目　　录

I. 从微分观点看拓扑

II. 微 分 拓 扑

I. 从微分观点看拓扑

序

在培基-巴布(Page-Barbour)讲演基金会的资助下，这些讲演于1963年12月在弗吉尼亚(Virginia)大学发表. 其中介绍了拓扑学初期的某些论题，这些论题是以1912年L. E. J. Brouwer的映射度的定义为中心的. 然而，我们用的是微分拓扑的方法而不是Brouwer的组合方法. 正则值的概念以及断定每一光滑映射都有正则值的Sard定理和Brown定理在本书中起核心作用.

为陈述简单起见，所有的流形都取为无限次可微的并且明确地嵌入在欧氏空间中的流形. 少量点集拓扑学和实变理论的知识是众所周知的，在此不予叙证.

J. W. M.

1965年3月于新泽西州

普林斯顿

§1 光滑流形和光滑映射

首先说明一些术语：R^k 表示 k 维欧氏空间，于是一个点 $x\in R^k$ 便是实数的一个 k 重组 $x=(x_1, \cdots, x_k)$.

设 $U\subset R^k$, $V\subset R^l$ 都是开集. 如果从 U 到 V 的映射 f（写作 $f: U\to V$）的所有偏导数 $\partial^n f/\partial x_{i_1}\cdots\partial x_{i_n}$ 都存在且连续，则称 f 为*光滑映射*.

更为一般的情形：设 $X\subset R^k$ 以及 $Y\subset R^l$ 为欧氏空间的任意子集，$f: X\to Y$. 如果对于每一个 $x\in X$，存在着包含 x 的开集 $U\subset R^k$ 以及光滑映射 $F: U\to R^l$，使得 F 与 f 在 $U\cap X$ 上是一致的，则称 f 为*光滑映射*.

如果 $f: X\to Y$ 与 $g: Y\to Z$ 都是光滑的，注意复合映射 $g\circ f: X-Z$ 也是光滑的. 任一集合 X 的恒同映射显然是光滑的.

定义 如果映射 $f: X\to Y$ 将 X 同胚地变到 Y 上，并且 f 与 f^{-1} 两者都是光滑的，则称 f 为*微分同胚*.

现在可以粗略地说：*微分拓扑学*是研究集合 $X\subset R^k$ 在微分同胚下不变的性质的学科.

在此，我们不想去考察那些完全任意的集合 X，而用下述定义挑选出特别引人注目和特别有用的一类.

定义 设 $M\subset R^k$. 如果每一点 $x\in M$ 都有一个邻域

$W\cap M$ 微分同胚于欧氏空间 R^m 的某一个开子集 U，则称 M 为 m 维光滑流形.

任一特定的微分同胚 $g: U\to W\cap M$ 都称为区域 $W\cap M$ 的一个参数化(逆微分同胚 $g^{-1}: W\cap M\to U$ 称为 $W\cap M$ 上的一个坐标系).

有时，我们必须考察零维流形. 根据定义，如果每一个 $x\in M$ 有一邻域 $W\cap M$ 由 x 独点组成，则 M 是零维流形.

例 由所有满足 $x^2+y^2+z^2=1$ 的点 $(x, y, z)\in R^3$ 组成的单位球 S^2 是 2 维光滑流形. 事实上，当 $x^2+y^2<1$ 时，微分同胚

$$(x, y)\mapsto(x, y, \sqrt{1-x^2-y^2})$$

将 S^2 中 $z>0$ 的区域参数化了. 用互换 x、y、z 以及改变变量符号的办法，得到 $x>0$, $y>0$, $x<0$, $y<0$ 以及 $z<0$ 的区域类似的参数化. 由于这些区域覆盖 S^2，所以 S^2 是一个光滑流形.

更为一般的情形是：由所有满足 $\sum x_i^2=1$ 的点 $(x_1, \cdots, x_n)\in R^n$ 组成的球 S^{n-1} 是 $n-1$ 维光滑流形. 例如 $S^0\subset R^1$ 是由两个点组成的流形.

光滑流形的一个多少有点不规整的例子是所有满足条件 $x\neq 0$ 和 $y=\sin(1/x)$ 的点 $(x, y)\in R^2$ 的集合.

切空间和导射

为了对光滑流形间的光滑映射 $f: M\to N$ 定义导射 df_x 的概念，首先将每一点 $x\in M\subset R^k$ 联系一个 m 维线性子空间 $TM_x\subset R^k$，并称之为 M 在点 x 处的切空间. 然后，df_x 将是一个从 TM_x 到 TN_y 的线性映射，其中 $y=f(x)$. 向量空间 TM_x 的元素称为 M 在点 x 处的切向量.

人们直观地联想到 R^k 中的在点 x 附近最好地逼近 M 的 m 维超平面，TM_x 便是既通过原点而又平行于上述超平面的超平面(参看图 1 和图 2)．类似地，人们联想到从点 x 处的切超平面到点 y 处的切超平面的、最好地逼近 f 的非齐次线性映射．把这两个超平面都平移到原点去，便得到 df_x.

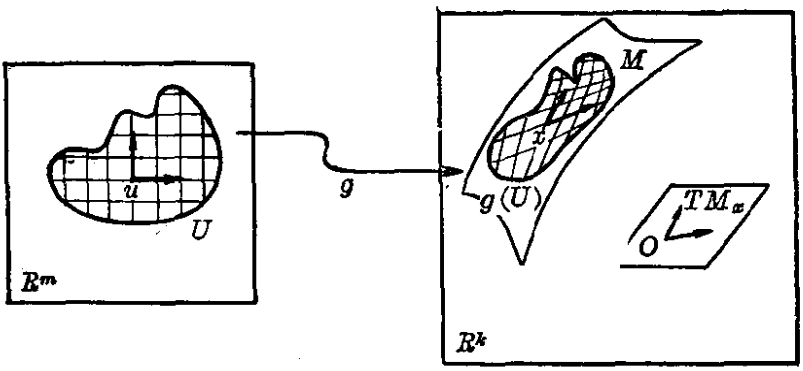

图 1　M 中区域的参数化

在给出实际定义之前，必须研究开集间的映射这一特殊情形．对于任意开集 $U\subset R^k$，切空间 TU_x 定义为整个向量空间 R^k．对于任一光滑映射 $f: U\to V$，导射

$$df_x: R^k\to R^l$$

用下列公式定义：当 $x\in U$，$h\in R^k$，

$$df_x(h)=\lim_{t\to 0}(f(x+th)-f(x))/t.$$

显然，$df_x(h)$ 是 h 的线性函数．[实际上，df_x 恰好是与在点 x 处取值的一阶偏导数的 $l\times k$ 阶矩阵 $(\partial f_i/\partial x_j)_x$ 相应的线性映射.]

下面是导射运算的两个基本性质：

1.（链法则）　若 $f: U\to V$ 和 $g: V\to W$ 都是光滑映射，$f(x)=y$，则

$$d(g\circ f)_x=dg_y\circ df_x.$$

换言之，R^k、R^l、R^m 的开子集之间的光滑映射的每一个可交换的三角形

$$\begin{tikzcd}
 & V \arrow[dr, "g"] & \\
U \arrow[ur, "f"] \arrow[rr, "g\circ f"'] & & W
\end{tikzcd}$$

对应着一个线性映射的可交换的三角形

$$\begin{tikzcd}
 & R^l \arrow[dr, "dg_y"] & \\
R^k \arrow[ur, "df_x"] \arrow[rr, "d(g\circ f)_x"'] & & R^m
\end{tikzcd}$$

2．若 I 为 U 的恒同映射，则 dI_x 为 R^k 的恒同映射．更为一般的情况是：如果 $U\subset U'$ 都是开集，并且

$$i: U\to U'$$

为包含映射，则 df_x 也是 R^k 的恒同映射．

还要注意：

3．若 $L: R^k\to R^l$ 为线性映射，则 $dL_x=L$．

作为这两个性质的简单应用，有下述论断：

论断　若 f 是开集 $U\subset R^k$ 与 $V\subset R^l$ 之间的微分同胚，则 k 必定等于 l，并且线性映射

$$df_x: R^k\to R^l$$

必定是非蜕化的．

证明　复合映射 $f^{-1}\circ f$ 是 U 的恒同映射，因此 $d(f^{-1})_y\circ df_x$ 是 R^k 的恒同映射．类似地，$df_x\circ d(f^{-1})_y$ 是 R^l 的恒同映射．于是 df_x 有双边的逆，因此推得 $k=l$．

这一论断的部分逆命题为真．令 $f: U\to R^k$ 为光滑映射，其中 U 为 R^k 中的开集．

反函数定理　如果导射 $df_x: R^k\to R^k$ 是非蜕化的，则 f 将

围绕 x 的任一充分小的开集 U' 微分同胚地映到开集 $f(U')$ 上.

(见 Apostol[2, p. 144]或 Dieudonné[7, p. 268].)*)

注意：即使在每一点处，df_x 都是非退化的，在大范围内 f 却可以不是一一的.（一个有意思的例子是复平面到自身的指数映射.）

现在对任意光滑流形 $M\subset R^k$ 定义切空间 TM_x：选取 M 中 x 的邻域 $g(U)$ 的一个参数化

$$g: U\to M\subset R^k$$

$g(u)=x$. 此处 U 是 R^m 的开子集. 将 g 认作是从 U 到 R^k 的映射. 所以导射

$$dg_u: R^m\to R^k$$

已有定义. 命 TM_x 等于 dg_u 的像 $dg_u(R^m)$（参见图 1).

我们必须证明这种构作法不依赖于参数化 g 的特殊选取. 令 $h: V\to M\subset R^k$ 为 M 中的点 x 的邻域 $h(V)$ 的另外一个参数化，且令 $v=h^{-1}(x)$. 则 $h^{-1}\circ g$ 将 u 的某一邻域 U_1 微分同胚地映到 v 的一个邻域 V_1 上. 开集间的光滑映射的交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & R^k & \\
U_1 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "h^{-1}\circ g"'] & & V_1 \arrow[ul, "h"']
\end{tikzcd}$$

引出线性映射的交换图表

$$\begin{tikzcd}
 & R^k & \\
R^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "\cong", "d(h^{-1}\circ g)_u"'] & & R^m \arrow[ul, "dh_v"']
\end{tikzcd}$$

*) 亦可参看本书第 II 篇 §1 的 1.5.——译注

而由此直接推得 dg_u 的像等于 dh_v 的像，即

$$\mathrm{Image}(dg_u)=\mathrm{Image}(dh_v).$$

于是，TM_x 是完全确定的.

证明 TM_x 是 m 维向量空间：因为

$$g^{-1}: g(U)\to U$$

是光滑映射，所以可以选取一个包含 x 的开集 W 以及一个光滑映射 $F: W\to R^m$，使 F 在 $W\cap g(U)$ 上与 g^{-1} 一致. 令 $U_0=g^{-1}(W\cap g(U))$，我们有交换图表

$$\begin{tikzcd} & W \arrow[dr, "F"] & \\ U_0 \arrow[ur, "g"] \arrow[rr, "\text{包含}"] & & R^m \end{tikzcd}$$

因此有交换图表

$$\begin{tikzcd} & R^k \arrow[dr, "dF_x"] & \\ R^m \arrow[ur, "dg_u"] \arrow[rr, "\text{恒同}"] & & R^m \end{tikzcd}$$

这一图表显然蕴含 dg_u 秩为 m，因而它的像 TM_x 为 m 维.

现在考虑两个光滑流形 $M\subset R^k$ 和 $N\subset R^l$，以及光滑映射

$$f: M\to N,$$

并设 $f(x)=y$. 导射

$$df_x: TM_x\to TN_y$$

定义如下：由于 f 是光滑的，所以存在着包含 x 的开集 W 以及在 $W\cap M$ 上与 f 一致的光滑映射

$$F: W\to R^l.$$

对于所有 $v\in TM_x$，定义 $df_x(v)$ 等于 $dF_x(v)$.

为了验证这一定义，必须证明 $dF_x(v)$ 属于 TN_y 并且不依赖于 F 的特殊选取.

对于 x 的邻域 $g(U)$ 和 y 的邻域 $h(V)$ 选取参数化

$$g: U \to M \subset R^k \quad 和 \quad h: V \to N \subset R^l.$$

如果必要的话，用一个较小的集合替换 U，可以假定 $g(U) \subset W$，以及 f 将 $g(U)$ 映到 $h(V)$ 中．从而

$$h^{-1} \circ f \circ g: U \to V$$

是完全确定的光滑映射.

考虑开集间的光滑映射的交换图表

$$\begin{tikzcd} W \arrow[r, "F"] & R^l \\ U \arrow[u, "g"] \arrow[r, "h^{-1} \circ f \circ g"] & V \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

取导射，得到线性映射的交换图表

$$\begin{tikzcd} R^k \arrow[r, "dF_x"] & R^l \\ R^m \arrow[u, "dg_u"] \arrow[r, "d(h^{-1} \circ f \circ g)_u"] & R^n \arrow[u, "dh_v"'] \end{tikzcd}$$

其中 $u = g^{-1}(x)$；$v = h^{-1}(y)$.

这立即推出 dF_x 将 $TM_x = \mathrm{Image}(dg_u)$ 变到

$$TN_y = \mathrm{Image}(dh_v)$$

中．从而得到的映射 df_x 不依赖于 F 的特殊选取，因为绕着图表的底部走能得到同一个线性变换．此即

$$df_x = dh_v \circ d(h^{-1} \circ f \circ g)_u \circ (dg_u)^{-1}.$$

这就证明了 $$df_x: TM_x \to TN_y$$

是完全确定的线性映射.

象前面一样，导射运算具有两个基本性质：

1．（链法则） 若 $f: M \to N$ 以及 $g: N \to P$ 都是光滑的，$f(x) = y$，则

$$d(g \circ f)_x = dg_y \circ df_x.$$

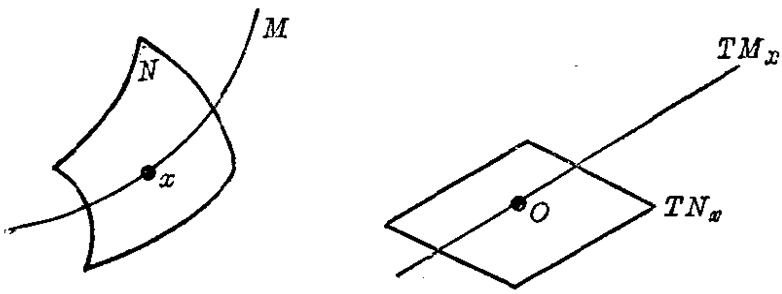

图 2　子流形的切空间

2．若 I 是 M 的恒同映射，则 dI_x 是 TM_x 的恒同映射．更一般些，如果 $M\subset N$，i 是包含映射，则 $TM_x\subset TN_x$，di_x 也是包含映射(参见图 2)．

证明是简易的．

象前面一样，由这两个性质可导出如下论断：

论断　若 $f: M\to N$ 是微分同胚，则 $df_x: TM_x\to TN_y$ 是向量空间的同构．特别，M 的维数必定等于 N 的维数．

正则值

设 $f: M\to N$ 为维数相同的*) 两个流形之间的光滑映射．如果在 $x\in M$ 处导射 df_x 是非蜕化的，则称 x 是 f 的正则点．这时，从反函数定理推出 f 将 M 中 x 的某一邻域微分同胚地映到 N 中的一个开集上．对于 $y\in N$，如果 $f^{-1}(y)$ 只包含正则点，那么 y 称为正则值．

若 df_x 是蜕化的，则 x 称为 f 的临界点，并且像 $f(x)$ 称为临界值．于是每一点 $y\in N$ 是临界值还是正则值按照 $f^{-1}(y)$ 包含还是不包含临界点而确定．

注意：若 M 是紧致的并且 $y\in N$ 是正则值，则 $f^{-1}(y)$ 是有限集(可能是空集)．这是因为：一方面，在任何情况下，

*) 在§2 中这一限制将取消．——原注

$f^{-1}(y)$作为紧致空间的闭子集总是紧致的；另一方面，由于 f 在每一点 $x\in f^{-1}(y)$ 的某一邻域中是一一的，因而 $f^{-1}(y)$ 是离散的.

对于光滑映射 $f: M\to N$，其中 M 是紧致的，$y\in N$ 是正则值，我们定义 $\# f^{-1}(y)$ 为 $f^{-1}(y)$ 中点的个数. 首先注意：$\# f^{-1}(y)$ 作为 y 的函数(其中 y 只取正则值!)是局部常值的，即存在着 y 的一个邻域 $V\subset N$，使得对于任意 $y'\in V$ 都有 $\# f^{-1}(y')=\# f^{-1}(y)$. [设 $x_1, \cdots, x_k$ 为 $f^{-1}(y)$ 的全部点，选取这些点的两两无交的邻域 $U_1, \cdots, U_k$，要求这些邻域分别被 f 微分同胚地映到 N 中某些邻域 $V_1, \cdots, V_k$ 上. 于是可取

$$V=V_1\cap V_2\cap\cdots\cap V_k-f(M-U_1-\cdots-U_k).]$$

代数基本定理

作为这些概念的一个应用，我们证明代数基本定理：每一个非常值的复多项式 $P(z)$ 必定有一个零点.

为了证明定理，首先必需从复数平面过渡到紧致流形. 考虑单位球 $S^2\subset R^3$ 以及从 S^2 的“北极”(0, 0, 1)出发的球极投射

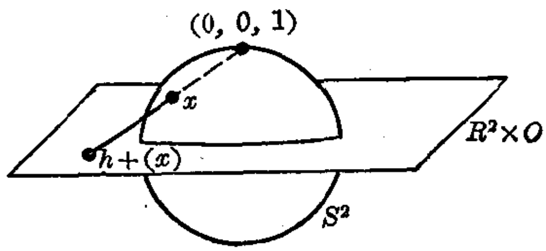

图 3　球极投射

$$h_+: S^2-\{(0,\ 0,\ 1)\}\to R^2\times 0\subset R^3$$

(见图 3). 我们将把 $R^2\times 0$ 与复数平面看成一样. 从 $R^2\times 0$ 到自身的多项式映射 P 对应于从 S^2 到自身的一个映射 f；其中

$$f(x)=h_+^{-1}Ph_+(x)\quad (\text{当 } x\neq(0,\ 0,\ 1));$$
$$f(0,\ 0,\ 1)=(0,\ 0,\ 1).$$

众所周知，得到的映射 f 是光滑的，即使在北极的一个邻域中也是如此．为了看清这一点，我们引进从南极 $(0, 0, -1)$ 出发的球极投射 h_-，且令

$$Q(z) = h_- f h_-^{-1}(z).$$

注意：根据初等几何，有

$$h_+ h_-^{-1}(z) = z/|z|^2 = 1/\bar{z}.$$

现若

$$P(z) = a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \cdots + a_n \quad (a_0 \neq 0),$$

则通过一个简短的计算，可得到

$$Q(z) = z^n / (\bar{a}_0 + \bar{a}_1 z + \cdots + \bar{a}_n z^n).$$

于是 Q 在 0 的一个邻域中是光滑的，这就推出 $f = h_-^{-1} Q h_-$ 在 $(0, 0, 1)$ 的一个邻域中是光滑的．

其次，注意：f 只有有限个临界点；因为 P 仅在微商多项式 $P'(z) = \sum a_{n-j} j z^{j-1}$ 的零点处才不是局部微分同胚，且由于 P' 不恒等于零，它只有有限多个零点．f 的正则值的集合是除去了有限个点的球，因而是连通的．所以，在这个集合上局部常值函数 $\# f^{-1}(y)$ 自然应当是常值的．因为 $\# f^{-1}(y)$ 不能处处为零，所以我们断定它无处为 0．于是 f 是一个在上的映射，从而多项式 $P(z)$ 必有零点．

§2 Sard 定理和 Brown 定理

一般地说，如果希望光滑映射的临界值的集合总是有限的，那就太过份了．但是，在下述定理所说明的意义下，这个集合是“微小的”．这个定理是由 A. Sard 于 1942 年接在 A. P. Morse 较早的工作之后证明的．（参见[30]、[24].）

定理 设 $f: U\to R^n$ 为定义在开集 $U\subset R^m$ 上的光滑映射，并令

$$C=\{x\in U \mid df_x \text{ 的秩 } <n\},$$

则 $f(C)$ 的像在 R^n 中的 Lebesque 测度为零*)．

因为零测集不能包含任何非空开集，因而余集 $R^n-f(C)$ 必定在 R^n 中处处稠密**)．

定理的证明将在 §3 中给出．这个证明的关键在于 f 应当有多重偏导数．（参见 Whitney[38].）

我们主要对 $m\geqslant n$ 的情形感兴趣．若 $m<n$，则显然 $C=U$；因此本定理只是简单地谈到 $f(U)$ 有零测度．

更一般些，考虑从 m 维流形到 n 维流形的光滑映射 $f: M$

*) 换言之，任给 $\varepsilon>0$，可有一个 n 维总体积小于 ε 的 R^n 中的方体序列覆盖 $f(C)$．——原注

**) Arthur B. Brown 于 1935 年证明．这一结论又由 Dobovickiĭ 于 1953 年以及 Thom 于 1954 年重新发现．（参见[5]，[8]，[36].）——原注

$\to N$. 设 C 为所有使得

$$df_x: TM_x \to TN_{f(x)}$$

的秩小于 n 的(即 df_x 不是映上的)点 x 的集合. 则 C 称为临界点集; $f(C)$ 称为临界值集, 而余集 $N-f(C)$ 则称为 f 的正则值集.(当 $m=n$ 时, 这与我们先前的定义相合). 因为 M 能被邻域的可数族所覆盖, 这些邻域的每一个同胚于 R^m 的一个开子集, 故有:

推论(A. B. Brown) 光滑映射 $f: M\to N$ 的正则值集在 N 中是处处稠密的.

为了阐发这一推论, 我们需要下列引理:

引理 1 若 $f: M\to N$ 为从 m 维流形到 n 维流形的光滑映射($m\geqslant n$), 并且 $y\in N$ 为正则值, 则集合 $f^{-1}(y)\subset M$ 为 $m-n$ 维光滑流形.

证明 令 $x\in f^{-1}(y)$. 因为 y 是正则值, 导射 df_x 必将 TM_x 映到 TN_y 上. df_x 的核空间 $\mathfrak{N}=(df_x)^{-1}(0)\subset TM_x$ 是 $m-n$ 维向量空间.

若 $M\subset R^k$, 选取一个在子空间 $\mathfrak{N}\subset TM_x\subset R^k$ 上非蜕化的线性映射 $L: R^k\to R^{m-n}$. 现在用 $F(\xi)=(f(\xi), L(\xi))$ 定义

$$F: M\to N\times R^{m-n}.$$

导射 dF_x 显然由公式

$$dF_x(v)=(df_x(v), L(v))$$

给出. 于是 dF_x 是非蜕化的. 因此 F 将 x 的某一邻域 U 微分同胚地映到 $(y, L(x))$ 的一个邻域 V 上. 注意 $f^{-1}(y)$ 在映射 F 下对应着超平面 $y\times R^{m-n}$. 事实上, F 将 $f^{-1}(y)\cap U$ 微分同胚地映到 $(y\times R^{m-n})\cap V$ 上. 这证明了 $f^{-1}(y)$ 是 $m-n$ 维光滑流形.

作为例子，我们能够给出单位球 S^{m-1} 是光滑流形的一个简单的证明：考虑函数 $f: R^m \to R$，其定义为

$$f(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_m^2.$$

任意 $y \neq 0$ 都是正则值，因而 $S^{m-1} = f^{-1}(1)$ 是光滑流形.

若 M' 是包含在 M 中的流形，注意到对于 $x \in M'$，TM'_x 是 TM_x 的子空间. 于是 TM'_x 在 TM_x 中的正交补是 $m-m'$ 维的向量空间，称为 M' 在 M 中点 x 处的法向量空间.

特别地，对于 $f: M \to N$ 的正则值 y，令 $M' = f^{-1}(y)$.

引理 2 $df_x: TM_x \to TN_y$ 的核空间恰好等于子流形*) $M' = f^{-1}(y)$ 的切空间 $TM'_x \subset TM_x$. 因此，df_x 将 TM'_x 的正交补同构地映到 TN_y 上.

证明 从图表

$$\begin{tikzcd}
M' \arrow[r, "i"] \arrow[d] & M \arrow[d, "f"] \\
y \arrow[r] & N
\end{tikzcd}$$

我们知道 df_x 将子空间 $TM'_x \subset TM_x$ 映到零. 通过计算维数可见，df_x 将 M' 的法向量空间同构地映到 TN_y 上.

有边流形

上述引理能够修改得适用于定义在光滑的"有边流形"上的映射. 首先考虑闭的半空间

$$H^m = \{(x_1, \cdots, x_m) \in R^m \mid x_m \geqslant 0\}.$$

边 ∂H^m 定义为超平面 $R^{m-1} \times 0 \subset R^m$.

定义 设 $X \subset R^k$，如果每一个 $x \in X$ 有一邻域 $U \cap X$ 微分同胚于 H^m 的一个开子集 $V \cap H^m$，则 X 称为光滑的有边

*) 流形 $M' \subset$ 流形 M 时则称 M' 是 M 的子流形. ——译注

m-流形*). 边 ∂X 是在这种微分同胚下 X 中所有对应于 ∂H^m 的点的那些点构成的集合.

不难证明 ∂X 是一个完全确定的 $m-1$ 维光滑流形；内部 $X-\partial X$ 是一个 m 维光滑流形.

如在 § 1 中那样定义切空间 TX_x, 所以即使 x 是边界点, TX_x 也是整个的 m 维向量空间.

在此有一个给出有边流形的例子的方法：令 M 为无边流形, 且令 $g: M\to R$ 以 0 为正则值.

引理 3 M 中使得 $g(x)\geqslant 0$ 的点 x 构成的集合是光滑的有边流形, 其边等于 $g^{-1}(0)$.

此引理的证明与引理 1 的证明完全类似.

例 由所有满足条件

$$1-\sum x_i^2\geqslant 0$$

的点 $x\in R^m$ 组成的单位圆盘 D^m 是光滑的有边流形，其边等于 S^{m-1}.

现在考虑从一个有边 m-流形到一个 n-流形的光滑映射 $f: X\to N$, 其中 $m>n$.

引理 4 若对 f 而言以及对限制映射 $f|\partial X$ 而言, $y\in N$ 都是正则值, 则 $f^{-1}(y)\subset X$ 是光滑的有边 $(m-n)$-流形. 并且边 $\partial(f^{-1}(y))$ 正好等于 $f^{-1}(y)$ 与 ∂X 的交.

证明 因为要证明的是一个局部性质，所以只要考虑这种特殊情形：即以 $y\in R^n$ 为正则值的映射 $f: H^m\to R^n$. 令 $\bar{x}\in f^{-1}(y)$, 若 $\bar{x}$ 是一个内点, 则如前, $f^{-1}(y)$ 在 $\bar{x}$ 的一个邻域中为光滑流形.

假设 $\bar{x}$ 为边界点. 选取一个光滑映射 $g: U\to R^n$, g 定义于 x 在 R^m 中的整个邻域 U 上, 并且在 $U\cap H^m$ 上与 f 一致.

*) m-流形即 m 维流形. 下同. ——译注

如果必要的话，用小一些的邻域替换 U，我们可以假定 g 没有临界点．因此，$g^{-1}(y)$是 $m-n$ 维的光滑流形．

设 $\pi: g^{-1}(y)\to R$ 表示坐标投射，

$$\pi(x_1, \cdots, x_m)=x_m.$$

可以断定 π 以 0 为一正则值．因为 $g^{-1}(y)$在点 $x\in\pi^{-1}(0)$处的切空间等于

$$dg_x=df_x: R^m\to R^n$$

的核空间；而由于假定 $f|\partial H^m$ 在点 x 处是正则的，这保证了这一核空间不能完全包含在 $R^{m-1}\times 0$ 中．

因此根据引理 3，由所有满足 $\pi(x)\geqslant 0$ 的点 $x\in g^{-1}(y)$ 组成的集合 $g^{-1}(y)\cap H^m=f^{-1}(y)\cap U$ 是光滑的有边流形，其边等于 $\pi^{-1}(0)$．这就完成了证明．

Brouwer 不动点定理

现在应用上述结果来给出一个证明经典的 Brouwer 不动点定理时用到的关键性引理：设 X 为紧致的有边流形．

引理 5 不存在光滑映射 $f: X\to\partial X$ 保持 ∂X 点式不动．

证明（遵循 M. Hirsch 的方式） 假设存在这样一个映射 f．令 $y\in\partial X$ 为 f 的正则值．因为 y 肯定也是恒同映射 $f|\partial X$ 的正则值，所以 $f^{-1}(y)$是光滑的有边 1-流形，其边由独点

$$f^{-1}(y)\cap\partial X=\{y\}$$

组成．但 $f^{-1}(y)$也是紧致的，而仅有的紧致 1-流形都是有限个圆周和闭线段的不相交的并*)，所以 $\partial f^{-1}(y)$必定由偶数个点组成．这一矛盾就证实了引理．

特别地，单位圆盘

*) 在附录中给了一个证明．——原注

$$D^n=\{x\in R^n \mid x_1^2+\cdots+x_n^2\leqslant 1\}$$

是以单位球 S^{n-1} 为边的紧致流形. 因此作为特殊情形, 我们证明了 S^{n-1} 的恒同映射不能扩充为光滑映射 $D^n\to S^{n-1}$.

引理 6 任一光滑映射 $g: D^n\to D^n$ 都有一个不动点(即一个点 $x\in D^n$ 使得 $g(x)=x$).

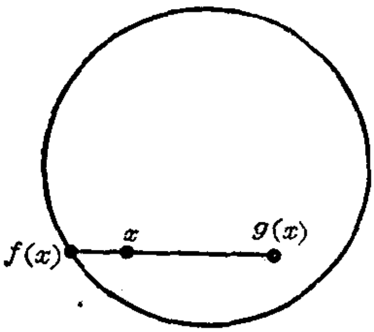

图 4

证明 假设 g 没有不动点. 对于 $x\in D^n$, 令 $f(x)\in S^{n-1}$ 为在通过 x 与 $g(x)$ 的直线上而又离 x 比离 $g(x)$ 更近的那个点(见图 4), 则 $f: D^n\to S^{n-1}$ 为光滑映射, 满足条件: 对于 $x\in S^{n-1}$, $f(x)=x$. 据引理 5 知: 这是不可能的. (为了知道 f 是光滑的, 我们给出下列解析表达式: $f(x)=x+tu$, 其中

$$u=\frac{x-g(x)}{\|x-g(x)\|},$$

$$t=-x\cdot u+\sqrt{1-x\cdot x+(x\cdot u)^2},$$

在平方根符号下的表达式严格地是正的. 此处以及以后 $\|x\|$ 都表示欧氏长度 $\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2}$.)

Brouwer 不动点定理 任一连续映射 $G: D^n\to D^n$ 都有一个不动点.

证明 我们用光滑映射来逼近 G, 从而将这个定理归结为引理. 给定 $\varepsilon>0$, 根据 Weierstrass 逼近定理*), 存在多项式函数 $P_1: R^n\to R^n$ 满足条件: 对于 $x\in D^n$, $\|P_1(x)-G(x)\|<\varepsilon$. 然而, P_1 可能把 D^n 的点变为 D^n 外面的点. 为了修正这一点, 我们设

$$P(x)=P_1(x)/(1+\varepsilon).$$

*) 例如见 Dieudonné[7. p. 133].——原注

则显然 P 将 D^n 映到 D^n 中，并且对于 $x\in D^n$，$\|P(x)-G(x)\|<2\epsilon$.

假设对于所有 $x\in D^n$，$G(x)\neq x$. 则连续函数 $\|G(x)-x\|$ 必定在 D^n 上取到一个最小值 $\mu>0$. 如上选取 $P: D^n\to D^n$ 使得对于所有 x，$\|P(x)-G(x)\|<\mu$，显然有 $P(x)\neq x$. 于是 P 是一个从 D^n 到自身的没有不动点的光滑映射. 这与引理 6 矛盾. 于是证明完成.

这里用过的方法常常能够用于更一般的情形：为了证明关于连续映射的一个命题，首先对于光滑映射建立这一结果，然后用一个逼近定理过渡到连续情形.（参见 § 8，问题 4.）

§3 Sard 定理的证明*)

首先重述

Sard 定理 设 $f: U \to R^p$ 为光滑映射，其中 U 是 R^n中的开集，并令 C 为临界点集，即所有使得

$$df_x \text{ 的秩} < p$$

的点 $x \in U$ 的集合. 则 $f(C) \subset R^p$ 有零测度.

注意 $n \leqslant p$ 的情形是比较容易的（参见 de Rham [29, p. 10]）. 不过，我们要给一个统一的证明.

证明对 n 作归纳法. 注意定理的陈述对于 $n \geqslant 0$, $p \geqslant 1$ 都有意义. （据定义 R^0 由独点组成.）作为归纳的开始，当 $n=0$ 时定理肯定为真.

令 $C_1 \subset C$ 表示所有使得一阶导射 df_x 为零的点 $x \in U$ 组成的集合. 更一般些，令 C_i 表示使得 f 的所有阶数 $\leqslant i$ 的偏导数在点 x 处为零的那些点 x 的集合. 于是得到一个闭集递减序列

$$C \supset C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset \cdots.$$

证明分如下三个步骤:

第 1 步 像集 $f(C - C_1)$ 有零测度.

*) 这里的证明是根据 Pontryagin [28] 中的证明给出的，只是在细节上稍微简单一点，因为这里假定 f 是无限次可微的. ——原注

第 2 步　当 $i \geqslant 1$ 时，像集 $f(C_i - C_{i+1})$ 有零测度.

第 3 步　当 k 足够大时，像集 $f(C_k)$ 有零测度.

（注意：若 f 是实解析的，则所有 C_i 的交是空的，除非 f 在 U 的某一分支上为常值. 因此在这种情形下只要给出第 1 步和第 2 步.）

第 1 步的证明：这一步也许是最难的一步，我们可以假定 $p \geqslant 2$，因为当 $p=1$ 时 $C=C_1$. 我们需要众所周知的 Fubini 定理*)：一个可测集

$$A \subset R^p = R^1 \times R^{p-1}$$

如果与每一超平面（常数）$\times R^{p-1}$ 都交于 $p-1$ 维零测度集，则 A 必定有零测度.

对于每一 $\bar{x} \in C - C_1$，我们找一个开邻域 $V \subset R^n$，使得 $f(V \cap C)$ 有零测度. 因为 $C - C_1$ 被可数多个这种邻域所覆盖，这就证明了 $f(C - C_1)$ 有零测度.

由于 $\bar{x} \notin C_1$，存在某一个偏导数，设为 $\partial f_1/\partial x_1$，在点 $\bar{x}$ 处不为零. 考虑由

$$h(x) = (f_1(x), x_2, \cdots, x_n)$$

定义的映射 $h: U \to R^n$，因为 $dh_{\bar{x}}$ 是非蜕化的，h 将 $\bar{x}$ 的某一邻域 V 微分同胚地映到一个开集 V' 上. 于是复合映射 $g = f \circ h^{-1}$ 将 V' 映到 R^p 中. 注意 g 的临界点集 C' 正好是 $h(V \cap C)$；因此 g 的

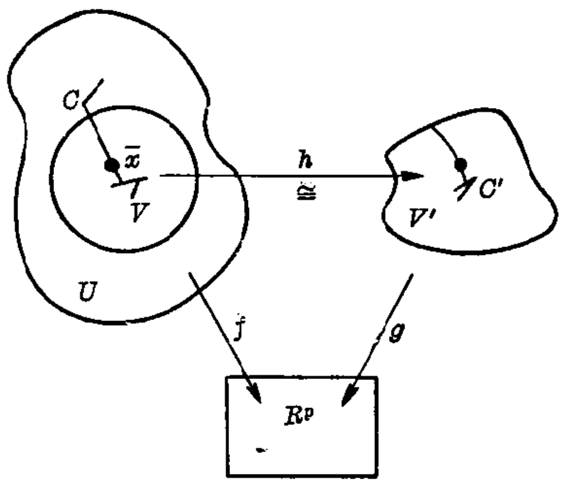

图 5　映射 g 的构造

*) 一个简单的证明（以及 Sard 定理的另外一个证明）见 Sternberg [35, pp. 51～52]. Sternberg 假定 A 是紧致的，不过一般情形容易从这种特殊情形推出来. ——原注

临界值的集合 $g(C')$ 等于 $f(V\cap C)$.

对于每一 $(t, x_2, \cdots, x_n)\in V'$, 注意 $g(t, x_2, \cdots, x_n)$ 属于超平面 $t\times R^{p-1}\subset R^p$, 于是 g 将超平面变到超平面中. 令

$$g^t: (t\times R^{n-1})\cap V'\to t\times R^{p-1}$$

表示 g 的限制. 注意 $t\times R^{n-1}$ 的点是 g^t 的临界点当且仅当它是 g 的临界点; 因为 g 的一阶偏导数的矩阵具有形式

$$(\partial g_i/\partial x_j)=\begin{bmatrix}1 & 0\\ * & (\partial g_i^t/\partial x_j)\end{bmatrix}.$$

根据归纳假设, g^t 的临界值集在 $t\times R^{p-1}$ 中有零测度, 因此 g 的临界值集与每一超平面 $t\times R^{p-1}$ 交于一个零测度集. 集合 $g(C')$ 是可测的, 因为它能表为紧致子集的可数并. 因此, 根据 Fubini 定理, 集合

$$g(C')=f(V\cap C)$$

有零测度, 第 1 步证完.

第 2 步的证明: 对于每一 $\bar{x}\in C_k-C_{k+1}$, 存在某个 $k+1$ 阶偏导数 $\partial^{k+1}f_r/\partial x_{s_1}\cdots\partial x_{s_{k+1}}$ 不为零. 于是函数

$$w(x)=\partial^k f_r/\partial x_{s_2}\cdots\partial x_{s_{k+1}}$$

在点 $\bar{x}$ 处为零, 但 $\partial w/\partial x_{s_1}$ 在点 $\bar{x}$ 处不为零. 为确定起见, 设 $s_1=1$. 则以

$$h(x)=(w(x), x_2, \cdots, x_n)$$

定义的映射 $h: U\to R^n$ 将 $\bar{x}$ 的某一邻域 V 微分同胚地变到一个开集 V' 上. 注意 h 将 $C_k\cap V$ 变到超平面 $0\times R^{n-1}$ 中. 我们再考虑

$$g=f\circ h^{-1}: V'\to R^p,$$

令
$$\bar{g}: (0\times R^{n-1})\cap V'\to R^p$$

表示 g 的限制. 由归纳法知, $\bar{g}$ 的临界值集在 R^p 中有零测

度．但 $h(C_k\cap V)$ 中的每一点肯定是 $\bar{g}$ 的临界点(因为所有阶数$\leqslant k$ 的偏导数为零)．因此

$$\bar{g}h(C_k\cap V)=f(C_k\cap V)$$

有零测度．由于 C_k-C_{k+1} 是被可数多个这种集合 V 所覆盖，从而推得 $f(C_k-C_{k+1})$有零测度.

第 3 步的证明：令 $I^n\subset U$ 为边长等于 δ 的一个立方体．若 k 充分大(确切地说 $k>n/p-1$)我们可以证明 $f(C_k\cap I^n)$ 有零测度．因为 C_k 能被可数多个这种立方体所覆盖，这就可证明 $f(C_k)$有零测度.

从 Taylor 定理、I^n 的紧致性以及 C_k 的定义，我们知道：当 $x\in C_k\cap I^n$，$x+h\in I^n$ 时，

$$f(x+h)=f(x)+R(x,\ h),$$

其中

$$\|R(x,\ h)\|\leqslant C\|h\|^{k+1}, \tag{1}$$

这里 C 为仅依赖于 f 和 I^n 的常数．现在重分 I^n 为边长等于 δ/r 的 r^n 个立方体．令 I_1 为重分中的一个立方体，它包含 C_k 的一个点 x．则 I_1 的任何一点能写作 $x+h$，其中

$$\|h\|\leqslant\sqrt{n}\,(\delta/r). \tag{2}$$

从(1)推出 $f(I_1)$在一个边长为 a/r^{k+1} 以 $f(x)$ 为中心的立方体中，其中 $a=2c(\sqrt{n}\,\delta)^{k+1}$ 是常数．因此 $f(C_k\cap I^n)$包含在最多 r^n 个立方体的并中，这些立方体总体积为

$$V\leqslant r^n(a/r^{k+1})^p=a^pr^{n-(k+1)p}.$$

若 $k+1>n/p$，则显然当 $r\to\infty$ 时，V 趋近于0；所以 $f(C_k\cap I^n)$必定有零测度．Sard 定理证毕.

§4　映射的模 2 度

考虑一个光滑映射 $f: S^n \to S^n$. 若 y 为正则值，再说一遍，$\#f^{-1}(y)$ 表示方程 $f(x)=y$ 的解 x 的个数. 我们可证明 $\#f^{-1}(y)$ 的模 2 同余类不依赖于正则值 y 的选取. 这一同余类称为 f 的模 2 度. 并且，上述论断及定义对于任何光滑映射

$$f: M \to N$$

都有效，其中 M 是紧致的无边流形，N 是连通的，并且两个流形有相同的维数(此外，我们也可假定 N 是紧致无边的，因为否则，模 2 度必为零). 为了证明上述论断，下面引进两个新概念.

光滑同伦和光滑同痕

给定 $X \subset R^k$，令 $X \times [0, 1]$ 表示由所有满足 $x \in X$ 以及 $0 \leqslant t \leqslant 1$ 的 (x, t) 组成的 R^{k+1} 的子集*). 两个映射

$$f, g: X \to Y$$

称为是光滑同伦的(简记作 $f \sim g$)，如果存在一个光滑映射 $F: X \times [0, 1] \to Y$ 满足条件：对于所有 $x \in X$,

*) 若 M 为光滑的无边流形，则 $M \times [0, 1]$ 为以 M 的两个“拷贝”为边的光滑流形. M 的边点将会生出 $M \times [0, 1]$ 的“角”点. ——原注

$$F(x,\ 0)=f(x);\quad F(x,\ 1)=g(x).$$

这一映射 F 称为 f 与 g 之间的一个光滑同伦.

注意：光滑同伦的关系是一个等价关系．为了证明它是传递的，我们要用到：存在一个光滑函数 φ: $[0,\ 1]\to[0,\ 1]$，满足条件

$$\varphi(t)=0,\quad \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3};$$

$$\varphi(t)=1,\quad \text{当 } \frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1.$$

$\Big[$例如令 $\varphi(t)=\lambda\left(t-\frac{1}{3}\right)\Big/\left(\lambda\left(t-\frac{1}{3}\right)+\lambda\left(\frac{2}{3}-t\right)\right)$，其中当 $\tau\leqslant 0$ 时，$\lambda(\tau)=0$；而当 $\tau>0$ 时，$\lambda(\tau)=\exp(-\tau^{-1})$. $\Big]$给定一个 f 与 g 之间的光滑同伦 F，公式 $G(x,\ t)=F(x,\ \varphi(t))$ 确定了一个光滑同伦 G，满足条件：

$$G(x,\ t)=f(x),\quad \text{当 } 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{3};$$

$$G(x,\ t)=g(x),\quad \text{当 } \frac{2}{3}\leqslant t\leqslant 1.$$

现若 $f\sim g$ 且 $g\sim h$，则利用上面的作法容易证明 $f\sim h$.

若 f 与 g 恰好都是从 X 到 Y 的微分同胚，我们也能定义 f 与 g 之间的“光滑同痕”的概念．这也是一个等价关系．

定义 微分同胚 f 是光滑同痕于 g 的，如果存在一个从 f 到 g 的光滑同伦 F: $X\times[0,\ 1]\to Y$，使得对于每一个 $t\in[0,\ 1]$，对应

$$x\mapsto F(x,\ t)$$

将 X 微分同胚地映到 Y 上.

下面要证明一个映射的模 2 度仅仅依赖于它的光滑同伦类．为此，先证明两个引理：

同伦引理 令 f、$g: M \to N$ 为光滑同伦的两个映射，其中 M, N 是两个具有相同维数的流形，并且 M 是紧致无边的. 若 $y \in N$ 对于 f 与 g 两者都是正则值，则

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \pmod 2.$$

证明 令 $F: M \times [0, 1] \to N$ 为 f 与 g 之间的光滑同伦. 先设 y 也是 F 的正则值. 则 $F^{-1}(y)$ 是一个紧致 1-流形，其边等于

$$F^{-1}(y) \cap (M \times 0 \cup M \times 1)$$
$$= f^{-1}(y) \times 0 \cup g^{-1}(y) \times 1.$$

于是 $F^{-1}(y)$ 的边点的总数等于

$$\# f^{-1}(y) + \# g^{-1}(y).$$

但在 §2 中说过，紧致的 1-流形总有偶数个边界点. 所以 $\# f^{-1}(y) + \# g^{-1}(y)$ 是偶数，因此

$$\# f^{-1}(y) \equiv \# g^{-1}(y) \pmod 2.$$

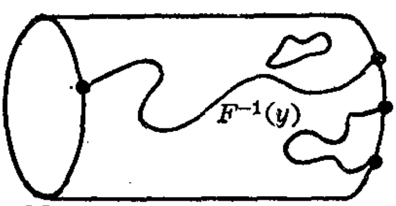

图 6 在左边的边点数与在右边的边点数模 2 同余

现在假设 y 不是 F 的正则值. 在 §1 中说过，$\# f^{-1}(y')$ 以及 $\# g^{-1}(y')$ 都是 y' 的局部常值函数（只要避开临界值），于是存在一个由 f 的正则值组成的 y 的邻域 $V_1 \subset N$，使得对于所有的 $y' \in V_1$

$$\# f^{-1}(y') = \# f^{-1}(y);$$

同时存在一个类似的邻域 $V_2 \subset N$，使得对于所有的 $y' \in V_2$

$$\# g^{-1}(y') = \# g^{-1}(y).$$

在 $V_1 \cap V_2$ 中选取一个 F 的正则值 z. 则

$$\# f^{-1}(y) = \# f^{-1}(z) \equiv \# g^{-1}(z) = \# g^{-1}(y).$$

同伦引理证毕.

齐性引理 令 y 与 z 为光滑的连通流形 N 的任意两个

内点．则存在一个光滑地同痕于恒等映射并且将 y 变到 z 的微分同胚 $h: N \to N$．

(对于特殊情形 $N=S^n$，证明是容易的：h 可简单地选为将 y 变到 z，且保持所有的正交于过 y 与 z 的平面的向量不动的旋转)．

一般的证明如下：首先构造一个从 R^n 到自身的光滑同痕，满足条件：

1) 保持单位球体外面的所有点都不动；且

2) 将原点滑到开单位球体中任何一个点上去．

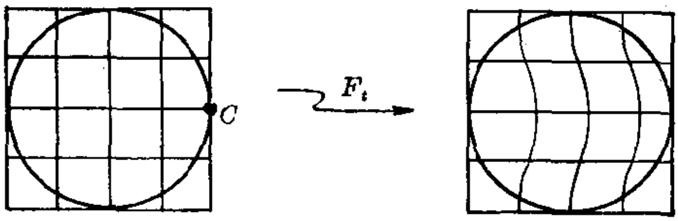

图 7　将单位球体变形

令 $\varphi: R^n \to R$ 为一光滑函数，满足

$$\varphi(x)>0, \quad 当\|x\|<1;$$
$$\varphi(x)=0, \quad 当\|x\|\geqslant 1.$$

(例如令 $\varphi(x)=\lambda(1-\|x\|^2)$，其中 $\lambda: R \to R$ 定义为[*]当 $t\leqslant 0$ 时，$\lambda(t)=0$；当 $t>0$ 时，$\lambda(t)=\exp(-t^{-1})$．)给定任一固定的单位向量 $c\in S^{n-1}$，考虑微分方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=c_i\varphi(x_1, \cdots, x_n) \quad (i=1, \cdots, n),$$

对于任意的 $\bar{x}\in R^n$，这微分方程组有唯一的一个满足初始条件

$$x(0)=\bar{x}$$

*) "$\lambda: R\to R$ 定义为"为译者所加．——译注

的解 $x=x(t)$, 对于所有实数都有定义*). 我们使用记号 $x(t)=F_t(\bar{x})$. 则显然

1) $F_t(\bar{x})$对于所有的 t 和 $\bar{x}$ 都有定义并且光滑地依赖于 t 和 $\bar{x}$;

2) $F_0(\bar{x})=\bar{x}$;

3) $F_{s+t}(\bar{x})=F_s\circ F_t(\bar{x})$.

因此每一 F_t 是一个从 R^n 到 R^n 上的微分同胚. 让 t 改变, 我们可以看到在一个保持单位球外的所有点都不动的同痕下, 每一 F_t 都光滑地同痕于恒同映射. 显然, 适当地选取 c 和 t, 微分同胚 F_t 将会把原点变到开单位球体中任何一个点.

现在考虑连通的流形 N. 如果存在一个光滑的同痕将一个点变为另一个点, 则称 N 的这两个点是"同痕的". 这明显地是一个等价关系. 若 y 是一个内点, 则它有一个微分同胚于 R^n 的邻域; 因此, 上述论断表明每一个充分靠近于 y 的点都是"同痕"于 y 的. 换言之, N 的内部的点的每一个"同痕类"都是开集, 进而 N 的内部被剖分为互不相交的开的"同痕类", 但 N 的内部是连通的, 因此只有一个同痕类. 引理证毕.

现在我们就能够证明这一节的主要结果了. 假设 M 紧致且无边, N 为连通的, 并且 $f: M\to N$ 是光滑的.

定理 若 y 与 z 是 f 的正则值, 则

$$\#f^{-1}(y)\equiv\#f^{-1}(z)\ (\mathrm{mod}\ 2)$$

这一共同的同余类称为 f 的模 2 度, 它仅依赖于 f 的光滑同伦类.

证明 给定正则值 y 与 z. 令 h 为一个从 N 到 N 的、同痕于恒同映射的、并将 y 变为 z 的微分同胚. 则 z 为复合映

*) 参见[22, § 2.4]. ——原注

射 $h\circ f$ 的正则值. 因为 $h\circ f$ 同伦于 f, 同伦引理断定

$$\#(h\circ f)^{-1}(z)\equiv\#f^{-1}(z)\ (\bmod 2).$$

但 $$(h\circ f)^{-1}(z)=f^{-1}h^{-1}(z)=f^{-1}(y),$$

所以 $$\#(h\circ f)^{-1}(z)=\#f^{-1}(y).$$

因此 $$\#f^{-1}(y)\equiv\#f^{-1}(z)\ (\bmod 2).$$

这正是我们所需要的.

这一共同的同余类记为 $\deg_2(f)$. 现设 f 光滑地同伦于 g. 根据 Sard 定理, 存在一个元素 $y\in N$, 它是 f 与 g 两者的正则值. 同余式

$$\deg_2 f\equiv\#f^{-1}(y)\equiv\#g^{-1}(y)\equiv\deg_2 g\ (\bmod 2)$$

表明 $\deg_2 f$ 是一个光滑同伦不变量. 定理证毕.

例 常值映射 $c: M\to M$ 具有偶的模 2 度*). M 的恒同映射 I 具有奇的模 2 度. 因此紧致无边的流形的恒同映射不同伦于常值映射.

当 $M=S^n$ 时, 这一结果蕴含着结论: 没有光滑映射 $f: D^{n+1}\to S^n$ 保持球面上点式不动(即球面不是圆盘的光滑"收缩核". 参见 § 2 中引理 5), 因为这种映射将会引出一个常值映射和恒同映射之间的光滑同伦:

$$F: S^n\times[0,\ 1]\to S^n,\ F(x,\ t)=f(tx).$$

---

*) 这里明显地缺一个条件, 即: M 的维数不为 0. 下面的结论也要这个条件. ——译注

§5 有向流形

为了把"度"定义为整数(而不是模 2 整数)我们必需引进"定向"的概念.

定义 有限维实向量空间的一个定向乃是有序基的如下等价类：有序基$(b_1, \cdots, b_n)$与基$(b'_1, \cdots, b'_n)$决定同一定向，如果$b'_i = \sum a_{ij} b_j$满足条件$\det(a_{ij}) > 0$；反之，如果$\det(a_{ij}) < 0$，则决定相反的定向. 于是每一正维数的向量空间恰好有两个定向. 向量空间R^n有一个标准的定向，即基$(1, 0, \cdots, 0)$, $(0, 1, 0, \cdots, 0)$, $\cdots$, $(0, \cdots, 0, 1)$决定的定向.

在零维向量空间的情况，将一个"定向"定义为符号$+1$或-1是方便的.

一个有向光滑流形是一个流形M连同每一个切空间TM_x的定向的一个选择. 若$m \geqslant 1$，要求它们满足下列条件：对于M的每一点存在一个邻域$U \subset M$以及一个保持定向的、将U映到R^m或H^m的一个开子集上的微分同胚h. 保持定向的意思是：对于每一个$x \in U$，同构dh_x将TM_x的指定的定向变为R^m的标准定向.

如果M是连通的并且是可定向的，那么它恰好有两个定向.

如果M有边，我们能区别在边点处的切空间TM_x中的

三种向量:

1) 有一些向量与边相切, 形成一个 $m-1$ 维的子空间 $T(\partial M)_x \subset TM_x$;

2) 有一些"外向的"向量, 形成一个以 $T(2M)_x$ 为边的开半空间;

3) 有一些"内向的"向量, 形成以 $T(\partial M)_x$ 为边的另一个开半空间.

M 的每一个定向决定 ∂M 的一个定向如下: 对于 $x \in \partial M$, 选取 TM_x 的一个正的有向基 $(v_1, v_2, \cdots, v_m)$, 使得 $v_2, \cdots, v_m$ 与边相切 (假定 $m \geqslant 2$), 且 v_1 是"外向的"向量. 那么 $(v_2, \cdots, v_m)$ 便决定了所求的 ∂M 在点 x 处的定向.

如果 M 的维数是 1, 则每一边点 x 按照正有向向量在 x 点处是内向的或是外向的而指定定向为 -1 或 $+1$ (见图 8).

例如单位球 $S^{m-1} \subset R^m$ 能够当作圆盘 D^m 的边给出定向.

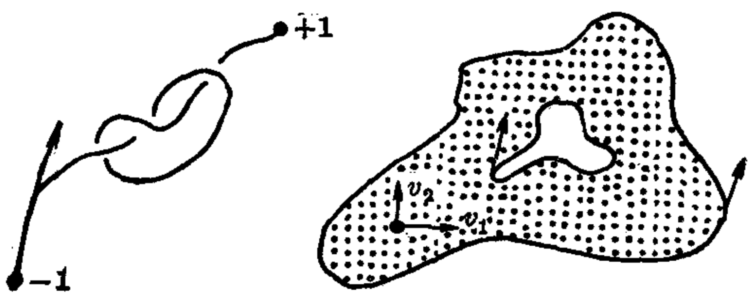

图 8 如何给边界定向

Brouwer 度

现设 M 与 N 为无边的有向 n 维流形, 且令

$$f: M \to N$$

为光滑映射. 若 M 是紧致的, N 是连通的, 则 f 的度定义如下:

设 $x\in M$ 为 f 的正则点，于是 df_x: $TM_x\to TN_{f(x)}$ 为有向向量空间之间的线性同构. 定义 df_x 的符号为 $+1$ 或 -1，按 df_x 保持定向或反转定向而定. 对于任一正则值 $y\in N$，定义

$$\deg(f;y)=\sum_{x\in f^{-1}(y)}\operatorname{sign} df_x.$$

如 § 1，上式中整数 $\deg(f;y)$ 是 y 的局部常值函数. 它被定义在 N 的一个稠密的开子集上.

定理 A 整数 $\deg(f;y)$ 不依赖于正则值 y 的选取.

于是这个整数就称为 f 的度(记作 $\deg f$).

定理 B 若 f 光滑地同伦于 g，则 $\deg f=\deg g$.

证明本质上与 § 4 中的证明一样. 只是必需一直小心地照顾定向.

首先考虑下述情形：设 M 为一紧致的有向流形 X 的边，并且 M 是作为 X 的边而予以定向的.

引理 1 若 f: $M\to N$ 扩充为一光滑映射 F: $X\to N$，则对于每一个正则值 y，$\deg(f;y)=0$.

证明 首先设 y 既是 $f=F|M$ 的正则值又是 F 的正则值. 紧致的 1-流形 $F^{-1}(y)$ 为弧和圆周的有限并，只有弧有边点，并且在 $M=\partial X$ 上. 令 $A\subset F^{-1}(y)$ 为这些弧中的一个，且 $\partial A=\{a\}\cup\{b\}$. 下面证明

$$\operatorname{sing} df_a+\operatorname{sing} df_b=0,$$

因此(在所有这些弧上求和) $\deg(f;y)=0$.

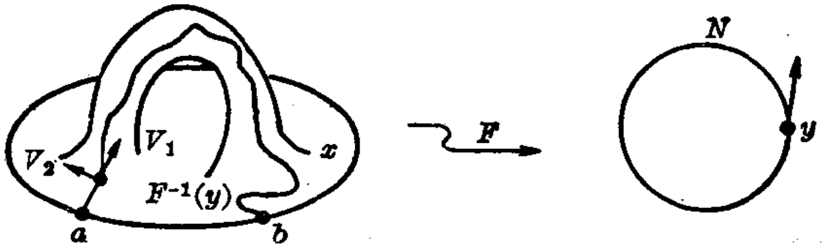

图 9 如何给 $F^{-1}(y)$ 定向

X 的定向和 N 的定向决定 A 的一个定向如下：给定 $x\in A$，令 $(v_1, \cdots, v_{n+1})$ 为 TX_x 的一个正的有向基，其中 v_1 与 A 相切．则 v_1 决定的 TA_x 的定向为所需要的定向当且仅当 dF_x 将 $(v_2, \cdots, v_{n+1})$ 变为 TN_y 的正的有向基．

令 $v_1(x)$ 表示在点 x 处与 A 相切的正向单位向量．显然 v_1 是光滑函数，并且 $v_1(x)$ 在一个边点（设为 b）上指向外，而在另一个边点 a 上指向内．

这立即推出

$$\operatorname{sign} df_a = -1; \quad \operatorname{sign} df_b = +1.$$

因此和为 0．在所有这些弧 A 上加起来，便证明了 $\deg(f; y) = 0$．

更一般些，设 y_0 是 f 的正则值但不是 F 的正则值．函数 $\deg(f; y)$ 在 y_0 的某一邻域 U 中为常数．因此如在§4 中，我们能够在 U 内取到一个 F 的正则值 y，从而

$$\deg(f; y_0) = \deg(f; y) = 0.$$

这就证明了引理 1.

现在考虑光滑映射 $f(x) = F(0, x)$ 与 $g(x) = F(1, x)$ 之间的光滑同伦 F: $[0, 1]\times M\to N$.

引理 2 对于任意共同的正则值 y，度 $\deg(g; y)$ 等于 $\deg(f; y)$．

证明 流形 $[0, 1]\times M$ 能作为乘积给予定向，并且它有由 $1\times M$（具有正确的定向）与 $0\times M$（具有错误的定向）组成的边界[*]．于是在正则值 y 处 $F|\partial([0, 1]\times M)$ 的度等于差

[*] "$1\times M$（具有正确的定向）"意指：将 M 的定向考虑作为 $1\times M$ 的定向与由 $I\times M$ 决定的 $1\times M$ 的定向相同；"$0\times M$（具有错误的定向）"意指：将 M 的定向考虑作为 $0\times M$ 的定向与由 $I\times M$ 决定的 $0\times M$ 的定向相反．——译注

$$\deg(g;y)-\deg(f;y).$$

根据引理 1，这个差必定为零.

定理 A 与定理 B 的证明的剩余部分完全类似于 § 4 中的论证. 若 y 与 z 两者都是 $f: M \to N$ 的正则值，选取一个将 y 变为 z 且同痕于恒同映射的微分同胚 $h: N \to N$. 则 h 保持定向，且经验证，

$$\deg(f;\ y)=\deg(h\circ f;\ h(y)).$$

但 f 同伦于 $h\circ f$; 因此根据引理 2,

$$\deg(h\circ f;z)=\deg(f;z).$$

从而 $\deg(f;y)=\deg(f;z)$. 定理证毕.

例 复函数 $z\mapsto z^k$, $z\neq 0$, 将单位圆周映到自身上，其度为 k(此处 k 可为正数、负数或零). 蜕化映射

$$f: M\to \text{常值} \in N$$

的度为零. 一个微分同胚的度为 $+1$ 或 -1，按 f 保持或反转定向而定. 于是，紧致的无边流形的反转定向的微分同胚不光滑地同伦于恒同映射.

反射 $r_i: S^n \to S^n$ 定义为

$$r_i(x_1,\ \cdots,\ x_{n+1})=(x_1,\ \cdots,\ -x_i,\ \cdots,\ x_{n+1}).$$

这是反转定向的微分同胚的例子. S^n 的对径映射的度等于 $(-1)^{n+1}$，只要注意这个映射为 $n+1$ 个反射的复合

$$-x=r_1\circ r_2\circ\cdots\circ r_{n+1}(x)$$

便可了解. 于是，若 n 是偶数，S^n 的对径映射不光滑地同伦于恒同映射，这是一个用模 2 度不能判明的事实.

作为一个应用，依从 Brouwer，我们证明：S^n 上容许有一个非零的切向量场，当且仅当 n 是奇数(参见图 10 和图 11).

定义 $M\subset R^k$ 上的一个光滑的切向量场乃是一个光滑

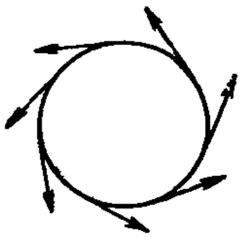

图 10　1 维球上的非零向量场

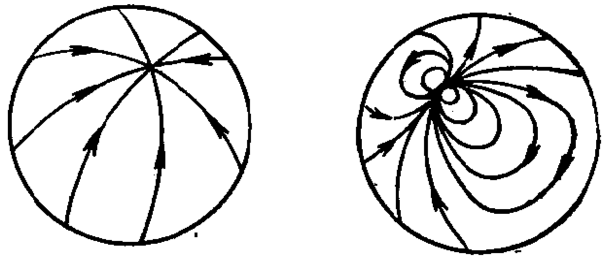

图 11　$n=2$ 时的两个尝试

映射 $v: M\to R^k$，满足条件：对于每一 $x\in M$，$v(x)\in TM_x$. 至于球 $S^n\subset R^{n+1}$ 的情形，明显地等价于条件：对于所有的 $x\in S^n$，

$$v(x)\cdot x=0, \tag{1}$$

其中"·"表示欧氏内积.

若 $v(x)$ 对于所有 x 都是非零的，则也可假设：对于所有 $x\in S^n$，

$$v(x)\cdot v(x)=1. \tag{2}$$

因为无论如何，$\bar{v}(x)=v(x)/\|v(x)\|$ 都将是满足这一条件的向量场. 于是我们可以认为 v 是一个从 S^n 到自身的光滑映射.

现在，用公式 $F(x,\ \theta)=x\cos\theta+v(x)\sin\theta$ 定义一个光滑同伦

$$F: S^n\times[0,\ \pi]\to S^n.$$

计算表明 $$F(x,\ \theta)\cdot F(x,\ \theta)=1,$$

并且 $$F(x,\ 0)=x,\quad F(x,\ \pi)=-x.$$

于是 S^n 的对径映射同伦于恒同映射. 但当 n 为偶数时，我们已经知道这是不可能的.

另一方面，若 $n=2k-1$，解析表达式

$$v(x_1,\ \cdots,\ x_{2k})=(x_2,\ -x_1,\ x_4,\ -x_3,\ \cdots,\ x_{2k},\ -x_{2k-1})$$

在 S^n 上确定一个非零切向量场. 证明完成.

附带指出：推出 n 为奇数时 S^n 的对径映射同伦于恒同映射，应归功于 Heinz Hopf 的一个著名定理："从连通的 n 维流形到 n 维球的两个映射是光滑同伦的，当且仅当它们有相同的度."在后面 § 7 中，我们将证明一个蕴含着 Hopf 定理的更为一般的结果.

§ 6　向量场与 Euler 数

作为度的概念的进一步应用，现在研究在其他流形上的向量场.

首先考虑开集 $U\subset R^m$ 和以点 $z\in U$ 为孤立零点的光滑向量场

$$v: U\to R^m.$$

映射
$$\bar{v}(x)=v(x)/\|v(x)\|$$
将以 z 为中心的小球映到单位球中*). 这一映射的度称为 v 在零点 z 处的指数 ι**).

图 12 说明了指数为 -1, 0, 1, 2 的一些例子(与 v 有着密切联系的是这样一些"相切于" v 的曲线，它们通过解微分方程 $dx_i/dt=v_i(x_1, \cdots, x_n)$ 而得到. 实际画在图 12 中的便是这些曲线).

具有任一指数的零点可按如下方式得到：在复数平面上，多项式 z^k 确定一个光滑向量场，原点是它的指数为 k 的零点；而函数 $\bar{z}^k$ 确定一个光滑向量场，原点是它的指数为 $-k$

---

*) 每一个球都作为相应的圆盘的边而予以定向. ——原注

**) 在这一段指数的定义中所谈到的"小球"应具有如下的性质：这小球连同它所包围的球体中无 v 的其它零点；并且应补充证明指数 ι 的定义与定义中涉及的小球的选择无关. ——译注

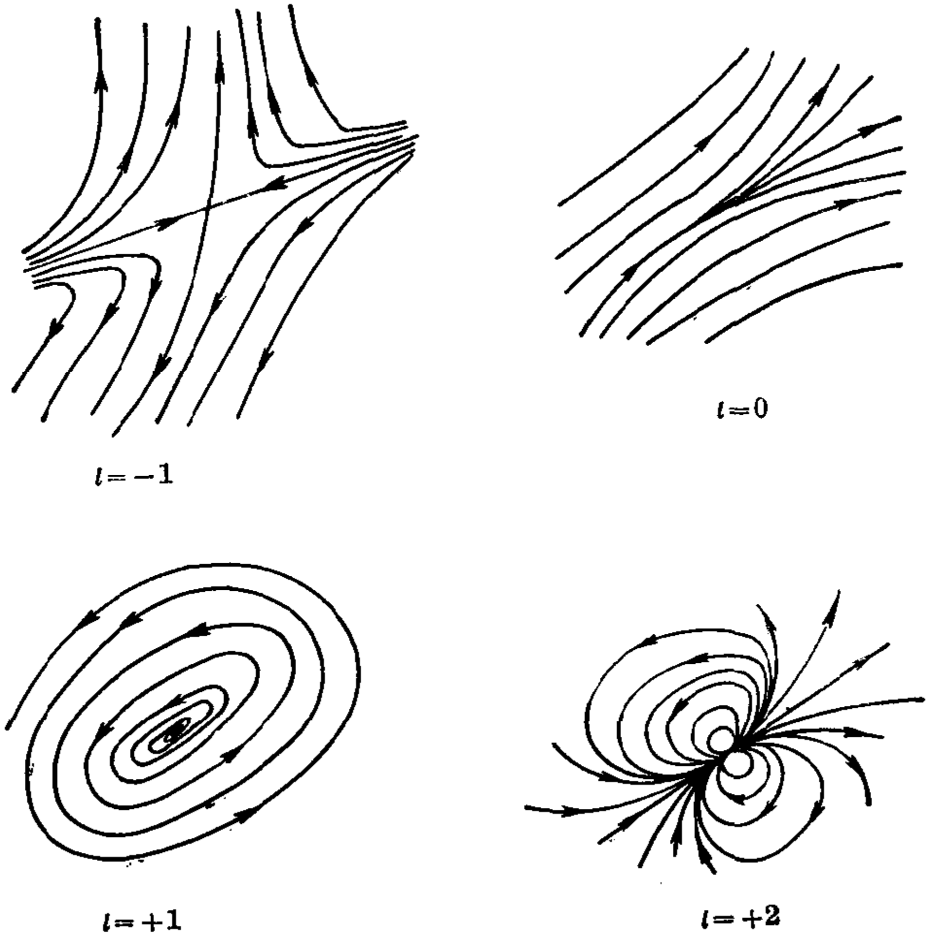

图 12 平面向量场的例子

的零点.

我们必需证明指数的概念在 U 的微分同胚下是不变的. 为了说清这层意思, 我们考虑更为一般的情形, 即映射 $f: M \to N$, 且在 M 和 N 上各有一个向量场.

定义 如果对于每一点 $x \in M$, df_x 将 $v(x)$ 变为 $v'(f(x))$, 则称流形 M 上的向量场 v 与流形 N 上的向量场 v' 在映射 f 下是对应的.

若 f 是一个微分同胚, 则显然 v' 被 v 唯一地确定. 下面要用到记号

$$v' = df \circ v \circ f^{-1}.$$

引理 1 设 U 上的向量场 v 在微分同胚 $f: U \to U'$ 下对应于 U' 上的向量场

$$v' = df \circ v \circ f^{-1},$$

则 v 在孤立零点 z 处的指数等于 v' 在 $f(z)$ 处的指数.

假定引理 1 成立,我们便能对任意流形 M 上的向量场 w 定义指数的概念如下:若 $g: U \to M$ 为 M 中的孤立零点 z 的某一邻域的参数化,则 w 在点 z 处的指数 ι 定义为等于 U 上对应的向量场 $dg^{-1} \circ w \circ g$ 在零点 $g^{-1}(z)$ 处的指数. 很明显,从引理 1 可知, ι 是完全确定的.

引理 1 的证明将建立在一个完全不同的结果的证明的基础上.

引理 2 任一 R^m 的保持定向的微分同胚 f 光滑地同痕于恒同映射.

(可作如下比较:对于许多 m 的值,存在球 S^m 的保持定向的微分同胚,这微分同胚却不光滑地同痕于恒同映射. 见 [20, p. 404].)

证明 我们可以假定 $f(0)=0$. 因为在 0 点处的导射可定义为

$$df_0(x) = \lim_{t \to 0} f(tx)/t,$$

所以由公式

$$F(x, t) = f(tx)/t \quad (\text{当 } 0 < t \leqslant 1 \text{ 时})$$

及

$$F(x, 0) = df_0(x)$$

确定一个同痕

$$F: R^m \times [0, 1] \to R^m$$

是自然的. 为证明 F 即使当 $t \to 0$ 时也是光滑的,我们将 f 写成形式*)

---

*) 例如见[22, p. 5]. ——原注

$$f(x)=x_1g_1(x)+\cdots+x_mg_m(x),$$

其中 $g_1, \cdots, g_m$ 是适当的光滑映射，并注意对于所有 t 的值，

$$F(x, t)=x_1g_1(tx)+\cdots+x_mg_m(tx).$$

于是 f 同痕于线性映射 df_0，而后者显然同痕于恒同映射. 这就证明了引理 2.

引理 1 的证明 可以假设 $z=f(z)=0$ 以及 U 为凸集. 若 f 保持定向，则与上面的过程一样，构造一个单参数嵌入族

$$f_t: U\to R^m,$$

使得满足 $f_0=$ 恒同映射，$f_1=f$，并且对于所有的 t，$f_t(0)=0$. 令 v_t 表示与 U 上的向量场 v 对应的 $f_t(U)$ 上的向量场 $df_t\circ v\circ f_t^{-1}$. 这些向量场都是完全确定的，并且在一个以点 0 为中心的充分小的球上都是非零的. 因此 $v=v_0$ 在点 0 处的指数必定等于 $v'=v_1$ 在点 0 处的指数. 这就对于保持定向的微分同胚证明了引理 1.

为了考虑反转定向的微分同胚，只要考虑反射 ρ 这一特殊情形. 于是

$$v'=\rho\circ v\circ\rho^{-1},$$

故在 ε-球上的相关联的函数 $\bar{v}'(x)=v'(x)/\|v'(x)\|$ 满足条件

$$\bar{v}'=\rho\circ\bar{v}\circ\rho^{-1}.$$

显然 $\bar{v}'$ 的度等于 $\bar{v}$ 的度. 这就完成了引理 1 的证明.

现在研究下面的一个经典结果：令 M 为一紧致流形，w 为 M 上具有孤立零点的一个光滑向量场. 如果 M 有边，则要求 w 在所有边点上都指向外.

Poincaré-Hopf 定理 在这样一个向量场上的所有零点处的指数和 $\sum\iota$ 等于 Euler 数*)

*) 这里 $H_i(M)$ 表示 M 的第 i 个同调群. 这是我们第一次也是最后一次提到同调论. ——原注

$$\chi(M)=\sum_{i=0}^{m}(-1)^i \text{秩}\ H_i(M).$$

特别，这一指数和是 M 的一个拓扑不变量：它不依赖于向量场的特殊选取.

（这个定理的 2 维情形是由 Poincaré 在 1885 年证明的. 全部定理是 Hopf[14]在 1926 年接着 Brouwer 和 Hadamard 的较早的部分结果之后证明的）.

我们证明这个定理的一部分，而约略勾划一下其余部分的证明. 首先考虑 R^m 中紧致区域这种特殊情形：

令 $X\subset R^m$ 表示紧致的有边 m–流形. Gauss 映射

$$g: \partial X\to S^{m-1}$$

对于每一点 $x\in\partial X$ 指定了一个在点 x 处的向外的单位法向量.

引理 3(Hopf) 若 $v: X\to R^m$ 为具有孤立零点的光滑向量场，并且在边上 v 指向 X 的外面，则指数和 $\sum\iota$ 等于从 ∂X 到 S^{m-1} 的 Gauss 映射的度. 特别，$\sum\iota$ 不依赖于 v 的选取.

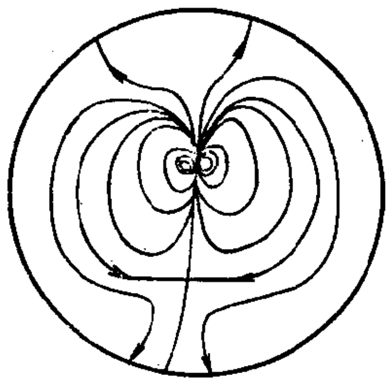

图 13 指数和为 $+1$ 的例子

例如，若圆盘 D^m 上的向量场在边上指向外面，则 $\sum\iota=+1$（参见图 13）.

证明 围绕着每一个零点挖去一个 ε–球体，得到一个新的有边流形. 函数

$$\bar v(x)=v(x)/\|v(x)\|$$

将这一流形映到 S^{m-1} 中. 因此，$\bar v$ 限制于各个边的分支上的度的和为零. 但 $\bar v|\partial X$ 同伦于 g，并且在其余的边的分支上的度加起来为 $-\sum\iota$（负号出现是因为每一个小球都得到错误

的定向*).)因此

$$\deg(g)-\sum\iota=0$$

正如所需要的.

注意 g 的度也常作为 ∂X 的"积分曲率"而为人们所知晓,这是因为它能被表为高斯曲率在 ∂X 上的积分的常数倍.这一积分自然等于 X 的 Euler 数. 当m为奇数时, 它等于 ∂X 的 Euler 数的一半.

在把这一结果推广到其它流形上去以前, 必需某些进一步的准备知识.

自然希望能够借助于向量场 v 在零点 z 处的偏导数来计算 v 在点 z 处的指数. 首先考虑开集 $U\subset R^m$ 上的向量场 v, 并且把 v 看成是映射 $U\to R^m$, 所以 dv_z: $R^m\to R^m$ 是有定义的.

定义 如果线性变换 dv_z 是非蜕化的, 那么向量场 v 在点 z 处也是非蜕化的.

因此,非蜕化的零点 z 是孤立零点.

引理 4 v 在非蜕化零点 z 处的指数是 $+1$ 或是 -1, 按照 dv_z 的行列式是正的或是负的而定.

证明 将 v 看成一个从 z 的某一凸邻域 U_0 到 R^m 中的微分同胚. 我们可以假定 $z=0$. 若 v 保持定向,我们已经知道了 $v|U_0$ 能够光滑地形变为恒同映射而不引入任何新的零点(见引理 1、2). 因此,指数肯定等于 $+1$.

若 v 反转定向,则类似地, v 能形变为一个反射,因此 $\iota=-1$.

---

*) 在零点的指数的定义中,每个小球的定向应作为圆盘(即 ε-球体)的边而得到;而现在却作为除去了圆盘的其余部分的边而得到. 因此这两个定向恰好相反。——译注

更一般地，考虑在流形 $M\subset R^k$ 上的向量场 w 的零点 z. 将 w 看作一个从 M 到 R^k 的映射，所以导射 dw_z: $TM_z\to R^k$ 是有定义的.

引理 5 由于导射 dw_z 实际上将 TM_z 变到子空间 $TM_z\subset R^k$ 中，因此能考虑作为从 TM_z 到自身的线性变换. 如果这个线性变换的行列式 $D\neq 0$. 则 z 为 w 的一个孤立零点，它的指数为 $+1$ 或 -1，是按 D 为正或为负而定.

证明 设 $h: U\to M$ 为 z 的某一邻域的参数化. 令 e^i 表示 R^m 的第 i 个基向量，且令

$$t^i=dh_u(e^i)=\partial h/\partial u_i,$$

所以向量 $t^1, \cdots, t^m$ 形成切空间 $TM_{h(u)}$ 的基. 现在需要计算 $t^i=t^i(u)$ 在线性变换 $dw_{h(u)}$ 下的象. 首先注意

$$dw_{h(u)}(t^i)=d(w\circ h)_u(e^i)=\partial w(h(u))/\partial u_i. \tag{1}$$

设 $v=\sum v_j e^j$ 为 U 上的对应于 M 上的向量场 w 的向量场. 根据定义 $v=dh^{-1}\circ w\circ h$，于是

$$w(h(u))=dh_u(v)=\sum v_j t^j.$$

因此

$$\partial w(h(u))/\partial u_i=\sum_j(\partial v_j/\partial u_i)t^j+\sum_j v_j(\partial t^j/\partial u_i). \tag{2}$$

联合(1)和(2)，并且在 v 的零点 $h^{-1}(z)$ 处计算值，则得到公式

$$dw_z(t^i)=\sum_j(\partial v_j/\partial u_i)t^j. \tag{3}$$

于是 dw_z 映 TM_z 到自身中，并且线性变换 $TM_z\to TM_z$ 的行列式 D 等于矩阵 $(\partial v_j/\partial u_i)$ 的行列式. 结合引理 4 即得本引理的证明.

现在考虑紧致的无边流形 $M\subset R^k$. 令 N_ε 表示 M 的闭的 ε-邻域(即满足条件：对于某一 $y\in M$ 使 $\|x-y\|\leq\varepsilon$ 的所有 $x\in R^k$ 的集合). 当 ε 充分小时，能够证明 N_ε 是光滑的有边流形(见 §8 中问题 11).

定理 1 对于 M 上只有非蜕化零点的任意向量场 v，指数和 $\sum\iota$ 等于 Gauss 映射

$$g: \partial N_\varepsilon \to S^{k-1}$$

的度*)．特别，这一指数和是不依赖于向量场的选取的．

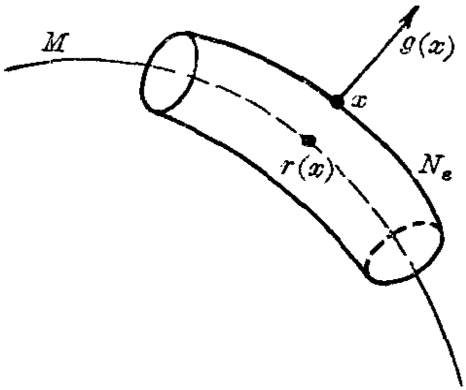

图 14 M 的 ε-邻域

证明 对于 $x \in N_\varepsilon$，设 $r(x) \in M$ 表示 M 中最接近于 x 的点(参见 § 8 中问题 12)． 注意向量 $x-r(x)$ 是正交于 M 在点 $r(x)$ 处的切空间的，否则，$r(x)$ 将不是 M 中最接近于 x 的点．若 ε 充分小，则映射 $r(x)$ 必是光滑的，并且是完全确定的．

现在还要考虑距离平方函数

$$\varphi(x) = \| x - r(x) \|^2.$$

经简单的计算表明，φ 的梯度由

$$\operatorname{grad} \varphi = 2(x - r(x))$$

给出．因此，对于等高曲面 $\partial N_\varepsilon = \varphi^{-1}(\epsilon^2)$ 的每一点 x，向外的单位法向量由

$$g(x) = \operatorname{grad} \varphi / \| \operatorname{grad} \varphi \| = (x - r(x))/\varepsilon$$

给出．将 v 扩充为邻域 N_ε 上的向量场 w，w 的定义是

$$w(x) = (x - r(x)) + v(r(x)).$$

w 在边上指向外，因为内积 $w(x) \cdot g(x)$ 等于 $\varepsilon > 0$，仅在 M 中 v 的零点处 w 才能为零，这是清楚的，因为两个加项 $(x-r(x))$ 与 $v(r(x))$ 是互相正交的．在零点 $z \in M$ 处计算 w 的偏导数，可以看到

---

*) Allendoerfer 与 Fenchel 给了此度一个不同的解释：g 的度能够表为某一适当的曲率量在 M 上的积分，于是便产生了经典的 Gauss-Bonnet 定理的 m 维推广(参考[1]、[9]；也可见于 Chern[6])．——原注

$$\text{对于所有的 } h\in TM_z,\quad dw_z(h)=dv_z(h);$$

$$\text{对于 } h\in TM_z^{\perp},\quad dw_z(h)=h.$$

于是 dw_z 的行列式等于 dv_z 的行列式. 因此 w 在零点 z 处的指数等于 v 在点 z 处的指数 ι.

现按引理 3, 指数和 $\sum\iota$ 等于 g 的度. 这就证明了定理 1.

例 在球 S^m 上存在一个向量场 v, 它在每一点处都指向"北"[*]. 在南极处各向量向外放射, 因此指数是 $+1$; 在北极处各向量向内汇集, 因此指数是 $(-1)^m$. 于是不变量 $\sum\iota$ 等于 0 或 2 按 m 是奇数或偶数而定. 这就重新证明了在偶维球上的每一个向量场都有零点.

对于任意奇维的无边流形, 不变量 $\sum\iota$ 为零. 因为如果把向量场 v 换成 $-v$, 则每一指数都是乘了 $(-1)^m$, 从而等式

$$\sum\iota=(-1)^m\sum\iota.$$

当 m 为奇数时, 蕴含 $\sum\iota=0$.

注意 若在一个连通流形 M 上 $\sum\iota=0$, 则 Hopf 的定理就断定 M 上存在一个根本没有零点的向量场.

为了使 Poincaré-Hopf 定理完全可靠, 下列三个步骤是完全必要的.

第 1 步 不变量 $\sum\iota$ 与 Euler 数 $\chi(M)$ 恒等. 这只需适当地构造一个在 M 上的、使得 $\sum\iota$ 与 $\chi(M)$ 相等的非蜕化向量场的例子即可. 作这件事的很有趣的方法如下: 根据 M. Morse 的理论, 总可以找到 M 上的一个实值函数, 它的梯度是一个非蜕化的向量场. 同时 Morse 证明了与这个梯度场连系着的指数和等于 M 的 Euler 数. 关于这一论证的详情,

[*] 例如: v 可用公式 $v(x)=p-(p\cdot x)x$ 来定义, 其中 p 是北极(见图 11). ——原注

请读者参考 Milnor[22, pp. 29, 36].

第 2 步　对于有蜕化零点的向量场，证明这个定理. 首先考虑开集 U 上的有一个孤立零点 z 的向量场 v. 若

$$\lambda: U\to[0,\ 1]$$

在 z 的一个小邻域 N_1 取值为 1，而在一个稍大一点的邻域 N 外取值为 0，同时若 y 是 v 的一个足够小的正则值，则向量场

$$v'(x)=v(x)-\lambda(x)y$$

在 N 中是非蜕化的*). 在 N 中的零点的指数和能够用映射

$$\bar{v}: \partial N\to S^{m-1}$$

的度来计算，因此，在这种替换**)之下是不变的.

更一般地，考虑紧致流形 M 上的向量场. 局部地应用这一断言，可以看到任意有孤立零点的向量场能换成一个非蜕化的向量场而不改变其指数和 $\sum\iota$.

第 3 步　有边流形. 若 $M\subset R^k$ 有边，则在边 ∂M 上指向外面的任一向量场 v 也能扩充到邻域 N_ε 上，并使其在 ∂N_ε 上指向外面. 不过在 M 的边的周围的光滑性问题上存在着某些困难，因为 N_ε 不是光滑的（即 C^∞ 类可微的）流形，而仅仅是 C^1-流形. 如果象前面一样，用 $w(x)=v(r(x))+x-r(x)$ 来定义扩展 w，它在 ∂M 附近将仅仅是连续向量场. 这一论断是能够证明的，而不必给出更强的可微性假定. 此外还有其他的证明方法.

*) 显然，在 N_1 中 v' 是非蜕化的. 若 y 充分小，则 v' 在 $N-N_1$ 中根本没有零点. ——原注

**) 即将 v 换成 v'. ——译注

§7 标架式协边；Pontryagin 构造

映射 $M \to M'$ 的度只是当着流形 M 和 M' 是有定向的并且具有同样的维数时才有定义. 现在研究由 Pontryagin 给出的一种推广，它对于任意从紧致无边流形到球的光滑映射

$$f: M \to S^p$$

都有定义. 下面首先叙述某些定义.

令 N 与 N' 为 M 的紧致的 n 维子流形，并且 $\partial N = \partial N' = \partial M = \emptyset$. 维数差 $m-n$ 称为这些子流形的余维数.

定义 如果 $M \times [0, 1]$ 的子集

$$N \times [0, \varepsilon) \cup N' \times (1-\varepsilon, 1]$$

能够扩张为一个紧致流形

$$X \subset M \times [0, 1]$$

使得
$$\partial X = N \times 0 \cup N' \times 1,$$

并且使得 X 与 $M \times 0 \cup M \times 1$ 的交点都是 ∂X 的点，则称 N 在 M 中协边于 N'.

显然，协边是一个等价关系(见图 15).

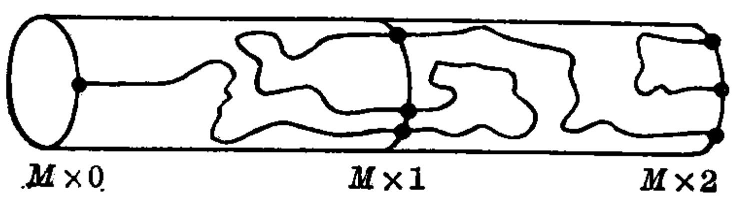

图 15 M 中两个协边的粘接

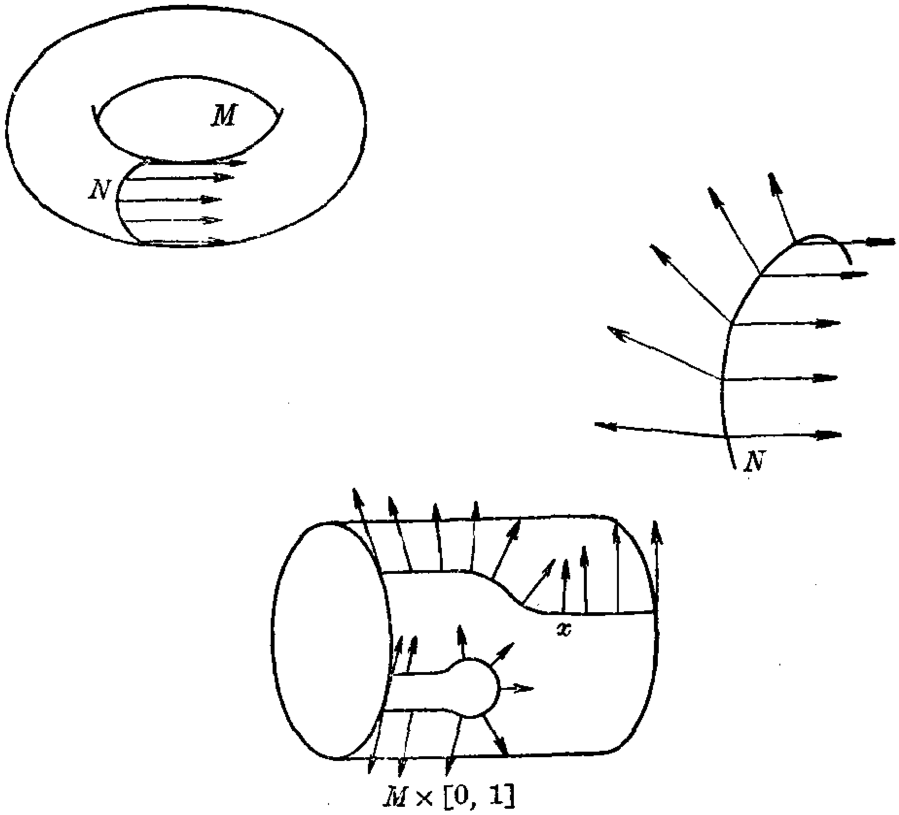

图 16 标架式子流形与标架式协边

定义 子流形 $N\subset M$ 的一个标架乃是一个光滑函数 $\mathfrak{v}$，它于每一点 $x\in N$ 指定了点 x 处 M 中对于 N 而言的法向量空间 $TN_x^{\perp}\subset TM_x$ 的一个基

$$\mathfrak{v}(x)=(v^1(x),\ \cdots,\ v^{m-n}(x))$$

(见图 16)．偶对 $(N, \mathfrak{v})$ 称为 M 的标架式子流形．两个标架式子流形 $(N, \mathfrak{v})$ 与 $(N', \mathfrak{w})$ 是标架式协边的，如果存在 N 与 N' 间的一个协边 $X\subset M\times[0, 1]$ 以及 X 的一个标架 $\mathfrak{u}$，使得

当 $(x, t)\in N\times[0, \varepsilon)$ 时，　　$u^j(x, t)=(v^j(x), 0)$；

当 $(x, t)\in N'\times(1-\varepsilon, 1]$ 时，　$u^j(x, t)=(w^j(x), 0)$.

这(标架式子流形间的标架式协边)*⁾也是一个等价关系.

---

*⁾ 括号中的字为译者所加．——译注

现在考虑光滑映射 $f: M \to S^p$ 以及其正则值 $y \in S^p$. 映射 f 诱导出流形 $f^{-1}(y)$ 的一个标架如下: 对于切空间 $T(S^p)_y$ 选取一个正的有向基 $\mathfrak{v}=(v^1, \cdots, v^p)$. 对于每一个 $x \in f^{-1}(y)$, 回顾第 14 页,

$$df_x: TM_x \to T(S^p)_y$$

将子空间 $Tf^{-1}(y)_x$ 映成零, 且将它的正交补空间 $Tf^{-1}(y)_x^{\perp}$ 同构地映到 $T(S^p)_y$ 上. 因此存在唯一的一个向量

$$w^i(x) \in Tf^{-1}(y)_x^{\perp} \subset TM_x$$

在 df_x 下映为 v^i. 为了方便, 将得到的 $f^{-1}(y)$ 的标架 $w^1(x), \cdots, w^p(x)$ 记作 $\mathfrak{w}=f^*\mathfrak{v}$.

定义 标架式流形 $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$ 称为与 f 相联系的 Pontryagin 流形.

自然, 对于 y 和 $\mathfrak{v}$ 的不同选择, f 有许多 Pontryagin 流形, 但它们都属于同一个标架式协边类.

定理 A 若 y' 是 f 的另一个正则值, 且 $\mathfrak{v}'$ 是 $T(S^p)_{y'}$ 的一个正的定向基, 则标架式流形 $(f^{-1}(y'), f^*\mathfrak{v}')$ 标架式协边于 $(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$.

定理 B 从 M 到 S^p 的两个映射是光滑同伦的当且仅当它们联系着的 Pontryagin 流形是标架式协边的.

定理 C M 中任一余维数为 p 的紧致的标架式子流形 $(N, \mathfrak{w})$ 均可认作某一光滑映射 $f: M \to S^p$ 的 Pontryagin 流形.

于是映射的同伦类便与子流形的标架式协边类一一对应.

定理 A 的证明非常类似于 § 4 与 § 5 中诸论断的证明, 这证明基于下列三个引理:

引理 1 若 $\mathfrak{v}$ 与 $\mathfrak{v}'$ 为在 y 处的两个不同的正定向基, 则

Pontryagin 流形$(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$标架式协边于$(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v}')$.

证明 在$T(S^p)_y$的所有正定向基的空间中选取一条从$\mathfrak{v}$到$\mathfrak{v}'$的光滑道路. 这是可能的, 因为这一基的空间能够等同于具有正行列式的矩阵的空间$GL^+(p, R)$, 因此是连通的. 由这一道路引出所求的协边$f^{-1}(y)\times[0, 1]$的标架.

马虎一点, 我们可常常于"标架式流形$(f^{-1}(y), f^*\mathfrak{v})$"中省略$f^*\mathfrak{v}$而径称为"标架式流形$f^{-1}(y)$".

引理 2 若y为f的正则值, 且z充分接近于y, 则$f^{-1}(z)$标架式协边于$f^{-1}(y)$.

证明 因为临界值的集合$f(C)$是紧致的, 故可以选到$\varepsilon>0$使得y的ε-邻域只包含正则值. 给定z满足$\|z-y\|<\varepsilon$, 选取一个光滑的单参数旋转族(即同痕)$r_t: S^p\to S^p$, 使得$r_1(y)=z$, 并且

1) 当$0\leqslant t<\varepsilon'$时, r_t为恒同;

2) 当$1-\varepsilon'<t\leqslant 1$时, r_t等于r_1;

3) 每一个$r_t^{-1}(z)$都位于从y到z的大圆上, 因此为f的正则值.

定义同伦

$$F: M\times[0, 1]\to S^p$$

为$F(x, t)=r_tf(x)$. 对于每一个t, 注意z为复合映射

$$r_t\circ f: M\to S^p$$

的正则值. 这就可推知z为映射F的正则值了. 于是

$$F^{-1}(z)\subset M\times[0, 1]$$

为一标架式流形, 并且它给出了标架式流形$f^{-1}(z)$与

$$(r_1\circ f)^{-1}(z)=f^{-1}r_1^{-1}(z)=f^{-1}(y)$$

之间的一个标架协边. 这就证明了引理 2.

引理 3 若f与g是光滑同伦的, 且y是两者的正则值,

则 $f^{-1}(y)$ 标架式协边于 $g^{-1}(y)$.

证明 选取一个同伦 F, 满足

$$F(x,\ t)=f(x)\quad (0\leqslant t<\varepsilon),$$
$$F(x,\ t)=g(x)\quad (1-\varepsilon<t\leqslant 1).$$

选取一个 F 的足够靠近 y 的正则值 z, 因而 $f^{-1}(z)$ 标架式协边于 $f^{-1}(y)$, 并且 $g^{-1}(z)$ 标架式协边于 $g^{-1}(y)$. 从而 $F^{-1}(z)$ 为一标架式流形, 并且它给出 $f^{-1}(z)$ 和 $g^{-1}(z)$ 之间的一个标架式协边. 这就证明了引理 3.

定理 A 的证明 给定 f 的任意两个正则值 y 与 z, 我们能够选取一个光滑的单参数旋转族

$$r_t: S^p\to S^p$$

使得 r_0 为恒同, 并且 $r_1(y)=z$. 于是 f 同伦于 $r_1\circ f$; 因此 $f^{-1}(z)$ 标架式协边于

$$(r_1\circ f)^{-1}(z)=f^{-1}r_1^{-1}(z)=f^{-1}(y).$$

这就完成了定理 A 的证明.

定理 C 的证明 基于下列事实: 令 $N\subset M$ 为带着标架 $\mathfrak{v}$ 的, 余维数为 p 的标架式子流形. 设 N 是紧致的并且 $\partial N=\partial M=\emptyset$.

乘积邻域定理 N 在 M 中的某一邻域微分同胚于乘积 $N\times R^p$. 此外, 微分同胚能够取得使每一个 $x\in N$ 对应着 $(x,\ 0)\in N\times R^p$, 并且使每一个法标架 $\mathfrak{v}(x)$ 对应于 R^p 的标准基.

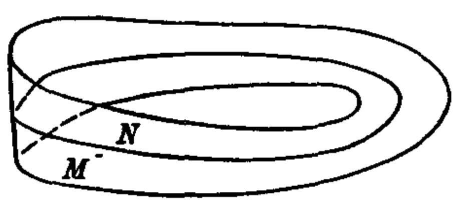

图 17 不可标架的子流形

注意 对于任意子流形乘积邻域不存在(参见图 17).

证明 先设 M 为欧氏空间 R^{n+p}. 考虑映射 $g: N\times R^p\to M$, 其定义为

$$g(x;t_1,\ \cdots,\ t_p)=x+t_1v^1(x)+\cdots+t_pv^p(x).$$

显然 $dg_{(x;0,\cdots,0)}$ 是非蜕化的，因此 g 将 $(x, 0)\in N\times R^p$ 的某邻域微分同胚地映到一个开集上.

如果 $\varepsilon>0$ 充分小，我们将证明 g 在 $N\times 0$ 的整个邻域 $N\times U_\varepsilon$ 上是一一的，其中 U_ε 表示 0 在 R^p 中的 ε-邻域. 因为否则，在 $N\times R^p$ 中将有点偶 $(x, u)\neq(x', u')$，其中 $\|u\|$ 与 $\|u'\|$ 任意小，使得

$$g(x, u)=g(x', u').$$

因为 N 是紧致的，故可选到一个这种点偶的序列，其中 x 收敛于 x_0，x' 收敛于 x'_0，且 $u\to 0$，$u'\to 0$. 显然 $x_0=x'_0$，而这与 g 在 $(x_0, 0)$ 的一个邻域中是一一的相矛盾.

于是 g 将 $N\times U_\varepsilon$ 微分同胚地映到一个开集上，但 U_ε 在对应

$$u\to u/(1-\|u\|^2/\varepsilon^2)$$

之下微分同胚于整个欧氏空间 R^p。因为 $g(x, 0)=x$，且因为 $dg_{(x,0)}$ 满足定理的要求，这就对于 $M=R^{n+p}$ 的特殊情形证明了乘积邻域定理.

对于一般情形，必需将 R^{n+p} 中的直线换成 M 中的测地线. 更精确地说，令 $g(x; t_1, \cdots, t_p)$ 为 M 中长度为 $\|t_1v^1(x)+\cdots+t_pv^p(x)\|$ 的测地线段的端点，这个测地线段从 x 开始，且初速度向量为

$$t_1v^1(x)+\cdots+t_pv^p(x)/\|t_1v^1(x)+\cdots+t_pv^p(x)\|.$$

熟悉测地线的读者，不难验证

$$g: N\times U_\varepsilon\to M$$

当 ε 充分小时完全确定，并且是光滑的. 余下的证明与前面相同.

定理 C 的证明 设 $N\subset M$ 为紧致的、无边的标架式子流形. 对于 N 的邻域 V 用上面的方法选取一个乘积表示

$$g: N\times R^p \to V\subset M,$$

并且定义映射

$$\pi: V\to R^p$$

为 $\pi(g(x, y))=y$(见图 18). 显然 0 为正则值, 且 $\pi^{-1}(0)$ 恰好是附有给定标架的 N.

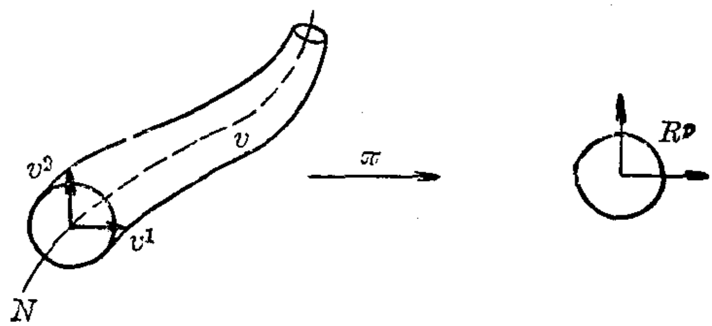

图 18 构造一个具有给定 Pontryagin 流形的映射

现在选取一个光滑映射 $\varphi: R^p\to S^p$, 它把每一个满足 $\|x\|\geqslant 1$ 的点 x 映为一个基本点 s_0, 并且将 R^p 中的开单位球体微分同胚地*)映到 S^p-S_0 上. 定义

$$f: M\to S^p$$

为 当 $x\in V$ 时, $f(x)=\varphi(\pi(x))$;

当 $x\overline{\in} V$ 时, $f(x)=s_0$.

显然 f 是光滑的, 且点 $\varphi(0)$ 是 f 的正则值. 由于相应的 Pontryagin 流形

$$f^{-1}(\varphi(0))=\pi^{-1}(0)$$

正好等于标架式流形 N, 这就完成了定理 C 的证明.

为了证明定理 B, 必需首先证明一个映射的 Pontryagin 流形决定它的同伦类. 令 f, $g: M\to S^p$ 表示具有共同的正则

---

*) 例如, $\varphi(x)=h^{-1}(x/\lambda(\|x\|^2))$, 其中 h 为从 s_0 出发的球极投射, λ 为单调递减的光滑函数, 且满足条件: 当 $t<1$ 时, $\lambda(t)>0$; 当 $t\geqslant 1$ 时, $\lambda(t)=0$. ——原注

值 y 的光滑映射.

引理 4 若标架式流形 $(f^{-1}(y), f^{*}\mathfrak{v})$ 等于标架式流形 $(g^{-1}(y), g^{*}\mathfrak{v})$, 则 f 光滑地同伦于 g.

证明 为方便计, 置 $N=f^{-1}(y)$. 假设 $f^{*}\mathfrak{v}=g^{*}\mathfrak{v}$ 意味着对于所有的 $x\in N$, $df_x=dg_x$.

先设 f 与 g 在 N 的某一邻域 V 上完全重合. 令 $h: S^p-y\to R^p$ 为球极投射. 那么, 由同伦

$$\text{当 } x\in V \text{ 时}, \quad H(x, t)=f(x);$$

$$\text{当 } x\in M-N \text{ 时}, \quad H(x, t)=h^{-1}[t\cdot h(f(x))+(1-t)\cdot h(g(x))].$$

可以知道: f 光滑地同伦于 g.

于是只要将 f 变形, 使得在 N 的某一小邻域上与 g 重合, 但在变形的过程中必须注意, 不要把任何新的点映为 y. 对于 N 的邻域 V 选取一个乘积表示

$$N\times R^p\to V\subset M,$$

其中 V 足够小, 使得 $f(V)$ 与 $g(V)$ 不包含 y 的对径点 $\bar{y}$. 将 V 与 $N\times R^p$ 等同, 并且将 $S^p-\bar{y}$ 与 R^p 等同, 得到相应的映射

$$F,\ G: N\times R^p\to R^p,$$

其中
$$F^{-1}(0)=G^{-1}(0)=N\times 0,$$

并且对于所有的 $x\in N$,

$$dF_{(x,0)}=dG_{(x,0)}=(\text{到 } R^p \text{ 的投射}).$$

首先找一个常数 c, 使当 $x\in N$ 以及 $0<\|u\|<c$ 时,

$$F(x, u)\cdot u>0; \quad G(x, u)\cdot u>0.$$

这就是说点 $F(x, u)$ 与点 $G(x, u)$ 属于 R^p 中同一个开的半空间. 所以 F 与 G 之间的同伦

$$(1-t)F(x, u)+tG(x, u)$$

至少当 $\|u\|<c$ 时不会把任何新的点映射为 0.

根据 Taylor 定理，

$$\text{当 } \|u\| \leqslant 1 \text{ 时,} \quad \|F(x, u) - u\| \leqslant c_1 \|u\|^2.$$

因此
$$|(F(x, u) - u) \cdot u| \leqslant c_1 \|u\|^3,$$

并且当 $0 < \|u\| < c = \text{Min}(c_1^{-1}, 1)$ 时，

$$F(x, u) \cdot u \geqslant \|u\|^2 - c_1 \|u\|^3 > 0.$$

对于 G 有类似的不等式。

为了避免移动离得远的点。我们选择一个光滑映射 $\lambda: R^p \to R$ 满足条件

$$\text{当 } \|u\| \leqslant c/2 \text{ 时,} \quad \lambda(u) = 1;$$
$$\text{当 } \|u\| \geqslant c \text{ 时,} \quad \lambda(u) = 0.$$

现在，同伦

$$F_t(x, u) = [1 - \lambda(u) t] F(x, u) + \lambda(u) t G(x, u)$$

将 $F = F_0$ 形变为映射 F_1，使得：(1) F_1 在区域 $\|u\| < c/2$ 中与 G 重合；(2) 当 $\|u\| \geqslant c$ 时 F_1 与 F 重合；(3) F_1 没有新的零点。对最初的映射 f 作一个相应的形变。显然，这就完成了引理 4 的证明。

定理 B 的证明 若 f 与 g 是光滑同伦的，则引理 3 断定 Pontryagin 流形 $f^{-1}(y)$ 与 $g^{-1}(y)$ 是标架式协边的。反之，给定 $f^{-1}(y)$ 与 $g^{-1}(y)$ 之间的一个标架式协边 $(X, \mathfrak{w})$，完全类似于定理 C 的证明，可构造一个同伦

$$F: M \times [0, 1] \to S^p,$$

它的 Pontryagin 流形 $(F^{-1}(y), F^*\mathfrak{v})$ 正好等于 $(X, \mathfrak{w})$。设 $F_t(x) = F(x, t)$，注意映射 F_0 与 f 正好有着相同的 Pontryagin 流形。因此根据引理 4，有 $F_0 \sim f$；类似地，$F_1 \sim g$。因此 $f \sim g$。这就完成了定理 B 的证明。

注意 定理 A、B 和 C 容易推广到使之对于有边流形 M 适用。根本的想法在于只考虑把边界变为某一基本点 s_0 的映

射. 这种映射

$$(M,\ \partial M)\to(S^p,\ s_0)$$

的同伦类与余维数为 p 的标架式子流形

$$N\subset M \text{ 的内部}$$

的协边类一一对应. 若 $p\geqslant\frac{1}{2}m+1$, 则可对这个同伦类的集合给予一个交换群的构造, 并称之为第 p 个上同伦群 $\pi^p(M,\ \partial M)$. $\pi^p(M,\ \partial M)$ 中的复合运算对应着 M 的内部中的无交的标架式子流形的并运算(参见 § 8, 问题 17).

Hopf 定理

作为一个例子, 设 M 为 $m=p$ 维连通的有向流形. 余维数为 p 的标架式子流形恰好为一有限点集, 且在每一点处有一指定的基. 令 $\mathrm{sgn}(x)$ 等于 $+1$ 或 -1, 按这个指定的基决定的定向是正确的定向还是错误的定向而定. 于是 $\sum\mathrm{sgn}(x)$ 显然等于相关的映射 $M\to S^m$ 的度. 但不难发现 0 维流形的标架式协边类完全由整数 $\sum\mathrm{sgn}(x)$ 决定. 于是证明了下列定理:

Hopf 定理 若 M 是连通的、有向的无边流形, 则两个映射 $M\to S^m$ 是光滑同伦的当且仅当它们有相同的度.

另一方面, 设 M 是不可定向的. 则给定 TM_x 的一个基, 我们能够在一条闭道路上将 x 围绕着 M 滑行一周, 使得给定的基变成相反的定向. 用一个简单的推导便证得下列定理:

定理 若 M 是连通的、但不可定向的流形, 则两个映射是同伦的当且仅当它们具有相同的模 2 度.

标架式协边理论是由 Pontryagin 为了研究映射

$$S^m\to S^p\quad(m>p)$$

的同伦类而引进的．例如，如果 $m=p+1\geqslant 4$，则正好存在映射 $S^m\to S^p$ 的两个同伦类．Pontryagin 根据 S^m 中标架式 1-流形的分类证明了这个结果．更难得的是，他还指出在 $m=p+2\geqslant 4$ 的情形也恰好是两个同伦类．这用到标架式 2-流形．但是，对于 $m-p>2$，用这个方法来解决问题会碰到多重困难．

后来产生了比较简单的然而是很不相同的、并且更为代数化的方法*)计算同伦群．Pontryagin 构造则是一个双边的工具．它不仅允许我们把流形的信息传入同伦论，还使我们能把同伦的任何信息传入流形理论．在现代拓扑中的某些最深刻的工作就起源于这两种理论的交互作用，R. Thom 的关于协边理论的工作便是一个重要的例子(参见[36]，[21])．

*) 例如见 S. -T. Hu, Homotopy Theory.——原注

§8 练　习

为读者列举一些问题如下：

问题 1　证明复合映射 $g\circ f$ 的度等于乘积 $(\deg g)(\deg f)$.

问题 2　证明每一个 n 阶复多项式引出一个从 Gauss 球 S^2 到自身的 n 阶光滑映射.

问题 3　若从 X 到 S^p 的两个映射 f 与 g 满足对于所有的 x, $\|f(x)-g(x)\|<2$, 证明 f 同伦于 g; 且若 f 与 g 都是光滑的, 则这个同伦也是光滑的.

问题 4　若 X 是紧致的, 证明每一连续映射 $X\to S^p$ 均能用光滑映射一致地逼近; 若两个光滑映射 $X\to S^p$ 是连续同伦的, 证明它们还是光滑同伦的.

问题 5　若 $m<p$, 证明每一映射 $M^m\to S^p$ 都同伦于常值映射.

问题 6 (Brouwer)　证明具有异于 $(-1)^{n+1}$ 的度的映射 $S^n\to S^n$ 必有一个不动点.

问题 7　证明度为奇数的任一映射 $S^n\to S^n$ 必将某一对对径点变为一对对径点.

问题 8　给定光滑流形 $M\subset R^k$ 及 $N\subset R^l$. 证明切空间 $T(M\times N)_{(x,y)}$ 等于 $TM_x\times TN_y$.

问题 9　光滑映射 $f: M\to N$ 的图 Γ 定义为满足条件

$f(x)=y$ 的所有点 $(x, y)\in M\times N$ 的集合. 证明 Γ 为一光滑流形, 且切空间

$$T\Gamma_{(x,y)}\subset TM_x\times TN_y$$

等于线性映射 df_x 的图.

问题 10 给定 $M\subset R^k$, 证明切丛空间

$$TM=\{(x, v)\in M\times R^k \mid v\in TM_x\}$$

也是一个光滑流形. 证明任一光滑映射 $f: M\to N$ 引出一个光滑映射

$$df: TM\to TN,$$

其中

$$d(\text{恒同})=\text{恒同},$$

$$d(g\circ f)=(dg)\circ(df).$$

问题 11 同样证明法丛空间

$$E=\{(x, v)\in M\times R^k \mid v\perp TM_x\}$$

为一光滑流形. 若 M 是紧致且无边的, 证明从 E 到 R^k 的对应

$$(x, v)\mapsto x+v$$

将 $M\times 0$ 在 E 中的 ε-邻域微分同胚地映到 M 在 R^k 中的 ε-邻域 N_ε 上(参见 §7 中的乘积邻域定理).

问题 12 用 $r(x+v)=x$ 定义 $r: N_\varepsilon\to M$. 证明 $r(x+v)$ 比 M 的任何其他点更接近 $x+v$. 用收缩 r 证明与问题 4 类似的论断, 在其中将球 S^p 换成流形 M.

问题 13 给定不相交的流形 M, $N\subset R^{k+1}$, 环绕映射

$$\lambda: M\times N\to S^k$$

定义为 $\lambda(x, y)=(x-y)/\|x-y\|$. 若 M 与 N 是紧致的、有向的, 且无边的, 其总维数为 $m+n=k$, 则 λ 的度称为环绕数 $l(M, N)$. 证明

$$l(N, M)=(-1)^{(m+1)(n+1)}L(M, N).$$

如果 M 为某一个与 N 无交的有向流形 X 的边，证明 $l(M, N)=0$. 对于在球 S^{m+n+1} 中的无交流形定义环绕数.

问题 14　Hopf 不变量. 若 $y\neq z$ 都是映射 $f: S^{2p-1}\to S^p$ 的正则值，于是流形 $f^{-1}(y)$、$f^{-1}(z)$ 能够象在 §5 中那样给予定向；因此环绕数 $l(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$ 是有定义的.

a) 证明这一环绕数作为 y 的函数是局部常值的；

b) 若 y 与 z 也是 g 的正则值，其中对于所有的 x,

$$\|f(x)-g(x)\|<\|y-z\|.$$

证明

$$\begin{aligned} l(f^{-1}(y), f^{-1}(z)) &= l(g^{-1}(y), f^{-1}(z)) \\ &= l(g^{-1}(y), g^{-1}(z)). \end{aligned}$$

c) 证明 $l(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$ 仅依赖于 f 的同伦类而不依赖于 y 和 z 的选择.

整数 $H(f)=l(f^{-1}(y), f^{-1}(z))$ 称为 f 的 Hopf 不变量（参考[15]).

问题 15　若维数 p 为奇数，证明 $H(f)=0$. 对于复合映射

$$S^{2p-1}\xrightarrow{f} S^p\xrightarrow{g} S^p,$$

证明 $H(g\circ f)$ 等于 $H(f)$ 乘以 g 的度的平方.

Hopf 纤维化 $\pi: S^3\to S^2$ 定义为

$$\pi(x_1, x_2, x_3, x_4)=h^{-1}((x_1+ix_2)/(x_3+ix_4)),$$

其中 h 表示到复平面的球极投射. 证明 $H(\pi)=1$.

问题 16　M 的两个子流形 N 与 N' 称为横截相交的，如果对于每一个 $x\in N\cap N'$，子空间 TN_x 与 TN'_x 共同生成 TM_x. （若 $n+n'<m$，这表示 $N\cap N'=\emptyset$.）若 N 为一个标架式子流形，证明它能作一微小的形变使之与一给定的 N' 横截相交. 证明得到的交为一光滑流形.

问题17　令 $\Pi^p(M)$ 表示所有 M 中余维数为 p 的标架式协边类的集合. 用横截相交运算定义一个对应

$$\Pi^p(M)\times\Pi^q(M)\to\Pi^{p+q}(M).$$

若 $p\geqslant\frac{1}{2}m+1$, 用无交并运算将 $\Pi^p(M)$ 作成一交换群(参见 p. 56).

附录 1-流形的分类

我们要证明在本书正文中假定为已知的下列结果，还要给出关于高维流形分类问题的一个简短的讨论.

定理 任一光滑的连通的1-流形或者微分同胚于圆周S^1,或者微分同胚于实数的某一区间.

(区间是R中多于一点的连通子集，它可以是有限的或无限的,也可以是开的、闭的或半开的.)

因为任一区间都同胚于*) $[0, 1]$、$(0, 1]$或$(0, 1)$,由此推出只有四个不同的1-流形.

证明要用到弧长的概念. 令I表示一个区间.

定义 如果f将I微分同胚地映到M的一个开子集上**)，并且对于每一个$s\in I$,"速度向量"$df_s(1)\in TM_{f(s)}$具有单位长. 则映射$f: I\to M$称为弧长式参数化.

用一个直接的变量替换,任何一个局部参数化$I'\to M$都能变换成一个弧长式参数化.

引理 令$f: I\to M$, $g: J\to M$都是弧长式参数化. 则

---

*) 例如用形如

$$f(t)=a\tanh(t)+b$$

的微分同胚. ——原注

**) 于是仅当M有边点时，I才能有边点. ——原注

$f(I)\cap g(J)$最多有两个分支. 若它只有一个分支, 那么f能扩充为并$f(I)\cup g(J)$的弧长式参数化. 若它有两个分支, 那么M必定微分同胚于S^1.

证明 显然$g^{-1}\circ f$将I的某一相对开子集微分同胚地映到J的一个相对开子集上. 并且$g^{-1}\circ f$的导数处处等于± 1.

考虑由满足$f(s)=g(t)$的所有(s,t)组成的图形$\Gamma\subset I\times J$. 则Γ为由斜率为± 1的线段作成的$I\times J$的闭子集. 由于Γ是闭的并且$g^{-1}\circ f$局部地为一个微分同胚, 这些线段不能在$I\times J$的内部有端点, 而是必定能扩展到边上. 由于$g^{-1}\circ f$是一一且单值的, 在矩形$I\times J$的四条边的每一条边上, 这些线段中最多只有一条能够取端点. 因此Γ最多有两个分支(见图 19). 而且当有两个分支时, 两者必有同样的斜率.

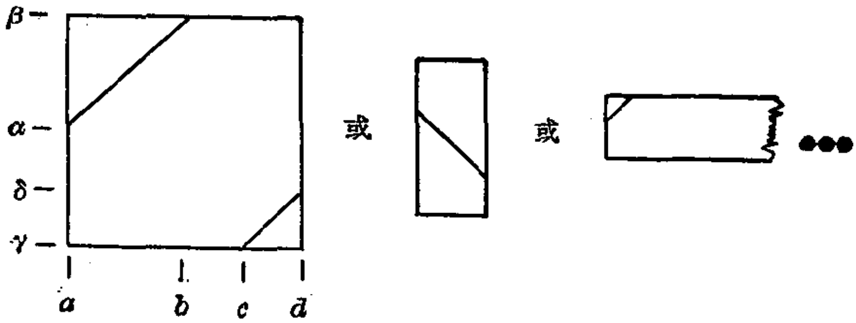

图 19 Γ的三种可能性

若Γ是连通的, 则$g^{-1}\circ f$扩充为一个线性映射$L: R\to R$. 将f及$g\circ L$粘接起来即产生所求的扩充

$$F: I\cup L^{-1}(J)\to f(I)\cup g(J).$$

若Γ有两个分支, 设其斜率为$+1$, 它们必能被安排得象在图 19 的左边矩形中一样. 必要时, 改造一下区间$J=(\gamma,\beta)$, 我们可以假定$\gamma=c$, $\delta=d$, 于是

$$a<b\leqslant c<d\leqslant\alpha<\beta.$$

现设 $\theta=2\pi t/(\alpha-a)$，所求的微分同胚

$$h: S^1\to M$$

可用下面的公式来定义：

$$h(\cos\theta,\ \sin\theta)=f(t)\quad (\text{当 } a<t<d \text{ 时});$$
$$=g(t)\quad (\text{当 } c<t<\beta \text{ 时}).$$

象集 $h(S^1)$ 在 M 中是紧致的开集，故必为整个流形 M. 引理得证.

分类定理的证明 任何一个弧长式参数化都能扩充为最大的弧长式参数化

$$f: I\to M.$$

其中"最大"意指：f 作为弧长式参数化而言，不能再扩充到更大的区间上，这只要将 f 先尽可能地向左扩充，然后再尽可能地向右扩充.

若 M 不微分同胚于 S^1，我们要证明 f 是在上的. 因此是一个微分同胚. 因为如果开集 $f(I)$ 不是整个 M，那么在 $M-f(I)$ 中有 $f(I)$ 的一个极限点 x. 将 x 的一个邻域弧长参数化，并且应用引理，可以看到 f 能够扩充到一个比较大的区间上. 这与 f 是最大的假定相矛盾. 从而完成证明.

注意 高维流形的分类问题令人望而生畏. 对于 2 维流形，完整的说明是由 Kerékjártó[17] 给出的. 3 维流形的研究是当前的研究专题(见 Papakyriakopoulos [26]). 对于维数 $\geqslant 4$ 的紧致流形，分类问题实际上是不可解决的*). 但对于高维单连通的流形，近年来有许多进展，例如见 Smale[31] 和 Wall[37].

*) 见 Markov[19]. ——原注

参 考 文 献

下面是一份由原始资料和推荐给读者的参考书组成的混合表. 对于希望深究微分拓扑的读者, 我们推荐 Milnor[22], Munkres[25] 及 Pontryagin[28]. 概观性文章[23]及[32]也是有用的. 作为密切相关领域中的背景知识, 我们推荐 Hilton 和 Wylie[11], Hu[16], Lang[18], de Rham[29], Steenrod[34] 以及 Sternberg[35].

[1] Allendoerfer, C. B., "The Euler number of a Riemann manifold", *Amer. Jour. Math.* 62(1940), 243～248.

[2] Apostol, T. M., *Mathematical Annalysis*. Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1957.

[3] Auslander, L. 和 R. MacKenzie, *Introduction to Differentiable Manifolds*. New York: McGraw-Hill, 1963.

[4] Brouwer, L. E. J., Uber Abbildung von Mannigfaltigkeiten", *Math. Annalen* 71(1912), 97～115.

[5] Brown, A. B., "Functional dependence", *Trans. Amer. Math. Soc.* 38 (1935), 379～394. (见定理 3-III.)

[6] Chern, S. S. (陈省身), "A simple intrinsic proof of the Gauss-Bonnet formula for closed Riemannian manifolds", *Annals of Math.* 45(1944), 747～752.

[7] Dieudonné, J., *Foundations of Mordern Analysis*. New York: Academic Press, 1960.

[8] Dubovickiy, A. Ya., "On differentiable mappings of an n-dimensional cube into a k-dimensional cube", *Mat. Sbornik* N. S. 32 (74) (1953), 443～464. (俄文)

[9] Fenchel, W.. "On total curvatures of Riemannian manifolds", *Jour. London Math. Soc.* 15(1940), 15～22.

[10] Goffman, C., *Calculus of Several Variables*. New York: Harper & Row, 1965.

[11] Hilton, P. 和 S. Wylie, *Homology Theory*. Cambridge Univ. Press, 1960.

[12] Hirsch, M., "A proof of the nonrectractibility of a cell onto its boundary", *Proc. Amer. Math. Soc.* 14(1963), 364～365.

[13] Hopf, H., "Abbildungsklassen n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten", *Math. Annalen* 96(1926), 209～224.

[14] ——, "Vektorfelder in n-dimensionalen Mannigfaltigkeiten", *Math. Annalen* 96(1926), 225～250.

[15] ——, "Uber die Abbildungen von Sphären auf Sphären niedrigerer Dimension", *Fundamenta Mathematicae* 25(1935), 427～440.

[16] Hu, S. -T. (胡世桢), *Homotopy Theory*. New York: Academic Press, 1959.

[17] Kerékjártó, B. v., *Vorlesungen über Topologie*. Berlin: Springer, 1923.

[18] Lang, S., *Introduction to Differentiable Manifolds*. New York: Interscience, 1962.

[19] Markov, A. A., "Insolubility of the problem of homeomorphy", *Proceedings Intern. Congress of Math.* 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, pp. 300～306. (俄文)

[20] Milnor, J., "On manifolds homeomorphic to the 7-Sphere", *Annals of Math.* 64(1956), 399～405.

[21] ——, "A survey of cobordism theory", *L'Enseignement math.* 8(1962), 16～23.

[22] ——, *Morse Theory*. (Annals Studies 51.) Princeton Univ. Press, 1963.

[23] ——, "Differential topology", *Lectures on Modern Mathematics*, II, ed. T. L. Saaty, New York: Wiley, 1964, pp. 165～183.

[24] Morse, A. P., "The behavior of a function on its critical set", *Annals of Math.* 40(1939), 62～70.

[25] Munkres, J. R., *Elementary Differential Topology*. (Annals Studies

54). Princeton Univ. Press, 1963.

[26] Papakyriakopoulos, C. D.,"The theory of three-dimensional manifolds since 1950", *Proceedings Intern. Congress of Math.* 1958, Cambridge Univ. Press, 1960, pp. 433∼440.

[27] Pontryagin, L. S., "A classification of continuous transformations of a complex into a sphere", *Doklady Akad. Nauk.* S. S. S. R. (*Comptes Rendues*) 19(1938), 147∼149.

[28] ——, "Smooth manifolds and their applications in homotopy theory", *Amer. Math. Soc. Translations*, Ser. 2, II(1959), 1∼114.(译自 *Trudy Inst. Steklov* 45(1955).)

[29] Pham, G. de, *Variétés différentiables*. Paris: Hermann, 1955.

[30] Sard, A., "The measure of the critical points of differentiable maps", *Bull. Amer. Math. Soc.* 48(1942), 883∼890.

[31] Smale, S., "Generalized Poincaré's Conjecture in dimensions greater than four", *Annals of Math.* 74(1961), 391∼406.

[32] ——, "A survey of some recent developments in differential topology", *Bull. Amer. Math. Soc.* 69(1963), 131∼145.

[33] Spivak, M., *Calculus on Manifolds*. New York: Benjamin, 1965.

[34] Steenrod, N., *The Topology of Fibve Bundles*. Princeton Univ. Press, 1951.

[35] Sternberg, S., *Lectures on Differential Geometry*. New York: Prentice-Hall, 1964.

[36] Thom, R., "Quelques propriétés globales des variétés différentiables", *Commentarii Math. Helvet.* 28(1954), 17∼86.

[37] Wall, C. T. C., "Classification of $(n-1)$-connected $2n$-manifolds", *Annals of Math.* 75(1962),163∼189.

[38] Whitney, H., "A function not constant on a connected set of critical points", *Duke Math. Jour.* 1(1935), 514∼517.

[39] Husemoller, D., *Fiber Bundles*. New York: McGraw-Hill, 1966.

[40] Spanier, E. H., *Algebraic Topology*. New York: McGraw-Hill, 1966

[41] Wall, C. T. C., "Topology of smooth manifolds",*J. London Math. Soc.* 40(1965), 1∼20.

[42] Wallace, A. H., *Differential Topology, First Steps*. New York: Benjamin, 1968.

II. 微 分 拓 扑

普林斯顿大学 John Milnor 讲授，1958
James Minkres 笔记

微分拓扑学可以定义为研究可微流形在微分同胚下的不变性质的学科. 在这个题目下面的典型问题是:

(1) 给定的两个可微流形在什么条件下是微分同胚的?

(2) 某一个给定的可微流形是另一个可微的有边流形的边吗?

(3) 某一个给定的可微流形是可平行化的吗?

所有这些问题的牵涉面都超过流形的拓扑学，但它们并不属于通常总是带有附加结构(如联络或度量)的微分几何.

在这一课题中最有力的工具来自代数拓扑. 特别，示性类论是最重要的; 据此，从流形 M 过渡到它的切丛，从而又过渡到 M 的某些依赖于这个丛的上同调类.

这些笔记打算作为这一课题的引论，尽可能不涉及代数拓扑. 我们的两个主要目标乃是可微 n–流形能够嵌入于欧氏空间 R^{2n+1} 作为其闭子集的 Whitney 定理(见 § 1.32)以及不可定向的协边群 $\mathfrak{N}^n$ 同构于某一稳定的同伦群的 Thom 定理(见 § 3.15).

§ 1 中主要涉及逼近定理. 首先给出了基本定义和阐述了反函数定理(1.1～1.12). 其次证明了两个局部逼近定理，指出给定的映射能够用最大秩的映射逼近(1.13～1.21). 最后，应用局部有限覆盖得出相应的整体性定理，即 Whitney 嵌入定理和 Thom 横截性引理(1.35).

§ 2 中是向量空间丛理论的一个引论，着重介绍流形的切丛. § 3 中将以上材料用于研究协边群 $\mathfrak{N}^n$.

§1 流形的嵌入和浸入

记号 欧氏空间 R^n 中一点 x 的坐标记为 $(x^1, \cdots, x^n)$. 记 $\|x\| = \max|x^i|$; $C^n(r)$ 表示使得 $\|x\|<r$ 的 x 的集合; 而 $C^n(x_0, r)$ 表示使得 $\|x-x_0\|<r$ 的 x 的集合. 方体 C 的闭包记为 $\bar{C}$.

如果实值函数 $f(x^1, \cdots, x^n)$ 的所有各阶偏导数存在且连续, 则称 f 是*可微的*(即"可微"意味着 C^∞). 如果映射 $f: U \to R^p$(其中 U 为 R^n 中的开集)的每一坐标函数 $f^1, \cdots, f^p$ 都是可微的, 则称 f 是*可微的*. Df 表示 f 的雅可比矩阵, 易验证 $D(gf) = Dg \cdot Df$. 记号 $\partial(f^1, \cdots, f^p)/\partial(x^1, \cdots, x^n)$ 也是常用到的. 若 $n=p$, 则 $|Df|$ 表示这一矩阵的行列式.

1.1 定义 *n-流形* M^n 乃是局部同胚于 R^n 的具有可数基的 Hausdorff 空间.

流形 M^n 上的一个*可微构造* $\mathscr{D}$ 乃是满足下述条件的一族定义在 M^n 的开子集上的实值函数:

1) 对于 M^n 的每一个点 p, 存在 p 的一个邻域 U 以及从 U 到 R^n 的一个开子集上的同胚 h, 使得定义在 U 的开子集 W 上的函数 f 属于 $\mathscr{D}$ 当且仅当 fh^{-1} 是可微的.

2) 若 U_i 都是包含于 f 的定义域中的开子集, 且 $U = \bigcup U_i$, 则 $f|U \in \mathscr{D}$ 当且仅当对于每一个 i, $f|U_i \in \mathscr{D}$.

可微流形 M^n 乃是给定了一个可微构造 $\mathscr{D}$ 的流形; $\mathscr{D}$ 的元素都称为 M^n 上的可微函数. 满足上述 1) 中要求的任何开集 U 和同胚 h 的偶对 (U, h) 称为 M^n 上的一个坐标系.

记号 坐标系有时用坐标函数表示为:

$$h(p)=(u^1(p), \cdots, u^n(p)).$$

1.2 另一定义 设给定了一族 (U_i, h_i), 其中 h_i 为 M^n 的开子集 U_i 到 R^n 的一个开子集上的同胚, 满足

a) U_i 覆盖 M^n;

b) 对于所有的 i, j, $h_jh_i^{-1}$ 是 $h_i(U_i\cap U_j)$ 上的可微映射.

定义坐标系为一个开集 U 连同从 U 到 R^n 的一个开子集上的同胚 h, 使得对于每一个 i, h_ih^{-1} 和 hh_i^{-1} 分别在 $h(U\cap U_i)$ 与 $h_i(U\cap U_i)$ 上都是可微的. 定义 M^n 上的可微构造为所有这种坐标系的族. 设 f 是定义在开集 V 上的函数, 如果对于所有坐标系 (U, h), fh^{-1} 在 $h(U\cap V)$ 上都是可微的, 则称 f 是可微的.

容易证明这两个定义完全是等价的.

1.3 定义 设 M_1、M_2 为可微流形. 设 f: $U\to M_2$, 其中 U 为 M_1 的开子集, 如果对于 M_2 上的每一个可微函数 g, gf 在 M_1 上是可微的, 则称映射 f 是可微的.

设 $A\subset M_1$, f: $A\to M_2$, 如果 f 能够扩充为定义在 A 的某一个邻域 U 上的可微映射, 则 f 也称为可微的.

设 f: $M_1\to M_2$, 如果 f 与 f^{-1} 都是确定的并且都是可微的, 则称 f 为微分同胚.

[因此 M^n 上的一个坐标系 (U, h) 是 M 中的开集 U 连同一个从 U 到 R^n 的一个开集上的微分同胚.]

若 $A\subset M$, 对于 A 的诸子集, 上面刚刚定义了可微函数的

概念. 设 A 局部微分同胚于 R^k, 容易证明这一族*⁾是 A 上的一个可微构造. 在这种情形下, A 称为 M 的**可微子流形**.

下面的引理在初等微积分中是熟知的.

1.4 引理 设 $f: C^n(r)\to R^n$ 满足条件: 对于所有的 i、j, $\left|\dfrac{\partial f^i}{\partial x^j}\right|<b$. 则对于所有的 x、$y\in\overline{C}^n$, $\|f(x)-f(y)\|\leqslant bn\|x-y\|$.

1.5 定理(反函数定理) 设 U 为 R^n 的开子集, $f: U\to R^n$ 是可微的, 且设 Df 在点 x_0 处是非蜕化的. 则 f 为从 x_0 的某一邻域到 $f(x_0)$ 的某一邻域上的微分同胚.

证明 我们可以假定 $x_0=f(x_0)=0$ 以及 $Df(x_0)$ 为单位矩阵.

令 $g(x)=f(x)-x$, 则 $Dg(0)$ 是零矩阵. 选取 $r>0$ 满足条件: 若 $\|x\|<r$, 则 $x\in U$, $Df(x)$ 非蜕化, 并且 $|\partial g^i/\partial x_j|\leqslant 1/2n$.

论断: 若 $y\in C(r/2)$, 则恰好存在一个 $x\in C(r)$ 使得 $f(x)=y$.

根据前一引理, 在 $C(r)$ 上有:

$$\|g(x)-g(x_0)\|\leqslant\frac{1}{2}\|x-x_0\|. \tag{*}$$

定义 $x_0=0$、$x_1=y$、$x_{n+1}=y-g(x_n)$. 这是确定的, 因为 $x_n-x_{n-1}=g(x_{n-2})-g(x_{n-1})$, 故 $\|x_n-x_{n-1}\|\leqslant\dfrac{1}{2}\|x_{n-2}-x_{n-1}\|$; 于是对于每一个 n, $\|x_n\|\leqslant 2\|y\|$. 因此, 序列 x_n 收敛于满足 $\|x\|\leqslant 2\|y\|$ 的某一点 x, 故 $x\in C(r)$. 从而 $x=y-g(x)$, 故 $f(x)=y$. 这就证明了 x 的存在性; 为了证明 x 的唯一性, 注意若 $f(x)=f(x_1)=y$, 则 $g(x_1)-g(x)=x-x_1$, 这与(*)相矛盾.

*⁾ 即所有定义在 A 的开子集上的可微函数构成的族. ——译注

因此，$f^{-1}: C(r/2) \to C(r)$存在. 注意 $\|f(x)-f(x_1)\| \geqslant \|x-x_1\| - \|g(x)-g(x_1)\| \geqslant \frac{1}{2}\|x-x_1\|$, 故 $\|y-y_1\| \geqslant \frac{1}{2}\|f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1)\|$. 因此，$f^{-1}$ 是连续的; $C(r/2)$在 f^{-1} 下的像是开的，因为它等于两个开集之交 $C(r) \cap f^{-1}(C(r/2))$.

为了证明 f^{-1} 是可微的，注意 $f(x) = f(x_1) + Df(x_1) \cdot (x-x_1) + h(x, x_1)$，其中$(x-x_1)$写成一个列矩阵，圆点表示矩阵乘法. 等式中的 h 满足条件：当 $x \to x_1$ 时，$h(x, x_1)/\|x-x_1\| \to 0$. 令 A 为 $Df(x_1)$的逆矩阵. 则

$$A \cdot (f(x) - f(x_1)) = (x-x_1) + A \cdot h(x, x_1)$$

或者 $$A \cdot (y-y_1) + A \cdot h_1(y, y_1) = f^{-1}(y) - f^{-1}(y_1),$$

其中 $h_1(y, y_1) = -h(f^{-1}(y), f^{-1}(y_1))$. 现有

$$\frac{h_1(y, y_1)}{\|y-y_1\|} = -\frac{h(x, x_1)}{\|x-x_1\|} \frac{\|x-x_1\|}{\|y-y_1\|}.$$

由于$\|x-x_1\|/\|y-y_1\| \leqslant 2$, 所以当 $y \to y_1$ 时 $h_1(y, y_1)/\|y-y_1\| \to 0$. 因此 $D(f^{-1}) = A = (D(f))^{-1}$.

这意味着 $D(f^{-1})$是下列映射的复合：

$$C(r/2) \xrightarrow[f^{-1}]{} C(r) \xrightarrow[Df]{} GL(n) \xrightarrow[\text{矩阵逆}]{} GL(n);$$

其中 $GL(n)$表示 $n \times n$ 阶非蜕化矩阵的集合，考虑作为 n^2-维欧氏空间的子空间. 由于 f^{-1} 是连续的并且 Df 和矩阵逆都是 C^∞ 的，故 $D(f^{-1})$是连续的，即 f^{-1} 是 C^1 的. 一般说来，若 f^{-1} 是 C^k 的. 根据这一论证 $D(f^{-1})$也是 C^k 的，即 f^{-1} 是 C^{k+1} 类的. 这就完成了证明.

1.6 引理 设 U 为 R^n 的一个开子集，令 $f: U \to R^p$ $(n \leqslant p)$, $f(0)=0$, 且令 $Df(0)$的秩为 n. 则存在 R^p 中原点的一个邻域到另一个邻域的一个微分同胚 g 使得 $g(0)=0$, 并且在原点的某一邻域中，$gf(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^n, 0, \cdots, 0)$.

证明 因为 $\partial(f^1, \cdots, f^p)/\partial(x^1, \cdots, x^n)$ 的秩为 n, 我们可以假定 $\partial(f^1, \cdots, f^n)/\partial(x^1, \cdots, x^n)$ 是非蜕化的子矩阵. 用等式

$$F(x^1, \cdots, x^p) = f(x^1, \cdots, x^n) + (0, \cdots, 0, x^{n+1}, \cdots, x^p)$$

定义 $F: U \times R^{p-n} \to R^p$. F 是 f 的扩充, 因为

$$F(x^1, \cdots, x^n, 0, \cdots, 0) = f(x^1, \cdots, x^n).$$

因为 DF 的行列式处处等于 $|\partial(f^1, \cdots, f^n)/\partial(x^1, \cdots, x^n)|$, 故 DF 在原点处是非蜕化的. 因此 F 有一个局部逆 g 将 R^p 中原点的一个邻域映到另一个邻域上, 并且

$$gF(x^1, \cdots, x^p) = (x^1, \cdots, x^p).$$

于是 $$gf(x^1, \cdots, x^n) = (x^1, \cdots, x^n, 0, \cdots, 0).$$

1.7 推论 设 A^k 为 M^n 的可微子流形. 给定 $x \in A$, 则存在 M 上围绕 x 的一个坐标系 (U, h) 使得

$$h(U \cap A) = h(U) \cap R^k$$

(其中 R^k 考虑作为 $R^k \times R^{n-k} = R^n$ 的子空间 $R^k \times 0$).

证明 设 (U_1, h_1) 为 M 的一个围绕 x 的坐标系; 根据假设, 存在一个从 M 中 x 的某邻域 V 到 R^k 中的可微映射 f 使得 $f|V \cap A = f_1$ 为一微分同胚, 其值域是 R^k 中某一开集 W. 我们可以假定 $U_1 = V$ 以及 $h_1(x) = f(x) = 0$.

现在, $fh_1^{-1}h_1f_1^{-1}$ 是 W 上的恒同映射, 故其雅可比矩阵等于 $D(fh_1^{-1}) \cdot D(h_1f_1^{-1})$, 它是非蜕化的. 因此 $D(h_1f_1^{-1})$ 的秩为 k, 故根据前一引理, 存在从 0 的某一邻域 $V_1 \subset h_1(U_1)$ 到另一邻域上的微分同胚 g, 使得 $g(0) = 0$, 并且 $gh_1f_1^{-1}(x^1, \cdots, x^k) = (x^1, \cdots, x^k, 0, \cdots, 0)$.

于是 $U = h_1^{-1}(V_1)$ 以及 $h = gh_1$ 满足引理的要求.

1.8 引理 设 U 为 R^n 的开子集, 令 $f: U \to R^p$, $f(0) = 0$ $(n \geqslant p)$, 且令 $Df(0)$ 的秩为 p. 则存在从 R^n 中的原点的某

一邻域到另一邻域上的微分同胚 h, 使得 $h(0)=0$, 并且

$$fh(x^1, \cdots, x^n)=(x^1, \cdots, x^p).$$

证明 由于 $Df(0)$ 的秩为 p, 我们可以假定

$$\frac{\partial(f^1, \cdots, f^p)}{\partial(x^1, \cdots, x^p)}$$

在点 0 处是非蜕化的. 用等式

$$F(x^1, \cdots, x^n)=(f^1(x), \cdots, f^p(x), x^{p+1}, \cdots, x^n)$$

定义 $F: U\to R^n$, 则 $DF(0)$ 是非蜕化的; 令 h 为 F 的局部逆. 令 g 为从 R^n 到子空间 R^p 上的投射: $f=gF$. 于是

$$\begin{aligned} fh(x^1, \cdots, x^n) &= gFh(x^1, \cdots, x^n) \\ &= g(x^1, \cdots, x^n)=(x^1, \cdots, x^p). \end{aligned}$$

1.9 练习 设 U 为 R^n 的开子集, $f: U\to R^p$, $f(0)=0$, 且令 $Df(x)$ 对于 U 中所有 x 其秩均为 k. 则分别存在 R^n 和 R^p 的局部微分同胚 h 和 g 使得

$$gfh(x^1, \cdots, x^n)=(x^1, \cdots, x^k, 0, \cdots, 0).$$

1.10 定义 若 $f: M_1\to M_2$, f 在点 x 处的秩即为 $D(h_2fh_1^{-1})$ 在点 $h_1(x)$ 处的秩, 其中 (U_1, h_1) 和 (U_2, h_2) 分别是围绕 x 和 $f(x)$ 的坐标系. 如果处处都有 $\operatorname{rank} f=n(n\leqslant p)$, 则可微映射 $f: M^n\to M^p$ 称为一个浸入; 如果 f 还是一个同胚入, 则 f 称为一个嵌入.

设 $f: M^n\to M^p$, $y\in M^p$. 如果在整个集合 $f^{-1}(y)$ 上 $\operatorname{rank} f=p$, 那么 $y\in M^p$ 称为 f 的正则值; 否则, y 称为临界值. [若 $y\bar{\in} f(M^n)$, y 是 f 的正则值.]

1.11 练习 若 A 为 M 的可微子流形, 则包含映射 $A\to M$ 为一嵌入; 反之, 若 $f: M_1\to M$ 为一嵌入, 则 $f(M_1)$ 为可微子流形.

1.12 练习 若 y 为 $f: M^n\to M^p$ 的正则值, 则 $f^{-1}(y)$ 为

M^n 的 $n-p$ 维可微子流形(或为空集).

1.13　定义　如果 R^n 的子集 A 能被具有任意小的总体积的可数个方体 $C(x, r)$ 构成的族所覆盖,则称 A 有零测度. 在这种情形下, R^n-A 是处处稠密的(即它与每一开集相交).

1.14　引理　设 U 为 R^n 的开子集; 令 $f: U\to R^n$ 为可微的. 若 $A\subset U$ 有零测度,则 $f(A)$ 也有零测度.

证明　设 C 为满足 $\bar{C}\subset U$ 的任一方体. 令 b 表示对于所有的 i、j, $|\partial f^i/\partial x^j|$ 在 $\bar{C}$ 上的最大值. 根据 1.4, 对于 x、$y\in\bar{C}$, $\|f(x)-f(y)\|\leqslant bn\|x-y\|$.

于是 $A\cap C$ 有零测度; 我们用包含于 C 的并且 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} r_i^n<\varepsilon$ 的方体 $C(x_i, r_i)$ 覆盖 $A\cap C$. 则 $f(C(x_i, r_i))\subset C(f(x_i), bnr_i)$, 故 $f(A\cap C)$ 被总体积为 $b^n n^n \sum r_i^n<b^n n^n \varepsilon$ 的一些方体所覆盖. 因此 $f(A\cap C)$ 有零测度.

因为 A 能够被可数多个这种方体 C 所覆盖, 所以 $f(A)$ 有零测度.

1.15　推论　若 $f: U\to R^p$ 是可微的,其中 U 为 R^n 的开子集且 $n<p$, 则 $f(U)$ 有零测度.

证明　将 $U\times R^{p-n}$ 投射到 U 上再应用 f. 因为 $U\times 0$ 在 R^p 中有零测度,所以 $f(U)$ 也有零测度.

1.16　定义　若 $A\subset M$, 如果对于每一个坐标系 (U, h), $h(A\cap U)$ 有零测度,则称 A 有零测度.

1.17　推论　若 $f: M^n\to M^p$ 是可微的且 $n<p$, 则 $f(M^n)$ 有零测度.

1.18　定义　设 $M(p, n)$ 表示具有欧氏空间 R^{pn} 的可微构造的 $p\times n$ 矩阵组成的空间. 令 $M(p, n; k)$ 表示秩为 k 的

矩阵组成的子空间. 于是若 $p \geqslant n$, 则 $M(p, n; n)$ 为 $M(p, n)$ 的开子集; 关于秩的行列式判别法证明了这一点. 更一般些, 有:

1.19 引理 $M(p, n; k)$ 为 $M(p, n)$ 的 $k(p+n-k)$ 维可微子流形, 其中 $k \leqslant \min(p, n)$.

证明 设 $E_0 \in M(p, n; k)$; 我们可以假定 E_0 形如 $\begin{pmatrix} A_0 & B_0 \\ C_0 & D_0 \end{pmatrix}$, 其中 A_0 是非蜕化的 $k \times k$ 矩阵. 存在一个 $\varepsilon > 0$ 使得当 $A - A_0$ 的所有元素都小于 ε 时, A 也是非蜕化的. 令 U 为 $M(p, n)$ 中所有形如 $E = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ 的矩阵组成的集合, 其中 $A - A_0$ 的所有元素都小于 ε.

于是 E 在 $M(p, n; k)$ 中当且仅当 $D = CA^{-1}B$; 因为矩阵

$$\begin{pmatrix} I_k & 0 \\ X & I_{p-k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A & B \\ XA + C & XB + D \end{pmatrix}$$

的秩与 E 的秩相同. 若 $X = -CA^{-1}$, 这个矩阵为

$$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & -CA^{-1}B + D \end{pmatrix}.$$

若 $D = CA^{-1}B$, 这一矩阵的秩为 k. 反之也成立, 因为如果 $-CA^{-1}B + D$ 的任一元素异于 0, 则这一矩阵的秩 $> k$.

设 W 为 $(pn - (p-k)(n-k)) = k(p+n-k)$ 维欧氏空间中的开集, 它由所有形如 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix}$ 的矩阵组成, 其中 $A - A_0$ 的所有元素都小于 ε. 映射 $\begin{pmatrix} A & B \\ C & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} A & B \\ C & CA^{-1}B \end{pmatrix}$ 是从 W 到 E_0 的邻域 $U \cap M(p, n; k)$ 上的微分同胚.

1.20 定理 设 U 为 R^n 中的开集, 且设 f: $U \to R^p$ 是可

微的，其中 $p\geqslant 2n$. 给定 $\varepsilon>0$, 则存在一个 $p\times n$ 矩阵 $A=(a_j^i)$满足条件 $|a_j^i|<\varepsilon$, 并且使得 $g(x)=f(x)+A\cdot x$ 为一浸入(x 写成列矩阵).

证明 $Dg(x)=Df(x)+A$; 我们希望选取 A 使得对于所有 x, $Dg(x)$的秩都是 n. 即是说，A 应形如 $Q-Df$, 其中 Q 的秩为 n.

我们用等式

$$F_k(Q,\ x)=Q-Df(x)$$

定义 F_k: $M(p,\ n;k)\times U\to M(p,\ n)$. F_k 为可微映射，并且 F_k 的定义域的维数为 $k(p+n-k)+n$. 当 $k<n$ 时，这一表达式对 k 而言是单调的(它对于 k 的偏导数为 $p+n-2k$). 因此当 $k<n$ 时 F_k 的定义域的维数不大于 $(n-1)(p+n-(n-1))+n=(2n-p)+pn-1$. 由于 $p\geqslant 2n$, 这一维数严格地小于 $pn=\dim M(p,\ n)$.

因此 F_k 的像在 $M(p,\ n)$中有零测度，所以存在 $M(p,\ n)$的任意接近于零矩阵的元素 A, 对于 $k=0,\ \cdots,\ n-1$, A 都不是 F_k 的像. 于是对于每一个 x, $A+Df(x)=Dg(x)$的秩为 n.

1.21 定理 设 U 为 R^n 的开子集，f: $U\to R^p$ 是可微的. 给定 $\varepsilon>0$, 则存在诸元素的绝对值均小于 ε 的矩阵 $A(p\times n)$ 和 $B(p\times 1)$, 使得

$$g(x)=f(x)+A\cdot x+B$$

以原点为正则值.

注意 下列更为优美的结果是由 A. Sard 证明的：任一可微映射的临界值的集合有零测度.

1.21 的证明 注意当 $p>n$ 时定理是显然的，因为这时 $f(U)$有零测度，我们可以选取 $A=0$、B 尽量小，而又使得

0 不在 g 的像中.

假设 $p \leqslant n$, 我们希望 $Dg(x_0)=Df(x_0)+A$ 的秩为 p, 其中 x_0 跑遍所有满足

$$g(x_0)=0=f(x_0)+A \cdot x_0+B$$

的点. 因此, A 属于 $Q-Df(x)$ 型; B 属于 $-f(x)-A \cdot x$ 型, 其中 Q 的秩为 p.

我们用等式

$$F_k(Q, x)=(Q-Df(x), \ -f(x)-(Q-Df(x)) \cdot x)$$

定义 F_k: $M(p, n; k) \times U \rightarrow M(p, n) \times R^p$. F_k 是可微的. 若 $k<p$, F_k 的定义域的维数不大于 $(p-1)(p+n-(p-1))+n=p+pn-1$. 因此对于 $k=0, \cdots, p-1$, F_k 的像有零测度, 所以存在任意接近于原点的点 (A, B) 不在任何一个这种像集中. 证完.

1.22 定义 X 的一个覆盖是局部有限的, 如果每一点有一邻域仅与这个覆盖的有限多个元素相交. X 的一个覆盖的加细是另一个覆盖, 它的每一元素包含于前一覆盖的某一元素中. 如果一个 Hausdorff 空间的每一开覆盖都有一个局部有限的开的加细, 则称这个 Hausdorff 空间是仿紧致的.

若 X 是仿紧致的, 且 U_α 是一个开覆盖, 则存在一个局部有限的开覆盖 V_α, 使得对于每一个 α, $V_\alpha \subset U_\alpha$. 因为若令 W_β 为 U_α 的局部有限的加细, 对于每一个 β, 可选取一个 $\alpha(\beta)$, 使得 $W_\beta \subset U_{\alpha(\beta)}$. 设 $V_{\alpha_0}=\bigcup_{\alpha(\beta)=\alpha_0} W_\beta$. 仅与有限多个 W_β 相交的邻域也仅与有限多个 V_α 相交.

1.23 定理 若 X 是局部紧致、Hausdorff、并且是具有可数基的, 则 X 是仿紧致的.

证明 令 $U_1, U_2, \cdots$ 为 X 的一基, 对于每一 i, $\overline{U}_i$ 是紧致的. 存在紧致子集的一个序列 $A_1, A_2, \cdots$, 这些紧致子集

的并为 X, 并且满足 $A_i \subset \operatorname{Int} A_{i+1}$; 设 $A_1 = \overline{U}_1$. 给定 A_i 是紧致的, 令 k 为使得 $A_i \subset U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k$ 的最小整数; 令 A_{i+1} 等于集合 $U_1 \cup \cdots \cup U_k$ 的闭包与 $\overline{U}_{i+1}$ 的并.

令 O 为 X 的开覆盖. 用有限多个开集 $V_1, \cdots, V_n$ 覆盖紧致集合 $A_{i+1} - \operatorname{Int} A_i$, 其中每一个 V_i 包含于 O 的某一元素, 并且包含于开集 $\operatorname{Int} A_{i+2} - A_{i-1}$. 令 P_i 表示集族 $\{V_1, \cdots, V_n\}$, 且令 $P = P_0 \cup P_1 \cup \cdots$. P 是 O 的加细, 并且由于任一紧致闭邻域 C 包含于某一 A_i 中, C 仅能与有限多个 P 的元素相交.

1.24 练习 证明: 仿紧致空间是正规的 (先证明它是正则的).

1.25 定理 设 M^n 为可微流形, $\{U_\alpha\}$ 为 M 的开覆盖. 存在一族 M 上的坐标系 (V_j, h_j), 满足:

1) $\{V_j\}$ 是 $\{U_\alpha\}$ 的局部有限的加细;

2) $h_j(V_j) = C^n(3)$;

3) 若 $W_j = h_j^{-1}(C^n(1))$, 则 (W_j) 覆盖 M.

证明 本证明沿用前一定理的证明线索进行. 仅有的差别乃是选取 V_j 满足条件 2), 并且使得诸集合 $h_j^{-1}(C(1))$ 也覆盖 $A_{i+1} - \operatorname{Int} A_i$.

1.26 我们希望构造一个 C^∞ 函数 $\varphi(x_1, \cdots, x_n)$, 使得在 $\overline{C}(1)$ 上 $\varphi = 1$, 在 $C(2) - \overline{C}(1)$ 上 $0 < \varphi < 1$, 在 $R^n - C(2)$ 上 $\varphi = 0$.

这一函数可以用等式 $\varphi(x_1, \cdots, x_n) = \Pi_1^n \psi(x_i)$ 来定义, 其中

$$\psi(x) = \frac{\lambda(2+x) \cdot \lambda(2-x)}{\lambda(2+x) \cdot \lambda(2-x) + \lambda(x-1) + \lambda(-x-1)}.$$

而
$$\lambda(x) = e^{-1/x} \quad (\text{若 } x > 0);$$
$$\lambda(x) = 0 \quad (\text{若 } x \leqslant 0).$$

注意 ψ 的表达式中的分母是恒正的，并且

$$\text{当 } |x| \leqslant 1 \text{ 时}, \quad \psi(x) = 1;$$
$$\text{当 } 1 < |x| < 2 \text{ 时}, \quad 0 < \psi(x) < 1;$$
$$\text{当 } |x| \geqslant 2 \text{ 时}, \quad \psi(x) = 0.$$

1.27　定义　设 f、g: $X \to Y$，其中 Y 是可度量的，又设 $\delta(x)$ 为定义在 X 上的一个正连续函数．如果对于所有的 x，$d(f(x), g(x)) < \delta(x)$．则称 g 为 f 的 δ-逼近．[若将 f 的诸 δ-逼近取为 f 在映射空间 $F(X, Y)$ 中的一个邻域，那么在这个映射空间中便给了一个拓扑，这个拓扑不依赖于 Y 上的度量(X, Y 都是仿紧致的).]

1.28　定理　给定一个可微映射 f: $M^n \to R^p$, $p \geqslant 2n$，以及 M 上的一个连续的正函数 δ，则存在一个浸入 g: $M^n \to R^p$ 是 f 的 δ-逼近．若在闭集 N 上 rank $f = n$，我们可以将 g 取得满足条件 $g|N = f|N$.

证明　在 N 的某一邻域 U 上 rank $f = n$．用 U 和 $M^n - N$ 覆盖 M^n．令 (V_i, h_i) 为这一覆盖的一个加细，构作的办法如 1.25 中所述．如前，$h_i(W_i) = C(1)$ 且 $h_i(V_i) = C(3)$．令 $h_i(U_i) = C(2)$．设这些 V_i 用正的和负的整数标号；并且使得 $i \leqslant 0$ 当且仅当 $V_i \subset U$．令 ε_i 为 $\delta(x)$ 在紧致集合 $\overline{U}_i$ 上的最小值.

设 $f_0 = f$．假定 f_{k-1}: $M^n \to R^p$ 在 $N_{k-1} = U_{j<k} \overline{W}_j$ 上的秩为 n．考虑 $f_{k-1} h_k^{-1}$: $C(3) \to R^p$．令 A 为一个 $p \times n$ 矩阵；设 F_A: $C(3) \to R^p$ 由等式

$$F_A(x) = f_{k-1} h_k^{-1}(x) + \varphi(x) A \cdot (x)$$

所定义，其中 (x) 写成(如常)一个 $(n \times 1)$ 列矩阵；A 待定；而 $\varphi(x)$ 是定义在 1.26 中的函数.

首先，我们希望在集合 $K = h_k(N_{k-1} \cap \overline{U}_k)$ 上 $F_A(x)$ 的秩

为 n; 我们已经给定 $f_{k-1}h_k^{-1}$ 在 K 上的秩为 n. 现在

$$D(F_A(x))=D(f_{k-1}h_k^{-1}(x))+A\cdot(x)\cdot D\varphi(x)+\varphi(x)A$$

($D\varphi$ 为一个 $1\times n$ 矩阵). 将 (x, A) 变为 $D(F_A(x))$ 的映射将 $K\times M(p, n)$ 映到 $M(p, n)$ 中, 它是连续的. 这一映射将 $K\times(0)$ 映到 $M(p, n)$ 的开子集 $M(p, n; n)$ 中. 因此若 A 充分小, 这一映射将把 $K\times A$ 映到 $M(p, n; n)$ 中; 我们的第一个要求便是 A 为这样小的.

其次, 我们要求 A 足够小到使得对于所有的 $x\in C(3)$, $\|A\cdot(x)\|<\varepsilon_k/2^k$.

最后, 根据 1.20, A 可以被选取得任意小, 使在 $C(2)$ 上 $f_{k-1}h_k^{-1}(x)+A\cdot(x)$ 的秩为 n.

现在用等式

$$f_k(y)=f_{k-1}(y)+\varphi(h_k(y))A\cdot(h_k(y)) \quad (\text{当 } y\in V_k \text{ 时});$$

$$f_k(y)=f_{k-1}(y) \quad (\text{当 } y\in M^n-\overline{U}_k \text{ 时})$$

来定义 f_k: $M^n\to R^p$. 在公共区域上, $f_k(y)$ 的两种定义一致, 所以 f_k 是可微的. 根据 A 的第一个条件, 它在 N_{k-1} 上的秩为 n; 根据第三个条件, 它在 $\overline{W}_k$ 上的秩为 n. 根据第二个条件, f_k 是 f_{k-1} 的 $\delta/2^k$-逼近.

定义 $g(x)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(x)$. 因为覆盖 V_i 是局部有限的, 当 k 充分大时, 所有 f_k 在任一给定的紧致集合上都一致, 所以 g 是可微的并且其秩处处为 n. 它也是 f 的一个 δ-逼近.

1.29 引理 若 $p>2n$, 任一浸入 f: $M^n\to R^p$ 能用 1-1 的浸入 g δ-逼近. 若 f 在闭集 N 的一个邻域 U 中是 1-1 的, 我们能够选取 g 满足 $g|N=f|N$.

证明 选取 M 的一个覆盖 $\{U_\alpha\}$ 使得 $f|U_\alpha$ 为嵌入(据 1.6, 这是可能的). 设 (V_i, h_i) 为在 1.25 中构作的局部有限

的加细；令 $\varphi(x)$ 为在 1.26 中构作的函数．当 $y\in V_i$ 时，令 $\varphi_i(y)=\varphi(h_i(y))$；对于其它的 y，令 $\varphi_i(y)=0$．φ_i 是可微的．如前，我们假定 $(V_i,\ h_i)$ 是覆盖 $\{U,\ M-N\}$ 的加细，并且使得 $i\leqslant 0$ 当且仅当 $V_i\subset U$．令 $f_0=f$．给定浸入 f_{k-1}: $M^n\to R^p$，我们用等式

$$f_k(y)=f_{k-1}(y)+\varphi_k(y)b_k$$

定义 f_k: $M^n\to R^p$，其中 b_k 为 R^p 中一个待定点．据前一定理的论断，若 b_k 取得充分小，f_k 的秩处处为 n．第一个要求便是 b_k 小到这种程度；第二个要求是 b_k 足够小到使得 f_k 是 f_{k-1} 的 $\delta/2^k$-逼近．

最后，令 N^{2n} 为 $M^n\times M^n$ 的开子集，它由满足条件 $\varphi_k(y)\neq\varphi_k(y_0)$ 的点偶 $(y,\ y_0)$ 所组成．考虑将 $(y,\ y_0)$ 变为

$$-(f_{k-1}(y)-f_{k-1}(y_0))/(\varphi_k(y)-\varphi_k(y_0))$$

的可微映射，它将 N^{2n} 映到 R^p 中．因为 $2n<p$，N^{2n} 的像有零测度，所以 b_k 可以选得任意小而并不在这像中．

这推出 $f_k(y)-f_k(y_0)=0$ 当且仅当 $\varphi_k(y)-\varphi_k(y_0)=0$ 并且 $f_{k-1}(y)-f_{k-1}(y_0)=0\,(k>0)$．

定义 $g(y)=\lim\limits_{k\to\infty}f_k(y)$．若 $g(y)=g(y_0)$ 且 $y\neq y_0$，这将推出对于所有 $k>0$，$f_{k-1}(y)=f_{k-1}(y_0)$ 且 $\varphi_k(y)=\varphi_k(y_0)$．前一条件蕴含 $f(y)=f(y_0)$，所以 y 与 y_0 不属于任何一个集合 U_i．根据后一条件，这表示当 $i>0$ 时两者中无论哪一个都不属于任何集合 U_i．因此它们都在 U 中．这与 f 在 U 上是 1-1 的相矛盾．

1.30 定义 设 f: $M^n\to R^p$．极限集 $L(f)$ 为满足下列条件的 $y\in R^p$ 的集合：对于某一在 M^n 中没有极限点的序列 $(x_1,\ x_2,\ \cdots)$，$y=\lim f(x_n)$．

练习 证明下列论断:

1) $f(M)$是R^p的闭子集当且仅当$L(f)\subset f(M)$.

2) f为一拓扑嵌入当且仅当f是1-1的并且$L(f)\cap f(M)$是空的.

1.31 引理 存在可微函数$f: M^n\to R$使得$L(f)$是空的.

证明 令(V_i, h_i)与φ被取得如1.25与1.26中，其中i跑遍正整数；设当$y\in V_i$时，$\varphi_i(y)=\varphi h_i(y)$；其它情形，$\varphi_i(y)=0$. 定义$f(y)=\sum_j(j\varphi_j(y))$. 这是一个有限和，因为$V_i$是局部有限的覆盖. 若$\{x_i\}$是$M$的没有极限点的点集，则只有有限多个点在$M$的任一紧致子集中. 给定$m$，存在一个整数$i$使得$x_i$不在$\overline{W}_1\cup\cdots\cup\overline{W}_m$中. 因此，对于某一$j>m$，$x_i\in\overline{W}_j$. 从而$f(x_i)>m$. 于是序列$f(x_m)$不收敛.

1.32 推论 每一M^n能够可微地嵌入在R^{2n+1}中作为闭子集.

证明 令$f: M^n\to R\subset R^{2n+1}$为可微函数，$L(f)=\emptyset$. 设$\delta(x)\equiv1$，并令$g$为1-1的浸入且为$f$的$\delta$-逼近. 则$L(g)$是空的，所以$g$是一个同胚入.

1.33 定义 设$f: M^n\to N^p$为可微映射，N_1^{p-q}为N的可微子流形. 令$f(x)\in N_1$，且令$(u^1, \cdots, u^n)$为围绕x的一个坐标系；$(v^1, \cdots, v^p)$为围绕$f(x)$的一个坐标系，它使得在N_1上，$v^1=\cdots=v^q=0$(见1.6). 考虑条件：矩阵

$$\left(\frac{\partial v^i}{\partial u^j}\right)_{\substack{i=1,\cdots,q\\ j=1,\cdots,n}}$$

在点x处的秩为q. 这是对于f与N_1在点x处的横截正则性条件. [练习：证明这一条件与坐标系的选取无关.]注意：满足横截正则性条件的点集是$f^{-1}(N_1)$的开子集. 如果对于$f^{-1}(N_1)$中的每一个x，这一横截正则性条件都被满足，则f

就称为在 N_1 上是横截正则的.

1.34 引理 若 $f: M^n \to N^p$ 在 N_1^{p-q} 上是横截正则的，则 $f^{-1}(N_1)$ 是 $n-q$ 维可微子流形(或为空集).

证明 设 π 将 R^p 投射到它的前 q 个分量上，$\pi: R^p \to R^q$. 若 $(V, h)=(v^1, \cdots, v^p)$ 为设于 1.33 中的坐标系，则 $N_1 \cap V = h^{-1}\pi^{-1}(0)$ (此处 0 表示 R^q 中的原点)；并且 $f^{-1}(N_1 \cap V)=(\pi h f)^{-1}(0)$. 由于 $\pi h f$ 在点 $x \in f^{-1}(N_1 \cap V)$ 处的秩为 q，原点是 $\pi h f$ 的正则值. 因此 $(\pi h f)^{-1}(0)$ 是 M 的 $n-q$ 维可微子流形(见 1.12).

1.35 定理 设 $f: M^n \to N^p$ 是可微的，N_1^{p-q} 为 N 的一个闭的可微子流形. 又设 A 为 M 的闭子集，满足条件：对于 f 和 N_1，在 $A \cap f^{-1}(N_1)$ 的每一点 x 处横截正则性条件成立. 令 δ 为 M 上的一个正连续函数. 则存在可微映射 $g: M^n \to N^p$，使得

(1) g 是 f 的 δ–逼近；

(2) g 在 N_1 上是横截正则的；

(3) $g|A=f|A$.

证明 存在 A 在 M 中的邻域 U，使得 f 在 $U \cap f^{-1}(N_1)$ 上满足横截正则性条件. 用 $N-N_1=Y_0$ 以及坐标系 (Y_i, k_i) $(i>0)$ 覆盖 N；其中各坐标函数 $(v^1, \cdots, v^n)$ 在 N_1 上满足 $v^1=\cdots=v^q=0$. 诸开集 $f^{-1}(Y_i)$ 正如开集 U、$M-A$ 一样，也覆盖 M. 设 (v_j, h_j) 为这两个覆盖的加细，如 1.25 中所构作. 留意 $h_j(V_j)=C(3)$，$h_j(U_j)=C(2)$，$h_j(W_j)=C(1)$，并且诸 W_j 覆盖 M. 这些 V_j 用正的与负的整数标号，并且使得 $j \leqslant 0$ 当且仅当 $V_j \subset U$.

设 φ 如 1.26 中者，且当 $x \in V_i$ 时，令 $\varphi_i(x)=\varphi(h_i(x))$；在另外情形下，令 $\varphi_i(x)=0$. 对于每一个 j，选取 $i(j) \geqslant 0$,

使 $f(V_j)$ 包含于 $Y_{i(j)}$.

令 $f_0=f$.

设 f_{k-1} 已确定, 并且对 N_1 而言, 在 $f_{k-1}^{-1}(N_1)$ 与 $U_{j<k}\overline{W}_j$ 的交中的每一点处都满足横截正则性条件. 进而对于每一个 j, 设 $f_{k-1}(\overline{U}_j)\subset Y_{i(j)}$. 令 $i=i(k)$, 特别地有

$$f_{k-1}(\overline{U}_k)\subset Y_i.$$

考虑 $\pi k_i f_{k-1}h_k^{-1}: C(2)\to R^q$; 根据 1.21, 存在任意小的仿射映射

$$L(x)=A\cdot(x)+B,$$

使得将其加在原先的映射上得到的映射以原点为正则值. 考虑 R^q 作为 R^p 中前 q 个坐标, 且定义: 当 x 在 $\overline{U}_k$ 的一个邻域中,

$$f_k(x)=k_i^{-1}(k_i f_{k-1}(x)+L(h_k(x))\varphi_k(x));$$

当 x 在 $M-U_k$ 中,

$$f_k(x)=f_{k-1}(x).$$

此处 L 待定. 当然, 我们应当将 L 选得足够小, 以使得对于 $x\in\overline{U}_k$, $k_i f_{k-1}+L\varphi_k$ 能在 $C(1)$ 中, 为的是 k_i^{-1} 可以对它用得上. 这是对 L 的第一个要求. 第二, 我们将 L 取得足够小, 以使得 f_k 是 f_{k-1} 的 $\delta/2^k$-逼近. 第三, 将 L 取得足够小, 以使得对于每一个 j, $f_k(\overline{U}_j)$ 包含在 $Y_{i(j)}$ 中. 这是可能的, 因为仅有有限个 $\overline{U}_j$ 与 $\overline{U}_k$ 相交.

现在根据定义, f_k 对于 N_1 而言, 在 $f_k^{-1}(N_1)\cap\overline{W}_k$ 的每一点处都满足横截正则性条件. 我们希望将 L 取得足够小, 以使得在 $f_k^{-1}(N_1)$ 与 $U_{j<k}\overline{W}_j$ 的交的每一点处都满足这个条件. 这只要考虑这一集合与 $\overline{U}_k$ 的交即可, 将这个交记作 K. 考虑将偶对 (x, L) $(x\in K)$ 映为 $N\times M(q, n)$ 的点 $(f_k(x), D(\pi k_i f_k h_k^{-1})(h_k(x)))$ 的映射, 此映射是连续的, 且将 $K\times(0)$

映到 $N\times M(q,\ n)$ 的开集 $[(N-N_1)\times M(q,\ n)]\cup[N\times M(q,n;q)]$ 中. 因此当 L 充分小时, $(K,\ L)$ 变到这个集合中, 所以 f_k 对于 N_1 而言, 在 $f_k^{-1}(N_1)\cap(\cup_{j<k}\overline{W}_j)$ 的每一点处满足横截正则性条件.

如经常所作的那样, 我们定义

$$g(x)=\lim_{k\to\infty}f_k(x).$$

§2 向量空间丛

2.1 定义 n 维实向量空间丛 ξ 是一个三联组(π, a, s)，其中 π 是一个从 E 到 B 上的连续映射(E, B 是拓扑空间; B 是 Hausdorff 的); $F_b=\pi^{-1}(b)$称为一个纤维; $s: R\times E\to E$ 为一映射，将 $R\times F_b$ 变到 F_b 中; a 定义在 $\bigcup_b(F_b\times F_b)\subset E\times E$ 上并且将 $F_b\times F_b$ 变到 F_b 中; 同时下列条件被满足:

(1) F_b 是一个 n 维实向量空间，分别以 s 和 a 为数量乘法和向量加法.

(2) (局部平凡性)对于 B 中的每一点 b，存在一个邻域 U 和一个同胚 $\varphi: U\times R^n\to\pi^{-1}(U)$，使得对于 U 中每一点 b'，φ 是从 $b'\times R^n$ 到 $F_{b'}$ 上的一个向量空间的同构.

若在(2)中，邻域 U 可以取为整个 B，那么这种丛称为平凡丛.

若 ξ、η 分别为 n 维和 p 维向量空间丛，定义积丛 $\xi\times\eta$ 如下:

$$E(\xi\times\eta)=E(\xi)\times E(\eta),$$
$$B(\xi\times\eta)=B(\xi)\times B(\eta),$$
$$(\pi\times\lambda)(x, y)=(\pi(x), \lambda(y)),$$

其中 π、λ 分别是 ξ、η 中的投射，并且 $F_b(\xi\times\eta)$有通常的向量空间的乘积构造.

若 U 是 $B(\xi)$ 的子集，则 $\xi|U$ 表示丛 $\pi: \pi^{-1}(U)\to U$. 它称为丛 ξ 在 U 上的限制.

2.2 定义 设 M^n 为一可微流形，且设 $x_0\in M$. x_0 处的一个切向量乃是一个运算 X，它对于每一个定义在 x 的邻域上的可微函数指定一个实数，并且下列条件必需满足：

1) 若 g 是 f 的限制，则 $X(g)=X(f)$;

2) $X(cf+dg)=cX(f)+dX(g)$ (c, d 为实数);

3) $X(f\cdot g)=X(f)\cdot g(x_0)+f(x_0)\cdot X(g)$，其中圆点表示通常的实数乘法.

于是根据 3)：$X(1)=X(1\cdot 1)=X(1)+X(1)$. 因此 $X(1)=0$; 根据 2)：$X(c)=0$.

若将切向量认作是流形中的曲线的速度向量，那末 $X(f)$ 只不过是 f 相对于这一曲线的参数的导数. 下面将这意思说清楚：

2.3 引理 设 $(u^1, \cdots, u^n)$ 为围绕 x 的一个坐标系. 设 X 为 x 处的一个切向量. 则 X 可以唯一地写成诸算子 $\dfrac{\partial}{\partial u^i}$ 的线性组合：

$$X=\sum \alpha^i \frac{\partial}{\partial u^i}.$$

证明 假设 $u(x)$ 为原点，对于任一给定的 $f(u^1, \cdots, u^n)$，定义

$$g_1(u^1, \cdots, u^n)=\frac{f(u^1, \cdots, u^n)-f(0, u^1, \cdots, u^n)}{u^1}$$

(若 $u^1\neq 0$);

$$g_1(u^1, \cdots, u^n)=\frac{\partial f}{\partial u^1}(0, u^2, \cdots, u^n) \quad (\text{若 } u^1=0).$$

为了弄清楚 g 是可微的，只要注意：

$$g_1(s, u^2, \cdots, u^n)=\int_0^1 \frac{\partial f}{\partial u^1}(st, u^2, \cdots, u^n)dt.$$

于是

$$f(u^1, \cdots, u^n)=u^1 g_1(u^1, \cdots, u^n)+f(0, u^2, \cdots, u^n).$$

类似地有:

$$f(0, u^2, \cdots, u^n)=u^2 g_2(u^2, \cdots, u^n)+f(0, 0, u^3, \cdots, u^n),$$

其中 $g_2(0)=\frac{\partial f}{\partial u^2}(0)$. 最后可得:

$$f(u^1, \cdots, u^n)=\sum u^i g_i+f(0),$$

其中 $g_i(0)=\frac{\partial f}{\partial u^i}(0)$。于是

$$X(f)=\sum(X(u^i)g_i(0)+0\cdot X(g_i))=\sum\alpha^i \frac{\partial f}{\partial u^i}(0),$$

其中 $\alpha^i=X(u^i)$.

注意 若 $(v^1, \cdots, v^n)$ 是围绕 x 的另一个坐标系,且

$$X=\sum\beta^j \frac{\partial}{\partial v^j},$$

则

$$\alpha^i=X(u^i)=\sum_j\beta^j \frac{\partial u^i}{\partial v^j}.$$

诸 α^i 称为向量 X 相对于坐标系 $(u^1, \cdots, u^n)$ 而言的分量.

2.4 另一定义 在 x 处的一个切向量乃是对于每一个围绕 x 的坐标系 $(u^1, \cdots, u^n)$ 指定 R^n 的一个元素 $(\alpha^1, \cdots, \alpha^n)$,满足要求: 若 (β^j) 是由坐标系 $(v^1, \cdots, v^n)$ 指定的,则

$$\alpha^i=\sum_j \frac{\partial u^i}{\partial v^j}\beta_j.$$

求导算子 X 定义为 $\sum\alpha^i \frac{\partial}{\partial u^i}$. 容易验证:

a) $X(f)$ 与用到的坐标系无关,并且

b) $X(f)$ 满足切向量的定义中的要求 1)、2) 和 3).

2.5 定义 对于 M 中的每一个 x, x 处的切向量形成一

个 n 维向量空间(根据 2.3, 诸算子 $\partial/\partial u^i$ 构成一个基). 将这些东西的总体记作 $E(\tau)$[*]; 定义 $\pi: E(\tau)\to M$ 为把在 x_0 处的切向量 X 映到 x_0 的映射. 局部乘积结构由 $\varphi_u: U\times R^n\to E(\tau)$ 给出, 其中 $(U, h)=(u^1, \cdots, u^n)$ 是 M 上的一个坐标系, 且 φ_u 确定如下:

$$\varphi_u(x_0, a^1, \cdots, a^n)=x_0 \text{ 处的切向量 } X,$$

其中 $X=\sum a^i\dfrac{\partial}{\partial u^i}$.

由于 φ_u 应当是同胚, 因而在 E 上引出了一个拓扑; 由于 $\varphi_v^{-1}\varphi_u$ 是 $(U\cap V)\times R^n$ 上的同胚, 这一拓扑是确定的. 可直接验证: 对于每一个纤维, φ_u 给出向量空间的同构.

事实上, $\varphi_v^{-1}\varphi_u$ 是 $(U\cap V)\times R^n$ 上的 C^∞ 映射, 故 E 是一个 $2n$ 维可微流形(用可微流形的定义 1.2). 映射 π 是秩为 n 的可微映射.

这个丛 τ 称为 M 的切丛.

2.6 定义 若 $f: M_1\to M_2$, 则有一个诱导映射 $df: E(\tau_1)\to E(\tau_2)$ 定义如下: $df(X)=Y$, 其中 $Y(g)=X(gf)$. 若 X 是 x_0 处的切向量, 则 Y 是 $f(x_0)$ 处的切向量. 这一映射在每一纤维上明显地是线性的. 我们将这一映射称为导射.

若 (U, h) 和 (V, k) 分别为围绕 x_0 与 $f(x_0)$ 的坐标系, 且 (α^i)、(β^j) 分别是 X、Y 的相对于这两个坐标系而言的分量, 则

$$(\beta^j)=D(kfh^{-1})\cdot(\alpha^i),$$

其中向量的分量如通常一样写作列矩阵.

2.7 定义 设 ξ、η 为两个 n 维向量空间丛.

一个丛映射 $f: \xi\to\eta$ 是一个从 $E(\xi)$ 到 $E(\eta)$ 中的连续映

---

[*] 即 $E(\tau)=\{(x, X): x\in M, X \text{ 是 } x \text{ 处的切向量}\}$.——译注

射，它将每一纤维同构地变到某个纤维上. 诱导出来的映射 $f_B: B(\xi)\to B(\eta)$ 自动地是连续的.

当 $B(\xi)=B(\eta)$，并且这一诱导出来的映射是恒等映射时，f 称为一个等价. 注意：如果 f 是一个等价，则它也是一个同胚：局部看来，f 正好是一个映射 $U\times R^n\to V\times R^n$. 由于 f_B^{-1} 是恒等映射，故 f^{-1} 投射到因子 U 中是连续的；f 可以用 $x\in U$ 的一个非蜕化的矩阵函数给出，f^{-1} 是这矩阵的逆，所以 f^{-1} 投射到因子 R^n 中是连续的. 因此 f^{-1} 是连续的.

如果存在一个从 ξ 到 η 上的等价，则可写作 $\xi\simeq\eta$.

2.8 引理 给定丛 η，其投射为 $\lambda: E(\eta)\to B(\eta)$，且给定映射 $f: B_1\to B(\eta)$，则存在一个丛 $\pi: E_1\to B_1$ 以及一个丛映射 $g: E_1\to E(\eta)$，使得 $\lambda g=f\pi$. 并且 E_1 对于等价而言是唯一的(E_1 称为诱导丛，且常记为 $f^*\eta$).

证明 设 E_1 为 $B_1\times E(\eta)$ 的子集，它由满足 $f(b)=\lambda(e)$ 的点 (b, e) 组成. 定义 $\pi(b, e)=b$; $g(b, e)=e$. 为证明 E_1 是一个向量空间丛，设 $\varphi: V\times R^n\to E(\eta)$ 为 $E(\eta)$ 中的乘积邻域，且设 $f(U)\subset V$. 然后 $\varphi_1: U\times R^n\to E_1$ 定义为 $\varphi_1(b, x)=(b, \varphi(f(b), x))$. 这映射是连续且 1-1 的，它的像等于 $\pi^{-1}(U)$. 它的逆将 (b, e) 变为 $(b, p\varphi^{-1}(e))$（其中 p 是从 $V\times R^n$ 到 R^n 上的投射)，所以它是连续的. 映射 g 在每一纤维上都是同构.

现设 $g': E'\to E(\eta)$ 为一丛映射，其中 $\pi': E'\to B_1$ 为一丛，且 $\lambda g'=f\pi'$. 我们用 $e'\to(\pi'(e'), g'(e'))$（在 E_1 中）定义一个映射 $E'\to E_1$. 因为 g' 在每一纤维上都是同构的，所以这个映射也如此，并且这个映射在底空间上诱导出恒等映射. 因此它是一个等价.

2.9 定义 设 ξ、η 为 B 上的两个丛. Whitney 和 $\xi\oplus\eta$

是一个丛，其定义如下：考虑积丛 $E(\xi)\times E(\eta)\to B\times B$，设 d 为对角线映射 $B\to B\times B$，诱导丛 $d^*(\xi\times\eta)$ 便定义作为 Whitney 和 $\xi\oplus\eta$.

注意：$\xi\oplus\eta$ 中 b 上的纤维乃是 $F_b(\xi)\times F_b(\eta)$，所以

$$\dim(\xi\oplus\eta)=\dim\xi+\dim\eta.$$

再注意 $\oplus$ 的交换性和结合性，即 $\xi\oplus\eta\simeq\eta\oplus\xi$ 以及 $(\xi\oplus\eta)\oplus\zeta\simeq\xi\oplus(\eta\oplus\zeta)$. 证明留作练习.

2.10 定义 若 ξ、η 都是 B 上的丛，称 $g: E(\xi)\to E(\eta)$ 为一个同态，如果

1) 它将每一纤维线性地映到某一纤维中，且

2) 在 B 上诱导出来的映射是恒同映射.

(注意：等价既是丛映射又是同态.) 丛的一个嵌入乃是一个 1-1 的同态.

2.11 定理 若 $f: E(\xi)\to E(\eta)$ 将每一纤维映到一个纤维中，则 f 可以分解为一个同态接上一个丛映射.

证明 设 π_1、π_2 分别为 ξ、η 中的投射.

设 $f_B: B(\xi)\to B(\eta)$ 为由 f 诱导出来的映射. 令 $E_1=f_B^*\eta$ 为 f_B 的诱导丛；g 为丛映射 $E_1\to E(\eta)$，而 π 为投射 $E_1\to B(\xi)$.

定义 $h: E(\xi)\to B(\xi)\times E(\eta)$ 为 $h(e)=(\pi_1(e), f(e))$. 事实上，h 的像是在 $B(\xi)\times E(\eta)$ 的子集 E_1 中，于是 h 是一个同态. 根据定义，$f=gh$.

$$\begin{tikzcd}
E(\xi) \arrow[r, "h"] \arrow[d, "\pi_1"] & E_1 \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\pi"] & E(\eta) \arrow[d, "\pi_2"] \\
B(\xi) \arrow[r, "i"'] & B(\xi) \arrow[r, "f_B"'] & B(\eta)
\end{tikzcd}$$

2.12 引理 设 ξ、η 都是 B 上的丛，其维数分别为 n 和

p; 并设 $g: \xi \to \eta$ 为一同态. 若 g 是在上的, 则 g 的核是一个丛. 若 g 是 1–1 的, 则 g 的余核(即商 η/g 的像)是一个丛.

证明 设 g 是 1–1 的(即 g 限制于每一纤维的秩均为 n). 在 $E(\eta)$ 中, 如果 $e-e'$ 存在, 并且在 g 的像中, 则定义 $e \sim e'$ 等同等价类中的诸元素, 将得到的迭合空间定义为 $E(\eta/g(\xi))$. 它是一个 B 上的丛, 其投射按自然的方式定义, 并且每一纤维为一个 $p-n$ 维向量空间. 在此只需证明局部乘积构造的存在性.

设 U 为一个 B 中的开集, 它使 $\xi|U$ 等价于 $U \times R^n$, 并且 $\eta|U$ 等价于 $U \times R^p$. 令 g_0 表示由 g 诱导出来的同态 $U \times R^n \to U \times R^n$. 由于 $(\eta/g(\xi))|U$ 等价于商 $U \times R^p/g_0(U \times R^n)$, 所以只要证明后面的这个商局部地为一个乘积.

将 g_0 表为连续依赖于点 $b \in U$ 的矩阵 $M(b) \in M(p, n)$. 对于给定的 b_0, 可以假定在 b_0 的某一邻域 U_0 中, $M(b)$ 的前 n 行是独立的. 我们定义 $h: U_0 \times R^n \times R^{p-n} \to U_0 \times R^p$ 为 R^p 上的线性映射, 它的矩阵(非蜕化的)是

$$\left(M(b) \,\middle|\, \frac{0}{I_{p-n}}\right).$$

$U_0 \times R^n \times 0$ 在 h 下的像正好是 $g_0(U_0 \times R^n)$; 由于 h 是一个等价, 它诱导出一个

$$\text{从 } U_0 \times R^{p-n} \simeq \frac{U_0 \times R^n \times R^{p-n}}{U_0 \times R^n \times 0} \text{ 到 } \frac{U_0 \times R^p}{g_0(U_0 \times R^n)}$$

上的等价.

其次, 设 g 是映上的(即 g 限制于每一纤维的秩均为 p). $E(g^{-1}(0))$ 定义为 $E(\xi)$ 的子集, 由使 $g(e)=0$ 的点 e 所组成. 在此还需指出局部乘积构造的存在性. 设 U、g_0 和 $M(b)$ 如上. 给定 b_0, 可以假定在 b_0 的邻域 U_0 中 $M(b)$ 的前 p 列

是独立的. 我们用矩阵

$$\left(\frac{M(b)}{0\,|\,I_{n-p}}\right)$$

定义 $h: U_0\times R^n\to U_0\times R^p\times R^{n-p}$. 由于 h 接上一个从 $U_0\times R^p\times R^{n-p}$ 到 $U_0\times R^p$ 上的自然的投射以后等于 $g_0|U_0$, 因此 h^{-1} 将 $U_0\times 0\times R^{n-p}$ 映到 $g_0^{-1}(U_0\times 0)$ 上; 因为 h 是一个等价, 所以 h^{-1} 限制于 $U_0\times 0\times R^{n-p}$ 也是一个等价.

注意 若 g 是映上的, $\xi/g^{-1}(0)$ 作为包含同态 $g^{-1}(0)\to\xi$ 的商, 它是一个丛; 若 g 是 1-1 的, $g(\xi)$ 作为投射同态 $\eta\to\eta/g(\xi)$ 的核也是一个丛.

2.13 定义 若 φ 是 B 上的一个非负函数, φ 的承载子乃是使得 $\varphi(x)>0$ 的 x 组成的集合的闭包. 一个单位分解乃是 B 上的一族连续的非负函数, 使得诸集合 $C_\alpha=\varphi_\alpha$ 的承载子形成 B 的一个局部有限的覆盖, 并且 $\sum\varphi_\alpha(x)=1$(对于每一个 x 这都是有限和).

2.14 引理 设 B 为一正规空间, U_α 为 B 的一个局部有限的开覆盖. 则存在一个单位分解 φ_α, 使得对于每一个 α, φ_α 的承载子包含于 U_α.

证明 首先, 我们证明存在 B 的一个开覆盖 V_α, 使得对于每一个 α, $\overline{V}_\alpha\subset U_\alpha$. 假设 U_α 用一个序数的集合作指标(良序定理)*). 设对于所有的 $\alpha<\beta$, V_α 已经确定, 并且假定这些集合 V_α 与诸集合 $U_\alpha(\alpha\geqslant\beta)$ 一道覆盖 B. 考虑集合 $A(\beta)=B-\bigcup_{\alpha<\beta}V_\alpha-\bigcup_{\alpha>\beta}U_\alpha$. 则 $A(\beta)\subset U_\beta$. 令 V_β 为一包含于闭集 $A(\beta)$ 中且 $\overline{V}_\beta\subset U_\beta$ 的开集(正规性). 这就完成了诸 V_α 的构造.

现在设 g_α 为一函数, 它在 $\overline{V}_\alpha$ 上是正的且在 U_α 之外是 0

---

*) 可改为"用一个良序集合作指标集", ——译注

(还是用正规性). 定义 $\varphi_{\alpha_0}(x)=g_{\alpha_0}(x)/\sum g_\alpha(x)$. 因为 U_α 是局部有限的，分母中的和是有限的并且是正的，所以 φ_α 是完全确定的.

注意 若 B 为可微流形，则 φ_α 可以选成可微的：如 1.25 中所作，用坐标系 (V_i, h_i) 覆盖 B，而这些坐标系是 B 的覆盖 U_α，$B-\overline{V}_\alpha$ 的加细. 当 $y\in V_i$ 时，令 $\varphi_i(y)=\varphi(h_i(y))$；其它情形，$\varphi_i(y)=0$（$\varphi$ 如 1.26 中）. 令 $g_\alpha(y)=\sum\varphi_i(y)$，其中求和号对所有的使 $V_i\subset U_\alpha$ 的 i 求和.

2.15 引理 设 B 为仿紧致的，且令

$$0\longrightarrow\xi\xrightarrow{i}\eta\xrightarrow{\varphi}\zeta\longrightarrow 0$$

为丛同态的一个正合序列. 则存在一个等价 $f:\eta\to\xi\oplus\zeta$ 使得 fi 为自然的包含映射；而 φf^{-1} 为自然的投射.

证明 设 $\dim\xi=n$; $\dim\zeta=p$.

首先，我们在 η 上构造一个 Riemann 度量（即 $E(\eta)$ 上的一个连续的内积）. 令 U_α 为 B 的局部有限的覆盖，它使 $\eta|U_\alpha$ 是平凡的；令 g_α 为从 $\eta|U_\alpha$ 到 R^{n+p} 上的相应的投射，φ_α 为一单位分解，使 φ_α 的承载子包含于 U_α.

若 e、e' 都包含在 $E(\eta)$ 中且 $\pi(e)=\pi(e')$，定义

$$e\cdot e'=\sum_\alpha\varphi_\alpha(\pi(e))g_\alpha(e)\cdot g_\alpha(e'),$$

（其中右边的圆点为 R^{n+p} 中的通常内积.）这是一个有限和，它满足内积的公理.

我们用这个 Riemann 度量将 η 分解为 $iE(\xi)$ 与其正交补. 设 ξ' 为 ξ 在 η 中的像，且将 $E(\zeta')$ 定义为 $E(\eta)$ 中由正交于 $i(E(\xi))$ 的元素组成的子集. 为了证明 ζ' 有局部乘积构造，考虑同态

$$h:\eta\to\xi'$$

它将每一个向量变成它在ξ'中的正交投影. [验证h是连续的. 在任一坐标邻域U上我们能够选取ξ'的纤维的一个基$a_1, \cdots, a_n$. 则映射h将$v\in E(\eta)$变为

$$\sum t_j a_j \in E(\xi') \subset E(\eta),$$

其中$t_j=\sum B_{jk}(v\cdot a_k)$, 且$(B_{jk})$表示$(a_j\cdot a_k)$的逆矩阵.] 因为$h$是映上的, 它的核$\zeta'$也是一个向量空间丛.

从$i(\xi)=\xi'$等价于ξ. 还需证明ζ'等价于ζ以及η等价于$\xi'\oplus\eta'$. 前者由$\varphi|\zeta'$为同态而直接推出; 考虑到秩, 它也应当是1-1的且映上的. 后者的推出只要注意$E(\xi'\oplus\zeta')$定义为$E(\xi')\times E(\zeta')$的子集, 它由满足$\pi(e_1)=\pi(e_2)$的点(e_1, e_2)所组成. 考虑从$E(\xi'\oplus\zeta')$到$E(\eta)$中的映射f, 它将(e_1, e_2)变为它们在$E(\eta)$中的和(由于e_1和e_2在同一个纤维中, 所以这个和存在). 这显然是一个同态, 考虑到秩, 它应当是1-1的且映上的.

2.16 定义 设M_1、M_2都是可微流形. 并设f为一个浸入$M_1\to M_2$. 法丛ν_f定义如下:

令τ_1、τ_2分别为M_1、M_2的切丛, 根据2.11, 映射$df: E(\tau_1)\to E(\tau_2)$可以分解为从$E(\tau_1)$到$E(f^*\tau_2)$中的一个同态$h$接上一个丛映射$g$. 由于$f$是浸入; h是一个1-1的同态, 因此据2.12, $f^*\tau_2/\mathrm{Image}\,h$是$M_1$上的丛, 称为法丛$\nu_f$.

于是$0\to\tau_1\to f^*\tau_2\to\nu_f\to 0$是同态的一个正合序列, 故根据2.15, $f^*\tau_2$等价于$\tau_1\oplus\nu_f$. 实际上, 在$f^*\tau_2$上给定一个Riemann度量以后, ν_f等价于τ_1的像的正交补.

现在考虑$M_2=R^{n+p}$的情形, 其中$\dim M_1=n$. 由于τ_2是平凡丛, 所以$f^*\tau_2$也是平凡丛. [证明: 若$f: B\to B(\eta)$且η是平凡的, 则$f^*\eta$也是平凡的. 我们有

$$\begin{array}{c} B\times R^n \\ \big\downarrow{\scriptstyle \pi} \\ f: B_1 \to B \end{array}$$

$E(f^*\eta)$定义为$B_1\times(B\times R^n)$的子集，它由使得$f(b_1)=\pi(b,x)$的点(b_1, b, x)组成，即由所有点$(b_1, f(b_1), x)$组成．若将$(b_1, f(b_1), x)$映为(b_1, x)，便得到$f^*\eta$与丛$B_1\times R^n\to B_1$的一个等价.]

于是$\tau_1\oplus\nu_f$等价于一个平凡丛．接着，我们研究下述问题：对于给定ξ，存在一个η使$\xi\oplus\eta$是平凡的吗？根据1.28，当ξ是一个n-流形的切丛时，总会是这样的，并且实际上η可以选为同样是n维的．更为一般的回答见2.19.

2.17 定义 设$f: M_1\to M_2$; 令$\dim M_1=n, \dim M_2=p$. 若f在M_1的每一点处的秩都为p，则f称为正则的．若f是正则的，由2.11给出的同态$h: \tau_1\to f^*\tau_2$是在上的映射．根据2.12，h的核是一个丛α_f．称为沿着纤维的丛.

注意，$f^{-1}(y)$为M_1的一个$n-p$维子流形（根据1.12或1.34）．从$f^{-1}(y)$到M_1中的包含映射i_y诱导出一个从$f^{-1}(y)$的切丛到τ_1中的包含映射di_y．h的核恰由在某个di_y的像中的向量所组成，即切于子流形$f^{-1}(y)$的向量便是被h变为0的那些向量.

由于有正合序列$0\longrightarrow\alpha_f\longrightarrow\tau_1\xrightarrow{g}f^*\tau_2\longrightarrow 0$，所以根据2.15，$\tau_1$等价于$\alpha_f\oplus f^*\tau_2$.

2.18 定义 一个丛ξ称为有限型的，如果B是正规的并且可以用有限个邻域$U_1, \cdots, U_k$覆盖，而这些邻域满足条件：对于每一个i，$\xi|U_i$是平凡的.

2.19 引理 若B是紧致的，或者是有限维仿紧致的，则

ξ是有限型的.

证明 前一论述是显然的;我们考虑后者:根据定义,如果B的每一个开覆盖都有一个开的加细满足条件:(*)B中没有点包含于这个加细的多于$n+1$个元素中,那么B的维数不大于n. 在这种意义下,一个n-流形的维数为n. 这是拓扑学中一个定理.

用一些开集U覆盖B, 这些U满足条件:引U是平凡的;设$\{V_\alpha\}$为这一覆盖的满足条件(*)的一个开的加细. 根据1.22, 我们可以假定$\{V_\alpha\}$也是局部有限的. 令φ_α为一单位分解,对于每一个α, φ_α的承载子包含于V_α(参见2.14).

任取$\{\varphi_\alpha\}$的指标集中$i+1$个互不相同的元素组成一个无序的元素组,所有这种元素组的集合记作A_i. 给定

$$a=\{\alpha_0, \cdots, \alpha_i\}\in A_i,$$

令W_{ia}为所有满足如下条件的x的集合:对于所有

$$\alpha\neq\alpha_0, \cdots, \alpha_i, \quad \varphi_\alpha(x)<\min[\varphi_{\alpha_0}(x), \cdots, \varphi_{\alpha_i}(x)].$$

每一集合W_{ia}是开的,并且若$a\neq b$, 则W_{ia}与W_{ib}无交. W_{ia}包含在$\varphi_{\alpha_0}, \cdots, \varphi_{\alpha_i}$的承载子的交中,因此在某集合$V_\alpha$中. 对于固定的$i$, 设$X_i$等于所有集合$W_{ia}$的并, $\xi|X_i$是平凡的(因为$\xi|W_{ia}$是平凡的,并且这些W_{ia}无交).

最后,集合$X_0, \cdots, X_n$覆盖B. 给定B中x, x最多包含在$n+1$个集合V_α中,故最多$n+1$个函数φ_α在x上取正值. 由于某个φ_α在x上取正值,故x包含于集合W_{ia}之一中$(0\leqslant i\leqslant n)$.

[这一证明的直观想法如下:考虑一个n维单纯复合形,其中φ_α是相对于顶点α而言的x的重心坐标. 诸集合W_{0a}是各个顶点的无交邻域;诸集合W_{1a}是各个开的1-单形的无交邻域,等等.]

2.20 定理 若ξ是有限型的，则存在一个丛η，使得$\xi\oplus\eta$是平凡的.

证明 我们通过指出ξ可以嵌入一个平凡丛$B\times R^m$的方法来进行证明. 如果证明了这一点，则根据2.12，存在正合序列$0\longrightarrow\xi\xrightarrow{i}B\times R^m\longrightarrow B\times R^m/i(\xi)\longrightarrow 0$，于是定理便从2.15推出(仿紧致性不是必需的，因为平凡丛显然有一个Riemann度量).

用有限个邻域$U_1, \cdots, U_k$覆盖B，对于每一个i，$\xi|U_i$是平凡的. 设$\varphi_1, \cdots, \varphi_k$为单位分解，对于每一个$i$，$\varphi_i$的承载子包含于$U_i$(2.14). 设$f_i$表示从$E(\xi|U_i)$到$U_i\times R^n$上的等价，$f_i^1, \cdots, f_i^n$表示等价$f_i$到$R^n$中的投射的坐标函数.

定义$h: E(\xi)\to B\times R^{nk}$如下:

$$h(e)=(\pi(e),\ \varphi_i(\pi(e))\cdot f_i^j(e))$$

$$(i=1,\ \cdots,\ k;\ j=1,\ \cdots,\ n)$$

(没有求和). 这是确定的，因为$\varphi_i(\pi(e))=0$，除非

$$e\in E(\xi|U_i).$$

这显然是一个同态，因为每一个f_i^j在$E(\xi|U_i)$上是线性的. 为了证明它是1-1的，设$e\neq 0$. 则对于某个i，$\varphi_i(\pi(e))>0$. 因为f_i是一个等价，对于某个j，$f_i^j(e)\neq 0$. 因此

$$h(e)\neq(\pi(e),\ 0),$$

恰如所期望的.

2.21 定义 设ξ为一丛，如果存在平凡丛0^p、0^n，使得$\xi\oplus 0^p\simeq\eta\oplus 0^n$，则称丛$\xi$是$s$-等价于$\eta$的.

这里$0^p=B\times R^p$. s-等价的对称性和反身性是明显的. 传递性的证明如下：设$\xi\oplus 0^p\simeq\eta\oplus 0^q$且$\eta\oplus 0^r\simeq\zeta\oplus 0^s$. 则有$\xi\oplus 0^p\oplus 0^r\simeq\zeta\oplus 0^s\oplus 0^q$.

注意 s–等价不同于等价．例如对于 R^3 中的 2 维球面 S^2，$\tau^2\oplus\nu^1=0^3$．易见法丛 ν^1 是平凡的，但 τ^2 非平凡（它不允许有一个非零的交截）．这是拓扑学中的一个经典定理．因此 τ^2 是 s–平凡的，但不是平凡的．

2.22 定理 B 上的有限型的向量空间丛的 s–等价类的集合在 $\oplus$ 下形成一个 Abel 群．

证明 为了避免逻辑的困难，我们对于所有的 m，考虑 $B\times R^m$ 的子丛．这是足够的，因为根据 2.20，任意有限型的丛 ξ 可以嵌入于某个 $B\times R^m$ 中．

平凡丛 0^p 的类是恒等元．逆元的存在性为 2.20 的本义．

2.23 推论 给定微分流形 M 在欧氏空间中的两个浸入，它们的法丛是 s–等价的．

2.24 定义 如果 M^n 能浸入于某个 R^{n+p}，使其法丛为平凡的，则称 M^n 是 π–流形．

这等价于要求 τ^n 是 s–平凡的．设 τ^n 为 s–平凡的．若取 M 在 R^{n+p} 中的某一个浸入，则根据 2.16，$\tau^n\oplus\nu^p$ 是平凡的，故 ν^p 是 s–平凡的，即对于某个 q，$\nu^p\oplus 0^q=0^{p+q}$．考虑复合浸入 $M\to R^{n+p}\subset R^{n+p+q}$．$M$ 在 R^{n+p+q} 中的法丛恰为 $\nu^p\oplus 0^p$，它是平凡的；反之，若对于某一浸入，ν^p 是平凡的，则由于 $\tau^n\oplus\nu^p$ 是平凡的，故 τ^n 是 s–平凡的．

2.25 定义 设 G_{pn} 表示 R^{n+p} 的所有 n 维向量子空间的集合（即所有通过原点的 n 维超平面）．它称为 $n+p$ 维空间中 n 维平面组成的 Grassman 流形．

G_{pn} 的拓扑按如下方式确定：考虑 $M(n,\ n+p;\ n)$．如果其中某两个矩阵的行向量所生成的超平面相同，我们就等置这两个矩阵，于是得到一个迭合空间，G_{pn} 与这个迭合空间

是 1-1 对应着的，因此可将迭合空间的拓扑加到 G_{pn} 上．设

$$\rho: M(n,\ n+p;\ n)\to G_{pn}$$

为投射．

$\rho(A)=\rho(B)$ 当且仅当有某个非蜕化的 $n\times n$ 矩阵 C，使 $A=CB$．超平面 $\rho(A)$ 由所有点 $(x^1,\ \cdots,\ x^{n+p})\in R^{n+p}$ 组成，对于某些常数 c^i，$(x^1,\ \cdots,\ x^{n+p})=(c^1,\ \cdots,\ c^n)\cdot A$．若 $\rho(A)=\rho(B)$，则对于某些常数 c_i^j，

$$(1,\ 0,\ \cdots,\ 0)\cdot A=(c_1^1,\ \cdots,\ c_1^n)\cdot B,$$
$$(0,\ 1,\ \cdots,\ 0)\cdot A=(c_2^1,\ \cdots,\ c_2^n)\cdot B,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

则 $IA=CB$，因为 A 的秩为 n，故 C 的秩也为 n．反过来的情形也是显然的．

(a) G_{pn} 就局部而言是欧氏空间．令 $A\in M(n,\ n+p;\ n)$，将矩阵 A 的列重新排列之后，可设 $A=(P,\ Q)$，其中 P 为非蜕化的 $n\times n$ 矩阵．令 U 为所有这种 A 的集合，它是 $M(n,\ n+p;\ n)$ 中的开集，因为它是非零实数的集合在连续映射 $(P,\ Q)\to\det P$ 下的原像．若 $\rho(P,\ Q)=\rho(R,\ S)$，其中 P 是非蜕化的，则 $(P,\ Q)=(CR,\ CS)$，C 是某个非蜕化的矩阵．因此 R 一定是非蜕化的，这推出 $\rho^{-1}(\rho(U))=U$，故 $\rho(U)$ 在 G_{pn} 中是开的（根据迭合拓扑的定义）．

现在证明 $\rho(U)$ 同胚于 R^{pn}．定义 $\varphi: U\to R^{pn}$ 为

$$\varphi(P,\ Q)=P^{-1}Q.$$

若
$$\rho(P,\ Q)=\rho(R,\ S),$$
则
$$(P,\ Q)=(CR,\ CS),$$
故
$$P^{-1}Q=(CR)^{-1}(CS)=R^{-1}S.$$

因此 φ 诱导出一个连续映射 $\varphi_0: \rho(U)\to R^{pn}$．定义 $\psi: R^{pn}\to\rho(U)$ 为 $\psi(Q)=\rho(I,\ Q)$，其中 Q 为 $n\times p$ 矩阵．直接验证 ψ 与 φ_0

互逆

$$\begin{tikzcd}
M(n, n+p; n) \arrow[d] & \supset & U \arrow[d, "\rho"] \arrow[dr, "\varphi"] & \\
G_{pn} & \supset & \rho(U) \arrow[r, shift left, "\varphi_0"] & R^{pn} \arrow[l, shift left, "\psi"]
\end{tikzcd}$$

(b) 为了证明 G_{pn} 是 Hausdorff 的，我们证明 ψ 将每一个紧致集合映为一个闭集(显然，这足够了)．设 K 为 R^{pn} 的一个紧致子集，我们证明 $\varphi^{-1}(K)$ 在 $M(n, n+p; n)$ 中是闭集．$\varphi^{-1}(K)$ 由所有矩阵 (P, Q) 组成，其中 P 是非蜕化的，而 $P^{-1}Q\in K$．设 $(P, Q)\in M(n, n+p; n)$ 为 $\varphi^{-1}(K)$ 的元素的序列 (P_i, Q_i) 的极限．因为 K 是紧致的，序列 $\varphi(P_i, Q_i)=P_i^{-1}Q_i$ 的某一子序列收敛于 K 的一个点 R．序列 Q_i 的相应的子序列收敛于 PR，故 $(P, Q)=P(I, R)$．因为 (P, Q) 秩为 n，这就推出 P 是非蜕化的，故 $(P, Q)\in\varphi^{-1}(K)$，正如所期望的．

因此 G_{pn} 为一 pn 维流形．

(c) G_{pn} 是一个可微流形，ρ 是一个可微映射．设 f 是 G_{pn} 中的开集 V 上的一个函数，如果 $f\rho$ 是可微的，则 f 属于可微构造 $\mathscr{D}$．为了证明 $\mathscr{D}$ 满足可微构造的条件，我们证明 (a) 中定义的 $(\rho(U), \varphi_0)$ 是一个坐标系．设 f 定义在 $V\subset\rho(U)$ 上．给定 $Q\in R^{pn}$，$f\varphi_0^{-1}(Q)=f\rho(I, Q)$．所以，如果 $f\rho$ 是可微的，则 $f\varphi_0^{-1}$ 是可微的．反之，给定 $(P, Q)\in V$，$f\rho(P, Q)=f\varphi_0^{-1}\varphi_0\rho(P, Q)=f\varphi_0^{-1}(P^{-1}Q)$．所以，如果 $f\varphi_0^{-1}$ 是可微的，则 $f\rho$ 是可微的．

(d) G_{pn} 是紧致的．设 L 为 $M(n, n+p; n)$ 的子集，由各行互相正交的矩阵所组成．L 是 $R^{n(n+p)}$ 的有界闭子集．因为 $\rho(L)=G_{pn}$ (Gram-Schmidt 正交化过程证实这一点)，所以

G_{pn} 是紧致的.

(e) G_{pn} 微分同胚于 G_{np}. 用几何的话说，同胚 h 定义为将每一超平面变为它的正交补. 显然 h 是1-1的，为了证明 h 是可微的，我们应用定义在(a)中的坐标系$(\rho(U), \varphi_0)$. 令 $g: U\to M(p, n+p; p)$，它将(P, Q)变为$(-(P^{-1}Q)^\tau, I_p)$(τ 表示转置)，它是可微的. (P, Q)的行空间与$(I_n, P^{-1}Q)$的行空间相同，而(P, Q)的行向量都正交于$(-(P^{-1}Q)^\tau, I_p)$的行向量(将其中的一个乘上另一个的转置即可知道). 因此 g 诱导出 $h|\rho(U)$，故后者是可微的.

2.26 定义 设 $E(\gamma_p^n)$ 为 $G_{pn}\times R^{n+p}$ 的子集，由偶(H, x)所组成，其中 x 为超平面 H 中的向量. $E(\gamma_p^n)$称为**万有丛**(理由后文有说明). 投射 π 将(H, x)映到 H，纤维则是 R^{n+p} 的 n 维子空间.

γ_p^n 为 G_{pn} 上的一个 n 维向量空间丛. 我们必需证明局部乘积构造的存在性. 设$(\rho(U), \varphi_0)$为 G_{pn} 的一个坐标邻域(如2.25(a)中所述). 定义 $h: \rho(U)\times R^n\to\pi^{-1}\rho(U)$ 将$(H, (x^1, \cdots, x^n))$变为$(x^1, \cdots, x^n)\cdot(I_n, Q)$，其中 $Q=\varphi_0(H)$. 这是超平面 H 中的一个向量，显然 h 在每一纤维上都是同构. h 的逆是连续的，因为它将 $G_{pn}\times R^{n+p}$ 中的$(H, (y^1, \cdots, y^{n+p})$变为 $\rho(U)\times R^n$)中的$(H, (y^1, \cdots, y^n))$.

2.27 定义 设 ξ 为一向量空间丛，如果 $E(\xi)$和 $B(\xi)$都是可微流形，并且局部乘积构造中的同胚

$$U\times R^n\to\pi^{-1}(U)$$

能够选为微分同胚，则 ξ 为一**可微向量空间丛**.

由此推出 $\pi: E\to B$ 是可微的，并且具有最大的秩. 注意 B 能够可微地嵌入到 E 中，只要将 b 映到 F_b 的0向量. 这一嵌入的法丛恰好是 ξ.

可微丛的例子包括流形的切丛、流形的法丛(相对于这个流形到另一流形的某一浸入而言)和上述万有丛 γ_p^n. 在后一情形, $E(\gamma_p^n)$ 可微地嵌入在 $G_{pn}\times R^{n+p}$ 中.

2.28 定理 设 ξ^n 为一个 n 维向量空间丛. 下列条件是等价的:

(a) ξ 是有限型的;

(b) 存在一个丛 η^p 使得 $\xi^n\oplus\eta^p$ 是平凡的;

(c) 对于某一个 p, 存在一个丛映射 $\xi^n\to\gamma_p^n$. (这就是 γ_p^n 称为"万有丛"的原因.)

证明 我们已经证明了(a)蕴含(b)(2.20),在那里构造的丛 γ^p 是 $n(k-1)$ 维的,其中 k 是 $B(\xi)=B$ 的覆盖 $U_1, \cdots, U_k$ 的元素个数, 这里的每一个 U_i 都满足条件: $\xi|U_i$ 是平凡的.

(b)蕴含(c): 条件(b)意味着 ξ^n 可以嵌入于平凡丛 $B(\xi)\times R^{n+p}$ 中, 设 f 为这一嵌入. 我们希望确定下列图表中的 g 和 g_B:

$$\begin{array}{ccc} E(\xi) & \xrightarrow{g} & E(\gamma_p^n) \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow \\ B(\xi) & \xrightarrow[g_B]{} & G_{pn} \end{array}$$

因为 f 是一个1-1的同态, $f(F_b)$ 为 b 与 R^{n+p} 中的 n 维超平面 H^n 的笛卡儿积; 令 $g_B(b)$ 等于这一超平面 H^n. 若 $e\in F_b$,则 $f(e)=(b, x)$, 其中 x 是超平面 H^n 中的一个向量; 令 $g(e)$ 等于 $G_{pn}\times R^{n+p}$ 中的 (H^n, x). 则 $g(e)$ 实际上是在 $G_{pn}\times R^{n+p}$ 的一个子集中,这个子集构成 $E(\gamma_p^n)$. 考虑 g 的秩, 易见 g 在每一个纤维上自动为同构.

余下证明 g 是连续的. 局部看起来, g 为从 $U\times R^n$ 到 $G_{pn}\times R^{n+p}$ 的映射.我们将它分解为一个连续映射 h: $U\times R^n\to$

$M(n, n+p; n)\times R^{n+p}$ 接上一个到 $G_{pn}\times R^{n+p}$ 中的投射 $\rho\times 1$. 局部看起来, f 为从 $U\times R^n$ 到 $B\times R^{n+p}$ 的映射. 令 $e_1, \cdots, e_n$ 为 R^n 的一个基, 定义 $h(b, x)$ 为 $(A, p_2f(b, x))$. 此处 p_2 为 $B\times R^{n+p}$ 到它的第二个因子的投射, 而 A 为以 $p_2f(b, e_1), \cdots, p_2f(b, e_n)$ 为其各行的矩阵. 于是 h 是连续的, 且 $(\rho\times 1)h$ 等于 g.

(注意: 逆命题(c)蕴含(b)也能用同样的推导证明.)

(c)蕴含(a): 根据紧致性, G_{pn} 可用有限个邻域 U_i 覆盖, 这些 U_i 满足条件: $\gamma_p^n|U_i$ 是平凡的. (事实上 $(n+p)!/n!p!$ 个邻域便足够了). 若 $f: \xi^n\to\gamma_p^n$ 为丛映射, 则集合 $f_B^{-1}(U_i)=V_i$ 覆盖 B, 并且 $\xi|V_i$ 等价于由 $f_B: V_i\to G_{pn}$ 诱导出来的丛(2.8的唯一性部分). 于是 $\xi|V_i$ 是平凡的(因为它由平凡丛中诱导出来).

§3 Thom 协边理论

3.1 定义 一个有边 n-流形 Q 是一个局部同胚于 H^n (R^n 中满足条件 $x^1\geqslant 0$ 的点 x 组成的子集)的*)具有可数基的 Hausdorff 空间. 边 ∂Q 是 Q 的子集,由在上述局部同胚下对应于 R^{n-1} 中的点组成(R^{n-1} 是 R^n 的子集,由满足 $x^1=0$ 的点 x 组成). ∂Q 是完全确定的,因为 R^n 中的一个开集在它到 R^n 中的一同胚下的像必定是开的(Brouwer 区域不变性定理). 显然 ∂Q 为一个 $(n-1)$-流形.

Q 上的一个可微构造 $\mathscr{D}$ 是满足下述条件的定义在 Q 的开子集上的一族实值函数.

1) Q 的每一点有一个开邻域 U 和一个从 U 到 H^n 的开子集上的微分同胚 h, 使得 f 属于 $\mathscr{D}$ 当且仅当 fh^{-1} 是可微的. (f 定义在 U 的开子集上; fh^{-1} 可微意即它可以扩充为 $h(U)$ 在 R^n 中的一个邻域上的可微函数.)

2) 若 U_i 是一些包含于 f 的定义域中的开集, 且 $U=\bigcup U_i$, 则 $f|U\in\mathscr{D}$ 当且仅当对于每一个 i, $f|U_i\in\mathscr{D}$.

如前, (U, h)称为 Q 上的坐标系. 此外, 我们也能够用坐标系来另行定义可微构造.

在下面 3.2 中,我们将要对 $\mathscr{D}$ 增加一个额外的要求.

---

*) 此处原文有遗漏,应为"局部同胚于 H^n 中的某一开子集的".——译注

3.2 定义 设 M_1、M_2 为紧致的可微 n–流形. 这两个流形称为属于同一协边类(记作 $M_1 \sim M_2$), 如果有一个紧致的可微的有边 $(n+1)$-流形, 使得 ∂Q 与 M_1 与 M_2 的无交并(记作 M_1+M_2)微分同胚.

协边关系的对称性和反身性是明显的. 为证明传递性, 我们对 $\mathscr{D}$ 增加一个额外的要求, 这就是: ∂Q 在 Q 中有一个邻域 U 微分同胚于 $\partial Q\times[0, 1)$, 并且这个微分同胚在 $\partial Q\times 0$ 上是恒等. 这本来是多余的, 但我们为避免证明而加以假定. 传递性证述如下:

设 M_1+M_2 微分同胚于 ∂Q_1, M_2+M_3 微分同胚于 ∂Q_2; 令 h_1、h_2 分别为这两个微分同胚. 在 $Q_1\cup Q_2$ 中将 $h_1(M_2)$ 的每一点与这点在 $h_2h_1^{-1}$ 下的像等同, 于是得到一个新空间 Q_3. 从而有一个从 $M_2\times(-1, 1)$ 到这个空间中的同胚, 这个同胚限制于 $M_2\times 0$ 时等于 h_1, 并且对于 $i=1, 2$, 它是从 $M_2\times[0, (-1)^i)$ 到 Q_i 中的微分同胚. (这从关于"积邻域" $\partial Q\times[0, 1)$的假定推出.) 若将此取为 Q_3 上的一个坐标系, 则 Q_3 成为可微的有边流形, 并且 M_1+M_3 与 ∂Q_3 微分同胚, Q_1 及 Q_2 都与 Q_3 的子集微分同胚.

3.3 定义 像通常一样, 在考虑这些协边类时会碰到某些逻辑上的困难. 避免这些困难的一个办法是只考虑嵌入于某欧氏空间 R^p 中的有边流形: 若 Q_1 是一个可微的有边流形, 且 $Q_2=\partial Q_1\times[0, 1)$, 则按前一节中的办法构造的空间 Q_3 是一个可微流形, 所以它可以嵌入到某一欧氏空间中. 因此 Q_1 也可以嵌入到某一欧氏空间中.

加上了上述限制以后, n–流形的协边类的集合在运算 + (无交并)之下形成一个 Abel 群 (记作 $\mathfrak{N}^n$). 若 $M_1\sim M_1'$ 且 $M_2\sim M_2'$, 这意味着 M_i+M_i' 与 ∂Q_i 微分同胚. 于是 $(M_1+$

$M_2)+(M_1'+M_2')$ 与 $\partial(Q_1\cup Q_2)$ 微分同胚，故 $M_1+M_2\sim M_1'+M_2'$，因而运算 $+$ 在协边类上是完全确定的。零元素是空流形或 n 维球（或 ∂Q，其中 Q 为任一紧致可微的有边 $(n+1)$-流形）。其余的公理显然是满足的。注意 $M+M$ 与 $\partial(M\times[0,1])$ 微分同胚，所以每一元素都是 2 阶的。

群 $\mathfrak{N}^n$ 称为（不能定向的）协边群。令 $\mathfrak{N}$ 表示直和 $\mathfrak{N}^0\oplus\mathfrak{N}^1\oplus\mathfrak{N}^2\oplus\cdots$。有一个从 $\mathfrak{N}^i$、$\mathfrak{N}^j$ 到 $\mathfrak{N}^{i+j}$ 中的双线性的对称配对，即由笛卡儿积运算诱导出来的从 $\mathfrak{N}^i\otimes\mathfrak{N}^j$ 到 $\mathfrak{N}^{i+j}$ 中的同态。

首先，据笛卡儿积的定义，$(M_1+M_2)\times M_3=(M_1\times M_3)+(M_2\times M_3)$。其次，若 $M_1\sim 0$，即 $M_1=\partial Q$，则 $M_1\times M_2$ 与 $\partial(Q\times M_2)$ 微分同胚，故 $M_1\times M_2\sim 0$。

因为 $M_1\times M_2\sim M_2\times M_1$，且因为 $M_1\times p\sim M_1$（其中 p 是一个点流形），这个配对将 $\mathfrak{N}$ 作成一个有单位的（分次）交换环。实际上，它是域 Z_2 上的一个分次交换代数。

3.4 注意 Thom 的一般结果如下：

定理 $\mathfrak{N}$ 为一 Z_2 上的多项式代数，并且在每个不等于 2^m-1 的正维数处，$\mathfrak{N}$ 有一个生成元。若 n 为偶数，n 维射影空间就是一个生成元。

这一定理意味着存在紧致流形 M^2，M^4，M^5，…，使得每一紧致流形都在这些流形的乘积的一个无交并的协边类中，并且这些生成元没有关系（除去乘积的交换性和结合性）。

Thom 的步骤是证明 $\mathfrak{N}^n$ 与某一空间 T_k 的第 $(n+k)$ 个同伦群同构，然后再计算这些同伦群。在这篇讲义中，我们将只考虑这两个问题中的第一个。

3.5 定义 设 h 为可微流形 M^n 在 R^{n+k} 中的一个嵌入，考虑这一嵌入的法丛。根据 R^{n+k} 的切丛的标准 Riemann 度

量，这个法丛等价于 M^n 的切丛在 R^{n+k} 的切丛中的像的正交补(2.16)．我们把这一正交补记为 ν^k．定义 e 作为从 $E(\nu^k)$ 到 R^{n+k} 中的典型映射，它将 M^n 中点 x 的法向量 v 映为它的终点(换言之，将 R^{n+k} 的切丛映到 R^{n+k} 中的典型映射是将点 x 处的向量 v 映为 R^{n+k} 的点 $x+v$ 的映射．这一映射是可微的，它在 $E(\nu^k)$ 上的限制便是映射 e)．

将 M^n 考虑作为 $E(\nu^k)$ 的零向量所成的子集．从而有

3.6 定理 M^n 在 $E(\nu^k)$ 中有一邻域微分同胚于 M^n 在 R^{n+k} 中一个邻域．

证明 注意 e 是可微的，并且它在 $M^n \subset E(\nu^k)$ 的点处的秩为 $n+k$(计算 e 相对于一局部坐标系的 Jacobi 矩阵即易验证)．因此 e 在 $E(\nu^k)$ 内 M^n 的某邻域中的秩为 $n+k$，故它在 M^n 的点处是一个局部同胚：它将每一个 $x \in M^n$ 的一个邻域同胚地映到 $f(x)$ 的一个邻域上．于是我们求助于拓扑学中的一个引理：

若 $f: X \to Y$ 为一局部同胚，且 f 在闭子集 A 上的限制 $f|A$ 是一个同胚，则 f 在 A 的某一邻域 V 上为一同胚(X, Y 是具有可数基的 Hausdorff 空间；X 是局部紧的)．这一引理证明如下：

(1) 当 A 紧致时，引理成立．因若不然，则有任意接近于 A 的点 x、y，使得 $f(x)=f(y)$．因为 A 有一个紧致邻域，我们可以选取序列 x_n、y_n 分别收敛于 x、$y \in A$，且满足 $x_n \neq y_n$ 及 $f(x_n)=f(y_n)$．因此 $f(x)=f(y)$．由于 f 在 A 上是一个同胚，所以 $x=y$，从而 f 在点 x 处不是局部同胚．

(2) 设 A_0 为 A 的紧致子集．则 A_0 有一个邻域 U_0，使得 $\overline{U}_0$ 是紧致的，并且 f 是 $\overline{U}_0 \cup A$ 上的同胚：这只要证明 f 在 $\overline{U}_0 \cup A$ 上是 1-1 的．因为 f 是局部同胚，根据(1)，可设

V_0 为 A_0 的邻域，$f|\overline{V}_0$ 是 1-1 的．若在 V_0 中没有 A_0 的邻域满足前述对于 U_0 的要求，则有 $X-A$ 的点的序列 x_n 收敛于 $x\in A_0$，且 $f(x_n)\in f(A)$．选取 $y_n\in A$ 使 $f(x_n)=f(y_n)$．由于 f 是连续的，$f(y_n)$ 收敛于 $f(x)$；由于 f 在 A 上是同胚，y_n 收敛于 x.但是 $x_n\neq y_n$，这与 f 在点 x 处是局部同胚相矛盾．

(3) 将 A 表为紧致子集递增序列 $A_1\subset A_2\subset\cdots$ 的并．设 V_1 为 A_1 的邻域，满足条件：$\overline{V}_1$ 是紧致的，且 f 在 $\overline{V}_1\cup A$ 上是一个同胚(据(2))．假定 V_i 为 A_i 的满足上述条件的邻域，考虑集合 $\overline{V}_i\cup A_{i+1}$．它是 $\overline{V}_i\cup A$ 的紧致子集，并且 f 是 $\overline{V}_i\cup A$ 上的同胚．因此据(2)，有一个 $\overline{V}_i\cup A_{i+1}$ 的邻域 V_{i+1}，使得 $\overline{V}_{i+1}$ 是紧致的，并且 f 是 $\overline{V}_{i+1}\cup A$ 上的同胚．用归纳法继续进行．f 在 $V=\bigcup V_{i+1}$ 是 1-1 的，所以 f 是 V 上的同胚(由于 f 是映上的局部同胚)．

3.7 推论 R^{n+k} 的任一可微子流形是一个可微的邻域收缩核．

投射 $E(\nu^k)\to M^n$ 诱导出(在 e 下)从 R^{n+k} 中 M^n 的一个邻域到 M^n 上的一个可微映射，这一映射在 M^n 上是恒同．

3.8 定义 设 ξ 为一向量空间丛，$B(\xi)$ 是紧致的；令 $T(\xi)$ 表示 $E(\xi)$ 的加一点的紧致化，$T(\xi)$ 称为 ξ 的 Thom 空间．设 ∞ 表示加上去的一点．

设 ξ 有一个 Riemann 度量．在 $E(\xi)$ 中将长度大于或等于 ε 的所有向量等同为一点，把得到的空间记为 $T_\varepsilon(\xi)$．设 $\alpha(x)$ 为一 C^∞ 函数：$\alpha'(x)\geqslant 0$；在 $x=0$ 的某一邻域中，$\alpha(x)=0$；当 $x\to 1$ 时 $\alpha(x)\to 1$．将向量 e 变为向量 $e\alpha(\|e\|/\varepsilon)$ 的映射把 $E(\xi)$ 映到 $T(\xi)$ 中，这个映射诱导出一个从 $T_\varepsilon(\xi)$ 到 $T(\xi)$ 上的同胚，并且它在集合 $E_\varepsilon(\xi)$ 上是微分同胚，其中 $E_\varepsilon(\xi)$ 是由长度小于 ε 的向量组成的集合．这里用到了 B 是紧致集

合这个事实.

3.9 定义 设紧致流形 M^n 嵌入于 R^{n+k} 中. 将 R^{n+k} 的 Riemann 度量限制在 ν^k 上; 据 3.6, 有 M^n 在 R^{n+k} 中的一个邻域微分同胚于 $E(\nu^k)$ 的子集 $E_{2\varepsilon}(\nu^k)$. 这样的一个邻域称为 M^n 的管状邻域.

根据 3.8, 我们知道 $T(\nu^k)$ 与在 R^{n+k} 中将 M 的管状 ε-邻域的外部捏合成一点所得到的空间同胚.

我们要用到与可微函数的逼近有关的三条引理:

3.10 引理 设 A 为可微流形 M 的闭子集; 令 $f: M\to R^m$ 在 A 上为可微映射, δ 为 M 上的正连续函数. 则存在 $g: M\to R^m$, 满足条件:

(1) g 是可微的;

(2) g 是 f 的一个 δ-逼近;

(3) $g|A=f|A$.

证明 只需对于 $m=1$ 的情形证明这一引理.

对于 $x\in A$, $f|A$ 可以扩充为 x 的一个邻域 N_x 中的可微函数 f_x. 设 N_x 选取得足够小, 使 $|f_x(y)-f(y)|<\delta(y)$ 对于所有的 $y\in N_x$ 成立.

对于 $x\in M-A$, 选取 x 的一个足够小的邻域 N_x, 使得对于所有的 $y\in N_x$, $|f(y)-f(x)|<\delta(y)$. 对于 $y\in N_x$, 定义 $f_x(y)\equiv f(x)$.

令 φ_α 为一可微的单位分解, 对于每一个 α, φ_α 的承载子包含于某一 N_x——设为 $N_{x(\alpha)}$ 中. 定义

$$g(y)=\sum\varphi_\alpha(y)f_{x(\alpha)}(y).$$

容易验证 g 满足引理的要求.

更一般地, 有:

3.11 引理 设 $f: M_1\to M_2$ 为可微流形之间的连续映

射，它在 M_1 的闭子集 A 上是可微的．设 $\varepsilon(x)>0$ 已给定，且在 M_2 上给定一个由某个嵌入 $M_2\subset R^p$ 确定的度量．则存在 $g: M_1\to M_2$，满足条件：

(1) g 是可微的；

(2) g 是 f 的 ε–逼近；

(3) $g|A=f|A$.

证明 R^p 中存在 M_2 的一个邻域 U，使 M_2 是 U 的可微的收缩核(3.7)．令 ρ 为从 U 到 M_2 上的可微的收缩映射．设 $\delta(x)$ 为 M_2 上的正函数，选得使 $f(x)$ 的半径为 $\delta(x)$ 的立方体形邻域包含于 U 中，并且在 ρ 下的像的半径小于 $\varepsilon(x)$．设 $f_1: M_1\to R^p$ 为一可微映射，它是 f 的一个 δ–逼近，并且 $f_1|A=f|A$(根据 3.10)．定义 $g(x)=\rho(f_1(x))$．

3.12 引理 设 $f: M_1\to M_2$ 为可微流形之间的连续映射，M_2 的度量是将它嵌入于某一欧氏空间而得到的．给定 $\varepsilon(x)$，则有一个 $\delta(x)$ 使得：若 $g: M_1\to M_2$ 为 f 的 δ–逼近，则 g 同伦于 f，并且 f 与 g 之间有一同伦 $F(x, t)$，满足条件：

(1) 对于使 $f(x)=g(x)$ 的任一 x，$F(x, t)=f(x)$，并且

(2) 对于任一 t，$F(x, t)$ 是 f 的 ε–逼近．

证明 设 U，ρ 和 $\delta(x)$ 选得同在 3.11 中一样． 令 $g: M^1\to M_2$ 为 f 的一个 δ–逼近．

则从 $g(x)$ 到 $f(x)$ 的线段在 U 中，所以

$$F(x, t)=\rho(tg(x)+(1-t)f(x))$$

是完全确定的．从而对于任一个 t，$F(x, t)$ 是 $f(x)$ 的 ε–逼近．

3.13 定义 设 ξ^k 为一可微向量空间丛，其中 $B(\xi)$ 是紧致的、m 维的；令 $E(\xi^k)$ 有一度量，是将它嵌入于某一个欧氏空间中作为闭子流形而得到的（$E(\xi^k)$ 是一个 $(m+k)$–流形）．

给定 $\pi_{n+k}(T(\xi^k),\ \infty)$ 的一个元素，设这个元素由映射

$$f:(\bar{C}_{n+k},\ \partial\bar{C}_{n+k})\to(T(\xi^k),\ \infty)$$

所代表，其中 $\bar{C}_{n+k}$ 为闭方体 $[0,\ 1]^{n+k}$，而 $\partial\bar{C}_{n+k}$ 为其边.

设 U 表示 C_{n+k} 的开子集 $f^{-1}(E(\xi^k))$. 令 $g: U\to E(\xi^k)$ 为 $f|U$ 的可微的 δ–逼近，其中 δ 选得满足 $\delta<1$，并且 g 同伦于 f，同伦 F 也是 f 的 1–逼近. (这一点保证着：若对于 $x\in\bar{C}_{n+k}-U$ 定义 $F(x,\ t)\equiv\infty$ 时，那么 F 将是连续的.)

现在再用一个可微映射 $h: U\to E(\xi)$ 逼近 g，h 在 $E(\xi)$ 的子流形 $B(\xi)$ 上是横截正则的. 我们将这个逼近 h 选得足够靠近 g，同伦于 g，并且对于每一个 t，同伦 H 都是 g 的 1–逼近. 当 $x\in\bar{C}_{n+k}-U$ 时，定义 $h(x)=\infty$. 这样便将 h 扩充到 $\bar{C}_{n+k}$ 上了. 从而 h 属于 f 的同伦类.

$h^{-1}(B(\xi))$ 是 U 的一个可微子流形 M^n，它在 $\bar{C}_{n+k}$ 中是闭的，因而是紧致的.

定义：设 $\lambda: \pi_{n+k}(T(\xi^k),\ \infty)\to\mathfrak{N}^n$ 将 h 的同伦类变为 M^n 的协边类.

3.14 定理 λ 是完全确定的同态.

证明 设 $H:(\bar{C}_{n+k}\times I,\ \partial\bar{C}_{n+k}\times I)\to(T(\xi^k),\ \infty)$ 为

$$h_0=H(x,\ 0)\quad 与\quad h_1=H(x,\ 1)$$

之间的一个同伦. 并设 h_0、h_1 满足条件：

(1) h_i 在 $h_i^{-1}(E(\xi))$ 上是可微的；

(2) h_i 在 $B(\xi)$ 上是横截正则的 $(i=1,\ 2)$.

我们希望证明 $h_0^{-1}(B)$ 与 $h_1^{-1}(B)$ 属于同一协边类.

可以假设：当 $t\leqslant\dfrac{1}{3}$ 时，$H(x,t)=H(x,0)$；当 $t\geqslant\dfrac{2}{3}$ 时，$H(x,\ t)=H(x,\ 1)$. 令 $U=H^{-1}(E(\xi))\cap[\bar{C}_{n+k}\times(0,\ 1)]$，则 U 为 R^{n+k+1} 的开子集. 设 $G: U\to E(\xi)$ 为 H 的可微的 1–

逼近，G 在闭子集 A 上等于 H，其中

$$A=U\cap[\bar{C}_{n+k}\times(0,\ 1/4]\cup[3/4,\ 1)]$$

(见 3.11, H 在 A 上是可微的).

现在，G 对于 $B(\xi)$ 而言，在 A 中诸点满足横截正则性条件(因为 h_0 和 h_1 在 B 上是横截正则的)，故根据 1.35：存在一个可微映射 $F: U\to E(\xi)$，在 A 上等于 G；在 $B(\xi)$ 上是横截正则的，并且是 G 的 1-逼近．由于 F 为 H 的一个 2-逼近，如果当 $(x, t)\in(\bar{C}_{n+k}\times(0,\ 1))-U$ 时，定义 $F(x, t)=\infty$; F 会是连续的，由于 F 在 A 上等于 H，如果当 $t=0$、1 时，定义 $F(x, t)=H(x, t)$，F 还会是连续的．因此 $F^{-1}(B)$ 作为一个有界闭集是 $\bar{C}_{n+k}$ 的紧致子集.

由于 $F|U$ 在 B 上是横截正则的，$(F|U)^{-1}(B)$ 是 $\bar{C}_{n+k}\times(0,\ 1)$ 的可微 $(n+1)$-子流形．它与 $\bar{C}_{n+k}\times t$ 的交，当 $t\leqslant 1/4$ 时，等于 $h_0^{-1}(B)\times t$; 当 $t\geqslant 3/4$ 时，等于 $h_1^{-1}(B)\times t$．因此 $F^{-1}(B)$ 为可微有边流形，其边是 $h_0^{-1}(B)+h_1^{-1}(B)$．于是 λ 完全确定.

显然，λ 为同态，因为在 $\mathfrak{N}^n$ 中的和是由作为代表的流形的无交并诱导出来的.

3.15 定理 若 ξ^k 为万有丛 γ_m^k，其中 $k\geqslant n+1$, $m\geqslant n$, 则 $\lambda: \pi_{n+k}(T(\gamma_m^k),\ \infty)\to\mathfrak{N}^n$ 是映上的.

证明 设 M^n 为一紧致 n-流形；$k\geqslant n+1$．并设 M^n 嵌入于 C_{n+k}(1.32)；令 ν^k 为这一嵌入的法丛．$E(\nu^k)$的 Riemann 度量是由 R_{n+k} 的切丛(ν^k 包含于其中)上的自然内积诱导出来的.

根据 3.6, 对于小的 ε，$E(\nu^k)$的子集 $E_{2\varepsilon}(\nu^k)$与 M^n 在 C_{n+k} 中的一个管状邻域微分同胚；令 U 为 $E_\varepsilon(\nu^k)$的像.

令 p_1 为从 $\bar{C}_{n+k}$ 到 $\bar{C}_{n+k}$ 中将 $\bar{C}_{n+k}-U$ 等同为一点而得

到的空间(记作 $\bar{C}_{n+k}/\bar{C}_{n+k}-U$)上的投射.

令 p_2 为从 U 到 $E_\varepsilon(\nu^k)$上的微分同胚，接上从 $E(\nu^k)$到 $T_\varepsilon(\nu^k)$中的映射，这个映射由等同 $T(\nu^k)$中所有长度$\geqslant\varepsilon$的向量而得到(3.8). 然后扩充 p_2, 将 $\bar{C}_{n+k}-U$ 映为 ∞.

令 p_3 为在 3.8 中构造的从 $T_\varepsilon(\nu^k)$到 $T(\nu^k)$ 上的同胚. 复合映射 $p_3p_2p_1$ 为从 U 到 $E(\nu^k)$上的微分同胚.

最后，令 p_4 为从 ν^k 到 γ_m^k 中的丛映射，它由 M^n 在 $R_{n+k}\subset R_{m+k}$ 中的嵌入诱导而得. 因为两者的纤维都是 k 维，这一映射对于 G_{km} 而言，在 M^n 的每一点处满足横截正则性条件. 将 p_4 按显然的方式扩充为从 $T(\nu^k)$到 $T(\gamma_m^k)$中的映射.

令 $g=p_4p_3p_2p_1$, 则 g: $\partial\bar{C}\to\infty$. 令 $\mu(M^n)$ 表示 g 在 $\pi_{n+k}(T(\gamma_m^k), \infty)$中的同伦类. g 在 G_{km} 上是横截正则的，且 $M^n=g^{-1}(G_{km})$. 根据定义: M^n 的协边类是 $\mu(M^n)$ 在 λ 下的像，故 $\lambda\mu(M^n)=[M^n]$.

3.16 定理 若 ξ^k 为万有丛 γ_m^k, 其中 $k\geqslant n+2$, $m>n$, 则 λ 是一对一的.

证明 给定 $\pi_{n+k}(T(\gamma_m^k), \infty)$的一个元素，我们可以假设它由一个在 $f^{-1}(E)$上是可微的、且在 G_{mk} 上是横截正则的映射

$$f: (\bar{C}_{n+k}, \partial\bar{C}_{n+k})\to(T(\gamma_m^k), \infty)$$

所代表(根据 3.13). 令 $M^n=f^{-1}(G_{mk})$, 我们希望证明若 M^n 是一个有边$(n+1)$-流形 Q 的边，则 f 同伦于常值映射.

M^n 为 C_{n+k} 的子流形; 令其法丛为 ν^k. 设 ε 选得使 $E_{2\varepsilon}(\nu^k)$ 与 M^n 的 2ε-邻域微分同胚; 令 U_ε 为 $E_\varepsilon(\nu^k)$中诸向量的像. 在 γ_m^k 上加一 Riemann 度量; 设 δ 选得使对于 $x\in E(\nu^k)$, $\|x\|\geqslant\varepsilon$ 蕴含 $\|f(x)\|\geqslant\delta$.

第 1 步. f 同伦于一个映射 f_1, 满足条件:

(1) f_1 在 $f_1^{-1}(E)$ 上是可微的，在 G_{mk} 上是横截正则的；

(2) 在 $M^n=f_1^{-1}(G_{mk})$ 上 $f=f_1$；

(3) f_1 将 U_ε 之外的点变为 ∞.

用等式 $F(e, t)=e\alpha(t\|e\|/\delta)$ 定义 $F: E(\gamma_m^k)\times I\to T(\gamma_m^k)$，其中 α 是在 3.8 中定义的函数. 令 $f_1(x)=F(f(x), 1)$.

第 2 步. 根据 $U_{2\varepsilon}$ 与 $E_{2\varepsilon}$ 微分同胚，f_1 诱导出一个从 $\overline{E}_\varepsilon(\nu^k)$ 到 $T(\gamma_m^k)$ 中的映射 $\overline{f}_1$，它将 $\partial(E_\varepsilon)$ 变为 ∞. 保持 $\partial(E_\varepsilon)$ 变为 ∞ 的 $\overline{f}_1$ 的任一同伦诱导出 f_1 的一个同伦.

于是 $\overline{f}_1$ 同伦于满足下列条件的一个映射 $\overline{f}_2$.

(1) $\overline{f}_2$ 在 $\overline{f}_2^{-1}(E)$ 上是可微的，在 G_{mk} 上是横截正则的；

(2) 在 $M^n=\overline{f}_2^{-1}(G_{mk})$ 上 $\overline{f}_2=\overline{f}_1$；

(3) 在 M^n 的某一邻域中，$\overline{f}_2$ 局部地是一丛映射.

同伦保持将 $\partial(E_\varepsilon)$ 变为 ∞.

考虑用等式 $G(e, t)=\overline{f}_1(te)/f$ 定义的映射 $G: \overline{E}_\varepsilon(\nu^k)\times I\to T(\gamma_m^k)$. 当 $t\to 0$ 时，$G(e, t)$ 有一极限，若 $e\neq 0$，此极限非零(因为 $\overline{f}_1$ 是可微的且横截正则的). 易见，它是一个丛映射. 但这还不能满足我们的愿望，因为它不能把 $\partial(E_\varepsilon)\times I$ 变为 ∞. 选取 $\delta>0$，使得当 $x\in E(\nu^k)$，$t\in I$ 时，$\|x\|\geqslant\varepsilon$ 蕴含 $\|G(x, t)\|\geqslant\delta$，且定义 $H(e, t)=[G(e, t)]\alpha(\|G(e, t)\|/\delta)$. 若设 $\overline{f}_2=H(e, 0)$，则当 $\|e\|$ 很小时，$\overline{f}_2$ 为一丛映射(因为当 x 很小时，$\alpha(x)\equiv 1$). 映射 $H(e, 1)=\overline{f}_1(e)\alpha(\|\overline{f}_1(e)\|/\delta)$ 不等于 $\overline{f}_1$，但它同伦于 $\overline{f}_1$，且这一同伦保持将 $\partial(E_\varepsilon)$ 变为 ∞. 这一同伦是由等式 $K(e, t)=\overline{f}_1(e)\alpha(t\|\overline{f}_1(e)\|/\delta)$ 来定义的，如在第 1 步中所作的那样.

第 3 步. 设 Q 为有边 $(n+1)$-流形，使得 $M^n=\partial Q$. 令 h 为从 $M^n\times[0, 1]$ 到 Q 中的一个微分同胚，它将 $M^n\times 0$ 变到 ∂Q 上. 定义 $h_1: Q\to C_{n+k}\times I$ 如下：

若 $x=h(y, t)$，其中 $y\in M^n$ 且 $0\leqslant t\leqslant 1/2$，令

$$h_1(x)=(y, t).$$

若 x 不属于 h 的像，令 $h_1(x)=p$，其中 p 是 $C_{n+k}\times I$ 中某一固定的内点.

若 $x=h(y, t)$，其中 $y\in M^n$ 且 $1/2\leqslant t\leqslant 1$，令

$$h_1(x)=(1-\beta(t))h_1(y, 1/2)+\beta(t)p,$$

其中 $\beta(t)$ 为一 C^∞ 函数，$\beta'(t)\geqslant 0$；在 $t=1/2$ 的一个邻域中，$\beta(t)\equiv 0$；在 $t=1$ 的一个邻域中 $\beta(t)\equiv 1$. h_1 为从 $\operatorname{Int}Q$ 到 $\operatorname{Int}(C_{n+k}\times I)$ 中的一个可微映射；且 h_1 在 ∂Q 的一个邻域中是 1-1 的浸入. 因为 $\dim(C_{n+k}\times I)>2(n+1)$，$h_1$ 可以用在 ∂Q 的一个邻域中等于 h_1 的 1-1 的浸入 h_2 逼近(根据 1.29). 它可以扩充为从 Q 到 $C_{n+k}\times I$ 中的嵌入(因为 Q 是紧致的，一个 1-1 的浸入自动地是一个嵌入). 在此把 Q 认作 $C_{n+k}\times I$ 的子集.

第 4 步. 有一个从 $\bar{C}_{n+k}\times 0$ 到 $T(\gamma_m^k)$ 中的映射 f_2，当限制于 $M^n\times 0$ 在 $C_{n+k}\times 0$ 中的一个小的管状邻域时，它是一个丛映射. 当 b 很小时，我们用显然的方式将它扩充于 $\bar{C}_{n+k}\times[0, b)$. 设存在从 Q 在 $C_{n+k}\times I$ 中的 ε'-邻域 N 到 $T(\gamma_m^k)$ 中的一个映射 g，它在 ∂Q 在 $C_{n+k}\times I$ 中的某个邻域中等于 f_2，且将 $N-Q$ 的每一点映为 $E(\gamma_m^k)$ 的非零向量. 从而本定理证出：设 δ 选得满足条件：若 x 到 Q 的距离 $\geqslant\varepsilon/2$，则 $\|g(x)\|\geqslant\delta$. 定义 $g_1: C_{n+k}\times I\to T(\gamma_m^k)$ 使当 $(x, s)\in N$ 时，$g_1(x, s)=g(x, s)\alpha(\|g(x, s)\|/\delta)$；在其它情形，$g_1(x, s)=\infty$. 将 g_1 在 $C_{n+k}\times 0$ 上的限制不等于 f_2，但根据在第 2 步最后用过的同样的技巧，它同伦于 f_2. g_1 便是本定理所求的同伦.

为了证明扩充 g 的存在，我们参照 Steenrod 的书《纤维丛》(Fibre Bundles, Princeton Press, 1951)，按此书的 § 19.4

和 19.7，与 γ_m^k 相关联的主丛为 m–万有丛. 此即：给定一个维数 $\leqslant m$ 的复形上的向量空间丛 ξ^k，任一从丛 ξ^k 在一子复形上的限制到 γ_m^k 的丛映射能够扩充到 ξ^k 上. 我们假定已知 Q 能被三角剖分，Q 的维数 $n+1$ 是 $\leqslant m$ 的. 因此从 Q 的法丛 ν^k 在 ∂Q 的多面体邻域上的限制到 γ_m^k 中的任一丛映射能够扩充到 ν^k 上.

对映射 f_2 应用这一结论便完成了 3.16 的证明.

设 T_k 表示 Thom 空间 $T(\gamma_m^k)\subset T(\gamma_{m+1}^k)\subset\cdots$ 的并，按弱拓扑：定理 3.15 和 3.16 蕴含下列定理：

3.17 定理 当 $k\geqslant n+2$ 时，协边群 $\mathfrak{N}^n$ 典型地同构于稳定同伦群 $\pi_{n+k}(T_k)$.

参 考 文 献

H. Whitney, Differentiable Manifolds, *Ann. of Math.* Vol. 37 (1936), pp. 645~680.

H. Whitney, The self-intersections of a smooth n-manifold in $2n$-space, *Ann. of Math.* Vol. 45 (1944), pp. 220~246.

H. Whitney, The singularities of a smooth n-manifold in $(2n-1)$-space, *Ann. of Math.* Vol. 45 (1944), pp. 247~293.

H. Whitney, A function not constant on a connected critical set of points, *Duke Math. J.* Vol. 1 (1935), pp. 514~517.

A. P. Morse, The behavior of a function on its critical set, *Ann. of Math.* Vol. 40 (1939), pp. 62~70.

A. Sard, The measure of the critical valnes of differentiable maps, *Bull. Am. Math. Soc.* Vol. 48 (1942), pp. 883~890.

R. Thom, Quelques propriétés globales des variétés différentiables. *Comment. Math. Helv.* Vol. 28 (1954), pp. 17~86.