

第五章定性理论

§ 1 解的稳定性

1.1 李雅普诺夫稳定性

考虑方程组

$$\frac{dx}{dt} = f(t, x) \quad (E)$$

其中 $f(t, x)$ 在 $R^1 \times G$ 内连续, 且局部地满足李氏条件, 这里 G 是 x 空间的某域。

对 $(\tau, \xi) \in R^1 \times G$, 以 $x = \varphi(t, \tau, \xi)$ 表示 (E) 满足初值条件 $x(\tau) = \xi$ 的饱和解。若 $x = \varphi(t, \tau, \xi_0)$ 在有限区间 $\tau \leq t \leq T$ 上有定义, 则根据第四章 § 6 定理 6.1, 当 ξ 充分靠近 ξ_0 时, $\varphi(t, \tau, \xi)$ 也在 $\tau \leq t \leq T$ 上有定义, 并且对 t, ξ 是连续的, 因而对 $\tau \leq t \leq T$ 一致地有

$$\lim_{\xi \rightarrow \xi_0} \varphi(t, \tau, \xi) = \varphi(t, \tau, \xi_0),$$

即对任给的 $\varepsilon > 0$, 都有 $\delta > 0$, 使得只要 $|\xi - \xi_0| < \delta$, 就有

$$|\varphi(t, \tau, \xi) - \varphi(t, \tau, \xi_0)| < \varepsilon, \quad \tau \leq t \leq T.$$

然而如果将有限区间 $\tau \leq t \leq T$ 换成无限区间 $t \geq \tau$, 情况就大不相同了,

这时初值的微小变化有可能引起解的巨大变化。

例 1.1 初值问题

$$\frac{dx}{dt} = x, \quad x(\tau) = \xi$$

的饱和解为

$$\varphi(t, \tau, \xi) \equiv \xi e^{t-\tau}.$$

它对所有 $t \geq \tau$ 有定义。因为 $\varphi(t, \tau, 0) \equiv 0$ ，所以 $|\varphi(t, \tau, \xi) - \varphi(t, \tau, 0)| = |\xi| e^{t-\tau}$ ，它在无限区间 $t \geq \tau$ 上是无界的，不论 $|\xi|$ 多小，只要它不为零。

研究解在无限区间上对初值的连续性，便导致李雅普诺夫意义下的稳定性问题。

假设解 $x = \varphi(t, \tau, \xi_0)$ 于 $t \geq \tau$ 上有定义，如果对任给的 $\varepsilon > 0$ ，都有 $\delta > 0$ ，使得只要 $|\xi - \xi_0| < \delta$ 时，解 $x = \varphi(t, \tau, \xi)$ 就在 $t \geq \tau$ 上有定义，且成立

$$|\varphi(t, \tau, \xi) - \varphi(t, \tau, \xi_0)| < \varepsilon, \quad t \geq \tau,$$

则称解 $x = \varphi(t, \tau, \xi_0)$ （在李雅普诺夫意义下）是稳定的。否则，称解 $x = \varphi(t, \tau, \xi_0)$ 是不稳定的。如果 $x = \varphi(t, \tau, \xi_0)$ 是稳定的，而且存在 $\delta_0 > 0$ ，使得只要 $|\xi - \xi_0| \leq \delta_0$ ，就有

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} (\varphi(t, \tau, \xi) - \varphi(t, \tau, \xi_0)) = 0,$$

则称解 $x = \varphi(t, \tau, \xi_0)$ （在李雅普诺夫意义下）是渐近稳定的。如果 $G = \mathbb{R}^n$ ，且在渐近稳定的定义中 δ_0 可取 $+\infty$ ，则称解 $x = \varphi(t, \tau, \xi_0)$ 是全局渐近稳定的。

注 1. 1 如果解 $x = \varphi(t, \tau, \xi_0)$ 于 $t \leq \tau$ 有定义，则也可以引出负向稳定性的概念。但是在一般情况下，我们只考虑正向稳定性。

习题

1. 试对稳定性，全局渐近稳定性以及负向稳定性，负向全局渐近稳定性等概念各举一微分方程实例。

2. 设 $A: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ ， $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ 是连续的函数，考虑线性微分方程 $x' = A(t)x + f(t)$ ， $t \in [0, +\infty)$ 。

设 $\Phi(t)$ 是此微分方程对应的齐次方程的一个基本解矩阵。证明：若 $\Phi(t)$ 于 $[0, +\infty)$ 有界，则该微分方程的每一解都是稳定的。

3 . 试举一线性微分方程，其任何两条解曲线当 $t \rightarrow +\infty$ 时都充分接近，但都是无界的。

1.2 按第一近似决定稳定性

若作未知函数的变换：

$$x = y + \varphi(t, \tau, \xi_0),$$

则方程组 (E) 便化为

$$\frac{dy}{dt} = f(t, y + \varphi(t, \tau, \xi_0)) - f(t, \varphi(t, \tau, \xi_0)).$$

(E) 的解 $x = \varphi(t, \tau, \xi_0)$ 对应于上述方程组的零解 $y = 0$. 因此我们不妨就设 (E) 有零解 $x = 0$, 而且在适当的可微性假设下, (E) 可改写为

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x + R(t, x) \quad (1.1)$$

其中 $R(t, x)$ 是 $f(t, x)$ 关于 x 的展开式中所有高于一次的项的总和。齐次线性方程组

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x \quad (1.2)$$

称为 (1.1) 的第一近似方程组.

基于这种背景, 我们假设 $A(t)$ 于 $t \geq \tau$ 上连续, $R(t, x)$ 于 $t \geq \tau, |x| < H$ 上连续, 局部地满足李氏条件, $R(t, 0) \equiv 0$, 且对 $t \geq \tau$ 一致地有

$$\lim_{|x| \rightarrow 0} \frac{R(t, x)}{|x|} = 0 \quad (1.3)$$

我们先讨论如何判定 (1.2) 零解的稳定性.

定理 1.1 设 $\Phi(t)$ 是方程组 (1.2) 的一个基本解矩阵. 方程组 (1.2) 的零解

1) 是稳定的, 当且仅当 $\Phi(t)$ 于 $t \geq 0$ 上有界;

2) 是渐近稳定 (实际上是全局渐近稳定) 的, 当且仅当

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \Phi(t) = 0.$$

定理 1.2 当 $A(t)$ 是常矩阵 A 时, 方程组 (1.2) 的零解

1) 是渐近稳定 (也是全局渐近稳定) 的, 当且仅当 A 的全部特征根都有负的实部;

2) 是稳定的, 当且仅当 A 的全部特征根的实部是非正的, 并且那些实部为零的特征根对应的约当小块都是一阶的;

3) 是不稳定的, 当且仅当 A 的特征根中至少有一个实部为正, 或者至少有一个实部为零, 而它所对应的约当小块是高于二阶的。

这两个定理容易从第二章和第三章的通解结构定理推出。

方程组 (1.1) 的零解稳定性能不能由其第一近似方程组 (1.2) 的零解稳定性决定呢? 人们曾对此并不怀疑, 李雅普诺夫第一个指出, 在一般情形下, 对上述问题的回答是否定的. 同时他也正面肯定了很广泛的条件下, (1.1) 的零解的稳定性确实能够由其第一近似 (1.2) 来决定.

定理 1.3 设 $A(t)$ 是常矩阵 A .

1) 若 A 的全部特征根都具有负的实部, 则方程组 (1.1) 的零解是渐近稳定的;

2) 若 A 的特征根中至少有一个具有正的实部, 则方程组 (1.1) 的零解是不稳定的。

证明 下面证明结论 1), 结论 2) 的证明可参看[7]第 13 章定理 1.2. 证明分三步:

1. 把 (1.1) 的解 $x = \varphi(t, \tau, \xi)$ 简记为 $\varphi(t)$. 应用第二章 § 4 常数变易公式, 在 $x = \varphi(t)$ 的定义区间上,

$$\varphi(t) \equiv e^{(t-\tau)A} \xi + \int_{\tau}^t e^{(t-s)A} R(s, \varphi(s)) ds. \quad (1.4)$$

由于 A 的全部特征根实部为负, 因此存在正数 K 和 ρ 使得当 $t \geq \tau$ 时有

$$\left| e^{(t-\tau)A} \right| \leq K e^{-\rho(t-\tau)}. \quad (1.5)$$

由条件 (1.3) 知, 存在正数 δ , 使得当 $|x| \leq \delta$, $t \geq \tau$ 时有

$$|R(t, x)| \leq \frac{\rho}{2K} |x|. \quad (1.6)$$

设 $|\xi| \leq \frac{\delta}{K+1}$. 则当 $t \geq \tau$, 而 $t-\tau$ 充分小时, $x = \varphi(t)$ 停留在 $|x| \leq \delta$ 中。假设使 $x = \varphi(t)$ 停留在 $|x| < \delta$ 中的右行最大存在区间为 $\tau \leq t \leq t_1$. 则当 $t \in [\tau, t_1)$ 时, 利用 (1.5), (1.6), 由 (1.4) 可得

$$|\varphi(t)| e^{\rho(t-\tau)} \leq K |\xi| + \frac{\rho}{2} \int_{\tau}^t |\varphi(s)| e^{\rho(s-\tau)} ds.$$

2. 应用格龙瓦尔不等式 (见第四章 § 7 引理 7.1), 由此推出,

$$|\varphi(t)| \leq K |\xi| e^{-\frac{\rho(t-\tau)}{2}} \quad t \in [\tau, t_1) \quad (1.7)$$

3. 应用延展定理, 由 (1.7) 知, 必有 $t_1 = +\infty$. 再由 (1.7) 及渐近稳定的定义即知结论 1) 成立. 口

为了应用定理 1.3, 人们需要考察矩阵 A 的特征根的实部. 下述的结果常被使用 (见 [27]).

命题 1.1 设

$$P(\lambda) = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1} \lambda + a_n$$

是一实系数多项式. 记 $D_1 = a_1$, 和 $D_k = \det \begin{pmatrix} a_1 & a_3 & a_5 & \cdots & a_{2k-1} \\ 1 & a_2 & a_4 & \cdots & a_{2k-2} \\ 0 & a_1 & a_3 & \cdots & a_{2k-3} \\ 0 & 1 & a_2 & \cdots & a_{2k-4} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_k \end{pmatrix}$, $k = 2, \cdots, n$,

其中 $a_i = 0$, $i > n$. 那么, $P(\lambda) = 0$ 所有根的实部均是负的, 当且仅当 $D_k > 0$, $k = 1, \cdots, n$, 并且 $a_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$.

在所谓临界情形, 即 A 的特征根中没有实部为正但有实部为零的情形, (1.1) 的零解的稳定性不能应用定理 1.3 来判定. 这时 (1.1) 的零解的稳定性, 视具体情况而定.

例 1.2 讨论方程组

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -y + \sigma(x^3 + xy^2), \\ \frac{dy}{dt} = x + \sigma(x^2y + y^3) \end{cases}$$

零解的稳定性, 其中 σ 是常数, 取值 -1, 0 和 1.

容易算出它的第一近似方程组系数矩阵的特征根是 $\pm i$, 因此定理 5.1.3 不能用. 但是容易看出, 对上述方程组的任何解 $x = x(t), y = y(t)$ 有

$$\frac{d}{dt}(x^2(t) + y^2(t)) = 2\sigma(x^2(t) + y^2(t)).$$

若 $x = x(t), y = y(t)$ 满足初值条件 $x(0) = x_0, y(0) = y_0$, 则由上式可解出:

$$x^2(t) + y^2(t) = \frac{x_0^2 + y_0^2}{1 - 2\sigma(x_0^2 + y_0^2)t}.$$

由此看出: 当 $\sigma = -1$ 时, 零解全局渐近稳定; 当 $\sigma = 0$ 时, 零解稳定; 当 $\sigma = 1$ 时, 零解不稳定。

1.3 李雅普诺夫第二方法

为了处理稳定性问题, 李雅普诺夫创立了两种著名的方法, 即所谓第一方法和第二方法. 第一方法要利用微分方程的级数解, 在他之后没有得到多大发展, 第二方法又称为直接方法, 是寻求某个与所考虑微分方程有关的所谓李雅普诺夫函数, 根据这种函数的特性直接去判断解的稳定性。例 1.2 中的 $x^2 + y^2$ 正是这样的函数。

例 1.3 讨论方程组

$$x' = \sigma x - y^2, \quad y' = \sigma y + xy \quad (1.8)$$

零解的稳定性, 其中 σ 是常数, 取值 $-1, 0$ 和 1 .

解 取函数

$$V(x, y) = x^2 + y^2. \quad (1.9)$$

记 (1.8) 满足初值条件 $x(\tau) = x_0, y(\tau) = y_0$ 的解为 $x = x(t), y = y(t)$. 则

$$\frac{dV}{dt}(x(t), y(t)) = 2\sigma V(x(t), y(t)).$$

解之，得

$$V(x(t), y(t)) = x^2(t) + y^2(t) = (x_0^2 + y_0^2)e^{2\sigma(t-\tau)}.$$

由此可见，(1.8) 的零解当 $\sigma = -1$ 时是全局渐近稳定的；当 $\sigma = 0$ 时是稳定的；当 $\sigma = 1$ 时是不稳定的。□

这例中的函数 (1.9) 的也正是方程组 (1.8) 的李雅普诺夫函数。

现在一般地介绍李雅普诺夫第二方法. 为简单计，我们只考虑右端不显含自变量 t 的方程组 (E)

$$\frac{dx}{dt} = f(x), \quad (E)_a$$

其中 x 和 $f(x)$ 都是 n 维列向量. 这种方程组称为自治方程组, 或称为驻定系统.

假设 $f(0) = 0$ (因而 $(E)_a$ 有零解), $f(x)$ 于域 $G: |x| < H$ 上连续, 且局部地满足李氏条件.

设 $V(x)$ 为定义在

$$|x| \leq h < H \quad (1.10)$$

上的连续可微纯量函数. 如果

$$V(0) = 0, \quad V(x) > 0 \quad (V(x) < 0), \quad x \neq 0,$$

则称 $V(x)$ 是 (1.10) 上的定正 (定负) 函数; 如果

$$V(0) = 0, \quad V(x) \geq 0 \quad (V(x) \leq 0), \quad \text{则称 } V(x) \text{ 是 (1.10) 上的常正 (常负) 函数.}$$

引进记号

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(E)_a} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial V(x)}{\partial x_i} f_i(x), \quad (1.11)$$

其中 $f_i(x)$ 是 $f(x)$ 的第 i 个分量. 这通常被称为函数 $V(x)$ 沿着方程 $(E)_a$ 的方向导数.

下面的结果就是经典的李雅普诺夫稳定性定理, 它巧妙地将微分方程解的稳定性的判定与构造具有某种性质的纯量函数 (习惯上称为李雅普诺夫函数) 联系起来.

定理 1.4 设 $V(x)$ 是 (1.10) 上的定正函数.

- 1) 如果 (1.11) 是常负函数, 则 $(E)_a$ 的零解是稳定的;
- 2) 如果 (1.11) 是定负函数, 则 $(E)_a$ 的零解是渐近稳定的;
- 3) 如果 (1.11) 是定正函数, 则 $(E)_a$ 的零解是不稳定的.

证明略。

当一个微分方程组的零解为稳定, 渐近稳定或不稳定时, 是否一定存在相应的李雅普诺夫函数? 这便是著名的所谓李雅普诺夫反问题. 已有研究表明: 对这个问题的回答是肯定的. 但是理论上存在和实际上能否具体构造出来是两回事. 如何构造李雅普诺夫函数, 没有一般的方法可遵循, 至今仍是一个吸引人的研究课题,

例 1.4 讨论方程组

$$x' = y, \quad y' = -f(x, y)y - g(x) \quad (1.16)$$

零解的稳定性, 其中 $f(x, y)$ 和 $g(x)$ 连续, 且在原点 $(0, 0)$ 附近

$$f(x, y) \geq 0, \quad xg(x) > 0 \quad (x \neq 0).$$

解 取函数

$$V(x, y) = \frac{y^2}{2} + \int_0^x g(s) ds.$$

则它在原点附近是定正的, 且

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1.16)} = -f(x, y)y^2$$

是常负的, 故由定理 1.4 知 (1.16) 的零解是稳定的.

例 1.5 讨论方程组

$$x' = y^3, \quad y' = -x^3 \quad (1.17)$$

零解的稳定性.

解 取函数

$$V(x, y) = x^4 + y^4.$$

则它在原点附近是定正的, 且 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1.17)} \equiv 0$ 是常负的, 从而 (1.12) 的零解是稳定的.

实际上, 该方程组的任何解 $x = x(t), y = y(t)$ 都满足 $x^4 + y^4 \equiv c$, c 是某一常数. 可见零解只能是稳定的, 而不可能是渐近稳定的. □

例 1.6 讨论方程组

$$x' = 2y + yz - x^3, \quad y' = -x - xz - y^3, \quad z' = xy - z^3 \quad (1.18)$$

零解的稳定性.

解 尝试选取函数

$$V(x, y, z) = ax^2 + by^2 + cz^2,$$

其中 $a, b, c > 0$ 待定. 注意到

$$\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1.18)} = 2(2a-b)xy + 2(a-b+c)xyz - 2(ax^4 + by^4 + cz^4),$$

自然选取 a, b, c 使得 $2a-b=0, 2(a-b+c)=0$. 特别我们取 $a=c=1, b=2$. 对这样选取的 a, b, c , $V(x, y, z)$ 是定正的, 而 $\left. \frac{dV}{dt} \right|_{(1.18)}$ 是定负的, 故 (1.18) 的零解是渐近稳定的. □

李雅普诺夫稳定性理论已经得到很大的发展, 一些进一步的工作可参看[34]. 这里我们顺便介绍关于零解全局渐近稳定的一个重要结果: 假设 $(E)_a$ 中 $n=2$, $f(x)$ 于 \mathbb{R}^2 上连续可微, $f(0)=0$. 如果有

$$\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) > 0, \quad \text{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) < 0 \quad x \in \mathbb{R}^2,$$

则 $(E)_a$ 的零解是全局渐近稳定的, 这里 $\det\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ 表示 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的行列式, $\text{tr}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$ 表示 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 的迹.

§ 2 一般定性理论的概念

2.1 相空间, 轨线, 动力系统

考虑自治方程组 $(E)_a$. 假设 $f(x)$ 于 R^n 上连续可微,

称 x 取值的 R^n 空间为相空间. 如果把 x 看成质点的位置, t 看成时间, $(E)_a$ 看成质点的运动方程, 则方程组 $(E)_a$ 在相空间 R^n 的每一点 x 处给定了一个质点运动的速度向量:

$$f(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)), \quad (2.1)$$

因而在相空间 R^n 中定义了一个速度场. $(E)_a$ 过点 $(\tau, \xi) \in R^1 \times R^n$ 的解 $x = \varphi(t, \tau, \xi)$ 是通过相空间中点 ξ 的与速度场 (2.1) 相吻合的一条光滑曲线 (称为轨线) 的参数表示, 其中 t 就是参数, 且当 $t = \tau$ 时对应于轨线上的点 ξ . 随着 t 的推移, 在“动力” $f(x)$ 的作用下, 质点在相空间中沿着轨线运动 (因此, 有时

也称解为运动），通常在轨线上用箭头标明 t 增大时质点的运动方向，我们的任务就是从速度场(2.1)出发，力求给出 $(E)_a$ 的所有轨线的一种全面描述（称为相图）。因此，定性理论也称为几何理论

对自治方程组 $(E)_a$ ，有下述三条重要性质。

1 . 积分曲线的平移不变性，这是指对 $(E)_a$ 的任一解 $x = \varphi(t)$ 和任意常数 c ， $x = \varphi(t+c)$ 仍是 $(E)_a$ 的解，

2 . 轨线的唯一性。这是说对相空间的每一点， $(E)_a$ 只有一条轨线通过。

3 . 群性质，即若把 $(E)_a$ 的解 $x = \varphi(t, 0, \xi)$ 简记为 $x = \varphi(t, \xi)$ 则

$$\varphi(t_2, \varphi(t_1, \xi)) = \varphi(t_1 + t_2, \xi).$$

性质1 可以直接代入 $(E)_a$ 验证。性质3 可以由性质1 和初值问题解的唯一性得到，因为 $x = \varphi(t, \varphi(t_1, \xi))$ 和 $x = \varphi(t + t_1, \xi)$ 是 $(E)_a$ 满足同一初值条件 $x(0) = \varphi(t_1, \xi)$ 的解，下面证明性质2 .

设对点 $\xi \in R^n$ 方程组 $(E)_a$ 有两条轨线通过。假定它们对应于解 $x = \varphi(t)$ 和 $x = \psi(t)$ ，且有 τ_1 和 τ_2 ， $\tau_1 \neq \tau_2$ ，使得

$$\varphi(\tau_1) = \psi(\tau_2) = \xi$$

则由性质1 和初值问题解的唯一性知

$$\varphi(t) \equiv \psi(t - \tau_1 + \tau_2). \quad (2.2)$$

由此可知 $x = \varphi(t)$ 和 $x = \psi(t)$ 代表同一条轨线。这是因为 x_0 是轨线 $x = \varphi(t)$ 上的一点，即对某一个 t_1 有 $\varphi(t_1) = x_0$ ，则也处于轨线 $x = \psi(t)$ 上（因为由(2)

知， $x_0 = \varphi(t_1) = \psi(t_1 - \tau_1 + \tau_2)$ ）；反之，若 x_0 是轨线 $x = \psi(t)$ 上的一点，即存在 t_2 使得 $\psi(t_2) = x_0$ ，则 x_0 也处于轨线上 $x = \varphi(t)$ （因为由(2.2)知，

$x_0 = \psi(t_2) = \varphi(t_2 + \tau_1 - \tau_2)$ ）。于是性质2 得证，

由于

$$\varphi(t, \tau, \xi) = \varphi(t - \tau, 0, \xi)$$

因此对方程组 $(E)_a$ ，不失一般性，我们可以只考虑当 $\tau = 0$ 时从 ξ 出发的轨线

$$x = \varphi(t, \xi) = \varphi(t, 0, \xi)$$

一般来说，方程组 $(E)_a$ 的解 $x = \varphi(t, \xi)$ 未必于整个 x 轴上有定义。但由延展定理知，方程组

$$\frac{dx}{dt} = \frac{f(x)}{1 + |f(x)|}$$

的每一个解却总是在整个 t 轴上有定义的，而且它的轨线和 $(E)_a$ 相应的轨线却是相同的。所以我们不妨设 $(E)_a$ 的解 $x = \varphi(t, \xi)$ 于整个 t 轴存在。

对每一固定的 t , $\varphi(t, \xi)$ 是把点 $\xi \in R^n$ 变到点 $\varphi(t, \xi) \in R^n$ 的一个点变换，因此， $F = \{\varphi(t, \xi) : t \in R^1\}$ 是一个含单参数 t 的变换集合，也称为 $(E)_a$ 的流它具有性质：

- 1 . $\varphi(t, \xi)$ 是 (t, ξ) 的连续函数；
- 2 . $\varphi(0, \xi) = \xi$
- 3 . $\varphi(t, \varphi(s, \xi)) = \varphi(t + s, \xi)$.

如果把性质 3 视作对 F 中元素定义的乘法，则这种乘法是 F 上的代数运算，且满足结合律。 $\varphi(0, \xi)$ 是 F 中的单位元素，因为

$$\varphi(t, \varphi(0, \xi)) = \varphi(t, \xi) = \varphi(0, \varphi(t, \xi)).$$

此外， F 中任一元素 $\varphi(t, \xi)$ 都有逆元素 $\varphi(-t, \xi)$ ：

$$\varphi(t, \varphi(-t, \xi)) = \varphi(0, \xi) = \varphi(-t, \varphi(t, \xi)).$$

因此 F 构成了一个乘法群（所以性质 3 称为群性质）称为动力系统有时也把方程组 $(E)_a$ 称为动力系统这个概念是由伯克霍夫（Birkhoff，1884 — 1944）引入的，它形象地描述了微分方程的力学背景。而脱离微分方程的这种具有性质 1 — 3 的单参数连续变换群，称为一个抽象动力系统或拓扑动力系统如果 $\varphi(t, x)$ 对 t 还是可微的，则称它为微分动力系统这是微分方程理论发展的一个主要研究方向，

2.2 奇点, 闭轨, 极限集

若 $f(x_0)=0$, 则在 x_0 处(2.1)是零向量, 方向无法确定, 这种点称为方程组 $(E)_a$ 的奇点有时从速度为零这一角度而称它为平衡点。由于 $f(x_0)=0$, $x=x_0$ 显然是方程组 $(E)_a$ 的一个解, 称为定常解

2. 若存在正数 T 使得 $\varphi(T, \xi)=\xi$ 则称 $x=\varphi(t, \xi)$ 是 $(E)_a$ 的周期解, 以 T 为周期, 因为这时必有

$$\varphi(T, \xi)=\varphi(t, \xi), t \in R^1.$$

不是定常解的周期解所对应的轨线称为闭轨。

奇点和闭轨在动力系统理论的研究中, 起着特殊重要的作用. 像太阳系中九大行星运行的轨道, 某些彗星(如哈雷彗星)的轨道, 钟表中的单摆的振动, 心脏的跳动等等都可以看成闭轨。

一条闭轨 Γ 称之为稳定的, 如果对任意 $\varepsilon > 0$ 存在 Γ 的一个邻域 U 使得对每一 $\xi \in U$ 有 $d(\varphi(t, \xi), \Gamma) < \varepsilon, t \geq 0$ 否则, 闭轨 Γ 就称为不稳定的, 闭轨 Γ 称之为渐近稳定的, 如果存在 Γ 的一个邻域 U_0 , 使得对每一 $\xi \in U_0$, 有

$d(\varphi(t, \xi), \Gamma) \rightarrow 0, t \rightarrow +\infty$; 这里, $d(x, \Gamma)$ 表示点 x 到 Γ 的距离, 应该强调指出的是, 这里所说的稳定不同于李雅普诺夫意义下的稳定, 这种稳定性一般称为轨线稳定性。

为了确定 $(E)_a$ 所有轨线的分布状况, 我们必须考察每条轨线在 $t \rightarrow +\infty$ 或 $t \rightarrow -\infty$ 时的渐近性态。

假设

$$x = \varphi(t, \xi)$$

在正半轴 $t \geq 0$ 上有定义. 如果存在点 $y_0 \in R^n$ 及趋于 $+\infty$ 的点列 $\{t_k\}$ 使得

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \varphi(t_k, \xi) = y_0, \quad (2.4) \quad \text{则说 } y_0 \text{ 是轨线(2.3)的 } \omega\text{-极限点。}$$

(2.3)的 ω -极限点全体, 称为(2.3)的 ω -极限集记为 $\Omega^+(\xi)$ 。同样, 如果(2.3)在负半轴 $t \leq 0$ 上有定义, 且 $\{t_k\}$ 是趋于 $-\infty$ 的点列, 则使(2.4)成立的点 y_0 称为轨线(2.3)的 α -极限点。

(2.3)的 α -极限点全体,称为(2.3)的 α -极限集记为 $\Omega^-(\xi)$. 而 $\Omega^+(\xi) \cup \Omega^-(\xi)$ 称为(2.3)的极限集,记为 $\Omega(\xi)$

可以证明: $\Omega^+(\xi)$ 和 $\Omega^-(\xi)$ 都是闭集; 若 $p \in \Omega^+(\xi)$, 则 $\varphi(t, p) \in \Omega^+(\xi)$, 且 $\Omega^+(p) \subset \Omega^+(\xi)$; 如果 $\varphi(t, \xi)$ 在 $t \geq 0$ ($t \leq 0$)上有界, 则 $\Omega^+(\xi)$ ($\Omega^-(\xi)$)是非空的, 连通的有界闭集.

一个集合 $S \subset R^n$ 称为流 $\{\varphi(t, \xi): t \in R^1\}$ 的正(负)不变集, 如果 $\varphi(t, s) \in S, t \geq 0$ ($t \leq 0$); 如果 S 同时是正不变的和负不变的, 则称为流 $\{\varphi(t, \xi): t \in R^1\}$ 的不变集. 一个集合 $S \subset R^n$ 称为 $(E)_a$ 的最小集, 如果它是非空的, 闭的和不变的, 并且没有 S 的真子集具有这三条性质, 一个闭不变集 S 称为流 $\{\varphi(t, \xi): t \in R^1\}$ 的吸引集如果存在 S 的一个邻域 U , 使得对所有

§ 3 平面动力系统

考虑平面动力系统

$$\frac{dx}{dt} = X(x, y), \frac{dy}{dt} = Y(x, y), \quad (3.1)$$

其中 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 于平面 R^2 上连续可微,

我们将对系统的奇点, 闭轨附近轨线的性态及其全局结构给出一个简要的考察, 由于平面本身的特殊性, 使得平面动力系统的轨线分布比较单纯, 因而相应的理论也比较完善,

3.1 奇点

先研究(3.1)的奇点的性质, 不失一般性, 我们只考虑奇点是坐标原点的情形. 这是因为经简单变换, (3.1)的任一奇点都能化成原点, 而后者是另一自治系统的奇点, 假设(3.1)在点(0,0)附近能写成如下形式:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + R(x, y)$$

(3 . 2)

其中这里

A 是二阶实数矩阵, $R(x, y)$ 于点 $(0, 0)$ 附近连续可微, $R(x, y) = 0$, 且

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{R(x, y)}{r} = 0$$

如果 $\det \neq 0$, 则称 $(0, 0)$ 是 (3 . 2) 的初等奇点: 否则称它为高阶奇点. 容易想到在奇点 $(0, 0)$ 附近, (3 . 2) 的轨线分布应该和它的第一近似方程组

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

(3 . 3)

的相似, 在 $(0, 0)$ 是初等奇点的情形, 情况基本上是这样 (见后面的定理 3 .

2) . 下面我们在假设 $\det \neq 0$ 的前提下, 详细地来分析 (3 . 3) 的轨线分布.

根据矩阵化标准形的定理 (见第三章盛 2 习题), 经一非奇异线性变换, 可将 (3 . 3) 化成另一方程组, 其系数矩阵为实标准形, 记

$p = -\text{tr}A, q = \det A$. 对于初等奇点, 即当 $q \neq 0$ 时, 不外下列几种情形:

1 . 若 $q > 0, p^2 - 4q = 0$. 则 A 有二重实特征根 λ . 此时的实标准形为 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ (若尔当块是一阶的) 或 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$ (若尔当块是二阶的);

2 . 若 $q > 0, p^2 - 4q < 0$ 则 A 有两个相异实特征根 λ, μ , 且 $\lambda\mu > 0$. 此时的

实标准形为 $\begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$

3. 若 $q < 0$, 则 A 有两个相异实特征根 λ, μ , 且 $\lambda\mu < 0$. 此时的实标准形也

$$\text{是} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$$

4. 若 $q \neq 0, p^2 - 4q < 0$, 则 A 有两个互相共轭的复特征根 $\alpha + \beta i, \alpha - \beta i$, 且

$$\alpha \neq 0, \beta \neq 0. \text{ 此时的实标准形为 } \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

5. 若 $q > 0, p = 0$, 则 A 有两个纯虚特征根 $\beta i, -\beta i$. 此时的实标准形

$$\begin{pmatrix} 0 & -\beta \\ \beta & 0 \end{pmatrix}$$

不妨设矩阵 A 已具有上述标准形之一下面分别加以讨论.

I $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}$. 容易得到 (3.3) 的通解

$$x = c_1 e^{\lambda t}, y = c_2 e^{\mu t}$$

故 (3.3) 的全部轨线可表示成

$$y = c |x|^{\mu/\lambda} \text{ 和 } x = 0$$

其中 c_1, c_2, c 都是任意常数. 这时又有三种情形:

1. $\lambda = \mu$ (3.3) 的轨线族是由原点及自原点出发但不含原点的全体射线组成的, 这时称奇点 (0,0) 为星形结点或临界结点. 依入的符号有如图 3.1 所示的两种相图,

2. $\lambda \neq \mu$ 且 $\lambda\mu > 0$. 当 $\frac{\mu}{\lambda} > 1$ 时, (3.3) 的轨线除 y 轴上的两条轨线外, 其

它轨线均于原点与 y 轴相切; 当 $\frac{\mu}{\lambda} < 1$ 时, 除了 x 轴上的两条轨线外, 其它轨线

均于原点与 x 轴相切, 当 $\lambda, \mu < 0$ 时, (3.3) 的零解 (0,0) 是稳定的; 当 $\lambda, \mu > 0$

时, 零解 $(0,0)$ 是不稳定的, 我们称此种奇点 $(0,0)$ 为两向结点或正常结点. 相图如 3 . 2 所示,

3o $\lambda\mu < 0$. 时 (3 . 3) 的轨线除了在 x : 轴上的两条和在 y 轴上的两条轨线外, 均以二轴和 y 轴为其渐近线, 这种奇点 $(0,0)$ 称为鞍点相图如图 3 . 3 所示. 这时 (3 . 3) 的零解 $(0,0)$ 是不稳定的,

II. $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} (\lambda \neq 0)$ 的通解为

$$x = c_1 e^{\lambda t}, y = (c_2 + c_1 t) e^{\lambda t}$$

故 (3 . 3) 的全部轨线可表示成

$$y = cx \frac{x}{\lambda} \ln |x| \text{ 和 } x = 0$$

由此知

$$\lim_{x \rightarrow 0} y(x) = 0 \text{ 和 } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{dy}{dx} = \begin{cases} +\infty, \lambda < 0 \\ -\infty, \lambda > 0 \end{cases}$$

因此, (3 . 3) 的每一轨线都在原点与 y 轴相切, 这时称 $(0,0)$ 为单向结点或退化结点依入的符号有如图 3 . 4 所示的两种相图.

III. $A = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$ 即 A 有一对共扼的复特征根, 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

则 (3 . 3) 化为 $\frac{dr}{dt} = ar, \frac{d\theta}{dt} = \beta$

(3.4)

其通解为

$$r = c_1 e^{at}, \theta = \beta t + c_2$$

从而 (3.3) 的全部轨线的极坐标形式为

$$rt = ce^{a\theta/\beta} \quad (3.5)$$

其中 $c \geq 0$ 为任意常数. 易见, 当 $c > 0$ 时, 曲线族 (3.5) 不通过点 $(0, 0)$. 由 (3.4) 的第二式知, β 的符号决定了轨线的盘旋方向: 确切地说, $\beta > 0$ 时, 沿逆时针方向; $\beta < 0$ 时, 沿顺时针方向, 相图依 α 的不同符号分为三种: $\alpha < 0$ 时, (3.5) 是螺线族, 当 $t \rightarrow 0$ 时盘旋地趋近于点 $(0, 0)$ 因而是稳定的, 这时奇点 $(0, 0)$ 称为稳定焦点; $\alpha > 0$ 时, (3.5) 为螺线族, 只是当 $t \rightarrow -0$ 时盘旋地趋于点 $(0, 0)$, 这时我们称 $(0, 0)$ 为不稳定焦点; $\alpha = 0$ 时, (3.5) 为以 $(0, 0)$ 为心的同心圆族, 因而奇点 $(0, 0)$ 是稳定的, 但不是渐近稳定的, 它称为中心点见相图 3.5.

综合上面的讨论, 我们有如下判定初等奇点类型的结果.

定理 3.1 设 $p = -\text{tr}A, q = \det A$. 则有

- 1) 当 $q > 0, p^2 = 4q$ 时, $(0, 0)$ 为单向结点或星形结点;
- 2) 当 $q > 0, p^2 > 4q$ 时, $(0, 0)$ 为两向结点;
- 3) 当 $q < 0$ 时, $(0, 0)$ 为鞍点;
- 4) 当 $q > 0, 0 < p^2 < 4q$ 时, $(0, 0)$ 为焦点;
- 5) 当 $q > 0, p = 0$ 时, $(0, 0)$ 为中心点,

此外, 在情形 1), 2), 4) 中, 奇点 $(0, 0)$ 的稳定性由 p 的符号来决定: 当 $p > 0$ 时, $(0, 0)$ 是稳定的; 而当 $p < 0$ 时, $(0, 0)$ 是不稳定的,

现在我们来考察在何种条件下, 非线性系统 (3.2) 在原点附近与 (3.3) 有相同的定性结构. 下面的定理给出了 (3.2) 与 (3.3) 有相同稳定性的充分条件, 它的证明见专著 [36] 第二章定理 4.2 — 4.6.

定理 3.2 1) 如果 $(0, 0)$ 是 (3.3) 的焦点, 则它也是 (3.2) 的焦点, 并且它们的稳定性相同;

2) 如果 $(0, 0)$ 是 (3.3) 的鞍点或两向结点, 则它也是 (3.2) 的鞍点或两向结点, 并

且有相同的稳定性;

3) 如果 $(0,0)$ 是 (3.3) 的单向结点, 又对任给 $\varepsilon > 0$, 都有

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{R(x,y)}{r^{1+\varepsilon}} = 0$$

则 $(0,0)$ 也是 (3.2) 的单向结点, 并且稳定性相同;

4) 如果 $(0,0)$ 是 (3.3) 的星形结点, 又 $R(x,y)$ 满足条件 (3.6), 则 $(0,0)$ 也是 (3.2) 的星形结点, 并且稳定性相同,

还可以证明: 如果 $(0,0)$ 是 (3.3) 的双曲奇点, 即矩阵 A 的特征值的实部都异于零, 则只要 $R(x,y)$ 及其导数足够小, (3.2) 就局部拓扑等价于 (3.3), 即在 $(0,0)$ 的一个小邻域内, 存在一个同胚变换 (即本身及其逆都连续的变换) 将 (3.2) 的轨线变到 (3.3) 的轨线, 并且还保持轨线的方向. 这时我们称 (3.3) 在 $(0,0)$ 附近是局部结构稳定的. 这样的结果对高维动力系统同样成立,

3.2 极限环

下面研究 (3.1) 的极限环即孤立闭轨的性质, 我们将通过研究极限环来考察平面动力系统 (3.1) 的轨线分布. 所谓孤立的闭轨是指存在闭轨的一个邻域, 使得在此邻域内系统别无其它闭轨. 极限环的稳定性, 习惯上是指通常意义下的闭轨的渐近稳定性: 设 Γ 是 (3.1) 的一个极限环, 如果存在 Γ 的一个邻域, 使得从这个邻域内点出发的轨线当 $t \rightarrow +\infty (t \rightarrow -\infty)$ 时都盘旋趋于 Γ , 则称 Γ 是稳定 (不稳定) 的, 如果存在 Γ 的一侧 (内侧或外侧) 邻域, 使得从这个邻域中点出发的轨线当 $t \rightarrow +\infty (t \rightarrow -\infty)$ 时都盘旋趋于 Γ , 则称 Γ 是单侧稳定 (不稳定) 的. 有时也称一侧稳定而另一侧不稳定的极限环为半稳定极限环例 3.1 考虑方程组

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= y + x(1 - x^2 - y^2) \\ \frac{dy}{dt} &= -x + y(1 - x^2 - y^2)\end{aligned}$$

作极坐标变换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ ，时方程组变为

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= r(1-r^2) \\ \frac{d\theta}{dt} &= -1\end{aligned}$$

由此容易推知 $x^2 + y^2 = 1$ 是极限环，并且是稳定的。

我们知道，要想弄清 (3.1) 的轨线的全局分布，必须研究 (3.1) 轨线的极限集的结构，在这方面，有如下著名的庞加莱-本迪克松

Bendixson, 1861–1935) 定理

定理 3.3 设 $x = \varphi(t)$ 是 (3.1) 的一条轨线，它的 ω -限集 Ω^+ 非空，有界且不含奇点，则 Ω^+ 恰是 (3.1) 的一条闭轨，

这个定理是平面定性理论的基础，它的证明严重地依赖于平面上的约当曲线分离定理，这个证明可在任何一本关于微分方程定性理论的专著中找到。

定理 3.3 有如下简明而有用的推论，

定理 3.4 (庞加莱-本迪克松环域定理) 设 D 是由两条简单闭曲线 Γ_1 和 Γ_2 所围成的环域，并且在 $\bar{D} = \Gamma_1 \cup D \cup \Gamma_2$ 上，系统 (3.1) 无奇点，如果从 Γ_1 和 Γ_2 上出发的轨线都不离开 (都不进入) \bar{D} ，而 Γ_1 和 Γ_2 均不是轨线的闭轨，则 D 内至少存在一条闭轨

这个定理的物理意义是很明显的。设 (3.1) 描述了平面流体运动。如果流体都从边界流入 D 中又没有源或汇，那么在 D 内就有环流存在。这里源指不稳定的结点和焦点，而汇则指稳定的结点和焦点。通常 Γ_2 称为外境界线， Γ_1 称为内境界线。定理 3.4 虽然肯定了 D 内有闭轨，但没有说明闭轨是否是极限环，可以证明：如果 (3.1) 是解析向量场，即 $X(x, y)$ 和 $Y(x, y)$ 于 D 上解析，则 D 内的闭轨都是极限环，应该指出，在一般情形下，作这种环域本身就是很复杂的问题，没有一般方法可遵循，然而对某些特殊类型方程，如列娜 (Li-nard) 方程 $y'' + f(y) = 0$ (司了+夕 (司一。)，

其中函数 f (司, 抓劝是连续可微的, 二抓劝 > 0 , 二务。已有较成熟的方法 (见 [36]) •

另外一个重要的事实是: 庞加莱一本迪克松定理, 包括环域定理并不能简单地推广到相空间是 3 维以上的动力系统 (见 【1 川.

下述的关于闭轨不存在的判别准则有时也是很有用的.

定理 3 . 5 (本迪克松准则) 设 X (二, 川, y (二, 功在单连通区域 D 上是连续可微的, 若于 D 的任何子区域中散度

这仅当 $\text{div} (X, Y)$ 在 D 上恒为零或变号时才可能, 定理证完, 口判别系统 (3 . 1) 的极限环的个数及其相对位置是一个非常困难的问题, 即使对多项式系统, 即尤 (二, 功和 y (二, 川是二元多项式 (甚至是二次多项式) 情形, 极限环个数的上界问题也未获得完全解决, 后者是 1901 年希尔伯特 (Hilbert , 1862 — 1 贝 3) 提出的著名的 23 个数学难题中第 16 问题的后半部分. 许多数学家对这一问题的研究作出了不懈的努力, 其间充满反复和曲折, 一个重要的结果是: 定理 3 . 6 (有限性定理) 任何多项式系统归. 习的极限环的个数在 \mathbb{R}^2 中都是有限的.

关于这方面的研究状况可参看 [14 , 16 , 33