Chapter 6

参数估计

6.2 设总体X服从几何分布，概率函数为

$$p(x;p) = p(1-p)^{1-x}, \quad x = 1, 2, 3, \cdots.$$

如果取得样本观测值为$x_1, x_2, \cdots, x_n$，求参数p的矩估计值与最大似然估计值。

解：

(1) 矩估计：几何分布的一阶原点矩

$$\nu_1(X) = E(X) = \frac{1}{p}.$$

用样本一阶原点矩V_1的观测值$v_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$作为$\nu_1(X)$的估计值，即有

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = \bar{x}.$$

由此得参数p的矩估计值

$$\widehat{p} = \frac{1}{\bar{x}}.$$

(2) 最大似然估计：似然函数为

$$L(p) = \prod_{i=1}^{n}(p(1-p)^{x_i-1}) = p^n(1-p)^{\sum\limits_{i=1}^{n} x_i - n}.$$

取对数，得

$$\ln L(p) = n\ln p + \left(\sum_{i=1}^{n} x_i - n\right)\ln(1-p).$$

求上述函数关于参数p的导数并令导数等于零，得似然方程

$$\frac{d\ln L(p)}{dp}=\frac{n}{p}-\frac{1}{1-p}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i-n\right)=0.$$

由此解得参数p的最大似然估计值

$$p^*=\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i}=\frac{1}{\bar{x}}.$$

□

6.3 设总体X的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其它},\end{cases}$$

其中$\theta>0$。如果取得样本观测值为$x_1,x_2,\cdots,x_n$，求参数θ的矩估计值与最大似然估计值。

解：

(1) 矩估计：总体X的期望

$$E(X)=\int_0^1 x\cdot\theta x^{\theta-1}dx=\theta\int_0^1 x^{\theta}dx=\frac{\theta}{\theta+1}.$$

用样本均值的观测值$\bar{x}=\frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i$作为$EX$的估计值，则有

$$\frac{\theta}{\theta+1}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i=\bar{x}.$$

由此得参数θ的矩估计值

$$\widehat{\theta}=\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}.$$

(2) 最大似然估计：似然函数为

$$L(\theta)=\prod_{i=1}^{n}(\theta x_i^{\theta-1})=\theta^n\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)^{\theta-1}.$$

取对数，得

$$\ln L(\theta) = n\ln\theta + (\theta-1)\sum_{i=1}^{n}\ln x_i.$$

上述函数对θ求导，并令导数等于零，得似然方程：

$$\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta} = \frac{n}{\theta} + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i = 0.$$

由此解得参数θ的最大似然估计值

$$\theta^* = -\frac{n}{\sum\limits_{i=1}^{n}\ln x_i}.$$

□

6.5 设总体X服从Γ分布，概率密度为

$$f(x;\lambda) = \begin{cases} \frac{1}{\lambda^2}xe^{-x/\lambda}, & x>0, \\ 0, & x\le 0, \end{cases}$$

其中参数$\lambda>0$。已知$X_1, X_2, \cdots, X_n$为取自总体X的一组样本，

(1) 求参数λ的最大似然估计值；

(2) 你得到的估计量是不是λ的无偏估计量？请说明理由。

解:

(1) 似然函数为

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{\lambda^2}x_ie^{-x_i/\lambda}\right) = \frac{1}{\lambda^{2n}}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i\right)e^{-n\bar{x}/\lambda}.$$

取对数，得

$$\ln L(\lambda) = -2n\ln\lambda + \sum_{i=1}^{n}\ln x_i - \frac{n\bar{x}}{\lambda}.$$

上述函数对λ求导，并令导数等于零，得似然方程：

$$\frac{d\ln L(\lambda)}{d\lambda} = -\frac{2n}{\lambda} + \frac{n\bar{x}}{\lambda^2} = 0.$$

由此解得参数λ的最大似然估计值为$\lambda^* = \frac{\bar{x}}{2}$，从而最大似然估计量为

$$\lambda^* = \frac{\overline{X}}{2}.$$

(2) X的数学期望

$$E(X) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda^2} x^2 e^{-x/\lambda} dx \xlongequal{x=\lambda t} \lambda \int_0^{+\infty} t^2 e^{-t} dx = \lambda\Gamma(3) = 2\lambda.$$

从而

$$E(\lambda^*) = \frac{1}{2} E(\overline{X}) = \lambda,$$

即统计量$\lambda^* = \dfrac{\overline{X}}{2}$为$\lambda$的无偏估计量。

□

6.7 证明：如果已知总体X的均值μ，则总体方差的无偏估计量为

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2,$$

其中$X_1, X_2, \cdots, X_n$是从总体X中抽取的样本。

证明： 计算$\widehat{\sigma}^2$的期望

$$E(\widehat{\sigma}^2) = E\left[\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2\right] = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} E[(X_i - \mu)^2] = \frac{1}{n} \cdot n\sigma^2 = \sigma^2.$$

所以，$\widehat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n} \sum\limits_{i=1}^{n} (X_i - \mu)^2$是总体方差$\sigma^2$的无偏估计量。 □

6.9 设总体X服从指数分布$e(\dfrac{1}{\lambda})$，其中$\lambda > 0$，抽取样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$，证明：

(1) 虽然样本均值$\overline{X}$是λ的无偏估计量，但$\overline{X}^2$却不是λ^2的无偏估计量；

(2) 统计量$\dfrac{n}{n+1}\overline{X}^2$是$\lambda^2$ 的无偏估计量。

证明：

(1) 已知总体$X \sim e(\dfrac{1}{\lambda})$且样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$与总体$X$同分布，则

$$E(X_i) = \lambda, \quad D(X_i) = \lambda^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

所以，

$$E(\overline{X}) = E\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n} \cdot n\lambda = \lambda.$$

由此得样本均值$\overline{X}$是λ的无偏估计量。又样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$相互独立，则

$$D(\overline{X}) = D\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \frac{1}{n^2}\cdot n\lambda^2 = \frac{\lambda^2}{n}.$$

于是，

$$E(\overline{X}^2) = D(\overline{X}) + [E(\bar{X})]^2 = \frac{\lambda^2}{n} + \lambda^2 \neq \lambda^2.$$

所以，$\overline{X}^2$不是λ^2的无偏估计量。

(2) 由(1)中关于$E(\overline{X}^2)$的计算结果得

$$E\left(\frac{n}{n+1}\overline{X}^2\right) = \frac{n}{n+1}E(\overline{X}^2) = \frac{n}{n+1}\left(\frac{\lambda^2}{n} + \lambda^2\right) = \lambda^2.$$

所以，统计量$\frac{n}{n+1}\overline{X}^2$是$\lambda^2$ 的无偏估计量。

□

6.11 从总体X中抽取样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$，设$c_1, c_2, \cdots, c_n$为常数，且$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$，证明：

(1) $\widehat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$是总体均值$\mu$的无偏估计量；

(2) 在所有这些无偏估计量$\hat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$ 中，样本均值$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$的方差最小。

证明：

(1) 设总体X的均值与方差分别是

$$E(X) = \mu, \quad D(X) = \sigma^2.$$

因为样本与总体同分布，则

$$E(X_i) = \mu, \quad D(X_i) = \sigma^2, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

又$\sum_{i=1}^{n} c_i = 1$，所以有

$$E(\widehat{\mu}) = E\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i E(X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i \mu = \mu.$$

所以，统计量$\widehat{\mu}$是总体均值μ的无偏估计量。

(2) 样本$X_1, , X_2, \cdots, X_n$相互独立，则有

$$D(\widehat{\mu}) = D\left(\sum_{i=1}^{n} c_i X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 D(X_i) = \sum_{i=1}^{n} c_i^2 \sigma^2.$$

由Cauchy不等式，有

$$1 = \left[\sum_{i=1}^{n}(c_i \times 1)\right]^2 \leq \left(\sum_{i=1}^{n} c_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right) = n\sum_{i=1}^{n} c_i^2,$$

其中的不等式取等号当且仅当$c_1 = c_2 = \cdots = c_n$，即

$$c_i = \frac{1}{n}, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

所以，对任意的无偏估计量$\widehat{\mu} = \sum_{i=1}^{n} c_i X_i$，

$$D(\widehat{\mu}) \geq \frac{\sigma^2}{n},$$

且仅当$c_1 = c_2 = \cdots = c_n = \dfrac{1}{n}$时等号成立，即样本均值$\overline{X}$的方差最小。

□

6.13 某工厂生产滚珠，从某日生产的产品中随机抽取9个，测得直径（单位：mm）如下：

14.6	14.7	15.1	14.9	14.8	15.0	15.1	15.2	14.8

设滚珠直径服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，求直径均值μ的置信水平为0.95的置信区间，如果

(1) 已知直径标准差$\sigma = 0.15$；

(2) 未知σ。

解： 由已知条件，$n = 9$，$\alpha = 0.05$。样本均值与样本标准差观测值分别为

$$\bar{x} \approx 14.91(\mathrm{mm}), \quad s \approx 0.203(\mathrm{mm}).$$

(1) 该问题为正态总体、方差已知条件下求总体均值的置信区间，公式为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times u_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times u_{\alpha/2}\right).$$

查表得

$$u_{\frac{\alpha}{2}}=u_{0.025}=1.96.$$

由此得

$$\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\times u_{\frac{\alpha}{2}}=\frac{0.15}{\sqrt{9}}\times 1.96=0.098.$$

故均值μ的置信水平为0.95的置信区间为

$$(14.91-0.098,14.91+0.098)\approx(14.81,15.01)\ (\mathrm{mm}).$$

(2) 该问题为正态总体、方差未知条件下求总体均值的置信区间，公式为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\times t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}\times t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\right).$$

查表得

$$t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})=t_8(0.025)=2.31.$$

由此得

$$\frac{s}{\sqrt{n}}\times t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})=\frac{0.203}{\sqrt{9}}\times 2.31\approx 0.156.$$

故均值μ的置信水平为0.95的置信区间为

$$(14.91-0.156,14.91+0.156)\approx(14.75,15.07)\ (\mathrm{mm}).$$

□

6.14 设总体X服从整天分布$N(\mu,\sigma_0^2)$，其中σ_0为已知数。需要抽取容量n为多大的样本，才能使总体均值μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间的长度不大于l?

解： 在正态总体、方差已知条件下，总体均值μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间是

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\times u_{\frac{\alpha}{2}},\overline{X}+\frac{\sigma_0}{\sqrt{n}}\times u_{\frac{\alpha}{2}}\right).$$

该置信区间的长度不大于l，即

$$2 \times \frac{\sigma_0}{\sqrt{n}} \times u_{\frac{\alpha}{2}} \le l.$$

解得

$$n \ge \frac{4\sigma_0^2 u_{\frac{\alpha}{2}}^2}{l^2}.$$

□

6.16 测得16个零件的长度（单位：mm）如下：

12.15	12.12	12.01	12.08	12.09	12.16	12.03	12.01
12.06	12.13	12.07	12.11	12.08	12.01	12.03	12.06

设零件长度服从正态分布$N(\mu, \sigma^2)$，求零件长度的标准差σ的置信水平为0.99的置信区间，如果

(1) 已知零件长度的均值$\mu = 12.08$；

(2) 未知μ。

解： 由已知条件，$n = 16$，$\alpha = 0.01$。

(1) 该问题是正态总体、均值已知条件下求总体标准差的置信区间，由于总体方差σ^2的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(\frac{\alpha}{2})}, \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(1 - \frac{\alpha}{2})} \right).$$

故总体标准差σ的置信区间公式为

$$\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(\frac{\alpha}{2})}}, \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\chi_n^2(1 - \frac{\alpha}{2})}} \right).$$

由已给的样本观测值计算得

$$\sum_{i=1}^{16} (x_i - 12.08)^2 = 0.037(\mathrm{mm}^2).$$

查表得

$$\chi_n^2(1-\frac{\alpha}{2})=\chi_{16}^2(0.995)=5.14,\quad \chi_n^2(\frac{\alpha}{2})=\chi_{16}^2(0.005)=34.3.$$

故标准差σ的置信水平为0.99的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{0.037}{34.3}},\sqrt{\frac{0.037}{5.14}}\right)\approx(0.0328,0.0848)\ (\mathrm{mm}).$$

(2) 该问题是正态总体、均值未知条件下求总体标准差的置信区间，由于总体方差σ^2的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})},\ \frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})}\right).$$

故总体标准差σ的置信区间公式为

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})}},\ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})}}\right).$$

样本方差的观测值为$s^2=0.00244$，查表得

$$\chi_{n-1}^2(1-\frac{\alpha}{2})=\chi_{15}^2(0.995)=4.60,\quad \chi_{n-1}^2(\frac{\alpha}{2})=\chi_{15}^2(0.005)=32.8.$$

标准差σ的置信水平为0.99的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{15\times0.00244}{32.8}},\sqrt{\frac{15\times0.00244}{4.60}}\right)\approx(0.0334,0.0892)\ (\mathrm{mm}).$$

□

6.17 进行30次独立测试，测得零件加工时间（单位：s）的样本均值$\bar{x}=5.5$，样本标准差$s=1.7$。设零件加工时间服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，求零件加工时间的均值μ及标准差σ 的置信水平为0.95的置信区间。

解： 该问题是对正态总体的均值和标准差的区间估计（总体均值、方差均未知），公式分别为

$$\left(\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\times t_{n-1}(\frac{\alpha}{2}),\ \overline{X}+\frac{S}{\sqrt{n}}\times t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})\right)$$

与

$$\left(\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})}},\ \sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}}\right).$$

由题目条件$n=30$，$\alpha=0.05$，查表得T分布的相应分位点为

$$t_{n-1}(\frac{\alpha}{2})=t_{29}(0.025)=2.04,$$

总体均值μ的置信水平为0.95的置信区间为

$$\left(5.5-\frac{1.7}{\sqrt{30}}\times 2.04, 5.5+\frac{1.7}{\sqrt{30}}\times 2.04\right)\approx(4.87,6.13)\ (\mathrm{s});$$

χ^2分布的相应分位点为

$$\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})=\chi^2_{29}(0.975)=16.0,\quad \chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})=\chi^2_{29}(0.025)=45.7,$$

总体标准差σ的置信水平为0.95的置信区间为

$$\left(\sqrt{\frac{29\times 1.7^2}{45.7}},\sqrt{\frac{29\times 1.7^2}{16.0}}\right)\approx(1.35,2.29)\ (\mathrm{s}).$$

□

6.18 两批导线，从第一批中抽取4根，从第二批中抽取5根，测得其电阻（单位：Ω）如下：

第一批导线：	0.143	0.142	0.143	0.137	
第二批导线：	0.140	0.142	0.136	0.138	0.140

设这两批导线的电阻分别服从正态分布$N(\mu_1,\sigma_1^2)$及$N(\mu_2,\sigma_2^2)$，其中μ_1,μ_2及σ_1,σ_2都是未知参数，求这两批导线电阻的均值差$\mu_1-\mu_2$（假定$\sigma_1=\sigma_2$）及方差比$\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为0.95的置信区间。

解： 该问题是两个正态总体，

(1) 方差未知但相等条件下估计均值的差，及

(2) 均值未知条件下估计方差的比，

公式分别为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm S\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\times t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})\right)$$

及

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\times\frac{1}{F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\times\frac{1}{F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}\right),$$

其中$S=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}$。

由已知条件，$m=4$，$n=5$，$\alpha=0.05$。由样本观测值计算得

$$\bar{x}=0.14125(\Omega),\qquad s_1^2=8.25\times10^{-6}(\Omega^2),$$
$$\bar{y}=0.1392(\Omega),\qquad s_2^2=5.20\times10^{-6}(\Omega^2).$$

从而$\bar{x}-\bar{y}=0.00205$，S的观测值为

$$s=\sqrt{\frac{3\times8.25\times10^{-6}+4\times5.20\times10^{-6}}{4+5-2}}\approx2.55\times10^{-3}.$$

查表得T分布的相应分位点为

$$t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})=t_7(0.025)=2.36.$$

由此得

$$s\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\times t_{m+n-2}(\frac{\alpha}{2})=2.55\times10^{-3}\times\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}\times2.36\approx0.00404.$$

均值差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.95的置信区间为

$$(0.00205-0.00404,0.00205+0.00404)\approx(-0.002,0.006)\ (\Omega).$$

又查得F分布的相应分位点为

$$F_{m-1,n-1}(\frac{\alpha}{2})=F_{3,4}(0.025)=9.98,$$
$$F_{m-1,n-1}(1-\frac{\alpha}{2})=\frac{1}{F_{n-1,m-1}(\frac{\alpha}{2})}=\frac{1}{F_{4,3}(0.025)}=\frac{1}{15.10}.$$

从而方差比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为0.95的置信区间为

$$\left(\frac{8.25\times10^{-6}}{5.20\times10^{-6}}\times\frac{1}{9.98},\frac{8.25\times10^{-6}}{5.20\times10^{-6}}\times15.10\right)\approx(0.159,23.96).$$

□

6.23 从汽车轮胎厂生产的某种轮胎中抽取10个样品进行磨损试验，直至轮胎行驶到磨坏为止，测得它们的行驶路程（单位：km）如下：

41250	41010	42650	38970	40200
42550	43500	40400	41870	39800

设汽车轮胎行驶路程服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，求：

(1) μ的置信水平为0.95的单侧置信下限；

(2) σ的置信水平为0.95的单侧置信上限。

解： 由已知条件，$n=10$，$\alpha=0.05$。计算得样本均值$\overline{X}$、样本方差S^2与样本标准差S的观测值分别为

$$\bar{x}=41220(\mathrm{km}),\quad s^2\approx2030156(\mathrm{km}^2),\quad s\approx1425(\mathrm{km}).$$

(1) 该问题是正态总体、方差未知条件下求总体均值的单侧置信下限，公式为

$$\overline{X}-\frac{S}{\sqrt{n}}\times t_{n-1}(\alpha).$$

查表得

$$t_{n-1}(\alpha)=t_9(0.05)=1.833.$$

得

$$\frac{S}{\sqrt{n}}\times t_{n-1}(\alpha)=\frac{1425}{\sqrt{10}}\times1.833\approx826,$$

故μ的置信水平为0.95的单侧置信下限为

$$41220-826=40394(\mathrm{km}).$$

(2) 该问题是正态总体、均值未知条件下求总体标准差的单侧置信上限，公式为

$$\sqrt{\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\alpha)}}.$$

查表得

$$\chi^2_{n-1}(1-\alpha) = \chi^2_9(0.95) = 3.33.$$

故σ的置信水平为0.95的单侧置信上限为

$$\sqrt{\frac{9\times 2030156}{3.33}} \approx 2342(\mathrm{km}).$$

□