16.3 二重积分的变量变换

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 求抛物线 $x^2 = my, x^2 = ny$ 和直线 $y = \alpha x, y = \beta x$ 所围区域 D 的面积 S_D, 其中 $0 < m < n$ 在 $0 < \alpha < \beta$ (图**??**).

解:

$$S_D = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

为了简化积分区域, 作变换

$$u = \frac{x^2}{y}, \quad v = \frac{y}{x},$$

即

$$x = uv, \qquad y = uv^2.$$

则 xy 平面上的区域 D 与 uv 平面的矩形区域 $\Delta = [m, n] \times [\alpha, \beta]$ 一一对应, 且

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} v & u \\ v^2 & 2uv \end{vmatrix} = uv^2 > 0, \quad (u, v \in \Delta),$$

所以

$$\begin{aligned} S_D &= \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int \int \Delta uv^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_m^n u\mathrm{d}u \cdot \int_\alpha^\beta v^2 dv = \frac{1}{6}(n^2 - m^2)(\beta^3 - \alpha^3). \end{aligned}$$

□

例 2 计算二重积分 $I = \iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $xy = 1$ 在 $xy = 2$ 在 $y = x$ 和 $y = 4x$ 所围成的区域 (图**??**).

解: 直接积分会很复杂. 根据被积函数和区域的特点, 显然可以作以下变换

$$u = xy, \qquad v = \frac{y}{x},$$

即 $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ 在 $y = \sqrt{uv}$. xy 平面的区域 D 与 uv 平面的矩形 $\Delta = [1, 2] \times [1, 4]$ 一一对应, 且

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2\sqrt{uv}} & -\dfrac{\sqrt{u}}{2v\sqrt{v}} \\ \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{v}{u}} & \dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{u}{v}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v} > 0.$$

所以

$$I=\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_1^4 dv\int_1^2\frac{1}{2v}f(u)\mathrm{d}u=\ln 2\cdot\int_1^2 f(u)\mathrm{d}u.$$

□

例 3 计算二重积分

$$I=\iint\limits_D\frac{x^2\sin xy}{y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D 是由曲线 $x^2=ay$ 在 $x^2=by$ 在 $y^2=cx$ 在 $y^2=\mathrm{d}x$ $(0<a<b$ 在 $0<c<d)$ 围成的区域(图**??**).

解: 作变换

$$\begin{cases} u=\frac{x^2}{y}, & a\le u\le b,\\ v=\frac{y^2}{x}, & c\le v\le d,\end{cases}$$

即

$$\begin{cases} x &= \sqrt[3]{u^2v},\\ y &= \sqrt[3]{uv^2}.\end{cases}$$

所以

$$J(u,v)=\frac{1}{3},$$

于是

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{3}\int_a^b \mathrm{d}u\int_c^{\mathrm{d}} u\sin uv dv\\ &= \frac{\sin bc-\sin ac}{3c}-\frac{\sin bd-\sin ad}{3d}.\end{aligned}$$

□

例 4 计算

$$I=\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x^2+y^2}},$$

其中 D 为圆域: $x^2+y^2\le 1$.

解: 作极坐标变换, 注意到原点在 D 内, 则有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1+x^2+y^2}} &= \int_0^{2\pi}d\theta\int_0^1\frac{r}{\sqrt{1+r^2}}dr\\ &= \int_0^{2\pi}\left[\sqrt{1+r^2}\right]_0^1 d\theta=2(\sqrt{2}-1)\pi.\end{aligned}$$

□

例 5 计算 $I=\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le R^2\}$.

解: 首先利用极坐标变换, 有

$$I=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R r\mathrm{e}^{-r^2}dr=\pi(1-\mathrm{e}^{-R^2}).$$

其次注意, 不用极坐标变换, 在直角坐标系下计算 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 会遇到计算不定积分 $\int \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}y$ 和 $\int \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 的难题.

□

例 6 求椭球体

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\le 1$$

的体积.

解: 由对称性, 椭球体的体积 V 是第一卦限部分体积的 8 倍, 这一部分的曲顶是 $z=c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}$, 其中 $(x,y)\in D$,

$$D=\left\{(x,y)\middle|0\le y\le b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}},0\le x\le a\right\}$$

是 xy 平面上椭圆的四分之一, 所以

$$V=8\iint\limits_D c\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

应用广义极坐标变换

$$T:x=ar\cos\theta,y=br\sin\theta,0\le r\le 1,\quad 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}.$$

计算可得 $J(r,\theta)=abr$. 所以

$$V=8\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 c\sqrt{1-r^2}abrdr=8abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^1 r\sqrt{1-r^2}dr=\frac{4\pi}{3}abc.$$

当 $a=b=c=R$ 时, 得到球的体积为 $\frac{4\pi}{3}R^3$.

□

例 7 求球 $x^2+y^2+z^2\le R^2$ 被圆柱面 $x^2+y^2=Rx$ 所割下部分的维维安尼 *(Viviani)* 体 *(*图**??***)* 的体积.

解: 由对称性, 只要求出在第一卦限内的部分体积再乘以 4 即可. 第一卦限曲顶为 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2},y\ge 0,x^2+y^2\le Rx$. 所以,

$$V=4\iint\limits_D\sqrt{R^2-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D=\{(x,y)\mid y\ge 0,x^2+y^2\le Rx\}$. 用极坐标变换, 可得

$$\begin{aligned}V&=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_0^{R\cos\theta}\sqrt{R^2-r^2}rdr\\&=\frac{4}{3}R^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^3\theta)d\theta=\frac{4}{3}R^3\left(\frac{\pi}{2}-\frac{2}{3}\right).\end{aligned}$$

□

习题

1. 引入新变量 u, v 后, 将下列积分化为累次积分.
(1) 在 $\iint\limits_D f(3x+4y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\ |x^2+y^2\leqslant 1\}$, 令 $u=35x+\frac{4}{5}y, v=-\frac{4}{5}x+\frac{4}{5}y$;
(2) 在 $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{1-2x}^{4-2x} f(x,y)\mathrm{d}y$, 令 $u=2x+y, v=x-y$.

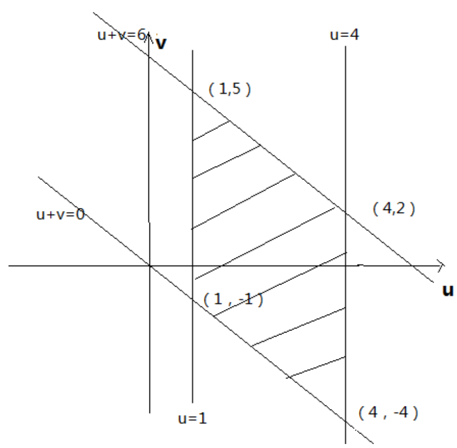
解: (1) 由 $u=\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y, v=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{4}{5}y$, 可得 $x=\dfrac{3}{5}u-\dfrac{4}{5}v, y=\dfrac{4}{5}u+\dfrac{3}{5}v$, 于是 xy 平面区域 D 与 uv 平面的 $D'=\{(u,v)|u^2+v^2\leqslant 1\}$ 一一对应, 并且,

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{3}{5} & \dfrac{4}{5} \\ -\dfrac{4}{5} & \dfrac{3}{5} \end{vmatrix}=1\neq 0,$$

所以

$$\begin{aligned} I=\iint\limits_D f(3x+4y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D'} f(5u)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &= \int_{-1}^1 \mathrm{d}v\int_{-\sqrt{1-v^2}}^{\sqrt{1-v^2}} f(5u)\mathrm{d}u \\ &= \int_{-1}^1 \mathrm{d}u\int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(5u)\mathrm{d}v. \end{aligned}$$

(2) 由 $u=2x+y, v=x-y$ 反解得, $x=\frac{u}{3}+\frac{v}{3}, y=\frac{u}{3}+-\frac{2v}{3}$, 于是 xy 平面区域 $D=\{(x,y)|1-2x\leqslant y\leqslant 4-2x, 0\leqslant x\leqslant 2\}$, 与 uv 平面区域 $D'=\{(u,v)|-u\leqslant v\leqslant 6-u, 1\leqslant x\leqslant 4\}$ 是一一对应的, 如下图所示,



,

且有

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{3} \\ \dfrac{1}{3} & -\dfrac{2}{3} \end{vmatrix}=-\dfrac{1}{3}\neq 0,,$$

所以

$$\begin{aligned} I=\iint\limits_D f(3x+4y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{3}\int_1^4 \mathrm{d}u\int_{-u}^{\sqrt{6-u}} f(\frac{u+v}{3},\frac{u-2v}{3})\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{3}\int_{-4}^{-1}\mathrm{d}v\int_{-v}^{4} f(\frac{u+v}{3},\frac{u-2v}{3})\mathrm{d}u+ \\ &= \frac{1}{3}\int_{-1}^{2}\mathrm{d}v\int_{1}^{4} f(\frac{u+v}{3},\frac{u-2v}{3})\mathrm{d}u+ \\ &= \frac{1}{3}\int_{2}^{5}\mathrm{d}v\int_{1}^{6-v} f(\frac{u+v}{3},\frac{u-2v}{3})\mathrm{d}u. \end{aligned}$$

□

2. 用极坐标计算下列二重积分.

(1) 在 $\iint\limits_D f(2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2x\}$;

(2) 在 $\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 1\le x^2+y^2\le \pi^2\}$;

(3) 在 $\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 由阿基米德线 $r=\theta$ 与射线 $\theta=\pi$ 围成.

解: (1) 解法一: 做极坐标变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 知区域 D 与 $\triangle=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant 2\cos\theta,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}$ 一一对应, 则

$$\begin{aligned} \iint\limits_D f(2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r\cdot r(2\cos\theta-3\sin\theta)\mathrm{d}r \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(2\cos\theta-3\sin\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{2\cos\theta} r^2\mathrm{d}r \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{8\cos^3\theta}{3}(2\cos\theta-3\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{16}{3}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta-\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}8\cos^3\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{16}{3}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta-0 \\ &= \frac{32}{3}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^4\theta\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{32}{3}\frac{3}{4}\frac{1}{2}\frac{\pi}{2} \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

解法二: 做极坐标变换 $\begin{cases} x=1+r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 知区域 D 与 $\triangle=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant 1,-\frac{\pi}{2}\leqslant\theta\leqslant\frac{\pi}{2}\}$ 一一对应, 且有

$$J(r,\theta)=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r,,$$

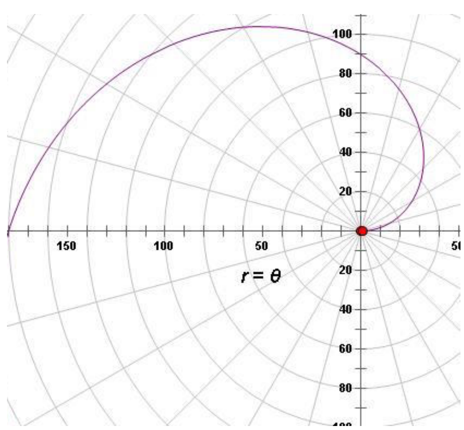
所以

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D f(2x-3y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cdot(2(1+r\cos\theta)-3r\sin\theta)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1(2+2r^2\cos\theta-3r^2\sin\theta)\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}1+\frac{2}{3}\cos\theta-\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= 2\pi
\end{aligned}
$$

(2) 做极坐标变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 知区域 D 与 $\triangle=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant\pi, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$ 一一对应, 则

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D \cos\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi} r\cdot\cos r^2\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\cos r^2\mathrm{d}r^2 \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\sin\pi^2-\sin 1)\mathrm{d}\theta \\
&= \pi(\sin\pi^2-\sin 1).
\end{aligned}
$$

(3) 做极坐标变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 知区域 D 与 $\triangle=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant\theta, 0\leqslant\theta\leqslant\pi\}$ 一一对应, 如下图所示,



,

则

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D y\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\theta} r\cdot r\sin r\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\cos r^2\mathrm{d}r \\
&= \frac{1}{3}\int_0^{\pi}\theta^3\sin\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{1}{3}\left(-\int_0^{\pi}\theta^3\mathrm{d}\cos\theta\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\pi^3+3\int_0^{\pi}\theta^2\mathrm{d}\sin\theta\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\pi^3+3(\theta^2\sin\theta|_0^{\pi}-2\int_0^{\pi}\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta)\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\pi^3+6\int_0^{\pi}\theta\sin\theta\mathrm{d}\theta\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(\pi^3+6(\theta\cos\theta|_0^{\pi}-\int_0^{\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta)\right) \\
&= \frac{1}{3}\pi^3-2\pi.
\end{aligned}
$$

□

3. 进行适当的坐标变换, 计算下列积分.

(1) 在 $\iint\limits_D |\cos(x+y)|\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid |x|+|y|\le 2\pi\}$;

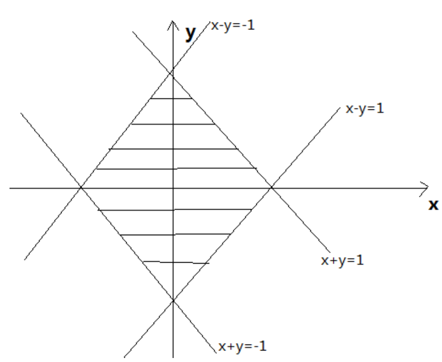
(2) 在 $\iint\limits_D (x-y)\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中$D=\{(x,y)\mid 0\le x+y\le\pi, 0\le x-y\le\pi\}$;

(3) 求 $\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 D 是由 $x=0$ 在 $y=0$ 和 $x+y=1$ 所围区域;

解: (1) 作以下变换

$$u=x+y,\qquad v=x-y,$$

即 $x=\dfrac{u+v}{2}$ 在 $y=\dfrac{u-v}{2}$. xy 平面的区域 D 与 uv 平面的矩形 $D'=\{(u,v)|-2\pi\leqslant u\leqslant 2\pi, -2\pi\leqslant v\leqslant 2\pi\}$ 一一对应, 如下图所示,



,

且

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0.$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_D |\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-2\pi}^{2\pi}\mathrm{d}v\int_{-2\pi}^{2\pi}\frac{1}{2}|\cos u|\mathrm{d}u\\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi}\mathrm{d}v\int_{0}^{2\pi}|\cos u|\mathrm{d}u\\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi}\mathrm{d}v\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} cosu\mathrm{d}u+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} cosu\mathrm{d}u+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} cosu\mathrm{d}u\right)\\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi}\left(\sin u|_0^{\frac{\pi}{2}}+\sin u|_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}+\sin u|_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\right)\mathrm{d}v\\ &= \int_{-2\pi}^{2\pi}4\mathrm{d}v\\ &= 16.\end{aligned}$$

(2) 作以下变换

$$u=x+y,\qquad v=x-y,$$

即 $x=\dfrac{u+v}{2}$ 在 $y=\dfrac{u-v}{2}$. xy 平面的区域 D 与 uv 平面的矩形 $D'=\{(u,v)|0\leqslant u\leqslant\pi,0\leqslant v\leqslant\pi\}$ 一一对应, 且

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{1}{2} & \dfrac{1}{2}\\ \dfrac{1}{2} & -\dfrac{1}{2}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2}\neq 0.$$

所以

$$\begin{aligned}\iint_D (x-y)\cos(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}v\int_0^{\pi}\frac{1}{2}v\cos u\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\int_0^{\pi}v\mathrm{d}v\int_0^{\pi}\cos u\mathrm{d}u\\ &= \frac{1}{2}\cdot\pi\cdot\sin u|_0^{\pi}\\ &= 0.\end{aligned}$$

(3) 作以下变换

$$u=x+y,\qquad v=\frac{x-y}{x+y},$$

即 $x=\dfrac{u(1+v)}{2}$ 在 $y=\dfrac{u(1-v)}{2}$. xy 平面的区域 D 与 uv 平面的矩形 $D'=\{(u,v)|0\leqslant u\leqslant 1,-1\leqslant v\leqslant 1\}$ 一一对应, 且

$$J(u,v)=\begin{vmatrix}\dfrac{1+v}{2} & \dfrac{1-v}{2}\\ \dfrac{u}{2} & -\dfrac{u}{2}\end{vmatrix}=-\frac{u}{2}\neq 0.$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \mathrm{e}^{\frac{x-y}{x+y}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{2}\int_0^1 \mathrm{d}u\int_{-1}^1 u\mathrm{e}^v\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 u\mathrm{d}u\int_{-1}^1 \mathrm{e}^v\mathrm{d}v \\ &= \frac{1}{2}\cdot\frac{u^2}{2}|_0^1\cdot \mathrm{e}^v|_{-1}^1 \\ &= \frac{\mathrm{e}-\mathrm{e}^{-1}}{4}.\end{aligned}$$

□

4. 求由下列曲面所围立体 V 的体积.
(1) 在 V 是由 $z=x^2+y^2$ 和 $2z=x^2+y^2$ 所围的体积;
(2) 在 V 是由曲面 $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ 和 $z=x+y$ 所围的立体.

解: (1) 立体 V 在 XOY 平面上的投影区域为 $D=\{(x,y)|0\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$, 且注意到曲面 $z=x^2+y^2$ 在 D 上总是大于 $2z=x^2+y^2$, 于是 V 的体积为 $I=\iint\limits_D (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

作极坐标变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta\end{cases}$ 知区域 D 与 $\triangle=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$ 一一对应, 于是有

$$\begin{aligned}I=\iint\limits_D (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^2 r\cdot(r-\frac{1}{2}r^2)\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\cdot\int_0^2 r^2-\frac{1}{2}r^3)\mathrm{d}r \\ &= 2\pi\cdot\left(\frac{1}{3}r^3-\frac{1}{8}r^4\right)|_0^2 \\ &= \frac{4}{3}\pi\end{aligned}$$

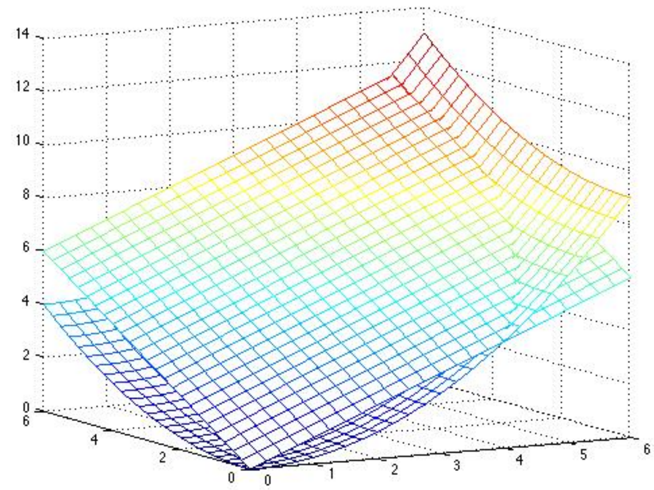
(2) 曲面 $z=\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}$ 和 $z=x+y$ 所围的立体图形如下图所示. 立体 V 在 XOY 平面上的投影区域为 $D=\{(x,y)|\frac{x^2}{4}-x+\frac{y^2}{9}-y\leqslant 0\}$, 且注意到曲面 $z=x+y$ 在 D 上总是大于 $z=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}$, 于是 V 的体积为 $I=\iint\limits_D x+y-(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

又因为

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}=\left(\frac{x}{2}-1\right)^2+\left(\frac{y}{3}-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{13}{4}$$

作极坐标变换 $\begin{cases} \frac{x}{2}-1=r\cos\theta, \\ (\frac{y}{3}-\frac{3}{2}=r\sin\theta\end{cases}$ 即 $\begin{cases} x=2r\cos\theta+2, \\ y=3r\sin\theta+\frac{9}{2}\end{cases}$ 知区域 D 与 $\triangle=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant \frac{\sqrt{13}}{2}, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$ 一一对应, 且

$$J(u,v)=\begin{vmatrix} 2\cos\theta & -2r\sin\theta \\ 3\sin\theta & 3r\cos\theta\end{vmatrix}=6r\neq 0.$$



,

于是有

$$
\begin{aligned}
I=\iint\limits_{D} x+y-(\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9})\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\sqrt{13}}{2}} 6r\cdot(\frac{13}{4}r^2)\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\cdot\int_0^{\frac{\sqrt{13}}{2}}(\frac{39}{2}r-6r^3)\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\cdot\left(\frac{39}{4}r^2-\frac{3}{2}r^4\right)\Big|_0^{\frac{\sqrt{13}}{2}} \\
&= \frac{507}{16}\pi
\end{aligned}
$$

□

---

5. 作适当变换, 把下列二重积分化为定积分.

(1) 在 $\iint\limits_{D} f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\ |1\leqslant\ x^2+y^2\leq 4\}$;

(2) 在 $\iint\limits_{D} f(\frac{y}{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant x\}$;

(3) 在 $\iint\limits_{D} f(ax+by)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $a^2+b^2\neq 0, D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leqslant 1\}$;

(4) 在 $\iint\limits_{D} f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x\frac{x}{\mathrm{e}}\leqslant y\leqslant \mathrm{e}x, 1\leqslant xy\leqslant 3\}$.

解: (1) 做极坐标变换 $\begin{cases} x=r\cos\theta, \\ y=r\sin\theta \end{cases}$ 知区域 D 与 $\triangle=\{(r,\theta)|1\leqslant r\leqslant 2, 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$ 一一对应, 则

$$
\begin{aligned}
f(\sqrt{x^2+y^2})\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_1^2 r\cdot f(r^2)\mathrm{d}r \\
&= 2\pi\int_0^{2\pi} rf(r^2)\mathrm{d}r.
\end{aligned}
$$

(2) 做极坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ 知区域 D 与 $\triangle = \{(r,\theta)|0 \leqslant r \leqslant \cos\theta, -\frac{\pi}{2} \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}\}$ 一一对应, 则

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(\frac{y}{x})\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} r\cdot f(\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta})\mathrm{d}r \\ &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\tan\theta)\mathrm{d}\theta\int_0^{\cos\theta} r\mathrm{d}r \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta f(\tan\theta)\mathrm{d}\theta.\end{aligned}$$

(3) 作以下变换

$$u = ax + by, \qquad v = -bx + ay,$$

即 $x = \dfrac{au - bv}{a^2+b^2}$ 在 $y = \dfrac{bu+av}{a^2+b^2}$. xy 平面的区域 D 与 uv 平面的矩形 $D' = \{(u,v)|u^2+v^2 \leqslant a^2+b^2\}$ 一一对应, 且

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{a}{a^2+b^2} & \dfrac{b}{a^2+b^2} \\ \dfrac{-b}{a^2+b^2} & -\dfrac{a}{a^2+b^2} \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(ax+by)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{a^2+b^2}}\mathrm{d}u\int_{-\sqrt{a^2+b^2-u^2}}^{\sqrt{a^2+b^2}-u^2}\mathrm{d}v \\ &= \int_{-\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{a^2+b^2}} f(u)(\sqrt{a^2+b^2-u^2}+\sqrt{a^2+b^2-u^2})\mathrm{d}u \\ &= 2\int_{-\sqrt{a^2+b^2}}^{\sqrt{a^2+b^2}} f(u)\sqrt{a^2+b^2-u^2}+\sqrt{a^2+b^2-u^2}\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

(4) 作以下变换

$$u = xy, \qquad v = \frac{y}{x},$$

即 $x = \sqrt{\dfrac{u}{v}}$ 在 $y = \sqrt{uv}$. xy 平面的区域 D 与 uv 平面的矩形 $D' = \{(u,v)|1 \leqslant u \leqslant 3, \frac{1}{\mathrm{e}} \leqslant x \leqslant \mathrm{e}\}$ 一一对应, 且

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & \dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \\ -\dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & \dfrac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}v^{-1} \neq 0.$$

所以

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(xy)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_1^3\mathrm{d}u\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}}\frac{1}{2}v^{-1}f(u)\mathrm{d}v \\ &= \int_1^3 f(u)\mathrm{d}u\int_{\mathrm{e}^{-1}}^{\mathrm{e}}\frac{1}{2}v^{-1}\mathrm{d}v \\ &= \int_1^3 f(u)\mathrm{d}u.\end{aligned}$$

$\square$

6. 设 $f(x,y)$ 为连续函数, 且 $f(x,y)=f(y,x)$. 证明:

$$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^x f(1-x,1-y)\mathrm{d}y.$$

解: 作以下变换

$$u = a_1x + b_1y + c_1, \qquad v = a_2x + b_2y + c_2,$$

即 $x = \dfrac{b_2u - b_1v + b_1c_1 - b_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$, $y = -\dfrac{a_2u - a_1v + a_1c_2 - a_2c_1}{a_1b_2 - a_2b_1}$. xy 平面的区域 D 与 uv 平面的矩形 $D' = \{(u,v)|u^2+v^2 \leqslant 1\}$ 一一对应, 且

$$J(u,v) = \begin{vmatrix} \dfrac{b_2}{a_1b_2 - a_2b_1} & \dfrac{a_2}{a_1b_2 - a_2b_1} \\ \dfrac{-b_1}{a_1b_2 - a_2b_1} & -\dfrac{a_1}{a_1b_2 - a_2b_1} \end{vmatrix} = -1 \neq 0.$$

所以由椭圆围城的面积为

$$S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{|a_1b_2 - a_2b_1|} S_{D'},$$

其中 $S_{D'}$ 表示 D' 的面积.

$$\begin{aligned} S = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \frac{1}{|a_1b_2 - a_2b_1|} S_{D'} \\ &= \frac{\pi}{|a_1b_2 - a_2b_1|} S_{D'}. \end{aligned}$$

$\square$