应用数学丛书

集合论

程极泰　编著

国防工业出版社

内容简介

本书着重介绍公理集合论的基础，无穷集合的良序化理论，以及一般良序无穷集合上的超限归纳定理和超限递归定理。最后，并给出一些集合理论的应用。

本书可供理工科大学师生的参考，特别适用应用数学的教学和科研工作的参考。

应用数学丛书

集 合 论

程极泰 编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

850×1168 1/32　印张 4 7/8　123 千字

1985年4月第一版　1985年4月第一次印刷　印数：0,001—9,750册

统一书号：15034·2766　　定价：1.00元

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术领域的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前 言

集合论在本世纪二十年代以后，逐渐从朴素的集合论发展为比较完善的公理集合论，公理集合论的特点是紧密了集合理论与数学逻辑的关系，从而，使用公理集合论的语言论述近代数学就愈来愈普遍，和近代数学的关系也愈来愈密切了。

有许多带有根本性的数学问题，例如连续统假设，六十年代对它的详尽论证，就大大地增加了集合论的内容，发现了公理化理论的相容性问题。集合论的目的，本来是用公理系统来研究无穷集合的内在特征，分清楚哪些公理相容，哪些公理无关，这自然是首要问题。今天，我们知道连续统假设这个公理是和通常的 ZF 集合公理体系无关的。哥德尔的完全性定理指出“一个公理化理论当且仅当它有一个模型时才是相容的”，这样，集合论的深入研究又必然要涉及数学逻辑的“模型理论”的研究。

因此，集合论的著作，大体可以分成两种类型，一种是研究点集拓扑学和一般数学研究所需要的内容，称为“集合论基础”，另一种则是包含一些近年来发展的集合论的细致研究内容，例如可构造性、强迫论法、大基数问题以及确定性问题。

集合论基础主要包括 ZF 集合理论的十条公理，按良序化集合将自然数的规律发展为超限归纳定理和超限递归定理，给出严格的序数集合和基数集合的定义，分析无穷集合涉及的选择公理的各种等价定理，集合理论的基本应用等。

集合论基础的著作，近几年才出现几本较好的书，这说明集合论基础已经成熟到了完全自成一个课目的时期。

目　录

第一章　引　言

数学研究的对象，是那些从实际存在的事物中高度抽象出来的一类客体，以这些客体为基础，分析它构成客体的各个组成部分，组成部分的本身也是一种客体，我们就把这些能够属于某客体的部分客体称为集合。所以，我们可以说，通常的数学系统都是用一些集合来描述的。

数学的某一门学科，除了要首先弄清楚集合的一般规律外，还要按学科本身的特有规律给集合以一些新的运算限制，形成该学科所要研究的一种数学模型。所以，通常的数学系统不仅是用集合来描述，而且也是要用集合来构造。在这样的前题下，我们才可以进行数学研究中的各种推理，阐明数学理论与数学方法的最深刻的内容。

由于集合理论是完全就集合本身的一般规律建立起来的理论系统，它在近代数学的各个分支中都是必不可少的工具。近年来，有关集合论的研究日渐深入，逐渐普遍使用到各个方面，所以，集合论是近代数学的基础之一。

集合论研究的基础是人们熟知的一些关于有限集合的性质，从这些显而易见的性质寻求探索无穷集合的途径，和研究无穷集合的具体方法，这就是研究集合论的目的。

就有限集合来说，集合的性质是十分显然的，所以，近年来欧美很多国家就把集合理论的一些简单性质和运算的基本概念放到中学讲授，使学生能尽早地接触近代数学的基础，被称为新数学的第一章，从而，就有所谓孩子们的集合论的提法。

但是，研究集合理论的主要目的是要解决有关无穷集合的问题，研究那些关于有限推理的方法是否能直接引用到有关无穷集合的命题，研究普通推理分析方法在怎样条件下才能使用于有关

无穷集合的问题。今日的集合论已经解决了很大一部分问题，但是，仍然有很多待澄清的问题，需要进一步深入研究。

现在，从研究集合理论的方法上来说，较多的是由朴素集合论逐渐向公理集合论发展；从描述的手段来说，较多的是由非形式观点趋向形式体系，更多地和数学逻辑发生了关系，使集合论占有了数学逻辑四大分支的一个分支。这四个分支是：（1）模型理论；（2）集合理论；（3）递归理论；（4）证明理论。

早在1873年，德国数学家坎托尔（Georg Cantor）就证明了所有实数的集合不能与所有整数的集合构成一一对应，开始了抽象集合理论的研究。接着，在1893年与1903年，德国数学家弗雷格（Gottlob Frege）出版了两本关于数学和哲学的书，指出如何把集合理论归结为数学逻辑的一种自明的演绎思想。最后，德国数学家策墨罗（Ernst Zermelo）于1908年发表了集合论的第一种公理系统，另一位数学家弗朗克（Abraham A. Fraenkel）在1922年又补充完善了策墨罗的公理系统。这种集合论公理系统简称为ZF公理系统，是我们今天论述集合论的基础。

但是，集合论的ZF公理系统刚刚在建立，还来不及研究它本身的协调性，所以在它建立的过程中引起了一些逻辑上的矛盾，由于这些矛盾的严重性，就引起了数学界以至哲学方面的争论。正如当时法国数学家庞加雷（Henri Poincaré）所怀疑的那样，他说："我们围住了一群羊，然而在羊棚里可能也圈进了狼"。

这时，具有代表性的数学界的三个论争学派就是：（1）英国数学家罗素（Bertrand Russell）和怀特海德（Alfred North Whitehead）为代表的逻辑主义学派。（2）荷兰数学家布劳沃（Luitzen E. J. Brouwer）为代表的直觉主义学派。（3）德国数学家希尔伯特（David Hilbert）为代表的形式主义学派。罗素和怀特海德的逻辑主义认为，数学来源于逻辑，并且是逻辑的延拓，所以，在他们的思想中，认为他们所使用的逻辑方法保证了数学的协调性。由于逻辑是无可置疑地协调的，通过逻辑处理，数学就成了从逻辑原理出发的一系列推理。逻辑本身有一些公理，由逻辑导出数学就不需要数学所特有的公理。事实上，逻辑主义的

形式体系并不代表数学的真实，它充其量只达到数学的外表，而不是核心。

布劳沃的直觉主义认为，数学思想是一个构造的过程，它建筑自己的世界，不依赖于经验的世界，也不需要模型，唯一的限制就是应以基本的数学直觉为基础。所以，数学观念应在语言、逻辑和经验之前，是直觉决定着观念的正确性和可接受性。数学思想不依赖于语言，而逻辑原理是构成使用语言的一种方法，所以逻辑是建立在数学上的。从而，直觉主义者不承认从公理出发推导出结论的数学工作，并且提出使用排中律值得怀疑的例子。

希尔伯特的形式主义认为，必须把逻辑和数学同时处理，在数学中，每一个特殊领域应借助于逻辑概念及数学概念和原理获得一种公理基础。他批判不准数学家使用排中律等于不准许天文学家使用望远镜。希尔伯特曾经指责布劳沃企图摆脱掉所有不合他们意的东西。

乍看起来，似乎希尔伯特的思想比较罗素和布劳沃的思想接近事实。然而，如果说只要能够证明一些简单的形式体系的协调性，便能说明形式主义是无可指责的话？那吗1931年奥地利数学家哥德尔（Kurt Gödel）就破灭了这一希望，他指出：人们不能借助于被容许用于希尔伯特元数学的那个狭窄的逻辑来证明包括普通逻辑和数论在内的体系的协调性。

关于集合论公理系统的协调性问题目前仍然是深入研究的一个重要方面。1940年哥德尔证明：如果ZF体系在不用选择公理时是协调的，则当加上这个公理时也是协调的。从这一事实出发，现在有一些集合论的著作常把一些推理命题分成与选择公理有关（标以AC符号）和无关的两类。1963年美国数学家柯亨（Paul J. Cohen）还证明了选择公理与连续统假设这两个公理是与ZF体系相互独立的，并且，包括选择公理在内的ZF体系也不能证明连续统假设这个公理。

总之，集合论的公理体系带来了数学上很大的论证严密性，如果仔细地把一些悖论排除，又能界定公理体系的各个协调关系，今天的数学包括ZF公理体系在内是丰富了的，而不是什么贫乏问题。这就是当今法国学派以布尔巴基（Nicolas Bourbaki）为集体笔名的一批数学家所提出的鼓舞人心的言词。

第二章 基本概念

§2.1 集合概念

当集合理论在1908年到1922年间开始系统建立时，由于ZF集合公理系统的协调性还有些不足之处，还有待于深入分析，集合理论遇到一些似是而非的悖论的非议，其中，最为著名的就是逻辑主义者罗素提出的悖论，这种悖论产生于一种特殊集合，这个集合含有一个仅仅用这个集合自身才能定义的元集，所以，为了避免这种悖论，罗素规定凡是含有一个集合内全部元素的，它本身不应该再是这个集合的一个元。直觉主义者认为“数学无需尊重逻辑规则”，所以在我们准备接受涉及悖论的数学概念和数学构造时，悖论是不重要的；形式主义者则想避免明显地使用所有这个词来避免悖论的出现。这些论述，事实上已经提供了一种避免悖论出现的集合理论的协调性方法，这就是我们在这一章，首先要阐明的：集合是一种好的类，还有一种顽固的类，它不能按集合的一般运算来处理，它们就是一种固有类。

悖论还是一个婉转的措辞，关于悖论，我们是能够判断这一类悖论是真是伪，应该怎样说才是对的。

罗素把他的悖论写成多种形式，其中之一就是所谓的“理发师的悖论”：

一个理发师在城里宣称，他要为所有自己不刮胡子的人刮胡子，而且不为那些自己刮胡子的人刮胡子。

那么，理发师自己该不该为自己刮胡子呢？如果他为自己刮了，按他自己的宣称，他就不该为自己刮的，但是，如他不为自己刮胡子，按他的宣称，又应该由理发师自己为自己刮胡子。

这里，很明显地是，理发师宣称的事情是把他自己排除在外的。

为了从数学上澄清罗素悖论，我们应该首先弄清的是集合概念。

集合理论研究的对象是非常广泛、非常一般的

客体

客体的一个组合，又常是一个客体，也就是若A，B，C都是客体，则由A，B，C构成的一个组合，表示为

$$D\equiv\{A, B, C\}$$

这时，称客体A，B，C是客体D的元，称A，B，C各与D构成一种从属关系，表为

$$A\in D,\quad B\in D,\quad C\in D$$

称A，B，C各个客体是属于客体D的。所以，就客体而论，有的可以再组合成新的客体，有的就未必一定要再与其它客体组合成更大的客体。

总之，我们把任何一个客体称为

类

对于它们，用某一种确定的二元关系$\in$来定义它们的一种构成元关系，从而，若A，B是类，则

$$A\in B$$

就有意义，它表示A是B的一元，A属于B，A在B中的。

客体是数学研究对象实际存在的东西的一般表述词汇，类则是第一步抽象出来的数学语言。一些类能构成一个组合，这是反映客观存在的一个事实，并不泛指任何两个类都可以组成一个新类，所以，二元关系$\in$也并不是任意可以加在两个类上的。

在确定所研究客体都是类这个前题下，以后，我们称

对于一切A

就是指

对于一切类A

从而，数学研究的对象是类，数学中所指的事物是一个类。

类的一个基本性质就是，类完全由它的元所决定；如果两个类明显地有相同的各元，它们就完全是同一个客体，就类而言，

我们不再探究产生这些元的实际背景。

在逻辑上有一个基本的约定：

$$p\text{ 当且仅当 }q$$

是指仅当 p 和 q 都真或都伪时成立的意思，将它缩写为

$$p \text{ iff } q$$

利用这个约定，我们首先给出关于类的第一个公理，

公理 I $A=B$ iff (对于所有 z，$z\in A$ iff $z\in B$)

这里，我们把"$=$"理解为两个客体或两个类相等的符号，从而"$A=B$"就表示 A，B 是同一个客体或者说是同一个类，它说明关于客体的两个名词"A"和"B"是可以在相代替的，特别是，如果这种代换是在一个定理中形成的，所得结果还是一个定理。由于各种类，例如 A 或 B，它们尽管是相等的，但是他们产生的由来可以不同，所以，经过类相等的互相代换，从定理的意义来说，就反映出一种外延性，因此公理 I 的实质意义，就说明我们在分析类的时候，不究它产生的由来以及它表示的客观物理内容，只要它所内含的元完全一样，我们就把它们看成是同一个类。

由于一个类 A 完全由它的元所决定，所以就能够从构成 A 的成元关系的任何一个必要且充分的条件所决定，这就是用任何一个性质 P 所决定，这个 P 是使

$$x\in A \text{ iff } x\text{ 有性质 }P$$

成立。再若把"x 有性质 P"这句话写成简单表示符号"Px"，则 P 是使

$$x\in A \text{ iff } Px$$

成立的一种性质。

例如，每一个正整数都是一个类，而"小于 10 的素数"这个说明就指出一种性质，所有只满足这个性质的正整数就构成一个类 A，它是使

$$x\in A \text{ iff } x\text{ 是小于 10 的素数}$$

成立的类，所以

$$A \equiv \{2, 3, 5, 7\}$$

这里的“小于 10 的素数”也是构成A类的一个充分而且必要的条件。但是，另一个性质

Q：多项式方程 $x^4 - 17x^3 + 101x^2 - 247x + 210 = 0$ 的解也构成一个类B，它使

$$x \in B \text{ iff } x\text{是满足}Q\text{性质的}$$

成立，则

$$B \equiv \{2, 3, 5, 7\}$$

它是用P中的素数元代换为多项式方程的根。从P的意义外延到Q的意义，但是

$$A = B$$

有了关于类的外延性公理，我们可以用类来陈述罗素提出的著名例子——一种悖论：

设A是所有使$B \notin B$（即B不属于B）的类B所组成的类，B不属于B的元就是一个性质，可见A类是指

$$B \in A \text{ iff } B \notin B$$

成立的一个类。但是类A也是具有这个性质的，所以

$$A \in A$$

即得到一个矛盾，

$$A \notin A \text{ 同时 } A \in A$$

澄清这个事实，显然是和理发师悖论的原义一样，对于类是首先应加以区别的，也就是我们在陈述$B \notin B$的所有类的组成类A时是把A类排除在外的。

数学上严格的来说，我们应该把“类”分成两种：一种是可以顺利进行类运算的“OK”类；一种是限制运算的“固有类”。我们称“OK”类是一种集合，对集合可以给出一些运算的公理和命题，运算之后仍给出集合，而关于固有类，一般是并不都能运算的。

直观的说，集合就是那些能够形成元关系的类，所以给出

定义 1 类A是一个集合 iff 存在一个类B使$A \in B$。

所有的类都是在集合的基础上建立的，类的最大形式就是固有类。所以，我们只承认在能用一些基本类界定的集合，再给以某些性质组成的新类，也就是

公理Ⅱ 设P是任一性质，则有一个类A使

$$x \in A \text{ iff } Px \text{ 且 } x \text{ 是一个集合}$$

由此，我们把“集合”、“类”、“性质”三者协调的加以规定，并统一其表达形式，给出

定义 2 关于公理Ⅱ给出的类写成

$$\{x \mid Px\}$$

从而

$$y \in \{x \mid Px\} \text{ iff } Py \text{ 且 } y \text{ 是一个集合。}$$

如果Px是罗素性质$x \notin x$且$A = \{x \mid x \notin x\}$，则

$$A \in A \text{ iff } A \notin A \text{ 且 } A \text{ 是一个集合}$$

才是罗素声称的悖论本身的实际意义，而现在A不再是一个集合，所以就不会产生矛盾。

我们以后要讨论的集合理论，除了个别地方要引用固有类以外，都是针对集合来给出公理体系，产生有关集合运算的定义，以及随之而定的命题，演绎推导出有关集合理论的各个定理。

为了明瞭起见，我们把上述内容，列表分析如下：

客体 ≡ 类

—公理Ⅰ
$A = B$ iff 对所有z，$z \in A$ iff $z \in B$
A, B, z 都是类

固有类——非集合
OK 类——集合
类A是集合 iff 存在类B使$A \in B$
（定义 1）

公理Ⅱ
存在一个类A使对x有性质P
$x \in A$ iff Px 且x是一个集合
↓
$A \equiv \{x \mid Px\}$
$y \in \{x \mid Px\}$ iff Py 且y是一个集合
（定义 2）

§2.2 命题逻辑

从上面所述的集合概念，可知以集合 x 为变元，加以性质 P 的限制，就可以有一个类的存在，它是由那些满足性质 P 且只满足性质 P 的集合 x 为元的一种组合，表为

$$A \equiv \{x \mid Px\}$$

A 可以是一个固有类，也可以是一个 OK 类，也就是 A 本身又可以是一个集合。这就说明描述集合与类之间，集合与集合之间关系的主要依赖于所给定的性质 P。一般地说，性质 P 是用逻辑语言或者称为命题逻辑给出的。

逻辑语言或称命题逻辑是指的“语句逻辑的语言”，它是和普通使用的自然语言有些区别的。命题逻辑是用一些基本术语和公式构成的。

所以，命题逻辑是从一些基本的字母开始，第一步构成各种层次的关系把一些术语形成一些元公式，第二步将各元公式用一些命题联络符号和量符号组合成复杂公式。

命题联络符号共有五个：

名称	符号	意义
蕴涵	$\Rightarrow$	$P \Rightarrow Q$ 表示若 P 则 Q
否定	$\neg$ 或 $\sim$	$\neg P$ 或 $\sim P$ 表示不是 P
析取	$\vee$ 或 or	$P \vee Q$ 或者 P or Q 表示是 P 或是 Q 或 P，Q 皆是
合取	$\wedge$ 或 &	$P \wedge Q$ 或者 P & Q 表示 P，Q 都是
等价	$\Longleftrightarrow$ 或 $\equiv$	$P \Longleftrightarrow Q$ 表示 P iff Q

量符号有两个：

名称	符号	意义
普遍量符号	$\forall$	$\forall x$ 表示“所有的 x”
存在量符号	$\exists$	$\exists x$ 表示“存在有 x”

关于命题联络词，它们并不都是互相独立的逻辑形式符号，

因为，如果用F表示谬误，则从“蕴涵”$\Rightarrow$这个逻辑形式符号就可以导出其它的表达，也就是，如果我们把联络词看成是由零元运算F以及二元运算$\Rightarrow$构成的命题代数的逻辑推导，则从命题代数

$$T=\{F,\ \Rightarrow\}$$

出发，就可以得到

$$\sim P=P\Rightarrow F$$
$$P\vee Q=(\sim P)\Rightarrow Q$$
$$P\wedge Q=\sim(\sim P\vee\sim Q)$$
$$P\Longleftrightarrow Q=(P\Rightarrow Q)\wedge(Q\Rightarrow P)$$

这里加上一些括号是避免表达上的混乱，而且“$=$”也是一种陈述的代号，它并不是命题代数本身中的一种运算。

设P是一些称为元公式或素公式为客体的一个集合，这些素公式可以是某种自然语言的句子或者是字母表的字元p，q，r，…，也就是说它们不是简单公式的命题组合，所以它们是元公式与冠以量词的公式。P的命题公式的集合构成包含P的一些元的表示式的最小集合，而且在联络词的组合下是闭的，也就是说，若A，B是命题公式，则$\urcorner A$，$(A\wedge B)$，$(A\vee B)$与$(A\Rightarrow B)$也都是命题公式。

例如，设$P=\{p,q,r\}$，则p，q，$(p\vee q)$，$(q\vee p)$，$((p\vee q)\Rightarrow(q\vee p))$都是$P$的命题公式。

我们要指出，一个命题公式的正确或谬误，真或伪如何依赖于它的素组成部分的真或伪。更进一步，我们还要注意，有一类问题是无论命题公式素组成部分是否正确，是真是伪，命题公式总是正确的，例如

（1）$p\vee\urcorner p$

（2）$((p\Rightarrow q)\wedge\urcorner q)\Rightarrow\urcorner p$

这类命题公式称为命题的同义反复，因为它们的正确性仅依赖于句法。这种同义反复的处理使我们首先弄清楚逻辑规律的一种特殊类型。

一般的情况，设用T和F各表示正确和谬误，就可以列出真

值表

A	B	$\neg A$	$A\wedge B$	$A\vee B$	$A\Rightarrow B$	$B\Rightarrow A$	$A\Leftrightarrow B$
T	T	F	T	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	T	F
F	T	T	F	T	T	F	F
F	F	T	F	F	T	T	T

其中T表示当A是假时，$A\Rightarrow B$不是命题的原义，所以是空虚的真。

例如，要说明公式

$$((\neg(p\wedge\neg q)\wedge q)\Rightarrow p)$$

成立的条件，只要在真值表中排除谬误的部分就可以了。从下表可以看出

p	q	$\neg q$	$p\wedge\neg q$	$\neg(p\wedge\neg q)$	$\neg(p\wedge\neg q)\wedge q$	$(\neg(p\wedge\neg q)\wedge q)\Rightarrow p$
T	T	F	F			
T	F			F	F	
F	T	F	F			F
F	F		F		F	

只有在p谬误且q是正确的情况下，公式才是不成立的。

又如，$p\Rightarrow q$的逆命题是$q\Rightarrow p$，$p\Rightarrow q$的反命题是$\neg p\Rightarrow\neg q$，从而，可以证明$p\Rightarrow q$的逆反命题$\neg q\Rightarrow\neg p$是与原命题等价的，即

$$(\neg q\Rightarrow\neg p)\Longleftrightarrow(p\Rightarrow q)$$

这从下表可以显然看出。

p	q	$p\Rightarrow q$	$\neg q$	$\neg p$	$\neg q\Rightarrow\neg p$	$(\neg q\Rightarrow\neg p)\Leftrightarrow(p\Rightarrow q)$
T	T	T	F	F	T	T
T	F	F	T	F	F	T
F	T	T	F	T	T	T
F	F	T	T	T	T	T

从上面可以看出，在真值表中，只要研究基本的四种逻辑关系：

$$\neg \quad \wedge \quad \vee \quad \Rightarrow$$

特别是$\Rightarrow$这个原始的逻辑关系最为重要。例如等价性$\Longleftrightarrow$完全可以从$\Rightarrow$来判定，即

$$(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)$$

就表示了

$$A\Longleftrightarrow B$$

这种等价性关系是很重要的推理、论证、和定义的数学逻辑关系。

例 1 我们可以用真值表证明有

(1) $\neg\neg p\equiv p$

(2) $(\neg p\vee q)\equiv(p\Rightarrow q)$

(3) $\neg(p\vee q)\equiv(\neg p\wedge\neg q)$

(4) $\neg(p\wedge q)\equiv(\neg p\vee\neg q)$

例 2 在亚里斯多德（Aristotle）逻辑中，非矛盾律等价于排中律，即

$$\neg(p\wedge\neg p)\equiv(\neg p\vee p)$$

例 3 蕴涵逻辑是可传的，即

$$[(p\Rightarrow q)\wedge(q\Rightarrow r)]\Rightarrow(p\Rightarrow r)$$

是一个同义反复命题。

例 4 有两种重要的有效推断原理，它们是同义反复的命题公式：一种是肯定前件的推理，即假言推理，它是一种取式的推断原理

$$[(p\Rightarrow q)\wedge p]\Rightarrow q$$

一种是用否定来肯定的推理，即否定推理，它是一种拒取式的推断原理

$$[(p\Rightarrow q)\wedge\neg q]\Rightarrow\neg p$$

第三章　集合理论的公理系统

§3.1　外延性公理

我们知道，以有限集合为背景来朴素地阐述集合理论，虽然可以通俗介绍集合概念，正像“新数学”在中学课程中插入的“孩子们的集合论”那样。但是，无穷集合是我们进一步研究集合理论的对象，如果我们不首先用公理来界定，概念上会产生矛盾，而且，如果不以公理的形式确定我们要探讨的无穷集合的存在性与唯一性，集合理论的一些定义、运算和推理就会失去它的协调性，许多概念就可能是模糊不清的。

另一方面，公理的叙述基于一些原始概念的逻辑处理，公理建立后，定义、运算、推理和命题的引伸也都希望通过严格的逻辑语言来表达。所以，我们常常不满足于用自然语言叙述命题的非形式表达，还要尽可能多的使用逻辑联络符号和逻辑量符号组成的形式语言。

朴素集合论的思想主要是由德国数学家康托（Georg Cantor）完成的，他的著名贡献就是1895年提出的关于集合的基数概念。

在朴素集合论中，首先要解决的问题是一般的怎样表示出一个集合。因为，我们知道，即使是简单的有限集合，例如由五个元构成的集合

$$\{92357,\ 10846,\ 85243,\ 16128,\ 95212\}$$

甚至更复杂一些的有限集合，一眼之下，我们几乎无法掌握它，更不必说是无穷集合了。所以我们总是要用一种“性质”来刻划集合才行，这也就是我们在§2.1中阐明的集合与类的构成关系，那里，我们说x是集合A的一元，表示x是一个集合，而且它满足性质P，即

$$x \in A \Longleftrightarrow Px,\quad x\text{是一个集合}$$

朴素集合论的基本原理是：概括原理

设Φ是客体（集合）的一个性质，则有一个集合，它的元恰是那些具有性质Φ的客体。

这正是我们在§2.1中指出的公理Ⅱ，公理Ⅱ的集合存在性依赖于原始集合与性质二者，而原始集合是一种能属于另一个类的类。按公理系统来说，集合只是一种 OK 类，而无论是OK类，或非 OK 类的固有类都是客体。所以朴素集合论所指的客体恒是集合，在论证时，自必受到限制。

概括原理所肯定的集合可以写成

$$\{x \mid \Phi(x)\}$$

其中$\Phi(x)$就是"x具有性质Φ"的一种缩写。所以，若Φ表示一个性质，则

（1）$\{x \mid \Phi(x)\}$是一个集合

（2）对于所有的集合y，$y \in \{x \mid \Phi(x)\} \Longleftrightarrow \Phi(y)$

从而，设$A \equiv \{x \mid \Phi(x)\}$，$B \equiv \{x \mid \psi(x)\}$，则$A$，$B$两个集合相等和包含的关系是

$$(A = B) \Longleftrightarrow \forall x[\Phi(x) \Longleftrightarrow \Psi(x)]$$

$$(A \subseteq B) \Longleftrightarrow \forall x[\Phi(x) \Longrightarrow \Psi(x)]$$

由此，引出一些朴素集合论中的定义：

（1）空集　取$\Phi(z)$是指性质Φ使z满足，表示$z \neq z$，则$\{z \mid z \neq z\}$是一个无元的集合，也就是

$$\forall y[y \notin \{z \mid z \neq z\}]$$

用$\phi \equiv \{z \mid z \neq z\}$

表之，则称这个ϕ集合是一个空集。

（2）并集　设A，B是二集合，则A与B的并集是

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$$

这里的符号"$:=$"表示"定义"，符号"$\cup$"表示集合的并运算。

（3）交集　$A \cap B := \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$

这里的符号"$\cap$"表示集合的交运算。

（4）差集　$B-A:=\{x \mid x\in B\wedge x\notin A\}$

这里的符号“$-$”表示集合的差运算，有时将“$B-A$”写成“$B\setminus A$”。

上述的朴素集合理论，严格说来，应该首先区分集合与类的关系，这是我们在§2.1中所阐明的；其次，就集合本身来说，要界定两个集合相等，它和界定两个类相等一样的是我们研究集合的公认前提，所以在 ZF 集合公理体系中，十大公理的第一个重要公理就是

〔**外延性公理**〕　具有相同各元的集合是相等的。

形式地表出这个外延性公理，就是

$$\forall z[z\in A\Longleftrightarrow z\in B]\Longrightarrow A=B$$

我们在§2.1叙述关于类的外延性公理时，已经说明它的“外延”的意义：一个集合完全由它所含有的元所确定，而与这些元的来由、物理意义、数学表示对象无关。

外延性公理首先指出两个集合相等这种概念的存在性，其次还指出所有相等的集合的唯一性，即

（1）若 A，B 二集合所含的元完全一样，就是两个集合 A，B 相等，写成 $A=B$，所以两个集合相等这一概念是存在的；

（2）如果 A,B，C 是三个集合，$A=B$，$A=C$，则外延性公理又同时肯定 $B=C$，也就是和 A 集合相等的集合的唯一性。有了这种集合相等概念的存在性与唯一性以后，我们就可以在公理的基础上，给出两个集合相等的定义：

定义3.1　若 A，B 是任何两个集合，则当且仅当 A，B 二集合恰有相同的各元时，称 A，B 是相等的两个集合，表为

$$A=B$$

形式的表出定义3.1，则是

$$A=B\quad \text{iff}\quad \forall x(x\in A\Longleftrightarrow x\in B)$$

也可以写成

$$\forall A\forall B[\forall x(x\in A\Longleftrightarrow x\in B)\Longleftrightarrow A=B]$$

§3.2 空 集 公 理

朴素集合理论关于空集的定义是应该先肯定有一种无元的集合的存在性和唯一性的，而承认空集的存在对于讨论集合的运算和推理又是非常重要的。所以，ZF 集合理论的第二个公理就是

〔**空集公理**〕 有一个无任何元的集合，它是空的集合。形式上来表示，就是

$$\exists B \forall x[x \notin B]$$

从空集公理肯定了空集的存在性以后，又从外延性公理知道这种空集是唯一的。因为，一个集合是完全由它的元所确定，如果 A，B 是两个空集，则从外延性公理得知它们是相等的，所以也就恰有一个空集。

由空集的存在性和唯一性，我们就可以给出关于空集的定义。

定义3.2 空集是一个无元的集合，即若用 ϕ 表示空集，则

$$\phi \text{ 是一个空集 iff } \forall x[x \notin \phi]$$

空集 ϕ 和自然数本来并没有什么关系，也就是说，ϕ 和 0 是两个不同的对象。但是，如果我们要把自然数从 0 开始计起的各数

$$0, 1, 2, 3, \cdots$$

看成是各个集合，表成

$$\underset{\sim}{0}, \underset{\sim}{1}, \underset{\sim}{2}, \underset{\sim}{3}, \cdots$$

在集合理论中，如何用集合概念表达出自然数是十分重要的。因为，如果我们能把每一个自然数按其产生抽象的数的规律表述为一个集合时，我们才能认真地分析自然数全体 N 是怎么样的一种无穷集合 $\underset{\sim}{N}$，从这个无穷集合 $\underset{\sim}{N}$，我们才有可能深入研究整数全体 Z 所形成的整数集合 $\underset{\sim}{Z}$，以及所有实数全体 R 所形成的实数集合 $\underset{\sim}{R}$。

很明显地，我们应该用空集 ϕ 表示“0”这个数，即

$$\underset{\sim}{0}: = \phi$$

因为原来数个数时补加上“0”的意思就是没有,其后有了一个,都是从“数个数”概念从无到有的第一个开始;所以“1”这个自然数也显然地可以表示为

$$\underset{\sim}{1}:=\{\phi\}$$

好像是说,ϕ是什么都没有,而$\{\phi\}$却有一个空袋子,这一点意义在其后构造自然数集合都是采用了的。1908年策墨罗使用下列方法表出各自然数:

$$\underset{\sim}{0}:=\phi$$
$$\underset{\sim}{1}:=\{\phi\}$$
$$\underset{\sim}{2}:=\{\{\phi\}\}$$
$$\underset{\sim}{3}:=\{\{\{\phi\}\}\}$$
$$\cdots\cdots$$

用这种表示法只说明了前者为后者的元,也就是

$$\underset{\sim}{0}\in\underset{\sim}{1},\quad \underset{\sim}{1}\in\underset{\sim}{2},\quad \underset{\sim}{2}\in\underset{\sim}{3},\quad \cdots$$

但是“属于”的逻辑概念未必有“可传的”的性质,也就是若$a\in b$,$b\in c$,则未必有$a\in c$。现在的策墨罗表示自然数的方法也不能使自然数有“属于”的可传性。排除这种可传性使我们失掉了自然数原来具有的良好性质,因为“数个数”每次总是把前面所数了的个数包含在里面的,每一个自然数不但说明它是第几个(这一点,策墨罗的表示法能够说明),而且还要反映出它包含了多少个。前者就是集合理论重要的

序　数

概念,后者则是集合理论重要的

基　数

概念。基数是对应的个数概念,序数则是排序的概念。

1924年德国数学家诺伊曼(John von Neumann)按序与基的两种意义,给出自然数的表示是

$$\underset{\sim}{0}:=\phi$$
$$\underset{\sim}{1}:=\{\phi\}$$
$$\underset{\sim}{2}:=\{\phi,\ \{\phi\}\}$$

$$\underset{\sim}{3}:=\{\phi,\ \{\phi\},\ \{\phi,\ \{\phi\}\}\}$$

$$\cdots\cdots$$

也就是

$$\underset{\sim}{0}:=\phi$$

$$\underset{\sim}{1}:=\{\underset{\sim}{0}\}$$

$$\underset{\sim}{2}:=\{\underset{\sim}{0},\ \underset{\sim}{1}\}$$

$$\underset{\sim}{3}:=\{\underset{\sim}{0},\ \underset{\sim}{1},\ \underset{\sim}{2}\}$$

$$\cdots\cdots$$

这样，各自然数集合，前者恒属于后面发展出的各数集合，也就是有“属于”的可传性，即从

$$\underset{\sim}{0}\in\underset{\sim}{1}\in\underset{\sim}{2}\in\underset{\sim}{3}\in\cdots$$

也有

$$\underset{\sim}{0}\in\underset{\sim}{2},\ \underset{\sim}{0}\in\underset{\sim}{3},\ \cdots;\ \underset{\sim}{1}\in\underset{\sim}{3},\ \cdots$$

这种可传性的由来是因为诺伊曼表示法具有“包含”关系

$$\underset{\sim}{0}\subseteq\underset{\sim}{1}\subseteq\underset{\sim}{2}\subseteq\underset{\sim}{3}\subsetneq\cdots$$

而“包含”关系总是可传的。

§3.3　子集公理格式

集合理论 ZF 公理体系的第三个公理就是非常重要的子集公理，由于从一个集合可以肯定产生很多个或无穷多个子集，这个概念是我们首先要给出的一类公理，统称为子集公理格式。策墨罗最早给出这个公理时，称为分离公理，它形象地刻划了从已给集合按一定限制划出的部分集合概念。

在§2.1中，我们已经指出从各个集合满足一定性质的组合所得的类表示为

$$\{x\,|\,Px\}$$

它说明了从集合与性质给出类的存在的公理Ⅱ。关于给定集合 A，它的元满足某性质的所给出组合，它与公理Ⅱ所阐述的对象稍有区别，它是在已存在某集合 A 的前题下，讨论 A 中各元为集合再满足某性质的部分组合，所以它不会是大而无边的，所以是不会

与固有类混在一起的。因此我们给出

〔**子集公理格式**〕 对于每一个集合A和集合的每一种性质Φ，存在有一个集合，它的元恰是A中那些具有性质Φ的元。

形式地写出子集公理格式是：

$$\exists B\forall x[x\in B\Longleftrightarrow x\in A\wedge\Phi(x)]$$

显然的，B不可以在Φ中出现，否则存在B的意义就是先前已以某种形式肯定了的。

这个公理称为格式是因为它同时肯定了无穷多个公理，每一个公理对应于某一公式Φ以及变量A，B和x。我们不能把子集公理格式表示成统一的公式，因为在形式语言中，我们还不能一般地说明性质。我们只能说明集合，例如$x\in A$；只有在性质本身能用语言的一种公式表出时，我们才能写出完整形式的子集公理。表示性质的语言公式可以含有x之外的一些参数，例如，可以对任何k个参数t_1，t_2，$\cdots t_k$和集合A写出子集公理格式：

$$\forall t_1\forall t_2\cdots\forall t_k\forall A\exists B\forall x(x\in B\Longleftrightarrow x\in A\ \&\ \text{——})$$

式中——表示一个可以包含参数t_1，t_2，$\cdots t_k$在内，但不含B的一种公式或性质。

子集公理格式确定了给定集合A和性质Φ以后存在有一个集合B，它使属于B的元皆属于A且具性质Φ；再从外延性公理知道这样确定的一个子集是唯一的，因为若另有一个子集B_1满足条件，则因

$$x\in B\Longleftrightarrow x\in B_1$$

得知，$B_1=B$，所以由子集公理所肯定的集合是唯一存在的，我们称B是A的一个子集，表为

$$\{x\in A|\Phi(x)\}$$

也就是

$$B=\{x\in A|\Phi(x)\}$$

因此，我们可用子集这个能唯一确定存在的意义，给出

定义3.3 B集合是A集合的一个子集 iff B的每一个元也是A的一个元。

形式地表示这个定义，若用符号

$$B\subseteq A$$

表示B是A的一个子集，则

$$(B\subseteq A)\Longleftrightarrow \forall x(x\in B\Longrightarrow x\in A)$$

也就是

$$(B\subseteq A):=\forall x(x\in B\Longrightarrow x\in A)$$

反之，如果B不是A的一个子集，则写成

$$B\nsubseteq A$$

一般地说，B集合是A集合的一个子集，并不排斥$A=B$的情况，如果B是A的一个子集，而且$A\neq B$，则写成

$$B\subsetneqq A\text{或}B\subset A$$

也就是说B是A的一个真子集。形式地写出这个定义就是

$$(B\subset A)\Longleftrightarrow(B\subseteq A\wedge B\neq A)$$

事实上，这时A，B两个集合就构成了一种关系，这种关系是以后我们要论述的一种序关系。

我们可以对任何集合讨论它们之间的包含关系，我们说A，B两个集合可以构成一种包含关系，即B是A的一个子集，也可以并没有这种包含关系。我们还可以在一个总的集合S中讨论其中各个子集之间的包含关系，例如

$$B\subseteq A\subseteq S$$

对于所有集合讨论包含关系，这种关系的总体将构成一个固有类，而对给定集合讨论其子集之间的包含关系，它的总体将构成一个集合类。这种包含关系是一种偏序关系，它们满足①自反性②反对称性③可传性，这是我们在第四章中要详细讨论的问题。但是，我们现在容易得到下列性质

定理3.1 对任何集合A，B，C有包含关系的

（1）自反性：$A\subseteq A$对任何集合成立；

（2）反对称性：若$A\subseteq B$且$B\subseteq A$则$A=B$；

（3）可传性：若$A\subseteq B$且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$。

证明

从子集定义立即可知有(1)，因为

$$\forall x(x\in A\Longrightarrow x\in A)$$

自然成立，所以有

$$A\subseteq A$$

再者，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，即

$$\forall x[(x\in A\Longrightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Longrightarrow x\in A)]$$

也就是

$$\forall x[x\in A\Longleftrightarrow x\in B]$$

从外延性公理得知有(2)

$$(A\subseteq B\wedge B\subseteq A)\Longrightarrow A=B$$

最后关于（3）是显然的，因为

$$\forall x(x\in A\Longrightarrow x\in B)\wedge(x\in B\Longrightarrow x\in C)$$

就给出了

$$\forall x(x\in A\Longrightarrow x\in C)$$

它就是 $A\subseteq C$ 证毕

§3.4 组对公理与并公理

上述两个集合之间的包含关系，这关系的本身就将涉及到任何两个集合肯定可以构成一个新集合的问题。这个肯定比较§2.1中公理Ⅱ所肯定的由满足性质 P 的所有集合组成的类要原始得多，它是从有限个集合组合的构造开始的。特别是首先只研究任两个集合组合成一个新集合的问题。

〔**组对公理**〕 对于给定的任何两个集合 a，b 有一个集合 C，C 集合的元恰是 a 和 b。

形式地写出这个公理是

$$\exists C\forall x[x\in C\Longleftrightarrow x=a\vee x=b]$$

再从外延性公理，知道这公理所肯定的组对集合 C 是唯一的，表为

$$\{a,\ b\}，或\ \{b,\ a\}$$

今后，我们常用大括号表示一个集合，其中的各元是没有什么次序关系的，也就是

$$\{a, b\} \equiv \{b, a\}$$

由此，我们有

定义3.4 集合$\{a, b\}$是一个组对集合 iff a 和 b 是集合。

特别是，由同一个集合 x 给出的组对集合$\{x, x\}$按外延性公理，它就是$\{x\}$，从而可以定义

$$\{x\} := \{x, x\}$$

它是由 x 构成的单子集合。

所以，从空集定义给出表示

$$\underset{\sim}{0} := \phi$$

从单子集合定义给出表示

$$\underset{\sim}{1} := \{\phi\}$$

从组对集合定义给出表示

$$\underset{\sim}{2} := \{\phi, \{\phi\}\}$$

它们都是集合。但是进一步讨论 $\underset{\sim}{3}$，$\underset{\sim}{4}$，…就要讨论并公理。因为

$$\underset{\sim}{3} := \{\phi, \{\phi\}, \{\phi, \{\phi\}\}\}$$

这个集合应可以看成集合$\{\{\phi, \{\phi\}\}\}$与集合$\{\phi, \{\phi\}\}$中的元取出来构成的新集合，这就是二集合之并的思想，更一般的，我们应该可以从很多个元集合构成的集合中，将各元集合所含各元为一个新集合的元，就得到更为广义的并集合。

〔**并公理**〕 关于任何一个集合 A，有一个集合 B，B 的元恰是那些至少在 A 中一元中出现的那些客体。

形式地写出并公理，就是

$$\exists B \forall x [x \in B \Longleftrightarrow \exists a (a \in A \wedge x \in a)]$$

再一次根据外延性公理得知并公理从集合 A 所肯定的并集合 B，不仅存在而且还是唯一存在的。所以可以给出

定义3.5 B 集合是 A 集合的一个并集 iff

$$\forall x [x \in B \Longleftrightarrow \exists a (a \in A \wedge x \in a)]$$

B 集常用并运算符号$\bigcup$表之为

$$B=\bigcup A \quad 或 \quad B=\bigcup_{a\in A} a$$

由此可见，“并”运算得之于并集合的定义，而并集合定义得之于并公理。

特别是两个集合 a 和 b 的并，是指以 a，b 为元的组对集合 $\{a, b\}$ 的并集合，也就是我们常见的初等并运算是

$$a\bigcup b:=\bigcup\{a, b\}$$

它说明

$$\forall a\forall b\exists B\forall x(x\in B\Longleftrightarrow x\in a\vee x\in b)$$

所以又可以给出

定义3.6 a 集合与 b 集合的并集合 B 是当且仅当

$$\forall x(x\in B\Longleftrightarrow x\in a\vee x\in b)$$

成立的一个集合。

有了组对和并的定义，对于任何三个集合 x_1，x_2，x_3，我们自然就容易构成一个三元集合

$$\{x_1, x_2, x_3\}:=\{x_1, x_2\}\bigcup\{x_3\}$$

同样的

$$\underset{\sim}{3}:=\{\phi,\{\phi\},\{\phi,\{\phi\}\}\}=\{\{\phi,\{\phi\}\}\}\bigcup\{\phi,\{\phi\}\}$$
$$=\{\underset{\sim}{2}\}\bigcup\underset{\sim}{2}$$

而且注意到组对集合与并集合都是与次序无关的，所以

$$a\bigcup b=b\bigcup a$$

从而自然地也有

$$\underset{\sim}{3}=\underset{\sim}{2}\bigcup\{\underset{\sim}{2}\}$$

关于并运算，我们容易证明有下列各性质：

（1）$A\bigcup A=A$

（2）$A\bigcup B=B\bigcup A$

（3）$A\bigcup(B\bigcup C)=(A\bigcup B)\bigcup C$

（4）$A\bigcup\phi=A$

（5）$A\subseteq A\bigcup B$，$B\subseteq A\bigcup B$

（6）若 $A\subseteq B$，则 $A\bigcup C\subseteq B\subseteq C$

（7）$(A\subseteq C\wedge B\subseteq C)\Longleftrightarrow A\cup B\subseteq C$

（8）若$A\subseteq B$则$A\cup B=B$

所有上列性质的证明只要用蕴含关系论证就可以。为了说明起见，设就（3）的证明而论，则是

$$\begin{aligned} x\in A\cup(B\cup C) &\Longleftrightarrow x\in A\vee x\in B\cup C \\ &\Longleftrightarrow x\in A\vee(x\in B\vee x\in C) \\ &\Longleftrightarrow(x\in A\vee x\in B)\vee x\in C \\ &\Longleftrightarrow(x\in A\cup B)\vee x\in C \\ &\Longleftrightarrow x\in(A\cup B)\cup C \end{aligned}$$

关于集合关系式的证明，我们常常可以使用威恩（John Venn）于1880年提出的图示方法来启发证明的过程。上列（3）关于并运算的结合律是从下列威恩图一目了然的（图3.1）。

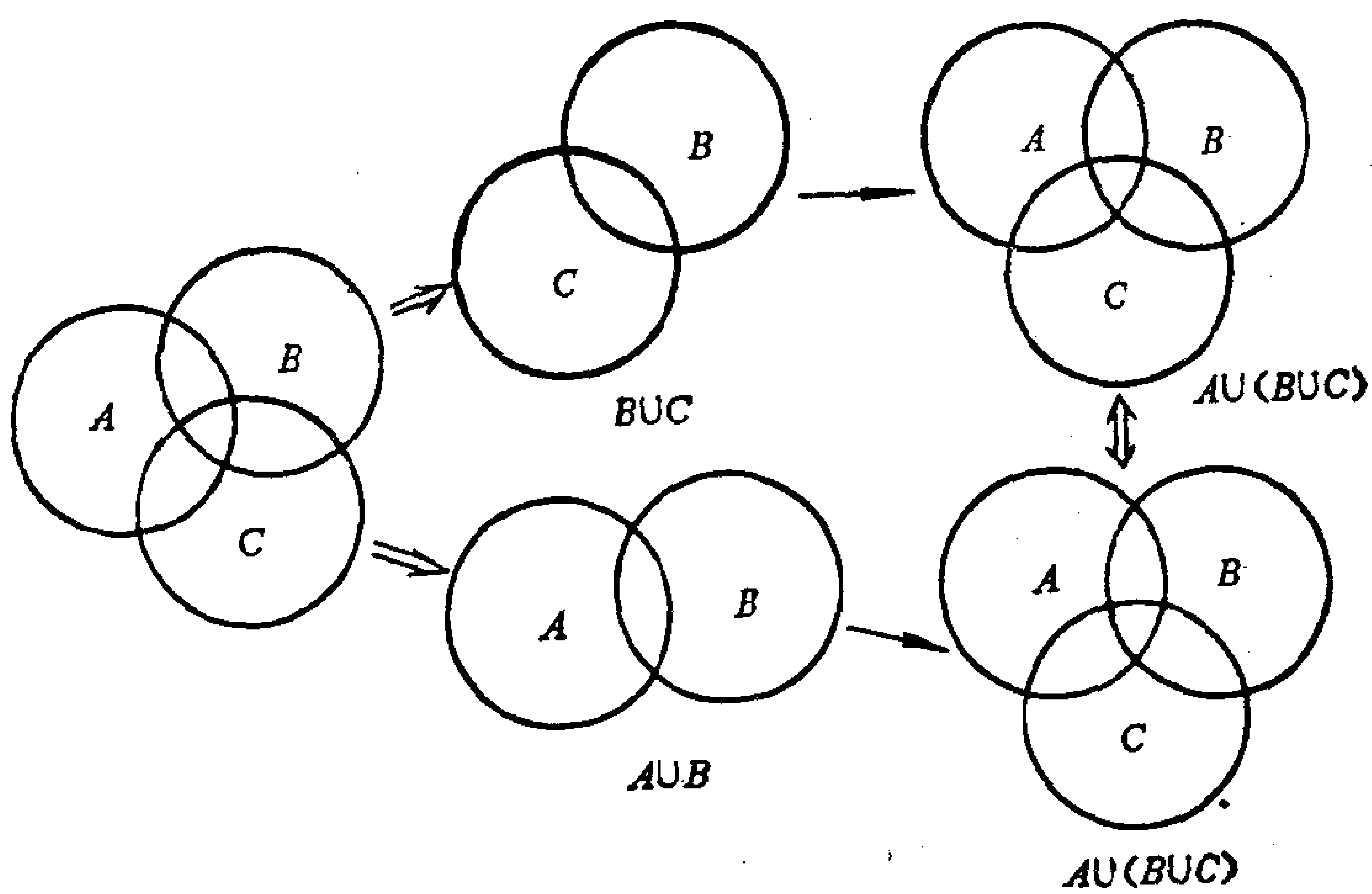

图 3.1

集合交的概念和集合差的概念都来自于子集公理给出的子集定义，也就是

$$A\cap B:=\{x\in A\mid x\in B\}$$
$$A\setminus B:=\{x\in A\mid x\notin B\}$$

这里的$x\in B$或$x\notin B$都各表出能用逻辑表示的性质$\Phi(x)$。关于A，B＝集合的交“$\cap$”，它们显然有如下性质：

（1）$A\cap A=A$

（2）$A\cap B=B\cap A$

（3）$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C$

（4）$A\cap\varnothing=\varnothing$

（5）$A\cap B\subseteq A$，$A\cap B\subseteq B$

（6）若$A\subseteq B$，则$A\cap C\subseteq B\cap C$

（7）$(C\subseteq A\wedge C\subseteq B)\Longleftrightarrow C\subseteq A\cap B$

（8）$A\subseteq B\Longleftrightarrow A\cap B=A$

（9）$A\cap(A\cup B)=A$

（10）$A\cup(A\cap B)=A$

（11）$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

（12）$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

（1）（2）（3）说明了集合在交运算下有幂等性可交换性和可结合性；（9）（10）是关于交、并运算的吸收律，（11）（12）是关于交、并运算的分配律。

§3.5 无穷性公理

从上述关于自然数的各个集合表示，说明用诺伊曼表出各自然数的表示方法能够从“个数”“次序”两个方面刻划了各个自然数之间的关系。这种刻划方法的本身就已说明了我们可以把自然数从“构造”的观点来阐明它的意义，使用这种构造方法要得到整个自然数全体的集合，我们还要给出“无穷性公理”。在第五章中，我们还将抛去这种构造方法，一开始就用公理体系来完全刻划自然数。

由于自然数集合是我们研究无穷集合的突破点，所以，我们应该集中力量来洞察它的奥秘。

从诺伊曼给出的自然数的集合表示

$\underset{\sim}{0}=\phi$，$\underset{\sim}{1}=\underset{\sim}{0}\cup\{\underset{\sim}{0}\}$，$\underset{\sim}{2}=\underset{\sim}{1}\cup\{\underset{\sim}{1}\}$，$\underset{\sim}{3}=\underset{\sim}{2}\cup\{\underset{\sim}{2}\}$，…

可见这是自然数的一般规律，故可有

定义3.7 对于任何一个集合 a，它的后继是一个集合，定义为 a 与 $\{a\}$ 的并

$$a \cup \{a\}$$

表为 a^+，即

$$a^+ = a \cup \{a\}$$

所以，诺伊曼关于自然数的表示就是

定义3.8 $0 := \phi$

$1 := 0^+$

$2 := 1^+$

一般的，$n+1 := n^+$

这样定义之后，以后我们就视 0，1，2，…不单是书写的自然数符号，而且也是用后继与空集表出的各个集合。显然，我们所要刻划的自然数集合就是用后继定义的无穷集合。

定义3.9 若 A 集合有性质：

$$\phi \in A \text{且} \forall x [x \in A \Longrightarrow x^+ \in A]$$

则称 A 是一个后继集合或者称 A 是归纳的。

也就是说，若 A 是在运算"+"下闭的而且包含有 ϕ，则 A 是一个后继集合。

我们注意到，如果确有归纳集存在，定义 3.9 才有意义，而且容易看出若有归纳集存在，则归纳集必然含有自然数的全体，这里的"必然"只是我们直观上的理解，仍必须去定义它。另一方面，归纳集存在以后也不是唯一的，所以定义出的归纳集可以是 A，也可以是和 A 不相等的 B。

这是我们首先要用公理形式肯定归纳集这种无穷集合存在的无穷性公理，以后的集合论的论述，几乎都是在这个公理的基础上发展出来的。

〔**无穷性公理**〕 有一个后继集（或归纳集）的存在。

如果我们用 $SUC(A)$ 表示 A 是一种后继集，则形式地表出无穷性公理是：

$$\exists A[S \amalg C(A)]$$

或者说，有一个归纳集存在，即

$$(\exists A)[\phi \in A \& (\forall a \in A)a^{+} \in A]$$

从上面①一个集合的后继的定义

②后继集或归纳集的定义

③无穷性公理对后继集存在的肯定

可以看出自然数集合就是最小的后继集(或最小的归纳集)。为此，我们先证明这种最小的后继集的存在性，然后定义出自然数集合。

定理3.2 $\exists A[S \cup C(A) \wedge \forall X[S \cup C(X) \Longrightarrow A \subseteq X]$

证明

根据无穷性公理，确有某后继集B的存在，现在取A是所有后继集合的交，它是B的一个子集，所以它是一个集合，所以可得集合

$$A := \bigcap \{X \subseteq B | S \cup C(X)\}$$

今证 〔1〕 A是一个后继集。

因为①若$S \amalg C(X)$，则$\phi \in X$，而A是所有后继集之交，故$\phi \in A$，②若$u \in A$，则对于每一个后继集$X \subseteq B$，$u \in X$，故对所有的X有$u^{+} \in X$，这就表示$u^{+} \in A$。

所以，A是一个后继集。

〔2〕 A是一个最小的后继集合。

因为，设$S \amalg C(C)$。则容易看出$S \amalg C(B \cap C)$所以$A \subseteq b \cap C \subseteq C$，$A$是被任何后继集$C$所包含的一个后继集，我们就是称这样的集合为最小集合，故A是一个最小的后继集。

证毕

从子集公理与外延性公理，我们知道最小后继集由定理 3.2 所肯定的集合还是唯一存在的。我们就称它是一个自然数集合，即

定义3.10 称最小后继集

$$\omega := \{x | \forall B[S \amalg C(B) \Longrightarrow x \in B]\}$$

是自然数集合，ω的元称为自然数。

按定义 3.8 可知 0， 1， 2， 3， …都是自然数。并且从自然数

集合ω的最小归纳集性质，得到关于一般数学归纳法根据的：

〔**关于ω的归纳原理**〕 ω的任何一个归纳子集与ω重合。从这个原理，使我们知道，欲使某一个命题对所有的自然数成立，只需要论证关于自然数n的一种命题陈述“— n —”或某一种性质公式$\Phi(n)$，所构成的ω的子集

$$T=\{n\in\omega|— n —\}$$

是一个归纳集，也就是只要证明

$$\phi\in T \text{ 且当 } n\in T \text{ 时} n^+\in T。$$

就可以了。

§3.6 幂集合公理

在引用无穷性公理规范了自然数集合ω的定义以后，我们还可以将它的所有它的子集为元所构成的集合，形成更进一步高浓度的无穷集合，这将是我们研究无穷集合以至整个集合理论的两个重要步骤。所以，我们首先给出

〔**幂集合公理**〕 对于任何一个集合A，有一个集合B，它的元恰是A的各个子集。

形式地表出这个公理，就是

$$\exists B\forall x[x\in B\Longleftrightarrow\forall y[y\in x\Longrightarrow y\in A]$$

或者用包含关系来表示，公理指出

$$\exists B\forall x[x\in B\Longleftrightarrow x\subseteq A]$$

再从外延性公理，得知相对于集合A所确定的集合B是唯一的。我们称B是A的幂集合，也就是我们可以有

定义3.11 集合B是集合A的一个幂集合 iff

$$\forall x[x\in B\Longleftrightarrow x\subseteq A]$$

A的幂集合B表为$\mathscr{P}A$，即

$$\mathscr{P}A:=\{x|x\subseteq A\}。$$

关于幂集合的分析研究，今后我们将集中注意无穷集合A的幂集合，例如$\mathscr{P}\omega$就是我们最感兴趣的对象之一。不过，在我们进一步引伸无穷集合之前，我们现对有限集合A的幂集合$\mathscr{P}A$，

加以论述。

定理3.3 设w是一个有限集合，且$a \notin W$，令

$$V = W \cup \{a\}$$

则V所具有的子集的个数，恰是W所具有的子集个数的二倍。

证明

因为，对于W的每一个子集，我们可以加上a这个元和不加入a这个元，就得到V的所有子集，所以V的子集个数恰是W的子集个数的两倍。

证毕

例如 $\mathscr{P}\{\phi\} = \mathscr{P}\{0\} = \{\phi, \{\phi\}\} = \{0, 1\}$。

$\mathscr{P}\{0, 1\} = \mathscr{P}\{\{0\} \cup \{1\}\} = \{\phi, \{0\}, \{1\}, \{0, 1\}\}$

还要注意，若$A = \{x, y, z\}$，则

$$\mathscr{P}A = \{\phi, \{x\}, \{y\}, \{z\}, \{x, y\}, \{x, z\}, \{y, z\}, \{x, y, z\}\}$$

但是$\mathscr{P}A$中并不直接包含有x，y，z三个元。因为一般地说

$$x \in A, \quad y \in A, \quad z \in A$$

不必一定有 $x \subseteq A$，$y \subseteq A$，$z \subseteq A$

只有在属于关系具有可传性时，才有又属于又被包含的性质，例如

$$0 \in 1 \in 2 \Longrightarrow 0 \subseteq 1 \subseteq 2$$

所以在$\mathscr{P}\{0, 1\}$中又包含有$0 = \phi$，$1 = \{0\}$二元。所以，一般在做成某集合A的幂集合$\mathscr{P}A$之后，又要求再包含A的原来各元，就应该做成新集合

$$A \cup \mathscr{P}A。$$

最后，从上列三例中，可以看出含一元的集合，它的幂集合有2个元；含二个元的集合，它的幂集合由四个元，即2^2个元组成；含三个元的集合，它的幂集合含有$2^3 = 8$个元。一般的，可以有

定理3.4 若V集合有n个元，则$\mathscr{P}V$有2^n个元。

证明

因为定理要求对任何自然数n成立，故需用关于ω的归纳原

理加以证明。对于$n\in\omega$，设$\Phi(n)$是命题。

对所有集合V，若V有n个元，则$\mathscr{P}V$有2^n个元。

定理要证 $\forall n\in\omega[\Phi(n)]$

也就是要证

$$T=\{n\in\omega|\Phi(n)\}$$

是一个归纳集。

〔1〕 证$\Phi(0)$

设V是一个无元的集合，则$V=\phi$，故$\mathscr{P}V=\{\phi\}$即$\mathscr{P}V$有一个元，$2^0=1$成立，故有$\Phi(0)$。

〔2〕 证$\forall k\in\omega[\Phi(k)\Longrightarrow\Phi(k+1)]$

设$k\in\omega$，且设$\Phi(k)$，即若w有k个元，则已知$\mathscr{P}w$有2^k个元。今证$\Phi(k+1)$。设V是一个有$k+1$个元的集合，设$a\in V$，且$W:=V-\{a\}$，则W有k个元，故W有2^k个子集，从定理3.3得知V有子集个数是W的子集个数的两倍，即V有

$$2\cdot2^k=2^{k+1}$$

个子集。 证毕

最后，我们给出幂集合一般性质的定理

定理3.5 (1) $A\subseteq B\Longrightarrow\mathscr{P}A\subseteq\mathscr{P}B$

(2) $\mathscr{P}A\subseteq\mathscr{P}B\Longrightarrow A\subseteq B$

(3) $\mathscr{P}A=\mathscr{P}B\Longrightarrow A=B$

(4) $\mathscr{P}A\in\mathscr{P}B\Longrightarrow A\in B$

证明

(1) 设$A\subseteq B$，则$\forall x[x\subseteq A\Longrightarrow x\subseteq B]$，也就是

$\forall x[x\in\mathscr{P}A\Longrightarrow x\in\mathscr{P}B]$，这表示$\mathscr{P}A\subseteq\mathscr{P}B$，

(2) 设$\mathscr{P}A\subseteq\mathscr{P}B$，则$\forall x[x\in\mathscr{P}A\Longrightarrow x\in\mathscr{P}B]$，也就是

$\forall x[x\subseteq A\Longrightarrow x\subseteq B]$特别情况，$A\subseteq A$就给出$A\subseteq B$。

(3) 设$\mathscr{P}A=\mathscr{P}B$，则$\mathscr{P}A\subseteq\mathscr{P}B$，$\mathscr{P}B\subseteq\mathscr{P}A$，则从(2)有

$A\subseteq B$，$B\subseteq A$，故$A=B$，

(4) 设$\mathscr{P}A\in\mathscr{P}B$，则$\mathscr{P}A\subseteq B$。而$A\in\mathscr{P}A$，故$A\subseteq B$。

证毕

值得注意的是，定理 3.5 的(4)，它的逆命题

$$A \in B \Longrightarrow \mathscr{P}A \in \mathscr{P}B$$

是不成立的，因为容易给出反例：设 $A=\{\phi\}$， $B=\{\{\phi\}\}$，则 $A \in B$，但是

$$\mathscr{P}A=\{\phi,\{\phi\}\}，\mathscr{P}B=\{\phi,\{\{\phi\}\}\}$$

故 $\mathscr{P}A \notin \mathscr{P}B$。

第四章 关系集合

§4.1 序对集合

两个集合A，B，如果已知它们有一种包含关系

$$A\subseteq B$$

则A，B二个集合可以用一种新的集合概念来描述它。要描述这个新集合，它有两个要素：一个是新集合由两个集合构成；二是两个集合构造成新集合时不是简单的组对集合

$$\{A,\ B\}$$

而是一个有次序的集合，如果把它写成

$$\langle A,\ B\rangle$$

则新构成的序对集合应有性质

$$\langle A,B\rangle=\langle C,D\rangle\Longleftrightarrow A=C\wedge B=D$$

为此，我们可以利用组对集合定义出这种有次序的组对集合。定义的方法是很多的，我们采用的是最简单的一种方法，它是首先由克亚托斯基（Kazimierz Kurafowski）在1921年给出的。

定义4.1 序对是由集合A和集合B组成的集合，它定义为

$$\langle A,B\rangle:=\{\{A\},\{A,B\}\}$$

由这种定义，我们就可以证明它是满足我们上述要求的。

定理4.1 当且仅当$A=C$且$B=D$时，$\langle A,B\rangle=\langle C,D\rangle$，即$\langle A,B\rangle=\langle C,D\rangle\Longleftrightarrow A=C\wedge B=D$

证明

$\Leftarrow$的证明是显然的

证$\Rightarrow$，设$\langle A,B\rangle=\langle C,D\rangle$，则有

$$\{\{A\},\{A,B\}\}=\{\{C\},\{C,D\}\}$$

按集合相等的定义，它们应该是具有相同的元，故或者是

〔1〕 $\{A\}=\{C\}$ 且 $\{A,B\}=\{C,D\}$

或　　　〔2〕　$\{A\}=\{C,D\}$　且　$\{A,B\}=\{C\}$

〔1〕　给出　　$A=C$，$B=D$

〔2〕　则给出　$A=C=D$ 且 $A=B=C$

所以都是　　　　$A=C$，$B=D$

证毕

如果是从两个大的集合 A，B 中，分别取出集合 a，b，组成序对 $\langle a, b\rangle$，这些序对与原来的集合有什么关系呢？这个问题实际上是我们熟知的平面几何问题，因为从 X，Y 两个坐标轴上任取两点 x，y，就决定了平面上坐标为 x，y 的一点，用集合观点来说，它的对应问题就是从两个实数集合 X，Y 中任取二实数 x 集合与 y 集合，构成序对

$$\langle x, y\rangle$$

那么，我们显然要考虑全面点所对应的序对为元的类：

$$\{\langle x, y\rangle \mid x\in X, y\in Y\}$$

它是不是一个集合呢？

定理4.2　若 $a\in A$ 且 $b\in B$，则 $\langle a, b\rangle\in\mathscr{P}\mathscr{P}(A\cup B)$

证明

设 $a\in A$，且 $b\in B$，则

〔1〕　$a\in A\cup B$，故 $\{a\}\subseteq A\cup B$，也就是

$$\{a\}\in\mathscr{P}(A\cup B)$$

〔2〕　$b\in A\cup B$，而 $\{a, b\}\subseteq A\cup B$ 也就是

$$\{a, b\}\in\mathscr{P}(A\cup B)$$

从〔1〕，〔2〕得知

$$\{\{a\},\{a, b\}\}\subseteq\mathscr{P}(A\cup B)$$

故　　$$\{\{a\},\{a, b\}\}\in\mathscr{P}\mathscr{P}(A\cup B)$$

即　　$$\langle a, b\rangle\in\mathscr{P}\mathscr{P}(A\cup B)$$

证毕

由此可见 $\{\langle a, b\rangle \mid a\in A\wedge b\in B\}$ 必是 $\mathscr{P}\mathscr{P}(A\cup B)$ 的一个子集，因为从并公理、幂集合公理、知道由集合 A，B 构成的 $\mathscr{P}\mathscr{P}(A\cup B)$ 是一个集合，再从子集公理可知

$$\{\langle a, b\rangle \mid a\in A\wedge b\in B\}\subseteq\mathscr{P}\mathscr{P}(A\cup B)$$

所以，可给出定义如下：

定义4.2 给定二集合A, B，一切$a\in A$，$b\in B$组成的序对$\langle a, b\rangle$为元的集合，称为A, B二集合的笛氏积，写成$A\times B$，即

$$A\times B:=\{\langle a, b\rangle \mid a\in A\wedge b\in B\}$$

例如

$$\{2, 3\}\times\{4\}=\{\langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle\}$$

$$\{1\}\times\{4, 5\}=\{\langle 1, 4\rangle\langle 1, 5\rangle\}$$

$$\{2, 3\}\times\{4, 5\}$$
$$=\{\langle 2, 4\rangle, \langle 3, 4\rangle, \langle 2, 5\rangle, \langle 3, 5\rangle\}$$

并且，我们看出

$$A\times B=\{x\in\mathscr{P}\mathscr{P}(A\cup B)\mid \exists a\in A\exists b\in B[x=\langle a, b\rangle]\}$$

或者说

$$A\times B=\{\langle a, b\rangle\in\mathscr{P}\mathscr{P}(A\cup B)\mid a\in A\wedge b\in B\}$$

显然，集合在“×”运算下是不可交换的，即一般地说，$A\neq B$时

$$A\times B\neq B\times A$$

不过，“×”与并、交作用时有分配律，即

定理4.3 “×”运算对于“并”和“交”运算是可分配的，即

$$A\times(B\cup C)=(A\times B)\cup(A\times C)$$
$$A\times(B\cap C)=(A\times B)\cap(A\times C)$$

证明

这里只证第一式，第二式可以类似地得到证明。

证⇒：设$y\in A\times(B\cup C)$，即对于

$$a\in A \quad 且 \quad z\in B\cup C$$

有 $\quad y=\langle a, z\rangle \quad$ 且 $\quad z\in B$或$z\in C$

若$z\in B$，则 $\quad y\in A\times B\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$

若$z\in C$，则 $\quad y\in A\times C\subseteq(A\times B)\cup(A\times C)$

故总有 $\qquad y\in(A\times B)\cup(A\times C)$

证$\Leftarrow$ 设 $\qquad y\in(A\times B)\cup(A\times C)$则

$$y\in A\times B \quad 或 \quad y\in A\times C$$

故或者有 $\qquad a\in A$与$b\in B$使$y=\langle a, b\rangle$

或者有 $\qquad a\in A$与$c\in C$使$y=\langle a, c\rangle$

二者都说明有 $\qquad a\in A$及某$z\in B\cup C$ 使

$$y=\langle a, z\rangle$$

故 $\qquad y\in A\times(B\cup C)$ 证毕

现在，我们可以把序对概念推广到**n序组**，$n\in\omega$，$n\geqslant 1$的情况。

定义4.3 $\langle a\rangle:=a$ 且对所有$n\in\omega$，$n\geqslant 1$时

$$\langle a_1, a_2, \cdots, a_n, a_{n+1}\rangle:=\langle\langle a_1, a_2, \cdots a_n\rangle, a_{n+1}\rangle$$

定理4.4 对所有$n\in\omega$，有

$$\langle a_0, a_1, \cdots a_n\rangle=\langle b_0, b_1, \cdots b_n\rangle\Longleftrightarrow a_0=b_0\wedge a_1=b_1\wedge\cdots\wedge a_n=b_n$$

证明

引用关于ω的归纳原理，$n=0$时

$$\langle a_0\rangle=a_0,\ \langle b_0\rangle=b_0 \quad 故 \quad \langle a_0\rangle=\langle b_0\rangle\Longleftrightarrow a_0=b_0$$

若$n=k$时成立，即

$$\langle a_0, a_1, \cdots a_k\rangle=\langle b_0, b_1, \cdots b_k\rangle\Longleftrightarrow a_0=b_0\wedge a_1=b_1\wedge\cdots\wedge a_k=b_k$$

设 $\langle a_0, a_1, \cdots a_k, a_{k+1}\rangle=\langle b_0, b_1, \cdots b_k, b_{k+1}\rangle$即

$$\langle\langle a_0, a_1, \cdots a_k\rangle, a_{k+1}\rangle=\langle\langle b_0, b_1, \cdots b_k\rangle, b_{k+1}\rangle$$

则从定理4.1得知

$$\langle a_0, a_1, \cdots a_k\rangle=\langle b_0, b_1, \cdots, b_k\rangle 且 \ a_{k+1}=b_{k+1}$$

故从$n=k$有

$$a_0=b_0, a_1=b_1, \cdots a_k=b_k,$$

得 $$a_0=b_0\wedge a_1=b_1\wedge\cdots a_k=b_k\wedge a_{k+1}=b_{k+1}$$

证毕

由此，相对于A，B二集合构成的序对全体的集合定义为笛

氏积$A\times B$，我们就可用从n个集合$A_1,A_2,\cdots A_n$，构成n序组全体的集合，定义出一般的笛氏积集合。

定义4.4 $\displaystyle\mathop{\times}_{i=1}^{1} A_i := A_1$

$$\mathop{\times}_{i=1}^{n+1} A_i := \left(\mathop{\times}_{i=1}^{n} A_i\right)\times A_{n+1}$$

特别是$A_i\equiv A$时，简写为　$A^1:=A$，$A^{n+1}:=A^n\times A$

例如，若　$A_1=\{1,2\}, A_2=\{3,4\}, A_3=\{7,8,9\}$

则 $\displaystyle\mathop{\times}_{i=1}^{3} A_i=(A_1\times A_2)\times A_3$

$=\{\langle a_1,a_2,a_3\rangle | a_1\in A_1, a_2\in A_2, a_3\in A_3\}$

$\{\langle 1,3\rangle,\langle 1,4\rangle,\langle 2,3\rangle,\langle 2,4\rangle\}\times\{7,8,9\}$

$=\{\langle 1,3,7\rangle,\langle 1,3,8\rangle,\langle 1,3,9\rangle,\langle 1,4,7\rangle,$
$\langle 1,4,8\rangle,\langle 1,4,9\rangle,\langle 2,3,7\rangle,\langle 2,3,8\rangle,$
$\langle 2,3,9\rangle,\langle 2,4,7\rangle,\langle 2,4,8\rangle,\langle 2,4,9\rangle\}$

有的书刊将序对$\langle a,b\rangle$写成（a,b）则n序组$\langle a_1,a_2,\cdots a_n\rangle$就写成（$a_1,a_2,\cdots a_n$）。所以平面坐标点用序对表出是（$x,y$）空间坐标点用3序组表出是（$x,y,z$），一般的$n$维空间中一点用$n$序组表出是（$x_1,x_2,\cdots,x_n$）。

§4.2　关系的集合

数学研究的对象，经常是要弄清楚描述客体之间的关系，例如平面中的点的坐标就是第一个坐标与第二个坐标之间的关系；两个集合中一个集合被另一集合所包的关系；函数是自变量与应变量的关系；加法运算是数与被加数的关系；次序是一先一后的关系；大小是一大一小的关系；等价命题是一个命题与另一命题的对等关系；等等。

一般的说，一个集合X的各元和一个集合Y的各元之间的一个二元关系R可以用下列一些例子来引出：

〔1〕 $X=M$(男性)$Y=W$(女性)$xRy:=x$是y的儿子

〔2〕 $X=\omega$，$Y=\omega$ $xRy:=y=x+1$

〔3〕 $X=\omega$，$Y=\underset{\sim}{R}$ $xRy:=y=\sqrt{x}$

〔4〕 $X=\omega^2$，$Y=\omega^2$，$\langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle:=a+d=b+c$

〔5〕 $X=\omega\times\{\underset{\sim}{Z}-\{0\}\}$，$Y=X$，$\langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle:=a\cdot d=b\cdot c$

〔6〕 $X=\omega$，$Y=\mathscr{P}\omega$ $xRy:=x\in y$

这里的$\underset{\sim}{R}$，$\underset{\sim}{Z}$各表实数集合与整数集合，实际上，〔4〕的关系就是从ω构成负数概念与减法运算概念，从而产生整数集合$\underset{\sim}{Z}$，再从〔5〕的关系就构成有理数集，我们然后从有理数可以用三种方法之一来定义实数集合$\underset{\sim}{R}$。另外，我们还可以举出三个集合构成的三元关系：

〔7〕 $X=M$(男性)，$Y=W$(女性)，$Z=P$(人)
$R(x, y, z):=x$和y是z的父母

〔8〕 $X=Y=Z=\omega$，$R(x, y, z):=x+y=z$

我们也可以把〔1〕～〔8〕的关系表成集合如下：

〔1〕 $\{\langle x, y\rangle\in M\times W|x$是$y$的儿子$\}$

〔2〕 $\{\langle x, y\rangle\in\omega\times\omega|y=x+1\}$

〔3〕 $\{\langle x, y\rangle\in\omega\times\underset{\sim}{R}|y=\sqrt{x}\}$

〔4〕 $\{\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle\in\omega^2\times\omega^2|a+d=b+c\}$

〔5〕 $\{\langle\langle a, b\rangle, \langle c, d\rangle\rangle\in(\omega\times(\underset{\sim}{Z}-\{0\}))^2|$
$a\cdot d=b\cdot c\}$

〔6〕 $\{\langle x, y\rangle\in\omega\times\mathscr{P}\omega|x\in y\}$

〔7〕 $\{\langle x, y, z\rangle\in X\times Y\times Z|x$和$y$是$z$的父母$\}$

〔8〕 $\{\langle x, y, z\rangle\in\omega^3|x+y=z\}$

事实上，如上所指各例的二元关系R决定了$X\times Y$集合的一个子集，反之，$X\times Y$的每一个子集也决定了X的元与Y的元之间的一种二元关系，所以，我们可以定义关系的集合如下：

定义4.5 R是X集合与Y集合之间的一种二元关系集合 iff

$R\subseteq X\times Y$，并且符号表示二元关系集合R为

$$x\ R\ y:=\langle x,y\rangle\in R$$

或 $$R(x,y):=\langle x,y\rangle\in R$$

由此可见，一个关系集合R是一类序对集合为元的集合，它是某笛氏积的一个子集，其中序对集合的第一个元的集合是构成笛氏积第一个集合的一个子集，而序对集合第二个元的集合是构成笛氏积的第二个集合的一个子集。所以，我们还可以指出一个二元关系R的定义域（表为$\mathrm{dom}R$）和值域（表为$\mathrm{ran}R$）。

定义4.6 当$R\subseteq X\times Y$，定义

$\mathrm{dom}\,R:=\{x\in X|\exists\, y\in Y[x\ R\ y]\}$为$R$的定义域

$\mathrm{ran}\,R:=\{y\in Y|\exists\, x\in X[x\ R\ y]\}$为$R$的值域。

上举6例是容易指出它们的定义域和值域的，例如在〔6〕中$\mathrm{dom}\,R=\omega$，$\mathrm{ram}\,R=\mathscr{P}\omega-\{\phi\}$。

如果$R\subseteq X\times X$，则简称R是在X上的一个关系，例如〔2〕就是在ω上的一个关系，〔4〕是在ω^2上的一个关系，〔5〕是在$\omega\times(\underset{\sim}{Z}-\{0\})$上的一个关系。

在二元关系集合给定的基础上，我们还可以考虑它们的逆关系和复合关系。

定义4.7 设$R\subseteq X\times Y$，则其逆关系

$$\breve{R}:=\{\langle u,v\rangle\in Y\times X|\langle v,u\rangle\in R\}$$

从而，上述各例各给出其逆关系是

〔1〕′ $\{\langle u,v\rangle\in W\times M|\,u$ 是 v 的母亲$\}$

〔2〕′ $\{\langle u,v\rangle\in\omega\times\omega|\,v=u-1\}$

〔3〕′ $\{\langle u,v\rangle\in\underset{\sim}{R}\times\omega|\,v=u^2\}$

〔4〕′ $\{\langle\langle u_1,u_2\rangle,\langle v_2,v_2\rangle\rangle\in\omega^2\times\omega^2|u_1-v_1=u_2-v_2\}$

〔5〕′ $\{\langle\langle u_1,u_2\rangle,\langle v_1,v_2\rangle\rangle\in(\omega\times(\underset{\sim}{Z}-\{0\}))^2|u_1\cdot v_2$
$=u_2\cdot v_1\}$

〔6〕′ $\{\langle u,v\rangle\in\mathscr{P}\omega\times\omega|\,v\in u\}$

特别是，在〔4〕〔5〕二例，$\breve{R}=R$。

定义4.8 设$R\subseteq U\times V$且$S\subseteq V\times W$，则S和R的复合关

系或S和R的复合是U和W之间的一个关系集合，表为$S\circ R$，它定义为

$$S\circ R := \{\langle x, z\rangle\in U\times W \mid \exists y\in V[\langle x, y\rangle\in R \wedge\langle y, z\rangle\in S]\}$$

这种关系可以表示如图 4.1

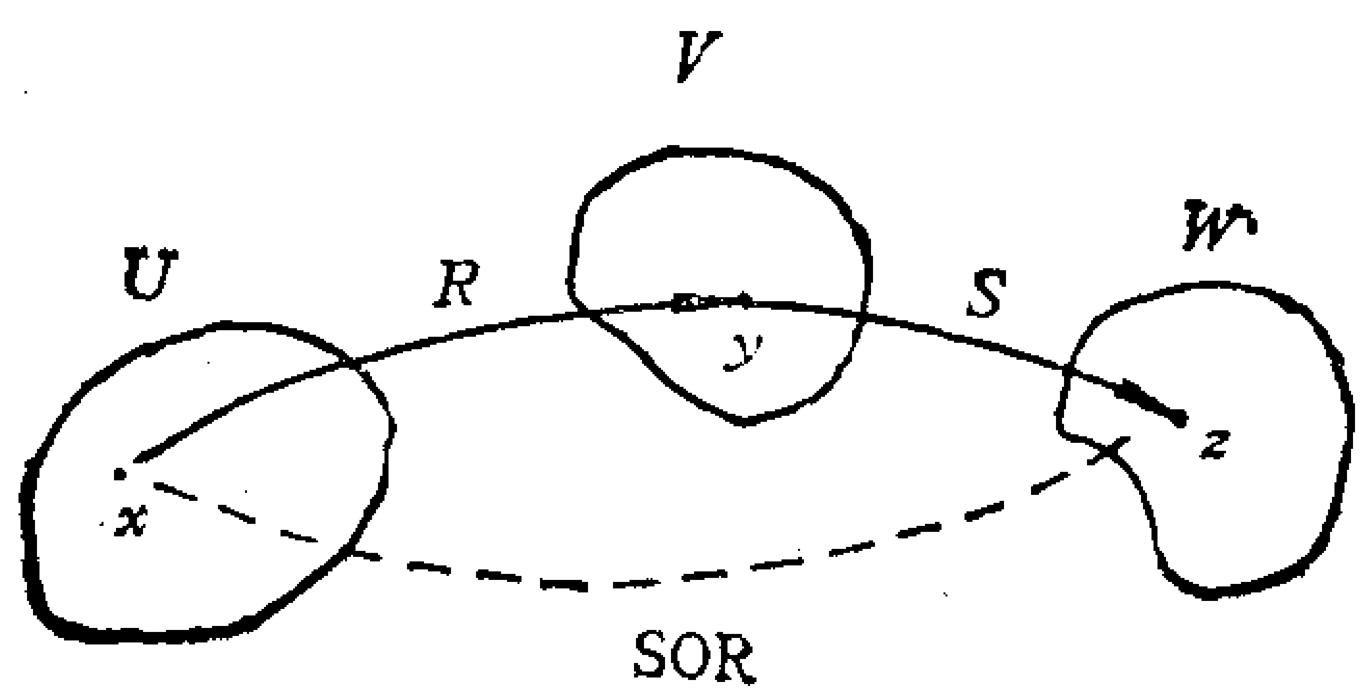

图 4.1

例 1 设R是上例〔2〕的关系$R\subseteq\omega\times\omega$；$S$是上例〔3〕的关系$S\subseteq\omega\times\underset{\sim}{R}$，则

$$\begin{aligned} S\circ R &:= \{\langle x, z\rangle\in\omega\times\underset{\sim}{R} \mid \exists y\in\omega[\langle x, y\rangle\in R \\ &\qquad \wedge\langle y, z\rangle\in S]\} \\ &= \{\langle x, z\rangle\in\omega\times\underset{\sim}{R} \mid \exists y\in\omega[y = x+1 \\ &\qquad \wedge z=\sqrt{y}]\} \\ &= \{\langle x, z\rangle\in\omega\times\underset{\sim}{R} \mid z=\sqrt{(x+1)}\} \end{aligned}$$

例 2 设M是男人的集合，$xRy:=y$是x的父亲，则

$R\circ R:=\{\langle x, z\rangle\in M\times M \mid \exists y\in M[\langle x, y\rangle\in R\wedge \langle y, z\rangle\in R]\}=\{\langle x, z\rangle\in M\times M \mid \exists y\in M$ 〔y是x的父亲且z是y的父亲〕$\}$

$=\{\langle x, z\rangle\in M\times M \mid z$是$x$的祖父$\}$

常见的一种关系是恒等关系：

定义4.9 设V是一个集合，关系

$$I_V := \{\langle x, y\rangle\in V\times V \mid x=y\}$$

称为V上的恒等关系

我们在上述论证二元关系是从给定集合X与Y以后给出笛氏

积$X\times Y$的一个子集，从而有

$$R\subseteq X\times Y$$

也就是　　$$R\in\mathscr{P}(X\times Y)$$

所以，在 $\langle x, y\rangle\in R$时，就有

$$\langle x, y\rangle\in\mathscr{P}\mathscr{P}(X\times Y)$$

这个结果，从序对的构成关系来说是和定理4.2的结论一致的。

现在，反过来分析，如果已知二元关系R集合，那么它的每一个元是一个序对，序对中的两个元将在什么集合中呢？

定理4.5　若$\langle a, b\rangle\in R$，则$a\in U(UR)$，$b\in U(UR)$

证明

设 $\langle a, b\rangle=\{\{a\},\{a, b\}\}\in R$，则

$$\{a\}\in UR,\ \{a, b\}\in UR$$

从后式得　$a\in U(UR)$，$b\in U(UR)$　　证毕

由此可见，从定义4.6得知

$$\operatorname{dom}R=\{x\mid\exists y[\langle x, y\rangle\in R]\}$$

$$\operatorname{ran}R=\{y\mid\exists x[\langle x, y\rangle\in R]\}$$

而且它们都是$U(UR)$的子集，所以总是一个集合，也就是

$$\operatorname{dom}R=\{x\in U(UR)\mid\exists y[\langle x, y\rangle\in R]\}$$

$$\operatorname{ran}R=\{y\in U(UR)\mid\exists x[\langle x, y\rangle\in R]\}$$

§4.3　等价关系

二元关系中一种重要类型就是等价关系，它的特点是在X集合上的一个关系R具有自反性、对称性和可传性。例如

〔1〕　$X=\omega$，$xRy:=x=y$

〔2〕　$X=\omega$，$xRy:=\exists k\in\underset{\sim}{Z}[x-y=3k]$

〔3〕　$X=\omega^2$，$\langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle:=a+d=b+c$

〔4〕　$X=\omega\times(\underset{\sim}{Z}-\{0\})$，$\langle a, b\rangle R\langle c, d\rangle:$

$$=a\cdot d=b\cdot c$$

它们都是使R为

（1）自反的，对所有$x\in X$，xRx

（2）对称的，对所有 $x,y\in X$，$xRy\Longrightarrow yRx$

（3）可传的，对所有$x,y,z\in X$，$xRy\wedge yRz\Rightarrow xRz$

从而，我们给出

定义4.10 在集合X上的一个关系R，若R是自反的、对称的、可传的时候，称R是在X上的一个等价关系。这时常用"$\sim$"表示R。

注意到，当R是在X上的一个等价关系时，并不是X的任何两个元都恒有R关系，而是有些元构成等价关系组，有些元构成同样关系下的等价关系组，所以,对于给定等价关系$R\subseteq X\times X$以后，我们就可以将X的各元按R等价关系分成若干类，每一类就是X的一个子集，称为等价类，也就是：

定义4.11 设R或$\sim$是在X集合上的一个等价关系，X的一个元x相对于$\sim$的等价类是由X中那些使$x\sim y$成立的所有$y\in X$元组成的子集，表为

$$[x]_{\sim}:=\{y\in X\,|\,x\sim y\}$$

或

$$[x]_R:=\{t\,|\,xRt\}\quad（R\text{是等价关系}）$$

并且称x是等价类$[x]_{\sim}$的一个"表示"。

等价类$[x]_{\sim}$有时写成"$x/\sim$"。

由此，我们得到等价类相等的充要条件定理。

定理4.6 若R是X集合上的一个等价关系，且x，y都属于X，则

$$[x]_R=[y]_R\quad iff\quad xRy$$

证明

证$\Rightarrow$ 设$[x]_R=[y]_R$，由于yRy，故$y\in[y]_R$，从而$y\in[x]_R$，也就是xRy

证$\Leftarrow$ 设xRy，则

$t\in[y]_R$就有yRt，而xRy，R又是可传，故xRt，也就是$t\in[x]_R$

$t\in[x]_R$就有xRt，而xRy，R是对称，可传，故有

yRx, xRt给出yRt，即 $t\in[y]_R$

所以 $[x]_R=[y]_R$

证毕

例如本节提出的第一例有

$[0]_\sim:=\{y\in\omega \mid y=0\}$，故$[0]_\sim=\{0\}$

$[1]_\sim:=\{y\in\omega \mid y=1\}$，故$[1]_\sim=\{1\}$

……

又从第二例来说，

$[0]_\sim:=\{y\in\omega \mid 0-y$ 能被 3 整除$\}=\{0, 3, 6, \cdots\}$

$[1]_\sim:=\{y\in\omega \mid 1-y$ 能被 3 整除$\}=\{1, 4, 7, \cdots\}$

$[2]_\sim:=\{y\in\omega \mid 2-y$ 能被 3 整除$\}=\{2, 5, 8, \cdots\}$

$[3]_\sim:=\{y\in\omega \mid 3-y$ 能被 3 整除$\}=\{0, 3, 6, \cdots\}$

……

所以，$[4]_\sim=[1]_\sim$，$[5]_\sim=[2]_\sim$，$[6]_\sim=[3]_\sim=[0]_\sim$这就说明“模 3 对 x 同余”的等价类，即按此为了整除后同一余数将 ω 分成的子集类，共有三个，即

$$[0]_\sim,\ [1]_\sim,\ [2]_\sim$$

再从第三例来看：

$$[\langle 0, 0\rangle]_\sim:=\{\langle c, d\rangle\in\omega^2 \mid c=d\}$$
$$=\{\langle 0, 0\rangle, \langle 1, 1\rangle\langle 2, 2\rangle, \cdots\}$$

并且$[\langle 1, 1\rangle]_\sim=[\langle 0, 0\rangle]_\sim$，$[\langle 2, 2\rangle]_\sim$
$=[\langle 0, 0\rangle]_\sim\cdots$

$$[\langle 0, 1\rangle]_\sim:=\{\langle c, d\rangle\in\omega^2 \mid d=c+1\}$$
$$=\{\langle 0, 1\rangle, \langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle, \cdots\}$$

并且$[\langle 1, 2\rangle]_\sim=[\langle 0, 1\rangle]_\sim$，$[\langle 2, 3\rangle]_\sim$
$=[\langle 0, 0\rangle]_\sim\cdots$

这就说明 $[\langle 0, 0\rangle]_\sim$等价类表出了“0”

$[\langle n, 0\rangle]_\sim$等价类表出了“$n$”

此外，$[\langle 0, n\rangle]_\sim$等价类则表出了负整数“$-n$”。

所以，在自然数基础上，通过笛氏积 ω^2，后继给出的加法运算，

就可以构造出负整数和自然数，构造出整数集合 $\underset{\sim}{Z}$。它的每一元用ω^2上的一个等价类给出。

最后，第四个例子是

$$X=\omega\times(\underset{\sim}{Z}-\{0\}),\ \langle a,b\rangle\sim\langle c,d\rangle:$$
$$=a\cdot d=b\cdot c$$
$$[\langle 2,1\rangle]_{\sim}:=\{\langle c,d\rangle\in\omega\times(\underset{\sim}{Z}-\{0\})\mid 2\cdot d=c\}$$
$$=\{\langle 2,1\rangle,\langle 4,2\rangle,\cdots\}$$
$$[\langle 2,-1\rangle]_{\sim}:=\{\langle c,d\rangle\in\omega\times(\underset{\sim}{Z}-\{0\})\mid 2\cdot d$$
$$=-c\}=\{\langle 2,-1\rangle,\langle 4,-2\rangle,\cdots\}$$

它们分别表出整数“2”，“-2”。而乘法运算是在后继定义的基础上构成的。

$$[\langle 1,2\rangle]_{\sim}:=\{\langle c,d\rangle\in\omega\times(\underset{\sim}{Z}-\{0\})\mid d=2\cdot c\}$$
$$=\{\langle 1,2\rangle,\langle 2,4\rangle,\cdots\}$$

表出了有理数“1/2”。同样的$[\langle 2,3\rangle]_{\sim}$表出了“2/3”。

为了进一步说明，如何利用等价类来将一个集合重新分组构成新集合，正如从自然数集合构成整数集合，又从自然数集合和整数集合构成有理数集合那样，应该先阐明如何应用等价类划分集合的问题。

定理4.7 若$[a]_{\sim}\cap[b]_{\sim}\neq\phi$，则$[a]_{\sim}=[b]_{\sim}$

证明

设$[a]_{\sim}\cap[b]_{\sim}\neq\phi$，则有某$c$使

$$c\in[a]_{\sim}\quad 且\quad c\in[b]_{\sim}$$

所以$c\sim a$且$c\sim b$。

今若$x\in[a]_{\sim}$，则$x\sim a$，从上可知$x\sim b$即$x\in[b]_{\sim}$类似的，若$x\in[b]_{\sim}$则$x\sim b$，从上得$x\sim a$，故$x\in[a]_{\sim}$，故 $[a]_{\sim}\subseteq[b]_{\sim}$，$[b]_{\sim}\subseteq[a]_{\sim}$，即$[a]_{\sim}=[b]_{\sim}$。

证毕

定义4.12 X集合的某些子集的组合P称为是X的一种“划分”，如果

(1) $X=U\{A\mid A\in P\}$

（2）对所有$A, B\in P$，或者$A=B$或是

$$A\cap B=\phi$$

如此定义的“划分”，显然是$\mathscr{P}X$的一个子集，所以P是一个集合。特别是从等价类性质定理4.7，就可以给出

定理4.8 设$\sim$是在集合X上的一种等价关系，则

$\{[x]_\sim | x\in X\}$是X的一种划分

证明

（1）由于$\sim$是X集合的一个等价关系，所以对于X的每一个元x，

$$x\in[x]_\sim$$

所以
$$X\subseteq U\{[x]_\sim | x\in X\}$$

而 $[x]_\sim=\{y\in X | x\sim y\}$，所以所有$[x]_\sim$都是$X$的子集，即

$$U\{[x]_\sim | x\in X\}\subseteq X$$

故
$$X=U\{[x]_\sim | x\in X\}$$

（2）再从定理4.7，可知对于任何$[x]_\sim$，$[y]_\sim$，$x, y\in X$，或者$[x]_\sim=[y]_\sim$，或者$[x]_\sim\cap[y]_\sim=\phi$

所以 $\{[x]_\sim | x\in X\}$是X的一种划分。

证毕

定义4.13 设$\sim$是在X集合上的一种等价关系，模$\sim$的X的“商集合”是所有$x\in X$的等价类$[x]_\sim$组成的集合，用符号$X/\sim$表示这个商集合，则

$$X/\sim:=\{[x]_\sim | x\in X\}$$

所以，整数集合是给定ω^2上的一种等价关系$\sim$后，对ω^2的一种划分集合，即

$$\underset{\sim}{Z}:=\omega^2/\sim$$

而有理数集合是给定的$\omega\times(\underset{\sim}{Z}-\{0\})$集合上的一种等价关系$\sim$后，对$\omega\times(\underset{\sim}{Z}-\{0\})$集合的一种划分，即

$$\underset{\sim}{Q}:=\omega\times(\underset{\sim}{Z}-\{0\})/\sim$$

在有理数集合$\underset{\sim}{Q}$的基础上，我们可以有三种构造实数集合的等价方法，他们是.

（1）康托的节链法

（2）狄德金（Richard Dedekind）的分割法

（3）柯西（Augustin Cauchy）的序列法

今分述如下：

（1）节链法

定义4.14 $\langle a_n, b_n\rangle_{n\in\omega}$ 构成 Q 中的一个节链 iff

① 对所有 $n\in\omega$，$a_n\in Q$，$b_n\in Q$

② 对所有 $n\in\omega$，$a_n\leqslant a_{n+1}\leqslant b_{n+1}\leqslant b_n$

③ 对所有 $n\in\omega$，$b_n-a_n\leqslant 2^{-n}$

若将 $\langle a_n, b_n\rangle_{n\in\omega}$ 简写为 $\langle a_n, b_n\rangle$，则称 $\langle a_n, b_n\rangle$ 等于 $\langle c_n, d_n\rangle$ iff 对所有 $k\in\omega$ 有 $b_k\geqslant c_k$ 且 $d_k\geqslant a_k$ 写这种相等的关系是：$\langle a_n, b_n\rangle\sim\langle c_n, d_n\rangle$ 此时

0	×	0	×	或	×	0	×	0
a_k	c_k	b_k	d_k		c_k	a_k	d_k	b_k

直观来说，$\langle a_n, b_n\rangle\sim\langle c_n, d_n\rangle$ 意味着对于每个 $k\in\omega$，节段 $[a_k, b_k]$ 交会节段 $[c_k, d_k]$ 的，我们可以证明～是一个等价关系。

定理4.9 ～是在 Q 中所有节链集合上的一个等价关系

证明

～的对称性和自反性是显然的。只要证明～是可传的。设 $\langle a_n, b_n\rangle\sim\langle c_n, d_n\rangle$，$\langle c_n, d_n\rangle\sim\langle e_n, f_n\rangle$ 但是没有 $\langle a_n, b_n\rangle\sim\langle e_n, f_n\rangle$，即

$$\neg\forall n\in\omega\,[b_n\geqslant e_n\wedge f_n\geqslant a_n]$$

则有某 $m\in\omega$ 使 $\neg(b_m\geqslant e_m\wedge f_m\geqslant a_m)$，也就是

$$b_m<e_m\vee f_m<a_m$$

所以

$$a_m\leqslant b_m<e_m\leqslant f_m \quad 或 \quad e_m\leqslant f_m<a_m\leqslant b_m$$

只就 $b_m<e_m$ 情况讨论，则类似的可以讨论 $f_m<a_m$ 的情况。

取 $k\in\omega$ 使 $2^{-k}<e_m-b_m$ 且使 $k\geqslant m$。今究 $\langle ck, dk\rangle$ 由于 $k\geqslant m$，就得

$$\left.\begin{array}{l} a_m\leqslant a_k\leqslant b_k\leqslant b_m \\ e_m\leqslant e_k\leqslant f_k\leqslant f_m \end{array}\right\}$$

而 $\langle a_n, b_n\rangle \sim \langle c_n, d_n\rangle$给出 $b_k \geqslant c_k \wedge d_k \geqslant a_k$

$\langle e_n, d_n\rangle \sim \langle e_n, f_n\rangle$给出 $d_k \geqslant e_k \wedge f_k \geqslant c_k$

并且还有 $d_k - c_k \leqslant 2^{-k} < e_m - b_m$

这样，可以从下图看出是矛盾的

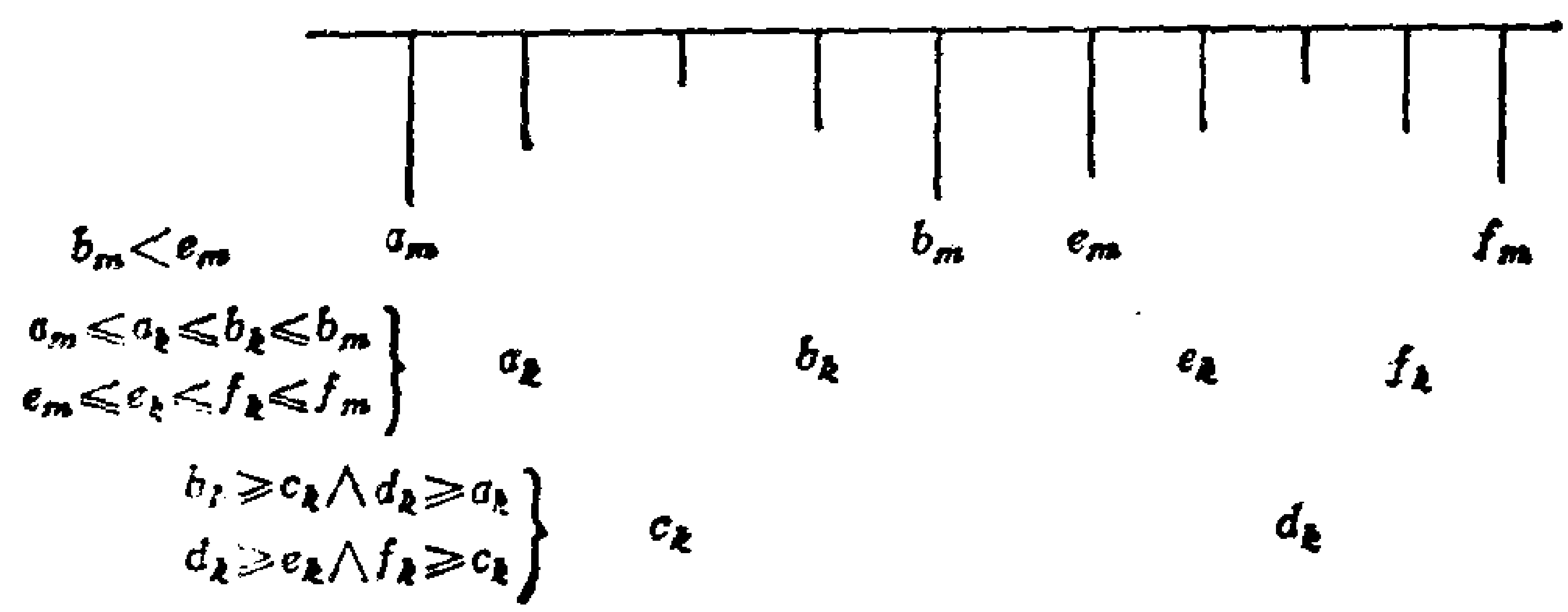

图 4.2

证毕

从上分析，我们可以定义12为节链等价类〈1，2〉,〈1.4, 1.5〉,…。从朴素集合的概念来说，我们已经有了连续统的假设，所以，每一个实数决定一个节链而且就恰恰决定了这个节链的一个等价类。我们还可以检验在 $\underset{\sim}{Q}$ 中这些节链的所有等价类的集合中，能够定义“加法”和“乘法”的运算，从而得到具有加乘法运算性质的实数集合。这些分析就促使我们抛去直观的朴素的连续统概念，直接定义实数集合 $\underset{\sim}{R}$ 为在 $\underset{\sim}{Q}$ 中模～节链集合的商集，也就是，实数集合 $\underset{\sim}{R}$ 是在 $\underset{\sim}{Q}$ 中节链等价类的集合。

由于 $\underset{\sim}{Q}$ 定义在 $\underset{\sim}{Z}$ 的基础上，$\underset{\sim}{Z}$ 定义在 ω 上，所以最终的意义就是 $\underset{\sim}{R}$ 也可以用 ω 来定义。

（2）分割法

构造连续统 $\underset{\sim}{R}$ 另一种方法是和 $\underset{\sim}{R}$ 的“连续性”概念相联系的，也就是，若 $A, B \subseteq \underset{\sim}{R}$ 不是空集，而且 $A \cup B = \underset{\sim}{R}$，且

$$\forall a \in A \forall b \in B [a < b]$$

则或是 A 有一个最大的或者 B 有一个最小的。由此可以直接给出从有理数集合 $\underset{\sim}{Q}$ 定义实数集合 $\underset{\sim}{R}$ 的分割法。

定义4.15 在 $\underset{\sim}{Q}$ 中的一种“分割”是一个子集 $A \subseteq \underset{\sim}{Q}$，它使

① $A \neq \phi$ 且 $A \neq \underset{\sim}{Q}$

② 若 $p \in A$ 且 $q < p$，则 $q \in A$

③ A 无最大元。

例如，$\{x \in Q \mid x < 0 \vee x^2 < 2\}$ 就是在 $\underset{\sim}{Q}$ 中的一种分割，我们定义 $\underset{\sim}{R}$ 是在 $\underset{\sim}{Q}$ 中所有的分割的集合

（3）序列法

定义4.16 在 $\underset{\sim}{Q}$ 中的一个柯西序列为 $\langle a_n \rangle_{n \in \omega}$，它使

〔1〕 对所有 $n \in \omega$，$a_n \in \underset{\sim}{Q}$

〔2〕 $\forall k \in \omega \exists p \in \omega \forall n, m \in \omega [n, m \geqslant p \Rightarrow |a_n - a_m| \leqslant 2^{-k}]$

我们可以用柯西序列 1，1.4，1.41，1.414，1.4142，…或柯西序列 1，1.2，1.3，1.4，1.41，1.414，1.4142，…来辨识 $\sqrt{2}$，从而可以将实数集合 $\underset{\sim}{R}$ 定义为 $\underset{\sim}{Q}$ 中模一种等价关系的所有柯西序列的集合，在决定了这种等价关系之后就可以证明有柯西定理：

若 $\langle a_n \rangle_{n \in \omega}$ 是在 $\underset{\sim}{R}$ 中的一个柯西序列，则有 $c \in \underset{\sim}{R}$ 使

$$\lim_{n \to \infty} a_n = c$$

§4.4 函数关系

关于一般用朴素集合概念给出函数定义，我们是熟悉的。

设 X 和 Y 是二个任何客体为元的集合，对于 X 的每一个元 x，按某种方式连带的赋以 Y 中唯一的一个元 $y \in Y$，则表成 $f(x)$，称 f 是从 X 到 Y 的一个函数，或者说 f 是从 X 到 Y 的一个映射，表出为

$$f: X \to Y \text{ 并且 } x \mapsto f(x)$$

其中 $y = f(x) \in Y$ 称为 $x \in X$ 在 f 下的像。这样，对应于任何一个函数，我们都可以考虑从它给出的序对为元的集合

$$\{\langle x, y \rangle \in X \times Y \mid y = f(x)\}$$

这个集合称为函数 f 的图，明显的可以看出：

对于X中每一个x，函数f给出Y中唯一元y，使$\langle x, y\rangle$在集合$R=\{\langle x, y\rangle\in X\times Y \mid y=f(x)\}$中；反之若$X\times Y$有一个子集$R$，对于每$x\in X$只有一个$y\in Y$对应构成序对，$R$就决定了一个函数$f: X\to Y$，即

$$R=\{\langle x, y\rangle\in X\times Y \mid \forall x\in X\Rightarrow \exists_! \, y\in Y\}\Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} f: X\to Y \\ x\mapsto f(x)\end{array}}$$

其中$\exists_!$表示唯一存在。

所以，任何一个函数可以用它的图给出的集合来定义。

定义4.17 f是一个从X到Y的函数 iff

（1）f是X和Y之间的一个关系，即$f\subseteq X\times Y$

（2）对每一个$x\in X$有唯一一个$y\in Y$使$\langle x, y\rangle\in f$

设Y是任一集合，则$\phi\subseteq\phi\times Y$，由于$\phi$中无元，所以无妨说对每$x\in\phi$有唯一的$y\in Y$使$\langle x, y\rangle\in\phi$，从而，可以把$\phi$看成是从$\phi$到$Y$的一个函数，而且$\phi$也是从$\phi$到$Y$的仅有的函数，因为$\phi$是使$\mathrm{dom}\,\phi=\phi$的仅有的关系。另外，我们还应该注意到，若$f: X\to Y$，则$f\subseteq X\times Y$，故

$$f\in\mathscr{P}(X\times Y)$$

我们就可以进一步研究属于$\mathscr{P}(X\times Y)$的所有函数的集合。

定义4.18 任何函数$f: X\to Y$为元的集合表为Y^X，即

$$Y^X:=\{f\in\mathscr{P}(x\times Y) \mid f: X\to Y\}$$

例如，集合$\{1, 2, 3\}^{\{5,6\}}$ 共有$3^2=9$个函数元$f_1, f_2\cdots f_9$它们是

	f_1	f_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
5	1	1	1	2	2	2	3	3	3
6	1	2	3	1	2	3	1	2	3

一般的，对于有限集合X，Y来说，容易有

定理4.10 若X是一个有n个元的集合，Y是一个有m个元

的集合，则 Y^X 共有 m^n 个元。

证明

设 $m\in\omega$ 固定，并令 Φ 是性质："若 X 是任何具有 n 个元的集合，Y^X 有 m^n 个元"。定理就是

$$\forall n\in\omega[\Phi(n)]$$

就要证明 （1） $\Phi(0)$

（2） $\forall k\in\omega[\Phi(k)\Rightarrow\Phi(k+1)]$

〈$\Phi(0)$的证明〉：

若 X 有 0 个元，即 $X=\phi$，则 ϕ 是从 X 到 Y 的仅有函数，故 $Y^X=\{\phi\}$，即 Y^ϕ 有 $m^0=1$ 个元。

〈$\forall k\in\omega[\Phi(k)\Rightarrow\Phi(k+1)]$的证明〉

设 $\Phi(k)$，即若 X 是任何一个具有 k 个元的集合，则 Y^X 有 m^k 个元。要指出 $\Phi(k+1)$，先设

$$\{x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}\}$$

是有 $k+1$ 个元的集合，从 $\Phi(k)$ 这一归纳假设知有 m^k 个不同的函数从 $\{x_1,\cdots x_k\}$ 到 Y，而对于每一个 i （$1\leqslant i\leqslant m^k$），又有关于 $f_i(x_{k+1})$ 的 m 个不同的选法，所以共有

$$m\cdot m^k=m^{k+1}$$

个从 $\{x_1, x_2\cdots x_k, x_{k+1}\}$ 到 Y 的不同的函数。

证毕

函数指出了对应于每一个 $x\in X$ 有唯一一个 $y\in Y$，我们还要进一步讨论，函数值域 ran f 中任何一元是否也是唯一对应于 dom f 中的一元。在给出函数 f 后，我们给出

定义4.19 若 $\forall x\in X\forall y\in X[x\neq y\Rightarrow f(x)\neq f(y)]$，则称 $f:X\to Y$ 是单射的

这时，我们常用 $f:X\underset{1}{\leqslant}Y$ 表示 $f:X\to Y$ 是单射的，或称 f 是从 X 到 Y 的一对一函数。

定义4.20 若 $\forall y\in Y\exists x\in X[y=f(x)]$，则称 $f:X\to Y$ 是满射的。

也就是“$f: X \to Y$是满射的 iff $\operatorname{ran} f = Y$”。

定义4.21 若函数f是单射且是满射的，则称$f: X \to Y$是双射的。

我们常用“$f: X \underset{1}{=} Y$”表示$f: X \to Y$是双射的，一个双射的$f: X \to Y$给出X的元和Y的元之间的一种“一一对应”关系：对每$x \in X$恰有一个$y \in Y$使$y = f(x)$，且对每一个$y \in Y$，恰只有一个$x \in X$使$y = f(x)$。

函数最重要的二种是恒等函数和特征函数

定义4.22 当$X \subseteq Y$时，称

$$id_X: X \to Y$$

$$x \mapsto id_X(X) = x$$

是在X上的一个恒等函数

恒等函数自然是单射的，而且仅当$X = Y$时，恒等函数才是满射的。

定义4.23 当$U \subseteq V$时，设$K_U: V \to \{0, 1\}$定义为

$$K_U(X) = 1 \quad 若 \quad x \in U$$

$$= 0 \quad 若 \quad x \notin U$$

称$K_U: V \to \{0, 1\}$是集合U的一个特征函数。

我们注意到特征函数是讨论V集合中各个子集U的特征的，每一个子集U相对于整个集合V，给它一个特征函数K_U，它实际上是所有从V到$\{0, 1\}$的函数的一元，即

$$K_U \in \{0, 1\}^V$$

这样，它就说明了特征函数将与V的幂集合有密切的联系为了说明这一点，我们还要注意到朴素的函数定义和用序对为元的集合所定义的函数关系是等价的，所以我们可以用集合的相等来说明函数之间的相等。设$f: X \to Y$，$g: X \to Y$，则从外延性公理，知道

$$f = g \Longleftrightarrow \forall x \in X \forall y \in Y [\langle x, y \rangle \in f$$

$$\Longleftrightarrow \langle x, y \rangle \in g]$$

所以，

$$f=g \Longleftrightarrow \forall x\in X\,\forall y\in Y\,[\,y=f(x) \Longleftrightarrow y=g(x)\,]$$

也就是

$$f=g \Longleftrightarrow \forall x\in X\,[\,f(x)=g(x)\,]$$

而所谓 f 函数关系与 g 函数关系不相等，就是

$$f\neq g \Longleftrightarrow \exists x\in X\,[\,f(x)\neq g(x)\,]$$

从而可证

定理4.11 设$K:\mathscr{P}V\to\{0,1\}^V$定义为$K(\mathbb{U}):=K_{\mathbb{U}}$，

则 （1）K是单射的

（2）K是满射的

证明

（1）设$\mathbb{U}_1\neq\mathbb{U}_2$ 也就有某 $x\in V$ 使

$$(x\in\mathbb{U}_1\wedge x\notin\mathbb{U}_2)\vee(x\in\mathbb{U}_2\wedge x\notin\mathbb{U}_1)$$

从而有 $(K_{\mathbb{U}1}(x)=1\wedge K_{\mathbb{U}2}(x)=0)\vee(K_{\mathbb{U}1}(x)$

$$=0\wedge K_{\mathbb{U}2}(x)=1)$$

故 $\exists x\in V\,[K_{\mathbb{U}1}(x)\neq K_{\mathbb{U}2}(x)]$也就是 $K_{\mathbb{U}1}\neq K_{\mathbb{U}2}$

所以K是单射的。

（2）设 $f\in\{0,1\}^V$ 则可令

$$\mathbb{U}_f:=\{x\in V\mid f(x)=1\}\quad \mathbb{U}_f\in\mathscr{P}V$$

从而对一切 $x\in V$

$$K_{\mathbb{U}f}(x)=1\Longleftrightarrow x\in\mathbb{U}_f\Longleftrightarrow f(x)=1$$

所以，对所有 $x\in V$，$K_{\mathbb{U}f}(x)=f(x)$故

$$K_{\mathbb{U}f}=f$$

即K是满射的

证毕

这个定理十分重要，因为它把$\mathscr{P}V$ 这个关于V 集合的幂集合和V 的特征函数集合

$$\{0,1\}^V=\{f\in\mathscr{P}(V\times\{0,1\})\mid f:V\to\{0,1\}\}$$

一一对应起来，而一一对应是我们把有限集合性质发展到无穷集

合上去以研究无穷集合的一个重要方法。

关于函数关系，我们还有相应的复合关系，反函数关系和函数的限制关系。

定义4.24 设$f:X\to Y$且$g:Y\to Z$，它们的复合是一个函数，表为$g\circ f$，定义为

$$g\circ f(x):=g(f(x)),\ \forall x\in X$$

定义4.25 设$f:X\to Y$是一个双射，则对Y中每一个元y有唯一元x使$y=f(x)$，这个函数表为$f^{-1}:Y\to X$，称f^{-1}是f的反函数。

若把函数f视为一个关系，则反函数f^{-1}就是f的一个逆关系，也就是

$$f^{-1}=\breve{f}$$

如果$f:X\to Y$是一个双射，则$f^{-1}\circ f$是在X上的一个恒等函数，$f\circ f^{-1}$是在Y上的一个恒等函数。

定义4.26 若$f:X\to Y$，且$X_0\subseteq X$，则对每一个$x\in X_0$定义的$f(x)$，表为$f\upharpoonright X_0:X_0\to Y$，称它为$f$到$X_0$的一个限制。

例如 设$f:\underset{\sim}{R}\to\underset{\sim}{R}$，定义为$f(x):=\sin\pi x$，则

$$f\upharpoonright\underset{\sim}{Z}:\underset{\sim}{Z}\to\underset{\sim}{R}\quad\text{就定义为}$$

$$f\upharpoonright\underset{\sim}{Z}(m)=\sin m\pi=0$$

所以$\operatorname{ran}(f\upharpoonright\underset{\sim}{Z})=\{0\}\subseteq\underset{\sim}{R}$。

双射函数是构成关系间同构性的重要工具

定义4.27 一个集合A与在A上的一个二元关系R（即$R\subseteq A\times A$）组成的序对$\langle A,R\rangle$称为一个构造。

定义4.28 在给定二个构造$\langle A,R\rangle$和$\langle B,S\rangle$以后，一个双射函数f对A中x，y有

$$x\,R\,y\quad\text{iff}\quad f(x)\,S\,f(y)$$

性质时，称f是一个从构造$\langle A,R\rangle$到构造$\langle B,S\rangle$的同构映射。若对于二个构造$\langle A,R\rangle$和$\langle B,S\rangle$确有这样一个同构映射存在，则称构造$\langle A,R\rangle$是同构于构造$\langle B,S\rangle$的，写成

$$\langle A,R\rangle\cong\langle B,S\rangle$$

定理4.12 设$\langle A, R\rangle$，$\langle B, S\rangle$和$\langle C, T\rangle$是任何三个构造，则它们有自反律、对称律和可传律：

（1）$\langle A, R\rangle \cong \langle A, R\rangle$

（2）$\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle \Rightarrow \langle B, S\rangle \cong \langle A, R\rangle$

（3）$\langle A, R\rangle \cong \langle B, S\rangle \cong \langle C, T\rangle \Rightarrow \langle A, R\rangle \cong \langle C, T\rangle$

证明

（1）对于$\langle A, R\rangle$本身总有同构映射是恒等函数

$$id_A: A \rightarrow A$$

（2）对于$\langle A, R\rangle$，$\langle B, S\rangle$，若$f: A \rightarrow B$是它们的一个同构映射，则$f^{-1}: B \rightarrow A$也将是$\langle B, S\rangle$同构于$\langle A, R\rangle$的同构映射。

（3）若$f: A \rightarrow B$是$\langle A, R\rangle$与$\langle B, S\rangle$的同构映射，

$g: B \rightarrow C$是$\langle B, S\rangle$与$\langle C, T\rangle$的同构映射，

则$g \circ f: A \rightarrow C$就是$\langle A, R\rangle$与$\langle C, T\rangle$的同构映射

证毕

这个定理说明所有用二元关系给出的构造为元的类，在同构关系下是一个等价类。但是，因为这个类所含集合多至无计，这类的本身不再是一个集合，而是一个固有类。

第五章 归纳原理

§5.1 偏序关系

研究无穷集合，从有限集合的性质看来，我们首先要弄清楚无穷集合的容量，也就是要像研究自然数集合那样，把集合中的各元规定一种排序关系，对于集合中任何两个元，都要有一种比较大小的方法，所以，集合中任何两个元就对应的构成一个序对，所有这些序对的集合，就表示出无穷集合的一种“序”关系。

“序”关系包括偏序关系，线序关系和良序关系，论证了良序关系以后，我们就可以把在自然数集合上的归纳原理推广到在任何良序集合上的归纳原理。最后，我们再论证任何无穷集合都可以构成一个良序关系，从而任何集合上的归纳意义就得到新的内容，有了归纳概念才产生递归概念和运算概念，进而给出任何集合的序数和基数概念。

为了下面叙述的方便，我们先举出一些简单的序关系例子：

（1）$X=\{\{a\},\ \{b\},\ \{a,\ b\}\},\ a\neq b$

$$xRy:=x\subseteq y$$

这种由三元构成的包含关系，示于图5.1

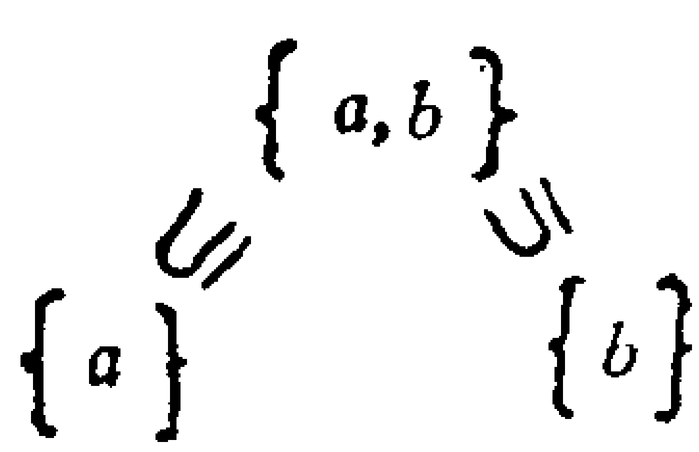

图 5.1

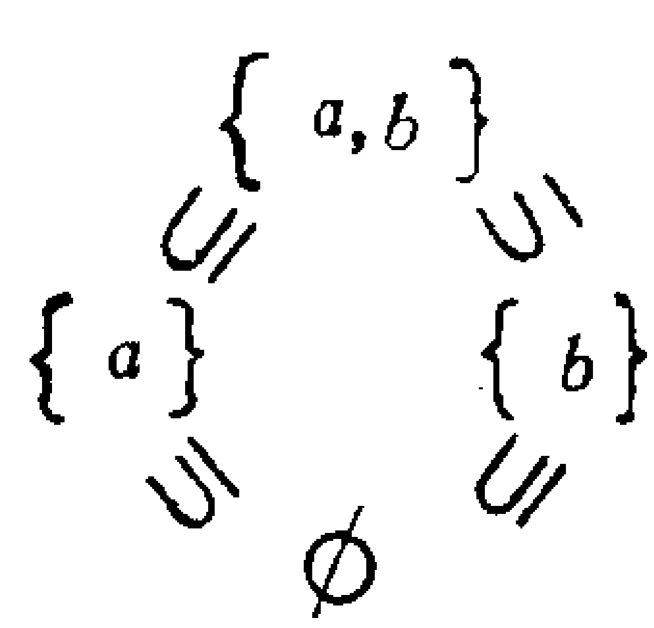

图 5.2

（2）$X=\mathscr{P}(\{a,\ b\})=\{\phi,\ \{a\},\{b\},\{a,\ b\}\},\ a\neq b$

$$xRy:=x\subseteq y$$

这种二元集的幂集合上四个元构成的包含关系，如图5.2

所示

（3） $X=\{2, 3, 4, 6, 8, 12\}$

$$xRy:=x\text{ 是 }y\text{ 的一个因子}$$

这种在六个元组成的集合上的因子关系，如图 5.3 所示

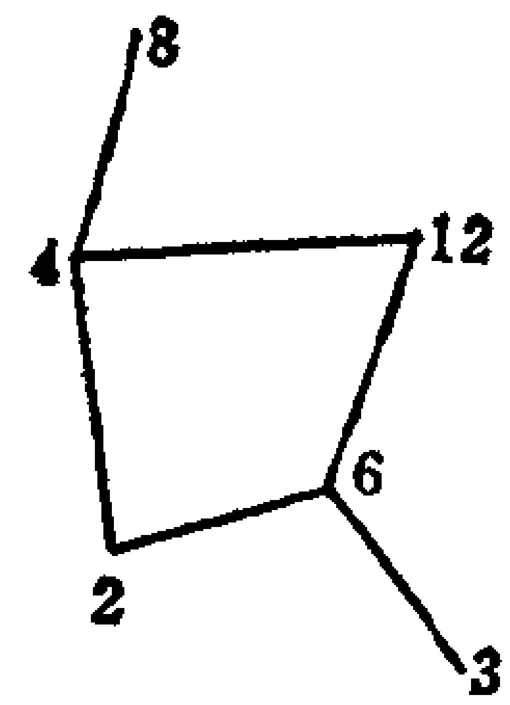

图 5.3

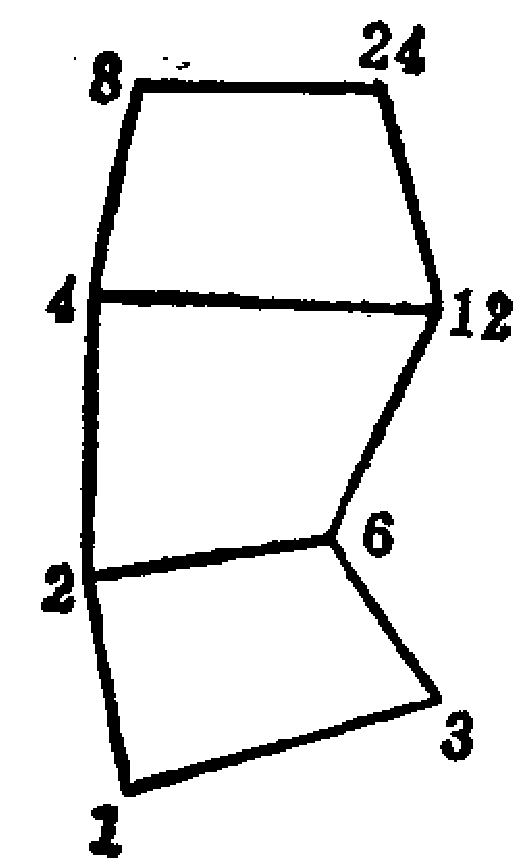

图 5.4

（4） $X=\{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$

$$xRy:=x\text{ 是 }y\text{ 的一个因子}$$

这种在八个元组成的集合上的因子关系，如图 5.4 所示

（5） $X=\underset{\sim}{Z}$

$$xRy:=x\leqslant y$$

（6） $X=\underset{\sim}{Q}$

$$xRy:=x\leqslant y$$

（7） $X=\omega$

$$xRy:=x\leqslant y$$

（8） $X=\omega\times\omega$

$$\langle a, b\rangle R\langle x, y\rangle:=a<x\vee(a=x\wedge b\leqslant y)$$

这就是在字典中排字的顺序，所以称它是在 $\omega\times\omega$ 上的字典序关系。

从以上所举八例，可以看出，我们经常遇到的下述的偏序关系。

定义5.1 一个在集合 X 上的关系 R 是在 X 上的一个偏序关系 iff

（1）对所有 $x\in X$，有 xRx　　（R是自反的）

（2）对所有 x，$y\in X$，若 xRy 且 yRx，则 $x=y$

（R是反对称的）

（3）对所有 x，y，$z\in X$，若 xRy，且 yRz，则 xRz

（R是可传的）

容易看出，（1）～（8）各例都是在X上的一种偏序关系，称R是在X上的一种偏序关系表示"X是一个集合，它为R所偏序"，简单地说，"R偏序了X"。在X上给出一种偏序关系R，R本身就是一个由序对为元构成的集合，所以R连同X本身，就给出X上的一个构造$\langle X, R\rangle$，简称它是一个偏序集合，有时更简称"X是一个偏序集合"。从例（1）到例（4），我们在绘出偏序关系的图示时，常常"从左到右"，"从下到上"的给出序关系，并且常用"$\leqslant$"表示一种偏序关系"R"。

定义5.2　设X是一个集合，它为$\leqslant$所偏序，且设$Y\subseteq X$，则称 y_0 是Y的一个极小元 iff $y_0\in Y$，且无 $y\in Y$ 元能使 $y\leqslant y_0$ 且 $y\neq y_0$。称 y_0 是Y的一个最小元 iff $y_0\in Y$，且对所有 $y\in Y$ 元有 $y_0\leqslant y$。

用符号写出定义5.2，就是：

$$y_0\text{是}Y\text{的一个极小元}:=y_0\in Y\wedge\forall y\in Y\,[y\leqslant y_0\Longrightarrow y_0=y]$$

$$y_0\text{是}Y\text{的一个最小元}:=y_0\in Y\wedge\forall y\in Y\,[y_0\leqslant y]$$

注意到Y的一个最小元必是Y的一个极小元，但是，反过来，Y的一个极小元不必是Y的一个最小元。在例（1）中$\{a\}$和$\{b\}$都是X的极小元，但是，X没有一个最小元。还注意到，一个集合$Y\subseteq X$至多有一个最小元，因为，如果 y_0 和 y_1 都是最小元，则从定义5.2，就知道 $y_0\leqslant y_1$ 且 $y_1\leqslant y_0$，又从偏序关系的反对称性，得知 $y_0=y_1$。

在例（2）中，ϕ是X的最小元，所以，ϕ也是X的极小元。

在例（3）中，2和3都是X的极小元，但是，X没有一个

最小元。在例（4）中，1是X的最小元，也是X的极小元，而且例（3）的X是例（4）X的一个子集。在例（5）（6）中，X没有最小元，也没有极小元。在例（7）中有一个最小元0，而且在X中的任何子集中都有一个最小元。

类似地，我们可以定义：Y的极大元和Y的最大元：

y_0是Y的一个极大元$:= y_0 \in Y \wedge \forall y \in Y [y_0 \leqslant y \Longrightarrow y = y_0]$

y_0是Y的一个最大元$:= y_0 \in Y \wedge \forall y \in Y [y \leqslant y_0]$

定义5.3 设X是一个集合，它由$\leqslant$偏序，且令$Y \subseteq X$，则x是Y在X中的一个下界 *iff* $x \in X$，且对所有$y \in Y$有$x \leqslant y$

定义5.4 设$\leqslant$偏序了集合X，且$Y \subseteq X$，则x是Y在X中的一个下确界 iff

（1）x是Y在X中的一个下界

（2）对所有$z \in X$，若z是Y在X中的一个下界，则$z \leqslant x$。

符号的写出定义5.3和定义5.4，就是：

x是Y在X中的一个下界$:= x \in X \wedge \forall y \in Y [x \leqslant y]$

x是Y在X中的一个下确界$:= x \in X \wedge \forall y \in Y [x \leqslant y]$

$\wedge \forall z \in X [\forall y \in Y (z \leqslant y) \Longrightarrow z \leqslant x]$

同样地，我们可以定义Y在X中的上界和上确界：

x是Y在X中的一个上界$:= x \in X \wedge \forall y \in Y [y \leqslant x]$

x是Y在X中的一个上确界$:= x \in X \wedge \forall y \in Y [y \leqslant x]$

$\wedge \forall z \in X [\forall y \in Y (y \leqslant z] \Longrightarrow x \leqslant z]$

定理5.1 〔偏序集合的表示定理〕

若$\langle X, \leqslant \rangle$是一个偏序集合，则有$X$的一个子集为元的集合$Y$，使$\langle X, \leqslant \rangle$同构于$\langle Y, \subseteq \rangle$，其中$\subseteq$是$Y$中的一个包含关系。

证明

当$x \in X$时，令$X(x) := \{y \in X | y \leqslant x\}$且令

$$Y = \{X(x) | x \in X\}$$

定义 $f: X \to Y$

$$x \mapsto f(x) = X(x)$$

容易验证 f 是从 X 到 Y 的一个双射，然后使

$$x_1 \leqslant x_2 \Longleftrightarrow f(x_1) \subseteq f(x_2)$$

对应起来，就得 $\langle X, \leqslant\rangle$ 同构于 $\langle Y, \subseteq\rangle$，且 f 是这两个构造的同构映射。

证毕

例 在例（3）中，$\langle X, \leqslant\rangle$ 用 $\langle Y, \subseteq\rangle$ 表示的同构关系是

$Y = \{\{2\}, \{2, 4\}, \{2, 4, 8\}, \{3\}, \{2, 3, 6\}, \{2, 3, 4, 6, 12\}\}$

见图 5.5。

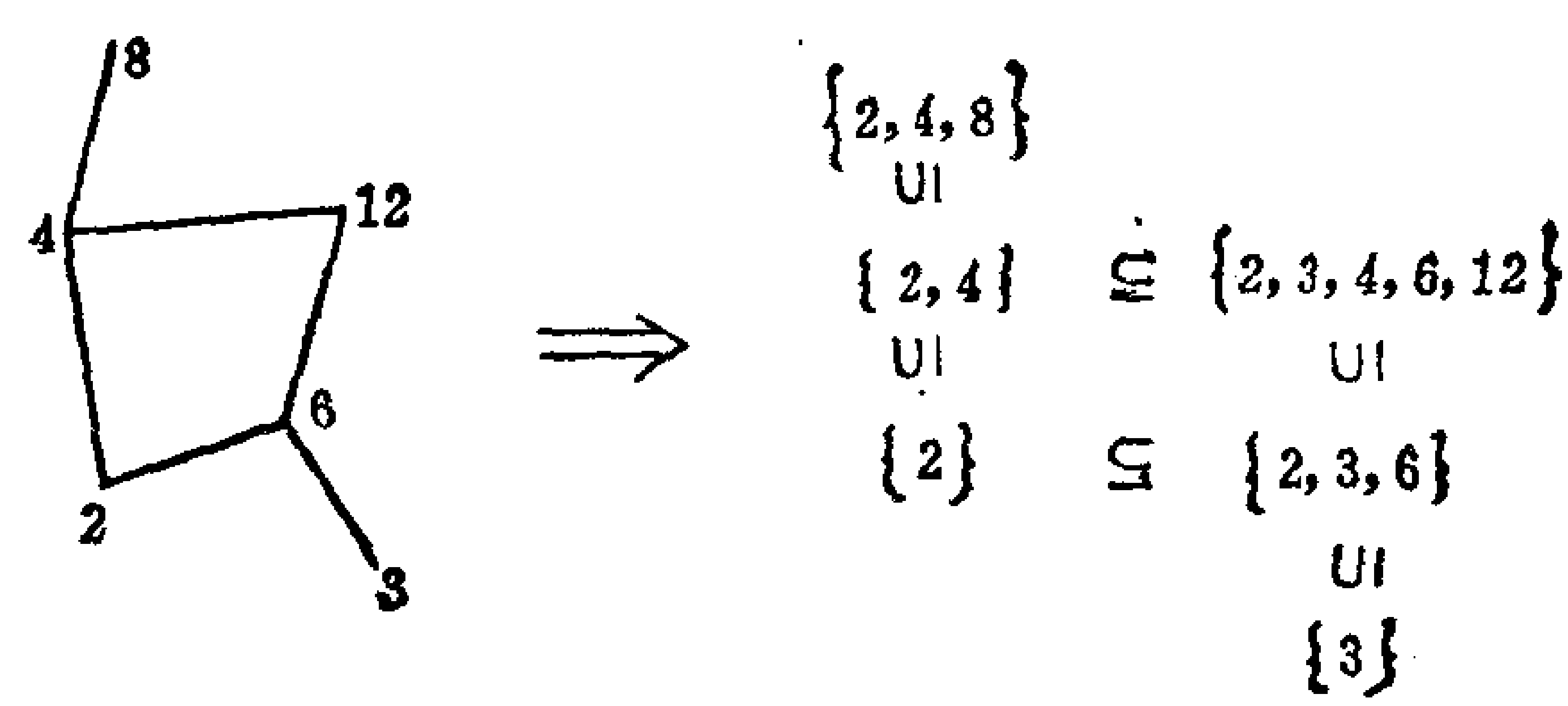

图 5.5

我们在定义5.1中定义的偏序关系是要求最低的一种序关系，称为弱偏序关系。另外，我们还可以给出强的偏序关系，称为严格偏序关系。

定义5.5 一个在集合 X 上的关系 R，若它满足定义 5.1 的（1）（2）（3）性质，称 R 是在 X 上的一个弱偏序关系；R 称为在 X 上的一个严格偏序关系 iff

（1）非自反性：对所有 $x \in X$，无 xRx；

（2）非对称性：对任何 x，$y \in X$，若 xRy，则无 yRx；

（3）可传性 ：对任何 x，y，$z \in X$，若有 xRy 且 yRz，则有 xRz。

也就是严格偏序关系是把弱偏序关系的（1）自反性（2）反对称性（3）可传性，改为（1）非自反性（2）非对称性（3）可传性。所以，严格偏序也是一种序，它排除了元自身的成序关系，从而若写弱偏序集合为$\langle X, \leqslant\rangle$，则可写严格偏序构造是$\langle X, <\rangle$。

定理5.2 设R是在X上的一个弱偏序关系，定义$\hat{R}$是在X上的一个关系，它使

$$x\hat{R}y := xRy \wedge x \neq y$$

则$\hat{R}$是在X上的一个严格偏序关系。

证明

（1）设有$x\hat{R}x$，则按$\hat{R}$定义知$x \neq x$，这是不成立的，所以 $\neg x\hat{R}x$。

（2）设$x\hat{R}y$，则按$\hat{R}$定义知xRy且$x \neq y$，若还有$y\hat{R}x$，则yRx且$y \neq x$，由R的反对称性得知应有$x = y$，矛盾，所以若$x\hat{R}y$，则必然是$\neg y\hat{R}x$

（3）若$x\hat{R}y$且$y\hat{R}z$，则xRy，yRz且$x \neq y \neq z$，故从R的可传性得知有xRz且$x \neq z$，故$x\hat{R}z$。

证毕

定理5.3 若R是在X上的一个严格偏序关系，且$\check{R}$定义是在X上的一个关系，它使

$$x\check{R}y := xRy \vee x = y$$

则$\check{R}$是在X上的一个弱偏序关系。

证明

（1）设有$x\check{R}y$，按定义，它也容许有$x\check{R}x$的情况。

（2）设$x\check{R}y$，按定义有xRy或$x = y$，由R的严格偏序，$\neg yRx$，所以，只能有

$$x\check{R}y \text{ 且 } y\check{R}x \text{ 则 } x = y$$

这个反对称性结果。

（3）若$x\check{R}y$且$y\check{R}z$，无论是$x = y$，或$y = z$或$x = y = z$都从R的可传性得有$x\check{R}z$。

证毕

事实上，我们还可以用较少的条件来定义严格偏序关系：

定义5.6 在X集合上的一个严格偏序关系R是满足下列二条件的一个关系

（1）R是一个可传关系。

（2）R是非自反的一个关系。

由这个定义，可以得到定义 5.5 的全部性质，因为有

定理5.4 设$<$是X上的一个严格偏序关系，则对任何$x, y, z\in X$

（1）至多有以下三种情况之一成立

$$x<y,\quad x=y,\quad y<x$$

（2）$x\leqslant y\leqslant x\Longrightarrow x=y$，其中$x\leqslant y$表示$x<y$或$x=y$

证明

（1）若$x<y$且$x=y$，则有$x<x$它和非自反性矛盾；若$x<y$且$y<x$，则从可传性得$x<x$，又矛盾。

（2）若$x\neq y$，应有$x<y<x$，则从可传性得$x<x$矛盾，而且从条件（1）也知道不能同特有$x<y$，$y<x$。

证毕

容易看出，定理 5.4 等于指出，一个严格偏序关系是非对称的。

严格偏序关系的最明显例子就是自然数在属于$\in$或严格包含$\subset$意义下的关系：

$$R_1=\{\langle x,\ y\rangle\in\omega^2|\ x\in y\}$$

$$R_2=\{\langle x,\ y\rangle\in\omega^2|\ x\subset y\}$$

$x\subset y$表示$x\subseteq y$且$x\neq y$。

§5.2 线序关系和良序关系

偏序关系的一个重要性质就是定理 5.4 所指出的，若R是X集合上的一个偏序关系，则对于X中任何三个元x，y和z，“至多”有“$x<y$，$x=y$，$y<x$”三者之一。这就表明，在R关系下，并非X中任何二元都有R关系。下述的线序关系就是在严

格偏序的基础上再给以"连通性"而得的，所谓R关系在X上的连通性是指：对任何x，$y \in X$二元，"$x < y$，$x = y$，$y < x$"必居其一，且仅取其一。

定义5.7 R是在集合X上的一个线序关系 iff

（1）对任何$x \in X$，$\neg xRx$

（2）对任何x，$y \in X$，若xRy，则$\neg yRx$。

（3）对任何x，y，$z \in X$，若xRy，且yRz，则xRz。

（4）对任何x，$y \in X$，或者是xRy，或者是yRx，或者是$x = y$。

定义 5.7 指出一个线序关系具有（1）非自反性（2）非对称性（3）可传性（4）连通性，也就是线序关系是严格偏序加以连通性质构成的。由于线序列划了集合中元好似直线上实数按大小排序的那样，所以它是"线序"而且也是完全排成序的，所以也称线序关系是"全序关系"。

类似于定义5.6，我们可以用较少的条件定义全序关系。

定义5.8 X集合上的关系R，若R满足下列二条件

（1）R是一个可传的关系；

（2）R在X上满足三分律：对X中任何x，y元有且仅有下列三者之一

$$xRy,\quad x = y,\quad yRx。$$

则称R是在X集合上的一个线序关系。

容易看出定义 5.8 中（1）（2）和定义 5.7 中（3）（4）一样，而定义 5.7 中的（1）（2）是从（3）（4）导出的必然结果。

例如，$\langle \underset{\sim}{z},\ R\rangle$，且$xRy := x < y$

$\langle \underset{\sim}{Q},\ R\rangle$，且$xRy := x < y$

都是线序集合，但是线序集合$\langle \omega,\ <\rangle$还有更深刻的内容，也就是在$\omega$集合上给了线序"$<$"大小的通常意义之后，$\omega$的任何一个子集都有一个最小元。这个特殊的性质是我们把任何无穷集合进行分析的起点，一旦我们能把无穷集合经过一种"线序"，并具有这种比较"线序"更好的"良序"性质，我们就可把研究自然

数的一整套方法相应地使用于任何一个无穷集合，这是集合理论的一个最主要部分。

定义5.9 一个在集合X上的关系R称为X上的一个良序关系 iff

（1）R是X上的一个线序关系

（2）X的每一个非空子集都有一个最小元。

关于$\langle\omega, <\rangle$的良序集合性质是很明显的，因为只要对于任何n，证明$\{0, 1, 2, \cdots, n\}$的每一个非空子集有一个最小元就可以了，事实上，$n=0$自然成立，0就是$\{0\}$的最小元；设$\{0, 1, 2, \cdots, n\}$是良序的，则可证$\{0, 1, 2, \cdots, n+1\}$也是良序的，因为任何它的非空子集A，

$$A\subseteq\{0, 1, 2, \cdots, n+1\}$$

若 $A\cap\{0, 1, \cdots n\}=\phi$，则$n+1$就是$A$的最小元，否则

$$A\cap\{0, 1, \cdots n\}\neq\phi$$

那么A的最小元是在与$\{0, 1, \cdots n\}$相交的子集中，由归纳假设，它有一个最小元k，那么，k就是A的一个最小元。

$\langle \underset{\sim}{Z}, <\rangle$不是一个良序集合，因为$\underset{\sim}{Z}$的本身就没有一个最小元。$\langle \underset{\sim}{Q}, <\rangle$显然也不是一个良序集合。

关于$\langle\omega, <\rangle$的良序，有时也称为“最小数原理”。

为了更深入分析序与良序的关系，我们再给出

定义5.10 设R是在X上的一个偏序关系；$a, b\in X$，则b是a的一个R后继或a是b的一个R前趋 iff aRb且$a\neq b$；b是a的一个立即后继或a是b的一个立即前趋 iff

（1）aRb且$a\neq b$

（2）$\neg\exists c\in X[c\neq a\wedge c\neq b\wedge aRc\wedge cRb]$

在§5.1中例(3)，4和6都是2的立即后继，2和3是6的立即前趋；在例（8）中，每一个序对元$\langle a, b\rangle$都有一个立即后继，但是$\langle 1, 0\rangle$，$\langle 2, 0\rangle$，$\langle 3, 0\rangle$，…等则没有立即前趋，但是例(8)

$$\langle\omega\times\omega, R\rangle, \langle a, b\rangle R\langle x, y\rangle :=$$

$$a < x \vee (a = x \wedge b < y)$$

则是一个良序集合，所以良序集合不必一定每一个元都有一个立即前趋。

再举些良序集合$\langle X, R\rangle$的例子：

（1）$X = \omega \cup \{\omega\}$，

$xRy := (x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge x < y) \vee (x \in \omega \wedge y = \omega)$

这里除了ω元之外，X的每一元都有一个立即前趋。

（2）$\omega^+ = \omega \cup \{\omega\}$，$X = \omega^+ \cup \{\omega^+\}$

$$xRy := (x \in \omega \wedge y \in \omega \wedge x < y) \vee (x \in \omega \wedge y = \omega) \vee (x \in \omega \wedge y = \omega^+) \vee (x = \omega \wedge y = \omega^+)$$

也就是　0，1，2，…，ω，ω^+，ω元无一立即前趋，但ω^+元有立即前趋ω^+。

（3）$\langle \omega, R\rangle$，

$$xRy := (x\text{是偶} \wedge y\text{是奇}) \vee (x\text{是偶} \wedge y\text{是偶} \wedge x < y) \vee (x\text{是奇} \wedge y\text{是奇} \wedge x < y)$$

它是一个良序集合，序列为

$$0,\ 2,\ 4,\ \cdots \qquad 1,\ 3,\ 5,\ \cdots$$

但是$\langle \omega, R\rangle$，$xRy := x > y$（$>$是通常计算上的意义），它是一个线序集合，不是一个良序集合。原因是它倒置了顺序为

$$\cdots\cdots 3,\ 2,\ 1,\ 0$$

有了偏序、线序、良序等概念，就得到各种类型的集合序对构造$\langle X, R\rangle$，我们自然可以讨论它们之间的同构性质。

定理5.5　设f是从集合A到集合B的一个一对一函数，且$<_B$是在B上的一个偏序关系，对于A中的x，y元，定义A上的二元关系$<_A$是　　$x <_A y$　iff　$f(x) <_B f(y)$

则（1）关系$<_A$是在A上的一个偏序；

（2）若$<_B$是B上的一个线序关系，则$<_A$是A上的一个线序关系；

（3）若$<_B$是在B上的一个良序关系，则$<_A$是在A上的一个良序关系。

证明

(1)(2)的证明是显然的；

(3) 若 $<_B$ 是 B 上的一个良序，则 A 的任何一个非空子集 S 对于 $<_A$ 必有一个最小元，因为若用 $f[\![S]\!]$ 表示 f 在 S 中所有像的集合，它本身就是 B 的一个非空子集，所以它有一个最小元，这个最小元必是由唯一的 $m\in S$ 给出的 $f(m)$，因为 f 是一一函数。

可以证明，m 就是 S 中的最小元。设 x 是 S 的任何其它的元，则由于

$$f(x)\in f[\![S]\!]$$

从 $f(m)$ 的最小元性质，知道

$$f(m)<_B f(x) \quad 或 \quad f(m)=f(x)$$

再从 f 的一一性，知道只能有

$$f(m)<_B f(x)$$

从条件，可知 $m<_A x$，这就表示 m 是 S 中的最小元。
所以，$<_A$ 是在 A 上的一个良序关系（根据(2)）。

证毕

定理5.6 设构造 $\langle A, <_A\rangle$ 和 $\langle B, <_B\rangle$ 是同构的，若其一是一个偏序（或线序、或良序）构造，则另一个也是偏序(或线序、或良序）构造。

证明

根据同构的对称性，我们可以选 $\langle B, <_B\rangle$ 是一个已知是偏序(或线序、或良序)的构造，而且有一个同构映射使

$$x<_A y \quad \text{iff} \quad f(x)<_B f(y)$$

对 A 中的 x，y 元成立，从定理 5.5 可知 $\langle A, <_A\rangle$ 是一个偏序（或线序、或良序）的构造。

证毕

定理5.7 设 $<$ 是在 A 上的一个偏序关系，且设 $C\subseteq A$，则 $<$ 是 C 上的一个偏序关系；用线序或良序代替偏序的结果也成立。

证明

只要取 f 是 C 上的恒等函数，就满足定理 5.5 的条件，所以得证

证毕

§5.3 自然数集合的良序关系

自然数集合上的归纳原理说明一种研究无穷集合的论证方法，这个原理的关键性就在于自然数集合在通常的大小排序意义上是一个良序集合。所以，我们应该首先把自然数集合上的归纳原理改用自然数集合的良序意义来阐述，这样，我们就可以推广到任何的良序集合上去。

为此，我们来进一步分析自然数集合的良序性。

定义5.11 一个集合 A 称为一个可传集 iff A 的元中每一个元本身也是 A 的一元，即

$$x \in a \in A \Longrightarrow x \in A$$

由此可见，要说明 A 是一个可传集，只要用下述三种论述之一成立时就可以肯定 A 是可传集：

（1）$\bigcup A \subseteq A$

（2）$a \in A \Longrightarrow a \subseteq A$

（3）$A \subseteq \mathscr{P} A$

因为，它们都是等价于：$x \in a \in A \Longrightarrow x \in A$ 这个性质的。而且，我们看出诺伊曼构造的自然数表示集合

$$0 = \phi, \quad 1 = \{\phi\}, \quad 2 = \{\phi, \{\phi\}\}, \cdots$$

所组成的自然数集 ω，它们的每一个元集合本身就是一个可传集，ω 本身也是一个可传集。我们将严格地加以论证。

定理5.8 对于一个可传集 A，有

$$\bigcup(A^+) = A$$

证明

由于 $\quad \bigcup(A^+) = \bigcup\{A \cup \{A\}\}$

$$= (\bigcup A) \cup (\bigcup\{A\}) = (\bigcup A) \cup A$$

而$\bigcup A \subseteq A$，所以有

$$\bigcup(A^+) = A$$

证毕

定理5.9 每一个自然数是一个可传集

证明

设 $T = \{n \in \omega \mid n \text{ 是一个可传集}\}$

显然 $o \in T$

若 $k \in T$，则 $\bigcup(k^+) = k$（定理5.8），而 $k \subseteq k^+$

故有 $\bigcup(k^+) \subseteq k^+$

即 k^+ 是一个可传集，$k^+ \in T$，所以T是归纳集，即 $T = \omega$

证毕

定理5.10 集合ω是一个可传集

证明

现在要证明 $(\forall n \in \omega)$ $n \subseteq \omega$，所以应究

$$T = \{n \in \omega \mid n \subseteq \omega\}$$

显然$o \in T$

若 $k \in T$，则有 $k \subseteq \omega$。现在 $k \in \omega$，所以有$\{k\} \subseteq \omega$

所以，$k \cup \{k\} \subseteq \omega$

也就是 $k^+ \subseteq \omega$ 即 $k^+ \in T$

从而T是归纳的，即 $T = \omega$

证毕

从ω的各元及其本身的可传集性质，加上ω的三分律性质，就可以证明ω的良序关系

关于自然数，我们可以给以序的关系，它们的规定是

$$m < n \quad \text{iff} \quad m \in n$$

$$m \leqq n \quad \text{iff} \quad m \in n \text{ 或 } m = n$$

序关系集合是

$$\in_\omega = \{\langle m, n\rangle \in \omega \times \omega \mid m \in n\}$$

则有

定理5.11 （1）对于任何自然数m和n有

$$m \in n \quad \text{iff} \quad m^+ \in n^+$$

（2）没有自然数能是它自身的一元，即

$$\forall n \in \omega [n \notin n]$$

证明

（2）证$\Longleftarrow$，设$m^+ \in n^+$，则$m \in m^+ \subseteq n$，所以从n的可传性，得知$m \in n$。

证$\Longrightarrow$　设

$$T = \{n \in \omega | (\forall m \in n) m^+ \in n^+\}$$

显然，$o \in T$

设$k \in T$，证$k^+ \in T$，也就要证明每当$m \in k^+$时，$m^+ \in k^{++}$。事实上，若$m \in k^+$，则

① 或是$m = k$，则$m^+ = k^+ \in k^{++}$，

② $m \in k$，从$k \in T$知道有$m^+ \in k^- \in k^{++}$，从自然数的可传性得　$m^+ \in k^{++}$

所以$k^+ \in T$，T是一个归纳集，即$T = \omega$

（2）设

$$T = \{n \in \omega | n \notin n\}$$

显然，$o \in T$

若$k \notin k$成立，则从（1）的论证得知$k^+ \notin k^+$否则从$\Longleftarrow$得$k \in k$，矛盾，

故T是一个归纳集，即$T = \omega$

证毕

上面定理中所涉及到的（1）$m \in n \Longleftrightarrow m^+ \in n^+$（2）$n \notin n$的两个性质，也可以从ZF集合公理系中的第八个公理给出，它就是

〔**正则性公理**〕　每一个非空集合A有一个元m使

$$m \cap A = \phi$$

形式的写出，公理就是

$$\exists x [x \in A] \Longrightarrow \exists m [m \in A \wedge \forall x (x \in A \Longrightarrow x \notin m)]$$

或者

$$A\neq\phi\Longrightarrow\exists m[m\in A\wedge m\cap A=\phi]$$

在这个公理的基础上，可以有

定理5.12 若a，b是集合，则

（1）$a\notin a$

（2）不可能有（$a\in b$）$\wedge$（$b\in a$）

证明

（1）设有$a\in a$，则可研究单子集合$\{a\}$，它是一个非空集，故从正则性公理知道有一个元m使

$$m\cap\{a\}=\phi$$

而a是$\{a\}$的仅有元，故$m=a$，即

$$a\cap\{a\}=\phi$$

今若$a\in a$，则 $a\in a\cap\{a\}$，$a\in\phi$。矛盾。

（2）设定 $A=\{a, b\}$，若（$a\in b$）$\wedge$（$b\in a$），则有

$$a\in b\cap A \quad 且 \quad b\in a\cap A$$

从而$b\cap A\neq\phi$，$a\cap A\neq\phi$，这和正则性公理矛盾。

证毕

引用正则公理得到的定理5.12，可知定理5.12的（1）就给出定理5.11的（2），而定理5.11的（1）的证$\Longrightarrow$部分，可从定理12的（2）得到，因为，若$m^+\in n^+$不成立，则对某m，n将有$m^+=n^+$，即$m\cup\{m\}=n\cup\{n\}$，

这就给出

$$(m\in n\cup\{n\})\wedge(n\in m\cup\{m\})$$

也就是

$$(m\in n\vee m=n)\wedge(n\in m\vee n=m)$$

而（$m\in n$）$\wedge$（$n\in m$）是不可能的，只能是$m=n$，这与$m\in n$所设矛盾；而如果$n^+\in m^+$，则从定理5.11的（1）的$\Longleftarrow$部分得$n\in m$，这与$m\in n$矛盾，而且也不可能同时有$n\in m$，$m\in n$。

定理5.13 （ω的三分律）

对于任何自然数m和n，恰有下列三种关系之一

$$m\in n,\quad m=n,\quad n\in m$$

证明

① 首先证明主多有一个关系成立：

若$m\in n$且$m=n$，则$m\in m$,这是定理5.12(1)所否定的；若$m\in n\in m$，则从自然数的可传性又得$m\in m$，也不容许。

② 证明至少有一个关系成立，设

$$T=\{n\in\omega|(\forall m\in\omega)(m\in n\text{ 或 }m=n\text{ 或 }n\in m)\}$$

要指出$o\in T$就只要指出所有$m\in\omega$，恒有$o\in m$，对m进行归纳证明：显然$o\in o$，且若$o\in k$，则$o\in k^+$，故$o\in T$。

今设$k\in T$，究k^+：对ω中任一m，由于$k\in T$故知 $m\in k$或$k\in m$，前者给出$m\in k^+$，后者也从定理5.11得$k^+\in m^+$，并且$k^+\in m$，故知，对ω中任一m恒有$m\in k^+$，$k^+=m$，$k^+\in m$之一，故$k^+\in T$，所以T是归纳集，即$T=\omega$

证毕

定理5.14 （ω的良序关系）

设A是ω的一个非空子集，则有$m\in A$，使对所有$n\in A$，有$m\in n$。

证明

① 首先证明最小数m是唯一的，因若m_1，m_2都是A中的最小数，则$m_1\in m_2$，$m_2\in m_1$，就给出$m_1=m_2$，

② 次设ω的子集A无一最小数，可以指出$A=\phi$，这只要证明$\omega-A$是归纳的。设

$$T=\{m\in\omega|\text{小于 }m\text{ 的元没有属于 }A\text{ 者}\}$$

则$(m\in T)\Longleftrightarrow(m\subseteq\omega-A)$，现在$0\in T$是显然的，次设已知$k\in T$，则若$n$小于$k^+$时：①$n$小于$k$，则$n\notin A$，②$n=k$，则$n\notin A$，否则$A$就以$n$为最小数，故从①②得$k^+\in T$，所以$T$是归纳集，即$\forall m\in\omega(m\subseteq\omega-A)$故$A=\phi$

证毕

从上分析，可见自然数集合ω在属于关系下是可传的，而且每个自然数也是可传的，并且在属于的关系下，自然数满足三分律，从而自然数集在属于关系下形成一个线序。再从定理5.14指出的，任何一个属于ω的非空子集A在线序意义下有最小元。所以ω是一个良序集合。

ω的良序意义是和ω的构造定义直接相关的，而且在以最小归纳集定义ω以后，自然数的大小概念就等价于属于的关系。这是其它无穷集合不曾固有的，我们的论证，今后将依赖于任何无穷集合都可以良序的这个原理，用良序特性来分析任何无穷集合。

§5.4 超限归纳定理

从个数来说，ω是第一个非有限的无穷集合，在这个集合上，我们有了ω上的归纳原理就可以克服了ω中无穷元都要论证的困难，但是，ω是一个最小的无穷集合，超过它的所有无穷集合称为是超限的集合。也可以这样说，ω是第一个遇到的极限序数，超过这个极限序数的无穷集合论证问题都属于超限问题。

由于ω也是一个无穷集合，它的归纳原理必然也是所有无穷集合可归纳性的一种反映，而所有无穷集合都要涉及到选择公理，并由选择公理导出所有无穷集合都可以良序化的良序定理（这些我们将在第七章详细分析），所以，我们要全面的讨论无穷集合，应该从良序着手，从而，应该把ω上的归纳原理表述为ω上良序性的归纳原理。

定理5.15 设A是ω的一个子集，且设：

关于ω中每一n，若每一个小于n的元是在A中时，则$n\in A$

则$A=\omega$。

证明

若$A\neq\omega$，则$\omega-A\neq\phi$，从ω的良序性，有$\omega-A$的一个最小元m，从而，所有小于m的元都在A中，但是从假设可知

$m\in A$，这和$m\in\omega-A$相矛盾。

证毕

一般地说，如果$<$是A上的一个偏序关系，我们也可以仿照定理5.15中所探究的那样，对于每一个$t\in A$，讨论集合

$$\operatorname{seg} t := \{x\in A \mid x<t\}$$

称它是A中直至t的一个初段，特别是，ω是由$\in$所偏序，而且是良序的，所以，对于每一个$n\in\omega$，它的直到n的初段就是

$$\operatorname{seg} n=\{x\in\omega \mid x\in n\}=\{0, 1, 2, \cdots n-1\}=n$$

所谓一切小于n的元是A的元，就表示

$$\operatorname{seg} n=n\subseteq A$$

定理5.15中的假设，就是

$$\forall n\in\omega[\operatorname{seg} n\subseteq A\Longrightarrow n\in A]$$

循着这种分析，我们可以有关于一般良序集合的“超限归纳原理”：

定理5.16 设$<$是集合A上的一个良序，又设B是A的一个子集，若B有性质：

对于A中每一个t，$\operatorname{seg} t\subseteq B\Longrightarrow t\in B$则$B$与$A$重合。

证明

若B不与A重合，则$A-B\neq\phi$，故有一最小元m，从良序的线序性和最小元性质，可知对于任何$y<m$的$y\in A$元，恒有$y\in B$，也就是

$$\operatorname{seg} m\subseteq B$$

从而，由假设应有$m\in B$，这与$m\in A-B$，$A\neq B$矛盾。故必是$B=A$

证毕

再仔细地分析一下良序在超限归纳定理5.16中的作用，它的良性的作用重要于序的作用，所以，我们就可以把这种良性扩充到一种更大的关系类。

注意到上述定理的一种偏序关系，一个集合A以及A的一个

元m，如果在A中没有元x可以使xRm，m元就称为一个最小元。作为xRm这个主要问题来说，着重在R这个集合，所以，我们可以按R给出最小元的定义。

定义5.12 一个集合A的一个元m称为A的一个R-极小元 iff 在A中无x可使xRm。

定义5.13 一个关系R称是良基的 iff 每一个非空集合A含有一个R-极小元。

例如，给出一个有限关系

$$R=\{\langle 1,\ 2\rangle,\ \langle 2,\ 6\rangle,\ \langle 3,\ 6\rangle\}$$

我们常常要讨论的相对于R的集合A就是把R看成是在A上的一个关系，所以若规定R的域是

$$\mathrm{fld}\,R:=\mathrm{ran}\,R\cup\mathrm{dom}\,R$$

则R的域是$\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$，这个域的所有15个非空子集（即$C_1^4+C_2^4+C_3^4+C_4^4=15$）都有$R$-极小元，所以都是良基的，由上举三序对组成的关系$R$是良基的。

如果集合A不是R域的一个子集，那么在A-fld$R$中的任何一个元都是一个R-极小元，所以我们所感兴趣的，自然是指R域的子集。

空集关系自然也是良基，不过，没有什么值得讨论它的意义。

又例如，研究任何一个集合S以及成元关系

$$\in_S=\{\langle x,\ y\rangle\in S\times S\mid x\in y\}$$

则从正则性公理可以指出$\in_S$是良基的，因为对于任何非空集A，由正则性，在A中应有某m使$m\cap A=\phi$，也就是在A中无x元可以使$x\in m$，从而，的确在A中无x元可使

$$x\in_S m$$

所以，m是在A中的$\in_S$-极小元。事实上，正则性公理也可以陈述为："成元关系是良基的"。

类似于良序的超限归纳原理，现在，从良基的R-极小元性质可以引出良基的超限归纳原理

定理5.17 设R是在A上的一个良基关系。设B是A的一个子集，它有性质：

对A中每t，有R归纳性

$$\{x\in A|xRt\}\subseteq B\Longrightarrow t\in B$$

则B与A重合。

证明

若$B\neq A$，则$A-B$有一个R-极小元m，从极小性有$\{x\in A|xRm\}\subseteq B$，则从$R$归纳性，得$m\in B$，矛盾。故$B=A$。

证毕

第六章　递 归 原 理

§6.1　自然数集合上的递归定理

从自然数集合的属于关系，给出自然数大小的比较，构成良序集合，以良序概念来陈述自然数集合上的归纳原理，就可以类似的陈述一般良序集合甚至是良基关系上的归纳原理，这是集合理论研究无穷集合的一种重要方法。

另外一种研究无穷集合的重要方法，则是从自然数集合上的递归原理推论到一般良序集合上的递归原理，这样就引出超限递归原理的问题。

在ω集合上的加法运算和乘法运算就是最重要的二种在ω集合上的递归运算，这些递归运算基于递归定理对运算函数唯一存在的肯定，所以，我们首先来阐明“ω上的递归定理”：

定理6.1　设给定集合A以及一元$a\in A$，并且在A集合上有一个映射$F: A\to A$，则有唯一的一个函数$h: \omega\to A$使

$$h(0)=a$$

$$h(n^+)=F(h(n)),\quad \forall n\in\omega$$

证明

我们可以构造序对集合h，使$h\subseteq\omega\times A$且

$$\langle 0, a\rangle\in h$$

同时当$\langle n, x\rangle\in h$时，$\langle n^+, F(x)\rangle\in h$

定义X是一个R集合：=

$$\{X\subseteq\omega\times A\mid\langle 0, a\rangle\in X\wedge\forall n\in\omega\forall x\in A(\langle n, x\rangle\in X\Rightarrow\langle n^+, F(x)\rangle\in X)\}$$

由于$\omega\times A$本身就是一种R的集合，所以，所有R集合的组合C是非空的，从而可以构造组合C中的一切R集合的交h，从子集公理，可知h是一个集合，且

$$h \subseteq \omega \times A$$

并且 h 本身也是一个 R 集合，即

$$\langle 0, a \rangle \in h$$

$$\langle n, x \rangle \in h \Rightarrow \langle n^T, F(x) \rangle \in h$$

如果再能证明 h 是一个函数，则从交的构造，就知道这是唯一确定的函数，因为它是最小的一个 R 集合。

所以，现在要证明

$$(\forall n \in \omega) \exists ! x \in A [\langle n, x \rangle \in h],$$

设 $\Phi(n) := \exists ! x \in A [\langle n, x \rangle \in h]$，要证 $\forall n \in \omega [\Phi(n)]$

(1) $\Phi(0)$ 的证明：

今 $\langle 0, a \rangle \in h$，若更有 $\langle 0, b \rangle \in h$，且 $b \neq a$，则究 $h - \{\langle 0, b \rangle\}$，

由于 $h - \{\langle 0, b \rangle\}$ 是一个 R 集合，它与 h 是"最小的 R"假定矛盾，故 $\Phi(0)$，即

$$\exists ! x \in A [\langle 0, x \rangle \in h$$

(2) 设 $\Phi(n)$，则对 $n \in \omega$，恰有一个 $x \in A$ 使 $\langle n, x \rangle \in h$，而

当 $\langle n, x \rangle \in h$ 时，$\langle n^+, F(x) \rangle \in h$，设 $\langle n^+, b \rangle \in h$，且 $b \neq F(x)$，则研究 $h - \{\langle n^+, b \rangle\}$，可见 $h - \{\langle n^+, b \rangle\}$ 是一个 R 集，这是与 h 为最小 R 集合的假定矛盾，故 $\Phi(n^+)$。即

$$\forall n \in \omega [\Phi(n)]$$

证毕

自然数集合 ω 上的递归定理建立之后，我们就可以定义在 ω 上的加法运算和乘法运算：

定义6.1 在集合 A 上的一种二元运算是从 $A \times A$ 到 A 的一个函数。

定义6.2 加法（+）是在 ω 上的一种二元运算，它对 ω 中任何 m, n，对应的有 $A_m(n)$，其中

$$A_m(0) = m \qquad \text{(A 1)}$$

$$A_m(n^+) = A_m(n)^+, \ n \in \omega, \qquad \text{(A 2)}$$

写成

$$m+n=A_m(n)$$

所以，若将加法运算这种函数关系写成关系，则是

$$+=\{\langle\langle m, n\rangle, p\rangle | m\in\omega\wedge n\in\omega\wedge p=A_m(n)\}$$

故对自然数m，n而言，应有

$$m+0=m,$$

$$m+n^+=(m+n)^+$$

并且，对于ω中各元构成的等价类

$$\sim=\{\langle\langle m, n\rangle,\langle p, q\rangle\rangle | m+q=p+n, m, n, p, q\in\omega\}$$

就得到整数集合$\underset{\sim}{z}$，它就是所有差的等价类集合

$$\underset{\sim}{z}:=(\omega\times\omega)/\sim$$

这是我们在第四章中提到的第一个结果。

定义6.3 乘法（$\cdot$）是在ω上的一个二元运算，使ω中任何的m，n有$M_m(n)$，其中

$$M_m:\omega\to\omega$$

且

$$M_m(0)=0 \tag{M1}$$

$$M_m(n^+)=M_m(n)+m \tag{M2}$$

写成 $m\cdot n=M_m(n)$。

故对自然数m，n而言，若将乘法运算这种函数关系写成关系，就是

$$\cdot=\{\langle\langle m, n\rangle, p\rangle | m\in\omega\wedge n\in\omega\wedge p=M_m(n)\}$$

并且有

$$m\cdot 0=0$$

$$m\cdot n^+=m\cdot n+m$$

而且，在$\underset{\sim}{z}\times(\underset{\sim}{z}-\{0\})$上构成等价类

$$\sim=\{\langle\langle a, b\rangle,\langle c, d\rangle\rangle | a\cdot d=c\cdot b; a, c\in\underset{\sim}{z}; b, d\in(\underset{\sim}{z}-\{0\})\}$$

就得到有理数集合$\underset{\sim}{Q}$，它就是所有商的等价类集合

$$\underset{\sim}{Q}:=\underset{\sim}{Z}\times(\underset{\sim}{z}-\{0\})/\sim$$

这就是我们在第四章中提到的第二个结果。

值得注意的是，我们在定义 6.2 中给出的定义 $A_m:\omega\to\omega$，从 ω 上的递归定理，知道它是唯一确定的，因为，此时 $A=\omega$，$a=m$，$F(k)=k^+$，$h=A_m$，它使

$$h(0)=A_m(0)=m$$

$$h(n^+)=F(h(n))\Rightarrow A_m(n^+)=(A_m(n))^+$$

类似的，定义 6.3 中的给出定义 $M_m:\omega\to\omega$，也是唯一确定的，因为，此时 $A=\omega$，$a=0$，$F(k)=k+m$，$h=M_m$ 它使

$$h(0)=M_m(0)=0$$

$$h(n^+)=F(h(n))\Rightarrow M_m(n^+)=M_m(n)+m$$

最后，从上述定义，我们可以给出自然数运算的五个基本性质

定理6.2 对所有自然数，有下列五规律：

（1）加法的可结合律 $m+(n+p)=(m+n)+p$

（2）加法的可交换律 $m+n=n+m$

（3）加乘法的分配律 $m\cdot(n+p)=m\cdot n+m\cdot p$

（4）乘法的可结合律 $m\cdot(n\cdot p)=(m\cdot n)\cdot p$

（5）乘法的可交换律 $m\cdot n=n\cdot m$

证明

（1）对于固定的 $m, n\in\omega$，设

$$A=\{p\in\omega\mid m+(n+p)=(m+n)+p\}$$

$0\in A$，因为从（A1）知 $n+0=n$，

$$(m+n)+0=m+n$$

故 $m+(n+0)=(m+n)+0$

若 $k\in A$，则 $m+(n+\underline{k+1})=m+(n+k)^+$

按（A2）有 $m+(n+k)^+=(m+(n+k))^+$

所以 $m+(n+\underline{k+1})=(m+(n+k))^+=((m+n)+k)^+$

$$=(m+n)+k^+=(m+n)+\underline{k+1}$$

（2）先证明 $0+n=n$

$$m^{+}+n=(m+n)^{+}$$

（Ⅰ）对所有$n\in\omega$有$0+n=n$

令 $$A=\{n\in\omega\mid 0+n=n\}$$

从（A1）得$0\in A$，即$0+0=0$

设$k\in A$，则从（A2）得$0+k^{+}=(0+k)^{+}=k^{+}$

故$k^{+}\in A$，即$A=\omega$

（Ⅱ）对所有在ω中的m，n有$m^{+}+n=(m+n)^{+}$

今设就任何固定的$m\in\omega$，令

$$B=\{n\in\omega\mid m^{+}+n=(m+n)^{+}\}$$

从（A1）得$m^{+}+0=m^{+}=(m+0)^{+}$，故$0\in B$

设$k\in B$，则从（A2）及$k\in B$得

$$\begin{aligned}m^{+}+k^{+}&=(m^{+}+k)^{+}\\&=(m+k)^{++}&&\text{从}K\in B\\&=(m+k^{+})^{+}&&\text{从（A2）}\end{aligned}$$

故$k^{+}\in B$，即$B=\omega$。

今设对任一$n\in\omega$，令

$$C=\{m\in\omega\mid m+n=n+m\}$$

由（Ⅰ）知$0+n=n=n+0$故$0\in C$

从（Ⅱ），设$k\in C$，则

$$\begin{aligned}k^{+}+n&=(k+n)^{+}\\&=(n+k)^{+}&&\text{由 }k\in C\\&=n+k^{+}&&\text{由（A2）}\end{aligned}$$

故$k^{+}\in C$，即$C=\omega$。

（3）固定m，$n\in\omega$，令

$$A=\{p\in\omega\mid m\cdot(n+p)=m\cdot n+m\cdot p\}$$

由于 $$\begin{aligned}m\cdot(n+0)&=m\cdot n&&\text{从（A1）}\\&=m\cdot n+0&&\text{从（A1）}\\&=m\cdot n+m\cdot 0&&\text{从（M1）}\end{aligned}$$

故$0\in A$

设$k\in A$，则

$$\begin{aligned} m\cdot(n+k^+) &= m\cdot(n+k)^+ && \text{从（A2）} \\ &= m\cdot(n+k)+m && \text{从（M2）} \\ &= (m\cdot n+m\cdot k)+m && \text{从（}k\in A\text{）} \\ &= m\cdot n+(m\cdot k+m) && \text{从（1）} \\ &= m\cdot n+m\cdot k^+ && \text{从（M2）} \end{aligned}$$

故$k^+\in A$，即$A=\omega$。

（4）固定m，$n\in\omega$，令

$$A=\{p\in\omega\,|\,m\cdot(n\cdot p)=(m\cdot n)\cdot p\}$$

从（M1）得

$$m\cdot(n\cdot 0)=m\cdot 0=0$$

且 $$(m\cdot n)\cdot 0=0$$

故$0\in A$

设$k\in A$，则

$$\begin{aligned} m\cdot(n\cdot k^+) &= m\cdot(m\cdot k+n) && \text{从(M2)} \\ &= m\cdot(nk)+m\cdot n && \text{从（3）} \\ &= (m\cdot n)\cdot k+m\cdot n && \text{因 } k\in A \\ &= (m\cdot n)k^+ && \text{从（M2）} \end{aligned}$$

故$k^+\in A$，即$A=\omega$

（5）与（2）类似，先证$0\cdot n=0$

$$m^+\cdot n=m\cdot n+n$$

（Ⅰ）对所有$n\in\omega$有$0\cdot n=0$，令

$$A=\{n\in\omega\,|\,0\cdot n=0\}$$

从（M1）得$0\cdot 0=0$，即$0\in A$

设$k\in A$，则从（M2）得$0\cdot k^+=0\cdot k+0=0+0$

再从（A1）得$0\cdot k^+=0$故$k^+\in A$

故$A=\omega$

（Ⅱ）对所有m，$n\in\omega$有$m^+\cdot n=m\cdot n+n$

对固定的$m\in\omega$，令

$$B=\{n\in\omega\,|\,m^+\cdot n=m\cdot n+n\}$$

从（M1）得$m^+\cdot 0=0=m\cdot 0=m\cdot 0+0$故$0\in B$

设$k\in B$，则从（M2）得

$$m^+ \cdot k^+ = m^+ \cdot k + m^+$$
$$= (m \cdot k + k) + m^+。\text{因 } k \in B$$
$$= (m \cdot k + m) + k^+ \quad \text{从（1）}$$
$$= m \cdot k^+ + k^+ \quad \text{从（M2）}$$

故$k^+ \in B$，即$B = \omega$

今对任一 $n \in \omega$，令

$$C = \{m \in \omega \mid m \cdot n = n \cdot m\}$$

由（Ⅰ）知 $0 \cdot n = 0$，从（M1）得$0 \cdot n = n \cdot 0$故

$$0 \in C$$

从（Ⅱ），设$k \in C$，则

$$k^+ \cdot n = k \cdot n + n$$
$$= n \cdot k + n \quad \text{由 } k \in C$$
$$= n \cdot k^+ \quad \text{由（M2）}$$

故$k^+ \in C$，即$C = \omega$

证毕

§6.2 自然数集合的皮亚诺公设

在第三章，我们曾经引用无穷性公理，定义最小归纳集合是自然数集合，这个集合就是诺伊曼给出的自然数表示的各元的集合。

除此之外，皮亚诺在1889年给出定义自然数集合的一个公理方法。

皮亚诺关于自然数集合的公设是：

关于自然数系统N的皮亚诺公设，就是由一个集合N一个函数$S: N \to N$和一个元$e \in N$构成的三序组$\langle N, S, e\rangle$满足

〔1〕 $e \notin \operatorname{ran} S$

〔2〕 S是一一函数

〔3〕 N的任何含e并在S下是闭的子集A等于N本身，这时，称三序组$\langle N, S, e\rangle$是一个“皮亚诺系统”。

首先，若S是一个函数，A是$\operatorname{dom} S$的一个子集，则称A在

S下是闭的iff每当$x \in A$时，$S(x) \in A$。这个性质可以等价地表为

$$S[\![A]\!] \subseteq A$$

其次，“$e \notin \operatorname{ran} S$”就排除了图 6.1(1) 的情况，其中箭头表示$S$的作用；而$S$是一一函数的要求就排除了图 6.1(2) 的情况，从而任何一种皮亚诺系统就将是图 6.1(3) 的形式。

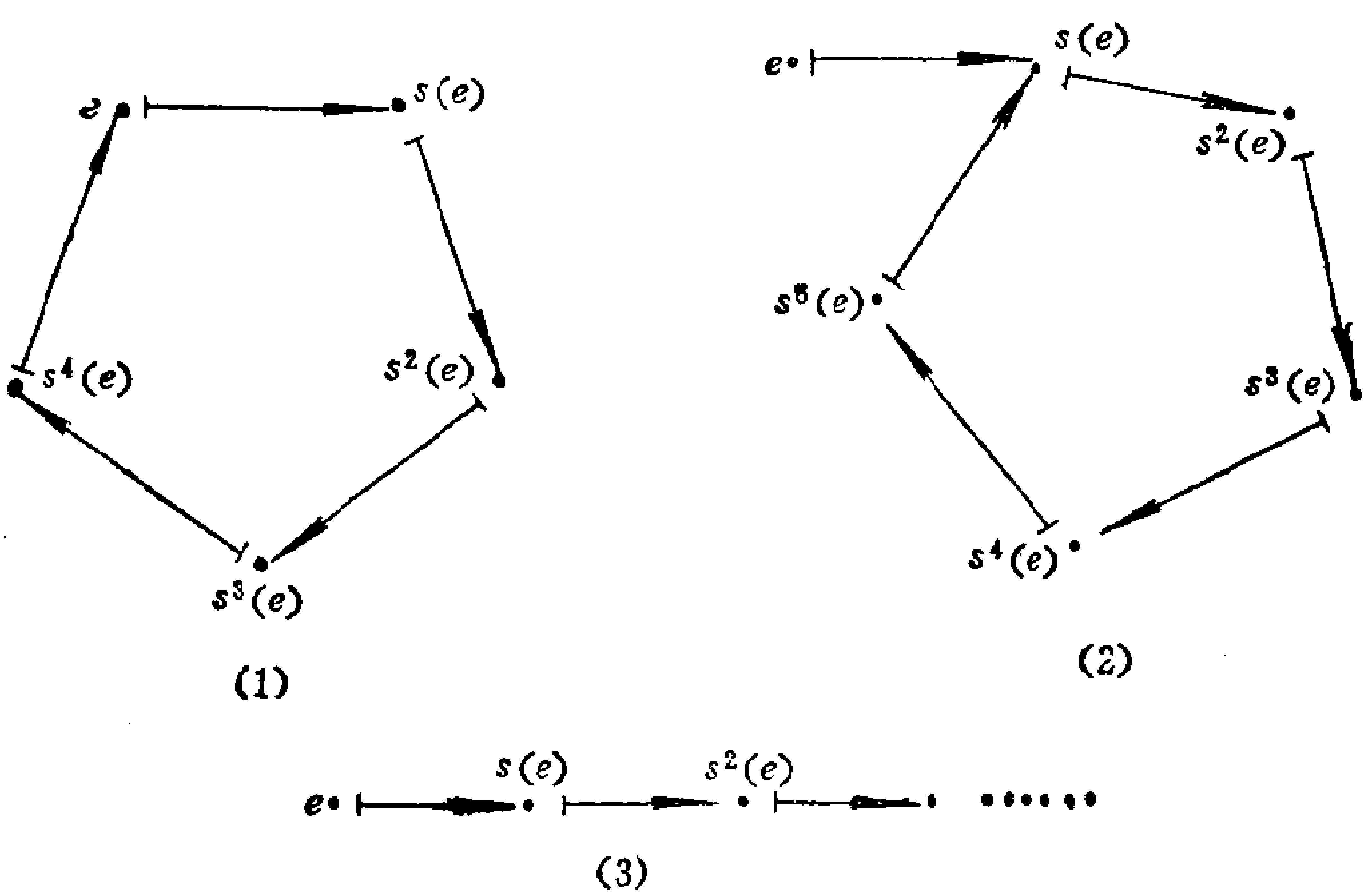

图 6.1

皮亚诺系统满足的第三个条件称为皮亚诺归纳假设，以后我们将可以证明在ZF系统中的ω上的归纳原理就是一种皮亚诺归纳假设。假设中的函数S的作用就是除了一个我们要表出的函数值以外，排除所有其它可能取的值，这是和ZF系统中后继定义的作用一样。我们所希望的系统将只含有e，$S(e)$，$SS(e)$，…而皮亚诺归纳假设就是用一种明确的集合理论条件来代替这最后的三个点所表示的意思，说明没有小于N本身的集合可以含有e和在S下是闭的。

现在，我们可以指出ω在后继运算和含 0 元之下是一种皮亚诺系统，这有二点意思：第一说明确有某个皮亚诺系统存在；第二是说明皮亚诺公理是可以在ZF集公理论系统中得到证明的。

定理6.3 设$\sigma=\{\langle n, n^+\rangle | n\in\omega\}$，则$\langle\omega, \sigma, 0\rangle$就是一个皮亚诺系统。

证明

〔1〕 由于$n^+\neq\phi$对任何$n\in\omega$成立，故$0\notin\mathrm{ran}\,\sigma$。

〔2〕 若在ω中关于m, n有$m^+=n^+$，前面从正则性公理已证$m=n$，所以σ是一一函数。

〔3〕 任何含0且在σ下闭的ω之子集等于ω本身，这正是ω的归纳原理。

证毕

将在ω上的递归定理6.1改用皮亚诺系统的自然数集合N来陈述，就是：给定集合A和一个元$a\in A$以及一个函数$F: A\to A$，则有唯一函数$h: N\to A$使

$$h(e)=a$$

$$h(S(x))=F(h(x)),\ \forall x\in N$$

事实上，我们可以用ω上的递归定理来证明$\langle\omega, \sigma, 0\rangle$同构于$\langle N, S, e\rangle$。

定理6.4 设$\langle N, S, e\rangle$是一个皮亚诺系统，则$\langle\omega, \sigma, 0\rangle$同构于$\langle N, S, e\rangle$，即有一个双射函数$h: \omega\to N$使

$$h(\sigma(n))=S(h(n))$$

且

$$h(0)=e$$

证明

从ω上的递归定理，知道有唯一的函数$h: \omega\to N$使

$h(0)=e$，且对$\forall n\in\omega$，$h(n^+)=S(h(n))$

现在只要指出（1）h是一一函数（2）$\mathrm{ran}\,h=N$。

（2）证：利用关于$\langle N, S, e\rangle$的皮亚诺公设，现在有

$$e\in\mathrm{ran}\,h$$

且对任何一个$x\in\mathrm{ran}\,h$（例如$x=h(n)$）

就有$S(x)\in\mathrm{ran}\,h$（因为$S(x)=h(n^+)$）

所以N的子集$\mathrm{ran}\,h$就是N本身，即

$$\operatorname{ran} h = N$$

（1）证：令

$$T = \{n \in \omega \mid 在\omega中每一个与 n 相异的 m,$$
$$h(m) \neq h(n)\}$$

由于任何异于 0 的 $m \in \omega$ 必是 $p \in \omega$ 的 p^+ 形式，即 $m = p^+$，且 $h(p^+) = h(\sigma(p)) = S(h(p)) \neq e$，因为 $e \notin \operatorname{ran} S$。所以，$h(0) = e \neq h(p^+)$，$p \in \omega$ 即 $0 \in T$。

其次，设 $k \in T$，且设 $e(k^+) = h(m)$，则 $m \neq 0$，故 $m = p^+$，$p \in \omega$，从而

$$S(h(k)) = h(\sigma(k)) = h(k^+) = h(P^+) = S(h(p))$$

由 S 是一一的，故 $h(k) = k(p)$，而 $k \in T$ 故 $k = p$，

所以 $k^+ = p^+ = m$，这就表示

$$h(k^+) = h(m) \Rightarrow k^+ = m$$

即 $k^+ \in T$，

故 T 是归纳集，即

$$T = \omega$$

证毕

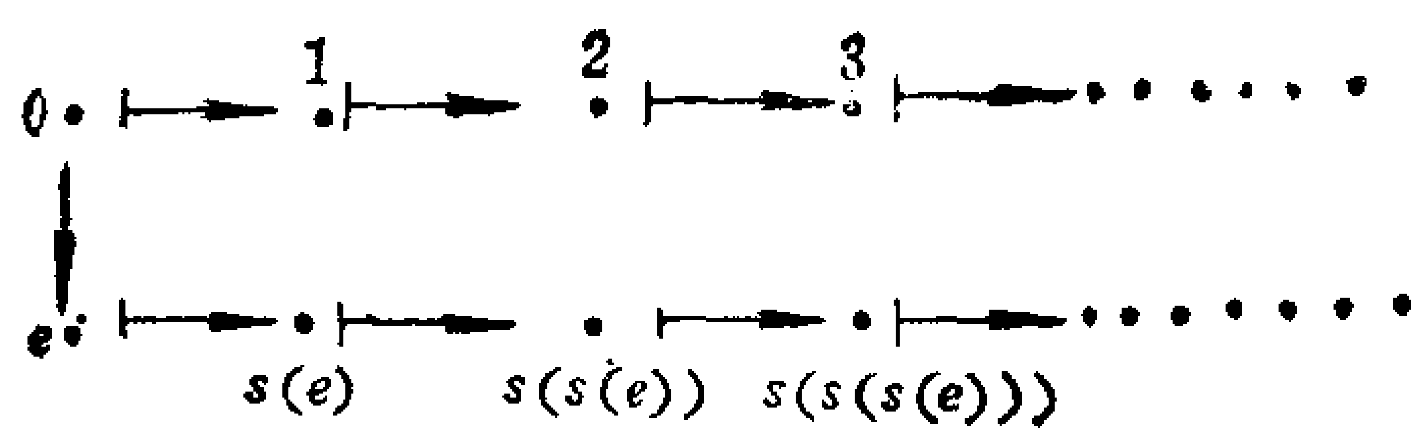

图 6.2

$\langle \omega, \sigma, 0 \rangle$ 和 $\langle N, S, e \rangle$ 的同构性可列为图 6.2。

例如：

$$\omega = \{0, 1\ 2, \cdots\cdots\}$$
$$N := \{1, 2, 4, 8, \cdots\}$$

则 $S(n) = 2n$，$n \in N$，且 $1 \notin \operatorname{ran} S$，$S$ 是一一的，$h: \omega \to N$ 是取值为

$$h(0) = 1$$
$$h(n^+) = S(h(n)),\quad n \in \omega$$

即

$$h(1) = S(h(0)) = S(1) = 2$$
$$h(2) = S(h(1)) = S(2) = 4$$

$$h(3)=S(h(2))=S(4)=8$$

………

§6.3 超限递归定理

ω上的递归定理和ω上的归纳原理一样，完全可以推论到一般超限的良序集合，这样推广的必要性是显而易见的，因为递归性本身具有计数的特性，在一般良序集合上给出递归定理就可以给出一般无穷良序集合的计数多少的概念，而策墨罗在集合理论中的最重要贡献就是他首先证明了任何集合都可以良序化，从而任何无穷集合也就可以和有限集合一样给出计数性质，这就是序数概念。

当然，递归定理的本身还有其它论证中的作用。

怎样从ω推广到一般良序集合来构造递归定理呢？

首先，我们从ω上的递归定理中的条件和构造过程来看：

$$(a\in A,\ F:A\to A)\Rightarrow(h(0)=a,\ h(n^{+})=F(h(n)))$$

本质上说明在已构造了

$$h\restriction \mathrm{seg}\, n$$

以后，如何决定$h(n)$的问题。ω上的递归定理还有更多的条件是F这个函数，有了这个函数等于解决了递归的构造，所以，ω上的递归定理证明过程就容易多了。

一般地，对于一个由<良序了的集合A而言，可以讨论对任何$t\in A$的初段集合

$$\mathrm{seg}\, t=\{x\in A\mid x<t\}$$

要确定有一个唯一函数F（相当于ω上递归定理中的h）使满足要求

$$r(F\restriction \mathrm{seg}\, t,\ F(t))$$

即F函数具有性质是，F在$t\in A$的值与直到t的各函数值之间有用γ公式表出的关系。公式

$$\gamma(f,y)$$

本身显然应该规定：对于任何一个f，有唯一的y。

实际上，一般地构造出F函数是就良序逐步形成的，所以，我们先给出“直到t为γ所构造了的函数v”，然后把所有这些v组合起来以求其并就可以得到整个函数F。

当t是A中一元时，称一个函数v是直到t为γ所构造了的 iff dom $v=\{x \mid x\leqslant t\}$，且对dom$v$中任何$x$有

$$\gamma(v\restriction \operatorname{seg} x,\ v(x))$$

在这个意义规定了之后，我们用$\varphi(t, v)$简单地表示“v是直到t在良序集合A内γ构造了的函数”这个意思的一种公式表示。现在γ的公式规定，说明了：

$$(t\in A)\wedge\varphi(t, v_1)\wedge\varphi(t, v_2)\Rightarrow v_1=v_2$$

然后探讨集合的类

$$\mathscr{K}=\{v \mid (\exists\, t\in A)\ v\text{是}\gamma\text{构造直到}t\text{的一个函数}\}$$

$\mathscr{K}$是否是一个集合呢？如果它确是一个集合，我们才可以用并公理，求出$\bigcup\mathscr{K}$。

在ω上的递归定理是不成问题的，因为，它事先肯定了一个集合A，按上述分析所得的容许函数v是满足

$$v\subseteq\omega\times A$$

而v是h的限制，所以$\mathscr{K}\subseteq\mathscr{P}(\omega\times A)$，从而

$$\bigcup\mathscr{K}\subseteq\omega\times A$$

关于一般良序集合，就首先要肯定$\mathscr{K}$是一个集合，为此，我们必需要给出ZF集合理论的第九个公理：

〔**置换公理**〕 对于任何一个不含B字母的公式$\varphi(x, y)$有：

$$\forall A[(\forall x\in A)\forall y_1\forall y_2(\varphi(x, y_1)\wedge\varphi(x, y_2)\Rightarrow y_1=y_2)$$
$$\Rightarrow\exists B\forall y(y\in B\Leftrightarrow(\exists x\in A)\varphi(x, y))]$$

用语言来说：对于任何集合A，若就A中任何一元x，公式$\varphi(x, y)$的性质是唯一确定一个y元，则有B集合存在，使B的各元确是A中所有元能从$\varphi(x, y)$决定的y元。

有了这个公理，从$\varphi(t, v)$的意义，我们就可以对任何一个良序集合构成的$\mathscr{K}$，肯定了它相当于公理中B集合的一个集合。

按置换公理，我们还可以讨论其它很多问题，例如，若A是一个集合，且取$\varphi(x, y)$为$y=\mathscr{P}x$，则$\{\mathscr{P}a \mid a \in A\}$就从公理肯定它是一个集合。若不用置换公理，则证明就比较复杂一些：事实上，若$a \in A$，则$\mathscr{P}a \in \mathscr{P}\mathscr{P}\bigcup A$，从而

$$\{\mathscr{P}a \mid a \in A\}$$

就是$\mathscr{P}\mathscr{P}\bigcup A$的一个子集，故它是一个集合。要证明$\mathscr{P}a \in \mathscr{P}\mathscr{P}\bigcup A$只要证明$\mathscr{P}a \subseteq \mathscr{P}\bigcup A$，所以，究任何$C \in \mathscr{P}a$得知

$$x \in C \Rightarrow x \in C \subseteq a \in A \Rightarrow x \in a \in A \Rightarrow x \in \bigcup A$$

所以$C \subseteq \bigcup A$即$C \in \mathscr{P}\bigcup A$，从$C$的任意性，可知$\mathscr{P}a \subseteq \mathscr{P}\bigcup A$，

置换公理是一种公理格式，它是由弗朗克（Fraenkel）在1922年和斯科莱姆（Skolem）在1923年根据1889年康托的思想给出的。

有了置换公理解决了ZF集合理论前八个公理不能解决的问题，同时，前八个公理的某些公理还可以直接从置换公理导出：

〔1〕 空集

命题：有唯一一个集合，集合内无元。

证明 用置换公理，设A是任一集合，用公式$\varphi(x, y)$表示$x \neq x$，则有一个集合B，它无元在其内，因为一方面从公理知有B存在，而从$\varphi(x, y)$又并未确定什么y元。再从外延性公理知道B是唯一的无元的集合。

证毕

定义：0是无元的集合，即$0=\{x \mid x \neq x\}$。这种定义方法是1847年布尔首先给出的。

〔2〕 组对集合

命题：$\forall s \forall t \exists B \forall x(x \in y \Leftrightarrow x=s \vee x=t)$，即对所有$s$，$t$集合，有一集合$B$使它恰是由$s$和$t$组成。

证明 在置换公理中，$\varphi(x, y)$是

$$(x=0 \wedge y=s) \vee (x=\{0\} \wedge y=t)$$

A集合是$\{0, \{0\}\}$。B集合就由s和t组成

证毕

定义：（1）$\{s, t\}=\{x \mid x=s \vee x=t\}$，$\{s, t\}$是恰由 s 和 t 所组成，从命题可知，$\{s, t\}$是一个集合，称为组对集合

（2）$\{s\}=\{s, s\}$，$\{s\}$是由一个元 s 组成，称为 s 的单子集。

〔3〕子集

定理格式：$\forall A \exists B \forall x(x \in B \Leftrightarrow x \in A \wedge \psi(x))$，此时 B 不是 $\psi(x)$ 中的自由变量，即对所有 A，有一个集合 B，它恰由 A 中使 $\psi(x)$ 成立的元组成。写成为

"$\{x \in A \mid \psi(x)\}$是一个集合"。

证明 在置换公理中的 $\varphi(x, y)$ 取为

$$\psi(x) \wedge x=y$$

则有 B 集合存在恰是满足要求者。

证毕

由此可见，ZF公理体系中的各个公理不是完全独立的，所以公理集合理论通常又可分为

（1）策墨罗公理系，系指前八个公理；

（2）策墨罗-弗朗克公理系，是指策墨罗公理外加置换公理，记为ZF体系；

（3）ZFC公理体系，是指ZF九个公理外加选择公理，共是十个公理。

现在，我们就要特别利用置换公理将 ω 上的递归定理推广为超限递归定理：

定理6.5 对于任何一个公式 $\gamma(x, y)$有定理：

设＜是在一个集合 A 上的良序关系，设对任何的 f 有唯一的 y 使 $\gamma(f, y)$，则有唯一一个函数 F，以 A 为定义域，使

$$\gamma(F \upharpoonright \operatorname{seg} t, F(t))$$

对 A 中所有的 t 成立。

证明

（1）F是一个函数：$F=\bigcup\mathscr{K}$。

若$F=\bigcup\mathscr{K}$，则

$\langle x, y\rangle\in F\Leftrightarrow v(x)=y$对某 v 成立，$v$在$\mathscr{K}$中

$$\mathscr{K}=\{v\mid(\exists\, t\in A)\ v\text{是}\gamma\text{构造直至}t\text{的一个函数}\}$$

故设$\langle x, y_1\rangle$和$\langle x, y_2\rangle$属于F，则有v_1, t_1, v_2, t_2使

$$v_1(x)=y_1,\quad v_2(x)=y_2$$

而且v_1, v_2分别是γ构造到t_1, t_2的，或者$x\leqslant t_1\leqslant t_2$，或者$x\leqslant t_2\leqslant t_1$，二者都说明

$$y_1=v_1(x)=v_2(x)=y_2$$

（2）F是γ构造的

要证明对任何$x\in\operatorname{dom}F$有$\gamma(F\upharpoonright\operatorname{seg}x, F(x))$，现在$x\in\operatorname{dom}F$，所以在$\mathscr{K}$中必有$v$具$x\in\operatorname{dom}v$，从而$\gamma(v\upharpoonright\operatorname{seg}x, v(x))$而且从（1）得

$$v\upharpoonright\operatorname{seg}x=F\upharpoonright\operatorname{seg}x\text{且}v(x)=F(x)$$

故
$$\gamma(F\upharpoonright\operatorname{seg}x, F(x))$$

（3）$\operatorname{dom}F=A$

若$\operatorname{dom}F\neq A$，则因$\operatorname{dom}F\subseteq A$，故于$A-\operatorname{dom}F$中有一最小元$t$，所以$\operatorname{seg}t\subseteq\operatorname{dom}F$。也就是$\operatorname{seg}t=\operatorname{dom}F$。

按γ性质，对于F我们可取唯一的y使$\gamma(F, y)$，且

令
$$v=F\cup\{\langle t, y\rangle\}$$

则v就是γ构造到t的，因为，显然v是一个函数

且
$$\operatorname{dom}v=\{x\mid x\leqslant t\}=\operatorname{seg}t\cup\{t\}$$

对任何$x<t$，有$v\upharpoonright\operatorname{seg}x=F\upharpoonright\operatorname{seg}x$，且$v(x)=F(x)$

从（2）知道是

$$\gamma(v\upharpoonright\operatorname{seg}x, v(x))$$

而在$x=t$时，有

$$v\upharpoonright\operatorname{seg}t=F,\text{ 且 }v(t)=y$$

由y的选法还知道

$$\gamma(v\restriction \text{seg}\ t,\ v(t))$$

所以，v 是 γ 构造直至 t 的，即 $t\in \text{dom}F$

从超限归纳原理，可知 $\text{dom}F=A$

（4）F 是唯一的，

设 F_1 和 F_2 都合于定理要求，令

$$B=\{t\in A|F_1(t)=F_2(t)\}$$

只要指出对任何一个 $t\in A$，

$\text{seg}\ t\subseteq B\Longrightarrow t\in B$，就有 $B=A$，就证明了唯一性。事实上，若 $\text{seg}\ t\subseteq B$，就有

$$F_1\restriction \text{seg}\ t=F_2\restriction \text{seg}\ t$$

故有 $\gamma(F_1\restriction \text{seg}\ t,\ F_1(t))$ 且 $\gamma(F_2\restriction \text{seg}\ t,\ F_2(t))$ 所以，由 γ 的意义可知 $F_1(t)=F_2(t)$，即 $t\in B$，

证毕

超限递归定理和超限归纳定理一样，是研究超限无穷集合的主要基础。特别是超限递归定理的一个最重要的应用，就是将有限的“序”推广到超限的“序”。

设 $<$ 是集合 A 上的一个良序关系，取 γ 公式是

$$y=\text{ran}\ x$$

则超限递归定理指出：有一个唯一的函数 E，定义域是 A，对于每一个 $t\in A$，使

$$\begin{aligned}E(t)&=\text{ran}(E\restriction \text{seg}\ t)\\&=E[\![\text{seg}\ t]\!]\\&=\{E(x)|x<t\}\end{aligned}$$

设

$$\alpha=\text{ran}\,E$$

称它是良序构造 $\langle A,\ <\rangle$ 的“ϵ 像”。

ϵ 像的意义，实质上是针对良序集合从序的规律给出计数的一个表示集合。这个性质完全可以从有限集合的 ϵ 像看出来，例如，设由三个元组成的集合

$$A=\{r,\ s,\ t\}，\text{且排序为 } r<s<t$$

则
$$E(r)=\{E(x)\mid x<r\}=\varnothing$$
$$E(s)=\{E(x)\mid x<s\}=\{E(r)\}=\{\varnothing\}$$
$$E(t)=\{E(x)\mid x<t\}=\{E(r),\ E(s)\}$$
$$=\{\varnothing,\ \{\varnothing\}\}$$
所以，$E(r)=0$，$E(s)=1$，$E(t)=2$，而$\langle A,\ <\rangle$的$\in$像不论A中具体的组成元为何，只要给以良序关系，总是“3”这个数，即

$$\alpha=\operatorname{ran}E=\{\varnothing,\ \{\varnothing\},\ \{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}=\{0,\ 1,\ 2\}=3$$

所以，良序的作用是给出一个始元，然后“良序构造”的$\in$像就是一个套一个的，计出集合A中所有元的个数，这种个数同时表示出集合排序整体的长短。

§6.4 序数集合

从上节超限递归定理的关于$\in$像的直接应用，可以看出，任何一个集合，良序化了以后，它的$\in$像正是有限集合顺序计数的一种推广，无穷集合A的良序构造$\langle A,\ <\rangle$，可以用它的$\in$像表示排序之后的长短计量，这种计量是一个集合。

我们对于良序集合的$\in$像必然特别感到兴趣，因为，它将是我们解开无穷集合之谜的一个重要钥匙。为此，我们应该深入研究$\in$像的一些性质。

定理6.6 设$<$是A集合上的一个良序关系，且设E是公式$y=\operatorname{ran}x$由超限递归定理确定的唯一函数，$\alpha=\operatorname{ran}E$，则

（1）对于任何一个$t\in A$，$E(t)\notin E(t)$

（2）E是A到α的一个双射

（3）对于A中的任何s，t，

$$s<t \quad \text{iff} \quad E(s)\in E(t)$$

（4）α是一个可传集

证明

（1）设S是反例集合

$$S=\{t\in A\mid E(t)\in E(t)\}$$

只要证明它是空集，就证明了定理的（1）。若S是一个非空集，则必有一个最小元$\hat{t}\in S$，并且$E(\hat{t})\in E(\hat{t})$，但从$E(\hat{t})$的定义可知有某$s<\hat{t}$具有$E(\hat{t})=E(s)$，从而又有$E(s)\in E(s)$，这是和$\hat{t}$的最小性矛盾的，所以$S=\varnothing$。

（2）$\alpha=\operatorname{ran}E$，就说明$E$是$A$到$\alpha$的一个满射，所以只要证明$E$是一一函数，设$s$，$t$是$A$的两个相异元，则一个必小于另一个，设$s<t$，则$E(s)\in E(t)$，但是从（1），$E(t)\notin E(t)$，故

$$E(s)\neq E(t)$$

（3）从定义直接有　$s<t\Longrightarrow E(s)\in E(t)$

反之，若$E(s)\in E(t)$，则从$E(t)$的定义

$$E(t)=\{E(x)\mid x<t\}$$

有某$x<t$具有$E(s)=E(x)$，从E的一一性，必是$s=x$，故$s<t$。

（4）若$u\in E(t)\in\alpha$，则有某$x<t$，使$u=E(x)$，而且因为$E(x)\in\alpha$，故$u\in\alpha$，所以，α是一个可传集。

证毕

定理6.7　两个良序构造是同构的iff它们有相同的$\in$像。即若$<_1$和$<_2$各是A_1，A_2二集合的良序关系，则$\langle A_1,<_1\rangle\cong\langle A_2,<_2\rangle$iff$\langle A_1,<_1\rangle$的$\in$像就是$\langle A_2,<_2\rangle$的$\in$像。

证明

证$\Leftarrow$：若$\langle A_1,<_1\rangle$和$\langle A_2,<_2\rangle$有相同的$\in$像α，则从定理6.6的（2）（3），知道良序构造是与它们的$\in$像同构，所以

$$\langle A_1,<_1\rangle\cong\langle\alpha,\in_\alpha\rangle\cong\langle A_2,<_2\rangle$$

再从同构关系的可传性，得

$$\langle A_1,<_1\rangle\cong\langle A_2,<_2\rangle$$

证$\Rightarrow$：设f是从$\langle A_1,<_1\rangle$到$\langle A_2,<_2\rangle$的一个同构映射，且$E_1:A_1\to\alpha_1$，$E_2:A_2\to\alpha_2$是良序集合到它们的$\in$像集合的同构映射；

$$E_1(s)=\{E_1(x)\mid x<_1 s\},$$

$$E_2(t)=\{E_2(y)|y<_2 t\}$$

可从超限归纳证明对所有的 $s\in A_1$有

$$E_1(s)=E_2(f(s))$$

从而有 $$\alpha_1=\{E_1(s)|s\in A_1\}$$
$$=\{E_2(f(s))|s\in A_1\}$$
$$=\{E_2(t)|t\in A_2\},$$

而 f 是从 A_1 满射到 A_2，故 $\alpha_1=\alpha_2$，即 ϵ 系是同一的。要证明对所有 $s\in A_1$ 有

$$E_1(s)=E_2(f(s))$$

可设 $$B=\{s\in A_1|E_1(s)=E_2(f(s))\}$$

由于开始的 $E_1(\cdot)$ 和 $E_2(\cdot)$ 的对应总是从 ϕ，$\{\phi\}$，$\{\phi,\{\phi\}\}\cdots$开始，所以 B 不是空的，设 $\mathrm{seg}\ s\subseteq B$，则

$$E_1(s)=\{E_1(x)|x<_1 s\}$$
$$=\{E_2(f(x))|x<_1 s\}$$

而取 $y=f(x)$ 后，由于 f 是 A_1 到 A_2 的满射

$$\{E_2(f(x))|x<_1 s\}=\{E_2(y)|y<_2 f(s)\}$$

所以 $$E_1(s)=\{E_2(y)|y<_2 f(s)\}=E_2(f(s))$$

故 $s\in B$，由超限归纳定理可知 $B=A_1$

证毕

由此可见，一个良序集合 A 的 ϵ 像不仅刻划了这个集合长短的计量，而且同一个 ϵ 像也刻划了所有同构于 A 集合的良序集合的长短计量，从而一个 ϵ 像刻划同构良序集合类中任何一个集合的长短。

定义6.4 设 $<$ 是在集合 A 上的一个良序关系，它的 ϵ 像称为 $\langle A, <\rangle$ 的**序数**，一个序数是一个集合，它是某个良序构造的序数。

从上分析，可知良序集合的同构类构成一个型类，称为一种**序型**。若集合 A 属于某序型，它就可以用某一个代表的集合表示，特别是用它的 ϵ 像或序数集合表示，把它写成 $[A]$，则良序集合 A，B 有

$$A \cong B \Longleftrightarrow [A] = [B]$$

通常的自然数本身就是各个序数，即

$$\underset{\sim}{0} := [\phi]$$

$$\underset{\sim}{1} := [\{0\}]$$

$$\underset{\sim}{2} := [\{0, 1\}]$$

$$\cdots$$

$$\underset{\sim}{n} := [\{0, 1, \cdots, n-1\}]$$

$$\cdots$$

$\omega := [N]$　N是任何皮亚诺系统集合。

进一步研究序数的加法，首先要定义良序集合的加法。

定义6.5　设$\langle A, <_A\rangle$和$\langle B, <_B\rangle$是非交的二良序集，

则　$\langle A, <_A\rangle + \langle B, <_B\rangle := \langle A \cup B, <\rangle$ 而且

在$x, y \in A$时，$x < y := x <_A y$，

在$x \in A$，$y \in B$时，$x < y$

在$x, y \in B$时，$x < y := x <_B y$，

称　$\langle A, <_A\rangle + \langle B, <_B\rangle$为序和，写成$A + B$。

定义6.6　若良序集合A，B非交，$\alpha = [A]$，$\beta = [B]$，

则

$$\alpha + \beta = [A + B]$$

例如

(1) $\underset{\sim}{2} + \underset{\sim}{3} = \underset{\sim}{5}$

因为　$\underset{\sim}{2} = [\{0, 1\}]$，$\underset{\sim}{3} = [\{2, 3, 4\}]$

$\underset{\sim}{2} + \underset{\sim}{3} = [\{0, 1, 2, 3, 4\}] = \underset{\sim}{5}$

(2) $\underset{\sim}{1} + \omega = \omega$

因为　$\underset{\sim}{1} = [\{0\}]$，$\omega = [\{1, 2, 3, \cdots\}]$

$\underset{\sim}{1} + \omega = [\{0, 1, 2, 3, \cdots\}] = \omega$

(3) $\omega + \underset{\sim}{1} \neq \omega$

因为　$\omega = [\{0, 1, 2, \cdots\}]$，$1 = \left[\left\{\frac{1}{2}\right\}\right]$

$$\omega + \underset{\sim}{1} = \left[\left\{0, 1, 2, \cdots, \frac{1}{2}\right\}\right]$$

（4）$\omega+\omega=[\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots\}]+[\{1,\ 3,\ 5,\cdots\}]$

$$=[\{0,\ 2,\ 4,\ 6,\ \cdots 1,\ 3,\ 5,\ \cdots\}]$$

从所举各例，可见序数的顺序应是

$\underset{\sim}{0},\ \underset{\sim}{1},\ \underset{\sim}{2},\ \cdots,\underset{\sim}{n},\ \cdots\omega,\ \omega+\underset{\sim}{1},\ \omega+\underset{\sim}{2},\ \cdots\omega+\omega,\ \omega+\omega+1,\ \cdots$

在引入乘法以后，还可以构成更大的序数，我们的办法是采用反字典型来给出乘法定义。

定义6.7 若 $\langle A,\ <_A\rangle$，$\langle B,\ <_B\rangle$ 是二良序集，则 $\langle A,\ <_A\rangle\otimes\langle B,\ <_B\rangle:=\langle A\times B,\ <\rangle$，其中 $\langle a,\ b\rangle<\langle a',\ b'\rangle:=(b<_B b')\vee(b=b'\wedge a<_A a')$ 称 $\langle A\times B,\ <\rangle$ 是 $\langle A,\ <_A\rangle$ 和 $\langle B,\ <_B\rangle$ 的序乘积，写成 $A\otimes B$。

还可以证明，若 A 与 B 是良序集合，则 $A\otimes B$ 也是良序集合，并且在 $A\cong A'$，$B\cong B'$ 时 $A\otimes B\cong A'\otimes B'$。

从定义6.7，我们就可以定义序数的相乘。

定义6.8 若 $\alpha=[A]$，$\beta=[B]$，则

$$\alpha\cdot\beta=[A\otimes B]$$

例如

（1）$\underset{\sim}{2}\cdot\underset{\sim}{3}=\underset{\sim}{6}$

因为　$\underset{\sim}{2}=[\{0,\ 1\}]$，$\underset{\sim}{3}=[\{0,\ 1,\ 2\}]$，且

$$\underset{\sim}{6}=[\{\langle 0,0\rangle,\ \langle 1,\ 0\rangle,\ \langle 0,\ 1\rangle,\ \langle 1,\ 1\rangle,\ \langle 0,\ 2\rangle,\ \langle 1,\ 2\rangle\}]=[\underset{\sim}{2}\otimes\underset{\sim}{3}]$$

（2）$\omega\cdot\underset{\sim}{2}=\omega+\omega$

因　$N\otimes\{0,\ 1\}=\{\langle 0,\ 0\rangle,\ \langle 1,\ 0\rangle,\ \langle 2,\ 0\rangle,\cdots,\langle 0,\ 1\rangle,\ \langle 1,\ 1\rangle,\ \langle 2,\ 1\rangle,\ \cdots\}$

设 N' 是 N 的一个非交复印，即 N'，N 是二个非交皮亚诺自然数系统，则显然有

$$N+N'=N\otimes\{0,\ 1\}$$

取它的序数，则得

$$[N+N']=[\{\langle 0,\ 0\rangle,\ \langle 1,\ 0\rangle,\ \langle 2,\ 0\rangle,\ \cdots,\ \langle 0,\ 1\rangle,\ \langle 1,\ 1\rangle,\ \langle 2,\ 1\rangle,\ \cdots\}]$$

即 $$\omega+\omega=\omega\cdot\underset{\sim}{2}$$

（3） $$\underset{\sim}{2}\cdot\omega=\omega$$

因为 $$\{0,\ 1\}\otimes N=\{\langle 0,\ 0\rangle,\ \langle 1,\ 0\rangle,\ \langle 0,\ 1\rangle,\ \langle 1,1\rangle,\ \cdots\langle 0,\ n\rangle,\ \langle 1,\ n\rangle,\ \cdots\}=N$$

故取序数得

$$\underset{\sim}{2}\cdot\omega=\omega$$

§6.5 基 数 集 合

序数的运算可以说明它的计数性的重点在于它的良序性，而良序的目的是把任何一个集合按某种序连续的排列，它有初始计数点，而且每“数”完一段再开始计数，就又有初始计点，所以，序数是集合序长短的一种计量，它表成一个集合。

如果，我们讨论任何一个集合，只究其个数的容量，而不计其顺序，那儿度量的结果显然将大大的缩小。只究集合元容量的方法就是在集合之间构成一一对应，从而给出各种不同对应的不同的“势”，这就是集合的“基数”概念，一个集合的基数显然就是一一对应它的最小序数良序集合的序数。

定义6.9 集合V称为“等数”或“等势”于集合W iff 有一双射$f:V\rightarrow W$，写成

$$V\underset{1}{=}W$$

它表示有一个f使$f:V\underset{1}{=}W$。

容易看出“$\underset{1}{=}$”这种等数关系是一种等价关系“类”，也就是

（1）对所有集合V，$V\underset{1}{=}V$

（2）对所有集合U与V，若$U\underset{1}{=}V$ 则$V\underset{1}{=}U$

（3）对所有集合U，V，W，若$U\underset{1}{=}V$，$V\underset{1}{=}W$，则$U\underset{1}{=}V$

注意到我们在定理4.11中提到的特征函数取值的双射函数K，我们就有

定理6.8 对任何集合V，$\mathscr{P}V \underset{1}{=} \{0, 1\}^V$

证明 由$K(U)=K_U$为$U\in\mathscr{P}V$（即$U\subseteq V$）的特征函数，它就在$\{0, 1\}^V$中，所以，$K(U)=K_U$是$\{0, 1\}^V$中一值，而$K: \mathscr{P}V\to\{0, 1\}^V$已证是一个双射，故$\mathscr{P}V \underset{1}{=} \{0, 1\}^V$

证毕

这个定理的一个特例就是

$$\mathscr{P}\omega \underset{1}{=} \{0, 1\}^\omega$$

它是有限集合$\mathscr{P}(\{1, 2, 3, \cdots n\})$有$2^n$个元的直接推论。接着，我们要指出$\omega$与$\mathscr{P}\omega$不是等数。

定理6.9 ω不等数于$\{0, 1\}^\omega$

证明

我们要指出没有双射$F: \omega\to\{0, 1\}^\omega$存在，所以，只要证明每一个$F: \omega\to\{0, 1\}^\omega$都不是满射，也就是要证明每一个$F: \omega\to\{0, 1\}^\omega$都有一个$h\in\{0, 1\}^\omega$使对所有$i\in\omega$，$h\neq F(i)$。

设$F: \omega\to\{0, 1\}^\omega$，则对所有的$i\in\omega$，$F(i)\in\{0, 1\}^\omega$，为方便起见，用$F_i$代$F(i)$，把$F_i$对指数位置的$\omega$取不同值，可以得到不同的$F_i(0)$，$F_i(1)$、$F_i(2)$，…即

例如

	0	1	2	3	…
F_0	0	1	0	0	…
F_1	1	0	1	0	…
F_2	0	0	1	1	…
⋮					

究其位于对角上的$F_0(0)$，$F_1(1)$，$F_2(2)$，…无论所取的$\{0, 1\}^\omega$为何，定义

$$h(i) := 1-F_i(i)$$

即在对角上将0与1互换，则对所有的$i\in\omega$，

$$h(i)\neq F_i(i)$$

所以 $$h\neq F_i$$

证毕

这种用对角形式的证法，称为康托对角法。从上分析，它说明ω的“基性”或“势”都是小于$\{0, 1\}^{\omega}$的“基性”或“势”的，也就是说，ω的“势”是小于$\mathscr{D}\omega$的“势”的。

定义6.10 $V \underset{1}{<} W := (V \underset{1}{\leqslant} W) \wedge (\neg V \underset{1}{=} W)$

所以

（1）$\omega \underset{1}{<} \{0, 1\}^{\omega}$

（2）$\omega \underset{1}{<} \mathscr{D}\omega$

一般地，可以有

定理6.9 对所有集合V，$V \underset{1}{<} \mathscr{D}V$

证明

（1）确有一个单射$f: V \to \mathscr{D}V$存在，只要对任何V集合定义每$x \in V$给出$f(x) = \{x\}$。

（2）现在要证明对每一个$g: V \to \mathscr{D}V$，总有$U \in \mathscr{D}V$使对每一个$x \in V$，$U \neq g(x)$；换句话说，不会有满射的$g: V \to \mathscr{D}V$，所以也就不会有双射的g，从而只能是$V \underset{1}{<} \mathscr{D}V$，即只能有单射$f$。因为，设$g: V \to \mathscr{D}V$，取

$$U = \{x \in V \mid x \notin g(x)\}$$

则$U \in \mathscr{D}V$，且对每一个$x \in V$，$U \neq g(x)$，因为如果$U = g(x)$，则对每个$y \in V$有$y \in U \Longleftrightarrow y \in g(x)$。也就是对每一个$y$，

$$y \notin g(y) \Longleftrightarrow y \in g(x)$$

故有 $x \notin g(x) \Longleftrightarrow x \in g(x)$ 矛盾

证毕

设a，$b \in \underset{\sim}{R}$，按通常实数大小顺序，取定义

$$[a, b] := \{x \in \underset{\sim}{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

$$(a, b) := \{x \in \underset{\sim}{R} \mid a < x < b\}$$

要弄清楚ω与$\underset{\sim}{R}$的关系，我们首先要证明$[0, 1]$不等数于ω，这是康托首先在1873年就证明了的事实，下面是庞加雷给出的改进

证明

定理6.10 ω不等数于$[0, 1]$

证明

我们要指出，不存在一个双射$g:\omega\to[0, 1]$，所以，只要证明没有函数$g:\omega\to[0, 1]$能是满射的，也就是总可以造一个实数b，$b\in[0, 1]$使对每一个$n\in\omega$，$g(n)\neq b$。

设$g:\omega\to[0, 1]$，我们可以在Q中构成一个节链S_0，S_1，S_2，…使每一个$n\in\omega$，$g(n)$不是S_n中的元，注意到

$$[0, 1]=\left[0, \frac{1}{3}\right]\cup\left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right]\cup\left[\frac{2}{3}, 1\right]$$

在三个分节中，至少有一个不含$g(0)$，令为S_0，设S_0，S_1，…S_n是已定义了的，它们使

（1）对所有i，$0\leqslant i\leqslant n$，$g(i)$不是S_i的一元，

（2）对所有i，$0\leqslant i<n$，$S_{i+1}\subseteq S_i$

（3）对所有i，$0\leqslant i\leqslant n$，S_i之长等于3^{-i-1}

（见图 6.3）设$S_n=[p_n, q_n]$，则S_n是下列三分节之并：

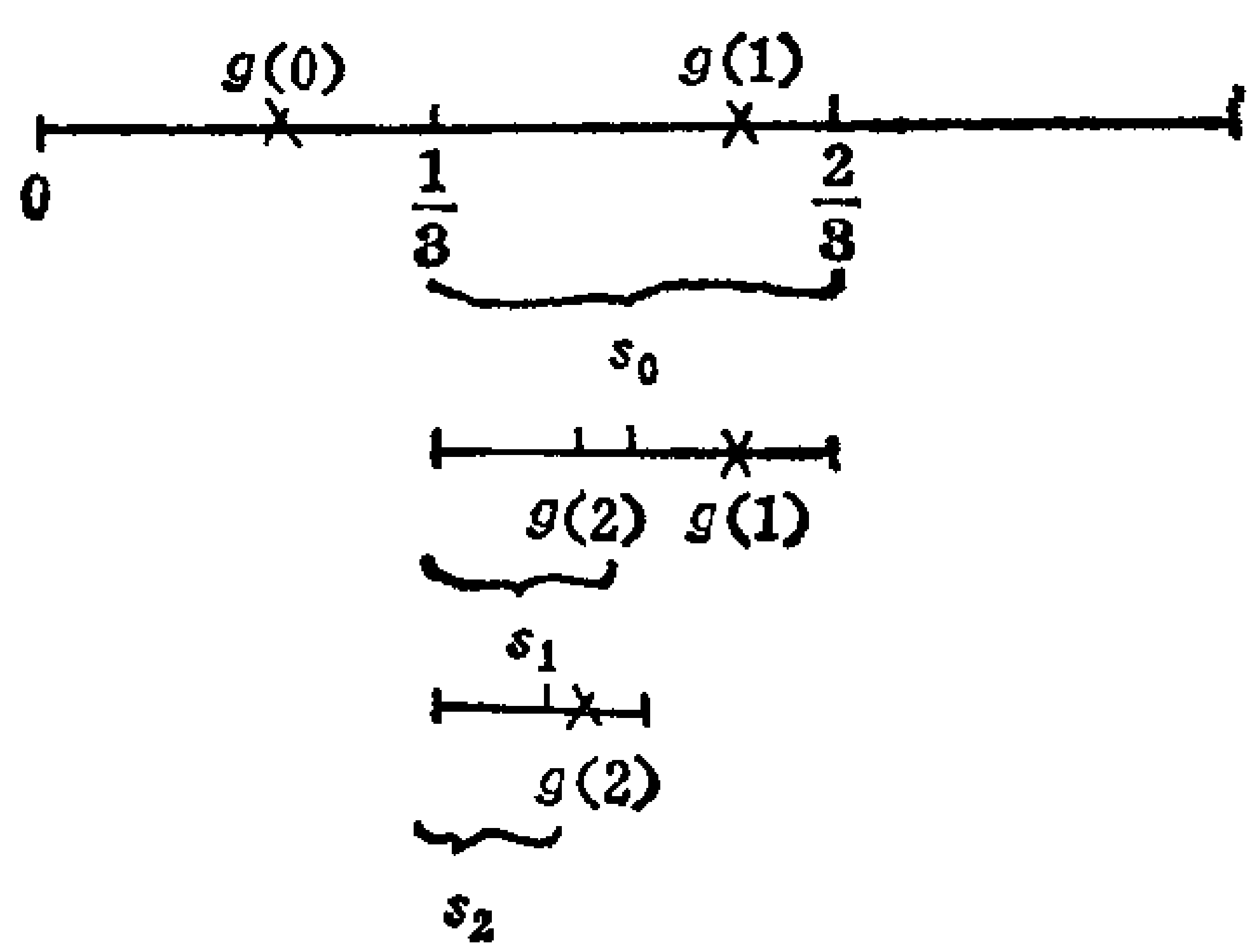

图 6.3

$$\left[p_n, \frac{2p_n+q_n}{3}\right], \left[\frac{2p_n+q_n}{3}, \frac{p_n+2q_n}{3}\right], \left[\frac{p_n+2q_n}{3}, q_n\right]$$

且至少有一个分节不含$g(n+1)$，称为S_{n+1}。这样的节链S_0，S_1，…就决定了一个实数b，使对每一个$n\in\omega$，b都出现在S_n中，故$b\in[0, 1]$，而现在对每一个$n\in\omega$，$g(n)$又不出现在S_n中，

所以

$$b \neq g(n)$$

证毕

定理6.11 $\omega \underset{1}{<} [0, 1]$

证明

容易看出有一个单射 $f: \omega \to [0, 1]$，它定义为

$$f(n) = \frac{1}{n+1}$$

故 $\omega \underset{1}{\leqslant} [0, 1]$，再从定理 6.10 知 $\neg\, \omega \underset{1}{=} [0, 1]$，

故 $\omega \underset{1}{<} [0, 1]$

定义6.11 V 是可数 的 iff $\omega \underset{1}{=} V$

V 是可数 的 iff V 是有限集或是可数集。

至此，我们知道$[0, 1]$不等数于ω，所以$[0, 1]$是一个不可数的无穷集合，但是它与哪些集合等数呢？这倒是一个值得仔细分析的问题，判别集合等数的一个方便定理就是下述的康托-施劳德-伯恩斯坦（Cantor-Schröder-Bernstein）定理。

定理6.12 若 $A \underset{1}{\leqslant} B$ 且 $B \underset{1}{\leqslant} A$，则 $A \underset{1}{=} B$

证明

定理的证明采用镜照耗尽方法。

从定理条件，已知有二个一一函数

$$f: A \to B \quad 和 \quad g: B \to A$$

问题是从它们是否可以构成一个双射函数

$$h: A \underset{1}{=} B$$

从已给的 g，可知有 $\mathrm{ran}(g) \subseteq A$，所以还要待决

$$C_0 = A - \mathrm{ran}(g)$$

的部分，现在的问题，就是是否可以用已给 的 f，g 来 耗 尽 C_0 构成 h 函数？

令 $$C_1 = g[\![f[\![C_0]\!]]\!]$$

$$C_{n+} = g[\![f[\![C_n]\!]]\!], \quad n \in \omega$$

从图 6.4，可知

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & \text{当 } x \in C_n \text{对某 } n \text{ 成立时} \\ g^{-1}(x) & \text{当 } x \notin C_n \text{对任何 } n \text{ 成立时} \end{cases}$$

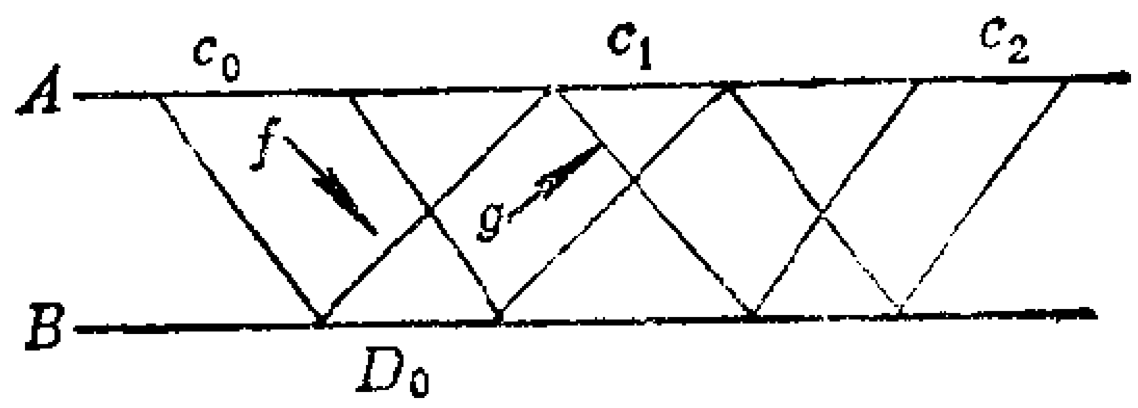

图 6.4

今证 h 是从 A 双射到 B 的，

(1) h 是一一的

(Ⅰ) 如果 $x \notin U_{n\in\omega}C_n$，$x' \notin U_{n\in\omega}C_n$

则 $h(x) = g^{-1}(x)$，$h(x') = g^{-1}(x')$，从 g^{-1} 的一一性，可知 $h(x) \neq h(x')$

(Ⅱ) 如果 $x \in U_{n\in\omega}C_n$，$x' \in U_{n\in\omega}C_n$，从 f 的一一性可知 $x \neq x' \Longrightarrow h(x) \neq h(x')$

(Ⅲ) 如果 $x \notin U_{n\in\omega}C_n$ 且 $x' \in U_{n\in\omega}C_n$，则

$$h(x) = g^{-1}(x), \quad h(x') = f(x')$$

由于现在有 $m \in \omega$ 使 $x' \in C_m$，故 $h(x') \in D_m$，

而 $x \notin C_{m+}$ 故 $g^{-1}(x) \notin D_m$ 故 $h(x) \neq h(x')$

(2) $\operatorname{ran}(h) = B$

由于 $D_n = h[\![C_n]\!]$，故对每一个 $D_n \subseteq \operatorname{ran}(h)$，然后究 $B - U_{n\in\omega}D_n$ 中一点 y，显然 $g(y) \notin C_0$，而且 $g(y) \notin C_n$，因为 $C_{n+} = g[\![D_n]\!]$，$y \notin D_n$ 且 g 是一一的，故对任一个 n，$g(y) \notin C_n$。所以

$$h(g(y)) = g^{-1}(g(y)) = y$$

这说明 $y \in \operatorname{ran} h$ 所以 $\operatorname{ran}(h) = B$

证毕

定理6.13 $(0,1)\underset{1}{=}[0,1]$

证明

$id_{(0,1)}:(0,1)\to[0,1]$是一个单射，故$(0,1)\underset{1}{\leqslant}[0,1]$，另外，$f:[0,1]\to(0,1)$定义为$f(x)=\frac{1}{4}(x+1)$，它是一个单射，故$[0,1]\underset{1}{\leqslant}(0,1)$，可以，从$C$，$S$，$B$，定理6.12，得知$(0,1)\underset{1}{=}[0,1]$

证毕

如果A集合等数于B集合，写成$A\approx B$，也就是

$$A\approx B \text{ iff } A\underset{1}{=}B$$

我们知道，每一个有限集合A，总有唯一的$n\in\omega$使

$$A\approx n$$

这个n就称为A的基数，它反映了有限集合A的容量计量，另外，对于有限集合来说，它的基数就是自然数表出的序数，就基数来说，我们把A集合的基数表为

$$\operatorname{card}A$$

而有限集合A，就有某$n\in\omega$使$n=\operatorname{card}A$，要把它推论到无穷集合，显然应该有两个约定：

〔1〕 对于任何集合A，B

$$\operatorname{card}A=\operatorname{card}B \text{ iff } A\approx B$$

〔2〕 对于有限集A，$\operatorname{card}A$是使$A\approx n$的自然数n。

再注意到，任何一个集合A都可以给它一种序关系，使它成为良序构造$\langle A,<\rangle$，所以，总有$\langle A,<\rangle$的同构的序数良序构造$\langle\alpha,<_\alpha\rangle$，这样，集合$A$就与某序数同构，也就是“任何集合$A$是等数于某序数”，但是，集合$A$可以等数的序数不是唯一的。

定义6.12 对于任何集合A，A的基数是等数于A的最小序数。表为$\operatorname{card}A$。

可以证明这样给出的基数定义是符合上述约定的。

定理6.14 （1）对任何集合A和B

$$\operatorname{card}A=\operatorname{card}B \text{ iff } A\approx B$$

（2）对一个有限集A，$\operatorname{card}A$是唯一等数于A的一个自然数。

证明

（1）证⇒：由于$A\approx\operatorname{card}A$，$B\approx\operatorname{card}B$，今若

$$\operatorname{card}A=\operatorname{card}B$$

则从等数的可传性，知道有$A\approx B$

证⇐：若$A\approx B$，则A和B等数于同一序数，而且等数的最小序数是唯一的，故

$$\operatorname{card}A=\operatorname{card}B$$

（2）若A有限，应有唯一的n，使$A\approx n$，而且自然数本身是一序数，故$\operatorname{card}A=n$，同时A不会再等数于较小于n的自然数

证毕

习惯上常用希伯莱字母的第一个字母"阿利夫"$\aleph$表出

$$\operatorname{card}\omega=\aleph_0$$

然后用$\aleph$的不同下附标表示"势"高于ω的各个集合的基数。

定义6.13 基数κ和基数λ相加定义为：设K，L是各为基数κ和λ的任何两个非交集合，则

$$\kappa+\lambda=\operatorname{card}(K\cup L)$$

例如：

（1）$n+\aleph_0=\aleph_0$

（2）$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$

定义6.14 基数κ和基数λ相乘定义为：设K，L是基数各为κ，λ的集合，则

$$\kappa\cdot\lambda=\operatorname{card}(K\times L)$$

例如：

（1）$\underset{\sim}{2}\cdot\kappa=\mathrm{card}(\underset{\sim}{2}\times K)=\mathrm{card}[(\{0\}\times K)\cup(\{1\}\times K)]=\kappa+\kappa$

（2）$n\cdot\aleph_0=\aleph_0$

（3）$\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$

定义6.15 若K，L是基数为κ，λ的二集合，定义基数κ，λ的指数运算为

$$\kappa^{\lambda}=\mathrm{card}(K^L)$$

其中K^L是所有从L到K的函数的集合。

例如：

（1）由于$K^{\phi}=\{\phi\}$，$\phi^L=\phi$，故

$$x^0=1,\ 0^{\lambda}=0$$

特别是有　$0^0=1$

（2）从　$2^A\approx\mathscr{P}A$，得知　$2^{\mathrm{card}A}=\mathrm{card}\mathscr{P}A$。

第七章　选 择 公 理

§7.1　无 穷 集 合

上一章通过超限递归定理引出序数集合和基数集合的目的，就是要把自然数的排序个数和容量大小推广到一般集合，从而把有限集合和无穷集合统一起来研究。那么，有限集合和无穷集合又有什么本质上的区别呢？这是我们值得进一步分析的问题。

定义7.1　V 集合是有限的 iff 有某自然数 $n\in\omega$，使

$$V \underset{1}{=} \{x\in\omega \mid x<n\}$$

所以：

（1）ϕ 是有限集合，因为 $\phi \underset{1}{=} \{x\in\omega \mid x<0\}$

（2）$\{-7,\ 8\frac{1}{2},\ 90\}$ 是有限集合，因为

$$\left\{-7,\ 8\frac{1}{2},\ 90\right\} \underset{1}{=} \{x\in\omega \mid x<3\}$$

定义7.2　V 集合是无穷的 iff V 不是有限集合

例如：

ω，$\underset{\sim}{Z}$，$\underset{\sim}{Q}$，$\underset{\sim}{R}$，ω^2，$\underset{\sim}{Z}^2$，$\underset{\sim}{Q}^2$，$\underset{\sim}{R}^2$，$\{x\in\underset{\sim}{Q} \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$\{x\in\underset{\sim}{R} \mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$\{0,\ 1\}^\omega$，$\omega^\omega$，$\omega^{\underset{\sim}{R}}$，$\mathscr{D}\omega$，$\mathscr{D}\underset{\sim}{R}$，$\mathscr{D}\mathscr{D}\omega$ 等等都是无穷集合。

要进一步分析无穷集合，必然要使用选择公理，凡是涉及到选择公理的定理，我们常标上 AC＝字母。

定理7.1　（AC）

一个无穷集合包含有一个可数的子集，即，若 V 是无穷集合，则 $\omega \underset{1}{\leqslant} V$。

证明

设V是无穷集合，因为V是非空的，V至少含有一元，选一个元是x_0，由于V是无穷，$V-\{x_0\}\neq\phi$，我们又可以从$V-\{x_0\}$中选出一元x_1设已选出x_0，x_1，$\cdots x_n$元，由于V是无穷的，$V-\{x_0, x_1, \cdots x_n\}\neq\phi$，就又可以从$V-\{x_0, x_1, \cdots x_n\}$中选得$x_{n+1}$元。

重复进行下去，就从V中产生了一个可数子集

$$\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$$

证毕

在上述定理的证明中，我们是用了“无穷多次的选取”来产生一个可数集合的，实际上，要做到这一点，应该是有一个定义在ω上的函数f，使对每一个$n\in\omega$，$f(n)\in A_n$，其中A_n就是V集合的一个子集。这种函数f就是一种“选择函数”，它的前题，应该肯定“选择公理”：

每一非空集合类有一个选择函数

我们再用选择公理证明进一步的定理

定理7.2 （AC）

若V是无穷的集合，则有V的一个真子集，它等数于V。

证明

设V是一个无穷集合，根据定理7.1（所以本定理也将依赖于选择公理）有V的一个子集

$$w=\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$$

它是可数的，从而$V-\{x_0\}$是V的一个真子集而且等数于V，因为可用有函数

$$g: V\to(V-\{x_0\})$$

它定义为 $g(x)=x$，若$x\notin\{x_0, x_1, x_2, \cdots\}$

$g(x_i)=x_{i+1}$，对所有$i\in\omega$

它就是从V到$V-\{x_0\}$的一个双射。

证毕

定理7.3 一个有限集合V不等数于它的一个真子集。

证明

现在对V的元个数做归纳证明。

如果V的元个数为0，则$V=\phi$，ϕ无一真子集，今设定理对至多n个元的所有集合已经证明是不等数它的真子集，且令V是一个有$n+1$个元的集合，设

$$V=\{a_1, \cdots a_n, a_{n+1}\}$$

若$W\subseteq V$，$W\neq V$，且$V\underset{1}{=}W$，则V有一元不在W中取它是a_{n+1}，现在有一双射$f:V\to W$，且令

$$f(a_{n+1})=a_k,\ \ a_k\in W$$

但是，f到W上的限制$f\restriction W$是从W到W的单射，W的f像$\{f(x)|x\in W\}$是W的一个子集，又归纳已知W无一真子集等数于W，所以

$$\{f(x)|x\in W\}=W$$

特别是，对某$a_j\in W$能有$a_k=f(a_j)$，矛盾

证毕

从定理7.2和定理7.3可和使用选择公理来分析无穷集合，就有性质：

V是无穷的集合 iff 它等数于它的一个真子集。所以，我们可以撇开选择公理的使用，即不从有限集合的定义来定义无穷集合，而是用真子集等数的方法定义无穷集合，这种刻划无穷集合的方法是“狄德金无穷”。

定义7.3 V集合是D.无穷（狄德金无穷）iff V有一个真子集等数于V。

这样，选择公理导出的无穷集合结果就可以用D.无穷表述为：

V是无穷的集合 iff V是D.无穷集合。

定理7.4 V集合是D.无穷 iff $\omega\underset{1}{\leqslant}V$

证明

证$\Leftarrow$：设$f:\omega\underset{1}{\leqslant}V$，定义$W:=V-\{f(0)\}$，则

$$W \subseteq V,\ W \neq V,\ \text{且} V \underset{1}{=} W,\ \text{因为只要取}$$

$g: V \to W$ 定义是

$$g(f(i)) = f(i+1)$$

$$g(x) = x,\ \text{若}\ x \neq f(i),\ i \in \omega$$

则 g 就是从 V 到它真子集 W 的一个双射。

证⇒：设 $W \subseteq V$，$W \neq V$，$a \in V$，$a \notin W$，且

$$f: V \underset{1}{=} W$$

则定义 $g: \omega \to V$ 为 $g(0) = a$

$$g(k) = \underbrace{f(\cdots(f(a)))}_{k\text{ 次复合}}$$

或者说 $g(0) := a$

$g(k+1) := f(g(k))$

证明 g 是一个单射的函数。用归纳法证之。

当 $i = 0$，且 $j \neq 0$ 时 $g(0) = a \notin W$，$g(j) \in W$

$$\text{故}\quad g(0) \neq g(j)$$

当 $i = k$ 成立，在 $i = k+1$，且 $j \neq k+1$ 时，证

$$g(k+1) \neq g(j)$$

再对 j 归纳证明：

$j = 0$ 时 $g(0) = a \notin W$，且 $g(k+1) \in W$

$$\text{故}\quad g(k+1) \neq g(0)$$

当 $j = l$ 成立，$j = l+1$ 时，由于 $j \neq k+1$，故 $k \neq l$

从归纳得 $g(k) \neq g(l)$

由于 f 是单射，故 $f(g(k)) \neq f(g(l))$，即

$$g(k+1) \neq g(l+1)\ \text{或}\ g(i) \neq g(j)$$

证毕

表面上看来，定理 7.4 的论证似乎与已得结论重复，实际上，现在证明中并未用上述的选择公理，所以它是给出 D. 无穷的一种清晰的等价意义。并且非选择公理的无穷集合论证又可归结为：

V 是 D. 无穷集合 iff V 含有一个可数子集。

总的来说，无论是否采用选择公理，无穷集合的研究都要涉及可数子集，所以深入探讨可数集合是有必要的。

定理7.5 一个可数集合的子集是有限集合或可数集合，即一个可数集合的子集必是可计集合。

证明

设 A 是通过 f 可数的，即，$f:\omega \underset{1}{=} A$。

若 A 的子集 B 是有限的，定理已得证明，故设 B 不是有限的。定义一个可数的函数 g 是 $g(0)=f(k)$，其中 k 是使 $f(k)\in B$ 的最小数，设 $g(0)$，$\cdots g(n)$ 给出，令 $g(n+1)=f(l)$，其中 l 是使

$$f(l)\in B-\{g(0),\ g(1),\ \cdots g(n)\}$$

的最小元。

注意到 $\mathrm{dom}(g)=\omega$，所以 g 是单射的，故

$$g:\omega \underset{1}{=} B$$

B 就是可数的

证毕

定理7.6 整数集合 $\underset{\sim}{Z}$ 是可数的。

证明

取可数的函数 $h:\omega\to\underset{\sim}{Z}$ 是

$$h(x)=y+1，若\ x=2y+1$$

$$h(x)=-y，若\ x=2y$$

它就是一个从 ω 到 $\underset{\sim}{Z}$ 的双射。

定理7.7 若 $f:\omega\to A$ 是满射，则 A 是可计的。

证明

设 $f:\omega\to A$ 是满射的，用它定义 g 是

$$g(0)=f(0)$$

$g(n+1)=f(k)$，若 $A\neq\{g(0),\ \cdots g(n)\}$，其中 k 是使 $f(k)\notin\{g(0),\ \cdots g(n)\}$ 的最小数，注意到 g 的定义域

或是有限集合$\{0, 1, 2, \cdots m\}$，或就是ω，所以g显然是一个双射，故A是有限集合或可数集合

证毕

定理7.8 若A和B二集合是可数的集合，且C集合是有限的，则$A\cup B$和$A\cup C$都是可数的集合。

证明

（1）设$f:\omega \underset{1}{=} A$，$g:\omega \underset{1}{=} B$，定义$h:\omega\to A\cup B$是

$$\left.\begin{aligned} h(2n) &= f(n), \\ h(2n+1) &= g(n), \end{aligned}\right\} \quad n\in\omega$$

则h是从ω到$A\cup B$的一个满射，从定理7.7知$A\cup B$是可数的。

（2）设$f:\omega \underset{1}{=} A$，且$g:\{0, 1, \cdots n\} \underset{1}{=} C$，定义$h:\omega\to A\cup C$是

$$h(i) = g(i)，当 i\leqslant n$$

$$h(i+1) = f(i) \quad i\in\omega$$

则h是从ω到$A\cup C$的一个满射，从定理7.7，知$A\cup C$是可数的。若$C=\phi$，则更是显然的

证毕

定理7.9 若A是D.无穷集合，且B是可计的集合，则$A\cup B \underset{1}{=} A$。

证明

设A是D.无穷集合，且B是可计集合，由于

$$A\text{是}D.\text{无穷集}\ iff\ A\text{含有一可数子集},$$

故A可写成

$$A = A_0\cup A_1，A_0\cap A_1 = \phi，A_0\text{是可数的。}$$

从定理7.8可知 $A_0\cup B \underset{1}{=} A_0$ 从而

$A\cup B = (A_0\cup B)\cup A_1$ 故$A\cup B \underset{1}{=} A_0\cup A_1$，所以

$$A \cup B \underset{1}{=} A$$

证毕

定理7.10 (AC),

若 A 是无穷集合且 B 是可计集合，则

$$A \cup B \underset{1}{=} A$$

证明

从定理 7.2 及定理 7.9 而得

证毕

这是深究了可数集合性质（定理 7.5～定理 7.9）以后，补充了选择公理论证的无穷集合性质。我们还可以进一步阐明可数集合的一些性质。

定理7.11 （1）$\omega^2 \underset{1}{=} \omega$

（2）二可数集合的笛氏积是一可数集合

证明

（1）在图 7.1 中，从下到上按箭头移动，然后向右进一步，再沿箭头向上移动。如此得到从 ω^2 到 ω 的一个双射：

$\langle 0, 0\rangle \to 0$，$\langle 1, 0\rangle \to 1$，$\langle 0, 1\rangle \to 2$，$\langle 2, 0\rangle \to 3$，…

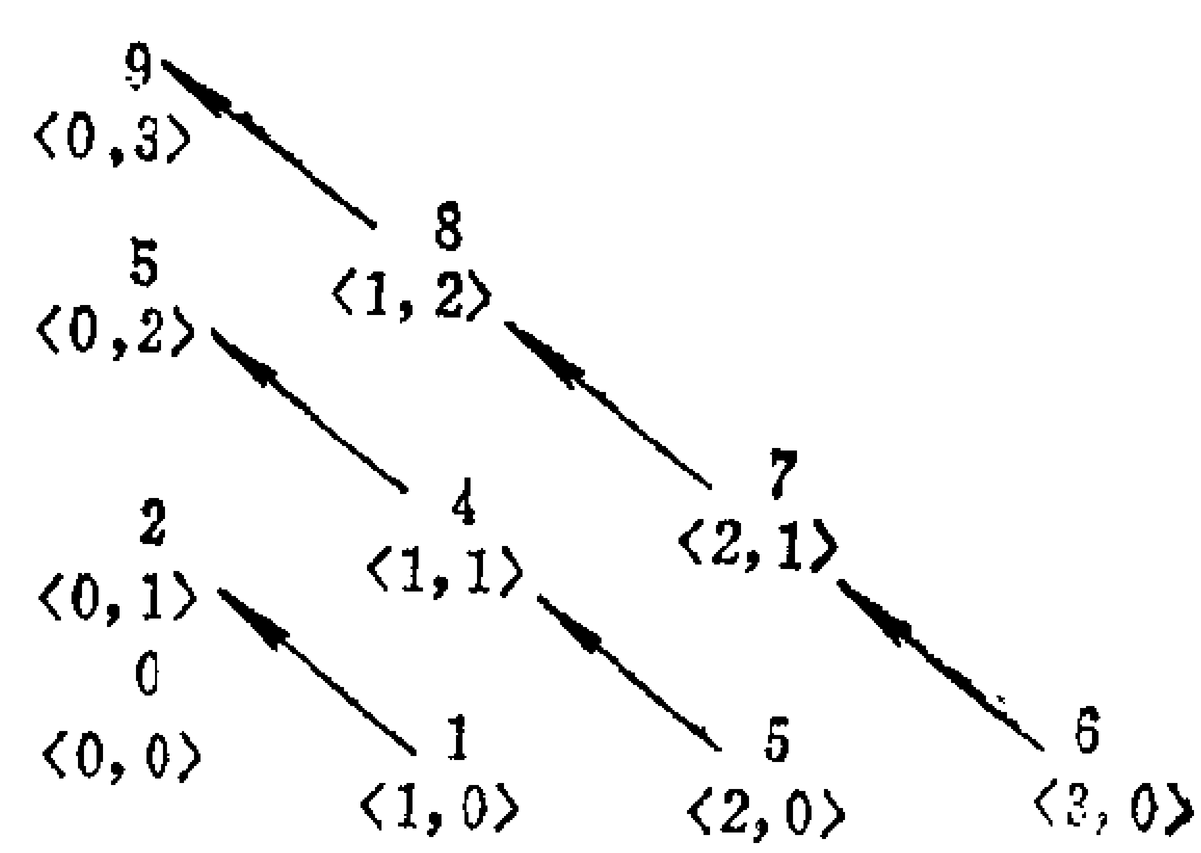

图 7.1

点 $\langle m, n\rangle$ 落在第 $(m+n+1)$ 条反对角线上（从第 0 条开始计起），所以，在 $\langle m, n\rangle$ 之前已有 $m+n$ 条完全的反对角线，或者说，已有

$$1+2+\cdots+(m+n)=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)$$

个点，再加上 $\langle m, n\rangle$ 在它本身反对角线上位置之前有 n 个点，故从第 0 点计起，$\langle m, n\rangle$ 是第 $\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n$

个点，因此，定义

$$J(\langle m, n\rangle):=\frac{1}{2}(m+n)(m+n+1)+n$$

从 J 的构造，得知 J 就是从 ω^2 到 ω 的一个双射，故

$$\omega^2 \underset{1}{=} \omega$$

（2）令 $f:\omega \underset{1}{=} A, g:\omega \underset{1}{=} B$，则定义 $F:\omega \to A \times B$ 是 $F(x) = \langle f(K(x)), g(L(x))\rangle$，它是一个双射，从而

$$F:\omega \underset{1}{=} A \times B$$

因为，若用 $J(m, n\rangle$ 表示 $J(\langle m, n\rangle)$，则

$$\forall z \exists ! x \exists ! y [J(x, y)=z]$$

所以有函数 K，L 使 $J(K(z), L(z))=z$

证毕

这里的 J 称为从 ω^2 到 ω 的一种编码，K，L 称为 J 的反编码。

定理7.12 （1）设有可数多个可数集 V_i（$i \in \omega$），且给定函数 $f_i:\omega \underset{1}{=} V_i$，则 $\bigcup_{i \in \omega} V_i$ 是可数的集合。

（2）（AC）可数多个可数集的并是可数的集合。

证明

（1）定义 $F:\omega \to \bigcup_{i \in \omega} V_i$ 是 $F(n)=f_{K(n)}(L(n))$，则 F 是从 ω 到 $\bigcup_{i \in \omega} V_i$ 的一个满射，因为，若 $a \in V_i$ 则 $a=f_i(j)$，故 $a = F(J(i, j))$ 从定理 7.9，知道 $\bigcup_{i \in \omega} V_i$ 是有限集合或可数集合。而 $V_0 \subsetneq \bigcup_{i \in \omega} V_i$ 所以，$\bigcup_{i \in \omega} V_i$ 是可数的集合

（2）设 $\{V_i | i \in \omega\}$ 是可数集合类，从选择公理有

$$f_i:\omega \underset{1}{=} V_i$$

故从（1）得知 $\bigcup_{i \in \omega} V_i$ 是可数集合

证毕

设A是一个集合，k是一个自然数，注意到

$$A^k=\{\langle a_1,\ a_2,\ \cdots a_k\rangle|a_1\in A\wedge\cdots\wedge a_k\in A\}$$

是所有k长的A的元的有限序组为元的集合，特别是

$$A^0=A^\phi=\{\phi\}$$

如果A是可数的，则A^k是可数的集合，所以，对每一个$k>0$，可以构成一个双射$f_k: \omega\underset{1}{=}A^k$，且若$A$是可数集合时，$\bigcup\limits_{k\in\omega}A^k$也是可数的，

定理7.13 一个可数集的所有有限子集的集合是可数集合。

证明

令$A^*=\bigcup\limits_{k\in\omega}A^k$，且$\mathscr{P}_\omega(A)=\{B\subseteq A|B$ 是 有 限 集$\}$，则$f: A^*\to\mathscr{P}_\omega(A)$ 定义为

$$f(\langle a_1,\ a_2,\ \cdots a_k\rangle)=\{a_1,\ a_2,\ \cdots a_k\}$$

它就是满射的，因为A^*是可数的，当然有从ω到$\mathscr{P}_\omega(A)$的一个满射，而$\mathscr{P}_\omega(A)$又不是有限集，故是可数集合

证毕

定理7.14 $\underset{\sim}{Q}$是可数集合

证明

注意到 $\underset{\sim}{Q}\underset{1}{=}\{\langle x,\ y\rangle|x\in\underset{\sim}{Z}\wedge y\in(\omega-\{0\})\wedge gcd(x,\ y)=1\}$其中$gcd(x,\ y)$是$x$，$y$的最大公因子。故

$\underset{\sim}{Q}\underset{1}{\leqslant}\underset{\sim}{Z}\times\omega$，所以$\underset{\sim}{Q}\underset{1}{\leqslant}\omega$，而另一方面，$\omega\underset{1}{\leqslant}\underset{\sim}{Q}$所以，从$C$，$S$，$B$，定理，知道$\underset{\sim}{Q}\underset{1}{=}\omega$。

证毕

定理7.15 $[a,\ b]\underset{1}{=}(a,\ b]\underset{1}{=}[a,\ b)\underset{1}{=}(a,\ b)$且$(a,\ b)\underset{1}{=}(c,\ d)$

证明

前一个问题，用C，S，B定理即可证明，或者仿效定理7.4

的证法，也可以直接得到证明。至于后一个问题，首先将 a ， c 变换为零

$$f_1:(a,\ b)\underset{1}{=}(0,\ b-a),\ f_1(x)=x-a$$

$$f_2:(c,\ d)\underset{1}{=}(0,\ d-c),\ f_2(x)=x-c$$

然后稍扩张（ 0 ， $b-a$ ）

$$f_3:(0,\ b-a)\underset{1}{=}(0,\ d-c),\ f_3(x)=\frac{d-c}{b-a}x$$

则 $f_2^{-1}\circ f_3\circ f_1:(a,\ b)\underset{1}{=}(c,\ d)$

证毕

定理7.16 $\underset{\sim}{R}\underset{1}{=}\{0,\ 1\}^{\omega}$

证明

首先，$f:(0,\ 1)\to R$，定义 $f(x)=tan\frac{\pi(2x-1)}{2}$，可知 $\underset{\sim}{R}\underset{1}{=}(0,\ 1)$ 所以 $\underset{\sim}{R}\underset{1}{=}(a,\ b)$。

其次　证（ 0 ， 1 ）$\underset{1}{=}\{0,\ 1\}^{\omega}$。

设 A 是（ 0 ， 1 ）中的无理数集合，B 是（ 0 ， 1 ）中的有理数集合，显然，A 是 D. 无穷，所以

$$A\underset{1}{=}A\cup B=(0,\ 1)$$

现在（Ⅰ）$f:A\underset{1}{\leqslant}\{0,\ 1\}^{\omega}$，其中 f 指定由 0 ， 1 组成的二进位序列的每一无理数，所以 f 是一个单射，

（Ⅱ）$g:\{0,\ 1\}^{\omega}\underset{1}{\leqslant}A$，$g$ 指定任何序列 a_0，a_1，$a_2\cdots$ 的二进展开

$$0,\ a_0\,0\,a_1\,0\,1a_2\,0\,11a_3\,0\,111a_4\,0\,1111\cdots$$

从 C、S、B、定理，知 $A\underset{1}{=}\{0,\ 1\}^{\omega}$，故

$$\underset{\sim}{R}\underset{1}{=}\{0,\ 1\}^{\omega}$$

证毕

这个定理的意义，就是把 $\underset{\sim}{R}$ 的拓扑性质表出它的基数意义，习惯的称 $\underset{\sim}{R}$ 的这种性质是“连续统”，所以，有时也直接称 $\{0, 1\}^\omega$ 是连续统。

我们在以前已经证明了 $\mathscr{D}_\omega \underset{1}{=} \{0, 1\}^\omega$，所以现在就有

$$\underset{\sim}{R} \underset{1}{=} \mathscr{D}_\omega$$

康托在 1878 年猜想 $\underset{\sim}{R}$ 的每一个无穷子集或是可数的，或是等数于连续统的，这种猜想就是所谓“连续统假设”，形式的来说，就是 若 $\omega \underset{1}{\leqslant} A \underset{1}{\leqslant} R$，则 $A \underset{1}{=} \omega$ 或 $A \underset{1}{=} \underset{\sim}{R}$。

一百年来，连续统假设经受了所有要澄清它的企图，根据哥德尔 1938 年的研究和柯亨 1963 年的研究的结果，我们知道了连续统假设是与集合论的基本公理无关的。在集合论中，连续统假设是否正确也还未得到解决，1947年哥德尔在他的“什么是康托的连续统问题？”一文中，似乎倾向于否定。

§7.2　选择函数与选择公理

我们知道，讨论无穷集合时，选择公理是一种重要论述的起点，另外，超限归纳定理和超限递归定理所设定的良序集合条件，它要由良序定理给出，良序定理是选择公理的一种等价定理。

首先，选择公理必须肯定的原因是，我们经常在论证无穷集合时，要使用选择函数。

选择函数有两种等价的定义：

〔1〕 一个函数 f 称为关于集合 A 的选择函数，若

$\operatorname{dom} f = A - \{\phi\}$，且对所有 $a \in \operatorname{dom} f$ 有

$$f(a) \in a$$

〔2〕 一个函数 F 称为关于集合 A 的选择函数，若 F 的定义域是 A 的非空子集的集合，且对每一非空 $B \subseteq A$ 有

$$F(B) \in B$$

从〔1〕可以给出选择公理的第一个形式

$AC_{(1)}$：每一个集合有一个选择函数。

所以，它给出〔2〕定义下的形式

$AC_{(1)'}$：每一个幂集合有一个选择函数。

如果这个幂集合是关于A集合的$\mathscr{P}A$，它就给出〔2〕的关于选择函数的定义。反过来说，非空的$B\subseteq A$，就是$B\in\mathscr{P}A$，若写$C=\mathscr{P}A$，则$\mathrm{dom}\,F=C-\{\phi\}$，且对所有$B\in\mathrm{dom}\,F$有$F(B)\in B$，这就是〔1〕的定义形式。

选择公理的第二种形式是关于"关系"和"函数"之间的论述形式：

$AC_{(2)}$：每一个二元关系含有一个具同一定义域的函数，即，对任一关系R，有一个函数$F\subseteq R$，使

$$\mathrm{dom}\,F=\mathrm{dom}\,R$$

〈$AC_{(1)}\Rightarrow AC_{(2)}$的证明〉

设$R\subseteq A\times A$，从（1）$'$，令G是关于$\mathscr{P}A$的一个选择函数，定义

$$F(x):=G(\{y\in A\mid x\,R\,y\}),$$

则 $$F(x)\in\{y\in A\mid x\,R\,y\},$$

也就是 $$\langle x,\ F(x)\rangle\in R，\text{故}F\subseteq R，$$

证毕

选择公理的第三种形式是关于无穷笛氏积和单射函数的两种：

$AC_{(3)}$（乘法公理）：非空集合的笛氏积非空，即，

若H是一函数，定义域是I，如果

$$(\forall i\in I)H(i)\neq\phi$$

则有一函数f，定义域是I，使

$$(\forall i\in I)f(i)\in H(i)$$

〈$AC_{(2)}\Rightarrow AC_{(3)}$的证明〉

设 $R=\{\langle i,\ x\rangle\mid i\in I\wedge x\in H(i)\}$

则$AC_{(2)}$指出有函数$F\subseteq R$使$\mathrm{dom}\,F=\mathrm{dom}\,R=I$

所以有　　　$\langle i,\ F(i)\rangle \in F \subseteq R,\quad i \in I$

也就是　　　$F(i) \in H(i),\quad i \in I$

证毕

$AC_{(3)}'$ 每一个函数有具同一值域的单射。

〈$AC_{(2)} \Rightarrow AC_{(3)}'$ 的证明〉

若 f 是函数，则 f 是关系，从 $AC_{(2)}$ 知道有函数 $F \subseteq \breve{f}$ 使 $\mathrm{dom}\,F = \mathrm{dom}\,f$，又从 F 的一一性，知道 F 是单射，且是函数，并且 $\mathrm{ran}\,F = \mathrm{ran}\,f$。

证毕

选择公理的第四种形式是关于“划分”方面的。

$AC_{(4)}$ $\mathscr{A}$ 是一个集合（1）$\mathscr{A}$ 的每一元非空，(2) $\mathscr{A}$ 的二相异元非交，则有 C 集合恰含 $\mathscr{A}$ 的每一元中的一元，即　$B \in \mathscr{A} \Rightarrow C \cap B = \{x\}$。

或者说：$\mathscr{A}$ 集合的每一个划分有一个表示集合。

〈$AC_{(3)} \Rightarrow AC_{(4)}$ 的证明〉

设 H 是 $\mathscr{A}$ 上的恒等函数，则

$$(\forall B \in \mathscr{A})\, H(B) = B \neq \phi$$

则从 $AC_{(3)}$ 知道有函数 $f(B) \in H(B) = B$，从而有

$$C = \mathrm{ran}(f),\quad B \cap C = \{f(B)\}$$

〈$AC_{(3)}' \Rightarrow AC_{(4)}$ 的证明〉

设 P 是一个划分，即非空的 A，$B \in P$ 时，$A \neq B$ 且 $A \cap B = \phi$。

定义 $f: \bigcup P \to P$，则从 $\bigcup P$ 得到划分 P，然后使

$$f(a) := \bigcup\{A \in P \mid a \in A\}$$

则 $a \in f(a) \in P$，从这个非单射的 f 中，由 $AC_{(3)}'$ 知道有单射 $h \subseteq f$ 使 $\mathrm{ran}\,h = \mathrm{ran}\,f = P$，则 $\mathrm{dom}\,h$ 就是划分的表示集合。

证毕

最后，要说明 $AC_{(1)}AC_{(1)}'$，$AC_{(2)}$，$AC_{(3)}$，$AC_{(3)}'$，$AC_{(4)}$ 都是选择公理等价形式，必须给出 $AC_{(4)} \Rightarrow AC_{(1)}$ 的证明。

〈$AC_{(4)} \Rightarrow AC_{(1)}$ 的证明〉

对集合 A 定义

$$\mathscr{A}=\{\{B\}\times B\mid\phi\neq B\subseteq A\}$$

它使（Ⅰ）把非空的各个B集合转为非空相异集合，因为，若

$$\langle x,\ y\rangle\in(\{B\}\times B)\cap(\{B'\}\times B'),\text{则 } x=B=B'$$

所以$\mathscr{A}$中任何二元是相异的；（Ⅱ）从$AC_{(4)}$得知有$\mathscr{A}$的表示集合C使

$$C\cap(\{B\}\times B)=\{\langle B,\ x\rangle\}\text{对某 } x\in B$$

如果不是对A的所有子集选C，只要在C中改用

$$F=C\cap(\bigcup\mathscr{A})$$

则F就是A的一个选择函数：$F(B)=x\in B$，$B\subseteq A$。这个手续$AC_{(1)}$与$AC_{(2)}$的区别。

证毕

关于选择公理，我们还有另外二种等价定理组，它们都涉及到著名的楚恩（M. Zorn）引理和良序定理，（见图7.2）它们的论证过程是：

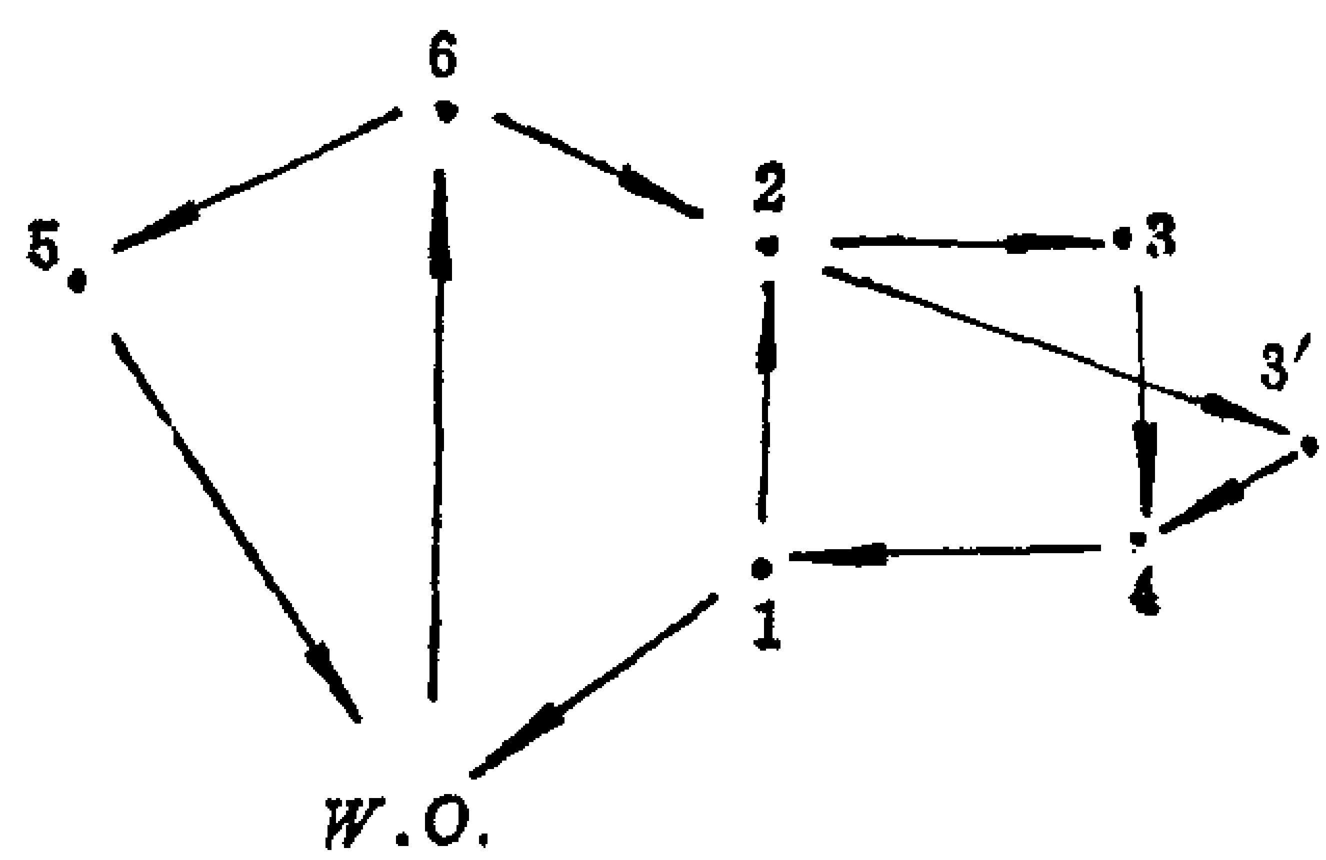

图 7.2

楚恩引理$\Rightarrow AC_{(2)}\Rightarrow AC_{(3)}\Rightarrow AC_{(4)}\Rightarrow AC_{(1)}\Rightarrow$良序定理

$\Rightarrow$楚恩引理。

楚恩引理$\Rightarrow$基数相容性定理$\Rightarrow$良序定理$\Rightarrow$楚恩引理。

在这些证明中，从$AC_{(1)}$证明良序定理和从基数相容性定理都要用到著名的哈托格斯（F. Hartogs）定理，所以，我们把它放在下一节论述。并且，为了方便起见，我们将基数相容性定理表为$AC_{(5)}$，楚恩引理表为$AC_{(6)}$，良序定理表为W. O。

现在我们来论证$AC_{(6)}\Rightarrow AC_{(2)}$和$AC_{(6)}\Rightarrow AC_{(5)}$。

关于楚恩引理，它有两种表述法：

$AC_{(6)}'$：若在偏序构造$\langle A,\ R\rangle$中每一个链，有一个上界，则A有一个极大元。

所谓偏序中的链，是指：若$B\subseteq A$使$R\cap(B\times B)$是B的一个线序，则称$B\subseteq A$是一个相对于R的链。再从偏序构造的表示定

理，$\langle X, <\rangle \simeq \langle Y, \subseteq\rangle$，所以，可将楚恩引理表述为

$AC_{(6)}$：设$\mathscr{A}$是一个集合，若对每一个链$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}$（即在$\mathscr{B}$中任何二元$C$，$D$，将是$C\subseteq D$或$D\subseteq C$）有

$$\bigcup\mathscr{B}\in\mathscr{A}$$

则$\mathscr{A}$含有一个极大元M，即M不是$\mathscr{A}$中任一其它集合的一个子集。楚恩引理的特征主要表现在“极大元”，所以又称引理是楚恩极大原理。

〈$AC_{(6)}\Rightarrow AC_{(2)}$ 的证明〉

对于给定的R关系，定义

$$\mathscr{A}=\{f\subseteq R \mid f\text{ 是一个函数}\}$$

讨论$\mathscr{A}$的任何一个链$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}$，由于$\mathscr{B}$的每一个元是$R$的一个子集，故$\bigcup\mathscr{B}$也是$R$的一个子集。

现在，若$\langle x, y\rangle$，$\langle x, z\rangle$属于$\bigcup\mathscr{B}$，则

$$\langle x, y\rangle\in G\in\mathscr{B},\ \langle x, z\rangle\in H\in\mathscr{B}$$

而且$G\subseteq H$或者$H\subseteq G$。二者都说明$\langle x, y\rangle$，$\langle x, z\rangle$属于单一一个函数，故$y=z$，也就是$\bigcup\mathscr{B}$也在$\mathscr{A}$中，即

$$\bigcup\mathscr{B}\in\mathscr{A}$$

从楚恩引理（$AC_{(6)}$）知道$\mathscr{A}$中应有一个极大函数F，$F\subseteq R$，今证$\operatorname{dom}F=\operatorname{dom}R$。

否则，取$x\in(\operatorname{dom}R-\operatorname{dom}F)$，则有某$y$使$xRy$，从而定义

$$F'=F\cup\{\langle x, y\rangle\},\ F'\in\mathscr{A}$$

这就与F的极大性矛盾，故

$$\operatorname{dom}F=\operatorname{dom}R$$

证毕

$AC_{(5)}$（基数相容性定理）

对于任何C，D集合，或者$C\underset{1}{\leqslant}D$或是$D\underset{1}{\leqslant}C$。

〈$AC_{(6)}\Rightarrow AC_{(5)}$ 的证明〉

定义 $\mathscr{A}=\{f\mid(f\text{ 是一一函数})\wedge(\operatorname{dom}f\subseteq C)\wedge(\operatorname{ran}f\subseteq$

$D)\}$究其任何一个链$\mathscr{B}\subseteq\mathscr{A}$，则$\mathscr{B}$的元是$C\times D$的一个子集，$\bigcup\mathscr{B}$也是$C\times D$的一个子集。若$\langle x,\ z\rangle$，$\langle y,\ z\rangle$属于$\bigcup\mathscr{B}$，则从

$$\langle x,\ z\rangle\in G\in\mathscr{B},\ \langle y,\ z\rangle\in H\in\mathscr{B}$$

且$G\subseteq H$或$H\subseteq G$，二者都说明$x=y$，故$\bigcup\mathscr{B}$是一一函数的集合，即$\bigcup\mathscr{B}\in\mathscr{A}$。

从楚恩引理，知道有一个极大的一一函数$\hat{f}\in\mathscr{A}$，证其$\mathrm{dom}\,\hat{f}=C$或$\mathrm{ram}\,\hat{f}=D$，前者就是$C\underset{1}{\leqslant}D$后者由于（$\hat{f}$）将是从$D$到$C$的一一函数，故$D\underset{1}{\leqslant}C$。

若二者都不成立，则有

$$C\in(C-\mathrm{dom}\,\hat{f}),\quad d\in(D-\mathrm{ran}\,\hat{f})$$

就可令 $$f'=\hat{f}\cup\{\langle c,\ d\rangle\},$$

它在$\mathscr{A}$中，这与$\hat{f}$的极大性矛盾。

证毕

§7.3 良序定理

集合理论关于无穷集合的讨论集中反映在良序性，如果我们能证明了“任何一个集合都有一个良序”，所有在良序意义上的讨论，诸如超限归纳定理和超限递归定理等等重要的集合理论才有意义。

“任何一个集合都有一个良序”这个良序定理是选择公理的一种等价定理。我们将分别用$AC_{(1)}$，$AC_{(5)}$来对它加以证明，最后用良序定理来证明楚恩引理，从而就完成了选择公理的论证。

为此，我们首先要从一些定理的论证导出重要的哈托格斯定理。

定理7.17 对于任何二良序构造，它们或是同构，或是一个同构于另一个的一段，也就是：设$<_A$，$<_B$分别是A，B集合上的良序，则下列三者必有其一，

$$\langle A,\ <_A\rangle\cong\langle B,\ <_B\rangle$$

$$\langle A,\ <_A\rangle\cong\langle \mathrm{seg}\,b,\ <_B^0\rangle,\quad b\in B$$

$$\langle \text{seg}\, a,\ <_A^0\rangle \cong \langle B,\ <_B\rangle,\quad a\in A$$

其中 $<_A^0$ 表示 $<_A\cap(\text{seg}\, a\times \text{seg}\, a)$

$<_B^0$ 表示 $<_B\cap(\text{seg}\, b\times \text{seg}\, b)$

证明

从二集合 A，B 的最小元开始配对，引用超限递归定理，令 e 是某既非 A 又非 B 中的元，应有唯一函数

$$F: A\to B\cup\{e\}$$

使对每 $t\in A$ 有

$$F(t)=\begin{cases}(B-F[\![\text{seg}\, t]\!])\text{的最小元，若有其元}\\ e, \qquad \text{若} B-F[\![\text{seg}\, t]\!]\text{是空}\end{cases}$$

（1） $e\in \text{ran}F$ 的情况

令 $a\in A$ 使 $F(a)=e$ 的最小元，可证 $F\restriction \text{seg}a$ 是从 $\langle \text{seg}\, a,\ <_A^0\rangle$ 到 $\langle B,\ <_B\rangle$ 的一个同构映射。

设 $F^0=F\restriction \text{seg}\, a$，显然，$F^0: \text{seg}\, a\to B$，且其值域是整个 B，因为 $B-F[\![\text{seg}\, a]\!]$ 是空的，故

$$\begin{aligned}x\leqslant_A y<_A a &\Rightarrow F[\![\text{seg}\, x]\!]\subseteq F[\![\text{seg}\, y]\!]\\ &\Rightarrow (B-F[\![\text{seg}\, y]\!])\subseteq (B-F[\![\text{seg}\, x]\!])\\ &\Rightarrow F(x)\leqslant_B F(y)\end{aligned}$$

再若 $x<_A y<_A a$，则 $F(x)\neq F(y)$，因为 $F(x)\in F[\![\text{seg}\, y]\!]$，而从 F 的构造，可知 $F(y)\notin F[\![\text{seg}\, y]\!]$，所以，$F^0$ 是一一的，事实上

$$x<_A y<_A a\Rightarrow F(x)<_B F(y)$$

所以，F^0 保持序关系，因为

$$\begin{aligned}F(x)<_B F(y) &\Rightarrow F(y)\nleqslant_B F(x)\\ &\Rightarrow y\nleqslant_A x\\ &\Rightarrow x<_A y\end{aligned}$$

所以 F^0 是一个同构映射。

（2） $\text{ran}F=B$ 的情况

这时，$F: A\to B$，和（1）一样，F 是一一的保序关系，故 F 是从 $\langle A,\ <_A\rangle$ 到 $\langle B,\ <_B\rangle$ 的一个同构映射。

（3）$\operatorname{ran} F$是B的一个真子集的情况。

令b是$B-\operatorname{ran} F$的最小元，则从$\operatorname{seg} b \subseteq \operatorname{ran} F$，且$F(x)$是$B-F[\![\operatorname{seg} x]\!]$中的最小元，所以，对任何$x$，不会有$b <_B F(x)$，所以，$b$属于$B-F[\![\operatorname{seg} x]\!]$，故$\operatorname{ran} F=\operatorname{seg} b$和（1）（2）一样，$F$是一一保序的，故$F$是从$\langle A, <_A\rangle$到$\langle \operatorname{seg} b, <_B^0\rangle$的一个同构映射。

证毕

定理7.18 设α是任一可传集，而且是用

$$\epsilon_\alpha=\{\langle x, y\rangle \in \alpha \times \alpha \mid x \in y\}$$

良序的，则α是一个序数，而且α就是$\langle \alpha, \epsilon_\alpha\rangle$的$\epsilon$像

证明

令E是从α满射到它的ϵ像的前述定义的函数，就可用超限归纳定理指出E正是α上的恒等函数。

对于$t \in \alpha$就有$x \in t \Longleftrightarrow x \epsilon_\alpha t$，因为$\alpha$是一个可传集。还有$\operatorname{seg} t=t$，而且$E(x)$总是从$\phi$开始，故若对所存在$\operatorname{seg} t$中的$x$有$E(x)=x$，则

$$E(t)=\{E(x) \mid x \epsilon_\alpha t\}=\{x \mid x \epsilon_\alpha t\}=\operatorname{seg} t=t$$

故E是在α上的恒等函数，$\langle \alpha, \epsilon_\alpha\rangle$的$\epsilon$像就是$\alpha$本身。

证毕

定理7.19 对于任何序数α，β，γ有

（1）α的任一元本身是一个序数。

（2）$\alpha \in \beta \in \gamma \Rightarrow \alpha \in \gamma$。

（3）$\alpha \notin \alpha$。

（4）恰有$\alpha \in \beta$，$\alpha=\beta$，$\beta \in \alpha$三者之一。

（5）序数的任何一个非空集合S有一个最小元μ，即对每$\alpha \in S$，有$\mu \subseteq \alpha$。

证明

（1）研究α中的任一元x，由于α是某良序构造$\langle A, <\rangle$的ϵ像，故$x=E(t)$，E就是A的常用的同构映射，t是A的某元，由于$<$在$\operatorname{seg} t$上的限制就是一个良序，$\langle \operatorname{seg} t, <\rangle$的$\epsilon$

像就是$E[\![\mathrm{seg}\ t]\!]$，它正是$E(t)$，也就是x，故x是一个序数。

（2）序数α是一个可传集。

（3）若$\alpha\in\alpha$，则有某t使$\alpha=E(t)$，从而$E(t)\in E(t)$这是不成立的。

（4）从（2）(3）知道在三种情况中至多有一个成立。又从定理7.18知道$\langle\alpha,\ \epsilon_\alpha\rangle$和$\langle\beta,\ \epsilon_\beta\rangle$或是同构，或一个同构其它的一段：(Ⅰ)若$\langle\alpha,\ \epsilon_\alpha\rangle\cong\langle\beta,\ \epsilon_\beta\rangle$，将有相同的$\epsilon$像，即$\alpha=\beta$；（Ⅱ）设$\langle\alpha,\ \epsilon_\alpha\rangle$同构于$\langle\mathrm{seg}\,\delta,\ \epsilon_\beta\rangle$，$\delta\in\beta$，则$\delta$是一个序数，$\mathrm{seg}\,\delta=\delta$，且$\epsilon_\beta=\epsilon_\delta$，故有

$$\langle\alpha,\ \epsilon_\alpha\rangle\cong\langle\delta,\ \epsilon_\delta\rangle$$

即$\alpha=\delta$，即$\alpha\in\beta$。(Ⅲ)$\langle\beta,\ \epsilon_\beta\rangle$同构于$\langle\mathrm{seg}\,\gamma,\ \epsilon_\alpha\rangle$，$\gamma\in\alpha$，同理证得$\beta\in\alpha$。

（5）研究任意的$\beta\in S$，若$\beta\cap S=\phi$，则β是S的最小元，因为，从三分律得知

$$\alpha\in S\Rightarrow\alpha\notin\beta\Rightarrow\beta\sqsubseteq\alpha$$

当$\beta\cap S\neq\phi$时，则有β的一个非空子集，所以$\beta\cap S$对于ϵ_β有一个最小元μ，μ就是S的最小元，因为任何一个$\alpha\in S$，

$$\alpha\notin\beta\Rightarrow\beta\sqsubseteq\alpha\Rightarrow\beta\subseteq\alpha\Rightarrow\mu\in\alpha$$

或是 $$\alpha\in\beta\Rightarrow\alpha\in\beta\cap S\Rightarrow\mu\sqsubseteq\alpha$$

二者都说明 $$\mu\sqsubseteq\alpha$$

证毕

定理7.20 （布拉利-福梯定理）（C. Burali-Forti）没有一个集合存在，使所有的序数属于它。

证明

从定理7.19知道，所有序数的类是一个为ϵ所良序的类。如果它是一个集合，则定理7.18得知它本身是一个序数，这个序数又不能是它自身的一元，故无一个集合包含所有序数。

证毕

定理7.21 （哈托格斯定理）

对于任何一个集合A，有一个不为A所支配的序数。

证明

构造集合

$$\alpha=\{\beta \mid \beta\text{是一个序且}\beta \underset{1}{\leqslant} A\}$$

证明α是一个集合，是一个可传集合，则α是序数，又从$\alpha\notin\alpha$，得$\neg\alpha\underset{1}{\leqslant}A$。

在A中子集的一切良序集合

$$W=\{\langle B,\ <\rangle \mid (B\subseteq A)\wedge(<\text{是在}B\text{上的一个良序})\}$$

由于$\langle B,\ <\rangle\in\mathscr{P}A\times\mathscr{P}(A\times A)$，故$W\subseteq\mathscr{P}A\times\mathscr{P}(A\times A)$，所以，$W$是一个集合。另外，$\alpha$中任一$\beta$应有

$$f:\beta\underset{1}{=}B\subseteq A$$

从而$\langle\beta,\ \in_\beta\rangle$同构于$\langle B,\ <\rangle$，此中

$$<=\{\langle f(x),\ f(y)\rangle \mid x\in y\in\beta\}$$

所以β是W中一元的$\in$像。

设$\mathscr{C}$是所有W中各元的$\in$像的组合，则置换公理指出$\mathscr{C}$是一个集合，而且$\mathscr{C}=\alpha$。

现在，若$\gamma\in\beta\in\alpha$，则$\gamma\subseteq\beta\underset{1}{\leqslant}A$，所以$\gamma\underset{1}{\leqslant}A$即$\gamma\in\alpha$，所以$\alpha$是可传集，从而$\alpha$是一个序数。

证毕

从定理 7.17 到定理 7.21，给出论证良序定理的预备定 理。

$AC_{W.O.}$（良序定理）

对于任何一个集合A，都有在A上的一个良序。

〈$AC_{(1)}\Rightarrow W.O.$的证明〉

从哈托格斯定理 7.21，可以知道有一个不为A所支配的序数α，另外，我们再选不属于A的一个e元。

逐次从α中取对应于$\mathrm{seg}\,\gamma=\gamma$的$A$中一元，直至耗尽$A$，则选$e$，从超限递归定理知道，关于

$$\gamma(F\restriction\mathrm{seg}\,\gamma,\ F(\gamma))$$

确有一个以α为定义域的函数F使之成立，它就是

$$F(\gamma)=\begin{cases} G(A-F[\![\gamma]\!]), & 若 A-F[\![\gamma]\!]\neq\phi \\ e, & 若 A-F[\![\gamma]\!]=\phi \end{cases}$$

其中G是关于A的选择函数。

设$\gamma\in\beta\in\alpha$，若$F(\gamma)$，$F(\beta)$都不等于e，则因$F(\gamma)\in F[\![\beta]\!]$而且$F(\beta)\notin F[\![\beta]\!]$，故

$$\{\delta\mid F(\delta)=e\}\subseteq\alpha$$

必有最小元δ_1，使$F(\delta_1)=e$，则$F[\![\delta_1]\!]=A$，给出

$$F:\delta_1\underset{1}{=}A$$

并且$\langle\delta_1,\ \in_{\delta_1}\rangle\cong\langle A,\ <\rangle$，其中

$$<=\{\langle F(\beta),\ F(\gamma)\rangle\mid\beta\in\gamma\in\delta\}$$

所以$\langle A,\ <\rangle$是一个良序构造。

证毕

上述各定理的证明，它们之间的关系可以列如图 7.3。

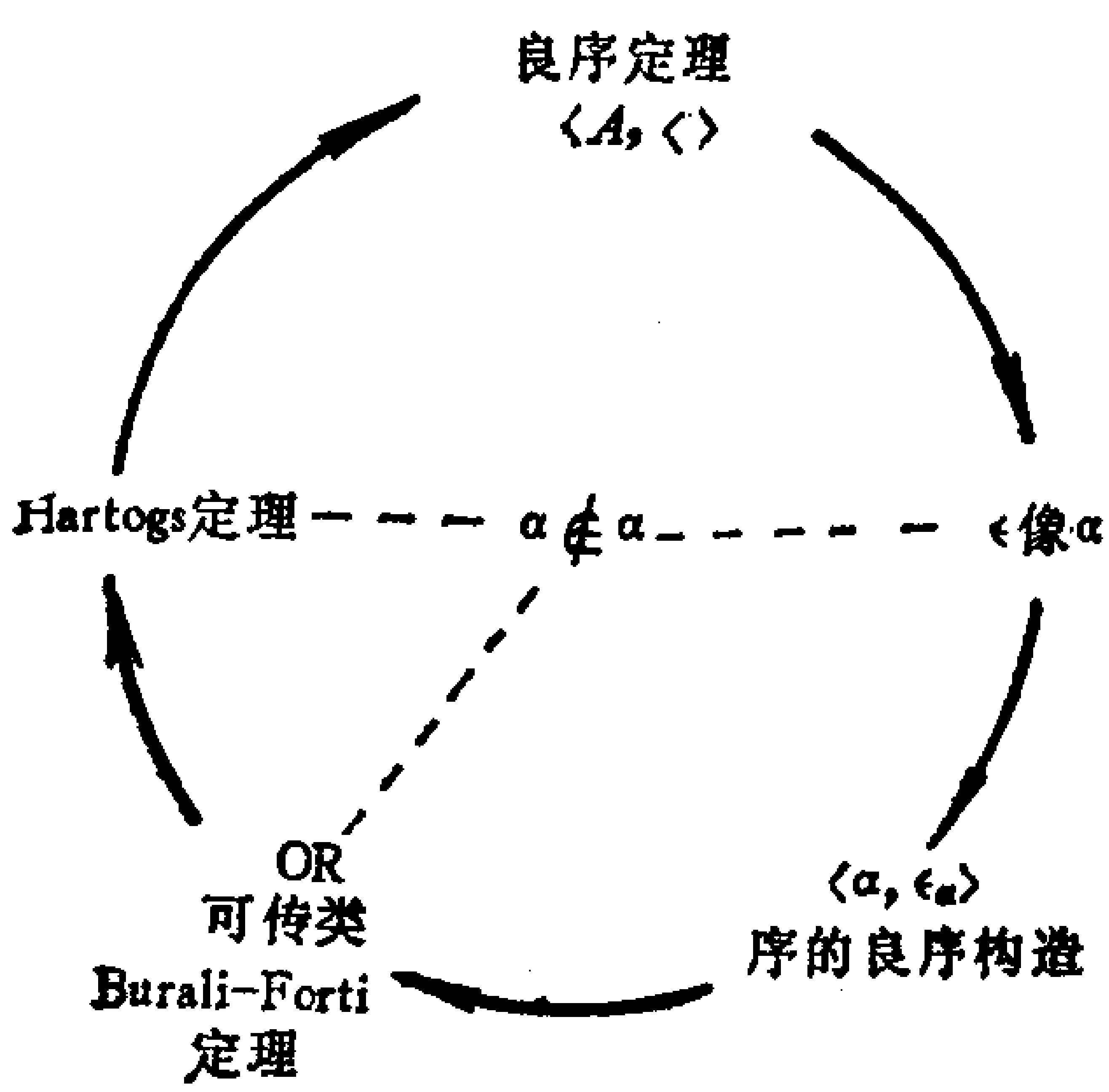

图 7.3

最后，我们证明了下述两种关系，就完全得到所有我们论述到的选择公理各个等价定理。

$\langle AC_{(5)}\Rightarrow W.O.$的证明$\rangle$

从哈托格斯定理 7.21 以及 $AC_{(5)}$，可以知道有序数α使

$$A\underset{1}{\leqslant}\alpha \quad 即 \quad f:A\underset{1}{\leqslant}\alpha$$

从而，对于A中的s，t可定义

$$s < t \Longleftrightarrow f(s) \in f(t)$$

由于后者是良序的，所以$<$是A上的良序。(从定理 5.5)

证毕

〈$W.O. \Rightarrow AC_{(6)}$的证明〉

研究任一个在链并下为闭的集合$\mathscr{A}$，从良序定理，$\mathscr{A}$有一个良序，我们要做成一个很大的链$\mathscr{C} \subseteq \mathscr{A}$，使$\bigcup \mathscr{C}$是一个最大元。办法是把$\mathscr{A}$中包含先前已置于$\mathscr{C}$中各元的元再置入$\mathscr{C}$中，从超限递归定理就得到一个函数

$$F: \mathscr{A} \to 2$$

使对任何一个$A \in \mathscr{A}$

$$F(A) = \begin{cases} 1, & \text{若} A \text{包含每一个使} F(B) = 1 \text{的集合} B < A \\ 0, & \text{其它情况} \end{cases}$$

则令 $$\mathscr{C} = \{A \in \mathscr{A} \mid F(A) = 1\}$$

F是$\mathscr{C}$的特征函数，且对$A \in \mathscr{A}$有

$$A \in \mathscr{C} \Longleftrightarrow A \text{包含每一使} B \in \mathscr{C} \text{的} B < A$$

则可证$\bigcup \mathscr{C}$是$\mathscr{A}$的一个极大元。

首先，$\mathscr{C}$是一个链，因为若A，B是在$\mathscr{C}$中时，则

$$A \leqslant B \Rightarrow A \subseteq B \text{且} B \leqslant A \Rightarrow B \subseteq A$$

由于$\mathscr{C}$是一个链，所以$\bigcup \mathscr{C} \in \mathscr{A}$，要证其极大性，设

$$\bigcup \mathscr{C} \subseteq D \in \mathscr{A}$$

则$D \in \mathscr{C}$，D包含$\mathscr{C}$的每一元，故$D \subseteq \bigcup \mathscr{C}$，所以

$$D = \bigcup \mathscr{C}$$

即$\bigcup \mathscr{C}$不是$\mathscr{A}$的任一元的一个真子集。

证毕

第八章　集合理论的应用

§8.1　布 尔 代 数

在集合理论中，我们曾经从子集公理、并公理给出一个固定集合中各个子集之间的“交”“补”“并”等运算，这些运算不过是“关系”的一种特殊类型。在代数中，除了运算和关系之外，还要给出一些常量，例如

〔1〕A是一个群：$\mathrm{A}=\langle A, \cdot, {}^{-1}, e\rangle$

〔2〕A是一个有序域$\mathrm{A}=\langle A, <, +, -, \cdot, {}^{-1}, 0, 1\rangle$

〔3〕A是一个偏序集合$\mathrm{A}=\langle A, R\rangle$，$R\subseteq A^2$

定义8.1　若$\mathrm{A}=\langle A, R_1, \cdots, R_m, F_1, \cdots, F_n, c_1, \cdots, c_p\rangle$，$A\neq\phi$，$R_i\subset A^{k_i}$，$F_j: A^{l_j}\to A$，$c_i\in A$，则称$A$是$(k_1, \cdots, k_m, l_1, \cdots, l_n, p)$型的一个构造。

定义8.2　若$\mathrm{A}=\langle A, R_0, \cdots, R_n, F_0, \cdots, F_m, c_0, \cdots, c_p\rangle$与$\mathrm{B}=\langle B, S_0, \cdots, S_n, G_0, \cdots, G_m, d_0, \cdots, d_p\rangle$是同一型的两个构造，若一个双射$f: A\to B$使

（1）$R_i(a_1, \cdots, a_k)\Longleftrightarrow S_i(f(a_1), \cdots, f(a_k))$，$i=0, \cdots, n$

（2）$f(F_j(a_1, \cdots, a_l))=G_j(f(a_1), \cdots, f(a_l))$，$j=0, \cdots, m$

（3）$f(c_i)=d_i$，$i=0, \cdots, p$

则称$f: A\to B$是一个同构映射。符号表出

$$f: A\simeq B$$

若存在一个从A到B的同构映射，则称A和B是同构的，符号表出

$$A\simeq B$$

布尔代数就是一种构造。

定义8.3 布尔代数是一个构造$\mathrm{A}=\langle A, \cup, \cap, c, 0, 1\rangle$满足下列九条公理

（1）可交换性

$$a \cup b = b \cup a \qquad a \cap b = b \cap a$$

（2）可结合性

$$(a \cup b) \cup c = a \cup (b \cup c) \qquad (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c)$$

（3）可分配性

$$a \cup (b \cap c) = (a \cup b) \cap (a \cup c) \qquad a \cap (b \cup c) = (a \cap b) \cup (a \cap c)$$

（4）幂等性

$$a \cup a = a \qquad a \cap a = a$$

（5）互反性

$$(a \cup b)^c = a^c \cap b^c \qquad (a \cap b)^c = a^c \cup b^c$$

（6）$(a^c)^c = a$

（7）$a \cup a^c = 1 \qquad a \cap a^c = 0$

（8）$a \cup 0 = a \qquad a \cap 1 = a$

（9）$a \cup 1 = 1 \qquad a \cap 0 = 0$

我们还引出有限并与有限交为：

$$\begin{cases} \bigcup\limits_{i \leqslant 1} a_i := a_1 \\ \bigcup\limits_{i \leqslant n+1} a_i := \bigcup\limits_{i \leqslant n} a_i \cup a_{n+1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \bigcap\limits_{i \leqslant l} a_i := a_1 \\ \bigcap\limits_{i \leqslant n+1} a_i := \bigcap\limits_{i \leqslant n} a_i \cap a_{n+1} \end{cases}$$

这里实际上我们已经用$a \cup b \cup c$代替了$a \cup (b \cup c)$以及用$a \cap b \cap c$代替了$a \cap (b \cap c)$的写法，并且在不会引起误会时，我们常用$\bigcap\limits_i$，$\bigcup\limits_i$代替$\bigcap\limits_{i \leqslant n}$，$\bigcup\limits_{i \leqslant n}$的写法。

例如（1）关于V集合的幂集合$\mathscr{P}_V$，在常用运算下以及$0 = \phi$，$1 = V$时，$\mathscr{P}_V$就是一个布尔代数。

（2）一个固定集合V的子集的集合A，子集或是有限或是有限余，则A是在常用运算下的一个布尔代数。若V是无穷

集，则A就是$\mathscr{P}_V$的一个真子代数。

（3）$\underset{\sim}{R}$的所有勒伯格可测子集形成一个布尔代数。

（4）在例（1）中，V恰只有一个元的情况，布尔代数仅含0与1两个元，关于$\cup$，$\cap$，c的代数运算表如下

$\cup$	0	1
0	0	1
1	1	1

$\cap$	0	1
0	0	0
1	0	1

c	
0	1
1	0

它是最小的非退化的布尔代数。

在一个布尔代数中，我们可以定义一种偏序关系以深入研究布尔代数的性质。

定义8.4 $a \leqslant b := a \cap b = a$

$a < b := a \leqslant b \wedge a \neq b$

定理8.1 （1）$a \leqslant a$

（2）$a \leqslant b \wedge b \leqslant a \Rightarrow a = b$

（3）$a \leqslant b \wedge b \leqslant c \Rightarrow a \leqslant c$

证明

（1）（2）是显然的

（3）从条件有$a \cap b = a$，$b \cap c = b$，则

$a \cap c = (a \cap b) \cap c = a \cap (b \cap c) = a \cap b = a$

所以$a \leqslant c$

证毕

定理8.1说明关系$\leqslant$是一个偏序关系。

定理8.2 （1）$a \leqslant b \Longleftrightarrow a^c \cup b = 1$

（2）$a \leqslant b \Longleftrightarrow b^c \leqslant a^c$

（3）$a \leqslant b \Longleftrightarrow a \cup b = b$

证明

（1）$a \cap b = a \Rightarrow a^c \cup b = (a \cap b)^c \cup b = a^c \cup b^c \cup b$

$=a_c\cup 1=1$ 反之，$a^c\cup b=1\Rightarrow a=a\cap 1=a\cap(a^c\cup b)=0\cup(a\cap b)=a\cap b$

（2） $a\leqslant b\Longleftrightarrow a^c\cup b=1\Longleftrightarrow a^c\cup(b^c)^c=1\Longleftrightarrow b^c\leqslant a^c$

（3） $a\leqslant b\Longleftrightarrow b^c\leqslant a^c\Longleftrightarrow b^c\cap a^c=b^c\Longleftrightarrow a\cup b=b$

证毕

定理8.3 （1） $a\cap(a\cup b)=a$

（2） $a\cup(a\cap b)=a$

证明

（1）只要证明 $a\leqslant a\cup b$，应用定理 8.2（1）得

$$a^c\cup(a\cup b)=1\cup b=1$$

（2）用互反性从（1）而得

证毕

定理8.4 （1） $a\cup b$ 是 a 和 b 的上确界

（2） $a\cap b$ 是 a 和 b 的下确界

证明

（2）从（1）用互反性而得，从定理 8.3（1）得知

$$a,\ b\leqslant a\cup b$$

(因为 $a\cap(a\cup b)=a$， $b\cap(a\cup b)=b$)

今设 a，$b\leqslant c$，则从定理 8.2，（1）得

$$a^c\cup c=1,\quad b^c\cup c=1$$

所以，

$(a^c\cup c)\cap(b^c\cup c)=1$ 或 $(a^c\cap b^c)\cup c=(a\cup b)^c\cup c=1$

这表示 $$a\cup b\leqslant c$$

所以 $a\cup b$ 是大于或等于 a 和 b 的最小元。

证毕

定理8.5 （1） $a^c=\sup\{x\mid a\cap x=0\}$

（2） $a^c=\inf\{x\mid a\cup x=1\}$

证明

（2）类似于（1）的证明，关于（1），我们已知 $a\cap a^c=$

0，所以仅要指出

$$a \cap x = 0 \Rightarrow x \leqslant a^c$$

从 $a \cap x = 0$ 得知 $a^c \cup x^c = 1$ 或者说 $x \leqslant a^c$（定理 8.2,（1））

证毕

从定理 8.4 和定理 8.5，可知布尔运算是可以从偏序来定义的，即从集合偏序后，求其上确界，下确界、就得到并、交、余的布尔运算。

斯通（M.H.Stone）指出 $\mathscr{P}_V$ 是布尔代数的原型，也就是，从同构关系来说，每一个布尔代数都是某个$\mathscr{P}_V$的子代数。

§8.2 树

树的概念在实用上经常遇到，图论把树的数学性质进行了深入分析。实际上，数学上的概念很少能比较一种“树”的概念更为规律，从训练有素的数学工作者来看，几乎处处都是树的规律，正好像“任何东西都是一个集合”这样一句口头禅一样，所以，稍加夸大一些来说，数学就是树的研究。

定义8.5 一个“树”是一个三序组$<B, \leqslant, t>$，此中

（1）B是用$\leqslant$偏序了的

（2）$|B| \leqslant \aleph_0$

（3）对于每一个 $b \in B$，前继的集合形成一个有限链 $b = b_n < b_{n-1} < \cdots < b_1 < b_0 = t$

B的各元称为结点，结点 t 称为树的顶点，它是B的最大元，若 b_0，…，b_n 是在（3）中所述的链，则称 n 是 b_n 的长。

由此可见，除了顶点之外，在一个树中的每一结点都有一个唯一的前继，不可以比较的各元不会有公共的后继元。我们把树中最大的链称为“支”或“道路”。

从集合方法，我们可以用序对来引出有限序列，从范畴方法，我们是用函数代替集合来研究，采用函数方法引出序列，除了这一点之外，序列表示好了之后，仍是集合的分析。

若 $a: n+1 \rightarrow \omega$（注意 $n+1 = \{0, 1, \cdots, n\}$），我们写

$$a=\langle a_0,\ \cdots,\ a_n\rangle \text{ 表示 } a_i=a(i)$$

而从 ϕ 到 ω 的唯一映射，表为$\langle\ \ \rangle$，称为空序列，这里序列的表示方法与 n 序组的意义是不同的。

定义8.6 $\mathrm{seq}:=\bigcup\{\omega^n|\ n\in\omega\}$

seq 就是包括空序列在内的 ω 的有限序列的集合

关于序列的最重的运算就是“并列”运算。

定义8.7 （1）若 $a:n\to\omega$，则 $^m a$ 定义为

$^m a(k)=a(k-m)$，若 $m\leqslant k\leqslant n+m$，$u>0$

$$^m a=\phi,\ \text{若 } n=0$$

（2）若 $a:n\to\omega$；$b:m\to\omega$，则 $a^*b=a\bigcup{}^n b$

定义中的（1）是将序列移动一个距离 m，而（2）就给出一种并列运算。

例如（1）$a=\{\langle 0,1\rangle,\ \langle 1,7\rangle,\ \langle 2,0\rangle\}$

$^3 a=\{\langle 3,1\rangle,\ \langle 4,7\rangle,\ \langle 5,0\rangle\}$

（2）$a=\{\langle 0,5\rangle,\ \langle 1,1\rangle\}$，$b=\{\langle 0,0\rangle,\ \langle 1,0\rangle\}$ 则：

$a*b=\{\langle 0,5\rangle,\ \langle 1,1\rangle,\langle 2,0\rangle,\langle 3,0\rangle\}$

或者简写为

$$a*b=\langle 5,1\rangle*\langle 0,0\rangle=\langle 5,1,0,0\rangle$$

定义8.8 $l(a):=\mathrm{dom}(a)$，即序列 a 的长，

所以

$l(\langle\ \ \rangle)=0$

$l(\langle a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n\rangle)=n+1$

$l(a*b)=l(a)+l(b)$

在 seq 上的偏序用包含关系来定义

定义8.9 $a\leqslant * b:=a\subseteq b$ 若 a，$b\in\mathrm{seq}$

所以 $a\leqslant * b\Rightarrow l(a)\leqslant l(b)$。

seq 显然的是一个树，它可以从图 8.1 看出

定理8.6 对于每一个树 B，有从 B 到 seq 的一个同构映射。

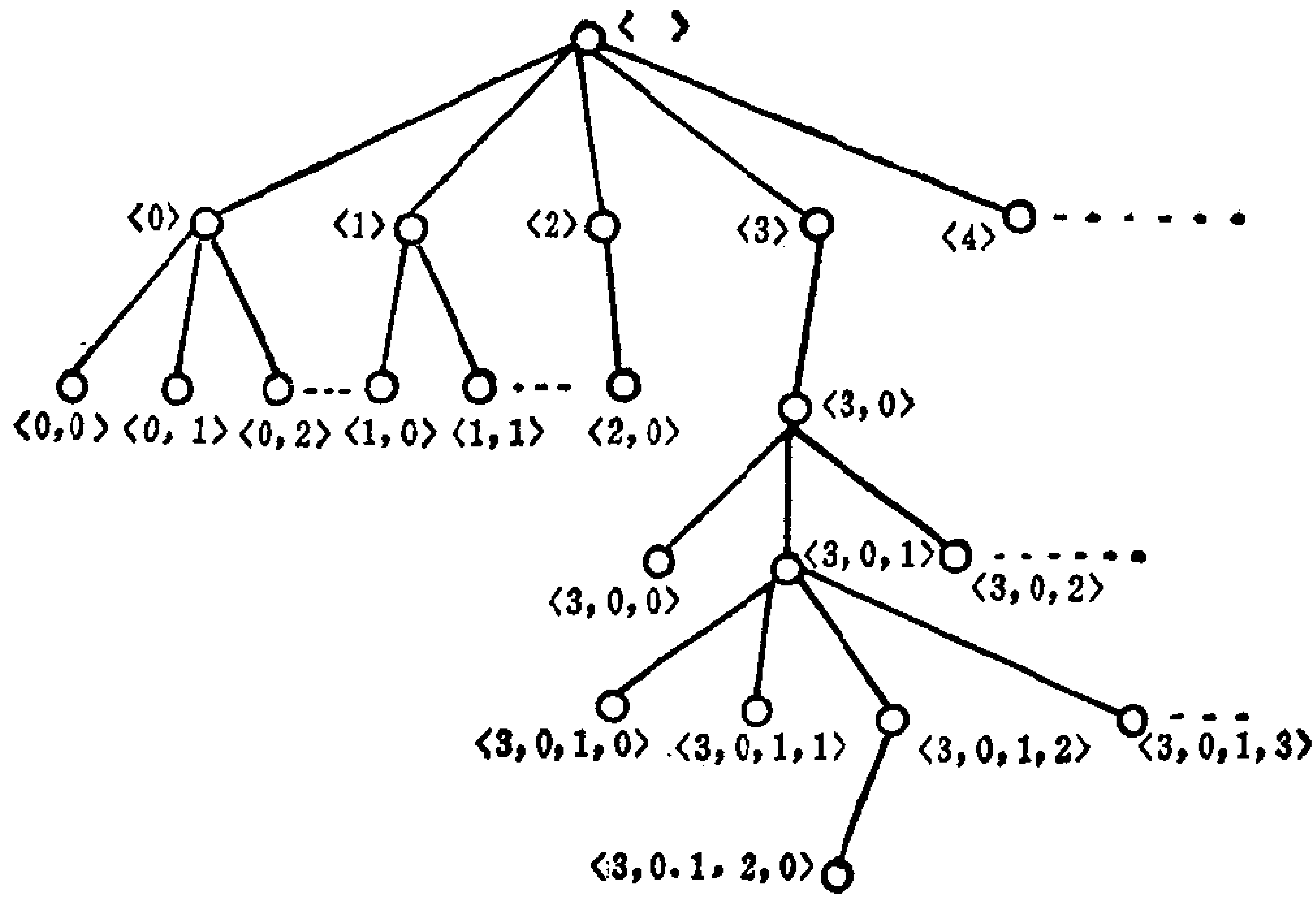

图 8.1

证明

由于B是可计的，所以有一个$\alpha \leqslant \omega$及一个h使 $h: B \underset{1}{=} \alpha$、设$t$，$b_1$，…，$b_n = b$是从$t$到$b$的唯一极大链，则定义$f(b) = \langle h(b_1), \cdots, h(b_n)\rangle$，而在顶点，定义$f$为$f(t) = \langle\ \ \rangle$，那么$f$就是一个从$B$到 seq 的同构映射

证毕

例如见图8.2

由定理 8.6，可见只要讨论 seq 的子树就可以了。

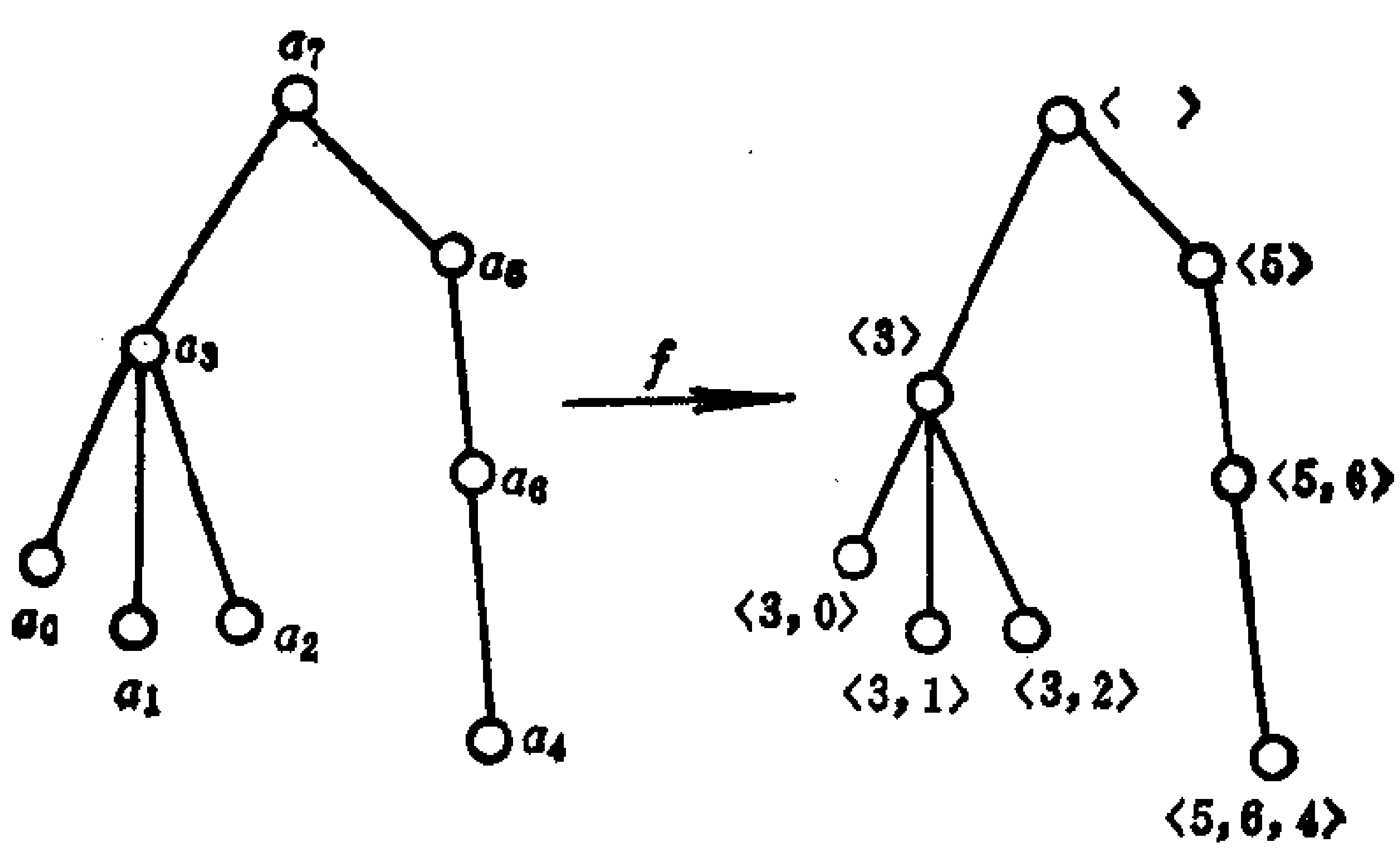

图 8.2

定义8.10 一个有限性树或扇树是一种树，它的每一结点仅有有限多个立即后继。

图论中有一个很著名的定理——柯立格（D.König）无穷性引理、

定理8.7 一个具无穷多个结点的扇树有一个无穷支

证明

设F是一个扇树，究具无穷多个后继的所有结点的子集F'，在F'中每一结点都在F'中有一个立即后继，引用选择公理：有一个映射$f:F'\to F'$使$f(b)$是b的立即后继，而F是无穷的，$t\in F'$，定义

$$a_0=t$$

$$a_{n+1}=f(a_n)$$

就不会有一个最终点a_k，因为$a_k\in F'$，所以

$$a_k>f(a_k)=a_{k+1}\in F'$$

从而 a_0，a_1，a_2，…就是一个无穷支。

证毕

反陈述这个定理就得到布劳沃（Brouwev）扇树定理。

定理8.8 若一个扇树的支是有限的，则扇树是有限的。

这个扇树定理的一种等价说法是：若一个扇树的所有支都是有限，则支的长有界。

在所有树中，有两种是最重要的：

1．二元扇树

它是所有0－1序列：$\bigcup_n\{0,1\}^n$的树。它的支所对应的集合就是$\{0,1\}^\omega$，它可以看成$\{0,1\}$的ω复印的拓扑积，具有离散拓扑的构造。这就是所谓的康托空间。

2．万有树seq

二元树也与seq一样，具有一种万有特性：每一个树都可以嵌入到二元扇树中去。

§8.3 波莱尔集合

波莱尔集合是我们讨论实变函数和概率论的基础，它有很多集合运算之间的良好关系。我们现在就“光泽空间”来讨论波莱尔集合，所谓光泽空间就是一个完备的可分度量空间：若在一个度量空间中的每一基本序列有一个极限，度量空间是完备的；若在度量空间中有在X中稠密的可计子集，则度量空间是可分的。

定义8.11 $\underset{\sim}{B}(X)$ 是X的最小子集类，这个类

（1）含各个开集，

（2）在余运算下是闭的，

（3）在可计并运算下是闭的。

称 $\underset{\sim}{B}(X)$ 是X的波莱尔(Emile Borel)类，并简写 $\underset{\sim}{B}(X)$为$\underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{B}$ 的各个元称为波莱尔集合。

对于光泽空间X，我们可以有另外的定义方法：

定理8.9 $\underset{\sim}{B}$ 是X的最小子集类，这个类

（1）含各个闭集，

（2）在可计并运算下是闭的，

（3）在可计交运算下是闭的。

证明 称满足定理三条件的类是 $\underset{\sim}{B}'$，证明 $\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}'$。

〔1〕指出 $\underset{\sim}{B}$ 满足定理三条件：

（1）设A是闭的，则 $A^c\in\underset{\sim}{B}$，所以 $(A^c)^c=A\in\underset{\sim}{B}$，

（2）$\underset{\sim}{B}$ 本来是在可计并运算下闭的，

（3）设 $A_n\in\underset{\sim}{B}$，则 $A_n^c\in\underset{\sim}{B}$ 且$\bigcup A_n^c\in\underset{\sim}{B}$，所以

$$(\bigcup A_n^c)^c=\bigcap A_n\in\underset{\sim}{B}$$

〔2〕指出 $\underset{\sim}{B}'$满足定义 8.11 的三条件：

（1）设A是开的，证明A是可计多个闭集的并。因为 X 是可分的，每一开集就是开球的一个可计并，所以只要证明每一个开球是小闭球的一个可计并就可以了。

若 $U_\varepsilon(x)=\{y\mid d(x,y)<\varepsilon\}$，则 $U_\varepsilon(x)=\bigcup\{B_n\mid n\in\omega\}$，此中

$$B_n=\{y\,|\,d(x,y)\leqslant\varepsilon(1-2^{-n})\}$$

（2）设 $A\in\underset{\sim}{B}'$，有三种情况

（Ⅰ）A是闭的，则 A^c 是开的，从（1）的证明，A^c 是可计多个闭集的并，故从条件（2）得 $A^c\in\underset{\sim}{B}'$。

（Ⅱ）$A=\bigcap A_n$，$A_n\in\underset{\sim}{B}'$，由孔 $A_n^c\in\underset{\sim}{B}'$ 今 $\bigcup A_n^c\in\underset{\sim}{B}'$，所以 $A^c=(\bigcup A_n^c)^c\in\underset{\sim}{B}'$。

（Ⅲ）$A=\bigcup A_n$，$A_n\in\underset{\sim}{B}'$，类似的 $A_n^c\in\underset{\sim}{B}'$ 而 $\bigcap A_n^c\in\underset{\sim}{B}'$，故 $A^c=(\bigcap A_n^c)^c\in\underset{\sim}{B}'$

（3）$\underset{\sim}{B}'$ 中元的可计并是闭的。

从〔1〕知 $\underset{\sim}{B}\subseteq\underset{\sim}{B}'$，〔2〕给出 $\underset{\sim}{B}'\subseteq\underset{\sim}{B}$ 故 $\underset{\sim}{B}=\underset{\sim}{B}'$

证毕

关于波莱尔集合，有一种传统的符号，这是因为，若 $\underset{\sim}{K}\subseteq\mathscr{P}X$，我们常用 $\underset{\sim}{K}_\sigma$ 表示 $\underset{\sim}{K}$ 中所有可计元的并的集合，而 $\underset{\sim}{K}_\delta$ 表示 $\underset{\sim}{K}$ 中所有可计元的交的集合。开集类用 $\underset{\sim}{G}$ 表示，闭集类用 $\underset{\sim}{F}$ 表示。从定理 8.9 的〔2〕(1)立即有

推论：
$$\underset{\sim}{G}\subseteq\underset{\sim}{F}\sigma$$
$$\underset{\sim}{F}\subseteq\underset{\sim}{G}\delta$$

在定义 8.11 中，我们是“从上”刻划波莱尔集合的，也就是研究所有满足条件的集合的类并且取最小一个，它可以从它们的交运算而得。我们也可以“从下”来逼近 $\underset{\sim}{B}$，开始用 $\underset{\sim}{F}$ 和 $\underset{\sim}{G}$，然后相迭的运算 σ 和 δ。

定义8.12 $\underset{\sim}{F}_0:=\underset{\sim}{F}$　　　$\underset{\sim}{G}_0:=\underset{\sim}{G}$

$$\begin{cases}\underset{\sim}{F}_\alpha:=(\bigcup\limits_{\mu<\alpha}\underset{\sim}{F}_\mu)_\delta,\\ \underset{\sim}{G}_\alpha:=(\bigcup\limits_{\mu<\alpha}\underset{\sim}{G}_\mu)_\sigma,\end{cases}\quad\text{对于偶 }\alpha\text{（即 }\alpha=\xi.2\text{ 或 }\lim\alpha\text{）}$$

$$\begin{cases}\underset{\sim}{F}_\alpha:=(\bigcup\limits_{\mu<\alpha}\underset{\sim}{F}_\mu)_\sigma,\\ \underset{\sim}{G}_\alpha:=(\bigcup\limits_{\mu<\alpha}\underset{\sim}{G}_\mu)_\delta,\end{cases}\quad\text{对于奇 }\alpha\text{（即 }\alpha=\xi.2+1\text{）}$$

定理8.10 $\underset{\sim}{B}=\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1}\underset{\sim}{F}_\alpha=\bigcup\limits_{\alpha<\omega_1}\underset{\sim}{G}_\alpha$

$$\omega_1 := \{\alpha\text{ 是序数}|\ \alpha \leqslant \omega\}$$
1

证明

首先给出 $\underset{\sim}{F}_\alpha$，$\underset{\sim}{G}_\alpha$ 的一些性质，然后证明

$$\bigcup \underset{\sim}{F}_\alpha = \bigcup \underset{\sim}{G}_\alpha,\quad \bigcup \underset{\sim}{F}_\alpha \subseteq \underset{\sim}{B},\quad \underset{\sim}{B} \subseteq \bigcup \underset{\sim}{F}_\alpha$$

（1） $\alpha < \beta \Rightarrow (\underset{\sim}{F}_\alpha \subseteq \underset{\sim}{F}_\beta,\ \underset{\sim}{G}_\alpha \subseteq \underset{\sim}{G}_\beta,\ \underset{\sim}{F}_\alpha \subseteq \underset{\sim}{G}_\beta,\ \underset{\sim}{G}_\alpha \subseteq \underset{\sim}{F}_\beta)$

关于 $\underset{\sim}{F}_\alpha \subseteq \underset{\sim}{F}_\beta$，$\underset{\sim}{G}_\alpha \subseteq \underset{\sim}{G}_\beta$，这是显然的。

要指出 $\underset{\sim}{F}_\alpha \subseteq \underset{\sim}{G}_\beta$ 引用超限归纳于 α 上。设对所有 $\gamma < \alpha$，$\underset{\sim}{F}_\gamma \subseteq \underset{\sim}{G}_\delta$ 对所有 $\delta > \gamma$ 成立

若 α 是偶　$A \in \underset{\sim}{F}_\alpha \Rightarrow \bigcap A_n = A$ 对 $A_n \in \underset{\sim}{F}_{\gamma_n}$ 成立，从归纳假设 $A_n \in \underset{\sim}{G}_\alpha$ 故 $A \in \underset{\sim}{G}_{\alpha+1}$ 则从 $\underset{\sim}{G}_{\alpha+1} \subseteq \underset{\sim}{G}_\beta$ 得结果。

若 α 是奇　$A \in \underset{\sim}{F}_\alpha \Rightarrow A = \bigcup A_n$ 具 $A_n \in \underset{\sim}{F}_{\gamma n}$ 从归纳假设 $A_n \in \underset{\sim}{G}_\alpha$，故 $A = \bigcup A_n \in \underset{\sim}{G}_{\alpha+1} \subseteq \underset{\sim}{G}_\beta$ 得结果

类似的证得 $\underset{\sim}{G}_\alpha \subseteq \underset{\sim}{F}_\beta$。

（2） $A \in \underset{\sim}{F}_\alpha \Longleftrightarrow A^c \in \underset{\sim}{G}_\alpha$

在 α 上归纳之，设该等价性已在所有 $\beta < \alpha$ 上建立，分两种情况

若 α 是偶　$A \in \underset{\sim}{F}_\alpha \Longleftrightarrow A = \bigcap A_n$，$A_n \in \underset{\sim}{F}_{\gamma_n}$ 从而有归纳假设：$A_n \in \underset{\sim}{F}_\gamma \Longleftrightarrow A_n^c \in \underset{\sim}{G}_{\gamma_n}$

由定义　$\bigcup A_n^c \in \underset{\sim}{G}_\alpha$，即 $A^c \in \underset{\sim}{G}_\alpha$

类似的在 α 是奇时得证。

（3） $\underset{\sim}{F}_\alpha \bigcup \underset{\sim}{G}_\alpha \subseteq \underset{\sim}{B}$

在 α 上归纳并用定义 8.11 及定理 8.9 而得

（4） $\bigcup \underset{\sim}{F}_\alpha = \bigcup \underset{\sim}{G}_\alpha$

从（1）立即可得

（5） $\bigcup \underset{\sim}{F}_\alpha \subseteq \underset{\sim}{B}$

从（3）而得

（6） $\bigcup \underset{\sim}{F}_\alpha$ 是在可计并下闭的。

设 $A = \bigcup A_n$，$A_n \in \bigcup \{\underset{\sim}{F}_\alpha |\ \alpha < \omega_1\}$

对每 $n < \omega$，有一个 $\alpha < \omega_1$ 使 $A_n \in \underset{\sim}{F}_\alpha$，从选择公理，有一函数

$f:\omega\to\omega_1$ 使 $A_n\in\underset{\sim}{F}_{f(n)}$。由于 f 的值域有界，即对某 $\beta<\omega_1$，$A_n\in\underset{\sim}{F}_\beta$ 对所有 n 成立，用此有界性，立即看出 $\bigcup A_n\in\bigcup\underset{\sim}{F}_\alpha$。

（7）$\underset{\sim}{B}\subseteq\bigcup\underset{\sim}{F}_\alpha$

从（2）及（4）得知 $\bigcup\underset{\sim}{F}_\alpha$ 是在余运算下闭的，再由（6）以及 $\underset{\sim}{G}\subseteq\bigcup\underset{\sim}{F}_\alpha$，得知有结果。

（8）$\underset{\sim}{B}=\bigcup\underset{\sim}{F}_\alpha$

从（5）及（7）而得

证毕

若写 $\underset{\sim}{D}_\alpha=\underset{\sim}{F}_\alpha\cap\underset{\sim}{G}_\alpha$ 则定理 8.10 证明中的（1）部分可以表为图 8.3 从左到右的包含关系。

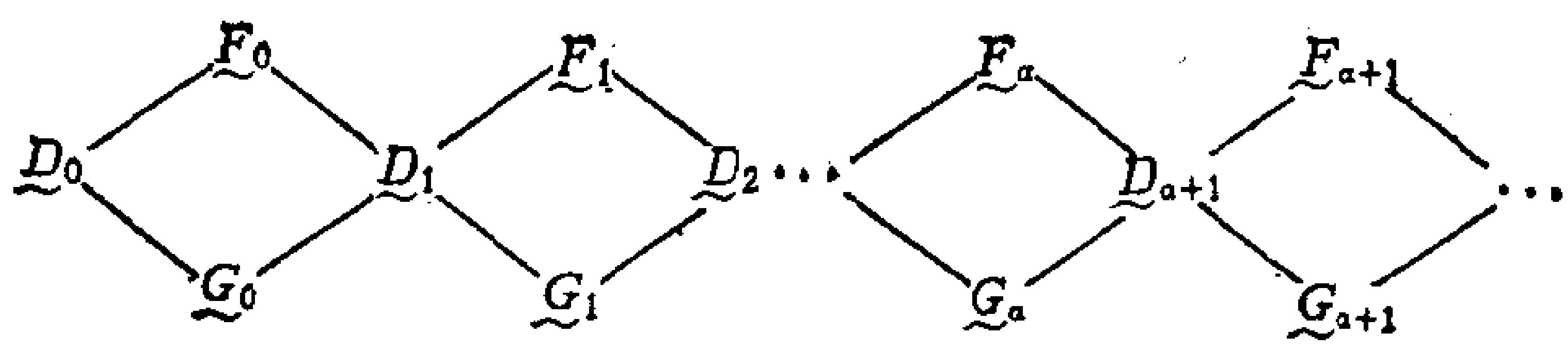

图 8.3

§8.4 选择公理的应用

选择公理是在集合理论中的一种最成功的工具，它在数学的各个领域中都是重要的。

定理8.11 每一个矢量空间有一个基

证明

在一个矢量空间 V 中，所有独立矢量集合的集合 X，在用包含偏序以后，引用楚恩引理。设 K 是在 X 中的一个链，则 $\bigcup K\in X$，设 $\bigcup K$ 是相关的，则有 V_1，$V_2\cdots V_n\in\bigcup K$，它们是相关的。由于 K 是一个链，所以有 A_1，$\cdots A_n\in K$ 使 $V_i\in A_i$ 且 $A_i\subseteq A_p$（$i\leqslant n$）对某 $p\leqslant n$ 成立，这样就说明 A_p 是相关的，矛盾。所以 $\bigcup K$ 是独立的，而且 $\bigcup K$ 控制了链 K，即对每个 $A\in K$，$A\subseteq\bigcup K$，从楚恩引理知道在 X 中应有一个极大元 B，则 B 就是 V 的一个基：

（1）从X的定义，知道B是独立的。

（2）若$x\in v$，则由B的极大性，知道$B\cup\{x\}$是相关的，故有b_1，b_2，$\cdots$，$b_n\in B$使$\{b_1, b_2, \cdots, b_n, x\}$是相关的，即$\alpha_1 b_1+\cdots+\alpha_n b_n+\alpha x=0$。由于$\alpha\neq 0$，故有

$$x=\alpha^{-1}\alpha_1 b_1+\cdots+\alpha^{-1}\alpha_n b_n$$

它就说明B是一个基。

证毕

定理8.12 若R是一个具单位元的环，I是R中的一个真理想，则I是含在一个极大理想中的。

证明

因为I是一个真理想，所以$1\notin I$。究R的一切使$I\subseteq J$，$1\notin J$的理想J的集合X。显然，$X\neq\phi$，X用包含来偏序，对X引用楚恩引理，设K是在X中的一个链，则$\bigcup K\in X$。由于：

（1）$\bigcup K$是一个理想

$x, y\in\bigcup K\Rightarrow(x\in J\in K$，$y\in J'\in K$且$J\subseteq J'$或$J'\subseteq J$）例如取$J\subseteq J'$，则$x, y\in J'$，所以$x-y\in J'\subseteq\bigcup K$，而$\bigcup K$在乘法下的闭性是显然的。

（2）$1\notin\bigcup K$，这是立即可见的。

$\bigcup K$控制了K，所以每一个链是有界的，楚恩引理指出在X中有一个极大元，它就是含I的所求的极大理想。

证毕

定理8.13 若$\langle A,\leqslant\rangle$是一个偏序集，则$\leqslant$可以在$A$上扩张为全序。

证明

究A的所有扩张$\leqslant$的偏序集合的集合，以包含成序关系，引用楚恩引理，每一个链为其并所控制，故有一个扩张$\leqslant$的极大偏序R，则R是一个全序关系。设其不是全序关系，则有a，b，既无aRb也无bRa，则将a，b塞在线内定义一个新编序关系R'：

令　　$xR'y$　　若xRy

　　　$xR'y$　　若$x=a$，$y=b$

$$xR'y \qquad 若 \quad xRa \quad 且 \quad bRy$$

这样就够成R'的可传性，从而R'是真的扩张了R的一个偏序关系，这就与R的极大性矛盾。

证毕

定理8.14 有一个不是勒贝格可测的实数的子集。

证明

我们知道在$\underset{\sim}{R}$上的勒贝格测度是在平移和σ相加之下不变的。当$a,b\in[0,1]$，定义

$$a\sim b \quad \text{iff} \quad a-b\in\underset{\sim}{Q}$$

显然$\sim$是一个等价关系。

究等价类$[a]$，从选择公理，应有一个集合，它交每一个$[a]$于一点（即$|A\cap[a]|=1$）。

设A是可测的，今定义：对每$r\in\underset{\sim}{Q}$，

$$A^r=\{x\mid x-r\in A\vee(x-r)+1\in A\}$$

（A^r就是模1的移动一个距离r）。注意到当$r\neq 0$时$A\cap A^r=\phi$且$\mu(A)=\mu(A^r)$，从A的定义，有

$$\bigcup\{A^r\mid r\in\underset{\sim}{Q}\}=[0,1]$$

所以
$$1=\mu[0,1]=\sum_{r\in\underset{\sim}{Q}}\mu(A^r)$$

这个和是无穷的，故$\mu(A)$不能是正的，从而$\mu(A)=0$但是这样一来，$1=\Sigma\mu(A^r)=0$矛盾，所以A是不可以勒贝格可测的

证毕

最后，我们要特别提出，在初等分析中，我们可以用很多方法定义连续性，而最著名的就是两种：

1．f是在a连续 iff

$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\quad\forall x(|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-f(a)|<\varepsilon)$

2．f是在a s-连续（序列连续）iff 对每序列$\langle a_n\rangle$ $\lim\limits_{k\to\infty}a_k=a\Rightarrow\lim\limits_{k\to\infty}f(a_k)=f(a)$

容易看出，连续性就包含有s-连续性（在一点）。反过来，就要引用选择公理证明s-连续性包含有连续性。

设f在a是s-连续而在a是不连续的，则

$$\exists \varepsilon > 0\ \forall \delta > 0\ \exists x(|x-a|<\delta \wedge |f(x)-f(a)|>\varepsilon)$$

在给定这个ε以后，对$\forall\exists$公式引用选择公理，则

有一个函数$s:\omega \to \underset{\sim}{R}$使对每一个$n\in\omega$

$$|s(n)-a|<2^{-n}\wedge|f(s(n))-f(a)|>\varepsilon$$

从第一部分得知$\lim\limits_{n\to\infty} s(n)=a$，而从第二部分说明若$\lim\limits_{n\to\infty} f(s(n))$存在，它与$f(a)$不同。这就和$f$的$s$-连续性矛盾。

上述连续性问题，自然可以对抽象空间来一般化的讨论，重要的是说明，即使在分析最开始的讨论中，我们都不可避免的要引用选择公理。这就表明集合理论公理系统的重要性了。

§8.5 多重集合序关系

1979年美国斯坦福大学计算机科学系的曼那(Zohar Manna)教授协助伊利诺埃大学计算机科学系的德舒维奇（Nachum Dershowifz）引用集合理论的良基概念，给出多重集合序关系以解决计算机中的程序终止问题。

关于多重集合序关系，它是如下建立起来的。

对于给定的一个偏序集合$\langle S,<\rangle$，所谓在S上的各个多重集合，是S的一些元的无序组合并容许相同的元多序出现。用$\mathscr{M}(S)$表示所有元取自S的有限多重集合为元且连带一个序关系$\prec\!\!\prec$的集合，$\mathscr{M}(S)$上的$\prec\!\!\prec$序关系是从S上的序关系$<$导出的关系。

多重集合间的运算类似于集合之间的运算定义。例如，两个多重集合的相等$A=B$，表示在A中任何一个出现n次的元也正是在B中出现n次，反之亦然；两个多重集合之并$A\cup B$，就是一个多重集合，它含有在A中出现n次在B中出现m次的任一元，这个元将出现$m+n$次。所以，多重集合$\{2,2,4\}$与$\{2,0,0\}$

的并是{2，2，4，2，0，0}。

对于一个偏序集合$\langle S,<\rangle$，$\mathscr{M}(S)$上的多重集合序关系$\prec\!\!\prec$定义为：

$M'\prec\!\!\prec M$，若对某$X,Y\in\mathscr{M}(S)$，$\phi\neq X\subseteq M$，$M'=(M-X)\cup Y$

而且$(\forall y\in Y)(\exists x\in X)\,y<x$。

用语言来说，一个多重集合是在（X中）至少有一元去掉，而在（Y中）用任何有限个较小的元（可以是零）取代所缩小形成时，就形成多重集合之间的一种序关系。

所以，我们首先应该指出$\prec\!\!\prec$是一个偏序，即$<$是非自反和可传时，$\prec\!\!\prec$也是非自反和可传的：

（1）要指出$\prec\!\!\prec$的非自反性，必须指出没有多重集合M能使$M\prec\!\!\prec M$。设有M使$M\prec\!\!\prec$，则将有某非空有限多重集合$X\subseteq M$，使

$$(\forall y\in X)(\exists x\in X)\,y<x$$

也就是，对于X的每一个元，都有X的另一个元大于它，这关于有限集合X是不可能的。

（2）要指出$\prec\!\!\prec$的可传性，可究在$\mathscr{M}(S)$中的下列可传关系$\prec\!\!\prec'$：$(M-\{x\})\cup Y\prec\!\!\prec' M$，若$(\forall y\in Y)\ y<x$。也就是，一个有限多重集合是将一个单元用零或更小的元代换在$\prec\!\!\prec'$关系下缩小。注意到多重集合序关系$\prec\!\!\prec$是关系$\prec\!\!\prec'$的非自反的可传闭包，即$M'\prec\!\!\prec M$ iff M'可从M中一个元一个元代换由M而得，所以$\prec\!\!\prec'$ $\prec\!\!\prec$是可传的。

我们有下列定理

定理8.15 在$\langle S,<\rangle$上的多重集合序关系$\langle\mathscr{M}(S),\prec\!\!\prec\rangle$是良基的 iff $\langle S,<\rangle$是良基的。

证明

（1）⇒的证明：

若$\langle S,<\rangle$不是良基的，则在S中有一个无穷下降序列$\cdots<s_3<s_2<s_1$，对应的单子序列

$$\cdots\prec\!\!\prec\{s_3\}\prec\!\!\prec\{s_2\}\prec\!\!\prec\{s_1\}$$

在$\mathscr{M}(S)$中构成一个无穷降元序列，所以$\langle\mathscr{M}(S), \leftarrow\!\!\prec\rangle$不是良基。

（2）$\Leftarrow$的证明：

设$\langle S, <\rangle$是良基的，令$S' = S\cup\{\perp\}$是具最小元$\perp$的扩张，即对每一个元$s\in S$，在S'上的序关系中$\perp < s$，若S是良基时，S'也是良基的。今设$\langle\mathscr{M}(S), \leftarrow\!\!\prec\rangle$不是良基，从$\mathscr{M}(S)$中就有一个多重集合无穷下降序列$\cdots\leftarrow\!\!\prec M_3\leftarrow\!\!\prec M_2\leftarrow\!\!\prec M_1$。我们就可以构造下列的树得到一个矛盾。在树中每一结点用S'的某元标号；构造的每一步中，树中所有的叶结点的集合形成$\mathscr{M}(S')$中的一个多重集合。

开始时，对应M_1的每一元给以一个根结点。由于$M_2\leftarrow\!\!\prec M_1$，必须存在多重集合$X$和$Y$使$\phi\neq X\subseteq M_1$，$M_2=(M_1-X)\cup Y$且$(\forall y\in Y)(\exists x\in X)\, y<x$，从而，对每一个$y\in Y$，加上一个对应$x$的标号$y$的结点，并且从$X$的每一个元产生一个$\perp$，因为$X$是非空的，即使$Y$是空的，产生$\perp$就使树中至少加上一个元。由于$Y$是有限的，对应于$X$的结点每一个有$Y$中的有限个结点，重复在$M_3\leftarrow\!\!\prec M_2$，$M_4\leftarrow\!\!\prec M_3$等等上进行。

因为在序列中，对于每一个多重集合M_i加在树上一个结点，所以树也是无穷的，从柯里格无穷性引理知道树有无穷个支。另一方面，从我们的构造，树中所有的支是在S'上良基序关系$<$中下降的，必然是有限，故得矛盾，M_1，M_2，M_3，$\cdots$不能是无穷。

证毕

其次，我们要讨论例如

$$\{\{1, 1\}, \{\{0\}, 1, 2\}, 0\}$$

的套多重集合。也就是，对于给定的一个偏序集合$\langle S, <\rangle$，在S上的一个元或是S的多重集合或是S上套多重集合的一个有限多重集合，并用$\mathscr{M}^*(S)$表示S上套多重集合为元的集合。

在$\mathscr{M}^*(S)$上定义一种套多重集合序关系$\leftarrow\!\!\prec^*$，它是标准多重集合序关系的一种递归形式，关于二元$M, M'\in\mathscr{M}^*(S)$，我们说：

$M' \leftarrow\!\!\prec^* M$ 若（1）$M, M' \in S$ 且 $M' < M$（基础集合用$<$比较）

或（2）$M \notin S$，$M' \in S$（任一多重集合大于基础集合的任一元）

或（3）$M, M' \notin S$，对某 $X, Y \in \mathscr{M}^*(S)$，

$\phi \neq X \subseteq M$，$M' = (M - X) \cup Y$ 且

$(\forall y \in Y)(\exists x \in X)\, y \leftarrow\!\!\prec^* x$

例如：套多重集合

$$\{\{1, 0, 0\}, 5, \{\{0\}, 1, 2\}, 0\}$$
$$\leftarrow\!\!\prec^* \{\{1, 1\}, \{\{0\}, 1, 2\}, 0\}$$

因为$\{1, 1\}$是大于$\{1, 0, 0\}$和5的，又如

$$\{\{\phi, 1, 2\}, \{5, 5, 2\}, 5\} \leftarrow\!\!\prec^* \{\{1, 1\},$$
$$\{\{0\}, 1, 2\}, 0\}$$

因为$\{\{0\}, 1, 2\}$大于$\{\phi, 1, 2\}$，$\{5, 5, 2\}$和5的。

1975年弗罗伊德（R.W.Floyd）提出关于计算机上的程序终止定理：

在定义域 $\bar{D}$ 上取值的变量 $\bar{X}$ 的一种程序 P 终止 iff 有（Ⅰ）一个标号集合 $\mathscr{L}$ 切割 P 中所有的循环，（Ⅱ）一个良基集合（W, $<$）（Ⅲ）一个从 $\mathscr{L} \times \bar{D}$ 到 W 的终止函数，使每当标号横穿一道路时，终止函数对当时标号$<$和变量 $\bar{X}$ 值的 $\tau_L(\bar{X})$ 值减小。

如果程序没有终止，则当非终止计算以及这些点的变量值对应的标号序列存在有一个无穷标号值序组序列 $(L_1, \bar{d}_1)$，$(L_2, \bar{d}_2)$，…由于函数 τ 随横穿道路而减小，从而得到集合 M 中形成的一个无穷下降序列

$$\cdots < \tau_{L_2}(\bar{d}_2) < \tau_{L_1}(\bar{d}_1)$$

这是和 M 的良基性矛盾的。

另一方面，若程序终止了，则集合$\langle \mathscr{L} \times \bar{D}, <_p \rangle$是良基的，其中的关系$<_p$定义为

$(L', \bar{d}') <_p (L, \bar{d})$ 若程序用标号 L 具 $\bar{d}$ 值的部分先于 L' 具 $\bar{d}'$ 值的部分到达。

因此，若 $\tau_L(\overline{X})$ 序对 $(L,\overline{X})$，则一道路的每一横穿 $\tau_L(\overline{X})$ 的出现值就减小。

下面，我们举出二个例子说明使用多重集合序关系为良基集合来证明程序终止的意义。

例 1 计量二分树末梢

在一二分树中计算末梢（无后继结点的叶结点）的个数，讨论一种简单程序。每一个不是末梢的树 y 有二个子树 $l(y)$ 和 $r(y)$，程序是：

```
S:=(t)
C:=0
loop until S=( )
     y:=head(S)
  if tip(y) then S:=tail(S)
                 C:=C+1
            else S:=l(y)0 r(y)0 tail(S)
            fi
  repeat
```

这个程序使用一种堆垛 S 的方法，当 S 是空时就终止，这时 C 就给出给定树 t 的末梢结点的整个个数。

这种程序的终止性可以用良基集合 $\langle \underset{\sim}{N}, < \rangle$ 来证明，适当的终止函数是

$$\tau(S)=\sum_{s\in S}\text{nodes}(S)$$

其中 nodes (S) 是子树 S 的整个结点个数，要指出 τ 的值随每一循环迭代而减小，必须考虑两种情况：若 $y=\text{head}(S)$ 是一个末梢结点，则结点就从堆垛中移去，和就减少一个，若 y 不是一个末梢，它就用它的两个子树所代替，而 y 是比较 $l(y)$，$r(t)$ 合起来还多一个根结点，所以，和也是减小的。

用树上的多重集合序关系，用给出堆垛中树的多重集合的简单终止函数

$$\tau(S)=\{s \mid s\in S\}$$

来证明终止作用。树本身是用通常自然的良基子树序关系来排序的，也就是任一个树都是大于它的子树的。因此，从堆垛中移去一个树，就在多重集合序关系中移去一元而减小 τ，而移去具有二子树的一个树，就相当于在多重集合中用二较小元代替一元，使 τ 减小。

例 2　麦克阿瑟 91-函数

在整数集合 $\underset{\sim}{Z}$ 上粗略计算的简单函数

$$f(x)=\begin{cases} x-10 & \text{若 } x>100 \\ 91 & \text{其它情况} \end{cases}$$

给出一种设计程序。这个程序虽然很短，但要证明它的正确性和可终止性，则不是一目了然的。所以，这个程序本身常被用来说明证明方法。

程序是：

```
n: = 1
z: = x
loop L: assert  f(x) = f^(n)(z),  n ≥ 1
     if z > 100 then  n: = n - 1
                      z: = z - 10
                else  n: = n + 1
                      z: = z + 11
                fi
     until  n = 0
     repeat
assert  z = f(x)
```

在循环之首的断言条款中预计

$$f(x)=f^{n}(z),\quad n\geqslant 1$$

是循环不变量；每当控制在标号 L 时都是成立。在程序终止时，变量 z 含 $f(x)$ 的值，因若控制到 until 条款具有 $n=0$ 循环就被引出，这时，$f(x)=f^{0}(z)=z$

使用传统的良基集合 $\langle\underset{\sim}{N},<\rangle$，1975 年曼那曾证明了这个程

序的终止性，可用终止函数

$$\tau(n,\ z)=-2\cdot z+21\cdot n+2\cdot\max(lll,\ x)\ \text{在}\ L$$

来证明。

我们现在用整数集合上的良基偏序$<_w$:

$$b<_w a\quad \text{iff}\quad a<b\leqslant 111$$

用整数的所有多重集合在对应的多重集合序关系下的集合〈$\mathscr{M}(\underset{\sim}{Z})$, $\prec\!\!\prec$〉，在L的选用终止函数τ给出$\mathscr{M}(\underset{\sim}{Z})$中的一个多重集合，定义为

$$\tau(n,\ z)=\{z,\ f(z),\cdots,f^{n-1}(z)\}$$

我们必须指出，对于每一循环迭代，这个函数是减小的。可以分成三种情况讨论：

（1）在L是$z>100$

这时，n，z都减少，并且取then的分支，故有

$$\tau(n-1,\ z-10)=\{z-10,\ \ f(z-10),\ \cdots,\ f^{n-2}(z-10)\}$$

由于$z>100$，故　$f(z)=z-10$，所以

$$\tau(n-1,\ z-10)=\{f(z),\ \ f^2(z),\cdots,f^{n-1}(z)\}$$

所以，从原来的多重集合$\{z,\ f(z),\ \cdots,f^{n-1}(z)\}$移去了$z$元，终止函数$\tau$的值得以减小。

（2）在L是　$90\leqslant z\leqslant 100$

这时，取else分支，n和z减小，给出

$\tau(n+1,\ z+11)=\{z+11,\ f(z+11), f^2(z+11)$，小，$f^n(z+11)\}$由于$z+11>100$，故有

$$f(z+11)=z+1\quad \text{以及}\ f^2(z+11)=f(z+1)$$

并且，或者$z+1=101$，或者是$z+1\leqslant 100$，二者都是

$$f(z+1)=91=f(z)$$

从而　　　　$f^2(z+11)=f(z)$

所以有

$$\tau(n+1,\ z+11)=\{z+11,\ z+1,\ f(z),\cdots,f^{n-1}(z)\}$$

而$z<z+1<z+11\leqslant 111$，故有

$$z+11<_w z,\ z+1<_w z$$

所以，多重集合从二个较小元 $z+11$, $z+1$ 代替 z 元而减小。

（3）在 L 是 $z<90$

这时取 else 分支，我们有

$\tau(n+1, z+11)=\{z+11, f(z+11), f^2(z+11), \cdots, f^n(z+11)\}$

由于 $z+11\leqslant 100$，故有

$$f(z+11)=91,\ f^2(z+11)=f(91)=91=f(z)$$

所以，

$$\tau(n+1, z+11)=\{z+11,\ 91,\ f(z), \cdots, f^{n-1}(z)\}$$

z 为二较小元（在 $<_w$ 意义下）$z+11$，91所替代，多重集合是减小的。

参考资料

〔1〕 Barnes, D. W. and Mack, J. M., An Algebraic Introduction to Mathematical Logic, Springer-verlag, 1975.

〔2〕 Barnise, J. edited, Handbook of Mathematical Logic, North-Holland, 1977.

〔3〕 Chang, C. C. and Keisler, H. J., Model Theory, North-Holland, 1973

〔4〕 Dalen, D. Van., Doets, H. C. and H. de Swart, Sets; Naive, Axiomatic and Applied, Pergamon Press, 1978.

〔5〕 Enderton, H. B., A Mathematical Introduction to Logic, Academic Press, 1972.

〔6〕 Enderton, H.B., Elements of Set Theory, Academic Press, 1977

〔7〕 Jech, T., Set Theory, Academic Press, 1978.

〔8〕 Kunen, K., Set Theory, AnIntroduction to Independence Proofs, North-Holland, 1980.

〔9〕 Kuratowski, K. and Mostowski, A., Set Theovy, North-Holland, 1976

〔10〕 Levy, A., Basic Set Theory, Springer-verlag, 1979.

〔11〕 Quigley, F. D., Manual of Axiomatic Set Theovy, Appleton-Century-Crofts, 1970.

〔12〕 Nachum Dershowitz and Zohar Manna, Proving Termination With Multiset Orderings, Communications of the ACM, Vol. 22, №, 8, August 1979 pp465～476.