BULLETIN DE LA S. M. F.

ALEXANDER GROTHENDIECK

La théorie des classes de Chern

Bulletin de la S. M. F., tome 86 (1958), p. 137-154.
<http://www.numdam.org/item?id=BSMF_1958__86__137_0>

Bull. Soc. math. France,
86, 1958, p. 137 à 154.

LA THÉORIE DES CLASSES DE CHERN

[Appendice au Mémoire de A. Borel et J.-P. Serre]

PAR

ALEXANDER GROTHENDIECK.

Introduction. — Dans cet appendice, nous développons une théorie axiomatique des classes de Chern, qui permet en particulier de définir les classes de Chern d'un fibré vectoriel algébrique E sur une variété algébrique non singulière quasi projective X comme des éléments de l'anneau de Chow $A(X)$ de X, i. e. comme des classes de cycles pour l'équivalence rationnelle. Cet exposé est inspiré du livre de HIRZEBRUCH d'une part (où les *propriétés formelles* essentielles caractérisant une théorie des classes de Chern étaient bien mises en évidence), et d'une idée de CHERN [2], qui consiste à utiliser la structure multiplicative de l'anneau des classes de cycles sur le fibré en espaces projectifs $P(E)$ associé à E, pour parvenir à une *construction* effective des classes de Chern. On notera que l'exposé donné ici vaut dans d'autres cadres que celui de la Géométrie algébrique et redonne par exemple une théorie entièrement élémentaire des classes de Chern pour les fibrés vectoriels complexes sur des variétés topologiques (et partant, sur tous les espaces pour lesquels le théorème de classification des fibrés principaux à groupe structural à l'aide d'un « espace classifiant » est valable). De même, on obtiendrait, pour un fibré vectoriel analytique complexe E sur une variété analytique complexe (non singulière) X des classes de Chern

$$c_p(E) \in \mathrm{H}^p(X, \mathbf{\Omega}_X^p),$$

où $\mathbf{\Omega}_X^p$ est le faisceau des germes de formes différentielles holomorphes de degré p sur X. [Et il est certainement facile de montrer que cette définition coïncide avec celle donnée récemment par ATIYAH [1], et qu'elle est reliée à la définition topologique des classes de Chern à l'aide de la suite spectrale qui relie les $H^p(X, \mathbf{\Omega}_X^q)$ et $H^*(X, \mathbf{C})$.] De même, la théorie des classes de

Stiefel-Whitney en cohomologie mod 2 rentre dans le schéma qui sera donné ici.

Il semble qu'une théorie satisfaisante des classes de Chern en Géométrie algébrique ait été exposée pour la première fois par W. L. Chow (non publié), qui utilise la grassmanienne. Le souci principal de la présente rédaction a été d'éliminer la grassmannienne de la théorie. J'ai montré ailleurs [4] comment la théorie des classes de Chern permet de *retrouver* la structure de $A(X)$ quand X est une grassmanienne.

1. Notations. — Pour ne pas nous exposer à des complications provenant de la théorie des intersections, nous nous limitons dans ce qui suit à la considération d'espaces algébriques *non singuliers*. Le corps de base k sera fixé une fois pour toutes, et pour fixer les idées le lecteur pourra le supposer algébriquement clos. Tous les espaces fibrés, sous-variétés, morphismes, etc. envisagés par la suite seront définis sur k.

Si X est un espace algébrique, E un fibré vectoriel sur X, on désigne par $P(E)$ le fibré projectif associé. La fibre $P(E)_x$ de $P(E)$ au point $x \in X$ est donc l'espace projectif associé à l'espace vectoriel E_x, donc un point de $P(E)_x$ au-dessus d'un point $x \in X$ n'est autre chose qu'une droite homogène dans E_x. Soit $f\colon P(E) \to X$ la projection d'espace fibré; considérons sur $P(E)$ le fibré vectoriel $f^{-1}(E)$ image inverse de E par f. Il y a un sous-fibré canonique de rang 1 de $f^{-1}(E)$, dont la fibre en un point d de $P(E)$ (au-dessus du point x de X) est la droite d dans $E_x = f^{-1}(E)_d$. Le fibré dual de ce sous-fibré de $f^{-1}(E)$ est noté L_E, on a donc l'inclusion

$$\check{L}_E \subset f^{-1}(E).$$

Soit p le rang de E (supposé constant, ce qui est toujours le cas si X est connexe). Alors $E^{(1)} = f^{-1}(E)/L_E$ est un fibré vectoriel de rang $p-1$ sur $X^{(1)} = P(E)$, on peut donc construire $P(E^{(1)}) = X^{(2)}$ et le fibré analogue $E^{(2)} = (E^{(1)})^{(1)}$ de rang $p-2$ 2ur $X^{(2)}$. On construit ainsi par récurrence des variétés $X^{(i)}$ et des fibrés vectoriels $E^{(i)}$ de rang $p-i$ sur $X^{(i)}$ $(1 \leqq i \leqq p)$, $X^{(i)}$ étant le fibré $P(E^{(i-1)})$ sur $X^{(i-1)}$. Appelons *drapeau de longueur i* dans un espace vectoriel V une suite croissante $(V_j)_{0 \leqq j \leqq i}$ de sous-espaces vectoriels V_j, avec $\dim V_j = j$. Alors $X^{(i)}$ peut aussi s'interpréter comme le *fibré sur X des drapeaux de longueur i* dans E, et si $f^{(i)}$ est la projection de $X^{(i)}$ sur X, on définit directement, comme pour la définition de L_E, une suite croissante de sous-fibrés $(V_j)_{0 \leqq j \leqq i}$ de $E_i = (f^{(i)})^{(-1)}(E)$, rang $(V_j) = j$, le quotient de E_i par V_i n'étant autre que le fibré vectoriel $E^{(i)}$. En particulier, $X^{(p)}$ est *la variété des drapeaux* (de longueur maximum p) $D(E)$ de E, qui apparaît donc comme « extension multiple » de X par des fibrations en espaces projectifs associées à des fibrés vectoriels; l'image inverse E_p de E dans $X^{(p)} = D(E)$ étant de plus *complètement scindée*. Par là on entend que ce fibré vectoriel de rang p est muni d'une suite $(V_i)_{0 \leqq i \leqq p}$ de sous-fibrés vectoriels, avec rang $(V_i) = i$. Alors les V_i/V_{i-1} $(1 \leqq i \leqq p)$ sont des fibrés vectoriels de rang 1, appelés les *facteurs* du scindage donné.

Si X est un espace algébrique, nous désignons par $\mathbf{P}(X)$ le groupe des classes (à isomorphisme près) de fibrés vectoriels de rang 1 sur X (la loi de composition du groupe étant donnée par la multiplication tensorielle des fibrés). Si L est un tel fibré vectoriel de rang 1, on désigne par $cl_X(L)$ l'élément de $\mathbf{P}(X)$ qu'il définit. On a donc

$$cl_X(L \otimes L') = cl_X(L) + cl_X(L'), \qquad cl_X(\check{L}) = -cl_X(L).$$

Si $f: X \to Y$ est un morphisme, alors la formule

$$f^*(cl_X(L)) = cl_X(f^{-1}(L))$$

définit un homomorphisme f^* de $\mathbf{P}(Y)$ dans $\mathbf{P}(X)$. Ainsi, $\mathbf{P}(X)$ peut être considéré comme un *foncteur contravariant* en X.

Soit toujours $f: X \to Y$ un morphisme, et soit F un fibré vectoriel de rang p sur Y, posons $E = f^{-1}(F)$. C'est un fibré vectoriel de rang p sur X, et l'on a un isomorphisme canonique $P(E) = f^{-1}(P(F))$, d'où un morphisme naturel

$$\bar{f}: \quad P(E) \to P(F) \qquad [E = f^{-1}(F)].$$

Ceci dit, on vérifie aussitôt que L_E *est canoniquement isomorphe à l'image inverse* $\bar{f}^{-1}(L_F)$. On a par suite la formule

$$cl(L_E) = \bar{f}^*(cl(L_F)).$$

Soient E un fibré vectoriel de rang p sur X, s une section régulière de E. C'est donc un morphisme de X dans E, qui est même un isomorphisme de X sur un sous-espace fermé de E de codimension p. En particulier, l'image de X par la section nulle est un sous-espace fermé non singulier X' de E de codimension p. Évidemment, l'image réciproque $s^{-1}(X')$ n'est autre que l'ensemble des zéros de s. Pour que le *cycle* $s^{-1}(X')$ soit défini, il faut et il suffit que l'ensemble des zéros de s soit partout vide ou de codimension p dans X. Dans ce cas, on peut donc parler du *cycle des zéros* de la section s. Rappelons par ailleurs que le morphisme s est dit *transversal* à la sous-variété X' de X, si en tout point de l'image inverse de X' par s, l'application tangente à s est surjective mod l'espace tangent à X' Dans ce cas, $s^{-1}(X')$ est un sous-espace algébrique non singulier de X partout de codimension p, et toutes ses composantes sont de multiplicité 1 dans le cycle des zéros de s. On dira pour abréger que la section s est *transversale à la section nulle*. Pour exprimer cette propriété par le calcul, comme elle est locale sur X, on peut supposer que E est le fibré trivial $X \times k^p$, donc que s est défini par la donnée de p fonctions régulières $(f_1, \ldots, f_p)$ sur X. Pour que s soit transversale à la section nulle, il faut et il suffit que pour tout $x \in X$, les fonctions $f_1, \ldots, f_p$ fassent partie d'un système régulier de paramètres de $\mathbf{O}_x$.

2. Le foncteur $A(X)$. — On suppose donnée par la suite une catégorie $\mathbf{V}$ d'espaces algébriques non singuliers (les morphismes dans cette catégorie étant les morphismes d'espace algébrique). La seule condition imposée à $\mathbf{V}$ étant

($\mathbf{V}$ 1). *Si* $X \in \mathbf{V}$, *et si* E *est un fibré vectoriel sur* X, *alors* $P(E) \in \mathbf{V}$.

On suppose qu'on a de plus les données suivantes :

a. Un foncteur contravariant $X \to A(X)$ de $\mathbf{V}$ dans la catégorie des anneaux gradués avec unité anticommutatifs;

b. Un homomorphisme fonctoriel $p_X : \mathbf{P}(X) \to A^2(X)$ $(X \in \mathbf{V})$;

c. Pour tout $X \in \mathbf{V}$, et tout sous-espace algébrique fermé Y de X, $Y \in \mathbf{V}$, de codimension constante p dans X, un homomorphisme de groupes

$$i_* : \quad A(Y) \to A(X) \qquad (i \text{ désignant l'injection } Y \to X)$$

augmentant les degrés de $2p$ unités.

Si $f : X \to Y$ est un morphisme dans $\mathbf{V}$, l'homomorphisme correspondant de $A(Y)$ dans $A(X)$ est noté f^*. L'élément unité de $A(X)$ sera noté 1_X, et si X, $Y \in \mathbf{V}$, et si Y est un sous-espace fermé de X de codimension constante p, on pose $p_X(Y) = i_*(1_Y)$, où i est le morphisme d'injection de Y dans X.

Ceci posé, nous supposons les conditions suivantes satisfaites :

A 1. Soient $X \in \mathbf{V}$, E un fibré vectoriel de rang p sur X, $P(E)$ le fibré projectif associé, ξ_E l'élément de $A(P(E))$ défini par

$$\xi_E = p(cl(L_E)).$$

Considérons $A(P(E))$ comme un module à gauche sur $A(X)$ grâce à l'homomorphisme $f^* : A(X) \to A(P(E))$ associé à la projection $f : P(E) \to X$. Alors les éléments

$$(\xi_E)^i \qquad (0 \leqq i \leqq p-1)$$

forment une base de $A(P(E))$ sur $A(X)$.

A 2. Soient $X \in \mathbf{V}$, L un fibré vectoriel de rang 1 sur $\mathbf{V}$, s une section régulière de L transversale à la section nulle et telle que l'espace Y des zéros de s appartienne à $\mathbf{V}$. Alors on a

$$p_X(Y) = p_X(cl_X(L)).$$

A 3. Soient X, Y, $Z \in \mathbf{V}$, avec $Z \subset Y \subset X$, soient i et j les morphismes d'injection $Z \to Y$ et $Y \to X$, alors on a $(ji)_* = j_* i_*$.

A 4. Soient X, $Y \in \mathbf{V}$, avec $Y \subset X$, soit i le morphisme d'injection de Y

dans X, alors on a la formule

$$i_*(bi^*(a)) = i_*(b)a \qquad [a \in A(X),\ b \in A(Y)].$$

Nous allons tirer de ces axiomes deux lemmes qui nous seront utiles au numéro suivant.

LEMME 1. — *Soient $X \in \mathbf{V}$, et E un fibré vectoriel de rang p sur X. Considérons pour tout $i (1 \leqq i \leqq p)$ le fibré $X^{(i)}$ des drapeaux de longueur i dans E. Alors $X^{(i)} \in \mathbf{V}$, et l'homomorphisme $A(X) \to A(X^{(i)})$ déduit de la projection $X^{(i)} \to X$ est* injectif.

En vertu de ce qui a été dit au n° **1**, on est ramené par récurrence sur i au cas du fibré projectif $X^{(1)} = P(E)$ associé à E. Alors nos assertions sont une conséquence immédiate de l'axiome (**V 1**) et **A 1** [l'élément $1_{P(E)} = (\xi_E)^0$ étant libre sur l'anneau $A(X)$].

LEMME 2. — *Soient $X \in \mathbf{V}$, E un fibré vectoriel de rang p sur X, s une section régulière de E, $(E_i)_{0 \leqq i \leqq p}$ une suite décroissante de sous-fibrés vectoriels de E, avec rang $E_i = p - i$. Posons*

$$\xi_i = p_X\, cl_X(E_{i-1}/E_i) \qquad (1 \leqq i \leqq p).$$

Soit pour tout $1 \leqq i \leqq p$, Y_i le sous-ensemble de X formé des $x \in X$ tels que $s(x) \in E_i$. On suppose que pour tout i, Y_i est une sous-variété non singulière de X, et $Y_i \in \mathbf{V}$. Soit s_i la section de $(E_i/E_{i+1}) \mid Y_i$ définie par s, on suppose que pour $1 \leqq i \leqq p - 1$, s_i est transversale à la section nulle. Sous ces conditions, on a

$$p_X(Y_p) = \prod_{1 \leqq i \leqq p} \xi_i.$$

Nous démontrerons par récurrence sur $j (1 \leqq j \leqq p)$ que

$$(\star) \qquad p_X(Y_j) = \prod_{1 \leqq i \leqq j} \xi_i.$$

Pour $j = 1$, cette relation n'est autre que l'axiome **A 2**. Supposons la relation démontrée pour j, avec $j < p$, démontrons-la pour $j + 1$. Appliquant **A 2** à la section s_j de $(E_j/E_{j+1}) \mid Y_j$, on trouve

$$p_{Y_j}(Y_{j+1}) = p_{Y_j}\, cl_{Y_j}((E_j/E_{j+1}) \mid Y_j).$$

Soit u_j le morphisme d'injection $Y_j \to X$. De la fonctoralité de cl et p résulte que le deuxième membre de la relation précédente est $u_j^*(p_X cl_X(E_j/E_{j+1}))$, d'où

$$p_{Y_j}(Y_{j+1}) = u_j^*(\xi_{j+1}).$$

Utilisant **A 3**, on en conclut

$$p_X(Y_{j+1}) = u_{j*}(u_j^*(\xi_{j+1})).$$

Le deuxième membre s'écrit aussi $u_{j*}(1_{Y_j} u_j^*(\xi_{j+1}))$, qui est égal en vertu de **A 4** à $u_{j*}(1_{Y_j})\xi_{j+1} = p_X(Y_j)\,\xi_{j+1}$. Utilisant l'hypothèse de récurrence ($\bigstar$), on trouve bien la formule analogue avec $j+1$ au lieu de j. Nous aurons seulement besoin au n° 3 du corollaire suivant.

COROLLAIRE. — *Sous les conditions du lemme 2, si s ne s'annule en aucun point, alors on a* $\prod_{1 \leq i \leq p} \xi_i = 0$.

REMARQUE. — L'introduction dans c de l'opération i, et les axiomes **A 2**, **A 3**, **A 4** sur cette opération, ont eu pour unique objet de fournir des moyens techniques pour démontrer le corollaire au lemme 2. (Dans **A 4**, il aurait suffi alors de supposer $b = 1_Y$.) Nous ne nous servirons pour la théorie des classes de Chern au numéro suivant, que des données a, b, de l'axiome **A 1** et du corollaire au lemme 2.

CAS PARTICULIERS. — Notons d'abord que la condition **V 1** est satisfaite pour toutes les catégories raisonnables d'espaces algébriques, et en tous cas pour la catégorie de tous les espaces algébriques non singuliers, pour la catégorie des espaces algébriques non singuliers quasi projectifs, et pour la catégorie des espaces algébriques non singuliers projectifs. La vérification dans ces deux derniers cas ne présente pas de difficultés et est laissée au lecteur (ce résultat étant par ailleurs un cas particulier d'un résultat général sur les variétés éclatées).

Donnons maintenant des cas particuliers où les conditions envisagées dans ce numéro sont vérifiées.

1° **V** est la catégorie des espaces algébriques non singuliers quasi projectifs, $A(X)$ est l'anneau des classes de cycles sur X pour l'*équivalence rationnelle*, avec la définition usuelle de f^* et f_*. Bien entendu, on gradue $A(X)$ en attribuant le degré $2p$ à la classe d'un cycle sur X partout de codimension p [de sorte que $A(X)$ n'a que des degrés pairs, comme il est raisonnable, dans une théorie de nature cohomologique, pour un anneau gradué *commutatif*]. L'homomorphisme $\mathbf{P}(X) \to A^2(X)$ est un isomorphisme, obtenu en associant à tout fibré vectoriel L de rang 1 sur X l'ensemble des diviseurs des sections rationnelles de L qui ne sont nulles sur aucune composante de X. Pour la théorie de l'équivalence linéaire, y compris la vérification des propriétés **A 1** à **A 4** (seule **A 1** n'étant pas immédiate), *voir* des exposés de CHEVALLEY et GROTHENDIECK dans [4].

Les conditions exigées sont aussi vérifiées en prenant pour $A(X)$ l'anneau des classes de cycles pour l'équivalence *algébrique*. Mais pour une théorie des classes de Chern, on a intérêt à travailler avec l'équivalence rationnelle, qui donne une théorie plus fine.

On ne peut pas pour l'instant définir dans le groupe $A(X)$ des classes de cycles sur une variété non singulière *quelconque* (non nécessairement quasi projective) une structure d'anneau, et pour un morphisme $f : X \to Y$ un morphisme $f^* : A(Y) \to A(X)$, de façon à satisfaire aux conditions qu'il faut. Et il n'est pas même certain que cela soit possible. On peut songer à remplacer l'anneau des classes de cycles (pour l'équivalence rationnelle) par l'anneau gradué associé à l'anneau $K(X)$ des classes de faisceaux algébriques cohérents sur X, filtré de façon naturelle (par la considération de la dimension des supports dès faisceaux). Malheureusement, il faudrait prouver que cette filtration est compatible avec la structure d'anneau (et avec les homomorphismes « image inverse »), ce que je ne sais faire que dans le cas quasi projectif, en me servant précisément de l'équivalence rationnelle. Il semble cependant que ces difficultés disparaissent quand on tensorise par le corps des rationnels $\mathbf{Q}$, i. e. si l'on néglige les phénomènes de torsion.

2° $\mathbf{V}$ est la catégorie de tous les espaces algébriques non singuliers. Si X est une telle variété, on désigne par $\mathbf{\Omega}_X^*$ le faisceau des germes de formes différentielles régulières sur X, et par $A(X)$ le groupe de cohomologie $H^*(X, \mathbf{\Omega}_X^*)$. On gradue ce groupe en attribuant à $H^p(X, \mathbf{\Omega}_X^q)$ le degré $p+q$, et l'on en fait une algèbre à l'aide du cup-produit. On obtient ainsi une algèbre graduée anticommutative, qui est manifestement un foncteur contravariant par rapport à X. En reprenant le formalisme développé par Grothendieck dans [3] on définit de façon naturelle l'homomorphisme $i_* : A(Y) \to A(X)$ associé à une injection $i : Y \to X$ (et il est probablement possible de définir i_* pour tout morphisme *propre* $i : Y \to X$) (*). Enfin, on définit un morphisme $\mathbf{P}(X) \to H^1(X, \mathbf{\Omega}_X^1) \subset A^2(X)$ de façon classique, par exemple en écrivant $\mathbf{P}(X) = H^1(X, \mathbf{O}_X^*)$ (où $\mathbf{O}_X^*$ désigne le faisceau des germes de fonctions régulières inversibles sur X), et en considérant l'homomorphisme $f \to df/f$ de $\mathbf{O}_X^*$ dans $\mathbf{\Omega}_X^1$. On vérifie encore sans difficulté les conditions **A 1** à **A 4**, la condition **A 1** étant une conséquence de la suite spectrale de Leray de l'application continue $P(E) \to X$ [suite spectrale qui est triviale, comme il résulte de la considération de la classe ξ_E sur $P(E)$.]

3° Le corps de base k est le corps des nombres complexes, $\mathbf{V}$ est la catégorie des espaces algébriques non singuliers, et $A(X) = H^*(X, \mathbf{Z})$ (X étant muni de sa topologie « usuelle »). La définition de b (soit par dualité de Poincaré à partir des classes de diviseurs, soit comme une classe d'obstruction dans la suite exacte classique $0 \to \mathbf{Z} \to \mathbf{O}_X \to \mathbf{O}_X^* \to 0$ de faisceaux sur X, muni de sa topologie usuelle) est bien connue. La définition de c se fait clas-

(*) (Note ajoutée pendant la correction des épreuves). Cet homomorphisme i_* est défini maintenant en toute généralité..

siquement par dualité de Poincaré, et les propriétés **A 1** à **A 4** sont bien connues (**A 2** résultant encore de la suite spectrale de Leray).

3. Définition et propriétés fondamentales des classes de Chern. — Soient $X \in \mathbf{V}$, E un fibré vectoriel de rang p sur X, $\xi_E = p_X(cl(L_E))$ la classe fondamentale dans $A^2(P(E))$. En vertu de l'axiome **A 1** du numéro précédent, $(\xi_E)^p$ peut s'écrire de façon unique comme combinaison linéaire, à coefficients dans $\mathbf{A}(X)$, des $(\xi_E)^i$ $(0 \leqq i \leqq p-1)$. Par suite, on peut trouver de façon unique des éléments $c_i(E) \in A^{2i}(X)$ (définis pour tout entier $i \geqq 0$) satisfaisant aux conditions

$$(1) \qquad \sum_{i=0}^{p} c_i(E)\,(\xi_E)^{p-i} = 0,$$

$$c_0(E) = 1, \qquad c_i(E) = 0 \qquad \text{pour} \quad i > p.$$

Les $c_i(E)$ s'appellent les *classes de Chern* de E, $c_i(E)$ est dit la $i^{\text{ième}}$ classe de Chern. On pose

$$(2) \qquad c(E) = \sum_i c_i(E)$$

et $c(E)$ est appelé *la classe de Chern* (totale) de E; sa donnée équivaut donc à la donnée de tous les $c_i(E)$.

THÉORÈME 1. — *Supposons qu'on ait les données* a, b, c *du numéro précédent, satisfaisant aux axiomes* **A 1** *à* **A 4**. *Alors les classes de Chern* [*définies par* (1)] *satisfont aux conditions suivantes* :

(i) *Fonctoralité.* — Soit $f : X \to Y$ un morphisme dans $\mathbf{V}$, E un fibré vectoriel sur Y, alors on a

$$(3) \qquad c(f^{-1}(E)) = f^*(c(E))$$

[où $f^{-1}(E)$ désigne le fibré vectoriel sur X image réciproque de E par f].

(ii) *Normalisation.* — Si E est un fibré vectoriel de rang 1 sur $X \in \mathbf{V}$, alors on a

$$(4) \qquad c(E) = 1 + p_X(cl_X(E)).$$

(iii) *Additivité.* — Soient $X \in \mathbf{V}$, $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ une suite exacte de fibrés vectoriels sur X, alors on a

$$(5) \qquad c(E) = c(E')\,c(E'').$$

De plus, les propriétés (i), (ii) et (iii) caractérisent *entièrement les classes de Chern.*

DÉMONSTRATION. — Prouvons d'abord l'*unicité* d'une théorie des classes de Chern satisfaisant à (i), (ii) et (iii). Soient $X \in \mathbf{V}$, E un fibré vectoriel sur X de rang p, X' la variété de drapeaux associée à E, $f : X' \to X$ la projection canonique. En vertu du lemme 1, on a $X' \in \mathbf{V}$ et $f^\star : A(X) \to A(X')$ est injectif. Donc $c(E)$ est connu si l'on connaît $f(c(E))$, qui en vertu de (i) est égal à $c(f^{-1}(E))$. Or $f^{-1}(E)$ se scinde complètement. On est ainsi ramené à déterminer $c(E)$ quand E est un fibré vectoriel de rang p, qui se scinde complètement, donc muni d'une suite de composition $(E_i)_{0 \leqq i \leqq p}$, avec rang $E_i = p - i$. Mais alors la formule d'additivité (iii) prouve (par récurrence sur p) que $c(E) = \prod_{i=1}^{p} c(E_{i-1}/E_i)$, enfin la formule de normalisation (ii) donne

$$c(E) = \prod_{i=1}^{p} (1 + p_X cl_X(E_{i-1}/E_i)). \tag{6}$$

Montrons maintenant que les classes de Chern définies par (1) satisfont bien à (i), (ii) et (iii).

Vérification de (i). — Soient X, $Y \in \mathbf{V}$, E un fibré vectoriel sur Y, F son image réciproque par f. Alors $P(F)$ est l'image réciproque de $P(E)$ par f, donc on a un diagramme commutatif de morphismes

$$\begin{array}{ccc} P(F) & \xrightarrow{\bar{f}} & P(E) \\ {\scriptstyle p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle q} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

D'autre part, L_F est l'image réciproque de L_E par $\bar{f}$. Il en résulte qu'on a

$$\xi_F = \bar{f}^\star(\xi_E).$$

La relation (3) est vérifiée trivialement en dimension $i = 0$ et $i > p$, il suffit de la vérifier en dimensions $1 \leqq i \leqq p$. Par définition, on a

$$\sum_{i=0}^{p} q^\star(c_i(E))\,(\xi_E)^{p-i} = 0,$$

ce qui donne, en appliquant l'homomorphisme $\bar{f}^\star$, et notant que

$$\bar{f}^\star q^\star = (q\bar{f})^\star = (fp)^\star = p^\star f^\star, \qquad \text{et que} \qquad \bar{f}^\star(\xi_E) = \xi_F,$$

la relation

$$\sum_{i=0}^{p} p^\star(f^\star(c_i(E)))\,(\xi_F)^{p-i} = 0,$$

relation qui prouve, par définition, qu'on a

$$c_i(F) = f^*(c_i(E)) \qquad \text{pour} \quad 1 \leq i \leq p$$

Vérification de (ii). — Supposons E de rang 1, alors $P(E) = X$, $L_E = \check{E}$, et $\xi_E = p_X cl_X(\check{E}) = -p_X cl_X(E)$. La première formule (1) s'écrit

$$\xi_E + c_1(E) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad c_1(E) = -\xi_E = p_X cl_X(E).$$

Vérification de (iii). — Sous les conditions de l'énoncé de (i), soit P le produit fibré sur X de la variété des drapeaux de E' et de la variété des drapeaux de E''. Alors P s'identifie aussi à la variété des drapeaux de $f^{-1}(E'')$, où $f: D(E') \rightarrow X$ est la projection canonique sur X de la variété des drapeaux $D(E')$ de E'. Utilisant deux fois le lemme 1 du numéro précédent, on trouve que $P \in \mathbf{V}$ et que l'homomorphisme $g^* : A(X) \rightarrow A(P)$ associé à la projection $g : P \rightarrow X$ est injectif. Par suite, pour prouver la formule (5) il suffit de prouver la formule qui s'en déduit en appliquant g^* aux deux membres, ce qui, en vertu de la fonctoralité (i), revient à prouver la formule de multiplicativité pour la suite exacte image réciproque par g de la suite exacte donnée $0 \rightarrow E' \rightarrow E \rightarrow E'' \rightarrow 0$. Or il est immédiat que $g^{-1}(E')$ et $g^{-1}(E'')$ se scindent complètement. On est donc ramené à prouver la formule d'additivité dans le cas où les facteurs E', E'' se scindent complètement. Mais alors les scindages de E' et E'' définissent un scindage de E, et il suffit évidemment de démontrer pour chacune des suites de composition de E', E'' et E ainsi obtenues, la formule (6). Cela nous ramène à prouver (6) pour un fibré vectoriel E complètement scindé.

Soient alors $X' = P(E)$, f la projection de X' sur X,

$$E' = f^{-1}(E), \qquad E'_i = f^{-1}(E_i), \qquad L = L_E,$$
$$\xi_i = p_X cl_X(E_{i-1}/E_i) \qquad (1 \leq i \leq p),$$
$$\xi'_i = f^*(\xi_i) = p_X cl_{X'}(E'_i/E'_{i+1}).$$

Le fibré (de rang 1) $\check{L}$ s'identifie à un sous-fibré vectoriel de E', l'homomorphisme d'injection $\check{L} \rightarrow E'$ peut s'interpréter comme une section régulière s du fibré $F' = L \otimes E'$. Comme s correspond à un morphisme d'injection, on voit aussitôt que s ne s'annule pas. D'autre part, posant $F'_i = L \otimes E'_i$, on obtient un scindage de F', dont les facteurs sont $F'_i/F'_{i+1} = L \otimes (E'_i/E'_{i+1})$, d'où

$$p_X cl_{X'}(F'_{i-1}/F'_i) = \xi_E + \xi'_i.$$

Soit Y_i l'ensemble des points de X' tels que $s(x') \in F'_i$, c'est aussi l'ensemble des points x' tels que la fibre de $\check{L}$ en x' soit contenue dans E'_i, et s'identifie par suite à $P(E_i)$. Donc Y_i est un sous-espace fermé non singulier de X', et $Y' \in \mathbf{V}$. D'autre part, soit s_i la section de $(F'_{i-1} \mid F'_i) \mid Y_{i-1}$ déduite de $s \mid Y_{i-1}$, je dis qu'elle est transversale à la section nulle. La question étant locale, on peut supposer en effet que $E = X \times k^n$, $E_i = X \times k^{n-i}$, alors $Y_i = X \times P(k^{n-i})$, $E_j \mid Y_i$ est le fibré constant de fibre k^{n-j} sur Y_i, $L \mid Y_i$ est le sous-fibré du fibré constant de fibre k^{n-i} image réciproque, par l'application de projection de Y_i sur son facteur $P(k^{n-i})$, du sous-fibré de rang 1 bien connu l du fibré constant de fibre k^{n-i}. Ainsi le fibré $(F'_i \mid F'_{i+1}) \mid Y_i$ sur Y_i et sa section s_{i+1} sont les images réciproques, par l'application de projection de Y_i sur son facteur $P(k^{n-i})$, d'une certaine section σ de l. Or il est bien connu (et immédiat à vérifier) que toute section non nulle de l est transversale à la section nulle (son cycle des zéros étant alors un hyperplan linéaire de l'espace projectif). Cela prouve en même temps notre assertion.

Ainsi, nous sommes sous les conditions du corollaire au lemme 2 du numéro précédent, qui donne

$$\prod_{i=1}^{p} (\xi_E + \xi'_i) = 0.$$

Cela prouve, en vertu de la définition des $c_i(E)$, que les $c_i(E)$ sont les fonctions symétriques élémentaires en les ξ_i, ce qui est précisément la formule (6).

Cela achève la démonstration du théorème 1.

COROLLAIRE. — *Soient $X \in \mathbf{V}$, E et F des fibrés vectoriels sur X. Alors*

$$c_i(\check{E}) = (-1)^i c_i(E) \tag{7}$$

et de même les classes de Chern des puissances extérieures $\wedge E$ (resp. du produit tensoriel $E \otimes F$) s'expriment en fonction des classes de Chern de E et du rang de E (resp. en fonction des classes de Chern de E et F et des rangs de E et de F) par le calcul bien connu de fonctions élémentaires (*cf.* le livre de HIRZEBRUCH).

Passant à une variété de drapeaux comme d'habitude, on se ramène au cas où E et F sont complètement scindés. Dans ce cas, ces formules résultent aussitôt de la formule (6).

4. Remarques et compléments divers. — 1° Dans tout ce qui précède, on n'a eu à calculer qu'avec des éléments de degré pair dans les $A(X)$, ce qui implique en particulier que tous les calculs étaient essentiellement commutatifs. On notera d'ailleurs que les axiomes **A 1** à **A 4** restent satisfaits si l'on remplace chaque $A(X)$ par la somme directe des $A^{2i}(X)$. Mais alors il peut sembler commode de diviser tous les degrés par 2, donc de supposer dès le début que les $A(X)$ étaient commutatifs, et que l'homomorphisme p_X de $\mathbf{P}(X)$ prenait ses valeurs, non dans $A^2(X)$, mais dans $A^1(X)$. C'est ce qu'on suppose dans la remarque qui suit.

2° Soit A un anneau gradué commutatif avec unité à degrés positifs. Soit $\hat{A}$

l'anneau produit des $A^i (i \geqq 0)$, alors l'ensemble des éléments de $\hat{A}$ d'augmentation 1 (i. e. dont la composante de degré 0 est 1) est un groupe pour la multiplication, qu'on désignera par $1 + \hat{A}^+$. Considérons le groupe produit

$$\tilde{A} = \mathbf{Z} \times (1 + \hat{A}^+)$$

dont la loi de composition sera écrite additivement; donc $(0, 1 + \hat{A}^+)$ en est un sous-groupe, isomorphe au groupe multiplicatif $1 + \hat{A}^+$. Ceci dit, on peut définir sur $\tilde{A}$ une loi d'anneau (commutatif, avec unité), compatible avec sa structure additive, dont l'unité est $(1, 1)$ et qui est donnée, sur le facteur $(0, 1 + A^+)$, par des formules polynomiales universelles (à coefficients entiers). On aura

$$(8) \qquad (1, 1 + x_1)(1, 1 + y_1) = (1, 1 + (x_1 + y_1))$$

pour $x_1, y_1 \in A^1$, et ces formules suffisent à caractériser les polynomes définissant la loi de composition (compte tenu de l'associativité de la loi de composition).

On peut aussi définir des applications (non additives !)

$$\lambda^i : \tilde{A} \to \tilde{A} \qquad (i \geqq 0)$$

faisant de $\tilde{A}$ un λ-anneau, ce par quoi on entend que les conditions suivantes sont satisfaites :

$$(9) \quad \lambda^0(x) = 1, \quad \lambda^1(x) = x, \quad \lambda^n(x + y) = \sum_{i+j=n} \lambda^i(x)\lambda^j(y) \qquad \text{si } n \geqq 0$$

qui signifient aussi que l'application

$$\lambda : \tilde{A} \to 1 + \tilde{A}[[t]]^+$$

défini par la formule

$$(10) \qquad \lambda(x) = \sum_{i \geqq 0} \lambda^i(x)\, t^i$$

est un homomorphisme additif de $\tilde{A}$ dans le groupe multiplicatif des séries formelles d'augmentation 1, inverse à droite de l'homomorphisme naturel $(1 + a_1 t + \ldots) \to a_1$ de ce dernier groupe dans $\tilde{A}$. La restriction des opérations λ^i au facteur $(0, 1 + \tilde{A}^+)$ est défini par des formules polynomiales universelles (à coefficients entiers), on aura

$$(11) \qquad \lambda^i(1, 1 + x_1) = 0 \qquad \text{pour} \quad i > 1$$

si $x_1 \in A^1$, ct cette formule suffit à caractériser les polynomes définissant la formation des λ^i [compte tenu des formules (9)].

En fait, le λ-anneau A est un λ-anneau *spécial*, par quoi on entend que les $\lambda^i(xy)$ peuvent s'exprimer par des polynomes universels à coefficients entiers en fonction des $\lambda^j(x)$, $\lambda^k(y)$, et que les $\lambda^j(\lambda^i(x))$ peuvent s'exprimer par les polynomes universels à coefficients entiers en fonction des $\lambda^k(x)$. Nous n'expliciterons pas ici ces polynomes, en nous contentant de l'indication ci-après. Le fait qu'un λ-anneau K soit spécial signifie aussi que l'homomorphisme $\lambda : K \to 1 + K[[t]]^+$ est en outre un homomorphisme de λ-anneaux, étant entendu que, pour tout anneau commutatif avec unité K, on peut définir sur $1 + K[[t]]^+$ une loi de λ-anneau canonique (dont la structure additive est la multiplication usuelle des séries formelles), dont les lois de composition sont données par des formules polynomiales universelles, à coefficients entiers. Si la multiplication de cet anneau est notée par $f \circ g$, alors on a

$$(12) \qquad (1 + at) \circ (1 + bt) = 1 + abt,$$

$$(13) \qquad \lambda^i(1 + at) = 1 \quad (\text{élément nul de } 1 + K[[t]]^+) \qquad \text{si} \quad i > 1$$

[formules qui sont l'analogue « multiplicatif » des formules (8) et (11)]. Ces formules suffisent à caractériser [compte tenu de (9) et de l'associativité de la multiplication] les polynomes définissant la formation de $f \circ g$ et des $\lambda^i(f)$.

C'est l'étude détaillée des λ-anneaux en général, et de certains λ-anneaux particuliers (anneau des classes de fibrés vectoriels sur une variété algébrique, anneau des classes de représentations d'un groupe algébrique) qui donnait la clef de la première démonstration algébrique du théorème de Riemann-Roch, sous la forme donnée à ce théorème dans le travail qui précède. Cette démonstration n'est valable pour l'instant qu'en caractéristique 0, elle donne cependant des résultats plus fins que la deuxième méthode, utilisant les variétés éclatées. En tout état de cause, les λ-anneaux existent en grand nombre dans la nature, le formalisme auquel ils donnent lieu est des plus maniables, et l'auteur de ces lignes ne saurait trop recommander au lecteur d'en faire usage.

Ceci dit, retournons aux anneaux gradués commutatifs $A(X)$. Si E est un fibré vectoriel de rang p sur X, on désigne par $\tilde{c}(E)$, et l'on appelle *classe de Chern complétée* de E, l'élément de $\widetilde{A(X)}$ défini par

$$(14) \qquad \tilde{c}(E) = (p, c(E)) \qquad [p = \operatorname{rang}(E)].$$

Avec cette notation, les deux formules non explicitées du corollaire du théorème 1 s'écrivent simplement

$$(7\,bis) \qquad \tilde{c}\left(\overset{i}{\wedge} E\right) = \lambda^i(\tilde{c}(E)), \qquad \tilde{c}(E \otimes F) = \tilde{c}(E)\,\tilde{c}(F),$$

la formule d'additivité s'écrivant par ailleurs

$$(5\,bis) \qquad \tilde{c}(E) = \tilde{c}(E') + \tilde{c}(E'').$$

On peut donc dire aussi que *la classe de Chern complétée* $\tilde{c}(E)$ *définit un homomorphisme de* λ*-anneaux de* $K(X)$ *dans* $\widetilde{A(X)}$.

3° *Application à l'anneau de Chow.* — Soit X un espace algébrique non singulier. Rappelons que si Y est un cycle irréductible sur X, on désigne par $\gamma(Y)$ l'élément du groupe $K(X)$ des classes de faisceaux sur X défini par $\mathbf{O}_Y$, et qu'on étend par linéarité cette définition au cas où Y est un cycle quelconque. Considérons sur $K(X)$ la *filtration* décroissante par les $K^i(X)$, où $K^i(X)$ désigne le sous-groupe de $K(X)$ engendré par les classes de faisceaux cohérents sur X dont le support est de codimension $\geqq i$ [c'est-à-dire, si X est équidimensionnel de dimension n, le sous-groupe $K_{n-i}(X)$ de $K(X)$ engendré par les classes de faisceaux dont le support est de dimension $\leqq n-i$]. On montre que $K^i(X)$ est l'ensemble des $\gamma(Z)$, où Z parcourt les cycles de codimension $\geqq i$ dans X. D'autre part, soient Z, Z' deux cycles de codimension p, p' tels que le cycle intersection $Z.Z'$ soit défini. On déduit alors de la définition de la structure d'anneau de $K(X)$ (sommes alternées de Tor) et de la définition cohomologique de l'intersection de cycles par Serre qu'on a

$$\gamma(Z)\gamma(Z') \equiv \gamma(Z.Z') \qquad [\operatorname{mod} K^{p+p'+1}(X)].$$

Utilisant ceci, et la proposition 8 du présent rapport de Borel-Serre, on trouve que *si X est quasi projective, la filtration de $K(X)$ est compatible avec sa structure d'anneau;* l'homomorphisme $Z \to \gamma(Z)$ du groupe $A(X)$ des classes de cycles dans $K(X)$ est compatible avec les filtrations, et définit, par passage aux gradués associés, *un homomorphisme φ d'anneaux gradués de l'anneau de Chow $A(X)$ sur l'anneau gradué $GK(X)$ associé à $K(X)$.* Nous allons montrer que *le noyau de cet homomorphisme est un groupe de torsion.* Pour ceci, considérons l'homomorphisme $\tilde{c}$ du λ-anneau $K(X)$ dans $\widetilde{A(X)}$ envisagé dans la remarque 2. Comme $A^i(X)$ ne change pas si l'on enlève de X une partie fermée de codimension $> i$, on voit aussitôt que $\tilde{c}$ est compatible avec les filtrations, et définit donc par passage aux gradués associés *un homomorphisme ψ de $GK(X)$ dans l'anneau gradué $A'(X)$ associé à l'anneau filtré $\widetilde{A(X)}$, qui s'identifie à $A(X)$ lui-même en tant que groupe gradué.* [Quant à sa structure multiplicative, on vérifie formellement qu'elle est donnée par le produit $x_p \star y_q = -\dfrac{(p+q-1)!}{(p-1)!\,(q-1)!}x_p y_q$ pour $x_p \in A^p(X)$, $y_q \in A^q(X)$.] Ceci dit, on a les relations

$$(15) \qquad \psi\varphi = (-1)^{i-1}(i-1)!\,id, \qquad \varphi\psi = (-1)^{i-1}(i-1)!\,id$$

en degré i. Comme φ est surjectif, la deuxième formule résulte de la première, qui, en vertu de ce qui a été dit, est équivalente à l'assertion suivante : Si Y

est une sous-variété fermée non singulière de X, de codimension i, alors on a

$$(16) \qquad \begin{cases} c_j(\gamma(Y)) = 0 & \text{pour } j < i, \\ c_i(\gamma(Y)) = (-1)^{i-1}(i-1)!\, cl_X^i(Y) \end{cases}$$

[où $cl_X^i(Y)$ désigne la classe de Y dans $A^i(X)$]. [Les premières formules (16) signifient simplement que $\tilde{c}$ est compatible avec les filtrations, et ont été réécrites pour mémoire.] La formule (16) est plausible *a priori*, si l'on note que, puisque la restriction de $c_i(\gamma(Y))$ à $X - Y$ est nulle (fonctoralité des classes de Chern), $c_i(\gamma(Y))$ doit être nécessairement proportionnelle à $cl_X^i(Y)$; et que d'autre part $\psi\varphi$ doit être un homomorphisme d'anneaux de $A'(X) = G(\widetilde{A(X)})$ (dont la structure multiplicative a été explicitée ci-dessus) dans $A(X)$. Nous ne donnerons pas ici la démonstration en forme de (16), nous bornant à noter que, si l'on fait abstraction de la torsion, cette formule est un cas particulier du théorème de Riemann-Roch [appliqué à l'injection de Y dans X, et l'élément unité de $K(Y)$].

Les formules (15) montrent bien que *φ et ψ sont des isomorphismes à des groupes de torsion près.* (J'ignore si φ est même un isomorphisme; c'est du moins le cas en degrés $i = 1$ et $i = 2$.) Il en résulte aussi que *$\tilde{c}$ est un isomorphisme de $K(X)$ sur $A(X)$ à torsion près.*

Ce qui précède montre que pour prouver des formules d'intersection dans $A(X)$, on peut, si l'on néglige la torsion, faire les calculs dans $GK(X)$, c'est-à-dire en définitive dans $K(X)$, i. e. on est ramené à calculer des sommes alternées de Tor de faisceaux : c'est la méthode « sans faire bouger les cycles ». Elle permet, par exemple, de déterminer (à torsion près) l'anneau des classes de cycles d'une variété éclatée, en utilisant la formule (c) du lemme 19 du rapport de Borel-Serre, qui donne (en passant aux gradués associés) $f^\star i_\star(y) = j_\star(g^\star(y)c_{p-1}(F))$. Nous reviendrons sur ces questions dans un travail ultérieur.

5. Le cycle des zéros d'une section régulière d'un fibré vectoriel. — Dans ce numéro, nous supposerons que la catégorie $\mathbf{V}$ satisfait la condition suivante :

($\mathbf{V}$ 2) Pour tout $X \in \mathbf{V}$ et tout sous-espace fermé non singulier Y de X, on a $Y \in \mathbf{V}$.

De plus, on suppose l'axiome suivant vérifié :

A 5. Soient X, $Y \in \mathbf{V}$, Y' un sous-espace fermé non singulier de Y, f un morphisme de X dans Y transversal à Y', $X' = f^{-1}(Y')$ [donc X' est un sous-espace fermé non singulier de X, donc $X' \in \mathbf{V}$ et $p_X(X')$ est défini]. Sous ces conditions, on a

$$p_X(X') = f^\star(p_Y(Y')).$$

Soient $X \in \mathbf{V}$, E un fibré vectoriel de rang p sur X, désignons par e le fibré vectoriel constant $X \times k$ sur X, soit $\tilde{E} = E + \mathrm{e}$ le fibré vectoriel somme directe de E et e, et posons $\hat{E} = P(\tilde{E})$. L'injection $E \to \tilde{E}$ définit une injection de fibrés $P(E) \subset P(\tilde{E}) = \hat{E}$, et le complémentaire $\hat{E} - P(E)$ est isomorphe canoniquement à E : $\hat{E}$ peut s'interpréter comme le fibré déduit de E en complétant projectivement toutes les fibres de E. Soit s une section régulière de E, alors $s(X)$ est un sous-espace fermé non singulier de $\hat{E}$, donc $s(X) \in \mathbf{V}$, nous nous proposons de déterminer $p_{\hat{E}}(s(X))$. Nous allons prouver :

Lemme 3. — *Avec les notations précédentes, si s_0 est la section nulle de E, on a*

$$p_{\hat{E}}(s_0(X)) = \sum_{i=0}^{p} c_i(E)\,(\xi_{\tilde{E}})^{p-i}. \tag{17}$$

Soit X' la variété des drapeaux de E, f la projection de X' sur X, E' le fibré vectoriel $f^{-1}(E)$ sur X', s'_0 la section de E' image réciproque de s_0 par f. Alors $\hat{E}'$ est l'image réciproque de $\hat{E}$ par f, soit $\hat{f}$ le morphisme naturel de $\hat{E}'$ dans $\hat{E}$; on a donc un diagramme commutatif de morphismes :

$$\begin{array}{ccc} X & \xleftarrow{f} & X' \\ {\scriptstyle s_0}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle s'_0} \\ \hat{E} & \xleftarrow{\hat{f}} & \hat{E}' \end{array}$$

Comme $\hat{f}$ est un morphisme fibrant, il s'ensuit qu'il est transversal à tout sous-espace fermé non singulier de $\hat{E}$, et en particulier à $s_0(X)$. D'autre part, on a $\hat{f}^{-1}(s_0(X)) = s'_0(X')$. Comme $\hat{f}^*$ est injectif (lemme 1), il suffit, pour prouver (17), de prouver la formule qui s'en déduit en appliquant $\hat{f}^*$ aux deux membres. Appliquant l'axiome **A 5**, le premier membre donne alors $p_{\hat{E}'}(s'_0(X'))$, tandis que le deuxième donne $c_i(E')\,(\xi_{\tilde{E}'})^{p-i}$ [en tenant compte de la fonctoralité des c_i, et de la formule immédiate $\xi_{\tilde{E}'} = \hat{f}^*(\xi_{\tilde{E}})$]. Cela nous ramène à prouver la formule (17) dans le cas où le fibré E admet un scindage $(E_i)_{0 \leq i \leq p}$ (rang $E_i = p - i$).

Soit alors f la projection de $\hat{E} = P(\tilde{E})$ sur X, considérons le scindage

$$\tilde{E} = E_0 + \mathrm{e} \supset E_1 + \mathrm{e} \supset \ldots \supset E_p + \mathrm{e} = \mathrm{e} \supset 0$$

de $\tilde{E}$, et soit $E' = f^{-1}(\tilde{E})$. Alors sur le fibré $L_{\tilde{E}} \otimes E'$ on a aussi un scindage donc les facteurs sont les $L_{\tilde{E}} \otimes f^{-1}(E_{i-1}/E_i)$ $(1 \leq i \leq p)$ et $L_E \otimes f^{-1}(\mathrm{e}) = L_E$, et d'autre part une section canonique s, et l'on a vu dans la démonstration du théorème 1 que les conditions du lemme 2 sont vérifiées. La formule ($\bigstar$)

après le lemme 2 nous donne donc

$$p_{\hat{E}}(Y_p) = \prod_{i=1}^{p} c_1(L_{\tilde{E}} \otimes f^{-1}(E_{i-1}/E_i)),$$

où Y_p désigne l'ensemble des points de $\hat{E} = P(\tilde{E})$ formé des droites de $\tilde{E}$ qui sont contenues dans le sous-fibré $\mathbf{e}$, c'est-à-dire l'ensemble $s_0(X)$, où s_0 est la section nulle de E (E étant identifié à un ouvert de $\hat{E}$). Comme on a

$$c_1(L_{\tilde{E}} \otimes f^{-1}(E_{i-1}/E_i)) = \xi_{\tilde{E}} + f^*(\xi_i), \qquad \text{où} \quad \xi_i = c_1(\mathrm{E}_{i-1}/\mathrm{E}_i),$$

la formule (17) s'ensuit. On va en déduire le

THÉORÈME 2. — *Soient $X \in \mathbf{V}$, E un fibré vectoriel de rang p sur X, s une section régulière de E transversale à la section nulle, Y l'ensemble des zéros de s (qui est donc un sous-espace fermé non singulier de codimension p de X). Sous ces conditions, on a*

(18) $$p_X(Y) = c_p(E).$$

Considérons en effet s comme un morphisme de X dans $\hat{E}$, alors s est transversal au sous-espace fermé non singulier $s_0(X)$ de $\hat{E}$ (s_0 désignant la section nulle), donc en vertu de **A 5** on a, puisque $Y = s^{-1}(s_0(X))$:

$$p_X(Y) = s^*(p_{\hat{E}}(s_0(X))).$$

La formule (18) résulte alors de la formule (17), puisqu'on a

$$s^*(c_i(E)) = c_i(E) \qquad \text{et} \qquad s^*(\xi_{\tilde{E}}) = 0.$$

(Cette dernière formule résultant aussitôt du fait que $L_{\tilde{E}}$ induit sur E un fibré trivial, donc l'image réciproque de $L_{\tilde{E}}$ par s est le fibré trivial sur X.)

En fait, la démonstration précédente prouve la formule suivante, valable pour *toute* section régulière s de E :

(18 *bis*) $$s^*(p_{\tilde{E}}(s_0(X))) = c_p(E)$$

(où s_0 désigne la section nulle de E). On en déduit par exemple :

COROLLAIRE. — *Supposons qu'on soit en théorie de Chow ($\mathbf{V}$, catégorie des espaces algébriques quasi projectifs non singuliers; $A(X)$, anneau des classes de cycles pour l'équivalence rationnelle). Soient $X \in \mathbf{V}$, E un fibré vectoriel de rang p sur X, s une section régulière de E telle que le cycle des zéros Z de s existe. Alors la classe de Z est $c_p(E)$.*

REMARQUE. — La formule (17) est vraie quand on remplace la section nulle s_0 par une section arbitraire de E. On peut le voir en modifiant légèrement la démonstration du lemme 3, mais il est facile de déduire cette formule du théorème 2, en notant que $s(X)$ est l'ensemble des zéros d'une section (transversale à la section nulle) d'un fibré vectoriel convenable sur $P(\tilde{E})$, savoir le fibré $L_{\tilde{E}} \otimes f^{-1}(\tilde{E}/S)$, où S est le sous-fibré (trivial) de rang 1 de $\tilde{E}$ défini par la section s. Le deuxième membre de (17) n'est autre que

$$c_p(L_{\tilde{E}} \otimes f^{-1}(\tilde{E}/S)) = c_p(L_{\tilde{E}} \otimes f^{-1}(E)),$$

comme il résulte du formulaire du n° 3.

BIBLIOGRAPHIE.

[1] ATIYAH (M.). — *Complex analytic connections in fibre bundles* (*Trans. Amer. math. Soc.*, t. 85, 1957, p. 181-207).

[2] CHERN (Shung-Shen). — *On the characteristic classes of complex sphere bundles and algebraic varieties* (*Amer. J. Math.*, t. 75, 1953, p. 565-597).

[3] GROTHENDIECK (Alexandre). — *Théorème de dualité pour les faisceaux algébriques cohérents* (*Séminaire Bourbaki*, t. 9, n° 149, 1956-1957).

[4] Séminaire CHEVALLEY, *Classification des groupes de Lie*, t. 1, 1956-1958.

(Manuscrit reçu le 1er juin 1958.)

Alexander GROTHENDIECK,
74, rue Adolphe-Guyot,
Bois-Colombes (Seine).