cdots,\ n$，故 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ 是 K 上无关未定元。

3·3·5 定理 域 K 上 n 次一般方程

$$f(x)=x^n-u_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^nu_n=0$$

在 $F=K(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ 上的伽罗华群与 S_n 同构。

证明　设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是 $f(x)$ 的 n 个根，N 为 $f(x)$ 在 F 上的分裂域，则 $N=F(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$，由 3·3·2，$\mathrm{Gal}N/F\cong S_n$ 的一个子群。看

$$\tau=\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_n\\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \cdots & \alpha_{in}\end{pmatrix},$$

$\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in}$ 是 $f(x)=0$ 的 n 个根 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的任一排列。定义

$$r(\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)\mapsto r(\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in}),$$

r 是系数在 K 里的有理分式，由 3·3·4，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 和 $\alpha_{i1}, \alpha_{i2}, \cdots, \alpha_{in}$ 是 K 上无关未定元，因此这个映射是 N 的一个自同构映射，在这个同构映射之下，K 的元不动，又由于 α_i 调动次序不影响 $f(x)=0$ 的系数，因之在这个同构映射之下，F 的元亦不动，故这个映射是 N 在 F 上的自同构映射，因而它属于 $\mathrm{Gal}N/F$，但形如 τ 的置换共有 $n!$ 个，所以 $|\mathrm{Gal}N/F|\geqslant n!$，故 $\mathrm{Gal}N/F\cong S_n$。

习　题

1．令 G 是 n 个数码的任一置换群，证明，存在一个域 F 以及 F 上的一个方程 $f(x)=0$，这个方程在 F 上的伽罗华群与 G 同构。

2．设域 F 上的 n 次多项式 $f(x)$ 在 F 上可约，则 $f(x)=0$ 在 F 上的伽罗华群不与 S_n 同构。

§3·4　伽罗华理论的基本定理

有了前面的准备工作，我们就可以讨论伽罗华理论的核

心内容——伽罗华理论的基本定理。

设 N 是域 F 的正规域，令 $\widetilde{L}$ 表示由 N 与 F 的所有中间域作成的集合：

(1) $$\widetilde{L}=\{L|L\text{是}N\text{的包含}F\text{的子域}\}.$$

对于 $\widetilde{L}$ 中任意元 L 都有 N 是 L 的正规域。我们把由 $\mathrm{Gal}N/F$ 的所有子群作成的集合记成 $\widetilde{H}$：

(2) $$\widetilde{H}=\{H|H\text{是}\mathrm{Gal}N/F\text{的子群}\},$$

显然，$\widetilde{L}$ 与 $\widetilde{H}$ 都是非空的。伽罗华把这两个集合联系起来，很巧妙地在这两个集合之间建立了某种一一映射关系，这就是伽罗华理论基本定理所阐述的重要内容。

通过具体验证，很容易得到

3·4·1 引理 设 N 是 F 的正规域，$\mathrm{Gal}N/F$ 是 N 在 F 上的伽罗华群，那么

1）设 H 是 $\mathrm{Gal}N/F$ 的一个子群，则由 H 所确定的 N 的子集

$$\mathrm{Inv}H=\{a\in N|a^{\tau}=a,\ \forall\tau\in H\},$$

是 N 的一个包含 F 的子域，称 $\mathrm{Inv}H$ 为 H 的不变子域。

2）设 L 是 N 的包含 F 的一个子域，则 N 在 L 上的伽罗华群

$$\mathrm{Gal}N/L=\{\sigma\in\mathrm{Gal}N/F|a^{\sigma}=a,\ \forall a\in L\}$$

是 $\mathrm{Gal}N/F$ 的一个子群。

根据3·4·1可得映射

$$\Phi:\ \widetilde{H}\longrightarrow\widetilde{L}$$

$$H\longmapsto\mathrm{Inv}H,\ \forall H\in\widetilde{H}.$$

这个映射可用下面的图来表示：

$$\begin{array}{c} \mathrm{Gal}N/F \geqslant H \\ \downarrow \Phi \\ N \supseteq \mathrm{Inv}H \end{array}$$

$$\Psi: \quad \tilde{L} \longrightarrow \tilde{H}$$

$$L \longmapsto \mathrm{Gal}N/L, \quad \forall L \in \tilde{L}.$$

这也可用图来表示：

$$\begin{array}{c} \mathrm{Gal}N/F \geqslant \mathrm{Gal}N/L \\ \uparrow \Psi \\ N \supseteq L \end{array}$$

我们把 Φ 与 Ψ 称为两个伽罗华映射。

由于 $\mathrm{Inv}H$ 是 N 包含 F 的子域，则 N 是 $\mathrm{Inv}H$ 的正规域(根据§3·1的习题3)。这样，自然可以提出这样的问题，$\mathrm{Gal}N/\mathrm{Inv}H$ 与 H，$\mathrm{Inv}(\mathrm{Gal}N/L)$ 与 L 各有什么关系。我们有

3·4·2 引理　伽罗华映射具有如下性质：

1) $\mathrm{Gal}(N/\mathrm{Inv}H) = H$；

2) $\mathrm{Inv}(\mathrm{Gal}N/L) = L$。

证明

1) 为书写方便，设 $\mathrm{Gal}(N/\mathrm{Inv}H) = H_1$。

首先由于 H 的元是 N 在 F 上的自同构，并且使 $\mathrm{Inv}H$ 的元保持不动，故 H 的元是 N 在 $\mathrm{Inv}H$ 上的自同构，因之

$$H \subseteq H_1 \tag{3}$$

其次，由 3·2·6，$|\mathrm{Gal}(N/\mathrm{Inv}H)| = [N : \mathrm{Inv}H]$。设 $[N : \mathrm{Inv}H] = k$，$\mathrm{Inv}H = L$，则存在一个 k 次不可约多项式 $g(x) \in L[x]$，且有 $g(\theta) = 0$，$N = L(\theta)$。令

$$H = \{\tau_1 = \varepsilon, \ \tau_2, \cdots, \ \tau_m\}$$

考虑多项式

$$h(x)=(x-\theta^{\tau_1})(x-\theta^{\tau_2})\cdots(x-\theta^{\tau_m})$$

$h(x)$ 的 m 个根为

(4) $$\theta^{\tau_1},\quad \theta^{\tau_2},\ \cdots,\quad \theta^{\tau_m}$$

对于任意 $\tau\in H$，显然有

$$H=\{\tau_1\tau,\ \tau_2\tau,\ \cdots,\ \tau_m\tau\}$$

故

(5) $$\theta^{\tau_1\tau},\ \theta^{\tau_2\tau},\ \cdots,\ \theta^{\tau_m\tau}$$

与(4)只有次序不同。因之，$h(x)$ 的系数经 H 的任意元 τ 作用后仍保持不动，这就是说 $h(x)\in L[x]$，从而 θ 在 L 上的极小多项式 $g(x)$ 是 $h(x)$ 的因式。于是 $[L(\theta):L]\leqslant m$，但 $L(\theta)=N$，而 $[N:L]=k$，因此，$k\leqslant m$，即

(6) $$|H_1|\leqslant|H|$$

由(3)和(6)即得，$H_1=H$，即

$$\mathrm{Gal}(N/\mathrm{Inv}H)=H.$$

2) 令 $\mathrm{Inv}(\mathrm{Gal}N/L)=L_1$，则

$$L_1=\{a\in N\mid a^\tau=a,\ \forall\tau\in\mathrm{Gal}N/L\}$$

由 1) 知，$\mathrm{Gal}N/L_1=\mathrm{Gal}(N/\mathrm{Inv}(\mathrm{Gal}N/L))=\mathrm{Gal}N/L$，即 $\mathrm{Gal}N/L$ 恰为 N 在 L_1 上的伽罗华群 $\mathrm{Gal}N/L_1$，于是

(7) $$|\mathrm{Gal}N/L|=|\mathrm{Gal}N/L_1|$$

根据3·2·6，我们有

(8) $$|\mathrm{Gal}N/L|=[N:L]$$

(9) $$|\mathrm{Gal}N/L_1|=[N:L_1]$$

由(7)，(8)，(9)得

$$[N:L]=[N:L_1]$$

而根据 $\mathrm{Gal}N/L$ 的定义知，$L\subseteq L_1$，故 $L_1=L$，即

$$\mathrm{Inv}(\mathrm{Gal}N/L)=L.$$

根据3·4·2的结论，我们可得

$$H \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Inv}H \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Gal}(N/\mathrm{Inv}H) = H, \quad \forall H \in \widetilde{H}$$

$$L \xrightarrow{\Psi} \mathrm{Gal}N/L \xrightarrow{\Phi} \mathrm{Inv}(\mathrm{Gal}N/L) = L, \quad \forall L \in \widetilde{L}$$

即

$$\Phi \circ \Psi = \mathrm{I}_{\widetilde{H}}, \qquad \Psi \circ \Phi = \mathrm{I}_{\widetilde{L}}$$

这里“$\circ$”表示映射的乘法，$\mathrm{I}_{\widetilde{H}}$表示$\widetilde{H}$到$\widetilde{H}$的恒等映射，$\mathrm{I}_{\widetilde{L}}$表示$\widetilde{L}$到$\widetilde{L}$的恒等映射。因此，$\Phi$与$\Psi$都是双射，并且，$\Psi = \Phi^{-1}$

综合以上讨论，我们得到

3·4·3 基本定理Ⅰ 设N是域F的正规域，$\widetilde{H}$和$\widetilde{L}$分别由(2)和(1)定义，则伽罗华映射Φ和Ψ均为双射，而且互为逆映射。

由伽罗华映射定义易得

3·4·4 定理 $\widetilde{H}$与$\widetilde{L}$之间的伽罗华映射具有性质：$H_1 \geqslant H_2 \Leftrightarrow \mathrm{Inv}H_1 \subseteq \mathrm{Inv}H_2$

3·4·3和3·4·4的结论可以用图示意如下：

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Gal}N/F & \geqslant & H = \mathrm{Gal}N/L & \geqslant & \{\varepsilon\} \\ & & \downarrow \Phi \quad \uparrow \Psi & & \\ F & \subseteq & \mathrm{Inv}H = L & \subseteq & N \end{array}$$

此图称为伽罗华对应图。

下面给出如何求伽罗华映射的方法。

假定中间域L已知，我们来求$H = \mathrm{Gal}N/L$。

设$L = F(\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_m)$，因为$N = F(\alpha)$，所以$\beta_i$是$\alpha$的多项式。假定$\mathrm{Gal}N/F$中元$\tau$把$\alpha$变为$\alpha_k$，如果我们

在表示 β_i 的 α 的多项式中，把 α 换成 α_k，仍然是这个多项式，那么 τ 就不使 β_i 变动。$\mathrm{Gal}N/F$ 中不使 β_1，β_2，…，β_m 变动的元也不使 L 中任意元变动，因此所有这些元构成的子群就是 $H=\mathrm{Gal}N/L$。

假定 $\mathrm{Gal}N/F$ 的子群 H 已知，我们来求中间域 $L=\mathrm{Inv}H$。

设 $H=\{\tau_1=\varepsilon,\ \tau_2,\ \cdots,\ \tau_m\}$。由 3·4·2 的证明中可知多项式

$$g(x)=(x-\alpha^{\tau_1})(x-\alpha^{\tau_2})\cdots(x-\alpha^{\tau_m})$$

的系数都在 L 中，因此把这些系数添加于 F 得到的扩域 $L'\subseteq L$，并且 $[N:L']\leqslant m$，于是由次数定理推出 $[L:L']=1$，因此 $L'=L$。这就是说，把 α^{τ_1}，α^{τ_2}，…，α^{τ_m} 的初等对称多项式添加于 F 所得的扩域就是所求的 $L=\mathrm{Inv}H$。

例 1　§3·2 的例 3 中 $\mathbf{Q}(\theta)$ 是 $\mathbf{Q}$ 的正规域，这里 θ 是 $x^4+x^3+x^2+x+1=0$ 的一个根，$[\mathbf{Q}(\theta):\mathbf{Q}]=4$，设

$$\mathrm{Gal}\mathbf{Q}(\theta)/\mathbf{Q}=\{\tau_1=\varepsilon,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4\}$$

而 $\mathrm{Gal}\mathbf{Q}(\theta)/\mathbf{Q}\cong Z_5^*$。$Z_5^*$ 是循环群，它只有一个真子群，即 $H=\{\tau_1,\ \tau_4\}$，因之 $\mathrm{Gal}\mathbf{Q}(\theta)/\mathbf{Q}$ 共有三个子群，于是 $\mathbf{Q}(\theta)$ 与 $\mathbf{Q}$ 的中间域也有三个。于是有

$$\Phi:\quad \{\varepsilon\}\longmapsto\mathbf{Q}(\theta)$$

$$H\longmapsto\mathbf{Q}(\theta^{\tau_1}+\theta^{\tau_4},\ \theta^{\tau_1}\theta^{\tau_4})=\mathbf{Q}(\theta+\theta^4)$$

$$\mathrm{Gal}\mathbf{Q}(\theta)/\mathbf{Q}\longmapsto\mathbf{Q}$$

例 2　§3·3中的例 3 给出方程 $x^3-2=0$ 的伽罗华群 $G=\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}$，这里 $N=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\ \omega)$。又知

$$G=\{\tau_1=\varepsilon,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4,\ \tau_5,\ \tau_6\}$$

(10)

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6
$\sqrt[3]{2} \mapsto$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$
$\omega \mapsto$	ω	ω	ω	ω^2	ω^2	ω^2

由§3·3的(1)可知$G\cong S_3$，由此可得G共有6个子群：

$\{\tau_1\}$，$H_1=\{\tau_1, \tau_2, \tau_3\}$，$H_2=\{\tau_1, \tau_4\}$，

$H_3=\{\tau_1, \tau_5\}$，$H_4=\{\tau_1, \tau_6\}$，G。

由(10)直接看出$\{\tau_1\}$，H_1，H_2，G在Φ之下的象分别为N，$L_1=Q(\omega)$，$L_2=Q(\sqrt[3]{2})$，Q。因为$(\sqrt[3]{2}\omega^2)^{\tau_5}=\sqrt[3]{2}\omega^2$，$(\sqrt[3]{2}\omega)^{\tau_6}=\sqrt[3]{2}\omega$，再利用3·2·6可知$H_3$和$H_4$在$\Phi$之下的象分别为$L_3=Q(\sqrt[3]{2}\omega^2)$，$L_4=Q(\sqrt[3]{2}\omega)$。于是，我们有

$$\Phi: \quad \{\tau_1\} \longmapsto N$$

$$H_1 \longmapsto L_1$$

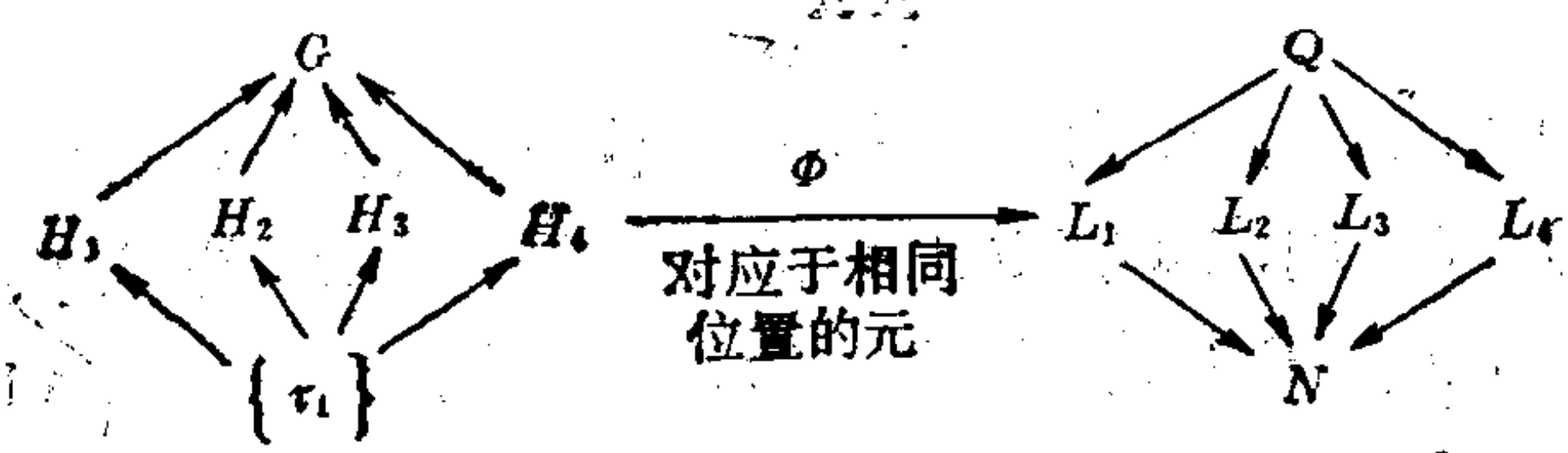
$$H_2 \longmapsto L_2$$

$$H_3 \longmapsto L_3$$

$$H_4 \longmapsto L_4$$

$$G \longmapsto Q$$

这种对应关系可以用图3-1来表示：



$H\to K$表示H是K的子群　　$M\to P$表示域$M\subseteq P$

图 3-1

在这个例子中，由于$\sqrt[3]{2}$在Q上的共轭元$\sqrt[3]{2}\omega$不属于$Q(\sqrt[3]{2})$，所以$L_2=Q(\sqrt[3]{2})$不是Q的正规域，可以验证相应于G的子群H_2不是G的不变子群。然而$L_1=Q(\omega)$是Q的正规域，相应的子群H_1是G的不变子群。这个结果可以推广到一般情形。

3·4·5 基本定理Ⅱ 设Φ是伽罗华映射，如果$H\triangleleft \mathrm{Gal}N$ F，则$H^{\Phi}=\mathrm{Inv}H$是F的正规域，反之亦然。并且

$$\mathrm{Gal}N/F/\mathrm{Gal}N/L\cong\mathrm{Gal}L/F$$

证明 设$H\triangleleft \mathrm{Gal}N/F$，$L=\mathrm{Inv}H$。我们要证明，对于任意的$a\in L$，$a$在$F$上的共轭元属于$L$。为此，先来证明$a$在$F$上的共轭元一定具有$a^{\tau}$的形式，$\tau\in \mathrm{Gal}N/F$。令

$$\mathrm{Gal}N/F=\{\tau_1=\varepsilon,\ \tau_2,\ \cdots,\ \tau_n\}$$

对于任意$\tau\in \mathrm{Gal}N/F$，仍然有

$$\mathrm{Gal}N/F=\{\tau_1\tau,\ \tau_2\tau,\ \cdots,\ \tau_n\tau\}$$

现考虑多项式

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a^{\tau_i})$$

显然有

$$f(x)=\prod_{i=1}^{n}(x-a^{\tau_i\tau})$$

故$f(x)$的系数在任意τ的作用下不变，即$f(x)\in F[x]$。由$f(a)=0$，因之a在F上的极小多项式$g(x)$整除$f(x)$。如果b与a在F上共轭，则$g(b)=0$，故存在$\tau\in \mathrm{Gal}N/F$使得$b=a^{\tau}$。

由此，只要证明，对于任意$\tau\in \mathrm{Gal}N/F$，任意$a\in L$，均有$a^{\tau}\in L$，则L即为F的正规域。

因为 $H \lhd \mathrm{Gal}N/F$，所以，对于任意 $\tau \in \mathrm{Gal}N/F$，任意 $\sigma \in H$，都有 $\tau\sigma\tau^{-1} \in H$. 设 $a \in L = \mathrm{Inv}H$，则 $a^{\tau\sigma\tau^{-1}} = a$，从而 $a^{\tau\sigma} = a^{\tau}$，即 a^{τ} 在 σ 之下不变. 故 $a^{\tau} \in L$，即 L 是 F 的正规域.

反之，设 L 是 F 的正规域，$a \in L$，$\sigma \in \mathrm{Gal}N/F$，由 3·2·5知 a^{σ} 与 a 共轭，因而 $a^{\sigma} \in L$，故 $\mathrm{Gal}N/F$ 的元 σ 可诱导出 L 的一个自同构 σ'：

$$a^{\sigma'} = a^{\sigma}, \quad \forall a \in L$$

因为对于任意 $a \in F$，都有 $a^{\sigma} = a$，故 $a^{\sigma'} = a$，即 σ' 是 L 在 F 上的自同构，L 是 F 的正规域，$\sigma' \in \mathrm{Gal}L/F$. 作 $\mathrm{Gal}N/F$ 到 $\mathrm{Gal}L/F$ 内的一个映射 ρ：

$$\rho: \quad \sigma \longmapsto \sigma'$$

容易验证 ρ 是一个同态映射.

我们来看 ρ 的核. 由 $\rho: \sigma \longmapsto \varepsilon$ 可得对于任意的 $a \in L$ 都有 $a^{\sigma} = a$，因而 ρ 的核是 H，所以 $H \lhd \mathrm{Gal}N/F$. 又 $H = \mathrm{Gal}N/L$，由同态基本定理可知

$$\mathrm{Gal}N/F \big/ \mathrm{Gal}N/L \cong \mathrm{Gal}L/F \text{ 的一个子群}$$

设 $[N : L] = r$，$[L : F] = s$，则 $[N : F] = rs$，因之

$$|\mathrm{Gal}N/F \big/ \mathrm{Gal}N/L| = rs/r = s$$

而 $|\mathrm{Gal}L/F| = s$，所以

$$\mathrm{Gal}N/F \big/ \mathrm{Gal}N/L \cong \mathrm{Gal}L/F.$$

习　题

1. 设 $N = Q(\sqrt{3}, i)$，找出 $\mathrm{Gal}N/Q$ 的所有子群，并找出与这些子群对应的 N 与 Q 的中间域.

2. 设 $N = Q(\sqrt[4]{2}, i)$，找出 $\mathrm{Gal}N/Q$ 的所有子群，何者是不变子群；找出这些子群对应的 N 与 Q 的中间域，何者是 Q 的正规域.

3. 如果 $Gal N/F$ 的子群 $H \neq Gal N/F$，则 N 中存在一元 $a \notin F$，a 在 H 的任何元作用下不变。

4. 设 N 是 F 上的有限扩域，G 是 N 在 F 上的自同构群，$L = \{x \in N | x^{\tau} = x, \tau \in G\}$，证明，$N$是$F$上正规域的充分必要条件是$F = L$。

5. 令E是F的一个扩域，而I_1及I_2是两个中间域，若 I_1与 I_2 之间存在一个使F不动的同构映射，我们就说 I_1 与 I_2 是F上的共轭域。令G是一个群，而H_1及H_2是G的两个子群，若是存在G 的元a，使 $H_2 = aH_1a^{-1}$，我们就说H_1与H_2是共轭子群。

令N是域F的一个正规域，G是N在F上的伽罗华群，而 I_1 与 I_2 是两个中间域。证明，在伽罗华映射之下，I_1与 I_2 共轭的充分必要条件是：与它们对应的G的子群H_1与H_2共轭。

第四章　伽罗华理论的应用

本章是应用伽罗华理论的基本定理来讨论方程的根号解，给出方程可用根号解的充要条件，并且得出五次和五次以上一般方程不能用根号解；进一步给出方程不能用根号解的具体例子；最后讨论了圆规和直尺作图问题。

§4·1　单位根和循环扩域

在讨论方程的根号解时，域 F 上二项方程 $x^n-a=0$ 占有突出的地位。由于 $\sqrt[n]{a}$ 是方程 $x^n-a=0$ 的一个根，所以我们称 $F(\sqrt[n]{a})$ 为 F 的根次数是 n 的根号扩域。

以下我们就研究域 F 上根号扩域 $F(\sqrt[n]{a})$，主要研究方程 $x^n-a=0$ 的伽罗华群。先从最简单的方程 $x^n-1=0$ 研究开始。

在 F 上作方程 $x^n-1=0$ 的根域 N，这个方程的根叫做 n 次单位根。若 n 是使 $\varepsilon^n=1$ 的最小正整数，称 ε 是 n 次本原单位根，简称 n 次本原根。我们知道 n 次本原根一共有 $\varphi(n)$ 个，这里 $\varphi(n)$ 表示一切小于 n 且与 n 互素的正整数的个数。称 $\varphi(n)$ 为欧拉函数。

4·1·1 引理　一切 n 次单位根对乘法来说作成一个循环群 G。

证明　任取 $\varepsilon_1,\varepsilon_2\in G\Rightarrow(\varepsilon_1\varepsilon_2)^n=\varepsilon_1^n\varepsilon_2^n=1\Rightarrow\varepsilon_1\varepsilon_2\in G$，又 $\varepsilon\in G$，$\varepsilon\cdot\varepsilon^{n-1}=1\Rightarrow\varepsilon^{n-1}$ 是 ε 的逆元。$(\varepsilon^{n-1})^n=(\varepsilon^n)^{n-1}$

$=1\Rightarrow\varepsilon^{-1}\in G$，即它是方程 $x^n-1=0$ 的根域 N 的乘群的子群，所以 G 是一个有限可换群。

令 m 是 G 的元的阶中最大者，那么有

$$\varepsilon_i^m=1 \text{ 对于任意 } \varepsilon_i\in G,$$

这就是说，多项式 x^m-1 至少有 n 个根，由此推出 $m\geqslant n$，但 $m\leqslant n$，于是推出 $m=n$。这就是说，G 有一元 ε，它的阶为 n，因而 G 是一个循环群。

4·1·2 定理 方程 $x^n-1=0$ 在 F 上的伽罗华群是交换群。

证明 设 ε 是任一 n 次本原根，G 是方程 $x^n-1=0$ 的伽罗华群。

任 $\tau\in G$，$\tau:\ \varepsilon\mapsto\varepsilon^i$，这里 i 是小于 n 的正整数，则 ε^i 也是 n 次本原根。于是 $(i,\ n)=1$。设 G' 是整数模 n 的既约剩余类的乘法群，知 G' 是可换群。令

$$\varphi:\quad \tau\mapsto\overline{i}\quad \text{若 } \varepsilon^\tau=\varepsilon^i。$$

因为 ε^i 是本原根，所以 $(i,\ n)=1$，因之 $\overline{i}\in G'$。即 φ 是 G 到 G' 的一个映射。又令

$$\sigma:\quad \varepsilon\mapsto\varepsilon^j$$

若 $\tau\neq\sigma\Rightarrow\varepsilon^\tau\neq\varepsilon^\sigma\Rightarrow\varepsilon^i\neq\varepsilon^j\Rightarrow i\neq j\Rightarrow\overline{i}\neq\overline{j}$，所以 φ 是 G 到 G' 的一个单射。令

$$\varphi:\quad \tau\mapsto\overline{i},\quad \sigma\mapsto\overline{j}$$

由于 $\varepsilon^{\tau\sigma}=(\varepsilon^\tau)^\sigma=(\varepsilon^i)^\sigma=(\varepsilon^\sigma)^i=\varepsilon^{ji}=\varepsilon^{ij}$。所以

$$\varphi:\quad \tau\sigma\mapsto\overline{ij}=\overline{i}\,\overline{j}$$

因而 φ 是 G 到 G' 内的一个同构映射。即 G 和 G' 的一个子群同构。由于 G' 是可换群，所以 G' 的子群也是可换群，故 G 是可换群。

4·1·3 推论 设p为素数，方程 $x^p-1=0$ 在 F 上的伽罗华群 G是循环群。

证明 因 p 为素数，所以由4·1·2知 $G'=\{\overline{1}, \overline{2}, \cdots, \overline{p-1}\}$，但 G' 对剩余类的乘法做成一个循环群，又由于循环群的子群还是循环群，所以 G为循环群。

现在研究方程 $x^n-a=0$ 的伽罗华群。

4·1·4 定理 设域 F 含有一切 n 次单位根，则方程 $x^n-a=0(a\neq 0)$ 在 F 上的伽罗华群是循环群。

证明 设 $\varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^{n-1}, \varepsilon^n=1$，是方程 $x^n-1=0$ 的 n 个根，G 是方程 $x^n-a=0$ 的伽罗华群。

若 α 是方程 $x^n-a=0$ 的一个根，则每一 $\varepsilon^i\alpha$ 都是 $x^n-a=0$ 的根。$\alpha\neq 0\Rightarrow\varepsilon^i\alpha\neq\varepsilon^j\alpha$，$i\neq j\ (i,j=1, 2, \cdots, n)$。故 $\varepsilon^i\alpha(i=1, 2, \cdots, n)$ 是 $x^n-a=0$ 的 n 个不同的根。

任 $\tau\in G$，τ：$\alpha\mapsto\varepsilon^i\alpha$，我们规定

$$\varphi: \quad \tau\mapsto\varepsilon^i$$

则 φ 是 G 到出现 ε^i 所成的集合上的满单射。

若 $\varphi: \quad \tau\mapsto\varepsilon^i$，$\lambda\mapsto\varepsilon^j$，则 $\alpha^{\tau\lambda}=(\varepsilon^i\alpha)^\lambda=\varepsilon^i\alpha^\lambda=\varepsilon^i(\varepsilon^j\alpha)=(\varepsilon^i\varepsilon^j)\alpha$，故

$$\varphi: \quad \tau\lambda\mapsto\varepsilon^i\varepsilon^j.$$

所以 G 与一切 n 次单位根所成之循环群的一个子群 同 构，因而 G是群循环。

4·1·5 推论 在 $F[x]$ 中，x^p-a（p 为素数）或是不可约，或是完全分解。

证明 阶为素数 p 的群的子群或是它本身，或是单位元群。设 N 是方程 $x^p-a=0$ 在 F 上的根域，G 是它的伽罗华群，由4·1·4知 G 的阶等于 p 或 1。若 G 的阶 $=p$，$[N:F]=p$，$N=F(\alpha)$，即是说 α 在 F 上 的 次 数 $=p$。但 α 又 是

x^p-a 的根，故 x^p-a 是 a 在 F 上的极小多项式，因之x^p-a 在 F 上不可约。

若 G 的阶为 1，$[N:F]=1\Rightarrow\ N=F$，x^p-a 在 F 上完全分解。

为了讨论方便，我们给出如下

4·1·6 定义　设 N 是 F 的正规域，若 $\mathrm{Gal}N/F$ 是循环群，则称 N是 F 的循环扩域。

由此定义和4·1·4知，域 F 上方程 $x^n-a=0$ 的根域 N是 F 的循环扩域。

4·1·4的逆定理也是成立的，我们只讨论 n 为素数的情况，为此，我们先证明一个引理。

4·1·7 引理　若 ε_1，ε_2，…，ε_n 是一切n次单位根，则

$$\varepsilon_1^k+\varepsilon_2^k+\cdots+\varepsilon_n^k=0\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

证明　不妨假定 $\varepsilon_i=\varepsilon^i$，$\varepsilon$ 是 n 次本原根。

$$\begin{aligned}\varepsilon_1^k+\varepsilon_2^k+\cdots+\varepsilon_n^k&=\varepsilon^k+(\varepsilon^k)^2+\cdots+(\varepsilon^k)^n\\&=\varepsilon_k+\varepsilon_k^2+\cdots+\varepsilon_k^n=\varepsilon_k(1-\varepsilon_k^n)/(1-\varepsilon_k)=0\\&\qquad(\varepsilon_k=\varepsilon^k\neq 1).\end{aligned}$$

4·1·8 定理　设域 F 包含一切 p（p 为素数）次单位根，若 N 是 F 的一个 p 次循环扩域，则 $N=F(a)$，其中 a 是方程 $x^p-a=0\ (a\in F)$ 的一个根。

证明　令 ε，ε^2，…，ε^{p-1}，$\varepsilon^p=1$ 表示一切 p 次单位根，$\mathrm{Gal}N/F=\{\tau,\ \tau^2,\ \cdots,\ \tau^{p-1},\ \tau^p=\varepsilon\}$，$N$是域 F的p次循环扩域，$N=F(\theta)$。令

$$\alpha_j=\theta+\varepsilon_j\theta^{\tau}+\cdots+\varepsilon_j^{p-1}\theta^{\tau^{p-1}},\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ p.$$

（这个式子称为 Lagrange 预解式）。由4·1·7

$$\sum_{j=1}^{p}\alpha_j = p\theta \qquad \text{故} \quad \theta = \frac{\sum_{j=1}^{p}\alpha_j}{p}$$

其中至少有一 $\alpha_i \notin F$，否则 $\theta \in F$，矛盾。

$$\alpha_i^1 = \theta^\tau + \varepsilon_i\theta^{\tau^2} + \varepsilon_i^2\theta^{\tau^3} + \cdots + \varepsilon_i^{p-2}\theta^{\tau^{p-1}} + \varepsilon_i^{p-1}\theta^{\tau^p}$$

$$= \varepsilon_i^{p-1}(\theta + \varepsilon_i\theta^\tau + \cdots + \varepsilon_i^{p-1}\theta^{\tau^{p-1}}) = \varepsilon_i^{p-1}\alpha_i$$

又 $(\alpha_i^p)^\tau = (\alpha_i^1)^p = (\varepsilon_i^{p-1})^p\alpha_i^p = \alpha_i^p$，　故 α_i^p 在 GalN/F 作用下不变，所以 $\alpha_i^p = a \in F$。即 α_i 是方程 $x^p - a = 0$ 的一个根，由 4·1·5 $x^p - a$ 在 F 上不可约，因之，$N = F(\alpha_i)$。取 $\alpha = \alpha_i$，则 $N = F(\alpha)$，而 α 是 $x^p - a = 0$的一个根。

习　题

1。令n是任意给定的一个正整数，方程 $x^n - 1 = 0$ 在F上的伽罗华群是不是一个循环群？

2。如果基域F不含n次单位根，那么方程 $x^n - a = 0$ 的伽罗华群是不是交换群？

§4·2　方程可用根号解的充要条件

有了以上的准备，我们就可以讨论用根号解方程。本节我们给出方程可用根号解的充要条件，并且得到 Abel-Ruffini 定理。

让我们先看一下，能用根号解的方程的求根公式有些什么特点。

我们看 Q 上二次一般方程

$$x^2 - ax + b = 0$$

可看成$F=Q(a,\ b)$上的方程。把$\sqrt{D}=\sqrt{a^2-4b}$添加到F上得到的扩域$F(\sqrt{D})$中包含了$f(x)$的所有根。$x=(a\pm\sqrt{D})/2$。对于高于二次的方程能用根号解也是这个意思，此时的添加元不一定是平方根，而是一般的n次方根，而且可能是多次添加才能得到一个扩域使方程的所有根含于这个扩域内。为了叙述简洁，我们形象地采用根塔这个述语：即扩域K/F的如下子域塔

$$F=F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots\subseteq F_i\subseteq F_{i+1}\subseteq\cdots\subseteq F_r\subseteq F_{r+1}=K$$

其中每个$F_{i+1}=F_i(\alpha_i)$，$\alpha_i^{n_i}=a_i\in F_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$。称为$K/F$的根塔。下面我们就精确地给出方程可用根号解的定义。

4·2·1 定义　设$f(x)$是域F上某一首项系数是1的多项式，称方程$f(x)=0$在F上可用根号解，如果存在F的某个扩域K满足以下条件：

1）K包含了$f(x)$在F上的分裂域E，即

$$F\subseteq E\subseteq K$$

2）扩域K/F有如下根塔

$$F=F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots\subseteq F_r\subseteq F_{r+1}=K$$

其中每个$F_{i+1}=F_i(\alpha_i)$，$\alpha_i^{n_i}=a_i\in F_i$，$i=1,\ 2,\ \cdots,r$。对应的自然数集$\{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_r\}$称为此根塔的根次数集。并称$K$为$F$的根次数集是$\{n_1,\ n_2,\ \cdots,\ n_s\}$的根号扩域。简称$K/F$为根号扩域。

用这种条件定义的方程可用根号解是否合理？因为每个F_{i+1}是把$F_i[x]$中某个n_i次方程$x^{n_i}-a_i=0$的一个根$\alpha_i=\sqrt[n_i]{a_i}$添加到F_i上而得的单代数扩域，所以F_{i+1}中每个元都可表为α_i的多项式，系数属于F_i，即F_{i+1}中的

每个元都可由 F_i 中的元经过有限次加减乘除和开 n_i 次方运算得出。因为 $f(x)=0$ 的所有根都在 $f(x)$ 的分裂域 E 中，因而也在 K 中，所以 $f(x)=0$ 的每一个根都可利用 $f(x)$ 的系数，经过有限次加减乘除和开 n_i 次方运算表示，这恰好是通常所说的方程可用根号解的含义，因此定义是合理的。

例　有理数域 Q 上二项方程

$$x^5-p=0 \quad (p\text{ 为素数})$$

可用根号解。

因为 $x^5-p=0$ 的五个根为 $\sqrt[5]{p}$，$\varepsilon\sqrt[5]{p}$，$\varepsilon^2\sqrt[5]{p}$，$\varepsilon^3\sqrt[5]{p}$，$\varepsilon^4\sqrt[5]{p}$，这里 $\varepsilon=\cos72^\circ+i\sin72^\circ$ 是五次本原根。

取 $\alpha=18^\circ$，则由 $\sin3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$，$\cos2\alpha=1-2\sin^2\alpha$ 得 $4\sin^2\alpha+2\sin\alpha-1=0$，故有

$$\sin18^\circ=\frac{\sqrt{5}-1}{4}=\cos72^\circ$$

$$\sin72^\circ=\frac{1}{4}\sqrt{10+2\sqrt{5}}\ =\cos18^\circ$$

于是

$$\varepsilon=\frac{1}{4}\left(-1+\sqrt{5}+\sqrt{-10-2\sqrt{5}}\right)$$

我们构造一个根塔

$$Q\subset Q(\sqrt[5]{p})\subset Q(\sqrt[5]{p},\sqrt{5})\subset Q(\sqrt[5]{p},\sqrt{5},\sqrt{-10-2\sqrt{5}})=K,$$

其中相邻两域次数依次为 5，2，2，而且都是添加一个根号所得的扩域。K 中包含了 $x^5-p=0$ 的所有根，所以方程 $x^5-p=0$ 可用根号解。

下面我们讨论方程可用根号解的充要条件，为此需要用到伽罗华的基本定理，但是伽罗华基本定理仅讨论正规域，而且有根塔的扩域K/F未必为正规域。因此首先解决以下重要定理。

4·2·2 定理 设K是F的根号扩域，则存在F的正规根号扩域N，使 $F\subseteq K\subseteq N$。

证明：设K/F的根塔为

$$F=F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots\subseteq F_r\subseteq F_{r+1}=K \tag{1}$$

$$F_{i+1}=F_i(\alpha_i),\quad \alpha_i^{n_i}=a_i\in F_i$$

我们对r用数学归纳法

当$r=1$时，$K=F_2=F_1(\alpha_1)=F(\alpha_1)$，其中$\alpha_1^{n_1}=a_1\in F$，取$\varepsilon_1$是$n_1$次本原根，令$N=F(\varepsilon_1,\ \alpha_1)$，则$N\supseteq K$，而$N$显然是$F$的根号扩域。由于$N$是$x^{n_1}-a_1=0$的根域，故$N$是$F$的正规域。

假定对$r-1$定理成立，即是说存在F的正规根号扩域N'，而$N'\supseteq F_r$。

$K=F_{r+1}=F_r(\alpha_r)$，α_r是$x^{n_r}-a_r=0$的根，而$a_r\in F_r\subseteq N'$。令G是N'在F上的伽罗华群，考虑

$$\prod_{\tau\in G}(x^{n_r}-a_r^{\tau})=f(x)\in F[x].$$

在N'上作$f(x)$的分裂域N，因$N'\supseteq F_r\Rightarrow N\supseteq K=F_{r+1}$。由于$N'$是根号扩域，而$f(x)$的每个根都可用开$n_r$次根号表示，故$N$是$F$的根号扩域。

又$N=N'(\alpha^{(1)},\cdots,\alpha^{(s)})$，某一$\alpha^{(i)}=\alpha_r$，这里$\alpha^{(1)}$，$\cdots$，$\alpha^{(s)}$是$f(x)$的全部根，而$N'$又是$F$上某个多项式$g(x)$的分裂域。所以$N$是$F$上$g(x)f(x)$的分裂域，所以$N$是$F$的正规扩域。即有$F$的正规根号扩域$N$，使 $F\subseteq K$

$\subseteq N$。

在证明方程可用根号解的充要条件之前，我们再来证明一个引理。

4·2·3 引理 令 $N=F(\alpha)$ 是 F 的一个正规扩域，而域 $K\supseteq F$，又假定 N 与 K 同属于一域 Ω，则 $K(\alpha)$ 是 K 的正规扩域，并且 $K(\alpha)$ 在 K 上的伽罗华群 G' 与 N 在 F 上的伽罗华群 G 的一个子群同构。

证明 设 $f(x)$ 是 α 在 F 上的极小多项式，$g(x)$ 是 α 在 K 上的极小多项式，于是 $g(x)|f(x)$，由于 N 是 F 的正规域，所以在 N 中 $f(x)$ 完成分解：

$$f(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_n)$$

又 $K(\alpha)\supseteq N$，所以 $f(x)$ 在 $K(\alpha)$ 中完全分解，因之 $g(x)$ 在 $K(\alpha)$ 中也完全分解，不妨假设：

$$g(x)=(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\cdots(x-\alpha_r)$$

于是 $K(\alpha)$ 是 K 上 $g(x)$ 的分裂域。故 $K(\alpha)$ 是 K 的正规域。

$$\text{设}\quad G=\{\tau_1,\ \tau_2,\ \cdots,\ \tau_n\}\quad \tau_i:\ F(\alpha)\to F(\alpha_i)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots n,$$

$$G'=\{\tau_1',\ \tau_2',\ \cdots,\ \tau_r'\}\quad \tau_i':\ K(\alpha)\to K(\alpha_i)$$

$$i=1,\ 2,\ \cdots,\ r.$$

令 $\qquad \tau_i'\mapsto\tau_i$

这显然是 G' 到 G 的一个单射，对应的 τ 对于 $N=F(\alpha)$ 来说作用一样，即：

$$\tau_i'\tau_j'=\tau_h'\Rightarrow\tau_i\tau_j=\tau_h$$

因此 G' 与 G 的一个子群同构。

4·2·4 定理 域 F 上的一个方程 $f(x)=0$ 在 F 上可用根号解的充要条件是：这个方程在 F 上的伽罗华群是可解群。

证明 (i) 先证条件是必要的。

假定方程 $f(x)=0$ 在 F 上可用根号解，根据 4·2·1 和 4·2·2知必存在 F 的某个正规扩域 K，它有根塔

$$F=F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots\subseteq F_r\subseteq F_{r+1}=K \tag{2}$$

$$F_{i+1}=F_i(a_i),\ a_i^{n_i}=a_i\in F_i\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r.$$

且 K 包含 $f(x)$ 在 F 上的分裂域 E。

设根塔(2)中所有根次数 n_1，n_2，…，n_r 的最小公倍数是 n，任意取定一个 n 次本原根 ε，我们先把 ε 添加到(2)中每个域上去，即令

$$K_i=F_i(\varepsilon),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ r,\ r+1.$$

那么从根塔(2)又可得到 $K(\varepsilon)/F$ 的一个根塔

$$F=K_0\subseteq K_1\subseteq K_2\subseteq\cdots\subseteq K_r\subseteq K(\varepsilon)=K_{r+1}. \tag{3}$$

这里

$$K_1=F(\varepsilon)=K_0(\varepsilon)$$

$$K_{i+1}=F_{i+1}(\varepsilon)=F_i(\varepsilon,\ a_i)=K_i(a_i)$$

$$a_i^{n_i}=a_i\in F_i\subseteq K_i,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$$

因为 K 是 F 的正规域，所以 K 必是某个 $g(x)\in F[x]$ 在 F 上的分裂域，因为 ε 是 n 次本原根，$x^n-1=0$ 的根都是 ε 的方幂，所以 $K(\varepsilon)$ 就是 $g(x)(x^n-1)\in F[x]$ 在 F 上的分裂域，因而 $K(\varepsilon)$ 必是 F 的正规域，$K(\varepsilon)$ 也是每个 K_i 的正规域，$i=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ r$。记

$$H_i=\mathrm{Gal}K(\varepsilon)/K_i$$

则 $K_i=\mathrm{Inv}H_i$，$i=0,\ 1,\ \cdots,\ r$。现在考虑伽罗华对应图

$$\begin{array}{ccccccccc}
F=K_0 & \subseteq\cdots\subseteq & K_i & \subseteq K_{i+1} & \subseteq\cdots\subseteq & K_r & \subseteq K_{r+1}=K(\varepsilon) \\
\updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \updownarrow \\
H_0 & \geqslant\cdots\geqslant & H_i & \geqslant H_{i+1} & \geqslant\cdots\geqslant & H_r & \geqslant H_{r+1}=\{e\}
\end{array}$$

因为 $K_1=F(\varepsilon)$ 是 x^n-1 在 F 上的分裂域，由 4·1·2 知

$\mathrm{Gal}K_i/F$ 是交换群，对于任一 $i(1\leqslant i\leqslant r)$，由于 K_i 中包含了 n_i 次本原根 $\varepsilon^{\frac{n}{n_i}}$，而 $K_{i+1}=K_i(\alpha_i)$ 是 $x^{n_i}-a_i\in K_i[x]$ 在 K_i 上的分裂域，由 4·1·4 知 $\mathrm{Gal}K_{i+1}/K_i$ 也是交换群。于是应用伽罗华基本定理Ⅱ，由 K_{i+1}/K_i 是正规域知 H_{i+1} 是 H_i 的不变子群，且每个因子群

$$H_i/H_{i+1}\cong\mathrm{Gal}K_{i+1}/K_i$$

都是交换群，所以 $H_0=\mathrm{Gal}K(\varepsilon)/F$ 是可解群。再考虑另一张伽罗华对应图：

$$\begin{array}{ccccc} F & \subseteq & E & \subseteq & K(\varepsilon) \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ H_0 & \geqslant & \overline{H} & \geqslant & \{e\} \end{array}$$

其中 E 是 $f(x)$ 在 F 上的分裂域，$\overline{H}=\mathrm{Gal}K(\varepsilon)/E$，因为 E 是 F 的正规域，所以 $\overline{H}$ 是 H_0 的不变子群，且 $f(x)$ 的伽罗华群

$$G=\mathrm{Gal}E/F\cong H_0/\overline{H}$$

因为 H_0 是可解群，所以与其商群同构的群 G 也是可解群。

（ii）证明条件也是充分的。

假定方程 $f(x)=0$ 的伽罗华群 G 是可解群。由 1·5·1 知 G 有合成列

$$G=G_1\triangleright G_2\triangleright\cdots\triangleright G_i\triangleright G_{i+1}\triangleright\cdots\triangleright G_{r+1}=\{e\}$$

且 G_i/G_{i+1} 的阶为素数 p_i，$i=1,2,\cdots,r$。设 E 为 $f(x)$ 在 F 上的分裂域，考虑伽罗华对应图：

$$\begin{array}{ccccccccccc} G=G_1 & \triangleright & G_2 & \triangleright\cdots\triangleright & G_i & \triangleright & G_{i+1} & \triangleright\cdots\triangleright & G_{r+1}=\{e\} \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ F=F_1' & \subset & F_2' & \subset\cdots\subset & F_i' & \subset & F_{i+1}' & \subset\cdots\subset & F_{r+1}'=E \end{array}$$

由于$|G_i/G_{i+1}|=p_i$，所以$F'_{i+1}=F'_i(\alpha_i)$是p_i次循环扩域，且$\alpha_i'^{p_i}=a_i\in F'_i$。于是

$$E=F(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r),$$

作

$$K=F(\varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_r,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_r),$$

这里ε_i是p_i次本原根。于是有子域塔

(4) $F=L_1\subseteq L_2\subseteq\cdots\subseteq L_{r+1}=F_1\subseteq F_2\subseteq\cdots\subseteq F_{r+1}=K$

其中 $L_{i+1}=L_i(\varepsilon_i)$，$\varepsilon_i'^{p_i}=1$，$i=1,\ 2,\ \cdots,\ r$

$$F_{i+1}=F_i(\alpha_i),$$

由4·2·3知F_{i+1}是F_i的正规域，且其伽罗华群与F'_{i+1}在F'_i上的伽罗华群的子群同构。因而得到或是$F_{i+1}=F_i$或是F_{i+1}是F_i的p_i次循环扩域，由4·1·8知，

$$F_{i+1}=F_i(\beta_i),\quad \beta_i'^{p_i}=b_i\in F_i,$$

所以(4)是K/F的根塔，而且$K\supseteq E$。故方程$f(x)=0$可用根号解。

由3·3·5已知n次一般方程$f(x)=0$的伽罗华群是n次对称群S_n，且由1·5·5知当$n>4$时S_n不是可解群，这样就导出有名的

4·2·5 Abel-Ruffini 定理 当$n>4$时，特征为∞的域上n次一般方程不能用根号解。

这个定理只是对n次一般方程来说，对于特殊的n次方程，当$n>4$时是不是能用根号解？这个定理不能保证，我们将在下一节讨论。

习 题

1。设$f(x)$是F上一个不可约多项式，证明若$f(x)=0$的一个根可用根号表示（即此根含在F的一个根号扩域中），则$f(x)=0$在F上

可用根号解。

2。证明：域 F 上二项方程 $x^n-a=0$ 在 F 上的伽罗华群是可解群。因而F上二项方程 $x^n-a=0$ 可用根号解。 ∎

§4·3 不能用根号解的方程的例子

上一节我们证明了，当$n>4$时，特征为∞的一个域上的n次一般方程不能用根号解，但对特殊的 n 次方程来说，当$n>4$时是不是能用根号解，这个定理不能保证。在某一数域内有些特殊的五次或五次以上方程可以用根号解出，但是在有理数域内，总存在五次或五次以上方程它的伽罗华群是 S_n，因而它不能用根号解，这一节我们就来解决这个问题。

首先证明以下：

4·3·1 定理 设$f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$是实系数$n$次多项式，$n$ 是素数，$f(x)$在 $F=\mathbf{Q}(a_1,\cdots,a_n)$上不可约，并且 $f(x)$有 $n-2$ 个实根，则 $f(x)$在F上的伽罗华群 G 与 S_n 同构。

证明 设 $f(x)$ 在F上的分裂域为 N，即 $N=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，此处$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$是 $f(x)$的全部根，令 $G=\mathrm{Gal}N/F=\{\tau_1,\tau_2,\cdots,\tau_r\}$，则由3·3·2知

$$G\overset{\varphi}{\cong}S_n \text{ 的一个子群 } G'$$

今证明 $G'=S_n$。

首先证明 G' 为可迁群，为此需要证明对于任意 α_k，$1\leqslant k\leqslant n$，存在$\sigma\in G$，使得 $\alpha_1^{\sigma}=\alpha_k$

令
$$h(x)=\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_1^{\tau_i})$$

则对任意 $\tau\in G$，用 τ 作用在 $h(x)$ 的系数上有

$$(h(x))^{\tau}=\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_1^{\sigma^i\tau})=\prod_{i=1}^{r}(x-\alpha_1^{\tau^i})=h(x)$$

所以 $h(x)\in F[x]$。

又 $f(\alpha_1)=0$，而 $f(x)$ 在 F 上不可约，所以

$$f(x)\mid h(x)$$

而 $f(x)$ 的任一根有 $\alpha_1^{\sigma^i}$ 形，即对任一根 α_k，有 $\sigma\in G$，使 $\alpha_1^{\sigma}=\alpha_k$。即

$$\varphi:\quad \sigma\mapsto P_\sigma=\begin{pmatrix}\alpha_1\cdots\\ \alpha_k\cdots\end{pmatrix}\in G'$$

所以 G' 为可迁群。

其次，我们证明 G' 含有一个对换。

由题设 $f(x)$ 有 $n-2$ 个实根，故 $f(x)$ 有一对共轭复根，不妨假定 α_1，α_2 是共轭复数，而 α_3，α_4，…，α_n 是实数，因 $N=F(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$。故 $\alpha\in N\Rightarrow\alpha=g(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)$，此处 g 是 F 上 α_1，α_2，…，α_n 的多项式。又

$$\tau:\ \alpha\mapsto\overline{\alpha}=g(\overline{\alpha_1},\overline{\alpha_2},\cdots,\overline{\alpha_n})=g(\alpha_2,\alpha_1,\alpha_3,\cdots,\alpha_n)$$

则 $\overline{\alpha}\in N$。易证 τ 是 N 的一个自同构，且 τ 使 F 不动，故 $\tau\in G$。由 τ 的定义可知

$$\alpha_1^{\tau}=\alpha_2,\ \alpha_2^{\tau}=\alpha_1,\ \alpha_i^{\tau}=\alpha_i,\ i=3,\ 4,\ \cdots,\ n。$$

所以，
$$\tau\mapsto P_\tau=\begin{pmatrix}\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n\\ \alpha_2\alpha_1\alpha_3\cdots\alpha_n\end{pmatrix}=(\alpha_1\alpha_2)\in G'$$

这样我们证明了 G' 含有一个对换。

由于 n 是素数，G' 为可迁群，且 G' 含有一个对换，由1·6·4定理得 $G'=S_n$。

例　设

$$f(x)=x^5-p^2x+p$$

p 是任意正的素数。

由于 $f(x)$ 的最高项系数不能被 p 整除，而其余各项的系数均能被 p 整除，并且常数项 p 不能被 p^2 整除，利用艾森施坦因判别法，知 $f(x)$ 在有理数域 Q 上不可约。

我们说 $f(x)$ 恰有三个实根，为此我们需要用到数学分析的以下两个简单事实：

1°．设 $f(x)$ 是实系数多项式，且对实数 $a<b$ 来说有 $f(a)>0$，$f(b)<0$，则存在实数 c，而 $a<c<b$ 使 $f(c)=0$。

2°．对 $f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 来说，$a<b$ 有 $f(a)=0$，$f(b)=0$，则至少有一实数 c，而 $a\leqslant c\leqslant b$ 使 $f'(c)=0$。

$$f(x)=x^5-p^2x+p$$

x	$+\infty$	1	0	$-\infty$
$f(x)$	$+\infty$	<0	>0	$-\infty$

由1°知 $f(x)$ 至少有三个实根，但 $f(x)$ 的实根不能多于三个，否则 $f(x)$ 有五个实根，设为

$$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$$

由2°知 $f'(x)$ 至少有四个实根，但 $f'(x)=5x^4-p^2$ 只有二个实根，矛盾，所以 $f(x)$ 恰有三个实根。于是 $f(x)$ 适合定理条件，$f(x)$ 的伽罗华群 G 与 S_5 同构，但 S_5 不是可解群，因之 $f(x)$ 不能用根号解。

习　题

1．再举一个不能用根号解的五次方程的例子。

§4·4 三次方程和它的不可约情形

本节我们给出三次一般方程求根公式，并讨论一下实系数三次方程不可约情形。

为了方便起见，我们在复数域范围内进行讨论。

三次一般方程

(1) $$y^3+ay^2+by+c=0$$

首先经过代换

(2) $$y=x-\frac{a}{3}$$

可以变成

(3) $$x^3+px+q=0$$

的形式。

如果求得方程(3)的根，那么由(2)我们就得出所给方程(1)的根。因此，我们只需解方程(3)。

由代数基本定理，方程(3)有三个复数根。设 x_0 为它的任何一个根，引进辅助未知量 u 来讨论多项式

$$f(u)=u^2-x_0u-\frac{p}{3}$$

设它的两个根为 α 和 β，由根与系数关系得

(4) $$\alpha+\beta=x_0$$

(5) $$\alpha\beta=-\frac{p}{3}$$

用根 x_0 的表示式(4)代进(3)中去，我们得出：

$$(\alpha+\beta)^3+p(\alpha+\beta)+q=0$$

或 $$\alpha^3+\beta^3+(3\alpha\beta+p)(\alpha+\beta)+q=0$$

但由(5)得　$3\alpha\beta+p=0$，故有

(6)　　$$\alpha^3+\beta^3=-q$$

另一方面由(5)推得

(7)　　$$\alpha^3\beta^3=-\frac{p^3}{27}$$

等式(6)和(7)说明了数 α^3 和 β^3 为系数是复数的二次方程

(8)　　$$z^2+qz-\frac{p^3}{27}=0$$

的根。

解方程(8)，我们得出

$$z=-\frac{q}{2}\pm\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$$

故

(9)　　$$\alpha=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}},$$

$$\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

我们得到下面的卡当公式，把方程(3)的根经它的系数用平方根和立方根来表示：

$$x_0=\alpha+\beta=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}}$$

因立方根在复数域中有三个值，所以(9)式给出 α 的三个值和 β 的三个值。

设 α_1 和 β_1 分别为 α 和 β 的三个值中的任何一个，则知

α 和 β 的三个值分别为

$$\alpha_1,\ \alpha_1\omega,\ \alpha_1\omega^2$$

和

$$\beta_1,\ \beta_1\omega,\ \beta_1\omega^2$$

这里 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ 为 1 的立方根。

若取 β_1，使 $\alpha_1\beta_1=-\dfrac{p}{3}$，则有

$$\alpha_1\omega\cdot\beta_1\omega^2=\alpha_1\beta_1=-\frac{p}{3}$$

$$\alpha_1\omega^2\cdot\beta_1\omega=\alpha_1\beta_1=-\frac{p}{3}$$

于是方程(3)的三个根可以写成如下形式：

$$(10)\qquad \begin{cases} x_1=\alpha_1+\beta_1 \\ x_2=\alpha_1\omega+\beta_1\omega^2 \\ x_3=\alpha_1\omega^2+\beta_1\omega \end{cases}$$

关于四次一般方程也有求根公式，我们不在此来介绍。

下面我们来研究一下实系数不完全三次方程

$$(11)\qquad x^3+px+q=0$$

的根。在这一情形下，我们发现卡当公式中平方根下面的表示式 $\dfrac{q^2}{4}+\dfrac{p^3}{27}$ 有重要的作用。

通常我们称

$$D=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$$

为三次方程(11)的判别式。

事实上，由根与系数的关系，有

$$(12)\qquad \begin{cases} x_1+x_2+x_3=0 \\ x_1x_2+x_2x_3+x_1x_3=p \\ x_1x_2x_3=-q \end{cases}$$

利用(12)的前两个关系式，我们得

$$x_1x_2-x_3^2=p$$

$$x_1x_3-x_2^2=p$$

$$x_2x_3-x_1^2=p$$

$$(x_1-x_2)^2=-4p-3x_3^2$$

$$(x_1-x_3)^2=-4p-3x_2^2$$

$$(x_2-x_3)^2=-4p-3x_1^2$$

$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=-2p$$

$$x_1^2x_2^2+x_2^2x_3^2+x_1^2x_3^2=p^2$$

于是

$$\begin{aligned} D&=(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2 \\ &=(-4p-3x_3^2)(-4p-3x_2^2)(-4p-3x_1^2) \\ &=-64p^3-48p^2(x_1^2+x_2^2+x_3^2)-36p(x_1^2x_2^2 \\ &\quad +x_1^2x_3^2+x_2^2x_3^2)-27x_1^2x_2^2x_3^2 \\ &=-64p^3-48p^2(-2p)-36p\cdot p^2-27q^2 \\ &=-4p^3-27q^2 \end{aligned}$$

所以 $D=-4p^3-27q^2=-108\left(\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}\right)$

于是卡当公式可以写成

$$x_0=\sqrt[3]{-\frac{q}{2}+\frac{1}{18}\sqrt{-3D}}+\sqrt[3]{-\frac{q}{2}-\frac{1}{18}\sqrt{-3D}}$$

(i) 若方程(11)有一个实根和两个共轭的复根，于是 $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)=\sqrt{D}$ 显然是纯虚数，从而 $D<0$。

（ii）若方程（11）有三个实根，这时，$\sqrt{D}$ 是实的，因之 $D\geqslant 0$。在 $D=0$ 时，方程(11)有两个相等的实根；当$D>0$时，方程(11)有三个不相等的实根，但在 α，β 的表示式中有虚数出现，我们问这个时候是否能使在它的表示式中没有虚数出现呢？这是不可能的。我们管这种情形称三次方程不可约情形。这一点，我们用伽罗华理论来证明。

为此我们先证两个引理。

4·4·1 引理　令 x^p-a（ p 为素数 ）是域 F 上的多项式，那么，或者 x^p-a 在 F 上不可约，或者 a 是 F 中一个元的 p 次方幂。

证明　假定 $x^p-a=h(x)g(x)$，在复数域内，$x^p-a=\prod_{i=1}^{p}(x-\varepsilon^i\theta)$，$\varepsilon$ 是 p 次本原根，$\theta^p=a$，$h(x)$的常数项 $b=\varepsilon'\theta^m$，m 是 $h(x)$ 的次数，ε' 是 p 次单位根．我们可以推得

$$b^p=(\varepsilon'\theta^m)^p=(\varepsilon')^p(\theta^p)^m=a^m,\quad 0<m<p,$$

$(m,\ p)=1$，存在整数 s，t，使得 $sm+tp=1$，所以，

$$a=a^{sm}\cdot a^{tp}=b^{sp}\cdot a^{tp}=(b^s\cdot a^t)^p$$

令 $b^s\cdot a^t=c$，则 $a=c^p$，$c\in F$。

4·4·2 引理　若多项式 $f(x)=x^3+px+q$在域 F上不可约，且 F 含$\sqrt{D}$，则方程 $f(x)=0$ 在 F 上的伽罗华群的阶是3。

证明　令 N 是 $f(x)$ 在 F 上的分裂域，G 为 N 在 F上的伽罗华群，$f(x)$ 的三个根为 x_1，x_2，x_3。因 F 含$\sqrt{D}$，即 F 含 $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$。

设 $\tau\in G$

$$\tau\mapsto\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^{\tau} & x_2^{\tau} & x_3^{\tau}\end{pmatrix}$$

由3·3·2知 $G\cong S_3$ 的一个子群。

假定某一 $\tau\longmapsto(x_1, x_2)$

$$\tau:\ (x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\mapsto$$
$$(x_2-x_1)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$$
$$=-(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)$$

与 $(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_2-x_3)\in F$ 不合，因之在这个映射下 (x_1, x_2) 不出现。

同样地，(x_1, x_3)，(x_2, x_3) 也不出现。

所以 $G\cong\{(1), (132), (123)\}$ 的一个子群。但$\{(1), (123), (132)\}$只有两个子群：它本身和单位元群$\{(1)\}$，显然，$G\neq\{(1)\}$，故

$$G\cong\{(1), (132), (123)\}。$$

所以 G 的阶为 3 .

4·4·3 定理 令 F 是实数域的子域，假定 F 上的方程

$$f(x)=x^3+px+q=0$$

的判别式 $D>0$，但 $f(x)$ 在 F 上不可约，那么方程的根域不可能被包含在 F 的一个实根号扩域中。

证明 假定方程 $f(x)=0$ 的根域 N 被包含在 $F(r_1, r_2, \cdots, r_r)$，其中 $r_i^{p_i}=a_i\in F(r_1, \cdots, r_{i-1})$，$r_i$ 是实数，p_i 为素数。所以 $N\subseteq F(\sqrt{D}, r_1, \cdots, r_r)$ 实根号扩域中，在 $F(\sqrt{D}, r_1, \cdots, r_r)$ 中 $f(x)$ 完全分解，且在 $F(D)$ 上 $f(x)$ 亦不可约，因此可找到 r_i，使 $f(x)$ 在 $K=F(\sqrt{D}, r_1, \cdots, r_{i-1})$ 上不可约，但在 $K(r_i)$ 中开始分解。r_i 是方程 $x^{p_i}-a_i=0$ 的根，$a_i\in F(\sqrt{D}, r_1, \cdots, r_{i-1})$。

（i）证明 $x^{p_i}-a_i=0$ 在 K 上不可约。假定 $x^{p_i}-a_i$ 在 K 上可约，由4·4·1知 $a_i=c^{p_i}$，$c\in K$，$\Rightarrow c={}^{p_i}\sqrt{a_i}$，$c$ 为实数，当 p_i 是单数时，a_i 有一个实根，当 p_i 是双数时，

a_i 有两个实根，所以 $r_i = c$ 或 $r_i = -c$，因之 $r_i \in K$ 矛盾。

所以，$x^{p_i} - a_i$ 在 K 上不可约。

（ii）证明 $K(r_i)$ 是 K 的正规扩域。由（i）知 $x^{p_i} - a_i$ 在 K 上不可约，所以 $[K(r_i) : K] = p_i$。设 x_1，x_2，x_3 是 $f(x)$ 的三个根，由于 $f(x)$ 在 $K(r_i)$ 中开始分解，所以至少 $f(x)$ 的一个根属于 $K(r_i)$，不妨设，$x_1 \in K(r_i)$，于是，$K(x_1) \subseteq K(r_i)$，因而 $3 | p_i$。但因 p_i 是素数，所以 $3 = p_i$。故 $K(r_i) = K(x_1)$。由4·4·2又知 $[K(x_1, x_2, x_3) : K] = 3$，所以，$K(r_i) = K(x_1) = K(x_1, x_2, x_3)$，所以 $K(r_i)$ 是 K 的正规扩域。

（iii）证明 $K(r_i)$ 不是全由实数构成的域。因 $K(r_i)$ 是 K 的正规扩域，因之 r_i 的极小多项式 $x^3 - a_i = 0$ 在 $K(r_i)$ 中完全分解，即 $K(r_i)$ 包含它的三个根 r_i，ωr_i，$\omega^2 r_i \Rightarrow \omega \in K(r_i)$，但 ω 是虚数，与 $K(r_i)$ 都是实数相矛盾。

注：若 p_i 不为素数，设 $p_i = rs$，则 $\sqrt[p_i]{a} = \sqrt[r]{\sqrt[s]{a}}$，所以可假定 p_i 为素数。

习　题

1．用卡当公式解 Q 上方程：$x^3 - 2x + 4 = 0$

2．试求有理数域 Q 上多项式

$$f(x) = x^3 - 3x + 1$$

在 Q 上的分裂域 N，并证明：N 是 Q 上的三次正规域。

3．证明：有理数域 Q 上三次方程

$$g(x) = x^3 + x + 1 = 0$$

的伽罗华群与 S_3 同构。

§4·5 尺规作图

用圆规和直尺作图是中学几何的内容之一，几何作图三大问题也是许多数学爱好者很感兴趣的问题。本节我们就来研究尺规作图问题。并证明几何三大问题不可能用圆规和直尺作出。

我们知道，尺规作图所使用的直尺不带刻度，但可延伸。直尺的功能过两点可以画一条直线。圆规两脚可以任意张开，它的功能是以一点为圆心，以定长为半径画圆或截取定长。

所谓尺规作图，是在平面上给定了一些初等几何图形，点、线、圆，利用这些图形，来作一些满足某些要求的几何图形，但在作图的过程中，仅限用圆规和直尺。

讨论尺规作图，先来分析一下，用尺规作图到底能做些什么？归纳起来，用尺规能作以下六件事情：

1° 在平面上的某一区域内，选择一个任意点；

2° 通过二点画一直线；

3° 用给定的圆心及半径(两点的距离)画一圆；

4° 使二直线相交；

5° 使一直线与一圆相交；

6° 使两圆相交。

由此我们看出，用尺规只能作出点、直线和圆来。事实上，我们只能用步骤1°、4°、5°、6°来作点，用步骤2°来作直线，用步骤3°来作圆。

所谓一个有某些性质的图形可以用尺规作出指的是：能够给出由有限个上述步骤组成一个确定的程序(方案)，通过

这个程序，必然地会得到一个所要的图形。

现在我们用代数的方法来研究图形什么时候可以用圆规和直尺作出的问题。

我们在平面上任意取定一个笛卡儿坐标系。那么，每一个点有一对确定的坐标（a，b），每一条直线有一个确定的方程：

$$x+cy+d=0 \quad 或 \quad y+d=0;$$

每个圆有一个确定的方程：

$$x^2+y^2+ex+fy+g=0$$

注意，我们限定直线和圆的方程取以上的形式，因此它们是由它们所代表的图形唯一确定的。

我们把一个直线或圆的方程的系数叫做直线或圆的坐标。

这样，取定坐标系后，对于平面上每一初等几何图形有一组确定的实数(图形的坐标)与它对应。

我们把两个坐标都是有理数的点叫做有理点。由有理数的稠密性，这样的点在平面的任何区域内都存在。

4·5·1 定理　假定某一图形，可从给定的图形用尺规作出，那么任意取定平面的一个笛卡尔坐标系后，都可以作出一个所要图形，它有以下性质：对于给定图形的任意取定了的坐标 a，b，c，… 来说，都可以这样选取所作的图形的坐标，使它们属于一个域 K，而 K 是 $F=\mathbf{Q}(a,\ ,b,\ c\cdots)$的一个 2^m(m为非负整数)次扩域。此处 $\mathbf{Q}$ 是有理数域。

证明　按照假设，所要的图形可以用圆规和直尺作出，这就是说，它可以通过有限次施行步骤1°～6°中的某些个而必然地得到。这样，当我们每次需要施行步骤1°时，都取一个有理点，我们也将得到一个所要的图形。

对于给定的图形，任意取定它的坐标 a，b，c …，先看施行头一步后所得图形的坐标是什么？头一步只能是六个步骤中的一个。

假定第一步是1°，在某一区域内任取一点，按照我们的约定取定的是有理点，所得的坐标根本就在 $Q(a, b, c, \cdots)$ 内。

假定第一步是2°，通过两点画一直线。两个点在图形中早已给定，直线的方程可以用给定的点有理表示，在这种情况下，可选直线的坐标属于 $Q(a, b, c, \cdots)$ 内。

假定第一步是3°，用给定的圆心及半径画圆。圆的方程是：$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2=r^2$，这里 (x_1, y_1) 是圆心的坐标，r 是给定的半径，r 可由给定两点的距离表示，这样圆的坐标是给定三点坐标的有理函数，于是圆的坐标属于 $Q(a, b, c, \cdots)$ 内。

假定第一步是4°，使两直线相交，这时两条直线是给定的，解这两直线的方程就得出交点来，其交点是系数的有理式，所得的点的坐标属于 $Q(a, b, c, \cdots)$ 内。

假定第一步是5°，使一直线与一圆相交，圆和直线是给定的，求圆方程及直线方程的交点，其解最多有系数开平方式子出现，所得点的坐标属于一个域，这个域对于 $Q(a, b, c, \cdots)$ 来说，其次数是 $2^{\mu_1}(\mu_1=0, 1)$。

假定第一步是6°，两圆相交，解两圆方程相当于解一个直线和一个圆的方程，和5°一样，其解最多是系数开平方的表示式，所得点属于一个域。这个域对于 $Q(a, b, c, \cdots)$ 来说，其次数是 $2^{\mu_2}(\mu_2=0, 1)$。

总的来说，完成第一步，得出一个新的图形，使新的图形的坐标属于域 K_1，而

$$〔K_1 : Q(a, b, c, \cdots)〕 = 2^{m_1}.$$

做完第一步，做第二步，这时给定的图形就多了第一步所作出的一个新的图形，给定的图形属于域 K_1 内，这时用 K_1 代替 $Q(a, b, c, \cdots)$ 继续讨论。与第一步一样，完成第二步使所得新的图形的坐标属于域 K_2 内，而 $〔K_2 : K_1〕 = 2^{m_2}$。

这样一直做下去，由于只用有限次 1° ～ 6° 步骤所确定的程序就得出所要的图形，最后得到所要的图形属于域 K 内，而 $〔K : K_{n-1}〕 = 2^{m_n}$，这样

$$〔K : Q(a, b, c, \cdots)〕 = 〔K_1 : Q(a, b, c, \cdots)〕$$
$$〔K_2 : K_1〕\cdots〔K : K_{n-1}〕$$
$$= 2^{m_1} \cdot 2^{m_2} \cdots 2^{m_n}$$
$$= 2^{m_1+m_2+\cdots+m_n}$$
$$= 2^m.$$

4·5·2 推论 4·5·1定理中的域 $K \subseteq \overline{K}$，而 $\overline{K}$ 是 $F = Q(a, b, c, \cdots)$ 的正规域，并且 $〔\overline{K} : F〕 = 2^s$。

证明 由4·5·1定理的证明知

$$F = F_1 \subset F_2 \subset \cdots \subset F_i \subset F_{i+1} \subset \cdots \subset F_{m+1} = K$$

其中 $F_{i+1} = F_i(a_i)$ 而 $a_i^2 = a_i \in F_i$。即 $〔F_{i+1} : F_i〕 = 2$，而 $〔K : F〕 = 2^m$。我们称这样的扩域 K/F 有平方根塔。

仿4·2·2定理的证明对 m 应用数学归纳法可知存在一个正规扩域 $\overline{K}$，而 $\overline{K} \supseteq K$，且 $\overline{K}$ 亦具有平方根塔，因之 $〔\overline{K} : F〕 = 2^s$，而 s 为非负整数。

有了4·5·2我们就可以假定4·5·1定理中的 K/F 为正规域，而 K/F 有平方根塔，或说 $〔K : F〕 = 2^m$。

下面在假定 K/F 为正规域的前提下，来证明4·5·1定理

的逆定理。为此我们做一些说明，我们知道，初等几何图形都是由点、线、圆弧和角度构成的。两点可定一直线，三点可定一圆，角的顶点和角的两边上的两点可定一角，给定的图形和所要做的图形都可以用平面上的点来表示。但平面上直角坐标为(a, b)的点又可用复数$a+bi$来表示。这样一个几何图形是否可作，要看确定这个图形的点即复数是否可作。下面我们把给定的复数的运算，用几何作图来实现。实现的方法按照：

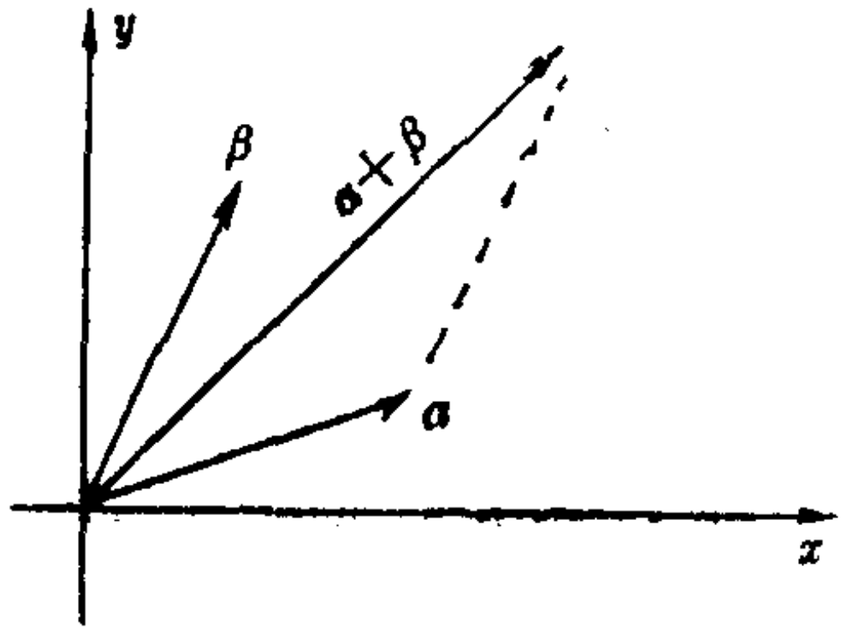


图 4-1

加法是向量的加法(如图 4-1 示)。减法是它的逆运算。

乘法就是辐角相加而模相乘，如果相乘的两个数的辐角是φ_1，φ_2，模是r_1，r_2，那么乘积的辐角φ与模r，即按方程

$$\varphi=\varphi_1+\varphi_2 \quad 与 \quad r=r_1r_2 \quad 或 \quad 1:r_1=r_2:r$$

来构造(如图4-2示)。除法又是它的逆运算。

图 4-2

复数的开平方。对于一个模为r，辐角为φ的复数的平方根，由方程

$$\varphi=2\varphi_1 \quad 或 \quad \varphi_1=\frac{1}{2}\varphi$$

与 $r=r_1^2$ 或 $1:r_1=r_1:r$

来构造(如图 4-3 示)。

图 4-3

对于已知的实数或复数可以用圆规和直尺进行加、减、乘、除和开平方五种运算。

4·5·3 定理 任意取定平面上的一个笛卡尔坐标系，对于给定图形的任意取定了的坐标 a，b，c，… 来说，只要能够选取所作图形的坐标，使它们属于 $F=\mathbf{Q}(a, b, c, \cdots)$的一个正规扩域 K，而 $[K:F]=2^m$，m 为非负整数。则这个图形就可以用圆规和直尺作出。

证明 只需在 $F=\mathbf{Q}(a, b, c, \cdots)$ 的每一个数可作的假定下，来证明 K 的每个数都是可作的。

因 K 是 F 上的 2^m 次正规域，故 $G=\mathrm{Gal}K/F$的阶为2^m。因之，G 为 $p(=2)$ 群，由1·5·9知 G 为可解群。于是 G 有合成列：

$$G=G_1 \triangleright G_2 \triangleright \cdots \triangleright G_i \triangleright G_{i+1} \triangleright \cdots \triangleright G_{m+1}=\{e\}$$

而 G_i/G_{i+1} $(i=1, 2, \cdots, m)$是阶为 2 的循环群。因之由伽罗华基本定理 I 知 K/F 有如下平方根塔：

$$F=K_1 \subset K_2 \subset \cdots \subset K_i \subset K_{i+1} \subset \cdots \subset K_{m+1}=K$$

而 $[K_{i+1}:K_i]=2$

令对 m 应用数学归纳法来证明 K 的每一元可用圆规与直尺作出。

当 $m=0$ 时，定理显然成立。

假定 $m=i$ 时定理成立，即 K_i 中每一元可作，在这个假定下，我们证明 K_{i+1} 的每一元也可作。

因 $[K_{i+1}:K_i]=2$，即 $K_{i+1}=K_i(a_i)$。而 $a_i^2=a_i\in K_i$，又 $K_{i+1}=\{a+ba_i,\ a,\ b\in K_i\}$。因 $a_i\in K_i$，所以 a_i 可作，因之，a_i 的平方根 a_i 可作。又 $a,\ b\in K_i$，所以 a,b 可作。于是 ba_i 可作，因而 $a+bi$ 可作。这样 K_{i+1} 的每一元都可作，归纳法完成。

下面我们利用 4·5·1 的结果，来证明几何三大问题不可能用尺规作出。

1．三等分任一角，假定能够用圆规和直尺三等分任意角，那么给定了夹角是 60° 的两条直线 OA 与 OB（如图 4-4）以及直线 OB 上任一点 D（D 不与 O 重合）以后，我们可以用圆规和直尺作出直线 OC 使 $\angle COD=20°$，并且作出以 O 为圆心，OD 为半径的圆，这样我们也可以作出 OC 与这个圆的交点 E（如图4.4）。

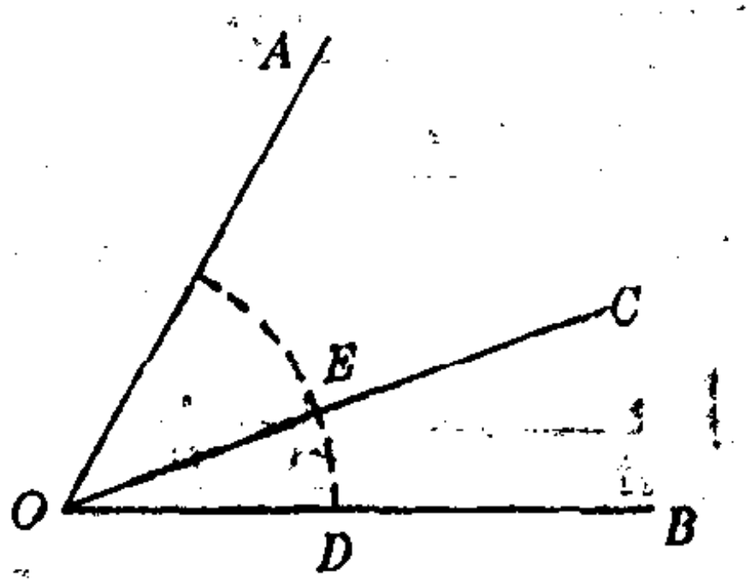


图 4-4

取以 O 为原点，OB 为 x 轴，OD 长为单位的笛卡尔坐标系，那么，D 点的坐标是(1,0)，直线 OB 与 OA 的方程分别是：

$$y=0 \quad 和 \quad y=\mathrm{tg}60°x=\sqrt{3}\,x \quad 即 \quad x-\frac{1}{\sqrt{3}}y=0$$

取 $Q(a,\ b,\ c,\ \cdots)=Q\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=Q(\sqrt{3})$。假如用尺规能三等分60° 角就得出点 $E=(\cos 20°,\sin 20°)$ 在 $Q(\sqrt{3})$的

2^m（m 非负整数）次扩域内，即在 Q 的 2^{m+1} 次扩域内。

另一方面，由三角公式

$$\cos 3(20^\circ) = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ,$$

我们知道 $\cos 20^\circ$ 满足 $4x^3 - 3x = \frac{1}{2}$，即 $8x^3 - 6x - 1 = 0$，但 $8x^3 - 6x - 1$ 在有理数域上不可约，$\cos 20^\circ$ 包含在 Q 的三次扩域内，这与前者是矛盾的。故三等分任意角不能用尺规作出。

2．立方倍积。给了立方体，求作一个立方体，使它的体积是前者的二倍。这个问题归结为：给了一个线段 AB，（换一句话说，给了 A 和 B 两点）求作一线段，使这个线段的长等于 $\sqrt[3]{2}\,AB$。

取以 A 为原点，AB 为 x 轴，AB 长为单位的笛卡尔坐标系，那么 A 点的坐标是(0,0)，B 点的坐标是(1,0)。（如图4-5）。

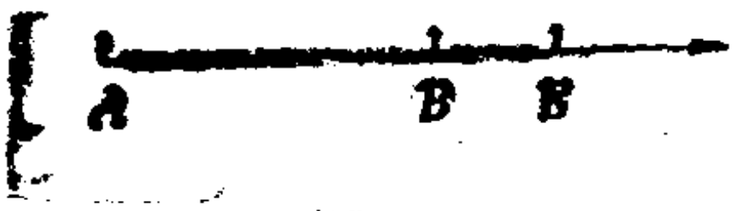


图 4-5

这样 $Q(a, b, c\cdots) = Q$。

假定合乎要求的线段可以用尺规作出，那么可以在 x 轴上得出一点 E，使 E 点的横坐标 $\alpha = \sqrt[3]{2}$。于是由定理应有 $[Q(\alpha) : Q] = 2^m$，但 α 是有理数域 Q 上不可约多项式 $x^3 - 2$ 的一个根，所以，$[Q(\alpha) : Q] = 3$。这样我们得到一个矛盾。因此，立方倍积问题也不能通过尺规作图来解决。

3．化圆为方。设给定一个圆，求作一线段，使得以这个线段为边的正方形的面积等于所给圆的面积。

取以圆心 O 为原点，半径长为单位的笛卡儿坐标系。（如

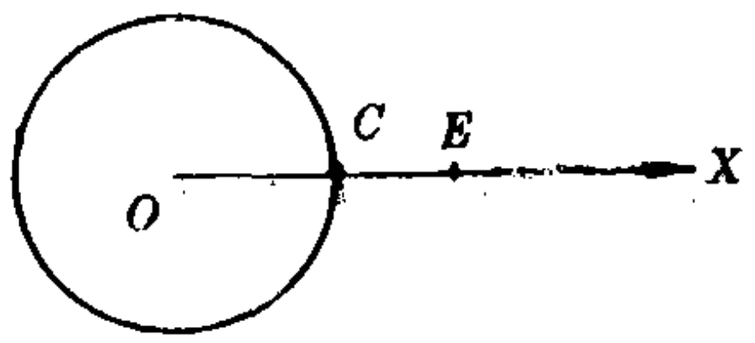


图 4-6

图4-6)。

那么圆的方程是

$$x^2+y^2-1=0$$

这时 $Q(a,\ b,\ c,\ \cdots)=Q$

假定合乎要求的线段可以用尺规作出，那么在 x 轴上可以得出一点 E，E 的横坐标 $a=\sqrt{\pi}$，于是由定理〔$Q(a):Q$〕$=2^s$，但 $1,\ \pi=a^2,\ \pi^2,\ \cdots,\ \pi^{2^s}$ 这2^s+1个数属于$Q(a)$，所以根据扩域次数的定义，这 2^s+1 个数在 Q 上线性相关。这就是说，存在不全为零的有理数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2^s}$，能使

$$a_0+a_1\pi+\cdots+a_{2^s}\pi^{2^s}=0$$

但我们知道 π 是一个超越数，因而以上等式不可能成立。这样，化圆为方问题也不能够通过尺规作图来解决。

习　题

1．利用4·5·1定理证明正七边形不可能用圆规和直尺作出。

§4·6　分圆多项式和正 n 边形作图

正 n 边形的作图是一个有趣的问题，自古以来就吸引着数学家的注意。在古希腊时代，人们就会用尺规作出3，4，5，6，8，10，12，15，16等边数的正多边形。但是企图用尺规作出正七边形或正九边形却是失败的。一直到十八世纪，高斯才给出正十七边形的作图法，并且知道并非任何一个正多边形都能用尺规来作出。然而怎样判断一个正多边形能不能用尺规来作图呢？下面我们用 §4·5 得到的结果来讨论这个问题。

由上节我们知道，一个图形可以用圆规和直尺作出当且

仅当对于给定图形的任意取定的坐标 a，b，c，… 来说，只要能够选取所作图形的坐标，使它们属于 $F=\mathbf{Q}(a, b, c, \cdots)$的一个正规域 K，而 $[K:F]=2^m(m\geqslant 0)$。

一般说来，图形的坐标 a，b，c，… 是实数，因而 F 是实数域的子域，但上节我们说过，一个图形可以用平面上的有限个点或复数来刻划。一个图形可作，就是这些点或者说这些复数可作。由于 K 为正规域，故若 $z\in K$，因而其共轭复数 $\overline{z}\in K$。显然，$z=re^{i\theta}$ 可作，则其 $\overline{z}=re^{i(-\theta)}$ 亦可作。这样上述尺规作图判别准则可以改述如下：

4·6·1 定理(尺规作图判别准则) 设 z_1，z_2，$\cdots z_n$ 是给定的复数，令 $F=\mathbf{Q}(z_1, z_2, \cdots, z_n, \overline{z_1}, \cdots, \overline{z_n})$，则某数 z 可由 z_1，z_2，…，z_n 作出 $\Leftrightarrow z$ 是 F 上代数元，且有 F 的正规域 K，使 $F\subseteq F(z)\subseteq K$，而 $[K:F]=2^m$，m 是非负整数。

运用这个判别准则可以彻底解决正 n 边形作图问题。

首先讨论分圆多项式的不可约性。

看有理系数多项式 x^n-1，我们知道 n 次本原根一共有 $\varphi(n)$ 个，设为

$$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_{\varphi(n)}$$

4·6·2 定义 称

(1) $$\Phi_n(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\cdots(x-\xi_{\varphi(n)})$$

为分圆多项式，由4·1·1知 $\mathbf{Q}$ 上一切 n 次单位根作成一个 n 阶循环群 (ξ)，因之，$\mathbf{Q}(\xi)$ 为 $\mathbf{Q}$ 上正规域，称它为分圆域。

4·6·3 引理

(2) $$x^n-1=\prod_{d\mid n}\Phi_d(x)$$

证明 首先证明 $\Phi_n(x)\in\mathbf{Q}[x]$。任取 $\eta\in \mathrm{Gal}\mathbf{Q}(\xi)/\mathbf{Q}$，

因 ξ 是本原根，所以 ξ^η 亦为本原根，于是

$$(\Phi_n(x))^\eta=\Phi_n(x)$$

从而 $\Phi_n(x)\in\mathbf{Q}[x]$，显然 $\Phi_n(x)\mid x^n-1$。

因为任意一个 n 次单位根的阶 d 是 n 的因数，故这个单位根是 d 次本原根，反之当 d 为 n 的因数时，d 次本原根也是一个 n 次单位根，所以

$$x^n-1=\prod_{d\mid n}\Phi_d(x)$$

4·6·4 引理 $\Phi_n(x)$ 为整系数多项式。

证明 对 n 用数学归纳法。

当 $n=1$ 时，命题显然成立。

假设对 $\Phi_d(x)$ $1\leqslant d<n$ 此命题成立，现在来证明对 $\Phi_n(x)$ 命题亦成立。

由(2)知，$x^n-1=\Phi_n(x)g(x)$，其中 $g(x)=\prod_{d\mid n\ d<n}\Phi_d(x)$

由归纳假设知 $g(x)$ 为首项系数为 1 的整系数多项式，由带余除法知

$$x^n-1=q(x)g(x)+r(x)$$

且 $\partial^\circ(r(x))<\partial^\circ(g(x))$，$g(x)$ 是整系数多项式。

因 $g(x)$ 和 $r(x)$ 在 $\mathbf{Q}[x]$ 中是唯一的，且在 $\mathbf{Q}[x]$ 中，$x^n-1=\Phi_n(x)g(x)$，所以 $\Phi_n(x)=q(x)$是整系数多项式。

4·6·5 定理 $\Phi_n(x)$ 是 $\mathbf{Q}$ 上不可约多项式。

证明 设 ξ 是任意一个 n 次本原根，$p(x)$ 是 ξ 在 $\mathbf{Q}$ 上的极小多项式，则 $p(x)\mid\Phi_n(x)$，从而 $p(x)$ 为整系数多项式，下面我们证明 $\Phi_n(x)=p(x)$，从而 $\Phi_n(x)$ 为 $\mathbf{Q}$ 上不可约多项式。

首先证明，如果素数 $p\nmid n$，则 ξ^p 也是 $p(x)$ 的根。

令 $\psi(x)$ 为 ξ^p 在 $\mathbf{Q}$ 上的极小多项式，仿上知 $\psi(x)$ 为

整系数多项式. 我们断言 $\psi(x)=p(x)$. 假设 $\psi(x)\neq p(x)$, 则在 $Q[x]$ 内应有

$$x^n-1=P(x)\psi(x)f(x) \tag{3}$$

其中 $f(x)$ 是首项系数为 1 的整系数多项式, 由 $P(x)$ 与 $\psi(x^P)$ 有公根 ξ, 故有

$$\psi(x^p)=P(x)g(x) \tag{4}$$

其中 $g(x)$ 为首项系数为 1 的整系数多项式. 如果把 (3) 与 (4)都看成 $Z_p[x]$ 中的等式, 其中 $Z_p=\{\overline{0}, \overline{1}, \cdots, \overline{p-1}\}$ 为素域, 则由于在 Z_p 中总有 $a^p=a(a\in Z_p)$, 故 $\psi(x^p)=[\psi(x)]^p$, 而(4)成为

$$[\psi(x)]^p=p(x)q(x) \tag{5}$$

令 $\varphi(x)$ 为 $p(x)$ 在 $Z_p[x]$ 中的一个不可约因式, 则由 (5) 知, $\varphi(x)\mid[\psi(x)]^p$, 从而 $\varphi(x)\mid\psi(x)$, 故由 (3) 知 $[\varphi(x)]^2\mid x^n-1$. 但 $p\nmid n$, x^n-1 在 $Z_p[x]$ 中无重因式, 此为矛盾. 因此必有 $p(x)=\psi(x)$, 即 ξ^p 也是 $p(x)$ 的根.

其次证明, 任意 n 次本原根 ε 都是 $p(x)$ 的根.

设 $\varepsilon=\xi^m$, $(m, n)=1$, 于是

$$m=p_1p_2\cdots p_s \quad (p_i \text{ 均为素数})$$

且诸 p_i 均非 n 的因数. 故逐次用上段已得到的结论即知 ξ^{p_1}, 从而$\xi^{p_1p_2}$, $\cdots$, $\xi^{p_1p_2\cdots p_s}=\xi^m$, 应为 $p(x)$ 的根, 于是 n 次本原根都为 $p(x)$ 的根, 故 $\Phi_n(x)\mid p(x)$, 从而 $\Phi_n(x)=p(x)$.

所以, $\Phi_n(x)$ 是 Q 上不可约多项式.

由此定理知 $\Phi_n(x)$ 显然是任意 n 次本原单位根 ξ 的极小多项式. 于是 $[Q(\xi):Q]=\varphi(n)$.

若 p 为素数, 则

$$x^p-1=(x-1)\Phi_p(x)$$

所以 $\Phi_p(x)=x^{p-1}+x^{p-2}+\cdots+x+1$ 在 Q 上不可约。

公式(2)提供给我们求分圆多项式 $\Phi_n(x)$ 的一个算法。首先有

$$\Phi_1(x)=x-1.$$

再假设对 n 的真因子 d，我们知道 $\Phi_d(x)$，则(2)便给出 $\Phi_n(x)$。例如

$$\Phi_2(x)=(x^2-1)/\Phi_1(x)=x+1.$$

$$\Phi_3(x)=(x^3-1)/\Phi_1(x)=x^2+x+1.$$

$$\Phi_6(x)=(x^6-1)/\Phi_1(x)\Phi_2(x)\Phi_3(x)$$

$$=x^2-x+1.$$

有了上面的准备，我们可以较容易解决正多边形的尺规作图问题。

我们首先指出：若 s 是某个自然数使得 2^s+1 是素数，则必存在非负整数 t 使 $s=2^t$。

事实上，如果 s 有奇数因子 u 使 $s=uv$ 则由

$$2^s+1=(2^v+1)(2^{(u-1)v}-2^{(u-2)v}+2^{(u-3)v}-\cdots+1)$$

知 2^s+1 不是素数。凡形如 $2^{2^t}+1$ 的素数称为费尔马(Fermat)素数，费尔马曾猜测它们都是素数。实则当 $t=5$ 时，欧拉(Euler)已发现它不是素数：

$$2^{2^5}+1=641\times 6700417$$

当 $t=6$，7 时，$2^{2^t}+1$ 也不是素数。所以很多数学家都猜测在 $t=4$ 时，是最后的费尔马素数。即3，5，17，257，65537，是仅有的全部费尔马素数。当然，这一点目前也没有得到证明。

下面我们给出正 n 边形可用尺规作图的判别定理：

4·6·6 定理 正n边形可作$\Leftrightarrow n=2^s(s\geqslant 2)$或$n=2^l p_1 p_2\cdots p_r$.这里$l\geqslant 0$, $p_1,p_2,\cdots,p_r$是两两不同的费尔马素数.

证明 设ξ是n次本原根，由前面的证明已知$Q(\xi)/Q$是$\varphi(n)$次正规域. 由 4·6·1 可知,

正n边形可作$\Leftrightarrow\xi$可作$\Leftrightarrow\varphi(n)$是2的方幂.

设$n=2^l p_1^{l_1}p_2^{l_2}\cdots p_r^{l_r}$, p_i为两两不同的奇素数. 如果$n=2^l$, $l\geqslant 2$，显然正2^l边形可作，因此仅需要讨论$l\geqslant 0$且所有$l_i\geqslant 1$的情形.

根据欧拉函数定义，对于任一素数方幂p^k有

$$\varphi(p^k)=p^k-p^{k-1}=p^{k-1}(p-1)$$

且当r与s互素时，必有

$\varphi(rs)=\varphi(r)\varphi(s)$　　所以得到

$$\varphi(n)=\varphi(2^l)\varphi(p_1^{l_1})\cdots\varphi(p_r^{l_r})$$

$$=2^{l-1}p_1^{l_1-1}\cdots p_r^{l_r-1}(p_1-1)\cdots(p_r-1)$$

易见$\varphi(n)$是2的方幂$\Leftrightarrow$所有$l_i=1$且$p_i-1=2^{s_i}$，且由$p_i=2^{s_i}+1$为素数知s_i为2的方幂，即p_i为费尔马素数.

有了高斯定理我们就彻底解决了正n边形作图问题.

当$t=2$时，$2^{2^2}+1=17$是第三个费尔马素数，正十七边形可作，由高斯给出作法，继高斯之后，为西罗给出正257边形的完善作法，盖尔美斯又给出了正65537边形的作图方法，这里我们不再介绍. 最后我们给出:

4·6·7 正十七边形的作法

我们先推导出作法的依据. 令

$$\theta=2\pi/17,\quad z=\cos\theta+i\sin\theta,\quad 则$$

$$z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta,\ (1\leqslant k\leqslant 17)$$

是17个17次单位根。由

$$x^{17}-1=(x-1)(x^{16}+x^{15}+\cdots+x+1)$$

和 z^k，$k=1$，2，…，16，是17次本原根的全体，可知 z 在 Q 上的极小多项式为

$$g(x)=\sum_{i=0}^{16}x^i=\prod_{k=1}^{16}(x-z^k)$$

$g(x)$ 在 Q 上的分裂域是 $E=\mathbf{Q}(z)$，$[E:\mathbf{Q}]=16$，且

$$G=\mathrm{Gal}E/\mathbf{Q}=(\sigma)$$

为16阶循环群，这里

$$\sigma:\ z\longmapsto z^k \qquad \sigma\text{ 不变 Q 中数，}(k,\ 16)=1$$

为讨论简单起见，可取 $k=3$，即 $z^\sigma=z^3$。设

$$3^i=17q_i+l_i \quad 1\leqslant l_i\leqslant 16,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ 16.$$

利用 $z^{\sigma^i}=z^{3^i}$ 和 $z^{17}=1$ 可列出下表。

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
l_i	3	9	10	13	5	15	11	16	14	8	7	4	12	2	6	1

易见 $G=(\sigma)$ 有合成群列

$$G=G_1=(\sigma)\triangleright G_2=(\sigma^2)\triangleright G_3=(\sigma^4)\triangleright G_4$$
$$=(\sigma^8)\triangleright G_5=\{e\}$$

其中 G_i/G_{i+1} 都是2阶群。根据伽罗华映射可得平方根塔

$$\mathbf{Q}=F_1\subset F_2\subset F_3\subset F_4\subset F_5=E$$

这里 $F_i=\mathrm{Inv}G_i$，$[F_{i+1}:F_i]=2$，$i=1$，2，3。现要依次定出 $F_{i+1}/F_i(i=1,\ 2,\ 3)$的添加元。

1）设

$$(6)\quad \begin{cases} x_1 = \sum_{i=0}^{7} z^{\sigma^{2i}} = \sum_{i=0}^{7} z^{3^{2i}} \\ x_2 = x_1^{\sigma} = \sum_{i=0}^{7} z^{\sigma^{2i+1}} = \sum_{i=0}^{7} z^{3^{2i+1}} \end{cases}$$

由上表可知 $x_1 \neq x_2$，但却有 $x_1^{\sigma^2} = x_1$，所以 $x_1 \notin F_1$，但 $x_1 \in F_2 = \mathrm{Inv}(\sigma^2)$. 由 $[F_2 : F_1] = 2$，所以

$$F_2 = F_1(x_1)$$

又由 $g(z) = 0$，知

$$\sum_{k=1}^{16} z^k = -1$$

由 $z\overline{z} = 1$ 得 $\overline{z} = z^{-1}$，$(z^k)^{-1} = \overline{z}^k = \cos k\theta - i\sin k\theta$

因而

$$z^k + z^{-k} = 2\cos k\theta,\ 1 \leqslant k \leqslant 17.$$

利用上表可算出

$$\begin{aligned} x_1 &= (z^{3^0} + z^{3^3}) + (z^{3^2} + z^{3^{10}}) + (z^{3^4} + z^{3^{12}}) + (z^{3^6} + z^{3^{14}}) \\ &= (z + z^{-1}) + (z^8 + z^{-8}) + (z^4 + z^{-4}) + (z^2 + z^{-2}) \end{aligned}$$

从而

$$(7)\quad x_1 = 2(\cos\theta + \cos 8\theta + \cos 4\theta + \cos 2\theta)$$

同理可得

$$(8)\quad x_2 = 2(\cos 3\theta + \cos 7\theta + \cos 5\theta + \cos 6\theta)$$

故有

$$x_1 + x_2 = \sum_{k=1}^{16} z^k = -1$$

利用三角恒等式

$$2\cos\alpha\cos\beta = \cos(\alpha + \beta) - \cos(\alpha - \beta)$$

直接将(7)、(8)两式相乘得

$$x_1x_2 = 4(x_1 + x_2) = -4$$

所以 x_1，x_2 是 $(x-x_1)(x-x_2) = x^2 + x - 4 = 0$ 的二根，它们是 $\frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{17})$。由于 $\theta = \frac{2\pi}{17}$，$\cos 3\theta > 0, \cos 7\theta < 0$，$\cos 5\theta < 0$，$\cos 6\theta < 0$，而且

$$|\cos 6\theta| = \cos(\pi - 6\theta) = \cos\frac{5\pi}{17} > \cos\frac{6\pi}{17} = \cos 3\theta$$

因此 $x_2 < 0$ 而

$$(9)\quad \begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{17}) \\ x_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{17}) \end{cases}$$

2) 设

$$(10)\quad \begin{cases} y_1 = \sum_{i=0}^{3} z^{\sigma^{4i}} = \sum_{i=0}^{3} z^{3^{4i}} \\ y_2 = y_1^{\sigma^2} = \sum_{i=0}^{3} z^{\sigma^{4i+2}} = \sum_{i=0}^{3} z^{3^{4i+2}} \end{cases}$$

也有 $y_1 \neq y_2$，由

$$y_1^{\sigma^4} = \sum_{i=0}^{3} z^{\sigma^{4(i+1)}} = y_1$$

知 $y_1 \notin F_2$，$y_1 \in F_3 = \mathrm{Inv}(\sigma^4)$。所以

$$F_3 = F_2(y_1) = F_1(x_1, y_1)$$

和 x_1，x_2 类似地可算出

$$y_1 = z + z^{-1} + z^4 + z^{-4} = 2(\cos\theta + \cos 4\theta)$$

$$y_2 = z^8 + z^{-8} + z^2 + z^{-2} = 2(\cos 8\theta + \cos 2\theta)$$

再令

$$y_3 = z^3 + z^{-3} + z^5 + z^{-5} = z(\cos 3\theta + \cos 5\theta)$$

$$y_4 = z^7 + z^{-7} + z^6 + z^{-6} = 2(\cos 7\theta + \cos 6\theta)$$

仍使用上述三角恒等式可得：

$$y_1 y_2 = 4(\cos\theta + \cos 4\theta)(\cos 8\theta + \cos 2\theta)$$

$$= 2\sum_{k=1}^{8} \cos k\theta = -1$$

同理

$$y_3 y_4 = -1$$

又因

$$y_1 + y_2 = x_1,\ y_3 + y_4 = x_2$$

故

y_1，y_2 是 $x^2 - x_1 x - 1 = 0$ 的根，而 y_3、y_4 是 $x^2 - x_2 x - 1 = 0$ 的根。

因 $\theta = \frac{2\pi}{17}$ 时．$\cos\theta > \cos 2\theta$，$\cos 4\theta > 0$，$\cos 8\theta < 0$．

故有 $y_1 > y_2$，同理 $y_3 > y_4$。因此

$$(11)\quad \begin{cases} y_1 = \frac{1}{2}\left(x_1 + \sqrt{x_1^2 + 4}\right) = \frac{1}{4}(\sqrt{17} - 1) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{4}\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} \\ y_2 = \frac{1}{2}\left(x_1 - \sqrt{x_1^2 + 4}\right) \\ y_3 = \frac{1}{2}\left(x_2 + \sqrt{x_2^2 + 4}\right) = \frac{1}{4}(-\sqrt{17} - 1) \\ \qquad\qquad + \frac{1}{4}\sqrt{34 + 2\sqrt{17}} \\ y_4 = \frac{1}{2}\left(x_2 - \sqrt{x_2^2 + 4}\right) \end{cases}$$

3）设

(12)
$$\begin{cases} z_1 = z + z^{3^8} \\ z_2 = z_1^{\sigma^4} = z^{3^4} + z^{3^{12}} \end{cases}$$

必有 $z_1 \neq z_2$，由 $z_1^{\sigma^8} = z^{3^8} + z = z_1$，知 $z_1 \notin F_3$，而 $z_1 \in F_4 = \mathrm{Inv}(\sigma^4)$。所以

$$F_4 = F_3(z_1) = F_1(x_1, y_1, z_1)$$

易见

$$z_1 = z + z^{-1} = 2\cos\theta$$
$$z_2 = z^4 + z^{-4} = 2\cos 4\theta$$

则 $z_1 > z_2$，$z_1 + z_2 = y_1$，$z_1 z_2 = 4\cos\theta\cos 4\theta = 2(\cos 5\theta + \cos 3\theta) = y_3$，故

(13)
$$\begin{cases} z_1 = \dfrac{1}{2}\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 + 4y_3}\right) \\ z_2 = \dfrac{1}{2}\left(y_1 - \sqrt{y_1^2 - 4y_3}\right) \end{cases}$$

最后可得

$$\cos\theta = \frac{1}{2} z_1 = \frac{1}{4}\left(y_1 + \sqrt{y_1^2 - 4y_3}\right)$$

利用公式(11)可得 $\cos\theta$ 的显表示式，再利用 $\sin\theta = \sqrt{1 - \cos^2\theta}$，就可得到

$$z = \cos\theta + i\sin\theta$$

这表示 z 确是一个可作的复数，即正十七边形是可用尺规作出的。

现在给出具体的作图步骤。作直角坐标系 xOy。在 x 轴上以 $OA = 4$ 为半径作圆 O 交 y 轴于 C。取 $OE = |OA|/4 = 1$，连结 CE。作

$$EF = EF' = EC = \sqrt{OC^2 + OE^2} = \sqrt{17}.$$

在 x 轴上取

$$FG = FC = \sqrt{OC^2 + OF^2} = \sqrt{16 + (1 + \sqrt{17})^2}$$

$$= \sqrt{34 + 2\sqrt{17}}$$

$$F'G' = F'C = \sqrt{OC^2 + OF'^2} = \sqrt{16 + (\sqrt{17} - 1)^2}$$

$$= \sqrt{34 - 2\sqrt{17}}$$

以 AG 为直径作圆 O'，与 y 轴交于 H，作

$$IH = IJ = \frac{1}{2}OG' = \frac{1}{2}(OF' + F'G')$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{34 - 2\sqrt{17}} + \sqrt{17} - 1\right) = 2y_1$$

作 OJ 的中垂线分别交圆 O 于 K 和 L 两点，则可证

$$\angle AOK = 2\pi/17,$$

于是 AK 就是所求的正十七边形的边长。事实上，

$$OG = FG - FO = \sqrt{34 + 2\sqrt{17}} - \sqrt{17} - 1 = 4y_3,$$

$$OH^2 = OG \cdot OA = 4y_3 \cdot 4 = 16y_3,$$

$$OI = \sqrt{IH^2 - OH^2} = \sqrt{4y_1^2 - 16y_3} = 2\sqrt{y_1^2 - 4y_3},$$

$$OJ = OI + IJ = 2y_1 + 2\sqrt{y_1^2 - 4y_3} = 4z_1,$$

$$OM = \frac{1}{2}OJ = 2z_1$$

所以，$\cos\angle AOK = \dfrac{OM}{OK} = \dfrac{2}{4}z_1 = \dfrac{1}{2}z_1$，$\angle AOK = \dfrac{2\pi}{17}$.

于是正十七边形作出来了(见图4-7)。

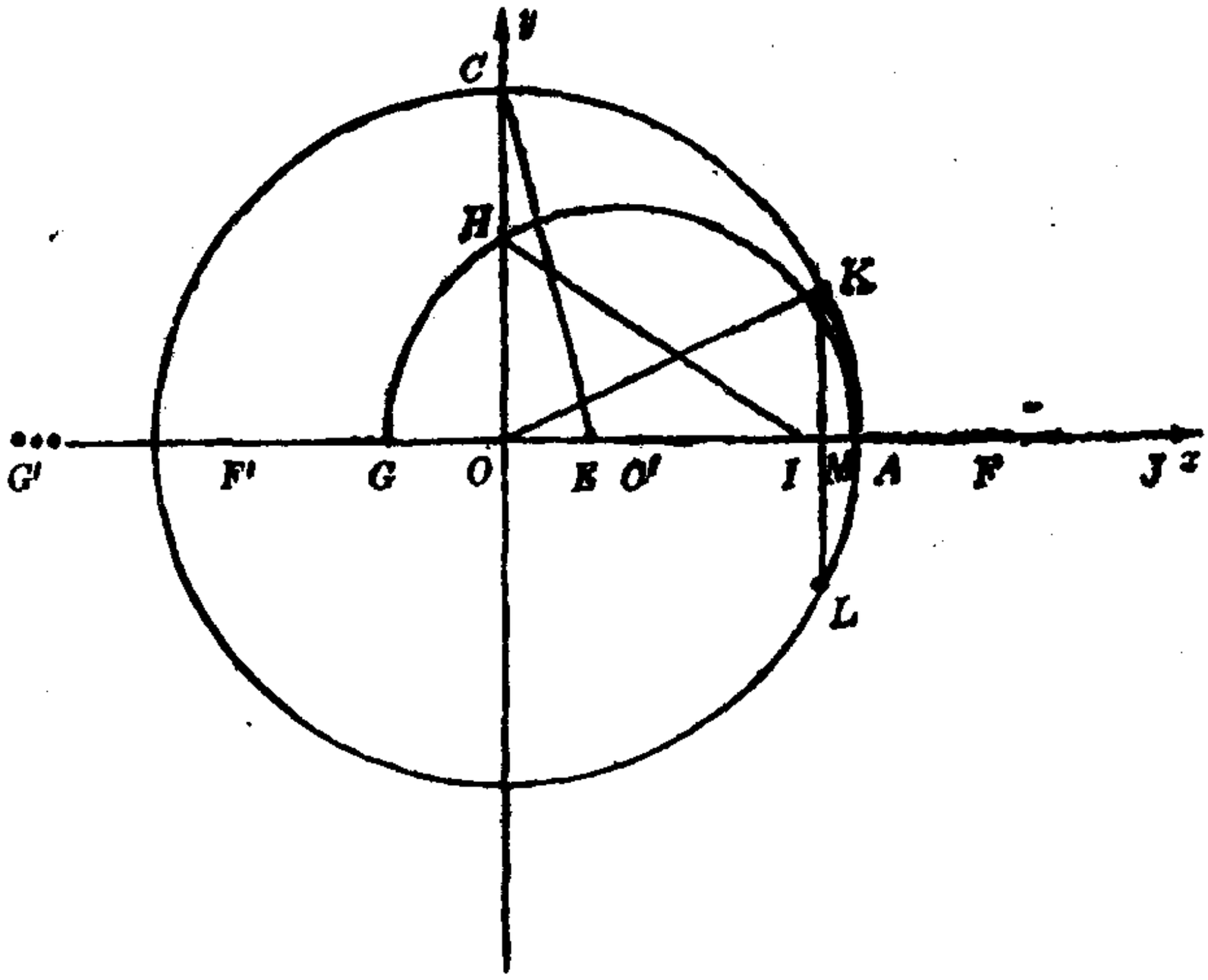


图 4-7

习　　题

1．给出正五边形和正十五边形用尺规作图法．

2．写出边数n不超过50的可作正n边形．

附：习 题 答 案

习题除较简单的外，都给以提示或简略的解答，只作为解题的思路，供读者参考校核．

§1·1　习　　题

1．由 $(ab)^{-1}=b^{-1}a^{-1}$ 可推出 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$．

2．对元素 a_1，$a_2\in A$，b_1，$b_2\in B$．则 $a_1b_1=a_2b_2$ 当且仅当 $a_2^{-1}a_1=b_2b_1^{-1}$，所以存在一个元素 $d\in A\cap B$ 使得

$a_1 = a_2 d$ 和 $b_2 = d b_1$。

3。对任 $a \notin H$ 有 $aH = Ha$ 又 $eH = He$。

4。对 $x \in A$， $y \in B \Rightarrow y^{-1} xy \in A$， $x^{-1} y^{-1} x \in B$

$\Rightarrow x^{-1} y^{-1} (xy) = x^{-1} (y^{-1} xy) = (x^{-1} y^{-1} x) y \in A \cap B = \{e\}$

5。因群 G 的中心 $Z \neq \{e\}$，所以 $|G/Z| \leqslant p$ 为循环群。

§1·2 习 题

1。设 $G = \{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$，令

$$\tau_{a_i}: \ a \mapsto a a_i = a^{\tau_a i}。则$$

$$\varphi: \quad a_i \mapsto \tau_{a_i}$$

是 G 和 S_n 的一个子群间的同构映射。

2。设 $N \lhd S_4$，且 $N \neq A_4$， B_4， $\{(1)\}$。

(i) N 不能包含3-循环，否则 $N = S_4$。

(ii) N 不能包含一个对换，否则 $N = S_4$。

(iii) N 不能包含一个4-循环，否则 $N = S_4$。

(iv) N 不能包含两个对换之积，否则 $N = S_4$。

3。假定 $N \geqslant 3$， $N \neq 4$。

设 $N \trianglelefteq S_n$， $\Rightarrow N \cap A_n \trianglelefteq A_n \Rightarrow N \cap A_n = A_n$ 或 $N \cap A_n = \{e\}$。

(i) 若 $N \cap A_n = A_n \Rightarrow N \supseteq A_n$，若 $N \neq A_n \Rightarrow N$ 包有奇置换 $\alpha \Rightarrow N = S_n$。

(ii) 若 $N \cap A_n = \{(1)\} \Rightarrow N$ 的元除单位元外都是奇置换，且其平方为单位元，再这些奇置换用不同文字循环置换的乘积表示时又都是对换的乘积，因为不如此，它们的平方就不是单位元。又 N 不含两个奇置换，因为两个奇置换的乘积是单位元，于是它们互逆，因此它们就相等。假如 $\beta =$

$(ij)\cdots$ 是 N 所含奇置换，命 $r=(ik)$，$k\neq j$，那末 $\tau=r\beta r^{-1}=(kj)\cdots\in N$，这不可能。所以 $N=\{(1)\}$。

§1·3 习 题

1。令 $\overline{S}_3=\{(1),(12),(13),(23),(123),(132)\}\subseteq S_4$，且 $S_4=\overline{S}_3B_4$，而 $\overline{S_3}\cap B_4=\{(1)\}$，再利用第一同构定理即可证明之。

2。设 G 是所给的置换群，且 G 包有奇置换，而 H 是由 G 中偶置换做成的群，则 $S_n=GA_n$，$H=G\cap A_n$。然后利用第一同构定理即可证明 $S_n/A_n\cong G/H$。所以 $[G:H]=2$。

3。若 $H\cap N=K\cap N\Rightarrow KN\cap H=K$，于是

$$HN/KN=H(KN)/KN\cong H/KN\cap H=H/K$$

§1·4 习 题

1。设 $G=(a)$，则 G 的合成列有如下 3 个。

(i) $G\triangleright H_1\triangleright H_3\triangleright\{e\}$

(ii) $G\triangleright H_1\triangleright H_4\triangleright\{e\}$

(iii) $G\triangleright H_2\triangleright H_4\triangleright\{e\}$

这里 $H_1=(a^2)$，$H_2=(a^3)$，$H_3=(a^4)$，$H_4=(a^6)$

2。令 $G=(B_4,(12))$，则 G 的合成列有如下 7 个。

(i) $G\triangleright B_4\triangleright C_1\triangleright\{(1)\}$

(ii) $G\triangleright B_4\triangleright C_2\triangleright\{(1)\}$

(iii) $G\triangleright B_4\triangleright C_3\triangleright\{(1)\}$

(iv) $G\triangleright\overline{B}_4\triangleright\overline{C}_1\triangleright\{(1)\}$

(v) $G\triangleright\overline{B}_4\triangleright\overline{C}_2\triangleright\{(1)\}$

(vi) $G\triangleright\overline{B}_4\triangleright\overline{C}_3\triangleright\{(1)\}$

(vii) $G\triangleright H\triangleright C_2\triangleright\{(1)\}$

这里 $\overline{B_4}=\{(1),(12),(34),(12)(34)\}\cong B_4, H=((1234))$，$C_i$ 和 $\overline{C_i}$ 自明。

3．因 $G=(a)$，而 $|G|=2^n$．G 除本身外有如下 n 个子群。

$H_1=(a^2)$，$H_2=(a^{2^2})$，$\cdots$，$H_{n-1}=(a^{2^{n-1}})$，$H_n=\{e\}$

设 H 为 G 的任一子群，通过整数性质可以证明：$H=H_s=(a^{2^s})$。故 G 只有如下一个合成列。

$$G\triangleright H_1\triangleright H_2\triangleright\cdots\triangleright H_{n-1}\triangleright H_n=\{e\}$$

4．设 G 是可换群，且

$$G=G_0\triangleright G_1\triangleright\cdots\triangleright G_{i-1}\triangleright G_i\triangleright\cdots\triangleright G_s=\{e\}$$

为 G 的一个合成列，于是知每一因子群 G_{i-1}/G_i 为单群，且 G_{i-1}/G_i 亦为可换群。因之 G_{i-1}/G_i 的阶为素数或 1，即每一因子群皆为有限群。

§1·5 习　　题

1．由第一同构定理知

$$HK/K\cong H/H\cap K$$

利用 H 是可解群，知 $H/H\cap K$ 是可解群，利用 K 和 HK/K 是可解群，可推出 HK 是可解群。

2．设 $G=G_0\triangleright G_1\triangleright\cdots\triangleright G_{i-1}\triangleright G_i\triangleright\cdots\triangleright G_s=\{e\}$ 是 G 的一个可解列。设 $H\leqslant G$，则

$$H=H\cap G_0\supseteq H\cap G_1\supseteq\cdots\supseteq H\cap G_{i-1}\supseteq H\cap G_i\supseteq\cdots\supseteq H\cap G_s=\{e\}$$

因 $G_i\triangleright G_{i-1}$，而 $H\cap G_i\leqslant G_{i-1}$．由第一同构定理得

$(H\cap G_{i-1})G_i/G_i\cong H\cap G_{i-1}/(H\cap G_{i-1})\cap G_i=H\cap G_{i-1}/H\cap G_i$　但　$(H\cap G_{i-1})G_i\subseteq G_{i-1}$，故

$(H\cap G_{i-1})G_i/G_i\leqslant G_{i-1}/G_i$ 又 G_{i-1}/G_i 可换 $\Rightarrow$ $(H\cap G_{i-1})G_i/G$，可换，故 $H\cap G_{i-1}/H\cap G_i$ 可换，所以 H 是可解群。

3．因 $G^{(1)}=[G,\ G]=G_1$，$G^{(2)}=[G^{(1)},\ G^{(1)}]\subseteq[G_1,\ G]=G_2$。一般有 $G^{(i)}=[G^{(i-1)},\ G^{(i-1)}]\subseteq[G,\ G^{(i-1)}]=G_i$ 又因 $G_m=[G,\ G_{m-1}]=\{e\}$，所以 $G^{(m)}\subseteq G_m=\{e\}$。

§1·6 习 题

1．设 $M=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}$，任取 a_i，$a_j\in M$，知有 α，$\beta\in G$ 使 $a_1^{\alpha}=a_i$，$a_1^{\beta}=a_j$。取 $\gamma=\alpha^{-1}\beta$ 则 $a_i^{\gamma}=a_j$。

2．设 G_a 为 a 的稳定子群，对任 $\tau\in G$，令

$$\varphi:\quad G_a\tau\to a^{\tau}$$

则 φ 显然是 G_a 的右陪集的集合到作用集合 M 的满单射，所以 $|G:G_a|=m$；因之 $m|n$。

§2·1 习 题

1．利用2·1·6直接验证。

2．令 $F=\bigcap\limits_{\alpha}F_{\alpha}$，$F_{\alpha}$ 为 F 的子域，F 中显然含非零元。任取 a，$b\in F$，则对一切 α，a、$b\in F_{\alpha}$，所以 $a-b\in F_{\alpha}$，当 $b\neq 0$ 时 $ab^{-1}\in F_{\alpha}$，从而 $a-b\in F$，$ab^{-1}\in F(b\neq 0)$，故 F 是 E 的子域。

4．列出 Z_{11} 的加法表和乘法表，然后计算或利用同余法则进行计算。

5．可直接利用2·1·4来验证，或利用 2·1·6 验证它们是实数域 R 的子域。

§2·2 习　　题

1. $[Q(\sqrt{2}) : Q]=2$. 1, $\sqrt{2}$ 是 $Q(\sqrt{2})$ 在 Q 上一个基.

$[Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : Q]$

$=[Q(\sqrt{2}, \sqrt{3}) : Q(\sqrt{2})][Q(\sqrt{2}) : Q]=4$

1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{6}$ 是一个基.

2. 由于 Z_p 有 p 个元, $[K : Z_p]=n$, 所以 K 恰含有 p^n 个元.

3. $[Q(\alpha) : Q]=3$. 1, α, α^2 为 $Q(\alpha)$ 在 Q 上的通常基, $\alpha^4=-18-57\alpha+27\alpha^2$, $3\alpha^5-\alpha^4+2=-223-726\alpha+288\alpha^2$, 由于 $\frac{1}{13}[(x+1)(x^2-7x+16))-f(x)]=1$, 所以 $(\alpha+1)^{-1}=\frac{16}{13}-\frac{7}{13}\alpha+\frac{1}{13}\alpha^2$.

4. 因 $[K : F]=[K : E][E : F]=[K : E]$, 所以 $[E : F]=1$, 故 $E=F$.

5. 由于 $[E : F]=p$ (素数), 则 $p\geqslant 2$, 所以可取 $\alpha\in E/F$, $[E : F]=[E:F(\alpha)][F(\alpha):F]$, $[F(\alpha) : F]>1$, $[F(\alpha) : F]\mid p$, 故 $[F(\alpha) : F]=p$, 因而 E 是 F 的单代数扩域.

6. 若 $[F(\alpha) : F]=1$, 则显然有 $F(\alpha)=F(\alpha^2)$

若 $[F(\alpha) : F]>1$, 且 $[F(\alpha) : F]$ 为奇数, 则由 $[F(\alpha) : F(\alpha^2)][F(\alpha^2) : F]=[F(\alpha) : F]$. 知道 $[F(\alpha) : F(\alpha^2)]$ 和 $[F(\alpha^2) : F]$ 也都是奇数. 所以 α^2 是 F 上奇次代数元, 今证明 $[F(\alpha) : F(\alpha^2)]=1$.

显然 α 是 $F(\alpha^2)$ 上多项式 $x^2-\alpha^2=0$ 的根, 故 α 在 $F(\alpha^2)$ 上的次数至多为 2, 又因为 $[F(\alpha) : F(\alpha^2)]$ 为奇数. 所以 $[F(\alpha) : F(\alpha^2)]=1$.

7．(1) 设α,β在F上的极小多项式分别为$f(x)$，$g(x)$，则$\partial^\circ(f(x))=m$，$\partial^\circ(g(x))=n$．若β在$F(\alpha)$上的极小多项式为$p(x)$，则$p(x)|g(x)$，从而$\partial^\circ(p(x))\leqslant\partial^\circ(g(x))$．故

$$〔F(\alpha,\ \beta):\ F〕=〔F(\alpha,\ \beta):\ F(\alpha)〕〔F(\alpha):\ F〕\leqslant mn.$$

(2) 设$〔F(\alpha,\ \beta):\ F〕=s$，由(1) $s\leqslant mn$．因为$〔F(\alpha,\ \beta):\ F(\alpha)〕〔F(\alpha):\ F〕=〔F(\alpha,\ \beta):\ F(\beta)〕〔F(\beta):\ F(\alpha)〕=〔F(\alpha,\ \beta):\ F〕$，所以 $m|s$， $n|s$， 又 $(m,\ n)=1$，故$mn|s$，于是$mn=s$．

8．充分性，设$E=F(\alpha)$，α在F上的极小多项式是x^4+ax^2+b．令$L=F(\alpha^2)$，显然$F\subset L\subset E$．由于x^4+ax^2+b在F上不可约，所以x^2+ax+b在F上也不可约．易验证α^2是x^2+ax+b的根，因此x^2+ax+b是α^2在F上的极小多项式，L是F的二次扩域．

必要性　设 $F\subset L\subset E$，$〔L:\ F〕=2$，$〔E:\ F〕=4$，则$〔E:\ L〕=2$．利用$\mathrm{char}\,F\neq 2$， 可以证明$E=L(\theta)$而θ在L上极小多项式是$x^2-\lambda$，$\lambda\in L$．

(i) 若$\lambda\notin F$，λ在F上极小多项式为x^2+ax+b，由于$\theta^2=\lambda$，所以$\theta^4+a\theta^2+b=0$，但

$$L=F(\lambda),\ E=L(\theta)=F(\lambda,\ \theta)=F(\theta)$$

而$〔E:\ F〕=4$，所以θ在F上的极小多项式是x^4+ax^2+b．

(ii) 若$\lambda\in F$，那么由$〔L:\ F〕=2$，可找到$\mu\in L$，$\mu\notin F$而$\mu^2\in F$．取$\theta'=\theta(1+\mu)$，则可证$\theta'^2=\lambda'\notin F$，与(i)一样可证$E=F(\theta')$，而$\theta'$在$F$上的极小多项式是$x^4+ax^2+b$．

§2·3　习　　题

1．$L=Q(\sqrt[3]{2},\omega)$，这里$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$，$〔L:\ Q〕=6$，

2．设 α_1，α_2，…，α_n 为 $f(x)$ 的 n 个根，则 α_1 在 F 上的极小多项式的次数 $m_1 \leqslant n$，即 $[F(\alpha_1) : F] = m_1 \leqslant n$，在 $F(\alpha_1)$ 上 $f(x)$ 可分解成

$$f(x) = (x - \alpha_1) \cdot f_1(x)$$

$\partial^\circ(f_1(x)) = n-1$，$\alpha_2$，…，$\alpha_n$ 是 $f_1(x)$ 的根，则 α_2 在 $F(\alpha_1)$ 上的极小多项式的次数 $m_2 \leqslant n-1$，于是

$$\begin{aligned}[F(\alpha_1)(\alpha_2) : F] &= [F(\alpha_1)(\alpha_2) : F(\alpha_1)][F(\alpha_1) : F] \\ &\leqslant n(n-1)\end{aligned}$$

这样做下去可得

$$[F(\alpha_1, \alpha_2 \cdots, \alpha_n) : F] \leqslant n!$$

设 $N = F(\alpha_1)(\alpha_2)\cdots(\alpha_n) = F(\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$，$N$ 为 $f(x)$ 在 F 上的分裂域。

3．$f(x) = (x-1)(x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1)$，$x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + 1$ 是 $\mathbf{Q}$ 上不可约多项式，其分裂域为 $E = \mathbf{Q}(\theta)$，θ 为 p 次本原单位根，E 也是 $f(x)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的分裂域，而 $[E : \mathbf{Q}] = p-1$。

4．令 $f(x) = p_1(x)p_2(x)\cdots p_s(x)$，作 $f(x)$ 在 F 上的分裂域 E，E 含有 $f(x)$ 的所有根，因而含有 α_1，…，α_s，其中 α_i 为 $p_i(x)$ 的根，$i = 1, 2, \cdots, s$，因此

$$F(\alpha_1, \cdots, \alpha_s) \subset E$$

$F(\alpha_1, \cdots, \alpha_s)$ 是 F 的有限扩域。

§2·4 习　　题

1．$f(x)$ 的根为

$$\alpha_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \qquad \alpha_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i,$$

$$\alpha_3 = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i, \quad \alpha_4 = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$$

又因为 $\alpha_2 = \alpha_1^{-1}$, $\alpha_3 = -\alpha_1^{-1}$, $\alpha_4 = -\alpha_1$, 所以令$\alpha = \alpha_1$

则 $$\mathbf{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4) = \mathbf{Q}(\alpha)$$

为 $f(x) = x^4 + 1$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的分裂域.

2. (1) 取 $c = 1$ 即满足条件(4), 故 $\theta = \sqrt{3} + \sqrt[3]{2}$

(2) 令 $\alpha = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$, $\beta = 2i$, 取 $c = 1$, $\theta = \alpha + \beta$

即为所求.

3. 设 $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $\alpha^3 = 11\sqrt{2} + 9\sqrt{3}$, 于是

$11\alpha - \alpha^3 = 2\sqrt{3}$, $\sqrt{3} = \frac{11}{2}\alpha - \frac{1}{2}\alpha^3$. 同理可知

$\sqrt{2} = \frac{1}{2}\alpha^3 - \frac{9}{2}\alpha$.

4. 设 E 是 F 的代数扩域, K 是 E 的不可分扩域, $\alpha \in K$ 是 E 的不可分元素, 则有 E 上不可约多项式 $p(x)$ 以 α 为根. 但 K 也是 F 的扩域, 故是可分扩域, α 是 F 上可分元, 设 α 在 F 上极小多项式为 $g(x)$, $g(x)$ 无重根, 在 $E[x]$ 中 $p(x) | g(x)$, 故 $p(x)$ 也无重根, 矛盾.

§2·5 习 题

1. 设 Δ 是特征为 3 的素域, $\Delta = \{0, 1, 2\}$, 则 $f(x) = x^2 + 1$ 在 $\Delta[x]$ 中不可约. 作 Δ 上单式数扩域 $F = \Delta(\alpha)$, α 在 Δ 上的极小多项式为 $f(x)$, F 含有 9 个元, $|F^*| = 8$, 但 $\alpha^2 = -1$, $\alpha^4 = 1$, 所以 α 不是 F^* 的生成元.

2. 设 Δ 是特征为 3 的素域, $\Delta = \{0, 1, 2\}$, Δ 上 2 次不可约多项式必为 $x^{3^2-1} - 1 = x^8 - 1$ 的因式, 而

$$x^8-1=(x+1)(x-1)(x^2+1)(x^2+x+2)(x^2+2x+2)$$

且 x^2+1，x^2+x+2，x^2+2x+2 皆为 $\Delta[x]$ 中不可约多项式。$\Delta[x]/(x^2+1)$，$\Delta[x]/(x^2+x+2)$，$\Delta[x]/(x^2+2x+2)$ 皆是特征为 3 的 9 元域，仿例 1 可列出它们的加法表和乘法表，只列出 $\Delta[x]/(x^2+1)$ 即可。

3．令 E 所含素域为 Δ，根据2·5·3，E是多项式 $x^{p^n}-x$ 在 Δ 上的分裂域，若 $m|n$，则 $p^m-1|p^n-1$，进一步有 $x^{p^{m-1}}-1|x^{p^{n-1}}-1$，即 $x^{p^m}-x|x^{p^n}-x$，因此 E 含 $x^{p^m}-x$ 的所有根，这些根作成一个有 p^m 个元的 E 的子域，若 L_1 也是含有 p^m 个元的 E 的子域，由 2·5·3 知 L_1 也是由 $x^{p^m}-x$ 在 E 中所有根作成的，因而 $L_1=L$。

§3·1 习　题

1．由 $[E:\mathbf{Q}]=2$，知 E 是 $\mathbf{Q}$ 的单代数扩域，因而存在 $\beta\in E/\mathbf{Q}$，使得 $E=\mathbf{Q}(\beta)$，β 在 $\mathbf{Q}$ 上的极小多项式是

$$f(x)=x^2+ax+b.\qquad a,\ b\in\mathbf{Q}$$

将 $f(x)$ 化为整系数多项式

$$g(x)=hx^2+kx+l,\qquad h,\ k,\ l\in Z$$

$f(x)$ 与 $g(x)$ 有相同的根，取

$$\beta=\frac{-k\pm\sqrt{k^2-4hl}}{2h}$$

k^2-4hl 为整数，则 $\sqrt{k^2-4hl}=n\sqrt{m}$．这里$n\in Z$ $m=-1$ 或者 $m=\pm p_1p_2\cdots p_s$，p_1，p_2，…，p_s 为互不相同的素数。

令 $\alpha=\sqrt{m}$，则有 $\beta=-\frac{k}{2h}+\frac{n}{2h}\alpha$，$-\frac{k}{2h}$，$\frac{n}{2h}\in Q$

所以 $E=Q(\beta)=Q(\alpha)$，这里 $\alpha=\sqrt{m}$，$m=-1$ 或 $m=\pm p_1\cdots p_s$ 当 $i\neq j$ 时 $p_i\neq p_j$。

2. 令 $F=Q(\sqrt[3]{3})$，显然 $[F:Q]=3$，由于 $\sqrt[3]{3}$ 在 Q 上的共轭元 $\sqrt[3]{3}\omega\notin Q(\sqrt[3]{3})$，这里 $\omega=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，所以 F 不是 Q 的正规域。令 $F=Q(\sqrt[4]{2})$，显然 $[F:Q]=4$，同样讨论可知 F 不是 Q 的正规域。

3. 因为 P_2 是 F 的正规域，所以 P_2 是 F 上某个多项式 $f(x)$ 的分裂域。但 $f(x)$ 也是 P_1 上的多项式，所以 P_2 也是 $f(x)$ 在 P_1 上的分裂域，故 P_2 也是 P_1 的正规域。

若 P_2 是 F 的正规域，则 P_1 不一定是 F 的正规域。例如 $Q(\sqrt[3]{2}, i)\supseteq Q(\sqrt[3]{2})\supseteq Q$，$Q(\sqrt[3]{2}, i)$ 是 $Q(\sqrt[3]{2})$ 的正规域，但 $Q(\sqrt[3]{2})$ 不是 Q 的正规域。

§3·2 习　题

1. 只需证明 τ 是 N 到自身的双射。因为 N 是 F 的正规域，所以 $N=F(\theta)$，θ 在 F 上的极小多项式为 $g(x)$。由 $g(\theta)=0$ 可得 $g(\theta^\tau)=0$。则 $\theta^\tau\in N$，从而 $N=F(\theta)=F(\theta^\tau)$。这样 τ 是 N 到自身的双射。

2. 因为 N 的任一自同构都使 Q 中的元不动，所以找出 $AutN$ 就是找出 N 的保持 Q 的元不动的一切自同构。

由于N是Q上有限可分扩域，$N=Q(\sqrt{5}, \omega)=Q(\sqrt{5}+\omega)$。任取 $\tau\in AutN$，则

$$(\sqrt{5}+\omega)^\tau=(\sqrt{5})^\tau+\omega^\tau$$

显然 $\sqrt{5}^{\tau}=\begin{cases}\sqrt{5}\\-\sqrt{5}\end{cases}$，$\omega^{\tau}=\begin{cases}\omega\\\omega^2\end{cases}$，这样可得

$$\tau_1:\ \sqrt{5}+\omega\to\sqrt{5}+\omega$$

$$\tau_2:\ \sqrt{5}+\omega\to\sqrt{5}+\omega^2$$

$$\tau_3:\ \sqrt{5}+\omega\to-\sqrt{5}+\omega$$

$$\tau_4:\ \sqrt{5}+\omega\to-\sqrt{5}+\omega^2$$

于是 $\mathrm{Aut}N=\{\tau_1=\varepsilon,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4\}$，其乘法表如下：

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
τ_1	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
τ_2	τ_2	τ_1	τ_4	τ_3
τ_3	τ_3	τ_4	τ_1	τ_2
τ_4	τ_4	τ_3	τ_2	τ_1

设 N 在 $\mathbf{Q}(\sqrt{5})$ 上的自同构群为 H，则 $H=\{\tau_1,\tau_2\}$，这是因为 $\sqrt{5}^{\tau_1}=\sqrt{5}$，$\sqrt{5}^{\tau_2}=\sqrt{5}$.

3. 因为 $N=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2},\ \omega)$ 是 $(x^3-2)(x^2+x+1)$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的分裂域，所以 N 是 $\mathbf{Q}$ 的正规域，且 $N=\mathbf{Q}(\sqrt[3]{2}+\omega)$，任取 $\tau\in\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}$，则

$$(\sqrt[3]{2}+\omega)^{\tau}=(\sqrt[3]{2})^{\tau}+\omega^{\tau}$$

$$(\sqrt[3]{2})^{\tau}=\begin{cases}\sqrt[3]{2}\\\sqrt[3]{2}\,\omega\\\sqrt[3]{2}\,\omega^2\end{cases},\qquad \omega^{\tau}=\begin{cases}\omega\\\\\omega^2\end{cases}$$

又 $|\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}|=6$，所以 $\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}$ 恰含 6 个元素：

$Gal N/Q = \{\tau_1 = \varepsilon,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4,\ \tau_5,\ \tau_6\}$。且

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4	τ_5	τ_6
$\sqrt[3]{2}\rightarrow$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$	$\sqrt[3]{2}\omega^2$
$\omega\rightarrow$	ω	ω^2	ω	ω^2	ω	ω^2

由上表很容易引出 $Gal N/Q$ 的乘法表。

§3·3 习　　题

1．设 G_0 是域 K 上 n 次一般方程

$$x^n - u_1 x^{n-1} + \cdots + (-1)^n u_n = 0$$

在域 $F' = K(u_1, \cdots, u_n)$ 上的伽罗华群，则由 3·3·4 知 $G_0 \cong S_n$。因为 $G \subseteq S_n$，在 G_0 存在一个子群 $G' \cong G$，令

$$G' \rightarrow F = \mathrm{Inv} G'$$

由伽罗华基本定理，$F' \subseteq F \subseteq N$，这里 N 为所给一般方程的根域。F 唯一存在且 N 是 F 的正规域，$N = F(\alpha)$。设 α 在 F 上的极小多项式为 $f(x)$，则 $f(x) = 0$ 在 F 上的伽罗华群就是 G'。

2．因为 $f(x)$ 在 F 上可约，所以 $f(x)$ 在 F 上可分解为

$$f(x) = p_1^{r_1}(x) \cdots p_r^{r_s}(x)$$

这里 $p_1(x)$，$\cdots$，$p_s(x)$ 为 $F[x]$ 中互不相同的不可约多项式，$r_i \geqslant 1$，$i = 1, 2, \cdots, s$。

设 $f(x)$ 在 F 上的分裂域为 N，令

$$f_0(x) = p_1(x) \cdots p_s(x)$$

则 $f_0(x)$ 在 F 上的分裂域仍为 N。因而 $f(x)$ 与 $f_0(x)$ 在 F 上伽罗华群相同，记为 G。设 $\partial^\circ(f_0(x)) = m$，由 3·3·2 知 $G \overset{\varphi}{\cong} S_m$ 的一个子群。

$$\varphi:\ \tau\to\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \cdots & \alpha_m\\ \alpha_1^{\tau} & \alpha_2^{\tau} & \cdots & \alpha_m^{\tau}\end{pmatrix},\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_m \text{为 } f_0(x)$$

的根。

i) 当 $m<n$ 时，G 不与 S_n 同构。

ii) 当 $m=n$ 时，$f(x)=f_0(x)$。设 α_1 与 α_2 分别为 $p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 的根，由于 $p_1(x)$ 与 $p_2(x)$ 无公根，所以 $\alpha_1^{\tau}\neq\alpha_2$。因之在 $\varphi(G)$ 中不出现$\begin{pmatrix}\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n\\ \alpha_2 & \alpha_1 & \alpha_3 & \cdots & \alpha_n\end{pmatrix}$，所以 G 不与 S_n 同构。

§3·4 习　　题

1. $N=\mathbf{Q}(\sqrt{3},\ i)$ 是方程 $(x^2-3)(x^2+1)=0$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的根域。$|\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}|=[N:\mathbf{Q}]=4$。$\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}$ 中四个元可列表说明如下：

	τ_1	τ_2	τ_3	τ_4
$\sqrt{3}\mapsto$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$	$\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$
$i\mapsto$	i	i	$-i$	$-i$

$\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}=\{\tau_1=\varepsilon,\ \tau_2,\ \tau_3,\ \tau_4\}$，将 $\sqrt{3}$，$-\sqrt{3}$，i，$-i$ 分别标为 1，2，3，4，则

$$\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}\cong\{(1),\ (12),\ (34),\ (12)(34)\}\cong B_4$$

于是 $\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}$ 有5个子群：$\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}$，$H_1=\{\tau_1,\ \tau_2\}$，$H_2=\{\tau_1,\ \tau_3\}$，$H_3=\{\tau_1,\ \tau_4\}$，$\{\varepsilon\}$。这5个子群在伽罗华映射 Φ 之下的象分别为 $\mathbf{Q}$，$L_1=\mathbf{Q}(i)$，$L_2=\mathbf{Q}(\sqrt{3})$，$L_3=\mathbf{Q}(\sqrt{3}\,i)$，$N$。即如图 A 所示。

2. $N=\mathbf{Q}(\sqrt[4]{2},i)$ 为 $x^4-2=0$ 在 $\mathbf{Q}$ 上的根域，由 §3·3 的例4知 $\mathrm{Gal}N/\mathbf{Q}$ 恰含8个元，设为 $\tau_1=\varepsilon,\ \tau_2,\ \cdots,\ \tau_8$。

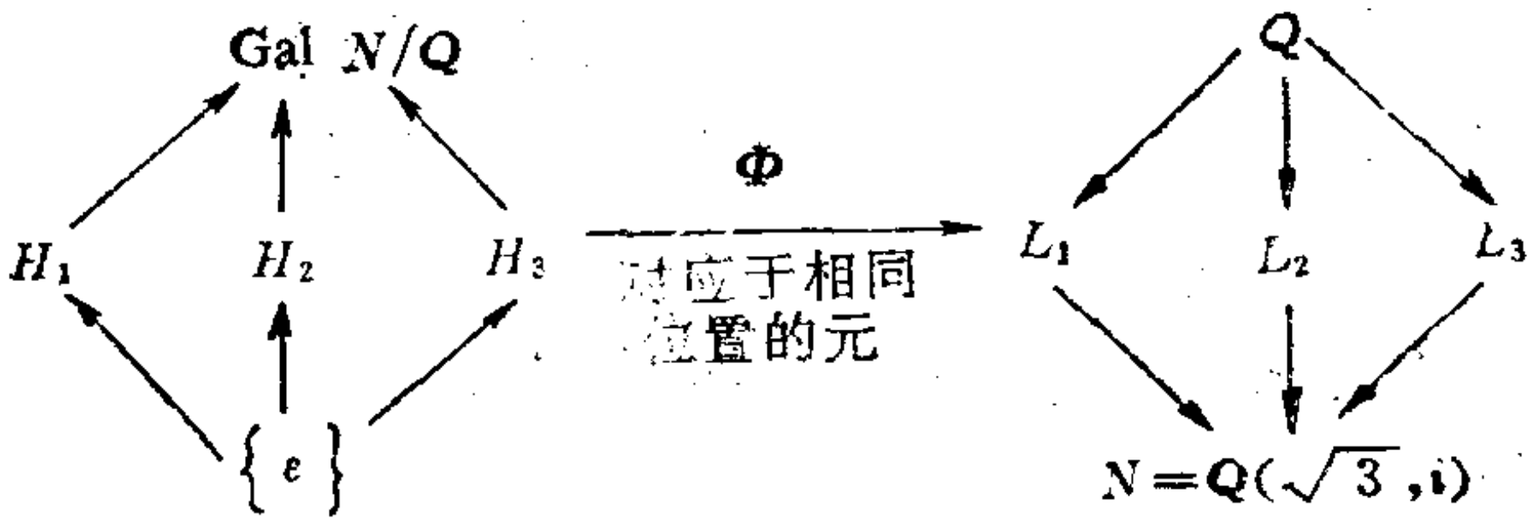


图 A

且 Gal$N/Q \cong H$，这里

$$H=\{(1)(12)(34),\ (1324),\ (1423),\ (34),$$
$$(12),\ (13)(24),\ (14)(23)\}$$

H 是 S_4 的一个子群。由此可知 GalN/Q 有10个子群：

GalN/Q，$H_1=\{\tau_1,\ \tau_6,\ \tau_5,\ \tau_2\}$，$H_2=\{\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_3,\tau_4\}=(\tau_3)$，$H_3=\{\tau_1,\ \tau_2,\ \tau_7,\ \tau_8\}$，$H_4=\{\tau_1,\tau_6\}$，$H_5=\{\tau_1,\tau_5\}$，$H_6=\{\tau_1,\tau_2\}$，$H_7=\{\tau_1,\tau_7\}$，$H_8=\{\tau_1,\tau_8\}$，$\{\tau_1\}$。它们分别对应的子域是：

Q，$L_1=Q(\alpha^2)$，$L_2=Q(i)$，$L_3=Q(\alpha^2 i)$，$L_4=Q(\alpha i)$ $L_5=Q(\alpha)$，$L_6=Q(\alpha^2,\ i)$，$L_7=Q((1+i)\alpha)$，$L_8=Q((1-i)\alpha)$，$N=Q(\alpha,i)$。这里 $\alpha=\sqrt[4]{2}$，可以用图B表示这种对应关系：

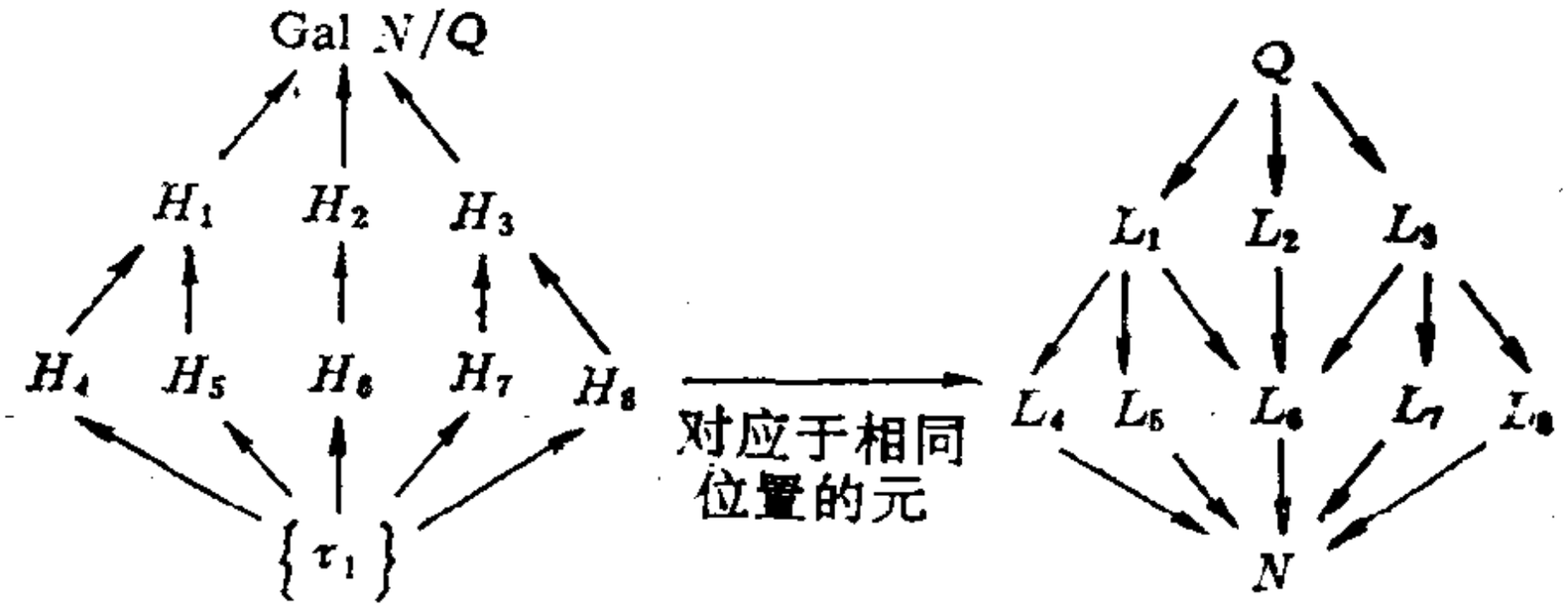


图 B

因为 $\{\tau_1\}$，H_1，H_2，H_3，$\mathrm{Gal}N/Q$ 是 $\mathrm{Gal}N/Q$ 的不变子群，所以 N，L_1，L_2，L_3，Q 是 Q 的正规域。

3．因为 $H \neq \mathrm{Gal}N/F$，所以 $H \subsetneq \mathrm{Gal}N/F$

$$\varphi: H \to \mathrm{Inv}H = L$$

则 $L \supsetneq F$．因为 L 的元在 H 元下均不变，所以存在 $a \in L$ 而 $a \notin F$ 使得 a 在 H 元下不变。

4．设 N 是 F 的正规域。因为 G 是 N 在 F 上的自同构群，所以对于任意 $a \in F$，$\tau \in G$ 都有 $a^{\tau} = a$，因而 $F \subseteq L$．由 $G = \mathrm{Gal}N/F$ 恰为 N 在 L 上的伽罗华群，利用 3·2·6 可得 $F = L$。

反之，设 $F = L$，由于 N 是 F 的有限扩域，所以 $N = F(\theta)$．由于 G 是 N 在 F 上的自同构群，所以 G 的阶一定有限，设

$$G = \{\tau_1 = \varepsilon, \tau_2, \cdots, \tau_m\}$$

考虑

$$f(x) = (x - \theta^{\tau_1})(x - \theta^{\tau_2}) \cdots (x - \theta^{\tau_m})$$

对任意 $\tau \in G$，有

$$f(x)^{\tau} = (x - \theta^{\tau_1\tau})(x - \theta^{\tau_2\tau}) \cdots (x - \theta^{\tau_m\tau}) = f(x) \in L[x] = F[x]$$

．于是 N 是 F 上多项式 $f(x)$ 的分裂域，故 N 是 F 的正规域

5．令 Ψ 是伽罗华映射

$$\Psi: I_1 \to H_1, \quad I_2 \to H_2$$

假设 I_1 和 I_2 在 F 上共轭，并设 $I_1 = F(\alpha)$．$\tau: I_1 \to I_2$ 是同构映射，且 $a^{\tau} = a$，$\forall a \in F$．设 $\alpha^{\tau} = \beta$，则 $F(\beta) = I_2$，进一步有 α 与 β 在 F 上共轭．由 3·4·5 的证明知，存在 $\sigma \in \mathrm{Gal}N/F = G$ 使得 $\beta = \alpha^{\sigma}$，于是 $F(\alpha^{\sigma}) = F(\beta) = I_2$．这

样，$I_1=F(\alpha)\cong F(\alpha^\sigma)=I_2$。任取$\tau_1\in H_1$，则$(\alpha^\sigma)^{\sigma^{-1}\tau_1\sigma}=\alpha^{\tau_1\sigma}=\alpha^\sigma$，即$\sigma^{-1}H_1\sigma$的任意元不使$\alpha^\sigma$变动，因而$\sigma^{-1}H_1\sigma$也不使$I_2$的元变动，所以$\sigma^{-1}H_1\sigma\subseteq H_2$。同理，我们可以把$I_1$写成$I=F((\alpha^\sigma)^{\sigma^{-1}})$，因此$\sigma H_2\sigma^{-1}\subseteq H_1$，于是$H_2\subseteq\sigma^{-1}H\sigma$，故$H_2=\sigma^{-1}H_1\sigma$。

反之，假设H_1与H_2共轭，令$H_2=\sigma^{-1}H\sigma$，$\sigma\in G$。设$I_1=F(\alpha)$，则$I_1=F(\alpha)\cong F(\alpha^\sigma)=I_2'$，显然$I_1$与$I_2'$共轭。由前面的证明知

$$\Psi:\quad I_1\to H_1$$
$$I_2'\to\sigma^{-1}H_1\sigma$$

但

$$\Psi:\quad I_2\to H_2$$

又$H_2=\sigma^{-1}H_1\sigma$ 所以$I_2'=I_2$。

§4·1 习 题

1．方程$x^n-1=0$在F上的伽罗华群不一定是循环群。例如方程$x^8-1=0$在Q上的伽罗华群就不是一个循环群。

2．方程$x^n-a=0$在F上的伽罗群不一定是交换群。例如方程$x^3-2=0$在Q上的伽罗华群与S_3同构，而S_3不是交换群。

§4·2 习 题

1．设α是$f(x)$的一个根，且$\alpha\in N$，并且N/F具有根塔，可假设N为F的正规域。由于$f(x)$不可约，且$f(\alpha)=0$，而$\alpha\in N$。由正规扩域的定义知N包含$f(x)=0$的根域，即方程的所有根皆在N中，所以$f(x)=0$在F上可用根号

解。

2. 设 ε 是 n 次本原根，α 是 $x^n-a=0$ 的一个根，则方程 $x^n-a=0$ 在 F 上的根域 $N=F(\varepsilon,\ \alpha)$。于是

$$N\subseteq F(\varepsilon)\subseteq F(\varepsilon)(\alpha)=N$$

考虑伽罗华映射图

$$\begin{array}{ccccc} F & \subseteq & F(\varepsilon) & \subseteq & F(\varepsilon)(\alpha)=N \\ \updownarrow & & \updownarrow & & \updownarrow \\ G & \trianglerighteq & G_1 & \trianglerighteq & G_2=\{e\} \end{array}$$

则不难看出

$$G\trianglerighteq G_1\trianglerighteq G_2=\{e\}$$

为可解列。

§4·3 习 题

1. $f(x)=3x^5-5x^3-30x+30=0$

是 Q 上不能用根号解的 5 次方程又一个例子。

§4·4 习 题

2. $f(x)=x^3-3x-1$ 在 Q 上显然不可约。又 $\mathbf{Q}\ni\sqrt{D}$，所以 $f(x)=0$ 在 Q 上的伽罗群 G 的阶是 3，设 N 是 $f(x)$ 在 Q 上的分裂域，则 $[N:\mathbf{Q}]=3$。设 α 是 $f(x)=0$ 的一个根，则 $[\mathbf{Q}(\alpha):\mathbf{Q}]=3$，又 $\mathbf{Q}(\alpha)\subseteq N$。所以 $N=\mathbf{Q}(\alpha)$。

3. 显然 $g(x)=x^3+x+1$ 在 Q 上不可约，不难算出 $\sqrt{D}\notin\mathbf{Q}$。所以 $g(x)$ 在 Q 上的伽罗华群不与 A_3 同构。这样可证出 $G\cong S_3$。

§4·5 习 题

1. $x^7-1=0$ 的本原根为

$$\varepsilon = \cos\frac{2}{7}\pi + i\sin\frac{2}{7}\pi$$

$$\varepsilon^{-1} = \varepsilon^6 = \cos\frac{2}{7}\pi - i\sin\frac{2}{7}\pi$$

ε 是 $\varphi(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$ 的根。正七边形可作$\Leftrightarrow \varepsilon + \varepsilon^6 = 2\cos\frac{2}{7}\pi$ 可作。

又 $\varepsilon + \varepsilon^6$ 是 $f(x) = x^3 + x^2 - 2x - 1 = 0$ 的根，且 $f(x)$ 不可约，所以 $[\mathbf{Q}(\varepsilon + \varepsilon^6) : \mathbf{Q}] = 3$。因之 $\varepsilon + \varepsilon^6 = 2\cos\frac{2}{7}\pi$ 不可作。

[General Information]
书名=伽罗华理论基础
作者=刘长安，王春森编著
页数=163
SS号=10101771
出版日期=

目录
正文