《常微分方程》习题解答

东北师范大学微分方程教研室（第二版）

高等教育出版社

习题 1.2

1 求下列可分离变量微分方程的通解：

(1) $ydy = xdx$

解：积分，得 $\frac{1}{2}y^2 = \frac{1}{2}x^2 + c_1$ 即 $x^2 - y^2 = c$

(2) $\frac{dy}{dx} = y\ln y$

解： $y = 0,\quad y = 1$ 为特解，当 $y \neq 0,\quad y \neq 1$ 时，$\frac{dy}{y\ln y} = dx$，

积分，得 $\ln|\ln y| = x + c_1,\qquad \ln y = \pm e^{c_1}e^x = ce^x \quad c \neq 0$，即 $y = e^{ce^x}$

(3) $\frac{dy}{dx} = e^{x-y}$

解： 变形得 $e^y dy = e^x dx$ 积分，得 $e^y - e^x = c$

(4) $\tan ydx - \cot xdy = 0$

解：变形得 $\frac{dy}{dx} = \frac{\tan y}{\cot x}$， $y = 0$ 为特解，当 $y \neq 0$ 时，$\frac{\cos y}{\sin y}dy = \frac{\sin x}{\cos x}dx$.

积分，得 $\ln|\sin y| = -\ln|\cos x| + c_1,\qquad \ln|\sin y\cos x| = c_1$，

即 $\sin y\cos x = \pm e^{c_1} = c,\quad c \neq 0$

2．求下列方程满足给定初值条件的解：

(1) $\frac{dy}{dx} = y(y-1), y(0) = 1$

解： $y = 0,\quad y = 1$ 为特解，当 $y \neq 0,\quad y \neq 1$ 时，$(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y})dy = dx$，

积分，得 $\ln\left|\frac{y-1}{y}\right| = x + c_1,\qquad \frac{y-1}{y} = \pm e^{c_1}e^x = ce^x, c \neq 0$

将 $y(0) = 1$ 代入，得 $c = 0$，即 $y = 1$ 为所求的解。

(2) $(x^2 - 1)y' + 2xy^2 = 0, y(0) = 1$

解： $\frac{dy}{dx} = -\frac{2xy^2}{x^2 - 1},\qquad y = 0$ 为特解，当 $y \neq 0$ 时，$\frac{dy}{y^2} = -\frac{2x}{x^2 - 1}dx$，

积分，得 $-\frac{1}{y} = -\ln|x^2 - 1| + c$

将 $y(0)=1$ 代入，得 $c=-1$，即 $y=\dfrac{1}{\ln\left|x^2-1\right|+1}$ 为所求的解。

(3) $y'=3\sqrt[3]{y^2}, y(2)=0$

解： $y=0$ 为特解，当 $y\neq 0$ 时，$\dfrac{dy}{3y^{\frac{2}{3}}}=dx$，

积分，得 $y^{\frac{1}{3}}=x+c,\qquad y=(x+c)^3$

将 $y(2)=0$ 代入，得 $c=-2$，即 $y=(x-2)^3$ 和 $y=0$ 均为所求的解。

(4) $(y^2+xy^2)dx-(x^2+yx^2)dy=0, y(1)=-1$

解： $x=0, y=0$ 为特解，当 $x\neq 0, y\neq 0$ 时，$\dfrac{1+x}{x^2}dx-\dfrac{1+y}{y^2}dy=0$，

积分，得 $-\dfrac{1}{x}+\ln|x|+\dfrac{1}{y}-\ln|y|=c_1,\qquad \dfrac{x}{y}=\pm e^{c_1}e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}=ce^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}, c\neq 0$

将 $y(1)=-1$ 代入，得 $c=-e^{-2}$，即 $\dfrac{x}{y}=-e^{-2}e^{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}$ 为所求的解。

4．求解方程 $x\sqrt{1-y^2}\,dx+y\sqrt{1-x^2}\,dy=0$

解：$x=\pm 1\,(-1\le y\le 1), y=\pm 1\,(-1\le x\le 1)$ 为特解，

当 $x\neq\pm 1, y\neq\pm 1$ 时，$\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx+\dfrac{y}{\sqrt{1-y^2}}dy=0$

积分，得 $\sqrt{1-x^2}+\sqrt{1-y^2}=c(c>0)$

6．求一曲线，使其具有以下性质：曲线上各点处的切线与切点到原点的向径及 x 轴可围成一个等腰三角形(以 x 轴为底)，且通过点(1,2).

解：设所求曲线为 $y=y(x)$ 对其上任一点 (x,y) 的切线方程：

$Y-y=y'(X-x)$ 于 x 轴上的截距为 $a=x-\dfrac{y}{y'}$ 由题意建立方程：

$x-\dfrac{y}{y'}-x=x-0$ 即 $y'=-\dfrac{y}{x},\quad y(1)=2$

求得方程的通解为 $xy=e^c,\quad c\neq 0$ 再由 $2=e^c$ 得 c = ln2， 得所求曲线为

为 $xy=2$

7．人工繁殖细菌，其增长速度和当时的细菌数成正比

（1） 如果 4 小时的细菌数为原细菌数的 2 倍，那么经过 12 小时应有多少？

（2） 如果在 3 小时时的细菌数为得10^4个，在 5 小时时的细菌数为得4×10^4个，那么在开始时有多少个细菌？

解：设 t 时刻的细菌数为 q (t)，由题意建立微分方程 $\frac{dq}{dt}=kq \quad k>0$

求解方程得 $q=ce^{kt}$ 再设 t = 0 时，细菌数为 q_0,求得方程的解为 $q=q_0e^{kt}$

（1） 由 $q(4)=2q_0$ 即 $q_0e^{4k}=2q_0$ 得 $k=\frac{\ln 2}{4}$

$q(12)=q_0e^{12k}=q_0e^{12\frac{\ln 2}{4}}=8q_0$

（2）由条件 $q(3)=q_0e^{3k}=10^4$， $q(5)=q_0e^{5k}=4\times10^4$

比较两式得 $k=\frac{\ln 4}{2}$， 再由 $q(3)=q_0e^{3k}=q_0e^{3\frac{\ln 4}{2}}=8q_0=10^4$

得 $q_0=1.25\times10^3$

习题 1.3

1 解下列方程：

(2) $(y^2-2xy)dx+x^2dy=0$

解：方程改写为 $\frac{dy}{dx}=2(\frac{y}{x})-(\frac{y}{x})^2$

令 $u=\frac{y}{x}$，有 $u+x\frac{du}{dx}=2u-u^2$ 整理为 $(\frac{1}{u}-\frac{1}{u-1})du=\frac{dx}{x} \quad (u\neq 0,1)$

积分，得 $\ln\left|\frac{u}{u-1}\right|=\ln|c_1x|$ 即 $u=\frac{c_1x}{c_1x-1}$

代回变量，得通解 $x(y-x)=cy$， $y=0$ 也是方程的解

(4) $xy'-y=x\tan\frac{y}{x}$

解：方程改写为 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=\tan\frac{y}{x}$

令 $u=\frac{y}{x}$，有 $x\frac{du}{dx}=\tan u=\frac{\sin u}{\cos u}$ 即 $\cot u du=\frac{dx}{x} \quad (\sin u\neq 0)$

积分，得 $\sin u=cx$

代回变量，得通解 $\sin\frac{y}{x}=cx$

(5) $xy'-y=(x+y)\ln\frac{x+y}{x}$

解：方程改写为 $\frac{dy}{dx}-\frac{y}{x}=(1+\frac{y}{x})\ln\frac{x+y}{x}$

令 $u=\frac{y}{x}$，有 $x\frac{du}{dx}=(1+u)\ln(1+u)$

当$u\neq 0,u\neq -1$时 $\frac{du}{(1+u)\ln(1+u)}=\frac{dx}{x}$

积分，得 $\ln(1+u)=cx$

代回变量，得通解$\ln(1+\frac{y}{x})=cx$

(6) $xy'=\sqrt{x^2-y^2}+y$

解：方程改写为 $\frac{dy}{dx}=\sqrt{1-(\frac{y}{x})^2}+\frac{y}{x}$

令 $u=\frac{y}{x}$，有 $x\frac{du}{dx}=\sqrt{1-u^2}$ 分离变量 $\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}=\frac{dx}{x}$ $(-1<u<1)$

积分，得 $\arcsin u=\ln cx$

代回变量，得通解$\arcsin\frac{y}{x}=\ln cx,$ $y=\pm x$ 也是方程的解

2 解下列方程：

(1) $(2x-4y+6)dx+(x+y-3)dy=0$

解：方程改写为 $\frac{dy}{dx}=\frac{4y-2x-6}{x+y-3}$

令$\begin{cases}-2\alpha+4\beta=0\\ \alpha+\beta-3=0\end{cases}$，解得 $\alpha=1,\beta=2$

作变换$x=\zeta+1,$ $y=\eta+2$ 有 $\frac{d\eta}{d\zeta}=\frac{4\eta-2\zeta}{\eta+\zeta}$

再令$u=\frac{\eta}{\zeta}$ 上方程可化为$u+\zeta\frac{du}{d\zeta}=\frac{4u-2}{1+u}$

整理为 $\frac{u+1}{(u-1)(u-2)}du=-\frac{d\zeta}{\zeta}$ $(u\neq 1,2)$

积分，得 $(u-2)(\frac{u-2}{u-1})^2\zeta=c$

代回变量，得通解 $(y-2x)^3=c(y-x-1)^2$， $y=x+1$ 也是方程的解

(2) $(2x+y+1)dx-(4x+2y-3)dy=0$

解：方程改写为 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x+y+1}{4x+2y-3}$

令 $u=2x+y$，有 $\dfrac{du}{dx}=\dfrac{5u-5}{2u-3}$ 分离变量 $\dfrac{2u-3}{u-1}du=5dx \quad (u\neq 1)$

积分，得 $2u-\ln|u-1|=5x+c_1$

代回变量，得通解 $2x+y-1=ce^{2y-x}$

(4) $y'=2(\dfrac{y-2}{x+y-1})^2$

解：令 $u=x+1,\quad v=y-2$ 则原方程变为 $\dfrac{dv}{du}=2(\dfrac{v}{u+v})^2$

再令 $z=\dfrac{v}{u}$，则方程化为 $z+u\dfrac{dz}{du}=2(\dfrac{z}{1+z})^2$

分离变量 $\dfrac{(1+z)^2}{z(1+z^2)}dz=-\dfrac{du}{u} \quad (z\neq 0)$

积分，得 $\ln|zu|=-2\arctan z+\ln|c|$

代回变量，得通解 $y-2=ce^{-2\arctan\frac{y-2}{x+1}}$

3 解方程 $(2x^2+3y^2-7)xdx-(3x^2+2y^2-8)ydy=0$

解：方程改写为 $\dfrac{2ydy}{2xdx}=\dfrac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}$ 即 $\dfrac{dy^2}{dx^2}=\dfrac{2x^2+3y^2-7}{3x^2+2y^2-8}$

令 $x^2=u, y^2=v$ 则 $\dfrac{dv}{du}=\dfrac{2u+3v-7}{3u+2v-8}$

再令 $\begin{cases}2\alpha+3\beta-7=0\\ 3\alpha+2\beta-8=0\end{cases}$ 解得 $\alpha=2,\beta=1$

作变换 $u=\xi+2, v=\eta+1$，则方程化为 $\dfrac{d\eta}{d\xi}=\dfrac{2\xi+3\eta}{3\xi+2\eta}$

再作变换 $\omega=\dfrac{\eta}{\xi}$，则方程化为 $\dfrac{3+2\omega}{2(1-\omega^2)}d\omega=\dfrac{d\xi}{\xi} \quad (\omega\neq\pm 1)$

积分，得 $\dfrac{1+\omega}{(1-\omega)^5}=c\xi^4$

代回原变量，得原方程的通解为 $(x^2-y^2-1)^5=c(x^2+y^2-3)$

习题 1.4

1 解下列方程.

(1) $\dfrac{dy}{dx}+2xy=4x$

解：原方程对应的齐次方程 $\dfrac{dy}{dx}+2xy=0$ 的通解为 $\tilde{y}=Ce^{-x^2}$.

由常数变易法得原方程的一个特解为 $\overline{y}=2$.

则原方程的通解为$y=Ce^{-x^2}+2$.

(2) $y'-\dfrac{1}{x-2}y=2(x-2)^2$

解： 原方程对应的齐次方程 $y'-\dfrac{1}{x-2}y=0$ 的通解为 $\tilde{y}=C(x-2)$.

由常数变易法得原方程的一个特解为 $\overline{y}=(x-2)^3$.

则原方程的通解为 $y=(x-2)(x^2-4x+C)$.

(3) $\dfrac{d\rho}{d\theta}+3\rho=2$

解： 原方程对应的齐次方程 $\dfrac{d\rho}{d\theta}+3\rho=0$ 的通解为 $\tilde{\rho}=Ce^{-3\theta}$.

由常数变易法得原方程的一个特解为 $\overline{\rho}=\dfrac{2}{3}$.

则原方程的通解为 $\rho=Ce^{-3\theta}+\dfrac{2}{3}$，或者 $3\rho=Ce^{-3\theta}+2$.

2 求曲线,使其切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标.

解：设所求曲线为 $y=y(x)$,则它在曲线上任一点的斜率 $k=y'$.

过点 (x,y) 的方程为 $Y-y=y'(Z-x)$.

依题意得 $y-xy'=x$，即 $y'=\dfrac{y}{x}-1$.

它对应的齐次方程 $y'=\dfrac{y}{x}$ 的通解为 $\tilde{y}=Cx$.

它的一个特解为 $\overline{y}=x\ln|x|$.

因此,所求曲线为 $y=x\ln|x|+Cx$.

3 解下列伯努利方程

(2) $y'+2xy+xy^4=0$

解：原方程可化为 $y^{-4}y'+2xy^{-3}=-x$.令\$z=y^{-3}\$, 则有 $\frac{dz}{dx}-6xz=3x$.

它对应的齐次线性方程为 $\frac{dz}{dx}=6xz$.

当 $z=0$ 时,有 $y^{-3}=0$,得 $y=0$;

当 $z\neq 0$ 时,有 $\frac{dz}{z}=6xdx$,得 $z=Ce^{3x^2}$.

令 $z=C(x)e^{3x^2}$ 为方程 $\frac{dz}{dx}-6xz=3x$ 的一个解，则有 $C'(x)=3xe^{-3x^2}$.

两边积分得 $C(x)=\frac{1}{2}e^{-3x^2}+C_1$,带回得原方程的通解为 $z=Ce^{3x^2}-\frac{1}{2}$,

即 $y^{-3}=Ce^{3x^2}-\frac{1}{2}$.

(4) $\frac{dy}{dx}+y=y^2(\cos x-\sin x)$

解：方程两边同乘以 $-y^{-2}$ 得 $-y^{-2}\frac{dy}{dx}-y^{-1}=\sin x-\cos x$.

令 $z=y^{-1}$,则 $\frac{dz}{dx}=y^{-2}\frac{dy}{dx}$. 于是 $\frac{dz}{dx}-z=\sin x-\cos x$.

该方程对应的齐次方程 $\frac{dz}{dx}-z=0$ 的通解为 $\tilde{z}=Ce^x$.

由常数变易法得一个特解为 $\bar{z}=-\sin x$.

则它的通解为 $z=Ce^x-\sin x$.

于是原方程的通解为 $y^{-1}=Ce^x-\sin x$.

另外， $y=0$ 也是原方程的解.

6. 设 $y(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上连续可微，且 $\lim\limits_{x\to+\infty}[y'(x)+y(x)]=0$，证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$.

证明：设 $y'(x)+y(x)=f(x)$,则 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$,

$$y(x)=\frac{C+\int_{x_0}^{x}f(s)e^s ds}{e^x}$$

$\forall\varepsilon>0$，对充分大的 x_1，当 $x>x_1$ 时， 有 $|f(x)|<\varepsilon$. 故

$$y(x) \le \frac{|C| + \int_{x_0}^{x} |f(s)| e^s ds}{e^x}$$

$$\le \frac{|C| + \int_{x_0}^{x_1} |f(s)| e^s ds + \varepsilon \int_{x_1}^{x} e^s ds}{e^x}$$

$$\to \varepsilon \ (x \to +\infty)$$

由 ε 的任意性有 $\lim\limits_{x\to+\infty} y(x) = 0$.

习题 1.5

1 (1) $2xydx + (x^2 - y^2)dy = 0$

解：因为 $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}$,所以方程是全微分方程. 于是方程的通解为 $3x^2 y - y^3 = C$.

(2) $e^{-y}dx - (2y + xe^{-y})dy = 0$

解：$\frac{\partial M}{\partial y} = -e^{-y} = \frac{\partial N}{\partial x}$,所以方程是全微分方程. 于是方程的通解为 $xe^{-y} - y^2 = C$.

2. 求下列方程的积分因子和积分.

(1) $(x^2 + y^2 + x)dx + xydy = 0$

解：由于 $\frac{\partial M}{\partial y} = 2y, \frac{\partial N}{\partial x} = y$,所以方程不是全微分方程.

而 $\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = \frac{1}{x}$ 只与 x 有关,故可得积分因子为 $\mu(x) = x$.

以积分因子乘以原方程两端,得全微分方程：

$$(x^3 + xy^2 + x^2)dx + x^2 ydy = 0.$$

则原方程的的通解为

$$3x^4 + 6x^2 y^2 + 4x^3 = C.$$

(2) $(2xy^4 e^y + 2xy^3 + y)dx + (x^2 y^4 e^y - x^2 y^2 - 3x)dy = 0$

解：由于 $\frac{\partial M}{\partial y} = 8xy^3 e^y + 2xy^4 e^y + 6xy^2 + 1$，$\frac{\partial N}{\partial x} = 2xy^4 e^y - 2xy^2 - 3$，所以方程不是全微分方程. 而 $\frac{1}{-M}(\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}) = -\frac{4}{y}$ 只与 y 有关,故可得积分因子为 $\mu(y) = \frac{1}{y^4}$.

以积分因子乘以原方程两端,得全微分方程：

$$(2xe^y+\frac{2x}{y}+\frac{1}{y^3})dx+(x^2e^y-\frac{x^2}{y^2}-\frac{3x}{y^4})dy=0.$$

则原方程的的通解为

$$x^2e^y+\frac{x^2}{y}+\frac{x}{y^3}=C.$$

(3) $(x^4+y^4)dx-xy^3dy=0$

解：因为$\frac{\partial M}{\partial y}=4y^3$，$\frac{\partial N}{\partial x}=-y^3$,所以方程不是全微分方程. 而$\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=-\frac{5}{x}$只与$x$有关,用积分因子$x^{-5}$乘以原方程两端，得全微分方程：

$$(x^{-1}+x^{-5}y^4)dx-x^{-4}y^3dy=0.$$

于是原方程的通解为

$$\ln x^4-x^{-4}y^4=C.$$

(4) $(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y)dx+2(y^3-x^2y+x)dy=0$

解：由于$\frac{\partial M}{\partial y}=4x^3y+4x^2+4xy+4xy^3+2$，$\frac{\partial N}{\partial x}=4xy+2$,所以方程不是全微分方程.

而$\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=2x$只与$x$有关，故积分因子为$\mu(x)=e^{x^2}$.

用积分因子乘以原方程两端，得全微分方程：

$$(2x^3y^2+4x^2y+2xy^2+xy^4+2y)e^{x^2}dx+2(y^3-x^2y+x)e^{x^2}dy=0.$$

于是原方程的通解为

$$(2x^2y^2+4xy+y^4)e^{x^2}=C.$$

习题 1.6

1. 求解下列方程.

(1) $y'^2-y^2=0$

解：因为$(y'+y)(y'-y)=0$,所以$y'=-y$或$y'=y$. 由$y'=-y$得$y=Ce^{-x}$；由$y'=y$得$y=Ce^x$.因此原方程的通解为$y=Ce^{\pm x}$.

(2) $8y'^3=27y$

解：令 $p=y'$，可得 $8p^3=27y$. 此式关于 x 求导数整理得 $24p\dfrac{dp}{dx}=27$.

于是 $p^2=\dfrac{27}{12}x+C$.从而原方程的通解为 $y^2=(x+C)^3$.

另外, $y=0$ 也是原方程的解.

(3) $y^2(y'^2+1)=1$

解：首先，$y=\pm1$ 是方程的解. 令 $y=t$，则 $y'=\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}$. 于是

$$dx=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dy=\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt,$$

从而

$$x=\int\frac{t}{\sqrt{1-t^2}}dt+C=-\sqrt{1-t^2}-C.$$

由此可得原方程的通解为

$$\begin{cases}x+C=-\sqrt{1-t^2}\\ y=t\end{cases}$$

即 $(x+C)^2+y^2=1$.

（4） $x^2yy''=(y-xy')^2$

解：方程关于 y,y',y'' 是齐次的,作代换 $y=e^{\int zdx}$ 可把方程降一阶，其中 z 是 x 的新的未知函数.故

$$y'=ze^{\int zdx},\quad y''=(z'+z^2)e^{\int zdx}.$$

把 y,y',y'' 的表达式代入方程并消去 $y=e^{2\int zdx}$,得

$$x^2(z'+z^2)=(1-xz)^2,\text{或}\quad x^2z'+2xz=1,$$

这是线性方程,它的左边可以写成 $(x^2z)'=1$,由此得 $x^2z=x+C_1$，或 $z=\dfrac{1}{x}+\dfrac{C_1}{x^2}$,

$$\int zdx=\int(\frac{1}{x}+\frac{C_1}{x^2})dx=\ln|x|-\frac{C_1}{x}+\ln C_2.$$

原方程的通解是 $y=e^{\int zdx}=e^{\ln|x|-C_1/x+\ln C_2}$ 或 $y=C_2xe^{-C_1/x}$.

此外,方程还有解 $y=0$.

习 题 2.1

1. 试绘出下列各方程的积分曲线图：

(1) $y' = a$（a为常数）；　　(2) $y' = x^2$；

(3) $y' = |y|$；　　(4) $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{1}{x^2}$；

(5) $\dfrac{dy}{dx} = |x|$.

解：(1) 由于 $f(x,y) = a$，不依赖于 x和 y，所以线素场的线素均平行，其斜率为 a. 从而可以根据线素场线素的趋势，大体描出积分曲线. 如图(1)所示.

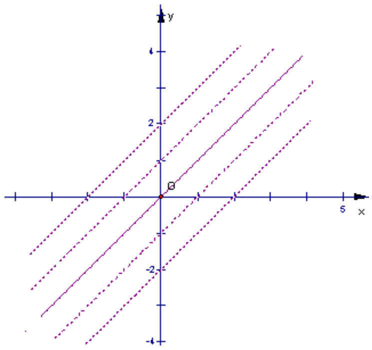


图 (1)

(2) 由于 $f(x,y) = x^2$，不依赖于 y，因而，在直线 $\pm\sqrt{x} = k$ 上线素场的线素都平行，其斜率为函数 $f(x,y)$ 横坐标的平方. 于是，横坐标的绝对值越大，线素场的方向越陡. 从而，可以根据线素场线素的趋势，大体上描出积分曲线. 如图(2)所示.

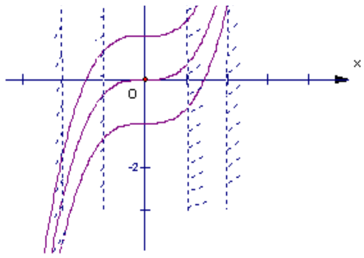
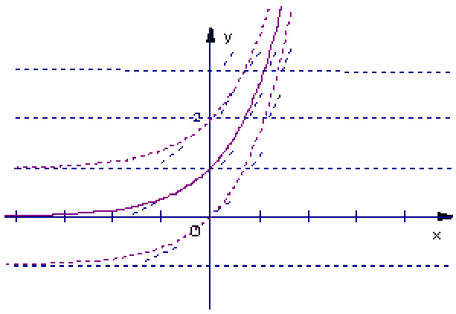
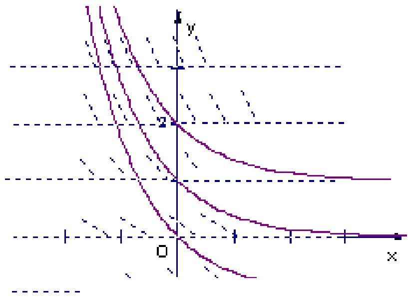


图 (2)

(3) 由于 $f(x,y) = |y|$，不依赖于 x，因而在直线 $|y| = k$（k为常数）上，线素场的线素都平行，斜率为纵坐标的绝对值，故当 $y > 0$ 时，其积分曲线如图(3)所示；当
曲线如图(4)所示.



图(3)



(4) 由于 $f(x,y) = -\dfrac{1}{x^2}$，不依赖于 y，所以，

线素场的线素都平行，其斜率为右端函数 $f(x,y)$ 横坐标平方的倒数的相反数. 于是，横坐标越大，线素场的方向越平缓. 从而，可以根据线素场线素

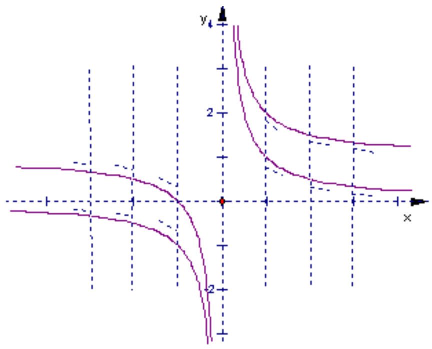
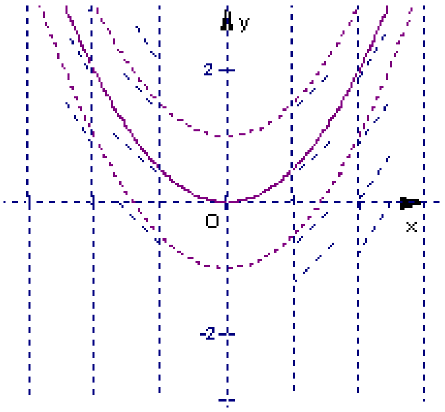


图 (5)

的趋势，大体上描出积分曲线．如图(5)所示.(5) 由于 $f(x,y)=|x|$，不依赖于 y，因而在直线 $|x|=k$（k为常数）上，线素场的线素都平行，故当 $x>0$ 时，其积分曲线如图(6)所示；当 $x<0$ 时，其积分曲线如图(7)所示．



图(6)

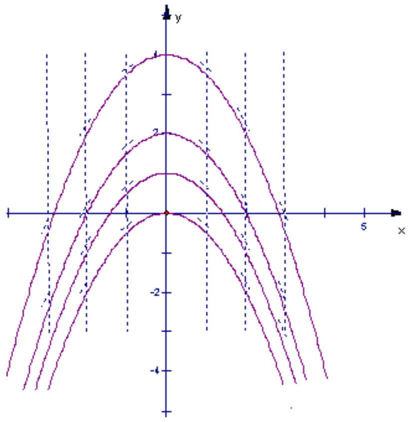


图 (7)

2．试画出方程

$$\frac{dy}{dx}=x^2-y^2$$

在 xoy平面上的积分曲线的大致图像．

解：这个方程是不可积的，但易于画出它的线素场．在同一以原点为对称中心的双曲线上，线素场的线素都平行．其斜率等于双曲线实半轴长的平方．于是，实半轴越长，线素场的方向越陡．从而，根据线素场线素的趋势，大体上可以描出积分曲线．如图(8)所示．

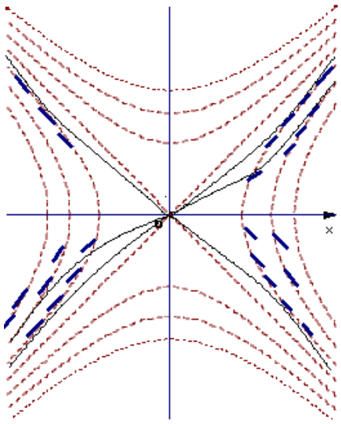


图 (8)

3．试用欧拉折线法，取步长 $h=0.1$，求初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=x^2+y^2,\\ y(1)=1\end{cases}$$

的解在 $x=1.4$ 时的近似值．

解　令　$x_0=1,\ y_0=1.$

则　$x_1=x_0+0.1=1.1,\quad y_1=1+2\cdot 0.1=1.2;$

$x_2=x_1+0.1=1.2,\quad y_2=1.2+2.65\cdot 0.1=1.465;$

$x_3=x_2+0.1=1.3,\quad y_3=1.465+3.586\cdot 0.1=1.824;$

$x_4=x_3+0.1=1.4,\quad y_4=1.824+5.017\cdot 0.1=2.326.$

习题 2.2

1．试判断方程 $\frac{dy}{dx}=x\tan x$ 在区域

(1) $R_1:-1\le x\le 1,\ 0\le y\le \pi;$

(2) $R_2:-1\le x\le 1,\ -\frac{\pi}{4}\le y\le \frac{\pi}{4}$

上是否满足定理2.2的条件？

解：(1) 不满足．因为在区域 R_1 上，右端函数 $f(x,y)=x\tan y$ 当 $y=\frac{\pi}{2}$ 时不连续．

(2) 满足．因为在区域 R_2 上，右端函数 $f(x,y)=x\tan y$ 连续且 $\left|f_y'(x,y)\right|=\left|\frac{x}{\cos^2 y}\right|\le 2$ 有界．

2．判断下列方程在什么样的区域上保证初值解存在且唯一？

(1) $y'=x^2+y^2$； (2) $y'=x+\sin y$；

(3) $y'=x^{-\frac{1}{3}}$； (4) $y'=\sqrt{|y|}$．

解：(1) 因为 $f(x,y)=x^2+y^2$ 及 $f_y'(x,y)=2y$ 在整个 xoy 平面上连续，所以在整个 xoy 平面上满足存在唯一性定理条件．进而在 xoy 平面上保证初值解存在且唯一．

(2) 因为 $f(x,y)=x+\sin y$ 及 $f_y'(x,y)=\cos y$ 在整个 xoy 平面上连续，所以在整个 xoy 平面上满足存在唯一性定理条件．进而在 xoy 平面上保证初值解存在且唯一．

(3) 因为方程右端函数 $f(x,y)=x^{-\frac{1}{3}}$ 在除去 y 轴外的整个 xoy 平面上连续且 $f_y'(x,y)=0$，所以在除去 y 轴外的整个 xoy 平面上初值解存在且唯一．

(4) 因为方程右端函数 $f(x,y)=\sqrt{|y|}=\begin{cases}\sqrt{y}, & y\ge 0,\\ \sqrt{-y}, & y<0\end{cases}$ 在整个 xoy 平面上连续，而 $f_y'(x,y)=\begin{cases}\frac{1}{2\sqrt{y}}, & y>0,\\ \frac{-1}{2\sqrt{-y}}, & y<0\end{cases}$ 在除去 x 轴外的整个 xoy 平面上

连续，所以在除去 x 轴外的整个 xoy 平面上初值解存在且唯一.

3．讨论方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$ 在怎么样的区域中满足定理 2.2 的条件．并求通过 $(0,0)$ 的一切解.

解：右端函数对 y 的偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{2}y^{-\frac{2}{3}}$，显然它在任何一个不包含 x 轴 $(y=0)$ 上的点的有界闭区域中是有界的，因此在这种区域中解是存在唯一的．即，只有通过 $y=0$ 上的点可能出现多个解的情况(方程右端的连续性保证在任何有界区域中,解是存在的).

原方程分离变量得

$$y^{-\frac{1}{3}}dy=\frac{3}{2}dx$$

上式两端取积分得

$$\frac{3}{2}y^{\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}x-\frac{3}{2}C$$

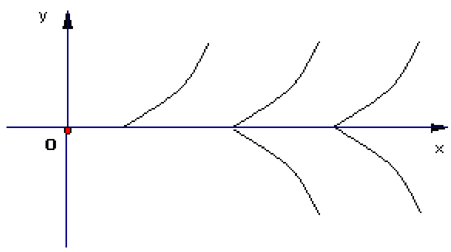
$$y=\pm(x-C)^{\frac{3}{2}}$$

其中 $(x-C)\geq 0$. 此外有特解 $y=0$．因此过点 $(0,0)$ 有无穷多个解(如图(9)所示).

$$y=0,$$

$$y=\begin{cases}0, & x\leq C\\ (x-C)^{\frac{3}{2}}, & x>C\end{cases}$$

$$y=\begin{cases}0, & x\leq C\\ -(x-C)^{\frac{3}{2}}, & x>C.\end{cases}$$



图(9)

4．试用逐次逼近法求方程 $\frac{dy}{dx}=x-y^2$ 满足初值条件 $y(0)=0$ 的近似解:

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \varphi_3(x)$$

解： $\varphi_0(x)=y(0)=0$

$$\varphi_1(x)=0+\int_0^x (s-0)ds=\frac{1}{2}x^2$$

$$\varphi_2(x)=0+\int_0^x [s-(\frac{1}{2}s^2)^2]ds=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{20}x^5$$

$$\varphi_3(x)=0+\int_0^x [s-(\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{20}s^5)^2]ds=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{20}x^5+\frac{1}{160}x^8-\frac{1}{4400}x^{11}.$$

5．试用逐次逼近法求方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2-x^2$ 满足初值条件 $y(0)=1$ 的近似解:

$$\varphi_0(x),\ \ \varphi_1(x),\ \ \varphi_2(x)$$

解： $\varphi_0(x)=y(0)=1$

$$\varphi_1(x)=0+\int_0^x (1-s)ds=1+x-\frac{1}{3}x^3$$

$$\varphi_2(x)=1+\int_0^x [1+s-\frac{1}{3}s^3)^2-s^2]ds=1+x+x^2-\frac{1}{6}x^4-\frac{2}{15}x^5+\frac{1}{63}x^7.$$

6．试证明定理 2.2 中的 n 次近似解 $\varphi_n(x)$ 与精确解 $\varphi(x)$ 有如下的误差估计式:

$$\left|\varphi_n(x)-\varphi(x)\right|\le\frac{MN^n}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$$

证：由 $\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(s,\varphi(s))ds$ 及迭代列

$$\varphi_0(x)=y_0,$$

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(s,\varphi_{n-1}(s))ds \qquad n=1,\ 2,\ \cdots$$

得

$$\left|\varphi(x)-\varphi_0(x)\right|\le\left|\int_{x_0}^x\left|f(s,\varphi(s))\right|ds\right|\le M\left|x-x_0\right|$$

设

$$\left|\varphi(x)-\varphi_n(x)\right|\le\frac{MN^n}{(n+1)!}\left|x-x_0\right|^{n+1}$$

则

$$
\begin{aligned}
|\varphi(x)-\varphi_{n+1}(x)| &\le \left|\int_{x_0}^{z}|f(s,\varphi(s))-f(s,\varphi_n(s))|ds\right| \\
&\le \frac{MN^{n+1}}{(n+1)!}\left|\int_{x_0}^{x}|s-x_0|^{n+1}ds\right| \\
&\le \frac{MN^{n+1}}{(n+2)!}|x-x_0|^{n+2}
\end{aligned}
$$

由归纳法可知,对任意 n 次近似解，估计式 $|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\le\frac{MN^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$ 成立.

7．利用上面的估计式，估计:

(1) 4 题中的三次近似 $\varphi_3(x)$ 在 $x=\frac{1}{2}$ 和 $x=1$ 时的误差;

(2) 5 题中的二次近似 $\varphi_2(x)$ 在 $x=\frac{1}{4}$ 时的误差.

解：(1) 显然初值问题 $\frac{dy}{dx}=x-y^2$, $y(0)=0$ 在区域 $R:|x|\le 1,\ |y|\le 1$ 上存在唯一解，由解的存在唯一性定理知,解的定义区间为

$$|x|\le h_0$$

其中 $h_0=\min(a,\frac{b}{M})$, $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|x-y^2|=2$．这里 $a=1,\ b=1$, 从而 $h_0=\frac{1}{2}$,即得解的定义区间为 $|x|\le\frac{1}{2}$.

则由误差估计公式

$$|y_n(x)-y(x)|\le\frac{MN^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

其中 N 是李普希兹常数．因为 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=|-2y|\le 2$, 可取 $N=2$,

当 $x=\frac{1}{2}$ 时，有

$$|y_3(x)-y(x)|\le\frac{2\cdot 2^3}{4!}(\frac{1}{2})^4=\frac{1}{24}.$$

当 $x=1$ 时，有

$$|y_3(x)-y(x)|\le\frac{2\cdot 2^3}{4!}(1)^4=\frac{2}{3}.$$

(2) 显然初值问题 $\frac{dy}{dx}=y^2-x^2, y(0)=1$ 在区域 $R:|x|\le 1,\ |y-1|\le 1$ 上存在唯一解，由解的存在唯一性定理知，解的定义区间为:

$$|x|\le h_0$$

其中 $h_0=\min(a,\frac{b}{M})$， $M=\max\limits_{(x,y)\in R}\left|y^2-x^2\right|=4$. 这里 $a=1,\ b=1,$ 从而 $h_0=\frac{1}{4}$,即得解的定义区间为 $|x|\le\frac{1}{4}$.

则由误差估计公式

$$|y_n(x)-y(x)|\le\frac{MN^n}{(n+1)!}|x-x_0|^{n+1}$$

其中 N 是李普希兹常数. 因为 $\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=|2y|\le 2,$ 可取 $N=2,$ 则有

$$|y_2(x)-y(x)|\le\frac{4\cdot 2^2}{3!}(\frac{1}{4})^3=\frac{1}{24}.$$

8. 在条形区域 $a\le x\le b,\ |y|<+\infty$ 内，假设方程 (2.1) 的所有解都唯一，对其中任意两个解 $y_1(x), y_2(x)$，如果有 $y_1(x_0)<y_2(x_0)$，则必有 $y_1(x)<y_2(x),\ x_0\le x\le b$.

证：令

$$\varphi(x)=y_1(x)-y_2(x),$$

由于

$$y_1(x_0)<y_2(x_0),$$

故

$$\varphi(x_0)=y_1(x_0)-y_2(x_0)<0.$$

用反证法 若在 $y_1(x),y_2(x)$ 共同的存在区间内 $y_1(x)<y_2(x)$ 不成立，由 $\varphi(x)$ 的连续性，必存在点 $\bar{x}\in[a,b]$，使得 $\varphi(\bar{x})=0$. 从而 $y_1(\bar{x})-y_2(\bar{x})=0$，即 $y_1(\bar{x})=y_2(\bar{x})$. 这于假设矛盾，故必有 $y_1(x)<y_2(x)$.