18.4 曲线积分与路径无关性

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 设 $w = (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)\mathrm{d}x + (3^4y^2 - 6xy - 4)\mathrm{d}y$. 验证 w 在 $\mathbb{R}^2$ 上有原函数, 并利用原函数求曲线积分

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)\mathrm{d}x + (3^4y^2 - 6xy - 4)\mathrm{d}y.$$

解: 令 $P(x,y) = 4x^3y^3 - 3y^2 + 5, Q(x,y) = 3x^4y^2 - 6xy - 4$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 12x^3y^2 - 6y = \frac{\partial Q}{\partial x},$$

因此 w 有原函数, 且原函数

$$\begin{aligned} u(x,y) &= \int_{(0,0)}^{(x,y)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + C \qquad (C \text{ 为任意常数}) \\ &= \int_0^x P(x,0)\mathrm{d}x + \int_0^y Q(x,y)\mathrm{d}y + C \\ &= \int_0^x 5\mathrm{d}x + \int_0^y (3x^4y^2 - 6xy - 4)\mathrm{d}y + C \\ &= 5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y + C. \end{aligned}$$

此外

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = u(1,2) - u(0,0) = -7.$$

□

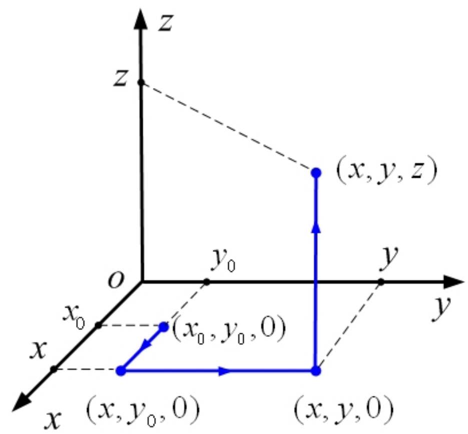
例 2 对于微分式

$$z\Big(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x^2+z^2}\Big)\mathrm{d}x + \frac{z}{xy^2}\mathrm{d}y + \Big(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\Big)\mathrm{d}z,$$

判断原函数的存在性并求出之.

解法 1 记

$$\begin{aligned} P &= z\Big(\frac{1}{x^2y} - \frac{1}{x^2+z^2}\Big), \\ Q &= \frac{z}{xy^2}, \\ R &= \Big(\frac{x}{x^2+z^2} - \frac{1}{xy}\Big). \end{aligned}$$



容易验证

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=-\frac{z}{x^2y^2},$$
$$\frac{\partial Q}{\partial z}=\frac{\partial R}{\partial y}=\frac{1}{xy^2},$$
$$\frac{\partial R}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial z}=\frac{1}{x^2y}+\frac{z^2-x^2}{(x^2+z^2)^2},$$

由定理 (18.4.2), 该微分式有原函数. 根据微分式的特点, 为计算简单起见取 $z_0=0$, $x_0, y_0>0$, 积分路径为 $(x_0,y_0,0)\longrightarrow(x,y_0,0)\longrightarrow(x,y,0)\to(x,y,z)$ (见图 18.12), 则原函数

$$\begin{aligned}\varphi(x,y,z) &= \int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}Q(x,y,z)\mathrm{d}z+C\\ &= \int_0^z\Big(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\Big)\mathrm{d}z+C=\arctan\frac{z}{x}-\frac{z}{xy}+C.\end{aligned}$$

□

解法 2 求原函数时也可用下面求不定积分的方法: 由于

$$\frac{\partial\varphi}{\partial z}=\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy},$$

则

$$\varphi(x,y,z)=\int\Big(\frac{x}{x^2+z^2}-\frac{1}{xy}\Big)\mathrm{d}z=\arctan\frac{z}{x}-\frac{z}{xy}+\psi(x,y).$$

其中 $\psi(x,y)$ 为待定的 x,y 的函数. 由此得

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi}{\partial x} &= -\frac{z}{x^2+z^2}+\frac{z}{x^2y}+\frac{\partial\psi}{\partial x},\\ \frac{\partial\varphi}{\partial y} &= \frac{z}{xy^2}+\frac{\partial\psi}{\partial y}.\end{aligned}$$

由 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=P$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}=Q$, 得

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y}=0.$$

即 $\psi(x,y)$ 为常数, 所以

$$\varphi(x,y,z)=\arctan\frac{z}{x}-\frac{z}{xy}+C.$$

□

思考题

1. 什么是单连通域? 定理 18.4.1 的证明中那个地方用到了区域是单连通的?

解: 设 D 是平面区域, 如果 D 是道路连通的, 且 D 内任一闭曲线所围的部分都属于 D , 则称 D 为平面单连通区域. 在证明 $(2)\Rightarrow(3),(3)\Rightarrow(4)$ 用到了区域是单连通的. □

2. 怎样求全微分 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 的原函数?

解: 设全微分 $P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$ 的原函数为 $u(x,y,z)$, 则

$$u(x,y,z)=\int_{x_0}^{x}P(x,y_0,z_0)\mathrm{d}x+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)\mathrm{d}y+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

□

习题

1. 先证明下列曲线积分与路径无关, 再计算积分值.

(1) 在 $\displaystyle\int_{(0,0)}^{(2,3)}(2x-y)(\mathrm{d}y-2\mathrm{d}x)$;

(2) 在 $\displaystyle\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y$,其中$\varphi(x),\psi(y)$ 是连续函数;

(3) 在 $\displaystyle\int_{(0,1)}^{(4,6)}\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 沿不通过原点的路径:

(4) 在 $\displaystyle\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)}yz\mathrm{d}x+zx\mathrm{d}y+xy\mathrm{d}z$.

解: (1) 因为

$$\int_{(0,0)}^{(2,3)}(2x-y)(\mathrm{d}y-2\mathrm{d}x)=\int_{(0,0)}^{(2,3)}(2y-4x)\mathrm{d}x+(2x-y)\mathrm{d}y,$$

于是, 令 $P=2y-4x,\quad Q=2x-y$, 则有

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=2,$$

由定理 18.4.1 可知上述积分与路径无关, 于是取路径 $(0,0)\to(2,0)\to(2,3)$, 于是

$$\begin{aligned}\int_{(0,0)}^{(2,3)}(2x-y)(\mathrm{d}y-2\mathrm{d}x)&=\int_0^2-4x\mathrm{d}x+\int_0^3(4-y)\mathrm{d}y\\&=-2x^2\Big|_0^2+\left(4y-\frac{y^2}{2}\right)\Big|_0^3\\&=-\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(2) 因为

$$\frac{\partial\phi(x)}{\partial y}=\frac{\partial\psi(y)}{\partial x}=0,$$

由定理 18.4.1 可知上述积分与路径无关, 于是取路径 $(2,1)\to(1,1)\to(1,2)$, 于是

$$\int_{(2,1)}^{(1,2)}\varphi(x)\mathrm{d}x+\psi(y)\mathrm{d}y=\int_2^1\phi(x)\mathrm{d}x+\int_1^2\psi(y)\mathrm{d}y.$$

(3) 令 $P = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad Q = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$, 容易验证

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{-2xy}{x^2+y^2},$$

由定理 18.4.1 可知上述积分与路径无关, 于是取路径 $(0,1) \to (0,6) \to (4,6)$, 于是

$$\begin{aligned}\int_{(0,1)}^{(4,6)} \frac{x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}} &= \int_1^6 \mathrm{d}y + \int_0^4 \frac{x}{\sqrt{x^2+36}}\mathrm{d}x \\ &= y\Big|_1^6 + \left(x^2+36\right)^{\frac{1}{2}}\Big|_0^4 \\ &= 2\sqrt{13} - 1.\end{aligned}$$

(4) 令 $P = yx, \quad Q = zx, \quad R = xy$, 则有

容易验证

$$\begin{aligned}\frac{\partial P}{\partial y} &= \frac{\partial Q}{\partial x} = z, \\ \frac{\partial Q}{\partial z} &= \frac{\partial R}{\partial y} = x, \\ \frac{\partial R}{\partial x} &= \frac{\partial P}{\partial z} = y,\end{aligned}$$

由定理 18.4.2 可知上述积分与路径无关, 于是取路径 $(1,2,3) \to (6,2,3) \to (6,1,3) \to (6,1,1)$, 于是

$$\begin{aligned}\int_{(1,2,3)}^{(6,1,1)} yz\mathrm{d}x + zx\mathrm{d}y + xy\mathrm{d}z &= \int_1^6 6\mathrm{d}x + \int_1^2 18\mathrm{d}y + \int_1^3 6\mathrm{d}z \\ &= 6x\Big|_1^6 + 18y\Big|_1^2 + 6z\Big|_1^3 \\ &= 0.\end{aligned}$$

□

---

2. 函数 $f(u)$ 具有一阶连续导数, 证明对任何光滑封闭曲线 L, 有

$$\oint_L f(xy)(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x) = 0.$$

证明. 令 $P = f(xy)x, \quad Q = f(xy)y$, 容易验证

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = xyf_u + f(xy),$$

由定理 18.4.1 可知上述积分与路径无关, 且对任何光滑封闭曲线 L, 有

$$\oint_L f(xy)(x\mathrm{d}y + y\mathrm{d}x) = 0.$$

▮