《概率与统计》内容总结与习题：参数估计

课本例题、习题分类：

1. 矩估计与最大似然估计：§6.1例1-5, 例7；习题六6.1-6.5, 4.5-4.7, 4.10
2. 衡量点估计量好坏的标准：习题六6.7-6.9, 6.11, 6.12
3. 正态总体均值的区间估计：§6.3例1-2；习题六6.13, 6.14, 6.15
4. 正态总体方差的区间估计：§6.3例3；习题六6.16, 6.17
5. 两个正态总体的区间估计：§6.4例1-2；习题六6.18
6. 单侧置信限：§6.5例；习题六6.23, 6.24

补充习题（本部分习题未涵盖本章的全部主要内容，仅为课本例题、习题的补充）：

1. 判断以下论述正确与否：

   (1) 每个参数都有唯一的无偏估计量； （ ）

   (2) 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的简单随机样本，在所有无偏估计量$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i$（其中$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$）中，样本均值$\overline{X}$的方差最小； （ ）

   (3) 在某实际问题中，计算得出总体均值的的置信水平为95%的置信区间为$(9.8, 10.2)$，这意味着总体均值落在区间$(9.8, 10.2)$内的概率是0.95。 （ ）

2. 选择题

   (1) 设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，在总体中取出样本容量分别为9和11的两组样本，记样本方差分别为S_1^2和S_2^2，并令

$$S_3^2 = \frac{1}{2}(S_1^2 + S_2^2), \quad S_4^2 = \frac{1}{18}(8S_1^2 + 10S_2^2).$$

由“服从自由度为n的χ^2分布的随机变量的方差等于$2n$”，则σ^2的四个无偏估计量中方差最小的是

(A) S_1^2;　　(B) S_2^2;　　(C) S_3^2;　　(D) S_4^2.

(2) 设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中参数μ, σ^2未知。$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，则总体方差σ^2的最大似然估计为

(A) $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$;　　(B) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$;

(C) $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$;　　(D) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$.

(3) 设总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，其中参数μ已知，σ^2未知。$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体X的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，则总体方差σ^2的最大似然估计为

(A) $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$;　　(B) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$;

(C) $\dfrac{1}{n-1}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$;　　(D) $\dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$.

(4) 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的简单随机样本，为使

$$a\sum_{i=1}^{n-1}(X_{i+1} - X_i)^2$$

为总体方差σ^2的无偏估计量，应选$a =$

(A) $\dfrac{1}{n-1}$;　　(B) $\dfrac{1}{n}$;　　(C) $\dfrac{1}{2(n-1)}$;　　(D) $\dfrac{1}{2n}$.

(5) 设$X_1, X_2, \cdots, X_n$是来自总体$X \sim N(\mu, \sigma^2)$的简单随机样本，$\overline{X}$为样本均值，S^2为样本方差，则

(A) $E(\overline{X}^2 - S^2) = \mu^2 - \sigma^2$;　　(B) $E(\overline{X}^2 + S^2) = \mu^2 + \sigma^2$;

(C) $E(\overline{X} - S^2) = \mu - \sigma^2$;　　(D) $E(\overline{X}^2 + S^2) = \mu + \sigma^2$.

3. 证明：设总体X的期望和方差分别为

$$E(X)=\mu, \qquad D(X)=\sigma^2.$$

从总体取一组样本$X_1,X_2,\cdots,X_n$，则样本平均数$\overline{X}$与样本方差S^2分别是μ和σ^2的无偏估计，即

$$E(\overline{X})=\mu, \qquad E(S^2)=\sigma^2.$$

4. 某车间生产的滚珠直径服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，从中抽取5个，测得直径如下（单位：毫米）

$$14.6,\ 15.1,\ 14.9,\ 15.2,\ 15.1.$$

试求μ的置信水平为0.95的置信区间，如果(1) $\sigma^2=0.05$，(2) σ^2未知。

5. 假设初一女生的身高服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，从中随机抽取6名，测得身高如下（单位：厘米）

$$149,\ 158,\ 153,\ 165,\ 157,\ 142.$$

试求μ的置信水平为95%的置信区间，如果(1) $\sigma^2=6^2$，(2) σ^2未知。

6. 从工厂产品库中随机抽取16只零件，测得它们的长度为（单位：厘米）

$$2.14,\ 2.10,\ 2.13,\ 2.15,\ 2.13,\ 2.12,\ 2.13,\ 2.10,$$
$$2.15,\ 2.12,\ 2.14,\ 2.10,\ 2.13,\ 2.11,\ 2.14,\ 2.11.$$

假设零件长度分布为$N(\mu,\sigma^2)$，试分如下两种情况求μ的置信水平为0.90的置信区间：(1) $\sigma^2=0.01^2$，(2) σ^2未知。

7. 甲、乙两组生产同种导线, 现从甲组生产的导线中随机抽取4根, 从乙组生产的导线中随机抽取5根, 他们的电阻值分别为

甲组：0.143, 0.142, 0.143, 0.137;

乙组：0.140, 0.142, 0.136, 0.138, 0.140.

假设两组电阻值分别服从正态分布$N(\mu_1,\sigma^2)$和$N(\mu_2,\sigma^2)$, 其中σ^2未知。试求$\mu_1-\mu_2$的置信系数为0.95的置信区间.

区间估计公式总结：

1. 单个正态总体下，总体期望μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

- 情况一：方差σ^2已知

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times u_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times u_{\alpha/2}\right),$$

- 情况二：方差σ^2未知

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\times t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}\times t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\right).$$

2. 单个正态总体下，总体方差σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

- 情况一：均值μ已知

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_n^2(\frac{\alpha}{2})},\ \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_n^2(1-\frac{\alpha}{2})}\right).$$

- 情况二：均值μ未知

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})}\right).$$

3. 两个正态总体，总体期望的差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

- 情况一：方差σ_1^2与σ_2^2均已知

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\times u_{\alpha/2}\right).$$

- 情况二：方差σ_1^2与σ_2^2均未知，但知道$\sigma_1^2=\sigma_2^2$

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm S\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\times t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})\right),$$

其中$S=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}$。

4. 两个正态总体，总体方差的比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

- 情况一：均值μ_1与μ_2均已知

$$\left(\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2}\times\frac{1}{F_{m,n}(\frac{\alpha}{2})},\ \frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2}\times\frac{1}{F_{m,n}(1-\frac{\alpha}{2})}\right).$$

- 情况二：均值μ_1与μ_2均未知

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\times\frac{1}{F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\times\frac{1}{F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}\right).$$

5. 单侧置信限可根据双侧置信限的公式得到（注意将$\frac{\alpha}{2}$相应改为α)。