《试卷A》答案

一、 选择题

1.C； 2.A； 3.B； 4.D； 5.A。

二、 填空题

1. 对任意$\varepsilon>0$，存在$M>0$，只要$|x|>M$，就有$|f(x)-A|<\varepsilon$；

2. β满足：(1) 对任意$x\in E$，有$x\geq\beta$

(2) 对任意$\varepsilon>0$，存在$x\in E$，使得$x<\beta+\varepsilon$；

3. $-\dfrac{1}{2}$；

4. $-\dfrac{b}{a^2}\csc^3 t$ 或$-\dfrac{b}{a^2\sin^3 t}$；

5. $-\dfrac{1}{12}$。

三、 证明

1. 证明：对$\forall\varepsilon>0$，取$N=\left[\dfrac{5}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时有

$$\left|\frac{3n^2+n}{2n^2-1}-\frac{3}{2}\right|=\left|\frac{5n}{2(2n^2-1)}\right|=\left|\frac{5n}{n^2+3n^2-2}\right|<\frac{5n}{n^2}=\frac{5}{n}<\varepsilon$$

所以原式成立。

2. 证明：因为$\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}\leq\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\leq\dfrac{n}{\sqrt{n^2}}=1$

以及$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n+1}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{1+\dfrac{1}{n}+\dfrac{1}{n^2}}}=1$，

所以由夹逼原理即知原式成立。

3. 证明：对$\forall\varepsilon>0$，$N=\left[\dfrac{1}{\varepsilon}\right]+1$，则当$n>N$时，对一切$p\in\mathbb{N}$有

$$\begin{aligned}|x_{n+p}-x_n|&\leq\left|\frac{\cos(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right|+\left|\frac{\cos(n+2)}{(n+2)(n+3)}\right|+\cdots+\left|\frac{\cos(n+p)}{(n+p)(n+p+1)}\right|\\&\leq\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\frac{1}{(n+2)(n+3)}+\cdots+\frac{1}{(n+p)(n+p+1)}\\&=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+p+1}<\frac{1}{n}<\varepsilon\end{aligned}$$

所以数列x_n收敛。

4. 证明：由 $y=f(u)$ 在 u_0 可导，$\Delta y=f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u$，且 $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=0$，所以

$$\begin{aligned}\left.\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}&=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f\left(g(x)\right)\Big|_{x=x_0}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}\\&=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f'(u_0)\Delta u+\alpha\Delta u}{\Delta x}=f'(u_0)\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}+\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\frac{\Delta u}{\Delta x}\\&=f'(u_0)g'(x_0)+g'(x_0)\lim_{\Delta x\to 0}\alpha\end{aligned}$$

由于 $u=g(x)$ 在 x_0 处可导，故也连续，所以当 $\Delta x\to 0$ 时，$\Delta u\to 0$，于是

$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\alpha=\lim\limits_{\Delta u\to 0}\alpha=0$，从而有 $\left.\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=f'(u_0)g'(x_0)$，这说明复合函数

$f(g(x))$ 在 x_0 处可导。

四、 计算

1. 解：显然 $x=0$ 是函数的一个不连续点，并且 $\lim\limits_{x\to 0+}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to 0-}f(x)=-1$，

所以 $x=0$ 为第一类不连续点（或者跳跃间断点）。

2. 解：$y'=\frac{1}{5}x^{-\frac{3}{5}}(7x-2),$

当 $x=\frac{2}{7}$ 时 $y'=0$；$x=0$ 时 y' 不存在，故函数只可能在这两点有极值，列表讨论如下：

x	$(-\infty,0)$	0	$\left(0,\frac{2}{7}\right)$	$\frac{2}{7}$	$\left(\frac{2}{7},+\infty\right)$
y'	+	不存在	−	0	+
y	单调增	极大值 0	单调减	极小值 $-\frac{5}{7}\sqrt[3]{\frac{4}{49}}$	单调增

下面讨论凸性和拐点，$y''=\frac{6}{25}x^{-\frac{8}{5}}(7x+3)$

$x=-\frac{3}{7}$ 时 $y''=0$；$x=0$ 时 y'' 不存在，

在 $(-\infty,-\frac{3}{7})$ 上，$y''<0$，函数为上凸；

在 $(-\frac{3}{7},0)$ 上，$y''>0$，函数为下凸；

在 $(0,+\infty)$ 上，$y''>0$，函数为下凸；

所以函数只有一个拐点：$\left(-\frac{3}{7},-\frac{10}{7}\sqrt[5]{\frac{9}{49}}\right)$。

3. 解：1）由函数在 $x=0$ 连续及 $g(x)$ 有连续的二阶导数

$$A=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-g(x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-g'(x)}{1}=1-g'(0)$$

2）由洛必达法则及 $g(x)$ 有连续的二阶导数

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{e^x-g(x)}{x}-(1-g'(0))}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-g(x)-(1-g'(0))x}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-g'(x)-(1-g'(0))}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-g''(x)}{2}=\frac{1-g''(0)}{2}$$

所以我们有

$$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{xe^x-xg'(x)-e^x+g(x)}{x^2}, & x\neq 0\\ \dfrac{1}{2}(1-g''(0)) & ,x=0\end{cases}$$

下面研究 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处的连续性

$$\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x-xg'(x)-e^x+g(x)}{x^2}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{xe^x+e^x-g'(x)-xg''(x)-e^x+g'(x)}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-g''(x)}{2}=f'(0)$$

所以 $f'(x)$ 在 $x=0$ 处连续。

五、 解答题

1. 解:（1）对 $\forall\varepsilon>0$，取 $\delta=\eta^2\varepsilon$，则对 $\forall x_1,x_2\in[\eta,1]$，只要 $|x_1-x_2|<\delta$ 就有:

$$\left|\cos\frac{1}{x_1}-\cos\frac{1}{x_2}\right|=\left|\frac{1}{\xi^2}\sin\frac{1}{\xi}\right||x_1-x_2| \qquad （其中 \eta<\xi<1）$$

$$\le\frac{1}{\eta^2}|x_1-x_2|<\frac{\delta}{\eta^2}=\varepsilon,$$

所以对于满足 $0<\eta<1$ 的每个 η，$f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$ 在 $[\eta,\ 1]$ 上是一致连续的。

（2）不一致连续。取 $x_k=\dfrac{1}{2k\pi},\ y_k=\dfrac{1}{2k\pi+\frac{\pi}{2}},\ (k\in\mathbb{N})$，则

$$|x_k-y_k|\to 0\ \ (k\to\infty)，并且\left|\sin\frac{1}{x_k}-\sin\frac{1}{y_k}\right|\equiv 1\not\to 0,$$

所以 $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$ 在开区间 $(0,\ 1)$ 上不一致连续。

2. 解：由泰勒公式：$f(x)-f(x_0)=\dfrac{f^{(m)}(x_0)}{m!}(x-x_0)^m+o\left((x-x_0)^m\right)\ \ (x\to x_0)$，

所以$\exists\delta>0$，当$|x-x_0|<\delta$时，$f(x)-f(x_0)$和$f^{(m)}(x_0)(x-x_0)^m$同号，

（a）当m为偶数，$f^{(m)}(x_0)>0$时，

在x_0的δ-邻域里总有：$f(x)-f(x_0)\geq 0$，所以$f(x_0)$为极小值；

（b）当m为偶数，$f^{(m)}(x_0)<0$时，

在x_0的δ-邻域里总有：$f(x)-f(x_0)\leq 0$，所以$f(x_0)$为极大值；

（c）当m为奇数时，在x_0的δ-邻域里，当x从左向右经过x_0时

$f(x)-f(x_0)$会改变符号，所以$f(x_0)$不为极值。