JIHEYUDUIYING

集合与对应

陈 泽 张孔修编

青海人民出版社

陈　泽　张孔修编

集合与对应

jihe yu duiying

青海人民出版社

集合与对应

陈　泽　张孔修　编

青海人民出版社出版
（西宁市西关大街76号）
青海省新华书店发行　青海海南印刷厂印刷
787×1092毫米1/32　印张 2.375　45,000字
1979年12月第1版　1979年12月第1次印刷
印数1—38,000
书号：13097·34　定价：0.19元

内 容 提 要

集合与对应是近代数学中两个最基本的概念。它们已经对数学的各个分支发生了深刻的影响，并且已经渗透到中小学的数学教材中，成了学生进一步学习近代数学的基础知识。

本书以比较通俗的语言，介绍了有关集合的一些基本概念和基本运算方法，用集合和对应的观点对函数、反函数和复合函数的概念作了阐述，可作为中小学数学教师的教学参考用书，同时是高中以上学生的一本较好的课外读物。对一般科技工作者、工人、有中等文化水平的干部和知识青年，在学习中也有一定的参考价值。

责任编辑 包琏瑞
封面设计 光绍天

序　言

集合和对应是近代数学中两个最基本的概念。1892年，德国数学家康托（*George Cantor*，1845—1918）在研究三角函数收敛性问题的时候，奠定了集合理论的基础。从那以后，集合和对应的思想得到越来越广泛的应用，渗透到数学的各个分支，大大简化了数学论述的语言，对数学的各个分支产生了十分深刻的影响，成为数学研究领域中十分重要的基础和工具。许多重要的近代数学理论，例如实变函数、泛函分析、拓扑学等，都是建立在集合和对应理论的基础之上的。因此，了解和熟悉集合和对应的基本原理，对于学习和掌握近代数学是一个非常重要的准备。

全国十年制中小学数学教学大纲规定，在中小学数学教材中要逐步渗透集合与对应的思想和方法，为学生进一步学习和参加社会主义现代化建设打下良好的基础。这一要求，有着重大的意义。人们都清楚，在中小学各科教学中，数学是一门重要的基础学科。为了适应工农业生产和科学技术现代化的需要，使学生尽早接触并逐步了解一些近代数学的基础知识，是十分必要的。集合和对应的思想缩小了常量数学和变量数学（即所谓初等数学和高等数学）之间衔接的距

离。因此，学生掌握了集合与对应的概念和方法，一方面可以加深对传统数学教材的理解，例如用集合的观点来解释不等式组的解、三角形和四边形的分类等，用对应的观点来解释函数概念以及函数的定义域和值域等，更能使学生易于接受这些教材，并深刻理解其内在规律；另一方面也为进一步学习近代数学和现代科学技术奠定必要的基础。从青少年的接受能力来看，只要循序渐进，教学得法，学习集合和对应的基本概念不会发生很大困难。在中小学阶段逐步掌握这方面的初步知识，也是完全可能的。

编写这本小册子的目的，主要是想比较系统地介绍有关集合和对应的基本知识，作为中小学数学教师的教学参考书和中学生的课外读物。当然，也可供对这方面有兴趣的科技工作者、工人、干部、知识青年参考。

本书分三个部分。第一部分介绍了集合，集合的元素，集合的分类，子集，集合的相等这些基本概念；第二部分介绍了并集，交集，差集，补集等概念，并且在幂集概念的基础上，说明了并、交、差、补这四种基本运算的封闭性，由此给出集代数的定义；第三部分用集合、对应的观点来阐述函数、反函数和复合函数的概念，最后从一一对应的概念出发，对集合的基数作了初步说明。本书在叙述映射和函数的定义的时候，是把多值映射和多值函数也包括在内的；而在有的书上，映射和函数都是专指单值的情况来说的。

在叙述上，本书力求通俗易懂，并且尽可能多举实例。对于一些难度较大的性质，除了用直观图来说明外，同时给出了比较严格的证明。本书还附有一定数量的练习题，以加深读者对于概念的理解。

限于我们的学识和能力，本书不免会有许多缺点，殷切希望广大读者给予指正。

这本小册子在编写过程中，曾得到青海师范学院赵得春同志的热情指导，在此谨表谢意。

编　　者

1979年5月

目　　录

一　集合 ……………………………………（ 1 ）

1. 集合的概念 ……………………………（ 1 ）

2. 子集　集合的相等 ……………………（ 7 ）

二　集合的运算 …………………………（ 15 ）

1. 并集 ……………………………………（ 15 ）

2. 交集 ……………………………………（ 18 ）

3. 差集 ……………………………………（ 25 ）

4. 补集 ……………………………………（ 29 ）

5. 全集和幂集 ……………………………（ 31 ）

三　对应与函数 …………………………（ 38 ）

1. 对应 ……………………………………（ 38 ）

2. 函数 ……………………………………（ 46 ）

3. 反函数 …………………………………（ 49 ）

4. 复合函数 ………………………………（ 54 ）

5. 集合的基数 ……………………………（ 59 ）

一 集 合

1. 集合的概念

集合（*set*）这个概念，是现代数学中一个最基本的概念。

在通常的情况下，介绍一个新的数学概念，我们都应该用已经学过的概念来说明它的意义，这就叫做给出这个新概念的定义。但是，如果要求每一个新概念都用它"前面"的概念来定义，那么"最前面"的概念又应该用怎样的概念来定义呢？因此，这个"给出定义"的要求不可能无限制地追溯上去。事实上，在数学中还有这样一些基本概念，它们的含义是不能用更简单的已知概念来解释的，而只能用一些同义语或者实例来加以描述。比如，平面几何学中的"直线"，就是一个这样的基本概念；我们现在要讨论的"集合"，也是一个这样的基本概念。

我们还是先来看看下面这些问题吧。

西宁市的电影院本周上映哪几部影片？

《安徒生童话集》里有哪几篇童话？

红星中学初一（2）班有哪些学生？

在平面内，和一个定点O的距离等于定长r的点有哪些？

有理数包括哪些数？

…………

研究这一类的问题，我们发现，它们的答案尽管各种各

样，但是也有一些相似的地方．首先，这些问题里的每一个问题的答案，都是在一定范围内的某些事物．比如，影片，童话，学生，平面内的点，数，等等．其次，每一个问题里的这些事物，都具有某种共同的属性．比如，“西宁市的电影院本周上映”的影片，“《安徒生童话集》里”的童话，“红星中学初一（2）班”的学生，平面内“和一个定点O的距离等于定长r”的点，“有理”数，等等．我们就把象上面每一个问题的答案里所包含的事物的“全体”，分别叫做一个集合．

一般说来，在一定范围内，具有某种共同属性的所有事物的全体，构成一个集合（简称为集）；而构成这个集合的每一件事物，都叫做这个集合的一个元素（*element*）．判断一件事物是不是某一个集合的元素，只要看它是否具有这个集合的全体事物所具有的共同属性就可以了．比如：

红星学校的全体学生构成一个集合，这个集合的元素的共同属性是“红星学校的学生”，因此，正在这个学校上学的姚小明是这个集合的一个元素，而他的那个只有四岁的小妹妹，不是这个集合的元素；

太阳系的所有行星构成一个集合，这个集合的元素的共同属性是“太阳系里的行星”，因此，地球是这个集合的一个元素，火星也是这个集合的一个元素，而月亮不是这个集合的元素；

全体自然数构成一个集合，这个集合的元素的共同属性是“自然数”，因此，7是这个集合的一个元素，109也是这个集合的一个元素，而-3和$\frac{2}{5}$都不是这个集合的元素；

直线l上的所有的点构成一个集合，这个集合的元素的共同属性是“在直线l上的点”，因此，在直线l上的点A是这个集合的一个元素，而不在直线l上的点B就不是这个集合的元素；

…………

通常，集合用大写字母A，B，C，M，N，……等来表示，集合的元素用小写字母a，b，c，……等来表示。如果a是集合A的元素，就说“a属于A”或者“A含有a”，记做$a\in A$。如果a不是集合A的元素，就说“a不属于A”，记做$a \overline{\in} A$。比如，设R是全体有理数构成的集合（有理数集），那么，$-\frac{1}{3}\in R$，而$\sqrt{2}\overline{\in} R$；设S是太阳系所有行星的集合，那么海王星$\in S$，而织女星$\overline{\in} S$。

在研究集合的时候，我们常常要用一个平面封闭图形（矩形或者圆）来表示一个集合，并且用这个图形中的点（有时包括部分界线或者全部界线）来表示这个集合的元素。我们把这种表示集合的图形叫做**直观图**或者**文氏图**（*Venn diagram*）。例如在图1中，$a\in A$，而$b\overline{\in} A$。

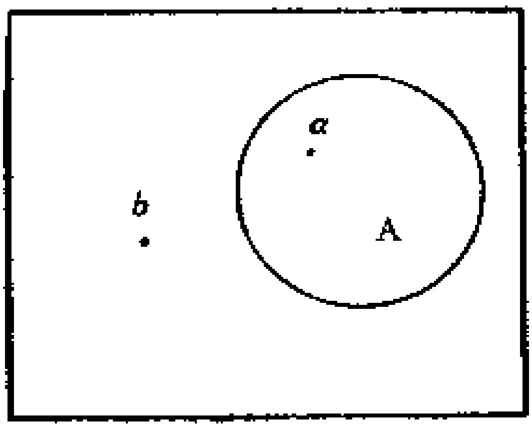


图1

对于一个给定的集合，我们总能够根据这个集合的元素所具有的共同属性，明确地判定任何一个具体的事物属于这个集合，还是不属于这个集合；反过来，一个集合是由它所含有的全体元

素唯一确定的，也就是由它的元素的共同属性唯一确定的。因此，表示一个集合，可以有下面的两种方法：

（1）在大括号中列出这个集合的所有元素。比如：

我国西北地区所有省、区的集合记做

{陕西省，甘肃省，宁夏回族自治区，新疆维吾尔自治区，青海省}；

地球的自然卫星的集合记做

{月球}；

正多面体的集合记做

{正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体，正二十面体，…}；

小于20的素数的集合记做

{2,3,5,7,11,13,17,19}；

小于40的3的正整倍数的集合记做

{3,6,9,12,…,39}；

全体自然数的集合（自然数集）记做

$\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$；

…………。

（2）在大括号中清楚地描述集合里的元素所具有的共同属性。比如：

第一中学的全体共青团员的集合记做

{第一中学的共青团员}；

全体实数的集合（实数集）记做

$\{x \mid x$是实数$\}$；

在直线MN上的所有点的集合记做

$\{P \mid P$点在直线MN上$\}$；

5的一切整倍数的集合记做

$$\{n \mid \frac{n}{5} \in Z(\text{整数集})\},$$

方程$x^2-2x-3=0$的解的集合记做

$$\{x \mid x^2-2x-3=0\};$$

闭区间$[-1,1]$记做

$$\{x \mid x^2 \leqslant 1\},\ 或者\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\};$$

…………。

为了叙述方便，通常把元素都是数的集合叫做数集，比如，自然数集，实数集等；元素都是点的集合叫做点集，比如，数轴上的点集，平面上的点集等；方程、不等式或者方程组、不等式组的解的集合叫做它们的解集，比如，方程$2x^2-x-3=0$的解集，不等式$4x^2-9>0$的解集等。

含有有限个元素的集合，叫做有限集；含有无限多个元素的集合，叫做无限集；只含有一个元素的集合，叫做单元素集；一个元素也没有的集合，叫做空集，空集通常用符号"ϕ"表示。比如，小于5的自然数的集合，一座城市的全体居民的集合等是有限集；有理数集，空间一切平面的集合等是无限集；偶素数构成的集合即$\{2\}$，平面上过不在同一条直线上的三点A、B、C的圆的集合等是单元素集；实数范围内方程$x^2+1=0$的解集，青海湖里的所有鲸的集合等是空集。和空集相对的，我们把至少含有一个元素的集合叫做非空集合。

无限集与元素很多的有限集是不同的。元素非常多以至数也数不清的集合，不一定是无限集。无限集是指那些元素怎么数也数不完的集合。有一些集合，比如，一杯水里全体水分子的集合，一个人体内所有细胞的集合，地球上所有脊

椎动物的集合，等等，虽然我们没有可能或者没有必要精确地数出它们的元素究竟有多少，但是却可以断定，如果一个一个地数下去，总有数完的时候。因此，这些集合应该是有限集，而不是无限集。

空集ϕ与只有一个元素 0 的零集$\{0\}$也是不同的。空集ϕ是指一个元素也没有的集合，而零集$\{0\}$却含有一个元素0，因此是一个非空集合。比如，方程$ax=b$的解集，当$a=0$，$b\neq0$时是空集ϕ，因为 0 与任何数的积都不能是一个非零的数；而当$a\neq0$，$b=0$时是零集$\{0\}$，因为一个非零的数只有乘以 0，积才能等于 0。

练　　习

1. 表示下面的集合，并且指出哪些是有限集合？哪些是无限集合？哪些是空集？

(1)一组交通指挥灯的颜色；

(2)一个星期内七天的名称；

(3)你的家庭的成员；

(4)24的约数；

(5)2 的一切整倍数；

(6)边长是3、5、6的直角三角形；

(7)平面内，到两个定点的距离相等的点；

(8)不等式$2x^2-x+3\leqslant0$的解。

2. (1)写出下面每一个集合的所有元素：

$A=\{$小于40的 2 的倍数$\}$；

$B=\{$小于40的 3 的倍数$\}$，

$C=\{$小于40的 5 的倍数$\}$。

（2）在下面的短划上填写“是”或者“不是”：

2 ____ 集合A的一个元素；

20 ____ 集合 B的一个元素；

20 ____ 集合C的一个元素。

（3）用记号“$\in$”，写出下列各数分别属于集合A、B、C中的哪些集合：

32；27；28；35；10；18；20；45；40；36；30；42。

3． 在下面的集合中，把不应当属于那个集合的元素去掉：

（1）$\{$体育比赛用球$\}=\{$篮球，排球，足球，地球，羽毛球，乒乓球，…$\}$；

（2）$\{a|a=n^2$，n是自然数$\}=\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 47, 64, \cdots\}$；

（3）$\{(x, y)|x-2y=0\}=(0, 0), (4, 2), (3, 1), (16, 8), (9, 4.5), \cdots\}$；

（4）$\{$与十进数 9 相等的数$\}=\{9_{10}, 1001_2, 100_3, 13_6, 23_4, \cdots\}$；〔注〕

（5）$\{F|F$是多边形$\}=\{$三角形，四边形，四面体，五边形，六边形，……$\}$。

2． 子集 集合的相等

〔注〕 数字右下角的脚标，表示记数制的基数，比如，1101_2表示1101是一个二进制的数，化成十进制的数是

$1101_2=1\times2^3+1\times2^2+0\times2^1+1\times2^0=13$，而五进制的数$142_5$化成十进制的数是

$$142_5=1\times5^2+4\times5^1+2\times5^0=47.$$

同一个事物，可以是许多不同的集合的元素。比如，一个中学生，可以是他所在班级全体学生的集合的一个元素，也可以是他所在学校全体学生的集合的一个元素，还可以是他所在城市全体居民的集合的一个元素，并且他还可能是下面这些集合的元素：

{全体共青团员}；

{少年科技活动的爱好者}；

{不戴眼镜的男孩子}；

{足球运动员}；

…………。

仔细研究这些集合，我们发现其中有这样的集合，它的每一个元素，同时又都是另一个集合的元素。比如，某中学一年级全体学生的集合的每一个元素，都是这所中学全体学生的集合的元素。

一般地，如果集合B的每一个元素都是集合A的元素，就是说当$x\in B$时，总有$x\in A$，那么，集合B就叫做集合A的子集（subset），记做$B\subseteq A$（读做B包含在A中）或者$A\supseteq B$（读做A包含B）（图2）。比如：

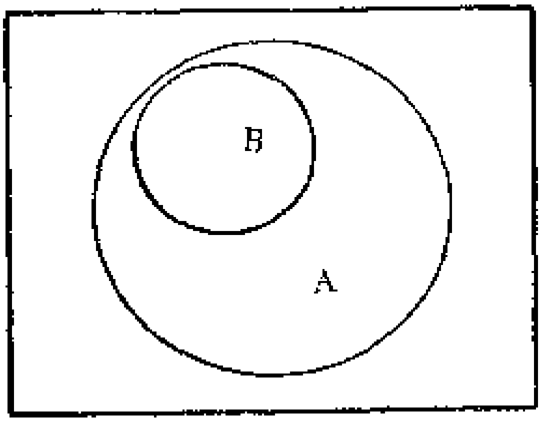


图 2

设$A=${所有欧洲国家}，$B=${斯堪的纳维亚半岛的国家}，则$B\subseteq A$；

设$P=\{x\mid x$是多边形$\}$，$T=\{x\mid x$是三角形$\}$，则$T\subseteq P$；

设$N=\{x|x$是自然数$\}$，$E=\{x|x$是正偶数$\}$，则$E\subseteq N$；

设$F=\{x|x$是等腰三角形$\}$，$G=\{x|x$是有两个角相等的三角形$\}$，则$G\subseteq F$；

设$S=\{x|x-3=0\}$，$S'=\{x|(x-3)(x^2+1)=0\}$，则$S\subseteq S'$；

…………。

显然，对于任意的集合A，B，C，我们都有

(1)$A\subseteq A$（任何集合都是它自身的子集）；

(2)如果$B\subseteq A$，$C\subseteq B$，那么，$C\subseteq A$（包含的传递性）；

(3)$\phi\subseteq A$（空集是任意一个集合的子集）。

对最后一个性质需要解释几句。因为空集ϕ里一个元素也没有，所以如果说x是空集ϕ的一个元素的话（当然，这样的x是不存在的），那么，x也就可以是任意一个集合的元素。这正象俗话说的：如果太阳能从西边出来，你叫我干什么都可以。用数学式子来表示，就是：如果有一个$x\in\phi$的话，那么，就一定有$x\in A$；或者换一个说法，如果$x\overline{\in}A$，就一定可以得到$x\overline{\in}\phi$（其实，这个式子对于任何一个事物x都是成立的，而不管这个x是不是集合A的元素）。

上面举的五个例子，虽然在每一个例子中总有一个集合是另一个集合的子集，但情况并不完全一样。前三个例子里，比如，斯堪的纳维亚半岛的每一个国家都是欧洲国家，但欧洲国家里却确实有一些国家（如法国）不是斯堪的纳维亚半岛的国家；每一个正偶数都是自然数，但也的确有象3这样的自然数不是偶数。

一般地，如果集合B是集合A的子集，并且集合A中至少有一个元素不属于集合B，那么，集合B叫做集合A的真子集（*proper subset*），记做$B\subset A$。比如，集合$\{1,2,3,6\}$是集合$\{1,2,3,4,6,12\}$的真子集；设A是所有四边形的集合，B是所有平行四边形的集合，C是所有菱形的集合，D是所有正方形的集合，那么，$D\subset C\subset B\subset A$。

符号“$\in$”和“$\subset$”（或者“$\subseteq$”）表示的是两种根本不同的关系：前者表示一个事物与一个集合之间的从属关系，后者则表示两个集合之间的包含关系。

上面五个例子的后两个例子里，比如，每一个有两个角相等的三角形都是等腰三角形，并且不会有一个等腰三角形中没有两个角相等；方程$x-3=0$的解也是方程$(x-3)(x^2+1)=0$的解，并且在实数范围内方程$(x-3)(x^2+1)=0$再没有其他的解。换句话说，这些例子里的每两个集合都有完全相同的元素。

象这样，如果集合A与集合B有完全相同的元素，那么，集合A与集合B叫做相等的集（*equal sets*），记为$A=B$。比如，

设$A=\{2,3\}$，$B=\{x|x^2-5x+6=0\}$，则$A=B$；

设$M=\{$全体偶素数$\}$，$N=\{x|x-2=0\}$，则$M=N$；

…………。

显然，对于任意的集合A，B，C，我们都有

（1）$A=A$（反身性）；

（2）如果$A=B$，那么，$B=A$（对称性）；

（3）如果$A=B$，$B=C$，那么，$A=C$（传递性）。

由两个集合相等的定义，我们可以得到：集合A与集合

B 相等的充分必要条件是$B\subseteq A$，并且$A\subseteq B$.

平面几何中关于动点轨迹的问题，以及解析几何中关于曲线方程的问题，本质上都是关于两个集合相等的问题。因此，在证明这类问题的时候，实际上是利用了集合相等的充分必要条件。

例 1 求证：到两个定点的距离相等的动点的轨迹是连结这两个定点的线段的垂直平分线.

证明 设A={到定点M、N距离相等的所有的点}，B={线段MN的垂直平分线l上的所有的点}.

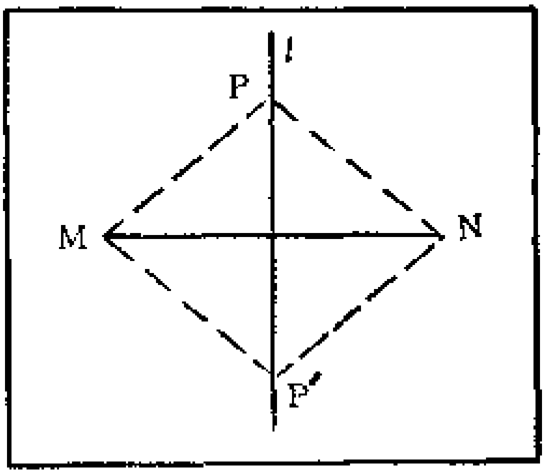


图 3

∵ 在线段的垂直平分线上的点到线段两端的距离相等，

∴对于任意的点$P\in B$，都有$P\in A$，即$B\subseteq A$；

∵ 到线段两端距离相等的点在线段的垂直平分线上，

∴ 对于任意的点$P'\in A$，都有$P'\in B$，即$A\subseteq B$.

因此，$A=B$，也就是说，到两个定点的距离相等的动点的轨迹是连结这两个定点的线段的垂直平分线.

例 2 求证：以原点为圆心，以r($r\geqslant 0$)为半径的圆的方程是$x^2+y^2=r^2$.

证明 设C={平面上以原点为圆心，以r为半径的圆上的所有的点}，E={坐标适合于方程 $x^2+y^2=r^2$ 的所有的点}.

∵　以原点为圆心，以r为半径的圆上任意一点的坐标都适合于方程

$$x^2+y^2=r^2,$$

∴　$C\subseteq E$；

∵　坐标适合于方程$x^2+y^2=r^2$的任意一点都在以原点为圆心，以r为半径的圆上，

∴　$E\subseteq C$。

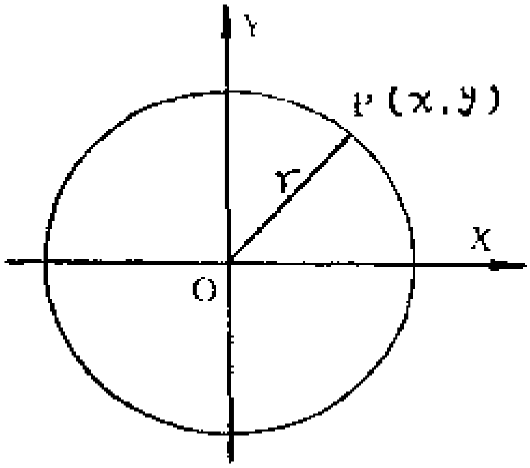


图 4

因此，$C=E$，也就是说，以原点为圆心，以r为半径的圆的方程是$x^2+y^2=r^2$。

集合的相等与集合里元素个数的相等，是两个完全不同的概念。比如，两支球队比赛篮球，每队5个人，如果分别用两个集合来表示这两支球队，那么，这两个集合的元素个数相等，但是这两个集合是不相等的，因为正在比赛的两支篮球队绝不可能有相同的5个运动员。再比如，两个盒子，每个盒子里装6个乒乓球，如果分别用两个集合来表示这两盒乒乓球，那么，这两个集合的元素个数相等，但是这两个集合也是不相等的，因为把乒乓球看作一个集合的元素，任何两个相异的乒乓球都应该认为是不同的元素，尽管它们的形状大小完全一样。

反过来，如果用A表示装在一个盒子里的所有乒乓球的集合，现在把这些乒乓球全部倒在一张球台上（假定这张球台上原来没有任何别的乒乓球），并且用B来表示在球台上的所有乒乓球的集合，那么，$A=B$，因为原来装在盒子里

的和后来放在球台上的，是一些完全相同的乒乓球。

练　　习

1. 如果用A表示青海省所有汽车的集合，你能写出集合A的四个子集吗？你能举出一个与集合A相等的集合的例子吗？

2. 写出集合$\{1, 2, 3, 4\}$的所有具有三个元素的子集。

3. 下面的集合中，哪些集合之间有包含的关系？哪些集合是相等的？

（1） $A=\{$所有三角形$\}$；

（2） $B=\{$全体直角三角形$\}$；

（3） $C=\{$两个内角都等于$45°$的所有三角形$\}$；

（4） $D=\{$两个内角互余的所有三角形$\}$；

（5） $E=\{$全体等腰直角三角形$\}$。

4. 设自然数集$N=\{1,2,3,\cdots\}$，并且：

$A=\{x \mid x$是偶数$\}$；

$B=\{x \mid x=2y$，并且$y\in N\}$；

$C=\{x \mid x>1$，并且$x\in N\}$；

$D=\{x \mid x=2\}$；

$E=\{x \mid x$是偶素数$\}$；

$F=\{x \mid x=y+1$，并且$y\in N\}$。

数2属于上列集合中的哪些集合？数3属于上列集合中的哪些集合？哪些集合是相等的？哪些集合之间有包含的关系？

5. 设A是全体等边三角形的集合，B是三个内角都相等的全体三角形的集合，试证：$A=B$。

6. 判别下列各题中两个方程的解集，是相等的集，还是一个是另一个的真子集？

（1） $5x+2=7x-8$ 与 $5x+2-7x-2$
$=7x-8-7x-2$；

（2） $\dfrac{5y-1}{6}=\dfrac{7}{3}$ 与 $\dfrac{5y-1}{6}\times 6=\dfrac{7}{3}\times 6$；

（3） $\dfrac{x}{x-5}+\dfrac{x}{x-1}=\dfrac{-4}{(x-5)(x-1)}$
与 $x(x-1)+x(x-5)=-4$；

（4） $(x-3)(2x^2+1)=(3x+5)(2x^2+1)$
与 $x-3=3x+5$；

（5） $x^2=x$ 与 $x=1$；

（6） $\sqrt{x+5}=x-1$ 与 $x+5=(x-1)^2$。

二　集合的运算

1. 并集

车间办公室出了一个通知：

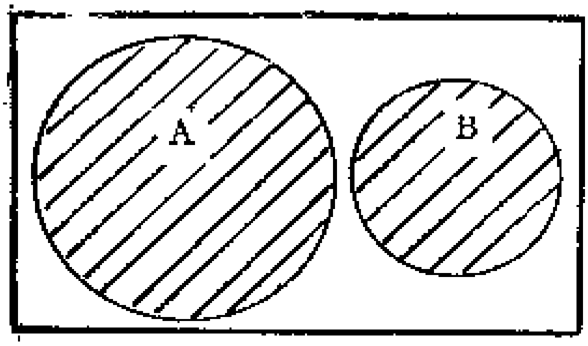
“今天下班以后，技术革新小组的全体成员和全体班组长在车间办公室开会，研究技术攻关问题。”

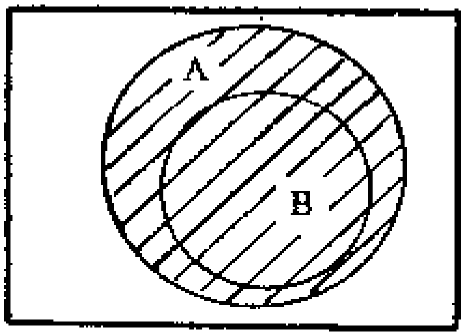
既是技术小组的成员又是班组长的工人，当然应该参加这个会议；其实，只要有技术革新小组成员或者班组长这两种身份中的任何一种身份的工人，都应该参加这个会议。换句话说，参加这个会议的全体工人包括了技术革新小组的全体工人和担任班组长的全体工人，而不管其中是不是有人同时兼有两种身份。

象这样，把集合A与集合B的所有元素合并在一起，构成一个新的集合S，集合S就叫做集合A与集合B的并集(Union)，记做$S=A\cup B$(读做A与B的并)，$\cup$叫作并运算。显然，如果x是并集S的元素，那么，x或者是集合A的元素，或者是集合B的元素，或者同时是集合A与集合B的元素；反过来，如果x是集合A的元素，或者是集合B的元素，或者同时是集合A与集合B的元素，那么，x是集合A与集合B的并集S的元素。这就是说，

$$S=A\cup B=\{x\mid x\in A,\text{或者}x\in B\}.$$

表示两个集合的并集，可以用如图 5 这样的直观图。图中的阴影部分表示$A\cup B$。





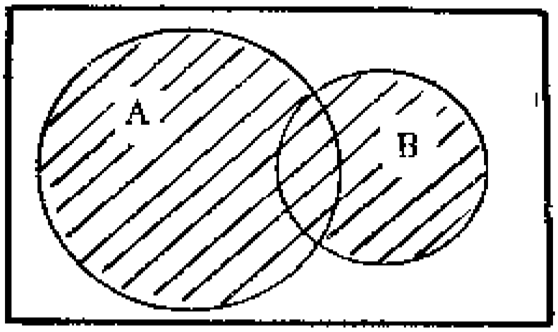


图 5

比如：

设A＝{语文成绩是100分的学生}，B＝{数学成绩是 100分的学生}，则$A\cup B$＝{语文、数学成绩至少有一门是 100分的学生}；

设$A=\{a|0\leqslant a\leqslant 3\}$，$B=\{b|1\leqslant b\leqslant 4\}$，则

$$A\cup B=\{x|0\leqslant x\leqslant 4\};$$

设$A=\{x|x-2=0\}$，$B=\{x|x+5=0\}$，则

$$A\cup B=\{x|(x-2)(x+5)=0\};$$

…………。

注意　如果一个元素同时属于集合A和集合B，那么，这个元素在并集$A\cup B$中只能出现一次。比如，设$A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$，则$A\cup B=\{1,2,3,4,5,7,9\}$。

根据定义，显然可以得到，对于任意的集合A、B，有$A\subseteq A\cup B$，$B\subseteq A\cup B$。

并集的概念还可以推广到任意多个集合的情形。设有有限个集合A_1，A_2，…，A_n或者无限个集合A_1，A_2,…，A_n，…，那么，这些集合的所有元素合并在一起构成的集合，叫做这些集合的并集，分别记做$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n$(缩写做$\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$)或者$A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n\cup\cdots$(缩写做$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$)。

比如：

设A＝{第八届亚运会上我国获得金牌的项目}＝{田径，体操，球类，跳水，射击，击剑，举重}，B＝{第八届亚运会上我国获得银牌的项目}＝{田径，体操，球类，游泳，跳水，射击，击剑，举重，自行车}，C＝{第八届亚运会上我国获得铜牌的项目}＝{田径，体操，球类，游泳，射击，举重，自行车，摔跤}，则$A\cup B\cup C$＝{第八届亚运会上我国得奖的项目}＝{田径，体操，球类，游泳，射击，击剑，跳水，举重，自行车，摔跤}；

设A_1＝{全体有限小数}，A_2＝{全体无限循环小数}，A_3＝{全体无限不循环小数}，则$A_1\cup A_2\cup A_3$＝{全体实数}；

设A_i($i=1,2,3,\cdots$)是恰好能被2^{i-1}除尽的自然数的集合，即

$A_1=\{1,3,5,7,\cdots\}$，

$A_2=\{2,6,10,14,\cdots\}$，

$A_3=\{4,12,20,28,\cdots\}$，

$A_4=\{8,24,40,56,\cdots\}$，

…………，

则 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ 是全体自然数的集合。

对于任意的集合 A，B，C，我们都有

（1） $A \cup B = B \cup A$（交换律）；

（2） $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$（结合律）；

（3） 如果 $B \subseteq A$，那么，$A \cup B = A$（图6）；特别地，$A \cup A = A$，$\phi \cup A = A$。

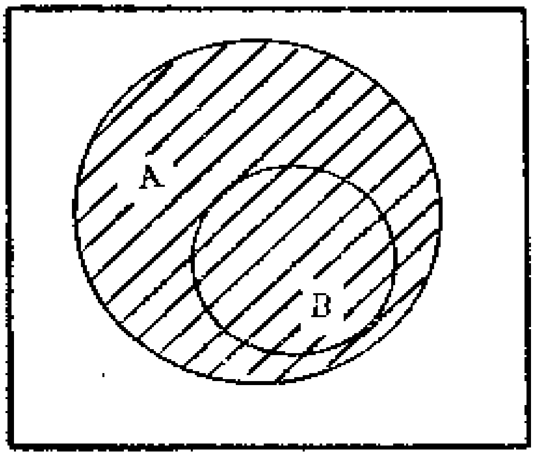


图6

前两个性质跟数的加法交换律、加法结合律类似，但在数的加法中却没有跟性质（3）相仿的性质。现在，我们来证明这个性质。

因为，对于任意的集合 A、B，都有 $A \subseteq A \cup B$，所以，只要证明当 $B \subseteq A$ 时，$A \cup B \subseteq A$，性质（3）就得到证明。

设 $x \in A \cup B$，根据并集的定义，我们有 $x \in A$ 或者 $x \in B$。如果 $x \in A$，则 $A \cup B \subseteq A$；如果 $x \in B$，则因 $B \subseteq A$，仍然得到 $x \in A$，$A \cup B \subseteq A$。

$\because$ $A \subseteq A \cup B$，$A \cup B \subseteq A$，

$\therefore$ 当 $B \subseteq A$ 时，$A \cup B = A$。

2． **交集**

学校里举行数学竞赛和物理竞赛，参加数学竞赛的全部学生组成一个集合 A，参加物理竞赛的全部学生组成一个集

合B．那些同时参加数学竞赛和物理竞赛的学生，又可以构成一个新的集合，并且明显地，这个集合里的每一个元素，都应该既是集合A的元素，又是集合B的元素，也就是集合A与集合B的公共元素．

由集合A与集合B的所有公共元素构成的集合K，叫做集合A与集合B的交集（intersection），记做$K=A\cap B$（读做A与B的交），$\cap$叫做交运算．显然，如果x同时是集合A与集合B的元素，那么，x就是它们的交集K的元素；反过来，如果x是集合A与集合B的交集K的元素，那么，x既是集合A的元素，又是集合B的元素．这就是说，

$$K=A\cap B=\{x\mid x\in A,\text{并且}x\in B\}.$$

可以用如图 7 这样的直观图来表示两个集合的交集．图中阴影部分表示$A\cap B$．

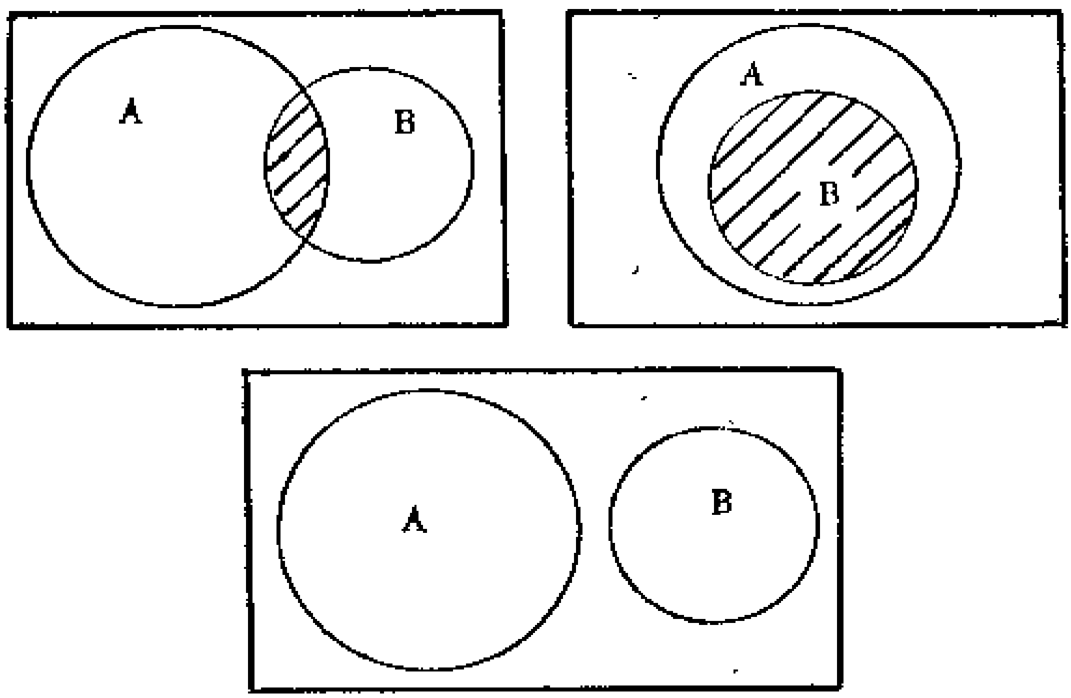


图 7

比如：

设$A=\{12$的所有约数$\}=\{1,2,3,4,6,12\}$，$B=\{18$的所有约数$\}=\{1,2,3,6,9,18\}$，则$A\cap B=\{12$与18的所有公约数$\}=\{1,2,3,6\}$，其中，12与18的最大公约数

$(12,\ 18)=6$；

设$M=\{$全体等腰三角形$\}$，$N=\{$全体直角三角形$\}$，则$M\cap N=\{$全体等腰直角三角形$\}$；

设$P=\{(x,\ y)|2x-y=7\}$，

$Q=\{(x,\ y)|x+2y=-4\}$，则

$P\cap Q=\{(x,y)|2x-y=7$，并且$x+2y=-4\}$，即$P\cap Q$是方程组

$$\begin{cases}2x-y=7,\\x+2y=-4\end{cases}$$

的解集；

…………。

如果集合A与集合B没有公共元素，就说集合A与集合B不相交（*disjoint*），这时，$A\cap B=\phi$。如图7中的第3图所示。

显然，对于任意的集合A，B，有

$$A\cap B\subseteq A,\quad A\cap B\subseteq B.$$

交集的概念也可以推广到任意多个集合的情形，集合A_1，A_2，…，A_n或者A_1，A_2，…，A_n，…的所有公共元素构成的集合，叫做这些集合的交集，分别记做$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n$（$\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$），或者$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots$（$\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}A_i$），比如：

设 $A=\{x|x<3\}$,$B=\{x|x>-1\}$,$C=\{x|-3\leqslant x\leqslant 2\}$,则 $A\cap B\cap C=\{x|-1<x\leqslant 2\}$;

设 $A=\{$直线a上所有的点$\}$,$A_i=\{$线段a_i上所有的点$\}$($i=1$, 2, …),并且 $A\supset A_1\supseteq A_2\supseteq\cdots\supseteq A_n\supseteq\cdots$. 如果无论给出怎样小的线段$b$,总能有一充分大的 k,使$a_k<b$,那么,直线a上存在唯一的一点C,使 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n\cap\cdots=\{C\}$. 这个性质在平面几何学中叫做康托公理(连续公理之一).

对于任意的集合A,B,C,都有

(1) $A\cap B=B\cap A$(交换律);

(2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$(结合律);

(3) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$,

$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$(分配律);

(4) 如果$B\subseteq A$,那么,$A\cap B=B$,特别地,$A\cap A=A$,$A\cap\phi=\phi$;

(5) $A\cup(A\cap B)=A$,

$A\cap(A\cup B)=A$(吸收律).

性质(1)、(2)以及性质(3)中的第一个等式,分别跟数的乘法的交换律、结合律以及乘法对于加法的分配律类似;但在数的乘法中却没有跟性质(3)中第二个等式相类似的性质,比如,$3+(2\times 5)\neq(3+2)\times(3+5)$. 下面,我们来证明这个性质.

设$x\in A\cup(B\cap C)$,则$x\in A$,或者$x\in B\cap C$.

如果$x\in A$,那么,就有$x\in A\cup B$,同时,$x\in A\cup C$,

$\therefore\quad x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

如果$x\in B\cap C$,那么,就有$x\in B$,同时,$x\in C$,

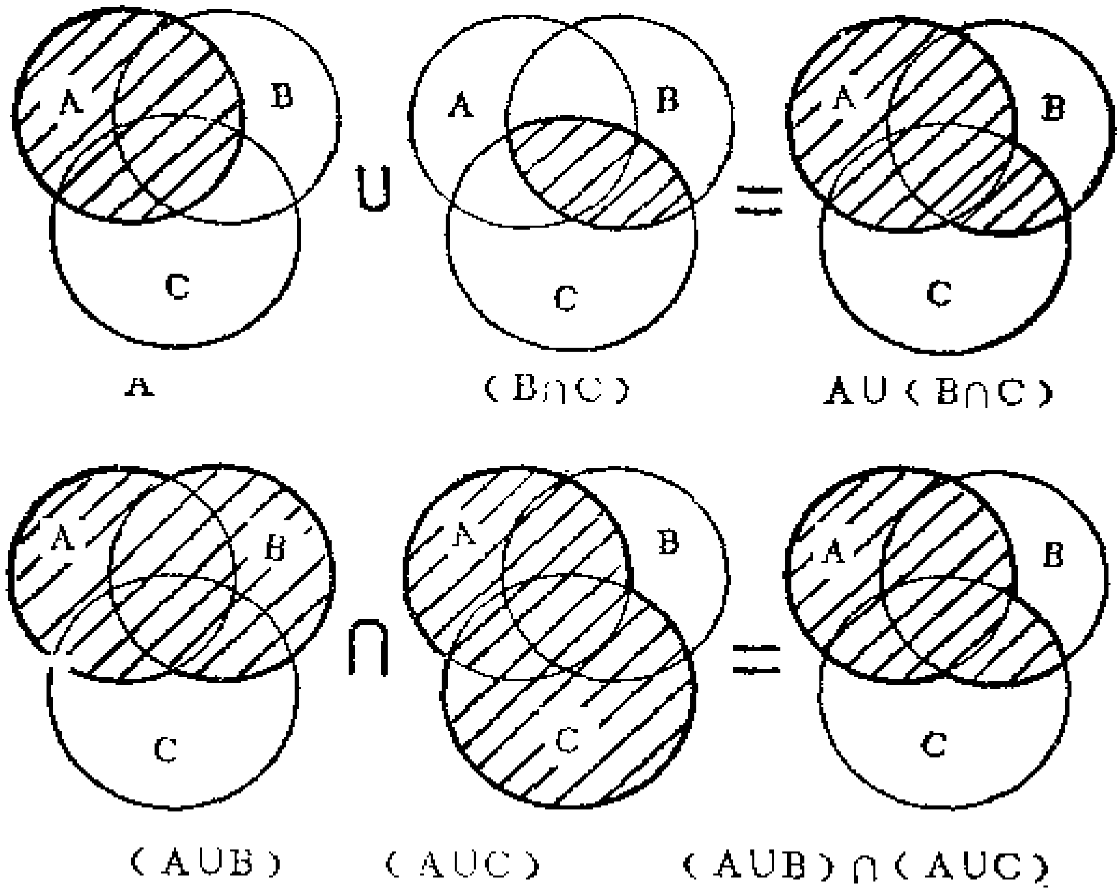


图 8

∴　$x \in A \cup B$，同时，$x \in A \cup C$，

∴　$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$。

这就是说，只要$x \in A \cup (B \cap C)$，总有$x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$，即

$$A \cup (B \cap C) \subseteq (A \cup B) \cap (A \cup C). \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

反过来，设$x' \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$，则$x' \in A \cup B$，同时，$x' \in A \cup C$。

∵　$x' \in A \cup B$，∴　$x' \in A$或者$x' \in B$；

∵　$x' \in A \cup C$，∴　$x' \in A$或者$x' \in C$。

如果$x' \in A$，那么，$x' \in A \cup (B \cap C)$；

如果$x'\notin A$，就有$x'\in B$，同时$x'\in C$，

$\therefore\quad x'\in B\cap C$，从而$x'\in A\cup(B\cap C)$。

这就是说，只要$x'\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，总有$x'\in A\cup(B\cap C)$，即

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C)。\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

由(1)及(2)可知，

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)。$$

现在，我们来证明性质(5)的两个等式。

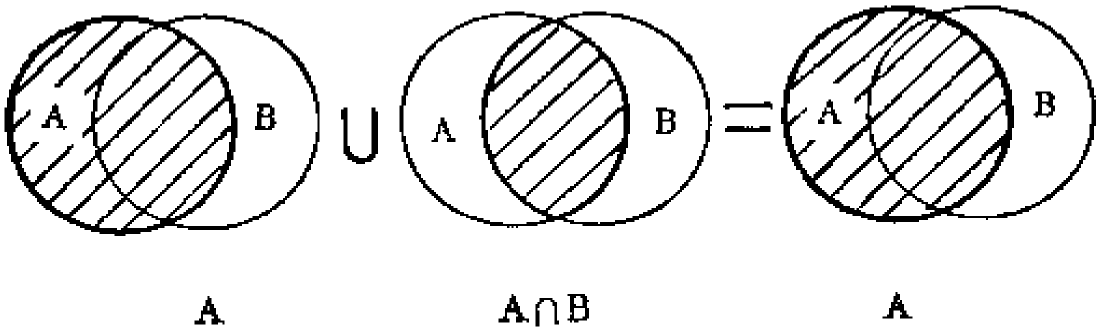


图 9

$\because\quad A\cap B\subseteq A$，$\therefore\quad A\cup(A\cap B)=A$(关于并集的性质3)同样，

$\because\quad A\subseteq A\cup B$，$\therefore\quad A\cap(A\cup B)=A$(性质4)。

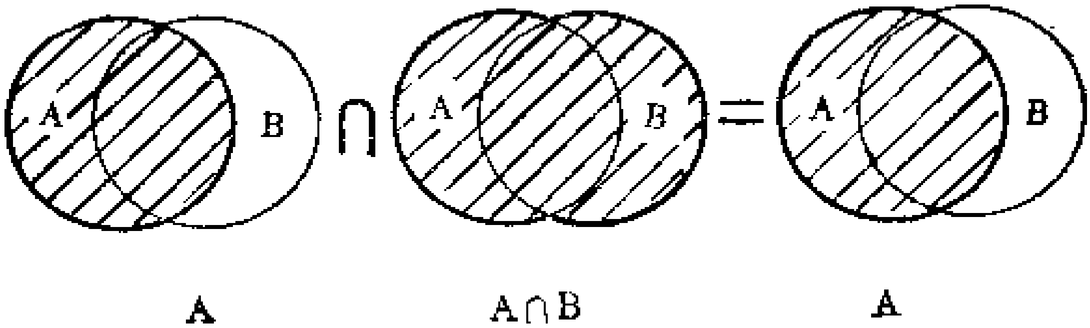


图10

练　　习

1. 已知$A=\{2,4,6,8,10,12\}$，$B=\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$，$C=\{6,7,8,9,10,11\}$.

（1） 列出集合$A\cup B$和$B\cup C$的元素；

（2） 求出$(A\cup B)\cup C$和$A\cup(B\cup C)$，它们是否相等？

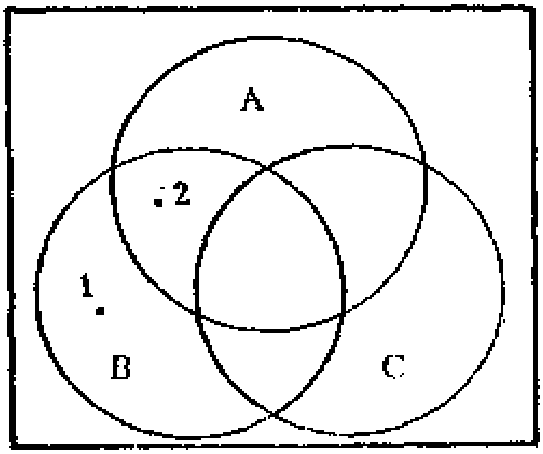


图11

（3） 列出集合$A\cap B$和$B\cap C$的元素；

（4） 求出$(A\cap B)\cap C$和$A\cap(B\cap C)$，它们是否相等？

（5） 画出左图，在适当的区域上"标出"数1，2，3，4，5，6，7，8，9，10，11，12.（数1和2已经"标出"）

2. 设$A=\{$全体自然数$\}$，$B=\{0\}$，$C=\{$全体负整数$\}$，$A\cup B\cup C$表示怎样的集合？

3. 设$E=\{$等边三角形$\}$，$I=\{$等腰三角形$\}$，$O=\{$钝角三角形$\}$，$R=\{$直角三角形$\}$，如果可能，分别画一个属于以下集合的三角形：

（1） $I\cap R$；　　（2） $O\cap R$；

（3） $I\cap E$；　　（4） $O\cap I$.

4. 设$M=\{$矩形$\}$，$N=\{$菱形$\}$，说出$M\cap N$的元素是

怎样的图形。

5． 证明：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

6． 用直观图验证：（1） 当$B\cap C=\phi$时，（2） 当$C\subseteq A$时，

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

7． 利用关于交集的性质（3）、（4），证明性质（5）的两个等式是等价的．

3． **差集**

在集合A中，但不在集合B中的所有元素构成的集合D，叫做集合A与集合B的差集（*difference set*），记做$A\setminus B$，$\setminus$叫做差运算．就是说，$D=A\setminus B=\{x|x\in A$，而且$x\overline{\in}B\}$．

图12中的阴影部分表示$A\setminus B$。

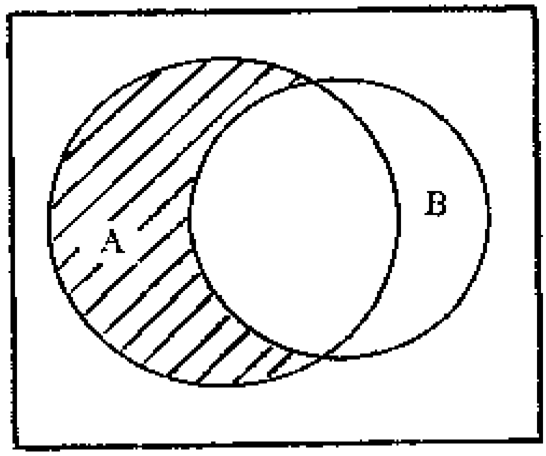


图12

比如：

设A表示初中一年级的全体学生的集合，B表示全体女学生的集合，则它们的差集$A\setminus B$表示初中一年级全体男生的集合；

设$C=\{1,2,3,4,5\}$，$E=\{$全体偶数$\}$，则$C\setminus E=\{1,3,5\}$；

设$F=\{x|(2x+3)(x+1)=(x+3)^2\}$，$G=\{x|x+2=0\}$，则方程$\dfrac{(2x+3)(x+1)}{x+2}=\dfrac{(x+3)^2}{x+2}$的解集是

$F\setminus G=\{-3\}$；

设$R=\{$全体实数$\}$，$S=\{x|-5<x<5\}$，则代数式$\sqrt{x^2-25}$中x的可取值范围是

$R\setminus S=\{x||x|\geqslant 5\}$；

…………。

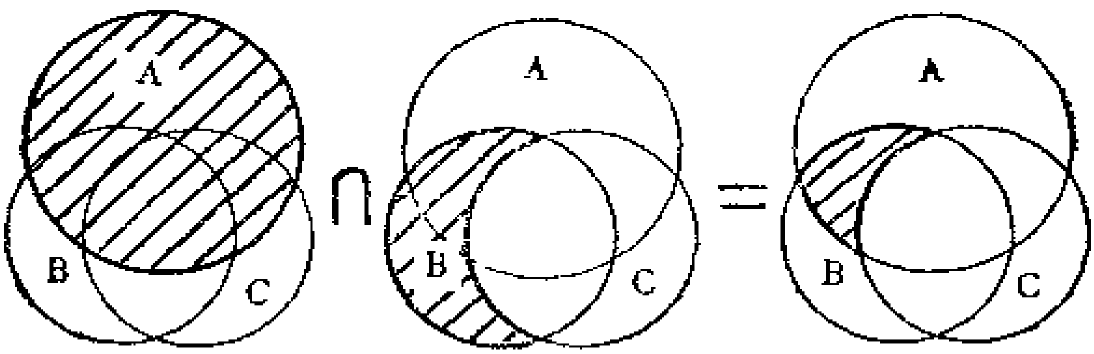
对于任意的集合A，B，C，都有

（1） $A\setminus A=\phi$，$A\setminus\phi=A$，$\phi\setminus A=\phi$；

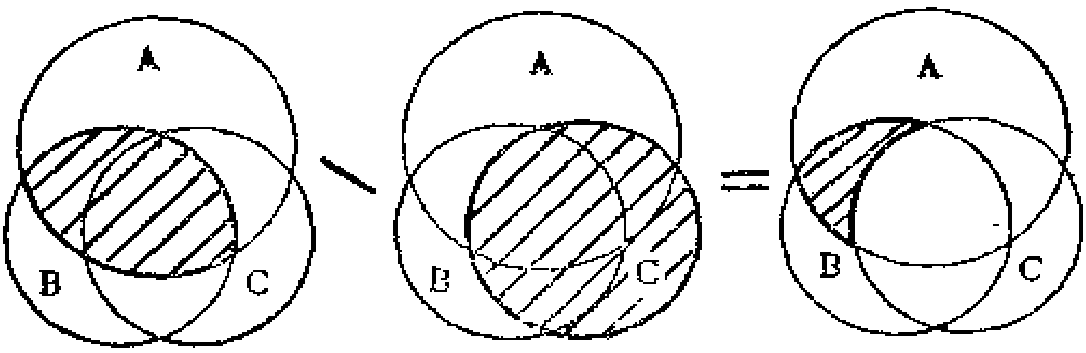
（2） 如果$A\subseteq B$，那么$A\setminus B=\phi$；

（3） $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$，

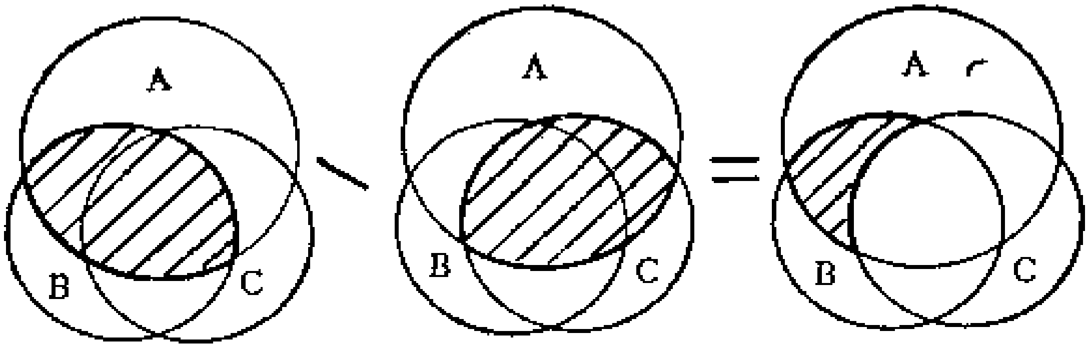
$=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$；



A　　　　B＼C　　　　A∩（B＼C）



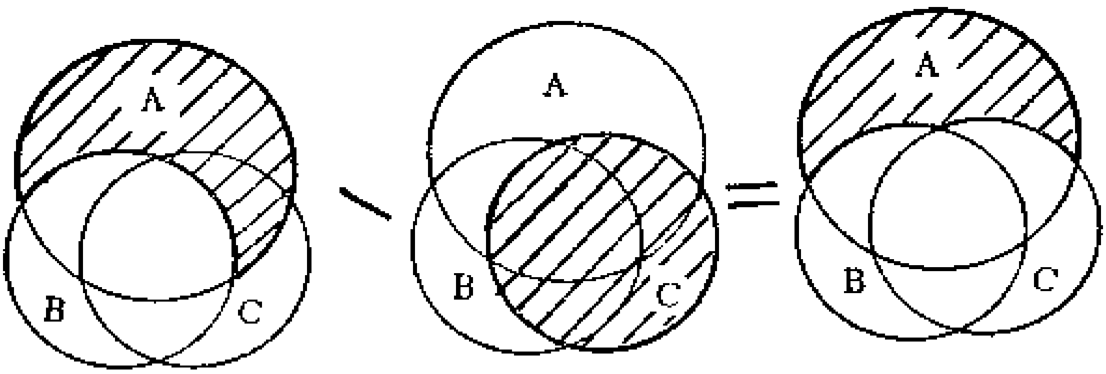
A∩B　　　　C　　　　（A∩B）＼C



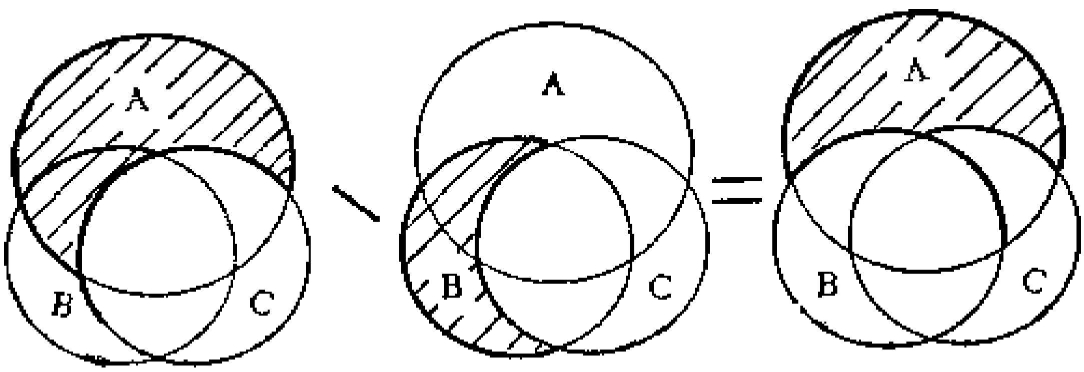
$A \cap B$　　　$A \cap C$　　　$(A \cap B) \setminus (A \cap C)$

图13

(4)　$(A \setminus B) \setminus C = (A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$；



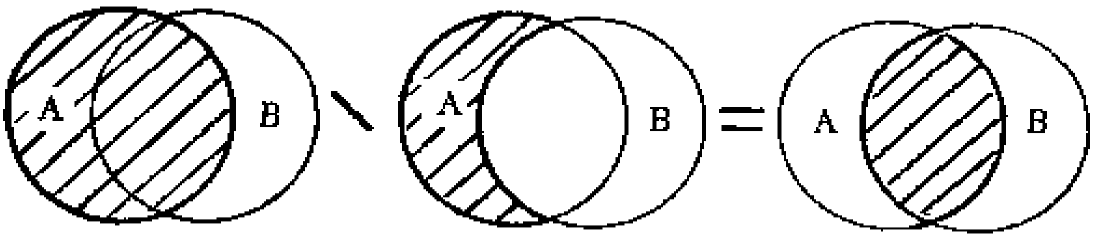
$A \setminus B$　　　C　　　$(A \setminus B) \setminus C$



$A \setminus C$　　　$B \setminus C$　　　$(A \setminus C) \setminus (B \setminus C)$

图14

（5） $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$。



A　　　　　　$(A\setminus B)$　　　　　　$A\cap B$

图15

这里，只给出性质（3）的证明。

设$x\in A\cap(B\setminus C)$，那么，$x\in A$，$x\in B\setminus C$。

$\because\ x\in B\setminus C$，　$\therefore\ x\in B$，$x\overline{\in}C$。

$\because\ x\in A$，$x\in B$，$\therefore\ x\in A\cap B$。

又 $x\overline{\in}C$，$\therefore\ x\in(A\cap B)\setminus C$，就是$A\cap(B\setminus C)\subseteq(A\cap B)\setminus C$。

反过来，设$x'\in(A\cap B)\setminus C$，那么，$x'\in A\cap B$，$x'\overline{\in}C$。

$\because\ x'\in A\cap B$，　$\therefore\ x'\in A$，$x'\in B$。

$\because\ x'\in B$，$x'\overline{\in}C$，$\therefore\ x'\in B\setminus C$。

又 $x'\in A$，$\therefore\ x'\in A\cap(B\setminus C)$，就是$(A\cap B)\setminus C\subseteq A\cap(B\setminus C)$。

因此，$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C$。

从上面的证明还可以得到，当$x\in A\cap(B\setminus C)$时，有$x\in A$，$x\in B$，$x\overline{\in}C$。

$\because\ x\in A$，$x\in B$，$\therefore\ x\in A\cap B$；

$\because\ x\overline{\in}C$，　$\therefore\ x\overline{\in}A\cap C$。

$\therefore\quad x\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$. 就是$A\cap(B\setminus C)\subseteq(A\cap B)\setminus(A\cap C)$.

反过来，设$x'\in(A\cap B)\setminus(A\cap C)$，那么，$x'\in A\cap B$，$x'\overline{\in}A\cap C$.

$\because\quad x'\in A\cap B,\qquad\qquad\therefore x'\in A,\ x'\in B;$

$\because\quad x'\in A,\ x'\overline{\in}A\cap C,\quad\therefore\quad x'\overline{\in}C.$

$\because\quad x'\in B,\ x'\overline{\in}C,\qquad\therefore\quad x'\in B\setminus C.$

又　$x'\in A,\quad\therefore\quad x'\in A\cap(B\setminus C)$，就是$(A\cap B)\setminus(A\cap C)\subseteq A\cap(B\setminus C)$.

因此，
$$A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus C=(A\cap B)\setminus(A\cap C).$$

4. 补集

如果$B\subseteq A$，那么，差集$A\setminus B$又叫做集合B在集合A中的**补集**或者**余集**（*complement set*）．记做C_AB，就是说，当$B\subseteq A$时，$A\setminus B=C_AB$.

求补集的运算叫做**补运算**，是差运算的一种特殊情况．比如：

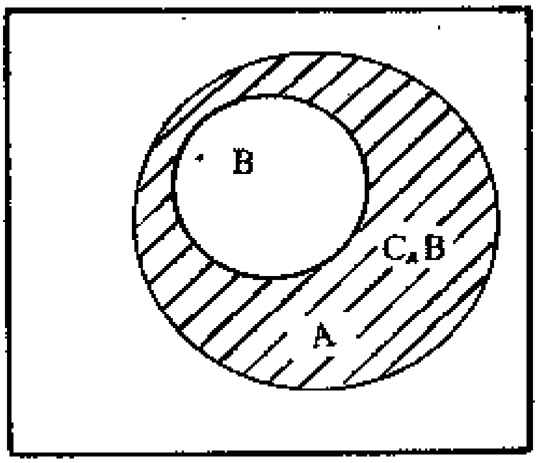


图16

设A表示一个车间在一周内所有产品的集合，B表示这些产品中所有不合格产品的集合，则补集C_AB表示这个车间在一周内所有合格产品的集合；

设$N=\{1,2,3,\cdots,n,\cdots\}$，$E=\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$，

则$C_N E=\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$；

设$A=\{x|x\geqslant 0\}$，$B=\{x|x\geqslant 3\}$，

则$C_A B=\{x|0\leqslant x<3\}$；

设$S=\{x|x^2=x+2\}=\{-1,2\}$，$R=\{x|x=-\sqrt{x+2}\}=\{-1\}$，则方程$x=\sqrt{x+2}$的解集是

$C_s R=\{2\}$；

…………。

对于任意集合A，都有$C_A\phi=A$，$C_A A=\phi$，并且对于集合S的任意两个子集A，B，都有

（1） $A\cap C_s A=\phi$，$A\cup C_s A=S$；

（2） $C_s(C_s A)=A$；

（3） 如果$B\subseteq A$，那么，$C_s A\subseteq C_s B$，$B\cap C_s A=\phi$，$A\cup C_s B=S$；

（4） 摩根（De Morgan）公式：

$$C_s(A\cup B)=C_s A\cap C_s B,$$

$$C_s(A\cap B)=C_s A\cup C_s B.$$

下面是性质（4）里第一个等式的证明。

设$x\in C_s(A\cup B)$，那么，$x\in S$，$x\overline{\in}A\cup B$。

$\because$ $x\overline{\in}A\cup B$， $\therefore$ $x\overline{\in}A$，$A\overline{\in}B$。

$\because$ $x\in S$，$x\overline{\in}A$， $\therefore$ $x\in C_s A$；

同样可以得到$x\in C_s B$。

$\therefore$ $x\in C_s A\cap C_s B$，就是

$C_s(A\cup B)\subseteq C_s A\cap C_s B$。

反过来，设$x'\in C_s A\cap C_s B$，那么，

$x'\in C_s A$，$x'\in C_s B$。

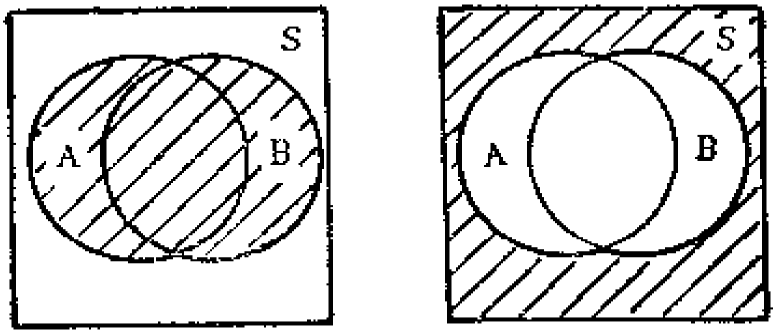
$\because$ $x'\in C_s A$， $\therefore$ $x'\in S$，$x'\overline{\in}A$；

∵ $x' \in C_s B$, ∴ $x' \in S$, $x' \overline{\in} B$.

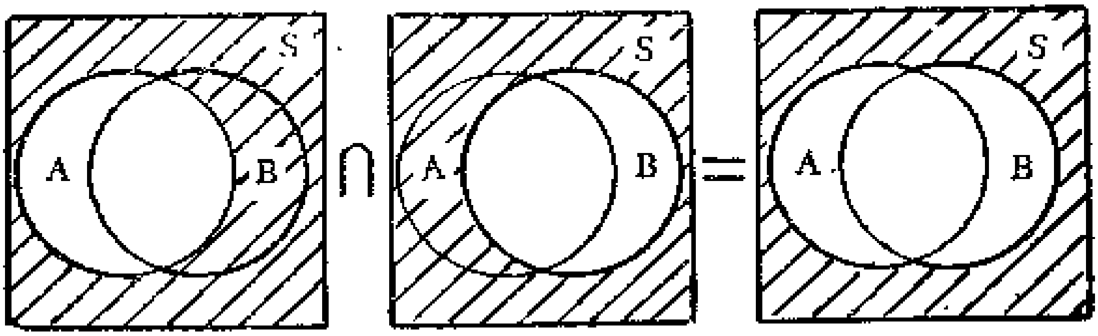
∵ $x' \overline{\in} A$, $x' \overline{\in} B$, ∴ $x' \overline{\in} A \cup B$.

又 $x' \in S$, ∴ $x' \in C_s(A \cup B)$，就是 $C_s A \cap C_s B \subseteq C_s(A \cup B)$.

因此，$C_s(A \cup B) = C_s A \cap C_s B$.



A∪B　　　　Cs（A∪B）



CsA　　　　CsB　　　　CsA∩CsB

图17

5. 全集和幂集

在研究各种不同类型的问题的时候，往往根据问题的需要，事先选定一个含有所涉及的全体事物的集合，作为研究的基础。这个事先选定的、作为研究基础的集合，叫做**全集**

(*universal set*)，记做I．在作为研究基础的全集已经选定的情况下，整个研究过程中出现的集合都是这个全集的子集；而集合之间的并、交、差、补等运算，实际上是全集的子集之间的运算．比如，下面这些集合都可以作为在一定范围内的研究基础的全集：

某中学的全体学生；

一个生产队的全部耕地；

银河系的所有星体；

地球上的一切生物；

一个城市里的全部机动车辆；

…………．

在数学的各个分支中，由于研究对象的不同，选来作为研究基础的全集也不尽相同．比如，小学数学里的全集是非负有理数集，数论里的全集是整数集，微积分学里的全集是实数集，平面几何学里的全集是全平面上的点集，等等．

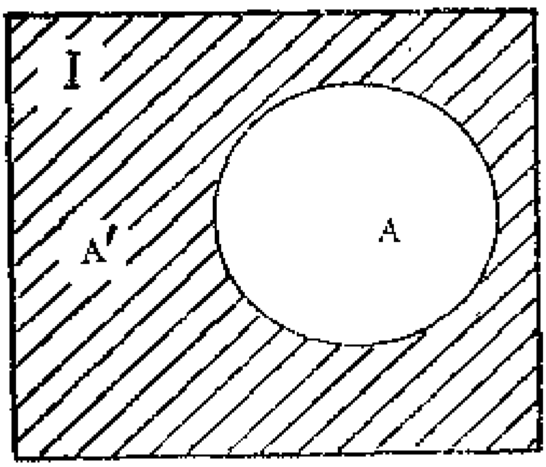


图18

如果集合A是全集I的一个子集，那么，它的补集$C_I A$可以简单地记为$\overline{A}$，并且有下面的性质：

（1）　$A\cup\overline{A}=I$，

$A\cap\overline{A}=\phi$；

（2）　$\overline{(\overline{A})}=A$；

（3）　$\overline{\phi}=I$，　$\overline{I}=\phi$；

（4） $A\setminus B=A\cap\overline{B}$；

（5） 摩根公式 $\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B}$，

$$\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$$；

（6） 如果 $B\subseteq A$，那么，$\overline{A}\subseteq\overline{B}$，$\overline{A}\cap B=\phi$，$A\cup\overline{B}=I$。

在这些性质的基础上，我们还可以证明一些进一步的性质。下面，举出两个例子，而把其余的留给读者作为练习。

例 1 试证明 $A\setminus(A\cap B)=A\setminus B$。

证
$$
\begin{aligned}
A\setminus(A\cap B)&=A\cap\overline{A\cap B} && （性质 4）\\
&=A\cap(\overline{A}\cup\overline{B}) && （性质 5）\\
&=(A\cap\overline{A})\cup(A\cap\overline{B}) && （分配律）\\
&=\phi\cup(A\cap\overline{B}) && （性质 1）\\
&=A\cap\overline{B} && （并集的性质 3）\\
&=A\setminus B. && （性质 4）
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad A\setminus(A\cap B)=A\setminus B$.

例 2 试证明 $E\setminus(F\setminus G)=(E\setminus F)\cup(E\cap G)$。

证
$$
\begin{aligned}
E\setminus(F\setminus G)&=E\cap\overline{F\setminus G} && （性质 4）\\
&=E\cap\overline{F\cap\overline{G}} && （性质 4）\\
&=E\cap(\overline{F}\cup\overline{\overline{G}}) && （性质 5）\\
&=E\cap(\overline{F}\cup G) && （性质 2）\\
&=(E\cap\overline{F})\cup(E\cap G) && （分配律）\\
&=(E\setminus F)\cup(E\cap G). && （性质 4）
\end{aligned}
$$

$\therefore\quad E\setminus(F\setminus G)=(E\setminus F)\cup(E\cap G)$.

以全集 I 的所有子集作为元素的集合，叫做全集 I 的**幂集**（*power set*），记做 $P(I)$（或者 ε）。一个全集给定以后，

由它的元素能够组成多少个子集呢？

设全集I含有有限个元素$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n$，即$I=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\}$。首先，我们可以得到全集$I$的两个子集$A$，$B$，使$a_1\in A$，$a_1\overline{\in}B$，即$A=\{a_1, a_2,a_3, \cdots, a_n\}$，$B=\{a_2,a_3, \cdots, a_n\}$；再把这两个子集按含有元素$a_2$和不含有元素$a_2$，分别分成两个集合，就是$A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n\}$，$A'=\{a_1, a_3, \cdots, a_n\}$，$B=\{a_2, a_3, \cdots, a_n\}$，$B'=\{a_3, \cdots, a_n\}$，得到$I$的$4=2^2$个子集；同样，把这4个子集，按含有元素$a_3$和不含有元素$a_3$，再分别分成两个集合，得到$I$的$8=2^3$个子集；……，照这样继续下去，一共可以得到$I$的$2^n$个子集。这就是说，全集$I=\{a_1, a_2,a_3, \cdots, a_n\}$一共有$2^n$个子集，因此，它的幂集$P(I)$有$2^n$个元素。

求有限集I的幂集$P(I)$的元素，也可以用下面的方法。因为空集ϕ是任何一个集合的子集，所以ϕ是$P(I)$的一个元素；在集合I的n个元素$a_1,a_2, \cdots, a_n$中任意取一个元素，可以构成一个单元素集，显然，这样的单元素集一共有C_n^1个，它们都是I的子集，也是$P(I)$的元素；同样，在集合I的n个元素$a_1, a_2, \cdots, a_n$中每次取出不同的两个元素，一共可以构成C_n^2个I的子集，即C_n^2个$P(I)$的元素；……；最后，由n个元素$a_1, a_2, \cdots, a_n$所构成的集合I，也是$P(I)$的个元素。如果空集ϕ的个数1用C_n^0表示，那么幂集$P(I)$的元素一共有

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$$

个（这个公式在代数里叫做组合总数公式）。

比如，设全集I是由1,2,3这三个数构成的，即$I=\{1,2,3\}$，它一共有$2^3=8$个子集，即ϕ，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{2,3\}$，$\{1,2,3\}$；而它的幂集是$P(I)=\{\phi,\{1\},\{2\},\{3\},\{1,2\},\{1,3\},\{2,3\},\{1,2,3\}\}$。

至于全集I含有无限个元素的情形，讨论它的幂集的元素个数，是比较复杂的，已经超出了我们这本小册子的范围。

因为全集I的所有子集就是它的幂集$P(I)$的元素 所以，集合之间的四种基本运算，实际上是幂集$P(I)$的元素之间的运算；并且不难证明，经过这几种运算的结果（并集、交集、差集或者补集），仍然是幂集里的元素。就象在整数集中可以进行加法、乘法、减法三种运算（就是任意两个整数的和、积或者差仍然是整数）一样，在全集的幂集中，可以进行并、交、差（包括补）的运算。也就是说，幂集对于并、交、差这三种集合运算是封闭的。

以全集I的所有子集（即幂集$P(I)$的所有元素）作为运算对象，以并、交、差（包括补）这三种集合运算作为基本运算建立起来的一种代数，叫做集代数（*algebra of sets*）。

练　　习

1. （1） 用差集表示不等式组$\begin{cases}3-4x<0,\\2+3x<0\end{cases}$的解；

（2） 用补集表示代数式$\frac{3x}{4x^2-9}$中x的可取值范

围．

2． 试证明对于集合S的任意两个子集A和B，下面的等式成立：

（1） $A\setminus B=A\cap C_sB$；

（2） $C_s(A\cap B)=C_sA\cup C_sB$．

3． 试证明下列等式成立：

（1） $A\setminus(A\setminus B)=A\cap B$；

（2） $(A\setminus B)\setminus C=A\setminus(B\cup C)$；

（3） $A\setminus(B\cap C)=(A\setminus B)\cup(A\setminus C)$，

$A\setminus(B\cup C)=(A\setminus B)\cap(A\setminus C)$；

（4） $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$；

（5） $(A\cup B)\setminus C=(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$，

$(A\setminus B)\cap(C\setminus D)=(A\cap C)\setminus(B\setminus D)$．

4． 集合A与集合B的**对称差集**（*symmetric difference*）$A_\Delta B$是用等式$A_\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)$来定义的．试证明下列对称差集的性质：

（1） $A_\Delta\phi=A$， $A_\Delta I=\overline{A}$，

$A_\Delta A=\phi$， $A_\Delta\overline{A}=I$；

（2） $A_\Delta B=B_\Delta A$；

（3） $A_\Delta(B_\Delta C)=(A_\Delta B)_\Delta C$；

（4） $A\cap(B_\Delta C)=(A\cap B)_\Delta(A\cap C)$；

（5） $A_\Delta B=(A\cup B)\setminus(A\cap B)$．

5． 写出集合$N=\{1,2,3,4\}$的所有子集；并说明它的幂集$P(N)$一共有多少个元素．

6． 设$P(I)$是全集I的幂集，求证：

（1） $\{E\mid E\in P(I)\}=\{\overline{E}\mid E\in P(I)\}$；

（2） 对于每一个集合$A\in P(I)$，都有

$$\bigcap\{E\mid E\in P(I)\}\subseteq A\subseteq\bigcup\{E\mid E\in P(I)\}$$

和 $$A\cap(\bigcup\{E\mid E\in P(I)\})=\bigcup\{A\cap E\mid E\in P(I)\}.$$

7. 设A，B是任意两个集合，求证集合$\{\phi, A, B, A\setminus B, B\setminus A, A\cap B\}$对于差运算是封闭的。

三　对应与函数

1. 对应

同集合的概念一样，对应的概念也是近代数学中一个最基本的概念。如果说，在这以前我们研究的是集合与它的元素之间的关系，那么，“对应”这一部分研究的就是两个集合的元素之间的联系。

我们来看下面的一些例子。

例 1　一个小组有 5 名青年工人，他们在业余时间参加体育活动的情况，如下图所示。

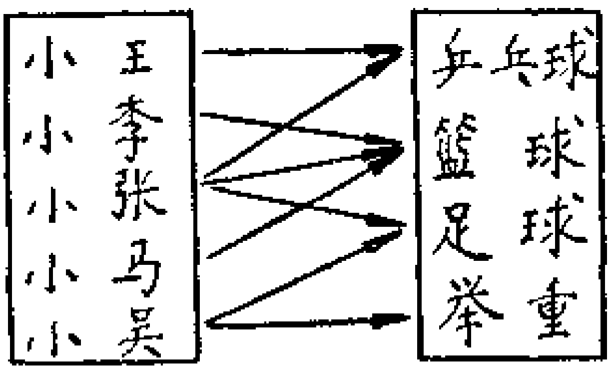


图19

由这个“箭头图”可以清楚地看出，在这个小组里，谁参加体育活动的兴趣比较广泛，以及爱好哪一个体育项目的青年工人比较多。

如果用集合A表示这个小组的所有青年工人，用集合B表示他们参加业余体育活动的全部项目，那么，上面的箭头

图就表示按照"谁参加什么业余体育活动"的法则，建立了集合A的元素与集合B的元素之间的对应（*correspondence*）关系。

一般说来，如果对于集合A中的元素a，能按一定的法则，求出集合B中相应的元素b（不一定只有一个），就叫做a和b相对应（或者a对应于b）。如果对于集合A中每一个确定的元素a，都有集合B中确定的元素b跟它对应，那么这种对应叫做从集合A到集合B的映射（*mapping*）；其中，$b(b\in B)$叫做$a(a\in A)$在集合B中的映象（*image*），而a叫做b的原象(*inverse image*)。

如图20表示的是从集合A到集合B的某一个真子集的映射，也就是集合B中至少存在这样一个元素b，它不是集合A中任何一个元素的映象。我们把这样的映射叫做从集合A到集合B内的映射。

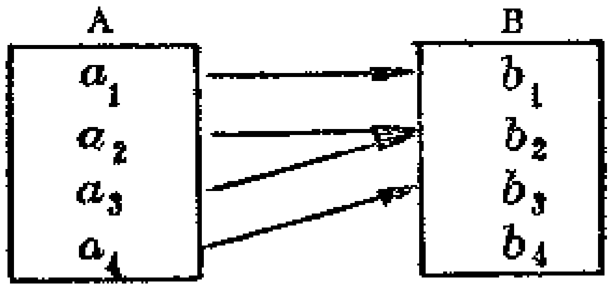


图20

但是，如图21就不表示映射，因为在集合A中至少存在这样一个元素a_4，它在集合B中没有映象。

在例1中，每个青年工人参加的体育活动不一定只有一项、而每项体育活动也不一定只有一个青年工人参加；也就是说，集合A中的元素a在集合B中的映象不一定只有一个，

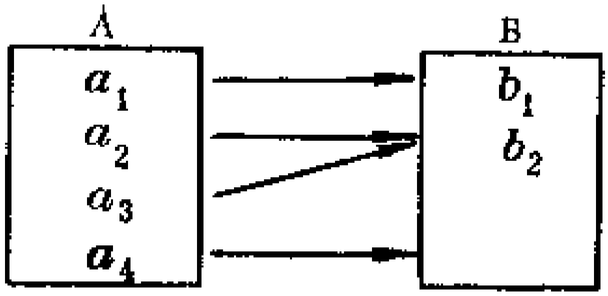


图21

而集合B中的元素b在集合A中的原象也不一定只有一个．我们把这种对应叫做“多对多”．下面的例2也是一个“多对多”的例子．

例2　设$A=\{3,4,5\}$，$B=\{15,20,25\}$，则由关系｛…是…的约数｝，得到从集合A到集合B的映射：

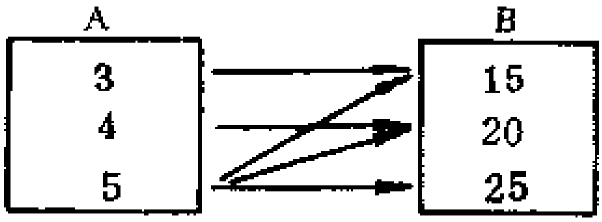


图22

例3　设C=｛一个锻炼小组的青年｝=｛甲，乙，丙，丁，

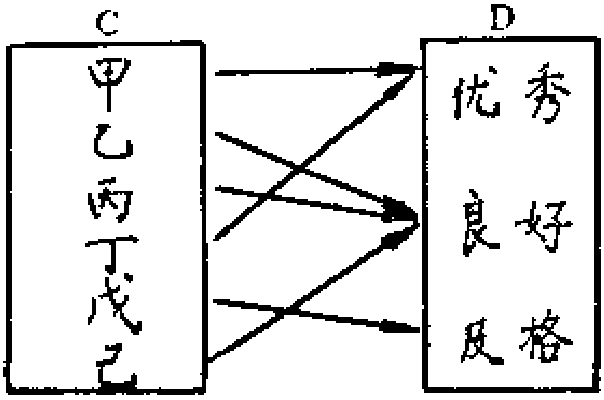


图23

戊，己}，D={测验成绩}={优秀，良好，及格}，则由关系“…在某一次体育锻炼标准测验中的成绩是…”，得到从集合C到集合D的映射。

例 4 设E={5的所有正整倍数}

$$=\{5,10,15,20,\cdots\},$$

$$F=\{0,5\},$$

则由关系“…的末位数字是…”，有从集合E到集合F的映射。

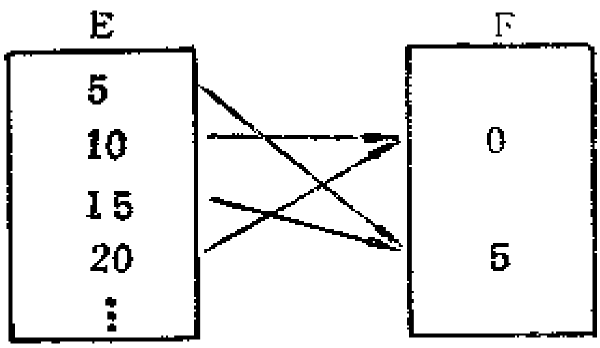


图24

例 3 和例 4 的原象集合中每一个元素都只有一个映象，而不同的元素却可以有相同的映象。这样的对应叫做“多一对应”（*many-one correspondence*）。

例 5 一个车间里有三名修理工人，六台机床，每人负责维修两台机床，就有如图25的映射。

例 6 把全体自然数按除以 3 所得的余数分类，由关系“除以 3 所得的余数是…的自然数有…”，可以得到如图26的映射。

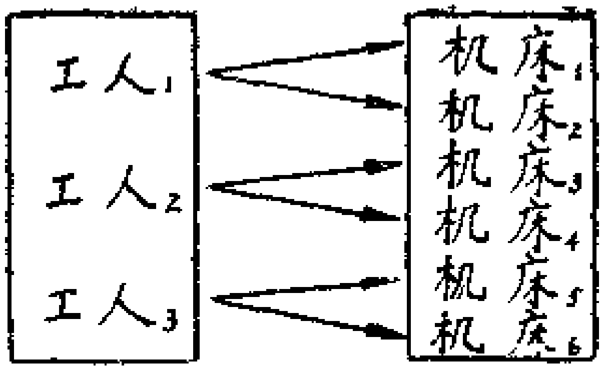


图25

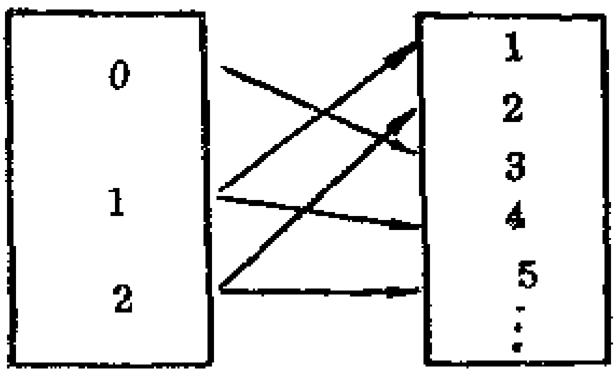


图26

跟"多一对应"相仿，象例 5 和例 6 这样的对应叫做"一多对应"（*one-many correspondence*）。

例 7　举行篮球比赛，一个球队里的每一个运动员都有一个号码，于是可以得到如图27的映射

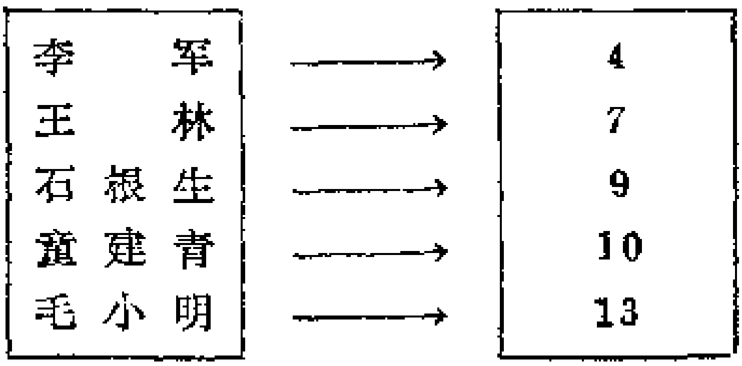


图27

例 8　设 $A=\{0,1,2,3,\cdots\}$，$B\{n\left|\frac{n}{4}\in A\right.\}=\{0,4,8,12,\cdots\}$，由关系“…的4倍是…”，有从集合 A 到集合 B 的映射。

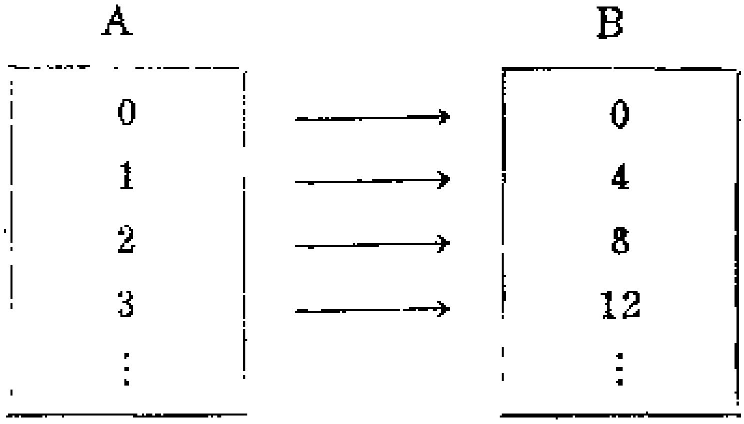


图28

我们把象例 7 和例 8 这样的对应叫做“一一对应”(*one-to-one correspondence*)。在研究两个集合 A 与 B 的元素之间的对应关系的时候，一一对应具有特别重要的意义。“一一对应”是指这样一种对应：对于集合 A 中每一个确定的元素 a，都有集合 B 中唯一确定的元素 b 跟它对应；反过来，对于集合 B 中每一个确定的元素 b，都有集合 A 中唯一确定的元素 a 跟它对应。显然，一一对应给出了从集合 A 到集合 B 上(注意，不是到集合 B 的任何真子集上)的这样一种映射：集合 A 中每一个元素 a 在集合 B 中都只有一个映象 b，集合 A 中任意两个不同的元素 a_1、a_2 在集合 B 中也有不同的映象 b_1、b_2。

比如，在平面直角坐标系中，平面上的点集 $A=\{$平面上的所有点$\}$与有序实数对的集合 $B\{(x,\ y)\mid x,\ y$ 都是实数$\}$的元素之间，有一一对应的关系；斜率等于 $-\frac{2}{3}$ 的直线的集合 L 与所有方程 $2x+3y=C$（C 是实数）的集合 F 的元素之间有一一对应的关系。

有时候，我们也用符号$a\to b$来表示一个映射，其中a是集合A中的任意一个元素，而b是a在集合B中的映象。比如，例 6 中的映射可以表示为$a\to 3m+a$（m是非负整数，$a=0$，1，2）；例 8 中的映射可以表示为$a\to 4a$（$a=0,1,2,3,\cdots$）；而下面的箭头图表示作用于集合$\{2,3,4\}$的映射$a\to 25-a$：

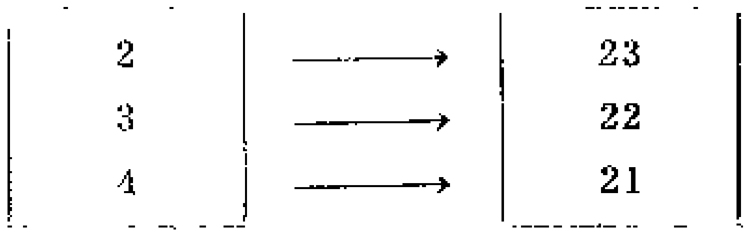


图29

练　　习

1．（1）调查你所在小组的每一个同学哪一门文化课（语文、数学、物理、外语、…）学得好些，并把调查结果用箭头图表示出来；

（2）调查你所在小组的每一个同学的年龄，并把调查结果用箭头图表示出来；

（3）调查在你所在的班上课的教师，每一个人讲授哪些课程，并把调查的结果用箭头图表示出来；

（4）分别说出（1）、（2）、（3）题中的箭头图是哪一种对应关系。

2．画一个箭头图，表示按照“…是…的素因数”的法则，从集合$\{2,3,5,7\}$到集合$\{30,31,32,33,34,35,36\}$内的映射。哪一个数没有箭头联系？为什么？

3．画图表示由关系“…是…的素因数的个数”得到的

集合{1,2,3,4,5}的元素与集合{30,31,32,33,34, 35, 36}的元素之间的对应关系。

4．用$x\to$（　　）的形式写出下列箭头图所示的对应关系，并说出它们分别作用于哪个集合：

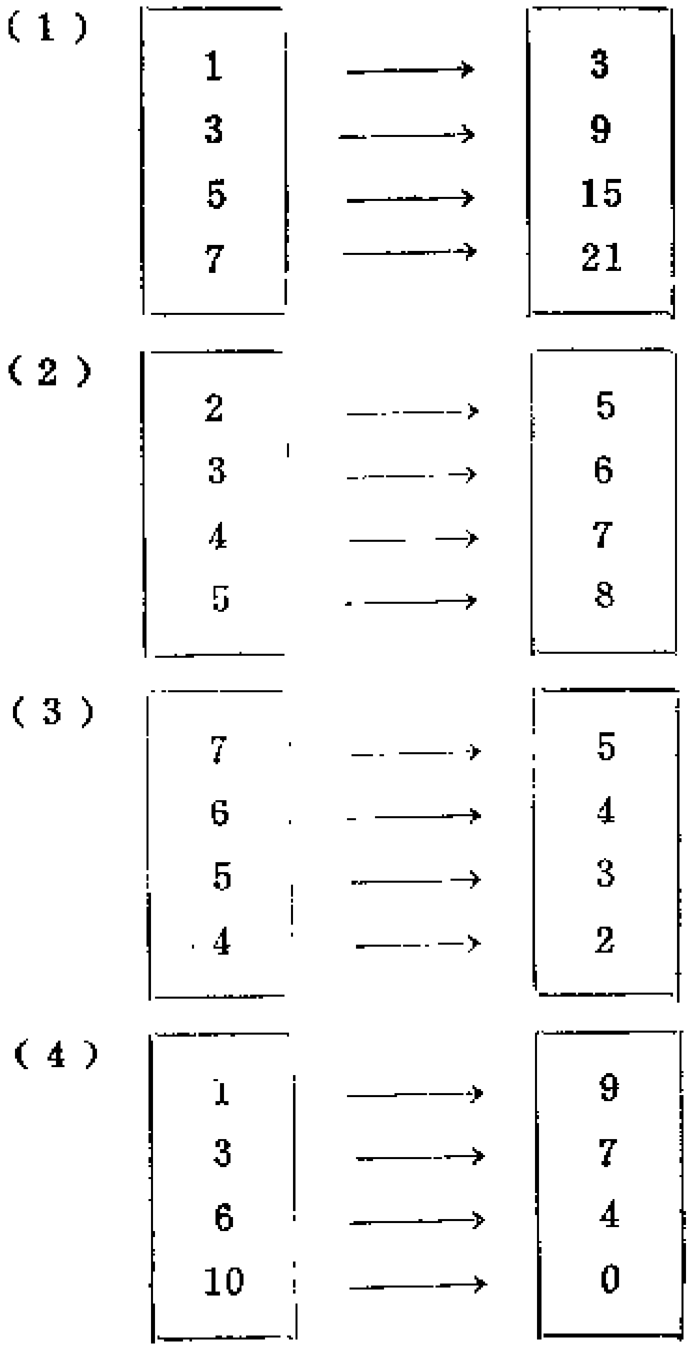


图30

5. 分别用箭头图表示作用于集合{1, 2, 3, 4,5}的下列映射：

(1) $x\to 4x$；　　(2) $x\to 4+x$；

(3) $x\to\frac{1}{x}$；　　(4) $x\to 6-x$；

(5) $x\to\pm\sqrt{x}$；　　(6) $x\to x^2-6x+5$。

2. 函数

研究从集合A到集合B的映射时，一个重要的问题是要知道对于集合A中每一个确定的元素a，应该按照怎样的法则，跟集合B中的元素b相对应．因为只有搞清楚了这两个集合的元素之间的对应法则，我们才能准确地判定：对于任何一个属于集合A的元素a，它的映象b是什么，这个映象b是不是唯一的一个，以及集合A的所有元素a的映象b组成一个怎样的集合，等等。

我们把集合A中每一个确定的元素a同它在集合B中的映象b之间的对应法则，叫做定义在集合A上的函数(*function*)，记做f：$a\to b$，或者$b=f(a)$。这时，集合A叫做函数f的定义域(*field of definitions*)，而a的映象b的集合（可以是集合B，也可以是集合B的某个真子集）叫做函数f的值域(*field of values*)。

对于任何一个函数f，我们都应该记住它所包含的三个内容：

(1)这个函数定义在怎样的集合上？

(2)用怎样的法则来求出定义域中每一个元素的映象？

(3)这些映象构成一个怎样的集合？

比如，如果把我们的讨论限制在全体实数范围内，也就是

把全体实数的集合R作为全集，那么，

函数$f: x \to x+4$的定义域是实数集R，值域也是实数集R；

函数$g: x \to \sqrt{x^2-1}$的定义域是集合$\{x \mid x \in R$，且$|x| \geqslant 1\}$，值域是集合$\{y \mid y \in R$，且$y \geqslant 0\}$；

函数h：$x \to \frac{2x+3}{x-2}$的定义域是集合$R \setminus \{2\} = \{x \mid x \in R$，且$x \neq 2\}$，值域也是集合$R \setminus \{2\}$；

狄里克雷（*Dirichlet*）函数

$$h: \quad x \to D(x) = \begin{cases} 1, & \text{（如果}x\text{是有理数）} \\ 0 & \text{（如果}x\text{是无理数）} \end{cases}$$

的定义域是实数集R，值域是集合$\{0, 1\}$；

集合R的子集A的特征函数（*characteristic function*）

$$X: \quad x \to \begin{cases} 1, & \text{（如果}x \in A\text{）} \\ 0 & \text{（如果}x \overline{\in} A\text{）} \end{cases}$$

的定义域是R，值域是$\{0,1\}$；

…………。

函数f的定义域里的元素又叫做自变量，通常用字母x表示；函数f的值域里的元素又叫做因变量（或者函数），通常用字母y表示。这样，函数关系又可以表示为

$y = f(x)$，或者f：$x \to y$。

因此，“函数”这个词在不同的地方可以表示不同的意思。有时候，它跟“映射”、“对应法则”是同义语；有时候，它跟“映象”是同义语。但是，从叙述的上下文，我们不难分清在什么情况下“函数”这个词表示的是什么意思。比如，说“函数$y = f(x)$”的时候，“函数”这个词表示映

射；说"y是x的函数"的时候，"函数"这个词就表示映象了。

对于定义在集合A上的函数f来说，如果定义域A中每一个确定的元素a，只同值域B中唯一的映象b对应，那么，这个函数就叫做单值函数；如果定义域A中每一个确定的元素a，同值域B中**不止一个**映象b对应，那么，这个函数就叫做**多值函数**。我们在前面列举的几个函数都是单值函数，而函数$y=\pm\sqrt{x}$是一个多值函数，因为对于集合$\{x \mid x>0\}$中的每一个确定的元素x，在实数集R中都有两个元素y同它对应。

1	$\longrightarrow$	± 1
$\frac{9}{25}$	$\longrightarrow$	$\pm\frac{3}{5}$
2.25	$\longrightarrow$	± 1.5
3	$\longrightarrow$	$\pm\sqrt{3}$
$\vdots$		$\vdots$

图31

反正弦函数$y=\mathrm{Arcsin}x$也是一个多值函数，因为对于集合$\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$中每一个确定的元素$x$，在实数集$R$中都有无限多个元素$y$同它对应。

0	$\longrightarrow$	$n\pi$
$\frac{1}{2}$	$\longrightarrow$	$n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$
$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\longrightarrow$	$n\pi+(-1)^{n+1}\frac{\pi}{3}$
$\vdots$		$\vdots$

图32

对于任何一个多值函数，只要适当选择它的值域的某个真子集作为新的值域，就可以使这个函数在这个新的值域上的映象是单值的，从而使这个函数成为单值函数。比如，设值域是集合 $Y=\{y\mid -\frac{\pi}{2}\leqslant y\leqslant\frac{\pi}{2}\}$，则定义在集合$X=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$上的反正弦函数$y=arcsinx$就是单值函数。

在一般情况下，我们提到函数的时候都是指的单值函数。

3. 反函数

定义在集合A上的函数f，就是从集合A到集合B的一种映射。也就是说，对于集合A中每一个确定的元素a，都有集合B中完全确定的元素b，作为a的映象。这时，a叫做b的原象。

反过来，如果对于集合B中每一个确定的元素b，都有集合A中完全确定的元素a，它在集合B中的映象是b，这样就得到一个从集合B到集合A的映射，我们把b与a之间的这种对应$b\to a$，叫做a与b之间的对应$a\to b$的**逆对应**(*inverse correspondence*)，而从集合B到集合A的这种映射，叫做从集合A到集合B的映射的**逆映射**(*inverse mapping*)。

比如，设$A=\{5$的一切正整倍数$\}=\{5,10,15,20,\cdots\}$，$B=\{0,5\}$，则由法则{…的末位数字是…}，得到从集合A到集合B的映射

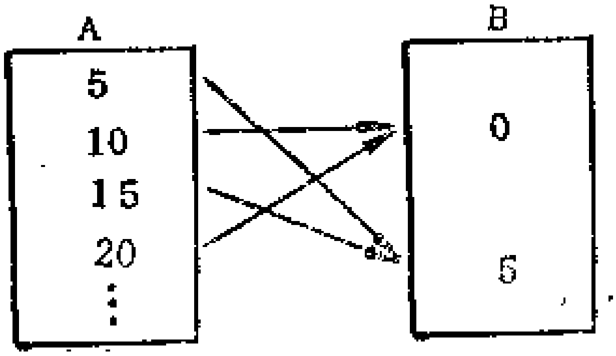


图33

而由法则"末位数字是…的数有…" 所得到的从集合B到集合A的映射

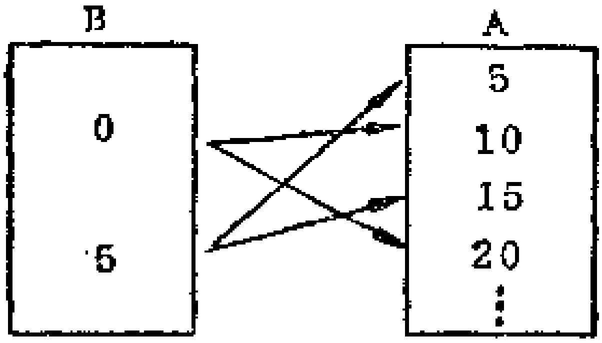


图34

是前一个映射的逆映射。

要注意的是，并不是每一个映射都有逆映射，如果已知的映射是从集合A到集合B内的映射，即集合A中所有元素a的映象b的集合是集合B的某个真子集，那么，这个映射就没有一个从集合B到集合A的逆映射。比如，设$A=\{1, 2, 3\}$，$B=\{0, 1, 2\}$，则由法则"$b=-a^2+4a-3$"，得到从集合A到集合B的映射

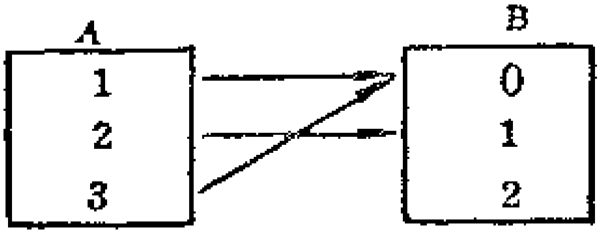


图35

这时，没有一个从集合B到集合A的映射，可以作为它的逆映射，因为在集合B中有一个元素2，它不是集合A中任何

一个元素的映象，因而下面的箭头图不能表示一种映射。

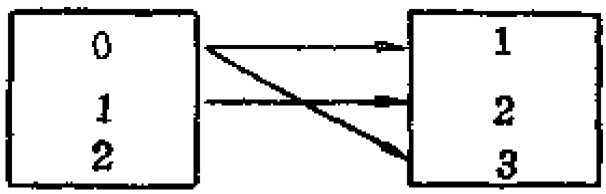


图36

设f是定义在集合A上的函数，那么，对于集合A中每一个确定的元素a，都有集合B中完全确定的元素b，使得$b=f(a)$。反过来，如果对于集合B中每一个确定的元素b，都能找到集合A中完全确定的元素a，使得$f(a)=b$，这样就给出了定义在集合B上的一个函数，我们把这个函数叫做函数f的反函数(*inverse function*)，记做f^{-1}；而函数f叫做直接函数(*direct function*)。也就是说，映射$a \to b$给出了函数f：$a \to b$，如果它的逆映射$b \to a$存在，那么，这个逆映射就给出了反函数f^{-1}：$b \to a$。

比如，设$N=\{$全体自然数$\}$，$E=\{$全体正偶数$\}$，f：$n \to 2n$是定义在集合N上的函数，

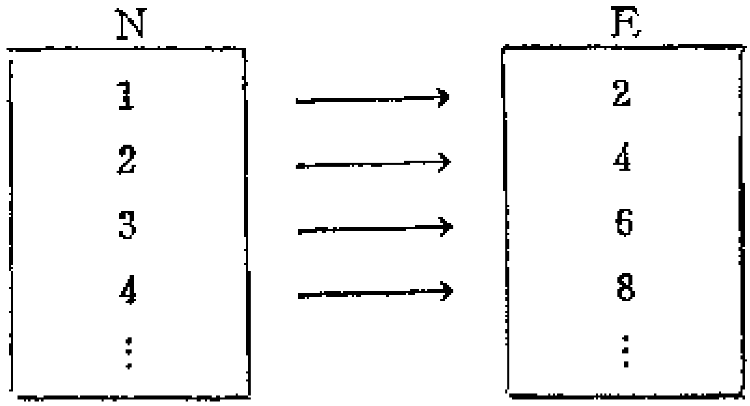


图37

那么，它的反函数就是定义在集合E上的函数$f^{-1}: n \to \frac{1}{2}n$。

$$\begin{array}{ccc} E & & N \\ 2 & \longrightarrow & 1 \\ 4 & \longrightarrow & 2 \\ 6 & \longrightarrow & 3 \\ 8 & \longrightarrow & 4 \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

图38

因为，函数的自变量通常用字母x表示，因变量用字母y表示，所以，我们把函数$y=f(x)$的反函数记做$y=f^{-1}(x)$。因此，要求出一个函数$y=f(x)$的反函数，可以分两步来做：

(1)在表达式$y=f(x)$中，把y看做常数，解出x，得到$x=f^{-1}(y)$；

(2)在式子$x=f^{-1}(y)$中，把字母x和y的位置对调，就得到函数$y=f(x)$的反函数$y=f^{-1}(x)$。比如，

直接函数　　　　　　　　　　　　　　　　　反函数

$$y=2x \xrightarrow{\text{解出 } x} x=\frac{1}{2}y \xrightarrow{\text{把}x,y\text{ 对调}} y=\frac{1}{2}x$$

$$y=x^2 \longrightarrow x=\pm\sqrt{y} \longrightarrow y=\pm\sqrt{x}$$

$$y=a^x \longrightarrow x=\log_a y \longrightarrow y=\log_a x$$

$$y=\frac{2x+3}{x-2} \longrightarrow x=\frac{2y+3}{y-2} \longrightarrow y=\frac{2x+3}{x-2}$$

$$y=\sin x \longrightarrow x=\mathrm{Arcsin}\,y \longrightarrow y=\mathrm{Arcsin}\,x$$

…………。

很明显，反函数f^{-1}的定义域就是函数f的值域B，而反函数f^{-1}的值域就是函数f的定义域A。比如，以实数集R作为全集，函数$y=\frac{x+1}{x+2}$的定义域是$R\setminus\{-2\}$，值域是$R\setminus\{1\}$，它的反函数$y=\frac{2x+1}{1-x}$的定义域是$R\setminus\{1\}$，值域是$R\setminus\{-2\}$；函数$y=a^x$（$a>0$）的定义域是R，值域是$\{y|y\in R$，且$y>0\}$，它的反函数$y=\log_a x$的定义域是$\{x|x\in R$，且$x>0\}$，值域是R。

如果一个定义在集合A上的单值函数$y=f(x)$的反函数是多值的，我们可以适当选取集合A的某个真子集A'作为函数$y=f(x)$的定义域，使定义在它的值域B上的反函数$y=f^{-1}(x)$成为单值函数。比如，定义在实数集R上的函数$y=\sin x$的反函数$y=\mathrm{Arcsin}\,x$是多值函数，而定义在集合$R'=\{x\mid -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\}$（$R'\subset R$）上的函数$y=\sin x$的反函数$y=\arcsin x$是单值函数；定义在实数集$R$上的函数$y=x^2$的反函数$y=\pm\sqrt{x}$是多值函数，而定义在集合$R''=\{x\mid 0\leqslant x<+\infty\}$（$R''\subset R$）上的函数$y=x^2$的反函数$y=\sqrt{x}$是单值函数。

显然，函数f与它的反函数f^{-1}都是单值函数的充分必要条件是，函数f的定义域与值域的元素之间有一一对应的关系。

练　　习

1．设全集是实数集R，求下列函数的定义域和值域：

(1) $y=x-2$； (2) $y=\frac{x^2-4}{x^2+2x-3}$；

(3) $y=\sqrt{x+2}+\sqrt{3-x}$；

(4) $y=\{x\}=x$的小数部分；

(5) $y=lg(x^2+3x-4)$；

(6) $y=tg(x+\frac{\pi}{3})$。

2． 设原象的集合 $A=\{1, 2, 3, \cdots, 12\}$，画出下列映射与它的逆映射的箭头图，并用$x\to($ $)$来表示逆映射：

(1) $x\to x-1$； (2) $x\to\frac{1}{3}x$；

(3) $x\to\frac{12}{x}$， (4) $x\to 12-x$。

3． 已知函数$y=\frac{1}{x-1}$，

(1) 求它的定义域；

(2) 求它的反函数；

(3) 求这个反函数的定义域。

4． 已知函数$y=x^3+1$，

(1) 求它的定义域；

(2) 求它的反函数；

(3) 求这个反函数的定义域。

5． 求下列函数的单值的反函数：

(1) $y=x^4-1$； (2) $y=\frac{1}{x^2}$；

(3) $y=cosx$； (4) $y=\{x\}=x$的小数部分。

4． 复合函数

某工厂给厂里的每个工人同志都填发工作证，同时对发出的所有工作证都进行编号。如果用W表示这个工厂全体工人的集合，P表示发给这些工人的所有工作证的集合，N表示这些工作证上的号码的集合，那么，就得到从集合W到集合P、再从集合P到集合N的映射。

工$_1$	$\longrightarrow$	证$_1$	$\longrightarrow$	001
工$_2$	$\longrightarrow$	证$_2$	$\longrightarrow$	002
工$_3$	$\longrightarrow$	证$_3$	$\longrightarrow$	003
⋮		⋮		⋮
工$_{59}$	$\longrightarrow$	证$_{59}$	$\longrightarrow$	059
⋮		⋮		⋮

图39

象这样，从集合A到集合B、再从集合B到集合C的映射，叫做**复合映射**（compound mapping）。比如，我们去看一场演出，也会遇到类似的情况。看这一场演出的所有观众都持有一张印着“×排×号”的入场券，而每一张印着“×排×号”的入场券又代表着剧场里一个特定的座位。如果用A表示看这场演出的全体观众的集合，B表示这些观众持有的入场券的集合，C表示剧场里所有座位的集合，那么，可以得到从集合A到集合B、再从集合B到集合C的复合映射：观众→入场券→剧场里的座位。

设定义在集合A上的函数f代表从集合A到集合B的映射，则对于集合A中每一个确定的元素a，都能求出集合B中对应的元素b，使$b=f(a)$；设定义在集合B上的函数g代表

从集合B到集合C的映射，则对于集合B中每一个确定的元素b，都能求出集合C中对应的元素c，使$c=g(b)$。这样，就得到一个定义在集合A上的函数，对于集合A中每一个确定的元素a，总能求出集合C中对应的元素c，使

$$c=g(b)=g(f(a)).$$

A	f	B	g	C
a_1	$\longrightarrow$	b_1	$\longrightarrow$	c_1
a_2	$\longrightarrow$	b_2	$\longrightarrow$	c_2
a_3	$\longrightarrow$	b_3	$\longrightarrow$	c_3
$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$

图40

我们把这个函数叫做函数f与g的**复合函数**（compound function），记做gof，即

$$(gof)(a)=g(f(a)).$$

显然，在复合函数gof中，函数f的值域与函数g的定义域应该是相等的集合。

比如，在实数集R上，设有函数f：$x\to x+2$与函数g：$x\to x^2+1$.因为函数f的值域与函数g的定义域都是集合R，所以

$$(gof)(x)=g(x+2)=(x+2)^2+1.$$

设有函数f：$x\to x^2$，函数g：$y\to\sqrt{1-y}$。因为，函数f的值域是非负实数集$B=\{y|y\geqslant 0\}$，而函数g的定义域是集合$B'=\{y|y\leqslant 1\}$，所以，对于复合函数gof：$x\to\sqrt{1-x^2}$，应该以集合

$$B\cap B'=\{y|0\leqslant y\leqslant 1\}$$

作为函数f的值域与函数g的定义域。这就是说，函数f的定义域（因此也是函数gof的定义域）应该是集合

$$A=\{x\mid 0\leqslant x^2\leqslant 1\}=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}.$$

在一般的情况下，复合函数 gof 与 fog 不是同一个函数。比如，

设有函数f：$x\to x+2$与函数g：$x\to x^2+1$，则

$$(gof)(x)=g(x+2)=(x+2)^2+1$$
$$=x^2+4x+5,$$
$$(gof)(3)=g(5)=5^2+1=26;$$

而 $$(fog)(x)=f(x^2+1)=(x^2+1)+2$$
$$=x^2+3,$$
$$(fog)(3)=f(3^2+1)=f(10)=12.$$

设有函数f：$x\to x^2$与函数g：$x\to\sqrt{1-x}$，则

$$(gof)(x)=g(x^2)=\sqrt{1-x^2},$$
$$(gof)(-\frac{1}{2})=g(\frac{1}{4})=\sqrt{1-\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{3}}{2};$$

而 $$(fog)(x)=f(\sqrt{1-x})=(\sqrt{1-x})^2,$$
$$(fog)(-\frac{1}{2})=f(\sqrt{\frac{3}{2}})=(\sqrt{\frac{3}{2}})^2=\frac{3}{2};$$ 并且函数gof的定义域是集合$A=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 1\}$，而函数$fog$的定义域是集合$A'=\{x\mid x\leqslant -1\}$.

如果函数f与它的反函数f^{-1}都是单值函数，那么，

$$(f^{-1}of)(a)=f^{-1}(f(a))=a,$$
$$(fof^{-1})(a)=f(f^{-1}(a))=a.$$

比如，定义在实数集R上的函数f：$x\to 2x+1$与它的反函数f^{-1}：$x\to\frac{x-1}{2}$都是单值函数，则

$$f^{-1}(f(a))=f^{-1}(2a+1)$$

$$=\frac{(2a+1)-1}{2}=a,$$

$$f(f^{-1}(a))=f\left(\frac{a-1}{2}\right)$$

$$=2\left(\frac{a-1}{2}\right)+1=a;$$

定义在集合 $\{x\mid -\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\}$上的函数$f$：$x\rightarrow\sin x$与它的反函数$f^{-1}$：$x\rightarrow\arcsin x$都是单值函数，

则 $f^{-1}(f(a))=\arcsin(\sin a)=a,$

$$\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant a\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f(f^{-1}(a))=\sin(\arcsin a)=a.$$

$$(-1\leqslant a\leqslant 1)$$

练　　习

1. 设函数f与g分别由下面的箭头图给出：

$$\begin{array}{ccc} & f & \\ 0 & \rightarrow & 5 \\ 1 & \rightarrow & 4 \\ 2 & \rightarrow & 3 \\ 3 & \rightarrow & 6 \\ 4 & \rightarrow & 7 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} & g & \\ 3 & \rightarrow & 4 \\ 4 & \rightarrow & 7 \\ 5 & \rightarrow & 6 \\ 6 & \rightarrow & 5 \\ 7 & \rightarrow & 8 \end{array}$$

图41

（1） 求$f(3)$；　　　（2） 求$g(3)$；

（3） 求$(gof)(3)$；　　（4） 求$(fog)(3)$。

2． 设有函数f：$n\to 3n$，g：$n\to n+2$，h：$n\to n^2$，

（1） 求下列各式的值：

$f(-15)$；$g(-15)$；$h(-15)$；

$(f\circ g)(-15)$；$(f\circ h)(-15)$；$(g\circ h)(-15)$；

$(g\circ f)(-15)$；$(h\circ f)(-15)$；$(h\circ g)(-15)$。

（2） 分别求出适合于下列各式的整数n：

$g(h)=3$；$h(n)=49$；$f(n)=85$；

$(f\circ h)(n)=27$；$(g\circ f)(n)=14$；$(g\circ h)(n)=38$。

（3） 分别验证下面每一组的两个复合函数是不是相同的函数：

$f\circ g$与$g\circ f$；$g\circ h$与$h\circ g$；$h\circ f$与$f\circ h$。

5． 集合的基数

现在，我们来讨论在怎样的条件下，两个集合的元素个数相等。

对于两个有限集来说，它们的元素个数相等的充分必要条件是，这两个集合的元素之间有一一对应的关系。比如，集合$A=\{11, 12, 13, 14, 15\}$与集合$B=\{81, 64, 49, 36, 25\}$都有五个元素，我们可以规定它们之间的一一对应关系为$a\to(20-a)^2$：

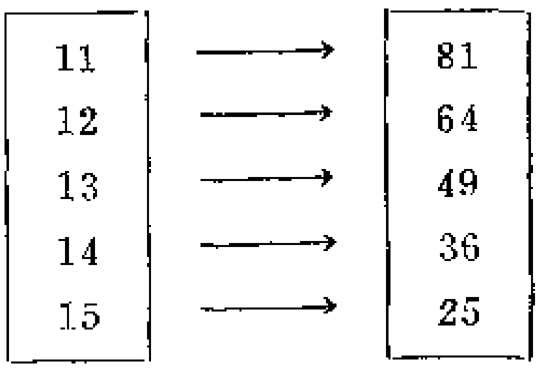


图42

反过来，任何与集合A的元素之间有一一对应关系的集合，一定恰好有五个元素。因此，对于两个有限集来说，要判断它们的元素个数是不是相等，可以有两种办法：一种办法是分别数一数这两个集合的元素的个数；另一种办法是看它们的元素之间是不是能够建立起一一对应的关系。打个比方吧，为了搞清楚一队骑兵的人数与一群战马的匹数是不是相等，我们可以用分别数一数有多少名骑兵和多少匹战马的办法，也可以让每个骑兵骑上一匹战马，最后再来看一看有没有剩下来的骑兵或者战马。

我们把一个有限集A的元素的个数，叫做这个集合的基数(*cardinal number*)，记做$n(A)$。比如，设$A=\{24$的所有正约数$\}$，则$n(A)=8$；设$B=\{$小于5的自然数$\}$，则$n(B)=4$。集合的基数又叫做集合的势或者浓度。

显然，单元素集的基数是1，空集ϕ的基数是0；对于两个有限集A与B，当$A\subset B$时，$n(A)<n(B)$；当$A=B$时，$n(A)=n(B)$；两个有限集A与B的元素之间有一一对应关系的充分必要条件是$n(A)=n(B)$。

对于任意的两个有限集A与B，都有

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B).$$

特别地，当$A\cap B=\phi$时，

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B).$$

这个等式可以帮助我们做某些统计工作。比如，一个班里有50名学生，其中语文成绩100分的有15名，数学成绩100分的有19名，语文、数学成绩都不是100分的有27名，问语文、数学成绩都是100分的学生有几名？

设$A=\{$语文成绩是100分的学生$\}$，$B=\{$数学成绩是100

分的学生}，则$A \cup B=${语文、数学至少有一门成绩是100分的学生}，$A \cap B=${语文、数学成绩都是100分的学生}，并且$n(A)=15$，$n(B)=19$，$n(A \cup B)=50-27=23$.

$$\because \quad n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B),$$

$$\therefore \quad n(A \cap B)=n(A)+n(B)-n(A \cup B)$$

$$=15+19-23=11,$$

即语文、数学成绩都是100分的学生是11名.

基数的概念可以扩充到无限集的情形. 对于任意两个集合A与B（无论是有限集还是无限集），如果它们的元素之间有一一对应的关系，那么，这两个集合叫做是等势的或者是对等的（*equivalent sets*），记做$A \sim B$. 两个有限集，只有当它们的元素个数相同，即基数相等的时候，才是等势的；也就是说，只有当$n(A)=n(B)$的时候，才有$A \sim B$. 两个无限集如果是等势的，我们也可以理解为这两个集合有相同"个数"的元素，并且就说这两个无限集的基数相等，虽然我们并不知道这个基数（也就是元素的"个数"）究竟是多少，因为无限集的元素是怎么数也数不完的. 因此，当两个无限集A与B等势的时候，也可以沿用有限集的记号，记做$n(A)=n(B)$.

比如，自然数集$N=\{1, 2, 3, \cdots, n, \cdots\}$与全体正偶数的集合$E=\{2, 4, 6, \cdots, 2n, \cdots\}$的元素之间，按照法则"…的2倍是…"，可以建立一一对应的关系. 因此，$N \sim E$.

我们知道，正偶数集E是自然数集N的一个真子集，但集合N却跟集合E等势，也就是集合N并不比集合E的元素更"多". 这正好说明了无限集与有限集的本质区别. 在有

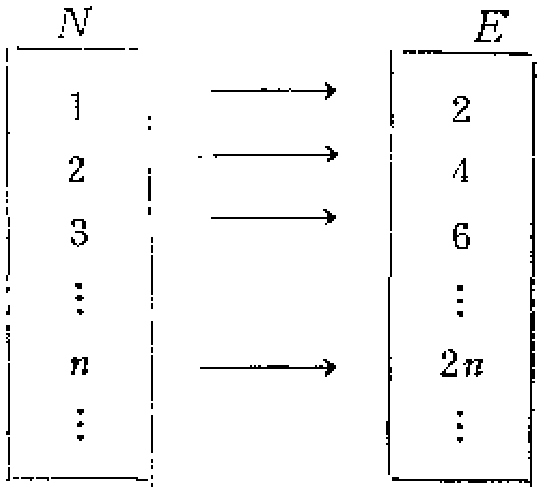


图43

限集的情形，一个集合是不可能跟它的任何一个真子集等势的；而在无限集的情形，一个集合却可以跟它的真子集等势。“全体大于部分”这个论断，在这里是不成立的。

在平面几何学与解析几何学中都有这种全体不“大于”部分的例子。比如，在直角三角形中，虽然斜边总是比直角边“长”，但斜边上的点并不比一条直角边上的点更“多”。设P是直角三角形ABC的斜边AB上的任意一点，过P作直角边AC的垂线，垂足是Q。用这样的方法可以使斜边AB上的点跟直角边AC上的点一一对应，因此斜边AB上的点集跟直角边AC上的点集等势。

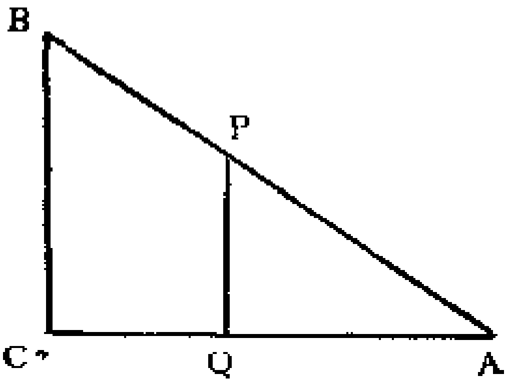


图44

在图45中，设A是开区间（0，1）上的点集，B是半轴（0，∞）上的点集，C是$\overset{\frown}{OQ}$上的点集（端点除外）。过开区间（0，1）上任意一点M作x轴的垂线，与$\overset{\frown}{OQ}$相交

于点R，过P、R作直线交x半轴于N。这样就可以使开区间（0，1）上的点与半轴（0，∞）上的点一一对应.因此，虽然$A\subset B$，但是$A\sim B$，即开区间（0，1）上的点并不比半轴（0，∞）上的点更"少"。

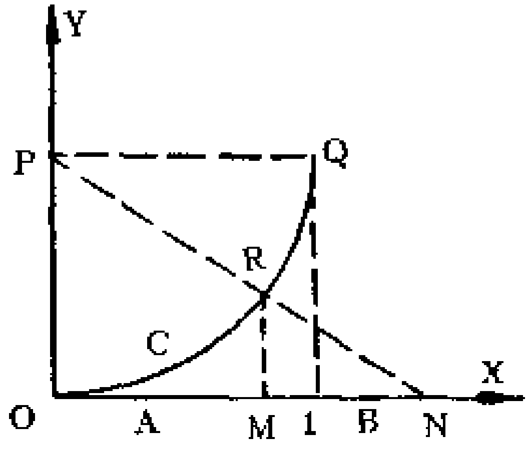


图15

设无限集$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$，$A'=\{a_2,a_3,\cdots\}$，则显然有$A'\subset A$。如果令集合A中的元素a_i跟集合A'中的元素a_{i+1}（$i=1, 2, 3, \cdots$）对应，就可以得到$A\sim A'$.因此，每一个无限集都可以跟它的一个真子集等势。这是无限集区别于有限集的一个重要特征。

对于任意的集合A，B，C，都有：

（1）反射性：$A\sim A$；

（2）对称性：如果$A\sim B$，那么$B\sim A$；

（3）传递性：如果$A\sim B$，$B\sim C$，那么$A\sim C$。

我们把与自然数集$N=\{1, 2, 3, \cdots\}$等势的集合叫做可数集（*countable set*），可数集的基数用符号$\aleph_0$表示($\aleph$是希伯来文的第一个字母，读做*aleph*，$\aleph_0$读做*aleph zero*).比如，下面这些集合都是可数集，它们的基数都是$\aleph_0$：

$\{2,4,6,\cdots,2n,\cdots\}$；

$\{1,3,5,\cdots,2n-1,\cdots\}$；

$\{2,4,8,\cdots,2^n,\cdots\}$；

$\{1,4,9,\cdots,n^2,\cdots\}$，

$\{10, 100, 1000, \cdots, 10^n, \cdots\}$；

$\{2, 3, 5, \cdots, p_n$（第n个素数），$\cdots\}$；

…………。

设a_1是无限集A的一个元素，a_2是差集$A\setminus\{a_1\}$（仍然是无限集）的一个元素，a_3是差集$A\setminus\{a_1, a_2\}$（仍然是无限集）的一个元素，……．照这样一直继续下去，这些互不相同的元素a_1，a_2，a_3，…就构成无限集A的一个可数子集．因此，每一个无限集都含有一个可数的子集。

我们把实数集与跟实数集等势的集合叫做连续集（continuous set）．连续集的基数用符号$\aleph$表示．比如，直线上所有点的集合，平面上所有点的集合，空间中所有点的集合等，都跟实数集等势，因此它们都是连续集，它们的基数都等于$\aleph$。

直线上任意一个区间内所有点的集合，比如，集合$A=\{x \mid -\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\}$，也是连续集．因为，如果令$f: x \to tg\,x$，就可以得到集合$A$跟实数集$R=\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$的元素之间的一一对应关系．所以，虽然$A\subset R$，仍然有$A \sim R$，并且$n(A)=\aleph$。

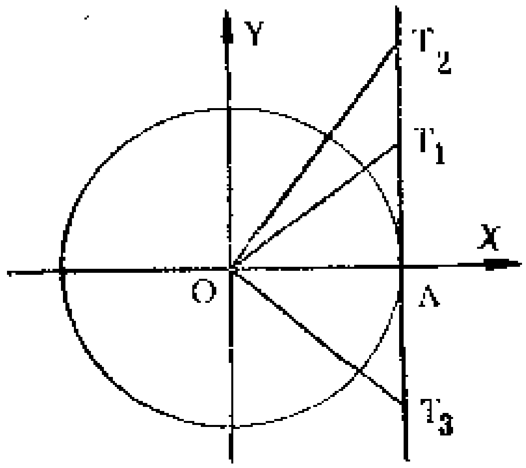


图46

如果集合A可以跟集合B的某个子集B'等势，但集合B却不能跟集合A的任何一个子集等势，那么，就说

集合A的基数小于集合B的基数，或者集合B的基数大于集合A的基数，记做$n(A)<n(B)$，或者$n(B)>n(A)$。

比较集合基数的大小，有下面的性质：

（1）如果$A\sim B'$，$B'\subseteq B$，则$n(A)\leqslant n(B)$；

（2）如果$n(A)\leqslant n(B)$，$n(B)\leqslant n(A)$，则$n(A)=n(B)$，即$A\sim B$；

（3）如果$A\sim B$，$n(B)<n(C)$，则

$$n(A)<n(C);$$

（4）如果$n(A)<n(B)$，$n(B)<n(C)$，则$n(A)<n(C)$。

因为，任何一个无限集A都含有一个可数的子集，即$n(A)\geqslant\aleph_0$，所以，在所有无限集的基数中，$\aleph_0$是最小的。

进一步的讨论可以证明：连续集的基数大于可数集的基数，即$\aleph>\aleph_0$，并且$\aleph=2^{\aleph_0}$。如果把有限集的幂集的概念扩充到无限集的情形，那么，也可以说可数集的幂集是连续集。此外，还存在着各种类型的基数大于连续集的基数$\aleph$的无限集。比如，实数集的一切子集所组成的集合，平面内的所有点集所组成的集合，实变数x的一切单值函数$f(x)$所组成的集合等，它们的基数都等于$2^{\aleph}$，并且$2^{\aleph}>\aleph$。基数$\aleph_0$、$\aleph$和$2^{\aleph}$又叫做初等势。但是，这些讨论已经超出了我们这本小册子的范围。

练　　习

1． 求下列集合的基数：

（1） $A=${太阳系的全体行星}；

（2） $B=\{$你的家庭的全体成员$\}$；

（3） $C=\{$小于100的全体素数$\}$；

（4） $D=\{x\mid x$是有理数，且$x^2=2\}$；

（5） $E=\{0.1,0.01,0.001,\cdots\}$；

（6） $F=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3\}$。

2. （1） 已知$n(A)=21,n(B)=37,n(A\cap B)=13$，求$n(A\cup B)$；

（2） 已知$n(E)=19$，$n(F)=17$， $n(E\cup F)=26$，求$n(A\cap B)$；

（3） 已知$M\cap N=\phi$ ，$n(M)=23$，$n(M\cup N)=51$，求$n(N)$；

（4） 已知$P\subseteq Q$，$n(P)=31$，$n(P\cup Q)=69$，求$n(Q)$和$n(P\cap Q)$。

3. 试证明$n(A\setminus B)=n(A\cup B)-n(B)$
$=n(A)-n(A\cap B)$。

4. 有100名青年工人，每人至少学习一门外语（英语或者日语），其中，学习英语的有67人，学习日语的有59人，问同时学习英语和日语的有多少人？

5. 一个学校先后举行数学、物理、化学三科竞赛。学生中至少参加一科的：数学285人，物理237人，化学194人；至少参加两科的：数学、物理136人，数学、化学108人，物理、化学 95 人；三科都参加的有74人。试统计参加竞赛的学生总数。

6. 在图47中，DE是$\triangle ABC$的中位线。设M是线段DE上所有点的集合，N是线段BC上所有点的集合，试证$M\sim N$。

7. 在图48中，试证明：圆O上除点A外的所有点构成的集合，跟直线XY上的所有点构成的集合等势。

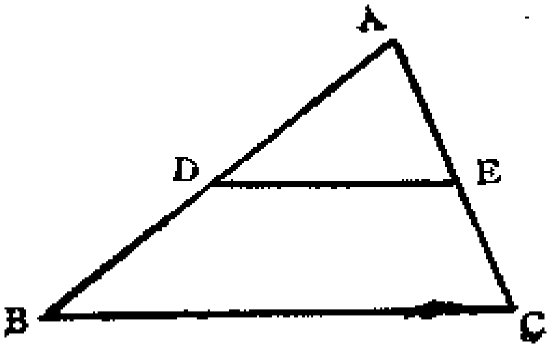


图47

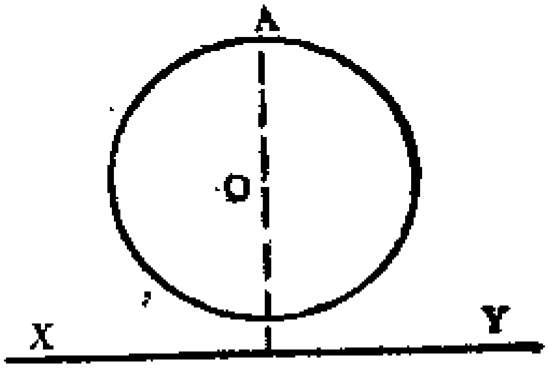


图48

7. 在图48中，试证明：圆O上除点A外的所有点构成的集合，跟直线XY上的所有点构成的集合等势。

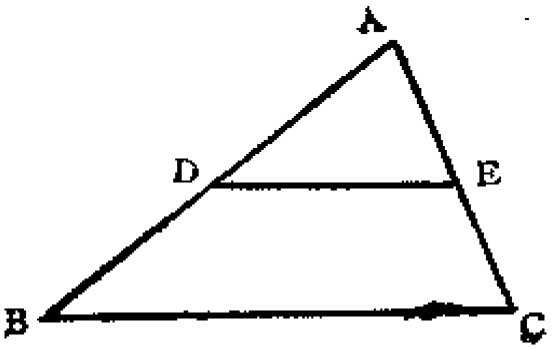


图47

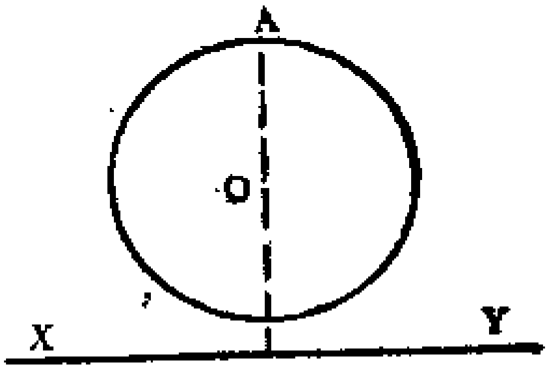


图48