数 学 符 号 史 话

孙兴运　编著

山 东 教 育 出 版 社
1998 年　济南

图书在版编目(CIP)数据

数学符号史话/孙兴运编著.

济南：山东教育出版社，1998.9

ISBN 7-5328-2780-1

Ⅰ.数… Ⅱ.孙… Ⅲ.数学-符号-历史 Ⅳ.01-091

中国版本图书馆 CIP 数据核字（98）第 14810 号

数学符号史话

孙兴运 编著

出版发行： 山东教育出版社

地　　址： 济南市经八纬一路 321 号

出版日期： 1998 年 9 月第 1 版

1998 年 9 月第 1 次印刷

印　　数： 1—5000

用纸规格： 787 毫米 × 1092 毫米 32 开

4.625 印张　　97 千字

制版印刷： 山东新华印刷厂潍坊厂

书　　号： ISBN 7—5328—2780—1/G·2536

定　　价： 4.40 元

内容提要

数学符号是数学概念的代表。本书选取了中小学数学中常见的数学符号，对这些符号产生和发展的历史及其应用，作了简要的介绍。内容丰富，层次清楚，叙述通俗。本书可作为广大青少年的课外读物，用以开阔眼界，提高分析问题和解决问题的能力，增强对数学的爱好和兴趣。

写在前面

我们在学习和应用数学的时候，都会感到有一套得心应手的数学符号是多么重要。各种各样的数学符号错综复杂地交织在一起，构成了数学世界中一幅宏大而绚丽的图画。但是，你可知道这些形形色色的符号产生和发展的历史吗？

数学符号体系出现在16世纪，通行于18世纪。在此以前的各国数学家们，也都多少意识到数学需要一种新的表述方法，有的引用特殊的字眼、缩写，有的用数字符号来改革数学的书写方式，但那时没有引起人们的足够重视。直到15、16世纪，科学和数学自身的发展有了采用符号需要的时候，数学符号体系也就应运而生了。

纵观世界数学史，可以看出，数学符号的使用极大地推动了数学的发展。有人把17世纪叫做数学的天才时期，把18世纪叫做发展时期。这两个世纪数学之所以取得了较大的成就，原因之一就是大量创造和使用了数学符号。

严整的符号体系，独特的公式语言是数学区别于其他学科的一个重要特征。它不仅简化和丰富了数学理论的表达方式，尤其重要的是，只有在准确而严整的符号体系下，才能使运算成为可能。德国数学家克莱因曾说："如果没有专门的符号和公式，简直就不可能有现代数学。"

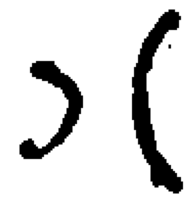
数学符号的种类繁多，它包括数字符号、运算符号、关系符号、性质符号、象形符号等。到目前为止，数学中常见

的符号有两百多种，其中，中小学常用的符号有一百多种。这些符号有机地结合在一起，构成了内涵深刻、丰富、简明的数学语言，成为“数学王国”里统一规定的文字。

本书选取了中小学数学中常见的八十多个数学符号，对这些符号产生和发展的过程，作了简要的介绍。这对于帮助读者了解数学符号的演变过程，激发学习数学的兴趣，将是大有裨益的。

目　录

1，2，…，9，0　阿拉伯数字号

从遥远的古代起，人们为了表示物品的多少或相互之间的关系，就有了“数”的概念，并创造了表达数的符号。我国在三千多年前的商代遗留下来的甲骨文中，就有刻在甲骨和陶器上的数字，比如用“”代表 5，“”代表 8 等。

大约在一千五百年前，印度人已采用了一套特殊的符号表示数，而且非常简单，这些印度数字总共十个：

后来，由于东西方往来做生意的多了，印度数字由商人传入了西班牙。

到了公元 8 世纪时，阿拉伯帝国进入强盛时期，掌握了东西邻国的先进文化。阿拉伯人于巴格达建立伊斯兰教庭，首都巴格达越来越繁荣，科学文化得到了蓬勃的发展，被称为“世界文明的首都”。当时西班牙和阿拉伯发生了战争，伊斯兰教徒西征，侵占了埃及和西班牙等地。占领了西班牙的阿拉伯人，看到印度数字很简单，就把它们学了回去。后来有一个阿拉伯学者，名叫哈瓦尔扎米，他领会了印度数字的技巧，写了一本算术书，进一步介绍了印度数字的使用方法。由于当时东西方往来频繁，哈瓦尔扎米的数学著作被译成了拉丁文，慢慢地传到了欧洲各地。在公元 10 世纪时，

欧洲出现的阿拉伯数字是这样的：

这时已使用“0”的符号了。

从另一方面说，中世纪西欧经济开始繁荣，西方商人到东方经商的越来越多。意大利有个商人数学家斐波那契，幼年跟他的父亲在非洲北部蒲其亚地方，曾受过当地伊斯兰学校的教育。青年时又旅行到地中海各地，熟悉各种商业算术。他认为应用印度数字最为方便，于 1202 年写成了一本《算法书》，详细论述了应用“十进位记数法”的优越性。斐波那契的书不同于前一世纪的各个翻译本，他针对当时商业社会的迫切需要，介绍了合适的算法，引起了算术课程的革新运动。此后，印度数字便普及于意大利等城市。由于在使用中不断改进，到了 14 世纪时，欧洲通用的数字已演变得和现在差不多了：

现在通用的数字是：

1　2　3　4　5　6　7　8　9　0

这十个数字，叫做阿拉伯数字。因为它实际上是印度人创造的，数学史工作者叫做印度—阿拉伯数字。

用阿拉伯数字记数时，比 9 大 1 的数用“10”表示，以后是 11，12，…，19，比 19 大 1 的数用“20”表示，再以后是 21，22，…，29，比 29 大 1 的数用“30”表示……这

种记数法叫做十进位制记数法。一组包括零号在内的十个符号可以用来记录一切自然数，这是数学史上无与伦比的光辉成就。恩格斯非常推崇这种记数法，把它称为“现代的数字”。法国数学家拉普拉斯关于这件事也写道：“用很少的几个符号来表示一切的数目，使符号除了具有形状意义外，还具有数位的意义。这一思想如此自然，如此使人容易理解，简直无法估计它的奇妙程度。”

由于阿拉伯数字比中国数字，罗马数字等符号都简单易学，因此它很快地被传播开来，到今天已通行于全世界了。

0 零号

在阿拉伯数字中，没有哪一个数字比“0”更奇特了。然而，如此简单的零的诞生，却经历了十分漫长的过程。

0 的发现和十进位记数法有着密切关系。比如“五十加三”可记作“53”，但“五个一百加三”就不能记作“53”了，这时要在 5 和 3 之间留一个空位，记作“5　3”。当然这个空位可以不写什么，但容易发生混淆。人们自然想用一个符号填在这个空位上。

大约在 6 世纪的时候，印度人在《太阳手册》这本书里，就用符号“·”表示过空位。后来印度数字在漫长的旅行中，由“·”逐渐演变成为椭圆形的“0”。

我国古代数学家很早就认识到零的重要性，国际友人称誉中国是“0”的故乡，这种说法是有一定道理的。

为什么这样说呢？

我国古代把竹筹摆成不同的形状，表示一到九的数字：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
纵式:	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式:	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱

记数的方法是个位用纵式，十位用横式，百位用纵式，千位用横式，依此类推。用上面九个数字纵横相间排列，能够表示出任意一个数。算筹是了解中国古代数学的一把钥匙。

例如“123”这个数可摆成：𝍠𝍪𝍢 。但是，“206”这个数，就不能摆成：𝍡𝍥 ，这样就是“26”了。这时必须在中间空一位，摆成：𝍡 𝍥 。这里的空位，就是产生0的萌芽。

公元前4世纪时，人们用在筹算盘上留下空位的办法来表示零。不过这仅仅是一个空位而已，并没有什么实在的符号，容易使人产生误解。后来人们就用“空”字代替空位，如把206摆成：𝍡空𝍥 。然而用空字代表零，在数字运算中，和纵横相间的算筹交织在一起，很不协调，于是又用“□”表示零。例如南宋蔡沈著的《律吕新书》中，曾把104976记作“十□四千九百七十六”。用“□”表示零，标志着用符号表示零的新阶段。

为了书写方便，又把“□”顺笔改作“○”。例如金代

的《大明历》中，把 405 写成“四百〇五”。

用圆圈“〇”来表示零，它既好写，又很美观，反映古代人民的审美观念。当然，我国用圆圈代替零与阿拉伯数字中的 0 有不同之处。圆圈〇在意义上仅表示一个空位，并没有把它当作数字来使用，这是两者的区别。

0 一经产生，就成为阿拉伯数字的十大成员之一，随着人类实践活动的发展，0 比其它一切数都有更丰富的内容。比如说，0.95 里没有 0，就显示不出整数和小数的界限；5 后面添上一个零就成为 50，恰为原数的 10 倍；由汽车号码为00058，马上可以知道某市汽车的最高号码是五位数。

如果我们需要考虑精确度的话，小数末尾的零就不能随便去掉。例如工人师傅加工零件，要求一个零件的长度为 16 毫米，另一个零件的长度为 16.0 毫米。前者表示精确到 1 毫米，即加工后的实际长度在 $15.5<l<16.5$（毫米）之间，都可以认为是合格的；后者表示精确到 0.1 毫米，即加工的实际长度在 $15.95<l<16.05$（毫米）之间才认为是合格的。显然后者的加工精度要比前者高。你看，只是末尾一个 0 之差，就有两种不同的要求。

数学中的“0”和“无”并不完全是一回事。在小学里用 0 表示“没有”是对现实的反映。随着人类社会实践活动的不断发展，对 0 的认识也在不断地加深。在学习了正负数以后，0 有了更为丰富的内容，它不仅可以表示“没有”，而且可以表示一种确定的量。例如北京高出水准面 52.3 米，吐鲁番最低处低于水准面 154 米，而水准面的高度规定为 0 米，它表示了水准面高程这个确定的量。

0 在数学里具有非常独特的性质：

(1) 在加数中，任何一个数与 0 相加，仍等于这个数，即 $a+0=a$。

(2) 在减法中，一个数减去 0，仍等于这个数，即 $a-0=0$。

(3) 在乘法中，因数只要有一个为 0，则其积为 0，即 $a\times0=0$。

(4) 在除法中，0 除以不等于零的数，其商为 0，即 $\frac{0}{a}=0\quad(a\neq0)$，并且规定 0 不能做除数。

今天，我们无论在什么样的计算中，几乎都要遇到零，0 在整个数学中，扮演了十分重要的角色。

$a, b, c, \cdots, x, y, z, \cdots$　表示数的字母号

在人类历史上，先是有具体的数量，如两只羊，三头牛等，再经过漫长的发展阶段，才离开了具体的量，抽象出一般的数，如 1，2，$\frac{1}{2}$ 等。这一次抽象意义重大，产生了算术的理论。

然而，算术研究的对象是具体的数，因而不便于表示数量关系的一般规律，不便于对带有一般性的数学问题进行研究。生产的发展，人的认识能力的发展，必然要引起数学史上的再一次抽象——用字母表示数。

16 世纪末，法国的数学家韦达，在前人积累下来的经验基础上，有意识地、系统地使用字母表示数。他用母音字母 a，e，i，…代表未知量，子音字母 b，d，g，…代表

已知量。韦达相信使用字母代替数的方法，会使运算过程变得简明得多。1591 年，在他的著作《美妙的代数》一书中，把算术和代数加以区别，从而使后者不仅用数，也用字母计算，推进了代数问题一般性的讨论。

17 世纪，法国数学家笛卡儿采用字母 a，b，c，…代表已知量，用字母 x，y，z，…代表未知量。用 a^2，b^2，…的形式表示幂，初步建立了代数的符号系统，发展成为今天的习惯写法。

不过韦达和笛卡儿都是在正数的情况下用字母表示数。虽然他们毫不迟疑地进行文字系数项的加减，但还没有意识到用字母表示负数。

1657 年，数学家约翰·哈德提出用字母既可以表示正数，又可以表示负数。从此以后，用字母表示数的方法，贯穿于全部数学之中。数学在表达方式、解题思想和研究方法方面都发生了深刻的变化，数学大大地前进了一步。

首先，含有字母符号的方程出现了，列方程解题比算术方法优越得多。方程用几乎机械化的动作代替了一部分推理。

其次，公式出现了，数学中很多定理、定律、法则、运算律，都能用公式简洁地表达出来。比如用 $a^2+b^2=c^2$ 表示勾股定理，比用 $3^2+4^2=5^2$ 表达这个定理，更具有普遍意义。

可以说，用字母表示数的方法，使得整个数学的面貌为之一新。比如说所有的数，除了表示不同的量以外，就数与数之间的关系来说，在一定范围内都有某种共同的性质。例如两个数相加，交换两个数的位置，它们的和不变。如果用

字母 a、b 分别表示两个数，这个性质可以简明地表示为：

$$a+b=b+a。$$

这就是加法的交换律。同样，用字母也可以表示其他的定律：

加法结合律：$(a+b)+c=a+(b+c)$；

乘法交换律：$a \cdot b=b \cdot a$；

乘法结合律：$(ab) \cdot c=a \cdot (bc)$；

加乘分配律：$(a+b)c=ac+bc$。

采用字母表示数的方法，还有助于认识事物间的内在联系和规律。

比如，任取一个三位数 $M=825$，颠倒其数字的位置，得到另一个三位数 $N=528$，求出这两个三位数的差：

$$M-N=825-528=297。$$

在这个结果中，我们没有看到什么令人注意的东西。但是，如果用字母表示数位上的数字以后，就会发现意想不到的情况：

用 a、b、c 分别表示任意一个三位数的百位、十位、个位上的数字，于是

$$M=100a+10b+c,$$

$$N=100c+10b+a。$$

求其差：

$$\begin{aligned} M-N &=(100a+10b+c)-(100c+10b+a) \\ &=99a-99c=99(a-c)。\end{aligned}$$

这表明任何一个三位数，将其数字的位置颠倒后，所得的三位数之差一定为 99 的倍数。这个规律在没有采用字母表示数以前，是不容易被人们注意到的。采用字母表示数的

方法，摆脱了使用具体数字研究问题的局限性，提供了揭示数量关系一般性的可能，有助于人们探索事物的内在联系，这是数学发展史上的一项重大革新。

| | 绝对值号

两辆汽车，第一辆向东行驶了 5 千米，第二辆向西行驶了 8 千米，把向东方向规定为正方向，那么它们行驶的方向和路程，分别记作 +5 千米，-8 千米。

世界上的事情是复杂的，有时人们只需要知道汽车行驶的路程，而不去考虑它的方向。这时，仅知道 5 千米，8 千米这样的数就行了。另外，像力，速度等量，都有大小和方向问题，当仅考虑其大小时，就产生了绝对值的概念。

一个正数的绝对值是它本身，一个负数的绝对值是它相反的数，零的绝对值是零。

要表示一个数的绝对值，在这个数的两旁各画一条竖线，用符号“| |”表示，比如“-8 的绝对值”记为 $|-8|$。

由于用字母表示数，绝对值的概念进一步深化了。例如要把 $|a|$ 中的绝对值符号去掉，需要对字母 a 的取值情况进行讨论。

a 是正数时，$|-a|=a$ 是对的，因为 a 是正数，$-a$ 是负数，而 $-a$ 的相反数是 a。

当 a 是负数时，$|-a|=a$ 对吗？

不对！

因为 a 是负数，$-a$ 是正数，而正数的绝对值是它本身。所以 a 是负数时，$|-a|=a$ 不对，要写成 $|-a|=-a$ 才

行。

同样，$|a| = a$ 也是不正确的。这同样是犯了把字母 a 看成是正数的毛病。正确的答案是：

$$|a| = \begin{cases} a & \text{当 } a \geqslant 0 \text{ 时；} \\ -a & \text{当 } a < 0 \text{ 时。} \end{cases}$$

当数的概念由实数扩充到复数后，复数的绝对值还有意义吗?

大家都知道复数是没有大小的，表示复数的点不一定落在实轴上，不可能从数轴的角度去解释绝对值概念。

怎么办呢?

如图 1，设复数 $a+bi$ ($b \neq 0$) 对应的点是 M，它对应的向量是 $\overrightarrow{OM}$，我们把向量 $\overrightarrow{OM}$ 的模 r（有向线段 OM 的长度），叫做复数 $a+bi$ 的绝对值，用符号 $|a+bi|$ 表示。

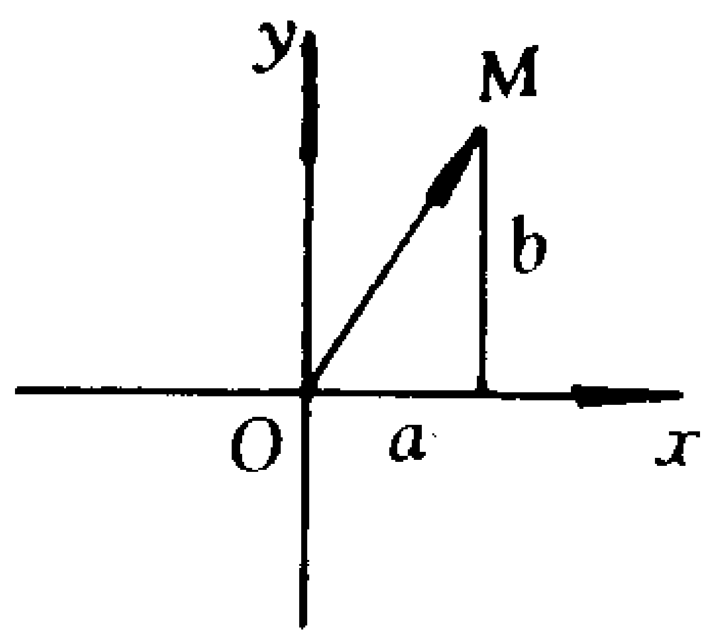


图 1

虽然复数没有正负可言，但它的绝对值也是客观存在的。

实际上，当 $b=0$ 时，$|a+bi| = |a|$。

从这里可以看出复数的绝对值和实数的绝对值的一致性。这一点还可从绝对值的几何意义中看出来：

复数的绝对值和实数绝对值的几何意义，其相同的地方是都表示对应的点到原点的距离，但复数对应的点在复平面上，实数对应的点在数轴上。模相等的复数对应的点在同一个圆上，绝对值相等的两个实数对应的点在数轴上原点的两旁，并且与原点距离相等。

大家知道，复数不能比较大小，但它的模（绝对值）能够比较大小。例如，已知复数：

$z_1=3+4\mathrm{i}$， $z_2=-\frac{1}{2}-\sqrt{2}\mathrm{i}$。

因为$|z_1|=5$， $|z_2|=\frac{3}{2}$，

所以$|z_1|>|z_2|$。

复数的绝对值在复数的运算方面有着重要的作用，它是实数绝对值的自然推广。

—— 分数线号

人类在形成自然数概念的同时，也获得了加、减、乘、除运算的概念。任意两个自然数相加或相乘，其结果还是一个自然数。但是，两个自然数相除，其结果就不一定是自然数了。比如说三个人平均分吃五个西瓜，问每人可分得多少？

像这样一类问题，就不能用自然数的除法来解决。也就是说，其商不再是一个自然数了。

用什么数表示这类量呢？

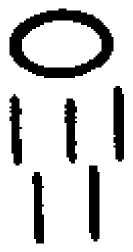
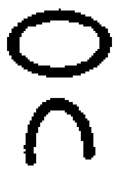
这种新数就是分数。两个数相除能写成分数的形式，即

被除数÷除数$=\frac{\text{被除数}}{\text{除数}}$。

上面分数中间的线段“——”叫做分数线。分数线号的出现和分数的引入有着密切的关系。

从历史上来看，分数的出现是很早的，用来记写分数的符号也是五花八门的。

古埃及人曾用象形符号表示分数。记号“○”是一个卵形。埃及人把○写在整数的上端，表明这是一个分数。例如：

 $=\frac{1}{5}$，  $=\frac{1}{10}$，  $=\frac{1}{15}$。

公元前 1850 年左右，埃及僧侣阿姆斯所写的《算术》一书中，把分数用若干个自然数的倒数，叫做单分数的形式来表示，书写时并不写成单位分数，而是在自然数上加上一个点“·”，以此来表示分数。例如：

$\frac{2}{5}$记为：$\dot{3}\dot{1}5$，意思是$\frac{2}{5}=\frac{1}{3}+\frac{1}{15}$；

$\frac{2}{13}$记为：$\dot{8}\ \dot{5}2\ \dot{1}04$，意思是

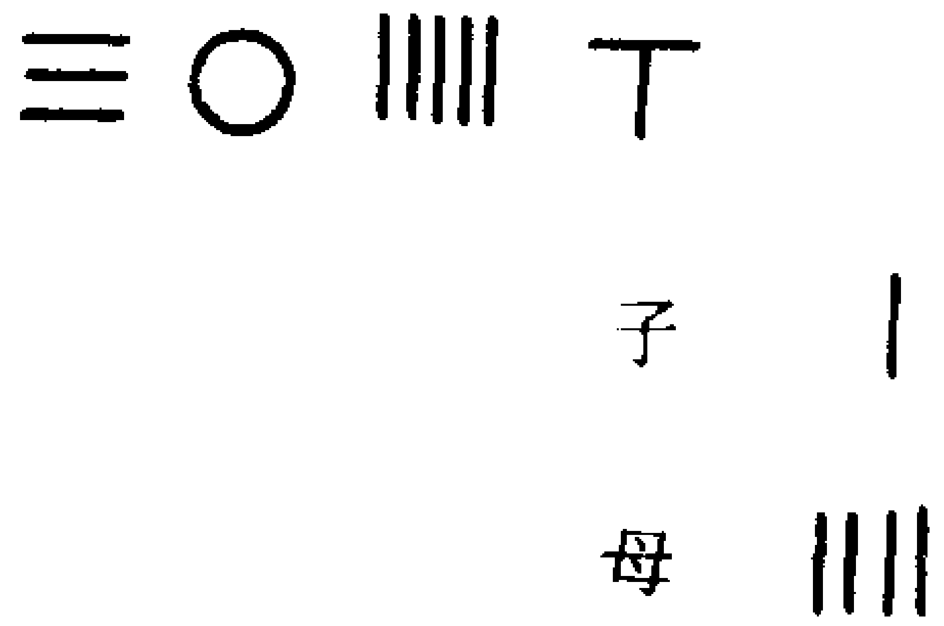
$$\frac{2}{13}=\frac{1}{8}+\frac{1}{52}+\frac{1}{104}。$$

古巴比伦人用楔形文字表示分数，比如“  ”表示 $\frac{20}{60}$，“  ”表示$\frac{21}{60}$等。

中国古代对分数的研究，在数学史上有极其光辉的一页。早在公元前 3 世纪，有一部古书《考工记》里，谈到制造车轮问题时，有“十分寸之一为一枚”的词句。这句话的意思是：$\frac{1}{10}$寸等于 1 分。像这种“十分寸之一”之类的说

法，成为中国古代记写分数的一个方法。

我国古代用算筹记写分数也很有特色，分子、分母不摆在一起。宋代秦九韶写的《数书九章》里，有这样一个例子：把乳香 3056 $\frac{1}{4}$斤，记作：



显然，用算筹来表示分数是纷繁复杂的。

17 世纪，阿拉伯人想出了一个简便的方法表示分数，他们在被除数和除数之间画一条短线“——”表示除法。比如，$\frac{3}{4}$表示“3 除以 4”的意思。现在通用的分数线“——”就是从阿拉伯人开始沿用下来的，用这个符号可以表示任意一个分数，如$\frac{2}{3}$，$3\frac{4}{5}$等。

总之，分数线号的引入，担当了表示连续分割量的重要角色。在用字母表示数后，仍用“——”表示分式。一般地，设 A，B 是两个整式，若 $B\neq0$，$A\div B$ 可以表示成：$\frac{A}{B}$的形式。如果 B 中含有字母，$\frac{A}{B}$就是分式。

引入字母表示数后，分数线“——”应用的范围更加广阔了。

%，‰ 百分号，千分号

古代社会，由于生产力水平低下，尚不需要很精密的数值，一般有一位小数就够用了。

16世纪的欧洲，工商贸易的迅速发展推动了科学技术的进步，人们对计算的精确度要求越来越高了。

在计算实践中发现，自然数有一个基本的单位是1，而分数和小数都没有统一的单位。比如说$\frac{5}{7}$的单位是$\frac{1}{7}$，0.05的单位是0.01。因为它们的单位很不统一，所以在实际应用中仍有许多不足之处。于是，在分数的基础上，数学家把目光投向分母是100的分数身上，称它为百分数。“百分数”用符号“%”表示。例如$\frac{75}{100}$记作“75%”。一般地，把分数$\frac{p}{100}$记作为$p\%$，读作“百分之p”。

对于已知数a，当表示成百分数时，通常将这个数乘以100作为分子，而以100作为分母，再改写为百分数的形式。例如，

$$0.27=\frac{0.27\times100}{100}=27\%。$$

如果一个数比另一个数小，表示这个数与另一个数的关系时，常常采用百分数。比如说，地球表面积是五亿一千余万平方公里，其中海洋面积是三亿六千一百余万平方公里，陆地面积是一亿四千九百余万平方公里。当人们比较海洋、陆地与地球表面积的关系时，用百分号表示时就显得一目了然，其中：

海洋面积占地球表面积的71%；

陆地面积占地球表面积的29%。

因为百分数的分母划一，便于比较和联系，所以把事物之间的数量关系，反映得简单明了。因此它在税收、折扣、保险、利息、汇兑和科学技术领域里，获得了广泛的应用。比如说：

$$增长率=\frac{增长数}{原来的基数}\times 100\%,$$

$$合格率=\frac{合格产品数}{产品总数}\times 100\%,$$

$$出粉率=\frac{面粉斤数}{小麦斤数}\times 100\%,$$

$$出勤率=\frac{出勤人数}{应出勤数}\times 100\%,$$

$$浓\quad 度=\frac{溶质重量}{溶液重量}\times 100\%。$$

综上所述，百分数算法可以归结为：

$$\frac{部分(比较数)}{整体(标准数)}\times 100\% = 百分数。$$

也许有人要问：用十分法和千分法不是一样吗？

的确，历史上有人曾用过十分法，比如说我国很早就有“七折”“八成”“十分之一谓之枚”的说法，这些语句都有十分法的思想。但是，十分法的缺点是太粗，仅仅分为十份，不能表达更为精确的小份。

后来人们又想了个办法，把分母恒为1000的分数引进来了，叫做千分数。“千分数”用符号“‰”表示，例如$\frac{8}{1000}$记作为“8‰”。

千分法比百分数更为精密，常用于专门的统计中，比如

保险费率，溶液浓度等。我国公布的“八五”计划期间，人口自然增长率由 1990 年的 14‰，下降到 1995 年的 10.5‰，就是用千分法给出的。

小数点号

从历史上看，世界各民族都是先认识了整数和分数，后来为了满足日益精确化的要求，又认识了小数。

1558 年，比利时的数学家斯蒂文，对十进分数颇感兴趣。十进分数是分母是 1 后面带有 1 个或若干个零的分数，比如$\frac{3}{10}$，$\frac{27}{1000}$等。

斯蒂文想：能不能不写出分母而表示一个十进分数呢？

这个想法萦绕在他的心头，许多想法涌现在斯蒂文的脑海里：

任何一个十进分数都可以用分母是 10，100，1000，…而分子是一位整数的分数之和表示，例如：

$$\frac{27}{100}=\frac{20+7}{100}=\frac{2}{10}+\frac{7}{100},$$

$$\frac{27401}{1000}=\frac{27000+400+1}{1000}=27+\frac{4}{10}+\frac{1}{1000}。$$

其中$\frac{1}{10}$，$\frac{1}{100}$，$\frac{1}{1000}$，…分别是十进分数的十分单位、百分单位、千分单位……。

在整数记法中，两个相同的整数并列在一起，左边一个表示的是右边的十倍。按照这种规定，能否设计一种记法，从整数个位起，把右边第一位表示为十分位，第二位表示为百分位呢？

斯蒂文终于想出了办法：

把个位和十分位之间，用符号“⓪”隔开，在十分位和百分位间用“①”隔开，依次类推。

例如$\frac{27}{100}=0_{⓪}2_{①}7$，

$\frac{27401}{1000}=27_{⓪}4_{①}0_{②}1$。

当然，这种记写小数的方法十分麻烦。

17 世纪初，英国的数学家威廉·奥垂德用符号“⌊”表示记号“⓪”。例如把$\frac{27}{100}$表示为“0⌊27”。

到 17 世纪末，英国数学家约翰瓦里斯，用一个圆点“.”代替“⌊”，出现了小数点号。这时，$\frac{27}{100}=0_{⓪}2_{①}7=$ 0⌊27 = 0.27。

因为用小数点“.”表示小数既简明又方便，所以到了 18 世纪，这种记写小数的符号，成为一种通用的方法了。

中国是世界文明古国之一。魏晋时期的刘徽在《九章算术注》里，为了表示不尽根，指出在“忽”以下的第一位，作为以 10 为分母的分数，第二位数作为以“百”为分母的分数……这是最早的十进位分数。可见，刘徽那时就有了小数思想的萌芽了。

十进小数在日常生活和科技领域里发挥了巨大的作用，它和阿拉伯数字、对数一起，被誉为数学计算的三大发明。

：　比号

在生产和生活中，经常需要比较两个数或两个同类量的

大小。

我们说 12 比 4 大。有时仅仅知道两个数哪一个大还不够，还要对它们之间的大小关系研究得更深入一些。这里有两条研究的思路：

计算它们的差，得 $12-4=8$，即 12 比 4 大 8；

计算它们的商，得 $12\div4=3$，即 12 是 4 的 3 倍。

同样，比较两个同类量 20 米和 5 米的大小，也包含了两层意思：

求它们的差，$20-5=15$，即 20 米比 5 米大 15 米，其差仍是同类量。

求它们的商，$20\div5=4$，即 20 米是 5 米的 4 倍，这个商只表示倍数，是个不名数。

两个数或两个同类量的倍数关系通常用“比”表示，“:”是表示“比”的符号，读作“比”。例如 12 比 4，记作 $12:4$。

17 世纪，数学家莱布尼兹认为：两个量的比，包含有除的意思，但又不能用“÷”表示。于是，他把除号中间的小短线去掉，用“:”表示比号。

在应用“:”号时要注意，“5 比 4 大 1”这句话的“比”字和“5 比 4”里的“比”字，它们的意义是不同的，只有后者才能写成 $5:4$。

在代数里，我们用字母表示数，两个数 a 和 b 的比，可以写作 $a:b$，后项 b 不能等于零。

在几何里，在同一单位下，两条线段长度的比叫做两条线段的比，可记作 $AB:CD$，其中 AB、CD 是两条线段。

莱布尼兹认为：两个数 a 与 b 的比，可以一般地表示为

$a:b$。当表示三个或三个以上的同类量时，如果第一个量和第二个量的比为 $a:b$，而第二个量和第三个量的比为 $b:c$，则称这些量成连比，记作：

$$a:b:c,$$

读作"a 比 b 比 c"。

连比有以下的性质：

如果 $a:b=m:n$,

$b:c=n:r$,

则 $a:b:c=m:n:r$。

如果 $k\neq0$，那么有

$$a:b:c=ka:kb:kc,$$

$$a:b:c=\frac{a}{k}:\frac{b}{k}:\frac{c}{k}。$$

比号":"在数学里应用范围极广，是常用的数学符号之一。它和"——"、"÷"之间有着密切的联系。比和分数比较，它的前项相当于分子，后项相当于分母，比号":"相当于分数线"——"；比和除法比较，它的前项相当于被除数，后项相当于除数，":"相当于"÷"。

由此可以看出：":""——""÷"是三个既有联系又有区别的数学符号，只是在不同的场合下，有着不同的作用罢了。

· 或 ·· 循环节号

一个分数的分子除以分母可能整除，其商是一个整数；也可能不整除，但是可以除尽，其商是一个有限小数。

如果要问：除了以上所说的两种情形，会不会有第三种情况呢？

请看下面的两个问题：

$$\frac{1}{9}=0.1111\cdots \tag{1}$$

$$\frac{7}{12}=0.3181818\cdots \tag{2}$$

你看，上面所得的商都是无限小数。更有趣的是，在（1）式里，商自第一位起，数字“1”就无限重复出现；在（2）式里，商自第二位小数起，数字“18”也重复出现。

我们说，一个无限小数的各位数字，如果从某一位起，总是由 1 个或几个数字依照一定的顺序连续不断地重复出现，这种小数就叫做循环小数。重复出现的一个或几个数字叫做循环节。

循环小数有无限个循环节，要是都写出来是不可能的，怎样表示循环小数呢？

有办法了，可以在无限个循环节中，选上一个作代表，在这个循环节的首位数字上面画一个圆点“·”；在末尾数字上面也画一个圆点“·”，这个圆点叫做循环点。当然，如果循环节里只有 1 个数字，圆点只能画在它的顶上了。

例如：$0.1111\cdots$记作 $0.\dot{1}$，

$0.3181818\cdots$记作 $0.3\dot{1}\dot{8}$，

$5.32463246\cdots$记作 $5.\dot{3}24\dot{6}$。

最初有人用符号“ $\lfloor\quad\rfloor$ ”表示过循环节。例如：

$0.31818\cdots$记作 $0.3\lfloor 1\ 8 \rfloor$，

$5.32463246\cdots$记作 $5.\lfloor 3\ 2\ 4\ 6 \rfloor$。

因为符号“ └──┘ ”书写起来比较费事，后来逐渐被淘汰了。

有了循环节号，观察循环小数里循环数字是什么时，就一目了然了。

i　虚数单位号

1545 年，意大利有位学者叫卡丹诺，他在《大法》一书中提出了这样一个问题：

把 10 分成为两部分，使两个数的乘积等于 40，求这两个数。

设一部分数为 x，那么另一部分数为 $(10-x)$，依题意列出方程：$x(10-x)=40$。

解这个方程得到两个根是：$5+\sqrt{-15}$，$5-\sqrt{-15}$。

这就遇到了负数开平方的问题。当时普遍认为负数没有平方根。

这个结果使卡丹诺感到十分困惑。然而所求的两个根竟然满足了题意：

$$(5+\sqrt{-15})+(5-\sqrt{-15})=10,$$
$$(5+\sqrt{-15})(5-\sqrt{-15})=25-(-15)=40。$$

卡丹诺进一步思索：负数和正数一样，都有牢固的现实基础，开平方也是数学中一个独立的运算，既然负数和开平方都有现实为根据，那么负数就不能开平方吗？

由此他断定，一定有一种新型的数存在。这种数自乘后能等于 -1，卡丹诺把这个数叫做虚数单位。

1777 年，瑞士的数学家欧拉，在递交给彼得堡科学院

的论文《微分公式》中，首先采用符号“i”表示“$\sqrt{-1}$”，即 $i=\sqrt{-1}$，i 叫做虚数单位号。

为什么把 i 叫做虚数呢？

因为早期的代数学家认为，像$\sqrt{-1}$这样的数是不存在的，所以“虚”得很。17 世纪，数学家笛卡儿说负数开平方是“不可思议的”，数学家莱布尼兹也认为，虚数是“神灵美妙与惊奇的避难所，它几乎是又存在又不存在的两栖物”。虽然他曾经用虚数成功地解决了一些数学问题，却认为“这是神奇的干预”。

在我国，虚数这个名词是 1873 年清代数学家华衡芳先生，在翻译《代数术》一书中首次采用的，它的原意是“虚假的数”。

当然数学家的这种认识，受到当时历史条件的限制，关键是没有找到虚数在现实中的原型。实际上，虚数不是虚无缥缈的东西。我们研究一下方程 $x^2+1=0$。

首先，以 -1 代替 x^2，则方程变为：$-1+1=0$，这是完全成立的。

但要使 $x^2=-1$，必须使 x 等于 -1 的平方根。-1 的平方根是这样的数，当它自乘时可以得到 -1。但是在正数和负数集合中没有这样的数。因此，就完全有必要定义一种全新的数，称为虚数，它的单位 $i=\sqrt{-1}$。

有了符号 i 以后，就可以表示任何一个负数的平方根。比如，$\sqrt{-4}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{-1}=2i$，若 $n>0$，则$\sqrt{-n}=\sqrt{n}\cdot\sqrt{-1}=\sqrt{n}i$。

对于实数 1，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，4，… 可以对应写出虚数：i，$\sqrt{2}i$，$\sqrt{3}i$，4i，…。

对于 -1，$-\sqrt{2}$，$-\sqrt{3}$，-4，…可对应写出虚数：$-i$，$-\sqrt{2}i$，$-\sqrt{3}i$，$-4i$，…。

这样我们就有了三类数：正实数，负实数和纯虚数。

将数的系统作这样的扩展后，可以发现方程 $x^2+1=0$ 有两个根 $+i$ 和 $-i$。

首先，$+i$ 乘以 $+i$ 等于 -1；

其次，$-i$ 乘以 $-i$ 等于 -1。

在以上两种情况下，方程都变成了 $-1+1=0$。

同样，像 $x^4-1=0$ 这样一个方程的所有的根为：$+1$，-1，$+i$，$-i$。

由此可知，虚数 i 并不是“虚”数，而是正确运算的必然结果。

$a+bi(a,b\in R)$ 复数号

尽管有人把虚数的出现视为“鬼火”，贬之为“荧光”，但科学发现的智慧火花，一旦接触到客观需要的干柴，就会燃起熊熊大火，蔚为壮观。

虚数是从解方程的过程中产生的，而求解方程又是人类在生产和科学实验中经常遇到的问题，从这种意义上来说，虚数本来是不“虚”的，因此它首先在数学内部得到了应用。17、18 世纪的数学家，如莱布尼兹、欧拉、棣莫弗等人，他们研究了虚数和对数函数、三角函数……之间的关系，使比较复杂的数学问题，变得易于处理了。

1832 年，德国数学家高斯，对虚数单位 i 作了以下的规定：

（1）它的平方等于 -1，即 $i^2=-1$；

（2）实数与它进行四则运算时，原有的加、乘运算仍然成立。

在这种规定之下，i 可以与实数 b 相乘，再同实数 a 相加，由于满足乘法交换律及加法交换律，从而可以把结果写成：$a+bi$，其中 a，b 是实数，出现了形如 $a+bi$ 的数，叫做复数。

当 $b=0$ 时，$a+bi$ 是实数；$b\neq0$ 时，$a+bi$ 是虚数，高斯把实数和虚数统一起来了。

令 $z=a+bi$，其中实数 a 叫做复数 z 的实部，用符号"Re"表示，即 $a=\mathrm{Re}(z)$；实数 b 叫做复数 z 的虚部，用符号"Im"表示，即 $b=\mathrm{Im}(z)$。

1797 年，挪威有一位测量学家维塞尔，在前人工作的基础上，提出了把复数 $a+bi$ 用平面上的点（a，b）来表示的思想。维塞尔在向丹麦科学院递交的论文中这样写道：

只要想像一条有方向的水平直线与一条有方向的垂直的直线相交，把交点 O 叫做零点，现在就有四条从 O 点出发的射线，共同构成了一个直角，如图 1。

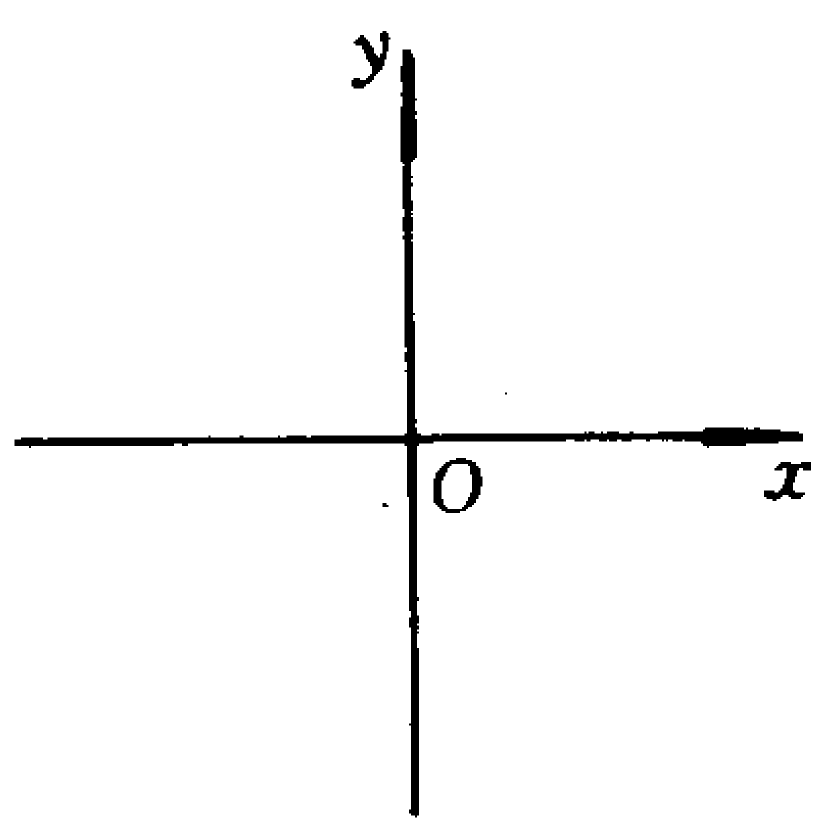


图 1

如果在向右的那条射线 Ox 上，每隔相等的间隔就标以记号 $+1$，$+2$，…这条射线上的点都对应唯一个正实数；反之，每一个正实数，在射线上也可以找到唯一个点和它对应。同样，向左的那条射线用负实数来作上记号，向上的那条射线 Oy 用正的纯虚数作

上记号，向下的那条射线用负的纯虚数作上记号。有了这两条数轴后，就可以表示任意一个复数了。

维塞尔构想的这样一个复平面，对人们接受复数概念起了很大的作用，通过复平面上的点，虚数至少不是虚无缥缈的了。但是，维塞尔的这种构想，并没有引起人们广泛的注意。

稍后，高斯给出了代数基本定理的证明，他的很多论证都假定了复数和复平面上的点一一对应起来，使人们进一步接受了复平面的思想，所以人们又把复平面叫做高斯平面。

复平面的引入，为复数的应用奠定了基础。19 世纪以来，复数在很多实际问题中得到应用。例如：

考虑一条江河表面上水的流动，如图 2 假定在河上取好一个复平面 xOy，把河面上任意一点 P 在某一时刻水流速度的两个分量记作 v_x，v_y，把速度向量写成：$v = v_x + \mathrm{i}v_y$。

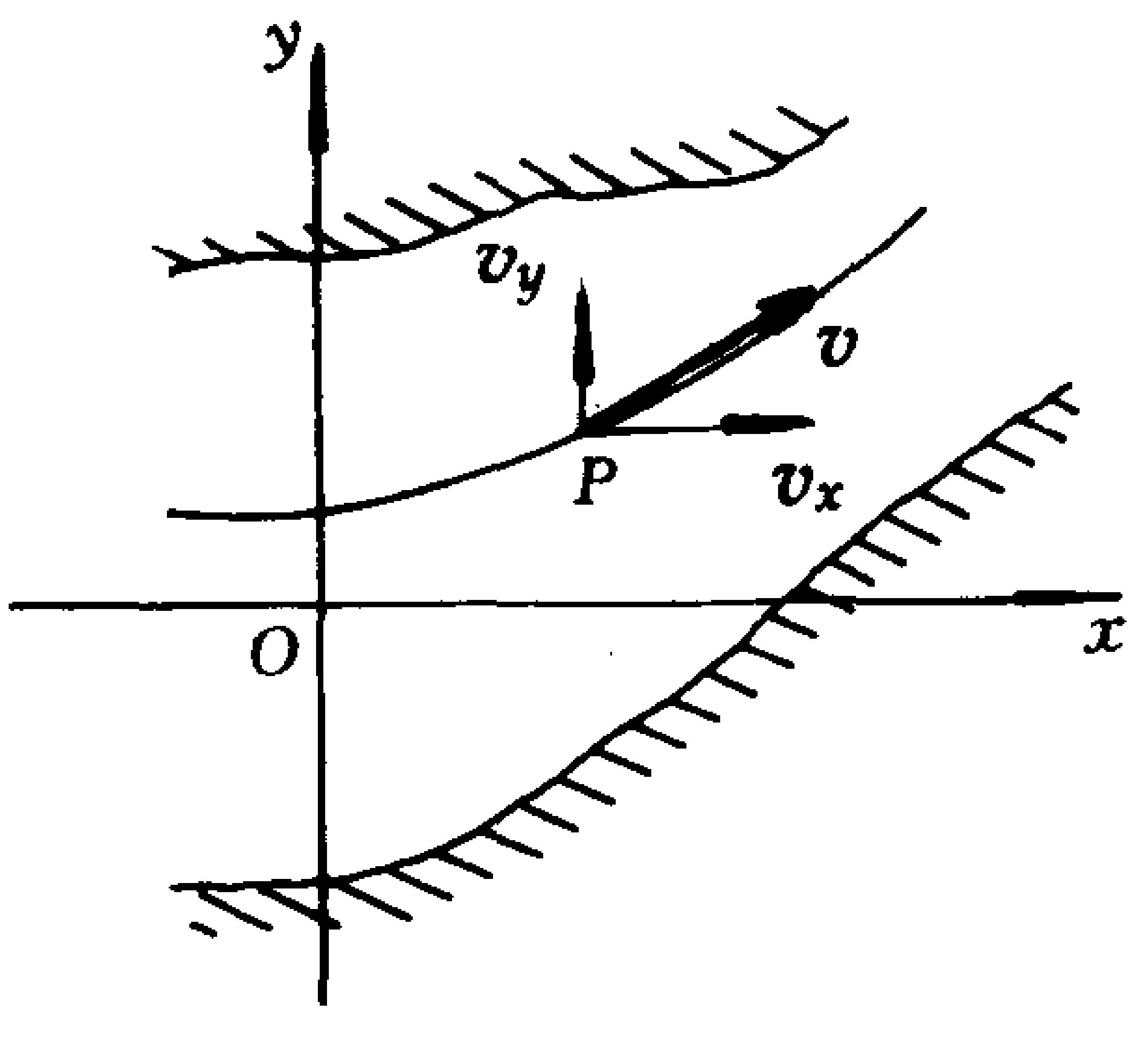


图 2

与此类似，可以把均匀带电无限长导线周围，垂直于导线的某个平面上的电场强度写成复数的形式：$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}x+\mathrm{i}\boldsymbol{E}y$。

其他的例子还有很多，不胜枚举。

总之，由两个有序实数所确定的量，一般都能表示成复数的形式。复数在流体力学，弹性力学，空气动力学，电学等方面都有实际应用，是科学技术中普遍使用的数学工具之一。

=，≠　等号，不等号

为了表示等量关系，用“=”表示“相等”，这是大家最熟悉的一个符号了。

说来话长，在15、16世纪的数学书中，还用单词代表两个量的相等关系。例如在当时一些公式里，常常写着aequ或aequaliter这种单词，其含义是“相等”的意思。

1557年，英国数学家列科尔德，在其论文《智慧的磨刀石》中说：“为了避免枯燥地重复isaequalleto（等于）这个单词，我认真地比较了许多的图形和记号，觉得世界上再也没有比两条平行而又等长的线段，意义更相同了。”

于是，列科尔德有创见性地用两条平行且相等的线段“=”表示“相等”，“=”叫做等号。

用“=”替换了单词表示相等是数学上的一个进步。由于受当时历史条件的限制，列科尔德发明的等号，并没有马上为大家所采用。

历史上也有人用其它符号表示过相等。例如数学家笛卡

儿在1637年出版的《几何学》一书中，曾用“∞”表示过“相等”。

直到17世纪，德国的数学家莱布尼兹，在各种场合下大力倡导使用“=”，由于他在数学界颇负盛名，等号渐渐被世人所公认。

顺便提一下，“≠”是表示“不相等”关系的符号，叫做不等号。“≠”和“=”的意义相反，在数学里也是经常用到的，例如 $a+1 \neq a+5$。

≈ 或 ≑ 近似号

我们在进行度量、统计、分配时，得到的结果可能是一个准确数，也可能是近似数。例如初二（5）班有60个学生，这是一个准确数。如果说 A 市人口是100万人，这很难说是一个准确数，因为迁出、转入、出生、死亡等，都引起人口数的变动。A 市100万人，只能说是一个近似数。

在数学里，为了表示“近似相等”这件事，人们常用符号“≈”或“≑”表示，读作“近似于”或“约等于”。比如 $\pi \approx 3.1416$。

实际上，在测算重量、距离、速度、温度、面积等活动中，所得到的数都是近似数。凡是近似数都能用“≈”记写，带来了很大的方便。

例如用“四舍五入”法得到的数写成：

$8.8 \approx 9$，$5.2 \approx 5$。

又如，工人师傅用一根100厘米的圆钢锯短，用来做6

厘米长的零件，可加工多少个？

计算所得的结果是 $100\div6=16.66\cdots$尽管这个商十分位上的数字大于 5，实际上只能做成 16 个零件，即 $100\div6\approx16$，这种取近似数的方法叫去尾法。

再如用汽车运送 3600 千克粮食，一车最多装 1500 千克，几次才能运完？

计算的结果是：$3600\div1500=2.4$。尽管这个商十分位上的数字小于 5，但实际上汽车要运 3 次，即 $3600\div1500\approx3$。这种取近似数的方法叫进一法。

“=”是表示相等关系的符号，当表示两个量近似等于时，就产生了“≈”或“≐”。这种近似号，可以看作是对“=”的延伸和发展。

≡，≢　恒等号，不恒等号

请看下面的三个等式：

$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2, \tag{1}$$

$$\frac{4x^2}{2x}=2x, \tag{2}$$

$$x-5=8。 \tag{3}$$

在等式（1）中，不论 a、b 取什么数值，代入等式的两边都能成立。

在（2）式中，除了 x 不能取零外，x 不论取其它任何数值，等式总是成立的。

一个等式，不论用任何允许取的数值代替其中的字母，它的左右两边总是相等的，这种等式叫做恒等式。

“恒等”用符号“≡”表示，读作“恒等于”。

例如，解析式$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)$和 $Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是恒等式，记作：

$$P(x_1,x_2,\cdots,x_n)\equiv Q(x_1,x_2,\cdots,x_n)。$$

在（3）式中，字母 x 不是取任何数值都能使等式成立，这种等式是条件等式，又叫做方程。

恒等号“≡”比等号“＝”多了一条横线段，这就进一步强调了两个代数式恒等的特性。可见，恒等式是等式的特殊情况。

恒等式和方程都是等式。不过恒等式用任何允许的数值代替式子中的字母，它都能成立；方程是一个条件等式，只有未知数取一定的值时才能成立。

我们在应用符号“≡”“＝”时，要特别小心。对于方程来说，主要任务是怎样求解；对恒等式来说，主要任务是证明它的成立。

有的人以为，要证明 $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$ 是一个恒等式，可以设 $a=1$，$b=1$，试试看；再设 $a=2$，$b=3$ 试试看……试验了许多组数，都能使等式左边等于右边，就认为它是恒等式了。

一般说来，用这种设数验算的办法来证明恒等式是不行的。你试过的是这样，并不保证没有试过的也是这样，而你又不可能把所有的数都一一进行检验。

怎么办呢？

要证明一个等式是恒等式，通常是根据已知条件，采用推理的办法，推导出等号两边相等，这种方法在数学里经常用到它。例如：

求证：$\frac{1}{(b-c)^2-a^2}+\frac{1}{(c-a)^2-b^2}+\frac{1}{(a-b)^2-c^2}$

$=\frac{a+b+c}{(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}$。

证明：左边 $=\frac{-1}{(a+b-c)(a-b+c)}+$

$\frac{1}{(a+b-c)(a-b-c)}+\frac{1}{(a-b+c)(a-b-c)}$

$=\frac{-(a-b-c)+(a-b+c)+(a+b-c)}{(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}$

$=\frac{-a+b+c+a-b+c+a+b-c}{(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}$

$=\frac{a+b+c}{(a+b-c)(a-b+c)(a-b-c)}$。

你看，左边＝右边了，这就证明了原来的等式确实是一个恒等式。

顺便提一下，“≠”是表示不恒等关系的符号，叫做“不恒等号”。“≠”和“≡”的意义相反，为了推理论证的方便起见，有时也用到这个符号，比如说：“a 不恒等于 b”，可以记作：$a \not\equiv b$。

>，< 大于号，小于号

现实世界中的同类量，如长度与长度，时间与时间之间，有相等关系，也有不等关系。我们知道，相等关系可以用“＝”表示，不等关系用什么符号来表示呢？

为了寻求一套表示“大于”或“小于”的符号，数学家们绞尽了脑汁。

1629 年，法国数学家日腊尔，在他的《代数教程》中，

用象征的符号“ ʃʃ ”表示“大于”，用符号“§”表示“小于”。例如，A 大于 B 记作：“A ʃʃ B”，A 小于 B 记作“A § B”。

1631 年，英国数学家哈里奥特，首先创用符号“$>$”表示“大于”，“$<$”表示“小于”，这就是现在通用的大于号和小于号。例如 $5>3$，$-2<0$，$a>b$，$m<n$。

与哈里奥特同时代的数学家们也创造了一些表示大小关系的符号。例如，1631 年，数学家奥乌列德曾采用“　”代表“大于”；用“　”代表“小于”。

1634 年，法国数学家厄里贡在他写的《数学教程》里，引用了很不简便的符号，表示不等关系，例如：

$a>b$ 用符号“$a3|2b$”表示；

$b<a$ 用符号“$b2|3a$”表示。

因为这些不等号书写起来十分繁琐，很快就被淘汰了。只有哈里奥特创用的“$>$”和“$<$”符号，在数学中广为传用。比如说，不等号和推出号“$\Rightarrow$”结合起来，能简明地表达出不等式的性质：

(1) $a>b \Leftrightarrow b<a$；

(2) $a>b$，$b>c \Rightarrow a>c$；

(3) $a>b \Rightarrow a+c>b+c$；

(4) $a>b$，$c>0 \Rightarrow ac>bc$，

　　$a>b$，$c<0 \Rightarrow ac<bc$；

(5) $a>b>0 \Rightarrow \sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$。

有的数学著作里也用符号“$\gg$”表示“远大于”，其含义是表示“一个量比另一个量要大得多”；用符号“$\ll$”

表示“远小于”，其含义是表示“一个量比另一个量要小得多”。例如，$a \gg b$，$c \ll d$。

灵活地运用>、<、$\gg$ 、$\ll$ 这些符号，可使某些问题的推理过程变得简单明了。

⩾，⩽ 大于或等于号，小于或等于号

人们在表达不等量关系时，常把等式作为不等式的特殊情况来处理。在许多场合下，要用到一个数（或量）大于或等于另一个数（或量）的情况，可以把“>”，“=”这两个符号有机地结合起来，得到符号“⩾”，读作“大于或等于”，有时也称为“不小于”。同样，把符号“⩽”读作“小于或等于”，有时也称为“不大于”。例如，某天最低气温是-5℃，最高气温是12℃。换句话说，这一天的气温不低于-5℃，不高于12℃。如果用t代表某天的气温，上面的关系可表示为：

$$-5℃ \leqslant t \leqslant 12℃。$$

表面看来，两个符号⩾和>好像差不多，其实是有区别的。

那么，怎样理解符号“⩾”的含义呢?

有人认为，如果一个函数 $f(x) \geqslant a$，就断言 $f(x)$ 的最小值一定等于 a。

这种看法是片面的。

例如设 $f(x)=x^2+1$，因为 x^2 和 1 都是非负的，所以它们之和也是非负的，即 $x^2+1 \geqslant 0$。但不能说 x^2+1 的最小值是 0。

其实，$f(x)=x^2+1$ 的最小值是 1。

为什么会产生这样的错误呢？主要是对“$\geqslant$”这个符号的含义认识不清。“$\geqslant$”的意思是“$>$”或者“$=$”，即两者必居其一，不要求同时满足。比如给出了两个函数 $f(x)$，$D(x)$，它们的定义域相同，如果知道不论对定义域中的那个值 x_0，$f(x_0)$或者大于 $D(x_0)$或者等于 $D(x_0)$，而绝不会小于 $D(x_0)$，根据这种判断，自然可以写出 $f(x)\geqslant D(x)$。但这里并没有说，一定有使 $f(x)=D(x)$的一个点 x_0。上面所举的例子 $f(x)=x^2+1\geqslant 0$，正是属于这样情况。

$a\geqslant b$ 表示 $a>b$ 或者 $a=b$，这两种情况都有可能出现，但不要求同时存在。

同样，“$\leqslant$”也有类似的情况。

因此，有人把形如 $a>b$，$b<a$ 这样的不等式叫做严格的不等式，把形如 $a\geqslant b$，$b\leqslant a$ 这样的不等式叫做不严格的不等式。

现代数学中又用符号“$\nless$”表示“不小于”，用“$\ngtr$”表示“不大于”。有了这些符号，在表示不等量关系时，就非常得心应手了。

( ),[ ],{ } 小括号,中括号,大括号

大家都知道，当一个算式里含有加、减、乘、除、乘方等几种运算时，通常是按先算乘方、再算乘除、最后算加减的顺序进行。

但是在计算中，为了某种特殊的约定，需要改变常规的运算顺序时，就要把提前演算的部分，添上一个括号。

请看下面的两个算式：

$$a+b\cdot c, \tag{1}$$

$$(a+b)\cdot c。 \tag{2}$$

在（1）式中，要先算乘法，再算加法。

在（2）式中，要先算括号里的加法，再算乘法。

其中（$a+b$）是约定要提前演算的部分，所以添加了一个括号，这是括号产生的历史背景。

常见的括号，有下面三种形式：

（ ）叫做小括号，又称为圆括号。早在1544年就采用了。在小括号出现之前，历史上曾用括线“——”代替过它，例如计算：

$10+\overline{8+19}=10+27=37$。

这里的括线和小括号“( )”有着同样的功能。

〔 〕叫做中括号，又称方括号。17世纪，英国数学家华里士在计算时最先采用了它。

｛ ｝叫做大括号，又称花括号。它是1593年由数学家韦达首先创用的。

这三种括号中，以小括号应用的范围最为广泛。例如，在表示一个负数的乘方时，要把负数用（ ）括起来，把乘方的次数写在小括号的右肩上。比如“-5的平方”这句话，要写成$(-5)^2$，如果粗心大意写成-5^2，就是错误的了。

也许有人问：当一个算式里有多种括号时，应怎样运算呢？

这时要注意它们运算的顺序：先去小括号，再去中括号，最后脱掉大括号。例如：

$$
\begin{aligned}
\text{计算}&\left[\left(-\frac{1}{2}\right)^2+2\frac{1}{2}\right]\div\left\{1-\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}\\
&=\left[\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}\right]\div\left\{1-\left[\frac{3}{4}+\left(-\frac{1}{2}\right)\right]\right\}\\
&=2\frac{3}{4}\div\left\{1-\frac{1}{4}\right\}\\
&=2\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}=3\frac{2}{3}\text{。}
\end{aligned}
$$

+，－　加号(正号)，减号(负号)

从小学起，我们就和“+”、“−”这两个符号打交道了。但人们认识和运用这两个符号，却有一段漫长的历史。

公元前2000年的古巴比伦人遗留下来的泥版和公元前1700年古埃及人的阿摩斯纸草中，就有了加法和减法的记载。在埃及尼罗河里，长着像芦苇似的水生植物，它的阔大的叶子像一张张结实的纸，后人称之为阿摩斯纸草。在这些纸草上，用一个人走近的形状“  ”表示加法，比如“1  2”代表“1+2”的意思；用一个人走开的形状“  ”表示减法，比如“2  1”代表“2−1”的意思。

古希腊人的办法更高明一点，他们用两个数衔接在一起的形式代表加法。例如用“$3\frac{1}{4}$”表示“$3+\frac{1}{4}$”；用两个数中间拉开一段距离的形式代表减法，例如用“$3\quad\frac{1}{4}$”表示

“$3-\frac{1}{4}$”。

14 世纪至 16 世纪欧洲文艺复兴时期，欧洲人用过拉丁文 plus（相加）的第一个字母“P”代表加号，比如“3P5”代表“3 + 5”的意思；用拉丁文 minus（相减）的第一个字母“m”代表减号，比如“5m3”代表“5 − 3”的意思。

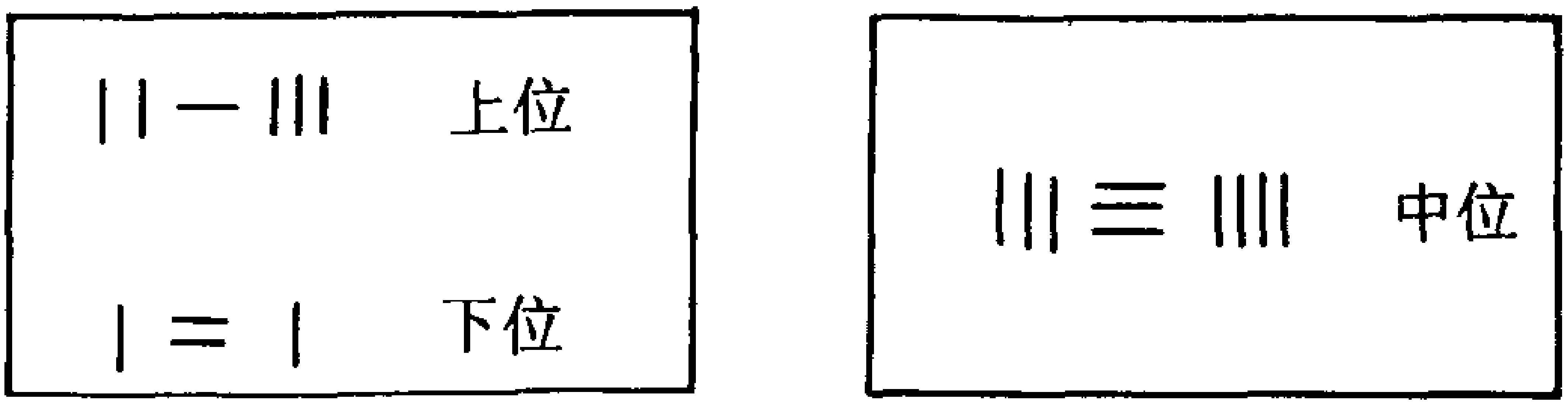
中世纪以后，欧洲商业逐渐发展起来。传说当时卖酒的人，用线条“−”记录酒桶里的酒卖了多少。在把新酒灌入大桶时，就将线条“−”勾销变成为“+”号，灌回多少酒就勾销多少条。商人在装货的箱子上画一个“+”号表示超重，画一个“−”号表示重量不足。久而久之，符号“+”给人以相加的形象，“−”号给人以相减的形象。

当时德国有个数学家叫魏德曼，他非常勤奋好学，整天废寝忘食地搞计算，很想引入一种表示加减运算的符号。魏德曼巧妙地借用了当时商业中流行的“+”和“−”号。1489 年，在他的著作《简算和速算》一书中写道：

在横线“−”上添加一条竖线来表示相加的意思，把符号“+”叫做加号；从加号里拿掉一条竖线表示相减的意思，把符号“−”叫做减号。

法国数学家韦达，对魏德曼采用的加号、减号的记法很感兴趣，在计算中经常使用这两个符号。所以在 1630 年以后，“+”和“−”号在计算中已经是屡见不鲜了。

我国古代用算筹进行加减法运算，没有用“+”和“−”号。当时要计算 213 + 121 = 334，用算筹是这样进行的：



上面两个方框的意思是：左边方框的上位加下位，等于右边方框的中位。

这是我国古代加、减运算的特色。

顺便说一下，在引入了正负数概念之后，加号和减号又多了一个新名子。规定正数前面的“+”叫做正号，负数前面的“-”叫做负号。正、负号指出了数的性质，把它们叫做性质符号。例如单独的一个数 $+3$，-5，$+\frac{1}{3}$…这里的“+”和“-”是性质符号。

对于含有加减法的混合运算，如

$$+5+\frac{1}{2}-2.5,$$

$$-20+5-7+\frac{1}{5}。$$

如果不对以上两个算式施行交换律，那么算式中的第一个数 $+5$ 和 -20，前面“+”“-”号表示的是性质符号，而在它们后面的“+”“-”号，既可以看作是运算符号，又可以看作是性质符号，具有双重的意义。

在有理数乘除算式中，如

$(+3)\times(-5)$，$(+6)\div(-2)$。

这些算式中的“+”“-”号，只能是性质符号了。

实际运算中，判断“+”和“-”是运算符号，还是性质符号，没有十分严格的界限，只能根据具体情况，灵活确定。

×，÷　乘号，除号

人类很早就掌握乘法运算了。由于乘法比加法麻烦，我国古代出现了“九九歌”乘法表，在西方出现过“格子乘法”并且在直乘法中，有从高位起和从低位起两种算法。

关于表示乘法的符号，也是众说纷纭：

17世纪前，有人用过字母M和D分别表示乘法和除法。M和D是拉丁文中乘、除两个单词的第一个字母。显然，用字母参于乘除运算是相当繁琐的。

1631年，英国数学家奥特雷德，发现乘法也是相加的意思，但是又和加法有所不同，怎么表示更合适呢？

他想：能不能把“+”号旋转45°的角，斜过来用“×”表示乘法呢？

当奥特雷德的这种设想成为现实时，乘号“×”便问世了。

但是，数学家莱布尼兹认为乘号“×”和拉丁字母“x”很相似，容易引起混淆，所以他反对使用这个符号。莱布尼兹非常理解建立一个合适符号的重要性，他很赞成数学家哈里奥特首创的符号“·”表示乘法。这个点乘号，几乎被整个欧洲大陆和拉美国家所普遍采用。

令人遗憾的是，“·”这个记号与小数点号相似，容易引

起新的混淆。后来有人干脆改用逗号“,”来代替圆点，但这种改用的办法迄今未被人们所接受。

实际上，“×”和“·”这两个乘号同时被使用着，一直沿袭到今天。

在代数里，两个有理数用括号括起来再相乘或者数和字母相乘或字母之间相乘，常用“·”号或把乘号省略不写，例如：

$(-3)\times(-5)$可以记作：$(-3)\cdot(-5)$；

$3\times a$ 可以记作：$3\cdot a$ 或 $3a$.

因为除法是乘法的逆运算，人类很早就掌握了除法的技巧。

公元前二千多年前，古巴比伦人就用过“倒数表”把除数表示成六十进位制的小数，通过乘以除数的倒数来做除法。

关于除法的符号，阿拉伯人曾用过两个数之间加一条短线的方法表示相除。例如用“2/3 表示“2 除以 3”的意思。

1631 年，数学家奥特雷德也曾设想过用符号“:”表示除法，但没有推广开来。

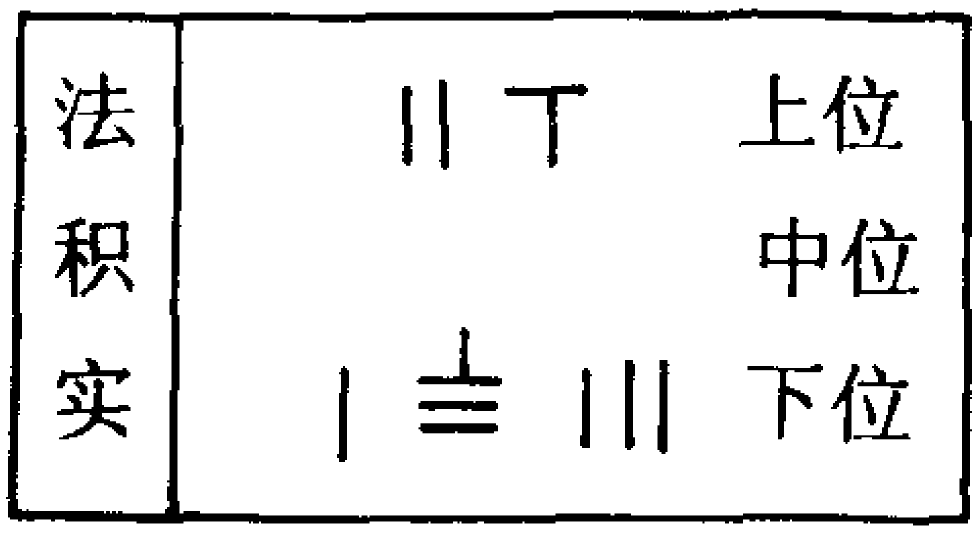
数学上正式把“÷”作为除法运算的符号，是瑞士数学家哈纳的功劳。哈纳在计算时，遇到把一个整数分成几份的问题，却没有恰当的符号表示这种算法。于是他把阿拉伯人表示除法的小短线“/”和奥特雷德的除法记号“:”合二为一，哈纳用一条横线段“—”把两个圆点“:”从中间分开，产生了表示除法的新记号“÷”，这就是除号。

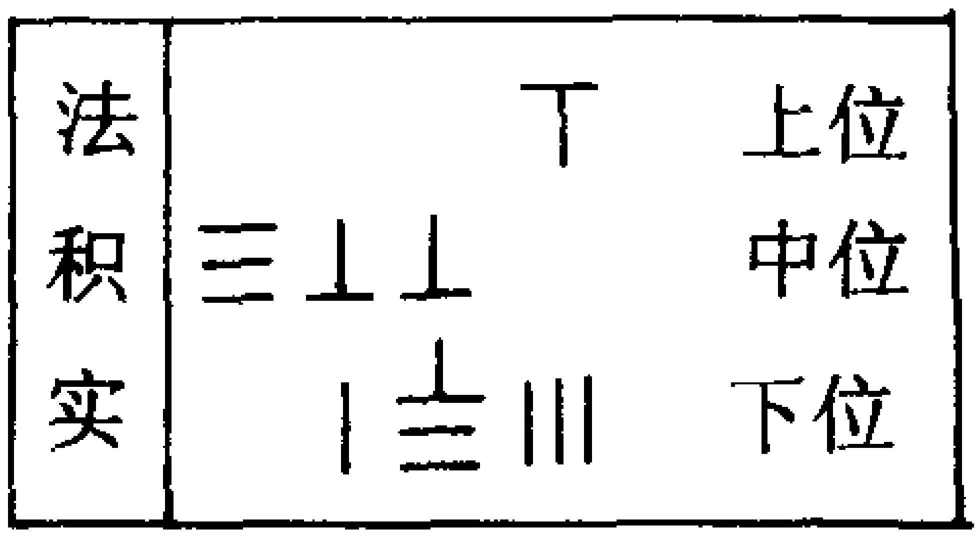
1659 年，哈纳在苏黎士出版的《代数学》一书中，正式把“÷”作为除法运算的符号。

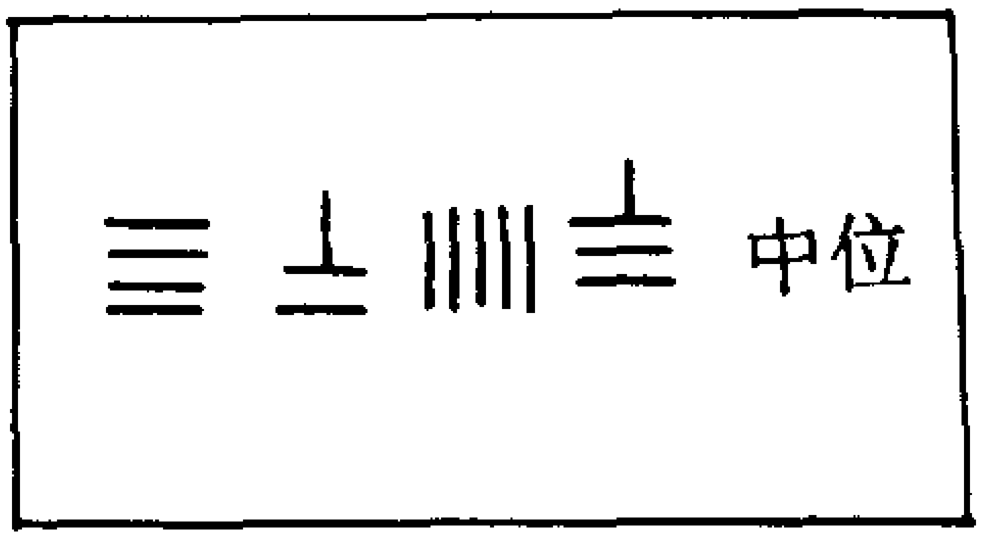
我国古代是采用算筹进行乘、除计算的。把两数相乘所得的结果叫做积，相除所得的结果叫做商。下面以乘法为例，看一看怎样用算筹来进行乘法运算。例如：

$$183\times 26=4758,$$

用算筹计算的程序如下：







我国古代把被乘数叫做“实”，乘数叫做“法”，上面三个方框的意思是：

首先拿上位 26 的十位数 20，和下位 183 相乘等于中位的 3660。然后再用上位的个位数 6 和下位的 183 相乘并与中位 3660 相加起来，则等于中位的 4758。

这是中国古代乘除法的特色。

a^n 乘方号或幂号

在计算中，经常遇到求相同因数连乘积的运算。例如 5×5×5×5×5×5，这六个 5 连乘还好些，再多一些，比如说六千个，一张纸也写不下。能不能想一个简单的记法呢？

为了简便起见，相同的因数相乘，可以只写一个因数，而在它的右上角写上相同因数的个数。例如，

7×7 记作 7^2，

$5\times5\times5\times5\times5\times5$ 记作 5^6。

n 个相同的因数 a 相乘，即

$\underbrace{a\cdot a\cdot a\cdot\cdots\cdot a}_{n}$，记作 a^n。

这种求 n 个相同因数的积的运算，叫做乘方，乘方的结果叫做幂。

符号 a^n 读作“a 的 n 次方”。将 a^n 看作是 a 的 n 次方的结果时，也读作“a 的 n 次幂”。

用指数来表示 a 的乘幂，是经过复杂的演变过程的。

14 世纪，数学家奥利森开始采用指数附在数字上的记法。1484 年，法国数学家舒开在其著作《三部曲》里，用 12^3，10^5 和 120^8 表示 $12x^3$，$10x^5$ 和 $120x^8$，他又用 12^0 表示 $12x^0$。

数学家邦别利，在他的《代数》一书中，把 x，x^2 和 x^3 写成 $\underset{\smile}{1}$，$\underset{\smile}{2}$，$\underset{\smile}{3}$。如 $1+3x+6x^2+x^3$ 就写成了 $1p.3^{\underset{\smile}{1}}p.6^{\underset{\smile}{2}}p.1^{\underset{\smile}{3}}$。1585 年，数学家斯蒂文把这个式子写成 $1^0+3^1+6^2+1^3$。

笛卡儿在 1637 年系统地采用了正整数指数。他把 $1+3x+6x^2+x^3$ 写成 $1+3x+6xx+x^3$，他和别人偶尔也用 x^2 这种写法，但并不是固定的。直到 1801 年由数学家高斯采用 x^2 代替 xx 后，x^2 变成了标准写法。

数学家牛顿发展了笛卡儿的工作，最先使用了正指数和负指数，整数指数和分数指数。1676 年，牛顿给莱布尼兹的一封信中这样写道：“因为代数学家们将 aa，aaa，$aaaa$，…写成 a^2，a^3，a^4，…，所以我将$\sqrt{a}$，$\sqrt[3]{a}$写成$a^{\frac{1}{2}}$，$a^{\frac{1}{3}}$，又将$\frac{1}{a}$，$\frac{1}{aa}$，$\frac{1}{aaa}$…写成 a^{-1}，a^{-2}，a^{-3}，…。”

牛顿大胆地指出，不论是什么指数，均可用 a^n 表示。

用字母表示指数，这是数学史上的一大变革。

$a\cdot 10^n$（$1\leqslant a<10$）　科学记数法号

在对宇宙的研究中，处处要遇到极其巨大的数。例如从地球到仙女座星云的距离，用普通写法，等于这样多千米：

$$8,050,000,000,000,000,000。\tag{1}$$

在天文计算中，天体间的距离往往不用千米，而用更小的单位厘米表示。这样一来，(1)式中这串数还得多五个零。

很容易明白，用这样大的天文数字来进行计算是何等的困难，而且又多么容易发生错误。

怎样解决这个矛盾呢？

办法是这样的：用带一位整数的数和 10 的整数次幂乘积的形式，来表示一个数，这种办法叫做科学记数法。通常用“$a\cdot 10^n$”的形式表示，这里 n 是整数，$1\leqslant a<10$。

采用科学记数法，可以把（1）式中的数写成：

8.05×10^{18}。又如，一个水分子的质量是：

0.0000000000000000000000033 克，

可以记作：3.3×10^{-24}克。用科学记数法不仅节省了书写的篇幅，而且可以避免书写不慎造成的错误。

不仅如此，用科学记数法还便于确定有效数字的个数，进而分辨出该数的精确度。例如，1.800×10^3 表示有四位有效数字，其绝对误差界为 0.5；

1.80×10^3 表示有三位有效数字，其绝对误差界为 5；

1.8×10^3 表示有两位有效数字，其绝对误差界为 50。

采用科学记数法，便于进行演算。不论是笔算还是用计算机运算，能很快地确定小数点的位置。例如，计算：

$$\frac{10000\times46000\times0.00006}{200\times0.003}=\frac{10^4\times4.6\times10^4\times6\times10^{-5}}{2\times10^2\times3\times10^{-3}}$$

$$=\frac{4.6\times6\times10^3}{2\times3\times10^{-1}}=4.6\times10^4。$$

可见，用科学记数法便于进行约分，加快了运算的速度和准确性。这种方法在工程技术和科学研究中，使比较难以计算的问题变得易于处理了，这是科学记数法的功劳。

$\sqrt{}$　根号

一个数自乘得出了它的平方。反过来问：什么数的平方等于一个已知数呢？

寻求开平方运算的方法，早就引起人们的注意了。在我国古书《九章算术》第四章“少广”篇里，就有了开平方，

开立方计算的萌芽，这是我国古代数学家的非凡成就之一。

如果 $x^2=a$，那么求 x 的运算叫做开平方，x 叫做平方根。一个正数的平方根有两个，记作 $\pm\sqrt{a}$，其中“$\sqrt{\ }$”叫做二次根号。

“$\sqrt{\ }$”的历史源远流长。

最初，曾用拉丁字母 R 并在后面跟上拉丁文“平方”一词的第一个字母 q，表示开平方。

例如现在的 $\sqrt{27}$，从前写作：

R. q. 27。

历史上常有这样的事，只要是被一些名人、学者肯定过的东西，即使是错误的也会被人们接受下来。比如说，现在使用的根号 $\sqrt{\ }$，数学家欧拉猜想“√”是由拉丁文 radix（根）的第一个字母 r 变形而来，这种说法流传了很长的时间。后来经过仔细的研究，证明不是。原来德国人在 1480 年前后，用一个点“·”表示平方根，如·3 就是 3 的平方根。到 16 世纪初，小点带上了一条尾巴变成为“⌣”，这可能是写快时带上的小尾，在此基础上演变成“√”表示平方根。

1525 年，鲁道夫的代数书用√8 表示 $\sqrt{8}$。

1637 年，笛卡儿的《几何学》中，出现了历史上第一个平方根号“$\sqrt{\ }$”，他写道：“如果我想求 a^2+b^2 的平方根，就写作 $\sqrt{a^2+b^2}$。”可能笛卡儿当时想到，当被开方数是一个多项式时，为了避免混淆，又在上面加一条括线“——”，左边又加了一个小钩，就是现在的根号了。

如果 $x^3=a$，那么求 x 的运算叫做开立方，x 叫做立方根，记作 $\sqrt[3]{a}$，符号 $\sqrt[3]{\ }$ 叫做三次根号。

关于开立方，最初曾用拉丁字母 R，后面跟上拉丁文

“立方”的第一个字母 c 表示。例如现在的$\sqrt[3]{5}$，从前写作：R. c. 5。

德国人在1480年曾用“···”表示立方根。如“···5”就表示5的立方根。

1525年，鲁道夫的代数书用 w√8 表示$\sqrt[3]{8}$。

1637年，笛卡儿的《几何学》中首先采用了立方根号“$\sqrt[3]{}$”，他写道：“如果我想求 a^3+b^3 的立方根，就写作：$\sqrt[3]{a^3+b^3}$。”

一般地，如果 $x^n=a$，且 n 是大于1的自然数。那么求 x 的运算叫做开 n 次方，x 叫做 a 的 n 次方根。

当 n 是奇数时，a 可以是任何实数，用符号$\sqrt[n]{}$ 表示一个方根。

当 n 是偶数时，a 可以是任何正数或零，用符号$\pm\sqrt[n]{a}$，表示两个方根。

$\sqrt[n]{}$ 叫做 n 次根号。

当 n 依次取2，3，4，…就得出二次根号，三次根号……这些根号都是$\sqrt[n]{}$ 的特例。

Σ 和号

数学里常会遇到若干个数相加的式子，比如：$(a_1+a_2+\cdots+a_n)+(b_1+b_2+\cdots+b_n)$。 (1)

这一长串式子，书写起来比较麻烦，能否找到一个简单的记法呢？

为了书写方便起见，我们将 $a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n$ 记作：

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$，其中“$\sum$”是求和符号，读作“西格玛”。

$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 读作“$\sum$，a，i，i 从 1 到 n”。a_i 叫做一般项，整数 i 叫做取和指标。

这样（1）式可简记为：$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i + \sum\limits_{j=1}^{n} b_j$。

和号“$\sum$”是 1755 年德国数学家欧拉在他写的《微分学原理》一书中首先采用的。

“$\sum$”起源于希腊文 σογμαρω（增加），$\sum$是单词第一个字母 σ 的大写。

在符号$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 中，字母 i 是表示一般项的取和指标，也可以采用其他字母。实际上，$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 与$\sum\limits_{j=1}^{n} a_j$、$\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ 意义都是相同的。比如说：

$$\sum_{k=1}^{20} \frac{1}{k},\quad \sum_{l=1}^{20} \frac{1}{l},\quad \sum_{\beta=1}^{20} \frac{1}{\beta},$$

这三个式子都代表同一个和：

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{20}。$$

试问：在$\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ 中，展开式的开始项和终了项各是什么？

在$\sum$下面注明“$i=1$”，上面写字母“n”，表示 i 依次取 1，2，3，…，n。

很明显，开始项是 a_1，终了项是 a_n。

可能有人又问：开始项是否一定取 a_1？

这不一定。

例如，$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_{n+1}$，记为$\sum\limits_{i=0}^{n+1} a_i$。

又如，$\sum\limits_{i=2}^{6}2i=4+6+8+10+12$。

怎样把一个 n 项之和简记成$\sum$的形式呢？关键是求出它的一般项 a_i。例如：

$$x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n, \tag{2}$$

$$1\cdot2+2\cdot3+3\cdot4+\cdots+n(n+1)。\tag{3}$$

细心的读者不难发现：

（2）式中，把 x_nf_n 的脚码换成 i，就可得出式子的一般项是 x_if_i。

（3）式中，每一项都是相邻两个整数的乘积，显然一般项是 $i(i+1)$。于是得出：

$$x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_nf_n=\sum_{i=1}^{n}x_if_i;$$

$$1\cdot2+2\cdot3+\cdots+n(n+1)=\sum_{i=1}^{n}i(i+1)。$$

当然，在某种场合下，还要用到双重和号。例如：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j。$$

双重和号的意义是：先对第二个求和号求和，再对第一个求和。双重和号满足交换律，即有：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_ib_j。$$

这个性质，应用和号$\sum$简化证明如下：

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}a_ib_j=\sum_{i=1}^{m}a_i(\sum_{j=1}^{n}b_j)=\sum_{i=1}^{m}a_i(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{m}a_ib_1+\sum_{i=1}^{m}a_ib_2+\cdots+\sum_{i=1}^{m}a_ib_n$$

$$=(b_1+b_2+\cdots+b_n)\sum_{i=1}^{m}a_i=\sum_{j=1}^{n}b_j\sum_{i=1}^{m}a_i$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{m}a_ib_j。$$

实际上，数学中很多场合引入了和号∑后，在表达方式上带来了极大的方便。比如在立体几何里，设直棱柱底面的各边长分别为：a_1，a_2，a_3，…，a_n，直棱柱的高为 h，则 $S_{直棱柱侧}=a_1h+a_2h+\cdots+a_nh=\sum_{i=1}^{n}a_ih$。

在高等数学里，对于任意一个无穷数列：

u_1，u_2，…，u_n，…作出形如：$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$ 的和式，叫做数项级数，简记为：$\sum_{i=1}^{\infty}u_i$。

和号∑的应用，简化了书写的格式，显示了数学符号的优越性。

$\bar{x}$　平均数号

某中学足球队的 20 名队员的身高测出如下（单位：厘米）：

170	167	171	168	160	172	168	162
172	169	164	174	169	165	175	170
165	167	170	172				

问足球队员的平均身高是多少？（精确到个位）

这个平均身高是：

$$\frac{170+167+\cdots+170+172}{20}\approx169,$$

169 这个数就是 20 个人身高的平均数。

一般地，如果有 n 个数：x_1，x_2，…，x_n，那么

$$\frac{1}{n}\ (x_1+x_2+\cdots+x_n) \tag{1}$$

叫做这 n 个数的平均数。

通常用符号“$\bar{x}$”表示平均数，读作“x 拔”。“拔”是英语“*bar*”的读音，含义是“横杠”的意思。

这样，（1）式可以简化为：

$$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i。 \tag{2}$$

（2）式是算术平均数的计算公式。

如果有两组数：x_1，x_2，…，x_n 和 y_1，y_2，…，y_n，它们的平均数分别用 $\bar{x}$，$\bar{y}$ 表示，那么一组新数：x_1+y_1，x_2+y_2，…，x_n+y_n 的平均数 $\overline{W}$ 是什么呢？

由（1）式知：

$$\begin{aligned}\overline{W}&=\frac{1}{n}[(x_1+y_1)+(x_2+y_2)+\cdots+(x_n+y_n)]\\&=\frac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)+\frac{1}{n}(y_1+y_2+\cdots+y_n)\\&=\bar{x}+\bar{y}。\end{aligned}$$

在统计学里，像加权平均数，几何平均数，幂平均数，调和平均数等，这类平均数都可以用一个字母并在上面添加一条横杠“-”的方法来简化书写方式。例如：

在 n 个数中，x_1 出现 f_1 次，x_2 出现 f_2 次……x_k 出现 f_k 次，这里，$f_1+f_2+\cdots+f_k=n$，那么这 n 个数的平均数可以表示为：

$$\bar{x}=\frac{x_1f_1+x_2f_2+\cdots+x_kf_k}{n},$$

可简记为：　$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k}x_if_i。$

这个数叫做加权平均数，其中 f_1，f_2，…，f_k 叫做“权”。

平均数就是从有波动的数据中，找出其变化规律的一种数学方法，它反映了数据的集中趋势。例如，20 个足球队员的平均身高是 169 厘米，反映了足球队员身高的集中位置。

作为表示平均数的符号 $\bar{x}$，在数学中要经常用到它，推广到物理学中的平均速度 $\bar{v}$，也是用这种办法记写的。

log，lg　对数号，常用对数号

数学和其它自然科学一样，它的产生和发展，归根到底，决定于人类生产实践的需要。

15、16 世纪，天文学处于科学的前沿，许多学科在它的带动下发展。1471 年，德国数学家雷基奥蒙斯坦从天文计算的需要出发，造出了第一张具有八位数字的正弦表。精密三角表的问世，伴随着出现的是大数的运算。但尤其是乘除运算，当时还没有一个简单的办法。能否用加、减运算来代替乘除运算呢？这个问题吸引了当时的许多数学家。

苏格兰数学家纳皮尔对数字计算很有研究。他在一个需要改革计算技术的年代里冲锋陷阵。他曾说：“我总是尽量使自己的精力和才能去使人摆脱麻烦而单调的计算，因为这种令人厌烦的计算常使学习者望而生畏”。由他发明的“纳皮尔算筹”与球面三角中的“纳皮尔比拟式”等在当时都颇负盛名。1614 年纳皮尔发表了名著《奇妙的对数定律说明书》，向世人公布了新的计算法——对数。当时指数的概念

尚未形成，纳皮尔不是从指数出发，而是通过研究直线运动得出对数概念的。

18 世纪，瑞士数学家欧拉产生了“对数源于指数”的看法。这一观点是正确的，实际上对数和指数之间有着天然的联系：

设 a 是不等于 1 的正数，如果 $a^b = N$，那么反过来要表达 N 是 a 的多少次幂时，记作：

$$b = \log_a N。$$

这里，b 叫做以 a 为底 N 的对数。

“log”是对数号，它源于拉丁文 Logarithm（对数）的前三个字母，而对数符号的通用形式“log”是意大利的数学家卡瓦列利于 1632 年起用的。

英国数学家布里格斯，认真研究过纳皮尔的对数，他发现如果选用以 10 为底数，那么任意一个十进位数的对数，就等于该数的那个 10 的乘幂中的幂指数，将这种对数用于计算会带来更多的方便。1624 年，布里格斯出版了《对数算术》一书，制成了以 10 为底的对数表。这种以 10 为底的对数，叫做常用对数。记作：$\log_{10} N$。这里的底数 10 一般省略不写，即为：$\lg N$，它是常用对数号。

对数符号引入后，在表达对数运算法则时，可以准确、简洁地表示出对数的运算规律：

$$\log_a(M \cdot N) = \log_a M + \log_a N;$$

$$\log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N;$$

$$\log_a M^n = n \log_a M;$$

$$\log_a \sqrt[n]{M} = \frac{1}{n} \log_a M。$$

其中 $M>0, N>0, a$ 是不等于 1 的正数。

17 世纪对数通过西方传教士引入我国。在 1772 年 6 月由康熙主持编纂的《数理精蕴》中亦列入“对数比例”一节，并称“以假数与真数对列成表，故名对数表”。真数，即现在所指的对数中的真数；假数就是今天“对数”的别名。我国清代数学家戴煦研究对数很有成绩，著成《求表捷术》一书。

对数在数学中的应用很广泛，给人们在计算上带来很大方便，彻底解决了乘方、开方运算和计算上的降级运算，如乘除运算可以用加减运算来代替，乘方、开方运算可以用乘除运算来代替，对数的发明是数学史上的一件大事。恩格斯曾把对数的发明，解析几何学的创始和微积分学的建立并列为 17 世纪数学的三大成就。难怪意大利的天文学家伽利略曾说过：“给我空间、时间及对数，我可以创造一个宇宙。”这话当然是夸张的语气，然而说明对数的用处是巨大而广泛的。

ln　自然对数号

在数学里，除了常用对数外，还有一种很重要的对数，叫做自然对数。这种对数和一个很著名的常数 e 紧紧地联系在一起。

e 是怎样的一个数呢？

观察无穷数列：

$$(1+1)^1, \left(1+\frac{1}{2}\right)^2, \left(1+\frac{1}{3}\right)^3, \cdots, \left(1+\frac{1}{n}\right)^n, \cdots \tag{1}$$

进一步计算可以看到：

$$(1+1)^1=2^1=2,$$
$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{3}{2}\right)^2=\frac{9}{4}=2.25,$$
$$\left(1+\frac{1}{3}\right)^3=\left(\frac{4}{3}\right)^3=\frac{64}{27}\approx 2.37,$$
$$\cdots\cdots$$

可以证明，e 是数列（1）的极限值，即

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}。$$

由这个极限过程产生的数 e，和著名常数 π 一样，是一个很重要的数，1727 年，数学家欧拉把这个极限定名为“e”。

1873 年，法国数学家埃尔米特进一步证明了 e 是一个无理数，e = 2.71828…。

在科学技术中，采用 e 作为对数的底，这种对数叫做自然对数，记作 $\log eN$。在应用时底数 e 经常省略不写，简记为：“$\ln N$”。上面符号中的“l”是 logarithm（对数）的第一个字母，“n”是 nature（自然）的第一个字母，两个字母合并在一起，构成了自然对数号“ln”。

早在 1618 年，英国数学家纳皮尔出版的《新对数》一书中，就有了接近于 e 为底的对数，与现在不同的是，log 右下角没有 e 这个符号。

1665 年，数学家牛顿发现双曲线 $y=\dfrac{1}{x}$ 下的面积与自然对数所表示面积的对等性，而前者在积分意义下就是 $\int_0^x\frac{1}{x}\mathrm{d}x$，这样，自然对数就在新的意义下 $\ln x=\int_0^x\frac{1}{x}\mathrm{d}x$ 诞生了。在微积分和无穷级数的计算中，采用自然对数比其它形式的对数要简单得多。

1728 年，数学家欧拉在他的数学手稿中，首先用 e 作为自然对数的底，到了 1736 年便正式命名发表了。说来很巧，字母 e 恰好是他的名字“Euler”中的第一个字母，沿用下来也是对这位伟大数学家的纪念。

常用对数和自然对数是底数不同的两种对数，它们之间的换算关系是：

$$\lg N = 0.4343 \ln N;$$

$$\ln N = 2.303 \lg N。$$

常用对数常用于简化数值的计算，而自然对数是由微积分的产生而发展起来的，在解决变量间的函数关系时，更能刻划出运动变化的规律，在高等数学里扮演了十分重要的角色。

$P_n^m, n!, C_n^m$　排列数号，阶乘号，组合数号

我国古代有一部书叫《易经》，它是世界上公认的最先讨论排列的书。书中谈到的八卦和六十四卦，曾引导人们对一切可能的情况进行了探求。《易经》所说的八卦和“八个人围着一个圆桌坐，有多少不同的坐法?”的问题十分相似。

我们在学习排列和组合一章时知道：

从 n 个不同的元素中取出 m（$m \leqslant n$）个元素的所有排列的个数，叫做从 n 个不同元素取出 m 个元素的排列数，用符号“P_n^m”表示，字母 P 是英文 Permutation（排列）的第一个字母。

计算排列数的公式是：

$$P_n^m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1) \quad (m, n \in N) \quad (1)$$

当公式(1)中 $m=n$ 时,有:

$$P_n^n=n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1 \tag{2}$$

公式(2)给出了 n 个不同元素全部取出的排列数。其中:$1\cdot2\cdot3\cdots(n-1)\cdot n$ 是 n 个自然数的连乘积,叫做 n 的阶乘,用符号“$n!$”表示,读作“n 的阶乘”。

最早有人用符号 $\underline{|n}$ 表示过“n 的阶乘”。但这个符号不但书写困难,而且有误认为是角号“∠”的可能,于是就改用为 $n!$。

1731 年,数学家贝努利在他的著作《猜度术》里介绍了组合数的概念。

从 n 个不同的元素中取出 $m(m\leqslant n)$ 个元素的所有组合的个数,叫做从 n 个不同元素中取出 m 个元素的组合数,用符号“C_n^m 表示。C 是英文 Combination(组合)的第一个字母。

计算组合数的公式是:

$$C_n^m=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)}{m!}\quad(m,n\in N)。$$

这里顺便提醒一句,表示排列数和组合数的符号,在不同的书刊上很不一致,常见的标记符号有:

排列数号:P_n^m,P_m^n,A_n^m,A_m^n,${}_nA_m$,${}_mA_n$。

组合数号:C_n^m,C_m^n,$\binom{m}{n}$,$\binom{n}{m}$,${}_nC_m$,${}_mC_n$。

在应用这些符号时,要根据具体书刊的规定,认清符号的含义。

∠ 角号

在数学中,要研究各种各样的数和形。数和形的概念,

是从天上掉下来的吗？不是。是人们头脑里固有的吗？也不是。它们是从社会实践中得来的。

人类的祖先从开始制造工具起，就脱离了动物界，对千奇百怪的“形”有了一定的认识。比如说，当古人们观察到人的大小腿间，或者上下臂之间，形成了一个角度，这种形象在头脑里反复了无数次，就可能会产生出角的蒙昧概念。据考证，在很多语言中，角的边常用“臂”或“股”字代表。

随着社会的不断进步，人们终于从各种角的形象中，抽象出它的本质概念：由一点出发的两条射线所组成的图形叫做角。“角”用符号“∠”表示，读作“角”。

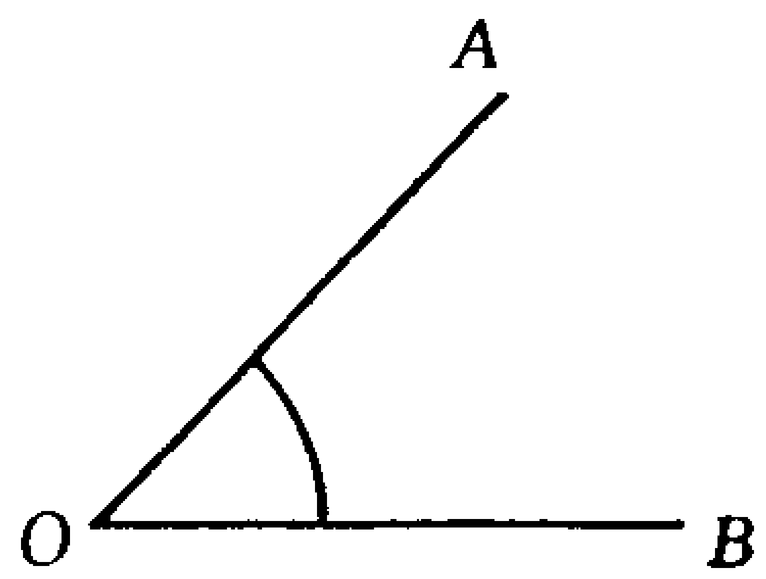


图 1

角是几何里最简单的图形之一。用“∠”和三个大写字母联合起来，能形象地表示一个角，方法是这样的：

在角的两边上各取一个点并用字母表示，把表示顶点的字母放在中间，如图 1 中的角，可记作：$\angle AOB$ 或 $\angle BOA$。

为了方便，角也可以用小写的希腊字母 α，β，γ，…或者用阿拉伯数字表示，要把字母或数字写在角的内部靠近顶点的地方，如图 2 所示。

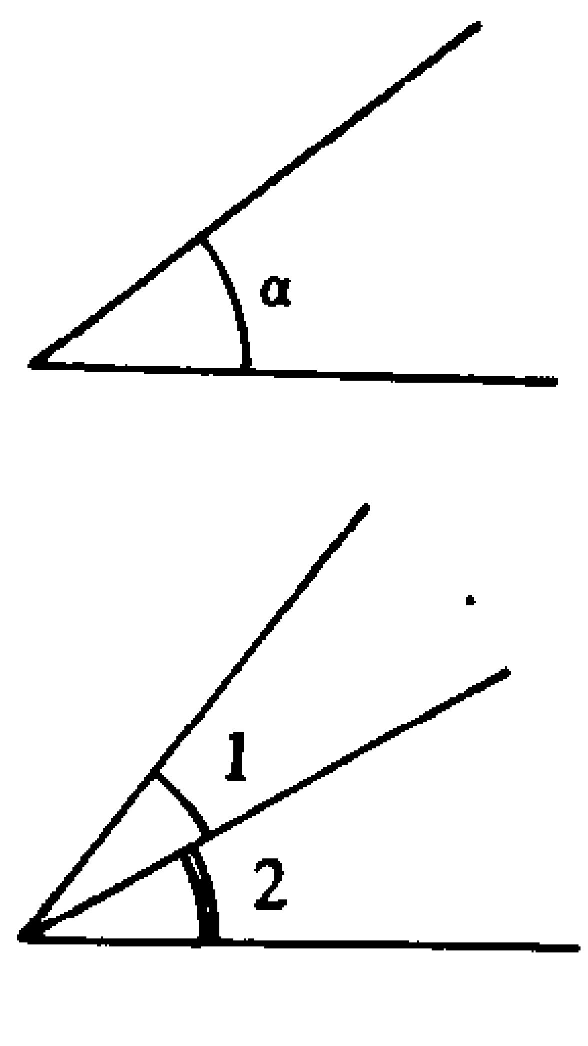


图 2

如图 3，角也可以看作一条

射线以 O 为中心，从 OA 位置旋转到 OP 位置而形成的。这里既要考虑 OP 的旋转方向，又要考虑旋转的角度大小。通常规定逆时针方向为正，顺时针方向为负。OP 绕点 O 可以任意旋转，几周都行，其旋转量称为 OA 和 OP 形成的角。正方向旋转形成的角称为正角，负方向旋转形成的角叫做负角。OA 为始边，OP 为终边，因终边旋转不受限制，其差为 2π 的整数倍，所以终边处在任何一个位置都表示无穷个角。如果其中一个角为 α，所有与 α 终边相同的角，连同 α 在内，可以记作：

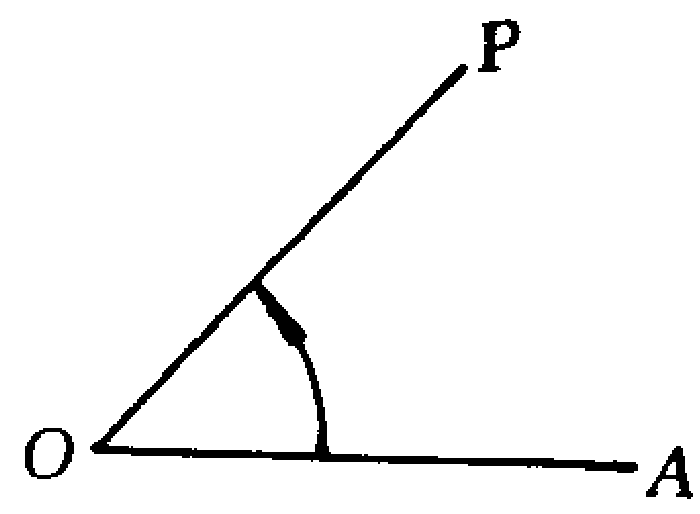


图 3

$$2k\pi+\alpha \quad 或\ k\cdot 360^\circ+\alpha \quad (k\ 为整数)。$$

把平面上的角推广到空间时，其相应的图形是二面角。

在图 4 中，给出平面上的$\angle AOB$，如果把顶点 O 改为直线AB，把 OA 和 OB 这两条边分别改为半平面 P 和 Q，得到的图形是二面角。

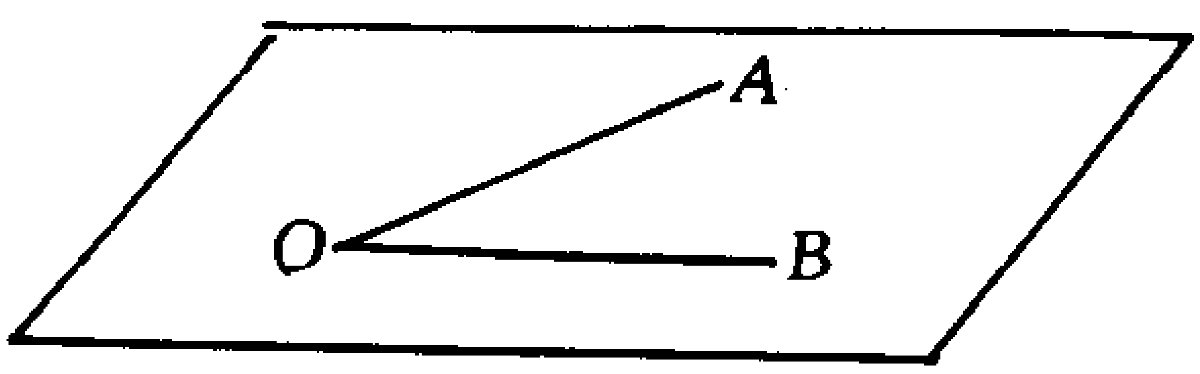


图 4

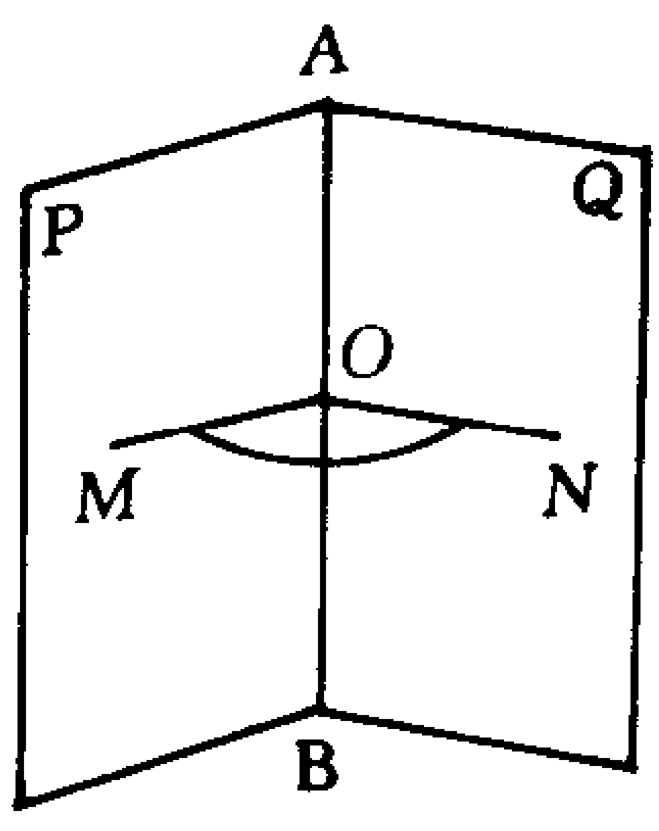


图 5

如图 5 中，设二面角的棱是 AB，两个面是 P，Q，那

么这个二面角用符号“$P—AB—Q$”表示。

如何度量这个二面角的大小呢?

以二面角棱上的任意一点为顶点，在两个面内分别作垂直于棱的射线，由这两条射线构成的一个平面上的角，叫做二面角的平面角。如图（5）中，$\angle MON$ 就是二面角“$P—AB—Q$”的平面角。

一个二面角的大小，可以用它的平面角来度量，这种方法非常巧妙。

同样，空间两条异面直线所成的角，直线与平面所成的角，都是通过平面几何中的角来定义的。因而，它们都可以看作是平面几何中角的概念在空间的拓广。

⊥ 垂直号

建筑工人在砌墙时，常用一端系有铅锤的线，来检查所砌的墙面是否和水平面垂直，如图 1。这条带铅锤的线叫做铅垂线。测量时这条线在空中自由摆动画出了圆弧，当它静止下来时，铅垂线和地面成直角。当铅垂线与墙壁面平行时，自然墙面和水平面就垂直了。

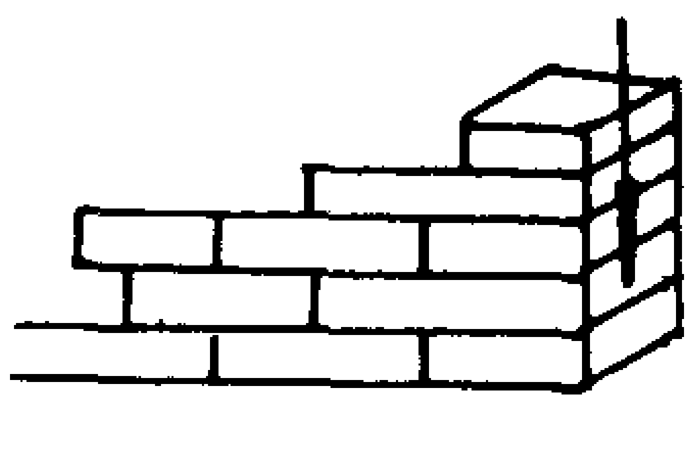


图 1

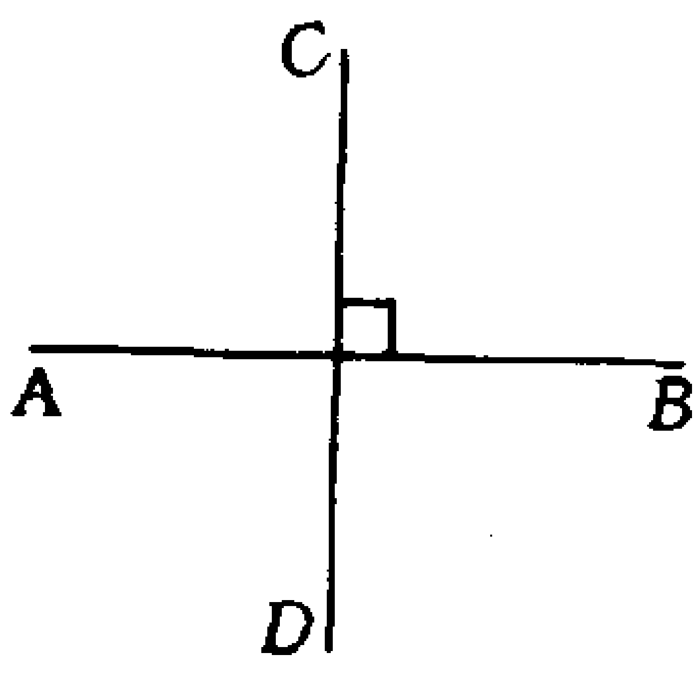


图 2

在平面几何中，把相交成直角的两条直线叫做两条直线互相垂直。“垂直”用“⊥”表示，读作“垂直于”。在图 2 中，直线 AB 和 CD 垂直时，记作：$AB \perp CD$。

垂直号简便易写，是几何学里常用的符号之一。空间直线和平面垂直，平面和平面垂直，两条异面直线互相垂直等，都是通过平面里两条直线的垂直来判定的，因而可以看作是平面几何里垂直概念的拓广。

如果一条直线和一个平面内的任何一条直线都垂直，就说这条直线和这个平面垂直。

如图 3 中，直线 l 垂直于平面 α，记作：$l \perp \alpha$。

可以证明：只要直线 l 垂直于平面 α 内两条相交直线，就有 $l \perp \alpha$。

同样，两个平面相交，如果所成的二面角是直二面角，叫做两个平面互相垂直。

图 4 中，当平面 α 和平面 β 垂直时，记作 $\alpha \perp \beta$。

也可以证明：若平面 α 通过一条垂直于平面 β 的直线，则 $\alpha \perp \beta$。

垂直号“⊥”十分形象地表达了直线与直线，直线与平面，平面与平面的垂直关系，是几何中常用的符号之一。

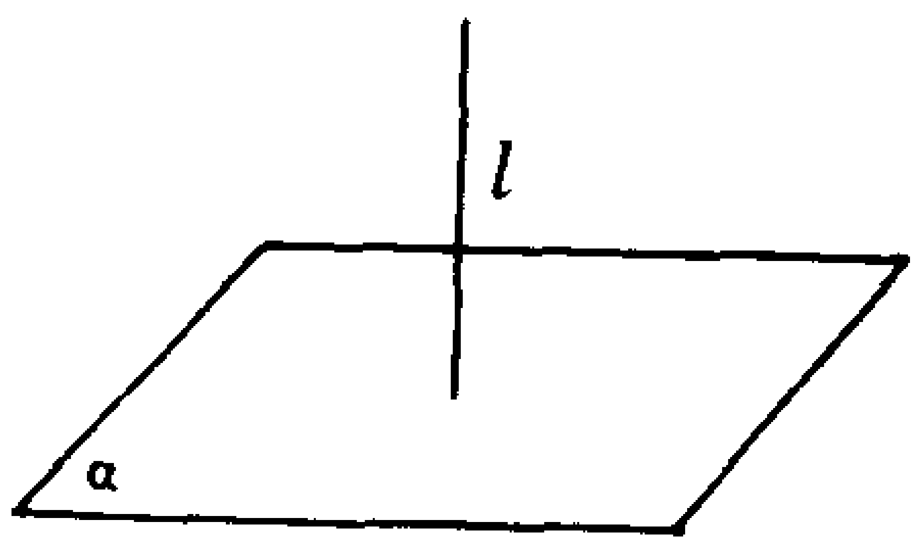


图 3

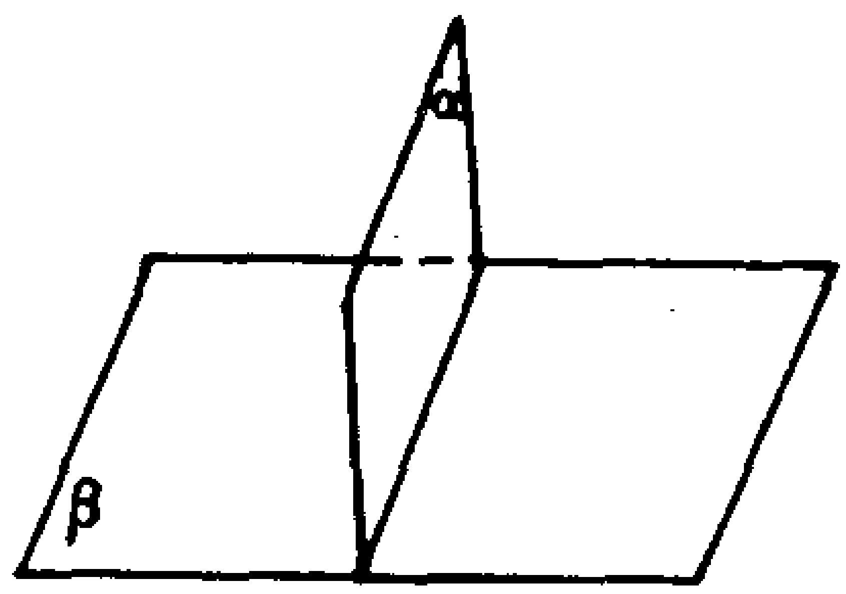


图 4

//，$\underline{\underline{//}}$ 平行号，平行且相等号

一座高层大楼，它的正面和背面无论怎样延展都不会相交，反映了两个平面的平行关系。

笔直的两条铁轨，黑板相对的两条边等，都给人以平行线的形象。

说得准确一点，在同一平面内不相交的两条直线，叫做平行线。

“平行”用“//”表示，读作“平行于”。在图 1 中，直线 AB 平行于直线 CD，记作：$AB // CD$。

平行号也是几何学中常用的符号之一。

在空间，直线和平面平行，平面和平面平行，都是通过平面几何里两条直线的平行来判定的，因而，它们可以看作是平面几何里平行概念的推广。

如果一条直线和一个平面没有公共点，那么就说这条直线和这个平面平行。图 2 中，直线 l 平行于平面 α，记作：$l // \alpha$。

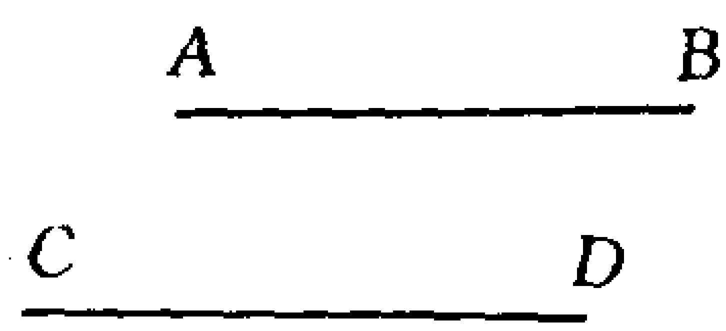


图 1

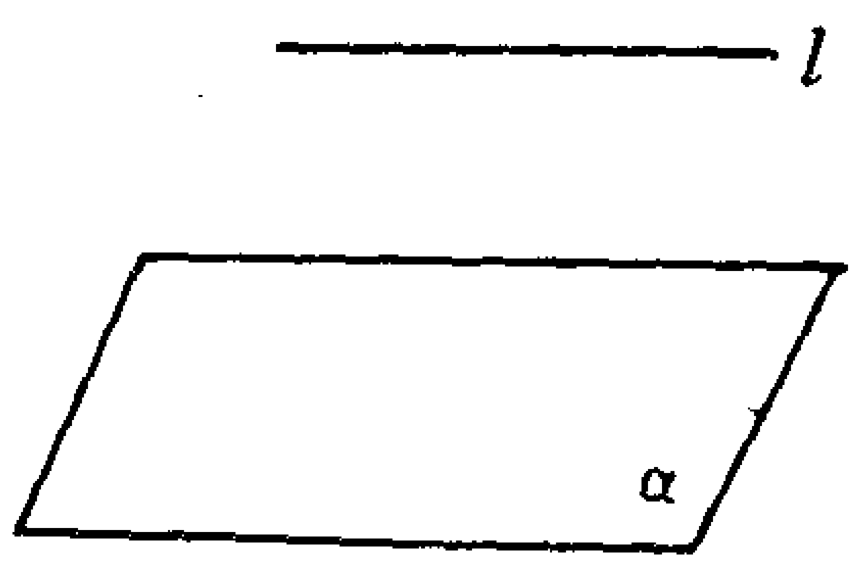


图 2

可以证明：如果平面外的一条直线 l 和这个平面 α 内一条直线平行，那么这条直线 l 与平面 α 平行。

如果两个平面没有公共点，叫做两个平面互相平行。图3中，平面 α 平行于平面 β，记作 $\alpha /\!/ \beta$。

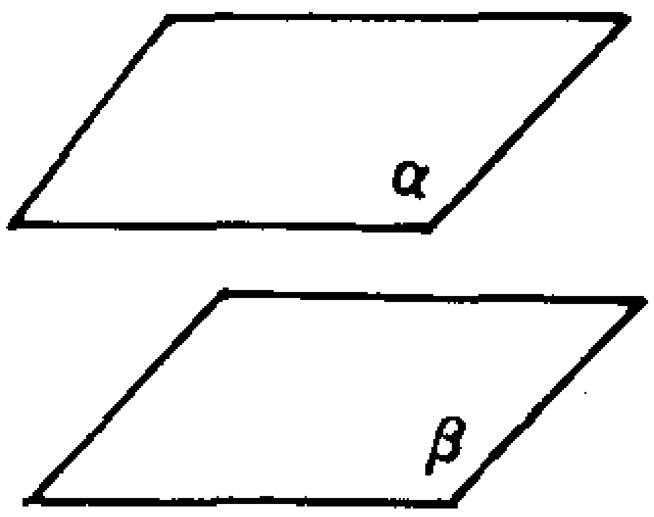


图 3

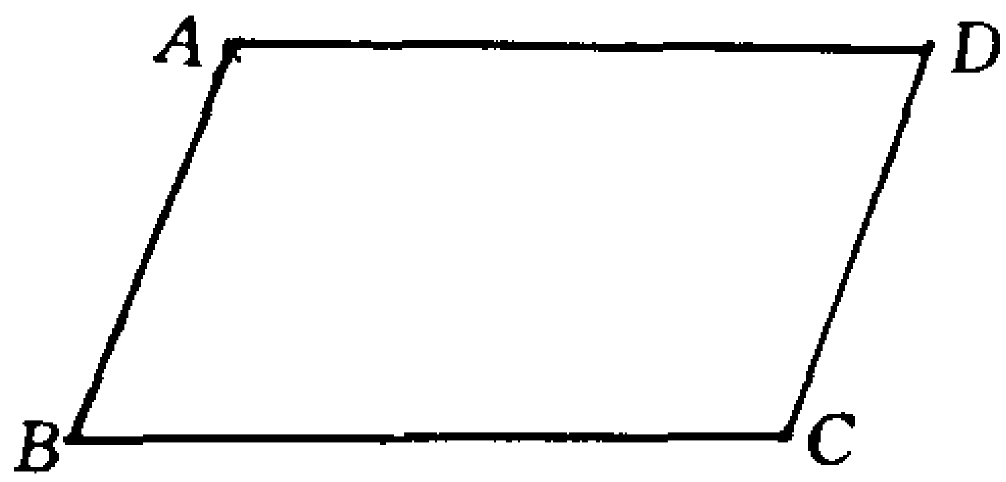


图 4

在平面几何里，像矩形，正方形，平行四边形等图形，它们的对边都具有既平行又相等的特点。我们把这种“平行并且相等”的线段，用符号“$\underline{\underline{/\!/}}$”表示，读作“平行且等于”。

在证明或计算的过程中，为了书写和论证方便，可以使用“平行且等于”号。如图 4 中，已知四边形 $ABCD$ 是平行四边形，那么有 $AB \underline{\underline{/\!/}} CD$，$BC \underline{\underline{/\!/}} AD$。

平行号“$/\!/$”十分形象的表达了直线与直线，直线与平面，平面与平面间的平行关系。

△,▱　三角形号,平行四边形号

我们伟大的祖国，在历史上对世界文化有过重大的贡献。由于农业生产的需要，早在三千多年前，就已经有了三角形的概念，并总结出了直角三角形三边之间的关系。

南宋时数学家秦九韶把三角形的三边，分别叫做大斜、中斜、小斜，独创了用三斜求三角形面积的方法，即著名的

三斜求积法。

一般地说，三条线段首尾顺次连结所组成的图形叫做三角形。

“三角形”用“△”表示，读作“三角形”。

如图 1 中，顶点是 A、B、C 的三角形，记作：$\triangle ABC$。

三角形是平面几何中最重要的图形之一。

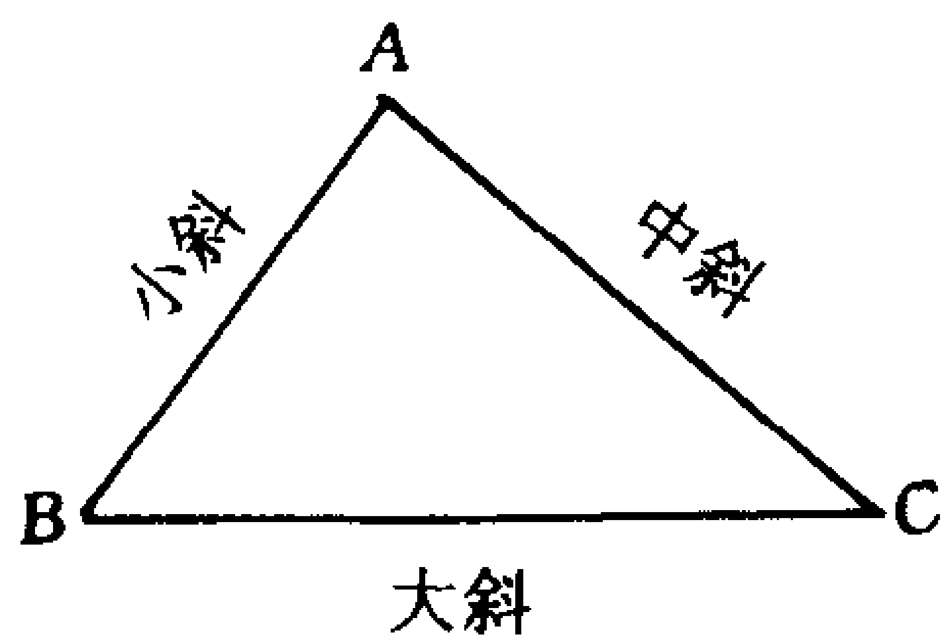


图 1

平面上的三角形推广到空间得到相应的图形是三面角。如图 2 中，从 $\triangle ABC$ 所在的平面 α 外的点 O 出发，作射线 OA，OB，OC，这三条射线及每两条射线间的部分所组成的图形叫做三面角，记作“$O—ABC$”，点 O 叫三面角的顶点，射线 OA，OB，OC 叫三面角的棱。

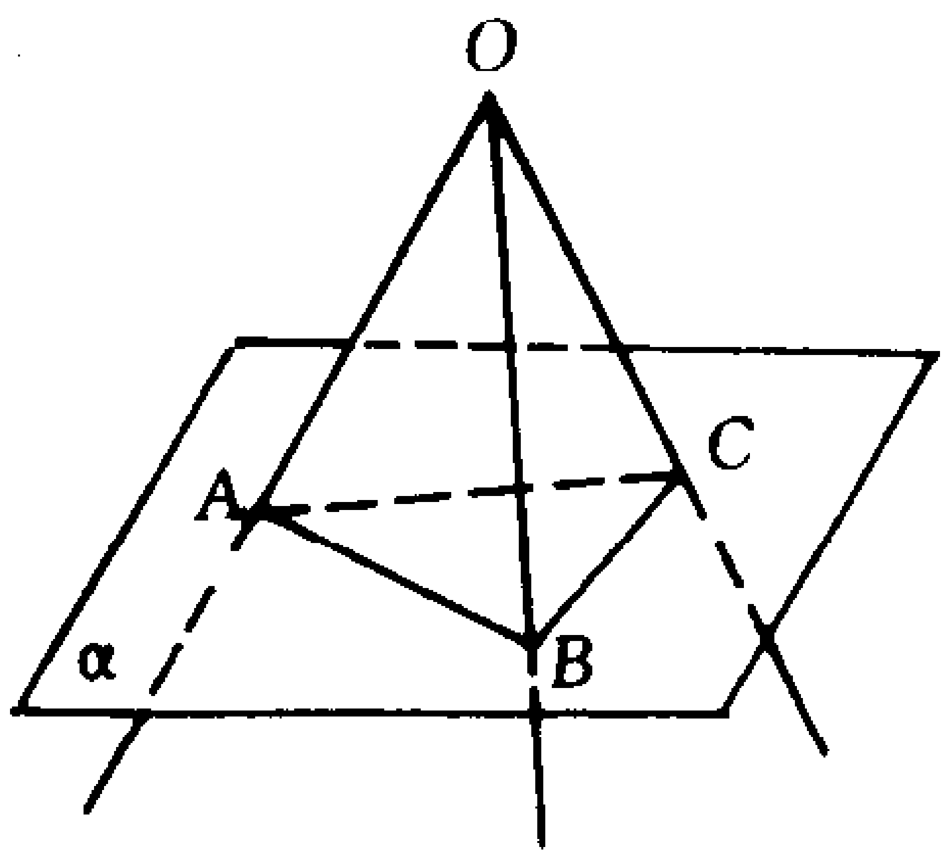


图 2

顺便提一下，在学习一元二次方程：$ax^2+bx+c=0$（$a\neq0$）时，曾经用过符号“Δ”表示一元二次方程根的判别式，即 $\Delta=b^2-4ac$，它是用与 Discriminant（判别式）的

第一个字母D相当的希腊字母“Δ”表示增量，此时不要读成“三角形”，而应读作“delta”。这是形状相近，但含义完全不同的两个符号。

在几何里，还有一种常见的图形叫做平行四边形，即两组对边分别平行的四边形。

“平行四边形”用符号“▱”表示，读作“平行四边形”。如图3中，平行四边形 $ABCD$，记作：▱$ABCD$。

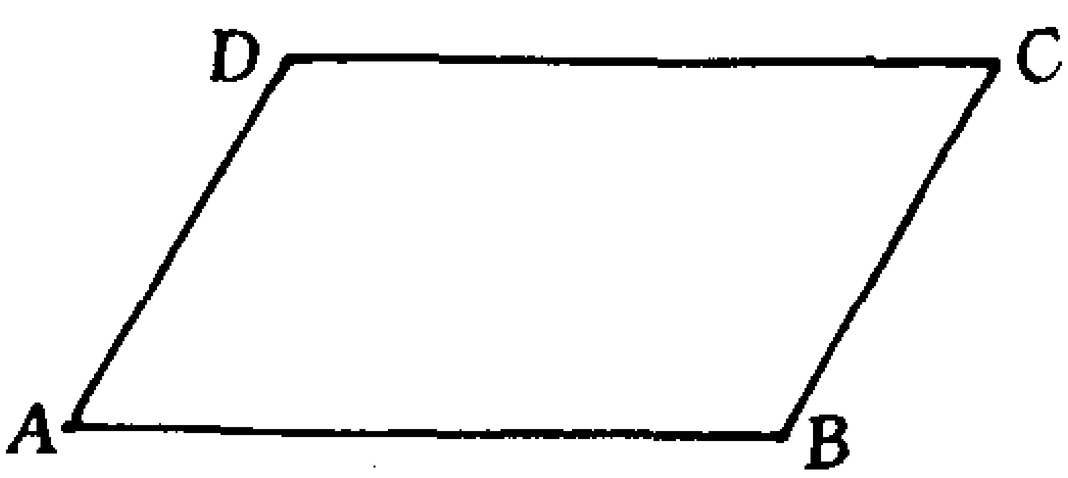


图3

前面提到的符号，如∠，⊥，//，$\underline{\underline{/\!/}}$，△，▱等，这些数学符号本身与它们所表示的图形，在形状上十分相似，叫做象形符号，应用它们可以代替繁杂的文字叙述，在论证和计算中，读、写、用都非常便利，节省了人们的思维劳动，增进了数学方法的功效。

Rt∠，Rt△　直角号，直角三角形号

你知道世界建筑史上的奇迹——金字塔吗？它和我国的万里长城一样，是世界上最著名的景观之一。

金字塔的塔基是一个很大的正方形，这么大的正方形是怎样画的呢？当然，在纸上画一个小正方形是很容易的，只要用绘图的三角板就行了。可是在地面上画一个边长是二百

三十多米的正方形，哪里有这么大的三角板呢？况且在公元前三千多年前，还没有绘图用的三角板呢！那时候所用的工具主要是绳子。我们知道正方形四条边的长度是相等的，但反过来，四条边的长度都相等的四边形不一定是正方形，正方形还必须四个角都是直角。

怎样才能确定出一个直角呢？

你听说过原始人用绳子打结记事的方法吗？

在远古时代，没有纸，也没有文字，人们做一件事就在绳子上打一个结子。古埃及人在建造金字塔时，就是用这种打结的绳子进行测量的。所不同的是，它所打的结子要把测绳分成许多相等的小段，他们发现用这种绳子围成的三角形，当三边的段数分别是 3、4 和 5 时，最长边所对的角是直角。

平角的一半叫做直角。

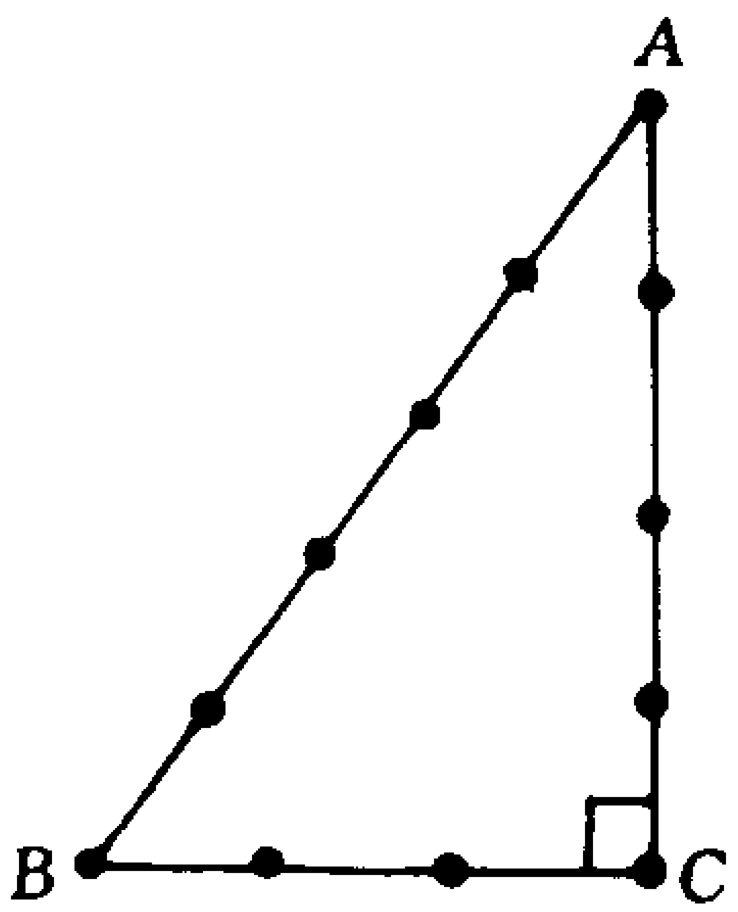


图 1

“直角”用符号“Rt∠”表示，这就是直角号。如图 1 中，“直角 ACB”，记作“Rt∠ACB”。有的书上也用符号“ ∟ ”或“ ⌊d ”来表示直角。

一个角是直角的三角形叫做直角三角形。“直角三角形”用“Rt△”表示，例如，“直角三角形 ABC”记作“Rt△ABC”。

中国是世界上最早的文明国家之一。

我国古代，把直角三角形的两条直角边叫做勾和股，斜

边叫做弦。在数学古书《周髀算经》中，曾记载了周公和商高的一段问答，其中谈到“故折矩，以为勾广三，股脩四，径隅五”。“勾广”就是勾长，“股脩”就是股长，“径隅”就是弦长。这句话的意思是说，如果将一根直尺折成一个直角，若短直角边的长为3，长直角边的长为4，那么斜边的长一定为5。在《周髀算经》中记载的荣方和陈子的问答中，谈到了由勾股求弦的一般方法“勾股各自乘，并而开方除之”。可见古代劳动人民已将勾股定理运用于生产实践之中。一般认为《周髀算经》成书于公元前1世纪，可见我国至少在二千一百年前就发现了勾股定理。

魏晋时的赵爽在《勾股圆方图》中说：“案：弦图，又可以勾股相乘为朱实二，倍之，为朱实四，以勾、股之差自乘为中黄实，加差实，亦成弦实。”这就是说，按弦图2，ab 等于两个直角三角形的面积，$2ab$ 等于四个直角三角形的面积，$(b-a)^2$ 是中间正方形的面积。把这四个直角三角形和一个正方形拼在一起，就得到一个边长是 c 的正方形。也就是$2ab+(b-a)^2=c^2$，化简以后，得到 $a^2+b^2=c^2$。在我国古代，这是一种多么新奇，多么美妙的数学思想方法啊！

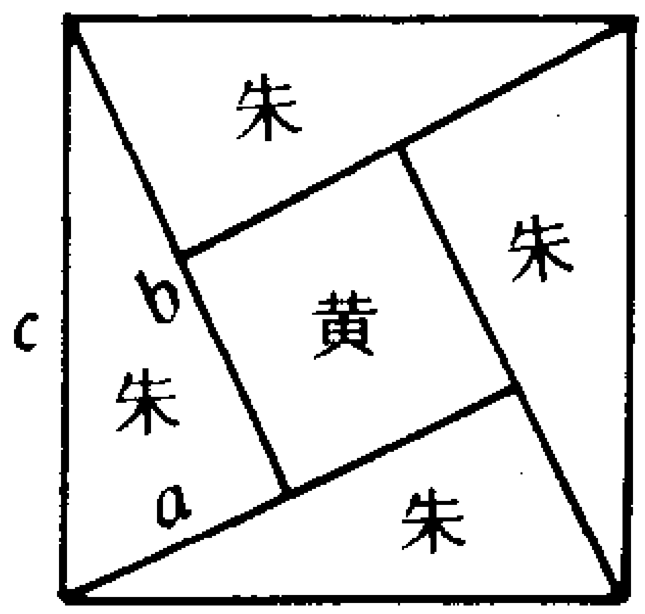


图 2

在西方，一般认为勾股定理是毕达哥拉斯首先提出的，也是毕达哥拉斯首先证明的。但是，毕达哥拉斯的证明方法早已失传，而西欧有史记载的最早的勾股定理的证明方法，是古希腊的几何学家欧几里得所作出的。毕达哥拉斯是公元前6世纪人，欧几里得是公元前4世纪末至公元前3世纪

人。从以上这些事实可以看出，商高等人早于毕达哥拉斯，而陈子至少是与毕达哥拉斯同时代的人。因此，我们把这个定理命名为勾股定理，以纪念我国古代数学家的功绩。

m，dm，cm，mm 米号，分米号，厘米号，毫米号

要量一块布的长短，可以用米尺来度量。这里所说的米，就是一个长度单位。

人类文化发展的初期，长度单位往往是人们在生活环境中取定的。有的以人体的某一部分长度为单位，也有的以某种实物为单位。

相传 1011 年，英国皇帝亨利曾用他的臂长为单位，定为一码，以成年人的足长为单位，定为一英尺。

我国历史上，曾用过“步”作为长度单位。有“一步合五尺，千步为一里”的说法。

以上这些天然的度量方法，显然是不科学的。人们在不断地探求更科学的长度单位。

1790 年，法国国民议会决定选择一套合于世界通用的度量制度。他们成立了以数学家拉格朗日等人为领导的委员会。该委员会决定采用巴黎子午线长度的四千万分之一为一个基本单位。1799 年，在数学家拉普拉斯的具体策划下，完成了测量和拟定工作。并准备了标准白金模型，在棒上刻了两条细线为刻度。规定在 0℃ 时，两条细线间的距离为 1 米。

为了记写单位方便，用字母“m”表示“米”。米是最基本的长度单位。

在公制长度单位里，米以下还有分米、厘米、毫米等长度单位，它们分别用“dm”“cm”“mm”表示。长度单位是十进制的，例如：

$1m=10dm$，

$1dm=10cm$，

$1cm=10mm$。

人们以长度单位为基础，能进一步表示面积单位和体积单位。

在公制单位里，面积用平方米、平方分米、平方厘米等为单位，它们分别用“m^2”“dm^2”“cm^2”表示。

面积单位是百进制的，例如：

$1m^2=100dm^2$，

$1dm^2=100cm^2$。

在公制单位里，体积用立方米、立方分米、立方厘米等单位，它们分别用“m^3”“dm^3”“cm^3”等表示。

体积单位是千进制的，例如：

$1m^3=1000dm^3$，

$1dm^3=1000cm^3$。

在实际应用中，要根据具体的情况，恰当地选用不同的度量单位。

° ′ ″ 度号，分号，秒号

古代的人们由于生产劳动的需要，早就注意研究天文和历法了。因为古代科学不够发达，长期误认为太阳和金星、木星、水星、火星、土星等一些星体，都沿着圆形轨道环绕

地球旋转。由于天文学的需要，要求计算太阳在一天内走过的圆弧长和转过的圆心角。那时把一年近似取作 360 天。这样太阳每天所转过的圆弧就是太阳圆形轨道的三百六十分之一。于是规定这一段圆弧所对的圆心角是 1 度的角。它是度量角的基本单位。

在几何学里，“度”用“°”表示，读作“度”。

为了适应更为精确的计算，将“度”的单位再细分下去，常见的分法是 2、3、4、5、6、10 和 12 等分。为了分得的结果是整数，需要取上述七个数的最小公倍数为 60，这样度以下自然采取了 60 进位制。把一度分成 60 等分，每一份叫做一分，“分”用“′”表示。再把一分分成 60 等分，每一份叫做一秒，“秒”用“″”表示。

用度、分、秒作单位，计量角的大小就精确得多了。例如，一个角是 32 度 25 分 30 秒，记作：$32°25'30''$。

印度的数学家们最先采用了“°”“′”“″”的符号，一直沿用到今天。

附带提一下，时间的单位是小时，它的$\frac{1}{60}$叫做 1 分，用“′”表示，1 分的$\frac{1}{60}$叫做 1 秒，用“″”表示。

有人可能要问：为什么时间也分成“分”“秒”等小单位呢？

时间的单位是小时，角度的单位是度。表面看来，好像是两种完全没有关系的量。但是仔细研究一下，两种量之间有着密切的联系。比如研究昼夜的变化，就要观察地球的自转，这时自转的角度和时间是联系在一起的，这里就不再详述了。

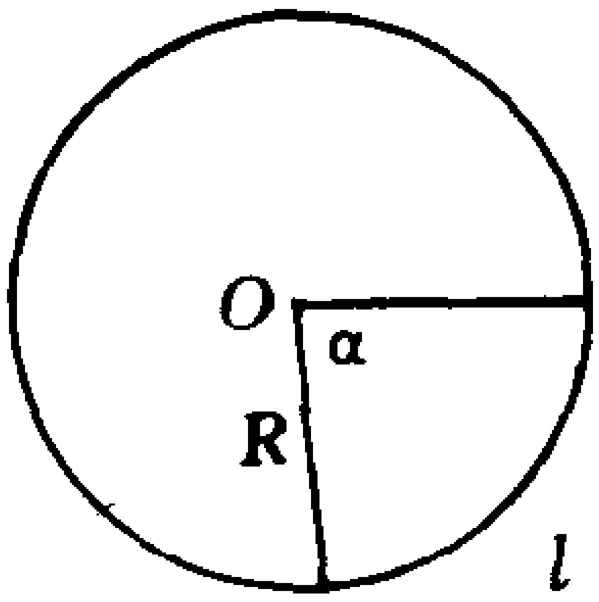


图 1

除了角度制外，另外还有一种度量角的制度，叫做弧度制。

对于一个角 α，如果以它的顶点为圆心，任意长 R 为半径作一个圆，如图 1，设角 α 所对的圆弧为 l，可以证明对于每一个确定的角，比值 $l:R$ 不随 R 的不同而改变。我们以 $l:R=1$ 时的角，即等于半径长的弧所对的圆心角，叫做 1 弧度的角。

弧度制是 1748 年由数学家欧拉首先引入的。

用弧度来度量角的时候，“弧度”两字通常省略不写。例如把 $90^\circ=\frac{\pi}{2}$弧度，简记为 $90^\circ=\frac{\pi}{2}$，但仍读成“90°等于$\frac{\pi}{2}$弧度”，否则前者是名数，后者是不名数，就不能用等号连结起来。比如，$\angle AOB=2$ 不能说明$\angle AOB$ 的大小，这正像线段 $AB=5$ 不知道 AB 有多长一样。因此，弧度单位省略不写只能看作是一种约定，即凡是角的量数不带单位的，就认定单位是弧度。不写“弧度”两字，只是在不引起混淆的情况下约定的简便写法而已。

⇒，⇔　推出号，等价号

初学几何的人，大都对证明题感到头疼。传统的“三段论”格式，使书写过程繁琐，证明的思路不畅。

那么，有没有更好的论证格式呢？

有，这就是推出号“⇒”的运用。

“⇒”是逻辑学的一个符号，表示根据左边的条件，推出右边的结论。它与“由 A 推出 B”“如果有 A，那么有 B”意义是相同的。数学里借用符号“⇒”表达因果关系时，条理清楚，层次分明，有利于表达定理的题设和结论。但是，应用“⇒”时，要注意以下几点：

首先，由一个条件推出几个结论时，要写成直列，并在左边用大括号括起来。例如：

$$\square ABCD \Rightarrow \begin{cases} AB = CD, \\ AB \parallel CD。\end{cases}$$

不要写成：$\square ABCD \Rightarrow AB = CD$，$AB \parallel CD$。

其次，由几个条件推出某一个结论时，要把题设中的全部条件，逐个分成几行写成直列，并在右边用大括号括起来。例如：

$$\left.\begin{array}{l} AB = CD \\ \angle 1 = \angle 2 \\ \angle 3 = \angle 4 \end{array}\right\} \Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle COD。$$

最后，有些问题的证明过程较长，论证中需要转行时，要把“⇒”放在结论的前面。例如：

$$\square ABCD \Rightarrow \left.\begin{cases} AB = CD, \\ AB \parallel CD \Rightarrow \begin{cases} \angle 1 = \angle 2 \\ \angle 3 = \angle 4 \end{cases} \end{cases}\right\}$$

$$\Rightarrow \triangle AOB \cong \triangle COD \Rightarrow \begin{cases} AO = CO, \\ BO = DO。\end{cases}$$

如果 $A \Rightarrow B$，同时又有 $B \Rightarrow A$，可以用符号“⇔”表示，读作“等价于”。

例如，$a > b \Leftrightarrow b < a$。

符号“⇒”和“⇔”，把传统的三段论推理格式中的∵，∴省

去，使证明过程的整体感加强了，更容易理清证明的思路。

∽ 相似号

我国国旗上的大五星和小五星一样不一样呢？

说一样，对。它们都有五个角，每个角都是36°，颜色都是黄色的。

说不一样，也对，因为一个大，一个小。

这种情况，在数学里就能说清楚了。这种形状相同，大小不相等的两个图形叫做相似形。

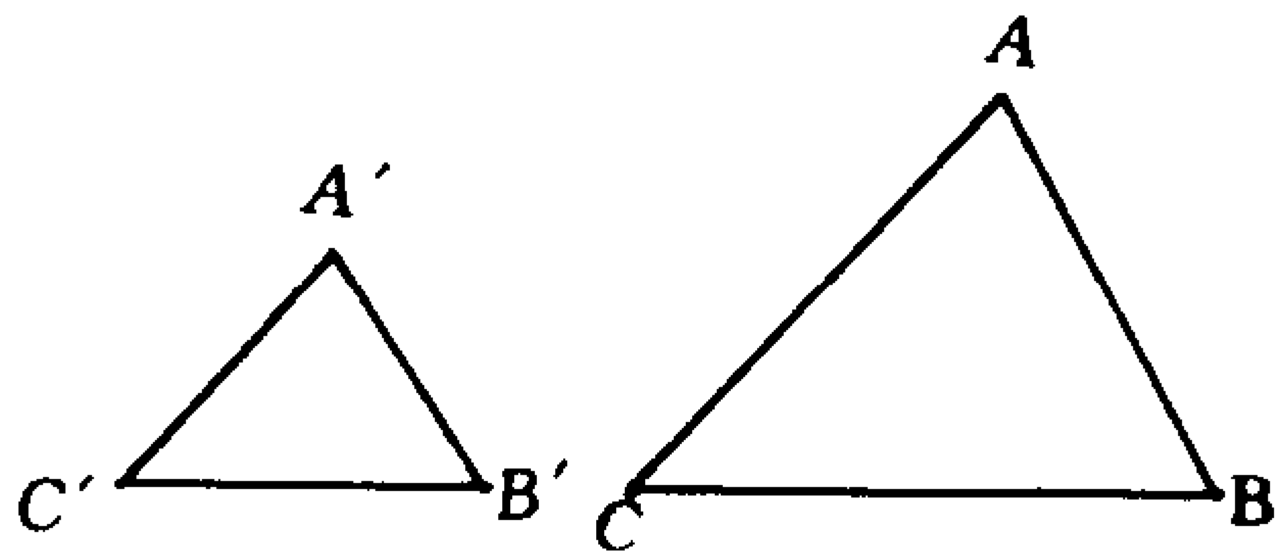
说得更准确一些，两个多边形，要是对应角都相等，对应边都成比例，叫做相似多边形。

“相似”用“∽”表示，读作“相似于”。

数学家莱布尼兹在研究相似问题时，产生了一个奇妙的想法：他把拉丁字母S横放过来，首创了相似号“∽”，大家应用起来非常得心应手。

如图中的$\triangle ABC$相似于$\triangle A'B'C'$，记作：$\triangle ABC \backsim \triangle A'B'C'$。

用“∽”表示两个三角形相似时，对应顶点的字母要写在对应的位置上，这样相似三角形的对应边和对应角就一目了然了。



用“∽”表示三角形相似时，还要遵守三条规矩：

(1) $\triangle \text{I} \backsim \triangle \text{I}$ （自己和自己相似——反身性）；

(2) $\triangle \text{I} \backsim \triangle \text{II}$，则$\triangle \text{II} \backsim \triangle \text{I}$ （对称性）；

(3) $\triangle \text{I} \backsim \triangle \text{II}$，$\triangle \text{II} \backsim \triangle \text{III}$，则$\triangle \text{I} \backsim \triangle \text{III}$（传递性）。

人们对相似三角形的研究，历史非常悠久。早在两千多年前，希腊数学家泰勒斯就利用相似原理，测量过金字塔的高度。

我国数学家刘徽除了注解《九章算术》外，还撰写了《重差术》一书。“重差”就是利用标竿，绳索或矩进行复杂的测量，再根据相似三角形原理来计算的方法。

刘徽看了东汉时期的一部算学书后说，有一种名叫重差的算法，开始他还不知道这是什么算法，后来学到了周代官员测算太阳高、远的方法，这才明白凡是“望极高、测其远”的测量方法就是重差。刘徽把周代官员测太阳的方法加以改编和推广，举出了九个典型的例题，写成了《重差术》。因为本书开头的第一个问题是测量海岛高度和距离的问题，所以又称为《海岛算经》。书中第一题的原文是这样的：

今有望海岛，立两表齐高三丈，前后相去千步，今后表与前表参相直，从前表却行一百二十三步，人目着地取望岛峰与表末参合，从后表却行一百二十七步，人目着地取望岛峰与表末参合，问岛高及去表各几何?

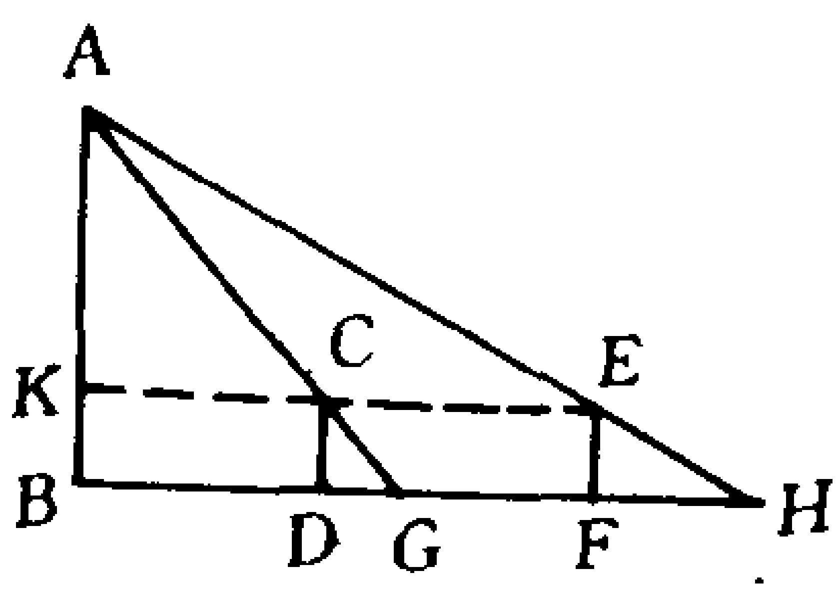


图 1

把上面这个问题译成现代汉语的意思是：如图 1，为了求出海岛上山峰 AB 的高度，在 D 和 F 处树立标杆 DC 和 EF，标杆的高度都是 3 丈，

相隔1000步（1步等于5尺），并且AB、CD和EF在同一平面内，从标杆DC退后123步到G处，可看到山峰A和标杆顶点C在一直线上；从标杆EF退后127步到H处，可看到山峰A和标杆顶端E在一直线上，求山峰的高度AB及它和标杆的水平距离BD各是多少？

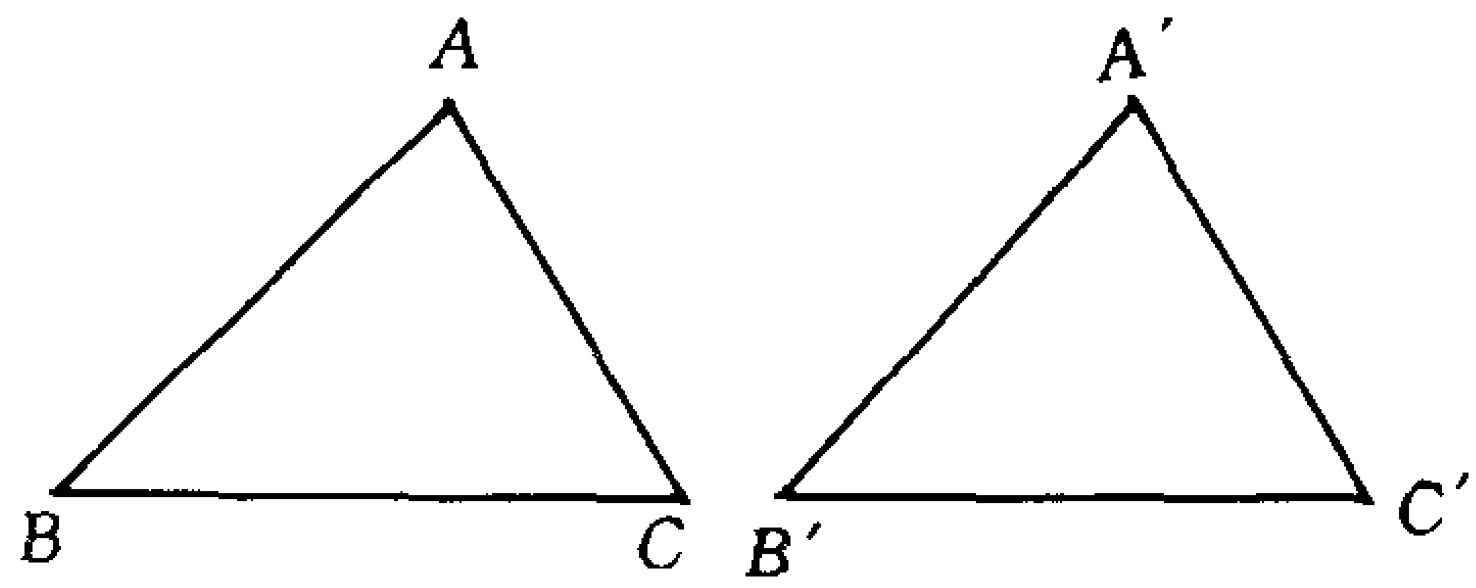
刘徽用“重差术”计算出岛高AB为1506步，和标杆的水平距离BD为30750步。

《重差术》就是一部利用相似三角形的原理，测量远处目标的高、深、广、远的数学著作。

≌ 全等号

在摄影部里，用同一张底片冲洗出两张照片，把这两张照片放在一起，能够完全重合。

能够完全重合的两个图形叫全等形。



“全等”用“≌”表示，读作“全等于”。

如图$\triangle ABC$和$\triangle A'B'C'$全等，记作：

$\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$。

数学家莱布尼兹在研究两个图形全等时，曾这样想过：

“=”能表示线段的长度相等，角的大小相等……符号“∽”又能表示两个图形相似，能不能用合成符号“≌”表示全等呢？

于是，莱布尼兹首先创用了全等号≌。这个符号由两部分合成：上面的“∽”表示两个图形相似，下面的“=”表示两个图形等积。它反映了两个全等形既形状相同，又大小相等的本质。

使用≌表示两个三角全等时，也要遵守三条规矩：

(1) △Ⅰ≌△Ⅰ（反身性）；

(2) △Ⅰ≌△Ⅱ，则△Ⅱ≌△Ⅰ（对称性）；

(3) △Ⅰ≌△Ⅱ，△Ⅱ≌△Ⅲ，则△Ⅰ≌△Ⅲ（传递性）。

判定两个三角形全等，是平面几何的重要内容之一，有一系列的公理。应用它们证明两个三角形全等时，规定了一些简记符号。例如：

通常用“S”代表三角形的边，它是拉丁文 Side（边）的第一个字母；

用字母“A”代表三角形的角，它是拉丁文 Angle（角）的第一个字母。

在这种约定下，许多公理可以简记为：

“SAS”代表边角边公理；

“ASA”代表角边角公理；

“SSS”代表边边边公理；

“HL”代表斜边直角边公理。

巧妙地采用这些简记符号，在表达两个三角形全等的规律时，比文字叙述要简明得多。

$\overset{m}{=}$ 度数相等号

要比较$\angle AOB$和$\angle A'O'B'$的大小，可以把一个角移放到另一个角上去，要是它们能够完全重合，记作：$\angle AOB = \angle A'O'B'$，如图1。

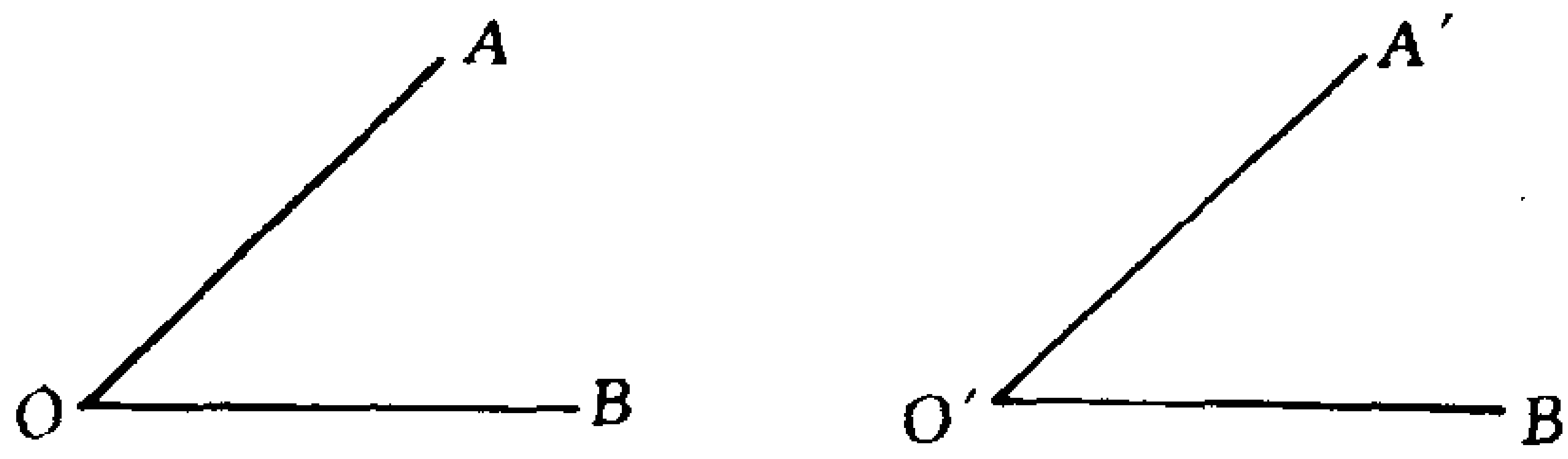


图1

但是，弧与弧或者角与弧之间能不能用“＝”连接呢？

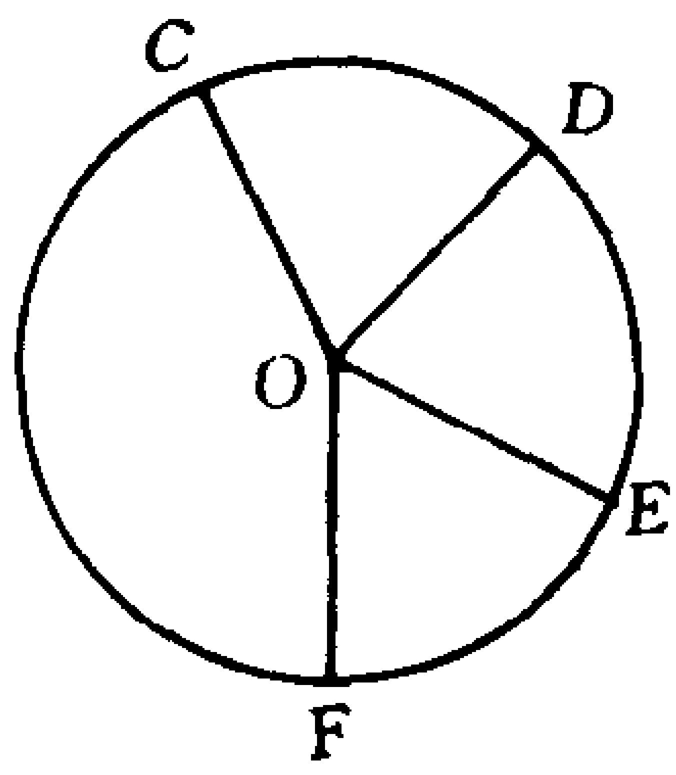


图2

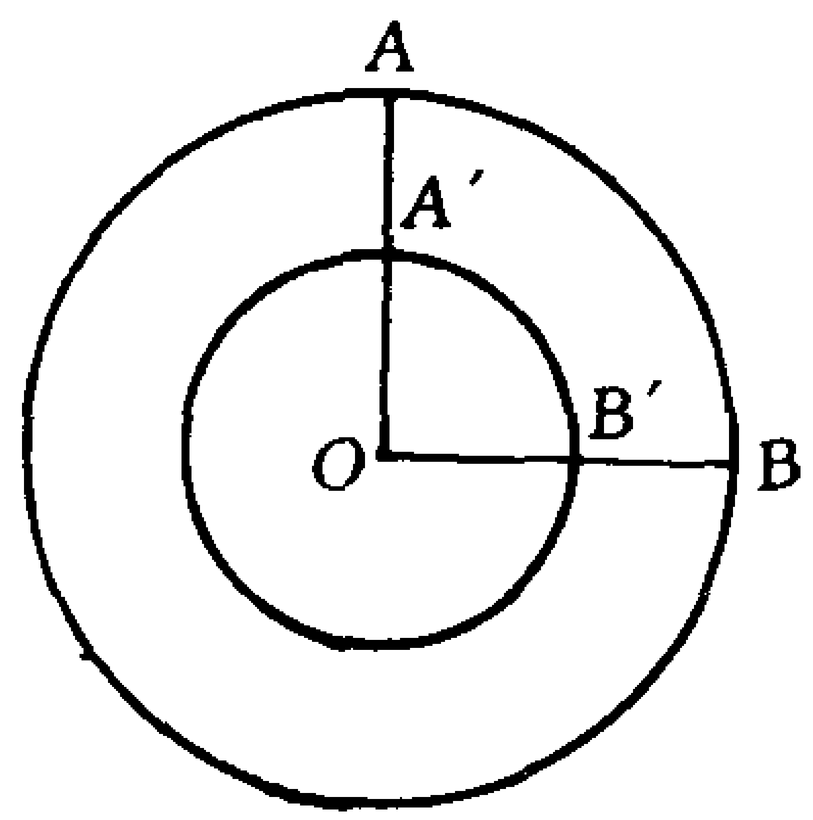


图3

在图2中，如果$\angle COD = \angle EOF$，那么，$\overset{\frown}{CD}$和$\overset{\frown}{EF}$不仅度数相等，而且弧长也相等，在这种情况下，记作：$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{EF}$。

在图 3 中，$\overset{\frown}{AB}$和$\overset{\frown}{A'B'}$虽然都是含 90°的弧，但它们的弧长显然不相等，不能写成：$\overset{\frown}{AB}=\overset{\frown}{A'B'}$。

由此可知，不等圆中的两条弧，即使是度数相等，也不能用“=”连接起来。

为了解决这个难题，人们又引进了符号“$\overset{m}{=}$”，专门表示“度数相等”。例如图 3 中$\overset{\frown}{AB}\overset{m}{=}\overset{\frown}{A'B'}$。

再看角与弧之间又有什么情况呢？

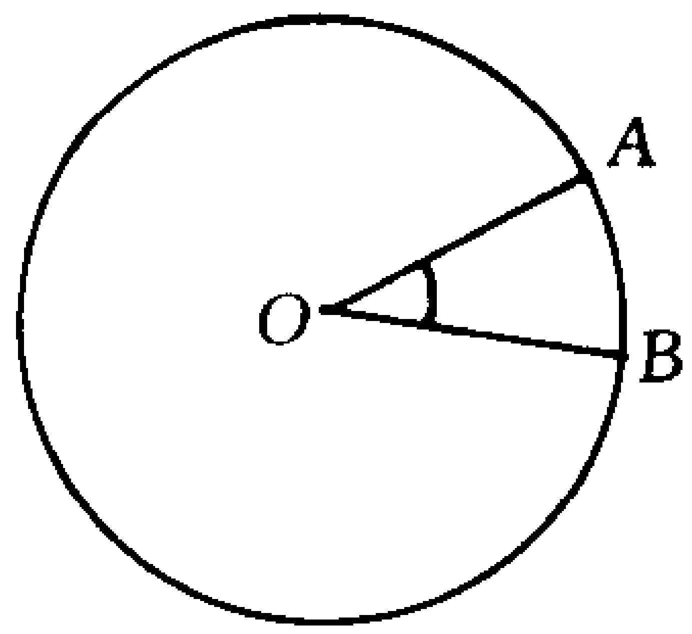


图 4

在图 4 中，设$\overset{\frown}{AB}=30°$，那么$\angle AOB=30°$，能否写成：$\angle AOB=\overset{\frown}{AB}$呢？不能！

因为就图形来说，前者是角，后者是圆弧，两种不同的图形之间，不可以用“=”连接，只能写成：$\angle AOB\overset{m}{=}\overset{\frown}{AB}$。

等号“=”上面添上字母 m，成了度数相等号“$\overset{m}{=}$”，它是“=”的延伸和拓广。

⊙，⌒　圆号，弧号

圆是最常见的曲线之一。

人类居住的地球是圆的，给地球光和热的太阳是圆的。自然界里充满了圆。

当人们撇开了各种具体的圆形物体时，就萌发了圆的概念。

我国春秋战国时代的《墨经》一书中说：“圜，一中同长也。”古代的“圜”字就是圆的意思。这句话的含义是：圆有唯一的中心，这个中心到圆上各点都是一样远。这就是圆的一般定义。

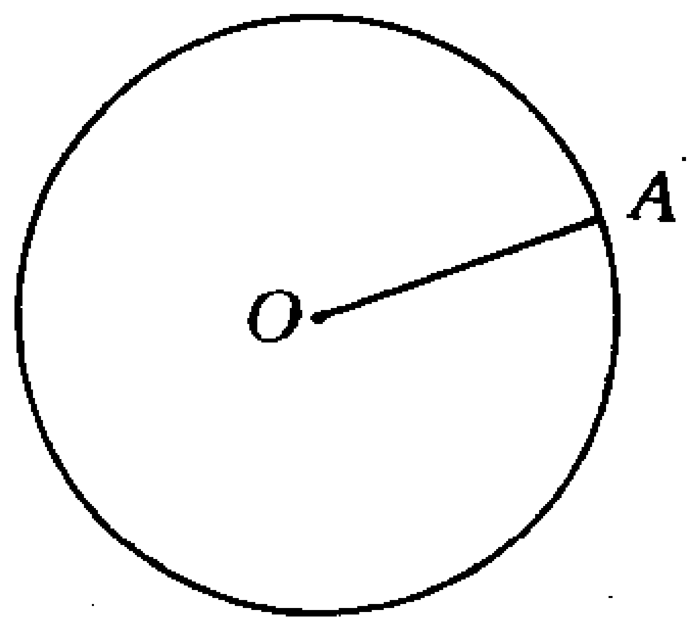


图 1

如图 1，一条线段 OA，绕着它的端点 O 旋转一周，另一个端点 A 所经过的封闭曲线叫做圆。

“圆”用“⊙”表示，这个符号形象地反映了圆的特点。如图 (1)，以 O 为圆心的圆，记作：“$\odot O$”。

我国古代劳动人民不仅有了圆的概念，还创造了两足规画圆的工具。《墨经》中又说：“轮匠执其规矩，以度天下之方圆。”这里所提到的“规”，就是指画圆的工具。

一千多年前，我国隋代建造了赵州石拱桥，它的桥拱是圆弧形的，拱高为 7.2 米，跨度为 37.4 米。这里提到的“圆弧”是圆上任意两点间的部分。

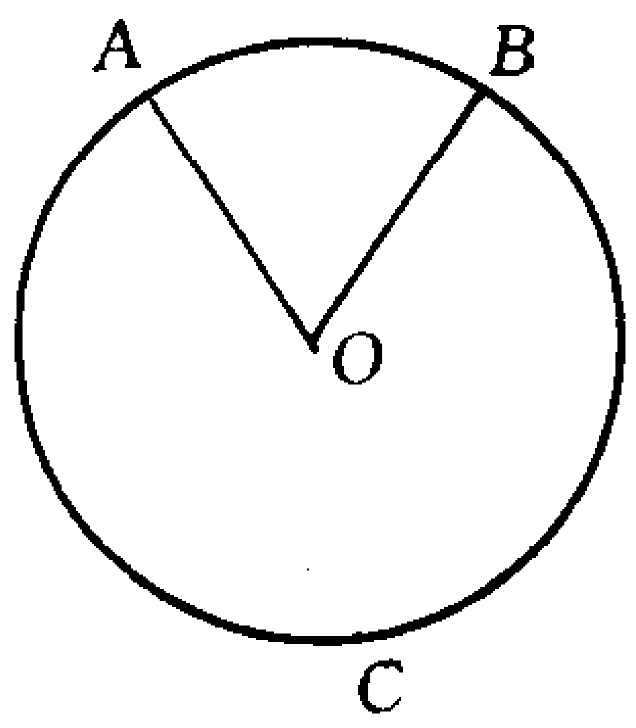


图 2

“圆弧”用“⌒”表示，读作“弧”。

如图 2 中所示：以 A、B 为端点的弧，把圆周分成两部分，如果一条弧比半圆大叫做优弧，这时需用三个大写字母表示，记作：$\overset{\frown}{ACB}$。

小于半圆的弧叫做劣弧，可用两个大写字母表示，记作：$\overset{\frown}{AB}$，其中 A、B 为弧的端点。

符号“⊙”“⌒”形象地反映了圆和弧的特点，是几何中常见的象形符号。

在空间里，把半圆以它的直径为旋转轴，旋转所成的曲面叫做球面。球面所围成的几何体叫做球体，简称为球。

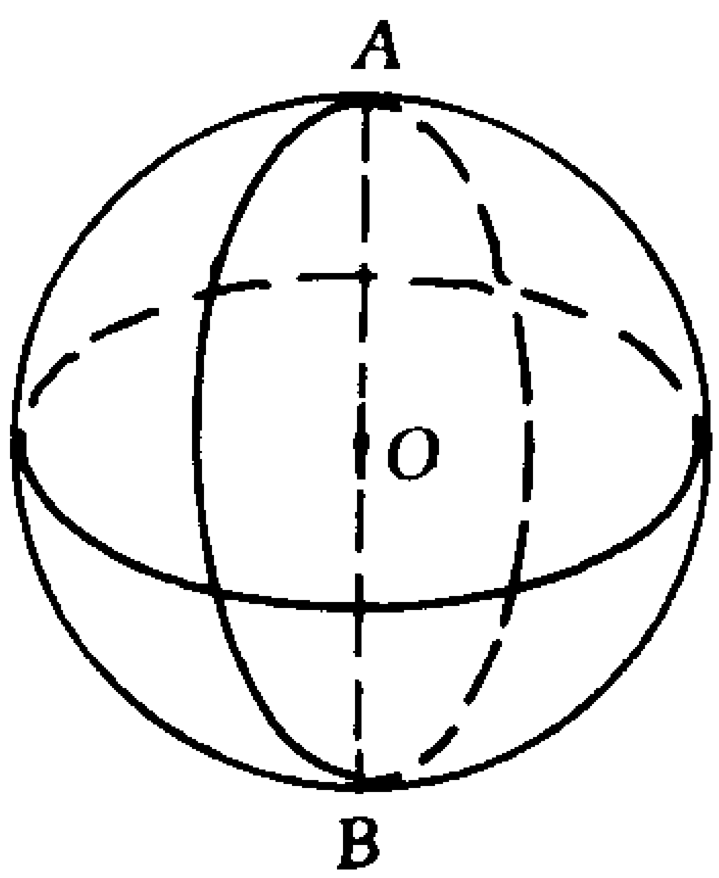


图 3

在图 3 的球中，点 O 是球心，用符号表示一个球，是先写一个“球”字，后面接着写上表示它的球心的字母就可以了，例如球 O。

在平面上，圆可以看作与定点（圆心）的距离等于定长（半径）的所有点的集合。在空间里，球面也可以看作与定点（球心）的距离等于定长（半径）的所有点的集合。因此，在球面上两点之间的最短距离，就是经过这两点的大圆在这两点间的一段劣弧的长度，这个弧长叫做两点间的球面距离。飞机、轮船都是尽可能以大圆弧为航线航行。

π　圆周率号

人们在长期和圆打交道的过程中，开始思考一个问题：圆中包含着两个长度，一个是直径的长，另一个是圆周的长，两者之间有没有一定的联系呢？

从实验和研究中发现：在各种大小不同的圆中，周长和

直径的比都相等，所以把圆的周长与它直径的比叫做圆周率。

“圆周率”用符号“π”表示，这里 $\pi=3.14159\cdots$，它和常数 e 一样，也是数学中一个重要的常数。

我国古代数学家对圆周率的研究，做出过杰出的贡献。

在最早的数学书《周髀算经》中已谈到“径一而周三”，就是说 $\pi=3$，这种说法历代相传，后人称之为“古率”。

取 π 为 3，误差很大，越来越不能满足科学、生产的需要，人们开始探索比较精确的圆周率。西汉历算学家刘歆受王莽之命作铜斛，由计算容积而推算得 $\pi=3.1547$。从这里可以看出，刘歆是圆周率发展史上第一个改正“古率”的人。后人称 $\pi=3.1547$ 为“歆率。”

东汉时代的张衡是一位天文学家，他通过计算球的体积推得 $\pi\approx3.1622$，称为“衡率”。

魏晋时的数学家刘徽，在探求圆周率方面有过特殊的贡献。他在《九章算术注》里，首创了“割圆术”。割圆就是在圆周上截取等分点，然后顺次连结各等分点，便组成了内接正多边形。刘徽说：“割之弥细，所失弥少，割之又割，以至不可割，则与圆合体无所失矣。”意思是说，等分圆周越细，内接正多边形的面积就越接近圆的面积，只要这种分割无限进行下去，就可以获得圆的面积值。刘徽从圆内接正六边形起，推到圆内接正一百九十二边形得出：

$$3.14\frac{64}{625}<\pi<3.14\frac{169}{625}。$$

他求出圆周率的近似值为：$\pi=\frac{157}{50}$，$\pi=\frac{3927}{1250}$，后人称之为“徽率”。刘徽的功绩主要不在于得出了徽率，而是提出

了求圆周率的一个基本的方法——割圆术。

南北朝时代的数学家祖冲之，在研究天文历法的过程中，认为“徽率”仍嫌不够精确，在刘徽割圆术的基础上，运用“缀术”，获得了精确度更高的圆周率的近似值，得出 π 的值在 3.1415926 与 3.1415927 之间。这是世界上最早的七位小数的精确值。他提出了两个分数值：一个叫约率，取 $\pi=\frac{22}{7}$；另一个叫密率，取 $\pi=\frac{355}{113}$。祖冲之的约率与古希腊阿基米德所得的圆周率相同，但密率在欧洲到 1000 多年以后，才为德国人奥托和荷兰人安托尼兹推算出来。为了纪念祖冲之的功绩，有的外国数学史专家建议把 $\pi=\frac{355}{113}$叫做“祖率”。

祖冲之的圆周率是当时首屈一指的 π 的近似值。如果用它来计算半径为 10 千米的圆的面积，其误差不会超过几个平方厘米。然而，采用直接求正多边形周长或面积的办法来近似地求圆的周长或面积，毕竟有很大的局限性。在 1596 年，荷兰数学家鲁尔道夫用这个方法求出圆周率的近似值达小数点后 35 位数字，几乎把他的精力拖垮了，他嘱咐他的孩子，在他死后，要把鲁尔道夫计算的圆周率刻在他的墓碑上。后人为了纪念他，把这个圆周率的近似值叫做鲁尔道夫数。

圆周率号 π，是希腊文 περτφερετα（圆周）的第一个字母。1600 年英国的威廉·奥托兰特首先使用$\frac{\pi}{\delta}$表示圆周率，他的理由是因为 π 是希腊文圆周的第一个字母，而 δ 是希腊文直径的第一个字母，根据圆周率的定义，$\frac{\pi}{\delta}$理应表示圆

周率。但是在推算圆周率的过程中，常选用直径为 1 的圆，这时 $\delta=1$，于是$\frac{\pi}{\delta}$自然等于 π 了。1706 年英国数学家琼斯首先用字母“π”表示圆周率，然而也是由于当时数学家欧拉继而用之的缘故，这样 π 才被作为圆周率的符号使用至今。

圆周率计算上的重大突破是以寻求 π 的解析式开始的。近代常采用高等数学中的级数做工具来进行计算。

自电子计算机出现后，计算圆周率的记录不断地诞生。

1947 年，美国电脑 ENIAC，仅花了 70 个小时，就将 π 算到小数点后 3037 位；1981 年，日本数学家利用大型计算机，仅花费 143 小时就将 π 算到小数点后 200 万位，创造了新的世界纪录。根据最新公布的资料表明，日本东京大学大型计算机中心的教授田康正和助手高桥大介，历时 37 小时，将圆周率演算到小数点后 515.396 亿位，大大超过了他们两年前创造的小数点后 64 亿位的世界纪录。

1882 年，德国数学家林德曼证明了圆周率 π 是一个无理数。

$\overrightarrow{AB}$ 向量号或矢量号

设有一个飞行中的火箭，从 A 到 B 行驶了 30 千米的路程，到达 B 处后突然改变飞行方向，沿着与原方向成直角的方向又行驶了 40 千米到达 C 处。试问火箭飞行的路程和位移各是多少？

如图 1 所示。火箭从 A 到 B 驶过 30 千米，从 B 到 C

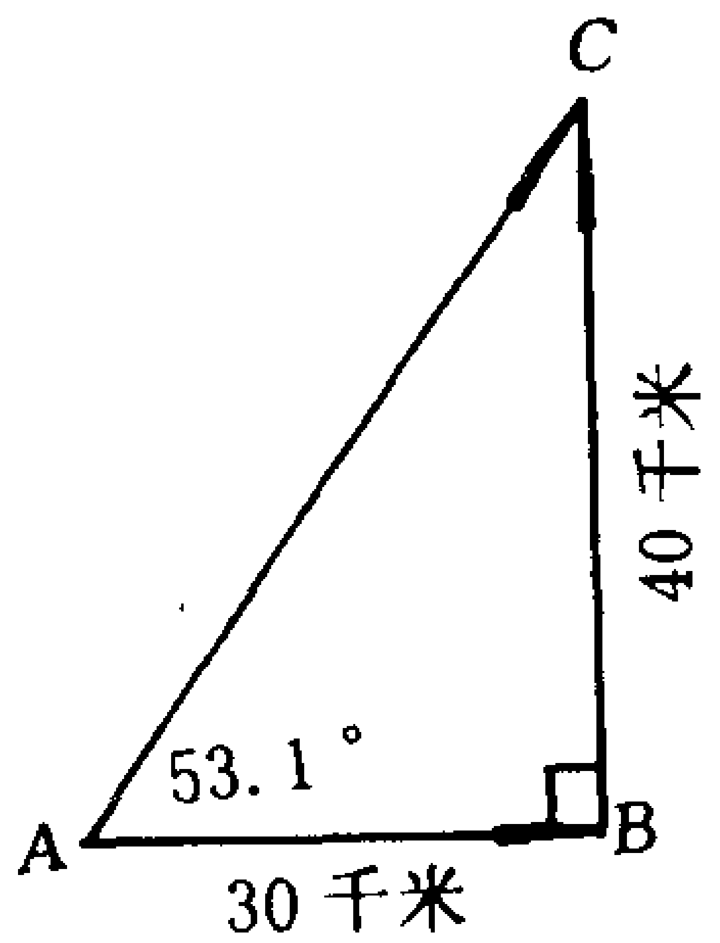


图 1

驶过 40 千米，因此，从 A 到 C 的路程是 50 千米。这个总路程是仅有大小的量，叫做数量。再如温度、时间、质量、面积之类的量都是数量。

能不能说位移是 50 千米呢？

不能这样说。

因为火箭从 A 到 C 的位移，包含了两种因素：首先位移和 AB 约成 53.1°的角度，其次，A、C 两点的距离是 50 千米。

由此可见，位移是既有大小，又有方向的一种量，叫做向量或矢量。

向量和数量有不同的运算规律，我们所采用的符号必须清楚地区别出哪些是数量，哪些是向量。

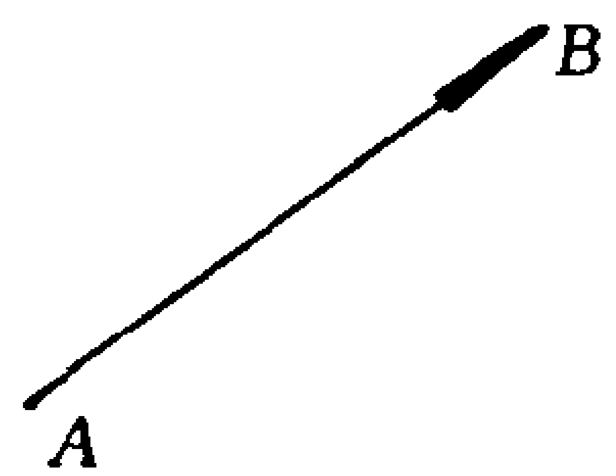


图 2

向量常用有向线段表示，线段的长度就是这个向量的绝对值，线段的方向用箭头表示就是向量的方向。如图 2 中，"向量 AB"，用符号"$\overrightarrow{AB}$"表示，它代表了起点在 A，终点在 B 的向量。

从图 1 中不难看出：除了向量$\overrightarrow{AC}$外，从 A 到 B 和从 B 到 C 的两个位移也都是向量，分别表示为$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{BC}$。

有时还用一个字母上面加上箭头"→"的方法表示向量，比如向量$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 等。

运用向量的记法，可以表示向量的加、减等基本运算。例如，两个不共线的向量$\vec{a}$，$\vec{b}$ 相加是这样进行的：

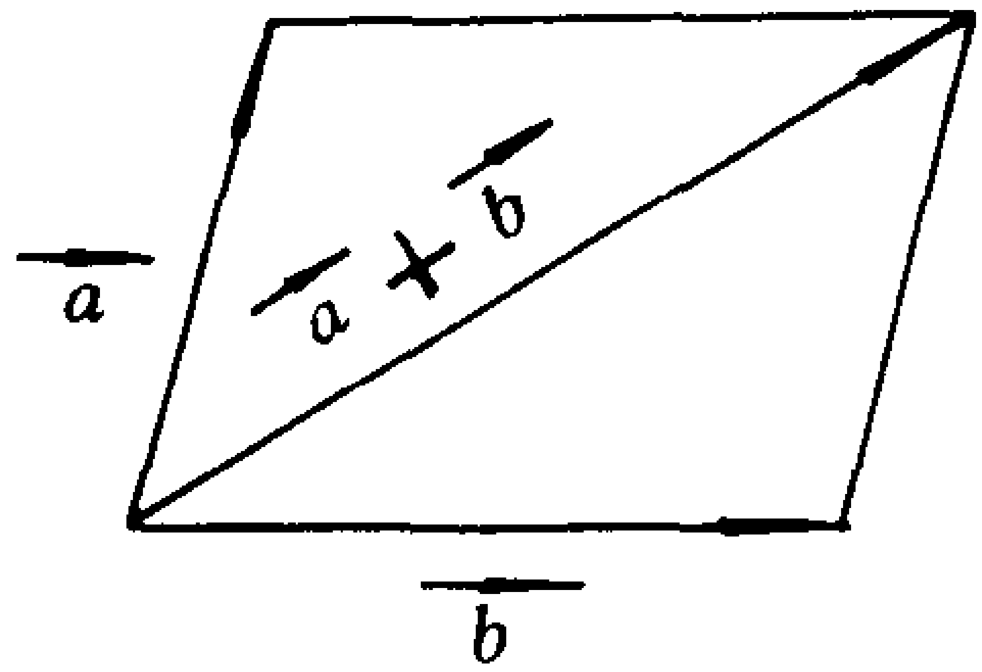
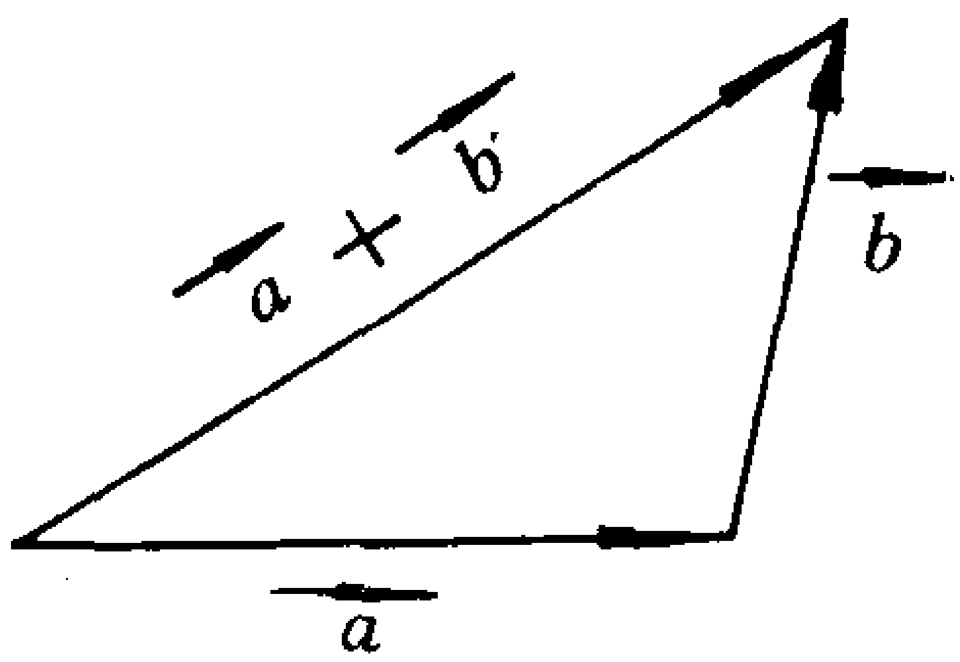


图 3



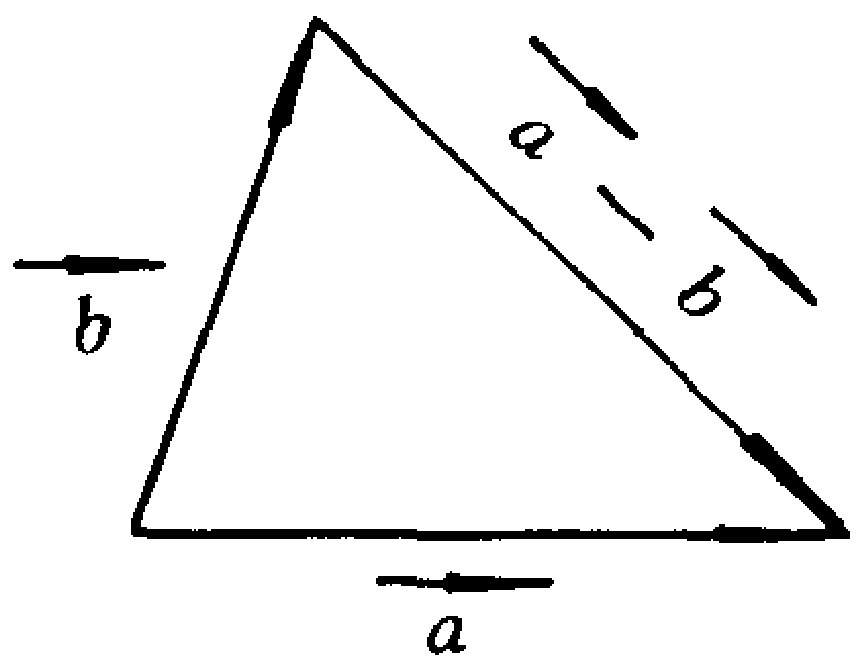


图 4　　图 5

如图 3，把 $\vec{a}$ 和 $\vec{b}$ 的起点放在一起，以 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 为邻边作平行四边形，在这个平行四边形中和 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 同起点的对角线向量即是 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的和，记作：$\vec{a}+\vec{b}$。

如图 4 中，两个向量的和还可以用另外一种方法得到，把 $\vec{b}$ 的起点移到 $\vec{a}$ 的终点，那么以 $\vec{a}$ 的起点为起点，以 $\vec{b}$ 的终点为终点的向量就是 $\vec{a}+\vec{b}$。

同样，如图 5 中，把 $\vec{a}$、$\vec{b}$ 的起点放在一起，由 $\vec{b}$ 的终点到 $\vec{a}$ 的终点的向量是 $\vec{a}-\vec{b}$。

向量是电学、力学、运动学许多现代科学技术的重要工具，不少实际问题用向量解决十分方便。例如在电路计算中，要对几个交流电进行加法运算。例如，已知

$$i_1 = I_{m1}\sin(\omega t+\varphi_1),$$

$$i_2 = I_{m2}\sin\ (\omega t + \varphi_2),$$

求 i_1 和 i_2 的合成电流 i。

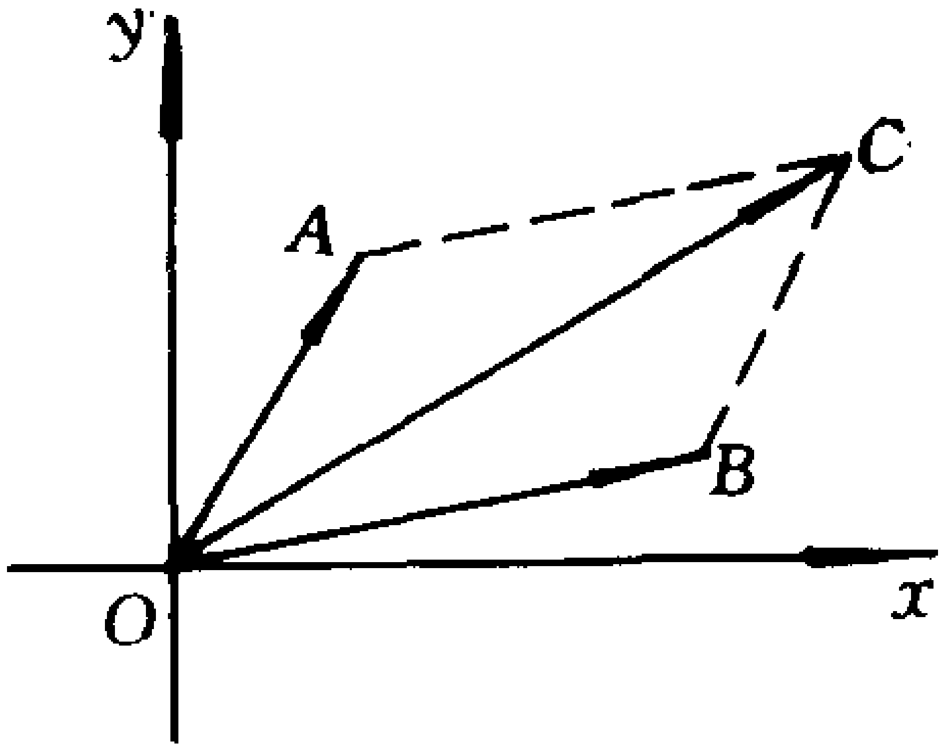


图 6

如果这里不用向量的知识，则要作出 i_1 和 i_2 的曲线，然后用图象的叠加法，求出合成电流 i 的曲线，这种做法是很麻烦的。

如果利用向量加法，如图 6 中在同一坐标系 xOy 中，分别画出代表 i_1 和 i_2 的向量$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，然后依向量的加法合成向量$\overrightarrow{OC}$。这里，$\overrightarrow{OC}$就代表了合成电流 i 的旋转向量，显然，这种计算方法十分简便。

$P(x,y)$ 点的坐标号

在日常生活中，有许多“点”和“数”互相联系的例子。

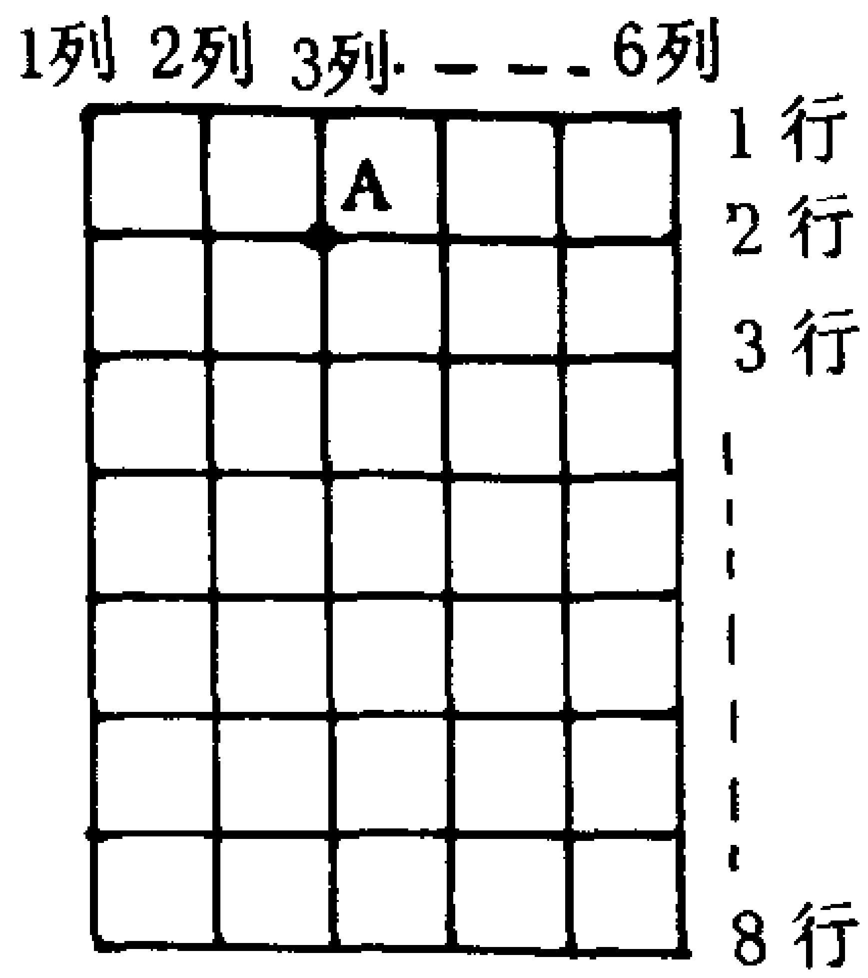


图 1

如图 1 是高一（5）班的座次表。由前向后依次是 1 行到 8 行；由左向右依次是 1 列到 6 列。

这样，每一个同学的位置，可以由两个数来确定。比如说同学 A 在第二行，第三列，他可以由 2 和 3 这

两个数完全确定。

人们按照这种一一对应的想法，建立了数学上常用的平面直角坐标系。

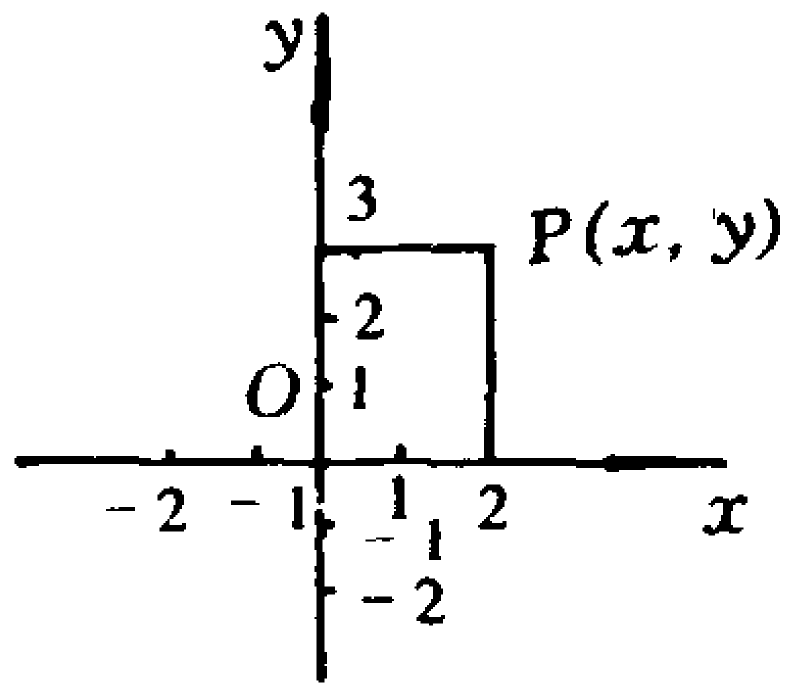


图 2

在平面上画两条互相垂直的直线，交点 O 叫做原点。在每条直线上都指定一个正方向，并规定一个长度单位，作为这两条有向直线的共同单位。一条直线如具备了原点、方向、单位，就成了一条数轴。两条互相垂直的数轴组成一个整体，叫做平面直角坐标系。在图 2 中，从平面上任意一点 P 向 x 轴作垂线，它在 x 轴上对应的数 x 叫做点 P 的横坐标；从 P 点向 y 轴作垂线，它在 y 轴上对应的数 y 叫做点 P 的纵坐标。人们把点 P 对应的有序实数对 (x, y) 叫做点 P 的坐标，用符号"$P(x, y)$"表示，这就是点的坐标号。在 $P(x, y)$ 中，括号里写在前面的一个数表示它的横坐标，写在后面的一个数表示它的纵坐标，中间用逗号分开。建立了平面直角坐标系后，使平面上的任意一个点和一对有序实数建立了一一对应的关系。

关于坐标的思想，在人类认识史上起源是很早的。我国早就有由两个数据表示星星位置的方法。古希腊托勒密研究地理时所用到的经纬度，都具有坐标的原始概念。14 世纪中叶，法国人奥雷姆为了用图象来显示温度的变化，就提出了坐标轴的概念。此后，德国数学家维叶特为了确定直线上点的位置，设想了横坐标。文艺复兴后，随着航海事业的发

展，需要确定轮船在大海中的位置，更推动了坐标概念的产生。

运用坐标的思想，把代数方法用到几何上的代表人物，要算是法国数学家笛卡儿了。他曾这样设想：只要几何图形看成是动点运动的轨迹，就可以把几何图形看成是由具有某种共同特性的点组成的。例如，我们把圆看成是一个动点对定点 O 作等距离运动的轨迹，也就是可以把图形看作是由无数个到定点 O 距离相等的点组成的。

笛卡儿的基本思想是：在平面上建立点的坐标，而一条曲线，就可以由含有两个变数的代数方程来表示。这样他就把一个几何问题通过坐标系归结为代数方程式。用代数方法研究这个方程式的性质后，再翻译成几何语言，就得出了几何问题的解法。笛卡儿用这种方法研究了具有两个变数的二次方程，指出这种方程一般地表示椭圆、双曲线或者抛物线。1637 年，笛卡儿将他 20 年来的研究成果在《几何》一书中发表了，引入了平面笛卡儿坐标系，建立了一对实数 x、y 与平面上一点的对应关系。当然，笛卡儿在《几何》中建立的坐标系不是现在的平面直角坐标系，而是一种原始形态的斜坐标系。但是这丝毫无损于他创建解析几何的功绩。因为用运动的观点，系统地引入坐标方法以扩大几何世界，并在这个世界中给各类问题以完整解答，这个功劳无疑是笛卡儿的。

这里应当指出的是，像“横坐标”“纵坐标”的名称笛卡儿也没有使用过。“纵坐标”一词是莱布尼兹在 1694 年提出的。到了 18 世纪，才由数学家沃尔夫等人正式使用“横坐标”一词。

平面直角坐标系，好像在被一条大河隔开的代数和几何

的两岸，架起了一座桥梁，产生了解析几何学。解析几何方法建立后，立即发挥了巨大的作用，使变量进入了数学，引起了数学的深刻革命。

$M(\rho,\theta)$ 点的极坐标号

建立坐标系的方法不止一种，先看下面一道习题：

甲乙两个牧民各骑一匹马，同时从草原的 O 地出发。甲以每小时 20 千米的速度向北 62°东跑去，乙牧民以每小时 15 千米的速度向南 28°东跑去，请你计算一下，两个小时后，甲乙两牧民的距离是多少？

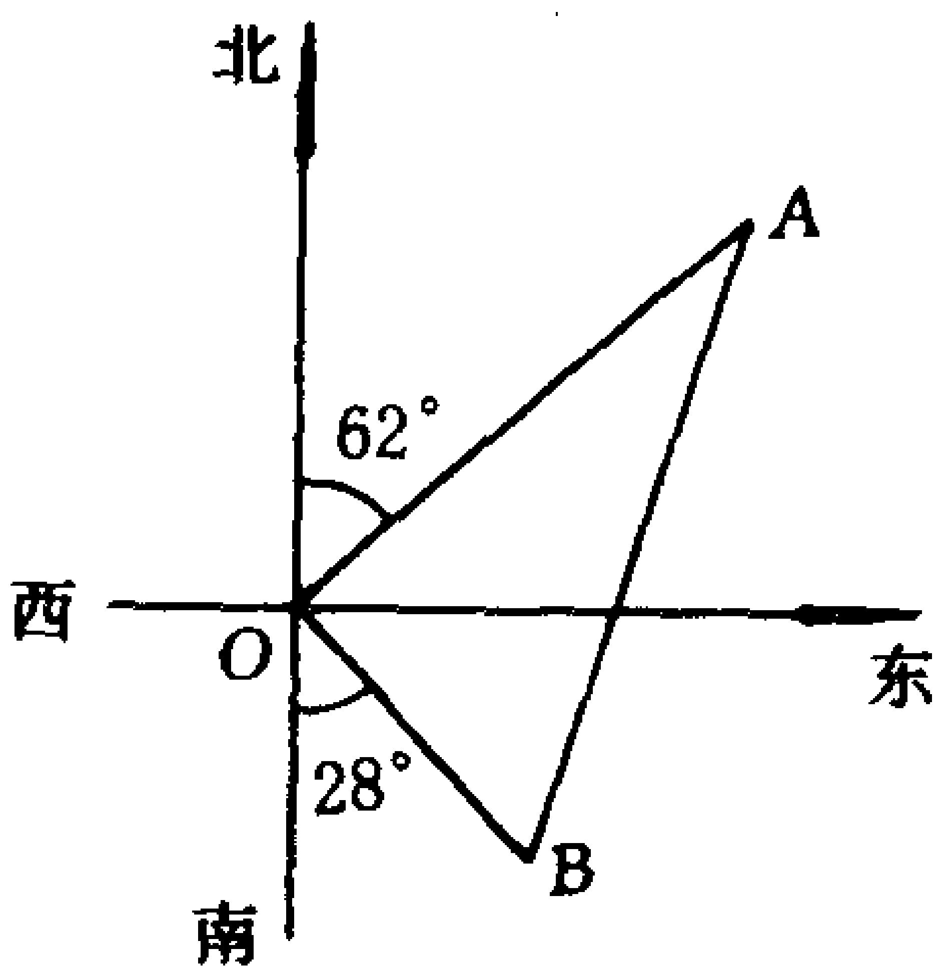


图 1

如图 1，设两小时后，牧民甲来到 A 处，显然 $OA=40$ 千米，角度是“北 62°东”。这样 A 点的位置就完全确定了。

设两小时后，牧民乙来到 B 处，显然，$OB=30$ 千米，角度是“南 28°东”，同样 B 点的位置也完全确定了。

因为 $62^\circ+28^\circ=90^\circ$，所以两个牧民前进的方向是互相垂直的，由勾股定理，易知

$$AB=\sqrt{40^2+30^2}=50\ （千米）。$$

这个问题启发我们：用一个方位和这个方位上的一段距离，也可以确定平面上任意一个点的位置，这就是极坐标系的思想。

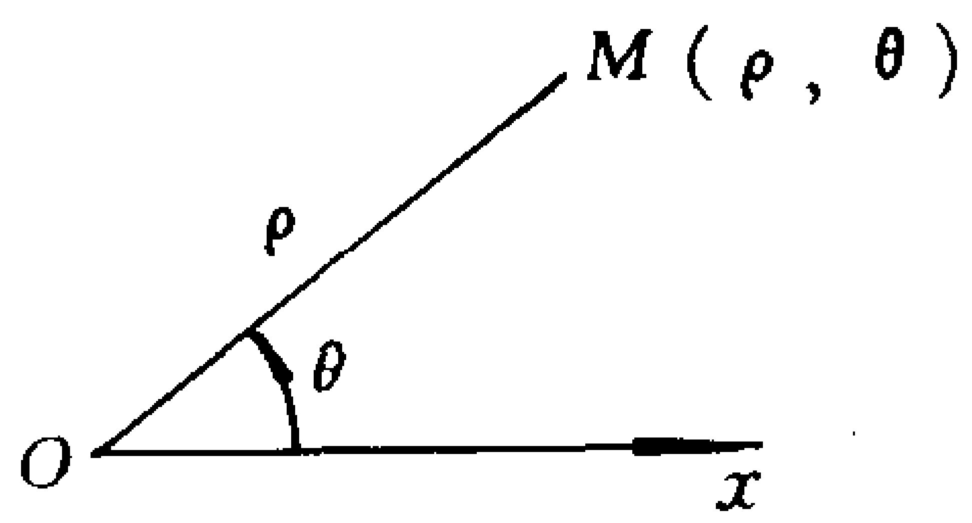


图 2

如图 2 我们在平面上选择一个定点 O 叫做极点。由 O 引一条射线 Ox 叫做极轴。在平面上任取一点 M，连接 OM，把 OM 的长度记为 ρ，把由 x 轴转到 OM 所转过的角记作 θ，由 ρ 和 θ 这两个数，完全可以确定 M 点的位置。我们把这样建立起来的坐标系叫做极坐标系，把 ρ 和 θ 这一对数，叫做 M 点的极坐标，用符号“M (ρ, θ)”表示。

其中，ρ 叫做点 M 的极径，θ 叫做点 M 的极角。在极坐标中极径 ρ 为长度，是十进位制的。如果极角 θ 为角度制，则是六十进位制。在同一个点的坐标中搞成两种进位制，这是很不方便的，所以极坐标中的极角，是采用十进位的弧度制。

极坐标系是瑞士数学家贝努利于 1691 年创用的。当然数学家牛顿在 1671 年也采用过类似的坐标系，还提出过双极坐标系，即通过两个固定点的距离来确定点的位置。这种双极坐标系不如贝努利创建的极坐标系简便易行。

直角坐标系和极坐标系是地位相当的两种坐标系，它们的基本思想是一样的，只是表现方法有所不同。同一条曲线，在不同的坐标系下方程是不同的。例如圆心在坐标原点的圆，它的直角坐标方程是：

$$x^2 + y^2 = r^2,$$

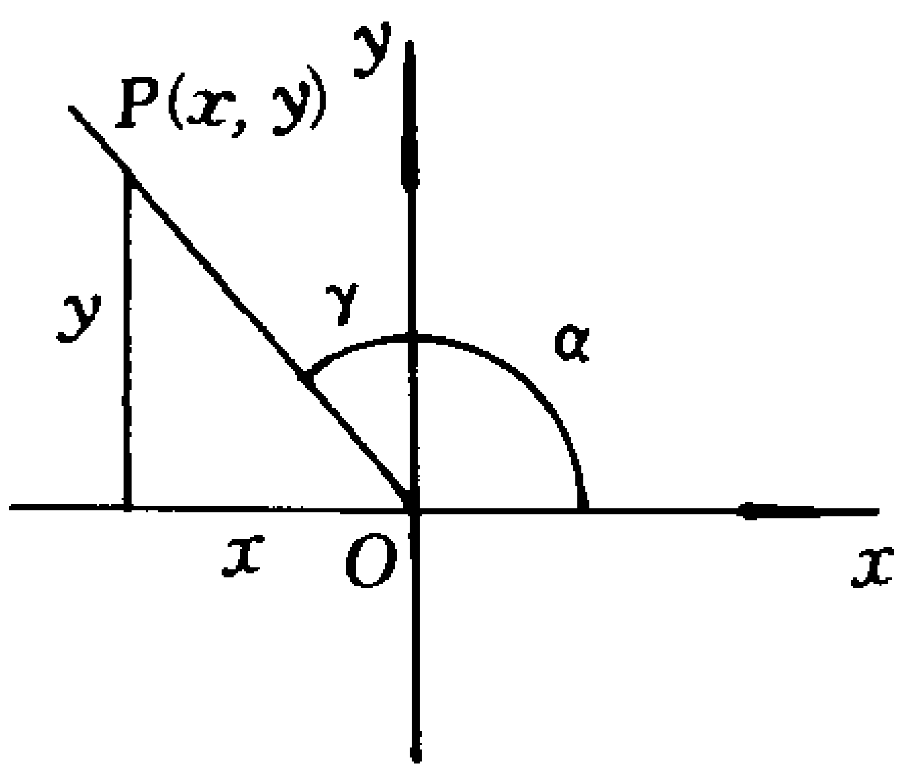
其中 r 是圆的半径；圆心在极点时的极坐标方程是：

$$\rho = r。$$

利用极坐标来研究某些曲线比直角坐标方便，这是引进极坐标系的客观原因。

sin，cos，tan，cot，sec，csc　正弦号，余弦号，正切号，余切号，正割号，余割号

三角学是研究三角函数及其应用的一个数学分支。三角函数包括正弦，余弦，正切，余切，正割，余割，再加上正矢，余矢，在我国总称为八线。



在建立了直角坐标系以后，人们利用坐标的观点，给出了三角函数的意义。

如图所示，在角 α 终边上任取一点$P(x, y)$，它到原点的距离为 r，则 $r=\sqrt{x^2+y^2}$。

角 α 的六个三角函数的定义如下：

$$\sin\alpha=\frac{y}{r};\qquad \cos\alpha=\frac{x}{r};$$

$$\tan\alpha=\frac{y}{x};\qquad \cot\alpha=\frac{x}{y};$$

$$\sec\alpha=\frac{r}{x};\qquad \csc\alpha=\frac{r}{y}。$$

1464 年，德国数学家雷基奥蒙坦在其著作《论各种三角形》中，开始用符号“sine”表示正弦。1626 年，数学家阿贝尔特·格洛德进一步把 sine 简化为“sin”，这就是正弦号。

英国数学家根日尔，1620年在伦敦出版的著作《炮兵测量学》中，开始用符号“cosine”“cotangent”分别表示余弦、余切。到1675年,英国数学家奥屈特进一步把“cosine”“cotangent”简化为“cos”“cot”，它们分别是余弦号和余切号。

丹麦数学家托玛斯·劳克，1591年在其著作《圆几何学》一书中，采用符号“secant”“tangent”分别表示正割和正切。到1626年，还是阿贝尔·格洛德，把“secant”“tangent”，简化为“sec”“tan”，它们分别是正割号和正切号。建国后，由于受前苏联教材的影响，把“cot”改成为“ctg”，“tan”改成为“tg”，至今仍在我国使用着。

1596年，英国数学家锐梯卡斯在他的著作《宫廷乐曲》一书中，用符号“cosecant”表示余割，到1675年，英国人奥屈特把cosecant进一步简化为“csc”，这就是余割号。

正弦、余弦、正切、余切、正割、余割，它们都是以角为自变量，比值为函数值的函数，总称为三角函数。

我国对三角早有研究。春秋战国时代，齐国有一部叫《考工记》的书，书中就记载过几种特殊角的名称，比如把90度的角叫做“矩”，45度的角叫做“宣”，135度角叫做“罄折”等。

公元3世纪我国著名数学家刘徽在计算圆内接正六边形的边长及13世纪数学家赵友钦在计算圆内接正方形的边长时，实际上已求得了某些特殊的正弦值。我国古代历法中，根据竿的不同影长来确定季节的方法，实际上已构成了一份余切值表。

18世纪末期，数学家欧拉把三角函数看成是线段比的

新观点，使三角学无论在理论上，还是应用方面都得到了较大的发展。

欧拉本人非常欣赏前人创用的三角函数符号，由于他的大力倡导，表示三角函数的符号终于得到了公认。

max，min…… 约定性符号

为了使数学语言更加简明、方便，数学里有一类约定性符号，它们专门表达某种约定的含义或某些特定的公式。

比如说，在几何证明过程中，“因为”和“所以”这两个词用得特别多，为了使论证格式简明，就用“∵”表示“因为”，用“∴”表示“所以”。

例如，$\because \angle 1=\angle 2$,

$\angle 3=\angle 2$,

$\therefore \angle 1=\angle 3$。

有了这两个符号，在证明和计算中，就使前后的因果关系简明清楚了。

又如我们用简记符号“$S_{\alpha+\beta}$”表示两角和的正弦公式：

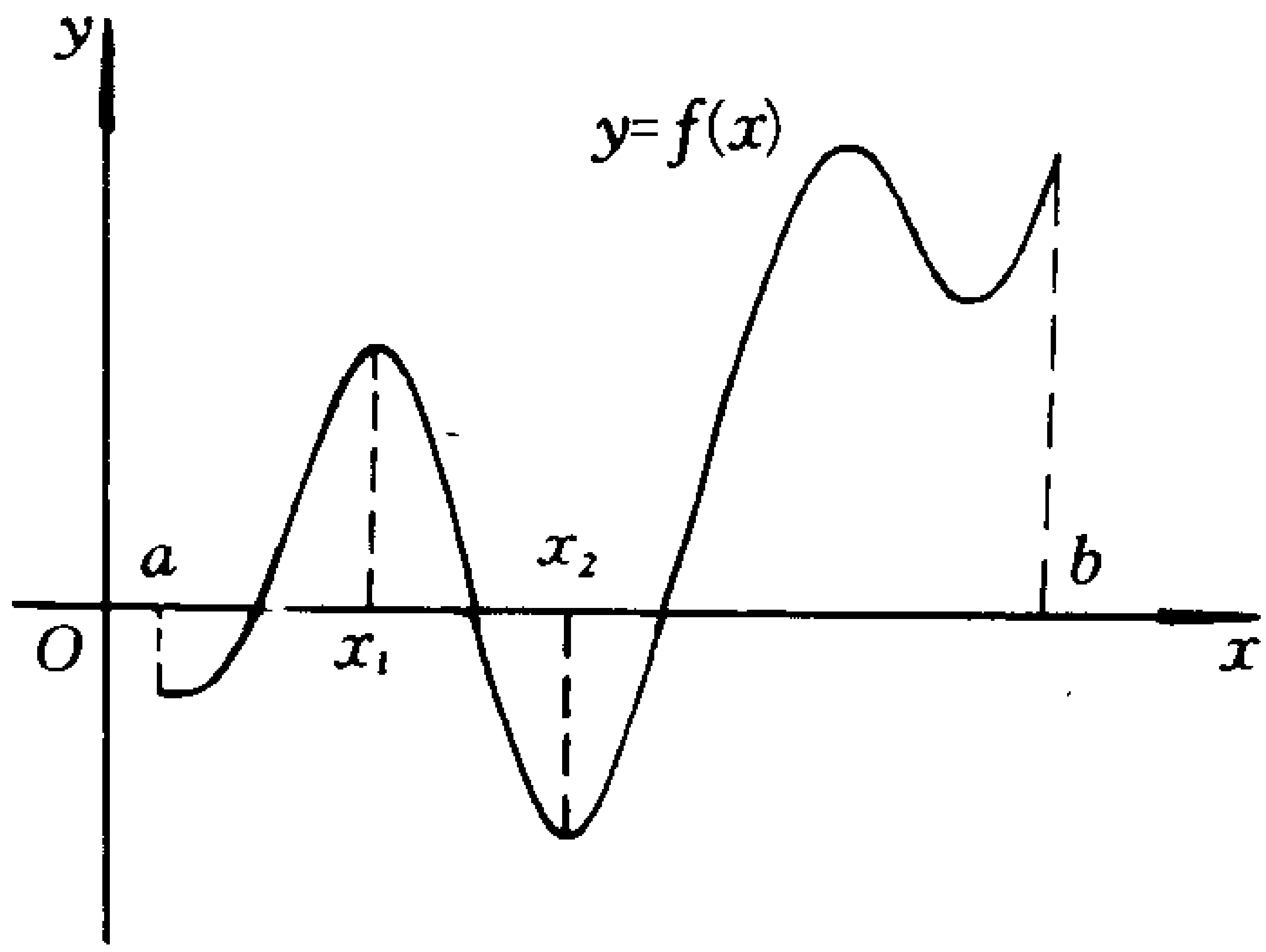
$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cdot\cos\beta+\cos\alpha\cdot\sin\beta$，即($S_{\alpha+\beta}$)。

用简记符号“$C_{\alpha+\beta}$”表示两角和的余弦公式：

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-\sin\alpha\cdot\sin\beta$，即($C_{\alpha+\beta}$)。

类似的简记公式还有 $S_{\alpha-\beta}$，$C_{\alpha-\beta}$，$T_{\alpha\pm\beta}$，$S_{2\alpha}$，$C_{2\alpha}$，$T_{2\alpha}$等，都是为了简记公式的需要而引进的约定性符号。

如图，表示连续曲线 $y=f(x)$在区间$[a,b]$上的图象，函数 $f(x)$在 $x=x_1$ 时有极大值 $f(x_1)$，可以记作：$\max f(x)=f(x_1)$。



同样，函数 $f(x)$ 在 $x = x_2$ 时有极小值 $f(x_2)$，可以记作：$\min f(x) = f(x_2)$。

这里，max 是极大值号，是英文 maximunvalue（极大值）的缩写；min 是极小值号，是英文 minimunvalue（极小值）的缩写。

$\{x \mid P(x)\}$ 或 $\{x : P(x)\}$　集合号

集合论是德国数学家康托在 19 世纪 70 年代开创的。后来集合论的思想渗透到数学的各个分支中，已成为数学逻辑的基础。那么，什么是集合呢？

在日常生活中，常要把一些事物放在一起考虑，并且给它们一个总称，例如：

小王家里有爷爷、奶奶、爸爸、妈妈和他，这五口人可总称为"小王的一家"。

苹果、梨子、桃、桔子……总称为水果。

笔、三角板、直尺、圆规……总称为文具。

这个给总称的办法很重要。要不给苹果、梨子、桃……等一个总称，一个卖这些东西的商店，叫什么名子好呢？

数学里把一组对象的全体叫做集合。

集合总是由一些基本的单元组成的，这些基本的单元叫集合的元素。

当一个集合的元素很少时，可把全部元素放在花括号里括起来表示它。例如，小于10的所有正偶数的集合，记作：

$$\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}。$$

通常是用刻划一个集合元素公共特征的方法表示集合。例如：

设$P(x)$是一个与x有关的条件，所有适合于这个条件的x组成一个集合，用符号“$\{x \mid P(x)\}$”或“$\{x : P(x)\}$”表示。

在花括号里，竖线“|”或“:”前面的x是该集合的代表元素，后面的$P(x)$指出了元素x所具有的公共属性，最外层的花括号包含了“所有”的意思。

初学集合论的人，要学会正确地使用集合号。例如有人把不等式：

$$3x+2<4x-1$$

的解集误写成：

$$\{x \mid 3x+2<4x-1\}=\{x>3\}。$$

上面这种写法的错误在于没有理解集合号$\{x \mid P(x)\}$的含义。

$\{x>3\}$只写出了x具有的公共属性，而没有写出竖线和它前面的元素x，造成了把集合号表示为$\{P(x)\}$的错误。

不等式$3x+2<4x-1$的解集应是：

$\{x|x>3\}$。

有些集合的元素可以不用一个字母表示。例如：由抛物线 $y^2=2x$ 上所有点组成的集合，记作：$\{(x,y)|y^2=2x\}$。

这里是把(x,y)整体上看作是一个元素。

集合号中的花括号{}，包含了"所有"的意思，诸如{全体实数}，{一切圆}等写法都是欠妥当的，要去掉花括号内"全体""一切"……这些字眼。

N,Z,Q,R,C　数集号

研究集合的数学分支叫做集合论。以数为元素的集合叫做数集，它们是最常用的集合之一。

物以类聚，数以群分。常见的数集按照一定的性质，有以下几种：

早在原始社会末期，由于计数的需要，人们就建立起自然数的概念。由全体自然数组成的集合叫自然数集，用"N"表示，即

$N=\{1,2,3,\cdots\}$。

为了表示各种具有相反意义的量以及满足记数的要求，人们引进了零及负数，把自然数看作正整数，把正整数，零，负整数合在一起，构成了整数集，用"Z"表示，即

Z={正整数，零，负整数}。

为解决分配中遇到的某些量进行等分的问题，人们又引进了有理数，规定它们就是形如$\frac{m}{n}$的数（$m\in Z$，$n\in Z$，$n\neq 0$）。这样，就把整数集Z扩大为有理数集，用"Q"表

示，即

$$Q=\{正有理数,零,负有理数\}。$$

Q取自英文 quotient（商）的第一个字母。如果把整数看作是分母为1的分数，那么有理数集 Q 实质上就是分数集。

每一个有理数都可以表示成整数、有限小数或循环节不为零的循环小数；反过来，整数、有限小数或循环节不为零的循环小数也都是有理数。

为解决有些量与量之间的比值不能用有理数表示的矛盾，人们引进了无理数。所谓无理数，就是无限不循环小数。有理数集与无理数集并在一起，构成了实数集，用“R”表示，即

$$R=\{有理数,无理数\}。$$

因为有理数都可看作循环小数，无理数是无限不循环小数，所以实数集 R 实质上是小数集合。

数的范围扩充到实数集 R 后，像 $x^2=-1$ 这样的方程还是无解，因为没有一个实数的平方等于 -1。16世纪由于解方程的需要，出现了形如 $a+bi(a,b\in R)$ 的数，这就是复数。全体复数组成的集合叫做复数集，用“C”表示，即

$$C=\{实数,虚数\}。$$

为了方便起见，有时还常用 Q^+ 表示正有理数集，Q^- 表示负有理数集。用符号 R^+ 表示正实数集，R^- 表示负实数集，这样使表示数集的符号更具体化了。

$\varnothing$ 空集号

在某些特定的条件下，你会遇到一种非常奇特的集合，它“奇”在集合里一个元素也没有！

你可能要问：难道没有元素也能组成一个集合吗？

的确是这样。例如，由方程 $x^2+1=0$ 的所有实数根组成的集合，就具有这种特性，因为方程 $x^2+1=0$，根本没有实数根。

不含任何元素的集合叫做空集。“空集”用“$\varnothing$”表示，也可以记作 $\{\ \}$，读作“空集”，也可读作“欧”。例如：

$$\{x \mid x^2+1=0 \text{ 的实数根}\}=\varnothing;$$

$$\{x \mid x+1=x+5\}=\varnothing。$$

有人认为：0，$\varnothing$，和 $\{0\}$，这三个符号代表的意义是等同的。

这种看法不对。

学习空集概念之前，人们习惯用数“0”表示“没有”。给出了空集$\varnothing$后，0 和$\varnothing$并不相同。正如由两个苹果组成的集合和自然数 2 不同一样。事实上，自然数是由于数物体集合中元素的个数而产生的，而没有元素是空集的一个特征，因此，0 和$\varnothing$混淆的实质，是将集合中元素的个数同集合本身混为一谈。数 0 有明显的几何意义，它表示数轴上的原点，是正数和负数的分界限。0 是一个数字，可以是某个集合的元素；空集$\varnothing$是一个集合，决不能因为空集中没有元素而误认为是 0。

$\{0\}$ 和$\varnothing$虽然都表示集合，二者也是有区别的：$\{0\}$ 是

指仅含一个元素0的集合；$\varnothing$指没有元素的集合，$\{0\}$和$\varnothing$是两码事。

也有人说：$\varnothing=\{\varnothing\}$，这个等式应该成立了吧？

其实不然。

因为$\{\varnothing\}$是一个集合，它里面含有一个元素$\varnothing$；而$\varnothing$是一个空集，不含有任何的元素。不少人只知道集合的元素可以是数、式、形以及一些物体，却不知道集合的元素也可以是集合。因为空集是一个集合，所以下列符号都表示集合：

$$\{\varnothing\},\ \{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}。$$

可见，$\varnothing$和$\{\varnothing\}$是两个不同的集合。

空集$\varnothing$是集合论中最抽象的符号之一。正确理解0，$\varnothing$，$\{0\}$，$\{\varnothing\}$等符号的含义，是学习集合概念的基础。

∈，∉ 属于号，不属于号

商场的橱窗里商品琳琅满目。橱窗里摆的所有样品，组成了一个集合，每件样品是属于这个集合的一个元素。

一般地，如果说a是集合A的元素，叫做a属于集合A。“属于”用“∈”表示，读作“属于”。比如，$a\in A$。

当然，如果b不是集合A的元素，叫做b不属于集合A。“不属于”也有个符号，就是在“∈”号上画一条短线，用“∉”或“$\overline{\in}$”表示，这两个符号通用。读作“不属于”。比如，$b\notin A$。

1889年，意大利数学家皮亚诺首先创用了“∈”和

“$\notin$”这两个符号，表示元素与集合间的从属关系。

$\in$和$\notin$是集合论中的一种基本关系，即元素 与集合的从属关系。给定一个集合 A，意味着这个集合的元素是确定的。对于任意一个元素 a，关系式：

$$a \in A \quad \text{或} \ a \notin A$$

有且仅有一个成立，也就是说这两个关系式不能同时成立，也不能同时不成立。

设 A 和 B 是两个集合，如果有 $x \in A$，必有 $x \in B$；若 $y \in B$，必有 $y \in A$，那么 A 和 B 是同一个集合或称 A 和 B 相等，记作：

$$A = B。$$

“属于”两字有十多划，用符号“$\in$”表示只有两划，这样，运用属于号表达元素与集合的关系时，显得既简便又明确，充分体现了数学符号的优越性。

$\supseteq$，$\supset$　包含号，真包含号

开学的第一天，高一（3）班的 60 名新同学都到齐了，这 60 名同学组成了一个集合。班里有 20 名女生，这 20 名女生也组成了一个集合。可以说，女生集合比高一（3）班的同学集合要小得多。用数学语言来说，高一（3）班的同学集合包含了女生集合。

设 A、B 是两个集合，如果集合 A 的任何一个元素都是集合 B 的元素，那么集合 A 叫做集合 B 的子集。“子集”用“$\supseteq$”表示，读作“包含”，也可以用“$\subseteq$”表示，读作“包含于”。A 是 B 的子集，记作：$B \supseteq A$（或 $A \subseteq B$）。

A 不是B 的子集时，记作：$B\not\supseteq A$（或 $A\not\subseteq B$）。符号“$\not\supseteq$”读作“不包含”；“$\not\subseteq$”读作“不包含于”。

看到子集的“子”字，使人联想起“儿子”这一名词。可是，这里有一点不同，儿子要比父母小。A 是B 的子集，A 可能和B 一样大。因为“$\supseteq$”中，包含了 $A=B$ 的意思，实际上，$A\supseteq A$ 是正确的。

但也有这样一种情况：如果 A 是B 的子集，并且 B 中至少有一个元素不属于A，那么集合 A 叫做集合B 的真子集。

“真子集”用“$\supset$”表示，读作“真包含”，也可以用“$\subset$”表示，读作“真包含于”。A 是B 的真子集，记作：$B\supset A$（或 $A\subset B$）。

1889 年，意大利数学家皮亚诺首先使用了包含号“$\supseteq$”和真包含号“$\supset$”。

符号“$\subseteq$”所表示的关系具有下列性质：对于任意三个集合 A，B，C 有

(1) 自反性：$A\subseteq A$；

(2) 对逆性：如果 $A\subseteq B$，同时 $B\subseteq A$，那么 $A=B$；

(3) 传递性：如果 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，那么 $A\subseteq C$。

引入了$\in$和$\supseteq$这两个符号后，有人可能要问：$\in$和$\supseteq$是否可以相互代替呢？

不可以。

比如说，有集合 $\{a, b\}$，其中 a、b 是集合的元素，它的子集是：

$\varnothing$，$\{a\}$，$\{b\}$，$\{a, b\}$。

应当注意，$\{a\}$是集合$\{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$的一个元素，应

记作：$\{a\} \in \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$，而不能写成：$\{a\} \subseteq \{\varnothing, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$。

$\in$ 用在元素与集合的关系上，表示从属关系；

$\supseteq$ 用在集合与集合的关系上，表示包含关系。

在应用这两个符号时，不要把两者混为一谈。

∩ 交集号

大家都知道，陈毅同志是我国50年代授衔的元帅，又是热情奔放的诗人。他曾风趣地说："在诗人当中，我是一个元帅；在元帅当中，我是一个诗人。"当然，这句话是陈毅同志的谦逊之词，意思说，他既算不上元帅，又算不上诗人。

要用数学的语言来表达，可以这样说：我国所有的元帅组成了一个元帅集合 A；所有的诗人组成了一个诗人集合 B。陈毅同志就是属于 A，B 两个集合的公共元素。

这种所有属于集合 A 且属于集合 B 的元素组成的集合，叫做 A 和 B 的交集。

"交集"用"$\cap$"表示，记作：$A \cap B$，读作"A 交 B"。

例如，若 $A = \{$等腰三角形$\}$，$B = \{$直角三角形$\}$，则 $A \cap B = \{$等腰直角三角形$\}$。

数学家莱布尼兹曾用符号"$\cap$"表示过乘法。后来在集合论里，被他借用来表示交集运算，即 $A \cap B = \{x \mid x \in A$ 且 $x \in B\}$。注意上式中的"且"字，它说明 $A \cap B$ 的任一元素都是 A 和 B 公共元素。由此可知，$A \cap B$ 是 A 与 B 的公共子集，即

$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$。

特别地，当 $A \cap B = \varnothing$ 时，表明 A 和 B 两个集合不相交。比如，$A = \{\{1,2\},\{3\}\}$，$B = \{\{1\},5\}$，则有 $A \cap B = \varnothing$。

由交集的定义，还可直接利用交集号"$\cap$"推出以下性质：

(1) $A \cap A = A$；

(2) $A \cap \varnothing = \varnothing$；

(3) $A \cap B = B \cap A$；

(4) $A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$；

(5) $A \subseteq B$ 的充分必要条件是：$A \cap B = A$。

集合的交可以推广到两个以上直至无穷多个的情况。设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个集合，用符号 $\bigcap\limits_{i=1}^{n} A_i$ 表示它们的交，则

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$= \{x \mid 对一切\ i = 1, 2, \cdots, n, x \in A_i\}。$$

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 为无穷多个集合，则它们的交为：

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n \cap \cdots$$

$$= \{x \mid 对一切\ i = 1, 2, \cdots, n, \cdots, x \in A_i\}。$$

交集号"$\cap$"是指各个集合的公共部分，它仍是一个集合，不要误认为是各集合的公共元素。

例如，设 $A = \{0,1,2\}$，$B = \{1,4\}$，则 A 和 B 的公共元素是 1，这里不能写成：$A \cap B = 1$，而应写成：$A \cap B = \{1\}$。

求集合的交集，是集合论中一种重要的运算。

∪ 并集号

有些东西放在一起是多少的问题，不能用数的加法直接计算。例如，1 头牛和 1 只羊，不能用 $1+1=2$ 的加法计算，因为只有同名数才能相加，这是加法的一条规定。

但是，在实际生活中，经常又会遇到一些不同名数的东西放在一起计算的问题。

例如，高一(3)班订了 5 种杂志，高一(5)班也订了 5 种杂志，能不能说两个班共订了 10 种不同的杂志呢？

处理这类问题，就必须有一种不受数的加法约束的“加法”，这就是集合的并集运算。

由所有属于集合 A 或属于集合 B 的元素组成的集合，叫做 A，B 两个集合的并集。

“并集”用“∪”表示，记作 $A\cup B$，读作“A 并 B”。例如，

$\{-2,2\}\cup\{-1,1,-2,2\}=\{-1,1,-2,2\}$。

数学家莱布尼兹曾用“∪”表示过加法，后来在集合论中，被借用来表示两个集合的并集，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A$ 或 $x\in B\}$。其中，$x\in A$ 或 $x\in B$ 的条件，含有三层意思：

$x\in A$，但 $x\notin B$；

$x\notin A$，但 $x\in B$；

$x\in A$，且 $x\in B$。

按集合论的要求，相同的对象归入任何一个集合时，只能算这个集合的一个元素。

这样以来，A 与 B 的公共元素，在 $A\cup B$ 中只能出现一次。

现在来看开始提出的问题，高一(3)班订了 5 种杂志，高一(5)班也订了 5 种杂志，这里要回答两班共订的不同杂志的种数，不能简单地用 $5+5=10$ 来计算。

那么应当怎样回答呢?

这里要弄清楚两班所订杂志的种类。如果有 2 种杂志是两班同时订阅的，那么两个班只订了 8 种不同的杂志，而不是 10 种。

由 $A\cup B$ 的定义可知，对于集合 A,B 有以下的性质：

(1) $A\cup A=A$;

(2) $A\cup\varnothing=A$;

(3) $A\cup B=B\cup A$;

(4) $A\cup B\supseteq A, A\cup B\supseteq B$;

(5) $A\subseteq B$ 的充分必要条件是：$A\cup B=B$。

同交集一样，集合的并集可以推广到 n 个或无穷多个。

设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为 n 个集合，用符号 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 表示 n 个集合的并集，即

$$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$$
$$=\{x\mid 至少存在某个\ i,1\leqslant i\leqslant n,使得\ x\in A_i\}$$
$$=\{x\mid 在\ A_1,A_2\cdots A_n\ 中至少一个集合含有\ x\}。$$

例如，设 n 个集合

$$A_j=\{n-j,j^2\},j=1,2\cdots n$$

其中每个集合只有两个元素，当 $j=1$ 时：

$$A_1=\{n-1,1\};$$

类似地，有 $A_2=\{n-2,2^2\}$;

$$A_3=\{n-3,3^2\};$$

$\cdots\cdots$

$A_n = \{0, n^2\}$。

由此得知,它们的并集为:

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \{n-1, 1\} \cup \{n-2, 2^2\} \cup \{n-3, 3^2\} \cup \cdots$$
$$\cup \{0, n^2\}$$
$$= \{0, 1, 2, \cdots, n-1, 2^2, 3^2, \cdots, n^2\}。$$

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$ 是无穷多个集合,则它们的并集定义为:

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$$
$$= \{x \mid \text{至少存在某个 } i, 1 \leqslant i \leqslant n, \cdots \text{使得 } x \in A_i\}。$$

求集合的并集,也是集合论里一种基本的运算。

$\overline{A}$ 补集号

了解班级同学缺席的情况可以先弄清楚有哪些同学出席，如果把全班同学当作一个集合，显然出席的同学组成的集合是它的一个子集，在全班同学的集合中，去掉出席同学的集合，剩下的就是缺席的同学了，他们也是一个子集。

像这样的两个子集，叫做互补的集合。

说到互补，应当给定一个集合作为全集，说出席同学的集合和缺席同学的集合互补，是相对于全班同学的集合来说的，它是一个全集。

“全集” 用 “I” 表示，读作 “全集”。

已知全集 I，集合 $A \subseteq I$，由 I 中所有不属于 A 的元素组成的集合，叫做集合 A 在集合 I 中的补集。用符号 “$\overline{A}$”

表示，读作“A 补”，即

$$\overline{A}=\{x \mid x\in I \text{ 且 } x\notin A\}。$$

例如，已知 $I=\{实数\}$，$Q=\{有理数\}$，那么 $\overline{Q}=\{无理数\}$。

由补集的定义可知，事实上，补集 $\overline{A}$ 就是全集 I 与集合 A 的差集，对于任意一个集合 A，有下列的性质：

(1) $A\cup\overline{A}=I$；

(2) $A\cap\overline{A}=\varnothing$；

(3) $\overline{\overline{A}}=A$，其中 $\overline{\overline{A}}$ 表示 $\overline{A}$ 在 I 中的补集。

用符号 $\cap$ 和 $\cup$ 可以简炼地表示出集合的运算定律。设 A，B，C 为集合，那么

交换律：$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$；

结合律：$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C$，

$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$；

分配律：$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$，

$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$；

狄·摩根律：设 I 是集合 A，B 的全集，那么：

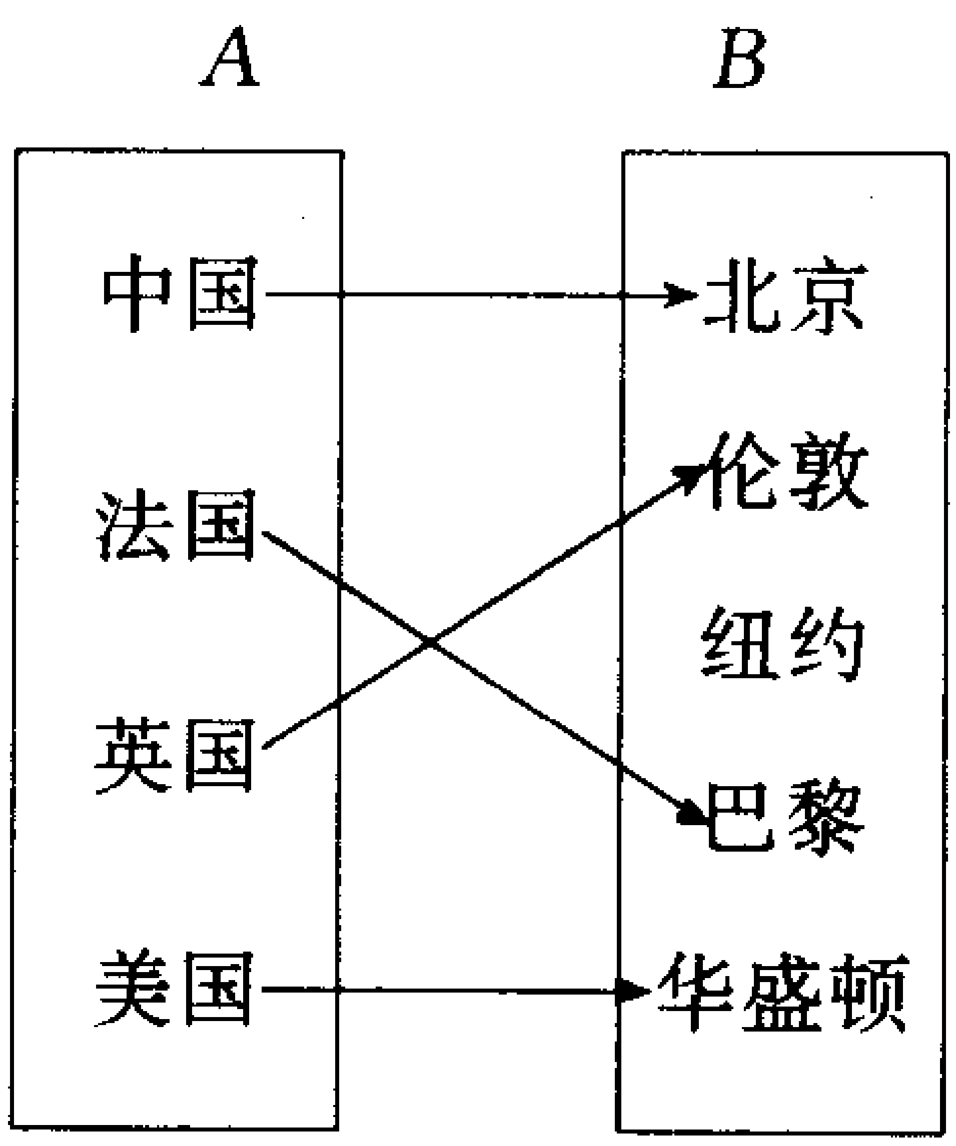
$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}；$$

$$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}。$$

运用以上各种运算律时，要和数的运算律相比较，注意其异同点。这种符号化的记法，对于初学者可能不太习惯，其实只要看多了，用多了，习惯了，这种符号化的记法会带来很多好处，它能使你在描述、表达问题时更清晰、严格和简练。

$f:A \to B$ 映射号

初一(3)班的同学举办了一次知识竞赛活动。主持人在图板上展示了这样一道题：



如图，左边方框里是由中国、法国、英国、美国四个国家组成的集合 A；右边方框里是由北京、伦敦、纽约、巴黎、华盛顿五个城市组成的集合 B。

主持人提出了要求：把集合 A 中的各个国家，按照是“该国的首都”这种对应关系，选择集合 B 的元素，用箭头 $\to$ 依次连接起来。

这道题的正确答案如图中箭头所示。

这种对应，叫做集合 A 到集合 B 的映射。

一般地，设 A，B 是两个集合，如果按照某种对应法则 f，对于集合 A 中的任何一个元素，在集合 B 中都有唯一的元素和它对应，这样的对应叫做从集合 A 到集合 B 的映射。

“映射”用符号“$f:A\to B$”表示，读作“从 A 到 B 的映射”。

在映射号 $f:A\to B$ 里，两个集合可以是数集，点集或其它的集合。不过，符号里的两个集合有先后顺序，$f:A\to B$ 和 $f:B\to A$ 是截然不同的两个映射。

“f”是表示对应法则的内容，它可以是运算法则，也可以是某种约定，包含的内容极其广泛。一般常用汉字表示，例如“加倍”、“取正弦”等，有的书上全部是用抽象的数学符号给出的。比如，设 T 是所有三角形组成的集合，R 是实数集，那么，对 T 中的任何一个元素，对应法则 f 是“求面积”，这个映射可记作：

$$f:T\to R。$$

这是从 T 到 R 的一个映射。

映射是集合论的基本方法之一。现代数学的许多重要概念都和映射密切相关。例如距离空间中的距离，赋范空间的范数，线性空间中的矩阵，微分和积分等都是映射。就拿积分来说吧，在现代积分概念中，是把积分看作是某个空间到实数内的满足一些公理的映射。所以映射的概念在现代数学中占有很重要的地位。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

二阶行列式号，
三阶行列式号

一个二元线性方程组，当方程的个数和未知数的个数相

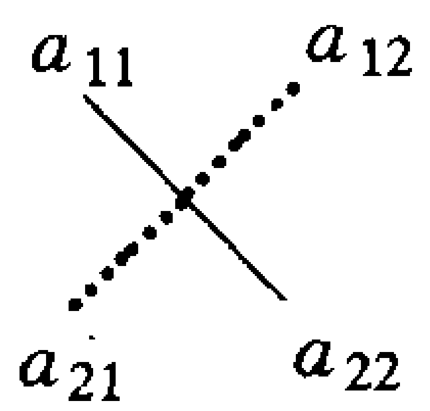
同时，一般形式为：

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = c_1, \\ a_{21}x + a_{22}y = c_2, \end{cases} \quad (x,\ y \text{ 为未知数}) \tag{1}$$

用加减消元法，得出方程组（1）的解：

$$\begin{cases} x = \dfrac{c_1 a_{22} - c_2 a_{12}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}, \\ y = \dfrac{c_2 a_{11} - c_1 a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}}。 \end{cases} \tag{2}$$

细心的读者会发现：公式（2）中，两个分式的分母都是 $a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$。把这些未知数的系数，依照在方程组中原来的位置，排成一个正方形：



$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$是这样两项的和：一项是实线表示的对角线上的两个数之积，另一项是虚线表示的对角线上的两个数之积，再添上负号。

我们在正方形四个数两旁各加一条竖线，得到符号：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{3}$$

规定它表示：$a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$。

符号（3）叫做二阶行列式。

1841 年，英国数学家凯莱在研究行列式问题时，在正方形数的两旁各画了一条竖线，这就是行列式号。

同样，把九个数排成三行三列，在这些正方形数的两旁

各画一条竖线，得到：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{4}$$

符号（4）叫做三阶行列式。

一般地，$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{5}$$

符号（5）叫做 n 阶行列式。

n 阶行列式也可以简记为：

$|a_{ij}|$ 或 $\det(a_{ij})$，其中，$i=1,2,\cdots,n$，$j=1,2,\cdots,n$。

在（2）式里，把 $c_1a_{22}-c_2a_{12}=\begin{vmatrix} c_1 & a_{12} \\ c_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，记作 D_x，$c_2a_{11}-c_1a_{21}=\begin{vmatrix} a_{11} & c_1 \\ a_{21} & c_2 \end{vmatrix}$，记作 D_y，把行列式 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ 记作 D。

这样，当 $D\neq0$ 时，二元线性方程组（1）的解为：

$$\begin{cases} x=\dfrac{D_x}{D}, \\ y=\dfrac{D_y}{D}, \end{cases}$$

即 $\left(\dfrac{D_x}{D}, \dfrac{D_y}{D}\right)$。

一般地，当 $D\neq0$ 时，n 元线性方程组有唯一解，记作

$\left(\dfrac{D_1}{D}, \dfrac{D_2}{D}, \dfrac{D_3}{D}, \cdots, \dfrac{D_n}{D}\right)$，

其中 D_i（$i=1, 2, \cdots, n$）是把系数行列式 D 的第 i 列，换成方程组的常数项而得的 n 阶行列式。1750 年，瑞士数学家克莱姆，给出了上述求解方法，这就是著名的克莱姆规则。但当时克莱姆并没有用“行列式”这个名词。

1812 年，法国数学家柯西首先采用了行列式这个名称，柯西在 1815 年发表的论文中，第一个把元素排列成“方形阵式”，并采用双重足标 a_{ij}表示行列式中的元素。在柯西之前，数学家拉普拉斯和高斯已经对行列式进行了大量的研究，拉格朗日也已经对三阶行列式给出了乘法定理，1812 年贝尔特曾对一般情形论证了乘法定理，但都不够令人满意，是柯西系统地处理了行列式。他的主要成果之一是行列式的乘法定理，即$|a_{ij}|\cdot|b_{ij}|=|c_{ij}|$（此处$|a_{ij}|$，$|b_{ij}|$均为 n 阶行列式，$c_{ij}=\sum\limits_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$）。

在柯西对行列式理论频频作出贡献的同时，数学家舒尔克于 1825 年发表了一篇重要的数学论文，他叙述了行列式的几个性质，就是：

（1）只有一行（或一列）不同的两个行列式相加的规则。

（2）一个常数乘以行列式等于这个常数分别乘以这个行列式的一行（或一列）的元素。

（3）某一行元素是另两行或几行元素的线性组合时，行列式为零。

（4）三角（右上三角或左下三角）行列式的值是主对角线上的元素之积。

在柯西和舒尔克之后的 50 年，对行列式理论始终不渝

的奋斗者，还有英国数学家西勒维斯特，他一生献身于行列式理论，取得了一系列的成果。

据日本数学家的考证，17 世纪的日本数学家关孝和在 1683 年所著《解伏题之法》一书中，对行列式的概念和它的展开，已经有了清楚的叙述，其时间比莱布尼兹要早。关孝和是一位有成就的日本古代数学家，他很熟悉中国的古算。一些数学史专家认为，在独立发现行列式方面，关孝和思想的产生，多半是受惠于中国而非西方的影响。中国古代的“方程术”，对行列式概念的产生有很大的启示。由此可见，日本数学家关孝和的行列式观念，应该是世界上最早的行列式了。

行列式及其符号的建立，虽不像微积分那样使数学发生了重大变革，但它作为数学上的重要工具也很受重视。因此，它能在短短 200 年的历史发展中就有了一套较完整的理论，它不但为矩阵论的诞生奠定了牢固的基础，也对尔后矩阵论的发展及广泛应用产生了极为重要的作用。

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$ 矩阵号

用行列式解线性方程组有它的优越性，但也有不足之处。

首先，对未知数较多的方程组，列出高阶行列式，尽管

理论上是可以解的，实际上，运算起来十分繁琐。

其次，用行列式解线性方程组，仅限于未知数和方程的个数相同的情形。当未知数与方程的个数不相等时，用行列式法就显得无能为力了。

怎么办呢?

人们在反复实践的过程中，找到了矩阵这个得力的工具，开创了新的纪元。

设有 $m\times n$ 个数，排成了一个 m 行 n 列的矩形表，用一个圆括号，把它的两侧括起来，得到：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

这个表就是矩阵，或者叫 $m\times n$ 矩阵。其中，a_{ij}（$i=1$，2，…，m，$j=1$，2，…，n）叫做矩阵的元素。

元素 a_{ij} 的下脚标 i 表示这个元素的位置在矩阵的第 i 行，第二下脚标 j 表示位于矩阵的第 j 列。有时也用符号 $(a_{ij})_{m\times n}$ 表示矩阵。例如，$(b_{ij})_{s\times t}$ 代表了下面一个 $s\times t$ 矩阵：

$$\begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1t} \\ \vdots & & \vdots \\ b_{s1} & \cdots & b_{st} \end{pmatrix}$$

“矩阵”一词是英国数学家西勒维斯特在 1850 年首先使用的。表示矩阵的符号应归功于两位长期合作的英国数学家凯莱和西勒维斯特，他们对矩阵的理论及其符号的运用，做了很多开创性的工作。

矩阵是解线性方程组的一种工具。例如，三元线性方程

组的求解过程，也就是有顺序地利用矩阵的初等变换，把方程组的增广矩阵变换为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 1 & 0 & y_1 \\ 0 & 0 & 1 & z_1 \end{pmatrix}$$

的过程。这时方程组的系数矩阵为：

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

常数矩阵为：$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}$。（$x_1$，$y_1$，$z_1$）是三元线性方程组的解。

又例如，当在平面上取直角坐标系时，若以原点为中心旋转，把点 $P(x, y)$映射到 $P'(x', y')$，其中：$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$，$y' = x\sin\theta + y\cos\theta$。这一变换可以用矩阵号表示为：

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

矩阵符号的使用，简化了书写的过程。

其实，矩阵的萌芽出现在我国的《九章算术》中，古代解方程组，用算筹把方程各项的系数、常数依次排成一个长方形的形状，然后移动算筹，对方程施行“编乘”和“直除”两种运算，这相当于今天的矩阵的初等变换，这是世界上最古老的矩阵了。

例如《九章算术》方程章的第一题为：

今有上禾三秉，中禾二秉，下禾一秉实三十九斗；上禾

二秉，中禾三秉，下禾一秉，实三十四斗；上禾一秉，中禾二秉，下禾三秉，实二十六斗。

问上、中、下禾一秉各几何？

那时用算筹把方程各项的系数，常数项依次排列成一个长方形（即矩阵）。

1	2	3
2	3	2
3	1	1
26	34	39

然后移动算筹，通过一系列的“编乘”与“直除”化为：

		3
	5	2
36	1	1
99	24	39

于是得下禾一秉实$\frac{99}{36}$，即$2\frac{3}{4}$斗，中禾一秉实$4\frac{1}{4}$斗，上禾一秉实$9\frac{1}{4}$斗。

公元263年，刘徽在《九章算术注》中，特别说明可以继续使用“编乘”、“直除”之法，直到算出结果，那就是：

		1
	1	
1		
$\frac{11}{4}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{37}{4}$

刘徽还特别对《九章算术》中的“方程”加以说明，“此都

术也，以空言难晓，故系之以禾以决之。”意思是：这是一种普遍方法，由于抽象地说难以说清楚，故联系到禾的例子来决定它。人们清楚地看到，“方程术”就是今天代数学中的“高斯消元法”，我国在这方面的成就要比欧洲早一千五百多年。后来，我国元代数学家朱世杰于 1303 年刊行的《四元玉鉴》中，也运用了矩阵。

在欧洲，由于有行列式的成果作为基础，1850 年前后，矩阵理论的发展是非常迅速的，英国剑桥大学教授凯莱还把行列式中已有的一些工作转入矩阵理论之中，矩阵的很多开创性工作都浸透了凯莱的劳动。

现在矩阵的很多理论是 19 世纪下半叶取得的。在 19 世纪 60 年代，还证明了复数矩阵中埃尔米特矩阵的特征根都是实数，以及实对称矩阵等。进入 20 世纪后，矩阵的理论、线性代数及其应用又有了长足的发展，其中我国数学家华罗庚教授也作了很多工作。矩阵理论及其应用远远超出了数学的范围，它在物理学、力学与电气相关的工程学科中，成为主要的数学工具之一。

$f(x)$ 函数号

知道了圆的周长，就能算出它的面积。

为什么能算出来呢？因为圆的周长和它的面积这两个数量之间有联系。

有联系，是不是就一定能算出来呢？

平行四边形的周长和它的面积之间有没有联系呢？总不能说没有。但是，仅知道平行四边形的周长，你却算不出它

的面积来。

可见，两个量之间仅有联系是不够的，还必须有确定性的联系。圆的周长可以确定它的面积，它们之间有确定性的联系。平行四边形的周长和面积之间虽然有联系，可是这种联系不是确定性的关系。

这种反映两种量的确定性联系的数学关系，就是函数概念的基本思想。

从历史上来看，人们对函数关系的认识，经历了从低级到高级的演变过程：

在欧洲，函数（function）这一名词，是微积分的奠基人莱布尼兹首先采用的。他在1692年发表的数学论文中，就应用了函数这一概念。不过，莱布尼兹仅用函数一词表示幂，即x，x^2，x^3，…，其后他用函数一词表示曲线上点的横坐标、纵坐标、切线长等与曲线上点相关的某些几何量。

1718年，瑞士数学家贝努利使用变量概念给出了不同于几何形式的函数定义：函数就是变量和常量以任何方式组成的量。贝努利还采用了莱布尼兹“x的函数”一词作为这个量的名称，首先用符号“$\varnothing x$”作为函数的记号。

数学家欧拉在其著作《无穷小分析引论》中，把凡是给出解析式表示的变量，统称为函数。1734年，欧拉首先创用了符号“$f(x)$”作为函数的记号。$f(x)$中的字母“f”取自function(函数)的第一个字母。

其实，欧拉关于函数的定义，并没有真正揭示出函数概念的实质。

德国数学家狄利克勒，在总结前辈数学家工作的基础

上，在1837年给出了至今还常用的函数的定义：

如果对于给定区间上的每一 x 的值，都有唯一的 y 值与它对应，那么 y 是 x 的函数。用符号记作：$y=f(x)$。

随着数学的不断进步和完善，当19世纪集合论出现后，函数也是映射，是数集合到数集合的映射：

设 A,B 都是非空的数的集合，f 是从 A 到 B 的一个对应法则，那么 A 到 B 的映射 $f:A\to B$，就叫做 A 到 B 的函数。记作：$y=f(x)$ 其中 $x\in A,y\in B$。

1859年，清代数学家李善兰在翻译《代数学》一书时，把函数概念介绍到我国。这本书中说："凡式中含天，为天之函数。"这句话的意思是：凡一个式子含有 x，则称为关于 x 的函数。函数中的"函"字有着包含的意思。

函数 $y=f(x)$ 是个比较抽象的数学符号。$y=f(x)$ 是表示"y 是 x 的函数"这句话的数学表达式，而不是 f 与 x 的乘积。

在研究同一问题的过程中，等式 $y=f(x),h=f(t),m=f(n)$……表示完全相同的对应法则。至于自变量、函数用什么字母表示是无关紧要的。

但是，同一个问题的不同的对应法则，就应当由不同的字母表示。例如，$y=\varphi(x),y=G(x),y=D(x),y=U(x)$ 等，这是不同的函数符号。

数学概念常用数学符号表示，这是数学的特点，又是数学的优点。在运用函数符号 $f(x)$ 时，要防止概念与符号 $f(x)$ 脱节。例如，要通过理解 $f(a)$ 的意义从侧面加深对 $f(x)$ 的理解。

$f(a)$ 不能简单地说成是当 $x=a$ 时，$f(x)$ 的函数值。因

为只有当 $x=a$ 是 $f(x)$ 定义域的某个值时，$f(x)$ 才有意义，才能称为函数值的记号。比如：$f(x)=x^2-1(-1<x<1)$，那么 $f(2)=3$ 就不能是 $x=2$ 时 $f(x)=x^2-1$ 的值，因 $x=2$ 已不是定义域 $-1<x<1$ 里面的变量了。

其次，要从反面理解 $f(x)$ 的意义。

如果已知 $f(x+1)=x^2+4x-5$，那么能不能说 $f(y)=y^2+4y-5$ 呢？

不行！

因为 $f(x+1)=x^2+4x-5=(x^2+2x+1)+(2x+2)-8=(x+1)^2+2(x+1)-8$，得到的对应函数应为：

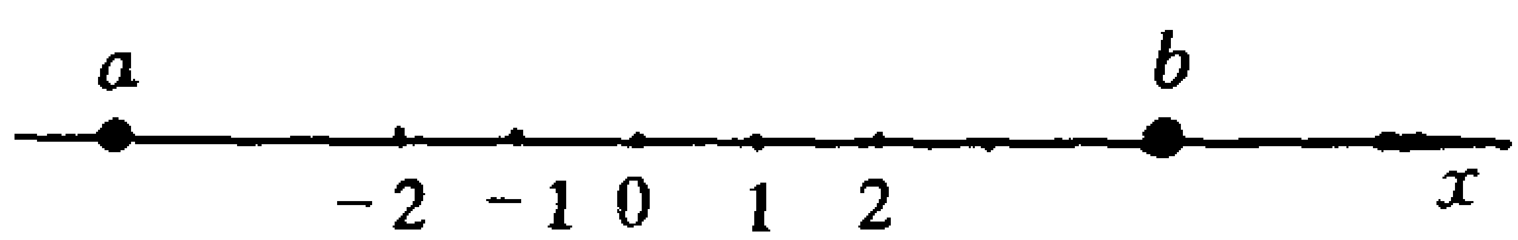
$$f(y)=y^2+2y-8。$$

函数是数学中的重要概念之一，在学习时要从正面、侧面和反面明确符号 $f(x)$ 的含义和实质。

(a,b)，$[a,b]$，$[a,b)$，$(a,b]$ 开区间号，闭区间号，半开半闭区间号

大家已经知道，函数是数学里的重要概念之一。为了进一步研究函数的性质，又引入了区间号。

设 a,b 是两个实数，且 $a<b$，我们把满足 $a<x<b$ 的实数 x 的集合叫做开区间，用 (a,b) 表示。反映在数轴上，如图，是由 a 到 b 但不包括端点 a,b 的那一段。



把满足 $a \leqslant x \leqslant b$ 的实数 x 的集合叫做闭区间，用 $[a, b]$ 表示。反映在数轴上，是由 a 到 b 且包括端点 a，b 的那一段。

把满足 $a \leqslant x < b$，$a < x \leqslant b$ 的实数 x 的集合，叫做半开半闭区间，分别用 $[a, b)$、$(a, b]$ 表示。反映在数轴上，是由 a 到 b 包括一个端点，但不包括另一个端点的那一段。

开区间，闭区间，半开半闭区间，都是有限区间。

为了记法上的统一和方便，实数集 R 也可以用区间号 $(-\infty, +\infty)$ 表示，其中，"$-\infty$"读作"负无穷大"，"$+\infty$"读作"正无穷大"。$(-\infty, +\infty)$ 的几何意义，表示了整个数轴。

此外，把满足 $x \geqslant a$，$x > a$，$x \leqslant b$，$x < b$ 的实数 x 的集合，分别用区间号表示为：$[a, +\infty)$，$(a, +\infty)$，$(-\infty, b]$，$(-\infty, b]$。

这些区间里都有无穷大"∞"，叫做无穷区间。

形态各异的区间符号，使表示连续实数集的方式更加丰富多彩了。

例如要把"大于 1 小于 2 的实数集"表达清楚，可以有三种方法：

用集合法为：$\{x \mid 1 < x < 2\}$；

用不等式法为：$1 < x < 2$；

用区间法为：$(1, 2)$

不同形式的符号有不同的作用，可以根据问题的具体要求，灵活地选用适当的表达方式。

lim　极限号

我国战国时代有一位精于辩论的人叫惠施。他说:“一尺之棰,日取其半,万世不竭。”意思是说,一根一尺长的棍子,每天把它断为两半,取走其中的一半,千秋万代也取不完。

请看,第一天取走$\frac{1}{2}$尺,剩下$\frac{1}{2}$尺;第二天取走$\frac{1}{2}$尺的$\frac{1}{2}$,剩下$\frac{1}{4}$尺;这样继续分下去,剩下的棍子的长是$\frac{1}{8}$尺,$\frac{1}{16}$尺,$\frac{1}{32}$尺……虽然越分越短,可就是分不完,也取不完。

在此过程中,我们得到一串有序实数:

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots。$$

这一串有顺序实数叫做数列,其中每一个数叫做数列的项。

这个数列的特点是数值越变越小,越变越靠近零,近到要多近就有多近的程度,这是说数列的极限是0。

什么是数列的极限呢?

对于数列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$, A 是一个常数,对于任意给定的正数 ε,如果总存在自然数 N,当 $n > N$ 时,不等式

$$|a_n - A| < \varepsilon$$

恒能成立,就说 A 是数列$\{a_n\}$的极限。记作:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = A \text{ 或者 } a_n \to A。$$

这里,“极限”用“lim”表示,它源于拉丁文 limes(极限)的前三个字母。

项数 n 在变化过程中无限增大这个事实，用符号"$n\to\infty$"表示，其中箭头$\to$读作"趋向于"。

$a_n\to A$ 是表示极限的第二种方法。

表示极限的两种记号：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 和 $a_n\to A$，是同一件事的两种不同的表达方式，但它们的着眼点是有区别的：

$a_n\to A$ 是说 a_n 无限逼近于 A，这里是先有一个常数 A，用数列 a_n 去逼近它，a_n 是 A 的近似值；而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ 是说先有一个数列 $\{a_n\}$，而求出了它的极限是 A。

求极限是数学中的一项重要运算。但它和一般的代数运算不同。比如上面讨论的数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，从第一项开始数下去，永远也数不完，可谓万世不竭了。这表明不论项数 n 怎么大，$\frac{1}{2^n}$永远不能为 0，只能是 0 的近似值。不同的自然数 n，$\frac{1}{2^n}$与 0 的近似程度不同，保持了近似值的相对稳定，不会发生质的变化。但是，当项数 n 无限增大时，相应的数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$的变化出现了质的飞跃，得出：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$。

可见，极限运算是事物运动变化由量变到质变这个辩证规律在数学上的反映。因此说极限方法是人们从有限中认识无限，从近似中认识精确的一种数学方法。

用极限号"lim"可以简明地表达极限的运算法则：

设 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ 是两个数列，如果 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$，那么

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \pm b_n) = \lim_{n\to\infty} a_n \pm \lim_{n\to\infty} b_n = A \pm B;$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n \cdot b_n)=\lim_{n\to\infty}a_n \cdot \lim_{n\to\infty}b_n = A\cdot B;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}a_n}{\lim\limits_{n\to\infty}b_n}=\frac{A}{B}(B\neq 0)。$$

求极限时，除了要正确地运用极限运算法则外，还要学会应用符号 lim 的技巧。

例如，计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$。

当 n 无限增大时，分式$\frac{2n+1}{3n+2}$的分子和分母都无限增大，不存在极限，所以不能直接用商的运算法则。但是，当 $n\to\infty$ 时，

$$\frac{2n+1}{n}=2+\frac{1}{n}\to 2;$$

$$\frac{3n+2}{n}=3+\frac{2}{n}\to 3。$$

因此，求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}$时，首先将分式的分子与分母除以 n，其次，再应用极限运算法则，即

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n+1}{3n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{3+\frac{2}{n}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}(2+\frac{1}{n})}{\lim\limits_{n\to\infty}(3+\frac{2}{n})}=\frac{2}{3}。$$

在进行极限运算时，灵活地运用极限号“lim”参与计算，是一项专门的学问，这里就不再赘述了。

前面曾以数列的极限为例介绍了极限的定义，但人们对极限概念的认识，却经历了一个逐步精确化的过程。

公元 3 世纪，我国数学家刘徽根据圆内接正多边形面积，当边数越来越多时接近于圆的面积这一思想，成功地推算出

了圆周率的近似值，他的“割圆术”就孕育了极限概念的思想。17世纪，以牛顿为代表的数学家在创立微积分学时，还没有严格的极限定义。牛顿用路程的改变量 Δs 与时间的改变量 Δt 之比$\frac{\Delta s}{\Delta t}$表示运动物体的平均速度，让 Δt 逐渐减小为零，得出了物体在时刻 t_0 的瞬时速度，并由此引出了导数的概念。到这时为止，极限作为数学概念，它只用到直观性的描述：

数列极限：对于数列$\{a_n\}$，如果当 n 无限地增大时，a_n 无限地接近于常数A，那么就说$\{a_n\}$以 A 为极限。

函数极限：对于函数 $f(x)$，如果当 x 无限地接近于 x_0 时，$f(x)$无限地接近于常数 A，那么就说 $f(x)$以 A 为极限。

显然这种直观性的描述可以毫不费力地用来说明微积分学中的许多定理。但是，如果用来证明，问题就来了，因为这些证明的逻辑基础是极限，而用直观性的语言作为证明在数学上是不能被承认的。正因为极限在当时还没有严格的定义，微积分的理论曾一度被人怀疑和攻击。例如在瞬时速度概念中，使当时的数学家在 Δt 等于零和不等于零之间进退两难。有个大主教名字叫贝克莱的人说，Δt 是消失了数量的“量的鬼魂”，这让贝克莱钻了空子。为了解决微积分理论的逻辑基础，经过长时间的争论，到了 19 世纪终于产生了严格的极限定义，这是由数学家柯西提出来的。例如函数极限的定义是：设 $f(x)$是一个函数，A 是一个常数。如果对于任意给定的正数 ε，总存在一个正数 δ，使得当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，不等式$|f(x)-A|<\varepsilon$ 恒能成立，那么就说当 x 无限趋近x_0 时 $f(x)$以 A 为极限。

柯西的定义引用了不等式，定量的而不是定性地叙述无穷

变化的过程，用作数学证明是严格的，这个定义一直沿用至今。

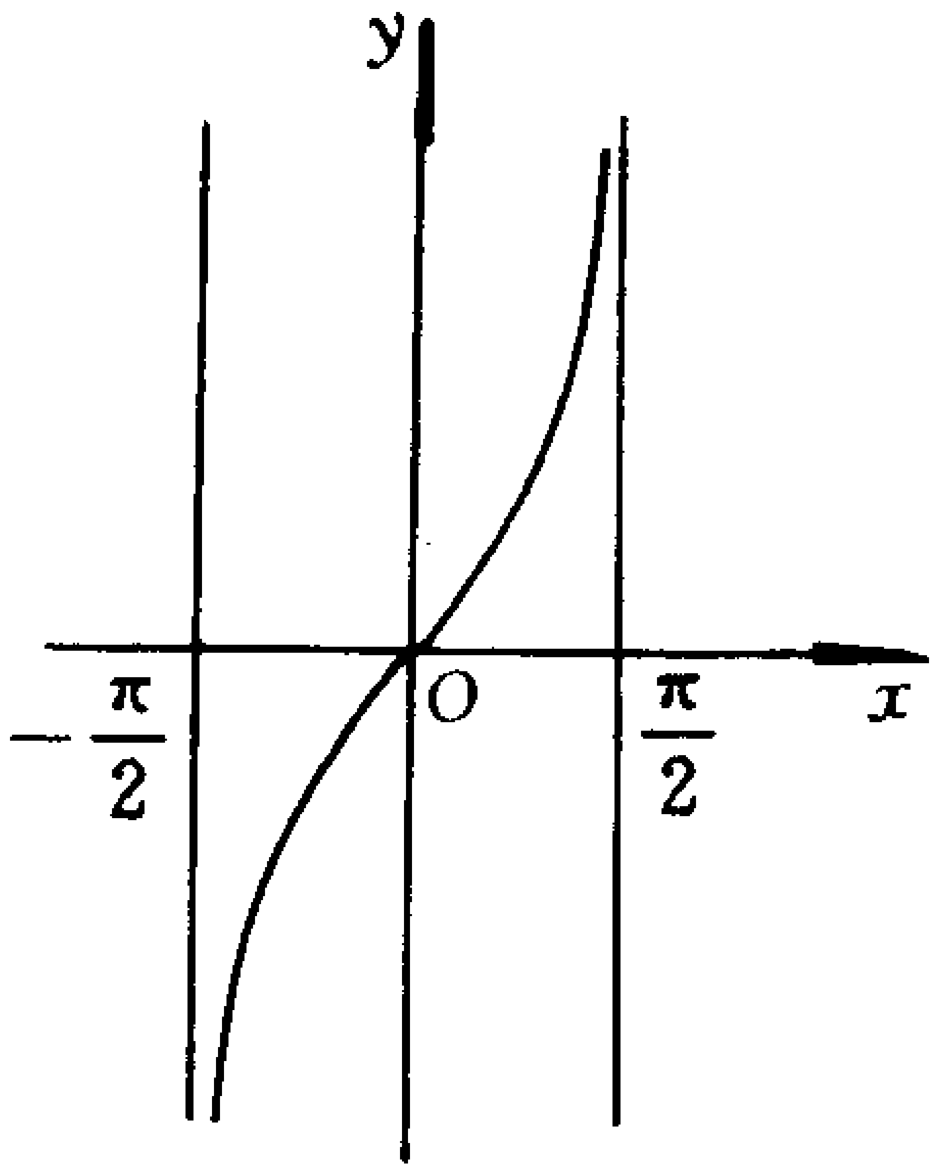
∞ 无穷大量号

看了这个题目，你也许会说：任意大的数就是无穷大量，这不是很明白的吗？

凭常识来判断无穷大量，容易产生错觉。

你看，咱们居住的地球可不算小了，它的半径约为 6371 千米。太阳要比地球大得多，它的半径是地球半径的 109 倍。但是，在宇宙问题的研究中，它还是一个很小的数。例如，太阳和地球相距 15×10^7 千米，坐一架每小时 1000 千米的飞机奔向太阳，要 15 年的时间。牛郎、织女星离我们就更远了。已知光每秒跑 3×10^5 千米。一年的时间约行 9×10^{12} 千米，天文学上叫做 1 光年。牛郎星距地球 16 光年，织女星距地球 27 光年，它们之间以 16 光年的距离，隔河相望。

上面所说的几个天文数字，一个比一个大得惊人，这算不算无穷大量呢？



不能这样说。

例如函数 $y=\mathrm{tg}x$ 的图象，由左图可知，当 x 由小于 $\frac{\pi}{2}$ 的正值，趋近于 $\frac{\pi}{2}$ 时，$\mathrm{tg}x$ 的值一直保持正值，而且无限制地增大。数学里把这样的变量叫做无穷大量。一般地说，对于某一变量 x 来说，在变化过

程中，它的绝对值从某一时刻开始，并且以后一直保持大于预先给定的任意大的正数 M，则变量 x 称为无穷大量。

"无穷大量"用"∞"表示，读作"无穷大"。

无穷大量虽然没有极限，但有时能用极限的形式来表示。例如：

若变量在某一时刻后永远取正值，记作：

$\lim x = +\infty$。

若变量在某一时刻后永远取负值，记作：

$\lim x = -\infty$。

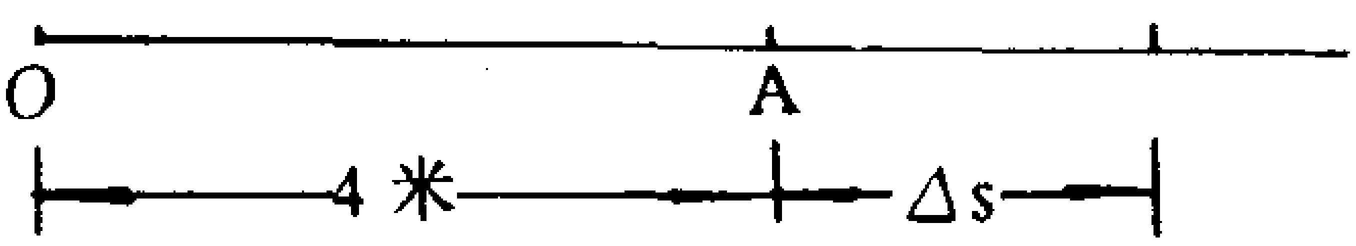
有人说，无穷大量是个非常大的数，这是一种误解。无穷大量是一个变量，符号"∞"是描述变量变化状态的符号。而任意大的正数，是人为去寻找的，要多么大就多么大，但无论多大，都是一个确定的数。

有人会问：$(+\infty)+(-\infty)=0$，$\frac{+\infty}{+\infty}=1$，这两个等式对吗？

不对。因为"∞"是表示无穷大量的符号，在应用时，不能和普通数的运算混为一谈。

$f'(x)$或 y'　导数号

17 世纪后期，英国数学家牛顿认真分析了平均速度和瞬时速度的关系，提出了计算瞬时速度的新方法。



如图，假设一只小船从 O 点出发作匀加速直线运动：一秒钟走了 1 米，二秒钟走了 4 米，三秒钟走了 9 米……

分析一下上面的几个数，船走的距离正好等于时间的平方，即 1 秒钟走了 1^2 米，2 秒钟走了 2^2 米，3 秒钟走了 3^2 米……t 秒钟走了 t^2 米。

凝神细想可以得到路程 $s=t^2$，这个等式反映了小船的运动规律。

假如求小船第二秒时的瞬时速度，我们可以换一个思考方式：

小船第二秒末走到了 A 点，点 A 距 O 点为 4 米。我们不妨让小船由 A 点再向前走一段时间。因为给出的时间很小，于是就在字母 t 前面加一个希腊字母“Δ”，即用符号“Δt”表示，以便与一般的时间有所区别。

在 Δt 时间里，小船前进了多少米呢？

这可以算出来，船 2 秒钟走了 2^2 米，$(2+\Delta t)$秒走了$(2+\Delta t)^2$ 米，它们的差：$(2+\Delta t)^2-2^2$ 就是船 Δt 秒走过的距离，这个距离的改变量也很小，用符号“Δs”表示，得到：

$$\begin{aligned}\Delta s &= (2+\Delta t)^2-2^2\\ &= (2^2+2\cdot 2\Delta t+\Delta t^2)-2^2\\ &= 4\Delta t+\Delta t^2。\end{aligned}$$

这样，在 Δt 秒内的平均速度 $\overline{V}$ 是：

$$\overline{V}=\frac{\Delta s}{\Delta t}=\frac{4\Delta t+\Delta t^2}{\Delta t}=4+\Delta t(\text{米/秒})。$$

牛顿断定：当 $\Delta t\to 0$ 时，平均速度 $\overline{V}$ 的极限值就是 2 秒时的瞬时速度，即

$$V_{t=2}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}(4+\Delta t)=4(\text{米/秒})。$$

你看，当 $\Delta t \to 0$ 时，平均速度就发生了质的变化，转化为瞬时速度，近似值就转化为精确值了。

当然，数学中类似于瞬时速度这样的问题举不胜举，从而抽象出导数的概念。

对于一个给定的函数 $y=f(x)$，设自变量在点 x 处有增量 Δx，$y=f(x)$ 有对应的增量 Δy，如果 $\Delta x \to 0$ 时，函数的增量 Δy 和自变量增量的比有极限存在，那么这个极限：

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

叫做函数 $y=f(x)$ 在点 x 的导数。

我们常用在函数 $f(x)$ 上方加一个“ ′ ”的方法，即用 $f'(x)$ 或者 y' 来表示导数。这种表示符号是法国数学家拉格朗日创用的，又称为拉格朗日记号。

函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$ 仍是 x 的函数，如果对 $f'(x)$ 再求一次导数，所得的函数叫做 $y=f(x)$ 的二阶导数，用符号 $y''=f''(x)$ 表示。

类似地，按同样的方式对函数 $y=f(x)$ 求 n 次导数，所得的函数叫做 $y=f(x)$ 的 n 阶导数，记作：$y^{(n)}=f^{(n)}(x)$。

表示导数的符号，有它发展变化的历史：

早在 1671 年，数学家牛顿在他的著作《流数法和无穷级数》一书中，称变量为“流量”，把流量的变化率叫做“流数”。这里所说的流数就是指“导数”的意思。如果以 x, y 表示流量时，牛顿的流数用符号“$\dot{x}$”，“$\dot{y}$”表示。并把 $\dot{x}, \dot{y}$ 的流数，记作“$\ddot{x}$”，“$\ddot{y}$”。现在采用的表示导数的符号，就是从牛顿的记号中演变而来的。

运用导数的符号，可以简化和、差、积、商等求导公式，例

如：

设 u,v 都是 x 的可导函数，c 为常数，那么有：

(1) $(u\pm v)'=u'\pm v'$；

(2) $(cu)'=cu'$；

(3) $(uv)'=u'v+uv'$；

(4) $\left(\frac{u}{v}\right)'=\frac{u'v-uv'}{v^2}(v\neq0)$。

导数是微积分中的基本概念，它精确地回答了力学、物理学、工程学等方面提出的问题，在数学史上具有划时代的意义。

d$f(x)$或 dy　微分号

如前所述，已知小船运动的规律是：$s=t^2$，在点 t 处，当 t 的改变量为 Δt 时，函数 s 也相应地产生了一个改变量 Δs，即

$$\Delta s=2t\Delta t+(\Delta t)^2。\tag{1}$$

在实际问题中，Δs 这个量刻划了函数在点 t 处的变化，计算 Δs 是很重要的事。但通常 Δs 的表达式比较复杂，直接计算时难度很大。自然会产生这种想法：在 Δt 充分小时，能不能用一个既简单而近似程度又好的量来代替它呢？

这个想法很好，也是可能实现的。

在(1)式中，Δs 是 Δt 的二次式，其中 $(\Delta t)^2$ 为二次项，$2t\cdot\Delta t$ 为一次项。在 $\Delta t\to0$ 的过程中，$(\Delta t)^2$ 以更快的速度趋近于 0，所以从数量上看，$2t\Delta t$ 是 Δs 的主要部分，是精确度较为理想的近似值。特别值得庆幸的是，近似值的表达式

$2t\Delta t$，恰好是 $s'(t)\Delta t$。这个量就是函数 $s(t)$在 t 处的微分。

一般地说，如果函数 $y=f(x)$ 在点 x 处可导，则 $f'(x)\Delta x$叫做函数在点 x 处的微分，用符号“$\mathrm{d}y$”表示，记作：

$$\mathrm{d}y=f'(x)\Delta x \text{ 或 } \mathrm{d}f(x)=f'(x)\Delta x。$$

微分号 $\mathrm{d}y$ 或 $\mathrm{d}f(x)$是数学家莱布尼兹首先创用的，一直沿用到今天。

为了计算上的方便，把自变量的改变量 Δx，用符号 $\mathrm{d}x$ 表示，即 $\Delta x=\mathrm{d}x$，于是微分表达式变为：

$$\mathrm{d}y=f'(x)\mathrm{d}x。$$

计算一下可以发现：

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f'(x)。$$

我们从微分之比来观察导数，又把导数叫做微商。$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$和 y'，$f'(x)$一样，也是表示导数的常用符号。1675 年，数学家莱布尼兹率先使用微商“$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$”，故又称为莱布尼兹记号。

符号$\frac{“\mathrm{d}y”}{\mathrm{d}x}$的巧妙之处在于清楚地指出了这是对变量 x 的导数。当讨论中有一个函数对不同的变量求导时，就显示了这种符号的优越性。例如当讨论由函数 $y=f(u)$ 和 $u=\varphi(x)$确定的复合函数的微分时，在论证中既要引进 y 对自变量 x 的导数，又要引进对中间变量 u 的导数，这时用符号 y'就显得模糊不清了，这里不能直接看出来究竟它代表这两个导数中的哪一个。

然而采用莱布尼兹记号，就可以把这两种导数分别记作：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$与$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}u}$。这就立刻可知是对哪一个变量求导数了。

实际上，在微分学发展的初期，导数就是通过微分的比定义的。当时微分在微积分学中占有很重要的地位。经过一百年之后，柯西等人在建立微积分理论时，精确地定义了导数，使导数概念成为微积分学的核心。相反地，微分倒过来用导数定义，使微分成为用起来比较方便的辅助性概念了。

∫　不定积分号

如果某物体的运动规律由方程：$s=s(t)$给出，其中 t 为时间，s 是物体走过的路程，那么求函数 $s(t)$的导数，就得到在某一时刻的瞬时速度：$v=s'(t)$。

解决此类问题，是由已知函数求导数的问题。但是在科学技术中，常需要完成与求导数相反的运算。比如，已知瞬时速度 $v(t)$，求出物体的运动规律 $s(t)$，就是已知某个函数的导数，求原函数的问题。

如果 $F(x)$是一个原函数，那么函数 $F(x)$加上常数 c，它的导数仍是 $f(x)$，$F(x)+c$ 叫做函数$f(x)$的不定积分，记作：$\int f(x)dx=F(x)+c$。“不定积分”用“$\int$”表示，叫做不定积分号。其中，$f(x)$叫做被积函数，dx 叫做积分元。

如上所述，要求 $f(x)$的不定积分，只要求出 $f(x)$的任意一个原函数就行了。设 $F(x)$是 $f(x)$的一个原函数，那么 $F(x)+c$（c 是任意常数）就是 $f(x)$的不定积分。

例如给定 $f(x)=2x$，因为$(x^2)'=2x$，所以 x^2 是 $2x$ 的一个原函数，其不定积分为：

$$\int 2xdx=x^2+c。$$

这里要注意：

$$\int 2xdx \neq x^2,$$
$$\int 2xdx \neq x^2 + c_0,$$
其中 c_0 为一个确定的常数。

这是因为 x^2 或 $x^2 + c_0$ 仅是 $f(x) = 2x$ 的一个原函数，而不定积分 $\int 2xdx$ 则是 $2x$ 的“所有”原函数组成的函数族。

1645 年，意大利数学家卡瓦列利曾用过记号“$\overline{\text{omn}\,l}$”，表示 l 的积分，“omn”是“omnia”（全部）的前三个字母，l 是线段。

数学家莱布尼兹从几何观点上独立地发现了微积分，他从 1684 年起发表了一系列的微积分著作，莱布尼兹的功绩之一是创造了反映事物本质的数学符号。他曾经跟着卡瓦列利使用过记号“$\overline{\text{omn}\,l}$”表示积分。但不久在莱布尼兹的论文中就改用符号“$\int y$”表示积分，这个记号里还没有标出积分变量。“$\int$”是“summa”（和）第一个字母“s”拉长以后的写法。到了 1684 年，莱布尼兹又改用“$\int y\mathrm{d}x$”表示不定积分。

事实上，设 $F(x)$ 的导数为 $f(x)$，求 $F(x)$ 的微分得到 $\mathrm{d}F(x) = f(x)\mathrm{d}x$；反之，求 $f(x)$ 的不定积分得到 $\int f(x)dx = F(x) + c$，又回到了 $F(x)$，只不过要加上一个任意的常数 c。可见微分和积分在运算上是互逆的。

认识这种互逆关系对于不定积分的计算是很重要的。因为不定积分的定义没有特定的构造形式，所以定义本身并不指明它的求法。要求不定积分，只能依靠它的逆运算来引导。

不定积分是学习定积分及其应用的基础。

$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$　定积分号

自然界中有这样两种互逆的运动过程：比如一滴水，在干燥的空气中逐渐蒸发，最后全部散失在空气中；相反地，在一定条件下，水蒸汽会逐渐凝聚起来成为水滴。这是两个互逆的过程。前者表现为逐层分解，化整为零；后者则表现为逐层积累，积零为整。

我们看一下这两个过程的数学形式。

设球形水滴的半径为 r，且 $0\leqslant r\leqslant R$，设它的体积为 V，则 $V=\frac{4}{3}\pi r^3$。

设想蒸发的过程，分为 n 层进行（n 很大）每层的厚度为 $\Delta r\left(\Delta r=\frac{R}{n}\right)$，第 i 层的半径设为 r_i，该层的体积为 ΔV_i。于是，用微分来近似地表达各层的体积：

$$\Delta V_i = dV_i = V'\Delta r = 4\pi r_i^2\Delta r。$$

当 $n\longrightarrow\infty$ 时，在极限意义下，不妨说 $\Delta V_i = dV_i$。可见，蒸发过程是水滴分解成无限多个微分的过程。

反之，如果把 n 个微分加起来，就是水滴的近似体积：

$$\sum_{i=1}^{n}\Delta V_i=\sum_{i=1}^{n}dV_i=\sum_{i=1}^{n}4\pi r_i^2\Delta r。$$

n 越大就越接近水滴体积，当 $n\to\infty$ 时（$\Delta r\to 0$）取极限，它等于水滴的体积：

$$V_{(R)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}4\pi r_i^2\Delta r=\frac{4}{3}\pi R^3(0\leqslant r\leqslant R)$$

在极限意义下，积聚过程恰是把全部微分还原为整体的过程，由此引发出定积分的思想。

设 $f(x)$是$[a,b]$上的连续函数,用分点

$$a<x_1<x_2<\cdots<x_{i-1}<x_i<\cdots<x_n=b$$

把$[a,b]$分成 n 个子区间,在每一个子区间$[x_{i-1},x_i]$上任取一点 ξ_i,并令 $\Delta x=x_i-x_{i-1}$。

当 $\Delta x_i\to 0$ 时,和式

$$\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i$$

的极限,叫做 $f(x)$在$[a,b]$上的定积分,用"$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$"表示,读作"从 a 到 b 函数 $f(x)$的定积分",即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\Delta x_i\to 0}\sum_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta x_i。$$

1779 年,数学家拉普拉斯首先给出了"定积分"这一名词。现在使用的定积分号 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是 1819 年到 1822 年间,由法国数学家富里哀首先使用的。这个符号清楚地表示出积分的上限和下限,应用起来非常方便。

定积分起源于求平面图形的面积和其它一些实际问题。在古代数学家的工作中,早已孕育了定积分的思想。比如说阿基米德远在公元前 240 年,就曾用求和方法计算过抛物线弓形及其它图形的面积。

在我国,像刘徽的"割圆术",祖暅的"开立圆术"(祖暅原理),都有积分思想的萌芽。

但是,直到牛顿和莱布尼兹之前,有关定积分的种种结果还是孤立和零散的,比较完整的定积分理论始终未能形成。定积分的形成和发展,为什么经过如此漫长的岁月?这与定积分的一般计算方法的解决有很大的关系。

在牛顿和莱布尼兹以前，计算定积分没有一般可行的方法，所采取的方法也是五花八门，有代数法，有几何法，其共同特点是都躲避不了繁难且技巧性很强的计算，这就限制了定积分的发展。

17世纪中叶，牛顿和莱布尼兹这两位数学大师，在总结了前人丰富资料的基础上，发现了存在于微分学和积分学之间的本质联系，提供了定积分的普遍计算方法——牛顿—莱布尼兹公式，即

设 $f(x)$是区间$[a,b]$上的连续函数，$F(x)$是一个原函数，则

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)。$$

“$F(b)-F(a)$”可以用符号$[F(x)]_a^b$ 或$F(x)\big|_a^b$ 表示，例如，上面提到的水滴的体积相当于

$$\begin{aligned} V(R) &= \lim_{\Delta r \to 0}\sum_{i=1}^{n} 4\pi r_i^2 \Delta r \\ &= \int_0^R 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi r^3 \Big|_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3。\end{aligned}$$

牛顿—莱布尼兹公式的确立，揭示了定积分与不定积分的内在联系，给出了计算定积分的一般方法，才使定积分真正成为解决许多实际问题的有力工具，促进了定积分学的发展。可以毫不夸张的说，牛顿—莱布尼兹公式的出现，是定积分学建立和发展的转折点，是积分学有如此广泛应用的关键，为科学技术的发展做出了十分宝贵的贡献。

告 读 者

亲爱的读者，本书向您介绍了数学中常见的一些数学符号，这些符号都是数学概念的代表，它们具有以下几个特点。

首先是含义的明确性：

一个数学符号确定它表示某个概念后，一般不再表示其他的含义。例如“$\lg N$”表示以 10 为底的常用对数。“$\backsim$”是表示两个图形相似的符号。符号的引进，有时伴随着一定的条件，例如 a^0 存在的条件是 $a\neq 0$；$\log_a N$ 存在的条件是：$a>0$ 且 $a\neq 1$，$N>0$。如果忽视了这些条件，很容易产生错误。

其次是表达的简明性：

采用数学符号后，能使叙述、计算和推理都显得简单明了。比如说“某数在 5 以上”这句话究竟是不是包括 5，不够明确。如果再补充说明一下包括 5，又显得累赘，当用不等式“$x\geqslant 5$”表示时，就会一目了然了。利用数学符号，能以简明的形式准确地表示出结果。例如矩形的一边长增加 10%，其邻边减少 10%，那么矩形的面积如何变化？

粗心大意的人可能认为一多一少，互相抵消后面积没有什么变化。如果采用字母表示数的方法，就会知道矩形的面积是减少了。事实上，设矩形的一条边为 a，邻边为 b，那么可以算出新矩形的面积为 $0.99ab$，这就是说无论哪条边增加 10%，哪条边减少 10%，则新矩形的面积是原来矩形的 99%。这里，利用数学符号起了决定性的作用。

最后是使用的方便性：

数学符号归纳起来，有的直接用字母充当符号，例如 π，e，i 等；有的是单词的缩写，例如对数号“log”就是 logarithm（对数）的缩写；有的是缩写以后的演变，例如积分号“$\int$”就是 summa（总和）的缩写 s 拉长以后得来的；有的则是采用了特殊记号，例如 $+$，$-$，$\times$，$\div$，$>$，$<$，$n!$ 等；在几何里还引入了一些象形符号，例如 $\angle$，$\perp$，$/\!/$，$\odot$，$\triangle$ 等。不论是哪种情况，读、写、用都很方便。借助于这些数学符号，还能沟通不同对象之间的内在联系，使之在形式上得到统一。例如利用圆锥曲线的极坐标方程，把椭圆、双曲线、抛物线的方程在形式上统一起来。在极坐标系里圆锥曲线的方程是：$\rho=\dfrac{ep}{1-e\cos\theta}$（其中 e 是离心率，p 为正常数）。

当 $0\leqslant e<1$ 时，方程表示椭圆，

当 $e=1$ 时，方程表示抛物线，

当 $e>1$ 时，方程表示双曲线。

数学符号使用起来非常方便，使数学问题变得便于思考也便于计算了，节省了人们的思维劳动，增加了数学方法的功效和普遍性。

数学符号既然是数学学习的重要内容，又是数学应用的重要工具，因此大家在学习数学时，要注意排除符号的迷惑。受思维定势的影响，有人对某些运算符号和数量符号容易发生混淆。例如学习对数符号 $\log_c(a+b)$ 时，就会受到代数运算律 $c(a+b)=ca+cb$ 的干扰，而误认为 $\log_c(a+b)=\log_c a+\log_c b$；同样在学习三角函数时，也会写出错误的等式：$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha+\sin\beta$。因此，弄清新旧两种符号的区别是

十分重要的。当然,在学习中还要注意发掘数学符号的新含义。例如某奇数的平方减1,所得的结果是什么数?我们用符号 $2n-1(n\in N)$ 表示这个奇数,依题意可以写成:

$$(2n-1)^2-1=4n^2-4n,$$

得数为4的倍数。把 $4n^2-4n$ 提取公因式得:原数 $=4n(n-1)$,这个得数是8的倍数。如果进一步把 $4n(n-1)$ 变换为 $8\times\frac{n(n-1)}{2}$,并且把 $\frac{n(n-1)}{2}$ 看成是一个二项式的系数 C_n^2,那么原数 $=8\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)=8C_n^2$。通过这样适当的操作,可以挖掘数学符号深层次的含义,探求数学问题未知的规律。

总之,随着数学的发展,数学符号将逐步走向综合和统一,而且应用的范围越来越广泛。展望未来,作为“数学王国”里统一文字的数学符号,必将日新月异,推动数学不断地向前发展。

孙兴运写于1998年

°′″　度号，分号，秒号

?，?　推出号，等价号

∽　相似号

≌　全等号

?　度数相等号

⊙，⌒　圆号，弧号

π　圆周率号

?　向量号或矢量号

P（x，y）　点的坐标号

M（ρ，θ）　点的极坐标号

sin，cos，tan，cot，sec，csc　正弦号，余弦号，正切号，余切号，正割号，余割号

max，min……　约定性符号

{x｜　P（x）} 或 {x：P（x）}　集合号

N，Z，Q，R，C　数集号

?　空集号

∈，?　属于号，不属于号

?，?　包含号，真包含号

∩　交集号

∪　并集号

?　补集号

f：A→B　映射号

?　二阶行列式号，三阶行列式号

?　矩阵号

f（x）　函数号

（a，b），〔a，b〕，〔a，b），（a，b〕　开区间号，闭区间号，半开半闭区间号

lim　极限号

∞　无穷大量号

f′（x）或y′　导数号

df（x）或dy　微分号

∫　不定积分号

?f（x）dx　定积分号

告读者