

数学的前途和发展历史*

丘成桐**

摘 要 本文阐述今后数学的发展趋势至少有三个方面:(1)数学家为追求数学本身的古典价值观念,即数学的内在美或抽象美而继续研究;(2)数学与理论物理及自然科学相结合;(3)数学与工程学相结合。文中并对当代理工院校的青年人致力于数学研究的兴趣、必要性和方法,作了许多鼓励和有益的启示。

关键词 数学;抽象美;理论物理;自然科学;工程学

中图分类号 NI, OI

我是广东人,很高兴能来东莞理工学院讲几句话,虽然东莞不是我的故乡,但我们都是广东人,所以感到非常亲切。

我在国外几十年了,也教了不少中国留学生,基本上都是北方人或者是上海人。我并不是有意讲我们应该有地域这个观念。我们知道,在历史上,广东的年青人自太平天国后,历次革命都作了很大贡献,从太平天国到孙中山革命到近代解放,广东人花了很多的心血,作出了很大的努力。现在,在政府的领导下,我们进入了一个新的科技的世纪,这也可以说是一个革命。我希望广东的年青人也能为此尽一份力量。

广东出了不少人才,在海外很多领导世界科技尖端的人才,很多是广东人。所以我们完全没有疑问,广东可以培养第一流的科技人才。问题只是我们的学生自己愿不愿意做到带领科技的发展。

我在香港也有好几年了,大体了解香港年青人的想法,也了解他们在世界科技上的贡献。这几十年,香港出了不少人才,也是第一流的科学家。香港这十年,经济的成长是世界第一流的,产生了不少企业家,有辉煌的成就。可是我们年青人对科技的发展没有引起注意,这是很遗憾的。

在珠江三角洲一带,经济的发展很快,可真的跟世界第一流的先进国家相比,要跳跃上去的话,非要靠高科技上的成长不可。

高科技的成长一定要与基本科学有密切的关系。我鼓励诸位能对经济尽一份力量,也希望能对科技的发展和基本科学有一个向上的心理,才能够把已经得到的经济成长维持下去。

* 本文根据丘成桐教授 1996 年 7 月 30 日在东莞理工学院讲演录音整理,未经本人审阅。

** 丘成桐教授 1949 年生,22 岁获美国柏克莱加州大学博士学位,28 岁任斯坦福大学教授,1987 年起任教于哈佛大学,1993 年入选为美国国家科学院院士。丘教授研究成果卓著,解决了悬疑 25 年的卡拉比猜想,为数学界所推崇,1979 年获选为美国加州“最杰出科学家”,1981 年获美国数学学会颁发的威伯伦奖,1982 年获国际数学界最高荣誉的菲尔兹数学奖,成为获此项殊荣的第一位也是迄今唯一的华人获奖者。

我们看全世界最先进的国家的发展,美国也好,欧洲也好,不能把高科技工业和基本科学做好,最终总是要落后的。所以,我希望在广东的年青朋友能想到这一点。我先讲这番话,是衷心期望我们都有信心,去作一番事业,这无论对国家、对自己都有很大的好处。

下面我开始讲中国和世界上数学的前途和发展的历史。

数学是一门基本科学。它有它的基本态度、基本观念,就是它的价值观念。但它也有很重要的、实用方面的贡献。所以,对于数学,我们首先要知道它有很重要的应用观念。可是为达到实用价值起见,我们不能脱离它的一个比较抽象的想法。

在历史上,数学的发展跟物理的发展一样,往往刚开始的时候,不是为了在工厂里做出某一个零件,或者在计算机上将一个图象处理得很干净,也不是把汽车加以改良。数学的发展刚开始时只是比较抽象的研究。可是能抽象多远呢?往往也不能抽象得太远,所以一定要把抽象数学和应用数学密切地联合在一起。我先讲这句话原因何在呢?因为在理工学院大概因为基本数学可能是没有用的,就不用去学。我想这是错误的看法。

我们看全世界最出名的理工学院。在美国有麻省理工学院、加州理工学院和很多不同的理工学院,我们来看这几个大学的发展。麻省理工学院的基本数学和基本科学是美国第一流的。我们也知道在加州理工学院有几个很出名的物理学家,费曼 R P 和盖尔曼 M 他们都拿了诺贝尔奖金,但物理系除了这两位,还有好几位很有成就的物理学家,他们研究的物理不见得都能直接立即用在工程上。那么,加州理工学院为什么还要聘请他们,并用高薪聘请他们呢?这总是有点原因的。

我们再来看麻省理工学院。它比加州理工学院大好多倍,它就在哈佛大学旁边。麻省理工学院的基本数学在世界数学界的排名,按美国自己的估计总是在前三名之内。它们的物理也是排最前几名的。还有其他基本科学也是排前几名的。什么原因呢?因为应用科学与应用数学或应用科学与基本科学是密切联系,切不开来的。

我们知道最基本的数学,例如富里叶级数的发展,开始时跟工程没有很大直接的关系,跟信号的传播虽有一点点关系,但数学家在研究富里叶分析时,并不见得特别重视应用方面。可是发展到一定地步,理论对应用科学是完全分不开的。我们看很多因此发展出来的科学,比如小波的分析,在现代应用数学上是很大的贡献。但在刚开始做小波分析时只是纯粹数学的 curiosity (好奇心),即数学家对这门科学觉得很有研究的必要,了解到很清楚的时候,发觉它应用到工程上有很大用处才用上去了。我讲这番话的主要目的是要我们知道整个数学的发展有两部分,可是不必要分界得很清楚。

在 21 世纪,数学的发展至少有三部分。

1 数学本身为了它的古典的价值观念继续发展

就是讲数学会因为我们追求它的美的观念,而不停地了解,并继续发展下去。

从古到今,不少数学家对很抽象的数学的美不停地研究。举例来讲,如数论。数论里有很多命题,对实际观念好象是完全没有关系,prime number 即素数的分布,它的分解研究了几十个世纪,我们数学家对这方面的研究绝对不会放松的。可这种研究近几十年来,我们发觉对应用数学有很大的帮助。数字 prime number 的分解,即数字分成 prime number 存在这个命题,现在在组合理论里面是一个最大的命题,美国国防部对此有很主要的研究。现在用在组合理论中的有非常先进的代数数论的研究,最尖端的数学家和数论学家都在这个边

沿上作分析。几十个世纪的研究好像是单纯追随数字的美的观念,但研究出来的结果在应用科学上却得到了很大的发展。依我所看,这方面的研究会不停的推展,不但是在数论上有此命题,在几何上、代数上也会有这种发展。

我是搞几何出身的数学家,对几何有一定的了解。我们对几何的图形处理,从一个美的观念来看,我们有一定的命题和想法,跟应用数学不一定有关系。可是,我们也从应用科学上得到很多灵感。往往在电子计算机处理一个图形时,尤其是高维的图形,就算处理三维图形吧,也是很复杂的几何问题。电子计算机能够处理的数据是有限的,假如不能把一个几何图形本身用抽象的数学方法了解清楚,电子计算机不可能将所有的数据全部输进去,即使输进去也不会好好地输送和了解。因此,产生了很多不同的计算机上的 graphic 问题,对几何研究上有一定的灵感。我们在这方面没有考虑过的,因为现代计算机的发展需要我们对这方面有一定研究。可是我们为了处理图形,为了它美的观念,也引进了自己的观念。这方面的发展会不断地增长。所以,微分几何、三维或二维空间的发展会跟应用科学有密切的联系,也跟微分方程和其他数学方面的理论,譬如:代数数论、代数、甚至数论有相当大的联系。

近代数学的发展,尤其在 21 世纪,数学领域内的界线大概会慢慢地减少。因为,我们发觉,做一个研究时需要的工具,不单是古典的工具就够用了,往往要到代数方面、组合方面、甚至数论方面找到它们得到的成果来帮助我们处理图形方面的想法。所以我们的空间要放得很大,才能把一个好的学问弄得很清楚。在 20 世纪后期,即近 30 年,数学的中间领域就慢慢减少,也跟其他科学的中间领域慢慢减少。所以,我们应知道这种观念,尤其在国演讲我很注意这一点。为什么呢?因为国内的年青朋友往往很早就决定念什么科目,同时在决定念什么科目后就不愿意改变,勿论是否有此需要。假定念了代数,就绝不会愿意念几何或者其他方面的科目,结果往往吃了很大的亏,因为现代数学已经到了很难分清界线的时候,能够懂得很多不同科目的数学家往往占了很大的优先。因为你需要的工具到最后一分钟才去了解,就会比其他在这面工作的人迟了很多。我建议年青朋友要学新的科学的话,最好在做研究时,先把各门科学的基础打好,这样到真的做研究有需要时,才能很快进入领域,找到自己所需要的工具。否则,到最后才去找工具,会比其他人慢了一步,做研究可是跟打仗一样,分秒必争。你比人家慢了点,你做的研究就比人家晚了几个月或几个星期,人家先发表了,你也就落后了。所以无论在做工程方面或学问方面都有这个问题。

我讲的第一方面可概括为:数学家将继续不停地为追求数学的内在美或抽象美而研究。我坚信这个方向绝不会消失的。

2 数学与理论物理及自然科学的结合

近三十多年来,尤其在理论物理方面得出来的数学灵感是很深远的。我们数学家有很多漂亮想法,有些甚至是天才的发现。可是,无论人类的头脑有多聪明,我们也没法比得上大自然的神秘。有很多漂亮的自然规律,尤其是从量子物理方面得来的灵感,我们无法想象。到了七八十年代以后,量子力学尤其是从量子场论得到的灵感,数学家很难用普通的数学想法把它理解清楚。我们不得不去了解一下从高能物理到量子场论得出的灵感。因为这灵感只是近几十年才发展的,所以我们不是一下就能了解清楚。这种情况好象电磁学刚开始时一样,我们从不知道电磁学的感应是什么样子。现在,我们对电磁学看惯了,看懂了,我们就觉得只是一个很普遍的理论。现在,我们数学家看麦克斯韦(Maxwell)方程并不觉得太

困扰和有什么太神秘的地方。这并不是说,我们对电磁学已全部了解清楚,可是对电磁学带来的数学,我们有信心去想去做,因为这跟我们的想法差不多远,又天天接触到电磁感应方面的现象。所以一个时代有一个时代的想法。

五六十年代量子场论尤其所谓重整化的观念,在统计物理得出的想法,在数学上是一个很深的领域,它得出的灵感并不是我们天天碰得到的灵感。原因在于,物理学家也不知道这得出的灵感是不是正确的。对我们数学家来讲,也是一个更新鲜的观念。假如这个观念是错的,我们根本不用去学它。所以许多数学家,因为这种灵感没有得到严格的证明,宁愿不去学它。可是,这十多年来事实上的证明,即从经验得到的看法,往往从量子场论或重整化的观念得出来的数学具有很大的贡献。在物理方面,一种非一般性的想法得出来的数学往往是正确的。这正确性对数学家有很大的困扰,因为从高能物理或量子场论得出来的想法是不可以证明的,它有一定的思路,可是不能辩证地证明。整个思维的方法跟我们古典数学的思维方法并不一样。那么怎样知道我们的结论是对的呢?因为我们有时候可以证明它,有时候还没法证明,有大部分要用电子计算机重复计算,可以用来作一种猜测,用电子计算机可以验证一部分。所以,我们基本上相信它的结论是对的。可是,我们对整个结论重新进行严格的证明,还未达到这种地步。为什么我们要坚持严格的证明呢?在理工科学学校里,可能觉得有点奇怪,因为你做某个东西,你做试验,试试看行不行,如果成功了,也就算了。我们数学无论在什么时候,最后还是希望证明一个命题的严格性,否则就不能算是数学。你当然在实验的物理上或者工科上,证明并不重要,可是我们也要知道,物理上得出的命题,虽然现在知道是对的,但有时也常常发现有错误,这个现象,在数学本身也出现过。

大概在20世纪初期,代数几何的发展,意大利的代数几何学家,发展了一套理论。它跟现代的工科理论和高能物理的理论相近,可以基本上用它的灵感作出一系列的猜测,同时往往是对的。这全是用数学的方法来做的想法,发展了15年到20年的功夫,得出一套很漂亮的数学,可是我们发现慢慢越发展下去,得出来的结论却是错误的。到了三四十年代,数学家产生了很大的反感,因为数学不应该有错。可是发觉从不严格的代数几何的发展,虽然得出的结论有时是对的,甚至很漂亮,但我们也发觉仍有错误,同时越走越远。所以到了三四十年代,数学家花了二十多年功夫把数学重新再严格化。因此,我想很多工科的朋友或者物理学家对数学家会有很大的偏见,认为数学家只愿意看严格的证明,而不愿意去整理、研究实际的现象。我想这是个错误的观念。因为数学家主要看命题也是个很实际的自然界现象或者工科上出来的题目。因此,我们得到一个教训,假如是离题太远,完全不去研究证明的话,我们就会得到错误的结论。这结论往往要困扰我们相当一段时间,才能重新整理。但我不是鼓励你们对命题非要证明得很严格不可。不过,我们应切记:假如没有证明过的数学总是可能有错的。

照我的看法,在21世纪,由于少部分,甚至相当大部分的数学,大概都会是由自然科学得出的灵感数学化,把它吸收进来,变成数学的一部分,变成以后,不但对数学有很大的贡献,对自然科学也将有很大的贡献。事实上,现在高能物理的研究得到许多数学家的帮助才能向前推进。我本人也参加了很多高能物理理论的研究,他们认为我们的贡献是很重要的,是不可缺的。除高能物理外,还有其他许多科学领域,比如,电磁学,很多不同的从自然界涌现出的流行理论都含有重要的数学。这些问题有些相当困难,有些比较容易,我相信数学家会继续不断地向这个方向努力,这是不可避免的,同时也是很重要的数学和自然科学

结合的必要过程。

3 数学与工程学的结合

直到二十多年前,数学家还看不起工程学里面的数学。因为工程学上能够提供的数学并不是很深入,往往为解决工程学上的问题,只需要不太深的数学就够了。

可是,近20年来,工程学突飞猛进,尤其是在电子计算机上得到的启发,到一定地步提出的问题本身已相当深入,对数学也是如此,所要求的解决方法也相当困难。20年来,工程学提出了很多重要的问题。例如,图象处理、信号传送和其他种种问题,都有相当深入的数学在里面。

现在,已经有一定的数学家在发展这方面的数学。我想以后会有更多的新数学家进入这个领域。数学家这五六十年发展了不少抽象的数学,无论在代数方面、代数几何方面、几何方面,有许多不同的理论跟实际在表面上还是脱节。可是,到21世纪,我相信会有大量的这方面的数学进入工程里面,帮助工程学家去解决这方面的问题。工程学家和物理学家刚开始有一种情况,即他们来问数学家关于数学上的问题时,往往只将一个问题写下来,而不讲清这个问题是怎样产生的,问题是怎么来的。这个数学家其实很难答复这个问题。因为一个方程或一个组合的问题。不讲清它的来源的话,数学家很难把这个问题解释清楚。因为每个问题的来源是解决问题的最重大线索,就好像我们看一部侦探片子、小说一样,假如你不去找解决问题的种种不同线索,就不可能解决它。所以,我们搞数学的第一件事是在遇到一个困难问题时,首先要了解问题的起源在哪里,为什么工程学家或物理学家对这个问题有兴趣。假如我们不了解问题的起源,这就很难解决了。

因此,工程学家和数学家交往时,最好能够运用数学的方法把问题的来源解释清楚。也有另外一种情况,数学家研究问题时,不问问题的来源如何,就不停地把这个问题推广到其他地方去,而不知道原来的问题是如何来的。结果就会离题万里,这对工程和数学都没有好处。一个深入的数学理论,我想一定要与问题的来源结合,针对问题的来源能够解决才能是成功的数学。我们知道数学家有很多不同的类型,能力也各有不同。所以,数学家得不出结果,并不表示数学就不行。这里我讲一个很微妙、神秘的事情,有的数学家可把问题变成一个很抽象的想法,抽象到离题万里,可以把它推广到很远很远的地方。可是,最后他有本领把抽象的问题收缩起来,将困难的问题解决。这一点对我而言,有相当的神秘感。

在代数几何方面,大约在30年代时,一个很伟大的数论学家建议用几何的方法解决数论的问题。这个方法由30年代用到现在,变成了很重要的做法。当时,我们的几何基本上是可看到或感觉得到的,可是,他们却把代数几何推到一个很抽象的领域。大概二十多年的功夫,我们搞几何的基本上不懂为什么他们能将代数几何抽象到这种地步。可是到最后,他们用抽象的方法却把最重要的、很深的数论上和几何上的问题全部解决了。这在数学历史上是一个很出名的成就。

我想,当代有名的数学家,他们在做整个抽象的过程里面,从来没有忘记过要解决很基本的问题。虽然当时的抽象我们看不到,可是带领这方面做研究的人从来没有忘记过要解决什么问题。虽然这中间要遭到很多批评,就是指他们的抽象数学跟实际上是完全没有关系的。可是,最后他们把这个问题解决了,所需要的时间往往是十到二十年。所以,我们要有毅力等待成果成长出来,我想搞工科和物理方面的朋友们、同事们是很难想象,同时也不大

会愿意等待的。

在 21 世纪,也会有相当多的不同科学会出现相同情况。我们有一些数学仍会很抽象地进行,可是带领这方面研究的人,大概还是把要解决的问题放在脑子里面,最后可能要过十年、二十年才将它解决。在数学方面有不同方向、想法和看法的人,我想都可兼收并蓄,一同发展。数学的好处是并不受到应用的管制,不必要非解决某个问题不可。可是,最后我们总会解决一个重要的问题,主要我们想做的并非与实际相差太远,就算很远,我们脑子里面也想定要解决某一个(具体)问题。

如上所述,数学的三个方面基本上是离不开的,以后怎样发展,大家都没有办法知道。因为数学的发展、基本科学的发展,最成功的时候就是我们想象的时候。例如:在量子力学发展以前,谁都想不到量子力学会带来这么大的划时代的贡献。19 世纪我们想都不会想到量子力学会使我们现代社会完全变了形,变成了不同的社会。它无论对理论物理或数学上都是一个巨大的成就。

我们可作一个猜测,即 21 世纪某一科学的发展,假如一定要怎样发展,同时按照我们讲的去发展,这个科学的发展也不见得会太重要。因此,我们只能作个猜想。我们只能基本上跟着时代来变化,跟着时代得出来的重要性再去重申、估计当时的猜想应有什么修正。亘古以来的发展都是如此。所以我们应有相当大的灵活性,不要坚持非做这个不可。但是,我不是鼓励你们不停地跳跃,因为好的科研往往需要花十年、二十年功夫才能做成。很不幸的,在这方面要靠有经验的大科学家才能作出明确的选择,即什么时候要跳跃,什么时候要继续作某一领域。这一点,我想要靠大家一同来学习才能做到。所以我们的心胸要放得很大,不仅是自己努力学,还要到国内其他地方或到全世界去看看学问做到什么地步,才能够开阔我们的眼界,才能向前推展。我鼓励现代的年青人多看点书,多看最近的发展,不要把自己封闭起来。我今天就讲到这里,谢谢大家。

THE FUTURE OF MATHEMATICS AND ITS PAST HISTORY

Qiu Chengtong

Abstract In this article, the author dwells on the future development of mathematics at least in the following three aspects :

1. Mathematicians will make a further study of the classical concept of value — the inner beauty or the abstract beauty of mathematics.
2. Mathematics, theoretical physics and natural science will be integrated.
3. Mathematics will be combined with engineering.

In addition to his valuable enlightenment on the necessity and method of conducting researches in mathematics, the author gives great encouragement to the young people in present-day colleges of science and engineering to cultivate their interest in this field.

Keywords Mathematics; Abstract beauty; Theoretical physics; Natural science; Engineering