调和分析讲义

大连理工大学　王文栋

2014.2

Abstract

调和分析也叫Fourier分析，形成于18世纪，来源于Fourier级数，主要研究函数的Fourier变换以及相关问题. 20世纪调和分析实变理论得到了深入发展，Hardy-Littlewood极大算子、Littlewood-Paley理论成了近代调和分析的重要工具. 50年代奇异积分理论的产生、70年代Hardy空间的实变理论的形成都为当代调和分析的发展注入了新的活力， 特别是Calderon-Zygmund奇异积分理论的发展以及在偏微分方程中的应用，可以说是五、六十年代调和分析最为辉煌的成就之一. 算子的有界性以及函数空间的刻画是调和分析的两个中心内容. 调和分析基本理论不仅对于实分析和函数论有重要的意义，对其它的数学领域的发展也有重要的作用，比如偏微分方程和概率论.

在本讲义中，我们将介绍调和分析基础的一般理论，具体地说：第一章我们提供了所需要的实变函数泛函分析基础知识，参考 [3, 4] 与[12]；第二章我们介绍Fourier级数及其理论，主要参考 [13]；第三章是Fourier变换的基本理论，主要参考 [9, 10]，[2]；第四章至第八章是调和分析的现代方法：Hardy-Littlewood 极大值函数， Marcinkiewicz 插值定理，Calderón-Zygmund 奇异积分算子，Littlewood-Paley 理论与Besov空间，振荡积分等，我们主要参考[8]与[14].

1 基础知识

1.1 可测函数，可积函数

Definition 1.1. 外测度（$Lebesgue$ 测度）：设E是R^n中的点集，$\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$是R^n中的开区间序列，且$\cup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E$， 则我们定义 E的外测度m^*E为：

$$m^*E = \inf_{I_n\, open, \cup_{n=1}^{\infty} I_n \supset E} \sum_{n=1}^{\infty} |I_n|.$$

•外测度的性质如下：

$$\begin{aligned}
&i) m^*E \geq 0, m^*\emptyset = 0;\\
&ii) If A \supset B, then\, m^*A \geq m^*B;\\
&iii) m^*(\cup_{n=1}^{\infty} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m^*(A_n);\\
&iv) If\, \rho(A, B) > 0, then\, m^*(A \cup B) = m^*(A) + m^*(B).
\end{aligned}$$

Definition 1.2. 可测集$(measurable\ set)$：设E，T是R^n中的点集，我们称E是可测的或者是$Lebesgue$ 可测的，如果下列$Caratheodory$条件成立：

$$m^*T = m^*(T \cap E) + m^*(T \cap E^c), \quad \forall T \subset R^n. \tag{1}$$

•可测集的性质：
1）若E可测，则E^c可测；
2）若E_k可测，$k = 1, 2, \cdots$, 则E_k的可数交集或者可数并集都是可测的；
3）R^n中的开集，闭集，Borel集（开集的σ域）都是可测的.

Definition 1.3. 非负可测函数：设$f(x)$定义在R^n中的可测集E上，可由简单函数$\psi_m(x)$逼近，$i.e.$

$$f(x) = \lim_{m\to\infty} \psi_m(x).$$

•可测集E上的非负可测函数$f(x)$：

$$\begin{aligned}
&i) \Leftrightarrow \forall a > 0, \{x; x \in E,\ f(x) > a\}\, is\, measurable\, in\, R^n;\\
&ii) \Leftrightarrow G(E, f) = \{(x, z); x \in E,\ 0 \leq z < f(x)\}\, is\, measurable\, in\, R^{n+1}.
\end{aligned}$$

Definition 1.4. 可测函数：设$f(x)$定义在R^n中的可测集E上，若$f(x)$的正部$f^+(x)$与负部$f^-(x)$均是可测的，则称$f(x)$为可测函数.

•可测集E上的可测函数$f(x)$：
1）等价于 $\forall a \in R,\ \{x; x \in E,\ f(x) > a\}$在$R^n$中是可测的，
2）等价于 $\forall a \in R,\ \{x; x \in E,\ f(x) < a\}$在$R^n$中是可测的，

3）若f,g 可测，则它们的线性组合也是可测的，
4）序列$f_k(x)$可测，则$\sup_k f_k(x)$, $\inf_k f_k(x)$, $\limsup_k f_k(x)$, $\liminf_k f_k(x)$均是可测的，
5）若f 可测，则 $|f|^p$ $(p>0)$ 是可测的，
6）（Egoroff定理: 几乎处处收敛蕴含内部一致收敛）若E上的可测序列$f_k(x)\to f(x)$ a.e.， 且$|E|<\infty$， $|f(x)|<\infty$. 则去掉某一个测度任意小的集合上该序列一致收敛.
7）（Lusin 定理：可测函数内部是连续的）$f(x)$在可测集E上可测，几乎处处有限，则在去掉某个任意小的集合后的闭集上，$f(x)$连续.
推论：$f(x)$在可测集E上可测，几乎处处有限，且$m(E)<\infty$，则对于任意的$\delta>0$，存在连续函数g， s.t.

$$\sup_E|g|\le ess\sup_E|f|,\quad |\{x,x\in E,f(x)\ne g(x)\}|\le\delta.$$

（参考周民强实变函数P61,P138）
8）（Riesz 定理：依测度收敛蕴含 a.e.收敛）若$\forall\sigma>0$，

$$\lim_{k\to\infty}|\{x;x\in E,|f_k-f|>\sigma\}|=0,$$

则存在$f_k(x)$的子列a.e.收敛.
推论：可测函数$f_k(x)$在L^p中收敛，则存在$f_k(x)$的子列a.e.收敛.

Definition 1.5. 非负函数$f(x)$的积分有意义当且仅当在R^n中的可测集E上，$f(x)$为可测函数. 积分值为函数下方图像的测度. 函数$f(x)$的积分有意义当且仅当$f(x)$的正部负部之一积分值有限. 若可测函数$f(x)$其正部负部积分值均有限，则称其为*Lebesgue*可积或者简称可积.

•可测集E上的非负可测函数$f_k(x)$:
1）（Levi 定理：单调，积分与极限换序）$f_k(x)$单调上升几乎处处收敛于$f(x)$，则

$$\int_E f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx,$$

2）（Lebesgue 基本定理：级数，积分与求和换序）$\sum_{k=1}^{\infty}f_k(x)=f(x)$，则

$$\int_E f(x)dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_E f_k(x)dx$$

3）（Fatou 引理）

$$\int_E\liminf_{k\to\infty}f_k(x)dx\le\liminf_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx$$

•可测集E上的可积函数的性质$f_k(x)$:
1）积分的绝对连续性：，
2）（Lebesgue 控制收敛定理：积分与极限换序）$\lim_{k\to\infty}f_k(x)=f(x)$ a.e.，且$|f_k|\le F$， 其中F可积，则

$$\int_E f(x)dx=\lim_{k\to\infty}\int_E f_k(x)dx$$

3）（Fubini 定理）可积函数可以积分换序.

最后，我们引入可测函数的最常用的空间 L^p空间，设集合Ω为R^n中的开集，定义$L^p(\Omega)$空间如下：

Definition 1.6. *1*） $L^p(\Omega)$空间（$1 \le p < \infty$）：$f(x)$为Ω上的可测函数， 且 $\|f\|_{L^p(\Omega)} < \infty$， 这里

$$\|f\|^p_{L^p(\Omega)} \doteq \int_\Omega |f|^p dx.$$

2）$L^\infty(\Omega)$空间：$f(x)$为Ω上的可测函数， 且 f 本质有界，*i.e.* $ess\sup_{x\in\Omega}|f(x)| < \infty$.

- 有的时候我们会用到复的L^p空间，这时$f = u + iv$满足，i）u, v是实的可测函数；ii）$|f| = \sqrt{|u|^2 + |v|^2}$在实的$L^p$空间里.

1.2 Banach 空间，L^p空间的性质

1.2.1 Banach 空间

Definition 1.7. 实的（复的）线性空间：设X为非空集合，K为实数域（复数域）. X上定义加法与数乘，满足下列两个条件.
1）X上的加法有交换律，结合律，X有唯一零元0，唯一负元；*i.e.* 对于$x, y \in X$

$$x + y = y + x, \quad x + y + z = y + z + x, \quad 0 + x = x, \quad x + (-x) = 0.$$

2）数乘满足分配律结合律，单位元1 作用不变，

$$\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y, \quad (\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta y, \quad \alpha(\beta x) = (\alpha\beta x), \quad 1x = x.$$

则X按照上述加法数乘形成实的（复的）线性空间，也叫向量空间.

Definition 1.8. 线性流形M：线性空间X的一个子集M满足

$$x + y, \alpha x \in M, \quad \forall x, y \in M, \quad \forall \alpha \in K.$$

Definition 1.9. 线性赋范空间：实的线性空间（或者复的）X，若有从X到实数R的映射$\|\cdot\|$满足下列条件，

$$\begin{aligned} &i)\|x\| \ge 0; \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;\\ &ii)\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|;\\ &iii)\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|; \end{aligned}$$

这里$x, y \in X$， $\alpha \in K$. 我们称X为实的（复的）线性赋范空间.

Definition 1.10. *Banach*空间：完备的线性赋范空间，*i.e.* 所有的*Cauchy* 列都收敛.

1.2.2 L^p空间的性质

对于L^p空间，我们有如下的结论：

Theorem 1.1. *1*）L^p空间（$1 \le p \le \infty$）是*Banach*空间；
2）L^p空间（$1 \le p < \infty$）是整体连续性的. *i.e.* 对于$h \in R^n$，我们有

$$\lim_{h \to 0} \|f(x+h) - f(x)\|_{L^p} = 0.$$

（利用*Lusin* 定理与控制收敛定理）
3）L^p空间（$1 \le p < \infty$）， $C_0^\infty(\Omega)$ 在其中稠密；其中$C_0^\infty(\Omega)$定义为支集在Ω内部且无穷次可微的函数.（利用磨光算子逼近，详细见*1.3*节）
4）L^p空间（$1 \le p < \infty$）是可分空间；（利用*3*）与魏尔斯特拉斯逼近定理）
5）L^p空间 （$1 < p < \infty$）是自反空间，*(*参考*[4] P138* 构造法或者*[12] P15-21* 利用*Clarkson*不等式 *)*且 L^p的对偶空间是 L^q，其中$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$；

这里我们只证明1）-3），4）-5）略，详见教科书.

按照定义，L^p空间显然是线性空间，并且满足线性赋范空间的i)-ii)，为了说明范数的第三条性质，我们给出如下的三个引理：

Lemma 1.2. （*Young inequality*）

i）设$a \ge b > 0$， $0 \le \alpha \le 1$，则

$$a^\alpha b^{1-\alpha} \le a\alpha + b(1-\alpha). \tag{2}$$

ii) 设$a, b > 0$，$1 < p, q < \infty$，且$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，则

$$ab \le \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{3}$$

证明：不妨设$a > b > 0$，$0 < \alpha < 1$，由拉格朗日中值定理知，对于$x > 1$，

$$x^\alpha - 1 = \alpha\xi^{\alpha-1}(x-1) \le \alpha(x-1), \quad 1 < \xi < x.$$

令$x = \frac{a}{b}$，则我们有

$$(\frac{a}{b})^\alpha - 1 \le \alpha(\frac{a}{b} - 1).$$

两边乘以b，我们得到不等式（2）.

我们把$\|f(x)\|_{L^p(\Omega)}$简记为$\|f\|_{L^p}$或者$\|f\|_p$.

Lemma 1.3. （*Hölder inequality*）

设$f(x) \in L^p(\Omega)$，$g(x) \in L^q(\Omega)$，其中$1 \le p, q \le \infty$，且$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. 则我们有$f(x)g(x) \in L^1(\Omega)$，而且

$$\|f(x)g(x)\|_{L^1(\Omega)} \le \|f(x)\|_{L^p(\Omega)} \|g(x)\|_{L^q(\Omega)}.$$

证明：不妨设$\|f\|_p\|g\|_q > 0$. 利用不等式（3），我们有

$$\frac{|f|}{\|f\|_p}\frac{|g|}{\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\Big(\frac{|f|}{\|f\|_p}\Big)^p + \frac{1}{q}\Big(\frac{|g|}{\|g\|_q}\Big)^q$$

两边积分，证毕. $\sharp$

Lemma 1.4. （*Minkowski inequality*）

设$f(x), g(x) \in L^p(\Omega)$，其中$1 \leq p \leq \infty$. 则我们有 $f(x)+g(x) \in L^p(\Omega)$，而且

$$\|f(x)+g(x)\|_{L^p(\Omega)} \leq \|f(x)\|_{L^p(\Omega)} + \|g(x)\|_{L^p(\Omega)}.$$

证明：不妨设$1 < p < \infty$，由Hölder不等式我们得到

$$\begin{aligned}\int_\Omega |f+g|^p dx &\leq \int_\Omega |f+g||f+g|^{p-1} dx \\ &\leq (\|f\|_p + \|g\|_p)\|f+g\|_p^{p-1}\end{aligned}$$

证毕. $\sharp$

上述引理表明：L^p空间是线性赋范空间.

定理 1.1的 证明：

1）为了验证L^p空间是Banach空间，我们还需要证明任何Cauchy 列都是收敛的.

Case 1: $1 \leq p < \infty$. 设$\{f_k\}_{k=1}^\infty$ 是L^p空间中的Cauchy 列： $\forall \varepsilon > 0$，存在$M > 0$，使得对于任意的$k > M$及任意的自然数l，都有

$$\|f_k - f_{k+l}\|_{L^p} \leq \varepsilon.$$

从而存在子列$\{f_{k_j}\}_{j=1}^\infty$ s.t.

$$\|f_{k_{j+1}} - f_{k_j}\|_{L^p} \leq 2^{-j}.$$

令 $v_m = \sum_{j=1}^m |f_{k_{j+1}} - f_{k_j}|$，则 由Minkowski不等式知 $\|v_m\|_p \leq 1$.

又有单调收敛，我们有$v_m \to v$. 根据 Fatou 引理，

$$\|v\|_p = \|\lim_{m\to\infty} v_m\|_p \leq \liminf_{m\to\infty} \|v_m\|_p \leq 1.$$

因此 $\sum_{j=1}^\infty (f_{k_{j+1}} - f_{k_j}) + f_{k_1}$ 点态收敛，令其收敛于 f. 对于上述的$\varepsilon > 0$，存在$M > 0$，使得$k > M$时满足 （再根据 Fatou 引理）

$$\|f - f_k\|_p = \|\lim_{j\to\infty} f_{k_j} - f_k\|_p \leq \liminf_{j\to\infty} \|f_{k_j} - f_k\|_p \leq \varepsilon.$$

这说明 $f \in L^p$，并且 在L^p的意义下$f_k \to f$.

Case 2: $p = \infty$. 注意到：去掉某一个零测集外，$\{f_k\}$ 是Cauchy 列并且一致收敛，故极限有界.

2）不妨设Ω为R^n， 其他区域可以零延拓成全空间.

$\forall\varepsilon>0$，由积分的绝对连续性知，存在R^n中有限测度的集合K上的可测函数g_0满足

$$\|f-g_0\|_{L^p(R^n)}\leq\varepsilon/6,\quad g_0(x)=0,\quad x\in R^n\setminus K$$

并且$|g_0|\leq M$.

再由Lusin 定理知，存在R^n上的连续函数g，使得

$$|\{x,g(x)\neq g_0(x)\}|\leq\big(\frac{\varepsilon}{12M}\big)^p,\quad |g|\leq M,x\in R^n.$$

对于连续函数g, 由控制收敛定理，我们知道存在$\delta>0$，使得 $|h|\leq\delta$，恒有

$$\|g(x+h)-g(x)\|_{L^p(R^n)}\leq\varepsilon/3$$

因此，$\forall\varepsilon>0$，当$|h|\leq\delta$，恒有

$$\begin{aligned}
&\|f(x+h)-f(x)\|_{L^p(R^n)}\\
&\leq\|f(x+h)-g_0(x+h)+g_0(x+h)-g_0(x)+g_0(x)-f(x)\|_{L^p(R^n)}\\
&\leq\varepsilon/3+\|g_0(x+h)-g_0(x)\|_{L^p(R^n)}\\
&\leq\varepsilon/3+\|g_0(x+h)-g(x+h)+g(x+h)-g(x)+g(x)-g_0(x)\|_{L^p(R^n)}\\
&\leq\frac{2}{3}\varepsilon+\|g(x+h)-g(x)\|_{L^p(R^n)}\leq\varepsilon.
\end{aligned}$$

证毕. $\sharp$

3）证明思路见下一节.

1.3 卷积与恒等逼近

Definition 1.11. 卷积定义：设$f(x),g(x)$为R^n上的可测函数，若它们的乘积$f(x-y)g(y)$对 $a.e.$ 的$x\in R^n$是 $y\in R^n$的可积函数，则

$$f*g(x)=\int_{R^n}f(x-y)g(y)dy$$

称为f与g的卷积.

•卷积性质：

1）（线性）

$$f*(g+h)=f*g+f*h,\quad f*(cg)=cf*g,$$

2）（交换性）

$$f*g=g*f,$$

3）（结合性）

$$(f*g)*h=f*(g*h)$$

Lemma 1.5. （积分形式的*Minkowski inequality*）
设$f(x,y)$是$R^m\times R^n$上的可测函数，则对于任意的$1\le p<\infty$， 我们有

$$\Big(\int_{R^m}|\int_{R^n}f(x,y)dy|^pdx\Big)^{1/p}\le\int_{R^n}\Big(\int_{R^m}|f(x,y)|^pdx\Big)^{1/p}dy$$

证明：对于$1<p<\infty$, 令 $\frac{1}{q}+\frac{1}{p}=1$，则 由对偶性知

$$\begin{aligned}&\Big(\int_{R^m}|\int_{R^n}f(x,y)dy|^pdx\Big)^{1/p}\\ \le&\sup_{g\in L^q,\|g\|_q=1}\Big(\int_{R^m}\int_{R^n}f(x,y)dyg(x)dx\Big)\\ \le&\int_{R^n}\Big(\int_{R^m}|f(x,y)|^pdx\Big)^{1/p}dy\end{aligned}$$

Lemma 1.6. （*Young inequality*）
1）设$f\in L^1(R^n)$， $g\in L^p(R^n)$（$1\le p\le\infty$），则$f*g\in L^p(R^n)$，且

$$\|f*g\|_{L^p(R^n)}\le\|f\|_{L^1(R^n)}\|g\|_{L^p(R^n)}.$$

2）设$f\in L^r(R^n)$， $g\in L^q(R^n)$，则$f*g\in L^p(R^n)$，且

$$\|f*g\|_{L^p(R^n)}\le\|f\|_{L^r(R^n)}\|g\|_{L^q(R^n)},$$

这里$1\le r,p,q\le\infty$，且$1+\frac{1}{p}=\frac{1}{r}+\frac{1}{q}$.

证明：我们只证第一个不等式，第二个略. 设$1<p<\infty$，其他情况显然. 则由积分形式的Minkowski不等式，

$$\begin{aligned}\Big(\int_{R^n}|\int_{R^n}f(x-y)g(y)dy|^pdx\Big)^{1/p}&\le\int_{R^n}\Big(\int_{R^n}|f(x-y)g(y)|^pdx\Big)^{1/p}dy\\ &\le\|f\|_{L^1(R^n)}\|g\|_{L^p(R^n)}.\end{aligned}$$

Definition 1.12. 伸缩函数族：设$\phi\in L^1(R^n)$，$\varepsilon>0$，令$\phi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-n}\phi(\frac{x}{\varepsilon})$，则称$\phi_\varepsilon(x)$为$\phi$的伸缩函数族.

•卷积性质：设$\phi\in L^1(R^n)$，$\varepsilon>0$. 则

$$\begin{aligned}&i)\int_{R^n}\phi_\varepsilon(x)dx=\int_{R^n}\phi(x)dx;\\ &ii)\lim_{\varepsilon\to0}\int_{|x|>\delta}\phi_\varepsilon(x)dx=0,\quad\delta>0.\end{aligned}$$

Theorem 1.7. （逼近定理） 设$\phi \in L^1(R^n)$，$\varepsilon > 0$，且$\|\phi\|_{L^1(R^n)} = 1$. 则

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \|\phi_\varepsilon * f - f\|_{L^p(R^n)} = 0,$$

这里$f \in L^p(R^n)$且$1 \le p < \infty$.

证明：首先

$$\begin{aligned} \phi_\varepsilon * f(x) - f(x) & \\ &= \int_{R^n} \phi_\varepsilon(y)(f(x-y) - f(x))dy \\ &= \int_{R^n} [f(x - \varepsilon y) - f(x)]\phi(y)dy \end{aligned}$$

则由积分形式的Minkowski不等式，

$$\begin{aligned} \|\phi_\varepsilon * f - f\|_{L^p(R^n)} &\le \int_{R^n} \|f(\cdot - \varepsilon y) - f(\cdot)\|_p |\phi(y)| dy \\ &= \int_{|y| \le r} + \int_{|y| > r} \equiv I_1 + I_2. \end{aligned}$$

下面，我们只需证明：$\forall \eta > 0$, 存在$\varepsilon_0 > 0$, s.t. 对于所有的$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$，都有

$$I_1 + I_2 < \eta.$$

第一步，由于 $f \in L^p(R^n)$及$\phi \in L^1(R^n)$， 我们可以取r充分大使得

$$I_2 \le 2\|f\|_p \int_{|y|>r} |\phi(y)|dy < \eta/2.$$

固定这样的选择r.

第二步，估计I_1我们有

$$I_1 \le C(n,r)\|f(\cdot - \varepsilon y) - f(\cdot)\|_p,$$

注意到这里$|y| \le r$，从而由L^p空间的整体连续性，知存在$\varepsilon_0 > 0$, s.t. 对于所有的$0 < \varepsilon < \varepsilon_0$，都有

$$I_1 < \eta/2.$$

证毕. ♯

Example 1:

$$\phi(x) = \frac{1}{|B_1|} \begin{cases} 1, & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \tag{4}$$

其中 $B_1=\{x,|x|\le 1\}$.

Example 2: $\phi(x)=e^{-|x|}$

Example 3: $\phi(x)=e^{-\pi|x|^2}$，注意到 $\int_{R^n} e^{-\pi|x|^2}dx=1$

Example 4: 磨光算子 $\phi(x)=\frac{1}{A}e^{\frac{1}{|x|^2-1}}(|x|<1), \phi(x)=0(|x|\ge 1)$，其中 $A=\int_{R^n} e^{\frac{1}{|x|^2-1}}$.

思考题：

1. 对$f\in L^p(R^n)$，ϕ 取 Example 1. 是否有$\phi_\varepsilon * f\to f$ a.e. ?
2. $\sup_{\varepsilon>0}\phi_\varepsilon * |f|$ 有什么性质？

在第四章，我们研究Hardy-Littlewood 极大值函数时，将对这些问题做出解答.

Theorem 1.8. （磨光算子的逼近定理） 设ϕ为磨光算子，$\varepsilon>0$. 则
1) 对$f\in L^1_{loc}(R^n)$ （在每一个有界开集上都可积）， 则$\phi_\varepsilon * f\in C^\infty$，*i.e.* 无穷次可微.
2) $C_0^\infty(\Omega)$ 在L^p空间（$1\le p<\infty$）中稠密.

证明：1）验证留作练习.

2）若可测函数$f\in L^p(R^n)$，$\forall\eta>0$，则由积分的绝对连续性知存在有界可测集合K上的有界函数f_0使得

$$\|f-f_0\|_p\le \eta/2.$$

又$\phi_\varepsilon * f_0\in C_0^\infty$，根据逼近定理

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\|\phi_\varepsilon * f_0-f_0\|_{L^p(R^n)}=0,$$

可知存在$\varepsilon_0>0$, s.t. 对于所有的$0<\varepsilon<\varepsilon_0$，都有

$$\|\phi_\varepsilon * f_0-f_0\|_{L^p(R^n)}<\eta/2.$$

因此，$\forall\eta>0$，存在 $\phi_\varepsilon * f\in C_0^\infty$，使得

$$\|\phi_\varepsilon * f_0-f\|_{L^p(R^n)}<\eta.$$

证毕. $\sharp$

1.4 Hilbert 空间与L^2空间

Definition 1.13. 内积空间：设X为复的线性空间，如果对于任给的$x,y\in X$， 都有一个复数$<x,y>$ 与之对应，并且满足

$$\begin{aligned}
&i)\ <x,x>\ge 0; <x,x>=0\Leftrightarrow x=0;\\
&ii))\ <x+y,z>=<x,z>+<y,z>;\\
&iii)\ <\alpha x,z>=\alpha<x,z>;\\
&iv)\ <x,z>=\overline{<z,x>};
\end{aligned}$$

这里$x,y,z\in X$， $\alpha\in C$，则称 $<x,y>$为x,y的内积，并且称X为具有内积$<\cdot,\cdot>$的内积空间.

Definition 1.14. 内积空间X中的两个元素x, y是正交的：若$< x, y >= 0$.
内积空间X中的一族正规正交集$\{x_j\}$: 如果

$$< x_i, x_j >= \delta_{ij},$$

这里δ_{ij}是 *Kronecker* 常数：$\delta_{ij} = 1$，当 $i = j$； $\delta_{ij} = 0$，当 $i \neq j$.

在内积空间X中，我们定义范数：

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}, \quad x \in X.$$

注意到：若x, y是正交的，则

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Lemma 1.9. 设 $\{x_j\}_{j=1}^N$是内积空间X中的一族正规正交集，则对于任意的$x \in X$有

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^N | < x, x_k > |^2 + \|x - \sum_{k=1}^N < x, x_k > e_k\|_2^2.$$

Lemma 1.10. （*Bessel* 不等式）设 $\{x_j\}_{j=1}^N$是内积空间X中的一族正规正交集，则对于任意的$x \in X$有

$$\sum_{k=1}^N | < x, x_k > |^2 \leq \|x\|^2.$$

Lemma 1.11. （*Schwarz* 不等式）设 x, y是内积空间X中的两个向量，则

$$| < x, y > | \leq \|x\|\|y\|.$$

注：把y看成一个基.

Theorem 1.12. 每个内积空间X按范数 $\|x\| = \sqrt{< x, x >}, \quad x \in X$，成为线性赋范空间.

证明：只需验证范数定义的第三条：

$$\begin{aligned}
\|x + y\|^2 &= < x + y, x + y > \\
&= < x, x > + < x, y > + < y, x > + < y, y > \\
&= \|x\|^2 + 2Re < x, y > + \|y\|^2 \\
&\leq (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}$$

Definition 1.15. *Hilbert* 空间：内积作为范数，范数空间是完备的.

Theorem 1.13. *1)* 在L^2空间中定义内积：$< f,g >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}dx$. 则$L^2$空间是可分的*Hilbert* 空间，并且存在可数正交基 $e_1, e_2, \cdots$；
2) Bessel 不等式及*Parseval* 不等式：$\forall f \in L^2$, 我们有

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{\infty} | < f, e_k > |^2;$$

3) $L^2(-\pi,\pi)$的一族正交正规基底是：

$$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots ,$$

这里内积我们设为$< f,g >= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} fgdx$.

证明：

1）按照内积的定义验证，显然. 又L^2空间在该范数下是可分的完备的，故L^2空间是可分的Hilbert 空间.

2）既然

$$f = \sum_{k=1}^{N} < f, e_k > e_k + f - \sum_{k=1}^{N} < f, e_k > e_k,$$

因此我们有

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=1}^{N} | < f, e_k > |^2 + \|f - \sum_{k=1}^{N} < f, e_k > e_k\|_2^2.$$

令$N \to \infty$，易知$f_N = \sum_{k=1}^{N} < f, e_k > e_k$ 是L^2中的Cauchy序列，从而收敛于f'， 而

$$< f - f', e_j >= \lim_{N\to\infty} < f - \sum_{k=1}^{N} < f, e_k > e_k, e_j >= 0,$$

故$f = f'$成立.

3）易证其正交性，只需证明完全性. 若$< f, e_i >= 0$， 我们来证$f \equiv 0$. 这里$(e_0, e_1, e_2, \cdots ,) = (\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots ,)$.

由于

$$\int_{-\pi}^{\pi} fdx = 0,$$

我们令

$$g(x) = \int_{-\pi}^{x} f(t)dt,$$

则$g(x)$ 是绝对连续函数，从而几乎处处可微，并且 $g(-\pi) = g(\pi)$.

令$C_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} gdx$， 并且$G(x) = g(x) - C_0$，则

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x)dx = 0,$$

且

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x) \begin{pmatrix} \sin nx \\ \cos nx \end{pmatrix} dx = \frac{G(x)}{n} \begin{pmatrix} -\cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix} |_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n} \int_{-\pi}^{\pi} \begin{pmatrix} -\cos nx \\ \sin nx \end{pmatrix} f(x) dx = 0$$

这里$n = 1, 2, \cdots,$

若$G(x)$不恒为零，则存在$x_0 \in (-\pi, \pi)$ 和$\delta > 0$，使得$G(x_0) = 2\varepsilon_0 > 0$，且在区间$I_0 = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$上 $G(x) \geq \varepsilon_0 > 0$.

令$t(x) = 1 + \cos(x - x_0) - \cos\delta$，则

$$t(x) \begin{cases} > 1, & x \in I_0 \\ \leq 1, & [-\pi, \pi] \backslash I_0. \end{cases} \tag{5}$$

而且，

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} G(x)(t(x))^n dx \\ &= \int_{I_0} G(x)(t(x))^n dx + \int_{[-\pi,\pi]\backslash I_0} G(x)(t(x))^n dx \\ &\equiv I_1 + I_2 \end{aligned}$$

当$n \to \infty$，我们有$I_1 \to \infty$与$I_2 \to 0$，矛盾. 故$G(x) \equiv 0$，$g(x) = C_0$，又$g(\pi) = 0$，我们推出 $g(x) \equiv 0$，因而 $f \equiv 0$. 证毕. $\sharp$

1.5 算子与扩张定理

Definition 1.16. 线性算子：从一个线性赋范空间到另一个线性赋范空间的线性映射.

Definition 1.17. 有界线性算子：设T是从线性赋范空间X到另一个线性赋范空间Y的映射，若对于任意的$x \in X$，都有

$$\|Tx\|_Y \leq C\|x\|_X,$$

其中C的下确界称为T的范数.

Definition 1.18. 酉算子T：设T是*Hilbert* H空间的有界线性算子，若对于任意的$x, y \in H$，都有

$$< Tx, Ty > = < x, y > .$$

Theorem 1.14. （*Hahn-Banach* 扩张定理）对于线性赋范空间X之线性流形 G上的连续线性泛函$f(x)$，恒有X上的连续线性泛函$F(x)$，使得

1）$F(x) = f(x)$， 当$x \in G$；

2) $\|F\| = \|f\|_G$.

2 Fourier级数

如果$f \in L^2(-\pi,\pi)$，从上一章我们知道空间 $L^2(-\pi,\pi)$的正规正交基底可以选择基本的三角函数系：$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots$. 从而函数$f$可以用基底表示为

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

并且（利用内积的正交性）

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx, \quad n = 0, 1, 2\cdots, \tag{1}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx dx, \quad n = 1, 2\cdots, \tag{2}$$

Definition 2.1. *Fourier级数：形如$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$表示的级数. 其中$a_n, b_n$称为相应的Fourier级数的系数.*

重要的问题：Fourier级数是否收敛，以及一个函数是否可以展成Fourier级数？

2.1 $L^2(-\pi,\pi)$ 中Fourier级数的性质

若$f \in L^2(-\pi,\pi)$，我们有下述性质：

1）唯一性. 存在唯一的Fourier系数a_n, b_n，使得

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

2）L^2收敛性. 令$f_k(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{k}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$，则

$$\lim_{k\to\infty} \|f_k - f\|_2 = 0.$$

3）最佳逼近. 设T_n是以$\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cdots, \cos nx, \sin nx$ 为基底的线性组合. 则

$$\|f_n - f\|_2 \le \|T_n - f\|_2.$$

2.2 Fourier级数的点态收敛性

Definition 2.2. 函数的*Fourier*级数：若$f(x) \in L^1[-\pi,\pi]$，以2π为周期，我们定义f形式的*Fourier*级数如下：$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$， 其中$a_n, b_n$为相应的*Fourier*系数满足（*1*）. 记为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

练习1：求如下函数的Fourier级数，

$$i)f(x)=x,\quad x\in[-\pi,\pi);$$
$$ii)f(x)=\frac{\pi-x}{2},\quad x\in[0,2\pi);$$
$$iii)f(x)=x^2,\quad x\in[0,2\pi);$$

设$f(x)$的Fourier级数的前$n+1$项和记为$S_n(x)$，则由（1）

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)[\cos ku\cos kx+\sin ku\sin kx]du\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(u-x)]du.\end{aligned}$$

由于

$$2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)-\sin(\beta-\alpha),$$

因此，

$$\begin{aligned}&2\sin\frac{\alpha}{2}(\frac{1}{2}+\cos\alpha+\cdots+\cos n\alpha)\\ =\ &\sin\frac{\alpha}{2}+(\sin\frac{3\alpha}{2}-\sin\frac{\alpha}{2})+\cdots+(\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}-\sin\frac{(2n-1)\alpha}{2})\\ =\ &\sin\frac{(2n+1)\alpha}{2}.\end{aligned}$$

从而，我们有

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(u-x)}{2\sin\frac{u-x}{2}}du\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+x}^{\pi+x}f(u)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})(u-x)}{2\sin\frac{u-x}{2}}du\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\\ &= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt\end{aligned}$$

若$f(x)\equiv1$，则

$$1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}dt=2\int_0^{\pi}D_n(t)dt, \tag{3}$$

这里$D_n(t)=\frac{\sin(n+\frac{1}{2})t}{2\pi\sin\frac{t}{2}}$为Dirichlet核. 并且称

$$\int_0^\pi [f(x+t)+f(x-t)]D_n(t)dt,$$

为Dirichlet积分.

练习2：利用（3）证明：

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}=\frac{\pi}{2}.$$

提示：利用黎曼引理及变量替换.

对于$x_0\in[-\pi,\pi]$，有两个问题：一是，何时$S_n(x_0)$收敛于某常数S_0？二是，何时$S_0=f(x_0)$？

我们首先计算 $S_n(x_0)-S_0$，

$$\begin{aligned} S_n(x_0)-S_0 &= \int_0^\pi [f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0]D_n(t)dt \qquad (4)\\ &= \int_0^\pi G(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt, \qquad (5)\end{aligned}$$

其中

$$G(t)=\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{2\pi\sin\frac{t}{2}}.$$

为了说明$S_n(x_0)\to S_0$，我们表述下面重要的引理：

Lemma 2.1. （*Riemann* 引理） 设$f(x)$在区间$[a,b]$上黎曼可积或者有瑕点时绝对可积或者L^1可积，则

$$\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx=\lim_{\lambda\to\infty}\int_a^b f(x)\cos(\lambda x)dx=0.$$

证明：我们只证$f(x)$在区间$[a,b]$上黎曼可积的情况，其他利用逼近定理.

不妨设$|f(x)|\le M$，利用可积性知，$\forall\varepsilon>0$，存在一个分划

$$a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b,$$

使得M_i,m_i为$[x_{i-1},x_i]$ 上的最大值最小值，满足

$$\sum_{i=1}^n (M_i-m_i)\Delta x_i<\varepsilon/2.$$

因此，我们有

$$|\int_a^b f(x)\sin(\lambda x)dx| = |\sum_{i=1}^n\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\sin(\lambda x)dx|$$

$$
\begin{aligned}
&\le \; |\sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(f(x)-m_i)\sin(\lambda x)dx| + |\sum_{i=1}^{n} m_i\int_{x_{i-1}}^{x_i}\sin(\lambda x)dx| \\
&\le \; \sum_{i=1}^{n}|x_{i-1}-x_i||M_i-m_i| + \frac{2}{\lambda}\sum_{i=1}^{n}|m_i| \\
&\le \; \varepsilon/2 + \frac{2NM}{\lambda} < \varepsilon,
\end{aligned}
$$

如果 λ充分大. 证毕. $\sharp$

Theorem 2.2. （*Dini* 定理）若$f(x)\in L^1[-\pi,\pi]$，以2π为周期，且$f(x)$*Fourier*级数的前$n+1$项和为$S_n(x)$.

$$
S_n(x_0)-S_0=\int_0^{\pi}G(t)\sin(n+\frac{1}{2})tdt, \tag{6}
$$

其中

$$
G(t)=\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{2\pi\sin\frac{t}{2}}.
$$

若对于某个$0<\delta<1$有$G(t)\in L^1([0,\delta])$，则我们有

$$
S_n(x_0)\to S_0.
$$

Corollary 2.3. *1*）验证：上述定理的中$G(t)$可以换成

$$
\frac{f(x_0+t)+f(x_0-t)-2S_0}{\pi t}.
$$

2）若$f\in C^1[-\pi,\pi]$，则$S_n(x_0)\to f(x_0)$.

3）若f是分段连续可微的，则$S_n(x_0)\to \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

4）（*Lipschitz* 定理）若f在x_0处是*Hölder*连续的，*i.e.* 存在$L>0$，$\delta>0$使得对于任意的$x\in U(x_0,\delta)$，有

$$
|f(x)-f(x_0)|\le L|x-x_0|^{\alpha},\quad \alpha>0,
$$

则$S_n(x_0)\to f(x_0)$.

5）（*Dirichlet*定理）若f在x_0处是单调的，则$S_n(x_0)\to \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$.

练习3： 计算如下函数的Fourier级数的值，并比较与原函数的值是否相等（特别注意端点的取值）

$$
\begin{aligned}
&i)f(x)=x,\quad x\in[-\pi,\pi);\\
&ii)f(x)=\frac{\pi-x}{2},\quad x\in[0,2\pi);\\
&iii)f(x)=x^2,\quad x\in[0,2\pi);
\end{aligned}
$$

2.3 Fourier级数的一致收敛性

Theorem 2.4. （一致收敛）若$f(x)\in L^1[-\pi,\pi]$，以2π为周期可导，且$f'(x)\in L^2[-\pi,\pi]$. 则我们有$f(x)$的*Fourier*级数一致收敛于$f(x)$.

证明：设f的Fourier级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

设f'的Fourier级数为

$$f'(x)\sim\frac{a_0'}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n'\cos nx+b_n'\sin nx).$$

则，

$$a_0'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(u)du=0,$$

$$a_n'=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(u)\cos(nu)du=\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(u)\sin(nu)du=nb_n,$$

同理可证：$b_n'=-na_n$.

因此，我们有

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|) &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n'|+|b_n'|}{n}\\ &\leq 2\Big(\sum_{n=1}^{\infty}|a_n'|^2+|b_n'|^2\Big)^{1/2}\Big(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\Big)^{1/2}<\infty.\end{aligned}$$

Theorem 2.5. （逐项微分）若$f(x)\in L^1[-\pi,\pi]$，以2π为周期，且$f''(x)\in L^2[-\pi,\pi]$. 则我们有$f(x)$的*Fourier*级数可以逐项微分.

Theorem 2.6. （逐项积分）若$f(x)\in L^2[-\pi,\pi]$，以2π为周期， 则我们有

$$\int_0^x f(t)dt=\frac{a_0}{2}x+\sum_{n=1}^{\infty}\Big(\frac{a_n}{n}\sin nx+b_n\frac{1-\cos nx}{2}\Big).$$

证明：略. 参考P283， [13].

练习4： 若$f(x)$是R上的连续二阶可导函数，以2π为周期，并且f的Fourier级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

求f',f''的Fourier级数，并证明存在常数$C>0$使得，

$$|a_n|\leq\frac{C}{n^2},\quad |b_n|\leq\frac{C}{n^2},\quad n=1,2,\cdots.$$

练习5：若$f(x)$是闭区间$[0,2\pi]$上两个单调函数的差，且f的Fourier级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx),$$

证明：

$$a_n = O(\frac{1}{n}), \quad b_n = O(\frac{1}{n}).$$

练习6：$f(x)$在闭区间$[0,2\pi]$连续可微，且满足$f(0) = f(2\pi)$，$\int_0^{2\pi} f(x)dx = 0$. 证明：

$$\int_0^{2\pi} [f'(x)]^2 dx \geq \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx.$$

3 Fourier变换

引子：从Fourier级数的形式思考，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{inx},$$

其中

$$a_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

把求和看成积分，形式上我们有

$$f(y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} f(x)e^{-2\pi itx}dxe^{2\pi ity}dt.$$

由此，我们想到可以做一个全空间的变换，

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi itx}dt,$$

这就是Fourier变换. 显然，函数的Fourier变换有意义的一个充要条件是函数是可积的. 基于此，我们首先引入L^1空间的Fourier变换.

3.1 L^1空间的Fourier变换

Definition 3.1. *Fourier*变换：若$f \in L^1(R^n)$，则定义f的*Fourier*变换如下，

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{R^n} f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx.$$

L^1空间的函数的Fourier变换有如下性质：

Theorem 3.1. *1*）$\mathcal{F}$是$L^1 \to L^\infty$的有界线性算子；
2) 若$f \in L^1(R^n)$，则$\mathcal{F}(f)(\xi)$是一致连续的，且 $\mathcal{F}(f)(\xi) \to 0$，当$|\xi| \to \infty$.

证明：
1） 由于

$$\||\mathcal{F}(f)(\xi)\|_\infty = ess\sup_{\xi\in R^n} |\mathcal{F}(f)(\xi)| \le \|f\|_1$$

故显然.

2）首先，由$Lebesgue$控制收敛定理知，$\mathcal{F}(f)(\xi)$是连续的；其次，$\forall\varepsilon > 0$，由磨光算子的逼近定理1.8知，存在C_0^∞函数g使得

$$|\int_{R^n}(f(x) - g(x))e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx| < \varepsilon/2,$$

对于上述的函数g，再由黎曼引理2.1知，存在$M>0$，使得$|\xi|>M$时有

$$|\int_{R^n} g(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx|<\varepsilon/2.$$

因此，$\forall\varepsilon>0$，存在$M>0$，使得$|\xi|>M$时，我们有

$$|\hat{f}(\xi)|=|\int_{R^n} f(x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx|<\varepsilon,$$

即：$\mathcal{F}(f)(\xi)\to 0$，当$|\xi|\to\infty$. 这也说明了$\mathcal{F}(f)(\xi)$是一致连续的.

Proposition 3.2. *1）平移算子的Fourier变换. 设$\tau_h f(x)=f(x-h)$是平移算子，则*

$$\mathcal{F}(\tau_h f)(\xi)=e^{-2\pi ih\cdot\xi}\hat{f}(\xi),$$
$$(\widehat{e^{2\pi ih\cdot x}f(x)})(\xi)=(\tau_h\hat{f})(\xi).$$

2）卷积的Fourier变换. 若$f,g\in L^1(R^n)$，则

$$\widehat{f*g}=\hat{f}\hat{g}.$$

3）乘积公式. 若$f,g\in L^1(R^n)$，则

$$\int_{R^n} f\hat{g}dx=\int_{R^n}\hat{f}gdx.$$

4）导数的Fourier变换. 设$\alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n)$，这里$\alpha_i\in N$. 则

$$\widehat{\partial^\alpha f}(\xi)=(2\pi i)^{|\alpha|}\xi^\alpha\hat{f}(\xi),$$
$$\partial^\alpha\hat{f}(\xi)=(-2\pi i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha f}(\xi),$$

这里$|\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$，$\xi^\alpha=\xi_1^{\alpha_1}\cdots\xi_n^{\alpha_n}$，并且假设$f,\partial^\alpha f,x^\alpha f\in L^1$.

5）膨胀（dilation）算子的Fourier变换. 设 $\lambda>0$ 并且$(\sigma_\lambda f)(x)=f(\lambda x)$ 是平移算子，则

$$\widehat{(\sigma_\lambda f)}(\xi)=\lambda^{-n}(\sigma_{\lambda^{-1}}\hat{f})(\xi).$$

证明：

1）

$$\mathcal{F}(\tau_h f)(\xi)=\int_{R^n} f(x-h)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx=e^{-2\pi ih\cdot\xi}\int_{R^n} f(y)e^{-2\pi iy\cdot\xi}dy.$$

2）

$$\widehat{f*g}(\xi)=\int_{R^n}\int_{R^n} f(x-y)g(y)dye^{-2\pi ix\cdot\xi}dx$$

$$= \int_{R^n}\int_{R^n} f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\cdot\xi}dxg(y)e^{-2\pi iy\cdot\xi}dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi).$$

3）利用Fubini定理.

4）我们只计算一个导数，其他类似.

$$\widehat{\partial_{x_1}f}(\xi) = \int_{R^n}[\partial_{x_1}f(x)]e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx = (2\pi i)\xi_1\hat{f}(\xi),$$

$$\widehat{x_1 f}(\xi) = \int_{R^n}[x_1 f(x)]e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx = \frac{1}{-2\pi i}\partial_{\xi_1}\hat{f}(\xi).$$

5）

$$\widehat{(\sigma_\lambda f}(\xi) = \int_{R^n} f(\lambda x)e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx = \int_{R^n} f(\lambda x)e^{-2\pi i\lambda x\cdot\frac{\lambda}{\xi}}dx = \lambda^{-n}\hat{f}(\lambda^{-1}\xi).$$

证毕. $\sharp$

练习1：若R上的函数$f(x)=x, |x|\le 1$，且$f(x)=0, |x|>1$. 求$f(x)$在R上的Fourier变换.

例子1：若$f=e^{-\pi|x|^2}$，则

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-\pi|\xi|^2} = f(\xi).$$

证明：

$$\hat{f}(\xi) = \int_{R^n} e^{-\pi|x|^2}e^{-2\pi ix\cdot\xi}dx = e^{-\pi|\xi|^2}\int_{R^n} e^{-\pi|x+i\xi|^2}dx = e^{-\pi|\xi|^2},$$

注意到最后一步我们利用了柯西积分公式与概率积分

$$\int_{R^n} e^{-\pi|x|^2}dx = 1.$$

概率积分的一个简单计算方法是利用二维的极坐标：

$$\begin{aligned}
[\int_{R^n} e^{-\pi|x|^2}dx]^2 &= \int_{R^n} e^{-\pi|x|^2}dx\int_{R^n} e^{-\pi|y|^2}dy \\
&= \int_{R^n} e^{-\pi(|x|^2+|y|^2)}dxdy \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi r^2}2\pi rdr = 1.
\end{aligned}$$

证毕. $\sharp$

由膨胀（dilation）算子的Fourier变换，我们立即得到：

例子2:$\forall\alpha>0$，若$f=e^{-\alpha\pi|x|^2}$，则

$$\widehat{f}(\xi)=\alpha^{-n/2}e^{-\pi|x|^2/\alpha}.$$

例子3：$\forall\alpha>0$，我们有

$$\int_{R^n}e^{-2\pi|y|\alpha}e^{-2\pi ix\cdot y}dy=c_n\frac{\alpha}{\left(\alpha^2+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}},$$

这里 $c_n=\frac{\Gamma(\frac{n+1}{2})}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}$

证明：

1）先设$\alpha=1$，否则可以做一个伸缩变换. 其次我们假设下面等式成立：

$$e^{-\beta}=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-\frac{\beta^2}{4u}}du. \tag{1}$$

从而，我们有

$$\begin{aligned}&\int_{R^n}e^{-2\pi|y|}e^{-2\pi ix\cdot y}dy\\
=&\int_{R^n}\{\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-\frac{\pi^2|y|^2}{u}}du\}e^{-2\pi ix\cdot y}dy\\
=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\{\int_{R^n}e^{-\frac{\pi^2|y|^2}{u}}e^{-2\pi ix\cdot y}dy\}du\\
=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}(\frac{u}{\pi})^{n/2}e^{-u|x|^2}du\quad(Example\ 2,\ \alpha=\frac{\pi}{u})\\
=&\pi^{-\frac{n+1}{2}}(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}\int_0^\infty e^{-s}s^{\frac{n-1}{2}}ds\\
=&\pi^{-\frac{n+1}{2}}(1+|x|^2)^{-\frac{n+1}{2}}\Gamma(\frac{n+1}{2}).\end{aligned}$$

2）来证明式子(1).

$$\begin{aligned}I&\doteq\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty\frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}e^{-\frac{\beta^2}{4u}}du\\
&=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-x^2-\frac{\beta^2}{4x^2}}dx\\
&=\frac{\beta}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-y^2-\frac{\beta^2}{4y^2}}y^{-2}dy\quad(y=\frac{\beta}{2x})\end{aligned}$$

因此，

$$I=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-y^2-\frac{\beta^2}{4y^2}}[1+\frac{\beta}{2}y^{-2}]dy$$

$$= \quad e^{-\beta}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-(y-\frac{\beta}{2y})^2}d(y-\frac{\beta}{2y}) = e^{-\beta}.$$

证毕. ♯

Lemma 3.3. （*Gauss-Weierstrass* 核与*Poisson* 核） 令$W(x,\alpha) = (4\pi\alpha)^{-n/2}e^{-|x|^2/4\alpha}$，则称为*Gauss-Weierstrass* 核；令$P(x,\alpha) = c_n\frac{\alpha}{\left(\alpha^2+|x|^2\right)^{\frac{n+1}{2}}}$，则称为*Poisson* 核. 则对于任意的$\alpha > 0$，我们有

$$i)\int_{R^n} W(x,\alpha)dx = 1,$$
$$ii)\int_{R^n} P(x,\alpha)dx = 1,$$

证明：i）概率积分；ii）略.（也可参考下面的推论3.6）

Theorem 3.4. 若$f,\Phi \in L^1(R^n)$，$\phi = \hat{\Phi}$. 则

$$\int_{R^n}\hat{f}(x)e^{2\pi ix\cdot y}\Phi(\varepsilon x)dx = \int_{R^n} f(x)\phi_\varepsilon(x-y)dx,$$

特别的，

$$\int_{R^n}\hat{f}(x)e^{2\pi ix\cdot y}e^{-2\pi\varepsilon|x|}dx = \int_{R^n} f(x)P(x-y,\varepsilon)dx,$$
$$\int_{R^n}\hat{f}(x)e^{2\pi ix\cdot y}e^{-4\pi^2\varepsilon|x|^2}dx = \int_{R^n} f(x)W(x-y,\varepsilon)dx,$$

证明：由平移算子的Fourier变换及乘积公式得

$$\begin{aligned}\int_{R^n}\hat{f}(x)e^{2\pi ix\cdot y}\Phi(\varepsilon x)dx &= \int_{R^n} f(x)\widehat{\sigma_\varepsilon\Phi}(x-y)dx,\\ &= \int_{R^n} f(x)\varepsilon^{-n}\phi(\frac{x-y}{\varepsilon})dx\\ &= \int_{R^n} f(x)\phi_\varepsilon(x-y)dx.\end{aligned}$$

Corollary 3.5. 若$f,\hat{f} \in L^1(R^n)$，则

$$f(x) = \int_{R^n}\hat{f}(\xi)e^{2\pi ix\cdot\xi}dx.$$

证明：既然

$$\int_{R^n}\hat{f}(x)e^{2\pi ix\cdot y}e^{-4\pi^2\varepsilon|x|^2}dx = \int_{R^n} f(x)W(x-y,\varepsilon)dx,$$

并且

$$\int_{R^n} W(x,\varepsilon)dx = 1,$$

由恒等逼近的结论我们推出

$$\int_{R^n} f(x)W(x-y,\varepsilon)dx \to f(y), \quad L^1,$$

因此，存在子列$\varepsilon_k \downarrow 0$,使得

$$\int_{R^n} f(x)W(x-y,\varepsilon_k)dx \to f(x), \quad a.e. R^n.$$

证毕. ♯

Corollary 3.6. 由于$f = e^{-2\pi\alpha|x|}$， $\widehat{f}(t) = P(t,\alpha)$，故由上述推论知

$$\int_{R^n} P(t,\alpha)e^{2\pi i x\cdot t}dt = e^{-2\pi\alpha|x|},$$

因而，令$x=0$，我们有

$$\int_{R^n} P(x,\alpha)dx = 1.$$

Theorem 3.7. （*Fourier*变换的唯一性） 若$f_1, f_2 \in L^1(R^n)$，且$\hat{f}_1(\xi) = \hat{f}_2(\xi)$， $\xi \in R^n$. 则$f_1(x) = f_2(x)$，$a.e.\ x \in R^n$.

证明：由于$f_1 - f_2 \in L^1(R^n)$，并且$(\widehat{f_1 - f_2})(\xi) = \hat{f}_1(\xi) - \hat{f}_2(\xi) = 0 \in L^1(R^n)$，故根据上面的推论，我们可以得到，

$$f_1(x) - f_2(x) = 0, \quad a.e. x \in R^n.$$

Definition 3.2. 逆*Fourier*变换：若$f \in L^1(R^n)$，则定义f的逆*Fourier*变换如下，

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \check{f}(\xi) = \int_{R^n} f(x)e^{2\pi i x\cdot\xi}dx.$$

显然，我们有如下的推论：
i）若$f \in L^1(R^n)$，则 $\check{f}(\xi) = \hat{f}(-\xi)$，$\xi \in R^n$.
ii）若$f, \hat{f} \in L^1(R^n)$，则 $\check{f} \in L^1(R^n)$，$\check{\hat{f}} = f$，a.e. $x \in R^n$，
且 $\hat{\check{f}} = f$，a.e. $x \in R^n$.

3.2 L^2空间的Fourier变换

Lemma 3.8. 若$f \in L^1 \cap L^2(R^n)$，则

$$\|\hat{f}\|_2 = \|f\|_2.$$

证明：若$f \in L^1 \cap L^2(R^n)$，令$g_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n} e^{-\pi \frac{|x|^2}{\varepsilon^2}}$，则

$$\int_{R^n} g_\varepsilon(x) dx = 1,$$

由卷积函数的Young 不等式知，

$$g_\varepsilon * f \in L^1 \cap L^2(R^n).$$

再根据卷积的Fourier变换知，

$$\widehat{g_\varepsilon * f} = \widehat{g_\varepsilon} \hat{f} = e^{-\varepsilon^2 \pi |\xi|^2} \hat{f} \in L^1(R^n).$$

故令$h = g_\varepsilon * f$，则

$$h, \hat{h} \in L^1(R^n).$$

从而，$\|\hat{h}\|_2^2 = \int_{R^n} \hat{h}(\xi) \bar{\hat{h}}(\xi) d\xi$有意义，且注意到

$$\bar{\hat{h}}(\xi) = \overline{\int_{R^n} h(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx} = \int_{R^n} \bar{h}(x) e^{2\pi i x \cdot \xi} dx = \check{\bar{h}}(\xi).$$

因此，

$$\int_{R^n} \hat{h}(\xi) \bar{\hat{h}}(\xi) d\xi = \int_{R^n} \hat{h}(\xi) \check{\bar{h}}(\xi) d\xi = \int_{R^n} h \bar{h} dx = \|h\|_2^2.$$

即：

$$\|g_\varepsilon * f\|_2^2 = \|e^{-\varepsilon^2 \pi |\xi|^2} \hat{f}(\xi)\|_2^2,$$

再令$\varepsilon \to 0$, 由逼近定理及单调性知，

$$\|f\|_2^2 = \|\hat{f}(\xi)\|_2^2.$$

证毕. $\sharp$

由此可以看出，Fourier变换算子$\mathcal{F}$是定义在$L^1 \cap L^2(R^n) \to L^2(R^n)$的有界线性算子， 用Hahn-Banach扩张定理可以定义一般$L^2(R^n) \to L^2(R^n)$的Fourier变换. 事实上，对于$f \in L^2(R^n)$，存在一序列$f_k \in L^1 \cap L^2(R^n)$ 使得在L^2中$f_k \to f$. 根据上述的引理，我们有

$$\|\widehat{f_j - f_k}\|_2^2 = \|f_j - f_k\|_2^2,$$

因而，$\{\hat{f}_k\}$ 是L^2中的Cauchy 列，故存在$\hat{f} \in L^2(R^n)$，使得$\widehat{f_k} \to \hat{f}$. 我们就定义 $\hat{f}$ 为f的Fourier变换.

注：这种定义是合理的，不依赖于序列$\{f_k\}$的选取. 假设有另一序列$\{f_k'\}$，使得在$L^2(R^n)$中$f_k' \to f$，并且在$L^2(R^n)$中$\widehat{f_k'} \to \hat{f}'$. 假设$\hat{f}' \neq \hat{f}$，则存在$a > 0$使得

$$\begin{aligned} a &\leq \|\hat{f}' - \hat{f}\|_2 \\ &\leq \|\hat{f}' - \hat{f}_k'\|_2 + \|\hat{f}_k' - \hat{f}_k\|_2 + \|\hat{f}_k - \hat{f}\|_2 \\ &\leq 2\varepsilon + \|\hat{f}_k' - \hat{f}_k\|_2 \\ &\leq 2\varepsilon + \|f_k' - f_k\|_2 \\ &\leq 2\varepsilon + \|f_k' - f\|_2 + \|f_k - f\|_2 \\ &\leq 4\varepsilon. \end{aligned}$$

由ε的任意性知，矛盾.

Definition 3.3. L^2上的*Fourier*变换：若$f \in L^2(R^n)$，则定义f的*Fourier*变换$\hat{f}$为g_k在$L^2(R^n)$中的极限，其中

$$g_k = \int_{|x| \leq k} f(x) e^{-2\pi i x \cdot \xi} dx.$$

Theorem 3.9. （L^2*Fourier*变换的性质）
1）乘积公式：若$f, g \in L^2(R^n)$，则

$$\int_{R^n} f \hat{g} dx = \int_{R^n} \hat{f} g dx.$$

2）*Fourier*变换算子$\mathcal{F}$是$L^2(R^n)$中的酉算子.
3）

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f)(-\xi).$$

4）若$f \in L^2(R^n)$，令

$$f_k(x) = \int_{|\xi| \leq k} \hat{f}(\xi) e^{2\pi i x \cdot \xi} d\xi,$$

则

$$\lim_{k \to \infty} \|f_k - f\|_2 = 0.$$

Definition 3.4. L^p空间上的*Fourier*变换（$1 < p < 2$）：若$f \in L^p(R^n)$，则存在$f_1 \in L^1(R^n)$，$f_2 \in L^2(R^n)$，使得$f = f_1 + f_2$，故定义f的*Fourier*变换如下，

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \mathcal{F}(f_1)(\xi) + \mathcal{F}(f_2)(\xi).$$

注：上述定义也是合理的. 因为对于$f \in L^p(R^n)$（$1 < p < 2$），$f = f_1 + f_2 = f_1' + f_2'$，其中$f_1, f_1' \in L^1(R^n)$，并且$f_2, f_2' \in L^2(R^n)$. 我们来证明

$$\mathcal{F}(f_1)(\xi) + \mathcal{F}(f_2)(\xi) = \mathcal{F}(f_1')(\xi) + \mathcal{F}(f_2')(\xi).$$

由于$f_1 - f_1' = -f_2 + f_2' \in L^1 \cap L^2(R^n)$，故

$$\mathcal{F}(f_1)(\xi) + \mathcal{F}(f_2)(\xi) - \mathcal{F}(f_1')(\xi) - \mathcal{F}(f_2')(\xi) = \mathcal{F}(f_1 + f_2 - f_1' - f_2')(\xi) = 0.$$

Questions: 对于L^q空间（$q > 2$），如何定义其上的Fourier变换？

Idea：注意到L^q空间是L^p空间的对偶空间，这里$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$，对于$f \in L^q, \phi \in L^p$是否可定义 f的Fourier变换为$\hat{f}(\phi) = f(\hat{\phi})$？

这里有一个问题：$\hat{f}$是否属于L^q？事实上，这是不可能的，参考CH5插值算子的应用—Hausdorff-Young 不等式. 因此，我们需要找一个更大的空间在Fourier变换下不变. 我们知道L^2空间在Fourier变换下不变，但是明显L^2空间不包含L^q空间（$q > 2$），并且L^2空间的对偶空间还是L^2空间. 这对于我们没多大帮助，那么是否存在L^2空间的某个子空间D在Fourier变换下不变呢？

因为，等式$\hat{f}(\phi) = f(\hat{\phi})$给予我们启发，如果空间$D$在Fourier变换下不变，$\phi \in D$，$f$为$D$的对偶空间上的泛函，则上述定义的$\hat{f}$也是$D$的对偶空间上的泛函.

因此，寻找L^2空间的某个子空间D在Fourier变换下不变是一个急需解决的问题！！！

我们立刻想到$C_0^\infty(R^n)$空间，遗憾的是它不满足，因为它的Fourier变换未必是$C_0^\infty(R^n)$函数；符合这样的空间存在吗？ 答案是肯定的，这就是著名的Schwartz空间.

3.3 缓增分布空间的Fourier变换

Definition 3.5. 速降函数空间（*Schwartz*空间$\mathcal{S}$）：$\phi \in C^\infty(R^n)$，且对于任意的 $k \in N \cup \{0\}$ 有

$$p_k(\phi) \doteq \sup_{x \in R^n} (1 + |x|^2)^{k/2} \sum_{|\alpha| \le k} |D^\alpha \phi| < \infty.$$

<u>练习2：</u>：上述的距离$p_k(\phi)$事实上可以被下列距离替换， 对于任意的 $k, j \in N \cup \{0\}$ 有

$$p_{k,j}(\phi) \doteq \sup_{x \in R^n} (1 + |x|^2)^j \sum_{|\alpha| \le k} |D^\alpha \phi| < \infty.$$

Definition 3.6. *Schwartz*空间$\mathcal{S}$中的收敛：设$\phi_j, \phi \in \mathcal{S}$，$j = 1, 2, \cdots$. 若对于任意的 $k \in N \cup \{0\}$ 都有

$$p_k(\phi_j - \phi) \to 0, \quad j \to \infty,$$

则我们称在*Schwartz*空间$\mathcal{S}$中，$\phi_j \to \phi$.

练习3：设$\phi\in\mathcal{S}$，则对于任意的$1\le p\le\infty$，$\phi\in L^p(R^n)$，并且存在$k>0$使得

$$\|\phi\|_{L^p(R^n)}\le Cp_k(\phi).$$

特别地，我们可以选取$k=n+1$.

练习4：验证$\phi(x)=e^{-\pi|x|^2}\in\mathcal{S}$.

练习5：验证磨光算子$\phi(x)=e^{\frac{1}{|x|^2-1}}(|x|<1),\phi(x)=0(|x|\ge 1)$，则$\phi\in\mathcal{S}$.

练习6：：验证$\phi(x)=e^{-|x|}\notin\mathcal{S}$.

Theorem 3.10. （*Schwartz*空间在*Fourier*变换下不变性）
若设$\phi_1,\phi_2\in\mathcal{S}$，则

$$\begin{aligned}&i)\widehat{\phi_1}\in\mathcal{S},\quad ii)\check{\phi}_1\in\mathcal{S},\\&iii)\check{\widehat{\phi_1}}=\phi_1,\quad iv)\phi_1*\phi_2\in\mathcal{S}.\end{aligned}$$

证明：第一个是因为，对于任意的 $k,j\in N\cup\{0\}$ 有

$$\begin{aligned}(1+|\xi|^2)^j\sum_{|\alpha|\le k}D^\alpha\hat{\phi}_1&=\mathcal{F}\big\{[1+(4\pi^2)^{-1}(-\Delta)]^j\sum_{|\alpha|\le k}(2\pi i)^{|\alpha|}x^\alpha\phi_1\big\}\\&\le\|[1+(4\pi^2)^{-1}(-\Delta)]^j\sum_{|\alpha|\le k}(2\pi i)^{|\alpha|}x^\alpha\phi_1\|_{L^1}<\infty,\end{aligned}$$

这里$\triangle=\sum_{k=1}^n\frac{\partial^2}{\partial_{x_kx_k}}$.

第二个显然.

第三个是因为

$$\phi_1,\widehat{\phi_1}\in L^1(R^n).$$

第四个是因为

$$\widehat{\phi_1*\phi_2}=\widehat{\phi_1}\widehat{\phi_2}\in\mathcal{S},$$

故由ii)知$\phi_1*\phi_2\in\mathcal{S}$.

Definition 3.7. 缓增分布空间$\mathcal{S}'$（广义函数）：*Schwartz*空间$\mathcal{S}$上的连续线性泛函的空间，即：若$f\in\mathcal{S}'$，则存在常数$C>0$使得

$$f(\phi)\le C\sup_{k\in N\cup\{0\}}p_k(\phi).$$

Definition 3.8. 缓增分布空间$\mathcal{S}'$中的收敛：设$f_j,f\in\mathcal{S}'$，$j=1,2,\cdots$. 若对于任意的$\phi\in\mathcal{S}$， 都有

$$f_j(\phi)\to f(\phi),\quad j\to\infty,$$

则我们称在缓增分布空间$\mathcal{S}'$中，$f_j\to f$.

练习7：L^p函数是缓增分布.

证明：对于任意的$\phi\in\mathcal{S}$，$f\in L^p$，定义

$$f(\phi)=\int_{R^n}f(x)\phi(x)dx,$$

则由练习2知，

$$f(\phi)\le\|f\|_{L^p(R^n)}\|\phi\|_{L^q(R^n)}\le Cp_{n+1}(\phi),$$

这里$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$.

练习8：δ函数是缓增分布. 对于任意的$\phi\in\mathcal{S}$， 定义δ函数为

$$\delta(\phi)=\phi(0).$$

练习9：$\frac{1}{|x|^\alpha}$（$0<\alpha<n$）函数是缓增分布. 对于任意的$\phi\in\mathcal{S}$，定义

$$\frac{1}{|x|^\alpha}(\phi)=\int_{R^n}\frac{1}{|x|^\alpha}\phi dx.$$

则，

$$\begin{aligned}\int_{R^n}\frac{1}{|x|^\alpha}\phi dx &\le \int_{|x|\le 1}\frac{1}{|x|^\alpha}\phi dx+\|\phi\|_1\\ &\le \||x|^{-1}\|_{L^{\frac{\alpha+n}{2}}(\{x,|x|\le 1\})}\|\phi\|_{\frac{n+\alpha}{n-\alpha}}+\|\phi\|_1\le Cp_{n+1}(\phi)\end{aligned}$$

这里C为常数.

Theorem 3.11. 若f是$Schwartz$空间$\mathcal{S}$上的线性泛函，则f是连续的当且仅当 存在常数$C>0,k>0$使得

$$f(\phi)\le Cp_k(\phi).$$

证明：充分性是显然的，下面证明必要性. 反证法. 设f是连续的，但是

$$f(\phi)\le Cp_k(\phi),$$

不成立，则对于任意的$k>0$，存在ϕ_k使得

$$f(\phi_k)>kp_k(\phi_k).$$

令$\psi_k=\frac{\phi_k}{|f(\phi_k)|}$，则$|f(\psi_k)|=1$，且$\psi_k\in\mathcal{S}$，

$$p_k(\psi_k)<\frac{1}{k}.$$

由p_k的单调增加性知，对于任意的$k_0>0$

$$\lim_{k\to\infty}p_{k_0}(\psi_k)=0,$$

即

$$\psi_k \to 0, \quad in \quad \mathcal{S}.$$

从而

$$f(\psi_k) \to 0,$$

这与$|f(\psi_k)| = 1$矛盾，证毕. $\sharp$

Definition 3.9. 缓增分布上的$Fourier$变换：若f为缓增分布空间$\mathcal{S}'$中的元素，则定义f的$Fourier$变换、$Fourier$逆变换分别如下，

$$\mathcal{F}(f)(\phi) = f(\mathcal{F}(\phi)), \quad \mathcal{F}^{-1}(f)(\phi) = f(\mathcal{F}^{-1}(\phi)).$$

Theorem 3.12. （缓增分布空间在$Fourier$变换下不变性）
若f是缓增分布，则

$$\hat{f} \in \mathcal{S}', \quad \hat{\hat{f}} = f, \quad \check{\hat{f}} = f.$$

证明：既然$\mathcal{F}(f)(\phi) = f(\mathcal{F}(\phi))$，显然.
练习10：δ函数，常数1的Fourier变换.
对于任意的$\phi \in \mathcal{S}$，

$$\hat{\delta}(\phi) = \delta(\hat{\phi}) = \hat{\phi}(0) = \int_{R^n} \phi(x)dx = 1(\phi).$$

类似的，

$$\hat{1}(\phi) = 1(\hat{\phi}) = \int_{R^n} \hat{\phi}dx = \check{\hat{\phi}}(0) = \phi(0) = \delta(\phi).$$

因此，$\hat{\delta} = 1$，且 $\hat{1} = \delta$.
例子1：$\frac{1}{|x|^\alpha}$（$0 < \alpha < n$）的Fourier变换.
我们知道$Gamma$函数为：$p > 0$，

$$\Gamma(p) = \int_0^\infty t^{p-1}e^{-t}dt.$$

特别，$\Gamma(n+1) = n!$.
令$t = \pi|x|^2\tau$，则

$$\int_0^\infty \tau^{p-1}e^{-\pi|x|^2\tau}d\tau = (\pi|x|^2)^{-p}\Gamma(p).$$

再令，$p = \frac{\alpha}{2}$，则

$$\int_0^\infty \tau^{\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\pi|x|^2\tau}d\tau = (\pi)^{-\frac{\alpha}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})|x|^{-\alpha}.$$

因此，

$$\begin{aligned}\widehat{|x|^{-\alpha}} &= (\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})^{-1}\int_0^\infty \tau^{-\frac{n}{2}+\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\frac{\pi|x|^2}{\tau}}d\tau \\ &= (\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})^{-1}\int_0^\infty t^{\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{2}-1}e^{-\pi|x|^2 t}dt \\ &= (\pi)^{\alpha-\frac{n}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})^{-1}\Gamma(\frac{n}{2}-\frac{\alpha}{2})|x|^{-n+\alpha}\end{aligned}$$

故，对于$0<\alpha<n$，可以简单记作

$$\widehat{|x|^{-\alpha}} = C(n,\alpha)|x|^{-n+\alpha}.$$

3.4 Fourier变换的应用

例子2：全空间上Poisson方程的求解问题：$\triangle u = f$， $x\in R^n$.

解：两边做Fourier变换得，

$$-4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi) = \hat{f}(\xi),$$

从而，

$$\hat{u}(\xi) = -\frac{1}{4\pi^2}|\xi|^{-2}\hat{f}(\xi),$$

因而，由上一节例子1知，

$$u(x) = -\frac{1}{4\pi^2}\big(\mathcal{F}^{-1}(|\xi|^{-2})*f\big)(x) = C\int_{R^n}|x-y|^{2-n}f(y)dy.$$

例子3：热方程的求解问题：

$$\begin{cases}\partial_t u - \triangle u = f, & (x,t)\in R^n\times R^+ \\ u|_{t=0} = u_0(x).\end{cases}$$

解：方程两边对空间变量x作Fourier变换得，

$$\partial_t\hat{u}(\xi,t) + 4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi,t) = \hat{f}(\xi,t),$$

两边乘以$e^{4\pi^2|\xi|^2t}$得，

$$\partial_t(e^{4\pi^2|\xi|^2t}\hat{u}(\xi,t)) = e^{4\pi^2|\xi|^2t}\hat{f}(\xi,t),$$

从0到t积分得

$$e^{4\pi^2|\xi|^2t}\hat{u}(\xi,t) = \hat{u}(\xi,0) + \int_0^t e^{4\pi^2|\xi|^2s}\hat{f}(\xi,s)ds,$$

从而，

$$\hat{u}(\xi,t) = e^{-4\pi^2|\xi|^2t}\hat{u}(\xi,0) + \int_0^t e^{-4\pi^2|\xi|^2(t-s)}\hat{f}(\xi,s)ds.$$

最后，我们利用$\mathcal{F}^{-1}(f*g)=\check{f}\check{g}$与概率函数$e^{-4\pi^2\xi^2 t}$的Fourier变换是

$$\Gamma(x,t)=(4\pi t)^{-\frac{n}{2}}e^{-\frac{|x|^2}{4t}},$$

推出

$$u(x,t)=\int_{R^n}\Gamma(x-y,t)u_0(y)dy+\int_0^t\int_{R^n}\Gamma(x-y,t-s)f(y,s)dyds.$$

这里$\Gamma(x,t)$称为热方程的基本解.

例子4：上半空间调和方程的求解问题：

$$\begin{cases}\partial_{tt}u+\triangle u=0, & (x,t)\in R^n\times R^+\\ u|_{t=0}=f(x).\end{cases}$$

解：方程两边对空间变量x作Fourier变换得，

$$\partial_{tt}\hat{u}(\xi,t)-4\pi^2|\xi|^2\hat{u}(\xi,t)=0,$$

利用待定系数法，可以求得基本解系为$e^{\pm 2\pi|\xi|t}$. 假设$\hat{u}$在空间的无穷远处退化，则 可得

$$\hat{u}(\xi,t)=e^{-2\pi|\xi|t}\hat{f},$$

再作用Fourier逆变换，利用Poisson核的结果得，

$$u(x,t)=\int_{R^n}P(x-y,t)f(y)dy.$$

**例子5：Heisenberg 测不准定理：（P158，[10]或者[2]）

在量子力学里，不确定性原理（Uncertainty principle）表明，粒子的位置与动量不可同时被确定，位置的不确定性与动量的不确定性遵守不等式 $\triangle x\triangle p_x\geq h_0$. 其中$h_0$是约化普朗克常数.

维尔纳·海森堡于1927年发表论文给出这原理的原本启发式论述， 因此这原理又称为“海森堡不确定性原理”. 跟据海森堡的表述，测量这动作不可避免的搅扰了被测量粒子的运动状态， 因此产生不确定性. 同年稍后，厄尔·肯纳德（Earl Kennard）给出另一种表述。隔年，赫尔曼·外尔也独立获得这结果。按照肯纳德的表述， 位置的不确定性与动量的不确定性是粒子的秉性，无法同时压抑至低于某极限关系式，与测量的动作无关。 这样，对于不确定性原理，有两种完全不同的表述. 追根究底，这两种表述等价， 可以从其中任意一种表述推导出另一种表述.

物理学者渐渐发觉，肯纳德的表述所涉及的不确定性原理是所有类波系统的内秉性质， 它之所以会出现于量子力学完全是因为量子物体的波粒二象性， 它实际表现出量子系统的基础性质，而不是对于当今科技实验观测能力的定量评估. 在这里特别强调，测量不是只有实验观察者参与的过程，而是经典物体与量子物体之间的相互作用， 不论是否有任何观察者参与这过程.

事实上，一个微观粒子的某些物理量（如位置和动量，或方位角与动量矩，还有时间和能量等），不可能同时具有确定的数值， 其中一个量越确定，另一个量的不确定程度就越大。

在一维情形，用波函数$f(x)$来刻划粒子沿x轴的运动状态，$|f(x)|^2$表示粒子位于x处的密度，则粒子在区间 $[a,b]$处的概率为 $\int_a^b |f(x)|^2dx$. 波函数的Fourier变换$|\hat{f}(\xi)|^2$可以给出粒子动量为ξ的概率密度. 我们可以假设归一化条件：$\|f\|_2=\|\hat{f}\|_2=1$. 令

$$\triangle_a g=\frac{\int_{-\infty}^{\infty}(x-a)^2|f(x)|^2dx}{\int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|^2dx},$$

其中$\triangle_a g$刻画g在a处的集中程度. 则不确定性原理的数学描述如下：

Theorem 3.13. （不确定性原理） 假设$f,\hat{f},|x|f,|\xi|\hat{f}\in L^2R$，且$\|f\|_2=1$. 则对于任意的$a,b\in R$有

$$\triangle_a f\triangle_b\hat{f}\geq\frac{1}{16\pi^2}.$$

证明：不妨设$a=b=0$，则由 Plancherel等式得

$$\triangle_0 f\triangle_0\hat{f}=\frac{1}{4\pi^2}\|xf\|_2^2\|f'\|_2^2\geq\frac{1}{4\pi^2}|Re\int xf\overline{f'}dx|^2=\frac{1}{16\pi^2}\|f\|_2^4=\frac{1}{16\pi^2}.$$

对于一般的a,b，令$g(x)=e^{-2\pi ibx}f(x+a)$ 即可. 证毕. $\sharp$

4 Hardy-Littlewood 极大值函数

Definition 4.1. 极大值函数：若$f \in L^1_{loc}(R^n)$（在每一个测度有限的开集上可积），则定义f的极大值函数如下，

$$M(f)(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{|B(x,r)|} \int_{B(x,r)} |f(y)|dy,$$

这里$B(x,r)$表示R^n中以x为圆心，r为半径的球，并且$|B(x,r)|$表示其测度.

<u>练习1：</u>求函数$f(x) = 1, x \geq 0,\ f(x) = 0, x < 0$的极大值函数表示.
<u>练习2：</u>求函数$f(x) = x, x \in R$的极大值函数表示.

Definition 4.2. 分布函数：设$g(x)$是可测函数，对任意的$\alpha \geq 0$，则定义g的分布函数$\lambda(\alpha)$如下，

$$\lambda(\alpha) = |\{x; |g(x)| > \alpha\}|.$$

Lemma 4.1. 若函数$g(x) \in L^p(R^n)$，这里$1 < p < \infty$. 则我们有下述结论

$$\int_{R^n} |g(x)|^p dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \lambda(\alpha) d\alpha = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} |\{x; |g(x)| > \alpha\}| d\alpha.$$

证明：既然

$$\int_{R^n} |g(x)|^p dx = \int_{R^n} p \int_0^{|g(x)|} \alpha^{p-1} d\alpha dx,$$

交换积分次序，我们有

$$\int_{R^n} p \int_0^{|g(x)|} \alpha^{p-1} d\alpha dx = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} \int_{\{x;|g(x)|>\alpha\}} dx d\alpha = p \int_0^\infty \alpha^{p-1} |\{x; |g(x)| > \alpha\}| d\alpha.$$

证毕. $\sharp$

对于上述定义的极大值函数，我们有如下的有界定理：

Theorem 4.2. （极大值函数的有界性） 假设f定义在R^n上.
a）如果$f \in L^p(R^n)$ （$1 \leq p \leq \infty$），则Mf 是几乎处处有限的.
b）如果$f \in L^1(R^n)$ ，则对于任意的$\alpha > 0$，有

$$|\{x; (Mf)(x) > \alpha\}| \leq \frac{A}{\alpha} \int_{R^n} |f(y)| dy.$$

这里A是依赖于n的绝对常数，可以取5^n.
c）如果$f \in L^p(R^n)$ （$1 < p \leq \infty$），则$Mf \in L^p(R^n)$，并且

$$\|Mf\|_p \leq A_p \|f\|_p.$$

为了证明上述定理，我们需要引入下面的Vitali 覆盖引理.

Lemma 4.3. （*Vitali* 覆盖引理） 设E是R^n中的一个可测子集，其被一族有界半径的开球B_α（$\alpha \in A$）所覆盖. 则存在不交的子集B_k，$k = 1, 2, \cdots$,使得

$$\sum_k m(B_k) \geq cm(E),$$

这里c可取5^{-n}.

证明：

第一步，构造B_k，$k = 1, 2, \cdots$. 令$diam(B_\alpha)$表示B_α的直径，我们首先选取B_1使得，

$$diam(B_1) \geq \frac{1}{2}\sup_{\alpha \in A}\{diam(B_\alpha)\}.$$

假设$B_1, B_2, \cdots, B_k$已经选定，再来选取B_{k+1}使得

$$diam(B_{k+1}) \geq \frac{1}{2}\sup_{j \in A}\{diam(B_\alpha), B_\alpha \cap B_l = \emptyset, l = 1, \cdots, k\}.$$

第二步，讨论分析.

Case I: 若选定的B_k有限个，设为$B_1, \cdots, B_k$. 则对于任意的B_α（$\alpha \in A, \alpha \neq 1, \cdots, k$），都有$1 \leq j_0 \leq k$使得 $B_\alpha \cap B_{j_0} \neq \emptyset$，我们还可以假设$j_0$是第一个出现的. 则由选择方式可知

$$diam(B_{j_0}) \geq \frac{1}{2}diam(B_\alpha),$$

从而如果假设$B^*_{j_0}$是与B_{j_0}中心相同，但是直径是B_{j_0}的五倍大. 则

$$B^*_{j_0} \supset B_\alpha.$$

因此，

$$\cup_{l=1}^k B^*_l \supset \cup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

Case II: 若$\sum_k m(B_k) = \infty$，则证毕. $\sharp$

Case III: 设$\sum_{k=1}^\infty m(B_k) < \infty$，仍然假设$B^*_k$与$B_k$中心相同，但是直径是$B_k$的5倍. 则

$$diam(B_k) \to 0, \quad k \to \infty.$$

从而，对于任意的B_α（$\alpha \in A, \alpha \neq 1, \cdots, \infty$），都有$j_0 \geq 1$使得 $B_\alpha \cap B_{j_0} \neq \emptyset$，我们还可以假设$j_0$是第一个出现的. 则由选择方式可知

$$diam(B_{j_0}) \geq \frac{1}{2}diam(B_\alpha),$$

因此，

$$\cup_{l=1}^\infty B^*_l \supset \cup_{\alpha \in A} B_\alpha.$$

证毕. $\sharp$

4.1 极大值函数的有界性

定理4.2的证明：

对于固定的$\alpha > 0$，在极大值函数Mf的定义下，我们假设

$$E_\alpha = \{x; (Mf)(x) > \alpha\}.$$

则，对于每一个$x \in E_\alpha$，存在一个以x为中心的球，记为B_x，使得

$$\int_{B_x} |f(y)|dy \geq \alpha |B_x|,$$

并且我们有

$$|B_x| \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_1.$$

显然，

$$\cup_{x\in E_\alpha} B_x \supset E_\alpha,$$

由Vitali 覆盖引理知，存在可数个不交的B_x，记为B_k，$k = 1, 2, \cdots$，使得

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \geq C(n)E_\alpha,$$

这里$C(n)$可取5^{-n}.

因此，

$$C(n)E_\alpha \leq \sum_{k=1}^{\infty} |B_k| \leq \frac{1}{\alpha}\int_{\cup_{k=1}^{\infty} B_k} |f(y)|dy \leq \frac{1}{\alpha}\|f\|_1,$$

因此，令$A = \frac{1}{C(n)}$，定理中的b)成立.

若$p = \infty$，则取$A_p = 1$，显然成立. 下面假设$1 < p < \infty$，定义$f_1(x)$: $f_1(x) = f(x)$（当$|f(x)| \geq \frac{\alpha}{2}$时），并且 $f_1(x) = 0$（当$|f(x)| < \frac{\alpha}{2}$时）. 则我们有

$$|f(x)| \leq |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}, \quad Mf(x) \leq M(f_1)(x) + \frac{\alpha}{2},$$

因此，

$$\{x; (Mf)(x) > \alpha\} \subset \{x; M(f_1)(x) > \frac{\alpha}{2}\},$$

并且（应用b)的结论）

$$|E_\alpha| = |\{x; (Mf)(x) > \alpha\}| \leq \frac{2A}{\alpha}\|f_1\|_1 = \frac{2A}{\alpha}\int_{|f|>\alpha/2} |f|dx. \tag{1}$$

令$g=Mf(x)$，$\lambda(\alpha)=\{x;(Mf)(x)>\alpha\}$，则由引理4.1知，

$$\|g\|_p^p=p\int_0^\infty\alpha^{p-1}\lambda(\alpha)d\alpha.$$

故根据不等式(1)，我们有

$$\|Mf\|_p^p=p\int_0^\infty\alpha^{p-1}|E_\alpha|d\alpha\leq p\int_0^\infty\alpha^{p-1}\big[\frac{2A}{\alpha}\int_{|f|>\alpha/2}|f|dx\big]d\alpha.$$

对后一积分，利用Fubini定理，可以被下面积分量控制，

$$2Ap\int_{R^n}|f(x)|\int_0^{2|f(x)|}\alpha^{p-2}d\alpha dx=\frac{2Ap}{p-1}\int_{R^n}|f(x)||2f(x)|^{p-1}dx=A_p^p\|f\|_p,$$

这里$A_p=2\big(\frac{5^np}{p-1}\big)^{1/p}$.

故，我们有

$$\|Mf\|_p=A_p\|f\|_p.$$

证毕. $\sharp$

4.2 Lebesgue 微分定理

Theorem 4.4. （*Lebesgue* 微分定理） 若$f\in L^p(R^n)$ （$1\leq p\leq\infty$），或者$f\in L^1_{loc}(R^n)$，则

$$\lim_{r\to0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy=f(x),\quad a.e.\ R^n.$$

证明： 不妨假设$f\in L^1(R^n)$，令

$$f_r(x)=\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy,\quad r>0.$$

由恒等逼近定理1.7知，$\|f_r(x)-f(x)\|_1\to0$. （$r\to0$） 故存在一个字列$r_k\downarrow0$使得$f_{r_k}\to f$, a.e. R^n.

对于$g\in L^1(R^n)$， $x\in R^n$，定义

$$\Omega g(x)=|\limsup_{r\to0}g_r(x)-\liminf_{r\to0}g_r(x)|.$$

则对于$g_0\in C_0^\infty(R^n)$，则有$\Omega g_0(x)=0$.

若对于$g\in L^1(R^n)$，由定理4.2 b)知，

$$|\{2Mg>\varepsilon\}|\leq\frac{2A}{\varepsilon}\|g\|_1.$$

明显地，$\Omega g(x) \le 2Mg(x)$, 因此，

$$|\{x; \Omega g(x) > \varepsilon\}| \le \frac{2A}{\varepsilon}\|g\|_1.$$

从而，对于任意的$f \in L^1(R^n)$，根据光滑逼近定理1.8知$f = g_0 + g$，其中$g_0 \in C_0^\infty(R^n)$， $g \in L^1(R^n)$. 既然，

$$\Omega f(x) \le \Omega g_0(x) + \Omega g(x),$$

因此

$$|\{x; \Omega f(x) > \varepsilon\}| \le \frac{2A}{\varepsilon}\|g\|_1.$$

由于$\|g\|_1$可以任意小，故$\Omega f(x) \equiv 0$. 证毕. ♯

事实上，我们可以得到更加一般的结论. 设$Q(x,r)$为包含x的球体或者方体，半径或者边长为r. 则

Corollary 4.5. （广义*Lebesgue* 微分定理） 若$f \in L^p(R^n)$ （$1 \le p \le \infty$），或者$f \in L^1_{loc}(R^n)$，则

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{|Q(x,r)|}\int_{Q(x,r)} |f(y)|dy = f(x), \quad a.e.\ R^n.$$

证明：类似的定义极大值函数，证明极大值算子的有界性定理（类似定理4.1），从而与定理4.2相似的步骤可以证明本结论. ♯

4.3 调和函数

若一个函数满足：在任一个小球上的均值，都为球心点的值，那么它有什么特殊形式？这事实上就是所谓的调和函数，我们把这种性质称为平均值性质.

Definition 4.3. 平均值性质：设$u(x)$是R^n中区域Ω上局部可积的可测函数， 若对于任意的$x \in \Omega, r > 0$，$B_r(x) \subset \Omega$，满足

$$u(x) = \frac{1}{|B_r(x)|}\int_{B_r(x)} u(y)dy, \tag{2}$$

则称$u(x)$是区域Ω上具有平均值性质的函数.

我们假设R^n中单位球面$\Sigma_1 = \Sigma$的表面积为w_{n-1}，则R^n中单位球B_1的体积为$|B_1| = \frac{w_{n-1}}{n}$ （详情见本节末补充知识）. 从而上述平均值性质条件（2）等价于： 对于任意的$r > 0$，$B_r(x) \subset \Omega$有

$$u(x) = \frac{1}{w_{n-1}r^{n-1}}\int_{\partial B(x,r)} u(y)dS_y = \frac{1}{w_{n-1}}\int_{\Sigma} u(x + ry')dy', \tag{3}$$

事实上，若条件（2）成立，则

$$r^n u(x) = \frac{n}{w_{n-1}} \int_{B(x,r)} u(y)dy = \frac{n}{w_{n-1}} \int_0^r \int_\Sigma \tau^{n-1} u(x+\tau y')dy'd\tau,$$

两边微分，即得条件（3）.

另一方面，若条件（3）成立，两边乘以r^{n-1}，对r积分即得条件（2）.

Definition 4.4. 调和函数： 设$u(x)$是R^n中区域Ω上的两次可微的函数， 若满足

$$\triangle u \doteq (\frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_1} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n \partial x_n})u(x) = 0,$$

则称$u(x)$是R^n中区域Ω上的调和函数.

练习3：验证下述的函数$v(x)$是$R^n \backslash \{0\}$上的调和函数.

$$v(x) = \begin{cases} |x|^{2-n}, & n \geq 3; \\ \ln(|x|), & n = 2. \end{cases} \tag{4}$$

对于平均值性质与调和函数的关系，我们首先有下述结论：

Theorem 4.6. （平均值性质蕴含调和性质）
若$u(x)$是区域Ω上两次可微并且具有平均值性质的函数，则$u(x)$是Ω上的调和函数.

证明：对于任意的$x_0 \in \Omega, r > 0$，并且$B_r(x_0) \subset \Omega$，则由假设知

$$u(x_0) = \frac{1}{w_{n-1}} \int_\Sigma u(x_0 + ry')dy',$$

因此， 两边对r求导两次有，

$$0 = \frac{1}{w_{n-1}} \int_\Sigma \sum_{j,k=1}^n u_{jk}(x_0 + ry')y'_j y'_k dy',$$

取$r = 0$，并且由于球坐标的性质（见本节末）

$$\int_\Sigma y'_j y'_k dy' = 0, \quad j \neq k,$$

及（对称性）

$$\int_\Sigma y'_j y'_j dy' = \frac{w_{n-1}}{n},$$

我们最终获得

$$0 = \sum_{k=1}^n u_{kk}(x_0).$$

再由x_0的任意性知，

$$0=\sum_{k=1}^{n}u_{kk}(x),\quad x\in\Omega,$$

即$u(x)$是Ω上的调和函数. 证毕. $\sharp$

Theorem 4.7. （调和性质蕴含平均值性质）
若$u(x)$是Ω上的调和函数，则$u(x)$在区域Ω具有平均值性质.

证明：
设

$$v(x)=\begin{cases}|x|^{2-n}, & n\geq 3;\\ \ln(|x|), & n=2.\end{cases}\tag{5}$$

对于$B_r(x_0)\subset\Omega$，不妨设$x_0=0$，对u,v在$B_r\backslash B_\varepsilon$上利用Greeng公式

$$\int_\Omega(v\triangle u-u\triangle v)dx=\int_{\partial\Omega}(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n})dx,$$

我们推导出，（$n>2$，$n=2$类似）

$$0=(\int_{\Sigma_r}-\int_{\Sigma_\varepsilon})[-(n-2)|x|^{-n+1}]udS-(\int_{\Sigma_r}+\int_{\Sigma_\varepsilon})v\frac{\partial u}{\partial n}dS.$$

由于u的调和性质，我们有

$$\int_{\Sigma_r}\frac{\partial u}{\partial n}dx'=\int_{B_r}\triangle udx=0,$$

与

$$\int_{\Sigma_\varepsilon}\frac{\partial u}{\partial n}dx'=\int_{B_\varepsilon}\triangle udx=0,$$

从而，

$$0=(\int_{\Sigma_r}-\int_{\Sigma_\varepsilon})|x|^{-n+1}udS$$

故根据u的连续性，

$$r^{1-n}\int_{\Sigma_r}udS=\varepsilon^{1-n}\int_{\Sigma_\varepsilon}udS=u(0)w_{n-1}$$

因此，

$$\frac{1}{w_{n-1}}\int_{\Sigma}u(ry')dy'=u(0).$$

证毕. $\sharp$

Theorem 4.8. （极大值定理）
若$u(x)$是Ω上的调和函数，且$u(x)$在区域Ω内部取得最大值，则u必恒为常值.

证明：由调和函数的平均值性质立即可得. 证毕. $\sharp$

Theorem 4.9. （*Liouville*定理）
若$u(x)$是R^n上的有界调和函数，则u必恒为常值.

证明：由调和函数的平均值性质求两点的差立即可得.
事实上，设任意的两点$x_0, y_0 \in R^n$，由平均值性质知

$$u(x_0) = \frac{1}{|B(x_0,r)|}\int_{B(x_0,r)} u(y)dy, \quad u(y_0) = \frac{1}{|B(y_0,r)|}\int_{B(y_0,r)} u(y)dy,$$

则，当$r \to \infty$时，

$$\begin{aligned} |u(x_0) - u(y_0)| &= \frac{1}{|B(x_0,r)|}|\int_{B(x_0,r)} u(y)dy - \int_{B(y_0,r)} u(y)dy| \\ &\leq \frac{1}{|B(x_0,r)|}|\int_{B(x_0,r)\backslash B(y_0,r)} dy + \int_{B(y_0,r)\backslash B(x_0,r)} dy|\|u\|_\infty \to 0. \end{aligned}$$

证毕. $\sharp$
♣补充1：R^n中的球坐标.

$$\int_{R^n} f(x)dx = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}\int_0^{\infty} f(rx')(\sin\phi_1)^{n-2}(\sin\phi_2)^{n-3}\cdots(\sin\phi_{n-2})r^{n-1}drd\phi_1\cdots d\phi_{n-1},$$

这里$0 \leq \phi_k \leq \pi$（$k = 1, \cdots, n-2$），$0 \leq \phi_{n-1} \leq 2\pi$，$r = |x|$，$x' = (x'_1, \cdots, x'_n) \in \Sigma$（$\Sigma$为$R^n$中的单位球面），$x'_1 = \cos\phi_1$，$x'_2 = \sin\phi_1\cos\phi_2, \cdots, x_{n-1} = \sin\phi_1\cdots\cos\phi_{n-1}$，并且 $x_n = \sin\phi_1\cdots\sin\phi_{n-1}$. 简记

$$\int_\Sigma dx' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\cdots\int_0^{\pi}(\sin\phi_1)^{n-2}(\sin\phi_2)^{n-3}\cdots(\sin\phi_{n-2})d\phi_1\cdots d\phi_{n-1}.$$

由于

$$\int_0^{\pi}\sin^k\phi\cos\phi d\phi = 0, \quad \forall k \in N,$$

故，

$$\int_\Sigma x'_j dx' = 0, \quad \int_\Sigma x'_j x'_k dx' = 0\ (j \neq k).$$

♣补充2：设w_{n-1}是R^n中单位球的表面积，Ω_n是R^n中单位球的体积，则

$$w_{n-1} = \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}, \quad \Omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}$$

证明：
由于

$$I=\int_{R^n}e^{-|x|^2}dx=\pi^{n/2},$$

因此

$$I=\int_{\Sigma}\int_0^{\infty}e^{-|r|^2}r^{n-1}drdx'=\frac{w_{n-1}}{2}\int_0^{\infty}e^{-t}t^{n/2-1}dt=\frac{w_{n-1}}{2}\Gamma(n/2),$$

从而，

$$w_{n-1}=\frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)}.$$

再由于，

$$\Omega_n=\int_{|x|\leq 1}dx=\int_{\Sigma}\int_0^{1}r^{n-1}drdx'=\frac{w_{n-1}}{n}=\frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(1+n/2)}.$$

5 Marcinkiewicz 插值定理

Definition 5.1. 算子T是(p,q)**类的**：是指对于$1\le p,q\le\infty$，T是$L^p(R^n)$空间到$L^q(R^n)$空间的线性映射，并且

$$\|Tf\|_q \le A\|f\|_p,\quad f\in L^p(R^n),$$

这里A是不依赖于f的常数.

例子：极大值算子是(p,p)类的，这里$1<p\le\infty$.

Definition 5.2. 算子T是**弱**(p,q)**类的**：是指对于$1\le p,q\le\infty$，T是$L^p(R^n)$空间到$L^q(R^n)$空间的线性映射，并且

$$m\{x;|Tf(x)|>\alpha\}\le\big(\frac{A\|f\|_p}{\alpha}\big)^q,\quad f\in L^p(R^n),q<\infty.$$

另外，弱(p,∞)类是指(p,∞)类.

例子：极大值算子是弱$(1,1)$类的.

Definition 5.3. **{**弱空间$L^p_w(\Omega)$（Lorentz 空间）}：设Ω是R^n中的区域，$f(x)$是可测函数，并且满足**

$$\|f\|_{L^p_w(\Omega)}\doteq\sup_{\alpha>0}m\{x\in\Omega;|f(x)|>\alpha\}^{1/p}\alpha<\infty,\quad 1\le p<\infty.$$

另外，$L^\infty_w(\Omega)=L^\infty(\Omega)$.

例1：$|x|^{-n}\in L^{1,\infty}(R^n)$，$|x|^{-\beta}\in L^{\frac{n}{\beta},\infty}(R^n)$（$0<\beta<n$）.

Definition 5.4. **{$L^{p_1}(R^n)+L^{p_2}(R^n)$空间}（$1\le p_1,p_2\le\infty$）:设$g(x)$是可测函数，$g(x)=g_1(x)+g_2(x)$，若$g_1(x)\in L^{p_1}(R^n)$，$g_2(x)\in L^{p_2}(R^n)$，则称$g(x)\in L^{p_1}(R^n)+L^{p_2}(R^n)$.**

注：若$p_1\le p\le p_2$，则$L^p(R^n)\in L^{p_1}(R^n)+L^{p_2}(R^n)$. 事实上，若$g(x)\in L^p(R^n)$，对于某个$\tau>0$，定义 $g_1(x)=g(x)$（当$|g(x)|\ge\tau$时），其他区域为零；并且$g_2(x)=g(x)-g_1(x)$. 则$g_1(x)\in L^{p_1}(R^n)$， $g_2(x)\in L^{p_2}(R^n)$.

Theorem 5.1. （*Marcinkiewicz*插值定理）
对于$1<r\le\infty$，假设T是一个从$L^1(R^n)+L^r(R^n)$空间到可测函数空间的次可加映射；并且 T是弱$(1,1)$类的与弱(r,r)类的，对于任意的$1<p<r$，T也是(p,p)类的. 上述等价于说，对于$f,g\in L^1(R^n)+L^r(R^n)$，满足

$$i)|T(f+g)(x)|\le|Tf(x)|+|Tg(x)|;$$
$$ii)m\{x;|Tf(x)|>\alpha\}\le\frac{A_1\|f\|_1}{\alpha},\quad f\in L^1(R^n);$$

$$iii) m\{x; |Tf(x)| > \alpha\} \le \big(\frac{A_r\|f\|_r}{\alpha}\big)^r, \quad f \in L^r(R^n), r < \infty.$$

（当$r=\infty$时，我们假设$\|Tf\|_\infty \le A_\infty \|f\|_\infty$.）则

$$\|Tf\|_p \le A_p \|f\|_p, \quad f \in L^p(R^n).$$

这里 $1 < p < r$， A_p依赖于A_1, A_r, p, r.

5.1 Marcinkiewicz 插值定理的证明

定理5.1的证明：我们假设$r < \infty$.（$r=\infty$情况类似）

对于任意的$g \in L^p(R^n)$，设

$$\lambda(\alpha) = |\{x; |Tg(x)| > \alpha\}|.$$

对于上述的$\alpha > 0$，定义 $g_1(x) = g(x)$（当$|g(x)| \ge \alpha$时），其他区域为零；并且$g_2(x) = g(x) - g_1(x)$. 则$g_1(x) \in L^1(R^n)$， $g_2(x) \in L^r(R^n)$.

既然

$$|T(g_1+g_2)(x)| \le |Tg_1(x)| + |Tg_2(x)|,$$

我们有

$$\{x; |Tg(x)| > \alpha\} \subset \{x; |Tg_1(x)| > \alpha/2\} \cup \{x; |Tg_2(x)| > \alpha/2\}.$$

因此，

$$\lambda(\alpha) = |\{x; |Tg(x)| > \alpha\}| \le m\{x; |Tg_1(x)| > \alpha/2\} + m\{x; |Tg_2(x)| > \alpha/2\}.$$

借助于假设$ii), iii)$，我们有

$$\lambda(\alpha) \le \frac{A_1}{\alpha/2}\int_{R^n} |g_1(x)|dx + \frac{A_r^r}{(\alpha/2)^r}\int_{R^n} |g_2(x)|^r dx$$

因此

$$\lambda(\alpha) \le \frac{A_1}{\alpha/2}\int_{|g|>\alpha} |g(x)|dx + \frac{A_r^r}{(\alpha/2)^r}\int_{|g|\le\alpha} |g(x)|^r dx$$

利用引理4.1中的结论，

$$\int_{R^n} |f|^p dx = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}|\{x; |f| > \alpha\}|dx,$$

我们有

$$\begin{aligned} \|Tg\|_p^p &= p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}|\{x; |Tg| > \alpha\}|dx = p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}\lambda(\alpha)dx \\ &\le p\int_0^{+\infty} \alpha^{p-1}\{\frac{A_1}{\alpha/2}\int_{|g|>\alpha} |g(x)|dx + \frac{A_r^r}{(\alpha/2)^r}\int_{|g|\le\alpha} |g(x)|^r dx\}dx \end{aligned}$$

$$\leq \quad 2A_1 p\int_{R^n}|g|\int_0^{|g|}\alpha^{p-2}d\alpha dx + A_r^r 2^r p\int_{R^n}|g|^r\int_{|g|}^{\infty}\alpha^{p-1-r}d\alpha dx$$
$$\leq \quad [\frac{2A_1 p}{p-1}+\frac{(2A_r)^r p}{r-p}\|g\|_p^p \doteq A_p^p\|g\|_p^p.$$

证毕.

5.2 Riesz-Thorin 插值定理的介绍

Riesz-Thorin 插值定理最初是由Riesz在1926年对于实值函数空间用实变方法给予证明，后来由Thorin在1939年推广至复数空间. 我们这里只是叙述，并给出几个应用，并不给予证明.

Theorem 5.2. （***Riesz-Thorin* 插值定理）
对于任意的$f\in L^{p_0}(R^n)$，$g\in L^{p_1}(R^n)$，设T是一个线性算子满足

$$\|Tf\|_{q_0}\leq C_0\|Tf\|_{p_0},\quad \|Tf\|_{q_1}\leq C_0\|Tf\|_{p_1},.$$

这里$1\leq p_0,q_0,p_1,q_1\leq\infty$，则对于任意的$t\in[0,1]$有

$$\|Tf\|_{q_t}\leq C_0\|Tf\|_{p_t},$$

这里
$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{p_0}+\frac{t}{p_1},\quad \frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{q_0}+\frac{t}{q_1}.$$

Lemma 5.3. （*Hausdorff-Young* 不等式）
若$f\in L^p(R^n)$，$1\leq p\leq 2$，则$\hat{f}\in L^q(R^n)$，且

$$\|\hat{f}\|_q\leq\|f\|_p,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{1}$$

证明：回忆$L^1(R^n)$及$L^2(R^n)$中的Fourier 变换，

$$\|\hat{f}\|_\infty\leq\|f\|_1,\quad \|\hat{f}\|_2\leq\|f\|_2.$$

因此，借助Riesz-Thorin 插值定理，我们有

$$\|\hat{f}\|_{q_t}\leq\|f\|_{p_t},$$

这里
$$\frac{1}{p_t}=\frac{1-t}{1}+\frac{t}{2}=1-\frac{t}{2},\quad \frac{1}{q_t}=\frac{1-t}{\infty}+\frac{t}{2}=1-\frac{1}{p_t}.$$

故，对于$1\leq p\leq 2$有

$$\|\hat{f}\|_q\leq\|f\|_p,\quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$$

Lemma 5.4. （广义的$Young$ 不等式）
若$f \in L^p(R^n)$，$g \in L^q(R^n)$，$1 \leq p, q \leq \infty$，$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. 则

$$\|f * g\|_r \leq \|f\|_p \|g\|_q, \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1. \tag{2}$$

证明：
令T算子为：

$$Tf(x) = g * f(x),$$

则T是线性算子，并且满足，

$$\|Tf\|_q \leq \|g\|_q \|f\|_1,$$

$$\|Tf\|_\infty \leq \|g\|_q \|f\|_{q'} \quad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1.$$

因此，借助Riesz-Thorin 插值定理，我们有

$$\|Tf\|_{r_t} \leq \|g\|_q \|f\|_{p_t},$$

这里

$$\frac{1}{p_t} = \frac{1-t}{1} + \frac{t}{q'} = 1 - \frac{t}{q}, \quad \frac{1}{r_t} = \frac{1-t}{q} + \frac{t}{\infty} = -1 + \frac{1}{p_t} + \frac{1}{q}.$$

故证毕.

6 Calderón-Zygmund 奇异积分算子

在这一章里，我们将研究奇异积分算子的性质，它来源于Fourier级数中出现的Hilbert变换：

$$Hf(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f(y)}{x-y} dy = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x-y|>\varepsilon} \frac{f(y)}{x-y} dy.$$

Hilbert变换的早期研究主要是复方法，50年代后Calderón与Zygmund将这一算子的研究推广到R^n上， 得到了一般的奇异积分理论，这一理论在偏微分方程的应用中发挥着重要角色，可以说是当代调和分析中光辉的一页.

要研究奇异积分算子的性质，我们必须对函数的性质有一个很好的理解，相比较与前几章对空间的集合做的分解， Calderón与Zygmund引入了以他们名字命名的与空间结合的函数分解理论，即Calderón-Zygmund分解定理.

Theorem 6.1. （*Calderón-Zygmund*分解定理）
设非负函数$f \in L^1(R^n)$，$\alpha > 0$，则存在R^n的一个分解使得

$$\begin{aligned} &i) R^n = F \cup \Omega, \quad F \cap \Omega = \emptyset; \\ &ii) f(x) \le \alpha, \quad a.e.\ F; \\ &iii) \Omega = \cup_{k=1}^{\infty} Q_k, \quad \alpha < \frac{1}{|Q_k|} \int_{Q_k} f(x)dx \le 2^n \alpha; \\ &iv) |\Omega| \le \frac{1}{\alpha} \|f\|_1, \end{aligned}$$

这里Q_k是内部两两不交的方体.

借助于上述的分解定理，我们可以证明下列的奇异积分算子的有界性定理.

Theorem 6.2. （***Calderón-Zygmund*奇异积分定理）
设$K(x) \in L^2(R^n)$，我们假设
(a)K的*Fourier*变换是本质有界的，

$$|\hat{K}(\xi)| \le B < \infty;$$

(b)K在原点外是连续可微的，并且满足

$$|\nabla K(x)| \le \frac{B}{|x|^{n+1}}.$$

对于$F \in L^1 \cap L^p(R^n)$，我们假设

$$Tf(x) = \int_{R^n} K(x-y) f(y) dy.$$

则存在一个常数A_p使得

$$\|Tf\|_p \le A_p \|f\|_p, \quad 1 < p < \infty.$$

这里A_p只依赖于p, B, n.

6.1 Calderón-Zygmund 分解定理的证明

证明：

第一步：把全空间R^n分成边长相等的方体$\{Q'\}$，当边长充分大时，我们有

$$\frac{1}{|Q'|}\int_{Q'} f(x)dx \le \alpha$$

第二步：把每一个Q'分成2^n个小的方体Q''，这是会出现两种情况：

Case I:

$$\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} f(x)dx \le \alpha$$

Case II:

$$\frac{1}{|Q''|}\int_{Q''} f(x)dx > \alpha$$

对于第二种情况，我们不再分割；对于第一种情况我们接着把Q''分成2^n个小的方体. 继续讨论，属于第一种情况继续分解，属于第二种情况的停止分解. 如此下去，我们得到第二种情况立方体的可数集合， 记为

$$\Omega = \cup_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

并且满足

$$\alpha < \frac{1}{|Q_k|}\int_{Q_k} f(x)dx \le 2^n\alpha,$$

与

$$|\Omega| \le \frac{1}{\alpha}\|f\|_1.$$

第三步，对于上述$x \in F = R^n \backslash \Omega$，由Lebesgue微分定理我们有

$$f(x) = \lim_{|Q|\to 0}\int_Q f(y)dy.$$

证毕. $\sharp$

6.2 **Calderón-Zygmund 奇异积分算子的有界性

略. 参考P29-33，[8].

7 **Littlewood-Paley 理论与Besov空间

Littlewood-Paley 理论与Besov空间在当今偏微分方程，特别是流体方程的研究中发挥着重要作用. 以陶哲轩为代表利用调和分析研究色散方程，以法国学派Chemin等代表研究流体方程，他们的娴熟技巧之一便是重要的 Littlewood-Paley 理论；同时Besov空间理论也得到越来越多的数学家关注与学习.

7.1 Littlewood-Paley 理论介绍

下面我们来介绍Littlewood-Paley理论的一些基本事实. 选取两个非负的径向函数 $\chi, \phi \in \mathcal{S}(R^n)$， 它们的支集分别在 $\{\xi \in R^n, |\xi| \le \frac{4}{3}\}$ 与$\{\xi \in R^n, \frac{3}{4} \le |\xi| \le \frac{8}{3}\}$ 使得对于任意的 $\xi \in R^n$成立

$$\chi(\xi) + \sum_{j \ge 0} \phi(2^{-j}\xi) = 1.$$

Definition 7.1. 频率局部化算子（*Frequency Localization Operator*）Δ_j 与S_j ：假设$h = \mathcal{F}^{-1}\phi$, $\tilde{h} = \mathcal{F}^{-1}\chi$，则定义

$$\begin{aligned}
&\Delta_j f = \phi(2^{-j}D)f = 2^{nj}\int_{R^n} h(2^j y)f(x-y)dy, \quad\ \textit{for}\ \ j \ge 0,\\
&S_j f = \chi(2^{-j}D)f = \sum_{-1 \le k \le j-1} \Delta_k f = 2^{nj}\int_{R^n} \tilde{h}(2^j y)f(x-y)dy,\\
&\Delta_{-1} f = S_0 f, \ \ \Delta_j f = 0\ \ \textit{for}\ \ j \le -2.
\end{aligned}$$

在上述ϕ的选取下, 容易验证：

Lemma 7.1.

$$\Delta_j \Delta_k f = 0, \ \ \text{if}\ \ |j-k| \ge 2; \ \ \Delta_j(S_{k-1} f \Delta_k f) = 0, \ \ \text{if}\ \ |j-k| \ge 5. \tag{1}$$

Definition 7.2. *Bony*分解定义如下：

$$uv = T_u v + T_v u + R(u,v), \tag{2}$$

这里

$$T_u v = \sum_j S_{j-1} u \Delta_j v, \quad R(u,v) = \sum_{|j-j'| \le 1} \Delta_j u \Delta_{j'} v.$$

我们有下述的Bernstein's不等式.

Theorem 7.2. 设$c \in (0,1)$，$R > 0$. 再设$1 \le p \le q \le \infty$ 与$f \in L^p(R^n)$. 则

$$\begin{aligned}
&\text{supp}\hat{f} \subset \big\{|\xi| \le R\big\} \Rightarrow \|\partial^\alpha f\|_q \le C R^{|\alpha| + n(\frac{1}{p} - \frac{1}{q})}\|f\|_p,\\
&\text{supp}\hat{f} \subset \big\{cR \le |\xi| \le R\big\} \Rightarrow \|f\|_p \le C R^{-|\alpha|} \sup_{|\beta| = |\alpha|} \|\partial^\beta f\|_p,
\end{aligned}$$

这里C是与f，R无关的常数.

7.2 Besov空间理论介绍

Definition 7.3. 非齐次$Besov$空间 $B^s_{p,q}$（ $s\in R$,，$p,q\geq 1$）：借助于 Δ_j，定义如下

$$\|f\|_{B^s_{p,q}} \doteq \left\|\{2^{js}\|\Delta_j f\|_p\}_{j\geq -1}\right\|_{\ell^q},$$

且

$$\|f\|_{B^s_{p,\infty}} \doteq \sup_{j\geq -1}\{2^{js}\|\Delta_j f\|_p\}.$$

编后记.

当接到上《调和分析》这门课程的任务时，我原以为会比较简单；毕竟我读过一些有关调和分析的书籍，也在科研中用过其中经典的方法与理论. 然而，对象是本科生，不像是研究生一二年级，可以随便引申扩展，顿时觉得有些束缚；好在是大三的本科生，有了《数学分析》，《实变函数》的基础， 而《调和分析》就是在这样的枝干上发芽，开花，结果. 我可以把《调和分析》的经典内容用数分，实变的知识去诠释，去融会贯通. 另外， 由于国内外没有一本适合本科生的《调和分析》教材，在这种思想下，我参考国内外专著，写了这本小册子，方便同学们阅读掌握，也方便后来的老师教授这门课程.

最后感谢中科院数学所的张立群研究员，北大数学科学学院的章志飞教授的一些建议与指导；感谢本院郑斯宁教授，李风泉教授，王巍老师，丛鸿滋老师的支持与帮助； 感谢愿意听课的2011级数应专业可爱的同学们.

———2014.4

References

[1] Anton Deitmar, A first course in Harmonic analysis, 世界图书出版公司，2009.

[2] 郭紫华, 调和分析与非线性发展方程引论，2013.

[3] 江泽坚，吴智泉， 实变函数， 高教出版社，1994.

[4] 江泽坚，孙善利， 泛函分析讲义.

[5] 苗长兴，调和分析及其在偏微分方程中的应用，科学出版社，2006.

[6] 苗长兴，张波，偏微分方程的调和分析方法，科学出版社，2008.

[7] 苗长兴，吴家宏，章志飞，Littlewood-Paley理论及其在流体动力学方程中的应用 ，科学出版社，2012.

[8] E.M. Stein,Singular integrals and differentiability properties of functions, 世界图书出版公司，2012.

[9] E.M. Stein and G. Weiss, Introduction to Fourier analysis on Euclidean spaces, 世界图书出版公司，2009.

[10] E.M. Stein and R. Shakarchi, Fourier analysis—An Introduction, 世界图书出版公司，2006.

[11] E.M. Stein, Harmonic analysis, 世界图书出版公司，2012.

[12] 王明新，索伯列夫空间， 高等教育出版社，2013.

[13] 伍胜健，数学分析（二）， 北京大学出版社，2009.

[14] 周民强，调和分析讲义， 北京大学出版社，2003.

[15] 周民强，实变函数论， 北京大学出版社，2001.