目　录

CONTENTS

第 1 章

θ 函数和 Eisenstein 级数

§1.1 θ 函数

设 a、b、c 和 n 都是正整数，且 $(a, b, c)=1$，以 $N(a, b, c, n)$ 表示不定方程

$$ax^2+by^2+cz^2=n$$

的整数解 (x, y, z) 的个数。定义 θ 函数

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{2\pi i n^2 z}.$$

这里 z 为上半平面 H 上的复变数。$\theta(z)$ 是 H 上的全纯函数。令

$$f(z)=\theta(az)\theta(bz)\theta(cz),$$

易见

$$f(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty} N(a, b, c, n)\, e^{2\pi i n z}.$$

所以 $N(a, b, c, n)$ 是函数 $f(z)$ 的 Fourier 展开式的系数。如果能计算 $f(z)$ 的 Fourier 展开式，也就能找到 $N(a, b, c, n)$。函数 $f(z)$ 与 θ 函数有密切关系，以后我们将知道，$f(z)$ 是一个权为 $3/2$ 的模形式。在研究了模形式的有关理论后，我们在第六章将讨论 $N(a, b, c, n)$ 的解析表达式。更一般，我们也可以考虑多个变量的整系数正定二次型表整数的问题。

本节主要研究 θ 函数。设 t 为正实数，令

$$\varphi(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{-\pi t(n+x)^2},$$

当 x 在任一有限区间内时，该级数绝对一致收敛。由于 $\varphi(x+1)=\varphi(x)$，所以它有 Fourier 展开式：

$$\varphi(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{2\pi i m x},$$

其中

$$\begin{aligned} c_m &= \int_0^1 \varphi(x) e^{-2\pi i m x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi t x^2 - 2\pi i m x} dx \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\pi \left(\sqrt{t}x + \frac{mi}{\sqrt{t}}\right)^2 - \frac{\pi m^2}{t}} dx \\ &= t^{-1/2} e^{-\pi m^2/t}, \end{aligned}$$

因而

$$\varphi(x) = t^{-1/2} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi m^2/t + 2\pi i m x}. \tag{1.1.1}$$

令

$$\tilde{\theta}(z) = \theta(z/2).$$

在(1.1.1)中取 $x=0$ 得到

$$\tilde{\theta}(it) = t^{-1/2}\tilde{\theta}(-1/(it)).$$

由于$\tilde{\theta}(z)$是H上的全纯函数,故有

$$\tilde{\theta}(-1/z) = (-iz)^{1/2}\tilde{\theta}(z), \quad z \in H. \tag{1.1.2}$$

对于多值函数 $z^{1/2}$, 我们选取 $z^{1/2}$ 的幅角 $\arg(z^{1/2})$, 使其适合

$$-\pi/2 < \arg(z^{1/2}) \leqslant \pi/2.$$

一般,我们有 $(z_1z_2)^{1/2} = \pm z_1^{1/2}z_2^{1/2}$。考虑如何决定正负号. 设

$$z_1 = |z_1| e^{i\alpha}, \ z_2 = |z_2| e^{i\beta}, \ -\pi < \alpha, \ \beta \leqslant \pi.$$

则
$$z_1^{1/2} = |z_1|^{1/2} e^{i\alpha/2}, \ z_2^{1/2} = |z_2|^{1/2} e^{i\beta/2}.$$

当 $-\pi < \alpha+\beta \leqslant \pi$ 时,

$$(z_1z_2)^{1/2} = |z_1z_2|^{1/2} e^{i(\alpha+\beta)/2} = z_1^{1/2}z_2^{1/2}.$$

当 $-2\pi < \alpha+\beta \leqslant -\pi$ 时,

$$(z_1z_2)^{1/2} = |z_1z_2|^{1/2} e^{i(\alpha+\beta+2\pi)/2} = -z_1^{1/2}z_2^{1/2},$$

当 $\pi < \alpha+\beta \leqslant 2\pi$ 时,

$$(z_1z_2)^{1/2} = |z_1z_2|^{1/2} e^{i(\alpha+\beta-2\pi)/2} = -z_1^{1/2}z_2^{1/2}.$$

可以总结出如下的规则,若下述三个条件之一成立:

(i) $\mathrm{Im}(z_1) < 0$, $\mathrm{Im}(z_2) < 0$, $\mathrm{Im}(z_1z_2) > 0$;

(ii) $\mathrm{Im}(z_1) > 0$, $\mathrm{Im}(z_2) > 0$, $\mathrm{Im}(z_1z_2) < 0$;

(iii) z_1 和 z_2 都是负数，或一个是负数，另一个的虚部为正，则
$$(z_1z_2)^{1/2} = -z_1^{1/2}z_2^{1/2},$$
在其他情况，都有
$$(z_1z_2)^{1/2} = z_1^{1/2}z_2^{1/2}.$$

一般地，设 $f(x_1, \cdots, x_\kappa)$ 为 κ 个变量的整系数正定二次型。定义矩阵
$$A = (\partial^2 f/\partial x_i\partial x_j),$$
A 是一个对称正定整系数方阵，且对角线上的元素都为偶数。易见
$$f(x_1, \cdots, x_\kappa) = \frac{1}{2}\, xAx^T,$$
这里 $x = (x_1, \cdots, x_\kappa) \in \mathbf{Z}^\kappa$ 是一个行向量，x^T 表示 x 的转置。定义 f 对应的 θ 函数
$$\theta_f(z) = \sum_{x\in Z^\kappa} e^{2\pi i f(x) z},\ z \in H.$$
易见
$$\theta_f(z) = \sum_{x\in Z^\kappa} e^{\pi i xAx^T z}$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \gamma(f, n) e^{2\pi i n z},$$
其中 $\gamma(f, n)$ 为 $f(x) = n$ 的解 $x \in \mathbf{Z}^\kappa$ 的个数。$\theta_f(z)$ 在 H 内的任一有界区域内绝对一致收敛，它是 H 上的一个全纯函数。

设 N 是使矩阵 NA^{-1} 的元素都为整数，且对角线元素都为偶数的最小正整数，可见，$\det A$ 是 N^κ 的因子，所以 $\det A$ 的素因子都是 N 的素因子；又因 $N|2\det A$，N 的奇素因子也一定是 $\det A$ 的素因子。

将 A 看作 2 - adic 整数环 $\mathbf{Z}_2$ 上的矩阵，不难证明一定存在 $\mathbf{Z}_2$ 上的 κ 阶可逆矩阵 S，使
$$SAS^T = \begin{pmatrix} A_1 & & \\ & \ddots & \\ & & A_r \end{pmatrix},$$
其中 A_i 或为 $2\mathbf{Z}_2$ 中的数，或为一个 2 阶对称方阵

$$\begin{pmatrix}2a & b\\ b & 2c\end{pmatrix}(a,\ b,\ c\in \mathbf{Z}_2).$$

当 κ 为奇数时，A_i 中一定有一个是一阶的。由此得到以下引理：

引理 1.1　当 κ 为奇数时，一定有 $2|\det A$ 及 $4|N$；当 κ 为偶数时，一定有 $N|\det A$。又若 $4|\kappa$，则 $\det A$ 或为 4 的倍数，或模 4 余 1；若 $\kappa\equiv 2(\mathrm{mod} 4)$，则 $\det A$ 或为 4 的倍数，或模 4 余 3，因而，$(-1)^{\kappa/2}\det A$ 总为模 4 余 1 或余 0。

设向量 $h\in \mathbf{Z}^\kappa$，且 $hA\in N\mathbf{Z}^\kappa$。定义H上的函数

$$\theta(z;h,\ A,\ N)=\sum_{m\equiv h(N)} e(zmAm^T/2N^2),$$

这里 $e(z)$ 表示 $e^{2\pi iz}$。

命题 1.2　我们有

$$\begin{aligned}&\theta(-1/z;h,\ A,\ N)\\ &=(\det A)^{-1/2}(-iz)^{\kappa/2}\sum_{\substack{l \bmod N\\ lA\equiv (N)}} e(kAk^T/N^2)\theta(z;k,\ A,\ N).\end{aligned}$$

证明　设 t 为正实数，$x=(x_1,\ \cdots,\ x_\kappa)\in \mathbf{R}^\kappa$，令

$$g(x)=\sum_{m\in Z^\kappa} e(it(x+m)A(x+m)^T/2),$$

$g(x)$ 有 Fourier 展开式

$$g(x)=\sum_{m\in \mathbf{Z}^\kappa} a_m e(x\cdot m^T),\tag{1.1.3}$$

其中

$$\begin{aligned}a_m&=\int\cdots\int_{0\leqslant x_j<1} g(x)e(-x\cdot m^T)dx\\ &=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int e(itxAx^T/2-x\cdot m^T)dx,\end{aligned}$$

存在实正交方阵 S，使 SAS^T 为对角阵 $[\alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_\kappa]$，这里 $\alpha_i>0$ $(1\leqslant i\leqslant\kappa)$。在上述积分中取变数变换 $x=yS$，记 $Sm^T=(u_1,\ \cdots,\ u_\kappa)^T$，我们得到

$$\begin{aligned}a_m&=\prod_{j=1}^{\kappa}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t\alpha_j y^2-2\pi i u_j y}dy\\ &=\prod_{j=1}^{\kappa}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi t\alpha_j\left(y+\frac{iu_j}{t\alpha_j}\right)^2-\pi u_j^2/(t\alpha_j)}dy\end{aligned}$$

$$=t^{-\kappa/2}\prod_{j=1}^{\kappa}\alpha_j^{-1/2}e^{-\pi u_j^2/(t\alpha_j)}$$

$$=t^{-\kappa/2}(\det A)^{-1/2}e^{-\pi mA^{-1}m^T/t}. \tag{1.1.4}$$

对任一 $m\in \mathbf{Z}^\kappa$，令 $k\equiv mNA^{-1}(\mathrm{mod}N)$，则 $kA\equiv 0(\mathrm{mod}N)$，$m$ 可表为 $(Nu+k)A/N(u\in\mathbf{Z}^\kappa)$，将(1.1.4)式代入(1.1.3)式得到

$$g(x)=t^{-\kappa/2}(\det A)^{-1/2}\sum_{\substack{k \bmod N\\ kA\equiv 0(N)}}e(xAk^T/N)$$

$$\times\sum_u e(xAu^T+i(Nu+k)A(Nu+k)^T/(2tN^2)),$$

因为 $\theta(it;h,A,N)=g(h/N)$，故由上式可得到

$$\theta(it;h,A,N)$$

$$=t^{-\kappa/2}(\det A)^{-1/2}\sum_{\substack{k \bmod N\\ kA\equiv 0(N)}}e(hAk^T/N^2)\theta(-1/(it);k,A,N),$$

$\theta(z;h,A,N)$是H上的全纯函数，由此即可证得命题1.2。

定义二阶模群

$$SL_2(\mathbf{Z})=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle| a,\ b,\ c,\ d\in\mathbf{Z},\ ad-bc=1\right\}.$$

设

$$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z}),$$

我们将研究 $\theta(z;h,A,N)$ 经变换 $z\longrightarrow\gamma(z)=(az+b)/(cz+d)$ 后的变换公式。首先设 $c>0$，利用命题1.2，我们有

$$\theta(\gamma(z);h,A,N)$$

$$=\sum_{m\equiv h(N)}e\left(mAm^T\left(a-\frac{1}{cz+d}\right)\Big/(2cN^2)\right)$$

$$=\sum_{\substack{g \bmod (cN)\\ g\equiv h(N)}}e(agAg^T/(2cN^2))$$

$$\times\sum_{m\equiv g(cN)}e(-cmAm^T/[2(cz+d)(cN)^2])$$

$$=(\det A)^{-1/2}c^{-\kappa/2}(-i(cz+d))^{\kappa/2}$$

$$\times\sum_{\substack{k \bmod (cN)\\ kA\equiv 0(N)}}\Phi(h,k)\theta(cz;k,cA,cN), \tag{1.1.5}$$

其中

$$\Phi(h,\ k)=\sum_{\substack{g \bmod (cN)\\ g\equiv h(N)}} e([agAg^T+2kAg^T+dkAk^T]/(2cN^2)),$$

这里我们利用了对任一 $m\in \mathbf{Z}^\kappa$, mAm^T 总是偶数这一事实。因为 $ad=1+bc$, 故

$$\Phi(h,\ k)=\sum_{\substack{g \bmod (cN)\\ g\equiv h(N)}} e(a(g+dk)A(g+dk)^T/(2cN^2))$$

$$\times e(-b[2gAk^T+dkAk^T]/(2N^2))$$

$$=e(-b[2hAk^T+dkAk^T]/(2N^2))\Phi(h+dk,\ 0),$$

可见 $\Phi(h,\ k)$ 仅依赖于 $k \bmod N$, 由(1.1.5)式得到

$$\theta(\gamma(z);h,\ A,\ N)(\det A)^{1/2}c^{\kappa/2}(-i(cz+d))^{-\kappa/2}$$

$$=\sum_{\substack{k \bmod N\\ kA\equiv 0(N)}} \Phi(h,\ k)\sum_{\substack{g \bmod (cN)\\ g\equiv k(N)}} \theta(cz;g,\ cA,\ cN)$$

$$=\sum_{\substack{k \bmod N\\ kA\equiv 0(N)}} \Phi(h,\ k)\theta(z;k,\ A,\ N).$$

以 $-1/z$ 代替 z, 再利用命题 1.2 得到

$$\theta((bz-a)/(dz-c);h,\ A,\ N)\det A$$

$$\times c^{\kappa/2}(-i(d-c/z))^{-\kappa/2}(-iz)^{-\kappa/2}$$

$$=\sum_{\substack{l \bmod N\\ lA\equiv 0(N)}} \{\sum_{\substack{k \bmod N\\ kA\equiv 0(N)}} e(lAk^T/N^2)\Phi(h,\ k)\}\theta(z;l,\ A,\ N).$$

(1.1.6)

设 $d\equiv 0(N)$。因 NA^{-1} 为整数方阵，且对角线上的元素都是偶数，所以

$$kAk^T/(2N)=(N^{-1}kA\cdot NA^{-1}\cdot N^{-1}Ak^T)/2$$

为整数，因而

$$\Phi(h,\ k)=e(-bhAk^T/N^2)\Phi(h,\ 0),$$

(1.1.6)式右端为

$$\Phi(h,\ 0)\sum_{\substack{l \bmod N\\ lA\equiv 0(N)}}\ \sum_{\substack{k \bmod N\\ kA\equiv 0(N)}} e((l-bh)Ak^T/N^2)\theta(z;l,\ A,\ N).$$

计算上式的内和。存在 κ 阶模矩阵 P、Q, 使 PAQ 为对角阵$[\alpha_1,\cdots,\alpha_\kappa]$, 因 NA^{-1} 为整数矩阵，故 $\alpha_i|N(1\leqslant i\leqslant\kappa)$。由于

$$kA\equiv(l-bh)A\equiv 0(N),$$

通过计算可知

$$\sum_{\substack{l \bmod N \\ lA \equiv 0(N)}} e((l-bh)Ak^T/N^2)$$
$$=\begin{cases}0, & 若\ l \not\equiv bh(N);\\ \det A, & 若\ l \equiv bh(N).\end{cases}$$

以$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$代替$\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$，这时我们假设 $c \equiv 0(N)$，$d<0$，我们有

$$\theta((az+b)/(cz+d); h, A, N)$$
$$=(-i(c+d/z))^{\kappa/2}(-iz)^{\kappa/2}W\cdot\theta(z; ah, A, N), \quad (1.1.7)$$

其中

$$W=|d|^{-\kappa/2}\sum_{\substack{g \bmod |d|N \\ g\equiv h(N)}} e(-bgAg^T/(2|d|N^2)).$$

因 $$\mathrm{Im}(-i)<0,\ \mathrm{Im}(c+d/z)>0,$$

故 $$(-i(c+d/z))^{\kappa/2}=(-i)^{\kappa/2}(c+d/z)^{\kappa/2}.$$

同样，因为 $\mathrm{Im}(-i)<0$，$\mathrm{Im}z>0$，故

$$(-iz)^{\kappa/2}=(-i)^{\kappa/2}z^{\kappa/2}.$$

又因 $$\mathrm{Im}(cz+d)=c\mathrm{Im}z,$$

故 $$z^{\kappa/2}(c+d/z)^{\kappa/2}=\mathrm{sgn}(c)^{\kappa}(cz+d)^{\kappa/2},$$

其中

$$\mathrm{sgn}(c)=\begin{cases}1, & 若\ c\geqslant 0;\\ -1, & 若\ c<0.\end{cases}$$

所以

$$(-i(c+d/z))^{\kappa/2}(-iz)^{\kappa/2}=(-i\,\mathrm{sgn}(c))^{\kappa}(cz+d)^{\kappa/2}. \quad (1.1.8)$$

由于 $ad\equiv 1(N)$，可将W中的g表为 $adh+Nu$，u 跑遍$(\boldsymbol{Z}/|d|\boldsymbol{Z})^{\kappa}$，于是

$$W=e(abhAh^T/(2N^2))w(b, |d|), \quad (1.1.9)$$

其中

$$w(b, |d|)=|d|^{-\kappa/2}\sum_{u \bmod |d|} e(-buAu^T/(2|d|)).$$

当 $c=0$ 或 $b=0$ 时，总有 $d=-1$，这时 $w(b, |d|)=1$。今设 $bc\neq$

0, d 为奇数。在(1.1.7)式中以 $z+8m(m\in\mathbf{Z})$ 代替 z, 且使 $d+8mc<0$, 利用(1.1.8)式及(1.1.9)式可知

$$w(b,\ |d|)=w(b+8ma,\ |d+8mc|),$$

由于 d 与 $8c$ 互素,可以找到整数 m, 使 $-d-8mc$ 为一奇素数,记它为 p, 又记 $\beta=-(b+8ma)$, 于是得到

$$w(b,\ |d|)=w(-\beta,\ p)=p^{-\kappa/2}\sum_{u \bmod p}e(\beta uAu^T/(2p)).$$

设 $\beta\equiv2\beta'(p)$, 由于 $c\equiv0(N)$, d 与 c 互素,故 p 与 N 互素,因而 p 也与 $\det A$ 互素,存在 κ 阶整数矩阵 S, 其行列式与 p 互素,使 SAS^{-1} 模 p 与对角阵$[q_1,\ \cdots,\ q_\kappa]$ 同余。利用高斯和的结果,我们有

$$\begin{aligned}w(b,\ |d|)&=p^{-\kappa/2}\prod_{i=1}^{\kappa}\left(\sum_{x=1}^{p}e(\beta'q_ix^2/p)\right)\\&=\varepsilon_p^{\kappa}\left(\frac{(\beta')^{\kappa}\det A}{p}\right),\end{aligned}$$

这里$\left(\frac{q}{p}\right)$是 Legendre 符号,即

$$\left(\frac{q}{p}\right)=\begin{cases}1, & 若\ q\ 为模\ p\ 的二次剩余;\\-1, & 否则。\end{cases}$$

符号 ε_n 对一切奇数 n 有定义,且

$$\varepsilon_n=\begin{cases}1, & 若\ n\equiv1(4);\\i, & 若\ n\equiv3(4).\end{cases}$$

易见

$$\varepsilon_p=\varepsilon_{-d}=i\varepsilon_d^{-1}.$$

因为 $\det A$ 的素因子一定是 N 的素因子, $p\equiv-d(8N)$, 故

$$\left(\frac{\det A}{p}\right)=\left(\frac{\det A}{-d}\right).$$

由于$\begin{pmatrix}a & -\beta\\c & -p\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})$, 即 $\beta c-ap=1$, 所以 $2\beta'c\equiv1(p)$, 因而

$$\left(\frac{\beta'}{p}\right)=\left(\frac{2c}{p}\right)=\left(\frac{2c}{-d}\right).$$

设 a 为整数，$b\neq 0$ 为奇数，我们定义一个新的二次剩余符号 $\left(\frac{a}{b}\right)$，它具有下述性质：

(1) 当 $(a,\ b)\neq 1$ 时，$\left(\frac{a}{b}\right)=0$；

(2) $\left(\frac{0}{\pm 1}\right)=1$；

(3) 当 $b>0$ 时，$\left(\frac{a}{b}\right)$ 就是 Jacobi 符号，即若 $b=\Pi p^{r}$ 为标准因子分解，则

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\Pi\left(\frac{a}{p}\right)^{r};$$

(4) 当 $b<0$ 时，$\left(\frac{a}{b}\right)=\operatorname{sgn}(a)\left(\frac{a}{|b|}\right)$。

今后在本书中出现的符号 $\left(\frac{a}{b}\right)$，都如上述所定义。在上述定义下，我们有

$$w(b,\ |d|)=\varepsilon_{d}^{-\kappa}(\operatorname{sgn}(c)i)^{\kappa}\left(\frac{2c\det A}{d}\right). \qquad (1.1.10)$$

上式在 $c=0$ 或 $c\neq 0$ 两种情况下都成立。

定义模群的子群

$$\Gamma_0(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})\,\middle|\, N\mid c\right\}.$$

于是有下述命题：

命题 1.3 设 $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$。当 κ 为奇数时，我们有

$$\begin{aligned}&\theta(\gamma(z);h,\ A,\ N)\\ &=e(abhAh^{T}/(2N^{2}))\left(\frac{\det A}{d}\right)\left(\frac{2c}{d}\right)^{\kappa}\\ &\quad\times\varepsilon_{d}^{-\kappa}(cz+d)^{\kappa/2}\theta(z;ah,\ A,\ N).\end{aligned} \qquad (1.1.11)$$

当 κ 为偶数时，我们有

$$\begin{aligned}&\theta(\gamma(z);h,\ A,\ N)\\ &=e(abhAh^{T}/(2N^{2}))\left(\frac{(-1)^{\kappa/2}\det A}{d}\right)\end{aligned}$$

$$\times(cz+d)^{\kappa/2}\theta(z;ah,A,N). \qquad (1.1.12)$$

证明　首先设 κ 为奇数。由引理1.1，这时 N 是4的倍数，所以 d 一定是奇数。当 $d<0$ 时，将(1.1.8)、(1.1.9)和(1.1.10)式代入(1.1.7)式即得(1.1.11)式。当 $d>0$ 时，以 $-\gamma$ 代替 γ，由于

$$(-\gamma)(z)=\gamma(z),$$

故

$$\begin{aligned}&\theta(\gamma(z);h,A,N)\\&=e(abhAh^T/(2N^2))\left(\frac{\det A}{d}\right)\left(\frac{-2c}{-d}\right)^{\kappa}\\&\quad\times\varepsilon_{-d}^{-\kappa}(-cz-d)^{\kappa/2}\theta(z;-ah,A,N).\end{aligned}$$

易见 $\theta(z;-ah,A,N)=\theta(z;ah,A,N)$。当 $c=0$ 时，有 $d=1$，这时

$$\left(\frac{-2c}{-d}\right)^{\kappa}\varepsilon_{-d}^{-\kappa}(-cz-d)^{\kappa/2}=i^{-\kappa}(-1)^{\kappa/2}=1.$$

当 $c\neq0$ 时，我们有

$$\begin{aligned}&\left(\frac{-2c}{-d}\right)^{\kappa}\varepsilon_{-d}^{-\kappa}(-cz-d)^{\kappa/2}\\&=(-\operatorname{sgn}(c))^{\kappa}\left(\frac{-2c}{d}\right)^{\kappa}i^{-\kappa}\varepsilon_d^{\kappa}(-i\operatorname{sgn}(c))^{\kappa}(cz+d)^{\kappa/2}\\&=\varepsilon_d^{-\kappa}\left(\frac{2c}{d}\right)^{\kappa}(cz+d)^{\kappa/2}.\end{aligned}$$

所以当 $d>0$ 时，(1.1.11)式也成立。

现在设 κ 为偶数。当 d 为奇数时，利用上述类似方法，可知(1.1.12)式成立。当 d 为偶数时，c 一定是奇数，从而 N 也是奇数。利用上面已经证明的 d 为奇数时的结果，我们有

$$\begin{aligned}&\theta\left(\frac{az+aN+b}{cz+cN+d};h,A,N\right)\\&=e(abhAh^T/(2N^2))\left(\frac{(-1)^{\kappa/2}\det A}{cN+d}\right)\\&\quad\times(cz+cN+d)^{\kappa/2}\theta(z;ah,A,N), \qquad (1.1.13)\end{aligned}$$

以上利用了 $hAh^T/(2N)$ 为整数这一事实。由引理1.1及后面将要证明的引理1.5，我们有

$$\left(\frac{(-1)^{\kappa/2}\det A}{cN+d}\right)=\left(\frac{(-1)^{\kappa/2}\det A}{d}\right).$$

这里 d 是偶数，上式右端可以理解为$\left(\frac{(-1)^{\kappa/2}\det A}{d+\det A}\right)$，在(1.1.13)式中以 $z-N$ 代替 z 便得到(1.1.12)式。

由于

$$\theta_f(z)=\theta(z;\ 0,\ A,\ N),$$

我们得到本节的主要定理：

定理 1.4 设 $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$。当 κ 为奇数时，

$$\theta_f(\gamma(z))=\left(\frac{2\det A}{d}\right)\varepsilon_d^{-\kappa}\left(\frac{c}{d}\right)^{\kappa}(cz+d)^{\kappa/2}\theta_f(z);$$

当 κ 为偶数时，

$$\theta_f(\gamma(z))=\left(\frac{(-1)^{\kappa/2}\det A}{d}\right)(cz+d)^{\kappa/2}\theta_f(z).$$

特别，取 $\kappa=1$, $A=2$, 这时 $N=4$, 对任一

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(4),$$

由定理 1.4 得到

$$\theta(\gamma(z))=\varepsilon_d^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)(cz+d)^{1/2}\theta(z).$$

定义符号

$$j(\gamma,\ z)=\varepsilon_d^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)(cz+d)^{1/2},\ \gamma\in\Gamma_0(4).$$

若 γ_1、$\gamma_2\in\Gamma_0(4)$，利用上述结果，我们有

$$\theta(\gamma_1\gamma_2(z))=j(\gamma_1\gamma_2,\ z)\theta(z)$$

及

$$\begin{aligned}\theta(\gamma_1\gamma_2(z))&=j(\gamma_1,\ \gamma_2(z))\theta(\gamma_2(z))\\&=j(\gamma_1,\ \gamma_2(z))j(\gamma_2,\ z)\theta(z).\end{aligned}$$

故

$$j(\gamma_1\gamma_2,\ z)=j(\gamma_1,\ \gamma_2(z))j(\gamma_2,\ z).\tag{1.1.14}$$

引理 1.5 设整数 $a=ds^2\neq0$, d 无平方因子。令

$$D=\begin{cases}|d|, & 若\ d\equiv 1(4);\\ 4|d|, & 若\ d\equiv 2,\ 3(4).\end{cases}$$

则映射 $b\mapsto\left(\frac{a}{b}\right)$ (b 为奇数)定义一个模 $4a$ 的一个因子的特征，以 D 为导子。

证明 当 a 与 b 互素时，显然有

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{d}{b}\right).$$

(i) 设 $d>0$, d 为奇数。若 $b>0$, 则

$$\left(\frac{d}{b}\right)=\begin{cases}\left(\frac{b}{d}\right), & 若\ d\equiv 1(4);\\ \left(\frac{-1}{b}\right)\left(\frac{b}{d}\right), & 若\ d\equiv 3(4).\end{cases}$$

若 $b<0$, 则当 $d\equiv 1(4)$ 时，

$$\left(\frac{d}{b}\right)=\left(\frac{d}{|b|}\right)=\left(\frac{|b|}{d}\right)=\left(\frac{b}{d}\right).$$

当 $d\equiv 3(4)$ 时，

$$\left(\frac{d}{b}\right)=\left(\frac{d}{|b|}\right)=\left(\frac{-1}{|b|}\right)\left(\frac{|b|}{d}\right)=\left(\frac{-1}{b}\right)\left(\frac{b}{d}\right).$$

所以引理成立。

(ii) 设 $d<0$, d 为奇数。若 $b>0$, 则

$$\begin{aligned}\left(\frac{d}{b}\right)&=\left(\frac{-1}{b}\right)\left(\frac{|d|}{b}\right)\\&=\begin{cases}\left(\frac{b}{|d|}\right), & 若\ d\equiv 1(4);\\ \left(\frac{-1}{b}\right)\left(\frac{b}{|d|}\right), & 若\ d\equiv 3(4).\end{cases}\end{aligned}$$

若 $b<0$, 则当 $d\equiv 1(4)$ 时，

$$\left(\frac{d}{b}\right)=-\left(\frac{d}{|b|}\right)=-\left(\frac{|b|}{|d|}\right)=\left(\frac{b}{|d|}\right),$$

当 $d\equiv 3(4)$ 时，

$$\left(\frac{d}{b}\right)=-\left(\frac{d}{|b|}\right)=-\left(\frac{-1}{|b|}\right)\left(\frac{|b|}{|d|}\right)=\left(\frac{-1}{b}\right)\left(\frac{b}{|d|}\right),$$

引理也成立。

(iii) 设 $d=2d'$，则

$$\left(\frac{d}{b}\right)=\left(\frac{2}{b}\right)\left(\frac{d'}{b}\right),$$

$\left(\frac{2}{b}\right)$是模 8 的特征，将(i)与(ii)的结果应用于$\left(\frac{d'}{b}\right)$，即可证得引理。

当 $a\equiv 1(4)$ 时，$b\longmapsto\left(\frac{a}{b}\right)$是模 a 的特征，这时 b 也可取为偶数。

§1.2 Eisenstein 级数

在本节中，κ 总代表一个正奇数，N 为正整数，且是 4 的倍数，ω 为模N的偶特征，即 $\omega(-1)=1$。我们将构造一类H上的全纯函数，称为 Eisenstein 级数，它们具有变换公式

$$f(\gamma(z))=\omega(d_\gamma)j(\gamma, z)^\kappa f(z),$$

$$\gamma=\begin{pmatrix} * & * \\ * & d_\gamma \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N).$$

因为 $j(-I, z)=1$，若 $\omega(-1)=-1$，则仅有 $f(z)=0$ 适合上式，所以我们要求 $\omega(-1)=1$。

引理 1.6 设 $k>2$ 为正整数，$z\in H$，令

$$L=\{mz+n\mid m,\ n\in\mathbf{Z}\},$$

则级数

$$E_k(z)=\sum_{w\in L\setminus\{0\}}w^{-k}=\sum_{m,n}{}'(mz+n)^{-k}$$

为H上的全纯函数，$\sum'$ 表示对所有$(m, n)\neq(0, 0)$求和。

证明 令 P_m 表示以$\pm mz\pm m$为顶点的平行四边形。记

$$r=\min\{|w|,\ w\in P_1\},$$

任一 $w\in P_m$，有$|w|\geqslant mr$。因为 P_m中有L的 $8m$ 个点，故

$$\sum_{w\in L\setminus\{0\}}|w|^{-k}=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{w\in P_m}|w|^{-k}\leqslant 8\sum_{m=1}^{\infty}m(mr)^{-k},$$

当$k>2$时，上式右端是一个收敛级数。所以当z在H的一个有界区域内时，$E_k(z)$是绝对一致收敛的，$E_k(z)$是H上的全纯函数。

令

$$\Gamma_\infty=\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & n\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| n\in\mathbf{Z}\right\},$$

它是$\Gamma_0(N)$的一个子群。设$\kappa\geqslant 5$，定义

$$E_k(\omega,N)(z)=\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}\omega(d_\gamma)j(\gamma,z)^{-\kappa} \qquad (1.2.1)$$

这里γ跑遍Γ_∞在$\Gamma_0(N)$中的右陪集代表系。当$\gamma'\in\Gamma_\infty$时，利用(1.1.14)式可得

$$\begin{aligned}\omega(d_{\gamma'\gamma})j(\gamma'\gamma,z)^{-\kappa}&=\omega(d_{\gamma'})\omega(d_\gamma)j(\gamma',\gamma(z))^{-\kappa}j(\gamma,z)^{-\kappa}\\&=\omega(d_\gamma)j(\gamma,z)^{-\kappa}.\end{aligned}$$

可见上述定义是合理的。由引理1.6，可知$E_\kappa(\omega,N)$是H上的全纯函数。对任一$\gamma'\in\Gamma_0(N)$，我们有

$$\begin{aligned}E_\kappa(\omega,N)(\gamma'(z))&=\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}\omega(d_\gamma)j(\gamma,\gamma'(z))^{-\kappa}\\&=\bar{\omega}(d_{\gamma'})j(\gamma',z)^{\kappa}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}\omega(d_{\gamma\gamma'})j(\gamma\gamma',z)^{-\kappa}\\&=\bar{\omega}(d_{\gamma'})j(\gamma',z)^{\kappa}E_\kappa(\omega,N)(z).\end{aligned}$$

这里利用了$d_{\gamma\gamma'}\equiv d_\gamma\cdot d_{\gamma'}(N)$。

当$1\leqslant\kappa<5$时，(1.2.1)中定义的级数不是绝对收敛的，为了也能得到具有上述变换公式的H上的全纯函数，引进如下的函数

$$E_\kappa(s,w,N)(z)=y^{s/2}\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}\times w(d_\gamma)j(\gamma,z)^{-\kappa}|j(\gamma,z)|^{-2s}, \qquad (1.2.2)$$

其中$y=\mathrm{Im}(z)>0$，s为一个复变量，通常称$|j(\gamma,z)|^{-2s}$为Hecke收敛因子，这是由Hecke首先引入的。当$\mathrm{Re}(s)>2-\kappa/2$时，上述级数是绝对收敛的，且具有变换公式

$$\begin{aligned}&E_\kappa(s,\omega,N)(\gamma(z))\\&=\bar{\omega}(d_\gamma)j(\gamma,z)^{\kappa}E_\kappa(s,\omega,N)(z),\qquad \gamma\in\Gamma_0(N).\end{aligned} \qquad (1.2.3)$$

这里利用了

$$\mathrm{Im}(\gamma(z)) = |j(\gamma, z)|^{-2}\mathrm{Im}(z).$$

我们将通过解析延拓，将 $E_\kappa(s, \omega, N)$ 延拓为 s 平面上的亚纯函数，然后在 $s=0$ 处得到 H 上的一个全纯函数。由(1.2.3)式可得

$$E_\kappa(s, \omega, N)(z+1) = E_\kappa(s, \omega, N)(z),$$

即以 1 为周期，我们将首先计算 $E_\kappa(s, \omega, N)(z)$ 关于 $e(z)$ 的 Fourier 展开式，然后得到关于 s 的解析延拓。当 $\kappa \geqslant 5$ 时，$E_\kappa(0, \omega, N)(z)$ 的 Fourier 展开式即为(1.2.1)中定义的 $E_\kappa(\omega, N)(z)$ 的 Fourier 展开式，这时并不需要引入 Hecke 收敛因子，但在下面的讨论中，我们将 $\kappa \geqslant 5$ 和 $1 \leqslant \kappa < 5$ 两种情况一并处理。

我们需要下述几个引理。

引理 1.7 设 $\lambda, y \in \boldsymbol{R}$, $\beta \in \boldsymbol{C}$, 且 $y > 0$, $\mathrm{Re}(\beta) > 0$, 则

$$\int_{y-i\infty}^{y+i\infty} v^{-\beta} e^{\lambda v} dv = \begin{cases} 2\pi i \lambda^{\beta-1} \Gamma(\beta)^{-1}, & \text{若 } \lambda > 0; \\ 0, & \text{若 } \lambda \leqslant 0. \end{cases}$$

证明 仅需在假设 $0 < \mathrm{Re}(\beta) < 1$ 之下证明本引理。记

$$\beta = a + bi, \quad v = |v| e^{i\varphi} = s + it \quad (s, t \in \boldsymbol{R}).$$

当 $\lambda \leqslant 0$ 时，取积分围道(图 1.1)，由于

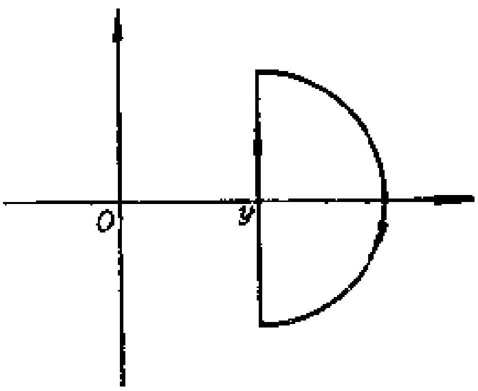

图 1.1

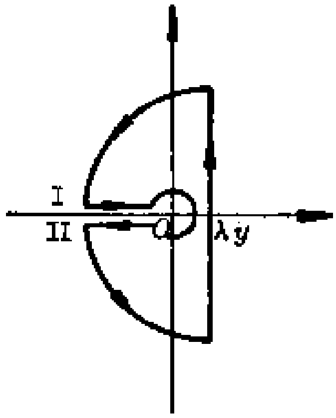

图 1.2

$$|v^{-\beta} e^{\lambda v}| = |e^{-(a+bi)(\lg|v|+i\varphi)+\lambda(s+it)}|$$
$$= e^{-a\lg|v|+b\varphi+\lambda s} \to 0 \ (|v| \to \infty, \ s \geqslant y).$$

利用围道积分，易见引理成立。

当 $\lambda > 0$ 时，

$$\int_{y-i\infty}^{y+i\infty} v^{-\beta}e^{\lambda v}dv=\lambda^{\beta-1}\int_{\lambda y-i\infty}^{\lambda y+i\infty}v^{-\beta}e^{v}dv,$$

取积分围道（图1.2），当 v 在以原点 O 为中心，r 为半径的圆上时，由于 $0<\alpha<1$，所以

$$r|v^{-\beta}e^{v}|=r^{1-\alpha}|e^{v}|\to 0\quad(r\to 0)。$$

另一方面，

$$|v^{-\beta}e^{v}|=e^{-\alpha\lg|v|+b\varphi+s}\to 0\quad(|v|\to\infty,\ s\leqslant\lambda y)。$$

故由围道积分得到

$$\int_{\lambda y-i\infty}^{\lambda y+i\infty}v^{-\beta}e^{v}dv=-\underbrace{\int_{-\infty}^{0}v^{-\beta}e^{v}dv}_{\mathrm{I}}-\underbrace{\int_{0}^{-\infty}v^{-\beta}e^{v}dv}_{\mathrm{II}},$$

第一个积分沿负实轴上岸，这时 $-1=e^{i\pi}$，第二个积分沿负实轴下岸，这时 $-1=e^{-i\pi}$。我们有

$$\underbrace{\int_{-\infty}^{0}v^{-\beta}e^{v}dv}_{\mathrm{I}}=e^{-i\pi\beta}\int_{0}^{\infty}x^{-\beta}e^{-x}dx=e^{-i\pi\beta}\Gamma(1-\beta),$$

$$\underbrace{\int_{0}^{-\infty}v^{-\beta}e^{v}dv}_{\mathrm{II}}=-e^{i\pi\beta}\int_{0}^{\infty}x^{-\beta}e^{-x}dx=-e^{i\pi\beta}\Gamma(1-\beta)。$$

由于

$$\begin{aligned}(e^{i\pi\beta}-e^{-i\pi\beta})\Gamma(1-\beta)&=2i\Gamma(1-\beta)\sin\pi\beta\\&=2\pi i\Gamma(\beta)^{-1},\end{aligned}$$

证得引理1.7。

设 $y>0$，α、$\beta\in\boldsymbol{C}$，定义

$$W(y,\alpha,\beta)=\Gamma(\beta)^{-1}\int_{0}^{\infty}(1+u)^{\alpha-1}u^{\beta-1}e^{-yu}du,$$

称为Whittaker函数。当 $\mathrm{Re}(\beta)>0$ 时，上述积分是收敛的，由分部积分公式可得

$$\begin{aligned}W(y,\alpha,\beta)&=\beta^{-1}\Gamma(\beta)^{-1}\int_{0}^{\infty}(1+u)^{\alpha-1}e^{-yu}du^{\beta}\\&=yW(y,\alpha,\beta+1)+(1-\alpha)W(y,\alpha-1,\beta+1)。\end{aligned}\tag{1.2.4}$$

利用上式,可将 $W(y,\alpha,\beta)$ 解析延拓，使其对任一 $(\alpha,\beta)\in\boldsymbol{C}^2$ 都有定义。解析延拓后的函数仍记为 $W(y,\alpha,\beta)$。

引理 1.8 $W(y,\alpha,0)=1$ 及 $W(y,1,-1/2)=y^{1/2}$。

证明 在(1.2.4)式中取 $\beta=0$，得

$$W(y,\alpha,0)=yW(y,\alpha,1)+(1-\alpha)W(y,\alpha-1,1)$$

$$=y\int_0^\infty(1+u)^{\alpha-1}e^{-yu}du+(1-\alpha)\int_0^\infty(1+u)^{\alpha-2}e^{-yu}du$$

$$=y\int_0^\infty(1+u)^{\alpha-1}e^{-yu}du-\int_0^\infty e^{-yu}d(1+u)^{\alpha-1}$$

$$=-e^{-yu}(1+u)^{\alpha-1}\Big|_0^\infty=1.$$

同样,在(1.2.4)式中取 $\beta=-1/2$，得

$$W(y,1,-1/2)=yW(y,1,1/2)$$

$$=y\Gamma(1/2)^{-1}\int_0^\infty u^{-1/2}e^{-yu}du=y^{1/2}.$$

引理 1.9 设 $y>0$，$\alpha,\beta\in\boldsymbol{C}$，我们有

$$y^\beta W(y,\alpha,\beta)=y^{1-\alpha}W(y,1-\beta,1-\alpha).$$

证明 取 $\Gamma(\beta)W(y,\alpha,\beta)$ 的 Mellin 变换(设 $\mathrm{Re}(s)>0$)

$$\Gamma(\beta)\int_0^\infty W(y,\alpha,\beta)y^{s-1}dy$$

$$=\int_0^\infty(u+1)^{\alpha-1}u^{\beta-1}\int_0^\infty y^{s-1}e^{-yu}dydu$$

$$=\Gamma(s)\int_0^\infty(u+1)^{\alpha-1}u^{\beta-s-1}du,$$

设 $\mathrm{Re}(1-\alpha)>0$，将

$$(u+1)^{\alpha-1}=\Gamma(1-\alpha)^{-1}\int_0^\infty e^{-x(u+1)}x^{-\alpha}dx$$

代入上式,可得

$$\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)\int_0^\infty W(y,\alpha,\beta)y^{s-1}dy$$

$$=\Gamma(s)\Gamma(\beta-s)\Gamma(1-\alpha-\beta+s),$$

利用 Mellin 反变换得

$$W(y,\alpha,\beta)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}\frac{\Gamma(s)\Gamma(\beta-s)\Gamma(1-\alpha-\beta+s)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)}y^{-s}ds,$$

其中 c 适合 $c>0$, $\mathrm{Re}(\beta)>c>\mathrm{Re}(\alpha+\beta-1)$。当

$$\mathrm{Re}(\beta)>0,\ \mathrm{Re}(1-\alpha)>0$$

时，这样的 c 总存在。取变数变换 $S=s-\beta$, 我们有

$$y^{\beta}W(y,\alpha,\beta)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-p-i\infty}^{-p+i\infty}\frac{\Gamma(-S)\Gamma(S+\beta)\Gamma(S+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)}y^{-s}dS,$$

其中 p 适合 $0<p<\min(\mathrm{Re}(1-\alpha),\ \mathrm{Re}(\beta))$。上式右端在变换 $\alpha\mapsto1-\beta$, $\beta\mapsto1-\alpha$ 之下不变，故当 $\mathrm{Re}(1-\alpha)>0$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$ 时引理成立，由于 $W(y,\alpha,\beta)$ 是 $\boldsymbol{C}^2$ 上的解析函数，故对任一 $(\alpha,\beta)\in\boldsymbol{C}^2$, 引理成立。

引理 1.10(Siegel [21]) 设 $\mathrm{Re}(\alpha)>0$, $\mathrm{Re}(\beta)>0$, $\mathrm{Re}(\alpha+\beta)>1$, $z=x+iy\in H$, 则

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(z+m)^{-\alpha}(\bar z+m)^{-\beta}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}t_n(y,\alpha,\beta)e^{2\pi inx},$$

其中

$$i^{\alpha-\beta}(2\pi)^{-\alpha-\beta}t_n(y,\alpha,\beta)$$
$$=\begin{cases}n^{\alpha+\beta-1}e^{-2\pi ny}\Gamma(\alpha)^{-1}W(4\pi ny,\alpha,\beta), & 若\ n>0;\\ |n|^{\alpha+\beta-1}e^{-2\pi|n|y}\Gamma(\beta)^{-1}W(4\pi|n|y,\beta,\alpha), & 若\ n<0;\\ \Gamma(\alpha)^{-1}\Gamma(\beta)^{-1}\Gamma(\alpha+\beta-1)(4\pi y)^{1-\alpha-\beta}, & 若\ n=0.\end{cases}$$

证明 令

$$f(x)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}(x+iy+m)^{-\alpha}(x-iy+m)^{-\beta},$$

当 $\mathrm{Re}(\alpha+\beta)>1$ 时，该级数绝对收敛。由于 $f(x+1)=f(x)$, 可设

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_ne^{2\pi inx},$$

其中

$$c_n=\int_0^1 f(x)e^{-2\pi inx}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}(x+iy)^{-\alpha}(x-iy)^{-\beta}e^{-2\pi inx}dx$$

$$=i^{\beta-\alpha}\int_{-\infty}^{\infty}(y-ix)^{-\alpha}(y+ix)^{-\beta}e^{-2\pi inx}dx$$

$$=i^{\beta-\alpha-1}e^{2\pi ny}\int_{y-i\infty}^{y+i\infty}v^{-\beta}(2y-v)^{-\alpha}e^{-2\pi nv}dv$$

$$=i^{\beta-\alpha-1}e^{2\pi ny}\Gamma(\alpha)^{-1}\int_{y-i\infty}^{y+i\infty}v^{-\beta}e^{-2\pi nv}\int_0^{\infty}e^{-\xi(2y-v)}\xi^{\alpha-1}d\xi dv$$

$$=i^{\beta-\alpha-1}e^{2\pi ny}\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{\infty}\xi^{\alpha-1}e^{-2y\xi}\left\{\int_{y-i\infty}^{y+i\infty}v^{-\beta}e^{(\xi-2\pi n)v}dv\right\}d\xi,$$

这里利用了当 $\mathrm{Re}(\alpha)>0$ 时，

$$(2y-v)^{-\alpha}=\Gamma(\alpha)^{-1}\int_0^{\infty}e^{-\xi(2y-v)}\xi^{\alpha-1}d\xi.$$

令 $\xi=2\pi p$, $u=\max(0, n)$, 因 $\mathrm{Re}(\beta)>0$, 由引理 1.7 得到

$$c_n=2\pi i^{\beta-\alpha}e^{2\pi ny}\Gamma(\alpha)^{-1}\Gamma(\beta)^{-1}\int_{2\pi u}^{\infty}\xi^{\alpha-1}(\xi-2\pi n)^{\beta-1}e^{-2y\xi}d\xi$$

$$=(2\pi)^{\alpha+\beta}i^{\beta-\alpha}e^{2\pi ny}\Gamma(\alpha)^{-1}\Gamma(\beta)^{-1}\int_u^{\infty}p^{\alpha-1}(p-n)^{\beta-1}e^{-4\pi py}dp.$$

当 $n>0$ 时, $u=n$, 取变数变换 $p-n=nq$, 这时

$$\int_n^{\infty}p^{\alpha-1}(p-n)^{\beta-1}e^{-4\pi py}dp$$

$$=n^{\alpha+\beta-1}\int_0^{\infty}(q+1)^{\alpha-1}q^{\beta-1}e^{-4\pi n(1+q)y}dq$$

$$=n^{\alpha+\beta-1}e^{-4\pi ny}W(4\pi ny, \alpha, \beta).$$

当 $n<0$ 时, $u=0$, 取变数变换 $p=-nq$, 这时

$$\int_0^{\infty}p^{\alpha-1}(p-n)^{\beta-1}e^{-4\pi py}dp$$

$$=|n|^{\alpha+\beta-1}\int_0^{\infty}(1+q)^{\beta-1}q^{\alpha-1}e^{-4\pi|n|qy}dq$$

$$=|n|^{\alpha+\beta-1}W(4\pi|n|y, \beta, \alpha).$$

当 $n=0$ 时, $u=0$, 这时

$$\int_0^{\infty}p^{\alpha+\beta-2}e^{-4\pi py}dp=(4\pi y)^{1-\alpha-\beta}\Gamma(\alpha+\beta-1).$$

现在来计算 $E_\kappa(s, \omega, N)(z)$ 的 Fourier 展开式。

令

$W=\{(c,\ d)\mid c,\ d\in\mathbf{Z},\ (c,\ d)=1,\ N\mid c,\ c\geqslant 0,$ 当 $c=0$ 时 $d=1\}$

$\Gamma_0(N)$中的两个元素属于Γ_∞的同一右陪集，当且仅当它们的第二行相同或差一个负号，易见Γ_∞在$\Gamma_0(N)$中的右陪集可与W中的$(c,\ d)$一一对应。设$\mathrm{Re}(s)>2-\kappa/2$，利用引理1.10，我们有(以$cN$代替$c$)：

$$\begin{aligned}
&E_\kappa(s,\ \omega,\ N)(z)\\
&=y^{s/2}\left\{1+\sum_{d=-\infty}^{+\infty}\sum_{c=1}^{\infty}\omega(d)\varepsilon_d^\kappa\left(\frac{cN}{d}\right)(cNz+d)^{-\kappa/2}|cNz+d|^{-s}\right\}\\
&=y^{s/2}\left\{1+\sum_{c=1}^{\infty}(cN)^{-\kappa/2-s}\sum_{d=1}^{cN}\omega(d)\varepsilon_d^\kappa\left(\frac{cN}{d}\right)\right.\\
&\quad\left.\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(z+\frac{d}{cN}+n\right)^{-\kappa/2-s/2}\left(\bar{z}+\frac{d}{cN}+n\right)^{-s/2}\right\}\\
&=y^{s/2}\left\{1+\sum_{n=-\infty}^{+\infty}a_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N)t_n(y,\ (\kappa+s)/2,\ s/2)e(nx)\right\}.
\end{aligned}\tag{1.2.5}$$

其中

$$\begin{aligned}
&a_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N)\\
&=\sum_{c=1}^{\infty}(cN)^{-\kappa/2-s}\sum_{d=1}^{cN}\omega(d)\varepsilon_d^\kappa\left(\frac{cN}{d}\right)e\left(\frac{nd}{cN}\right).
\end{aligned}\tag{1.2.6}$$

当$\mathrm{Re}(s)>2-\kappa/2$时，定义函数

$$E'_\kappa(s,\ \omega,\ N)(z)=z^{-\kappa/2}E_\kappa(s,\ \omega,\ N)(-1/(Nz)).\tag{1.2.7}$$

设$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$且$a>0$，由(1.2.3)式我们有

$$\begin{aligned}
&E'_\kappa(s,\ \omega,\ N)(\gamma(z))\\
&=\gamma(z)^{-\kappa/2}E_\kappa(s,\ \omega,\ N)\left(\frac{d(-1/Nz)-c/N}{-Nb(-1/Nz)+a}\right)\\
&=\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{-\kappa/2}\bar{\omega}(a)\varepsilon_a^{-\kappa}\left(\frac{-Nb}{a}\right)(a+b/z)^{\kappa/2}\\
&\quad\times E_\kappa(s,\ \omega,\ N)(-1/(Nz)).
\end{aligned}$$

由于$ad\equiv1(N)$，因而$\bar{\omega}(a)=\omega(d)$，$\varepsilon_a=\varepsilon_d$，利用引理1.5，有

$$\left(\frac{-Nb}{a}\right)=\left(\frac{Nc}{d}\right)\left(\frac{-bc}{d}\right)\left(\frac{-Nb}{1+bc}\right)=\left(\frac{cN}{d}\right).$$

又因 $a>0$，所以

$$\left(\frac{az+b}{z}\right)^{\kappa/2}=\frac{(az+b)^{\kappa/2}}{z^{\kappa/2}},$$
$$\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)^{-\kappa/2}=\frac{(az+b)^{-\kappa/2}}{(cz+d)^{-\kappa/2}},$$

于是我们得到

$$E'_\kappa(s,\ \omega,\ N)(\gamma(z))$$
$$=\omega(d_\gamma)\left(\frac{N}{d_\gamma}\right)j(\gamma,\ z)^\kappa E'_\kappa(s,\ \omega,\ N)(z). \quad (1.2.8)$$

当 $c<0$ 时，以 $-\gamma$ 代替 γ，由于

$$\omega(-1)\left(\frac{N}{-1}\right)j(-I,\ z)^\kappa=1,$$

故(1.2.8)式对任一 $\gamma\in\Gamma_0(N)$ 均成立。

令 $W'=\{(c,\ d)\mid c,\ d\in\mathbf{Z},\ (c,\ d)=1,\ N\mid c,\ d>0\}$，$\Gamma_\infty$ 在 $\Gamma_0(N)$ 中的右陪集也可与 W' 中的 $(c,\ d)$ 一一对应，因此我们有

$$E_\kappa(s,\ \omega,\ N)(z)$$
$$=y^{s/2}\sum_{d=1}^{+\infty}\sum_{c=-\infty}^{+\infty}\omega(d)\varepsilon_d^\kappa\left(\frac{cN}{d}\right)(cNz+d)^{-\kappa/2}|cNz+d|^{-s},$$

由(1.2.7)式得

$$E'_\kappa=(s,\ \omega,\ N)(z)$$
$$=y^{s/2}N^{-s/2}\sum_{d=1}^{\infty}\sum_{c=-\infty}^{+\infty}\omega(d)\varepsilon_d^\kappa\left(\frac{-cN}{d}\right)(dz+c)^{-\kappa/2}|dz+c|^{-s}$$
$$=y^{s/2}N^{-s/2}\sum_{d=1}^{\infty}\left(\frac{-N}{d}\right)\omega(d)\varepsilon_d^\kappa d^{-\kappa/2-s}\sum_{c=1}^{d}\left(\frac{c}{d}\right)$$
$$\times\sum_{m=-\infty}^{+\infty}\left(z+\frac{c}{d}+m\right)^{-\kappa/2-s/2}\left(\bar z+\frac{c}{d}+m\right)^{-s/2}$$
$$=y^{s/2}N^{-s/2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}b_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N)$$
$$\times t_n(y,\ (s+\kappa)/2,\ s/2)e(nx). \quad (1.2.9)$$

其中

$$b_\kappa(n, s, \omega, N)=\sum_{d=1}^{\infty}\left(\frac{-N}{d}\right)\omega(d)\varepsilon_d^{\kappa}d^{-s-\kappa/2}\sum_{m=1}^{d}\left(\frac{m}{d}\right)e\left(\frac{nm}{d}\right), \tag{1.2.10}$$

引理 1.11　设 ω_0 为模 r 的原特征，ω 为模 rs 的特征，且当 $(n, s)=1$ 时有 $\omega(n)=\omega_0(n)$，则对任意整数 q 有

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{rs}\omega(n)e\left(\frac{nq}{rs}\right)\\&=\sum_{m=1}^{r}\omega_0(m)e\left(\frac{m}{r}\right)\sum_{c\mid(s,q)}c\mu(s/c)\omega_0(s/c)\bar{\omega}_0(q/c).\end{aligned}$$

证明　我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{rs}\omega(n)e\left(\frac{nq}{rs}\right)&=\sum^{rs}\omega_0(n)\sum_{d\mid(s,n)}\mu(d)e\left(\frac{nq}{rs}\right)\\&=\sum_{d\mid s}\mu(d)\sum^{rs/d}\omega_0(nd)e\left(\frac{ndq}{rs}\right)\\&=\sum_{d\mid s}\mu(d)\omega_0(d)\sum_{n=1}^{r}\omega_0(n)e\left(\frac{ndq}{rs}\right)\sum_{u=1}^{s/d}e\left(\frac{uq}{s/d}\right).\end{aligned}$$

记 $c=s/d$，上式中的内和仅当 $c\mid q$ 时，其值为 c，其余情况都为零，故得引理。

设 $d=ru^2$ 为正奇数，r 为无平方因子的正整数，在引理 1.11 中，取 $\omega=\left(\frac{\cdot}{d}\right)$，$\omega_0=\left(\frac{\cdot}{r}\right)$，$q=n$，这时 $s=u^2$，我们有

$$\sum_{m=1}^{d}\left(\frac{m}{d}\right)e\left(\frac{nm}{d}\right)=\varepsilon_r r^{1/2}\sum_{c\mid(u^2,n)}c\mu(u^2/c)\left(\frac{u^2/c}{r}\right)\left(\frac{n/c}{r}\right). \tag{1.2.11}$$

这里利用了

$$\sum_{m=1}^{r}\left(\frac{m}{r}\right)e\left(\frac{m}{r}\right)=\varepsilon_r\cdot r^{1/2}.$$

令 $\lambda=(\kappa-1)/2$，n 为任一整数，定义 $\omega_\kappa^{(n)}$ 为一原特征，它适合

$$\omega_\kappa^{(n)}(d)=\left(\frac{(-1)^\lambda nN}{d}\right)\omega(d)\quad(若 (d, nN)=1).$$

又以 ω' 表示适合

$$\omega'(d)=\omega^2(d)\quad(若 (d, N)=1)$$

的原特征。

设 χ 为模 N 的一个因子的任一特征，定义

$$L_N(s,\ \chi)=\sum_{(n,N)=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}=\prod_{p\nmid N}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1},$$

p 跑遍与 N 互素的所有素数。

命题 1.12 我们有

$$L_N(2s+2\lambda,\ \omega')b_\kappa(0,\ s,\ \omega,\ N)=L_N(2s+2\lambda-1,\ \omega'),$$

当 $n\neq 0$ 时，则有

$$\begin{aligned}&L_N(2s+2\lambda,\ \omega')b_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N)\\&=L_N(s+\lambda,\ \omega_\kappa^{(n)})\beta_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N).\end{aligned}$$

其中

$$\beta_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N)=\sum_{a,b}\mu(a)\omega_\kappa^{(n)}(a)\omega'(b)a^{-s-\lambda}b^{-2s-2\lambda+1}. \tag{1.2.12}$$

以上的求和号跑遍适合 $(ab,\ N)=1$，$(ab)^2|n$ 的正整数 a，b。

证明 当 $n=0$ 时，(1.2.10) 式中的内和仅当 d 为平方数时不为零，所以

$$\begin{aligned}b_\kappa(0,\ s,\ \omega,\ N)&=\sum_{u=1}^{\infty}\omega(u^2)u^{-2s-\kappa}\varphi(u^2)\\&=\prod_{p\nmid N}\left\{\sum_{i=0}^{\infty}\omega(p^{2i})p^{-(2s+\kappa)i}\varphi(p^{2i})\right\}\\&=\prod_{p\nmid N}\left\{1+\sum_{i=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p}\right)(\omega(p^2)p^{-(2s+\kappa-2)})^i\right\}\\&=\prod_{p\nmid N}\frac{1-\omega(p^2)p^{-2s-\kappa+1}}{1-\omega(p^2)p^{-2s-\kappa+2}}\\&=L_N(2s+2\lambda-1,\ \omega')L_N(2s+2\lambda,\ \omega')^{-1}.\end{aligned}$$

设 $n=tm^2\neq 0$，t 为无平方因子整数。由于 N 是偶数，(1.2.10) 式的和式中仅当 d 为奇数时，才出现非零项，由 (1.2.11) 式得到

$$\begin{aligned}&b_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N)\\&=\sum_{r,u}\left(\frac{-N}{ru^2}\right)\varepsilon_r^{\kappa+1}\omega(ru^2)(ru^2)^{-s-\kappa/2}r^{1/2}\end{aligned}$$

$$\times \sum_{r\mid(u^2,n)} c\mu(u^2/c)\left(\frac{u^2/c}{r}\right)\left(\frac{n/c}{r}\right).$$

求和号中 r、u 跑遍一切正整数，且 r 无平方因子。记 $u^2=ac$，仅当 a 无平方因子时 $\mu(a)\neq 0$，故可设 $u=ab$，这时

$$c=ab^2,\ u^2n/c^2=n/b^2,$$

因而

$$b_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N)=\sum_{r,a,b}\mu(a)r^{-s-\lambda}a^{-2s-2\lambda}b^{-2s-2\lambda+1}$$
$$\times\omega(ra^2b^2)\left(\frac{(-1)^\lambda nN/b^2}{r}\right),$$

这里我们利用了

$$\varepsilon_r^{\kappa+1}=\left(\frac{(-1)^{(\kappa+1)/2}}{r}\right).$$

上述求和号跑遍适合 $(rab,\ N)=1$、$ab^2|n$ 的 r, a, b, 且 r 无平方因子，可见 $b|m$, 令 $m=bh$, 这时 $a|th$, $n/b^2=th^2$。由于

$$\omega(r)\left(\frac{(-1)^\lambda Nth^2}{r}\right)=\begin{cases}0, & 若(r,\ thN)>1;\\ \omega_\kappa^{(n)}(r), & 若(r,\ thN)=1.\end{cases}$$

故

$$\begin{aligned}&b_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N)\\&=\sum_{b\mid m}\omega^2(b)b^{-2s-2\lambda+1}\sum_{a\mid th}\mu(a)\omega^2(a)a^{-2s-2\lambda}\\&\quad\times\sum_{(r,thN)=1}\mu^2(r)\omega_\kappa^{(n)}(r)r^{-s-\lambda}.\end{aligned}\tag{1.2.13}$$

易见

$$\sum_{a\mid th}\mu(a)\omega^2(a)a^{-2s-2\lambda}=\prod_{\substack{p\mid th\\ p\nmid N}}(1-\omega'(p)p^{-2s-2\lambda}),\tag{1.2.14}$$

及

$$\begin{aligned}&\sum_{(r,thN)=1}\mu^2(r)\omega_\kappa^{(n)}(r)r^{-s-\lambda}\\&=\prod_{p\nmid thN}(1+\omega_\kappa^{(n)}(p)p^{-s-\lambda})=\prod_{p\nmid thN}\frac{1-\omega'(p)p^{-2s-2\lambda}}{1-\omega_\kappa^{(n)}(p)p^{-s-\lambda}}\\&=\frac{L_N(s+\lambda,\ \omega_\kappa^{(n)})}{L_N(2s+2\lambda,\ \omega')}\prod_{p\mid h,\ p\nmid N}\frac{1-\omega_\kappa^{(n)}(p)p^{-s-\lambda}}{1-\omega'(p)p^{-2s-2\lambda}},\end{aligned}\tag{1.2.15}$$

若存在素数 p，使 $p|t$，$p\nmid N$，由 $\omega_\kappa^{(n)}$ 的定义，可知这时 $\omega_\kappa^{(n)}(p)=0$。将(1.2.14)、(1.2.15)代入(1.2.13)式得到

$$\begin{aligned}&b_\kappa(n,s,\omega,N)\\&=\frac{L_N(s+\lambda,\omega_\kappa^{(n)})}{L_N(2s+2\lambda,\omega')}\sum_{b|m}\omega^2(b)b^{-2s-2\lambda+1}\\&\quad\times\prod_{p|t,p\nmid N}(1-\omega_\kappa^{(n)}(p)p^{-s-\lambda})\\&=\frac{L_N(s+\lambda,\omega_\kappa^{(n)})}{L_N(2s+2\lambda,\omega')}\sum_{a,b}\mu(a)\omega_\kappa^{(n)}(a)\omega'(b)a^{-s-\lambda}b^{-2s-2\lambda+1}.\end{aligned}$$

设 n 为任一整数，令 χ_n 为适合

$$\chi_n(d)=\left(\frac{n}{d}\right),\quad (d,4n)=1$$

的原特征。由引理 1.5，若 $n=ab^2$，a 无平方因子，则当 $a\equiv1(4)$ 时，χ_n 的导子为 $|a|$，当 $a\equiv2,3(4)$ 时，χ_n 的导子为 $4|a|$。

命题 1.13 我们有

$$a_\kappa(n,s,\omega,N)=b_\kappa(n,s,\omega\chi_N,N)c_\kappa(n,s,\omega,N),$$

其中

$$c_\kappa(n,s,\omega,N)=\sum_{N|M|N^\infty}\sum_{d=1}^{M}\left(\frac{M}{d}\right)\omega(d)\varepsilon_d^\kappa e\left(\frac{nd}{M}\right)M^{-s-\kappa/2}. \tag{1.2.16}$$

当 $n\neq0$ 时，$c_\kappa(n,s,\omega,N)$ 为有限级数。($M|N^\infty$ 表示 M 的素因子都是 N 的素因子)

证明 记 $cN=aM$，其中 a 与 N 互素，M 适合 $N|M|N^\infty$，则

$$\begin{aligned}&\sum_{d=1}^{cN}\omega(d)\varepsilon_d^\kappa\left(\frac{cN}{d}\right)e\left(\frac{nd}{aM}\right)\\&=\sum_{d_1=1}^{M}\sum_{d_2=1}^{a}\omega(d_1a+d_2M)\varepsilon_{d_1a}^\kappa\left(\frac{aM}{d_1a+d_2M}\right)e\left(\frac{n(d_1a+d_2M)}{aM}\right).\end{aligned}$$

当 a、b 都为正奇数时，我们有

$$\left(\frac{a}{b}\right)=\left(\frac{b}{a}\right)\varepsilon_b^{-\kappa}\varepsilon_a^{-\kappa}\varepsilon_{ab}^\kappa. \tag{1.2.17}$$

利用上式及引理 1.5 可得

$$\left(\frac{aM}{d_1a+d_2M}\right)=\left(\frac{M}{d_1a+d_2M}\right)\left(\frac{a}{d_1a+d_2M}\right)$$

$$=\left(\frac{M}{d_1a}\right)\left(\frac{d_2M}{a}\right)\varepsilon_a^{-\kappa}\varepsilon_{d_1a}^{-\kappa}\varepsilon_{d_1}^{\kappa},$$

从而由(1.2.6)式得

$$\begin{aligned}&a_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N)\\&=\sum_{a=1}^{\infty}\left(\frac{-1}{a}\right)\omega(a)\varepsilon_a^{\kappa}a^{-s-\kappa/2}\sum_{d=1}^{a}\left(\frac{d}{a}\right)e\left(\frac{nd}{a}\right)\\&\quad\times\sum_{N\mid M\mid N^\infty}\sum_{d=1}^{M}\left(\frac{M}{d}\right)\varepsilon_d^{\kappa}\omega(d)e\left(\frac{nd}{M}\right)M^{-s-\kappa/2}\\&=b_\kappa(n,\ s,\ \omega\chi_N,\ N)c_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N)。\end{aligned}$$

当 $\kappa\equiv1(4)$ 时，由于

$$\varepsilon_d^{\kappa}=\varepsilon_d=\frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{-1}{d}\right)\right)+\frac{i}{2}\left(1-\left(\frac{-1}{d}\right)\right),$$

$c_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N)$的内和中 $M^{-s-\kappa/2}$ 的系数可表为

$$\begin{aligned}&\frac{1+i}{2}\sum_{d=1}^{M}\left(\frac{M}{d}\right)\omega(d)e\left(\frac{nd}{M}\right)\\&\quad+\frac{1-i}{2}\sum_{d=1}^{M}\left(\frac{-M}{d}\right)\omega(d)e\left(\frac{nd}{M}\right),\end{aligned}$$

对上述两个和式，分别利用引理1.11，当M足够大时，对任一$c\mid(s,\ n)$，都有$\mu(s/c)=0$（s 由M决定）。这证明了 $c_\kappa(n,\ s,\ \omega,\ N)$是有限和。当 $\kappa\equiv3(4)$时，也可以类似地证明。

为了讨论 $E_\kappa(s,\ \omega,\ N)$的解析延拓，需要下述两个引理。

引理 1.14　设ω为模 $r\neq1$ 的原特征，

$$R(s,\ \omega)=(r/\pi)^{(s+\nu)/2}\Gamma((s+\nu)/2)L(s,\ \omega),$$

其中

$$\nu=\begin{cases}0, & 若\ \omega(-1)=1;\\1, & 若\ \omega(-1)=-1。\end{cases}$$

则对实数 $\mathbf{R}$ 中任一紧子集 J，存在一个常数 c_J，它不依赖r 和 ω，使

$$|R(s,\ \omega)|\leqslant c_Jr^{|\sigma|/2+2},\quad \sigma=\mathrm{Re}(s)\in J。$$

证明　令

$$g_\nu(t,\ \omega)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\omega(n)n^{\nu}e^{-\pi n^2t/r},\quad (t>0),$$

利用

$$(n^2\pi/r)^{-(s+\nu)/2}\Gamma\left(\frac{s+\nu}{2}\right)=\int_0^\infty e^{-\pi n^2 t/r}t^{(s+\nu)/2-1}dt,$$

我们有

$$R(s,\ \omega)=\frac{1}{2}\int_0^\infty g_\nu(t,\ \omega)t^{(s+\nu)/2-1}dt. \tag{1.2.18}$$

将(1.1.1)式两端对 x 取微商，得

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty}(n+x)e^{-\pi t(n+x)^2}=-it^{-3/2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}ne^{-\pi n^2/t+2\pi inx},$$

于是

$$\begin{aligned}g_\nu(t^{-1},\ \omega)&=\sum_{d=1}^{r}\omega(d)r^\nu\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(m+d/r)^\nu e^{-\pi r(m+d/r)^2/t}\\&=(-i)^\nu r^{-1/2}t^{\nu+1/2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}n^\nu e^{-\pi tn^2/r}\sum_{d=1}^{r}\omega(d)e\left(\frac{nd}{r}\right)\\&=(-i)^\nu r^{-1/2}t^{\nu+1/2}\sum_{d=1}^{r}\omega(d)e(d/r)\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\bar{\omega}(n)n^\nu e^{-\pi tn^2/r}\\&=\varepsilon_\nu(\omega)t^{\nu+1/2}g_\nu(t,\ \bar{\omega}),\end{aligned} \tag{1.2.19}$$

其中

$$\varepsilon_\nu(\omega)=(-i)^\nu r^{-1/2}\sum_{d=1}^{r}\omega(d)e(d/r),$$

其绝对值为 1。

由(1.2.18)和(1.2.19)式我们有

$$\begin{aligned}R(s,\ \omega)&=\frac{1}{2}\left(\int_1^\infty g_\nu(t,\ \omega)t^{(s+\nu)/2-1}dt\right.\\&\qquad\left.+\int_1^\infty g_\nu(t^{-1},\ \omega)t^{-(s+\nu)/2-1}dt\right)\\&=\frac{1}{2}\int_1^\infty g_\nu(t,\ \omega)t^{(s+\nu)/2-1}dt\\&\qquad+\frac{\varepsilon_\nu(\omega)}{2}\int_1^\infty g_\nu(t,\ \bar{\omega})t^{(1-s+\nu)/2-1}dt.\end{aligned} \tag{1.2.20}$$

以 $P(s,\ \omega)$ 表示上式中的第一项，其第二项即为 $\varepsilon_\nu(\omega)P(1-s,\ \bar{\omega})$，由此可见 $R(s,\ \omega)$ 可以延拓为 s 平面上的全纯函数，且有函数方程

$$R(1-s,\ \omega)=\varepsilon_\nu(\omega)R(s,\ \bar{\omega}). \tag{1.2.21}$$

当 $\sigma>1$ 时，我们有

$$|R(1-s,\omega)|=|R(s,\bar{\omega})|$$
$$\leqslant(r/\pi)^{(\sigma+\nu)/2}\Gamma((\sigma+\nu)/2)\zeta(\sigma). \qquad (1.2.22)$$

为了证明引理1.14，我们仅需再考虑 $-1<\sigma\leqslant2$ 的情况。由于

$$|g_\nu(t,\omega)|\leqslant2\sum_{n=1}^{\infty}ne^{-\pi nt/r}=2e^{-\pi t/r}(1-e^{-\pi t/r})^{-2},$$

因而

$$|P(s,\omega)|\leqslant\int_1^\infty e^{-\pi t/r}(1-e^{-\pi t/r})^{-2}t^{(\sigma+\nu)/2-1}dt$$
$$=(r/\pi)^{(\sigma+\nu)/2}\int_{\pi/r}^\infty e^{-t}(1-e^{-t})^{-2}t^{(\sigma+\nu)/2-1}dt. \qquad (1.2.23)$$

不妨设 $r>\pi$，将上述积分区间分为 $(1,\infty)$ 和 $(\pi/r,1)$ 两段，在 $(1,\infty)$ 上的积分与 r 和 ω 无关，在 $(0,1)$ 上，$t/(1-e^{-t})$ 是连续函数，故存在一个常数 A，使 $e^{-t}(1-e^{-t})^{-2}\leqslant At^{-2}$。当 $-1<\sigma<2$ 时，存在不依赖 r 及 ω 的常数 B、C，使

$$\int_{\pi/r}^1 e^{-t}(1-e^{-t})^{-2}t^{(\sigma+\nu)/2-1}dt$$
$$\leqslant A\int_{\pi/r}^1 t^{(\sigma+\nu)/2-3}dt\leqslant B+Cr^{2-(\sigma+\nu)/2}. \qquad (1.2.24)$$

将(1.2.24)式代入(1.2.23)式得到

$$|P(s,\omega)|\leqslant Dr^2,\ (-1<\sigma<2).$$

其中 D 为一常数，因而

$$|R(s,\omega)|\leqslant C_1r^2 \quad (-1<\sigma<2). \qquad (1.2.25)$$

由(1.2.22)和(1.2.25)式即证得引理1.14。

在引理1.14中，我们实际上也证明了当 ω 为非平凡特征时 $R(s,\omega)$ 是 s 平面上的全纯函数，由此我们将 $L(s,\omega)$ 延拓为 s 平面上的亚纯函数，并得到了它的函数方程(1.2.21)式。对于平凡特征的情况，令

$$\eta(s)=\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)\zeta(s) \quad (\mathrm{Re}(s)>1),$$

这里 $\zeta(s)$ 为 Riemman-ζ 函数。利用类似的方法可得到 $(\mathrm{Re}(s)>1)$：

$$\eta(s)=\frac{1}{2}\int_0^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 t}-1\right)t^{s/2-1}dt$$
$$=\frac{1}{s(s-1)}+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 t}-1\right)t^{s/2-1}dt$$
$$+\frac{1}{2}\int_1^{\infty}\left(\sum_{n=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi n^2 t}-1\right)t^{(1-s)/2-1}dt.$$

可见$\xi(s)=s(s-1)\eta(s)$为 s 平面上的全纯函数，且$\xi(s)=\xi(1-s)$。

引理 1.15 设K为C^2中的一个紧子集，则存在正常数A与B，使

$$|y^B W(y,\alpha,\beta)|\leqslant A\max(y^{-B},1)\quad((\alpha,\beta)\in K).$$

证明 在引理 1.9 的证明中我们得到了

$$y^\beta W(y,\alpha,\beta)$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{-p-i\infty}^{-p+i\infty}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+\beta)\Gamma(s+1-\alpha)}{\Gamma(-\alpha)\Gamma(\beta)}y^{-s}ds,$$

其中$0<p<\min(\mathrm{Re}(\beta),\mathrm{Re}(1-\alpha))$。设$\mathrm{Re}(\beta)>-q$，$\mathrm{Re}(1-\alpha)>-q$，$q$为正数，将积分线由$\mathrm{Re}(s)=-p$ 移至$\mathrm{Re}(s)=q$，由

$$\Gamma(-s)=\frac{\Gamma(-s+m+1)}{(-s)(-s+1)\cdots(-s+m)}\quad(m\geqslant0)$$

可知$\Gamma(-s)$在$s=m$处的留数为$(-1)^m/m!$，故

$$y^\beta W(y,\alpha,\beta)=\sum_{m=0}^{[q]}\frac{\Gamma(m+\beta)\Gamma(m+1-\alpha)}{\Gamma(m+1)\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)}(-y)^{-m}$$
$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{q-i\infty}^{q+i\infty}\frac{\Gamma(-s)\Gamma(s+\beta)\Gamma(s+1-\alpha)}{\Gamma(1-\alpha)\Gamma(\beta)}y^{-s}ds,$$

由于上述等式两端都是C^2上的解析函数，所以该等式对一切$(\alpha,\beta)\in C^2$都成立，从而可证得引理 1.15。

定理 1.16 设$z\in H$，$s\in C$，定义

$$F_\kappa^t(s,\omega,N)(z)$$
$$=\Gamma\left(\frac{s+\kappa}{2}\right)\Gamma\left(\frac{s+\lambda+\lambda_0}{2}\right)L_N(2s+2\lambda,\omega')$$
$$\times E_\kappa^t(s,\omega,N)(z),$$

其中$\lambda=(\kappa-1)/2$，

$$\lambda_0=\begin{cases}0, & 若\ 2\mid\lambda,\\ 1, & 若\ 2\nmid\lambda.\end{cases}$$

则 $(s+\lambda-1)F''_\kappa$ 可延拓为 s 平面上的全纯函数。当 $(\kappa+1)/2$ 为偶数或 ω' 为非平凡特征时，F''_κ 可以延拓为 s 平面上的全纯函数。

证明　由(1.2.9)式及命题1.12，我们有

$$(-i)^{\kappa/2}(2\pi)^{-s-\kappa/2}(N/y)^{s/2}F''_\kappa(s,\ \omega,\ N)(z)$$
$$=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}A(n,\ y,\ s)e^{2\pi(inx-|n|y)}|n|^{s+\kappa/2-1}. \qquad (1.2.26)$$

其中

$$A(n,\ y,\ s)=L_N(s+\lambda,\ \omega_\kappa^{(n)})\beta_s(n,\ s,\ \omega,\ N)\Gamma((s+\lambda+\lambda_0)/2)$$
$$\times\begin{cases}W(4\pi ny,\ (s+\kappa)/2,\ s/2), & 若\ n>0;\\ \Gamma\left(\dfrac{s+\kappa}{2}\right)\Gamma\left(\dfrac{s}{2}\right)^{-1}\\ \times W(4\pi|n|y,\ s/2,\ (s+\kappa)/2), & 若\ n<0.\end{cases}$$

$$A(0,\ y,\ s)=\Gamma(s/2)^{-1}\Gamma((s+\lambda+\lambda_0)/2)\Gamma(s+\kappa/2-1)$$
$$\times L_N(2s+2\lambda-1,\ \omega')(4\pi y)^{1-s-\kappa/2}.$$

我们有

$$\Gamma((s+\lambda+\lambda_0)/2)\Gamma(s/2)^{-1}=2^{-c}\prod_{a=1}^{c}(s+\lambda+\lambda_0-2a)$$

(其中 $c=(\lambda+\lambda_0)/2$)

以及

$$\Gamma(s+\kappa/2-1)L_N(2s+\kappa-2,\ \omega')$$
$$=\Gamma(s+\kappa/2-1)L(2s+\kappa-2,\ \omega')\prod_{p\mid N}(1-\omega'(p)p^{2-2s-\kappa}).$$

由此可见，$A(0,\ y,\ s)$ 是 s 平面上的亚纯函数。当 ω' 非平凡时，由(1.2.20)式可知 $\Gamma(s+\kappa/2-1)L(2s+\kappa-2,\ \omega')$ 是 s 平面上的全纯函数，因而 $A(0,\ y,\ s)$ 是 s 平面上的全纯函数。而当 ω' 为平凡特征时，$\Gamma(s+\kappa/2-1)\times\zeta(2s+\kappa-2)$ 以 $s=1-\kappa/2$ 和 $s=1-\lambda$ 为一阶极点，而前一极点可以被因子 $1-2^{2-2s-\kappa}$ 抵消，当 λ 为奇数时(这时 $\lambda_0=1$)，后一极点可以被因子 $s+\lambda-1$ 抵消。因而

$$(s+\lambda-1)A(0,\ y,\ s)$$

总是 s 平面上的全纯函数，而当 $\lambda+1=(\kappa+1)/2$ 为偶数或 ω' 为非平凡特征时，$A(0, y, s)$ 是 s 平面上的全纯函数。

当 $n>0$ 时，$\beta_\kappa(n, s, \omega, N)$ 是 s 平面上的全纯函数，且

$$|\beta_\kappa(n, s, \omega, N)|\leqslant\gamma|n|^{\delta\sigma+\varepsilon},$$

常数 γ、δ、ε 与 n 无关。$W(4\pi ny, (s+\kappa)/2, s/2)$ 也是 s 平面上的全纯函数，当 s 在 C 的一个紧子集 K 中时，由引理 1.15 有

$$|W(4\pi ny, (s+\kappa)/2, s/2)|$$
$$\leqslant C(4\pi ny)^{-\delta/2}\max(4\pi ny)^{-B}, 1),$$

常数 B 和 C 由 K 决定，与 n 无关。我们有

$$\Gamma((s+\lambda+\lambda_0)/2)L_N(s+\lambda, \omega_\kappa^{(n)})$$
$$=\Gamma((s+\lambda+\lambda_0)/2)L(s+\lambda, \omega_\kappa^{(n)})$$
$$\times\prod_{p|N}(1-\omega_\kappa^{(n)}(p)p^{-s-\lambda}),$$

当 λ 为奇数时，$\omega_\kappa^{(n)}(-1)=-1$ 及 $\lambda_0=1$；当 λ 为偶数时，

$$\omega_\kappa^{(n)}(-1)=1 \quad 及 \quad \lambda_0=0.$$

由引理1.14可知，当$\omega_\kappa^{(n)}$非平凡时，$\Gamma((s+\lambda+\lambda_0)/2)L(s+\lambda, \omega_\kappa^{(n)})$ 为 s 平面上的全纯函数，因而 $A(n, y, s)$ 是 s 平面上的全纯函数。当 $\omega_\kappa^{(n)}$ 为平凡特征时（这时 λ 为偶数），$\Gamma((s+\lambda)/2)L(s+\lambda, \omega_\kappa^{(n)})$ 以 $s=-\lambda$ 及 $s=1-\lambda$ 为两个一阶极点，前一极点被因子 $1-\alpha^{-s-\lambda}$ 抵消，因而 $(s+\lambda-1)A(n, y, s)$ 是 s 平面上的全纯函数。利用引理 1.14，当 s 在紧子集 K 中时，我们有

$$|(s+\lambda-1)A(n, y, s)|\leqslant un^\nu(y^W+y^{-W}), \quad (1.2.27)$$

常数 u、v、W 仅依赖 K，与 n 无关。

现在考虑 $n<0$。λ 为奇数时，$\omega_\kappa^{(n)}(-1)=1$；$\lambda$ 为偶数时，

$$\omega_\kappa^{(n)}(-1)=-1.$$

令

$$\eta=\begin{cases}0, & 若 \lambda 为奇数；\\ 1, & 若 \lambda 为偶数。\end{cases}$$

我们有

$$A(n, y, s)=(\Gamma(s+\lambda+\eta)/2)L(s+\lambda, \omega_\kappa^{(n)})$$

$$\times \prod_{p\mid N} (1-\omega_\kappa^{(n)}(p)p^{-s-\lambda})\beta_\kappa(n, s, \omega, N)$$
$$\times W(4\pi|n|y, s/2, (s+\kappa)/2)\times\Gamma((s+\kappa)/2)$$
$$\times\Gamma((s+\lambda+\eta)/2)^{-1}\Gamma((s+\lambda+\lambda_0)/2)\Gamma(s/2)^{-1},$$

上式中最后四个因子乘积为

$$\alpha^{-s-d}\prod_{b=1}^{d}(s+\kappa-2b)\prod_{a=1}^{c}(s+\lambda+\lambda_0-2a),$$

其中 $d=(\lambda-\eta+1)/2$。利用上述同样方法，可以证明 $A(n, y, s)$ 为 平面上的全纯函数，且当 $s\in K$ 时，

$$|A(n, y, s)|\leqslant u'\eta^{v'}(y^{w'}+y^{-w'}),\tag{1.2.28}$$

常数 u'、v'、w' 由 K 决定，与 n 无关。

由(1.2.27)和(1.2.28)式，可知级数(1.2.26)乘 $(s+\lambda-1)$ 之后在 K 中绝对一致收敛，定理1.16证毕。

定理1.16将 $E'_\kappa(s, \omega, N)(z)$ 延拓为 s 平面上的亚纯函数，利用(1.2.7)式，$E_\kappa(s, \omega, N)(z)$ 也可延拓为 s 平面上的亚纯函数，$E_\kappa(s, \omega, N)$ 和 $E'_\kappa(s, \omega, N)$ 的变换公式(1.2.3)及(1.2.8)在整个 s 平面上也都成立。我们关心它们在 $s=0$ 的值。

设 $\kappa\geqslant 3$，当 $\kappa=3$ 时，ω 不是实特征，在这假设下，对任意整数 n，$L_N(\lambda, (\bar\omega\chi_N)_\kappa^{(n)})$ 总是有限数。定义函数

$$E_\kappa(\omega, N)(z)=E_\kappa(0, \bar\omega, N)(z),$$
$$E'_\kappa(\omega, N)(z)=E'_\kappa(0, \omega, N)(z).$$

由于 $\Gamma(0)^{-1}=0$ 及 $W(4\pi ny, \kappa/2, 0)=1$（引理1.8），由命题1.12、命题1.13、引理1.10及(1.2.5)式，我们有

$$E_\kappa(\omega, N)(z)$$
$$=1+\frac{(-2\pi i)^{\kappa/2}}{\Gamma(\kappa/2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_N(\lambda, (\bar\omega\chi_N)_\kappa^{(n)})}{L_N(2\lambda, \bar\omega')}\beta_\kappa(n, 0, \bar\omega\chi_N, N)$$
$$\times c_\kappa(n, 0, \bar\omega, N)n^{\kappa/2-1}e(nz).\tag{1.2.29}$$

同样由(1.2.9)式得

$$E'_\kappa(\omega, N)(z)$$
$$=\frac{(-2\pi i)^{\kappa/2}}{\Gamma(\kappa/2)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_N(\lambda, \omega_\kappa^{(n)})}{L_N(2\lambda, \omega')}\beta_N(n, 0, \omega, N)n^{\kappa/2-1}e(nz).\tag{1.2.30}$$

记 $n=tm^2$，t 为无平方因子的正整数。由引理 1.14 可知

$$|L_N(\lambda,\ (\bar{\omega}\chi_N)_{\kappa}^{(n)})|\leqslant\rho t^2,$$

其中 ρ 为不依赖 n 的常数，当 $n\neq 0$ 时，由命题 1.13 可知 $c_\kappa(n,\ 0,\ \omega,\ N)$ 为有限级数，因而

$$|E_\kappa(\omega,\ N)(z)|\leqslant 1+\rho\sum^{\infty}n^{\kappa/2+1}e^{-2\pi ny}\leqslant 1+\rho y^{-(\kappa+5)/2}. \tag{1.2.31}$$

这里 ρ 可以表示不同的常数。由此可见，$E_\kappa(\omega,\ N)(z)$ 是 H 上的全纯函数，类似地可以证明 $E'_\kappa(\omega,\ N)(z)$ 也是 H 上的全纯函数。

由(1.2.3)式及(1.2.8)式，我们有

$$\begin{aligned}E_\kappa(\omega,\ N)(\gamma(z))&=\omega(d_\gamma)j(\gamma,\ z)^\kappa E_\kappa(\omega,\ N)(z),\\ E'_\kappa(\omega,\ N)(\gamma(z))&=\omega(d_\gamma)\left(\frac{N}{d_\gamma}\right)j(\gamma,\ z)^\kappa E'_\kappa(\omega,\ N)(z)\end{aligned} \tag{1.2.32}$$

对任一 $\gamma\in\Gamma_0(N)$ 都成立。

命题 1.17 设 ν 为正整数，p 为奇素数，令

$$a_\kappa(2^\nu,\ n)=\sum_{d=1}^{2^\nu}\left(\frac{2^\nu}{d}\right)\varepsilon_d^\kappa e\left(\frac{nd}{2^\nu}\right)\quad(\nu\geqslant 2),$$

$$a_\kappa(p^\nu,\ n)=\varepsilon_{p^\nu}^{-\kappa}\sum_{d=1}^{p^\nu}\left(\frac{d}{p^\nu}\right)e\left(\frac{nd}{p^\nu}\right),$$

则

$$c_\kappa(n,\ s,\ id,\ N)=\prod_{p|N}\sum_{\nu=N(p)}^{\infty}p^{-(s+\kappa/2)\nu}a_\kappa(p^\nu,\ n).$$

这里 id 表示模 N 恒为 1 的特征，$N(p)$ 适合 $p^{N(p)}\|N$。

证明 由(1.2.16)式，我们有

$$c_\kappa(n,\ s,\ id,\ N)=\sum_{N|M|N^\infty}\sum_{d=1}^{M}\left(\frac{M}{d}\right)\varepsilon_d^\kappa e\left(\frac{nd}{M}\right)M^{-s-\kappa/2}.$$

设 $M=2^eM_1$，$e\geqslant 2$，M_1 为奇数，则

$$\sum_{d=1}^{M}\left(\frac{M}{d}\right)\varepsilon_d^\kappa e\left(\frac{nd}{M}\right)$$

$$=\sum_{d_1=1}^{M_1}\sum_{d_2=1}^{2^e}\left(\frac{2^eM_1}{2^ed_1+M_1d_2}\right)\varepsilon_{M_1d_1}^{\kappa}e\left(\frac{n(2^ed_1+M_1d_2)}{2^eM_1}\right)$$

$$=\sum_{d_2=1}^{2^e}\left(\frac{2^e}{M_1d_2}\right)\varepsilon_{M_1d_2}^{\kappa}e\left(\frac{nd_2}{2^e}\right)\sum_{d_1=1}^{M_1}\left(\frac{2^ed_1}{M_1}\right)\varepsilon_{d_1}^{\kappa}\varepsilon_{M_1}^{-\kappa}\varepsilon_{M_1d_1}^{-\kappa}e\left(\frac{nd_1}{M_1}\right)$$

$$=a_\kappa(2^e,n)\varepsilon_{M_1}^{-\kappa}\sum_{d_1=1}^{M_1}\left(\frac{d_1}{M_1}\right)e\left(\frac{nd_1}{M_1}\right).$$

这里利用了(1.2.17)式。进一步，设 $M_1=M_2M_3$，M_2 与 M_3 互素，则

$$\varepsilon_{M_1}^{-\kappa}\sum_{d_1=1}^{M_1}\left(\frac{d_1}{M_1}\right)e\left(\frac{nd_1}{M_1}\right)$$

$$=\varepsilon_{M_1}^{-\kappa}\sum_{d_2=1}^{M_2}\sum_{d_3=1}^{M_3}\left(\frac{d_2M_3}{M_2}\right)\left(\frac{d_3M_2}{M_3}\right)e\left(\frac{n(d_2M_3+d_3M_2)}{M_2M_3}\right)$$

$$=\varepsilon_{M_2}^{-\kappa}\sum_{d_2=1}^{M_2}\left(\frac{d_2}{M_2}\right)e\left(\frac{nd_2}{M_2}\right)\varepsilon_{M_3}^{-\kappa}\sum_{d_3=1}^{M_3}\left(\frac{d_3}{M_3}\right)e\left(\frac{nd_3}{M_3}\right).$$

由此可证得命题1.17。

引理1.18　当 $\nu\geqslant 2$ 为正整数时，我们有

$$a_\kappa(2^\nu,n)=\begin{cases}2^{\nu-3/2}e^{\pi i(l/2+(-1)^\lambda/4)}, & 若\ n=2^{\nu-2}l,\ 2\mid l,\ 2\mid\nu;\\ 2^{\nu-3/2}e^{\pi i(l/2-(-1)^\lambda/4)}, & 若\ n=2^{\nu-2}l,\ 2\nmid l,\ 2\mid\nu;\\ 2^{\nu-1}\delta\left(\dfrac{u-(-1)^\lambda}{4}\right)e^{\pi iu/4}, & \\ & 若\ n=2^{\nu-3}u,\ 2\nmid u,\ 2\nmid\nu;\\ 0, & 其他情况。\end{cases}$$

其中

$$\delta(x)=\begin{cases}1, & 若\ x\ 为整数;\\ 0, & 否则。\end{cases}$$

证明　当 ν 为偶数时，

$$a_\kappa(2^\nu,n)=\left(e\left(\frac{n}{2^\nu}\right)+i^\kappa e\left(\frac{3n}{2^\nu}\right)\right)\sum_{d=0}^{2^{\nu-2}-1}e\left(\frac{nd}{2^{\nu-2}}\right),$$

当 $2^{\nu-2}\nmid n$ 时，上式中的和式为零；当 $2^{\nu-2}\mid n$ 时，该和式为 $2^{\nu-2}$。设 $n=2^{\nu-2}l$，这时

$$e\left(\frac{n}{2^\nu}\right)+i^\kappa e\left(\frac{3n}{2^\nu}\right)=e\left(\frac{l}{4}\right)(1+i^\kappa e^{\pi il})$$

$$=\begin{cases}\sqrt{2}\,e^{\pi i(l/2+(-1)^\lambda/4)}, & 若 2|l;\\ \sqrt{2}\,e^{\pi i(l/2-(-1)^\lambda/4)}, & 若 2\nmid l。\end{cases}$$

当 ν 为奇数时(这时 $\nu\geqslant 3$),

$$a_\kappa(2^\nu, n)=\left(e\left(\frac{n}{2^\nu}\right)-i^\kappa e\left(\frac{3n}{2^\nu}\right)-e\left(\frac{5n}{2^\nu}\right)\right.$$

$$\left.+i^\kappa e\left(\frac{7n}{2^\nu}\right)\right)\sum_{d=1}^{2^{\nu-3}-1} e\left(\frac{nd}{2^{\nu-3}}\right).$$

当 $2^{\nu-3}\nmid n$ 时,上式中的和式为零;当 $2^{\nu-3}|n$ 时,该和式为 $2^{\nu-3}$。设 $n=2^{\nu-3}u$, 若 $2|u$, 则

$$e\left(\frac{u}{8}\right)=e\left(\frac{5u}{8}\right),\ e\left(\frac{3u}{8}\right)=e\left(\frac{7u}{8}\right),$$

上式中第一个因子为零;若 $2\nmid u$, 该因子为

$$2\left(e\left(\frac{u}{8}\right)-i^\kappa e\left(\frac{3u}{8}\right)\right)=2e\left(\frac{u}{8}\right)(1-i^{\kappa+u})$$

$$=\begin{cases}0, & 若 \kappa+u\equiv 0(4);\\ 4e\left(\dfrac{u}{8}\right), & 若 \kappa+u\equiv 2(4)。\end{cases}$$

易见 $\delta\left(\dfrac{u+\kappa+2}{4}\right)=\delta\left(\dfrac{u-(-1)^\lambda}{4}\right)$。

引理 1.19 设 ν 为正整数,p 为奇素数,则

$$a_\kappa(p^\nu, n)$$

$$=\begin{cases}p^{\nu-1/2}\left(\dfrac{(-1)^\lambda np^{1-\nu}}{p}\right), & 若 p^{\nu-1}|n,\ p^\nu\nmid n,\ 2\nmid \nu;\\ -p^{\nu-1}, & 若 p^{\nu-1}|n,\ p^\nu\nmid n,\ 2|\nu;\\ \varphi(p^\nu), & 若 p^\nu|n,\ 2|\nu;\\ 0, & 其他情况。\end{cases}$$

证明

$$a_\kappa(p^\nu, n)=\varepsilon_{p^\nu}^{-\kappa}\sum_{a=1}^{p-1}\sum_{b=1}^{p^{\nu-1}}\left(\frac{a+pb}{p^\nu}\right)e\left(\frac{na+nbp}{p^\nu}\right)$$

$$=\varepsilon_{p^\nu}^{-\kappa}\sum_{a=1}^{p-1}\left(\frac{a}{p^\nu}\right)e\left(\frac{na}{p^\nu}\right)\sum_{b=1}^{p^{\nu-1}} e\left(\frac{nb}{p^{\nu-1}}\right),$$

当 $p^{\nu-1}\nmid n$ 时,上式中内和为零;当 $p^{\nu-1}|n$ 时,内和为 $p^{\nu-1}$。

今设 $p^{\nu-1}|n$，若 ν 为奇数，则

$$a_\kappa(p^\nu, n)=\varepsilon_p^{-\kappa}p^{\nu-1}\sum_{a=1}^{p-1}\left(\frac{a}{p}\right)e\left(\frac{anp^{1-\nu}}{p}\right)$$

$$=\begin{cases}0, & 若\ p^\nu|n;\\ p^{\nu-1/2}\varepsilon_p^{1-\kappa}\left(\frac{np^{1-\nu}}{p}\right), & 若\ p^\nu\nmid n.\end{cases}$$

而 $\varepsilon_p^{1-\kappa}=\left(\frac{(-1)^\lambda}{p}\right)$。若 ν 为偶数，则

$$a_\kappa(p^\nu, n)=p^{\nu-1}\sum_{a=1}^{p-1}e\left(\frac{anp^{1-\nu}}{p}\right)$$

$$=\begin{cases}-p^{\nu-1}, & 若\ p^\nu\nmid n;\\ p^{\nu-1}(p-1), & 若\ p^\nu|n.\end{cases}$$

定义

$$A_\kappa(2, n)=\sum_{\nu=2}^{\infty}2^{-\nu\kappa/2}a_\kappa(2^\nu, n),$$

$$A'_\kappa(2, n)=\sum_{\nu=3}^{\infty}2^{-\nu\kappa/2}a_\kappa(2^\nu, n),$$

$$A_\kappa(p, n)=\sum_{\nu=1}^{\infty}p^{-\nu\kappa/2}a_\kappa(p^\nu, n).$$

设 D 为无平方因子的正奇数，利用命题 1.17，得到

$$c_\kappa(n, 0, id, 4D)=A_\kappa(2, n)\prod_{p|D}A_\kappa(p, n),$$

$$c_\kappa(n, 0, id, 8D)=A'_\kappa(2, n)\prod_{p|D}A_\kappa(p, n).$$

记

$$\lambda_\kappa(n, 4D)=\frac{L_{4D}(\lambda, \chi_{(-1)^\lambda n})}{L_{4D}(2\lambda, id)}\beta_\kappa(n, 0, \chi_D, 4D).$$

当 $\kappa>3$ 时，由(1.2.29)和(1.2.30)式可得

$$E_\kappa(id, 4D)(z)=1+\frac{(-2\pi i)^{\kappa/2}}{\Gamma(\kappa/2)}\sum^{\infty}\lambda_\kappa(n, 4D)$$
$$\times\prod_{p|2D}A_\kappa(p, n)n^{\kappa/2-1}e(nz). \qquad (1.2.33)$$

$$E'_\kappa(\chi_\lambda, 4D)(z)=\frac{(-2\pi i)^{\kappa/2}}{\Gamma(\kappa/2)}\sum^{\infty}\lambda_\kappa(n, 4D)n^{\kappa/2-1}e(nz). \qquad (1.2.34)$$

引理 1.20 以 $h(2,n)$ 表示适合 $2^{h(2,n)}\|n$ 的整数，则

$$A_\kappa(2,n)$$
$$=\begin{cases}2^{-\kappa}(1+(-1)^\lambda i)\left\{\dfrac{1-2^{(2-\kappa)(h(2,n)-1)/2}}{1-2^{2-\kappa}}-2^{(2-\kappa)(h(2,n)-1)/2}\right\}, & \text{若 } 2\nmid h(2,n);\\ 2^{-\kappa}(1+(-1)^\lambda i)\left\{\dfrac{1-2^{(2-\kappa)h(2,n)/2}}{1-2^{2-\kappa}}-2^{(2-\kappa)h(2,n)/2}\right\}, & \text{若 } 2\mid h(2,n),\ (-1)^\lambda n/2^{h(2,n)}\equiv -1(4);\\ 2^{-\kappa}(1+(-1)^\lambda i)\left\{\dfrac{1-2^{(2-\kappa)h(2,n)/2}}{1-2^{2-\kappa}}\right.\\ \qquad\left.+2^{(2-\kappa)h(2,n)/2}\left(1+2^{(3-\kappa)/2}\left(\dfrac{(-1)^\lambda n/2^{h(2,n)}}{2}\right)\right)\right\}, & \text{若 } 2\mid h(2,n),\ (-1)^\lambda n/2^{h(2,n)}\equiv 1(4).\end{cases}$$

及

$$A'_\kappa(2,n)$$
$$=\begin{cases}0, & \text{若 } (-1)^\lambda n\equiv 2,\ 3\ (4);\\ A_\kappa(2,n)-2^{-\kappa}(1+(-1)^\lambda i), & \text{若 } (-1)^\lambda n\equiv 0,\ 1(4).\end{cases}$$

证明 将 $h(2,n)$ 简记为 h。设 $2\nmid h$，由引理 1.18，我们有

$$A_\kappa(2,n)=\sum_{s=1}^{(h+1)/2}2^{(2-\kappa)s-3/2}e^{\pi i(n/2^{2s-1}+(-1)^\lambda/4)}$$
$$=4^{-1}(1+(-1)^\lambda i)\left\{\sum_{s=1}^{(h-1)/2}2^{(2-\kappa)s}-2^{(2-\kappa)(h+1)/2}\right\}$$
$$=2^{-\kappa}(1+(-1)^\lambda i)\left\{\frac{1-2^{(2-\kappa)(h-1)/2}}{1-2^{2-\kappa}}-2^{(2-\kappa)(h-1)/2}\right\}.$$

设 $2\mid h$，记 $n=2^h u$，则

$$A_\kappa(2,n)=\sum_{s=1}^{h/2}2^{(2-\kappa)s-3/2}e^{\pi i(n/2^{2s-1}+(-1)^\lambda/4)}$$
$$+2^{-\kappa+(2-\kappa)h/2+1/2}e^{\pi i(u/2-(-1)^\lambda/4)}$$
$$+2^{(2-\kappa)h/2-3\kappa/2+2}\delta\left(\frac{u-(-1)^\lambda}{4}\right)e^{\pi iu/4}$$
$$=2^{-\kappa}(1+(-1)^\lambda i)\ \frac{1-2^{(2-\kappa)h/2}}{1-2^{2-\kappa}}$$
$$+2^{-\kappa+(2-\kappa)h/2+1/2}e^{\pi i(u/2-(-1)^\lambda/4)}$$

$$+2^{(2-\kappa)h/2-3\kappa/2+2}\delta\left(\frac{u-(-1)^{\lambda}}{4}\right)e^{\pi iu/4}.$$

通过直接验算,可见引理中关于 $A_\kappa(2, n)$ 的结论成立。

由引理 1.18 可知, 当 $(-1)^{\lambda}n\equiv 2, 3\ (4)$ 时, $a_\kappa(2^{\nu}, n)=0$ $(\nu\geqslant 3)$; 当 $(-1)^{\lambda}n\equiv 0, 1(4)$ 时, $a_\kappa(2^2, n)=1+(-1)^{\lambda}i$, 因而关于 $A'_\kappa(2, n)$ 的结论也成立。

由(1.2.29)式及引理 1.20, 我们有

$$\begin{aligned}&E_\kappa(id, 8D)(z)\\&=1+\frac{(-2\pi i)^{\kappa/2}}{\Gamma(\kappa/2)}\sum_{\substack{n\geq 1\\(-1)^{\lambda}n\equiv 0,1(4)}}\lambda_\kappa(n, 4D)(A_\kappa(2, n)\\&\quad-2^{-\kappa}(1+(-1)^{\lambda}i))\prod_{p|D}A_\kappa(p, n)n^{\kappa/2-1}e(nz).\end{aligned}\tag{1.2.35}$$

引理 1.21 设 p 为奇素数, $p^{h(p,n)}\,\|\,n$, 则

$$A_\kappa(p, n)=\begin{cases}\dfrac{(p-1)(1-p^{(2-\kappa)(h(p,n)-1)/2})}{p(p^{\kappa-2}-1)}\\\quad-p^{(2-\kappa)(h(p,n)-1)/2-1}, & 若 2\nmid h(p, n);\\\dfrac{(p-1)(1-p^{(2-\kappa)h(p,n)/2})}{p(p^{\kappa-2}-1)}\\\quad+\left(\dfrac{(-1)^{\lambda}n/p^{h(p,n)}}{p}\right)p^{(2-\kappa)(h(p,n)+1)/2-1/2}, \\ & 若 2\mid h(p, n).\end{cases}$$

证明 仍记 $h=h(p, n)$。若 $2\nmid h$, 由引理 1.19, 我们有

$$\begin{aligned}A_\kappa(p, n)&=\sum_{s=1}^{(h-1)/2}p^{-\kappa s}\varphi(p^{2s})-p^{-\kappa(h+1)/2+h}\\&=\frac{(p-1)(1-p^{(2-\kappa)(h-1)/2})}{p(p^{\kappa-2}-1)}-p^{(2-\kappa)(h+1)/2-1}.\end{aligned}$$

若 $2\mid h$, 则

$$\begin{aligned}A_\kappa(p, n)&=\sum_{s=1}^{h/2}p^{-\kappa s}\varphi(p^{2s})\\&\quad+\left(\frac{(-1)^{\lambda}n/p^{h}}{p}\right)p^{-\kappa(h+1)/2+h+1/2}\\&=\frac{(p-1)(1-p^{(2-\kappa)(h-1)/2})}{p(p^{\kappa-2}-1)}\end{aligned}$$

$$+\left(\frac{(-1)^{\lambda}n/p^{h}}{p}\right)p^{(2-\kappa)(h+1)/2-1/2}.$$

现在考虑 $E_3(s, id.4D)(z)$ 和 $E_3'(s, id.4D)(z)$ 在 $s=0$ 的值。这里 D 仍为无平方因子的正奇数。设 $n=tm^2$，t 为无平方因子的整数，易见 $(\chi_{4D})_3^{(n)}=\left(\frac{-t}{\cdot}\right)$。当 n 为负数且不是负平方数时，由于 $t_n(y, 3/2, 0)=0$，且 $L_{4D}\left(1, \left(\frac{-n}{\cdot}\right)\right)$为有限数，所以在 $E_3(0, id.4D)$和 $E_3'(0, id.4D)$ 的展开式中不出现 $e(nx)$ 项。当 $n=-m^2$ 为负平方数时，$(\chi_{4D})_3^{(n)}$ 是平凡特征，由于

$$\zeta(1+s)\Gamma^{-1}(s/2)$$
$$=(s/2)\zeta(1+s)\Gamma^{-1}(1+s/2)\longrightarrow 2^{-1}, \quad (s\to 0),$$

所以在 $E_3(0, id.4D)$和 $E_3'(0, id.4D)$的展开式中出现$e(-m^2x)$项。由命题 1.17 及引理 1.20 和 1.21，我们有

$$c_3(-m^2, 0, id.4D)=A_3(2, -m^2)\prod_{p|D}A_3(p, -m^2)$$
$$=(4D)^{-1}(1-i).$$

利用(1.2.5)和(1.2.9)式及命题 1.13，我们得到

$$E_3(0, id.4D)(z)-(4D)^{-1}(1-i)E_3'(0, \chi_D.4D)(z)$$
$$=1-4\pi(1+i)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_3(n, 4D)$$
$$\times\left(\prod_{p|D}A_3(p, n)-(4D)^{-1}(1-i)\right)n^{1/2}e(nz), \qquad (1.2.36)$$

今后我们将此函数表为 $f_1(id, 4D)(z)$。

设 $l|D$，类似地可有

$$E_3(0, \chi_l, 4D)(z)-(4D)^{-1}(1-i)l^{1/2}E'(0, \chi_{D/l}, 4D)(z)$$
$$=1-4\pi(1+i)l^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_3(ln, 4D)$$
$$\times\left(\prod_{p|D}A_3(p, ln)-(4D)^{-1}(1-i)\right)n^{1/2}e(nz). \qquad (1.2.37)$$

今后将此函数记为 $f_1(\chi_l, 4D)$。

类似地有

$$c_3(-m^2, 0, id.8D)=A_3'(2, -m^2)\prod_{p|D}A_3(p, -m^2)$$
$$=(8D)^{-1}(1-i),$$

当 $l|2D$ 时，我们有

$$E_3(0,\ \chi_l,\ 8D)(z)-(8D)^{-1}(1-i)l^{1/2}E_3'(0,\ \chi_{2D/l},\ 8D)(z)$$
$$=1-4\pi(1+i)l^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_3(ln,\ 8D)(A_3'(2,\ ln)$$
$$\times\prod_{p|D}A_3(p,\ ln)-(8D)^{-1}(1-i))n^{1/2}e(nz),\qquad(1.2.38)$$

今后将此函数记为 $f_1(\chi_l,\ 8D)(z)$。

考虑 $E_3(s,\ \omega,\ N)$ 和 $E_3'(s,\ \omega,\ N)$ 在 $s=-1$ 的值。令

$$f_2(\omega,\ N)(z)=-\left.\frac{E_3(s,\ \bar{\omega},\ N)L_N(2s+2,\ \bar{\omega}')}{2\pi(1+i)L_N(2s+1,\ \bar{\omega}')}\right|_{s=-1},\qquad(1.2.39)$$

$$f_2^*(\omega,\ N)(z)=-\left.\frac{E_3'(s,\ \omega\chi_N,\ N)L_N(2s+2,\ \omega')}{2\pi(1+i)N^{1/2}L_N(2s+1,\ \bar{\omega}')}\right|_{s=-1}.\qquad(1.2.40)$$

当 ω 为非平凡的偶特征时，$L(0,\ \omega)=0$（见引理 1.14）。因而

$$L_N(1+s,\ \omega)|_{s=-1}=L(1+s,\ \omega)\prod_{p|N}\left(1-\frac{\omega(p)}{p^{1+s}}\right)\Big|_{s=-1}=0.$$

当 ω 恒为 1 时，上式中乘积为零，故也同样成立。因而在 $f_2(\omega,\ N)$ 的展开式中不出现 $e(nz)$ $(n<0)$ 的项。当 $n>0$ 时，由引理1.8、1.9、1.10，有

$$t_n(y,\ 1,\ -1/2)=(2\pi)^{1/2}i^{-3/2}e^{-2\pi ny}n^{-1/2}W(4\pi ny,\ 1,\ -1/2)$$
$$=-\pi^{1/2}(1+i)e^{-2\pi ny}n^{-1/2}(4\pi ny)^{1/2}W(4\pi ny,\ 3/2,\ 0)$$
$$=-2\pi(1+i)y^{1/2}e^{-2\pi ny}.$$

及

$$t_0(y,\ 1,\ -1/2)=-2\pi(1+i)y^{1/2}.$$

所以我们有

$$f_2(\omega,\ N)(z)=c_3(0,\ -1,\ \bar{\omega},\ N)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_N(0,\ (\bar{\omega}\chi_N)\left(\frac{n}{\cdot}\right))}{L_N(-1,\ \bar{\omega}')}\beta_3(n,\ -1,\ \bar{\omega}\chi_N,\ N)$$
$$\times c_3(n,\ -1,\ \bar{\omega},\ N)e(nz).\qquad(1.2.41)$$

这里 $c_3(0,\ -1,\ \bar{\omega},\ N)$ 是 (1.2.16) 中的级数对 s 解析延拓后在 $s=-1$ 的值。同样也可得

$$f^*_{\frac{3}{2}}(\omega, N)(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{L_N(0, (\omega\chi_N)_3^{(n)})}{L_N(-1, \omega')}\times\beta_3(n, -1, \omega\chi_N, N)e(nz). \tag{1.2.42}$$

为了今后使用的方便，我们将引理 1.20 和 1.21 中的 $A_3(p, n)$ 的表达式重写如下：

$$A_3(2, n)=\begin{cases}4^{-1}(1-i)(1-3\cdot 2^{-(1+h(2,n))/2}), \\ \quad 若\ 2\nmid h(2, n); \\ 4^{-1}(1-i)(1-3\cdot 2^{-(1+h(2,n)/2)}), \\ \quad 若\ 2\mid h(2, n),\ n/2^{h(2,n)}\equiv 1\ (4); \\ 4^{-1}(1-i)(1-2^{-h(2,n)/2}), \\ \quad 若\ 2\mid h(2, n),\ n/2^{h(2,n)}\equiv 3\ (8); \\ 4^{-1}(1-i), \\ \quad 若\ 2\mid h(2, n),\ n/2^{h(2,n)}\equiv 7\ (8).\end{cases} \tag{1.2.43}$$

当 $p\neq 2$ 时，

$$A_3(p, n)=\begin{cases}p^{-1}-(1+p)p^{-(3+h(p,n))/2}, \quad 若\ 2\nmid h(p, n); \\ p^{-1}-2p^{-1-h(p,n)/2}, \\ \quad 若\ 2\mid h(p, n),\ \left(\frac{-n/p^{h(p,n)}}{p}\right)=-1; \\ p^{-1}, \quad 若\ 2\mid h(p, n),\ \left(\frac{-n/p^{h(p,n)}}{p}\right)=1.\end{cases} \tag{1.2.44}$$

引理 1.22 设 m 为 D 的正因子，则

$$f^*_{\frac{3}{2}}(id, 4m)(z)=1-4\pi(1+i)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_3(n, 4D)(A_3(2, n)-4^{-1}(1-i))\times\prod_{p\mid m}(A_3(p, n)-p^{-1})\prod_{p\mid D/m}(1+A_3(p, n))n^{1/2}e(nz), \tag{1.2.45}$$

及

$$-2^{-1}(1+i)\mu(m)f_2(id.8m)(z)$$
$$=1-4\pi(1+i)\sum_{n\equiv 0,3(4)}^{\infty}\lambda_3(n,4D)(A_3(2,n)-4^{-1}(1-i))$$
$$\times\prod_{p|m}(A_3(p,n)-p^{-1})\prod_{p|D/m}(1+A_3(p,n))n^{1/2}e(nz).$$
$$(1.2.46)$$

证明 设 $n=ab^2$, a 为无平方因子的正整数. 这时 $(\chi_{4D})_3^{(n)}=\chi_{-a}$ 是一个奇特征. 由 $L(s,\chi_{-a})$ 及 $\zeta(s)$ 的函数方程 (见引理 1.14 及其后的说明) 我们有

$$L(0,\chi_{-a})=(r/\pi)^{1/2}\Gamma(1/2)^{-1}L(1,\chi_{-a})$$

及

$$\zeta(-1)=-(\pi^{3/2}\Gamma(1/2))^{-1}\zeta(2),$$

这里利用了

$$\sum_{d=1}^{r}\chi_{-a}(d)e(d/r)=i\sqrt{r},$$

r 是 χ_{-a} 的导子, 由引理 1.5, 当 $2|a$ 或 $a\equiv 1$ (4) 时, $r=4a$; 当 $a\equiv 3$ (4) 时, $r=a$. 因而

$$L_{4m}(-1,id.)^{-1}L_{4m}(0,\chi_{-a})=-L_{4D}(2,id.)^{-1}L_{4D}(1,\chi_{-a})$$
$$\times 2\pi r^{1/2}\prod_{p|2m}(1-\chi_{-a}(p))(1-p^{-1}\chi_{-a}(p))^{-1}(1-p)^{-1}$$
$$\times(1-p^{-2})\prod_{p|D/m}(1-p^{-1}\chi_{-a}(p))^{-1}(1-p^{-2}) \qquad (1.2.47)$$

仍记 $h=h(p,n)$, 由 (1.2.12) 式, 我们有

$$\beta_3(ab^2,-1,\chi_m,4m)=\sum_{\substack{(v,4m)=1\\ uv|b}}\mu(u)\chi_{-a}(u)v$$
$$=\prod_{p|a,p\nmid 2m}\left(\sum_{l=0}^{(h-1)/2}p^l\right)\prod_{p|b,p\nmid 2ma}\left(\sum_{l=0}^{h/2}p^l-\chi_{-a}(p)\sum_{l=0}^{h/2-1}p^l\right)$$
$$=\prod_{p|a,p\nmid 2D}p^{(h-1)/2}\left(\sum_{l=0}^{(h-1)/2}p^{-l}\right)\prod_{p|b,p\nmid 2Da}p^{h/2}$$
$$\times\left(\sum_{l=0}^{h/2}p^{-l}-\chi_{-a}(p)\sum_{l=0}^{h/2-1}p^{-l}\right)$$
$$\times\prod_{p|a,p|D/m}\left(\sum_{l=0}^{(h-1)/2}p^l\right)\prod_{p\nmid a,p|b,p|D/m}\left(\sum_{l=0}^{h/2}p^l-\chi_{-a}(p)\sum_{l=0}^{h/2-1}p^l\right)$$
$$=\prod_{p|a,p\nmid 2D}p^{(h-1)/2}\prod_{p|b,p\nmid 2Da}p^{h/2}\prod_{p|a,p|D/m}\left(\sum_{l=0}^{(h-1)/2}p^l\right)$$

$$\times \prod_{p\nmid a, p|b, p|D/m}\left(\sum_{l=0}^{h/2} p^l - \chi_{-a}(p)\sum_{l=0}^{h/2-1} p^l\right)$$
$$\times \beta_3(ab^2, 0, \chi_D, 4D). \tag{1.2.48}$$

利用引理 1.18 和 1.19，通过直接验算，可得到(1.2.45)式。注意，当 $2|a$ 或 $a\equiv 1(4)$ 时，$\chi_{-a}(2)=0$；当 $a\equiv 3(8)$ 时，$\chi_{-a}(2)=-1$；当 $a\equiv 7\ (8)$ 时，$\chi_{-a}(2)=1$。

当 ν 为奇数时，$a_3(2^\nu, 0)=a_3(p^\nu, 0)=0$；

当 ν 为偶数时，$a_3(2^\nu, 0)=2^{\nu-2}(1-i)$，$a_3(p^\nu, 0)=\varphi(p^\nu)$。

由命题 1.13 我们有

$$c_3(0, -1, id.8m)$$
$$=4^{-1}(1-i)\sum_{s=2}^{\infty} 2^{-(2s+1)t}\prod_{p|m}\left[\sum_{t=1}^{\infty} p^{-(2s+3)t}\varphi(p^{2t})\right|_{s=-1}$$
$$=4^{-1}(1-i)\frac{2^{-2(2s+1)}}{1-2^{-(2s+1)}}\Bigg|_{s=-1}\prod_{p|m}\sum_{t=1}^{\infty} p^{-t}\varphi(p^{2t})$$
$$=\mu(m)(i-1). \tag{1.2.49}$$

设 $n=ab^2\neq 0$，a 无平方因子。这时我们有

$$c_3(n, -1, id.8m)$$
$$=\sum_{\nu=3}^{\infty} 2^{-\nu/2}a_3(2^\nu, n)\prod_{p|m}\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu/2}a_3(p^\nu, n)\right)$$
$$=\begin{cases}0, & 若\ n\equiv 1,\ 2\ (4);\\ \mu(m)(i-1), & 若\ \prod_{p|m}(1-\chi_{-a}(p))\neq 0.\end{cases} \tag{1.2.50}$$

现在我们来证明(1.2.50)式。

若 $n\equiv 1,\ 2\ (4)$，由引理 1.18 可知

$$\sum_{\nu=3}^{\infty} 2^{-\nu/2}a_3(2^\nu, n)=0.$$

今设 $\prod_{p|2m}(1-\chi_{-a}(p))\neq 0$。当 $p\neq 2$ 时，若 p 能整除 a，即 $2\nmid h$，则

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu/2}a_3(p^\nu, ab^2)=\sum_{t=1}^{(h-1)/2} p^{-t}\varphi(p^{2t})-p^{-(h+1)/2+h}=-1;$$

若 p 不能整除 a（即 $2|h$），由假设条件，这时 $\chi_{-a}(p)=-1$，因而

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} p^{-\nu/2}a_3(p^\nu, ab^2)=\sum_{t=1}^{h/2} p^{-t}\varphi(p^{2t})$$
$$-p^{-(h+1)/2+h+1/2}=-1;$$

当 $p=2$ 时，若2能整除 a，即 $2\nmid h$，则

$$\sum_{\nu=3}^{\infty} 2^{-\nu/2}a_3(2^\nu, n)=\sum_{t=2}^{(h-1)/2} 2^{t-3/2}e^{-\pi i/4}$$
$$-2^{(h+1)/2-3/2}e^{-\pi i/4}=i-1.$$

若2不能整除 a，即 $2|h$。由假设条件，$\chi_{-a}(2)\neq 1$，故这时 $a\equiv 1(4)$ 或 $a\equiv 3\ (8)$。若 $a\equiv 1$，则

$$\sum_{\nu=3}^{\infty} 2^{-\nu/2}a_3(2^\nu, n)=\sum_{t=2}^{h/2} 2^{t-3/2}e^{-\pi i/4}+2^{(h+2)/2-3/2}e^{3\pi i/4}=i-1,$$

若 $a\equiv 3\ (8)$，则

$$\sum_{\nu=3}^{\infty} 2^{-\nu/2}a_3(2^\nu, n)=\sum_{t=2}^{h/2} 2^{t-3/2}e^{-\pi i/4}$$
$$+2^{(h+2)/2-3/2}e^{7\pi i/4}+2^{(h+1)/2}e^{3\pi i/4}=i-1.$$

这完成了(1.2.50)式的证明。

当 $\prod_{p|2m}(1-\chi_{-a}(p))=0$ 时，我们有

$$(A(2, n)-4^{-1}(1-i))\prod_{p|m}(A(p, n)-p^{-1})=0, \qquad (1.2.51)$$

（注意，若 $\chi_{-a}(2)=1$，则有 $n/2^{h(2,n)}\equiv 7(8)$）。显然

$$\frac{L_{8D}(0, \chi_{-n})}{L_{8D}(-1, id.)}\beta_3(n, -1, \chi_{8D}, 8D)$$
$$=\frac{L_{4D}(0, \chi_{-n})}{L_{4D}(-1, id.)}\beta_3(n, -1, \chi_D, 4D). \qquad (1.2.52)$$

利用(1.2.47)～(1.2.52)式，可由(1.2.41)式得到(1.2.46)式。

命题1.12和定理1.16取自Shimura[24]，命题1.13取自Sturm[25]。

第 2 章

模形式空间的维数

§2.1 模群及其同余子群

$$令 SL_2(\boldsymbol{R})=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\middle| a,\ b,\ c,\ d\in\boldsymbol{R},\ ad-bc=1\right\}.$$

对任一$\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{R})$，定义复平面上的变换

$$\sigma(z)=\frac{az+b}{cz+d},$$

易见

$$\operatorname{Im}(\sigma(z))=\frac{\operatorname{Im}(z)}{|cz+d|^2},$$

所以$z\to\sigma(z)$决定了上半平面H上的一个变换．由于$\pm\sigma$对应H上的同一变换，所以我们得到的H上的变换群为$SL_2(\boldsymbol{R})/\pm I$.

变换$z\mapsto\sigma(z)$的固定点为

$$cz^2+(d-a)z-b=0$$

的根．当$c\neq 0$时，它的两个根为

$$(a-d\pm\sqrt{(a+d)^2-4})/2c.$$

当$c=0$时，我们有$\sigma(\infty)=\infty$．上述方程乘a后化为

$$(1-a^2)z-ab=0.$$

若$a^2=1$，变换$z\mapsto\sigma(z)$有唯一的固定点∞；若$a^2\neq 1$，该变换有∞及$ab/(1-a^2)$两个固定点．

定义 2.1 设$\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$，$\sigma\neq\pm I$．若变换$z\mapsto\sigma(z)$在$H$内有一个固定点，称$\sigma$为椭圆元；若变换$z\mapsto\sigma(z)$在$\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$内有唯一的固定点，称$\sigma$为抛物元；若变换$z\mapsto\sigma(z)$在$\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$内有两个固定点，称$\sigma$为双曲元．

记 $\mathrm{tr}(\sigma)=a+d$。从上述讨论得到以下命题：

命题2.2 设 $\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})$，$\sigma\neq\pm I$。则当且仅当 $|\mathrm{tr}(\sigma)|<2$ 时，σ 为椭圆元；当且仅当 $|\mathrm{tr}(\sigma)|=2$ 时，σ 为抛物元；当且仅当 $|\mathrm{tr}(\sigma)|>2$ 时，σ 为双曲元。

由此可知道，当 σ 为椭圆元(抛物元，双曲元)时，对任一 $\tau\in SL_2(\boldsymbol{R})$，$\tau\sigma\tau^{-1}$ 仍为椭圆元(抛物元，双曲元)。

设 $\sigma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{R})$，若 $\sigma(i)=i$，则有 $a=d$，$c=-b$，从而 $a^2+b^2=1$，所以

$$\{\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})\,|\,\sigma(i)=i\}=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\middle|\ 0\leqslant\theta<2\pi\right\},$$

记该群为 $SO(2)$。设 $z=x+iy\in H$，取

$$\tau=\begin{pmatrix}y^{1/2} & xy^{-1/2}\\ 0 & y^{-1/2}\end{pmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{R}),$$

则有 $\tau(i)=z$，故

$$\{\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})\,|\,\sigma(z)=z\}=\tau\cdot SO(2)\cdot\tau^{-1}.$$

设 $s\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$，令

$$F(s)=\{\sigma\in SL_2(\boldsymbol{R})\,|\,\sigma(s)=s\},$$
$$P(s)=\{\sigma\in F(s)\,|\,\sigma\text{ 为抛物元或 }\pm I\}.$$

易见

$$F(\infty)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\middle|\ a、b\in\boldsymbol{R},\ a\neq0\right\}$$

$$P(\infty)=\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle|\ h\in\boldsymbol{R}\right\}$$

对任一 $s\in\boldsymbol{R}$，取

$$\tau=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & -s\end{pmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{R}),$$

由于 $\tau(s)=\infty$，所以

$$F(s)=\tau^{-1}F(\infty)\tau,\quad P(s)=\tau^{-1}P(\infty)\tau.$$

$\boldsymbol{R}$ 上的拓扑在 $SL_2(\boldsymbol{R})$ 上诱导一个拓扑。设 Γ 为 $SL_2(\boldsymbol{R})$ 的

离散子群，z为H中一点，若存在Γ的一个椭圆元σ，使$\sigma(z)=z$，则z称为Γ的椭圆点。设$s\in \boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$，若存在$\Gamma$的一个抛物元$\sigma$，使$\sigma(s)=s$，则$s$称为$\Gamma$的尖点。当$\omega$为$\Gamma$的椭圆点（尖点）时，对任一$\gamma\in\Gamma$，$\gamma(\omega)$仍是$\Gamma$的椭圆点（尖点）。

模群$SL_2(\boldsymbol{Z})$是$SL_2(\boldsymbol{R})$的一个重要的离散子群。设N为正整数，在§1.1中，我们已遇见了它的子群$\Gamma_0(N)$。又令

$$\Gamma(N)=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z})\,\middle|\, a\equiv d\equiv 1,\ b\equiv c\equiv 0(N)\right\},$$

它们也都是$SL_2(\boldsymbol{R})$的离散子群。

设Γ为模群的一个子群，若存在某一正整数N，使$\Gamma(N)\subset\Gamma$，则称Γ为模群的同余子群。$\Gamma_0(N)$和$\Gamma(N)$为本书中主要讨论的同余子群。

将$\boldsymbol{R}$看作一个加法群，设A是$\boldsymbol{R}$的一个离散子群，令α是A中最小的正数，则$A=\{n\alpha\mid n\in\boldsymbol{Z}\}$，$A$与$\boldsymbol{Z}$同构。

命题2.3 设Γ为$SL_2(\boldsymbol{R})$的离散子群，z为Γ的椭圆点，则

$$\Gamma_z=\{\sigma\in\Gamma\mid\sigma(z)=z\}$$

是有限循环群。

证明 由上述，已知存在$\tau\in SL_2(\boldsymbol{R})$，使$\tau(i)=z$，因而

$$\Gamma_z=\Gamma\cap\tau\cdot SO(2)\cdot\tau^{-1}.$$

$SO(2)$与加法群$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$同构，所以它是一个紧致群，$\tau\cdot SO(2)\cdot\tau^{-1}$也是一个紧致群。由于$\Gamma$是离散群，故$\Gamma_z$是紧致群$\tau\cdot SO(2)\cdot\tau^{-1}$中的一个离散子群，它必定是有限群。$\boldsymbol{R}$的任一离散子群都与$\boldsymbol{Z}$同构，因而$\boldsymbol{R}/\boldsymbol{Z}$的任一离散子群都是有限循环群。

我们称$[\Gamma_z:\Gamma\cap\{\pm I\}]$为椭圆点$z$的阶。

命题2.4 设Γ为$SL_2(\boldsymbol{R})$的离散子群，s为Γ的尖点，

$$\Gamma_s=\{\sigma\in\Gamma\mid\sigma(s)=s\}.$$

则$\Gamma_s/\Gamma\cap\{\pm I\}$与$\boldsymbol{Z}$同构，且$\Gamma_s$中任一元或为$\pm I$，或为抛物元。

证明 已知存在$\tau\in SL_2(\boldsymbol{R})$，使$\tau(s)=\infty$，因而

$$\Gamma_s=\Gamma\cap\tau^{-1}F(\infty)\tau,$$

我们有 $\tau\Gamma_s\tau^{-1}=\tau\Gamma\tau^{-1}\cap F(\infty)=(\tau\Gamma\tau^{-1})_\infty$，$\tau\Gamma\tau^{-1}$ 也是 $SL_2(\boldsymbol{R})$ 的离散子群，由此可见，不失普遍性，仅需对 $s=\infty$ 证明本定理。$\Gamma\cap P(\infty)$ 是离散子群，$\Gamma\cap P(\infty)/\Gamma\cap\{\pm I\}$ 与 $\boldsymbol{R}$ 的一个离散子群同构，因而与 $\boldsymbol{Z}$ 同构。$\Gamma\cap P(\infty)$ 中存在一个元素

$$\sigma=\begin{pmatrix}1 & h_0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \text{ 或 } \begin{pmatrix}-1 & h_0\\ 0 & -1\end{pmatrix},$$

它具有最小的正数 h_0。

假设 $\Gamma\cap F(\infty)$ 中有一个双曲元

$$\mu=\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix},\qquad (a\neq 0,\ \pm 1),$$

必要时以 μ^{-1} 代替 μ，可设 $|a|<1$，这时

$$\mu\sigma\mu^{-1}=\begin{pmatrix}\pm 1 & a^2h_0\\ 0 & \pm 1\end{pmatrix}\in\Gamma\cap P(\infty).$$

这与 h_0 的定义矛盾。

定义 2.5　设 w_1、$w_2\in H\cup\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}$，若存在 $\tau\in\Gamma$，使 $\tau(w_1)=w_2$，则称 w_1 与 w_2 为 Γ 等价

现在来讨论模群的尖点和椭圆点。

由于 ∞ 是 $\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 的固定点，故 ∞ 是模群的尖点。设 $s\in\boldsymbol{R}$ 为模群的尖点，则存在模群的抛物元 $\sigma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，它以 s 为唯一的固定点。这时 $c\neq 0$，否则，σ 以 ∞ 为固定点。s 是方程

$$cx^2+(d-a)x-b=0$$

的唯一的根，所以 s 一定是有理数。反之，设 p/q 为任一有理数，且 p 与 q 互素，则存在整数 u、t，使

$$\sigma=\begin{pmatrix}p & u\\ q & t\end{pmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z}),$$

由于 $\sigma(\infty)=p/q$，∞ 为模群的尖点，因此 p/q 也是模群的尖点。总结上述，可知 $Q\cup\{\infty\}$ 为模群的所有尖点，且它们都与 ∞ 等价。

设 σ 为模群的椭圆元，由命题 2.2，可知 $|\mathrm{tr}(\sigma)|<2$，$\mathrm{tr}(\sigma)$

是整数，故 $\mathrm{tr}(\sigma)=0$ 或 ± 1。σ 的特征多项式 $\det(\sigma-xI)$ 为 x^2+1 或 $x^2\pm x+1$，可见 $\sigma^2=-I$ 或 $\sigma^3=\pm I$。若 $\sigma^3=-I$，则 $(-\sigma)^3=I$，所以我们仅需考虑 $\sigma^2=-I$ 及 $\sigma^3=I$ 两个情况。

设 $\sigma^2=-I$，令 $\boldsymbol{Z}[\sigma]=\{a+b\sigma \mid a,\ b\in\boldsymbol{Z}\}$，它与 $\boldsymbol{Z}[i]$ 同构，是一个欧氏环。任一 $\tau\in\boldsymbol{Z}[\sigma]$，可定义 $\boldsymbol{Z}^2$ 上的一个变换

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\mapsto\tau\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}\in\boldsymbol{Z}^2,$$

因而 $\boldsymbol{Z}^2$ 可看作 $\boldsymbol{Z}[\sigma]$ 上的模。$\boldsymbol{Z}^2$ 中任一非零元 $\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$，若有 $\tau=a+b\sigma$ 使 $\tau\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\boldsymbol{0}$，则

$$0=(a-b\sigma)(a+b\sigma)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(a^2+b^2)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},$$

可见 $a=b=0$，即 $\tau=0$。由欧氏环上有限生成模的基本定理，可知存在 $u\in\boldsymbol{Z}^2$，使

$$\boldsymbol{Z}^2=\boldsymbol{Z}[\sigma]u=\boldsymbol{Z}u+\boldsymbol{Z}\sigma u.$$

记 $v=\sigma u$，则 $\sigma v=-u$，即

$$\sigma(u,\ v)=(u,\ v)\begin{pmatrix}0&-1\\ 1&0\end{pmatrix}.$$

$(u,\ v)$ 表示以 u、v 为列的二阶方阵，u、v 是 $\boldsymbol{Z}^2$ 的基。所以

$$\det(u,\ v)=\pm 1.$$

若 $\det(u,\ v)=1$，则 $(u,\ v)$ 为模群的元素，且

$$\sigma=(u,\ v)\begin{pmatrix}0&-1\\ 1&0\end{pmatrix}(u,\ v)^{-1}.$$

若 $\det(u,\ v)=-1$，则 $(v,\ u)$ 为模群的元素，且

$$\sigma=(v,\ u)\begin{pmatrix}0&1\\ -1&0\end{pmatrix}(v,\ u)^{-1}.$$

可见 σ 在模群中与 $\begin{pmatrix}0&-1\\ 1&0\end{pmatrix}$ 或 $\begin{pmatrix}0&1\\ -1&0\end{pmatrix}$ 共轭，这两个元素在 H 中的固定点是 i，所以 σ 的固定点与 i 等价，它们都是二阶椭圆点。

设 $\sigma^3=I$，这时 $\boldsymbol{Z}[\sigma]$ 仍是欧氏环，$\boldsymbol{Z}^2$ 仍可看作 $\boldsymbol{Z}[\sigma]$ 的模，

设$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$是 $\mathbf{Z}^2$ 的非零元，若有 $\tau = a + b\sigma$ 使 $\tau\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$，则

$$0 = (a - b - b\sigma)(a + b\sigma)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (a^2 - ab + b^2)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

因而 $a^2 - ab + b^2 = 0$，由此可推出 $a = b = 0$。因此我们仍有

$$\mathbf{Z}^2 = \mathbf{Z}[\sigma]u = \mathbf{Z}u + \mathbf{Z}\sigma u,\ (u \in \mathbf{Z}^2).$$

令 $v = \sigma u$，则 $\sigma v = -\sigma u - u = -v - u$，所以

$$\sigma(u,\ v) = (u,\ v)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

若 $\det(u,\ v) = 1$，则

$$\sigma = (u,\ v)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}(u,\ v)^{-1}.$$

若 $\det(u,\ v) = -1$，则

$$\sigma = (v,\ u)\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}(v,\ u)^{-1}.$$

所以 σ 在模群中与

$$\tau = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \text{ 或 } \tau^2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

共轭。τ 在H中的固定点为 $z^2 - z + 1 = 0$ 的根，即为三次单位根 $\rho = e^{2\pi i/3}$，由此可见，σ 的固定点为三阶椭圆点，且与 ρ 等价。

综合上述，我们得到以下定理：

定理 2.6　模群的所有尖点为 $\mathbf{Q} \cup \{\infty\}$，每个尖点都与$\infty$等价，模群的椭圆点或为二阶或为三阶，所有二阶椭圆点与 i 等价，所有三阶椭圆点与 ρ 等价(这里所说的等价都是模群等价)。

现在讨论同余子群 $\Gamma(N)$ 与 $\Gamma_0(N)$ 的椭圆点和尖点。不妨设 $N > 1$(易见 $\Gamma_0(1) = \Gamma(1) = SL_2(\mathbf{Z})$)。

由上述，模群的椭圆元都与下列元素之一共轭：

$$\pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\quad \pm\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Gamma(N)$是模群的正规子群，当$N > 1$时，以上诸元素都不属于$\Gamma(N)$。

可见 $\Gamma(N)$ 没有椭圆点。

由定理 2.6，$\Gamma_0(N)$ 的椭圆点也仅可能是二阶或三阶。

定理 2.7 以 ν_2 和 ν_3 分别表示 $\Gamma_0(N)$ 的二阶和三阶椭圆点等价类的个数，则

$$\nu_2=\begin{cases}0, & \text{若 } 4\mid N;\\ \prod\limits_{p\mid N}\left(1+\left(\dfrac{-1}{p}\right)\right), & \text{若 } 4\nmid N.\end{cases}$$

$$\nu_3=\begin{cases}0, & \text{若 } 9\mid N;\\ \prod\limits_{p\mid N}\left(1+\left(\dfrac{-3}{p}\right)\right), & \text{若 } 9\nmid N.\end{cases}$$

其中

$$\left(\frac{-1}{p}\right)=\begin{cases}0, & \text{若 } p=2;\\ 1, & \text{若 } p\equiv 1(4);\\ -1, & \text{若 } p\equiv 3(4).\end{cases}$$

$$\left(\frac{-3}{p}\right)=\begin{cases}0, & \text{若 } p=3;\\ 1, & \text{若 } p\equiv 1(3);\\ -1, & \text{若 } p\equiv 2(3).\end{cases}$$

证明 首先考虑二阶椭圆点。设 z_1 和 z_2 为 $\Gamma_0(N)$ 的两个二阶椭圆点，因而

$$\Gamma_{z_1}=\{\sigma\in\Gamma_0(N)\mid\sigma(z_1)=z_1\}=\{\pm I,\ \pm\sigma_1\},$$
$$\Gamma_{z_2}=\{\sigma\in\Gamma_0(N)\mid\sigma(z_2)=z_2\}=\{\pm I,\ \pm\sigma_2\}.$$

其中 σ_1 和 σ_2 为 $\Gamma_0(N)$ 的椭圆元，可以假定它们在模群中都与 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}$ 共轭。若 z_1 与 z_2 是 $\Gamma_0(N)$ 等价，则有 $\tau\in\Gamma_0(N)$，使 $\tau(z_1)=z_2$，这时 $\tau^{-1}\sigma_2\tau$ 属于 Γ_{z_1}，不难证明 $\tau^{-1}\sigma_2\tau$ 一定是 σ_1，而不可能是 $-\sigma_1$。所以 z_1 与 z_2 为 $\Gamma_0(N)$ 等价的充要条件是 σ_1 与 σ_2 在 $\Gamma_0(N)$ 中共轭。ν_2 为椭圆元集合

$$\Sigma=\left\{T^{-1}\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}T\in\Gamma_0(N)\mid T\in SL_2(\mathbf{Z})\right\}$$

在 $\Gamma_0(N)$ 中的共轭类个数。

设 $\sigma = T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}T \in \Sigma$，令

$$(\omega_1,\ \omega_2) = (1,\ i)T,$$

ω_1、ω_2 为 $\mathbf{Z}[i]$ 在 $\mathbf{Z}$ 上的基，我们有

$$\begin{aligned}(i\omega_1,\ i\omega_2) &= (1,\ i)\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}T \\ &= (\omega_1,\ \omega_2)\sigma. \end{aligned} \tag{2.1.1}$$

又令

$$J = \{a\omega_1 + bN\omega_2 \mid a、b \in \mathbf{Z}\} \subset \mathbf{Z}[i].$$

(2.1.1)式表明J是$\mathbf{Z}[i]$的理想（因为 $i\omega_1 \in J$），且该理想具有下述两个性质：

(1) 理想 J 的范数 $N(J) = [\mathbf{Z}[i]:J] = N$。

(2) 设 $q \neq \pm 1$ 为任一整数，则 J 不包含在 q 生成的主理想 (q) 内（因为 $\omega_1 \notin (q) = \{aq\omega_1 + bq\omega_2 \mid a、b \in \mathbf{Z}\}$）。

反之，若 J 为 $\mathbf{Z}[i]$ 的理想，且适合性质(1)与(2)，由(1)，可以找到 $\mathbf{Z}[i]$的基 ω_1、ω_2，使 $\varepsilon_1\omega_1$、$\varepsilon_2\omega_2$（ε_1、$\varepsilon_2 \in \mathbf{Z}$）为 J 的基，且 $\varepsilon_1 \mid \varepsilon_2$，$\varepsilon_1\varepsilon_2 = N$。这时 $J \subset (\varepsilon_1)$，由(2) 可知 $\varepsilon_1 = 1$，$\varepsilon_2 = N$。必要时以 $-\omega_2$ 代替 ω_2，我们总可假设

$$(\omega_1,\ \omega_2) = (1,\ i)T,\ T \in SL_2(\mathbf{Z}).$$

因而

$$(i\omega_1,\ i\omega_2) = (\omega_1,\ \omega_2)T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}T,$$

由于 $i\omega_1 \in J$，故

$$T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}T \in \Sigma.$$

现在来证明 Σ 中元素在 $\Gamma_0(N)$ 中的共轭类与 $\mathbf{Z}[i]$中具有性质(1)与(2)的理想一一对应。设

$$\sigma = T^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}T \in \Sigma,$$

$$\sigma_1 = T_1^{-1}\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}T_1 \in \Sigma,$$

相应地定义

$$(\omega_1,\ \omega_2)=(1,\ i)T,\ (\omega_1',\ \omega_2')=(1,\ i)T_1$$

及

$$J=\{a\omega_1+bN\omega_2\,|\,a,\ b\in\mathbf{Z}\},$$
$$J_1=\{a\omega_1'+bN\omega_2'\,|\,a、b\in\mathbf{Z}\}.$$

如果 $J=J_1$，由于 $(\omega_1,\ \omega_2)=(\omega_1',\ \omega_2')T_1^{-1}T$ 及 $\omega_1\in J_1$，故

$$T_1^{-1}T=\tau\in\Gamma_0(N),$$

从而 $\sigma=\tau^{-1}\sigma_1\tau$，即 σ 与 σ_1 在 $\Gamma_0(N)$ 中共轭。反之，如果 σ 与 σ_1 在 $\Gamma_0(N)$ 中共轭，设 $\sigma=\tau^{-1}\sigma_1\tau$，其中 $\tau\in\Gamma_0(N)$。令

$$(\omega_1'',\ \omega_2'')=(\omega_1',\ \omega_2')\tau,$$

我们有

$$(i\omega_1,\ \ i\omega_2)=(\omega_1,\ \omega_2)\sigma,\ (i\omega_1'',\ i\omega_2'')=(\omega_1'',\ \omega_2'')\sigma,$$

$(\omega_1,\ \omega_2)$ 与 $(\omega_1'',\ \omega_2'')$ 同为方程

$$\begin{cases}(\sigma_{11}-i)x+\sigma_{21}y=0\\ \sigma_{12}x+(\sigma_{22}-i)y=0,\end{cases}\qquad \sigma=\begin{pmatrix}\sigma_{11} & \sigma_{12}\\ \sigma_{21} & \sigma_{22}\end{pmatrix}$$

的解，因而存在 $\lambda\in Q(i)$，使 $\omega_1=\lambda\omega_1''$，$\omega_2=\lambda\omega_2''$。由于 ω_1''、ω_2'' 是 $\mathbf{Z}[i]$ 的基，故存在整数 n、m，使 $n\omega_1''+m\omega_2''=1$，从而 $n\omega_1+m\omega_2=\lambda$，即 $\lambda\in\mathbf{Z}[i]$。由于 ω_1、ω_2 也是 $\mathbf{Z}[i]$ 的基，类似地可证明 $\lambda^{-1}\in\mathbf{Z}[i]$，即 λ 是 $\mathbf{Z}[i]$ 的可逆元，因此

$$J=\{a\omega_1''+bN\omega_2''\,|\,a、b\in\mathbf{Z}\}=J_1.$$

熟知 $\mathbf{Z}[i]$ 是主理想环，理想 $J=(x+iy)$ 若具有性质(1) 和(2)，则

$$x^2+y^2=N,\quad (x,\ y)=1.$$

这个关于 x 和 y 的不定方程的解数为

$$\begin{cases}4\prod\limits_{p|N}\left(1+\left(\dfrac{-1}{p}\right)\right), & 若\ 4\nmid N;\\ 0, \quad 若\ 4|N.\end{cases}$$

(参阅华罗庚：《数论导引》，第六章 §7)。由于 $\pm(x+iy)$，$\pm(-y+ix)$ 生成同一理想，所以证得关于 ν_2 的结果。

现在考虑 $\Gamma_0(N)$ 的三阶椭圆点。设 z_1 与 z_2 为 $\Gamma_0(N)$ 的两个

三阶椭圆点，$\Gamma_{z_1}=\{\pm I,\ \pm\sigma_1,\ \pm\sigma_1^2\}$ 及 $\Gamma_{z_2}=\{\pm I,\ \pm\sigma_2,\ \pm\sigma_2^2\}$。可以假设 σ_1 与 σ_2 在模群中 都与 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$共轭. 为此仅需证明

$$\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$$

在模群中不能彼此共轭. 它们的特征多项式分别为

$$\lambda(\lambda+1)+1,\ \ \lambda(\lambda+1)+1,\ \ \lambda(\lambda-1)+1,\ \ \lambda(\lambda-1)+1.$$

所以仅可能有第一、第二个元共轭，第三、第四个元共轭. 记

$$\alpha=\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix},$$

则
$$\alpha^{-1}=\begin{pmatrix}-1&1\\-1&0\end{pmatrix}.$$

假设存在 $\gamma\in SL_2(\mathbf{Z})$，使 $\gamma\alpha\gamma^{-1}=\alpha^{-1}$. 已知存在 $\tau\in SL_2(\boldsymbol{R})$，使

$$\tau\alpha\tau^{-1}=\begin{pmatrix}p&q\\-q&p\end{pmatrix}\in SO(2)\ \ (q\neq 0).$$

令
$$\tau\gamma\tau^{-1}=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},$$

由此我们得到

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p&q\\-q&p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p&-q\\q&p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix},$$

因而
$$\begin{pmatrix}ap-bq&bp+aq\\cp-dq&dp+cq\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}ap-cq&bp-dq\\cp+aq&dp+bq\end{pmatrix},$$

可见 $a=-d$，$b=c$，这时

$$\det\gamma=ad-bc=-a^2-b^2<0,$$

这不可能，因此 α 与 α^{-1} 不能共轭，同样$\begin{pmatrix}0&1\\-1&1\end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix}1&-1\\1&0\end{pmatrix}$ 也不能共轭. 因而 z_1 与 z_2 为 $\Gamma_0(N)$ 等价的充要条件是 σ_1 与 σ_2 在 $\Gamma_0(N)$ 中共轭. ν_3 为椭圆元集合

$$\{T^{-1}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}T\in\Gamma_0(N)\mid T\in SL_2(\mathbf{Z})\}$$

在 $\Gamma_0(N)$ 中共轭类的个数。利用讨论二阶椭圆点的类似方法，以 $\mathbf{Z}[\rho]$ 代替 $\mathbf{Z}[i]$，可以证明 $6\nu_3$ 为不定方程

$$x^2-xy+y^2=N \quad ((x, y)=1)$$

的解数。利用该不定方程解数的结果，即证得本定理。

引理 2.8 我们有

$$[SL_2(\mathbf{Z}):\Gamma(N)]=N^3\prod_{p\mid N}(1-p^{-2}),$$

$$[SL_2(\mathbf{Z}):\Gamma_0(N)]=N\prod_{p\mid N}(1+p^{-1}).$$

证明 记 $\Gamma=SL_2(\mathbf{Z})$。定义同态映射

$$f: \Gamma\longrightarrow SL_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}),$$

$$\alpha\longrightarrow\alpha \bmod N.$$

矩阵 α 模 N 即是对其每个元素模 N，f 的核为 $\Gamma(N)$。今证 f 映上，即若任一二阶整数方阵 A，若 $\det A\equiv 1(N)$，则存在 $B\in\Gamma$，使 $A\equiv B(N)$。熟知可以找到 U、$V\in\Gamma$，使

$$UAV=\begin{pmatrix} a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix},$$

我们有 $a_1a_2=1+rN$，r 为整数。令

$$B'=\begin{pmatrix} a_1+xN & yN\\ N & a_2\end{pmatrix},$$

由于 a_2 与 N 互素，总可取整数 x、y，使 $r+a_2x-yN=0$，因而

$$\det B'=a_1a_2+a_2xN-yN^2=1,$$

即 $B'\in\Gamma$。易见 $UAV\equiv B'(N)$，取 $B=U^{-1}B'V^{-1}$ 即可。

因此我们有

$$[\Gamma:\Gamma(N)]=[SL_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}):1].$$

设 $N=\prod p^e$ 为标准因子分解，由孙子定理，我们有

$$[SL_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}):1]=\prod_{p\mid N}[SL_2(\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z}):1]. \tag{2.1.2}$$

考虑映射

$$h: GL_2(\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z})\mapsto GL_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}),$$

$$\alpha \bmod p^e\mapsto\alpha \bmod p,$$

h 的核为

$$X=\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL_2(\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z})\ \middle|\ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\equiv I \quad (p)\right\}$$

易见 $[X:1]=p^{4(e-1)}$。熟知

$$[GL_2(\mathbf{Z}/p\mathbf{Z}):1]=(p^2-1)(p^2-p),$$

所以

$$[GL_2(\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z}):1]=p^{4e}(1-p^{-1})(1-p^{-2}).$$

考虑 $GL(\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z})$ 到 $(\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z})^*$ 的映射：$\alpha\mapsto \det\alpha$，其核为 $SL_2(\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z})$，且是映上的，故

$$\begin{aligned}[SL_2(\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z}):1]&=[GL_2(\mathbf{Z}/p^e\mathbf{Z}):1]/\varphi(p^e)\\&=p^{3e}(1-p^{-2}).\end{aligned}$$

由 (2.1.2) 式得到 $[\Gamma:\Gamma(N)]$。

在上述定义的同态映射 f 之下，$\Gamma_0(N)$ 的像为

$$\left\{\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & d \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})\ \middle|\ ad\equiv 1\ (N)\right\}.$$

其中包含 $N\varphi(N)$ 个元，故

$$\begin{aligned}[\Gamma:\Gamma_0(N)]&=[SL_2(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}):1]/(N\varphi(N))\\&=N\prod_{p\mid N}(1+p^{-1}).\end{aligned}$$

引理 2.9 设 Γ 为 $SL_2(\mathbf{R})$ 的离散子群，Γ' 为 Γ 的子群，且 $[\Gamma:\Gamma']<\infty$。则 Γ 与 Γ' 具有相同的尖点集合。

证明 显然，Γ' 的尖点一定是 Γ 的尖点。反之，设 s 是 Γ 的尖点，则存在 Γ 的抛物元 σ，使 $\sigma(s)=s$。由于 $[\Gamma:\Gamma']<\infty$，一定存在正整数 n，使 $\sigma^n\in\Gamma'$。σ 在 $SL_2(\mathbf{R})$ 中一定与一个形如 $\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 的元素共轭，因而 σ^n 与 $\begin{pmatrix} 1 & nh \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 共轭，即 σ^n 也是抛物元。由于 $\sigma^n(s)=s$，s 也是 Γ' 的尖点。

由定理 2.6 及引理 2.8、2.9，可知 $\Gamma(N)$ 和 $\Gamma_0(N)$ 的尖点集合都是 $\mathbf{Q}\cup\{\infty\}$。为了叙述方便，今后当我们说 d/c 是一个尖点时，总意味着 d 为整数，c 为非负整数，且 $(c,d)=1$。当 $c=0$ 时，有 $d=1$，$1/0$ 表示∞。

定理 2.10 尖点集

$$\{d/c \mid c|N,\ (c,\ d)=1,\ d\in(\mathbf{Z}/(c,\ N/c)\mathbf{Z})^*\} \qquad (2.1.3)$$

是 $\Gamma_0(N)$ 尖点等价类的代表系。因而 $\Gamma_0(N)$ 尖点等价类个数为

$$\nu_\infty=\sum_{c|N}\varphi((c,\ N/c)).$$

证明 若 d' 与 $(c,\ N/c)$ 互素，令

$$d=d'+(c,\ N/c)\prod_{p|c,\,p\nmid d'}p,$$

易见 d 与 c 互素，且 $d\equiv d'((c,\ N/c))$，所以(2.1.3) 中所含尖点的个数即为

$$\sum_{c|N}\varphi((c,\ N/c)).$$

余下的则要证明 $\Gamma_0(N)$ 的任一尖点与 (2.1.3) 式中某一尖点 $\Gamma_0(N)$ 等价，(2.1.3) 中任意两个尖点 $\Gamma_0(N)$ 不等价。

设 d/c 和 d_1/c 为两个尖点，c 为 N 的因子，且 $d\equiv d_1((c,\ N/c))$，这时可以证明 d/c 和 d_1/c 是 $\Gamma_0(N)$ 等价的。事实上，可以找到模群中的元素 $\begin{pmatrix} a & d \\ b & c\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} a_1 & d_1 \\ b_1 & c\end{pmatrix}$，易见

$$bd\equiv b_1d_1\equiv -1((c,\ N/c)),$$

因而 $b\equiv b_1((c,\ N/c))$。存在整数 m、n，使 $b=b_1+mc+nN/c$，因此

$$\gamma=\begin{pmatrix} a-md & d \\ b-mc & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix} c & -d_1 \\ -b_1 & a_1\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N),$$

且 $\gamma(d_1/c)=d/c$。

设 n/m 为尖点，且 $(m,\ N)=c$。存在整数 α 和 β，使

$$\alpha m+\beta nN=c.$$

令

$$\alpha'=\alpha+\prod_{p|N,\,p\nmid\alpha}pnN/c,\ \beta'=\beta-\prod_{p|N,\,p\nmid\alpha}pm/c,$$

易见 $\alpha'm/c+\beta'nN/c=1$，且 α' 与 $\beta'N$ 互素，因而有

$$\sigma=\begin{pmatrix} * & * \\ \beta'N & \alpha'\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N),$$

使 $\sigma(n/m)=d/c$， c 与 d 亦互素。d/c 与 (2.1.3) 中某一尖点

$\Gamma_0(N)$ 等价，n/m 亦然。

今证(2.1.3) 中任意两点都不 $\Gamma_0(N)$ 等价。设 d/c 和 d_1/c_1 为(2.1.3)中的两点，且 $\Gamma_0(N)$ 等价，于是有

$$\sigma=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma N & \delta\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N),$$

使

$$\alpha d+\beta c=d_1,\ \gamma Nd+\delta c=c_1. \tag{2.1.4}$$

由 (2.1.4) 的第二式得到 $c\mid c_1$，由于对称性，类似地也可证明 $c_1\mid c$，因而 $c=c_1$，进而有 $\delta\equiv 1\ \ (N/c)$。因为 $\alpha\delta\equiv 1(N)$，所以 $\alpha\equiv 1(N/c)$。由 (2.1.4) 的第一式可知道 $d\equiv d_1((c,\ N/c))$，所以 d/c 与 d_1/c_1 为(2.1.4)中同一点。

引理 2.11 设 $a,\ b,\ c,\ d$ 为整数，a 与 b 互素，c 与 d 互素，且 $a\equiv c,\ b\equiv d\ \ (N)$，则存在 $\Gamma(N)$ 中的元素 σ，使

$$\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\sigma\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}.$$

证明 (i) 首先考虑 $c=1,d=0$ 的情形，这时 $a\equiv 1,b\equiv 0(N)$，存在整数 p 和 q，使 $ap-bq=(1-a)/N$，因而

$$\sigma=\begin{pmatrix}a & Nq\\ b & 1+Np\end{pmatrix}\in\Gamma(N),\ 且\ \begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\sigma\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

(ii) 对于一般的情况，存在

$$\tau=\begin{pmatrix}c & *\\ d & *\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z}),$$

使

$$\tau\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c\\ d\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}(N),$$

因此

$$\tau^{-1}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}(N).$$

由(i)的讨论，存在 $\sigma\in\Gamma(N)$，使

$$\tau^{-1}\begin{pmatrix}a\\ b\end{pmatrix}=\sigma\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix},$$

从而
$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \tau\sigma\tau^{-1}\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix},$$
$\tau\sigma\tau^{-1}$ 为 $\Gamma(N)$ 的元素。

定理 2.12 两个尖点 $s = a/b$ 和 $s' = c/d$ 为 $\Gamma(N)$ 等价的充要条件是 $\pm\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}(N)$。$\Gamma(N)$ 的尖点等价类的个数

$$\nu_\infty = \begin{cases} \dfrac{N^2}{2}\prod\limits_{p\mid N}(1-p^{-2}), & 若\ N>2; \\ 3, & 若\ N=2. \end{cases}$$

证明 假设 $\pm\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}(N)$，由引理 2.11，存在 $\Gamma(N)$ 的元素 σ，使 $\sigma(s) = s'$。反之，若存在 $\Gamma(N)$ 的元素 σ，使 $\sigma(s) = s'$，则 $\sigma\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = m\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}$，$m$ 为整数。由于 a 与 b 互素，c 与 d 互素，m 仅可能为 ± 1。因而 $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \equiv \pm\begin{pmatrix} c \\ d \end{pmatrix}(N)$。

令
$$J = \{(a_1, a_2) \mid 1 \leqslant a_1,\ a_2 \leqslant N,\ (a_1, a_2, N) = 1\}.$$
设 $s = c/d$ 为 $\Gamma(N)$ 的尖点，令 $a_1 \equiv c$，$a_2 \equiv d\ (N)$，且 $1 \leqslant a_1$，$a_2 \leqslant N$。由于 $(a_1, a_2, N) \mid (c, d) = 1$，故 $(a_1, a_2) \in J$，尖点 s 按上述方式对应 J 中的一元。若另一尖点 s' 对应 J 中的元素 (a_1', a_2')，由本定理已证的第一个结论可知，s 与 s' 为 $\Gamma(N)$ 等价的充要条件是 $a_1 = a_1'$，$a_2 = a_2'$ 或 $a_1 = N - a_1'$，$a_2 = N - a_2'$。反之，设 (a_1, a_2) 为 J 中任一元，易见 a_2 与 $c = a_1 + N\prod_{p\mid a_2, p\nmid a_1} p$ 互素，因而尖点 c/a_2 按上述定义与 (a_1, a_2) 对应。故当 $N>2$ 时（设 $N = \prod_p p^e$），有

$$\begin{aligned} \nu_\infty = \#J/2 &= \frac{1}{2}\sum_{a=1}^{N} \varphi((a, N))N/(a, N) \\ &= \frac{N}{2}\prod_{p\mid N}\sum_{a=1}^{p^e}\varphi((a, p^e))/(a, p^e) \end{aligned}$$

$$=\frac{N}{2}\prod_{p\mid N}\sum_{i=1}^{e}\varphi(p^i)\varphi(p^{e-i})/p^i$$

$$=\frac{N^2}{2}\prod_{p\mid N}(1-p^{-2}).$$

而当 $N=2$ 时，$\nu_\infty=\# J=3$。

设 Γ 为 $SL_2(\mathbf{R})$ 的离散子群，H 中的一个区域 F 如果适合下述条件：

(1) F 是连通开集；

(2) F 内任意两点为 Γ 不等价；

(3) H 内任一点都与 F 的闭包 $\overline{F}$ 内的一点 Γ 等价。

则 F 称为 Γ 的基域。

下面证明

$$F=\{z\in H\mid -1/2<Re(z)<1/2,\ |z|>1\}$$

是模群的一个基域。

F 显然适合条件(1)。设 z_1、$z_2\in F$，且存在

$$\sigma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z}),$$

使 $z_1=\sigma(z_2)$。不妨假设 $\mathrm{Im}(z_2)\leqslant\mathrm{Im}(z_1)=\mathrm{Im}(z_2)/|cz_2+d|^2$，因此

$$|c|\cdot\mathrm{Im}(z_2)\leqslant|cz_2+d|\leqslant1.$$

如果 $c=0$，则 $a=d=\pm1$，$z_1=z_2\pm b$，b 为整数，这不可能，所以 $c\neq0$。因为 $z_2\in F$，可知 $\mathrm{Im}(z_2)\geqslant\sqrt{3}/2$，由(2.1.5)可得 $|c|=1$ 及 $|z_2\pm d|\leqslant1$，这也是不可能的，故条件(2)成立。

设 z 为 H 的任一点，$\sigma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})$，由于

$$\mathrm{Im}(\sigma(z))=\mathrm{Im}(z)/|cz+d|^2,$$

当 σ 跑遍模群时，$\mathrm{Im}(\sigma(z))$ 存在最大值。若 $\mathrm{Im}(\sigma_0(z))$ 为其最大值，令 $w=\sigma_0(z)=x+iy$，取 $\gamma=\begin{pmatrix} 0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，则

$$\mathrm{Im}(\gamma\sigma_0(z))=\mathrm{Im}(-1/w)=y/|w|^2\leqslant y.$$

可见 $|w|\geqslant 1$。又令 $\tau=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则

$$\tau^h(\sigma_0(z))=x+h+iy,$$

h 为整数，由于 $\mathrm{Im}(\tau^h\sigma_0(z))=\mathrm{Im}(\sigma_0(z))$，同样也有 $|\tau^h\sigma_0(z)|\geqslant 1$、选择适当的 h，可使 $\tau^h\sigma_0(z)\in\overline{F}$，因此条件(3)也成立。

令

$$F'=F\cup\{z\in H\mid |z|\geqslant 1,\ Re(z)=-1/2\}$$
$$\cup\{z\in H\mid |z|=1,\ -1/2<Re(z)\leqslant 0\},$$

F' 是 $SL_2(\boldsymbol{Z})\backslash H$ 的一个完全代表系。我们可以直观地看到，$SL_2(\boldsymbol{Z})\backslash H$ 不是紧集，但如果添加一个 ∞ 点，就可以成为紧集了。取

$$H^*=H\cup\boldsymbol{Q}\cup\{\infty\},$$

$\boldsymbol{Q}\cup\{\infty\}$ 是模群的所有尖点。由定理 2.6，我们有

$$SL_2(\boldsymbol{Z})\backslash H^*=(SL_2(\boldsymbol{Z})\backslash H)\cup\{\infty\}.$$

所以我们要以 H^* 代替 H。下面我们给出严格的论证。

设 $\boldsymbol{R}$ 为一个连通的 Hausdorff 拓扑空间，$\boldsymbol{R}$ 上有一个复结构 S，即：

(1) S 是一组 $\{U_i,\varphi_i\}_{i\in I}$ 的集合，$\{U_i\}_{i\in I}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 的一个开覆盖，φ_i 为 U_i 到复平面上一个开集的同胚映射；

(2) 如果 $U_i\cap U_j\neq\phi$，则

$\varphi_j\cdot\varphi_i^{-1}$: $\varphi_i(U_i\cap U_j)\to\varphi_j(U_i\cap U_j)$

是全纯变换。

这时我们称 $\boldsymbol{R}$ 为黎曼面。上述每个 U_i 称为坐标邻域，φ_i 称为坐标映射，它给 U_i 每个点一个局部坐标。当两个坐标邻域有公共部份时，在公共部份就有两套坐标，条件(2)是说这两套坐标之间存在一个全纯变换。

记 $G=SL_2(\boldsymbol{R})$，$\boldsymbol{R}^4$ 的拓扑在 G 上诱导出一个拓扑，且使 G 成为一个拓扑群。Γ 表示 G 的一个离散子群，令

$$H^*=H\cup\{\Gamma\text{ 的所有尖点}\}.$$

下面我们首先在商集 $\Gamma\backslash H^*$ 上引入一个拓扑，使其成为连通

的 Hausdorff 空间，然后在 $\Gamma\backslash H^*$ 上引入一个复结构，使其成为一个黎曼面。

首先在 H^* 上引入拓扑。若 $z\in H$，仍采用 z 在 H 中的开邻域基本系；若 ∞ 为 Γ 的尖点，定义下述集合

$$\{\infty\}\cup\{z\in H\,|\,\mathrm{Im}(z)>c>0\} \tag{2.1.6}$$

为 ∞ 处的开邻域基本系；若 $s\in\mathbf{R}$ 为 Γ 的尖点，定义

$$\{s\}\cup\{H\text{内与实轴在 } s \text{ 相切的圆内部}\}$$

为 s 的开邻域基本系。H^*在上述定义下成为一个拓扑空间。

G 中任一元素 σ 在 H 上定义一个同胚变换 $z\mapsto\sigma(z)$。若 $\sigma(s_1)=s_2$，s_1 和 s_2 为实数，σ 将 H 中与实轴在 s_1 相切的圆变为 H 中与实轴在 s_2 相切的圆。又若 $\sigma(s)=\infty$，s 为实数，则 σ 将 H 中与实轴在 s 相切的圆变为(2.1.6)中的集合。所以 Γ 中每个元素定义 H^*上的一个同胚变换。

令 φ 为 H^*到 $\Gamma\backslash H^*$ 的自然映射，$\Gamma\backslash H^*$ 中的开集定义为

$$\{X\subset\Gamma\backslash H^*\,|\,\varphi^{-1}(X)\text{为}H^*\text{的开集}\},$$

于是 $\Gamma\backslash H^*$成为拓扑空间。H^*是连通的，因而 $\Gamma\backslash H^*$也是连通的。可以证明 $\Gamma\backslash H^*$ 是 Hausdorff 空间(参阅文献[22]中第一章)。我们把 H^*中的椭圆点(尖点)对应的 $\Gamma\backslash H^*$ 中的点也称为椭圆点(尖点)。

现在我们在 $\Gamma\backslash H^*$ 上引入复结构。我们需要下述引理，其证明参阅文献[22]中第一章。

引理 2.13 设 $v\in H^*$，则存在 v 的一个邻域 U，使

$$\{\sigma\in\Gamma\,|\,\sigma(U)\cap U\neq\phi\}=\{\sigma\in\Gamma\,|\,\sigma(v)=v\}=\Gamma_v,$$

即 $\Gamma_v\backslash U$ 可以嵌入 $\Gamma\backslash H^*$。

设 $v\in H^*$，U 为引理 2.13 中所说的 v 的邻域。仍以 φ 表示 $H^*\to\Gamma\backslash H^*$ 的自然映射。若 $v\in H$，v 不是椭圆点，则 $\Gamma_v=\Gamma\cap\{\pm I\}$，故 φ: $U\to\Gamma_v\backslash U$ 是一个同胚映射，令$(\Gamma_v\backslash U,\ \varphi^{-1})$为 $\Gamma\backslash H^*$ 的复结构中的一个元素。若 $v\in H$，v 是椭圆点，由命题2.3，$\bar{\Gamma}_v=\Gamma_v/(\Gamma_v\cap\{\pm I\})$是有限循环群，设其阶为 e。设

$$\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_v,$$

对应 $\bar{\Gamma}_v$ 的生成元，取 λ 为分式线性变换

$$\lambda(z)=(z-v)/(z-\bar{v}),$$

同时也以 λ 表示矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & v \\ 1 & -\bar{v} \end{pmatrix}$，我们有

$$\lambda\sigma\lambda^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -v \\ 1 & -\bar{v} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\bar{v} & v \\ -1 & 1 \end{pmatrix}(v-\bar{v})^{-1}$$

$$=\begin{pmatrix} c\bar{v}+d & 0 \\ 0 & cv+d \end{pmatrix}.$$

记 $\xi=cv+d$，易见 $\xi\bar{\xi}=1$。设 e 为最小正整数，使 $\sigma^e=\pm I$，即能使 $\xi^e=\pm1$。当 e 为偶数时，一定有 $\xi^e=-1$，ξ 为 $2e$ 次本原单位根。但不论 e 为偶数或奇数，ξ^2 总是 e 次本原单位根。令 $\zeta=\xi^{-2}$，

$\lambda\bar{\Gamma}_v\lambda^{-1}$ 由下述变换组成：

$$z\mapsto\zeta^i z,\ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ e).$$

变换 $z\mapsto\lambda(z)$ 将 U 中相对 Γ_v 等价的点映为 $\lambda(U)$ 中相对 $\lambda\Gamma_v\lambda^{-1}$ 等价的点，即 λ 诱导一个 $\Gamma_v\backslash U$ 到 $\lambda\Gamma_v\lambda^{-1}\backslash\lambda(U)$ 的一对一映射。$\lambda(U)$ 中两个点 w_1 和 w_2 当且仅当适合 $w_1^e=w_2^e$ 时，相对 $\lambda\Gamma_v\lambda^{-1}$ 等价。定义映射：

$$p:\ \Gamma_v\backslash U\to\boldsymbol{C},$$

$$\varphi(z)\mapsto\lambda(z)^e\quad(z\in U).$$

将 $(\Gamma_v\backslash U,\ p)$ 作为 $\Gamma\backslash H^*$ 的复结构中的一个元素，它是 $\Gamma_v\backslash U$ 到 $\boldsymbol{C}$ 内的一个同胚映射。

若 v 是 Γ 的尖点，则存在 $\rho\in G$，使 $\rho(v)=\infty$，因而

$$\rho\Gamma_v\rho^{-1}\cdot\{\pm I\}=\left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m m\in\boldsymbol{Z}\right\},\ (h>0).$$

定义 $\Gamma_v\backslash U$ 到 $\boldsymbol{C}$ 内的一个同胚映射：$p(\varphi(z))=e^{2\pi i\rho(z)/h}$，将 $(\Gamma_v\backslash U,\ p)$ 作为 $\Gamma\backslash H^*$ 的复结构中的一个元素。

可以证明，在上述定义下，$\Gamma\backslash H^*$ 成为一个黎曼面。一般地

说，$\Gamma\backslash H^*$ 是局部紧的，但不一定是紧的。当 $\Gamma\backslash H^*$ 为紧黎曼面时，称 Γ 为第一类 Fuchsian 群

引理 2.14 $\Gamma\backslash H^*$是紧黎曼面的充要条件是存在 H^* 的一个紧子集 C，使 $H^*=\Gamma C$。

证明 假设存在 H^* 的紧子集C使 $H^*=\Gamma C$，则$\varphi(C)=\Gamma\backslash H^*$。设 $\Gamma\backslash H^*\subset\bigcup_i V_i$ 是 $\Gamma\backslash H^*$ 的开覆盖，V_i 是 $\Gamma\backslash H^*$ 的开集，则 $C\subset\bigcup_i\varphi^{-1}(V_i)$ 是一个开覆盖。由于C是紧的，于是得到C的一个有限开覆盖 $C\subset\bigcup_{i=1}^n\varphi^{-1}(V_i)$，从而

$$\Gamma\backslash H^*=\varphi(C)\subset\bigcup_{i=1}^n V_i,$$

所以 $\Gamma\backslash H^*$是紧的。反之，设 $\Gamma\backslash H^*$是紧的。因为 H^* 是局部紧的，可以找到 H^* 的一个开覆盖 $H^*\subset\bigcup_i V_i$，使得每个 $\overline{V}_i$ 是紧的。我们有 $\Gamma\backslash H^*\subset\bigcup_i\varphi(V_i)$，由于 $\varphi^{-1}(\varphi(V_i))=\bigcup_{g\in\Gamma}g(V_i)$，每个 $g(V_i)$都是H^*的开集，因而 $\varphi^{-1}(\varphi(V_i))$也是 H^* 的开集，根据 $\Gamma\backslash H^*$ 上拓扑的定义，可知$\varphi(V_i)$是 $\Gamma\backslash H^*$ 的开集，由于$\Gamma\backslash H^*$是紧的，存在一个有限开覆盖 $\Gamma\backslash H^*\subset\bigcup_{i=1}^n\varphi(V_i)$，于是

$$H^*=\Gamma(\bigcup_{i=1}^n\overline{V}_i),$$

$\bigcup_{i=1}^n\overline{V}_i$ 是一个紧集。

令

$$\overline{F}=\{\infty\}\cup\{z\in H\mid |z|\geqslant 1,\ -1/2\leqslant\mathrm{Re}(z)\leqslant 1/2\},$$

$\overline{F}$ 是H^*的紧子集，根据前面的讨论，则有 $H^*=SL_2(\boldsymbol{Z})\cdot\overline{F}$，利用上述引理，可知$SL_2(\boldsymbol{Z})\backslash H^*$ 是紧黎曼面，即模群是第一类 Fuchsian 群。

设 Γ 是第一类 Fuchsian 群，Γ' 是 Γ 的子群，且$n=[\Gamma:\Gamma']<\infty$。$\Gamma$ 可以分解为 Γ' 的 n 个右陪集之并：$\Gamma=\bigcup_{i=1}^n\Gamma'\sigma_i$。由引理 2.14，存在$H^*$的紧子集 C，使 $H^*=\Gamma C$，从而

$$H^*=\Gamma'(\bigcup_{i=1}^n\sigma_i C),$$

而 $\bigcup_{i=1}^n\sigma_i C$ 是 H^* 的紧子集，所以 Γ' 也是第一类 Fuchsian 群。利用引理 2.8，可知 $\Gamma(N)$和 $\Gamma_0(N)$都是第一类 Fuchsian 群。

设 Γ 为G的离散子群，Γ' 为 Γ 的子群，且 $[\Gamma:\Gamma']<\infty$，由引理 2.9，Γ' 与 Γ 具有相同的尖点集合，因而定义同一个H^*。设

v 为 H^* 中任一点，H^* 中与 v 为 Γ 等价的点集，将分成有限个关于 Γ' 的等价类，设它分成 h 个 Γ' 等价类，$\omega_i(1\leqslant i\leqslant h)$ 为其代表系。仍以 φ 表示自然映射 $H^*\to\Gamma\backslash H^*$，以 φ' 表示自然映射 $H^*\to\Gamma'\backslash H^*$。我们可以建立一个从 $\Gamma'\backslash H^*$ 到 $\Gamma\backslash H^*$ 的覆盖映射，f 将 $\varphi'(\omega_i)(1<i\leqslant h)$ 映为 $\varphi(v)$，记 $q_i=\varphi'(\omega_i)\in\Gamma'\backslash H^*$。$f$ 是一个

$$\begin{array}{ccc} H^* & \xrightarrow{\text{恒等映射}} & H^* \\ {\scriptstyle\varphi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ \Gamma'\backslash H^* & \xrightarrow{f} & \Gamma\backslash H^* \end{array}$$

全纯映射，设 q_i 处的局部坐标为 u，$\varphi(v)$ 处的局部坐标为 t，若

$$t(f(q))=a_e u(q)^e+a_{e+1}u(q)^{e+1}+\cdots,\qquad a_e\neq 0.$$

q 属于 q_i 的一个邻域，我们称 e 为 f 在 q_i 处的重数（或分歧指数）。在下述引理 2.15 中，我们将证明 f 在 $q_i(1\leqslant i\leqslant h)$ 的重数之和等于 $[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma'}]$，它不依赖 $\varphi(v)$。

由于 $\omega_i(1\leqslant i\leqslant h)$ 与 v 是 Γ 等价的，故存在 $\sigma_i\in\Gamma$，使 $\omega_i=\sigma_i(v)$。以 $\overline{\Gamma}$ 表示 Γ 所对应的 H 的变换群，即 $\overline{\Gamma}=\Gamma/\Gamma\cap[\pm I]$。

引理 2.15 利用上述定义的符号。则覆盖映射 f 在 q_i 处的重数为

$$e_i=[\overline{\Gamma}_{\omega_i}:\overline{\Gamma}'_{\omega_i}]=[\overline{\Gamma}_v:\sigma_i^{-1}\overline{\Gamma}'\sigma_i\cap\overline{\Gamma}_v](1\leqslant i\leqslant h),$$

且 $e_1+\cdots+e_h=[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma'}]$，即 f 是次数为 $[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma'}]$ 的覆盖。特别，当 $\overline{\Gamma'}$ 是 $\overline{\Gamma}$ 的正规子群时，有 $e_1=\cdots=e_h$，且 $[\overline{\Gamma}:\overline{\Gamma'}]=e_1h$。

证明 取变换 $\lambda_i(z)=(z-\omega_i)/(z-\overline{\omega}_i)$，在 $\Gamma'\backslash H^*$ 上 q_i 处有局部坐标 $\lambda_i(z)^{[\overline{\Gamma}'_{\omega_i}:1]}$，在 $\Gamma\backslash H^*$ 上，$\varphi(\omega_i)$ 处有局部坐标 $\lambda_i(z)^{[\overline{\Gamma}_{\omega_i}:1]}$，所以 f 在 q_i 的重数为 $[\overline{\Gamma}_{\omega_i}:1]/[\overline{\Gamma}'_{\omega_i}:1]=[\overline{\Gamma}_{\omega_i}:\overline{\Gamma}'_{\omega_i}]=e_i$。又因 $\overline{\Gamma}_{\omega_i}=\sigma_i\overline{\Gamma}_v\sigma_i^{-1}$，$\overline{\Gamma}'_{\omega_i}=\sigma_i\overline{\Gamma}_v\sigma_i^{-1}\cap\overline{\Gamma'}$，故

$$e_i=[\overline{\Gamma}_v:\overline{\Gamma}_v\cap\sigma_i^{-1}\overline{\Gamma}'\sigma_i].$$

今证 $\overline{\Gamma}$ 有一个双陪集分解：

$$\overline{\Gamma}=\bigcup_{i=1}^{h}\overline{\Gamma}'\sigma_i\overline{\Gamma}_v.$$

首先，对任一 $\sigma\in\overline{\Gamma}$，$\sigma(v)$ 一定与某个 ω_i 为 Γ' 等价，即存在 σ_i 及 $\sigma'\in\overline{\Gamma'}$，使 $\sigma(v)=\sigma'\sigma_i(v)$，从而 $(\sigma'\sigma_i)^{-1}\sigma\in\overline{\Gamma}_v$，即 $\sigma\in\sigma'\sigma_i\overline{\Gamma}_v$，

当 $i\neq j$ 时，双陪集 $\bar{\Gamma}'\sigma_i\bar{\Gamma}_v$ 与 $\bar{\Gamma}'\sigma_j\bar{\Gamma}_v$ 没有公共元。否则，若有

$$\gamma_1\sigma_i\delta_1=\gamma_2\sigma_j\delta_2,$$

其中 γ_1、$\gamma_2\in\bar{\Gamma}'$，δ_1、$\delta_2\in\bar{\Gamma}_v$，则

$$\gamma_1(\omega_i)=\gamma_1\sigma_i\delta_1(v)=\gamma_2\sigma_j\delta_2(v)=\gamma_2(\omega_j),$$

ω_i 与 ω_j 是 $\bar{\Gamma}'$ 不等价的，这不可能。所以 $\bar{\Gamma}$ 有如上所述的双陪集分解。考虑双陪集 $\bar{\Gamma}'\sigma_i\bar{\Gamma}_v$ 中 $\bar{\Gamma}'$ 的右陪集个数，取 δ_1、$\delta_2\in\bar{\Gamma}_v$，能够存在一个 $\gamma\in\bar{\Gamma}'$，使 $\sigma_i\delta_1=\gamma\sigma_i\delta_2$ 的充要条件为 $\delta_1\delta_2^{-1}\in\sigma_i^{-1}\bar{\Gamma}'\sigma_i\cap\bar{\Gamma}_v$，因此 $\bar{\Gamma}'\sigma_i\bar{\Gamma}_v$ 中有 $[\bar{\Gamma}_v:\sigma_i^{-1}\bar{\Gamma}'\sigma_i\cap\bar{\Gamma}_v]$ 个 $\bar{\Gamma}'$ 的右陪集，从而证得 $[\bar{\Gamma}:\bar{\Gamma}']=e_1+\cdots+e_h$。当 $\bar{\Gamma}'$ 为 $\bar{\Gamma}$ 的正规子群时，因为 $\sigma_i^{-1}\bar{\Gamma}\sigma_i=\bar{\Gamma}'$，所以有 $e_1=\cdots=e_h$ 及 $[\bar{\Gamma}:\bar{\Gamma}']=e_1h$。

下面我们需要利用黎曼面亏格的 Herwitz 公式。设 f 为紧黎曼面 R' 到紧黎曼面 R 的 n 次覆盖，g' 和 g 分别为 R' 和 R 的亏格，则

$$2g'-2=n(2g-2)+\sum_{z\in R'}(e_z-1),$$

其中 e_z 为 f 在 $z\in R'$ 处的重数。

定理 2.16　设 Γ 为模群的子群，且 $[L_2(\boldsymbol{Z}):\bar{\Gamma}]=\mu$，$\Gamma$ 的二阶、三阶椭圆点等价类个数分别记为 ν_2 和 ν_3，Γ 的尖点等价类个数记为 ν_∞，则 $\Gamma\backslash H^*$ 的亏格为

$$g=1+\frac{\mu}{12}-\frac{\nu_2}{4}-\frac{\nu_3}{3}-\frac{\nu_\infty}{2}.$$

证明　考虑引理 2.15 中所定义的 μ 次分歧覆盖 $f:\Gamma\backslash H^*\to SL_2(\boldsymbol{Z})\backslash H^*$，若 f 在 $\Gamma\backslash H^*$ 中映为 $\varphi(e^{2\pi i/3})(\in SL_2(\boldsymbol{Z})\backslash H^*)$ 的各点的重数分别为 $e_1,\cdots,e_t$，则 $e_1+\cdots+e_t=\mu$，每个 e_i 或为 1 或为 3，e_i 为 1 的个数恰为 ν_3。令 $\nu_3'=t-\nu_3$，由 $\nu_3+3\nu_3'=\mu$，得

$$\sum_{i=1}^{t}(e_i-1)=2\nu_3'=2(\mu-\nu_3)/3.$$

同样，若 f 在 $\Gamma\backslash H^*$ 中映为 $\varphi(i)$ 的各点的重数分别为 $e_1',\cdots,e_h'$，则 $e_1'+\cdots+e_h'=\mu$，且其中有 ν_2 个为 1，其余为 2，故

$$\sum_{i=1}^{h}(e_i-1)=(\mu-\nu_2)/2.$$

$\Gamma\backslash H^*$ 中在 f 作用之下映为 $\varphi(\infty)$ 的点数即为 ν_∞，设其重数分别为 $e''_1, \cdots, e''_{\nu_\infty}$，则

$$\sum_{i=1}^{\nu_\infty}(e''_i - 1) = \mu - \nu_\infty.$$

$SL_2(\mathbf{Z})\backslash H^*$ 是一个球面，其亏格为零，利用 Hurwitg 公式，我们有

$$2g-2 = -2\mu + 2(\mu-\nu_3)/3 + (\mu-\nu_3)/2 + \mu - \nu_\infty,$$

即证得所需结论。

$\Gamma(N)$ 无椭圆点，当 $N>2$ 时，$-I$ 不属于 $\Gamma(N)$，故这时

$$[\overline{SL_2(\mathbf{Z})}:\overline{\Gamma}(N)] = [SL_2(\mathbf{Z}):\Gamma(N)]/2,$$

由引理 2.8，我们有

$$\mu_N = [\overline{SL_2(\mathbf{Z})}:\overline{\Gamma}(N)] = \begin{cases} 2^{-1}N^3\prod\limits_{p\mid N}(1-p^{-2}), & \text{若 } N>2; \\ 6, & \text{若 } N=2. \end{cases}$$

由定理 2.12，可知 $\nu_\infty = \mu_N/N$，所以 $\Gamma(N)\backslash H^*$ 的亏格为

$$1+\mu_N(N-6)/(12N) \quad (N>1). \tag{2.1.7}$$

对于 $\Gamma_0(N)$，我们有

$$[\overline{SL_2(\mathbf{Z})}:\overline{\Gamma_0}(N)] = [SL_2(\mathbf{Z}):\Gamma_0(N)] = N\prod_{p\mid N}(1+p^{-1}).$$

在定理 2.7 和 2.10 中，我们已算出它的 ν_2、ν_3 和 ν_∞，因而可以计算 $\Gamma_0(N)\backslash H^*$ 的亏格。

§2.2 权为整数和半整数的模形式

设 Γ 为第一类 Fuchsian 群，从而 $M=\Gamma\backslash H^*$ 是紧黎曼面。以 K 表示 M 上全体亚纯函数组成的域，熟知 K 是 $\mathbf{C}$ 上的代数函数域。仍以 φ 表示 $H^*\to\Gamma\backslash H^*$ 的自然映射。设 $g\in K$，我们称 $f(z)=g(\varphi(z))$，为 H 上的自守函数，它是 H 上的亚纯函数。显然，对任一 $\gamma\in\Gamma$，我们有 $f(\gamma(z))=f(z)$。下面我们引进更广泛的一类函数。

设

$$\sigma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in GL_2(\boldsymbol{R}),$$

令 $J(\sigma, z)=cz+d\ \ (z\in H)$。若 $\sigma'\in GL_2(\boldsymbol{R})$，容易验证

$$J(\sigma\sigma', z)=J(\sigma, \sigma'(z))J(\sigma', z).$$

设 k 为整数，$\sigma\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$，$f$ 为 H 上的函数，定义算子

$$f|[\sigma]_k=\det(\sigma)^{k/2}J(\sigma, z)^{-k}f(\sigma(z)),$$

易见

$$f|[\sigma\sigma']_k=(f|[\sigma]_k)|[\sigma']_k,\quad (\sigma'\in GL^+(\boldsymbol{R})).$$

定义 2.17 设 k 为整数，f 为 H 上的复值函数，若 f 适合下列三个条件：

(1) f 在 H 上是亚纯函数；

(2) 对任一 $\gamma\in\Gamma$，有 $f(\gamma(z))=J(\gamma, z)^k f(z)$，即

$$f|[\gamma]_k=f,$$

(3) f 在 Γ 的每个尖点上是亚纯的。

则称 f 为 Γ 上的权为 k 的自守形式。以 $A_k(\Gamma)$ 表示 Γ 上权为 k 的全体自守形式，它是 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间。

关于条件(3)，需要作一些解释：设 s 为 Γ 的尖点，则存在 $\rho\in SL_2(\boldsymbol{R})$，使 $\rho(s)=\infty$。因而

$$\rho\Gamma_s\rho^{-1}\cdot\{\pm I\}=\left\{\pm\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^m \middle| m\in\boldsymbol{Z}\right\}.$$

其中

$$\Gamma_s=\{\gamma\in\Gamma|\gamma(s)=s\},$$

h 为正整。由条件(2)，可知 $f|[\rho^{-1}]_k$ 在算子 $[\sigma]_k(\sigma\in\rho\Gamma_s\rho^{-1})$ 作用下不变。记为 $w=\rho(z)$，$g(w)=(f|[\rho^{-1}]_k)(w)$，则有

$$g\left|\left[\pm\begin{pmatrix} 1 & h \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]_k\right.=(\pm 1)^k g(w+h)=g(w). \tag{2.2.1}$$

1) 若 k 为偶数：由(2.2.1)可知

$$g(w+h)=g(w).$$

这时条件 (3) 是说存在零的一个邻域上的亚纯函数在 $\Phi(q)$ $(q=$

$e^{2\pi i w/h}$)，使 $g(w)=\Phi(q)$。

2) 若 k 为奇数：如果 $-I\in\Gamma$，在条件(2)中取 $\gamma=-I$，可得到 $f=-f$，从而 $f=0$，这时没有非零的权为 k 的自守形式。所以当 k 为奇数时，我们总假定 Γ 不包含 $-I$。这时 $\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 与 $-\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 不能同时属于 $\rho\Gamma_s\rho^{-1}$。当 $\rho\Gamma_s\rho^{-1}$ 是由 $\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 生成时，s 称为正则尖点；当 $\rho\Gamma_s\rho^{-1}$ 是由 $-\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 生成时，s 称为非正则尖点。当 s 为正则尖点时，条件(3)的含义与 k 为偶数时相同。当 s 为非正则时，由(2.2.1)，我们有

$$g(w+h)=-g(w),$$

因而

$$g(w+2h)=g(w).$$

这时条件(3)是说存在零的一个邻域中的亚纯函数 ψ，使

$$g(w)=\psi(e^{\pi i w/h}),$$

且 ψ 是一个奇函数。

容易证明，f 在 s 处所适合的条件不依赖于 ρ 的选择。由上述可知，$f|[\rho^{-1}]_k$ 可表成 $e^{2\pi i w/h}$ 或 $e^{\pi i w/h}$ 的幂级数。

$$f|[\rho^{-1}]_k=\sum_{n\geqslant n_0}c_n e^{2\pi i n w/h} \text{ 或 } \sum_{n\geqslant n_0}c_n e^{\pi i n w/h},$$

这称为 f 在尖点 s 的 Fourier 展开式，c_n 称为它的Fourier 系数。当 $n_0=0$ 时，称 c_0 为 f 在尖点 s 的值，它也不依赖于 ρ 的选择。

$A_0(\Gamma)$ 即为 M 上的函数域 K。自守形式 f 若在 H 上全纯，并且它在 Γ 的所有尖点的 Fourier 系数都适合 $c_n=0(n<0)$，则称 f 为整自守形式。特别是，如果整自守形式 f 在 Γ 的所有尖点的 Fourier 系数适合 $c_n=0$ $(n\leqslant 0)$，则 f 称为尖形式。我们分别以 $G_k(\Gamma)$ 和 $S_k(\Gamma)$ 表示 $A_k(\Gamma)$ 中的整形式集合及尖形式集合。它们都是 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间。

当 Γ 为模群的同余子群时，Γ 上的自守形式称为模形式。

易见，若 $f\in A_m(\Gamma)$，$g\in A_n(\Gamma)$，则 $fg\in A_{m+n}(\Gamma)$。对于

$G_n(\Gamma)$和$S_m(\Gamma)$，类似的性质也成立。因此，若f、$g\in A_k(\Gamma)$，$g\neq 0$，则$f/g\in A_0(\Gamma)=K$，所以当$A_n(\Gamma)\neq 0$时，它是K上的一维向量空间。

对于黎曼面M上的亚纯函数$f\in K$，可以定义它所对应的除子

$$\operatorname{div}(f)=\sum_{p\in M}\nu_p(f)p,$$

这里$\nu_p(f)$是f在p点的阶[若p为f的零点(极点)，$\nu_p(f)$为正(负)，否则为零]。对于Γ上的自守形式,我们也可定义它所对应的一个除子。

设$F\in A_k(\Gamma)$，我们以$\nu_{z-z_0}(F)$表示F在$z_0\in H$处关于$z-z_0$的展开式中首项的次数，记$p=\varphi(z_0)$，当p不是椭圆点时，令$\nu_p(F)=\nu_{z-z_0}(F)$。当p是椭圆点时,设其阶为e，取

$$\lambda(z)=(z-z_0)/(z-\bar{z}_0),$$

我们已知$\lambda(z)^e$为p附近的一个局部坐标,故这时我们令

$$\nu_p(F)=\nu_{z-z_0}(F)/e.$$

设$p=\varphi(s)$为一尖点,F在s点的Fourier展开式为

$$F|[\rho^{-1}]_k=\begin{cases}\psi(q^{1/2}), & \text{若 } k \text{ 为奇数 } (s \text{ 非正则});\\ \Phi(q), & \text{其他情况。}\end{cases}$$

其中$q=e^{2\pi iw/h}$，w和h如上所定义，它是p点附近的一个局部坐标。令

$$\nu_p(F)=\begin{cases}\nu_t(\psi)/2, & \text{若 } k \text{ 为奇数}(s \text{ 非正则});\\ \nu_q(\Phi), & \text{其他情况。}\end{cases}$$

其中$t=q^{1/2}$。因为Φ是奇函数,所以$\nu_t(\psi)$总是奇数。

设D为M上全体除子所成的群。令$D_{\mathbf{Q}}=D\otimes_{\mathbf{Z}}\mathbf{Q}$，即把除子中的系数从整数扩充为有理数。对每个$F\in A_k(\Gamma)$，定义它所对应的$D_{\mathbf{Q}}$中的除子为

$$\operatorname{div}(F)=\sum_{p\in M}\nu_p(F)p.$$

因M是紧的,F的零点和极点都是孤立的,所以上述和是有限的。

设$f\in A_0(\Gamma)=K$，且f不是常数。对任一$\gamma\in\Gamma$，有

$$f(\gamma(z))=f(z),$$

两端对 z 取微商，可得

$$\frac{df}{dz}(z)=\frac{df}{dz}(\gamma(z))\cdot\frac{d\gamma(z)}{dz}=J(\gamma,z)^{-2}\frac{df}{dz}(\gamma(z))_{\circ}$$

记
$$F(z)=\frac{df}{dz}(z),$$

上式表示对任一 $\gamma\in\Gamma$，有 $F|[\gamma]_2=F$。设 s 为 Γ 的尖点，如上述，定义 ρ 及 $q=e^{2\pi iw/h}$，若 k 为偶数或为奇数，但 s 为正则奇点，我们有在 $q=0$ 亚纯的函数 $\Phi(q)$ 使 $f(\rho^{-1}(w))=\Phi(q)$。该式两端对 w 取微商，得到

$$\Phi'(q)q\cdot 2\pi i/h=\frac{df}{dz}(\rho^{-1}(w))\frac{d\rho^{-1}(w)}{dw}=F|[\rho^{-1}]_2.$$

当 k 为奇数，s 为非正则尖点时，也可类似地得到 $F|[\rho^{-1}]_2$ 的表达式。由此可见 $F\in A_2(\Gamma)$。df 是M上的亚纯微分，我们可以将它形式地表为 $F(z)dz$。

反之，任取 $F_1(z)\in A_2(\Gamma)$，我们可以将 $F_1(z)dz$ 看作M上的一个亚纯微分，因为

$$F_1(z)dz=F_1(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1}df=\frac{F_1(z)}{F(z)}df,$$

而 $F_1/F\in K$，df 为亚纯微分。以 $\mathrm{Dif}(M)$ 表示M上所有亚纯微分的集合，它是K上的一维向量空间。设 $\omega\in\mathrm{Dif}(M)$，则存在 $g\in K$，使 $\omega=gdf=gF(z)dz$，这时 $gF\in A_2(\Gamma)$。所以 $F(z)\mapsto F(z)dz$ 是 $A_2(\Gamma)$ 到 $\mathrm{Dif}(M)$ 的同构(作为K上的向量空间)。

对任一亚纯微分 $\omega\in\mathrm{Dif}(M)$，我们定义它所对应的一个除子

$$\mathrm{div}(\omega)=\sum_{p\in M}\nu_p(\omega)p,$$

其中 $\nu_p(\omega)=\nu_t(\omega/dt)$，$t$ 为 p 处的一个局部坐标。

定义K上的一个分次结合代数

$$\mathscr{D}=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathrm{Dif}^n(M),$$

它适合下述条件：

(1) $\mathrm{Dif}^0(M)=K$，$\mathrm{Dif}^1(M)=\mathrm{Dif}(M)$；

(2) 对任一 $n\in \boldsymbol{Z}$，$\mathrm{Dif}^n(M)$ 是K上的一维向量空间；

(3) 若 $\alpha\in \mathrm{Dif}^n(M)$，$\beta\in \mathrm{Dif}^m(M)$，则 $\alpha\beta\in \mathrm{Dif}^{n+m}(M)$，当 $\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$ 时，亦有 $\alpha\beta\neq 0$。

我们可以证明，上述条件唯一地决定了代数 $\mathscr{D}$。取非零微分 $\omega\in \mathrm{Dif}(M)$，由条件(3)，有 $\omega^n\in \mathrm{Dif}^n(M)$，再由条件(2)，可知

$$\mathrm{Dif}^n(M)=K\omega^n,$$

即 $\mathrm{Dif}^n(M)$ 中每个元素都可表为 $\xi=f\omega^n$，其中 $f\in K$。当 $f\neq 0$ 时，对任一 $p\in M$，定义

$$\nu_p(\xi)=\nu_p(f)+n\nu_p(\omega)=\nu_p(\xi/(dt)^n),$$

t 为 p 处的局部坐标。因而对任一 $0\neq\xi\in \mathrm{Dif}^n(M)$，定义除子

$$\mathrm{div}(\xi)=\sum_{p\in M}\nu_p(\xi)p=\mathrm{div}(f)+n\,\mathrm{div}(\omega)。$$

若 η 为 $\mathscr{D}$ 中另一非零元素，易见

$$\mathrm{div}(\xi\eta)=\mathrm{div}(\xi)+\mathrm{div}(\eta)。$$

设 M 的亏格为 g，熟知

$$\deg(\mathrm{div}(\omega))=2g-2,$$

$$\deg(\mathrm{div}(f))=0,$$

从而

$$\deg(\mathrm{div}(\xi))=n(2g-2),\quad 0\neq\xi\in \mathrm{Dif}^n(M)。$$

设 $f\in K$，f 不为常数。若 $F(z)\in A_{2n}(\Gamma)$，由于 $F/(f')^n\in K$，所以

$$F(z)(dz)^n=(F/(f')^n)(df)^n\in \mathrm{Dif}^n(M)。$$

反之，若 $\eta\in \mathrm{Dif}^n(M)$，则存在 $g\in K$，使 $\eta=g\omega^n$，ω 可表为 $F_1(z)dz$，这里 $F_1(z)\in A_2(\Gamma)$，所以

$$\eta=gF_1^n(z)(dz)^n,$$

而 $gF_1^n\in A_{2n}(\Gamma)$。可见 $F(z)\to F(z)(dz)^n$ 是 $A_{2n}(\Gamma)$ 到 $\mathrm{Dif}^n(M)$ 的一个同构。

设 F_1、F_2 为两个自守形式，我们有

$$\mathrm{div}(F_1F_2)=\mathrm{div}(F_1)+\mathrm{div}(F_2)。$$

在引入了自守形式所对应的除子这一概念后，我们可以把整形式，尖形式的定义表达为：

$$G_k(\Gamma)=\{F\in A_k(\Gamma)\,|\,\operatorname{div}(F)\geqslant 0\}$$

$$S_k(\Gamma)=\begin{cases}\{F\in A_k(\Gamma)\,|\,\operatorname{div}(F)\geqslant\sum\limits_{j=1}^{u}Q_j+\sum\limits_{j=1}^{u'}Q'_j\}, & \text{若 } k \text{ 为偶数;}\\ \{F\in A_k(\Gamma)\,|\,\operatorname{div}(F)\geqslant\sum\limits_{j=1}^{u}Q_j+2^{-1}\sum\limits_{j=1}^{u'}Q'_j\}, & \text{若 } k \text{ 为奇数.}\end{cases}$$

这里 $Q_1,\cdots,Q_u$ 为 Γ 的正则尖点，$Q'_1,\cdots,Q'_{u'}$ 为 Γ 的非正则尖点。设 $D_1=\sum\limits_p a_1(p)p$，$D_2=\sum\limits_p a_2(p)p$ 为 $\mathscr{D}_Q$ 中两个元素，关系 $D_1\geqslant D_2$ 是表示 $a_1(p)\geqslant a_2(p)$ 对每个 $p\in M$ 都成立。类似地，我们定义 $\deg D_1=\sum\limits_p a_1(p)$。这些都是 D 中相应概念的自然推广。

引理 2.18 设 $P_1,\cdots,P_r$ 为 $M=\Gamma\backslash H^*$ 上所有的椭圆点，它们的阶分别为 $e_1,\cdots,e_r$，$Q_1,\cdots,Q_u$ 为 M 的所有正则尖点，$Q'_1,\cdots,Q'_{u'}$ 为 M 的所有非正则尖点。设 $0\neq F\in A_k(\Gamma)$ (k 为偶数)，

令
$$\eta=F(z)(dz)^{k/2}(\in \mathrm{Dif}^{k/2}(M)),$$

则
$$\operatorname{div}(F)=\operatorname{div}(\eta)+(k/2)\left\{\sum_{i=1}^{r}(1-e_i^{-1})p_i+\sum_{j=1}^{u}Q_j+\sum_{j=1}^{u'}Q'_j\right\}$$

及
$$\deg(\operatorname{div}(F))=(k/2)\left\{2g-2+\sum_{i=1}^{r}(1-e_i^{-1})+u+u'\right\}.$$

上述第二式当 k 为奇数时也成立。

证明 首先设 k 为偶数。设 P 为 M 上一点。若 $P=\varphi(z_0)$，$z_0\in H$，当 z_0 不是 Γ 的椭圆点时，z 即为 P 处的局部坐标，所以

$$v_p(\eta)=v_{z-z_0}(F(z)(dz/dz)^{k/2})=v_p(F);$$

当 z_0 为 Γ 的椭圆点时，若其阶为 e，则

$$t=\lambda(z)^e=((z-z_0)/(z-\bar z_0))^e$$

是 P 处的局部坐标，因而

$$\begin{aligned}v_p(\eta)&=v_t(F(z)(dz/dt)^{k/2})\\&=v_t(F(z))-(k/2)v_t(dt/dz)\\&=v_p(F)-(k/2)v_t(e\lambda(z)^{e-1}(z_0-\bar z_0)(z-\bar z_0)^{-2})\\&=v_p(F)+(k/2)(e^{-1}-1).\end{aligned}$$

若 $P=\varphi(s)$，s 为 Γ 的尖点，则 $q=e^{2\pi i w/h}$ 是 p 处的局部坐标，其

中 $w = \rho(z)$，$\rho(s) = \infty$，我们有

$$\begin{aligned} F(z)(dz)^{k/2} &= F(\rho^{-1}(w))(dz/dw)^{k/2}(dq/dw)^{-k/2}(dq)^{k/2} \\ &= F|[\rho^{-1}]_k(q\cdot 2\pi i/k)^{-k/2}(dq)^{k/2} \\ &= \Phi(q)(2\pi i q/k)^{-k/2}(dq)^{k/2}. \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} \nu_s(\eta) &= \nu_q(F(z)(dz/dq)^{k/2}) \\ &= \nu_q(\Phi(q)q^{-k/2}) = \nu_s(F) - k/2. \end{aligned}$$

从而引理中第一个结论得证。当 k 为偶数时，利用

$$\deg(\mathrm{div}(\eta)) = (2g-2)\cdot k/2,$$

由第一式直接推出第二式。当 k 为奇数时，由于

$$\mathrm{div}(F) = 2^{-1}\mathrm{div}(F^2),$$

而 $F^2 \in A_{2k}(\Gamma)$，所以第二式对 F^2 成立，从而也对 F 成立。

由上述引理，我们可以形式地认为

$$\mathrm{div}(dz) = -\left\{\sum_{i=1}^{r}(1-e_i^{-1})P_i + \sum_{j=1}^{u} Q_j + \sum_{j=1}^{u'} Q'_j\right\}.$$

在引理 2.18 中，我们假定了 $A_k(\Gamma)$ 中存在非零元。当 k 为偶数时，取 K 中非常数的函数 f，则 $(df/dz)^{k/2}$ 即为 $A_k(\Gamma)$ 中的非零元。今证 k 为奇数时，$A_k(\Gamma)$ 中也一定存在非零元。设 D 为 M 的除子群，令 $D_0 = \{\Sigma n_i p_i \in D \mid \Sigma n_i = 0\}$，$D_0$ 是 D 的子群。又令 $P = \{(f) \mid f \in K\}$，P 是 D_0 的子群。由 Abel-Jacobi 定理，可知 D_0/P 同构于 $\mathbf{C}^g/T$，其中 g 为 M 的亏格，T 为 $\mathbf{C}^g$ 中秩为 $2g$ 的格。取 ω 为 M 的一个非零亚纯微分，R_0 为 M 上一点，由于

$$\deg[\mathrm{div}(\omega) - (2g-2)R_0] = 0,$$

由 Abel-Jacobi 定理，可知存在除子 B 及 K 中非零函数 f，使

$$2B - \mathrm{div}(\omega) + (2g-2)R_0 = (f).$$

令 $B' = B + (g-1)R_0$。存在 $0 \neq F(z) \in A_2(\Gamma)$，使

$$F(z)dz = f\omega.$$

利用 $k=2$ 时引理 2.18 的结论，我们有

$$\mathrm{div}(F) = 2B' + \sum_{i=1}^{r}(1-e_i^{-1})P_i + \sum_{j=1}^{u} Q_j + \sum_{j=1}^{u'} Q'_j.$$

当 k 为奇数时，$-I\notin\Gamma$，所以 e_i 都是奇数（设 $P_i=\varphi(z_i)$，由于 $\Gamma_{z_i}\cong\Gamma_{P_i}$，$\Gamma_{z_i}$ 的生成元 σ 作为矩阵的阶也是 e_i，若 e_i 为偶数，则 $\sigma^{e_i/2}=-I\in\Gamma$，矛盾），由上式及 $v_{P_i}(F)$ 的定义，可知 $v_{z-z_0}(F)$ 对任一 $z_0\in H$ 都是偶数，从而 $F(z)$ 在每点附近都可以开平方，利用解析延拓，可以找到 H 上的亚纯函数 $G(z)$，使 $F(z)=G^2(z)$。因为 $F\in A_2(\Gamma)$，对任一 $\gamma\in\Gamma$ 有 $F(\gamma(z))J(\gamma,z)^{-2}=F(z)$，因而

$$G^2(z)=(G(\gamma(z))J(\gamma,z)^{-1})^2,$$

即对任一 $\gamma\in\Gamma$，有 $G|[\gamma]_1=\chi(\gamma)G$，其中 $\chi(\gamma)=\pm1$，令

$$\Gamma'=\{\gamma\in\Gamma\,|\,\chi(\gamma)=1\}.$$

若 $\Gamma=\Gamma'$，则 $G\in A_1(\Gamma)$（易证 G 在 Γ 的每个尖点是亚纯的），因而 $G^k\in A_k(\Gamma)$，且 G^k 是非零元。

若 $\Gamma'\neq\Gamma$，Γ' 是 Γ 的正规子群，且 $[\Gamma:\Gamma']=2$。设 $\Gamma=\Gamma'\cup\varepsilon\Gamma'$，因为 $\chi(\varepsilon^2)=1$，故 $\varepsilon^2\in\Gamma'$。$A_0(\Gamma)$ 是 $A_0(\Gamma')$ 的子域。对任一 $f(z)\in A_0(\Gamma')$，考虑变换 $f\mapsto f|[\varepsilon]_0=f(\varepsilon(z))$，由于 Γ' 是 Γ 的正规子群，易见 $f|[\varepsilon]_0\in A_0(\Gamma')$。当且仅当 $f\in A_0(\Gamma)$ 时，有

$$f=f|[\varepsilon]_0.$$

$[\varepsilon^2]_0$ 是恒等变换，所以 $([\varepsilon]_0,[\varepsilon^2]_0)$ 是 $A_0[\Gamma']$ 的自同构群，它以 $A_0(\Gamma)$ 为固定子域。$A_0(\Gamma')$ 是 $A_0(\Gamma)$ 的二次扩张。在 $A_0(\Gamma')$ 中一定存在一个非零函数 $h(z)$ 适合 $h|[\varepsilon]_0=-h$。易见 $hG\in A_1(\Gamma')$，又因 $(hG)|[\varepsilon]_1=h|[\varepsilon]_0\cdot G|[\varepsilon]_1=hG$，故 $(hG)|[\gamma]_1=hG$ 对任一 $\gamma\in\Gamma$ 成立，即 hG 是 $A_1(\Gamma)$ 中的非零元，从而 $(hG)^k$ 是 $A^k(\Gamma)$ 中的非零元。

下面引进权为半整数的模形式的概念。首先引进群 $GL_2^+(\boldsymbol{R})$ 的一个扩张。设

$$\alpha=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in GL_2^+(\boldsymbol{R}),$$

取 H 上的任一全纯函数 $\varphi(z)$，使其适合

$$\varphi^2(z)=t\det(\alpha)^{-1/2}(cz+d),$$

这里 t 为适合 $|t|=1$ 的任一复数。考虑所有形如 $\{\alpha,\varphi(z)\}$ 的二元组，在这些二元组之间定义一个乘法：

$$\{\alpha_1, \varphi_1(z)\}\cdot\{\alpha_2, \varphi_2(z)\} = \{\alpha_1\alpha_2, \varphi_1(\alpha_2(z))\varphi_2(z)\}, \qquad (2.2.2)$$

可以验证它们形成一个乘法群，记它为$\hat{G}$。定义$\hat{G}$到$GL_2^+(\boldsymbol{R})$的投影算子P：

$$P: \{\alpha, \varphi(z)\}\mapsto\alpha,$$

易见$\mathrm{Ker}P=\{(I, t)\mid |t|=1\}$。设$\kappa$为奇数，对$H$上的任一函数$f(z)$及任一$\xi=(\alpha, \varphi(z))\in\hat{G}$，定义算子

$$f|[\xi]_\kappa = f(\alpha(z))\varphi(z)^{-\kappa}.$$

若η为$\hat{G}$中任一元素，由(2.2.2)式，容易验证

$$f|[\xi\eta]_\kappa = (f|[\xi]_\kappa)|[\eta]_\kappa. \qquad (2.2.3)$$

记$\det\xi=\det\alpha$，定义$\hat{G}$的子群$\hat{G}_1$：

$$\hat{G}_1=\{\xi\in G\mid\det\xi=1\}.$$

$\hat{G}_1$的子群Δ若适合下述条件：

(1) $P(\Delta)$是$SL_2(\boldsymbol{R})$的离散子群，$P(\Delta)\backslash H^*$为紧黎曼面。

(2) P给出Δ与$P(\Delta)$的一一对应，即除了元素$(1, 1)$之外，Δ中不含形如$(I, t)(|t|=1)$的元素，

(3) 若$-I\in P(\Delta)$，则$(-I, 1)\in\Delta$。

我们称Δ为第一类 Fuchsian 子群。

设Δ为第一类 Fuchsian 子群，H上的亚(全)纯函数$f(z)$若适合下列条件：

(1°) 对任一$\xi\in\Delta$，有$f|[\xi]_\kappa=f$；

(2°) f在$P(\Delta)$的尖点处亚(全)纯。

则$f(z)$称为群Δ上权为$\kappa/2$的自守(整)形式，全体这种自守(整)形式组成的空间记为$A_{\kappa/2}(\Delta)$($G_{\kappa/2}(\Delta)$)。

以上条件(2°)的确切含义解释如下：设$\xi=(\alpha, \varphi)\in\Delta$，$s$为$P(\Delta)$的一个尖点，记$\xi(s)=\alpha(s)$，令

$$\Delta_s=\{\xi\in\Delta\mid\xi(s)=s\},$$

根据命题2.4，Δ_s或为无限循环群，或为一无限循环群与由$\{-I, I\}$生成的二阶循环群之积。设η为该无限循环群的生成元，取$\rho\in\hat{G}_1$，使$\rho(s)=\infty$。由于$P(\rho\eta\rho^{-1})$为抛物元，所以我们有

$$\rho\eta\rho^{-1}=\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\right\}, \quad |t|=1.$$

必要时以η^{-1}代替η，可以假定$h>0$。不难验证t与ρ的选取无关。若s_1与s为$P(\Delta)$等价，设$s=\gamma(s_1)$ $(\gamma\in P(\Delta))$，则以s_1代替s时，$\gamma^{-1}\eta\gamma$为Δ_{s_1}的无限循环群的生成元，且$\rho\gamma(s_1)=s_1$。由于$\rho\gamma\cdot\gamma^{-1}\eta\gamma\cdot(\rho\gamma)^{-1}=\rho\eta\rho^{-1}$。可见上述$t$与尖点等价类的代表元的选取亦无关。利用(2.2.3)式，我们有

$$(f|[\rho^{-1}]_\kappa)\left|\left[\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, t\right\}\right]_\kappa\right.=f|[\rho^{-1}]_\kappa,$$

即$f|[\rho^{-1}]_\kappa(z+h)=t^\kappa f|[\rho^{-1}]_\kappa$，所以$f|[\rho^{-1}]_\kappa$有展开式：

$$f|[\rho^{-1}]_\kappa=\sum_n c_n e((n+r)z/h).$$

其中$e(r)=t^\kappa$ $(0\leqslant r<1)$。条件(2°)是说：若f在s亚纯，则当$n<0$时，仅有有限个$c_n\neq0$；若f在s全纯，则当$n<0$时，c_n均为零。以$\nu_s(f)$表示上述展开式的首项所对应的指数$n+r$，类似于整权的情况，对于权为半整数的自守形式，我们也可以定义它所对应的除子。

设N为正整数，且$4|N$。定义$\Gamma_0(N)$到$\widehat{G}_1$的映射：

$$L: \gamma\mapsto\{\gamma, j(\gamma, z)\},$$

这里$j(\gamma, z)$为在§1.1中所定义。L是$\Gamma_0(N)$到$\widehat{G}_1$的嵌入，易见$j(-I, z)=1$，所以$L(\Gamma_0(N))$为$\widehat{G}_1$的第一类Fuchsian子群，记它为$\Delta_0(N)$。定义

$$\Gamma_1(N)=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)\,\middle|\,a\equiv d\equiv1\ (N)\right\}.$$

易见$\Delta_1(N)=L(\Gamma_1(N))$，$\Delta(N)=L(\Gamma(N))$都是第一类Fuchsian群。

§2.3 $G(N, k, \omega)$和$S(N, k, \omega)$的维数

设k为整数，ω为模N的特征，且$\omega(-1)=(-1)^k$。我们以$A(N, k, \omega)$表示H上适合下述条件的函数f的集合：

(1) f 在 H 上是亚纯函数;

(2) 对任一 $\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$, 有 $f|[\gamma]_k=\omega(d)f$;

(3) f 在 $\Gamma_0(N)$ 的每个尖点是亚纯的。

称这样的函数 f 为 $\Gamma_0(N)$ 上权为 k 具有特征 ω 的模形式。以 $G(N, k, \omega)$ 和 $S(N, k, \omega)$ 分别表示 $A(N, k, \omega)$ 中的整模形式和尖模形式的集合。本节的主要内容是利用 Riemann-Roch 定理计算 $G(N, k, \omega)$ 和 $S(N, k, \omega)$ 的维数。

设 A 是紧黎曼面 M 上的一个除子, K 是 M 上的亚纯函数域, 定义

$$L(A)=\{f\in K\,|\,f=0 \text{ 或 } \operatorname{div}(f)\geqslant -A\}.$$

$L(A)$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间, 以 $l(A)$ 表示其维数。

Riemann-Roch 定理 设 M 为紧黎曼面, M 的亏格为 g, ω 为 M 的一个非零微分, 则对 M 的任一除子 A, 有

$$l(A)=\deg(A)-g+1+l(\operatorname{div}(\omega)-A).$$

设 $f(z)\in G(N, k, \omega)$, 则易证 $\overline{f(-\bar{z})}\in G(N, k, \bar{\omega})$, 所以 $G(N, k, \omega)$ 与 $G(N, k, \bar{\omega})$ 具有相同的维数。同样, $S(N, k, \omega)$ 与 $S(N, k, \bar{\omega})$ 也有相同的维数。

设 $f\in A(N, k, \omega)$, $g\in A(N, 2-k, \bar{\omega})$, 则 $fg\in A_2(\Gamma_0(N))$, 所以 $\omega=fgdz$ 是 $\Gamma_0(N)\backslash H^*$ 上的一个微分。利用引理 2.18, 我们有

$$\operatorname{div}(\omega)=\operatorname{div}(f)+\operatorname{div}(g)-\sum_p(1-e_p^{-1})p. \qquad (2.3.1)$$

求和号中的 p 跑遍 $\Gamma_0(N)\backslash H^*$ 上所有的点, 但仅当 p 为椭圆点或尖点时, 出现非零项。当 p 为尖点时, 我们约定 $e_p=\infty$。

任一 $g'\in A(N, 2-k, \bar{\omega})$, 由于 $g/g'\in A_0(\Gamma_0(N))$, 所以 $\nu_p(g)-\nu_p(g')$ 对任意 p 点都是整数, 因而存在 μ_p', 使

$$0\leqslant\mu_p'<1,\ \nu_p(g')\equiv\mu_p' \bmod \boldsymbol{Z}.$$

当 p 为椭圆点时, $e_p\mu_p'$ 为整数, 所以 $\mu_p'\leqslant 1-e_p^{-1}$。令 $\mu_p=1-e_p^{-1}-\mu_p'$, 由 (2.3.1) 可见

$$0\leqslant\mu_p\leqslant 1,\ \nu_p(f)\equiv\mu_p \bmod \boldsymbol{Z}$$

对任一$f\in A(N,k,\omega)$都成立。

设p为尖点，当$\mu_p'=0$时，称p为正则尖点，这时$\mu_p=1$。否则，称p为非正则尖点。这个定义是相对权k来说的，它是§2.2中所引进的正则尖点概念的推广。

定义D_Q中两个除子

$$\mathfrak{A}=-\sum_p\mu_p p,\quad \mathfrak{B}=-\sum_p\mu_p' p.$$

由(2.3.1)式得到

$$\mathfrak{A}+\operatorname{div}(f)+\mathfrak{B}+\operatorname{div}(g)=\operatorname{div}(\omega),\tag{2.3.2}$$

$\mathfrak{A}+\operatorname{div}(f)$与$\mathfrak{B}+\operatorname{div}(g)$都是$D$中的除子。由整形式和尖形式的定义，我们有

$$\dim G(N,2-k,\omega)=l(\mathfrak{B}+\operatorname{div}(g)),$$
$$\dim S(N,k,\omega)=l(\mathfrak{A}+\operatorname{div}(f)).$$

利用 Riemann-Roch 定理及(2.3.2)得到

$$\begin{aligned}&\dim S(N,k,\omega)-\dim G(N,2-k,\omega)\\&=\deg(\mathfrak{A}+\operatorname{div}(f))-g+1\\&=\frac{(k-1)}{2}\Big(2g-2+\sum_p(1-e_p^{-1})\Big)+\sum_p\Big(\frac{1-e_p^{-1}}{2}-\mu_p\Big)\\&=\frac{(k-1)}{2}\mu(\Gamma_0(N)\backslash H^*)+\sum_p\Big(\frac{1-e_p^{-1}}{2}-\mu_p\Big).\end{aligned}\tag{2.3.3}$$

这里我们利用了引理2.18及

$$\mu(\Gamma_0(N)\backslash H^*)=\iint_{\Gamma_0(N)\backslash H^*}y^{-2}dxdy=2g-2+\sum_p(1-e_p^{-1})$$

(其证明可参阅[22]，§2.5)。

定理2.19 设ω为模N的特征，且$\omega(-1)=(-1)^k$，ω的导子为F，N和F的标准因子分解为$N=\prod p^{r_p}$及$F=\prod p^{s_p}$。则

$$\begin{aligned}&\dim S(N,k,\omega)-\dim G(N,2-k,\omega)\\&=12^{-1}(k-1)N\prod_{p\mid N}(1+p^{-1})-2^{-1}\prod_{p\mid N}\lambda(r_p,s_p,p)\\&\quad+\nu_k\sum_{\substack{x\bmod N\\ x^2\equiv-1\,(N)}}\omega(x)+\mu_k\sum_{\substack{x\bmod N\\ x^2+x+1\equiv0\,(N)}}\omega(x),\end{aligned}$$

其中

$$\lambda(r_p, s_p, p)=\begin{cases}p^{r'}+p^{r'-1}, & 若 2s_p\leqslant r_p=2r' \ (r'\in \mathbf{Z});\\ 2p^{r'}, & 若 2s_p\leqslant r_p=2r'+1 \ (r'\in \mathbf{Z});\\ 2p^{r_p-s_p}, & 若 2s_p>r_p.\end{cases}$$

$$\nu_k=\begin{cases}0, & 若 2\nmid k;\\ -1/4, & 若 k\equiv 2 \ (4);\\ 1/4, & 若 k\equiv 0 \ (4).\end{cases}$$

$$\mu_k=\begin{cases}0, & 若 k\equiv 1 \ (3);\\ -1/3, & 若 k\equiv 2 \ (3);\\ 1/3, & 若 k\equiv 0 \ (3).\end{cases}$$

证明　利用(2.3.3)式。我们已知 $\Gamma_0(1)\backslash H^*$ 的亏格为零，它有一个尖点，一个二阶椭圆点，一个三阶椭圆点，故

$$\mu(\Gamma_0(1)\backslash H^*)=-2+1+(1-1/2)+(1-1/3)=1/6.$$

因此

$$\mu(\Gamma_0(N)\backslash H^*)=[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]\mu(\Gamma_0(1)\backslash H^*)$$
$$=\frac{N}{6}\prod_{p|N}(1+p^{-1}).$$

这里利用了引理2.8，$\Gamma_0(N)$ 的基域是由 $[\Gamma_0(1):\Gamma_0(N)]$ 块 $\Gamma_0(1)$ 的基域并成的。(也可由定理2.7、2.10和2.16直接计算)。

考虑(2.3.3)式右端的第二个和式，首先考虑 p 为尖点的情况。以下记 $\Gamma=\Gamma_0(N)$。设尖点 $s=d/c$, $\varphi(s)=p$，这里 φ 仍表示 $H^*\to\Gamma\backslash H^*$ 的自然映射。由定理2.10，可设 s 的分母 c 为 N 的因子，d 与 $(c, N/c)$ 互素，设 c 的标准因子分解为 $c=\prod p^{c_p}$。存在

$$\rho=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z}),$$

使 $\rho(s)=\infty$。取 $\delta\in\Gamma_s$ 对应 $\bar{\Gamma}_s$ 的生成元，由于 $-I\in\Gamma$，可设

$$\rho\delta\rho^{-1}=\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}(h>0),$$

它是 $\rho\bar{\Gamma}_s\rho^{-1}$ 的生成元，因此

$$\delta=\rho^{-1}\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rho=\begin{pmatrix}1-hcd & hd^2\\ -hc^2 & 1+hcd\end{pmatrix}\in\Gamma,$$

h应是最小正整数,它使hc^2为N的倍数,可见

$$h=N/[c(c, N/c)].$$

由于

$$\begin{aligned}(f|[\rho^{-1}]_k)\left|\left[\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right]_k\right. &=(f|[\delta]_k)|[\rho^{-1}]_k\\ &=\omega(1+hcd)f|[\rho^{-1}]_k,\end{aligned}$$

记$\omega(1+hcd)=e^{2\pi i r}(0<r\leqslant 1)$,则

$$f|[\rho^{-1}]_k=c_n e^{2\pi i(n+r)z/h}+\cdots\quad(c_n\neq 0).$$

所以$\mu_p=r$。

对N的任一因子c,令

$$f_c=\sum_{s=d/c}\left(\frac{1}{2}-\mu_{\varphi(s)}\right).$$

求和号中的d跑遍$(\boldsymbol{Z}/(c, N/c)\boldsymbol{Z})^*$,且$d$与$c$互素。

若$F|N/(c, N/c)$,则

$$\omega(1+hcd)=\omega(1+dN/(c, N/c))=1,$$

所以

$$\mu_{\varphi(d/c)}=1,\ f_c=-2^{-1}\varphi((c, N/c)).$$

若$F\nmid N/(c, N/c)$。这时当d与$(c, N/c)$互素时,总有

$$\omega(1+dN/(c, N/c))\neq 1.$$

否则,若存在d_0,它与$(c, N/c)$互素,且

$$\omega(1+d_0N/(c, N/c))=1.$$

由于$(c, N/c)^2|N$,所以对任意整数m,有

$$(1+d_0N/(c, N/c))^m\equiv 1+md_0N/(c, N/c)\,(N),$$

因而

$$\omega(1+md_0N/(c, N/c))=1.$$

由于d_0与$(c, N/c)$互素,存在整数m_0,使

$$m_0d_0\equiv 1\quad((c, N/c)).$$

可见对任意整数m,都有

$$\omega(1+mN/(c,\ N/c))=1.$$

由此可推得 $F|N/(c,\ N/c)$，导致矛盾。取 d'，使 d' 与 c 互素，且 $d'\equiv -d\ \ ((c,\ N/c))$。记 $p'=\varphi(d'/c)$，因而

$$\omega(1-d'N/(c,\ N/c))=\bar{\omega}(1+dN/(c,\ N/c)),$$

且都不等于 1。当 $(c,\ N/c)\neq 2$ 时，p 与 p' 为 $\Gamma\backslash H^*$ 上两个不同的尖点，这时我们有 $\mu_p+\mu_{p'}=1$，因而 $f_c=0$，当 $(c,\ N/c)=2$ 时，我们有 $\omega(1+N/2)=-1$，因而 $\mu_p=1/2$，这时仍有 $f_c=0$。即当 $F\nmid N/(c,\ N/c)$ 时，总有 $f_c=0$。于是当 p 跑遍所有尖点时，

$$\begin{aligned}\sum_{p:\text{尖点}}\left(\frac{1}{2}-\mu_p\right)&=-\frac{1}{2}\sum_{(c,N/c)|N/F}\varphi((c,\ N/c))\\&=-\frac{1}{2}\prod_{p|N}\Bigg[\sum_{\substack{c_p=0\\ \min(c_p,r_p-c_p)\leqslant r_p-s_p}}^{r_p}\varphi((p^{c_p},\ p^{r_p-c_p}))\Bigg].\end{aligned}\tag{2.3.4}$$

当 $s_p\leqslant r_p/2$ 时，(2.3.4)式乘积中的和式为

$$\sum_{c_p=0}^{r_p}\varphi((p^{c_p},\ p^{r_p-c_p}))=\begin{cases}p^{r'}+p^{r'-1}, & \text{若 } r_p=2r';\\ 2p^{r'}, & \text{若 } r_p=2r'+1.\end{cases}$$

其中 r' 为整数。当 $s_p>r_p/2$ 时，(2.3.4)式乘积中的和式为

$$\sum_{c_p=0}^{r_p-s_p}\varphi(p^{c_p})+\sum_{c_p=s_p}^{r_p}\varphi(p^{r_p-c_p})=2\sum_{c_p=0}^{r_p-s_p}\varphi(p^{c_p})=2p^{r_p-s_p}.$$

现在考虑 p 为椭圆点的情况。设 $z_0\in H$，$p=\varphi(z_0)$，p 的阶为 e。存在

$$\beta=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma,$$

使 $\beta(z_0)=z_0$，且 β 对应 $\bar{\Gamma}_{z_0}$ 的生成元，取

$$\lambda=\begin{pmatrix}1 & -z_0\\ 1 & -\bar{z}_0\end{pmatrix},$$

易见 $\lambda(z_0)=0$，且

$$\begin{aligned}\lambda\beta\lambda^{-1}&=(z-\bar{z}_0)^{-1}\begin{pmatrix}1 & -z_0\\ 1 & -\bar{z}_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-\bar{z}_0 & z_0\\ -1 & 1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}c\bar{z}_0+d & 0\\ 0 & cz_0+d\end{pmatrix}.\end{aligned}\tag{2.3.5}$$

由于 e 是最小正整数,使 $\beta^e = \pm I$, 可见 $(cz_0+d)^2$ 是 e 次本原单位根。

设 $f(z)\in A(N, k, \omega)$在 $z=z_0$ 的展开式为

$$f(z)=c_n(z-z_0)^n+\cdots(c_n\neq 0)_{\bullet}$$

利用

$$\beta(z)-z_0=\beta(z)-\beta(z_0)=\frac{z-z_0}{(cz+d)(cz_0+d)}$$

及

$$f(\beta(z))=\omega(d)(cz+d)^k f(z),$$

得

$$\begin{aligned}&c_n(cz+d)^{-n}(cz_0+d)^{-n}(z-z_0)^n+\cdots\\ &=\omega(d)(cz+d)^k c_n(z-z_0)^n+\cdots\end{aligned}$$

所以

$$\omega(d)(cz_0+d)^k=(cz_0+d)^{-2n}=(cz_0+d)^{-2e\mu_p}. \tag{2.3.6}$$

这里利用了 $\nu_p(f)=n/e\equiv\mu_p \bmod \boldsymbol{Z}$ 及$(cz_0+d)^2$是 e 次单位根。

$\Gamma_0(N)$ 仅有二阶和三阶椭圆点。今设 $e=2$。假设 β 在模群中与$\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$共轭,即存在 $\gamma\in SL_2(\boldsymbol{Z})$, 使

$$\beta=\gamma\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\gamma^{-1},$$

易见 $\gamma(i)=z_0$——β 在H中的固定点,因而 $\lambda\gamma(i)=0$, $\lambda\gamma(-i)=\infty$, 所以

$$\lambda\gamma=\begin{pmatrix}u & \\ & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix},\ u、v\in\boldsymbol{C}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\lambda\beta\lambda^{-1}&=\begin{pmatrix}u & \\ & v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -i\\ 1 & i\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}u & \\ & v\end{pmatrix}^{-1}\\ &=\begin{pmatrix}-i & \\ & i\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由(2.3.5)式,可见 $cz_0+d=i$。

由

$$-I=\beta^2=\begin{pmatrix}a^2+bc & ab+cd\\ ac+dc & bc+d^2\end{pmatrix}$$

可知 $d^2+1\equiv 0(N)$，从而

$$\omega(d)^2=\omega(-1)=(-1)^k. \tag{2.3.7}$$

设 z_0' 为 Γ 的另一个2阶椭圆点，

$$p'=\varphi(z_0'),\quad \beta'=\begin{pmatrix}a' & b'\\ c' & d'\end{pmatrix}$$

对应 $\Gamma_{z_0'}$ 的生成元，且 β' 与 $\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 在模群中共轭．同样我们有 $(d')^2+1\equiv 0\ (N)$ 及 $c'z_0'+d'=i$．假如 z_0' 与 z_0 为 Γ 等价，由定理2.7的证明，可知 β 与 β' 在 Γ 中共轭，由此可推出 $d\equiv d'\ (N)$，即 d 与 d' 对应同余方程

$$x^2+1\equiv 0\ (N) \tag{2.3.8}$$

的同一个解．$\Gamma\backslash H^*$ 上二阶椭圆点的个数 ν_2 正是同余方程(2.3.8)的解数，所以 $\Gamma\backslash H^*$ 的二阶椭圆点与(2.3.8)的解一一对应。

首先考虑 k 为奇数的情况：若 $N\leqslant 2$，(2.3.8)仅有 $d\equiv 1(N)$ 一个解，由(2.3.7)式可知这时 k 不能是奇数，所以我们有 $N>2$．设 d 为(2.3.8)的解，取 $d'\equiv -d(N)$，d' 也是(2.3.8)的解，d 与 d' 对应两个不同的椭圆点 p 与 p'．由(2.3.7)式，不妨设 $\omega(d)=i$，$\omega(d')=-i$，由(2.3.6)式得到

$$i^{k+1}=(-1)^{2\mu_p},\qquad -i^{k+1}=(-1)^{2\mu_{p'}},$$

这时 $\mu_p=0$，$\mu_{p'}=1/2$ 或 $\mu_p=1/2$，$\mu_{p'}=0$．p 与 p' 两点在(2.3.3)式的第二个和式中对应的两项互相抵消。

当 k 为偶数时，由(2.3.7)式，可知 $\omega(d)=\pm 1$．由(2.3.6)式，当 $\omega(d)=1$ 时，

$$\mu_p=\begin{cases}0, & 若\ k\equiv 0\ (4);\\ 1/2, & 若\ k\equiv 2\ (4).\end{cases}$$

当 $\omega(d)=-1$ 时，

$$\mu_p=\begin{cases}1/2, & 若\ k\equiv 0\ (4);\\ 0, & 若\ k\equiv 2\ (4).\end{cases}$$

所以 $1/4-\mu_p=\nu_k\omega(d)$。

今设 $e=3$，由定理 2.7，这时 $9\nmid N$。设 β 在模群中与 $\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}$ 共轭，即存在 $\gamma\in SL_2(\boldsymbol{Z})$ 使 $\beta=\gamma\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\gamma^{-1}$，记 $\rho=e^{2\pi i/3}$，易见 $\gamma(-\rho)=z_0$，从而 $\lambda\gamma(-\rho)=0$，$\lambda\gamma(-\bar{\rho})=\infty$。所以

$$\lambda\gamma=\begin{pmatrix}u&\\&v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\rho\\1&\bar{\rho}\end{pmatrix},\quad u、v\in\boldsymbol{C}.$$

我们有

$$\begin{aligned}\lambda\beta\lambda^{-1}&=\begin{pmatrix}u&\\&v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\rho\\1&\bar{\rho}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&-1\\1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\rho\\1&\bar{\rho}\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}u&\\&v\end{pmatrix}^{-1}\\&=\begin{pmatrix}\bar{\rho}^2&0\\0&\rho^2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

由(2.3.5)式，有 $cz_0+d=\rho^2$。从 $\beta^3=I$，可得 $d^3\equiv1\ (N)$。现在证明，这时 d 一定适合同余方程

$$x^2+x+1\equiv0\ (N). \tag{2.3.9}$$

若 q 为 $(d-1, N)$ 的一个素因子，由于 $ad\equiv1\ (q)$，$\mathrm{tr}(\beta)=a+d=\pm1$，从而 $a+d\equiv2\equiv\pm1\ (q)$，$q$ 仅可能为 3，显然 $d^2+d+1\equiv0\ (3)$ 对一切与 3 互素的 d 都成立。由于 $9\nmid N$，可见 d 是(2.3.9)的解。$\Gamma\backslash H^*$ 的三阶椭圆点个数 ν_3 就是(2.3.9)的解数。类似于二阶椭圆点的情况，可知 $\Gamma\backslash H^*$ 的三阶椭圆点与(2.3.9) 的解一一对应。

设 d 为(2.3.9)的解，取 $d'\equiv d^{-1}(N)$，若 $d'\equiv d(N)$，由

$$d^3\equiv d^2\equiv1\ (N),$$

可知 $d\equiv1\ (N)$，这时 N 只可能为 1 或 3，显然 $\omega(d)=1$。由(2.3.6)得到 $\rho^{2k}=\rho^{6\mu_p}$，p 为 $\Gamma\backslash H^*$ 上唯一的三阶椭圆点。因而

$$\mu_p=\begin{cases}0, & 若\ k\equiv 0\ (3);\\ 1/3, & 若\ k\equiv 1\ (3);\\ 2/3, & 若\ k\equiv 2\ (3).\end{cases}$$

于是 $1/3-\mu_p=\mu_k$。

设 $N\neq 1$ 或 3，这时 $d'\neq d\ (N)$。记 d 与 d' 对应的两个三阶椭圆点分别为 p 与 p'，不妨设 $\omega(d)=\rho$，从而 $\omega(d')=\rho^2$。由 (2.3.6)，得

$$\rho^{2k+1}=\rho^{6\mu_p},\ \rho^{2k+2}=\rho^{6\mu_{p'}}.$$

所以

$$\mu_p=\begin{cases}2/3, & 若\ k\equiv 0\ (3);\\ 0, & 若\ k\equiv 1\ (3);\\ 1/3, & 若\ k\equiv 2\ (3).\end{cases}$$

$$\mu_{p'}=\begin{cases}1/3, & 若\ k\equiv 0\ (3);\\ 2/3, & 若\ k\equiv 1\ (3);\\ 0, & 若\ k\equiv 2\ (3).\end{cases}$$

于是

$$\left(\frac{1}{3}-\mu_p\right)+\left(\frac{1}{3}-\mu_{p'}\right)=-\mu_k=\mu_k(\omega(d)+\omega(d')).$$

到此，完成了定理 2.19 的证明。

命题 2.20　设 k 为负整数，Γ 为第一类 Fuchsian 群，则

$$\dim G_k(\Gamma)=0.$$

证明　取 F_0 为 $A_k(\Gamma)$ 的非零元，则

$$G_k(\Gamma)=\{fF_0\mid f\in A_0(\Gamma),\ \operatorname{div}(fF_0)\geqslant 0\}.$$

若 $\operatorname{div}F_0=\sum v_p p\,(\in D_\Omega)$，定义除子 $[\operatorname{div}F_0]=\sum[v_p]p$，可见

$$\dim G_k(\Gamma)=l([\operatorname{div}F_0]).$$

利用引理 2.18 及关系式

$$\mu(\Gamma\backslash H^*)=2g-2+\sum_p(1-e_p^{-1}),$$

我们有

$$\deg([\operatorname{div}F_0])\leqslant\deg\operatorname{div}F_0=\mu(\Gamma\backslash H^*)\cdot k/2<0.$$

故 $\dim G_k(\Gamma)=0$。

分别以 k 和 $2-k$ 代入定理 2.19 的恒等式，然后将两式相加，可得

$$\dim S(N,\ k,\ \omega)-\dim G(N,\ 2-k,\ \omega)$$

$$+\dim S(N, 2-k, \omega)-\dim G(N, k, \omega)$$
$$=-\prod_{p|N}\lambda(r_p, s_p, p)=-\sum_{\substack{c|N\\(c,N/c)|N/F}}\varphi((c, N/c)). \quad (2.3.10)$$

这里F为ω的导子。因$G(N, k, \omega)\subset G_k(\Gamma(N))$，所以当$k<0$时，由命题2.20，$G(N, k, \omega)$ 和 $S(N, k, \omega)$ 的维数都为零。$G_0(\Gamma(N))$ 为紧黎曼面$\Gamma(N)\backslash H^*$上的全纯函数集合，它们都是常数函数，所以$G_0(\Gamma(N))$的维数为1。同样

$$G(N, 0, id.)=G_0(\Gamma_0(N))$$

的维数也为1（$id.$表示恒为1的特征）。由于$\Gamma_0(N)$有尖点，所以$S(N, 0, id.)$的维数为零。当$\omega\neq id.$时，由于

$$G(N, 0, \omega)\subset G_0(\Gamma(N)),$$

可见$G(N, 0, \omega)$和$S(N, 0, \omega)$的维数都为零。利用上述结果，由(2.3.10)式我们得到

当$k\geqslant 3$或$k=2$，$\omega\neq id.$时

$$\dim G(N, k, \omega)-\dim S(N, k, \omega)=\sum_{(c,N/c)|N/F}\varphi((c, N/c)), \quad (2.3.11)$$

当$k=2$，$\omega=id.$时，

$$\dim G(N, 2, id.)-\dim S(N, 2, id.)$$
$$=\sum_{(c,N/c)|N/F}\varphi((c, N/c))-1. \quad (2.3.12)$$

当$k=1$时，

$$\dim G(N, 1, \omega)-\dim S(N, 1, \omega)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{(c,N/c)|N/F}\varphi((c, N/c)). \quad (2.3.13)$$

我们在第五章中将利用这些结果。

当$k\geqslant 2$时，由定理2.19亦可以得到$G(N, k, \omega)$ 和 $S(N, k, \omega)$的维数。

§2.4 $G(N, \kappa/2, \omega)$和$S(N, \kappa/2, \omega)$的维数

设κ为奇数，N为正整数，且$4|N$，ω为模N的偶特征，H上

的全纯函数 $f(z)$ 如适合下列条件：

(1) 对任一 $\xi=(\gamma,\ j(\gamma,\ z))\in\Delta_0(N)$，有

$$f|[\xi]_\kappa=\omega(d_\gamma)f,\quad \gamma=\begin{pmatrix}* & *\\ * & d_\gamma\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N).$$

(2) $f(z)$ 在 $\Gamma_0(N)$ 的尖点全纯。

称 $f(z)$ 为群 $\Gamma_0(N)$ 上权为 $\kappa/2$ 具有特征 ω 的整模形式。全体这样的模形式组成的空间记为 $G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$。f 在尖点的 Fourier 展开式的常数项称为 f 在该尖点的值。空间 $G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 中任一模形式 $f(z)$，如果在 $\Gamma_0(N)$ 的任一尖点 s 都有 $v_s(f)>0$，则 $f(z)$ 称为尖形式。$G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 中全体尖形式组成的空间记为 $S(N,\ \kappa/2,\ \omega)$。本节将计算 $G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 和 $S(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 的维数。

由于 $(-I,\ 1)\in\Delta_0(N)$，当 ω 为模 N 的奇特征且有

$$f|[(-I,\ 1)]_\kappa=\omega(-1)f$$

时，f 只能为零，所以我们必须取 ω 为偶特征。

从(2.3.3)式的推导过程可以看出，当以半整权 $\kappa/2$ 代替整权 k 时，该式仍成立。当 $4|N$ 时，$\Gamma_0(N)$ 没有椭圆点(定理2.7)，所以我们有

$$\dim S(N,\ \kappa/2,\ \omega)-\dim G(N,\ 2-\kappa/2,\ \omega)$$
$$=\frac{\kappa-2}{4}\mu(\Gamma_0(N)\backslash H^*)+\sum_p\left(\frac{1}{2}-\mu_p\right).\qquad(2.4.1)$$

其中 p 跑遍 $\Gamma_0(N)\backslash H^*$ 的所有尖点，对任一 $f\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，我们有 $v_p(f)\equiv\mu_p(\mathrm{mod}\,Z)$，且 $0<\mu_p\leqslant 1$。

设 F 为 ω 的导子，N 和 F 的标准因子分解为 $N=\prod p^{r_p}$ 和 $F=\prod p^{s_p}$。我们定义条件：

存在 N 的一个素因子 p，$p\equiv 3\ (4)$，r_p 为奇数或 $0<r_p<2s_p$。　　(*)

当条件(*)不成立时，若 p 为 N 的素因子，且 $p\equiv 3\ (4)$，则 r_p 一定是偶数且 $r_p\geqslant 2s_p$。

引理 2.21　设 n、p、q 为正整数，$n>1$，$p<q$，则

$$\sum_{\substack{r=0\\(r,n)=1}}^{n-1}\left\{\frac{p}{q}+\frac{r}{n}\right\}=\frac{\varphi(n)}{2}-\sum_{d\mid n}\mu(d)\left\{\frac{(q-p)n}{qd}\right\}.$$

证明 上式左端等于

$$\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{n-1}\left\{\frac{p}{q}+\frac{r}{n}\right\}\sum_{d\mid(r,n)}\mu(d)\\
&=\sum_{d\mid n}\mu(d)\sum_{r=0}^{n/d-1}\left\{\frac{p}{q}+\frac{rd}{n}\right\}\\
&=\sum_{d\mid n}\mu(d)\left[\sum_{r=0}^{n/d-1}\left(\frac{p}{q}+\frac{rd}{n}\right)-\left(\frac{n}{d}-1-\frac{(q-p)n}{qd}\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.+\left\{\frac{(q-p)n}{qd}\right\}\right)\right]\\
&=\sum_{d\mid n}\mu(d)\left[\frac{1}{2}\left(\frac{n}{d}+1\right)-\left\{\frac{(q-p)n}{qd}\right\}\right]\\
&=\frac{\varphi(n)}{2}-\sum_{d\mid n}\mu(d)\left\{\frac{(q-p)n}{qd}\right\}.
\end{aligned}$$

当 n 为奇数时，定义 $\chi_2(n)=\left(\frac{-1}{n}\right)$.

引理 2.22 设 n 和 k 都为正奇数，n 共有 ν 个素因子，都是模 4 余 3，则

$$\sum_{d\mid n}\mu(d)\left\{\frac{kn}{4d}\right\}=-2^{\nu-2}\chi_2(kn).$$

证明 以 $k\equiv n\equiv 1\ (4)$ 这一情况为例，这时

$$\begin{aligned}
\sum_{d\mid n}\mu(d)\left\{\frac{kn}{4d}\right\}&=\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\binom{\nu}{1}+\frac{1}{4}\binom{\nu}{2}-\frac{3}{4}\binom{\nu}{3}+\cdots\\
&=-\frac{1}{2}\left[1+\binom{\nu}{2}+\binom{\nu}{4}+\cdots\right]=-2^{\nu-2}.
\end{aligned}$$

其他情况可类似地证明。

定理 2.23 我们有

$$\begin{aligned}
&\dim S(N, \kappa/2, \omega)-\dim G(N, \kappa/2, \omega)\\
&=\frac{\kappa-2}{24}N\prod_{p\mid N}(1+p^{-1})-\frac{\zeta}{2}\prod_{p\mid N,\, p\neq 2}\lambda(r_p, s_p, p).
\end{aligned}$$

其中 $\lambda(r_p, s_p, p)$ 为定理 2.19 中所定义。ζ 的值定义如下：

若 $r_2\geq 4$，$\zeta=\lambda(r_2, s_2, 2)$；若 $r_2=3$，$\zeta=3$；若 $r_2=2$，

(*)(见88页)成立，$\zeta=2$。

$$
(*)\text{不成立}\begin{cases}\text{若 } k\equiv 1\ (4) & \begin{cases}\text{若 } s_2=0, & \zeta=3/2;\\ \text{若 } s_2=2, & \zeta=5/2;\end{cases}\\ \text{若 } k\equiv 3\ (4) & \begin{cases}\text{若 } s_2=0, & \zeta=5/2;\\ \text{若 } s_2=2, & \zeta=3/2.\end{cases}\end{cases}
$$

证明 我们需计算(2.4.1)式右端的和式，以M表示该和式。设$s=d/c$为$\Gamma_0(\ )$的一个尖点，c为N的正因子，令

$$f_c=\sum_{s=d/c}\left(\frac{1}{2}-\mu_{\varphi(s)}\right),$$

求和号中d跑遍$(\boldsymbol{Z}/(c,\ N/c)\boldsymbol{Z})^*$，且与$c$互素，这里$\varphi$为$H^*\to\Gamma_0(N)\backslash H^*$的自然映射。因而

$$M=\sum_{c\mid N}f_c.$$

取

$$\rho=\begin{pmatrix}a & b\\ c & -d\end{pmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z}),$$

显然$\rho(d/c)=\infty$。设δ为$\bar{\Gamma}_s$的生成元，这里

$$s=d/c,\qquad \Gamma_s=\{\gamma\in\Gamma_0(N)\mid\gamma(s)=s\}.$$

由于$-I\in\Gamma_0(N)$，我们可以假设

$$\rho\delta\rho^{-1}=\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad(h>0).$$

因此

$$\delta=\rho^{-1}\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}\rho=\begin{pmatrix}1-hcd & hd^2\\ -hc^2 & 1+hcd\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N).$$

由此可见

$$h=N/[c(c,\ N/c)].$$

令

$$\rho^*=(\rho,\ (cz-d)^{1/2})\in\hat{G}_1,$$

则

$$
\begin{aligned}
&\rho^*\cdot L(\delta)\cdot(\rho^*)^{-1}\\
&=\rho^*\left\{\delta,\ \varepsilon_{1+hcd}^{-1}\left(\frac{-h}{1+hcd}\right)(-hc^2z+1+hcd)^{1/2}\right\}\cdot(\rho^*)^{-1}
\end{aligned}
$$

$$=\left\{\begin{pmatrix}1 & h\\ 0 & 1\end{pmatrix}, \varepsilon_{1+hcd}^{-1}\left(\frac{-h}{1+hcd}\right)\right\}.$$

设 $f\in G(N, \kappa/2, \omega)$，因为

$$\begin{aligned}&(f|[(\rho^*)^{-1}]_\kappa)|[\rho^*L(\delta)(\rho^*)^{-1}]_\kappa\\ &=\omega(1+hcd)f|[(\rho^*)^{-1}]_\kappa\end{aligned}$$

可知 $\nu_p(f)\equiv\mu_p \bmod \mathbf{Z}$，$(0<\mu_p\leqslant 1)$，其中 $p=\varphi(s)$，且 μ_p 由下式决定

$$e(\mu_p)=\omega(1+hcd)\varepsilon_{1+hcd}^{-\kappa}\left(\frac{-h}{1+hcd}\right),$$

我们把上式右端记为 $\psi(d/c)$。记 c 的标准因子分解为 $c=\prod p^{c_p}$，经直接计算可以得到

$$\varepsilon_{1+hcd}^{-\kappa}=\begin{cases}i^{-\kappa} & 若\ r_2=2,\ c_2=1;\\ 1, & 其他情况。\end{cases}$$

及

$$\left(\frac{-h}{1+hcd}\right)=\begin{cases}1, & 若\ r_2\geqslant 4;\\ 1, & 若\ r_2=3,\ c_2=0,\ 2,\ 3;\\ -1, & 若\ r_2=3,\ c_2=1;\\ 1, & 若\ r_2=2,\ c_2=0,\ 2;\\ -1, & 若\ r_2=2,\ c_2=1,\ h\equiv 1(4);\\ 1, & 若\ r_2=2,\ c_2=1,\ h\equiv 3(4).\end{cases}$$

在计算中需利用引理 1.5. 例如，当 $r_2=2$，$c_2=1$ 时，这时 h 为奇数，我们有

$$\left(\frac{-h}{1+hcd}\right)=\left(\frac{-h}{1+2h}\right)=\left(\frac{2}{1+2h}\right)\left(\frac{-2h}{1+2h}\right)=\left(\frac{2}{1+2h}\right),$$

可得上述结果。

(1) 设 $r_2\geqslant 4$，这时 $\psi(d/c)=\omega(1+hcd)$，与定理 2.19 中(2.3.4)式的证明类似，可以得到

$$f_c=\begin{cases}0, & 若\ (c,\ N/c)\nmid N/F;\\ -\dfrac{1}{2}\varphi((c,\ N/c)), & 若\ (c,\ N/c)\mid N/F.\end{cases}\tag{2.4.2}$$

从而

$$M=-\frac{1}{2}\sum_{\substack{c\mid N\\(c,N/c)\mid N/F}}\varphi((c,\ N/c))$$

$$=-\frac{1}{2}\prod_{p\mid N}\lambda(r_p,\ s_p,\ p).$$

(2) 设 $r_2=3$，当 $c_2=0,\ 2,\ 3$ 时，仍有

$$\psi(d/c)=\omega(1+hcd),$$

这时(2.4.2)式成立。当 $c_2=1$ 时，

$$\psi(d/c)=-\omega(1+hcd).$$

若 $F\mid N/(c,\ N/c)$，这时 $\psi(d/c)=-1$，因而 $f_c=0$。今设 $F\nmid N/(c,\ N/c)$，考虑何时能有 $\psi(d/c)=1$(对某一 d)，即

$$\omega(1+dN/(c,\ N/c))=-1.$$

这时

$$\omega(1+2dN/(c,\ N/c))=1,$$

因 d 与 $(c,\ N/c)$ 互素，由此可推出 $F\mid 2N/(c,N/c)$，即 $(c,N/c)\mid 2N/F$。但 $(c,\ N/c)\nmid N/F$，故这时必有 $2\nmid N/F$。当 $2\nmid N/F$，$2^{-1}(c,\ N/c)\mid N/F$ 时，对任一 d/c 都有 $\psi(d/c)=1$，所以这时

$$f_c=-2^{-1}\varphi((c,\ N/c)).$$

若 $2\mid N/F$，取 d'，使 $d'\equiv -d((c,\ N/c))$，且 d' 与 c 互素，这时

$$\psi(d/c)=\bar{\psi}(d'/c),$$

且都不为 1。由于 $2\mid N/F$，$(c,\ N/c)\nmid N/F$，故 $(c,\ N/c)\neq 2$，$\varphi(d/c)$ 与 $\varphi(d'/c)$ 为 $\Gamma_0(N)\backslash H^*$ 上两个不同的尖点，所以这时有 $f_c=0$。总结上述，当 $2\nmid N/F$ 时，

$$M=\sum_{\substack{(c,N/c)\mid N/F\\c_2=0,3}}f_c+\sum_{\substack{2^{-1}(c,N/c)\mid N/F\\c_2=1}}f_c=-\frac{3}{2}\prod_{p\mid N,\,p\neq 2}\lambda(r_p,\ s_p,\ p).$$

当 $2\mid N/F$ 时，

$$M=\sum_{\substack{(c,N/c)\mid N/F\\c_2=0,2,3}}f_c=-\frac{3}{2}\prod_{p\mid N,\,p\neq 2}\lambda(r_p,\ s_p,\ p).$$

(3) 设 $r_2=2$，当 $c_2=0,\ 2$ 时，

$$\psi(d/c)=\omega(1+hcd),$$

这时(2.4.2)式成立，故

$$\sum_{\substack{c|N\\c_2=0,2}} f_c = \sum_{\substack{(c,N/c)|N/F\\c_2=0,2}} f_c = -\prod_{p|N,\,p\neq 2} \lambda(r_p, s_p, p). \quad (2.4.3)$$

当 $c_2=1$ 时，分别讨论以下三种情况：

(1°) N 有一个素因子 p 为模 4 余 3，其对应的 r_p 为奇数。对任一给定的 $c|N$，令 $c'=cp^{r_p-2c_p}$，c' 也是N的因子，且

$$\frac{N}{c(c, N/c)} \equiv -\frac{N}{c'(c', N/c')} \quad (4),$$

所以我们有

$$\psi(d/c)=\bar{\psi}\left(\frac{(c', N/c')-d}{c'}\right),$$

从而 $f_c+f_{c'}=0$。由(2.4.3)式可得

$$M=\sum_{\substack{c|N\\c_2=0,2}} f_c+\sum_{\substack{c|N\\c_2=1}} f_c=-\prod_{p|N,\,p\neq 2}\lambda(r_p, s_p, p).$$

以下假设N的任一模 4 余 3 的素因子p，其对应的 r_p都是偶数。这时对任意 c，其对应的 $h=N/[c(c, N/c)]$ 都是模 4 余 1。从而

$$\psi(d/c)=e^{\kappa\pi i/2}\omega(1+dN/(c, N/c)).$$

令

$$n_c=\prod_p p^{s_p-r_p+\min(r_p-c_p,\, c_p)},$$

其中 p 跑遍适合 $r_p-\min(r_p-c_p, c_p)<s_p$ 的N的所有奇素因子。当且仅当 $n_c=1$ 时有 $2^{-1}(c, N/c)|N/F$。

设 $s_2=0$，若 $n_c=1$，这时 $\psi(d/c)=e^{\kappa\pi i/2}$，故

$$\sum_{\substack{(c,N/c)|N/F\\c_2=1}} f_c=\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{\kappa}{4}\right\}\right)\sum_{\substack{(c,N/c)|N/F\\c_2=1}}\varphi((c, N/c))$$

$$=\frac{\chi_2(\kappa)}{4}\prod_{p|N,\,p\neq 2}\lambda(r_p, s_p, p). \qquad (2.4.4)$$

若$n_c\neq 1$，这时 $\omega(1+\bar{d}N/(c, N/c))$为 n_c 次本原单位根。由于

$$\omega(1+d_1N/(c, N/c))\cdot\omega(1+d_2N/(c, N/c))$$
$$=\omega(1+(d_1+d_2)N/(c, N/c)),$$

(利用$(c, N/c)^2|N$)。不妨设 $\omega(1+N/(c, N/c))=e^{2\pi i/n_c}$，因而

$$\psi(d/c)=e^{2\pi i(\kappa/4+d/n_c)}.$$

n_c为$(c,\ N/c)$ 的因子。当d跑遍 $(\mathbf{Z}/(c,\ N/c)\mathbf{Z})^*$时，它跑遍$(\mathbf{Z}/n_c\mathbf{Z})^*$共$\varphi((c,\ N/c))/\varphi(n_c)$次。利用引理2.21，我们有

$$f_c=\frac{1}{2}\varphi((c,\ N/c))-\sum_{\substack{d=0\\(d,n_c)=1}}^{n_c-1}\left\{\frac{\kappa}{4}+\frac{d}{n_c}\right\}\frac{\varphi((c,\ N/c))}{\varphi(n_c)}$$

$$=\frac{\varphi((c,\ N/c))}{\varphi(n_c)}\sum_{d\mid n_c}\mu(d)\left\{\frac{(4-\kappa)n_c}{4d}\right\}.\qquad(2.4.5)$$

设$s_2=2$，这时$\omega(1+dN/(c,\ N/c))$为$2n_c$次本原单位根。若$n_c=1$，则

$$\psi(d/c)=e^{2\pi i(2+\kappa)/4},$$

因而

$$\sum_{\substack{2^{-s}(c,N/c)\mid N/F\\c_2=1}}f_c=\left(\frac{1}{2}-\left\{\frac{2+\kappa}{4}\right\}\right)\sum_{\substack{2^{-s}(c,N/c)\mid N/F\\c_2=1}}\varphi((c,\ N/c))$$

$$=-\frac{\chi_2(\kappa)}{4}\prod_{p\mid N,p\neq 2}\lambda(r_p,\ s_p,\ p).\qquad(2.4.6)$$

若$n_c\neq 1$，不妨假设

$$\omega(1-dN/(c,\ N/c))=e^{2\pi i d/2n_c}=-e^{2\pi i d'/n_c},$$

其中$2d'\equiv d(n_c)$（注意：d为奇数），这时

$$\psi(d/c)=e^{2\pi i\left(\frac{2+\kappa}{4}+\frac{d'}{n_c}\right)},$$

因而

$$f_c=\frac{1}{2}\varphi((c,\ N/c))-\frac{\varphi((c,\ N/c))}{\varphi(n_c)}\sum_{\substack{d=0\\(d,n_c)=1}}^{n_c-1}\left\{\frac{2+\kappa}{4}+\frac{d'}{n_c}\right\}$$

$$=\frac{\varphi((c,\ N/c))}{\varphi(n_c)}\sum_{d\mid n_c}\mu(d)\left\{\frac{\kappa n_c}{4d}\right\}.\qquad(2.4.7)$$

(2°) N的任一模4余3的素因子p，其r_p都是偶数，且$r_p\geqslant 2s_p$（即条件$(*)$不成立）。由于

$$r_p-\min(r_p-c_p,\ c_p)\geqslant r_p/2\geqslant s_p,$$

所以这时n_c中不含模4余3的素因子。当$n_c\neq 1$时，

$$\sum_{d\mid n_c}\mu(d)\left\{\frac{\kappa n_c}{4d}\right\}=\left\{\frac{\kappa}{4}\right\}\sum_{d\mid n_c}\mu(d)=0.$$

由(2.4.3)、(2.4.4)、(2.4.5)、(2.4.6)、(2.4.7) 式即证得所需结论。

(3°) N的任一模 4 余 3 的素因子 p，其 r_p 都为偶数，但其中至少有一个 p 适合 $0<r_p<2s_p$。令

$$R=\{p\mid p\mid N,\ p\equiv 3(4),\ 0<r_p<2s_p\}.$$

若 n_c 含有模 4 余 1 的素因子，令 $n_c=n_c'n_c''$，其中 n_c' 的素因子均为模 4 余 1，n_c'' 的素因子均为模 4 余 3。由于 $n_c'\neq 1$，因而

$$\sum_{d\mid n_c}\mu(d)\left\{\frac{\kappa n_c}{4d}\right\}=\sum_{d'\mid n'_c}\mu(d')\sum_{d''\mid n''_c}\mu(d'')\left\{\frac{\kappa n''_c}{4d''}\right\}$$
$$=0.$$

所以对应的 f_c 一定是零。仅当 n_c 的素因子均为模 4 余 3 时，f_c 才可能非零，这时 n_c 的素因子一定属于 R。对于 R 的任一子集 R'，令

$$c(R')=\{c\mid c\mid N,\ c_2=1,\ n_c\text{的素因子集合为}R'\}.$$

设 $s_2=0$，由(2.4.5)式及引理 2.22，可得

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{n_c\neq 1\\ c_2=1}}f_c&=\sum_{R'\subset R}\ \sum_{c\in c(R')}\ \prod_{p\mid N,\,p\nmid n_c}\varphi\left(p^{\min(r_p-c_p,\,c_p)}\right)\\ &\quad\times\prod_{p\mid n_c}2p^{r_p-s_p}\chi_2(\kappa n_c)/4\\ &=\frac{\chi_2(\kappa)}{4}\sum_{R'\subset R}\ \prod_{p\in R'}\ \sum_{c_p=r_p-s_p+1}^{s_p-1}\chi_2\left(p^{s_p-r_p+\min(r_p-c_p,\,c_p)}\right)\\ &\quad\times\prod_{p\mid N,\,p\neq 2}\lambda(r_p,\ s_p,\ p)\\ &=\frac{\chi_2(\kappa)}{4}\sum_{R'\subset R}(-1)^{|R'|}\prod_{p\mid N,\,p\neq 2}\lambda(r_p,\ r_p,\ p)\\ &=-\frac{\chi_2(\kappa)}{4}\prod_{p\mid N,\,p\neq 2}\lambda(r_p,\ s_p,\ p).\end{aligned}\tag{2.4.8}$$

由(2.4.3)、(2.4.4)及(2.4.8)即得到所需结论。当 $s_2=2$ 时，由(2.4.3)、(2.4.6)、(2.4.7) 及引理 2.22 亦可类似地证得所需结论。

利用命题 2.20，当 $\kappa<0$ 时，易见

$$\dim G(N,\ \kappa/2,\ \omega)=0.$$

在定理 2.23 中，取 $\kappa\geqslant 5$，可得到 $\dim S(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 的表达式。同

样亦可得到 $\dim G(N, \kappa/2, \omega)$ $(\kappa\geqslant 5)$ 的表达式. 取 $\kappa=1$ 或 3 时，则得到

$$\dim S(N, 1/2, \omega)-\dim G(N, 3/2, \omega)$$

及

$$\dim S(N, 3/2, \omega)-\dim G(N, 1/2, \omega).$$

如果知道了 $G(N, 1/2, \omega)$ 及 $S(N, 1/2, \omega)$ 的维数，就可得到 $G(N, 3/2, \omega)$ 及 $S(N, 3/2, \omega)$ 的维数。在 §5.3 中，将给出 $G(N, 1/2, \omega)$ 和 $S(N, 1/2, \omega)$ 的维数的计算方法。

定理 2.19 和定理 2.23 所给出的维数公式，可在 H. Cohen 和 J. Oesterlé[2] 中找到，但没有给出证明。为了读者的方便，我们在这里给出了详细的推导，这在文献上很难找到。

第 3 章

模形式空间的算子

§3.1 Hecke 算子

Hecke 算子是模形式空间的一类重要的线性算子。我们首先讨论一个群的双陪集所组成的 Hecke 环。

设 G 为一个乘法群，Γ 与 Γ' 为 G 的子群。如果指数 $[\Gamma:\Gamma\cap\Gamma']$ 及 $[\Gamma':\Gamma\cap\Gamma']$ 都有限，则称 Γ 与 Γ' 为可公度的，记为 $\Gamma\sim\Gamma'$。

引理 3.1 设 Γ_1、Γ_2 和 Γ_3 为 G 的子群，若 $\Gamma_1\sim\Gamma_2$，$\Gamma_2\sim\Gamma_3$，则 $\Gamma_1\sim\Gamma_3$。

证明 由 $[\Gamma_2:\Gamma_2\cap\Gamma_3]$ 为有限，可推出 $[\Gamma_1\cap\Gamma_2:\Gamma_1\cap\Gamma_2\cap\Gamma_3]$ 为有限，又由 $[\Gamma_1:\Gamma_1\cap\Gamma_2]$ 为有限，可推出 $[\Gamma_1:\Gamma_1\cap\Gamma_2\cap\Gamma_3]$ 为有限，从而 $[\Gamma_1:\Gamma_1\cap\Gamma_3]$ 为有限。同样可证 $[\Gamma_3:\Gamma_1\cap\Gamma_3]$ 有限，因而 $\Gamma_1\sim\Gamma_3$。

设 Γ 为 G 的子群，定义

$$\tilde{\Gamma}=\{\alpha\in G\mid\alpha\Gamma\alpha^{-1}\sim\Gamma\},$$

易见 $\tilde{\Gamma}$ 成一个群，称为 Γ 的可公度化子。

引理 3.2 设 Γ_1 和 Γ_2 为 G 的子群，α 为 G 中一元素，若

$$d=[\Gamma_2:\Gamma_2\cap\alpha^{-1}\Gamma_1\alpha],$$

则

$$\Gamma_1\alpha\Gamma_2=\bigcup_{i=1}^{d}\Gamma_1\alpha_i,$$

为 d 个互不相交的 Γ_1 的右陪集之并(在下面，$\bigcup_i\Gamma\alpha_i$ 总表示是互不相交的右陪集之并，不再另作说明)。

证明 我们有 $\Gamma_2=\bigcup_{i=1}^{d}(\alpha^{-1}\Gamma_1\alpha\cap\Gamma_2)\delta_i$，为互不相交的 d 个右

陪集之并，其中 δ_i 为 Γ_2 中的元素，因而

$$\Gamma_1\alpha\Gamma_2=\bigcup_{i=1}^{a}\Gamma_1\alpha\delta_i.$$

若存在 i, j, 使 $\Gamma_1\alpha\delta_i=\Gamma_1\alpha\delta_j$, 则有 $\gamma\in\Gamma_1$, 使 $\alpha\delta_i=\gamma\alpha\delta_j$, 从而

$$\delta_i\delta_j^{-1}\in\Gamma_2\cap\alpha^{-1}\Gamma_1\alpha.$$

必有 $i=j$.

设 Γ 为 G 的子群，Δ 为一个半群，且 $\Gamma\subset\Delta\subset G$, 我们定义一个环 $R(\Gamma,\Delta)$, 称为 Hecke 环，它由形如

$$\sum_{i=1}^{m}c_i\Gamma\alpha_i\Gamma\quad(\alpha_i\in\Delta,\ c_i\in\mathbf{Z})$$

的元素组成，其中的加法即为形式地相加．两个双陪集的乘法按下述方法定义(利用乘法分配律,就可以得到两个双陪集形式和的乘积)．设 $\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup_i\Gamma\alpha_i$, $\Gamma\beta\Gamma=\bigcup_j\Gamma\beta_j(\alpha,\ \beta\in\Delta)$, 且

$$\Gamma\alpha\Gamma\beta\Gamma=\bigcup_\xi\Gamma\xi\Gamma$$

为互不相交的双陪集之并．定义 $\Gamma\alpha\Gamma$ 和 $\Gamma\beta\Gamma$ 的乘积为

$$\sum_\xi c_\xi\Gamma\xi\Gamma\in R(\Gamma,\ \Delta),$$

其中

$$c_\xi=\#\{(i,\ j)\mid\Gamma\alpha_i\beta_j=\Gamma\xi\}.$$

我们必须证明这个定义不依赖于右陪集代表元 α_i、β_j 及双陪集代表元 ξ 的选取．当 j 固定后，若 $\Gamma\alpha_{i_1}\beta_j=\Gamma\alpha_{i_2}\beta_j$, 则 $\Gamma\alpha_{i_1}=\Gamma\alpha_{i_2}$, 从而 $i_1=i_2$．即当 j 固定后，最多只有一个 i, 使 $\Gamma\alpha_i\beta_j=\Gamma\xi$．故

$$\begin{aligned}c_\xi&=\#\{j\mid\beta_j\in\Gamma\alpha^{-1}\Gamma\xi\}\\&=\#\{j\mid\Gamma\beta_j\subset\Gamma\alpha^{-1}\Gamma\xi\}\\&=\Gamma\beta\Gamma\cap\Gamma\alpha^{-1}\Gamma\xi\end{aligned}$$

中含有 Γ 的右陪集的个数．

可见 c_ξ 不依赖于 α_i 与 β_j 的选取．又若 $\Gamma\xi\Gamma=\Gamma\eta\Gamma$, 则

$$\xi=\delta_1\eta\delta_2,\ \delta_1、\delta_2\in\Gamma,$$

因而

$$\Gamma\beta\Gamma\cap\Gamma\alpha^{-1}\Gamma\xi=(\Gamma\beta\Gamma\cap\Gamma\alpha^{-1}\Gamma\eta)\delta_2.$$

所以 c_ξ 不依赖于 ξ 的选取．

定义 3.3 $\deg \Gamma\alpha\Gamma$ 为 $\Gamma\alpha\Gamma$ 中所含 Γ 的右陪集的个数，

$$\deg(\sum c_\xi \Gamma\xi\Gamma) = \sum c_\xi \deg(\Gamma\xi\Gamma).$$

引理 3.4 若 $\Gamma\alpha\Gamma\cdot\Gamma\beta\Gamma = \sum_\xi c_\xi\Gamma\xi\Gamma$，则

$$c_\xi\cdot\deg(\Gamma\xi\Gamma) = \#\{(i,\ j)\mid \Gamma\alpha_i\beta_j\Gamma = \Gamma\xi\Gamma\}.$$

证明 设 $\Gamma\xi\Gamma = \bigcup\limits_{k=1}^{f}\Gamma\xi_k$，当且仅当存在一个 k，使

$$\Gamma\alpha_i\beta_j = \Gamma\xi_k$$

成立时，有

$$\Gamma\alpha_i\beta_j\Gamma = \Gamma\xi\Gamma,$$

故

$$\#\{(i,\ j)\mid\Gamma\alpha_i\beta_j\Gamma = \Gamma\xi\Gamma\} = \sum_{k=1}^{f}\#\{(i,\ j)\mid\Gamma\alpha_i\beta_j = \Gamma\xi_k\}$$

$$= c_\xi\cdot f = c_\xi\cdot\deg(\Gamma\xi\Gamma).$$

这里利用 c_ξ 不依赖双陪集 $\Gamma\xi\Gamma$ 的代表元 ξ 的选取这一事实。

引理 3.5 设 x、$y\in R(\Gamma,\ \Delta)$，则

$$\deg x\cdot\deg y = \deg(xy).$$

证明 仅需考虑 x 和 y 都是一个双陪集. 设

$$x = \Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_i\Gamma\alpha_i,\quad y = \Gamma\beta\Gamma = \bigcup_j\Gamma\beta_j,\quad x\cdot y = \sum c_\xi\Gamma\xi\Gamma,$$

则由引理 3.4，有

$$\deg(xy) = \sum c_\xi\deg(\Gamma\xi\Gamma) = \sum\#\{(i,\ j)\mid\Gamma\alpha_i\beta_j\Gamma = \Gamma\xi\Gamma\}$$
$$= \#\{(i,\ j)\} = \deg x\cdot\deg y.$$

今证 $R(\Gamma,\ \Delta)$ 的乘法满足结合律. 令

$$M = \{\sum c_i\Gamma\eta_i\mid c_i\in\mathbf{Z},\ \eta_i\in\tilde{\Gamma}\},$$

M 中每个元素为右陪集的有限形式和. 对任一

$$u = \Gamma\alpha\Gamma = \bigcup_j\Gamma\alpha_j\,(\alpha\in G),$$

定义 M 的一个同态：

$$u\cdot\sum c_i\Gamma\eta_i = \sum_{i,j} c_i\Gamma\alpha_j\eta_i.$$

因而我们可以使 $R(\Gamma,\ \Delta)$ 中任一元素对应 $\mathrm{Hom}(M)$ 的一个元素. 这个对应是单射. 设

$$\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup_i\Gamma\alpha_i,\quad \Gamma\beta\Gamma=\bigcup_j\Gamma\beta_j,$$

$$\Gamma\alpha\Gamma\cdot\Gamma\beta\Gamma=\sum_t c_{\xi_t}\Gamma\xi_t\Gamma \quad 及 \quad \Gamma\xi_t\Gamma=\bigcup_k\Gamma\xi_{t,k},$$

我们有

$$\Gamma\alpha\Gamma(\Gamma\beta\Gamma\cdot\Gamma\eta)=\Gamma\alpha\Gamma\sum_j\Gamma\beta_j\eta=\sum\Gamma\alpha_i\beta_j\eta$$

$$=\sum_{t,k}c_{\xi_t}\Gamma\xi_{t,k}\eta=(\Gamma\alpha\Gamma\cdot\Gamma\beta\Gamma)\cdot\Gamma\eta.$$

所以，若 y、$z\in R(\Gamma,\ \Delta)$，$a\in M$，则 $(y\cdot z)a=y(za)$。今设 x、y、$z\in R(\Gamma,\ \Delta)$，则

$$((xy)z)a=(xy)(za)=x(y(za))=x((yz)a)=(x(yz))a.$$

因为 $R(\Gamma,\ \Delta)\to\mathrm{Hom}(M)$ 是单射，故 $(xy)z=x(yz)$。

引理 3.6　设 $\alpha\in\tilde{\Gamma}$，若

$$\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup_{i=1}^d\Gamma\alpha_i'=\bigcup_{i=1}^d\alpha_i''\Gamma,$$

则可找到 $\{\alpha_i\}$，使

$$\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup_{i=1}^d\Gamma\alpha_i=\bigcup_{i=1}^d\alpha_i\Gamma.$$

证明　由于 $\alpha_1'\in\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\alpha_1''\Gamma$，所以存在 δ、$\varepsilon\in\Gamma$，使

$$\alpha_1'=\delta\alpha_1''\varepsilon,$$

令
$$\alpha_1=\delta^{-1}\alpha_1'=\alpha_1''\varepsilon,$$

则有
$$\Gamma\alpha_1=\Gamma\alpha_1',\quad \alpha_1\Gamma=\alpha_1''\Gamma.$$

若群 G 有一个反自同构 $\alpha\mapsto\alpha^*$（$(\alpha\beta)^*=\beta^*\alpha^*$），且 $\Gamma^*=\Gamma$，对任一 $\alpha\in G$ 有 $(\Gamma\alpha\Gamma)^*=\Gamma\alpha\Gamma$，这时 $R(\Gamma,\ \Delta)$ 的乘法是可交换的。设 $\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup_i\Gamma\alpha_i$，则 $\Gamma\alpha\Gamma=(\Gamma\alpha\Gamma)^*=\bigcup_i\alpha_i^*\Gamma$。由引理 3.6，存在 $\{\alpha_i\}$，使

$$\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup_i\Gamma\alpha_i=\bigcup_i\alpha_i\Gamma.$$

同样可设

$$\Gamma\beta\Gamma=\bigcup_j\Gamma\beta_j=\bigcup_j\beta_j\Gamma.$$

我们有
$$\Gamma\alpha\Gamma=(\Gamma\alpha\Gamma)^*=\bigcup_i\Gamma\alpha_i^*,$$

同样有
$$\Gamma\beta\Gamma=\bigcup_j\Gamma\beta_j^*.$$

若
$$\Gamma\alpha\Gamma\beta\Gamma=\bigcup_\xi\Gamma\xi\Gamma,$$

则 $\Gamma\beta\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\beta^*\Gamma\alpha^*\Gamma=(\Gamma\alpha\Gamma\beta\Gamma)^*=\bigcup_\xi\Gamma\xi\Gamma=\Gamma\alpha\Gamma\beta\Gamma$,

因此

$$\Gamma\alpha\Gamma\cdot\Gamma\beta\Gamma=\sum c_\xi\Gamma\xi\Gamma,\quad \Gamma\beta\Gamma\cdot\Gamma\alpha\Gamma=\sum c'_\xi\Gamma\xi\Gamma,$$

是对同样一组 ξ 求和。由引理 3.4，得

$$\begin{aligned}c_\xi\cdot\deg\Gamma\xi\Gamma&=\#\{(i,\ j)\mid\Gamma\alpha_i\beta_j\Gamma=\Gamma\xi\Gamma\}\\&=\#\{(i,\ j)\mid\Gamma\beta_j^*\alpha_i^*\Gamma=\Gamma\xi\Gamma\}\\&=c'_\xi\cdot\deg\Gamma\xi\Gamma,\end{aligned}$$

因此 $c_\xi=c'_\xi$，$R(\Gamma,\ \Delta)$是交换环。

取 $G=GL_2^+(\mathbf{Q})$，$\Gamma=SL_2(\mathbf{Z})$。

引理 3.7 Γ 在 G 中的可公度化子 $\tilde{\Gamma}=G$。

证明 对任一$\alpha\in G$，存在 $c\in\mathbf{Q}$，$\beta\in M_2(\mathbf{Z})$，使 $\alpha=c\beta$，这时$\alpha\Gamma\alpha^{-1}=\beta\Gamma\beta^{-1}$。设 $b=\det\beta$，令 $\Gamma_b=\Gamma(b)$，因为

$$b\beta^{-1}\Gamma_b\beta\equiv 0\ \ (b),$$

故 $\beta^{-1}\Gamma_b\beta\in\Gamma$，因而 $\Gamma_b\subset\Gamma\cap\beta\Gamma\beta^{-1}$，所以

$$[\Gamma:\Gamma\cap\beta\Gamma\beta^{-1}]<[\Gamma:\Gamma_b]<+\infty.$$

由于 $$[\beta^{-1}\Gamma\beta:\beta^{-1}\Gamma\beta\cap\Gamma]=[\Gamma:\Gamma\cap\beta\Gamma\beta^{-1}],$$

以 β 代替 β^{-1}，可得

$$[\beta\Gamma\beta^{-1}:\Gamma\cap\beta\Gamma\beta^{-1}]<+\infty,$$

即 $\alpha=c\beta\in\tilde{\Gamma}$。

令

$$\Delta=\{\alpha\in M_2(\mathbf{Z})\mid\det\alpha>0\}.$$

考虑 Hecke 环 $R(\Gamma,\ \Delta)$ 的结构。对任一$\alpha\in\Delta$，双陪集 $\Gamma\alpha\Gamma$ 都可唯一地表为

$$\Gamma\begin{pmatrix}a&0\\0&d\end{pmatrix}\Gamma,\ a>0,\ d>0,\ a\mid d.$$

将上述陪集记为 $T(a,\ d)$。方阵的转置是G上的一个反自同构 $\alpha\mapsto\alpha^T$，显然 $\Gamma^T=\Gamma$，$T(a,\ d)^T=T(a,\ d)$，故 $R(\Gamma,\ \Delta)$ 是一个交换环。

引理 3.8 设 a_2 与 b_2 互素，则

$$T(a_1,\ a_2)\cdot T(b_1,\ b_2)=T(a_1b_1,\ a_2b_2).$$

证明　记

$$\alpha=\begin{pmatrix}a_1 & 0\\ 0 & a_2\end{pmatrix},\ \beta=\begin{pmatrix}b_1 & 0\\ 0 & b_2\end{pmatrix},$$

显然 $\Gamma\alpha\beta\Gamma\subset\Gamma\alpha\Gamma\beta\Gamma$。任取 $\gamma\in\Gamma$，考虑 $\alpha\gamma\beta$ 的初等因子，α 的任一元素能被 a_1 整除，$\gamma\beta$ 的任一元素能被 b_1 整除，所以 $\alpha\gamma\beta$ 的任一元素能被 a_1b_1 整除，且 a_1b_1 是具有此性质的最大正整数，因此 $\alpha\gamma\beta\in\Gamma\alpha\beta\Gamma$，从而可见 $\Gamma\alpha\beta\Gamma=\Gamma\alpha\Gamma\beta\Gamma$。我们有

$$\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup_{s_1,s_2,u}\Gamma\begin{pmatrix}s_1 & u\\ 0 & s_2\end{pmatrix}a_1,$$

$$\Gamma\beta\Gamma=\bigcup_{t_1,t_2,v}\Gamma\begin{pmatrix}t_1 & v\\ 0 & t_2\end{pmatrix}b_1,$$

其中　　$s_1s_2=a_2/a_1,\ 0\leqslant u<s_2,\ (s_1,\ s_2,\ u)=1$

及　　$t_1t_2=b_2/b_1,\ 0\leqslant v<t_2,\ (t_1,\ t_2,\ v)=1$。

若

$$\Gamma\begin{pmatrix}s_1 & u\\ 0 & s_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}t_1 & v\\ 0 & t_2\end{pmatrix}a_1a_2=\Gamma\begin{pmatrix}a_1b_1 & 0\\ 0 & a_2b_2\end{pmatrix},$$

不难证明这时

$$s_1=t_1=1,\ s_2=a_2/a_1,\ t_2=b_2/b_1,\ u=v=0。$$

故　　$$\Gamma\alpha\Gamma\cdot\Gamma\beta\Gamma=\Gamma\alpha\beta\Gamma。$$

容易验证

$$T(c,\ c)\cdot T(a,\ d)=T(ca,\ cd)。$$

由引理 3.8，任一 $T(a,\ d)$ 可表成形如 $T(p^{e_1},\ p^{e_2})$（p 为素数，$e_1\leqslant e_2$）的元素之积。对每个素数 p，以 R_p 表示 $R(\Gamma,\ \Delta)$ 中由形如 $T(p^{e_1},\ p^{e_2})$的元素生成的子环。易见 $T(p^e,\ p^e)=T(p,\ p)^e$。当 $e_1<e_2$ 时，

$$T(p^{e_1},\ p^{e_2})=T(p,\ p)^{e_1}T(1,\ p^{e_2-e_1}),$$

可见 R_p 由 $T(p,\ p)$ 及 $T(1,\ p^k)$ ($k\geqslant1$) 生成。

设 m 为正整数，定义

$$T(m)=\sum_{ad=m}T(a,\ d),$$

即 $T(m)$ 为所有双陪集 $\Gamma\alpha\Gamma$($\det\alpha=m,\ \alpha\in\Delta$) 之和。当 $k\geqslant2$ 时，

易见

$$T(p^k)=T(1,\ p^k)+T(p,\ p)T(p^{k-2}).\qquad(3.1.1)$$

引理 3.9 设 $k\geqslant 1$, 则

$$T(p)T(p^k)=T(p^{k+1})+pT(p,\ p)T(p^{k-1}).$$

证明 我们有

$$T(p^k)=\bigcup_{\substack{a_1+a_2=k\\ 0\leqslant b_1<p^{a_2}}}\Gamma\begin{pmatrix}p^{a_1} & b_1\\ & p^{a_2}\end{pmatrix},$$

$$T(p)=\Gamma\begin{pmatrix}p & \\ & 1\end{pmatrix}\bigcup_{0\leqslant b_2<p}\Gamma\begin{pmatrix}1 & b_2\\ & p\end{pmatrix},$$

设

$$T(p)T(p^k)=\sum_{\substack{d_1+d_2=k+1\\ 0\leqslant d_1\leqslant d_2}}c_{d_1d_2}\Gamma\begin{pmatrix}p^{d_1} & \\ & p^{d_2}\end{pmatrix}\Gamma,$$

当 $d_1=0$ 时, 由

$$\Gamma\begin{pmatrix}1 & b_2\\ & p\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^{a_1} & b_1\\ & p^{a_2}\end{pmatrix}=\Gamma\begin{pmatrix}1 & \\ & p^{k+1}\end{pmatrix}$$

可推得 $a_1=0,\ a_2=k,\ b_1=b_2=0$, 因而 $c_{0,k+1}=1$. 当 $d_1>0$ 时, 可以类似地证明 $c_{d_1d_2}=p+1$. 因此

$$\begin{aligned}T(p)\cdot T(p^k)&=\Gamma\begin{pmatrix}1 & \\ & p^{k+1}\end{pmatrix}\Gamma+(p+1)\\&\quad\times\sum_{\substack{d_1+d_2=k+1\\ 1\leqslant d_1\leqslant d_2}}\Gamma\begin{pmatrix}p^{d_1} & \\ & p^{d_2}\end{pmatrix}\Gamma\\&=T(1,\ p^{k+1})+(p+1)T(p,\ p)T(p^{k-1})\\&=T(p^{k+1})+pT(p,\ p)T(p^{k-1}).\end{aligned}$$

这里利用了(3.1.1)式.

由(3.1.1)式及引理 3.9, 我们有

$$\begin{aligned}T(1,\ p^2)&=T(p^2)-T(p,\ p)\\&=T(p)^2-(1+p)T(p,\ p)\\&=T(1,\ p)^2-(1+p)T(p,\ p).\end{aligned}$$

当 $k\geqslant 2$ 时,

$$T(p)T(1,\ p^k)=T(p)(T(p^k)-T(p,\ p)T(p^{k-2}))$$

$$\begin{aligned}&=T(p^{k+1})+T(p,\ p)(pT(p^{k-1})-T(p)T(p^{k-2}))\\&=T(1,\ p^{k+1})+T(p,\ p)((1+p)T(p^{k-1})\\&\quad-T(p)T(p^{k-2}))\\&=T(1,\ p^{k+1})+pT(p,\ p)T(1,\ p^{k-1}).\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}T(1,\ p^{k+1})=T(1,\ p)T(1,\ p^{k})\\-pT(p,\ p)T(1,\ p^{k-1}),\end{aligned}$$

可见 R_p 是由 $T(p,\ p)$ 及 $T(1,\ p)$ 生成的.

考虑一个形式级数

$$D(s)=\sum_{m=1}^{\infty}T(m)m^{-s},\qquad s\in\boldsymbol{C},$$

由引理 3.8, 当 m_1 与 m_2 互素时,有

$$T(m_1m_2)=T(m_1)T(m_2),$$

所以

$$D(s)=\prod_p\left(\sum_{k=0}^{\infty}T(p^k)p^{-ks}\right).$$

由引理 3.9, 我们有

$$(1-T(p)p^{-s}+T(p,\ p)p^{1-2s})\cdot\sum_{k=0}^{\infty}T(p^k)p^{-ks}=1,$$

因而

$$D(s)=\prod_p(1-T(1,\ p)p^{-s}+T(p,\ p)p^{1-2s})^{-1},\qquad(3.1.2)$$

这称为 $D(s)$ 的 Euler 乘积. 当我们有 $R(\Gamma,\ \Delta)$ 的一个表示时, 就可以由 $D(s)$ 得到这个表示的乘积性质. 例如, $\Gamma\alpha\Gamma\mapsto\deg\Gamma\alpha\Gamma$ 为 $R(\Gamma,\ \Delta)$的一个表示(引理 3.5), 所以

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\deg(T(m))m^{-s}&=\prod_p(1-(1+p)p^{-s}+p^{1-2s})^{-1}\\&=\prod_p(1-p^{-s})^{-1}(1-p^{1-s})^{-1}\\&=\zeta(s)\zeta(s-1),\end{aligned}$$

这里我们利用了 $\deg T(1,\ p)=1+p$ 及 $\deg T(p,\ p)=1$. 由此可得

$$\deg T(m)=\sum_{d\mid m}d.\qquad(3.1.3)$$

取 $G=GL_2^+(\boldsymbol{R})$，Γ 为 $SL_2(\boldsymbol{R})$ 的第一类 Fuchsian 群。设 $\alpha\in\widetilde{\Gamma}$，$\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup_i\Gamma\alpha_i$，我们在空间 $A_k(\Gamma)$（k 为整数）上定义一个线性算子

$$f|[\Gamma\alpha\Gamma]_k=\det(\alpha)^{k/2-1}\sum_i f|[\alpha_i]_k,\quad f\in A_k(\Gamma).$$

该定义与 α_i 的选取无关。我们称这算子为 Hecke 算子。

引理 3.10 $[\Gamma\alpha\Gamma]_k$ 是将 $A_k(\Gamma)$、$G_k(\Gamma)$ 和 $S_k(\Gamma)$ 映到自身的映射。

证明 设 $f\in A_k(\Gamma)$，则 $f|[\alpha_i]_k\in A_k(\alpha_i^{-1}\Gamma\alpha_i)$。令

$$\Gamma_1=\bigcap_i(\alpha_i^{-1}\Gamma\alpha_i\cap\Gamma).$$

易见 $f|[\Gamma\alpha\Gamma]_k\in A_k(\Gamma_1)$。由于 $[\Gamma:\alpha_i^{-1}\Gamma\alpha_i\cap\Gamma]<+\infty$，可以证明 $[\Gamma:\Gamma_1]<+\infty$，$\Gamma$ 与 Γ_1 具有相同的尖点集合。任取 $\delta\in\Gamma$，集合 $\{\Gamma\alpha_i\delta\}$ 是集合 $\{\Gamma\alpha_i\}$ 的一个置换，故

$$\begin{aligned}f|[\Gamma\alpha\Gamma]_k\cdot[\delta]_k&=\det(\alpha)^{k/2-1}\textstyle\sum_i f|[\alpha_i\delta]_k\\&=\det(\alpha)^{k/2-1}\textstyle\sum_i f|[\alpha_i]_k=f|[\Gamma\alpha\Gamma]_k,\end{aligned}$$

所以 $f|[\Gamma\alpha\Gamma]_k\in A_k(\Gamma)$。由上述证明也易见，若 $f\in G_k(\Gamma)$ 或 $S_k(\Gamma)$，则 $f|[\Gamma\alpha\Gamma]_k\in G_k(\Gamma)$ 或 $S_k(\Gamma)$。

对于 $X=\sum c_\xi\Gamma\xi\Gamma\in R(\Gamma,\widetilde{\Gamma})$，定义

$$f|[X]_k=\sum c_\xi f|[\Gamma\xi\Gamma]_k,\quad f\in A_k(\Gamma).$$

引理 3.11 设 $X, Y\in R(\Gamma,\widetilde{\Gamma})$，则

$$[X\cdot Y]_k=[X]_k\cdot[Y]_k.$$

证明 仅需证明

$$[\Gamma\alpha\Gamma]_k\cdot[\Gamma\beta\Gamma]_k=[\Gamma\alpha\Gamma\cdot\Gamma\beta\Gamma]_k\quad(\alpha,\beta\in\widetilde{\Gamma}).$$

设 $\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup\Gamma\alpha_i$，$\Gamma\beta\Gamma=\bigcup\Gamma\beta_j$ 及

$$\Gamma\alpha\Gamma\cdot\Gamma\beta\Gamma=\sum c_\xi\Gamma\xi\Gamma,\ \Gamma\xi\Gamma=\bigcup\Gamma\xi_h.$$

任取 $f\in A_k(\Gamma)$，我们有

$$\begin{aligned}(f|[\Gamma\alpha\Gamma]_k)|[\Gamma\beta\Gamma]_k&=\det(\alpha\beta)^{k/2-1}\sum_{i,j}f|[\alpha_i\beta_j]_k\\&=\det(\alpha\beta)^{k/2-1}\sum_{\xi,h}c_\xi f|[\xi_h]_k=\sum_\xi c_\xi f|[\Gamma\xi\Gamma]_k\\&=f|[\Gamma\alpha\Gamma\cdot\Gamma\beta\Gamma]_k.\end{aligned}$$

设 $f、g\in G_k(\Gamma)$，则 $f(z)\overline{g(z)}y^k$ 可看作是 $\Gamma\backslash H^*$ 上的函数

$(y=I_m(z))$。因对任一 $\sigma\in\Gamma$，我们有

$$\begin{aligned}&f(\sigma(z))\bar{g}(\sigma(z))Im^k\sigma(z)\\&=f(z)\bar{g}(z)J^k(\sigma,z)\bar{J}^k(\sigma,z)Im^k(z)|J(\sigma,z)|^{-2k}\\&=f(z)\bar{g}(z)y^k.\end{aligned}$$

定义积分

$$\iint_{\Gamma\backslash H}f(z)\bar{g}(z)y^{k-2}dxdy. \tag{3.1.4}$$

由上述，该积分不依赖于基域 $\Gamma\backslash H$ 的选取。考虑该积分的收敛性，由于 $f(z)$、$g(z)$ 在 H 上是全纯的，故仅需考虑它在尖点的收敛性。设 s 为 Γ 的尖点，取 $\rho\in SL_2(\boldsymbol{R})$，使 $\rho(s)=\infty$，令 $w=\rho(z)$，$q=e^{\pi iw/h}$($h>0$，其定义见§2.1)。我们有

$$f|[\rho^{-1}]_k=\phi(q),\qquad g|[\rho^{-1}]_k=\psi(q),$$

且 ϕ 和 ψ 在 $q=0$ 处是全纯的，而

$$\begin{aligned}&f(z)\bar{g}(z)Im^k(z)\\&=f(\rho^{-1}(w))\bar{g}(\rho^{-1}(w))Im^k(w)|J(\rho^{-1},w)|^{-2k}\\&=\phi(q)\bar{\psi}(q)Im^k(w).\end{aligned}$$

如果 f 和 g 至少有一个在 $S_k(\Gamma)$ 内，则 $\phi(0)\bar{\psi}(0)=0$，积分(3.1.4)在 $w=\infty$ 处收敛，即在 $z=s$ 处收敛。记

$$\langle f,g\rangle=\frac{1}{\mu(D)}\iint_D f(z)\bar{g}(z)y^{k-2}dxdy,$$

其中 D 为 Γ 的基域，

$$\mu(D)=\iint_D y^{-2}dxdy.$$

称 $\langle f,g\rangle$ 为 f 与 g 的 Petersson 内积。$S_k(\Gamma)$ 在 Petersson 内积下成为一个 Hilbert 空间。若 Γ' 是 Γ 的子群，且 $[\Gamma:\Gamma']<\infty$，由定义可知在 Γ 和 Γ' 上 f 与 g 的内积是一样的。

设 $\alpha\in GL_2^+(\boldsymbol{R})$，则 $f|[\alpha]_k$、$g|[\alpha]_k\in A_k(\alpha^{-1}\Gamma\alpha)$，以 Δ 表示 $\alpha^{-1}\Gamma\alpha$ 的一个基域，这时 $\alpha(\Delta)$ 就是 Γ 的一个基域，所以

$$\langle f|[\alpha]_k,g|[\alpha]_k\rangle$$

$$=\det(\alpha)^k(\mu(A))^{-1}\iint\limits_A f(\alpha(z))\bar{g}(\alpha(z))|J(\alpha,z)|^{-2k}y^{k-2}dxdy$$

$$=(\mu(A))^{-1}\iint\limits_{\alpha(A)} f(z)\bar{g}(z)y^{k-2}dxdy=\langle f, g\rangle. \qquad (3.1.5)$$

引理 3.12 设 f、$g\in S_k(\Gamma)$，$\alpha\in\tilde{\Gamma}$，$\alpha^\tau=\det(\alpha)\cdot\alpha^{-1}$，则

$$\langle f|[\Gamma\alpha\Gamma]_k, g\rangle=\langle f, g|[\Gamma\alpha^\tau\Gamma]_k\rangle.$$

证明 设 A 为 Γ 的基域及 $\Gamma=\bigcup_i(\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha)\varepsilon_i(\varepsilon_i\in\Gamma)$，于是 $\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup_i\Gamma\alpha\varepsilon_i$，而 $P=\bigcup_i\varepsilon_i(A)$ 是 $\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha$ 的基域。由(3.1.5)式，

$$\begin{aligned}
&\mu(A)\langle f|[\Gamma\alpha\Gamma]_k, g\rangle\\
&=\det(\alpha)^{k/2-1}\sum_i\iint\limits_A f|[\alpha\varepsilon_i]_k\bar{g}|[\varepsilon_i]_k y^{k-2}dxdy\\
&=\det(\alpha)^{k/2-1}\sum_i\iint\limits_{\varepsilon_i(A)} f|[\alpha]_k\bar{g}y^{k-2}dxdy\\
&=\det(\alpha)^{k/2-1}\iint\limits_P f|[\alpha]_k\bar{g}y^{k-2}dxdy\\
&=\det(\alpha)^{k/2-1}\iint\limits_{\alpha(P)} f\cdot\bar{g}|[\alpha^{-1}]_k y^{k-2}dxdy.
\end{aligned}$$

注意 $g|[\alpha^{-1}]_k=g|[\alpha^\tau]_k$，$\alpha(P)$ 是 $\alpha(\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha)\alpha^{-1}=\Gamma\cap\alpha\Gamma\alpha^{-1}$ 的基域。设 $\Gamma=\bigcup_j(\Gamma\cap(\alpha^\tau)^{-1}\Gamma\alpha^\tau)\varepsilon_j'$，因而 $\Gamma\alpha^\tau\Gamma=\bigcup_j\Gamma\alpha^\tau\varepsilon_j'$，由于

$$(\alpha^\tau)^{-1}\Gamma\alpha^\tau=\alpha\Gamma\alpha^{-1},$$

所以 $\bigcup_j\varepsilon_j'(A)$ 是 $\Gamma\cap\alpha\Gamma\alpha^{-1}$ 的基域。我们有

$$\begin{aligned}
&\mu(A)\cdot\langle f, g|[\Gamma\alpha^\tau\Gamma]_k\rangle\\
&=\det(\alpha)^{k/2-1}\sum_j\iint\limits_A f\bar{g}|[\alpha^\tau\varepsilon_j]_k y^{k-2}dxdy\\
&=\det(\alpha)^{k/2-1}\sum_j\iint\limits_{\varepsilon_j'(A)} f\bar{g}|[\alpha^\tau]_k y^{k-2}dxdy\\
&=\det(\alpha)^{k/2-1}\iint\limits_{\alpha(P)} f\bar{g}|[\alpha^\tau]_k y^{k-2}dxdy.
\end{aligned}$$

当 f 与 g 中仅有一个属于 $S_k(\Gamma)$ 时，引理 3.12 也同样成立。

回到 $\Gamma=SL_2(\mathbf{Z})$ 的情况。设 $\alpha\in\Delta=M_2^+(\mathbf{Z})$，由于 α 与 α^ι 有相同的初等因子，故 $\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\alpha^\iota\Gamma$，于是

$$\langle f|[\Gamma\alpha\Gamma]_k,\ g\rangle=\langle f,\ g|[\Gamma\alpha\Gamma]_k\rangle,\qquad f,\ g\in S_k(\Gamma).$$

算子集 $\{[\Gamma\alpha\Gamma]_k\}_{\alpha\in\Delta}$ 为一组可交换的自伴算子。因此 $S_k(\Gamma)$ 中存在 $\boldsymbol{C}$ 上的一组基，其中每个函数都是这组算子的公共本征函数，而且本征值都是实数。对任一 $f\in S_k(\Gamma)$，我们有

$$f|[T(p,\ p)]_k=p^{k-2}f.$$

由于 R_p 是由 $T(p,\ p)$ 及 $T(p)$ 生成，所以 f 是所有算子

$$\{[\Gamma\alpha\Gamma]_k\}_{\alpha\in\Delta}$$

的公共本征函数的充要条件是对任一素数 p，f 是 $[T(p)]_k$ 的本征函数。

定理 3.13 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c(n)e(nz)$ 为 $G_k(\Gamma)$ 中的一个非常数的函数，且对一切正整数 n，f 是 $[T(n)]_k$ 的本征函数。设

$$f|[T(n)]_k=\lambda_n f\quad(\lambda_n\in\boldsymbol{R}),$$

则 $c(1)\neq0$，$c(n)=\lambda_n c(1)$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n n^{-s}=\prod\nolimits_p(1-\lambda_p p^{-s}+p^{k-1-s})^{-1},\tag{3.1.6}$$

(不考虑收敛性)。反之，如果形式地有

$$\sum_{n=1}^{\infty}c(n)n^{-s}=\prod\nolimits_p(1-c(p)p^{-s}+p^{k-1-s})^{-1},\tag{3.1.7}$$

则 $f|[T(n)]_k=c(n)f$ 对一切 n 都成立。

证明 我们有

$$f|[T(n)]_k=n^{k/2-1}\sum_{\substack{ad=n\\a>0}}\sum_{b=0}^{d-1}f\left|\begin{pmatrix}a&b\\0&d\end{pmatrix}_k\right.$$

$$=n^{k-1}\sum_{ad=n}\sum_{b=0}^{d-1}\sum_{m=0}^{\infty}c(m)e(m(az+b)/d)d^{-k}$$

$$=\sum_{ad=n}a^{k-1}d^{-1}\sum_{m=0}^{\infty}c(m)e(maz/d)\sum_{b=0}^{d-1}e(mb/d)$$

$$=\sum_{t=1}^{\infty}\sum_{a|n}a^{k-1}c(nt/a)e(taz)$$

$$=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{a\mid(N,n)}a^{k-1}c(mn/a^2)e(mz), \tag{3.1.8}$$

因 $f\mid[T(n)]_k=\lambda_n f$，比较上式两端 $e(z)$ 项的系数，得到

$$\lambda_n c(1)=c(n).$$

由于 f 不是常数，可见 $c(1)\neq 0$，由(3.1.2)式可得到(3.1.6)式。

反之，若设(3.1.7)式成立。令

$$\sum_{r=0}^{\infty} b(p^r)p^{-rs}=(1-c(p)p^{-s}+p^{k-1-s})^{-1}$$

$$=(1-Ap^{-s})^{-1}(1-Bp^{-s})^{-1}$$

$$=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{A^{r+1}-B^{r+1}}{A-B}p^{-rs},$$

其中 A 和 B 适合 $A+B=c(p)$，$AB=p^{k-1}$。故

$$b(p^r)=\frac{A^{r+1}-B^{r+1}}{A-B}=\sum_{i=0}^{r}A^{r-i}B^i.$$

设 $r\leqslant l$，则

$$b(p^l)b(p^r)=(A^{l+1}b(p^r)-B^{l+1}b(p^r))(A-B)^{-1}$$

$$=\left(A^{l+1}\sum_{t=0}^{r}A^{r-t}B^t-B^{l+1}\sum_{t=0}^{r}A^tB^{r-t}\right)(A-B)^{-1}$$

$$=\sum_{t=0}^{r}A^tB^t(A^{l+r+1-2t}-B^{l+r+1-2t})(A-B)^{-1}$$

$$=\sum_{t=0}^{r}p^{t(k-1)}b(p^{l+r-2t})=\sum_{a\mid(p^l,p^r)}a^{k-1}b(p^{l+r}/a^2)$$

设 $n\neq 0$，$n=\prod p^{n_p}$ 为标准因子分解，由(3.1.7)式得到

$$c(n)=\prod_{p\mid n}b(p^{n_p}).$$

设 $m=\prod p^{m_p}$，我们有

$$c(n)c(m)=\prod_{p}b(p^{n_p})b(p^{m_p})$$

$$=\prod_{p}\sum_{a\mid(p^{n_p},p^{m_p})}a^{k-1}b(p^{n_p+m_p}/a^2)$$

$$=\sum_{a\mid(m,n)}a^{k-1}c(mn/a^2).$$

由(3.1.8)式，得到 $f\mid[T(n)]_k=c(n)f$。

以下讨论模群 Γ 的同余子群的 Hecke 环。

设 N 为正整数．为了简便，我们以 Γ_N 代表群 $\Gamma(N)$。设 Γ' 是

Γ 的同余子群，且 $\Gamma_N\subset\Gamma'\subset\Gamma$。

引理 3.14 设 a、b 为正整数，$c=(a,\ b)$，则 $\Gamma_c=\Gamma_a\Gamma_b$。

证明 显然有 $\Gamma_a\Gamma_b\subset\Gamma_c$。今设 $\alpha\in\Gamma_c$，由孙子定理，可找到 $\beta\in M_2(\boldsymbol{Z})$，使

$$\beta\equiv1\ \ (a),\quad \beta\equiv\alpha\ \ (b).$$

因而 $\det(\beta)\equiv1\ \ (ab/c)$。由定理 2.8 的证明，可知存在 $\gamma\in\Gamma$，使 $\gamma\equiv\beta(ab/c)$。因而 $\gamma\equiv1(a)$，$\gamma^{-1}\alpha\equiv1(b)$，即 $\gamma\in\Gamma_a$，$\gamma^{-1}\alpha\in\Gamma_b$，所以 $\alpha=\gamma\cdot\gamma^{-1}\alpha\in\Gamma_a\Gamma_b$。

设 $\alpha\in M_2(\boldsymbol{Z})$，定义 $\lambda_N(\alpha)=\alpha(\mathrm{mod}\,N)\in M_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$。令

$$\Delta_N=\{\alpha\in M_2(\boldsymbol{Z})\,|\,\det\alpha>0,\ (\det\alpha,\ N)=1\}$$

及

$$\Phi=\{\alpha\in\Delta_N\,|\,\lambda_N(\Gamma'\alpha)=\lambda_N(\alpha\Gamma')\}.$$

当 $\alpha\in\Delta_N$ 时，$\lambda_N(\alpha)$ 属于 $GL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})$。

引理 3.15 设 α、$\beta\in\Delta_N$，则

(1) $\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\alpha\Gamma_N=\Gamma_N\alpha\Gamma$。

(2) 若 $\alpha\in\Phi$，则 $\Gamma'\alpha\Gamma'=\{\xi\in\Gamma\alpha\Gamma\,|\,\lambda_N(\xi)\in\lambda_N(\Gamma'\alpha)\}$。

(3) 当且仅当 $\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\beta\Gamma$，$\alpha\equiv\beta(N)$ 时，$\Gamma_N\alpha\Gamma_N=\Gamma_N\beta\Gamma_N$。

(4) 若 $\alpha\in\Phi$，则 $\Gamma'\alpha\Gamma'=\Gamma'\alpha\Gamma_N=\Gamma_N\alpha\Gamma'$。

(5) 若 $\alpha\in\Phi$，$\Gamma'\alpha\Gamma'=\bigcup\Gamma'\alpha_i$，则 $\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup\Gamma\alpha_i$。

证明 记 $a=\det\alpha$。因 $(a,\ N)=1$，由引理 3.14，可知 $\Gamma=\Gamma_a\Gamma_N$。利用 $\alpha\Gamma_a\alpha^{-1}\subset\Gamma$，可见 $\Gamma\alpha\Gamma\subset\Gamma\alpha\Gamma_N$，而 $\Gamma\alpha\Gamma_N\subset\Gamma\alpha\Gamma$ 是显然的，故证得 (1)。易见 $\Gamma'\alpha\Gamma'\subset\Gamma\alpha\Gamma$。设 $\xi=\delta\alpha\gamma$，其中 δ、$\gamma\in\Gamma'$。由于 $\alpha\in\Phi$，这时 $\lambda_N(\xi)\in\lambda_N(\Gamma'\alpha)$。反之，设

$$\xi\in\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\alpha\Gamma_N,$$

这时 $\xi=\delta\alpha\gamma$，其中 $\delta\in\Gamma$，$\gamma\in\Gamma_N$。若 $\lambda_N(\xi)\in\lambda_N(\Gamma'\alpha)$，则有 $\xi\equiv\varepsilon\alpha(N)$，其中 $\varepsilon\in\Gamma'$，因而

$$\delta\equiv\varepsilon(N)\quad(\text{注意 }\alpha\,\mathrm{mod}\,N\in GL_2(\boldsymbol{Z}/N\boldsymbol{Z})),$$

即 $\delta\varepsilon^{-1}\in\Gamma_N$。所以 $\delta=\delta\varepsilon^{-1}\cdot\varepsilon\in\Gamma'$，证得(2)。(3)和 (4) 都可由(2)推出。现在来证明(5)，设 $\alpha\in\Phi$，$\Gamma'\alpha\Gamma'=\bigcup\Gamma'\alpha_i$，由(1) 可得 $\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\alpha\Gamma'=\bigcup\Gamma\alpha_i$。若 $\Gamma\alpha_i=\Gamma\alpha_j$，则有 $\alpha_i=\gamma\alpha_j$，$\gamma\in\Gamma$。因为

α_i、$\alpha_j\in\Gamma'\alpha\Gamma'$，由(2)，存在 $\delta\in\Gamma'$，使 $\alpha_i\equiv\delta\alpha_j(N)$。故 $\gamma\equiv\delta(N)$，则有 $\gamma\in\Gamma'$，所以 $i=j$。

引理 3.16 对应 $\Gamma'\alpha\Gamma'\to\Gamma\alpha\Gamma$ 是 $R(\Gamma',\Phi)$ 到 $R(\Gamma,\Delta)$ 的同态。

证明 仅需证明上述映射保持乘法关系。设 $\alpha,\beta\in\Phi$，

$$\Gamma'\alpha\Gamma'=\bigcup\Gamma'\alpha_i,\quad \Gamma'\beta\Gamma'=\bigcup\Gamma'\beta_j,$$

由引理 3.15 的(5)，我们有

$$\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup\Gamma\alpha_i,\quad \Gamma\beta\Gamma=\bigcup\Gamma\beta_j.$$

设
$$\Gamma'\alpha\Gamma'\cdot\Gamma'\beta\Gamma'=\sum_{\xi}c'_\xi\Gamma'\xi\Gamma',$$

其中
$$c'_\xi=\#\{(i,\ j)\mid\Gamma'\alpha_i\beta_j=\Gamma'\xi\}.$$

由引理 3.15 的(1)，我们有

$$\Gamma\alpha\Gamma\beta\Gamma=\Gamma\alpha\Gamma'\beta\Gamma'=\bigcup_\xi\Gamma\xi\Gamma'=\bigcup_\xi\Gamma\xi\Gamma,$$

而且不同的 ξ 对应不同的双陪集，不然，若有 $\Gamma\xi\Gamma=\Gamma\xi'\Gamma$，由于

$$\lambda_N(\xi)\in\lambda_N(\Gamma'\alpha\beta),\qquad \lambda_N(\xi')\in\lambda_N(\Gamma'\alpha\beta),$$

可得 $\Gamma'\xi\Gamma'=\Gamma'\xi'\Gamma'$。设

$$\Gamma\alpha\Gamma\cdot\Gamma\beta\Gamma=\sum_{\xi}c_\xi\Gamma\xi\Gamma,$$

其中

$$c_\xi=\#\{(i,\ j)\mid\Gamma\alpha_i\beta_j=\Gamma\xi\},$$

今证 $c_\xi=c'_\xi$。若 $\Gamma'\alpha_i\beta_j=\Gamma'\xi$，则显然有 $\Gamma\alpha_i\beta_j=\Gamma\xi$。反之，若 $\Gamma\alpha_i\beta_j=\Gamma\xi$，则有 $\xi=\gamma\alpha_i\beta_j$，$\gamma\in\Gamma$。因为 $\xi\in\Gamma'\alpha\Gamma'\beta\Gamma'$，故

$$\lambda_N(\xi)\in\lambda_N(\Gamma'\alpha_i\beta_j),$$

由此可推出 $\gamma\in\Gamma'$，即 $\Gamma'\alpha_i\beta_j=\Gamma'\xi$，所以

$$\Gamma'\alpha\Gamma'\cdot\Gamma'\beta\Gamma'\to\Gamma\alpha\Gamma\cdot\Gamma\beta\Gamma.$$

设 $\mathfrak{v}$ 为 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ 的一个子群，t 为 N 的正因子，定义

$$\Gamma'=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})\mid a\in\mathfrak{v},\ t\mid b,\ N\mid c\right\},$$

$$\Delta'=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in M_2^+(\mathbf{Z})\mid a\in\mathfrak{v},\ t\mid b,\ N\mid c\right\}.$$

易见，当 $\mathfrak{v}=1$，$t=N$ 时，Γ' 就是 Γ_N；当 $\mathfrak{v}=(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$，$t=1$ 时，

Γ' 就是 $\Gamma_0(N)$。显然有 $\Gamma_N\subset\Gamma'\subset\Gamma$。类似于引理3.7，可以证明 $\Delta'\subset\tilde{\Gamma}'$。现在我们来讨论 Hecke 环 $R(\Gamma',\Delta')$ 的结构。首先考虑 Δ' 中行列式与 N 互素的矩阵，定义

$$\Delta'_N=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Delta'\,\middle|\,(d,N)=1\right\},$$

$$\Delta^*_N=\left\{\alpha\in M_2^+(Z)\,\middle|\,\lambda_N(\alpha)=\begin{pmatrix}1&0\\0&d\end{pmatrix},\ (d,N)=1\right\},$$

易见 $\Delta^*_N\subset\Delta'_N\subset\Delta'$。

若 $\alpha\in\Delta'_N$，$d=\det\alpha$，则

$$\det\left[\begin{pmatrix}1&\\&e\end{pmatrix}\alpha\right]\equiv1\ (N),$$

这里取 e 使 $ed\equiv1(N)$。利用定理2.8的证明，可以找到 $\gamma\in\Gamma$，使

$$\gamma\equiv\begin{pmatrix}1&\\&e\end{pmatrix}\alpha\quad(N),$$

这时 $\gamma\in\Gamma'$，且

$$\alpha\gamma^{-1}\equiv\begin{pmatrix}1&\\&d\end{pmatrix}\quad(N),$$

所以

$$\alpha=\alpha\gamma^{-1}\cdot\gamma\in\Delta^*_N\Gamma',$$

即证得 $\Delta'_N=\Delta^*_N\Gamma'$，同理可证 $\Delta'_N=\Gamma'\Delta^*_N$。所以对任一 $\alpha\in\Delta'_N$，可找到 $\alpha'\in\Delta^*_N$，使 $\Gamma'\alpha\Gamma'=\Gamma'\alpha'\Gamma'$，因而

$$R(\Gamma',\Delta'_N)=R(\Gamma',\Delta^*_N).$$

对任一 $\alpha\in\Delta'_N$，若 $\alpha\in\Gamma'\alpha'$，$\lambda_N(\alpha')=\begin{pmatrix}1&\\&x\end{pmatrix}$，则

$$\Gamma'\alpha\equiv\Gamma'\begin{pmatrix}1&\\&x\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix}1&\\&x\end{pmatrix}\Gamma'\equiv\alpha\Gamma'\ (N).$$

所以 $\Delta'_N\subset\Phi$。

引理 3.17　在引理3.16中引入的映射

$$\Gamma'\alpha\Gamma'\mapsto\Gamma\alpha\Gamma\quad(\alpha\in\Delta'_N)$$

定义了 $R(\Gamma',\Delta'_N)$ 到 $R(\Gamma,\Delta_N)$ 之上的同构。

证明 我们仅需证明上述映射是映上的且是单射。设 η 为 Δ_N 中任一元素，$d=\det\eta$，类似上面的讨论，可以找到 $\gamma\in\Gamma$，使

$$\eta\gamma^{-1}\equiv\begin{pmatrix}1 & \\ & d\end{pmatrix}\quad(N),$$

即 $\eta\gamma^{-1}\in\Delta_N^*$，从而

$$\Gamma'\eta\gamma^{-1}\Gamma'\to\Gamma\eta\gamma^{-1}\Gamma=\Gamma\eta\Gamma,$$

这证明了上述映射是映上的。设 α、$\beta\in\Delta_N^*$，

$$\lambda_N(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & \\ & c\end{pmatrix},\ \lambda_N(\beta)=\begin{pmatrix}1 & \\ & d\end{pmatrix},$$

若 $\Gamma\alpha\Gamma=\Gamma\beta\Gamma$，则 $c\equiv\det\alpha=\det\beta\equiv d\ \ (N)$，由引理 3.15 的(3)，有 $\Gamma_N\alpha\Gamma_N=\Gamma_N\beta\Gamma_N$，更有 $\Gamma'\alpha\Gamma'=\Gamma'\beta\Gamma'$，即上述映射是单射。

设 p 为素数，令 $E_p=GL_2(\mathbf{Z}_p)$。设 α、$\beta\in\Delta$，当且仅当 α 与 β 的初等因子有相同的 p 支量时，有 $E_p\alpha E_p=E_p\beta E_p$。

引理 3.18 设 $\alpha\in\Delta'$，$\det\alpha=mq$，其中 q 与 N 互素，$m|N^\infty$，则

(1) $\Gamma'\alpha\Gamma'=\{\beta\in\Delta'\mid\det\alpha=mq$，对任一 $p|q$ 有

$$E_p\alpha E_p=E_p\beta E_p\}.$$

(2) 存在 $\xi\in\Delta_N^*$，使 $\det\xi=q$，且对任一 $p|q$，有

$$E_p\alpha E_p=E_p\xi E_p.$$

(3) 令 $\eta=\begin{pmatrix}1 & \\ & m\end{pmatrix}$，则

$$\Gamma'\alpha\Gamma'=\Gamma'\xi\Gamma'\cdot\Gamma'\eta\Gamma'=\Gamma'\eta\Gamma'\cdot\Gamma'\xi\Gamma'.$$

证明 记(1)中右端的集合为 $X(\alpha)$。若 $\beta\in\Gamma'\alpha\Gamma'$，则

$$\det\beta=\det\alpha=mq,$$

β 与 α 具有相同的初等因子，因而 $\beta\in X(\alpha)$，故 $\Gamma'\alpha\Gamma'\subset X(\alpha)$。下面我们将证明 $X(\alpha)$ 包含在 Γ' 的一个双陪集内，由此即可证得(1)。

设 $\beta=\begin{pmatrix}a & *\\ * & *\end{pmatrix}$ 为 $X(\alpha)$ 中任一元素，可以找到 $\gamma\in\Gamma$，使

$$\gamma\equiv\begin{pmatrix}a^{-1} & \\ & a\end{pmatrix}\quad(mN),$$

易见这时 $\gamma\in\Gamma'$。我们有

$$\gamma\beta\equiv\begin{pmatrix}1 & tb\\ fN & *\end{pmatrix}\quad(mN).$$

令

$$\delta=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -fN & 1\end{pmatrix},\quad \varepsilon=\begin{pmatrix}1 & tb\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

则

$$\delta\gamma\beta\varepsilon^{-1}\equiv\begin{pmatrix}1 & \\ & mq\end{pmatrix}\quad(mN).$$

记 $\xi=\delta\gamma\beta\varepsilon^{-1}\eta^{-1}$，易见 $\det\xi=q$，且

$$\xi\equiv\begin{pmatrix}1 & \\ & q\end{pmatrix}\quad(N),$$

即 $\xi\in\Delta_N^*$。对 q 的任一素因子 p，因 δ、γ、ε、$\eta\in E_p$，故

$$E_p\xi E_p=E_p\beta E_p=E_p\alpha E_p,$$

这证明了(2)。

由上述证明可见 $\beta\in\Gamma'\xi\eta\Gamma'$。今证双陪集 $\Gamma'\xi\eta\Gamma'$ 并不依赖于 β 的选取，如果证明了这一点，我们就有 $X(\alpha)\subset\Gamma'\xi\eta\Gamma'$，即证明了(1)。设 β_1 为 $X(\alpha)$ 中另一元素，利用同样方法找到 $\xi_1\in\Delta_N^*$，$\det\xi_1=q$，且对 q 的任一素因子 p 有 $E_p\xi_1E_p=E_p\alpha E_p$。$\xi$ 与 ξ_1 具有相同的初等因子。又由于 $\xi\equiv\xi_1(N)$，由引理3.16的(3)，有 $\xi_1=\varphi\xi\psi$，φ、$\psi\in\Gamma_N$。我们欲证明 $\Gamma'\xi\eta\Gamma'=\Gamma'\xi_1\eta\Gamma'$，即希望能找到 ω、$\theta\in\Gamma'$，使 $\xi\psi\eta=\omega\xi\eta\theta^{-1}$，这时 $\omega=\xi\psi\eta\theta\eta^{-1}\xi^{-1}$。利用孙子定理可以找到 θ，使

$$\theta\equiv I\quad(mN),\qquad \theta\equiv\eta^{-1}\psi^{-1}\eta\quad(q).$$

由于 $\det\theta\equiv1\ (qmN)$，故可设 $\theta\in\Gamma$。由第一个同余式可知 $\theta\in\Gamma_{mN}$，由第二个同余式可知 $\psi\eta\theta\eta^{-1}\in\Gamma_q$，因为 $\det\xi=q$，故 $\omega\in\Gamma$，又由于 $\theta\in\Gamma_{mN}$，$\psi\in\Gamma_N$，可见 $\omega\in\Gamma_N$。

今证(3)。由(1)的证明，我们已知

$$X(\alpha)=\Gamma'\alpha\Gamma'=\Gamma'\xi\Gamma'\eta\Gamma'=\Gamma'\eta\Gamma'\xi\Gamma'.$$

设 $\Gamma'\xi\Gamma'=\bigcup\Gamma'\xi_i$，因为 $\xi\in\Delta_N^*\subset\Phi$，由引理3.16的(5)，有 $\Gamma\xi\Gamma$

$=\bigcup\Gamma\xi_i$，在下面的引理3.19中，我们将证明

$$\Gamma'\eta\Gamma'=\bigcup_{r=0}^{m-1}\Gamma'\begin{pmatrix}1&tr\\0&m\end{pmatrix}=\bigcup_{r=0}^{m-1}\Gamma'\eta_r.$$

不难验证

$$\Gamma\begin{pmatrix}1&tr\\0&m\end{pmatrix}\quad(r=0,\ \cdots,\ m-1)$$

为 $\Gamma\eta\Gamma$ 中 m 个不同的右陪集。因为 $\det\xi=q$ 与 $\det\eta=m$ 是互素的，由引理 3.8，我们有

$$\Gamma\xi\Gamma\cdot\Gamma\eta\Gamma=\Gamma\xi\eta\Gamma=\Gamma\alpha\Gamma,$$

所以最多有一对 $(i,\ r)$ 使 $\Gamma\xi_i\eta_r=\Gamma\alpha$，因而也最多只有一对 $(i,\ r)$，使 $\Gamma'\xi_i\eta_r=\Gamma'\alpha$，这就证明了 $\Gamma'\alpha\Gamma'=\Gamma'\xi\Gamma'\cdot\Gamma'\eta\Gamma'$，同样也可证明 $\Gamma'\alpha\Gamma'=\Gamma'\eta\Gamma'\cdot\Gamma'\xi\Gamma'$。

引理 3.19 设 $\alpha\in\Delta'$，$\det\alpha=m$，$m|N^\infty$，则

$$\Gamma'\alpha\Gamma'=\{\beta\in\Delta'|\det\beta=m\}=\bigcup_{r=0}^{m-1}\Gamma'\begin{pmatrix}1&tr\\0&m\end{pmatrix}.$$

证明 第一个等号是引理 3.18 的特例。今证第二个等号。设 $\beta\in\Delta'$，$\det\beta=m$，由引理 3.18 的证明，可知存在 δ、$\gamma\in\Gamma'$，$\xi\in\Gamma_N$，使

$$\delta\gamma\beta=\xi\begin{pmatrix}1&tb\\0&m\end{pmatrix}.$$

若 $b=r+mh$ $(0\leqslant r\leqslant m-1)$，则

$$\begin{pmatrix}1&tb\\0&m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&th\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&tr\\0&m\end{pmatrix},$$

即
$$\beta\in\Gamma'\begin{pmatrix}1&tr\\0&m\end{pmatrix}.$$

不难证明

$$\Gamma'\begin{pmatrix}1&tr\\0&m\end{pmatrix}\quad(0\leqslant r\leqslant m-1)$$

为 m 个不同的右陪集。∎

以 $T'(n)$ 表示 $R(\Gamma',\ \Delta')$ 中适合条件 $\alpha\in\Delta'$，$\det\alpha=n$ 的所有

陪集 $\Gamma'\alpha\Gamma'$ 之和。当 $m|N^\infty$ 时，由引理 3.19，有 $\deg T(m)=m$。设 a、$d>0$，$a|d$，$(d, N)=1$，以 $T'(a, d)$ 表示在引理 3.17 所定义的 $R(\Gamma', \Delta'_N)$ 与 $R(\Gamma, \Delta_N)$ 同构之下，$T(a, d)$ 在 $R(\Gamma', \Delta'_N)$ 中所对应的元素，我们有

$$T'(a, b)=\Gamma'\sigma_a\begin{pmatrix} a & \\ & d\end{pmatrix}\Gamma',$$

其中 $\sigma_a\in\Gamma$，$\sigma_a\equiv\begin{pmatrix} a & \\ & a^{-1}\end{pmatrix}(N)$，因而 $\sigma_a\begin{pmatrix} a & \\ & d\end{pmatrix}\in\Delta_N^*$。

定理 3.20 (1) $R(\Gamma', \Delta')$ 是由下列元素生成的 $\mathbf{Z}$ 上的多项式环：

$$T'(p),\quad 任一 p|N;$$
$$T'(1, p),\ T'(p, p),\quad 任一 p\nmid N.$$

(2) 每个双陪集 $\Gamma'\alpha\Gamma'(\alpha\in\Delta')$ 都可表为

$$\Gamma'\alpha\Gamma'=T'(m)\cdot T'(a, d)$$
$$=T'(a, d)T'(m),\ m|N^\infty,\ (d, N)=1.$$

(3) 若 $m|N^\infty$，$n|N^\infty$，则

$$T'(m)T'(n)=T'(mn).$$

(4) 若 $(n_1, n_2)=1$，则

$$T'(n_1n_2)=T'(n_1)T'(n_2).$$

证明 由引理 3.18、3.19 可得(2)。由引理 3.19，有

$$T'(m)T'(n)=cT'(mn),$$

c 为正整数，但由

$$\deg T'(m)\deg T'(n)=\deg T'(mn).$$

可见 $c=1$，因而证得(3)。由(2)、(3)及引理 3.17 证得(1)。(4)可由(3)及引理 3.8 得到。

定义形式幂级数

$$D'(s)=\sum_{n=1}^\infty T'(n)n^{-s}.$$

由定理 3.20 及引理 3.9，我们有

$$D'(s)=\prod_p\left(\sum_{k=0}^\infty T'(p^k)p^{-ks}\right)$$

$$=\prod_{p\mid N}(1-T'(p)p^{-s})^{-1}$$
$$\times\prod_{p\nmid N}(1-T'(p)p^{-s}+T'(p,\ p)p^{1-2s})^{-1}. \quad (3.1\ 9)$$

引理 3.21 σ_a 定义如上。n 为任一正整数，我们有

$$T'(n)=\{\alpha\in\Delta'\mid\det\alpha=n\}$$
$$=\bigcup_{\substack{ad=n\\(d,N)=1}}\bigcup_{b=0}^{d-1}T'\sigma_a\begin{pmatrix}a & tb\\0 & d\end{pmatrix}.$$

证明 等式最右端的集合包含在 $T'(n)$ 内，易证其中的右陪集互不相同。设 $n=mq$，$m\mid N^\infty$，$(q,\ N)=1$，则

$$\deg T'(n)=\deg T'(m)\deg T'(q)=m\cdot\sum_{d\mid q}d,$$

它恰为最右端右陪集的个数。

任一 $\alpha\in\widetilde{\Gamma}'$，我们已经定义了 $A_k(\Gamma')$ 上的一个线性算子 $[\Gamma'\alpha\Gamma']_k$。$R(\Gamma',\ \Delta')$ 是一个交换环，所以 $R(\Gamma',\ \Delta')$ 对应 $A_k(\Gamma')$ 上的一组可交换的线性算子。设 $\alpha\in\Delta_N^*$，$\det\alpha=q$。取 $\sigma_q\in\Gamma$，

$$\sigma_q\equiv\begin{pmatrix}q^{-1} & \\ & q\end{pmatrix}(N),$$

则
$$\alpha\equiv\sigma_q\alpha^\tau\equiv\alpha^\tau\sigma_q\ \ (N).$$

α 与 α^τ 有相同的初等因子，由引理 3.15 的(3)，我们有

$$\Gamma'\alpha\Gamma'=\Gamma'\sigma_q\alpha^\tau\Gamma'=\Gamma'\alpha^\tau\sigma_q\Gamma'.$$

易证 $\Gamma'\sigma_q=\sigma_q\Gamma'$，即 $\Gamma'\sigma_q\Gamma'=\Gamma'\sigma_q$。设 $\Gamma'\alpha^\tau\Gamma'=\bigcup\Gamma'\alpha_i$。若

$$\Gamma'\sigma_q\alpha_i=\Gamma'\sigma_q\alpha_j,$$

由于 $\Gamma'\sigma_q=\sigma_q\Gamma'$，可见 $i=j$。因此

$$\Gamma'\alpha\Gamma'=\Gamma'\sigma_q\Gamma'\cdot\Gamma'\alpha^\tau\Gamma'=\Gamma'\alpha^\tau\Gamma'\cdot\Gamma'\sigma_q\Gamma'.$$

由此可得

$$\Gamma'\alpha\Gamma'\cdot\Gamma'\alpha^\tau\Gamma'=\Gamma'\alpha^\tau\Gamma'\cdot\Gamma'\alpha\Gamma'.$$

所以 $[\Gamma'\alpha\Gamma']_k$ $(\alpha\in\Delta_N^*)$ 是 $A_k(\Gamma')$ 上的正规算子。

若 $\alpha\in\Delta'$，$\det\alpha=m\mid N^\infty$，由于 $\Gamma'\alpha\Gamma'=\Gamma'\alpha^\tau\Gamma'$（引理 3.19），可见这时 $[\Gamma'\alpha\Gamma']_k$ 是 $A_k(\Gamma')$ 上的自伴算子。

在有限维向量空间 $S_k(\Gamma')$ 上，一组可交换的正规算子一定有

一组公共本征矢，构成一组基。所以 $S_k(\Gamma')$ 中存在一组基，其中每个函数都是算子 $[\Gamma'\alpha\Gamma']_k$ $(\alpha\in\Delta')$ 的本征函数。

取一固定的 t $(t>0,\ t|N)$，考虑 $\mathfrak{D}=1$ 和 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ 两个情况。定义

$$\Gamma_0'=\left\{\gamma\in Sl_2(\mathbf{Z})\,\middle|\,\lambda_N(\gamma)=\begin{pmatrix}a & tb\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.a\in(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*,\ b\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}\right\},$$

$$\Gamma''=\left\{\gamma\in\Gamma_0'\,\middle|\,\lambda_N(\gamma)=\begin{pmatrix}1 & tb\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ b\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}\right\},$$

$$\Delta_0'=\left\{\alpha\in\Delta\,\middle|\,\lambda_N(\alpha)=\begin{pmatrix}a & tb\\ 0 & d\end{pmatrix},\right.$$

$$\left.a\in(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*,\ b、d\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}\right\},$$

$$\Delta''=\left\{\alpha\in\Delta\,\middle|\,\lambda_N(\alpha)=\begin{pmatrix}1 & tb\\ 0 & d\end{pmatrix},\ b、d\in\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}\right\}.$$

当 $t=1$ 时，Γ_0' 即为 $\Gamma_0(N)$，而当 $t=N$ 时，Γ'' 也记为 $\Gamma_1(N)$。

Γ'' 是 Γ_0' 的正规子群，且 $\Gamma_0'/\Gamma''\cong(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ 是一个交换群。设 $f\in G_k(\Gamma'')$，$\gamma\in\Gamma_0'$，可见 $f|[\gamma]_k\in G_k(\Gamma'')$。我们得到了 Γ_0' 在 $G_k(\Gamma'')$ 上的一个表示 $f\mapsto f|[\gamma]_k$。当 $\gamma\in\Gamma''$ 时，$f|[\gamma]_k=f$，所以该表示实际上也是商群 Γ_0'/Γ'' 的表示，空间 $G_k(\Gamma'')$ 可以分解为形如 $G_k(\Gamma_0',\psi)$ 的子空间的直和，这里 ψ 是模 N 的特征，且 $\psi(-1)=(-1)^k$。$G_k(\Gamma_0',\psi)$ 是由适合

$$f|[\gamma]_k=\psi(d_\gamma)f$$

的函数 f 组成。

设 $\alpha\in\Delta_0'$，若 $\Gamma_0'\alpha\Gamma_0'=\bigcup_\nu\Gamma_0'\alpha_\nu$，$f\in G_k(\Gamma_0',\psi)$，令

$$f|[\Gamma_0'\alpha\Gamma_0']_{k,\psi}=(\det\alpha)^{k/2-1}\textstyle\sum_\nu\psi^{-1}(d(\alpha_\nu))f|[\alpha_\nu]_k,$$

其中 $d(\alpha_\nu)$ 是 α_ν 的右下角元素，易证 $[\Gamma_0'\alpha\Gamma_0']_{k,\psi}$ 是 $G_k(\Gamma_0',\psi)$ 上的一个线性算子。从而我们得到 $R(\Gamma_0',\Delta_0')$ 在 $G_k(\Gamma_0',\psi)$ 上的表示，以 $T'(a,d)_{k,\psi}$ 和 $T'(m)_{k,\psi}$ 分别表示 $T'(a,d)$ 和 $T'(m)$ 在

$G_k(\Gamma_0', \psi)$上的作用。

Γ_0'中使 $i\infty$ 固定的子群由$\begin{pmatrix}1 & t\\ 0 & 1\end{pmatrix}$生成。若

$$f(z)\in G_k(\Gamma_0'),$$

则 $f(z)$在 $i\infty$ 的展开式为

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c(n)e(nz/t)。$$

设m为正整数，若

$$g(z)=f|T'(m)_{k,\psi}=\sum_{n=0}^{\infty} c'(n)e(nz/t),$$

利用引理 3.21，因为 $\sigma_a\in\Gamma_0'$，我们有

$$\begin{aligned}g(z)&=\sum_{\substack{ad=m\\a>0}}\sum_{b=0}^{d-1}\psi(a)f\left(\frac{az+bt}{d}\right)d^{-k}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)\sum_{\substack{ad=m\\a>0}}a^{k-1}\psi(a)e(naz/dt)d^{-1}\sum_{b=0}^{d-1}e(nb/d)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a|m}a^{k-1}\psi(a)c(nm/a)e(anz/t)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{a|(n,m)}a^{k-1}\psi(a)c(nm/a^2)e(nz/t),\end{aligned}$$

故

$$c'(n)=\sum_{a|(n,m)}a^{k-1}\psi(a)c(nm/a^2)。$$

当q与N互素时，由于

$$f|T'(q, q)_{k,\psi}=q^{k-2}\psi(q)f, \quad f\in G_k(\Gamma_0', \psi),$$

由(3.1.9)式，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}T'(n)_{k,\psi}n^{-s}=\prod_p(1-T'(p)_{k,\psi}p^{-s}+\psi(p)p^{k-1-2s})^{-1}$$

(当 $p|N$ 时，$\psi(p)=0$)。类似定理 3.13，有以下定理：

定理 3.22　设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} c(n)e(nz/t)$为 $G_k(\Gamma_0', \psi)$ 中所有算子 $T'(n)_{k,\psi}$ 的非零公共本征矢：$f|T'(n)_{k,\psi}=\lambda_n f$，则 $c(1)\neq 0$，$c(n)=\lambda_n c(1)$，且

$$\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n n^{-s}=\prod_p(1-\lambda_p p^{-s}+\psi(p)p^{k-1-2s})^{-1}$$

(不考虑收敛性)。反之,如果形式地有

$$\sum_{n=1}^{\infty}c(n)n^{-s}=\prod_p(1-c(p)p^{-s}+\psi(p)p^{k-1-2s})^{-1},$$

则 $f|T'(n)_{k,\psi}=c(n)f$。

§3.2　半整权模形式空间的算子

设N为正整数,$4|N$。令

$$L:\ \gamma\mapsto(\gamma,\ j(\gamma,\ z))$$

为 $\Gamma_0(N)$到$\hat{G}$中的映射,以 $\Delta_0(N)$, $\Delta_1(N)$, $\Delta(N)$ 分别表示 $\Gamma_0(N)$, $\Gamma_1(N)$, $\Gamma(N)$ 在映射L作用下的像,$G(\Delta_0(N),\ \kappa/2)$, $G(\Delta_1(N),\ \kappa/2)$, $G(\Delta(N),\ \kappa/2)$ 分别表示$\Delta_0(N)$, $\Delta_1(N)$ 和 $\Delta(N)$上权为$\kappa/2$的整模形式空间,κ为奇数,$S(\Delta_0(N),\ \kappa/2)$, $S(\Delta_1(N),\ \kappa/2)$, $S(\Delta(N),\ \kappa/2)$分别表示对应的尖形式子空间。设Δ为$\hat{G}$中任一第一类 Fuchsian 子群,f、$g\in G(\Delta,\ \kappa/2)$且其中至少有一个属于$S(\Delta,\ \kappa/2)$,与整权模形式类似,可以定义$f$与$g$的 Peterson 内积

$$\langle f,\ g\rangle=\langle f,\ g\rangle_\Delta=\frac{1}{\mu(D)}\iint_D f(z)\bar{g}(z)y^{\kappa/2-2}dxdy,$$

其中D为Δ的基域,

$$\mu(D)=\iint_D y^{-2}dxdy.$$

若$\Delta'\subset\Delta$, 且$[\Delta:\Delta']<\infty$, 则显然有$\langle f,\ g\rangle_{\Delta'}=\langle f,\ g\rangle_\Delta$。

$\Delta_1(N)$ 为 $\Delta_0(N)$ 的正规子群。任一$\xi\in\Delta_0(N)$, 可以对应$G(\Delta_1(N),\ \kappa/2)$上的一个线性算子

$$\xi:\ f\mapsto f|[\xi]_\kappa,\quad f\in G(\Delta_1(N),\ \kappa/2).$$

由此得到商群

$$\Delta_0(N)/\Delta_1(N)\cong(Z/NZ)^*$$

在 $G(\Delta_1(N),\ \kappa/2)$ 上的一个表示。$(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ 是交换群，所以空间 $G(\Delta_1(N),\ \kappa/2)$ 可以分解为它的一维表示空间的直和，因而我们得到

$$G(\Delta_1(N),\ \kappa/2)=\bigcup_\omega G(N,\ \kappa/2,\ \omega), \tag{3.2.1}$$

这里 ω 跑遍模 N 的偶特征。类似地有

$$S(\Delta_1(N),\ \kappa/2)=\bigcup_\omega S(N,\ \kappa/2,\ \omega). \tag{3.2.2}$$

以 $\varepsilon(\Delta_1(N),\ \kappa/2)$、$\varepsilon(\Delta(N),\ \kappa/2)$ 分别表示 $S(\Delta_1(N),\ \kappa/2)$ 和 $S(\Delta(N),\ \kappa/2)$ 在 $G(\Delta_1(N),\ \kappa/2)$ 和 $G(\Delta(N),\ \kappa/2)$ 中的正交补空间，$\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 表示 $S(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 在 $G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 中的正交补空间。设 $f\in\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，$g\in S(N,\ \kappa/2,\ \omega')$，且 $\omega\neq\omega'$。若 $\xi\in\Delta_0(N)$，则

$$\begin{aligned}\omega(d_\xi)\langle f,\ g\rangle&=\langle f\mid[\xi]_\kappa,\ g\rangle=\langle f,\ g\mid[\xi^{-1}]_\kappa\rangle\\&=\omega'(d_\xi)\langle f,\ g\rangle,\end{aligned}$$

d_ξ 可以为 $(\mathbf{Z}/N\mathbf{Z})^*$ 中任一元，可见 $\langle f,\ g\rangle=0$，即 $f\in\varepsilon(\Delta_1(N),\ \kappa/2)$。所以

$$\varepsilon(\Delta_1(N),\ \kappa/2)=\bigcup_\omega\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \omega). \tag{3.2.3}$$

引理 3.23 设 $N|M$，则

$$\varepsilon(\Delta_1(N),\ \kappa/2)=G(\Delta_1(N),\ \kappa/2)\cap\varepsilon(\Delta(M),\ \kappa/2).$$

证明 由于 $S(\Delta_1(N),\ \kappa/2)\subset S(\Delta(M),\ \kappa/2)$，显然有

$$G(\Delta_1(N),\ \kappa/2)\cap\varepsilon(\Delta(M),\ \kappa/2)\subset\varepsilon(\Delta_1(N),\ \kappa/2).$$

由于 $\mu=[\Gamma_1(N):\Gamma(M)]=[\Delta_1(N):\Delta(M)]<\infty$，

设

$$\Delta_1(N)=\bigcup_{j=1}^{\mu}\Delta(M)\xi_j$$

是 $\Delta_1(N)$ 关于 $\Delta(N)$ 的右陪集分解。任取 $f\in\varepsilon(\Delta_1(N),\ \kappa/2)$ 及 $g\in S(\Delta(M),\ \kappa/2)$，易见

$$g'=\sum_{j=1}^{\mu}g\mid[\xi_j]_\kappa\in S(\Delta_1(N),\ \kappa/2),$$

因而

$$0=\langle f,\ g'\rangle_{\Delta_1(N)}=\sum_{j=1}^{\mu}\langle f,\ g\mid[\xi_j]_\kappa\rangle_{\Delta(M)}$$

$$= \sum_{j=1}^{\mu} \langle f \mid [\xi_j^{-1}]_\kappa, g \rangle_{\Delta(M)} = \mu \langle f, g \rangle_{\Delta(M)},$$

(在(3.1.5)式中以 κ 代替 $k/2$)可见 $f \in \varepsilon(\Delta(M), \kappa/2)$，即

$$\varepsilon(\Delta_1(N), \kappa/2) \subset \varepsilon(\Delta(M), \kappa/2).$$

引理 3.24 设 $N|M$，ω 为模 N 的偶特征，则

$$\varepsilon(N, \kappa/2, \omega) = G(N, \kappa/2, \omega) \cap \varepsilon(\Delta(M), \kappa/2).$$

证明 由(3.2.1)、(3.2.3)及引理3.23，易证本引理.

引理 3.25 设 $f \in \varepsilon(\Delta_1(N), \kappa/2)$，$\alpha \in GL_2^+(\mathbf{Z})$，$\xi = (\alpha, \varphi(z)) \in \hat{G}$，则 $f \mid [\xi]_\kappa \in \varepsilon(\Delta(N\det\alpha), \kappa/2)$.

证明 由引理3.23，可知 $f \in \varepsilon(\Delta(N\det^2\alpha), \kappa/2)$. 任取

$$g \in S(\Delta(N\det\alpha), \kappa/2),$$

则
$$g \mid [\xi^{-1}]_\kappa \in S(\Delta(N\det^2\alpha), \kappa/2),$$

我们有

$$\langle f \mid [\xi]_\kappa, g \rangle_{\Delta(N\det\alpha)} = \langle f, g \mid [\xi^{-1}]_\kappa \rangle_{\Delta(N\det^2\alpha)} = 0.$$

下面讨论半整权模形式空间上的几个算子.

(1) Hecke 算子

设 Δ 为 $\hat{G}$ 的第一类 Fuchsian 子群，$\xi \in \hat{G}$，Δ 与 $\xi^{-1}\Delta\xi$ 为可公度，于是

$$\Delta\xi\Delta = \bigcup_{\nu=1}^{d} \Delta\xi_\nu,$$

设 $f \in G(\Delta, \kappa/2)$，定义

$$f \mid [\Delta\xi\Delta]_\kappa = (\det\xi)^{\kappa/4-1} \sum_{\nu=1}^{d} f \mid [\xi_\nu]_\kappa,$$

易见 $f \mid [\Delta\xi\Delta]_\kappa \in G(\Delta, \kappa/2)$.

记 $\Gamma = P(\Delta)$. 设 $\alpha \in GL_2^+(\mathbf{R})$，$\Gamma$ 与 $\alpha^{-1}\Gamma\alpha$ 为可公度. P 是 Δ 到 Γ 的1—1映射，记 $L: \Gamma \to \Delta$ 表示 P 的逆映射. 取 $\xi \in \hat{G}$，使 $P(\xi) = \alpha$. 任一 $\gamma \in \Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha$，由于 $P(\xi L(\gamma)\xi^{-1}) = \alpha\gamma\alpha^{-1} \in \Gamma$，故存在 $t(\gamma)$，使

$$L(\alpha\gamma\alpha^{-1}) = \xi L(\gamma)\xi^{-1}\{1, t(\gamma)\}, \quad \gamma \in \Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha.$$

映射 $t: \gamma \mapsto t(\gamma)$ 是 $\Gamma \cap \alpha^{-1}\Gamma\alpha$ 到 $T = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$ 的同态映射，这个同态不依赖于 ξ 的选取.

在不会引起混乱的情况下，我们以 $f|[\Delta\xi\Delta]$ 代替

$$f|[\Delta\xi\Delta]_*.$$

引理 3.26 映射 t 的定义如上，则 $L(\mathrm{Ker}(t))=\Delta\cap\xi^{-1}\Delta\xi$。如果$[\Gamma:\mathrm{Ker}(t)]<\infty$，则 Δ 与 $\xi^{-1}\Delta\xi$ 为可公度。当

$$t^\kappa(\gamma)\quad(\gamma\in\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha)$$

不恒为 1 时，对任一 $f\in G(\Delta,\kappa/2)$，有 $f|[\Delta\xi\Delta]=0$。

证明 若 $\gamma\in\mathrm{Ker}(t)$，则

$$L(\gamma)=\xi^{-1}L(\alpha\gamma\alpha^{-1})\xi\in\Delta\cap\xi^{-1}\Delta\xi.$$

反之，若 $L(\gamma)\in\Delta\cap\xi^{-1}\Delta\xi$，则 $\xi L(\gamma)\xi^{-1}\in\Delta$，由于

$$P(\xi L(\gamma)\xi^{-1})=\alpha\gamma\alpha^{-1},$$

故

$$L(\alpha\gamma\alpha^{-1})=\xi L(\gamma)\xi^{-1},$$

即 $t(\gamma)=1$，所以证得 $L(\mathrm{Ker}(t))=\Delta\cap\xi^{-1}\Delta\xi$。

由上述，我们得到 $[\Delta:\Delta\cap\xi^{-1}\Delta\xi]=[\Gamma:\mathrm{Ker}(t)]$。由于$P$是 $\xi^{-1}\Delta\xi$ 到 $\alpha^{-1}\Gamma\alpha$ 的同构，同样有

$$[\xi^{-1}\Delta\xi:\Delta\cap\xi^{-1}\Delta\xi]=[\alpha^{-1}\Gamma\alpha:\mathrm{Ker}(t)].$$

当$[\Gamma:\mathrm{Ker}(t)]<\infty$ 时，由于 Γ 与 $\alpha^{-1}\Gamma\alpha$ 可公度，可见 Δ 与 $\xi^{-1}\Delta\xi$ 为可公度。

设 $\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha=\bigcup_\mu\mathrm{Ker}(t)\delta_\mu$，$\Gamma=\bigcup_\nu(\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha)\gamma_\nu$ 为右陪集分解，则

$$\Delta=\bigcup_\nu L(\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha)L(\gamma_\nu)=\bigcup_{\mu,\nu}(\Delta\cap\xi^{-1}\Delta\xi)L(\delta_\mu\gamma_\nu).$$

因而

$$\Delta\xi\Delta=\bigcup_{\mu,\nu}\Delta\xi\cdot L(\delta_\mu\gamma_\nu).\tag{3.2.4}$$

由于 $\delta_\mu\in\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha$，所以

$$\xi L(\delta_\mu)=L(\alpha\delta_\mu\alpha^{-1})\xi\{1,\ t(\delta_\mu)^{-1}\}.$$

取 $f\in G(\Delta,\kappa/2)$，我们有

$$\begin{aligned}f|[\Delta\xi\Delta]&=(\det\xi)^{\kappa/4-1}\sum_{\mu,\nu}f|[\xi L(\delta_\mu\gamma_\nu)]\\&=(\det\xi)^{\kappa/4-1}\sum_\mu t(\delta_\mu)^\kappa\sum_\nu f|[\xi L(\gamma_\nu)]=0.\end{aligned}$$

引理 3.27 下列三条件互相等价：

(1) $L(\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha)=\Delta\cap\xi^{-1}\Delta\xi$。

(2) 对任一 $\gamma\in\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha$，有 $L(\alpha\gamma\alpha^{-1})=\xi L(\gamma)\xi^{-1}$。

(3) P 是 $\Delta\xi\Delta$ 到 $\Gamma\alpha\Gamma$ 的 1-1 映射。

当上述条件成立时，$\Delta\xi\Delta=\bigsqcup\Delta\xi_\nu$ 成立的充要条件是

$$\Gamma\alpha\Gamma=\bigsqcup\Gamma\cdot P(\xi_\nu).$$

证明　条件(1)与(2)都等价于 $\mathrm{Ker}(t)=\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha$。利用引理 3.26 的证明中的符号，因为 $\alpha\delta_\mu\alpha^{-1}\in\Gamma$，所以 P 将(3.2.4)式中的右陪集 $\Delta\xi L(\delta_\mu\gamma_\nu)$ 1—1 地映射为右陪集 $\Gamma\alpha\gamma_\nu$，由于

$$\Gamma\alpha\Gamma=\bigsqcup_\nu\Gamma\alpha\gamma_\nu$$

及(3.2.4)式，P 是 $\Delta\xi\Delta$ 到 $\Gamma\alpha\Gamma$ 的 1—1 映射的充要条件是

$$\mathrm{Ker}(t)=\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha,$$

即条件(3)与条件(1)和(2)等价。当条件(3)成立时，易见

$$\Delta\xi\Delta=\bigsqcup\Delta\xi_\nu$$

成立的充要条件是 $\Gamma\alpha\Gamma=\bigsqcup\Gamma P(\xi_\nu)$。

令 $\Delta=\Delta_0(N)$ $(4|N)$，$\Gamma=\Gamma_0(N)$。又令

$$\alpha=\begin{pmatrix}m&\\&n\end{pmatrix},$$

m、n 为正整数。取 $\xi=(\alpha,\ t(n/m)^{1/4})\in\hat{G}$。当 $\gamma\in\Gamma_0(4)$ 时，令

$$\gamma^*=(\gamma,\ j(\gamma,z)).$$

若

$$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma\cap\alpha^{-1}\Gamma\alpha,$$

由于

$$\alpha\gamma\alpha^{-1}=\begin{pmatrix}m&\\&n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}m^{-1}&\\&n^{-1}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a&bmn^{-1}\\cnm^{-1}&d\end{pmatrix}\in\Gamma,$$

故

$$(\alpha\gamma\alpha^{-1})^*=\left\{\alpha\gamma\alpha^{-1},\ \varepsilon_d^{-1}\left(\frac{cmn}{d}\right)(cnz/m+d)^{1/2}\right\}$$

$$=\xi\gamma^*\xi^{-1}\left\{1,\left(\frac{mn}{d}\right)\right\}.$$

因而 $\gamma\mapsto\left(\frac{mn}{d}\right)$就是上面所讨论的映射 t。当 $\left(\frac{mn}{d}\right)$ 不恒为 1 时，对任一 $f\in G(\varDelta,\ \kappa/2)$，有 $f\,|\,[\varDelta\xi\varDelta]=0$。

以 χ_m 表示特征$\left(\frac{m}{\cdot}\right)$。

引理 3.28 设 m 为正整数，$m\,|\,N^\infty$，特征 $\left(\frac{m}{\cdot}\right)$ 的导子是 N 的因子。令 $\varDelta_1=\varDelta_1(N)$，$\alpha=\begin{pmatrix}1 & \\ & m\end{pmatrix}$及 $\xi=\{\alpha,\ m^{1/4}\}\in\hat{G}$．则$[\varDelta_1\xi\varDelta_1]$将 $G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 映入 $G(N,\ \kappa/2,\ \omega')$，其中 $\omega'=\omega\chi_m$，也将 $S(N,\ \kappa/2,\ \omega)$和 $\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \omega)$分别映入 $S(N,\ \kappa/2,\ \omega')$和$\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \omega')$。又若

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega),$$

则

$$f\,|\,[\varDelta_1\xi\varDelta_1]=\sum_{n=0}^{\infty}a(mn)e(nz).$$

证明 设 $f\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，易见

$$g=f\,|\,[\varDelta_1\xi\varDelta_1]\in G(\varDelta_1,\ \kappa/2).$$

任取

$$\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(mN),$$

且设 $mN\,|\,b$。记 $\delta=\gamma^*$，$\varepsilon=\xi\delta\xi^{-1}$。由于

$$\alpha\gamma\alpha^{-1}=\begin{pmatrix}a & bm^{-1}\\ cm & b\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N),$$

可见

$$\varepsilon=(\alpha\gamma\alpha^{-1})^*\left\{1,\ \left(\frac{m}{d}\right)\right\}.$$

由于

$$\delta\varDelta_1\delta^{-1}=\varepsilon\varDelta_1\varepsilon^{-1}=\varDelta_1,$$

故

$$\varDelta_1\xi\varDelta_1\cdot\varDelta_1\delta\varDelta_1=\varDelta_1\xi\delta\varDelta_1=\varDelta_1\varepsilon\xi\varDelta_1=\varDelta_1\varepsilon\varDelta_1\cdot\varDelta_1\xi\varDelta_1.$$

我们有

$$\begin{aligned}g\,|\,[\delta]&=f\,|\,[\varDelta_1\xi\varDelta_1]\cdot[\delta]=f\,|\,[\varepsilon]\cdot[\varDelta_1\xi\varDelta_1]\\&=\omega(d)\left(\frac{m}{d}\right)g.\end{aligned}$$

对 $\Gamma_0(N)$ 中任一元素 γ'，总可找到 $\Gamma_1(N)$ 中的元素 β，使 $\beta\gamma'\in\Gamma_0(mN)$，且其右上角元素为 mN 的倍数。因而我们证明了

$$g\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega').$$

g 在尖点的值是 f 在尖点的值的线性组合（见§4.2），所以 $[\Delta_1\xi\Delta_1]$ 将 $S(N,\kappa/2,\omega)$ 映入 $S(N,\ \kappa/2,\ \omega')$。设 $f\in\varepsilon(N,\kappa/2,\ \omega)$，由引理 3.24，可知道 $f\in\varepsilon(\Delta(mN),\ \kappa/2)$。任取 $g'\in S(\Delta(N),\ \kappa/2)$，利用引理 3.12（在半整权情况下也成立），有

$$\langle g,\ g'\rangle=\langle f,\ g'|[\Delta_1\xi\Delta_1]\rangle=0,$$

因为 $$g'|[\Delta_1\xi\Delta_1]\in S(\Delta(mN),\ \kappa/2).$$

故 $g\in\varepsilon(\Delta(N),\ \kappa/2)$，所以 $[\Delta_1\xi\Delta_1]$ 将 $\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 映入 $\varepsilon(N,\kappa/2,\omega')$。

记 $\Gamma_1=\Gamma_1(N)$。由引理 3.19，有

$$\Gamma_1\alpha\Gamma_1=\bigcup_{b=1}^{m}\Gamma_1\begin{pmatrix}1&b\\0&m\end{pmatrix}=\bigcup_{b=1}^{m}\Gamma_1\alpha\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix},$$

若 $$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_1\cap\alpha^{-1}\Gamma_1\alpha,$$

则 $$\alpha\gamma\alpha^{-1}=\begin{pmatrix}a&bm^{-1}\\cm&d\end{pmatrix}\in\Gamma_1,$$

由于 $d\equiv1(N)$，所以 $(\alpha\gamma\alpha^{-1})^*=\xi\gamma^*\xi^{-1}$。由引理 3.27 可得

$$\Delta_1\xi\Delta_1=\bigcup_{b=1}^{m}\Delta_1\xi\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}^*.$$

若 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，则

$$\begin{aligned}f|[\Delta_1\xi\Delta_1]&=m^{\kappa/4-1}\sum_{b=1}^{m}f\left|\left[\xi\begin{pmatrix}1&b\\0&1\end{pmatrix}^*\right]\right.\\&=m^{-1}\sum_{b=1}^{m}f\left(\frac{z+b}{m}\right)\\&=m^{-1}\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz/m)\sum_{b=1}^{m}e(nb/m)\\&=\sum_{n=0}^{\infty}a(nm)e(nz).\end{aligned}$$

引理 3.29 设 m、n 为平方整数，

$$\alpha=\begin{pmatrix}1&\\&m\end{pmatrix},\quad \beta=\begin{pmatrix}1&\\&n\end{pmatrix},$$

$$\xi=\{\alpha,\ m^{1/4}\},\quad \eta=\{\beta,\ n^{1/4}\}.$$

设 $(m,n)=1$ 或 $m|N^\infty$，Δ 为 $\Delta_0(N)$、$\Delta_1(N)$ 和 $\Delta(N)$ 中任一个，则

$$\Delta\xi\Delta\cdot\Delta\eta\Delta=\Delta\xi\eta\Delta=\Delta\eta\Delta\cdot\Delta\xi\Delta.$$

证明 记 $\Gamma=P(\Delta)$。由定理 3.20 及引理 3.8 和 3.17，可得

$$\Gamma\alpha\Gamma\cdot\Gamma\beta\Gamma=\Gamma\alpha\beta\Gamma=\Gamma\beta\Gamma\cdot\Gamma\alpha\Gamma.$$

设 $\Gamma\alpha\Gamma=\bigcup\Gamma\alpha_i$，$\Gamma\beta\Gamma=\bigcup\Gamma\beta_j$，$\Gamma\alpha\beta\Gamma=\bigcup\Gamma\varepsilon_k$，$mn$ 是平方整数，由引理 3.27 及其后的说明，我们有

$$\Delta\xi\Delta=\bigcup\Delta P(\alpha_i),\ \Delta\eta\Delta=\bigcup\Delta P(\beta_j),\ \Delta\xi\eta\Delta=\bigcup\Delta P(\varepsilon_k),$$

存在唯一的 (i,j) 使 $\Gamma\alpha_i\beta_j=\Gamma\alpha\beta$，因而也就存在唯一的 (i,j)，使 $\Delta P(\alpha_i\beta_j)=\Delta\xi\eta$，证得所需结论。

令 m 为平方整数，$\alpha=\begin{pmatrix}1&\\&m\end{pmatrix}$ 及 $\xi=\{\alpha,\ m^{1/4}\}$。记

$$\Gamma_0=\Gamma_0(N),\ \Delta_0=\Delta_0(N),\ \Delta_1=\Delta_1(N).$$

设 $\Gamma_0\alpha\Gamma_0=\bigcup\Gamma_0\alpha_\nu$，因而 $\Delta_0\xi\Delta_0=\bigcup\Delta_0\xi_\nu$，这里 $\xi_\nu=P(\alpha_\nu)$。在 $G(N,\kappa/2,\omega)$ 上定义线性算子 $T^N_{\kappa,\omega}(m)$：

$$f|T^N_{\kappa,\omega}(m)=m^{\kappa/4-1}\sum_\nu\omega(a_\nu)f|[\xi_\nu],$$

其中 $\alpha_\nu=\begin{pmatrix}a_\nu&*\\ *&*\end{pmatrix}$。不难验证，$T^N_{\kappa,\omega}(m)$ 和 $[\Delta_1\xi\Delta_1]$ 在 $G(N,\kappa/2,\omega)$ 上的作用是一致的，$T^N_{\kappa,\omega}(m)$ 将 $S(n,\kappa/2,\omega)$ 和 $\varepsilon(N,\kappa/2,\omega)$ 映入自身。

定理 3.30 设 p 为素数，

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)\in G(N,\kappa/2,\omega).$$

令

$$f|T^N_{\kappa,\omega}(p^2)=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)e(nz),$$

则

$$b(n)=a(p^2n)+\omega_1(p)\left(\frac{n}{p}\right)p^{\lambda-1}a(n)$$
$$+\omega(p^2)p^{\kappa-2}a(n/p^2),\qquad(3.2.5)$$

其中 $\lambda=(\kappa-1)/2$, $\omega_1=\omega\left(\frac{-1}{\cdot}\right)^{\lambda}$ 为模 N 的特征。当 $p^2\nmid a$ 时，$a(n/p^2)$ 理解为零。

证明　当 $p|N$ 时，由引理 3.28 即得 $b(n)=a(p^2n)$。设 $p\nmid N$。令 $\alpha=\begin{pmatrix}1&\\&p^2\end{pmatrix}$ 及 $\xi=\{\alpha,\ p^{1/2}\}$。下列 p^2+p 个元素可作为 $\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ 关于 Γ_0 的右陪集分解的代表系：

$$\alpha_b=\begin{pmatrix}1&b\\0&p^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\\&p^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&b\\&1\end{pmatrix},\quad 0\leqslant b<p^2,$$

$$\beta_h=\begin{pmatrix}p&h\\0&p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\psN&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&p^2\end{pmatrix}$$
$$\times\begin{pmatrix}p&h\\-sN&r\end{pmatrix},\quad 0<h<p,$$

$$\sigma=\begin{pmatrix}p^2&\\&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}p^2&-t\\N&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&\\&p^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^2d&t\\-N&1\end{pmatrix}.$$

其中，对每个 h，选择 r、s，使 $pr+shN=1$。在 σ 中选取 t、d，使 $p^2d+tN=1$。设 γ、$\delta\in\Gamma_0$，定义 $L(\gamma\alpha\delta)=\gamma^*\xi\delta^*$。由引理 3.27，这是 $\Gamma_0\alpha\Gamma_0$ 到 $\Delta_0\xi\Delta_0$ 的 1—1 映射，且 $L(\alpha_b)$ $(0\leqslant b<p^2)$，$L(\beta_h)$ $(0<h<p)$ 和 $L(\sigma)$ 为 $\Delta_0\xi\Delta_0$ 关于 Δ_0 的右陪集分解的代表系。通过计算得到

$$L(\alpha_b)=\{\alpha_b,\ p^{1/2}\},$$
$$L(\beta_h)=\left\{\beta_h,\ \varepsilon_p^{-1}\left(\frac{-h}{p}\right)\right\},$$
$$L(\sigma)=\{\sigma,\ p^{-1/2}\}.$$

所以

$$f|T^N_{\kappa,\omega}(p^2)=p^{\kappa/2-2}\Big(\sum_b f|[L(\alpha_b)]$$
$$+\omega(p)\sum_h f|[L(\beta_h)]+\omega(p^2)f|[L(\sigma)]\Big),\qquad(3.2.6)$$

代入 f 的展开式得到

$$p^{\kappa/2-2}\sum_b f|[L(\alpha_b)] = p^{\kappa/2-2}\sum_b f((z+b)/p^2)\,p^{-\kappa/2}$$

$$= p^{-2}\sum_{n=0}^{\infty} a(n)e(nz/p^2)\sum_{b=0}^{p^2-1} e(bn/p^2)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a(p^2n)e(nz) \tag{3.2.7}$$

以及

$$p^{\kappa/2-2}\sum_h f|[L(\beta_h)] = p^{\kappa/2-2}\varepsilon_p^{\kappa}\sum_h\left(\frac{-h}{p}\right)f\left(z+\frac{h}{p}\right)$$

$$= p^{\kappa/2-2}\varepsilon_p^{\kappa}\left(\frac{-1}{p}\right)\sum_{n=0}^{\infty} a(n)e(nz)\sum_{h=1}^{p-1}\left(\frac{h}{p}\right)e\left(\frac{nh}{p}\right)$$

$$= p^{\lambda-1}\left(\frac{-1}{p}\right)^{\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{n}{p}\right)a(n)e(nz). \tag{3.2.8}$$

这里利用了

$$\sum_{h=1}^{p-1}\left(\frac{h}{p}\right)e\left(\frac{h}{p}\right) = \varepsilon_p p^{1/2},$$

最后

$$p^{\kappa/2-2}f|[L(\sigma)] = p^{\kappa-2}\sum_{n=0}^{\infty} a(n)e(np^2z). \tag{3.2.9}$$

将(3.2.7)、(3.2.8)、(3.2.9)代入(3.2.6)，即证得结论。

(2) 平移算子

设 m 为正整数，$f\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，定义平移算子 $V(m)$：

$$f|V(m) = f(mz).$$

命题 3.31 设 $f\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，则

$$f|V(m)\in G(mN,\ \kappa/2,\ \omega\chi_m).$$

当 $f\in S(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 或 $f\in \varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 时，则相应地有

$$f|V(m)\in S(mN,\ \kappa/2,\ \omega\chi_m)$$

或

$$f|V(m)\in \varepsilon(mN,\ \kappa/2,\ \omega\chi_m).$$

证明 令 $\xi=\left\{\begin{pmatrix} m & \\ & 1\end{pmatrix},\ m^{-1/4}\right\}$，易见

$$f|V(m) = m^{-\kappa/4}f|[\xi].$$

任取

$$\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(mN),$$

由于

$$\begin{pmatrix}m&\\&1\end{pmatrix}\gamma\begin{pmatrix}m^{-1}&\\&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&bm\\cm^{-1}&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N),$$

所以

$$\gamma^*=\xi^{-1}\begin{pmatrix}a&bm\\cm^{-1}&d\end{pmatrix}^*\xi\left\{1,\left(\frac{m}{d}\right)\right\},$$

因而

$$f\mid[\xi][\gamma^*]=\omega(d)\left(\frac{m}{d}\right)f\mid[\xi],$$

可见 $f|V(m)\in G(mN,\ \kappa/2,\ \omega\chi_m)$ ($f|V(m)$ 在 $\Gamma_0(mN)$ 的尖点全纯是容易证明的)。若 $f\in S(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，因为 $f|V(m)$ 在一个尖点的值是 f 在某一尖点的值,故

$$f\mid V(m)\in S(mN,\ \kappa/2,\omega\chi_m).$$

又若 $f\in\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，则 $f\in\varepsilon(\Delta(m^2N),\ \kappa/2)$。任取一 $g\in S(\Delta(mN),\ \kappa/2)$，则因 $g\mid[\xi^{-1}]\in S(\Delta(m^2N),\ \kappa/2)$，故

$$\langle f\mid V(m),\ g\rangle_{\Delta(mN)}=m^{-\kappa/4}\langle f,\ g\mid[\xi^{-1}]\rangle_{\Delta(m^2N)}=0,$$

即 $f|V(m)\in\varepsilon(\Delta(mN),\ \kappa/2)$，由引理 3.24，可知

$$f\mid V(m)\in\varepsilon(mN,\ \kappa/2,\ \omega\chi_m).$$

(3) 对称算子

设正整数 Q 为 N 的因子，Q 与 N/Q 互素，取整数 u、v，使

$$vQ+uN/Q=1,$$

则 $\begin{pmatrix}Q&-1\\uN&vQ\end{pmatrix}$ 属于 $\Gamma_0(N)$ 的正规化子，即

$$\begin{pmatrix}Q&-1\\uN&vQ\end{pmatrix}\Gamma_0(N)\begin{pmatrix}Q&-1\\uN&vQ\end{pmatrix}^{-1}=\Gamma_0(N).$$

当 $2\nmid Q$ 时，令

$$W(Q)=\left\{\begin{pmatrix}1&\\&Q\end{pmatrix},\ Q^{1/4}\right\}\cdot\begin{pmatrix}Q&-1\\uN/Q&v\end{pmatrix}^*$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} Q & -1 \\ uN & vQ \end{pmatrix},\ \varepsilon_Q^{-1}Q^{1/4}(uNQ^{-1}z+v)^{1/2}\right\},$$

$\left(\text{注意：}\varepsilon_v=\varepsilon_Q,\ \left(\dfrac{uNQ^{-1}}{v}\right)=1\right)$. 当 $4|Q$ 时，令

$$W(Q)=\left\{\begin{pmatrix} & -1 \\ Q & \end{pmatrix},\ Q^{1/4}(-iz)^{1/2}\right\}\begin{pmatrix} uN/Q & v \\ -Q & 1 \end{pmatrix}^*$$

$$=\left\{\begin{pmatrix} Q & -1 \\ uN & vQ \end{pmatrix},\ e^{-\pi i/4}Q^{1/4}(uNQ^{-1}z+v)^{1/2}\right\}.$$

$W(Q)$是$\widehat{G}$的元素，它的定义与u、v的选取有关。我们有下述命题：

命题 3.32 Q的定义如上。设

$$f\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega),\ \omega=\omega_1\omega_2,$$

其中ω_1、ω_2分别为模Q和N/Q的特征，则$g=f|[W(Q)]$不依赖于u、v的选取，且$g\in G(N,\ \kappa/2,\ \bar{\omega}_1\omega_2\chi_Q)$。同样，算子$[W(Q)]$将$S(N,\ \kappa/2,\ \omega)$和$\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \omega)$映入$G(N,\ \kappa/2,\ \bar{\omega}_1\omega_2\chi_Q)$和$\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \bar{\omega}_1\omega_2\chi_Q)$。

证明 仅考虑Q为奇数的情况，当$4|Q$时，证明是类似的。设u_1、v_1也适合$v_1Q+u_1N/Q=1$，则

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix},\ Q^{1/4}\right\}\begin{pmatrix} Q & -1 \\ uN/Q & v \end{pmatrix}^*\begin{pmatrix} v_1 & 1 \\ -u_1N/Q & Q \end{pmatrix}^*$$

$$\times\left\{\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix},\ Q^{-1/4}\right\}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ (uv_1-vu_1)N & 1 \end{pmatrix}^*.$$

可见g不依赖u、v的选取。

令 $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$ 及 $\alpha=\begin{pmatrix} Q & -1 \\ uN/Q & v \end{pmatrix}$，则

$$\gamma_0=\begin{pmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} Q & -1 \\ uN & vQ \end{pmatrix}\gamma\begin{pmatrix} Q & -1 \\ uN & vQ \end{pmatrix}^{-1}\in\Gamma_0(N),$$

通过计算可知

$$d_0=auN/Q+buN+cv+dvQ,$$

利用$uN/Q+vQ=1$及$ad\equiv1\ (N)$，可得

$$d_0 \equiv a \ (4Q) \quad 及 \quad d_0 \equiv d \ (N/Q).$$

注意

$$\alpha\gamma\alpha^{-1} = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 Q \\ c_0/Q & d_0 \end{pmatrix},$$

所以

$$\begin{aligned} & W(Q)\gamma^* W(Q)^{-1} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix}, Q^{1/4}\right\}(\alpha\gamma\alpha^{-1})^* \left\{\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix}, Q^{-1/4}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q \end{pmatrix}, Q^{1/4}\right\}\left\{\begin{pmatrix} 1 & \\ & Q^{-1} \end{pmatrix}\gamma_0, \ \varepsilon_{d_0}^{-1}\left(\frac{c_0 Q}{d_0}\right)(c_0 z + d_0)^{1/2} Q^{-1/4}\right\} \\ &= \gamma_0^*\left\{1, \left(\frac{Q}{d_0}\right)\right\}. \end{aligned}$$

因为$\left(\frac{Q}{d_0}\right) = \left(\frac{Q}{a}\right) = \left(\frac{Q}{d}\right)$，由此可知

$$g|\gamma^* = f|[W(Q)\gamma^*] = \omega\chi_Q(d_0)g = \bar{\omega}_1\omega_2\chi_Q(d)g.$$

因而$g \in G(N, \kappa/2, \bar{\omega}_1\omega_2\chi_Q)$。易见算子$[W(Q)]$将$S(N, \kappa/2, \omega)$映入$S(N, \kappa/2, \bar{\omega}_1\omega_2\chi_Q)$。利用引理3.24和3.25可证$[W(Q)]$将$\varepsilon(N, \kappa/2, \omega)$映入$\varepsilon(N, \kappa/2, \bar{\omega}_1\omega_2\chi_Q)$。

当$N = Q$时，由于

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} u & -1 \\ vN & 1 \end{pmatrix}^* \left\{\begin{pmatrix} N & -1 \\ uN & vN \end{pmatrix}, \ e^{-\frac{\pi i}{4}} N^{1/4}(uz+v)^{1/2}\right\} \\ &= \left\{\begin{pmatrix} & -1 \\ N & \end{pmatrix}, N^{1/4}(-iz)^{1/2}\right\}, \end{aligned}$$

通常我们取 $W(N) = \left\{\begin{pmatrix} & -1 \\ N & \end{pmatrix}, N^{1/4}(-iz)^{1/2}\right\}$，容易验证$[W(Q)]^2$是恒等算子。

(4) 扭转算子

设$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e(nz) \in G(N, \kappa/2, \omega)$，特征$\psi$为模$m$的原特征，定义

$$h(z)=\sum_{u=1}^{m}\bar{\psi}(u)f(z+u/m)$$
$$=\sum_{u=1}^{m}\bar{\psi}(u)e(u/m)\sum_{n=0}^{\infty}\psi(n)a(n)e(nz).$$

命题 3.33 设 s 为 ω 的导子，则 $h\in G(N^*,\ \kappa/2,\ \omega\psi^2)$，其中 N^* 是 N、sm、$4m$ 和 m^2 的最小公倍数。当 $f\in S(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 或 $f\in\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 时，相应地有 $h\in S(N^*,\ \kappa/2,\omega\psi^2)$ 或 $h\in\varepsilon(N^*,\ \kappa/2,\ \omega\psi^2)$。

证明 令 $\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ cN^* & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N^*)$ 及

$$a'=a+cuN^*/m,$$
$$b'=b+du(1-ad)/m-cd^2u^2N^*/m^2,$$
$$d'=d-cd^2uN^*/m.$$

a'、b'、d' 都是整数。容易验证

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & u/m\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ 1\right\}\gamma^*=\begin{pmatrix}a' & b'\\ cN^* & d'\end{pmatrix}^*\left\{\begin{pmatrix}1 & d^2u/m\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ 1\right\}.$$

这里利用了

$$d\equiv d'\ (4)\quad 及\quad \left(\frac{cN^*}{d'}\right)=\left(\frac{cN^*}{d}\right),$$

后一式是因为 $m^2|N^*$, $4m|N^*$, 因此

$$h|\gamma^*=\sum_{u=1}^{m}\bar{\psi}(u)f\left|\left[\left\{\begin{pmatrix}1 & u/m\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ 1\right\}\gamma^*\right]\right.$$
$$=\omega(d')\sum_{n=1}^{m}\bar{\psi}(n)f\left|\left[\left\{\begin{pmatrix}1 & d^2u/m\\ 0 & 1\end{pmatrix},\ 1\right\}\right]\right.$$
$$=\omega\psi^2(d)g.$$

这里利用了 $sm|N^*$. 命题最后的结论类似于命题 3.32 得证。

(5) 共轭算子

设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$。定义共轭算子 H:

$$(f|H)(z)=\overline{f(-\bar{z})}=\sum_{n=0}^{\infty}\overline{a(n)}e(nz).$$

若 $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$，由于

$$(f|H)(\gamma(z))=\overline{f\left(\frac{a(-\bar{z})-b}{-c(-\bar{z})+d}\right)}$$

$$=\bar{\omega}(d)\varepsilon_d^{\kappa}\left(\frac{-c}{d}\right)(cz+d)^{\kappa/2}\overline{f(-\bar{z})},$$

可见 $f|H\in G(N,\kappa/2,\bar{\omega})$。当 $f\in S(N,\kappa/2,\omega)$ 时，易见

$$f|H\in S(N,\kappa/2,\bar{\omega}).$$

又若 $f\in\varepsilon(N,\kappa/2,\omega)$，任取一 $g\in S(N,\kappa/2,\bar{\omega})$，由于 $g|H\in S(N,\kappa/2,\omega)$，故

$$\langle f|H,g\rangle=\overline{\langle f,g|H\rangle}=0,$$

即 $f|H\in\varepsilon(N,\kappa/2,\bar{\omega})$。这里利用了变换 $z\mapsto-\bar{z}$ 将 $\Gamma_0(N)$ 的基域变为 $\Gamma_0(N)$ 的基域。

命题 3.33　设 $f\in G(N,\kappa/2,\omega)$，我们有

$$(f|V(m))|T^{mN}_{\kappa,\omega\chi_m}(p^2)=(f|T^N_{\kappa,\omega}(p^2))|V(m)，若 p\nmid m.$$

$$(f|H)|T^N_{\kappa,\bar{\omega}}(p^2)=(f|T^N_{\kappa,\omega}(p^2))|H,$$

$$(f|[W(N)])|T^N_{\kappa,\bar{\omega}\chi_N}(p^2)$$
$$=\bar{\omega}(p^2)(f|T^N_{\kappa,\omega}(p^2))|[W(N)]，若 p\nmid N.$$

证明　前两个关系式由算子 $V(m)$ 和 H 的定义以及 (3.2.5) 式即可得到。由(3.2.6)式我们有

$$(f|[W(N)])|T^N_{\kappa,\bar{\omega}\chi_N}(p^2)|[W(N)]^{-1}$$
$$=p^{\kappa/2-2}\Big(\sum_{b=0}^{p^2-1}f|[W(N)L(\alpha_b)W(N)^{-1}]$$
$$+\bar{\omega}(p)\left(\frac{N}{p}\right)\sum_{h=0}^{p-1}f|[W(N)L(\beta_h)W(N)^{-1}]$$
$$+\bar{\omega}(p^2)f|[W(N)L(\sigma)W(N)^{-1}]\Big).\qquad(3.2.10)$$

记 $\alpha=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}$，$\beta=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ N & 0 \end{pmatrix}$，则有 $\beta\alpha\beta^{-1}=\sigma$。易见

$$W(N)L(\alpha)W(N)^{-1}=L(\sigma).$$

设 $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$，容易验证

$$W(N)L(\gamma)W(N)^{-1}=L(\beta\gamma\beta^{-1})\left\{1,\left(\frac{N}{d}\right)\right\}.$$

所以若

$$\delta=\gamma_1\alpha\gamma_2=\begin{pmatrix} * & * \\ * & d \end{pmatrix},\quad \gamma_1、\gamma_2\in\Gamma_0(N).$$

则

$$\begin{aligned} W(N)L(\sigma)W(N)^{-1} &= W(N)L(\gamma_1)W(N)^{-1} \\ &\times W(N)L(\alpha)W(N)^{-1}W(N)L(\gamma_2)W(N)^{-1} \\ &= L(\beta\delta\beta^{-1})\left\{1,\left(\frac{N}{d}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

当 $p\nmid b$ 时，取整数 s、t，使 $sp^2+tbN=1$，这时

$$\beta\alpha_b\beta^{-1}=\begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ -bN & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p^2 & t \\ -bN & s \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}.$$

当 $b\neq 0$，$p\mid b$ 时，取整数 s'、t'，使 $s'p^2+t'bN=p(b<p^2)$，这时

$$\beta\alpha_b\beta^{-1}=\begin{pmatrix} p^2 & 0 \\ -bN & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & t' \\ -bN/p & s' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p & -t' \\ 0 & p \end{pmatrix}.$$

对每一个 $h\ (0<h<p)$，取整数 s''、t'' 使 $s''p+t''hN=1$。这时

$$\beta\beta_h\beta^{-1}=\begin{pmatrix} p & 0 \\ -hN & p \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p & t'' \\ -hN & s'' \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -t''p \\ 0 & p^2 \end{pmatrix}.$$

利用(3.2.11)式，(3.2.10)式右端化为

$$\begin{aligned} & p^{\kappa/2-1}\Big(f\,|\,[L(\sigma)]+\bar{\omega}(p^2)\sum_{\substack{0<b<p^2 \\ p\nmid b}} f\,|\,[L(\alpha_b)] \\ & +\bar{\omega}(p)\sum_{0<h<p} f\,|\,[L(\beta_h)]+\bar{\omega}(p^2)\sum_{\substack{0<b<p^2 \\ b\mid p}} f\,|\,[L(\alpha_b)] \\ & +\bar{\omega}(p^2)f\,|\,[L(\alpha_0)]\Big)=\bar{\omega}(p^2)f\,|\,T^N_{\kappa,\omega}(p^2). \end{aligned}$$

(6) 迹算子

设素数 p_0 除尽 $N/4$，这时 $\Gamma_0(N)$ 为 $\Gamma_0(N/p_0)$ 的子群，记其指数为 μ。设

$$\Gamma_0(N/p_0)=\bigcup_{j=1}^{\mu}\Gamma_0(N)A_j,$$

其中
$$A_j=\begin{pmatrix}a_j & b_j\\ c_j & d_j\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N/p_0)$$
为 $\Gamma_0(N/p_0)$ 关于 $\Gamma_0(N)$ 的右陪集分解。设 $f\in G(N,\kappa/2,\omega)$，定义迹算子 $S'(\omega)$：
$$f\,|\,S'(\omega)=\sum_{j=1}^{\mu}\omega(a_j)f\,|\,[A_j^*],$$
它与代表系 $\{A_j\}$ 的选取无关。若 ω 为模 N/p_0 可定义的（即 ω 也是模 N/p_0 的特征），则 $f\,|\,S'(\omega)\in G(N/p_0,\kappa/2,\omega)$。又若
$$f\in G(N/p_0,\kappa/2,\omega),$$
则 $f\,|\,S'(\omega)=\mu f$。

命题 3.34 设 $f\in G(N,\kappa/2,\omega)$，$\omega$ 是模 N/p_0 可定义的，素数 p 与 N 互素，则
$$(f\,|\,S'(\omega))\,|\,T^{N/p_0}_{\kappa,\omega}(p^2)=(f\,|\,T^N_{\kappa,\omega}(p^2))\,|\,S'(\omega).$$

证明 必要时在 A_j 的左边乘一个 $\Gamma_0(N)$ 的元，可假设 $p^2|c_j$ $(1\leqslant j\leqslant\mu)$（对任意两个整数 a、c，都可找到两个互素的整数 s、t，使 $p^2|sa+tc$，且 $N|s$）。令
$$\xi=\left\{\begin{pmatrix}1 & \\ & p^2\end{pmatrix},\ p^{1/2}\right\},$$
设
$$\Gamma_0(N)\xi\Gamma_0(N)=\bigcup_i\Gamma_0(N)\xi\alpha_i^*\quad(\alpha_i\in\Gamma_0(N)),$$
对任一 i，我们有
$$\sum_{j=1}^{\mu}\omega(a_j)A_j^*\xi\alpha_i^*=\xi(\alpha_i)^*\sum_{j=1}^{\mu}\omega(a_j)(\alpha_i^{-1})^*\begin{pmatrix}a_j & b_jp^2\\ c_jp^{-2} & d_j\end{pmatrix}\alpha_i^*,\tag{3.2.12}$$
任两个正整数 j 与 j' $(1\leqslant j<j'\leqslant\mu)$，若存在 $\gamma\in\Gamma_0(N)$，使
$$\begin{pmatrix}1 & \\ & p^2\end{pmatrix}^{-1}A_j\begin{pmatrix}1 & \\ & p^2\end{pmatrix}=\gamma\begin{pmatrix}1 & \\ & p^2\end{pmatrix}^{-1}A_{j'}\begin{pmatrix}1 & \\ & p^2\end{pmatrix},$$
则
$$A_j=\begin{pmatrix}1 & \\ & p^2\end{pmatrix}\gamma\begin{pmatrix}1 & \\ & p^2\end{pmatrix}^{-1}A_{j'}.$$
因而

$$\begin{pmatrix}1&\\&p^2\end{pmatrix}\gamma\begin{pmatrix}1&\\&p^2\end{pmatrix}^{-1}=A_jA_{j'}^{-1}\in\Gamma_0(N/p_0).$$

又由于$\gamma\in\Gamma_0(N)$，所以

$$\begin{pmatrix}1&\\&p^2\end{pmatrix}\gamma\begin{pmatrix}1&\\&p^2\end{pmatrix}^{-1}\in\Gamma_0(N),$$

这与A_j与$A_{j'}$属于不同的$\Gamma_0(N)$右陪集矛盾。所以

$$\left\{\begin{pmatrix}1&\\&p^2\end{pmatrix}^{-1}A_j\begin{pmatrix}1&\\&p^2\end{pmatrix},\ 1\leqslant j\leqslant\mu\right\}$$

是$\Gamma_0(N/p_0)$关于$\Gamma_0(N)$的右陪集分解的代表系，因此

$$\left\{\alpha_i^{-1}\begin{pmatrix}a_j&b_jp^2\\c_jp^{-2}&d_j\end{pmatrix}\alpha_i,\quad 1\leqslant j\leqslant\mu\right\}$$

也是$\Gamma_0(N/p_0)$关于$\Gamma_0(N)$的右陪集分解的代表系，由(3.2.12)式即可证得本命题。

在$G(N,\kappa/2,\omega)$上定义算子$S(\omega)=S(\omega,N,p_0)$：

$$S(\omega)=p_0^{\kappa/4}\mu^{-1}[W(N)]S'(\bar{\omega}\chi_N)[W(N/p_0)].$$

算子$S(\omega)$可以抵消平移算子$V(p_0)$的作用，具体地说，我们有：

命题 3.35 设$\omega\chi_{p_0}$是模N/p_0可定义的，则

(1) 算子$S(\omega)$将$G(N,\kappa/2,\omega)$映入$G(N/p_0,\kappa/2,\omega\chi_{p_0})$。

(2) 设m与p_0互素，$f\in G(N,\kappa/2,\omega)$，则

$$f|S(\omega,N,p_0)=f|S(\omega,mN,p_0).$$

(3) 当$p\nmid N$时，若$f\in G(N,\kappa/2,\omega)$，则

$$(f|S(\omega))|T^{N/p_0}_{\kappa,\omega\chi_{p_0}}(p^2)=(f|T^N_{\kappa,\omega}(p^2))|S(\omega).$$

(4) 设$g\in G(N/p_0,\kappa/2,\omega\chi_{p_0})$，则$g|V(p_0)\in G(N,\kappa/2,\omega)$，且

$$(g|V(p_0))|S(\omega,N,p_0)=g.$$

(5) 设p为素数，$4p|N$，$p\neq p_0$，$\omega\chi_p$是模N/p可定义的。若$g\in G(N/p,\kappa/2,\omega\chi_p)$，则

$$(g|V(p))|S(\omega,N,p_0)=(g|S(\omega\chi_p,N/p,p_0))|V(p).$$

证明 当$\omega\chi_{p_0}$是模N/p_0可定义时，$\bar{\omega}\chi_N=\bar{\omega}\chi_{p_0}\chi_{N/p_0}$也是模$N/p_0$可定义的，由命题3.32即证得(1)。设

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(mN/p_0),$$

且 $p_0 \nmid m$，由于

$$W(mN)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^* W(mN/p_0)$$

$$= \{mI,\ 1\} W(N)\begin{pmatrix} a & bm \\ c/m & d \end{pmatrix}^* W(N/p_0),$$

可见(2)成立。当 $p \nmid N$ 时，由命题 3.33 及 3.34 证得(3)。今证(4)，由于

$$\left\{\begin{pmatrix} p_0 & \\ & 1 \end{pmatrix},\ p_0^{-1/4}\right\} W(N) = \{p_0 I,\ 1\} W(N/p_0),$$

所以

$$(g|V(p_0))\,|\,[W(N)] = p_0^{-\kappa/4} g\,|\,[W(N/p_0)].$$

因为 $g|[W(N/p_0)] \in G(N/p_0,\ \kappa/2,\ \bar{\omega}\chi_N)$，它在 $\mu^{-1}S'(\bar{\omega}\chi_N)$ 作用下不变，又由于$[W(N/p_0)]^2$是恒等变换，所以 (4) 成立。考虑(5)，我们有 $4pp_0 | N$，$\omega\chi_{pp_0}$ 是模 N/pp_0 可定义的，由于

$$\left\{\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix},\ p^{-1/4}\right\} W(N) = \{pI,\ 1\} W(N/p),$$

$$W(N/p_0) = W(N/pp_0)\left\{\begin{pmatrix} p & \\ & 1 \end{pmatrix},\ p^{-1/4}\right\},$$

及 $\bar{\omega}\chi_N = \overline{\omega\chi_p} \cdot \chi_{N/p}$，所以(5)成立。

§3.3　模形式的 Zeta 函数及其函数方程

设 $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c(n) q^n (q = e(z))$属于 $G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，定义它的Zeta函数

$$L(s,\ f) = \sum_{n=1}^{\infty} c(n) n^{-s}, \qquad s \in \boldsymbol{C}.$$

本节讨论 $L(s,\ f)$的收敛性、解析延拓及其函数方程。

命题 3.36 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)q^n\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，则存在常数 A，使 $|f(z)|\leqslant A\mathrm{Im}(z)^{-\kappa/2}$ $(z\in H)$ 且 $c(n)=O(n^{\kappa/2})$。

证明 设 $s=d/c$ 为 $\Gamma_0(N)$ 的任一尖点，取

$$\rho=\begin{pmatrix} a & b\\ -c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z}),$$

使 $\rho(s)=i\infty$。由整模形式的定义，$f(\rho^{-1}(z))(cz+a)^{-\kappa/2}$ 在 $z=i\infty$ 全纯，因而

$$\lim_{z\to i\infty}f\left(\frac{dz-b}{cz+a}\right)(cz+a)^{-\kappa/2}=\lim_{\tau\to 0}(-c\tau)^{\kappa/2}f(\tau+s)$$

是一个常数。在 s 附近存在常数 A'，使

$$|f(z)|\leqslant A'|z-s|^{-\kappa/2}\leqslant A'\mathrm{Im}(z)^{-\kappa/2}.$$

由于 $\Gamma_0(N)\backslash H^*$ 是紧黎曼面，所以存在常数 A，使

$$|f(z)|\leqslant A\mathrm{Im}(z)^{-\kappa/2}$$

对任一 $z\in H$ 成立。我们有

$$c(n)=\frac{1}{2\pi i}\int f(q)q^{-n-1}dq.$$

其中积分围道取为 $|q|=r$。取 $\mathrm{Im}(z)=1/(2\pi n)$，即取 $\gamma=e^{-1/n}$，因而

$$|c(n)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int|f(q)|e^{1+1/n}dq\leqslant A(2\pi n)^{\kappa/2}.$$

命题 3.37 设 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c(n)q^n\in S(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，则存在常数 A，使 $|f(z)|\leqslant A\mathrm{Im}(z)^{-\kappa/4}(z\in H)$，且 $c(n)=O(n^{\kappa/4})$。

证明 令 $h(z)=f(z)\mathrm{Im}(z)^{\kappa/4}$，对任一 $\gamma\in\Gamma_0(N)$，有

$$h(\gamma(z))=h(z).$$

设 s 为 $\Gamma_0(N)$ 的尖点，取 $\rho\in SL_2(\boldsymbol{Z})$，使 $\rho(s)=i\infty$。由尖形式的定义，我们有 $h(\rho^{-1}(z))\to 0(\mathrm{Im}\,z\to\infty)$，所以 $h(z)$ 是紧黎曼面 $\Gamma_0(N)\backslash H^*$ 上的连续函数，它是有界函数。其余部分的证明类似于命题 3.36。

对于权为整数 k 的模形式，命题 3.36 和 3.37 显然也成立，只要以 k 代替 $\kappa/2$。以任一第一类 Fuchsian 群代替 $\Gamma_0(N)$，上述

两命题也成立．这里给出的估计是较粗的，不过已经可以满足我们的要求．当 f 为尖形式，n 无平方因子时，有 $c(n)\ll n^{\frac{k-1}{2}+\varepsilon}$，$\varepsilon$ 为任意小的正数，这就是著名的 Ramanujan 猜想，后来为 Deligne[3] 所证明．关于半整权的情况，H. Iwanice[7] 证明了当 $\kappa\geqslant5$，n 无平方因子时，有 $c(n)\ll n^{\kappa/4-2/7+\varepsilon}$．相应 Ramanujan 猜想应有 $c(n)\ll n^{\kappa/4-1/2+\varepsilon}$．

设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c(n)q^n\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，形式地计算，我们有

$$\int_0^{\infty}(f(iy)-c(0))y^{s-1}ds=\sum_{n=1}^{\infty}c(n)\int_0^{\infty}y^{s-1}e^{-2\pi ny}dy$$

$$=(2\pi)^{-s}\Gamma(s)L(s,\ f). \tag{3.3.1}$$

可以证明上述计算是成立的．实际上，我们有下述定理：

定理 3.38 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}c(n)q^n\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，令

$$L(s,\ f)=\sum_{n=1}^{\infty}c(n)n^{-s},$$

$$R(s,\ f)=(2\pi)^{-s}N^{s/2}\Gamma(s)L(s,\ f).$$

则当 $Re(s)>1+\kappa/2$ 时，$L(s,\ f)$ 绝对收敛．$R(s,\ f)$ 可以延拓为整个 s-平面上的亚纯函数，以 $s=0$ 和 $s=\kappa/2$ 为可能的一阶极点，留数分别为 $c(0)$ 和 $b(0)N^{-\kappa/4}$，其中 $b(0)$ 为 $f|[W(N)]$ 在 $i\infty$ 的展开式的常数项．$R(s,\ f)$ 有函数方程

$$R(s,\ f)=R(\kappa/2-s,\ f|[W(N)]).$$

证明 当 $Re(s)>1+\kappa/2$ 时，由命题 3.36 可知 $L(s,\ f)$ 绝对收敛．取 ε 与 E 为两个正数，我们有

$$\left|\int_E^{\infty}(f(iy)-c(0))y^{s-1}dy\right|$$

$$\leqslant A\int_E^{\infty}e^{-2\pi y}y^{Re(s)-1}dy\to0\quad(E\to\infty),$$

其中 A 为一个常数．令

$$g=f|[W(N)]=N^{-\kappa/4}(-iz)^{-\kappa/2}f(-1/(Nz))$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)q^n,$$

当 $Re(s)>1+\kappa/2$ 时,

$$\left|\int_0^{\varepsilon}(f(iy)-c(0))y^{s-1}dy\right|$$
$$=\left|\int_0^{\varepsilon}(N^{\kappa/4}y^{-\kappa/2}g(i/(yN))-c(0))y^{s-1}dy\right|\to 0\quad(\varepsilon\to 0).$$

由于 $$c(n)=O(n^{\kappa/2}),$$

当 $y\geqslant\varepsilon$ 时,

$$\sum_{n=1}^{\infty}c(n)e^{-2\pi ny}$$

绝对收敛,故

$$\int_{\varepsilon}^{E}(f(y)-c(0))y^{s-1}dy=\sum_{n=1}^{\infty}c(n)\int_{\varepsilon}^{E}e^{-2\pi ny}y^{s-1}dy.$$

给定任意小的 $\varepsilon>0$, $\eta>0$, 存在充分大的 M, 使

$$\left|\sum_{n>M}c(n)\int_{\varepsilon}^{E}e^{-2\pi ny}y^{s-1}dy\right|$$
$$\leqslant\sum_{n>M}|c(n)|\int_0^{\infty}e^{-2\pi ny}y^{\sigma-1}dy$$
$$=(2\pi)^{-\sigma}\Gamma(\sigma)\sum_{n>M}|c(n)|n^{-\sigma}<\eta\quad(Re(s)=\sigma),$$

因而

$$\left|\int_0^{\infty}(f(iy)-c(0))y^{s-1}dy-\sum_{n=1}^{M}c(n)\int_0^{\infty}e^{-2\pi ny}y^{s-1}dy\right|$$
$$=\lim_{\varepsilon\to 0,E\to\infty}\left|\int_{\varepsilon}^{E}(f(iy)-c(0))y^{s-1}dy\right.$$
$$\left.-\sum_{n=1}^{M}c(n)\int_{\varepsilon}^{E}e^{-2\pi ny}y^{s-1}dy\right|<\eta.$$

这证明了(3.3.1)是成立的。

令 $A=N^{-1/2}$。我们有

$$\int_0^{\infty}(f(iy)-c(0))y^{s-1}dy$$
$$=\int_0^{A}(f(iy)-c(0))y^{s-1}dy+\int_A^{\infty}(f(iy)-c(0))y^{s-1}dy,\tag{3.3.2}$$

第一个积分在 $\mathrm{Re}(s)>1+\kappa/2$ 时绝对收敛, 第二个积分对任意的 s 都收敛。在第一个积分中取变数变换 $y\to 1/(yN)$, 得

$$\int_0^A (f(iy)-c(0))y^{s-1}dy$$
$$=\int_A^\infty (N^{\kappa/4}y^{\kappa/2}g(iy)-c(0))N^{-s}y^{-s-1}dy$$
$$=N^{\kappa/4-s}\int_A^\infty (g(iy)-b(0))y^{\kappa/2-s-1}dy$$
$$-\frac{c(0)}{sN^{s/2}}-\frac{b(0)}{(\kappa/2-s)N^{s/2}}, \tag{3.3.3}$$

(3.3.3) 式中的积分对任意的 s 都收敛。将 (3.3.3) 式代入 (3.3.2)式得到

$$R(s,f)=N^{s/2}\int_A^\infty (f(iy)-c(0))y^{s-1}dy$$
$$+N^{\kappa/4-s/2}\int_A^\infty (g(iy)-b(0))y^{\kappa/2-s-1}dy$$
$$-\frac{c(0)}{s}-\frac{b(0)}{\kappa/2-s}. \tag{3.3.4}$$

可见 $R(s,f)$ 可延拓为 s 平面上的亚纯函数，以 $s=0$ 和 $s=\kappa/2$ 为两个可能的一阶极点，留数分别为 $-c(0)$ 和 $b(0)$。由于

$$f=g|[W(N)],$$

在(3.3.4)式中交换 f 与 g 的位置，可得

$$R(\kappa/2-s,g)=N^{\kappa/4-s/2}\int_A^\infty (g(iy)-b(0))y^{s-1}dy$$
$$+N^{s/2}\int_A^\infty (f(iy)-c(0))y^{s-1}dy$$
$$-\frac{b(0)}{\kappa/2-s}-\frac{c(0)}{s}=R(s,f).$$

从定理 3.38 可知，$L(s,f)$ 仅可能以 $s=\kappa/2$ 为一阶极点，留数为 $(2\pi)^{\kappa/2}N^{-\kappa/4}\Gamma(\kappa/2)^{-1}b(0)$。由于 $\Gamma(s)$ 以 $s=0$ 为一阶极点，留数为 1，所以 $L(0,f)=-c(0)$。

设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c(n)q^n\in G(N,k,\psi)$ (k 为整数)，若对任一素数 p，$f(z)$ 是 Hecke 算子 $T^N_{k,\psi}(p)$ 的本征函数，且 $c(1)=1$，由定理 3.22，有

$$L(s,\ f)=\prod_p(1-c(p)p^{-s}+\psi(p)p^{k-1-2s})^{-1},\quad (3.3.5)$$

这称为 $L(s,\ f)$ 的欧拉乘积。对于半整权模形式，也有类似的结果。

引理 3.39 设 t 为正整数，p 为素数，

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}c(n)q^n\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega),$$

它是 $T^N_{\kappa,\omega}(p^2)$ 的本征函数，对应的本征值为 λ_p。设 $p\mid N$ 或 $p^2\nmid t$，则

$$(1)\quad \lambda_p c(t)=c(p^2t)+\omega_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{\lambda-1}c(t);$$

$$(2)\quad \lambda_p c(p^{2m}t)=c(p^{2m+2}t)+\omega_1(p^2)p^{\kappa-2}c(p^{2m-2}t)\ (m>0).$$

且

$$\sum_{n=1}^{\infty}c(tn^2)n^{-s}=\left(\sum_{(p,n)=1}c(tn^2)n^{-s}\right)$$
$$\times\left(1-\omega(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{\lambda-1-s}\right)(1-\lambda_p p^{-s}+\omega(p^2)p^{\kappa-2-2s})^{-1},$$

其中 $\lambda=(\kappa-1)/2,\ \omega_1=\omega\chi^{\lambda}_{-1}$。

证明 由定理 3.30 及 $f\mid T^N_{\kappa,\omega}(p^2)=\lambda_p f$，若 n 与 p 互素，可得

$$\lambda_p c(tn^2)=c(tp^2n^2)+\omega_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{\lambda-1}c(tn^2),\qquad (*)$$

$$\lambda_p c(tp^{2m}n^2)=c(tp^{2m+2}n^2)$$
$$+\omega(p^2)p^{\kappa-2}c(tp^{2m-2}n^2)\quad (m>0)\quad (**)$$

可见(1)和(2)成立。令

$$H_n(x)=\sum_{m=0}^{\infty}c(tn^2p^{2m})x^m,$$

将(*)式两端乘 x，(**)式两端乘 x^{m+1}，然后相加，得到

$$\lambda_p xH_n(x)=H_n(x)-c(tn^2)$$
$$+\omega_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{\lambda-1}c(tn^2)x+\omega(p^2)p^{\kappa-2}x^2H_n(x),$$

故

$$H_n(x)=c(tn^2)\left(1-\omega_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{\lambda-1}x\right)$$

$$\times(1-\lambda_p x+\omega(p^2)p^{\kappa-2}x^2)^{-1}.$$

因为 $\sum\limits^{\infty} c(tn^2)n^{-s}=\sum\limits_{(p,n)=1} H_A(p^{-s})n^{-s}$，故引理 3.39 成立。

由引理 3.39 即可证得下述定理：

定理 3.40　设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} c(n)q^n\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，且对任一素数 p 有 $f(z)|T^N_{\kappa,\omega}(p^2)=\lambda_p f(z)$。设 t 为一正整数，无平方因子，且与 N 互素，则

$$\sum_{n=1}^{\infty} c(tn^2)n^{-s}=c(t)\prod_p\left(1-\omega_1(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{\lambda-1-s}\right)$$
$$\times(1-\lambda_p p^{-s}+\omega(p^2)p^{\kappa-2-2s})^{-1}. \qquad (3.3.6)$$

(3.3.6)式的分母部分恰与(3.3.5)式类似（取 $k=\kappa-1$，$\psi=\omega^2$）。令

$$\sum^{\infty} A(n)n^{-s}=\prod_p(1-\lambda_p p^{-s}+\omega(p^2)p^{\kappa-2-2s})^{-1}$$

及

$$F(z)=\sum_{n=1}^{\infty} A(n)q^n.$$

Shimura[23] 证明了当 $f(z)\in S(N,\ \kappa/2,\ \omega)$，$\kappa\geqslant 3$ 时，$F(z)$加上适当的常数项后属于 $G(N',\ \kappa-1,\ \omega^2)$，这里 N' 可取为 $N/2$(见 S.Niwa[10]和 H.Kojima[9])。而当 $\kappa\geqslant 5$ 时，$F(z)$属于 $S(N',\ \kappa-1,\ \omega^2)$。从 $f(z)$ 到 $F(z)$，称为 Shimura 提升。这是权为半整数的模形式理论的一个重要结果。

第 4 章

权为半整数的 Eisenstein 级数

§4.1 老形式和新形式

今后在不会引起混乱的情况下，我们将 $G(N, \kappa/2, \omega)$ 上的 Hecke 算子 $T^N_{\kappa,\omega}(p^2)$ 简写为 $T(p^2)$。设 $f\in G(N, \kappa/2, \omega)$，对几乎所有的素数 p，f 是算子 $T(p^2)$ 的本征函数。若存在 $N/4$ 的一个素因子 p，使 ω 是模 N/p 可定义的，且 $f\in G(N/p, \kappa/2, \omega)$ 或 $\omega\chi_p$ 是模 N/p 可定义的，且存在 $g\in G(N/p, \kappa/2, \omega\chi_p)$，使 $f=g|V(p)$，这时称 f 为*老形式*。$G(N, \kappa/2, \omega)$ 中由老形式张成的子空间记为 $G^{old}(N, \kappa/2, \omega)$。又若 $f\in G(N, \kappa/2, \omega)$，$f$ 是几乎所有的算子 $T(p^2)$ 的本征函数，且 f 不属于 $G^{old}(N, \kappa/2, \omega)$，这时称 f 为*新形式*。

引理 4.1 对称算子 $W(N)$ (今后以 $W(N)$ 代替 $[W(N)]$) $G(N, \kappa/2, \omega)\to G(N, \kappa/2, \omega\chi_N)$ 和共轭算子 H: $G(N, \kappa/2, \omega)\to G(N, \kappa/2, \bar{\omega})$ 将老形式变为老形式，新形式变为新形式。

证明 命题 3.33 表示 $W(N)$ 和 H 将 $T(p^2)$ 的本征函数映为本征函数。如果 f 是上面定义的第一类老形式，即 $f\in G(N/p, \kappa/2, \omega)$，则

$$f|W(N)=p^{\kappa/4}(f|W(N/p))|V(p),$$

$f|W(N)$ 是第二类老形式；若 f 是第二类老形式，即 $f=g|V(p)$，$g\in G(N/p, \kappa/2, \omega\chi_p)$，则

$$f|W(N)=p^{-\kappa/4}g|W(N/p)\in G(N/p, \kappa/2, \omega\chi_N)$$

是第一类老形式，所以 $W(N)$ 将老形式映为老形式。易见 H 将老形式映为老形式。由于 $W(N)^2$ 和 H^2 都是恒等变换，所以它们亦将新形式映为新形式。

引理 4.2　设 $h\in G^{old}(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 是几乎所有的 Hecke 算子 $T(p^2)$ 的非零本征函数。则一定存在 N 的一个因子 $N_1<N$，一个模 N_1 的特征 ψ 及 $G(N_1,\ \kappa/2,\ \psi)$ 中的一个新形式 g，使 h 与 g 对几乎所有的 Hecke 算子 $T(p^2)$ 有相同的本征值。

证明　对 N 用归纳法：$G^{old}(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 有一组基 $\{f_i\}$，其中每个 f_i 是几乎所有的 Hecke 算子 $T(p^2)$ 的本征函数，且具有形式 g 或 $g|V(p)$，其中 g 对应较小的 N。h 是某些 f_i 的线性组合，在这个线性组合中出现的 f_i 若与 h 都是算子 $T(p^2)$ 的本征函数，它们一定具有相同的本征值。由对 N 的归纳法即得证。

引理 4.3　设 p 为素数，

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)$$

为 $G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 中的非零元，且当 n 不是 p 的倍数时都有 $a(n)=0$。则 p 能除尽 $N/4$，$\omega\chi_p$ 是模 N/p 可定义的，且 $f=g|V(p)$，其中 $g\in G(N/p,\kappa/2,\ \omega\chi_p)$。

证明　令

$$g(z)=f(z/p)=\sum_{n=0}^{\infty}a(np)e(nz)=p^{\kappa/4}f\left|\left[\left\{\begin{pmatrix}1&\\&p\end{pmatrix},p^{1/4}\right\}\right]\right.,\tag{4.1.1}$$

若 $p|N/4$，则记 $N'=N/p$，否则，记 $N'=N$。令

$$\Gamma_0(N',\ p)=\left\{\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N')\,\middle|\,p|b\right\}.$$

若 $A=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N',\ p)$，则 $A_1=\begin{pmatrix}a&b/p\\cp&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$，我们有

$$\left\{\begin{pmatrix}1&\\&p\end{pmatrix},\ p^{1/4}\right\}A^*=\{1,\ \chi_p(d)\}A_1^*\left\{\begin{pmatrix}1&\\&p\end{pmatrix},\ p^{1/4}\right\},$$

因而

$$g|A^*=\omega(d)\chi_p(d)g.\tag{4.1.2}$$

由(4.1.1)式有 $g\left|\left[\left\{\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix},\ 1\right\}\right]\right.=g$，$\Gamma_0(N')$ 可由 $\Gamma_0(N',\ p)$

及$\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$生成，故(4.1.2)式对任一 $A\in\Gamma_0(N')$ 都成立。$\omega\chi_p$ 一定是模 N' 可定义，否则，一定存在整数 a 与 d，使 $ad\equiv 1\ (N')$，而 $\omega\chi_p(a)\cdot\omega\chi_p(d)\neq 1$。取

$$B=\begin{pmatrix}a & b\\ N' & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N'),$$

我们有 $g=g|[B^*(B^{-1})^*]=\omega\chi_p(a)\omega\chi_p(d)g$，$g$ 为非零，这不可能。当 $\omega\chi_p$ 模 N' 可定义时，一定有 $p|N/4$，所以 $N'=N/p$，且可见 $g\in G(N/p,\ \kappa/2,\ \omega\chi_p)$。

引理 4.3 刻划了第二类老形式的特征，当 f 为尖形式时，对应的 g 亦为尖形式。

命题 4.4 设 m 为正整数，

$$f=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega),$$

且当 n 与 m 互素时，都有 $a(n)=0$，则

$$f=\sum f_p|V(p),\qquad f_p\in G(N/p,\ \kappa/2,\ \omega\chi_p),$$

这里素数 p 跑遍 m 和 $N/4$ 的公因子，且 $\omega\chi_p$ 模 N/p 可定义。当 f 为尖形式时，f_p 亦可取为尖形式。当 f 是几乎所有的 Hecke 算子 $T(p^2)$ 的本征函数时，f_p 亦可取为几乎所有的 Hecke 算子 $T(p^2)$ 的本征函数，且与 f 具有相同的本征值。

证明 可以认为 m 无平方因子。设 m 有 r 个素因子。当 $r=0$ 时，$f=0$，命题显然成立。当 $r=1$ 时，该命题即为引理 4.3。对 r 用归纳法，设 $m=p_0m_0$，取 p 为一素数，定义算子 $K(p)=1-T(p,\ Np)V(p)$，$T(p,\ Np)$ 表示 $G(pN,\ \kappa/2,\ \omega)$ 上的 Hecke 算子 $T^{Np}_{\kappa,\omega}(p)$，由引理 3.28 及 3.31，可知

$$f|K(p)=\sum_{(n,p)=1}a(n)e(nz)\in G(p^2N,\ \kappa/2,\ \omega),$$

所以我们有

$$h=\sum_{(n,m_0)=1}a(n)e(nz)=f|\prod_{p|m_0}K(p)\in G(m_0^2N,\ \kappa/2,\ \omega).$$

若 $h=0$，用 m_0 代替 m，由归纳假设，可知命题成立。今设 $h\neq 0$。当 $(n,\ m_0)=1$，$a(n)\neq 0$ 时，一定有 $p_0|n$。由引理 4.3，存在

$g_{p_0} \in G(m_0^2N/p, \kappa/2, \omega\chi_{p_0})$，使 $h = g_{p_0}|V(p_0)$，且 $\omega\chi_{p_0}$ 模 m_0^2N/p_0 可定义。由此可知 $p_0 \mid N/4$，且 $\omega\chi_{p_0}$ 模 N/p_0 可定义。我们有

$$f - h = f - g_{p_0}|V(p_0) = \sum_{n=0}^{\infty} b(n)e(nz),$$

当 $(n, m_0) = 1$ 时，$b(n) = 0$，利用归纳假设，我们有

$$f - g_{p_0}|V(p_0) = \sum_p g_p|V(p),$$

其中 p 跑遍 m_0 的因子，且 $\omega\chi_p$ 模 m_0^2N/p 可定义。将§3.2中定义的算子 $S(\omega) = S(\omega, N, p_0)$ 作用于上式，利用命题3.35得到

$$f|S(\omega) - g_{p_0} = \sum_p (g_p|S(\omega\chi_p, m_0^2N/p, p_0))|V(p).$$

记 $f_{p_0} = f|S(\omega)$，它属于 $G(N/_{p_0}, \kappa/2, \omega\chi_{p_0})$。又记

$$f_{p_0}|V(p_0) = \sum_{n=0}^{\infty} c(n)e(nz),$$

由上式可知，$f_{p_0}|V(p_0) - g_{p_0}|V(p_0)$ 的展开式中仅含适合 $(n, m_0) \neq 1$ 的 $e(nz)$ 项。所以当 $(n, m_0) = 1$ 时，有 $c(n) = a(n)$。于是当 $(n, m_0) = 1$ 时，$f - f_{p_0}|V(p_0)$ 中 $e(nz)$ 项的系数为零。应用归纳假设，得到所要证的 f 的分解式。命题中其余的结论也可应用归纳法及命题3.35证明。

推论 4.5　命题4.4中的 f 如果是几乎所有的Hecke算子 $T(p^2)$ 的本征函数，则 f 属于 $G^{\mathrm{old}}(N, \kappa/2, \omega)$。

§4.2　模形式在尖点的值

设 $f(z) \in G(N, \kappa/2, \omega)$，$s = d/c$ 是 $\Gamma_0(N)$ 的一个尖点。令 $\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z})$，则 $\rho(s) = i\infty$。$f|[\{\rho^{-1}, (cz+a)^{1/2}\}]$ 在 $z = i\infty$ 关于 $e(z)$ 的Fourier展开式的常数项称为 f 在尖点 s 的值，记作 $V(f, s)$。当 $f \in S(N, \kappa/2, \omega)$ 时，f 在所有尖点的值都是零。f 在尖点 s 的值与 ρ 的选取无关，且当 $c \neq 0$ 时有

$$V(f, s) = \lim_{z \to i\infty} f((dz-b)/(cz+a))(cz+a)^{-\kappa/2}$$

$$= \lim_{z \to i\infty} f(-c^{-1}(cz+a)^{-1} + dc^{-1})(cz+a)^{-\kappa/2}$$

$$= \lim_{\tau \to 0} (-c\tau)^{\kappa/2} f(\tau + dc^{-1}). \qquad (4.2.1)$$

当 $s = 1/N$ 时,

$$V(f, s) = V(f, i\infty) = \lim_{z \to i\infty} f(z).$$

引理 4.6 设 $f \in G(N, \kappa/2, \omega)$, 尖点 $s_1 = d_1/c_1$ 与 $s_2 = d_2/c_2$ 为 $\Gamma_0(N)$ 等价, 即存在

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N),$$

使 $\rho(s_1) = s_2$, 则

$$V(f, s_2) = \omega \chi_c(d) \varepsilon_d^{-\kappa} V(f, s_1).$$

证明 令

$$\rho_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ -c_2 & d_2 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}) \quad 及 \quad \rho_1 = \rho_2 \rho,$$

由于 $\rho^{-1}(s_2) = s_1$, 可知 $c_1 = -cd_2 + ac_2$, $d_1 = dd_2 - bc_2$, 因此

$$\rho_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ -c_1 & d_1 \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{Z}).$$

c_1 与 c_2 都是正数, 故

$$\{\rho_1^{-1}, (c_1 z + a_1)^{1/2}\} = \{\rho^{-1}, (-cz+a)^{1/2}\} \times \{\rho_2^{-1}, (c_2 z + a_2)^{1/2}\}.$$

所以

$$f | [\{\rho_1^{-1}, (c_1 z + a_1)^{1/2}\}] = \omega(a) \left(\frac{-c}{a}\right) \varepsilon_a^{-\kappa} f | [\{\rho_2^{-1},$$

$$(c_2 z + a_2)^{1/2}\}] = \bar{\omega}(d) \chi_c(d) \varepsilon_d^{\kappa} f | [\{\rho_2^{-1}, (c_2 z + a_2)^{1/2}\}],$$

得到所需结论。

引理 4.7 设 $f \in G(N, \kappa/2, \omega)$, $s = d/c$ 是 $\Gamma_0(N)$ 的尖点且 $N | c$, 则 $V(f, s) = \bar{\omega}(d) \chi_c(d) \varepsilon_d^{-\kappa} V(f, i\infty)$.

证明 这是引理 4.6 的特例, 取 $s_1 = s$, $s_2 = i\infty$,

$$\rho = \begin{pmatrix} a & b \\ -c & d \end{pmatrix} \in \Gamma_0(N)$$

即可。

设 c 为 N 的正因子，记 $g(c)=\phi((c, N/c))$。设 $\{d_1, \cdots, d_{g(c)}\}$ 为 $(Z/(c, N/c)Z)^*$ 的一个完全代表系，定义尖点集

$$S(N)=\{d_i/c\,|\,c\,|\,N,\ 1\leqslant i\leqslant g(c)\},$$

它是 $\Gamma_0(N)$ 的尖点等价类的完全代表系。由引理 4.6 可知，f 在 $S(N)$ 中各点的值决定了它在所有尖点的值。

引理 4.8 令

$$\theta(z)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} e(n^2z),$$

则 $\theta(z)$ 属于 $G(4, 1/2, id)$，且 $V(\theta, 1/4)=1$，$V(\theta, 1/2)=0$，$V(\theta, 1)=(1-i)/2$。

证明 由于定理 1.4，我们仅需证明 θ 在 $S(4)=\{1, 1/2, 1/4\}$ 中各尖点是全纯的。现在我们来计算 θ 在这些尖点的值，如果这些值都是有限的，则上述结论显然也就成立了。

由 θ 的展开式，显然有 $V(\theta, i\infty)=V(\theta, 1/4)=1$。由 (1.1.2) 式可得

$$\theta(-1/(4z))=(-2iz)^{1/2}\cdot\theta(z), \tag{4.2.2}$$

因而

$$\begin{aligned}V(\theta, 1)&=\lim_{\tau\to 0}(-\tau)^{1/2}\theta(\tau+1)\\&=\lim_{\tau\to 0}(2i)^{-1/2}\theta(-1/(4\tau))=(1-i)/2.\end{aligned}$$

以 $z+1/2$ 代入 (4.2.2) 式得

$$(-2z)^{1/2}\theta(z+1/2)=\left(\frac{-2iz}{2z+1}\right)^{1/2}\theta\left(\frac{z}{2z+1}+\frac{1}{2}\right).$$

令 $z\to 0$ 得到 $V(\theta, 1/2)=i^{1/2}V(\theta, 1/2)$，故 $V(\theta, 1/2)=0$。

考虑在 §1.2 中所构造的 Eisenstein 级数。

定理 4.9 当 $\kappa>3$ 或 $\kappa=3$，ω 不是实特征时，函数 $E_\kappa(\omega, N)$ 和 $E'_\kappa(\bar{\omega}\chi_N, N)$ 属于 $\varepsilon(N, \kappa/2, N)$。函数 $f_2^*(\omega, N)$ 和 $f_2(\omega, N)$ 属于 $\varepsilon(N, 3/2, \omega)$。当 D 为无平方因子的正整数时，函数 $f_1(id., 4D)$ 属于 $\varepsilon(4D, 3/2, id.)$，$f_1(id., 8D)$ 属于 $\varepsilon(8D, 3/2, id.)$。

证明 以函数 $E_\kappa(\omega, N)$ 为例，关于其余函数的证明是类似

的。在§1.2中，我们已证明了 $E_\kappa(\omega, N)$ 是 H 上的全纯函数，考虑它在尖点是否也是全纯。显然它在 $i\infty$ 是全纯的。对任一

$$\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z}),$$

设 $c\neq 0$。利用(1.2.31)式我们有

$$|E_\kappa(\omega, N)(\gamma(z))(cz+d)^{-\kappa/2}|$$
$$\leqslant(1+\rho y^{-(\kappa+5)/2}|cz+d|^{\kappa+5})|cz+d|^{-\kappa/2}\leqslant\rho' y^{5/2}\quad(y\to\infty),$$

这表示 $E_\kappa(\omega, N)$ 在所有尖点都是全纯的，即它属于 $G(N, \kappa/2, \omega)$。

关于 $E_\kappa(\omega, N)$ 与尖形式的正交性，这是一个经典的结果。这个证明方法是 Petersson 提出来的。设

$$f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}c(n)e(nz)\in S(N, \kappa/2, \omega)$$

及 $\gamma\in\Gamma_0(N)$，因 $\int_0^1\bar{f}(z)dx=0$ 及

$$\bar{f}(\gamma(z))Im(\gamma(z))^{(s+\kappa)/2}$$
$$=\bar{\omega}(d_\gamma)j(\gamma, z)^{-\kappa}|j(\gamma, z)|^{-2s}\bar{f}(z)y^{(s+\kappa)/2},$$

我们有

$$0=\int_0^\infty y^{(s+\kappa)/2-2}\int_0^1\bar{f}(z)dxdy=\iint\limits_{\Gamma_\infty\backslash H}\bar{f}(x+iy)y^{(s+\kappa)/2-2}dxdy$$

$$=\iint\limits_{\Gamma_0(N)\backslash H}E_\kappa(s, \bar{\omega}, N)(x+iy)\bar{f}(x+iy)y^{\kappa/2-2}dxdy,$$

注意，区域 $\{0\leqslant x<1, 0<y<\infty\}$ 是 Γ_∞ 的基域，取 $s=0$ 即证得正交性。

现在来计算§1.2中所引入的函数 $E_3'(\omega, N)$，$E_3(\omega, N)$，$f_1(id\cdot, 4D)$，$f_2^*(id\cdot, 4D)$，$f_2^*(id\cdot, 8D)$ 及 $f_2(id\cdot, 8D)$ 在尖点的值，其中 D 为无平方因子正奇数，$id.$ 表示恒为1的特征，这些结果将在§4.4中被应用。

引理 4.10 设 $\omega_2\neq id.$，则 $V(E_3'(\omega, N), 1)=i$，而对任一 $d/c\in S(N)$，当 $c\neq 1$ 时，有 $V(E_3'(\omega, N), d/c)=0$。

证明 由(1.2.7)式我们有

$$(-z)^{3/2}E_3'(\omega,N)(z)=iE_3(\omega,N)(-1/(Nz)),\quad(4.2.3)$$

因此，$V(E',1)=iV(E,i\infty)=i$，这里$E'=E_3'(\omega,N)$，$E=E_3(\omega,N)$。

设α为N的正因子，且$\alpha\neq1$，$(\alpha,N/\alpha)=1$。令$\omega=\omega_1\omega_2$，ω_1和ω_2分别为模α和模N/α的特征。设p为α的素因子，由定理3.30及(1.2.30)式，可知$E'|T(p^2)=pE'$，这里$T(p^2)$是Hecke算子，即

$$\begin{aligned}pE'(z+1/\alpha)&=p^{-2}\sum_{k=1}^{p^2}E'\left(\frac{z}{p^2}+\frac{k}{p^2}+\frac{1}{\alpha}\right)\\&=p^{-2}\sum_{k=1}^{p^2}E'\left(\frac{z}{p^2}+\frac{1+k\alpha}{\alpha p^2}\right).\end{aligned}$$

$1+k\alpha$总与αp^2互素，利用(4.2.1)式可得

$$pV(E',1/\alpha)=p^{-2}\sum_{k=1}^{p^2}V(E',(1+k\alpha)/\alpha p^2),\quad(4.2.4)$$

由于$(\alpha p^2,N)=\alpha$及$(\alpha,N/\alpha)=1$，故尖点$(1+k\alpha)/\alpha p^2$与尖点$1/\alpha$是$\Gamma_0(N)$等价的，即存在$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$，使

$$\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+k\alpha\\\alpha p^2\end{pmatrix}.$$

因而$a+b\alpha=1+k\alpha$，$c+d\alpha=\alpha p^2$，由此可得$a\equiv d\equiv1\ (\alpha)$和$d\equiv p^2\ (N/\alpha)$。在$4|\alpha$或$2\nmid\alpha$两种情况下，都有$\varepsilon_d=1$及

$$\left(\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{\alpha p^2-d\alpha}{d}\right)=\left(\frac{\alpha}{d}\right)=1.$$

由引理4.6，得到$V(E',(1+k\alpha)/\alpha p^2)=\omega_2(p^2)V(E',1/\alpha)$，代入(4.2.4)式，可知$V(E',1/\alpha)=0$。

今设c为N的任一因子，$c\neq1$。令$m=\prod_{p|c}p$，一定存在正整数l，使

$$((m^{2l}c,N),N/(m^{2l}c,N))=1.$$

利用$E'|T(m^{2l})=m^lE'$，可得

$$m^lV(E',d/c)=m^{-2l}\sum_{k=1}^{m^{2l}}V(E',(d+kc)/m^{2l}c)=0.$$

这是因为尖点 $(d+kc)/m^{2l}c$ 与 $1/(m^{2l}c,\ N)$ 为 $\Gamma_0(N)$ 等价，而后一尖点属于上述已讨论过的类型。

引理 4.11 设 $\omega^2 \neq id.$，则 $V(E_3(\omega,\ N),\ i\infty)=1$，而对任一 $d/c \in S(N)$，当 $c \neq N$ 时，有 $V(E_3(\omega,\ N),\ d/c)=0$。

证明 前一结论是显然的，后一结论利用 (4.2.3) 式即可证得。

引理 4.12 我们有

$$V(f_1(id.,\ 4D),\ 1)=-(1+i)(4D)^{-1},$$
$$V(f_1(id.,\ 8D),\ 1)=-(1+i)(8D)^{-1}.$$

证明 由定义，我们有

$$f_1(id.,\ 4D)(z)=E(0,\ id.,\ 4D)(z)$$
$$-(1-i)(4D)^{-1}z^{-3/2}E(0,\ \chi_D,\ 4D)(-(4Dz)^{-1}).$$

因此

$$z^{-3/2}f_1(id.,\ 4D)(-(4Dz)^{-1})=E'(0,\ id.,\ 4D)(z)$$
$$-2D^{1/2}(1+i)E(0,\ \chi_D,\ 4D)(z)$$
$$=-2D^{1/2}(1+i)f_1(\chi_D,\ 4D)(z),$$

利用(4.2.1)式和(1.2.37)式得到

$$V(f_1(id,\ 4D),\ 1)=\lim_{z\to i\infty}(4Dz)^{-3/2}f_1(id.,\ 4D)(-(4Dz)^{-1})$$
$$=-(1+i)(4D)^{-1}.$$

类似地可以证明第二个结论。

以下，m、l 和 β 总表示 D 的因子，α 总表示 m 的因子。

引理 4.13 设 $f(z)\in G(8D,\ 3/2,\ \chi_1)$，且适合

$$f|T(p^2)=f,\ (p|m),$$
$$f|T(p^2)=pf,\ (p|Dm^{-1}).$$

则我们有

$$V(f,\ 1/\alpha)=\mu(\alpha)\alpha(\alpha,\ l)^{-1/2}\varepsilon_{\alpha/(\alpha,l)}^{-1}\left(\frac{l/(\alpha,\ l)}{\alpha/(\alpha,\ l)}\right)V(f,\ 1),$$

$$V(f,\ 1/(4\alpha))$$
$$=\mu(\alpha)\alpha(\alpha,\ l)^{-1/2}\varepsilon_{l/(\alpha,l)}\varepsilon_l^{-1}\left(\frac{\alpha/(\alpha,\ l)}{l/(\alpha,\ l)}\right)V(f,\ 1/4),$$

$$V(f,\ 1/(8\alpha))$$
$$=\mu(\alpha)\alpha(\alpha,\ l)^{-1/2}\varepsilon_{l/(\alpha,l)}\varepsilon_l^{-1}\left(\frac{2}{(\alpha,\ l)}\right)\left(\frac{\alpha/(\alpha,\ l)}{l/(\alpha,\ l)}\right)V(f,1/8),$$

且当 $(\beta,\ D/m)\neq 1$，$r=0,\ 2,\ 3$ 时，f 在 $1/(2^r\beta)$ 的值都是零。

证明　首先证明最后一个结论。设素数 $p|(\beta,\ D/m)$。由 $f|T(p^2)=pf$，我们有

$$pf(z+1/(2^r\beta))=p^{-2}\sum_{k=1}^{p^2}f(z/p^2+(1+2^r\beta k)/(2^r\beta p^2)).$$

当 $r=2,\ 3$ 时，$2^r\beta$ 是 4 的倍数，当 $r=0$ 时，$8D/(2^r\beta)$ 是 4 的倍数，利用引理 4.10 的证明中的类似方法，可证得 $V(f,\ 1/(2^r\beta))=0$。

今证第一式 当 $\alpha=1$ 时，显然成立。对 α 的素因子个数应用归纳法。设该式对 $V(f,\ 1/\alpha)$ 成立，且 $\alpha\neq m$，我们要证明该式对 $V(f,\ 1/(\alpha p))$ 也成立，这里素数 p 适合 $\alpha p|m$。由 $f|T(p^2)=f$ 可得

$$f(z+1/\alpha)=p^{-2}\sum_{k=1}^{p^2}f(z/p^2+(1+k\alpha)/(\alpha p^2)),$$

这时 $1+k\alpha$ 与 p 不一定互素，必须将分子和分母的公因子消去后，才表示一个尖点。存在唯一的整数 k_1，使 $1\leqslant k_1\leqslant p$，$1+\alpha k_1=pt_1$。同样，存在唯一的整数 k_2，使 $1\leqslant k_2\leqslant p^2$，$1+k_2\alpha=p^2t_2$，这里 t_1、t_2 都是整数。因而利用(4.2.1)式我们可以得到

$$\begin{aligned}V(f,\ 1/\alpha)=&\ p^{-2}\sum_{1\leqslant k\leqslant p^2,\ p\nmid 1+k\alpha}V(f,\ (1+k\alpha)/(\alpha p^2))\\&+p^{-1/2}\sum_{1\leqslant k\leqslant p,\ p\nmid t_1+k\alpha}V(f,\ (t_1+k\alpha)/(\alpha p))+pV(f,\ t_2/\alpha).\end{aligned}\tag{4.2.5}$$

尖点 $(1+k\alpha)/(\alpha p^2)$ $(p\nmid 1+k\alpha)$、$(t_1+k\alpha)/(\alpha p)$ $(p\nmid t_1+k\alpha)$ 和 t_2/α 分别 $\Gamma_0(8D)$ 等价于 $1/(\alpha p)$、$1/(\alpha p)$ 和 $1/\alpha$。首先考虑 $p\nmid l$ 的情况，设 $\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(8D)$，使

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ \alpha p\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1+k\alpha\\ \alpha p^2\end{pmatrix}.\tag{4.2.6}$$

因而 $a+b\alpha p=1+k\alpha$, $c+d\alpha p=\alpha p^2$。又由于 $ad-bc=1$, 于是可推得 $d\equiv a\equiv 1\ (\alpha)$, $d\equiv p\ \ (4l/(l,\ \alpha))$。利用引理 4.6 可得

$$V(f,\ (1+k\alpha)/(\alpha p^2))=\left(\frac{lc}{d}\right)\varepsilon_d V(f,\ 1/(\alpha p))$$

$$=\left(\frac{l/(l,\ \alpha)}{d}\right)\left(\frac{c/(l,\ \alpha)}{d}\right)\varepsilon_p V(f,\ 1/(\alpha p))$$

$$=\left(\frac{l/(l,\ d)}{p}\right)\left(\frac{d}{\alpha/(l,\ \alpha)}\right)\varepsilon_{d\alpha/(l,\alpha)}\varepsilon_d^{-1}\varepsilon_{\alpha/(l,\alpha)}^{-1}V(f,\ 1/(\alpha p))$$

$$=\varepsilon_{\alpha p/(l,\alpha)}\varepsilon_{\alpha/(l,\alpha)}^{-1}\left(\frac{l/(l,\ \alpha)}{p}\right)V(f,\ 1/(\alpha p))。\qquad (4.2.7)$$

类似地可推得

$$V(f,\ (t_1+k\alpha)/(\alpha p))=\left(\frac{t_1+k\alpha}{p}\right)\left(\frac{p}{\alpha/(\alpha,\ l)}\right)V(f,1/(\alpha p)),\qquad (4.2.8)$$

$$V(f,\ t_2/\alpha)=V(f,\ 1/\alpha)。\qquad (4.2.9)$$

将(4.2.7)、(4.2.8)和(4.2.9)代入(4.2.5)式，(4.2.5)式中的第二个和为零，故得到

$$V(f,1/(\alpha p))=-p\varepsilon_{\alpha/(\alpha,l)}\varepsilon_{\alpha p/(\alpha,l)}^{-1}\left(\frac{l/(\alpha,\ l)}{p}\right)V(f,\ 1/\alpha)。$$

这表示第一式对 $V(f,\ 1/(\alpha p))$ 成立。

当 $p\mid l$ 时，这时由(4.2.6)式得到 $d\equiv a\equiv 1(\alpha)$, $d\equiv p\ \ (4l/(l,\ \alpha p))$, $(1+k\alpha)d\equiv 1\ \ (p)$, 因而

$$V(f,\ (1+k\alpha)/(\alpha p^2))$$

$$=\left(\frac{l/(l,\ \alpha p)}{d}\right)\left(\frac{p\alpha/(l,\ \alpha)}{d}\right)\varepsilon_d V(f,\ 1/(\alpha p))$$

$$=\left(\frac{l/(l,\ \alpha p)}{p}\right)\left(\frac{d}{p\alpha/(l,\ \alpha)}\right)\varepsilon_{\alpha/(l,\alpha)}\varepsilon_{p\alpha/(l,\alpha)}^{-1}V(f,\ 1/(\alpha p))$$

$$=\varepsilon_{\alpha/(l,\alpha)}\varepsilon_{p\alpha/(l,\alpha)}^{-1}\left(\frac{(1+k\alpha)l/(l,\ \alpha p)}{p}\right)V(f,\ 1/(\alpha p)),$$

同样可证得

$$V(f,\ (t_1+k\alpha)/(\alpha p))=\left(\frac{p}{\alpha/(\alpha,\ l)}\right)V(f,\ 1/(\alpha p)),$$

$$V(f,\ t_2/\alpha)=V(f,\ 1/\alpha),$$

代入(4.2.5)式得

$$V(f,\ 1/(\alpha p)) = -p^{-1/2}\left(\frac{p}{\alpha/(\alpha,\ l)}\right)V(f,\ 1/\alpha),$$

第一式成立。

类似地可证明第二式和第三式。

类似于引理 4.13，可以证明以下引理：

引理 4.14 设 $f(z)\in G(8D,\ 3/2,\ \chi_{2l})$，且适合

$$f|T(p^2)=f,\qquad (p|m),$$
$$f|T(p^2)=pf,\qquad (p|Dm^{-1}),$$

则

$$V(f,\ 1/(2^r\alpha)) = \mu(\alpha)\alpha(\alpha,\ l)^{-1/2}\varepsilon^{-1}_{\alpha/(\alpha,l)}\left(\frac{2^{1-r}l/(\alpha,\ l)}{\alpha/(\alpha,\ l)}\right)$$
$$\times V(f,\ 1/2^r)\quad (r=0,\ 1),$$
$$V(f,\ 1/(8\alpha))$$
$$=\mu(\alpha)\alpha(\alpha,\ l)^{-1/2}\varepsilon_{l/(\alpha,l)}\varepsilon_l^{-1}\left(\frac{\alpha/(\alpha,\ l)}{l/(\alpha,\ l)}\right)V(f,\ 1/8).$$

当 $(\beta,\ D/m)\neq 1$；$r=0,\ 1,\ 3$ 时，f 在 $1/(2^r\beta)$ 的值都是零。

引理 4.15 我们有

$$V(f_2^*(id.,\ 4D),\ 1/\beta) = -4^{-1}(1+i)\mu(D/\beta)\beta/(D\varepsilon_\beta),$$
$$V(f_2^*(id.,\ 4D),\ 1/(2\beta))=0,$$
$$V(f_2^*(id.,\ 4D),\ 1/(4\beta))=\mu(D/\beta)\beta/D.$$

证明 我们已知 $f_2^*(id.,\ 4D)\in G(4D,\ 3/2,\ id.)$，且对 $2D$ 的任一素因子 p，有 $f_2^*|T(p^2)=f_2^*$（利用(1.2.42)式）。首先证明第二式，因为 $f_2^*|T(4)=f_2^*$，故

$$f_2^*(id.,\ 4D)(z+1/(2\beta))$$
$$=4^{-1}\sum_{k=1}^{4}f_2^*(id.,\ 4D)(z/4+(1+2\beta k)/(8\beta)),$$

对任一k，尖点$(1+2\beta k)/(8\beta)$与 $1/(4\beta)$都和 $\Gamma_0(4D)$ 等价。由上式及引理 4.6 可得

$$V(f_2^*(id.,\ 4D),\ 1/(2\beta))$$
$$=4^{-1}\sum_{k=1}^{4}V(f_2^*(id.,\ 4D),\ (1+2\beta k)/(8\beta))$$

$$=4^{-1}\sum_{k=1}^{4}\left(\frac{2\beta}{1+2\beta k}\right)\varepsilon_{1+2k}V(f_2^*(id., 4D), 1/(4\beta))=0,$$

这里利用了

$$\left(\frac{2\beta}{a+4\beta}\right)=-\left(\frac{2\beta}{a}\right).$$

因为 $V(f_2^*(id., 4D), 1/(4D))=1$，由引理 4.13（取 $l=1$）可知 $V(f_2^*(id., 4D), 1/4)=\mu(D)D^{-1}$，因而由引理 4.13 的第二式即可证得第三式。再利用

$$f_2^*(id., 4D)(z)=4^{-1}\sum_{k=1}^{4}f_2^*(id., 4D)(z/4+k/4)$$

及 $\quad V(f_2^*(id., 4D), 1/2)=0,$

得到

$$V(f_2^*(id., 4D), 1)=4^{-1}(1+i)V(f_2^*(id., 4D), 1/4)$$
$$+2V(f_2^*(id., 4D), 1),$$

注意尖点 $3/4$ 与 $1/4$ 是 $\Gamma_0(4D)$ 等价，因此

$$V(f_2^*(id., 4D), 1)=-4^{-1}(1+i)\mu(D)D^{-1}.$$

由引理 4.13 的第一式即可证得第一式。

引理 4.16 我们有

$$V(f_2^*(\chi_{2D}, 8D), 1/\beta)=-2^{-3/2}(1+i)\mu(D/\beta)\beta^{1/2}D^{-1/2},$$
$$V(f_2^*(\chi_{2D}, 8D), 1/(2\beta))=2^{-1}(1+i)\mu(D/\beta)\beta^{1/2}D^{-1/2},$$
$$V(f_2^*(\chi_{2D}, 8D), 1/(4\beta))=0,$$
$$V(f_2^*(\chi_{2D}, 8D), 1/(8\beta))=\mu(D/\beta)\beta^{1/2}D^{-1/2}\varepsilon_{D/\beta}.$$

证明 记 $h=f_2^*(\chi_{2D}, 8D)$，h 属于 $G(8D, 3/2, \chi_{2D})$，且对 $2D$ 的任一素因子 p，有 $h|T(p^2)=h$，利用 $h|T(4)=h$ 及 $V(h, 1/(8D))=1$，可证对任一 β 有 $V(h, 1/(4\beta))=0$ 及

$$V(h, 1)=-2^{-3/2}(1+i)\mu(D)D^{-1/2},$$
$$V(h, 1/2)=2^{-1}(1+i)\mu(D)D^{-1/2},$$
$$V(h, 1/8)=\mu(D)D^{-1/2}\varepsilon_D.$$

在引理 4.14 中取 $l=D$，即得证。

引理 4.17 我们有

$$-2^{-1}(1+i)\mu(D)V(f_2(id., 8D), 1/\beta)$$

$$= -16^{-1}(1+i)\mu(D/\beta)\beta D^{-1}\varepsilon_\beta^{-1},$$

$$-2^{-1}(1+i)\mu(D)V(f_2(id.,\ 8D),\ 1/(2\beta))=0,$$

$$-2^{-1}(1+i)\mu(D)V(f_2(id.,\ 8D),\ 1/(4\beta))$$

$$= -2^{-1}\mu(D/\beta)\beta D^{-1},$$

$$-2^{-1}(1+i)\mu(D)V(f_2(id.,\ 8D),\ 1/(8\beta))$$

$$=\mu(D/\beta)\beta D^{-1}.$$

证明　由 $f_2^*(\chi_{2D},\ 8D)$ 及 $f_2(id.,\ 8D)$ 的定义((1.2.39)式及(1.2.40)式)，我们有

$$f_2^*(\chi_{2D},\ 8D)(-1/(8Dz))z^{-3/2}=8iDf_2(id.,\ 8D)(z),$$

设 c 为 $8D$ 的因子，因

$$(-cz)^{3/2}f_2(id.,\ 8D)(z+c^{-1})$$

$$=-i(8D)^{-1}c^{3/2}f_2^*(\chi_{2D},\ 8D)\left(\frac{cz}{8D(z+c^{-1})}-\frac{c}{8D}\right)$$

$$\times\left(-\frac{z}{z+c^{-1}}\right)^{3/2},$$

所以我们有

$$V(f_2(id.,\ 8D),\ 1/c)$$

$$=-i(8D)^{-1}c^{3/2}V(f_2^*(\chi_{2D},\ 8D),\ -c/(8D)).$$

尖点 $-c/(8D)$ 与 $c/(8D)$ 是 $\Gamma_0(8D)$ 等价的，利用引理 4.16 即得证。

引理 4.18　设 $f\in G(N,\ 3/2,\ \omega)$，且在 $S(N)$ 中除 $1/N$ 之外所有的尖点的值都为零，则 $g=f|W(Q)$ 在 $S(N)$ 中除 $1/(NQ^{-1})$ 之外的所有尖点的值为零。

证明　仅需注意变换 $s\to\dfrac{Qs-1}{uNs+vQ}$ 诱导出 $\Gamma_0(N)$ 的尖点等价类的一个置换，且

$$\left.\frac{Qs-1}{uNs+vQ}\right|_{s=QN^{-1}}=\frac{Q-N/Q}{(u+v)N},$$

而该尖点与 $1/N$ 是 $\Gamma_0(N)$ 等价的。

§4.3 权为 1/2 的模形式

定理 4.19 设 ψ 为模 r 的本原特征，ν 为 0 或 1，适合 $\psi(-1)=(-1)^\nu$。令

$$\theta_\psi(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi(n)n^\nu e(n^2z),\quad z\in H.$$

则当 $\nu=0$ 时，$\theta_\psi\in G(4r^2, 1/2, \psi)$，当 $\nu=1$ 时，$\theta_\psi\in S(4r^2, 3/2, \psi\chi_{-1})$。

令

$$\theta(z;k, r)=\sum_{m\equiv k(r)}m^\nu e(zm^2/2r),\quad z\in H.$$

易见

$$\theta_\psi(z)=\sum_{k=1}^{r}\psi(k)\theta(2rz;k, r).$$

为了证明定理 4.19，需要研究 $\theta(z;k, r)$ 的变换公式。它与 §1.1 中当 $\kappa=1$ 时所定义的 $\theta(z;h, A, N)$ 稍有不同，即这时 NA^{-1} 不一定是偶数，所以我们不能直接引用命题 1.3，而需稍作修改。我们这里仅考虑 $\kappa=1$ 的情况，当 $\kappa>1$ 时也有相应的结果(见[23])，这时在定义 $\theta(z;h, A, N)$ 时，不要求 NA^{-1} 的对角线元素为偶数。

命题 4.20 我们有

$$\theta(-1/z;k, r)=(-1)^\nu r^{-1/2}(-iz)^{(1+2\nu)/2}\sum_{j=1}^{r}e(jk/r)\theta(z;j, r).$$

证明 令

$$g(x)=\sum_{m=-\infty}^{+\infty}(x+m)^\nu e(itr(x+m)^2/2),$$

因为 $g(x+1)=g(x)$，故 $g(x)$ 有展开式 $g(x)=\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}a(m)e(mx)$，通过计算，可得

$$a(m)=(-i)^\nu(tr)^{-(1+2\nu)/2}e^{-\pi m^2/(tr)},$$

从而

$$g(x)=(-i)^\nu(tr)^{-(1+2\nu)/2}\sum_{m=-\infty}^{+\infty}e^{-\pi m^2/(tr)+2\pi imx}.$$

易见

$$\theta(it;k,r)=r^{\nu}g(k/r)$$
$$=(-i)^{\nu}r^{-1/2}t^{-(1+2\nu)/2}\sum_{j=1}^{r}e(jk/r)\theta(-1/(it);j,r).$$

由此即可证得命题.

命题 4.21　设 $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})$，且 $b\equiv 0\ (2)$，$c\equiv 0(2r)$，则

$$\theta(\gamma(z);k,r)$$
$$=e(abk^2/2r)\varepsilon_d^{-1}\left(\frac{2cr}{d}\right)(cz+d)^{(1+2\nu)/2}\theta(z;ak,r).$$

证明　设 $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}$，$c>0$，$a=2\alpha$，$d=2\delta$，$\alpha$ 和 δ 为整数，利用命题4.20，我们有

$$\theta(\gamma(z);k,r)=\sum_{n\equiv k(r)}n^{\nu}e\left(n^2\left(a-\frac{1}{cz+d}\right)\Big/(2cr)\right)$$
$$=(-i)^{\nu}(cr)^{-1/2}(-i(cz+d))^{(1+2\nu)/2}\sum_{t \bmod (cr)}\Phi(k,t)$$
$$\times\sum_{n\equiv t(ct)}n^{\nu}e(n^2z/(2r)),$$

其中

$$\Phi(k,t)=\sum_{\substack{g \bmod cr\\ g\equiv k(r)}}e((\alpha g^2+tg+\delta t^2)/(cr)).$$

证明的其余部分与命题1.3的证明类似，将它留给读者。■

定理4.19的证明　设 $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(4r^2)$，利用命题4.21可得：

$$\theta_{\psi}(r(z))=\sum_{\kappa=1}^{r}\psi(k)\theta\left(\frac{2rza+2rb}{2rz(c/2r)+d};k,r\right)$$
$$=\varepsilon_d^{-1}\left(\frac{c}{d}\right)(cz+d)^{(1+2\nu)/2}\sum_{\kappa=1}^{r}\psi(k)\theta(2rz;ak,r)$$
$$=\psi(d)\varepsilon_d^{2}j(\gamma,z)^{1+2\nu}\theta_{\psi}(z).$$

考虑 $\theta_{\psi}(z)$ 在尖点是否全纯. 设 $\rho=\begin{pmatrix} a & b \\ -c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})$，

$c>0$, 易见

$$|\theta_\psi(z)|\leqslant 1-\nu+2\sum_{n=1}^{\infty}n^\nu e^{-2\pi n^2 y}<1-\nu+\rho y^{-\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}\quad (y\to\infty),$$

其中 ρ 为一常数，因而

$$\begin{aligned}&|\theta_\psi(\rho^{-1}(z))(cz+d)^{-(1+2\nu)/2}|\\&\leqslant(1-\nu+\rho y^{-\left(\frac{\nu}{2}+1\right)}|cz+d|^{\nu+2})|cz+d|^{-(1+2\nu)/2}\\&\leqslant(1-\nu+\rho' y^{\frac{\nu}{2}+1})y^{-(1+2\nu)/2}\quad (y\to\infty).\end{aligned}$$

由上式可见，当 $\nu=0$ 时，$\theta_\psi(z)\in G(4r^2,\ 1/2,\ \psi)$，当 $\nu=1$ 时，$\theta_\psi(z)\in S(4r^2,\ 3/2,\ \psi\chi_{-1})$。

设 t 为正整数，ψ 为模 r 的原特征。令

$$\theta_{\psi,t}(z)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\psi(n)e(tn^2z),\quad z\in H,$$

由命题 3.31，可知 $\theta_{\psi,t}\in G(4r^2t,\ 1/2,\ \psi\chi_t)$。在本节我们将证明 $G(N,\ 1/2,\ \omega)$ 是由形如 $\theta_{\psi,t}$ 的函数生成的。

设 ω 为模 N 的偶特征，ψ 为模 $r(\psi)$ 的原偶特征，t 为正整数，以 $\Omega(N,\ \omega)$ 表示适合下述条件的二元组 $(\psi,\ t)$ 的集合：

(i) $4r^2(\psi)t$ 是 N 的因子；

(ii) 对任一与 N 互素的 n 有 $\omega(n)=\psi(n)\chi_t(n)$。

定理 4.22 函数集 $\{\theta_{\psi,t}\mid(\psi,\ t)\in\Omega(N,\ \omega)\}$ 是 $G(N,\ 1/2,\ \omega)$ 的基。

记 $\psi=\Pi\psi_p$，这里 p 跑遍 $r(\psi)$ 的素因子，ψ_p 称为 ψ 的 p-分量，它是模 p^e 的特征，这里 $p^e\|r$。若每个 ψ_p 都是偶特征，则称 ψ 为完全偶的。将 $\Omega(N,\ \omega)$ 中 ψ 为完全偶的所有二元组 $(\psi,\ t)$ 组成的子集记为 $\Omega_e(N,\ \omega)$，令 $\Omega_c(N,\ \omega)=\Omega(N,\ \omega)-\Omega_e(N,\ \omega)$。

定理 4.23 函数集 $\{\theta_{\psi,t}\mid(\psi,\ t)\in\Omega_c(N,\ \omega)\}$ 是 $S(N,\ 1/2,\ \omega)$ 的基，而函数集 $\{\theta_{\psi,t}\mid(\psi,\ t)\in\Omega_e(N,\ \omega)\}$ 是 $S(N,\ 1/2,\ \omega)$ 在 $G(N,\ 1/2,\ \omega)$ 中的正交补空间的基。

下面我们来证明定理 4.22 和定理 4.23。这部分材料取自 H.M.Stark 和 J.P.Serre[20]。

引理 4.24 (a) $G(N,\kappa/2,\omega)$ 中存在一组基，其中每个函数

的 Fourier 展开式的系数都属于某一代数数域。

(b) 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)\in G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 的系数 $a(n)$ $(n\geqslant 0)$ 都是代数数，则存在一个整数 D，使 $Da(n)$ $(n\geqslant 0)$ 都是代数整数。

证明　对于权为整数的模形式，该引理是成立的(见[22]，定理 3.52)。令

$$f_0=\theta(z)^{3\kappa}=1+6\kappa e(z)+\cdots$$

映射 ϕ: $f\mapsto ff_0$ 将 $G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 映入 $G(N,\ 2\kappa,\ \omega)$。若 f 的系数都是代数数，则 ff_0 的系数也都是代数数，(b) 对 ff_0 是成立的，可见对 f 亦成立。今证(a)：$\theta(z)$ 在 H 上无零点，在 $S(4)=\{1,\ 1/2,\ 1/4\}$ 的三个尖点上，仅在 $1/2$ 的值为零 (引理 4.8)。$G(N,\ 2\kappa,\ \omega)$ 中的一个函数 g 属于 ϕ 的像，即 g/f_0 属于 $G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 的充要条件是 g 在 $S(N)$ 中与 $1/2$ 为 $\Gamma_0(N)$ 等价的尖点处有足够高的零点阶。利用整权模形式的性质，我们已知在 $G(N,\ 2\kappa,\ \omega)$ 中存在一组基 $\{g_i\}$，g_i 在各尖点的 Fourier 系数都是代数数。g 是 $\{g_i\}$ 的线性组合，g 在一部分尖点具有一定阶的零点，这表示这些组合系数适合一组线性方程，每个方程的系数都是代数数。由此可见，$G(N,\ \kappa/2,\ \omega)$ 中存在一组基，其中每个函数的系数都是代数数。

引理 4.25　设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)$ 为 $G(N,\ 1/2,\ \omega)$ 中的非零元，p 为素数，$p\nmid N$，且 $f|T(p^2)=c_pf$，c_p 为一复数。又设 m 为正整数，且 $p^2\nmid m$。则

(a) 对任一 $n\geqslant 0$，有 $a(mp^{2n})=a(m)\omega(p)^n\left(\frac{m}{p}\right)^n$；

(b) 若 $a(m)\neq 0$，则 $p\nmid m$，且 $c_p=\omega(p)\left(\frac{m}{p}\right)(1+p^{-1})$。

证明　算子 $T(p^2)$ 将系数为代数数的模形式仍映为系数为代数数的模形式，$G(N,\ 1/2,\ \omega)$ 中存在一组基，其中每个模形式的系数都是代数数，所以 $T(p^2)$ 的本征值 c_p 是代数数，且其对应的

本征函数空间由具有代数数为系数的模形式张成。不妨假设 f 的系数 $a(n)$ 都是代数数。令

$$A(T)=\sum_{n=0}^{\infty}a(mp^{2n})T^n,$$

其中 T 为一不定元。由引理 3.39, 我们有

$$A(T)=a(m)\cdot\frac{1-\alpha T}{(1-\beta T)(1-\gamma T)},$$

其中 $\alpha=\omega(p)p^{-1}\left(\frac{m}{p}\right)$, $\beta+\gamma=c_p$, $\beta\gamma=\omega(p^2)p^{-1}$。若假设 $a(m)\neq0$, $A(T)$ 则为非零的有理函数。将 $A(T)$ 看作 p-adic T 函数, 即将 $A(T)$ 的系数看作 p-adic 数域 $\boldsymbol{Q}_p$ 的代数扩域中的元素。由引理 4.24 的(b), 可知 $a(mp^{2n})(n\geqslant0)$ 的 p-adic 绝对值是有界的, 从而当 $|T|_p<1$ 时, $A(T)$ 是收敛的, $A(T)$ 在单位圆 $U=\{T\mid |T|_p<1\}$ 内不能有极点, $(1-\beta T)(1-\gamma T)$ 若与 $1-\alpha T$ 互素, 则必有 $|\beta|_p<1$, $|\gamma|_p<1$, 但 $|\beta\gamma|_p=|\omega(p^2)p^{-1}|_p>1$, 这不可能。所以 β 与 γ 中必有一个等于 α, 不妨设 $\beta=\alpha$, 因此 $A(T)=a(m)/(1-\gamma T)$, $a(mp^{2n})=\gamma^n a(m)$。因 $\beta\gamma\neq0$, 故 $\alpha\neq0$, 可见 $p\nmid m$, 且

$$\gamma=\beta\gamma/\alpha=\omega(p^2)p^{-1}\Big/\left(\omega(p)p^{-1}\left(\frac{m}{p}\right)\right)=\omega(p)\left(\frac{m}{p}\right),$$

所以, $a(mp^{2n})=a(m)\omega(p)^n\left(\frac{m}{p}\right)^n$。证得(a)。由 $c_p=\beta+\gamma=\alpha+\gamma$, 即证得 (b)。

定理 4.26 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)$ 为 $G(N,\ 1/2,\ \omega)$ 中的非零元, N' 为 N 的一个倍数, 对任一素数 $p\nmid N'$, 有 $f|T(p^2)=c_pf$, $c_p\in\boldsymbol{C}$。则存在唯一的无平方因子的正整数 t, 使 n/t 不是平方数时总有 $a(n)=0$, 且

(i) $t\mid N'$;

(ii) 对任一 $p\nmid N'$, $c_p=\omega(p)\left(\frac{t}{p}\right)(1+p^{-1})$;

(iii) 对任一 $u\geqslant1$, 若 $(u,\ N')=1$, 则

$$a(nu^2)=a(n)\omega(u)\left(\frac{t}{u}\right).$$

证明　设m和m'任意两个使$a(m)$和$a(m')$都不是零的正整数，P为适合$p\nmid N'mm'$的素数集合，对任一$p\notin P$，由引理4.25，我们有

$$\omega(p)\left(\frac{m}{p}\right)(1+p^{-1})=\omega(p)\left(\frac{m'}{p}\right)(1+p^{-1}),$$

因此$\left(\frac{mm'}{p}\right)=1$，这表示$mm'$一定是一个平方数．所以存在一个无平方因子的正整数$t$，使$m=tv^2$，$m'=t(v')^2$，这证明了定理的第一部分。设$p$为任一素数，$p\nmid N'$．若$v=p^nu$，$p\nmid u$，由于$a(m)=a(tu^2p^{2n})\neq 0$，将引理4.25应用于$tu^2$，可知$a(tu^2)\neq 0$，由引理4.25的(b)。可知$p\nmid t$，且$c_p=\omega(p)\left(\frac{t}{p}\right)(1+p^{-1})$，证得(ii)。由于$t$无平方因子，所以(i)成立。证明(iii)时，仅需考虑$u=p$，$p\nmid N'$的情况。设$n=mp^{2a}$，$p^2\nmid m$，利用引理4.25的(b)即可证(iii)。

推论4.27　在定理4.26的假设条件下，又若$a(1)\neq 0$，则$t=1$，$c_p=\omega(p)(1+p^{-1})(p\nmid N')$。可见这时特征$\omega$由本征值集合$\{c_p\}$唯一决定。

由定理4.26的(i)和(iii)可得以下定理：

定理4.28　在定理4.26的假设条件下，我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}=t^{-s}\Big(\sum_{n\mid(N')^{\infty}}a(tn^2)n^{-2s}\Big)\prod_{p\nmid N'}\left(1-\omega(p)\left(\frac{t}{p}\right)p^{-2s}\right)^{-1}.$$

下面我们总假设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)$$

为$G(N,1/2,\omega)$中的新形式。由定理4.26，存在无平方因子的正整数t，使n/t不是平方数时，总有$a(n)=0$。

引理4.29　设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)$为$G(N,1/2,\omega)$中的新形式，则$a(1)\neq 0$，$t=1$。

证明 若 $a(1)=0$，由定理 4.28 可见当 $(n, N')=1$ 时，总有 $a(n)=0$，利用推论 4.5，这时 f 属于 $G^{old}(N, 1/2, \omega)$，这不可能，所以 $a(1)\neq 0$，由推论 4.27 可知这时 $t=1$。

以 $a(1)^{-1}f$ 代替 f，以下我们总假设 $a(1)=1$，这时称 f 为正规化的。

引理 4.30 设 $g\in G(N, 1/2, \omega)$ 是几乎所有的 Hecke 算子 $T(p^2)$ 的本征函数，且与 f 具有相同的本征值，则 $g=cf\,(c\in\mathbf{C})$。

证明 设 g 的展开式中 $e(z)$ 的系数为 c，则 $h=g-cf$ 的展开式中 $e(z)$ 的系数为零。若 $h\neq 0$，h 是几乎所有的 Hecke 算子 $T(p^2)$ 的本征函数，利用定理 4.28，可以找到 N'，使 $(n, N')=1$ 时，h 的展开式中 $e(nz)$ 的系数为零，由引理 4.4 可知 h 属于 $G^{old}(N, 1/2, \omega)$。由引理 4.2，存在 N 的一个因子 $N_1<N$，模 N_1 的特征 ψ 及 $G(N_1, 1/2, \psi)$ 中的一个正规化的新形式 g_1 使 g_1 与 f 和 h 对于几乎所有的算子 $T(p^2)$ 有相同的本征值。在推论 4.27 中已经提到，特征 ψ 可由本征值集合 $\{c_p\}$ 唯一决定，故 $\psi=\omega$，g_1 属于 $G^{old}(N, 1/2, \omega)$。同样推理知，$f-g_1$ 也属于 $G^{old}(N, 1/2, \omega)$，而 $f=g_1+(f-g_1)$，这与 f 是 $G(N, 1/2, \omega)$ 中的新形式矛盾，因此 $h=0$，即 $g=cf$。

引理 4.31 在上述假设下，f 一定是所有算子 $T(p^2)$ 的本征函数，若 $f|T(p^2)=c_pf$，则

$$\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}=\prod_{p|N}(1-c_pp^{-2s})^{-1}\prod_{p\nmid N}(1-\omega(p)p^{-2s})^{-1},$$

且当 $4p|N$ 时，$c_p=0$。

证明 设 p 为任一素数，令 $g=f|T(p^2)$，对几乎所有的算子 $T((p')^2)$，g 与 f 具有相同的本征值，由引理 4.30，有 $g=cf$，所以 f 是所有算子 $T(p^2)$ 的本征函数。利用定理 4.28 即可得到上述 Euler 乘积表达式。

设 $4p|N$，我们有

$$f|T(p)=\sum_{n=0}^{\infty}a(np)e(nz)=\sum_{m=0}^{\infty}a(m^2p^2)e(pm^2z)$$

$$=(f|T(p^2))|V(p)=c_pf|V(p),$$

它属于$G(N,1/2,\omega\chi_p)$。若$c_p\neq 0$，应用引理4.3于$f|T(p)$，可知ω模N/p是可定义的，且存在$g\in G(N/p,1/2,\omega)$，使$f|T(p)=g|V(p)$，因而$g=c_pf$，这与f是$G(N,1/2,\omega)$中的新形式矛盾。所以$c_p=0$。

引理 4.32　在上述假设之下，N是平方数，且$f|W(N)=cf|H(c\in\mathbf{C})$。

证明　设素数$p\nmid N$，则$f|T(p^2)=c_pf$，且$c_p=\omega(p)(1+p^{-1})$。利用命题3.33，我们有

$$f|W(N)T(p^2)=\bar{\omega}(p^2)c_pf|W(N)=\bar{c}_pf|W(N),$$

$$f|HT(p^2)=(c_pf)|H=\bar{c}_pf|H.$$

引理4.1告诉我们，$f|W(N)$是$G(N,1/2,\bar{\omega}\chi_N)$中的新形式，$f|H$是$G(N,1/2,\bar{\omega})$中的新形式，当$p\nmid N$时，它们对于算子$T(p^2)$具有相同的本征值，因为本征值集合$\{\bar{c}_p\}$可以唯一地决定它们对应的特征，故有$\bar{\omega}\chi_N=\bar{\omega}$，可见$N$是平方数。由引理4.30，可知$f|W(N)$与$f|H$仅差一常数因子。

定理 4.33　设f是$G(N,1/2,\omega)$中的正规化的新形式，r是ω的导子，则$N=4r^2$，$f=2^{-1}\theta_\omega$。

证明　定义

$$F(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)n^{-s}=\prod_{p|N}(1-c_pp^{-2s})^{-1}\prod_{p\nmid N}(1-\omega(p)p^{-2s})^{-1},$$

$$\bar{F}(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{a(n)}n^{-s},$$

由定理3.38，可知当$Re(s)>3/2$时，上述级数绝对收敛，且有函数方程

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)F(s)=c_1\left(\frac{2\pi}{N}\right)^{s-1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)\bar{F}\left(\frac{1}{2}-s\right)$$

(注意$f|W(N)=cf|H$)。这里的c_1及下文中的c_2、c_3、c_4均为常数。又令

$$G(s)=L(2s,\omega)=\prod_{p\nmid r}(1-\omega(p)p^{-2s})^{-1},$$

$$\bar{G}(s)=L(2s,\bar{\omega}),$$

$G(s)$有函数方程(见(1.2.21))

$$(2\pi)^{-s}\Gamma(s)G(s)=c_2\left(\frac{2\pi}{4r^2}\right)^{s-1/2}\Gamma\left(\frac{1}{2}-s\right)\bar{G}\left(\frac{1}{2}-s\right).$$

将以上两式相除得到

$$\prod_{p|m}\frac{1-c_pp^{-2s}}{1-\omega(p)p^{-2s}}=c_3\left(\frac{N}{4r^2}\right)^{s-1/2}\prod_{p|m}\frac{1-\bar{c}_pp^{2s-1}}{1-\bar{\omega}_pp^{2s-1}},$$

m为适合 $c_p\neq\omega(p)$的N的素因子的乘积. 若存在 $p|m$, 使 $\omega(p)\neq 0$, 则在 $Re(s)=0$ 的直线上左端的函数有无穷个极点, 而右端的函数在 $Re(s)=0$ 的直线上没有极点. 故对任一$p|m$, 有 $\omega(p)=0$ (即 $p|r$). 由于这时 $c_p\neq\omega(p)$, 所以 $c_p\neq 0$. 我们有

$$\prod_{p|m}(1-c_pp^{-2s})=c_4\left(\frac{Nm^2}{4r^2}\right)^s\prod_{p|m}(1-c_p'p^{-2s}),$$

其中 $c_p'=p/\bar{c}_p$. 考虑上式两端函数的零点, 可知对任一 $p|m$, 有 $c_p=c_p'$, 因而 $|c_p|^2=p$. 可见 $c_4=1$, $Nm^2=4r^2$. 由引理4.31, 当 $4p|N$ 时有 $c_p=0$, 所以m仅可能为1或2. 当 $m=1$时就有 $N=4r^2$. 若 $m=2$, 因 $c_2\neq 0$, 故 $8\nmid N$, 但因 $\omega(2)=0$, 故 $4|r$, 由于 $4N=4r^2$, 这与 $8\nmid N$ 矛盾. 所以我们证得 $N=4r^2$, $F(s)=G(s)$. 对任一$n\geqslant 1$, f 与 $2^{-1}\theta_\omega$的展开式中 $e(nz)$ 项的系数相同, $f-2^{-1}\theta_\omega$ 是一个常数, 但它是权为1/2的模形式, 必有 $f=2^{-1}\theta_\omega$.

定理 4.34 设ω是导子为r的偶特征, 则$2^{-1}\theta_\omega$为 $G(4r^2, 1/2, \omega)$中的正规化新形式.

证明 我们已知 $\theta_\omega\in G(4r^2, 1/2, \omega)$. 由定理3.30, 对任一$p\nmid 4r^2$, 有

$$\theta_\omega|T(p^2)=\omega(p)(1+p^{-1})\theta_\omega.$$

若θ_ω不是 $G(4r^2, 1/2, \omega)$中的新形式, 则存在$4r^2$的因子 $N_1<4r^2$, 模 N_1 的特征 ψ 及 $G(N_1, 1/2, \psi)$ 中的新形式 f, 使 f 与 θ_ω 对几乎所有的算子 $T(p^2)$具有相同的本征值$\psi(p)(1+p^{-1})=\omega(p)(1+p^{-1})$, 因此 $\omega=\psi$, $N_1=4r^2$(定理4.33), 这与 $N_1<4r^2$ 矛盾,所以 θ_ω 是 $G(4r^2, 1/2, \omega)$中的新形式.

定理 4.22 的证明 (a) $\{\theta_{\psi,t}|(\psi, t)\in\Omega(N, \omega)\}$ 是线性独

立的。

因为 ψ 由 ω 和 t 唯一确定，所以在 $\Omega(N,\omega)$ 中，t 作为二元对 (ψ,t) 的第二个元素仅出现一次。设

$$\lambda_1\theta_{\psi_1,t_1}+\cdots+\lambda_m\theta_{\psi_m,t_m}=0,$$

并且 $t_1<t_2<\cdots<t_m$，$\lambda_i\neq0\ (1\leqslant i\leqslant m)$。在 θ_{ψ_1,t_1} 的展开式中 $e(t_1z)$ 的系数为 2，而 $\theta_{\psi_i,t_i}(i\geqslant2)$ 的展开式中 $e(t_1z)$ 的系数为零，可见 $\lambda_1=0$，这与上述假设矛盾。

(b) $\{\theta_{\psi,t}|(\psi,t)\in\Omega(N,\omega)\}$ 生成 $G(N,1/2,\omega)$。

设 f、$g\in G(N,1/2,\omega)$，若 $p\nmid N$，利用引理 3.12 可证

$$\langle f|T(p^2),g\rangle=\omega(p^2)\langle f,g|T(p^2)\rangle,$$

所以 $\bar{\omega}(p)T(p^2)$ 是 Hermitian 算子，由于它们是可交换的，可知 $G(N,1/2,\omega)$ 有一组基，其中每个函数是 $T(p^2)(p\nmid N)$ 的本征函数。我们仅需证明当 $f\in G(N,1/2,\omega)$ 是所有算子 $T(p^2)(p\nmid N)$ 的本征函数时，它可以表成 $\{\theta_{\psi,t}|(\psi,t)\in\Omega(N,\omega)\}$ 的线性组合。对 N 用归纳法。若 f 是新形式，由定理 4.33 即得证。若 f 是老形式，则 $f\in G(N/p,1/2,\omega)$，ω 模 N/p 可定义，或 $f=g|V(p)$，$g\in G(N/p,1/2,\omega\chi_p)$，$\omega\chi_p$ 模 N/p 可定义，在第一种情况，由归纳假设，可知 f 是 $\{\theta_{\psi,t}|(\psi,t)\in\Omega(N/p,\omega)\}$ 的线性组合，显然 $\Omega(N/p,\omega)\subset\Omega(N,\omega)$；在第二种情况，由归纳假设，$g$ 是 $\{\theta_{\psi,t}|(\psi,t)\in\Omega(N/p,\omega\chi_p)\}$ 的线性组合，从而 f 是 $\{\theta_{\psi,t}|(\psi,t)\in\Omega(N,\omega)\}$ 的线性组合。

现在考虑定理 4.23 的证明。设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)$$

为 $\Gamma_1(N)$ 上权为 $\kappa/2$ 的模形式，ε 是定义在 $\mathbf{Z}$ 上以 M 为周期的函数，令

$$(f*\varepsilon)(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)\varepsilon(n)e(nz),$$

ε 的 Fourier 变换为

$$\hat{\varepsilon}(m)=M^{-1}\sum_{n=1}^{M}\varepsilon(n)e(-nm/M),$$

由反变换得到

$$\varepsilon(n)=\sum_{m=1}^{M}\hat{\varepsilon}(m)e(nm/M),$$

所以

$$(f*\varepsilon)(z)=\sum_{m=1}^{M}\hat{\varepsilon}(m)f(z+m/M),$$

$f(z+m/M)$是$\Gamma_1(NM^2)$上的权为$\kappa/2$的模形式.

引理 4.35 下述两个结论是等价的:

i) f在所有的尖点$m/M(m\in\mathbf{Z})$的值为零(这里m与M可以不互素);

ii) 对每个以M为周期的函数ε,

$$L(f*\varepsilon,\ s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)\varepsilon(n)n^{-s}$$

在$s=\kappa/2$是全纯的.

(对于权为整数的模形式,类似的结论也成立.)

证明 i) 等价于对任一以M为周期的函数ε, $f*\varepsilon$在尖点$s=0$的值为零,由定理3.38, ii) 等价于$f*\varepsilon|W(NM^2)$在$i\infty$的值为零,而$f*\varepsilon|W(NM^2)$在$i\infty$的值与$f*\varepsilon$在尖点$s=0$的值仅差一个常数因子,故引理成立.

推论 4.36 f是尖形式等价于对任一$\mathbf{Z}$上的周期函数ε, $L(f*\varepsilon,\ s)$在$s=\kappa/2$是全纯的.

当$f\in G(N,\ 1/2,\ \omega)$时, 由于任一尖点都$\Gamma_0(N)$等价于形如m/N(m与N不一定互素)的尖点,所以我们仅需考虑以N为周期的函数ε.

引理 4.37 设ψ是偶特征, 但不是完全偶的, 则θ_ψ是尖形式.

证明 设ε是$\mathbf{Z}$上任一以N为周期的函数, 不妨假设N是ψ的导子$r(\psi)$的倍数. 我们仅需证明

$$F_\varepsilon(s)=2\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon(n^2)\psi(n)n^{-2s}$$

在$s=1/2$是全纯的.

我们有　　$F_\varepsilon(s)=2\sum_{m=1}^{N}\varepsilon(m^2)\psi(m)F_{m,N}(2s)$，

其中

$$F_{m,N}(s)=\sum_{\substack{n\equiv m(N)\\ n\geq 1}}n^{-s}.$$

熟知，$F_{m,N}(s)$在 $s=1$ 处有一个单极点，留数为 $1/N$。所以$F_\varepsilon(s)$在 $s=1/2$ 最多有一个单极点，其留数为 $R(\varepsilon,\psi)/N$，其中

$$R(\varepsilon,\psi)=\sum_{m=1}^{N}\varepsilon(m^2)\psi(m).$$

仅需证明$R(\varepsilon,\psi)=0$。因 ψ 不是完全偶的，存在 $r(\psi)$ 的一个素因子 l，使 ψ 的 l-分量 ψ_l 是奇特征。设 $N=l^aN'$，$l\nmid N'$。取整数 χ_l，使 $\chi_l\equiv -1(l^a)$，$\chi_l\equiv 1(N')$。易见 χ_l 在 $\mathbf{Z}/N\mathbf{Z}$ 中是可逆的，且 $\chi_l^2\equiv 1(N)$，$\psi(\chi_l)=-1$，所以

$$\begin{aligned}R(\varepsilon,\psi)&=\sum_{m \bmod N}\varepsilon((\chi_l m)^2)\psi(\chi_l m)\\&=-\sum_{m \bmod N}\varepsilon(m^2)\psi(m)=-R(\varepsilon,\psi),\end{aligned}$$

因此$R(\varepsilon,\psi)=0$。

引理 4.38　设 ψ 是完全偶特征，T 是有限个正整数的集合，若 $f=\sum_{t\in T}c_t\theta_{\psi,t}(c_t\in\mathbf{C})$为尖形式，则所有的 $c_t=0$。

证明　假设不是所有的 $c_t=0$，设 t_0 为 T 中最小的数，使 $c_{t_0}\neq 0$。取正整数 M，它是 $2r(\psi)$ 及 T 中所有数的倍数。由于 ψ 是完全偶的，因此可以找到一个模M的特征 α，使 $\alpha^2=\psi$。定义 $\mathbf{Z}$ 上的周期函数 ε：

$$\varepsilon(n)=\begin{cases}\bar{\alpha}(n/t_0), & 若\ t_0\mid n,\ n/t_0\ 与M互素;\\ 0\ , & 否则.\end{cases}$$

我们有

$$\varepsilon(t_0n^2)=\begin{cases}\bar{\psi}(n), & 若(n,\ M)=1;\\ 0, & 若(n,\ M)\neq 1.\end{cases}$$

及

$$\varepsilon(tn^2)=0,\ 若\ t\in T,\ t>t_0.$$

(因为$(tn^2,\ M)\geqslant t>t_0$)。于是

$$L(f*\varepsilon, s)=2c_{t_0}\sum_{\substack{(n,M)=1\\ n\geqslant 1}}\bar{\psi}(n)\psi(n)(t_0n^2)^{-s}$$
$$=2c_{t_0}t_0^{-s}\sum_{\substack{(n,M)=1\\ n\geqslant 1}}n^{-2s}.$$

它在 $s=1/2$ 的留数为

$$c_{t_0}t_0^{-1/2}\varphi(M)/M\neq 0,$$

由推论 4.36 可见 f 不是尖形式.

定理 4.23 的证明 仅需证明以下三条:

(a) 若 $(\psi, t)\in\Omega_c(N, \omega)$, 则 $\theta_{\psi,t}$ 是尖形式(由引理 4.37 即得).

(b) $\{\theta_{\psi,t}\mid(\psi, t)\in\Omega_e(N, \omega)\}$ 的非零线性组合不是尖形式.

以 V 表示 $\{\theta_{\psi,t}\mid(\psi, t)\in\Omega_e(N, \omega)\}$ 的线性组合与尖形式子空间的交. 若 $V\neq\{0\}$, V 在 $T(p^2)(p\nmid N)$ 的作用下不变, 故 V 中有一个所有算子 $T(p^2)(p\nmid N)$ 的非零公共本征函数 f. 由于 $\theta_{\psi,t}$ 关于算子 $T(p^2)$ 的本征值为 $\psi(p)(1+p^{-1})$, 可见 f 是一组具有同一 ψ 的 $\theta_{\psi,t}$ 的线性组合, 这与引理 4.38 矛盾. 所以 $V=\{0\}$.

(c) 设 $(\psi, t)\in\Omega_c(N, \omega)$, $(\psi', t')\in\Omega_e(N, \omega)$, 则 $\theta_{\psi,t}$ 与 $\theta_{\psi',t'}$ 在 Petersson 内积下正交.

$\bar{\psi}'\omega^2$ 是完全偶特征, ψ 不是完全偶特征, 所以 $\bar{\psi}'\omega^2\neq\psi$, 一定可以找到一个素数 p, 使 $\psi(p)\neq\bar{\psi}'\omega^2(p)$. $\theta_{\psi,t}$ 和 $\theta_{\psi',t'}$ 关于 $T(p^2)$ 的本征值分别为 $(1+p^{-1})\psi(p)$ 和 $(1+p^{-1})\psi'(p)$, 利用 $\langle\theta_{\psi,t}|T(p^2), \theta_{\psi',t'}\rangle=\omega^2(p)\langle\theta_{\psi,t}, \theta_{\psi',t'}|T(p^2)\rangle$, 得到 $\psi(p)\langle\theta_{\psi,t},\theta_{\psi',t'}\rangle=\bar{\psi}'\omega^2(p)\langle\theta_{\psi,t},\theta_{\psi',t'}\rangle$, 可见 $\langle\theta_{\psi,t},\theta_{\psi',t'}\rangle=0$.

§4.4 $\varepsilon(N, 3/2, \omega)$的基(I)

设 $N=2^{r(2)}N'$, $r(2)\geqslant 2$, $2\nmid N'$, ω 为模 N 的偶特征, 其导子记为 $r(\omega)$, 利用定理 2.23, 当 $r(2)=2$ 时, 我们有

$$\dim\varepsilon(N, 3/2, \omega)=2\sum_{\substack{c\mid N'\\ (c\cdot N'/(c))\mid N/r(\omega)}}\varphi((c, N'/c))$$
$$-\dim\varepsilon(N, 1/2, \omega), \qquad (4.4.1)$$

当 $r(2)=3$ 时，有

$$\dim\ \varepsilon(N,3/2,\omega)=3\sum_{\substack{c\mid N'\\(c,N'/c)\mid N/r(\omega)}}\varphi((c,\ N'/c))-\dim\ \varepsilon(N,\ 1/2,\ \omega),\qquad(4.4.2)$$

当 $r(2)\geqslant4$ 时，有

$$\dim\ \varepsilon(N,3/2,\omega)=\sum_{\substack{c\mid N\\(c,N/c)\mid N/r(\omega)}}\varphi((c,\ N/c))-\dim\ \varepsilon(N,\ 1/2,\ \omega),\qquad(4.4.3)$$

从定理 4.23，我们已得到了 $\dim\varepsilon(N,\ 1/2,\ \omega)$，它是 $\Omega_e(N,\ \omega)$ 中的二元对 $(\psi,\ t)$ 的个数。

在本节，D 总表示一个无平方因子的正奇数，m、l 和 β 总表示 D 的因子，α 总表示 m 的因子，ν 为 D 的素因子个数。我们将构造 $\varepsilon(4D,\ 3/2,\ \chi_l)$，$\varepsilon(8D,\ 3/2,\ \chi_l)$ 和 $\varepsilon(8D,\ 3/2,\ \chi_{2l})$ 的基。由于 $\Omega_e(4D,\ \chi_l)=\{(id.,\ l)\}$，故 $\dim\varepsilon(4D,\ 1/2,\ \chi_l)=1$，所以

$$\dim\varepsilon(4D,\ 3/2,\ \chi_l)=2^{\nu+1}-1.\qquad(4.4.4)$$

我们在本节仅讨论权为 $3/2$ 的 Eisenstein 级数，为了符号的简便，我们将省去下标“3”，定义

$$\lambda(n,\ 4D)=\lambda_3(n,\ 4D)=L_{4D}(2,\ id.)^{-1}L_{4D}(1,\ \chi_{-t})\beta_3(n,\ 0,\ \chi_D,\ 4D)$$

及 $\quad A(p,\ n)=A_3(p,\ n).$

由(1.2.43)及(1.2.44)式，易见

$$\begin{aligned}&A(2,\ 4n)-4^{-1}(1-i)=2^{-1}(A(2,\ n)-4^{-1}(1-i)),\\&A(p,\ p^2n)-p^{-1}=p^{-1}(A(p,\ n)-p^{-1})\quad(p\neq2).\end{aligned}\qquad(4.4.5)$$

当 $2\nmid q$ 时，$A(2,\ qn)=A(2,\ n)$。同样当 $p\nmid q$ 时，$A(p,\ qn)=A(p,\ n)$。

定义函数

$$\begin{aligned}g(\chi_l,\ 4D,\ 4D)(z)&=1-4\pi(1+i)l^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(ln,\ 4D)(A(2,\ ln)-4^{-1}(1-i))\\&\quad\times\prod_{p\mid D}(A(p,\ ln)-p^{-1})n^{1/2}e(nz),\end{aligned}$$

当 $m\neq D$ 时，定义函数

$$g(\chi_l, 4m, 4D)(z)$$
$$= -4\pi(1+i)l^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(ln, 4D)(A(2, ln)-4^{-1}(1-i))$$
$$\times\prod_{p\mid m}(A(p, ln)-p^{-1})n^{1/2}e(nz),$$

当 $m\neq 1$ 时，定义函数

$$g(\chi_l, m, 4D)(z)$$
$$=2\pi l^{1/2}\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(ln, 4D)\prod_{p\mid m}(A(p, ln)-p^{-1})n^{1/2}e(nz).$$

命题 4.39 函数 $g(\chi_l, 4m, 4D)$ 属于 $\varepsilon(4D, 3/2, \chi_l)$，且

$$V(g(\chi_l, 4m, 4D), 1/\alpha)$$
$$=-4^{-1}(1+i)\mu(m/\alpha)\alpha m^{-1}l^{1/2}(l, \alpha)^{-1/2}\varepsilon^{-1}_{\alpha/(l,\alpha)}\left(\frac{l/(l, \alpha)}{\alpha/(l, \alpha)}\right),$$
$$V(g(\chi_l, 4m, 4D), 1/(4\alpha))$$
$$=\mu(m/\alpha)\alpha m^{-1}l^{1/2}(l, \alpha)^{-1/2}\varepsilon_{l/(l,\alpha)}\left(\frac{\alpha/(l, \alpha)}{l/(l, \alpha)}\right),$$

$g(\chi_l, 4m, 4D)$ 在 $S(4D)$ 的其他尖点的值为零。

证明 首先考虑 $l=1$。由引理 1.22，可知 $g(id., 4D, 4D)=f_2^*(id., 4D)$，由定理 4.9 及引理 4.15，可见命题对 $g(id., 4D, 4D)$ 是成立的。设 $m\neq D$，我们有

$$g(id., 4m, 4D)=-4\pi(1+i)\prod_{p\mid D/m}p(1+p)^{-1}$$
$$\times\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n, 4D)(A(2, n)-4^{-1}(1-i))\prod_{p\mid m}(A(p, n)-p^{-1})$$
$$\times\prod_{p\mid D/m}\{1+A(p, n)-(A(p, n)-p^{-1})\}n^{1/2}e(nz)$$
$$=\prod_{p\mid D/m}p(1+p)^{-1}\sum_{d\mid D/m}\mu(d)f_2^*(id., 4md). \tag{4.4.6}$$

所以 $g(id., 4m, 4D)$ 属于 $\varepsilon(4D, 3/2, id.)$。由(4.4.5)式可得

$$g(id., 4m, 4D)\mid T(p^2)=g(id., 4m, 4D)\quad (p\mid 2m),$$
$$g(id., 4m, 4D)\mid T(p^2)=pg(id., 4m, 4D)\quad (p\mid D/m). \tag{4.4.7}$$

由引理 4.15，我们有

$$V(g(id., 4m, 4D), 1)$$

$$= \prod_{p \mid D/m} p(1+p)^{-1} \sum_{d \mid D/m} \mu(D) V(f_2^*(id., 4md), 1)$$
$$= -4^{-1}(1+i) \prod_{p \mid D/m} p(1+p)^{-1} \sum_{d \mid D/m} \mu(d)\mu(md)(md)^{-1}$$
$$= -4^{-1}(1+i)\mu(m)m^{-1}.$$

利用 $g(id., 4m, 4D) \mid T(4) = g(id., 4m, 4D)$ 和引理 4.15 的证明方法，可证得对一切 β 有 $V(g(id., 4m, 4D), 1/(2\beta)) = 0$ 及

$$V(g(id., 4m, 4D), 1/4)$$
$$= -4(1+i)^{-1} V(g(id., 4m, 4D), 1) = \mu(m)m^{-1},$$

利用引理 4.13，即可证得 $l=1$ 时命题成立。

对于 $l \neq 1$ 的情况，因为

$$g(\chi_l, 4m, 4D) = g(id., 4m, 4D) \mid T(l)$$
$$= l^{-1} \sum_{k=1}^{l} g(id., 4m, 4D)\left(\frac{z+k}{l}\right),$$

所以 $g(\chi_l, 4m, 4D) \in \varepsilon(4D, 3/2, \chi_l)$。利用引理 4.6，我们可得到

$$V(g(\chi_l, 4m, 4D), 1)$$
$$= l^{-1} \sum_{d \mid l} d^{3/2} \sum_{\substack{k=1 \\ (k, l/d)=1}}^{l/d} V(g(id., 4m, 4D), k/(ld^{-1}))$$
$$= l^{-1} \sum_{d \mid l} l^{3/2} \sum_{k=1}^{l/d} \left(\frac{k}{ld^{-1}}\right) V(g(id., 4m, 4D), 1/(ld^{-1}))$$
$$= -4^{-1}(1+i)\mu(m)m^{-1}l^{1/2}.$$

(4.4.7) 式对 $g(\chi_l, 4m, 4D)$ 也同样成立，利用上述 $l=1$ 时同样的方法，可证命题对 $g(\chi_l, 4m, 4D)$ 也成立。

引理 4.40　设 κ 为正奇数，n 为正整数，则

$$\lambda_\kappa(n, 4m) = \lambda_\kappa(n, 4D) \prod_{p \mid D/m} (1 + A_\kappa(p, n)).$$

证明　设 $n = ab^2$，a 无平方因子，记 $h = h(p, n)$，由定义

$$\lambda_\kappa(n, 4m) = L_{4m}(2\lambda, id.)^{-1} L_{4m}(\lambda, \chi_{(-1)^\lambda a}) \beta_\kappa(n, 0, \chi_m, 4m),$$

其中 $\lambda = (\kappa-1)/2$。易见

$$L_{4m}(2\lambda, id.)^{-1} L_{4m}(\lambda, \chi_{(-1)^\lambda a})$$
$$= L_{4D}(2\lambda, id.)^{-1} L_{4D}(\lambda, \chi_{(-1)^\lambda a})$$

$$\times \prod_{p|D/m}(1-p^{-2\lambda})(1-\chi_{(-1)^\lambda a}(p)p^{-\lambda})^{-1}$$

及

$$\beta_\kappa(ab^2, 0, \chi_m, 4m) = \sum_{\substack{uv|b \\ (nv, 2m)=1}} \mu(u)\chi_{(-1)^\lambda a}(u)u^{-\lambda}v^{1-2\lambda}$$

$$= \prod_{p|a, p\nmid 2m}\left(\sum_{l=0}^{(h-1)/2} p^{(1-2\lambda)l}\right)$$

$$\times \prod_{p|b, p\nmid 2ma}\left(\sum_{l=0}^{h/2} p^{(1-2\lambda)l} - \chi_{(-1)^\lambda a}(p)p^{-\lambda}\sum_{l=0}^{h/2-1} p^{(1-2\lambda)l}\right)$$

$$= \prod_{p|a, p\nmid D/m}\left(\sum_{l=0}^{(h-1)/2} p^{(1-2\lambda)l}\right)\prod_{p|b, p|D/m, p\nmid a}\left(\sum_{l=0}^{h/2} p^{(1-2\lambda)l}\right.$$

$$\left.-\chi_{(-1)^\lambda a}p^{-\lambda}\sum_{l=0}^{h/2-1} p^{(1-2\lambda)l}\right)\beta_\kappa(ab^2, 0, \chi_D, 4D).$$

当 $p|a$, $p|D/m$ 时,

$$(1-p^{-2\lambda})\sum_{l=0}^{(h-1)/2} p^{(1-2\lambda)l}$$

$$= 1 + (1-p^{-1})\sum_{l=1}^{(h-1)/2} p^{(1-2\lambda)l} - p^{(1-2\lambda)(h+1)/2-1}$$

$$= 1 + A_\kappa(p, n),$$

当 $p\nmid a$, $p|b$, $p|D/m$ 时,若 $\chi_{(-1)^\lambda a}(p) = 1$, 则有

$$(1-p^{-2\lambda})(1-p^{-\lambda})^{-1}\left(\sum_{l=0}^{h/2} p^{(1-2\lambda)l} - p^{-\lambda}\sum_{l=0}^{h/2-1} p^{(1-2\lambda)l}\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{h/2} p^{(1-2\lambda)l} - p^{-2\lambda}\sum_{l=0}^{h/2-1} p^{(1-2\lambda)l} + p^{(1-2\lambda)(h+1)/2-1/2}$$

$$= 1 + A_\kappa(p, n).$$

若 $\chi_{(-1)^\lambda a} = -1$, 则有

$$(1-p^{-2\lambda})(1+p^{-\lambda})^{-1}\left(\sum_{l=0}^{h/2} p^{(1-2\lambda)l} + p^{-\lambda}\sum_{l=0}^{h/2-1} p^{(1-2\lambda)l}\right)$$

$$= \sum_{l=0}^{h/2} p^{(1-2\lambda)l} - p^{-2\lambda}\sum_{l=0}^{h/2-1} p^{(1-2\lambda)l} - p^{(1-2\lambda)(h+1)/2-1/2}$$

$$= 1 + A_\kappa(p, n),$$

引理证毕.

命题 4.41 函数 $g(\chi_l, m, 4D)$ $(m\neq 1)$ 属于 $\varepsilon(4D, 3/2, \chi_l)$, 且

$$V(g(\chi_l, m, 4D), 1/\alpha)$$
$$= -4^{-1}(1+i)\mu(m/\alpha)\alpha m^{-1}l^{1/2}(l, \alpha)^{-1/2}\varepsilon^{-1}_{\alpha/(l,\alpha)}\left(\frac{l/(l, \alpha)}{\alpha/(l, \alpha)}\right),$$

$g(\chi_l, m, 4D)$在$S(4D)$的其他尖点的值为零。

证明　类似于命题4.39，仅需考虑$l=1$的情况。假设已证得$g(id., m, 4D)$属于$\varepsilon(4D, 3/2, id.)$，由(4.4.5)式可知

$$\begin{aligned} &g(id., m, 4D)\,|\,T(p^2) = g(id., m, 4D) \quad (p\,|\,m), \\ &g(id., m, 4D)\,|\,T(p^2) = pg(id., m, 4D) \\ &\qquad\qquad (p\,|\,2D/m). \end{aligned} \tag{4.4.8}$$

利用上述关于$T(4)$的关系式，对任一β有

$$2V(g(id., m, 4D), 1/(4\beta))$$
$$= 4^{-1}\sum_{k=1}^{4} V(g(id., m, 4D), (1+4\beta k)/(4\beta))$$
$$= V(g(id., m, 4D), 1/(4\beta)),$$

由此得到$V(g(id., m, 4D), 1/(4\beta)) = 0$。仍利用关于$T(4)$的关系式可得

$$2V(g(id., m, 4D), 1/(2\beta))$$
$$= 4^{-1}\sum_{k=1}^{4} V(g(id., m, 4D), (1+2\beta k)/(8\beta)) = 0.$$

所以如果知道了$V(g(id., m, 4D), 1)$，由引理4.13，即可知道$g(id., m, 4D)$在所有尖点的值。令

$$f_3(id., 4D)(z)$$
$$= 2\pi\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n, 4D)\left(\prod_{p|D}A(p, n) - D^{-1}\right)n^{1/2}e(nz),$$

则

$$f_1(id., 4D) = -f_3(id., 4D) + 1$$
$$-4\pi(1+i)\sum_{n=1}^{\infty}\lambda(n, 4D)\left(A(2, n) - 4^{-1}(1-i)\right)$$
$$\times\prod_{p|D}A(p, n)n^{1/2}e(nz)$$
$$= D^{-1}\sum_{m|D}mg(id., 4m, 4D) - f_3(id., 4D),$$

可见$f_3(id., 4D)$属于$\varepsilon(4D, 3/2, id.)$，且

$$V(f_3(id., 4D), 1) = D^{-1}\sum_{m|D} mV(g(id., 4m, 4D), 1)$$

$$-V(f_1(id., 4D), 1)$$

$$= -4^{-1}(1+i)D^{-1}\sum_{m|D}\mu(m) + (1+i)(4D)^{-1}$$

$$= (1+i)(4D)^{-1}. \tag{4.4.9}$$

因为 $m\neq 1$ 即表示 $D\neq 1$。

若 D 为一素数 p, 则 $g(id., p, 4p) = f_3(id., 4p)$, 它属于 $\varepsilon(4p, 3/2, id.)$, 再由 (4.4.9) 式可知这时命题成立。现对 D 的素因子个数 ν 应用归纳法。易见

$$\prod_{p|\beta}(1+p)^{-1}\prod_{p|D}(A(p, n) - p^{-1})$$

$$= \prod_{p|D/\beta}(A(p, n) - p^{-1}) \prod_{p|\beta}\{(1+A(p,n))(1+p)^{-1} - p^{-1}\}$$

$$= \sum_{d|\beta}\mu(\beta/d)d\beta^{-1} \prod_{p|D/\beta}(A(p, n) - p^{-1})$$

$$\times\prod_{p|d}(1+A(p, n))(1+p)^{-1},$$

所以

$$\sum_{\beta|D, \beta\neq D}\mu(\beta)\prod_{p|\beta}(1+p)^{-1}\prod_{p|D}(A(p, n) - p^{-1})$$

$$= \prod_{p|D}A(p, n) - D^{-1} + \sum_{\beta|D, \beta\neq D}\sum_{d|\beta, d\neq 1}\mu(d)d\beta^{-1}$$

$$\times \prod_{p|D/\beta}(A(p, n) - p^{-1})\prod_{p|d}(1+A(p, n))(1+p)^{-1},$$

我们得到

$$\sum_{\beta|D, \beta\neq D}\mu(\beta)\prod_{p|\beta}(1+p)^{-1}g(id., D, 4D) = f_3(id., 4D)$$

$$+ \sum_{\beta|D, \beta\neq D}\sum_{d|\beta, d\neq 1}\mu(d)d\beta^{-1}g(id., D/\beta, 4D/d).$$

这里利用了引理 4.40。由归纳假设, 可知 $g(id., D, 4D)$ 属于 $\varepsilon(4D, 3/2, id.)$, 且

$$\sum_{\beta|D, \beta\neq D}\mu(\beta)\prod_{p|\beta}(1+p)^{-1}V(g(id., D, 4D), 1)$$

$$= (1+i)(4D)^{-1} + \sum_{\beta|D, \beta\neq D}\sum_{d|\beta, d\neq 1}\mu(d)d\beta^{-1}$$

$$\times\prod_{p|d}(1+p)^{-1}(-4^{-1}(1+i)\mu(D/\beta)\beta D^{-1})$$

$$= -(4D)^{-1}(1+i)\mu(D)\sum_{\beta|D, \beta\neq D}\mu(\beta)\prod_{p|\beta}(1+p)^{-1},$$

所以，$V(g(id., D, 4D), 1) = -(4D)^{-1}(1+i)\mu(D)$，命题对 $g(id., D, 4D)$ 成立。

利用命题 4.39 中所用的方法，可得

$$g(id., m, 4D) = \prod_{p\mid D/m} p(1+p)^{-1} \sum_{d\mid D/m} \mu(d) g(id., md, 4md),$$

由归纳假设及以上所证，右端每个函数都属于 $\varepsilon(4D, 3/2, id.)$，故 $g(id., m, 4D)$ 亦属于 $\varepsilon(4D, 3/2, id.)$，且

$$\begin{aligned} & V(g(id., m, 4D), 1) \\ &= \prod_{p\mid D/m} p(1+p)^{-1} \sum_{d\mid D/m} \mu(d) V(g(id., md, 4md), 1) \\ &= -4^{-1}(1+i) \prod_{p\mid D/m} p(1+p)^{-1} \sum_{d\mid D/m} \mu(d)\mu(md)(md)^{-1} \\ &= -(4m)^{-1}(1+i)\mu(m). \end{aligned}$$

正如本证明开始时所述，可见命题成立。

定理 4.42　函数集

$$g(\chi_l, 4m, 4D) \quad (m\mid D); \; g(\chi_l, m, 4D) \quad (m\mid D, m\neq 1)$$

是 $\varepsilon(4D, 3/2, \chi_l)$ 的基。

证明　定义函数

$$G(\chi_l, 4, 4D) = l^{-1/2}\varepsilon_l^{-1} g(\chi_l, 4, 4D),$$

对 D 的每个素因子 p 定义函数

$$\begin{aligned} & G(\chi_l, p, 4D) \\ &= 2(i-1) l^{-1/2}(l, p)^{1/2} \varepsilon_{p/(l,p)} \left(\frac{l/(l, p)}{p/(l, p)}\right) g(\chi_l, p, 4D). \end{aligned}$$

然后对 m 的素因子个数归纳地定义函数

$$\begin{aligned} & G(\chi_l, 4m, 4D) \\ &= l^{-1/2}(l, m)^{1/2} \varepsilon_{l/(l,m)}^{-1} \left(\frac{m/(l, m)}{l/(l, m)}\right) \Big\{ g(\chi_l, 4m, 4D) \\ &\quad - g(\chi_l, m, 4D) - \mu(m) m^{-1} l^{1/2} \sum_{\alpha\mid m, \alpha\neq m} \mu(\alpha)\alpha(l, \alpha)^{-1/2} \\ &\quad \times \varepsilon_{l/(l,\alpha)} \left(\frac{\alpha/(l, \alpha)}{l/(l, \alpha)}\right) G(\chi_l, 4\alpha, 4D) \Big\} \end{aligned}$$

及

$$G(\chi_l, m, 4D) = 2(i-1) l^{-1/2}(l, m)^{1/2} \varepsilon_{m/(l,m)} \left(\frac{l/(l, m)}{m/(l, m)}\right)$$

$$\times\left\{g(\chi_l, m, 4D)+(1+i)(4m)^{-1}\mu(m)\sum_{\alpha|m,\alpha\ne1,m}'\mu(\alpha)\right.$$

$$\left.\times\alpha l^{1/2}(l, \alpha)^{-1/2}\varepsilon_{\alpha/(l,\alpha)}^{-1}\left(\frac{l/(l, \alpha)}{\alpha/(l, \alpha)}\right)G(\chi_l, \alpha, 4D)\right\}.$$

可以归纳地证明,除了在1和$1/(2^r m)$两个尖点之外,$G(\chi_l, 2^r m, 4D)$ $(r=0$ 或 $2)$在$S(4D)$中的其他尖点的值都是零. 利用命题4.39和4.41,通过直接计算可知

$$V(G(\chi_l, 4m, 4D), 1/(4m))=V(G(\chi_l, m, 4D), 1/m)=1,$$

$$V(G(\chi_l, 4m, 4D), 1)$$

$$=-(4m)^{-1}(1+i)(l, m)^{1/2}\varepsilon_{l/(l,m)}^{-1}\left(\frac{m/(l, m)}{l/(l, m)}\right), \quad (4.4.10)$$

$$V(G(\chi_l, m, 4D), 1)=-m^{-1}(l, m)^{1/2}\varepsilon_{m/(l,m)}\left(\frac{l/(l, m)}{m/(l, m)}\right).$$

由(4.4.4)式, 可见函数集

$$G(\chi_l, 4m, 4D)\quad(m|D)\quad 及\quad G(\chi_l, m, 4D)\quad(m|D, m\ne1)$$

是$\varepsilon(4D, 3/2, \chi_l)$的基, 它们是定理中所说的函数集的线性组合, 所以定理成立.

现在取$N=8D$. 因为$\Omega_e(8D,\chi_l)=\{(id., l)\}$, $\Omega_e(8D,\chi_{2l})=\{(id., 2l)\}$, 所以由(4.4.2)式可知

$$\dim\varepsilon(8D, 3/2, \chi_l)=\dim\varepsilon(8D, 3/2, \chi_{2l})=3\cdot2^{\nu}-1.$$

令

$$R=\{n\in\mathbf{Z}|n\geqslant1, n\equiv1 或 2\ \ (4)\}.$$

定义函数

$$f_4(id., 4D)=2\pi\sum_{n\in R}\lambda(n, 4D)\prod_{p|D}(A(p, n)-p^{-1})n^{1/2}e(nz).$$

由(1.2.45)和(1.2.46)式我们有

$$f_2^*(id., 4D)+2^{-1}(1+i)\mu(D)f_2(id., 8D)$$

$$=2^{-1}\cdot3f_4(id., 8D).$$

这里我们利用了$A(2, n)-4^{-1}(1-i)=3(i-1)/8$ $(n\in R)$. 可见$f_4(id., 8D)$属于$\varepsilon(8D, 3/2, id.)$. 由引理4.15和4.17, 我们有

$$V(f_4(id., 8D), 1/(8\beta)) = V(f_4(id., 8D), 1/(2\beta)) = 0,$$
$$V(f_4(id., 8D), 1/\beta) = -8^{-1}(1+i)\mu(D/\beta)\beta D^{-1}\varepsilon_\beta^{-1},$$
$$V(f_4(id., 8D), 1/(4\beta)) = \mu(D/\beta)\beta D^{-1}. \tag{4.4.11}$$

对任一$m|D$，定义函数

$$g(\chi_l, 4m, 8D) = 2\pi l^{1/2}\sum_{ln\in R}\lambda(ln, 4D)\prod_{p|m}(A(p, ln)-p^{-1})n^{1/2}e(nz).$$

命题 4.43　函数$g(\chi_l, 4m, 4D)$属于$e(8D, 3/2, \chi_l)$，且

$$V(g(\chi_l, 4m, 8D), 1/\alpha) = -8^{-1}(1+i)\mu(m/\alpha)\alpha m^{-1}l^{1/2}(l, \alpha)^{-1/2}\varepsilon_{\alpha/(l,\alpha)}^{-1}\left(\frac{l/(l, \alpha)}{\alpha/(l, \alpha)}\right),$$
$$V(g(\chi_l, 4m, 8D), 1/(4\alpha)) = \mu(m/\alpha)\alpha m^{-1}l^{1/2}(l, \alpha)^{-1/2}\varepsilon_{l/(l,\alpha)}\left(\frac{\alpha/(l, \alpha)}{l/(l, \alpha)}\right),$$

$g(\chi_l, 4m, 8D)$在$S(8D)$的其他尖点的值为零.

证明　因$g(\chi_l, 4m, 8D) = g(id., 4m, 8D)|T(l)$，故仅需考虑$l=1$的情况. 类似于(4.4.6)式，我们有

$$g(id., 4m, 8D) = \prod_{p|D/m}p(1+p)^{-1}\sum_{d|D/m}\mu(d)f_4(id., 8md),$$

所以$g(id., 4m, 8D)$属于$e(8D, 3/2, id.)$. 由(4.4.11)式得

$$V(g(id., 4m, 8D), 1/(8\beta)) = V(g(id., 4m, 8D), 1/(2\beta)) = 0,$$
$$V(g(id., 4m, 8D), 1) = -8^{-1}(1+i)\mu(m)m^{-1},$$
$$V(g(id., 4m, 8D), 1/4) = \mu(m)m^{-1}.$$

显然我们也有

$$g(id., 4m, 8D)|T(p^2) = g(id., 4m, 8D)\quad(p|m),$$
$$g(id., 4m, 8D)|T(p^2) = pg(id., 4m, 8D)\quad(p|D/m).$$

由引理 4.13，即可证得命题成立.

定理 4.44　函数集

$$g(\chi_l, 4m, 8D)\ (m|D);\ g(\chi_l, 4m, 4D)\ (m|D);$$
$$g(\chi_l, m, 4D)\ (m|D, m\neq 1)$$

是 $\varepsilon(8D, 3/2, \chi_l)$的基。

证明 尖点 $1/(8\alpha)$ 和尖点 $1/(4\alpha)$是 $\Gamma_0(4D)$ 等价的，由命题 4.39 和引理 4.6 得到

$$V(g(\chi_l, 4m, 4D), 1/(8\alpha))$$
$$=\mu(m/\alpha)\alpha m^{-1}l^{1/2}(l, \alpha)^{-1/2}\varepsilon_{l\cdot(l,\alpha)}\left(\frac{2\alpha/(l, \alpha)}{l/(l, \alpha)}\right).$$

定义函数

$$G(\chi_l, 4, 8D)=l^{-1/2}\varepsilon_l^{-1}g(\chi_l, 4, 8D),$$
$$G(\chi_l, 8, 8D)$$
$$=l^{-1/2}\varepsilon_l^{-1}\left(\frac{2}{l}\right)\{g(\chi_l, 4, 4D)-g(\chi_l, 4, 8D)\}.$$

然后归纳地定义

$$G(\chi_l, 8m, 8D)=l^{-1/2}(l, m)^{1/2}\varepsilon_{l/(l,m)}^{-1}\left(\frac{2m/(l, m)}{l/(l, m)}\right)$$
$$\times\{g(\chi_l, 4m, 4D)-g(\chi_l, 4m, 8D)-2^{-1}g(\chi_l, m, 4D)$$
$$-\mu(m)m^{-1}l^{1/2}\sum_{\alpha|m, \alpha\neq m}\mu(\alpha)\alpha(l, \alpha)^{-1/2}$$
$$\times\varepsilon_{l/(l,\alpha)}\left(\frac{2\alpha/(l, \alpha)}{l/(l, \alpha)}\right)G(\chi_l, 8\alpha, 8D)\}$$

及

$$G(\chi_l, 4m, 8D)=l^{-1/2}(l, m)^{1/2}\varepsilon_{l/(l,m)}^{-1}\left(\frac{m/(l, m)}{l/(l, m)}\right)$$
$$\times\Big\{g(\chi_l, 4m, 8D)-2^{-1}g(\chi_l, m, 4D)$$
$$-\mu(m)m^{-1}l^{1/2}\sum_{\alpha|m, \alpha\neq m}\mu(\alpha)\alpha(l, \alpha)^{-1/2}$$
$$\times\varepsilon_{l/(l,\alpha)}\left(\frac{\alpha/(l, \alpha)}{l/(l, \alpha)}\right)G(\chi_l, 4\alpha, 4D)\Big\},$$

当 $m\neq 1$ 时，定义函数 $G(\chi_l, m, 8D)=G(\chi_l, m, 4D)$。

可以归纳地证明 $G(\chi_l, 2^r m, 8D)$ $(r=0, 2, 3)$ 仅在尖点 1 和 $1/(2^r m)$有非零的值，在 $S(8D)$ 的其他尖点的值都是零。通过直接计算得到

$$V(G(\chi_l, m, 8D), 1/m)=1 \quad (m\neq 1),$$
$$V(G(\chi_l, 4m, 8D), 1/(4m))$$

$$=V(G(\chi_l,\ 8m,\ 8D),\ 1/(8m))=1,$$

$$V(G(\chi_l,\ m,\ 8D),\ 1)=-m^{-1}(l,\ m)^{1/2}\varepsilon_{m/(l,m)}\left(\frac{l/(l,\ m)}{m/(l,\ m)}\right),$$

$$V(G(\chi_l,\ 4m,\ 8D),\ 1)$$
$$=-8^{-1}(1+i)m^{-1}(l,\ m)^{1/2}\varepsilon^{-1}_{l/(l,m)}\left(\frac{m/(l,\ m)}{l/(l,\ m)}\right),$$

$$V(G(\chi_l,\ 8m,\ 8D),\ 1)$$
$$=-8^{-1}(1+i)m^{-1}(l,\ m)^{1/2}\varepsilon^{-1}_{l/(l,m)}\left(\frac{2m/(l,\ m)}{l/(l,\ m)}\right). \tag{4.4.12}$$

由(4.4.10)式,可见函数集

$$G(\chi_l,\ 8m,\ 8D)\ \ (m|D);\ \ G(\chi_l,\ 4m,\ 8D)\ \ (m|D);$$
$$G(\chi_l,\ m,\ 8D)\ \ (m|D,\ m\neq 1)$$

是 $\varepsilon(8D,\ 3/2,\ \chi_l)$的基,从而定理成立.

现在考虑 $\varepsilon(8D,\ 3/2,\ \chi_{2l})$的基. 定义函数

$$\begin{aligned} g(\chi_{2l},\ m,\ 8D)&=g(\chi_l,\ m,\ 4D)\,|\,T(2),\\ g(\chi_{2l},\ 2m,\ 8D)&=g(\chi_l,\ 4m,\ 8D)\,|\,T(2),\\ g(\chi_{2l},\ 8m,\ 8D)&=g(\chi_l,\ 4m,\ 4D)\,|\,T(2).\end{aligned} \tag{4.4.13}$$

利用命题 4.41、4.43 和 4.39 不难证明下述三个命题:

命题 4.45　函数 $g(\chi_{2l},\ m,\ 8D)$ $(m\neq 1)$ 属于 $\varepsilon(8D,\ 3/2,\ \chi_{2l})$, 且

$$V(g(\chi_{2l},\ m,\ 8D),\ 1/\alpha)=-2^{-3/2}(1+i)\mu(m/\alpha)$$
$$\times\alpha m^{-1}l^{1/2}(l,\ \alpha)^{-1/2}\varepsilon^{-1}_{\alpha/(l,\alpha)}\left(\frac{2l/(l,\ \alpha)}{\alpha/(l,\ \alpha)}\right),$$

$g(\chi_{2l},\ m,\ 8D)$在 $S(8D)$的其他尖点的值都是零.

命题 4.46　函数 $g(\chi_{2l},\ 2m,\ 8D)$ 属于 $\varepsilon(8D,\ 3/2,\ \chi_{2l})$, 且

$$V(g(\chi_{2l},\ 2m,\ 8D),\ 1/\alpha)$$
$$=-2^{-5/2}(1+i)\mu(m/\alpha)\alpha m^{-1}l^{1/2}(l,\ \alpha)^{-1/2}$$
$$\times\varepsilon^{-1}_{\alpha/(l,\alpha)}\left(\frac{2l/(l,\ \alpha)}{\alpha/(l,\ \alpha)}\right),$$

$$V(g(\chi_{2l},\ 2m,\ 8D),\ 1/(2\alpha))$$

$$= -2^{-1}(1+i)\mu(m/\alpha)\alpha m^{-1}l^{1/2}(l, \alpha)^{-1/2}\varepsilon^{-1}_{\alpha/(l,\alpha)}$$
$$\times \varepsilon_l^{-1}\left(\frac{l/(l, \alpha)}{\alpha/(l, \alpha)}\right),$$

$g(\chi_{2l}, 2m, 8D)$在$S(8D)$的其他尖点的值都是零.

命题 4.47 函数$g(\chi_{2l}, 8m, 8D)$属于$\varepsilon(8D, 3/2, \chi_{2l})$, 且

$$V(g(\chi_{2l}, 8m, 8D), 1/\alpha)$$
$$= -2^{3/2}(1+i)\mu(m/\alpha)\alpha m^{-1}l^{1/2}(l, \alpha)^{-1/2}$$
$$\times \varepsilon^{-1}_{\alpha/(l,\alpha)}\left(\frac{2l/(l, \alpha)}{\alpha/(l, \alpha)}\right),$$

$$V(g(\chi_{2l}, 8m, 8D), 1/(2\alpha))$$
$$= 2^{-1}(1+i)\mu(m/\alpha)\alpha m^{-1}l^{1/2}(l, \alpha)^{-1/2}\varepsilon^{-1}_{\alpha(l,\alpha)}$$
$$\times \varepsilon_l^{-1}\left(\frac{l/(l, \alpha)}{\alpha/(l, \alpha)}\right),$$

$$V(g(\chi_{2l}, 8m, 8D), 1/(8\alpha))$$
$$= \mu(m/\alpha)\alpha m^{-1}l^{1/2}(l, \alpha)^{-1/2}\varepsilon_{l/(l,\alpha)}\left(\frac{\alpha/(l, \alpha)}{l/(l, \alpha)}\right),$$

$g(\chi_{2l}, 8m, 8D)$在$S(8D)$的其他尖点的值都是零.

定理 4.48 函数集

$g(\chi_{2l}, m, 8D)$ $(m|D, m\neq 1)$; $g(\chi_{2l}, 2m, 8D)$ $(m|D)$;

$g(\chi_{2l}, 8m, 8D)$ $(m|D)$

是$\varepsilon(8D, 3/2, \chi_{2l})$的基.

证明 令

$$G(\chi_{2l}, 2, 8D) = (1-i)l^{-1/2}\varepsilon_l g(\chi_{2l}, 2, 8D),$$
$$G(\chi_{2l}, 8, 8D) = l^{-1/2}\varepsilon_l^{-1}(g(\chi_{2l}, 8, 8D) - g(\chi_{2l}, 2, 8D)).$$

设p为D的任一素因子,定义

$$G(\chi_{2l}, p, 8D)$$
$$= 2^{1/2}(i-1)l^{-1/2}(l, p)^{1/2}\varepsilon_{p/(l,p)}\left(\frac{2l/(l, p)}{p/(l, p)}\right)g(\chi_{2l}, p, 8D).$$

对任一$m\neq 1$, 归纳地定义

$$G(\chi_{2l}, m, 8D) = 2^{1/2}(i-1)l^{-1/2}(l, m)^{1/2}$$
$$\times \varepsilon_{m/(l,m)}\left(\frac{2l/(l, m)}{m/(l, m)}\right)\Big\{g(\chi_{2l}, m, 8D)$$

$$+2^{-3/2}(1+i)\mu(m)m^{-1}\sum_{\alpha|m,\alpha\neq 1,m}\mu(\alpha)\alpha l^{1/2}(l,\alpha)^{-1/2}$$

$$\times\varepsilon_{\alpha/(l,\alpha)}^{-1}\left(\frac{2l/(l,\alpha)}{\alpha/(l,\alpha)}\right)G(\chi_{2l},\alpha,8D)\Big\},$$

$$G(\chi_{2l},2m,8D)=(1-i)l^{-1/2}(l,m)^{1/2}\varepsilon_{m/(l,m)}\varepsilon_l\left(\frac{l/(l,m)}{m/(l,m)}\right)$$

$$\times\Big\{g(\chi_{2l},2m,8D)-2^{-1}g(\chi_{2l},m,8D)$$

$$-2^{-1}(1+i)\mu(m)m^{-1}l^{1/2}\varepsilon_l^{-1}\sum_{\alpha|m,\alpha\neq m}\mu(\alpha)(l,\alpha)^{-1/2}$$

$$\times\varepsilon_{\alpha/(l,\alpha)}^{-1}\left(\frac{l/(l,\alpha)}{\alpha/(l,\alpha)}\right)G(\chi_{2l},2\alpha,8D)\Big\},$$

$$G(\chi_{2l},8m,8D)=l^{-1/2}(l,m)^{1/2}\varepsilon_{l/(l,m)}^{-1}\left(\frac{m/(l,m)}{l/(l,m)}\right)$$

$$\times\Big\{g(\chi_{2l},8m,8D)-g(\chi_{2l},2m,8D)-2^{-1}g(\chi_{2l},m,8D)$$

$$-\mu(m)m^{-1}l^{1/2}\sum_{\alpha|m,\alpha\neq m}\mu(\alpha)\alpha(l,\alpha)^{-1/2}$$

$$\times\varepsilon_{l/(l,\alpha)}\left(\frac{\alpha/(l,\alpha)}{l/(l,\alpha)}\right)G(\chi_{2l},8\alpha,8D)\Big\},$$

从而我们有

$$V(G(\chi_{2l},m,8D),1/m)=V(G(\chi_{2l},2m,8D),1/(2m))$$
$$=V(G(\chi_{2l},8m,8D),1/(8m))=1,$$

$$V(G(\chi_{2l},m,8D),1)$$
$$=-m^{-1}(l,m)^{1/2}\varepsilon_{m/(l,m)}\left(\frac{l/(l,m)}{m/(l,m)}\right),\tag{4.4.14}$$

$$V(G(\chi_{2l},2m,8D),1)$$
$$=-2^{-3/2}m^{-1}(l,m)^{1/2}\varepsilon_{m/(l,m)}\varepsilon_l\left(\frac{l/(l,m)}{m/(l,m)}\right),$$

$$V(G(\chi_{2l},8m,8D),1)$$
$$=-2^{-5/2}(1+i)m^{-1}(l,m)^{1/2}\varepsilon_{l/(l,m)}^{-1}\left(\frac{m/(l,m)}{l/(l,m)}\right),$$

从而可证得定理。

由于空间 $\varepsilon(8D,3/2,\chi_{2l})$ 的维数与 $\varepsilon(8D,3/2,\chi_l)$ 的维数相同，算子 $T'(2)$ 是线性的，由(4.4.13)式及定理 4.44 可给出定理 4.48 的另一证明。我们在下一节将利用函数 $G(\chi_{2l},m,8D)$、

$G(\chi_{2l}, 2m, 8D)$和$G(\chi_{2l}, 8m, 8D)$。

最后，我们给出本节所引入的一些模形式的Zeta函数，设

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)\in G(N, 3/2, \omega)$$

是所有Heche算子$T(p^2)$的本征函数，对应的本征值为λ_p。设t为无平方因子的正整数，且与N互素。定理3.40给出了f的Zeta函数的Eular乘积表示(取$\kappa=3$)：

$$\sum_{n=1}^{\infty}a(tn^2)n^{-s}=a(t)\prod_p\left(1-\omega(p)\left(\frac{-1}{p}\right)p^{-s}\right)$$
$$\times(1-\lambda_p p^{-s}+\omega(p^2)p^{1-2s})^{-1}.$$

取$f=g(\chi_l, 4m, 4D)$。我们已知$f|T(p^2)=f$(若$p|2m$)及$f|T(p^2)=pf$(若$p|D/m$)。设素数q与$4D$互素。令

$$a(n)=\lambda(ln, 4D)(A(2, ln)-4^{-1}(1-i))$$
$$\times\prod_{p|m}(A(p, ln)-p^{-1})n^{1/2}$$

及

$$f|T(q^2)=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)e(nz),$$

易见

$$L_{4D}(1, \chi_{-lnq^2})(A(2, lnq^2)-4^{-1}(1-i))$$
$$\times\prod_{p|m}(A(p, lnq^2)-p^{-1})$$
$$=L_{4D}(1, \chi_{-ln})(A(2, ln)-4^{-1}(1-i))$$
$$\times\prod_{p|m}(A(p, ln)-p^{-1}).$$

记$ln=\tau\sigma^2$，τ为无平方因子的正整数，以$h(p)$表示ln中出现的p的最高幂次。利用表达式

$$\beta_3(\tau\sigma^2, 0, \chi_D, 4D)$$
$$=\prod_{p|\tau, p\nmid 2D}\left(\sum_{k=0}^{(h(p)-1)/2}p^{-k}\right)\prod_{p|\sigma, p\nmid 2D\tau}\left(\sum_{k=0}^{h(p)/2}p^{-k}-\chi_{-tn}(p)\sum_{k=1}^{h(p)/2}p^{-k}\right),$$

若$h(q)=0$，则

$$\beta_3(\tau\sigma^2q^2, 0, \chi_D, 4D)$$
$$=(1+q^{-1}-\chi_{-l\tau}(q)q^{-1})\beta_3(\tau\sigma^2, 0, \chi_D, 4D),$$

若$q|\tau$，则

$$\beta_3(\tau\sigma^2q^2,\ 0,\ \chi_D,\ 4D)$$
$$=\left(\sum_{k=0}^{(h(q)+1)/2} q^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{(h(q)-1)/2} q^{-k}\right)^{-1}\beta_3(\tau\sigma^2,\ 0,\ \chi_D,\ 4D),$$

若 $q\nmid\tau$, $q|\sigma$, 则

$$\beta_3(\tau\sigma^2q^2,\ 0,\ \chi_D,\ 4D)=\left(\sum_{k=0}^{h(q)/2+1} q^{-k}-\chi_{-\tau l}(q)\sum_{k=1}^{(h(q)/2)+1} q^{-k}\right)$$
$$\times\left(\sum_{k=0}^{h(q)/2} q^{-k}-\chi_{-\tau l}(q)\sum_{k=1}^{h(q)/2} q^{-k}\right)^{-1}\beta_3(\tau\sigma^2,\ 0,\ \chi_D,\ 4D).$$

利用定理 3.30, 当 $h(q)=0$ 时, 我们有

$$b(n)=\{q(1+q^{-1}-\chi_{-l\tau}(q)q^{-1})+\chi_{-l\tau}(q)\}a(n)$$
$$=(1+q)a(n);$$

当 $h(q)=1$ 时, 我们有

$$b(n)=a(q^2n)=(1+q)a(n);$$

当 $q|\tau$, $h(q)\geqslant 3$ 时, 我们有

$$b(n)=\left\{q\left(\sum_{k=0}^{(h(q)+1)/2} q^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{(h(q)-1)/2} q^{-k}\right)^{-1}\right.$$
$$\left.+\left(\sum_{k=0}^{(h(q)-3)/2} q^{-k}\right)\left(\sum_{k=0}^{(h(q)-1)/2} q^{-k}\right)^{-1}\right\}a(n)=(1+q)a(n);$$

当 $q\nmid\tau$, $q|\sigma$ 时, 我们有

$$b(n)=\left\{q\left(\sum_{k=0}^{(h(q)/2)+1} q^{-k}-\chi_{-l\tau}(q)\sum_{k=1}^{(h(q)/2)+1} q^{-k}\right)\right.$$
$$\times\left(\sum_{k=0}^{h(q)/2} q^{-k}-\chi_{-l\tau}(q)\sum_{n=1}^{h(q)/2} q^{-k}\right)^{-1}$$
$$+\left(\sum_{k=0}^{(h(q)/2)-1} q^{-k}-\chi_{-l\tau}(q)\sum_{k=1}^{(h(q)/2)-1} q^{-k}\right)$$
$$\left.\times\left(\sum_{k=0}^{h(q)/2} q^{-k}-\chi_{-l\tau}(q)\sum_{k=1}^{h(q)/2} q^{-k}\right)^{-1}\right\}a(n)$$
$$=(1+q)a(n).$$

因此

$$g(\chi_l,\ 4m,\ 4D)|T(q^2)=(1+q)g(\chi_l,\ 4m,\ 4D)\quad(q\nmid 2D).$$

我们得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}a(tn^2)n^{-s}$$

$$=a(t)\prod_{p|2m}(1-p^{-s})^{-1}\prod_{p|D/m}(1-p^{1-s})^{-1}$$

$$\times\prod_{q\nmid 2D}(1-\chi_{-lt}(q)q^{-s})(1-(1+q)q^{-s}+q^{1-2s})^{-1}$$

$$=a(t)L_{D/m}(s,\ id.)L_{2m}(s-1,\ id.)L_{2Dt}(s,\ \chi_{-lt})^{-1}.$$

如以 $g(\chi_l,\ m,\ 4D)$代替 $g(\chi_l, 4m, 4D)$，相应的 Eular 乘积为

$$a(t)L_{2D/m}(s,\ id.)L_m(s-1,\ id.)L_{2Dt}(s,\ \chi_{-lt})^{-1}.$$

由于 $g(\chi_l,\ 4m,\ 8D)|T(2)=0$，故 $g(\chi_l,\ 4m,\ 8D)$ 相应的 Eular 乘积为

$$a(t)L_{2D/m}(s,\ id.)L_{2m}(s-1,\ id.)L_{2Dt}(s,\ \chi_{-lt})^{-1},$$

函数 $g(\chi_{2l},\ m,\ 8D)$，$g(\chi_{2l},\ 2m,\ 8D)$和 $g(\chi_{2l},\ 8m,\ 8D)$所对应的 Eular 乘积分别为

$$a(t)L_{2D/m}(s,\ id.)L_m(s-1,\ id.)L_{2Dt}(s,\ \chi_{-2lt})^{-1},$$

$$a(t)L_{D/m}(s,\ id.)L_{2m}(s-1,\ id.)L_{2Dt}(s,\ \chi_{-2lt})^{-1},$$

$$a(t)L_{2D/m}(s,\ id.)L_{2m}(s-1,\ id.)L_{2Dt}(s,\ \chi_{-2lt})^{-1}.$$

§4.5 $\varepsilon(N,\ 3/2,\ \omega)$的基(I)

对任意的 $N(4|N)$ 和模N的偶特征 ω，本节将构造 $\varepsilon(N, 3/2, \omega)$的基. 以 f 表示ω的导子. 设 c 为正整数，ψ 为模m的原特征.对任一素数 p，我们以 $c(p)$，$f(p)$，$m(p)$，…分别表示 c，f，m，…的标准因子分解式中所出现的 p 的幂次(即 $p^{c(p)}\|c$，等等). 为了简便，将 $N(p)$写为 $n(p)$.

二元对 $(\psi,\ c)$，若适合下列条件之一，称为允许对：

(1) 当 $n(2)\geqslant 4$ 时，c 和 m 适合

$$c|N,\quad m|(c,\ N/c)|N/f. \tag{4.5.1}$$

(2) 当 $n(2)=3$，$f(2)=3$ 时，c 和 m 适合

$$c|N,\quad m|(c/2^{c(2)},\ N/c)|N/f,\ c(2)=0,\ 1,\ 3.$$

(3) 当 $n(2)=3$，$f(2)=0,\ 2$ 时，c 和 m 适合(4.5.1)，且 $c(2)=0,\ 2,\ 3.$

(4) 当 $n(2)=2$ 时，c 和 m 适合(4.5.1)，且 $c(2)=0,\ 2.$

允许对的个数为

$$\sum_{c|N',(c,N/c)|N/f}\varphi((c,N/c)),\quad 若\ n(2)\geqslant 4.$$

$$3\sum_{c|N',(c,N/c)|N/f}\varphi((c,N/c)),\quad 若\ n(2)=3.$$

$$2\sum_{c|N',(c,N/c)|N/f}\varphi((c,N/c)),\quad 若\ n(2)=2.$$

其中 $N'=N/2^{n(2)}$，φ 为欧拉函数．设 t 是正整数，ψ^* 是一个完全偶的原特征，以 r 为导子，且 (ψ^*, t) 适合：

$$\text{(i)}\ 4r^2t\,|\,N;\quad \text{(ii)}\ \omega=\psi^*\chi_t. \tag{4.5.2}$$

二元对 (ψ^*, t) 的个数等于 $\varepsilon(N, 1/2, \omega)$ 的维数．对任一这样的对 (ψ^*, t)，因 ψ^* 是完全偶的，存在特征 ξ，使 $\xi^2=\psi^*$，以 $\tilde{m}$ 表示 ξ 的导子，当 $2\nmid r$ 时，有 $\tilde{m}=r$；当 $2|r$ 时，有 $\tilde{m}=2r$．在选取 ξ 时，我们还有个约定．对模素数幂 p^e 的任一偶特征 ψ_p^*，在两个可能的适合 $\xi_p^2=\psi_p^*$ 的模 p^e（模 p^{e+1}，当 $p=2$ 时）的特征中，固定选取其中的一个．以下我们总以 p 表示奇素数．令

$$\tilde{c}=2^e rt\prod_{p|t,p\nmid r}p^{-1}, \tag{4.5.3}$$

其中

$$e=\begin{cases}1, & 若\ r(2)\geqslant 3;\\ -1, & 若\ r(2)=0,\ t(2)\geqslant 1;\\ 0, & 若\ r(2)=t(2)=0.\end{cases}$$

因 r 是 ψ^* 的导子，所以 $r(2)$ 不能是 1 或 2．由(4.5.2)的(i)可知

$$2^{2-e}r\prod_{p|t,p\nmid r}p\tilde{c}\,|\,N.$$

由(4.5.2)的(ii)可知 $f(2)\leqslant 2-e+r(2)$．若 $p|r$，则 $f(p)\leqslant r(p)$，若 $p|t$，$p\nmid r$，则 $f(p)\leqslant 1$．因此我们有 $f\tilde{c}\,|\,N$．易见 $\tilde{m}\,|\,\tilde{c}$ 及 $\tilde{m}\,|\,N/\tilde{c}$，当 $n(2)=2, 3$ 时，总有 $\tilde{c}(2)=0$．$(\xi, \tilde{c})$ 是一个允许对．我们称这样的允许对为例外对。每个二元对 (ψ^*, t) 对应唯一的例外对，例外对的个数为 $\varepsilon(N, 1/2, \omega)$ 的维数．由(4.4.1)、(4.4.2)和(4.4.3)式可知，非例外的允许对个数就是 $\varepsilon(N, 3/2, \omega)$ 的维数。

将 N 的所有因子排个次序．首先将 N 的素因子排列为 $p_0=2$，$p_1, \cdots, p_n$，N 的任一因子 c 对应一个序列 $(c(p_0), c(p_1), \cdots,$

$c(p_s))$。设 c_1 和 c_2 为 N 的两个因子，若存在一个整数 $j(0\leqslant j\leqslant n)$，使 $c_1(p_j)<c_2(p_j)$，及 $c_1(p_i)=c_2(p_i)(0\leqslant i<j)$，我们称 c_1 位于 c_2 之前，记为 $c_1\prec c_2$。于是 N 的所有因子有了排序。

我们知道

$$S(N)=\{d_1/c,\ \cdots,\ d_{g(c)}/c\mid c|N\}$$

是 $\Gamma_0(N)$ 的尖点等价类的一个完全代表系，其中 $g(c)=\varphi((c, N/c))$，$d_i(1\leqslant i\leqslant g(c))$跑遍$(\mathbf{Z}/(c, N/c)\mathbf{Z})^*$，且与 c 互素。将 $S(N)$中的尖点首先按照 c 的次序排列，在对应同一个 c 的 $g(c)$ 个尖点之间可以任意排列，这样就得到了 $S(N)$ 中所有尖点的一个排序。

本节的主要内容是构造 $\varepsilon(N, 3/2, \omega)$的基。

对任一非例外的允许对(ψ, c)，我们定义一个函数$F(\psi, c)(z)\in\varepsilon(N, 3/2, \omega)$，使

$$V(F(\psi, c),\ d/c)=\psi(d)\rho_1(\psi)\rho_2(d) \tag{4.5.4}$$

及

$$V(F(\psi, c),\ d/\beta)=0 \quad (c\prec\beta,\ \beta|N)。 \tag{4.5.5}$$

这里 $\rho_1(\psi)$不依赖于 d，$\rho_2(d)$不依赖于 ψ，且 $\rho_1(\psi)\rho_2(d)\neq0$。定义尖点集合

$$S_f(N)=\{d_1/c,\ \cdots,\ d_{g(c)}/c\mid c\ \text{适合条件(1)～(4)之一}\}$$

构造一个矩阵 $A=(V(F(\psi, c), s))$，A 的每一行对应一个函数 $F(\psi, c)$，A 的每一列对应 $S_f(N)$ 中的一个尖点。在函数集 $\{F(\psi, c)\}$中也可引入一个排序，首先按照 c 的次序，而在同一个 c 对应的函数 $F(\psi, c)$ 之间可以任意排列。A 的行按照函数 $F(\psi, c)$ 的次序排列，A 的列则按照尖点 s 的次序排列。利用(4.5.4)、(4.5.5) 式及下述引理 4.49 可知 A 是满秩的。因此我们所找到的函数集 $\{F(\psi, c)\}$ 就是 $\varepsilon(N, 3/2, \omega)$的基。有时在(4.5.3)式右端还会出现附加的项，但这时可以证明它并不影响 A 的满秩。

我们首先叙述关于特征的几个引理：

引理 4.49 设 n 为正整数，$\psi_i(1\leqslant i\leqslant\varphi(n))$为模 n 的所有特

征，$a_j(1\leqslant j\leqslant\varphi(n))$ 是 $(\mathbf{Z}/n\mathbf{Z})^*$ 的一个完全代表系，则矩阵 $(\psi_i(a_j))$ 是 $\varphi(n)$ 阶满秩矩阵。

引理 4.50　设 ω 为模 r 的原特征，a 和 n 为整数，且 $r\nmid n$，则

$$\sum_{b=1}^{r/(r,n)}\omega(a+nb)=0.$$

证明　由于 $r\nmid n$，故 $(r,n)\neq r$，存在整数 b_0，使 $\omega(1+(r,n)b_0)\neq 1$。我们有

$$\begin{aligned}
&\omega(1+(r,n)b_0)\sum_{b=1}^{r/(r,n)}\omega(a+nb)\\
&=\omega(1+(r,n)b_0)\sum_{b=1}^{r/(r,n)}\omega(a+(r,n)b)\\
&=\sum_{b=1}^{r/(r,n)}\omega(a+(r,n)(b(1+(r,n)b_0)+ab_0))\\
&=\sum_{b=1}^{r/(r,n)}\omega(a+(r,n)b).
\end{aligned}$$

可见引理成立。

引理 4.51　设 ψ 和 ω 分别为模 m 和 f 的原特征，f 是 m 的倍数，且 $\psi\omega$ 为模 f 的原特征，则

$$\sum_{a=1}^{m}\psi(a)\omega(1+af/m)=\varepsilon m^{1/2},$$

其中 $|\varepsilon|=1$。

证明　利用特征的积性，仅需考虑 $m=p^r$，$f=p^s$ $(s\geqslant r)$ 的情况，这里 p 是一个素数（也可以是 2）。若 $s=r$（这时 $p\neq 2$，因 $\psi\omega$ 是模 f 的原特征），则

$$\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{p^r}\psi(a)\omega(1+a)\sum_{b=1}^{p^r}\bar{\psi}(b)\bar{\omega}(1+b)\\
&=\sum_{a=1}^{p^r}\sum_{p\nmid b,b=1}^{p^r}\psi(ab^{-1})\omega(1+a)\bar{\omega}(1+b)\\
&=\sum_{c=1}^{p^r}\psi(c)\sum_{\substack{b=1\\ p\nmid b,p\nmid 1+b}}^{p^r}\omega(1+(c-1)b(1+b)^{-1})\\
&=\sum_{c=1}^{p^r}\psi(c)\Bigg\{\sum_{b=1}^{p^r}\omega(1+(c-1)b)
\end{aligned}$$

$$-\sum_{b=1}^{p^{r-1}}\omega(1+(c-1)pb)-\sum_{b=1}^{p^{r-1}}\omega(1+(c-1)(1+pb))\Big\}$$

$$=p^r-p^{r-1}\sum_{a=1}^{p}\psi(1+ap^{r-1})-p^{r-1}\sum_{a=1}^{p}\psi\omega(1+ap^{r-1})=p^r.$$

最后两个等式应用了引理 4.50。若 $s>r$，则

$$\sum_{a=1}^{p^r}\psi(a)\omega(1+p^{s-r}a)\sum_{b=1}^{p^r}\bar\psi(b)\bar\omega(1+p^{s-r}b)$$

$$=\sum_{c=1}^{p^r}\psi(c)\sum_{p\nmid b=1}^{p^r}\omega(1+p^{s-r}(c-1)b(1+p^{s-r}b)^{-1})$$

$$=\sum_{c=1}^{p^r}\psi(c)\Big\{\sum_{b=1}^{p^r}\omega(1+p^{s-r}(c-1)b)$$

$$-\sum_{b=1}^{p^{r-1}}\omega(1+p^{s-r+1}(c-1)b)\Big\}$$

$$=p^r-p^{r-1}\sum_{a=1}^{p}\psi(1+ap^{r-1})=p^r.$$

从现在开始我们对每一个非例外的允许对(ψ, c)构造函数 $F(\psi, c)(z)\in\varepsilon(N, 3/2, \omega)$，且使$F(\psi, c)$在尖点的值适合(4.5.4)和(4.5.5)式。分$(\bar\omega\psi^2)^2\neq id.$和$(\bar\omega\psi^2)^2=id.$两种情况讨论。

(I) $(\bar\omega\psi^2)^2\neq id.$

对于给定的非例外允许对(ψ, c)，定义下列参数：

f_1 是适合 $c(p)<f(p)$的素数幂 $p^{f(p)}$之积；

m_2 是适合 $f(p)\leqslant m(p)$, $m(p)>0$ 的素数幂 $p^{m(p)}$之积；

f_3 是适合 $0<m(p)<f(p)\leqslant c(p)$的素数幂 $p^{f(p)}$之积；

f_4 是适合 $0=m(p)<f(p)\leqslant c(p)$的素数幂 $p^{f(p)}$之积；

u_1 是适合 $p|c$, $p\nmid mf$, $2\nmid c(p)$, $c(p)<n(p)$的素数 p 之积；

u_2 是适合 $p|c$, $p\nmid mf$, $2|c(p)$, $c(p)<n(p)$的素数 p 之积；

v_1 是适合 $p|c$, $p\nmid mf$, $2\nmid c(p)$, $c(p)=n(p)$的素数 p 之积；

v_2 是适合 $p|c$, $p\nmid mf$, $2|c(p)$, $c(p)=n(p)$的素数 p 之积；

w 是适合 $p|N$, $p\nmid cf$ 的素数 p 之积。

令

$$f_0=2^{f(2)},\qquad f_2=\prod_{p|m_2}p^{f(p)},$$

$$m_0=2^{m(2)},\qquad m_i=\prod_{p\mid f_i}p^{m(p)}\quad(i=1,3).$$

因此，我们有 $f=f_0f_1f_2f_3f_4$，$m=m_0m_1m_2m_3$。若 $i\neq j$，则 $(f_i, f_j)=(m_i, m_j)=1$。若 $p\mid N$，则 p 能除尽集合 $\{f_1, m_2, f_3, f_4, u_1, v_1, u_2, v_2, w\}$ 中唯一的一个数。

将特征 ω 和 ψ 相应分解为

$$\omega=\prod_{i=0}^{4}\omega_i,\qquad \psi=\prod_{i=0}^{3}\psi_i,$$

其中 ω_i 的导子是 $f_i(0\leqslant i\leqslant 4)$，$\psi_i$ 的导子是 $m_i(0\leqslant i\leqslant 3)$。

在构造函数 $F(\psi, c)$ 时，将区分下列五种不同的情况．在每一个情况，我们首先恰当选择正整数 N_1，Q，η 及特征 ϕ_1，ϕ_2，其中 ϕ_1 是模 N_1 的特征，且 $\phi_1^2\neq id.$，Q 适合条件 $Q\mid N$，$(Q, N/Q)=1$。然后定义下列函数：

$$g=g(\psi, c)(z)=E(\phi_1, N_1)\mid W(Q),\tag{4.5.6}$$

$$h=h(\psi, c)(z)=\sum_{j=1}^{\sigma}\phi_2(j)g(z+j/\sigma),\tag{4.5.7}$$

$$q=q(\psi, c)(z)=h\mid V(\eta).\tag{4.5.8}$$

其中 σ 为 ϕ_2 的导子．$E(\phi_1, N_1)$ 为(1.2.29)式所定义的 $E_3(\phi_1, N_1)$，$W(Q)$ 为对称算子，$V(\eta)$ 为平移算子．我们的目标是使 $q\in\varepsilon(N, 3/2, \omega)$，并且在尖点的值具有所要求的性质．对任一给定的整数 s，定义 $c[s]=\prod_{p\mid s}p^{c(p)}$，类似地定义 $N[s]$。令

$$N_1'=f_1m_2f_3f_4u_1u_2v_1w,\quad Q'=f_1m_2u_1u_2w,$$
$$\eta'=c/(m_1m_2'f_3f_4u_1v_1),\ \zeta=c[m_2]u_1,\ \sigma'=m_1m_2'm_3u_1,$$
$$\phi_1'=\bar\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\bar\psi^2,\quad \phi_2'=\bar\omega_2\psi_1\psi_2\bar\psi_3\chi_\zeta',\ (\text{这里 }\chi_\zeta'=(\tfrac{\cdot}{\zeta}))。$$

其中 σ' 是 ϕ_2' 的导子，即 m_2' 是 $\bar\omega_2\psi_2$ 的导子。

情况1　$n(2)\geqslant 4$，$c(2)<f(2)$。

我们取

$$N_1=[8, 2^{f(2)}]N_1',\quad Q=[8, 2^{f(2)}]Q',\quad \eta=\eta'/m_0,$$
$$\phi_1=\bar\omega_0\phi_1'\chi_{\eta Q},\quad \phi_2=\psi_0\psi_2'.$$

这时 ϕ_2 的导子 $\sigma=m_0\sigma'$。容易验证 ϕ_1 是模 N_1 的特征．由于

$$(\bar\omega\psi^2)^2=(\bar\omega_0\psi_0^2)^2(\bar\omega_1\psi_1^2)^2(\bar\omega_2\psi_2^2)^2(\bar\omega_3\psi_3^2)^2\bar\omega_4^2$$

及

$$\phi_1^2=(\bar{\omega}_0\bar{\psi}_0^2)^2(\bar{\omega}_1\bar{\psi}_1^2)^2(\bar{\omega}_2\bar{\psi}_2^2)^2(\bar{\omega}_3\bar{\psi}_3^2)^2\omega_4^2,$$

当 $f(2)>c(2)\geqslant m(2)$，$f(p)>c(p)(p|f_1)$时，由$(\bar{\omega}\psi^2)^2\neq id.$，即可推出 $\phi_1^2\neq id.$。利用命题3.32、3.33及3.31，可知$g\in\varepsilon(N_1, 3/2, \omega\phi_2^2\chi_\eta)$，$h\in\varepsilon(\sigma N_1, 3/2, \omega\chi_\eta)$ 及 $q\in\varepsilon([8, 2^{f(2)}]f_1m_2m_3u_1u_2wc, 3/2, \omega)$。在应用命题3.33时，利用了 $[4, \sigma, f]|N_1$。由(4.5.1)，有$m(p)\leqslant\min(c(p), n(p)-c(p))\leqslant n(p)-f(p)$，所以当$c(p)<f(p)$(即$p|f_1$)时，有$c(p)=\min(c(p), n(p)-c(p))\leqslant n(p)-f(p)$。此式当$p=2$时也成立，而当$f(2)\leqslant 2$时，则有$c(2)+3\leqslant 4\leqslant n(2)$。可见$[8, 2^{f(2)}]f_1m_2m_3u_1u_2wc$是$N$的因子(注意$u_1$、$u_2$及$w$的定义)，这表示$q\in\varepsilon(N, 3/2, \omega)$。

由引理4.10和4.18，g在$S(N_1)$中除$1/(f_3f_4v_1)$之外的所有尖点的值为零。以α_3, α_4, α_5, α_6表示适合

$$f_i|\alpha_i|\prod_{p|f_i}p^{n(p)}(i=3, 4),\ v_1|\alpha_5|\prod_{p|v_1}p^{n(p)},\ \alpha_6|\prod_{p|v_2}p^{n(p)}.$$

的正整数。尖点d/c一定$\Gamma_0(N_1)$等价于$S(N_1)$中以(c, N_1)为分母的一个尖点，由于$\sigma=m_0m_1m_2'm_3u_1$，可见h仅可能在$S(N)$中形如$d/(m_0m_1m_2'\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6u_1)$的尖点处取非零值。我们在下面仅需利用$\alpha_6=1$的情况，所以令$\alpha_6=1$，我们有

$$\begin{aligned}h\left(z+\frac{d}{m_0m_1m_2'\alpha_3\alpha_4\alpha_5u_1}\right)&=\sum_{j=1}^{\sigma}\phi_2(j)g\left(z+\frac{d+j\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_3^{-1}}{m_0m_1m_2'\alpha_3\alpha_4\alpha_5u_1}\right)\\&=\sum_{j_1=1}^{\sigma/m_3}\sum_{j_2=1}^{m_3}\bar{\omega}_2\psi_0\psi_1\psi_2\chi_2'(m_3j_1)\bar{\psi}_3(\sigma m_3^{-1}j_2)\\&\quad\times g\left(z+\frac{d+j_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5+j_2\sigma\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_3^{-2}}{m_0m_1m_2'\alpha_3\alpha_4\alpha_5u_1}\right).\end{aligned}\qquad(4.5.9)$$

存在唯一的整数j_1^*适合

$$d+j_1^*\alpha_3\alpha_4\alpha_5=\lambda\sigma m_3^{-1},\qquad 1\leqslant j_1^*\leqslant\sigma m_3^{-1},$$

这里λ是正整数。仅当$j_1=j_1^*$时，(4.5.9)式中右端的分数对应的尖点是$\Gamma_0(N_1)$等价于$1/(f_3f_4v_1)$，故

$$V\left(h,\ \frac{d}{m_0m_1m_2'\alpha_3\alpha_4\alpha_5u_1}\right)$$

$$=\bar{\omega}_2\psi_0\psi_1\psi_2\chi_t'(m_3j_1^*)(\sigma m_3^{-1})^{3/2}\sum_{j=1}^{m_3}\bar{\psi}_3(\sigma m_3^{-1}j)$$

$$\times V\left(g,\ \frac{\lambda+j\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_3^{-1}}{\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\right). \tag{4.5.10}$$

设

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ f_3f_4v_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+j\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_3^{-1}\\ \alpha_3\alpha_4\alpha_5\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N_1),$$

则

$$D\equiv\alpha_3\alpha_4\alpha_5/(f_3f_4v_1)\quad([8,\ 2^{f(2)}]f_1m_2u_1),$$
$$A\equiv\lambda+j\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_3^{-1}\quad(f_3f_4v_1).$$

将 c 写作 $c[2f_1m_2u_1]c[f_3f_4]c[u_1v_1v_2]$，$\varepsilon_d$ 记作 $\varepsilon(d)$。由引理 4.6，我们有

$$V\left(g,\ \frac{\lambda+j\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_3^{-1}}{\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\right)$$
$$=\bar{\omega}_3\psi_3^2(\lambda+j\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_3^{-1})\bar{\omega}_4(\lambda)\omega_0\omega_1\bar{\omega}_2\psi_0^2\psi_1^2\psi_2^2\left(\frac{\alpha_3\alpha_4\alpha_5}{f_3f_4v_1}\right)$$
$$\times\varepsilon(D)\left(\frac{cm_0m_1m_2'f_3f_4u_1v_1\alpha_3\alpha_4\alpha_5}{D}\right)V(g,\ 1/(f_3f_4v_1)). \tag{4.5.11}$$

易见

$$\left(\frac{c[2f_1m_2u_1]}{D}\right)=\left(\frac{c[2f_1m_2u_1]}{\alpha_3\alpha_4\alpha_5f_3f_4v_1}\right),$$

$$\left(\frac{c[f_3f_4]f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5}{D}\right)=\varepsilon^{-1}(D)\varepsilon^{-1}(c[f_3f_4]f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$$
$$\times\varepsilon(c[f_3f_4]v_1)\left(\frac{D}{c[f_3f_4]f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\right)$$
$$=\varepsilon^{-1}(D)\varepsilon^{-1}(c[f_3f_4]f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5)\varepsilon(c[f_3f_4]v_1)$$
$$\times\left(\frac{d}{c[f_3f_4]f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\right)\left(\frac{m_0m_1m_2'u_1}{c[f_3f_4]f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\right).$$

注意 $c[u_2v_1v_2]v_1$ 是平方数，由(4.5.11)可得

$$V\left(g,\ \frac{\lambda+j\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_3^{-1}}{\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\right)$$

$$=\bar{\omega}_3\psi_3^2(\lambda+j\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_3^{-1})\bar{\omega}_4(\lambda)\omega_0\omega_1\bar{\omega}_2\psi_0^2\psi_1^2\psi_2^2\left(\frac{\alpha_3\alpha_4\alpha_5}{f_3f_4v_1}\right)$$

$$\times\varepsilon(c[f_3f_4]v_1)\varepsilon^{-1}(c[f_3f_4]f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$$
$$\times\left(\frac{d}{c[f_3f_4]f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\right)$$
$$\times\left(\frac{c[2f_1m_2u_1]}{\alpha_3\alpha_4\alpha_5f_3f_4v_1}\right)\left(\frac{m_0m_1m_2'u_1}{c[f_3f_4]v_1}\right). \tag{4.5.12}$$

考虑和式

$$\sum_{j=1}^{m_3}\bar{\psi}_3(\sigma m_3^{-1}j)\bar{\omega}_3\psi_3^2(\lambda+j\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_3^{-1})$$
$$=\omega_3\bar{\psi}_3^2(\sigma m_3^{-1})\sum_{j=1}^{m_3}\bar{\psi}_3(\sigma m_3^{-1}j)\bar{\omega}_3\psi_3^2(d+j\sigma\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_3^{-2})$$
$$=\bar{\omega}_3\psi_3(d)\psi_3(\alpha_4\alpha_5)\omega_3\bar{\psi}_3^2(\sigma m_3^{-1})\sum_{j=1}^{m_3}\bar{\psi}_3(j)\bar{\omega}_3\psi_3^2(1+j\alpha_3m_3^{-1}).$$

这里利用了d与m_3的互素关系，因为d与c是互素的。令$n=m_3/(m_3,\alpha_3f_3^{-1})$，因$f_3|\alpha_3/(m_3,\alpha_3f_3^{-1})$，故当$n\neq m_3$时，由引理4.50,我们有

$$\sum_{j=1}^{m_3}\bar{\psi}_3(j)\bar{\omega}_3\psi_3^2(1+j\alpha_3m_3^{-1})$$
$$=\sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{m_3/n}\bar{\psi}_3(a+bn)\bar{\omega}_3\psi_3^2(1+a\alpha_3/m_3+b\alpha_3/(m_3,\alpha_3f_3^{-1}))$$
$$=\sum_{a=1}^{n}\bar{\omega}_3\psi_3^2(1+a\alpha_3/m_3)\sum_{b=1}^{m_3/n}\bar{\psi}_3(a+bn)=0.$$

而当$n=m_3$时，有$\alpha_3=f_3$，由引理4.51可知

$$\sum_{j=1}^{m_3}\bar{\psi}_3(j)\bar{\omega}_3\psi_3^2(1+jf_3/m_3)\neq 0.$$

将(4.5.12)代入(4.5.10)式，并利用上述结果，得到

$$V\left(h,\ \frac{d}{m_0m_1m_2'f_3\alpha_4\alpha_5u_1}\right)$$
$$=\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3\bar{\omega}_4\psi(d)\chi_d(c[m_2f_3f_4]f_4\alpha_4\alpha_5u_1)$$
$$\times\omega_0\omega_1\psi\chi_t'(\alpha_4\alpha_5)\varepsilon(c[f_3f_4]v_1)\varepsilon^{-1}(c[f_3f_4]f_4\alpha_4\alpha_5)$$
$$\times\left(\frac{c[2f_1m_2u_1]}{f_4\alpha_4\alpha_5v_1}\right)\left(\frac{m_0m_1m_2'u_1}{c[f_4]}\right)\rho,$$

其中常数ρ为

$$(\sigma m_3^{-1})^{3/2}\omega_3\omega_4\bar{\psi}_3^2(\sigma m_3^{-1})\omega_2\bar{\psi}_0\bar{\psi}_1\chi_t'(f_3m_3^{-1})\left(\frac{m_0m_1m_2'u_1}{c[f_3]v_1}\right)$$

$$\times\bar{\omega}_0\bar{\omega}_1\omega_2\bar{\psi}_*^2\bar{\psi}_1^2\bar{\psi}_2^2(f_4v_1)\sum_{j=1}^{m_3}\bar{\psi}_3(j)\bar{\omega}_3\psi_3^2(1+jf_3m_3^{-1}).$$

ρ 不为零，且不依赖 d, a_4, a_5 和 $c[f_4]$。以下总以 ρ 表示一个非零常数，但它的值在不同的场合可以是不同的。

以 τ 和 α 表示适合条件

$$\tau\mid c,\ (\tau,\ m_0m_1m_2'f_3f_4u_1v_1)=1,\qquad \alpha\mid\prod_{p\mid f_4}p^{n(p)-c(p)}$$

的正整数，由于 $\eta=c/(m_0m_1m_2'f_3f_4u_1v_1)$，故

$$\begin{aligned}
&V(q,\ d/(c\alpha\tau^{-1}))=\tau^{-3/2}V(h,\ d\tau/(m_0m_1m_2'f_3f_4\alpha u_1v_1))\\
&=\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3\bar{\omega}_4\psi(d\tau)\chi_{d\tau}(c[m_2f_3f_4]\alpha u_1v_1)\\
&\quad\times\omega_0\omega_1\psi\chi_2'(\alpha)\varepsilon(c[f_3f_4]v_1)\\
&\quad\times\varepsilon^{-1}(c[f_3f_4]\alpha v_1)\left(\frac{c[2f_1m_2u_1]}{\alpha}\right)\left(\frac{m_0m_1m_2'u_1}{c[f_4]}\right)\rho\tau^{-3/2}.
\end{aligned}\tag{4.5.13}$$

而且 q 在 $S(N)$ 中其他尖点的值都为零。

设 t 为无平方因子的正整数，且适合 $t\mid(f_4,\ N/c)$，今证 $(\psi,\ ct)$ 也是一个允许对。显然有 $ct\mid N$。设 p 为 f_4 的一个素因子，若 $n(p)-c(p)=\min(c(p),\ n(p)-c(p))\leqslant n(p)-f(p)$，则 $n(p)-c(p)-1<n(p)-f(p)$；又若 $c(p)<n(p)-c(p)\leqslant n(p)-f(p)$，则 $c(p)+1\leqslant n(p)-f(p)$，因此 $(ct,\ N/ct)\mid N/f$。显然也有 $m\mid(ct,\ N/ct)$，这证明了 $(\psi,\ ct)$ 是一个允许对。我们可以类似地定义函数 $q(\psi,\ ct)$。

定义函数

$$\begin{aligned}
F(\psi,\ c)(z)=&\sum_{t\mid(f_4,N/c)}\mu(t)\omega_0\omega_1\psi\chi_2'(t)\chi_t'(c[2f_1m_2]m_0m_1m_2')\\
&\times\varepsilon(c[f_3f_4]v_1)\varepsilon^{-1}(c[f_3f_4]v_1t)q(\psi,\ ct).
\end{aligned}\tag{4.5.14}$$

可见 $F(\psi,\ c)\in\varepsilon(N,\ 3/2,\ \omega)$。当 $t\nmid\alpha$ 时，我们有 $V(q(\psi,\ ct),\ d/(c\alpha\tau^{-1}))=0$，当 $\alpha\neq1$ 时，由 (4.5.13) 式得到（注意 $(ct)[f_4]=c[f_4]t$）：

$$\begin{aligned}
&V(F(\psi,\ c),\ d/(c\alpha\tau^{-1}))=\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3\bar{\omega}_4\psi(d\tau)\chi_{d\tau}(c[m_2f_3f_4]\alpha u_1v_1)\\
&\quad\times\omega_0\omega_1\psi\chi_2'(\alpha)\tau^{-3/2}\varepsilon(c[f_3f_4]v_1)\varepsilon^{-1}(c[f_3f_4]\alpha v_1)
\end{aligned}$$

$$\times\left(\frac{c[2f_1m_2u_1]}{a}\right)\left(\frac{m_0m_1m_2'u_1}{c[f_4]}\right)\rho\sum_{t|a}\mu(t)=0.$$

最后得到

$$V(F(\psi, c), d/c)=\rho\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3\bar{\omega}_4\psi(d)\chi_d(c^*), \qquad (4.5.15)$$

$$V(F(\psi, c), d/\beta)=0 \quad (\beta|N, c\prec\beta). \qquad (4.5.16)$$

其中 $c^*=c/c[2f_1]$，它不依赖 ψ；ρ 不依赖 d。

情况 2 $n(2)\geqslant4$, $m(2)\geqslant3$, $f(2)\leqslant m(2)$.

我们取

$$N_1=2^{n(2)}N_1', \quad Q=2^{m(2)}Q', \quad \eta=\eta'/m_0',$$

$$\phi_1=\begin{cases}\omega_0\phi_1'\chi_{\eta Q}, & 若\ f(2)\geqslant4;\\ \bar{\omega}_0\phi_1'\chi_{\eta Q}, & 若\ f(2)\leqslant3,\end{cases}$$

$$\phi_2=\begin{cases}\bar{\omega}_0\psi_0\phi_2', & 若\ f(2)\geqslant4;\\ \psi_0\phi_2', & 若\ f(2)\leqslant3.\end{cases}$$

其中 m_0' 是 $\bar{\omega}_0\psi_0$ 的导子(当 $f(2)\geqslant4$ 时)，或 $m_0'=m$ (当 $f(2)\leqslant3$ 时)。ϕ_2 的导子为 $\sigma=m_0'\sigma'$。在上述定义下，ϕ_1 是模 N_1 的特征，且 $\phi_1^2\neq id.$，σ 能除尽 N_1，$\sigma N_1\eta$ 能除尽 N。利用情况 1 中的同样方法可以找到 $F(\psi, c)\in\varepsilon(N, 3/2, \omega)$，使(4.5.16)成立，且

$$V(F(\psi, c), d/c)=\begin{cases}\rho\bar{\omega}_0\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3\bar{\omega}_4\psi(d)\chi_d(c^*), & 若\ f(2)\geqslant4;\\ \rho\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3\bar{\omega}_4\psi(d)\chi_d(c^*), & 若\ f(2)\leqslant3.\end{cases} \qquad (4.5.17)$$

ρ 不依赖 d，c^* 的定义如上。

情况 3

(i) $n(2)\geqslant4$, $f(2)\leqslant3$, $m(2)\leqslant2$, $f(2)\leqslant c(2)\leqslant n(2)-3$;

(ii) $n(2)\geqslant4$, $c(2)=n(2)-2$, $m(2)=2$, $\omega_0\chi_\nu=id.$ 或 χ_{-1} ($\nu=2^{c(2)}$，以下同)；

(iii) $n(2)=3$, $c(2)=1$;

(iv) $n(2)=3$, $c(2)=0$;

(v) $n(2)=2$, $c(2)=0$.

我们取

$N_1=aN_1'$, $\quad Q=aQ'$, $\quad \eta=\eta'/m_0$,

$\phi_1=\bar{\omega}_0\phi_1'\chi_{\eta Q}$, $\quad \phi_2=\psi_0\phi_2'$.

在(i)、(iv)和(v)中取 $a=(8,\ 2^{n(2)})$，在(ii)和(iii)中取 $a=4$。在上述取法下，ϕ_1 总是模 N_1 的特征（注意 $\bar{\omega}_0\bar{\psi}_3^2\chi_{a\eta m_0}$ 的导子。在(iii)中，有 $f(2)=3$, $m_0=1$），$\phi_1^2\ne id$. ϕ_2 的导子 $\sigma=m_0\sigma'$ 能除尽 N_1，且 $\sigma N_1\eta$ 能除尽 N，所以仍利用情况1的方法，可以找到 $F(\psi,\ c)\in\varepsilon(N,\ 3/2,\ \omega)$，使(4.5.15)、(4.5.16)式成立。

情况4 $n(2)\geqslant 4$, $f(2)\geqslant 4$, $m(2)<f(2)\leqslant c(2)$。

我们取

$$N_1=2^{f(2)}N_1', \quad Q=Q', \quad \eta=\eta'/2^{f(2)};$$
$$\phi_1=\omega_0\phi_1'\chi_{\eta Q}, \quad \phi_2=\bar{\psi}_0\phi_2'.$$

这时 $\sigma=m_0\sigma'$。因 $m(2)+c(2)\leqslant n(2)$，所以 $\sigma N_1\eta$ 能除尽 N。类似于情况1，我们有 $g\in\varepsilon(N_1,\ 3/2,\ \omega\phi_3^2\chi_\eta)$，$h\in\varepsilon(\sigma N_1,\ 3/2,\ \omega\chi_\eta)$ 及 $q\in\varepsilon(m_0f_1m_2m_3u_1u_2wc,\ 3/2,\ \omega)\subset\varepsilon(N,\ 3/2,\ \omega)$。以 α_0 表示适合 $2^{f(2)}|\alpha_0|2^{n(2)}$ 的正整数，α_3、α_4、α_5 定义如前。又取整数 j^* 和 λ，使其适合

$$\alpha+j_{\alpha_0}^*\alpha_3\alpha_4\alpha_5=\lambda m_1m_2'u_1, \quad 1\leqslant j^*\leqslant m_1m_2'u_1.$$

类似于情况1，我们有

$$V\left(h,\ \frac{d}{\alpha_0m_1m_2'\alpha_3\alpha_4\alpha_5u_1}\right)$$
$$=\bar{\omega}_2\psi_1\psi_2\chi_t'(m_0m_3j^*)(m_1m_2'u_1)^{3/2}\sum_{j=1}^{m_0m_3}\bar{\psi}_0\bar{\psi}_3(m_1m_2'u_1j)$$
$$\times V\left(g,\ \frac{\lambda+j\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_0^{-1}m_3^{-1}}{\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\right),$$

上式右端的尖点 $\Gamma_0(N_1)$ 等价于尖点 $1/(2^{f(2)}f_3f_4v_1)$。假设

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 2^{f(2)}f_3f_4v_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda+j\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_0^{-1}m_3^{-1}\\ \alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5\end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N_1).$$

因而

$$D\equiv\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5/(2^{f(2)}f_3f_4v_1) \quad (f_1m_2u_1),$$
$$A\equiv\lambda+j\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5/(m_0m_3) \quad (2^{f(2)}f_3f_4v_1).$$

由此可见

$$V\left(g,\ \frac{\lambda+j\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5 m_0^{-1}m_3^{-1}}{\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\right)$$
$$=\bar{\omega}_0\bar{\omega}_3\bar{\omega}_4\psi_0^2\psi_3^2(\lambda+j\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5 m_0^{-1}m_3^{-1})$$
$$\times\omega_1\bar{\omega}_2\psi_1^2\psi_2^2(\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5/(2^{f(2)}f_3f_4v_1))$$
$$\times\varepsilon(D)\left(\frac{c2^{f(2)}m_1m_2'f_3f_4u_1v_1\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5}{D}\right)$$
$$\times V(g,\ 1/(2^{f(2)}f_3f_4v_1)). \tag{4.5.18}$$

易见

$$\left(\frac{c[f_1m_2f_3f_4]m_1m_2'f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5}{D}\right)$$
$$=\varepsilon^{-1}(D)\varepsilon^{-1}(c[f_1m_2f_3f_4]m_1m_2'f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$$
$$\times\varepsilon(dc[f_1m_2f_3f_4]m_1m_2'f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$$
$$\times\left(\frac{D}{c[f_1m_2f_3f_4]m_1m_2'f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\right),$$

将它代入(4.5.18)得到

$$V\left(g,\ \frac{\lambda+j\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5 m_0^{-1}m_3^{-1}}{\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\right)$$
$$=\bar{\omega}_0\bar{\omega}_3\bar{\omega}_4\psi_0^2\psi_3^2(\lambda+j\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5 m_0^{-1}m_3^{-1})$$
$$\times\omega_1\bar{\omega}_2\psi_1^2\psi_2^2(\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5/(2^{f(2)}f_3f_4v_1))$$
$$\times\varepsilon(dc[f_1m_2f_3f_4]u_1f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5+\alpha_0m_0^{-1})$$
$$\times\varepsilon^{-1}(c[f_1m_2f_3f_4]m_1m_2'f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5)$$
$$\times\left(\frac{2^{f(2)+c(2)}\alpha_0}{\lambda+j\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5m_0^{-1}m_3^{-1}}\right)\left(\frac{dm_1m_2'u_1}{c[f_3f_4]f_3f_4\alpha_3\alpha_4\alpha_5}\right)$$
$$\times\left(\frac{2^{f(2)}f_3f_4v_1\alpha_0\alpha_3\alpha_4\alpha_5}{c[f_1m_2]m_1m_2'}\right)V(g,\ 1/(2^{f(2)}f_3f_4v_1)).$$

考虑和式

$$\sum_{j=1}^{m_0m_4}\bar{\psi}_0\bar{\psi}_3(j)\bar{\omega}_0\bar{\omega}_3\psi_0^2\psi_3^2\left(1+\frac{j\alpha_0\alpha_3}{m_0m_3}\right)\left(\frac{2^{f(2)+c(2)}\alpha_0}{1+j\alpha_0\alpha_3/m_0m_3}\right),$$

利用引理 4.50，可以证明，当 $m_0>1$ 时，上述和式当且仅当 $\alpha_0=2^{f(2)}$，$\alpha_3=f_4$ 时非零；当 $m_0=1$ 时，当且仅当 $\alpha_3=f_3$ 时，上述和式不为零．类似于(4.5.14)式定义函数 $F'(\psi, c)$，当 $m_0=1$ 时，以 $t|(2f_4, N/c)$ 代替 $t|(f_4, N/c)$。函数 $F'(\psi, c)$适合(4.5.16)式

及

$$V(F'(\psi, c), d/c)$$
$$=\rho\bar{\omega}_0\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3\bar{\omega}_4\psi\chi_\nu(d)\chi_d(c^*)\varepsilon(dc^*+2^{f(c)-m(2)}). \qquad (4.5.19)$$

设 m' 为 $\psi\chi_\nu$ 的导子，因 $m(2)<f(2)$，$f(2)\geqslant 4$，故 $m'(2)<f(2)$。(4.5.16)和(4.5.19)式对 $F'(\psi\chi_\nu, c)$ 和 $F'(\psi\chi_{-\nu}, c)$ 都成立。令

$$F(\psi, c)=F'(\psi\chi_\nu, c)\pm i\chi_{-1}(c^*)F'(\psi\chi_{-\nu}, c)$$

(当 $f(2)-m'(2)\geqslant 2$ 时取"+"号，当 $f(2)-m'(2)=1$ 时取"−"号)。容易验证 $F(\psi, c)$ 适合(4.5.15)和(4.5.16)。

情况 5

(i) $n(2)\geqslant 4$，$f(2)\leqslant 3$，$n(2)-2\leqslant c(2)\leqslant n(2)$，$m(2)=0$；

(ii) $n(2)\geqslant 5$，$c(2)=n(2)-2$，$m(2)=2$，$\omega_0\chi_\nu=\chi_2$ 或 χ_{-2}；

(iii) $n(2)=3$，$c(2)=2$ 或 3；

(iv) $n(2)=2$，$c(2)=2$。

我们取

$$N_1=aN_1',\qquad Q=Q',\qquad \eta=\eta'/a,$$
$$\phi_1=\omega_0\phi_1'\chi_{\eta Q},\qquad \phi_2=\psi_0\phi_2'.$$

其中 $a=(8, 2^{c(2)})$。当 $c(2)=2$，$n(2)=4$ 时，$f(2)\leqslant 2$，所以 ϕ_1 总是模 N_1 的特征。类似于情况 4，可以找到 $F'(\psi, c)$ 适合(4.5.16)及

$$V(F'(\psi, c), d/c)$$
$$=\rho\bar{\omega}_0\bar{\omega}_2\bar{\omega}_3\bar{\omega}_4\psi\chi_\nu(d)\chi_d(c^*)\varepsilon(dc^*+a/m_0). \qquad (4.5.20)$$

再用情况 4 所用的方法，可以得到所需要的 $F(\psi, c)$。

情况 1～情况 5 包含了 $(\bar{\omega}\psi^2)^2\neq id.$ 的所有可能的情况。

(I) $(\bar{\omega}\psi^2)^2=id.$

由 $(\bar{\omega}\psi^2)^2=id.$ 可推出：

(i) 若 $f(2)\geqslant 4$，则 $m(2)=f(2)+1$，若 $f(2)\leqslant 3$，则 $m(2)\leqslant 4$；

(ii) $c[f_1]=m_1=1$，f_1 和 f_4 无平方因子，$\omega_1=\prod_{p\mid f_1}\chi_p'$，$\omega_4=$

$\prod\limits_{p\|f_4}\chi'_p$ (这里 $\chi'_p=\left(\frac{\cdot}{p}\right)$);

(iii) 当 $p|m_2$ 时, $f(p)=m(p)$;

(iv) $f_3=m_3=1$.

因而 $\omega=\omega_0\omega_1\omega_2\omega_4$, $\psi=\psi_0\psi_2$. 定义整数 u'_1, u'_2, v'_1, v'_2 如下:

u'_1 是 u_1 与适合 $p|f_4$, $c(p)<n(p)$, $2|c(p)$的素数 p 之积;

u'_2 是 u_2 与适合 $p|f_4$, $c(p)<n(p)$, $2\nmid c(p)$的素数 p 之积;

v'_1 是 v_1 与适合 $p|f_4$, $c(p)=n(p)$, $2|c(p)$的素数 p 之积;

v'_2 是 v_2 与适合 $p|f_4$, $c(p)=n(p)$, $2\nmid c(p)$的素数 p 之积.

于是我们有

$$\chi_d(u'_1v'_1)=\omega_4(d)\chi_d(c[f_4]u_1v_1). \tag{4.5.21}$$

在下面我们分九种情况进行讨论. 在每种情况, 我们选取一个特征 ϕ_2, 整数 η 和函数 $g(z)=g(\psi, c)(z)$. 然后令 $\phi_1=\omega\phi_2^2\chi_\nu$, 按照(4.5.7)式和 (4.5.8) 式分别定义 $h(\psi, c)$和 $q(\psi, c)$. 在每一种情况下, 都可有 $q(\psi, c)\in\varepsilon(N, 3/2, \omega)$, 我们不再逐一证明这一事实, 而将它留给读者.

令

$$N_2=f_1\tilde{m}_2u'_1u'_2v'_1w,\quad \zeta=c[m_2]u'_1,\quad \eta'=c/(m'_2u'_1v'_1),$$
$$\phi'_2=\bar{\omega}_2\psi_2\chi'_\zeta,\quad \sigma'=m'_2u'_1.$$

其中 $\tilde{m}_2$ 是 m_2 的素因子之积, σ' 是 ϕ'_2 的导子, m'_2 是 m_2 的因子.

设D为无平方因子的正奇数, l 是D的因子, 在§4.4 中, 我们已找到 $\varepsilon(8D, 3/2, \chi_l)$的一组基:

$G(\chi_l, m, 8D)$ $(m|D, m\neq1)$, $G(\chi_l, 4m, 8D)$ $(m|D)$,

$G(\chi_l, 8m, 8D)$ $(m|D)$.

$\varepsilon(8D, 3/2, \chi_{2l})$ 的一组基: $G(\chi_{2l}, m, 8D)$ $(m|D, m\neq1)$; $G(\chi_{2l}, 2m, 8D)$ $(m|D)$; $G(\chi_{2l}, 8m, 8D)$ $(m|D)$.

$\varepsilon(4D, 3/2, \chi_l)$的一组基: $G(\chi_l, m, 4D)(m|D, m\neq1)$, $G(\chi_l, 4m, 4D)$ $(m|D)$.

情况 1 (i) $n(2)\geqslant4$, $n(2)-2\leqslant c(2)\leqslant n$, $m(2)=0$;

(ii) $n(2)\geqslant5$, $c(2)=n(2)-2$, $m(2)=2$, $\omega_0\chi_\nu=\chi_2$ 或 χ_{-2};

(iii) $n(2)=3$, $c(2)=2$ 或 3;

(iv) $n(2)=2$, $c(2)=2$。

我们取 $\phi_2=\psi_0\phi_2'$、$\eta=\eta'/a$ 及 $g=G(\phi_1, av_1', aN_2)$，其中 $a=(8, \nu)$。易见 ϕ_1 是偶特征，$\phi_1^2=id.$，且 ϕ_1 是模 aN_2 的特征。ϕ_2 的导子 $\sigma=m_0\sigma'$。在(i)、(iii)、(iv)中 $m_0=1$，在(ii)中 $m_0=4$，m_0 总能除尽 a。这时 $h\in\varepsilon(a\sigma[\sigma, N_2], 3/2, \omega\chi_\nu)$，$q\in\varepsilon(a\sigma[\sigma, N_2]\eta, 3/2, \omega)\subset\varepsilon(N, 3/2, \omega)$。利用(I)中情况 5 的方法，可以找到 $F(\psi, c)\in\varepsilon(N, 3/2, \omega)$，使其适合(4.5.16)及(4.5.20)。

情况 2

(i) $n(2)\geqslant4$, $c(2)=n(2)-2$, $m(2)=2$, $\omega_0\chi_\nu=id.$ 或 χ_{-1};

(ii) $n(2)=3$, $c(2)=1$。

在 (i) 中取 $\phi_2=\psi_0\phi_2'$, $\eta=\eta'/4$, 当 $v_1'\neq1$ 时，取 $g=G(\phi_1, v_1', 8N_2)$，当 $v_1'=1$ 时，取 $g=G(\phi_1, 4, 8N_2)$，这时 $\phi_1=\chi_l$，其中 l 为 N_2 的因子。在(ii)中取 $\phi_2=\phi_2'$, $\eta=\eta'/2$ 及 $g=G(\phi_1, 2v_1', 8N_2)$，这时 $f(2)=3$，故 $\phi_1=\chi_{2l}$，l 为 N_2 的因子。在两种情况下，都能证明 g 适合(4.5.15)和(4.5.16)式。以 (ii) 的证明为例，我们知道 g 仅在 $S(8N_2)$ 中的两个尖点 1 和 $1/(2v_1')$ 不为零。设整数 j^* 和 λ 适合

$$d+2j^*v_1'=\lambda\sigma', \quad 1\leqslant j^*\leqslant\sigma'.$$

我们可得

$$\begin{aligned}V(h, d/(2\sigma'v_1'))&=\phi_2(j^*)(\sigma')^{3/2}V(g, \lambda/(2v_1'))\\&=\rho\bar{\omega}_2\omega_4\psi(d)\chi_d(c^*)\end{aligned}$$

及

$$V(h, d/\beta)=0, \quad (2\sigma'v_1'\nmid\beta, \beta\mid8\sigma'N^2).$$

这里利用了 $\phi_1=\chi_{2l}(l\mid N_2, (l, v_1')=1)$ 及(4.5.21)式，取 $F(\psi, c)=q(\psi, c)$即可。

在讨论了情况 1 和情况 2 之后，以下我们仅需考虑：当 $n(2)\geqslant4$ 时，有 $c(2)\leqslant n(2)-3$；当 $n(2)=2$、3 时，有 $c(2)=0$。令 $b=(8, 2^{n(2)})$，当 $f(2)\leqslant3$ 时，令 $\psi_0'=\psi_0$；当 $f(2)\geqslant4$ 时，令 $\psi_0'=\bar{\omega}_0\psi_0$。$\psi_0'$ 的导子是 m_0。

情况 3 $n(2)\geqslant 4,\ c(2)\leqslant n(2)-3$, 或 $n(2)=2,\ 3,\ c(2)=0$; $v_1'\neq 1$.

令 $\phi_2=\psi_0'\phi_2',\ \eta=\eta'/m_0$ 及 $g=G(\phi_1,\ v_1',\ bN_2)$, 可以证明 $q(\psi,\ c)$适合(4.5.15)和(4.5.16)式. 取 $F(\psi,\ c)=q(\psi,\ c)$.

情况 4 $n(2)\geqslant 4,\ c(2)\leqslant n(2)-3$, 或 $n(2)=2,\ 3,\ c(2)=0$; $v_1'=1,\ v_2'\neq 1$.

取 v_2' 的一个素因子 p, 令 $\phi_2=\psi_0'\phi_2',\ \eta=\eta'/(m_0p)$ 及 $g=G(\phi_1,\ p,\ bN_2p)$, ϕ_1 以 χ_p' 为它的 p-分量. 在 $S(N)$的尖点中, h 仅可能在形如 $d/\sigma p^i(\sigma=m_0\sigma',\ i\geqslant 1)$ 的尖点处不为零, 且 $V(h,\ d/(\sigma p))=\rho\phi_2(d)$. 对 v_2' 的任一素因子 p' 都有 $c(p')=n(p')$, 而 $\eta=c/(\sigma p)$. 在计算 q 在尖点的值时,仅需利用$V(h,\ d/(\sigma p))$. 可以证明 q 适合(4.5.16)和(4.5.17). 取 $F(\psi,\ c)=q(\psi,\ c)$.

情况 5 $n(2)\geqslant 4,\ c(2)\leqslant n(2)-3$, 或 $n(2)=2,\ 3,\ c(2)=0$; $v_1'v_2'=1,\ u_2'\neq 1$.

设 p 为 u_2' 的素因子. 取 $\phi_2=\psi_0'\phi_2',\ \eta=\eta'/m_0$ 及 $g=G(\phi_1,\ p,\ bN_2)$. 我们有

$$\begin{aligned}V(q,\ d/c)&=V(h,\ d/\sigma)=\phi_2(-d)\sigma^{3/2}V(g,\ 1)\\&=-\phi_2(-d)\sigma^{3/2}p^{-1}\varepsilon_p\phi_1(p),\\V(q,\ d/(cp^i))&=V(h,\ d/(\sigma p^i))\\&=\phi_2(-d)\chi_{d\sigma}(p^i)\bar{\phi}_2(p^i)\phi_1(p^{i-1})\varepsilon_p\varepsilon^{-1}(p^i)\sigma^{3/2}\quad(i\geqslant 1).\end{aligned}$$

$V(g,\ 1)$可由(4.4.10)、(4.4.12)及(4.4.14)得到. 当 $\beta|N,\ c\prec\beta,\ \beta\neq cp^i(i\geqslant 0)$时, $V(q,\ d/\beta)=0$. 定义

$$g_1(\psi,\ c)=G(\phi_1\chi_p,\ p,\ bN_2),$$

$$h_1(\psi,\ c)=\sum_{j=1}^{\sigma}\phi_2(j)g_1(z+j/\sigma),$$

$$q_1(\psi,\ c)=h_1|V(c/(\sigma p)).$$

易证

$$V(q_1,\ d/(cp^i))=\phi_2(-d)\chi_{d\sigma}(p^i)\phi_2(p^{i+1})\times\phi_1(p^i)\varepsilon^{-1}(p^i)\sigma^{3/2}\quad(i\geqslant 0).$$

而当 $\beta|N,\ c\prec\beta,\ \beta\neq cp^i(i\geqslant 0)$时, $V(q_1,\ d/\beta)=0$. 令

$$F(\psi,\ c)=g(\psi,\ c)-\varepsilon_p\phi_1\Phi_2(p)g_1(\psi,\ c),$$

可知 $F(\psi,\ c)$ 适合(4.5.16)和(4.5.17)。

令 $\bar{\omega}_2\psi_2^2=\chi_s'$($s$ 是 $\widetilde{m}_2$ 的因子)

及　$\chi_d(sc[m_2]m_2\widetilde{m}_2)=\chi_d(y),\ y|\widetilde{m}_2,\ (d,\ \widetilde{m}_2)=1$。　(4.5.22)

情况 6　$n(2)\geqslant 4,\ c(2)\leqslant n(2)-3$，或 $n(2)=2,\ 3,\ c(2)=0$；$u_2'v_1'v_2'=1$，$\psi_2\chi_y'$ 的导子小于 m_2 或 $y\neq\widetilde{m}_2$。

取 $\xi=u_1'$ 及 $\Phi_2=\psi_0'\bar{\psi}_2\chi_\xi'$。$\Phi_2$ 的导子为 $\sigma=m\xi=m_0m_2u_1'$。令 $\eta=c/\sigma$ 及 $g=G(\phi_1,\ \widetilde{m}_2,\ bN_2)$，这时 $N_2=f_1\widetilde{m}_2u_1'w$，$c=c[2m_2u_1']$，$N=N[2f_1m_2u_1'w]$。在 $S(N)$ 的所有尖点中，h 仅可能在形如 $d/(\sigma a)$ $(a|m_2^\infty)$ 的尖点不为零。

设 $a\neq 1$：将 m_2 表为 $m_{21}m_{22}$，其中 m_{21} 与 a 互素，m_{22} 与 a 具有相同的素因子，可见 $m_{22}\neq 1$。我们有

$$\begin{aligned}h(z+d/(\sigma a))&=\sum_{j=1}^{\sigma}\Phi_2(j)g(z+(d+ja)/(\sigma a))\\&=\sum_{j_1=1}^{m_0u_1'}\sum_{j_2=1}^{m_2}\bar{\omega}_0\psi_0\chi_\xi'(j_1m_2)\bar{\psi}_2(j_2m_0u_1')\\&\quad g\left(z+\frac{d+j_1am_2+j_2am_0u_1'}{m_0m_2u_1'a}\right),\end{aligned}\tag{4.5.23}$$

存在唯一的整数 j_1^* 及 λ，使

$$d+j_1^*am_2=\lambda m_0u_1',\quad 1\leqslant j_1^*\leqslant m_0u_1'.$$

设 $\psi_2=\psi_{21}\psi_{22}$，$\psi_{21}$ 和 ψ_{22} 的导子分别为 m_{21} 和 m_{22}。将 j_2 表成 $j_{21}m_{22}+j_{22}m_{21}$，$1\leqslant j_{21}\leqslant m_{21}$，$1\leqslant j_{22}\leqslant m_{22}$。记 $\lambda+j_{21}m_{22}a+j_{22}m_{21}a=e\alpha$，其中 $e|m_{21}$，α 与 m_{21} 互素。由于 d 与 m_2 互素，因而 λ 与 m_2 互素，α 也与 m_2 互素。由(4.5.22)式可得

$$\begin{aligned}V(h,\ d/(\sigma a))&=\bar{\omega}_0\psi_0\chi_\xi'(j_1^*m_2)\bar{\psi}_2(m_0u_1')(m_0u_1')^{3/2}\\&\quad\times\sum_{e,m_{21}}e^{3/2}\sum_{j21}\sum_{j22}\bar{\psi}_{21}(j_{21}m_{22})\bar{\psi}_{22}(j_{22}m_{21})V\left\langle g,\ \frac{\alpha}{m_2ae^{-1}}\right\rangle,\end{aligned}\tag{4.5.24}$$

取定 e 后，j_{21} 应适合 $(\lambda+j_{21}m_{22}a,\ m_{21})=e$。仅当 $\widetilde{m}_2|m_{21}m_{22}ae^{-1}$ 时，上式中才能出现一个对应的非零项，这时 e 应能除尽 $m_{21}/\widetilde{m}_{21}$，这里 $\widetilde{m}_{21}$ 表示 m_{21} 的素因子之积。我们有

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \widetilde{m}_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha \\ m_2 a e^{-1} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}\in \Gamma_0(bN_2),$$

故
$$A \equiv \alpha \quad (\widetilde{m}_2),$$
$$D \equiv m_2 a/(e\widetilde{m}_2) \quad (bf_1 u_1' w).$$

因而

$$V\left(g, \frac{\alpha}{m_2 a e^{-1}}\right)=\bar{\omega}_0 \psi_0^2 w_1(m_2 a/(e\widetilde{m}_2))$$
$$\times \varepsilon^{-1}(c[m_2]ae)\varepsilon(c[m_2]m_2\widetilde{m}_2)$$
$$\times\left(\frac{c[2]m_0(-1)^{(f_1-1)/2}}{m_2\widetilde{m}_2 ae}\right)\left(\frac{\alpha}{c[m_2]aes}\right). \qquad (4.5.25)$$

当 j_{21} 取定一个值后，e 随之确定，而当 j_{22} 跑遍 $\mathbf{Z}/m_{22}\mathbf{Z}$ 时，$\alpha \bmod \widetilde{m}_2$ 是固定不变的（注意 $\widetilde{m}_{21}|m_{21}e^{-1}$），所以由 (4.5.24)可知 $V(h, d/(\sigma a))=0$，即当 $\beta|N$，$c\nprec\beta$ 时，总有 $V(h, d/\beta)=0$。

设 $a=1$，我们来计算 $V(h, d/\sigma)$。设整数 j^* 与 λ 适合 $d+j^* m_2=\lambda m_0\xi$，$1\leqslant j^*\leqslant m_0\xi$，由(4.5.23)式可得

$$V(h, d/\sigma)=\phi_2(-d)\sigma^{3/2}V(g, 1)$$
$$+\psi_0^l\chi_\xi^l(j^*)(m_0\xi)^{3/2}\sum_{e|m_2/\widetilde{m}_2} e^{3/2}\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha, m_2/e)=1}}^{m_2/e}\bar{\psi}_2(e\alpha-\lambda)$$
$$\times V\left(g, \frac{\alpha}{m_2 e^{-1}}\right), \qquad (4.5.26)$$

在(4.5.25)中令 $a=1$ 即得到 $V\left(g, \frac{\alpha}{m_2 e^{-1}}\right)$。当 $e\neq m_2/\widetilde{m}_2$ 时，我们有

$$\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha, m_2/e)=1}}^{m_2/e}\bar{\psi}_2(e\alpha-\lambda)\left(\frac{\alpha}{c[m_2]es}\right)$$
$$=\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha, m_2/e)=1}}^{\widetilde{m}_2}\left(\frac{\alpha}{c[m_2]es}\right)\sum_{j=1}^{m_2/e\widetilde{m}_2}\bar{\psi}_2(e\alpha-\lambda+je\widetilde{m}_2)=0.$$

而当 $e=m_2/\widetilde{m}_2$ 时，我们有

$$\sum_{\substack{\alpha=1\\(\alpha, \widetilde{m}_2)=1}}^{\widetilde{m}_2}\left(\frac{\alpha}{y}\right)\bar{\psi}_2\left(-\lambda+\frac{\alpha m_2}{\widetilde{m}_2}\right)$$
$$=\sum_{\alpha=1}^{\widetilde{m}_2}\left(\frac{\alpha}{y}\right)\bar{\psi}_2\left(-\lambda+\frac{\alpha m_2}{\widetilde{m}_2}\right)\sum_{n|(\alpha, \widetilde{m}_2 y^{-1})}\mu(n)$$

$$= \sum_{n\mid \widetilde{m}_2 y^{-1}} \mu(n)\left(\frac{n}{y}\right)\sum_{\alpha=1}^{y}\left(\frac{\alpha}{y}\right)\sum_{j=1}^{\widetilde{m}_2/(ny)} \bar{\psi}_2\left(-\lambda+\frac{\alpha n m_2}{\widetilde{m}_2}+\frac{jynm_2}{\widetilde{m}_2}\right)$$

$$= \bar{\psi}_2(-d)\chi_y'(-dm\,\xi\widetilde{m}_2 y^{-1})\psi_2(m_0\xi)\mu(\widetilde{m}_2 y^{-1})$$

$$\times \sum_{\alpha=1}^{y}\left(\frac{\alpha}{y}\right)\bar{\psi}_2\left(1+\frac{\alpha m_2}{y}\right).$$

利用引理4.51，由(4.5.26)即可得到

$$\begin{aligned} V(q(\psi,\ c),\ d/c) &= V(h,\ d/\sigma) \\ &= \bar{\omega}_0\bar{\omega}_2\omega_4\psi(d)\chi_d(c^* m_2\widetilde{m}_2)\sigma^{3/2}(\widetilde{m}_2)^{-3/2}y^{1/2}\rho_1 \\ &\quad - \bar{\omega}_0\bar{\omega}_2\omega_4\psi(d)\chi_y'(d)\chi_d(c^* m_2\widetilde{m}_2)\sigma^{3/2}(\widetilde{m}_2)^{-1/2}y^{1/2}\rho_2, \end{aligned} \tag{4.5.27}$$

这里利用了 $\phi_1=\chi_l$ 或 χ_{2l}，且 $l=\widetilde{m}_2/y$，$\bar{\psi}_2=\bar{\omega}_2\psi_2\chi_s'$，及(4.5.21)、(4.5.22)式。常数 ρ_1 与 ρ_2 的绝对值都为1。当 $\psi_2\chi_y'$ 的导子小于 m_2 时，(4.5.27)式的第二项的出现不会影响方阵 $A=(F(\psi,\ c),\ s)$ 的秩，所以我们令 $F(\psi,\ c)=q(\psi\chi_i',\ c)$，其中 $i=m_2\widetilde{m}_2$，$\psi_2\chi_i'$ 的导子仍为 m_2。当 $\psi_2\chi_y'$ 的导子等于 m_2 时，则

$$\begin{aligned} &V(q(\psi\chi_y',\ c),\ d/c) \\ &= \bar{\omega}_0\bar{\omega}_2\omega_4\psi\chi_y'(d)\chi_d(c^* m_2\widetilde{m}_2)\sigma^{3/2}(\widetilde{m}_2)^{-3/2}y^{1/2}\rho_1 \\ &\quad - \bar{\omega}_0\bar{\omega}_2\omega_4\psi(d)\chi_d(c^* m_2\widetilde{m}_2)\sigma^{3/2}(\widetilde{m}_2)^{-1/2}y^{-1/2}\rho_2. \end{aligned}$$

若 $y\neq\widetilde{m}_2$，可以取 $F(\psi,\ c)$ 为 $q(\psi\chi_i',\ c)$ 和 $q(\psi\chi_y',\ c)$ 的一个适当的线性组合，使 $F(\psi,\ c)$ 适合(4.5.16)和(4.5.17)式。

以下我们可以假设 $u_2'v_1'v_2'=1$，$y=\widetilde{m}_2$（即 $\chi_{r[m_2]m_2 8}'=id.$），$\psi_2\chi_y'$ 的导子是 m_2。由此可知 ψ_2 和 ψ_2^2 具有相同的导子，且 $\omega_1\omega_2\omega_4=\psi_2^2\chi_{f_1 f_4 8}'=\psi_2^2\chi_\lambda'$，其中 $\lambda=cf_1u_1'/(2^{c(2)}m_2)$，这里利用了(4.5.22)。由于 $m_2^2\lambda=c^* m_2 f_1 u_1'\mid N$，这里

$$c^*=m_2\lambda\prod_{p\mid\lambda,\,p\nmid m_2}p^{-1},$$

可见存在例外对$(K_0K_2,\ \tilde{c})$，使

$$\psi_2=K_2\chi_\kappa'\ (n^1\widetilde{m}_2),\quad c/2^{c(2)}=\tilde{c}/2^{\tilde{c}(2)}. \tag{4.5.28}$$

即在(4.5.3)中取 $r/2^{r(2)}=m_2$，$t/2^{t(2)}=\lambda$，K_0 的导子是2的幂，K_2 的导子是 m_2。当 m_2 确定后，K_2 的取法我们已约定了。

情况7　$n(2)\geqslant 4$，$c(2)\leqslant n(2)-3$，或 $n(2)=2,\ 3$，$c(2)=$

0; $\psi_2=K_2\chi'_n(n|\widetilde{m}_2, n\neq1)$.

取 $\phi_2=\psi'_0\overline{K}_2\chi'_\lambda(\lambda=m_2u'_1)$, $\sigma=mu'_1$, $\eta=c/\sigma$ 及 $g=G(\phi_1, n, bN_2)$。类似于情况 6 可证:

$$\begin{aligned}V(q(\psi, c), d/c)&=\bar{\omega}_0\bar{\omega}_2\omega_4\psi(d)\chi_d(c^*)\sigma^{3/2}n^{-1}\rho_1\\&-\bar{\omega}_0\bar{\omega}_2\omega_4K_2(d)\chi_d(c^*)\sigma^{3/2}n^{-1}\rho_2\end{aligned}\tag{4.5.29}$$

及 $V(q(\psi, c), d/\beta)=0\quad(\beta|N, c\prec\beta)$。取 $F(\psi, c)=q(\psi, c)$, 同样(4.5.29)式的第二项不影响矩阵 A 的秩。

到此,我们已完成了 $n(2)=2, 3$ 的讨论, 因当 $\psi_2=K_2$, $c(2)=0$ 时,在上述条件下, (ψ, c)就是一个例外对. 以下假设 $n(2)\geqslant4$, $c(2)\leqslant n(2)-3$, $\psi_2=K_2$, $\phi_2=\psi'_0\overline{K}_2\chi'_\xi(\xi=m_2u'_1)$, $\sigma=mu'_1$, $\eta=c/\sigma$。易见 $\phi_1=\chi_{f_1}$ 或 χ_{2f_1}。

情况 8 $\phi_1=\chi_{2f_1}$。

这时一定有 $m(2)>0$, 否则,若 $m(2)=0$, (ψ, c)就是例外对(在(4.5.3)式中有 $r(2)=0$, $t(2)=c(2)+1$)。令 $g=G(\chi_{2f_1}, 2, 8N_2)$, 可以证明 q 适合(4.5.16)及

$$\begin{aligned}V(q, d/c)&=\sigma^{3/2}\phi_2(-d)V(g, 1)+(\sigma/2)^{3/2}\phi_2(-d+\sigma/2)\\&=-2^{-1/2}\bar{\omega}_0\bar{\omega}_2\omega_4\psi(-d)\chi_{-d}(c^*)\sigma^{3/2}.\end{aligned}$$

这里我们利用了 $V(g, 1)=-2^{-3/2}$ 及 $\psi'_0(-d+\sigma/2)=-\psi'_0(-d)$, 因为 ψ'_0 的导子是 m_0。取 $F(\psi, c)=q(\psi, c)$, 它适合 (4.5.16) 和 (4.5.17)。

情况 9 $\phi_1=\chi_{f_1}$。

若 $m(2)=c(2)=0$, 在(4.5.3)式中有 $r(2)=t(2)=0$, 可见 (ψ, c)是例外对,这不可能。我们首先考虑 $m(2)>3$ 的情况,由于 $\phi_1=\omega\phi_2^2\chi_\eta=\chi_{f_1}$, 可知 $\omega_0=\psi_0^2\chi_{\omega_0(-1)\delta}$ $(\delta=2^{c(2)-m(2)})$, 于是 $\omega=\psi^2\chi_{\delta\xi}$。在(4.5.3)式中,取 $r(2)=m(2)-1$, $t(2)=c(2)-m(2)$, 可见存在一个例外对(K_0K_2, c), 其中 $K_0^2=\psi_0^2$.因为(ψ, c)不是例外对,故有 $\psi_0=K_0\chi_{-1}$, $K_0\chi_2$ 或 $K_0\chi_{-2}$, 令 $K=K_0K_2$, 取

$$g(K\chi_{-1}, c)=g(K\chi_2, c)=G(\chi_{f_1}, 4, 8N_2),$$
$$g(K\chi_{-2}, c)=G(\chi_{f_1}, 8, 8N_2),$$

可以证明 $q(K\chi_{-1}, c)$、$q(K\chi_2, c)$、$q(K\chi_{-2}, c)$适合(4.5.16)式, 且

$$V(q(K\chi_{-1},\ c),\ d/c)$$
$$=-8^{-1}(1+i)\varepsilon_{f_1}^{-1}\sigma^{3/2}\overline{\omega}_0\overline{\omega}_2\omega_4(-d)\chi_{-d}(c^*)$$
$$\times\left\{K\chi_{-1}(-d)+i\varepsilon_{f_1}K(-d)\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{-1}{j}\right)\phi_2\left(1+\frac{j\sigma}{4}\right)\right\},$$
$$V(q(K\chi_2,\ c),\ d/c)$$
$$=-8^{-1}(1+i)\varepsilon_{f_1}^{-1}\sigma^{3/2}\overline{\omega}_0\overline{\omega}_2\omega_4(-d)\chi_{-d}(c^*)$$
$$\times\left\{K\chi_2(-d)+i\varepsilon_{f_1}K\chi_{-2}(-d)\sum_{j=1}^{4}\left(\frac{-1}{j}\right)\phi_2\left(1+\frac{j\sigma}{4}\right)\right\},$$
$$V(q(K\chi_{-2},\ c),\ d/c)$$
$$=-8^{-1}(1+i)\varepsilon_{f_1}^{-1}\sigma^{3/2}\overline{\omega}_0\overline{\omega}_2\omega_4(-d)\chi_{-d}(c^*)$$
$$\times\left\{K(-d)-2^{-5/2}\varepsilon_{f_1}K\chi_2(-d)\sum_{j=1}^{8}\left(\frac{2}{j}\right)\phi_2\left(1+\frac{j\sigma}{8}\right)\right\}.$$

当 d 跑遍 $d_1,\ \cdots,\ d_{g(c)}[g(c)=\phi((c,\ N/c))]$ 时，以上三个式子所对应的行向量是线性独立的。

当 $0<m(2)\leqslant 3$ 时，$\psi_0=\chi_{-1}$、χ_2 或 χ_{-2}，我们只需用 $id.$ 代替 K_0。

现在考虑 $m(2)=0$，$c(2)>0$ 的情况。这时取 $\phi_2=K_2\chi'_\xi(\xi=m_2u'_1)$，$\sigma=m_2u'_1$ 及 $g=G(\chi_{2f_1},\ 2,\ 8N_2)$，$h$ 的定义如前，而 $q=h|V(\eta/2)$，取 $F(\psi,\ c)=q(\psi,\ c)$，可以证明 $F(\psi,\ c)$ 适合 (4.5.15) 和 (4.5.16)。

到此为止，我们已对每个非例外的允许对定义了一个函数 $F(\psi,\ c)$，而且也已经证明了矩阵 $A=(V(F(\psi,\ c),\ s))$ 是满秩的。因此我们可以得到这样的结论：$\varepsilon(N,\ 3/2,\ \omega)$ 是由Eisenstein级数生成的。我们也构造了该空间的一组基。

§4.4 和 §4.5 的结果也即证明了权为 $3/2$ 的尖形式的正交补子空间是由 Eisenstein 级数生成的。当模形式的权为 $\geqslant 5/2$ 的整数或半整数时，这一结论早在三十年代就已证明了，见 Hecke[5] 和 Petersson[16]。

§4.6 $\varepsilon(N, \kappa/2, \omega)(\kappa\geqslant 5)$的基

本节讨论权为$\kappa/2\geqslant 5/2$的 Eisenstein 级数。由定理2.23，我们知道$\varepsilon(N, \kappa/2, \omega)$的维数为

$$\begin{aligned}&\sum_{c|N',(c,N/c)|N/F}\varphi((c, N/c)),\ 若\,n(2)\geqslant 4;\\ 3&\sum_{c|N',(c,N/c)|N/F}\varphi((c, N/c)),\ 若\,n(2)=3;\\ 2&\sum_{c|N',(c,N/c)|N/F}\varphi((c, N/c)),\ 若\,n(2)=2,\end{aligned}\tag{4.6.1}$$

其中$N=2^{n(2)}N'$、$2\nmid N'$、F为ω的导子。利用§4.4和§4.5的类似方法，可以构造$\varepsilon(N, \kappa/2, \omega)$的基，且比权为3/2的情况要简单一些。在下面我们仅限于考虑$N=4D$或$8D$(D为无平方因子的正奇数)，ω为实特征的情况。由(4.6.1)可知，

$$\dim\varepsilon(4D, \kappa/2, \chi_l)=2^{\nu+1},$$

$$\dim\varepsilon(8D, \kappa/2, \chi_l)=\dim\varepsilon(8D, \kappa/2, \chi_{2l})=3\cdot 2^{\nu},$$

其中ν为D的素因子个数，l为D的因子。为了符号的简便，令

$$\begin{aligned}\lambda'_\kappa(n, 4D)&=\frac{(-2\pi i)^{\kappa/2}}{\Gamma(\kappa/2)}\lambda_\kappa(n, 4D)\\&=\frac{(-2\pi i)^{\kappa/2}}{\Gamma(\kappa/2)}\cdot\frac{L_{4D}(\lambda, \chi_{(-1)^\lambda n})}{L_{4D}(2\lambda, id.)}\beta_\kappa(n, 0, \chi_D, 4D),\end{aligned}$$

其中$\lambda=(\kappa-1)/2$。由(1.2.33)、(1.2.34)、(1.2.35)式，及引理4.40，可知函数

$$\begin{aligned}&E_\kappa(id., 4m)(z)\\&\quad=1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda'_\kappa(n, 4D)\prod_{p|2m}A_\kappa(p, n)\prod_{p|D/m}(A_\kappa(p, n)+1)n^{\kappa/2-1}\\&\qquad\times e(nz),\end{aligned}\tag{4.6.2}$$

及

$$\begin{aligned}&E'_\kappa(\chi_m, 4m)(z)\\&\quad=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda'_\kappa(n, 4D)\prod_{p|D/m}(A_\kappa(p, n)+1)n^{\kappa/2-1}e(nz),\end{aligned}\tag{4.6.3}$$

属于空间$\varepsilon(4m, \kappa/2, id.)$，而函数

$$E_\kappa(id., 8m)(z)=1+\sum_{\substack{n=1\\(-1)^\lambda n\equiv 0,1(4)}}^{\infty}\lambda'_\kappa(n, 4D)$$
$$\times(A_\kappa(2, n)-2^{-\kappa}(1+(-1)^\lambda i))\prod_{p\mid m}A_\kappa(p, n)$$
$$\times\prod_{p\mid D/m}(A_\kappa(p, n)+1)n^{\kappa/2-1}e(nz)\tag{4.6.4}$$

属于空间 $\varepsilon(8m, \kappa/2, id.)$。

令

$$\eta_2=\frac{1+(-1)^\lambda i}{2^\kappa-4},\qquad \eta_p=\frac{p-1}{p(p^{\kappa-2}-1)}\quad(p\neq 2),$$

由引理 1.20 及 1.21 可得

引理 4.52　设 p 为素数(可以为 2)，我们有

$$A_\kappa(p, p^2n)-\eta_p=p^{\kappa-2}(A_\kappa(p, n)-\eta_p).$$

以下 l 和 m 总表示 D 的因子．定义函数

$$g_\kappa(\chi_l, 4D, 4D)(z)$$
$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda'_\kappa(ln, 4D)\prod_{p\mid 2D}(A_\kappa(p, ln)-\eta_p)(ln)^{\kappa/2-1}e(nz),$$

$$g_\kappa(\chi_l, 4m, 4D)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda'_\kappa(ln, 4D)\prod_{p\mid 2m}(A_\kappa(p, ln)-\eta_p)$$
$$\times(ln)^{\kappa/2-1}e(nz),\quad(m\neq D),$$

$$g_\kappa(\chi_l, m, 4D)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda'_\kappa(ln, 4D)\prod_{p\mid m}(A_\kappa(p, ln)-\eta_p)$$
$$\times(ln)^{\kappa/2-1}e(nz),$$

$$g_\kappa(\chi_l, m, 8D)(z)=\sum_{\substack{n\geq 1\\(-1)^\lambda ln\equiv 2,3(4)}}\lambda'_\kappa(ln, 4D)\prod_{p\mid m}(A_\kappa(p, ln)-\eta_p)$$
$$\times(ln)^{\kappa/2-1}e(nz).$$

定理 4.53　函数集

$$g_\kappa(\chi_l, 4m, 4D),\quad g_\kappa(\chi_l, m, 4D)\quad(m\mid D)$$

是空间 $\varepsilon(4D, \kappa/2, \chi_l)$ 的一组基，它们是 Hecke 算子公共本征函数，且

$$g_\kappa(\chi_l, j, 4D)\mid T(p^2)=g_\kappa(\chi_l, j, 4D),\quad(p\mid j),$$
$$g_\kappa(\chi_l, j, 4D)\mid T(p^2)=p^{\kappa-2}g_\kappa(\chi_l, j, 4D),\quad(p\mid 8D/j),$$
$$g_\kappa(\chi_l, j, 4D)\mid T(p^2)=(1+p^{\kappa-2})g_\kappa(\chi_l, j, 4D),\ (p\nmid 2D).$$

其中 $j=m$ 或 $4m$。

证明 由于 $g_\kappa(\chi_l, j, 4D)=g_\kappa(id., j, 4D)|T(l)$，可知仅需考虑 $l=1$ 的情况。引进函数

$$F_\kappa(4D)(z)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\lambda'_\kappa(n, 4D)\prod_{p|2D}A_\kappa(p, n)n^{\kappa/2-1}e(nz)$$
$$=E_\kappa(id., 4D)(z),$$
$$F_\kappa(4m)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda'_\kappa(n, 4D)\prod_{p|2m}A_\kappa(p, n)n^{\kappa/2-1}e(nz),$$
$$F_\kappa(m)(z)=\sum_{n}^{\infty}\lambda'_\kappa(n, 4D)\prod_{p|m}A_\kappa(p, n)n^{\kappa/2-1}e(nz). \tag{4.6.5}$$

由于

$$\prod_{p|2m}A_\kappa(p, n)=\prod_{p|2m}A_\kappa(p, n)\prod_{p|D/m}(1+A_\kappa(p, n)-A_\kappa(p, n))$$
$$=\sum_{d|D/m}\mu(d)\prod_{p|2md}A_\kappa(p, n)\prod_{p|D/(md)}(1+A_\kappa(p, n))$$

以及

$$\prod_{p|m}A_\kappa(p, n)=\sum_{d|m}\mu(d)\prod_{p|m/d}(1+A_\kappa(p, n)),$$

由(4.6.2)及(4.6.3)式得到

$$F_\kappa(4m)=\sum_{d|D/m}\mu(d)E_\kappa(id., 4md)\in\varepsilon(4D, \kappa/2, id.),$$
$$F_\kappa(m)=\sum_{d|m}\mu(d)E'_\kappa(\chi_{dD/m}, 4dD/m)\in\varepsilon(4D, \kappa/2, id.).$$

又由于

$$g_\kappa(id.4m, 4D)=\sum_{d|m}\mu(d)\prod_{p|d}\eta_pF_\kappa(4m/d)$$
$$-\sum_{d|m}\mu(d)\prod_{p|2d}\eta_pF_\kappa(m/d),$$
$$g_\kappa(id., m, 4D)=\sum_{d|m}\mu(d)\prod_{p|d}\eta_pF_\kappa(m/d).$$

因此，$g_\kappa(id., 4m, 4D)$ 和 $g_\kappa(id., m, 4D)$ 都属于 $\varepsilon(4D, \kappa/2, id.)$。定理中的前两个等式由定理 3.30 及引理 4.52 可得到。第三个等式可利用 §4.4 末尾的方法证明之。

由于定理中所说的函数在 Hecke 算子作用下，对应不同的本征值集合，故它们是线性独立的。它们的个数恰等于 $\varepsilon(4D, \kappa/2, id.)$ 的维数 2^ν，因而构成一组基。

定理 4.54 函数集

$g_\kappa(\chi_l, 4m, 4D)$、$g_\kappa(\chi_l, m, 4D)$和 $g_\kappa(\chi_l, m, 8D)$ $(m|D)$ 是空间 $\varepsilon(8D, \kappa/2, \chi_l)$中的 Hecke 算子的公共本征函数。它们构成该空间的一组基。对于 $g_\kappa(\chi_l, m, 8D)$，有

$$g_\kappa(\chi_l, m, 8D)|T(p^2) = g_\kappa(\chi_l, m, 8D), \quad (p|m),$$

$$g_\kappa(\chi_l, m, 8D)|T(p^2) = p^{\kappa-2}g_\kappa(\chi_l, m, 8D), \quad (p|2D/m),$$

$$g_\kappa(\chi_l, m, 8D)|T(p^2) = (1+p^{\kappa-2})g_\kappa(\chi_l, m, 8D), \quad (p\nmid 2D).$$

证明 定义函数

$$E^*_\kappa(id., 4D)(z) = -2^{\kappa-1}(1+(-1)^\lambda i)^{-1} \times \{E_\kappa(id., 4D)(z) - 2^{-\kappa}(1+(-1)^\lambda i)F_\kappa(D)(z) - E_\kappa(id., 8D)(z)\}.$$

它属于 $\varepsilon(8D, \kappa/2, id.)$。由(4.6.2)、(4.6.4)及(4.6.5)式得

$$E^*_\kappa(id., 4D)(z) = \sum_{\substack{n\geq 1\\(-1)^\lambda n\equiv 2,3(4)}} \lambda'_\kappa(n, 4D)\prod_{p|D}A_\kappa(p, n)n^{\kappa/2-1}e(nz),$$

以 m 代替 D 可得

$$E^*_\kappa(id., 4m)(z) = \sum_{\substack{n\geq 1\\(-1)^\lambda n\equiv 2,3(4)}} \lambda'_\kappa(n, 4D)\prod_{p|m}A_\kappa(p, n) \times \prod_{p|D/m}(1+A_\kappa(p, n))n^{\kappa/2-1}e(nz).$$

类似于定理 4.53，可以证明 $g_\kappa(id., m, 8D)$ 属于 $\varepsilon(8D, \kappa/2, id.)$，且可计算它在 Hecke 算子作用下的本征值，利用定理4.53，可以证明本定理。

令 $g_\kappa(\chi_{2l}, m, 8D) = g_\kappa(\chi_l, m, 4D)|T(2)$,

$g_\kappa(\chi_{2l}, 2m, 8D) = g_\kappa(\chi_l, m, 8D)|T(2)$,

$g_\kappa(\chi_{2l}, 8m, 8D) = g_\kappa(\chi_l, 4m, 4D)|T(2)$.

利用定理 4.54 及 Hecke 算子的交换性可以证明以下定理：

定理 4.55 函数集

$g_\kappa(\chi_{2l}, m, 8D)$、$g_\kappa(\chi_{2l}, 2m, 8D)$、$g_\kappa(\chi_{2l}, 8m, 8D)$ $(m|D)$,

是空间 $\varepsilon(8D, \kappa/2, \chi_{2l})$ 中的 Hecke 算子公共本征函数，它们构成一组基底，而且

$$g_\kappa(\chi_{2l}, j, 8D)|T(p^2) = g_\kappa(\chi_{2l}, j, 8D), \quad (p|j),$$

$$g_\kappa(\chi_{2l}, j, 8D)|T(p^2) = p^{\kappa-2}g_\kappa(\chi_{2l}, j, 8D), \quad (p|16D/j),$$

$$g_\kappa(\chi_{2l}, j, 8D)|T(p^2) = (1+p^{\kappa-2})g_\kappa(\chi_{2l}, j, 8D). \quad (p\nmid 2D).$$

其中 $j=m$, $2m$ 或 $8m$。

第 5 章

权为整数的 Eisenstein 级数

§5.1　$\varepsilon(N, k, \omega)$的基

在本章中，N和k总表示正整数。设ω为模N的特征，且适合$\omega(-1)=(-1)^k$。通过与上一章类似的方法，即利用(4.5.6)、(4.5.7)、(4.5.8)三种变换及模形式在尖点的值，可以构造空间$\varepsilon(N, k, \omega)$的基。但在权为整数的情况，有一种更为简洁的方法，这个方法是由 Hecke[6] 提出的。本节将利用 Hecke 的方法构造$\varepsilon(N, k, \omega)$的基，并在此基础上给出$S(N, k, \omega)$中的尖形式特性的刻画。

令

$$\Gamma_\infty=\left\{\pm\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| m\in\boldsymbol{Z}\right\}$$

及 $$W=\left\{\begin{pmatrix}* & *\\ mN & n\end{pmatrix}\in SL_2(\boldsymbol{Z})\middle| m\geqslant 0,\ \text{当 } m=0 \text{ 时},\ n=1\right\}.$$

W是$\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)$的一组代表元。定义函数

$$\begin{aligned}E_k(z, s, \omega, N)&=y^s\sum_{\gamma\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma_0(N)}\bar{\omega}(d_\gamma)J(\gamma, z)^{-k}|J(\gamma, z)|^{-2s}\\&=2^{-1}y^s\sum_{(m,n)=1}\bar{\omega}(n)(mNz+n)^{-k}|mNz+n|^{-2s},\end{aligned}$$

这里s是一个复变数，m、n跑遍所有互素的整数对(也可以为负数)。为了与半整权的情况有所区别，我们在这里引用表达式$E_k(z, s, \omega, N)$。当$Re(2s)>2-k$时，上述无穷级数是绝对收敛的，它是s的解析函数。易见

$$E_k(\gamma(z), s, \omega, N)=\omega(d_\gamma)J(\gamma, z)^kE_k(z, s, \omega, N),\quad \gamma\in\Gamma_0(N). \tag{5.1.1}$$

利用引理 1.10, 我们得到

$$
\begin{aligned}
&E_k(z, s, \omega, N)\\
&=2^{-1}y^s L_N^{-1}(k+2s, \bar{\omega}) \sum_{m,n}{}' \bar{\omega}(n)(mNz+n)^{-k}|mNz+n|^{-2s}\\
&=y^s+y^s N^{-k-2s} L_N^{-1}(k+2s, \bar{\omega}) \sum_{m=1}^{\infty}\sum_{a=1}^{N}\bar{\omega}(a)\\
&\quad\times \sum_{t=-\infty}^{+\infty}(mz+aN^{-1}+t)^{-k-s}(m\bar{z}+aN^{-1}+t)^{-s}\\
&=y^s+i^{-k}(2\pi N^{-1})^{k+2s}y^s L_N^{-1}(k+2s, \bar{\omega})\\
&\quad\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\sum_{m=1}^{\infty} t_n(my, k+s, s)\sum_{a=1}^{N}\bar{\omega}(a)e(nmx+anN^{-1}).
\end{aligned}
\tag{5.1.2}
$$

$\sum'$表示对所有 $(m, n)\neq(0, 0)$ 求和. 类似于半整权的情况, $E_k(z, s, \omega, N)$ 可延拓为 s-平面上的亚纯函数. (5.1.1)式在延拓后仍成立. 当 $k\neq 2$ 或 $k=2$, $\omega\neq id_\cdot$ 时,定义

$$E_k(z, \omega, N)=E_k(z, 0, \omega, N).$$

由于 $\Gamma(s)^{-1}\to 0(s\to 0)$ 及 $W(y, \alpha, 0)=1$, $E_k(z, 0, \omega, N)$ 的展开式中对应 $n<0$ 的项都消失,因而有

$$
\begin{aligned}
&E_k(z, \omega, N)\\
&=1+\frac{(-2\pi i)^k}{N^k(k-1)!L_N(k, \omega)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{d|n}d^{k-1}\sum_{a=1}^{N}\bar{\omega}(a)e(ad/N)\right\}e(nz).
\end{aligned}
\tag{5.1.3}
$$

类似于定理4.9, 可证明这时 $E_k(z, \omega, N)\in\varepsilon(N, k, \omega)$.

在(5.1.2)式中令 $s=0$, $k=2$ 及 $\omega=id$, 则得到

$$
\begin{aligned}
E_2(z, 0, id_\cdot, N)&=1-\frac{\pi\varphi(N)}{2yN^2L_N(2, id_\cdot)}\\
&\quad-\frac{4\pi^2}{N^2L_N(2, id_\cdot)}\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\sum_{d|n}d\sum_{\substack{a=1\\(a,N)=1}}^{N}e(ad_\cdot/N)\right\}e(nz),
\end{aligned}
\tag{5.1.4}
$$

设正整数 Q 适合

$$Q|N, \quad (Q, N/Q)=1. \tag{5.1.5}$$

定义矩阵

$$W(Q)=\begin{pmatrix}Q_S & t\\ N_U & Q_V\end{pmatrix}\in GL_2^+(\mathbf{Z}),\ \det W(Q)=Q. \tag{5.1.6}$$

我们有 $W(Q)\Gamma_0(N)W(Q)^{-1}=\Gamma_0(N)$. 类似于命题3.32, 我们

有如下命题：

命题 5.1 $W(Q)$ 如上定义，设 $\omega=\omega_1\omega_2$，其中 ω_1 和 ω_2 分别为模 Q 和 N/Q 的特征，若 $f\in G(N,k,\omega)$，则 $g=f|[W(Q)]_k\in G(N, k, \bar\omega_1\omega_2)$。又若 $f\in\varepsilon(N, k,\omega)$，则 $g\in\varepsilon(N, k, \bar\omega_1\omega_2)$。

证明 任取 $\gamma=\begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in\Gamma_0(N)$，设 $W(Q)\gamma W(Q)^{-1}=\begin{pmatrix} a_0 & b_0\\ c_0 & d_0\end{pmatrix}$，直接计算可以验证 $c_0\equiv 0(N)$，$d_0\equiv a(Q)$，$d_0\equiv d(N/Q)$，所以

$$\begin{aligned} g|[\gamma] &= f|[W(Q)\gamma W(Q)^{-1}W(Q)]\\ &=\omega(d_0)f|[W(Q)]=\omega(d_0)g,\end{aligned}$$

即 $g\in G(N, k, \bar\omega_1\omega_2)$。类似于引理 3.23、3.24 和 3.25，当 $N|M$ 时，我们有

$$\varepsilon(N, k, \omega)=G(N, k, \omega)\cap\varepsilon(\Gamma(M), k).$$

由此可证命题中最后的讨论。

若 $W'(Q)$ 为另一个适合 (5.1.6) 的方阵，由于 $W'(Q)\times W(Q)^{-1}\in\Gamma_0(N)$，所以若 $f\in G(N, k, \omega)$，$f|[W(Q)]$ 与 $f|[W(Q)]$ 仅差一个常数因子。对适合 (5.1.5) 的 Q，固定取一个

$$W(Q)=\begin{pmatrix} jQ & l\\ -N & Q\end{pmatrix},\quad 其中\ jQ+lN/Q=1.$$

现在我们来计算 $E_k(z, \omega, N)|[W(Q)]$ 的 Fourier 展开式。首先，我们有

$$\begin{aligned} &L_N(k+2s, \bar\omega)E_k(z, s, \omega, N)|[W(Q)]\\ &=2^{-1}Q^{-k/2-2s}y^s\sum_{m,n}{}'\bar\omega(n)((mjQ-n)NQ^{-1}z\\ &\quad+lmNQ^{-1}+n)^{-k}|(mjQ-n)NQ^{-1}z+lmNQ^{-1}+n|^{-2s}\\ &=2^{-1}Q^{-k/2-2s}y^s\sum_{m,n}{}'\bar\omega_1(-m)\bar\omega_2(n)(mNQ^{-1}z+n)^{-k}\\ &\quad\times|mNQ^{-1}z+n|^{-2s}\\ &=N^{-k-2s}Q^{k/2}y^s\sum_{m=1}^{\infty}\bar\omega_1(-m)\sum_{a=1}^{N/Q}\bar\omega_2(a)\\ &\quad\times\sum_{t=-\infty}^{\infty}(mz+aQN^{-1}+t)^{-k-s}(m\bar z+aQN^{-1}+t)^{-s}\end{aligned}$$

$$= i^k(2\pi N^{-1})^{k+2s}Q^{k/2}y^s\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\bar{\omega}_1(-m)t_n(my, k+s, s)$$

$$\times\sum_{a=1}^{N/Q}\bar{\omega}_2(a)e(anQN^{-1}+nmx). \tag{5.1.7}$$

这里 ω_1 和 ω_2 如命题5.1中所定义。当 $k\geqslant 3$ 或 $k=2$, $\omega\neq id.$ 时，我们得到

$$E_k(z, \omega, N)\,|\,[W(Q)]=E_k(z, 0, \omega, N)\,|\,[W(Q)]$$

$$=\frac{(-2\pi i)^kQ^{k/2}}{N^k(k-1)!L_N(k, \bar{\omega})}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}\bar{\omega}_1(-n/d)d^{k-1}$$

$$\times\sum_{a=1}^{N/Q}\bar{\omega}_2(a)e(adQ/N)e(nz). \tag{5.1.8}$$

当 $k=1$, $\omega_2\neq id.$ 时，

$$E_1(z, \omega, N)\,|\,[W(Q)]=E_1(z, 0, \omega, N)\,|\,[W(Q)]$$

$$=-\frac{2\pi iQ^{1/2}}{NL_N(1, \bar{\omega})}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}\bar{\omega}_1(-n/d)\sum_{a=1}^{N/Q}\bar{\omega}_2(a)e(adQ/N)e(nz), \tag{5.1.9}$$

当 $k=1$, $\omega_2=id.$ 时，(5.1.7)式中将出现对应 $n=0$ 的项，于是可得 $E_1(z, \omega, N)\,|\,[W(Q)]=E_1(z, 0, \omega, N)\,|\,[W(Q)]$

$$=\frac{\pi iL_Q(0, \bar{\omega})}{Q^{1/2}L_N(1, \bar{\omega})}\prod_{p|N/Q}\left(1-\frac{1}{p}\right)$$

$$-\frac{2\pi iQ^{1/2}}{NL_N(1, \bar{\omega})}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}\bar{\omega}(-n/d)\sum_{\substack{a=1\\(a,N/Q)=1}}^{N/Q}e(adQ/N)e(nz). \tag{5.1.10}$$

最后，当 $k=2$, $\omega=id.$ 时，由(5.1.7)式得

$$E_2(z, 0, \omega, N)\,|\,[W(Q)]=-\frac{-\varphi(N)}{2yN^2L_N(2, id.)}$$

$$-\frac{4\pi^2Q}{N^2L_N(2, id.)}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{d|n\\(n/d,Q)=1}}\sum_{\substack{a=1\\(a,N/Q)=1}}^{N/Q}e(adQ/N)e(nz). \tag{5.1.11}$$

假设 ω 为模 N 的原特征，Q 适合(5.1.5)，令

$$b_k(n)=\sum_{d|n}\omega_1(-n/d)d^{k-1}\sum_{a=1}^{N/Q}\bar{\omega}_2(a)e(adQ/N).$$

ω_1 与 ω_2 如命题5.1中所定义。ω_2 是模 N/Q 的原特征。易见当 $(d, N/Q)>1$ 时，上式的内和为零，故

$$b_k(n)=\sum_{a=1}^{N/Q}\bar{\omega}_2(a)e(aQ/N)\sum_{d\mid n}\omega_1(-n/d)\omega_2(d)d^{k-1}.$$

设 p 为素数，$p\nmid N$。当 $p\nmid n$ 时，我们有

$$b_k(pn)=(\omega_1(p)+\omega_2(p)p^{k-1})b_k(n);$$

当 $p\mid n$ 时，若 $n=p^l n_1(p\nmid n_1)$，我们有

$$\begin{aligned}b_k(pn)&=\omega_1(p)b_k(n)+\omega_2(p)p^{k-1}\sum_{a=1}^{N/Q}\bar{\omega}_2(a)e(aQ/N)\\&\quad\times\sum_{d\mid n_1}\omega_1(-n_1/d)\omega_2(p^l d)(p^l d)^{k-1}\\&=\omega_1(p)b_k(n)+\omega_2(p)p^{k-1}(b_k(n)-\omega_1(p)b_k(n/p))\\&=(\omega_1(p)+\omega_2(p)p^{k-1})b_k(n)-\omega(p)p^{k-1}b_k(n/p).\end{aligned}$$

今设 $p\mid Q$，则

$$b_k(pn)=\omega_2(p)p^{k-1}b_k(n),$$

而当 $p\mid N/Q$ 时，易见 $b_k(pn)=\omega_1(p)b_k(n)$. 综合上述，我们得到

$$(\omega_1(p)+\omega_2(p)p^{k-1})b_k(n)=b_k(pn)+\omega(p)p^{k-1}b_k(n/p),$$

当 $p\nmid n$ 时，$b(n/p)$ 理解为零。因而

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}b_k(n)n^{-s}\\&=b_k(1)\prod_{p\mid Q}(1-\omega_2(p)p^{k-1-s})^{-1}\prod_{p\mid N/Q}(1-\omega_1(p)p^{-s})^{-1}\\&\quad\times\prod_{p\nmid N}(1-(\omega_1(p)+\omega_2(p)p^{k-1})p^{-s}+\omega(p)p^{k-1-2s})^{-1}\\&=b_k(1)\prod_{p\nmid Q}(1-\omega_1(p)p^{-s})^{-1}\prod_{p\nmid N/Q}(1-\omega_2(p)p^{k-1-s})^{-1}\\&=b_k(1)L(s,\omega_1)L(s-k+1,\omega_2).\end{aligned}$$

当 $k\neq 2$ 或 $k=2$, $\omega\neq id.$ (即 $N>1$) 时，令

$$E_k(z,\omega_1,\omega_2)=\frac{N^k(k-1)!L_N(k,\omega_1\bar{\omega}_2)}{(-2\pi i)^k Q^{k/2}\omega_1(-1)\sum_{a=1}^{N/Q}\bar{\omega}_2(a)e(aQ/N)}\times E_k(z,\bar{\omega}_1\omega_2,N)\mid[W(Q)].$$

则 $E_k(z,\omega_1,\omega_2)\in\varepsilon(N,k,\omega)$，且

$$E_k(z, \omega_1, \omega_2) = (b_k(1))^{-1}\sum^{\infty} b_k(n)e(nz),$$

因而

$$L(s, E_k(z, \omega_1, \omega_2)) = L(s, \omega_1)L(s-k+1, \omega_2). \quad (5.1.12)$$

其中 $L(s, E_k(z, \omega_1, \omega_2))$是 $E_k(z, \omega_1, \omega_2)$的 Zeta 函数，$L(s, \omega)$是通常的$L$函数。同时也可见 $E_k(z, \omega_1, \omega_2)$ 是 Hecke 算子的公共本征函数，且

$$E_k(z, \omega_1, \omega_2)\,|\,T(p) = (\omega_1(p) + p^{k-1}\omega_2(p))E_k(z, \omega_1, \omega_2).$$

现在假设ω为模N的任一特征。首先仍考虑$k\neq 2$或$k=2$，$\omega\neq id.$ 的情况。若$\omega=\omega_1\omega_2$，ω_1 和 ω_2 的导子分别为 r_1 和 r_2，将 ω_1 和 ω_2 看作为模 r_1 和 r_2 的原特征，我们将构造一个函数 $E_k(z, \omega_1, \omega_2)\in\varepsilon(N, k, \omega)$，且使(5.1.12)对它也成立。

类似命题3.33，我们有

命题 5.2 设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n e(nz)\in G(N, k, \omega)$，$\omega$的导子为$s$，$\psi$是模$r$的原特征，令

$$\begin{aligned}h(z) &= \sum_{u=1}^{r} \bar\psi(u)f(z+u/r)\\ &= \sum_{u=1}^{r} \bar\psi(u)e(u/r)\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)a_n e(nz),\end{aligned}$$

则 $h(z)\in G(M, k, \omega\psi^2)$，其中 $M=[N, rs, r^2]$。又若 $f(z)\in\varepsilon(N, k, \omega)$或$S(N, k, \omega)$，则 $h(z)\in\varepsilon(M, k, \omega\psi^2)$ 或 $S(M, k, \omega\psi^2)$。

设 $\omega=\omega_1\omega_2$，ω_1 和 ω_2 的导子分别为 r_1 和 r_2，又设

$$r_1=\prod_{i=1}^{m} p_i^{\alpha_i}, \quad r_2=\prod_{i=1}^{m} p_i^{\beta_i},$$

$$\omega_1=\prod_{i=1}^{m}\omega_{1,i}, \ \omega_2=\prod_{i=1}^{m}\omega_{2,i}.$$

$\omega_{1,i}$ 和 $\omega_{2,i}$ 的导子分别为 $p_i^{\alpha_i}$ 和 $p_i^{\beta_i}$。不失普遍性，可假设存在正整数 m_1，使得当 $1\leqslant i\leqslant m_1\leqslant m$ 时，有 $\alpha_i\geqslant\beta_i$，而当 $m_1<i\leqslant m$ 时，有 $\alpha_i<\beta_i$，利用上述结果，可知存在

$$\widetilde{E}_k(z)=E_k\left(z,\ \prod_{i=1}^{m_1}\omega_{1,i}\,\bar{\omega}_{2,i},\ \prod_{i=m_1+1}^{m}\bar{\omega}_{1,i}\omega_{2,i}\right)$$
$$\in\varepsilon\left(\prod_{i=1}^{m_1}p_i^{\alpha_i}\prod_{i=m_1+1}^{m}p_i^{\beta_i},\ k,\ \prod_{i=1}^{m_1}\omega_{1,i}\bar{\omega}_{2,i}\prod_{i=m_1+1}^{m}\bar{\omega}_{1,i}\omega_{2,i}\right).$$

当 $1\leqslant i\leqslant m_1$ 时，$\omega_{1,i}\bar{\omega}_{2,i}$ 不一定是模 $p_i^{\alpha_i}$ 的原特征，但这并不影响上式的成立。在命题5.2中，取 $\psi=\prod\limits_{i=1}^{m_1}\omega_{2,i}\prod\limits_{i=m_1+1}^{m}\omega_{1,i}$，$\psi$ 的导子 $r=\prod\limits_{i=1}^{m_1}p_i^{\beta_i}\prod\limits_{i=1}^{m}p_i^{\alpha_i}$，令

$$E_k(z,\ \omega_1,\ \omega_2)=\left(\sum_{u=1}^{r}\bar{\psi}(u)e(u/r)\right)^{-1}\sum_{u=1}^{r}\bar{\psi}(u)\widetilde{E}_k(z+u/r),$$

则 $E_k(z,\ \omega_1,\ \omega_2)\in\varepsilon(r_1r_2,\ k,\ \omega)$，且

$$\begin{aligned}&L(s,\ E_k(z,\ \omega_1,\ \omega_2))\\&=L\left(s,\ \psi\prod_{i=1}^{m_1}\omega_{1,i}\bar{\omega}_{2,i}\right)L\left(s-k+1,\ \psi\prod_{i=m_1+1}^{m}\bar{\omega}_{1,i}\omega_{2,i}\right)\\&=L(s,\ \omega_1)L(s-k+1,\ \omega_2).\end{aligned}$$

设 l 为正整数，ω_1 和 ω_2 分别为模 r_1 和 r_2 的原特征。考虑适合下述条件的三元组

$$(l,\ \omega_1,\ \omega_2):\quad \omega=\omega_1\omega_2,\quad lr_1r_2\,|\,N.\tag{5.1.13}$$

对应每一个这样的三元组 $(l,\ \omega_1,\ \omega_2)$，我们有函数

$$E_k(lz,\ \omega_1,\ \omega_2)\in\varepsilon(lr_1r_2,\ k,\ \omega)\subset\varepsilon(N,\ k,\ \omega),$$

且

$$L(s,\ E_k(lz,\ \omega_1,\ \omega_2))=l^{-s}L(s,\ \omega_1)L(s-k+1,\ \omega_2).$$

记 s 为 ω 的导子，以 $A(N,\ s)$ 表示适合 (5.1.13) 的三元组 $(l,\ \omega_1,\ \omega_2)$ 的个数。

引理 5.3　我们有

$$A(N,\ s)=\sum_{c|N,(c,N/c)|N/s}\varphi((c,\ N/c)).$$

证明　以 $B(N,\ s)$ 表示上式右端。若 $N=N_1N_2$，$s=s_1s_2$，N_1 与 N_2 互素，且 $s_1|N_1$，$s_2|N_2$，则易见 $A(N,\ s)=A(N_1,\ s_1)\times A(N_2,s_2)$，$B(N,\ s)=B(N_1,\ s_1)B(N_2,\ s_2)$。故仅需考虑 $N=p^a$，$s=p^b(b\leqslant a)$。若 $(p^i,\ \omega_1,\ \omega_2)$ 适合 (5.1.13)，r_1 与 r_2 中一定有一个是 s 的倍数，因而 $0\leqslant i\leqslant a-b$。$r_1$ 与 r_2 中若有一个比 s

大,则 r_1 与 r_2 务必相等。由于$\omega_2=\omega\bar{\omega}_1$, ω_1 确定后,ω_2也随之确定。

首先假设$2b\leqslant a$。当$0\leqslant i\leqslant a-2b$时,$r_1$可取的最大可能的值为$p^{\left[\frac{a-i}{2}\right]}$,这时$\left[\frac{a-i}{2}\right]\geqslant b$, ω_1 可取为模 $p^{\left[\frac{a-i}{2}\right]}$的任一特征;当$a-2b+1\leqslant i\leqslant a-b$ 时(这时 $b\geqslant 1$),由于 $2b+i>a$, r_1 和 r_2 不能同时是 p^b 的倍数,但其中一定有一个是 p^b,这时 ω_1 可取为 χ 或 $\omega\chi$, χ 是模 p^{a-b-i}的任一特征。于是得到

$$A(p^a, p^b)=2\sum_{i=0}^{b-1}\varphi(p^i)+\sum_{i=0}^{a-2b}\varphi\left(p^{\left[\frac{a-i}{2}\right]}\right)$$

$$=\begin{cases}2\displaystyle\sum_{i=0}^{a/2-1}\varphi(p^i)+\varphi(p^{a/2}), & 若 2|a;\\ 2\displaystyle\sum_{i=0}^{(a-1)/2}\varphi(p^i), & 若 2\nmid a.\end{cases}$$

现在假设$a<2b$。这时 r_1 与 r_2 中一定有一个是 p^b, ω_1 可取为 χ 或 $\omega\chi$, χ 为模 p^{a-b-i} 的特征,所以这时

$$A(p^a, p^b)=2\sum_{i=0}^{a-b}\varphi(p^i).$$

直接计算 $B(p^a, p^b)$,可证得引理。

对于整权模形式,也有类似与定理 3.38 的结果,即$E_k(lz, \omega_1, \omega_2)$在$\infty$的展开式的常数项为 $-L(0, \omega_1)L(1-k, \omega_2)$。当 ω 为模 $r(\neq 1)$ 的原特征时,若 $\omega(-1)=(-1)^\nu(\nu=0$ 或 $1)$,则函数

$$R(s, \omega)=(r/\pi)^{(s+\nu)/2}\Gamma((s+\nu)/2)L(s, \omega)$$

是 s 平面上的全纯函数。同样,函数

$$\pi^{-s/2}s(s-1)\Gamma(s/2)\zeta(s)$$

也是 s 平面上的全纯函数。$s=0$ 和负整数是 $\Gamma(s)$的一个阶极点。由此可知,当 ω 为非平凡的偶特征时有 $L(0, \omega)=0$,当 k 为大于1 的奇数及 ω 为偶特征时,有 $L(1-k, \omega)=0$,当 k 为偶数及 ω 为奇特征时,也有$L(1-k, \omega)=0$。所以有

$$-L(0, \omega_1)L(1-k, \omega_2)=\begin{cases}0, & 若 k\neq 1,\ \omega_1 非平凡,\\ & 或 \omega_1 和 \omega_2 都非平凡;\\ L(1-k, \omega)/2, & 其他情况,\end{cases}$$

这里我们利用了 $\zeta(0)=-1/2$。

设 $N=p_1^{\gamma_1}\cdots p_n^{\gamma_n}$，在§4.5节中，我们已在$N$所有的因子中引入了一个次序．即若 $l=p_1^{\beta_1}\cdots p_n^{\beta_n}$ 和 $l'=p_1^{\gamma_1}\cdots p_n^{\gamma_n}$ 为N的两个因子，若存在 $i(0\leqslant i\leqslant n)$，使 $\beta_j=\gamma_j(1\leqslant j\leqslant i)$，而 $\beta_{i+1}>\gamma_{i+1}$，则记 $l\succ l'$。

定理 5.4　当 $k\geqslant 3$ 或 $k=2$, $\omega\neq id.$ 时，函数集

$$E_k(lz,\ \omega_1,\ \omega_2)=-L(0,\ \omega_1)L(1-k,\ \omega_2)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d\mid n}\omega_1(n/d)\omega_2(d)d^{k-1}\Big)e(lnz),$$

组成 $\varepsilon(N,\ k,\ \omega)$ 的基，其中 $(l,\ \omega_1,\ \omega_2)$ 跑遍适合(5.1.13)的三元组。

证明　当 $k\geqslant 3$ 或 $k=2$, $\omega\neq id.$ 时，由(2.3.11)式，我们有 $\dim\varepsilon(N,\ k,\ \omega)=B(N,\ s)$。利用引理5.3，我们仅需证明以上这组函数是线性无关的。

假设

$$0=\sum_{n=0}^{\infty}b(n)e(nz)=\sum_{(l,\omega_1,\omega_2)}c(l,\ \omega_1,\ \omega_2)E_k(lz,\ \omega_1,\ \omega_2),$$

求和号跑遍适合(5.1.13)的所有的$(l,\ \omega_1,\ \omega_2)$。设$(1,\ \omega_1,\ \omega_2)$适合(5.1.13)，则不可能存在另一个形如$(1,\ \omega_1',\ \omega_2')$的三元组适合(5.1.13)，使 $\omega_2=\omega_2'$。以 1_N 表示模N的平凡特征，我们有

$$\begin{aligned}0&=\sum_{n=1}^{\infty}1_N\bar{\omega}_2(n)b(n)n^{-s}\\&=c(1,\ \omega_1,\ \bar{\omega}_2)L(s,\ \omega_1\bar{\omega}_21_N)L(s-k+1,\ 1_N)\\&\quad+\sum_{\omega_2'\neq\omega_2}c(1,\ \omega_1',\ \omega_2')L(s,\ \omega_1'\bar{\omega}_21_N)L(s-k+1,\ \omega_2'\bar{\omega}_21_N).\end{aligned}$$

上述求和号跑遍适合(5.1.13)形如$(1,\ \omega_1',\ \omega_2')$ $(\omega_2'\neq\omega_2)$的三元组．上式右端第一项在 $s=k$ 有一阶极点，其余各项在 $s=k$ 处无极点，可见 $c(1,\ \omega_1,\ \omega_2)=0$。类似地可证一切 $c(1,\ \omega_1,\ \omega_2)$ 都为零。

归纳假设当 $l'\prec l$ 时，$c(l',\ \omega_1,\ \omega_2)$都为零。设$(l,\ \omega_1,\ \omega_2)$适合(5.1.13)，我们有

$$0=\sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{1}_N\bar{\omega}_2(n)b(ln)n^{-s}$$
$$=c(l, \omega_1, \omega_2)L(s, \omega_1\bar{\omega}_2\mathbf{1}_N)L(s-k+1, \mathbf{1}_N)$$
$$+\sum_{\omega'_1\neq\omega_1}c(l, \omega'_1, \omega'_2)L(s, \omega_1'\bar{\omega}_2\mathbf{1}_N)L(s-k+1, \omega'_2\bar{\omega}_2\mathbf{1}_N)$$

利用同样推理，可知 $c(l, \omega_1, \omega_2)=0$，从而一切 $c(l, \omega_1, \omega_2)$ 都为零。

定理 5.5 函数集

$$E_1(lz, \omega_1, \omega_2)=-L(0, \omega_1)L(0, \omega_2)+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|n}\omega_1(n/d)\omega_2(d)\Big)e(nz),$$

组成 $\varepsilon(N, 1, \omega)$ 的基，其中 (l, ω_1, ω_2) 跑遍适合(5.1.13)的三元组，且 (l, ω_1, ω_2) 与 (l, ω_2, ω_1) 中仅取一个。

证明 由(2.3.13)式，可知

$$\dim\varepsilon(N, 1, \omega)=\frac{1}{2}B(N, s).$$

所以仅需证明上述函数集线性无关即可，这可以利用定理 5.4 同样的方法证明。

最后，考虑 $k=2$, $\omega=id.$ 的情形。ω_1 和 ω_2 仍为模 r_1 和 r_2 的原特征，考虑适合下述条件的三元组：

$$\omega_1\omega_2=id., lr_1r_2|N, \text{且当 } r_1=r_2=1 \text{ 时}, l\neq 1. \quad (5.1.14)$$

适合(5.1.14)的三元组的个数为 $B(N, s)-1$，而由(2.3.12)式，它恰等于 $\dim\varepsilon(N, 2, id.)$。

设 $t\neq 1$ 为无平方因子的正整数，且是 N 的因子。定义函数

$$g_t(z)=\sum_{Q|t}\mu(Q)E_2(z, 0, id., t)|[W(t/Q)]$$

由(5.1.4)及(5.1.11)式，我们有

$$g_t(z)=\mu(t)-\frac{4\pi^2}{tL_t(2, id.)}\sum_{Q|t}\frac{\mu(Q)}{Q}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{d|n\\(t/Q, n/d)=1}}d\times\sum_{\substack{a=1\\(a,Q)=1}}^{Q}e(ad/Q)e(nz),$$

将任一正整数 n 表为 $n'\prod_{p|t}p^{n(p)}$，n' 与 t 互素，记 $Q^*=\prod_{p|Q}p^{n(p)}$，则

$$\sum_{Q\mid t}\frac{\mu(Q)}{Q}\sum_{\substack{d\mid n\\(t/Q,\,n/d)=1}} d\sum_{\substack{a=1\\(a,Q)=1}}^{Q} e(ad/Q)$$

$$=\sum_{Q\mid t}\frac{\mu(Q)}{Q}\prod_{p\mid t/Q}p^{n(p)}\sum_{d\mid Q^*} d\sum_{d'\mid n'} d'\sum_{\substack{a=1\\(a,Q)=1}}^{Q} e(ad/Q)$$

$$=\sum_{d'\mid n'} d'\sum_{Q\mid t}\frac{\mu(Q)}{Q}\prod_{p\mid t/Q}p^{n(p)}\prod_{p\mid Q}\sum_{d\mid p^{n(p)}} d\sum_{\substack{a=1\\(a,p)=1}}^{p} e(ad/p)$$

$$=\sum_{d'\mid n'} d'\prod_{p\mid t}\Big(p^{n(p)}-p^{-1}\Big(-1+(p-1)\sum_{i=1}^{n(p)}p^{i}\Big)\Big)$$

$$=\sum_{d'\mid n'} d'\prod_{p\mid t}(1+p^{-1}).$$

令

$$g_t^*(z)=\Big(\frac{-4\pi^2}{tL_t(2,id.)}\prod_{p\mid t}(1+p^{-1})\Big)^{-1}g_t(z)$$

$$=-\prod_{p\mid t}(1-p)/24+\sum^{\infty}\sum_{\substack{d\mid n\\(d,t)=1}} d\,e(nz).$$

不难证明 $g_t^*(z)\in\varepsilon(t,\ 2,\ id.)$。易见

$$L(s,\ g_t^*)=\zeta(s)L(s-1,\ 1_t).$$

对任一正整数 l，令 $t(l)=\prod_{p\mid l}p$。当 $l\neq 1$ 时，$(l,\ id.,\ id.)$ 适合(5.1.14)，令

$$E_2(lz,\ id.,\ id.)=g_{t(l)}^*(zl/t(l))\in\varepsilon(l,\ 2,\ id.),$$

易见

$$L(s,\ E_2(lz,\ id.,\ id.))=(l/t(l))^{-s}\zeta(s)L(s-1,\ 1_{t(l)}).$$

注意：这里符号 $E_2(z,\ id.,\ id.)$是没有定义的。

若$(l,\ \omega_1,\ \omega_2)$ 适合 (5.1.14)，且 ω_1 是非平凡的，这时 ω_2 也是非平凡的，当 $\omega_1^2=id.$ (这时 $\omega_1=\omega_2$)时，令

$$E_2(z,\ \omega_1,\ \omega_2)=\Big(\sum_{u=1}^{r_1}\omega_1(u)e(u/r_1)\Big)^{-1}\sum_{u=1}^{r_1}\omega_1(u)g_{t(r_1)}^*(z+u/r_1),$$

则 $E_2(z,\ \omega_1,\ \omega_2)\in\varepsilon(r_1^2,\ 2,\ id.)$，且

$$L(s,\ E_2(z,\ \omega_1,\ \omega_2))=L(s,\ \omega_1)L(s-1,\ \omega_2);$$

当 $\omega_1^2\neq id.$ 时，令

$$E_2(z,\ \omega_1,\ \omega_2)=\Big(\sum_{u=1}^{r_1}\bar\omega_1(u)e(u/r_1)\Big)^{-1}$$

$$\times \sum_{u=1}^{r_1} \bar{\omega}_1(u) E_2(z+u/r_1, id., \bar{\omega}_1^2).$$

$E_2(z, id., \bar{\omega}_1^2)$在前面已有定义，这时仍有$E_2(z, \omega_1, \omega_2) \in \varepsilon(r_1^2, 2, id.)$，且由(5.1.12)式可知

$$L(s, E_2(z, \omega_1, \omega_2)) = L(s, \omega_1)L(s-1, \omega_2).$$

到此，对每个适合(5.1.14)的三元组(l, ω_1, ω_2)，都有一个函数$E_2(lz, \omega_1, \omega_2)$属于$\varepsilon(N, 2, id.)$。

以$a_0(l, \omega_1, \omega_2)$表示$E_2(lz, \omega_1, \omega_2)$在$\infty$的展开式的常数项，则易见

$$a_0(l, \omega_1, \omega_2) = \begin{cases} 0, & \text{若 } \omega_1 \text{ 非平凡;} \\ -\prod\limits_{p|l}(1-p)/24, & \text{若 } \omega_1 \text{ 平凡.} \end{cases}$$

定理 5.6　函数集

$$E_2(lz, \omega_1, \omega_2) = a_0(l, \omega_1, \omega_2) + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\sum_{d|n} \omega_1(n/d)\omega_2(d)d\Big)e(lnz)$$

组成$\varepsilon(N, 2, id.)$的基，其中(l, ω_1, ω_2)跑遍适合(5.1.14)的三元组。

证明　仅需证明上述函数集是线性无关的。假设

$$\sum c(l, \omega_1, \omega_2)E_2(lz, \omega_1, \omega_2) = 0, \qquad (5.1.15)$$

上述求和号跑遍适合(5.1.14)的所有三元组(l, ω_1, ω_2)。

设$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)e(nz) \in G(N, k, \omega)$，$r$为$N$的因子，$\psi$为模$N$的任一特征，定义

$$L(s, f, \psi, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n)a(rn)n^{-s}.$$

当$l/t(l) \nmid r$时，我们有$L(s, E_2(lz, id., id.), \psi, r) = 0$。当$l/t(l) | r$时，

$$L(s, E_2(lz, id., id.), \psi, r) = \sum_{n=1}^{\infty} \psi(n) \sum_{\substack{d|nrt(l)/l \\ (d,l)=1}} d\, n^{-s}$$

$$= \prod_{p|r,\, p\nmid l} (1+p+\cdots+p^{r(p)})L(s, \psi)L(s-1, \psi).$$

其中$r(p)$适合$p^{r(p)} \| r$。当ψ为模N的非平凡特征时，$L(s, E_2(lz, id., id.), \psi, r)$在$s=2$处全纯，因此，利用定理5.4的同样

方法，由(5.1.15)式可证得当 ω_2 为非平凡特征时，有 $c(l,\ \omega_1,\ \omega_2)=0$。

以 f 表示 (5.1.15) 式左端的函数，显然，$L(s,\ f,\ 1_N,\ r)$ 在 $s=2$ 处无极点，由此得到

$$A_r=\sum_{\substack{l|N,\,l\neq 1\\ l/t(l)\,|\,r}}\ \prod_{p|r,\,p\nmid l}(1+p+\cdots+p^{r(p)})c(l)=0$$

$$(r\,|\,N,\ r\neq N).\tag{5.1.16}$$

其中 $c(l)=c(l,\ id.,\ id.)$。(5.1.16)是 $\{c(l)\,|\,l\,|\,N,\ l\neq 1\}$ 所适合的一个线性方程组。如果我们能证明该线性方程组仅有零解，便可完成定理的证明。

当 N 为素数幂 p^n 时，显然由 $A_1=0,\ A_p=0,\ \cdots,\ A_{p^{n-1}}=0$ 依次得到 $c(p)=0,\ c(p^2)=0,\ \cdots,\ c(p^n)=0$。

对 N 的素因子个数用归纳法：设 $N=p_1^nN_1$，p_1 与 N_1 互素，当 $N=N_1$ 时，(5.1.16)仅有零解。设 $r_1\,|\,N_1$，则

$$A_{p_1^n r_1}-A_{p_1^{n-1}r_1}=p_1^n\sum_{\substack{l|N_1,\,l\neq 1\\ l/t(l)\,|\,r_1}}\ \prod_{p|r_1,\,p\nmid l}(1+p+\cdots+p^{r_1(p)})c(l)=0,$$

$$(r_1\,|\,N_1,\ r_1\neq N_1).$$

由归纳假设可知当 $p_1\nmid l$ 时有 $c(l)=0$。显然，这里的 p_1 可用 N 的任一素因子代替，即若存在 N 的任一素因子 p，使 $p\nmid l$，则 $c(l)=0$。这时我们有

$$A_{r_1}=\sum_{\substack{l|N_1,\,l\neq 1\\ l/t(l)\,|\,r_1}}\ \prod_{p|r_1,\,p\nmid l}(1+p+\cdots+p^{r_1(p)})c(p_1l)=0,$$

$$(r_1\,|\,N_1,\ r_1\neq N_1).$$

同样由归纳假设可知 $c(p_1l)=0\,(l\,|\,N_1)$ 类似地依次利用 $A_{p_1r_1}=0$，$A_{p_1^2r_1}=0,\ \cdots,\ A_{p_1^{n-1}r_1}=0\,(r_1\,|\,N_1,\ r_1\neq N_1)$，可证得 $c(p_1^2l)=0,\ \cdots,\ c(p_1^nl)=0\,(l\,|\,N_1)$。可见线性方程组(5.1.16)仅有零解。

利用定理 5.4、5.5 和5.6，我们可以得到权为整数的尖形式特性的一个刻划。

定理 5.7　设 $f(z)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)\in G(N,\ k,\ \omega)$，则 $f(z)$ 是尖形式的充要条件是对任一模 N 的特征 ψ 及 N 的任一真因子 r，

函数 $L(s, f, \psi, r)$ 在 $s=k$ 处全纯。

证明 由引理 4.35 即可得到定理中所述条件的必要性,现在证明该条件的充分性。因为 $G(N, k, \omega)=\varepsilon(N, k, \omega)\oplus S(N, k, \omega)$, $f(z)$ 可表为

$$f(z)=\sum c(l, \omega_1, \omega_2)E_k(lz, \omega_1, \omega_2)+g(z).$$

上述求号和分别跑遍定理 5.4、5.5 和 5.6 中所给的 $\varepsilon(N, k, \omega)$ 的基, $g(x)$ 属于 $S(N, k, \omega)$。利用 $L(s, f, \psi, r)$ 在 $s=k$ 处的全纯性质及定理 5.4、5.5 和 5.6 的证明方法,可证得所有系数 $c(l, \omega_1, \omega_2)$ 为零,所以 $f(z)$ 是尖形式。

定理 5.7 中的充要条件也可以改述为:对任一模 N 的特征所诱导的原特征 ψ 及 N^2 的任一真因子 r, $L(s, f, \psi, r)$ 在 $s=k$ 处全纯。由引理 4.35 可知该条件的必要性成立,今证其充分性。假设该条件成立,设 χ 为任一模 N 的特征,其诱导的原特征为 ψ, 则

$$\begin{aligned}L(s, f, \chi, r)&=\sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)a(rn)n^{-s}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)\sum_{d\mid(n,N)}\mu(d)a(rn)n^{-s}\\&=\sum_{d\mid N}\psi(d)d^{-s}L(s, f, \psi, rd),\end{aligned}$$

所以 $L(s, f, \chi, r)$ 在 $s=k$ 处全纯, f 是尖形式。

仍利用引理 4.35, 定理 5.7 中的充要条件进一步可改为:对任一原特征 ψ 及任一正整数 r, $L(s, f, \psi, r)$ 在 $s=k$ 处全纯。

§5.2 半整权 Eisenstein 级数的提升

设 $\kappa\geqslant 5$ 为奇数, t 为无平方因子的正奇数,令 $\lambda=(\kappa-1)/2$。若 $f(z)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)e(nz)\in S(N, \kappa/2, \omega)$, 令

$$b(n)=\sum_{d\mid n}\omega(d)\left(\frac{(-1)^{\lambda}t}{d}\right)d^{\lambda-1}a\left(\frac{tn^2}{d^2}\right).$$

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s}=L\left(s-\lambda+1,\ \omega\left(\frac{(-1)^{\lambda}t}{\cdot}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty} a(tn^{2})n^{-s}.$$

令

$$L_t(f)=\sum_{n=1}^{\infty} b(n)e(nz),$$

Shimura[23]证明了 $L_t(f)$ 属于 $S(N_t,\ \kappa-1,\ \omega^2)$，且 $N_t|N^{\infty}$。(当 $\kappa=3$ 时，则有 $L_t(f)\in G(N_t,\ \kappa-1,\ \omega^2)$，但 $L_t(f)$ 不一定是尖形式，我们将在 §5.3 中给出 $L_t(f)$ 是尖形式的一个充要条件。)由 f 到 $L_t(f)$ 称为 f 的Shimura提升。本节讨论半整权的Eisenstein 级数的提升。

在本节中，N 总表示一个无平方因子的正奇数，χ 为模 $4N$ 或 $8N$ 的实偶特征，这时总有 N 的一个因子 l，使

$$\chi(d)=\left(\frac{l}{d}\right),\ \text{或}\ \chi(d)=\left(\frac{2l}{d}\right),\quad (d,\ 2N)=1.$$

将 χ 记为 χ_l 或 χ_{2l}。以 χ_l' 表示一个模 N 的特征，它适合

$$\chi_l'(d)=\left(\frac{d}{l}\right),\quad (d,\ N)=1.$$

在 §4.6 中我们曾给出了 $\varepsilon(2^{\alpha}N,\ \kappa/2,\ \chi)$ $(\alpha=2,\ 3,\ \kappa\geqslant 5)$ 的基，利用这组基，可以定义从 $\varepsilon(2^{\alpha}N,\ \kappa/2,\ \chi)$ 到 $\varepsilon(2N,\kappa-1,id.)$ 的提升。

设整数 D 无奇数平方因子，$D\equiv 1(4)$ 或 $D\equiv 8,\ 12(16)$，我们称 D 为基本判别式。给定任一整数 n，总存在一个基本判别式 D，使 $\left(\frac{n}{\cdot}\right)=\left(\frac{D}{\cdot}\right)$，这时 $n=D(2^r f)^2$，f 为正奇数，r 可为 -1 及一切非负整数，n 的这种表法也是唯一的。

引理 5.8　设 n 为正整数，且 $(-1)^{\lambda}n=D(2^r f)^2$，其中 D 为基本判别式，f 为奇数，r 为整数。则

$$\begin{aligned}&(A_{\kappa}(2,\ n)-\eta_2)\cdot 2^{\kappa-2}(1-(-1)^{\lambda}i)(1-2^{\kappa-2})\\&\times\left(1-2^{-\lambda}\left(\frac{D}{2}\right)\right)(1-2^{1-\kappa})^{-1}\\&=2^{-r(\kappa-2)}\left(1-2^{\lambda-1}\left(\frac{D}{2}\right)\right),\end{aligned}$$

及

$$(A_\kappa(p,n)-\eta_p)\cdot p^{h(p,t)(\kappa-2)}(1-p^{\kappa-2})$$
$$\times\left(1-p^{-\lambda}\left(\frac{D}{p}\right)\right)(1-p^{1-\kappa})^{-1}$$
$$=1-p^{\lambda-1}\left(\frac{D}{p}\right)\quad(p\text{ 为奇素数}).$$

其中所用符号的定义见§1.2及§4.5。

证明 利用引理1.20和1.21, 可直接证明。

定理 5.9 设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)q^n\in\varepsilon(2^\alpha N,\ \kappa/2,\ \chi)$ $(\alpha=2,\ 3;$ $\kappa\geqslant5)$, t 为无平方因子的正奇数. 令

$$L_t(f)=2^{-1}a(0)L_{2N}\left(1-\lambda,\ \chi\left(\frac{(-1)^{\lambda}t}{\cdot}\right)\right)$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d\mid n}\chi(d)\left(\frac{(-1)^{\lambda}t}{d}\right)d^{\lambda-1}a\left(\frac{tn^2}{d^2}\right)e(nz),$$

则 $L_t(f)\in\varepsilon(2N,\ \kappa-1,\ id.)$。

证明 我们只考虑 $\varepsilon(4N,\ \kappa/2,\ \chi_t)$ 上的提升. $\varepsilon(8N,\ \kappa/2,\ \chi_t)$和 $\varepsilon(8N,\ \kappa/2,\ \chi_{2t})$ 上的情况是类似的. 定理4.53给出了 $\varepsilon(4N,\ \kappa/2,\ \chi_t)$ 的一组基底: $g_\kappa(\chi_t,\ 4m,\ 4N)$, $g_\kappa(\chi_t,\ m,\ 4N)$ $(m\mid N)$. 记

$$g_\kappa(\chi_t,\ j,\ 4N)=\sum_{n=0}^{\infty}a(l,\ j,\ 4N,\ n)e(nz),$$

其中 $j=m$ 或 $4m$. 由定理3.40及4.53, 我们有

$$L_{2N}\left(s-\lambda-1,\ \chi_t\left(\frac{(-1)^{\lambda}t}{\cdot}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}a(l,\ 4m,\ 4N,\ tn^2)n^{-s}$$
$$=a(l,\ 4m,\ 4N,\ t)\prod_{p\mid 2m}(1-p^{-s})^{-1}\prod_{p\mid N/m}(1-p^{\kappa-2-s})^{-1}$$
$$\times\prod_{p\nmid 2N}(1-(1+p^{\kappa-2})p^{-s}+p^{\kappa-2-2s})^{-1}$$
$$=a(l,\ 4m,\ 4N,\ t)\prod_{p\mid 2m}(1-p^{\kappa-2-s})$$
$$\times\prod_{p\mid N/m}(1-p^{-s})\zeta(s)\zeta(s-\kappa+2)$$
$$=a(l,\ 4m,\ 4N,\ t)\sum_{d\mid 2N}\mu(d)(d,\ 2m)^{\kappa-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{\kappa-2}(n)(dn)^{-s},$$

这里$\sigma_{\kappa-2}(n)=\sum\limits_{d\mid n}d^{\kappa-2}$。当 $\kappa\geqslant 5$ 为奇数时，由(5.1.3)式，可知

$$E_{\kappa-1}(z,id.,1)=1+\frac{(2\pi i)^{\kappa-1}}{(\kappa-2)!\zeta(\kappa-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{\kappa-2}(n)e(nz)$$
$$=1+2\zeta(2-\kappa)^{-1}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{\kappa-2}(n)e(nz)$$

属于 $\varepsilon(1,\ \kappa-1,\ id.)$。令 $G_{\kappa-1}(z)=2^{-1}\zeta(2-\kappa)E_{\kappa-1}(z,id.,1)$，从而

$$a(l,\ 4m,\ 4N,\ t)\sum_{d\mid 2N}\mu(d)(d,\ 2m)^{\kappa-2}G_{\kappa-1}(dz)$$
$$=2^{-1}\zeta(2-\kappa)a(l,\ 4m,\ 4N,\ t)\sum_{d\mid 2N}\mu(d)(d,\ 2m)^{\kappa-2}$$
$$+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d\mid n}\chi_l(d)\left(\frac{(-1)^{\lambda}t}{d}\right)d^{\lambda-1}a(l,\ 4m,\ 4N,\ tn^2/d^2)e(nz)\tag{5.2.1}$$

属于 $\varepsilon(2N,\ \kappa-1,\ id.)$。当 $m\neq N$ 时，

$$\sum_{d\mid 2N}\mu(d)(d,\ 2m)^{\kappa-2}=\prod_{p\mid 2m}(1-p^{\kappa-2})\prod_{p\mid N/m}(1-1)=0,$$

故仅当 $m=N$ 时，(5.2.1)中有非零常数项，记它为 $c(t,\ l,\ 4N)$。我们有

$$c(t,\ l,\ 4N)=2^{-1}L_{2N}(2-\kappa,\ id.)a(l,\ 4N,\ 4N,\ t)$$
$$=\frac{2^{-1}(-2\pi i)^{\kappa/2}L_{2N}(2-\kappa,id.)L_{4N}\left(\lambda,\left(\frac{(-1)^{\lambda}lt}{\cdot}\right)\right)}{\Gamma(\kappa/2)L_{4N}(2\lambda,\ id.)}$$
$$\times\prod_{p\mid 2N}(A(p,\ lt)-\eta_p)(lt)^{\kappa/2-1}.\tag{5.2.2}$$

(由于 t 无平方因子，故 $\beta_N(t,\ 0,\ \chi_N,\ 4N)=1$。)令 $(-1)^{\lambda}lt=D(2^r f)^2$，其中 D 为基本判别式，f 为奇数，r 为整数，D 即为特征 $\left(\frac{(-1)^{\lambda}lt}{\cdot}\right)$ 的导子。利用 L 函数的函数方程，我们有

$$\frac{(-2\pi i)^{\kappa/2}L_{2N}\left(\lambda,\left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)}{\Gamma(\kappa/2)L_{2N}(2\lambda,\ id.)}=\frac{L\left(1-\lambda,\left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)}{\zeta(2-\kappa)}$$
$$\times 2^{\kappa-2}(1-(-1)^{\lambda}i)|D|^{1-\kappa/2}\prod_{p\mid 2N}\frac{1-p^{-\lambda}\left(\frac{D}{p}\right)}{1-p^{1-\kappa}},\tag{5.2.3}$$

将它代入(5.2.2)式，并利用引理5.8，得到

$$c(l,\ l,\ 4N)=2^{-1}L_{2N}\left(1-\lambda,\ \chi_l\left(\frac{(-1)^{\lambda}t}{\cdot}\right)\right).$$

以上我们亦即证明了

$$\begin{aligned}&L_t(g_\kappa(\chi_l,\ 4m,\ 4N))\\&=a(l,\ 4m,\ 4N,\ t)\sum_{d|2N}\mu(d)(d,\ 2m)^{\kappa-2}G_{\kappa-1}(dz)\end{aligned}$$

属于$\varepsilon(2N,\ \kappa-1,\ id.)$。

对于函数$g_\kappa(\chi_l,\ m,\ 4N)$，类似地有

$$L_{2N}\left(s-\lambda+1,\ \chi_l\left(\frac{(-1)^{\lambda}t}{\cdot}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}a(l,\ m,\ 4N,\ tn^2)n^{-s}$$

$$=a(l,\ m,\ 4N,\ t)\sum_{d|2N}\mu(d)(d,\ m)^{\kappa-2}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{\kappa-2}(n)(dn)^{-s},$$

从而

$$\begin{aligned}&L_t(g_\kappa(\chi_l,\ m,\ 4N))\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d|n}\chi_l(d)\left(\frac{(-1)^{\lambda}t}{d}\right)d^{\lambda-1}a(l,\ m,\ 4N,\ tn^2/d^2)e(nz)\\&=a(l,\ m,\ 4N,\ t)\sum_{d|2N}\mu(d)(d,\ m)^{\kappa-2}G_{\kappa-1}(dz)\end{aligned}$$

属于$\varepsilon(2N,\kappa-1,\ id.)$，这时$\sum\limits_{d|2m}\mu(d)(d,\ m)^{\kappa-2}$总是零。到此，我们证明了在$\varepsilon(4N,\ \kappa/2,\ \chi_l)$上定理5.11是成立的。

在一般情况下，定理5.11中所定义的提升$L_t(f)$不是一对一的映射，但在$\varepsilon(4N,\ \kappa/2,\ \chi_l)$中存在一个子空间，使$L_t(f)$在其上是一对一的映射。

设m为N的因子，定义函数

$$\begin{aligned}H_\kappa(\chi_l,\ m,\ 4N)(z)&=g_\kappa(\chi_l,\ 4m,\ 4N)(z)\\&\quad+(2^{-\kappa}(1+(-1)^{\lambda}i)+\mu_2)g_\kappa(\chi_l,\ m,\ 4N)(z).\end{aligned}$$

它们所构成的子空间记为$\varepsilon^+(4N,\ \kappa/2,\ \chi_l)$。若以$\nu$表示$N$的素因子个数，则$\varepsilon^+(4N,\ \kappa/2,\ \chi_l)$的维数即为$2^\nu$。现在我们来计算$H_\kappa(\chi_l,\ m,\ 4N)$的Fourier展开式。首先设$m\neq N$。我们有

$$H_\kappa(\chi_l,\ m,\ 4N)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_\kappa^l(ln,\ 4N)(A(2,\ ln)+2^{-\kappa}(1+(-1)^{\lambda}i))$$

$$\times\prod_{p|m}(A_\kappa(p,\ ln)-\eta_p)(ln)^{\kappa/2-1}e(nz),\qquad(5.2.4)$$

其中

$$\lambda'_\kappa(ln,\ 4N)=\frac{(-2\pi i)^{\kappa/2}L_{2N}\left(\lambda,\ \chi_l\left(\frac{(-1)^\lambda n}{\cdot}\right)\right)}{\Gamma(\kappa/2)L_{2N}(2\lambda,\ id.)}$$
$$\times\beta_\kappa(ln,\ 0,\ \chi_N,\ 4N).\qquad(5.2.5)$$

记

$$I=A(2,\ ln)+2^{-\kappa}(1+(-1)^\lambda i).$$

由引理1.20，当$(-1)^\lambda ln\equiv2,\ 3(4)$时，我们有$I=0$。当$(-1)^\lambda ln\equiv0,\ 1(4)$时，令$\varepsilon=(-1)^{(l-1)/2}$，因为$\varepsilon\equiv l(4)$，所以$(-1)^\lambda\varepsilon n\equiv0,\ 1(4)$。设$(-1)^\lambda\varepsilon n=D_nf_n^2$及$(-1)^\lambda ln=D'_n(f'_n)^2$，其中$D_n$与$D'_n$为基本判别式，$f_n$和$f'_n$为正整数。比较两式可见$D'_n=\varepsilon lD_n/(l,\ D_n)^2$，$f'_n=(l,\ D_n)f_n$。由引理1.20，当$(-1)^\lambda ln\equiv1(4)$时，我们有

$$I=2^{-\kappa+1}(1+(-1)^\lambda i)\left(1+2^{-\lambda}\left(\frac{D'_n}{2}\right)\right),\qquad(5.2.6)$$

当$(-1)^\lambda ln\equiv0\ (4)$，$2\nmid h(2,\ ln)$时，则有$8|D'_n$，$(h(2,\ ln)-1)/2=h(2,\ f'_n)+1$，故

$$I=2^{-\kappa+1}(1+(-1)^\lambda i)(1-2^{1-\kappa})\sum_{t=0}^{h(2,f'_n)}2^{(2-\kappa)t}.\qquad(5.2.7)$$

当$(-1)^\lambda ln\equiv0\ (4)$，$2|h(2,\ ln)$时，若$2\nmid D'_n$，则$(-1)^\lambda ln/2^{h(2,ln)}\equiv1\ (4)$，故

$$I=2^{-\kappa+1}(1+(-1)^\lambda i)\left(1+2^{-\lambda}\left(\frac{D'_n}{2}\right)\right)$$
$$\times\left(\sum_{t=0}^{h(2,f'_n)}2^{(2-\kappa)t}-2^{-\lambda}\left(\frac{D'_n}{2}\right)\sum_{t=0}^{h(2,f'_n)-1}2^{(2-\kappa)t}\right),\qquad(5.2.8)$$

若$2|D'_n$，则$4\|D'_n$，$(-1)^\lambda ln/2^{h(2,ln)}\equiv-1\ (4)$，故

$$I=2^{-\kappa+1}(1+(-1)^\lambda i)(1-2^{1-\kappa})\sum_{t=0}^{h(2,f'_n)}2^{(2-\kappa)t}.\qquad(5.2.9)$$

当$(-1)^\lambda ln\equiv0,\ 1\ (4)$时，由引理5.8有

$$\prod_{p|m}(A(p,\ ln)-\eta_p)(ln)^{\kappa/2-1}$$
$$=|D'_n|^{\kappa/2-1}\prod_{p|m}\left(1-p^{\lambda-1}\left(\frac{D'_n}{p}\right)\right)(1-p^{\kappa-2})^{-1}\left(1-p^{-\lambda}\left(\frac{D'_n}{p}\right)\right)^{-1}$$

$$\times(1-p^{1-\kappa})\prod_{p\nmid m}p^{(\kappa-2)h(p,f'_n)}. \tag{5.2.10}$$

易见

$$\prod_{p\nmid m}p^{(\kappa-2)h(p,f_n')}=\left(\frac{(l,\ D_n)}{(l,\ D_n,\ m)}\right)^{\kappa-2}\prod_{p\nmid m}p^{(\kappa-2)h(p,f_n)}.$$

由定义，我们有

$$\begin{aligned}&\beta_\kappa(ln,\ 0,\ \chi_N,\ 4N)\\&=\prod_{p\mid D_n',p\nmid 2N}\sum_{t=0}^{h(p,f'_n)}p^{(2-\kappa)t}\\&\quad\times\prod_{p\nmid 2ND'_n}\left(\sum_{t=0}^{h(p,f'_n)}p^{(2-\kappa)t}-p^{-\lambda}\left(\frac{D'_n}{p}\right)\sum_{t=0}^{h(p,f'_n)-1}p^{(2-\kappa)t}\right)\\&=\prod_{p\mid D_n,p\nmid 2N}\sum_{t=0}^{h(p,f_n)}p^{(2-\kappa)t}\prod_{p\nmid 2ND_n}\left(\sum_{t=0}^{h(p,f_n)}p^{(2-\kappa)t}\right.\\&\quad\left.-p^{-\lambda}\chi_l'(p)\left(\frac{D_n}{p}\right)\sum_{t=0}^{h(p,f_n)-1}p^{(2-\kappa)t}\right).\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

这里我们利用了 $h(p,\ f_n)=h(p,\ f'_n)(p\nmid N)$。在(5.2.3)式中以 D'_n 代替 D，将(5.2.3)、(5.2.5)～(5.2.11)代入(5.2.4)式，得到 $\left(注意\left(\frac{D'_n}{\cdot}\right)=\chi_l'\left(\frac{D_n}{\cdot}\right)\right)$：

$$\begin{aligned}H_\kappa(\chi_l,\ m,\ 4N)=&\sum_{\substack{n>0\\ \varepsilon(-1)^\lambda n\equiv 0,1\ (4)}}\frac{L_m\left(1-\lambda,\left(\frac{D'_n}{\cdot}\right)\right)}{L_m(2-\kappa,\ id.)}\\&\times\prod_{p\mid N/m}\frac{1-p^{-\lambda}\left(\frac{D'_n}{p}\right)}{1-p^{1-\kappa}}\left(\frac{(l,\ D_n)}{(l,\ D_n,\ m)}\right)^{\kappa-2}\\&\times\sum_{a\mid f_n}\mu(a)\chi_l'(a)\left(\frac{D_n}{a}\right)a^{\lambda-1}\\&\times\sum_{\substack{b\mid f_n/a\\(b,m)=1,(f_n/ab,N/m)=1}}b^{\kappa-2}e(nz).\end{aligned}$$

这里我们利用了

$$\begin{aligned}&\prod_{p\nmid m}p^{(\kappa-2)h(p,f_n)}\prod_{p\mid D_n,p\nmid N}\sum_{t=0}^{h(p,f_n)}p^{(2-\kappa)t}\prod_{p\nmid ND_n}\\&\times\left(\sum_{t=0}^{h(p,f_n)}p^{(2-\kappa)t}-p^{-\lambda}\chi_l'(p)\left(\frac{D_n}{p}\right)\sum_{t=0}^{h(p,f_n)-1}p^{(2-\kappa)t}\right)\end{aligned}$$

$$= \prod_{p \mid N/m} p^{(\kappa-2)h(p,f_n)} \prod_{p \mid D_n, p \nmid N} \sum_{t=0}^{h(p,f_n)} p^{(\kappa-2)t}$$

$$\prod_{p \nmid ND_n} \left(\sum_{t=0}^{h(p,f_n)} p^{(\kappa-2)t} - p^{\lambda-1}\chi_l'(p)\left(\frac{D_n}{p}\right) \sum_{t=0}^{h(p,f_n)-1} p^{(\kappa-2)t} \right)$$

$$= \sum_{a \mid f_n} \mu(a)\chi_l(a)\left(\frac{D_n}{a}\right)a^{\lambda-1} \sum_{\substack{b \mid f_n/a \\ (b,m)=1,(f_n/ab,N/m)=1}} b^{\kappa-2}.$$

类似地可得到

$$H_\kappa(\chi_l, N, 4N) = 1 + \sum_{\substack{n>0 \\ \varepsilon(-1)^\lambda n \equiv 0,1\ (4)}} \frac{L_N\left(1-\lambda, \left(\frac{D_n'}{\cdot}\right)\right)}{L_N(2-\kappa, id.)}$$

$$\times \sum_{a \mid f_n} \mu(a)\chi_l'(a)\left(\frac{D_n}{a}\right)a^{\lambda-1} \sum_{b \mid f_n/a, (b,N)=1} b^{\kappa-2}e(nz).$$

设 $f(z) = \sum a(n)e(nz) \in \varepsilon^+(4N, \kappa/2, \chi_l)$，$p$ 为素数，定义 $\varepsilon^+(4N, \kappa/2, \chi_l)$上的 Hecke 算子 $T^+(p^2)$：

$$f \mid T^+(p^2) = \sum_{\substack{n>0 \\ \varepsilon(-1)^\lambda n \equiv 0,1\ (4)}} \left\{ a(p^2n) + \chi_l'(p)\left(\frac{(-1)^\lambda \varepsilon n}{p}\right)p^{\lambda-1}a(n) \right.$$

$$\left. + \chi_l'(p^2)p^{\kappa-2}a(n/p^2) \right\} e(nz),$$

当 $p \neq 2$ 时，它是 $G(4N, \kappa/2, \chi_l)$ 上的Hecke算子 $T(p^2)$ 在 $\varepsilon^+(4N, \kappa/2, \chi_l)$上的限制。通过直接验算可知 $H_\kappa(\chi_l, m, 4N)$ 是$T^+(p^2)$ $(p \neq 2)$的本征函数，且

$$H_\kappa(\chi_l, m, 4N) \mid T^+(p^2) = H_\kappa(\chi_l, m, 4N), \ (p \mid m),$$

$$H_\kappa(\chi_l, m, 4N) \mid T^+(p^2) = p^{\kappa-2}H_\kappa(\chi_l, m, 4N), \quad (p \mid N/m),$$

$$H_\kappa(\chi_l, m, 4N) \mid T^+(p^2) = (1 + p^{\kappa-2})H_\kappa(\chi_l, m, 4N), \quad (p \nmid 2N).$$

(利用定理 4.53)。

命题 5.10　设N为无平方因子正整数（这里N可以为偶数），有 ν 个不同的素因子，$k \geqslant 4$ 为偶数。令

$$f_k(N)(z) = L_N(1-k, id.)/2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{\substack{d \mid n \\ (d,N)=1}} d^{k-1}e(nz)$$

及

$$f_k(m)(z)=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{d\mid n\\(d,m)=1,(n/d,N/m)=1}}d^{k-1}e(nz),\quad (m\mid N,\ m\neq N).$$

上述 2^ν 个函数组成 $\varepsilon(N,\ k,\ id.)$ 的一组基。

证明 当 $\omega=id.$ 时，适合(5.1.13)的三元组一定形如 $(l,id.,\ id.)$ $(l\mid N)$。定理 5.4 给出了 $\varepsilon(N,\ k,\ id.)$ 如下的一组基：

$$E_k(lz,\ id.,\ id.)=\zeta(1-k)/2+\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d\mid n}d^{k-1}e(lnz),\quad (l\mid N).$$

令 $q_k(N)=E_k(Nz,\ id.,\ id.)$ 及

$$q_k(m)=\sum_{l\mid N/m}\mu(l)E_k(mlz,\ id.,\ id.)\quad (m\mid N,\ m\neq N).$$

函数集 $\{q_k(m)\mid m\mid N\}$ 是 $\varepsilon(N,\ k,\ id.)$ 的基。易见

$$\begin{aligned}q_k(m)&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{l\mid N/m}\mu(l)\sum_{l\mid n}\sum_{d\mid n/l}d^{k-1}e(mnz)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{d\mid n}d^{k-1}\sum_{l\mid (n/d,N/m)}\mu(l)e(mnz)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{\substack{d\mid n\\(n/d,N/m)=1}}d^{k-1}e(mnz).\end{aligned}\tag{5.2.12}$$

设 $m\mid N,\ m\neq N$，令

$$f_k'(m)=\sum_{s\mid m}\prod_{p\mid s}(1-p^{k-1})q_k(s)=\sum_{n=1}^{\infty}a(n)e(nz),$$

给定 n，设 $(n,\ m)=m_1,\ m=m_1m_2,\ n=n'\prod_{p\mid m_1}p^{h(p,n)}$，其中 n' 与 m 互素。可见

$$\begin{aligned}a(n)&=\sum_{s\mid m_1}\prod_{p\mid s}(1-p^{k-1})\sum_{\substack{d\mid n/s\\(n/sd,N/s)=1}}d^{k-1}\\&=\sum_{s\mid m_1}\prod_{p\mid s}(1-p^{k-1})\prod_{p\mid s}\left(\sum_{t=0}^{h(p,n)-1}p^{(k-1)t}\right)\\&\quad\times\prod_{p\mid m_1/s}p^{(k-1)h(p,n)}\sum_{\substack{d\mid n\\(d,m)=1,(n/d,N/m)=1}}d^{k-1}\\&=\sum_{s\mid m_1}\prod_{p\mid s}(1-p^{(k-1)h(p,n)})\prod_{p\mid m_1/s}p^{(k-1)h(p,n)}\\&\quad\times\sum_{\substack{d\mid n\\(d,m)=1,(n/d,N/m)=1}}d^{k-1}\end{aligned}$$

$$= \sum_{\substack{d|n \\ (d,m)=1,(n/d,N/m)=1}} d^{k-1}.$$

所以 $f'_k(m)=f_k(m)$ $(m|N,\ m\neq N)$。类似地可以证明

$$f_k(N)=\sum_{s|N}\prod_{p|s}(1-p^{k-1})g_k(s).$$

因而 $\{f_k(m)\,|\,m\,|\,N\}$ 是 $\varepsilon(N,\ k,\ id.)$ 的基。

以 $T(p)$ 表示 $\varepsilon(N,\ k,\ id.)$ 上的 Hecke 算子，我们有

$$f_k(m)\,|\,T(p)=f_k(m),\quad 若\ p\,|\,m,$$
$$f_k(m)\,|\,T(p)=p^{k-1}f_k(m),\quad 若\ p\,|\,N/m,$$
$$f_k(m)\,|\,T(p)=(1+p^{k-1})f_k(m),\quad 若\ p\nmid N.$$

设 t 为无平方因子的正整数，我们有

$$\chi_t\left(\frac{(-1)^\lambda t}{\cdot}\right)=\chi'_t\left(\frac{\varepsilon(-1)^\lambda t}{\cdot}\right)=\chi'_t\left(\frac{D}{\cdot}\right),$$

其中

$$D=\begin{cases}\varepsilon(-1)^\lambda t, & 若\ \varepsilon(-1)^\lambda t\equiv 1\ (4);\\ 4\varepsilon(-1)^\lambda t, & 若\ \varepsilon(-1)^\lambda t\equiv 2,\ 3\ (4).\end{cases}$$

D 是一个基本判别式，且 $\varepsilon(-1)^\lambda D>0$。

考虑定理 5.9 中所定义的 $\varepsilon(4N,\ \kappa/2,\ \chi_t)$ 上的提升 $L_t(f)$ 在 $\varepsilon^+(4N,\ \kappa/2,\ \chi_t)$ 上的作用，我们有下述定理：

定理 5.11 设 D 是一个基本判别式，且 $\varepsilon(-1)^\lambda D>0$ $(\varepsilon=(-1)^{(t-1)/2})$。设 $f(z)=\sum_{n\geq 0}a(n)e(nz)\in\varepsilon^+(4N,\ \kappa/2,\ \chi_t)$，定义 $\varepsilon^+(4N,\ \kappa/2,\ \chi_t)$ 上的提升

$$L_D(f)=\frac{a(0)}{2}L_N\left(1-\lambda,\ \chi'_t\left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)$$
$$+\sum_{n\geq 1}\left\{\sum_{d|n}\chi'_t(d)\left(\frac{D}{d}\right)d^{\lambda-1}a\left(|D|\frac{n^2}{d^2}\right)\right\}e(nz),$$

则 L_D 是 $\varepsilon^+(4N,\ \kappa/2,\ \chi_t)$ 到 $\varepsilon(N,\ \kappa-1,\ id.)$ 的一一映射。

证明 仅需考虑 L_D 在 $H_\kappa(\chi_t,\ m,\ 4N)$ 上的作用。由于

$$\sum_{d|n}\chi'_t(d)\left(\frac{D}{d}\right)d^{\lambda-1}\sum_{a|n/d}\mu(a)\chi'_t(a)\left(\frac{D}{a}\right)a^{\lambda-1}\sum_{\substack{b|n/ad \\ (b,m)=1,(n/(abd),N/m)=1}}b^{\kappa-2}$$

$$=\sum_{s|n}\chi'_t(s)\left(\frac{D}{s}\right)s^{\lambda-1}\sum_{\substack{b|n/s \\ (b,m)=1,(n/(sb),N/m)=1}}b^{\kappa-2}\sum_{a|s}\mu(a)$$

$$=\sum_{\substack{b\mid a\\ (b,m)=1,(a/b,N/m)=1}} b^{\kappa-2}.$$

所以

$$L_D(H_\kappa(\chi_l,\ N,\ 4N))=\frac{L_N\left(1-\lambda,\ \chi_l'\left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)}{L_N(2-\kappa,\ id.)}f_{\kappa-1}(N),$$

而当 $m\neq N$ 时,

$$L_D(H_\kappa(\chi_l,\ m,\ 4N))=\frac{L_m\left(1-\lambda,\ \chi_l'\left(\frac{D}{\cdot}\right)\right)}{L_m(2-\kappa,\ id)}$$

$$\times\prod_{p\mid N/m}\frac{1-\chi_l'(p)\left(\frac{D}{p}\right)p^{-\lambda}}{1-p^{1-\kappa}}\left(\frac{(l,\ D)}{(l,\ D,\ m)}\right)^{\kappa-2}f_{\kappa-1}(m)$$

利用命题 5.10 即证得本定理.

关于 $S(4N,\ \kappa/2,\ \chi_l)$中类似的子空间 $S^+(4N,\ \kappa/2,\ \chi_l)$的讨论,请见 W. Kohnen[8].

§5.3 权为 3/2 的尖形式的提升

设$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz)\in S(N,\ 3/2,\ \omega)$, $4\mid N$, $\omega(-1)=1$, t 为无平方因子的正整数. 以 $L_t(f)$表示f 的 Shimura 提升, 则 $L_t(f)\in G(N_t,\ 2,\ \omega^2)$, 且 $N_t\mid N^\infty$. 本节将给出 $L_t(f)\in S(N_t,\ 2,\ \omega^2)$的一个充要条件. 由 Shimura 提升的定义, $L_t(f)$ 的 Zeta 函数为

$$L(s,L_t(f))=L\left(s,\ \omega\left(\frac{-t}{\cdot}\right)\right)\sum^{\infty}a(tm^2)m^{-s}. \qquad (5.3.1)$$

命题 5.12 设 ψ 为模 r 的本原奇特征, 令

$$h(z,\ \psi)=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(m)me(m^2z),\quad (z\in H).$$

则 $h\in S\left(4r^2,\ 3/2,\ \varphi\left(\frac{-1}{\cdot}\right)\right)$.

证明 令

$$\theta(z, k, r)=\sum_{m\equiv k(r)} m e(m^2 z/2r),$$

其中 k 为一整数。则

$$h(z, \psi)=\sum_{k=1}^{r}\psi(k)\theta(2rz, k, r).$$

设 t 为正实数，令

$$\varphi(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}(x+n)e^{-\pi t(x+n)^2},$$

计算 $\varphi(x)$ 的 Fourier 展开式，得到

$$\varphi(x)=-i\cdot t^{-3/2}\sum_{h=1}^{r}e^{2\pi i h x}\sum_{n\equiv h(r)} n e^{-\pi n^2/t}.$$

易见

$$\theta(it, k, r)=r\sum_{n=-\infty}^{\infty}(k/r+n)e^{-\pi t r(k/r+n)^2}$$

$$=-i t^{-3/2} r^{-1/2}\sum_{h=1}^{r} e^{2\pi i h k/r}\sum_{n\equiv h(r)} n e^{-\pi n^2/tr},$$

因而我们有

$$\theta(-1/z, k, r)=(-i)(-iz)^{3/2}r^{-1/2}\sum_{h=1}^{r} e^{2\pi i h k/r}\theta(z, h, r). \tag{5.3.2}$$

利用(5.3.2)式及命题1.3的类似证法，可以证明当 $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in\Gamma_0(4r^2)$ 时，

$$h(\gamma(z), \psi)=\psi(d)\left(\frac{-1}{d}\right)j(\gamma, z)^3 h(z, \psi).$$

今设 $\gamma=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})$, $c>0$, 利用(5.3.2)式我们有

$$h(\gamma(z), \psi)=\sum_{k=1}^{rc}\psi(k)e(k^2 a/c)$$

$$\times\sum_{m\equiv k(rc)} m e(-2rm^2/(2rc(cz+d)))$$

$$=(-i)(cr)^{-1/2}\left(\frac{cz+d}{2ri}\right)^{3/2}\sum_{k=1}^{rc}\psi(k)e(k^2 a/c)$$

$$\times\sum_{h=1}^{rc} e^{2\pi i hk/rc}\theta\left(\frac{cz+d}{2r}, h, rc\right).$$

因而

$$\lim_{z\to\infty}(cz+d)^{-3/2}h(\gamma(z),\ \psi)=0,$$

可见 $h(z,\ \psi)\in S\left(4r^2, 3/2, \psi\left(\frac{-1}{\cdot}\right)\right)$.

由(5.3.1)式可见

$$L(s,\ L_1(h(z,\psi)))=L(s,\ \psi)L(s-1,\ \psi).$$

所以 $L_1(h(z,\ \psi))$ 是 Eisenstein 级数，不是尖形式.

在讨论本节的主要结果之前，我们引入下述两个命题：

命题 5.13 设 α 为非负整数，A 为正整数，φ 为模 A 的原特征. 定义

$$H_\alpha(s,\ z,\ \varphi)=\pi^{-s}\Gamma(s)y^s{\sum_{m,n}}'\varphi(n)(mAz-n)^\alpha|mAz+n|^{-2s},$$

$$(z\in H).$$

这里的求和号跑遍所有 $(m,\ n)\neq(0,\ 0)$ 的整数对. 假设 $\alpha>0$ 或 $A>1$，则上述无穷级数当 $Re(s)>1+\alpha/2$ 时绝对收敛，$H_\alpha(s,\ z,\ \varphi)$ 可以延拓为 s 平面上的整函数，且适合函数方程

$$H_\alpha(\alpha+1-s,\ z,\ \varphi)=(-1)^\alpha g(\varphi)A^{3s-\alpha-2}z^\alpha H_\alpha(s,\ -1/Az,\ \bar\varphi),$$

其中 $g(\varphi)=\sum_{k=1}^{A}\varphi(k)e(k/A)$.

证明 我们有

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t|uz+v|^2/y)e(ur+vs)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t[(ux+v)^2+u^2y^2]/y)e(ur+vs)dudv$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi t(v^2+u^2y^2)/y)e(u(r-xs)+vs)dudv$$

$$=(ty)^{-1/2}\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi u^2)e(u(r-xs)/(ty)^{1/2})du\cdot(ty^{-1})^{-1/2}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\exp(-\pi v^2)e(vsy^{1/2}/t^{1/2})dv$$

$$=t^{-1}e^{-\pi[(r-xs)^2/(ty)+s^2y/t]}=t^{-1}e^{-\pi|r-sz|^2/ty}. \tag{5.3.3}$$

由于

$$\left(z\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial s}\right)e(ur+vs)=2\pi i(uz+v),$$

$$\left(z\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial s}\right)\exp(-\pi|r-sz|^2/yt)$$
$$=-2\pi it^{-1}(r-sz)\exp(-\pi|r-sz|^2/yt),$$

将微分算子 $z\dfrac{\partial}{\partial r}+\dfrac{\partial}{\partial s}$ 在(5.3.3)式两端作用 α 次，得到

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(uz+v)^{\alpha}\exp(-\pi t|uz+v|^2/y)e(ur+vs)dudv$$
$$=(-1)^{\alpha}t^{-\alpha-1}(r-sz)^{\alpha}\exp(-\pi|r-sz|^2/yt). \qquad (5.3.4)$$

令

$$\zeta(t,\ z,\ u,\ v)$$
$$=\sum_{m,n}((m+u)z+n+v)^{\alpha}\exp(-\pi t|(m+u)z+n+v|^2/y)$$
$$=\sum_{m,n}c(m,\ n)e(mu+nv).$$

利用(5.3.4)式可得

$$c(-m,\ -n)=\int_0^1\int_0^1\sum_{m',n'}((m'+u)z+n'+v)^{\alpha}$$
$$\times\exp(-\pi t|(m'+u)z+n'+v|^2/y)e(mu+nv)dudv$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}(uz+v)^{\alpha}\exp(-\pi t|uz+v|^2/y)e(mu+nv)dudv$$
$$=(-1)^{\alpha}t^{-\alpha-1}(m-nz)^{\alpha}\exp(-\pi|m-nz|^2/yt),$$

故

$$\zeta(t,\ z,\ u,\ v)=(-1)^{\alpha}t^{-\alpha-1}\sum_{m,n}(mz+n)^{\alpha}$$
$$\times\exp(-\pi|mz+n|^2/yt)e(mv-nu). \qquad (5.3.5)$$

设 p 与 q 为整数，定义

$$\xi(t,\ z,\ p,\ q)=\sum_{(m,n)\equiv(p,q)(A)}(mz+n)^{\alpha}\exp(-\pi t|mz+n|^2/A^2y)$$

及

$$\eta(t,\ z,\ p,\ q)=\sum_{k}{}'\varphi(k)\xi(t,\ z,\ kp,\ kq). \qquad (5.3.6)$$

当 $A>1$ 时，假设 $(p,\ q)\not\equiv(0,\ 0)\ (A)$。利用(5.3.5)式，我们有

$$\xi(t,\ z,\ p,\ q)=A^{\alpha}\zeta(t,\ z,\ p/A,\ q/A)$$

$$= (-A)^{\alpha} t^{-\alpha-1} \sum_{m,n}{}' e((qm-pn)/A)(mz+n)^{\alpha} \exp(-\pi|mz+n|^2/yt)$$

$$= (-A)^{\alpha} t^{-\alpha-1} \sum_{(a,b) \bmod A} e((qa-pb)/A) \xi(A^2 t^{-1}, z, a, b)$$

以及

$$\eta(t^{-1}, z, p, q) = \sum_{k=1}^{A} \varphi(k) \xi(t^{-1}, z, kp, kq)$$

$$= (-A)^{\alpha} t^{\alpha+1} \sum_{k=1}^{A} \varphi(k) \sum_{(a,b) \bmod A} e(k(qa-pb)/A) \xi(A^2 t, z, a, b)$$

$$= (-A)^{\alpha} t^{\alpha+1} g(\varphi) \sum_{(a,b) \bmod A} \overline{\varphi}(qa-pb) \xi(A^2 t, z, a, b). \tag{5.3.7}$$

当 $\alpha>0$ 或 $A>1$ 时，(5.3.7) 式两端都不出现 $m=n=0$ 的项，因此，由(5.3.6)及(5.3.7)式，我们有

$$|\eta(t, z, p, q)| \leqslant \begin{cases} Me^{-ct}, & 若 t>1; \\ M't^{-\alpha-1}e^{-c'/t}, & 若 t<1. \end{cases} \tag{5.3.8}$$

M、M'、c 和 c' 为仅依赖于 z、p、q 的正常数。下述无穷积分可以逐项求积：

$$\int_0^{\infty} \eta(t, z, p, q) t^{s-1} dt$$

$$= \sum_{k=1}^{A} \varphi(k) \sum_{(m,n) \equiv k(p,q)(A)} (mz+n)^{\alpha}$$

$$\times \int_0^{\infty} \exp(-\pi t|mz+n|^2/A^2 y) t^{s-1} dt$$

$$= A^{2s} \pi^{-s} y^s \Gamma(s) \sum_{k=1}^{A} \varphi(k) \sum_{(m,n) \equiv (p,q)(A)} (mz+n)^{\alpha} |mz+n|^{-2s}. \tag{5.3.9}$$

上式右端的无穷级数当 $Re(s)>1+\alpha/2$ 时绝对收敛，将左端的积分分为 $\int_0^1$ 和 $\int_1^{\infty}$ 两部分，利用(5.3.8)式，可知这两个积分都是 s 平面上的整函数，它使(5.3.9)式右端的无穷级数延拓为 s 平面上的整函数。

我们有

$$A^{2s} H_{\alpha}(s, z, \varphi) = \int_0^{\infty} \eta(t, z, 0, 1) t^{s-1} dt. \tag{5.3.10}$$

所以当 $\alpha>0$ 或 $A>1$ 时，$H_\alpha(s, z, \varphi)$ 可以延拓为 s 平面上的整函数。在(5.3.10)式中以 $\alpha+1-s$ 代替 s，得到

$$
\begin{aligned}
&A^{2(\alpha+1-s)}H_\alpha(\alpha+1-s, z, \varphi)\\
&=\int_0^\infty \eta(t, z, 0, 1)t^{\alpha-s}dt=\int_0^\infty \eta(t^{-1}, z, 0, 1)t^{s-\alpha-2}dt\\
&=(-A)^\alpha g(\varphi)\sum_{(a,b)\bmod A}\overline{\varphi}(a)\int_0^\infty \xi(A^2t, z, a, b)t^{s-1}dt\\
&=(-A)^\alpha g(\varphi)y^s\pi^{-s}\Gamma(s)\sum_{m,n}{}'\overline{\varphi}(m)(mz+n)^\alpha|mz+n|^{-2s}\\
&=(-1)^\alpha g(\varphi)A^{\alpha+s}z^\alpha H_\alpha(s, -1/Az, \overline{\varphi}),
\end{aligned}
$$

从而得到 $H_\alpha(s, z, \varphi)$ 适合的函数方程。

命题 5.14　设 ω 为模 A 的特征(不一定是原特征)，令

$$G(s)=\Gamma(s)\sum_{m,n}{}'\omega(n)|mAz+n|^{-2s},$$

当 ω 为非平凡特征时，$G(s)$ 可以延拓为 s 平面上的整函数；当 $A=1$ 时，$G(s)$ 可延拓为 s 平面上的亚纯函数，仅以 $s=0$ 和 $s=1$ 为一阶极点，留数分别为 -1 和 π/y；当 $A>1$，ω 为平凡特征时，$G(s)$ 可以延拓为 s 平面上的亚纯函数，且仅以 $s=1$ 为一阶极点，留数为 $\pi\prod_{p|A}(1-p^{-1})/Ay$。

证明　设 ω 的导子为 B，$A=BC$，φ 为 ω 所决定的模 B 的原特征，则

$$
\begin{aligned}
G(s)&=\Gamma(s)\sum_{m,n}{}'\varphi(n)\sum_{d|(n,c)}\mu(d)|mAz+n|^{-2s}\\
&=\Gamma(s)\sum_{d|c}\mu(d)\varphi(d)d^{-2s}\sum_{m,n}{}'\varphi(n)\left|m\frac{A}{d}z+n\right|^{-2s}.
\end{aligned}
\tag{5.3.11}
$$

所以当 $B>1$(即 ω 为非平凡特征)时，由命题 5.13 可知 $G(s)$ 可以延拓为 s 平面上的整函数。

设 $A=1$，令

$$\eta(t, z)=\sum_{m,n}\exp(-\pi t|mz+n|^2/y),$$

由(5.3.7)式，可得

$$\eta(t^{-1}, z)=t\eta(t, z).$$

当 $Re(s)>1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\pi^{-s}y^sG(s) &= \int_0^\infty(\eta(t,z)-1)t^{s-1}dt\\ &= \int_1^\infty(\eta(t^{-1},z)-1)t^{-s-1}dt+\int_1^\infty(\eta(t,z)-1)t^{s-1}dt\\ &= \int_1^\infty(t(\eta(t,z)-1)+t-1)t^{-s-1}dt\\ &\quad+\int_1^\infty(\eta(t,z)-1)t^{s-1}dt\\ &= \frac{1}{s-1}-\frac{1}{s}+\int_1^\infty(\eta(t,z)-1)t^{-s}dt\\ &\quad+\int_1^\infty(\eta(t,z)-1)t^{s-1}dt.\end{aligned}$$

上式右端两个积分是 s 平面上的整函数。因此$G(s)$可以延拓为 s 平面上的亚纯函数，且仅以 $s=0$ 和 $s=1$ 为一阶极点，留数分别为 -1和 π/y。

设 $B=1$, $A>1$, 由(5.3.11)式得到

$$G(s)=\sum_{d\mid A}\mu(d)d^{-2s}\Gamma(s)\sum_{m,n}{}'\left|m\frac{A}{d}z+n\right|^{-2s}.$$

将 $\frac{A}{d}z$看作z, 利用上述 $A=1$ 时的结果，可知 $G(s)$可以延拓为 s 平面上的亚纯函数，仅以 $s=1$ 为一阶极点，留数为

$$\sum_{d\mid A}\mu(d)d^{-2}\pi d/Ay=\pi\prod_{p\mid A}(1-p)/Ay.$$

令

$$T=\{h(tz,\psi)\mid\psi\text{ 为奇原特征, }t\text{ 为正整数}\},$$

T张成的 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间记为 $\widetilde{T}$。又令

$$T_1=\{h(tz,\psi)\mid\psi\text{ 为奇特征, }t\text{ 为正整数}\}$$

及

$$T_2=\{\theta(tz,h,N)\mid t,h,N\in\boldsymbol{Z},\ t>0,\ N>0\}$$

其中

$$\theta(z,h,N)=\sum_{m\equiv h(N)}me(m^2z),$$

T_1 与 T_2 所张成的 $\boldsymbol{C}$ 上的向量空间分别记为 $\widetilde{T}_1$ 和 $\widetilde{T}_2$。

引理 5.15　我们有 $\widetilde{T}=\widetilde{T}_1=\widetilde{T}_2$。

证明　显然有 $\widetilde{T}\subset\widetilde{T}_1\subset\widetilde{T}_2$。设 ψ 为任一模 N 的奇特征，ψ 所诱导的原特征记为 $\widetilde{\psi}$，即当 $(d, N)=1$ 时有 $\psi(d)=\widetilde{\psi}(d)$。则

$$\sum_{m=1}^{\infty}\psi(m)me(tm^2z)$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{d\mid(m,N)}\mu(d)\widetilde{\psi}(m)me(tm^2z)$$

$$=\sum_{d\mid N}\mu(d)d\widetilde{\psi}(d)h(td^2z, \widetilde{\psi})\in\widetilde{T},$$

这证明了 $\widetilde{T}=\widetilde{T}_1$。记 $d=(h, N)$，我们有

$$\theta(tz, h, N)=d\sum_{m\equiv hd^{-1}(Nd^{-1})}me(td^2m^2z)$$

$$=d\varphi(Nd^{-1})^{-1}\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{\psi}\overline{\psi}(hd^{-1})\psi(m)me(td^2m^2z)$$

$$=d\varphi(Nd^{-1})^{-1}\sum_{\psi}\overline{\psi}(hd^{-1})h(td^2z, \psi), \in\widetilde{T}_1.$$

其中 ψ 跑遍模 Nd^{-1} 的所有特征，φ 为 Euler 函数，由此可见 $\widetilde{T}_1=\widetilde{T}_2$。

若 $f(z)=\sum_{n\in Q}a(n)e(nz)$ 为一形式级数，令

$$\xi(f(z))=\sum_{n=0}^{\infty}a(n)e(nz).$$

定义

$$F=\{\theta(zA^{-1})\mid\theta(z)\in\widetilde{T}, A\text{为正整数}\}.$$

引理 5.16　设 $G(z)\in F$，$\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SL_2(\mathbf{Z})$ 及 $H(z)=G(\gamma(z))(cz+d)^{-3/2}$，则(1) $H(z)\in F$；(2) $\xi(G(z))\in\widetilde{T}$。

证明　由于 $SL_2(\mathbf{Z})$ 是由 $\gamma_1=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ 及 $\gamma_2=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ 生成的，故仅需对 $\gamma=\gamma_1$ 和 $\gamma=\gamma_2$ 证明 (1)。不失普遍性，可以假设 $G(z)=\theta(tA^{-1}z, h, N)$，易见

$$G(\gamma_1(z))=\sum_{\substack{g\equiv h(N)\\ g\bmod AN}}e(tg^2/A)\theta(tz/A, AN, g)\in F.$$

利用(5.3.2)式可证得 $\gamma=\gamma_2$ 时(1)也成立。

以下证(2)：仍假设 $G(z)=(tz/A,\ h,\ N)$，这时

$$\xi(G(z))=\sum_{\substack{m\equiv h\ (N)\\ M^2\equiv 0\ (A)}} me(tm^2z/A).$$

设 A 的因子分解为 $p_1^{e(1)}\cdots p_j^{e(j)}$，取 $B=p_1^{f(1)}\cdots p_j^{f(j)}$，其中 $f(i)$ 是最小的正整数使 $2f(i)\geqslant e(i)$ $(1\leqslant i\leqslant j)$，从而

$$\xi(G(z))=\sum_{\substack{m\equiv h\ (N)\\ M\equiv 0\ (B)}} me(tm^2z/A).$$

记 $d=(B,\ N)$，若 $d\nmid h$，则 $\xi(G(z))=0$。设 $d|h$，记 $h'=hd^{-1}$，$N'=Nd^{-1}$，$t'=tB^2A^{-1}$，取 B' 使 $Bd^{-1}B'\equiv 1\ (N')$，这时

$$\begin{aligned}\xi(G(z))&=\sum_{n\equiv h'B'(N')} nBe(tn^2B^2z/A)\\&=\theta(t'z,\ h'B',\ N')\in\widetilde{T}.\end{aligned}$$

下面给出本节的主要结果：

定理 5.17 设 $f(z)=\sum\limits^{\infty} a(n)e(nz)\in S(N,\ 3/2,\ \omega)$，则对任一无平方因子的正整数 t，f 的 Shimura 提升 $L_t(f)$ 都是尖形式的充要条件是 f 与子空间 $S(N,\ 3/2,\ \omega)\cap\widetilde{T}$ 正交。

证明 设 $L_t(f)=\sum\limits_{n=0}^{\infty} b(n)e(nz)$，$L_t(f)$ 属于 $G(N_t,\ 2,\ \omega^2)$，其中 $N_t|N^\infty$。由定理 5.7 后的说明，$L_t(f)$ 是尖形式的充要条件是：对一切原特征 ψ 及正整数 r，级数 $L(s,\ L_t(f),\ \psi,\ r)$ 在 $s=2$ 处全纯。以 N 与 r 的最小公倍数代替 N，不失普遍性，可以假设 $r|N^\infty$。我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s}=L\left(s,\ \omega\left(\frac{-t}{\cdot}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty} a(tn^2)n^{-s},$$

注意 ω 是模 N 的特征，因而

$$\begin{aligned}L(s,\ L_t(f),\ \psi,\ r)&=\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)b(rn)n^{-s}\\&=L\left(s,\ \omega\psi\left(\frac{-t}{\cdot}\right)\right)\sum_{n=1}^{\infty}\psi(n)a(tr^2n^2)n^{-s}.\end{aligned}$$

令

$$h(z,\ \overline{\psi})=\sum_{n=1}^{\infty}\overline{\psi}(n)n^{\nu}e(n^2z).$$

其中 $\psi(-1)=(-1)^{\nu}$，ν 为 0 或 1。取常数 $\sigma>0$，当 $\mathrm{Re}(s)>\sigma$ 时，我们有

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty\int_0^1 f(z)\bar{h}(tr^2z,\ \bar{\psi})y^{s-1}dxdy\\&=\sum_{n=1}^\infty\sum_{m=1}^\infty a(n)\psi(m)m^\nu\int_0^\infty e(i(n+tr^2m^2)y)y^{s-1}dy\\&\quad\times\int_0^1 e((n-tr^2m^2)x)dx\\&=(4\pi tr^2)^{-s}\Gamma(s)\sum_{m=1}^\infty\psi(m)a(tr^2m^2)m^{\nu-2s}.\end{aligned}$$

以 g 表示 ψ 的导子。由命题 3.31、定理 4.19 及命题 5.12，$h(tr^2z,\ \bar{\psi})$ 属于 $G\left(4tr^2g^2,\ (1+2\nu)/2,\bar{\psi}\left(\frac{(-1)^\nu tr^2}{\cdot}\right)\right)$。记 $\tilde{N}=(4tr^2g^2,\ N)$，定义 $B(z,\ s)=f(z)\bar{h}(tr^2z,\ \bar{\psi})y^{s+1}$，则对任一 $\gamma=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in\Gamma=\Gamma_0(\tilde{N})$，我们有

$$B(\gamma(z),\ s)=\omega\psi(d)\left(\frac{-t}{d}\right)(cz+d)^{1-\nu}|cz+d|^{2\nu-1-2s}B(z,\ s).$$

所以

$$\begin{aligned}L(2s-\nu,\ L_r(f),\ \psi,\ r)&=(4\pi tr^2)^s\Gamma(s)^{-1}\\&\quad\times\int_{\Gamma\backslash H}B(z,\ s)L\left(2s-\nu,\ \omega\psi\left(\frac{-t}{\cdot}\right)\right)\sum_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\\&\quad\times\omega\psi(d)\left(\frac{-t}{d}\right)(cz+d)^{1-\nu}|cz+d|^{2\nu-1-2s}\frac{dxdy}{y^2}.\end{aligned}\tag{5.3.12}$$

易见

$$\begin{aligned}&L\left(2s-\nu,\ \omega\psi\left(\frac{-t}{\cdot}\right)\right)\sum_{\left(\begin{smallmatrix}a&b\\c&d\end{smallmatrix}\right)\in\Gamma_\infty\backslash\Gamma}\omega\psi(d)\\&\quad\times\left(\frac{-t}{d}\right)(cz+d)^{1-\nu}|cz+d|^{2\nu-1-2s}\\&=\sum_{m,n}{}'\omega\psi(n)\left(\frac{-t}{n}\right)(m\tilde{N}z+n)^{1-\nu}|m\tilde{N}z+n|^{2\nu-1-2s}.\end{aligned}\tag{5.3.13}$$

当 $\nu=0$ 时，由命题 5.13 可知 $L(s, L_t(f), \psi, r)$ 在 $s=2$ 处全纯；当 $\nu=1$ 时，由命题 5.14 可知仅当 $\omega=\overline{\psi}\left(\frac{-t}{\cdot}\right)$时，(5.3.13)式中的级数在 $s=3/2$ 时有一阶极点，其留数为 c/y，c 为一非零常数，因而由(5.3.12)式可知，仅当 $\omega=\overline{\psi}\left(\frac{-t}{\cdot}\right)$时，$L(s, L_t(f), \psi, r)$ 在 $s=2$ 处可能有一阶极点，留数为 $c'\langle f, h(tr^2z,\overline{\psi})\rangle$，$c'$ 为一非零常数。

今设 $L_t(f)$ 为尖形式，由上述推导可知，当 $\omega=\overline{\psi}\left(\frac{-t}{\cdot}\right)$时，$f$ 与 $h(tr^2z, \overline{\psi})$ 正交。而当 $\omega\neq\overline{\psi}\left(\frac{-t}{\cdot}\right)$ 时，记 $\omega'=\overline{\psi}\left(\frac{-t}{\cdot}\right)$，这时 $f\in S(\tilde{N},3/2,\omega)$，$h(tr^2z, \overline{\psi})\in S(\tilde{N}, 3/2, \omega')$类似于(3.1.5)式，对于任一 $\gamma\in\Gamma_0(\tilde{N})$，我们有

$$\begin{aligned}&\omega(d_\gamma)\overline{\omega}'(d_\gamma)\langle f, h(tr^2z, \overline{\psi})\rangle_{\Gamma_0(\tilde{N})}\\&=\langle f\,|\,[\gamma], \overline{h(tr^2z, \psi)}\,|\,[\gamma]\rangle_{\Gamma_0(\tilde{N})}\\&=\langle f, h(tr^2z, \overline{\psi})\rangle_{\Gamma_0(\tilde{N})}.\end{aligned}$$

由于 $\omega\neq\omega'$，总可找到 $\gamma\in\Gamma_0(\tilde{N})$，使 $\omega(d_\gamma)\neq\omega'(d_\gamma)$，于是可得 $\langle f, h(tr^2z, \overline{\psi})\rangle=0$。由于任一正整数 u 都可表为 $u=tr^2$，其中 t 无平方因子，所以可见 f 与 $\tilde{T}$ 正交，因而 f 与 $S(N, 3/2, \omega)\cap\tilde{T}$ 正交。

反之，设 f 与 $S(N, 3/2, \omega)\cap\tilde{T}$ 正交。任取 $h(uz, \psi)\in T$，$h(uz, \psi)$ 属于 $S\left(4ug^2, 3/2, \psi\left(\frac{-u}{\cdot}\right)\right)$，其中 g 表示 ψ 的导子。仍以 $\tilde{N}$ 表示 $[4ug^2, N]$。假设 $\omega=\psi\left(\frac{-u}{\cdot}\right)$。若 $\Gamma(\tilde{N})$ 在 $\Gamma_0(N)$ 中的右陪集分解为 $\Gamma_0(N)=\bigcup_{i=1}^{r}\Gamma(\tilde{N})\gamma_i$，以 a_i 表示 γ_i 的左上角元素，则函数

$$g(z)=\sum_{i=1}^{r}\omega(a_i)h(uz, \psi)\,|\,[\gamma_i]$$

属于 $S(N, 3/2, \omega)$。利用命题 5.16 的 (1)，可知 $g\in F$，由于 $g(z+1)=g(z)$，从而 $\xi(g(z))=g(z)$，由命题 5.16 的 (2)，可知

$g\in\widetilde{T}$，即 $g\in S(N,\ 3/2,\ \omega)\cap\widetilde{T}$。由假设条件得

$$\begin{aligned}0=\langle f,\ g\rangle&=\sum_{i=1}^{r}\bar{\omega}(a_i)\langle f,\ h(uz,\ \psi)\mid[\gamma_i]\rangle\\&=\sum_{i=1}^{r}\bar{\omega}(a_i)\langle f\mid[\gamma_i^{-1}],\ h(uz,\ \psi)\rangle\\&=r\langle f,\ h(uz,\ \psi)\rangle.\end{aligned}$$

可见 f 与 $h(uz,\ \psi)$ 正交。由上述论证，可知对任一 t，$L_t(f)$ 都是尖形式。

定理5.17的结论与J.Sturm[26]的结果是类似的，但证明的方法略有不同。这个结果首先是由Shimura[23]作为猜想提出来的。

第 6 章

三元二次型表整数

§6.1　正定二次型簇的 θ 函数

回到 §1.1 中所提出的二次型表整数的问题．我们仍采用 §1.1 的符号，设 $f(x_1, \cdots, x_\kappa)$ 为整系数正定二次型，假定 $\kappa\geqslant 3$．定义矩阵

$$A=\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\right),$$

A 是一个 κ 阶整数对称方阵，其对角线元素都是偶数．定义 f 对应的 θ 函数

$$\theta_f(z)=\sum_{m\in Z^\kappa} e(zmAm^T/2),\ z\in H.$$

$\theta_f(z)$ 是 H 上的全纯函数．设 N 是使 NA^{-1} 为整数方阵，且对角线元素都为偶数的最小正整数，令

$$\chi=\begin{cases}\left(\dfrac{2\det A}{\cdot}\right), & \text{若 } \kappa \text{ 为奇数;}\\[2ex] \left(\dfrac{(-1)^{\kappa/2}\det A}{\cdot}\right), & \text{若 } \kappa \text{ 为偶数.}\end{cases}$$

定理 6.1　$\theta_f(z)$ 属于 $G(N, \kappa/2, \chi)$．

证明　由定理 1.4，我们仅需考虑 $\theta_f(z)$ 在 $\Gamma_0(N)$ 的尖点的性质．显然有

$$\lim_{z\to i\infty} \theta_f(z)=1,$$

即 θ_f 在 $i\infty$ 全纯．设 a/c 为任一尖点 $(c>0)$，取 $\rho=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in Sl_2(\mathbf{Z})$，则 $\rho(\infty)=a/c$，我们有

$$\theta_f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=\sum_{x \bmod c} e(axAx^T/2c)$$

$$\times \sum_{m\in Z^{\kappa}} e(-(m+x/c)A(m+x/c)^T/2(z+d/c))$$
$$(6.1.1)$$

其中 $x\in \mathbf{Z}^{\kappa}$。在命题 1.2 中我们实际上已证明了

$$\sum_{m\in Z^{\kappa}} e(-(x+m)A(x+m)^T/2z)$$
$$=(-iz)^{\kappa/2}(\det A)^{-1/2}\sum_{m\in Z^{\kappa}} e(zmA^{-1}m^T/2+x\cdot m^T).$$

这里 $x\in \mathbf{R}^{\kappa}$，以(6.1.1)中的 x/c 代替上式中的 x，得到

$$\theta_f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)=(-i(z+d/c))^{\kappa/2}(\det A)^{-1/2}\sum_{m\in Z^{\kappa}} e(zmAm^T/2)$$
$$\times\sum_{x \bmod c} e(axAx^T/2c+x\cdot m^T/c+dmA^{-1}m^T/2c),$$

从而

$$\lim_{z\to i\infty}(z+d/c)^{-\kappa/2}\theta_f\left(\frac{az+b}{cz+d}\right)$$
$$=(-i)^{\kappa/2}(\det A)^{-1/2}\sum_{x \bmod c} e(axAx^T/2c), \qquad (6.1.2)$$

可见 $\theta_f(z)$ 在尖点 a/c 全纯。

设 $f_1(x_1,\cdots,x_\kappa)$ 和 $f_2(x_1,\cdots,x_\kappa)$ 为两个整系数正定二次型，它们对应的矩阵分别为 A_1 和 A_2。若存在一个行列式为 ± 1 的整数方阵 S，使 $SA_1S^T=A_2$，则称 f_1 与 f_2 等价。若存在实数域上的可逆方阵 S_R，使 $S_RA_1S_R^T=A_2$，则称 f_1 与 f_2 在实数域上等价。设 p 为素数，将 A_1 和 A_2 看作 $\mathbf{Z}_p$ 上的方阵，若存在 $\mathbf{Z}_p$ 上的可逆方阵 S_P，使 $S_PA_1S_P^T=A_2$，则称 f_1 与 f_2 在 $\mathbf{Z}_p$ 上等价。若对所有的素数 p，f_1 与 f_2 都在 $\mathbf{Z}_p$ 上等价，而且 f_1 与 f_2 也在实数域上等价，则称 f_1 与 f_2 属于同一个簇。显然，当 f_1 与 f_2 等价时，它们属于同一个簇。可以证明，一个簇内仅包含有限个等价类。

设 $f_1(x_1,\cdots,x_\kappa)$ 与 $f_2(x_1,\cdots,x_\kappa)$ 属于同一个簇，则它们所对应的矩阵 A_1 与 A_2 具有相同的行列式。若 a/c 为一个尖点，c 为正整数，由上述定义，利用孙子定理，一定存在一个整数方阵 S，其行列式与 $2c$ 互素，且 $SA_1S^T\equiv A_2\ (2c)$。由(6.1.2)式，可知 $\theta_{f_1}(z)$ 与 $\theta_{f_2}(z)$ 在 a/c 处具有相同的值，因而 $\theta_{f_1}-\theta_{f_2}$ 是一个尖形式。

以$M_\kappa(Z)$表示κ阶整数方阵集合。令$o(f)=\#\{S\in M_\kappa(Z)|SAS^T=A\}$，定义$f$所在的簇对应的$\theta$函数

$$\theta(\mathrm{gen}.f,\ z)=\left(\sum_{f_i}\frac{1}{o(f_i)}\right)^{-1}\sum_{f_i}\frac{\theta_{f_i}(z)}{o(f_i)},$$

上述求和号中的f_i跑遍f所在的簇中的所有等价类。

命题 6.2 设p为素数，$p\nmid N$，令

$$\lambda_p=\begin{cases}p^{\kappa-2}+1, & 若\ 2\nmid\kappa;\\ p^{\kappa-2}+2p^{\kappa/2-1}\left(\dfrac{(-1)^{\kappa/2}\det A}{p}\right)+1, & 若\ 2|\kappa.\end{cases}$$

则

$$\theta(\mathrm{gen}.f,\ z)|T(p^2)=\lambda_p\theta(\mathrm{gen}.f,\ z),$$

其中$T(p^2)$表示空间$G(N,\ \kappa/2,\ \chi)$上的Hecke算子。

命题6.2的证明超出了本书的范围。当τ为偶数时，M. Eichler[4]研究了Hecke算子在θ_f函数上的作用。当κ为奇数时，类似的结果也成立。读者可参阅R. Schulze-Pillot[19]和P. Ponomarev[17]。

利用命题6.2，可以证明下述定理：

定理 6.3 函数$\theta(\mathrm{gen}.f,\ z)$属于$\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \chi)$。

证明 首先假定$\kappa\geqslant4$为偶数。由于

$$G(N,\ \kappa/2,\ \chi)=\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \chi)\oplus S(N,\ \kappa/2,\ \chi),$$

设$\theta(\mathrm{gen}.f,\ z)=g_1(z)+g_2(z)$，其中$g_1\in S(N,\ \kappa/2,\ \chi)$，$g_2\in\varepsilon(N,\ \kappa/2,\ \chi)$。设$g_1(z)=\sum\limits_{n=n_0}^{\infty}c(n)e(nz)$ $(c(n_0)\neq0)$，当$p\nmid N$时，由命题6.2，我们有$g_1(z)|T(p^2)=\lambda_p g_1(z)$，因而

$$\lambda_p c(n_0)=c(n_0p^2)+\chi(p)\left(\frac{-n_0}{p}\right)a(n_0).$$

类似于命题3.37，可以证明$c(n)=O(n^{\kappa/4})$。于是可以得$\lambda_p=O(p^{\kappa/2})$。当$\kappa\geqslant6$时，由命题6.2可知，$p\to\infty$时$\lambda_p$的阶为$p^{\kappa-2}$，这个矛盾说明$g_1=0$，这时定理成立。当$\kappa=4$时，利用Rankin[18]关于尖形式的Fourier系数的估计结果$c(n)=O(n^{\kappa/4-1/5})$代替命题3.37较粗的估计，也可证明定理成立。

假设κ为奇数。当$\kappa\geqslant 5$时，类似于上述$\kappa\geqslant 6$为偶数的情况，可以证明定理成立。今设$\kappa=3$，以V表示定理5.17中所引入的子空间$S(N, 3/2, \chi)\cap\widetilde{T}$，$V^{\perp}$表示$V$在$S(N,3/2,\chi)$中的正交补空间，于是我们可以假设$\theta(\mathrm{gen}\ f, z)=g_1+g_2+g_3$，其中$g_1\in V$ $g_2\in V^{\perp}$，$g_3\in\varepsilon(N,3/2,\chi)$。利用命题6.2，可知对任一素数$p(p\nmid N)$有$g_i|T(p^2)=(p+1)g_i$ $(i=1, 2, 3)$。g_1为有限个形如$h(tz,\psi)$的函数的线性组合，且有$\chi=\psi\left(\frac{-t}{\cdot}\right)$.这时我们有$h(tz;\psi)|T(p^2)=\chi(p)\left(\frac{-t}{p}\right)(p+1)h(tz,\psi)$。一定存在素数$p$，使$h(tz;\psi)|T(p^2)=-(p+1)h(tz;\psi)$对上述有限个函数$h(tz;\psi)$都成立，从而$g_1|T(p^2)=-(p+1)g_1$，由此得到$g_1=0$。在Shimura提升下，$g_2$映入$S(N/2, 2, id.)$，它的像也是Hecke算子$T(p)$的本征函数，并以$p+1$为本征值。利用Rankin的估计$c(n)=O(n^{4/5})$，可以证得$g_2=0$，所以$\theta(\mathrm{gen}.f,z)$属于$\varepsilon(N, 3/2, \chi)$。

定理6.3的证明取自R.Schulze-Pillot[19]。

§6.2 三元二次型簇表整数

设$f(x_1, x_2, x_3)$为正定整系数三元二次型。在§1.1节我们引入了函数

$$\theta_f(z)=\sum_{m\in Z^3}e(zmAm^T/2)=\sum_{n=0}^{\infty}r(f, n)e(nz).$$

这里$r(f, n)$为$f(x_1, x_2, x_3)=n$的整数解(x_1, x_2, x_3)的个数。在上节我们证明了$\theta(\mathrm{gen}.f, z)$属于$\varepsilon(N, 3/2,\chi)$，$N$与$\chi$由$f$所决定。对于某些特殊的$N$与$\chi$，我们在第四章已构造了$\varepsilon(N,3/2,\chi)$的基，并给出了其中每个函数的Fourier展开式。如果我们能计算$\theta(\mathrm{gen}.f, z)$在各尖点的值，我们就可以将它表成$\varepsilon(N, 3/2, \chi)$这组已知基的线性组合，由此即可得到

$$\gamma(\mathrm{gen}.f,n)=\left(\sum_{f_i}\frac{1}{O(f_i)}\right)^{-1}\sum_{f_i}\frac{\gamma(f_i, n)}{O(f_i)}$$

的解析表达式，其中 f_i 跑遍 f 所在簇的等价类。

在§6.1节中，我们实际上也已指出了 $\theta_f(z)$ 与 $\theta(\mathrm{gen}.f, z)$ 在各尖点具有相同的值。

为了简便起见，我们在本节中仅讨论下述三个类型的三元二次型：

$$\alpha x_1^2+\beta x_2^2+\gamma x_3^2,$$
$$2\alpha x_1^2+\beta x_2^2+\gamma x_3^2,$$
$$2\alpha x_1^2+2\beta x_2^2+\gamma x_3^2.$$

其中 α, β, γ 为无平方因子的正奇数，且适合 $(\alpha, \beta, \gamma)=1$.

设 $f(x_1, x_2, x_3)=\alpha x_1^2+\beta x_2^2+\gamma x_3^2$，其中 α, β, γ 为无平方因子的正整数，且 $(\alpha, \beta, \gamma)=1$. 则

$$\theta_f(z)=\theta(\alpha z)\theta(\beta z)\theta(\gamma z),$$

其中

$$\theta(z)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}e(m^2z).$$

不难看出，$\theta_f(z)$ 属于 $G(4D, 3/2, \chi_i)$，其中

$$D=[\alpha, \beta, \gamma].$$
$$i=\alpha\beta\gamma/((\alpha, \beta)^2(\alpha, \gamma)^2(\beta, \gamma)^2). \tag{6.2.1}$$

引理 6.4 设 d/c 是一个尖点 $(c>0,\ (c, d)=1)$，则

$$V(\theta, d/c)=\begin{cases}\varepsilon_d^{-1}\left(\dfrac{d}{c}\right), & 若 4\mid c;\\ \dfrac{1-i}{2}\varepsilon_d\left(\dfrac{d}{c}\right), & 若 2\nmid c;\\ 0, & 若 2\| c.\end{cases}$$

证明 利用引理4.6、4.7和4.8即可证明之。

引理 6.5 设 d 为无平方因子的正奇数，则

$$\varepsilon_d=\prod_{p\mid d}\varepsilon_p\left(\frac{dp^{-1}}{p}\right).$$

证明 设 d_1 与 d_2 为两个互素的奇数，我们有

$$\left(\frac{d_1}{d_2}\right)\left(\frac{d_2}{d_1}\right)=(-1)^{(d_1-1)(d_2-1)/4}=\varepsilon_{d_1d_2}\varepsilon_{d_1}^{-1}\varepsilon_{d_2}^{-1}.$$

由此不难证得引理。

当 D 为无平方因子正奇数时,

$$S(4D)=\{1/d,\ 1/2d,\ 1/4d \mid d|D\}$$

是 $\Gamma_0(4D)$ 的尖点等价类代表系.

$$S(8D)=\{1/d,\ 1/2d,\ 1/4d,\ 1/8d \mid d|D\}$$

是 $\Gamma_0(8D)$ 的尖点等价类代表系.

命题 6.6　设 $f=\alpha x_1^2+\beta x_2^2+\gamma x_3^2$, 其中 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 为无平方因子的正奇数, 且适合 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=1$. 则 $\theta_f(z)$ 属于 $G(4D,\ 3/2,\ \chi_l)$, D 与 l 为(6.2.1)式所定义, 且

$$\begin{aligned}V(\theta_f,\ 1/d)=&-\frac{(1+i)dl^{1/2}}{4D(l,\ d)^{1/2}}\varepsilon_{d/(d,l)}^{-1}\left(\frac{-1}{d}\right)\left(\frac{l/(l,\ d)}{d/(l,\ d)}\right)\\&\times\left(\frac{\alpha\beta/(\alpha,\ \beta)^2}{(d,\ \alpha,\ \beta)(d,\ l,\ \gamma)}\right)\left(\frac{\beta\gamma/(\beta,\ \gamma)^2}{(d,\ \beta,\ \gamma)(d,\ l,\ \alpha)}\right)\\&\times\left(\frac{\gamma\alpha/(\gamma,\ \alpha)^2}{(d,\ \gamma,\ \alpha)(d,\ l,\ \beta)}\right),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}V(\theta_f,\ 1/4d)=&dD^{-1}l^{1/2}(l,\ d)^{-1/2}\varepsilon_{l/(l,d)}\left(\frac{-1}{D/d}\right)\\&\times\left(\frac{d/(l,\ d)}{l/(l,\ d)}\right)\left(\frac{\alpha\beta/(\alpha,\ \beta)^2}{\gamma(\alpha,\ \beta)(\alpha,\ \beta,\ d)^{-1}(\gamma,\ \alpha\beta d)^{-1}}\right)\\&\times\left(\frac{\beta\gamma/(\beta,\ \gamma)^2}{\alpha(\beta,\ \gamma)(\alpha,\ \beta\gamma d)^{-1}(\beta,\ \gamma,\ d)^{-1}}\right)\\&\times\left(\frac{\gamma\alpha/(\gamma,\ \alpha)^2}{\beta(\gamma,\ \alpha)(\beta,\ \alpha\gamma d)^{-1}(\gamma,\ \alpha,\ d)^{-1}}\right),\end{aligned}$$

$$V(\theta_f,\ 1/2d)=0.$$

d 为 D 的任一因子.

证明　我们有

$$\begin{aligned}&V(\theta_f,\ 1/d)\\&=\lim_{z\to 0}(-dz)^{3/2}\theta(\alpha(z+1/d))\theta(\beta(z+1/d))\theta(\gamma(z+1/d))\\&=\lim_{z\to 0}(-dz)^{3/2}\theta\left(\alpha z+\frac{\alpha/(\alpha,\ d)}{d/(\alpha,\ d)}\right)\theta\left(\beta z+\frac{\beta/(\beta,\ d)}{d/(\beta,\ d)}\right)\theta\\&\quad\times\left(\gamma z+\frac{\gamma/(\gamma,\ d)}{d/(\gamma,\ d)}\right)\\&=\left(\frac{(\alpha,\ d)(\beta,\ d)(\gamma,\ d)}{\alpha\beta\gamma}\right)^{1/2}V\left(\theta,\ \frac{\alpha/(\alpha,\ d)}{d/(\alpha,\ d)}\right)\end{aligned}$$

$$\times V\left(\theta,\ \frac{\beta/(\beta,\ d)}{d/(\beta,\ d)}\right)V\left(\theta,\ \frac{\gamma/(\gamma,\ d)}{d/(\gamma,\ d)}\right).$$

将 d 表为 $d=(d,\ l)\times d/(d,\ l)$。设 p 为 d 的素因子，当且仅当 p 仅能除尽 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 中的一个数时，p 能除尽 $(d,\ l)$；当且仅当 p 能除尽 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 中的两个数时，p 能除尽 $d/(d,\ l)$。所以 $\alpha\beta\gamma=D^2/l$，$(\alpha,\ d)(\beta,\ d)(\gamma,\ d)=d^2/(d,\ l)$。利用引理 6.4 和 6.5，我们得到

$$V(\theta_f,\ 1/d)=-4^{-1}(1+i)dD^{-1}l^{1/2}(d,\ l)^{-1/2}V_1,$$

其中

$$\begin{aligned}
V_1&=\varepsilon_{d/(\alpha,d)}\varepsilon_{d/(\beta,d)}\varepsilon_{d/(\gamma,d)}\left(\frac{\alpha/(\alpha,\ d)}{d/(\alpha,\ d)}\right)\left(\frac{\beta/(\beta,\ d)}{d/(\beta,\ d)}\right)\left(\frac{\gamma/(\gamma,\ d)}{d/(\gamma,\ d)}\right)\\
&=\prod_{p|d}\varepsilon_p^2\prod_{p|d/(d,l)}\varepsilon_p^{-1}\prod_{p|d/(\alpha,d)}\left(\frac{\alpha d/p}{p}\right)\prod_{p|d/(\beta,d)}\left(\frac{\beta d/p}{p}\right)\\
&\quad\times\prod_{p|d/(\gamma,d)}\left(\frac{\gamma d/p}{p}\right)\\
&=\left(\frac{-1}{d}\right)\varepsilon_{d/(d,l)}^{-1}\prod_{p|d/(d,l)}\left(\frac{d(p(d,\ l))^{-1}}{p}\right)\\
&\quad\times\prod_{p|d/(\alpha,d)}\left(\frac{\alpha d/p}{p}\right)\prod_{p|d/(\beta,d)}\left(\frac{\beta d/p}{p}\right)\prod_{p|d/(\gamma,d)}\left(\frac{\gamma d/p}{p}\right)\\
&=\left(\frac{-1}{d}\right)\varepsilon_{d/(d,l)}^{-1}\left(\frac{\alpha(d,\ l)}{(d,\ \beta,\ \gamma)}\right)\left(\frac{\beta(d,\ l)}{(d,\ \gamma,\ \alpha)}\right)\left(\frac{\gamma(d,\ l)}{(d,\ \alpha,\ \beta)}\right)\\
&\quad\times\left(\frac{\alpha\beta}{(d,\ l,\ \gamma)}\right)\left(\frac{\beta\gamma}{(d,\ l,\ \alpha)}\right)\left(\frac{\gamma\alpha}{(d,\ l,\ \beta)}\right)\\
&=\left(\frac{-1}{d}\right)\varepsilon_{d/(d,l)}^{-1}\left(\frac{l/(d,\ l)}{d/(d,\ l)}\right)\left(\frac{\alpha\beta/(\alpha,\ \beta)^2}{(d,\ l,\ \gamma)(d,\ \alpha,\ \beta)}\right)\\
&\quad\times\left(\frac{\beta\gamma/(\beta,\ \gamma)^2}{(d,\ l,\ \alpha)(d,\ \beta,\ \gamma)}\right)\left(\frac{\gamma\alpha/(\gamma,\ \alpha)^2}{(d,\ l,\ \beta)(d,\ \gamma,\ \alpha)}\right).
\end{aligned}$$

由此得到 $V(\theta_f,\ 1/d)$ 的表达式。

类似地我们有

$$\begin{aligned}
&V(\theta_f,\ 1/4d)\\
&=\lim_{z\to0}(-4dz)^{3/2}\theta(\alpha(z+1/4d))\theta(\beta(z+1/4d))\theta(\gamma(z+1/4d))\\
&=\left(\frac{(\alpha,\ d)(\beta,\ d)(\gamma,\ d)}{\alpha\beta\gamma}\right)^{1/2}V\left(\theta,\ \frac{\alpha/(\alpha,\ d)}{4d/(\alpha,\ d)}\right)
\end{aligned}$$

$$\times V\left(\theta,\ \frac{\beta/(\beta,\ d)}{4d/(\beta,\ d)}\right)V\left(\theta,\ \frac{\gamma/(\gamma,\ d)}{4d/(\gamma,\ d)}\right)$$
$$=dD^{-1}l^{1/2}(l,\ d)^{-1/2}V_2.$$

其中

$$V_2=\varepsilon^{-1}_{\alpha/(\alpha,d)}\varepsilon^{-1}_{\beta/(\beta,d)}\varepsilon^{-1}_{\gamma/(\gamma,d)}\left(\frac{d/(\alpha,\ d)}{\alpha/(\alpha,\ d)}\right)\left(\frac{d/(\beta,\ d)}{\beta/(\beta,\ d)}\right)\left(\frac{d/(\gamma,\ d)}{\gamma/(\gamma,\ d)}\right)$$
$$=\prod_{p\mid D/d}\varepsilon_p^{-2}\prod_{p\mid l/(l,d)}\varepsilon_p\prod_{p\mid\alpha/(\alpha,d)}\left(\frac{\alpha d/p}{p}\right)\prod_{p\mid\beta/(\beta,d)}\left(\frac{\beta d/p}{p}\right)$$
$$\times\prod_{p\mid\gamma/(\gamma,d)}\left(\frac{\gamma d/p}{p}\right)$$
$$=\varepsilon_{l/(l,d)}\left(\frac{-1}{D/d}\right)\prod_{p\mid l/(l,d)}\left(\frac{l(p(l,\ d))^{-1}}{p}\right)$$
$$\times\prod_{p\mid\alpha/(\alpha,d)}\left(\frac{\alpha d/p}{p}\right)\prod_{p\mid\beta/(\beta,d)}\left(\frac{\beta d/p}{p}\right)\prod_{p\mid\gamma/(\gamma,d)}\left(\frac{\gamma d/p}{p}\right).$$

由于

$$l/(l,\ d)=\alpha/(\alpha,\ \beta\gamma d)\times\beta/(\beta,\ \gamma\alpha d)\times\gamma/(\gamma,\ \alpha\beta d),$$

所以

$$V_2=\varepsilon_{l/(l,d)}\left(\frac{-1}{D/d}\right)\left(\frac{\alpha\beta/(\alpha,\ \beta)^2}{(\alpha,\ \beta)/(\alpha,\ \beta,\ d)}\right)\left(\frac{\beta\gamma/(\beta,\ \gamma)^2}{(\beta,\ \gamma)/(\beta,\ \gamma,\ d)}\right)$$
$$\times\left(\frac{\gamma\alpha/(\gamma,\ \alpha)^2}{(\gamma,\ \alpha)/(\gamma,\ \alpha,\ d)}\right)\left(\frac{\alpha dl(d,\ l)^{-1}(\alpha,\ l)^{-2}}{\alpha/(\alpha,\ \beta\gamma d)}\right)$$
$$\times\left(\frac{\beta dl(d,\ l)^{-1}(\beta,\ l)^{-2}}{\beta/(\beta,\ \gamma\alpha d)}\right)\left(\frac{\gamma dl(d,\ l)^{-1}(\gamma,\ l)^{-2}}{\gamma/(\gamma,\ \alpha\beta d)}\right)$$
$$=\varepsilon_{l/(l,d)}\left(\frac{-1}{D/d}\right)\left(\frac{d/(d,\ l)}{l/(d,\ l)}\right)\left(\frac{\alpha\beta/(\alpha,\ \beta)^2}{(\alpha,\beta)/(\alpha,\beta,d)\times\gamma/(\gamma,\alpha\beta d)}\right)$$
$$\times\left(\frac{\beta\gamma/(\beta,\ \gamma)^2}{(\beta,\ \gamma)/(\beta,\ \gamma,\ d)\times\alpha/(\alpha,\ \beta\gamma d)}\right)$$
$$\times\left(\frac{\gamma\alpha/(\gamma,\ \alpha)^2}{(\gamma,\ \alpha)/(\gamma,\ \alpha,\ d)\times\beta/(\beta,\ \gamma\alpha d)}\right).$$

由此可得到 $V(\theta_f,\ 1/4d)$ 的表达式。利用 $V(\theta,\ 1/2)=0$，不难证明 $V(\theta_f,\ 1/2d)=0$。

类似地可以证明以下两个命题：

命题 6.7 设 $f=2\alpha x_1^2+\beta x_2^2+\gamma x_3^2$，其中 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 为无平方因子的正奇数，且适合 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=1$。则 $\theta_f(z)$ 属于 $G(8D,\ 3/2,\ \varepsilon_{2l})$，

D与 l 如(6.2.1)式中所定义。对D的任一因子 d，有

$$V(\theta_f,\ 1/d)=\left(\frac{2}{d/(\alpha,\ d)}\right)V(\theta_{f'},\ 1/d),$$

$$V(\theta_f,\ 1/8d)=\left(\frac{2}{\beta\gamma/(\beta\gamma,\ d)}\right)V(\theta_{f'},\ 1/4d),$$

$$V(\theta_f,\ 1/2d)=V(\theta_f,\ 1/4d)=0,$$

其中 $f'=\alpha x_1^2+\beta x_2^2+\gamma x_3^2$，$V(\theta_{f'},\ 1/d)$和$V(\theta_{f'},\ 1/4d)$ 由命题6.6所给定。

命题 6.8 设 $f=2\alpha x_1^2+2\beta x_2^2+\gamma x_3^2$，其中 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ 为无平方因子的正奇数，且适合$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=1$。则 $\theta_f(z)$ 属于 $G(8D,\ 3/2,\ \chi_l)$，D与 l 如(6.2.1)式中所定义，对D的任一因子 d，有

$$V(\theta_f,\ 1/d)=\left(\frac{2}{d/(\alpha\beta,\ d)}\right)V(\theta_{f'},1/d),$$

$$V(\theta_f,\ 1/8d)=\left(\frac{2}{\gamma/(\gamma,\ d)}\right)V(\theta_{f'},1/4d),$$

$$V(\theta_f,\ 1/2d)=V(\theta_f,\ 1/4d)=0.$$

其中 $f'=\alpha x_1^2+\beta x_2^2+\gamma x_3^2$，$V(\theta_{f'},\ 1/d)$和$V(\theta_{f'},\ 1/4d)$ 由命题 6.6所给定。

下面我们给出一个计算$\gamma(\mathrm{gen}.f,\ n)$ 的解析表达式的例子。设 $f_p=x_1^2+x_2^2+px_3^2$，p 为一奇素数。这时 $\theta(\mathrm{gen}.f,\ z)$ 属于 $e(4p,\ 3/2,\ \chi_p)$，它是一个三维子空间。定理4.42给出了它的一组基：

$$g(\chi_p,\ 4p,\ 4p),\ g(\chi_p,\ 4,\ 4p),\ g(\chi_p,\ p,\ 4p).$$

应用第四章的符号，令

$$\lambda(n,\ 4p)=L_{4p}(2,\ id.)^{-1}L_{4p}(1,\ \chi_{-n})\sum\mu(a)\chi_{-n}(a)(ab)^{-1},$$

求和号跑遍所有与$4p$ 互素且适合 $(ab)^2|n$ 的整数对 $a,\ b$。又令

$$\alpha(n)=2(1+i)(4^{-1}(1-i)-A(2,\ n))$$

$$=\begin{cases}3\times2^{-(1+h(2,n))/2}, & 若 2\nmid h(2,\ n);\\ 3\times2^{-(1+h(2,n)/2)}, & 若 2\nmid h(2,\ n),\ n/2^{h(2,n)}\equiv1(4);\\ 2^{-h(2,n)/2}, & 若 2|h(2,\ n),\ n/2^{h(2,n)}\equiv3(8);\\ 0, & 若 2|h(2,\ n),\ n/2^{h(2,n)}\equiv7(8),\end{cases}$$

$$\beta_p(n)=p^2(p^{-1}-A(p,\ pn))$$

$$=\begin{cases}(1+p)p^{-h(p,n)/2}, & 若\ 2\mid h(p,\ n);\\ 2(p^{(1-h(p,n))/2}, & 若\ 2\nmid h(p,\ n),\ \left(\dfrac{-n/p^{h(p,n)}}{p}\right)=-1;\\ 0, & 若\ 2\nmid h(p,\ n),\ \left(\dfrac{-n/p^{h(p,n)}}{p}\right)=1.\end{cases}$$

以 δ_{pn} 表示特征 χ_{-pn} 的导子，$h(-pn)$ 表示虚二次域 $Q(\sqrt{-pn})$ 的类数。利用类数公式

$$h(-pn)=(2\pi)^{-1}\delta_{pn}^{1/2}\omega_{pn}L(1,\ \chi_{-pn}),$$

我们有

$$\lambda(pn,\ 4p)(pn)^{1/2}=\frac{16p^2}{\pi\omega_{pn}(p^2-1)}h(-pn)\gamma_p(n).$$

其中

$$\omega_{pn}=\begin{cases}6, & 若\ \delta_{pn}=3;\\ 4, & 若\ \delta_{pn}=4;\\ 2, & 其他情况.\end{cases}$$

$$\gamma_p(n)=(1-2^{-1}\chi_{-pn}(2))(1-p^{-1}\chi_{-pn}(p))(pn/\delta_{pn})^{1/2}$$
$$\times\sum_{(ab)^2\mid n,(ab,2p)=1}\mu(a)\chi_{-pn}(a)(ab)^{-1}.$$

空间 $\varepsilon(4p,\ 3/2,\ \chi_p)$ 有如下的一组基：

$$g(\chi_p,\ 4p,\ 4p)=1-\frac{32}{p^2-1}\sum_{n=1}^{\infty}h(-pn)\omega_{pn}^{-1}\alpha(pn)$$
$$\times\beta_p(n)\gamma_p(n)e(nz),$$

$$g(\chi_p,\ 4,\ 4p)=\frac{32}{p^2-1}\sum_{n=1}^{\infty}h(-pn)\omega_{pn}^{-1}\alpha(pn)\gamma_p(n)e(nz),$$

$$g(\chi_p,\ p,\ 4p)=-\frac{32}{p^2-1}\sum h(-pn)\omega_{pn}^{-1}\beta_p(n)\gamma_p(n)e(nz).$$

由命题 4.39 和命题 4.41 可以得到上述函数在 $S(4p)$ 中各个尖点的值，由命题 6.6 得到 $\theta(\mathrm{gen}.f_p,\ z)$ 在 $S(4p)$ 中各尖点的值，它们在 1/2 和 $1/2p$ 的值都是零。将它们在其他尖点的值列表如下(表 6.1)：

表 6.1

	1	$1/p$	$1/4$	$1/4p$
$g(\chi_p, 4p, 4p)$	$(1+i)/4p^{1/2}$	$-(1+i)/4$	$-\varepsilon_p p^{-1/2}$	1
$g(\chi_p, 4, 4p)$	$-(1+i)p^{1/2}/4$	0	$\varepsilon_p p^{1/2}$	0
$g(\chi_p, p, 4p)$	$(1+i)/4p^{1/2}$	$-(1+i)/4$	0	0
$\theta(\mathrm{gen}.f, z)$	$-(1+i)/4p^{1/2}$	$-(1+i)\left(\frac{-1}{p}\right)/4$	$\left(\frac{-1}{p}\right)\varepsilon_p p^{-1/2}$	1

由此可知

$$\theta(\mathrm{gen}.f_p, z)=\begin{cases} g(\chi_p, 4p, 4p)+2p^{-1}g(\chi_p, 4, 4p), & \text{若 } p\equiv 1(4); \\ g(\chi_p, 4p, 4p)-2g(\chi_p, p, 4p), & \text{若 } p\equiv 3(4). \end{cases}$$

从而我们得到

$$\gamma(\mathrm{gen}.f_p, n)=\begin{cases} \dfrac{32}{\omega_{pn}(p^2-1)}h(-pn)\alpha(pn)(2p^{-1}-\beta_p(n))\gamma_p(n), & \text{若 } p\equiv 1(4) \\ \dfrac{32}{\omega_{pn}(p^2-1)}h(-pn)(2-\alpha(pn))\beta_p(n)\gamma_p(n), & \text{若 } p\equiv 3(4). \end{cases}$$

取 $p=7$ 为例．在 f_7 所在的簇内有两个等价类，其代表可取为 $f=x_1^2+x_2^2+7x_3^2$ 及 $f'=x_1^2+2x_2^2+4x_3^2+2x_2x_3$，且 $o(f)=8$，$o(f')=4$（见 H. Brandt 和 O. Intrau[1]）．因此

$$\gamma(\mathrm{gen}.f, n)=\frac{1}{3}\gamma(f, n)+\frac{2}{3}\gamma(f', n),$$

由上述结果，我们有

$$\gamma(f, n)+2\gamma(f', n)=2\omega_{7n}^{-1}h(-7n)(2-\alpha(7n))\beta_7(n)\gamma_7(n).$$

考虑一个特殊的情况．当尖形式子空间 $S(N, 3/2, \chi)=\{0\}$ 时，$\varepsilon(N, 3/2, \chi)$ 的基就是整个空间 $G(N, 3/2, \chi)$ 的基，$\theta_f(z)$ 若属于这种类型的空间，利用上面的方法就能计算得到 $\gamma(f, n)$ 的解析表达式．实际上，这时 f 所在的簇仅有一个等价类，在 §6.1 我们已指出，当 f' 与 f 在同一个簇时，$\theta_{f'}-\theta_f$ 就是一个尖形式．

利用定理2.23及§4.3中关于$G(N, 1/2, \chi)$的维数的结果，可以发现以下一批尖形式空间仅含零元素：

$$S(4, 3/2, \chi_1),\quad S(8, 3/2, \chi_1),\quad S(8, 3/2, \chi_2),$$
$$S(12, 3/2, \chi_1),\quad S(12, 3/2, \chi_3),\quad S(16, 3/2, \chi_1),$$
$$S(16, 3/2, \chi_2),\quad S(20, 3/2, \chi_1),\quad S(20, 3/2, \chi_5),$$
$$S(24, 3/2, \chi_1),\quad S(24, 3/2, \chi_2),\quad S(24, 3/2, \chi_3),$$
$$S(24, 3/2, \chi_6),\quad S(32, 3/2, \chi_1),\quad S(32, 3/2, \chi_2),$$
$$S(64, 3/2, \chi_2).$$

利用我们在本书开头时定义的符号$N(a, b, c; n)$，通过计算，可以得到以下的结果(令$\delta(x)=1$，当x为整数时，否则，$\delta(x)=0$)：

$$N(1, 1, 1; n)=2\pi n^{1/2}\lambda(n, 4)\alpha(n),$$

$$N(1, 2, 2; n)=2\pi n^{1/2}\lambda(n, 4)\left(\alpha(n)-\delta\left(\frac{n-1}{4}\right)-\delta\left(\frac{n-2}{4}\right)\right),$$

$$N(1, 3, 3; n)=2\pi n^{1/2}\lambda(n, 12)\,(1/3-A(3, n))\,(2-\alpha(n)),$$

$$N(1, 5, 5; n)=2\pi n^{1/2}\lambda(n, 20)\alpha(n)(A(5, n)+1/5),$$

$$N(1, 6, 6; n)=2\pi n^{1/2}\lambda(n, 12)(1/3-A(3, n))\times\left(1+\delta\left(\frac{n-1}{4}\right)+\delta\left(\frac{n-2}{4}\right)-\alpha(n)\right),$$

$$N(2, 3, 6; n)=2\pi n^{1/2}\lambda(n, 12)(1/3+A(3, n))\times\left(\alpha(n)-\delta\left(\frac{n-1}{4}\right)-\delta\left(\frac{n-2}{4}\right)\right),$$

$$N(1, 1, 4; n)=\pi n^{1/2}\lambda(n, 4)\left(2\delta\left(\frac{n-1}{4}\right)+\delta\left(\frac{n-2}{4}\right)+2\delta\left(\frac{n}{4}\right)\alpha(n)\right),$$

$$N(1, 4, 4; n)=\pi n^{1/2}\lambda(n, 4)\left(2\delta\left(\frac{n}{4}\right)\alpha(n)+\delta\left(\frac{n-1}{4}\right)\right),$$

$$N(1, 2, 4; n)=\pi(2n)^{1/2}\lambda(2n, 4)\left(2\alpha(2n)-\delta\left(\frac{n}{2}\right)\delta\left(\frac{n/2-1}{4}\right)-\delta\left(\frac{n}{4}\right)\delta\left(\frac{n/4-1}{2}\right)-\frac{5}{2}\,\delta\left(\frac{n-1}{2}\right)\right),$$

$$N(1,\ 1,\ 8;n)=\pi n^{1/2}\lambda(2n,\ 4)\Big(2^{-1/2}\alpha\Big(\frac{n}{8}\Big)\delta\Big(\frac{n}{8}\Big)$$
$$+2^{1/2}\delta\Big(\frac{n}{2}\Big)\delta\Big(\frac{n/2-1}{2}\Big)+2^{-1/2}\delta\Big(\frac{n}{4}\Big)\delta\Big(\frac{n/4-1}{2}\Big)$$
$$+2^{5/2}\delta\Big(\frac{n-1}{4}\Big)\Big),$$

$$N(1,\ 4,\ 8;n)=\pi n^{1/2}\lambda(2n,\ 4)\Big(2^{-1/2}\alpha\Big(\frac{n}{8}\Big)\delta\Big(\frac{n}{8}\Big)$$
$$+2^{-1/2}\delta\Big(\frac{n}{4}\Big)\delta\Big(\frac{n/4-1}{2}\Big)+2^{-1/2}\delta\Big(\frac{n-1}{4}\Big)\Big).$$

我们也不难发现下述关系式：

$$N(1,\ 1,\ 2;n)=N(1,\ 2,\ 2;2n),$$
$$N(1,\ 1,\ 3;n)=N(1,\ 3,\ 3;3n),$$
$$N(1,\ 1,\ 5;n)=N(1,\ 5,\ 5;5n),$$
$$N(2,\ 3,\ 3;n)=N(1,\ 6,\ 6;2n),$$
$$N(1,\ 3,\ 6;n)=N(2,\ 3,\ 6;2n),$$
$$N(2,\ 2,\ 3;n)=N(1,\ 6,\ 6;3n),$$
$$N(1,\ 2,\ 6;n)=N(2,\ 3,\ 6;3n),$$
$$N(1,\ 1,\ 6;n)=N(1,\ 6,\ 6;6n),$$
$$N(1,\ 2,\ 3;n)=N(2,\ 3,\ 6;6n).$$

参 考 文 献

[1] Brandt H. und Intrau O, Tabellen reduzierter positiver ternarer quadratischer Formen, Abh.Sächs. Akad. Wiss.leipsig Math-Natur, KL45, 4(1958)

[2] Cohen H and Oesterlé J, Dimensions des espaces de formes modulaires, Modular Functions of One Variable VI, Lecture Notes in Math., vol 627, Springer-Verlag, Berlin and New York, 1977.

[3] Deligne P, La conjecture de Weil I, Publ. Math. Inst.Hautes Etud. Sci.43(1974), 273～307.

[4] Eichler M, Quadratische Formen und orthogonale Gruppen, Berlin-Göttingen-Heidelberg, Springer 1952.

[5] Hecke H, Theorie der Eisensteischen Reihen höherer Stufe und

ihre Anwendung auf Funktionentheorie und Arithmetik. Abh.Math. Sem Univ. Hamberg 5(1927), 199~224.

[6] Hecke E, Über Modulfunktionen und die Dirichletscher Reihen mit Eulerscher Produktentwicklung I, II, Math. Ann. 114(1937), 1~28, 316~351.

[7] Iwanice H, Fourier cofficients of modular forms of half-integral weight. Invent. Math. 87(1987), 385~401.

[8] Kohnen W, Newforms of half-integral weight, J. Reine Angew. Math.333(1982), 32~72.

[9] Kojima H, Cusp forms of weight 3/2, Nagoya Math. J., 79 (1980), 111~122.

[10] Niwa S, Modular forms of half-iutegral weight and the integral of certain theta functions, Nagoya Math.J., 56(1975), 147~161.

[11] Pei, D.Y, Eisenstein series of weight 3/2; I, II, Trans. Amer. Math. Soc., 274(1982), 573~606, 283(1984), 589~603.

[12] 裴定一,不定方程 $ax^2+by^2+cz^2=n$ 解的个数。科学通报 24 (1982), 1476~1479.

[13] 裴定一,权为半整数的 Eisenstein 空间的提升。科学通报, 24(1986), 1841~1844.

[14] 裴定一,权为半整数的 Eisenstein 空间。数学学报, 30(1987), 512~522.

[15] Pei, D.Y, A note on representations of integers by ternary quadratic forms, Algebraic Geometry and Algebraic Number Theory, Nankai Series in Pure, Applied Math.and Theoretical Physics vol.3, 1992, 92~101.

[16] Petersson H, Über die Entwicklungskoeffizienten der ganzen Modulformen und ihre Bedentung für die Zahlentheorie, Abh. Math.Sem. Univ.Hamburg 8(1931), 215~242.

[17] Ponomarev P, Ternary quadratic forms and Shimura's correspondence.Nagoya Math.J., 81(1981), 123—151.

[18] Rankin R A, Contributions to the theory of Ramanujan's function $\tau(n)$ and similar arithmetical functions I, II, III, Proc, Cambridge Phil. Soc., 35(1939), 351~356, 357~372, 36(1940), 150~151.

[19] Schulze-Pillot R, Thetareihen positiv definiter quaqdratischer Formen, Inven. Math., 75(1984), 283~299.

[20] Serre J P, and Stark H. M, Modular forms of weight 1/2, Modular Function of One Variable VI, Lecture Notes in Math. vol. 627, Springer-Verlag, 29~67.

[21] Siegel C L, Die Funktionalgleichungen einiger Dirichletscher Reihen, Math.z, 63(1956), 363~373(=Abh.III, 228~238).

[22] Shimura G, Introduction to the arithmetic theory of automorphic functions, Iwanami Shoten, Publishers and Princeton University Press, 1971.

[23] Shimura G, On modular forms of half integral weight, Ann.of Math., 97(1973), 440～481.

[24] Shimura G, On the holomorphy of certain Dirichlet series, Proc. London Math. Soc.(3)31(1975), 79～98.

[25] Sturm J, Special values of zeta functions and Eisenstein series of half integral weight, Amer.J.Math., 102(1980), 219～240.

[26] Sturm J, Theta series of weight 3/2, J. of Number Theory, 14 (1982), 353～361.