前　言

"数学物理方法"是物理类专业的重要基础课程，它不仅为后继课程研究有关的数学物理问题作准备，也为实际工作中遇到的数学物理问题的求解提供基础。为了掌握这门课程中解决问题的方法，在学习过程中解算一定数量的习题是至关紧要的。

斯颂乐、徐世良、高永椿、张宫南、张立志等同志将我编写的《数学物理方法》（第二版）的习题一一解答出来，有的习题还有几种解法，以资比较，并对整个题解进行了反复的修订。我认为这样一份题解可以起如下几方面的作用：

担任这门课程的老师，在给学生布置习题作业之前，需要先解算大量的习题，然后从中挑选适当的习题布置给学生，而《数学物理方法》习题的解算往往是很费时间的。《题解》可以节约任课老师挑选习题的时间，让他们把精力用于更好地提高教学质量。

学习这门课程的大学生或自修这门课程的读者，在独立思考和独立解算基础上，可以与《题解》进行比较，以总结自己解法的优缺点。如果某些习题虽经反复思考犹有困难，那么，从《题解》可以找出困难的症结所在，这就前进了一步。但是，这里需要强调的是独立思考，切切不可依赖《题解》，依赖《题解》对于学习是有害无益的。

实际工作者遇到有关数学物理问题时也可能从《题解》中取得某些借鉴。

原书由于编写时间十分仓促，习题答案有某些不妥之处，

解题时已作了订正。

在《数学物理方法习题解答》行将出版之际，天津科学技术出版社的编辑同志要我写个简短的前言，我就把上面的想法写了出来，以就教于各方人士。

梁昆森

一九八一年元月

内 容 提 要

本书对梁昆淼教授所编《数学物理方法》(第二版)中的全部习题作出了解答。内容分复变函数论、傅里叶级数和积分、数学物理方程三个部份，共十七章包括习题约四百条，有些习题列出了多种解法。

本书是配合综合大学、高等师范院校物理类各专业数学物理方法课程的教学用书，也可为工科院校有关专业的工程数学课程所选用，对于有关科学技术工作者也有一定的参考价值。

目　　录

第一篇　复变函数论

第二篇　傅里叶级数和积分

第三篇　数学物理方程

第一篇　复变函数论

第一章　复变函数

§1. 复数与复数运算

1. 下列式子在复数平面上各具有怎样的意义?

（1）$|z|\leqslant 2$.

解一：$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 2$,

或　$x^2+y^2\leqslant 4$.

这是以原点为圆心而半径为2的圆及其内部.

解二：按照模的几何意义，$|z|$是复数$z=x+iy$与原点间的距离．若此距离总是$\leqslant 2$，则即表示以原点为圆心而半径为2的圆及其内部.

（2）$|z-a|=|z-b|$（a、b为复常数）.

解一：设$z=x+iy$，$a=a_1+ia_2$，$b=b_1+ib_2$;

$$|z-a|=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2},$$

$$|z-b|=\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2},$$

于是

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2=(x-b_1)^2+(y-b_2)^2,$$

即　$(2y-a_2-b_2)(b_2-a_2)=(2x-a_1-b_1)(a_1-b_1)$

亦即

$$\frac{y-\frac{a_2+b_2}{2}}{x-\frac{a_1+b_1}{2}}=\frac{a_1-b_1}{b_2-a_2}.$$

这是一条直线.是一条过点 a 和点 b 连线的中点$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$且与该连线垂直的直线.

解二：等式的几何意义是，点 z 到定点 a 和点 b 的距离相等的各点的轨迹，即表示点 a 和点 b 的连线的垂直平分线.

（3） $\mathrm{Re}z>\frac{1}{2}$.

解：设 $z=x+iy$，则$\mathrm{Re}z=x$，故原式为$x>\frac{1}{2}$，它表示 $x>\frac{1}{2}$的半平面，即直线$x=\frac{1}{2}$右边的区域（不包括该直线）.

（4） $|z|+\mathrm{Re}z\leqslant 1$.

解：设 $z=x+iy$，则原式即$x^2+y^2\leqslant(1-x)^2$，亦即 $y^2\leqslant 1-2x$，它表示抛物线$y^2=1-2x$及其内部.

（5） $\alpha<\arg z<\beta, a<\mathrm{Re}z<b$（$\alpha$、$\beta$、$a$ 和 b 为实常数）.

解：注意到$\arg z=\varphi$，$\mathrm{Re}z=x$，则原二式

即
$$\begin{cases}\alpha<\varphi<\beta,\\ a<x<b.\end{cases}$$

为两直线$x=a$、$x=b$和两射线$\varphi=\alpha$、$\varphi=\beta$所围成的区域（不包括边界）.

（6） $0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$.

解：因为$\frac{z-i}{z+i}=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}$

$$=\frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{[x+i(y+1)][x-i(y+1)]}$$

$$=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$

$$\cong X+iY=Z.$$

所以，原式即 $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$.如以X轴为实轴，Y轴为虚轴，上式在复平面Z上表示由射线$\Phi=0$和$\Phi=\frac{\pi}{4}$所围成的区域（不包括射线本身），这就意味着要求$X>0$和$Y>0$，

即要求 $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}>0$ 和 $\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}>0$,

亦即

$$\begin{cases} x<0, \\ x^2+y^2-1>0. \end{cases} \tag{1}$$

又由$0<\arg Z<\frac{\pi}{4}$得 $0<\operatorname{arctg}(Y/X)<\frac{\pi}{4}$，即

$$0<\operatorname{arctg}\left(\frac{-2x}{x^2+y^2-1}\right)<\frac{\pi}{4},$$

亦即 $0<\frac{-2x}{x^2+y^2-1}<1$，注意到(1)式，

则

$$\begin{cases} -2x>0, \\ -2x<x^2+y^2-1. \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x<0, \\ x^2+y^2+2x-1>0. \end{cases} \tag{2}$$

在$x<0$的条件下，凡满足$x^2+y^2+2x-1>0$的点必定也满足$x^2+y^2-1>0$.所以，(1)式无需单独提出，而(2)式表示复平面上的左半平面$x<0$,但除去圆周$(x+1)^2+y^2=2$及其内部（图1-1）.

注意：应排除

$$\begin{cases} x>0, \\ x^2+y^2-1<0; \end{cases}$$

及 $(x+1)^2+y^2<2$

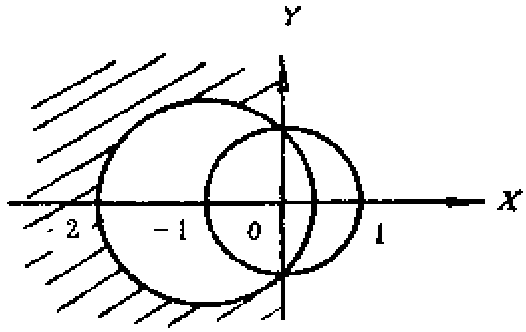


图 1-1

(这相当于 $X<0$, $Y<0$;

即 $\pi<\Phi<\frac{5}{4}\pi$，$\pi<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{5}{4}\pi$)这个解.

（7）$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$.

解：$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=\left|\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}\right|$

$$=\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}\leqslant 1,$$

即 $\quad (x-1)^2+y^2\leqslant(x+1)^2+y^2$,

亦即 $0\leqslant x$，这表示连同 Y 轴在内的右半平面.

（8）$\operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=2$.

解：$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$,

故 $\quad \operatorname{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}=2, 2x^2+2y^2=x$,

即 $\quad \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{1}{16}$.

这是中心在 $\left(\frac{1}{4}, 0\right)$ 而半径为 $\frac{1}{4}$ 的圆周.

（9）$\operatorname{Re}z^2=a^2$（a 是实常数）.

解：$z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i\cdot 2xy$,

故 $\operatorname{Re}z^2=x^2-y^2$，则原式即为

$$x^2-y^2=a^2.$$

此轨迹为双曲线$x^2-y^2=a^2$。

(10) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.

解：这是一个恒等式，对于复平面上任意的z_1和z_2都成立，因为

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2&=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\\&\quad+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\&=2x_1{}^2+2x_2{}^2+2y_1{}^2+2y_2{}^2\\&=2|z_1|^2+2|z_2|^2.\end{aligned}$$

它表示平行四边形对角线的平方和等于两邻边平方和的两倍。

此外，如把z_1和z_2表示成复平面上的矢量，那么z_1和z_2的加减运算与相应的矢量的加减运算（平行四边形法则）是相同的，这可由图1-2清楚地看出。

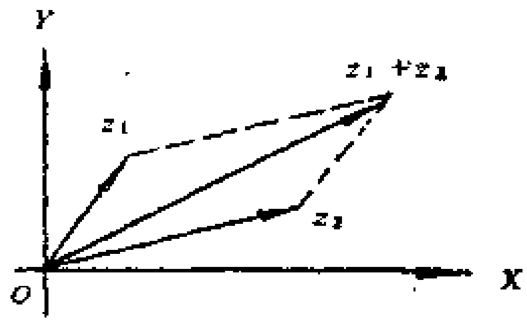


图 1-2

2.把下列复数用代数式、三角式和指数式几种形式表示出来。

(1) i.

解：i本身即为代数式，此时在$z=x+iy$中，$x=0$、$y=1$；

三角式：$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=1$,

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=\operatorname{argtg}\left(\frac{1}{0}\right)=\frac{\pi}{2},$$

所以 $z=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$;

指数式：$z=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

（2） -1.

解：-1本身即为代数式；

三角式：$z=\cos\pi+i\sin\pi$；

指数式：$z=e^{i\pi}$.

（3） $1+i\sqrt{3}$.

解：$z=1+i\sqrt{3}$本身即为代数式；

三角式：$\rho=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$，

所以
$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

指数式：$z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

（4） $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$（α是实常数）.

解：$z=(1-\cos\alpha)+i\sin\alpha$本身即为代数式；

三角式：$\rho=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{\alpha}{2},$$

在主值范围内 $\varphi=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，所以

$$z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

或 $$z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$$
$$(0\leqslant\alpha\leqslant\pi);$$

指数式：$z=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$，

或 $$z=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}.$$

（5）z^3.

解：代数式：$z^3=(x+iy)^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$

三角式：$z^3=\rho^3(\cos3\varphi+i\sin3\varphi)$，

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$；

指数式：$z^3=\rho^3e^{i3\varphi}$.

（6）e^{1+i}.

解：指数式即为$z=e^{1+i}=e\cdot e^i$，显然，其中$\rho=e$，$\varphi=1$；

三角式：$z=e(\cos1+i\sin1)$；

代数式：$z=e\cos1+ie\sin1$.

（7）$\frac{1-i}{1+i}$.

解：代数式：$z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{1}{2}(1-i)^2=-i$.

三角式：因$\rho=1$，$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{0}\right)=\frac{3}{2}\pi$，所以

$$z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2};$$

指数式：$z=e^{i\frac{3\pi}{2}}$.

3.计算下列数值（a、b和φ为实常数）.

（1） $\sqrt{a+ib}$．

解：先化$a+ib$为三角式

$$a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\ (\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

其中 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，于是

$$\begin{aligned}\sqrt{a+ib}&=\sqrt[4]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\\&=\sqrt[4]{a^2+b^2}\left[\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)}\right.\\&\qquad\left.+\ i\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)}\ \right]\\&=\sqrt[4]{a^2+b^2}\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}\right.\\&\qquad\left.+\ i\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}\right]\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}\right.\\&\qquad\left.+\ i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right).\end{aligned}$$

（2） $\sqrt[3]{i}$．

解：因 $i=1\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]$，

所以

$$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}n\pi\right)\right],$$

或 $\qquad \sqrt[3]{i}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}n\pi\right)}\quad (n=0,1,2)$．

（3）i^i。

解：因 $i=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}$，所以

$$i^i=\left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right]^i=e^{-\frac{\pi}{2}-2n\pi}\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

（4）$\sqrt[i]{i}$.

解：仿上题，

$$\sqrt[i]{i}=\left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right]^{\frac{1}{i}}=e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

（5）$\cos5\varphi$.

（6）$\sin5\varphi$.

解：由乘幂的公式

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

及二项式定理

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots,$$

$$+\frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k}b^k+\cdots.$$

可知

$$\begin{aligned}\cos5\varphi+i\sin5\varphi&=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5\\&=\cos^5\varphi+i5\cos^4\varphi\sin\varphi\\&\quad-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi\\&\quad-i10\cos^2\varphi\sin^3\varphi\\&\quad+5\cos\varphi\sin^4\varphi+i\sin^5\varphi.\end{aligned}$$

比较等式两边的实部和虚部得

$$\cos5\varphi=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$

$$\sin5\varphi=5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi.$$

（7）$\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$.

（8）$\sin\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$.

解一：从初等代数知道，n 项的等比级数 $x+x^2+\cdots+x^n$ 的和为 $x\dfrac{1-x^n}{1-x}$.

现在所求为

$$
\begin{aligned}
&\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi \\
&\quad+i(\sin\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi+\cdots+\sin n\varphi) \\
&=(\cos\varphi+i\sin\varphi)+(\cos2\varphi+i\sin2\varphi)+\cdots \\
&\quad+(\cos n\varphi+i\sin n\varphi) \\
&=e^{i\varphi}+e^{2i\varphi}+\cdots+e^{ni\varphi} \\
&=e^{i\varphi}\frac{1-e^{in\varphi}}{1-e^{i\varphi}} \\
&=\frac{e^{i\varphi}(1-e^{-i\varphi})(1-e^{in\varphi})}{(1-e^{-i\varphi})(1-e^{i\varphi})} \\
&=\frac{(e^{i\varphi}-1)(1-e^{in\varphi})}{2-2\cos\varphi} \\
&=\frac{e^{i\varphi/2}(e^{i\varphi/2}-e^{-i\varphi/2})e^{in\varphi/2}(e^{-in\varphi/2}-e^{in\varphi/2})}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} \\
&=\frac{e^{i\varphi/2}\left(2i\sin\frac{\varphi}{2}\right)e^{in\varphi/2}\left(-2i\sin\frac{n\varphi}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}} \\
&=\frac{e^{i(n+1)\varphi/2}\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}} \\
&=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\left(\cos\frac{n+1}{2}\varphi+i\sin\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}},
\end{aligned}
$$

比较等式两边的实部和虚部得

$$\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\sin\frac{\varphi}{2}\right],$$

$$\sin\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left[\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right].$$

解二：

$$\cos\varphi+\cos2\varphi+\cdots+\cos n\varphi+i\sin\varphi+i\sin2\varphi+\cdots+i\sin n\varphi$$

$$=(\cos\varphi+i\sin\varphi)+(\cos2\varphi+i\sin2\varphi)+\cdots+(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

$$=(\cos\varphi+i\sin\varphi)+(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2+\cdots+(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$$

$$=\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)[1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n]}{1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$$

$$=\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)[(1-\cos n\varphi)-i\sin n\varphi]\cdot[(1-\cos\varphi)+i\sin\varphi]}{[(1-\cos\varphi)-i\sin\varphi]\cdot[(1-\cos\varphi)+i\sin\varphi]}$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\left\{\left[4\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\varphi\right.\right.$$

$$-2\sin^2\frac{n\varphi}{2}\sin^2\varphi$$

$$+2\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\sin n\varphi+\sin\varphi\cos\varphi\sin n\varphi\Big]$$

$$+i\Big[4\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{n\varphi}{2}\sin\varphi$$

$$+2\sin^2\frac{n\varphi}{2}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$-2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\sin n\varphi+\sin^2\varphi\sin n\varphi\Big]\Big\}$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\Big\{\Big[\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\varphi-\sin\frac{\varphi}{2}\Big]2\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$+i\Big[\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\varphi\Big]2\sin\frac{\varphi}{2}\Big\}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\Big\{\Big[\sin\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\varphi-\sin\frac{\varphi}{2}\Big]$$

$$+i\Big[\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\Big(n+\frac{1}{2}\Big)\varphi\Big]\Big\},$$

比较等式两边的实部和虚部也得到解①中的答案.

§2. 复变函数

1.试验证(2.11)—(2.14)几个式子.

(1) (2.11)式: $\sin(z+2\pi)=\sin z, \cos(z+2\pi)$

$=\cos z.$

验证: $\sin(z+2\pi)=\dfrac{1}{2i}\Big[e^{i(z+2\pi)}-e^{-i(z+2\pi)}\Big]$

$$=\frac{1}{2i}\Big(e^{iz}-e^{-iz}\Big)=\sin z,$$

$$\cos(z+2\pi) = \frac{1}{2}\left[e^{i(z+2\pi)} + e^{-i(z+2\pi)}\right]$$

$$= \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z.$$

由此可见，三角函数有实周期2π。

（2）(2.12)式：

$$|\sin z| = \frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y} + e^{-2y}) + (2\sin^2 x - \cos^2 x)}\ .$$

验证：因$\sin z = \frac{1}{2i}(e^{iz} - e^{-iz}) = -\frac{i}{2}[e^{i(x+iy)}$

$$- e^{-i(x+iy)}]$$

$$= -\frac{i}{2}(e^{-y}e^{ix} - e^{y}e^{-ix})$$

$$= -\frac{i}{2}[e^{-y}(\cos x + i\sin x)$$

$$- e^{-y}(\cos x - i\sin x)]$$

$$= \frac{1}{2}[(e^{y} + e^{-y})\sin x + i(e^{y} - e^{-y})\cos x],$$

所以 $$|\sin z| = \frac{1}{2}\sqrt{(e^{y} + e^{-y})^2\sin^2 x + (e^{y} - e^{-y})^2\cos^2 x}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y} + e^{-2y}) + 2(\sin^2 x - \cos^2 x)}\ .$$

（3）(2.13)式：

$$|\cos z| = \frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y} + e^{-2y}) + 2(\cos^2 x - \sin^2 x)}\ .$$

验证一：其步骤全同于（2）.

验证二：由 $\cos z = \sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)$再利用（2）的答案，

则 $$|\cos z| = \left|\sin\left(\frac{\pi}{2} - z\right)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\cos^2x-\sin^2x)}\text{.}$$

（4）(2.14)式：$e^{z+2\pi i}=e^z$，$\mathrm{sh}(z+2\pi i)=\mathrm{sh}z$，

$$\mathrm{ch}(z+2\pi i)=\mathrm{ch}z\text{.}$$

验证：$e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{i2\pi}=e^z$，

$$\mathrm{sh}(z+2\pi i)=\frac{1}{2}[e^{z+2\pi i}-e^{-z-2\pi i}]$$

$$=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})=\mathrm{sh}z\text{,}$$

$$\mathrm{ch}(z+2\pi i)=\frac{1}{2}[e^{z+2\pi i}+e^{-z-2\pi i}]$$

$$=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})=\mathrm{ch}z\text{.}$$

显然，双曲函数有纯虚周期$2\pi i$.

2.计算下列数值（a 和 b 为实常数，x 为实变数）.

（1）$\sin(a+ib)$.

解：
$$\sin(a+ib)=\frac{1}{2i}[e^{i(a+ib)}-e^{-(a+ib)i}]$$

$$=\frac{1}{2i}[e^{-b}(\cos a+i\sin a)$$

$$-e^{+b}(\cos a-i\sin a)]$$

$$=\frac{1}{2}[e^{-b}\sin a+e^b\sin a+i(e^b\cos a$$

$$-e^{-b}\cos a)]$$

$$=\frac{1}{2}[(e^b+e^{-b})\sin a+i(e^b-e^{-b})\cos a]\text{.}$$

（2）$\cos(a+ib)$.

解：$\cos(a+ib)=\dfrac{1}{2}(e^{i(a+ib)}+e^{-i(a+ib)})$

$=\dfrac{1}{2}[e^{-b}(\cos a+i\sin a)+e^{b}(\cos a$

$-i\sin a)]$

$=\dfrac{1}{2}[(e^{-b}+e^{b})\cos a+i(e^{-b}-e^{b})\sin a]$。

（3）$\ln(-1)$。

解一：$\ln(-1)=\ln|-1|+i\arg(-1)=i(2n+1)\pi$；

解二：$\ln(-1)=\ln e^{i(\pi+2n\pi)}=\ln e^{i(2n+1)\pi}$

$=i(2n+1)\pi\ (n=0,\pm1,\cdots)$。

（4）$\mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z$。

解：$\mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z=\dfrac{e^{2z}+2+e^{-2z}}{4}-\dfrac{e^{2z}-2+e^{-2z}}{4}=1$。

（5）$\cos ix$。

解：$\cos ix=\dfrac{e^{i(ix)}+e^{-i(ix)}}{2}=\dfrac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x$。

（6）$\sin ix$。

解：$\sin ix=\dfrac{e^{i(ix)}-e^{-i(ix)}}{2i}=\dfrac{e^{x}-e^{-x}}{2}i$

$=i\,\mathrm{sh}x$。

（7）$\mathrm{ch}ix$。

解：$\mathrm{ch}ix=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x$。

（8）$\mathrm{sh}ix$。

解：$\mathrm{sh}ix=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=i\sin x$。

（9）$|e^{iaz-ib\sin z}|$。

解：因$\sin z=\sin(x+iy)$

$$=\frac{1}{2}\left[(e^{y}+e^{-y})\sin x+i(e^{y}-e^{-y})\cos x\right],$$

所以

$$原式=\left|e^{ia(x+iy)-ib\cdot\frac{1}{2}[(e^{y}+e^{-y})\sin x+i(e^{y}-e^{-y})\cos x]}\right|$$

$$=\left|e^{-ay}\cdot e^{i[ax-\frac{b}{2}(e^{y}+e^{-y})\sin x-i\frac{b}{2}(e^{y}-e^{-y})\cos x]}\right|$$

$$=\left|e^{-ay+\frac{b}{2}(e^{y}-e^{-y})\cos x}\cdot e^{i[ax-\frac{b}{2}(e^{y}+e^{-y})\sin x]}\right|$$

$$=e^{-ay+\frac{b}{2}(e^{y}-e^{-y})\cos x}=e^{-ay+b\,\mathrm{sh}\,y\cos x}.$$

3.求解方程$\sin z=2$.

解一：原方程即 $\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=2$,即$e^{iz}-e^{-iz}=4i$,

亦即

$$(e^{iz})^2-4i(e^{iz})-1=0.$$

由一元二次代数方程的根的公式得

$$e^{iz}=2i\pm\sqrt{(2i)^2+1}=(2\pm\sqrt{3})i,$$

于是

$$iz=\ln\left[(2\pm\sqrt{3})i\right]=\ln(2\pm\sqrt{3})+\ln i$$

$$=\ln(2\pm\sqrt{3})+\ln\left(e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}\right)$$

$$=\ln(2\pm\sqrt{3})+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right),$$

所以
$$z=\frac{1}{i}\left[\ln(2\pm\sqrt{3})+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}+2n\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3}).$$

因$-\ln(2\pm\sqrt{3})=\ln(2\mp\sqrt{3})$，故上式又可表为

$$z=\frac{\pi}{2}+2n\pi+i\ln(2\mp\sqrt{3}).$$

解二：$\sin z=\frac{1}{2}\left[(e^{y}+e^{-y})\sin x+i(e^{y}+e^{-y})\cos x\right]=2$,

比较等式两边的实部和虚部得

$$\begin{cases}(e^{y}+e^{-y})\sin x=4, & (1)\\ (e^{y}+e^{-y})\cos x=0. & (2)\end{cases}$$

在(2)式中，如果$e^{y}-e^{-y}=0$，则$y=0$，以$y=0$代入(1)式中则得出$\sin x=2$的错误结果；所以y不能为零，即$e^{y}-e^{-y}\neq 0$。只有$\cos x=0$，即

$$x=\frac{\pi}{2}+n\pi\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

但以$x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$代入(1)式，则得$-(e^{y}+e^{-y})=4$，

显然是不合理的，必须在$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$的解中舍去$x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$的部分解，只保留$x=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$的部分解，以$x=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$代入(1)式得

$$e^{y}+e^{-y}=4,$$

即
$$(e^{y})^{2}-4e^{y}+1=0,$$

由此解出
$$e^{y}=2\pm\sqrt{3}.$$

即
$$y=\ln(2\pm\sqrt{3}),$$

所以

$$z=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi+i\ln(2\pm\sqrt{3}).$$

§3. 多 值 函 数

指出下列多值函数的支点及其阶，并作出里曼面。

（1）$\sqrt{z-a}$。

解：(i) 根式$w=\sqrt{z-a}$的定义是$w^2=z-a$，今用指数式表示出$w=\rho e^{i\varphi}$，$z-a=re^{i\theta}$(r、$\rho\geqslant 0$)。以此代入$w^2=z-a$中得$\rho^2e^{i2\varphi}=re^{i\theta}$，所以$\rho^2=r$，$e^{i2\varphi}=e^{\theta i}$，$w=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$，即

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{r}\,,\\ 2\varphi=\theta+2n\pi,\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots\cdots),\end{cases}$$

由此可见，w的模与$z-a$的模r的对应关系是唯一确定的，但辐角不是如此，而是对应于每一个θ值，有两个不同的φ值，如：$\varphi_1=\dfrac{\theta}{2}(n=0)$，$\varphi_2=\dfrac{\theta}{2}+\pi$ $(n=1)$。相应的w值是：$w_1=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$，$w_2=\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}=-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$，其它$n$值给出的只是这两个$w$值的重复。

(ii) 对于$w=\sqrt{z-a}$来说，a点具有这样的特性，而z绕a点转一圈回到原处时，相应的函数值w不还原，改变了正负号；而当z不绕a点转一圈回到原处时，函数值还原，所以a点是该多值函数的支点。当z绕a点转两圈回到原处时，对应的函数值还原，所以a点是该多值函数的一阶支点。

(iii) 如令$z=\dfrac{1}{t}$，则$w=\dfrac{\sqrt{1-at}}{\sqrt{t}}$；当$t$绕$t=0$转一圈回到原处时，$w$值不能还原；绕两圈回到原处时，$w$值还原，所以$z=\infty$也是一阶支点。

作出里曼面如图1-3。

(2) $\sqrt{(z-a)(z-b)}$。

解：(i) 如令$z-a=r_1e^{i\theta_1}$，$z-b=r_2e^{i\theta_2}$，$w=\rho e^{i\varphi}$，则

$$w=\sqrt{(z-a)(z-b)}$$

$$=\rho e^{i\varphi}=\sqrt{r_1r_2}\ e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}},$$

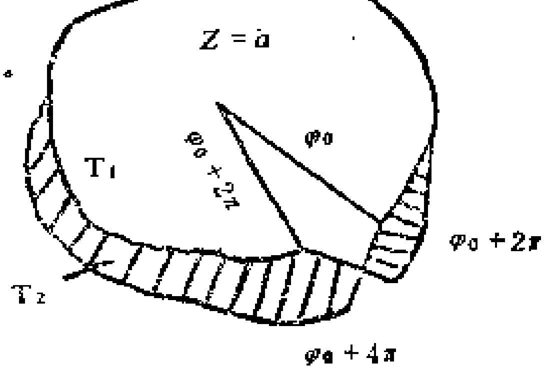


图 1-3

即

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{r_1r_2},\\ 2\varphi=\theta_1+\theta_2+2n\pi\,(n=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots).\end{cases}$$

(ii) 同上题分析，$z=a$和$z=b$是多值函数w的一阶支点。

(iii) 里曼面有两叶，在T_1上从$z=a$到$z=b$作切割，T_1的切割下岸连结于T_2的上岸，T_2的下岸连结于T_1的上岸。事实上，沿着不包围点a和b的闭路1环行一周，辐角θ_1和θ_2又返回原来的值。沿着包围两个点a和b的闭路2环行一周，此二辐角各增加2π，所以$\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$也增加$2\pi$，而函数值$w$还原。如果在同一叶上沿着只包围$a$点（或$b$点）的闭路3环行一周，函数值$w$并不还原，所作切割就是为了截断此种闭路。

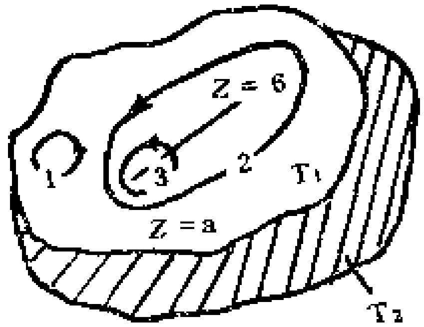


图 1-4

(3) $\ln z$

解：(i) 对数函数$w=\ln z$的定义是：$e^w=z$，令$w=u+iv$和$z=re^{i\theta}$代入上式得$e^u\cdot e^{iv}=re^{i\theta}$，比较两边的模和辐角得

$$e^u=r,\ \text{即}u=\ln r=\ln|z|,$$

$$v=\arg z=\theta+2n\pi\,(n=0,\pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots).$$

(ii) 由上可见，对数函数的多值性表现在函数值 w 的虚部 v 与自变量 z 的辐角的对应关系上。对于每一个 z 值，有无穷多个 w 值，这些不同的 w 值只是虚部不同而已，相差为 2π 的整数倍，即 $w_n(z) = \ln|z| + i(\theta + 2n\pi)$，其支点是 $z = 0$，而且是无限阶支点。

(iii) 黎曼面如图1-5所示，它有无穷多叶，在第一叶上从 $z = 0$ 到 $z = \infty$ 作切割，每一叶的切割下岸连接于下一叶的上岸（$z = \infty$ 亦为无限阶支点）。

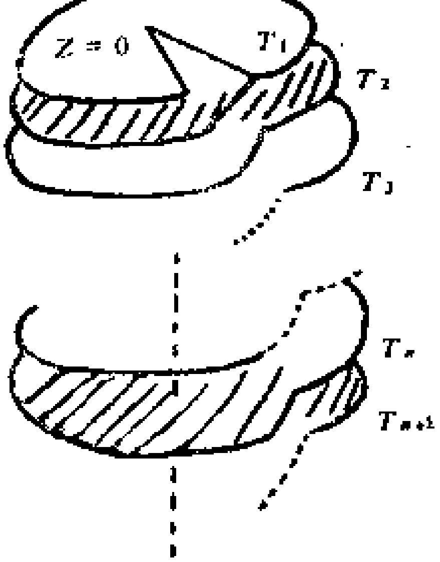


图 1-5

（4） $\ln(z - a)$。

解：除了以 $z = a$ 代替上题中的 $z = 0$ 以外，其它的分析完全和上题相同。

§4. 导数（微商）

试推导极坐标系中的科希-里曼方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{\partial v}{\partial \rho}. \end{cases}$$

解一：从直角坐标系中的科希-里曼方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

出发，按照变换公式：$\rho = \sqrt{x^2 + y^2}$ 和 $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$，即

$x=\rho\cos\varphi$ 和 $y=\rho\sin\varphi$ 变换到极坐标。计算如下：

从变换公式可得

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial\rho}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{x}{\rho}=\cos\varphi, \\[2ex]
\dfrac{\partial\rho}{\partial y}=\dfrac{1}{2}\dfrac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\dfrac{y}{\rho}=\sin\varphi, \\[2ex]
\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\dfrac{y\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{-y}{x^2+y^2}=-\dfrac{\sin\varphi}{\rho}, \\[2ex]
\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\dfrac{\dfrac{1}{x}}{1+\left(\dfrac{y}{x}\right)^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{\cos\varphi}{\rho},
\end{cases}
$$

又

$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}+\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\cos\varphi\dfrac{\partial u}{\partial\rho}-\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}, \\[2ex]
\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial y}+\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\sin\varphi\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho}\cos\varphi\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}, \\[2ex]
\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial x}+\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}=\cos\varphi\dfrac{\partial v}{\partial\rho}-\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}, \\[2ex]
\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\dfrac{\partial\rho}{\partial y}+\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}=\sin\varphi\dfrac{\partial v}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho}\cos\varphi\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}.
\end{cases}
$$

把以上四式代入直角坐标系中的科希–甲曼方程得

$$
\begin{cases}
\cos\varphi\dfrac{\partial u}{\partial\rho}-\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\sin\varphi\dfrac{\partial v}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho}\cos\varphi\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}, & (1) \\[2ex]
\sin\varphi\dfrac{\partial u}{\partial\rho}+\dfrac{1}{\rho}\cos\varphi\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=-\cos\varphi\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}+\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}. & (2)
\end{cases}
$$

(1)式 $\times\sin\varphi-$(2)式 $\times\cos\varphi$ 给出

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial \varphi}=\frac{\partial v}{\partial \rho}, \tag{3}$$

(1)式×cosφ＋(2)式×sinφ给出

$$\frac{\partial u}{\partial \rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial \varphi}, \tag{4}$$

(3)与(4)即为极坐标系中的科希-里曼方程。

解二：从定义出发进行推导。

$$w=u(z)+iv(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi).$$

在极坐标系中，先令 Δz 沿径向逼近零，即 $\Delta z=e^{i\varphi}\Delta\rho\to 0$，则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta\rho}\frac{\Delta\rho}{\Delta z}=\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta\rho}e^{i\varphi}$$

$$=\lim_{\Delta\rho\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta\rho}e^{-i\varphi}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+i\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)e^{-i\varphi};$$

再令Δz沿横向逼近零，即 $\Delta z=\rho\Delta(e^{i\varphi})=i\rho e^{i\varphi}\Delta\varphi\to 0$，则

$$\lim_{\Delta z\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta z}=\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta w}{\Delta\varphi}\frac{1}{i\rho}e^{-i\varphi}$$

$$=-\frac{i}{\rho}e^{-i\varphi}\lim_{\Delta\varphi\to 0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta\varphi}$$

$$=-\frac{i}{\rho}e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial n}{\partial\varphi}+i\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-i\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)e^{-i\varphi}.$$

如果函数$w(z)$在点z可导，则上述二极限必须都存在而且彼此相等，即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+i\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)e^{-i\varphi}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{i}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)e^{-i\varphi},$$

比较上式中的实部和虚部即得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \rho} = -\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

§5. 解 析 函 数

1.某个区域上的解析函数如为实函数，试证它必为常数。

解：设这个解析函数为$w(z) = u(x,y) + iv(x,y)$，因为它是实数，所以$v(x,y) \equiv 0$；因为它是解析函数，所以它满足科希-里曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$$

注意到$v(x,y) \equiv 0$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 0. \tag{2}$$

由(1)知$u = f_1(y)$，由(2)知$u = f_2(x)$；因为x、y在该区域中皆为独立变数，要$f_1(y) = f_2(x) = u$，则只有$f_1(y) = f_2(x) =$ 常数，即u必为常数，亦即该解析函数必为常数。

2.已知解析函数$f(z)$的实部$u(x,y)$或虚部$v(x,y)$，求该解析函数。

（1）$u = e^x \sin y$。

解一：$\dfrac{\partial u}{\partial x} = e^x \sin y$，$-\dfrac{\partial u}{\partial y} = -e^x \cos y$。根据科希-里曼方程，则

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\cos y.\ 于是$$

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-e^x\cos y dx+e^x\sin y dy$$

$$=d(-e^x\cos y).$$

所以
$$v(x,y)=-e^x\cos y+C.$$

$$f(z)=e^x\sin y+i(-e^x\cos y+C)$$

$$=-ie^x(\cos y+i\sin y)+iC=-ie^x\cdot e^{iy}+iC$$

$$=-ie^{x+iy}+iC=-ie^z+iC.$$

解二：因为

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\cos y, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\sin y. \tag{2}$$

所以，由（1）式，暂且把y当作参数，对x积分，

$$v(x,y)=\int^{(x)}-e^x\cos y dx=-e^x\cos y+\varphi(y). \tag{3}$$

把（3）式对y求偏导数，

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\sin y+\varphi'(y) \tag{4}$$

比较（2）式和（4）式得$\varphi'(y)=0$，即$\varphi(y)=C$。所以

$$v(x,y)=-e^x\cos y+C,$$

$$f(z)=e^x\sin y+i(-e^x\cos y+C)=-ie^z icC.$$

必须指出：下面各题都可用这两种方法求解，限于篇幅，我们将只任给出一种。

（2）$u=e^x(x\cos y-y\sin y)$，$f(0)=0$，

解：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x\ (x\cos y+\cos y-y\sin y)\ =\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2ex] -\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^x\ (x\sin y+\sin y+y\cos y)\ =\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

$$
\begin{aligned}
dv &= e^x(x\cos y+\cos y-y\sin y)dy+e^x(x\sin y\\
&\quad +\sin y+y\cos y)dx\\
&= e^x d(x\sin y+\sin y+y\cos y-\sin y)+e^x d(x\sin y\\
&\quad -\sin y+\sin y+\cos y)\\
&= d(e^x x\sin y+e^x y\cos y),
\end{aligned}
$$

所以 $v=e^x x\sin y+e^x y\cos y+C$.

$$
\begin{aligned}
f(z) &= e^x(x\cos y-y\sin y)+ie^x(x\sin y+y\cos y)+iC\\
&= xe^x(\cos y+i\sin y)-e^x y(\sin y-i\cos y)+iC\\
&= xe^x e^{iy}+iye^x e^{iy}+iC=e^{x+iy}(x+iy)+iC\\
&= ze^z+iC.
\end{aligned}
$$

因为$f(0)=0\cdot e^{i0}+iC=0$. 故$C=0$, 于是

$$f(z)=ze^z.$$

(3) $u=\dfrac{2\sin x}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}$, $f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$,

解:
$$
\begin{cases}
\dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{4\sin 2x(e^{2y}-e^{-2y})}{(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)^2}\\[2ex]
\dfrac{\partial v}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{4\cos 2x(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)-8\sin^2 2x}{(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)^2}
\end{cases}
$$

$$dv=\frac{4\sin 2x(e^{2y}+e^{-2y})dx+4[\cos x(e^{2y}+e^{-2y})-2]dy}{[e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x]^2}$$

同(1)题, 把$\dfrac{\partial v}{\partial x}$对$x$积分, 把$y$暂且当作参数,

$$v=-\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}+\varphi(y).$$

于是,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{2(e^{2y}-e^{-2y})^2-2(e^{2y}+e^{-2y})(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)}{(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)^2}\\
&\quad +\varphi'(y)
\end{aligned}
$$

$$=\frac{4[\cos 2x(e^{2y}+e^{-2y})-2]}{(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)^2}+\varphi'(y).$$

把上式与前式比较知$\varphi(y)=C$；又由于 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，

$\therefore\quad C=0$

则
$$v=-\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}.$$

所以 $f(z)=u+iv=\dfrac{2\sin 2x-i(e^{2y}e^{-2y})}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}=\mathrm{ctg}z$、

读者可以自己验证

$$\mathrm{ctg}z=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=\frac{(e^{y}-e^{-y})\sin x+i(e^{y}+e^{-y})\cos x}{(e^{-y}-e^{y})\cos x-i(e^{-y}+e^{y})\sin x}$$
$$=\frac{2\sin 2x-i(e^{2y}-e^{-2y})}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}.$$

（4） $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$f(2)=0$。

解 因为在 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$中的分母是x^2+y^2，这种情况下改用极坐标处理比较方便，这时

$$v=\frac{1}{\rho}\sin\varphi.$$

注意到极坐标系中的科希-里曼方程，则

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=\dfrac{1}{\rho^2}\cos\varphi=\dfrac{\partial u}{\partial\rho},\\[2mm] -\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho^2}\sin\varphi=\dfrac{1}{\rho}\,\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho^2}\cos\varphi,\\[2mm] \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi.\end{cases}$$

$$du = \left(\frac{1}{\rho^2}\cos\varphi\right)d\rho + \left(\frac{1}{\rho}\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$= \cos\varphi d\left(-\frac{1}{\rho}\right) + \frac{1}{\rho}d(-\cos\varphi)$$

$$= d\left(-\frac{1}{\rho}\cos\varphi\right),$$

所以 $$u = -\frac{1}{\rho}\cos\varphi + C,$$

$$f(z) = \frac{1}{\rho}(-\cos\varphi + i\sin\varphi) + C$$

$$= \frac{1}{\rho}e^{-i\varphi} + C = -\frac{1}{z} + C.$$

又因$f(2) = -\frac{1}{2} + C = 0$，则$C = \frac{1}{2}$，从而

$$f(z) = \frac{1}{2} - \frac{1}{z}.$$

（5） $u = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}$，$f(\infty) = 0$。

解：u的表达式的分母与上题相似，也含有因子$x^2 + y^2$，改用极坐标后$u = \frac{1}{\rho^2}\cos 2\varphi$．则

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = -\dfrac{2}{\rho^2}\cos 2\varphi = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi} = -\dfrac{2}{\rho^3}\sin 2\varphi = -\dfrac{\partial v}{\partial \rho}. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \rho} = -\dfrac{2}{\rho^2}\cos 2\varphi, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \rho} = \dfrac{2}{\rho^3}\sin 2\varphi. \end{cases}$$

$$dv = \left(-\frac{2}{\rho^2}\cos 2\varphi\right)d\varphi + \left(\frac{2}{\rho^3}\sin 2\varphi\right)d\rho$$

$$=\frac{1}{\rho^2}d(-\sin2\varphi)+\sin2\varphi d\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$=d\left(-\frac{1}{\rho^2}\sin2\varphi\right),$$

所以 $$v=-\frac{1}{\rho^2}\sin2\varphi+C.$$

$$f(z)=\frac{1}{\rho^2}\cos2\varphi-i\frac{1}{\rho^2}\sin2\varphi+iC$$

$$=\frac{1}{\rho^2}e^{-i2\varphi}+iC=\frac{1}{z^2}+iC.$$

又因 $f(\infty)=0+iC=0$，则$C=0$，从而

$$f(z)=\frac{1}{z^2}.$$

（6）$u=x^2-y^2+xy$，$f(0)=0$。

解：

因 $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y-x=\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

则 $$dv=(2x+y)dy+(2y-x)dx$$

$$=d\left(2xy+\frac{1}{2}y^2\right)+d\left(2xy-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=d\left(2xy+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2\right),$$

$$v=2xy+\frac{1}{2}(y^2-x^2)+C.$$

所以 $$f(z)=x^2-y^2+xy+i\left[2xy+\frac{1}{2}(y^2-x^2)\right]+iC$$

$$=x^2-y^2+i2xy-\left[\frac{1}{2}i(x^2-y^2)-xy\right]+iC$$

$$= (x+iy)^2 - i\frac{1}{2}\Big[(x^2-y^2)+i2xy\Big]+iC$$

$$= z^2 - i\frac{1}{2}z^2 + iC.$$

又因　$f(0)=0+iC=0$，则$C=0$，从而

$$f(z)=z^2\left(1-\frac{i}{2}\right).$$

（7）$u=x^3-3xy^2, f(0)=0$.

解：

$$\text{因}\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy=\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

则
$$\begin{aligned}dv&=(3x^2-3y^2)dy+6xydx\\&=d(3x^2y-y^3)+d(3x^2y)\\&=d(3x^2y-y^3),\end{aligned}$$

$$v=3x^2y-y^3+C.$$

所以
$$\begin{aligned}f(z)&=x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3+c)\\&=(x+iy)^3+iC=z^3+iC.\end{aligned}$$

又因　$f(0)=0+iC=0$，则$C=0$，从而

$$f(z)=z^3.$$

（8）$u=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3, f(0)=0$.

解：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12xy-3y^2=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}=-6x^2+6xy+6y^2=\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

则
$$\begin{aligned}dv&=(3x^2+12xy-3y^2)dy+(-6x^2+6xy+6y^2)dx\\&=d(3x^2y+6xy^2-y^3)+d(-2x^3+3x^2y+6xy^2).\end{aligned}$$

$$v=-2x^3+3x^2y+6xy^2-y^3+C.$$

所以　$f(z)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3+i$

$$(-2x^3+3x^2y+6xy^2-y^3)+iC$$
$$=(x+iy)^3-2i(x+iy)^3+iC=z^3(1-2i)+iC.$$

又因 $f(0)=0+iC=0$，则 $C=0$，从而

$$f(z)=z^3(1-2i).$$

（9） $u=x^4-6x^2y^2+y^4, f(0)=0$.

解：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial x}=4x^3-12xy^2=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}=12x^2y-4y^3=\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

$$dv=(4x^3-12xy^2)dy+(12x^2y-4y^3)dx$$
$$=d(4x^3y-4xy^3)+d(4x^3y-4xy^3).$$
$$v=4x^3y-4xy^3+C.$$

于是 $f(z)=x^4-6x^2y^2+y^4+i(4x^3y-4xy^3+C)$

$$=(x+iy)^4+iC=Z^4+iC.$$

因 $f(0)=0+iC=0$，则 $C=0$，所以

$$f(z)=z^4,$$

（10） $u=\ln\rho, f(1)=0$.

解：

因 $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=\dfrac{1}{\rho},\\ \dfrac{1}{\rho}\ \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=0.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=1,\\ \dfrac{\partial v}{\partial\rho}=0.\end{cases}$$

则 $$dv=d\varphi,$$
$$v=\varphi+C.$$

所以 $f(z)=\ln\rho+i\varphi+iC=\ln|z|+i\arg z+iC$

$$=\ln z+iC.$$

又因$f(1)=0+iC=0$，则$C=0$，从而

$$f(z)=\ln z,$$

(11) $u=\varphi$, $f(1)=0$.

解：因
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=0,\\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho},\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=0.\\ \dfrac{\partial v}{\partial\rho}=\dfrac{-1}{\rho}.\end{cases}$$

则
$$dv=-\frac{1}{\rho}d\rho=d(-\ln\rho),$$

$$v=-\ln\rho+C.$$

所以
$$\begin{aligned}f(z)&=\varphi-i\ln\rho+iC\\&=-i(\ln\rho+i\varphi)+iC=-i\ln z+iC.\end{aligned}$$

又因　$f(1)=0+iC=0$，则$C=0$，从而

$f(z)=-i\ln z+iC$.

3.试从极坐标系中的科希-里曼方程
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\end{cases}$$
中消去u或v。

解：该方程可改写为

$$\begin{cases}\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}, & (1)\\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial v}{\partial\rho}. & (2)\end{cases}$$

(1)式对ρ微分一次，(2)式对φ微分一次，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)=\dfrac{\partial^2 v}{\partial\rho\partial\varphi}, & (3)\\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial\rho\partial\varphi}. & (4)\end{cases}$$

(3) − (4) 得

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \qquad (5)$$

科希–里曼方程还可改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}, & (6)\\ \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=-\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}. & (7)\end{cases}$$

(6) 式对φ微分一次，(7) 式对ρ微分一次，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial\rho\partial\varphi}=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\right). & (8)\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\varphi}=\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(-\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\right). & (9)\end{cases}$$

(8) — (9) 得 $\quad \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (10)$

显然，消去 v（或 u）后的方程（9）（或（10））即极坐标系中的拉普拉斯方程（5.2）或（5.3）。

§6. 平面标量场

1.已知复势 $f(z)=\dfrac{1}{z-2+i}$，试描画等温网。

解：由 $f(z)=\dfrac{1}{z-2+i}=\dfrac{1}{(x-2)+i(y+1)}$

$$=\frac{x-2}{(x-2)^2+(y+1)^2}+i\frac{-(y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

得到等温网的两族曲线方程

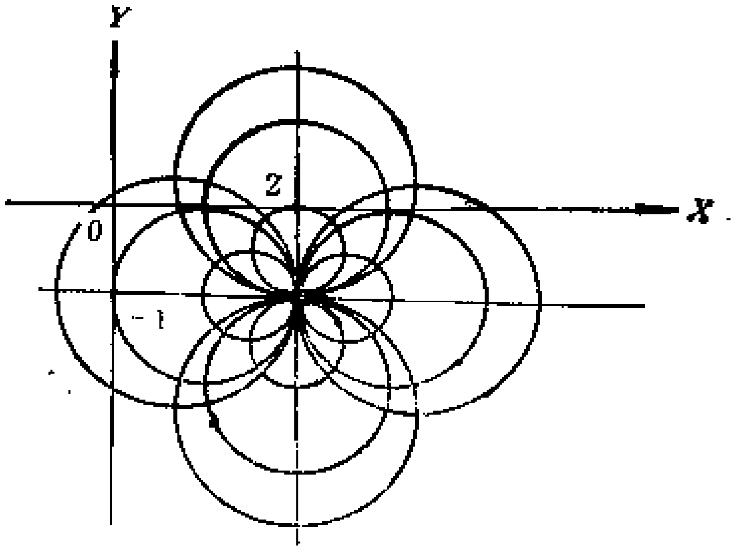


图 1-6

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{(x-2)^2+(y+1)^2}=C_1', \\ \dfrac{y+1}{(x-2)^2+(y+1)^2}=C_2'. \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} (x-2-C_1)^2+(y+1)^2=C_1^2, \\ (x-2)^2+(y+1-C_2)^2=C_2^2. \end{cases}$$

故等温网为：在点$(2,-1)$跟直线$x=2$，$y=-1$相切的圆族。

2. 已知流线族的方程为"$\dfrac{y}{x}=$常数"，求复势。

解：(i) 如令$v=\dfrac{y}{x}$，则$v_{xx}=\dfrac{2y}{x^3}$，$v_{yy}=0$，

从而$v_{xx}+v_{yy}\neq 0$，$v=\dfrac{y}{x}$不是调和函数。

(ii) 改令$v=F(t)$，$\left(t=\dfrac{y}{x}\right)$，

则 $$v_x = F'\left(-\frac{y}{x^2}\right),\quad v_{xx} = F''\left(\frac{y^2}{x^4}\right) + F'\left(\frac{2y}{x^3}\right);$$

$$v_y = F'\left(\frac{1}{x}\right),\quad v_{yy} = F''\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

应指出：这里必须有$v_{xx} + v_{yy} = 0$，

即 $$F''\left(\frac{x^2+y^2}{x^4}\right) + F'\left(\frac{2y}{x^3}\right) = 0.$$

$$\frac{F''}{F'} = -\frac{2y}{x^3}\cdot\frac{x^4}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{-2}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}$$

$$= \frac{-2}{t+\frac{1}{t}} = -\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\ln F'(t) = -\int\frac{2t}{1+t^2}\,dt = -\ln(1+t^2) + \ln C_1,$$

$$F'(t) = \frac{C_1}{1+t^2};$$

$$F(t) = C_1\int\frac{dt}{1+t^2} = C_1\operatorname{arctg} + C_2 = C_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C_2.$$

所以 $$v = C_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C_2.$$

这里的记号v_x和v_y分别代表$\frac{\partial v}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial y}$，$v_{xx}$和$v_{yy}$分别代表$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$（下同）。

(iii)根据科希-里曼方程 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$知

$$u_y = -v_x = C_1\frac{y}{x^2+y^2},$$

因而

$$u=C_1\int^{(y)}\frac{y}{x^2+y^2}dy=C_1\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C_4(x).$$

现在要确定$C_4(x)$，注意到

$$u_x=\frac{C_1x}{x^2+y^2}+C_4'(x)$$

根据科希-里曼方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，这应等于$v_y$，即 $\frac{C_1x}{x^2+y^2}$，

所以 $C_4'(x)=0$，$C_4(x)=C_3$，于是

$$u=C_1\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C_3;$$

$$\begin{aligned}
f(z)&=C_1\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C_3+iC_1\mathrm{arctg}\frac{y}{x}+iC_2\\
&=C_1\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C_3\\
&\quad+C_1i\left[-\frac{1}{2}i\ln\frac{1+i(y/x)}{1-i(y/x)}\right]+iC_2\\
&=C_1\left\{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\ln\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}\right\}+C_3+iC_2\\
&=C_1\ln(x+iy)+C_3+iC_2\\
&=C_1\ln z+C_3+iC_2.
\end{aligned}$$

这就是所要求的复势。

3. 已知等势线族的方程为"$x^2+y^2=$常数"，求复势。

解：(i) 令 $u=F(t)$，($t=x^2+y^2$)

则
$$\begin{cases}u_x=2xF', & u_{xx}=2F'+4x^2F'',\\ u_y=2yF', & u_{yy}=2F'+4y^2F''.\end{cases}$$

$$(4x^2+4y^2)F''+4F'=0,$$

$$\frac{F''}{F'}=-\frac{1}{x^2+y^2}=-\frac{1}{t},F'=\frac{C_1}{t},$$

求出 $$F = C_1\ln t + C_2 = C_1\ln(x^2+y^2) + C_2.$$

即 $$u = C_1\ln(x^2+y^2) + C_2.$$

(ii) $u_x = C_1\dfrac{2x}{x^2+y^2}$，$u_y = C_1\dfrac{2y}{x^2+y^2}$，根据科希—里曼方程

$$v_y = u_x = C_1\frac{2x}{x^2+y^2},$$

因而 $$v = C_1\int^{(y)}\frac{2x}{x^2+y^2}dy = 2C_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C_4(x).$$

又， $$v_x = 2C_1\cdot\frac{-y}{x^2+y^2} + C_4'(x) = -u_y = -2C_1\frac{y}{x^2+y^2}.$$

则 $$C_4'(x) = 0, \qquad C_4(x) = C_3.$$

所以 $$v = 2C_1\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right) + C_3 = -iC_1\ln\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} + C_3.$$

(iii) $$f(z) = C_1\ln(x^2+y^2) + C_2 + i\left[-iC_1\ln\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} + C_3\right]$$

$$= C_1\ln(x^2+y^2) + C_2 + C_1\ln\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2} + iC_3$$

$$= C\ln z^2 + C_2 + iC_3 = 2C_1\ln z + C_2 + iC_3.$$

这就是所要求的复势。

4. 已知电力线为跟实轴相切于原点的圆族，求复势。

解：如图1-7所示，该圆族的方程是

$$x^2 + (y-C_4)^2 = C_4^2,$$

或 $$\frac{-y}{x^2+y^2} = C_4^*，（C_4^*\text{亦为常数}），$$

如令 $v = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$，

$$v_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$v_{xx} = -\frac{2y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^3},$$

则

$$v_y = \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{x^2+y^2},$$

$$v_{yy} = \frac{6y}{(x^2+y^2)^2} - \frac{8y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

由此得$v_{xx}+v_{yy}=0$，故这里的 v 是调和函数。

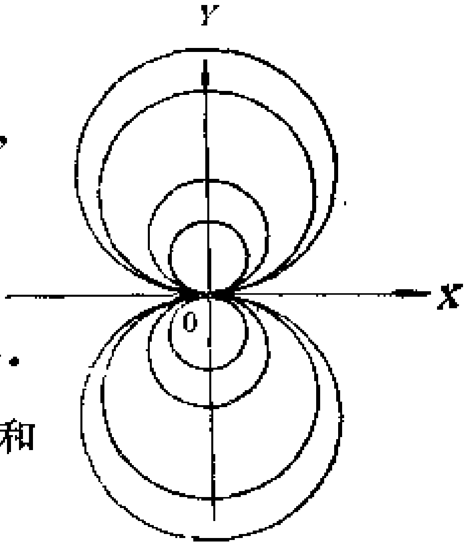


图 1-7

应指出：既然 $v=-\frac{y}{x^2+y^2}$是调和函数，所以我们可令复势的虚部$v(x,y)$就等于这个 v，下面再求 u。因v_x，v_y已在上面写出，由科希-里曼方程，

$$u_y = -v_x = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$u = -2x\int\frac{ydy}{(x^2+x^2)^2} = \frac{x}{x^2+y^2} + C_3(x).$$

则
$$u_x = \frac{1}{x^2+y^2} - \frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2} + C_3'(x)$$

$$= v_y = \frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2} - \frac{1}{x^2+y^2},$$

给出$C_3'(x)=0$，$C_3(x)=C_2$，故 $u = \frac{x}{(x^2+y^2)} + C_2$.

于是求出复势$f(z) = \frac{x}{x^2+y^2} + C_2 + i\frac{-y}{x^2+y^2} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} + C_2$

$$= \frac{1}{x+iy} + C_2 = \frac{1}{z} + C_2.$$

5. 在圆柱$|z|=R$的外部的平面静电场的复势为$f(z)=$

$i2\sigma\ln\left(\frac{R}{z}\right)$求柱面上的电荷面密度。

解：$f(z)=i2\sigma\ln\frac{R}{z}=i2\sigma\ln\frac{R}{\rho e^{i\varphi}}$

$$=2i\sigma\left[\ln\frac{R}{\rho}-i\varphi\right]=2\sigma\varphi+2i\sigma\ln\frac{R}{\rho}$$

这里，取电势 $u=2\sigma\ln\frac{R}{\rho}$，则圆柱表面外的法向场强

$$E\Big|_R=-\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big|_R=-\frac{\partial}{\partial\rho}(2\sigma\ln R-2\sigma\ln\rho)$$

$$=\frac{2\sigma}{\rho}\Big|_R=\frac{2\sigma}{R}.$$

设电势以高斯单位表示，以高斯单位表示的高斯定理为

$$\oiint\vec{E}\cdot d\vec{S}=4\pi q.$$

设面密度为σ_e.面积为S.则

$$\frac{2\sigma}{R}S=4\pi\sigma_e S,\ \sigma_e=\frac{\sigma}{2\pi R}.$$

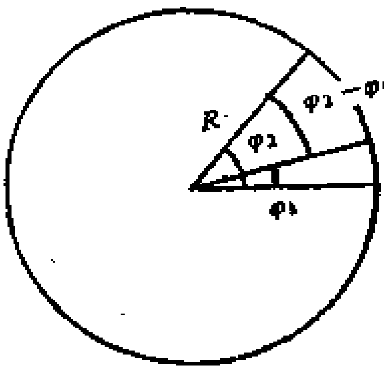


图 1-8

其实，电势 $u=2\sigma\ln\frac{R}{\rho}$的共轭调和函数$2\sigma\varphi$就是通量函数，而按照高斯定理

$$2\sigma\varphi_2-2\sigma\varphi_1=4\pi\sigma_e R(\varphi_2-\varphi_1).$$

$$2\sigma(\varphi_2-\varphi_1)=4\pi\sigma_e R,\ \text{所以}\sigma_e=\frac{\sigma}{2\pi R}.$$

6.有二个平行面均匀带电的线电荷，每单位长度所带电量分别是$+q$和$-q$,两线相距为$2a$,求这个平面静电场的复势、电力线和等势线。

解：考虑一线电荷在原点、单位长度所带电量为Q，显然可取通量函数为$v=2Q\varphi$（高斯单位制），u为电势，则

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}=\frac{2Q}{\rho},\quad \frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}=0.$$

于是 $$u=2Q\ln\rho+C,$$
所以复势$f(z)=C+2Q(\ln\rho+i\varphi)=C+2Q\ln z$，由此可知令$Q=+q$，并将线电荷移至$(a,0)$，复势为$f_1(z)=C_1+2q\ln(z-a)$，令$Q=-q$，并将线电荷移至$(-a,0)$，复势$f_2(z)=C_2-2q\ln(z+a)$，所要求的复势即为$f_1(z)+f_2(z)$（依电势迭加原理以及和的通量等于通量的和）．

$$f(z)=2q\ln\frac{z-a}{z+a}+C,\qquad (C=C_1+C_2),$$

或者置$+q$于$(-a,0)$，置$-q$于$(a,0)$，则

$$f(z)=-2q\ln\frac{z-a}{z+a}=2q\ln\frac{z+a}{z-a},$$

电力线族为$I_m\ln\dfrac{z-a}{z+a}=$常数，

等势线族为$R_e\ln\dfrac{z-a}{z+a}=$常数，

$$\ln\frac{z-a}{z+a}=\ln\frac{x+iy-a}{x+iy+a}=\ln\frac{x^2+y^2-a^2+2iay}{(x+a)^2+y^2}$$

$$=\ln\left[\frac{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2}}{(x+a)^2+y^2}\right.$$

$$\left.e^{i\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2}{[(x+a)^2+y^2]^2}$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2+a^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}+\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2},$$

电力线族为$x^2+y^2-a^2=2ac_1y$，

即$x^2+y^2-2ac_1y+a^2c_1^2=a^2+a^2c_1^2$，

$$x^2+(y-ac_1)^2=a^2(1+c_1^2),$$

等势线族为$c_2[(x-a)^2+y^2]=(x+a)^2+y^2$.

$$(c_2-1)x^2-2(c_2+1)ax+(c_2-1)y^2=(1-c_2)a^2,$$

$$x^2-2\frac{c_2+1}{c_2-1}ax+\left(\frac{c_2+1}{c_2-1}\right)^2a^2+y^2$$

$$=-a^2+\left(\frac{c_2+1}{c_2-1}\right)^2a^2.$$

$$\left(x-\frac{c_2+1}{c_2-1}a\right)^2+y^2=\frac{(c_2+1)^2-(c_2-1)^2}{(c_2-1)^2}a^2,$$

$$\left(x-\frac{c_2+1}{c_2-1}a\right)^2+y^2=\frac{4c_2}{(c_2-1^2)}a^2.$$

第二章　复变函数的积分

§9. 科 希 公 式

1. 已知函数$\psi(t,x)=e^{2tx-t^2}$，把x当作参数，把t认作是复变数，试应用科希公式把$\left.\dfrac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}$表为回路积分.

对回路积分进行积分变数的代换$t=x-z$，并借以证明$\left.\dfrac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=(-1)^n e^{x^2}\dfrac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$.

解：(i) 把$\dfrac{\partial^n\psi}{\partial t^n}$表为回路积分如下：

$$\left.\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{e^{2\zeta x-\zeta^2}}{(\zeta-t)^{n+1}}d\zeta$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{2\zeta x-\zeta^2}}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

(ii) 证明：以$\zeta=x-z$代入上式

$$\left.\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{x^2-z^2}}{(x-z)^{n+1}}d(-z)$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{x^2}\cdot e^{-z^2}}{(-1)^n(z-x)^{n+1}}dz$$

$$=e^{x^2}\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{(-1)^n e^{-z^2}dz}{(z-x)^{n+1}}$$

$$=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}，\text{得证。}$$

2. 已知函数$\psi(x,t)=\dfrac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}$，试把$x$当作参数，把$t$认为是复变数，试应用科希公式把$\left.\dfrac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}$表为回路积分。

对回路积分进行积分变数的代换，$t=(z-x)/z$，并借以证明$\left.\dfrac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x})$。

解： (i)把$\dfrac{\partial^n\psi}{\partial t^n}$表为回路积分如下：

$$\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{-\frac{x\zeta}{1-\zeta}}\Big/(1-\zeta)}{(\zeta-t)^{n+1}}d\zeta.$$

$$\left.\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{-\frac{x\zeta}{1-\zeta}}\Big/(1-\zeta)}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)}d\zeta.$$

(ii)证明：以$\zeta=(z-x)/z$代入上式，

$$\left.\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{-x\left(\frac{z-x}{z}\right)}\Big/\left(1-\frac{z-x}{z}\right)}{\left(\frac{z-x}{z}\right)^{n+1}\left(1-\frac{z-x}{z}\right)}\left(\frac{x}{z^2}\right)dz$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{z^{n+1}\cdot e^{-(z-x)}\cdot\frac{z}{x}}{(z-x)^{n+1}\frac{x}{z}}\left(\frac{x}{z^2}\right)dz$$

$$=e^x\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{z^n e^{-z}}{(z-x)^{n+1}}dz$$

$$=e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^n e^{-x}\right)，得证。$$

第三章　幂级数展开

§11. 幂　级　数

1.把幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_k(z-z_0)^k + \cdots$ 逐项求导，求所得级数的收敛半径，以此验证逐项求导，并不改变收敛半径。

解：该幂级数的收敛半径是$R = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|$。

对该级数逐项求导后得：

$$\frac{d}{dz_1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_1 + 2a_2(z_1-z_0) + \cdots + Ka_k(z-z_0)^{k-1} + (K+1)a_{k+1}(z-z_0)^k, + \cdots\cdots$$

其收敛半径为 $R = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{Ka_k}{(K+1)a_{k+1}}\right| \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{\left(1+\dfrac{1}{K}\right)a_{k+1}}\right|$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|,$$

所以逐项求导后，并不改变其收敛半径。

2.把上题的幂级数逐项积分，求所得级数的收敛半径，以此验证逐项积分并不改变收敛半径。

解：对该级数逐项积分后得：

$$\int\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k d(z-z_0) = a_0(z-z_0) + \frac{1}{2}a_1(z-z_0)^2$$

$+\frac{1}{3}a_2(z-z_0)^3+\cdots+\frac{1}{K+1}a_k(z-z_0)^{k+1}+\frac{1}{K+2}a_{k+1}(z-z_0)^{k+2}+\cdots,$

其收敛半径为：

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{K+1}a_k}{\frac{1}{K+2}a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(K+2)a_k}{(K+1)a_{k+1}}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\left(1+\frac{2}{K}\right)a_k}{\left(1+\frac{1}{K}\right)a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|,$$

故逐项积分后并不改变收敛半径。

3.求下列幂级数的收敛圆。

(1) $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K}(z-i)_k$

解：其收敛半径 $R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1/K}{1/K+1}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{K+1}{K}\right|$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|1+\frac{1}{K}\right|=1$$

∴ 收敛圆为 $|z-i|=1$ 。

(2) $\sum_{k=1}^{\infty}K^{\ln K}(z_1-2)^K$ 。

解：收敛半径 $R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{K^{\ln K}}{(K+1)^{\ln(K+1)}}\right|,$

令 $(K+1)^{\ln(K+1)}=(K+1)^{\ln\left[K\left(1+\frac{1}{K}\right)\right]}$

$$=(K+1)^{\ln K}\cdot(K+1)^{\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)},$$

故

$$R=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{K^{\ln K}}{(K+1)^{\ln K}}\cdot\frac{1}{(K+1)^{\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)}}\right]$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{K}\right)^{\ln K}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}(K+1)^{\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)}},$$

记$l_1=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{K}\right)^{\ln K}$，

$l_2=\lim\limits_{k\to\infty}(K+1)^{\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)}$，

则

$$R=\frac{1}{l_1 l_2}.$$

现计算l_1.

$$\ln l_1=\lim_{k\to\infty}\left[\ln K\cdot\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)}{\frac{1}{\ln K}},$$

这是0/0型的不定式，可用罗毕达法则确定极限，

$$\ln l_1=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{1+yK}\left(-\frac{1}{K^2}\right)}{-\frac{1}{(\ln K)^2}\cdot\frac{1}{K}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(\ln K)^2}{K+1},$$

这是∞/∞型的不定式，再用罗毕达法则，

$$\ln l_1=\lim_{k\to\infty}\frac{(2\ln K)\cdot\frac{1}{K}}{1}=\lim_{k\to\infty}\frac{2\ln K}{K},$$

再用罗毕达法则，

$$\ln l_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{2\cdot\frac{1}{K}}{1} = 0,$$

因而

$$l_1 = 1,$$

同理，

$$\ln l_2 = \lim_{k\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)\cdot\ln(K+1)\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)}{\frac{1}{\ln(K+1)}},$$

用罗毕达法则，

$$\ln l_2 = \lim_{k\to\infty} \frac{\frac{1}{1+1/K}\left(-\frac{1}{K^2}\right)}{-\frac{1}{[\ln(K+1)]^2}\cdot\frac{1}{K+1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{[\ln(K+1)]^2}{K}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{K}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{[\ln(K+1)]^2}{K},$$

用罗毕达法则，

$$\ln l_2 = \lim_{k\to\infty}\frac{\left[2\ln\left(K+1\right)\right]\frac{1}{K+1}}{1}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{2\ln(K+1)}{K+1},$$

再用罗毕达法则，

$$\ln l_2 = \lim_{k\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{K+1}}{1} = 0,$$

因而 $$l_2 = 1,$$

结果，收敛半径

$$R=\frac{1}{l_1 l_2}=1,$$

所以收敛圆为$|z_1-2|=1$．

（3）$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{K}\right)^k$．

解一：收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{K^k}}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{K^k}$$

$$=\lim_{k\to\infty}K=\infty.$$

解二：收敛半径为

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{K^{-k}}{(K+1)^{-(K+1)}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(K+1)^{k+1}}{K^k}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{K^k}\left[K^{k+1}+(K+1)K^k+\cdots\cdots\right]\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|K+(K+1)+\cdots\cdots\right|=\infty,$$

或

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\left(\frac{1}{K}\right)^k}}=\lim_{k\to\infty}K=\infty,$$

所以只要z是有限的，此幂级数就收敛，收敛圆$|z|=R<\infty$。

（4）$\sum_{k=1}^{\infty}K!\left(\frac{Z}{K}\right)^k$．

解：收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{K!}{(K+1)!}\cdot\frac{(K+1)^{k+1}}{K^k}\right]=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{K+1}\cdot\right.$$

$$=\frac{(K+1)^{k+1}}{K^k}\Big]=\lim_{k\to\infty}\frac{(K+1)^k}{K^k}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{K}\right)^k=e,$$

所以收敛圆是$|z|=e$。

（5）$\sum_{k=1}^{\infty}K^k(z-3)^k$。

解一：收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{K^k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{K}=0。$$

解二：收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{K^k}{(K+1)^{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\left[K+(K+1)+\cdots\cdots\right]^{-1}\right|$$

$$=0,$$

所以收敛圆为$|z-3|=0$，只要$z\neq3$，此幂级数就发散。

4.已知幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$和$\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$的收敛半径分别为$R_1=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|\left(\text{或}R_1=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}\right)$和$R_2=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right|$ $\left(\text{或}R_2=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|b_k|}}\right)$，求下列幂级数的收敛半径。

（1）$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)z^k$。

解一：如果$R_1\leqslant R_2$，则在圆$|z|=R_1$的内部，幂级数$\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$和$\sum_{k=0}^{\infty}b_kz^k$都绝对收敛，从而$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)z^k$必是绝对收敛的。所以该幂级数的收敛半径不小于$R_1$和$R_2$中的较小者。

解二：记 $|a_k|$ 和 $|b_k|$ 中的较大者为 A_k，则 $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)z^k$ 的收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k+b_k|}}=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k+b_k|}}$$

$$\geqslant\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|+|b_k|}}\geqslant\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{A_k+A_k}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{2}\,\sqrt[k]{A_k}}=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{A_k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{A_k}}$$

$$=\min(R_1,\ R_2).$$

（2）$\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k-b_k)z^k$.

解：方法及结论同于上题.

（3）$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kb_kz^k$.

解：$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_kb_k}{a_{k+1}b_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\cdot\frac{b_k}{b_{k+1}}\right|$$

$$=R_1R_2.$$

（4）$\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}z^k$ （$b^k\neq 0$）.

解：

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k/b_k}{a_{k+1}/b_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k/a_{k+1}}{b_k/b_{k+1}}\right|=\frac{R_1}{R_2}.$$

§12. 泰 勒 级 数

在指定的点z_0的邻域上把下列函数展开为泰勒级数.

（1）$\operatorname{arctg} z$在$z_0=0$。

解一：按照公式$f(z)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{K!}(z-z_0)^k$求解，令$f(z)=\operatorname{arctg} z$，则

$$f(z)=\operatorname{arctg} z,\quad f(0)\text{的主值}=0;$$

$$f'(z)=\frac{1}{1+z^2},\qquad f'(0)=1;$$

$$f''(z)=\frac{-2z}{(1+z^2)^2},\qquad f''(0)=0;$$

$$f'''(z)=\frac{6z^2-2}{(1+z^2)^3},\qquad f'''(0)=-2;$$

$$f^{(4)}(z)=\frac{24(z-z^3)}{(1+z^2)^4},\qquad f^{(4)}(0)=0;$$

$$\cdots\cdots,\qquad\qquad \cdots\cdots.$$

所以 $f(z)=z-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5-\frac{1}{7}z^7+\cdots\cdots,(|z|<1)$。

解二：已知函数$\frac{1}{1+z^2}$的泰勒级数是

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k},\quad(|z|<1),$$

对该级数逐项积分并不改变收敛半径，所以

$$\operatorname{arctg} z=\int\frac{1}{1+z^2}dz=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int z^{2k}dz$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2K+1}z^{2k+1}=z-\frac{1}{3}z^3$$

$$+\frac{1}{5}z^5-\frac{1}{7}z^7+\cdots\cdots(|z|<1).$$

（2）$\sqrt[3]{z}$在$z_0=i$。

解一：因为

$$f(z)=z^{1/3},\qquad f(i)=i^{1/3},$$

$$f'(z)=\frac{1}{3z}z^{1/3},\quad f'(i)=\frac{1}{3i}i^{1/3},$$

$$f''(z)=-\frac{2}{3^2z^2}z^{1/3},f''(i)=-\frac{1\cdot 2}{3^2i^2}i^{1/3},$$

$$f'''(z)=\frac{2\cdot 5}{3^3z^3}z^{1/3},\quad f'''(i)=\frac{2\cdot 5}{3^3i^3}i^{1/3},$$

$$\cdots\cdots,\qquad\qquad \cdots\cdots.$$

故其泰勒级数为

$$f(z)=\sqrt[3]{i}\left\{1+\frac{1}{1!\,i}\cdot\frac{1}{3}(z-i)\right.$$

$$-\frac{1}{2!\,i^2}\cdot\frac{1\cdot 2}{3^2}(z-i)^2$$

$$\left.+\frac{1}{3!\,i^3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3^3}(z-i)^3-\cdots\cdots\right\}$$

$$(|z|<1).$$

解二：根据二项式定理，对于非整数K，有

$$(a+z)^K=a^K\left\{1+\frac{K}{1!\,a}z+\frac{K(K-1)}{2!\,a^2}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{K(K-1)\cdots\cdots(K-m+1)}{m!\,a^m}z^m+\cdots\cdots\right\}.$$

所以$\sqrt[3]{z}=[i+(z-i)]^{1/3}$可展开为泰勒级数

$$f(z)=[i+(z-i)]^{1/3}$$

$$=\sqrt[3]{i}\left\{1+\frac{1}{1!\,i}\cdot\frac{1}{3}(z-i)\right.$$

$$-\frac{1}{2!\,i^2}\cdot\frac{1\cdot 2}{3^2}(z-i)^2$$

$$+\frac{1}{3!i^3}\ \frac{2\cdot5}{3^3}(z-i)^3-\cdots\cdots\Big\}\quad(|z|<1).$$

（3）$\ln z$在$z_0=i$.

解：因为

$$f(z)=\ln z,\qquad f(i)=\ln i;$$

$$f'(z)=\frac{1}{z},\qquad f'(i)=\frac{1}{i};$$

$$f''(z)=-\frac{1}{z^2},\qquad f''(i)=-\frac{1}{i^2};$$

$$f'''(z)=\frac{2!}{z^3},\qquad f'''(i)=\frac{2!}{i^3};$$

$$\cdots\cdots,\qquad\qquad \cdots\cdots.$$

故其泰勒级数为

$$f(z)=\ln i+\frac{1}{i}(z-i)-\frac{1}{2i^2}(z-i)^2$$

$$+\frac{1}{3i^3}(z-i)^3+\cdots\cdots.$$

（4）$\sqrt[m]{z}$在$z_0=1$.

解一：因为

$$f(z)=z^{1/m},\qquad f(1)\text{的主值}=1;$$

$$f'(z)=\frac{1}{m}z^{\frac{1}{m}-1},\quad f'(1)=\frac{1}{m};$$

$$f''(z)=\frac{1-m}{m^2}z^{\frac{1}{m}-2},\quad f''(1)=\frac{1-m}{m^2};$$

$$f'''(z)=\frac{(1-m)(1-2m)}{m^3}z^{\frac{1}{m}-3},$$

$$f'''(1)=\frac{(1-m)(1-2m)}{m^3};$$

$$\cdots\cdots,\qquad\qquad \cdots\cdots.$$

故其泰勒级数为

$$f(z)=1+\frac{1}{m}(z-1)+\frac{1-m}{2!m^2}(z-1)^2$$
$$+\frac{(1-m)(1-2m)}{3!m^3}(z-1)^3+\cdots\cdots$$

解二：注意到$\sqrt[m]{z}=[1+(z-1)]^{1/m}$，则根据二项式定理也可求出上述的答案。

（5）$e^{1/(1-z)}$ 在$z_0=0$。

解一：因为

$$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}},\qquad f(0)=e;$$

$$f'(z)=e^{\frac{1}{1-z}}(1-z)^{-2},\qquad f'(0)=e;$$

$$f''(z)=e^{\frac{1}{1-z}}[(1-z)^{-2}\cdot(1-z)^{-2}+2(1-z)^{-3}],$$
$$f''(0)=3e;$$
$$f'''(z)=e^{\frac{1}{1-z}}[(1-z)^{-6}+2(1-z)^{-5}+4(1-z)^{-5}+6(1-z)^{-4}],\quad f'''(0)=13e;$$
$$\cdots\cdots,\qquad\qquad \cdots\cdots.$$

故其泰勒级数为

$$f(z)=e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\cdots\cdots\right).$$

解二：注意到几何级数$\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^k$ （$|z|<1$），则

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e^{1+\frac{z}{1-z}}=e\cdot e^{\frac{z}{1-z}}$$

$$=e\left[1+\frac{z}{1-z}+\frac{1}{2!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\cdots\cdots\right]$$

$$=e\left[1+(z+z^2+z^3+\cdots\cdots)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!}(z+z^2+z^3+\cdots\cdots)^2+\cdots\cdots\right]$$

$$=e\left[1+z+\left(1+\frac{1}{2}\right)z^2+\left(1+\frac{2}{2!}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3!}\right)z^3+\cdots\cdots\right]$$

$$=e\left(1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\cdots\cdots\right),$$

$$(|z|<1).$$

(6) $\ln(1+e^z)$在$z_0=0$.

解：因为

$f(z)=\ln(1+e^z)$, $\qquad f(0)=\ln z$

$f'(z)=e^z/(1+e^z)$, $\qquad f'(0)=\frac{1}{2}$;

$f''(z)=e^z/(1+e^z)^2$, $\qquad f''(0)=\frac{1}{4}$;

$f'''(z)=\frac{-2e^{2z}}{(1+e^z)^3}+\frac{e^z}{(1+e^z)^2}$, $\qquad f'''(0)=0$;

$\cdots\cdots$, $\qquad \cdots\cdots$.

故其泰勒级数为

$$f(z)=\ln 2+\frac{1}{1!2}z+\frac{1}{2!4}z^3-\frac{1}{4!8}z^4+\cdots\cdots.$$

(7) $(1+z)^{1/2}$在$z_0=0$.

解一：因为

$f(z)=(1+z)^{1/2}$, $\qquad f(0)=e$,

$$f'(z)=\frac{z/(1+z)-\ln(1+z)}{z^2}\,e^{\frac{1}{z}\ln(1+z)},$$

$$f'(0) = -\frac{e}{2} \text{（用罗毕达法则），}$$

$$f''(z) = \left\{\left[\frac{z/(1+z) - \ln(1+z)}{z^2}\right]^2 + \frac{z^2/(1+z^2) - 2z/(1+z) + 2\ln(1+z)}{z^3}\right\}$$

$$e^{\frac{1}{z}\ln(1+z)}.$$

也用罗毕达法则求出$f''(0) = \frac{11}{12}e$，

……， ……。

所以其泰勒级数为

$$f(z) = e\left(1 - \frac{z}{2} + \frac{11}{24}z^2 + \cdots\cdots\right).$$

解二：注意到$\ln(1+z)$的泰勒展式是

$$\ln(1+z) = z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \cdots\cdots \quad (|z| < 1),$$

以及e^z的泰勒级数是

$$e^z = 1 + z + \frac{1}{2!}z^2 + \frac{1}{3!}z^3 + \cdots\cdots \quad (|z| < \infty).$$

则

$$f(z) = (1+z)^{1/z} = e^{\frac{1}{z}\ln(1+z)}$$

$$= e^{\frac{1}{z}\left(z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{3}z^3 - \frac{1}{4}z^4 + \cdots\cdots\right)}$$

$$= e^{1 - \frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^3 + \cdots\cdots}$$

$$= e \cdot e^{-\frac{1}{2}z + \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{4}z^3 + \cdots\cdots}$$

$$=e\left\{1+\left(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{4}z^3+\cdots\cdots\right)\right.$$

$$+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{4}z^3+\cdots\cdots\right)$$

$$\left.+\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2+\frac{1}{4}z^3+\cdots\cdots\right)^3+\cdots\cdots\right]$$

$$=e\left(1-\frac{z}{2}+\frac{11}{24}z^2+\cdots\cdots\right).$$

显然，其收敛半径$R=1$.值得注意的是这个级数在函数$(1+z)^{1/z}$的奇点$z=0$处也收敛；在这种情况下，我们不妨重新定义一个函数

$$f(z)=\begin{cases}(1+z)^{1/z}, & (z\neq 0),\\ \lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{1/z}=e, & (z=0).\end{cases}$$

它在整个开平面上是解析的，所以函数$f(z)$可在$z=0$处展开为泰勒级数。显然，$z=0$作为奇点是可去奇点。

（8）$\sin^2 z$和$\cos^2 z$在$z_0=0$．

解一：因为

$$\begin{array}{ll}
f(z)=\sin^2 z, & f(0)=0;\\
f'(z)=2\sin z\cos z=\sin 2z, & f'(0)=0;\\
f''(z)=2\cos 2z, & f''(0)=2^1;\\
f'''(z)=-4\sin 2z, & f'''(0)=0;\\
f^{(4)}(z)=-8\cos 2z, & f^{(4)}(0)=-2^3;\\
\cdots\cdots, & \cdots\cdots.
\end{array}$$

故其泰勒级数为

$$f(z)=\frac{2}{2!}z^2-\frac{2^3}{4!}z^4+\frac{2^5}{6!}z^6-\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2z)^{2k}}{(2K)!}.$$

解二：若已知$\sin z=z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5-\cdots\cdots$且在收敛域内绝对收敛，则可逐项相乘，即

$$\sin^2 z=z^2-\frac{2}{3!}z^4+\frac{1}{(3!)^2}z^6+\frac{2}{5!}z^6-\cdots\cdots$$

$$=z^2-\frac{1}{3}z^4+\frac{2}{45}z^6-\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2z)^{2k}}{(2K)!}.$$

可用类似于上述的两种解法 把$\cos^2 z$展开，此外，还可把$\cos^2 z$用下法展开为泰勒级数

$$f(z)=\cos^2 z=1-\sin^2 z$$

$$=1+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2z)^{2k}}{(2K)!}.$$

§14. 罗 朗 级 数

在挖去奇点z_0的环域上或指定的环域上把下列函数展开为罗朗级数.

（1）$z^5e^{1/z}$在$z_0=0$.

解：由$e^t=1+t+\frac{1}{2!}t^2+\cdots+\frac{1}{n!}t^n+\cdots(|t|<\infty)$知

$$e^{1/z}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!}\frac{1}{z^2}+\cdots+\frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n+\cdots(0<|z|)$$，所以

$$f(z)=z^5e^{1/z}=z^5+z^4+\frac{1}{2!}z^3+\frac{1}{3!}z^2+\cdots+\frac{1}{n!}z^{5-n}$$
$$+\cdots(0<|z|).$$

（2）$\frac{1}{z^2(z-1)}$在$z_0=1$.

解一：因为 $\dfrac{1}{z^2(z-1)}=\dfrac{1}{z-1}\dfrac{1}{[1-(1-z)]^2}$,

并注意到当$|t|<1$时，

$$\frac{1}{(1-t)^2}=\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t}=\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}t^K=\sum_{k=1}^{\infty}Kt^{K-1},$$

所以，当$0<|z-1|<1$时，有

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}\sum_{K=1}^{\infty}K(1-z)^{K-1}$$

$$=\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^{K-1}K(z-1)^{K-2}$$

亦即

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^{K+1}(K+2)(z-1)^K,$$

$(0<|z-1|<1)$。

解二：还可把原式表为

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{z+1}{z^2}=\frac{1}{z-1}-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right),$$

注意到 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+(z-1)}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^K(z-1)^k,(|z-1|<1)$,

及 $-\dfrac{1}{z^2}=\left(\dfrac{1}{z}\right)=\sum\limits_{K=1}^{\infty}(-1)^Kn(z-1)^{K-1}$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^{K+1}(K+1)(z-1)^K,$$

则 $-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}=\sum\limits_{K=0}^{\infty}(-1)^{K+1}(K+2)(z-1)^K$,

所以，$\dfrac{1}{z^2(z-1)}=(z-1)^{-1}+\sum\limits_{K=0}^{\infty}(-1)^{k+1}(K+2)(z-1)^K$

$$= \sum_{K=-1}^{\infty} (-1)^{K+1}(K+2)(z-1)^K \quad (0<|z-1|<1).$$

解三：注意到函数$\frac{1}{z^2}$在$z_0=1$处解析，故可把$\frac{1}{z^2}$在$z_0=1$处作泰勒展开，

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K (K+1)(z-1)^K, \quad (|z-1|<1),$$

所以

$$\frac{1}{z^2(z-1)} = \sum_{K=0}^{\infty} (-1)^K (K+1)(z-1)^{K-1}$$

$$= \sum_{K=-1}^{\infty} (-1)^{K+1}(K+2)(z-1)^K,$$

$$(0<|z-1|<1).$$

还有其它的解法，不再一一列举．以下各题我们也将只写出一种解法．

（3）$\frac{1}{z(z-1)}$在$z_0=0$，在$z_0=1$．

解：因为$\frac{1}{z(z-1)} = \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z}$．

(i) 注意到在$z_0=0$处$\frac{1}{z-1}$解析，可展开为泰勒级数，$\frac{1}{z-1}$

$= -\frac{1}{1-z} = -\sum_{k=0}^{\infty} z^k$，所以

在$z_0=0$：$\frac{1}{z(z-1)} = -\frac{1}{z} + \frac{1}{z-1} = -\frac{1}{z} - \sum_{k=0}^{\infty} z^k = -\sum_{k=-1}^{\infty} z^k$，

$(0<|z|<1)$．

(ii) 注意到在$z_0=1$处$\frac{1}{z}$解析，可展开为泰勒级数，

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-1)+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k,\text{所以}$$

在$z_0=1$： $\dfrac{1}{z(z-1)}=\dfrac{1}{z-1}-\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k$

$$=\sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-1)^k,(0<|z-1|<1).$$

（4） $e^{1/(1-z)}$在$|z|>1$.

解：因为$|z|>1$,所以$\left|\dfrac{1}{z}\right|<1$,则

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right).$$

从而可得

$$e^{\frac{1}{1-z}}=1-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^2$$

$$-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^3$$

$$+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^4-\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^5$$

$$+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}-\frac{19}{120z^5}+\cdots,$$

$(|z|>1)$.

（5） $\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$在$|z|>3$.

解：因为$\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}=\dfrac{z-2-(z-3)}{(z-2)(z-3)}=\dfrac{1}{z-3}-\dfrac{1}{z-2}$

$$=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}},$$

并注意到当$|z|>3$时,有

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{z^{k+1}}=\sum_{k=-\infty}^{-1}3^{-(k+1)}z^k,$$

以及$\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)=\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{-(k+1)}z^k$,

所以

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[3^{-(k+1)}-2^{-(k+1)}\right]z^k(|z|>3).$$

(6) $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$在$R<|z|<\infty$($R$很大)。

解:原式$=\frac{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-2\frac{1}{z}\right)}{\left(1-3\frac{1}{z}\right)\left(1-4\frac{1}{z}\right)}=1+\frac{6\frac{1}{z}}{1-4\frac{1}{z}}-\frac{2\frac{1}{z}}{1-3\frac{1}{z}}$,

注意到 $\frac{6\frac{1}{z}}{1-4\frac{1}{z}}=6\cdot\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^k=6\sum_{k=-\infty}^{-1}4^{-(k+1)}z^k$

及 $2\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=2\sum_{k=-\infty}^{-1}3^{-(k+1)}z^k=2\sum_{k=-\infty}^{-1}3^{-(k+1)}z^k$,

所以 $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1+\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[6\cdot4^{-(k+1)}-2\cdot3^{-(k+1)}\right]z^k$,

$(|z|>4)$.

(7) $\frac{1}{z^2-3z+2}$在$1<|z|<2$.

解：原式又$=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$，

而$\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}=-\dfrac{1}{2}\left[1+\dfrac{z}{2}+\left(\dfrac{z}{2}\right)^2+\left(\dfrac{z}{2}\right)^3+\cdots\right]$，

$$\left(\left|\frac{z}{2}\right|<1,|z|<2\right),$$

$\dfrac{-1}{z-1}=-\dfrac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}=-\dfrac{1}{z}\left[1+\dfrac{1}{z}+\left(\dfrac{1}{z}\right)^2+\left(\dfrac{1}{z}\right)^3+\cdots\right]$

$$=-\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots\right],\ \left(\left|\frac{1}{z}\right|<1,|z|>1\ .\right)$$

所以 $\dfrac{1}{z^2-3z+2}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^k-\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}z^k$，$(1<|z|<2)$，

即$\dfrac{1}{z^2-3z+2}=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{2^{k+1}}-\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}z^k$，　　$(1<|z|<2)$。

（8）$\dfrac{1}{z^2-3z+2}$在$2<|z|<\infty$。

解：原式$=\dfrac{1}{(z-2)(z-1)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}}-\dfrac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}$

而$\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}}=\dfrac{1}{z}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^kz^{-(k+1)}$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{-(k+1)}z^k,(|z|>2),$$

$-\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{z}\right)^{k+1}=-\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}z^k$，

所以 $\dfrac{1}{z^2-3z+2}=\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}(2^{-(k+1)}-1)z^k,(2<|z|<\infty)$.

（9）e^z/z在奇点。

解：奇点为$z=0$，而e^z在$z=0$解析，故可作泰勒展开，所以

$$\frac{1}{z}e^z=\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{K!}z^K=\sum_{k=-1}^{\infty}\frac{1}{(K+1)!}z^k$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K!}z^{k-1},(0<|z|<\infty).$$

（10）$(1-\cos z)/z$在奇点。

解：奇点为$z=0$，因为$\lim\limits_{z\to0}\dfrac{1-\cos z}{z}=0$，故该奇点为可去奇点。所以

$$\frac{1-\cos z}{z}=\frac{1}{z}-\frac{\cos z}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2K)!}z^{2k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{(2K)!}z^{2k-1}(|z|<\infty).$$

（11）$\sin\dfrac{1}{z}$在奇点。

解：$z=0$为函数的奇点，所以

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2K+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1},(0<|z|<\infty).$$

（12）$\mathrm{ctg}z$在奇点。

解：在半径可以任意小的内圆中只有一个奇点$z=0$。离$z=0$最近的另一个奇点是$z=\pi$，故可在$0<|z|<\pi$上展开。

解一：$f(z)=\mathrm{ctg}z=\dfrac{1}{\mathrm{tg}z}$。先求$\mathrm{tg}z$，用待定系数法求

$\text{tg}z_\Delta$在$z_\Delta=0$的邻域里的泰勒级数。

$$\text{设}\ \text{tg}z_\Delta=\sum_{l=0}^{\infty}b_l z_\Delta^{2l+1}$$

$$\sin z_\Delta=z_\Delta-\frac{z_\Delta^3}{3!}+\frac{z_\Delta^5}{5!}-\frac{z_\Delta^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z_\Delta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z_\Delta=1-\frac{z_\Delta^2}{2!}+\frac{z_\Delta^4}{4!}+\frac{z_\Delta^6}{6!}+\cdots+(-1)^k\frac{z_\Delta{}^{2k}}{(2K)!}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z_\Delta^{2k}}{(2K)!},$$

则 $$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z_\Delta^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2K)!}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}b_l z_\Delta^{2l+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z_\Delta^{2n+1}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}b_l}{(2n-2l)!}.$$

根据展开的唯一性（这里是$\sin z_\Delta$），两边级数中z_Δ^{2n+1}（$n=0$，1,2,…）的系数应相等，

$$\therefore\quad \sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^l b_l}{(2n-2l)!}=\frac{1}{(2n+1)!}$$

这是系数b_l之间的递推关系，可以据此推出这些系数，前几个是：

$n=0$，　$b_0=1$；

$n=1$，　$\frac{1}{2!}b_0-b_1=\frac{1}{3!}$，　$b_1=\frac{1}{3}$；

$n=2$，　$\frac{1}{4!}b_0-\frac{1}{2!}b_1+b_2=\frac{1}{5!}$，$b_2=\frac{2}{15}$；

$n=3$，　$\frac{1}{6!}b_0-\frac{1}{4!}b_1+\frac{1}{2!}b_2-b_3=\frac{1}{7!}$，　$b_3=\frac{17}{315}$；

……，　……。

$$\therefore \quad \operatorname{tg} z_\Delta = z_\Delta + \frac{1}{3}z_\Delta^3 + \frac{2}{15}z_\Delta^5 + \frac{17}{315}z_\Delta^7 + \cdots, \quad \left(|z_\Delta| < \frac{\pi}{2}\right).$$

下面再回到求$\operatorname{ctg} z_\Delta$：

$$\operatorname{ctg} z_\Delta = \frac{1}{\operatorname{tg} z_\Delta} = \left(z_\Delta + \frac{1}{3}z_\Delta^3 + \frac{2}{15}z_\Delta^5 + \frac{17}{315}z_\Delta^7 + \cdots\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{z_\Delta}\left(1 + \frac{1}{3}z_\Delta^2 + \frac{2}{15}z_\Delta^4 + \frac{17}{315}z_\Delta^6 + \cdots\right)^{-1},$$

注意到$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$，$|x| < 1$，

$$\operatorname{ctg} z_\Delta = \frac{1}{z_\Delta}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}z_\Delta^2 + \frac{2}{15}z_\Delta^4 + \frac{17}{315}z_\Delta^6 + \cdots\right)\right.$$

$$+ \left(\frac{1}{3}z_\Delta^2 + \frac{2}{15}z_\Delta^4 + \frac{17}{315}z_\Delta^6 + \cdots\right)^2$$

$$\left. - \left(\frac{1}{3}z_\Delta^2 + \frac{2}{15}z_\Delta^4 + \frac{17}{315}z_\Delta^6 + \cdots\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{z_\Delta} - \frac{1}{3}z_\Delta - \frac{1}{45}z_\Delta^3 - \frac{2}{945}z_\Delta^5 - \frac{1}{4725}z_\Delta^7 - \cdots,$$

$(0 < |\dot{z}| < \pi)$.

解法二：直接用待定系数法求 $\operatorname{tg} z_\Delta$在$z_\Delta = 0$的邻域内的罗朗级数。

设$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z_\Delta}\sum_{l=0}^{\infty} b_l z_\Delta^{2l}$再结合$\sin z$和$\cos z$的展开式得：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z_\Delta^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{z_\Delta}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z_\Delta^{2k+1}}{(2K+1)!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b l z^{2l}$$

$$= \frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} z_\Delta^{2n} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{n-l} b l}{(2n-2l+1)!},$$

根据展开的唯一性，得系数b_l之间的递推关系式：

$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l b l}{(2n-2l+1)!} = \frac{1}{(2n)!}$前几个系数是：

$n = 0$，$b_0 = 1$；

$n=1$, $\frac{b_0}{3!}-b_1=\frac{1}{2!}$, $b_1=-\frac{1}{3}$;

$n=2$, $\frac{b_0}{5!}-\frac{b_1}{3!}+b_2=\frac{1}{4!}$, $b_2=-\frac{1}{45}$;

$n=3$, $\frac{b_0}{7!}-\frac{b_1}{5!}+\frac{b_2}{3!}-b_3=\frac{1}{6!}$, $b_3=-\frac{2}{945}$;

……, ……。

$$\therefore \quad \operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{45}z^4-\frac{2}{945}z^6-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3-\frac{2}{945}z^5-\cdots,\ (0<|z|<\pi)。$$

(13) $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$在$|z|<1$，在$1<|z|<2$，

在$2<|z|$。

解：把原式分解为三项，并在不同的区域作泰勒展开，

即 $$\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{2(-1)-(z-2)}{(z-1)(z-2)^2}$$

$$=\frac{2}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

$$=\frac{2}{(z-2)^2}+\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2},$$

各自展开为：

$$
\begin{cases}
\dfrac{2}{(z-2)^2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{z}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^k(K+1), & (1) \\
\left(\left|\dfrac{z}{2}\right|<1 \text{ 即 } |z|<2\right), & \\
\dfrac{2}{(z-2)^2}=\dfrac{2\frac{1}{z^2}}{\left(1-\frac{2}{z}\right)^2}=2\sum\limits_{k=0}^{\infty}(K+1)\left(\dfrac{2}{z}\right)^k\dfrac{1}{z^2} &
\end{cases}
$$

$$
=\sum_{k=-\infty}^{-2}-(K+1)2^{-(k+1)}z^k,
$$

$$
\left(\left|\frac{2}{z}\right|<1 \text{ 即 } |z|>2\right); \qquad (2)
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{1}{z-1}=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k\ (|z|<1), & (3) \\
\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{k+1}}=\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}z^k,\ (|z|>1), & (4)
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
-\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^k,\ (|z|<2), & (5) \\
-\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{2^k}{z^{k+1}} & \\
\qquad =-\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}2^{-(1+k)}z^k,\ (|z|>2). & (6)
\end{cases}
$$

所以，(i)在$|z|<1$时，由(1)(3)(5)可得罗朗级数

$$
\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k(K+1)-\sum_{k=0}^{\infty}z^k
$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{K}{2}+1\right)-1\right]z^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{K+2}{2^{k+1}}-1\right)z^k.$$

其实这是泰勒级数。

(ii)在$1<|z|<2$时，由(1)(4)(5)可得罗朗级数

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k(K+1)+\sum_{k=-\infty}^{-1}z^k$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{K}{2}+1\right)\right]z^k$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}z^k+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{K+2}{2^{k+1}}z^k.$$

(iii)在$2<|z|$时，由(2)(4)(6)可得罗朗级数

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}=\sum_{k=-\infty}^{-2}-(K+1)2^{-(k+1)}z^k$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{-1}z^k-\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{-(k+1)}z^k$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-2}\left(1-\frac{K+2}{2^{k+1}}\right)z^k.$$

(14) $z/(z-1)(z-2)$在$|z|<1$，在$1<|z|<2$，在$2<|z|$。

解：与上题类似，把原式分解为

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{2(z-1)-(z-2)}{(z-1)(z-2)}=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

再把上式右边各项在不同的区域内泰勒展开为

$$\frac{2}{z-2}=-\frac{1}{1-\frac{z}{2}}=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{k}\quad(|z|<2), \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\frac{2}{z-2}&=\frac{2}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{z}\right)^{k+1}\\&=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)^{k}\quad(|z|>2);\end{aligned} \tag{2}$$

$$-\frac{1}{z-1}=\frac{1}{1-z}=\sum_{k=0}^{\infty}z^{k}\quad(|z|<1), \tag{3}$$

$$\begin{aligned}-\frac{1}{z-1}&=-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{z^{k+1}}\\&=-\sum_{k=-\infty}^{-1}z^{k}\quad(|z|>1);\end{aligned} \tag{4}$$

∴ (i)在$|z|<1$时，由(1)(3)式可得罗朗级数

$$\begin{aligned}\frac{z}{(z-1)(z-2)}&=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{k}+\sum_{k=0}^{\infty}z^{k}\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^{k}}\right)z^{k}.\end{aligned}$$

其实这是泰勒级数.

(ii) 在$1<|z|<2$时，由(1)(4)可得罗朗级数

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{k}-\sum_{k=-\infty}^{-1}z^{k}.$$

(iii)在$2<|z|$时，由(2)(4)可得罗朗级数

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)^{k}-\sum_{k=-\infty}^{-1}z^{k}$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2^k}-1\right)z^k.$$

(15) $\dfrac{1}{z^2(z^2-1)^2}$在 $0<|z|<1$．在$1<|z|<\infty$。

解：可仿前两题的解法求解．这里我们用另法求解如下：

(i)在 $0<|z|<1$时，

$$\frac{1}{z^2(z^2-1)^2}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{2z}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)=\frac{1}{2z^3}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}z^{2k}$$

$$=\frac{1}{2z^3}\sum_{k=0}^{\infty}2Kz^{2k-1}=\sum_{k=-1}^{\infty}(K+2)z^{2k}.$$

(ii)在$1<|z|<\infty$时，

$$\frac{1}{z^2(z^2-1)^2}=\frac{1}{z^6\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^2}=\frac{1}{z^6}\left(\frac{-z^3}{2}\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2z^3}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^k$$

$$=-\frac{1}{2z^3}\sum_{k=0}^{\infty}(-2K)\frac{1}{z^{2k+1}}$$

$$=-\sum_{k=-\infty}^{-2}(K+2)z^{2k}.$$

§15．奇 点 分 类

设函数$f(z)$和$g(z)$分别以点z_0为m阶和 n 阶极点，同对于下列函数而言，z_0是何种性质的点．

(1) $f(z)g(z)$。

解：$f(z)$和$g(z)$可分别表为

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m},\quad g(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^n}.$$

其中$\phi(z)$和$\psi(z)$在$z=z_0$的邻域上是解析的，且$\phi(z_0)\neq 0$，$\psi(z_0)\neq 0$。于是

$$f(z)g(z)=\frac{\phi(z)\psi(z)}{(z-z_0)^m(z-z_0)^n}=\frac{\phi(z)\psi(z)}{(z-z_0)^{m+n}},$$

∴ z_0是$f(z)g(z)$的$(m+n)$阶极点。

（2）$f(z)/g(z)$。

解：分析同上题，这时有

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\phi(z)/\psi(z)}{(z-z_0)^{m-n}}.$$

如$m>n$，则z_0是$f(z)/g(z)$的$(m-n)$阶极点；

如$m<n$，则z_0不是$f(z)/g(z)$的奇点。

（3）$f(z)+g(z)$。

解：分析同(1)题，这时有

$$f(z)+g(z)=\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}+\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^n}.$$

z_0是$f(z)+g(z)$的极点，其阶数为m和n中较大的一个，如$m=n$，则极点的阶数可能$<m$。

第四章　留 数 定 理

§16. 留 数 定 理

1.确定下列函数的奇点，求出函数在各奇点的留数.

（1）$\dfrac{e^z}{1+z}$.

解： (i) 因为$\lim\limits_{z\to-1}\left(\dfrac{e^z}{1+z}\right)=\infty$，所以$z_0=-1$是函数的极点. 又因$\lim\limits_{z\to-1}\left[(1+z)\left(\dfrac{e^z}{1+z}\right)\right]=\lim\limits_{z\to-1}e^z=\dfrac{1}{e}$，这是非零有限值，所以$z_0=-1$是函数的一阶极点（或称单极点）；其留数就是$\dfrac{1}{e}$，即

$$\operatorname{Res}f(-1)=\frac{1}{e},$$

(ii) 因为$\lim\limits_{z\to\infty}\left(\dfrac{e^z}{1+z}\right)$不存在，所以$z_0=\infty$是函数的本性奇点.函数在全平面上只有这两个奇点，根据(16.7){全平面各留数之和}＝0，可求出函数在本性奇点$z_0=\infty$的留数.

$\operatorname{Res}f(\infty)=-\{f(z)$在所有（有限个）有限远奇点的留数之和$\}=-\operatorname{Res}f(-1)=-\dfrac{1}{e}$.

以下各题皆应如此分析，但限于篇幅，我们只给出简捷的步骤.

（2）$\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$.

解：（i）单极点$z_0=1$，

$$\mathrm{Res}f(1)=\lim_{z\to1}\frac{z}{(z-2)^2}=1.$$

（ii）又二阶极点$z_0=2$，

$$\mathrm{Res}f(2)=\lim_{z\to2}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$=\lim_{z\to2}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{z}{(z-2)^2}\right]=-1.$$

（3）e^z/z^2+a^2.

解：（i）单极点$z_0=ia$，

$$\mathrm{Res}f(ia)=\lim_{z\to ia}\left(\frac{e^z}{z+ia}\right)=\frac{e^{ia}}{2ia}.$$

（ii）单极点$z_0=-ia$，

$$\mathrm{Res}f(-ia)=\lim_{z\to-ia}\left(\frac{e^z}{z-ia}\right)=\frac{e^{-ia}}{-2ia}$$

$$=-\frac{e^{-ia}}{2ia}.$$

（iii）本性奇点$z_0=\infty$，

$$\mathrm{Res}f(\infty)=-[\mathrm{Res}f(ia)+\mathrm{Res}f(-ia)]$$

$$=\frac{e^{-ia}-e^{ia}}{2ia}=-\frac{\sin a}{a}.$$

（4）$e^{iz}/(z^2+a^2)$.

解：（i）单极点$z_0=ia$，

$$\mathrm{Res}f(ia)=\lim_{z\to ia}\left(\frac{e^{iz}}{z+ia}\right)=\frac{e^{-a}}{2ia}.$$

（ii）单极点$z_0=-ia$，

$$\mathrm{Res}f(-ia)=\lim_{z\to-ia}\left(\frac{e^{iz}}{z-ia}\right)=-\frac{e^a}{2ia}.$$

（iii）本性奇点$z_0=\infty$，

$$\mathrm{Res} f(\infty) = -[\mathrm{Res} f(ia) + \mathrm{Res} f(-ia)]$$
$$= \frac{e^a - e^{-a}}{2ia} = \frac{\mathrm{sh}\, a}{ia}.$$

（5） $ze^z/(z-a)^3$.

解：（i）三阶极点 $z_0 = a$,

$$\mathrm{Res} f(a) = \lim_{z\to a} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2}(ze^z) = \left(1 + \frac{a}{2}\right)e^a.$$

（ii）本性奇点 $z_0 = \infty$,

$$\mathrm{Res} f(\infty) = -\mathrm{Res} f(a) = -\left(1 + \frac{a}{2}\right)e^a.$$

（6） $\dfrac{1}{z^3 - z^5}$.

解： $$f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5} = \frac{1}{z^3(1 - z^2)}.$$

（i）单极点 $z_0 = 1$,

$$\mathrm{Res} f(1) = \lim_{z\to 1}\left[-\frac{1}{z^3(z+1)}\right] = -\frac{1}{2}.$$

（ii）单极点 $z_0 = -1$,

$$\mathrm{Res} f(-1) = \lim_{z\to -1}\left[\frac{1}{z^3(1-z)}\right] = -\frac{1}{2}.$$

（iii）三阶极点 $z_0 = 0$.

$$\mathrm{Res} f(0) = \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1 - z^2}\right)$$
$$= \lim_{z\to 0} \frac{1}{2!}\left[\frac{2}{(1-z^2)^2} + \frac{8z^2}{(1-z^2)^3}\right] = 1$$

或由(16.7)得

$$\mathrm{Res} f(0) = -[\mathrm{Res} f(1) + \mathrm{Res} f(-1)] = 1.$$

（7） $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

解：（i）二阶极点 $z_0 = i$,

$$\mathrm{Res}f(i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2}\right]=-\frac{i}{4}.$$

(ii) 二阶极点$z_0=-i$，

$$\mathrm{Res}f(-i)=-\mathrm{Res}f(i)=\frac{i}{4}.$$

（8） $z^{2n}/(z+1)^n$.

解：（i）n阶极点$z_0=-1$，

$$\begin{aligned}\mathrm{Res}f(-1)&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z+1)^nf(z)\\&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}z^{2n}\\&=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}[2n(2n-1)\cdots(2n-n+2)\\&\quad\times z^{2n-n+1}]\\&=(-1)^{n+1}\frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)}{(n-1)!}\\&=(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}.\end{aligned}$$

(ii) n阶极点$z_0=\infty$，

$$\mathrm{Res}f(\infty)=-\mathrm{Res}f(-1)=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}.$$

（9） $e^{\frac{1}{1-z}}$.

解：本性奇点$z_0=1$．要求$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$的留数，必须把$f(z)$进行罗朗展开（见§14习题（4））．

$$f(z)=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}+\cdots,$$

所以

$$\mathrm{Res}f(1)=-1.$$

(10) $\dfrac{1}{1+z^{2n}}$.

解：令原式分母 $1+z^{2n}=0$，$z^{2n}=-1$，

$$z^n=\pm i=e^{i(2k+1)\pi/2}$$。

所以 $z_0=e^{i(2k+1)\pi/2n}$ $(k=0, 1, 2, \cdots 2n-1)$
为函数 $f(z)$ 的单极点，

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\lim_{z\to z_0}[(z-e^{i(2k+1)\pi/2n})/(1+z^{2n})],$$

应用罗毕达法则，则

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\lim_{z\to z_0}[1/2nz^{2n-1}]=\frac{1}{2n}e^{-i\frac{(2n-1)(2k+1)}{2n}\pi}$$

$$=\frac{1}{2n}\cdot\frac{e^{i(2k+1)\pi/2n}}{e^{i(2k+1)\pi}}=-\frac{1}{2n}e^{i(2k+1)\pi/2n}.$$

2．计算下列回路积分．

(1) $\displaystyle\oint_l\frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}$ (l 的方程是 $x^2+y^2-2x-2y=0$)．

解：l 的方程可化为：$(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$ 如图4-1，在复平面上，它是一个以 $(1,i)$ 为圆心、$\sqrt{2}$ 为半径的圆．

被积函数 $f(z)=1/(z^2+1)(z-1)^2$，它有两个单极点 $z_0=\pm i$，和一个二阶极点 $z_0=1$，在这三个极点中，$z_0=-i$ 不在积分回路之内，只有极点 $z_0=i$ 和 $z_0=1$ 在积分回路之内，它们的留数分别为：

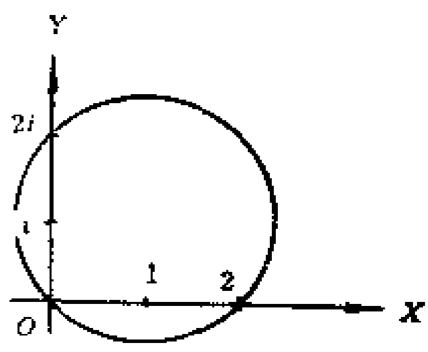


图 4-1

$$\operatorname{Res}f(i)=\lim_{z\to i}[1/(z+i)(1-z)^2]=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{Res}f(1) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(1/1+z^2) = \lim_{z\to 1}[-2z/(1+z^2)^2]$$
$$= -1/2.$$

应用留数定理：

$$\oint_l \frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2} = 2\pi i[\mathrm{Res}f(i) + \mathrm{Res}f(1)]$$
$$= 2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

（2）$\oint_{|z|=1}\cos z dz/z^3$.

解：被积$f(z)=\cos z/z^3$的三阶极点$z_0=0$在单位圆内，其留数.

$$\mathrm{Res}f(0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}(\cos z) = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \quad \oint_{|z|=1}\cos z dz/z^3 = 2\pi i\mathrm{Res}f(0) = -\pi i.$$

（3）$\oint_{|z|=2} e^{1/z^2}dz$.

解：被积函数的本性奇点$z_0=0$在积分回路之内，$\mathrm{Res}f(0)=0$，所以

$$\oint_{|z|=2} e^{1/z^2}dz = 0.$$

（4）$\oint_{|z|=2}\dfrac{zdz}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}$.

解：被积函数$f(z)=\dfrac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}=\dfrac{2z}{\cos 2z}$，

令$\cos 2z=0$，即$e^{i2z}+e^{-i2z}=0$，由此解出

$$z=\frac{(2k+1)\pi}{4}\ (k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

这些都是$f(z)$的单极点，但其中只有$z_0=\pm\frac{\pi}{4}$这个单极点在积分回路之内，而

$$\operatorname{Res}f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to-\frac{\pi}{4}}\frac{2z\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2z}=\lim_{z\to-\frac{\pi}{4}}\frac{4z+\frac{\pi}{2}}{-2\sin 2z}$$

$$=-\frac{\pi}{4},$$

$$\operatorname{Res}f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{2z(z-\pi/4)}{\cos 2z}=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{4z-\frac{\pi}{2}}{-2\sin 2z}$$

$$=-\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore\quad\oint_{|z|=2}\frac{zdz}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}=2\pi i\left[\operatorname{Res}f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\operatorname{Res}f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=-\pi^2 i.$$

3.应用留数定理计算回路积分$\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{z-\alpha}dz$,函数$f(z)$在$l$所围区域上是解析的，$\alpha$是区域的一个内点.

解：设被积函数$g(z)=\frac{f(z)}{z-\alpha}$，因为$f(z)$在$l$所围区域上是解析的，所以$g(z)$在积分回路（即$l$所围区域）内只有一个单极点$z_0=\alpha$，而

$$\operatorname{Res}f(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{f(z)}{z-\alpha}\cdot(z-\alpha)\right]=f(\alpha),$$

$$\therefore\quad\oint_l\frac{f(z)}{z-\alpha}dz=2\pi i\operatorname{Res}f(\alpha)=2\pi i f(\alpha),$$于是

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-a}dz = f(a).$$

这正是科希公式。

§17. 应用留数定理计算实变函数定积分

1.计算下列实变函数定积分

（1） $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$.

解：这是属于类型一的积分．为此，作变换$z=e^{ix}$使原积分化为单位圆内的回路积分

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}}=\oint_{|z|=1}\frac{2}{i}\frac{dz}{z^2+4z+1}$$

$$=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}f(z)dz.$$

$f(z)$有两个单极点$z_0=-2\pm\sqrt{3}$，其中$z_0=-2+\sqrt{3}$在单位圆内，且

$$\mathrm{Res}f(\sqrt{3}-2)=\lim_{z\to\sqrt{3}-2}\left[\frac{1}{z+2+\sqrt{3}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{2}{i}\ \mathrm{Res}f\ (\sqrt{3}-2)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

和本题一样，下面的几小题都是属于类型一的积分，处理方法和本题类似，因此，我们将只给出简捷步骤。

（2） $\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$ （$0<\varepsilon<1$）.

解：作变换$z=e^{ix}$，则

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\left[1+\frac{\varepsilon}{2}(z+z^{-1})\right]^2}$$

$$=\frac{4}{i\varepsilon^2}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(z^2+\frac{2}{\varepsilon}z+1\right)^2}$$

$$=\frac{4}{i\varepsilon^2}\oint_{|z|=1}f(z)dz.$$

$f(z)$有两个二阶极点$z_0=\frac{1}{\varepsilon}(-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2})$，其中$z_0=\frac{1}{\varepsilon}(-1+\sqrt{1-\varepsilon^2})$在单位圆内，且

$$\operatorname{Res}f\left[\frac{1}{\varepsilon}(-1+\sqrt{1-\varepsilon^2})\right]=\frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon^2)^{3/2}}.$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{4}{i\varepsilon^2}\operatorname{Res}f\left[\frac{1}{\varepsilon}(-1+\sqrt{1-\varepsilon^2})\right]$$

$$=\frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}.$$

（3）$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 2x\,dx}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}\ (|\varepsilon|<1)$.

解：令$z=e^{ix}$，则$dx=\frac{dz}{iz}$，$\cos x=\frac{1+z^2}{2z}$，$\cos 2x=\frac{1+z^4}{2z^2}$，以此代入原式得：

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\left(\frac{1+z^4}{2z^2}\right)^2\frac{dz}{iz}}{1-2\varepsilon\frac{1+z^2}{2z}+\varepsilon^2}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{(1+z^4)^2dz}{4iz^4[-\varepsilon z^2+(1+\varepsilon^2)z-\varepsilon]}$$

$$=\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1}\frac{(1+z^4)^2dz}{z^4(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}$$

$$=\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1}f(z)dz.$$

被积函数的极点是：四阶极点$z_0=0$，单极点 $z_0=\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}$，因$|\varepsilon|<1$，则$|1/\varepsilon|>0$，故只有$z_0=0$和$z_0=\varepsilon$两个极点在单位圆内，其留数分别为：

$$\mathrm{Res}f(0)=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}\left[\frac{(1+z^4)^2}{(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}\right]$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(1+z^4)^2[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^2}\right.$$

$$\left.+\frac{8z^3(1+z^4)}{(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}\right]$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left\{-\frac{2(1+z^4)^2[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]^2}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^3}\right.$$

$$+\frac{2(1+z^4)^2\varepsilon+8z^3(1+z^4)[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^2}$$

$$\left.+\frac{24z^2(1+z^4)+32z^6}{(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}\right.$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\left\{\frac{6(1+z^4)^2[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]^3}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^4}\right.$$

$$+\frac{\begin{array}{c}2\{(1+z^4)^2\cdot 2[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]2\varepsilon+2z^3\\ \cdot(1+z^4)[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]\}\end{array}}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^3}$$

$$+\frac{\begin{array}{c}2\{(1+z^4)^2\cdot 2\varepsilon[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]+16z^3\\ \cdot(1+z^4)[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]^2\}\end{array}}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^3}$$

$$+\frac{16\varepsilon z^3(1+z^4)}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^2}$$

$$-\frac{\frac{d}{dz}\{16z^3(1+z^4)[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]\}}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^2}$$

$$+\frac{d}{dz}\left[\frac{24z^2(1+z^4)+32z^6}{(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}\right]\}$$

$$=\frac{1}{3!}\left[-\frac{6}{\varepsilon^4}(1+\varepsilon^2)^3+\frac{8\varepsilon}{\varepsilon^2}(1+\varepsilon^2)\right.$$

$$\left.+\frac{4\varepsilon}{\varepsilon^3}(1+\varepsilon^2)\right]$$

$$=-\frac{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^4)}{\varepsilon^4},$$

$$\operatorname{Res}f(\varepsilon)=\lim_{z\to\varepsilon}\left[\frac{(1+z^4)^2}{z^4(1-\varepsilon z)}\right]=\frac{(1+\varepsilon^4)^2}{\varepsilon^4(1-\varepsilon^2)}.$$

$$\therefore I=2\pi i\cdot\frac{1}{4i}\left[\frac{(1+\varepsilon^4)^2}{\varepsilon^4(1-\varepsilon^2)}-\frac{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^4)}{\varepsilon^4}\right]$$

$$=\frac{(1+\varepsilon^4)\pi}{1-\varepsilon^2}.$$

（4） $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{a+b\cos x}dx \quad (a>b>0)$.

解：作变换后原式 $=\oint_{|z|=1}\frac{[(z^2-1)/2iz]^2\cdot dz/iz}{a+b[z^2+1]/2z}$

$$=-\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2dz}{4iz^3\left[a+\frac{b}{2z}(z^2+1)\right]}$$

$$=-\frac{1}{2bi}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2dz}{z^2\left[z^2+\frac{2a}{b}z+1\right]}$$

$$=-\frac{1}{2bi}\oint_{|z|=1}$$

$$\frac{(z^2-1)^2dz}{z^2\left[z+\frac{1}{b}(a+\sqrt{a^2-b^2})\right]\left[z+\frac{1}{b}(a-\sqrt{a^2-b^2})\right]}$$

$$= -\frac{1}{2bi}\oint_{|z|=1} f(z)dz.$$

上式的被积函数的极点是：二阶极点$z_0=0$，单极点 $z_0=-\frac{1}{b}(a+\sqrt{a^2-b^2})$和单极点 $z_0=-\frac{1}{b}(a-\sqrt{a^2-b^2})$.其中单极点 $z_0=-\frac{1}{b}(a+\sqrt{a^2-b^2})$在单位圆外（即$|z_0|>1$，亦即 $a+\sqrt{a^2-b^2}>b$），其余的极点在单位圆内，其留数分别是：

$$\operatorname{Res} f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z^2+\frac{2a}{b}z+1}\right]=-\frac{2a}{b},$$

$$\operatorname{Res} f\left(-\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

$$=\lim_{z\to\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z^2\left[z+\frac{1}{b}(a+\sqrt{a^2-b^2})\right]}\right]$$

$$=\frac{\left[\frac{(\sqrt{a^2-b^2}-a)^2}{b^2}-1\right]^2}{\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}\right)^2\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right]}$$

$$=\frac{(2a^2-2b^2-2a\sqrt{a^2-b^2})^2}{2b(2a^2-b^2-2a\sqrt{a^2-b^2})\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2bi}\right)\left[\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}-\frac{2a}{b}\right]$$

$$=\frac{(a-\sqrt{a^2-b^2})2\pi}{b^2}.$$

（5） $\int_0^{\pi}\frac{a\,dx}{a^2+\sin^2 x}\ (a>0)$.

解：把原式化为 $I=\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{a\,dx}{a^2+\sin^2x}+\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{a\,dy}{a^2+\sin^2y}$.

在后一个积分中令 $y=x-\pi$，则上式又

$$=\frac{1}{2}\int_0^\pi\frac{a\,dx}{a^2+\sin^2x}+\frac{1}{2}\int_\pi^{2\pi}\frac{a\,dx}{a^2+\sin^2x}=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a^2+\sin^2x}$$

$$=\frac{a}{2}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz[a^2+(z+z^{-1})^2/(2i)^2]}$$

$$=\frac{a}{2}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(a+\frac{z+z^{-1}}{2}\right)\left(a-\frac{z-z^{-1}}{2}\right)}$$

$$=-\frac{2a}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zaz}{(z^2+2az-1)(z^2-2az-1)}=-\frac{2a}{i}\oint_{|z|=1}$$

$$\frac{zdz}{(z+a+\sqrt{a^2-1})(z+a-\sqrt{a^2+1})(z-a+\sqrt{a^2+1})(z-a-\sqrt{a^2-1})}$$

$$=-\frac{2a}{i}\oint_{|z|=1}f(z)dz.$$

$f(z)$ 在单位圆内有单极点 $z_0=-a+\sqrt{a^2+1}$ 及 $z_0=a-\sqrt{a^2+1}$，且

$$\operatorname{Res}f(-a+\sqrt{a^2+1})=\frac{-a+\sqrt{a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}\cdot2\cdot(-a+\sqrt{a^2+1})(-2a)}$$

$$=\frac{-1}{8a\sqrt{a^2+1}},$$

$$\operatorname{Res}f(a-\sqrt{a^2+1})=-\frac{a-\sqrt{a^2+1}}{2a\cdot2(a-\sqrt{a^2-1})\cdot2(-\sqrt{a^2+1})}$$

$$=\frac{-1}{8a\sqrt{a^2+1}}.$$

$$\therefore\quad\int_0^\pi\frac{a\,dx}{a^2+\sin^2x}=\frac{2a}{i}\,2\pi i\,\frac{1}{-4a\sqrt{a^2+1}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}.$$

（6）$\int_0^{2\pi}\frac{\cos x\,dx}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}$（$|\varepsilon|<1$）.

解：作变换后原式 $=\oint_{|z|=1}\dfrac{\dfrac{z^2+1}{2z}\cdot\dfrac{dz}{iz}}{1-2\varepsilon\dfrac{z^2+1}{2z}+\varepsilon^2}$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)dz}{2iz^2\left(1-\varepsilon\dfrac{z^2+1}{z}+\varepsilon^2\right)}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)dz}{[(1+\varepsilon^2)z-\varepsilon z^2-\varepsilon]}$$

$$=\frac{1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2+1)dz}{z(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}.$$

被积函数有三个单极点 $z_0=0,\varepsilon,1/\varepsilon$；因 $|\varepsilon|<1$，则 $\left|\dfrac{1}{\varepsilon}\right|>1$，故只有单极点 $z_0=0$、ε 在积分回路之内，其留数分别是：

$$\mathrm{Res}f(0)=\lim_{z\to 0}\left[\frac{z^2+1}{(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}\right]=-\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\mathrm{Res}f(\varepsilon)=\lim_{z\to\varepsilon}\left[\frac{z^2+1}{z(1-\varepsilon z)}\right]=\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)},$$

$$\therefore\ I=2\pi i\cdot\frac{1}{2i}\left[\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}-\frac{1}{\varepsilon}\right]=\frac{2\pi\varepsilon}{1-\varepsilon^2}.$$

(7) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos^2x}$.

解：因被积函数是偶函数，故可作下列的延拓

$$I=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\cos^2x}=\frac{1}{4}\oint_{|z|=1}\frac{\dfrac{dz}{iz}}{1+\left[\dfrac{z^2+1}{2z}\right]^2}$$

$$=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{z^4+6z^2+1}$$

$$=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{[z^2+3+2\sqrt{2}][z^2+3-2\sqrt{2}]}$$

$$=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z\,dz}{[z^2+(3+2\sqrt{2})][z+\sqrt{3-2\sqrt{2}}i][z-\sqrt{3-2\sqrt{2}}i]},$$

被积函数的四个单极点中，只是 $z_0=\pm\sqrt{3-2\sqrt{2}}\,i$，即 $z_0=(\sqrt{2}-1)i$ 和 $z_0=(1-\sqrt{2})i$ 在积分回路之内，其留数分别是

$$\mathrm{Res}f(\sqrt{3-2\sqrt{2}}i)=\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{z}{[z^2+3+2\sqrt{2}][z+\sqrt{3-2\sqrt{2}}i]}\right\}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}},$$

$$\mathrm{Res}f(-\sqrt{3-2\sqrt{2}}i)=\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{z}{[z^2+3+2\sqrt{2}][z-\sqrt{3-2\sqrt{2}}i]}\right\}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}},$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

（8）$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\,dx$.

解：作变换后，原式 $=\oint_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\frac{dz}{iz}$

$$=\frac{1}{2^{2n}i}\oint_{|z|=1}\frac{(1+z^2)^{2n}dz}{z^{2n+1}},$$

被积函数有一个 $(2n+1)$ 阶极点 $z=0$，且

$$\mathrm{Res}f(0)=\frac{1}{(2n)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(1+z^2)^{2n};$$

根据二项式公式：$(a+b)^n=\cdots+\frac{n!a^{n-K}b^K}{(n-k)!k!}+\cdots$ 知

$$(1+z^2)^{2n}=\cdots+\frac{(2n)!z^{2K}}{(2n-K)!K!}+\cdots$$

还要对 z 微分 $2n$ 次，故凡是 $2k<2n$ 的 z^{2K} 项，在微分 $2n$ 次后都为零；而 $2K>2n$ 项中，在微分 $2n$ 次后仍含有变数 z，当 $z\to z_0=0$

时，这些项全部为零；只有当$2K=2n$的项在微分$2n$次并以$z_0=0$代入后的结果才不为零，即

$$\operatorname{Res}f(0)=\frac{1}{(2n)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\left[\frac{(2n)!z^{2n}}{(2n-n)!n!}\right]=\frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

$$\therefore\ I=\frac{1}{2^{2n}i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{2\pi\cdot 2^n(n!)[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]}{2^n(n!)2^n(n!)}$$

$$=\frac{2\pi[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}.$$

2. 计算下列实变函数定积分。

（1）$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$。

解：$f(z)=\frac{z^2+1}{z^4+1}=\frac{z^2+1}{(z^2-i)(z^2+i)}$

$$=\frac{z^2+1}{\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}$$

它具有四个单极点，其中只有$z_0=-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$，$\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$在上半平面，其留数分别为：

$$\operatorname{Res}f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{z^2+1}{(z^2+i)\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]}\right]=\frac{1}{2\sqrt{2}i},$$

$$\operatorname{Res}f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{z^2+1}{(z^2+i)\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]}\right]=\frac{1}{2\sqrt{2}i},$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\,i}+\frac{1}{2\sqrt{2}\,i}\right)=\sqrt{2}\,\pi.$$

本题和下面几小题都属于类型二。

（2）$\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$。

解：由于被积函数是偶函数，所以

$$原式=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2},$$

被积函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$

$$=\frac{z^2}{(z+3i)(z-3i)(z+2i)^2(z-2i)^2},$$

它在上半平面的奇点是两个，一个极点 $z_0=3i$，一个二阶极点 $z_0=2i$，其留数分别是：

$$\text{Res}f(3i)=\lim_{z\to 3i}\left[\frac{z^2}{(z+3i)(z^2+4)^2}\right]=\frac{3}{50}i,$$

$$\text{Res}f(2i)=\lim_{z\to 2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z^2+9)(z+2i)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to 2i}\left\{\frac{2z}{(z^2+9)(z+2i)^2}-\frac{2z^3(z+2i)^2+2z^2(z^2+9)(z+2i)}{[(z^2+9)(z+2i)^2]^2}\right\}$$

$$=-\frac{13}{200}i.$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{3i}{50}-\frac{13i}{200}\right]=\frac{\pi}{200}.$$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}.$

解：被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)}$

$$=\frac{1}{(z+ai)^2(z-ai)^2(z+bi)(z-bi)}.$$

(i) 若$a>b$，$b>0$，则其在上半平面的奇点是：单极点$z_0=bi$，二阶极点$z_0=ai$，其留数分别为：

$$\text{Res}f(bi)=\lim_{z\to bi}\left[\frac{1}{(z^2-a^2)\cdot(z+bi)}\right]=\frac{-i}{2b(b^2-a^2)^2},$$

$$\operatorname{Res} f(ai)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z^2+b^2)(z+ai)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to ai}\left[\frac{-2z(z+ai)^2-2(z^2+b^2)(z+ai)}{[(z^2+b^2)(z+ai)^2]^2}\right]$$

$$=\frac{(3a^2-b^2)i}{4a^3(b^2-a^2)^2};$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\left[\frac{(3a^2-b^2)i}{4a^3(b^2-a^2)^2}-\frac{i}{2b(b^2-a^2)^2}\right]=\frac{(2a+b)\pi}{2a^3b(a+b)^2}.$$

（ii）对于$a<0$，$b<0$或$a>0$，$b<0$或$a<0$，$b>0$ 等三种情况均可作类似的计算。

（4）$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}$.

解一：因被积函数是偶函数，故原式$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}$，其中被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}=\dfrac{1}{[z^2+a^2i][z^2-a^2i]}=$

$$\frac{1}{\left[z-\frac{\sqrt2}{2}a(1-i)\right]\left[z+\frac{\sqrt2}{2}a(1-i)\right]\left[z-\frac{\sqrt2}{2}a(1+i)\right]\left[z+\frac{\sqrt2}{2}a(1+i)\right]}$$

设$a>0$，它在上半平面有两个单极点$z_0=\dfrac{\sqrt2}{2}a(i-1)$，$z_0=\dfrac{\sqrt2}{2}a(i+1)$，其留数分别是：

$$\operatorname{Res} f\left(\frac{\sqrt2}{2}a(i-1)\right)=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{\left[z-\frac{\sqrt2}{2}a(1-i)\right][z^2-a^2i]}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt2\,a^3(1+i)},$$

$$\operatorname{Res} f\left[\frac{\sqrt2}{2}a(1+i)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{[z^2+a^2i]\left[z+\frac{\sqrt2}{2}a(1+i)\right]}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\,a^3(i-1)},$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\;\frac{1}{2\sqrt{2}\,a^3}\left(\frac{1}{i+1}+\frac{1}{i-1}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}\,a^3}.$$

解二：被积函数 $f(z)$ 有四个单极点 $z_0=ae^{i\frac{\pi}{4}}$、 $z_0=ae^{i\frac{3\pi}{4}}$、$z_0=ae^{i\frac{5\pi}{4}}$、$z_0=ae^{i\frac{7\pi}{4}}$，其中只有单极点 $z_0=ae^{i\frac{\pi}{4}}$ 和$z_0=ae^{i\frac{3\pi}{4}}$在上半平面，其留数分别是（应用罗毕达法则）：

$$\mathrm{Res}f(ae^{i\frac{\pi}{4}})=\lim_{z\to z_0}\left[(z-ae^{i\frac{\pi}{4}})\;\frac{1}{z^4+a^4}\right]=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z^3}$$

$$=\frac{1}{4a^3}e^{-i\frac{3\pi}{4}},$$

$$\mathrm{Res}f(ae^{i\frac{3\pi}{4}})=\lim_{z\to z_0}\left[(z-ae^{i\frac{3\pi}{4}})\;\frac{1}{z^4+a^4}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z^3}=\frac{1}{4a^3}e^{-i\frac{9\pi}{4}}.$$

$$\therefore\quad I=\pi i\left[\mathrm{Res}f(ae^{i\frac{\pi}{4}})+\mathrm{Res}f(ae^{i\frac{3\pi}{4}})\right]$$

$$=\frac{\pi i}{4a^3}\left[e^{-i\frac{3\pi}{4}}+e^{-i\frac{9\pi}{4}}\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{2}\,a^3}.$$

显然，解二比解一的计算要简单些。

（5）$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{(x^2+1)dx}{x^6-1}$.

解：因被积函数是偶函数，故原式$=\displaystyle\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+1)dx}{x^6+1}$,

被积函数 $f(z)=\frac{z^2+1}{z^6-1}=\frac{1}{z^4-z^2+1}$

$$=\frac{1}{\left[z^2-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\right]\left[z^2-\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)\right]}=$$

$$\frac{1}{\left[z+\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)}\right]\left[z-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)}\right]\left[z+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)}\right]\left[z-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)}\right]}$$

注意到：$\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)}=\sqrt{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$

$$=\frac{1}{2}(i+\sqrt{3}),$$

$\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)}=\sqrt{\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}}=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$

$$=\frac{1}{2}(i-\sqrt{3}),$$

故$f(z)=$

$$\frac{1}{\left[z+\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})\right]\left[z-\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})\right]\left[z+\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right]\left[z-\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right]}.$$

被积函数在上半平面有两个单极点$z_0=\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})$,

$z_0=\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})$，其留数为：

$$\operatorname{Res}f\left[\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\left[z^2-\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)\right]\left[z+\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})\right]}$$

$$=\frac{1}{\left\{\left[\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right]^2-\frac{1}{2}(i-\sqrt{3}i)\right\}\left\{\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})+\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}i-1)},$$

$$\operatorname{Res}f\left[\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right]=\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{1}{\left[z^2-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\right]\left[z+\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right]}\right\}$$

$$=\frac{1}{\left\{\left[\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right]^2-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\right\}\left\{\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}i+1)}.$$

$$\therefore I=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}i+1)}-\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}i-1)}\right\}=\frac{\pi}{2}.$$

必须指出：本题也可用上题解二的方法求解。

（6） $\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$。

解：因被积函数是偶函数，所以

$$原式=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx.$$

被积函数 $f(z)=\frac{z^2}{(z^2+a^2)^2}=\frac{z^2}{(z+ai)^2(z-ai)^2}$ 在上半平面有一个二阶极点$z_0=ai$，且

$$\operatorname{Res}f(ai)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right]=\lim_{z\to ai}\left[\frac{2z}{(z+ai)^2}-\frac{2z^2}{(z+ai)^3}\right]$$

$$=\frac{2ai}{(2ai)^2}-\frac{2(ai)^2}{(2ai)^3}=-\frac{i}{4a}.$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{i}{4a}\right)=\frac{\pi}{4a}.$$

（7） $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx$ $(m<n)$。

解：被积函数 $f(z)=\frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}$ 在上半平面有 n 个单极点

$(z^{2n}+1=0,\ z^{2n}=-1)$ $z_0=e^{(2K+1)\pi i/2n}$ $(K=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots n-1)$.现在计算留数

$$\mathrm{Res} f(e^{(2K+1)\pi i/2n})=\lim_{z\to z_0}\left[(z-e^{(2K+1)\pi i/2n})\frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\right],$$

用罗毕达法则，

$$上式=\lim_{z\to z_0}\frac{2mz^{2m-1}(z-e^{(2K+1)\pi i/2n})+z^{2m}}{2nz^{2n-1}}$$

$$=\frac{1}{2ne^{(2K+1)(2n-2m-1)\pi i/2n}},$$

故上半平面各留数之和为

$$\frac{1}{2ne^{(2n-2m-1)\pi i/2n}}\sum_{K=0}^{n-1}\frac{1}{e^{K(2n-2m-1)\pi i/n}}$$

$$=-\frac{-e^{(2m+1)\pi i/2n}}{2n}\cdot\frac{1-e^{-(2n-2m-1)\pi i}}{1-e^{-(2n-2m-1)\pi i/n}}$$

$$=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2}{e^{(2m+1)\pi i/2n}-e^{-(2m+1)\pi i/2n}}$$

$$=\frac{1}{2ni\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\frac{1}{2ni\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}=\frac{\pi}{n\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

3.计算下列实变函数定积分。

(1) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^4}dx\quad(m>0)$。

解：本题和下面几小题都属于类型三。

$$\because\quad F(z)\,e^{imz}=\frac{e^{imz}}{1+z^4}$$

$$=\frac{e^{miz}}{\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}.$$

在上半平面有两个单极点 $z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$，$z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)$，其留数分别为：

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)}\left\{\frac{e^{imz}}{\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right](z^2-i)}\right\}$$

$$=\frac{e^{-im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]}}{(-2i)(i-1)\sqrt{2}}=\frac{e^{-im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]}}{2\sqrt{2}(i+1)},$$

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)}\left\{\frac{e^{imz}}{\left[z^2+i\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}\right\}$$

$$=\frac{e^{im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}}{2i\cdot\sqrt{2}(1+i)}=\frac{e^{im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}}{2\sqrt{2}(i-1)}.$$

$$\therefore\quad I=\pi i\left\{\frac{e^{-im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]}}{2\sqrt{2}(i-1)}+\frac{e^{im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}}{2\sqrt{2}(i+1)}\right\}$$

$$=\frac{(i-1)e^{-im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]}-(i+1)e^{im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}}{4\sqrt{2}}\pi i$$

$$=\frac{2e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}\left[-i\cos\frac{m}{\sqrt{2}}-i\sin\frac{m}{\sqrt{2}}\right]}{4\sqrt{2}}\pi i$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{m}{\sqrt{2}}-\sin\frac{m}{\sqrt{2}}\right)}{4}.$$

本题也可用指数来表示被积函数在上半平面的极点，即 $z_0 = e^{i\frac{\pi}{4}}$ 和 $z_0 = e^{i\frac{3\pi}{4}}$.注意应用罗毕达法则计算被积函数在这两个极点的留数，也可同样求出上述答案。

（2） $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx \quad (m>0,\ a>0)$.

解一：$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{1}{2i}\int_0^{\infty}\frac{e^{imx}}{x(x^2+a^2)}dx = I$

考虑积分

$$\oint_l \frac{e^{imz}}{z(z^2+a^2)}\,dz = \int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z(z^2+a^2)}\,dz + \int_{C_\varepsilon}\frac{e^{imz}}{z(z^2+a^2)}\,dz + \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right)\frac{e^{imx}dx}{x(x^2+a^2)}. \qquad (1)$$

如图4-2，l 内有一单极点 ia，留数是 $\dfrac{-e^{-ma}}{2a^2}$. 所以，（1）式

左端 $= 2\pi i\,\dfrac{-e^{-ma}}{2a^2} = \dfrac{-\pi e^{-ma}}{a^2}i$，

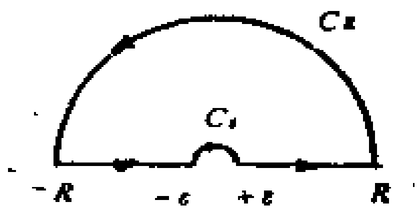


图 4-2

又在（1）式两端令 $\varepsilon\to0$，$R\to\infty$，则右端第一项依约当引理为零，右端最后两项 $=2iI$；于是，

$$-\frac{\pi e^{-ma}}{a^2}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{imz}}{z(z^2+a^2)}dz + 2iI\ .$$

而

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{imz}}{z(z^2+a^2)}dz = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\left[\frac{1}{a^2z} + 解析部分\ P(z)\right]dz$$

$$= \lim_{\varepsilon\to0}\int_{\pi}^{0}\frac{i\varepsilon e^{i\varphi}}{a^2\varepsilon e^{i\varphi}}d\varphi = -\frac{i}{a^2}\pi.$$

$\therefore\quad 2iI=\frac{i}{a^2}\pi-\frac{i\pi}{a^2}e^{-ma}$，即 $I=(1-e^{-ma})\dfrac{\pi}{2a^2}$.

解二：注意到 $\dfrac{1}{x(x^2+a^2)}=\dfrac{1}{a^2x}-\dfrac{x}{a^2(x^2+a^2)}$ 以及 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx=\frac{\pi}{2}$，则

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx=\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}dx-\frac{1}{a^2}\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{x^2+a^2}dx$$

$$=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi}{2}-\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{x^2+a^2}dx\right),$$

而 $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin mx}{x^2+a^2}dx=\pi\left\{\frac{ze^{imz}}{z^2+a^2}\text{在上半平面所有奇点留数之和}\right\}=\pi\left\{\operatorname{Res}f(ia)\right\}=\pi\left\{\lim_{z\to ia}\left[(z-ia)\frac{ze^{imz}}{z^2+a^2}\right]\right\}=\frac{\pi e^{-ma}}{2}$，所以

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx=\frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}e^{-ma}\right)$$

$$=(1-e^{-ma})\frac{\pi}{2a^2}.$$

(3) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$.

解：因被积函数是偶函数，

$\therefore\quad$ 原式 $=2\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x\sin x}{1+x^2}dx$.

上式中的被积函数 $G(z)e^{iz}=\dfrac{z}{1+z^2}e^{iz}=\dfrac{ze^{iz}}{(z+i)(z-i)}$ 在上半平面有一个单极点 $z_0=i$，且

$$\operatorname{Res}f(i)=\lim_{z\to i}\left(\frac{z}{z+i}\right)e^{iz}=\frac{1}{2e}.$$

$\therefore \quad I = \pi \cdot 2\left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{\pi}{e}$.

(4) $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin mx}{2x^2+a^2}dx$, $(m>0,\ a>0)$.

解：因为被积函数是偶函数，

$\therefore \quad$ 原式 $= 2\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin mx}{2x^2+a^2}dx$,

上式中的被积函数 $G(z)e^{imz} = \frac{z}{2z^2+a^2}e^{imz}$

$$= \frac{ze^{imz}}{2\left[z+\frac{a}{\sqrt{2}}i\right]\left[z-\frac{a}{\sqrt{2}}i\right]}$$

在上半平面有一个单极点 $z_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}i$，且

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \lim_{z\to ai/\sqrt{2}}\left[\frac{ze^{imz}}{2\left(z+\frac{a}{\sqrt{2}}i\right)}\right] = \frac{1}{4}e^{-ma/\sqrt{2}}.$$

$\therefore \quad I = \pi \cdot 2 \cdot \frac{1}{4}e^{-ma/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}e^{-ma/\sqrt{2}}$.

(5) $\int_{0}^{\infty} \frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2}dx$;

解：$F(z)\ e^{imz} = \frac{e^{imz}}{(z^2+a^2)^2} = \frac{e^{imz}}{(z+ai)^2(z-ai)^2}$ 在上半平面只有一个二阶极点 $z_0 = ai$，其留数

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{imz}}{(z+ai)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to ai}\left[\frac{ime^{imz}}{(z+ai)^2} - \frac{2e^{imz}}{(z+ai)^3}\right]$$

$$= -\frac{(am+1)e^{-ma}}{4a^3}.$$

$$\therefore \quad I = \pi i\left[-\frac{(am+1)e^{-ma}}{4a^3}i\right] = \frac{\pi(am+1)e^{-ma}}{4a^3}.$$

（6）$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$.

解：$\displaystyle F(z)\,e^{imz} = \frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$

$$= \frac{e^{iz}}{(z+ia)(z-ia)(z+ib)(z-ib)}$$

在上半平面有两个单极点$z_0=ai$，$z_0=bi$，其留数分别是：

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \lim_{z\to a}\left[\frac{e^{iz}}{(z+ia)(z^2+b^2)}\right] = \frac{ie^{-a}}{2a(a^2-b^2)},$$

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \lim_{z\to b_i}\left[\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z+ib)}\right] = \frac{-ie^{-b}}{2b(a^2-b^2)}.$$

$$\therefore \quad I = \pi i\left[\frac{ie^{-a}}{2a(a^2-b^2)} - \frac{ie^{-b}}{2b(a^2-b^2)}\right] = \frac{\pi(ae^{-b}-be^{-a})}{2ab(a^2-b^2)}$$

$$= \frac{\pi\left(\dfrac{e^{-b}}{b}-\dfrac{e^{-a}}{a}\right)}{2(a^2-b^2)}.$$

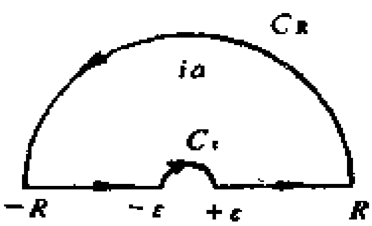


图 4-3

（7）$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$；

解：$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx = \frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\sin x}{x^2}dx = I$

我们考虑积分$\displaystyle\oint_l \frac{e^{iz}\sin z dz}{z^2}$

$$= \left[\int_{C_R} + \int_{C_\varepsilon}\right]\frac{e^{iz}\sin z}{z^2}dz + \left(\int_{-R}^{-\varepsilon} + \int_{\varepsilon}^{R}\right)\frac{e^{ix}\sin x}{x^2}dx.$$

如图4-3，l中无奇点，所以上式左端为零，令$\varepsilon\to 0$、$R\to\infty$，右端第一项为

$$\int_{C_R}\frac{e^{iz}(e^{iz}-e^{-iz})dz}{2iz^2}=\frac{1}{2i}\int_{C_R}\left(\frac{e^{i2z}}{z^2}-\frac{1}{z^2}\right)dz.$$

在上式中，第一项依约当引理$\to 0$，第二项$\frac{1}{z^2}$因z一致趋于0也$\to 0$，所以$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}=0$，

$$\therefore\quad 2iI=\lim_{\varepsilon\to 0}-\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}\sin z}{z^2}dz$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}-\left(\frac{1}{z}+\text{解析部分 }P(z)\right)dz$$

$$=\int_{\varphi}^{0}-\frac{i\varepsilon e^{iz}}{\varepsilon e^{i\varphi}}d\varphi=i\pi,\qquad I=\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{即}\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

解本题的方法不仅这一种，其它的方法留给读者自己练习。

(8) $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x-ia}dx$，$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x+ia}dx$ ($m>0$，$R_e a>0$)。

解：在上半平面$\frac{e^{imz}}{z-ia}$有单极点ia，$\frac{e^{imz}}{z+ia}$在上半平面无奇点

$$\therefore\quad\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x-ia}dx=2\pi i\left[\lim_{z\to ia}e^{imz}\right]=2\pi ie^{-ma},$$

而
$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{imx}}{x+ia}dx=0.$$

第五章　拉普拉斯变换

§21. 拉普拉斯变换

1.求下列函数的拉普拉斯变换函数。

（1） $\operatorname{sh}\omega t$，$\operatorname{ch}\omega t$。

解一： $\varphi(t)=\operatorname{sh}\omega t=\dfrac{1}{2}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})$

$$\fallingdotseq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right]=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}。$$

解二： $\varphi(t)=\operatorname{ch}\omega t=\dfrac{1}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$

$$\fallingdotseq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\right]=\frac{p}{p^2-\omega^2}。$$

（2） $e^{-\lambda t}\sin\omega t$，$e^{-\lambda t}\cos\omega t$；

解一： $\varphi(t)=e^{-\lambda t}\sin\omega t=\dfrac{1}{2i}e^{-\lambda t}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})$

$$\fallingdotseq\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{(p+\lambda)-i\omega}-\frac{1}{(p+\lambda)+i\omega}\right]$$

$$=\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2}；$$

解二： $\varphi(t)=e^{-\lambda t}\cos\omega t=\dfrac{1}{2}e^{-\lambda t}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})$，

$$\fallingdotseq\frac{1}{2}\left[\frac{1}{(p+\lambda)-i\omega}+\frac{1}{(p+\lambda)+i\omega}\right]$$

$$=\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}。$$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$.

解：$\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$,

$$\overline{\varphi}(p)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-pt}dt,$$

若令 $t=x^2$，$dt=2xdx$，

则
$$\overline{\varphi}(p)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ \frac{1}{x}e^{-px^2}\cdot 2xdx$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-px^2}\ dx$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-px^2}d(\sqrt{P}x)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi p}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi p}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{\sqrt{p}}.$$

2.对下列常微分方程施行拉普拉斯变换

(1) $\dfrac{d^3y}{dt^3}+3\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+y=6e^{-t}$,

$$y(0)=\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0}=0.$$

解：$p^3\overline{y}(p)+3p^2\overline{y}(p)+3p\overline{y}(p)+\overline{y}(p)=6\cdot\dfrac{1}{p+1}$,

$$(p+1)^3\overline{y}(p)=\frac{6}{p+1},\quad (p+1)^4\overline{y}(p)=6.$$

亦即$\overline{y}(p)=\dfrac{6}{(p+1)^4}$.

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+9y=30\mathrm{ch}t$, $y(0)=3$,

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0.$$

解：$p^2\overline{y}(p)-3p+9\overline{y}(p)=30\cdot\frac{p}{p^2-1}$，

$$(p^2+9)\overline{y}(p)=\frac{30p}{p^2-1}+3p$$

$$=\frac{3p(p^2+9)}{p^2-1},$$

$$\overline{y}(p)=\frac{3p}{p^2-1}.$$

（3）$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}+2y+2z=10e^{2t}, \\ \dfrac{dz}{dt}-2y+z=7e^{2t};\end{cases}$　　$\begin{cases}y(0)=1, \\ z(0)=3.\end{cases}$

解：$\begin{cases}p\overline{y}(p)-1+2\overline{y}(p)+2\overline{z}(p)=10\cdot\dfrac{1}{p-2}, \\ p\overline{z}(p)-3-2\overline{y}(p)+\overline{z}(p)=7\cdot\dfrac{1}{p-2},\end{cases}$

$$\begin{cases}(p+2)\overline{y}(p)+2\overline{z}(p)=\dfrac{1}{p-2}+1, \\ (p+1)\overline{z}(p)-2\overline{y}(p)=\dfrac{7}{p-2}+3.\end{cases}$$

（4）$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=t^2e^t, y(0)=\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0.$

解：$t^2e^t \doteq \dfrac{d^2}{dp^2}\dfrac{1}{p-1}=\dfrac{2}{(p-1)^3}$，对原方程进行拉普拉斯变换，

得　$p^2\overline{y}(p)-2p\overline{y}(p)+\overline{y}(p)=\dfrac{2}{(p-1)^3}$，

$$(p-1)^2\overline{y}(p)=\frac{2}{(p-1)^3},\quad (p-1)^5\overline{y}(p)=2.$$

$$\overline{y}(p)=\frac{2}{(p-1)^5}.$$

（5） $\dfrac{dy_1}{dt}=-c_1y_1$, $\dfrac{dy_2}{dt}=c_1y_1-c_2y_2$,

$\dfrac{dy_3}{dt}=c_2y_2-c_3y_3$, $\dfrac{dy_4}{dt}=c_3y_3$.

$y_1(0)=N_0$, $y_2(0)=y_3(0)=y_4(0)=0$.

解：
$$\begin{cases} p\overline{y}_1(p)-N_0=-c_1\overline{y}_1(p), \\ p\overline{y}_2(p)=c_1\overline{y}_1(p)-c_2\overline{y}_2(p), \\ p\overline{y}_3(p)=c_2\overline{y}_2(p)-c_3\overline{y}_3(p), \\ p\overline{y}_4(p)=c_3\overline{y}_3(p); \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} (p+c_1)\overline{y}_1(p)=N_0, \\ (p+c_2)\overline{y}_2(p)=c_1\overline{y}_1(p), \\ (p+c_3)\overline{y}_3(p)=c_2\overline{y}_2(p), \\ p\overline{y}_4(p)=c_3\overline{y}_3(p). \end{cases}$$

（6） 厄米方程$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2t\dfrac{dy}{dt}+\lambda y=0$.

解：$p^2\overline{y}(p)-py(0)-y'(0)+2\dfrac{d}{dp}$

$\times[p\overline{y}(p)-y(0)]+\lambda a\overline{y}=0$.

$p^2\overline{y}(p)-py(0)-y'(0)+2\overline{y}(p)+2p\dfrac{d\overline{y}(p)}{dp}$

$+\lambda\overline{y}(p)=0$,

$2p\dfrac{d\overline{y}(p)}{dp}+(p^2+\lambda+2)\overline{y}(p)=py(0)+y'(0)$.

（7） 拉盖尔方程 $t\dfrac{d^2y}{dt^2}+(1-t)\dfrac{dy}{dt}+\lambda y=0$.

解：$-\dfrac{d}{dp}[p^2\overline{y}(p)-py(0)-y'(0)]+p\overline{y}(p)-y(0)$

$+\dfrac{d}{dp}[p\overline{y}(p)-y(0)]+\lambda\overline{y}(p)=0$,

$$-p^2\frac{d\bar{y}(p)}{dp}-2p\bar{y}(p)+y(0)+p\bar{y}(p)-y(0)$$

$$+\ p\frac{d\bar{y}(p)}{dp}+\bar{y}(p)+\lambda\bar{y}(p)=0,$$

$$(p^2-p)\frac{d\bar{y}(p)}{dp}+(p-\lambda-1)\bar{y}(p)=0,$$

$$p(p-1)\frac{d\bar{y}(p)}{dp}+(p-\lambda-1)\bar{y}(p)=0.$$

§22. 拉普拉斯变换的反演

1.把下列像函数反演：

(1) $\bar{y}(p)=\dfrac{6}{(p+1)^4}$.

解：由位移定律 $\dfrac{3!}{(p+1)^{3+1}}\doteq t^3e^{-t}$.

(2) $\bar{y}(p)=\dfrac{3p}{p^2-1}$.

解：$\dfrac{3p}{p^2-1}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{p-1}\right)\doteq\dfrac{3}{2}(e^{-t}+e^t)=3\mathrm{ch}t$.

(3) $\bar{y}(p)=\dfrac{1}{p-2}$, $\bar{Z}(p)=\dfrac{3}{p-2}$.

解：$\dfrac{1}{p-2}\doteq e^{2t}=y(t)$,

$\dfrac{3}{p-2}\doteq 3e^{2t}=z(t)$.

(4) $\bar{y}(p)=\dfrac{2}{(p-1)^5}$.

解：$\dfrac{2}{(p-1)^{4+1}}\doteq\dfrac{2}{4!}t^4e^{-t}$.

2. 求$\bar{j}(P)=\dfrac{E}{LP^2+RP+\dfrac{1}{C}}$的原函数。

解：$\bar{j}(P)=$

$$\frac{E}{L\left(P+\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)\left(P+\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)}.$$

（1）如果 $R^2-\dfrac{4L}{C}=0$，则

$$\bar{j}(P)=\frac{E}{L}\frac{1}{\left(P+\frac{R}{2L}\right)^2}\doteq\frac{E}{L}te^{-\frac{R}{2L}t}=j(t).$$

（2）如果$R^2-\dfrac{4L}{C}>0$，则

$$\bar{j}(P)=\frac{E}{L}\frac{1}{\left(P+\frac{R}{2L}\right)^2-\left(\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}\right)}$$

$$\doteq\frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}e^{-\frac{R}{2L}t}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}t.$$

（3）如 $R^2-\dfrac{4L}{C}<0$，则

$$\bar{j}(P)=\frac{E}{L}\frac{1}{\left(P+\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}\right)}$$

$$\doteq\frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}e^{-\frac{R}{2L}t}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t.$$

3. 求$N_4(P)=\dfrac{N_0C_1C_2C_3}{P(P+C_1)(P+C_2)(P+C_3)}$的原函数。

解：令 $\overline{N}_4(P)=\dfrac{N_0\,C_1\,C_2\,C_3}{P(P+C_1)(P+C_2)(P+C_3)}$

$$=\frac{A}{P}+\frac{B}{P+C_1}+\frac{C}{P+C_2}+\frac{D}{P+C_3},$$

求出： $A=N_0$，

$$D=\frac{C_1C_2N_0}{(C_3-C_1)(C_2-C_3)},$$

$$C=\frac{C_3-C_1}{C_1-C_2}\cdot\frac{C_1N_0}{C_1-C_2}=\frac{C_1C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_2-C_3)},$$

$$B=-(C+D+N_0)=\frac{C_2C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_3-C_1)}.$$

$$\therefore N_4(P)=\frac{N_0}{P}+\frac{C_2C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_3-C_1)}\cdot\frac{1}{(P+C_1)}$$

$$+\frac{C_1C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_2-C_3)}\cdot\frac{1}{(P+C_2)}$$

$$+\frac{C_1C_2N_0}{(C_2-C_3)(C_3-C_1)(P+C_3)}.$$

进而求得：

$$N_4(t)=N_0+\frac{C_2C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_3-C_1)}e^{-C_1t}$$

$$+\frac{C_1C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_2-C_3)}e^{-C_2t}$$

$$+\frac{C_1C_2N_0}{(C_2-C_3)(C_3-C_1)}e^{-C_3t}.$$

4．求 $\overline{y}(P)=\lambda\mu\dfrac{P}{(P+C)^4}$ 的原函数。

解：$\overline{y}(P)=\lambda\mu\left[\dfrac{P+C}{(P+C)^4}-\dfrac{C}{(P+C)^4}\right]$

$$=\lambda\mu\left[\frac{1}{(P+C)^3}-\frac{C}{(P+C)^4}\right],$$

$$y(t)=\lambda\mu\left[\frac{1}{2!}t^2e^{-ct}-\frac{C}{3!}t^3e^{-ct}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lambda\mu e^{-ct}\left[t^2-\frac{C}{3}\cdot t^3\right].$$

5.求 $\bar{j}(P)=\dfrac{E_0\omega}{\left(P+\frac{1}{RC}\right)\left(P^2+\omega^2\right)}$的原函数。

解：令 $\bar{j}(P)=\dfrac{E_0\omega P}{R\left(P+\frac{1}{RC}\right)\left(P^2+\omega^2\right)}$

$$=\frac{AP}{P^2+\omega^2}+\frac{B}{P^2+\omega^2}+\frac{D}{P+\frac{1}{RC}},$$

求出：

$$A=\frac{E_0}{R^2\omega C+\frac{1}{C\omega}},$$

$$B=\frac{E_0}{R}\left(\frac{\omega}{1+\frac{1}{R^2C^2\omega^2}}\right),$$

$$D=-\frac{E_0}{R^2C\omega+\frac{1}{C\omega}}.$$

$$\therefore\quad \bar{j}(P)=\frac{E_0}{R^2C\omega+\frac{1}{C\omega}}\cdot\frac{P}{P^2+\omega^2}$$

$$+\frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{R^2C^2\omega^2}}\right)\frac{\omega}{P^2+\omega^2}$$

$$-\frac{E_0}{R^2C\omega+\frac{1}{C\omega}}\cdot\frac{1}{P+\frac{1}{CR}}$$

$$=\frac{E_0}{R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}\left[\left(R\frac{\omega}{P^2+\omega^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{C\omega}\left(\frac{P}{P^2+\omega^2}\right)\right]-\frac{E_0}{R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}$$

$$\times\frac{1}{C\omega}\cdot\frac{1}{P+\frac{1}{RC}},$$

$$j(t)=\frac{E_0}{R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}\left[R\sin\omega t+\frac{1}{C\omega}\cos\omega t\right]$$

$$-\frac{E_0/C\omega}{R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

6.求 $\overline{T}(P)=A\frac{\omega}{P^2+\omega^2}\quad\frac{1}{P^2+\pi^2a^2/l^2}$的原函数。

解：令 $\overline{T}(P)=A\frac{\omega}{P^2+\omega^2}\quad\frac{1}{P^2+\pi^2a^2/l^2}$

$$=\frac{E}{P^2+\omega^2}+\frac{F}{P^2+\pi^2a^2/l^2},$$

求出$E=\frac{A\omega}{\pi^2a^2/l^2-\omega^2}$，$F=-\frac{\omega A}{\pi^2a^2/l^2-\omega^2}$。

$$\therefore\quad\overline{T}(P)=\frac{A}{\pi^2a^2/l^2-\omega^2}\cdot\frac{\omega}{P^2+\omega^2}$$

$$-\frac{\omega A}{\pi^2a^2/l^2-\omega^2}\quad\frac{1}{P^2+\pi^2a^2/l^2},$$

$$T(t)=\frac{A}{\pi^2a^2/l^2-\omega^2}\left[\sin\omega t-\omega\frac{l}{\pi a}\sin\frac{\pi a}{l}t\right]$$

$$=\frac{lA}{\pi a}\cdot\frac{1}{\omega^2-\frac{\pi^2a^2}{l^2}}\left(\omega\sin\frac{\pi at}{l}\right.$$

$$-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\Big).$$

7．求 $\overline{T}(P)=\dfrac{1}{P^2+\omega^2a^2}\overline{g}(P)$ 的原函数，$\overline{g}(P)$ 是某个已知的 $g(t)$ 的像函数。

解：设 $\overline{f}(P)=\dfrac{1}{P^2+\omega^2a^2}$，

则 $f(t)=\dfrac{1}{\omega a}\sin\omega at$

$$=\frac{1}{\omega a}\cdot\frac{1}{2i}(e^{i\omega at}-e^{-i\omega at}).$$

根据卷积定理：因为 $\overline{f}(P)\doteqdot f(t)$，$\overline{g}(P)\doteqdot g(t)$。

$$\therefore\ T(t)\doteqdot\overline{f}(P)\overline{g}(P)\doteqdot\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{\omega a}\cdot\frac{1}{2i}\int_0^t g(\tau)[e^{i\omega a(t-\tau)}-e^{-i\omega a(t-\tau)}]d\tau.$$

8．求 $\overline{T}(P)=\dfrac{1}{P+\omega^2a^2}\ \overline{g}(P)$ 的原函数，$\overline{g}(P)$ 是某个已知的 $g(t)$ 的像函数。

解：设 $\overline{f}(P)=\dfrac{1}{P+\omega^2a^2}$，则 $f(t)=e^{-\omega^2a^2t}$。

根据卷积定理，因为 $\overline{f}(P)\doteqdot f(t)$，$\overline{g}(P)\doteqdot g(t)$。

$$\therefore\ T(t)\doteqdot\overline{f}(P)\overline{g}(P)\doteqdot\int_0^t g(t)e^{-\omega^2a^2(t-\tau)}d\tau.$$

9．已知像函数 $\overline{y}(P)=e^{-P^2/4}P^{-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}$

$$\times\int e^{P^2/4}P^{-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}\left(C_1+\frac{C_2}{P}\right)dP,$$

其中 C_1 和 C_2 是两个任意常数，问 λ 应取怎样的数值才有可能选

定C_1和C_2使原函数$y(t)$为多项式？

解：$\overline{y}(P)=e^{-P^2/4}P^{-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}$

$$\times\int e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}\left(C_1+\frac{C_2}{P}\right)dP$$

$$=e^{-P^2/4}P^{-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}$$

$$\times\left[C_1\int e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}dP+C_2\right.$$

$$\left.\times\int e^{P^2/4}P^{\frac{\lambda}{2}}dP\right]$$

$$=e^{-P^2/4}P^{-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}$$

$$\times\left[2C_1P^{\frac{\lambda}{2}}e^{P^2/4}-2C_1\left(\frac{\lambda}{2}\right)\int e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)}dP\right.$$

$$+2C_2P^{\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)}e^{P^2/4}-2C_2\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)$$

$$\left.\times\int e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}-2\right)}dP\right]$$

$$=e^{-P^2/4}P^{-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}\left\{2C_1P^{\frac{\lambda}{2}}e^{P^2/4}\right.$$

$$-2C_1\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left[2e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}-2\right)}\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{\lambda}{2}-2\right)\int e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}-2\right)}dP\right]$$

$$+2C_2P^{\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)}e^{P^2/4}$$

$$-2C_2\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\left[2e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}-3\right)}\right.$$

$$-2\left(\frac{\lambda}{2}-3\right)\int e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}-3\right)}dP\ \Big]\Big\}$$

$$=\cdots\cdots.$$

(i) 如$\frac{\lambda}{2}$为偶数，可选$C_1\neq 0$，$C_2=0$，一次又一次的分部积分，可得$\bar{y}(P)$为$\frac{1}{P}$的多项式，相应的原函数必亦为多项式。

(ii) 如$\frac{\lambda}{2}$为奇数，可选$C_2\neq 0$，$C_1=0$，亦可得多项式。

(iii) 如$\frac{\lambda}{2}$不是整数，则不可能得到多项式。

10. 已知$\bar{y}(P)=\frac{(P-1)^{\lambda}}{P^{\lambda+1}}$，问$\lambda$应取怎样的数值，原函数才是多项式？

解：当λ为正整数时，

$$\begin{aligned}\bar{y}(P)&=\frac{(P-1)^{\lambda}}{P^{\lambda+1}}=\frac{1}{P^{\lambda+1}}\Big[P^{\lambda}-\lambda P^{(\lambda-1)}\\&\quad+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}P^{(\lambda-2)}-\cdots\cdots\\&\quad+(-1)^{k}\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots\cdots(\lambda-K+1)}{K!}P^{(\lambda-k)}\\&\quad+\cdots\cdots+(-1)^{\lambda}\Big]\\&=\frac{1}{P}-\frac{\lambda}{P^2}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}\cdot\frac{1}{P^3}-\cdots\cdots\\&\quad+\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots\cdots(\lambda-K+1)}{K!}\frac{(-1)^{k}}{P^{k+1}}\\&\quad+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{\lambda}}{P^{\lambda+1}}.\end{aligned}$$

$\overline{y}(P)$为 $\frac{1}{P}$的多项式，相应的原函数亦必为多项式。

11.已知$\overline{X}(P)=F_0\dfrac{\omega}{P^2+\omega^2}\dfrac{mP^2+R}{D(P)}$，其中 $D(P)=(MP^2+RP+K+k)\cdot(mP^2+k)-k^2$，而$F_0$，$\omega$，$m$，$k$，$K$，$M$，$R$都是正的常数.试论证$D(P)$没有正的根，也没有纯虚数根，在什么条件下，原函数 $X(t)$ 不含有稳定振荡的部分而只含指数式衰减的部分，或衰减振荡部分.

解：（1） $D(P)=(MP^2+RP+K+k)(mP^2+k)-k^2$
$=0$，

即$MmP^4+RmP^3+(kM+km+Km)P^2+kRP+kK=0$.

(i) 若P_1为正数，则

$(MP_1^2+RP_1+K+k)(mP_1^2+k)>k^2$即$D(P_1)>0$，

所以$D(P)$没有正根，从而$X(t)$没有指数式增长项，即 $X(t)$ 不包含$e^{st}(S>0)$.

(ii) 设方程$D(P)=0$有某个纯虚数根iy，则

$$\begin{cases} R_eD(iy)=0, \\ I_mD(iy)=0; \end{cases}$$

$$即\begin{cases} (-My^2+K)(-my^2+k)-kmy^2=0, & (1) \\ R(-my^2+k)=0. & (2) \end{cases}$$

但（1）、（2）两式有矛盾，所以方程 $D(P)=0$ 没有纯虚数根，所以$X(t)$不包含$e^{\pm i\omega t}$(ω为实数)，即不包含有$\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$，没有稳定振荡部份.

(iii) 设方程$D(P)=0$ 有$x+iy(x>0)$的根，

则
$$\begin{aligned} D(x+iy)&=(Mx^2-My^2+2iMxy+Rx \\ &\quad+iRy+K+k)(mx^2-my^2+i2mxy \\ &\quad+k)-k^2 \\ &=[(Mx^2-My^2+Rx+K+k) \end{aligned}$$

$$\times(mx^2-my^2+k)-2mxy^2$$
$$\times(2Mx+R)-k^2]+i[(Mx^2-My^2$$
$$+Rx+K+k)2mxy$$
$$+(mx^2-my^2+k)(2Mx+R)y]$$
$$=0.$$

即
$$\begin{cases}(Mx^2-My^2+Rx+K+k)(mx^2-my^2+k)\\ \quad -2mxy^2(2Mx+R)-k^2=0, & (3)\\ (Mx^2-My^2+Rx+K+k)2mx+(mx^2-my^2\\ \quad +k)(2Mx+R)=0, & (4)\end{cases}$$

由(4)式

$$Mx^2-My^2+Rx+K+k=-\frac{2Mx+R}{2mx}(mx^2-my^2+k),$$

以此代入(3)式,

$$-\frac{2Mx+R}{2mx}(mx^2-my^2+k)-2mxy^2(2Mx+R)-k^2=0.$$

上式左边三项都是负的，其和不可能为零，所以原假设不成立，方程$D(P)=0$没有$x+iy(x>0)$的根.

由上述可见，$X(t)$只可能有指数式衰减e^{-xt}部分和衰减振荡$e^{-xt}\cos yt$、$e^{-xt}\sin yt$.

(2) 但$(P^2+\omega^2)D(P)$有纯虚数根$\pm i\omega$，所以$\overline{X}(P)$的分项分式有$(AP+B)/(P^2+\omega^2)$项，反演后给出$X(t)$的稳定振荡项.要消除$X(t)$的稳定振荡项，必须$\overline{X}(P)$的分母里$P^2+\omega^2$与分子里P^2+k/m互相约去，即

$$P^2+\omega^2=P^2+\frac{k}{m},$$

亦即在条件

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

之下，原函数$X(t)$不包含有稳定振荡部分而只含指数式衰减

的部分或衰减振荡部分。

12.求下列像函数的原函数。

（1） $\bar{I}(P)=\dfrac{\pi}{2a}\dfrac{1}{P+a}$。

解：$I(t)=\dfrac{\pi}{2a}e^{-at}$。

（2） $\bar{I}(P)=\dfrac{\pi}{2P}$。

解：$I(t)=\dfrac{\pi}{2}$。

（3） $\bar{I}(P)=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{P(P+1)}$。

解： $\bar{I}(P)=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{P}-\dfrac{1}{P+1}\right)$,

所以$I(t)=\dfrac{\pi}{2}(1-e^{-t})$。

（4） $\bar{I}(P)=\dfrac{\pi}{2P^2}$。

解：$I(t)=\dfrac{\pi}{2}t$。

§23. 运算微积应用例

1.求解下列常微分方程

（1） $\dfrac{d^3y}{dt^3}+3\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+y=6e^{-t}$,

$$y(0)=\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0}=0.$$

解：对该方程施行拉普拉斯变换(见§21习题2(1)后)，

得：
$$\overline{y}(P)=\frac{6}{(P+1)^4},$$
然后再求出$\overline{y}(P)$的原函数（见§22习题1(1)）为

$y(t)=t^3e^{-t}$，此即该常微分方程的解。

（2）$\dfrac{d^2y}{dt^2}+9y=30\text{ch}t$，$y(0)=3$，$y'(0)=0$。

解：对该方程施行拉普拉斯变换后（见§21习题2(2)）得
$$\overline{y}(P)=\frac{3P}{P^2-1},$$
然后再求出$\overline{y}(P)$的原函数（见§22习题1(2)）为
$y(t)=3\text{ch}t$，此即该常微分方程的解。

（3）$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}+2y+2z=10e^{2t},\\[2mm] \dfrac{dz}{dt}-2y+z=7e^{2t};\end{cases}$ $\qquad\begin{cases}y(0)=1,\\ z(0)=3.\end{cases}$

解：对该方程施行拉普拉斯变换后（见§21习题2(3)）得
$$\begin{cases}(P+2)\overline{y}(P)+2\overline{z}(P)=\dfrac{10}{P-2}+1=\dfrac{P+8}{P-2},\\[2mm] (P+1)\overline{z}(P)-2\overline{y}(P)=\dfrac{7}{P-2}+3=\dfrac{3P+1}{P-2}.\end{cases}$$
$$\overline{y}(P)=\frac{\begin{vmatrix}(P+8)/(P-2) & 2\\ (3P+1)/(P-2) & P+1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P+2 & 2\\ -2 & P+1\end{vmatrix}}=\frac{1}{P-2},$$
$$\overline{z}(P)=\frac{\begin{vmatrix}P+2 & (P+8)/(P-2)\\ -2 & (3P+1)/(P-2)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P+2 & 2\\ -2 & P+1\end{vmatrix}}=\frac{3}{P-2}.$$

然后再求出$\overline{y}(P)$和$\overline{Z}(P)$的原函数（见§22习题1(3)）为

$$y(t)=e^{2t},\quad z(t)=3e^{2t}$$此即该常微分方程的解。

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=t^2e^t,\quad y(0)=\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0$。

解：对该方程施行拉普拉斯变换后（见§21习题2(4)）得

$$\overline{y}(p)=\frac{2}{(p-1)^5},$$

然后再求出$\overline{y}(p)$的原函数（见§22习题1(4)）为$y(t)=\dfrac{1}{12}t^4e^t$，此即该常微分方程的解。

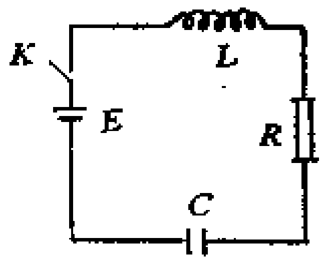


图 5-1

2. 电压为E_0的直流电源通过电感L和电阻R对电容C充电。

求解充电电流j的变化情况。

解：设电键K关闭前电路中没有电流，

即$j(0)=0$。

电键K关闭后电流j所满足的微分方程是

$$L\frac{dj}{dt}+Rj+\frac{1}{C}\int_0^t jdt=E.$$

结合初始条件$j(0)=0$对上述方程施行拉普拉斯变换后得

$$LP\overline{j}(P)+R\overline{j}(P)+\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{P}\overline{j}(P)=\frac{E}{P},$$

$$LP^2\overline{j}(P)+RP\overline{j}(P)+\frac{1}{C}\overline{j}(P)=E,$$

$$\overline{j}(P)=\frac{E}{LP^2+RP+\dfrac{1}{C}}.$$

然后再求出$\overline{j}(P)$的原函数（见§22习题2）为

(i) 如$R^2-\frac{4L}{C}=0$，

则$j(t)=\frac{E}{L}te^{-\frac{R}{2L}t}$.

(ii) 如$R^2-\frac{4L}{C}>0$，

则$j(t)=\frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}e^{\frac{-R}{2L}t}\ \mathrm{sh}\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}t$.

(iii) 如 $R^2-\frac{4L}{C}<0$，

则$j(t)=\frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}e^{\frac{-R}{2L}t}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t$.

3.放射性元素E_1蜕变为E_2，元素E_1的原子数N_1变化规律为$\frac{dN_1}{dt}=-C_1N_1$.元素E_2又蜕变为E_3，元素E_2的原子数N_2变化规律为$\frac{dN_2}{dt}=C_1N_1-C_2N_2$，元素$E_3$又蜕变为$E_4$，元素$E_3$的原子数 N_3 变化规律$\frac{dN_3}{dt}C_2N_2-C_3N_3$，元素$E_4$是稳定的，不再蜕变，它的原子数$N_4$的变化规律为$\frac{dN_4}{dt}=C_3N_3$，以上$C_1$、$C_2$、$C_3$和$C_4$都是常数，设开始时只有元素$E_1$的$N_0$个原子，求解$N_4$的变化情况$N_4(t)$.

解：$\frac{dN_1}{dt}=-C_1N_1$，$\frac{dN_2}{dt}=C_1N_1-C_2N_2$，

$\frac{dN_3}{dt}=C_2N_2-C_3N_3$，$\frac{dN_4}{dt}=C_3N_3$，

$$N_1(0)=N_0,\ N_2(0)=N_3(0)=N_4(0)=0,$$

对上述方程施行拉普拉斯变换后（见§21习题2(5)）得：

$(P+C_1)\bar{N}_1(P)=N_0,(P+C_2)\bar{N}_2(P)=C_1\bar{N}_1(P),$

$(P+C_3)\bar{N}_3(P)=C_2\bar{N}_2(P),\quad P\bar{N}_4(P)=C_3\bar{N}_3(P),$ 进一步求出：

$$\bar{N}_1(P)=\frac{N_0}{P+C_1},\ \bar{N}_2(P)=\frac{C_1N_0}{(P+C_1)(P+C_2)},$$

$$\bar{N}_3(P)=\frac{C_1C_2N_0}{(P+C_1)(P+C_2)(P+C_3)},$$

$$\bar{N}_4(P)=\frac{C_1C_2C_3N_0}{P(P+C_1)(P+C_2)(P+C_3)},$$

然后再求出$\bar{N}_4(P)$的原函数（见§22习题3）为：

$$\begin{aligned}N_4(t)=N_0&+\frac{C_2C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_3-C_1)}e^{-c_1t}\\&+\frac{C_1C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_2-C_3)}e^{-c_2t}\\&+\frac{C_1C_2N_0}{(C_2-C_3)(C_3-C_1)}e^{-c_3t},\end{aligned}$$

4. 设地面有一震动，其速度$v=H(t)$，地震仪中的感生电流j遵守规律$\dfrac{dj}{dt}+2cj+c^2\displaystyle\int_0^t jdt=\lambda\dfrac{dv}{dt}$，这电流通过检流计，使检流计发生偏转。偏转$y$遵守规律$\dfrac{d^2y}{dt^2}+2c\dfrac{dy}{dt}+c^2y=\mu j$，求解偏转$y$的变化情况$y(t)$。

解：

$$\begin{cases}\dfrac{dj}{dt}+2Cj+C^2\displaystyle\int_0^t jdt=\lambda\dfrac{dH(t)}{dt},\\[2mm]\dfrac{d^2y}{dt^2}+2c\dfrac{dy}{dt}+c^2y=\mu j;\end{cases}$$

$$\begin{cases} j(0)=0, \\ y(0)=\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0. \end{cases}$$

由于 $H(t) \doteq \dfrac{1}{P}$　　所以$\dfrac{dH}{dt} \doteq P\dfrac{1}{P}=1$.

再对方程组施行拉普拉斯变换后得：

$$\begin{cases} \left(P+2C+\dfrac{C^2}{P}\right)\bar{j}=\lambda, & \bar{j}(P)=\dfrac{\lambda P}{P^2+2CP+C^2}, \\ (P^2+2CP+C^2)\bar{y}(P)=\mu\bar{j}(P), \end{cases}$$

$$\bar{y}(P)=\frac{\mu\bar{j}(P)}{P^2+2CP+C^2}=\frac{\mu\lambda P}{(P^2+2CP+C^2)^2}=\frac{\lambda\mu P}{(P+C)^4}.$$

然后再求出$\bar{y}(P)$的原函数（见§22习题4）为：

$$y(t)=\frac{1}{2}\lambda\mu e^{-ct}\left(t^2-\frac{C}{3}t^3\right).$$

5.求解交流RC电路的方程

$$\begin{cases} Rj+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t jdt=E_c\sin\omega t, \\ j(0)=0. \end{cases}$$

解：对上述方程施行拉普拉斯变换后得：

$$R\bar{j}(P)+\frac{1}{CP}\bar{j}(P)=E_0\frac{\omega}{P^2+\omega^2},$$

$$\bar{j}(P)=\frac{E_0\omega P}{(P^2+\omega^2)\left(RP+\dfrac{1}{C}\right)},$$

然后再求出$\bar{j}(P)$的原函数（见§22习题5）为：

$$j(t)=\frac{E_0}{R^2+\dfrac{1}{C^2\omega^2}}\left[R\sin\omega t+\frac{1}{C\omega}\cos\omega t\right]$$

$$\times\frac{E_0/C\omega}{R^2+\dfrac{1}{C^2\omega^2}}e^{\frac{-t}{RC}}.$$

6. 求解 $T'' + \frac{\pi^2 a^2}{l^2} T = A\sin\omega t$，$T(0)=0$，$T'(0)=0$。

解：对该方程施行拉普拉斯变换后得：

$$P^2\overline{T}(P) + \frac{\pi^2 a^2}{l^2}\overline{T}(P) = A\frac{\omega}{P^2+\omega^2},$$

$$\overline{T}(P) = A\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p^2+\frac{\pi^2 a^2}{l^2}},$$

然后再求出$\overline{T}(P)$的原函数（见§22习题6）为

$$T(t) = \frac{lA}{\pi a}\cdot\frac{1}{\omega^2-\frac{\pi^2 a^2}{l^2}}\left(\omega\sin\frac{\pi a t}{l} - \frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right).$$

7. 求解$T'' + \omega^2 a^2 T = g(t)$，$T(0)=0$，$T'(0)=0$，$g(t)$是某个已知函数。

解：对该方程施行拉普拉斯变换后得：

$$P^2\overline{T}(P) + \omega^2 a^2\overline{T}(P) = \overline{g}(p),$$

$$\overline{T}(P) = \frac{1}{p^2+\omega^2 a^2}\overline{g}(p),$$

然后再求出$\overline{T}(P)$的原函数（见§22习题7）为：

$$T(t) = \frac{1}{\omega a}\cdot\frac{1}{2i}\int_0^t g(t)\left[e^{i\omega a(t-\tau)} - e^{-i\omega a(t-\tau)}\right]d\tau.$$

8. 求解 $T' + \omega^2 a^2 T = g(t)$，$T(0)=0$，$g(t)$ 是某个已知函数。

解：对该方程施行拉普拉斯变换后得：

$$P\overline{T}(P) + \omega^2 a^2\overline{T}(P) = \overline{g}(P),$$

$$\overline{T}(P) = \frac{1}{p+\omega^2 a^2}\overline{g}(P),$$

然后再求出$\overline{T}(P)$的原函数（见§22习题8）为：

$$T(t) = \int_0^t g(\tau)e^{-\omega^2 a^2(t-\tau)}d\tau.$$

9. 厄米方程$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2t\dfrac{dy}{dt}+\lambda y=0$里的$\lambda$值 应取怎样的数值才有可能使方程的解为多项式?

解：对厄米方程施行拉普拉斯变换后（见§21习题2(6)）得：

$$2P\frac{d\overline{y}(P)}{dP}+(P^2+2+\lambda)\overline{y}(P)=Py(0)+y'(0),$$

$$\frac{d\overline{y}}{dP}+\frac{P^2+2+\lambda}{2P}\overline{y}(P)=\frac{1}{2}y(0)+\frac{1}{2P}y'(0),$$

$$\overline{y}(P)=e^{-\int\frac{P^2+2+\lambda}{2P}dP'}\left\{\int\left[\frac{1}{2}y(0)+\frac{1}{2P}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\ y'(0)\right]e^{\int\frac{P^2+2+\lambda}{2P}dP}dP\right\}$$

$$=e^{-P^2/4}\cdot e^{-(\frac{\lambda}{2}+1)\ln P}\left\{\int\left[\frac{1}{2}y(0)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2P}y'(0)\right]e^{-P^2/4}\cdot e^{-(\frac{\lambda}{2}+1)\ln P}dP\right\}$$

$$=e^{-P^2/4}P^{-(\frac{\lambda}{2}+1)}\int e^{-P^2/4}P^{-(\frac{\lambda}{2}-1)}$$

$$\times\left[\frac{1}{2}y(0)+\frac{1}{2P}y'(0)\right]dP,$$

记$\dfrac{y(0)}{2}=C_1$，$\dfrac{y'(0)}{2}=C_2$，

则$$\overline{y}(P)=e^{-P^2/4}P^{-(\frac{\lambda}{2}+1)}\int e^{-P^2/4}P^{-(\frac{\lambda}{2}+1)}$$

$$\times\left(C_1+\frac{C_2}{P}\right)dP.$$

以下的讨论见§22习题9。

10. 拉盖尔方程$t\frac{d^2y}{dt^2}+(1-t)\frac{dy}{dt}+\lambda y=0$的$\lambda$应取怎样的数值才有可能使方程的解为多项式？

解：对拉盖尔方程进行拉普拉斯变换后（见§21习题2(7)得

$$P(P-1)\frac{d\overline{y}(P)}{dP}+(P-\lambda-1)\overline{y}(P)=0,$$

$$\frac{d\overline{y}(P)}{dP}+\frac{P-\lambda-1}{P(P-1)}\overline{y}(P)=0,$$

$$\frac{d\overline{y}(P)}{\overline{y}(P)}=-\frac{P-\lambda-1}{P(P-1)}dP,$$

$$\ln\overline{y}(P)=\int\frac{(P-\lambda-1)dP}{P(P-1)}$$

$$=\ln(P-1)^{\lambda}-\ln P^{(\lambda+1)}+\ln C,$$

$$\overline{y}(P)=C\frac{(P-1)^{\lambda}}{P^{\lambda+1}}.$$

以下的讨论见§22习题10。

11. 有一种船舶减震器利用的是耦合振动原理。在水面上颠簸的船体不妨看作是一个阻尼振子，其质量为M，倔强系数为K，阻尼系数为R。减震器则是附着在船体上的振子，其质量为m，倔强系数为k，因此，船体的位移$X(t)$和减震器的位移$X(t)$的运动方程是：

$$\begin{cases}M\ddot{X}=F_0\sin\omega t-KX-R\dot{X}-k(X-x),\\ m\ddot{X}=-k(x-X).\end{cases}$$

其中$F_0\sin\omega t$是使船体颠簸的外力。在什么条件下，船体的运动不含有稳定振荡而只含有指数式衰减或衰减振荡？

解：先对方程$m\ddot{X}=-k(x-X)$施行拉普拉斯变换后得：

$$m[P^2\overline{x}(P)-Px(0)-\dot{x}(0)]=-k[\overline{x}(P)-\overline{X}(P)],$$

$$\overline{X}(P)=\frac{mpx(0)+m\dot{X}(0)+k\overline{X}(P)}{mp^2+k} \qquad (1)$$

再对另一个运动方程施行拉普拉斯变换后得：

$$M[P^2\overline{X}(P)-PX(0)-\dot{X}(0)]$$
$$=F_0\frac{\omega}{P^2+\omega}$$
$$-K\overline{X}(P)-R[P\overline{X}(P)-X(0)]$$
$$-k[\overline{X}(P)-\overline{x}(P)],$$
$$(MP^2+RP+K+k)\overline{X}(P)$$
$$=F_0\frac{\omega}{P^2+\omega^2}$$
$$+MPX(0)+M\dot{X}(0)-RX(0)+k\overline{x}(P);$$

将（1）式代入上式并整理即得：

若$t=0$时，$X(0)=\dot{X}(0)=X(0)=\dot{X}(0)=0$，就有

$$\overline{X}(P)=F_0\frac{\omega}{P^2+\omega^2}\frac{mP^2+k}{(MP^2+RP+K+k)(mP^2+k)-k^2}$$
$$=F_0\frac{\omega}{P^2+\omega^2}\cdot\frac{mP^2+k}{D(P)}.$$

以下的讨论见§22习题11.

12.用运算微积方法求出下列积分

（1）$I(t)=\int_0^\infty\frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx.$

解：先进行拉普拉斯变换，再调换积分秩序，

$$\overline{I}(P)=\int_0^\infty\frac{Pdx}{(x^2+a^2)(x^2+p^2)}$$
$$=P\int_0^\infty\frac{[(x^2+a^2)-(x^2+P^2)]dx}{(a^2-P^2)(x^2+a^2)(x^2+P^2)}$$
$$=\frac{P}{a^2-P^2}\int_0^\infty\frac{1/P^2}{x^2/P^2+1}-\frac{1/a^2}{x^2/a^2+1}dx$$
$$=\frac{P}{a^2-P^2}\left(\frac{1}{P}\operatorname{arctg}\frac{x}{P}-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)\Bigg|_0^\infty$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{P}{a^2-P^2}\frac{a-P}{aP}=\frac{\pi}{2a}\frac{1}{a+P},$$

然后求出$\bar{I}(P)$的原函数，见§22习题12(1)，

$$\therefore\quad I(t)=\frac{\pi}{2a}e^{-at}.$$

（2）$I(t)=\int_0^\infty\frac{\sin tx}{x}dx.$

解：$\bar{I}(P)=\int_0^\infty\frac{\frac{x}{x^2+P^2}}{x}dx=\int_0^\infty\frac{dx}{x^2+P^2}=\frac{\pi}{2P},$

然后求出$\bar{I}(P)$的原函数，见§22习题12(2)，所以，

$$I(t)=\frac{\pi}{2}.$$

在施以拉普拉斯变换时，要求$\sin tx$中的$t>0$，从而得$I=\frac{\pi}{2}$.如果$t<0$，则

$$\begin{aligned}I(t)&=\int_0^\infty\frac{\sin tx}{x}dx\\&=-\int_0^\infty\frac{\sin t'x}{x}dx\quad(t'=-t).\end{aligned}$$

再对上式施行拉普拉斯变换得

$$I(P)=-\frac{\pi}{2P}.$$

故
$$I(t)=-\frac{\pi}{2}.$$

于是，

$$I(t)=\int_0^\infty\frac{\sin tx}{x}dx=\begin{cases}\pi/2, & (t>0),\\ 0, & (t=0),\\ -\pi/2, & (t<0).\end{cases}$$

(3) $I(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x(x^2+1)}dx$.

解：$\bar{I}(P)=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+P^2)}=\frac{\pi}{2P(P+1)}$,

然后求出$\bar{I}(P)$的原函数（见§22习题12(3)）

$$I(t)=\frac{\pi}{2}(1-e^{-t}).$$

当$t<0$时，$I(t)=\frac{\pi}{2}(e^{-t}-1)$。

(4) $I(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 tx}{2x^2}dx$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2xt}{2x^2}dx.$$

解：$\bar{I}(P)=\int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{P}-\frac{P}{P^2+(2x)^2}}{2x^2}dx$

$$=\int_0^{\infty}\frac{2^2x^2dx}{2x^2P[P^2+(2x)^2]}$$

$$=\frac{1}{P^2}\int_0^{\infty}\frac{d(2x/P)}{\left[1+\left(\frac{2x}{P}\right)^2\right]}=\frac{\pi}{2P^2},$$

然后求出$\bar{I}(P)$的原函数(见§22习题12(4))

$$I(t)=\frac{\pi}{2}t,$$

当$t<0$时，$I(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 tx}{x}dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2|t|x}{x}dx=\frac{\pi}{2}|t|$。

由上述可知$I(t)=\frac{\pi}{2}|t|$（t为任意实数）。

第二篇　傅里叶级数和积分

第六章　傅里叶级数

§24. 周期函数的傅里叶级数

1. 图6-1是硅可控整流电压$E(t)$的图象，试把它展开为傅里叶级数，在$[-\pi/\omega,\pi/\omega]$这个周期上，$E(t)$可表为

$$E(t)=\begin{cases}0 & \text{在}[-\pi/\omega,\alpha\pi/\omega]\text{上,}\\ E_0\sin\omega t & \text{在}[\alpha\pi/\omega,\pi/\omega]\text{上,}\end{cases}$$

其中α是触发电路控制的某个参数，注意直流成分的大小跟α有关，这就是硅可控整流的调压原理。

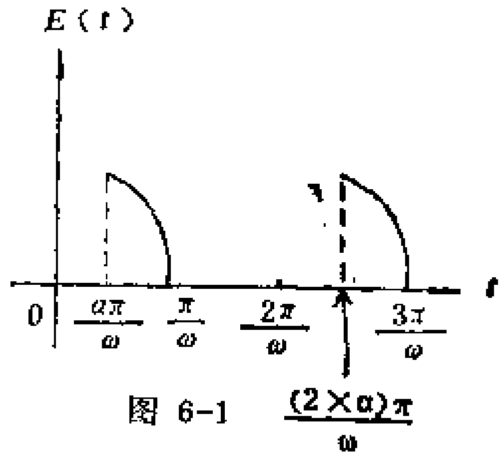


图 6-1

解：对任意周期 $2l$ 的傅里叶级数和傅里叶系数表达式为：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right),$$

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}t\,dt,$$

本题整流电压 $E(t)$ 之周期为$\frac{2\pi}{\omega}$，

令 $2l=\frac{2\pi}{\omega}$，得$\frac{\pi}{l}=\omega$，

将 l 代入上列公式即可得适合本题傅里叶级数及其系数表达式

$$E(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t),$$

先计算傅里叶系数a_0

$$a_0=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E(t)dt$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\alpha\pi}{\omega}}0dt+\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\,dt\right]$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{1}{\omega}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\,d\omega t$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}(-\cos\omega t)\Big|_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}(1+\cos\alpha\pi),$$

再计算系数a_n

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E(t)\cos n\omega t\,dt$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\cos n\omega t\,dt$$

$$=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(1+n)\omega t+\sin(1-n)\omega t]dt.$$

这里要区分两种情况：

（1） $n=1$ 时

$$a_1=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}\sin 2\omega t dt$$

$$=\frac{E_0}{4\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}\sin 2\omega t d(2\omega t)$$

$$=\frac{E_0}{4\pi}(-\cos 2\omega t)\Big|_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{E_0}{4\pi}(\cos 2\alpha\pi-1),$$

（2） $n\neq 1$ 时

$$a_n=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(1+n)\omega t+\sin(1-n)\omega t]dt$$

$$=-\frac{\omega E_0}{2\pi}\left[\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega}+\frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega}\right]_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=-\frac{E_0}{2\pi}\left[\frac{\cos(1+n)\omega t-n\cos(1+n)\omega t+\cos(1-n)\omega t+n\cos(1-n)\omega t}{(1+n)(1-n)}\right]_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=-\frac{E_0}{2\pi}\left[\frac{2\cos\omega t\cos n\omega t+2n\sin\omega t\sin n\omega t}{1-n^2}\right]_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{E_0}{\pi}\left(\frac{\cos\alpha\pi\cos n\alpha\pi+n\sin\alpha\pi\sin n\alpha\pi}{1-n^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\pi\cos n\pi+n\sin\pi\sin n\pi}{1-n^2}\right)$$

$$=\frac{E_0}{\pi}\left\{\frac{\cos\alpha\pi\cos n\alpha\pi+n\sin\alpha\pi\sin n\alpha\pi}{1-n^2}+\frac{\cos n\pi}{1-n^2}\right\}$$

$$=\frac{E_0}{\pi}\left\{\frac{\cos\alpha\pi\cos n\alpha\pi+n\sin\alpha\pi\sin n\alpha\pi}{1-n^2}+\frac{(-1)^n}{1-n^2}\right\},$$

用类似的方法可得系数b_n

$$b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E(t)\sin n\omega t dt$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\alpha\pi}{\omega}}0dt+\frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\sin n\omega t dt$$

$$=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[\cos(n-1)\omega t-\cos(n+1)\omega t]dt,$$

这里也要区分两种情况：

（1） $n=1$时，

$$b_1=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[\cos(n-1)\omega t-\cos(n+1)\omega t]dt$$

$$=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[1-\cos2\omega t]dt$$

$$=\frac{E_0}{4\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[1-\cos2\omega t]d2\omega t$$

$$=\frac{E_0}{4\pi}\left[2\omega t-\sin2\omega t\right]_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{E_0}{4}\left[2(1-\alpha)+\frac{1}{\pi}\sin2\alpha\pi\right],$$

（2） $n\neq1$时，

$$b_n=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[\cos(n-1)\omega t-\cos(n+1)\omega t]dt$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\omega t}{n-1}-\frac{\sin(n+1)\omega t}{n+1}\right]_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}\left(\frac{\sin(n+1)\alpha\pi}{n+1}-\frac{\sin(n-1)\alpha\pi}{n-1}\right)$$

$$=\frac{E_0}{\pi(1-n^2)}[\cos\alpha\pi\sin n\alpha\pi-n\sin\alpha\pi\cos n\alpha\pi],$$

$$\therefore\quad E(t)=\frac{1}{2\pi}E_0(1+\cos\alpha\pi)$$

$$+\frac{1}{4\pi}E_0(\cos2\alpha\pi-1)\cos\omega t,$$

$$+\frac{E_0}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}[\cos\alpha\pi\cos n\alpha\pi$$

$$+n\sin\alpha\pi\sin n\alpha\pi+(-1)^n]\cos n\omega t$$

$$+\frac{1}{4}E_0\left[2(1-\alpha)+\frac{1}{\pi}\sin2\alpha\pi\right]\sin\omega t$$

$$+\frac{E_0}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}[\cos2\pi\sin n\alpha\pi$$

$$-n\sin\alpha\pi\cos n\alpha\pi]\sin n\omega t.$$

计算时，经常用到下列公式，

$$\cos K\pi=(-1)^K,\qquad \sin\left(K+\frac{1}{2}\right)\pi=(-1)^K$$

$$\sin\left(K-\frac{1}{2}\right)\pi=(-1)^{K+1},\quad \cos(K+a)\pi=(-1)^K\cos a\pi$$

$\sin(K+a)\pi=(-1)^K\sin a\pi$.（$K$为整数，$a$为实数）.

2.试把图6-2的锯齿波展开为傅里叶级数，在（0，T）上，这个锯齿波可表为$f(x)=x/3$。

解：锯齿波之周期为T。

令 $$2l=T,$$

得 $$l=\frac{T}{2},$$

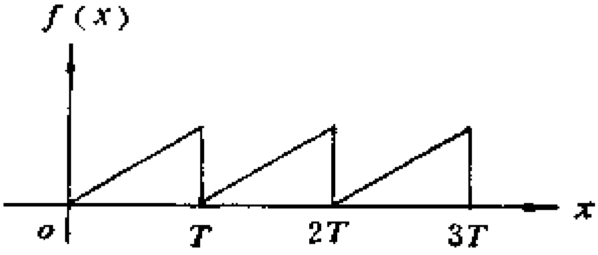


图 6-2

将l代入以$2l$为周期之傅里叶级数和傅里叶系数表达式即可得适合本题傅里叶级数和傅里叶系数表达式：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}t+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}t\right).$$

傅里叶系数的计算如下：

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{3}x\cdot dx$$

$$=\frac{1}{3T}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^T=\frac{T}{6},$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}tdt$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{1}{3}\ x\cos\frac{2n\pi}{T}xdx,$$

应用积分公式：

$$\int x\cos Pxdx=\frac{1}{P^2}\cos Px+\frac{x}{P}\sin Px$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{2}{T}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2}\cos\frac{2n\pi}{T}x\right.$$

$$\left.+\frac{x}{\frac{2n\pi}{T}}\sin\frac{2n\pi}{T}x\ \right|_0^T$$

$$=\frac{2}{3T}\left(\frac{T}{2n\pi}\right)^2\left[\cos\frac{2n\pi}{T}x+\frac{2n\pi}{T}x\sin\frac{2n\pi}{T}x\right]_0^T$$

$$=0,$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}tdt=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{1}{3}x\sin\frac{2n\pi}{T}xdx$$

$$=\frac{2}{T}\cdot\frac{1}{3}\left[\frac{1}{\left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2}\sin\frac{2n\pi}{T}x\right.$$

$$\left.-\frac{x}{\frac{2n\pi}{T}}\cos\frac{2n\pi}{T}x\right|_0^T$$

$$=\frac{2}{3T}\left(\frac{T}{2n\pi}\right)^2\left[\sin\frac{2n\pi}{T}x-\frac{2n\pi}{T}x\cos\frac{2n\pi}{T}x\right]_0^T$$

$$=-\frac{T}{3n\pi},$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{T}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T}{3n\pi}\sin\frac{2n\pi}{T}x,$$

3. 交流电压$E_0\sin\omega t$，经过全波整流，成为$E(t)=E_0|\sin\omega t|$.试把它展开为傅里叶级数，并跟半波整流电压（课本例）比较.

解：交流电压$E_0\sin\omega t$在区间$-\pi\leqslant\omega t\leqslant\pi$上是一周期，令$\omega t=x$，则经过整流后成为：

$$E(x)=E(\omega t)=E_0|\sin x|,$$

在周期$(-\pi,\pi)$内均为正值.

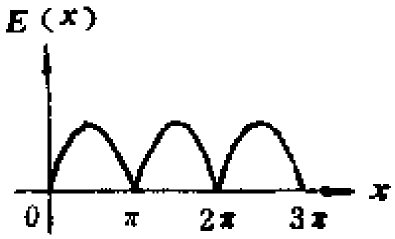


图 6-3

其傅里叶级数表为：

$$E(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

其中系数

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{E_0}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx$$

$$=\frac{E_0}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{2E_0}{\pi}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}E(-\sin x)\cos kx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_0\sin x\cos kx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_0\sin x\cos kx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{E_0}{2}[\sin(kx+x)-\sin(kx-x)]dx$$

$$=-\frac{E_0}{\pi}\left[\frac{\cos(k+1)x}{k+1}-\frac{\cos(k-1)x}{k-1}\right]_0^{\pi}$$

$$=\begin{cases}0, & \text{（当 } k \text{ 为奇数时，但 } k\neq 1\text{）。}\\ \dfrac{4E_0}{\pi(1-k^2)}, & \text{（当 } k \text{ 为偶数时）。}\end{cases}$$

当 $k=1$ 时，

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E_0\sin x\cos x\,dx=\frac{E_0}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=0,$$

又令 $k=2n$ 时则，

$$a_k=a_{2n}=\frac{4E_0}{\pi(1-4n^2)},\quad n=1,2,3,\cdots$$

同理，可以计算得 b_k

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E_0\sin x\sin kx\,dx=0,$$

$$\therefore\quad E(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nx=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2n\omega t$$

$$=\frac{2E_0}{\pi}+\frac{4E_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega t}{1-4n^2},$$

将半波整流和全波整流相比较：

$$E_{半}=\frac{E_0}{\pi}+\frac{1}{2}E_0\sin\omega t+\frac{2E_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega t}{1-4n^2}.$$

直流成分：全波整流是$\frac{2E_0}{\pi}$，半波整流是$\frac{E_0}{\pi}$。

基波成分：全波整流中没有和原来频率相同的交流成分，但半波整流中有基波成分，它的数值为$\frac{E_0}{2}\sin\omega t$。

高次谐波：全波整流中，高次谐波部分是半波整流的一倍而高次谐波均为偶次的。

4.把下列周期函数$f(x)$展开为傅里叶级数。

（1）在$(-l, +l)$这个周期上，$f(x)=e^{\lambda x}$。

解：这是一个周期为$2l$的函数，故可展开为傅里叶级数

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

傅里叶系数计算如下：

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}e^{\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda l}\operatorname{sh}\lambda l$$

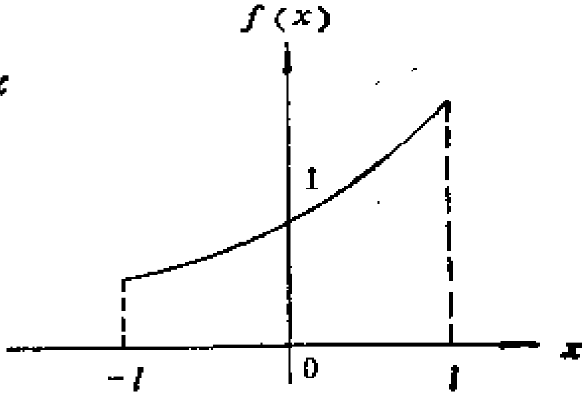


图 6-4

应用已知积分公式

$$\int e^{\lambda x}\cos Px\,dx=\frac{e^{\lambda x}(\lambda\cos Px+P\sin Px)}{\lambda^2+P^2}$$

可求得

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}e^{\lambda x}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\left.\frac{e^{\lambda x}\left(\lambda\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)}{\lambda^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right|_{-l}^{l}$$

$$=\frac{l}{\lambda^2l^2+n^2\pi^2}\Big[e^{\lambda l}\left(\lambda\cos n\pi+\frac{n\pi}{l}\sin n\pi\right)$$

$$-e^{\lambda l}\left(\lambda\cos(-n\pi)+\frac{n\pi}{l}\sin(-n\pi)\right)\Big]$$

$$=\frac{\lambda l}{\lambda^2l^2+n^2\pi^2}\cos n\pi\,(e^{\lambda l}-e^{-\lambda l})$$

$$=(-1)^n\frac{2\lambda l}{\lambda^2l^2+n^2\pi^2}\mathrm{sh}\lambda l,$$

再应用积分关系式

$$\int e^{\lambda x}\sin Px\,dx=\frac{e^{\lambda x}(\lambda\sin Px-P\cos Px)}{\lambda^2+P^2}$$

可求得：

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}e^{\lambda x}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\left.\frac{e^{\lambda x}\left(\lambda\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)}{\lambda^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right|_{-l}^{l}$$

$$=\frac{l}{\lambda^2l^2+n^2\pi^2}\Big[e^{\lambda l}\left(\lambda\sin n\pi-\frac{n\pi}{l}\cos n\pi\right)$$

$$-e^{-\lambda l}\left(\lambda\sin(-n\pi)-\frac{n\pi}{l}\cos(-n\pi)\right)\Big]$$

$$=\frac{-2n\pi}{\lambda^2l^2+n^2\pi^2}\cos n\pi\,(e^{\lambda l}-e^{-\lambda l})$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2n\pi}{\lambda^2l^2+n^2\pi^2}\mathrm{sh}\lambda l.$$

将傅里叶系数代入傅里叶级数表达式，则得

$$f(x)=\frac{1}{\lambda l}\mathrm{sh}\lambda l+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[(-1)^n\frac{2\lambda l}{\lambda^2l^2+n^2\pi^2}\mathrm{sh}\lambda l\cos\frac{n\pi}{l}x$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{2n\pi}{\lambda^2l^2+n^2\pi^2}\operatorname{sh}\lambda l\sin\frac{n\pi}{l}x\Big]。$$

（2）在$(-\pi,\pi)$这个周期上，$f(x)=H(x)$，阶跃函数。

解：根据单位阶跃函数的定义

$$H(x)=\begin{cases}0, & (x<0),\\ 1, & (x>0),\end{cases}$$

可以知道此周期函数之表达式应为

$$f(x)=\begin{cases}0, & (-\pi<x<0)\\ 1, & (0<x<\pi)\end{cases}$$

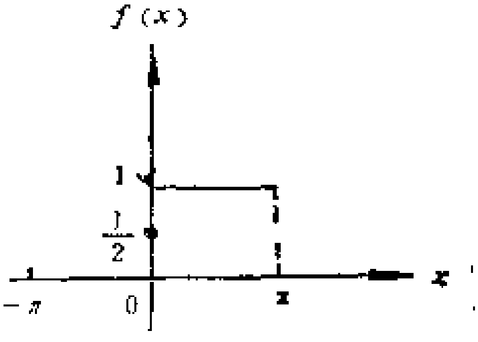


图 6-5

因为此函数之周期为2π，则有

$$2l=2\pi \qquad 即 l=\pi$$

将l代入以$2l$为周期之傅里叶级数表达式和傅里叶系数公式，则得

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

计算傅里叶系数如下：

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}dx=\frac{1}{2\pi}x\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)d\,x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos xdx=\frac{1}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}0, & (n=2k),\\ \dfrac{2}{n\pi}, & (n=2k+1).\end{cases}$$

$$H(x)=f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x.$$

如果给定函数在第一类间断点处的值为左、右极限的算术

平均值，则 $H(0)=\frac{1}{2}$，则上式即为周期是 $(-\pi,\pi)$ 的阶跃函数 $H(x)$ 的傅里叶级数。

（3）在 $(0,\pi)$ 这个周期上，

$f(x)=1-\sin\frac{x}{2}$。

解：$f(x)=1-\sin\frac{x}{2}$ 的图形如右图

$\because\quad 2l=\pi,\qquad\therefore\quad l=\frac{\pi}{2}$，

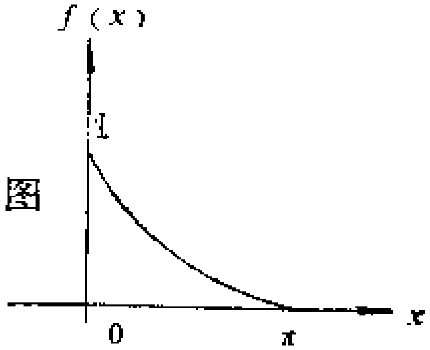


图 6-6

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式可写成

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx),$$

其中傅里叶系数，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x+2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}[\pi-2]=1-\frac{2}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)\cos 2nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2nx\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos 2nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin 2nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{1}{2}+2n\right)x\right.$$

$$+\sin\left(\frac{1}{2}-2n\right)x\ \Big]dx$$

$$=\frac{1}{\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)x\ \Big|_0^\pi$$

$$-\frac{1}{\pi\left(2n-\frac{1}{2}\right)}\cos\left(2n-\frac{1}{2}\right)x\ \Big|_0^\pi$$

$$=\frac{-1}{\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{\pi\left(2n-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{(16n^2-1)\pi},$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin 2nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)\sin 2nx dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin 2nx dx-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin\frac{x}{2}\sin 2nx dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\cos 2nx\ \Big|_0^\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{1}{2}\Big[\cos\left(2n-\frac{1}{2}\right)$$

$$\times x-\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)x\ \Big]dx$$

$$=\frac{-1}{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi}\sin\left(2n-\frac{1}{2}\right)x\ \Big|_0^\pi+\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$\times\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)x\ \Big|_0^\pi$$

$$=\frac{1}{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi}+\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}=\frac{16n}{(16n^2-1)\pi},$$

将傅里叶系数代入傅里叶级数表达式则得

$$f(x)=1-\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{16n^2-1}\cos 2nx\right.$$

$$+\frac{16n}{16n^2-1}\sin 2nx\Big).$$

（4）在$(-1,1)$这个周期上，

$$f(x)=\begin{cases} x, & 在(-1,\ 0)上, \\ 1, & 在\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)上, \\ -1, & 在\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)上. \end{cases}$$

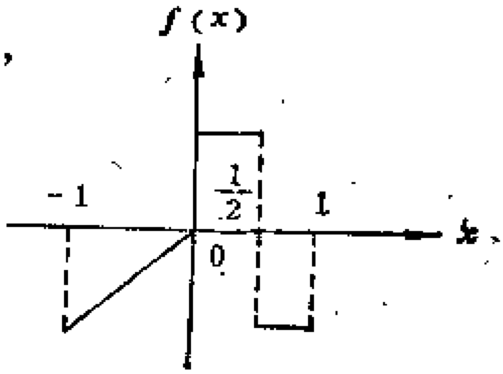


图 6-7

解：$\because 2l=2$，$\therefore l=1$，

所以$f(x)$展开为傅里叶级数的形式是

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\pi x+b_k\sin k\pi x)$$

傅里叶系数的计算如下：

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0}x\,dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}1\cdot dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\,dx\right]=-\frac{1}{4}.$$

$$a_k=\int_{-1}^{1}f(x)\cos k\pi x\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}x\cos k\pi x\,dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}1\cdot\cos k\pi x\,dx$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\cos k\pi x\,dx$$

$$=\left(\frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x+\frac{x}{k\pi}\sin k\pi x\right)_{-1}^{0}+\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\,\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\,\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{1}{k^2\pi^2}\left[1-(-1)^k\right]+\frac{1}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{k^2\pi^2}\left[1-(-1)^k\right]+\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2},$$

$$b_k=\int_{-1}^{1}f(x)\sin k\pi x dx$$

$$=\int_{-1}^{0}x\sin k\pi x dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}1\cdot\sin k\pi x dx$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\sin k\pi x dx$$

$$=\left[\frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x-\frac{x}{k\pi}\cos k\pi x\right]\Bigg|_{-1}^{0}-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{-1}{k\pi}\cos k\pi-\frac{1}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k\pi}+\frac{1}{k\pi}\cos k\pi$$

$$-\frac{1}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{k\pi}-\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2},$$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}+\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\right]\right.$$

$$\left.\times\cos k\pi x+\frac{1}{k\pi}\left(1-2\cos\frac{k\pi}{2}\right)\sin k\pi x\right\}.$$

（5）在$(0, l)$这个周期上，

$$f(x)=\left(\cos\frac{\pi x}{l}\right)\left[1-H\left(x-\frac{l}{2}\right)\right].$$

解：首先分析一下函数$f(x)$。函数$f(x)$表达式方括号内之函数$1-H\left(x-\frac{l}{2}\right)$可以看成是两个单位阶跃函数之叠加，即

$$1-H\left(x-\frac{l}{2}\right)=H(x)-H\left(x-\frac{l}{2}\right),$$

单位阶跃函数$H(x)$的定义是

$$H(x)=\begin{cases}0, & (x<0),\\ 1, & (x>0).\end{cases}$$

单位阶跃函数$H\left(x-\frac{l}{2}\right)$的定义则为

$$H\left(x-\frac{l}{2}\right)=\begin{cases}0, & \left(x<\frac{l}{2}\right),\\ 1, & \left(x>\frac{l}{2}\right),\end{cases}$$

这样，上面二单位阶跃函数之差便表示了一个矩形脉冲，因此有

$$1-H\left(X-\frac{l}{2}\right)\begin{cases}0, & (x<0),\\ 1, & \left(0<x<\frac{l}{2}\right),\\ 0, & \left(\frac{l}{2}<x\right),\end{cases}$$

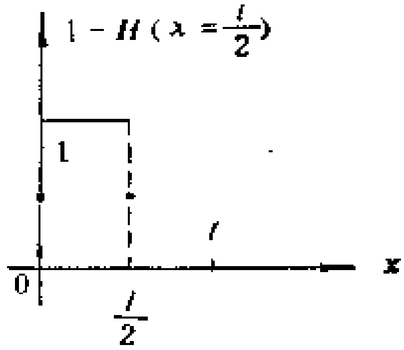


图 6-8

从而可以得出

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{l}\left[1-H\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]$$

$$=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{l}, & \left(0<x<\frac{l}{2}\right),\\ 0, & \left(\frac{l}{2}<x<l\right),\end{cases}$$

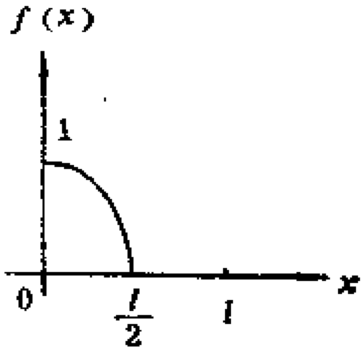


图 6-9

现将此函数展开成傅里叶级数，因周期为l，定义区间为$(0,\ l)$。故傅里叶级数及其系数表达式为：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{l}x\right),$$

计算傅里叶系数

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx=\frac{1}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\,dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}0\cdot dx\right]$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}=\frac{1}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{2n\pi}{l}x\,dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}0\cdot\cos\frac{2n\pi}{l}x\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{2n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{l}+\frac{2n\pi}{l}x\right)\right.$$

$$\left.+\cos\left(\frac{\pi x}{l}-\frac{2n\pi}{l}x\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{2n\pi+\pi}{l}x\,dx+\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{2n\pi-\pi}{l}x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{l}\frac{l}{2n\pi+\pi}\sin\frac{2n\pi+\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$+\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{2n\pi-\pi}\sin\frac{2n\pi-\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{\cos n\pi}{(2n+1)\pi}-\frac{\cos n\pi}{(2n-1)\pi}=\cos n\pi\,\frac{-2}{(4n^2-1)\pi}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{(4n^2-1)\pi},$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_l^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi}{l}x\sin\frac{2n\pi}{l}x\,dx+\int_{\frac{l}{2}}0\cdot\sin\frac{2n\pi}{l}x\,dx\right.$$

$$= \frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}} \cos\frac{\pi}{l}x\sin\frac{2n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x+\frac{\pi}{l}x\right)\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x-\frac{\pi}{l}x\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{2n\pi+\pi}{l}x\,dx+\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{2n\pi-\pi}{l}x\,dx\right]$$

$$=-\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{2n\pi+\pi}\cos\frac{2n\pi+\pi}{l}x\,\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$-\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{2n\pi-\pi}\cos\frac{2n\pi-\pi}{l}x\,\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)\pi}+\frac{1}{(2n-1)\pi}=\frac{4n}{(4n^2-1)\pi},$$

将上列傅里叶系数代入傅里叶级数表达式则得

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{2}{(4n^2-1)\pi}\cos\frac{2n\pi}{l}x\right.$$

$$\left.+\frac{4n}{(4n^2-1)\pi}\sin\frac{2n\pi}{l}x\right].$$

（6） 在$(-\pi,\pi)$这个周期上，$f(x)=x+x^2$，又在本题答案中，置$x=\pi$，由此验证$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$。

解：∵ $2l=2\pi$， ∴ $l=\pi$，

所以$f(x)=x^2+x$可以展开为傅里叶级数

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)dx$$

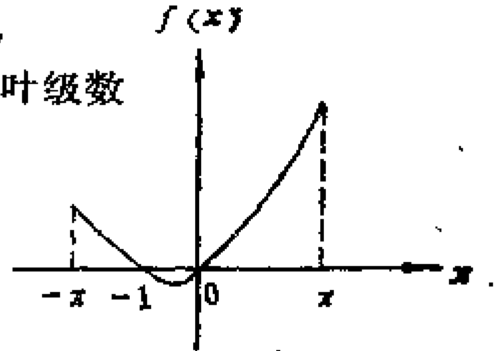


图 6-10

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\bigg|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\bigg|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{(\pi)^3}{3}\right)=\frac{1}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\cos nx\,dx.$$

应用已知积分公式

$$\int x^2\cos px\,dx=\frac{2x}{p^2}\cos px+\frac{p^2x^2-2}{p^3}\sin px,$$

$$\int x\cos px\,dx=\frac{1}{p^2}\cos px+\frac{x}{p}\sin px,$$

得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\cos nx+\frac{n^2x^2-2}{n^3}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos nx+\frac{x}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{4\pi}{n^2}\cos n\pi=\frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

应用已知积分公式：

$$\int x^2\sin nx\,dx=\frac{2x}{n^2}\sin nx-\frac{n^2x^2-2}{n^3}\cos nx,$$

$$\int x\sin nx\,dx=\frac{1}{n^2}\sin nx-\frac{x}{n}\cos nx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\sin nx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\sin nx-\frac{n^2x^2-2}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin x-\frac{x}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

将傅里叶系数代入傅里叶级数表达式则得

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left\{(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx+(-1)^{n+1}\right.$$

$$\left.\times\frac{2}{n}\sin nx\right\},$$

在此答案中，若置$x=\pi$则有，

$$f(\pi)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos n\pi$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

在$x=\pi$时，是函数$f(x)$有第一类间断点，据狄里希里定理知，此时函数值为

$$f(\pi)=\frac{1}{2}[\pi^2+\pi+(-\pi)^2+(-\pi)]=\pi^2,$$

将此结果代入上式则得

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

§25. 奇的和偶的周期函数

把下列函数$f(x)$展开为傅里叶级数

(1) $f(x)=\cos^3x$

〔提示：可按(25·4)和(25·5)展开。此外，还可令$t=e^{ix}$把$f(x)$化为t的有理分式，展开为幂级数，然后再回到x〕。

解：$f(x)=\cos^3x=\left[\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right]^3$

$$=\frac{1}{8}[e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}]$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}$$

$$=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x.$$

注：本题其实就是三倍角公式：

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,$$

则$f(x)=\cos 3x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x,$

(2) $f(x)=\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2},(|a|<1).$

解：令$e^{ix}=t$。则$\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\dfrac{t+\frac{1}{t}}{2}$，

$$f(x)=\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{1-a^2}{1-at-a\cdot\frac{1}{t}+a^2}$$

$$=\frac{1-a^2}{(a-t)(a-\frac{1}{t})}=\frac{t-a^2t}{(t-a)(1-at)}$$

$$=\frac{t-a+a(1-at)}{(t-a)(1-at)}=\frac{1}{1-at}+\frac{\frac{a}{t}}{1-\frac{a}{t}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a^kt^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{t}\right)^{k+1}$$

$$=1+\sum_{k=0}^{\infty}a^kt^k+\sum_{k=1}^{\infty}a^k\frac{1}{t^k},$$

$$\therefore\ f(x)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\frac{t^k+t^{-k}}{2}$$

$$=1+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\cos Kx,$$

(3) $f(x)=\frac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$, $(|a|<1)$.

解：令$t=e^{ix}$，则$\cos x=\frac{t+\frac{1}{t}}{2}$，

$$f(x)=\frac{1-a\left(\frac{t}{2}-\frac{a}{2t}\right)}{(1-at-a)\cdot\left(\frac{1}{t}+a^2\right)}=\frac{1}{2}\frac{1-at+1-\frac{a}{t}}{(a-t)\left(a-\frac{1}{t}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-t}{a-t}+\frac{-\frac{1}{t}}{a-\frac{1}{t}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\frac{a}{t}}+\frac{1}{1-at}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\frac{t^k+t^{-k}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\cos kx.$$

(4) $f(x)=\frac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}$ $(|a|<1)$.

解：令$e^{ix}=t$，则$\sin x=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=\frac{1}{2i}\left(t-\frac{1}{t}\right)$，

$$f(x)=\frac{a}{2i}\cdot\frac{t-t^{-1}}{1-\frac{a}{t}-at+a^2}$$

$$=\frac{a}{2i}\cdot\frac{t-\frac{1}{t}}{(a-t)\left(a-\frac{1}{t}\right)}$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1-a\cdot\frac{1}{t}-(1-at)}{\left(1-\frac{a}{t}\right)(1-at)}$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-at}-\frac{1}{1-\frac{a}{t}}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{2i}[t^k-t^{-k}]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\sin Kx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}a^k\sin Kx.$$

(5) 在$[-\pi,\ \pi]$这个周期上，$f(x)=x^2$，又在本题答案中，令$x=0$，由此验证：$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$.

解：由于$f(x)=x^2$是偶函数，因而$b_k=0$，展开式为如下形式：

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx$$

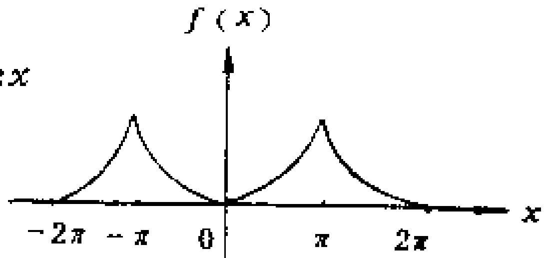


图 6-11

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{\pi}\times\int_0^{\pi}\zeta^2 d\zeta=\frac{1}{3\pi}\zeta^3\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}.$$

由：$\int x^2\cos x\,dx=2x\cos x+(x^2-2)\sin x$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(\zeta)\cos k\zeta\,d\zeta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\zeta^2\cos k\zeta\,d\zeta$$

$$=\frac{2}{\pi k^3}\int_0^{\pi}(k\zeta)^2\cos k\zeta\,d(k\zeta)$$

$$=\frac{2}{\pi k^3}\{2(k\zeta)\cos k\zeta+(k^2\zeta^2-2)\sin k\zeta\}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi k^3}\{2(k\pi)\cos k\pi+(k^2\pi^2-2)\sin k\pi\}=\frac{4}{k^2}(-1)^k.$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx,$$

令$x=0$，得

$$0=\frac{\pi^2}{3}+4\left(-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\cdots\cdots\right),$$

即 $$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{12}.$$

（6） 在半个周期$(-\pi,0)$上，$f(x)=-(\pi+x)/2$；在另外半个周期$(0,\pi)$上，$f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$。

解：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-(\pi+x)}{2} & (-\pi,0),\\[2mm] \dfrac{\pi-x}{2} & (0,\pi).\end{cases}$$

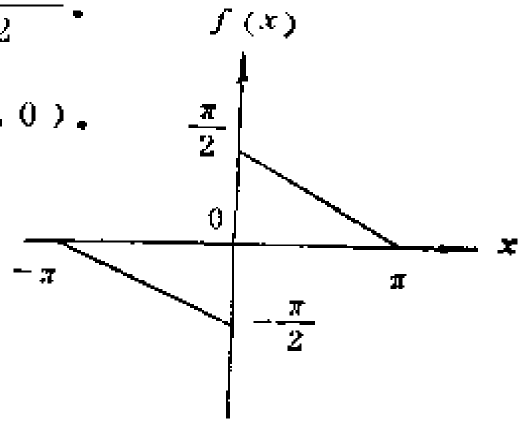


图 6-12

因为$f(x)$是奇函数，可以展开为傅里叶正弦级数，

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

其中：
$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(\frac{\pi-\zeta}{2}\right)\sin k\zeta d\zeta$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\pi}{2}\sin k\zeta d\zeta-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{\zeta}{2}\sin k\zeta d\zeta$$
$$=-\frac{1}{k}\cos k\zeta\Big|_0^\pi-\frac{1}{\pi k^2}[\sin k\zeta-k\zeta\cos k\zeta]_0^\pi$$
$$=\frac{1}{k},$$

$$\therefore \quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx.$$

（7） 在半个周期$(-\pi,0)$上，$f(x)=-\cos x$；在另外半

个周期$(0,\pi)$上，$f(x)=\cos x$.

解： $f(x)=\begin{cases}-\cos x, & -\pi<x<0,\\ \cos x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

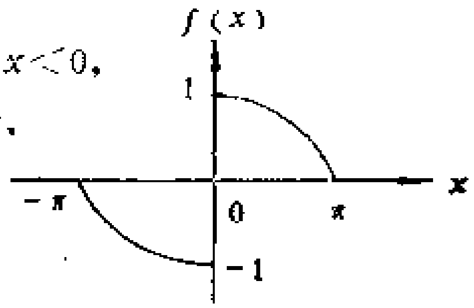


图 6-13

又 $2l=2\pi$, $\therefore$ $l=\pi$,

$\because$ $f(x)$是奇函数， 所以$f(x)$可以展开为傅里叶正弦级数。

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

其中

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\xi\sin k\xi d\xi$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\Big[\sin(k+1)\xi+\sin(k-1)\xi\Big]d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)\xi}{k+1}-\frac{\cos(k-1)\xi}{k-1}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)\pi-1}{k+1}-\frac{\cos(k-1)\pi-1}{k-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{k+2}+1}{k+1}+\frac{(-1)^{k}+1}{k-1}\right]$$

$$=\begin{cases}0,\ (k\text{为奇数但}\neq1),\\ \dfrac{4k}{\pi(k^2-1)},\ (k\text{ 为偶数}),\end{cases}$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin2\xi d\xi=\frac{1}{2\pi}\ (-\cos2\xi)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}[1-1]=0.$$

$$\therefore\ f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin2nx.$$

(8) 在$(-\pi,\pi)$这个周期上，$f(x)=\cos ax$，(a 非整数)。

解：因为$f(x)$是偶函数 $\therefore\quad b_k=0$，

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,$$

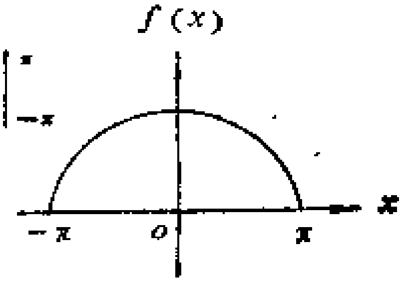


图 6-14

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos a\xi d\xi=\frac{1}{2a\pi}\sin a\xi\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{\sin a\pi}{a\pi}.$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos a\xi\ \cos k\xi\ d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k+a)\xi d\xi+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k-a)\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+a)\xi}{k+a}+\frac{\sin(k-a)\xi}{k-a}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+a)\pi}{k+a}+\frac{\sin(k-a)\pi}{k-a}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k+a}\left[\sin k\pi\cos a\pi+\cos k\pi\sin a\pi\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k-a}\left[\sin k\pi\cos a\pi-\cos k\pi\sin a\pi\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\cos k\pi\ \sin a\pi\left[\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k-a}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}(-1)^k\sin a\pi\cdot\frac{-2a}{k^2-a^2}$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\sin a\pi\cdot\frac{2a}{k^2-a^2},$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(-1)^{k+1}}{k^2-a^2}\cos kx\right].$$

（9）在 $(-\pi,\ \pi)$ 这个周期上，$f(x)=\sin ax$（a 非整数）.

解：$\because\quad f(x)$是奇函数，$\therefore\quad a_0=0,\ a_k=0$，

又 $2l=2\pi$， ∴ $l=\pi$，

$$\therefore \quad b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin a\xi \sin k\xi d\xi$$

$$=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(k+a)\xi d\xi$$

$$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(k-a)\xi d\xi$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}\sin a\pi}{\pi}\cdot\frac{2k}{k^2-a^2},$$

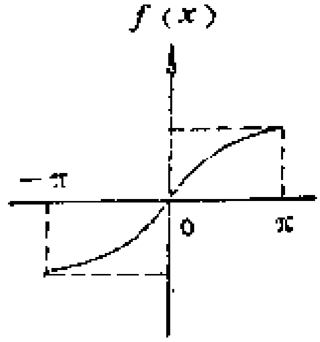


图 6-15

$$\therefore \quad f(x)=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2-a^2}(-1)^{k+1}\sin kx.$$

(10) 在 $(-\pi,\ \pi)$ 这个周期上，$f(x)=\text{ch}\,ax$.

解：$f(x)=\text{ch}\,ax=\dfrac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$，是偶函数

∴ $b_k=0$，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}dx$$

$$=\frac{1}{2\pi a}e^{ax}\Big|_0^\pi-\frac{1}{2\pi a}e^{-ax}\Big|_0^\pi$$

$$=\frac{1}{2\pi a}e^{a\pi}-\frac{1}{2\pi a}e^{-ax}$$

$$=\frac{1}{\pi a}\text{sh}\,a\pi.$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \frac{1}{2}(e^{a\xi}+e^{-a\xi})\cos k\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{a\xi}\cos k\xi d\xi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-a\xi}\cos k\xi d\xi$$

$$=\left[\frac{e^{a\xi}}{\pi}\cdot\frac{(a\cos k\xi+k\sin k\xi)}{a^2+k^2}+\frac{e^{-a\xi}(-a\cos k\xi+k\sin k\xi)}{\pi(a^2+k^2)}\right]_0^\pi.$$

$$= \frac{1}{\pi(a^2+k^2)}\Big\{e^{a\pi}(a\cos k\pi + k\sin k\pi)$$

$$+ e^{-a\pi}(-a\cos k\pi + k\sin k\pi)\Big\}$$

$$- \frac{1}{\pi(a^2+k^2)}\Big[(a+0)+(-a+0)\Big]$$

$$= \frac{a}{\pi(a^2+k^2)}\Big[(e^{a\pi}-e^{-a\pi})\cos k\pi\Big]$$

$$= \frac{2a\,\text{sh}\,a\pi}{\pi(a^2+k^2)}(-1)^k,$$

$$\therefore\quad f(x) = \frac{2\,\text{sh}\,a\pi}{\pi}\Big[\frac{1}{2a} + a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos kx}{a^2+k^2}\Big].$$

注：$\int e^{ax}\cos kx\,dx = \dfrac{e^{ax}(a\cos kx + k\sin kx)}{a^2+k^2}$.

(11) 在 $(-\pi,\ \pi)$ 这个周期上，$f(x) = \text{sh}\,ax$，

解：$f(x) = \text{sh}\,ax = \dfrac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$是奇函数，

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(e^{a\xi}-e^{-a\xi})\sin k\xi\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{a\xi}\sin k\xi\,d\xi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-a\xi}\sin k\xi\,d\xi$$

$$= \Big\{\frac{1}{\pi}\,\frac{e^{a\xi}(a\sin k\xi - k\cos k\xi)}{a^2+k^2}$$

$$- \frac{1}{\pi}\,\frac{e^{-a\xi}(-a\sin k\xi - k\cos k\xi)}{a^2+k^2}$$

$$= \frac{1}{\pi(a^2+k^2)}\Big\{-ke^{a\pi}\cos k\pi + ke^{-a\pi}\cos k\pi\Big\}$$

$$= \frac{2k\,\text{sh}\,a\pi}{\pi(a^2+k^2)}(-1)^{k+1}$$

$$\therefore\quad f(x) = \frac{2\,\text{sh}\,a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(-1)^{k+1}}{a^2+k^2}\sin kx.$$

注：$\int e^{ax}\sin kx\,dx=\dfrac{e^{ax}(a\sin kx-k\cos kx)}{a^2+k^2}$。

（12）在半个周期$\left(0,\dfrac{l}{2}\right)$上，$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{l}$；在另外半个周期$\left(\dfrac{l}{2},\ l\right)$上，$f(x)=-\sin\dfrac{\pi x}{l}$。

解：在边界上，$f(0)=0$，$f(l)=0$，因此用正弦级数展开

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\ \sin\frac{2k\pi}{l}x,$$

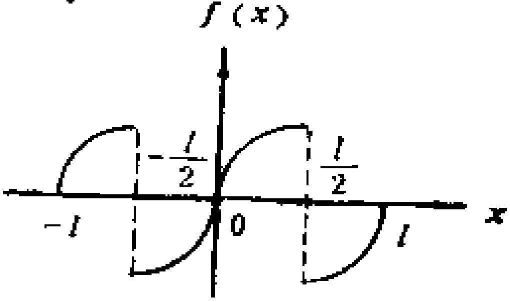


图 6-16

$$b_k=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\frac{2\pi k\xi}{2}d\xi-\int_{\frac{l}{2}}^{l}\sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\frac{2\pi k}{l}\xi d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{2k-1}{l}\pi\xi d\xi-\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{2k+1}{l}\pi\xi d\xi\right]$$

$$-\frac{1}{l}\left[\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\frac{(2k-1)}{2}\pi\xi d\xi-\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\frac{2k+1}{l}\pi\xi d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{l}\quad\frac{l}{(2k-1)\pi}\ \sin\frac{(2k-1)\pi}{l}\xi\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$-\frac{1}{l}\ \frac{l}{(2k+1)\pi}\ \sin\frac{(2k+1)\pi}{l}\xi\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$-\frac{1}{l}\ \frac{l}{(2k-1)\pi}\ \sin\frac{(2k+1)}{l}\pi\xi\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}$$

$$+\frac{1}{l}\ \frac{l}{(2k+1)\pi}\ \sin\frac{(2k+1)\pi}{l}\xi\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}$$

$$=\frac{1}{(2k-1)\pi}\sin\frac{(2k-1)}{2}\pi-\frac{1}{(2k+1)\pi}\sin\frac{2k+1}{2}\pi$$

$$-\frac{1}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)\pi+\frac{1}{(2k-1)\pi}\sin\frac{(2k-1)}{2}\pi$$

$$+\frac{1}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)\pi-\frac{1}{(2k+1)\pi}\sin\frac{(2k+1)}{2}\pi$$

$$=\frac{2}{(2k-1)\pi}\sin\frac{2k-1}{2}\pi-\frac{2}{(2k+1)\pi}\sin\frac{2k+1}{2}\pi,$$

$$b_k=\frac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k+1}+\frac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k+1}$$

$$=\frac{2}{\pi}\ \frac{4k}{4k^2-1}(-1)^{k+1},$$

$$\therefore\quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\ \frac{k(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\sin\frac{2k\pi x}{l}.$$

(13) 在 $(-\pi,\ \pi)$ 这个区间上，

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{2}\right),\\ 0, & \left(-\pi<x<-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}<x<\pi\right).\end{cases}$$

解： $f(x)$在 $(-\pi,\ \pi)$ 这个区间是偶函数，因此可展开为傅里叶余弦级数。

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\xi d\xi=\frac{1}{\pi}\sin\xi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}.$$

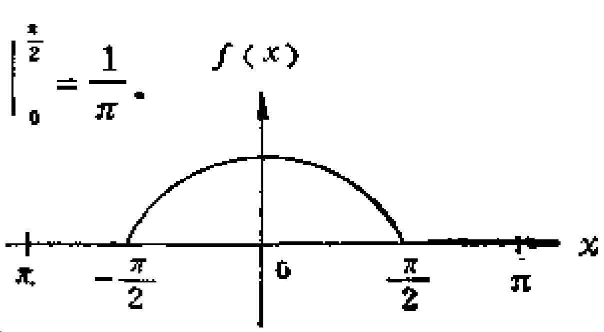


图 6-17

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\xi+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\xi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\pi}\;\frac{1}{2}\;\sin 2\xi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\xi\cos k\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\ (k+1)\ \xi d\xi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\ (k-1)\ \xi d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{\pi(k+1)}\sin(k+1)\xi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\pi(k-1)}\sin(k-1)\xi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\;\frac{1}{(k+1)}\sin\frac{(k+1)\pi}{2}$$

$$+\frac{1}{\pi(k-1)}\sin\frac{(k-1)\pi}{2},$$

当 k 为奇数时 $a_k=0$，当 k 为偶数时，则有

$$a_k=a_{2n}=\frac{1}{\pi(2n+1)}\sin\frac{2n+1}{2}\pi$$

$$+\frac{1}{\pi(2n-1)}\sin\frac{2n-1}{2}\pi$$

$$=\frac{(-1)^n}{\pi(2n+1)}+\frac{(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right](-1)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{\pi}\;\frac{2}{(2n)^2-1}(-1)^{n+1},$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos x+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx.$$

§ 26. 有限区间上的函数的傅里叶级数

1. 要求下列函数 $f(x)$ 在它的定义区间的边界上为零. 试根

据这个要求把$f(x)$展开为傅里叶级数。

（1）$f(x)=\cos ax$，定义在（0，π）上。

解：因为按题意，在边界（0，π）上，$f(a)=0$和$f(\pi)=0$由此可知，展开式中只有正弦项，而无余弦项，即$a_n=0$，因而展开式可表为

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

其中 $$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\sin kx dx.$$

应用三角公式 $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

可得 $2\cos ax\sin kx=\sin(k+a)x+\sin(k-a)x$

则
$$\begin{aligned}
b_k&=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(k+a)x+\sin(k-a)x]dx\\
&=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)}{k+a}\cos(k+a)x\right]_0^{\pi}\\
&\quad+\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)}{k-a}\cos(k-a)x\right]_0^{\pi}\\
&=\frac{1}{\pi}[1-\cos(k+a)\pi]\frac{1}{k+a}\\
&\quad+\frac{1}{\pi}\frac{1}{k-a}[1-\cos(k-a)\pi]\\
&=\frac{2k}{\pi(k^2-a^2)}[1+(-1)^{k+1}\cos a\pi],
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2-a^2}[1+(-1)^{k+1}\cos a\pi]\sin kx.$$

（2）$f(x)=x^3$，定义在（0，π）上。

解：

因为按题意，在边界上$f(0)=0$和$f(\pi)=0$，可见展开式中没有余弦项，即$a_0=0$，$a_k=0$，仅有正弦项，因而展开式可表示

为：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx.$$

其中 $b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\xi)\sin k\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\xi^3\sin k\xi d\xi$

$$=\frac{2}{\pi k^4}\int_0^{\pi}(k\xi)^3\sin k\xi d(k\xi).$$

利用公式 $\int x^3\sin xdx=(3x^2-6)\sin-(x^3-6x)\cos x$ 代入上式，则有

$$b_k=\frac{2}{\pi k^4}\left\{\left[3(k\xi)^2-6\right]\sin k\xi-\left[(k\xi)^3-6(k\xi)\right]\cos k\xi\right\}_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi k^4}\left\{-\left[(k\pi)^3-6(k\pi)\right]\cos k\pi-0\right\}$$

$$=(-1)^k\left[\frac{12}{k^3}-\frac{2\pi^2}{k}\right]$$

即 $$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{12}{k^3}-\frac{2\pi^2}{k}\right]\sin kx.$$

请读者将本题和习题 2（2）比较。

（3） $f(x)=a\left(1-\frac{x}{l}\right)$，定义在（0， l）上。

解：因为按题意要求，$f(0)=0$，$f(l)=0$，因此应将$f(x)$作奇延拓，然后展开为傅里叶正弦级数。

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l},$$

其中：$b_k=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{l}a\left(1-\frac{\xi}{l}\right)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^l a\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi-\frac{2}{l}\int_0^l\frac{a}{l}\xi\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi$$

$$=\frac{2}{l}\cdot\frac{la}{k\pi}\int_0^l\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)$$

$$-\frac{2a}{k^2\pi^2}\int_0^l\left(\frac{k\pi}{l}\xi\right)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)$$

$$=\frac{-2a}{k\pi}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\Big|_0^l-\frac{2a}{k^2\pi^2}\left[\sin\frac{k\pi\xi}{l}-\frac{k\pi\xi}{l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\right]_0^l$$

$$=\frac{-2a}{k\pi}(\cos k\pi-1)-\frac{2a}{k^2\pi^2}[0-k\pi\cos k\pi-0+0]$$

$$=\frac{2a}{k\pi}(1-\cos k\pi)+\frac{2a}{k\pi}\cos k\pi=\frac{2a}{k\pi}.$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

请将本题与习题2、(3)比较。

(4) 在$\left(0,\frac{l}{2}\right)$上，$f(x)=x$；在$\left(\frac{l}{2},l\right)$上，$f(x)=l-x$。

解：按题意要求，在边界上，$f(0)=0$和$f(l)=0$，因而展开式有下列形式：

$$(fx)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

其中 $$b_k=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}f(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi+\int_{\frac{l}{2}}^{l}f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right]$$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\xi\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right]$$

$$=\frac{2l}{k^2\pi^2}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)$$

$$+\int_{\frac{l}{2}}^{l} 2\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi-\frac{2l}{k^2\pi^2}\times\int_{\frac{l}{2}}^{l}\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)$$

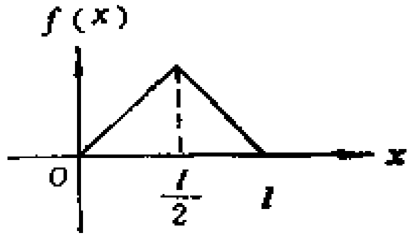


图 6-18

$$=\frac{2l}{k^2\pi^2}\left[\sin\frac{k\pi\xi}{l}-\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\right]_0^{\frac{l}{2}}-\frac{2l}{k\pi}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}-\frac{2l}{k^2\pi^2}\left[\sin\frac{k\pi\xi}{l}-\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\right]_{\frac{l}{2}}^{l}$$

$$=\frac{2l}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{2l}{k\pi}\cos k\pi+\frac{2l}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{2l}{k\pi}\cos k\pi+\frac{2l}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}$$

$$=2\times\frac{2l}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{4l}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$$=\begin{cases}0, & (k=2n),\\ (-1)^n\dfrac{4l}{(2n+1)^2\pi}, & (k=2n+1),\end{cases}$$

$$\therefore\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4l}{(2n+1)^2\pi^2}(-1)^n\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

请将本题和习题2(4)比较

(5) $f(x)=1$，定义在$(0,\ \pi)$上。

解： 因为要满足 $f(0)=0$ 和 $f(\pi)=0$，则展开式中仅有正弦项。

$$\therefore \quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

其中： $$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin k\zeta d\zeta=\frac{2}{k\pi}\Big[-\cos k\zeta\Big]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{k\pi}[-\cos k\pi+1]=\frac{2}{k\pi}[1-\cos k\pi]$$

$$=\begin{cases}0, & (k=2n),\\ \dfrac{4}{\pi(2n+1)}, & (k=2n+1).\end{cases}$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x.$$

请读者把本题与习题2（5）比较.

2. 要求下列函数$f(x)$的导数$f'(x)$在函数定义区间的边界为零. 试根据这个要求把$f(x)$展开为傅里叶级数.

（1）在$\left(0,\ \frac{l}{2}\right)$上，$f(x)=\cos\left(\frac{\pi x}{l}\right)$；在$\left(\frac{l}{2}, l\right)$上，$f(x)=0$.

解：因为$f'(0)$和$f'(l)=0$，所以应将$f(x)$展开成为傅里叶余弦级数，其傅里叶系数.

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi\zeta}{l}d\zeta=\frac{1}{\pi}\sin\frac{k\pi}{l}\zeta\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{1}{\pi},$$

$$a_1=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos^2\frac{\pi}{l}\zeta d\zeta=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{l}\zeta\right)d\zeta$$

$$=\frac{1}{l}\left[\zeta+\frac{1}{\pi}\sin\frac{2\pi}{l}\zeta\right]_0^{\frac{l}{2}}=\frac{1}{l}\left(\frac{l}{2}+\frac{1}{\pi}\sin\pi\right)$$

$$=\frac{1}{2},$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi}{l}\zeta\cos\frac{k\pi}{l}\zeta d\zeta$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{k+1}{l}\pi\zeta d\zeta+\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{k-1}{l}\pi\zeta d\zeta$$

$$=\left[\frac{1}{(k+1)\pi}\sin\frac{k+1}{l}\pi\zeta\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(k-1)\pi}\sin\frac{k-1}{l}\pi\zeta\right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{1}{(k+1)\pi}\sin\frac{k+1}{2}\pi$$

$$+\frac{1}{(k-1)\pi}\sin\frac{k-1}{2}\pi$$

$$=\begin{cases}0, & (k=2n+1),\\ (-1)^{n+1}\dfrac{2}{(4n^2-1)\pi} & (k=2n).\end{cases}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi x}{l}.$$

(2) $f(x)=x^3$，定义在 $(0,\pi)$ 上.

解：∵ 题意要求 $f'(0)=0$ 和 $f'(\pi)=0$，因而应将 $f(x)$ 展开为傅里叶余弦级数，其傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\zeta^3d\zeta=\frac{1}{\pi}\left.\frac{\zeta^4}{4}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{4},$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\zeta^3\cos k\zeta d\zeta=\frac{2}{\pi k^4}\int_0^{k\pi}(k\zeta)^3\cos k\zeta d(k\zeta)$$

$$=\frac{2}{\pi k^4}\left[(3k^2\zeta^2-6)\cos k\zeta+(k^2\zeta^2-2)\sin k\zeta\right]_0^\pi$$

$$=\frac{2}{\pi k^4}[(3k^2\pi^2-6)\cos k\pi+(k^2\pi^2-2)\sin k\pi$$

$$-(-6)\cos 0+(-2)\sin 0]$$

$$=\frac{2}{\pi k^4}[(3k^2\pi^2-6)\cos k\pi+6],$$

$$=\begin{cases}\dfrac{6\pi}{k^2}(-1)^k, & (k\text{为偶数}),\\ \dfrac{6\pi}{k^2}(-1)^k+\dfrac{24}{\pi k^4}, & (k\text{为奇数}),\end{cases}$$

如令　$k=2n$，则$a_k=a_{2n}=\dfrac{3\pi}{2n^2}$，

$$k=2n+1\text{则}a_k=a_{2n+1}=\frac{24}{\pi(2n+1)^4}-\frac{6\pi}{(2n+1)^4},$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{\pi^3}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,$$

请读者将本题和习题1（2）比较．

（3）$f(x)=a\left(1-\dfrac{x}{l}\right)$，定义在（0，$l$）上．

解：因在$f'(0)=0$和$f'(l)=0$，所以应将$f(x)$展开成余弦级数．

其系数：

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l a\left(1-\frac{\zeta}{l}\right)d\zeta=\frac{a}{l}\int_0^l d\zeta-\frac{a}{l^2}\int_0^l\zeta d\zeta$$

$$=\frac{a}{2},$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l a\left(1-\frac{\zeta}{l}\right)\cos\frac{k\pi}{l}\zeta d\zeta$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^l a\cos\frac{k\pi}{l}\zeta d\zeta-\frac{2a}{l^2}\int_0^l\zeta\cos\frac{k\pi}{l}\zeta d\zeta$$

$$=\frac{2a}{l}\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{l}\zeta\Big|_0^l-\frac{2a}{k^2\pi^2}\Big[\cos\frac{k\pi}{l}\zeta$$

$$-\frac{k\pi}{l}\zeta\sin\frac{k\pi}{l}\zeta\Big]_0^l$$

$$=-\frac{2a}{k^2\pi^2}[\cos k\pi-k\pi\sin k\pi-\cos 0]$$

$$=\frac{2a}{k^2\pi^2}[1-\cos k\pi]$$

$$=\begin{cases}0 & (k=2n),\\ \dfrac{4a}{\pi^2(2n+1)^2} & (k=2n+1).\end{cases}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{a}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4a}{\pi^2(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

请读者将本题和习题1（3）比较.

（4）在$\left(0,\ \frac{l}{2}\right)$上，$f(x)=x$；在$\left(\frac{l}{2},\ l\right)$上，$f(x)=l-x$.

解：按题意$f(x)$的展开式为余弦级数：

其系数：

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\zeta d\zeta+\frac{1}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-\zeta)d\zeta$$

$$=\frac{1}{2l}\zeta^2\Big|_0^{\frac{l}{2}}+\zeta\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}-\frac{1}{2l}\zeta^2\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}=\frac{l}{4},$$

$$a_k=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\zeta\cos\frac{k\pi\zeta}{l}d\zeta+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-\zeta)\cos\frac{k\pi\zeta}{l}d\zeta\right]$$

$$=\frac{2}{l}\Big[\frac{l^2}{k^2\pi^2}\int_0^{\frac{l}{2}}\Big(\frac{k\pi}{l}\ \zeta\Big)\cos\ \frac{k\pi\zeta}{l}d\ \Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big)$$

$$+\ l\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\ \frac{k\pi\zeta}{l}d\zeta$$

$$-\int_{\frac{l}{2}}^{l}\zeta\cos\frac{k\pi\zeta}{l}d\zeta\ \Big]$$

$$=\frac{2l}{k^2\pi^2}\Big[\ \cos\frac{k\pi\zeta}{l}+\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big)\sin\ \frac{k\pi\zeta}{l}\Big]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$+\frac{2l^2}{lk\pi}\sin\ \frac{k\pi\zeta}{l}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}-\frac{2}{l}\cdot\frac{l^2}{k^2\pi^2}\Big[\cos\ \frac{k\pi\zeta}{l}$$

$$+\Big(\frac{k\pi\zeta}{l}\Big)\sin\ \frac{k\pi\zeta}{l}\Big]_{\frac{l}{2}}^{l}$$

$$=\frac{2l}{k^2\pi^2}\Big[2\cos\frac{k\pi}{2}-(1+(-1)^k)\Big]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2l}{k^2\pi^2}\Big(2\cos\dfrac{k\pi}{2}-2\Big)(k\text{为偶数}),\\ 0\qquad\qquad\qquad\qquad(k\text{为奇数}).\end{cases}$$

$$=\frac{4l}{\pi^2(2n)^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0\qquad(n\text{为偶数}),\\ \dfrac{-8l}{\pi^2(2n)^2}(n\text{为奇数}),\end{cases}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{l}{4}-\frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)^2}\sin\ \frac{(2n+2)\pi}{l}x.$$

请读者将本题和习题 1（4）比较.

（5）$f(x)=1$，定义在$(0,\ \pi)$上.

解：因$f'(0)=0$，$f'(\pi)=0$，所以应将$f(x)$ 展开为余弦

级数.

其系数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} d\zeta=\frac{1}{\pi}\zeta\Big|_0^{\pi}=1,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(\zeta)\cos\frac{n\pi}{\pi}\zeta d\zeta=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)}{n}\sin n\zeta\Big|_0^{\pi}=0,$$

$\therefore$ $f(x)=1$,这是只有单项的傅里叶级数.

3.在区间$(0,l)$上定义了函数$f(x)=x$.试根据条件$f'(0)=0$,$f(l)=0$,把$f(x)$展开为傅里叶级数.

解:根据边界条件$f'(0)=0$应将函数$f(x)$对区间$(0,l)$的端点$x=0$作偶延拓,又根据边界条件$f(l)=0$,应将函数$f(x)$对区间$(0,l)$的端点$x=l$作奇延拓,延拓以后的函数是以$4l$为周期的偶函数.故展开式为

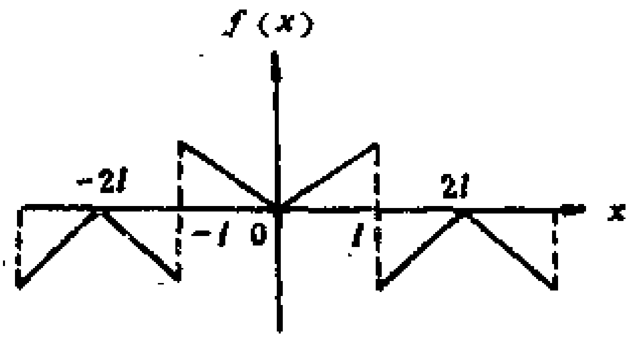


图 6-19

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{2l},$$

现在计算系数

$$a_0=\frac{1}{2l}\left[\int_0^l xdx+\int_l^{2l}(x-2l)dx\right.$$

$$=\frac{1}{2l}\left[\frac{l^2}{2}+\frac{4l^2}{2}-\frac{l^2}{2}-4l^2+2l^2\right]=0.$$

$$a_k=\frac{1}{l}\left[\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{2l}dx+\int_l^{2l}(x-2l)\cos\frac{k\pi x}{2l}dx\right]$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{2l}dx+\frac{1}{l}\int_l^{2l}(y-2l)\cos\frac{k\pi y}{2l}dy.$$

在第二个积分中作代换$x=2l-y$ 即$y=2l-x$ 则

$$a_k = \frac{1}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi}{2l}x\,dx + \frac{1}{l}\int_l^0 x\cos\left(k\pi - \frac{k\pi x}{2l}\right)dx$$

$$= \frac{1}{l}[1-(-1)^k]\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{2l}dx,$$

而 $1-(-1)^k = \begin{cases} 0, & (\text{如}k=\text{偶数}), \\ 2, & (\text{如}k=\text{奇数}), \end{cases}$

又 $\frac{1}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{2l}dx = \frac{4l}{k^2\pi^2}\left[\cos\frac{k\pi x}{2l} + \frac{k\pi x}{2l}\sin\frac{k\pi x}{2l}\right]_0^l$

$$= \frac{4l}{k^2\pi^2}\left[\cos\frac{k\pi}{2} - 1 + \frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}\right],$$

而在$k=2n+1$为奇数时，则有

$$a_k = 2\cdot\frac{1}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{2l}dx = \frac{-8l}{(2n+1)^2\pi^2} + \frac{4l}{(2n+1)\pi}(-1)^n,$$

结果 $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 4l}{(2n+1)\pi} - \frac{8l}{(2n+1)^2\pi^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x.$

4. 二元函数$f(x,y)=xy$，定义在区域$-\pi<x<\pi$，$-\pi<y<\pi$上。试根据边界条件$f\Big|_{x=-\pi}=\xi\Big|_{x=+\pi}=0$把$f$对自变数$x$展为傅里叶级数。这个级数的“系数”仍然是$y$的函数，再根据边界条件$f\Big|_{y=-\pi}=f\Big|_{y=\pi}=0$把这个级数中的“系数”对自变数$y$展为傅里叶级数，这叫做双重傅里叶级数。

解：先把$f(x,y)$就自变数x展开为傅里叶级数，根据边界条件，这傅里叶级数应是正弦级数。

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\sin kx = \sum_{k=1}^{\infty} b_k(y)\sin kx,$$

"系数" $b_k(y)$的计算如下：

$$b_k(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi yx\sin kxdx=\frac{2y}{\pi}\ \frac{1}{k^2}\Big[\sin kx-kx\cos kx\Big]_0^\pi$$

$$=\frac{2y}{k\pi}[-\pi\cos k\pi]\ =\frac{2y}{k}(-1)^{k+1}.$$

再将$b_k(y)$就自变数 y 展开傅里叶级数，根据边界条件，这里傅里叶级数应为正弦级数.

$$b_k(y)=\sum_{n=1}^\infty b_{kn}\sin ny,$$

系数b_{kn}的计算如下：

$$b_{kn}=\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\ \frac{2}{\pi}\int_0^\pi y\sin ny dy.$$

$$=\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\ \frac{2(-1)^{n+1}}{n}=\frac{4(-1)^{k+n}}{kn},$$

结果 $\quad f(xy)=\sum_{k=1}^\infty\ \sum_{n=1}^\infty\frac{4(-1)^{k+n}}{kn}\sin kx\sin ny.$

§27. 复数形式的傅里叶级数

1.矩形波 $f(x)$，在$\left(-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right)$这个周期上可表为

$$f(x)=\begin{cases}0, & 在\left(-\frac{T}{2},\ -\frac{\tau}{2}\right)上,\\ H, & 在\left(-\frac{\tau}{2},\ \frac{\tau}{2}\right)上,\\ 0, & 在\left(\frac{\tau}{2},\ \frac{T}{2}\right)上,\end{cases}$$

试将它展开为复数形式的傅里叶级数.

解：$\because \quad l=\frac{T}{2}$，故

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x}.$$

其中$C_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx=\frac{1}{2\cdot\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} H dx=\frac{1}{T}H\tau.$$

$$C_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\zeta)\left[e^{i\frac{k\pi\zeta}{l}}\right]^* d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{T}{2}}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} He^{-i\frac{2k\pi}{T}x}dx$$

$$=\frac{iH}{2\pi k}\left(-2i\sin\frac{k\pi\tau}{T}\right)=\frac{H}{\pi k}\sin\frac{k\pi\tau}{T}\ (k\neq 0).$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{H\tau}{T}+\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{H}{\pi k}\sin\frac{k\pi\tau}{T}$$

$$\times e^{i\frac{2k\pi}{T}x}.$$

2.锯齿波$f(x)$在$(0,T)$这个周期上可表为

$$f(x)=\frac{H}{T}x,$$

试把它展开为复数形式的傅里叶级数.

解：$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{2k\pi}{l}x}$，　　$\left(\because\ l=\frac{T}{2}\right)$，

$$C_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{T}Hxdx$$

$$
=\frac{1}{T}\ \frac{H}{T}\ \frac{x^{2}}{2}\Big|_{0}^{T}=\frac{H}{2},
$$

$$
C_{k}=\frac{1}{T}\int_{0}^{T} f(x)\ \left(e^{\ i\ \frac{2k\pi}{T}x}\right)^{*}\ dx
$$

$$
=\frac{1}{T}\int_{0}^{T}\frac{H}{T}\ xe^{\ -i\ \frac{2k\pi}{T}x}\ dx
$$

$$
=\frac{H}{T^{2}}\left(\frac{T}{-i2\pi k}\right)^{2}\ e^{\ -i\ \frac{2\pi k}{T}x}
$$

$$
\times\left(\ -i\frac{2\pi k}{T}\ x-1\right)\Big|_{0}^{T}
$$

$$
=\frac{H}{(-i2\pi k)^{2}}\Big[\ e^{-i2\pi k}\ \ (-i2\pi k-1)-(-1)\ \Big]
$$

$$
=\frac{H}{(-i2\pi k)^{2}}[(-i2\pi k-1)+1]=\frac{H}{-i2\pi k}
$$

$$
=\frac{iH}{2\pi k}, \qquad\qquad (k\neq 0),
$$

$$
\therefore\qquad f(x)=\frac{H}{2}+\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{iH}{2\pi k}\ e^{i\ \frac{2\pi k}{T}x}.
$$

3.在实数形式的傅里叶级数24·7式中

$$
\left[\ f\ (x)\ =a_{0}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_{k}\cos\ \frac{k\pi x}{l}+b_{k}\ \sin\ \frac{k\pi x}{l}\right)\right],
$$

把$\cos\ \frac{k\pi x}{l}$和$\sin\frac{k\pi x}{l}$按欧勒公式用虚指数的指数函数

$e^{i\ \frac{k\pi x}{l}}$和$e^{-\ i\ \frac{k\pi x}{l}}$表出，验证实数形式的傅里叶级数(24·7)

就化为复数形式的傅里叶级数(27·2)$\Big[$即$f(x)=$

$\sum\limits_{k=-\infty}^{\infty} C_{k}e^{\ i\ \frac{k\pi x}{l}}\ \Big]$而且$C_{k}=\frac{a_{k}-ib_{k}}{2}$，$C_{-k}=\frac{1}{2}(a_{k}+ib_{k})$.其中$k>0$.

解：$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k}{2}\left(e^{i\frac{k\pi x}{l}}+e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{b_k}{2i}\left(e^{i\frac{k\pi x}{l}}-e^{-i\frac{k\pi}{l}x}\right)\right]$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_k-ib_k}{2}\right)e^{i\frac{k\pi x}{l}}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{a_k+ib_k}{2}\right)e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\right],$$

令　$a_0=C_0$，$\frac{a_k-ib_k}{2}=C_k$，$\frac{a_k+ib_k}{2}=C_{-k}$，

则实数形式的傅里叶级数便化成复数形式：

$$f(x)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_ke^{i\frac{k\pi x}{l}}+C_{-k}e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\right).$$

令$k=0\pm1$，±2，±3，…则上式可化为统一的复数形式(即27·2式)：

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,e^{i\frac{k\pi x}{l}}$$，其中$k=|k|=$正整数。

从上述讨论可以看出C_k和C_{-k}的模正好是傅里叶级数展开式中k次谐波振幅的一半，这是因为k次谐波

$$a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}\right.$$

$$\left.+\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k}\right)$$

$$=A_k\sin\left(\frac{k\pi x}{l}+\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k}\right),$$

其中k次谐波的振幅$A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$，

而$|C_k|=|C_{-k}|=\frac{1}{2}\sqrt{a_k^2+b_k^2}=\frac{1}{2}A_k$。

第七章 傅里叶积分

§28. 非周期函数的傅里叶积分

1. 把单个锯齿脉冲$f(t)$展开为傅里叶积分.

$$f(t)=\begin{cases}0, & (t<0),\\ kt, & (0<t<T),\\ 0, & (T<t).\end{cases}$$

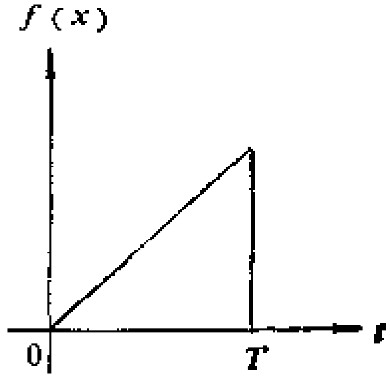


图 7-1

解: 因为$f(t)$是无界空间中的非周期函数,它的周期为∞,故可展开为傅里叶积分:

$$f(t)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega t d\omega+\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega t d\omega$$

其中傅里叶变换$A(\omega)$和$B(\omega)$为:

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^T kt\cos\omega t dt$$

$$=\frac{k}{\pi\omega^2}\int_0^T(\omega t)\cos\omega t d(\omega t)$$

$$=\frac{k}{\pi\omega^2}\Big[\cos\omega t+\omega t\sin\omega t\Big]_0^T$$

$$=\frac{k}{\pi\omega^2}[\cos\omega T+\omega T\sin\omega T-1],$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^t kt\sin\omega t dt$$

$$=\frac{k}{\pi\omega^2}\left[\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\right]_0^T$$

$$=\frac{k}{\pi\omega^2}[\sin\omega T-\omega T\cos\omega T],$$

$$\therefore\quad f(t)=\frac{k}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\omega^2}(\cos\omega T+\omega T\sin\omega T-1)\cos\omega t d\omega$$

$$+\frac{k}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\omega^2}(\sin\omega T-\omega T\cos\omega T)\sin\omega t d\omega.$$

2.把振幅按双曲线衰减的振动函数$f(t)$展开为傅里叶积分

$$f(t)=\frac{\sin\Omega t}{t},\quad (\Omega\text{为常数}).$$

试拿本题的频谱跟图(38)比较，又拿本题的$f(t)$跟图(39)比较。比较的结果说明什么问题？

解：因$\sin\Omega t$是奇函数，t也是奇函数，所以$f(t)$是偶函数，应展开为傅里叶余弦积分

$$f(t)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t d\omega,$$

其中$A(\omega)$是$f(t)$的傅里叶变换式，按(28·6)式有

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)\cos\omega\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi d\xi$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\xi}\sin\Omega\xi\cos\omega\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty\frac{1}{\xi}\sin(\omega+\Omega)\xi d\xi\right.$$

$$\left.-\int_0^\infty\frac{1}{\xi}\sin(\omega-\Omega)\xi d\xi\right].$$

应用积分公式

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin mx}{x}\,dx=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & (m>0),\\ 0, & (m=0),\\ -\dfrac{\pi}{2}, & (m<0).\end{cases}$$

得 $$A(\omega)=\left\{\begin{matrix}0, & (\omega>\Omega),\\ \dfrac{1}{2}, & (\omega=\Omega),\\ 1, & (\omega<\Omega),\end{matrix}\right\}=1-H(\omega-\Omega),$$

而$f(t)$和$A(\omega)$的图形如图7-2。

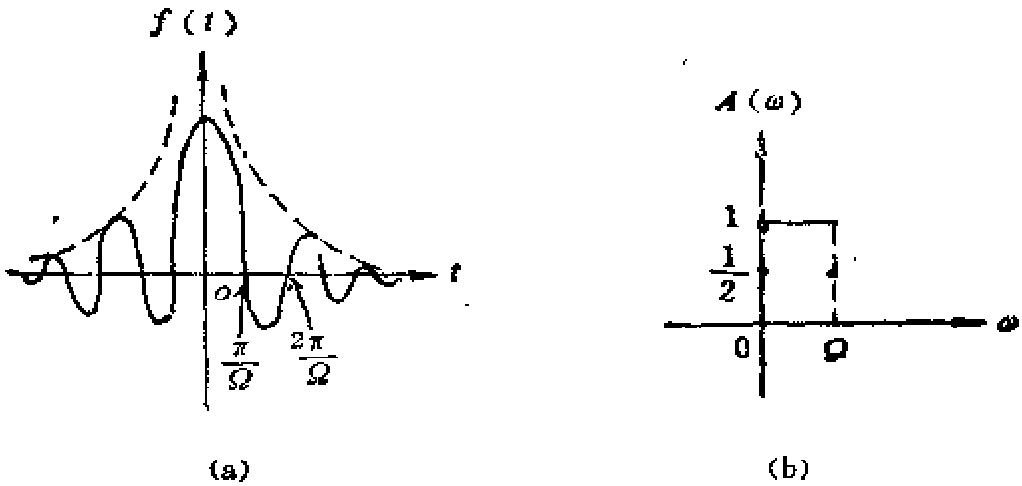


图 7-2

比较知，本题的$f(t)$的图象同于图(39)的$A(\omega)$，而本题的频谱$A(\omega)$的图象则同于图(39)的$f(t)$，这是由于公式(28·10)和(28·11)对变数x和ω对称的缘故，亦即如果不计及常数因子，其$f(x)$和$A(\omega)$互为傅里叶变换式，可以说$A(\omega)$是$f(x)$的傅里叶变换式，也可以说$f(x)$是$A(\omega)$的傅里叶变换式。

3.把下列脉冲$f(t)$展开为傅里叶积分，

$$f(t)=\begin{cases}0,(t<-T),\\-h,(-T<t<0),\\h,(0<t<T),\\0,(T<t).\end{cases}$$

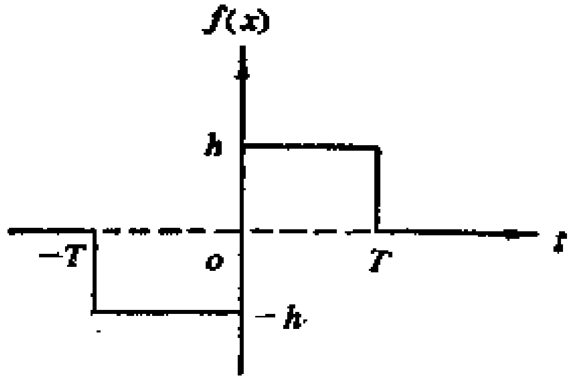


图 7-3

注意在半无界区间$(0,\infty)$上，本例题的$f(t)$跟例1的$f(t)$相同.

解：因为$f(t)$是奇函数，所以展开为傅里叶正弦积分：

$$f(t)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega t d\omega$$

其傅里叶变换为：

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^T h\sin\omega\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\frac{h}{\omega}\int_0^T\sin\omega\xi d(\omega\xi)$$

$$=\frac{2h}{\pi\omega}(-\cos\omega\xi)\Big|_0^T=\frac{2h}{\pi\omega}(1-\cos\omega T).$$

本题的图7-3和课本中的图38（第134页例1）的$f(t)$在区间$(0,\infty)$上，是相同的，只是本题属于奇函数，而第134页的例1为偶函数.

4.$f(t)$是定义在半无界区间$(0,\infty)$上的函数，

$$f(t)=\begin{cases}h,\ (0<t<T),\\0,\ (T<t).\end{cases}$$

（1）在边界条件$f'(0)=0$下把$f(t)$展为傅里叶积分；

（2）在边界条件$f(0)=0$下把$f(t)$展为傅里叶积分.

解：（1）要满足边界条件$f'(0)=0$，必须将$f(t)$展开为傅里叶余弦积分.

$$f(t)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t d\omega,$$

其中

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^T h\cos\omega\xi d\xi$$

$$=\frac{2h}{\pi\omega}\sin\omega\xi\Big|_0^T=\frac{2h}{\pi\omega}\sin\omega T,$$

$$\therefore\quad f(t)=\int_0^\infty\frac{2h}{\pi\omega}\sin\omega T\cos\omega t d\omega$$

$$=\frac{2h}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega T\cos\omega t d\omega}{\omega}.$$

（2）要满足边界条件$f(0)=0$，必须将$f(t)$展开为傅里叶正弦积分：

$$f(t)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega t d\omega,$$

其中

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\sin\omega\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^T h\sin\omega\xi d\xi$$

$$=\frac{2}{\pi}\ \frac{h}{\omega}(-\cos\omega\xi)\Big|_0^T=\frac{2h}{\omega\pi}(1-\cos\omega T),$$

$$\therefore\quad f(t)=\frac{2h}{\pi}\int_0^\infty\frac{(1-\cos\omega T)\sin\omega t}{\omega}d\omega.$$

5.在边界条件$f(0)=0$下，把定义在$(0,\infty)$上的函数$f(x)=e^{-\lambda x}$展开为傅里叶积分.

解：要满足边界条件$f(0)=0$，必须将$f(x)$展开为傅里叶正弦积分：

$$f(x)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega.$$

其中

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(x)\sin\omega\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi d\xi$$

$$=-\frac{2}{\pi\omega}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}d(\cos\omega\xi)$$

$$= -\frac{2}{\pi\omega}e^{-\lambda\xi}\cos\omega\xi\Big|_0^\infty + \frac{2}{\pi\omega}\int_0^\infty \cos\omega\xi de^{-\lambda\xi}$$

$$= \frac{2}{\pi\omega} + \frac{2}{\pi\omega}\int_0^\infty \cos\omega\xi e^{-\lambda\xi}(-\lambda)d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi\omega} - \frac{2\lambda}{\pi\omega^2}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}d(\sin\omega\xi)$$

$$= \frac{2}{\pi\omega} - \frac{2\lambda}{\pi\omega^2}e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi\Big|_0^\infty$$

$$+ \frac{2\lambda}{\pi\omega^2}\int_0^\infty (-\lambda)e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi\omega} - \frac{2\lambda^2}{\pi\omega^2}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi d\xi.$$

把上式移项整理后得

$$\left(\frac{2}{\pi} + \frac{2\lambda^2}{\pi\omega^2}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi d\xi = \frac{2}{\pi\omega},$$

即
$$\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi d\xi = \frac{\frac{2}{\pi\omega}}{\frac{2}{\pi} + \frac{2\lambda^2}{\pi\omega^2}} = \frac{\omega}{\omega^2+\lambda^2},$$

$$\therefore\quad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{\omega^2+\lambda^2},$$

故$f(x)$的展开式为：

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2+\lambda^2}\cos\omega x d\omega.$$

6.在边界条件$f'(0)=0$下．把定义在$(0,\infty)$上的函数$f(x)=1-H(x-a)$展为傅里叶积分．

解：在边界条件$f'(0)=0$的要求下，$f(x)$必须展开为傅里叶余弦积分：

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega,$$

其中
$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty[1-H(x-a)]\cos\omega x dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos\omega x dx-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty H(x-a)\cos\omega x dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^a\cos\omega x dx+\frac{2}{\pi}\int_a^\infty\cos\omega x dx$$
$$-\frac{2}{\pi}\int_a^\infty 1\cdot\cos\omega x dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^a\cos\omega x dx$$
$$=\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega x\Big|_0^a=\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega a,$$
$$\therefore\quad f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega a}{\omega}\cos\omega x d\omega.$$

7.在实数形式的傅里叶积分(28·5)里，把$\cos\omega x$和$\sin\omega x$按照欧勒公式用虚指数的指数函数$e^{i\omega x}$和$e^{-i\omega x}$表出，验证实数形式的傅里叶积分(28·5)就化为复数形式的傅里叶积分(28·13)而且
$$C(\omega)=\frac{1}{2}[A(\omega)-iB(\omega)],\ C(-\omega)=\frac{1}{2}[A(\omega)+iB(\omega)],$$
其中$\omega>0$。

证：
$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega+\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega$$
$$=\int_0^\infty\Big[\frac{A(\omega)}{2}(e^{i\omega x}+e^{-i\omega x})$$
$$-\frac{i}{2}B(\omega)(e^{i\omega x}-e^{-i\omega x})\Big]d\omega$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}[A(\omega)-iB(\omega)]e^{i\omega x}d\omega$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{1}{2}[A(\omega)+iB(\omega)]e^{-i\omega x}d\omega$$

$$=\int_0^{\infty}[C(\omega)e^{i\omega x}+C(-\omega)e^{-i\omega x}]d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega,\text{ 此即(28·13)式.}$$

8.验证延迟定理、位移定理和卷积定理.

（1）延迟定理：如果$f(x)$的傅里叶变换式是$C(\omega)$则$f(x-x_0)$的傅里叶变换式是$C(\omega)e^{-i\omega x_0}$.

证：$f(x-x_0)$的傅里叶变换式是$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-x_0)e^{-i\omega x}dx$,

在上述积分中作代换$x-x_0=\xi$ 即$x=\xi+x_0$,

则$f(x-x_0)$的傅里叶变换式$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega\xi-i\omega x_0}d\xi$

$$=e^{-i\omega x_0}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi$$

$$=C(\omega)e^{-i\omega x_0}.$$

（2）位移定理：如果$f(x)$的傅里叶变换式是$C(\omega)$则$e^{i\omega_0 x}f(x)$的变换式是$C(\omega-\omega_0)$,

证：$e^{i\omega_0 x}f(x)$的傅里叶变换式是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega_0 x}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i(\omega-\omega_0)x}dx$$

$$=C(\omega-\omega_0).$$

（3）卷积定理：如果$f_1(x)$和$f_2(x)$的傅里叶变换式是$C_1(\omega)$和$C_2(\omega)$则

$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$的傅里叶变换式是$2\pi C_1(\omega)C_2(\omega)$

证：$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}dx\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi)e^{-i\omega x}dx.$$

令$x-\xi=t$，$dx=dt$，则上式成为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)d\xi\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i(\xi+t)\omega}dt$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i\omega t}dt\right]$$

$$=2\pi C_1(\omega)\cdot C_2(\omega).$$

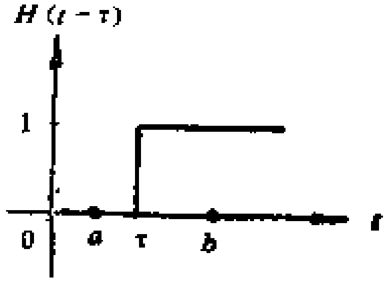
§29. δ函数和它的傅里叶积分

1. 验证$H'(t-\tau)=\delta(t-\tau)$，求$\delta(t-\tau)$的拉普拉斯变换像函数。

解：（1）验证$H'(t-\tau)=\delta(t-\tau)$

（i）按照单位函数的定义

$$H(t-\tau)=\begin{cases}0, & (t<\tau),\\ 1, & (t>\tau).\end{cases}$$



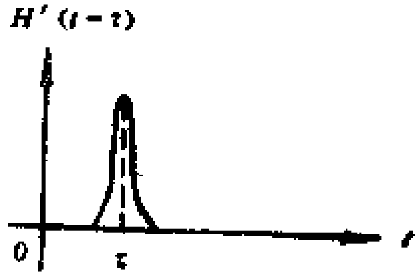
(a)

知当$t>\tau$和$t<\tau$，$H(t-\tau)$为常数，

$\therefore\quad H'(t-\tau)=0.$

当$t=\tau$时，$t=\tau$是$H(t-\tau)$的第一类间断点。

一般取$H(0)=\frac{1}{2}$，则



(b)

图 7-4

$$\lim_{\Delta t\to+0}\frac{H(\Delta t)-H(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{1-\frac{1}{2}}{\Delta t}=+\infty,$$

$$\lim_{\Delta t \to -0} \frac{H(\Delta t) - H(0)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to -0} \frac{0 - \frac{1}{2}}{\Delta t} = +\infty,$$

$$\therefore \quad H'(t-\tau)\Big|_{t=\tau} = \infty,$$

即
$$H'(t-\tau) = \begin{cases} 0, & (t \neq \tau), \\ \infty, & (t = \tau). \end{cases}$$

(ii) $\int_a^b H'(t-\tau)dt = H(t-\tau)\Big|_a^b = H(b-\tau) - H(a-\tau)$

$$= \begin{cases} 0, & (a,b\text{都}<\tau\text{或都}>\tau), \\ 1, & (a<\tau<b), \end{cases}$$

由 (i) 和 (ii) 知 $H'(t-\tau) = \delta(t-\tau)$.

（2）求$\delta(t-\tau)$的拉普拉斯变换象函数.

解：方法1：按照拉普拉斯变换的定义

$$\bar{\varphi}(p) = \int_0^\infty e^{-pt}\delta(t-\tau)\,dt = \begin{cases} 0, & (\tau<0), \\ e^{-p\tau}, & (\tau\geqslant 0), \end{cases}$$

这是因为 $0 \leqslant t < \infty$，当$\tau<0$时，$t-\tau>0$，

此时$\delta(t-\tau) = 0$，因此$\bar{\varphi}(p) = 0$.

而当$\tau>0$时，$0\leqslant\tau<\infty$，则根据δ函数的性质

$$\delta(t-\tau) \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}\delta(t-\tau)\,dt = e^{-pt}\Big|_{t=\tau} = e^{-p\tau}.$$

而当$\tau = 0$时，则有

$$\delta(t-\tau) = \delta(t) \doteqdot \int_0^\infty e^{-pt}\delta(t)\,dt = e^{-pt}\Big|_{t=0} = 1.$$

结果
$$\delta(t-\tau) \doteqdot \begin{cases} 0, & (\tau<0), \\ e^{-p\tau}, & (\tau\geqslant 0), \end{cases}$$

$$\delta(t) \doteqdot 1.$$

方法2：$\int_0^\infty e^{-pt}\delta(t-\tau)\,dt = \int_0^\infty e^{-pt}H'(t-\tau)\,dt$

$$= e^{-pt}H(t-\tau)\Big|_{t=0}^{\infty}$$

$$-\int_{\tau}^{\infty}-pe^{-pt}H(t-\tau)dt,$$

当$\tau>0$时，上式可以写成

$$-\int_{\tau}^{\infty}-pe^{-pt}H(t-\tau)dt=-\int_{\tau}^{\infty}-pe^{-pt}dt$$

$$=-e^{-pt}\Big|_{\tau}^{\infty}=e^{-p\tau}.$$

而当$\tau<0$时则$\because H(t-\tau)=1, H(-\tau)=1$，

这时上式可写为

$$-1-\int_{0}^{\infty}-pe^{-pt}dt=-1-e^{-pt}\Big|_{0}^{\infty}=0,$$

$$\therefore\quad \delta(t-\tau)\doteq e^{-p\tau}H(\tau).$$

2.验证§28例2的频谱$B(\omega)$（图41）于$N\to\infty$就成为$A\delta(\omega-\omega_0)-A\delta(\omega+\omega_0)$，阐明这结果的物理意义.

解：$\because$
$$B(\omega)=\frac{2A\omega_0}{\pi(\omega^2-\omega_0^2)}\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}N2\pi\right)$$

$$=\frac{A}{\pi}\,\frac{\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}N2\pi\right)}{\omega-\omega_0}$$

$$-\frac{A}{\pi}\,\frac{\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}N2\pi\right)}{\omega+\omega_0}$$

$$=\frac{A}{\pi}\,\frac{\sin\left[\frac{2\pi N}{\omega_0}(\omega-\omega_0)\right]}{\omega-\omega_0}$$

$$-\frac{A}{\pi}\,\frac{\sin\left[\frac{2\pi N}{\omega_0}(\omega+\omega_0)\right]}{\omega+\omega_0}$$

当$N\to\infty$时，即 $\dfrac{2\pi N}{\omega_0}\to\infty$

这时有限的正弦波列，便成为无限的正弦波列，而

$$B(\omega)=A\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{N2\pi}{\omega_0}(\omega-\omega_0)}{\omega-\omega_0}$$

$$-A\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{N2\pi}{\omega_0}(\omega_0+\omega)}{\omega+\omega_0}$$

$$=A\delta(\omega-\omega_0)-A\delta(\omega+\omega_0).$$

$$\because\quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin kx}{x}=\delta(x),$$

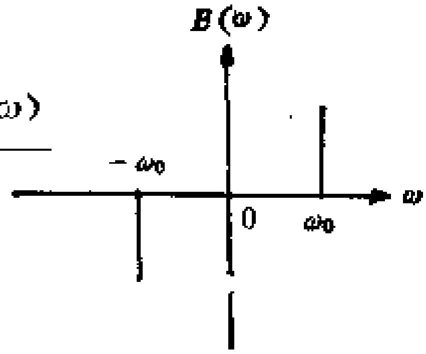


图 7-5

所以对于无限正弦波列，它的频谱成为两条线，一条位于$\omega=\omega_0$处，另一条位于$\omega=-\omega_0$处，振动成为单一圆频率ω_0的振动。

3.把$\delta(x)$展为实数形式的傅里叶积分。

解：

$\because$ $\delta(x)$是偶函数，它的傅里叶积分可表示为：

$$\delta(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega,$$

而

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\cos\omega x dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\cos(\omega\cdot 0)=\frac{1}{\pi},$$

$$\therefore\quad \delta(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\omega x d\omega,$$

或

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega x d\omega+i\int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega x d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega x d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\omega x d\omega.$$

第三篇　数学物理方程

第八章　定解问题

§31. 数学物理方程的导出

1.拿图51的B段弦作代表，推导弦振动方程.

解： 取x到$x+dx$的B段弦，这段弦无纵向振动，

∴　纵向合力为零

$$T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1=0$$

B段弦的横振动方程为

$$T_1\sin\alpha_1-T_2\sin\alpha_2=u_{tt}\rho ds,$$

在小振动的情况下，有$\alpha_1\approx\alpha_2\approx 0$，$\cos\alpha_1\approx\cos\alpha_2\approx 1$，

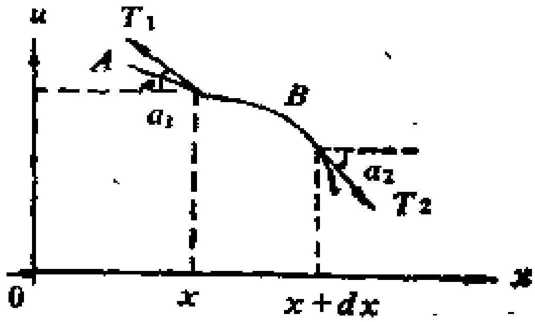


图 8-1

$$du\approx 0,\ ds=\sqrt{dx^2+du^2}\approx dx,$$

$$\sin\alpha_1\approx\mathrm{tg}\,\alpha_1,\quad \sin\alpha_2\approx\mathrm{tg}\,\alpha_2,$$

如图示，$\mathrm{tg}\,\alpha_1=-u_x|_x$，$\mathrm{tg}\,\alpha_2=-u_x|_{x+dx}$，

故在小振动的情况下，运动方程为

$$\begin{cases}T_1=T_2,\\ T_2u_x|_{x+dx}-T_1u_x|_x=u_{tt}\rho dx,\end{cases}$$

即
$$\frac{T\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x+dx}-T\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_x}{dx}=\rho u_{tt},$$

上式左边即 $T\dfrac{\partial u_x}{\partial x}=T\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 所以有 $u_{tt}-a^2u_{tt}=0$，

其中
$$a^2=\frac{T}{\rho}.$$

2. 用均质材料制作细圆锥杆，试推导它的纵振动方程。

解：设想在圆锥杆上截取一小段 B，C 段对 B 的拉力是 $Ysu_x|_x$ 合力是

$$Ysu_x|_{x+dx}-Ysu_x|_x=Y\frac{\partial}{\partial x}(su_x)dx,$$

∵ B 段的质量是 $\rho s dx$，

∴ B 段的运动方程是

$$(\rho s dx)u_{tt}=Y\frac{\partial}{\partial x}(su_x)dx.$$

其中 $s=\pi r^2=\pi(x\operatorname{tg}\alpha)^2$，

∴ 上式又可写为

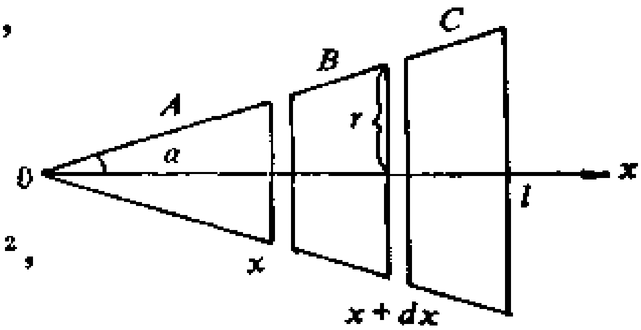


图 8-2

$$\rho(\pi x^2\operatorname{tg}^2\alpha)dx u_{tt}=Y\frac{\partial}{\partial x}[\pi x^2\operatorname{tg}^2\alpha u_x]dx,$$

$$x^2u_{tt}=\frac{Y}{\rho}\frac{\partial}{\partial x}(x^2u_x),\quad 令 a^2=\frac{Y}{\rho},$$

则得
$$u_{tt}=a^2\cdot\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}(x^2u_x)=\frac{a^2}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

3. 弦在阻尼介质中振动，单位长度弦所受阻力 $F=-Ru_t$（比例常数 R 叫做阻力系数），试推导弦在这阻尼介质中的振动方程。

解：如（1）题图示，B 段弦所受力除了张力 T_1，T_2 外，还受有阻力 F 的作用，在小振动的情况下，其运动方程为

$$T_1\approx T_2,$$

$$(T_2u_x|_{x+dx}-T_1u_x|_x)-Ru_t dx=u_{tt}\rho dx,$$

$$T\frac{u_x|_{x+dx}-u_x|_x}{dx}-Ru_t=\rho u_{tt},$$

$$Tu_{xx}-Ru_t=\rho u_{tt},\ u_{tt}-a^2u_{tt}+\frac{R}{\rho}u_t=0,$$

其中 $$a^2=\frac{T}{\rho}.$$

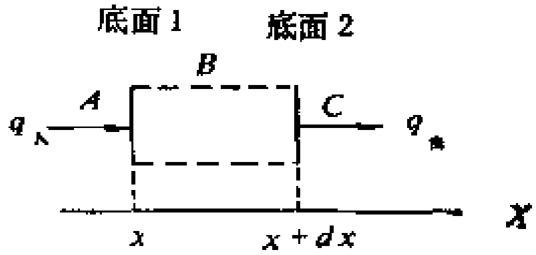


图 8-3

4.试推导一维和三维的热传导方程(31、38)和(31、39).

解：（1）仍采用“隔离物体法”，任取一小体积 B，如图8-3所示：在 $\varDelta t$ 时间内，自 A 通过底面 1 流入 B 的热量为 $q_入 s\varDelta t$，自 B 通过底面 2 流出的热量为 $q_出 s\varDelta t$，热量的净流入量为：$Q=(q_入-q_出)s\varDelta t$，但由于 $q_入=-K\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x$，$q_出=-K\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\varDelta x}$，因净流入的热量为 $Q=\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+\varDelta x}-K\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x\right)S\varDelta t$. 上述净流入热量使 dx 区间内的物质温度升高 du，设物质的比热为 C. 密度为 ρ，则

$$C\rho dxdu=(q_入-q_出)dt$$
$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdt,$$

即 $C\rho\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right)$ 这就是（31～38）式.

（2）任取一小体积 dV，位于 $x,x+dx$；$y,y+dy$；$z,z+dz$；之间，如图8-4，先考虑在 $x,x+dx$ 两面与邻域交换热量，在这两面上热流强度沿正 x 方向的分量为 $q_入=-Ku_x|_x$，$q_出=-Ku_x|_{x+dx}$，所以这一小块在 $\varDelta t$ 的时间所流入的热量为 $q_入 s\varDelta t=-K$

$\times u_x|_x dydz\Delta t$，所流出的热量为$q_{出}S\Delta t = -Ku_x|_{x+dx}dydz\Delta t$，所以它所流入的净热量为

$$Q_1 = \left(K\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x+dx} - K\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_x\right)dydz\Delta t$$

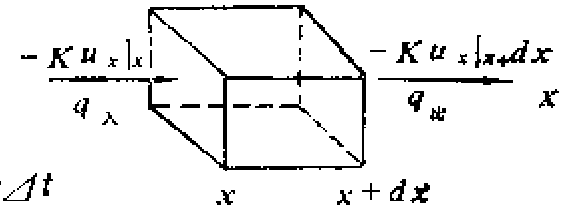


图 8-4

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)dxdydz\Delta t.$$

同样通过y，$y+dy$，两面所流入净热量是：

$$Q_2 = \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right)dydxdz\Delta t,$$

通过z，$z+dz$两面所流入净热量是：

$$Q_3 = \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right)dzdydx\Delta t,$$

上述流入的净热量$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3$，使小体积dV的温度升高du，如仍以C表小体积$dV = dxdydz$内物质的比热，ρ表密度就有$C\rho dudxdydz = \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K \times \frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]dxdydz$，

即 $$C\rho\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(K\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(K\frac{\partial u}{\partial z}\right),$$

此即（31、39）式。

5．混凝土浇灌后逐渐放出"水化热"，放热速率正比于当时尚储存着水化热密度Q，即$\frac{dQ}{dt} = -\beta Q$，试推导浇灌后的混凝土内的热传导方程。

解：设浇灌后的混凝土中在初始时刻储存的水化热密度为

Q_0，则在 t 时刻它所储存的水化热密度为$\int_{Q_0}^{Q}\frac{dQ}{Q}=\int_0^t-\beta dt$

$$\ln Q=-\beta t+\ln Q_0,\quad Q=Q_0e^{-\beta t},$$

所以在 t 时刻它的放热速率为$\frac{dQ}{dt}=-\beta Q_0e^{-\beta t}$.

其它分析与上题类似．只是现在还有热源分布于物质之中在单位时间内于单位体积中放出的热量即为$-\beta Q_0e^{-\beta t}$，故上题的热传导方程改为：

$$\rho Cu_t=\left[\frac{\partial}{\partial x}(Ku_x)+\frac{\partial}{\partial y}(Ku_y)+\frac{\partial}{\partial z}(Ku_z)\right]+Q_0\beta e^{-\beta t},$$

即 $$C\rho u_t-\frac{\partial}{\partial x}(Ku_x)+\frac{\partial}{\partial y}(Ku_y)+\frac{\partial}{\partial z}(Ku_z)=Q_0\beta e^{-\beta t}.$$

6．均质导线电阻率为r，通过均匀分布的直流电，电流密度为j，试推导导线内的热传导方程．

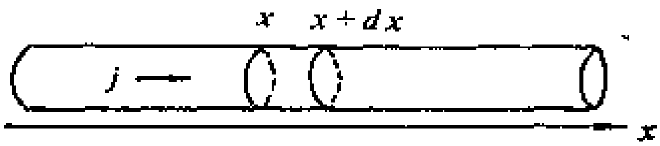


图 8-5

解：设均质导线面积为S，热量沿电流方向传播，先考虑一维情况，取x方向与电流和热量传播方向相同，在x处和$x+dx$处研究问题．

设q为单位时间里通过单位截面的热量，由热传导定律则有$q=-K\frac{\partial u}{\partial x}$，式中$u$是温度，$K$为热传导系数．在$dt$的时间里，流入体元$dV=Sdx$的净热量为

$$\left\{-K\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_x-\left[-K\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{x+dx}\right\}Sdt$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)Sdtdx,$$

由于电流密度为j，电阻率为r的导体在体元上产生的焦耳热为

$$J^2Rdt=(jS)^2\left[r\frac{dx}{S}\right]dt=j^2rSdxdt.$$

小体积dV中因温升而需要的热量＝净流入体元中的热量＋热源在体元中产生的热量

$$C\rho dVdu=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)Sdxdt+j^2rSdxdt,$$

$$C\rho du/dt=\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial u}{\partial x}\right)+j^2r. \quad 或 \quad C\rho\frac{\partial u}{\partial t}-K\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=j^2r.$$

如截面积S较大时，应该三维空间的热传导，这时泛定方程为

$$C\rho u_t-K\Delta u=j^2r.$$

7. 长为l的柔软均质绳索，一端固定在以匀速ω转动的竖直轴上，由于惯性离心力的作用，这弦的平衡位置应是水平线，试推导此绳相对于水平线的横振动方程。

解：如图示，在小振动的情况下，$\sin\alpha\approx\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\partial u}{\partial x}$，$\cos\alpha=1$，因而从$x$到$x+dx$这段绳的运动方程为

$$T_2u_x|_{x+dx}-T_1u_x|_x=\rho dx\cdot u_{tt},$$

即
$$(Tu_x)|_{x+dx}-(Tu_x)|_x=u_{tt}\rho dx,$$

为了求出在x处的张力$T(x)$，需考虑从x到l的一段绳上的惯性离心力的作用，设在x处的张力为$T(x)$，则

$$T(x)=\int_x^l\omega^2x\rho dx$$

$$=\frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2-x^2),$$

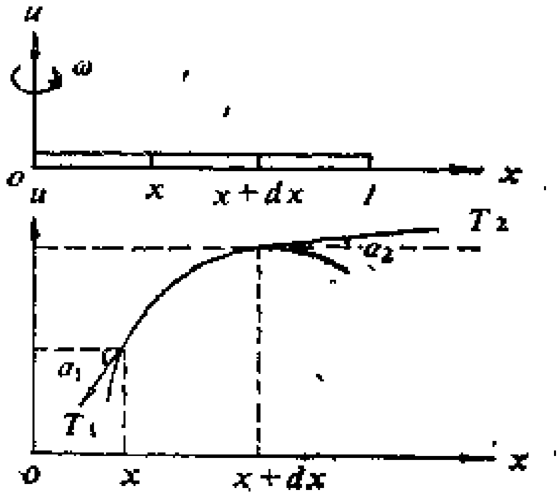


图 8-6

$$\therefore\quad\left[\frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2-x^2)\quad\right]$$

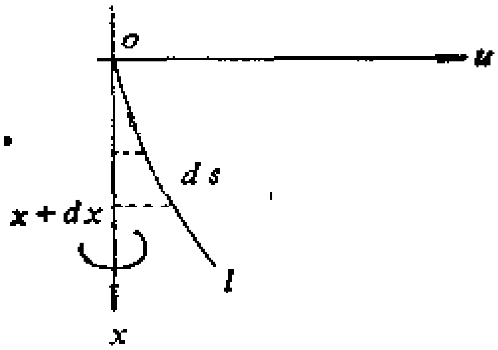
$$\times u_x\Big|_{x+dx} - \left[\frac{1}{2}\rho\omega^2(l^2-x^2)\right]u_x\Big|_x$$

$$=u_{tt}\rho dx,$$

即 $$\rho u_{tt}=\frac{\left[\frac{1}{2}(l^2-x^2)\rho\omega^2u_x\right]\Big|_{x+dx}-\left[\frac{1}{2}(l^2-x^2)\rho\omega^2u_x\right]\Big|_x}{dx}$$

$$=\frac{1}{2}\rho\omega^2\frac{\partial}{\partial x}[(l^2-x^2)u_x],$$

$$u_{tt}-\frac{1}{2}\omega^2\frac{\partial}{\partial x}[(l^2-x^2)u_x]=0.$$



8. 长为 l 的柔软均质重绳，上端固定在以匀速ω 转动的竖直轴上，由于重力作用，绳的平衡位置应是竖直线，试推导此线相对于竖直线的横振动方程。

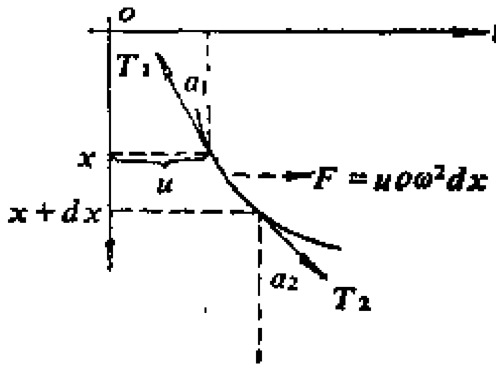


图 8-7

解：如图示，在小振动的情况下，$\sin\alpha\approx\text{tg}\alpha=\frac{\partial u}{\partial x}$，$ds\approx dx$，$\cos\alpha\approx1$．再取$x$到$x+dx$一段绳的运动方程是

$$T_2u_x|_{x+dx}-T_1u_x|_x+F=\rho dx\cdot u_{tt},$$

其中F是dx段弦所受的惯性离心力，$F=\rho dxu\omega^2$，在x端还受有张力（此处为重力）的作用，张力 T 为$T=\int_x^l\rho gdx$，

以此代入运动方程得：

$$[(l-x)\rho gu_x]_{x+dx}-[(l-x)\rho gu_x]_x+u\omega^2\rho dx=u_{tt}\rho dx.$$

即 $$u_{tt}=\frac{[(l-x)gu_x]_{x+dx}-[(l-x)gu_x]_x}{dx}+u\omega^2.$$

$$u_{tt}-g\frac{\partial}{\partial x}[(l-x)u_x]=u\omega^2$$

或 $$u_{tt}-g\frac{\partial}{\partial x}[(l-x)u_x]-u\omega^2=0.$$

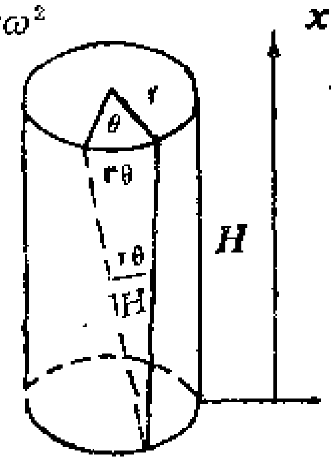


图 8-8

9.推导均匀圆柱的扭转振动方程，杆半径为 R，切变模量为 N

解：如果沿柱轴的切变是均匀的，在离轴 r 处的切变角为 $\frac{r\Theta}{H}$。事实上未必均匀，所以切变角应改用 $r\frac{\partial\theta}{\partial x}$ 计算，从而离轴 r 处的切胁强为 $Nr\theta_x$，从而

$$\text{力矩}=\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^R r(Nr\theta_x)rdr$$

$$=2\pi N\theta_x\int_0^R r^3dr=\frac{\pi N\theta_x R^4}{2},$$

设单位长度对轴的转动惯量为 I，则 x—$x+dx$ 段的动量矩定理给出

$$Idx\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=\frac{\pi NR^4}{2}(\theta_x|_{x+dx}-\theta_x|_x)$$

即 $$\frac{\partial^2\theta}{\partial t^2}=\frac{\pi NR^4}{2I}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}.$$

10.推导水槽中的重力波方程，水槽长 l，截面为矩形、两端由刚性平面封闭，槽中水在平衡时的深度为 h。

解：取 x 轴沿水槽的长度方向，水槽长为 l，宽为 S，将水面与静止水面的高度差记作 η，η 随 x 而异，且随 t 而变。

取 x 处的截面与 $x+dx$ 处的截面之间的水来考虑，由于这两处的 η 不同，所以这两部分水前后方所受的压力不等，其 x 方向

运动方程为：

$$(\rho S dx) u_{tt} = [-\rho g\eta|_{x+dx} + \rho g\eta|_x]S$$
$$= -\rho g S\eta_x dx,$$

即
$$u_{tt} = -g\eta_x. \tag{1}$$

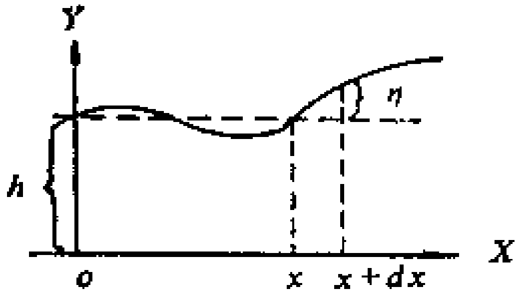


图 8-9(a)

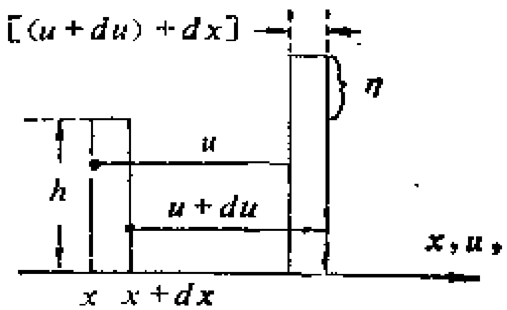


图 8-9(b)

我们还需要找一个方程，以便与（1）消去η，事实上，水是不可压缩的，试考察静止时在x—$x+dx$之间的水，其体积为$Shdx$，在运动中，这部分水的高度变为$(h+\eta)$，厚度变为

$$[(u+du)+dx-u] = du+dx,$$

从而体积变为$S(h+\eta)(du+dx)$.

由于水的不可压缩性，所以

$$Shdx = S(h+\eta)(du+dx)$$
$$= S[\eta du + hdu + \eta dx + hdx],$$
$$0 = \eta du + hdu + \eta dx,$$

略去二阶小量ηdu，上式给出 $\eta = -hu_x$， （2）

从（1）（2）消去η，得到

$$u_{tt} = ghu_{xx}. \tag{3}$$

这就是重力波的纵向运动方程.

再将（2）式微分 $\eta_{tt} = -h\dfrac{\partial^2}{\partial t^2}u_x = -h\dfrac{\partial}{\partial x}u_{tt}$， （4）

以（4）代入（1）有 $\eta_{tt} = gh\eta_{xx}$， （5）

这是重力波的横向运动方程.

§32. 定 解 条 件

1.长为 l 的均匀弦，两端 $x=0$，$x=l$ 固定，弦中张力为 T_0，在 $x=h$ 点，以横向力 F_0 拉弦，达到稳定后放手任其自由振动，写出初始条件。

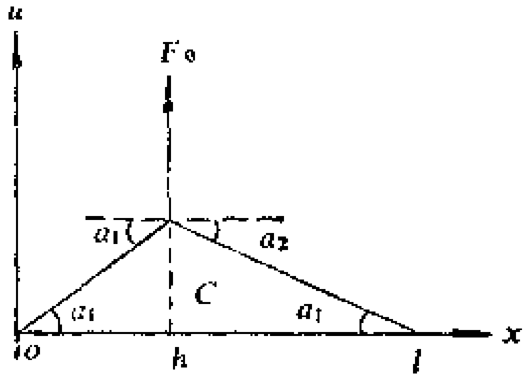


图 8-10

解：由点斜式方程，弦的初始位移为

$$u|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{c}{h}x,(0\leqslant x\leqslant h),\\[2mm] \dfrac{c}{l-h}(l-x),(h\leqslant x\leqslant l),\end{cases}$$

其中　c 为弦在 $x=h$ 点的初始位移。

如图，因为是小振动，所以 $\sin\alpha_1\approx\text{tg}\alpha_1=\dfrac{c}{h}$，

$$\sin\alpha_2\approx\text{tg}\alpha_2=\frac{c}{l-h},$$

$$\cos\alpha_2\approx\cos\alpha_1\approx1，dS\approx dx,$$

然后写出力平衡方程式 $F_0-T_1\sin\alpha_1-T_2\sin\alpha_2=0$。

$$T_2\cos\alpha_2-T_1\cos\alpha_1=0,\ T_2\approx T_1=T,$$

$$F_0=T\frac{c}{h}+T\frac{c}{l-h},$$

解得　　$C=\dfrac{F_0h(l-h)}{Tl}$，以 C 代入初始位移中即得：

$$u|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{F_0(l-h)}{T_0l}x,\ (0\leqslant x\leqslant h),\\[2mm] \dfrac{F_0h}{T_0l}(l-x),\ (h\leqslant x\leqslant l).\end{cases}$$

初始速度 $u_t|_{t=0}=0$．

2．长为 l 的均匀杆两端受拉力 F_0 作用而纵振动，写出边界条件．

解：杆的两端所受的拉力 F_0 等于这两端面所受的杨氏弹性力

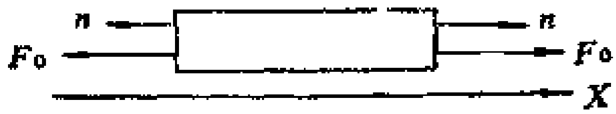


图 8-11(a)

$$YS\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=0}=-YS\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-F_0,$$

$$\therefore\quad YS\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=F_0,$$

$$YS\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=l}=YS\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=F_0.$$

3．长为 l 的均匀杆，两端有恒定热流进入，其强度为 q_0，写出这个热传导问题的边界条件．

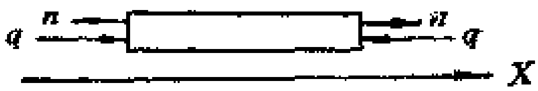


图 8-11(b)

解：在边界上有 $-K\dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_\Sigma=q_n$，

在 $x=l$ 端，

$$-K\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=l}=-K\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l}=q_n=-q,$$

即
$$K\frac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=l}=q.$$

在 $x=0$ 端，$-K\dfrac{\partial u}{\partial n}\bigg|_{x=0}=K\dfrac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=q_n=-q$，

即
$$K\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=0}=-q.$$

4．半径为 R 而表面熏黑的金属长圆柱体，受到阳光照射．阳光方向垂直于柱轴，热流强度为 M，写出这个圆柱的热传导

问题的边界条件．

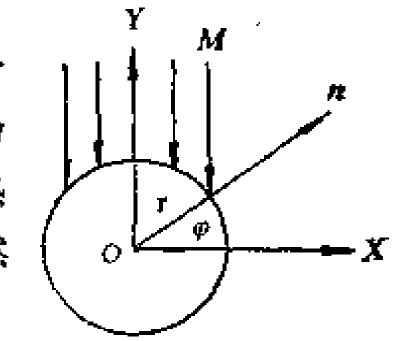


图 8-12

解：设圆柱体周围温度为θ，这个圆柱体的表面系熏黑，它的吸收系数为1，它可以全部吸收垂直照射阳光的热流的法向部分，即$M\sin\varphi$，同时又自然冷却，散热的热流强度为$H(u-\theta)$，因此，

$$-K\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\rho=R}+M\sin\varphi=H(u-\theta)\Big|_{\rho=R},$$

$$\text{即}\ -K\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{\rho=R}+M\sin\varphi=H(u-\theta)\Big|_{\rho=R},$$

$$\text{即}\quad \left[K\frac{\partial u}{\partial r}+H(u-\theta)\right]_{\rho=R}=\begin{cases}M\sin\varphi, & 0<\varphi<\pi,\\ 0, & \pi\leqslant\varphi\leqslant 2\pi,\end{cases}$$

不妨取圆柱周围环境的温度作为温标的零点，这样作则式中$\theta=0$．

5．习题1是否需要衔接条件？

解：弦在振动时，F_0已不作用，所以不需要衔接条件，若弦在振动时，力F_0仍然作用着，就要衔接条件．

6．一根杆由截面相同的两段连接而成．两段的材料不同，杨氏模量分别是Y^{I}、Y^{II}密度分别为ρ_1、ρ_2试写出衔接条件．

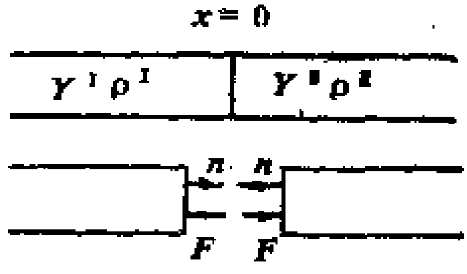


图 8-13

解：设二段杆的接点为$x=0$，在连接处位移u是连续的，所以有

$$u^{\mathrm{I}}\big|_{x-0}=u^{\mathrm{II}}\big|_{x+0},\qquad (1)$$

又在连接处两方的作用力为

$$Y^{\mathrm{I}}S\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial n}\Big|_{x-0}=Y^{\mathrm{I}}S\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial x}\Big|_{x-0}$$

与 $Y^{\mathrm{II}}S\frac{\partial u^{\mathrm{II}}}{\partial n}\Big|_{x+0} = -Y^{\mathrm{II}}S\frac{\partial u^{\mathrm{II}}}{\partial x}\Big|_{x+0}$，

这两力是作用力与反作用力所以

$$Y^{\mathrm{I}}S\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial x}\Big|_{x-0} = Y^{\mathrm{II}}S\frac{\partial u^{\mathrm{II}}}{\partial x}\Big|_{x+0}\text{，} \qquad (2)$$

（1）和（2）就是衔接条件。

7.写出静电场中电介质表面的衔接条件。

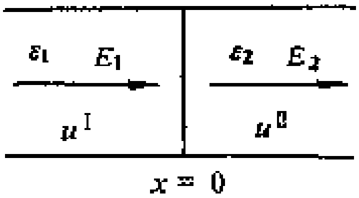


图 8-14

解：在电介质表面，电势是连续的。

$$u^{\mathrm{I}}\big|_{x-0} = u^{\mathrm{II}}\big|_{x+0}. \qquad (1)$$

又电位移法向分量连续

$$D=\varepsilon_1E_1=\varepsilon_2E_2 \text{ 即}\varepsilon_1\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial x}\Big|_{x-0} = \varepsilon_2\frac{\partial u^{\mathrm{II}}}{\partial x}\Big|_{x+0}. \qquad (2)$$

8.一根导热杆由两段构成，二段热传导系数，比热、密度分别是K^{I}、C^{I}、ρ^{I}和K^{II}、C^{II}、ρ^{I}，初始温度是u_0，然后保持两端温度为零，试把这个热传导问题表为定解问题。

解：

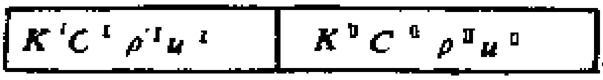


图 8-15

定解问题为

$$\begin{cases} u_t^{\mathrm{I}} - \dfrac{K^{\mathrm{I}}}{C^{\mathrm{I}}\rho^{\mathrm{I}}}u_{xx}^{\mathrm{I}} = 0, \\ u^{\mathrm{I}}(x_1,t) = 0, \\ u^{\mathrm{I}}(x,0) = u_0. \end{cases} \quad (x_1<x<x_2).$$

$$\begin{cases} u_t^{\mathrm{II}} - \dfrac{K^{\mathrm{II}}}{C^{\mathrm{II}}\rho^{\mathrm{II}}}u_{xx}^{\mathrm{II}} = 0, \\ u^{\mathrm{II}}(x_3,t) = 0, \\ u^{\mathrm{II}}(x,0) = u_0, \end{cases} \quad (x_2<x<x_3).$$

衔接条件，

$$u^{\mathrm{I}}|_{x_2-0}=u^{\mathrm{II}}|_{x_2+0},$$

$$K^{\mathrm{I}}\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial x}\bigg|_{x_2-0}=K^{\mathrm{II}}\frac{\partial u^{\mathrm{II}}}{\partial x}\bigg|_{x_2+0}.$$

§33. 二阶线性偏微分方程的分类

1.把下列方程化为标准形式：

（1） $au_{xx}+2au_{xy}+au_{yy}+bu_x+cu_y+u=0$.

解：因为$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=a^2-a\cdot a=0$ 所以该方程是抛物型的

特征方程$\frac{dy}{dx}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-a^2}}{a}=1$,

亦即只有一族实的特征线$y-x=$常数.

在这种情况下，我们设$\xi=y-x$，$\eta=x$（或令$\eta=y$，总之，此处η是与ξ无关的任一函数，当然宜取最简单的函数形式$\eta=x$或$\eta=y$）.

解一：用抛物型方程的标准形式$\eta_{yy}=-\frac{1}{A_{22}}[B_1u_\xi+B_2u_\eta+Cu+F]$先算出：

$$\begin{cases}A_{22}=a_{11}\eta_x^2+2a_{12}\eta_x\eta_y+a_{22}\eta_y^2\\ \quad=a+2a\cdot0+a\cdot0=a,\\ B_1=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y\\ \quad=a\cdot0+2a\cdot0+a\cdot0+b(-1)+c\cdot1=c-b,\\ B_2=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y\\ \quad=a\cdot0+2a\cdot0+a\cdot0+b\cdot1+c\cdot0=b,\\ C=1,\quad F=0,\end{cases}$$

$$\therefore\quad u_{\eta\eta}=-\frac{1}{a}[(-b+c)u_\xi+bu_\eta+u],$$

即 $$u_{\eta\eta}+\frac{c-b}{a}u_\xi+\frac{b}{a}u_\eta+\frac{1}{a}u=0.$$

解二：应用特征线方程，作自变量变换，求出

$$\begin{cases} u_x=-u_\xi+u_\eta,\quad u_y=u_\xi,\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}-u_{\xi\eta}-u_{\eta\xi}+u_{\eta\eta}=u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta},\\ u_{xy}=-u_{\xi\xi}+u_{\eta\xi},\quad u_{yy}=u_{\xi\xi}, \end{cases}$$

代入原方程得，$au_{\eta\eta}+(c-b)u_\xi+bu_\eta+u=0.$

（2）$u_{xx}-2u_{xy}-3u_{yy}+2u_x+6u_y=0,$

解：因为$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=4>0$，所以该方程是双曲型的

其特征方程为$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+3}}{1}=\begin{cases}1,\\-3,\end{cases}$

特征线为 $x-y=c_1$和$x+3y=c_2$.

故可令 $\xi=x-y$, $\eta=3x+y$, 在双曲型方程的标准型式，

$$u_{\xi\eta}=-\frac{1}{2A_{12}}[B_1u_\xi+B_2u_\eta+cu+F]$$中，先算出，

$$\begin{cases} A_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y\\ \qquad=1\cdot1\cdot3+(-1)[1\cdot1+(-1)\cdot3]+(-3)(-1)\cdot1\\ \qquad=3+2+3=8,\\ B_1=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y=-4,\\ B_2=a_{11}\eta_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y=12,\\ C=0,\quad F=0, \end{cases}$$

$\therefore$ $u_{\xi\eta}=-\dfrac{1}{16}[-4u_\xi+12u_\eta]$，即$4u_{\xi\eta}-u_\xi+3u_\eta=0,$

（3）$u_{xx}+4u_{xy}+5u_{yy}+u_x+2u_y=0.$

解：因为$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-1<0$，所以该方程是椭圆型的，

其特征方程为：$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\pm\sqrt{2^2-5}}{1}=2\pm i,$

特征线为：$(2+i)x-y=c_1$和$(2-i)x-y=c_2$,

故可令 $\xi=(2+i)x-y$，$\eta=(2-i)x-y$；为计算方便，又令

$$\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{2}(\xi+\eta)=2x-y,\\ \beta=\dfrac{1}{2i}(\xi-\eta)=x\ ;\end{cases}$$

在椭圆型方程的标准形式：

$$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=-\frac{1}{A_{12}}[(B_1+B_2)u_\alpha+i(B_2-B_1)u_\beta+2cu+F]$$

中，先算出：

$$\begin{cases}A_{12}=a_{11}\xi_x\eta_x+a_{12}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+a_{22}\xi_y\eta_y=2,\\ B_1=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\xi_{xy}+a_{22}\xi_{yy}+b_1\xi_x+b_2\xi_y=i\ ,\\ B_2=a_{11}\xi_{xx}+2a_{12}\eta_{xy}+a_{22}\eta_{yy}+b_1\eta_x+b_2\eta_y=-i,\\ C=0,\ \ F=0,\end{cases}$$

$\therefore\quad u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}=-\dfrac{1}{2}[i(-2i)u_\beta]$，即$u_{\alpha\alpha}+u_{\beta\beta}+u_\beta=0$。

改变自变量α、β的记号为ξ，η，则$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+u_\eta=0$。

（4） $u_{xx}+yu_{yy}=0$。

解：$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-y$。

(i) 如$y<0$，则$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-y>0$，该方程为双曲型。

其特征方程为：$\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{-y}$，和$\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{-y}$，

其特征线为： $x+2\sqrt{-y}=c_1$ 和 $x-2\sqrt{-y}=c_2$，

故可令：$\xi=x+2\sqrt{-y}$，$\eta=x-2\sqrt{-y}$。

在双曲型方程的标准形式

$u_{\xi\eta}=-\dfrac{1}{2A_{12}}[B_1u_\xi+B_2u_\eta+cu+F]$中，先算出

$$\left\{\begin{aligned}
A_{12} &= a_{11}\xi_x\eta_x + a_{12}(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x) + a_{22}\xi_y\eta_y \\
&= 1 + 0 + y\left(\frac{1}{-\sqrt{-y}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{-y}}\right) = 2, \\
B_1 &= a_{11}\xi_{xx} + 2a_{12}\xi_{xy} + a_{22}\xi_{yy} + b_1\xi_x + b_2\xi_y \\
&= -\frac{1}{2\sqrt{-y}} = \frac{2}{\eta-\xi}, \\
B_2 &= a_{11}\eta_{xx} + 2a_{12}\eta_{xy} + a_{22}\eta_{yy} + b_1\eta_x + b_2\eta_y \\
&= \frac{1}{2\sqrt{-y}} = \frac{2}{\xi-\eta}, \\
C &= 0, \quad F = 0.
\end{aligned}\right.$$

所以原方程化为 $(\xi-\eta)u_{\xi\eta} + \frac{1}{2}(u_\xi - u_\eta) = 0$。

(ii) 如$y>0$，则$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -y<0$，该方程为椭圆型。其特征方程为：$\frac{dy}{dx} = \sqrt{y}\,i$ 和$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{y}\,i$，

特征线为：$x + 2\sqrt{y}\,i = c_1$ 和$x - 2\sqrt{y}\,i = c_2$。

故可令 $\xi = x + 2\sqrt{y}\,i$，$\eta = x - 2\sqrt{y}\,i$，为方便计，又令

$$\alpha = \frac{1}{2}(\xi+\eta) = x, \quad \beta = \frac{1}{2i}(\xi-\eta) = 2\sqrt{y} \text{ 或 } y = \frac{\beta^2}{4},$$

则 $u_{xx} = u_{\alpha\alpha}$，$u_y = u_\beta\frac{1}{\sqrt{y}}$，$u_{yy} = -\frac{1}{2y^{3/2}}u_\beta + u_{\beta\beta}\frac{1}{y}$，

原方程为 $$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} - \frac{1}{2\sqrt{y}}u_\beta = 0,$$

即 $$u_{\alpha\alpha} + u_{\beta\beta} - \frac{1}{\beta}u_\beta = 0.$$

把符号α,β换成ξ,η，就有$u_{\xi\xi} + u_{\eta\eta} - \frac{1}{\eta}u_\eta = 0$。

(5) $u_{xx} + xu_{yy} = 0$。

解：$a_{12}^2 - a_{11}a_{22} = -x$，所以特征方程为$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{x}$。

(i) 如$x<0$，则$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-x>0$，所以方程是双曲型的。

特征线：$y+\frac{2}{3}(-x)^{3/2}=C_1$ 和 $y-\frac{2}{3}(-x)^{3/2}=C_2$，

或改写为$\frac{3}{2}y+(-x)^{3/2}=C_1$ 及$\frac{3}{2}y-(-x)^{3/2}=C_2$，

令 $$\xi=\frac{3}{2}y+(-x)^{3/2},\tag{1}$$

$$\eta=\frac{3}{2}y-(-x)^{3/2},\tag{2}$$

$$u_{\xi\eta}=-\frac{1}{2A_{12}}[B_1u_\xi+B_2u_\eta+cu+F],$$

$$A_{12}=-\frac{3}{2}\sqrt{-x}\cdot\frac{3}{2}\sqrt{-x}+x\frac{3}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{9}{2}x,$$

$$B_1=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{-x}},\qquad B_2=-\frac{3}{4}\frac{1}{\sqrt{-x}},$$

$$u_{\xi\eta}=-\frac{1}{9x}\frac{3}{4\sqrt{-x}}(u_\xi-u_\eta)$$

$$=\frac{1}{12(-x)^{3/2}}(u_\xi-u_\eta).\tag{3}$$

将(1)减(2)式得

$$\xi-\eta=2(-x)^{3/2},$$

$\therefore\quad 12(-x)^{3/2}=6(\xi-\eta)$，代入（3）

就化成标准形 $u_{\xi\eta}-\frac{1}{6(\xi-\eta)}(u_\xi-u_\eta)=0$。

(ii) 如$x>0$，则$-x<0$，则$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-x<0$，则此方程为椭圆型。

特征方程为：$\frac{dy}{dx}=\pm\sqrt{x}\,i$，

特征线为：$\frac{3}{2}y+ix^{3/2}=C_1$和$\frac{3}{2}y-ix^{3/2}=C_2$，

令 $\xi=\frac{3}{2}y$， $\eta=-x^{3/2}$，

则 $u_y=u_\xi\xi_y=\frac{3}{2}u_\xi$， $u_{yy}=\frac{9}{4}u_{\xi\xi}$，

$$u_x=u_\eta\left(-\frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}\right)=-\frac{3}{2}u_\eta x^{\frac{1}{2}},$$

$$u_{xx}=u_{\eta\eta}\cdot\frac{1}{4}\cdot x-u_\eta\frac{1}{4\sqrt{x}},$$

方程为 $$\frac{9}{4}xu_{\eta\eta}+\frac{9}{4}xu_{\xi\xi}-u_\eta\frac{3}{4\sqrt{x}}=0,$$

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}-\frac{1}{3x^{3/2}}u_\eta=0 \text{ 即 } u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{3\eta}u_\eta=0.$$

（6） $y^2u_{xx}+x^2u_{yy}=0$。

解：$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-x^2y^2<0$ 故方程是椭圆型，

特征方程：$\frac{dy}{dx}=\frac{\pm\sqrt{-x^2y^2}}{y^2}=\pm i\frac{x}{y}$，

特征线为：$y^2+ix^2=C_1$， $y^2-ix^2=C_2$，

令 $\xi=y^2$， $\eta=x^2$，则有

$u_x=u_\eta\cdot 2x$， $u_{xx}=4x^2u_{\eta\eta}+2u_\eta$，

$u_y=u_\xi\cdot 2y$， $u_{yy}=4y^2u_{\xi\xi}+2u_\xi$，

原方程变为 $4x^2y^2u_{\eta\eta}+2y^2u_\eta+4y^2x^2u_{\xi\xi}+2x^2u_\xi=0$，

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2y^2}u_\xi+\frac{1}{2x^2}u_\eta=0,$$

$$u_{\xi\xi}+u_{\eta\eta}+\frac{1}{2\xi}u_\xi+\frac{1}{2\eta}u_\eta=0.$$

（7） $4y^2u_{xx}-e^{2x}u_{yy}-4y^2u_x=0$。

解：$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=4y^2e^{2x}>0$ 故方程为双曲型，

特征方程： $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\pm\sqrt{4y^2e^{2x}}}{4y^2}=\pm\dfrac{e^x}{2y}$，

特征线： $y^2+e^x=C_1$， $y^2-e^x=C_2$。

令 $\xi=y^2+e^x$， （1）

$\eta=y^2-e^x$， （2）

则 $u_x=u_\xi e^x+u_\eta(-e^x)=e^x(u_\xi-u_\eta)$。

$$u_{xx}=e^x(u_\xi-u_\eta)+e^x[u_{\xi\xi}e^x+u_{\xi\eta}(-e^x)-u_{\eta\xi}e^x+u_{\eta\eta}e^x]$$

$$=e^x(u_\xi-u_\eta)+e^{2x}(u_{\xi\xi}-2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}),$$

$$u_y=u_\xi\cdot 2y+u_\eta\cdot 2y=2y(u_\xi+u_\eta),$$

$$u_{yy}=2(u_\xi+u_\eta)+2y(u_{\xi\xi}\cdot 2y+u_{\xi\eta}\cdot 2y+u_{\eta\xi}\cdot 2y+u_{\eta\eta}\cdot 2y),$$

$$=2(u_\xi+u_\eta)+4y^2(u_{\xi\xi}+2u_{\xi\eta}+u_{\eta\eta}),$$

方程成为

$$-16y^2e^{2x}u_{\xi\eta}+(4ye^x-2e^{2x})u_\xi-(4y^2e^{2x}+2e^{2x})u_\eta$$

$$-4y^2e^x(u_\xi-u_\eta)=2.$$

即 $-16y^2e^xu_{\xi\eta}-2e^xu_\xi-2e^xu_\eta=0$,

$8y^2u_{\xi\eta}+u_\xi+u_\eta=0$ （3）

（1）+（2）有 $2y^2=\xi+\eta$， ∴ $8y^2=4(\xi+\eta)$，

代入（1）得 $4(\xi+\eta)u_{\xi\eta}+u_\xi+u_\eta=0$。

2.简化下列常系数方程：

（1） $u_{xx}+u_{yy}+\alpha u_x+\beta u_y+\nu u=0$。

解：试作函数变换 $u(x,y)=e^{\lambda x+\mu y}v(x,y)$，其中$\lambda$和$\mu$是待定常数，于是

$$\begin{cases}u_x=e^{\lambda x+\mu y}(v_x+\lambda v),\\ u_y=e^{\lambda x+\mu y}(v_y+\mu v),\\ u_{xx}=e^{\lambda x+\mu y}(v_{xx}+2\lambda v_x+\lambda^2 v),\\ u_{xy}=e^{\lambda x+\mu y}(v_{xy}+\lambda v_y+\mu v_x+\lambda\mu v),\\ u_{yy}=e^{\lambda x+\mu y}(v_{yy}+2\mu v_y+\mu^2 v),\end{cases}$$

以此代入原方程，约去公共因子$e^{\lambda x+\mu y}$后得：

$v_{xx}+v_{yy}+(2\lambda+\alpha)v_x+(2\mu+\beta)v_y+(\lambda^2+\mu^2+2\lambda+\beta\mu+\nu)v$
$=0$。

令 $\lambda=-\dfrac{\alpha}{2}$， $\mu=-\dfrac{\beta}{2}$， 即 $u=e^{-\frac{\alpha}{2}x-\frac{\beta}{2}y}v$，则一阶偏导数$v_x$和$v_y$的项消去，方程简化为：

$$v_{xx}+v_{yy}+\left(\gamma-\frac{\alpha^2}{4}-\frac{\beta^2}{4}\right)v=0.$$

（2） $u_{xx}=\dfrac{1}{a^2}u_y+\alpha u+\beta u_x$。

解：与（1）题一样．试作函数变换 $u=ve^{\lambda x+\mu y}$，并以 u_x，u_y，u_{xx}，及 u 代入原方程，约去公共因子$e^{\lambda x+\mu y}$后得：

$$v_{xx}+(2\lambda-\beta)v_x-\frac{1}{a^2}v_y+(\lambda^2-\frac{\mu}{a^2}-\alpha-\lambda\beta)v=0.$$

如令 $\lambda=\dfrac{\beta}{2}$则v_x项被消去，如要 v 项也被消去，则必须

$$(\lambda^2-\frac{\mu}{a^2}-\alpha-\lambda\beta)=0,$$

即 $\mu=-a^2\left(\alpha+\dfrac{\beta^2}{4}\right)$，即 $u=ve^{\frac{\beta}{2}x-a^2\left(\alpha+\frac{\beta^2}{4}\right)y}$，即该常微分方程简化为 $v_{xx}-\dfrac{1}{a^2}v_y=0$。

（3） $u_{yy}+\dfrac{c-b}{a}u_x+\dfrac{b}{a}u_y+u=0$。

解．作函数变换 $u=ve^{\lambda x+\mu y}$，并以u_x，u_y，u_{yy}及u代入原方程，约去公共因子$e^{\lambda x+\mu y}$后得

$$v_{yy}+\frac{c-b}{a}v_x+\left(2\mu+\frac{b}{a}\right)v_y+\left[\mu^2+\lambda\frac{c-b}{a}+\frac{b}{a}\mu+1\right]v$$
$$=0.$$

如令 $\mu=-\frac{b}{2a}$，则v_y项消失；如要 v 项也消去，则必须

$\mu^2+\lambda\left(\frac{c-b}{a}\right)+\frac{b}{a}\mu+1=0$，　即 $\lambda=\frac{4a^2-b^2}{4a(b-c)}$才可能．

所以，作出函数变换 $u=ve^{-\frac{b}{2a}y+\frac{4a^2-b^2}{4a(b-c)}x}$后，方程简化为

$$v_{yy}+\frac{c-b}{a}v_x=0.$$

（4）$u_{xy}+3u_x+4u_y+2u=0$.

解：作函数变换 $u=ve^{\lambda x+\mu y}$，并以 u_x，u_y，u_{xy}及 u 代入原方程，约去公共因子$e^{\lambda x+\mu y}$后得：

$$v_{xy}+(\mu+3)v_x+(\lambda+4)v_y+[\lambda\mu+3\lambda+4\mu+2]v=0.$$

如令 $\lambda=-4$，$\mu=-3$，即$u=ve^{-4x-3y}$ 则方程简化为

$$v_{xy}-10v=0.$$

（5）$2au_{xx}+2au_{xy}+au_{yy}+2bu_x+2cu_y+u=0$.

解：如直接作函数变换，该方程不能化简，所以，必须先作自变量的变换先消去u_{xy}项，然后再作函数变换，消去u_x、u_y项才行．

(i) 因为$a_{12}^2-a_{11}a_{22}=-a^2<0$，该方程为椭圆型

其特征方程是：$\frac{dy}{dx}=\frac{a\pm\sqrt{a^2-2a^2}}{2a}=\frac{1}{2}\pm i/2$，

即 $2\frac{dy}{dx}=1+i$，和 $2\frac{dy}{dx}=1-i$，

特征线为：$y+(1+i)x=C_1$，　　$y-\frac{1}{2}(1-i)x=c_2$，

令 $\xi=y-\frac{x}{2}$，　$\eta=\frac{x}{2}$，　$y=\xi+\eta$，

则 $u_x=\frac{1}{2}(u_\eta-u_\xi)$，　　$u_{xx}=u_{\eta\eta}-\frac{1}{4}u_{\xi\xi}-\frac{1}{2}u_{\xi\eta}$，

$$u_{xy}=\frac{1}{2}u_{\eta\xi}-\frac{1}{2}u_{\xi\xi},\quad u_y=u_\xi,\quad u_{yy}=u_{\xi\xi},$$

方程成为

$$2a\cdot\frac{1}{4}(u_{\eta\eta}-2u_{\eta\xi}+u_{\xi\xi})+2a\cdot\frac{1}{2}(u_{\eta\xi}-u_{\xi\xi})+a\cdot u_{\xi\xi}$$

$$+2b\cdot\frac{1}{2}(u_\eta-u_\xi)+2cu_\xi+u$$

$$=0,$$

即 $\quad au_{\xi\xi}+au_{\eta\eta}+(4c-2b)u_\xi+2bu_\eta+2u=0.$

(ii) 对上式作进一步化简，令 $\quad u=ve^{\lambda\xi+\mu\eta}$，

$u_\xi=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\ (v_\xi+\lambda v),\quad u_{\xi\xi}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\ (v_{\xi\xi}+2\lambda v_\xi+\lambda^2 v),$

$u_\eta=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\ (v_\eta+\mu v),\quad u_{\eta\eta}=e^{\lambda\xi+\mu\eta}\ (v_{\eta\eta}+2\mu v_\eta+\mu^2 v),$

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\left[\frac{2(2c-b)}{a}+2\lambda\right]v_\xi+\left[\frac{2b}{a}+2\mu\right]v_\eta$$

$$+\left[\lambda^2+\mu^2+\frac{2(2c-b)}{a}\lambda+\frac{2b}{a}\mu+\frac{2}{a}\right]v$$

$$=0.$$

取 $\quad\lambda=-\frac{2c-b}{a},\quad \mu=-\frac{b}{a}$ 代入上式，则原方程简化为：

$$v_{\xi\xi}+v_{\eta\eta}+\frac{2}{a}\left(\frac{2bc-b^2-2c^2}{a}+1\right)v=0,$$

其中 $\quad u=ve^{\frac{b-2c}{a}\xi-\frac{b}{a}\eta}$，

代回原来变量 $\frac{b-2c}{a}\xi-\frac{b}{a}\eta=\frac{b-2c}{a}\left(y-\frac{x}{2}\right)-\frac{b}{a}\frac{x}{2}$

$$=\frac{2c-b-b}{2a}x+\frac{b-2c}{a}y$$

$$=\frac{c-b}{a}x+\frac{b-2c}{a}y,$$

$\therefore \qquad u=ve^{\frac{c-b}{a}x+\frac{b-2c}{a}y}.$

第九章 行波法

§34. 行 波 法

1. 求解无限长弦的自由振动，设弦的初始位移为 $\varphi(x)$，初始速度为 $-a\varphi'(x)$。

解：
$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & -\infty<x<+\infty, \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \\ u_t|_{t=0}=-a\varphi'(x). \end{cases}$$

这是一个一维的无界空间的问题，根据达朗伯公式：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

将初始位移和初始速度代入上式得：

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right] \\ &\quad +\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left[-a\varphi'(\xi)\right]d\xi \\ &= \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right]-\frac{1}{2}\int_{x-at}^{x+at}\varphi'(\xi)d\xi \\ &= \frac{1}{2}\left[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)\right] \\ &\quad -\frac{1}{2}\varphi(x+at)+\frac{1}{2}\varphi(x-at) \\ &= \varphi(x-at). \end{aligned}$$

波只朝一个方向（x 正方向）传播，这是一列行波。

2. 求解无限长理想传输线上电压和电流的传播情况，设初

始电压分布为 $A\cos kx$，初始电流分布为$\sqrt{\frac{C}{L}}A\cos kx$。

解：（1）电压的传播情况：

传输线方程：$v_{tt}-a^2v_{xx}=0$，式中$a^2=\frac{1}{LC}$。

初始条件：

$$\begin{cases} v\Big|_{t=0}=A\cos kx=\varphi(x), \\ v_t\Big|_{t=0}=-\frac{1}{C}j_x\Big|_{t=0}=\left(-\frac{1}{C}\right)\sqrt{\frac{C}{L}}Ak(-\sin kx) \\ \qquad =aAk\sin kx=\psi(x). \end{cases}$$

应用一维无界空间解的达朗伯公式有：

$$\begin{aligned} v(x,t)&=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi \\ &=\frac{1}{2}[A\cos k(x+at)+A\cos k(x-at)] \\ &\quad+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}aAk\sin k\xi d\xi \\ &=\frac{1}{2}[A\cos k(x+at)+A\cos k(x-at)] \\ &\quad+\frac{A}{2}[-\cos k(x+at)+\cos k(x-at)] \\ &=A\cos k(x-at). \end{aligned}$$

（2）电流的传播情况：

传输线方程：$j_{tt}-a^2j_{xx}=0$，式中$a^2=\frac{1}{LC}$，

初始条件：

$$\begin{cases} j\Big|_{t=0}=\sqrt{\frac{C}{L}}A\cos kx=\varphi(x), \\ j_t\Big|_{t=0}=-\frac{1}{L}v_x\Big|_{t=0}=\frac{Ak}{L}\sin kx=\psi(x). \end{cases}$$

应用一维无界空间解达朗伯公式：

$$j(x,t)=\frac{1}{2}\left[\sqrt{\frac{C}{L}}A\cos k(x+at)+\sqrt{\frac{C}{L}}A\cos k(x-at)\right]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\frac{Ak}{L}\sin k\xi d\xi$$

$$=\frac{A}{2}\sqrt{\frac{C}{L}}[\cos k(x+at)+\cos k(x-at)]$$

$$+\frac{\sqrt{LC}}{2L}A[-\cos k(x+at)+\cos(x-at)]$$

$$=\sqrt{\frac{C}{L}}A\cos k(x-at).$$

3. 在 $G/C=R/L$ 条件下求无限长传输线上的电报方程的通解.

解：关于 j 和 v 的电报方程为(31.13)(31.14)：

$$\begin{cases} LCj_{tt}-j_{xx}+(LG+RC)j_t+RGj=0, \\ LCv_{tt}-v_{xx}+(LG+RG)v_t+RGv=0. \end{cases}$$

以 j 的方程为代表求其通解. 直接求其通解是比较困难的，因此要作函数变换，以消去一阶微分项，

令 $j=e^{\lambda x+\mu t}u$,

则 $j_x=e^{\lambda x+\mu t}(u_x+\lambda u)$, $j_t=e^{\lambda x+\mu t}(u_t+\mu u)$,

$$j_{xx}=e^{\lambda x+\mu t}(u_{xx}+2\lambda u_x+\lambda^2u),$$

$$j_{tt}=e_0{}^{\lambda x+\mu t}(u_{tt}+2\mu u_t+\mu^2u).$$

代入关于 j 的方程，并约去公共因子 $e^{\lambda x+\mu t}$ 后得：

$$LC(u_{tt}+2\mu u_t+\mu^2u)-(u_{xx}+2\lambda u_x+\lambda^2u)+(LG+RC)(u_t+\mu u)+RGu=0,$$

$$LCu_{tt}-u_{xx}+[2\mu LC+(LG+RC)]u_t-2\lambda u_x+[LC\mu^2-\lambda^2+\mu(LG+RC)+RG]u$$

$= 0$.

如果选取$\lambda = 0 \quad \mu = -(LG+RC)/2LC$并注意$G/C = \dfrac{R}{L}$,

则$\mu = -\dfrac{2RC}{2LC} = -\dfrac{R}{L}$代入上式，方程化简为：

$$LCu_{tt} - u_{xx} + \left[LC\left(-\frac{R}{L}\right)^2 - \frac{R}{L}(LG+RC) + RG\right]u$$

$= 0$,

$$u_{tt} - \frac{1}{LC}u_{xx} = 0, \text{ 即} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, \text{ 其中 } a = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

如果初始条件为

$$j|_{t=0} = \varphi(x), \qquad j_t|_{t=0} = \psi_1(x),$$

则
$$\begin{cases} u|_{t=0}e^{-(\lambda x+\mu t)}j|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = j_te^{-\lambda x-\mu t}|_{t=0} - \mu u|_{t=0} = j_t|_{t=0} - \mu\varphi(x) \end{cases}$$

$$= \psi_1(x) - \left(-\frac{R}{L}\right)\varphi(x) = \psi_1(x) + \frac{R}{L}\varphi(x) = \psi(x),$$

应用达朗伯公式，可以得到关于$u_{tt} - a^2u_{xx} = 0$的通解为：

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)]$$

$$+ \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

$$\therefore \quad j = e^{\mu t}u = e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{1}{2}[\varphi(x+at) + \varphi(x-at)]\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.\right.$$

4.无限长弦在点$x = x_0$受到初始冲击，冲量为I，试求解弦的振动.〔提示：$u_t|_{t=0} = (I/\rho)\delta(x-x_0)$〕.

解：
$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & \left(-\infty<x<\infty \text{其中 } a^2=\dfrac{I}{\rho}\right), \\ u|_{t=0}=0, \\ u_t|_{t=0}=\dfrac{I}{\rho}\delta(\xi-x_0)=\dfrac{I}{\rho}H'(\xi-x_0), \end{cases}$$

$$u(x,t)=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\left(\frac{I}{\rho}\right)\delta(x-x_0)d\xi$$
$$=\frac{I}{2a\rho}\int_{x-at}^{x+at}H'(\xi-x_0)d(\xi-x_0)$$
$$=\frac{I}{2\rho\sqrt{\dfrac{T}{\rho}}}\Big[H(\xi-x_0)\Big]_{x-at}^{x+at}$$
$$=\frac{I}{2\sqrt{\rho T}}[H(x-x_0+at)-H(x-x_0-at)].$$

5. 求解细圆锥形均质杆的纵振动〔提示：泛定方程见§31习题2，作变换 $u=v/x$〕。

解：细圆锥形的均质杆的纵振动方程已在§31习题中导出，即：$u_{tt}-a^2\dfrac{1}{x^2}\dfrac{\partial}{\partial x}(x^2u_x)=0$，

直接求解该方程是比较困难的，因此作变换
$$u(x,t)=\frac{v(x,t)}{x},$$

则 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{1}{x}\dfrac{\partial v}{\partial x}-\dfrac{v}{x^2}$，

$$\frac{\partial}{\partial x}(x^2u_x)=\frac{\partial}{\partial x}\left\{x\frac{\partial v}{\partial x}-v\right\}=x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

$$u_{tt}=\frac{1}{x}v_{tt},$$

代入原方程式即有

$$\frac{1}{x}v_{tt}-a^2\frac{1}{x^2}\cdot x\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}=0,$$

即 $v_{tt}-a^2v_{xx}=0$.

$v(x,t)$的通解为$v(x,t)=f_1(x-at)+f_2(x+at)$,

$$\therefore\quad u(x,t)=\frac{1}{x}v(x,t)$$

$$=\frac{1}{x}[f_1(x-at)+f_2(x+at)].$$

6.半无限长杆的端点受到纵向力$F(t)=A\sin\omega t$作用，求解杆的纵振动.

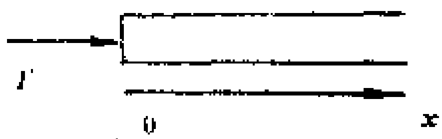


图 9-1

解：泛定方程$u_{tt}-a^2u_{xx}=0$.

初始条件：

$$\begin{cases}u|_{t=0}=\varphi(x),\quad x>0,\\ u_t|_{t=0}=\psi(x),\quad x>0,\end{cases}$$

边界条件 $u_x|_{x=0}=\dfrac{A}{YS}\sin\omega t$,

对$x>at$的地方，端点的影响未传到，所以

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi.$$

对$x<at$的地方，需要考虑端点的影响. 对 $x<0$, $\varphi(x)$和$\psi(x)$未定义，现将它们延拓.

$$\Phi(x)=\begin{cases}\varphi(x),(x\geqslant 0),\\ \varphi_1(x),(x<0).\end{cases}\qquad \Phi(x)=\begin{cases}\psi(x),(x\geqslant 0),\\ \psi_1(x),(x<0),\end{cases}$$

其中$\varphi_1(x)$和$\psi_1(x)$待定. 应用达朗伯公式：

$$u=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0}\psi_1(\xi)d\xi,$$

它应满足边界条件

$$u_x\Big|_{x=0}=\frac{1}{2}\varphi'(at)+\frac{1}{2}\varphi_1'(-at)+\frac{1}{2a}\psi(at)$$
$$-\frac{1}{2a}\psi_1(-at)$$
$$=\frac{A}{YS}\sin\omega t,$$

显然，取$\varphi_1(x)=\varphi(-x)$，而$\psi_1(x)=\psi(-x)+\dfrac{2aA}{YS}\sin\dfrac{\omega}{a}x$，即可满足边界条件.

$$\therefore\quad u=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\xi)d\xi+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0}\psi(-\xi)d\xi$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{0}\frac{2aA}{YS}\sin\frac{\omega}{a}\xi d\xi$$
$$=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(at-x)]+\frac{1}{2a}\int_0^{x+at}\psi(\xi)d\xi$$
$$+\frac{1}{2a}\int_0^{at-x}\psi(\xi)d\xi$$
$$+\frac{Aa}{YS\omega}\left[\cos\omega\left(t-\frac{x}{a}\right)-1\right].$$

7.求解半无限长理想传输线上电报方程的解，端点通过电阻R而相接，初始电压分布$A\cos kx$，初始电流分布$\sqrt{\dfrac{C}{L}}A\cos kx$在什么条件下端点没有反射（这种情况叫作匹射）？

解：$\because$ 是理想传输线 $\therefore$ $G=R=0$

因此，定解问题是

$$\begin{cases} j_{tt} - a^2 j_{xx} = 0, \\ j\Big|_{t=0} = \sqrt{\dfrac{C}{L}} A\cos kx, (x < 0), \\ j_t\Big|_{t=0} = \dfrac{-1}{L} v_x\Big|_{t=0} = \dfrac{Ak}{L}\sin kx, \end{cases}$$

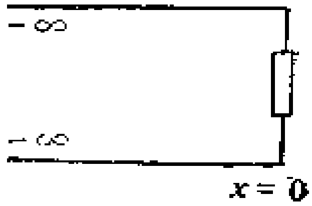


图 9-2

$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \\ v\big|_{t=0} = A\cos kx, \qquad (x<0). \\ v_t\Big|_{t=0} = \dfrac{-1}{C} j_x\Big|_{t=0} = \dfrac{Ak}{\sqrt{LC}}\sin kx, \end{cases}$$

电压 v 和电流 j 在 $x = 0$ 点有.

$$v\big|_{x=0} = Rj\big|_{x=0},$$

(i) 对于$t<\dfrac{|x|}{a}$端点的影响尚未到达，用达朗伯公式:

$$j(xt) = \frac{1}{2}\left\{\sqrt{\frac{C}{L}} A\cos k(x+at) + \sqrt{\frac{C}{L}} A\cos k(x-at)\right\} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \frac{Ak}{L}\sin k\xi d\xi.$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} A\cos k(x+at) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} A\cos k(x-at) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} A\int_{x-at}^{x+at}\sin k\xi d(k\xi).$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} A\cos k(x+at) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} A\cos k(x-at) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{C}{L}} A[-\cos k(x+at) + \cos k(x-at)]$$

$$= \sqrt{\frac{C}{L}} A\cos k(x-at),$$

同理$v(xt) = A\cos k(x-at)$,

这就是从$x<0$的区域沿x轴正方向朝着端点$x=0$行进的入

射波.

(ii) 对于 $t>\frac{|x|}{a}$，必须考虑到端点的反射，这里不拟从达朗伯公式(34.6)出发，而是直接从通解(34.5)出发

$$j(xt)=\sqrt{\frac{C}{L}}A\cos k(x-at)+g_1(x+at), \tag{1}$$

$$v(xt)=A\cos k(x-at)+g_2(x+at), \tag{2}$$

其中$g_1(x+at)$和$g_2(x+at)$是待求的反射波，因传输是理想的，故

(1)和(2)应满足$Lj_t=-v_x$,和$cv_t=-j_x$.

即
$$\begin{cases} L\sqrt{\frac{C}{L}}kaA\sin k(x-at)+Lag_1'(x+at) \\ =Ak\sin k(x-at)-g_2'(x+at). \\ CAka\sin k(x-at)+Cag_2'(x+at) \\ =\sqrt{\frac{C}{L}}A\sin k(x-at)-g_1'(x+at). \end{cases}$$

由于 $a=\sqrt{\frac{1}{LC}}$，所以上列两式即

$$\sqrt{\frac{L}{C}}g_1'(x+at)=-g_2'(x+at),$$

$$\sqrt{\frac{C}{L}}g_2'(x+at)=-g_1'(x+at).$$

总之g_1和g_2两个函数不是独立的，这样(1)和(2)应代之以

$$\begin{cases} j(xt)=\sqrt{\frac{C}{L}}A\cos k(x-at)-\sqrt{\frac{C}{L}}g_2(x+at), & (3) \\ v(xt)=A\cos k(x-at)+g_2(x+at), & (4) \end{cases}$$

(3)和(4)应满足边界条件$v|_{x=0}=Rj|_{x=0}$,即

$$A\cos kat+g_2(at)=R\sqrt{\frac{C}{L}}A\cos kat-R\sqrt{\frac{C}{L}}g_2(at)$$

由此解得

$$g_2(at)=\frac{1-R\sqrt{\frac{C}{L}}}{1+R\sqrt{\frac{C}{L}}}A\cos kat=\frac{\sqrt{\frac{L}{C}}-R}{\sqrt{\frac{L}{C}}+R}A\cos kat$$

以此代入（3）和（4）得到解答

$$j(xt)=\sqrt{\frac{C}{L}}A\cos k(x-at)-\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\sqrt{\frac{L}{C}}-R}{\sqrt{\frac{L}{C}}+R}$$

$$A\cos k(x+at),$$

$$v(xt)=A\cos k(x-at)+\frac{\sqrt{\frac{L}{C}}-R}{\sqrt{\frac{L}{C}}+R}A\cos k(x+at).$$

右边第二项是反射波，要想没有反射波，应令右边第二项的系数为零，即

$$\sqrt{\frac{L}{C}}=R,$$

端点没有反射波，意味着电波的能量全部被电阻吸收，
这叫做阻抗匹配，这时负载阻抗R等于传输线的特性阻抗$\sqrt{\frac{L}{C}}$.

8.半无限长的初始位移和速度都是零，端点作微小振动$u|_{x=0}=A\sin\omega t$，求解弦的振动.

解：对于$x\geqslant at$. 显然有 $v(x,t)=0$ 下面研究$t>\frac{x}{a}$，将初始条件延拓到$x<0$的半无界区域，

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & -\infty < x < \infty, \\ u(0, t) = A\sin\omega t, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0, \\ \varphi(x), & 0 < x, \end{cases} & u_t(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \geqslant 0, \\ \psi(x), & x < 0, \end{cases} \end{cases}$$

其中$\varphi(x)$和$\psi(x)$尚未确定。

将达朗伯公式应用于延拓后的无界弦。

$$u(x,t) = \frac{1}{2}\left[\Phi(x+at) + \Phi(x-at)\right] + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at} \Psi(\xi) d\xi,$$

且令其满足边界条件得到：

$$A\sin\omega t = \frac{1}{2}[0 + \varphi(-at)] + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{0} \Psi(\xi) d\xi,$$

即 $$A\sin\omega t = \frac{1}{2}\varphi(-at) + \frac{1}{2a}\int_{-at}^{0} \Psi(\xi) d\xi,$$

记at为x则

$$A\sin\omega \frac{x}{a} = \frac{1}{2}\varphi(-x) + \frac{1}{2a}\int_{-x}^{0} \psi(\xi) d\xi,$$

显然若取$\varphi(x) = 2A\sin\left(-\frac{\omega}{a}x\right)$，　　$\psi(x) = 0$。

于是$u(x,t) = \frac{1}{2}\varphi(x-at) = \frac{1}{2}2A\sin\left[-\frac{\omega}{a}(x-at)\right]$

$$= A\sin\omega\left(t - \frac{x}{a}\right). \qquad \left(t > \frac{x}{a}\right).$$

9．在弦的$x = 0$处悬挂着质量为M的载荷，有一行波$u(x, t) = f\left(t - \frac{x}{a}\right)$从$x < 0$的区域向悬挂点行进。试求反射波和透射波。

解：设波传到分界点$x = 0$处的时刻为$t = 0$，则依题意有：

$$\begin{cases} u^{\mathrm{I}}_{tt}-a^2u^{\mathrm{I}}_{xx}=0, & (-\infty<x<0), \qquad (1)\\ u^{\mathrm{I}}|_{t<0}=f\left(t-\dfrac{x}{a}\right), & \qquad (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} u^{\mathrm{II}}_{tt}-a^2u^{\mathrm{II}}_{xx}=0, & (0<x<\infty), \qquad (3)\\ u^{\mathrm{II}}|_{t<0}=0, \quad u^{\mathrm{II}}_t|_{t<0}=0. & \qquad (4)\end{cases}$$

衔接条件为

$$\begin{cases} u^{\mathrm{I}}|_{x=0}=u^{\mathrm{II}}|_{x=0}, & (5)\\ u^{\mathrm{I}}_t|_{x=0}=u^{\mathrm{II}}_t|_{x=0}=u_t|_{x=0}, \\ u^{\mathrm{I}}_{tt}|_{x=0}=u^{\mathrm{II}}_{tt}|_{x=0}=u_{tt}|_{x=0}, & (6)\\ T(u^{\mathrm{II}}_x-u^{\mathrm{I}}_x)|_{x=0}-Mg=Mu_{tt}|_{x=0}.\end{cases}$$

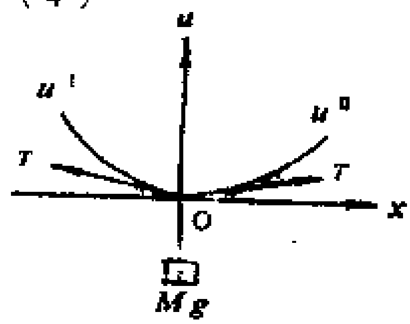


图 9-3

上式中 u 是荷载 Mg 的位移.

在 $x<0$ 的区域中，方程(1)的通解为

$$u^{\mathrm{I}}=f\left(t-\frac{x}{a}\right)+g\left(t+\frac{x}{a}\right),$$

其中 $g\left(t+\dfrac{x}{a}\right)$ 是待求的反射波。由条件(2)知 $g\left(\dfrac{x}{a}\right)=0$，$(x<0)$.

即 $\qquad g(\xi)=0, \qquad (\xi<0)$.

由 u^{I} 的解知 $u^{\mathrm{I}}_x|_{x=0}=\dfrac{1}{a}[g'(t)-f'(t)]$,

在 $x>0$ 的区域，只有透射波，而没有反射波，故(3)的解为

$$u^{\mathrm{II}}(xt)=h\left(t-\frac{x}{a}\right), \qquad (x>0).$$

其中 $h\left(t-\dfrac{x}{a}\right)$ 是待求的反射波，由条件(4)，可知

$$h\left(-\frac{x}{a}\right)=0, \qquad h'\left(-\frac{x}{a}\right)=0, \qquad (x>0).$$

即 $\qquad h(\xi)=0, \qquad h'(\xi)=0, \qquad (\xi<0)$.

由$u^{\mathrm{II}}(xt)$可得 $u_x^{\mathrm{II}}\big|_{x=0}=-\dfrac{1}{a}h'(t)$。

应用衔接条件(5)，(6)，可得

$$\begin{cases} f(t)+g(t)=h(t), \qquad f'(t)+g'(t)=h'(t), \\ f''(t)+g''(t)=h''(t)=u_{tt}\big|_{x=0}, \\ T\left\{-\dfrac{1}{a}h'(t)-\dfrac{1}{a}[g'(t)-f'(t)]\right\}-Mg=Mh''(t), \end{cases}$$

$$\therefore \quad h''(t)+\frac{2T}{Ma}[h'(t)-f'(t)]=-g,$$

将上式对t积分，并利用$h'\big|_{t=0}=0$，$h\big|_{t=0}=0$，得

$$h'(t)+\frac{2T}{Ma}[h(t)-f(t)]=-gt,$$

即 $$h'(t)+\frac{2T}{Ma}h(t)=\frac{2T}{Ma}f(t)-gt,$$

$$\therefore \quad h(t)=e^{\frac{-2T}{Ma}t}\left\{h(0)+\int_0^t\left[\frac{2T}{Ma}f(\tau)-g\tau\right]e^{\frac{2T}{Ma}\tau}d\tau\right\}$$

$$=e^{\frac{-2T}{Ma}t}\left[\frac{2T}{Ma}\int_0^t f(\tau)e^{\frac{2T}{Ma}\tau}d\tau-\int_0^t g\tau\, e^{\frac{2T}{Ma}\tau}d\tau\right]$$

$$=e^{\frac{-2T}{Ma}t}\left[\frac{2T}{Ma}\int_0^t f(\tau)e^{\frac{2T}{Ma}\tau}d\tau-g\frac{Ma}{2T}te^{\frac{2T}{Ma}t}+\frac{gM^2a^2}{4T^2}e^{\frac{2T}{Ma}\tau}\Big|_0^t\right],$$

$$=\frac{2T}{Ma}e^{\frac{-2T}{Ma}t}\int_0^t f(\tau)e^{\frac{2T}{Ma}\tau}d\tau-\frac{Ma}{2T}gt+\frac{M^2a^2}{4T^2}g\left[1-e^{\frac{-2T}{Ma}t}\right].$$

而反射波．　　　　$g(t)=h(t)-f(t)$．

故本题之解为：

透射波

$$
h\left(t-\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}0, & \left(t<\frac{x}{a}\right). \\ \frac{2T}{Ma}e^{\frac{-2T}{Ma}\left(t-\frac{x}{a}\right)}\int_0^{t-\frac{x}{a}}f(\tau)e^{\frac{2T}{Ma}\tau}d\tau \\ \quad -\frac{Ma}{2T}g\left(t-\frac{x}{a}\right)+\frac{Ma^2}{4T^2}g \\ \quad \left[1-e^{\frac{-2T}{Ma}\left(t-\frac{x}{a}\right)}\right] & \left(t>\frac{x}{a},x>0.\right).\end{cases}
$$

反射波

$$
g\left(t+\frac{x}{a}\right)=\begin{cases}0 & \left(t+\frac{x}{a}<0,\ x<0\right) \\ \frac{2T}{Ma}e^{\frac{-2T}{Ma}\left(t+\frac{x}{a}\right)}\int_0^{t+\frac{x}{a}}f(\tau)e^{\frac{2T}{Ma}\tau}d\tau \\ \quad -\frac{Ma}{2T}g\left(t+\frac{x}{a}\right)+\frac{M^2a^2}{4T^2}g \\ \quad \left[1-e^{\frac{-2T}{Ma}\left(t+\frac{x}{a}\right)}\right]-f\left(t+\frac{x}{a}\right). \\ \quad \left(t+\frac{x}{a}>0,\ x>0\right).\end{cases}
$$

10．平面偏振的平面光波沿 x 轴行进而垂直地投射于两种介质的分界面上．入射光波的电场强度 $E=E_0\sin\omega\left(t-\frac{n_1}{a}x\right)$，其中 n_1 是第一种介质的折射率．求反射光波和透射光波〔提示：在分界面上，E 连续，$\frac{\partial B}{\partial t}\left(即\frac{\partial E}{\partial x}\right)$ 连续〕．

解：设波传到分界面 $x=0$ 处的时刻为 $t=0$，得定解问题：

$$\begin{cases} E^{\mathrm{I}}_{tt}-\dfrac{a^2}{n_1^2}E^{\mathrm{I}}_{xx}=0, & (-\infty<x<0), & (1)\\ E^{\mathrm{I}}|_{t<0}=E_0\sin\omega\left(t-\dfrac{n_1}{a}x\right), & & (2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} E^{\mathrm{II}}_{tt}-\dfrac{a^2}{n_2^2}E^{\mathrm{II}}_{xx}=0, & (0<x<\infty), & (3)\\ E^{\mathrm{II}}|_{t<0}=0, \quad E^{\mathrm{II}}_{t}|_{t<0}=0, & & (4)\end{cases}$$

衔接条件 $$E^{\mathrm{I}}|_{x=0}=E^{\mathrm{II}}|_{x=0}, \qquad (5)$$

$$E^{\mathrm{I}}_{x}|_{x=0}=E^{\mathrm{II}}_{x}|_{x=0}, \qquad (6)$$

在 $x<0$ 的区域中，(1)之解为

$$E^{\mathrm{I}}=E_0\sin\omega\left(t-\frac{n_1}{a}x\right)+g\left(t+\frac{n_1}{a}x\right), \quad (x<0),$$

由条件(2)可得 $g(\xi)=0$，$(\xi<0)$.

在区域 $x>0$ 中，没有反射波，只有透射波.因此(3)的解为

$$E^{\mathrm{II}}=h\left(t-\frac{n_2}{a}x\right), \qquad (x>0).$$

由条件(4)，$h(\xi)=0$，$h'(\xi)=0$. $(\xi<0)$.

应用衔接条件(5)(6)，得

$$\begin{cases} E_0\sin\omega t+g(t)=h(t), & (7)\\ -\dfrac{E_0n_1\omega}{a}\cos\omega t+\dfrac{n_1}{a}g'(t)=-\dfrac{n_2}{a}h'(t), & (8)\end{cases}$$

将(8)对 t 积分，且由于 $g|_{t=0}=0$，$h|_{t=0}=0$.

$$-n_1E_0\sin\omega t+n_1g(t)=-n_2h(t), \qquad (9)$$

由(7)(9)消去 $h(t)$ 得

$$g(t)=\frac{(n_1-n_2)E_0}{n_1+n_2}\sin\omega t,$$

再得 $$h(t)=\frac{2n_1E_0}{n_1+n_2}\sin\omega t.$$

所以本题的解为：

反射波

$$g\left(t+\frac{n_1x}{a}\right)=\begin{cases}0, & \left(t+\dfrac{n_1x}{a}<0, x<0\right),\\ \dfrac{n_1-n_2}{n_1+n_2}E_0\sin\omega\left(t+\dfrac{n_1}{a}x\right), & \left(t+\dfrac{n_1x}{a}>0,\ x>0\right),\end{cases}$$

透射波

$$h\left(t-\frac{n_2x}{a}\right)=\begin{cases}0, & \left(t<\dfrac{n_2x}{a},\ x>0\right),\\ \dfrac{2n_1E_0}{n_1+n_2}\sin\left(t-\dfrac{n_2x}{a}\right), & \left(t>\dfrac{n_2x}{a},\ x>0\right).\end{cases}$$

第十章　分离变数（傅里叶级数）法

§35．分离变数法介绍

1．“顾名思义，分离变数法只能求出分离变数形式的解，如果一个定解问题的解不是分离变数形式的，用分离变数法不可能求得这个解。”试对上述说法加以评论．

解：分离变数法解方程可得到本征解，本征值说是分离变数形式的，但定解问题的解一般是本征解的某个叠加，即由本征解组成的级数，这种解已不是分离变数形式的了，事实上，一个解即使不是分离变数形式的也可展为级数，所以由分离变数法得到的解，一般并不一定是分离变数形式的．

2．演奏琵琶是把弦的某一点向旁拨开一个小距离，然后放手任其自由振动．设弦长为 l，被拨开的点在弦长的 $\frac{1}{n_0}$（n_0 为正整数）处，拨开距离为 h，试求解弦的振动．不要套用现成答案，请按照分离变数法的步骤一步一步求解．〔注意：在解答中，不存在 n_0 谐音以及 n_0 整倍数次谐音．因此，在不同位置拨弦（n_0 不同），发出的声音的音色也就不同．〕

解：定解问题为：

图 10-1

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\ (0<x<l), & (1)\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0, & (2)\\ u|_{t=0}=\begin{cases}\dfrac{n_0h}{l}x, & \left(0\leqslant x\leqslant\dfrac{l}{n_0}\right),\\ \dfrac{h}{l-\dfrac{l}{n_0}}(l-x), & \left(\dfrac{l}{n_0}\leqslant x\leqslant l\right),\end{cases} & (3)\\ u_t|_{t=0}=0,\ (0\leqslant x\leqslant l), & (4)\end{cases}$$

设$u(x,t)=X(x)T(t)$以此代入泛定方程和边界条件：

$$X(x)T''(t)-a^2T(t)X''(x)=0,\tag{5}$$

$$X(0)T(t)=X(l)T(t)=0,\tag{6}$$

由（5）式得到

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}.\tag{7}$$

只有上式两端均等于同一常数时才有可能成立，把这个常数记为$-\lambda$，代入（7）式成为：

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=-\lambda,$$

即

$$T''(t)+\lambda a^2T(t)=0,\tag{8}$$

$$X''(x)+\lambda X(x)=0,\tag{9}$$

在（6）中．若取$T(t)=0$，得出$u=X(x)T(t)=0$，显然无意义，只能取$X(0)=X(l)=0$由此式与x的方程（9）来求解$X(x)$，这要分$\lambda<0$，$\lambda=0$和$\lambda>0$三种情况．

（1）当$\lambda=0$时，由（9）式得$X(x)=C_1x+C_2$以此代入$X(0)=X(l)=0$得$C_1=C_2=0$则$X(x)\equiv0$，无意义，故得到$\lambda\neq0$．

（2）$\lambda<0$时，$-\lambda>0$，方程(9)的解是$X(x)=C_1l^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2l^{-\sqrt{-\lambda}x}$以此代入$X(l)=X(0)=0$得到；$C_1=C_2=0$，$X(x)=0$．也是无意义，可见$\lambda<0$的情况也要排除．

（3）$\lambda>0$，方程（9）的解是

$$X(x)=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x,\tag{10}$$

由边界条件$X(0)=X(l)=0$得到$C_1=0$，$C_2\sin\sqrt{\lambda}\,l=0$，这里$C_2$不能为0，否则得到的解只是零，无意义．因此只能取

$$\sin\sqrt{\lambda}\,l=0, \qquad \lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}, \ (n=1,2,3,\cdots)$$

$$\therefore \quad X_n(x)=C_2\sin\frac{n\pi}{l}x, \tag{11}$$

再解关于t的方程（8），用$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$，代入（8）式

$$T''_n(t)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(t)=0. \tag{12}$$

(10) 式的解为：

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l},$$

本征解为

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

一般解应是它的叠加：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}. \tag{13}$$

(13) 式应满足初始条件（3）和（4），则

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

$$\therefore \quad A_n=\frac{2}{l}\int_0^{l/n}\frac{n_0h}{l}\xi\sin\frac{n\pi\xi}{l}\,d\xi$$

$$+\frac{2}{l}\int_{l/n}^{l}\frac{n_0h}{(n_0-1)l}(l-\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$=\frac{2n_0^2h}{n^2\pi^2(n_0-1)}\sin\frac{n\pi}{n_0}.$$

(13) 式还应满足初始条件（4）

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a\pi nB_n}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}=0,$$

$$\therefore \quad \frac{a\pi n B_n}{l}=0, \qquad \therefore \quad B_n=0,$$

$$\therefore \quad u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$=\frac{2n_0^2h}{\pi^2(n_0-1)}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi}{n_0}\cos\frac{n\pi at}{l}$$

$$\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

由上式可以得知，不存在$n=kn_0$次谐音，因这时 $\sin\frac{n\pi}{n_0}=0$。

3.两端固定的弦的长度为 l，用细棒敲击弦上 $x=x_0$ 点，亦即在$x=x_0$施加冲力，设其冲量为I，求解弦的振动。〔注意：上题 n 次谐音的幅度$\propto\frac{1}{n^2}$，本题n次谐音幅度$\propto 1/n$，相比之下，细棒敲击弦发出的声音包含较多的高次谐音，比较刺耳。因此，演奏扬琴必须使用锤敲击弦而决不可用细棒〕。

解：定解问题：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, (0\leqslant x\leqslant l), \\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0, \\ u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=\dfrac{I}{\rho}\delta(x-x_0). \end{cases}$$

泛定方程的一般解为

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

代入初始条件：

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=0,$$

$$\therefore \quad A_n=0,$$

$$u_t|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\frac{I}{\rho}\delta(x-x_0),$$

$$\therefore\quad \frac{n\pi a}{l}B_n=\frac{2I}{l\rho}\int_0^l\sin\frac{n\pi x}{l}\delta(x-x_0)dx$$

$$=\frac{2I}{l\rho}\sin\frac{n\pi x_0}{l}.$$

$$\therefore\quad B_n=\frac{2I}{n\pi\rho a}\sin\frac{n\pi x_0}{l},$$

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$=\frac{2I}{\pi a\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

§36. 齐次的泛定方程（傅里叶级数法）

1.长为 l 的弦，两端固定，弦中张力为T，在距一端为x_0的一点以力F_0把弦拉开，然后突然撤除这力.求解弦的振动.

解：定解问题为

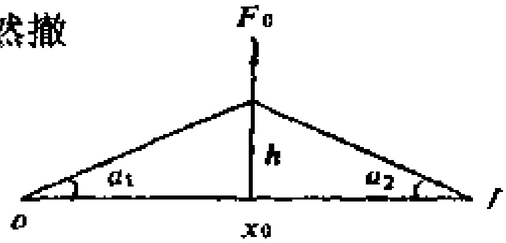


图 10-2

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0,(0<x<l). & (1)\\ u(0,t)=u(l,t)=0, & (2)\\ u(x,0)=\begin{cases}\dfrac{F_0}{T}\dfrac{l-x_0}{l}x,(0<x<0), \\ \dfrac{F_0}{T}\dfrac{x_0}{l}(l-x),(x_0<x<l), \end{cases} & (3)\\ u_t|_{t=0}=0. & (4)\end{cases}$$

令$u(x,t)=X(x)T(t)$代入泛定方程（1）得

$$\frac{X''}{X}=\frac{T''}{aT}=-\lambda^2.$$

可得
$$\begin{cases}T''+a^2\lambda^2T=0,\\X''+\lambda^2X=0, X(0)=X(l)=0.\end{cases}$$

由此可以得到有关X的解是：

$$X(x)=C\sin\lambda x.$$

由$X(l)=0$可知，$C\sin\lambda l=0$，C不能为0，否则$x\equiv0$，无意义，

$$\therefore \sin\lambda l=0, \lambda=\frac{n\pi}{l}(n=1,2,3,\cdots).$$

以λ的数值$\left(=\frac{n\pi}{l}\right)$代入关于$T$的方程得$T$的解：

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t,$$

$$T(t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right),$$

$$\therefore\quad u(x,t)=X(x)T(t)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi a}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

将u的表达式代入初始条件（4）得：

$$u_t\big|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(-A_n\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi a}{l}t+B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi a}{l}t\right)$$

$$\sin\frac{n\pi}{l}x\Big|_{t=0}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\cos0\sin\frac{n\pi}{l}x=0,\quad\therefore B_n=0.$$

则 $u(x,t)=\sum\limits_{n=1}A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t\sin\frac{n\pi}{l}x,$

根据初始条件（3）有：

$$u(x,0)=\sum A_n \sin\frac{n\pi}{l}x=\begin{cases}\dfrac{F_0}{T}\,\dfrac{l-x_0}{l}x, & (0<x<x_0),\\[2ex] \dfrac{F_0}{T}\,\dfrac{x_0}{l}(l-x), & (x_0<x<l),\end{cases}$$

$$\begin{aligned}
A_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi \\
&= \frac{2}{l}\int_0^{x_0}\frac{F_0}{T}\,\frac{l-x_0}{l}\xi\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi \\
&\quad + \frac{2}{l}\int_{x_0}^{l}\frac{F_0}{T}\,\frac{x_0}{l}\,(l-\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi \\
&= \frac{2}{l}\left\{\frac{F_0}{T}\,\frac{l-x_0}{l}\left[\frac{l}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right.\right. \\
&\quad \left. - \frac{l^2}{n^2\pi^2}\cdot\frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi}{l}\xi\right]_0^{x_0} \\
&\quad - \frac{F_0}{T}\,\frac{x_0}{l}\,\frac{l}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{l}\xi\Big|_{x_0}^{l} \\
&\quad - \frac{F_0}{T}\,\frac{x_0}{l}\,\frac{l^2}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi\xi}{l}\right. \\
&\quad \left.\left. - \frac{n\pi\xi}{l}\cos\frac{n\pi\xi}{l}\right]_{x_0}^{l}\right\} \\
&= \frac{2}{l}\left\{\frac{F_0}{T}\,\frac{(l-x_0)l}{n^2\pi^2}\left[\sin\frac{n\pi x_0}{l}\right.\right. \\
&\quad \left. - \frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x_0}{l}\right] \\
&\quad - \frac{F_0}{T}\,\frac{x_0}{n\pi}\left[\cos n\pi - \cos\frac{n\pi x_0}{l}\right] \\
&\quad - \frac{F_0}{T}\,\frac{x_0 l}{n^2\pi^2}\left[-n\pi\cos n\pi - \sin\frac{n\pi x_0}{l}\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi x_0}{l}\right]\right\}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{2}{l}\left\{\left[\frac{F_0 l(l-x_0)}{Tn^2\pi^2} + \frac{F_0 l x_0}{Tn^2\pi^2}\right]\sin\frac{n\pi x_0}{l}\right. \\
&\quad + \left[\frac{F_0 l x_0}{Tn\pi} - \frac{F_0 x_0^2}{Tn\pi} - \frac{F_0(l-x_0)x_0}{Tn\pi}\right] \\
&\quad \cos\frac{n\pi x_0}{l} \\
&\quad \left. - \left[\frac{F_0 l x_0}{Tn\pi} - \frac{F_0 x_0 l}{Tn\pi}\right]\cos n\pi\right\} \\
&= \frac{2}{l}\ \frac{F_0}{T}\ \frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l} \\
&= \frac{2F_0 l}{T\pi^2}\cdot\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore u(x,t) &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi a}{l} t \sin\frac{n\pi}{l} x \\
&= \frac{2F_0 l}{T\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi}{l} \\
&\quad x\cos\frac{n\pi a}{l} t.
\end{aligned}
$$

2. 求解细杆导热问题，杆长 l，两端保持为零度，初始温度分布 $u|_{t=0} = bx(l-x)/l^2$。

解：定解问题为

$$
\begin{cases}
u_t - a^2 u_{xx} = 0,\ \left(a^2 = \dfrac{k}{C\rho}\right)(0 \leqslant x \leqslant l), & (1) \\
u|_{x=0} = u|_{x=l} = 0, & (2) \\
u|_{t=0} = bx(l-x)/l^2. & (3)
\end{cases}
$$

设 $u(x,t) = X(x)T(t)$ 代入泛定方程：

$$
\frac{T'}{a^2 T} = \frac{X''}{X} = -\lambda,
$$

由此得到：
$$
\begin{cases}
T' + a^2\lambda T = 0. \\
X'' + \lambda X = 0, X(0) = X(l) = 0.
\end{cases}
$$

解X得

$$X(x)=\Sigma(A'_n\cos\sqrt{\lambda}x+B'_n\sin\sqrt{\lambda}x),$$

由边界条件（2）得$X(0)=0$.

$\therefore\quad A'_n=0,$

$X(l)=0,$

$\therefore\quad \sin\sqrt{\lambda}l=0,\sqrt{\lambda}l=n\pi,$

$\therefore\ \lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{l^2},$

$\therefore\quad X(x)=\Sigma B'_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x,$

又根据有关T的方程得

$$T'_n+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=0,$$

$$T_n=C_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t},$$

$$\therefore u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}B'_nC_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}B_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

由初始条件（3）得：

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x=\frac{bx(l-x)}{l^2},$$

$$\therefore\quad B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{b\zeta(l-\zeta)}{l^2}\sin\frac{n\pi\zeta}{l}d\zeta$$

$$=\frac{2b}{l^3}\int_0^l\zeta(l-\zeta)\sin\frac{n\pi\zeta}{l}d\zeta$$

$$=\frac{2b}{l^3}\Big\{l\cdot\frac{l^2}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{l}\zeta\Big|_0^l$$

$$
-\frac{l^2}{n\pi}\zeta\cos\frac{n\pi}{l}\zeta\Big|_0^l
$$

$$
-\frac{\zeta l^2}{n^2\pi^2}\left(2\sin\frac{n\pi}{l}\zeta-\frac{n\pi}{l}\zeta\cos\frac{n\pi}{l}\zeta\right)\Big|_0^l
$$

$$
\left.+\frac{2l}{n^3\pi^3}\cos\frac{n\pi}{l}\zeta\Big|_0^l\right\}
$$

$$
=\frac{2b}{l^3}\left\{-\frac{l^3}{n\pi}(-1)^n+\frac{l^3}{n\pi}(-1)^n\right.
$$

$$
\left.+\frac{2l^3}{n^3\pi^3}[(-1)^n-1]\right\}
$$

$$
=\begin{cases}\dfrac{8b}{\pi^3(2k+1)^3},\text{（当}n\text{为奇数}n=2k+1\text{时），}\\ 0. \qquad\qquad \text{（当}n\text{为偶数时）.}\end{cases}
$$

$$
\therefore u(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}B_k e^{-\frac{(2k+1)^2}{l^2}\pi^2a^2t}\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x
$$

$$
=\frac{8b}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^3}e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}
$$

$$
\sin\frac{(2k+1)}{l}\pi x.
$$

3.两端固定弦，长为 l．（1）用宽为2δ的平面锤敲击弦的 $x=x_0$点．（2）用宽度为2δ的余弦式凸面锤敲击弦的 $x=x_0$，求解弦的振动．

解：(i) 若锤为平面锤，定解问题为

$$
\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0\ ,\ (0<x<l),\\ u|_{x=0}=u|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=0,\\ u_t|_{t=0}=\begin{cases}0\ ,(0<x<x_0-\delta,x_0+\delta<x<l),\\ v_0,(x_0-\delta<x<x_0+\delta).\end{cases}\end{cases}
$$

根据边界条件，可知本征函数为 $\sin\frac{n\pi x}{l}$，故弦的一般振动可表示为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi a}{l}t+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

以此代入初始条件得：

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=0.$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}=\begin{cases}0,(0<x<x_0-\delta,),\\ \quad x_0+\delta<x<l\\ v_0(x_0-\delta<x<x_0+\delta).\end{cases}$$

由此可得傅里叶系数

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l 0\cdot\sin\frac{n\pi\zeta}{l}d\zeta=0,$$

$$B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}v_0\sin\frac{n\pi\zeta}{l}d\zeta=\frac{-2}{n\pi a}\frac{v_0 l}{n\pi}\cos\frac{n\pi\zeta}{l}\Big|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}$$

$$=\frac{2v_0 l}{n^2\pi^2 a}\left[\cos\frac{n\pi}{l}(x_0-\delta)-\cos\frac{n\pi}{l}(x_0+\delta)\right]$$

$$=\frac{4v_0 l}{n^2\pi^2 a}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi\delta}{l},$$

$$\therefore u(x,t)=\frac{4v_0 l}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi\delta}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

(ii) 若为余弦式锤，则定解问题为：

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,(0<x<l),\\ u(0,t)=u(l,t)=0,\\ u(x,0)=0.\\ u_t(x,0)=\begin{cases}0,(0<x<x_0-\delta,x_0+\delta<x<l),\\ v_0\cos\frac{x-x_0}{2\delta}\pi,(x_0-\delta<x<x_0+\delta).\end{cases}\end{cases}$$

根据边界条件可知其本征函数为 $\sin\frac{n\pi x}{l}$，因而弦的一般解可表示为：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

代入初始条件得：

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi x}{l}=0,$$

$$u_t(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\pi a}{l}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$=\begin{cases}0\ ,(0<x<x_0-\delta,x_0+\delta<x<l),\\ v_0\cos\frac{x-x_0}{2\delta}\pi, \quad (x_0-\delta<x<x_0+\delta),\end{cases}$$

从上列二式可得：

$$A_n=0.$$

$$B_n=\frac{2}{n\pi a}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}v_0\cos\frac{x-x_0}{2\delta}\pi\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2v_0}{n\pi a}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\cos\frac{x_0\pi}{2\delta}\cos\frac{\pi x}{2\delta}+\sin\frac{x_0\pi}{2\delta}\sin\frac{\pi x}{2\delta}\right]$$

$$\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2v_0}{n\pi a}\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\left[\cos\frac{x_0\pi}{2\delta}\cos\frac{\pi x}{2\delta}\sin\frac{n\pi x}{l}+\sin\frac{x_0\pi}{2\delta}\right.$$

$$\left.\sin\frac{\pi x}{2\delta}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]dx$$

$$=\frac{v_0}{n\pi a}\int\left[\cos\frac{x_0\pi}{2\delta}\left(\sin\frac{l\pi+2\delta n\pi}{2\delta l}x\right.\right.$$

$$\left.-\sin\frac{l\pi-2\delta n\pi}{2\delta l}x\right)$$

$$+\sin\frac{x_0\pi}{2\delta}\left(\cos\frac{l\pi-2\delta n\pi}{2\delta l}x\right.$$

$$\left.\left.-\cos\frac{l\pi+2\delta n\pi}{2\delta l}x\right)\right]dx$$

$$=\frac{v_0}{n\pi a}\left\{\cos\frac{x_0\pi}{2\delta}\left(\frac{2l\delta}{l\pi-2\delta n\pi}\cos\frac{l\pi-2\delta n\pi}{2l\delta}x\right.\right.$$

$$\left.-\frac{2l\delta}{l\pi+2\delta n\pi}\cos\frac{l\pi+2\delta n\pi}{2l\delta}x\right)\Bigg|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}$$

$$+\sin\frac{x_0\pi}{2\delta}\left(\frac{2l\delta}{l\pi-2\delta n\pi}\sin\frac{l\pi-2\delta n\pi}{2l\delta}x\right.$$

$$\left.\left.-\frac{2l\delta}{l\pi+2\delta n\pi}\sin\frac{l\pi+2\delta n\pi}{2l\delta}x\right)\Bigg|_{x_0-\delta}^{x_0+\delta}\right\}$$

$$=\frac{v_0}{n\pi a}\left\{\frac{2l\delta}{l\pi-2\delta n\pi}\left[\cos\frac{x_0\pi}{2\delta}\cos\frac{l\pi-2\delta n\pi}{2l\delta}\right.\right.$$

$$\left.(x_0+\delta)+\sin\frac{x_0\pi}{2\delta}\sin\frac{l\pi-2\delta n\pi}{2l\delta}(x_0+\delta)\right]$$

$$-\frac{2l\delta}{l\pi-2\delta n\pi}\left[\cos\frac{x_0\pi}{2\delta}\cos\frac{l\pi-2\delta n\pi}{2l\delta}(x_0-\delta)\right.$$

$$\left.+\sin\frac{x_0\pi}{2\delta}\sin\frac{l\pi-2\delta n\pi}{2l\delta}(x_0-\delta)\right]$$

$$-\frac{2l\delta}{l\pi+2\delta n\pi}\left[\cos\frac{x_0\pi}{2\delta}\cos\frac{l\pi+2\delta n\pi}{2l\delta}(x_0+\delta)\right.$$

$$\left.+\sin\frac{x_0\pi}{2\delta}\sin\frac{l\pi+2\delta n\pi}{2l\delta}(x_0+\delta)\right]$$

$$+\frac{2l\delta}{l\pi+2\delta n\pi}\left[\cos\frac{x_0\pi}{2\delta}\cos\frac{l\pi+2\delta n\pi}{2l\delta}(x_0-\delta)\right.$$

$$\left.\left.+\sin\frac{x_0\pi}{2\delta}\sin\frac{l\pi+2\delta n\pi}{2l\delta}(x_0-\delta)\right]\right\}$$

$$=\frac{v_0}{n\pi a}\left\{\frac{2l\delta}{l\pi-2\delta n\pi}\left[\cos\left(\frac{2n\pi x_0-l\pi-2\delta n\pi}{2l}\right)\right.\right.$$

$$-\cos\left(\frac{2n\pi x_0 + l\pi - 2\delta n\pi}{2l}\right)\Big]$$

$$-\frac{2l\delta}{l\pi - 2\delta n\pi}\Big[\cos\left(\frac{-2n\pi x_0 - l\pi - 2\delta n\pi}{2l}\right)$$

$$-\cos\left(\frac{-2n\pi x_0 + l\pi + 2\delta n\pi}{2l}\right)\Big]$$

$$=\frac{4v_0}{n\pi a}\Big[\frac{l\delta}{l\pi - 2\delta n\pi}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi\delta}{l}\right)$$

$$+\frac{l\delta}{l\pi + 2\delta n\pi}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{n\pi\delta}{l}\right)\Big]$$

$$=\frac{4v_0\delta}{n\pi^2 a}\left[\frac{1}{1 - \frac{2\delta n}{l}}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi\delta}{l}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1 + \frac{2\delta n}{l}}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi\delta}{l}\right]$$

$$=\frac{8v_0\delta}{n\pi^2 a}\frac{1}{1-\left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\cos\frac{n\pi\delta}{l},$$

$$\therefore\quad u(x,t) = \frac{8v_0\delta}{a\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{1-\left(\frac{2\delta n}{l}\right)^2}\sin\frac{n\pi x_0}{l}$$

$$\cos\frac{n\pi\delta}{l}\sin\frac{n\pi at}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

4. 长为 l 的均匀杆，两端受压从而长度缩为 $l(1-2\varepsilon)$，放手后自由振动，求解杆的这一振动.

解：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2u_{xx} = 0, (0<x<l), \\ u_x|_{x=0} = u_x|_{x=l} = 0, \\ u|_{t=0} = 2\varepsilon\left(\frac{l}{2} - x\right), \\ u_t|_{t=0} = 0. \end{cases}$$

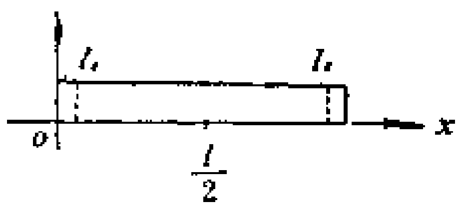


图 10-3

因为是第二类边界条件，所以要用本征函数 $\cos\dfrac{n\pi}{l}x$ 展开，设解为

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n\pi at}{l}+B_n\sin\frac{n\pi at}{l}\right)\cos\frac{n\pi}{l}x,$$

$$\because\quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\frac{n\pi a}{l}\cos\frac{n\pi at}{l}\cos\frac{n\pi}{l}x\,\Big|_{t=0}$$

$$=0,$$

$$\therefore\quad B_n=0。$$

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi at}{l}\cos\frac{n\pi x}{l},$$

$$\because\quad u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\cos\frac{n\pi x}{l}=2\varepsilon\left(\frac{l}{2}-x\right),$$

$$\therefore\quad A_0=\frac{1}{l}\int_0^l 2\varepsilon\left(\frac{l}{2}-x\right)dx=\varepsilon\int_0^l dx-\frac{2\varepsilon}{l}\int_0^l xdx$$

$$=\varepsilon x\Big|_0^l-\frac{2\varepsilon}{l}\;\frac{x^2}{2}\Big|_0^l=\varepsilon l-\varepsilon l=0。$$

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l 2\varepsilon\left(\frac{l}{2}-x\right)\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{4\varepsilon}{l}\int_0^l\frac{l}{2}\cos\frac{n\pi x}{l}dx-\frac{4\varepsilon}{l}\int_0^l x\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=2\varepsilon\left[\frac{l}{n\pi}\sin\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l$$

$$-\frac{4\varepsilon}{l}\left(\frac{l}{n\pi}\right)^2\left[\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}+\cos\frac{n\pi x}{l}\right]_0^l$$

$$=-\frac{4\varepsilon l}{n^2\pi^2}\left[\cos n\pi-1\right]=\frac{4\varepsilon l}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right].$$

$$
=\begin{cases}\dfrac{8\varepsilon l}{\pi^2(2k+1)^2}, & \text{当}n\text{为奇数}2k+1\text{时，}\\ 0, & \text{当}n\text{为偶数时，}\end{cases}
$$

$$
\therefore\quad u(x,t)=\frac{8\varepsilon l}{\pi^2}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^2}\cos\frac{(2k+1)\pi at}{l}
$$

$$
\cos\frac{(2k+1)\pi x}{l}.
$$

5. 长为 l 的杆，一端固定，另一端受力 F_0 而伸长。求解杆在放手后的振动。

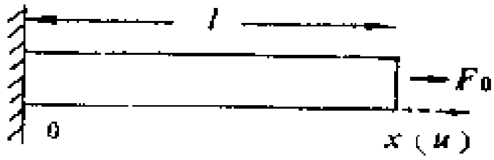


图 10-4

解：定解问题为

$$
\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0,\quad (0\leqslant x\leqslant l),\\ u|_{x=0}=0,\quad u_x|_{x=l}=0,\\ u(x,0)=\displaystyle\int_0^x\frac{\partial u}{\partial x}dx=\int_0^x\frac{F_0}{YS}dx\\ \qquad =\dfrac{F_0X}{YS},\quad (0\leqslant x\leqslant l),\\ u_t|_{t=0}=0,\end{cases}
$$

本题是既有第一类边界条件也有第二类边界条件的问题。

令 $u=X(x)T(t)$ 代入泛定方程分离变量得

$$
T''+\lambda a^2T=0,
$$

$$
\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\ X(0)=X'(l)=0.\end{cases}
$$

(i) 若 $\lambda<0$，则 $X=C_1l^{\sqrt{-\lambda}x}+C_2l^{-\sqrt{-\lambda}x}$ 则有 $C_1+C_2=0$ 和 $C_1l^{+\sqrt{-\lambda}l}+C_2l^{-\sqrt{-\lambda}l}=0$。

$\therefore$ $C_1=C_2=0$，$X\equiv0$ 无意义，因此，$\lambda<0$ 的情况应排除。

(ii) $\lambda=0$，则方程 $X''+\lambda X=0$ 的解为

$$
X(x)=C_1x+C_2,
$$

由X边界条件便可知，$C_2=0$，$C_1l+C_2=0$，　$\therefore$　$C_1=0$　从而$X(x)\equiv0$也没有意义，也应排除$\lambda=0$情况。

(iii) 仅当$\lambda>0$时才有意义的解，

$$X=C_1\cos\sqrt{\lambda}\,x+C_2\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

利用边界条件（8）可知，$C_1=0$，

$$X'(l)=C_2\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}\,l=0\quad\therefore\quad\cos\sqrt{\lambda}\,l=0$$

$$\sqrt{\lambda}\,l=n\pi+\frac{1}{2}\pi=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi,\quad n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots$$

$$\therefore\quad\lambda=\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}{l^2},$$

$$X_n(x)=C_2\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi x.$$

以本征值 $\lambda=\dfrac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l^2}\pi$ 代入到关于T的方程得解

$$T_n(t)=A_n'\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}a\pi t+B_n'\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}a\pi t,$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad u(x,t)&=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n'\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}a\pi t\right.\\&\left.+B_n'\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}a\pi t\right)C_2\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi x\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}a\pi t\right.\\&\left.+B_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}a\pi t\right]\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi x.\end{aligned}$$

利用初始条件，$\left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$，∴ $B_n=0$，

再利用初始条件，$u(x,0)=\dfrac{F_0x}{YS}$，可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi x}{l}=\frac{F_0}{YS}x,$$

$$\therefore\quad A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{F_0}{YS}\zeta\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\zeta d\zeta$$

$$=\frac{2l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\frac{F_0}{YS}\int_0^l\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\zeta}{l}\right]$$

$$\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\zeta}{l}\ d\left[\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\zeta}{l}\right]$$

$$=\frac{2l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\frac{F_0}{YS}\left[\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\zeta\right.$$

$$\left.-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\zeta}{l}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\zeta}{l}\right]_0^l$$

$$=\frac{2l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\frac{F_0}{YS}\left[(-1)^n-0\right]$$

$$=\frac{2l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2}\frac{F_0}{YS}(-1)^n,$$

$$\therefore\quad u(x,t)=\frac{8lF_0}{\pi^2YS}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)^2}\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi at}{l}$$

$$\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi x_{\circ}$$

6。长为 l 的理想传输线，远端开路，先把传输线充电到电位差 v_0，然后把近端短路。求解线上的电压 $v(x,t)$。

解：泛定方程 $v_{tt}-a^2v_{xx}=0$，$a^2=\frac{1}{LC}$，$(0<x<l)$。

边界条件 $\begin{cases} v(0,t)=0, \\ v_x(l,t)=-\left(R+L\cdot\frac{\partial}{\partial t}\right)j\Big|_{x=l}=0, \end{cases}$

初始条件 $v(x,0)=v_0$,

$$v_t(x,\ 0)=\ -\frac{1}{C}j_x\Big|_{t=0}=0,$$

与上题（第 5 题）类似，具有第一类和第二类边界条件，从而知道其一般解应为：

$$v(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n+\frac{1}{2}}{l}a\pi t+B_n\sin\frac{n+\frac{1}{2}}{l}a\pi t\right)$$

$$\sin\frac{n+\frac{1}{2}}{l}\pi x,$$

由于 $\frac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=0$,

$\therefore\quad B_n=0$。

$\because\quad v(x,t)\Big|_{t=0}=\sum_{n=0}^{\infty}A_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi x=v_0$。

$\therefore\quad A_n=\frac{2}{l}\int_0^l v_0\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\zeta d\zeta$

$$=\frac{2}{l}\frac{v_0 l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\left[-\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi\zeta\right]_0^l$$

$$=\frac{4v_0}{(2n+1)\pi}\left[1-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi\right]$$

$$=\frac{4v_0}{\pi(2n+1)}.$$

$$\therefore\quad v(x,t)=\frac{4v_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)}\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x\cos\frac{(2n+1)\pi a}{2l}t.$$

7.长为 l 的杆，上端固定在电梯天花板，杆身竖直，下端自由、电梯下降，当速度为v_0时突然停止。求解杆的振动。

解：泛定方程 $u_{tt}-a^2u_{xx}=0$，$(0\leqslant x\leqslant l)$。 （1）

边界条件 $\begin{cases}u|_{x=0}=0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0.\end{cases}$ （2）

初始条件 $\begin{cases}u|_{t=0}=0,\\ u_t|_{t=0}=v_0.\end{cases}$ （3）

本题中既有第一类边界条件，也有第二类边界条件，但都是齐次的，可以参阅课本P.211的例２．根据边界条件（2）可设

（1）的解：

$$u=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n+\frac{1}{2}}{l}\pi x,\tag{4}$$

代入泛定方程（1）有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left[T_n''+\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{l^2}\pi^2a^2T_n\right]\sin\frac{n+\frac{1}{2}}{l}\pi x=0,$$

关于$T(t)$方程的解为：

$$T_n(t)=A_n\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi at+B_n\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi at,$$

则：$u(x,t)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left[A_n\cos\frac{(2n+1)}{2l}\pi at+B_n\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi at\right]$

$$\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x.$$

根据初始条件（3）$u(x,0)=0$，可知$A_n=0$。

$$u(x,t)=\sum_{n=0}^{\infty}B_n\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi at\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x,$$

又从$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{2l}\pi aB_n\cos\frac{(2n+1)}{2l}$

$$\left.\pi at\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x\right|_{t=0}=v_0,$$

即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)}{2l}\pi aB_n\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x=v_0,$

$$B_n=\frac{2}{l}\frac{2l}{(2n+1)\pi a}\int_0^l v_0\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi\zeta d\zeta$$

$$=\frac{2v_0}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi a}\cdot\frac{l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$\int_0^l\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\zeta d\left(\frac{n+\frac{1}{2}}{l}\pi\zeta\right)$$

$$=\frac{2v_0l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2a}\left[-\cos\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi\zeta\right]_0^l$$

$$= \frac{2v_0 l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2 \pi^2 a}.$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \frac{2v_0 l}{\pi^2 a}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi a t \sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi x.$$

8. 在铀块中，除了中子的扩散运动之外，还进行着中子的增殖过程，每秒钟在单位体积中产生的中子数正比于该处的中子浓度u，从而可表为βu，（β是表示增殖快慢的常数）。研究厚度为 l 的层状铀块。求临界厚度（铀块厚度超过临界厚度，则中子浓度将随着时间而增长以致铀块爆炸。原子弹里就是这么回事）。

解：设中子的浓度为u，扩散系数为D。按题意，由于中子的增殖作用，产生的中子数和该处的中子浓度 u 成正比，设单位体积中产生的中子数为n，则$n=\beta u$，则

泛定方程 $\dfrac{\partial u}{\partial t} = D\Delta u + \beta u$. （1）

或 $\dfrac{\partial u}{\partial t} - a^2\Delta u - \beta u = 0$，$(a^2 = D)$.

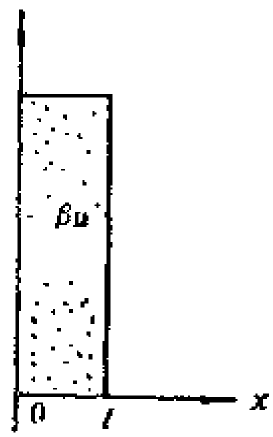


图 10-5

为了结合边界条件求解方程（1）用三种方法来解：

方法 I：在临界厚度时，$\dfrac{\partial u}{\partial t} = 0$，

则（1）式成为：

$D\Delta u + \beta u = 0$， （2）

如右图所示，将铀块看作一维的，

则（2）成为：

$$D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\beta u=0 \quad 或 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\beta}{D}u=0,$$

上式的解为：

$$u(x)=A_1e^{i\sqrt{\frac{\beta}{D}}x}+A_2\,e^{-i\sqrt{\frac{\beta}{D}}x}, \tag{3}$$

因为在$x=0$和$x=l$处有相等的浓度，$u(0)=u(l)$，代入（3）式有

$$A_1+A_2=A_1e^{i\sqrt{\frac{\beta}{D}}l}+A_2\,e^{-i\sqrt{\frac{\beta}{D}}l},$$

或
$$A_1(1-e^{i\sqrt{\frac{\beta}{D}}l})+A_2\,(1-e^{-i\sqrt{\frac{\beta}{D}}l})=0, \tag{4}$$

A_1，$A_2\neq 0$，必然有：

$$\left.\begin{aligned}1-e^{i\sqrt{\frac{\beta}{D}}l}&=1-\cos\sqrt{\frac{\beta}{D}}l-i\sin\sqrt{\frac{\beta}{D}}l=0,\\1-e^{-i\sqrt{\frac{\beta}{D}}l}&=1-\cos\sqrt{\frac{\beta}{D}}l+i\sin\sqrt{\frac{\beta}{D}}l=0,\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

要（5）式成立，则必须有：$\sqrt{\frac{\beta}{D}}l=\pi$，

$\therefore$ 临界厚度 $L=\sqrt{\frac{D}{\beta}}\pi=\frac{a\pi}{\sqrt{\beta}}$ $(a=\sqrt{D})$。

方法Ⅱ：（1）式写成如下形式：

$$u_t-a^2u_{xx}-\beta u=0. \tag{6}$$

令 $u=Ue^{\beta t}$，$u_t=\beta ve^{\beta t}+v_te^{\beta t}u_x=U_xe^{\beta t}$，$u_{xx}=v_{xx}e^{\beta t}$，

代入（6）式：

$$u\beta e^{\beta t}+v_te^{\beta t}-a^2v_{xx}e^{\beta t}-\beta ve^{\beta t}=0,$$

即
$$v_t-a^2v_{xx}=0. \tag{7}$$

由边界条件$u|_{x=0}=u|_{x=l}=0$，即$v|_{x=0}=v|_{x=l}=0$，

再令$v=X(x)T(t)$，利用边界条件$v|_{x=0}=v|_{x=l}=0$写出（7）的试解为

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

代入到（7）式有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n'+\frac{n^2\pi^2a^2}{l}T_n\right)\sin\frac{n\pi x}{l}=0,$$

要上式成立，只有 $T_n'+\frac{n^2\pi^2a^2}{l}T_n=0$ 才行，于是

$$T_n=C_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t},\quad v_n=C_ne^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

本征解 $u_n(x,t)=v_n l^{\beta t}=C_ne^{\left(\beta-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}\right)t}\sin\frac{n\pi x}{l}$,

由指数项可以看出，当 $\beta>\frac{\pi^2a^2}{l^2}$时，$n=1$的解将随时间增长，

设临界厚度为 L，则 $\beta=\frac{\pi^2a^2}{L^2}$,

$$\therefore\quad L=\frac{\pi a}{\sqrt{\beta}}.$$

方法Ⅱ：令 $u=X(x)T(t)$代入泛定方程（6）

而有
$$XT'-a^2X''T-\beta XT=0,$$

即
$$\frac{T'-\beta T}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda^2,$$

于是
$$\begin{cases}X''+\lambda^2X=0,\ X(0)=X(l)=0. & (8)\\ T'+(a^2\lambda^2-\beta)T=0. & (9)\end{cases}$$

由（8）可得 $X_n=\sum_{n=1}^{\infty}C_n\sin\frac{n\pi}{l}x$, $\lambda^2=\frac{n^2\pi^2}{l^2}$.

由（9）可得 $T_n=C_ne^{-\left(\frac{a^2\pi^2n^2}{l^2}-\beta\right)t}$,

$$\therefore\quad u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n e^{-\left(\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}-\beta\right)t}\sin\frac{n\pi}{l}x. \tag{10}$$

(10) 的指数项当$n=1$时有三种情况：

若 $\beta-\dfrac{a^2\pi^2}{l^2}>0$，则浓度$u$将随时间而增长，便可能产生爆炸。

$\beta-\dfrac{a^2\pi^2}{l^2}<0$，则浓度将随时间增长而减小，反应堆可能熄灭。

$\beta-\dfrac{a^2\pi^2}{l^2}=0$，则浓度$u$不随时间而变化，这时的$l$就是临界厚度，写作$L$，则有

$$L=\frac{a\pi}{\sqrt{\beta}}.$$

9.求解薄膜的恒定表面浓度扩散问题。薄膜厚度为l．杂质从两面进入薄膜．由于薄膜周围气氛中含有充分的杂质，薄膜表面上的杂质浓度得以保持为恒定的N_0。对于较大的t，把所得答案简化。

解：$u_t-a^2u_{xx}=0$，$\begin{cases}u(0,t)=N_0,\ u(x,0)=0.\\ u(l,t)=N_0,\end{cases}$

令 $u=W+N_0$，

则 $W=u-N_0$.代入泛定方程：

$W_t-a^2W_{xx}=0$，$\begin{cases}W(0,t)=0,\ W(x,0)=-N_0.\\ W(l,t)=0.\end{cases}$

经代换后的W的方程组中，有齐次的边界条件．

令 $W(x,t)=X(x)T(t)$，$\dfrac{T'}{a^2T}=\dfrac{X''}{X}=-\lambda$，

即
$$\begin{cases}T'+a^2\lambda T=0, & (1)\\ X''+\lambda X=0,\ X(0)=X(l)=0, & (2)\end{cases}$$

由（2）式得 $X_n(x)=A_n\cos\sqrt{\lambda}x+B_n\sin\sqrt{\lambda}x$.

$\because \quad X(0)=0,$

$\therefore \quad A_n=0.$

又 $X(l)=0$，$B_n\neq 0$，$\therefore \quad \sin\sqrt{\lambda}\,x=0,$

$$\lambda=\frac{n^2\pi^2}{l^2},$$

$$\therefore \quad X(x)=\Sigma B_n \sin\frac{n\pi}{l}x.$$

由关于T的方程（1）式得

$$T_n=C_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t},$$

$$\therefore \quad W(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_nT_n$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

为了确定系数B_n，可以利用初始条件：

$$W(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi x}{l}=-N_0,$$

$$\therefore \quad B_n=\frac{2}{l}\int_0^l(-N_0)\sin\frac{n\pi}{l}\zeta d\zeta$$

$$=-\frac{2N_0}{l}\cdot\frac{l}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi}{l}\zeta\right]_0^l$$

$$=\frac{2N_0}{n\pi}\left[\cos n\pi-1\right]=\frac{2N_0}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right],$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{4N_0}{\pi(2k+1)}, & \text{（当}n=2k+1\text{奇数时，}k=0,1,2\cdots\cdots\text{），}\\ 0, & \text{（当}n\text{为偶数时），}\end{cases}$$

$$\therefore \quad W(x,t)=\sum_{k=0}^{\infty}\left[-\frac{4N_0}{\pi(2k+1)}\right]e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

$$\sin\frac{(2k+1)\pi x}{l},$$

$$u(x,t) = N_0 + W$$

$$= N_0 - \frac{4N_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\ e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t}$$

$$\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}x.$$

对于较大的t，考虑指数因子（当$t>0$）：

$$e^{-\frac{(2k+1)^2\pi^2a^2}{l^2}t},$$

它随时间t的增大而急剧减小（参阅课本$P217$），u的级数解将收敛得很快，t越大，级数收敛得越快．当$t>0.18\frac{l^2}{a^2}$时，可以只保留$k=0$的一项，略去$k>0$的项，其误差$<1\%$，故t很大时，

$$u(x,t) = N_0 - \frac{4N_0}{\pi}e^{-\frac{\pi^2a^2}{l^2}t}\sin\frac{\pi x}{l}.$$

10．把上题改为限定源扩散．这是说，薄膜两面的表层已含有一定的杂质，比方说，每单位表面积下杂质总量Φ_0，但此外不再有杂质进入薄膜．

解：泛定方程：$u_t - a^2u_{xx} = 0$．

对于限定源扩散问题，薄膜两面的表面上含有一定的杂质浓度，设每单位表面积下杂质总量Φ_0，随着扩散时间的增长，杂质浓度具有趋向均匀的趋势，这是因为表面上不再有杂质粒子流$j(x)$进入界面．

这条件可写为：

$$j(x)\Big|_{x=0} = -D\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0,$$

因为扩散系数$D\neq 0$

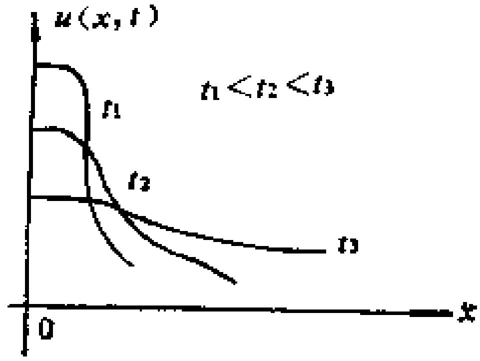


图 10-6

$\therefore$ 可以写出边界条件$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$,

同理，对薄片的另一面$x=l$处，同样有$\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0$,

在初始时刻$t=0$时的表面杂质浓度可表示为：

$$u(x,0)=\begin{cases}\Phi_0\delta(x-0), & (0<x<\varepsilon),\\ 0. & (\varepsilon<x<l-\varepsilon),\\ \Phi_0\delta[x-(l-0)], & (l-\varepsilon<x<l),\end{cases}$$

以 $u(x,t)=X(x)T(t)$代入泛定方程和边界条件得：

$$\begin{cases}T'+a^2\lambda T=0,\\ X''+\lambda X=0,\ X'(0)=X'(l)=0.\end{cases}$$

对于X组成的本征问题，解得本征值为 $\lambda=\frac{k^2\pi^2}{l^2}$,

本征函数 $X(x)=C_1\cos\frac{k\pi x}{l}$，代入泛定方程

$$u(x,t)=T_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}T_k(t)\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

$$T'_0(t)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[T'_k(t)+\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}T_k(t)\right]\cos\frac{k\pi x}{l}=0.$$

$\because$ $T'_0(t)=0$,

$\therefore$ $T_0=a_0$.

由 $T'_k(t)+\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}T_k(t)=0$. 解得

$$T_k(t)=a_ke^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t},$$

于是解$u(x,t)$可表为：

$$u(x,t)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\,e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l}t}\cos\frac{k\pi x}{l}.$$

应用初始条件以决定傅里叶系数，有：

$$u(x,0)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{l}$$

$$=\begin{cases}\Phi_0\delta(x-0), & (0<x<\varepsilon),\\ 0, & (\varepsilon<x<l-\varepsilon),\\ \Phi_0\delta[x-(l-0)], & (l-\varepsilon<x<l).\end{cases}$$

$$\therefore\quad a_0=\frac{1}{l}\int_0^l\left\{\Phi_0\delta(x-0)+\Phi_0\delta[x-(l-0)]\right\}dx$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{\varepsilon}\Phi_0\delta(x-0)dx+\frac{1}{l}\int_{l-\varepsilon}^{l}\Phi_0\delta[x-(l-0)]dx$$

$$=2\frac{\Phi_0}{l}$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^l\left\{\Phi_0\delta(x-0)+\Phi_0\delta[x-(l-0)]\right\}\cos\frac{k\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2\Phi_0}{l}[1+(-1)^k]=\begin{cases}\dfrac{4\Phi_0}{l},(\text{当 }k\text{ 为偶数时}),\\ 0,(\text{当 }k\text{ 为奇数时}),\end{cases}$$

$$\therefore\quad u(x,t)=\frac{2\Phi_0}{l}+\frac{4\Phi_0}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{4n^2\pi^2a^2}{l^2}t}\cos\frac{2n\pi x}{l}.$$

对于较大的 t，只取 $n=1$ 的一项时，上式成为：

$$u(x,t)=\frac{2\Phi_0}{l}+\frac{4\Phi_0}{l}e^{-\frac{4\pi^2a^2}{l}t}\cos\frac{2\pi x}{l}.$$

11.求解细杆导热问题.杆长 l，初始温度均匀为u_0，两端分别保持温度为u_1和u_2.

解：定解问题为

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,\\ u|_{x=0}=u_1,\quad u|_{x=l}=u_2,\\ u|_{t=0}=u_0,\end{cases}$$

首先设法化去非齐次边界条件，

令 $$u = w + u_1 + \frac{x}{l}(u_2 - u_1),$$

则 w 的定解问题是

$$\begin{cases} w_t - a^2 w_{xx} = 0, \\ w|_{x=0} = w|_{x=l} = 0, \\ w|_{t=0} = u_0 - u_1 - \frac{x}{l}(u_2 - u_1). \end{cases}$$

∵ w 有第一类齐次边界条件，它的解可写为

$$w(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x\, e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}.$$

利用初始条件来确定系数 B_n：

$$w(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\frac{n\pi}{l}x = u_0 - u_1 - \frac{x}{l}(u_2 - u_1),$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad B_n &= \frac{2}{l}\int_0^l \left[u_0 - u_1 - \frac{x}{l}(u_2 - u_1)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx \\
&= \frac{2}{l}\left[(u_0 - u_1)\frac{l}{n\pi}\int_0^l \sin\frac{n\pi}{l}x\,d\left(\frac{n\pi}{l}x\right)\right. \\
&\quad \left. - (u_2 - u_1)\int_0^l \frac{x}{l}\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx\right] \\
&= \frac{2}{l}\left[(u_0 - u_1)\frac{-l}{n\pi}\left(\cos\frac{n\pi x}{l}\right)\right]_0^l - \frac{2}{l}(u_2 - u_1) \\
&\quad \frac{l}{n^2\pi^2}\int_0^l \left(\frac{n\pi x}{l}\right)\sin\frac{n\pi}{l}x\,d\left(\frac{n\pi x}{l}\right) \\
&= \frac{2(u_0 - u_1)}{n\pi}[1 - (-1)^n] - \frac{2(u_2 - u_1)}{n^2\pi^2} \\
&\quad \left[\sin\frac{n\pi x}{l} - \frac{n\pi x}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\right] \\
&= \frac{2(u_0 - u_1)}{n\pi}[1 - (-1)^n]
\end{aligned}$$

$$-\frac{2(u_2-u_1)}{n^2\pi^2}[0-n\pi\cos n\pi-0+0]$$

$$=\frac{2(u_0-u_1)}{n\pi}[1-(-1)^n]+\frac{2(u_2-u_1)}{n\pi}(-1)^n.$$

$$\therefore\quad w(x,t)=\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{(u_0-u_1)\left[1-(-1)^n\right]\right.$$

$$\left.+(u_2-u_1)(-1)^n\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}e^{-\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}t}.$$

$$u(x,t)=u_1+\frac{x}{l}(u_2-u_1)+w(x,t)$$

$$=u_1+\frac{(u_2-u_1)x}{l}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left\{(u_0-u_1)[1-(-1)^n]+(u_2-u_1)\right.$$

$$\left.(-1)^n\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}e^{\frac{-n^2\pi^2a^2}{l^2}t}.$$

12. 求解细杆导热问题，初始温度为零，一端 $x=l$ 保持零度另一端 $x=0$ 的温度为 At 度（A 是常数，t 代表时间）。

解：

$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0, & (1)\\ u|_{x=0}=At,\quad u|_{x=l}=0, & (2)\\ u|_{t=0}=0, & (3)\end{cases}$$

解本题时，希望将边界条件化为齐次时，仍保持泛定方程为齐次，令

$$u=Atf(x)+g(x)+v, \tag{4}$$

代入泛定方程（1），整理后有：

$$v_t-a^2v_{xx}+Af(x)-a^2Atf''(x)-a^2g''(x)=0, \tag{5}$$

为了得到关于 v 的齐次泛定方程，就要选择（4）中的 $f(x)$ 和 $g(x)$，使（5）式中的后面几项消去。显然，若 $f(x)$ 取 x 的一次

式，则$f''(x)=0$，因此选$f(x)=1-\frac{x}{l}$即可。从而在(5)式中，因$f'(x)=-\frac{1}{l}$，$f''(x)=0$，所以$a^2Atf''(x)=0$。

同时又为了得到齐次边界条件，可按下列方程决定$g(x)$：

$$\begin{cases} a^2g''(x)=Af(x)=A\left(1-\dfrac{x}{l}\right), & (6)\\ g(0)=g(l)=0, & (7)\end{cases}$$

对(6)积分两次：

$$g'(x)=\frac{A}{a^2}\left(x-\frac{x^2}{2l}\right)+C_1,$$

$$g(x)=\frac{A}{a^2}\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{6l}\right)+C_1x+C_2,$$

由边界条件(7)：$\begin{cases} g(0)=C_2=0. \\ g(l)=\dfrac{A}{a^2}\left(\dfrac{l^2}{2}-\dfrac{l^3}{6l}\right)+C_1l=0,\end{cases}$

$$\therefore\quad C_1=-\frac{Al}{3a^2},$$

$$\therefore\quad g(x)=-\frac{l^2A}{6a^2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)\right], \tag{8}$$

$$u(x,t)=A\left(1-\frac{x}{l}\right)t-\frac{l^2A}{6a^2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)\right]+v, \tag{9}$$

由(5)式得齐次泛定方程：

$$v_t-a^2v_{xx}=0, \tag{10}$$

由(2)和(9)得齐次边界条件：

$$v|_{x=0}=v|_{x=l}=0, \tag{11}$$

由(3)和(9)得初始条件：

$$v|_{t=0}=\frac{l^2A}{6a^2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)\right] \tag{12}$$

对于(10)(11)和(12)的定解问题，其解为：

$$v=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\frac{k\pi x}{l}e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t},$$

$$v|_{t=0}=\sum_{k=1}^{\infty}C_k\sin\frac{k\pi x}{l}=\frac{Al^2}{6a^2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)\right],$$

$$C_k=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{Al^2}{6a^2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)\right]\sin\frac{k\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{Al^2}{3k\pi a^2}\left\{-\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)\right]\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l+\int_0^l\cos\frac{k\pi x}{l}d\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2+2\left(\frac{x}{l}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{Al^2}{3k\pi a^2}\left(\int_0^l\frac{2}{l}\cos\frac{k\pi x}{l}dx+\int_0^l\frac{6}{l^2}x\cos\frac{k\pi x}{l}dx+\int_0^l\frac{3}{l^3}x^2\cos\frac{k\pi x}{l}dx\right)$$

$$=\frac{Al^2}{3k^2\pi^2a^2}\left\{2\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l+\frac{6}{l}\int_0^l\sin\frac{k\pi x}{l}dx-\frac{6}{l}x\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l+\frac{3}{l^2}\left[x^2\sin\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l-2\int_0^l x\sin\frac{k\pi x}{l}dx\right]\right\}.$$

$$=\frac{Al^2}{3k^2\pi^2a^2}\left\{-\frac{6}{k\pi}\int_0^l d\left(\cos\frac{k\pi x}{l}\right)+\frac{6}{l^2}\left[\frac{l}{k\pi}x\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l-\int_0^l\cos\frac{k\pi x}{l}dx\right]\right\}$$

$$=\frac{Al^2}{3k^2\pi^2a^2}\left\{-\frac{6}{k\pi}\cos\frac{k\pi x}{l}\Big|_0^l+\frac{6}{l^2}\left[\frac{l^2}{k\pi}\cos k\pi\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{l}x\Big|_0^l\right]\right\}$$

$$=\frac{Al^2}{3k^2\pi^2a^2}\left\{-\frac{6}{k\pi}\cos k\pi+\frac{6}{k\pi}+\frac{6}{k\pi}\cos k\pi\right\}$$

$$=\frac{2Al^2}{k^3\pi^3a^2}.$$

$$\therefore\quad v=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2Al^2}{\pi^3a^2k^3}\sin\frac{k\pi x}{l}\,e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t},$$

$$u(x,t)=Af(x)t+g(x)+v(x,t)$$

$$=At\left(1-\frac{x}{l}\right)-\frac{Al^2}{6a^2}\left[\left(\frac{x}{l}\right)^3-3\left(\frac{x}{l}\right)^2\right.$$

$$\left.+2\left(\frac{x}{l}\right)\right]$$

$$+\frac{2Al^2}{\pi^3a^2}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^3}\sin\frac{k\pi x}{l}\,e^{-\frac{k^2\pi^2a^2}{l^2}t}.$$

13. 求解均匀杆的纵振动，杆长 l，一端固定，另一端受纵向力$F(t)$作用．初始位移和速度分别是$\varphi(x)$和$\psi(x)$．

$$F(t)=F_0\sin\omega t$$

解：与上题解法同样，是希望将边界条件化为齐次，并且又保持泛定方程为齐次．设：

$$u=f(x)\frac{F_0}{YS}\sin\omega t+v(x,t),\tag{1}$$

代入到关于$u(x,t)$的定解问题：

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=0, & (2)\\ u|_{x=0}=0,\ u_x|_{x=l}=\dfrac{F_0}{YS}\sin\omega t, & (3)\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x), & (4)\end{cases}$$

由(1)式：$u_t = f(x)\frac{F_0\omega}{YS}\cos\omega t + v_t$,

$$u_{tt} = -f(x)\frac{F_0\omega^2}{YS}\sin\omega t + v_{tt},$$

$$u_x = f_x\frac{F_0}{YS}\sin\omega t + v_x(x),$$

$$u_{xx} = f_{xx}\frac{F_0}{YS}\sin\omega t + v_{xx},$$

代入泛定方程(2)：

$$\begin{cases} v_{tt} - f(x)\frac{F_0\omega^2}{YS}\sin\omega t - a^2 f_{xx}\frac{F_0}{YS}\sin\omega t - a^2 v_{xx} = 0, & (5) \\ u(0,t) = f(0)\frac{F_0}{YS}\sin\omega t + v(0,t) = 0 & (6) \\ u_x(l,t) = f_x(l)\frac{F_0}{YS}\sin\omega t + v_x(l,t) = \frac{F_0}{YS}\sin\omega t, & (7) \end{cases}$$

为了得到 $\begin{cases} u_{xx} - a^2 u_{tt} = 0, & (8) \\ v(0,t) = 0, v_x(l,t) = 0, & (9) \end{cases}$

因此(5)(6)和(7)式必须是

$$\begin{cases} -f(x)\frac{F_0\omega^2}{YS}\sin\omega t - a^2 f_{xx}\frac{F_0}{YS}\sin\omega t = 0, \\ f(0)\frac{F_0}{YS}\sin\omega t = 0, \\ f_x(l)\frac{F_0}{YS}\sin\omega t = \frac{F_0}{YS}\sin\omega t, \end{cases}$$

即 $\begin{cases} f_{xx} + \frac{\omega^2}{a^2}f(x) = 0, & (10) \\ f(0) = 0 \text{ 和 } f_x(l) = 1, & (11) \end{cases}$

(10)在(11)条件下的解为

$$f(x) = \frac{a}{\omega\cos\left(\frac{\omega l}{a}\right)}\sin\frac{\omega x}{a}, \tag{12}$$

$$\therefore \quad u(x,t) = \frac{aF_0}{\omega YS\cos\left(\frac{\omega l}{a}\right)}\sin\frac{\omega x}{a}\sin\omega t + v, \tag{13}$$

由(4)、(1)和(12)式得：

$$v|_{t=0} = \varphi(x), \quad v_t|_{t=0} = \frac{-F_0 a\sin\frac{\omega x}{a}}{YS\cos\frac{\omega l}{a}} + \psi(x), \tag{14}$$

从而问题转为求解(8)(9)和(13)的定解问题：

即
$$\begin{cases} v_{tt} - a^2 v_{xx} = 0, \\ v|_{x=0} = 0, v_x|_{x=l} = 0, \\ v|_{t=0} = \varphi(x), v_t|_{t=0} = \psi(x) - \dfrac{F_0 a\sin\frac{\omega x}{a}}{YS\cos\frac{\omega l}{a}}. \end{cases}$$

参照课本第211页例2，可以写出定解问题(8)(9)(13)的解：

$$v = \sum_{k=0}^{\infty}\left[A_k\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)a\pi t}{l} + B_k\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)a\pi t}{l}\right]$$

$$\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi x. \tag{15}$$

利用初始条件(14)，求出系数A_k和B_k。

$$A_k = \frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\xi d\xi, \tag{16}$$

$$B_k=\frac{2l}{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi a l}\int_0^l\left[\psi(\xi)-\frac{F_0 a\sin\frac{\omega\xi}{a}}{YS\cos\frac{\omega l}{a}}\right]$$

$$\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}\xi d\xi. \tag{17}$$

将(14)代入(13)式

$$u(x,t)=\frac{aF_0\sin\frac{\omega}{a}x\sin\omega t}{Y\omega S\cos\frac{\omega l}{a}}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[A_k\cos\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)a\pi t}{l}\right.$$

$$\left.+B_k\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)a\pi t}{l}\right]\cdot\sin\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi}{l}x,$$

其中的系数A_k和B_k由(16)式与(17)式确定。

14. 把弹簧上端$x=0$加以固定，在静止弹簧下端$x=l$轻轻地挂上质量为m的物体，求解弹簧的纵振动。弹簧本身的重量可以忽略不计。

解：以重力作用下的平衡状态作为基准来计算位移u，则泛定方程是齐次的，定解问题为：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=0, \quad (a^2=Y/\rho), & (1)\\ u|_{x=0}=0, & (2)\\ mg-YSu_x|_{x=l}=mu_{tt}|_{x=l}，\text{即}\left(u_x+\frac{m}{YS}u_{tt}\right)\Big|_{x=l} & \\ \qquad =\frac{mg}{YS}, & (3)\\ u|_{t=0}=0, \quad u_t|_{t=0}=0, & (4)\end{cases}$$

令 $v=\frac{mg}{YS}x,\qquad u=v+\omega,$

则有
$$\begin{cases} w_{tt} - a^2 w_{xx} = 0, & (5) \\ w|_{x=0} = 0, & (6) \\ \left(w_x + \dfrac{m}{YS} w_{tt}\right)\Big|_{x=l} = 0, & (7) \\ w|_{t=0} = -\dfrac{mg}{YS}x, & (8) \\ w_t|_{t=0} = 0. & (9) \end{cases}$$

令 $w = X(x)T(t)$，代入(5)、(6)、(7)，则有

$$T'' + \lambda a^2 T = 0, \tag{10}$$

$$X'' + \lambda X = 0, \tag{11}$$

$$X(0) = 0, \tag{12}$$

$$X'(l)T(t) + \frac{m}{YS}X(l)T''(t) = 0. \tag{13}$$

由(13)并利用(10)式，则有

$$\frac{X'(l)}{-\dfrac{m}{YS}X(l)} = \frac{T''(t)}{T(t)} = -\lambda a^2 = -\lambda\frac{Y}{\rho}.$$

$$\therefore \quad X'(l) - \frac{\lambda m}{\rho S}X(l) = 0.$$

现由(11)，(12)，(14)求解 X，

当 $\lambda > 0$ 时，$X = C_1\cos\sqrt{\lambda}x + C_2\sin\sqrt{\lambda}x$，

由(12)，$C_1 = 0$，$X = C_2\sin\sqrt{\lambda}x$，

由(14) $$\sqrt{\lambda}\cos\sqrt{\lambda}l - \frac{\lambda m}{\rho S}\sin\sqrt{\lambda}l = 0, \tag{15}$$

或 $$\sqrt{\lambda}\,\mathrm{tg}\sqrt{\lambda}l = \frac{\rho S}{m},$$

记 $\xi = \sqrt{\lambda}l$，则方程(15)可写成

$$\mathrm{tg}\xi = \frac{\rho S l}{m}\frac{1}{\xi}.$$

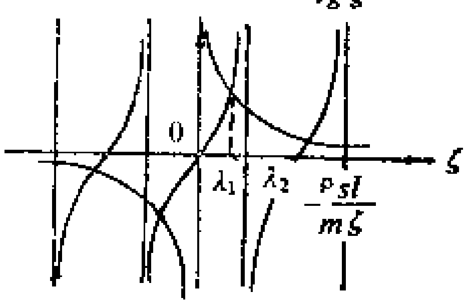


图 10-7

这个超越方程不能用初等方法求解，可用图解法求其根．设λ_n是方程(15)的第 n 个正根，则

本征函数为$X_n(x)=C_n\sin\sqrt{\lambda_n}x,(n=1,2,\cdots)$,

$w(x,t)$的一般解为

$$w(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos\sqrt{\lambda_n}at+B_n\sin\sqrt{\lambda_n}at)\sin\sqrt{\lambda_n}x, \quad (16)$$

由(9)式，知$B_n=0$,

由(8)式，得 $$\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\sqrt{\lambda_n}x=-\frac{mg}{YS}x=\varphi(x). \quad (17)$$

为求A_n，注意到本征函数族$\{\sin\sqrt{\lambda_n}x\}$在$(0,l)$上并不正交，事实上，$K\neq n$时，

$$\int_0^l\sin\sqrt{\lambda_k}x\sin\sqrt{\lambda_n}x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_0^l\cos(\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n})x\,dx-\int_0^l(\cos\sqrt{\lambda_k}+\sqrt{\lambda_n})x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n})l}{\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n}}-\frac{\sin(\sqrt{\lambda_k}-\sqrt{\lambda_n})l}{\sqrt{\lambda_k}+\sqrt{\lambda_n}}\right]$$

$$=\frac{\sqrt{\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_k}l\cos\sqrt{\lambda_n}l-\sqrt{\lambda_k}\cos\sqrt{\lambda_k}l\sin\sqrt{\lambda_n}l}{\lambda_k-\lambda_n}$$

$$=-\frac{m}{\rho S}\sin\sqrt{\lambda_k}l\sin\sqrt{\lambda_n}l \text{ (用(15)式,得到)}, \quad (18)$$

$$\int_0^l\sin^2\sqrt{\lambda_n}x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^l(1-\cos2\sqrt{\lambda_n}x)\,dx$$

$$=\frac{l}{2}-\frac{1}{4\sqrt{\lambda_n}}\sin2\sqrt{\lambda_n}x\Big|_0^l$$

$$=\frac{l}{2}-\frac{m}{2\rho S}\sin^2\sqrt{\lambda_n}l=\frac{l}{2}-\frac{1}{2\sqrt{\lambda_n}}\sin\sqrt{\lambda_n}l\cos\sqrt{\lambda_n}l. \quad (19)$$

由(17)，(18)，(19)，有：

$$\int_0^l \varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx=\sum_{k=1}^{\infty}\int_0^l A_k\sin\sqrt{\lambda_k}x\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx$$

$$=A_n\left[\frac{l}{2}-\frac{m}{2\rho S}\sin^2\sqrt{\lambda_n}l\right]+\sum_{k\neq n}$$

$$-\frac{m}{\rho S}A_k\sin\sqrt{\lambda_k}\,l\sin\sqrt{\lambda_n}l,\quad(20)$$

而$\frac{m}{\rho S}\varphi(l)\sin\sqrt{\lambda_n}\,l=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{m}{\rho S}A_k\sin\sqrt{\lambda_k}\,l\,\sin\sqrt{\lambda_n}l$，　　(21)

将(20)与(21)两式逐项相加，即得，

$$\int_0^l\varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\,dx+\frac{m}{\rho S}\varphi(l)\sin\sqrt{\lambda_n}l$$

$$=A_n\left[\frac{l}{2}-\frac{m}{2\rho S}\sin^2\sqrt{\lambda_n}l\right]+\frac{m}{\rho S}A_n\sin^2\sqrt{\lambda_n}l$$

$$=A_n\left[\frac{l}{2}+\frac{m}{2\rho S}\sin^2\sqrt{\lambda_n}\,l\right],\quad(22)$$

$$\because\quad\int_0^l\varphi(x)\sin\sqrt{\lambda_n}x\,dx=\int_0^l-\frac{mg}{YS}x\sin\sqrt{\lambda_n}\,x\,dx$$

$$=\frac{mg}{YS}\frac{1}{\lambda_n}\left[\sqrt{\lambda_n}\,l\cos\sqrt{\lambda_n}\,l-\sin\sqrt{\lambda_n}\,l\right]$$

$$=\frac{mg}{YS}\frac{1}{\lambda_n}\left(\frac{\lambda_n m}{\rho S}l-1\right)\sin\sqrt{\lambda_n}l,$$

$$\frac{m}{\rho S}\varphi(l)\sin\sqrt{\lambda_n}\,l=\frac{m}{\rho S}\left(-\frac{mg}{YS}l\right)\sin\sqrt{\lambda_n}l.$$

$\therefore$　(22)式的左端$=-\frac{mg}{YS\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}\,l$，

从而
$$A_n=\frac{-2\frac{mg}{YS\lambda_n}\sin\sqrt{\lambda_n}\,l}{l+\frac{m}{\rho S}\sin^2\sqrt{\lambda_n}\,l},$$

最后得本问题的解为：

$$u(x,t)=v+w$$
$$=\frac{mg}{YS}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2mg\sin\sqrt{\lambda_n}\,l}{YS\lambda_n\left(l+\frac{m}{\rho S}\sin^2\sqrt{\lambda_n}\,l\right)}$$
$$\cos a\sqrt{\lambda_n}\,t\sin\sqrt{\lambda_n}\,x.$$

又∵由(15)式有：

$$\sin^2\sqrt{\lambda_n}\,l=\frac{1}{1+\mathrm{ctg}^2\sqrt{\lambda_n}\,l}=\frac{1}{1+\frac{m^2\lambda_n}{\rho^2S^2}}$$
$$=\frac{\rho^2S^2}{\rho^2S^2+m^2\lambda_n},$$

∴ 本问题的解也可写成

$$u(x,t)=\frac{mg}{YS}x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-2mg\rho}{Y\lambda_n\left(l+\frac{\rho Sm}{\rho^2S^2+m^2\lambda_n}\right)\sqrt{\rho^2S^2+m^2\lambda_n}}$$
$$\cos a\sqrt{\lambda_n}\,t\ \sin\sqrt{\lambda_n}\,x.$$

15. 长为 l 的柱形管，一端封闭，另一端开放。管外空气中含有某种气体，其浓度为u_0，向管内扩散，求解该气体在管内的浓度$u(x,t)$。

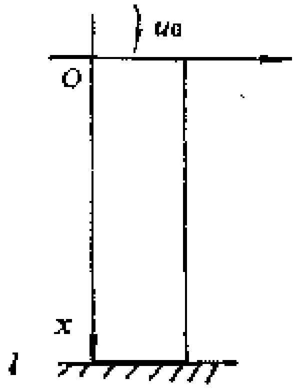


图 10-8

解：
$$\begin{cases}u_t-a^2u_{xx}=0,\\ u|_{x=0}=u_0,\\ u_x|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=0,\end{cases}$$

令 $u=v+u_0$,

则$v_t - a^2 v_{xx} = 0$，$v|_{x=0} = 0$，$v_x|_{x=l} = 0$，$v|_{t=0} = -u_0$。
这样 v 的边界条件变成齐次的了。显然 v 具有第一类和第二类的边界条件，它的本征值问题决定了它的本征函数是

$$\sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi x,$$ 即 v 的解为

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, e^{-\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{l^2}\pi^2 a^2 t} \sin\frac{\left(\frac{1}{2}+n\right)}{l}\pi x,$$

$$v(x,0) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)}{l}\pi x = -u_0.$$

$$\therefore C_n = \frac{2}{l}\int_0^l -u_0 \sin\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}{l} x\,dx$$

$$= \frac{2u_0}{l}\,\frac{l}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi}\cos\frac{n+\frac{1}{2}}{l}\pi x\,\Big|_0^l$$

$$= \frac{-2u_0}{\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi} = \frac{-4u_0}{\pi}\,\frac{1}{2n+1},$$

$$v = -\frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\, e^{-\frac{(2n+1)^2}{4l^2}\pi^2 a^2 t}\sin\frac{(2n+1)}{2l}\pi x$$

$$u(x,t) = u_0 + v$$

$$= u_0 - \frac{4u_0}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\, e^{-\frac{(2l+1)^2}{4l^2}\pi^2 a^2 t}\sin\frac{2l+1}{2l}\pi x$$

16. 在矩形区域 $0 < x < a$，$0 < y < b$ 上求解拉氏方程 $\Delta u = 0$，使满足边界条件

$$u|_{x=0}=Ay(b-y),\quad u|_{x=a}=0.$$
$$u|_{y=0}=B\sin\frac{\pi x}{a},\quad u|_{y=b}=0.$$

解：令 $u=v+w$，可使 v 和 w 分别满足：

$$v_{xx}+v_{yy}=0,\ \begin{cases}v(0,y)=0,\\ v(a,y)=0,\end{cases}\quad \begin{cases}v(x,0)=B\sin\dfrac{\pi x}{a}\\ v(x,b)=0.\end{cases} \tag{1}$$

$$w_{xx}+w_{yy}=0,\ \begin{cases}w(0,y)=Ay(b-y),\\ w(a,y)=0,\end{cases}\quad \begin{cases}w(x,0)=0.\\ w(x,b)=0.\end{cases} \tag{2}$$

先解 $v(x,y)$，设 $v(x,y)=X(x)Y(y)$，代入 $\Delta u=0$ 得，

$$X''Y+XY''=0,\ \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2,$$

$$X=A'_n\cos\lambda x+B'_n\sin\lambda x,$$

$\because\ X(0)Y(y)=0,$

$\therefore\ A'_n=0,$

$X(a)Y(y)=0,\ 0=B'_n\sin\lambda a,\ B'_n\neq 0,\ \therefore\ \sin\lambda a=0,$

$$\lambda a=n\pi,\quad \lambda=\frac{n\pi}{a}.$$

$$\therefore\quad X=B'_n\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

$$Y''-\frac{n^2\pi^2}{a^2}Y=0,\quad Y=A_n e^{\frac{n\pi y}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}.$$

$$\therefore\quad v(x,y)=XY$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi y}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

由条件$v(x,0)=B\sin\frac{\pi x}{a}$得，

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\sin\frac{n\pi x}{a}=B\sin\frac{\pi x}{a}$$

（式中B为常数A_n，B_n为系数），

$$\because\quad A_1+B_1=\frac{2B}{a}\int_0^a\sin^2\frac{\pi x}{a}dx=B,(n=1),$$

$$\begin{aligned}A_n+B_n&=\frac{2B}{a}\int_0^a\sin\frac{\pi x}{a}\sin\frac{n\pi x}{a}dx\\&=\frac{B}{a}\int_0^a\left[\cos\frac{(n-1)\pi}{a}\cdot x-\cos\frac{(n+1)}{a}\pi x\right]dx\\&=0,\ (n\neq1).\end{aligned}$$

从条件$v(x,b)=0$得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{n\pi b}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}=0,$$

$$\therefore\quad A_n e^{\frac{n\pi b}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}=0.$$

因而有：$\begin{cases}A_1+B_1=B,\\A_1 e^{\frac{\pi b}{a}}+B_1 e^{-\frac{\pi b}{a}}=0,\end{cases}$

$$\begin{cases}A_n+B_n=0,(n\neq1),\\A_n e^{\frac{n\pi b}{a}}+B_n e^{-\frac{n\pi b}{a}}=0.\end{cases}$$

可解得：$$A_1=\frac{-Be^{-\frac{\pi b}{a}}}{\left(e^{\frac{\pi b}{a}}-e^{-\frac{\pi b}{a}}\right)}=\frac{-Be^{-\frac{\pi b}{a}}}{2\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}},$$

$$B_1=B-A_1=\frac{Be^{\frac{\pi b}{a}}}{2\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}},$$

$$A_n = B_n = 0, \ (n \neq 1),$$

$$\therefore \quad v(x,y) = \frac{B}{2\text{sh}\frac{\pi b}{a}}\left[e^{\frac{\pi(b-y)}{a}} - e^{-\frac{\pi(b-y)}{a}} \right] \sin\frac{\pi x}{a}$$

$$= \frac{B\text{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\text{sh}\frac{\pi b}{a}} \sin\frac{\pi x}{a},$$

同样可以得到$W(x,y)$的一般解：

$$W(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{\frac{n\pi x}{b}} + D_n e^{-\frac{n\pi x}{b}} \right) \sin\frac{n\pi y}{b}.$$

从条件$W(0,y) = 0$得：

$$\sum_{n=1}^{\infty} (C_n + D_n) \sin\frac{n\pi y}{b} = Ay(b-y),$$

$$\therefore \quad C_n + D_n = \frac{2A}{b}\int_0^b \zeta(b-\zeta) \sin\frac{n\pi\zeta}{b} d\zeta$$

$$= \frac{4Ab^2}{(n\pi)^3}[1-(-1)^n].$$

从条件$W(a,y) = 0$得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_n e^{\frac{n\pi a}{b}} + D_n e^{-\frac{n\pi a}{b}} \right) \sin\frac{n\pi y}{b} = 0,$$

$$\therefore \quad C_n e^{\frac{n\pi a}{b}} + D_n e^{-\frac{n\pi a}{b}} = 0,$$

当n = 偶数时：

$$C_n + B_n = 0,$$

$$C_n e^{\frac{n\pi a}{b}} + D_n e^{-\frac{n\pi a}{b}} = 0.$$

当n = 奇数时：

$$\begin{cases} C_n + D_n = \dfrac{8Ab^2}{(n\pi)^3}, \\ C_n e^{\frac{n\pi a}{b}} + D_n e^{-\frac{n\pi a}{b}} = 0. \end{cases}$$

由此可得：　　n = 偶数时，$C_n = D_n = 0$，

n = 奇数时，

$$C_n=\frac{-8Ab^2e^{-\frac{n\pi a}{b}}}{(n\pi)^3\left(e^{\frac{n\pi a}{b}}-e^{-\frac{n\pi a}{b}}\right)}=\frac{-4Ab^2e^{-\frac{n\pi a}{b}}}{(n\pi)^3\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}},$$

$$D_n=\frac{8Ab^2}{(n\pi)^3}-C_n=\frac{8Ab^2e^{\frac{n\pi a}{b}}}{(n\pi)^3\left(e^{\frac{n\pi a}{b}}-e^{-\frac{n\pi a}{b}}\right)}$$

$$=\frac{4Ab^2e^{\frac{n\pi a}{b}}}{(n\pi)^3\operatorname{sh}\frac{n\pi a}{b}},$$

$$\therefore\ W(x,y)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{4Ab^2}{(2k+1)^3\pi^3\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi a}{b}}\left[e^{\frac{(2k+1)\pi(a-x)}{b}}-e^{-\frac{(2k+1)\pi(a-x)}{b}}\right]$$

$$\cdot\sin\frac{(2k+1)\pi y}{b}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8Ab^2\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi(a-x)}{b}}{(2k+1)^3\pi^3\operatorname{sh}\frac{(2k-1)\pi a}{b}}\sin\frac{(2k+1)\pi y}{b},$$

$$\therefore\quad u(x,y)=v(x,y)+W(x,y)$$

$$=\frac{B\operatorname{sh}\frac{\pi(b-y)}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\pi b}{a}}\sin\frac{\pi x}{a}$$

$$+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{8Ab^2\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi(a-x)}{b}}{(2k+1)^3\pi^3\operatorname{sh}\frac{(2k+1)\pi a}{b}}$$

$$\sin\frac{(2k+1)\pi y}{b}.$$

17. 均匀的薄板占据区域$0<x<a$, $0<y<\infty$, 边界上温度

$$u|_{x=0}=0, u|_{x=a}=0, u|_{y=0}=u_0, \lim_{y\to\infty} u=0.$$

求解板的稳定温度分布.

解: 泛定方程$u_{xx}+u_{yy}=0$. (1)

边界条件已由题目中明确给出, 令$u=X(x)Y(y)$代入(1):

$$X''Y+XY''=0. \text{即} \frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}=-\lambda^2.$$

$$X''+\lambda^2X=0. \quad (2)$$

$$Y''-\lambda^2Y=0. \quad (3)$$

先解本征值问题的(2):

$$X=\Sigma A_n\cos\lambda x+B_n\sin\lambda x,$$

$\because$ $X(0)=0$,

$\therefore$ $A_n=0$.

$\because$ $X(a)=0$.

$\therefore$ $\Sigma B_n\sin\lambda a=0$.

$\sin\lambda a=0$, $\lambda a=n\pi$.

$\therefore$ $\lambda=\frac{n\pi}{a}$, $(n=1,2,3\cdots)$.

$\therefore$ $X(x)=\sum_{n=1}^{\infty} B_n\sin\frac{n\pi}{a}x$.

再求方程(3)的解, 将(3)写成

$$Y''-\frac{n^2\pi^2}{a^2}Y=0,$$

$$Y_n=A'_ne^{\frac{n\pi y}{a}}+B'_ne^{-\frac{n\pi y}{a}}.$$

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(C_ne^{\frac{n\pi y}{a}}+D_ne^{-\frac{n\pi y}{a}}\right)\sin\frac{n\pi x}{a}.$$

利用y的边界条件:

$$u(x,0)=X(x)Y(0)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_n+D_n)\sin\frac{n\pi x}{a}$$

$$=u_0,$$

$$u(x,\infty)=X(x)Y(\infty)=\sum_{n=1}^{\infty}(C_ne^{\infty}+D_ne^{-\infty})\sin\frac{n\pi x}{a}=0,$$

$\therefore\quad C_n=0.$

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}D_n\sin\frac{n\pi x}{a}=u_0,$$

$$D_n=\frac{2}{l}\int_0^l u_0\sin\frac{n\pi x}{a}dx=\frac{2}{a}\int_0^a u_0\sin\frac{n\pi x}{a}dx$$

$$=\frac{2u_0}{a}\cdot\frac{a}{n\pi}\left[-\cos\frac{n\pi x}{a}\right]_0^a=\frac{2u_0}{n\pi}[1-(-1)^n]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{4u_0}{(2k+1)\pi},(\text{当}n\text{为奇数}2k+1),\\ 0. \qquad (\text{当}n\text{为偶数}),\end{cases}$$

$$\therefore\ u=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}e^{-\frac{(2k+1)\pi}{a}y}\sin\frac{(2k+1)\pi}{a}x.$$

18.在带状区域$0<x<a,0<y<\infty$上求解$\Delta u=0$使

$$u|_{x=0}=0,u|_{x=a}=0,u|_{y=0}=A\left(1-\frac{x}{a}\right),\lim_{y\to\infty}u=0.$$

解：如上题，令$u=X(x)Y(y)$，则可得

$$u(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_ne^{\frac{n\pi}{a}y}+B_ne^{-\frac{n\pi}{a}y}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x.$$

由$\lim\limits_{y\to\infty}u=0$，得$A_n=0$，

由$u|_{y=0}=A\left(1-\dfrac{x}{a}\right)$，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{a}x=A\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

$$\therefore\quad B_n=\frac{2}{a}\int_0^a A\left(1-\frac{x}{a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx=\frac{2A}{n\pi}.$$

$\therefore$原问题的解为$u(x,y)=\dfrac{2A}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}e^{-\frac{n\pi}{a}y}\sin\dfrac{n\pi}{a}x.$

19.矩形膜，边长为l_1和l_2，边缘固定，求它的本征振动模式.

解：设膜上各点的横向位移为$u(x,y,t)$，则有

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2(u_{xx}+u_{yy})=0,(0<x<l_1,0<y<l_2), & (1)\\ u|_{x=0}=0,u|_{x=l_1}=0, & (2)\\ u|_{y=0}=0,u|_{y=l_2}=0, & (3)\end{cases}$$

令$u(x,y,t)=X(x)Y(y)T(t)$,代入泛定方程及边界条件得：

$$T''XY-a^2(X''Y+XY'')T=0,$$

$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{X''Y+XY''}{XY}=-\lambda.$$

$$T''+\lambda a^2T=0, \qquad (4)$$

$$X''Y+XY''+\lambda XY=0.\ XY''+(X''+\lambda X)Y=0.$$

$$Y''+\left(\frac{X''}{X}+\lambda\right)Y=0, \qquad (5)$$

为了利用（2）.（3）求得X与Y的本征函数. 可以记$\lambda=\lambda_1+\lambda_2$, λ_1是$\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\ X(0)=X(l_1)=0,\end{cases}$决定的本征值

当$\lambda_1=\left(\dfrac{n\pi}{l_1}\right)^2$时,$X=C_1\sin\dfrac{n\pi}{l_1}X$. 可使$\dfrac{X''}{X}+\lambda_1=0$.

这时（5）成为$Y''+\lambda_2Y=0$.

注意到边界条件（3），应取$\lambda_2=\left(\dfrac{m\pi}{l^2}\right)^2$，亦即关于$y$的本征函数为

$$Y = C_2 \sin\frac{m\pi}{l_2} y,$$

将 $\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 = \left(\frac{n\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{m\pi}{l_2}\right)^2$ 代入（4）

可得 $T = A\cos\sqrt{\lambda}\,at + B\sin\sqrt{\lambda}\,at$.

如此可得本征振动模式为

$$u_{m,n}(x,y,t) = (A_{m,n}\cos\sqrt{\lambda}\,at + B_{m,n}\sin\sqrt{\lambda}\,at)\cdot\sin\frac{n\pi x}{l_1}\sin\frac{m\pi y}{l_2}.$$

其中 $\sqrt{\lambda} = \pi\sqrt{\left(\frac{n}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{m}{l_2}\right)^2}$.

20. 长为 l 的均匀杆两端被支承，求解它的横振动.

解：泛定方程

因两端被支承

$$\begin{cases} u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, (0<x<l), & (1) \\ u|_{x=0} = u_{xx}|_{x=0} = 0, & \\ u|_{x=l} = u_{xx}|_{x=l} = 0, & (2) \\ u|_{t=0} = \varphi(x), u_t|_{t=0} = \psi(x). & (3) \end{cases}$$

假设

以 $u(x,t) = X(x)T(t)$，代入（1）、（2）得

$$T''X + a^2 X^{(4)}T = 0, \quad \frac{X^{(4)}}{X} = -\frac{T''}{a^2 T} = \lambda^2,$$

$$T'' + a^2\lambda^2 T = 0, \tag{4}$$

$$\begin{cases} X^{(4)} - \lambda^2 X = 0, & (5) \\ X(0) = X''(0) = X(l) = X''(l) = 0. & (6) \end{cases}$$

若 $\lambda = 0$，则 $X = C_1 + C_2 x + C_3 x^2 + C_4 X^3$.

由 $X(0) = X''(0) = 0$，显有 $C_1 = C_3 = 0$.

又由 $X(l) = X''(l) = 0$，得 $\begin{cases} C_2 + C_4 l^2 = 0, \\ 6C_4 l = 0, \end{cases}$

$\therefore \quad C_4 = 0$.

$C_2=0$.

从而$\lambda=0$时只有零解，故$\lambda\neq0$，这时不妨设$\lambda>0$，(5)有通解

$$X=C_1\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}x+C_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}X+C_3\cos\sqrt{\lambda}x+C_4\sin\sqrt{\lambda}x.$$

由(6)

$$\begin{cases} C_1+C_3=0, & (7)\\ C_1\lambda-C_3\lambda=0, & (8)\\ C_1\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}l+C_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}l+C_3\cos\sqrt{\lambda}l \\ \quad +C_4\sin\sqrt{\lambda}l=0, & (9)\\ C_1\operatorname{ch}\sqrt{\lambda}l+C_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}l-C_3\cos\sqrt{\lambda}l \\ \quad -C_4\sin\sqrt{\lambda}l=0. & (10)\end{cases}$$

由(7)，(8)，$C_1=C_3=0$，(9)+(10)，(9)−(10) 分别得

$$C_2\operatorname{sh}\sqrt{\lambda}l=0,\ C_4\sin\sqrt{\lambda}l=0.$$

$\because\ \operatorname{sh}\sqrt{\lambda}l\neq0$，$\therefore C_2=0$，

又$\because C_4\neq0$（否则得零解），$\therefore\ \sin\sqrt{\lambda}l=0$.

$\sqrt{\lambda}l=n\pi$，本征值$\lambda=\dfrac{n^2\pi^2}{l^2}$，$X_n=C_n\sin\dfrac{n\pi}{l}x$.

将λ代入(4)，得

$$T''+\frac{a^2n^4\pi^4}{l^4}T=0,$$

$$T_n=A_n\cos\frac{n^2\pi^2a}{l^2}t+B_n\sin\frac{n^2\pi^2a}{l^2}t,$$

因而有

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{n^2\pi^2a}{l^2}t+B_n\sin\frac{n^2\pi^2a}{l^2}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x.$$

由(3)知，其中

$$\begin{cases} A_n=\dfrac{2}{l}\displaystyle\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx,\\ B_n=\dfrac{2l}{n^2\pi^2a}\displaystyle\int_0^l\psi(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx.\end{cases}$$

21. 细圆环、半径为R，初始温度分布已知为$f(\varphi)$，φ是以环心为极点的极角。环的表面是绝热的。求解环内温度变化情况。

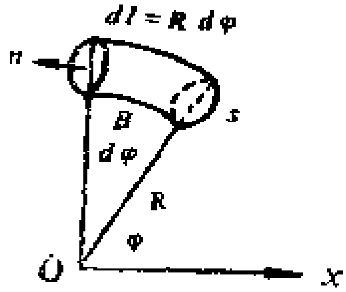


图 10-9

解：设圆环的截面积为S，比热为C，密度为ρ，热传导系数是k，因是细环，内外半径近似相等为R。位于φ和$\varphi+d\varphi$之间的体元B的体积为

$$Sdl=SRd\varphi,\ \frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial l}=\frac{\partial u}{\partial \varphi}\ \frac{\partial \varphi}{\partial l}=\frac{1}{R}u_\varphi.$$

于是热平衡方程可以写成为：

$$\rho CSRd\varphi du=-k\frac{1}{R}u_\varphi|_\varphi+k\frac{1}{R}u_\varphi|_{\varphi+d\varphi}Sdt,$$

$$\therefore\quad u_t-\frac{a^2}{R^2}u_{\varphi\varphi}=0,\quad \left(a^2=\frac{k}{\rho c}\right).$$

于是可以写出细圆环的定解问题：

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{\varphi\varphi}=0,\ 0\leqslant\varphi<2\pi, & (1)\\ u_{t=0}=f(\varphi), & (2)\\ u(\varphi+2\pi)=u(\varphi). & (3)\end{cases}$$

由于u有自然周期条件，设u有分离变量形式的本征解$u_n=T_n(t)\Phi_n(\varphi)$，则$\Phi_n(\varphi)$以$2\pi$为周期，从而可将$u$展开为以$2\pi$为周期的傅里叶级数为，

$$u(\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}T_n(t)(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),$$

代入泛定方程(1)得

$$T_n'+\frac{a^2n^2}{R^2}T_n=0,\ T_n(t)=C_ne^{-\frac{n^2a^2}{R^2}t},$$

$$\therefore u(\varphi,t)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)e^{-\frac{n^2a^2}{R^2}t},$$

其中A_n和B_n是由初始条件所决定的傅里叶系数，

$$A_n=\frac{1}{\delta_n\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$B_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi.$$

22.在圆形域内求解$\Delta u=0$使满足边界条件

（1）$u|_{\rho=a}=A\cos\varphi$,（2）$u|_{\rho=a}=A+B\sin\varphi$.

解：在极坐标系下，泛定方程为

$$u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}=0,\quad\begin{pmatrix}0<\rho<a\\0<\varphi<2\pi\end{pmatrix},\tag{1}$$

设$u(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$，有

$$R''\Phi+\frac{1}{\rho}R'\Phi+\frac{1}{\rho^2}R\Phi''=0,$$

$$(\rho^2R''+\rho R')\Phi+R\Phi''=0,$$

$$\Phi''+\lambda\Phi=0.\tag{2}$$

$$\rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0.\tag{3}$$

利用自然的周期条件，得本征值$\lambda=m^2(m=0,1,2,\cdots)$，

本征函数 $\Phi_m(\varphi)=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi$,

将λ值代入(3)，得$\rho^2R''+\rho R'-m^2R=0$,

$m=0$时，解为$R_0=C_0+D_0\ln\rho$.

$m>0$时，解为$R_m=C_m\rho^m+D_m\rho^{-m}$,

从而得(1)之本征解：

$$u_0(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho,$$

$$u_m(\rho,\varphi)=(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)(C_m\rho^m+D_m\rho^{-m}).$$

$\therefore$ 一般解为$u(\rho,\varphi)=(C_0+D_0\ln\rho)+\sum\limits_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)(C_m\rho^m+D_m\rho^{-m})$,

为使$u(\rho,\varphi)$在圆形域内有界，应有$D_0=D_m=0$,

（1）由$u|_{\rho=a}=A\cos\varphi$,有

$$C_0+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)C_m a^m=A\cos\varphi,$$

$\therefore\quad C_0=0,\ A_1C_1a=A,\ A_1C_1=\dfrac{A}{a}$，其余系数均为 0，

$\therefore\quad u(\rho,\varphi)=\dfrac{A}{a}\rho\cos\varphi,$

（2）在一般解 $u(\rho,\varphi)=C_0+\sum\limits_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi)\rho^m$ 中，

由 $u|_{\rho=a}=A+B\sin\varphi$，有：

$$C_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi)a^m=A+B\sin\varphi,$$

$\therefore\quad C_0=A, b_1a=B$，其余系数均为0.

$\therefore\quad u(\rho,\varphi)=A+\dfrac{B}{a}\rho\sin\varphi.$

23. 半圆形薄板，板面绝热，边界直径上温度保持零度，圆周上保持 u_0，求稳定状态下的板上温度分布.

解：板面绝热，方程为齐次的，稳定状态下 $u_t=0$，所以在极坐标系下定解问题为：

$$\begin{cases} u_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}u_\rho+\dfrac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}=0,\ (0<\rho<R,0<\varphi<\pi), & (1)\\ u|_{\varphi=0}=0, & \\ u|_{\varphi=\pi}=0, \qquad (0<\rho<R), & (2)\\ u|_{\rho=R}=u_0, \qquad (0<\varphi<\pi). & (3)\end{cases}$$

设 $u(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$，代入（1），有

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \tag{4}$$

$$\rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0. \tag{5}$$

又，由（2），有 $\qquad \Phi(0)=0,\Phi(\pi)=0. \qquad (6)$

解（4），（6）（i）$\lambda<0,\Phi=C_1e^{\sqrt{-\lambda}\varphi}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\varphi}$，由（6）$C_1+$

$C_2=0$,

$C_1e^{\sqrt{-\lambda}\pi}+C_2e^{-\sqrt{-\lambda}\pi}=0$，得$C_1=C_2=0$，$\Phi\equiv 0$，应排除$\lambda<0$。

(i) $\lambda=0$，$\Phi=C_1\varphi+C_2$ 由(6)$C_1=C_2=0$，应排除$\lambda=0$，

(ii) $\lambda>0$ $\Phi=C_1\cos\sqrt{\lambda}\varphi+C_2\sin\sqrt{\lambda}\varphi$ 由(6)$C_1=0$，$C_2\sin\sqrt{\lambda}\pi=0$。

∴ 本征值为$\lambda=n^2$，$(n=1,2,\cdots)$，

从而本征函数为 $\Phi_n(\varphi)=A_n\sin n\varphi$，

以λ值代入(5) $\rho^2R''+\rho R'-n^2R=0$，

$$R=C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}, (n=1,2,\cdots),$$

∴ 一般解为$u(\rho,\varphi)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}A_n\sin n\varphi(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n})$，

∵ 在半圆形薄板内u有界，$\rho\to\infty$时有界，所以$D_n=0$，

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(\sin n\varphi)\rho^n.$$

由边界条件(3)，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nR^n\sin n\varphi=u_0$。

a_nR^n为u_0的傅里叶系数，

$$a_nR_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}u_0\sin n\varphi d\varphi=-\frac{2u_0}{\pi n}\cos n\varphi\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2u_0}{n\pi}(1-(-1)^n),$$

$$\therefore\quad a_n=\begin{cases}0, & n=\text{偶数}.\\ \dfrac{2}{R^n}\cdot\dfrac{2u_0}{n\pi}, & n=\text{奇数}.\end{cases}$$

$$\therefore\quad u(\rho,\varphi)=\frac{4u_0}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{R^{2k+1}(2k+1)}\rho^{2k+1}\sin(2k+1)\varphi.$$

24．把例6的导体圆柱换为介质圆柱，介质的介电常数为

ε.求解柱内外的电场.(提示：柱内电势必须有限.在柱面上，电势连续.电位移的法向分量连续.)

解：取长圆柱的轴为Z轴，可设场强、电势与Z无关，只需研究图示xy平面上的截口.

x轴方向为场强E的方向，设圆柱半径为a.

柱内外的电势均应满足拉普拉斯方程.取极坐标系，且设柱内电势为u^{I}，柱外电势为u^{II}，则有：

$$u^{\mathrm{I}}_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u^{\mathrm{I}}_{\rho}+\frac{1}{\rho^2}u^{\mathrm{I}}_{\varphi\varphi}=0,(0\leqslant\rho<a), \qquad (1)$$

$$u^{\mathrm{II}}_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u^{\mathrm{II}}_{\rho}+\frac{1}{\rho^2}u^{\mathrm{II}}_{\varphi\varphi}=0,(\rho>a), \qquad (2)$$

$$u^{\mathrm{I}}(\varphi+2\pi)=u^{\mathrm{I}}(\varphi),u^{\mathrm{II}}(\varphi+2\pi)=u^{\mathrm{II}}(\varphi). \qquad (3)$$

在自然周期条件(3)下，方程(1)，(2)的一般解分别如下：

$$u^{\mathrm{I}}(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)(C_m\rho^m+D_m\rho^{-m}),$$

∵ 在柱内电势有限，$D_0=D_m=0$.

$$\therefore\quad u^{\mathrm{I}}(\rho,\varphi)=C_0+\sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\varphi+b_m\sin m\varphi)\rho^m, \qquad (4)$$

$$u^{\mathrm{II}}(\rho,\varphi)=C'_0+D'_0\ln\rho+\sum_{m=1}^{\infty}(A'_m\cos m\varphi+B'_m\sin m\varphi)(C'_m\rho^m+D'_m\rho^{-m}).$$

∵ 在无限远处的静电场保持为匀强的场强E_0，在给定坐标系下，

则 $\lim\limits_{\rho\to\infty}\dfrac{\partial u^{\mathrm{II}}}{\partial x}=-E_0$、$\lim\limits_{\rho\to\infty}u^{\mathrm{II}}=-E_0x=-E_0\rho\cos\varphi$,

从而$C'_0=D'_0=C'_m=0$，$m\neq1$.

$$A_1'C_1' = -E_0\rho,\text{记}a_m' = A_m'D_m',b_m' = B_m'D_m.$$

有： $$u^{\text{II}}(\rho,\varphi) = -E_0\rho\cos\varphi + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m'\cos m\varphi + b_m'\sin m\varphi)\rho^{-m}. \tag{5}$$

现以衔接条件 $$u^{\text{I}}\big|_{\rho=a} = u^{\text{II}}\big|_{\rho=a}, \tag{6}$$

$$\varepsilon\frac{\partial u^{\text{I}}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=a} = \frac{\partial u^{\text{II}}}{\partial\rho}\bigg|_{\rho=a}, \tag{7}$$

决定（4）与（5）的系数

由（6）得

$$\begin{cases} C_0 = 0, \\ a_1 a = -E_0 a + a_1' a^{-1}, & (8) \\ a_m a^m = a_m' a^{-m}, & (9) \\ b_m a^m = b_m' a^{-m}, \end{cases}$$

由（7）得

$$\varepsilon a_1 = -E_0 - a_1' a^{-2}, \tag{10}$$

$$\varepsilon a_m \cdot m a^{m-1} = -m a_m' a^{-m-1}, \tag{11}$$

$$\varepsilon b_m \cdot m a^{m-1} = -m b_m' a^{-m-1},$$

由 (8),(10) 两式，解得 $a_1 = \dfrac{-2E_0}{1+\varepsilon}$, $a_1' = \dfrac{(\varepsilon-1)}{\varepsilon+1}a^2E_0$.

由(9)，(11)两式，得：

$$\varepsilon m \cdot a_m' a^{-m} = -m a_m' a^{-m},$$

$$(\varepsilon+1) m a^{-m} a_m' = 0,$$

∴ $a_m' = 0$，从而$a_m = 0$，$(m = 2, 3, \cdots)$，

同理 $b_m = b_m' = 0$，$(m = 1, 2, \cdots)$，

∴ 本问题的解为：

柱内电势分布 $u^{\text{I}}(\rho,\varphi) = \dfrac{-2E_0}{1+\varepsilon}\rho\cos\varphi$,

柱外电势分布 $u^{\mathrm{II}}(\rho,\varphi)=-E_0\rho\cos\varphi+\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}a^2E_0\rho^{-1}\cos\varphi$

$$=-\left(\rho-\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}\cdot\frac{a^2}{\rho}\right)E_0\cos\varphi,$$

柱内场强 $E^{\mathrm{I}}(\rho,\varphi)=-\frac{\partial u^{\mathrm{I}}}{\partial x}=-\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-2E_0}{1+\varepsilon}x\right)$

$$=\frac{2E_0}{1+\varepsilon}.$$

柱内极化强度 $P=(\varepsilon-1)\varepsilon_0E=2\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}E_0$.

柱面束缚电荷面密度 $=P$ 的法向分量 $=2\varepsilon_0\frac{\varepsilon-1}{\varepsilon+1}E_0\cos\varphi$.

在$u^{\mathrm{II}}(\rho,\varphi)$的第二项，表示介质柱体极化电荷对柱体周围电势的影响。

25．半径为 a，表面熏黑了的均匀长圆柱，在温度为零度的空气中受着阳光照射．阳光垂直于柱轴，热流强度为 q．试求柱内稳定温度分布．〔提示：泛定方程为 $\Delta u=0$，边界条件为 $(ku_\rho+Hu)|_{\rho=a}=f(\varphi)$，$f(\varphi)$是热流强度的法向分量．如取极轴垂直于阳光，则

$$f(\varphi)\equiv\begin{cases}q\sin\varphi, & (0<\varphi<\pi),\\ 0, & (\pi<\varphi<2\pi).\end{cases}$$

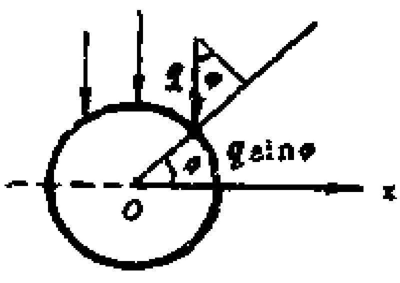


图 10-10

解：如图，取极轴方向垂直于阳光，对于"无限长"圆柱，温度分布与轴向无关，故可取圆柱的一个截面考虑．

以轴心为极点，与阳光垂直的方向为极轴方向，则对于稳定温度而言，$u(\rho,\varphi)$满足拉普拉斯方程$\Delta u=0$，

即 $$u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}=0,\quad\begin{pmatrix}0<\rho<a\\0<\varphi<2\pi\end{pmatrix},\tag{1}$$

在柱面处，一方面有热流流入，另一方面与周围空气进行热交

换，由热传导的定律，可得边界条件如下：

$$[ku_\rho + H(u-0)]|_{\rho=a} = \begin{cases} q\sin\varphi, & 0<\varphi<\pi, \\ 0, & \pi<\phi<2\pi, \end{cases} \quad (2)$$

自然周期条件 $u(\rho,\varphi)=u(\rho,\varphi+2\pi)$，

设 $u(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$，代入（1）有

$$\Phi''+\lambda\Phi=0, \qquad 0<\varphi<2\pi, \quad (4)$$

$$\rho^2R''+\rho R'-\lambda R=0, \quad 0<\rho<a, \quad (5)$$

由（3）$\Phi(\varphi)=\Phi(\varphi+2\pi)$， （6）

解本征问题（4），（6），得本征值 $\lambda=n^2$，（$n=0,1,2\cdots$），

本征函数为 $\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi$，（$n=0,1,2\cdots$），

以λ值代入（5）得 $R_0=C_0+D_0\ln\rho$，

$$R_n=C_n\rho^n+D_n\rho^{-n}, \quad n\neq0,$$

$$\therefore \quad u(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n})$$

$$(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi),$$

$\because$ 在柱内 u 有界，

$\therefore$ $D_n=0$，（$n=0,1,2\cdots$），

$$u=C_0+\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi),$$

由条件（2），

$$HC_0+\sum_{n=1}^{\infty}(kna^{n-1}+Ha^n)(a_n\cos n\varphi+b_n\sin n\varphi)$$

$$=\begin{cases} q\sin\varphi, & (0<\varphi<\pi) \\ 0, & (\pi<\varphi<2\pi) \end{cases}$$

在$[0,2\pi]$上，利用三角函数族之正交性．得

$$C_0=\frac{1}{H}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}q\sin\varphi d\varphi=\frac{q}{\pi H},$$

$$b_1=\frac{1}{(k+Ha)\pi}\int_0^\pi q\sin^2\varphi d\varphi=\frac{q}{2(k+Ha)},$$

当$n\geqslant 2$时，$b_n=0$，

$$a_n=\frac{1}{(k\pi a^{n-1}+Ha^n)\pi}\int_0^\pi q\sin\varphi\cdot\cos n\varphi d\varphi$$

$$=\frac{q}{(kna^{n-1}+Ha^n)\pi}\ \frac{1}{2}\left[\frac{-\cos(1+n)\varphi}{1+n}\right.$$

$$\left.+\frac{-\cos(1-n)\varphi}{1-n}\right]_0^\pi$$

$$=\frac{q}{2\pi(kna^{n-1}+Ha^n)}\left[\frac{1-(-1)^{n+1}}{1+n}+\frac{1-(-1)^{n-1}}{1-n}\right].$$

$$=\begin{cases}0, & n=2m+1,\\ \dfrac{q}{\pi(2kma^{2m-1}+Ha^{2m})}\cdot\dfrac{2}{1-4m^2}, & n=2m,\end{cases}$$

∴ 本问题的解为：

$$u(\rho,\varphi)=\frac{q}{\pi H}+\frac{q}{2(k+Ha)}\sin\varphi$$

$$+\frac{2q}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\rho^{2m}\cos^2 m\varphi}{a^{2m-1}(2km+Ha)(1-4m^2)}.$$

26. 在以原点为心，以R_1和R_2为半径的两个同心圆所围成的环域上求解$\Delta u=0$，使满足边界条件$u|_{\rho=R_1}=f_1(\varphi)$，$u|_{\rho=R_2}=f_2(\varphi)$。

解：取极坐标系，定解问题为

$$\begin{cases}u_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}u_\rho+\dfrac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}=0, & \left(\begin{matrix}R_1<\rho<R_2\\0<\varphi<2\pi\end{matrix}\right),\\ u|_{\rho=R_1}=f_1(\varphi),\\ u|_{\rho=R_2}=f_2(\varphi),\end{cases}$$

与上题类似，利用自然的周期条件得本征值$\lambda=n^2$，（$n=0,1,2,\cdots$），

本征函数为$\Phi_n(\varphi)=A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi$，

一般解为$u(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi$

$+B_n\sin n\varphi)(C_n\rho^n+D_n\rho^{-n})$，

由边界条件$\begin{cases} C_0+D_0\ln R_1+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi \\ \quad +B_n\sin n\varphi)(C_nR_1^n+D_nR_1^{-n})=f_1(\varphi), \\ C_0+D_0\ln R_2+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n\cos n\varphi \\ \quad +B_n\sin n\varphi)(C_nR_2^n+D_nR_2^{-n})=f_2(\varphi), \end{cases}$

$\therefore$ i) $\begin{cases} C_0+D_0\ln R_1=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f_1(\varphi)d\varphi\equiv\beta_0^{(1)}, & (1) \\ C_0+D_0\ln R_2=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f_2(\varphi)d\varphi\equiv\beta_0^{(2)}, & (2) \end{cases}$

$$C_0=\frac{\beta_0^{(1)}\ln R_2-\beta_0^{(2)}\ln R_1}{\ln R_2-\ln R_1},\qquad D_0=\frac{\beta_0^{(1)}-\beta_0^{(2)}}{\ln R_1-\ln R_2},$$

ii) $(C_nR_1^n+D_nR_1^{-n})A_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f_1(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\equiv\beta_n^{(1)}$，

(3)

$(C_nR_2^n+D_nR_2^{-n})A_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f_2(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\equiv\beta_n^{(2)}$，

(4)

$(C_nR_1^n+D_nR_1^{-n})B_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f_1(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi\equiv\alpha_n^{(1)}$，

(5)

$(C_nR_2^n+D_nR_2^{-n})B_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}f_2(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi\equiv\alpha_n^{(2)}$.

(6)

记$K=R_2^{-n}R_1^n-R_1^{-n}R_2^n$，

解（1），（2），得

$$C_nA_n=\frac{1}{K}(R_2^{-n}\beta_n^{(1)}-R_1^{-n}\beta_n^{(2)});$$

$$D_nA_n=-\frac{1}{K}(R_2^n\beta_n^{(1)}-R_1^n\beta_n^{(2)}).$$

解（3），（4），得

$$C_nB_n=\frac{1}{K}(R_2^{-n}\alpha_n^{(1)}-R_1^{-n}\alpha_n^{(2)}),$$

$$D_nB_n=-\frac{1}{K}(R_2^n\alpha_n^{(1)}-R_1^n\alpha_n^{(2)}),$$

则原问题的解为：

$$u(\rho,\varphi)=\frac{\beta_0^{(1)}\ln R_2-\beta_0^{(2)}\ln R_1}{\ln R_2/R_1}+\frac{\beta_0^{(2)}-\beta_0^{(1)}}{\ln R_2/R_1}\ln\rho$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{R_2^{-n}R_1^n-R_1^{-n}R_2^n}\Big\{\Big[(R_2^{-n}\beta_n^{(1)}$$

$$-R_1^{-n}\beta_n^{(2)})\rho^n-(R_2^n\beta_n^{(1)}-R_1^n\beta_n^{(2)})\rho^{-n}\Big]\cos n\varphi$$

$$+\Big[(R_2^{-n}\alpha_n^{(1)}-R_1^{-n}\alpha_n^{(2)})\rho^n-(R_2^n\alpha_n^{(1)}$$

$$-R_1^n\alpha_n^{(2)})\rho^{-n}\Big]\sin n\varphi\Big\}.$$

其中$\beta_0^{(1)},\beta_0^{(2)},\beta_n^{(1)},\beta_n^{(2)},\alpha_n^{(1)},\alpha_n^{(2)}$分别由（1）—（6）式决定。

27. 求解绕圆柱的水流问题。在远离圆柱因而未受圆柱干扰处的水流是均匀的，流速为v_0圆柱半径为a。

解：对于水的无旋流动，有速度u，满足下列关系：

$$\begin{cases}\Delta u=0, & (\vec{v}=\nabla u,\ \rho>a).\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right|_{\rho=a}=0. & u\Big|_{\rho\text{很大}}\approx v_0\rho\cos\varphi.\end{cases}$$

由于流体流动有自然周期条件，所以方程的解是

$$u(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho+A_0\varphi+\sum_{n=1}^{\infty}\Big[\rho^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)$$

$$+\frac{1}{\rho^n}(A_n'\cos n\varphi+B_n'\sin n\varphi)\Big\},$$

由边界条件 $u|_{\rho\to\infty}\approx v_0\cos\varphi$ 得

$$u|_{\rho\to\infty}=\sum_{n=1}^{\infty}\rho^n(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\approx v_0\rho\cos\varphi.$$

$$A_n=0,\ (n\neq 0,1),\quad A_1=v_0,\quad B_n=0.$$

又由

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}=\frac{\partial}{\partial\rho}\Big|_{\rho=a}\Big\{C_0+D_0\ln\rho+v_0\rho\cos\varphi$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\rho^n}[A_n'\cos n\varphi+B_n'\sin n\varphi]\Big\}$$

$$=\frac{D_0}{a}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{-n}{a^{n+1}}[A_n'\cos n\varphi+B_n'\sin n\varphi]$$

$$+v_0\cos\varphi=0,$$

$\therefore\quad D_0=0,\ A_n'=0,\ (n\neq 1),\ -\frac{1}{a^2}A_1'+v_0=0,$

$\therefore\quad A_1'=a^2v_0.$

$\therefore\quad u=C_0+v_0\rho\cos\varphi+\frac{v_0a^2}{\rho}\cos\varphi+A_0\varphi.$

记 $A_0=\frac{\Gamma}{2\pi}$，Γ称为环流，

则 $u(\rho,\varphi)=C_0+v_0\rho\cos\varphi+\frac{v_0a^2}{\rho}\cos\varphi+\frac{\Gamma}{2\pi}\varphi.$

28．长为 l 的理想传输线，一端接于电动势为$v_0\sin\omega t$ 的交流电源．另一端短路，求解线上的稳恒电振荡．并计算输入阻抗。

解：本题为没有初始条件的问题．其定解问题为：

泛定方程：$v_{tt}-a^2v_{xx}=0$，$\left(a=\frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$， (1)

边界条件：$\begin{cases} v|_{x=0} = v_0\sin\omega t, & (2) \\ v|_{x=l} = 0, & (3) \end{cases}$

为了计算方便，将电动势$v_0\sin\omega t$写成$v_0 e^{i\omega t}$，这就需要约定在计算结果中取其虚部，设$v(x,t) = X(x)e^{i\omega t}$，代入泛定方程(1)

$$X(i\omega)^2 e^{i\omega t} - a^2 X'' e^{i\omega t} = 0,$$

即 $$X'' + \left(\frac{\omega}{a}\right)^2 X = 0. \tag{4}$$

（4）式的解为：

$$X = Ae^{i\frac{\omega}{a}x} + Be^{-i\frac{\omega}{a}x},$$

$$\therefore \quad v(x,t) = Xe^{i\omega t} = \left[Ae^{i\frac{\omega}{a}x} + Be^{-i\frac{\omega}{a}x}\right]e^{i\omega t}, \tag{5}$$

利用（2）式$v|_{x=0} = v_0 e^{i\omega t}$，代入（5）式：

$$[A+B]e^{i\omega t} = v_0 e^{i\omega t}，\text{即} A+B = v_0, \tag{6}$$

利用（3）式$v|_{x=0} = 0$，代入（5）式有：

$$\left[Ae^{i\frac{\omega}{a}l} + Be^{-i\frac{\omega}{a}l}\right] = 0, \tag{7}$$

解（6）式和（7）式得

$$A = \frac{v_0}{1-e^{2i\frac{\omega}{a}l}} = \frac{iv_0 e^{-i\frac{\omega}{a}l}}{2\sin\left(\frac{\omega}{a}l\right)},$$

$$B = \frac{v_0}{1-e^{-2i\frac{\omega}{a}l}} = \frac{-iv_0 e^{i\frac{\omega}{a}l}}{2\sin\left(\frac{\omega}{a}l\right)},$$

以A、B代入（5）式得

$$v(xt) = \frac{v_0\left[e^{i\frac{\omega}{a}(x-l)} - e^{-i\frac{\omega}{a}(x-l)}\right]e^{i\omega t}}{-2i\sin\left(\frac{\omega}{a}l\right)}$$

$$= \frac{v_0\left[e^{i\frac{\omega}{a}(l-x)} - e^{-i\frac{\omega}{a}(l-x)}\right]e^{i\omega t}}{2i\sin\left(\frac{\omega l}{a}\right)}$$

$$= \frac{\sin\frac{\omega}{a}\left(l-x\right)}{\sin\left(\frac{\omega l}{a}\right)} e^{i\omega t},$$

取 $v(x,t)$ 的虚部，并以 $a=\sqrt{\frac{1}{LC}}$ 代入，可得

$$v(x,t) = \frac{v_0\sin\omega\sqrt{LC}\,(l-x)}{\sin\omega l\sqrt{LC}}\sin\omega t,$$

而 $$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{-v_0\omega\sqrt{LC}\cos\omega\sqrt{LC}\,(l-x)\sin\omega t}{\sin\omega l\sqrt{LC}},$$

对于理想传输线，$R=G=0$，由(31,12)式得

$$\frac{\partial j}{\partial t} = -\frac{1}{L}v_x = v_0\omega\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\cos\omega\sqrt{LC}\,(l-x)}{\sin\omega l\sqrt{LC}}\sin\omega t,$$

$$\therefore\quad j(x,t) = \int\frac{\partial j}{\partial t}dt$$

$$= v_0\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\cos\omega\sqrt{LC}\,(l-x)}{\sin\omega l\sqrt{LC}}\int\omega\sin\omega t\,dt$$

$$= -v_0\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\cos\omega\sqrt{LC}\,(l-x)}{\sin\omega l\sqrt{LC}}\cos\omega t + f(t). \tag{8}$$

由于(8)对t求导后为$-\frac{1}{L}v_x$，可知 $f'(t)=0$，故可取 $f(t)=0$

输入阻抗$Z_i = \frac{v_{max}|_{x=0}}{j_{max}|_{x=0}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\,\mathrm{tg}\,\omega l\sqrt{LC}$.

若以 $l=\frac{\lambda}{4}$，且 $\omega=\frac{2\pi a}{\lambda}$ 代入上式

得 $Z_l=\sqrt{\frac{L}{C}}\operatorname{tg}\frac{2\pi a}{\lambda}\cdot\frac{\lambda}{4}\cdot\frac{1}{a}$

$=\sqrt{\frac{L}{C}}\operatorname{tg}\frac{\pi}{2}=\infty$。

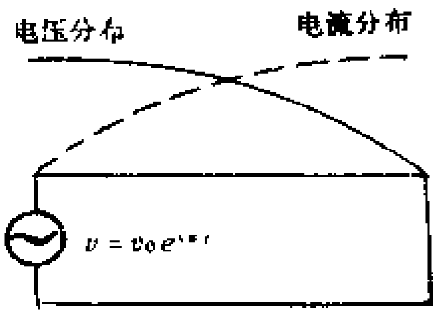


图 10-11

29. 长为 l 的非理想传输线，一端接于电源 $v_0\sin\omega t$，另一端通过阻抗元件 R_0，L_0 和 C_0 而相接。求解线上的稳恒电振荡。在什么情况下不存在反射波（这叫作匹配）？

解：传输线上电压方程为（即31、14式）：

$$LCv_{tt}-v_{xx}+(LG+RC)v_t+RGv=0。\tag{1}$$

边界上，$x=0$ 处将电压 $v|_{x=0}=v_0\sin\omega t$ 写成复数形式，并约定其结果中取虚部：

$$v|_{x=0}=v_0e^{i\omega t},\tag{2}$$

$x=l$ 处串接阻抗元件，电压为：

$$v|_{x=l}=\left(jR_0+L_0\frac{dj}{dt}+\frac{1}{C_0}\int_{t_0}^{t}jdt\right)\Big|_{x=l}。$$

由于是稳定电振荡，可以认为振荡周期和电源周期相同，因此可将 v 表示成 $v=X(x)e^{i\omega t}$， (3)

则 $v_{xx}=X''(x)e^{i\omega t}$，$v_t=i\omega Xe^{i\omega t}$，

$v_{tt}=-\omega^2X(x)e^{i\omega t}$，

将上列各式代入方程（1）：

$$-\omega^2X(x)e^{i\omega t}LC-X''(x)e^{i\omega t}+(LG+RC)i\omega X(x)e^{i\omega t}+RGX(x)e^{i\omega t}=0,$$

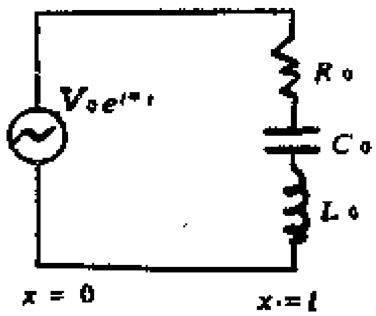


图 10-12

整理后有：

$$\frac{X''(x)}{X(x)}=-\omega^2LC+i\omega(LG+RC)+RG$$

$$=(R+i\omega L)(G+i\omega C),$$

上面微分方程的解为：

$$X(x)=Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}, \tag{4}$$

式中 $\alpha=\sqrt{(R+i\omega L)(G+i\omega C)}$， （5）

由（31、12）式得：

$$j_x=-Gv-Cv_t=-GXe^{i\omega t}-C(i\omega)Xe^{i\omega t},$$
$$=-(G+i\omega C)Xe^{i\omega t}$$
$$=-(G+i\omega C)(Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x})e^{i\omega t}$$

$$j=-(G+i\omega C)\left[\frac{A}{\alpha}\int e^{\alpha x}d(\alpha x)-\frac{B}{\alpha}\int e^{-\alpha x}d(\alpha x)\right]e^{i\omega t}+f(t)$$

$$=-\frac{(G+i\omega C)}{\alpha}\left[Ae^{\alpha x}-Be^{-\alpha x}\right]e^{i\omega t}+f(t), \tag{6}$$

$$j_t=-\frac{(G+i\omega C)}{\alpha}\left[Ae^{\alpha x}-Be^{-\alpha x}\right](i\omega)e^{i\omega t}+f'(t).$$

代入（31.12）式中关于v_x的方程。

$$v_x=-R_j-Lj_t=-[Rj+Lj_t]$$
$$=\frac{R(G+i\omega C)}{\alpha}[Ae^{\alpha x}-B^{-\alpha x}]e^{i\omega t}$$
$$+\frac{i\omega L(G+i\omega C)}{\alpha}[Ae^{\alpha x}-Be^{-\alpha x}]e^{i\omega t}$$
$$-(Rf+Lf')$$
$$=\frac{R(G+i\omega C)}{\alpha}[Ae^{\alpha x}-Be^{-\alpha x}]e^{i\omega t}$$
$$+\frac{i\omega L(G+i\omega C)}{\alpha}[Ae^{\alpha x}-Be^{-\alpha x}]e^{i\omega t}$$
$$-(Rf+Lf')$$

$$= \frac{(G+i\omega C)}{\alpha}(R+i\omega L)[Ae^{\alpha x}-Be^{-\alpha x}]$$

$$e^{i\omega t}-(Rf-Lf')$$

$$=\alpha[Ae^{\alpha x}-Be^{-\alpha x}]e^{i\omega t}-(Rf+Lf'). \quad (7)$$

另一方面，从（3）式和（4）式中得到

$$v_x=X'(x)e^{i\omega t}=[\alpha Ae^{\alpha x}-\alpha Be^{-\alpha x}]e^{i\omega t}$$

$=\alpha[Ae^{\alpha x}-Be^{-\alpha x}]e^{i\omega t}$，代入（7）式的左边有

$$\alpha[Ae^{\alpha x}-Be^{-\alpha x}]e^{i\omega t}$$

$$=\alpha[Ae^{\alpha x}-Be^{-\alpha x}]e^{i\omega t}-(Rf+Lf').$$

即 $\quad Rf(t)+Lf'(t)=0,$

$$\frac{df(t)}{dt}=-\frac{R}{L}f(t), \qquad \frac{df}{f}=-\frac{R}{L}dt.$$

$\therefore \quad f(t)=f_0 e^{-\frac{R}{L}t}$，代入（6）式：

$$j=-\sqrt{\frac{G+i\omega C}{R+i\omega L}}\left[Ae^{\alpha x}-Be^{-\alpha x}\right]e^{i\omega t}+f_0 e^{-\frac{R}{L}t}. \quad (8)$$

$$v=[Ae^{\alpha x}+Be^{-\alpha x}]e^{i\omega t}, \quad (9)$$

代入边界条件：$\begin{cases} v|_{x=0}=v_0e^{i\omega t}, \\ v|_{x=l}=\left(R_0+i\omega L_0-\dfrac{i}{C_0\omega}\right)j|_{x=l}, \end{cases}$

得$f_0=0$，及

$$\begin{cases} A+B=v_0, \\ Ae^{\alpha l}+Be^{\alpha l}=\left(R_0+i\omega L_0-\dfrac{i}{\omega C_0}\right)\sqrt{\dfrac{G+i\omega C}{R+i\omega L}} \\ \qquad (Ae^{\alpha l}-Be^{-\alpha l}). \end{cases}$$

解之得：

$$\begin{cases} A = \dfrac{R_0 + i\omega L_0 - \dfrac{i}{C_0\omega} - \sqrt{\dfrac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}}{M}, \\ B = \dfrac{R_0 + i\omega L_0 - \dfrac{i}{C_0\omega} + \sqrt{\dfrac{(R + i\omega L)}{(G + i\omega C)}}}{M} \cdot e^{2\alpha l}, \end{cases}$$

式中，$M = \left(R_0 + i\omega L_0 - \dfrac{i}{C_0\omega} + \sqrt{\dfrac{R + i\omega L}{G + i\omega C}} \right) e^{\alpha l}$

$$+ \left(R_0 + i\omega L_0 - \frac{i}{C_0\omega} - \sqrt{\frac{R + i\omega L}{G + i\omega C}} \right) e^{-\alpha l}.$$

从方程（9）中可以看出，$Be^{-\alpha x + i\omega t}$表示前进波，

$Ae^{\alpha x + i\omega t}$表示反射波。若$A = 0$表示不存在反射波

即必须 $R_0 + i\omega L_0 - \dfrac{i}{C_0\omega} = \sqrt{\dfrac{R + i\omega L}{G + i\omega C}}$，等号右边称为传输线的特征阻抗。

30. 长为l的均匀杆，一端固定，另一端在纵向力$F(t) = F_0\sin\omega t$长期作用下，求解杆的稳恒振动。

解：这个杆的稳恒振动完全是由力$F(t)$长期作用下形成的，因而是一个没有初始条件的问题。定解问题是：

$$\begin{cases} u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0, & (1) \\ u|_{x=0} = 0, & (2) \\ u_x|_{x=l} = \dfrac{F_0}{YS} e^{i\omega t}, & (3) \end{cases}$$

因为是稳定振动，因此可设振动周期和外力有相同的周期，

$$u(x,t) = X(x)\sin\omega t,$$

代入（1）得 $-\omega^2 X\sin\omega t - a^2 X''\sin\omega t = 0$,

$$X'' + \frac{\omega^2}{a^2}X = 0, \quad \therefore \quad X = C_1\cos\frac{\omega}{a}x + C_2\sin\frac{\omega}{a}x,$$

由边界条件（2）得$C_1 = 0$。

由条件（3）得：$C_2\frac{\omega}{a}\cos\frac{\omega}{a}x\Big|_{x=l}=\frac{F_0}{YS}$。

$$\therefore\quad C_2=\frac{F_0a}{YS\omega}\cdot\frac{1}{\cos\frac{\omega}{a}l},$$

$$\therefore\quad \text{所求解是}\ u(x,t)=\frac{F_0a}{YS\omega}\cdot\frac{\sin\frac{\omega}{a}x}{\cos\frac{\omega}{a}l}\sin\omega t.$$

§37. 非齐次的泛定方程（傅里叶级数法）

1.两端固定的弦在线密度为$\rho f(x,t)=\rho\Phi(x)\sin\omega t$的横向力作用下振动．求解其振动情况，研究共振的可能性，并求共振时的解。

解：(i) 冲量定理法

$$\begin{cases}u_{tt}-a^2u_{xx}=\Phi(x)\sin\omega t,\\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0,\\ u|_{t=0}=0,u_t|_{t=0}=0,\end{cases}$$

应用冲量定理法．先求解

$$\begin{cases}v_{tt}-a^2v_{xx}=0, & (1)\\ v|_{x=0}=0,\quad v|_{x=l}=0, & (2)\\ v|_{t=\tau+0}=0,v_t|_{t=\tau+0}=\Phi(x)\sin\omega\tau, & (3)\end{cases}$$

∵ 是第一类齐次边界条件．因此可设

$$v(x,t,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t,\tau)\sin\frac{n\pi x}{l},$$

代入(1)，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T_n''+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n\right)\sin\frac{n\pi x}{l}=0,$$

解 $$T_n'' + \frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n = 0,$$

得 $$T_n(t,\tau) = A_n(\tau)\cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l} + B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}.$$

$$\therefore\quad v(x,t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[A_n(\tau)\cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l} + B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

由(3) $$\sum_{n=1}^{\infty} A_n(\tau)\sin\frac{n\pi x}{l} = 0,\quad A_n(\tau) = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n(\tau)\frac{n\pi a}{l}\sin\frac{n\pi x}{l} = \Phi(x)\sin\omega\tau,$$

$$\therefore\quad B_n(\tau) = \frac{2}{n\pi a}\sin\omega\tau\int_0^l \Phi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi.$$

$$\therefore\quad v(x,t,\tau) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{n\pi a}\sin\omega\tau\int_0^l \Phi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\right]\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\cdot\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

从而原问题的解为

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \int_0^t v(x,t,\tau)d\tau \\ &= \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{n}\left(\int_0^l \Phi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\right)\sin\frac{n\pi x}{l}\right]\int_0^t \sin\omega\tau\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau \\ &= \frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^l \Phi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\left[\frac{\omega\sin\frac{n\pi at}{l} - \frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2 - n^2\pi^2a^2/l^2}\right]\sin\frac{n\pi x}{l}. \end{aligned}$$

下面研究共振的可能性，并求共振时的解。

如外力的频率等于基音或谐音的频率，亦即当

$\omega=\frac{n\pi a}{l}$，（$n=1,2,\cdots$中的某一个值）时，解$u(x,t)$

的表达式中[　　]内为$\frac{0}{0}$型，由洛必达法则

$$\lim_{\omega\to\frac{n\pi a}{l}}\frac{\omega\sin\frac{n\pi at}{l}-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-n^2\pi^2a^2/l^2}$$

$$=\lim_{\omega\to\frac{n\pi a}{l}}\frac{\sin\frac{n\pi at}{l}-t\frac{n\pi a}{l}\cos\omega t}{2\omega}$$

$$=\frac{1}{2\omega}\sin\omega t-\frac{1}{2}t\cos\omega t,$$

这时$\frac{1}{2}t\cos\omega t$项的振幅$\frac{1}{2}t$随时间t而增长，亦即发生共振。

(ii) 格林函数法，先求格林函数G。

$$\begin{cases}G_{tt}-a^2G_{xx}=\delta(x-\xi)\delta(t-\tau)\,;\\ G|_{x=0}=0\,,\qquad G|_{x=l}=0\,,\\ G|_{t=0}=0\,,\qquad G_t|_{t=0}=0\,,\end{cases}$$

即$$\begin{cases}G_{tt}-a^2G_{xx}=0\,,\\ G|_{x=0}=0\,,\quad G|_{x=l}=0\,,\\ G|_{t=\tau+0}=0\,,\quad G_t|_{t=\tau+0}=\delta(x-\xi)\,,\end{cases}$$

$$G(x,t;\xi,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n(\xi,\tau)\cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}$$
$$+B_n(\xi,\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\Big]\sin\frac{n\pi x}{l},$$

由初始条件，$A_n=0$，

$$B_n(\xi,\tau)=\frac{2}{n\pi a}\int_0^l \delta(x-\xi)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2}{n\pi a}\sin\frac{n\pi\xi}{l},$$

$$\therefore G(x,t;\xi,\tau)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}$$

$$\sin\frac{n\pi x}{l},$$

从而原问题的解为：

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l}f(\xi,\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l}\Big(\Phi(\xi)\sin\omega\tau\cdot\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin$$

$$\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\Big)d\xi d\tau$$

$$=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big[\Big(\Big(\int_0^l\Phi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\Big)\sin\frac{n\pi x}{l}\Big]$$

$$\int_0^t\sin\omega\tau\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau$$

$$=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\int_0^l\Phi(\xi)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi$$

$$\left(\frac{\omega\sin\frac{n\pi at}{l}-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-n^2\pi^2a^2/l^2}\right)\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

(iii) 傅里叶级数法

设 $u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$,

为定$T_n(t)$，将$f(x,t)=\Phi(x)\sin\omega t$展成以 $\left\{\sin\frac{n\pi x}{l}\right\}$

为基函数族的傅里叶级数，其傅里叶系数为

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l \Phi(x)\sin\omega t\sin\frac{n\pi x}{l}dx.$$

将$u(x,t)$及$f(x,t)$的傅氏级数代入泛定方程，比较系数得

$$\left.\begin{array}{l}T''_n+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n=f_n(t),\\ \text{由零初始条件，得}T_n(0)=0,T'_n(0)=0,\end{array}\right\}$$

用拉氏变换解此常微分方程，得

$$p^2T_n(p)+\frac{n^2\pi^2a^2}{l^2}T_n(p)=\bar{f}_n(p),$$

$$T_n(p)=\frac{1}{p^2+\dfrac{n^2\pi^2a^2}{l^2}}\bar{f}_n(p),$$

利用卷积定理反演，得

$$T_n(t)=\frac{l}{n\pi a}\int_0^t f_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau$$

$$=\frac{2}{n\pi a}\int_0^t\int_0^l f(x,\tau)\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}dxd\tau,$$

$$\therefore\ u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi x}{l}$$

$$=\int_0^t\int_0^l\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n\pi a}\sin\frac{n\pi\xi}{l}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}f(\xi,\tau)d\xi d\tau.$$

这就是弦振动方程在第一类齐次边界条件与零初始条件下解的公式。对于本题而言，$f(x,t)=\Phi(x)\sin\omega t$，以此代入后，则有

$$\int_0^t \sin\omega\tau \sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\,d\tau$$

$$=\frac{\omega\sin\frac{n\pi at}{l}-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-n^2\pi^2a^2/l^2}.$$

所得结果与前两法相同.

在上述一般公式中，积分号下与$f(\xi,\tau)$相乘的级数，正是解法(ii)中所求得的格林函数.

2.两端固定弦在点x_0受谐变力$\rho f(t)=\rho f_0\sin\omega t$作用而振动，求解振动情况.〔提示：外加力的线密度可表为$\rho f(x,t)=\rho f_0\sin\omega t\ \delta(x-x_0)$.〕

解：(i) 用冲量定理法求解

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f_0\sin\omega t\delta(x-x_0), \\ u|_{x=0}=0,\quad u|_{x=l}=0, \\ u_t|_{t=0}=0,\quad u|_{t=0}=0, \end{cases}$$

应用冲量定理法，先解

$$\begin{cases} v_{tt}-a^2v_{xx}=0, \\ v|_{x=0}=0,\quad v|_{x=l}=0, \\ v|_{t=\tau+0}=0,\quad v_t|_{t=\tau+0}=f_0\delta(x-x_0)\sin\omega\tau. \end{cases}$$

与上一题一样，可得

$$v(x,t,\tau)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n(\tau)\cos\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}+B_n(\tau)\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\right\}\sin\frac{n\pi x}{l}.$$

由初始条件，诸$A_n(\tau)=0$，

$$B_n(\tau)=\frac{2}{n\pi a}f_0\sin\omega\tau\int_0^l\delta(x-x_0)\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{2f_0}{n\pi a}\sin\omega\tau\sin\frac{n\pi x_0}{l},$$

$$\therefore \quad v(x,t;\tau)=\frac{2f_0}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\omega\tau\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi x}{l},$$

从而原问题的解为

$$u(x,t)=\int_0^t v(x,t;\tau)d\tau$$

$$=\frac{2f_0}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^t\sin\omega\tau\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau$$

$$=\frac{2f_0}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\left(\frac{\omega\sin\frac{n\pi a}{l}t-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-n^2\pi^2a^2/l^2}\right).$$

(ii) 用格林函数法求解，如上题，对弦振动方程第一类齐次边界条件、零初始条件的格林函数是：

$$G(x,t;\xi,\tau)=\frac{2}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\sin\frac{n\pi\xi}{l},$$

所以原问题的解为

$$u(x,t)=\int_{\tau=0}^{t}\int_{\xi=0}^{l}f(\xi\tau)G(x,t;\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$=\frac{2f_0}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left[\left(\int_0^l\delta(\xi-x_0)\sin\frac{n\pi\xi}{l}d\xi\right)\right.$$

$$\sin\frac{n\pi x}{l}\int_0^t\sin\omega\tau$$

$$\cdot \sin\frac{n\pi a(t-\tau)}{l}d\tau \Big]$$

$$=\frac{2f_0}{\pi a}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi x_0}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\cdot\left(\frac{\omega\sin\frac{n\pi at}{l}-\frac{n\pi a}{l}\sin\omega t}{\omega^2-n^2\pi^2a^2/l^2}\right).$$

3.均匀细导线，每单位长的电阻为 R，通以恒定电流I，导线表面跟周围温度为零度的介质进行热量交换，试解线上温度变化，设初始温度和两端温度都是零度.

解：泛定方程是$c\rho u_t d_t - ku_{xx}dt = -kudt + RI^2dt$，即

$$\begin{cases} u_t - a^2u_{xx} + \dfrac{h}{c\rho}u = \dfrac{1}{c\rho}I^2R, & (1)\\ u(ot) = u(ot) = 0\ ,u|_{t=0} = 0\ , & (2)\end{cases}$$

从泛定方程和齐次边界条件得知(1)的特征函数是$\sin\frac{n\pi}{l}x$

将$\frac{1}{c\rho}I^2R$ 展开为和特征函数相对应的傅立叶级数

$$C_n=\frac{2}{l}\int_0^l\frac{1}{c\rho}I^2R\sin\frac{n\pi}{l}\zeta d\zeta$$

$$=\frac{2}{n\pi}I^2R\frac{1}{c\rho}\int_0^l\sin\frac{n\pi}{l}\zeta d\left(\frac{n\pi}{l}\zeta\right)$$

$$=\frac{2}{n\pi}I^2R\frac{1}{c\rho}\Big[-\cos\frac{n\pi}{l}\zeta\Big]_0^l$$

$$=\frac{2}{n\pi}\frac{I^2R}{c\rho}1-(-1)^n],$$

取$n=2k+1=2n+1$为奇数， $c_n=\dfrac{4}{(2n+1)\pi}\dfrac{I^2R}{c\rho}$，

$$\therefore\ \frac{1}{c\rho}I^2R=\frac{4I^2R}{c\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

(3)

令$u(xt)=\sum T_n(t)X(x)=\sum T_n\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x$, (4)

将(3)(4)代入(1)中

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(T'_{2n+1}+\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}T_{2n+1}+\frac{h}{c\rho}T_{2n+1}\right)$$

$$\times\ \sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4I^2R}{c\rho(2n+1)\pi}\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x,$$

比较$\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x$的系数得到

$$T'+\left[\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}+\frac{h}{c\rho}\right]T=\frac{4I^2R}{c\rho(2n+1)\pi}. \quad (5)$$

微分方程(5)的相应齐次方程的解是

$T=C_1e^{-\left[\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}+\frac{h}{c\rho}\right]t}$ 应用系数变更法方程(5)的全解是,

$$T=e^{-\int pdt}\left[c_1+\int Q(t)e^{\int pdt}dt\right], \quad (6)$$

(6)式中的$p=\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}+\frac{h}{c\rho}$, $Q=\frac{4I^2R}{c\rho(2n+1)\pi}$,

p、Q, 都是常数

$$\therefore\quad T=e^{-pt}\left[c_1+\int Qe^{pt}dt\right]=e^{-pt}\left[c_1+\frac{Q}{p}e^{pt}\right].$$

应用初始条件决定$T(0)=0$, $\therefore\ c_1=-\frac{Q}{p}$.

因此$T=\frac{Q}{p}(1-e^{-pt})=\frac{4I^2R}{c\rho(2n+1)\pi}\cdot\frac{1}{p}(1-e^{-pt})$.

$$\therefore \quad u(x,t)=\frac{4I^2R}{c\rho}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n+1)\pi}\frac{1}{\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}+\frac{h}{c\rho}}$$

$$\left\{1-e^{-\left[\frac{(2n+1)^2\pi^2a^2}{l^2}+\frac{h}{c\rho}\right]t}\right\}\cdot\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

4.在圆域$\rho<a$上求解$\Delta u=-4$边界条件是$u|_{\rho=a}=0$.

解：在圆柱坐标中的拉氏方程是

$$\frac{\partial u}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}=-4,\quad u|_{\rho=a}=0. \tag{1}$$

由试探法找一个特解，使泛定方程化为齐次的。

设$u=v-\rho^2$，则定解问题成为

$$\frac{\partial^2v}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2v}{\partial\varphi^2}=0, \tag{2}$$

$$v|_{\rho=a}=a^2,\qquad(\because u|_{\rho=a}=v|_{\rho=a}-a^2=0), \tag{3}$$

泛定方程(2)的解是

$$v(\rho,\varphi)=C_0+D_0\ln\rho+\left(C_np^n+D_n\frac{1}{\rho n}\right)(A_m\cos m\varphi$$
$$+B_m\sin m\varphi),$$

代入边界条件$v|_{\rho=a}=C_0+D_0\ln a+\left(C_na^n+D_n\frac{1}{a^n}\right)$

$(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)=a^2$.

因为边界条件与φ无关$v|_{\rho=a}=C_0+D_0\ln a+\left(C_na^n+\right.$

$\left.+D_n\frac{1}{a^n}\right)=a^2$,

比较系数$C_0=0$, $D_0=0$, $C_2=1$, $D_n=0$, 所以$v=a^2$.

所以所求的解　　$u=v-\rho^2=a^2-\rho^2$.

5.在圆域$\rho<a$上求解$\Delta u=-xy$，边界条件是$u|_{\rho=a}=0$.

解：(i) 用傅里叶级数法求解.

$$
\begin{cases}
u_{\rho\rho}+\dfrac{1}{\rho}u_{\rho}+\dfrac{1}{\rho^{3}}u_{\varphi\varphi}=-\rho^{2}\sin\varphi\cos\varphi=-\dfrac{1}{2}\rho^{2}\sin 2\varphi, & (1)\\
u|_{\rho=a}=0, & (2)
\end{cases}
$$

设$u=\sum\limits_{m=0}^{\infty}R_m(\rho)(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)$，

代入(2)有 $\quad R_m(a)=0, m=0,1,2,\cdots.\qquad (2')$

代入(1)有 $\quad \sum\limits_{m=0}^{\infty}\left(R''_m+\dfrac{1}{\rho}R'_m-\dfrac{m^2}{\rho^2}R_m\right)(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)$

$$=-\frac{1}{2}\rho^{2}\sin\varphi.$$

∴ 诸$A_m=0$，且$B_m=0$，$(m\neq 2)$.取$B_2=1$，有

$$R''_2+\frac{1}{\rho}R'_2-\frac{2^2}{\rho^2}R^2=-\frac{1}{2}\rho^4,$$

令$\rho=e^t$，有$\ddot{R}_2-4R_2=-\dfrac{1}{2}e^{4t}$，

$$R_2=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}-\frac{1}{24}e^{4t}=c_1\rho^2+c_2\rho^{-2}-\frac{1}{24}\rho^4,$$

由于u在圆内有界，

∴ $c_2=0$，又由(2)$c_1=\dfrac{1}{24}a^2$，

∴ 解为$u(\rho、\varphi)=\dfrac{1}{24}\rho^2(a^2-\rho^2)\sin 2\varphi$.

(ii) 用特解法求定解问题.注意到

$\Delta(x^3y)=bxy$，$\Delta(xy^3)=bxy$.

为便于化为极坐标，取$v=-\dfrac{1}{12}(x^3y+xy^3)$，$\Delta v=-xy$，

令 $u=v+w$，在极坐标下 $v=-\dfrac{1}{12}xy(x^2+y^2)$

$$= -\frac{1}{12}\rho^4\sin\varphi\cos\varphi,$$

则 $\quad \Delta w = 0$,

$$w|_{\rho=a} = u|_{\rho=a} - v|_{\rho=a} = \frac{1}{12}\rho^4\sin\varphi\cos\varphi|_{\rho=a} = \frac{1}{24}a^4\sin 2\varphi,$$

解上述定解问题

$$w = C_0 + D_0\ln\rho + \sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\varphi + B_m\sin m\varphi)(C_m\rho^m + D_m\rho^{-m}),$$

由于w在圆内有界,$D_0 = D_m = 0$,记$A_mC_m = a_m$,$B_mC_m = b_m$,由边界条件

$$C_0 + \sum_{m=1}^{\infty}(a_m\cos m\varphi + b_m\sin m\varphi)a^m = \frac{1}{24}a^4\sin 2\varphi,$$

知$C_0 = 0$,$a_m = 0$,$b_2 = \frac{1}{24}a^2$,$m \neq 2$时,$b_m = 0$,

$$\therefore \quad w = \frac{1}{24}a^2\rho^2\sin 2\varphi,$$

$$\therefore \quad u(\rho,\varphi) = v + w = -\frac{1}{24}\rho^4\sin 2\varphi + \frac{1}{24}a^2\rho^2\sin 2\varphi$$

$$= \frac{1}{24}\rho^2(a^2 - \rho^2)\sin 2\varphi,$$

6.在矩形域$0 < x < a$,$-\frac{b}{2} < y < \frac{b}{2}$上求解$\Delta u = -2$且$u$在边界上的值为零.

解:$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -2 \qquad (1)$$

$$u(0,y) = u(a,y) = 0,\quad u\left(x,\frac{b}{2}\right) = u\left(x,-\frac{b}{2}\right) = 0 \qquad (2)$$

取试探解 $V = A + BX + CX^2$使$\Delta_2 V = -2$且$V|_{x=0} = V|_{x=a}$

$= 0$，

（由于$\Delta_2 V = -2, V|_{x=0} = V|_{x=A} = 0$有三个条件，所以可以定出三个系数$A$、$B$、$C$）。

由$\Delta_2 V = -2$，得出$C = -1$，由$V|_{x=0} = 0$，$A = 0$。

$V|_{x=a} = 0$，$B = a$。

$\therefore \quad V = ax - x^2 = x(x-a)$，

令 $\quad u = v + w, \Delta_2 w = 0$， （3）

$w|_{x=0} = u - v|_{x=0} = 0$，$w|_{x=a} = u - v|_{x=a} = 0$，

$$w\Big|_{y=\frac{b}{2}} = w\Big|_{y=-\frac{b}{2}} = u - v\Big|_{y=\frac{b}{2}} = -x(x-a),$$

泛定方程（3）的x有齐次边界条件$X = \sum C_n \sin\dfrac{n\pi}{a}x$，对于$y$没有齐次边界条件，

$$\therefore \quad W = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \mathrm{Ch}\frac{n\pi y}{a} + B_n \mathrm{Sh}\frac{n\pi y}{a}\right)\sin\frac{n\pi}{a}x,$$

应用边界条件$W\Big|_{y=\frac{b}{2}} = -x(x-a)$，及$W\Big|_{y=-\frac{b}{2}} = -x(x-a)$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \mathrm{Ch}\frac{n\pi}{a}\cdot\frac{b}{2} + B_n \mathrm{Sh}\frac{n\pi b}{2a}\right)\sin\frac{n\pi}{e}x$$

$$= -x(x-a),$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n \mathrm{Ch}\frac{n\pi b}{2a} - B_n \mathrm{Sh}\frac{n\pi b}{2a}\right)\sin\frac{n\pi}{e}x = -x(x-a).$$

$$A_n \mathrm{Ch}\frac{n\pi b}{2a} + B_n \mathrm{Sh}\frac{n\pi b}{2a}$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^a -x(a-x)\sin\frac{n\pi}{e}x\,dx,$$

$$A_n \mathrm{Ch}\frac{n\pi b}{2a} - B_n \mathrm{Sh}\frac{n\pi b}{2a}$$

$$= \frac{2}{a}\int_0^a - x(a-x)\sin\frac{n\pi}{e}x dx.$$

$$\therefore \quad B_n = 0$$

$$A_n = \frac{2}{n\pi \mathrm{Ch}\frac{n\pi b}{2a}}\left\{ x(a-x)\cos\frac{n\pi x}{a}\Big|_0^a\right.$$

$$\left. - \int_0^a \cos\frac{n\pi}{e} xd\,[x(a-x)]\right\}$$

$$= \frac{2}{n\pi \mathrm{Ch}\frac{n\pi b}{2a}}\left\{\int_0^a x\cos\frac{n\pi}{a}xdx - \int_0^a (a-x)\cos\right.$$

$$\left.\frac{n\pi}{e}xdx\right\}$$

$$= \frac{2a}{n^2\pi^2 \mathrm{Ch}\frac{n\pi b}{2a}}\left\{ x\sin\frac{n\pi}{c}x\Big|_0^a - \int_0^a \sin\frac{m\pi}{a}xdx\right.$$

$$\left. - (a-x)\sin\frac{n\pi}{a}x\Big|_0^a - \int_0^a \sin\frac{n\pi}{a}xdx\right\}$$

$$= \frac{4a^2}{n^3\pi^3 \mathrm{Ch}\frac{n\pi b}{2a}}[(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} \dfrac{-8a^2}{\pi^3(2k+1)^3 \mathrm{Ch}\frac{(2k+1)\pi b}{2a}}, & [n\text{为奇数}2k+1], \\ & n\text{为偶数}. \end{cases}$$

$$\therefore \quad w(xy) = -\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mathrm{Ch}\frac{(2k+1)\pi y}{a}\sin\frac{(2k+1)\pi}{a}x}{(2k+1)^3 \mathrm{Ch}\frac{(2k+1)\pi b}{2a}},$$

$$u(x\,y)=x(a-x)-\frac{8a^2}{\pi^3}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\operatorname{Ch}\dfrac{(2k+1)\pi y}{a}\sin\dfrac{(2k+1)\pi}{a}x}{(2k+1)^3\operatorname{Ch}\dfrac{(2k+1)\pi b}{2a}},$$

7.在矩形域 $0<x<a$ $-\frac{b}{2}<y<\frac{b}{2}$ 上求解$\Delta u=-x^2y$，且u在边界上的值为零：

解：找一个特解v使泛定方程为齐次，且仍保持齐次的边界条件$v|_{x=0}=v|_{x=a}=0$。

设$v=Axy+Bx^4y$，由$\Delta_2 v=12Bx^2y=-x^2y$，

$$\therefore\quad B=-\frac{1}{12},$$

$$\text{由}v|_{x=a}=0\text{ 得}A=\frac{a^3}{12},$$

$$\therefore\quad v=\frac{1}{12}(a^3xy-x^4y)=\frac{xy}{12}(a^3-x^3),$$

$u=v+w$得出

$$\Delta w=0\qquad w|_{x=0}=w|_{x=a}=0,$$

$$w|_{y=+\frac{b}{2}}=+\frac{xb}{24}(a^3-x^3),$$

$$w|_{y=-\frac{b}{2}}=\frac{-bx}{24}(a^3-x^3).$$

$$w=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{A_n\operatorname{Ch}\frac{n\pi y}{a}+B_n\operatorname{Sh}\frac{n\pi y}{a}\right\}\sin\frac{n\pi}{a}x,$$

应用关于y的边界条件来确定A_n和B_n。先求积分

$$I_n=\frac{2}{a}\int_0^a\frac{bx}{24}(a^3-x^3)\sin\frac{n\pi}{a}x\,dx$$

$$=\frac{-b}{12}\cdot\frac{12a^3}{n^3\pi^3}\left\{a^2(-1)^n+\frac{2a^2}{n^2\pi^2}\left[1-(-1)^n\right]\right\}$$

$$=\frac{-ba^4}{n^5\pi^5}\left[n^2\pi^2(-1)^n+2-2(-1)^n\right],$$

$$\begin{cases} A_n\mathrm{Ch}\frac{n\pi b}{2a}-B_n\mathrm{Sh}\frac{n\pi b}{2a}=I_n, & \text{得}A_n=0\text{。}\\ A_n\mathrm{Ch}\frac{n\pi b}{2a}+B_n\mathrm{Sh}\frac{n\pi b}{2a}=-I_n, & B_n=\frac{I_n}{\mathrm{Sh}\frac{n\pi b}{2a}},\end{cases}$$

$$\therefore u(xy)=\frac{xy}{12}(a^3-x^3)+\frac{a^4b}{\pi^5}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2\pi^2(-1)^n+2-2(-1)^n}{n^5\mathrm{Sh}\frac{n\pi b}{2a}}\mathrm{Sh}\frac{n\pi y}{a}\sin\frac{n\pi}{a}x\text{。}$$

第十一章　分离变数（傅里叶积分）法

§38. 齐次的泛定方程（傅里叶积分法）

1. 求解无限长传输线上的电振荡传播问题。$G:C=R:L$ 的情况跟$G:C\neq R:L$的情况有什么不同？

解：在电报方程式中令 $j=u$，$v=u$，则有同一方程式

$$LCu_{tt}-u_{xx}+(LG+RC)u_t+RGu=0,\qquad(1)$$

因此对于电压或电流都只须求同一个方程式（1）的解。

以分离变数的试探解，$u=X(x)T(t)$代入（1）式有

$$LCT''X-TX''+(LG+RC)T'X+RGTX=0,$$

$$LC\frac{T''}{T}+(LG+RC)\frac{T'}{T}+RG=\frac{X''}{X}=-k^2,\qquad(2)$$

无穷空间X的解是 $X=\int e^{ikx}dk,$ （3）

（3）式中的 $k=\frac{\omega}{a}=\frac{2\pi}{\lambda},$ （4）

k称为波矢，λ是波长。

关于t的方程为

$LCT''+(LG+RC)T'+(RG+k^2)T=0$，以$T=e^{mt}$代入得

$$m^2LC+m(LG+RC)+RG+k^2=0.$$

$$\therefore\quad m=\frac{-(LG+RC)\pm\sqrt{(LG+RC)^2-4LC(RG+k^2)}}{2LC},$$

$$\therefore\ m_1, m_2 = -\frac{G}{2C}-\frac{R}{2L}\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)^2-\frac{4k^2}{LC}},$$

$$\therefore T(t) = A(k)e^{m_1 t}+B(k)e^{m_2 t}.$$

可以得$u(x,t)$的一般解为：

$$u(x,t)=\int TX\,dk = e^{-\frac{G}{2C}t-\frac{R}{2L}t}$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\Big[A(k)\,e^{\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)^2-\frac{4k^2}{LC}}\,t}$$

$$+B(k)\,e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)^2-\frac{4k^2}{LC}}\,t}\Big]dk \tag{5}$$

(i) 在（5）式如有$\frac{G}{C}=\frac{R}{L}$时，这时（5）式成为

$$u(x,t)=e^{-\frac{G}{2C}t-\frac{R}{2L}t}\int_{-\infty}^{\infty}\Big(A(k)\,e^{\frac{ik}{\sqrt{LC}}t}$$

$$+B(k)\,e^{\frac{-ik}{\sqrt{LC}}t}\Big)dk,$$

即对任意波矢都有相同的衰减振荡，波没有色散现象．这说明传输线对通过频率没有限制．

(ii) 在$\frac{G}{C}\neq\frac{R}{L}$时，若$\left[\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)^2-\frac{4k^2}{LC}\right]<0$即当 $k>\frac{\sqrt{LC}}{2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)$时，这时有衰减振荡，若以$\omega=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4k^2}{LC}-\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)^2}$，则可得振荡传播速度

$$a=\nu\times\lambda=\frac{\lambda}{2\pi}\cdot 2\pi\nu=\frac{\omega}{k}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{LC}-\frac{1}{k^2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)^2},$$

即波速a随k的不同而有差异，这时波有色散现象．

(iii) 若$\frac{G}{C}\neq\frac{R}{L}$且$k<\frac{\sqrt{LC}}{2}\left(\frac{R}{L}-\frac{G}{C}\right)$，则（5）式中不出现虚数项，可以看出这时只有指数式的衰减而无振荡．

2. 研究半无限长细杆的导热问题，杆端 $x=0$ 温度保持为零度，初始温度分布为 $K(e^{-\lambda x}-1)$。

解：$u_t-a^2u_{xx}=0$，设 $u=TX$、

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{X''}{X}=-\lambda,\ \lambda\text{须为正实数记}\lambda=\omega^2,\ \omega\text{为实数，}$$

则有 $X=C_1e^{i\omega x}$，$T=C_2e^{-\omega^2a^2t}$。

本征解为 $C(\omega)e^{-\omega^2a^2t}e^{i\omega x}$。一般解 $u=\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{-\omega^2a^2t}$ $\cdot e^{i\omega x}d\omega$。若在无界空间求解 $u|_{t=0}=\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{i}d\omega$，其中 $C(\omega)$ 即 $u|_{t=0}$ 的傅里叶变换式，现在初始条件 $u|_{t=0}=\varphi(x)$ 定义在半无界空间，根据边界条件应将 u 作奇延拓

即 $\quad u|_{t=0}=\begin{cases}-K(e^{\lambda x}-1),(x<0).\\ K(e^{-\lambda x}-1),(x>0).\end{cases}$ 于是

$$C(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}K(e^{-\lambda\xi}-1)\ e^{-i\omega\xi}d\xi-\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}K(e^{\lambda\xi}-1)$$
$$\times e^{-i\omega\xi}d\xi,$$

$$u(xt)=\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{i\omega x}e^{-\omega^2a^2t}d\omega$$
$$=\frac{K}{2\pi}\int_0^{\infty}(e^{-\lambda\xi}-1)\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(x-\xi)-\omega^2a^2t}d\omega d\xi$$
$$-\frac{K}{2\pi}\int_{-\infty}^{0}(e^{\lambda\xi}-1)\left[\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega(x-\xi)-\omega^2a^2t}\ d\omega d\xi\right.$$
$$=\frac{K}{2\pi}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\left[\int_0^{\infty}(e^{-\lambda\xi}-1)e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\right.$$
$$\left.-\int_{-\infty}^{0}(e^{\lambda\xi}-1)e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi\right]$$
$$=\frac{K}{2a\sqrt{\pi t}}\left[-2a\sqrt{\pi t}\ erf\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)\right.$$

$$
+\int_0^{\infty} e^{-\left(\lambda\xi+\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)}d\xi
$$

$$
\left.-\int_{-\infty}^{0} e^{\left(\lambda\xi-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right)}d\xi\ \right]
$$

$$
=\ -K\operatorname{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t}}+\frac{K}{2a\sqrt{\pi t}}(I_1+I_2).
$$

在I_1的积分中令 $z=\dfrac{\xi-(x-2a^2\lambda t)}{2a\sqrt{t}}$,

在I_2的积分中令 $Z=\dfrac{(x+2a^2\lambda t)-\xi}{2a\sqrt{t}}$,

则 $I_1=\int_0^{\infty} e^{-\left[\lambda\xi+\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}\right]}d\xi$

$$
=\int_0^{\infty} e^{-\{[\xi-(x-2a^2\lambda t)]^2-4a^2\lambda^2t^2+4a^2\lambda tx\}}\ d\xi
$$

$$
=e^{a^2\lambda^2t-\lambda x}\int_0^{\infty} e^{-[\xi-(x-2a^2\lambda t)]^2/4a^2t}d\xi
$$

$$
=2a\sqrt{t}\,e^{a^2\lambda^2t-\lambda x}\int_{\frac{2\lambda a^2t-x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2}dz.
$$

$$
=2a\sqrt{t}\,e^{a^2\lambda^2t-\lambda x}\left[\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz-\int_0^{\frac{2\lambda a^2t-x}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}dz\right]
$$

$$
=a\sqrt{\pi t}\ e^{a^2\lambda^2t-\lambda x}erfc\left(\frac{2\lambda a^2t-x}{2a\sqrt{t}}\right).
$$

$$
I_2=-\int_{-\infty}^{0} e^{-\left[\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}-\lambda\xi\right]}d\xi
$$

$$
=\int_0^{-\infty} e^{-\frac{-\{[\xi-(x+2a^2+\lambda)]^2-4a^4t^2\lambda^2-4xa^2\lambda t\}}{4a^2t}}d\xi
$$

$$
=e^{a^2\lambda^2t+\lambda x}\int_0^{-\infty} e^{-\left(\frac{\xi-(x+2a^2\lambda t)}{2a\sqrt{t}}\right)^2}d\xi
$$

$$= -2a\sqrt{t}\,e^{a^2\lambda^2 t+\lambda x}\int_{\frac{x+2a^2\lambda t}{2a\sqrt{t}}}^{\infty} e^{-z^2}dz$$

$$= -2a\sqrt{t}\,e^{a^2x^2t+\lambda x}\left[\int_0^{\infty} e^{-z^2}dz - \int_0^{\frac{x+2a^2\lambda t}{2a\sqrt{t}}} e^{-z^2}dz\right]$$

$$= -a\sqrt{\pi t}\;e^{a^2\lambda^2 t+\lambda x}\mathrm{erfc}\left[\frac{x+2a^2\lambda t}{2a\sqrt{t}}\right].$$

$$\therefore\quad u(xt) = -K\mathrm{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+\frac{\lambda}{2}e^{a^2\lambda^2 t}\left[e^{-\lambda x}\right.$$

$$\left.\times\mathrm{erfc}\left(\frac{2\lambda a^2t-x}{2a\sqrt{t}}\right)-e^{\lambda x}\mathrm{erfc}\left(\frac{x+2a^2\lambda t}{2a\sqrt{t}}\right)\right].$$

在做上面的积分时，应用到余误差积分：

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_x^{\infty}e^{-z^2}dz=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-z^2}dz-\int_0^{x}e^{-z^2}dz$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\mathrm{erf}x$$

$$=1-\mathrm{erf}x=\mathrm{erfc}x.$$

3.半无界杆，杆端 $x=0$ 有谐变热流 $B\sin\omega t$ 进入，求长时间后杆上温度分布 $u(xt)$。

解：$$u_t-a^2u_{xx}=0,\ x>0,$$

$u_x|_{x=0}=-\dfrac{B}{k}\sin\omega t$，将边界条件改写为 $u_x|_{x=0}=-\dfrac{B}{k}e^{i\omega t}$，在解答中取虚部，可以预计各点温度都以同一频率作周期变化，所以 u 可表为 $u=X(x)e^{i\omega t}$. 代入泛定方程后得

$i\omega X-a^2X''=0$，以 $X=e^{mx}$，$m=\pm\sqrt{\dfrac{\omega}{a^2}}\sqrt{i}$，

由于 $\sqrt{i}=\sqrt{e^{\frac{\pi}{2}i}}=e^{\frac{\pi}{4}i}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ 从而得到

$$X_1(x)=e^{\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x},$$

$$X_2(x)=e^{-\sqrt{\frac{\omega}{a^2}}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+i\frac{1}{\sqrt{2}}\right)x}.$$

应用自然边界条件当$x\to\infty$ u 有限，舍去$X_1(x)$，因而有

$u=Ce^{-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}(1+i)x}e^{i\omega t}$，将 u 代入边界条件，得

$$-\sqrt{\frac{\omega}{2a^2}}(1+i)Ce^{i\omega t}=-\frac{B}{k}e^{i\omega t},$$

$$C=\frac{aB}{k}\sqrt{\frac{1}{2\omega}}(1-i),\quad (1-i)=\sqrt{2}e^{-\frac{\pi}{4}i}.$$

$$u=\frac{aB}{k}\frac{1}{\sqrt{2\omega}}(1-i)e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{x}{a}}e^{i\left(\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{x}{a}\right)}$$

$$=\frac{aB}{k\sqrt{\omega}}e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{x}{a}}e^{i\left(\omega t-\sqrt{\frac{\omega}{a}}\frac{x}{a}-\frac{\pi}{4}\right)}.$$

取虚部得 $u(xt)=\dfrac{aB}{k\sqrt{\omega}}e^{-\sqrt{\frac{\omega}{2}}\frac{x}{a}}\sin\left(\omega t-\sqrt{\dfrac{\omega}{2}}\dfrac{x}{a}-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

4. 应用泊松公式计算下述定解问题的解，$u_{tt}-a^2\Delta u=0$，初始速度为零，初始位移在某个单位球内为 1，在球外为零。

解：取单位球的球心为坐标原点，则定解问题为：

$$\begin{cases} u_{tt}-a^2\Delta u=0, \\ u|_{t=0}=\varphi(\vec{r})=\begin{cases}1, & \gamma<1,\\ 0, & \gamma>1,\end{cases} \\ u_t|_{t=0}=\psi(\vec{r})=0, \end{cases}$$

由泊松公式

$$u(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^{r}}\frac{\varphi(\vec{r}')}{at}ds'+\frac{1}{4\pi a}\iint\limits_{S_{at}^{r}}\frac{\psi(\vec{r}')}{at}ds'$$

$$= \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{S_{at}^{r}} \frac{\varphi(\vec{r}')}{at} ds'.$$

(i) 当点$\vec{r}$（以$\vec{r}$为矢径的点简称为点$\vec{r}$，下同）在单位球内时：

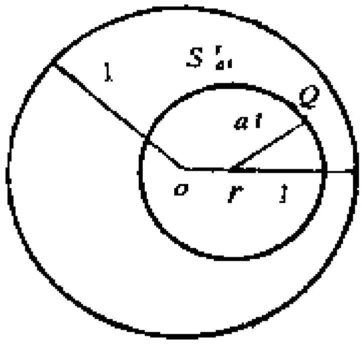


图 11-1

a.若$r+at<1$，球面S_{at}^{r}完全在单位球内．从而$\varphi(\vec{r}')=1$

$$u(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{at} \iint\limits_{S_{at}^{r}} ds'\right)$$

$$= \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{at} \cdot 4\pi (at)^2\right) = 1,$$

b.若$at>r+1$，单位球将在球面S_{at}^{r}内，这时$\varphi(\vec{r}')=0$，从而$u(\vec{r},t)=0$．

c.若$1-r<at<1+r$，则S_{at}^{r}与单位球相交，设它在球内的部分为$\bar{S}_{at}^{r}$，因在球外$\varphi(\vec{r}')=0$而在$\bar{S}_{at}^{r}$上，$\varphi(\vec{r}')=1$．

$$\therefore \quad u(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \iint\limits_{\bar{S}_{at}^{r}} \frac{1}{at} ds'.$$

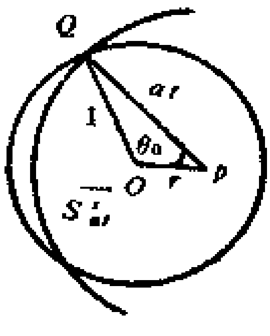


图 11-2

$$\because \quad \iint\limits_{\bar{S}_{at}^{r}} ds' = \int_0^{2\pi}\int_0^{\theta_0} (at)^2 \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$= 2\pi (at)^2 (-\cos\theta) \Big|_0^{\theta_0}$$

$$= 2\pi (at)^2 (1-\cos\theta_0)$$

$$= 2\pi (at)^2 \left(1 - \frac{r^2+a^2t^2-1}{2rat}\right)$$

$$= \frac{\pi at}{r}[1-(r-at)^2],$$

$$\therefore \quad u(\vec{r},t) = \frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\pi}{r}(1-(r-at)^2)\right\}$$

$$= \frac{1}{2r}(r-at).$$

(ii) 当点$\vec{r}$在单位球外时。

a.若$at+1<r$,S^{r}_{at}与单位球分离，在S^{r}_{at}上$\varphi(\vec{r}')=0$,

$\therefore \quad u(\vec{r},t)=0.$

b.若$at>1+r$,S^{r}_{at}将单位球包含于内，在S^{r}_{at}上$\varphi(\vec{r}')=0$,

$\therefore \quad u(\vec{r},t)=0.$

c.若$r-1<at<1+r$,S^{r}_{at}与单位球相交，设它在球内的部分为$\bar{S}^{r}_{at}$,与(i)之c相同的计算，

得$u(\vec{r},t)=\dfrac{1}{2r}(r-at)$

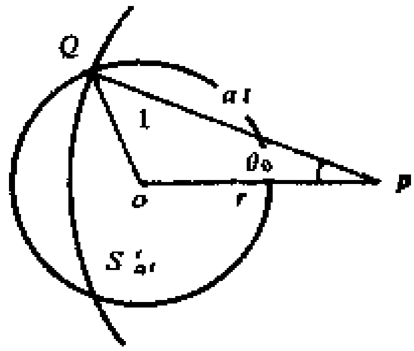


图 11-3

综上述，

在球内

$$u(\vec{r},t) = \begin{cases} 1, & \left(t<\dfrac{1-r}{a}\right), \\ 0, & \left(t>\dfrac{1+r}{a}\right), \\ \dfrac{1}{2r}(r-at), & \left(\dfrac{1-r}{a}<t<\dfrac{1+r}{a}\right), \end{cases}$$

在球外

$$u(\vec{r},t) = \begin{cases} 0, & \left(t<\dfrac{r-1}{a}\right), \\ 0, & \left(t>\dfrac{1+r}{a}\right), \\ \dfrac{1}{2r}(r-at), & \left(\dfrac{r-1}{a}<t<\dfrac{1+r}{a}\right). \end{cases}$$

5. 应用泊松公式计算下述定解问题的解. $u_{tt}-a^2\Delta u=0$，初始速度为零，初始位移在球 $r=r_0$ 以内为 $A\cos(\pi r/2r_0)$，在球外为零.

解：

$$
\begin{cases}
u_{tt}-a^2\Delta u=0, \\
u_t|_{t=0}=\psi(\vec{r})=0, \\
u|_{t=0}=\varphi(\vec{r})=\begin{cases} A\cos\left(\dfrac{\pi r}{2r_0}\right), & (r<r_0), \\ 0, & (r>r_0). \end{cases}
\end{cases}
$$

由泊松公式 $$u(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^{r}}\frac{\varphi(\vec{r}')}{at}ds',$$

(i) 当点 $\vec{r}$ 在球 $r=r_0$ 内时.

a. 若 $r+at<r_0$，S_{at}^{r} 在球内，

$$u(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint\limits_{S_{at}^{r}}\frac{A\cos\left(\dfrac{\pi r'}{2r_0}\right)}{at}ds'.$$

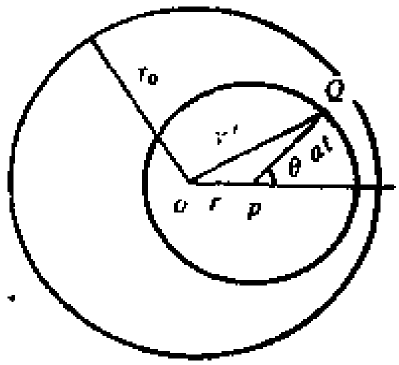


图 11-4

为计算上式右端积分，如右图所示，以 $p(\vec{r})$ 为原点，$\vec{op}$ 的方向为 Z 轴方向建立球坐标系，设 S_{at}^{r} 上的点 $Q(\vec{r}')$ 在球坐标系内的坐标为 $Q'(at,\theta,\varphi)$.

则 $\angle QPZ=\theta$，$r'^2=r^2+(at)^2+2rat\cos\theta$.

注意到 $$d\cos\theta=\frac{dr'^2}{2rat}=\frac{r'}{rat}dr',$$

有

$$u(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}d\varphi\int_0^{\pi}\frac{A\cos\left(\dfrac{\pi r'}{2r_0}\right)}{at}\cdot(at)^2\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^\pi A\cos\left(\frac{\pi r'}{2r_0}\right)\cdot(-at)d\cos\theta$$

$$=\frac{1}{2a}\frac{\partial}{\partial t}\int_{r+at}^{|r-at|}-A\cos\left(\frac{\pi r'}{2r_0}\right)\frac{r'}{r}dr'$$

$$=\frac{A}{2ar}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|r-at|}^{r+at}r'\cos\left(\frac{\pi r'}{2r_0}\right)dr'.$$

$$\because\quad \frac{d}{dx}\int_0^x f(\xi)d\xi=f(x),$$

又 $\frac{\partial}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial(r+at)}\cdot\frac{\partial(r+at)}{\partial t}=a\frac{\partial}{\partial(r+at)}$

$$\therefore\quad \frac{\partial}{\partial t}\int_{r-at}^{r+at}f(r')dr'=af(r+at)-(-a)f(r-at)$$

$$=a[f(r+at)+f(r-at)].$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{at-r}^{r+at}f(r')dr'=af(r+at)-af(at-r).$$

从而

$$u(\vec{r},t)=\begin{cases}\dfrac{A}{2r}\left[(r+at)\cos\dfrac{\pi(r+at)}{2r_0}+(r-at)\cos\dfrac{\pi(r-at)}{2r_0}\right], & (r>at),\\ \dfrac{A}{2r}\left[(r+at)\cos\dfrac{\pi(r+at)}{2r_0}+(at-r)\cos\dfrac{\pi(at-r)}{2r_0}\right], & (r<at).\end{cases}$$

$$=\frac{A}{2r}\left[(r+at)\cos\frac{\pi(r+at)}{2r_0}+(r-at)\cos\frac{\pi(r-at)}{2r_0}\right],$$

b.若 $at>r+r_0$，球 $r=r_0$ 将在 S_{at}^r 内部，这时 $\varphi(\vec{r}')=0$，从而 $u(\vec{r},t)=0$，

c.若 $r_0-r<at<r_0+r$，则 S_{at}^r 与球 $r=r_0$ 相交．

与情形 i) 一样建立坐标系，一样讨论，只不过应在 S_{at}^r 在球内的部分积分（$\because$ 在球外 $\varphi(\vec{r}')=0$）、即为右图所示，θ 应从 θ_0 积到 π，而 θ_0 所对应之点 A，$r'=r_0$，从而

$$u(\vec{r},t)=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}d\varphi$$

$$\times\int_{\theta_0}^{\pi}\frac{A\cos\left(\dfrac{\pi r'}{2r_0}\right)}{at}\cdot(at)^2\sin\theta d\theta$$

$$=\frac{A}{2ar}\frac{\partial}{\partial t}\int_{|r-at|}^{r_0}r'\cos\left(\frac{\pi r'}{2r_0}\right)dr'$$

$$=\frac{A}{2r}(r-at)\cos\frac{\pi(r-at)}{2r_0}.$$

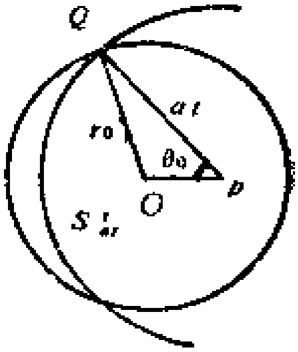


图 11-5

(ii) 当点$\vec{r}$在球外时.

a.若$at+r_0<r$，S^r_{at}与球分离，$\varphi(\vec{r}')=0$，$u(\vec{r},t)=0$，

b.若$at>r_0+r$，S^r_{at}将球$r=r_0$包含于内，仍有$\varphi(\vec{r}')=0$，$u(\vec{r},t)=0$.

c.若$r-r_0<at<r_0+r$，球面S^r_{at}与球$r=r_0$相交.

完全类似于(i)之c的讨论得到

$$u(\vec{r},t)=\frac{A}{2r}(r-at)\cos\frac{\pi(r-at)}{2r_0},$$

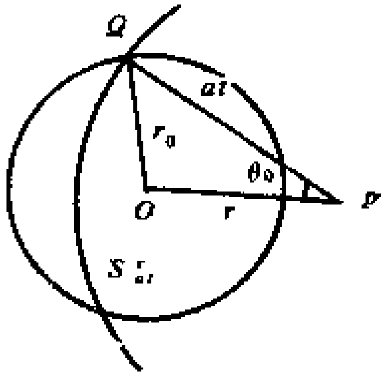


图 11-6

综上述，本问题的解为

在球内$u(\vec{r},t)=$

$$=\begin{cases}\dfrac{A}{2r}\left[(r+at)\cos\dfrac{\pi(r+at)}{2r_0}+(r-at)\cos\dfrac{\pi(r-at)}{2r_0}\right], & \left(t<\dfrac{r_0-r}{a}\right),\\[2ex] \dfrac{A}{2r}(r-at)\cos\dfrac{\pi(r-at)}{2r_0}, & \left(\dfrac{r_0-r}{a}<t<\dfrac{r_0+r}{a}\right),\\[2ex] 0, & \left(t>\dfrac{r_0+r}{a}\right).\end{cases}$$

在球外$u(\vec{r},t)=$

$$
=\begin{cases}0, & \left(t<\dfrac{r-r_0}{a}\right),\\[2mm] \dfrac{A}{2r}(r-at)\cos\dfrac{\pi(r-at)}{2r_0}, & \left(\dfrac{r-r_0}{a}<t<\dfrac{r+r_0}{a}\right),\\[2mm] 0, & \left(t>\dfrac{r+r_0}{a}\right).\end{cases}
$$

6.二维波动，初始速度为零，初始位移在圆 $\rho=1$ 以内为1，在圆外为零，试求$u|_{\rho=0}$。

解：应用二维泊松公式

$$u(\rho,\theta,t)=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iint_{\Sigma_{at}^{xy}}\frac{\varphi(\rho'\theta')}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}\rho d\rho d\theta,$$

(i) 当$at>1$时，

$$u=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}$$

$$=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\sqrt{a^2t^2-\rho^2}\Big|_0^1$$

$$=\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}(at-\sqrt{a^2t^2-1})$$

$$=1-\frac{at}{\sqrt{a^2t^2-1}},$$

(ii) 当$at<1$,

$$u=\frac{1}{2\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{at}\frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2t^2-\rho^2}}$$

$$=-\frac{1}{a}\frac{\partial}{\partial t}\left(\sqrt{a^2t^2-\rho^2}\Big|_0^{at}\right)=1.$$

7.求解三维无界空间的输送问题，$u_t-a^2\Delta u=0$，$u|_{t=0}=\varphi(xyz)$.

解：将u展开为三重傅里叶积分$\vec{k}=k_1\vec{i}_1+k_2\vec{i}_2+k_3\vec{i}_3$

$$u(rt)=\iiint_{-\infty}^{\infty}T(t\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{r}}dk_1dk_2dk_3$$ 代入泛定方程，得

$$\iiint_{-\infty}^{\infty}(T'+k^2a^2T)e^{i\vec{k}\vec{r}}\,dk_1dk_2dk_3=0,$$

得关于T的方程为$T'+k^2a^2T=0$，即$T=C(k)e^{-k^2a^2t}$。

$$u(\vec{r},t)=\iiint c(\vec{k})e^{-k^2a^2t}\,e^{i\vec{k}\vec{r}}\,dk_1dk_2dk_3,$$ 代入初始条件

$u|_{t=0}=\varphi(r')$，

即$\iiint_{-\infty}^{\infty}c(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{r}}\,dk_1dk_2dk_3=\varphi(\vec{r})$，$c(k)$是$\varphi(\vec{r})$的三重傅里叶变换式：

$$c(\vec{k})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\iiint_{-\infty}^{\infty}\varphi(\vec{r}')e^{-i\vec{k}\vec{r}'}dx'dy'dz'.$$

把$c(k)$代入$u(r,t)$的式子得：

$$u(r,t)=\iiint_{-\infty}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\iiint_{-\infty}^{\infty}\varphi(\vec{r}')e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}dx'dy'dz'\right]$$

$$\times e^{-k^2a^2t}\,e^{i\vec{k}\vec{r}}\,dk_1dk_2dk_3$$

$$=\iiint_{-\infty}^{\infty}\varphi(\vec{r}')\left[\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\iiint_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2a^2t}\,e^{ik\cdot(\vec{r}-\vec{r}')}\right.$$

$$\left.\times dk_1dk_2dk_3\right]dx'dy'dz'$$

其中$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\iiint_{-\infty}^{\infty}e^{-k^2a^2t}\,e^{ik(\vec{r}-\vec{r}')}\,dk_1dk_2dk_3$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k_1^2a^2t}\,e^{ik_1(x-x')}dk_1$$

$$\times\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k_2^2a^2t}e^{ik_2(y-y')}\,dk_2\int_{-\infty}^{\infty}e^{-k_3^2a^2t}\,e^{ik_3(z-z')}dk_3$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\,e^{-\frac{(x-x')^2}{4a^2t}}\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}\,e^{\frac{-(y-y')^2}{4a^2t}}\frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}}$$

$$\times\, e^{\frac{-(z-z')^2}{4a^2t}}$$

$$=\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\,e^{-\frac{|\vec{r}-\vec{r}'|^2}{4a^2t}}.$$

$$\therefore\quad u=\iiint_{-\infty}^{\infty}\varphi(\vec{r}')\frac{1}{(2a\sqrt{\pi t})^3}\,e^{\frac{-|r-r'|^2}{4a^2t}}dx'dy'dz'.$$

8．例 6 研究三维无界空间中的自由振动是从初始（$t=0$）状况推算以后（$t>0$）的状况．试重新求解例 6．从初始状况反推以前（$t<0$）的状况．

解：$u_{tt}-a^2\Delta_3u=0$，$u|_{t=0}=\varphi(\vec{r})$，$u_t|_{t=0}=\psi(\vec{r})$，

将 u 展开为三重傅里叶积分

$u(\vec{r})=\iiint_{-\infty}^{\infty}T(t\vec{k})e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}dk_1dk_2dk_3$ 代入泛定方程．分离出关于T的方程．

$$T''+a^2k^2T=0,\ T=A(\vec{k})\,e^{ikat}+B(\vec{k})e^{-ikat},$$

$u=\iiint_{-\infty}^{\infty}\left[A(k)e^{ikat}+B(k)e^{-ikat}\right]e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,dk_1dk_2dk_3$，代入初始条件得到

$$\begin{cases}\iiint\left[A(k)+B(k)\right]e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}dk_1dk_2dk_3=\varphi(\vec{r}),\\ \iiint ika\left[A(\vec{k})-B(\vec{k})\right]e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,dk_1dk_2dk_3=\psi(\vec{r}),\end{cases}$$

$$\begin{cases}A(\vec{k})+B(\vec{k})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\iiint\varphi(\vec{r}')e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}\,dx'dy'dz',\\ ika[A(\vec{k})-B(\vec{k})]=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\iiint\psi(\vec{r}')e^{-i\vec{k}\cdot\vec{r}'}\,dx'dy'dz'\end{cases}$$

解之得

$$A(\vec{k})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\iiint\frac{1}{2}\left[\varphi(\vec{r}')+\frac{1}{ika}\psi(r')\right]e^{-i\vec{k}\vec{r}'}$$
$$\times dx'dy'dz',$$
$$B(\vec{k})=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\iiint\frac{1}{2}\left[\varphi(r')-\frac{1}{ika}\psi(\vec{r}')\right]e^{-i\vec{k}\vec{r}'}$$
$$\times dx'dy'dz',$$
$$u(r,t)=\iiint\left[A(k)e^{ikat}+B(k)e^{-ikat}\right]e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}$$
$$\times dk_1dk_2dk_3$$
$$=\frac{1}{4\pi a}\iiint\varphi(r')\left[\frac{a}{4\pi^2}\iiint(e^{ikat}+e^{-ikat})\right.$$
$$\left.\times e^{ik(r-r')}dk_1dk_2dk_3\right]dx'dy'dz'$$
$$+\frac{1}{4\pi a}\iiint\varphi(r')\left[\frac{a}{4\pi^2}\iiint\frac{1}{ik}(e^{ikat}-e^{-ikat})\right.$$
$$\left.\times e^{ik(r-r')}dk_1dk_2dk_3\right]dx'dy'dz'$$
$$=\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}\psi(r')\frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{1}{|r-r'|}\left[\delta(|\vec{r}-\vec{r}'|-at)\right.\right.$$
$$\left.\left.-\delta(|\vec{r}-\vec{r}'|+at)\right\}dx'dy'dz'\right.$$
$$+\frac{1}{4\pi a}\iiint\psi(\vec{r}')\frac{1}{|r-r'|}\left[\delta(|r-r'|-at)\right.$$
$$\left.-\delta(|r-r'|+at)\right\}dx'dy'dz'.$$

对$t<0$，$|\vec{r}-\vec{r}'|-at\neq0$，舍去$\delta(|r-r'|-at)$，所以

$$u=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{-\infty}^{\infty}-\frac{\varphi(r')}{|r-r'|}\delta(|r-r'|+at)dx'dy'dz'$$

$$+\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}-\frac{\varphi(r')}{|r-r'|}\delta(|\vec{r}-\vec{r}'|+at)dx'dy'dz',$$

积分只需在球面上进行，这个球面使 $|\vec{r}-\vec{r}'|+at=0$，$|\vec{r}-\vec{r}'|=-at$，$\vec{r}'$为球面上点的矢端，球心在以$\vec{r}$为矢径的点（即要求解的点，半径为$-at$或写作$a|t|$，这个球面记为$S^r_{a|t|}$，因而所求的解

$$u=\frac{1}{4\pi a}\frac{\partial}{\partial t}\iiint_{S^r_{a|t|}}\frac{\varphi(\vec{r}')}{at}ds'+\frac{1}{4\pi a}\iiint_{S^r_{a|t|}}\frac{\psi(r')}{at}ds'.$$

§39. 非齐次的泛定方程（傅里叶积分法）

1. 求解一维半无界空间的输送问题

$u_t-a^2u_{xx}=0$，$u|_{x=0}=At$，$u|_{t=0}=0$.

解：(i) 令$u=W+At$，以消去非齐次边界条件，得W的定解问题：

$$\begin{cases}W_t-a^2w_{xx}=-A,\\ W|_{x=0}=u|_{x=0}-At=0,\\ W|_{t=0}=0.\end{cases}$$

再找定解问题的格林函数：

$$\begin{cases}G_t-a^2G_{xx}=\delta(x_0-\xi)\delta(t-\tau),\\ G|_{x=0}=0,\\ G|_{t=0}=0,\end{cases}\quad\begin{cases}G_t-a^2G_{xx}=0,\\ G|_{x=0}=0,\\ G|_{t=\tau}=\delta(x_0-\xi),\end{cases}$$

于是得到格林函数为

$$G(x,t;\xi,\tau)=\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x_0-\xi)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi$$

$$= \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{\frac{-(x-x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}}$$

得 $u(x,t) = At - \int AG(x,t;\xi,\tau)d\tau$

$$= At - \int_0^t A\frac{1}{2a\sqrt{t-\tau}} e^{\frac{-(x-x_0)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\tau$$

$$= A\int_0^t \left(1 - \mathrm{erf}\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)$$

$$= A\int_0^t \mathrm{erfc}\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}} d\tau.$$

(ii) 参照边界条件作奇延拓

$$W_t - a^2W_{xx} = \begin{cases} -A, x>0, \\ A, x<0. \end{cases} \qquad W|_{t=0} = 0,$$

$$W = \int_0^t \left[\int_0^\infty -A\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}} d\xi\right.$$

$$\left. + \int_{-\infty}^0 \frac{Ae^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} d\xi \right] d\tau$$

$$= A\int_0^t \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_0^\infty e^{-\left(\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)^2} d\left(\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right.$$

$$\left. -\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^0 e^{-\left(\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)^2} d\left(\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right] d\tau,$$

在 w 的第一个积分中，作替换 $z = \frac{\xi - x}{2a\sqrt{t-\tau}}$，第二个积分中，

$z = \frac{x-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$，则

$$W = -A\int_0^t \left[-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{\frac{-x}{2a\sqrt{t-\tau}}}^\infty e^{-z^2} dz + \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_\infty^{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}}\right.$$

$$\times \; e^{-z^2} dz \Big] d\tau$$

$$= -A\int_0^t \Big[-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}} e^{-z^2} dz \Big] d\tau = -A$$

$$\int_0^t \operatorname{erf}\Big(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\Big)d\tau,$$

$$u = At - \int_0^t \operatorname{erf}\Big(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\Big)d\tau$$

$$= A\int_0^t \Big[1 - \operatorname{erf}\Big(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\Big)\Big]d\tau$$

$$= A\int_0^t \operatorname{erfc}\Big(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\Big)d\tau.$$

2.在一维半无界空间求解$u_t - a^2u_{xx} = 0$，$u|_{x=0} = f(t)$，$u|_{t=0} = \varphi(x)$.

解：$u = f(t) + v + w$定解问题成为

$$\begin{cases} v_t - a^2v_{xx} = -f'(t), \\ v|_{x=0} = 0, v|_{t=0} = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} W_t - a^2W_{xx} = 0, \\ W|_{x=0} = 0, W|_{t=0} = \varphi(x) - f(0), \end{cases}$$

v 的方程参照边界条件，作奇延拓

$$v_t - a^2v_{xx} = \begin{cases} -f'(t), & x>0, \\ f'(t), & x<0, \end{cases} \quad v|_{t=0} = 0,$$

$$v(x,t) = \int_0^t \Big\{\int_{-\infty}^0 f'(\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi$$

$$+ \int_0^\infty -f'(\tau)\frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi \Big\} d\tau$$

$$= -\int_0^t f'(\tau)\operatorname{erf}\Big(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\Big)d\tau$$

$$=\int_0^t -f'(\tau)\left[1-\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right]d\tau$$

$$=f(0)-f(t)+\int_0^t f'(\tau)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)d\tau\ ,$$

w的方程，参照边界条件作奇延拓。

$$W_t-a^2W_{xx}=0,W\big|_{t=0}=\begin{cases}\varphi(x)-\varphi(0),x>0,\\-[\varphi(x)-f(0)],x<0,\end{cases}$$

引用书上第257页的结果，得出W的解

$$W=\int_0^{\infty}[\varphi(\xi)-f(0)]\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\ e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi$$

$$-\int_{-\infty}^0[\varphi(-\xi)-f(0)]\ ]\ \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}\ e^{\frac{-(x-\xi)^2}{4a^2t}}\,d\xi,$$

在W的第一个 积分中令$z=\frac{\xi-x}{2a\sqrt{t}}$，第二个积分中令

$z=\frac{x-\xi}{2a\sqrt{t}}$.

则 $$W=\int_{\frac{-x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\varphi(x+z2a\sqrt{t})\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{-z^2}\ dz-\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\varphi$$

$$\times(z2a\sqrt{t}-x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{-z^2}\ dz-f(0)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right),$$

$$u=f(t)+v+W=-f(0)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+\int_0^t f'(t)dt$$

$$+f(0)-\int_0^t f'(\tau)\operatorname{erf}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)d\tau$$

$$+\int_{\frac{-x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\varphi(x+za\sqrt{t})\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}\ dz\ -\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\varphi$$

$$\times(z2a\sqrt{t}-x)\ \frac{1}{\sqrt{\pi}}\ e^{-z^2}\ dz$$

$$=f(0)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t}}\right)+\int_0^t f'(t)\operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)dt$$

$$+\int_{\frac{-x}{2a\sqrt{t}}}^{\infty}\varphi(x+z2a\sqrt{t})\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz$$

$$-\int_{\frac{x}{2a\sqrt{t}}}\varphi(z2a\sqrt{t}-x)\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-z^2}dz.$$

3．在一维半无界空间求解$u_t-a^2u_{xx}=0, u_x|_{x=0}=q(t)$，$u|_{t=0}=0$。

解：本题实际还存在自然边界条件$u|_{x\to\infty}$应有限，所以应先选择一个函数以消除非齐次边界条件．函数$-e^{-x}q(t)$是适合这个条件的．为此

令$u=-e^{-x}q(t)+v+w$，而v、w满足

$$\begin{cases} v_t-a^2v_{xx}=e^{-x}q'(t)-a^2e^{-x}q(t). \\ v_x|_{x=0}=0, v|_{t=0}=0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_t-a^2W_{xx}=0. \\ W_x|_{x=0}=0, w|_{t=0}=e^{-x}q(0). \end{cases}$$

参照边界条件，将v、w偶延拓．

$$v_t-a^2v_{xx}=\begin{cases} e^{-x}[q'(t)-a^2q(t)]x>0, \\ e^{x}[q'(t)-a^2q(t)]x<0, \end{cases}$$

$$\begin{cases} W_t-a^2W_{xx}=0, \\ W|_{t=0}=\begin{cases} e^{-x}q(0), x>0, \\ e^{x}q(0), x<0, \end{cases} \end{cases}$$

$$v=\int_{\tau=0}^{t}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{\xi}\frac{q(\tau)-a^2q(\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\right.$$

$$\left.+\int_0^{\infty}e^{-\xi}\frac{q'(\tau)-a^2q(\tau)}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2(t-\tau)}}d\xi\right]d\tau.$$

在v的第一个积分中，令$z=\frac{[x-2a^2(t-\tau)]-\xi}{2a\sqrt{t-\tau}}$，

第二个积分中令 $z=\frac{\xi-[x+2a^2(t-\tau)]}{2a\sqrt{t-\tau}}$

$$\therefore \quad v=\int_0^t \frac{1}{2}[q'(\tau)-a^2q(\tau)]\left\{-e^{\frac{4a^4(t-\tau)^2-4a^2x(t-\tau)}{4a^2(t-\tau)}}\right.$$

$$\operatorname{erfc}\left(\frac{2a^2(t-\tau)-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)$$

$$\left.+e^{\frac{4a^4(t-\tau)^2+4a^2x(t-\tau)}{4a^2(t-\tau)}}\operatorname{erfc}\left(\frac{2a^2(t-\tau)-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right)\right]d\tau$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^t [a^2q(\tau)-q'(\tau)]\ e^{a^2(t-\tau)}\left\{e^x\operatorname{erfc}\left[\frac{2a^2(t-\tau)+x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right]\right.$$

$$\left.-e^{-x}\operatorname{erfc}\left[\frac{2a^2(t-\tau)-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right]\right\}d\tau,$$

$$W=\int_{-\infty}^0 q(0)e^{-x}\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi+\int_0^\infty q(0)$$

$$e^x\frac{1}{2a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}}d\xi$$

$$=\frac{1}{2}q(0)\ e^{a^2t+x}\operatorname{erfc}\left[\frac{2a^2t+x}{2a\sqrt{t}}\right]-\frac{1}{2}q(0)\ e^{a^2t-x}$$

$$\times\operatorname{erfc}\left[\frac{2a^2t-x}{2a\sqrt{t}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}q(0)\left[e^x\operatorname{erfc}\left(\frac{2a^2t+x}{2a\sqrt{t}}\right)-e^{-x}\right.$$

$$\left.\times\operatorname{erfc}\left(\frac{2a^2t-x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]e^{a^2t},$$

$$u=-e^{-x}q(t)+v+W$$

$$= -e^{-x}q(t) + \frac{t}{2}q(0)\left[e^{x}\operatorname{erfc}\left(\frac{2a^2t+x}{2a\sqrt{t}}\right) - e^{-x}\cdot\right.$$

$$\left.\times\operatorname{erfc}\left(\frac{2a^2t-x}{2a\sqrt{t}}\right)\right]e^{a^2t}$$

$$+\frac{1}{2}\int_0^t [a^2q(\tau)-q'(\tau)]e^{a^2(t-\tau)}\left\{e^{x}\right.$$

$$\left.\operatorname{erfc}\left[\frac{2a^2(t-\tau)+x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right] - e^{-x}\operatorname{erfc}\left[\frac{2a^2(t-\tau)-x}{2a\sqrt{t-\tau}}\right]\right\}d\tau.$$

4.用拉普拉斯变换法求解例 8 的常微分方程$T''+\omega^2a^2T=\bar{f}(t)$,

$$T(0)=0, T'(0)=0,$$

解：考虑初始条件，对方程进行拉普拉斯变换

$p^2\bar{T}(p)+\omega^2a^2\bar{T}(p)=\overline{\bar{f}(p)}$，其中$\overline{\bar{f}(p)}$是$f(t)$的拉氏变换象函数.

$$\bar{T}(p)=\overline{\bar{f}(p)}\frac{1}{p^2+\omega^2a^2}\cdot\overline{\bar{f}(p)}\doteqdot f(t).$$

$$\frac{1}{p^2+\omega^2a^2}\doteqdot\frac{e^{i\omega at}-e^{-i\omega at}}{2ai\omega}$$

应用卷积定理

$$Tp\doteqdot T(t)=\frac{1}{2ai\omega}\int_0^t\bar{f}(\tau)\left[e^{i\omega a(t-\tau)}-e^{-i\omega a(t-\tau)}\right]d\tau.$$

5.用拉普拉斯变换求解例 9 的常微分方程$T'+\omega^2a^2T=\bar{f}(t)$, $T(0)=0$.

解：对方程进行拉氏变换得$p\bar{T}(p)+\omega^2a^2\bar{T}(p)=\overline{\bar{f}(p)}$,

$\overline{\bar{f}(p)}$ 是$\bar{f}(t)$的拉氏变换的像函数,

$$\bar{T}(p)=\overline{\bar{f}(p)}\frac{1}{p+\omega^2a^2},\ \bar{f}(p)\doteqdot\bar{f}(t),\ \frac{1}{p+\omega^2a^2}\doteqdot e^{-\omega^2a^2t},$$

由卷积定理，即得到

$$\overline{T}(p) \doteq T(t) \quad \int_0^t \overline{f}(\tau) \quad e^{-\omega^2 a^2 (t-\tau)} \, d\tau.$$

6. 例10研究三维无界空间中的受迫振动，从初始（$t=0$）状况推算以后（$t>0$）的状况，试重新求解例10，从初始（$t=0$）状况反推以前（$t<0$）的状况。

解：$u_{tt} - a^2 \Delta u = f(\vec{r}t)$，$u|_{t=0} = 0$，$u_t|_{t=0} = 0$，$(t<0)$。

将 u 展开为三重傅里叶积分

$u = \iiint T e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}} dk_1 dk_2 dk_3$，代入方程及初始条件分离出

$$T'' + k^2 a^2 T = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint f(r't) e^{-ikr'} dx'dy'dz',$$

$$T|_{t=0} = 0, \; T'|_{t=0} = 0.$$

解得：$$T = \frac{1}{2aik}\int_0^t \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{\infty} f(\vec{r}'\tau) e^{-i\vec{k}\vec{r}'} dx'dy'dz'$$

$$\times \left[e^{ika(t-\tau)} - e^{ika(t-\tau)} \right] d\tau,$$

$$u = \iiint T e^{i\vec{k}\vec{r}} \, dk_1 dk_2 dk_3$$

$$= \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2aik} \int_0^t \left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \iiint_{-\infty}^{\infty} f(r'\tau) \left[e^{+ika(t-\tau)} - e^{-ika(t-\tau)} \right]$$

$$\times dx'dy'dz' \cdot d\tau e^{i\vec{k}\vec{r}} dk_1 dk_2 dk_3$$

$$= \frac{1}{4\pi a} \iiiint_{-\infty}^{\infty} \int_0^t f(r'\tau) \frac{1}{4\pi^2} \iiint_{-\infty} \frac{1}{ik} \left[e^{ika(t-\tau)} - e^{-ika(t-\tau)} \right]$$

$$\times \; e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')} dk_1 dk_2 dk_3 \; d\tau dx'dy'dz',$$

在上式中 $\frac{1}{4\pi^2} \iiint_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{ik} \left[e^{ika(t-\tau)} - e^{-ika(t-\tau)} \right] e^{i\vec{k}(\vec{r}-\vec{r}')}$

$$dk_1dk_2dk_3$$

$$=\frac{1}{R}\left\{\delta[a(t-\tau)-R]-\delta[a(t-\tau)+R]\right\},$$

$$R=|\vec{r}-\vec{r}'|,$$

从初始情况推算以前情况，所以$t<0$，因而$a(t-\tau)-R\neq 0$，所以舍弃$\delta[a(t-\tau)-R]$项，而只保留$\delta[a(t-\tau)+R]$项，

$$u=\frac{1}{4\pi a}\iiint_{-\infty}^{\infty}\int f(\vec{r}',\tau)\ \frac{-1}{R}\delta[a(t-\tau)+R]d\tau dx'dy'dz'$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{R}\int_0^t f(r',\tau)\delta[a(t-\tau)+R]d[a\ (t-\tau)+R]$$

$$dx'dy'dz'$$

$$=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{-\infty}^{\infty}\frac{f\left(r',t+\frac{R}{a}\right)}{R}\ dx'dy'dz',$$

$\because\quad t+\frac{R}{a}<0,\ R\equiv|\vec{r}-\vec{r}'|<-at=a\,|t|$，

$|\vec{r}-\vec{r}'|<a|t|$表示$(x'y'z')$在这样一个球内，圆心的矢径为$\vec{r}$，半径为$a\,|t|$，记作$T_a^{\vec{r}}{}_{|t|}$。

$$\therefore\quad u=\frac{1}{4\pi a^2}\iiint_{T^{\vec{r}}_{a|t|}}\frac{f\left(r',t+\frac{R}{a}\right)}{R}dx'dy'dz',\text{其中}R\equiv|\vec{r}-\vec{r}'|.$$

第十二章　二阶常微分方程级数解法　本征值问题

§40. 特殊函数常微分方程

1. 试用平面极坐标系把二维波动方程分离变数.

解：
$$u_{tt}-a^2\Delta_2 u=0, \tag{1}$$
先把时间变数 t 分离出来.

令$u(\rho,\varphi;t)=U(\rho,\varphi)\cdot T(t)$，代入方程(1)
$$U(\rho,\varphi)\cdot T''(t)-a^2\Delta_2 U(\rho,\varphi)\cdot T(t)=0,$$
各项遍乘以$\dfrac{1}{a^2UT}$并移项，得
$$\frac{T''}{a^2T}=\frac{\Delta_2 U}{U}.$$

上式左边仅是 t 的函数；右边是ρ和φ的函数. 若要等式成立，两边应为同一常数，记为 $-k^2$，即有
$$T''+a^2k^2T=0, \tag{2}$$
$$\Delta_2 U+k^2U=0, \tag{3}$$
（3）式为二维亥姆霍兹方程，它在平面极坐标系下的表达式为：
$$U_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}U_\rho+\frac{1}{\rho^2}U_{\varphi\varphi}+k^2U=0.$$

进一步分离变数，

令　$U(\rho,\varphi)=R(\rho)\Phi(\varphi)$，代入上式
$$R''(\rho)\Phi(\varphi)+\frac{1}{\rho}R'(\rho)\Phi(\varphi)+\frac{1}{\rho^2}R(\rho)\Phi''(\varphi)$$

$+k^2R(\rho)\Phi(\varphi)=0.$

各项遍乘以$\frac{\rho^2}{R\Phi}$，并适当移项，得

$$\frac{\rho^2R''}{R}+\frac{\rho R'}{R}+k^2\rho^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

同上讨论，等式两边应为同一常数．记为m^2，

即得：
$$\Phi''+m^2\Phi=0, \tag{4}$$
$$\rho^2R''+\rho R'+(k^2\rho^2-m^2)R=0. \tag{5}$$

对方程（5）作变数代换$x=k\rho$后变为贝塞尔方程

$$x^2R''+xR'+(x^2-m^2)R=0. \tag{6}$$

由周期性条件．方程（4）的解为：

$$\Phi_m=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi,$$

由波动问题及解在$\rho\to0$有限的条件，方程（3）的解为：

$$T_n=C_n\cos k_nat+D_n\sin k_nat.$$

2.试用平面极坐标系把二维输运过程方程分离变数．

解：$u_t-a^2\Delta_2u=0,$ （1）

在平面极坐标系下方程(1)为：

$$u_t-a^2\left(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho+\frac{1}{\rho^2}u_{\varphi\varphi}\right)=0,$$

令　$u(\rho,\varphi;t)=R(\rho)\Phi(\varphi)T(t)$，代入方程(1)

$$T'R\Phi-a^2\left(Ru''\Phi T+\frac{1}{\rho}R'\Phi T+\frac{1}{\rho^2}\Phi''RT\right)=0,$$

各项遍乘以$\frac{1}{a^2R\Phi T}$，并适当移项，得

$$\frac{T'}{a^2T}=\frac{R''}{R}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{R'}{R}+\frac{1}{\rho^2}\cdot\frac{\Phi''}{\Phi}.$$

同上题讨论，等式两边应为同一常数，记为$-K^2$。得

$$T'+a^2K^2T=0, \tag{2}$$

$$\frac{R''}{R}+\frac{1}{\rho}\cdot\frac{R'}{R}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\Phi''}{\Phi}=-K^2. \qquad (3)$$

方程（3）各项遍乘以ρ^2、并适当移项，得

$$\rho^2\frac{R''}{R}+\rho\frac{R'}{R}+K^2\rho^2=-\frac{\Phi''}{\Phi}=m^2,$$

即
$$\Phi''+m^2\Phi=0, \qquad (4)$$

$$\rho^2R''+\rho R'+(k^2\rho^2-m^2)R=0. \qquad (5)$$

方程（2）和（4）的解为

$$T_n=A_ne^{-a^2k_n^2t},$$

$$\Phi_m=B_m\cos m\varphi+C_m\sin m\varphi.$$

方程（5）作变数代换$x=k\rho$变成贝塞尔方程

$$x^2R''+xR'+(x^2-m^2)R=0.$$

3. 氢原子定态问题的量子力学薛定谔方程是 $-\frac{h^2}{8\pi^2\mu}\Delta u-\frac{Ze^2}{r}u=Eu$. 其中$h$、$\mu$、$Z$、$e$、$E$都是常数. 试用球坐标系把这个方程分离变数.

解：先令 $A=\frac{h^2}{8\pi\mu}$，$B=Ze^2$.

定态薛定谔方程在球坐标系下表达式是：

$$A\left(\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial u}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial u}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2u}{\partial\varphi^2}\right)+B\frac{u}{r}+Eu$$
$$=0,$$

令
$$u(r,\theta,\varphi)=R(r)Y(\theta,\varphi). \text{ 代入上式}$$

得到$$\frac{AY}{r^2}\cdot\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{AR}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{AR}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2r}{\partial\varphi^2}$$
$$+\left(\frac{B}{r}+E\right)RY=0,$$

各项遍乘以 $\dfrac{r^2}{ARY}$，则有

$$\frac{1}{R}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\frac{r^2}{A}\left(\frac{B}{r}+E\right)$$
$$=-\frac{1}{Y\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)-\frac{1}{Y\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2},$$

上式不可能成立，除非两边等于同一个常数，把这个数记作 $l(l+1)$，则得：

$$\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[\frac{B}{A}r+\frac{E}{A}r^2-l(l+1)\right]=R,$$

即 $$\frac{1}{r^2}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dR}{dr}\right)+\left[\frac{8\pi^2\mu}{h^2}\left(\frac{Ze^2}{r}+E\right)-\frac{l(l+1)}{r^2}\right]R=0,$$

（1）

至于 Y 则满足球函数方程

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2}+l(l+1)Y=0, \quad (2)$$

球函数方程（2）的进一步分离变数见课本第284—285页，如令 $Y(\theta,\varphi)=\Theta(\theta)\Phi(\varphi)$，则 Φ 满足

$$\Phi''+m^2\Phi=0, \quad (3)$$

它的解是 $\Phi_m(\varphi)=A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi$。

Θ 则满足缔合勒让德方程

$$(1+x^2)\frac{d^2\Theta}{d\theta^2}-2x\frac{d\Theta}{dx}+\left[l(l+1)-\frac{m^2}{1-x^2}\right]\Theta=0,$$

（4）

其中 $x=\cos\theta$。

4. 研究电磁波在矩形波导中的传播，取波导管的管轴为 z 轴，并设电磁波以谐波形式传播，通常令：

$$E_z(x,y,z,t)=e_z(x,y)e^{i(hz-kCt)},$$
$$H_z(x,y,z,t)=\mathscr{H}_z(x,y)e^{i(hz-kCt)},$$

其中 h 应为实数，（由 z 的上下底齐次边界条件确定 h 为实数）。

代入方程 $\Delta E_z+k^2E_z=0$和$\Delta H_z+k^2H_z=0$得

$\Delta_2\mathscr{E}_z+(k^2-h^2)\mathscr{E}_z=0$和$\Delta_2\mathscr{H}_z+(k^2-h^2)\mathscr{H}_z=0$。

设波导的 x 和 y 的边宽度为 a 和 b。试在边界条件：

（1）$\mathscr{E}_z|_{x=0}=\mathscr{E}_z|_{x=a}=\mathscr{E}_z|_{y=0}=\mathscr{E}_z|_{y=b}=0$

（2）$\left.\dfrac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial x}\right|_{x=a}=\left.\dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\dfrac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial y}\right|_{y=b}=0$

下求解$\mathscr{E}_z$和$\mathscr{H}_z$。在何种条件下得不到谐波形式的解？

解：（1）$\mathscr{E}_z$的定解问题为：

$$\Delta_2\mathscr{E}_z+(k^2-h^2)\mathscr{E}_z=0,\tag{1}$$

$$\begin{cases}\mathscr{E}_z|_{x=0}=\mathscr{E}_z|_{x=a}=0,\\ \mathscr{E}_z|_{y=0}=\mathscr{E}_z|_{y=b}=0,\end{cases}\tag{2}$$

令 $\mathscr{E}_z(x,y)=X(x)Y(y)$，代入方程(1)和条件（2）进行分离变数，得：

$$\frac{X''}{X}=-\frac{Y''}{Y}-(k^2-h^2)=-\lambda,$$

$$\begin{cases}X|_{x=0}Y=X|_{x=a}Y=0,\\ XY|_{y=0}=XY|_{y=b}=0,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\ X|_{x=0}=X|_{x=a}=0,\end{cases}\tag{3}$$

和

$$\begin{cases}Y''+(k^2-h^2-\lambda)Y=0,\\ Y|_{y=0}=Y|_{y=b}=0.\end{cases}\tag{4}$$

由定解问题（3）解得：

$$\lambda_m=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2,$$

$$X_m=A\sin\frac{m\pi x}{a},\ (m=1,2,\cdots),$$

由定解问题（4）解得：

$$k^2-h^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2=\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,$$

$$Y_n=B\sin\frac{n\pi y}{b},\ (n=1,2,\cdots),$$

$$\therefore\qquad \mathscr{E}_z=C\cdot\sin\frac{m\pi x}{a}\cdot\sin\frac{n\pi y}{b}. \tag{5}$$

（2）$\mathscr{H}_z$的定解问题为：

$$\Delta_2\mathscr{H}_z+(k^2-h^2)\mathscr{H}_z=0, \tag{6}$$

$$\begin{cases}\left.\dfrac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial x}\right|_{x=0}=\left.\dfrac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial x}\right|_{x=a}=0,\\[2ex]\left.\dfrac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial y}\right|_{y=0}=\left.\dfrac{\partial\mathscr{H}}{\partial y}\right|_{y=b}=0,\end{cases} \tag{7}$$

令 $\mathscr{H}_z(x,y)=X(x)Y(y)$代入方程（6）和条件（7）得

$$\begin{cases}X''+\lambda X=0,\\X'|_{x=0}=X'|_{x=a}=0,\end{cases} \tag{8}$$

及

$$\begin{cases}Y''+(k^2-h^2-\lambda)Y=0,\\Y'|_{y=0}=Y'|_{y=b}=0.\end{cases} \tag{9}$$

由定解问题（8）解得：

$$\lambda_m=\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2,$$

$$X_m=A\cos\frac{m\pi x}{a},\ (m=0,1,\cdots).$$

由定解问题（9）解得：

$$k^2-h^2-\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2=\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2,$$

$$Y_n=B\cos\frac{n\pi y}{b},\ (n=0,1,\cdots),$$

$$\therefore \quad \mathscr{H}_z = C \cdot \cos\frac{m\pi x}{a} \cdot \cos\frac{n\pi y}{b}, \tag{10}$$

故

$$\begin{cases} E_z = \mathscr{E}_z e^{i(hz-kCt)} = A \cdot \sin\frac{m\pi x}{a} \sin\frac{n\pi y}{b} e^{i(hz-kCt)}, \\ H_z = \mathscr{H}_z e^{i(hz-kCt)} = B \cdot \cos\frac{m\pi x}{a} \cdot \cos\frac{n\pi y}{b} e^{i(hz-kCt)}. \end{cases} \tag{11}$$

（3）从解（11）知，当h为虚数$h=i\beta$时，因子

$$e^{ihz} = e^{-\beta z}.$$

这表示电磁波沿z轴正方向衰减而不能传播，亦即没有谐波形式的解。

$\because \quad k^2 - \left[\left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2\right] = h^2$，当 h 为虚数时，

有
$$k^2 < \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2.$$

设$a>b$，当m，n不同时为零时，则凡 $k<\frac{\pi}{a}$的波以任何模式都通不过。这时

$$k = \frac{\pi}{a} \text{ 称为截止波矢，}$$

$$w_c = ck_c = \frac{c\pi}{a} \text{ 称为截止圆频率，}$$

$$f_c = \frac{w_c}{2\pi} = \frac{c}{2a} \text{ 称为截止频率，}$$

$$\lambda_c = \frac{c}{f} = 2a \text{ 称为截止波长。}$$

设$a<b$，当m,n不同时为零时，则 $nk<\frac{\pi}{b}$的波以任何模式都通不过。

§41. 常点邻域上的级数解法

1. 在$x_0=0$的邻域上求解$y''-xy=0$。

解：$y''-xy=0$， (1)

这里$p(x)=0$，$q(x)=-x$，$\therefore x_0=0$是方程(1)的常点。

设 $$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \tag{2}$$

则 $$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+2)(k+1)a_{k+2}x^k, \tag{3}$$

$$xy=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=\sum_{k=1}^{\infty}a_{k-1}x^k, \tag{4}$$

把（3）和（4）式代入方程（1），合并用幂次项，令各幂次的系数为零，得系数递推公式：

$$a_{k+2}=\frac{1}{(k+1)(k+2)}a_{k-1}, \tag{5}$$

由（5）可推得

$$a_2=a_{-1}=0\ (\because a_{-1}=0),\ a_5=0,\ \cdots a_{3k+2}=0,$$

$$a_3=\frac{1}{2\cdot3}a_0(a_0\neq0，待定),$$

$$a_6=\frac{1}{5\cdot6}a_3=\frac{1\cdot4}{6!}a_0,\ \cdots a_{3k}=\frac{1\cdot4\cdots(3k-2)}{(3k)!}a_0,$$

$$a_4=\frac{1}{3\cdot4}a_1(a_1\neq0，待定),$$

$$a_7=\frac{1}{6\cdot7}a_4=\frac{2\cdot5}{7!}a_1,\ \cdots a_{3k+1}=\frac{2\cdot5\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}a_1.$$

故

$$y_0(x)=a_0\left[1+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\cdots+\frac{1\cdot 4\cdots(3k-2)}{(3k)!}x^{3k}+\cdots\right],$$

(6)

$$y_1(x)=a_1\left[x+\frac{1}{3\cdot 4}x^4+\cdots+\frac{2\cdot 5\cdots(3k-1)}{(3k+1)!}\right.$$
$$\left.\times x^{3k+1}+\cdots\right], \tag{7}$$

其级数解的收敛半径为：

$$R_0=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1\cdot 4\cdots(3k-2)}{(3k)!}\cdot\frac{[3(k+1)]!}{1\cdot 4\cdots[3(k+1)-2]}\right|$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1\cdot 4\cdots(3k-2)}{(3k)!}\cdot\frac{(3k+3)!}{1\cdot 4\cdots(3k+1)}\right|$$
$$=\lim_{k\to\infty}\left|(3k+2)(3k+3)\right|=\infty.$$

同样可得

$$R_1=\lim_{k\to\infty}\left|(3k+3)(3k+4)\right|=\infty.$$

2. 在$x_0=0$的邻域上求解厄密方程

$$y''-2xy'+(\lambda-1)y=0.$$

λ取什么数值可使级数解退化为多项式？这些多项式乘以适当常数使最高幂项成为$(2x)^n$形式，叫做厄密多项式，记作$H_n(x)$。写出前几个$H_n(x)$。

解：$y''-2xy'+(\lambda-1)y=0,$ (1)

这里$p(x)=-2x$，$q(x)=\lambda-1$，知$x_0=0$是方程（1）的常点。

设 $$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \tag{2}$$

则 $$(\lambda-1)y=\sum_{k=0}^{\infty}(\lambda-1)a_kx^k, \tag{3}$$

$$-2xy' = \sum_{n=1}^{\infty} -2na_nx^n = \sum_{k=1}^{\infty} -2ka_kx^k, \tag{4}$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_nx^{n-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) \times (k+2)a_{k+2}x^k, \tag{5}$$

把（3），（4），（5）式代入方程（1），可得系数递推公式

$$a_{k+2} = \frac{2k+1-\lambda}{(k+1)(k+2)}a_k, \tag{6}$$

由公式（6）可推得

$$a_2 = \frac{1-\lambda}{1\cdot 2}a_0 (a_0 \neq 0,\ 待定),$$

$$a_3 = \frac{3-\lambda}{2\cdot 3}a_1 (a_1 \neq 0,\ 待定),$$

$$a_4 = \frac{5-\lambda}{3\cdot 4}a_2 = \frac{(1-\lambda)(5-\lambda)}{4!}a_0,$$

$$a_5 = \frac{7-\lambda}{4\cdot 5}a_3 = \frac{(3-\lambda)(7-\lambda)}{5!}a_1,$$

……

$$a_{2k} = \frac{(1-\lambda)(5-\lambda)\cdots(4k-3-\lambda)}{(2k)!}a_0,$$

$$a_{2k+1} = \frac{(3-\lambda)(7-\lambda)\cdots(4k-1-\lambda)}{(2k+1)!}a_1,$$

故 $$y(x) = a_0y_0(x) + a_1y_1(x), \tag{7}$$

其中 $$y_0(x) = 1 + \frac{(1-\lambda)}{2!}x^2 + \frac{(1-\lambda)(5-\lambda)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{(1-\lambda)(5-\lambda)\cdots(4k-3-\lambda)}{(2k)!}x^{2k} + \cdots, \tag{8}$$

$$y_1(x) = x + \frac{(3-\lambda)}{3!}x^3 + \frac{(3-\lambda)(7-\lambda)}{5!}x^5 + \cdots$$

$$+\frac{(3-\lambda)(7-\lambda)\cdots(4k-1-\lambda)}{(2k+1)!}x^{2k+1}+\cdots. \tag{9}$$

收敛半径均是无限大。

从级数解（8）和（9）知：

当　$\lambda=4k-3$　$(k=1,2,\cdots)$时，$y_0(x)$退化成多项式，

当　$\lambda=4k-1$　$(k=1,2,\cdots)$时，$y_1(x)$退化成多项式。

使多项式最高幂项为$(2x)^n$形式，称为厄密多项式，记为$H_n(x)$，其前几个$H_n(x)$是：

取　$k=1$，有

$\lambda=4k-3=1$，$y_0(x)=1$，记为$H_0(x)=1$，

$\lambda=4k-1=3$，$y_1(x)=x$，记为$H_1(x)=2y_1(x)=2x$，

取　$k=2$，有

$\lambda=4k-3=5$，$y_0(x)=1-2x^2$，

记为$H_2(x)=-2y_0(x)=(2x)^2-2$。

$\lambda=4k-1=7$，$y_1(x)=x-\dfrac{2}{3}x^3$，

记为$H_4(x)=-(2^2)\cdot3y_3(x)=(2x)^3-12x$。

3. 在$x_0=0$的邻域上求解$(1-x^2)y''-6xy'+6y=0$即

$$(1-x^2)y''-2(2+1)xy'+[3(3+1)-2(2+1)]y=0,$$

在例 2 的l阶勒让德方程$(1-x^2)R''-2xy'+l(l+1)R=0$的级数解

$$R_0(x)=1+\frac{(-l)(l+1)}{2!}x^2+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(2k-2-l)(2k-4-2)\cdots(-l)(l+1)(l+3)\cdots(l+2k-1)}{(2k)!}$$

$$\times x^{2k}+\cdots,$$

$$R_1(x)=x+\frac{(1-l)(l+2)}{3!}x^3+\cdots\cdots$$

$$+\frac{(2k-1-l)(2k-3-l)\cdots(1-l)(l+2)(l+4)\cdots(l+2k)}{(2k+1)!}$$

$$\times x^{2k+1}+\cdots$$

之中以 $l=3$ 代入，并求它的二阶导数，然后与本题的答案比较一下。

解：$\because$ $x_0=0$是方程的常点，

$\therefore$ 令 $y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$。

则：
$$6y=\sum_{k=0}^{\infty}6a_kx^k, \tag{1}$$

$$-6xy'=\sum_{n=1}^{\infty}-6na_nx^n=\sum_{k=1}^{\infty}-6ka_kx^k, \tag{2}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k, \tag{3}$$

$$-x^2y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^n=\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)a_kx^k. \tag{4}$$

把（1）—（4）式代入方程得系数递推公式

$$(k+1)(k+2)a_{k+2}-k(k-1)a_k-6ka_k+6a_k=0,$$

即
$$a_{k+2}=\frac{(k-1)(k+6)}{(k+1)(k+2)}a_k=\frac{[(k+2)-3][(k+2)+4]}{(k+2)(k+1)}a_k.$$

由系数递推公式知：

$$a_2=-\frac{6}{1\cdot 2}a_0,\quad (a_0\neq 0),$$

$$a_3=0\cdot a_1=0,\quad (设a_1\neq 0),$$

$$a_4=\frac{8}{3\cdot 4}a_2=\frac{6\cdot 8}{4!}a_0,$$

$$a_5=\frac{2\cdot 9}{4\cdot 5}a_3=0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$a_{2n}=\frac{(2n+4)(2n+2)\cdots 8\cdot 6\cdot 1\cdot(-1)\cdots(2n-5)(2n-3)}{(2n)!}a_0,$$

$$a_{2n+1}=0,$$

$$\therefore\quad y(x)=a_0y_0(x)+a_1y_1(x), \tag{5}$$

其中

$$y_0(x)=1+\frac{(-1)\cdot 6}{2!}x^2+\frac{(-1)\cdot 1\cdot 6\cdot 8}{4!}x^4+\cdots+\frac{(2n-3)\cdots(-1)\cdot 1\cdots(2n+4)}{(2n)!}x^{2n}+\cdots, \tag{6}$$

$$y_1(x)=x, \tag{7}$$

又，$l=3$ 阶勒让德方程的解为：

$$R_0(x)=1+\frac{(-3)\cdot 4}{2!}x^2+\cdots+\frac{(2n-5)(2n-7)\cdots(-3)(4)(6)\cdots(2n+2)}{(2n)!}\times x^{2n}+\cdots,$$

$$R_1(x)=x+\frac{(-2)\cdot 5}{3!}x^3.$$

对$R_0(x)$和$R_1(x)$求二阶导数

$$\frac{d^2R_0}{dx^2}=(-3)\cdot(4)+\frac{(-1)(-3)\cdot 4\cdot 6\cdot 3}{3!}x^2+\frac{(2n-5)\cdots(-3)\cdot 4\cdot 6\cdots(2n+2)(2n-1)}{(2n-1)!}x^{2n-2}+\cdots$$

$$=(-3)\cdot 4\left[1+\frac{(-1)\cdot 6}{2!}x^2+\cdots+\frac{(2n-3)\cdots(-1)\cdot 1\cdot 6\cdot 8\cdots(2n+4)}{(2n)!}x^{2n}+\cdots\right]$$

$$=(-3)\cdot 4\cdot y_0(x),$$

$$\frac{d^2R_1}{dx^2}=(-2)\cdot 5\cdot y_1(x).$$

因此，可以说本题的解正是3阶勒让德方程解的二阶导数。

4. 在$x_0=0$的邻域上求解雅可俾方程

$$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'$$
$$+\lambda(\alpha+\beta+\lambda+1)y=0.$$

解：$x_0=0$是方程的常点。

设
$$y=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n, \tag{1}$$

则
$$\lambda(\alpha+\beta+\lambda+1)\,y=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda(\alpha+\beta+\lambda+1)a_kx^k, \tag{2}$$

$$(\beta-\alpha)\,y'=\sum_{n=1}^{\infty}(\beta-\alpha)\,na_nx^{n-1}$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(\beta-\alpha)\cdot(k+1)a_{k+1}x^k, \tag{3}$$

$$-(\alpha+\beta+2)x\cdot y'=\sum_{n=1}-(\alpha+\beta+2)\cdot a_nnx^n$$
$$=\sum_{k=1}^{\infty}-(\alpha+\beta+2)ka_kx^k, \tag{4}$$

$$y''=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)\,a_n\,x^{n-2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)(k+2)a_{k+2}x^k, \tag{5}$$

$$-x^2y''=\sum_{n=2}^{\infty}-n(n-1)a_nx^n=\sum_{k=2}^{\infty}-(k-1)ka_kx^k, \tag{6}$$

把(2)—(6)代入雅可俾方程可得系数递推公式：

$$(k+1)(k+2)a_{k+2}+(\beta-\alpha)(k+1)a_{k+1}+[\lambda(\alpha+\beta+\lambda+1)$$
$$-(\alpha+\beta+2)k-k(k-1)]a_k=0,$$

$$a_{k+2}=\frac{\alpha-\beta}{k+2}\,a_{k+1}$$

$$-\frac{\lambda(\alpha+\beta+\lambda+1)+(\alpha+\beta+2)k-(k-1)k}{(k+1)(k+2)}a_k,$$

即 $$a_{k+2}=\frac{\alpha-\beta}{k+2}a_{k+1}+\frac{(k-\lambda)(k+\alpha+\beta+\lambda+1)}{(k+1)(k+2)}a_k.$$

可以写出前面几个系数，但难以写出一般的系数公式。

§42．正则奇点邻域上的级数解法

1． 在$x_0=0$的邻域上求解$x^2y''+2xy'-l(l+1)y=0$。

解： $x_0=0$是$p(x)=\dfrac{2}{x}$的一阶极点，是$q(x)=\dfrac{l(l+1)}{x^2}$的二阶极点，所以是方程的正则奇点。

设 $y=\sum\limits_{k=s}^{\infty}a_kx^k$，代入方程，各同幂次项分别集合如下表。

	x^s	x^{s+1}	…	x^{s+k}	…
$x^2y''=$	$s(s-1)a_s$	$(s+1)sa_{s+1}$	…	$(s+k)(s+k-1)a_{s+k}$	…
$2xy'=$	$2sa_s$	$2(s+1)a_{s+1}$	…	$2(s+k)a_{s+k}$	…
$-l(l+1)y=$	$-l(l+1)a_s$	$-l(l+1)a_{s+1}$	…	$-l(l+1)a_{s+k}$	…

令最低幂项系数为零，得判定方程：

$$[s(s-1)+2s-l(l+1)]a_s=0.$$

$\because$ $a_s\neq0$,

$\therefore$ $s^2+s-l(l+1)=0$。

解得 $s_1=l$， $s_2=-(l+1)$。 (1)

令x^{s+k}项系数为零，得系数递推公式：

$$[(s+k)(s+k-1)+2(s+k)-l(l+1)]a_{s+k}=0. \qquad (2)$$

当$s_1=l$时，由(2)式

$$[(l+k)(l+k-1)+2(l+k)-l(l+1)]a_{s_1+k}$$
$$=k(k+2l+1)a_{s_1+k}=0.$$

若 $k\neq 0$，l 取整数，则有 $a_{s_1+k}=0$，

若 $k=0$，则 $a_{s_1}\neq 0$，于是得一特解

$$y_0(x)=a_0x^l. \tag{3}$$

当 $s_2=-(l+1)$ 时，由(1)式得

$$[(-l-1+k)+(-l-1+k-1)+2(-l-1+k)$$
$$-l(l+1)]a_{s_2+k}$$
$$=k(k-2l-1)a_{s_2+k}=0,$$

同上讨论，有 $a_{s_2+k}=0$，$a_{s_2}\neq 0$，得另一特解

$$y_1(x)=a_1x^{-(l+1)}. \tag{4}$$

$$\therefore\quad y(x)=a_0x^l+a_1x^{-(l+1)}. \tag{5}$$

2. 在 $x_0=0$ 的邻域上求拉盖尔方程 $xy''+(1-x)y'+\lambda y=0$ 的有限解。λ 取什么数值可使级数退化为多项式？这些多项式乘以适当常数使最高幂项成为 $(-x)^n$ 形式就叫作拉盖尔多项式，记作 $L_n(x)$。写出前几个 $L_n(x)$。

解：$x_0=0$ 是 $p(x)=\dfrac{1-x}{x}$ 和 $q(x)=\dfrac{\lambda}{x}$ 的一阶极点，所以是方程的正则奇点。

设
$$y=\sum_{k=s}^{\infty}a_kx^k,$$

代入方程，把各同幂次项分别集合如下表。

	x^{s-1}	x^s	…	x^{s+k}	…
$xy''=$	$s(s-1)a_s$	$(s+1)sa_{s+1}$	…	$(s+k+1)(s+k)a_{s+k+1}$	…
$y'=$	sa_s	$(s+1)a_{s+1}$	…	$(s+k+1)a_{s+k+1}$	…
$-xy'=$		$-sa_s$	…	$-(s+k)a_{s+k}$	…
$\lambda y=$		λa_s	…	λa_{s+k}	…

令最低次幂系数为零，得判定方程

$$(s^2-s+s)a_s=0,$$

$\because$ $a_s\neq 0$,

$\therefore$ $s_{1,2}=0$. (1)

令x^{s+k}项系数为零，得系数递推公式

$$a_{s+k+1}=\frac{s+k-\lambda}{(s+k+1)^2}a_{s+k}, \tag{2}$$

当$s=0$时，由(2)式推算出：

$$a_1=-\lambda a_0,$$

$$a_2=\frac{1-\lambda}{2^2}a_1=\frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{1^2\cdot 2^2}a_0=\frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2}a_0,$$

......

$$a_n=\frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(k-1-\lambda)}{(k!)^2}a_0, \cdots\cdots$$

$$\therefore\quad y(x)=a_0\Big[1+\frac{-\lambda}{(1!)^2}x+\frac{(-\lambda)(1-\lambda)}{(2!)^2}x^2+\cdots$$
$$+\frac{(-\lambda)(1-\lambda)\cdots(k-1-\lambda)}{(k!)^2}x^k+\cdots\Big], \tag{3}$$

如$\lambda=0, 1, 2\cdots$时，级数解(2)退化为多项式。

使多项式最高幂项为$(-x)^n$形式，称为拉盖尔多项式，记为$L_n(x)$。其前几个$L_n(x)$是：

$\lambda=0$, $y_0(x)=1$,

记为$L_0(x)=1$,

$\lambda=1$, $y_1(x)=1-x$,

记为$L_1(x)=-x+1$,

$\lambda=2$, $y_2(x)=1-2x+\dfrac{1}{2}x^2$,

记为$L_2(x)=2y_2=(-x)^2-4x+2$,

$\lambda = 3$， $y_3(x) = 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3$，

记为$L_3(x) = 6y_3 = (-x)^3 + 9x^2 - 18x + 6$.

方程的另一特解在 $x = 0$ 处为无限大，舍去不讨论.

3.在$x_0 = 0$ 的邻域上求

$$y'' - 2\lambda y' + \left[\frac{2z}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}\right]y = 0$$ 的有限解.λ取什么数值可使级数退化为多项式?

解：因$x_0 = 0$ 是$p(x) = -2\lambda$的常点、是$q(x) = \frac{2z}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2}$的二阶极点，所以是方程的正则奇点.

设 $y(x) = \sum_{k=s}^{\infty} a_k x^k$，

代入方程，则有：

	x^s	x^{s+1}	…	x^{s+k}	…
x^2y''	$s(s-1)a_s$	$(s+1)sa_{s+1}$	…	$(s+k)(s+k-1)a_{s+k}$	…
$-2\lambda xy'$		$-2\lambda sa_s$	…	$-2\lambda(s+k-1)a_{s+k-1}$	…
$2zxy$		$2za_s$	…	$2za_{s+k-1}$	…
$-l(l+1)y$	$-l(l+1)a_s$	$-l(l+1)a_{s+1}$	…	$-l(l+1)a_{s+k}$	…

令最低幂项系数为零，得判定方程

$$[s(s-1) - l(l+1)]a_s = 0，$$

$\because$ $a_s \neq 0$，

$\therefore$ $s^2 - s - l(l+1) = 0$，

得 $s_1 = l+1$，$s_2 = -l$， (1)

令x^{s+k}项系数为零，得系数递推公式

$$[(s+k)(s+k-1) - l(l+1)]a_{s+k}$$

$$+[2z-2\lambda(s+k-1)]a_{s+k-1}=0,$$

即
$$a_{s+k}=\frac{2\lambda(s+k-1)-2z}{(s+k)(s+k-1)-l(l+1)}a_{s+k-1}. \qquad (2)$$

当$s_1=l+1$时，由（2）式得

$$\begin{aligned}a_{l+1+k}&=\frac{2\lambda(l+k)-2z}{(l+1+k)(l+k)-l(l+1)}a_{l+k}\\&=\frac{2[\lambda(l+k)-z]}{k(k+2l+1)}a_{l+k}\\&=\frac{2^2[\lambda(l+k)-z][\lambda(l+k-1)-z]}{k(k-1)(k+2l+1)(k+2l)}a_{l+k-1}\\&=\cdots\\&=\frac{2^k[\lambda(l+k)-z][\lambda(l+k-1)-z]\cdots[\lambda(l+1)-z]}{k!(k+2l+1)(k+2l)\cdots(2+2l)}a_{l+1},\end{aligned}$$

$$\therefore\quad y(x)=a_0x^{l+1}\left[1+\frac{(l+1-z/\lambda)}{1!(2l+2)}(2\lambda x)+\frac{(l+1-z/\lambda)(l+2-z/\lambda)}{2!(2l+2)(2l+3)}(2\lambda x)^2+\cdots\right]. \qquad (3)$$

如果$\dfrac{z}{\lambda}$=整数n，则级数退化成$n-l-1$次多项式。

当$s_2=-l$时，由上面讨论知这级数解中含有负幂项x^{-l}，（因$l>0$），在$x_0=0$处发散，不为有限解，故应舍去，不加讨论。

4. 在$x_0=0$的邻域上求解m阶虚宗量贝塞耳方程$x^2y''+xy'-(x^2+m^2)y=0$，暂且认为m非整数，象例2那样选取$a_{\pm m}=1/2^{\pm m}\Gamma(\pm m+1)$，所得的两个解分别叫作$m$阶和$-m$阶虚宗量贝塞耳函数，分别记作$I_{\pm m}(x)$。

验证$I_{\pm m}(x)$没有实的零点。

比较$J_{\pm m}(ix)$和$I_{\pm m}(x)$。

解：$x_0=0$是$p(x)=\dfrac{1}{x}$的一阶极点，是$q(x)=-\dfrac{(x^2+m^2)}{x^2}$的二阶极点，故为方程的正则奇点。

设 $$y(x)=\sum_{l=s}^{\infty}a_l x^l,$$

代入方程，则有：

	x^s	x^{s+1}	x^{s+2}	…	x^{s+k}	…
$x^2y''=$	$s(s-1)a_s$	$(s+1)sa_{s+1}$	$(s+2)(s+1)a_{s+2}$	…	$(s+k)(s+k-1)a_{s+k}$	…
$xy'=$	sa_s	$(s+1)a_{s+1}$	$(s+2)a_{s+2}$	…	$(s+k)a_{s+k}$	…
$-x^2y=$			$-a_s$	…	$-a_{s+k-2}$	…
$-m^2y=$	$-m^2a_s$	$-m^2a_{s+1}$	$-m^2a_{s+2}$	…	$-m^2a_{s+k}$	…

令各同次幂项系数为零，得一系列方程

$$[s(s-1)+s-m^2]a_s=0, \tag{1}$$

$$[(s+1)s+(s+1)-m^2]a_{s+1}=0, \tag{2}$$

……

$$[(s+k)(s+k-1)+(s+k)-m^2]a_{s+k}-a_{s+k-2}=0, \tag{3}$$

……。

由(1)式，$\because\ a_s\neq 0$，$\therefore\ s_{1,2}=\pm m$。 (4)

由(2)式$[(s+1)^2-m^2]a_{s+1}=0$，

当$s_{1,2}=\pm m$时，$[(\pm m+1)^2-m^2]a_{s+1}=0$，$\therefore\ a_{s+1}=0$。 (5)

由(3)式得系数递推公式：

$$a_{s+k}=\frac{1}{(s+k+m)(s+k-m)}a_{s+k-2}, \tag{6}$$

取$s_1=m$，由（6）式有：

$$a_{m+2}=\frac{1}{(2m+2)\cdot 2}a_m=\frac{1}{2^2\cdot(m+1)\cdot 1}a_m,$$

$$a_{m+3}=\frac{1}{(2m+3)\cdot 3}a_{m+1}=0,\quad (\because a_{m+1}=a_{s+1}=0),$$

$$a_{m+4}=\frac{1}{(2m+4)\cdot 4}a_{m+2}$$

$$=\frac{1}{2^4\cdot(m+1)(m+2)1\cdot 2}a_m,$$

类推有：

$$a_{m+2k}=\frac{1}{2^{2k}\cdot k!(m+1)(m+2)\cdots(m+k)}a_m,$$

$$a_{m+2k+1}=0.$$

于是得方程一个特解：

$$y_1(x)=a_m x^m\left[1+\frac{1}{1!(m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\cdots+\frac{1}{k!(m+1)\cdots(m+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k}+\cdots\right],$$

选取$a_m=1/2^m\Gamma(m+1)$，

则
$$I_m(x)\equiv y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k} \tag{7}$$

取$s_2=-m$依照上面同样讨论，并选取$a_{-m}=1/2^{-m}\Gamma(-m+1)$可得方程另一特解：

$$I_{-m}(x)\equiv y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k}, \tag{8}$$

因（7）和（8）式是对k求和，所以$\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm m}$可提出放在求和号外

面．这样求和号内只出现x的偶次幂，且系数全为正值（当$k+1\leqslant m$时，$\Gamma(-m+k+1)=\infty$，这部分系数为零），因而$I_{\pm m}(x)$没有实的零点．

又∵ $$J_{\pm m}(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\pm m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm m+2k}.$$

∴ $$J_{\pm m}(ix)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(\pm m+k+1)}\left(\frac{ix}{2}\right)^{\pm m+2k}$$

$$=(i)^{\pm m}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k(i)^{2k}}{k!\Gamma(\pm m+k+1)}\times\left(\frac{x}{2}\right)^{\pm m+2k}$$

$$=(i)^{\pm m}I_{\pm m}(x).$$

5．在$x_0=1$的邻域上，求勒让德方程$(1-x^2)y''-2xy'+l(l+1)y=0$的有限解．

解：令 $$t=\frac{1-x}{2},\qquad (1)$$

则 $$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=\frac{-1}{2}\frac{dy}{dt};$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\frac{dt}{dx}=\frac{1}{4}\frac{d^2y}{dt^2}.$$

原方程化为：

$$(t-t^2)y''+(1-2t)y'+l(l+1)y=0,\ (\text{且}t_0=0), \qquad (2)$$

∵ $t_0=0$是$p(t)=(1-2t)/t(1-t)$和$q(t)=l(l+1)/t(1-t)$的一阶极点，

∴ $t_0=0$是方程的正则奇点．

设 $y(t)=\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kt^k$ 代入方程(2)，则有：

	t^{s-1}	t^s	$\cdots$	t^{s+k}	$\cdots$
$-t^2y''=$		$-s(s-1)a_s$	$\cdots$	$-(s+k)(s+k-1)a_{s+k}$	$\cdots$
$ty''=$	$s(s-1)a_s$	$(s+1)sa_{s+1}$	$\cdots$	$(s+k+1)(s+k)a_{s+k+1}$	$\cdots$
$y'=$	sa_s	$(s+1)a_{s+1}$	$\cdots$	$(s+k+1)\cdot a_{s+k+1}$	$\cdots$
$-2ty'=$		$-2sa_s$	$\cdots$	$-2(s+k)a_{s+k}$	$\cdots$
$l(l+1)y=$		$l(l+1)a_s$	$\cdots$	$l(l+1)a_{s+k}$	$\cdots$

令上表各个幂次合并后的系数为零，得

$$[s(s-1)+s]a_s=0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$[(s+k+1)(s+k)+(s+k+1)]a_{s+k+1}$$
$$=[(s+k)(s+k-1)+2(s+k)-l(l+1)]a_{s+k},$$

$$\cdots\cdots$$

$\because \quad a_s\neq 0,\qquad\qquad \therefore \quad s_{1,2}=0,$ (3)

又
$$a_{s+k+1}=\frac{(s+k)(s+k+1)-l(l+1)}{(s+k+1)^2}a_{s+k}, \tag{4}$$

取 $s=0$， $a_{k+1}=\dfrac{(k-l)(l+k+1)}{(k+1)^2}a_k$， 其前几个系为：

$$a_1=\frac{-l(l+1)}{1^2}a_0=(-1)^1\frac{(l+1)l\cdot p(l)}{\Gamma(l)}\cdot\frac{1}{1^2}a_0$$

$$=(-1)^1\frac{\Gamma(l+2)}{\Gamma(l)}\frac{1}{1^2}a_0,$$

$$a_2=\frac{(1-l)(l+2)}{2^2}a_1$$

$$=(-1)\ \frac{(l-1)(l+2)}{2^2}\cdot(-1)\ \frac{\Gamma(l+2)}{1^2\cdot\Gamma(l)}a_0$$

$$=(-1)^2\frac{(l-1)\cdot(l+2)\Gamma(l+2)}{(2!)^2(l-1)\Gamma(l-1)}a_0$$

$$= (-1)\frac{\Gamma(l+3)}{\Gamma(l-1)}\cdot\frac{a_0}{(2!)^2},$$

类推有：

$$a_k = (-1)^k \frac{\Gamma(l+k+1)}{\Gamma(l-k+1)}\frac{1}{(k!)^2}a_0,$$

$$\therefore\quad y(x) = a_0\Big[1+(-1)^1\frac{\Gamma(l+2)}{\Gamma(l)}\frac{1}{(1!)^2}\Big(\frac{1-x}{2}\Big)$$

$$+(-1)^2\frac{\Gamma(l+3)}{\Gamma(l-1)}\cdot\frac{1}{(2!)^2}\Big(\frac{1-x}{2}\Big)^2+\cdots$$

$$+(-1)^k\frac{\Gamma(l+k+1)}{\Gamma(l-k+1)}\frac{1}{(k!)^2}$$

$$\Big(\frac{1-x}{2}\Big)^k+\cdots\Big],\ \Big(\text{因 } t=\frac{1-x}{2}\Big), \qquad (5)$$

另一特解在$x_0=1$（即$t_0=0$）为无限大，舍去不讨论。

6.在$x_0=0$的邻域上求解　　$xy''-xy'+y=0$。

解：这里$x_0=0$是方程正则奇点。

$$令\quad y(x)=\sum_{k=s}^{\infty}a_kx^k,$$

代入方程，把各幂次项集合如下表。

	x^{s-1}	x^s	…	x^{s+k}	…
$xy''=$	$s(s-1)a_s$	$(s+1)sa_{s+1}$	…	$(s+k+1)(s+k)a_{s+k+1}$	…
$-xy'=$		$-sa_s$	…	$-(s+k)a_{s+k}$	…
$y=$		a_s	…	a_{s+k}	…

由最低幂项系数为零，得

$$s(s-1)a_s=0,$$

$$\because\quad a_s\neq 0,\qquad \therefore\quad s_1=1,\qquad s_2=0. \qquad (1)$$

取$s=s_1=1$，这时系数递推公式是：

$$a_{k+2}=\frac{k}{(k+1)(k+2)}a_{k+1},\tag{2}$$

当 $k=0$ 时，$a_2=0\cdot a_1$，$\because a_1\neq 0$，$\therefore a_2=0$，

推知　　$a_k=0$，$(k\neq 1)$，

从而得到方程的一个特解：

$$y_1(x)=a_1x.\tag{3}$$

由于 $s_1-s_2=1-0=1$ 为整数，所以对于判定方程较小的根 s_2 对应的另一个特解的形式是：

$$y_2(x)=Ax\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k,$$

且　　$$y_2'(x)=A+A\ln x+\sum_{k=1}^{\infty}kb_kx^{k-1},$$

$$y_2''(x)=\frac{A}{x}+\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_kx^{k-2},$$

代入原方程，集合如下表．

	x^0	$x\ln x$	x	$\cdots$	x^k	$\cdots$
$xy_2''=$	A		$2b_2$	$\cdots$	$(k+1)kb_{k+1}$	$\cdots$
$-xy_2'=$		$-A$	$-A-b_1$	$\cdots$	$-kb_k$	$\cdots$
$y_2=$	b_0	A	b_1	$\cdots$	b_k	$\cdots$

令上表各幂次项系数为零，有

$b_0=-A$，

$-A+A=0$，知 A 为任意，

$2b_2-A-b_1+b_1=0$，　知 $b_2=\dfrac{A}{2}$，b_1 为任意，

……

$$b_{k+1}=\frac{k-1}{k(k+1)}b_k,\ (k\geqslant 2),$$

推之有：
$$b_3=\frac{1}{2\cdot 3}b_2=\frac{1}{2\cdot 3}\cdot\frac{1}{2}A=\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{3!}A,$$

$$b_4=\frac{2}{3\cdot 4}b_3=\frac{2!}{3!4!}A,$$

$$\cdots$$

$$b_k=\frac{(k-2)!}{(k-1)!k!}A,$$

$$\therefore\quad y_2(x)=Ax\ln x+\left[-A+b_1x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-2)!}{(k-1)!k!}Ax^k\right]$$

$$=A\left[x\ln x-1+x+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-2)!}{(k-1)!k!}x^k\right],\qquad (4)$$

故

$$y(x)=y_1(x)+y_2(x)$$

$$=a_0x+a_1\left[x\ln x-1+\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(k-2)!}{(k-1)!k!}x^k\right].$$

7. 在$x_0=0$的邻域上，求解$xy''+y=0$。

解：易知$x_0=0$是方程的正则奇点。

设 $$y=\sum_{k=s}^{\infty}a_kx^k,$$

代入方程，则有：

	x^{s-1}	x^s	$\cdots$	x^{s+k}	$\cdots$
$xy''=$	$s(s-1)a_s$	$(s+1)sa_{s+1}$	$\cdots$	$(s+k+1)(s+k)a_{s+k+1}$	$\cdots$
$y=$		a_s	$\cdots$	a_{s+k}	$\cdots$

这里判定方程为：$s(s-1)=0$，$\therefore s_1=1$，$s_2=0$。 (1)

其系数递推公式为：

$$a_{s+k+1} = \frac{-1}{(k+s+1)(s+k)} a_{s+k}, \tag{2}$$

取$s_1=1$，系数递推公式是：$a_{k+2}=\dfrac{-1}{(k+1)(k+2)}a_{k+1}$，

即有 $a_2=\dfrac{(-1)}{1\cdot 2}a_1$（$a_1$任意），$a_3=\dfrac{-1}{2\cdot 3}a_2=\dfrac{(-1)^2}{2!3!}a_1$，

$\cdots\cdots\quad a_k=\dfrac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!k!}a_1$，

于是得方程的一个特解：

$$y_1(x) = a_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!k!}x^k, \tag{3}$$

由于$s_1-s_2=1$为整数，所以第二个特解形式为

$$y_2(x)=Ay_1(x)\ln x+\sum_{k=0}^{\infty}b_kx^k,$$

且

$$y_2'(x)=\frac{A}{x}y_1(x)+A\ln x\cdot y_1'(x)+\sum_{k=1}^{\infty}kb_kx^{k-1}.$$

$$y_2''(x)=-\frac{A}{x^2}y_1(x)+\frac{2A}{x}y_1'(x)+Ay_1''(x)\ln x$$

$$+\sum_{k=2}^{\infty}k(k-1)b_kx^{k-2},$$

代入方程并注意到 $xy_1''+y_1=0$，于是有

$$2Ay_1'-\frac{A}{x}y_1+\sum_{k=2}^{\infty}[b_kk(k-1)+b_{k-1}]x^{k-1}+b_0=0.$$

$$\because\quad -\frac{A}{x}y_1=-Aa_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!k!}x^{k-1}$$

$$=-Aa_1-Aa_1\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!k!}x^{k-1},$$

$$2Ay_1'=2Aa_1\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(-1)^{k-1}}{(k-1)!k!}x^{k-1},$$

$$= 2Aa_1 + 2Aa_1\sum_{k=2}^{\infty}\frac{k(-1)^k}{(k-1)!k!}x^{k-1},$$

代入上式，并令同次幂系数为零，有

$$2Aa_1 - Aa_1 + b_0 = 0, \quad \therefore\ b_0 = -Aa_1 = -A_1,$$

$$(2A_1k - A_1)\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!k!} + k(k-1)b_k + b_{k-1} = 0,$$

$$\therefore\quad b_k = \left[\frac{A_1(2k-1)(-1)^k}{(k-1)!k!} - b_{k-1}\right]\frac{1}{k(k-1)},$$

对b_1无特殊要求，可令$b_1 = 0$。

$$b_2 = \frac{3}{1!2!}\cdot A_1\cdot\frac{1}{2},$$

$$b_3 = \left(\frac{-5}{2!3!}A_1 - b_2\right)\cdot\frac{1}{3\cdot 2} = \left(\frac{-5A_1}{2!3!} - \frac{3A_1}{1!2!}\cdot\frac{1}{2}\right)\frac{1}{2\cdot 3}$$

$$= \frac{-A_1}{2!3!}\left(\frac{3}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3}\right),$$

推之得：$b_k = \dfrac{(-1)^k A_1}{(k-1)!k!}\left[\dfrac{3}{1\cdot 2} + \dfrac{5}{2\cdot 3} + \cdots + \dfrac{(2k-1)}{(k-1)k}\right]$。

$$\therefore\quad y_2(x) = A_1\ln x\cdot y_1(x) - A_1 + A_1\sum_{k=2}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(k-1)!k!}\left[\frac{3}{1\cdot 2} + \frac{5}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{(2k-1)}{(k-1)k}\right]x^k. \tag{4}$$

8．在$x_0 = 0$的邻域上求解高斯方程（超几何级数微分方程）$x(x-1)y'' + [(1+\alpha+\beta)x - \gamma]y' + \alpha\beta y = 0$。

解：$\because x_0 = 0$ 是方程的E'则奇点。

设 $y(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty}a_kx^k$，则有（如下页表）。

其判定方程为

$$[-s(s-1) - \gamma s]a_s = 0.$$

	x^{s-1}	x^{s}	$\cdots$	x^{s+k}	$\cdots$
$x^2y''=$		$s(s-1)a_s$	$\cdots$	$(s+k)(s+k-1)a_{s+k}$	$\cdots$
$-xy''=$	$-s(s-1)a_s$	$-(s-1)sa_{s+1}$	$\cdots$	$-(s+k+1)(s+k)a_{s+k+1}$	$\cdots$
$(1+\alpha+\beta)xy'=$		$(1+\alpha+\beta)sa_s$	$\cdots$	$(1+\alpha+\beta)(s+k)a_{s+k}$	$\cdots$
$-\gamma y'=$	$-\gamma sa_s$	$-\gamma(s+1)a_{s+1}$	$\cdots$	$-\gamma(s+k+1)a_{s+k+1}$	$\cdots$
$\alpha\beta y=$		$\alpha\beta a_s$	$\cdots$	$\alpha\beta a_{s+k}$	$\cdots$

$\because\quad a_s\neq 0$,

$$\therefore\quad s_1=0,\ s_2=1-\gamma. \tag{1}$$

其系数递推公式为

$$[(s+k-1)(s+k)+(s+k)(1+\alpha-\beta)+\alpha\beta]a_{s+k}$$
$$=[(s+k)(s+k+1)+\gamma(s+k+1)]a_{s+k+1}.$$

即
$$a_{k+s+1}=\frac{(s+k+\alpha)(s+k+\beta)}{(s+k+\gamma)(s+k+1)}a_{s+k}. \tag{2}$$

取$s_1=0$,

则
$$a_{k+1}=\frac{(k+\alpha)(k+\beta)}{(k+\gamma)(k+1)}a_k, \tag{3}$$

由（3）式推算出：

$$a_1=\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}a_0\ \ (a_0\text{为任意}),$$

$$a_2=\frac{(\alpha+1)(\beta+1)}{2(\gamma+1)}a_1=\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}a_0.$$

$$\therefore\quad y_1(x)=a_0\left[1+\frac{\alpha\beta}{1!\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2+\cdots\right]$$
$$\equiv a_0F(\alpha,\beta,\gamma;x), \tag{4}$$

其中$F(\alpha,\beta,\gamma;x)$是超几何函数.

再取$s_2=1-\gamma$（非整数），

则有系数递推公式：

$$a_{k+1}=\frac{(k+\alpha+1-\gamma)(k+\beta+1-\gamma)}{(k+1)(k+2-\gamma)}a_k, \tag{5}$$

公式（5）是公式（3）中以$(\alpha+1-\gamma)$、$(\beta+1-\gamma)$、$(2-\gamma)$代替α、β、γ所得的结果，故知另一特解

$$y_2(x)=a_{1-\gamma}x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma,\beta+1-\gamma,2-\gamma;x). \tag{6}$$

9．在$x_0=0$的邻域上求解合流超几何级数微分方程

$xy''+(\gamma-x)y'-\alpha y=0$.

解：$x_0=0$是方程的正则奇点，

设 $y(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_kx^k$，则有

	x^{s-1}	x^s	…	x^{s+k}	…
xy''	$s(s-1)a_s$	$(s+1)sa_{s+1}$	…	$(s+k+1)(s+k)a_{s+k+1}$	…
$\gamma y'$	γsa_s	$\gamma(s+1)a_{s+1}$	…	$\gamma(s+k+1)a_{s+k+1}$	…
$-xy'$		$-sa_s$	…	$-(s+k)a_{s+k}$	…
$-\alpha y$		$-\alpha a_s$	…	$-\alpha a_{s+k}$	…

其判定方程为：

$$[s(s-1)+\gamma s]a_s=0.$$

$\because\quad a_s\neq0$,

$\therefore\quad s_1=0,s_2=1-\gamma$. （1）

其系数递推公式为：

$[(s+k)(s+k+1)+\gamma(s+k+1)]a_{s+k+1}-(s+k+\alpha)a_{s+k}=0$,

即
$$a_{s+k+1}=\frac{(s+k+\alpha)}{(s+k+1)(s+k+\gamma)}a_{s+k}, \tag{2}$$

取 $s_1=0$，其系数递推公式为：

$$a_{k+1}=\frac{(k+\alpha)}{(k+1)(k+\gamma)}a_k, \tag{3}$$

与上题（3）式比较知，上式仅不含β因子，故其解为

$$y_1(x) = a_0\left[1 + \frac{\alpha}{1!\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{2!\gamma(\gamma+1)}x^2 + \cdots\right]$$

$$\equiv a_0 F(\alpha,\gamma,x). \qquad (4)$$

再取$s_1 = 1-\gamma$，其系数递推公式为：

$$a_{k+1} = \frac{(k+\alpha+1-\gamma)}{(k+1)(k+2-\gamma)}a_k. \qquad (5)$$

完全类似的讨论有：

$$y_2(x) = a_{1-\gamma}x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, 2-\gamma, x). \qquad (6)$$

第十三章　球函数

§44. 轴对称球函数

1.计算　$\dfrac{2l+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{1}x^n p_l(x)dx$.

解：$\dfrac{2l+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^{+1}x^n p_l(x)dx$

$$=\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{1}{2^l l!}\int_{-1}^{+1}\frac{d^l(x^2-1)^l}{dx^l}\cdot x^n dx$$

$$=\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{1}{2^l l!}\left\{x^n\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l\Big|_{-1}^{+1}-n\int_{-1}^{+1}x^{n-1}\right.$$

$$\left.\times\frac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}dx\right\},$$

$\because$ $\dfrac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}\Big|_{-1}^{1}=0$,

原积分 $=-\dfrac{2l+1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^l l!}\left\{n\displaystyle\int_{-1}^{+1}x^{n-1}\dfrac{d^{l-1}(x^2-1)^l}{dx^{l-1}}\cdot dx\right\}$,

分部积分n次，由$(x^n)^{(n)}=n!$,

原积分 $=(-1)^n\dfrac{2l+1}{2}\cdot\dfrac{n!}{2^l l!}\displaystyle\int_{-1}^{+1}\dfrac{d^{l-n}(x^2-1)^l}{dx^{l-n}}\cdot dx$.

（1）如$n<l$,

$\because$ $\displaystyle\int_{-1}^{+1}\dfrac{d^{l-n}(x^2-1)^l}{dx^{l-n}}\cdot dx=\dfrac{d^{l-n-1}}{dx^{l-n-1}}(x^2-1)^l\Big|_{-1}^{+1}=0$,

$\therefore$ 原积分为零。

（2）如$n>l$,

(i) 若$n-l$为奇数，

$$原积分=(-)^{l}\cdot\frac{2l+1}{2}\cdot\frac{1}{2^{l}\cdot l!}n(n-1)\cdots(n-l+1)$$

$$\times\int_{-1}^{+1}x^{n-l}(x^2-1)^{l}dx,$$

$\because$ $x^{n-l}(x^2-1)^{l}$为奇函数，

$$\therefore\quad\int_{-1}^{+1}x^{n-l}(x^2-1)^{l}dx=0,$$

因此原积分等于零。

(ii) 若$n-l$为偶数

$\because$ $x^{n-l}(x^2-1)^{l}$为偶函数，

$$\because\quad\int_{-1}^{+1}x^{n-l}(x^2-1)^{l}dx$$

$$=2\int_{0}^{+1}x^{n-l}(x^2-1)^{l}dx$$

$$=2\left[\frac{x^{n-l+1}}{n-l+1}(x^2-1)^{l}\Big|_{0}^{1}-\frac{2\cdot l}{n-l+1}\int_{0}^{1}x^{n-l+1}\right.$$

$$\left.\times(x^2-1)^{l-1}x\cdot dx\right]$$

$$=2(-1)^{1}\frac{2'\cdot l}{n-l+1}\int_{0}^{1}x^{n-l+2}(x^2-1)^{l-1}\cdot dx$$

$$=2(-1)\frac{2l}{(n-l+1)}\left[\frac{x^{n-l+3}}{n-l+3}(x^2-1)^{l-1}\Big|_{0}^{1}\right.$$

$$\left.-\frac{2(l-1)}{n-l+3}\int_{0}^{1}x^{n-l+4}(x^2-1)^{l-2}dx\right]$$

$$=2(-1)^{2}\frac{2^{2}\cdot l(l-1)}{(n-l+1)(n-l+3)}\int_{0}^{1}x^{n-l+4}$$

$$\times(x^2-1)^{l-2}dx$$

$$=\cdots$$

$$=2(-1)^{l}\frac{2^{l}\cdot l!}{(n-l+1)\cdots[n-l+(2l-1)]}$$

$$\int_0^1 x^{n-l+2l}dx$$

$$=2(-1)^l\frac{2^l\cdot l!}{(n-l+1)\cdots(n+l-1)}\cdot\frac{1}{n+l+1}$$

$$=2(-1)^l\frac{(2l)!!(n-l-1)!!}{(n+l+1)!!},$$

因此原积分 $=(-1)^l\dfrac{2l+1}{2}\cdot\dfrac{1}{2^l l!}\cdot\dfrac{n!}{(n-l)!}$

$$\cdot\frac{2(-1)^l\cdot(2l)!!(n-l-1)!!}{(n+l+1)!!}$$

$$=\frac{2l+1}{2^l}\cdot\frac{n!}{l!(n-l)!}\cdot\frac{(2l)!!(n-l-1)!!}{(n+l+1)!!}$$

$$=\frac{(2l+1)n!(n-l-1)!!}{(n-l)!(n+l+1)!!}$$

$$=\frac{(2l+1)n!}{(n-l)!!(n+l+1)!!}.$$

〔因 $(n-l)!=(n-l)!!(n-l-1)!!$〕.

故

$$\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^1 x^n p_l(x)dx=\begin{cases}0, & (n<l\text{及}n-l=\text{奇数}),\\ \dfrac{(2l+1)n!}{(n-l)!!(n+l+1)!!}, & (n-l=\text{非负偶数}).\end{cases}$$

(记号 $k!!=k(k-2)(k-4)\cdots$ 直到 1 或 2 为止.)

2. 以勒让德多项式为基本函数族，在区间 $[-1,+1]$ 上把下列函数展为傅里叶级数.

(1) $f(x)=x^3$.

解: $\quad x^3=\sum\limits_{l=0}^{\infty}f_l p_l(x)$.

其中 $\quad f_l=\dfrac{2l+1}{2}\displaystyle\int_{-1}^1 x^3 p_l(x)dx,$

这里$n=3$，由第1题结果知：

$l>3$及$3-l=$奇数（即$l=0,2$）时积分为零，只有：

$$f_1=\frac{3\cdot 3!}{2!!5!!}=\frac{3}{5},\qquad f_3=\frac{7\cdot 3!}{0!!7!!}=\frac{2}{5},$$

$$\therefore\quad x^3=\frac{3}{5}p_1(x)+\frac{2}{5}p_3(x).$$

（2）$f(x)=x^4$.

解：这里$n=4$，由第1题结果知：

$l>4$及$4-l=$奇数（即$l=1,3$）时，积分为零.只有：

$$f_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^4p_0(x)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}x^4dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^5}{5}\Big|_{-1}^{1}=\frac{1}{5},$$

$$f_2=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^4p_2(x)dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_{-1}^{1}x^4\left(\frac{3x^2-1}{2}\right)dx=\frac{4}{7},$$

$$f_4=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}x^4p_4(x)dx$$

$$=\frac{9}{2}\int_{-1}^{1}x^4(35x^4-3x^2+3)\frac{1}{8}dx=\frac{8}{35},$$

$$\therefore\quad x^4=\frac{1}{5}p_0(x)+\frac{4}{7}p_2(x)+\frac{8}{35}p_4(x).$$

（3）$f(x)=|x|=\begin{cases}x,(0\leqslant x\leqslant 1),\\ -x,(-1\leqslant x<0).\end{cases}$

解：$\because\ f(x)=|x|$在区间$[-1,1]$上是偶函数，

$\therefore\ f(x)p_{2n}(x)$是偶函数，$f(x)p_{2n+1}(x)$是奇函数.

$$\therefore\quad f_l=\begin{cases}0\ ,(l=2n+1),\\ (2l+1)\int_0^1xp_l(x)dx,(l=2n),\end{cases}$$

$$f_{2n}=\frac{4n+1}{2^{2n}(2n)!}\int_0^1 x\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^{2n}dx$$

$$=\frac{4n+1}{2^{2n}(2n)!}\left[x\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}(x^2-1)^{2n}\Big|_0^1\right.$$

$$\left.-\int_0^1\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}(x^2-1)^{2n}dx\right]$$

$$=\frac{4n+1}{2^{2n}(2n)!}\left[-\frac{d^{2n-2}}{dx^{2n-2}}(x^2-1)^{2n}\Big|_0^1\right]$$

$$=\frac{4n+1}{2^{2n}(2n)!}C_{2n}^{n-1}(2n-2)!(-1)^{n+1}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-2)!}{(2n-2)!!(2n+2)!!}.$$

其中$C_{2n}^{n-1}=\dfrac{(2n)(2n-1)\cdots[2n-(n-1-1)]}{(n-1)!}$

$$=\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}.$$

对于$n=0$，由于系数计算公式中出现$(-2)!$和$(-2)!!$，而它们都无定义，故对于$n=0$的系数f_0应另外算出

$$f_0=\int_0^1 xdx=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore\quad |x|=\frac{1}{2}p_0(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-2)!}{(2n-2)!!(2n+2)!!}$$

$$\times p_{2n}(x)$$

或 $|x|=\dfrac{1}{2}p_0(x)+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n-1)!(n+1)!}p_{2n}(x).$

（4） $f(x)=\begin{cases}x,(0<x<1).\\0,(-1<x<0).\end{cases}$

解： $$f(x)=\sum_{l=0}^{\infty}f_l p_l(x).$$

其中 $$f_l=\frac{2l+1}{2}\int_0^1 x\,p_l(x)\,dx.$$

由前题结果知：

$$f_{2n}=(-1)^{n+1}\frac{(4n+1)(2n-2)!}{2(2n-2)!!(2n+2)!!},$$

及 $$f_0=\frac{1}{2}\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{4}.$$

$$f_{2n+1}=\frac{4n+3}{2^{2n+2}(2n+1)!}\int_0^1 x\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(x^2-1)^{2n+1}dx$$

$$=\frac{4n+3}{2^{2n+2}(2n+1)!}\left[x\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^{2n+1}\Big|_0^1\right.$$

$$\left.-\int_0^1\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^{2n+1}dx\right]$$

$$=\frac{-(4n+3)}{2^{2n+2}(2n+1)!}\frac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}(x^2-1)^{2n+1}\Big|_0^1=0.$$

$\because$ 二项式$(x^2-1)^{2n+1}$的展开式中只有偶次幂，求导次数为$(2n-1)$奇次数，其积分值总为零，

$\therefore f_{2n+1}=0,$

$\because$ 上式不适用$n=0$即$l=1$的情况，$\left(\text{因为其中有}\dfrac{d^{2n-1}}{dx^{2n-1}}\right)$，

$\therefore f_1$应另算出：

$$f_1=\frac{3}{2}\int_0^1 x\,p_1(x)\,dx=\frac{3}{2}\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{2}.$$

$$\therefore f(x)=\frac{1}{4}p_0(x)+\frac{1}{2}p_1(x)+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}$$

$$\times\frac{(4n+1)(2n-2)!}{2(2n-2)!!(2n+2)!!}p_{2n}(x).$$

3. 在本来是匀强的静电场 E_0 中放置导体球，球的半径为 a，试研究导体球怎样改变了匀强静电场.

解：取球坐标系.以球心为极点，过球心而平行于 E_0 的直线为极轴.

因是导体球，所以球内电势处处相等，设为C. 由于球外不存在电荷，所以球外电势满足拉普拉斯方程，又因球面上感应电荷在无限远处产生的电场为零，所以在无限远处仍是原来电场E. 于是可写出定解问题：

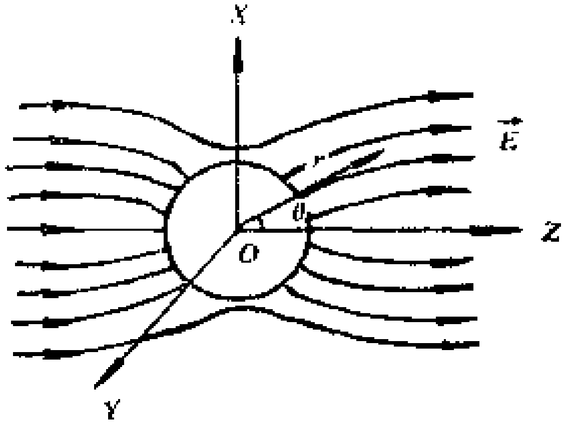


图 13-1

$$\Delta_3 u = 0. \tag{1}$$

$$\begin{cases} u|_{r\to\infty} \approx -E_0 Z = -E_0 r\cos\theta, (\text{设导体放入前，} u|_{r=0}=0), & (2) \\ u|_{r=a} = C, & (3) \end{cases}$$

由于电势具有轴对称性，方程（1）的有限解

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} (A_l r^l + B_l r^{-(l+1)}) p_l(\cos\theta),$$

由条件（2）：

$$u|_{r\to\infty} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l p_l(\cos\theta)\Big|_{r\to\infty}$$

$$\approx -E_0 r\cos\theta = -E_0 r p_1(\cos\theta).$$

得 $$A_1 = -E_0, A_l = 0. (l \neq 1).$$

于是 $$u = -E_0 r p_1(\cos\theta) + \sum_{l=0}^{\infty} B_l r^{-(l+1)} p_l(\cos\theta),$$

由条件（3）：$u|_{r=a} = -E_0 a p_1 + \sum_{l=0}^{\infty} B_l a^{-(l+1)} p_l = C,$

得 $$-E_0a+B_1a^{-2}=0,B_0=Ca,B_l=0,(l\neq 0,1),$$

即 $$B_1=E_0a^3,$$

$$\therefore\quad u=-E_0rp_1(\cos\theta)+Ca\frac{1}{r}p_0(\cos\theta)$$

$$+E_0a^3\frac{1}{r^2}p_1(\cos\theta).$$

或 $$u=\left(-E_0r+E_0a^3\frac{1}{r}\right)\cos\theta+Ca\frac{1}{r},(r\geqslant a),\qquad(4)$$

若导体接地，则$C=0$，这时

$$u=\left(-E_0r+E_0a^3\frac{1}{r}\right)\cos\theta.(r\geqslant a).\qquad(5)$$

4.在点电荷$4\pi\varepsilon_0q$的电场中放置导体球，球的半径为a，球心与点电荷相距$d\,(d>a)$，求解这个静电场。

解：选择球心为极点，极轴通过点电荷q,则问题与φ无关；

又设导体球接地，所以导体球内电势为0；

这样就剩下求解球外电势的问题。

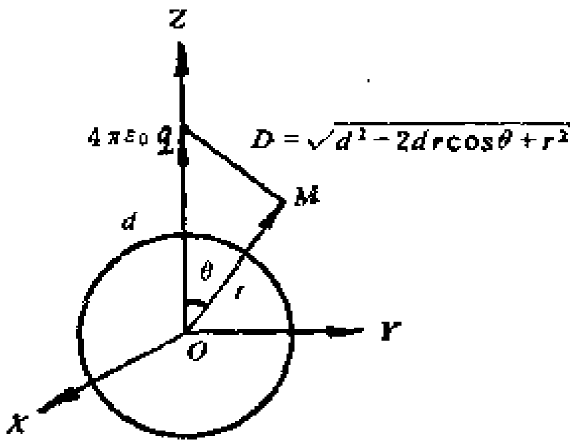


图 13-2

在球外（除点电荷处）任意点M的电势是点电荷$4\pi\varepsilon_0q$产生的电势$\dfrac{q}{D}$和导体球感应电荷产生的电势v的叠加。而v满足拉普拉斯方程.于是定解问题为

$$\begin{cases}u=\dfrac{q}{D}+v,&(1)\\ v|_{r=a}=0,&(2)\end{cases}$$

$$\begin{cases} \Delta v = 0, & (3) \\ v|_{r\to\infty} = 0, & (4) \end{cases}$$

定解问题（3）、（4），由于轴对称，其有限解为：

$$v = \sum_{l=0}^{\infty} C_l r^{-(l+1)} P_l(\cos\theta), \tag{5}$$

在球附近，$d>r$

$$\frac{q}{D} = \frac{q}{\sqrt{d^2+r^2-2dr\cos\theta}} = \frac{q}{d}\cdot\frac{1}{\sqrt{1-2\left(\frac{r}{d}\right)\cos\theta+\left(\frac{r}{d}\right)^2}}$$

$$= \frac{q}{d}\sum_{l=0}^{\infty}\left(\frac{r}{d}\right)^l P_l(\cos\theta),$$

由条件（2）：

$$q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^l}{d^{l+1}}P_l(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}\frac{C_l}{a^{l+1}}P_l(\cos\theta)=0,$$

得 $$\frac{qa^l}{d^{l+1}}+\frac{C_l}{a^{l+1}}=0,$$

$$\therefore\quad C_l = -qa^{2l+1}d^{-(l+1)}.$$

故 $$u = \frac{q}{\sqrt{d^2-2dr\cos\theta+r^2}} - q\sum_{l=0}^{\infty}\frac{a^{2l+1}}{d^{l+1}}\cdot$$

$$\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta)$$

$$= \frac{q}{\sqrt{d^2-2dr\cos\theta+r^2}} - \frac{a}{d}$$

$$\times\frac{q}{\sqrt{\left(\frac{a^2}{d}\right)^2-2\left(\frac{a^2}{d}\right)r\cdot\cos\theta+r^2}}. \tag{6}$$

在解（6）中，第二项为象电荷产生的电势，这象电荷处在球内极轴$d_0=\frac{a^2}{d}$上，带电量为$-4\pi\varepsilon_0 q\cdot\frac{a}{d}$.

5. 求解

$$\begin{cases} \Delta_3 u = 0, (r<a), \\ u|_{r=a} = \cos^2\theta. \end{cases}$$

解：因为是球内问题，所求的有限解为

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} C_{l,m}\, r^l P_l^m(\cos\theta) \begin{Bmatrix} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{Bmatrix},$$

又因边界条件与φ无关，所以知其解也应与φ无关，

即 $$u(r,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l \cdot r^l \cdot P_l(\cos\theta).$$

代入边界条件：

$$u(a,\theta) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^l P_l(\cos\theta) = \cos^2\theta$$

$$或 u(a,x) = \sum_{l=0}^{\infty} C_l a^l P_l(x) = x^2 ,$$

$$\therefore \quad C_l = \frac{2l+1}{2a^l}\int_{-1}^{1} x^2 P_l(x)\,dx ,$$

$$C_0 = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1} x^2 \cdot 1 dx = \frac{1}{2}\, \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{1}$$

$$= \frac{1}{6}[1-(-1)^3] = \frac{1}{3},$$

$$C_2 = \frac{5}{2a^2}\int_{-1}^{1} x^2 \frac{1}{2}(3x^2-1)\,dx$$

$$= \frac{5}{2a^2}\left(\frac{3}{2}\,\frac{x^5}{5} - \frac{1}{2}\,\frac{x^3}{3}\right)_{-1}^{1}$$

$$= \frac{5}{2a^2}\left(\frac{3}{5} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3a^2},$$

$$C_l = 0, \quad (l \neq 0, \ 2),$$

$$\therefore \quad u(r,\theta) = \frac{1}{3} P_0 + \frac{2}{3a^2} r^2 P_2$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(\frac{r}{a}\right)^2 P_2(\cos\theta).$$

6. 用一层不导电的物质把半径为 a 的导体球壳分隔为两个半球壳，使半球各充电到电势为 v_1 和 v_2，试解电场中的电势分布。

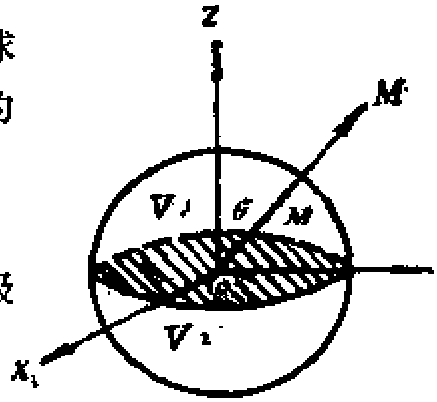


图 13-3

解：取球坐标系，以球心为极点，以过 O 且垂直于介质平面的直线为极轴，则电势与 φ 无关。

（1）球壳内电势 u_i 的定解问题为：

$$\Delta u_i=0,\ (r<a),\qquad (1)$$

$$\begin{cases} u_i|_{r=0}\text{有限，（自然边界条件）} & (2)\\ u_i|_{r=a}=\begin{cases} v_1, & \left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right)\text{或}(0\leqslant x<1),\\ v_2, & \left(\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\right)\text{或}(-1<x\leqslant 0), \end{cases} & (3)\end{cases}$$

其有限解为：$u_i=\sum\limits_{l=0}^{\infty}C_l r^l P_l(x)$，$(x=\cos\theta)$，

由边值（3）：$u_i|_{r=a}=\sum\limits_{l=0}^{\infty}C_l a^l P_l(x)=\begin{cases}v_1,\\ v_2,\end{cases}$

$$\therefore\quad C_l=\frac{2l+1}{2a^l}\left[\int_{-1}^{0}v_2P_l(x)\,dx+\int_0^1 v_1P_l(x)\,dx\right]$$

$$=\frac{(2l+1)v_2}{2a^l}\int_{-1}^{0}P_l\,dx+\frac{(2l+1)v_1}{2a^l}\int_0^1 P_l\,dx,$$

$$\because\quad \int_{-1}^{0}P_l(x)\,dx=\int_1^0 P_l(-x)(-dx)$$

$$=\int_0^1 P_l(-x)\,dx=(-1)^l\int_0^1 P_l(x)\,dx,$$

而$\int_0^1 P_l(x)dx=\frac{1}{2^l l!}\int_0^1\frac{d^l}{dx^l}(x^2-1)^l dx$

$$=\frac{1}{2^l l!}\left[\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}(x^2-1)^l\right]\Big|_{x=0}^{x=1}$$

$$=\frac{-1}{2^l l!}\left[\frac{d^{l-1}}{dx^{l-1}}\sum_{k=0}^{l}C_l^k x^{2k}(-1)^{l-k}\right]_{x=0}$$

$$=\begin{cases}0,\ (l=\text{偶数且}\ l\neq 0),\\ \dfrac{(-1)^n(2n)!}{2^{2n+1}(n+1)!n!},\ (l=2n+1\text{时}),\end{cases}$$

$$\therefore\quad C_l=\frac{v_1+(-1)^l v_2}{a^l}\cdot\frac{2l+1}{2}\int_0^1 P_l(x)dx$$

$$=\begin{cases}0,\ (l=2k,\text{且}\ k\neq 0),\\ \dfrac{v_1-v_2}{2}(-1)^k\dfrac{(4k+3)(2k)!}{(2k+2)!!(2k)!!}\cdot\dfrac{1}{a^{2k+1}},\\ (l=2k+1),\end{cases}$$

$$C_0=\frac{v_1-v_2}{2}\int_0^1 P_0(x)dx=\frac{v_1-v_2}{2},$$

故球壳内电势为：

$$u_i(r,\theta)=\frac{v_1+v_2}{2}+\frac{v_1-v_2}{2}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\times\frac{(4k+3)(2k)!}{(2k+2)!!(2k)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta).\tag{4}$$

（2）球壳外电势u_e的定解问题为：

$$\Delta u_e=0,\ (r>a),\tag{1}$$

$$\begin{cases}u_e|_{r\to\infty}=0, & (2)\\ u_e|_{r=a}=\begin{cases}v_1, & \left(0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\right),\\ v_2, & \left(\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\right),\end{cases} & (3)\end{cases}$$

其有限解是：

$$u_e = \sum_{l=0}^{\infty} d_l \frac{1}{r^{l+1}} P_l(x), \qquad (x = \cos\theta),$$

代入条件（3）：

$$u_e\big|_{r=a} = \sum_{l=0}^{\infty} d_l \frac{1}{a^{l+1}} P_l(x) = \begin{cases} v_1, \\ v_2, \end{cases}$$

同上有$d_0 = \frac{a}{2}(v_1 + v_2) \int_0^1 P_0(x)dx = \frac{a}{2}(v_1 + v_2)$,

$$d_{2k+1} = \frac{v_1 - v_2}{2}(-1)^k \cdot (4k+3) \frac{(2k-1)!!}{(2k+2)!!} a^{2k+2}$$

$$= \frac{v_1 - v_2}{2}(-1)^k \cdot (4k+3) \frac{(2k)!}{(2k+2)!!(2k)!!},$$

$d_{2k} = 0$，$(k \neq 0)$，

∴ 球壳外的电势为：

$$u_e(r,\theta) = \frac{v_1 + v_2}{2} \cdot \frac{a}{r} + \frac{v_1 - v_2}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k$$

$$\times \frac{(4k+3)(2k)!}{(2k+2)!!(2n)!!} \left(\frac{a}{r}\right)^{2k+2} P_{2k+1}(\cos\theta). \tag{4}$$

7．半球的球面保持一定温度u_0，半球底面①保持0℃，②绝热，试求这个半球里的稳定温度分布。

解：（1）半球底面保持0℃，取球坐标系如图(13-4)，则温度u与φ无关，其定解问题为：

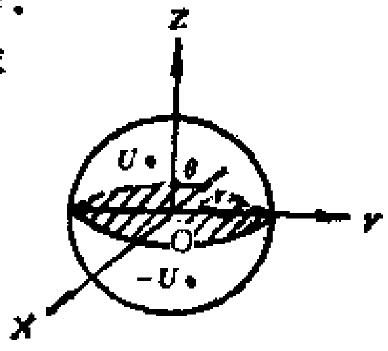


图 13-4

$$\Delta u = 0, \quad (r < a),$$

$$\begin{cases} u\big|_{r=0} \text{有限}, \\ u\big|_{r=a} = u_0, \end{cases}$$

$$u\big|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

将半球问题化成全球问题，需将 θ 延拓至$\left[\frac{\pi}{2},\ \pi\right]$. 根据

$u|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=0$ 知需作奇延拓，于是定解问题为：

$$\Delta u=0, \qquad (r<a), \tag{1}$$

$$\begin{cases} u|_{r=0}\text{有限}, & (2) \\ u|_{r=a}=\begin{cases} u_0, & \left(0\leqslant\theta<\frac{\pi}{2}\right), \\ -u_0, & \left(\frac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\right), \end{cases} & (3) \end{cases}$$

其有限解是：

$$u=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta),$$

代入条件（3）：

$$u|_{r=a}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l a^l P_l(\cos\theta)=\begin{cases} u_0, \\ -u_0, \end{cases}$$

由第 6 题（1）的结果知：

$$A_0=\frac{1}{2}(u_0-u_0)=0,\quad A_{2k}=0,$$

$$A_{2k+1}=\frac{(-1)^k}{a^{2k+1}}\,\frac{(4k+3)(2k)!}{(2k+2)!!(2k)!!}u_0,$$

$$\therefore\quad u=u_0\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(4k+3)(2k)!}{(2k+2)!!(2k)!!}$$

$$\times\left(\frac{r}{a}\right)^{2k+1}P_{2k+1}(\cos\theta). \tag{4}$$

（2）半球底面绝热.

定解问题为：

$$\Delta u=0,\quad (r<a),$$

$$\begin{cases} u|_{r=0} \text{有限}, \\ u|_{r=a} = u_0, \end{cases}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0,$$

由于 $\frac{\partial u}{\partial \theta}\bigg|_{\theta=\frac{\pi}{2}} = 0$，需作偶延拓，于是定解问题为：

$$\Delta u = 0,\ (r<a), \tag{1}$$

$$\begin{cases} u|_{r=0}\text{有限}, & (2) \\ u|_{r=a} = \begin{cases} u_0, & \left(0 \leqslant \theta < \dfrac{\pi}{2}\right), \\ u_0, & \left(\dfrac{\pi}{2} < \theta \leqslant \pi\right), \end{cases} & (3) \end{cases}$$

其有限解是：

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} A_l r^l P_l(\cos\theta),$$

由条件（3）：

$$u|_{r=a} = \sum_{l=0}^{\infty} A_l a^l P_l(\cos\theta) = u_0 \equiv u_0 P_0(\cos\theta),$$

比较等式两边得：

$$A_0 = u_0, \qquad A_l = 0,\ (l \neq 0),$$

$$\therefore \quad u = u_0. \qquad (4)$$

8．半径为 a，表面熏黑的均匀球，在温度为0°的空气中，受着阳光的照射，阳光的热流强度为q_0，求解小球里的稳定温度分布．

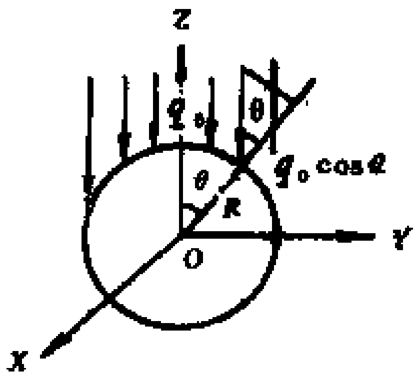


图 13-5

解：取坐标系如图(13-5)，则温度与φ无关，球仅有上半部

分球面受阳光照射，进行热量交换，而下半球面则不受阳光照射，于是定解问题为：

$$\Delta u = 0, \quad (r<a), \tag{1}$$

$$\begin{cases} u|_{r=0}\text{有限}, & (2) \\ \left(\dfrac{\partial u}{\partial r}+Hu\right)\Big|_{r=a} = \begin{cases} q_0\cos\theta, & \left(0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & \left(\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\right), \end{cases} & (3) \end{cases}$$

这里$H=h/k$，h为热交换系数，k为热传导系数。

其有限解为：

$$u=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta),$$

由边界条件（3），得

$$\sum_{l=1}^{\infty}A_l\cdot l\cdot a^{l-1}\cdot P_l(\cos\theta)+\sum_{l=0}^{\infty}HA_l a^l P_l(\cos\theta)=$$

$$\begin{cases} q_0\cos\theta, & \left(0\leqslant\theta<\dfrac{\pi}{2}\right), \\ 0, & \left(\dfrac{\pi}{2}<\theta\leqslant\pi\right), \end{cases}$$

即
$$HA_0+\sum_{l=1}^{\infty}A_l(l+Ha)a^{l-1}P_l(\cos\theta)=\begin{cases} q_0\cos\theta, \\ 0, \end{cases}$$

利用本节第2题（4）的结果，有

$$\left.\begin{aligned} A_0&=\frac{1}{2H}\int_0^1 q_0 x\,dx=\frac{q_0}{4H}, \\ A_1&=\frac{1}{Ha+1}\cdot\frac{3}{2}q_0\int_0^1 x\cdot x\,dx=\frac{1}{Ha+1}\cdot\frac{q_0}{2}, \end{aligned}\right\}(x=\cos\theta),$$

$$\left.\begin{aligned} &A_{2k+1}=0, \\ &A_{2k}=\frac{(-1)^{k+1}q_0}{Ha-2k}\cdot\frac{4k+1}{2}\cdot \\ &\qquad\frac{(2k-2)!}{(2k-2)!!\,(2k+2)!!}\cdot\frac{1}{a^{2k-1}}, \end{aligned}\right\}(k\neq 0),$$

$$\therefore \quad u(r,\theta) = \frac{q_0}{4H} + \frac{q_0}{2(Ha+1)} \cdot r \cdot P_1(\cos\theta)$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} q_0}{(Ha+2k)a^{2k-1}} \cdot$$

$$\frac{(4k+1)(2k-2)!}{2(2k-2)!!(2k+2)!!} r^{2k} P_{2k}(\cos\theta). \quad (4)$$

9. 求解§31习题7的轻绳的振动.初位移 $\varphi(x)$，初速 $\psi(x)$.

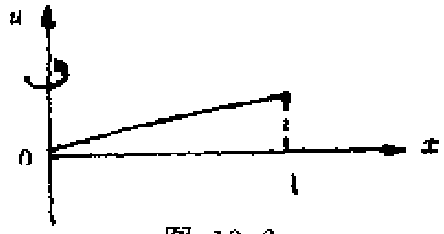


图 13-6

解：轻绳的横振动方程为：

$$u_{tt} - a^2 \frac{\partial}{\partial x}\left[(l^2 - x^2)\frac{\partial u}{\partial x}\right] = 0, \left(a^2 = \frac{\omega^2}{2}\right), \qquad (1)$$

定解条件为：

$$\begin{cases} u|_{x=0} = 0, & (\text{端点固定}), \\ u|_{x=l} = \text{有限}, & (\text{端点自由}), \end{cases} \qquad (2)$$

$$\begin{cases} u|_{t=0} = \varphi(x), \\ u_t|_{t=0} = \psi(x), \end{cases} \qquad (3)$$

令 $u(x,t) = X(x) \cdot T(t)$ 代入泛定方程及边界条件：

$$T''X - a^2 \cdot T \cdot \frac{d}{dx}[(l^2 - x^2)X'] = 0,$$

即 $$\frac{(l^2 - x^2)X'' - 2xX'}{X} = \frac{T''}{a^2 T} = -k(k+1),$$

由此分解为两个常微分方程

$$(l^2 - x^2)X'' - 2xX' + k(k+1)X = 0, \qquad (4)$$

$$T'' + a^2 k(k+1)T = 0, \qquad (5)$$

及 $\begin{cases} TX|_{x=0} = 0, \\ TX|_{x=l} = \text{有限}. \end{cases}$

令 $\xi=\dfrac{x}{l}$代入方程(4)，于是得本征值问题：

$$(1-\xi^2)\frac{d^2X}{d\xi^2}-2\xi\frac{dX}{d\xi}+k(k+1)X=0, \tag{6}$$

$$\begin{cases} X|_{x=0}=0, & (7)\\ X|_{\xi=1}=\text{有限}, & (8)\end{cases}$$

方程(6)为 k 阶勒让德方程，其解为

$$X_k(\xi)=X_k\left(\frac{x}{l}\right)=P_k\left(\frac{x}{l}\right),$$

由边界条件(8)　　$X|_{x=l}=$有限，知 $k=0,1,2,\cdots$，

由边界条件(7)　　$X|_{x=0}=P_k(0)=0$，

　　知 $k=2n-1$，　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$，

方程(5)的解为

$$T_n=A_n\cos\sqrt{2n(2n-1)}\ at+B_n\sin\sqrt{2n(2n-1)}\ at,$$

$$\therefore\quad u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\Big[A_n\cos\sqrt{2n(2n-1)}\ at$$

$$+B_n\sin\sqrt{2n(2n-1)}\ at\Big]P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right). \tag{9}$$

由初始条件(3)有

$$\begin{cases} u(x,t)|_{t=0}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}A_nP_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right)=\varphi(x),\\ u_t(x,t)|_{t=0}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sqrt{2n(2n-1)}\,aP_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right)=\psi(x),\end{cases}$$

$$\therefore\begin{cases} A_{2n-1}=\dfrac{4n-1}{l}\displaystyle\int_0^l\psi(x)P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right)dx,\\ B_{2n-1}=\dfrac{4n-1}{\sqrt{2n(2n-1)}\,al}\displaystyle\int_0^l\psi(x)P_{2n-1}\left(\frac{x}{l}\right)dx.\end{cases} \tag{10}$$

故本题的解为(9)，其中系数由(10)决定.

10. 半径为 a 的圆形铁环，充有$4\pi\varepsilon_0 q$单位电荷，求铁环周围电场中的电势.〔在初等电学课程中已知圆环轴上距环心 r 处的电势为$q/\sqrt{a^2+r^2}$.〕

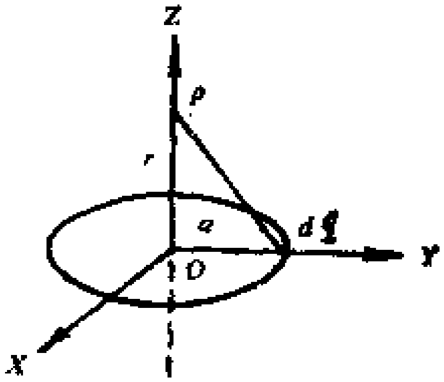


图 13-7

解：除圆铁环外，均无电荷，所以电势u_i,u_e均满足拉氏方程.为求定解条件，考察在圆环上的一电荷元 dq，它在环轴上距环心 r 远点 p 处所产生的电势为：

$$\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+a^2}},$$

∴ 圆环上全部电荷在点 p 处的合电势为：

$$\int\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+a^2}}=\frac{4\pi\varepsilon_0 q}{4\pi\varepsilon_0\sqrt{r^2+a^2}}=\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2}},$$

同理可知，在圆环中心 O 处的合电势为$\frac{q}{a}$.

以环心为极点，环轴为极轴建立球坐标系，电场分布具对称性，极轴即为对称轴，从而定解问题为：

(1) $r<a$时， $$\Delta_3 u_i=0, \quad (1)$$

$$u_i|_{\theta=0,\pi}=\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2}}, \quad (2)$$

方程(1)在球内有限解为 $u_i=\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(\cos\theta)$,

由条件(2)：$\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l P_l(1)=\frac{q}{\sqrt{r^2+a^2}}$,

即：$$\sum_{l=0}^{\infty}A_l r^l=\frac{p}{a}\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{r}{a}\right)^2}}$$

$$=\frac{q}{a}\left\{1-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{a}\right)^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\left(\frac{r}{a}\right)^4+\cdots+(-1)^n\right.$$

$$\times\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}+\cdots\Big\},$$

$$\left(因\left|\frac{r}{a}\right|<1\right)$$

$$\therefore\quad A_{2n+1}=0,\quad A_0=\frac{q}{a},$$

$$A_{2n}=(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{q}{a^{2n+1}},$$

$$\therefore\quad u_i(r,\theta)=\frac{q}{a}+\frac{q}{a}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}$$

$$\times\left(\frac{r}{a}\right)^{2n}P_{2n}(\cos\theta),\ (r<a).\qquad(3)$$

如果细铁环，不计其高度，占据一个平面：$\left\{\theta=\dfrac{\pi}{2},\ r<a\right\}$，这时定解问题成为$\Delta u=0$，$u\Big|_{\substack{\theta=\frac{\pi}{2}\\ r=0}}=\dfrac{q}{a}$，解为$u\equiv\dfrac{q}{a}$，这也可以由上面所得解$u_i(r,\theta)$中令$\theta=\pi/2$而得到，

$\because\quad P_{2n}$是$\cos\theta$的偶次幂，$\cos\dfrac{\pi}{2}=0$，

$$\therefore\quad u_i\left(r,\frac{\pi}{2}\right)=\frac{q}{a}.$$

（2）$r>a$时，

$$\Delta u_e=0,\qquad(4)$$

$$u_e|_{\theta=0,\pi}=q/\sqrt{r^2+a^2},\qquad(5)$$

方程（4）在球外的有限解为

$$u_e=\sum_{l=0}^{\infty}B_l\frac{1}{r^{l+1}}P_l(\cos\theta),$$

由条件（5）得：

$$\sum_{l=0}^{\infty} B_l \frac{1}{r^{l+1}} \quad P_l(1) = q/\sqrt{r^2+a^2} = \frac{q}{r} \cdot \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{a}{r}\right)^2}}$$

$$= \frac{q}{r}\left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \left(\frac{a}{r}\right)^{2n}\right],$$

$$\therefore \quad B_0 = q, \qquad B_{2n+1} = 0,$$

$$B_{2n} = (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} q a^{2n},$$

$$\therefore \quad u(r,\theta) = \frac{q}{r} + \frac{q}{a}\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \times \left(\frac{q}{r}\right)^{2n+1} P_{2n}(\cos\theta), \quad (r > a) \qquad (6)$$

11．求证 $P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2xP'_l(x) + P'_{l-1}(x)$．〔提示：拿(44.20)对 x 求导．〕

证：$\because \quad \frac{1}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x)$，

将上式对 x 求导，得：

$$\frac{r}{(1-2rx+r^2)^{3/2}} = \sum_{l=0}^{\infty} r^l P'_l(x),$$

$$\frac{r}{\sqrt{1-2rx+r^2}} = (1-2rx+r^2) \sum_{l=0}^{\infty} r^l P'_l(x),$$

$$r\sum_{l=0}^{\infty} r^l P_l(x) = (1-2rx+r^2) \sum_{l=0}^{\infty} r^l P'_l(x),$$

比较等式两边 r^{l+1} 的系数，得：

$$P_l(x) = P'_{l+1}(x) - 2xP'_l(x) + P'_{l-1}(x).$$

12．利用上题和(44.21)求证 $(2l+1)P_l(x) = P'_{l+1}(x) - P'_{l-1}(x)$．

证：由递推公式

$$(l+1)P_{l+1}(x)-(2l+1)xP_l(x)+lP_{l-1}(x)=0.$$

对 x 求导，得：

$$(l+1)P'_{l+1}(x)-(2l+1)P_l(x)-(2l+1)xP'_l(x)$$
$$+lP'_{l-1}(x)=0,$$

整理得：

$$(2l+1)P_l(x)=\frac{2l+1}{2}[P'_{l+1}(x)-2xP'_l(x)+P'_{l-1}(x)]$$
$$+\frac{1}{2}[P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x)],$$

应用上题结果得：

$$(2l+1)P_l(x)=\frac{2l+1}{2}P_l(x)$$
$$+\frac{1}{2}[P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x)],$$

$$\therefore\quad (2l+1)P_l(x)=P'_{l+1}(x)-P'_{l-1}(x).$$

§45. 一般的球函数

1.用球函数把下列函数展开

（1） $\sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi$.

解一：利用三角公式.

$$\sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi=\frac{1}{4}(1-\cos2\theta)(1+\cos2\varphi)$$
$$=\frac{1}{6}\left[\frac{3}{2}(1-\cos2\theta)\cos2\varphi\right]$$
$$+\frac{1}{2}(1-\cos^2\theta)$$

$$=\frac{1}{6}\left[\frac{3}{2}(1-\cos 2\theta)\cos 2\varphi\right]$$

$$-\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}\cos^2\theta-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}$$

$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}p_2(\cos\theta)+\frac{1}{6}p_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi.$$

解二：利用展开公式．

$$f(\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi]p_l^m(\cos\theta),$$

其中

$$\begin{cases} A_l^m=\dfrac{2l+1}{2\pi\delta_m}\cdot\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)p_l^m(\cos\theta) \\ \quad\cdot\cos m\varphi\sin\theta d\theta d\varphi, \\ B_l^m=\dfrac{2l+1}{2\pi}\cdot\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}f(\theta,\varphi)p_l^m(\cos\theta) \\ \quad\cdot\sin m\varphi\cdot\sin\theta d\theta d\varphi, \end{cases}$$

先对φ积分：

$\because$ $\cos^2\varphi$是偶函数，

$\therefore$ $B_l^m=0$，

而 $$\int_0^{2\pi}\cos^2\varphi\cdot\cos m\varphi d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\varphi)\cos m\varphi d\varphi$$

$$=\begin{cases}\pi, & (m=0),\\ \pi/2, & (m=2),\\ 0, & (m\neq 0,2).\end{cases}$$

再对θ积分：

$$\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cdot p_l^m(\cos\theta)\sin\theta d\theta=-\int_0^{\pi}(1-\cos^2\theta)p_l^m(\cos\theta)d(\cos\theta)$$

$$=\int_{-1}^{1}(1-x^2)p_l^m(x)dx,\ (\text{令}x=\cos\theta),$$

当$m=0$时，

$$\because \quad \int_{-1}^{1} p_l(x)dx = \begin{cases} 2, & (l=0), \\ 0, & (l\neq 0), \end{cases}$$

$$-\int_{-1}^{1} x^2 p_l(x)dx = \begin{cases} -\dfrac{2}{3}, & (l=0), \\ -\dfrac{4}{15}, & (l=2), \\ 0, & (l\neq 0,2), \end{cases}$$

$$\therefore \quad \int_{-1}^{1}(1-x^2)p_l(x)dx = \begin{cases} \dfrac{4}{3}, & (l=0), \\ -\dfrac{4}{15}, & (l=2), \\ 0, & (l\neq 0,2), \end{cases}$$

当$m=2$时，

$$\because \quad \int_{-1}^{1} p_l^2(x)dx = \begin{cases} 4, & (l=2), \\ 0, & (l\neq 2), \end{cases}$$

$$-\int x^2 p_l^2(x)dx = \begin{cases} -\dfrac{4}{5}, & (l=2), \\ 0, & (l\neq 2), \end{cases}$$

$$\therefore \quad \int_{-1}^{1}(1-x^2)p_l^2(x)dx = \begin{cases} \dfrac{16}{5}, & (l=2), \\ 0, & (l\neq 2), \end{cases}$$

于是得：$A_0^0 = \dfrac{1}{4\pi}\cdot\pi\cdot\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{3}$，　$A_2^0 = \dfrac{5}{4\pi}\pi\left(-\dfrac{4}{15}\right) = -\dfrac{1}{3}$，

$$A_2^2 = \frac{5}{2\pi}\cdot\frac{1}{4!}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{16}{5} = \frac{1}{6},$$

$$\therefore \quad \sin^2\theta\cdot\cos^2\varphi = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}p_2(\cos\theta) + \frac{1}{6}p_2^2(\cos\theta)\cos 2\varphi.$$

（2）$(1+3\cos\theta)\sin\theta\cdot\cos\varphi$.

解：$(1+3\cos\theta)\sin\theta\cdot\cos\varphi = \sin\theta\cdot\cos\varphi + 3\cos\theta\cdot\sin\theta\cdot$

$\cdot\cos\varphi$

$$= \sin\theta\cdot\cos\varphi + \frac{3}{2}\sin 2\theta\cdot\cos\varphi$$

$$= p_1^1(\cos\theta)\cos\varphi + p_2^1(\cos\theta)\cdot\cos\varphi.$$

（3） $(1-|\cos\theta|)(1+\cos 2\varphi)$.

解：$(1-|\cos\theta|)(1+\cos 2\varphi) = (1-|\cos\theta|) + (1-|\cos\theta|)\cos 2\varphi$,

其中$(1-|\cos\theta|)$可利用§.44习题2(3)的展开结果，

$$(1-|\cos\theta|) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(4n+1)(2n-2)!}{2^{2n}(n+1)!(n-1)!}\times p_{2n}(\cos\theta),$$

我们还需要把$(1-|\cos\theta|)\cos 2\varphi$展开，

令$(1-|\cos\theta|)\cos 2\varphi = \sum_k^{\infty} A_k p_k^2(\cos\theta)\cos 2\varphi$,

系数 $$A_k = \frac{2k+1}{2\pi}\frac{(k-2)!}{(k+2)!}\int_{-1}^{1}(1-|x|)p_k^2(x)dx \times \int_0^{2\pi}\cos 2\varphi\cos 2\varphi d\varphi,$$

对x迭次分部积分得

$$A_k = \frac{2k+1}{2}\frac{(k-2)!}{(k+2)!}\frac{1}{2^k k!}\int_{-1}^{1}(1-|x|)(1-x^2)\times\frac{d^{k+2}}{dx^{k+2}}(x^2-1)^k dx,$$

如k为奇数，则被积函数为奇函数，积分为零，即

$$A_k = 0, (k\text{为奇数}),$$

至于k=偶数$2n$,

则 $$A_{2n} = \frac{(4n+1)}{2}\frac{(2n-2)!}{(2n+2)!}\frac{2}{2^{2n}(2n)!}\int_0^1(1-x)(1-x^2)$$

$$\times \frac{d^{2n+2}}{dx^{2n+2}}(x^2-1)^{2n}dx$$

$$= \frac{(4n+1)(2n-2)!}{(2n+2)!\,2^{2n}(2n)!}\left\{\left[(1-x)(1-x^2)\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}\right.\right.$$

$$\left.(x^2-1)^{2n}\right]_0^1$$

$$\left.-\int_0^1 \frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(x^2-1)^{2n}d[(1-x)(1-x^2)]\right\}.$$

$\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(x^2-1)^{2n}$只有奇次幂，以$x=0$代入必为零，

$$\therefore\ A_{2n} = \frac{(4n+1)(2n-2)!}{(2n+2)!\,2^{2n}(2n)!}\int_0^1 (1-x)(3x+1)\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}$$

$$\times (x^2-1)^{2n}dx$$

$$= \frac{(4n+1)(2n-2)!}{(2n+2)!\,2^{2n}(2n)!}\left\{\left[(1-x)(3x+1)\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}\right.\right.$$

$$\left.(x^2-1)^{2n}\right]_0^1$$

$$\left.+2\int_0^1 (3x-1)\frac{d^{2n}}{dx^{2n}}(x^2-1)^{2n}dx\right\}$$

$$= \frac{(4n+1)(2n-2)!}{(2n+2)!\,2^{2n}(2n)!}\left[-(-1)^n 2^{2n}(2n)!\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right.$$

$$\left.+6\frac{(2n-2)!(2n)!(-1)^{n+1}}{(n+1)!(n-1)!}\right]$$

$$= -(-1)^n\frac{(4n+1)(2n-2)!(2n-1)!!}{(2n+2)!(2n)!!}$$

$$\times\left[1+\frac{6}{(2n-1)(2n+2)}\right],$$

$$\therefore\ (1-|\cos\theta|)(1+\cos 2\varphi) = \frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n$$

$$\times \frac{(4n+1)(2n-2)!}{(2n+2)!!(2n-2)!!} p_{2n}(\cos\theta)$$

$$-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n(4n+1)\left[1+\frac{6}{(2n-1)(2n+2)}\right]$$

$$\frac{(2n-2)!(2n-1)!!}{(2n+2)!(2n)!!} p_{2n}^2(\cos\theta)\cos 2\varphi.$$

2.在半径为a的球外$(r>a)$求解

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,\\ u|_{r=a}=f(\theta,\varphi).\end{cases}$$

解：球外问题的解为：

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1}[A_l^m\cos m\phi + B_l^m\sin m\varphi]p_l^m(\cos\theta), \quad (1)$$

由边界条件得：

$$u(a,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{a}{a}\right)^{l+1}[A_l^m\cos m\varphi + B_l^m\sin m\varphi]p_l^m(\cos\theta) = f(\theta,\varphi),$$

$$\therefore \begin{cases} A_l^m=\dfrac{(2l+1)}{2\pi\delta_m}\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\iint_s f(\theta,\varphi)p_l^m(\cos\theta)\times\cos m\varphi\cdot\sin\theta d\theta d\varphi,\\ B_l^m=\dfrac{(2l+1)}{2\pi}\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\iint_s f(\theta,\varphi)\times p_l^m(\cos\theta)\sin m\varphi\cdot\sin\theta d\theta d\varphi.\end{cases} \quad (2)$$

3.在半径为a的球的(1)内部，(2)外部，求解：

$$\begin{cases}\Delta_3 u=0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=f(\theta,\varphi).\end{cases}$$

研究一个特例$f(\theta,\varphi)=A\cos\theta$。

解：（1）半径为 a 的球的内部有限解为：

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\left(\frac{r}{a}\right)^{l}[A_l^m\cos m\varphi$$

$$+B_l^m\sin m\varphi]P_l^m(\cos\theta),\qquad(1)$$

代入边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=a}=\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{l}{a}\cdot[A_l^m\cos m\varphi+B_l^m\sin m\varphi]p_l^m(\cos\theta).$$

$$\because\begin{cases}A_l^m=\dfrac{a}{l}\;\dfrac{(2l+1)}{2\pi\delta_m}\;\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\iint_s f(\theta,\varphi)\,p_l^m(\cos\theta)\\ \qquad\times\cos m\varphi\cdot\sin\theta d\theta d\varphi,\\ B_l^m=\dfrac{a}{l}\;\dfrac{(2l+1)}{2\pi}\;\dfrac{(l-m)!}{(l+m)!}\displaystyle\iint_s f(\theta,\varphi)\,p_l^m(\cos\theta)\\ \qquad\times\sin m\varphi\cdot\sin\theta d\theta d\varphi,\end{cases}\qquad(2)$$

或者写为：

$$u(r,\theta,\varphi)=\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{l}\frac{r^l}{la^{l-1}}[A_l^m\cos m\varphi$$

$$+B_l^m\sin m\varphi]p_l^m(\cos\theta).\qquad(3)$$

其中系数A_l^m和B_l^m同上题，

当$f(\theta,\varphi)=A\cdot\cos\theta$时，知问题与$\varphi$无关，即$m=0$，这时

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\left(\frac{r}{a}\right)^{l}p_l(\cos\theta),$$

代入边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial r}\bigg|_{r=a}=\sum_{l=0}^{\infty}A_l\cdot l\cdot a^{-1}p_l(\cos\theta)=A\cos\theta,$$

$$\therefore\quad A_l=\frac{a}{l}\cdot\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}Ap_l(x)\cdot x\cdot dx$$

$$=\frac{Aa}{l}\;\frac{2l+1}{2}\int_{-1}^{1}xp_l dx.$$

$$\because \quad \int_{-1}^{1} x p_l(x) dx = \begin{cases} \int_{-1}^{1} x p(x) dx = \int_{-1}^{1} x^2 dx \\ \quad = \frac{1}{3}(x^3)\Big|_{-1}^{1} = \frac{2}{3}, (l=1); \\ 0, \quad (l \neq 1), \end{cases}$$

$$\therefore \quad A_1 = \frac{3Aa}{2} \cdot \frac{2}{3} = A. \quad A_l = 0, (l \neq 1),$$

故：$u(r,\theta) = Arp_1(\cos\theta) = Ar\cos\theta$.

（2）外部的解：

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] p_l^m(\cos\theta), \tag{1}$$

代入边界条件：

$$\frac{\partial u}{\partial r}\Big|_{r=a} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \frac{-(l+1)}{a^{l+2}} [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] p_l^m(\cos\theta),$$

$$\therefore \begin{cases} A_l^m = -\frac{a^{l+2}}{l+1} \cdot \frac{2l+1}{2\pi\delta_m} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \\ \quad \times \iint_s f(\theta,\varphi) \cdot p_l^m(\cos\theta) \cdot \cos m\varphi \cdot \sin\theta d\theta d\varphi, \\ B_l^m = -\frac{a^{l+2}}{l+1} \cdot \frac{2l+1}{2\pi} \cdot \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \\ \quad \times \iint_s f(\theta,\varphi) p_l^m(\cos\theta) \sin m\varphi \cdot \sin\theta \cdot d\theta d\varphi, \end{cases} \tag{2}$$

或者写为：

$$u(r,\theta,\varphi) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{l} \frac{-a^{l+2}}{(l+1)r^{l+1}} [A_l^m \cos m\varphi + B_l^m \sin m\varphi] p_l^m(\cos\theta), \tag{3}$$

其中系数A_l^m和B_l^m见上题.

当$f(\theta,\varphi)=A\cos\theta$时，知问题与$\varphi$无关，即有$m=0$，这时，

$$u(r,\theta)=\sum_{l=0}^{\infty}B_l\frac{1}{r^{l+1}}p_l(\cos\theta)\ .$$

代入边界条件：

$$\left.\frac{\partial u}{\partial r}\right|_{r=a}=\sum_{l=0}^{\infty}\frac{-(l+1)B_l}{a^{l+2}}p_l=A\cos\theta.$$

$$\therefore\quad B_l=\frac{-a^{l+2}}{(l+1)}\cdot\frac{2l+1}{2}A\int_0^{\pi}p_l(\cos\theta)\cos\theta d\theta$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{a^3A}{2},(l=1),\\ 0\ ,(l\neq1).\end{cases}$$

$$\therefore u(r,\theta)=-A\frac{a^3}{2r^2}p_1(\cos\theta)$$

$$=-\frac{a^3A}{2}\cdot\frac{1}{r^2}\cos\theta.$$

第十四章　柱函数

§46. 贝塞耳函数

1. 计算下列积分

（1）$\int x^3 J_0(x)dx$.

解一：∵ $\frac{d}{dx}[x^n J_n(x)] = x^n J_{n-1}(x)$.

即有 $xJ_0(x) = [xJ_1(x)]'$, $x^2 J_1(x) = [x^2 J_2(x)]'$,

$$\therefore \int x^3 J_0(x)dx = \int x^2 [xJ_0(x)]dx$$

$$= \int x^2 [xJ_1(x)]' dx$$

$$= x^3 J_1(x) - \int 2x^2 J_1(x)dx$$

$$= x^3 J_1(x) - 2x^2 J_2(x) + C.$$

解二：∵ $J_1(x) = -J_0'(x)$,

$$\therefore \int x^3 J_0(x)dx = x^3 J_1(x) - \int 2x^2 J_1(x)dx$$

$$= x^3 J_1(x) + \int 2x^2 J_0'(x)dx$$

$$= x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - \int 4xJ_0(x)dx$$

$$= x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4\int [xJ_1(x)]' dx$$

$$= x^3 J_1(x) + 2x^2 J_0(x) - 4xJ_1(x) + C,$$

由 $J_2(x)=\dfrac{2J_1(x)}{x}-J_0(x)$，

知解二与解法一结果相同.

（2） $\int x^4J_1(x)dx$.

解一：利用公式$\dfrac{d}{dx}[x^nJ_n]=x^nJ_{n-1}$.

$$\int x^4J_1dx=\int x^2[x^2J_1]dx$$
$$=x^4J_2-2\int x^3J_2dx$$
$$=x^4J_2-2x^3J_3+C.$$

解二：利用公式$J_1=-J'_0$，

$$\int x^4J_1dx=-\int x^4J'_0dx$$
$$=-x^4J_0+4\int x^3J_0dx=-x^4J_0+4\int x^2[xJ_0]dx$$
$$=-x^4J_0+4x^3J_1-4\int 2xxJ_1dx$$
$$=-x^4J_0+4x^3J_1-8\int x^2J_1dx=-x^4J_0+4x^3J_1$$
$$-8x^2J_2+C,$$

解三：对上式$-8\int x^2J_1dx$再利用公式$J_1=-J'_0$，

$$\because\quad -8\int x^2J_1dx=8\int x^2J'_0dx$$
$$=8x^2J_0-16\int xJ_0dx$$
$$=8x^2J_0-16xJ_1+C,$$

$$\therefore\quad \int x^4J_1dx=-x^4J_0+4x^3J_1+8x^2J_0-16xJ_1+C$$
$$=(8x^2-x^4)J_0+(4x^3-16x)J_1+C.$$

（3）$\int J_3(x)dx$

解：利用公式$\dfrac{d}{dx}\left[\dfrac{J_m}{x^m}\right]=-\dfrac{J_{m+1}}{x^m}$，

$$\int J_3dx=\int x^2[x^{-2}J_3]dx=\int x^2[x^{-2}J_2]'dx$$

$$=-J_2+\int 2x^{-1}J_2dx$$

$$=-J_2-2x^{-1}J_1+C.$$

由递推公式$J_{n+1}-\dfrac{2nJ_n}{x}+J_{n-1}=0$，有$J_2=\dfrac{2J_1}{x}-J_0$。

$$\therefore\quad \int J_3dx=J_0-\frac{2J_1}{x}-2\frac{J_1}{x}+C=J_0-4\frac{J_1}{x}+C.$$

2.在区间(0,1)上，第一类齐次边界条件下，用零阶贝塞耳函数把$f(x)=1$展开为傅里叶—贝塞耳级数。

解：展开公式是：

$$\begin{cases} f(\rho)=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f_nJ_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{\rho_0}\rho\right), \\ \text{系数}f_n=\dfrac{1}{[N_n^{(m)}]^2}\displaystyle\int_0^{\rho_0}f(\rho)J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{\rho_0}\rho\right)\rho d\rho. \end{cases}$$

这里可设$x=\rho$，则$f(x)=f(\rho)=1$，同时$\rho_0=1$，又第一类齐次边界条件，$[N_n^{(0)}]^2=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot[J_1(x_n^{(0)})]^2$，

$$\therefore\quad f_n=\frac{2}{[J_1(x_n^{(0)})]^2}\int_0^1 J_0(x_n^{(0)}\rho)\rho d\rho$$

$$=\frac{2}{[J_1(x_n^{(0)})]^2}\cdot\frac{1}{(x_n^{(0)})^2}\int_0^1(x_n^{(0)}\rho)$$

$$\times J_0(x_n^{(0)}\rho)d(x_n^{(0)}\rho)$$

$$=\frac{2}{[x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})]^2}\cdot(x_n^{(0)}\rho)J_1(x_n^{(0)}\rho)\Big|_0^1$$

$$= \frac{2}{x_n^{(0)} J_1(x_n^{(0)})},$$

故
$$1 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(x_n^{(0)}\rho)}{x_n^{(0)} J_1(x_n^{(0)})}$$
$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_0(x_n^{(0)}x)}{x_n^{(0)} J_1(x_n^{(0)})},$$

其中$x_n^{(0)}$是$J_0(x)$的第n个零点.

3.求解半径为R的圆形膜的稳恒振动.每单位面积上作用的周期力为

(1) $f = A\cdot\sin\omega t$,

(2) $f = A(1-\rho^2/R^2)\sin\omega t$.

解：设薄膜均匀，单位面积的质量为p，则均匀圆形膜的受迫横振动方程为：

$$u_{tt} - a^2 u = f/p, (a^2 = T/p),$$

取极坐标系，以圆形膜中心为极点，则振动与φ无关，从面方程成为：

$$u_{tt} - a^2\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho\right) = f/p,$$

求解在周期力作用下的稳恒振动，即是“没有初始条件”的问题，振动的周期与外力周期相同.可设

$$u(\rho,t) = v(\rho)\sin\omega t,$$

代入方程得：

$$\left[\omega^2 v + a^2\left(v_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}v_\rho\right)\right]\sin\omega t = -f/p. \qquad (1)$$

(1) $f = A\sin\omega t$.

这时有：
$$\begin{cases} v'' + \dfrac{1}{\rho}v' + \dfrac{\omega^2}{a^2}v = -\dfrac{A}{a^2 p}, & (2) \\ v|_{\rho=R} = 0, (\text{圆膜边缘固定}). & (3) \end{cases}$$

上面是非齐次方程，不能直接求解．但非齐次项是常数，故可

令 $W=v+\dfrac{A}{a^2p}$， 及$x=\dfrac{\omega}{a}\rho$，

则定解问题（2）和（3）变成

$$\begin{cases} W''+\dfrac{1}{x}W'+W=0, & (4)\\ W\Big|_{x=\frac{\omega}{a}R}=\dfrac{A}{a^2p}. & (5)\end{cases}$$

方程（4）是零阶贝塞尔方程．在圆内的有限解为：

$$W(x)=CJ_0(x),$$

代入边界条件（5）：

$$CJ_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)=\frac{A}{a^2p},$$

$$\therefore \qquad C=A/a^2pJ_0\left(\frac{\omega}{a}R\right),$$

于是 $$W=\left[A/a^2pJ_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)\right]J_0(x),$$

即 $$v=\frac{A}{a^2p}\left[\frac{J_0\left(\frac{\omega}{a}\rho\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)}-1\right],$$

$$\therefore \qquad u=\frac{A}{a^2p}\left[\frac{J_0\left(\frac{\omega}{a}\rho\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)}-1\right]\sin\omega t. \qquad (6)$$

（2） $f=A\left(1-\dfrac{\rho^2}{R}\right)\sin\omega t$，

这时有 $$\begin{cases} v''+\dfrac{1}{\rho}v'+\dfrac{\omega^2}{a^2}v=-\dfrac{A}{a^2p}\left(1-\dfrac{\rho^2}{R^2}\right), & (7)\\ v|_{\rho=R}=0. & (8)\end{cases}$$

非齐次方程（7）有形如$\lambda\rho^2+\mu$的特解，λ,μ为待定系数．以特解代入方程（7）得：

$$2\lambda+2\lambda+\frac{\omega^2}{a^2}\lambda\rho+\frac{\omega^2}{a^2}\mu+\frac{A}{a^2p}\left(1-\frac{\rho^2}{R}\right)=0,$$

即有

$$\begin{cases}4\lambda+\dfrac{\omega^2}{a^2}\mu+\dfrac{A}{a^2p}=0,\\[2mm] \dfrac{\omega^2}{a^2}\lambda-\dfrac{A}{a^2pR}=0,(\because\rho\text{不恒为零}),\end{cases}$$

解得：

$$\begin{cases}\lambda=\dfrac{A}{pR^2\omega^2}, & (9)\\[2mm] \mu=-\dfrac{A}{p\omega^2}-\dfrac{4Aa^2}{pR^2\omega^4}, & (10)\end{cases}$$

于是可令　$v=W+\lambda\rho^2+\mu$，$x=\dfrac{\omega}{a}\rho$，

则方程（7）成为：

$$W''+\frac{1}{x}W'+W=0, \tag{11}$$

方程(11)是零阶贝塞尔方程，在圆内的有限解为：

$$W=CJ_0(x),$$

则

$$v=CJ_0\left(\frac{\omega}{a}\rho\right)+\lambda\rho^2+\mu,$$

代入边界条件（8）：

$$CJ_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)+\frac{A}{pR^2\omega^2}R^2-\frac{A}{p\omega^2}-\frac{4Aa^2}{pR^2\omega^4}=0,$$

即

$$C=\frac{4Aa^2}{pR^2\omega^4J_0\left(\dfrac{\omega}{a}R\right)},$$

$$\therefore \quad v=\frac{4Aa^2}{pR^2\omega^4}\left\{\frac{J_0\left(\frac{\omega}{a}\rho\right)}{J_0\left(\frac{\omega}{a}R\right)}-1\right\}+\frac{A}{p\omega^2}\left(\frac{\rho^2}{R^2}-1\right), \tag{12}$$

故
$$u(\rho,t)=v(\rho)\sin\omega t, \tag{13}$$

其中 v 由(12)式表出.

4.半径为R 的圆形膜，边缘固定．初始形状是旋转抛物面 $u|_{t=0}=(1-\rho^2/R^2)H$，初速为零.求解膜的振动情况.

解：取以圆形膜中心为极点的极坐标系．由于定解条件与φ无关，因而问题亦与φ无关.于是定解问题是：

$$u_{tt}-a^2(u_{\rho\rho}+\frac{1}{\rho}u_\rho)=0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} u|_{\rho=0}\text{有限}, \\ u|_{\rho=R}=0. \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u|_{t=0}=H\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right), \\ u_t|t=0. \end{cases} \tag{3}$$

令 $u(\rho,t)=U(\rho)T(t)$代入泛定方程（1）和边界条件（2）分离变数得：
$$T''+\lambda^2a^2T=0, \tag{4}$$

$$U''+\frac{1}{\rho}U'+\lambda^2U=0, \tag{5}$$

$$\begin{cases} U|_{\rho=0}\text{有限}, \\ U|_{\rho=R}=0, \end{cases} \tag{6}$$

方程（5）是零阶贝塞耳方程，在圆内的有限解是：

$$U=C\cdot J_0(\lambda\rho),$$

代入边界条件（6）的第二条：

$J_0(\lambda R)=0$，令$x_n^{(0)}$为$J_0(x)$的第n个零点，$(n=1,2,\cdots)$，

则 $$\lambda_n^{(0)}=\frac{x_n^{(0)}}{R},$$

于是 $$v_n=J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right),$$

方程（4）的解为：

$$T_n=A_n\cos\frac{x_n^{(0)}}{R}at+B_n\sin\frac{x_n^{(0)}}{R}at.$$

$$\therefore\quad u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{x_n^{(0)}}{R}at+B_n\sin\frac{x_n^{(0)}}{R}at\right)J_0 \times\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right), \tag{7}$$

由初始条件（3），$u_t|_{t=0}=0$，知$B_n=0$及

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nJ_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)=H\left(1-\frac{\rho^2}{R}\right),$$

$$\therefore\quad A_n=\frac{2H}{R^2[J_1(x_n^{(0)})]^2}\int_0^R\left(1-\frac{\rho^2}{R^2}\right)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho d\rho,$$

$$\because\int_0^R J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho d\rho=\frac{R^2}{[x_n^{(0)}]^2}\int_0^{x_n^{(0)}}J_0(x)xdx$$

$$=\frac{R^2}{x_n^{(0)}}J_1(x_n^{(0)}),$$

$$\int_0^R\rho^2J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho d\rho=\frac{R^4}{[x_n^{(0)}]^4}\int_0^{x_n^{(0)}}x^3J_0(x)dx$$

$$=\frac{R^4}{[x_n^{(0)}]^4}\Big[x^3J_1(x)+2x^2J_0(x)-4xJ_1(x)\Big]_0^{x_n^{(0)}}$$

$$=\frac{R^4}{[x_n^{(0)}]}J_1(x_n^{(0)})-4\frac{R^4}{[x_n^{(0)}]^3}J_1(x_n^{(0)}),$$

$$\therefore\quad A_n=\frac{2H}{R^2[J_1(x_n^{(0)})]^2}\Big[\frac{R^2}{x_n^{(0)}}J_1(x_n^{(0)})$$

$$-\frac{R^2}{x_n^{(0)}}J_1(x_n^{(0)})+\frac{4R^2}{[x_n^{(0)}]^3}J_1(x_n^{(0)})\Big]$$

$$=\frac{8H}{[x_n^{(0)}]^3J_1(x_n^{(0)})},\tag{8}$$

故 $$u(\rho,t)=8H\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[x_n^{(0)}]^3J_1(x_n^{(0)})}J_0\Big(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\Big)$$

$$\times\cos\frac{x_n^{(0)}}{R}at.\tag{9}$$

5. 半径为R的圆形膜，在ρ_0，φ_0受到冲量K作用，求解其后的振动。

解：膜在（ρ_0，φ_0）点受冲量K作用，可用 δ-函数来表示，即 $K\cdot\delta(\rho-\rho_0)\cdot\delta(\varphi-\varphi_0)$，其冲量密度为

$$K\cdot\delta(\rho-\rho_0)\cdot\delta(\varphi-\varphi_0)/\rho_0,$$

由于冲量仅作用在起始时刻 $t=0$，因此也就是 $t=0$ 时的动量。设单位面积质量为p，则膜受到的初始速度为：

$$u_t|_{t=0}=\frac{k}{p\rho_0}\delta(\rho-\rho_0)\cdot\delta(\varphi-\varphi_0).$$ 于是定解问题为：

$$u_{tt}-a^2\Delta_2u=0,\tag{1}$$

$$\begin{cases}u|_{\rho=R}=0, & \text{（膜边缘固定）},\\ u|_{\rho=0}\text{有限},\end{cases}\tag{2}$$

$$\begin{cases}u|_{t=0}=0, & \text{（初位移为零）},\\ u_t|_{t=0}=\dfrac{k}{p\rho_0}\delta(\rho-\rho_0)\cdot\delta(\varphi-\varphi_0),\end{cases}\tag{3}$$

方程（1）在圆内的有限解为：

$$u(\rho,\varphi,t)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\Big(A_n\cos\frac{x_n^{(m)}}{R}at+B_n\sin\frac{x_n^{(m)}}{R}at\Big)$$

$$\times (C_m \cos m\varphi + D_m \sin m\varphi) J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right),$$

其中$x_n^{(m)}$是m阶贝塞尔函数的第n个零点。

由 $u|_{t=0}=0$，知 $A_n=0$，

由 $u_t|_{t=0} = \frac{k}{p\rho_0}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0)$，

有 $$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x_n^{(m)}}{R}a(C_{m,n}\cos m\varphi + D_{m,n}\sin m\varphi)J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)$$

$$=\frac{k}{p\rho_0}\delta(\rho-\rho_0)\delta(\varphi-\varphi_0),$$

$$\therefore\quad C_{m,n} = \frac{k}{p\rho_0}\cdot\frac{R}{x_n^{(m)}a}\cdot\frac{1}{\pi\delta_m}\cdot\frac{2}{R^2[J'_m(x_n^{(m)})]^2}$$

$$\times\int_0^{\rho_0}\delta(\rho-\rho_0)\cdot J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\rho d\rho$$

$$\times\int_0^{\varphi_0}\delta(\varphi-\varphi_0)\cos m\varphi d\varphi$$

$$=\frac{2k}{pa\pi R\delta_m x_n^{(m)}}\cdot\frac{J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho_0\right)}{[J'_m(x_n^{(m)})]^2}\cos m\varphi_0.$$

同理

$$D_{m,n} = \frac{2k}{pa\pi R x_n^{(m)}}\cdot\frac{J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho_0\right)}{[J'_m(x_n^{(m)})]^2}\sin m\varphi_0,$$

故：
$$u = \frac{2k}{pa\pi R}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho_0\right)}{\delta_m x_n^{(m)}[J'_m(x_n^{(m)})]^2}$$

$$\cdot(\cos m\varphi\cdot\cos m\varphi_0 + \sin m\varphi\cdot\sin m\varphi_0)J_m$$

$$\times\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\sin\frac{x_n^{(m)}}{R}at,$$

即 $$u=-\frac{2k}{pa\pi R}\cdot\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho_0\right)}{\delta_m x_n^{(m)}[J'_m(x_n^{(m)})]^2}$$

$$\cdot\cos(\varphi-\varphi_0)\,J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\sin\frac{x_n^{(m)}}{R}at. \qquad (4)$$

6. 半径为R的半圆形膜，边缘固定，求其本征频率和本征振动。

解：采用极坐标，定解问题为：

$$u_{tt}-a^2\Delta_2 u=0,\quad (0\leqslant\varphi\leqslant\pi,\quad 0\leqslant\rho\leqslant R), \qquad (1)$$

$$\begin{cases} u|_{\rho=0}\text{有限}, \\ u|_{\rho=R}=0, \end{cases} \qquad (2)$$

$$u|_{\varphi=0}=u|_{\varphi=\pi}=0. \qquad (3)$$

令 $u(\rho,\varphi,t)=v(\rho)\Phi(\varphi)T(t)$代入定解问题，进行分离变数得：

$$\begin{cases} \Phi''+m^2\Phi=0, \\ \Phi|_{\varphi=0}=\Phi|_{\varphi=\pi}=0, \end{cases} \qquad (4)$$

$$\begin{cases} v''+\dfrac{1}{\rho}v'+\left(\lambda^2-\dfrac{m^2}{\rho^2}\right)v=0, \\ v|_{\rho=0}\text{有限}, \\ v|_{\rho=R}=0, \end{cases} \qquad (5)$$

$$T''+\lambda^2a^2T=0, \qquad (6)$$

本征问题（4）的解

$$\Phi=A_1\cos m\varphi+A_2\sin m\varphi,$$

由 $\Phi|_{\varphi=0}=0$ 知 $A_1=0$,

由 $\Phi|_{\varphi=\pi}=0$ 有 $A_2\sin m\varphi=0$,

$\because$ $A_2\neq0$（否则得零解），

$\therefore$ $m=0,1,2,\cdots$,

则 $\Phi_m=A_m\sin m\varphi$,

本征问题（5）的在圆内的有限解：

$$v = B_1 J_m(\lambda\rho)\text{。}$$

由 $\quad v|_{\rho=R}=0$， 有 $\quad J_m(\lambda R)=0$，

令 $\quad x_n^{(m)}=\lambda_n^{(m)}R$为$J_m(\lambda\rho)$的第几个零点，

$$\therefore \quad \lambda_n^{(m)}=\frac{x_n^{(m)}}{R}, \quad (n=1,2,\cdots),$$

则 $$v_n = B_n J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right),$$

方程（6）的解为

$$T_{n,m}=C\cdot\cos\frac{x_n^{(m)}}{R}at+D\cdot\sin\frac{x_n^{(m)}}{R}at,$$

∴ 本征振动为：

$$u_{n,m}=\left[A_{m,m}\cos\frac{x_n^{(m)}}{R}at+B_{n,m}\sin\frac{x_n^{(m)}}{R}at\right]J_m \times\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\sin m\varphi, \tag{7}$$

本征圆频率为： $$\omega_{n,m}=\frac{a}{R}x_n^{(m)}\text{。} \tag{8}$$

7．半径为R而高为H的圆柱体下底和侧面保持零度，上底温度分布为$f(\rho)=\rho^2$．求柱体内各点的稳恒温度。

解：定解问题为：

$$\Delta u=0 \tag{1}$$

$$\begin{cases} u|_{Z=0}=0, \\ u|_{Z=H}=\rho^2, \end{cases} \tag{2}$$

$$\begin{cases} u|_{\rho=0}\text{有限}, \\ u|_{\rho=R}=0, \end{cases} \tag{3}$$

取柱坐标系，以柱下底面为$z=0$的坐标面，以柱轴为z轴．由边界条件知问题与φ无关（即$m=0$），

因侧面是第一类齐次边界条件，故其本征值λ由$J_0(\lambda R)=0$决定。

即 $\lambda_n^{(0)}=\dfrac{x_n^{(0)}}{R}$，$(n=1,2,\cdots)$，

其中$x_n^{(0)}$为$J_0(x)$的第n个零点。

柱内问题的有限解为：

$$u=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{x_n^{(0)}}{R}Z}+B_n e^{-\frac{x_n^{(0)}}{R}Z}\right)J_0(\lambda_n^{(0)}\rho),$$

由边界条件（2），得：

$$\left\{\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\,J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)=0, &(4)\\ &\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{x_n^{(0)}}{R}H}+B_n e^{-\frac{x_n^{(0)}}{R}H}\right)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)=\rho^2. &(5)\end{aligned}\right.$$

由（4）得：$B_n=-A_n$，

由（5）得：
$$A_n=\frac{1}{R^2\cdot[J_1(x_n^{(0)})]^2\cdot\mathrm{sh}\left(\dfrac{x_n^{(0)}}{R}H\right)}\times\int_0^R\rho^2J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho d\rho,$$

∵ 积分 $\displaystyle\int_0^R\rho^3J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)d\rho$

$$=\frac{R^4}{[x_n^{(0)}]^4}\Big[x^3J_1(x)+2x^2J_0(x)-4xJ_1(x)\Big]_0^{x_n^{(0)}}$$

$$=\frac{R^4}{x_n^{(0)}}J_1(x_n^{(0)})-\frac{4R^4}{[x_n^{(0)}]^3}J_1(x_n^{(0)}),$$

$$\therefore\quad A_n=\frac{R^2}{x_n^{(0)}\cdot J_1(x_n^{(0)})\cdot\mathrm{sh}(x_n^{(0)}H/R)}\cdot\left[1-\frac{4}{(x_n^{(0)})^2}\right],$$

故 $$u(\rho,z)=2R^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(x_n^{(0)}\rho/R)\cdot\mathrm{sh}(x_n^{(0)}Z/R)}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})\cdot\mathrm{sh}(x_n^{(0)}H/R)}$$

$$\times\left\{1-\frac{4}{(x_n^{(0)})^2}\right\}. \qquad (6)$$

8. 圆柱体半径为R，高为H，上底保持温度u_1，下底保持温度u_2，侧面温度分布为

$f(z)=\frac{2u_1}{H^2}\left(Z-\frac{H}{2}\right)Z+\frac{u^2}{H}(H-Z)$. 求柱内各点的稳定温度。

解：定解问题为：$\Delta u=0$, $\qquad$ (1)

$$\begin{cases} u|_{\rho=R}=\frac{2u_1}{H^2}\left(Z-\frac{H}{2}\right)Z+\frac{u_2}{H}(H-Z), & (2)\\ u|_{z=0}=u_2, & (3)\\ u|_{Z=H}=u_1. & (4)\end{cases}$$

解一：这里边界条件全是非齐次，不能直接求解。考虑到计算简单，我们化上下底为齐次边界。

令 $\quad u=u_2+\frac{u_1-u_2}{H}z+v$, $\qquad$ (5)

则 $\quad v$的定解问题为：

$$\Delta v=0, \qquad (6)$$

$$\begin{cases} u|_{Z=0}=0, & (7)\\ u|_{Z=H}=0, & (8)\\ u|_{\rho=R}=\frac{2u_1}{H^2}z^2-\frac{2u_1}{H}z, & (9)\end{cases}$$

因为上下底是齐次边界，所以本征问题是：

$$\begin{cases} Z=A_1\cos hz+A_2\sin hz,\\ Z|_{Z=0}=0,\\ Z|_{Z=H}=0,\end{cases}$$

即有 $\quad A_1=0$. $\quad h_n=\frac{n\pi}{H}$, $(n=1,2,\cdots)$, $Z_n=A_n\sin\frac{n\pi}{H}Z$,

又因问题与φ无关(即$m=0$)，所以柱内的有限解为：

$$v=\sum_{n=1}^{\infty}A_nI_0\left(\frac{n\pi}{H}\rho\right)\sin\frac{n\pi}{H}Z,$$

代入条件（9），得：

$$\sum_{n=1}^{\infty}A_nI_0\left(\frac{n\pi R}{H}\right)\sin\frac{n\pi}{H}Z=\frac{2u_1}{H^2}Z^2-\frac{2u_1}{H}Z,$$

$$\therefore\quad A_n=\frac{2}{H}\cdot\frac{1}{I_0(n\pi R/H)}\int_0^H\left(\frac{2u_1}{H^2}Z^2-\frac{2u_1}{H}Z\right)$$

$$\times\ \sin\frac{n\pi}{H}Zdz,$$

$$\because\quad\int_0^H z^2\cdot\sin\frac{n\pi z}{H}\cdot dz=\left\{\left(\frac{H}{n\pi}\right)^2z\left[2\sin\frac{n\pi z}{H}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{n\pi}{H}z\cdot\cos\frac{n\pi z}{H}\right]+\left(\frac{H}{n\pi}\right)^3\cdot2\cos\frac{n\pi z}{H}\right\}\Bigg|_0^H$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{H^3}{n\pi}+\frac{2H^3}{(n\pi)^3}[(-1)^n-1],$$

$$-\int_0^H z\sin\frac{n\pi z}{H}\,dz$$

$$=-\left[\left(\frac{H}{n\pi}\right)^2\sin\frac{n\pi z}{H}-\left(\frac{H}{n\pi}\right)\cos\frac{n\pi z}{H}\right]_0^H$$

$$=(-1)^n\frac{H^2}{n\pi},$$

$$\therefore\quad A_n=\frac{4u_1}{HI_0(n\pi R/H)}\left[(-1)^{n+1}\frac{H}{n\pi}+\frac{2H}{(n\pi)^3}\right.$$

$$\left.\times\left((-1)^n-1\right)+(-1)^n\frac{H}{n\pi}\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{-16u_1}{(n\pi)^3I_0(n\pi R/H)},(n=2k+1,\ k=0,1,2,\cdots),\\ 0,\qquad\qquad(n=2k,\ k=0,1,2,\cdots),\end{cases}$$

故： $u=u_2+\dfrac{u_1-u_2}{H}z$

$$-\sum_{k=0}^{\infty}\frac{16u_1}{(2k+1)^3\pi^3\cdot I_0[(2k+1)\pi R/H]}I_0$$

$$\times\left(\frac{2k+1}{H}\pi\rho\right)\sin\frac{2k+1}{H}\pi z. \tag{10}$$

解二：令 $u=v_1+v_2$，将定解问题化为：

$$\mathrm{I}\quad\begin{cases}\Delta v_1=0,\\ v_1|_{Z=0}=0,\\ v_1|_{Z=H}=0,\\ v_1|_{\rho=R}=f(z),\end{cases}\qquad \text{及 II}\quad\begin{cases}\Delta v_2=0,\\ v_2|_{Z=0}=u_2,\\ v_2|_{Z=H}=u_1,\\ v_2|_{\rho=R}=0,\end{cases}$$

定解问题 I 的解为：

$$v_1=\sum_{n=1}^{\infty}C_nI_0\left(\frac{n\pi}{H}\rho\right)\sin\frac{n\pi}{H}z, \tag{1}$$

由边界条件，$v_1|_{\rho=R}=f(\rho)$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_nI_0\left(\frac{n\pi R}{H}\right)\cdot\sin\frac{n\pi}{H}z=\frac{2u_1}{H^2}\left(z-\frac{H}{2}\right)+\frac{u_2}{H}(H-z),$$

$$\therefore\quad C_n=\frac{2}{HI_0(n\pi R/H)}\int_0^H\left[\frac{2u_1}{H^2}\left(z-\frac{H}{2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{u_2}{H}(H-z)\right]\sin\frac{n\pi}{H}z\cdot dz$$

$$=\frac{2}{HI_0(n\pi R/H)}\left\{\frac{2u_1H}{n\pi}\left[(-1)^{n+1}+2\frac{(-1)^n-1}{(n\pi)^2}\right]\right.$$

$$\left.+\frac{H(u_1+u_2)}{n\pi}(-1)^n-\frac{Hu_2}{n\pi}\left[(-1)^n-1\right]\right\}$$

$$=\frac{1}{I_0(n\pi R/H)}\begin{cases}\dfrac{u_2-u_1}{k\pi}, & (n=2k),\\[2mm] \dfrac{2}{(2k+1)\pi}\left[\left(1-\dfrac{8}{(2k+1)^2\pi^2}\right)u_1+u_2\right], & (n=2k+1).\end{cases}$$

$$\tag{2}$$

定解问题 II 的解为：

$$v_2=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\frac{x_n^{(0)}}{R}Z}+B_n e^{-\frac{x_n^{(0)}}{R}Z}\right)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right), \quad (3)$$

由上、下底的边界条件，有

$$\begin{cases}\sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)\,J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)=u_2,\\ \sum\limits_{n=1}^{\infty}(A_n e^{x_n^{(0)}H/R}+B_n e^{-x_n^{(0)}H/R})J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)=u_1,\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\therefore\quad A_n+B_n&=\frac{2}{R^2[J_1(x_n^{(0)})]^2}\int_0^R u_2J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho d\rho\\ &=\frac{2u_2}{[x_n^{(0)}J_0(x_n^{(0)})]^2}\int_0^{x_n^{(0)}}xJ_1(x)dx\\ &=\frac{2u_2}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})}.\end{aligned}$$

同理有 $A_n e^{x_n^0 H/R}+B_n e^{-x_n^{(0)}H/R}=\dfrac{2u_1}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})}$,

解得：
$$\begin{cases}A_n=\dfrac{u_1-u_2e^{-x_n^{(0)}H/R}}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})\cdot\mathrm{sh}(x_n^{(0)}H/R)},\\ B_n=\dfrac{u_1-u_2e^{x_n^{(0)}H/R}}{x_n^{(0)}J_1(x_n^{(0)})\cdot\mathrm{sh}(x_n^{(0)}H/R)},\end{cases}\quad (4)$$

故： $$u=v_1+v_2, \quad (5)$$

其中v_1和v_2分别为（1）和（3）式，而系数分别由（2）和（4）表出。

9.圆柱体半径为R，高为H，上底有均匀分布的强度为q_0的热流流入，下底有同样热流流出，柱侧保持为0℃，求柱内的稳恒温度。

解法一：定解问题为：

$$
\begin{cases}
\Delta_2 u = 0, & (1)\\
\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \dfrac{q}{R} \text{（热流方向与}z\text{轴反向），} & (2)\\
\left.\dfrac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H} = \dfrac{q_0}{R} \text{（热流方向与}z\text{轴同向），} & (3)\\
u|_{\rho=R} = 0, & (4)
\end{cases}
$$

∵　侧面是第一类齐次边界条件，且问题与φ无关，

则有　$J_0(\omega R) = 0$,

∴　$\omega_n^{(0)} = \dfrac{x_n^{(0)}}{R}$，$(n = 1, 2, \cdots)$，

$x_n^{(0)}$为$J_0(x)$的第n个零点。

$$
u(\rho, z) = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n e^{\omega_n^{(0)} z} + B_n e^{-\omega_n^{(0)} z}) + J_0(\omega_n^{(0)} \rho), \tag{5}
$$

由非齐次边界条件定出系数A_n, B_n,

$$
\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=0} = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n - B_n)\omega_n^{(0)} J_0(\omega_n^{(0)}\rho) = \frac{q_0}{k},
$$

$$
\begin{aligned}
\therefore\ A_n - B_n &= \frac{2q_0}{R^2 \omega_n^{(0)} [J_1(\omega_n^{(0)} R)]^2 k} \int_0^R J_0(\omega_n^{(0)}\rho)\rho d\rho \\
&= \frac{2q_0}{kR^2(\omega_n^{(0)})^3 [J_1(\omega_n^{(0)} R)]^2} \times \int_0^{\omega_n^{(0)} R} J_0(x) x dx \\
&= \frac{2q_0}{kR^2(\omega_n^{(0)})^3 [J_1(\omega_n^{(0)} R)]^2} \times x J_1(x) \Big|_0^{\omega_n^{(0)} R},
\end{aligned}
$$

$$
A_n - B_n = \frac{2q_0}{kR(\omega_n^{(0)})^2 J_1(\omega_n^{(0)} R)}, \tag{6}
$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial z}\right|_{z=H} = \sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{\omega_n^{(0)}H} - B_n e^{-\omega_n^{(0)}H}\right)\omega_n^{(0)} J_0(\omega_n^{(0)}\rho)$$

$$= \frac{q_0}{k},$$

$$\therefore \quad A_n e^{\omega_n^{(0)}H} - B_n e^{-\omega_n^{(0)}H} = \frac{2q_0}{kR(\omega_n^{(0)})^2 J_1(\omega_n^{(0)}R)}, \tag{7}$$

由（5），（7）解出：

$$\begin{cases} A_n = \dfrac{-Rq_0(-1+e^{-x_n^{(0)}H/R})}{k[x_n^{(0)}]^2 J_1(x_n^{(0)})\cdot \mathrm{sh}(x_n^{(0)}H/R)}, \\ B_n = \dfrac{-Rq_0(e^{x_n^{(0)}H/R}-1)}{k[x_n^{(0)}]^2 J_1(x_n^{(0)})\cdot \mathrm{sh}(x_n^{(0)}H/R)}. \end{cases} \tag{8}$$

（5）式是定解问题的解，其中系数A_n和B_n由（8）式表出。

解二：

因为上下底非齐次边界的非齐次项是常数，故可较易化成齐次边界。这样本征值问题就变成傅里叶级数本征问题，而不是贝塞尔函数本征问题，同时求系数亦为简单。

选 $v_1 = \dfrac{q_0}{k}z$，　　　令 $u = \dfrac{q_0}{k}z + v$，

则 v 的定解问题为：

$$\Delta_2 v = 0, \tag{1}$$

$$\begin{cases} v_z|_{z=0} = 0, & (2) \\ v_z|_{z=H} = 0, & (3) \\ v|_{\rho=R} = -\dfrac{q_0}{k}z, & (4) \end{cases}$$

分离变数得到的本征值问题为：

$$Z'' + h^2 Z = 0,$$

$$\begin{cases} Z'|_{z=0} = 0, \\ Z'|_{z=H} = 0, \end{cases}$$

解得 $$h_n = \frac{n\pi}{H}, (n = 0, 1, 2, \cdots),$$

$$Z_n = A_n \cos\frac{n\pi}{H}z,$$

问题在柱内的有限解为：

$$v(\rho, z) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \cos\frac{n\pi}{H}z \cdot I_0\left(\frac{n\pi}{H}\rho\right),$$

由条件（4），有

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n I_0\left(\frac{n\pi R}{H}\right) \cdot \cos\frac{n\pi}{H}z = -\frac{q_0}{k}z,$$

将上式右端展为傅里叶余弦级数，则有

$$A_n = \frac{2}{HI_0(n\pi R/H)}\int_0^H -\frac{q_0}{k}z \cdot \cos\frac{n\pi z}{H}dz$$

$$= -\frac{2q_0}{HkI_0(n\pi R/H)}\left[\left(\frac{H}{n\pi}\right)^2 \cos\frac{n\pi z}{H} + \frac{H}{n\pi}z \cdot \sin\frac{n\pi z}{H}\right]_0^H$$

$$= -\frac{2q_0}{HkI_0(n\pi R/H)} \cdot \left(\frac{H}{n\pi}\right)^2 [(-1)^n - 1]$$

$$= \begin{cases} 0, & (n = 2R \text{但不为零}), \\ \dfrac{4Hq_0}{k\pi^2 n^2 I_0(n\pi R/H)}, & (n = 2R + 1), \end{cases}$$

$$A_0 = \frac{1}{HI_0(0)}\int_0^H -\frac{q_0}{k}zdz = -\frac{q_0 H}{2k}, \quad (\because I_0(0) = 1),$$

$$\therefore \quad v = -\frac{q_0 H}{2k} + \frac{4q_0 H}{k\pi^2}\sum_{l=0}^{\infty} \times \frac{I_0\left(\frac{2l+1}{H}\pi\rho\right)}{(2l+1)^2 I_0\left(\frac{2l+1}{H}\pi R\right)} \cdot \cos\frac{2l+1}{H}\pi z, \tag{5}$$

故 $$u=\frac{q_0}{k}z+v, \tag{6}$$

其中 v 由（5）式表出.

10.研究横电波（指$E_z=0$的情况，z为波导的管轴方向，横电波通常记作TE波）在半径为R的圆形波导中传播.〔提示：在管壁上可以认为$\mathscr{E}_\varphi=0$，参看(40·53)，对于TE波，$\mathscr{E}_\varphi=0$，意味$\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\rho}=0$，这就是$\mathscr{H}_z$的边界条件.〕

解：(40·48)式指出：如果电磁波沿管轴以谐波形式传播，

则
$$\begin{cases}\vec{E}(\rho,\varphi,z,t)=\vec{\mathscr{E}}(\rho,\varphi)e^{i(hz-kCt)},\\ \vec{H}(\rho,\varphi,z,t)=\vec{\mathscr{H}}(\rho,\varphi)e^{i(hz-kCt)},\end{cases}$$

其中h应为实数，否则意味着$\vec{E}$和$\vec{H}$沿管轴衰减而通不过波导.问题归结为求解$\mathscr{E}$和$\mathscr{H}$.为此，又只需求解$\mathscr{E}_z$和$\mathscr{H}_z$，因为由此可按(40·53)式将其它分量$\mathscr{E}_\rho,\mathscr{E}_\varphi,\mathscr{H}_\rho,\mathscr{H}_\varphi$算出.

$\because$
$$\begin{cases}\Delta_2\mathscr{E}_z+(k^2-h^2)\mathscr{E}_z=0, & (1)\\ \Delta_2\mathscr{H}_z+(k^2-h^2)\mathscr{H}_z=0, & (2)\end{cases}$$

又TE波之$\mathscr{E}_z=0$，故只需解$\mathscr{H}_z$.

在管壁上可认为$\mathscr{E}_\varphi=0$，又由(40.53)知

$$\mathscr{E}_\varphi=\frac{i}{k^2-h^2}\left(h\frac{1}{\rho}\frac{\partial\mathscr{E}_z}{\partial\varphi}-k\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\rho}\right),$$

由于$\mathscr{E}_z=0$，$\mathscr{E}_\varphi=0$，知 $$\left.\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\rho}\right|_{\rho=R}=0, \tag{3}$$

亥姆霍兹方程（2）的分离变数形式的解是

$$\mathscr{H}_z=J_m(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix},$$

由边界条件（3），知

$$J'_m\left(\sqrt{k^2-h^2}\,R\right)=0,$$

从而 $\sqrt{k^2-h^2}\,R=x_n^{(m)}$（$x_n^{(m)}$是$J'_m(x)$的第 n 个零点），（4）

$$\therefore \quad \mathscr{H}_z=J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}. \tag{5}$$

将$\mathscr{E}_z=0$与（4）代入（40·53），得到$\mathscr{E}$、$\mathscr{H}$的各个分量为：

$$\left\{\begin{aligned}
\mathscr{E}_\rho&=\frac{i}{k^2-h^2}\frac{k}{\rho}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\varphi}=\frac{imkR^2}{\rho[x_n^{(m)}]^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}J_m\\
&\quad\times\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}-\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix},\\
\mathscr{E}_\varphi&=\frac{-ik}{k^2-h^2}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\rho}=\frac{-ikR}{x_n^{(m)}}\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}J'_m\\
&\quad\times\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix},\\
\mathscr{E}_z&=0,\\
\mathscr{H}_\rho&=\frac{ih}{k^2-h^2}\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\rho}=\frac{ihR}{x_n^{(m)}}J'_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\\
&\quad\times\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix},\\
\mathscr{H}_\varphi&=\frac{ih}{(k^2-h^2)\rho}\frac{\partial\mathscr{H}_z}{\partial\varphi}=\frac{ihmR^2}{[x_n^{(m)}]^2\rho}J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\\
&\quad\times\begin{Bmatrix}-\sin m\varphi\\ \cos m\varphi\end{Bmatrix},\\
\mathscr{H}_z&=J_m\left(\frac{x_n^{(m)}}{R}\rho\right)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix},
\end{aligned}\right.$$

其中$x_n^{(m)}$是$J'_m(x)$的第 n 个零点。

由（4）式有 $h=\sqrt{k^2-(x_n^{(m)}/R)^2}$,

要使电磁波能通过波导，h 必须为实数，则有 $k\geqslant\dfrac{x_n^{(m)}}{R}$,

$\because \quad k=\frac{2\pi}{\lambda}$,

$$\therefore \quad x^{(m)}_{n} \leqslant \frac{2\pi R}{\lambda}, \tag{6}$$

由贝塞尔函数知，n 一定，m 越大，则 $x^{(m)}_{n}$ 越大；m 一定，n 越大，则 $x^{(m)}_{n}$ 也越大。

又由（6）式知，对一定的电磁波（λ 一定），波导越粗（R 越大），符合（6）式的 $x^{(m)}_{n}$ 个数越多。即能通过的电磁波的模式越多，称为多模传播。

对于 TE 波，$x^{(m)}_{n}$ 是 $J'_m(x)$ 的零点，其绝对值最小的零点是 $J_1(x)$ 的第一个零点。$\because \quad J'_0(x)=-J_1(x)$，$x^{(1)}_{1}=3.832$，其次轮到 $J_0(x)$ 的第二个零点 $x^{(0)}_{2}=5.5201$。于是波导半径 R

$$\frac{\lambda}{2\pi}x^{(1)}_{1}<R<\frac{\lambda}{2\pi}x^{(0)}_{2},$$

即
$$\frac{2\pi R}{x^{(1)}_{1}}>\lambda>\frac{2\pi R}{x^{(0)}_{2}}.$$

则只有 $m=1$ 和 $n=1$ 的模式通过波导，称单模传播。

如果 $\quad R<\frac{\lambda}{2\pi}x^{(1)}_{1}$，即 $\lambda>\frac{2\pi R}{x^{(1)}_{1}}$，则什么模式也不能通过波导。

11．求长圆柱形铀块的临界半径。〔"临界"一词参看§36习题8〕。

解：取柱坐标系。因为增殖反应相当于存在着扩散源，而这些源与扩散浓度成正比。因此扩散方程为：

$$u_t-a^2\Delta u=\beta u,$$

其中 a^2 是扩散系数，β 是增殖常数。

长圆柱铀块的侧面给予防护，设圆柱半径为 R，因而有条件

$$u|_{\rho=R}=0,$$

因为是长圆柱，可取为平面问题，即问题与 z 无关；又 z 轴是对称轴，问题又与 φ 无关。所以在柱坐标系下定解问题为

$$u_t - a^2\left(u_{\rho\rho} + \frac{1}{\rho}u_\rho\right) = \beta u, \tag{1}$$

$$u|_{\rho=R} = 0, \tag{2}$$

分离变数(1)和(2)，得

$$T = Ae^{\lambda t}, \tag{3}$$

$$\begin{cases} v'' + \dfrac{1}{\rho}v' + \dfrac{(\beta-\lambda)}{a^2}v = 0, & (4)\\ v|_{\rho=R} = 0, & (5)\end{cases}$$

方程(4)是零阶贝塞尔方程，其柱内有限解是

$$v(\rho) = BJ_0\left(\frac{\sqrt{\beta-\lambda}}{a}\rho\right), \tag{6}$$

由边界条件(5)，有

$$J_0\left(\frac{\sqrt{\beta-\lambda}}{a}R\right) = 0,$$

$\therefore$ $$x_n^{(0)} = \frac{\sqrt{\beta-\lambda_n^{(0)}}}{a}R, \text{（}x_n^{(0)}\text{是}J_0(x)\text{的第 }n\text{ 个零点），}$$

即 $$\lambda_n^{(0)} = \beta - \left(\frac{ax_n^{(0)}}{R}\right)^2,$$

由解(3)知，对于$\beta > 0$（增殖扩散），即使指数中只有一个$\lambda_n^{(0)} > 0$，即$\beta > \left(\dfrac{ax_n^{(0)}}{R}\right)^2$，则随时间 t 的增长，中子浓度将按指数而增大，铀块将爆炸，

当β一定时，$\beta - (ax_n^{(0)}/R)^2 = 0$，即

$$R = \frac{ax_n^{(0)}}{\sqrt{\beta}}, \text{称为“临界尺寸”。}$$

$x_n^{(0)}$中最小的一个零点是$x_1^{(0)} = 2.4048$，代入上式便得长圆柱铀

块的临界半径

$$R_{kp}=\frac{2.4048a}{\sqrt{\beta}}. \tag{7}$$

12. 样品放入烘炉之前的温度同于室温即u_0℃. 把它放入温度为u_1℃的烘炉进行保温. 但是，样品内的温度不可能立即变为u_1℃，它与u_1的差随时间作指数衰减. 今约定把差值降到$1/e$，才算作保温开始，试计算圆柱形样品放入烘炉内多少时间才可开始计算保温时间.

解：定解问题为：

$$u_t-a^2\Delta_2 u=0,$$

$$\left.\begin{aligned}&u|_{\rho=R}=u_1,\\&u|_{z=0}=u_1,\\&u|_{z=H}=u_1,\end{aligned}\right\}\text{（同于烘炉温度）},$$

$$u|_{t=0}=u_0,\ \text{（同于室温）}.$$

解：改取温度u_1作为温标的零点，即作变换：

$$v=u-u_1, \tag{1}$$

v 的定解问题：

$$\begin{cases}v_t-a^2\Delta_3 v=0,(\rho\leqslant R,\ \ 0\leqslant Z\leqslant H), & (2)\\ v|_{t=0}=u_0-u_1, & (3)\\ v|_{\rho=R}=v|_{z=0}=v|_{z=H}=0, & (4)\end{cases}$$

分离变数形式的解为：

$$e^{-k^2a^2t}\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\cos hz\\ \sin hz\end{Bmatrix}J_m(\sqrt{k^2-h^2}\,\rho),$$

既然问题与φ无关，所以$m=0$. 又根据上下底的第一类齐次边界条件舍弃$\cos hz$而取$\sin hz$，且$h=\dfrac{m\pi}{H}$，（$m=1,2,\cdots$）.

由于侧面的第一类齐次边界条件：

$$\sqrt{k^2-h^2}=\frac{x_n^{(0)}}{R},\quad x_n^{(0)}\text{是}J_0(x)\text{的第 }n\text{ 个零点。}$$

$$\text{于是 } v=\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}C_{mn}\,e^{-\left[\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\right)^2+\left(\frac{m\pi}{H}\right)^2\right]a^2t}$$

$$\cdot\sin\frac{m\pi}{H}z\cdot J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right),$$

其中 $n=1$和 $m=1$的一项随时间减小最慢，可把此项降到 $t=0$ 时的值的$\frac{1}{e}$作为保温开始的时间即

$$e^{-\left[\left(\frac{x_1^{(0)}}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right]a^2t}=e^{-1},$$

$$\therefore\quad t=\frac{1}{a^2\left[\left(\frac{2.4048}{R}\right)^2+\left(\frac{\pi}{H}\right)^2\right]}. \tag{5}$$

13.电子光学透镜的某一部件由两个中空圆柱筒组成，其电势分别为$+v_0$和$-v_0$，在圆柱中间隙缝的边缘处电势可近似表为$v=v_0\sin\frac{\pi z}{2\delta}$，求圆柱筒内的电势分布，圆柱两端边界条件可近似表为$v|_{z=\pm l}=\pm v_0$。

解：取柱坐标系。由于电势为 z 的奇函数，可取通过隙缝中间的平面为柱坐标系底面，这样可在[0，l]上求解。

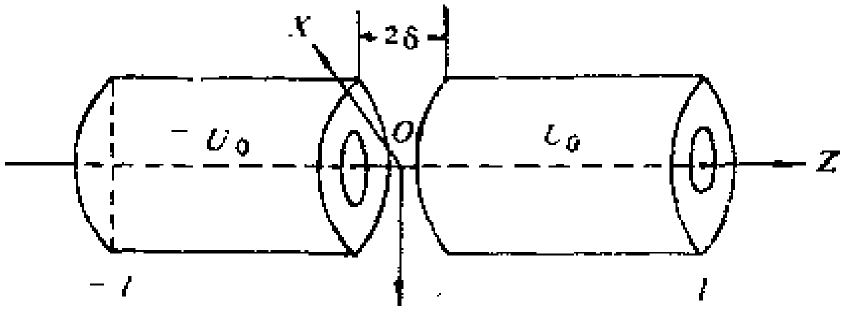


图 14-1

又因圆柱筒是等势体，筒内无电荷，所以筒内电势分布的

定解问题为：

$$\Delta u = 0,$$

$$\begin{cases} u|_{z=0} = v_0 \sin \left.\dfrac{\pi z}{2\delta}\right|_{z=0} = 0, \\ u|_{z=l} = v_0, \\ u|_{\rho=R} = \begin{cases} v_0 \sin \dfrac{\pi z}{2\delta}, & (0 \leqslant z \leqslant \delta), \\ v_0, & (\delta \leqslant z \leqslant l), \end{cases} \end{cases}$$

将定解问题化为两个定解问题.

令 $\qquad u = u^{\mathrm{I}} + u^{\mathrm{II}},$ (1)

$$\begin{cases} \Delta u^{\mathrm{I}} = 0, \\ u^{\mathrm{I}}|_{z=0} = 0, \\ u^{\mathrm{I}}|_{z=l} = 0, \\ u^{\mathrm{I}}|_{\rho=R} = \begin{cases} v_0 \sin \dfrac{\pi z}{2\delta}, & (0 \leqslant z \leqslant \delta), \\ v_0, & (\delta \leqslant z \leqslant l), \end{cases} \end{cases} \quad 及 \quad \begin{cases} \Delta u^{\mathrm{II}} = 0, \\ u^{\mathrm{II}}|_{z=0} = 0, \\ u^{\mathrm{II}}|_{z=l} = v_0, \\ u^{\mathrm{II}}|_{\rho=R} = 0, \end{cases}$$

先解u^{I}：由于上、下底都是第一类齐次边界，且问题与φ无关，可知本征值和本征函数为：

$$h_n = \frac{n\pi}{l}, \qquad Z_n = C_n \sin \frac{n\pi}{l} z, \ (n = 1, 2, \cdots),$$

柱内有限解为：

$$u^{\mathrm{I}} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n I_0\left(\frac{n\pi}{l}\rho\right) \cdot \sin \frac{n\pi}{l} z,$$

由柱侧边界，得：

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n I_0\left(\frac{n\pi R}{l}\right) \sin \frac{n\pi}{l} z = \begin{cases} v_0 \sin \dfrac{\pi z}{2\delta}, & (0 \leqslant z \leqslant \delta), \\ v_0, & (\delta \leqslant z \leqslant l), \end{cases}$$

$$C_n=\frac{2}{l}\cdot\frac{1}{I_0(n\pi R/l)}\left[\int_0^\delta v_0\sin\left(\frac{\pi}{2\delta}z\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right)dz\right.$$

$$\left.+\int_\delta^l v_0\sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right)dz\right],$$

$$\because\quad \int_0^\delta\sin\left(\frac{\pi}{2\delta}z\right)\cdot\sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right)dz$$

$$=\left[-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\delta}+\frac{n\pi}{l}\right)z}{2\left(\frac{\pi}{2z}+\frac{n\pi}{l}\right)}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2\delta}-\frac{n\pi}{l}\right)z}{2\left(\frac{\pi}{2\delta}-\frac{n\pi}{l}\right)}\right]_0^\delta$$

$$=-\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{n\pi\delta}{l}\right)}{2(\pi/2\delta+n\pi/l)}+\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{n\pi\delta}{l}\right)}{2(\pi/2\delta-n\pi/l)}$$

$$=\frac{\cos\frac{n\pi\delta}{l}}{2}\left[\frac{\pi/2\delta+n\pi/l-\pi/2\delta+n\pi/l}{\left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}\right]$$

$$=\frac{\cos\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right)}{2}\cdot\frac{2\frac{n\pi}{l}}{\left(\frac{\pi}{2\delta}\right)^2-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2}$$

$$=\cos\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right)\cdot\frac{n\pi}{l}\cdot\frac{4\delta^2l^2}{l^2\pi^2-4\delta^2n^2\pi^2},$$

$$\int_\delta^l\sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right)dz=\frac{l}{n\pi}\left[-\cos\left(\frac{n\pi}{l}z\right)\right]_\delta^l$$

$$=\frac{l}{n\pi}\left[(-1)^{n+1}+\cos\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right)\right]$$

$$\therefore\quad C_n=\frac{U_0}{I_0(n\pi R/l)}\cdot\frac{2}{l}\left\{\frac{n\pi}{l}\cdot\frac{4\delta^2l^2}{l^2\pi^2-4\delta^2n^2\pi^2}\right.$$

$$\left.\times\cos\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right)+\frac{l}{n\pi}\left[(-1)^{n+1}+\cos\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right)\right]\right\}$$

$$=\frac{2v_0}{I_0(n\pi R/l)}\cdot\frac{1}{n\pi}\Big[(-1)^{n+1}+\cos\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right)$$
$$+\frac{n^2 4\delta^2}{l^2-4n^2\delta^2}\cos\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right)\Big]$$
$$=\frac{2v_0}{n\pi}\cdot\frac{1}{I_0(n\pi R/l)}\Big[(-1)^{n+1}$$
$$+\left(1+\frac{4\delta^2n^2}{l^2-4n^2\delta^2}\right)\cos\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right)\Big]$$
$$=\frac{2v_0}{\pi}\cdot\frac{1}{I_0(n\pi R/l)}\cdot\frac{1}{n}\Big[(-1)^{n+1}$$
$$+\frac{l^2}{l^2-4\delta^2n^2}\cos\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right)\Big],$$

故：
$$u^{\mathrm{I}}(\rho,z)=\frac{2v_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\Big[(-1)^{n+1}+\frac{l^2}{l^2-4\delta^2n^2}$$
$$\times\cos\left(\frac{n\pi\delta}{l}\right)\Big]\frac{I_0\left(\frac{n\pi}{l}\rho\right)}{I_0\left(\frac{n\pi}{l}R\right)}\sin\left(\frac{n\pi}{l}z\right) \tag{2}$$

再解u^{II}：由于侧面是齐次边界，且问题与φ无关($m=0$)，可知本征值和本征函数为：

$\lambda_n^{(0)}=\dfrac{x_n^{(0)}}{R}$，　$(n=1,2,\cdots)$，$x_n^{(0)}$是 $J_0(x)$的第n个零点，

$$v_n(\rho)=J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right),$$

则柱内有限解为

$$u^{\mathrm{II}}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n e^{x_n^{(0)}z/R}+B_n e^{-x_n^{(0)}z/R}\right)$$
$$\times J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right),$$

由下底边界条件：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n+B_n)J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)=0,$$

得 $\qquad A_n=-B_n$,

由上底边界条件

$$\sum_{n=1}^{\infty}(A_n e^{x_n^{(0)}l/R}+B_n e^{-x_n^{(0)}l/R})J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)=v_0,$$

得
$$A_n=\frac{2}{R^2[J_1(x_n^{(0)})]^2}\cdot\frac{1}{2\cdot\mathrm{sh}(x_n^{(0)}l/R)}\times\int_0^R v_0 J_0\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\rho d\rho$$

$$=\frac{v_0R^2}{R^2[J_1(x_n^{(0)})]^2\cdot\mathrm{sh}(x_n^{(0)}l/R)(x_n^{(0)})^2}\times\left[\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\ J_1\left(\frac{x_n^{(0)}}{R}\rho\right)\right]_0^R$$

$$=\frac{v_0}{x_n^{(0)}\cdot J_1(x_n^{(0)})\cdot\mathrm{sh}(x_n^{(0)}l/R)}.$$

$$\therefore\quad u^{\text{II}}(\rho,z)=2v_0\sum_{n=1}^{\infty}\frac{J_0(x_n^{(0)}\rho/R)}{x_n^{(0)}\cdot J_1(x_n^{(0)})}\cdot\frac{\mathrm{sh}(x_n^{(0)}z/R)}{\mathrm{sh}(x_n^{(0)}l/R)},\tag{3}$$

故： $\qquad u=u^{\text{I}}+u^{\text{II}},\qquad (4)$

其中u^{I}和u^{II}分别为（2）和（3）表出。

§47．球贝塞耳方程

1．确定球形铀块的临界半径．〔“临界”一词参看§36习题8〕．

解：取球坐标系，以铀块中心为极点．同上节第11题讨论相同，有定解问题：

$$u_t - a^2 \Delta u = \beta u, \tag{1}$$

$$u|_{r=R} = 0, \tag{2}$$

其中a^2为扩散系数，β为增殖常数，R为铀球半径。

解一：作函数变换，消去方程（1）中函数项βu，

令 $$u(r,\theta,\varphi,t) = v(r,\theta,\varphi,t)e^{\beta t},$$

则 $$v_t - a^2 \Delta v = 0, \tag{3}$$

$$v|_{r=R} = 0, \tag{4}$$

∵问题与θ,φ无关（中子浓度u的变化只与r有关）。

即 $$l = 0, m = 0,$$

∴球内问题的分离变数形式解为

$$j_0(kr)e^{-k^2a^2t},$$

由边界条件（4），有

$$j_0(kr)|_{r=R} = \left.\frac{\sin kr}{kr}\right|_{r=R} = 0,$$

$$\therefore \quad k_n = \frac{n\pi}{R}, (n = 1, 2, \cdots),$$

则v的本征解为：

$$v_n = A_n \cdot j_0\left(\frac{n\pi}{R} r\right) \cdot e^{-n^2\pi^2a^2t/R^2},$$

u的本征解为：

$$u_n = A_n \cdot j_0\left(\frac{n\pi}{R} r\right) e^{(\beta - n^2\pi^2a^2/R^2)t},$$

根据“临界尺寸”定义，临界半径

$$R_{kp} = \frac{\pi a}{\sqrt{\beta}}, (\text{取 } n = 1). \tag{5}$$

解二：直接进行分离变量。由于问题与θ,φ无关，可令$u(r,t) = v(r)T(t)$代入方程（1）.得

$$T' - KT = 0, \tag{6}$$

$$r^2v'' + 2rv' + \frac{r^2}{a^2}(\beta - k)v = 0, \qquad (7)$$

方程（7）是零阶球贝塞尔方程，在球内有限解为：

$$v = j_0\left(\frac{\sqrt{\beta - k}}{a} r\right),$$

由边界条件（2），

$$j_0\left(\frac{\sqrt{\beta - k}}{a} r\right)\bigg|_{r=R} = \frac{\sin\frac{\sqrt{\beta - k}}{a} r}{\sqrt{\beta - k}\, r/a}\bigg|_{r=R} = 0,$$

即 $$\sqrt{\beta - k_n} \cdot \frac{R}{a} = n\pi, (n = 1,2,\cdots),$$

$$\therefore \quad k_n = \beta - n^2\pi^2 a^2/R^2,$$

根据"临界尺寸"定义，临界半径

$$R_{kp} = \frac{\pi a}{\sqrt{\beta}}, (\text{取 } n = 1). \qquad (8)$$

2. 均质球，半径为r_0，初始温度分布为$f(r)$，把球面温度保持为零度而使它冷却，求解球内各处温度变化情况。

解：定解问题为：

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = 0, & (1) \\ u|_{r=r_0} = 0, & (2) \\ u|_{t=0} = f(r), & (3) \end{cases}$$

取球坐标系，以球心为极点，由定解条件知，问题与θ,φ无关，（$l = 0, m = 0$）则球内问题的分离变数形式解为：

$$j_0(kr)e^{-a^2k^2k} = \frac{\sin kr}{kr} e^{-a^2k^2t},$$

其本征值由 $R(kr)\Big|_{r=r_0} = 0$ 求得：

$$\frac{\sin kr_0}{kr_0} = 0, \text{即} \sin kr_0 = 0,$$

$$\therefore \quad k_n = \frac{n\pi}{r_0}, (n = 1, 2, \cdots),$$

$$\therefore u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{\sin(n\pi r/r_0)}{n\pi r/r_0} \cdot e^{-\left(\frac{a^2 n^2 \pi^2}{r_0^2}\right)t}.$$

由初始条件(3),

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n j_0\left(\frac{n\pi}{r_0} r\right) = f(r),$$

$$\therefore \quad C_n = \frac{\int_0^{r_0} f(r) j_0\left(\frac{n\pi}{r_0} r\right) r^2 dr}{\int_0^{r_0} \left[j_0\left(\frac{n\pi}{r_0} r\right)\right]^2 r^2 dr}$$

$$= \int_0^{r_0} f(r) r^2 \cdot \frac{\sin(n\pi r/r_0)}{\frac{n\pi r}{r_0}}$$

$$\cdot dr \Big/ \int_0^{r_0} \frac{\sin^2(n\pi r/r_0)}{\left(\frac{n\pi r}{r_0}\right)^2} r^2 dr$$

$$= \left(\frac{n\pi}{r_0}\right)^2 \cdot \frac{2}{r_0} \cdot \frac{r_0}{n\pi} \int_0^{r_0} f(r) \cdot r \cdot \sin(n\pi r/r_0) dr$$

$$= \frac{2\pi n}{r_0^2} \int_0^{r_0} f(r) r \cdot \sin(n\pi r/r_0) dr,$$

故:

$$u(r,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\pi n}{r_0^2} j_0\left(\frac{n\pi r}{r_0}\right) e^{-n^2\pi^2 a^2 t/r_0^2}$$

$$\cdot \int_0^{r_0} f(r) r \cdot \sin(n\pi r/r_0) dr$$

$$= \frac{2}{r_0 r} \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{n\pi r}{r_0}\right) \cdot e^{-n^2\pi^2 a^2 t/r_0^2}$$

$$\cdot \int_0^{r_0} f(r) \cdot r \cdot \sin\left(\frac{n\pi r}{r_0}\right) dr. \qquad (4)$$

3.均质球,半径为r_0,初始温度分布为 $f(r)\cos\theta$,把球面

温度保持为零度而使它冷却.求解球内各处温度变化情况.

解：定解问题为：

$$\begin{cases} u_t - a^2\Delta u = 0, & (1) \\ u|_{t=0} = f(r)\cos\theta, & (2) \\ u|_{r=r_0} = 0 . & (3) \end{cases}$$

从初始条件知问题与φ无关,即$m=0$,又因初始条件中因子$\cos\theta = P_1(\cos\theta)$,即$l=1$,于是问题的一般解为：

$$P_1(\cos\theta)\cdot j_1(kr)\cdot e^{-a^2k^2t},$$

由边界条件(3),有$j_1(kr)|_{r=r_0} = \dfrac{\sin kr_0 - kr_0\cos kr_0}{kr_0} = 0$,

即$\mathrm{tg}\,kr_0 = kr_0$，令其第n个根为$x_n = k_n r_0$,($n=1,2,\cdots$),

$$\therefore \quad k_n = \frac{x_n}{r_0},$$

于是解为：

$$u(r,\theta,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1,n}P_1(\cos\theta)j_1(k_nr)e^{-a^2k_n^2t},$$

由初始条件(2),

$$u|_{t=0} = \sum_{n=1}^{\infty} A_{1,n}P_1(\cos\theta)j_1(k_nr) = f(r)\cos\theta$$

$$= f(r)P_1(\cos\theta),$$

$$\therefore \quad A_{1,n} = \int_0^{r_0} f(r)j_1(k_nr)r^2dr \Big/ \int_0^{r_0} j_1^2(k_nr)r^2dr,$$

$$\because \quad \int_0^{r_0}[j_1(k_nr)]^2r^2dr = \frac{\pi}{2k_n}\int_0^{r_0}\left[J_{\frac{3}{2}}(k_nr)\right]^2 rdr$$

$$= \frac{\pi}{2k_n}\cdot\frac{1}{2}r_0^2\left[J_{\frac{3}{2}}^{1}(k_nr_0)\right]^2$$

$$= \frac{\pi}{2k_n}\cdot\frac{r_0}{2}\left[J_{\frac{1}{2}}(k_nr_0)\right.$$

$$- \frac{3}{2} \frac{J_{\frac{3}{2}}(k_n r_0)}{k_n r_0} \Big]^2$$

$$= \frac{\pi}{2k_n} \cdot \frac{r_0^2}{2}[J_2(k_n r_0)]^2$$

$$= \frac{1}{2} r_0^3 \Big[\sqrt{\frac{\pi}{2k_n r_0}} J_{\frac{1}{2}}(k_n r_0)\Big]^2$$

$$= \frac{r_0^3}{2}[j_0(k_n r_0)]^2,$$

故：
$$u(r,\theta,t) = \frac{2}{r_0^3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{[j_0(k_n r_0)]^2} j_1(k_n r) P_1(\cos\theta) e^{-a^2k_n^2 t} \cdot \int_0^{r_0} f(r)\cdot r^2 \cdot j_1(k_n r)\, dr. \qquad (4)$$

4. 半径为$2r_0$的均质球。初始温度 $= \begin{cases} u_0 (0<r<r_0), \\ 0 (r_0<r<2r_0), \end{cases}$ 把球面保持为零度而使它冷却，求解球内温度变化情况。

解：定解问题为：

$$\begin{cases} u_t - a^2 \Delta u = 0, & (1) \\ u|_{r=2r_0} = 0, & (2) \\ u|_{t=0} = \begin{cases} u_0, (0<r<r_0), \\ 0, (r_0<r<2r_0), \end{cases} & (3) \end{cases}$$

由定解条件知问题与θ,φ无关，即 $l=0$，$m=0$，于是球内的分离变数形式解为：

$$j_0(kr)e^{-a^2k^2t},$$

其中本征值k由 $j_0(2kr_0) = \dfrac{\sin 2kr_0}{2kr_0} = 0$ 来定：

$$2kr_0 = n\pi, \therefore\ k_n = \frac{n\pi}{2r_0}, (n = 1, 2, \cdots),$$

$$\therefore\ u(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}C_n j_0\left(\frac{n\pi}{2r_0}r\right)e^{-\left(\frac{an\pi}{2r_0}\right)^2 t},$$

由初始条件（3），

$$u|_{t=0}=\sum_{n=1}^{\infty}C_n j_0\left(\frac{n\pi}{2r_0}r\right)=\begin{cases}u_0,(0<r<r_0),\\0,(r_0<r<2r_0),\end{cases}$$

$$C_n=\frac{\int_0^{r_0}u_0 j_0(k_n r)\cdot r^2dr}{\int_0^{2r_0}[j_0(k_n r)]^2r^2dr}$$

$$=\int_0^{r_0}u_0\ \frac{\sin(k_n r)}{k_n r}r^2dr\Big/\int_0^{2r_0}\frac{\sin^2(k_n r)}{(k_n r)^2}r^2dr$$

$$=\frac{u_0}{k_n}\int_0^{r_0}r_0\sin(k_n r)dr\Big/\frac{1}{k_n^2}\int_0^{2r_0}\sin^2(k_n r)dr,$$

$$\because\quad \frac{1}{k_n^2}\int_0^{2r_0}\sin^2 k_n r dr$$

$$=\frac{1}{k_n^2}\cdot\frac{1}{k_n}\left[\frac{1}{2}k_n r-\frac{1}{4}\sin(2k_n r)\right]_0^{2r_0}=\frac{r_0}{k_n^2},$$

及 $$\frac{u_0}{k_n}\int_0^{r_0}r\cdot\sin(k_n r)dr=\frac{u_0}{k_n}\left[\frac{1}{k_n^2}\sin(k_n r)\right.$$

$$\left.-\frac{1}{k_n}r\cos(k_n r)\right]_0^{r_0}$$

$$=\frac{u_0}{k_n}\left[\frac{1}{k_n^2}\sin(k_n r_0)-\frac{r_0}{k_n}\cos(k_n r_0)\right]$$

$$=\frac{u_0}{k_n}\left[\frac{1}{k_n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-\frac{r_0}{k_n}\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{u_0}{k_n^2}\left[\frac{1}{k_n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-r_0\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right],$$

$$\therefore\quad C_n=\frac{u_0}{k_n^2}\left[\frac{1}{k_n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-r_0\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]\Big/\frac{r_0}{k_n^2}$$

$$=\frac{u_0}{r_0}\left[\frac{1}{k_n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-r_0\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right)\right]$$

$$=\frac{u_0}{r_0k_n}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)-u_0\cos\left(\frac{n\pi}{2}\right),$$

故：$$u=\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{u_0}{r_0k_n}\sin\frac{n\pi}{2}-u_0\cos\frac{n\pi}{2}\right)\frac{\sin k_nr}{k_nr}e^{-k^2{}_na^2t}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{4r_0u_0}{n^2\pi^2}\sin\frac{n\pi}{2}-\frac{2r_0u_0}{n\pi}\cos\frac{n\pi}{2}\right)$$

$$\times\frac{1}{r}\sin(k_nr)e^{-a^2k_n^2t}$$

$$=\sum_{l=1}^{\infty}A_n\frac{1}{r}\sin(k_nr)e^{-a^2k_n^2t}. \tag{4}$$

其中
$$A_{2k}=(-1)^{k+1}\frac{u_0r_0}{k\pi},$$

$$A_{2k+1}=(-1)^k\frac{4u_0r_0}{(2k+1)^2\pi^2},$$

$$\because\ \cos\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0,(n=2k+1),\\(-1)^k,(n=2k),\end{cases}$$

$$\sin\frac{n\pi}{2}=\begin{cases}0,(n=2k),\\(-1)^k,(n=2k+1).\end{cases}$$

5. 均质球，半径为r_0，初始温度为v_0，放在温度为u_0的空气中自由冷却，（按牛顿冷却定律跟空气交换热量），求解球内各处温度变化情况。

解：定解问题为：

$$\begin{cases}u_t-a^2\Delta u=0,\\(u+Hu_r)|_{r=r_0}=u_0,(H=k/h),\\u|_{t=0}=v_0,\end{cases}$$

边界条件为非齐次．应化为齐次

令$u=u_0+W$，则W的定解问题为：

$$\begin{cases} W_t - a^2\Delta W = 0, & (1)\\ (W + HW_r)|_{r=r_0} = 0, & (2)\\ W|_{t=0} = v_0 - u_0, & (3)\end{cases}$$

由定解条件知问题与θ,φ无关，即 $l=0$，$m=0$，球内问题的分离变数形式解是：

$$j_0(kr)\cdot e^{-a^2k^2t},$$

本征值k由$(W+HW_r)|_{r=r_0}=0$决定。

$$\left[\frac{\sin kr}{kr}+H\frac{k^2r\cos kr-k\sin kr}{(kr)^2}\right]_{r=r_0}=0,$$

即 $$kr_0\sin kr_0+Hk^2r_0\cos kr_0-Hk\sin kr_0=0.$$

$$\therefore\quad \operatorname{tg}kr_0=\frac{Hkr_0}{H-r_0},$$

将这个方程的第 n 个根记作k_n，$(n=1,2,\cdots)$，

$$\therefore\quad W(r,t)=\sum_{n=1}^{\infty}Cn\frac{\sin(k_nr)}{k_nr}e^{-a^2k_n^2t},$$

由初始条件(3)，

$$\sum_{n=1}^{\infty}C_n\frac{\sin k_nr}{k_nr}=v_0-u_0,$$

$$\therefore C_n=(v_0-u_0)\int_0^{r_0}\frac{\sin(k_nr)}{k_nr}r^2dr\Big/\int_0^{r_0}\frac{\sin^2(k_nr)}{k_n^2r^2}r^2dr$$

$$=k_n(v_0-u_0)\int_0^{r_0}r\cdot\sin(k_nr)dr\Big/\int_0^{r_0}\sin^2(k_nr)dr,$$

$$\because\quad \int_0^{r_0}\sin^2(k_nr)dr=\frac{1}{k_n}\left[\frac{k_nr}{2}-\frac{1}{4}\sin(2k_nr)\right]_0^{r_0}$$

$$=\frac{1}{k_n}\left[\frac{k_nr_0}{2}-\frac{1}{4}\sin(2k_nr_0)\right]$$

$$=\frac{r_0}{2}-\frac{1}{k_n^2}\sin(k_nr_0)\cos(k_nr_0),$$

及
$$k_n(v_0-u_0)\int_0^{r_0} r\cdot\sin(k_n r)\,dr$$
$$=(v_0-u_0)\,k_n\left[\frac{1}{k_n^2}\sin(k_n r)-\frac{1}{k_n}r\cos(k_n r)\right]_0^{r_0}$$
$$=(v_0-u_0)\left[\frac{\sin(k_n r_0)}{k_n}-r_0\cos(k_n r_0)\right],$$
$$\therefore C_n=(v_0-u_0)\frac{1}{k_n}[\sin(k_n r_0)-r_0 k_n\cos(k_n r_0)]\Big/\frac{1}{2k_n}$$
$$\times[r_0 k_n-\sin(k_n r_0)\cos(k_n r_0)]$$
$$=2(v_0-u_0)\frac{\sin(k_n r_0)-r_0 k_n\cos(k_n r_0)}{r_0 k_n-\sin(k_n r_0)\cos(k_n r_0)}$$
$$=\frac{2r_0(v_0-u_0)}{H}\cdot\frac{\sin(k_n r_0)}{k_n r_0-\sin(k_n r_0)\cdot\cos(k_n r_0)},$$
故：
$$u(r,t)=u_0+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(v_0-u_0)r_0}{H}\cdot\frac{\sin k_n r_0}{k_n r_0-\sin k_n r_0\cdot\cos k_n r_0}$$
$$\cdot\frac{\sin k_n r}{k_n r}\cdot e^{-k_n^2 a^2 t}. \tag{4}$$

6．半径为r_0的球面径向速度分布为 $v=v_0\frac{1}{4}(3\cos2\theta+1)\times\cos\omega t$，试求解这个球在空气中辐射出去的声场中的速度势，设$r_0\ll\lambda$(波长)．本题径向速度对空间中的方向的依赖性由因子$\frac{1}{4}(3\cos2\theta+1)$即$P_2(\cos\theta)$描写，因而是轴对称四极声源．

解：速度势满足三维波动方程，即
$$v_{tt}-a^2\Delta v=0. \tag{1}$$
其中$a^2=\frac{p_0\gamma}{\rho_0}$，$p_0$是初始压强，$\rho_0$是初始密度，$\gamma$是定压比热与定容比热的比值．

又声波传播的速度与速度势的关系为$\vec{V}=\nabla v$，所以在球面上有条件

$$\left.\frac{\partial v}{\partial r}\right|_{r=r_0}=v_0\frac{1}{4}(3\cos 2\theta+1)\cdot\cos\omega t=v_0P_2(\cos\theta)e^{-i\omega t},\tag{2}$$

这里时间因子取指数形式是为了便利计算，在最后结果中取其实部．

三维波动方程（1）的分离变数形式解是

$$\left\{\begin{matrix}h_l^{(1)}(kr)\\ h_l^{(2)}(kr)\end{matrix}\right\}P_l^m(\cos\theta)\left\{\begin{matrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{matrix}\right\}\left\{\begin{matrix}e^{ikat}\\ e^{-ikat}\end{matrix}\right\},$$

与边界条件（2）比较，有 $l=2$，$m=0$，时间因子取 e^{-ikat}，且$ka=\omega$，即$k=\omega/a$，

又$h_l^{(1)}(kr)$含因子e^{ikr}，与e^{-ikat}结合给出$e^{ik(r-at)}$的辐射波，符合题意，应保留．而$h_l^{(2)}(kr)$含因子e^{-ikr}，与e^{-ikat}结合给出$e^{-ik(r+at)}$的收缩波，不符题意，应舍去．

综上原因，其解应为：

$$\begin{aligned}U(r,\theta,t)&=Ah_2^{(1)}(kr)\cdot P_2(\cos\theta)e^{-ikat}\\&=A\left[-\frac{3i}{(kr)^3}-\frac{3}{(kr)^2}+\frac{i}{kr}\right]e^{ikr}\\&\quad\times P_2(\cos\theta)\,e^{-ikat},\end{aligned}$$

代入边界条件（2），有

$$A\left[\frac{9i}{(kr_0)^4}+\frac{9}{(kr_0)^3}-\frac{2i}{(kr_0)^2}+\frac{1}{kr_0}\right]ke^{ikr_0}=v_0,$$

$\because r_0\ll\lambda$，$\therefore kr_0\ll 2\pi$，即kr_0很小，而$e^{ikr_0}\approx 1$，于是上式可用第一项来表示，

$$\frac{9i}{(kr_0)^4}Ak = v_0,$$

$$\therefore \qquad A = -i\frac{v_0 k^3 r_0^4}{9},$$

故 $$U = -i\frac{U_0 k^3 r_0^4}{9}h_2^{(1)}(kr)P_2(\cos\theta)e^{-ikat},$$

取实部 $$U = Re\left[-i\frac{U_0 k^3 r_0^4}{9}h_2^{(1)}(kr)\cdot P_2(\cos\theta)\cdot e^{-ikat}\right], \tag{3}$$

在远场区($r\gg 0$)：

$$U = -i\frac{u_0 k^3 r_0^4}{9}\left[-\frac{3i}{k^3r^3}-\frac{3}{k^2r^2}+\frac{i}{kr}\right]e^{ikr}\cdot P_2(\cos\theta)$$

$$\times e^{-ikat},$$

$\because$ $r\gg 0$，$\therefore$可只取第三项

$$U_{r\text{很大}} = \frac{U_0 k^2 r_0^4}{9r}e^{ik(r-at)}\cdot P_2(\cos\theta),$$

取实部

$$U_{r\text{很大}} = \frac{U_0 k^2 r_0^4}{9r}P_2(\cos\theta)\cdot\cos k(r-at). \tag{4}$$

§48. 路积分表示式和渐近公式

1. 半径为ρ_0的长圆柱面上一条母线作谐振动，即柱面径向速度为$U = v_0\delta(\varphi-\varphi_0)\cos\omega t$，试求解这个长圆柱在空气中辐射出去的声场中的速度势，设$\rho_0\ll\lambda$.

解：$\because$是长圆柱，$\therefore$问题与z无关，其速度势满足二维波动方程：

$$U_{tt} - a^2\Delta_2 U = 0, \tag{1}$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \rho}\right|_{\rho=\rho_0} = v_0\delta(\varphi-\varphi_0)\cos\omega t = v_0\delta(\varphi-\varphi_0)e^{-i\omega t}, \tag{2}$$

注意在最后结果中取实部.

方程(1)的分离变数形式解

$$\left\{\begin{array}{l} H_m^{(1)}(k\rho) \\ H_m^{(2)}(k\rho) \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} \cos m\varphi \\ \sin m\varphi \end{array}\right\}\left\{\begin{array}{l} e^{ikat} \\ e^{-ikat} \end{array}\right\},$$

考虑到边界条件、时间因子应取e^{-ikat}，且有

$$ka=\omega,\ 即\ k=\omega/a,$$

又∵$H_m^{(1)}(k\rho)$含有因子$e^{ik\rho}$，与e^{-ikat}结合给出$e^{ik(\rho-at)}$的发散波，符合题意，应保留，

而$H_m^{(2)}(k\rho)$中含有因子$e^{-ik\rho}$，与e^{-ikat}结合给出$e^{-ik(\rho+at)}$的收敛波，不符题意，应舍去.

所求的解

$$v(r,\varphi,t)=\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)H_m^{(1)}(k\rho)e^{-ikat}, \tag{3}$$

为确定系数A_m、B_m，把上式代入边界条件(2)，有

$$\sum_{m=0}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)\left.\frac{d}{d\rho}H_m^{(1)}(k\rho)\right|_{\rho=\rho_0}$$

$$=v_0\delta(\varphi-\varphi_0), \tag{4}$$

∵$\rho_0\ll\lambda$，∴$k\rho_0\ll 2\pi$，即$k\rho_0$很小，

这时有 $H_m^{(1)}=J_m+iN_m\approx\frac{1}{m!}\left(\frac{k\rho}{2}\right)^m-i\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{k\rho}\right)^m$

$$\approx -i\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{k\rho}\right)^m,$$

$$H_0^{(1)}=J_0+iN_0\approx 1-\frac{1}{4}(k\rho)^2+i\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{k\rho}{2}\right)+C\right]$$

$$\approx i\frac{2}{\pi}\left[\ln\left(\frac{k\rho}{2}\right)+C\right],$$

$$\therefore\quad \frac{d}{d\rho}H_m^{(1)}(k\rho)\Big|_{\rho=\rho_0}\approx\frac{d}{d\rho}\left[-i\frac{(m-1)!}{\pi}\left(\frac{2}{k\rho}\right)^m\right]_{\rho=\rho_0}$$

$$=i\frac{m!}{\pi}\left(\frac{2}{k}\right)^m\frac{1}{\rho_0^{m+1}},\tag{5}$$

$$\frac{d}{d\rho}H_0^{(1)}(k\rho)\Big|_{\rho=\rho_0}\approx\frac{d}{d\rho}\left[i\frac{2}{\pi}\ln\left(\frac{k\rho}{2}+C\right)\right]_{\rho=\rho_0}$$

$$=i\frac{2}{\pi\rho_0},\tag{6}$$

将$\delta(\varphi-\varphi_0)$在$[0,2\pi]$上展成傅里叶级数，

$$\delta(\varphi-\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}+\sum_{m=1}^{\infty}(\cos m\varphi_0\cos m\varphi$$

$$+\sin m\varphi_0\cdot\sin m\varphi),\tag{7}$$

把(5)、(6)、(7)代入(4)式，

$$A_0\left(i\frac{2}{\pi\rho_0}\right)+\sum_{m=1}^{\infty}(A_m\cos m\varphi+B_m\sin m\varphi)\left[i\frac{m!}{\pi}\left(\frac{2}{k}\right)^m\frac{1}{\rho_0^{m+1}}\right]$$

$$=v_0\left[\frac{1}{2\pi}+\sum_{m=1}^{\infty}(\cos m\varphi_0\cos m\varphi+\sin m\varphi_0\cdot\sin m\varphi)\right],$$

比较两边系得：

$$A_0=-i\frac{v_0\rho_0}{4},$$

$$B_0=0,$$

$$\left.\begin{aligned}A_m&=-i\frac{v_0\rho_0^{m+1}k^m}{2^m\cdot m!}\cos m\varphi_0,\\B_m&=-i\frac{v_0\rho_0^{m+1}k^m}{2^m\cdot m!}\sin m\varphi_0,\end{aligned}\right\}\ (m\neq 0),$$

故 $\quad U=\mathrm{Re}\Big\{\Big[\frac{v_0\rho_0}{4}H_0^{(1)}(k\rho)$

$$+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{U_0\rho_0^{m+1}k^m}{2^m\cdot m!}H_m^{(1)}(k\rho)\cdot\cos m(\varphi-\varphi_0)\Big]e^{-i\frac{\pi}{2}}\cdot$$

$$e^{-i\omega t}\Big\}. \qquad (8)$$

$(\because -i=e^{-i\pi/2})$.

2.半径为r_0的球面径向速度为 $v=v_0\frac{3}{2}(1-\cos2\theta)\cdot\sin2\varphi\cdot\cos\omega t$、试求解这个球在空气中辐射出去的声场中的速度势，设$r_0\ll\lambda$.本题是非轴对称的四极声源.

解：速度势满足三维波动方程，定解问题为

$$U_{tt}-a^2\Delta U=0, \qquad (1)$$

$$\left.\frac{\partial U}{\partial r}\right|_{r=r_0}=U_0\frac{3}{2}(1-\cos2\theta)\sin2\varphi\cdot\cos\omega t$$

$$=U_0P_2^2(\cos\theta)\cdot\sin2\varphi\cdot e^{-i\omega t}, \qquad (2)$$

注意最后取实部.

方程(1)的分离变数形式解

$$\begin{Bmatrix}h_l^{(1)}(kr)\\ h_l^{(2)}(kr)\end{Bmatrix}P_l^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\varphi\\ \sin m\varphi\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}e^{ikat}\\ e^{-ikat}\end{Bmatrix},$$

由题意和边界条件(2)，应取：

$l=2$，$m=2$，e^{-ikat}，

$(ka=\omega)$，$h_l^{(1)}(kr)$，

$\therefore\quad U=Ah_2^{(1)}(kr)\cdot P_2^2(\cos\theta)\cdot\sin2\varphi\, e^{-ikat}$，

同时有 $$A\frac{d}{dr}\left[h_2^{(1)}(kr)\right]\Big|_{r=r_0}=U_0,$$

$\because\quad r_0\ll\lambda$，

$\therefore\quad kr_0\ll2\pi$，即$kr_0$很小，

$\therefore\quad e^{ikr_0}\approx1$，

因而 $h_2^{(1)}(kr)=\left[-\frac{3i}{(kr)^3}-\frac{3}{(kr)^2}+\frac{i}{kr}\right]\approx-i\frac{3}{(kr)^3}$,

$$\therefore\quad A\frac{d}{dr}\left[-\frac{3i}{(kr)^3}\right]_{r=0}=v_0,$$

即
$$A=-i\frac{v_0r_0^4k^3}{9},$$

故 $U=\mathrm{Re}\left[-i\frac{U_0r_0^4k^3}{9}\cdot h_2^{(1)}(kr)\ P_2^2(\cos\theta)\cdot\sin2\varphi\cdot e^{-i\omega t}\right]$,

$$\tag{3}$$

对于远场区($r\gg0$):

$$h_2^{(1)}(kr)\approx i\frac{1}{kr}e^{ikr},$$

$$\therefore\quad U=\mathrm{Re}\left[-i\frac{U_0r_0^4k^3}{9}\cdot i\frac{1}{kr}e^{ikr}\ P_2^2(\cos\theta)\cdot\sin2\varphi\cdot e^{-i\omega t}\right],$$

即
$$U=\frac{U_0r_0^4k^2}{9r}P_2^2(\cos\theta)\cdot\sin2\varphi\cdot\cos k(r-at).\tag{4}$$

第十五章　数学物理方程的解的积分公式

§50. 格林公式应用于拉普拉斯方程和泊松方程

1. 在圆$\rho=a$内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0, & (\rho\leqslant a),\\ u|_{\rho=a}=f(\varphi).\end{cases}$$

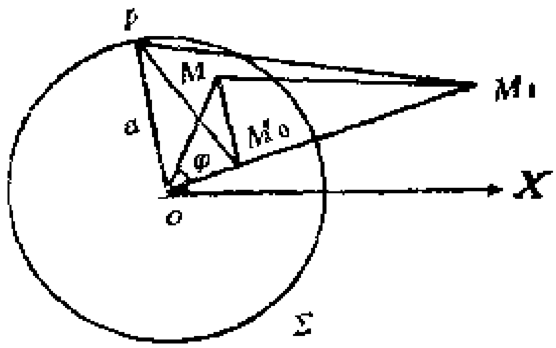


图 15-1

解：圆的第一边值问题的格林函数已在§37例 8 中求出(37·37)：

$$G(M,M_0)$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[-\ln\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_0|}+\ln\frac{1}{|\vec{r}-\vec{r}_1|}+\ln\frac{a}{\rho_0}\right],$$

其中$\vec{r}$，$\vec{r}_0$和$\vec{r}_1$分别是点$M(\rho,\varphi)$、$M_0(\rho_0,\varphi_0)$和$M_1(\rho_1,\varphi_1)$的矢径，且M_1是M_0关于圆O的“电像”，因而有

$$\rho_1=a^2/\rho_0,$$

又由图（15-1）知：（设$\phi=\varphi-\varphi_0$），

$$|\vec{r}-\vec{r}_0|=\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_0\cos\phi+\rho_0^2},$$

$$|\vec{r}-\vec{r}_1|=\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_1\cos\phi+\rho_1^2}.$$

于是　$$G=\frac{1}{2\pi}\left[\ln\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_0\cos\phi+\rho_0^2}\right.$$

$$\left.-\ln\sqrt{\rho^2-2\rho\rho_1\cos\phi+\rho_1^2}+\ln\frac{a}{\rho_0}\right].$$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_{\Sigma}=\left.\frac{\partial G}{\partial \rho}\right|_{\rho=a}=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\rho-\rho_0\cos\phi}{\rho^2-2\rho\rho_0\cos\phi+\rho_0^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\rho-\rho_1\cos\phi}{\rho^2-2\rho\rho_1\cos\phi+\rho_1^2}\right\}_{\rho=a}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left\{\frac{a-\rho_0\cos\phi}{a^2-2a\rho_0\cos\phi+\rho_0^2}\right.$$

$$\left.-\frac{a-a^2\cos\phi/\rho_0}{a^2-2a\cos\phi\cdot a^2/\rho_0+a^4/\rho_0^2}\right\}$$

$$=\frac{(a-\rho_0\cos\phi)-(\rho_0/a)^2(a-a^2\cos\phi/\rho_0)}{a^2-2a\rho_0\cos\phi+\rho_0^2}$$

$$=\frac{1}{2\pi a}\cdot\frac{a^2-\rho_0^2}{a^2-2a\rho_0\cos\phi+\rho_0^2},$$

又 $\because\ G(M,M_0)|_{\Sigma}=0,\ ds=ad\varphi,$

故代入解的积分公式得：

$$u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi a}\int_0^{2\pi}\frac{(a^2-\rho_0^2)f(\varphi)}{a^2-2a\rho_0\cos\phi+\rho_0^2}ad\varphi$$

$$=\frac{a^2-\rho_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{f(\varphi)}{a^2-2a\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2}d\varphi.$$

2. 在半平面 $y>0$ 内求解拉普拉斯方程的第一边值问题

$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,\quad (y>0),\\ u|_{y=0}=f(x).\end{cases}$$

解：平面第一边值问题的格林函数满足定解问题

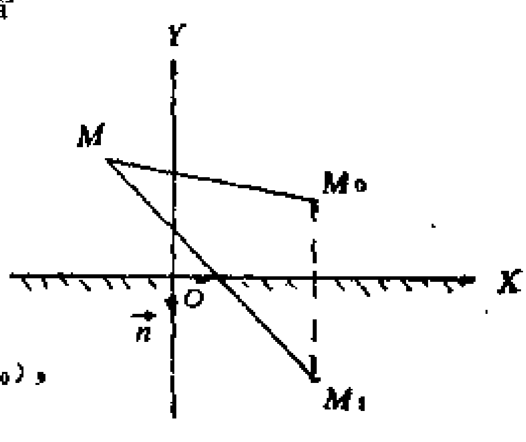


图 15-2

$$\begin{cases}\Delta_2 G(M,M_0)=\delta(x-x_0)\cdot\delta(y-y_0),\\ G|_{y=0}=0,\end{cases}$$

其解为：

$$G(M,M_0)=\frac{1}{2\pi}\left\{-\ln\frac{1}{|\vec r-\vec r_0|}+\ln\frac{1}{|\vec r-\vec r_1|}\right\},$$

式中$\vec{r}$，$\vec{r}_0$和$\vec{r}_1$是点$M(x,y)$，$M_0(x_0,y_0)$和$M_1(x_0,-y_0)$的矢径，且M_1是M_0关于平面$y=0$的“电像”．

由图（15-2）知：

$$|\vec{r}-\vec{r}_0|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2},$$

$$|\vec{r}-\vec{r}_1|=\sqrt{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2},$$

$$\therefore\quad \left.\frac{\partial G}{\partial n}\right|_\Sigma=-\left.\frac{\partial G}{\partial y}\right|_{y=0}=-\frac{1}{2\pi}\left[\frac{y-y_0}{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\right.$$

$$\left.-\frac{y+y_0}{(x-x_0)^2+(y+y_0)^2}\right]_{y=0}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{y_0}{(x-x_0)^2+y_0^2},$$

故代入解的积分公式，得

$$u(x_0,y_0)=\frac{y_0}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(x)}{(x-x_0)^2+y_0^2}dx,$$

3.在圆形域$\rho\leqslant a$上求解，$\Delta u=0$，使满足边界条件

（1）　$u|_{\rho=a}=A\cdot\cos\varphi$，　（2）　$u|_{\rho=a}=A+B\sin\varphi$。

解一：
$$\begin{cases}\Delta_2 u=0,\\ u|_{\rho=a}=A\cdot\cos\varphi,\end{cases}$$

由习题1的结果，有

$$u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{a^2-\rho_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A\cdot\cos\varphi\cdot d\varphi}{a^2-2a\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2},$$

$\because$　是圆内问题，有$a>\rho_0$，上式分子、分母同除以a^2，

并令$\frac{\rho_0}{a}=\varepsilon$，$(0<\varepsilon<1)$，有：

$$u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{(1-\varepsilon^2)A}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi d\varphi}{1-2\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)+\varepsilon^2},$$

$$\because\quad \cos\varphi=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}+e^{-i\varphi})=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right),(\text{令}z=e^{i\varphi}),$$

$$\cos(\varphi-\varphi_0)=\frac{1}{2}(e^{i\varphi}e^{-i\varphi_0}+e^{-i\varphi}e^{i\varphi_0})$$

$$=\frac{1}{2}\left(e^{-i\varphi_0}z+e^{i\varphi_0}\frac{1}{z}\right),$$

$$d\varphi=\frac{dz}{iz},$$

$$\therefore\quad I=\int_0^{2\pi}\frac{\cos\varphi d\varphi}{1-2\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)+\varepsilon^2}$$

$$=\frac{-1}{2i}\oint_{|z|=1}\frac{(1+z^2)dz}{z[e^{-i\varphi_0}\varepsilon z^2-(1+\varepsilon)^2z+\varepsilon e^{i\varphi_0}]},$$

被积函数在$|z|=1$内有两个单极点0和$\varepsilon e^{i\varphi_0}$，其留数为 $\frac{1}{\varepsilon}e^{-i\varphi_0}$和$\frac{1+\varepsilon^2e^{i2\varphi_0}}{\varepsilon e^{i\varphi_0}(\varepsilon^2-1)}$，留数之和为$\frac{(\varepsilon^2-1)+1+\varepsilon^2e^{i2\varphi_0}}{\varepsilon e^{i\varphi_0}(\varepsilon^2-1)}$

$$=\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\cos\varphi_0,$$

$$\therefore\quad I=\frac{-1}{2i}2\pi i\cdot\frac{2\varepsilon}{\varepsilon^2-1}\cos\varphi_0=\frac{2\pi\varepsilon}{1-\varepsilon^2}\cos\varphi_0,$$

故 $$u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{1-(\rho_0/a)^2}{2\pi}A\cdot\frac{2\pi\rho_0/a}{1-(\rho_0/a)^2}\cos\varphi_0$$

$$=\frac{A\rho_0}{a}\cos\varphi_0.$$

解二：
$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ u|_{\rho=a}=A+B\sin\varphi,\end{cases}$$

$$u(\rho,\varphi_0)=\frac{a^2-\rho_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A+B\sin\varphi}{a^2-2a\rho_0\cos(\varphi_0-\varphi_0)+\rho_0^2}d\varphi$$

$$=\frac{1-\varepsilon^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{A+B\sin\varphi}{1-2\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)+\varepsilon^2}d\varphi,$$

式中$\varepsilon=\rho_0/a$。

计算积分 $I=\int_0^{2\pi}\frac{A+B\sin\varphi}{1-2\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)+\varepsilon^2}d\varphi$。

令 $z=e^{i\varphi}$，则

$$I=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{2Aiz+Bz^2-B}{z[\varepsilon e^{-i\varphi_0}z^2-(1+\varepsilon^2)z+\varepsilon e^{i\varphi_0}]}dz,$$

被积函数在 $|z|=1$ 内有两个单极点 0 与 $\varepsilon e^{i\varphi_0}$，相应的留数为

$$\frac{-B}{\varepsilon e^{i\varphi_0}}\text{与}\frac{2Ai\varepsilon e^{i\varphi_0}+B(\varepsilon e^{i2\varphi_0}-1)}{\varepsilon e^{i\varphi_0}(\varepsilon^2-1)},$$

$$\text{留数之和}=\frac{-B\varepsilon^2+B+2Ai\varepsilon e^{i\varphi_0}+B(\varepsilon^2e^{i2\varphi_0}-1)}{\varepsilon e^{i\varphi_0}(\varepsilon^2-1)}$$

$$=-\frac{2Ai}{1-\varepsilon^2}-\frac{B\varepsilon(e^{i\varphi_0}-e^{-i\varphi_0})}{1-\varepsilon^2}$$

$$=-\frac{2i(A+B\varepsilon\sin\varphi_0)}{1-\varepsilon^2},$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2i(A+B\varepsilon\sin\varphi_0)}{1-\varepsilon^2}\right)$$

$$=-\frac{2\pi(A+B\sin\varphi_0)}{1-\varepsilon^2}.$$

应用这个结果

$$u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{1-\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^2}{2\pi}\cdot\frac{2\pi[A+B(\rho_0/a)\sin\rho_0]}{1-\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^2}$$

$$=A+B\frac{\rho_0}{a}\sin\varphi_0.$$

4.圆内拉氏方程第一边值问题中，对于一般的 $f(\varphi)$ 积分不易计算。试把$1/[a^2-2a\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2]$展开为傅里叶级数，然后逐项积分.

作为对照，再用分离变量法求解圆的第一边值问题。

解：圆内拉氏方程第一边值问题解的积分公式是：

$$u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{a^2-\rho_0^2}{a^2-2a\rho_0\cos(\varphi-\varphi_0)+\rho_0^2}f(\varphi)d\varphi$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1-\varepsilon^2}{1-2\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)+\varepsilon^2}f(\varphi)d\varphi,$$

$$(\varepsilon=\rho_0/a),$$

利用§25习题2的答案

$$\frac{1-\varepsilon^2}{1-2\varepsilon\cos(\varphi-\varphi_0)+\varepsilon^2}=1+2\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\cos n(\varphi-\varphi_0),$$

将上式逐项积分，即得

$$u(\rho_0,\varphi_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\left[1+2\sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon^n\cos n(\varphi-\varphi_0)\right]d\varphi$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\delta_n}\left(\frac{\rho_0}{a}\right)^n\left[(\cos n\varphi_0)\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi\right.$$

$$\left.+(\sin n\varphi_0)\cdot\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi\right]$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}[A_n\cos n\varphi_0+B_n\sin n\varphi_0]\rho_0^n,$$

其中 $A_n=\dfrac{1}{\delta_n\pi a^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$

$B_n=\dfrac{1}{\pi a^n}\displaystyle\int_0^{2\pi}f(\varphi)\sin n\varphi d\varphi,$

作为对照，用分离变数法重新求解，圆内拉普拉斯方程的一般解是

$$u(\rho,\varphi)=\sum_{n=0}^{\infty}(A_n\cos n\varphi+B_n\sin n\varphi)\rho^n,$$

为确定系数A_n和B_n，以这式代入边界条件得

$$\sum_{n=0}^{\infty}(A_na^n\cos n\varphi+B_na^n\sin n\varphi)=f(\varphi),$$

这样A_na^n，B_na^n，是$f(\varphi)$的傅里叶系数，所以

$$A_n=\frac{1}{\delta_n\pi a^n}\int_0^{2\pi}f(\varphi)\cos n\varphi d\varphi,$$

$$B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_0^{2\pi} f(\varphi) \sin n\varphi d\varphi,$$

两种解法结果相同。

5. 试求层状空间$0<z<H$第一边值问题的格林函数。

解：格林函数的定解问题为：

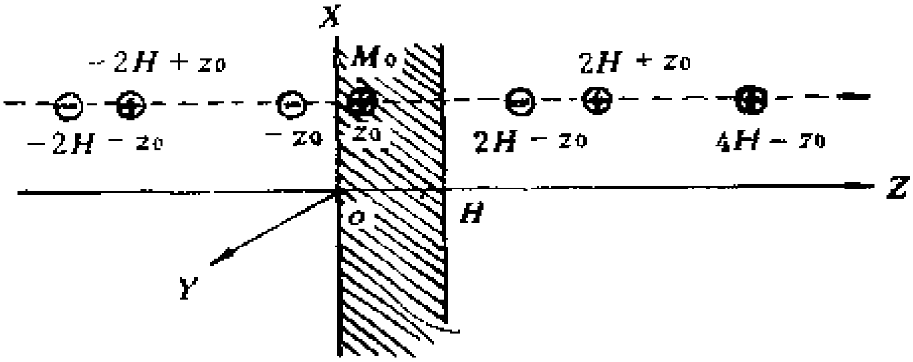


图 15-3

$$\begin{cases} \Delta G = \delta(\vec{r} - \vec{r}_0), \\ G|_{z=0} = 0, \\ G|_{z=H} = 0. \end{cases}$$

平面$z=0$和$z=H$相当于两面平面镜，电荷放在中间，出现反复反射，造成无限多个“电像”。对于放在$M_0(x_0, y_0, z_0)$点的正点电荷（负电荷亦可），所有位于$(x_0, y_0, 2nH+z_0)$处“电像”带正电荷，而所有位于$(x_0, y_0, 2nH-z_0)$处“电像”带负电荷。

空间第一边值问题的格林函数已在§50例 2 中求出为(50·22)式

$$G(\vec{r}; \vec{r}_0) = -\frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-2nH-z_0)^2}}$$

$$+\frac{1}{4\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-2nH+z_0)^2}},$$

这里的格林函数是无穷级数。

§ 51. 推广的格林公式及其应用

1.求解 $\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t), \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \\ u_t|_{t=0}=\psi(x). \end{cases}$

解：（1）作变换，化方程为标准型。因为上面方程的特征线方程是 $x\pm at=C$。

令 $y=at$, （1）

则定解问题成为：

$$u_{xx}-u_{yy}=-\frac{1}{a^2}f\left(x,\frac{y}{a}\right)$$

$$=f_1(x,y), \quad (2)$$

$$\begin{cases} u|_{y=0}=\varphi(x), \\ u_y|_{y=0}=\psi(x). \end{cases} \quad (3)$$

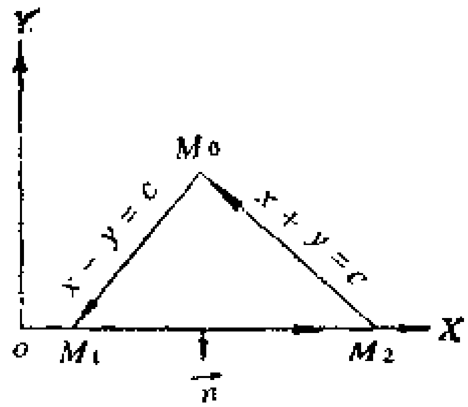


图 15-4

（2）求里曼函数 v.

∵ 方程（2）的系数 $a_{11}=1, a_{22}=-1, a_{12}=b_1=b_2=c=0$,

∴算符 $L=M=\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}$ 是自伴的，其里曼函数 v 应是方程 $MU=0$ 的解，且满足条件

$$\begin{cases} U=e^{\int_{s_0}^{s}\frac{b_2+b_1}{2\sqrt{2}}ds}=e^0=1, \text{（在}M_2M_0\text{上）}, \\ U=e^{\int_{s_0}^{s}\frac{b_2-b_1}{2\sqrt{2}}ds}=e^0=1, \text{（在}M_0M_1\text{上）}, \end{cases}$$

如取 $v(M,M_0)=1$, （4）

则上述条件均被满足.

（3）定解问题的解．由§51中(51·33)式，解为：

$$u(x,y)\ v(x,y)=\frac{1}{2}[u(x_1,y_1)v(x_1,y_1)$$
$$+u(x_2,y_2)v(x_2,y_2)]$$
$$+\frac{1}{2}\int_{M_1M_2}[X\cdot\cos(\vec{n},\vec{x})+Y\cdot\cos(\vec{n},\vec{y})]$$
$$dl-\frac{1}{2}\iint_{M_0M_1M_2} vf_1ds, \tag{5}$$

其中X和Y由§51中(51·30)式给出：

$$\begin{cases} X=-(uv)_x+(2u_x+b_1u)v, \\ Y=(uv)_y-(2u_y-b_2u)v, \end{cases} \tag{6}$$

下面分别算出（5）式各项.

由图(15·4)知：$M_1(x_1,y_1)$的坐标为：

$$x_1=x-y=x-at,\quad y_1=0,$$

$M_2(x_2,y_2)$的坐标为：

$$x_2=x+y=x+at,\quad y_2=0,$$

而 $v(M_1,M_0)=v(M_2,M_0)=1,$

$$u|_{y_1=0}=\varphi(x_1)=\varphi(x-at),$$

$$u|_{y_2=0}=\varphi(x_2)=\varphi(x-at),$$

∴ （5）式中第一项为：

$$\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)],$$

由（6）知：$X=u_x$,

$$Y=-u_y,$$

对于直线段M_1M_2，有

$$y=0,\ \cos(\vec{n},\vec{x})=\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)=0,\ \cos(\vec{n},\vec{y})=-1,$$

∴ （5）式中第二项积分为

$$\frac{1}{2}\int_{M_1}^{M_2}[u_y]|_{y=0}dx=\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)d\xi,$$

∵ 在区域$M_0M_1M_2$内，$v\equiv 1$，又$dy=adt$，

∴ （5）式中最后一项积分为：

$$-\frac{1}{2}\iint\limits_{M_0M_1M_2} f_1(x,y)\,dxdy$$

$$=\frac{1}{2a}\int_0^{at}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau,$$

故 $u(x,y)=\frac{1}{2}[\varphi(x-at)+\varphi(x+at)]$

$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^{at}\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi,\tau)\,d\xi\cdot d\tau. \quad (7)$$

2． 求解 $\begin{cases} x^2u_{xx}-t^2u_{tt}=0, \\ u|_{t=1}=\varphi(x), \\ u_t|_{t=1}=\psi(x). \end{cases}$

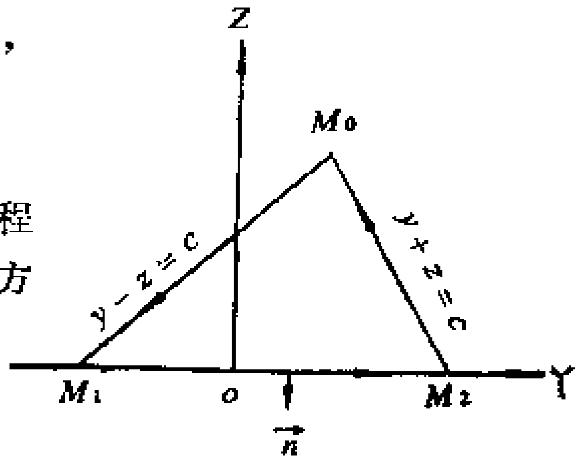


图 15-5

解：（1）作变换，化方程为标准型，上面方程的特征方程为 $x^2-t^2\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=0$，

则特征线为 $\ln x\pm\ln t=C$。

令 $y=\ln x$，$z=\ln t$， （1）

则定解问题变为：

$$u_{yy}-u_{zz}-u_y+u_z=0,$$

$$\begin{cases} u|_{z=0}=\varphi(e^y), \\ u_z|_{z=0}=u_t\cdot\left.\frac{dt}{dz}\right|_{t=1}=\psi(e^y) \end{cases} \quad (3)$$

（2）求里曼函数v

∵ $a_{11}=1$，$a_{22}=-1$，$b_1=-1$，

$b_2=1$，$a_{12}=c=0$，

$$\therefore \quad M=\frac{\partial^2}{\partial y^2}-\frac{\partial^2}{\partial z^2}+\frac{\partial}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial z},$$

于是有 $\quad Mv=0,$

$$v=e^{\int_{s_0}^{s}\frac{b_2-b_1}{2\sqrt{2}}ds}=e^0=1.\ （在M_2M_0上），$$

$$v=e^{\int_{s_0}^{s}\frac{b_2+b_1}{2\sqrt{2}}ds}=e^{-(z-z_0)}\ ，（在M_0M_1上），$$

$\therefore$ 可取

$$v=e^{-\frac{1}{2}(y-y_0+z-z_0)}. \tag{4}$$

（3）定解问题的解，其解式同上题公式（5）．下面分别计算（5）式中各项．

由图(15•5)知$M_1(x_1,y_1)$的坐标为$y_1=y_0-z_0$，$z_1=0$，

$M_2(x_2,y_2)$的坐标为$y_2=y_0+z_0$，$z_2=0$，

则
$$v(y_1,z_1)=e^{-\frac{1}{2}(y_0-z_0-y_0+0-z_0)}=e^{z_0}=t_0,$$

$$v(y_2,z_2)=e^{-\frac{1}{2}(y_0+z_0-z_0+0-z_0)}=e^0=1,$$

$$u(y_1,z_1)\big|_{z_1=0}=\varphi(e^{y_1})=\varphi(e^{y_0-z_0})=\varphi\left(\frac{x_0}{t_0}\right),$$

$$u(y_2,z_2)\big|_{z_2=0}=\varphi(e^{y_2})=\varphi(e^{y_0+z_0})=\varphi(x_0t_0),$$

$\therefore$（5）式中第一项为：

$$\frac{1}{2}[\varphi(e^{y_0-z_0})e^{z_0}+\varphi(e^{y_0+z_0})]=\frac{1}{2}\,t_0\varphi\left(\frac{x_0}{t_0}\right)+\frac{1}{2}\,\varphi(x_0t_0),$$

又在M_1M_2上，$y=0$，$\cos(\vec{n},\vec{y})=0$，$\cos(\vec{n},\vec{z})=-1$，所以只要算出上题公式（6）中Z的表达式．

$$\because \quad Z=uv_z-u_zv+b_2uv$$

$$=\frac{1}{2}uv-vu_z,\quad (\because\quad v_z=-\frac{1}{2}v),$$

$$\therefore \quad Z|_{z=0}=\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}(y-y_0-z_0)}u|_{z=0}$$

$$-e^{-\frac{1}{2}(y-y_0-z_0)}u_z|_{z=0}$$

$$=\frac{1}{2}\varphi(e^y)e^{-\frac{y}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}(y_0+z_0)}$$

$$-\psi(e^y)e^{-\frac{1}{2}y}\cdot e^{\frac{1}{2}(y_0+z_0)},$$

$\because \quad e^y=x,$

$\therefore \quad e^{-\frac{1}{2}y}=x^{-1/2},\quad e^{\frac{1}{2}(y_0+z_0)}=(x_0t_0)^{1/2}.$

$$\therefore \quad Z|_{z=0}=\frac{1}{2}(x_0t_0)^{1/2}\cdot x^{-1/2}\cdot\varphi(x)-(x_0t_0)^{1/2}x^{-1/2}\psi(x).$$

又 $\quad dy=\frac{1}{x}dx.$

$\therefore$ （5）式中第二项积分为

$$\frac{1}{2}\int_{M_1M_2}(-Z)dl=-\frac{1}{2}\int_{y_1}^{y_2}Z|_{z=0}dy$$

$$=-\frac{\sqrt{x_0t_0}}{4}\int_{x_0/t_0}^{x_0t_0}\varphi(x)x^{-3/2}dx$$

$$+\frac{\sqrt{x_0t_0}}{2}\int_{x_0/t_0}^{x_0t_0}\psi(x)x^{-3/2}dx,$$

又 $\because \quad f=0.$

$\therefore$ （5）式中最后一项积分为零.

故

$$u(x_0,t_0)=\frac{1}{2}t_0\varphi\left(\frac{x_0}{t_0}\right)+\frac{1}{2}\varphi(x_0,t_0)$$

$$-\frac{\sqrt{x_0t_0}}{4}\int_{x_0/t_0}^{x_0t_0}\varphi(x)x^{-3/2}dx$$

$$+\frac{\sqrt{x_0t_0}}{2}\int_{x_0/t_0}^{x_0t_0}\psi(x)x^{-3/2}dx. \qquad (5)$$

第十六章　拉普拉斯变换法

§52. 拉普拉斯变换法

1. 求解一维无界空间的扩散问题，即$u_t-a^2u_{xx}=0$，

$u|_{t=0}=\varphi(x)$，〔本题即§38例2，可对照〕.

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0, & (-\infty<x<\infty), \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \end{cases} \tag{1}$$

对定解问题施行拉普拉斯变换得

$$P\bar{u}-\varphi(x)-a^2\bar{u}_{xx}=0, \text{ 即} a^2\bar{u}_{xx}-P\bar{u}=-\varphi(x), \tag{2}$$

现在解方程$a^2y''-Py=-\varphi(x)$ 即$y''-\dfrac{P}{a^2}y=-\dfrac{1}{a^2}\varphi(x)$，

（3）

（3）对应的齐次方程的解是$y=Ae^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+Be^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}$

（4）

（4）式的A和B是积分常数.为了求得非齐次方程（3）的特解，可以把（4）式中的参数A和B看作是x的函数，而用参数变易法求（3）的特解.具体步骤如下：

$$y'=\frac{\sqrt{p}}{a}Ae^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}-\frac{\sqrt{p}}{a}Be^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}+A'e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}$$

$$+B'e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}, \tag{5}$$

引入辅助条件　$A'e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+B'e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}=0$，　（6）

则(5)成为 $$y'=\frac{\sqrt{p}}{a}Ae^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}-\frac{\sqrt{p}}{a}Be^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x},\tag{7}$$

$$\begin{aligned}y''&=\frac{p}{a^2}\left(Ae^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+Be^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)\\&\quad+\frac{\sqrt{p}}{a}\left(A'e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}-B'e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)\\&=\frac{p}{a^2}\left(Ae^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}+Be^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right),\end{aligned}\tag{8}$$

以(8)式代入(3)式中得

$$\frac{\sqrt{p}}{a}\left(A'e^{\frac{\sqrt{p}}{a}}-B'e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\right)=-\frac{1}{a^2}\varphi(x),$$

或 $$A'e^{\frac{\sqrt{p}}{a}x}-B'e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}=-\frac{1}{a\sqrt{p}}\varphi(x),\tag{9}$$

(9)+(6)得 $A'=\dfrac{-1}{2a\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{p}}{a}x}\varphi(x)$,

积分得 $$A=-\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}\xi}\varphi(\xi)d\xi,\tag{10}$$

以(6)—(9)$B'=\dfrac{1}{2a\sqrt{p}}e^{\frac{\sqrt{P}}{a}x}\varphi(\xi)$,

$$B=\frac{1}{2a\sqrt{p}}\int e^{\frac{\sqrt{P}}{a}\xi}\varphi(\xi)d\xi,\tag{11}$$

以(10)(11)代入(4)中即得方程(3)的特解为:

$$\begin{aligned}y_{特}&=-\frac{1}{2a\sqrt{p}}e^{\frac{\sqrt{P}}{a}x}\int e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}\xi}\varphi(\xi)d\xi\\&\quad+\frac{1}{2a\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}x}\int e^{\frac{\sqrt{P}}{a}\xi}\varphi(\xi)d\xi,\end{aligned}\tag{12}$$

从而得到方程(3)的通解为:

$$y=Ae^{\frac{\sqrt{P}}{a}x}+Be^{-\frac{\sqrt{P}}{a}x}-\frac{1}{2a\sqrt{p}}e^{\frac{\sqrt{P}}{a}x}$$

$$\times \int e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}\xi} \varphi(\xi) d\xi,$$

$$+\frac{1}{2a\sqrt{p}} e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}x} \int e^{\frac{\sqrt{P}}{a}\xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

$$= Ae^{\frac{\sqrt{P}}{a}x} + Be^{-\frac{\sqrt{P}}{a}x} - \frac{1}{2a} e^{\frac{\sqrt{P}}{a}x}$$

$$\times \int \frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}\xi} \varphi(\xi) d\xi$$

$$+\frac{1}{2a} e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}x} \int \frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{\sqrt{P}}{a}\xi} \varphi(\xi) d\xi.$$

为了使解在$x\to\pm\infty$时为有限，必须取$A=B=0$,

$$\therefore \quad \bar{u}(P) = y = \frac{1}{2a}\int_{x}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}(\xi-x)} \varphi(\xi) d\xi$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{p}} e^{\frac{\sqrt{P}}{a}(\xi-x)} \varphi(\xi) d\xi,$$

应用第496页公式(13) $\dfrac{e^{-a\sqrt{P}}}{\sqrt{p}} \doteq \dfrac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-a^2/4t}$,进行反演.

$$\therefore \quad \frac{e^{\pm\frac{(x-\xi)}{a}\sqrt{P}}}{\sqrt{p}} \doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-(x-\xi)^2/4a^2t},$$

$$\therefore \quad u = \frac{1}{2a}\int_{x}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi + \frac{1}{2a}$$

$$\times \int_{-\infty}^{x}\frac{\varphi(\xi)}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2t}} d\xi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\varphi(\xi)}{2a\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4a^2t}} d\xi.$$

2。求解硅片的限定源扩散问题，把硅片的厚度作为无限大，这是半无界空间的定解问题$u_t-a^2u_{xx}=0, u_x|_{x=0}=0$,

$u|_{t=0}=\Phi_0\delta(x-0)$〔本题即§38例3可对照〕。

解一：对泛定方程和边界条件施行拉普拉斯变换，得：

$$\begin{cases} p\bar{u} - \Phi_0\delta(x-0) - a^2\bar{u}_{xx} = 0, & (x>0), \\ \bar{u}_x|_{x=0} = 0, \end{cases} \tag{1}$$

由上题，可知(1)的通解为

$$\bar{u}(x,p) = Ae^{\sqrt{p}x/a} + Be^{-\sqrt{p}x/a} - \frac{1}{2a}$$

$$\times \int^{(x)} \frac{e^{\sqrt{p}\left(\frac{x-\zeta}{a}\right)}}{\sqrt{p}} \Phi_0\delta(\zeta-0)\,d\zeta$$

$$+ \frac{1}{2a}\int^{(x)} \frac{e^{\sqrt{p}\left(\frac{x-\zeta}{a}\right)}}{\sqrt{p}} \Phi_0\delta(\zeta-0)\,d\zeta,$$

$\because$ $x\to+\infty$时，$\bar{u}$有界，$\therefore$ $A=0$，

又 $$\bar{u}_x = -\frac{\sqrt{p}}{a}Be^{-\sqrt{p}x/a} - \frac{1}{2a}\,\frac{e^0}{\sqrt{p}}\Phi_0\delta(x-0)$$

$$+ \frac{1}{2a}\,\frac{e^0}{\sqrt{p}}\Phi_0\delta(x-0)$$

$$= -\frac{\sqrt{p}}{a}Be^{-\sqrt{p}x/a},$$

$$0 = \bar{u}_x|_{x=0} = -\frac{\sqrt{p}}{a}B,$$

$\therefore$ $B=0$，

$$\bar{u}(x,p) = -\frac{\Phi_0}{2a}\int^{(x)} \frac{e^{\sqrt{p}\left(\frac{x-\zeta}{a}\right)}}{\sqrt{p}}\delta(\zeta-0)\,d\zeta$$

$$+ \frac{\Phi_0}{2a}\int^{(x)} \frac{e^{\sqrt{p}\left(\frac{x-\zeta}{a}\right)}}{\sqrt{p}}\delta(\zeta-0)\,d\zeta$$

$$= -\frac{\Phi_0}{2a}\int_{\infty}^{x} \frac{\delta(\zeta-0)}{\sqrt{p}}\, e^{\sqrt{p}\cdot\frac{x-\zeta}{a}}\,d\zeta$$

$$+ \frac{\Phi_0}{2a}\int_{-\infty}^{x} \frac{\delta(\zeta-0)}{\sqrt{p}}\, e^{\sqrt{p}\left(\frac{\zeta-x}{a}\right)}\,d\zeta$$

$$=\frac{\Phi_0}{2a}\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\sqrt{P}\frac{x}{a}}+\frac{\Phi_0}{2a}\frac{1}{\sqrt{p}}e^{\sqrt{P}\cdot\frac{-x}{a}},$$

$$u(x,t)=\frac{\Phi_0}{2a}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}+\frac{\Phi_0}{2a}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}$$

$$=\frac{\Phi_0}{a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}. \tag{2}$$

解二：由$u_x|_{x=0}=0$，作偶延拓，得无界空间的定解问题

$$\begin{cases} u_t-a^2u_{xx}=0, \\ u|_{t=0}=\begin{cases}\Phi_0\delta(x-0), & (x>0),\\ \Phi_0\delta(x+0), & (x<0),\end{cases}\end{cases}$$

由上题结果，有

$$\therefore\quad u=\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\Phi_0\delta(x-0)+\Phi_0\delta(x+0)}{\sqrt{\pi t}}e^{\frac{-(\zeta-x)^2}{4a^2t}}d\zeta$$

$$=\frac{\Phi_0}{2a\sqrt{\pi t}}\left[e^{\frac{-(0-x)^2}{4a^2t}}+e^{-\frac{(-0-x)^2}{4a^2t}}\right]$$

$$=\frac{\Phi_0}{a\sqrt{\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4a^2t}}.$$

3.求解一维无界空间的有源输运问题，$u_t-a^2u_{xx}=f(x,t)$，$u|_{t=0}=0$，（本题即§39例 3 可对照）。

解：将方程进行拉普拉斯变换，$P\bar{u}-a^2\bar{u}_{xx}=\bar{f}(xP)$，应用第一题的结果

$$\bar{u}=Ae^{\frac{\sqrt{P}}{a}x}+Be^{-\frac{\sqrt{P}}{a}x}+\frac{1}{2a}\int_x^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}(\zeta-x)}$$

$$\times\bar{f}(\zeta p)d\zeta+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}(\zeta-x)}\bar{f}(\zeta p)d\zeta,$$

为使$x\to\pm\infty$时有限，必须取$A=B=0$.所以

$$\bar{u}=\frac{1}{2a}\int_x^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}(\zeta-x)}\bar{f}(\zeta,p)d\zeta$$

$$+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}(x-\zeta)}\bar{f}(\zeta,P)d\zeta,$$

进行反演$\bar{f}(\zeta,P) \doteq f(x,t)$，$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}(x-\zeta)}$

$$\doteq \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{(x-\zeta)^2}{4a^2 t}},$$

再应用卷积定理

$$u = \int_{-\infty}^{\infty}\int_0^t \frac{1}{2a\sqrt{\pi(t-\tau)}} e^{\frac{-(x-\zeta)^2}{4a^2(t-\tau)}} f(\zeta\tau)\,d\tau d\zeta.$$

4. 求解一维半界空间的输运问题，$u_t - a^2u_{xx} = 0$，$u|_{t=0} = 0$，边界条件是$u|_{x=0} = f(t)$，〔本题为§39习题2的一部分可对照〕.

解：进行拉普拉斯变换得

$$\begin{cases} P\bar{u} - a^2\bar{u}_{xx} = 0, & (1) \\ u|_{x=0} = \bar{f}(P), & (2) \end{cases}$$

微分方程(1)的通解为$\bar{u} = Ae^{\frac{\sqrt{P}}{a}x} + Be^{-\frac{\sqrt{P}}{a}x}$.　　(3)

由于条件$x\to\infty$，$\bar{u}$应有限，知$A=0$.

$\therefore\quad \bar{u} = Be^{-\frac{\sqrt{P}}{a}x}$，根据边界条件，可得到$B = \bar{f}(P)$，

$$\therefore\quad \bar{u} = \bar{f}(P)\ e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}x} = P\Big[\ \bar{f}(P)\frac{1}{p}\ e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}x}\Big],$$

进行反演$\bar{f}(P) \doteq f(t)$；$\frac{1}{P}\ e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}x} \doteq \operatorname{erfc}\frac{x}{la\sqrt{t}}$，

应用卷积定理 $\bar{f}(P)\ \frac{1}{P}\ e^{-\frac{\sqrt{P}}{a}x}$

$$\doteq \int_0^t f(t-\tau) \times \operatorname{erfc}\frac{x}{2a\sqrt{t}}\,d\tau, \qquad (4)$$

(4)式积分在$t=0$时为零，于是按(21·14)

$$u(xt) = \frac{\partial}{\partial t}\int_0^t f(t-\tau)\operatorname{erfc}\frac{x}{2a\sqrt{t}}\,d\tau.$$

5. 求解无界弦的受迫振动$u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t)$，$u|_{t=0}=\varphi(x)$，$u_t|_{t=0}=\psi(x)$.

解：
$$\begin{cases} u_{tt}-a^2u_{xx}=f(x,t) \\ u|_{t=0}=\varphi(x),\ u_t|_{t=0}=\psi(x), \end{cases} \tag{1}$$

进行拉普拉斯变换

$$P^2\bar{u}-P\varphi-\psi-a^2\bar{u}_{xx}=\bar{f}(x,P),$$

即
$$\bar{u}_{xx}-\frac{p^2}{a^2}u=\frac{1}{a^2}[P\varphi+\psi-\bar{f}(x,P)]. \tag{2}$$

仿照第1题得到方程②的解是：

$$\bar{u}=Ae^{\frac{P}{a}x}+Be^{-\frac{P}{a}x}-\frac{1}{2}e^{\frac{Px}{a}}\int\frac{1}{P}e^{-\frac{P\xi}{a}}$$
$$\times[\psi(\zeta)+P\varphi(\zeta)+\bar{f}(\zeta P)]d\zeta+\frac{1}{2a}e^{-\frac{Px}{a}}\int\frac{1}{P}$$
$$\times e^{\frac{P\zeta}{a}}[\psi(\zeta)+P\varphi(\zeta)+\bar{f}(\zeta,P)]d\zeta,$$

$\bar{u}$在$\pm\infty$应有限，必须$A=B=0$，

$$\bar{u}=-\frac{1}{2a}\int_{\infty}^{x}\frac{1}{P}e^{-P(\zeta-x)/a}[\psi(\zeta)+P\varphi(\zeta)+\bar{f}(\zeta,P)]d\zeta$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{P}e^{-P(x-\zeta)a}[\psi(\zeta)+P\varphi(\zeta)+\bar{f}(\zeta,P)]d\zeta,$$
$$=\Big[\frac{1}{2a}\int_{x}^{\infty}\frac{1}{P}e^{-P\frac{(\zeta-x)}{a}}\psi(\zeta)d\zeta+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{P}$$
$$\times e^{-P\frac{(x-\zeta)}{a}}\psi(\zeta)d\zeta\Big]+\Big[\frac{1}{2a}\int_{x}^{\infty}\frac{1}{P}e^{-P\frac{(\zeta-x)}{a}}P\varphi(\zeta)d\zeta$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{P}e^{-P\frac{(x-\zeta)}{a}}P\varphi(\zeta)d\zeta\Big]+\Big[\frac{1}{2a}\int_{x}^{\infty}\frac{1}{P}$$
$$\times e^{-P\frac{(\zeta-x)}{a}}\bar{f}(\zeta,P)d\zeta+\frac{1}{2a}\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{P}$$
$$\times e^{-P\frac{(x-\zeta)}{a}}\bar{f}(\zeta,P)d\zeta\Big].$$

进行反演：

$$\frac{1}{P}\ e^{-P\frac{(\zeta-x)}{a}} \doteq H\left(t-\frac{\zeta-x}{a}\right)=\begin{cases}1, & \zeta<x+at,\\ 0, & \zeta>x+at,\end{cases}$$

$$\frac{1}{P}\ e^{-P\frac{(x-\zeta)}{a}} \doteq H\left(t-\frac{x-\zeta}{a}\right)=\begin{cases}1, & \zeta>x-at,\\ 0, & \zeta<x-at,\end{cases}$$

$$\int_x^{\infty}\frac{1}{P}\ e^{-\frac{P(\zeta-x)}{a}}\psi(\zeta)d\zeta+\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{P}\ e^{\frac{-P(x-\zeta)}{a}}\psi(\zeta)d\zeta$$

$$\doteq\int_{x-at}^{x+at}\psi(\zeta)d\zeta,$$

$$P\left[\int_x^{\infty}\frac{1}{P}\ e^{-P\frac{(\zeta-x)}{a}}\ \varphi(\zeta)d\zeta+\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{P}\ e^{-P\frac{(x-\zeta)}{a}}\varphi(\zeta)d\zeta\right]$$

$$\doteq\frac{\partial}{\partial t}\int_{x-at}^{x+at}\varphi(\zeta)d\zeta$$

$$=a[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)],$$

$$\left[\int_x^{\infty}\frac{1}{P}\ e^{-P\frac{(\zeta-x)}{a}}\bar{f}(\zeta,P)d\zeta+\int_{-\infty}^{x}\frac{1}{P}\ e^{-P\frac{(x-\zeta)}{a}}\right.$$

$$\left.\times\bar{f}(\zeta,P)d\zeta\right]$$

$$\doteq\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t+\tau)}f(\zeta,\tau)\varphi\tau d\zeta,$$

所以总的解是：

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[\varphi(x+at)+\varphi(x-at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\zeta)d\zeta$$

$$+\frac{1}{2a}\int_0^t\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)}f(\zeta,\tau)d\tau d\zeta.$$

第十七章　保角变换法

§54. 某些常用的保角变换

1.例1的二面角(60°)的二等分面上有一带电细导线，平行于二面角的顶角线，相距为a，导线每单位长度带电量为Q，试求电势分布.

解：作变换$\zeta = Z^3$

这样就把Z平面变换到ζ平面上，在虚轴η上距原点a^3处有一细导线，下半平面为导体，用电像法求得ζ平面电场的复势是

$$-\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\frac{\zeta - a^3 i}{\zeta + a^3 i},$$

回到Z平面复势为$-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{Z^3 - a^3 i}{Z^3 + a^3 i}$，

电势为实数部分$\mathrm{Re}\left\{-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{Z^3 - a^3 i}{Z^3 + a^3 i}\right\}$.

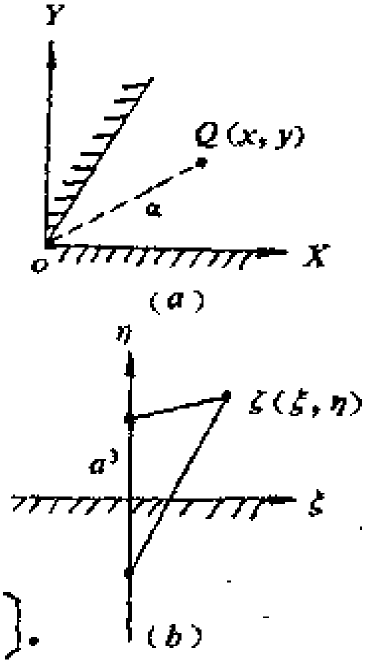


图 17-1

2.接地甚长空心金属圆柱半径为a，柱内有细导线平行于柱轴，与柱轴相距为b，导线每单位长度带电量为Q，试求柱内电势分布？

解：试作变换使b点变到圆心，考虑到$x = b$的对称点是$\dfrac{a^2}{b}$，作分式线性变换

$$\zeta = \frac{Z - b}{Z - \frac{a^2}{b}}, \tag{1}$$

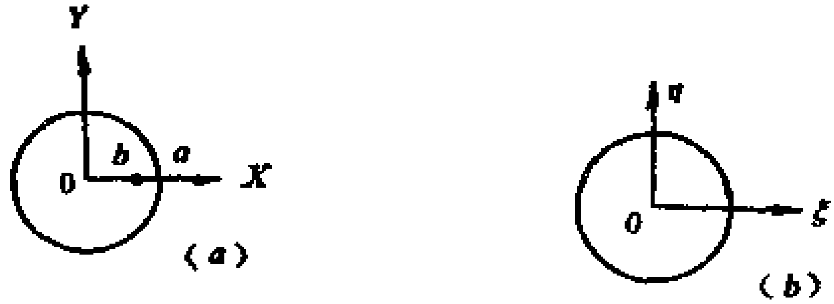


图 17-2

经过这个变换，Z平面的b变成ζ平面上的原点，$x=b$ 的对称点 $x=\dfrac{a^2}{b}$变到ζ平面上的无限远点。圆仍变为圆，ζ 平面上的原点 $\zeta=0$ 和无限远点对于变换后的圆是对称的，可见原点 $\zeta=0$是圆心。

为了确定ζ平面上圆的半径，以$Z=a$代入(1)式得出

$$R=\left|\frac{a-b}{a-a^2/b}\right|=\frac{b(a-b)}{a|b-a|}=\frac{b}{a},$$

在ζ平面上圆内的电势是容易求出的(设圆周上电势为零)，它应是 $-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{\zeta}{\frac{b}{a}}=-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{a\zeta}{b}$。

回到Z平面上，Z 平面的复势是 $-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{a(Z-b)}{b(Z-a^2/b)}$，

电势分布为 $\mathrm{Re}\left[-\dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\dfrac{a(Z-b)}{b(Z-a^2/b)}\right]$

$$=\frac{-Q}{2\pi\varepsilon_0}\ln\left|\frac{a^2(x-b)^2+a^2y^2}{(bx-a^2)^2+b^2y^2}\right|^{1/2}.$$

3.甚长金属圆柱的轴平行于甚大金属平板，两者相距为b，平板接地，圆柱半径为a，试求每单位长度的电容量。

解：先找A和B两点，使它们对于圆和实轴对称，设A在y_1i，B在$-y_2i$，($y_1>0$，$y_2>0$)，根据对称的定义，

$$\begin{cases}(b-y_1)(b+y_2)=a^2,\\ y_1=y_2,\end{cases}$$

解得$y_1=y_2=\sqrt{b^2-a^2}$，

于是分式线性变换 $\zeta=\dfrac{Z-iy_1}{Z+iy_2}$，

把原来Z平面上的圆周和实轴变为在ζ平面上的同心圆，圆心在原点半径分别为

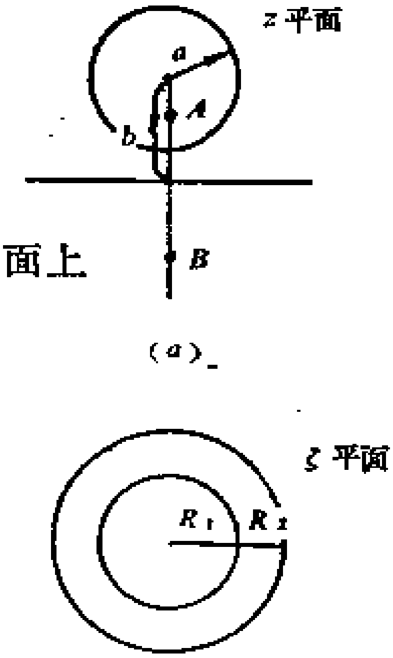


图 17-3

$$R_1=\left|\frac{(b-a-y_1)i}{(b-a+y_2)i}\right|$$

$$=\left|\frac{b-a-\sqrt{b^2-a^2}}{b-a+\sqrt{b^2-a^2}}\right|$$

$$=\left|\frac{a^2+b^2-2ab-b^2+a^2}{(b-a+\sqrt{b^2-a^2})^2}\right|$$

$$=\left|\frac{-2a(b-a)}{(b-a)(\sqrt{b-a}+\sqrt{b+a})^2}\right|$$

$$=\frac{2a}{b-a+b+a+a\sqrt{b^2-a^2}}=\frac{a}{b+\sqrt{b^2-a^2}},$$

$$R_2=\left|\frac{o-iy_1}{o+iy_1}\right|=1,$$

从而电容量 $c=\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\dfrac{R_2}{R_1}}=\dfrac{2\pi\varepsilon_0}{\ln\left(\dfrac{b}{a}+\sqrt{\dfrac{b^2}{a^2}-1}\right)}$，由于保角变换不改变电容量，回到Z平面，原来的电容量也是这数值。

4. 甚大金属平面有柱形隆起，其横截面为弓形，弓形在 c 和a之间，弓形弧内半径为a，求解带电后的静电场。

解：作分式线性变换

$$Z_1=\frac{-Z}{Z-a},$$

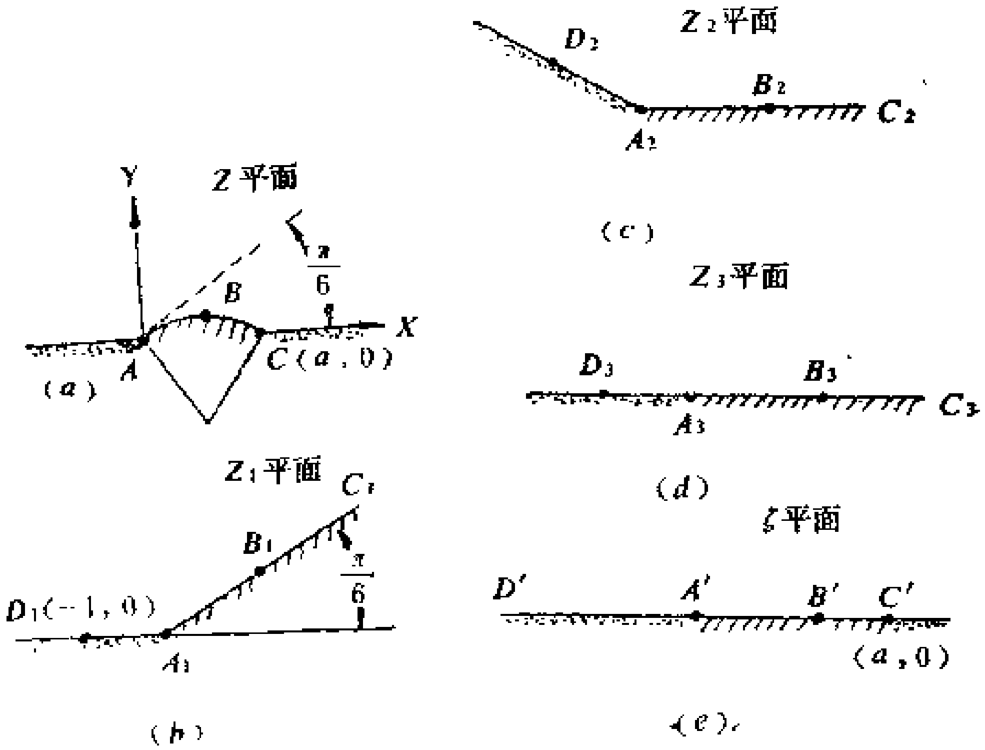


图 17-4

这个变换使C点变为Z_1平面的∞，A，B、C变为射线$A_1B_1C_1$。圆弧和AC'的交角$\pi/6$不变，无限远点D则变为$Z_1=-1$即D_1点。

再作变换

$$Z_2=e^{-\frac{\pi}{6}i}Z_1,$$

这相应于Z_1顺时针转$\frac{\pi}{6}$再作变换

$$Z_3=Z_2^{\frac{6}{5}},$$

在这个变换下正实轴这一段不变，A_2,D_2,C_2，则变成负实轴A_3,D_3,C_3。

再作分式线性变换

$$\zeta=\frac{aZ_3}{Z_3+1},$$

使D_3变为∞点D'，Z_3上的∞点C_3变成ζ平面上的C'点（a点），ζ平面上的电势为$C_1\eta+C_2$，即$C_1I_m\zeta+C_2$，回到原来的变数，即得解。

注：如果将 Z_3 作变换$\zeta'=\sqrt{Z^3}$，则Z_3的幅角为$0°$时不变，幅角为2π时变为π度，则有

图 17-5

这时好象可以得出ζ'平面上的电势为$C_1\eta'+C_2$或$C_1I_m\zeta'+C_2$，但是仔细考虑一下，在ζ'的等势线相交于∞点，即C'点，而在Z平面上却不相交于C'点，而是相交于∞的D点，因此作$\zeta'=\sqrt{Z_3}$变换而得出的等势是不对的。

注：保角变换，解题的一般方法：

上半平面及平面上，一点Z_0	令$\zeta=\dfrac{Z-Z_0}{Z+Z_0}$	Z_0变换成ζ平面上的圆心，圆半径是1
相离二圆或一圆及圆外一直线	求出公共对称点Z_1，Z_2，再令$\zeta=\dfrac{Z-Z_1}{Z-Z_2}$	变换成同心圆
二圆相切、或一直线与圆相切	设切点为Z_0 令 $\zeta=\dfrac{1}{Z-Z_0}$	变换成带形域
带形域	令$\zeta=e^Z$	变成角域或环域
角域	令$\zeta=Z^n$	化成半平面或全平面

二相交圆弧	设交点为Z_1，Z_2 令 $\zeta=\dfrac{Z-Z_1}{Z-Z_2}$	变换成角域
上半平面有半圆突起	令 $\zeta=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{Z}{R}+\dfrac{R}{Z}\right)$	化成上半平面
椭圆	$Z=\dfrac{C}{2}\left(\zeta-\dfrac{1}{\zeta}\right)$	变成圆，半径 $R=\dfrac{a+b}{c}$

5.长金属柱，其截面由两段圆弧围成，这两段圆弧是相等的，其半径为a，交点在b和a，求解金属柱带电后的静电场。

解：(i) 分式线性变换

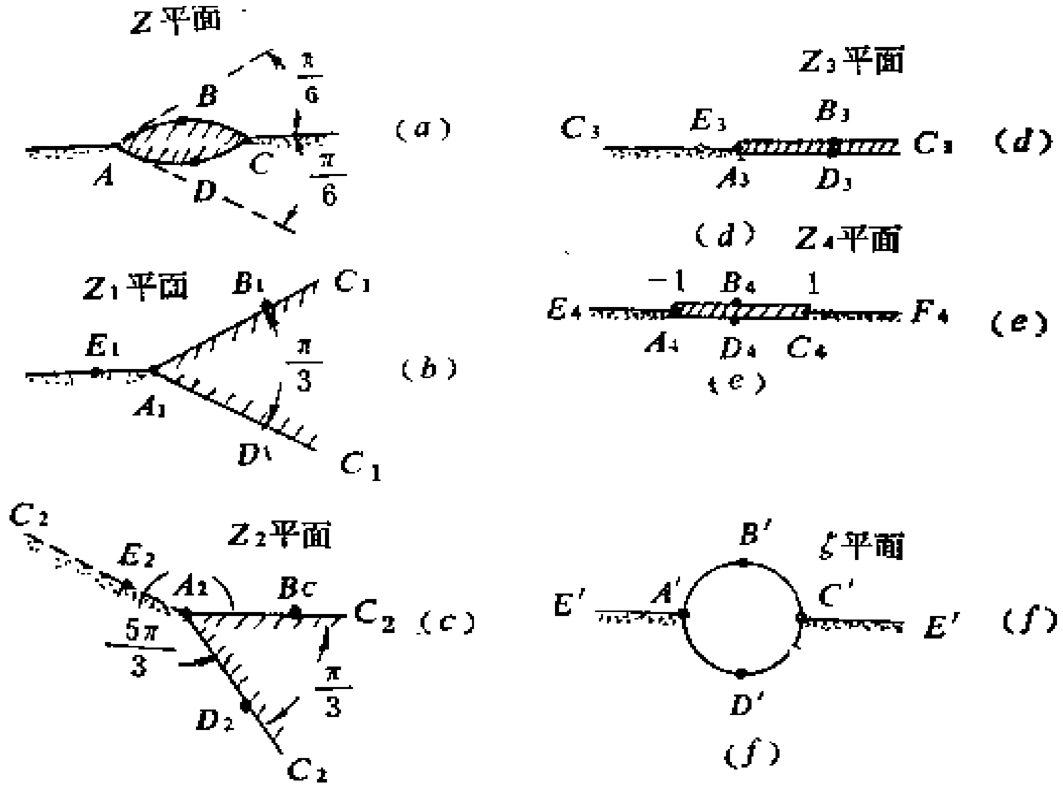


图 17-6

$$z_1=\frac{-z}{z-a},$$

将圆弧ABC变为射线$A_1B_1C_1$，

将圆弧ADC变为射线$A_1D_1C_1$，

二者交角$\frac{\pi}{3}$不变。

再作变换$z_2 = e^{-\frac{\pi}{6}i} z_1$，把图形顺时针转$\frac{\pi}{6}$，射线$A_1B_1C_1$变为正轴$A_2B_2C_2$，射线$A_2B_2C_2$与$A_2D_2C_2$之间夹角为$\frac{5\pi}{3}$，

再作变换$z_3 = z_2^{6/5}$，

将夹角放大$\frac{6}{5}$倍，从而射线$A_3B_3C_3$与$A_3D_3C_3$成为正实轴割线两岸，

再作变换$z_4 = \frac{z_3 - 1}{z_3 + 1}$，

将正实轴割线两岸，变为从-1到$+1$的割线两岸。引用儒阔夫斯基变换

$$z_4 = \frac{1}{2}\left(\zeta + \frac{1}{\zeta}\right).$$

将-1，$+1$，割线两岸变为单位圆，于是问题变为长金属圆柱带电后的静电场，ζ平面的电势为$C_1 \ln|\zeta| + C_2$回到z平面，即得原来那种长金属柱带电后的静电场。

解：(ii) 如(i)一样先作变换

$z_1 = \frac{-z}{z-a}$再作变换$z_2 = e^{-\frac{\pi}{6}i} z_1$，然后再作变换

$z_5 = z_2^{\frac{3}{5}}$这相当于z_2的模缩小原来的$\frac{3}{5}$倍，幅角成为原来的$\frac{3}{5}$倍即$\frac{3}{5} \times \frac{5}{3}\pi = \pi$，这就是说$A_5B_5C_5$和

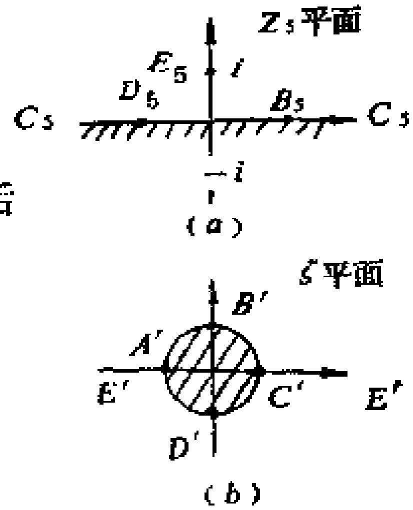


图 17-7

$A_5D_5C_5$成一直线，再作变换

$$z_6=\frac{z_5+i}{z_5-i},$$

$-i$变成ζ平面上的原点，它是圆心，圆半径是$R=|z_6|=\left|\frac{0+i}{0-i}\right|=1$，电势$=C_1\ln|z_6|+C_2$。

可以验证：解(ii)与解(i)等价，事实上

$$z_4=\frac{z_3-1}{z_3+1}=\frac{z_5^2-1}{z_5^2+1}=\frac{[i(z_6+1)/(z_6-1)]^2-1}{[i(z_6+1)/(z_6-1)]^2+1}$$

$$=\frac{-(z_6+1)^2-(z_6-1)^2}{-(z_6+1)^2+(z_6-1)^2}=\frac{-2(z_6^2+1)}{-4z_6}=\frac{1}{2}\left(z_6+\frac{1}{z_6}\right),$$

可见$\zeta=z_6$，

不过，在解(ii)之中，各点的对应关系不如解(i)那样明显。

6. 把下列区域保角变换为圆。

(1) 弓形$I_m z\geqslant1,|z|\leqslant2$.

这是以原点为圆心，以2为半径的弧以及经过$-\sqrt{3}+i$和$\sqrt{3}+i$的直线，两者所围的图形。作变换$z_1=\dfrac{z+\sqrt{3}-i}{-z+\sqrt{3}+i}$

A点变成z_1平面上的原点，B点成为z_1平面上的∞点，再作变换$z_2=z_1^3$，

z_1的$\dfrac{\pi}{3}$角域变成z_2的上半平面，再作变换

$$\zeta=\frac{z_2-i}{z_2+i},$$

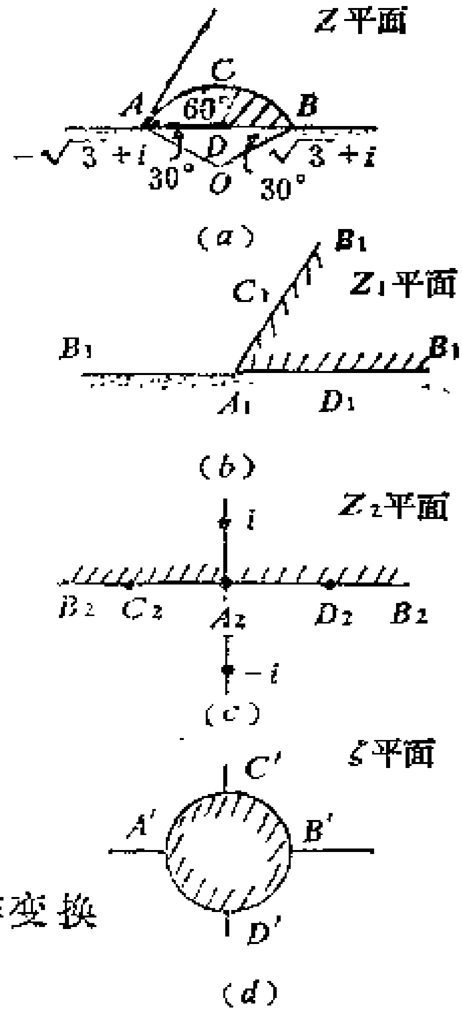


图 17-8

圆的半径$R = |\zeta| = \left|\frac{0-i}{0+i}\right| = 1$,

（2） 圆$|z| = 2$外，除去第一象限作变换

$$z_1 = e^{-i\frac{\pi}{2}} z,$$

再作变换

$$z_2 = z_1^{\frac{2}{3}},$$

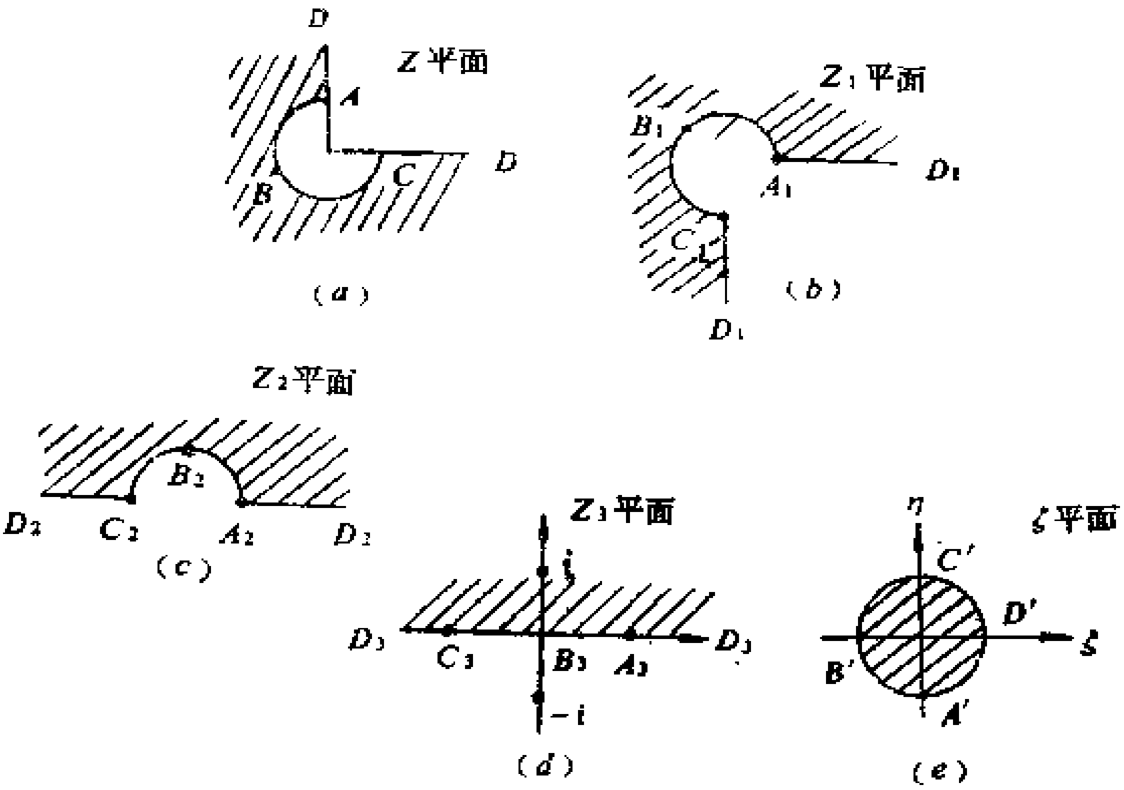


图 17-9

引用§54，例7的结果$z_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{z_2}{2^{2/3}} + \frac{2^{2/3}}{z_2}\right)$将$z_2$平面的划线区域变为$z_3$的上半平面.

再作变换

$$\zeta = \frac{z_3 - i}{z_3 + i},$$

变成ζ平面上的一个圆,

半径$R=|\zeta|=\left|\dfrac{0-i}{0+i}\right|=1$.

（3）二个相切的圆$|z|\leqslant 2$,和$|z-3|\leqslant 1$以外的区域.

作变换$z_1=\dfrac{1}{z-2}$,

B点变成∞点,A变为$-\dfrac{1}{4}$,C为$+\dfrac{1}{2}$,两圆和实轴的交角不变,AB的上半圆弧变成z_1的实轴下部,以$z=0$代入z_1得$z_1=\dfrac{-1}{2}$.

由此得知z平面上给定的区域变为z_1平面的条形区域,

再作变换$z_2=e^{iz_1}$,

变换$z_3=z_2e^{\frac{i}{4}}$,

变换$z_4=z_2^{\frac{1}{3}\pi}$,

最后作变换

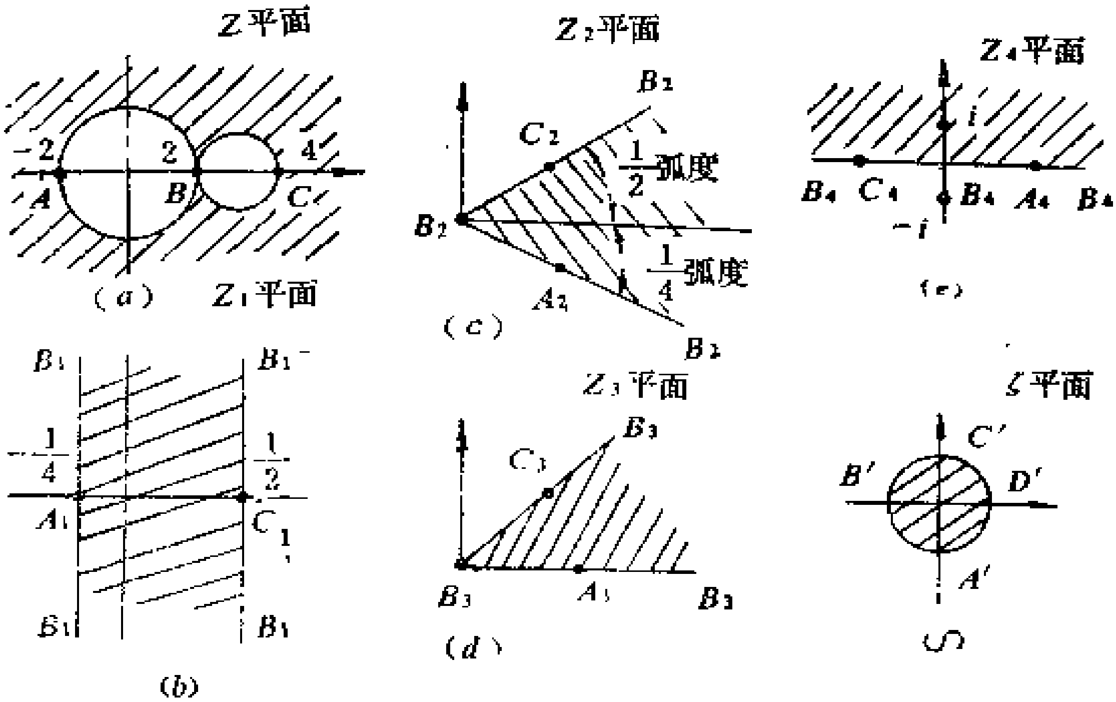
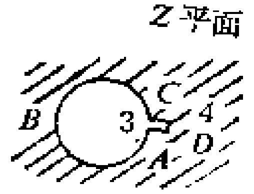


图 17-10

$$\zeta=\frac{z_3-i}{z_4+i}.$$

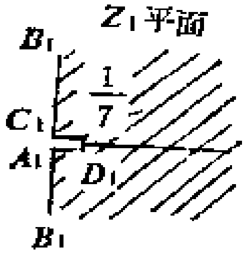
即将给定的区域变为圆。

（4）圆$|z|\leqslant 3$除去突起$\begin{cases}I_m z=0,\\ 3\leqslant R_e z\leqslant 4,\end{cases}$



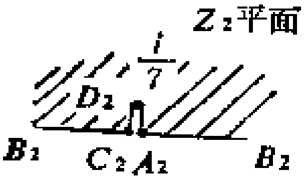
（a）

作$z_1=\frac{z-3}{z+3}$

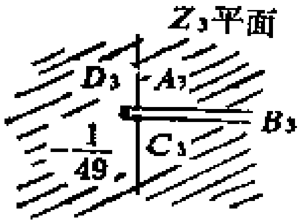


（b）

变换$z_2=iz_1$



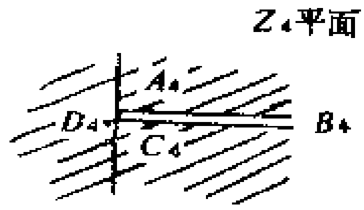
（c）



（d）

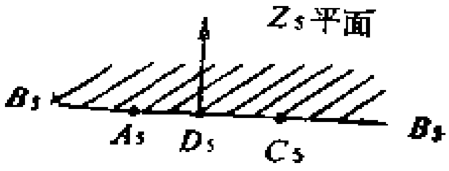
$$z_4=z_3+\frac{1}{49}$$

再作变换$z_3=z_2^2$

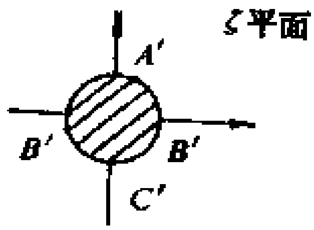


（e）

作变换$z_5=\sqrt{z_4}$



（f）



（g）

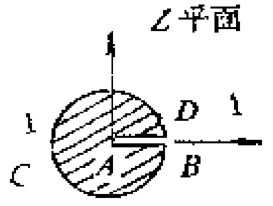
图 17-11

从z_2平面到z_5平面的变换就是课本中§54例2的变换，最后作变换

$$\zeta=\frac{z_5-i}{z_5+i}$$

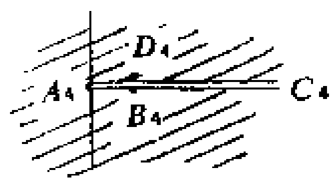
（5）在圆形区域有割线 $\begin{cases} I_m z=0, \\ 0\leqslant R_e z\leqslant 1, \end{cases}$

Z平面



（a）

Z_4平面

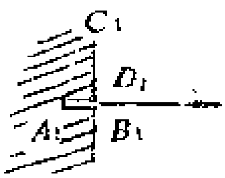


（e）

用分式线性变换，将圆变成直线

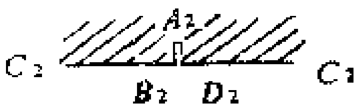
$$z_1=\frac{z-1}{z+1},$$

Z_1平面



（b）

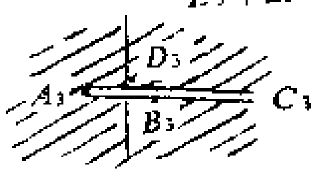
再作变换$z_2=-iz_1$，



（c）

再作变换$z_3=z_2^2$，

Z_3平面

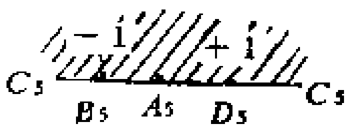


（d）

再变换$z_4=z_3+1$，

再作变换$z_5=\sqrt{z_4}$，

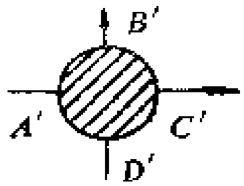
Z_5平面



（f）

从z_2到z_6的变换，即课本§54例2的变换，最后作变换 $\zeta=\dfrac{z-i}{z+i}$，

ζ平面



（g）

图 17-12

（6） 心脏线$|z|\leqslant\cos^2\left[\frac{1}{2}\arg z\right]$的内部

令$\zeta=\sqrt{z}$即$z=\zeta^2$，心脏内部区域变为$|\zeta^2|=\cos^2\left[\frac{1}{2}\arg\zeta^2\right]$的内部.

即$|\zeta|^2=\cos^2[\arg\zeta]$,

再即$|\zeta|=1\cdot\cos\arg\zeta$，用极坐标表出则是$\rho=\cos\psi$，这正是圆.

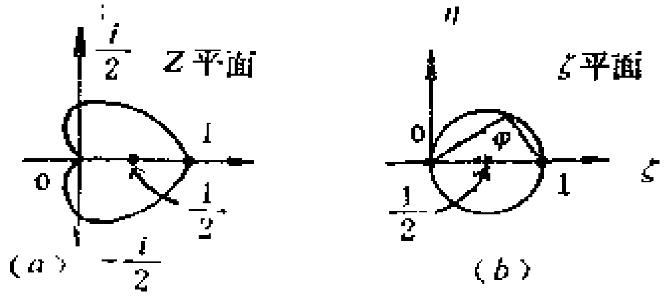


图 17-13

（7） 双纽线一支$|z|\leqslant\sqrt{\cos[2\arg z]}$,

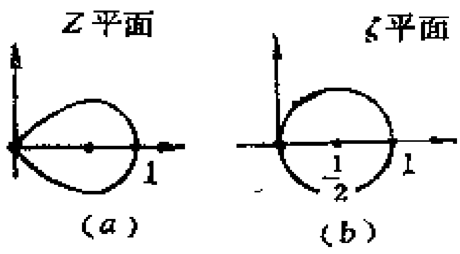


图 17-14

令 $\zeta=z^2$，即$z=\sqrt{\zeta}$,

z平面的双纽线在ζ平面上变为$|\zeta|=1$， $\cos\arg\zeta$，这正是圆.

7.研究甚长带电导体周围的静电场，带宽为$2a$.

解：带电导体可以看作是焦点在$-a$，a，半长轴为a，半短

轴为 0 的椭圆. 作儒阔夫斯基变换$\frac{z}{a}=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right)$, 带电导体变成在$\zeta$平面上半径为 1 的圆柱, 圆柱外的电势可表示为 $C_1\ln|\zeta|+C_2$,将这个表达式中的ζ变换到 z 即得原来那个静电场中的电势.

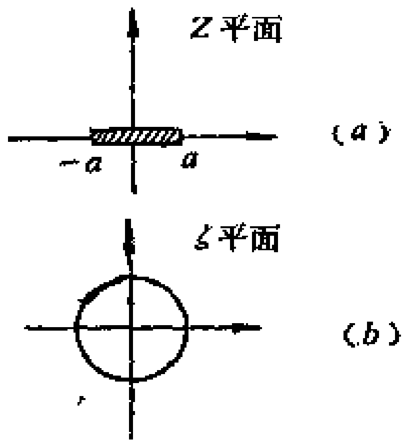


图 17-15

8.研究甚长带电椭圆导体柱周围的静电场,椭圆半长轴为 a, 半短轴为 b.

解: 用儒阔夫斯基变换

$$\frac{z}{\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),$$

把 z 平面的椭圆变成ζ平面的圆.

圆的半径为 $$\frac{a+b}{\sqrt{a^2-b^2}},$$

电势为$C_1\ln|\zeta|+C_2$.

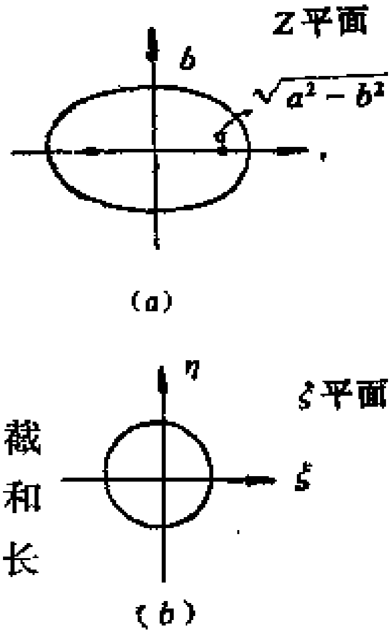


图 17-16

9.二个椭圆柱构成柱形电容器,横截面是两个共焦点椭圆,半长轴分别为 a_1 和 a_2, 半短轴分别为b_1和 b_2 试求每单位长度的电容.

解: 两焦点距离的一半

$$C=\sqrt{a_1^2-b_1^2}=\sqrt{a_2^2-b_2^2},$$

通过变换 $$\frac{Z}{C}=\frac{1}{2}\left(\zeta+\frac{1}{\zeta}\right),$$

把共焦点椭圆变成 ζ 平面上的同心圆, 半径分别为$R_1=\frac{a_1+b_1}{C}$和 $R_2=\frac{a_2+b_2}{C}$ 所以所求的电容量是

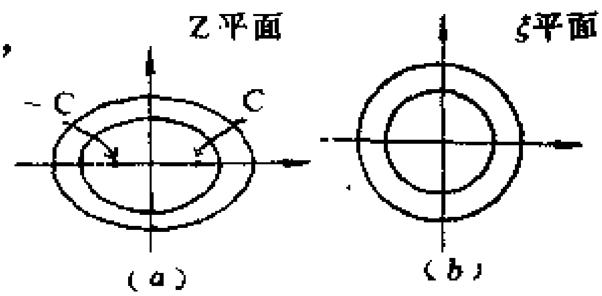


图 17-17

$$C=2\pi\varepsilon_0/\ln\frac{R_2}{R_1}=2\pi\varepsilon_0/\ln\frac{a_2+b_2}{a_1+b_1}.$$

10. 求解二维稳恒水流通过宽度为$2a$的闸门的情形。

解，闸门处即 $\begin{cases}\mathrm{I_m}z=0,\\ -a<\mathrm{R_e}z<a.\end{cases}$

由于水没有横向流动，因而速度势相等。通过变换

$\frac{z}{a}=\frac{1}{2}\left(\xi+\frac{1}{\xi}\right)$，闸门变为半径为 1 的圆柱，而圆柱表面上的速度势相等。与静电势相对比易知速度势$=C_1\ln|\xi|+C_2$。

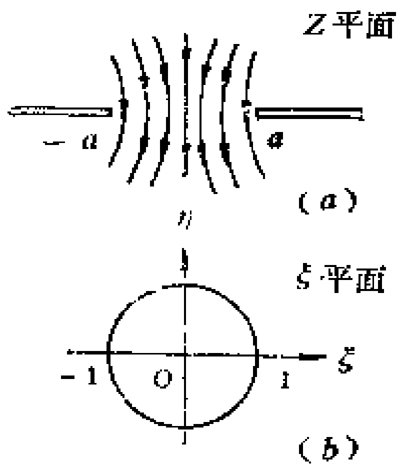


图 17-18

11. 右图是六角“星”的六个臂，彼此相隔60°，各臂的长度为 1，试把星的外部变为ξ平面单位圆的外部（提示 $z_1=z^3$，$\xi_1=\xi^3$再找出z_1和ξ_1之间的关系）。

解：作变换$z_1=z^3$，

和 $\xi_1=\xi^3$，

则 z 平面变为z_1的三叶交叉平面，原六角星成为三叶上沿实轴的一段（从-1到$+1$）割线，ξ平面单位圆的外部变为ξ_1的三叶交叉平面的单位圆外部。

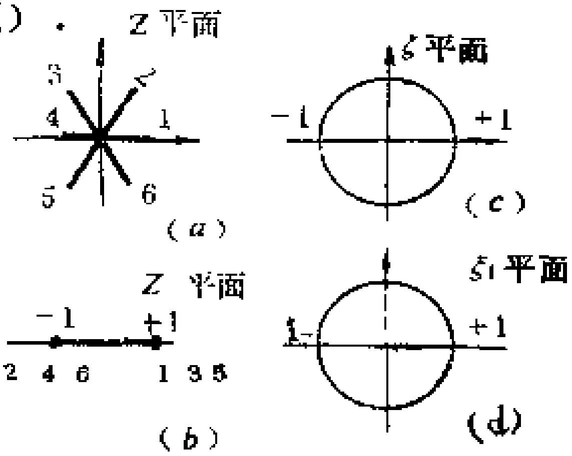


图 17-19

儒阔夫斯基变换 $z_1=\frac{1}{2}\left(\xi_1+\frac{1}{\xi_1}\right)$将$z_1$平面的图形变为$\xi_1$平面上的图形，因此，所求变换为

$$z^3=\frac{1}{2}\left(\xi^3+\frac{1}{\xi^3}\right),$$

12. 研究电机的转子和定子之间（图17-20）的磁场，求最大磁场和最小磁场之比。

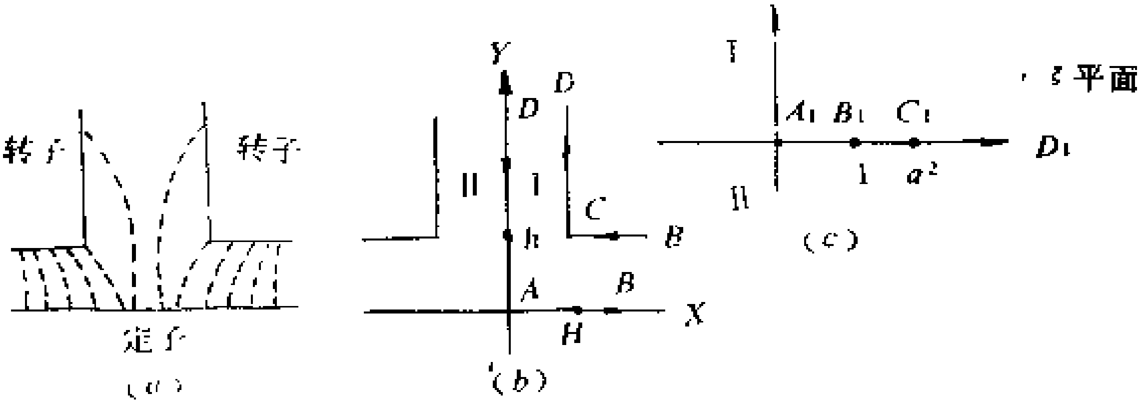


图 17-20

解："磁势" u 在转子和定子之间的区域中满足拉普拉斯方程，定子和转子的表面为等势面。找变换，使 z 空间变为 ζ_1 的全平面，区域 I 和 II 分别变为 ζ_1 平面的上半和下半平面。由于对称性，我们只考虑区域 I 和 ζ_1 上半平面。将区域 I 的 A, B, C, D 变成 ζ_1 平面的 A_1, B_1, C_1, D_1（其对应坐标见附表）的许瓦兹-克利斯多菲变换为：

附表

z 平 面	θ	$-\frac{\theta}{\pi}$	ζ_1 平 面
$A(0,0)$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$A_1(0,0)$
$B\left(\infty, \begin{smallmatrix}0\\h\end{smallmatrix}\right)$	π	-1	$B_1\left(\begin{smallmatrix}1-0\\1+0\end{smallmatrix}, 0\right)$
$C(H,h)$	$-\frac{\pi}{2}$	$+\frac{1}{2}$	$C_1(a^2,0)$
$D\left(\begin{smallmatrix}H\\0\end{smallmatrix}, \infty\right)$	π	-1	$D_1\left(\begin{smallmatrix}+\infty\\-\infty\end{smallmatrix}, 0\right)$

$$z = z_0 + A\int\sqrt{\frac{\zeta_1 - a^2}{\zeta_1}}\ \frac{1}{\zeta_1 - 1}\,d\zeta_1$$

作代换
$$\sqrt{\frac{\zeta_1-a^2}{\zeta_1}}=u,$$
即
$$\zeta_1=\frac{a^2}{1-u^2},$$
$$\frac{1}{\zeta_1-1}=\frac{1-u^2}{a^2-1+u^2},$$
$$d\zeta_1=\frac{2a^2udu}{(1-u^2)^2},$$
变换公式成为
$$\begin{aligned}z&=z_0+A\int u\frac{1-u^2}{a^2-1+u^2}\ \frac{2a^2u}{(1-u^2)^2}du\\&=z_0+2A\int\frac{a^2u^2du}{(a^2-1+u^2)(1-u^2)}\\&=z_0-2A\int\left[\frac{a^2-1}{a^2-1+u^2}-\frac{1}{1-u^2}\right]du\\&=z_0-2A\left[\sqrt{a^2-1}\ \operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{a^2-1}}-\operatorname{arcth}u\right],\end{aligned}$$
我们注意到
$$\operatorname{arctg}x=-i\ln\sqrt{\frac{1+ix}{1-ix}},$$
$$\operatorname{arcth}x=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}},$$
由此读者可以验证.

（1）如$x<1$，则$\operatorname{arcth}x$为实数，如$x>1$则
$$\begin{aligned}\operatorname{arcth}x&=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\ln\sqrt{\frac{1+x}{-(x-1)}}=\ln\left(-i\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\right)\\&=\ln(-i)+\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}=-\frac{\pi}{2}i+\ln\sqrt{\frac{x+1}{x-1}}\end{aligned}$$
即$\operatorname{arcth}x$是复数.

（2）如$x\to 1-0$则$\operatorname{arcth} x=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\infty$为实数，

如$x\to 1+0$则$\operatorname{arcth} x=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\ln\sqrt{\frac{x+1}{-(x-1)}}=-\frac{\pi}{2}i+\infty$

两者虚数部分不同，相差$-\frac{\pi}{2}$。

（3）如$x\to\pm\infty$时，

则 $$\operatorname{arcth} x=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\ln\sqrt{\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}}=\ln\frac{1}{\sqrt{-1}}$$

$$=\ln(-i)=-\frac{\pi}{2}i.$$

（4）$$\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{x}\right)=-i\ln\sqrt{\frac{1+i\frac{1}{x}}{1-i\frac{1}{x}}}=-i\ln\sqrt{\frac{x+i}{x-i}}$$

$$=-i\ln\sqrt{\frac{-x_i+1}{-x_i-1}}=-i\ln\sqrt{\frac{1+(-x_i)}{-[1-(-x_i)]}}$$

$$=-i\ln(-i)\sqrt{\frac{1+(-x_i)}{1-(-x_i)}}$$

$$=-i[\ln(-i)+\ln\sqrt{\frac{1+(-x_i)}{1-(-x_i)}}$$

$$=+\frac{\pi}{2}-i\ln\sqrt{\frac{1+(-x_i)}{1-(-x_i)}}$$

$$=+\frac{\pi}{2}+\operatorname{arctg}(-x)=+\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x.$$

（5）$$\operatorname{arcth} x=\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}=\ln\sqrt{\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}}=\ln\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}}{-\left(1-\frac{1}{x}\right)}}$$

$$=\ln(-i)+\ln\sqrt{\frac{1+\frac{1}{x}}{1-\frac{1}{x}}}=-\frac{\pi}{2}i+\operatorname{arcth}\frac{1}{x}$$

$$=\ln(-i)+\operatorname{arcth}\frac{1}{x}.$$

(6) $\operatorname{arctg}ix=i\operatorname{arcth}x$, $\operatorname{arcth}ix=i\operatorname{arctg}x$.

(7) $\lim\limits_{x\to a^2}\operatorname{arctg}\sqrt{a^2-1}\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}=\operatorname{arctg}\infty=\frac{\pi}{2}$,

另一方面$\lim\limits_{x\to a^2}\operatorname{arctg}\sqrt{a^2-1}\sqrt{\frac{x}{x-a^2}}=\lim\limits_{x\to a^2}i\operatorname{arcth}\sqrt{a^2-1}\sqrt{\frac{x}{a^2-x}}$

$$=i\left(-\frac{\pi}{2}\right)i=\frac{\pi}{2}.$$

现在根据点之间的对应关系确定变换公式中的z_0和A，首先由$z=0+0$和$\zeta_1=0+0$的对应知$u=i\infty$而$0=z_0-2A[\sqrt{a^2-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\ln(-i)]$，因而$z_0=2A[\sqrt{a^2-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\ln(-i)]$，而变换公式成为

$$z=2A[\sqrt{a^2-1}\left(-\frac{\pi}{2}\right)-\ln(-i)]$$

$$-2A[\sqrt{a^2-1}\operatorname{arctg}\frac{u}{\sqrt{a^2-1}}-\operatorname{arcth}u]$$

$$=2A\left[\sqrt{a^2-1}\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{a^2-1}{u}}+\operatorname{arcth}\frac{1}{u}\right]$$

$$=2A\left[\sqrt{a^2-1}\operatorname{arctg}\sqrt{a^2-1}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}+\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}\right],\tag{1}$$

其次由$\zeta_1=1-0$和$z=\infty$的对应知

$$\infty = 2A\left\{\sqrt{a^2-1}\, i\left[\operatorname{arcth}\left(\sqrt{a^2-1}\sqrt{\frac{\zeta_1}{a^2-\zeta_1}}\right)\right]_{\zeta_1\to1-0}\right.$$

$$\left.+i\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}\right\},$$

即 $$\infty = 2A\left\{\sqrt{a^2-1}\cdot i\cdot\infty + i\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}\right\}$$

$$= i\,2A\left\{\sqrt{a^2-1}\cdot\infty + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}\right\},$$

由此可见$2A$应为纯虚数，把它记作iC(C为实数）变换公式改写为：

$$z = iC\left[\sqrt{a^2-1}\operatorname{arctg}\left(\sqrt{a^2-1}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}\right)\right.$$

$$\left.+\operatorname{arcth}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}\right], \qquad (2)$$

同时还有$\zeta_1=1+0$对$z=\infty+ih$对应即

$$\infty+ih = iC\left\{\sqrt{a^2-1}\, i\left[\operatorname{arcth}\left(\sqrt{a^2-1}\sqrt{\frac{\zeta_1}{a^2-\zeta_1}}\right)\right]_{\zeta_1\to1+0}\right.$$

$$\left.+i\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}\right\}$$

$$= iC\left\{\sqrt{a^2-1}\, i\left(\infty - i\frac{\pi}{2}\right) + i\operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}\right\}$$

$$= i\frac{\pi}{2}C\sqrt{a^2-1} - C\left\{\sqrt{a^2-1}\cdot\infty + \operatorname{arctg}\sqrt{\frac{1}{a^2-1}}\right\},$$

由此可见$C=\frac{2}{\pi}\frac{h}{\sqrt{a^2-1}}$， (3)

又其次由于$\zeta_1=+\infty$和$z=H+i\infty$的对应知

$$H+i\infty = iC\left\{\sqrt{a^2-1}\operatorname{arctg}\sqrt{a^2-1} + \left(\infty - \frac{\pi}{2}i\right)\right\},$$

由$\zeta_1=-\infty$和$z=i\infty$对应知

$i\infty = iC\{\sqrt{a^2-1}\operatorname{arctg}\sqrt{a^2-1}+\infty\}$，由此两式可见

$$C = +\frac{2}{\pi}H, \tag{4}$$

（3）和（4）式应不矛盾，这表明$\frac{h}{\sqrt{a^2-1}}=H$，即

$$a^2 = 1+\frac{h^2}{H^2}, \tag{5}$$

还有$\zeta_1=a^2$和$z=H+ih$对应，即

$$H+ih = iC\left[\sqrt{a^2-1}\cdot\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}i\right],$$

这就是说 $C\sqrt{a^2-1}\,\frac{\pi}{2}=h$， $C=\frac{2}{\pi}H$，可得$a^2=1+\frac{h^2}{H^2}$，

这正是（3）和（4）式这样从z平面到ζ_1平面的变换为

$$z=+i\frac{2}{\pi}\left[h\,\mathrm{arctg}\frac{h}{H}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}+H\,\mathrm{arcth}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}\right].$$

接着作变换$\zeta_2=\sqrt{\zeta_1}$区域Ⅰ变成ζ_2平面的第一象限，又作变换

$$\zeta_3 = \frac{1+\zeta_2}{1-\zeta_2},$$

$$\zeta=\frac{V}{\pi}\ln\zeta_3=\frac{V}{\pi}\ln\frac{1+\sqrt{\zeta_1}}{1-\sqrt{\zeta_1}},$$

在ζ平面的磁势为η_1，复势为ζ，而磁场

$$B=\left|\frac{d\,复势}{dz}\right|=\left|\frac{d\zeta}{dz}\right|$$

$$=\left|\frac{d\zeta}{d\zeta_1}\Big/\frac{dz}{d\zeta_1}\right|=\frac{V}{H}\,\frac{1}{\sqrt{\zeta_1^2-a^2}},$$

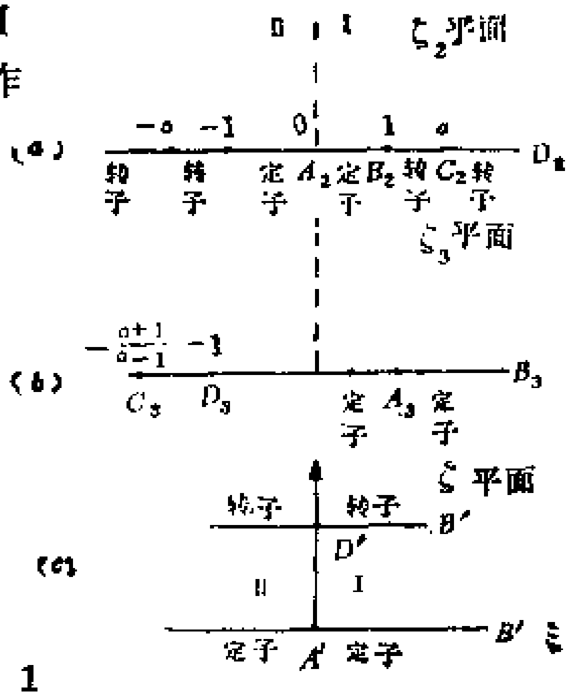


图 17-21

在点A，磁场最小，A点为$z=0$，它对应于$\zeta_1=0$，

$$\therefore \quad B_{\min}=\frac{V}{H}\cdot\frac{1}{a},$$

在B点磁场最大，B点为$z=\infty$，它对应于$\zeta_1=1$，

$$\therefore \quad B_{\max}=\frac{V}{H}\frac{1}{\sqrt{a^2-1}},$$

$$\therefore \quad B_{\max}:B_{\min}=a:\sqrt{a^2-1}=\sqrt{H^2+h^2}:h.$$

在得到最后结果时应用到 $a^2=1+\frac{h^2}{H^2}$ 以及

$$\left|\frac{dz}{d\zeta_1}\right|=\frac{2}{\pi}\left(\frac{h\cdot\frac{h}{H}}{1+\frac{h^2}{H^2}\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}+\frac{H}{1-\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}\right)\frac{d}{d\zeta_1}\sqrt{\frac{\zeta_1}{\zeta_1-a^2}}$$

$$=\frac{2}{\pi}\left(\frac{h^2H(\zeta_1-a^2)}{H^2(\zeta_1-a^2)+h^2\zeta_1}+\frac{H(\zeta_1-a^2)}{-a^2}\right)$$

$$\times\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\zeta_1-a^2}{\zeta_1}}\cdot\frac{-a^2}{(\zeta_1-a^2)^2}$$

$$=\frac{H}{\pi}\frac{(h^2+H^2)(\zeta_1-a^2)}{[(h^2+H^2)\zeta_1-H^2a^2]\cdot(-a^2)}\sqrt{\frac{1}{\zeta_1(\zeta_1-a^2)}}(-a^2)$$

$$=\frac{H}{\pi}\frac{h^2+H^2}{(h^2+H^2)\zeta_1-h^2a^2}\sqrt{\frac{\zeta_1-a^2}{\zeta_1}}$$

$$=\frac{H}{\pi}\frac{\sqrt{\zeta_1-a^2}}{(\zeta_1-1)\sqrt{\zeta_1}},$$

$$\left|\frac{d\zeta}{d\zeta_1}\right|=\frac{V}{\pi}\frac{1-\sqrt{\zeta_1}}{1+\sqrt{\zeta_1}}\cdot\frac{1}{\sqrt{\zeta_1}(1-\sqrt{\zeta_1})^2}.$$

13. 求z平面半无界长条$0<R_e z<a$，$I_m z>0$上的调和函数，边界条件为$u|_{x=0}=0, u|_{x=a}=0$，$u|_{y=0}=u_0$。

解：要把z平面上的$A(0,0)$，$B(a,0)$，$C(0$或a，$\infty)$点变到ζ平面的$A'(-1,0)$，$B'(1,0)$，$C(\pm\infty,0)$作施瓦兹-克利斯多菲变换，

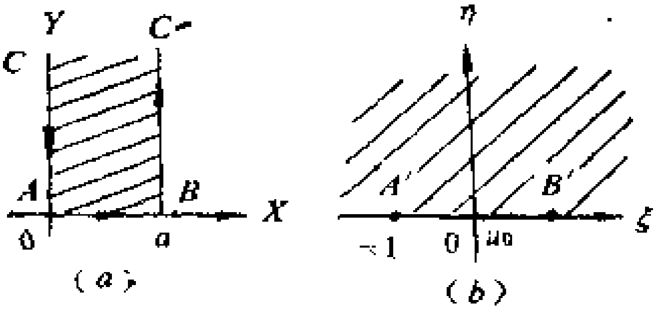


图 17-21

z 平面	θ	$-\frac{\theta}{\pi}$	ζ 平面
$A(0,0)$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1
$B(a,0)$	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
$C\binom{0,\infty}{a}$	π	-1	$\pm\infty$

$$z = z_0 + A\int(\zeta+1)^{-\frac{1}{2}}(\zeta-1)^{-\frac{1}{2}}d\zeta$$

$$= \zeta_0 + A_1\int\frac{d\zeta}{\sqrt{1-\zeta^2}}$$

$$= z_0 - Ai\arccos\zeta, \qquad (1)$$

应用点的对应关系，代入（1）式，$A(0,0)$对应$A'(-1,0)$得，$0 = z_0 - Ai\pi$、$B(a,0)$对应$B'(1,0)$得$a = z_0$，

解得　　$z_0 = a$，$A = -\dfrac{ai}{\pi}$，

于是所求的变换是

$$z = a + \frac{a}{\pi}\arccos\zeta \text{即} \left(\frac{z-a}{a}\right)\pi = \arccos\zeta,$$

亦即　$\zeta = \cos\left(\dfrac{\pi z}{a} - \pi\right) = -\cos\dfrac{\pi z}{a}$，　　　　（2）

应用(50.25)，求ζ平面上的解.

$$u=\frac{u_0}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{d\xi_0}{(\xi-\xi_0)^2+\eta^2}=\frac{u_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\xi-\xi_0}{\eta}\Big|_{-1}^{1}$$

$$=\frac{u_0}{\pi}\left\{\operatorname{arctg}\frac{\xi+1}{\eta}-\operatorname{arctg}\frac{\xi-1}{\eta}\right\}$$

$$=\frac{u_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\eta}{\xi^2+\eta^2-1}, \tag{3}$$

求得ζ平面上的u，再回到z平面上来即为所求的解，利用

$$\eta=I_m\zeta=I_m\left(-\cos\frac{\pi z}{a}\right)$$

$$=\operatorname{sh}\left(\frac{\pi}{a}y\right)\sin\left(\frac{\pi}{a}x\right).$$

$$\xi^2+\eta^2=|\zeta|^2=\left|\cos\frac{\pi z}{a}\right|^2$$

$$=\operatorname{ch}^2\frac{\pi y}{a}\cos^2\frac{\pi x}{a}+\operatorname{sh}^2\frac{\pi y}{a}\sin^2\frac{\pi x}{a}$$

$$=\operatorname{sh}^2\frac{\pi y}{a}\left(\cos^2\frac{\pi x}{a}+\sin^2\frac{\pi x}{a}\right)$$

$$+\left(\operatorname{ch}^2\frac{\pi y}{a}-\operatorname{sh}^2\frac{\pi y}{a}\right)\cos\frac{2\pi x}{a}$$

$$=\operatorname{sh}^2\frac{\pi y}{a}+\cos^2\frac{\pi x}{a}$$

$$=\operatorname{sh}^2\frac{\pi y}{a}+1-\sin^2\frac{\pi x}{a},$$

将求得的η和$\xi^2+\eta^2$代入（3）就得解

$$\therefore\quad u=\frac{u_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\operatorname{sh}\frac{\pi y}{a}\sin\frac{\pi x}{a}}{\operatorname{sh}^2\frac{\pi y}{a}-\sin^2\frac{\pi x}{a}}.$$

14. 把可变电容器中的静电场所占的空间（图17-22）变为

上半面。

解：把z平面上的$ABCD$点，变换到ζ平面上的$A'B'C'D'$点，

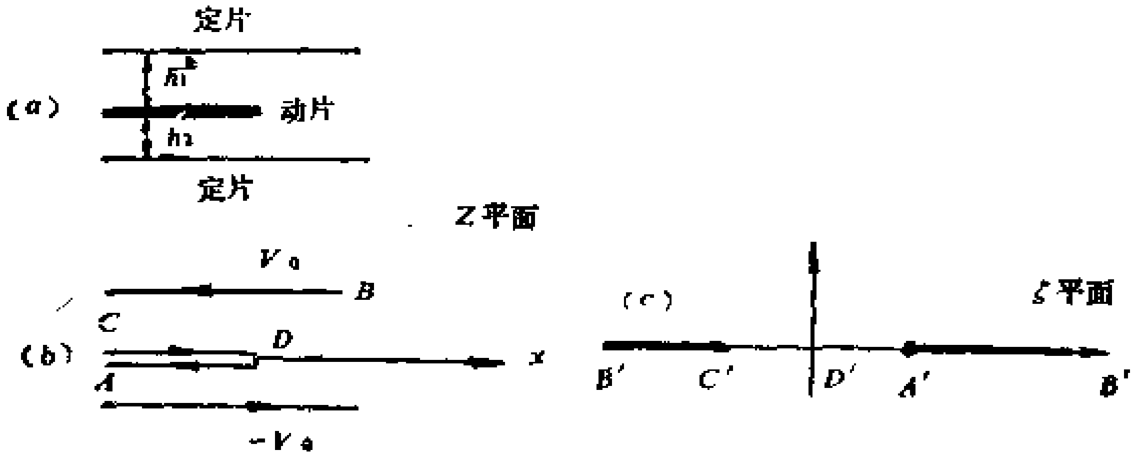


图 17-22

z 平 面	θ	$-\dfrac{\theta}{\pi}$	ζ平面
$A\left(-\infty,\ \begin{matrix}0\text{或}\\-ih_2\end{matrix}\right)$	π	-1	1
$B\left(\infty,\ \begin{matrix}-ih_2\\0\text{或}\end{matrix}\right)$	π	-1	$\pm\infty$
$C\left(-\infty,\ \begin{matrix}ih_1\text{或}\\0\end{matrix}\right)$	π	-1	$-a$
$D(0,0)$	$-\pi$	$+1$	0

$$z=z_0+A\int(\zeta-1)^{-1}(\zeta+a)^{-1}\zeta d\zeta$$

$$=z_0+\frac{A}{1+a}\int\frac{d(-\zeta)}{1-\zeta}+\frac{Aa}{1+a}\int\frac{d\zeta}{\zeta+a}$$

$$=z_0+\frac{A}{1+a}\left[\ln\left(\frac{\zeta}{a}+1\right)+\ln(1-\zeta)\right]. \qquad (1)$$

应用对应关系，由D点$(0,0)$变到$D'(0,0)$所以$z_0=0$。由于A与A'点对应

$$\begin{cases} -\infty - ih_2 = \dfrac{A}{1+a}(-\infty - i\pi), \\ -\infty + 0 = \dfrac{A}{1+a}(-\infty + 0), \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{A}{1+a} = \frac{h_2}{\pi},$$

由C点$(-\infty, ih$,或$0)$对应于$C'(-a, 0)$有

$$\begin{cases} -\infty + ih_1 = \dfrac{h_1}{\pi}a, \ (-\infty + i\pi), \\ -\infty = \dfrac{h_1}{\pi}a(-\infty), \end{cases}$$

$$\therefore \quad \frac{h_1}{\pi} = \frac{h_2}{\pi}a, \quad a = \frac{h_1}{h_2}, \tag{2}$$

代回(1)式便有

$$z = \frac{h_2}{\pi}\ln(1-\zeta) + \frac{h_1}{\pi}\ln\left(1 + \frac{h_2}{h_1}\zeta\right), \tag{3}$$

应用(50,25)求ζ平面上的解

$$\begin{aligned} u &= \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-a} + \int_{1}^{\infty}\right)\frac{V_0}{(\xi_0-\xi)^2+\eta^2}d\xi_0 \\ &= V_0 - \frac{V_0}{\pi}\left[\operatorname{arc\,tg}\frac{a+\xi}{\eta} + \operatorname{arctg}\frac{1-\xi}{\eta}\right] \\ &= V_0 - \frac{V_0}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{\eta\left(1+\dfrac{h_1}{h_2}\right)}{\xi^2+\eta^2+\left(\dfrac{h_1}{h_2}-1\right)\xi - \dfrac{h_1}{h_2}}, \end{aligned}$$

回到原变数，即为所求的解.

15.研究回旋加速器D形盒（图17-23）的静电场，可把D形盒的侧壁当作在无限远处.

解：要把$1(\pm\infty, H)$，$2(-h, H)$，$3(-\infty, \pm H)$，$4(-h, -H)$，$5(\pm\infty, -H)$，$6(h, -H)$，$7(\infty, \pm H)$，$8(h, H)$分别变

为1′($\pm\infty$,0),2′($-b$,0),3′($-a$,0),4′(-1,0),5′(0,0),6′(1,0),7′(a,0),8′(b,0).

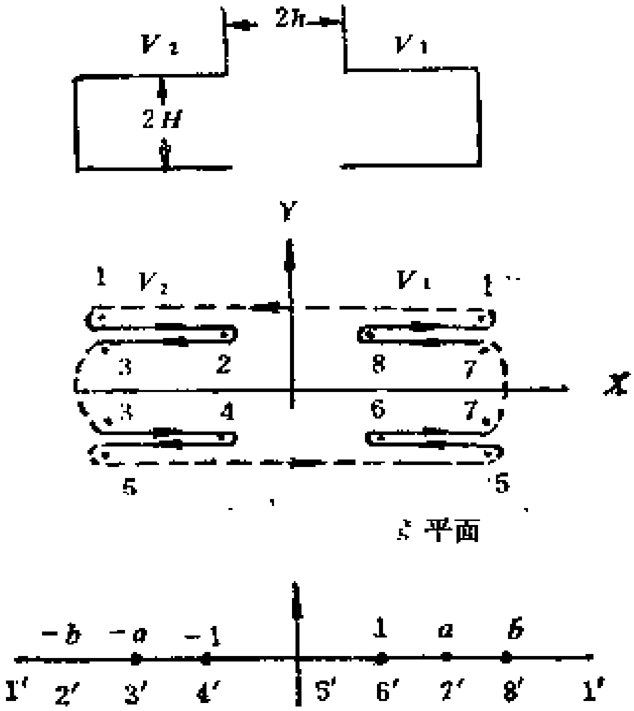


图 17-23

须作变换

$$z=z_1+A\int(\zeta_1+b)(\zeta_1+a)^{-1}(\zeta_1+1)\zeta_1^{-2}(\zeta_1-1)$$

$$\times(\zeta_1-a)^{-1}(\zeta_1-b)d\zeta_1$$

$$=z_1+A\int\frac{(\zeta_1^2-1)(\zeta_1^2-b^2)}{\zeta_1^2(\zeta_1^2-a^2)}d\zeta_1$$

$$=z_1+A\left\{\zeta_1+\frac{b^2}{a^2}\frac{1}{\zeta_1}+\frac{a^2+\frac{a^2}{b^2}-(1+b)^2}{2a}\ln\frac{\zeta_1-a}{\zeta_1+a}\right\},\tag{1}$$

利用点的对应关系

($\pm\infty$,H)变为($\pm\infty$,0),$\pm\infty+iH=z_1+A(\pm\infty+0+0)$

$$\therefore\quad z_1=iH,\tag{2}$$

$(\pm\infty, -H)$变为$(0,0)$，$\pm\infty - iH = iH + A\dfrac{b^2}{a^2}(\pm\infty) + A$

$$\times\frac{a^2+\frac{b^2}{a^2}-(1+b^2)}{2a}\pi i,$$

$$\therefore\quad A\frac{a^2+\frac{b^2}{a^2}-(1+b^2)}{2a}=-\frac{-2H}{\pi}, \tag{3}$$

(h,H)变为$(b,0)$，$(h,-H)$，变为$(1,0)$。

$$\begin{cases} h+iH=iH+A\left(b+\dfrac{b}{a^2}\right)-\dfrac{2H}{\pi}\ln\left(\dfrac{b-a}{b+a}\right), \\ h-iH=iH+A\left(1+\dfrac{b^2}{a^2}\right)-\dfrac{2H}{\pi}\ln\left(\dfrac{1-a}{1+a}\right), \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} h=A\left(b+\dfrac{b}{a^2}\right)-\dfrac{2H}{\pi}\ln\dfrac{\frac{b}{a}-1}{\frac{b}{a}+1}, & (4) \\ h-iH=iH+A\left(\dfrac{b^2}{a^2}+1\right)-\dfrac{2H}{\pi}i\pi-\dfrac{2H}{\pi}\ln\dfrac{a-1}{a+1}, & (5) \end{cases}$$

亦即
$$\begin{cases} h=A\left(b+\dfrac{b}{a^2}\right)-\dfrac{2H}{\pi}\ln\dfrac{\frac{b}{a}-1}{\frac{b}{a}+1}, \\ h=A\left(\dfrac{b^2}{a^2}+1\right)-\dfrac{2H}{\pi}\ln\dfrac{a-1}{a+1}, \end{cases}$$ 两式比较知$b=a^2$，

$$\tag{6}$$

以(6)代入(3)得

$A=\dfrac{4Ha}{(a^2-1)^2\pi}$，而$a$须满足(4)，

即
$$h=\frac{4Ha}{(a^2-1)^2\pi}(1+a^2)-\frac{2H}{\pi}\ln\frac{a-1}{a+1}, \tag{7}$$

把（2）（3）（6）（7）代入（1）得到所作的变换是

$$z=iH+\frac{4Ha}{(a^2-1)^2\pi}\left(\zeta_1+\frac{a^2}{\zeta_1}\right)-\frac{2H}{\pi}\ln\frac{\zeta_1-a}{\zeta_1+a}. \qquad (8)$$

再作变换

$\zeta=\ln\zeta_1$如图17-24.

$$电势=V_1+\frac{V_2-V_1}{\pi}I_m\zeta$$

$$=V_1+\frac{V_2-V_1}{\pi}\arg\zeta_1, \quad (9)$$

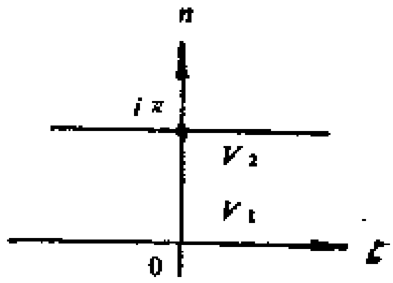


图 17-24

回到原变数，即得解.

而（9）式中的ζ_1由（8）式决定，（8）式中的a由（7）式决定.

编 后 记

梁昆淼教授所编《数学物理方法》于一九六〇年初版，一九七八年七月修订后出第二版，到一九七九年二月已第十次印刷。可见本书流传广泛，甚受欢迎。本书将数学方法与物理内容紧密结合，既着重物理概念的叙述，又适当地保持了数学的严谨性，为综合大学及师范院校的物理专业广泛采用，不少工科院校的有关系科也选为专业数学的教学用书。

本书再版时增补了许多与物理专业密切有关的例题和习题，求解这些习题有助于加深对正文的理解，且丰富和补充了正文的内容。为了启发读者思考，能在比较短的时间内取得较好的学习效果，同时便于教师教学参考，我们收集有关资料解出了该书的全部习题、编成此书。

由于数学物理方法习题的求解往往需要许多时间，把书中全部习题解出来亦非易事，本书的出版是相互协作的结果。梁昆淼教授对本书的出版给予了很大的支持，审阅了原稿，并作了若干订正，我们表示衷心地感谢。杭州大学许健民同志，徐州师范学院周明儒、苏跃中同志，江汉石油学院姜书时同志为本书编写提供过资料及改进意见，谨向他们表示谢意。还有袁士和同志和其他关心支持本书出版的同志，我们均表示谢意。

解题的方法往往是多样的，考虑到篇幅，不可能一一列出。由于我们水平所限，虽经反复审查修改，仍可能有不当和错误之处，敬希同志们批评指正。

编 者

一九八一年三月