第 23卷 第 4期 山 东 轻 工 业 学 院 学 报 Vol. 23 No. 4
2009年 11月 JOURNAL OF SHANDONG INSTITUTE OF LIGHT INDUSTRY Nov. 2009

文章编号: 1004 - 4280(2009)04 - 0089 - 03

二元非线性方程组求根的牛顿迭代法

徐瑞民

(山东轻工业学院 数理学院,山东 济南 250353)

摘要:本文根据一元函数的 Taylor公式和求解一元非线性方程的牛顿迭代法之间的关系,利用多元函数的 Taylor公式推导出了二元非线性方程组的牛顿迭代法;在此基础上,通过 MATLAB仿真计算一个方程组的根来说明该方法是可行的。

关键词:牛顿迭代法;一元函数;二元函数; Tayor公式;Matlab

中图分类号:O242.1 **文献标识码**:A

Newton's method for the nonlinear function of two independent variables

XU Rui-min

(School of Mathematics and Physics, Shandong Institute of Light Industry, Jinan 250353, China)

Abstract: According to the relation between Taylor's law for one independent variable and Newton's method about the nonlinear function of one independent variable, a Newton's method for the nonlinear equation set of two independent variables was derived by Taylor's law for moltivariate function based on this it is possible to verify the method through MATLAb to calculate the root of the equation.

Key words: Newton's Iterative method; function of one independent variable; function of two independent variables; Taylor formula; Matlab

0 引言

非线性方程 $f(x)=0$的数值解法有逐步搜索法、区间二分法、迭代法、牛顿迭代法等[1],那么,对于对于非线性方程组$\begin{cases} f(x,y)=0 \\ g(x,y)=0 \end{cases}$,其牛顿迭代法的迭代方程是什么?本文根据一元函数的 Taylor公式和一元非线性方程牛顿迭代法之间的关系,利用多元函数的 Taylor公式推导出了二元非线性方程组的牛顿迭代法,在此基础上利用推导出的二元非线性方程组求根的牛顿迭代法通过 matlab仿真计算出一个方程组的根,检验了所得方法的有效性。

1 基本定理、结论

定理 1(一元函数的 Taylor公式)[2]

如果函数 $f(x)$在含有 x_0 的某个开区间 (a, b)内具有直 $(n+1)$阶的导数,则对任一 $x\in(a, b)$,有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$,这里 ξ是 x_0 与 x之间的某个值。

定理 2(二元函数的 Taylor公式)[3]

设 $z=f(x,y)$在点 (x_0, y_0)的某一邻域内连续且

收稿日期: 2009 - 09 - 03

作者简介:徐瑞民(1981 -),男,山东省滨州市人,山东轻工业学院数理学院助教,硕士,研究方向:主要从事金融数学理论研究.

有直到 $(n+1)$ 阶的连续偏导数，(x_0+h, y_0+k) 为此邻域内任一点，则有

$$f(x_0+h, y_0+k)=f(x_0, y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)f(x_0, y_0)+\frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0, y_0)+\cdots+\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0)+\frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{n+1}f(x_0+\theta k, y_0+\theta k),$$

$(0<\theta<1)$. 其中 $\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^m f(x_0, y_0)$ 表示 $\sum_{p=0}^{m} C_m^p h^p k^{m-p}\frac{\partial^m f}{\partial x^p \partial y^{m-p}}\Big|_{(x_0, y_0)}$

定理 3:一元非线性方程求根的牛顿牛顿法[1]

设已知方程 $f(x)=0$ 有近似根 x_k (假定 $f'(x_k)\neq 0$)，将函数 $f(x)$ 在点 x_k 处展开，有

$$f(x)\approx f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k),$$

于是方程 $f(x)=0$ 可近似的表示为

$$f(x_k)+f'(x_k)(x-x_k)=0$$

这是个线性方程，记其根为 x_{k+1}，则 x_{k+1} 的计算公式为 $x_{k+1}=x_k-\frac{f(x_k)}{f'(x_k)}\quad (k=0, 1, \cdots)$

2 二元函数的牛顿迭代法

设 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内连续且有直到 2阶的连续偏导数，(x_0+h, y_0+k) 为此邻域内任一点，则有

$$f(x_0+h, y_0+k)\approx f(x_0, y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)\big|_{x=x_0}+k\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)\big|_{y=y_0}\right)$$

其中 $h=x-x_0, k=y-y_0$

于是方程 $f(x, y)=0$ 可近似的表示为

$$f(x_k, y_k)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}f(x, y)\big|_{x=x_k}+k\frac{\partial}{\partial y}f(x, y)\big|_{y=y_k}\right)=0$$

即 $f(x_k, y_k)+(x-x_k)f_x(x_k, y_k)+(y-y_k)f_y(x_k, y_k)=0$

同理设 $z=g(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内连续且有直到 2阶的连续偏导数，(x_0+h, y_0+k) 为此邻域内任一点，则同样有

$$g(x_0+h, y_0+k)\approx g(x_0, y_0)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}g(x, y)\big|_{x=x_0}+k\frac{\partial}{\partial x}g(x, y)\big|_{y=y_0}\right)$$

其中 $h=x-x_0, k=y-y_0$

于是方程 $g(x, y)=0$ 可近似的表示为

$$g(x_k, y_k)+\left(h\frac{\partial}{\partial x}g(x, y)\big|_{x=x_k}+k\frac{\partial}{\partial x}g(x, y)\big|_{y=y_k}\right)=0$$

即 $g(x_k, y_k)+(x-x_k)g_x(x_k, y_k)+(y-y_k)g_y(x_k, y_k)=0$

于是得到方程组

$$\begin{cases} f(x_k, y_k)+(x-x_k)f_x(x_k, y_k)+(y-y_k)f_y(x_k, y_k)=0 \\ g(x_k, y_k)+(x-x_k)g_x(x_k, y_k)+(y-y_k)g_y(x_k, y_k)=0 \end{cases}$$

求解这个方程组:

当 $g_x(x_k, y_k)f_y(x_k, y_k)-f_x(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k)\neq 0$ 时

$$x=x_k+\frac{f(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k)-g(x_k, y_k)f_y(x_k, y_k)}{g_x(x_k, y_k)f_y(x_k, y_k)-f_x(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k)}$$

$$y=y_k+\frac{g(x_k, y_k)f_x(x_k, y_k)-f(x_k, y_k)g_x(x_k, y_k)}{g_x(x_k, y_k)f_y(x_k, y_k)-f_x(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k)}$$

从而:

$$\begin{cases} x=x_k+\dfrac{f(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k)-g(x_k, y_k)f_y(x_k, y_k)}{g_x(x_k, y_k)f_y(x_k, y_k)-f_x(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k)} \\ y=y_k+\dfrac{g(x_k, y_k)f_x(x_k, y_k)-f(x_k, y_k)g_x(x_k, y_k)}{g_x(x_k, y_k)f_y(x_k, y_k)-f_x(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k)} \end{cases} \tag{1}$$

记符号

$$gf_x-fg_x\big|_{(x_k, y_k)}=g(x_k, y_k)f_x(x_k, y_k)-f(x_k, y_k)g_x(x_k, y_k)$$

$$fg_y-gf_y\big|_{(x_k, y_k)}=f(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k)-g(x_k, y_k)f_y(x_k, y_k)$$

$$g_xf_y-f_xg_y\big|_{(x_k, y_k)}=g_x(x_k, y_k)f_y(x_k, y_k)-f_x(x_k, y_k)g_y(x_k, y_k)$$

(1)式可改写为

$$\begin{cases} x=x_k+\dfrac{fg_y-gf_y\big|_{(x_k, y_k)}}{g_xf_y-f_xg_y\big|_{(x_k, y_k)}} \\ y=y_k+\dfrac{gf_x-fg_x\big|_{(x_k, y_k)}}{g_xf_y-f_xg_y\big|_{(x_k, y_k)}} \end{cases} \tag{2}$$

迭代公式为:

$$\begin{cases} x_{k+1}=x_k+\dfrac{fg_y-gf_y\big|_{(x_k, y_k)}}{g_xf_y-f_xg_y\big|_{(x_k, y_k)}} \\ y_{k+1}=y_k+\dfrac{gf_x-fg_x\big|_{(x_k, y_k)}}{g_xf_y-f_xg_y\big|_{(x_k, y_k)}} \end{cases} \tag{3}$$

通过迭代公式(3)可迭代出当 $k=1, 2, \cdots$ 时，(x_k, y_k) 的值，当 $|(x_{k+1}, y_{k+1})|\leq\delta$ ($\delta>0$ 为给定的误差控制项)时，原方程组的根即为 (x_k, y_k)。这就是二元函数牛顿(Newton)法。

3 方法应用

例 给定方程组 $\begin{cases} xy - e^x + e^y - 4 = 0 \\ xe^y - \sin(xy) = 0 \end{cases}$

初始条件取为 $x = 1, y = 1$,用二元函数牛顿迭代法求此方程组的根。

解:令 $\begin{cases} f = xy - e^x + e^y - 4 \\ g = xe^y - \sin(xy) \end{cases}$,计算其偏导数如下

$f_x = y - e^x, g_x = e^y - y\cos(xy)$

$f_y = x + e^y, g_y = xe^y - x\cos(xy)$

其代入迭代公式

$$\begin{cases} x_{k+1} = x_k + \dfrac{fg_y - gf_y|_{(x_k, y_k)}}{g_x f_y - f_x g_y|_{(x_k, y_k)}} \\ y_{k+1} = y_k + \dfrac{gf_x - fg_x|_{(x_k, y_k)}}{g_x f_x - f_x g_y|_{(x_k, y_k)}} \end{cases}$$

可得:

$fg_y - gf_y|_{(x_k, y_k)} = (xy - e^x + e^y - 4)[xe^y - x\cos(xy)] - [xe^y - \sin(xy)](x + e^y)$

$g_x f_y - f_x g_y|_{(x_k, y_k)} = (e^y - y\cos(xy))(x + e^y) - (y - e^x)[xe^y - x\cos(xy)]$

$gf_x - fg_x|_{(x_k, y_k)} = (y - e^x)[xe^y - \sin(xy)] - [e^y - y\cos(xy)](xy - e^x + e^y - 4)$

运用 matlab程序[4,5]解得此方程组的根为:

x = 1.1572e - 005

y = 1.6094

f = 8.1770e - 006

g = 3.9235e - 005

i = 5

分析:初始条件取为 $x = 1, y = 1$,可以换其他数值检验。说明误差在允许范围内! 其迭代次数为 5,迭代速度比较快。

参考文献:

[1] 马东升,雷永军. 数值计算方法[M]. 北京:机械工业出版社, 2001.

[2] 陈传璋,金福临,朱学炎,等. 数学分析(上册)[M]. 北京:高等教育出版社, 1983.

[3] 陈传璋,金福临,朱学炎,等. 数学分析(下册)[M]. 北京:高等教育出版社, 1983.

[4] 李海涛,邓樱. MATLAB程序设计教程[M]. 北京:高等教育出版社, 2004.

[5] 刘为国. MATLAB程序设计教程[M]. 北京:水利水电出版社, 2005.

(上接第 85页)

3 结论

虽然所测试的 3个燃煤电站燃用的煤种各异,取样测试点前烟气净化设备配置情况不同,各测试点处烟气的汞浓度及形态分布存在较大差异。但所设计的 FMSS测试装置对烟气汞的实际取样测试结果与 OH法及 CEM的测试结果基本相一致,说明该装置可用于实际燃煤电站的形态汞浓度测试,且测试准确性好,结果可靠。

KCl/SiO_2吸附剂具有良好的选择吸附特性,且在实际燃煤烟气中,当采样点处的 SO_2浓度高达 1248 ppm时,未发现气态零价汞被 KCl/SiO_2吸附剂氧化吸收的现象。

参考文献:

[1] Meij R. A sampling method based on activated carbon for gaseous mercury in ambient air and flue gases[J]. Water, Air, and Soil Pollution, 1991, 56: 117 - 129.

[2] Prestbo E. M., Bloom N. S. Mercury speciation adsorption (MESA) method for combustion flue gas: methodology, artifacts, intercomparison, and atmospheric implications[J]. Water, Air, and Soil Pollution, 1995, 80: 145 - 158.

[3] Mark S. Germani, William H. Zoller. Vapor - phase concentrations of arsenic, selenium, bromine, iodine, and mercury in the stack of a coal - fired power plant[J]. Environ. Sci. Technol, 1988, 22(9): 1079 - 1085.

[4] Anthony Carpi. Mercury from combustion source: a review of the chemical species emitted and their transport in the atmosphere[J]. Water, Air and Soil Pollution, 1997, 98: 241 - 254.

[5] Pavlish J H, Sondreal E A, Mann M D, et al. Status review of mercury control options for coal - fired power plants[J]. Fuel Process Technology, 2003, 82(2 - 3): 89 - 165.

[6] 周劲松,张乐,骆仲泱,等. 300 MW机组锅炉汞排放及控制研究[J]. 热力发电, 2008, 37(4): 22 - 27.

[7] Babur. Nott. Intercomparison of stack gas mercury measurement methods[J]. Water, Air, and Soil Pollution, 1995, 80: 1311 - 1314.

[8] Takahisa Yokoyama, Kazuo Asakura. Mercury emission from a coal - fired power plant in Japan[J]. The Science of the Total Environment, 2000, 259: 97 - 103.