二十一世纪的数学

Mathematics in the 21st Century

陈省身
(南开大学数学研究所所长)

编者按 本文为作者在纪念国家自然科学基金十周年学术会议上的发言，由中国数学学会根据录音整理。本刊作了少量删节。文中小标题是编辑部加的。

从两个故事谈起

我先讲两个故事。

我们都知道欧几里得(Euclid)的《几何原本》，这是一本数学方面的论著，完成于2000多年以前。它对于人类是一个很伟大的贡献。书中包括了分析和代数，不限于几何，目的是用推理的方法得到几何的结论。其中，第13章的内容讲的是正多面体的面数。正多面体就是这样一个多面体：它的面互相交合，同时通过一个顶点的每个面的边数是相同的。正多面体在平面上的情形是正多边形。正多边形很多，有正三角形、正四边形……等等。当时发现，到了空间，讨论正多面体就不这么简单了。空间的正多面体少得多，一共有五种正多面体：四面体、六面体、八面体、十二面体，最大的一个是正二十面体。

有些人可能会想，数学家们一天到晚没有事情可做，无中生有，搞这些多面体有什么意思？不过我跟张存浩先生讲，现在化学里的钛化合物就跟正多面体有关系。这就是说，经过2000年之后，正多面体居然会在化学里有用，有些数学家正在研究正多面体和分子结构间的关系。我们也知道，生物学上的病毒(Virose)也具有正多面体的形状。这表明，当年数学家的一种"空想"，经历了这么长的时间之后，竟然是很"实用"的。

我再讲一个许多人都在讲的故事。有两个中学时代的朋友，多年未见了，一天忽然碰到。甲对乙说："你这些年在做什么事？"乙说："我在研究人口问题"。甲当然很想看看老朋友的工作，于是拿来乙的人口学论文一读，发现论文出现很多π。他觉得很奇怪。π是圆周率，圆周与直径之比，怎么会和人口学扯上关系？这个问题与上面的正多面体问题说明了同样的一点，即基础科学，特别是纯粹数学很难说将来会在什么时候会有用，并且起到很重要的作用。如果要求基础科学立刻就要有应用，那是太短视了。

数学家经常在家里想问题，想出来的东西为什么会有用？我想，主要的原因就是它的基础非常简单，又十分坚固，它的结果是根据逻辑推理得出来的，所以完全可靠。逻辑推理比实验证实所获的结果要更为可靠些。数学由于它的逻辑可靠性，因而是一门有坚实根底的学问，这是数学有用的一种解释。

还有一个问题是，为什么许多不同的学科往往会用到相同的数学。这也是弄不清楚的问题。一种解释是好的数学太少。数学要讲应用，就往往归结到那几种特别好的数学，这种好数学也不多。

关键是培养人才

我的题目是讲21世纪的数学，也就是要讲中国的数学该怎么发展，如何使中国数学在21世纪占有若干方面的优势。办法说来很简单，就是要培养人才，找有能力的人来做数学，使优秀的年青人在数学上获得发展。具体一些讲，就是要在国内办十个够世界水平的、第一流的数学研究院。中国这么大，不仅北京要有，别的地方也应该办。

至于什么叫够水平，第一流，这并没有严格的定义。我只能说南开数学所不够水平，要达到世界

水平还需要很多的努力，

中国科学的根子必须在中国。中国科学技术在本土上生根，然后才能长上去。可是要请有能力的人来做数学很不容易。我从1984年开始组建南开数学所。开始时想，请有能力的人来所工作就是了。可是由于种种原因，很难做到这一点。我们办第一流的数学研究所就要有第一流的数学家。有了第一流的数学家，房子破一点，设备差一点，书也找不到，研究所仍是第一流。房子很漂亮，书很多，也有很贵的计算机，如果没有人来做第一流的工作，又有什么用处？我看到这种情形，就改变想法，努力训练自己的年青人，培养自己的数学家，送他们出国学习，到世界各地，请最好的数学家给予指导。

我很高兴地告诉大家，这些措施已经开始出现成效。比方说贺正需，他到美国加州大学圣地亚哥分校跟M.弗里德曼学。弗里德曼得过菲尔兹奖，是年青的领袖人物。他亲自对我说，贺正需是他最好的学生。再比方说，王蜀光，他是王宽诚基金会资助出国的，在选拔考试中获第一名。我介绍他到英国牛津大学跟S.唐纳森学习。唐纳森是英国当代最了不得的年轻数学家。我想他大概还不到30岁，现已成为牛津大学的教授。王蜀光一年前已完成了博士论文。另一位王荣光也是王宽诚基金会资助出国的，他到美国哈佛大学跟C. Taubes 读博士学位，今年也做完了论文。还有一位是张伟平，他的老师D.别斯缪(Bismut)是法国最有名的年轻数学家。张伟平在巴黎只用两年时间完成了博士论文，现在在巴黎的Institut des Hautes Etudes 做博士后。我还可以提到一些人，这里不能一一列举了。这样的人才，希望能留住他们。

主流数学与非主流数学

数学有很多特点。比如做数学不需要很多设备，现在有电子通讯(E—Mail)，要的资料很容易拿到。别的学科必须依赖设备，大家争分夺秒在一些最主要的方向上工作，在主流方向作出自已的贡献。数学则不同，由于数学的方向很多，又是个人的学问，不一定大家都集中做主流数学。我倒觉得可以鼓励人们不一定在主流数学上做。常有的情形是现在不是主流，过几年却成为主流了。这里我想讲讲我个人的经验。1943年，我在西南联大教书，应邀从昆明到美国普林斯顿高等研究院讲学。靠近普林斯顿有一个小城叫New Brunswick，是新泽西州立大学所在地。我8月到普林斯顿不久，就在New Brunswick参加美国数学会的暑期年会。由于近，我也去听听演讲，会会朋友。有一次我和一位美国非常有地位的数学家聊天，他问我做什么，我说微分几何，他立刻说:“It is dead(它已死了)”。但就在战后，微分几何成了主流数学。因此，我觉得做数学的人，有可能找到现在并非主流，但很有意义、将来很有希望的方向。主流方向上集中了世界上许多优秀人物，投入了大量的经费，你抢不过他们，赶不上，不如做其它同样很有意义的工作。我希望中国数学在某些方面能够生根，搞得特别好，具有自己的特色。这在历史上也有先例。例如:第二次世界大战以前，波兰就搞逻辑、点集拓扑。他们根据一些简单公设推出许多结论，成就不小。另外如芬兰，在复变函数论上取得成功，一直到现在，例如在拟共形映照(Quasi Conformal Mapping)上的推广一直在世界上领先。因为他们做的工作，别的国家不做，他们就拥有该领域内世界上最强的人物，我还可以举出更多的例子。

办好十个数学研究院

我刚才提到要办十个够水平的数学研究院，怎样才会够水平呢？

第一、应当开一些基本的先进课程。学生来了，要给他们基本训练，就要为他们开高水平的课。所谓基本训练有两方面。一是培养推理能力，学生应该知道什么是正确的推理，什么是不正确的推理，必须保证每步都正确，不能急于得结果。马马虎虎，最后一定出毛病。二是要知道一些数学，对整个数学有个判断。从前是与分析有关的学科较重要。20世纪以来是代数较时髦，群论、群表示论，后来是拓扑学，等等。总之，好的研究中心应该能开这些基本课程。我认为，中国要做到这一点是不困难的。无非是两条:一是讲授研究院的某些课程，给予奖金;二是也可请几个国外的人来教。这样，数学研究院会有一个完整的课程系统。

第二、我想必须要有好的学生。我们每年派去参加国际奥林匹克数学竞赛的中学生都很不错。虽然中学里数学念得好将来不一定都研究数学，但希望有一部分人搞数学，而且能有成就。昨天，我和在北京的一些数学竞赛中获奖的学生见面，谈了话。我对他们说，搞数学的人将来会有大的前途，10年，20年之后，世界上一定会缺乏数学人才。现在的年青人不愿念数学，势必造成人才短缺。学生不想念数学也难怪，因为数学很难，又没有把握。苦读多年之后，往往离成为数学家还很远。同时，又有许多因素在争夺数学家，例如计算机。做一个好的计算机软件，需要很高的才能，很不容易，不过它与数学相比，需要的准备知识较少。搞数学的人不知要念多少书，好象一直念不完。这样，有能力的人就转到计算机领域去了。也

有一些数学博士，毕业后到股票市场做生意。例如预测股票市场的变化，写个计算机程序，以供决策使用，其收入比大学教授高得多了。因此，数学人才的流失，是世界性的问题。

相比之下，中国的情况反而较为乐观，因为中国的人才多，流失一些还可以再培养。我们应采取一个态度，中国变成一个输送数学家的工厂。出去的人希望能回来，如果不回来，我们仍然继续送。中国有的是人才，送出去一部分在世界上发挥影响也是值得的。我们要做的事是花不多的钱，打好基础，开出好的课。基础搞得好了，至于出去的人回来不回来可以变得次要些。这是我的初步想法。参加国际奥林匹克数学竞赛的人，数学都是很好的，如果他们进大学数学系，我建议立刻给奖学金。钱很有限，但效果很大，对别人也是一种鼓励。对好的数学系学生来说，到国外去只是时间问题。国内做得很好的话，到了国外不必做研究生，可以直接当教授。中国已有条件产生第一流的数学家，大家要有信心。

培养学生我主张流动。19世纪的德国数学当然是世界第一。德国的大学生可以到任何大学去注册。这学期在柏林听Weierstrass的课，下学期到哥廷根听Schwarz的课，随便流动。教授也可以流动。例如柏林大学已有M.普朗克 A.爱因斯坦，一个理论物理学家在柏林大学自然没有发展的希望，就不妨到别的学校去创业。我希望中国的学生、教授都能流动。教授可以到别的学校去教课，各个数学研究院的教授也能互相交换。

选择好数学研究的方向

我想再讲点数学。刚才说过，选择数学研究方向并不一定要跟主流，可以选自己特别喜欢的那些分支。不过，一个数学家应当了解什么是好的数学，什么是不好的或不大好的数学。有些数学是具有开创性的，有发展的，这就是好的数学。还有一些数学也蛮有意思，但渐渐变成一种游戏了。所以选择好的数学研究方向是很重要的。

让我举例来谈谈。大家是否知道有个拿破仑定理？定理是说任给一个三角形，各边上各作等边三角形，然后将这三个等边三角形的重心联起来，又是一个等边三角形。各边上的等边三角形也可朝里面做，得到两个解，等等。这就不是好的数学，因为它难有进一步的发展，好象一种游戏。

那么，什么是好的数学？比方说解方程就是。搞数学都要解方程。一次方程易解。二次方程就不同。$x^2-1=0$有实数解。$x^2+1=0$就没有实数解。后来就加进复数，讨论方程的复数解。大家知道的代数基本定理就是n次代数方程必有复数解。这一问题有很长的历史。当年的有名数学家欧拉(1707～1783)就考虑过这个问题，结果一直没有证出来。后来还是高斯(1771～1855)发现了复数与拓扑有关系，有了新的理解。因为模等于1的复数表示一个圆周，在这圆周上就会有很多花样。第一个证明代数基本定理的是高斯，而且给了不止一个证明。

如果从解$f(x)=0$到解$f(x,y)=0$，那就进到研究曲线，当然也可能没有解，一个零点也没有。于是花样就来了，假使你在$f(x,y)=0$中把x，y都理解为复数，则两个复数相当于四维实空间，这就很麻烦，出现了复变函数论中的黎曼曲面。你要用黎曼曲面来表示这个函数，求解原来的方程$f(x,y)=0$，那就要用很多的数学知识。其中最要紧的概念是亏格(Genus)g。你把$f(x,y)=0$的解看成曲面之后，那么曲面有多少个圈，球面、环面等等的花样就很多，都和g有关。

此外，也可以有另外的花样。如假定$f(x,y)=0$的系数都是整数，你也可以讨论这一方程的整数解，这个问题就很难了。直到前几年才发现这一方程是否有整数解和亏格g有密切关系。当$g=0$时，有无穷多个整数解。$g=1$则有些特别的性质。当$g>1$时，德国的伐尔廷斯(Faltings)在1984～1985年间证明了$f(x,y)=0$的整数解至多为有限个。这一结果和费马定理有关。那是说$x^n+y^n=z^n(n>3)$没有正整数解。这还没有解决费马问题，但是前进了一大步。

确实，数学可以引出很深的观念。数学中我愿把数论看作应用数学。数论就是把数学应用于整数性质的研究。我想数学中有两个很重要的数学部门，一个是数论，另一个是理论物理。理论物理也是用很多数学的部门。

我还想讲一点，比方说最近一个时期最热闹的数学，即当前的主流数学是什么？刚才我说过我并不喜欢大家都去搞主流数学，不过主流数学毕竟是重要的。所谓主流数学，是指一个伟大的数学贡献，深刻的定理，含义很广，证明很不简单。如果在当前选一个这样的贡献，我想那就是Atiyah—Singer指数定理。Atiyah是英国皇家学会会长。这个指数定理可看成是上面所谈问题的近代发展，即将代数方程、黎曼曲面、亏格理论等从低维推广到高维和无穷维。

因此，我觉得数学研究不但是很深、很难、很强，而且做到一定的地步仍然维持一个整体。到现在为止，数学没有分裂为好几块，依旧是完整的。尽管现代数学的研究范围在不断扩大，有些观念看来比较次要，慢慢就被丢掉了，但基本的观念始终在维持着。

(责任编辑　蔡德诚)