

目 录

第一章 抛物型方程的差分方法	(1)
§ 1.1 抛物型方程的定解问题	(1)
§ 1.2 几个古典差分格式的建立和定解条件的处理	(2)
1.2.1 网格部分	(2)
1.2.2 几个古典差分格式	(3)
1.2.3 定解条件的处理	(7)
§ 1.3 差分格式的相容性、稳定性与收敛性	(9)
1.3.1 差分格式的相容性	(9)
1.3.2 差分格式的稳定性	(10)
1.3.3 差分格式的收敛性	(18)
§ 1.4 研究稳定性的分离变量法	(20)
1.4.1 分离变量法的一般讨论	(21)
1.4.2 对差分方程组的应用	(25)
§ 1.5 几个无条件稳定的差分格式	(29)
1.5.1 Crank—Nicholson 格式	(29)
1.5.2 Du Fort—Frankel 格式	(30)
1.5.3 三层隐式格式	(34)
1.5.4 交替显隐格式	(36)
§ 1.6 建立差分格式的其他方法	(39)
1.6.1 待定系数法	(39)
1.6.2 算子方法	(41)
1.6.3 积分插值法	(49)
§ 1.7 解二维问题的分裂法	(54)
1.7.1 分离变量法对多个空间变量的应用	(54)
1.7.2 分裂算法的基本思想	(57)

1.7.3	P-R(Peaceman-Rachford)格式	(57)
1.7.4	Douglas 格式	(58)
1.7.5	Yanenko 格式	(59)
1.7.6	局部一维格式	(60)
§ 1.8	解非线性抛物型方程的差分方法	(62)
习题		(64)
第二章	双曲型方程的差分方法	(68)
§ 2.1	一阶线性常系数双曲型方程的差分方法	(68)
2.1.1	一阶常系数方程初值问题	(68)
2.1.2	迎风格式	(70)
2.1.3	Lax-Friedrichs 格式	(72)
2.1.4	跳蛙(Leap-frog)格式	(73)
2.1.5	Lax-Wendroff 格式	(75)
2.1.6	隐式格式	(78)
2.1.7	利用特征线构造差分格式	(79)
§ 2.2	一阶常系数双曲型方程组的差分法	(81)
2.2.1	Lax-Friedrichs 格式	(81)
2.2.2	Lax-Wendroff 格式	(82)
2.2.3	迎风格式	(83)
§ 2.3	一阶变系数双曲型方程及方程组的差分方法	(85)
2.3.1	一阶变系数双曲型方程	(85)
2.3.2	一阶变系数双曲型方程组	(86)
§ 2.4	二阶线性双曲型方程的差分方法	(88)
2.4.1	一维波动方程	(88)
2.4.2	二维波动方程	(97)
§ 2.5	一阶拟线性双曲型方程组的特征线法	(102)
2.5.1	一阶线性双曲型方程的特征线法	(102)
2.5.2	一阶拟线性双曲型方程的特征线法	(104)

2.5.3 一阶拟线性双曲型方程组的特征线法	(105)
习题	(115)
第三章 椭圆型方程的差分方法	(117)
§ 3.1 矩形网的差分格式	(117)
3.1.1 椭圆型方程的定解问题	(117)
3.1.2 网格剖分	(118)
3.1.3 五点差分格式	(119)
3.1.4 九点差分格式	(120)
§ 3.2 三角网的差分格式	(124)
§ 3.3 极坐标系网的差分格式	(126)
§ 3.4 边界条件的处理	(128)
3.4.1 矩形区域	(128)
3.4.2 一般区域	(129)
§ 3.5 极值原理与差分格式的收敛性	(131)
3.5.1 差分方程的一般形式	(131)
3.5.2 极值原理及差分格式之解的先验估计	(132)
3.5.3 五点格式的敛速估计	(136)
§ 3.6 变系数方程	(138)
§ 3.7 双调和方程	(140)
习题	(142)
第四章 变分原理	(145)
§ 4.1 一维变分问题	(145)
4.1.1 一个简单的变分问题	(145)
4.1.2 变分法简介	(147)
4.1.3 两点边值问题及其等价的变分问题	(151)
4.1.4 Sobolev 空间中的一维变分问题	(155)
§ 4.2 二维变分问题	(164)
4.2.1 薄膜平衡	(164)

4.2.2	二维边值问题的变分形式	(168)
4.2.3	Sobolev 空间中的二维变分问题	(173)
§ 4.3	Ritz—Galerkin 方法	(176)
习题	(182)
第五章	有限元方法	(184)
§ 5.1	解一维问题的线性元	(185)
§ 5.2	解二维问题的三角形线性元	(192)
5.2.1	三角形剖分	(192)
5.2.2	面积坐标及其性质	(194)
5.2.3	三角形线性元的基函数	(197)
5.2.4	有限元方程及其计算公式	(198)
5.2.5	举例	(202)
§ 5.3	解二维问题的四边形双线性元	(205)
§ 5.4	高次元	(210)
5.4.1	一维高次元	(210)
5.4.2	二维三角形高次元	(214)
5.4.3	二维矩形高次元	(217)
§ 5.5	抛物型方程的有限元方法	(219)
习题	(224)
第六章	有限元解的误差估计	(226)
§ 6.1	Ritz—Galerkin 解的一个逼近性质	(226)
§ 6.2	一维线性元的误差估计	(228)
6.2.1	H^1 范数的估计	(228)
6.2.2	L_2 范数的估计	(231)
§ 6.3	二维三角线性元的误差估计	(233)
习题	(237)
主要参考书目	(238)

第一章 抛物型方程的差分方法

超星阅读器
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

在研究热的传导过程、气体扩散现象以及电磁场的传播等物理问题时,我们常常遇到抛物型偏微分方程. 这类方程中最典型与最简单的就是热传导方程,本章即以其为基本模型进行讨论.

§ 1.1 抛物型方程的定解问题

考虑最简单的一维热传导方程

$$Lu \equiv \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), \quad (x, t) \in D \quad (1.1.1)$$

其中 a 为正常数, $f(x, t)$ 是已知函数, D 是 $x-t$ 平面内的给定区域, L 表示微分算子 $\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial^2}{\partial x^2}$. 关于方程(1.1.1)的定解问题主要有以下几类

1. 初值问题(Cauchy 问题)

求方程(1.1.1)(区域 D 为上半平面 $\{-\infty < x < \infty, t \geq 0\}$)满足初始条件

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad -\infty < x < \infty \quad (1.1.2)$$

的解,其中 $\varphi(x)$ 是给定的函数.

2. 混合问题

求方程(1.1.1)(区域 D 为 $\{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$)满足初始条件

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.1.3)$$

以及边界条件

$$\begin{cases} u(0,t) = \mu_1(t), \\ u(1,t) = \mu_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.1.4)$$

的解,其中 $\varphi(x), \mu_1(t), \mu_2(t)$ 为给定的函数,且 $\varphi(0) = \mu_1(0), \varphi(1) = \mu_2(0)$. 这类定解问题又称为方程(1.1.1)的第一边值问题. 还有第二、第三边值问题,即在区域 $D\{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ 内求方程(1.1.1)满足下列条件

$$\begin{cases} u(x,0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_1(t)u \right\} \Big|_{x=0} = \gamma_1(t), \\ \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \lambda_2(t)u \right\} \Big|_{x=1} = \gamma_2(t), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq T \quad (1.1.5)$$

的解,其中 $\varphi(x), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \gamma_1(t), \gamma_2(t)$ 都是给定的函数,且 $\lambda_1(t) \leq 0, \lambda_2(t) \geq 0$. 这是第三边值问题,当 $\lambda_1(t) = 0, \lambda_2(t) = 0$ 时,相应的边值问题是第二边值问题.

§ 1.2 几个古典差分格式的建立和定解条件的处理

1.2.1 网格剖分

由于数字电子计算机只能存储有限个数据和作有限次运算,所以任何一种适用电子计算机解题的方法,都必须把连续问题离散化,最终化成有限形式的线性代数方程组. 为此,首先要对求解区域作网格剖分,以将求解区域离散化.

用 $x_j = jh, t_n = n\tau (j, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ 两组平行线构成的矩形网格覆盖整个 $x-t$ 平面, h, τ 分别称为 x, t 方向的步长,网格线的交点称为网格节点或网点. 对于初值问题而言,在 $t=0$ 上的节点称为边界节点,其余所有属于 $\{-\infty < x < \infty, t > 0\}$ 的节点称为内部节点;而对边值问题来说,在 $t=0, x=0, x=1$ 上的节点称为边界节点,其余所有属于 $\{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ 的节点称为内部节

点.

差分方法就是在网格节点上求出微分方程解的近似值的一种方法,因此,又称为网格法.

为方便起见,先在网格点 (x_j, t_n) (简记为 (j, n))处列出以后常用的一些数值微商公式. 利用它们,可以实现偏微分方程的离散化.

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_j^n = \frac{u(j, n+1) - u(j, n)}{\tau} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, \bar{t}_1)}{\partial x^2},$$
$$t_n \leq \bar{t}_1 \leq t_{n+1}, \quad (1.2.1)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_j^n = \frac{u(j, n) - u(j, n-1)}{\tau} + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, \bar{t}_2)}{\partial x^2},$$
$$t_{n-1} \leq \bar{t}_2 \leq t_n, \quad (1.2.2)$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right]_j^n = \frac{u(j, n+1/2) - u(j, n-1/2)}{\tau} - \frac{\tau^2}{24} \frac{\partial^3 u(x_j, \bar{t}_3)}{\partial x^3},$$
$$t_{n-1/2} \leq \bar{t}_3 \leq t_{n+1/2}, \quad (1.2.3)$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right]_j^n = \frac{u(j+1, n) - 2u(j, n) + u(j-1, n))}{h^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\tilde{x}_1, t_n)}{\partial x^4},$$
$$x_{j-1} \leq \tilde{x}_1 \leq x_{j+1}, \quad (1.2.4)$$

式中 $[\]_j^n$ 表示括号内函数在节点 (x_j, t_n) 处的值,后面将经常使用这个记号. 以上四式右端的第一项依次表示函数 $u(x, t)$ 在点 (x_j, t_n) 处关于 t 的一阶向前差商,一阶向后差商,一阶中心差商和关于 x 的二阶中心差商,我们总假定 $u(x, t)$ 具有我们需要的有界偏导数.

1.2.2 几个古典差分格式

1. 古典显格式

利用公式(1.2.1), (1.2.4)有

$$\begin{aligned}
 [Lu]_j^* &= \left[\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^* \\
 &= \frac{u(j, n+1) - u(j, n)}{\tau} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, \bar{t}_1)}{\partial x^2} \\
 &\quad - a \frac{u(j+1, n) - 2u(j, n) + u(j-1, n))}{h^2} \\
 &\quad + \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u(\tilde{x}_1, t_n)}{\partial x^4},
 \end{aligned}$$

若令

$$\begin{aligned}
 L_h[u]_j^* &= \frac{u(j, n+1) - u(j, n)}{\tau} \\
 &\quad - a \frac{u(j+1, n) - 2u(j, n) + u(j-1, n))}{h^2}, \\
 R_j^* &= -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, \bar{t}_1)}{\partial x^2} + \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u(\tilde{x}_1, t_n)}{\partial x^4}, \quad (1.2.5)
 \end{aligned}$$

则上式可改写为

$$[Lu]_j^* = L_h[u]_j^* + R_j^*,$$

其中 L_h 表示差分算子, R_j^* 表示在点 (x_j, t_n) 以 L_h 逼近 L 的截断误差. 由(1.2.5)式看出, 若 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^4 u}{\partial x^4}$ 在所考虑的区域保持有界, 则当 $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ 时有

$$R_j^* = O(\tau) + O(h^2) = O(\tau + h^2). \quad (1.2.6)$$

因为在内部节点 (x_j, t_n) 上微分方程(1.1.1)的解 $u(x, t)$ 应满足

$$[Lu]_j^* = \left[\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^* = f(x_j, t_n),$$

故有

$$L_h[u]_j^* + R_j^* = f(x_j, t_n).$$

在上式中略去 R_j^* , 并用 u_j^* 表示 $u(j, n)$ 的近似值, 则得到逼近方程(1.1.1)的有限差分方程(简称差分方程)

$$L_h u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - a \frac{u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n}{h^2} = f_j^n, \quad (1.2.7)$$

式中 $f_j^n = f(x_j, t_n)$. 引入网比记号 $r = \tau/h^2$, 则可将 (1.2.7) 式改写成便于计算的形式

$$u_j^{n+1} = (1 - 2ar)u_j^n + ar(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + \tau f_j^n. \quad (1.2.8)$$

如果我们求解的是方程 (1.1.1) 的初值问题, 则由差分方程 (1.2.8) 再加上初始条件 (1.1.2) 的离散化, 就可以按时间逐层计算. 如果求解的是混合问题, 则还需要将边界条件进行离散化, 才可逐层计算. 关于定解条件的离散化方法我们在下面讨论. 这里使用术语“层”是表示在直线 $t = n\tau$ 上网格点的全体. 差分方程 (1.2.8) 和定解条件的离散化结合在一起构成了一个差分格式. 事实上, (1.2.8) 式就给出了根据定解条件的离散来逐层计算的一个算法, 因此有时就称差分方程 (1.2.8) 或 (1.2.7) 为一个差分格式, 以后我们将对二者不加区分, 但要作如下理解: 说到差分格式就隐含了定解条件的离散. 在这样的含义下, 当构造出差分方程后, 就认为已构成一个差分格式.

由第 n 个时间层推进到第 $n+1$ 个时间层时, (1.2.7) 或 (1.2.8) 式给出了逐点计算 u_j^{n+1} 的明显表达式, 这样的格式称为显式格式. 通常称 (1.2.8) 或 (1.2.7) 式为古典显格式. 它用到的节

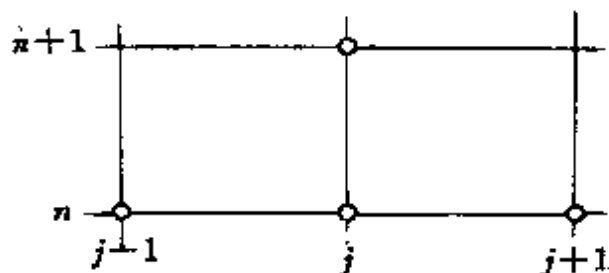


图 1.1 古典显格式节点图式

点图式如图 1.1. 在 (j, n) 处列出的差分方程用到了两个时间层上四个节点, 故又称为双层四点显格式.

2. 古典隐格式

仿照构造古典显格式的方法, 关于 t 采用向后差商, 关于 x 仍采用二阶中心差商, 则由

(1.2.2), (1.2.4) 式可得

$$[Lu]_j^n = L_h[u]_j^n + R_j^n,$$

这里

$$L_h[u]_j^n = \frac{u(j, n) - u(j, n-1)}{\tau} - a \frac{u(j+1, n) - 2u(j, n) + u(j-1, n))}{h^2}$$

$$R_j^n = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u(x_j, \tilde{t}_2)}{\partial x^2} + \frac{ah^2}{12} \frac{\partial^4 u(\tilde{x}_j, t_n)}{\partial x^4} = O(\tau + h^2).$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

因为

$$[Lu]_j^n = f(x_j, t_n),$$

故有

$$L_h[u]_j^n + R_j^n = f(x_j, t_n).$$

略去 R_j^n , 则得到差分方程

$$L_h u_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = f_j^n,$$

或

$$(1 + 2ar)u_j^n - ar(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) = u_j^{n-1} + \tau f_j^n. \quad (1.2.9)$$

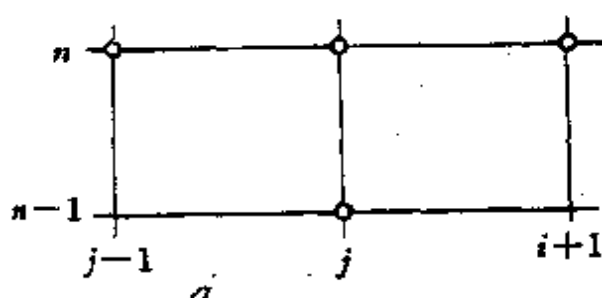


图 1.2 古典显格式节点图式

当我们已知第 $n-1$ 层上 u_j^{n-1} 的值以后, 为了确定第 n 层上 u_j^n 的值, 必须解一个线性代数方程组, 这种格式称为隐格式. 通常称 (1.2.9) 式为古典隐格式, 其节点图式如图 1.2.

3. Richardson 格式

为了提高截断误差的阶,在 (j, n) 点,关于 t 用一阶中心差商,关于 x 仍用二阶中心差商,仿以上两格式构造中的讨论,可得差分方程

$$L_h u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = f_j^n,$$

或

$$u_j^{n+1} = 2a\tau(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) + u_j^{n-1} + 2\tau f_j^n.$$

(1.2.10)

称之为 Richardson 格式,其截断误差 $R_j^n = O(\tau^2 + h^2)$,节点图式如图 1.3. 由图中看到,这是个显格式,但由于它是三层的,所以在逐层进行计算时,除了 $n=0$ 层的初值条件外,还必须先用其他方法求出 $n=1$ 层的值,然后才可按(1.2.10)式逐层逐点地求出一切 u_j^n .

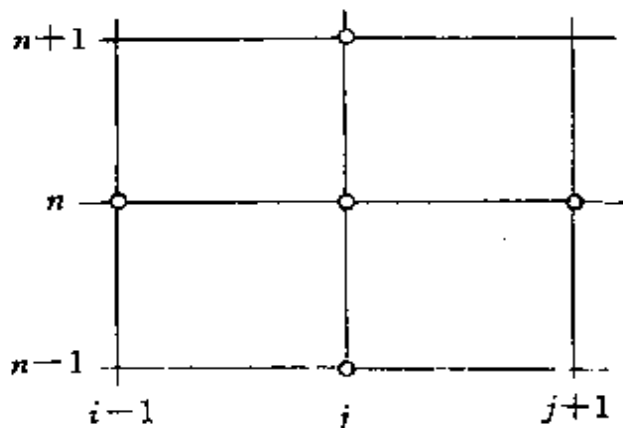


图 1.3 Richardson 节点图式

1.2.3 定解条件的处理

上面对微分方程(1.1.1)建立了三种不同类型的差分格式,为了把微分方程定解问题化为近似的差分方程问题,还必须对定解条件(即初、边值条件)构造相应的差分近似.

对于混合问题,由于求解区域是矩形区域 $\{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$,我们可以采用如下的长方形网格

$$\begin{cases} x_j = jh, j=0, 1, 2, \dots, N; Nh=1, \\ t_n = n\tau, n=0, 1, 2, \dots, m_0; m_0 = [T/\tau] \text{ 是 } T/\tau \text{ 的最大整数部分,} \\ \text{即 } m_0\tau \leq T < (m_0+1)\tau. \end{cases}$$

将第一边值问题的定解条件(1.1.3),(1.1.4)直接转换为差分方程的初始条件

$$u_j^0 = \varphi(jh), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \quad (1.2.11)$$

和边界条件

$$u_0^n = \mu_1(n\tau), \quad u_N^n = \mu_2(n\tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots, m_0. \quad (1.2.12)$$

当定解问题是第三边值问题时,因边界节点处的函数值是未知的,故需在这些点处列出相应的差分方程,再与内点处的差分方程联立求解.现介绍两种处理方法.

1. 在点 (x_0, t_n) 处利用向前差商逼近 $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^n$,而在点 (x_N, t_n) 处利用向后差商逼近 $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_N^n$,这样我们得出(1.1.5)式后两式的差分逼近

$$\begin{cases} \frac{u_1^n - u_0^n}{h} + \lambda_1(n\tau)u_0^n = \gamma_1(n\tau), \\ \frac{u_N^n - u_{N-1}^n}{h} + \lambda_2(n\tau)u_N^n = \gamma_2(n\tau), \end{cases} \quad (1.2.13)$$

其截断误差是 $O(h)$.

2. 为了提高边界节点处差分方程的误差阶,我们利用下面两个一阶中心差商

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{1/2}^n &= \frac{u(x_1, t_n) - u(x_0, t_n)}{h} + O(h^2), \\ \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_{3/2}^n &= \frac{u(x_2, t_n) - u(x_1, t_n)}{h} + O(h^2), \end{aligned}$$

作线性插值以求 $\left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^n$.得

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x}\right]_0^n &= \frac{3}{2} \frac{u(x_1, t_n) - u(x_0, t_n)}{h} \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{u(x_2, t_n) - u(x_1, t_n)}{h} + O(h^2), \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

类似地可得

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_N^* &= -\frac{1}{2} \frac{u(x_{N-1}, t_n) - u(x_{N-2}, t_n)}{h} \\ &+ \frac{3}{2} \frac{u(x_N, t_n) - u(x_{N-1}, t_n)}{h} + O(h^2), \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

将(1.2.14)、(1.2.15)两式代入定解条件(1.1.15)的后两个式子, 略去截断误差 $O(h^2)$, 便得到第三边界条件的差分近似

$$\begin{cases} (2h\lambda_1(n\tau) - 3)u_0^* + 4u_1^* - u_2^* = 2h\gamma_1(n\tau), \\ u_{N-2}^* - 4u_{N-1}^* + (2h\lambda_2(n\tau) + 3)u_N^* = 2h\gamma_2(n\tau). \end{cases} \quad (1.2.16)$$

将离散化后的定解条件和差分格式结合在一起, 就构成了一个完整的差分方程问题, 作为原微分方程定解问题的一种逼近.

下面我们以前述古典隐格式为例, 给出相应于热传导方程第一边值问题的差分方程问题

$$\begin{cases} (1+2ar)u_j^* - ar(u_{j+1}^* + u_{j-1}^*) = u_j^{*1} + \tau f_j^*, \\ \quad j=1, 2, \dots, N-1; \quad n=1, 2, \dots, m_0, \\ u_j^0 = \varphi(jh), \quad j=0, 1, 2, \dots, N, \\ u_0^* = \mu_1(n\tau), u_N^* = \mu_2(n\tau), \quad n=0, 1, 2, \dots, m_0. \end{cases} \quad (1.2.17)$$

如果原问题是第三边值问题, 则只需用与第三边界条件相应的差分近似代替与第一边值问题对应的边界条件即可构成差分方程问题.

§ 1.3 差分格式的相容性、稳定性与收敛性

上一节我们用直接差化(即用差商代替微商)法构造了几个差分格式, 这些格式是否实用, 尚需解决一些理论问题, 这就是差分格式的相容性、稳定性与收敛性.

1.3.1 差分格式的相容性

我们在建立微分方程的差分近似的过程中已经看出, 用不同

的差分方程来近似地代替微分方程,或者说用不同的差分方程来逼近微分方程,截断误差是不同的. 截断误差能反映出用差分方程代替微分方程的精度. 如果一个差分格式的截断误差 $R_j^* = O(\tau^\alpha + h^\beta)$, 则称该格式对时间 t 是 α 阶精度的, 对空间 x 是 β 阶精度的, 当 $\alpha = \beta$ 时, 则称该格式是 α 阶精度的.

从上一节几个古典差分格式的构造过程中我们看出, 为求出一个给定的差分格式的截断误差, 只需将格式中的各个项 u_j^n , 同时用微分方程的解在相应点 (j, n) 的值 $u(j, n)$ 代入, 再将各项都在 (j, n) 处进行 Taylor 级数展开, 就会得到一个误差项, 这个误差项就是截断误差.

从偏微分方程导出差分方程时, 我们总是要求当 $\tau, h \rightarrow 0$ 时, 差分方程能与微分方程充分接近, 这个事实称为差分格式的相容性. 我们说差分方程是微分方程的相容逼近, 或简称差分格式是相容的, 是指当 $\tau, h \rightarrow 0$ 时, 这个格式的截断误差趋于 0. 要用差分方程求解偏微分方程, 即用差分方程的解作为微分方程的解的近似, 相容性条件必须满足. 可以看出, 我们已经建立的几个差分格式与所给的微分方程都是相容的. 以后我们会看到与所给的微分方程不相容的差分格式也是存在的.

综上所述, 相容性表达了微分方程与差分方程间的下述关系, 一个差分格式与一个微分方程相容, 则表明当 $\tau, h \rightarrow 0$ 时, 差分算子 L_Δ 与微分算子 L 对任一光滑函数的作用是相同的, 所以可用相容的差分格式近似相应的微分方程, 而截断误差的阶则是对这一近似程度的一个度量.

1.3.2 差分格式的稳定性

如在 § 1.2 所见到的, 抛物型方程问题的差分格式, 在实际应用时, 都取逐层计算的形式, 如果某层上出现误差, 必然逐层传播, 影响以后各层计算. 研究这个误差传播的规律, 就是稳定性研究的问题.

下面我们以方程(1.1.1)的第一边值问题的古典显格式为例,用直观的方法,观察误差的传播情况.

为讨论简便起见,假定边界条件和右端的计算是完全精确的,只是在初始层上某点 $(j_0, 0)$ 上产生了误差 ϵ ,而在初始层其他点上没有误差,并假定在以后各层上的计算中都没有产生其他误差.于是,差分方程的精确解应满足

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = (1 - 2ar)u_j^n + ar(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + \tau f_j^n, \\ \quad j = 1, 2, \dots, N-1; \quad n = 0, 1, 2, \dots, m_0 - 1, \\ u_j^0 = \varphi(jh), \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, \\ u_0^n = \mu_1(n\tau), u_N^n = \mu_2(n\tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots, m_0. \end{cases}$$

差分方程的近似解(由于 ϵ 产生的) \tilde{u}_j^n 满足

$$\begin{cases} \tilde{u}_j^{n+1} = (1 - 2ar)\tilde{u}_j^n + ar(\tilde{u}_{j+1}^n + \tilde{u}_{j-1}^n) + \tau f_j^n, \\ \quad j = 1, 2, \dots, N-1; \quad n = 0, 1, 2, \dots, m_0 - 1, \\ \tilde{u}_j^0 = \begin{cases} \varphi(jh), & j \neq j_0, \\ \varphi(j_0h) + \epsilon, & j = j_0, \end{cases} \\ \tilde{u}_0^n = \mu_1(n\tau), \tilde{u}_N^n = \mu_2(n\tau), \quad n = 0, 1, 2, \dots, m_0. \end{cases}$$

因此误差 $\epsilon_j^n = \tilde{u}_j^n - u_j^n$ 应满足

$$\begin{cases} \epsilon_j^{n+1} = (1 - 2ar)\epsilon_j^n + ar(\epsilon_{j+1}^n + \epsilon_{j-1}^n), \\ \quad j = 1, 2, \dots, N-1; \quad n = 0, 1, 2, \dots, m_0 - 1, \\ \epsilon_j^0 = \begin{cases} 0, & j \neq j_0, \\ \epsilon, & j = j_0, \end{cases} \\ \epsilon_0^n = \epsilon_N^n = 0, \quad n = 0, 1, 2, \dots, m_0. \end{cases}$$

(1.3.1)

根据误差方程(1.3.1)可算出在 $ar=1/2$ 和 $ar=1$ 时误差 ϵ 的传播情况,并将其列于表1.1和表1.2中.

由表1.1可知,当 $ar=1/2$ 时误差是在逐层减少的.而由表1.2看出, $ar=1$ 时误差是逐层增大的.

表 1.1 $ar=1/2$ 时古典显格式的误差传播

4	0.0625 ϵ	0	0.25 ϵ	0	0.375 ϵ	0	0.25 ϵ	0	0.0625 ϵ
3		0.125 ϵ	0	0.375 ϵ	0	0.375 ϵ	0	0.125 ϵ	
2			0.25 ϵ	0	0.5 ϵ	0	0.25 ϵ		
1				0.5 ϵ	0	0.5 ϵ			
0					ϵ				
$n \backslash j$	j_0-4	j_0-3	j_0-2	j_0-1	j_0	j_0+1	j_0+2	j_0+3	j_0+4

表 1.2 $ar=1$ 时古典显格式的误差传播

4	ϵ	-4ϵ	10ϵ	-16ϵ	19ϵ	-16ϵ	10ϵ	-4ϵ	ϵ
3		ϵ	-3ϵ	6ϵ	-7ϵ	6ϵ	-3ϵ	ϵ	
2			ϵ	-2ϵ	3ϵ	-2ϵ	ϵ		
1				ϵ	$-\epsilon$	ϵ			
0					ϵ				
$n \backslash j$	j_0-4	j_0-3	j_0-2	j_0-1	j_0	j_0+1	j_0+2	j_0+3	j_0+4

以上的讨论表明,研究差分格式的稳定性是非常必要的. 上述方法称为 ϵ -图方法,这个方法简单而直观,它的缺点是网比必须固定,因而无法确定网比在什么范围内变化时误差逐层减小或不增大.

为精确刻划和研究稳定性,先引进一些记号.

仅在网格点上有定义的函数叫做网格函数,我们用差分方法求得的微分方程近似解 u_j^n 就是定义在网格点上的网格函数. 用 u^n 表示以第 n 层上网格函数值 $u_j^n (j=1, 2, \dots, N-1)$ 为分量的向量: $u^n = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_{N-1}^n)^T$, 其模为 $\|u^n\|$, 我们经常使用欧氏 (Eu-

clid)模(或离散 L_2 模)

$$\|u^n\|_0 = (h \sum_{j=1}^{N-1} (u_j^n)^2)^{1/2},$$

和最大模

$$\|u^n\|_\infty = \max_{1 \leq j \leq N-1} |u_j^n|$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

对典型定解问题

$$\begin{cases} Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), 0 < x < 1, 0 < t \leq T, & (1.3.2) \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad 0 \leq t \leq T, & (1.3.3) \end{cases}$$

这里把模型问题的边界条件取成齐次是不失一般性的。根据解上述问题的古典显格式和古典隐格式,不难知道,常系数线性微分方程的双层差分格式(对于三层差分格式一般采用化为双层格式组的办法讨论),连同它的边界条件可以写成

$$A(h, \tau)u^{n+1} = B(h, \tau)u^n + \tau f^n \quad (1.3.4)$$

的形式,其中 A, B 是常数矩阵,它们的元素一般只与 h, τ 有关, $f^n = (f_1^n, f_2^n, \dots, f_{N-1}^n)^T$ 。当方程的系数与 t 有关时, A, B 的元素不仅与 h, τ 有关,而且与时间层 n 有关,相应的两层格式可写成

$$A^{(n)}(h, \tau)u^{n+1} = B^{(n)}(h, \tau)u^n + \tau f^n. \quad (1.3.5)$$

例如,若引进 $N-1$ 阶矩阵

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & & \\ 1 & 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & 1 & 0 & 1 \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

则问题(1.3.2), (1.3.3)的古典显格式可写成

$$u^{n+1} = [(1 - 2ar)I + arC]u^n + \tau f^n.$$

值得指出的是,差分方程中 h 和 τ 总是有一定联系的,一方面描述差分格式的相容性时,要求 $h, \tau \rightarrow 0$, 另一方面,差分方程的误差传播与网比 $r = \tau/h^2$ 有关(由表 1.1, 1.2 可知). 所以差分方程中 h 和 τ 的关系可用连续函数 $h = g(\tau)$ 描述之,且要求 $g(0) = 0$.

我们首先给出稳定性的如下定义

定义 1.3.1 差分格式(1.3.5)称为按模 $\|\cdot\|$ 关于初值稳定,是指存在 τ_0 使得对任何 $0 < \tau < \tau_0, h = g(\tau)$, 相应于格式(1.3.5)的齐次方程

$$A^{(n)}V^{n+1} = B^{(n)}V^n \quad (1.3.6)$$

的任何解 $V^{(n)}$, 均满足不等式

$$\|V^{n+1}\| \leq M \|V^n\|, \text{ 对任何 } n, 0 \leq n_0 \leq n < T/\tau, \quad (1.3.7)$$

其中 M 为与 τ 无关的常数.

差分方程关于初值的稳定性是研究差分方程在右端自由项无误差(相当于齐次差分方程)的情况下,初值干扰对差分解的影响.

事实上,设 u^n 为差分格式(1.3.5)的精确解, \tilde{u}^n 表示当 n_0 层存在误差 ϵ^0 时由(1.3.5)式得到的解. 令 $\epsilon^n = \tilde{u}^n - u^n$, 显然有

$$A^{(n)}\epsilon^{n+1} = B^{(n)}\epsilon^n, \quad n \geq n_0,$$

即 ϵ^n 是齐次差分格式(1.3.6)的解. 于是当格式(1.3.5)关于初值稳定时, ϵ^n 满足估计式(1.3.7). 这表明,差分格式关于初值稳定的实际含义是,若格式之解在某层存在误差,则由它引起的以后各层上的误差不超过原始误差的常数倍. 因此,只要初始误差足够小,以后各层的误差就可足够小.

例 1.3.1 分析问题(1.3.2), (1.3.3)的古典显格式(1.2.8)关于初值的稳定性.

齐次形式的古典显格式为

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = (1 - 2ar)u_j^n + ar(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n), \\ \quad j = 1, 2, \dots, N-1, n = 0, 1, \dots, m_0-1, \\ u_j^0 = \varphi(jh), j = 0, 1, \dots, N, \\ u_0^n = u_N^n = 0, n = 0, 1, \dots, m_0. \end{cases} \quad (1.3.8)$$

先设 $ar \leq 1/2$, 此时格式(1.3.8)右端各项系数非负, 故

$$\begin{aligned} |u_j^{n+1}| &\leq (1 - 2ar)|u_j^n| + ar(|u_{j+1}^n| + |u_{j-1}^n|) \\ &\leq (1 - 2ar)\|u^n\|_\infty + 2ar\|u^n\|_\infty \\ &= \|u^n\|_\infty \end{aligned}$$

于是 $\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty$, 即此时格式按最大模关于初值稳定.

再考虑 $ar > 1/2$ 的情形. 为简便计, 设初值取如下形式

$$\varphi(jh) = \begin{cases} \varepsilon > 0, & j = j_0, \\ 0, & j \neq j_0. \end{cases}$$

此时可算出 $u_{j_0-1}^1 = u_{j_0+1}^1 = ar\varepsilon > 0$, 而 $u_{j_0}^1 = (1 - 2ar)\varepsilon < 0$, 若 $j \neq j_0 - 1, j_0, j_0 + 1$, 均有 $u_j^1 = 0$, 于是我们可以说 u_j^1 在其不为零时, 其符号随 j 交替变化. 这种事实对 $n > 1$ 也是成立的(证明略, 从表 1.2 也可看出). 于是对任意的 j, n , 当 $ar > 1/2$ 时, (1.3.8)式右端三项有相同符号, 故

$$|u_j^{n+1}| = (2ar - 1)|u_j^n| + ar|u_{j+1}^n| + ar|u_{j-1}^n|.$$

记

$$S_n = \sum_j |u_j^n|,$$

则有

$$\begin{aligned} S_{n+1} &= (2ar - 1)S_n + arS_n + arS_n = (4ar - 1)S_n \\ &= (4ar - 1)^2 S_{n-1} = \dots = (4ar - 1)^{n+1} S_0 \\ &= (4ar - 1)^{n+1} \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 $4ar - 1 > 1$, 故当 $n \rightarrow \infty$ 时, $S_n \rightarrow \infty$. 又 S_n 至多为 $N-1$ 项和, 所以必存在 $j_1, 0 < j_1 < N$, 使

$$|u_n^*| \geq (4ar - 1)^n \varepsilon / N.$$

故古典显格式之解受初值误差的影响,随 n 的增加按指数增加,亦即当 $ar > 1/2$ 时它是不稳定的.

例 1.3.2 分析古典隐格式(1.2.9)关于初值的稳定性.

齐次形式的古典隐格式为

$$(1 + 2ar)u_j^n - ar(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) = u_j^{n-1},$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1, n = 1, 2, \dots, m_0,$$

定解条件同上例. 我们有

$$\begin{aligned} (1 + 2ar)|u_j^n| &= |ar(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + u_j^{n-1}| \\ &\leq ar|u_{j+1}^n| + ar|u_{j-1}^n| + |u_j^{n-1}| \\ &\leq ar\|u^n\|_\infty + ar\|u^n\|_\infty + \|u^{n-1}\|_\infty, \end{aligned}$$

故有

$$(1 + 2ar)\|u^n\|_\infty \leq 2ar\|u^n\|_\infty + \|u^{n-1}\|_\infty,$$

亦即 $\|u^n\|_\infty \leq \|u^{n-1}\|_\infty$, 于是古典隐式对任何网比 r , 按最大模关于初值稳定.

还有一种稳定性也需考虑.

定义 1.3.2 差分格式(1.3.5)称为按模 $\|\cdot\|$ 关于右端稳定, 是指存在 τ_0 , 使对任何 $\tau, 0 < \tau < \tau_0, h = g(\tau)$, 相应于格式(1.3.5)满足零初始条件 $u^0 = 0$ 的解 u^n , 满足不等式

$$\|u^n\| \leq M\tau \sum_{m=0}^{n-1} \|f^m\|, \quad \text{对任何 } n, 0 < n \leq T/\tau, \quad (1.3.9)$$

其中 M 是与 τ 无关的常数.

为了理解(1.3.9)式的意义, 我们假定 $u^0 = 0$ 时 u^* 和 V^* 分别满足

$$A^{(n)}u^{n+1} = B^{(n)}u^n + \tau f^n, \quad (1.3.10)$$

$$A^{(n)}V^{n+1} = B^{(n)}V^n + \tau f_1^n, \quad (1.3.11)$$

其中 f_1^n 是 f^n 的近似值.

令

$$\epsilon^n = V^n - u^n,$$

由(1.3.11)式减去(1.3.10)式得

$$A^{(n)}\epsilon^{n+1} = B^{(n)}\epsilon^{(n)} + \tau(f_1^n - f^n).$$

假定差分格式(1.3.5)关于右端稳定时,则有

$$\|\epsilon^{n+1}\| \leq M\tau \sum_{m=0}^n \|f_1^m - f^m\|.$$

上式表明,差分格式关于右端稳定的含义是,当格式的右端项存在误差时,由它引起的解的误差可由右端误差予以控制.

初值误差和右端误差都是不可避免的,因此这两种稳定性都需要研究,但在一定条件下,关于右端稳定可以由关于初值稳定推出.为验证这一事实,我们首先证明,非齐次差分方程的解可由齐次差分方程之解叠加得到.

引理 1.3.1 (迭加原理) 设 u^n 为非齐次差分格式(1.3.5)满足零初始条件 $u^0=0$ 的解,则 u^n 可表示为

$$u^n = \sum_{m=0}^{n-1} V^{(m),n}, \quad (1.3.12)$$

其中 $V^{(m),n}$ 为下述齐次差分格式之解

$$\begin{cases} A^{(n)}V^{(m),n+1} = B^{(n)}V^{(m),n}, & m < n, \\ A^{(n)}V^{(m),n+1} = \tau f^n, & m = n, \\ V^{(m),n} = 0 & m > n, \end{cases} \quad (1.3.13)$$

$$m = 0, 1, \dots$$

证明 将(1.3.12)式代入(1.3.5)左端,则有

$$\begin{aligned} & A^{(n)} \sum_{m=0}^n V^{(m),n+1} - B^{(n)} \sum_{m=0}^{n-1} V^{(m),n} \\ &= A^{(n)} V^{(n),n+1} + \sum_{m=0}^{n-1} (A^{(n)} V^{(m),n+1} - B^{(n)} V^{(m),n}), \end{aligned}$$

由于 $V^{(m),n}$ 满足(1.3.13)式,故上式右端第一项等于 τf^n ,而第二项(和式)为 0. 即由(1.3.12)式表示的 u^n 满足(1.3.5)式. \square

定理 1.3.1 设矩阵 $A^{(n)}$ 的逆于 $0 < \tau < \tau_0, h = g(\tau)$ 关于 n —

致有界,且差分格式(1.3.5)关于初值稳定,则其关于右端稳定.

证明 由于矩阵 $A^{(n)}$ 的逆一致有界,故有与 τ, n 无关的常数 M_1 , 使

$$\|(A^{(n)})^{-1}\| \leq M_1.$$

又因格式(1.3.5)关于初值稳定,故存在与 τ 无关的常数 M_2 , 使(1.3.13)的解 $V^{(n),m}$ 满足不等式

$$\begin{aligned} \|V^{(n),m}\| &\leq M_2 \|V^{(n),m+1}\| = M_2 \|\tau(A^{(n)})^{-1}f^m\| \\ &\leq \tau M_1 M_2 \|f^m\|, \end{aligned}$$

$$m = 0, 1, \dots, m < n < T/\tau.$$

从而利用(1.3.12)式得

$$\|u^*\| \leq \sum_{m=0}^{n-1} \|V^{(n),m}\| \leq M_1 M_2 \tau \sum_{m=0}^{n-1} \|f^m\|. \square$$

根据这个定理,在以后讨论差分格式的稳定性时可限于格式关于初值的稳定性;同时为了研究的方便,一律将差分格式写成齐次形式.

1.3.3 差分格式的收敛性

上面我们研究了差分格式的相容性和稳定性,但是我们的目的是希望用差分格式计算出来的解在 $h, \tau \rightarrow 0$ 时,能逼近于相应微分方程的解,这是收敛性问题.

定义 1.3.3 设 $u(x, t)$ 是微分方程问题的解, u_j^n 是逼近这个微分方程的差分格式的解. 我们称差分格式是收敛的,是指对任意 $t (0 < t \leq T)$, 当步长 $\tau, h \rightarrow 0, n\tau = t$ 时有

$$\|u^* - [u]^*\| \rightarrow 0,$$

式中 $u^* = (u_1^n, u_2^n, \dots, u_{N-1}^n)^T$, $[u]^* = (u(1, n), u(2, n), \dots, u(N-1, n))^T$. 而 $u(1, n) = u(x_1, t_n)$, 其余类推.

下面研究差分格式的相容性、稳定性与收敛性的关系. 为研究方便,我们沿用 §1.2 的记号,有时也将求解问题(1.3.2), (1.3.3)的差分格式(1.3.5)写成为

$$L_h u_j^n = f_j^n \quad (1.3.14)$$

并首先证明如下的

引理 1.3.2 设矩阵 $A^{(n)}$ 的逆于 $0 < \tau < \tau_0, h = g(\tau)$ 关于 n 一致有界, 且差分格式 (1.3.5) 关于初值稳定, 则其解满足估计式

$$\|u^n\| \leq M(\|u^0\| + \tau \sum_{m=0}^{[T/\tau]} \|f^m\|),$$

$$\text{对任何 } n, 0 < n < T/\tau, 0 < \tau < \tau_0. \quad (1.3.15)$$

证明 设 V^n 为差分格式 (1.3.5) 满足零初始条件的解

$$\begin{cases} A^{(n)} V^{n+1} = B^{(n)} V^n + \tau f^n, \\ V^0 = 0, \end{cases} \quad (1.3.16)$$

而 W^n 为相应的齐次差分格式满足非齐次初始条件的解

$$\begin{cases} A^{(n)} W^{n+1} = B^{(n)} W^n, \\ W^0 = u^0, \end{cases} \quad (1.3.17)$$

显然 $u^n = V^n + W^n$. 由于格式 (1.3.5) 关于初值稳定, 故 (1.3.17) 式的解满足估计式

$$\|W^n\| \leq M \|W^0\| \quad (1.3.18)$$

利用定理 1.3.1, 格式 (1.3.5) 关于右端稳定, 从而格式 (1.3.16) 的解满足估计式

$$\|V^n\| \leq M\tau \sum_{m=0}^{n-1} \|f^m\|.$$

由此及 (1.3.18) 式, 并注意到 $u^n = V^n + W^n$, 立即导出 (1.3.15) 式. \square

下面的定理说明从格式的相容性与稳定性可以推出它的收敛性.

定理 1.3.2 设矩阵 $A^{(n)}$ 的逆于 $0 < \tau < \tau_0, h = g(\tau)$ 关于 n 一致有界, 如果格式 (1.3.14) 是相容和稳定的, 则它是收敛的. 此外, 又若截断误差的阶为 $O(\tau^r + h^p)$, 则有收敛估计式

$$\|u^n - [u]^n\| = O(\tau^r + h^p).$$

证明 令 $e_j^* = u_j^* - u(j, n) = u_j^* - [u]_j^*$, 则 $e_0^* = e_N^* = 0$. 注意到我们在 § 1.2 中曾用 R_j^* 表示差分格式的截断差, 于是有

$$\begin{aligned} R_j^* &= [Lu]_j^* - L_h[u]_j^* = f_j^* - L_h[u]_j^* \\ &= L_h u_j^* - L_h[u]_j^* = L_h(u_j^* - [u]_j^*) \\ &= L_h e_j^*, \end{aligned}$$

这里利用了 $[f]_j^* = f_j^*$. 上式说明了 e_j^* 为差分格式

$$\begin{cases} L_h e_j^* = R_j^*, \\ e_j^0 = 0, \\ e_0^* = e_N^* = 0 \end{cases} \quad (1.3.19)$$

之解. 这里初值 $u_j^0 = [u]_j^0$ 是精确的, 故有 $e_j^0 = 0$. 令 $e^* = (e_1^*, e_2^*, \dots, e_{N-1}^*)^T$, $R^* = (R_1^*, R_2^*, \dots, R_{N-1}^*)^T$, 注意到 $R_j^* = O(\tau^* + h^p)$, 对格式 (1.3.19) 应用估计式 (1.3.15), 有

$$\|e^*\| \leq M\tau \sum_{n=0}^{[T/\tau]} \|R^*\| = O(\tau^* + h^p). \quad \square$$

定理中, 我们利用了 $f_j^* = [f]_j^*$, 即假定了差分方程右端项无误差存在. 当有误差存在时, 只要将截断误差中增加右端项的误差, 定理的证明仍成立. 此外在定理中关于模无特殊要求, 因而, 只要证明了差分格式按确定模稳定, 即可导出差分解按相应模收敛. 例如我们在例 1.3.1 中证明了古典显格式在 $r \leq 1/2$ 时按最大模稳定, 利用本定理知古典显格式在 $r \leq 1/2$ 时按最大模收敛.

一般说来, 差分格式的相容性是易于验证的, 为得到格式的收敛性, 根据上述定理, 重要的是判断格式的稳定性, 我们将在下一节给出判断差分格式稳定性的方法.

§ 1.4 研究稳定性的分离变量法

判别一个差分格式的稳定性有许多方法, 本节介绍的是一种

较为实用的研究差分格式稳定性的方法——分离变量法,又称为 Von Neumann 方法或 Fourier 方法,它是熟知的求解偏微分方程问题的分离变量法在离散情形下的模拟. 不过,这种方法只适用于常系数差分格式.

1.4.1 分离变量法的一般讨论

设所考虑的微分方程是常系数的,因此相应的差分格式也是常系数的. 根据上一节的讨论,我们可将两层差分格式写成用于稳定性分析的齐次形式

$$\sum_{m \in \Omega_1} a_m u_{j+m}^{n+1} = \sum_{m \in \Omega_0} b_m u_{j+m}^n, \quad (1.4.1)$$

$$j = 1, 2, \dots, N-1, h = 1/N.$$

式中 Ω_0, Ω_1 分别表示在第 n 及 $n+1$ 层上 m 可取值的集合. 例如,对古典显格式(1.2.8), $\Omega_0 = \{-1, 0, 1\}$, $\Omega_1 = \{0\}$, $a_0 = 1$, $b_{-1} = b_1 = ar$, $b_0 = 1 - 2ar$.

对于给定的网格函数 u_j^n , 因定 n , 用它在节点上的函数值定义一个在区间 $[0, 1]$ 上的函数 $u^*(x)$. 例如 $u^*(x)$ 可定义为阶梯函数, 它在区间 $x_j - h/2 < x \leq x_j + h/2$ ($j = 1, \dots, N-1$) 上取值 u_j^n , 在 $[0, h/2]$ 和 $[1-h/2, 1]$ 上取值 $u_0^n = u_N^n = 0$ (在稳定性研究中, 总可以假定边界条件是齐次的). 因此可以把 $u^*(x)$ 周期地开拓到整个数轴上.

利用正交函数系 $\{e^{i2l\pi x}\}$, $i = \sqrt{-1}$, 将 $u^*(x)$ 展成 Fourier 级数

$$u^*(x) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} V^*(l) e^{i2l\pi x}, \quad (1.4.2)$$

其中 $V^*(l)$ 是系数, 根据 Parseval 等式, 有

$$\|u^*(x)\|_0^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |V^*(l)|^2, \quad (1.4.3)$$

此处

$$\|u^*(x)\|_0^2 = \int_0^1 |u^*(x)|^2 dx. \quad (1.4.4)$$

易见,按前述定义 $u^*(x)$ 的办法,由(1.4.4)确定的 L_2 模与 § 1.3 所定义的 Euclid 模是等价的.

对于开拓后的连续变量函数 $u^*(x)$,格式(1.4.1)可以写成

$$\sum_{m \in D_1} a_m u^{*+1}(x + mh) = \sum_{m \in D_0} b_m u^*(x + mh). \quad (1.4.5)$$

将(1.4.2)式代入上式得

$$\sum_{m \in D_1} a_m \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} V^{*+1}(l) e^{i2l\pi(x+mh)} \right] = \sum_{m \in D_0} b_m \left[\sum_{l=-\infty}^{\infty} V^*(l) e^{i2l\pi(x+mh)} \right].$$

整理后有

$$\begin{aligned} & \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i2l\pi x} \left[\sum_{m \in D_1} a_m e^{i2l\pi mh} \right] V^{*+1}(l) \\ &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} e^{i2l\pi x} \left[\sum_{m \in D_0} b_m e^{i2l\pi mh} \right] V^*(l). \end{aligned}$$

注意到

$$\int_0^1 e^{i2l\pi x} e^{-i2s\pi x} dx = \begin{cases} 0, & l \neq s, \\ 1, & l = s, \end{cases}$$

则由前式导出

$$\begin{aligned} \left[\sum_{m \in D_1} a_m e^{i2l\pi mh} \right] V^{*+1}(l) &= \left[\sum_{m \in D_0} b_m e^{i2l\pi mh} \right] V^*(l) \quad (1.4.6) \\ l &= 0, \pm 1, \pm 2, \dots \end{aligned}$$

若令 $\sigma = 2l\pi$, 并记(因 $h = g(\tau)$)

$$G(\sigma, \tau) = \left[\sum_{m \in D_1} a_m e^{i\sigma mh} \right]^{-1} \left[\sum_{m \in D_0} b_m e^{i\sigma mh} \right],$$

则(1.4.6)式可写成

$$V^{*+1}(l) = G(\sigma, \tau) V^*(l), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.4.7)$$

其中 $G(\sigma, \tau)$ 称为格式(1.4.1)的传播因子. 反复利用(1.4.7)式, 得到

$$V^n(l) = G^n(\sigma, \tau) V^0(l) \quad (1.4.8)$$

如果传播因子的任意次幂是一致有界的, 并设其界为 M , 那么应

用 Parseval 等式(1.4.3),有

$$\begin{aligned}\|u^n(x)\|_0^2 &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} |V^n(l)|^2 = \sum_{l=-\infty}^{\infty} |G(\sigma, \tau) V^0(l)|^2 \\ &\leq M^2 \sum_{l=-\infty}^{\infty} |V^0(l)|^2 = M^2 \|u^0(x)\|_0^2.\end{aligned}$$

由此得出格式(1.4.1)按 L_2 模是稳定的. 反过来我们也可以证明, 如果差分格式(1.4.1)按 L_2 模稳定, 那么其传播因子 $G(\sigma, \tau)$ 的任意次幂是一致有界的, 即有

定理 1.4.1 差分格式(1.4.1)按 L_2 模稳定的充要条件是对 $0 < \tau < \tau_0, 0 < n\tau \leq T$, 一切实数 σ , 存在与 τ, σ 无关的常数 M , 使得

$$|G^n(\sigma, \tau)| \leq M \quad (1.4.9)$$

利用条件(1.4.9)来判断差分格式的稳定性是不方便的, 代之使用的常常是下面的

定理 1.4.2 差分格式(1.4.1)按 L_2 模稳定的充要条件是对 $0 < \tau < \tau_0$, 一切实数 σ , 存在与 τ, σ 无关的常数 c , 使得

$$|G(\sigma, \tau)| \leq 1 + c\tau. \quad (1.4.10)$$

证明 易知(1.4.10)式与(1.4.9)式是等价的. 事实上若(1.4.10)式成立, 为确定起见, 设 $c > 0$, 则有

$$\begin{aligned}|G^n(\sigma, \tau)| &= |G(\sigma, \tau)|^n \leq (1 + c\tau)^n \leq (1 + c\tau)^{T/\tau} \\ &\leq e^c \equiv M.\end{aligned}$$

反之, 若(1.4.9)式成立, 不失一般性, 可设 $M \geq 1$, 注意到 $0 < n \leq T/\tau$, 特别地取 $(T-\tau)/\tau < n \leq T/\tau$, 则有 $\tau/T \leq 1/n < \tau/(T-\tau)$. 由此得到

$$\begin{aligned}|G(\sigma, \tau)| &\leq M^{1/n} \leq M^{\tau/(T-\tau)} = \exp\left(\frac{\tau}{T-\tau} \ln M\right) \\ &= 1 + \frac{\tau}{T-\tau} \ln M + \frac{1}{2!} \left(\frac{\tau}{T-\tau} \ln M\right)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{3!} \left(\frac{\tau}{T-\tau} \ln M \right)^3 + \dots \\
= & 1 + \frac{\tau}{T-\tau} \ln M \left(1 + \frac{1}{2!} \frac{\tau}{T-\tau} \ln M \right. \\
& \left. + \frac{1}{3!} \left(\frac{\tau}{T-\tau} \ln M \right)^2 + \dots \right) \\
\leq & 1 + c\tau,
\end{aligned}$$

其中 $c = \frac{\ln M}{T-\tau_0} \exp\left(\frac{\tau_0}{T-\tau_0} \ln M\right)$. \square

这样一来,为判别常系数差分格式的稳定性,只要算出它的传播因子 $G(\sigma, \tau)$,然后求出使(1.4.10)式成立时 τ 及 $h=g(\tau)$ 所应满足的条件即可. 条件(1.4.10)称为 Von Neumann 条件. 由此得知,在单个方程的情形, Von Neumann 条件是常系数双层差分格式稳定的充要条件.

上述方法也适用于 Cauchy 问题差分格式稳定性的研究,但此时 $u^*(x)$ 定义在整个数轴上,一般说来是不具有周期性的,然而我们可将其展成 Fourier 积分的形式,此时仍可导出 Von Neumann 条件是单个方程式情形常系数双层差分格式稳定的充要条件. 关于这方面的讨论可参见参考书[3].

实际使用上述方法时, $G(\sigma, \tau)$ 是容易计算的,因为由该法的推导过程可知,只要在所论的差分格式中将 u_j^n 改写为 $u^*(x)$,并以 $u^*(x) = V^*(l)e^{i\sigma x}$ 代入,消去公因子,即可得到(1.4.6)式,从而求得 $G(\sigma, \tau)$.

例 1.4.1 用分离变量法判别古典显格式(1.2.8)的稳定性.

先将格式写成

$$u^{n+1}(x) = (1 - 2ar)u^n(x) + ar(u^n(x+h) + u^n(x-h)),$$

再将 $u^*(x) = V^*(l)e^{i\sigma x}$ 代入得

$$V^{n+1}(l)e^{i\sigma x} = (1 - 2ar)V^n(l)e^{i\sigma x} + ar(e^{i\sigma(x+h)} + e^{i\sigma(x-h)})V^n(l)$$

消去 $e^{i\sigma x}$, 得

$$V^{n+1}(l) = [(1 - 2ar) + ar(e^{i\sigma h} + e^{-i\sigma h})]V^n(l),$$

从而

$$G(\sigma, \tau) = 1 - 2ar(1 - \cos \sigma h) = 1 - 4ar \sin^2 \frac{\sigma h}{2}.$$

因此, 当且仅当 $ar \leq 1/2$ 时, Von eumann 条件满足, 古典显格式稳定. 这与在例 1.3.1 中得到的结论相同, 但此处方法简便.

例 1.4.2 用分离变量法判别古典隐格式(1.2.9)的稳定性.

将格式写成

$$(1 + 2ar)u^n(x) - ar(u^n(x+h) + u^n(x-h)) = u^{n-1}(x),$$

以 $u^n(x) = V^n(l)e^{i\sigma x}$ 代入得

$$[(1 + 2ar) - ar(e^{i\sigma h} + e^{-i\sigma h})]e^{i\sigma x}V^n(l) = e^{i\sigma x}V^{n-1}(l),$$

即

$$(1 + 4ar \sin^2 \frac{\sigma h}{2})V^n(l) = V^{n-1}(l),$$

从而

$$G(\sigma, \tau) = 1/(1 + 4ar \sin^2 \frac{\sigma h}{2}).$$

显见对任何网比 r , Von Neumann 条件都满足, 故古典隐格式无条件稳定(绝对稳定).

1.4.2 对差分方程组的应用

分离变量法还可用于判断解偏微分方程组的差分格式(差分方程组)的稳定性.

对于偏微分方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} = C \frac{\partial^2 U}{\partial x^2},$$

其中 $U(x, t) = (u_1(x, t), \dots, u_n(x, t))^T$, C 是 n 阶常数矩阵, 其相应的两层差分格式也可统一写成

$$\sum_{n \in n_1} A_n U_{j+n}^{*+1} = \sum_{n \in n_0} B_n U_{j+n}^* \quad (1.4.11)$$

的形式, 其中 A_n, B_n 都是 n 阶常数矩阵, U_j^* 是 $U(x_j, t_n)$ 的近似值. 我们同样可以利用 U_j^* 定义 $U^*(x)$, 并开拓到整个数轴上, 再作 Fourier 展开, 最后得到类似 (1.4.8) 式的形式

$$V^*(l) = G^*(\sigma, \tau) V^0(l).$$

不过, 这里的 $G(\sigma, \tau)$ 是矩阵, 它称为格式 (1.4.11) 的传播矩阵, 而差分格式 (1.4.11) 稳定的充要条件是

$$\|G^*(\sigma, \tau)\|_0 \leq M, \quad (1.4.12)$$

对于 $0 < \tau < \tau_0, 0 < n\tau \leq T$, 一切实数 σ, M 为与 σ, τ 无关的常数. 此时已不能得到形如 (1.4.10) 式那样的充要条件了. 但由于矩阵的谱半径不超过它的任一种模, 故可得到 (1.4.12) 式成立的必要条件是 $G(\sigma, \tau)$ 的谱半径满足

$$\rho(G(\sigma, \tau)) \leq 1 + c\tau, \quad (1.4.13)$$

对于 $0 < \tau < \tau_0$, 一切实数 σ, c 为与 σ, τ 无关的常数.

条件 (1.4.13) 亦称为 Von Neumann 条件, 在很多情形下, 它也是稳定的充分条件.

定理 1.4.3 若 $G(\sigma, \tau)$ 为正规矩阵, 即满足关系式 $GG^* = G^*G$, 其中 G^* 为 G 的共轭转置阵, 则 (1.4.13) 式为差分方程组 (1.4.11) 按 L_2 模稳定的充要条件.

证明 当 $G(\sigma, \tau)$ 为正规矩阵时, $G^*(\sigma, \tau)$ 亦然. 由数值代数知识可知, 正规矩阵的 L_2 模等于它的谱半径, 故有

$$\|G^*(\sigma, \tau)\|_0 = \rho(G^*(\sigma, \tau)) = \rho^*(G(\sigma, \tau))$$

当 (1.4.13) 式成立时, 根据定理 1.4.2 的证明过程, 必有 $\rho^*(G(\sigma, \tau)) \leq M$, 从而 (1.4.12) 式成立, 所以差分方程组 (1.4.11) 稳定. \square

实对称阵, 正交阵, Hermite 阵, 酉矩阵都是正规阵, 当 $G(\sigma, \tau)$ 属于这些类型时, Von Neumann 条件是判断稳定性的充分条件.

下面我们给出一个作为对方程组应用分离变量法的例子.

例 1.4.3 用分离变量法分析 Richardson 格式(1.2.10)的稳定性.

先将格式写成

$$u^{n+1}(x) = 2ar(u^n(x+h) - 2u^n(x) + u^n(x-h)) + u^{n-1}(x)$$

显然,它等价于双层格式组

$$\begin{cases} u^{n+1}(x) = 2ar(u^n(x+h) - 2u^n(x) + u^n(x-h)) + v^n(x) \\ v^{n+1}(x) = u^n(x). \end{cases}$$

记 $W^n(x) = (u^n(x), v^n(x))^T$, 则可将上格式组写为

$$\begin{aligned} W^{n+1}(x) = & \begin{bmatrix} 2ar & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} [W^n(x+h) + W^n(x-h)] \\ & + \begin{bmatrix} -4ar & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} W^n(x) \end{aligned}$$

令 $W^n(x) = V^n(l)e^{i\sigma x}$, 这里 $V^n(l)$ 也为二维向量, 以之代入上式可得

$$V^{n+1}(l) = G(\sigma, \tau) V^n(l)$$

其中

师

$$G(\sigma, \tau) = \begin{bmatrix} -8arsin^2 \frac{\sigma h}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

为传播矩阵, 它的两个特征值 λ_1, λ_2 是方程

$$\det |G(\sigma, \tau) - \lambda I| = \lambda^2 + 8arsin^2 \frac{\sigma h}{2} \lambda - 1 = 0$$

的两个根, 显然 $\lambda_1 \lambda_2 = -1$, 但 $\lambda = \pm 1$ 不是上述方程的根. 又因这个方程的判别式 $64a^2 r^2 \sin^4 \frac{\sigma h}{2} + 4 > 0$, 故 λ_1, λ_2 均为实根, 由 $\lambda_1 \lambda_2 = -1$ 知, 必有一根的绝对值大于 1, 于是 $\rho(G(\sigma, \tau)) > 1$, 它不满足 Von Neumann 条件(1.4.13), 故 Richardson 格式绝对不稳定.

为今后应用方便起见, 对于传播矩阵不是正规阵的情形, 我们再给出几个判别差分格式稳定性的充分条件.

定理 1.4.4 如果存在非奇异矩阵 $S(\sigma, \tau)$, 使得

$$S^{-1}(\sigma, \tau)G(\sigma, \tau)S(\sigma, \tau) = \Lambda(\sigma, \tau)$$

其中 $\Lambda(\sigma, \tau)$ 为对角阵, 并且存在与 σ, τ 无关的常数 c_1 和 c_2 , 使对一切 σ 和 $0 < \tau < \tau_0$ 有

$$\|S(\sigma, \tau)\|_0 \leq c_1, \quad \|S^{-1}(\sigma, \tau)\|_0 \leq c_2$$

则 Von Neumann 条件 (1.4.13) 是矩阵族 $\{G^*(\sigma, \tau)\}$ 一致有界的充分条件.

证明 此时有

$$G(\sigma, \tau) = S(\sigma, \tau)\Lambda(\sigma, \tau)S^{-1}(\sigma, \tau),$$

若 Von Neumann 条件 (1.4.13) 满足, 则矩阵 $\Lambda(\sigma, \tau)$ 的对角元素的绝对值不超过 $1 + c\tau$ (c 是与 σ, τ 无关的常数), 由于

$$G^*(\sigma, \tau) = S(\sigma, \tau)\Lambda^*(\sigma, \tau)S^{-1}(\sigma, \tau)$$

所以当 $0 < \tau < \tau_0, n\tau \leq T$ 时有

$$\begin{aligned} \|G^*(\sigma, \tau)\|_0 &\leq c_1 c_2 (1 + c\tau)^n \leq c_1 c_2 (1 + c\tau)^{T/\tau} \\ &\leq c_1 c_2 e^{cT} \equiv M. \quad \square \end{aligned}$$

定理 1.4.5 设 $G(\sigma, \tau) = \hat{G}(\omega)$, 其中 $\omega = \sigma h$, $\hat{G}(\omega)$ 是 n 阶矩阵, 并且对每个 ω , 条件

(1) $\hat{G}(\omega)$ 有 n 个不同的特征值;

(2) $\rho(\hat{G}(\omega)) < 1$

中有一个成立, 则 Von Neumann 条件 (1.4.13) 是矩阵族 $\{G^*(\sigma, \tau)\}$ 一致有界的充分条件.

证明 (1) 因 $\hat{G}(\omega)$ 有 n 个不同的特征值, 所以存在非奇异矩阵 $S(\omega)$, 使

$$S^{-1}(\omega)\hat{G}(\omega)S(\omega) = \Lambda(\omega)$$

其中 $\Lambda(\omega)$ 是对角阵. 由定理 1.4.4 即可证得 Von Neumann 条件是矩阵族 $\{G^*(\omega)\}$ 一致有界的充分条件.

(2) 由于 $\rho(\hat{G}(\omega)) < 1$, 根据线性代数知识, 则存在一个相容矩阵模 $\|\cdot\|$, 使

$$\|\hat{G}(\omega)\|_* < 1$$

进而对任何自然数 n , 有

$$\|\hat{G}^n(\omega)\|_* \leq \|\hat{G}(\omega)\|_*^n < 1$$

利用矩阵模的等价性,

$$\|\hat{G}^n(\omega)\|_0 \leq M \|\hat{G}^n(\omega)\|_* < M. \quad \square$$



§ 1.5 几个无条件稳定的差分格式

由前面几节的讨论知, 构造精度高, 稳定性好, 计算量小的差分格式, 是差分方法的核心问题. 本节将重点就提高截断误差阶和改善稳定性两个方面, 介绍几种求解抛物型方程的实用的差分格式, 并用分离变量法分析其稳定性.

考虑简单的热传导方程的第一边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (1.5.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1.5.2)$$

下面就上述问题构造几种差分格式.

1.5 Crank-Nicholson 格式

在建立差分格式时, 经常使用半节点, 这样在不增加节点时, 一阶偏导数可用中心差商代替. 在半节点 $(x_j, t_{n+\frac{1}{2}})$ 处有

$$\frac{u(j, n+1) - u(j, n)}{\tau} = \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2), \quad (1.5.3)$$

$$\frac{u(j+1, n+1) - 2u(j, n+1) + u(j-1, n+1))}{h^2}$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^{n+1} + O(h^2)$$

$$= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^{n+\frac{1}{2}} + \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right]_j^{n+\frac{1}{2}} + O(\tau^2 + h^2), \quad (1.5.4)$$

类似地可得

$$\begin{aligned} & \frac{u(j+1, n) - 2u(j, n) + u(j-1, n))}{h^2} \\ &= \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n - \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right]_j^n + O(\tau^2 + h^2), \quad (1.5.5) \end{aligned}$$

将(1.5.4)式与(1.5.5)式相加得

$$\begin{aligned} & \frac{u(j+1, n+1) - 2u(j, n+1) + u(j-1, n+1))}{h^2} \\ &+ \frac{u(j+1, n) - 2u(j, n) + u(j-1, n))}{h^2} \\ &= 2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^{n+\frac{1}{2}} + (\tau^2 + h^2), \quad (1.5.6) \end{aligned}$$

由(1.5.3)式与(1.5.6)式, 可得逼近方程(1.5.1)的差分格式

$$\begin{aligned} & \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} \\ & - \frac{1}{2} \left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \right] = 0. \quad (1.5.7) \end{aligned}$$

它称作 Crank-Nicholson 格式, 简称 C-N 格式, 截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$, 节点图式如图 1.4.

容易求出格式(1.5.7)的传播因子

$$G(\sigma, \tau) = (1 - 2r \sin^2 \frac{2\sigma h}{2}) / (1 + 2r \sin^2 \frac{\sigma h}{2}),$$

其中 $r = \tau/h^2$, 显然, 对任何 r , Von Neumann 条件都满足, 故 C-N 格式绝对稳定.

1.5.2 Du Fort-Frankel 格式

逼近方程(1.5.1)的 Richardson 格式

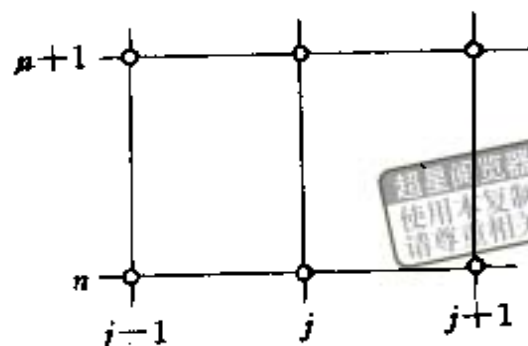


图 1.4 Crank-Nicholson 格式节点图式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0, \quad (1.5.8)$$

虽有二阶精度,但它是绝对不稳定的,现用 $u_j^{n+1} + u_j^{n-1}$ 代替 (1.5.8) 式中的 $2u_j^n$ 得到差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} - \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{h^2} = 0. \quad (1.5.9)$$

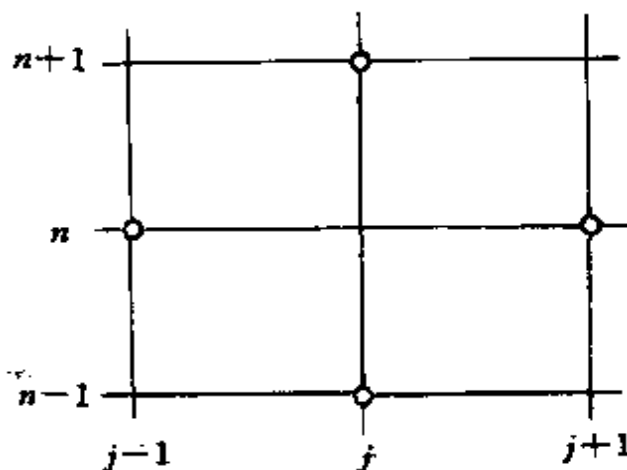


图 1.5 Du Fort-Frankel 格式节点图式

称之为 Du Fort-Frankel 格式,简称 D-F 格式,其节点图式为

图 1.5.

先考察格式的相容性. 利用 Taylor 级数展开有

$$\begin{aligned} & \frac{u(j, n+1) - u(j, n-1)}{2\tau} \\ &= \frac{u(j+1, n) - u(j, n+1) - u(j, n-1) + u(j-1, n)}{h^2} \\ &= \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n + \frac{\tau^2}{h^2} \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_j^n + O(\tau^2 + h^2 + \frac{\tau^4}{h^2}), \end{aligned}$$

由此可见, 当 $\tau, h \rightarrow 0$ 时, 若 $\tau/h \rightarrow 0$ (取 $r = \tau/h^2 = \text{const}$, 这一要求自然满足), 则 (1.5.9) 式为抛物型方程 (1.5.1) 的相容逼近, 截断误差为 $O(\tau + h^2)$. 若取 $\beta = \tau/h = \text{const}$, 则 (1.5.9) 式相容于双曲型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

不再是 (1.5.1) 式的相容逼近.

再来考察格式的稳定性. 仿照研究 Richardson 格式的稳定性过程, 先将 (1.5.9) 式写成等价的两层格式组

$$\begin{cases} (1 + 2r)u_j^{n+1} = 2r(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) + (1 - 2r)v_j^n, \\ v_j^{n+1} = u_j^n. \end{cases}$$

记 $W_j^n = (u_j^n, v_j^n)^T$, 将上格式组化成

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 + 2r & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} W_j^{n+1} &= \begin{bmatrix} 2r & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (W_{j+1}^n + W_{j-1}^n) \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 1 - 2r \\ 1 & 0 \end{bmatrix} W_j^n, \end{aligned}$$

令 $W_j^n = V^n e^{i\sigma jh}$, 代入上式, 消去公因子 $e^{i\sigma jh}$ 并整理得

$$V^{n+1} = G(\sigma, \tau) V^n,$$

其中传播矩阵

$$G(\sigma, \tau) = \frac{1}{1 + 2r} \begin{bmatrix} 4r \cosh \sigma h & 1 - 2r \\ 1 + 2r & 0 \end{bmatrix}$$

为非正规阵,其特征方程为

$$\lambda^2 - \frac{4r\cos\sigma h}{1+2r} - \frac{1-2r}{1+2r} = 0. \quad (1.5.10)$$

为了给出二次方程(1.5.10)的根的模的估计,我们先给出下面的引理

引理 1.5.1 实系数二次方程

$$x^2 - bx - c = 0 \quad (1.5.11)$$

的根按模不大于1的充要条件是

$$|b| \leq 1 - c \leq 2. \quad (1.5.12)$$

证明 必要性:令 x_1, x_2 是方程(1.5.11)的两个根,并满足 $|x_{1,2}| \leq 1$,由根与系数的关系有 $x_1 x_2 = -c$,因此有 $|c| = |x_1| |x_2| \leq 1$.再利用根与系数的关系 $b = x_1 + x_2$,如果 $x_1 + x_2 \geq 0$,则 $1 - c - |b| = 1 + x_1 x_2 - (x_1 + x_2) = (1 - x_1)(1 - x_2) \geq 0$,即 $|b| \leq 1 - c$.由已证得的 $|c| \leq 1$,知 $-1 \leq c \leq 1$,故有 $|b| \leq 1 - c \leq 2$.

同样,如果 $x_1 + x_2 < 0$,也有

$$\begin{aligned} 1 - c - |b| &= 1 + x_1 x_2 + (x_1 + x_2) \\ &= (1 + x_1)(1 + x_2) \geq 0, \end{aligned}$$

即 $|b| \leq 1 - c$,由 $|c| \leq 1$ 可得出 $|b| \leq 1 - c \leq 2$.

综合上面两种情况都有 $|b| \leq 1 - c \leq 2$.

充分性:由 $|b| \leq 1 - c \leq 2$ 可知 $|c| \leq 1$. 如果 $x_1 + x_2 < 0$,则由

$$1 - c - |b| = (1 + x_1)(1 + x_2) \geq 0$$

推知 $1 + x_1$ 与 $1 + x_2$ 同号. 又由 $|c| = |x_1 x_2| \leq 1$ 知 $|x_1|, |x_2|$ 最多只有一个大于1.

不妨设 $|x_1| > 1$,那么就有 $|x_2| < 1$,若令 $x_1 > 1$,则由 $x_1 + x_2 < 0$ 推知必有 $x_2 < -1$,这就矛盾于 $|x_2| < 1$. 若令 $x_1 < -1$,则由 $1 + x_1, 1 + x_2$ 同号知仍有 $x_2 < -1$,这是不可能的. 故总有

$$|x_1| \leq 1, |x_2| \leq 1.$$

完全类似地可以证明当 $x_1 + x_2 \geq 0$ 时结论也成立. \square

利用这个引理,易知方程(1.5.10)的两根 λ_1, λ_2 均按模不大于 1. 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时有

$$|\lambda_1 \lambda_2| = |\lambda_1| |\lambda_2| = |\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 = \left| \frac{1-2r}{1+2r} \right| < 1,$$

根据定理 1.4.5 得知, D-F 格式绝对稳定.

1.5.3 三层隐式格式

D-F 格式是一个绝对稳定的三层显格式, 但它的相容性是有条件的. 一般地, 三层显格式往往在稳定性或相容性方面要受到限制. 因此我们转向三层隐式格式

引入关于 x 的二阶中心差分

$$\delta_x^2 u(j, n) = u(j+1, n) - 2u(j, n) + u(j-1, n)$$

可知差分格式

$$\begin{aligned} \frac{1}{12} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^{n-1}}{2\tau} + \frac{10}{12} \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + \frac{1}{12} \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^{n-1}}{2\tau} \\ = \frac{1}{4h^2} (\delta_x^2 u_j^{n+1} + 2\delta_x^2 u_j^n + \delta_x^2 u_j^{n-1}) \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

是一个三层隐式格式, 其节点图式见图 1.6.

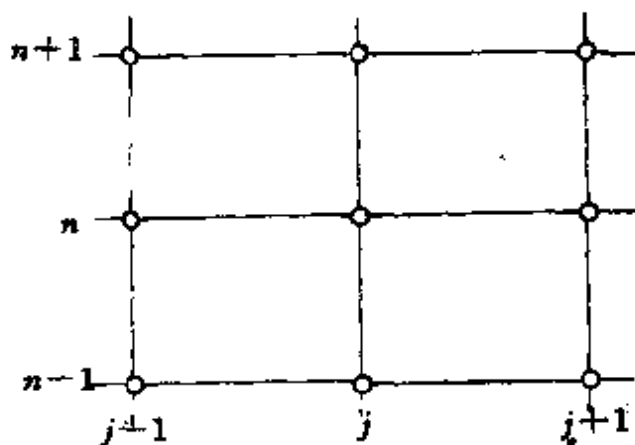


图 1.6 三层隐式格式(1.5.13)节点图式

当方程(1.5.1)的解充分光滑时, 如下关系式成立

$$\frac{\partial^{p+q} u}{\partial x^p \partial t^q} = \frac{\partial^{p+2q} u}{\partial x^{p+2q}}, p, q \text{ 为非负整数.} \quad (1.5.14)$$

将(1.5.13)式中各节点上的 u , 以其在节点 (j, n) 处展开的 Taylor 级数代入并利用关系式(1.5.14), 可以算出格式(1.5.13)的截断误差为 $O(\tau^2 + h^4)$, 因而, 它是一个高精度差分格式.

为分析格式(1.5.13)的稳定性, 首先将其化成等价的两层格式组

$$\begin{cases} (12 + (1 - 6r)\delta_x^2)u_j^{n+1} = 12\delta_x^2 u_j^n + (12 + (1 + 6r)\delta_x^2)v_j^n, \\ v_j^{n+1} = u_j^n. \end{cases}$$

容易求出其传播矩阵

$$G(\sigma, \tau) = \begin{bmatrix} -12r\sin^2 \frac{\sigma h}{2} & 3 - (1 + 6r)\sin^2 \frac{\sigma h}{2} \\ 3 - (1 - 6r)\sin^2 \frac{\sigma h}{2} & 3 - (1 - 6r)\sin^2 \frac{\sigma h}{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

这是一个非正规阵, 其特征方程为

$$\lambda^2 + \frac{12r\sin^2 \frac{\sigma h}{2}}{3 - (1 - 6r)\sin^2 \frac{\sigma h}{2}}\lambda - \frac{3 - (1 + 6r)\sin^2 \frac{\sigma h}{2}}{3 - (1 - 6r)\sin^2 \frac{\sigma h}{2}} = 0, \quad (1.5.15)$$

利用引理 1.5.1 知方程(1.5.15)的两根 λ_1, λ_2 均按模不大于 1, 当 $\lambda_1 = \lambda_2$ 时有

$$\begin{aligned} |\lambda_1 \lambda_2| &= |\lambda_1| |\lambda_2| = |\lambda_1|^2 = |\lambda_2|^2 \\ &= \left| \frac{3 - (1 + 6r)\sin^2 \frac{\sigma h}{2}}{3 - (1 - 6r)\sin^2 \frac{\sigma h}{2}} \right| < 1, \end{aligned}$$

根据定理 1.4.5 得知三层隐式格式(1.5.13)绝对稳定.

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < \pi, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin x, & 0 \leq x \leq \pi, \\ u(0, t) = u(\pi, t) = 0, & t \geq 0, \end{cases} \quad (1.5.16)$$

利用差分格式(1.5.13)求数值解.

取 $\tau=0.02, h=\pi/18$, 于是 $r=0.656561\dots$, 为简便起见, 用问题(1.5.16)的解析解 $u(x, t)=e^{-t}\sin x$ 计算第一层的值 u_j^1 , 然后按格式(1.5.13)计算到第五十层, 数值结果见表 1.3.

表 1.3 用格式(1.5.13)数值计算的结果

(x, t)	格式(1.5.13)差分解	问题(1.5.16)解析解
$(\pi/18, 1)$	0.063880	0.063882
$(\pi/9, 1)$	0.125819	0.125822
$(\pi/6, 1)$	0.183934	0.183940
$(2\pi/9, 1)$	0.236461	0.236468
$(5\pi/18, 1)$	0.281803	0.281812
$(\pi/3, 1)$	0.318584	0.318593

由表中看出, 格式(1.5.13)的精度是相当高的, 它至少具有 $O(\tau^2)$ 阶(10^{-4})精度.

1.5.4 交替显隐格式

我们总希望用差分格式能够获得较为精确的数值结果. 而用差分格式求出的解只有当 $h, \tau \rightarrow 0$ 时才能逼近相应微分方程的解(真解). 但是如果知道一种差分格式的解从小于真解的一侧逼近之, 而另一种差分格式的解从大于真解的一侧逼近之, 即两种差分格式的解有夹着真解的趋势, 则可以交替使用这两种格式以得到更高的逼近精度. 下面的两种格式就是基于古典显格式与古典隐格式分别从两侧逼近真解(详见参考书[1])构造出来的.

(1) 显式预测隐式校正格式

在 $n+1/2$ 层上, 用古典显格式计算出预测值(过渡值) $u_j^{n+1/2}$, 再在 $n+1$ 层上用古典隐格式校正予测值, 即有格式

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1/2} - u_j^n}{\tau/2} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n+1/2}}{\tau/2} - \frac{u_{j+1}^{n+1/2} - 2u_j^{n+1/2} + u_{j-1}^{n+1/2}}{h^2} = 0. \end{cases} \quad (1.5.17)$$

只要从以上两式消去过渡值 $u_j^{n+1/2}$, 即可得到逼近方程(1.5.1)的 $C-N$ 格式. 因此差分格式(1.5.17)是一个有二阶精度的绝对稳定的格式.

格式(1.5.17)的稳定性分析也可如下进行, 分别算出格式(1.5.17)中两个式子的传播因子

$$\begin{cases} V^{n+1/2} = (1 - 2r \sin^2 \frac{\sigma h}{2}) V^n, \\ V^{n+1} = (1 / (1 + 2r \sin^2 \frac{\sigma h}{2})) V^{n+1/2}. \end{cases}$$

从而得到格式(1.5.17)的传播因子

$$G(\sigma, \tau) = (1 - 2r \sin^2 \frac{\sigma h}{2}) / (1 + 2r \sin^2 \frac{\sigma h}{2}).$$

显然它就是 $C-N$ 格式的传播因子, 于是格式(1.5.17)绝对稳定.

格式(1.5.17)是先显式后隐式, 其实也可以先隐式后显式, 这样得到的格式也是一个有二阶精度的绝对稳定格式, 其证明留作习题.

(2) 跳点格式

首先将网点 (j, n) 按 $j+n = \text{偶数或奇数}$ 分成两组, 分别称作偶数网点和奇数网点. 从 t_n 到 t_{n+1} 的计算过程中, 先在偶数网点上用古典显格式计算, 再在奇数网点上用古典隐格式计算, 即

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0, \\ \quad n+1+j = \text{偶数}, \\ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0, \\ \quad n+1+j = \text{奇数}. \end{cases} \quad (1.5.18)$$

容易看出,在(1.5.19)式中, u_{j+1}^{n+1} 与 u_{j-1}^{n+1} 都是偶数网点值,已由(1.5.18)式求出,因此,这是偶、奇、显、隐交替的方法,称之为跳点格式,其中(1.5.19)式只是形式上是隐式,实质上还是显式.

为了研究跳点格式的精度和稳定性,我们注意到用(1.5.19)式算出奇数网点上的 u_j^{n+1} 时,由于 $n+2+j$ 为偶数,因此用(1.5.18)式计算 u_j^{n+2} 的计算式为

$$\frac{u_j^{n+2} - u_j^{n+1}}{\tau} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0.$$

此式与(1.5.19)式相减得到

$$u_j^{n+2} = 2u_j^{n+1} - u_j^n, \quad n+2+j = \text{偶数}. \quad (1.5.20)$$

从(1.5.20)式及(1.5.19)式中消去 u_j^{n+1} ,得到

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+2} - u_j^n}{2\tau} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - (u_j^{n+2} + u_j^n) + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} &= 0, \\ n+j &= \text{偶数}, \end{aligned} \quad (1.5.21)$$

因此可以看出,当 $n+j$ =偶数时,(1.5.21)就是D-F格式.此外我们注意到;跳点格式中,奇、偶网点是两组相互独立的网格点,因此跳点格式等价于D-F格式,其精度和稳定性两者是相同的,但在算法上跳点格式有较大的改进.

事实上,由初始值 u_j^0 出发按跳点格式进行计算时,首先用(1.5.18)式算出 $n=1$ 时间层上偶数网点上的值,再利用(1.5.19)式显式算出该层上奇数网点上的值,同时,每计算一个奇数网点上的值无需保留而直接用(1.5.20)式计算 $n=2$ 时间层上偶数网点

上的值,并予以保留,以便利用(1.5.19)式算出这一层上奇数网点上的值,依此进行,直至算出最后一个时间层上偶网点上的值,再用(1.5.19)式补算出该时间层上奇数网点上的值.由于(1.5.20)式较(1.5.18)式简单,从而节省了很多计算量,同时也克服了三层格式不能“自开始”的缺点.

§ 1.6 建立差分格式的其他方法

1.6.1 待定系数法

这是构造差分格式的常用方法之一.使用这种方法时,先给出含参数的差分方程或差分算子,然后适当选择参数使差分方程或差分算子逼近所论的微分方程或微分算子的逼近阶尽可能的高,且有较好的稳定性.我们举例说明之.

构造如下的差分方程

$$c_0 u_j^n + c_1 u_{j+1}^n + c_2 u_{j+1}^{n+1} + c_3 u_{j-1}^{n+1} = 0 \quad (1.6.1)$$

来逼近微分方程(1.5.1),其中 $c_i (i=0,1,2,3)$ 是待定参数.

将(1.6.1)式中各节点上的 u ,以其在节点 (j,n) 处展开的 Taylor 级数代入,并利用关系式(1.5.14),经整理得

$$\begin{aligned} & (c_0 + c_1 + c_2 + c_3)u(j,n) + (c_1 - c_3)h \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n \\ & + (c_2 + c_3)\tau \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^n + \frac{1}{2}(c_1 + c_3)h^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n \\ & - c_3 h \tau \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} \right]_j^n + \frac{1}{6}(c_1 - c_3)h^3 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_j^n \\ & + \frac{1}{2}(c_2 + c_3)\tau^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_j^n + \frac{1}{2}c_3 h^2 \tau \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \right]_j^n \\ & - \frac{1}{2}c_3 h \tau^2 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial t^2} \right]_j^n + \frac{1}{24}(c_1 + c_3)h^4 \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_j^n \\ & + \dots = 0 \end{aligned} \quad (1.6.2)$$

为了使(1.6.1)式逼近方程(1.5.1)且有尽可能高阶的截断误差,显然应有

$$\begin{cases} c_0 + c_1 + c_2 + c_3 = 0, \\ c_1 - c_3 = 0, \\ (c_2 + c_3)\tau = 1, \\ \frac{1}{2}(c_1 + c_3)h^2 = -1. \end{cases}$$



解此方程组得

$$c_0 = \frac{1}{h^2} - \frac{1}{\tau}, \quad c_1 = c_3 = -\frac{1}{h^2}, \quad c_2 = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2}.$$

将以上诸 c_i 之值代入(1.6.1)式,根据(1.6.2)式并注意到(1.5.14)式,我们得到截断误差为 $O(\frac{\tau}{h} + \tau + h^2)$ 的差分格式

$$(\frac{1}{h^2} - \frac{1}{\tau})u_j^n - \frac{1}{h^2}u_{j+1}^n + (\frac{1}{\tau} + \frac{1}{h^2})u_{j+1}^{n+1} - \frac{1}{h^2}u_{j-1}^{n+1} = 0,$$

或

$$(1+r)u_j^{n+1} = ru_{j+1}^{n+1} + (1-r)u_j^n + ru_{j+1}^n. \quad (1.6.3)$$

这是一个显式格式,但在计算第 $n+1$ 层的 u_j^{n+1} 时要用到这一层已算好的 u_{j+1}^n ,故称为半显式格式.

容易求出格式(1.6.3)的传播因子为

$$G(\sigma, \tau) = (1 - 2r\sin^2 \frac{\sigma h}{2} + ir\sin \frac{\sigma h}{2}) / (1 + 2r\sin^2 \frac{ch}{2} - ir\sin \sigma h).$$

而

$$|G(\sigma, \tau)|^2 = \frac{(1 - 2r\sin^2 \frac{\sigma h}{2})^2 + r^2\sin^2 \sigma h}{(1 + 2r\sin^2 \frac{\sigma h}{2})^2 + r^2\sin^2 \sigma h} \leq 1.$$

故格式(1.6.3)绝对稳定.

用完全类似于上述的方法,还可以得到另一个半显式格式

$$(1+r)u_j^{n+1} = ru_{j+1}^{n+1} + (1-r)u_j^n + ru_{j-1}^n. \quad (1.6.4)$$

该格式的精度与稳定性均与格式(1.6.3)相同, 为了区别起见, 称格式(1.6.3)为左半显式格式, 格式(1.6.4)为右半显式格式, 它们的节点图式见图 1.7 和图 1.8.

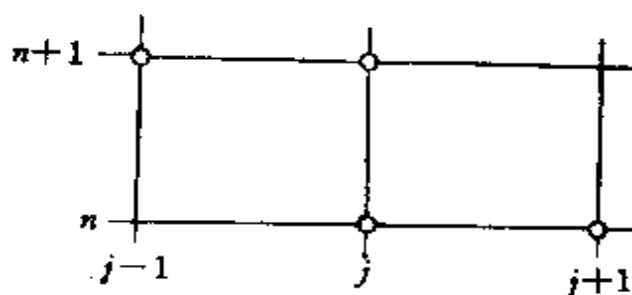


图 1.7 左半显式节点图式

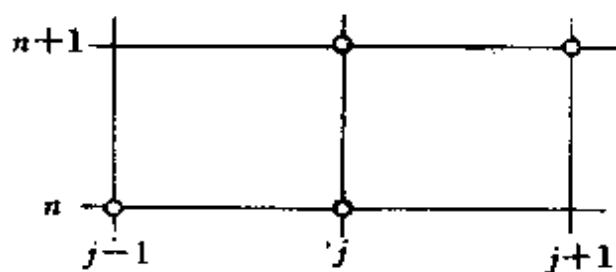


图 1.8 右半显式节点图式

这两个半显式的解有夹着问题(1.5.1), (1.5.2)的解的趋势(参见参考书[5]), 因此交替使用这两个格式进行计算, 效果会好些.

1.6.2 算子方法

考察微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = F(D)u, \quad (1.6.5)$$



其中 $D = \frac{\partial}{\partial x}$, $F(D)$ 为算子多项式.

引入记号

$$Ey(x) = y(x+h),$$

$$\Delta y(x) = y(x+h) - y(x),$$

$$\nabla y(x) = y(x) - y(x-h),$$

$$\delta y(x) = y(x + \frac{h}{2}) - y(x - \frac{h}{2}).$$

依次将 $E, \Delta, \nabla, \delta$ 称为位移算子, 向前差分算子, 向后差分算子, 中心差分算子. 后面三个算子均可用位移算子来表示, 即有

$$\Delta = E - 1, \nabla = 1 - E^{-1}, \delta = E^{1/2} - E^{-1/2}.$$

下面我们导出算子 $D = \frac{\partial}{\partial x}$ 与中心差分算子 δx 的关系.

由于

$$\begin{aligned} Ey(x) &= y(x+h) = y(x) + hy'(x) + \frac{1}{2!}h^2y''(x) + \cdots \\ &= (1 + hD + \frac{1}{2!}h^2D^2 + \cdots)y(x) = \exp(hD)y(x), \end{aligned}$$

所以

$$E = \exp(hD).$$

又因

$$\delta x = E^{1/2} - E^{-1/2} = \exp(\frac{1}{2}hD) - \exp(-\frac{1}{2}hD) = 2sh(\frac{hD}{2})$$

所以

$$D = \frac{2}{h}sh^{-1}(\frac{\delta x}{2}). \quad (1.6.6)$$

我们讨论微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (1.6.7)$$

此处 $F(D) = D^2$.

利用 Taylor 展开并注意到(1.6.7)式, 我们有

$$\begin{aligned}
& u(j, n+1) \\
&= u(j, n) + \tau \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_j + \frac{1}{2!} \tau^2 \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j + \frac{1}{3!} \tau^3 \left[\frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right]_j + \dots \\
&= (1 + \tau \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2!} \tau^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{1}{3!} \tau^3 \frac{\partial^3}{\partial x^3} + \dots) u(j, n) \\
&= (1 + \tau D^2 + \frac{1}{2} \tau^2 D^4 + \frac{1}{6} \tau^3 D^6 + \dots) u(j, n) \\
&= \exp(\tau D^2) u(j, n). \tag{1.6.8}
\end{aligned}$$

由(1.6.6)式知

$$\begin{aligned}
D &= \frac{2}{h} \left(\left(\frac{\delta x}{2} \right) - \frac{1}{2} \frac{1}{3} \left(\frac{\delta x}{2} \right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{5} \left(\frac{\delta x}{2} \right)^5 \right. \\
&\quad \left. - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{1}{7} \left(\frac{\delta x}{2} \right)^7 + \dots \right) \\
&= \frac{1}{h} (\delta x - \frac{1}{24} \delta_x^3 + \frac{3}{640} \delta_x^5 - \dots)
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
D^2 &= \frac{1}{h^2} (\delta_x^2 - \frac{1}{12} \delta_x^4 + \frac{1}{90} \delta_x^6 - \dots) \\
D^4 &= \frac{1}{h^4} (\delta_x^4 - \frac{1}{6} \delta_x^6 + \dots) \\
D^6 &= \frac{1}{h^6} \delta_x^6 - \dots.
\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
u(j, n+1) &= [1 + r \delta_x^2 + \frac{1}{2} r(r - \frac{1}{6}) \delta_x^4 \\
&\quad + \frac{1}{6} r(r^2 - \frac{1}{2} r + \frac{1}{15}) \delta_x^6 + \dots] u(j, n), \tag{1.6.9}
\end{aligned}$$

其中 $r = \tau/h^2$.

若(1.6.9)式的右端仅保留两项,则有

$$u(j, n+1) \approx u(j, n) + r \delta_x^2 u(j, n). \tag{1.6.10}$$

由于

$$\begin{aligned}\delta_x^2 u(j, n) &= \delta x [\delta x u(j, n)] \\ &= \delta x [u(j + \frac{1}{2}, n) - u(j - \frac{1}{2}, n)] \\ &= \delta x u(j + \frac{1}{2}, n) - \delta x u(j - \frac{1}{2}, n) \\ &= u(j + 1, n) - 2u(j, n) + u(j - 1, n),\end{aligned}$$

将上式代入(1.6.10)式,并用 u_j^* 表示 $u(j, n)$ 的近似值,则有

$$u_j^{*+1} = (1 - 2r)u_j^* + r(u_{j+1}^* + u_{j-1}^*),$$

这就是通常使用的古典显格式.

若将(1.6.9)式的右端保留到 δ_x^4 项,并根据

$$\begin{aligned}\delta_x^4 u(j, n) &= u(j + 2, n) - 4u(j + 1, n) + 6u(j, n) \\ &\quad - 4u(j - 1, n) + u(j - 2, n),\end{aligned}$$

可得

$$\begin{aligned}u_j^{*+1} &= \frac{1}{2}(2 - 5r + 6r^2)u_j^* + \frac{2}{3}r(2 - 3r)(u_{j+1}^* + u_{j-1}^*) \\ &\quad - \frac{1}{12}r(1 - 6r)(u_{j+2}^* + u_{j-2}^*),\end{aligned}$$

这是一个两层六点显格式.

若将(1.6.8)式改写为

$$\exp(-\tau D^2)u(j, n + 1) = u(j, n),$$

且取 $D^2 \approx \frac{1}{h^2}\delta_x^2$,则有

$$(1 - r\delta_x^2)u_j^{*+1} = u_j^*.$$

这就是通常使用的古典隐格式.

若将(1.6.8)式改写为

$$\exp(-\frac{1}{2}\tau D^2)u(j, n + 1) = \exp(\frac{1}{2}\tau D^2)u(j, n),$$

且取 $D^2 \approx \frac{1}{h^2}\delta_x^2$,则有

$$(1 - \frac{1}{2}r\delta_x^2)u_j^{n+1} = (1 + \frac{1}{2}r\delta_x^2)u_j^n.$$

这就是 C-N 格式.

若将(1.6.8)式改写为

$$\exp(-\theta\tau D^2)u(j, n+1) = \exp[(1-\theta)\tau D^2]u(j, n),$$

且取 $D^2 \approx \frac{1}{h^2}\delta_x^2$, 则可得到差分格式

$$(1 - \theta r\delta_x^2)u_j^{n+1} = [1 + (1-\theta)r\delta_x^2]u_j^n$$

称其为加权六点格式, 其中 θ 为权因子, 满足 $0 \leq \theta \leq 1$. 显然古典显格式, 古典隐格式, C-N 格式都是这个格式的特殊情形.

下面我们继续研究建立差分格式的算子方法, 以得出一些三层的差分格式.

由 Taylor 展式知

$$\begin{aligned} u(x, t+\tau) &= u(x, t) + \tau \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} + \dots \\ &= (1 + \tau \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{2!} \tau^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \dots)u(x, t) \\ &= \exp(\tau \frac{\partial}{\partial t})u(x, t). \end{aligned}$$

另一方面, 由

$$\nabla_t u(x, t+\tau) = u(x, t+\tau) - u(x, t),$$

推知

$$u(x, t+\tau) = (1 - \nabla_t)^{-1}u(x, t),$$

比较上面二个式子得到

$$\exp(\tau \frac{\partial}{\partial t}) = (1 - \nabla_t)^{-1},$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t} = -\frac{1}{\tau} \ln(1 - \nabla_t).$$

考虑微分方程



$$\frac{\partial u}{\partial t} = Lu, \quad (1.6.11)$$

其中 L 是关于 u 的微分算子, 它仅包含 u 关于空间变量的偏导数. 令 $u(x, t)$ 为方程 (1.6.11) 的解, 则在网格点 (x_j, t_{n+1}) 上, 有

$$-\frac{1}{\tau} \ln(1 - \nabla_t) u(x_j, t_{n+1}) = Lu(x_j, t_{n+1}). \quad (1.6.12)$$

为了构造方程 (1.6.11) 相应的差分格式, 分以下两步进行, 首先在 t 方向逼近, 即构造一个差分算子 $F(\nabla_t)$, 使得

$$\frac{1}{\tau} [-\ln(1 - \nabla_t) - F(\nabla_t)] u(x_j, t_{n+1}) = O(\tau^{\sigma_1}), \sigma_1 \geq 1. \quad (1.6.13)$$

其次在空间方向逼近, 即构造一个差分算子 L_h , 使得

$$(L - \frac{1}{h^{\sigma_2}} L_h) u(x_j, t_{n+1}) = O(h^{\sigma_2}), \quad (1.6.14)$$

其中 σ_2 是某个正整数, 且 $\sigma_2 \geq 1$.

由以上三式可得

$$\frac{1}{\tau} F(\nabla_t) u(x_j, t_{n+1}) - \frac{1}{h^{\sigma_2}} L_h u(x_j, t_{n+1}) = O(\tau^{\sigma_1} + h^{\sigma_2}). \quad (1.6.15)$$

令 $r = \tau/h^{\sigma_2}$, 略去截断误差 $O(\tau^{\sigma_1} + h^{\sigma_2})$, 并用 u_j^* 表示 $u(x_j, t_n)$ 的近似值, 可得差分方程

$$F(\nabla_t) u_j^{*+1} - r L_h u_j^{*+1} = 0.$$

若算子 $L = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$, 则选取不同的 $F(\nabla_t)$ 和 L_h , 可以导出不同的差分格式.

选取

$$F(\nabla_t) = \nabla_t, \quad L_h = \delta_x^2, \quad \sigma_2 = 2,$$

则有

$$\nabla_t u_j^{*+1} = r \delta_x^2 u_j^{*+1}$$

其中 $r=\tau/h^2$, 此即古典隐格式.

选取

$$F(\nabla_i) = (1 - \sigma_1 \nabla_i)^{-1} \nabla_i, \quad L_k = (1 + \sigma_3 \delta_x^2)^{-1} \delta_x^2$$

其中 σ_1, σ_3 为待定参数, 则有

$$(1 - \sigma_1 \nabla_i)^{-1} \nabla_i u_j^{n+1} = r(1 + \sigma_3 \delta_x^2)^{-1} \delta_x^2 u_j^{n+1},$$

即

$$\{1 + [\sigma_3 - r(1 - \sigma_1)]\delta_x^2\}u_j^{n+1} = [1 + (\sigma_3 + r\sigma_1)\delta_x^2]u_j^n, \quad (1.6.16)$$

其中 $r=\tau/h^2, \sigma_3=2$. 为计算格式(1.6.16)的截断误差 R_j^n , 可将该式的各项同时用微分方程(1.6.11) ($L \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2}$) 的解 $u(x, t)$ 在相应节点的值代入, 并进行 Taylor 展开, 经整理得到

$$\begin{aligned} & \{1 + [\sigma_3 - r(1 - \sigma_1)]\delta_x^2\}u(j, n+1) \\ & - [1 + (\sigma_3 + r\sigma_1)\delta_x^2]u(j, n) \\ & = \tau \left(\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^n - \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n + R_j^n \right), \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} R_j^n &= \left[\tau(\sigma_1 - \frac{1}{2}) + (\sigma_3 - \frac{1}{12})h^2 \right] \left[\frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right]_j^n \\ &+ \left[\frac{1}{2}(\sigma_1 - \frac{2}{3})\tau^2 + \frac{1}{2}(\sigma_3 - \frac{1}{6} + \frac{1}{6}\sigma_1)\tau h^2 \right. \\ &\left. + \frac{1}{12}(\sigma_3 - \frac{1}{30})h^4 \right] \left[\frac{\partial^6 u}{\partial x^6} \right]_j^n + \dots, \end{aligned}$$

这里利用了关系式(1.5.14).

若 σ_1, σ_3 为任意常数, 则 $R_j^n = O(\tau + h^2)$.

若 $\sigma_1=1/2, \sigma_3=0$, 则 $R_j^n = O(\tau^2 + h^2)$, (1.6.16) 式为 C-N 格式.

若 $\sigma_1=1/2, \sigma_3=1/12$ 或者 $\sigma_3=0, \sigma_1=(6r+1)/12r$, 则 $R_j^n = O(\tau^2 + h^4)$, (1.6.16) 式成为一个高精度差分格式

$$(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2)\nabla_i u_j^{n+1} = \frac{\tau}{2}\delta_x^2(u_j^{n+1} + u_j^n),$$

或

$$\begin{aligned} & (1 - 6r)(u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^{n+1}) + (10 + 12r)u_j^{n+1} \\ & = (1 + 6r)(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) + (10 - 12r)u_j^n, \end{aligned}$$

称之为 Crandall 格式, 是一个绝对稳定的双层六点隐格式.

由 (1.6.12) 式出发, 两端同时施加算子 $1 - \nabla_i$ 得

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\tau}(1 - \nabla_i)\ln(1 - \nabla_i)u(x_j, t_{n+1}) \\ & = (1 - \nabla_i)Lu(x_j, t_{n+1}) = Lu(x_j, t_n). \end{aligned}$$

如果选取 $G(D_i)$ 作为 $-(1 - \nabla_i)\ln(1 - \nabla_i)$ 的逼近, $\frac{1}{h^2}L_h$ 作为 L 的逼近, 并用 u_j^n 表示 $u(x_j, t_n)$ 的近似值, 则可得到显式差分格式

$$G(\nabla_i)u_j^{n+1} = rL_h u_j^n, \quad (1.6.17)$$

其中 $r = \tau/h^2$, α 为某个正整数.

选取

$$G(\nabla_i) = \nabla_i, \quad L_h = \delta_x^2, \quad r = \tau/h^2$$

则有

$$\nabla_i u_j^{n+1} = r\delta_x^2 u_j^n.$$

这和用直接差化方法得到的古典显格式相同.

选取

$$G(\nabla_i) = (1 - \eta_1 \nabla_i)^{-1}(\nabla_i + \eta_2 \nabla_i^2), \quad L_h = \delta_x^2, \quad r = \tau/h^2,$$

则有

$$(1 - \eta_1 \nabla_i)^{-1}(\nabla_i + \eta_2 \nabla_i^2)u_j^{n+1} = r\delta_x^2 u_j^n, \quad (1.6.18)$$

其中 η_1, η_2 为待定参数, 这是一个三层显式格式.

当 $\eta_1 = 0, \eta_2 = -1/2$ 时, (1.6.18) 式为 Richardson 格式.

当 $\eta_1 = 0, \eta_2 = -1/2 + r$ 时, (1.6.18) 式为 D-F 格式.

以上所介绍的算子方法也可用于建立双典型方程的差分格式.

1.6.3 积分插值法

很多物理现象和运动过程常常服从某种守恒规律,因此,描述它们的数量关系的微分方程也保持着这种守恒特征.为使差分解能逼近精确解,就要求差分方程也能具有这些特征.然而用直接差化方法构造差分格式并不考虑这些特征,有时会破坏守恒性质.注意到多数守恒性可以用积分形式表达,尤其对守恒型微分方程进行积分,可以转化成积分方程或微分积分方程,这个方程往往保持了守恒性.在此基础上我们用数值积分公式来代替积分就可得到差分方程.下面我们首先对常系数微分方程的模型问题进行讨论,然后推广到变系数的情形.

考虑热传导方程的第一边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, a > 0, \end{cases} \quad (1.6.19)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1.6.20)$$

在子区域 $\{x_{j-\frac{1}{2}} \leq x_{j+\frac{1}{2}}, t_n \leq t \leq t_{n+1}\}$ 上积分(1.6.19)式得到

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt - a \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx dt = 0. \quad (1.6.21)$$

其中 $\frac{\partial u}{\partial x} = \omega(x, t)$ 表示热流密度. 上面的第一个积分表示时间从 t_n 到 t_{n+1} 时, 在 $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$ 段上的热能, 第二个积分表示在同一时间范围内流入或流出该段的热能. 由此可知上式在物理上表示热量的平衡.

对于第一个积分先用中矩形公式计算再对 t 进行积分得

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt &= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[h \frac{\partial u(x_j, t)}{\partial t} + O(h^3) \right] dt \\ &= h[u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)] + O(\tau h^3). \end{aligned} \quad (1.6.22)$$

对于第二个积分先用梯形公式计算再对 x 进行积分得

$$\begin{aligned}
& a \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_j-\frac{1}{2}}^{x_{j+1}+\frac{1}{2}} \frac{\partial \omega}{\partial t} dx dt \\
&= a \int_{x_j-\frac{1}{2}}^{x_{j+1}+\frac{1}{2}} \left\{ \frac{\tau}{2} \left[\frac{\partial \omega(x, t_{n+1})}{\partial x} + \frac{\partial \omega(x, t_n)}{\partial x} \right] + O(\tau^3) \right\} dx \\
&= \frac{a\tau}{2} [\omega(x_{j+\frac{1}{2}}, t_{n+1}) - \omega(x_{j-\frac{1}{2}}, t_{n+1}) \\
&\quad + \omega(x_{j+\frac{1}{2}}, t_n) - \omega(x_{j-\frac{1}{2}}, t_n)] + O(h\tau^3). \quad (1.6.23)
\end{aligned}$$

对下面二个积分

$$\begin{aligned}
\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial x} dx &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\omega(x, t)}{h} dx, \\
\int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{1}{h} \frac{\partial u}{\partial x} dx &= \int_{x_j}^{x_{j+1}} \frac{\omega(x, t)}{h} dx,
\end{aligned}$$

采用中矩形公式得到

$$\begin{aligned}
\frac{u(x_j, t) - u(x_{j-1}, t)}{h} &= \omega(x_{j-\frac{1}{2}}, t) + O(h^3), \\
\frac{u(x_{j+1}, t) - u(x_j, t)}{h} &= \omega(x_{j+\frac{1}{2}}, t) + O(h^3),
\end{aligned}$$

将以上两式代入(1.6.23)式,有

$$\begin{aligned}
& a \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_j-\frac{1}{2}}^{x_{j+1}+\frac{1}{2}} \frac{\partial \omega}{\partial t} dx dt \\
&= \frac{a\tau}{2h} [u(x_{j+1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t_{n+1}) \\
&\quad + u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)] \\
&\quad + O(\tau h^3) + O(h\tau^3). \quad (1.6.24)
\end{aligned}$$

将(1.6.22)式与(1.6.24)式代入(1.6.21)式得

$$\begin{aligned}
& \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} \\
&= \frac{a}{2h^2} [u(x_{j+1}, t_{n+1}) - 2u(x_j, t_{n+1}) + u(x_{j-1}, t_{n+1})
\end{aligned}$$

$$+ u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)] \\ + O(\tau^2 + h^2).$$

去误差项, 得到差分方程

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{a}{2} \left[\frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \right. \\ \left. + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \right].$$

此即 C-N 格式.

下面讨论变系数的情形, 考虑在区域 $\{0 < x < 1, 0 < t \leq T\}$ 的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x} \left(p(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = f(x, t). \quad (1.6.25)$$

令

$$- p(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = w(x, t),$$

则上述方程可改写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial x} = f(x, t). \quad (1.6.26)$$

在子区域 $\{x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}, t_n \leq t \leq t_{n+1}\}$ 上积分 (1.6.26) 式得

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial w}{\partial x} dx dt \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx dt \quad (1.6.27)$$

对 (1.6.27) 式的第一项先对 x 采用中矩形积分公式再对 t 积分, 有

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial t} dx dt \\ = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left[h \frac{\partial u(x_j, t)}{\partial t} + O(h^2) \right] dt$$

$$=h[u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)] + O(\tau h^3). \quad (1.6.28)$$

对(1.6.27)的第二项先对 t 采用矩形公式的加权组合形式积分, 再对 x 积分有

$$\begin{aligned} & \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial \omega}{\partial x} dx dt \\ &= \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \left[\theta \tau \frac{\partial \omega(x, t_{n+1})}{\partial x} + (1-\theta) \tau \frac{\partial \omega(x, t_n)}{\partial x} \right. \\ & \quad \left. + O\left(\frac{1}{2} - \theta\right) \tau^2 + O(\tau^3) \right] dx \\ &= \theta \tau [\omega(x_{j+\frac{1}{2}}, t_{n+1}) - \omega(x_{j-\frac{1}{2}}, t_{n+1})] + (1-\theta) \tau [\omega(x_{j+\frac{1}{2}}, t_n) \\ & \quad - \omega(x_{j-\frac{1}{2}}, t_n)] + O\left[\left(\frac{1}{2} - \theta\right) \tau^2 h\right] + O(\tau^3 h), \quad (1.6.29) \end{aligned}$$

其中 $0 \leq \theta \leq 1$.

由于

$$-\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\omega}{p},$$

故有

$$\begin{aligned} u(x_{j-1}, t) - u(x_j, t) &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{\omega}{p} dx \\ &= \omega(x_{j-\frac{1}{2}}, t) \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{p} dx + O(h^3). \end{aligned}$$

记 $A'_j = h \left(\int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{p} dx \right)^{-1}$, 则有

$$\omega(x_{j-\frac{1}{2}}, t) = A'_j \frac{u(x_{j-1}, t) - u(x_j, t)}{h} + O(h^3). \quad (1.6.30)$$

类似地有

$$\omega(x_{j+\frac{1}{2}}, t) = A'_{j+1} \frac{u(x_j, t) - u(x_{j+1}, t)}{h} + O(h^3). \quad (1.6.31)$$

将以上两式代入(1.6.29)式,且用 ∇ 及 Δ 分别表示关于 x 的向后及向前差分,则有

$$\begin{aligned} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{\partial u}{\partial x} dx dt &= -\frac{\theta \tau}{h} [\Delta(A_j^{t_{n+1}} \nabla u(x_j, t_{n+1}))] \\ &- \frac{(1-\theta)\tau}{h} [\Delta(A_j^{t_n} \nabla u(x_j, t_n))] \\ &+ O[(\frac{1}{2} - \theta)\tau^2 h + \tau^3 h + \tau h^3]. \end{aligned} \quad (1.6.32)$$

将(1.6.28), (1.6.32)二式代入(1.6.27)式,两边除以 $h\tau$,并记

$$A_j^{t_n} = A_j^n, \quad f_j^n = \frac{1}{h\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} f(x, t) dx dt,$$

则得差分方程

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} &= \frac{1}{h^2} [\theta \Delta(A_j^{n+1} \nabla u_j^{n+1}) \\ &+ (1-\theta) \Delta(A_j^n \nabla u_j^n)] = f_j^n, \end{aligned} \quad (1.6.33)$$

其截断误差 $R_j^n = O[(\frac{1}{2} - \theta)\tau + \tau^2 + h^2]$, 当 $\theta=0$ 时为古典显格式, $\theta=1$ 时为古典隐格式, $\theta=1/2$ 时为C-N格式.

按照上述方法构造的差分格式近似地满足热量守恒条件,故称为守恒型格式. 这种格式是从热传导方程的积分形式出发通过插值导出的,因此这种构造方法叫做积分插值法.

为使用(1.6.33)式,需要用数值积分方法具体算出 A_j^n 和 f_j^n ,但要注意选取的数值积分公式的误差阶至少不低于截断误差 R_j^n 的阶,否则会降低差分解的精度.

关于变系数微分方程的差分格式的稳定性分析,一般说来分离变量法是不能应用的,在此我们不准备给出稳定性的严格论证了(例如能量估计法,有关这个方法的讨论可参见参考书[1]),只给出一种粗略的办法,即所谓“冻结”系数法,在节点处固定变系数值后构造差分格式,如果在求解区域中每一点,这样得到的差分格

式是稳定的,则认为该差分格式是稳定的.

作为例子,我们讨论(1.6.33)式的稳定性.为简单起见,取 $\theta = 0$,并假定方程的系数仅与 x 有关,即 $p(x,t) = a(x)$. 固定 $a(x) \equiv a$,这样(1.6.33)式就是显格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2},$$

我们知道该格式的稳定性条件是 $ar \leq 1/2$,因此推知关于(1.6.33)式的显式格式的稳定性条件是

$$\max_x |a(x)|r \leq \frac{1}{2}.$$

超星阅读器
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

§ 1.7 解二维问题的分裂法

1.7.1 分离变量法对多个空间变量的应用

考虑两个空间变量的抛物型方程的第一边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x, y < 1, 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), & 0 \leq x, y \leq 1, \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, & 0 \leq x, y \leq 1, 0 \leq t \leq T. \end{cases} \quad (1.7.1)$$

为简便起见,两个空间方向的步长均取为 $h = 1/N$,时间方向的步长取为 τ ,且记 $m_0 = [T/\tau]$, $u(x_j, y_l, t_n) = u(j, l, n)$,其近似值表示为 $u_{j,l}^n$,则解问题(1.7.1)的古典显格式为

$$\frac{u_{j,l}^{n+1} - u_{j,l}^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{j,l}^n,$$

或

$$u_{j,l}^{n+1} = (1 - 4r)u_{j,l}^n + r(u_{j+1,l}^n + u_{j-1,l}^n + u_{j,l+1}^n + u_{j,l-1}^n), \quad (1.7.2)$$

其中 $r = \tau/h^2$.

仿一个空间变量的情形, 求解问题(1.7.1)的双层差分格式可以写成

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta \in \Omega_1} a_{\beta_1 \beta_2} u_{j+\beta_1, l+\beta_2}^{n+1} \\ &= \sum_{\beta \in \Omega_0} b_{\beta_1 \beta_2} u_{j+\beta_1, l+\beta_2}^n, j, l = 1, 2, \dots, N-1, \end{aligned} \quad (1.7.3)$$

式中 $\beta = (\beta_1, \beta_2)$, Ω_0, Ω_1 分别表示第 n 及 $n+1$ 层上 β 可取值的集合. 对于(1.7.2)式, $\Omega_0 = \{(0, 0), (1, 0), (-1, 0), (0, 1), (0, -1)\}$, $\Omega_1 = \{(0, 0)\}$

象一维情形一样, 利用网点上函数值 u_μ^n 定义二维区域 $0 \leq x, y \leq 1$ 上的函数 $u^*(x, y)$, 使它在网点 (j, l, n) 上的值等于 u_μ^n . 这样, 格式(1.7.3)可以改写成

$$\begin{aligned} & \sum_{\beta \in \Omega_1} a_{\beta_1 \beta_2} u^{*+1}(x + \beta_1 h, y + \beta_2 h) \\ &= \sum_{\beta \in \Omega_0} b_{\beta_1 \beta_2} u^*(x + \beta_1 h, y + \beta_2 h). \end{aligned} \quad (1.7.4)$$

将 $u^*(x, y)$ 周期地开拓到整个二维空间, 于是它可以展成两个变量的 Fourier 级数

$$u^*(x, y) = \sum_m V^*(m) e^{i2\pi(m_1 x + m_2 y)}, \quad (1.7.5)$$

其中 $m = (m_1, m_2)$. 此时, 同样有 Parseval 等式成立

$$\|u^*(x, y)\|_0^2 = \int_0^1 \int_0^1 |u^*(x, y)|^2 dx dy = \sum_m |V^*(m)|^2.$$

将(1.7.5)式代进(1.7.4)式则可推出

$$V^{*+1}(m) = G(\sigma, \tau) V^*(m),$$

式中 $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)^T$, $\sigma_1 = 2m_1\pi$, $\sigma_2 = 2m_2\pi$, 传播因子

$$G(\sigma, \tau) = \left[\sum_{\beta \in \Omega_1} a_\beta e^{i h(\beta_1 \sigma_1 + \beta_2 \sigma_2)} \right]^{-1} \left[\sum_{\beta \in \Omega_0} b_\beta e^{i h(\beta_1 \sigma_1 + \beta_2 \sigma_2)} \right].$$

由此推出与一个空间变量情形同样的结论: Von Neumann 条件(1.4.10)是差分格式(1.7.3)稳定的充要条件, 只是此时 σ 是任意

二维向量.

现在研究古典显格式(1.7.2)的稳定性,令

$$u_{\mu}^* = V^* e^{i(\sigma_1 \mu h + \sigma_2 \mu h)}$$

以之代入(1.7.2)式,得到

$$V^{*+1} = G(\sigma, \tau) V^*,$$

其中 $G(\sigma, \tau) = 1 - 4r(\sin^2 \frac{\sigma_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\sigma_2 h}{2})$. 由此可知, Von Neumann 条件(1.4.10)满足, 当且仅当 $r \leq 1/4$, 即 $r \leq 1/4$ 是古典显格式(1.7.2)稳定的充要条件.

又如, 对逼近问题(1.7.1)的古典隐格式

$$\frac{u_{\mu}^{*+1} - u_{\mu}^*}{\tau} = \frac{1}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{\mu}^{*+1},$$

用上述方法求出格式的传播因子为

$$G(\sigma, \tau) = 1 / (1 + 4r(\sin^2 \frac{\sigma_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\sigma_2 h}{2})),$$

对任何 r , 均有 $|G(\sigma, \tau)| \leq 1$, 故古典隐格式绝对稳定.

对于 n 个空间变量的情形, 只要在讨论中将二维向量换成 n 维向量, 相应的结论依然成立. 例如对 n 维情形的古典显格式, 其传播矩阵可求出为

$$G(\sigma, \tau) = 1 - 4r(\sin^2 \frac{\sigma_1 h}{2} + \dots + \sin^2 \frac{\sigma_n h}{2}),$$

其中 $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)^T$, 当且仅当 $r \leq 1/2n$ 时古典显格式稳定.

由以上讨论看出, 在差分格式的构造及稳定性研究上, 空间变量个数的增加并没有产生多少困难, 但在实际求解中却出现了一些新的问题. 就模型问题(1.7.1)来说, 由于古典显格式的稳定性条件为 $r = \tau/h^2 \leq 1/4$, 故在实际使用时, 时间步长 τ 较一维情形取得更小, 计算量显著增加, 在多维情形, 此问题更加突出. 隐格式绝对稳定, 但对应的系数矩阵在二维情形是五对角的, 在 n 维情形是 $2n+1$ 对角的, 此时追赶法不便应用, 即使采用各种最佳迭代格

式,其计算量也是很大的.这就是说,在高维的情形,应当进一步构造计算量较小而又绝对稳定的差分格式.下面给出的几种可分裂格式就属于这一类.

1.7.2 分裂算法的基本思想

由 § 1.5 给出的一维交替显隐格式可知,几个简单格式可以复合成一个复杂的算法,由此得到启发,若能将高维差分格式分解为几个可简单求解的低维(特别是一维)差分格式,则必能有效地降低高维差分格式的求解计算量.

逼近(1.7.1)式的 C—N 格式为

$$\frac{u_{j\mu}^{n+1} - u_{j\mu}^n}{\tau} = \frac{1}{2h^2} [(\delta_x^2 u_{j\mu}^{n+1} + \delta_y^2 u_{j\mu}^{n+1}) + (\delta_x^2 u_{j\mu}^n + \delta_y^2 u_{j\mu}^n)],$$

可以证明该格式是一个具有二阶精度的无条件稳定的差分格式.将其变形为便于计算的形式

$$u_{j\mu}^{n+1} - \frac{r}{2} \delta_x^2 u_{j\mu}^{n+1} - \frac{r}{2} \delta_y^2 u_{j\mu}^{n+1} = u_{j\mu}^n + \frac{r}{2} \delta_x^2 u_{j\mu}^n + \frac{r}{2} \delta_y^2 u_{j\mu}^n,$$

两边分别加上 $\frac{1}{4} r^2 \delta_x^2 \delta_y^2 u_{j\mu}^{n+1}$ 和 $\frac{1}{4} r^2 \delta_x^2 \delta_y^2 u_{j\mu}^n$, 且分解因式,就得到格式

$$(1 - \frac{r}{2} \delta_x^2)(1 - \frac{r}{2} \delta_y^2) u_{j\mu}^{n+1} = (1 + \frac{r}{2} \delta_x^2)(1 + \frac{r}{2} \delta_y^2) u_{j\mu}^n. \quad (1.7.6)$$

可以证明,格式(1.7.6)仍然逼近(1.7.1)式,且具有二阶精度,绝对稳定.

(1.7.6)式能分解成两个简单的一维格式,分解的方式不同,即可得到不同的算法或格式,所有这些格式统称为可分裂格式.

1.7.3 P—R (Peaceman—Rachford) 格式

将(1.7.6)式分解为

$$\begin{cases} (1 - \frac{r}{2} \delta_x^2) u_{j\mu}^{n+\frac{1}{2}} = (1 + \frac{r}{2} \delta_y^2) u_{j\mu}^n, \\ (1 - \frac{r}{2} \delta_y^2) u_{j\mu}^{n+1} = (1 + \frac{r}{2} \delta_x^2) u_{j\mu}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.7.7)$$

称之为 Peaceman-Rachford 格式, 简称为 P-R 格式.

在 P-R 格式(1.7.7)中消去过渡值 $u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}}$ 就得到(1.7.6)式, 故 P-R 格式是具有二阶精度的无条件稳定的差分格式.

观察(1.7.7)式可以看出 P-R 格式是分别在 x 和 y 方向交替使用一维隐显格式的结果, 每个时间层只需解两个三对角方程组, 所以计算量小.

1.7.4 Douglas 格式

将(1.7.6)式变形为

$$\begin{aligned} & (1 - \frac{r}{2}\delta_x^2)(1 - \frac{r}{2}\delta_y^2)u_{\mu}^{n+1} \\ &= [(1 - \frac{r}{2}\delta_x^2)(1 - \frac{r}{2}\delta_y^2) + r(\delta_x^2 + \delta_y^2)]u_{\mu}^n, \end{aligned}$$

此即

$$(1 - \frac{r}{2}\delta_x^2)(1 - \frac{r}{2}\delta_y^2) \frac{u_{\mu}^{n+1} - u_{\mu}^n}{\tau} = \frac{1}{h^2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{\mu}^n. \quad (1.7.8)$$

(1.7.8)式可分裂为

$$\begin{cases} (1 - \frac{r}{2}\delta_x^2)(u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} - u_{\mu}^n) = r(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{\mu}^n, \\ (1 - \frac{r}{2}\delta_y^2)(u_{\mu}^{n+1} - u_{\mu}^n) = u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} - u_{\mu}^n. \end{cases}$$

整理可得

$$\begin{cases} (1 - \frac{r}{2}\delta_x^2)(u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} - u_{\mu}^n) = r(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{\mu}^n, \\ \frac{u_{\mu}^{n+1} - u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \frac{1}{h^2}\delta_y^2(u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} - u_{\mu}^n). \end{cases} \quad (1.7.9)$$

(1.7.9)式称为 Douglas 格式, 简称 D 格式, 它也是分别在 x 和 y 方向交替使用一维隐显格式的结果. 由 D 格式的构造过程即可得知, 它与 P-R 格式具有相同的稳定性和截断误差. 然而

(1.7.9)式的第二式中同时出现了 $u_{jlm}^n, u_{jlm}^{n+\frac{1}{2}}$ 和 u_{jlm}^{n+1} , 因此 D 格式的存贮量较 P-R 格式增加了. 显然, 对于二维问题, P-R 格式优于 D 格式, 但 P-R 格式不能推广到三维情形, 那时它不再是无条件稳定的了(其证明留作习题), 而 D 格式对三维情形仍旧适用.

设所考虑的三维模型问题取形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}, \quad (1.7.10)$$

那么, 相应的 D 格式为

$$\begin{cases} (1 - \frac{r}{2}\delta_x^2)(u_{jlm}^{n+\frac{1}{2}} - u_{jlm}^n) = r(\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2)u_{jlm}^n, \\ \frac{u_{jlm}^{n+\frac{2}{3}} - u_{jlm}^{n+\frac{1}{3}}}{\tau/2} = \frac{1}{h^2}\delta_y^2(u_{jlm}^{n+\frac{2}{3}} - u_{jlm}^n), \\ \frac{u_{jlm}^{n+1} - u_{jlm}^{n+\frac{2}{3}}}{\tau/2} = \frac{1}{h^2}\delta_x^2(u_{jlm}^{n+1} - u_{jlm}^n). \end{cases} \quad (1.7.11)$$

可以证明 D 格式(1.7.11)是一个有二阶精度的绝对稳定的差分格式.

1.7.5 Yanenko 格式

D 格式可以给予另外的解释, 即象在 § 1.5 那样, 可以将 (1.7.9)式的第一式视为预测算式, 而第二式视为校正算式. 基于这种思想, Yanenko 提出了另外一种格式

$$\begin{cases} \frac{u_{jl}^{n+\frac{1}{4}} - u_{jl}^n}{\tau/2} = \frac{1}{h^2}\delta_x^2 u_{jl}^{n+\frac{1}{4}}, \\ \frac{u_{jl}^{n+\frac{1}{2}} - u_{jl}^{n+\frac{1}{4}}}{\tau/2} = \frac{1}{h^2}\delta_y^2 u_{jl}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \frac{u_{jl}^{n+1} - u_{jl}^n}{\tau} = \frac{1}{h^2}(\delta_x^2 + \delta_y^2)u_{jl}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.7.12)$$

前两个式子是预测,需要求解两个三对角方程组,后一个式子是校正,计算是显式的.

从(1.7.12)式中消去过渡层值后,可知它即(1.7.8)式,因而和 D 格式等价,截断误差阶、稳定性以及计算特征都与 D 格式相同,但这里计算公式稍简单些. 这个格式也适用于三维情形,例如对三维模型问题(1.7.10),有

$$\begin{cases} \frac{u_{jlm}^{n+\frac{1}{6}} - u_{jlm}^n}{\tau/2} = \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_{jlm}^{n+\frac{1}{6}}, \\ \frac{u_{jlm}^{n+\frac{1}{3}} - u_{jlm}^{n+\frac{1}{6}}}{\tau/2} = \frac{1}{h^2} \delta_y^2 u_{jlm}^{n+\frac{1}{3}}, \\ \frac{u_{jlm}^{n+\frac{1}{2}} - u_{jlm}^{n+\frac{1}{3}}}{\tau/2} = \frac{1}{h^2} \delta_z^2 u_{jlm}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \frac{u_{jlm}^{n+1} - u_{jlm}^n}{\tau/2} = \frac{1}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2 + \delta_z^2) u_{jlm}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.7.13)$$

前三式为预测算式,后一个式子是显式校正算式,可以证明,格式(1.7.13)具有二阶精度且绝对稳定.

1.7.6 局部一维格式

局部一维格式的基本思想是:设已给抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \sum_{i=1}^q l_i u,$$

其中 $L = \sum_{i=1}^q L_i$ 为 q 维($q=2$ 或 3)二阶椭圆型微分算子(无混合导数项),把时间区间 $[t_n, t_n + \tau]$ 分成 q 个子区间 $[t_n + (s-1)\tau/q, t_n + s\tau/q]$, $s=1, 2$ 或 $s=1, 2, 3$. 在每个子区间上,用同一种差分格式来近似替代“一维”方程

$$\frac{1}{q} \frac{\partial u}{\partial t} = L_s u, \quad S = 1, \dots, q.$$

这 q 个格式的总就构成了 $[t_n, t_n + \tau]$ 上的局部一维格式.

例如,对二维模型方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 的显式局部一维格式为

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} - u_{\mu}^n}{\tau/2} = \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_{\mu}^n, \\ \frac{1}{2} \frac{u_{\mu}^{n+1} - u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \frac{1}{h^2} \delta_y^2 u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.7.14)$$

它是方程 $\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, $\frac{1}{2} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 分别在 $[t_n, t_n + \tau/2]$, $[t_n + \tau/2, t_n + \tau]$ 上用古典显格式替代而得到的. 若对这两个“一维”方程,分别用 C—N 格式替代,则得局部一维格式

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \frac{u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} - u_{\mu}^n}{\tau/2} = \frac{1}{h^2} \delta_x^2 \frac{u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} + u_{\mu}^n}{2}, \\ \frac{1}{2} \frac{u_{\mu}^{n+1} - u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \frac{1}{h^2} \delta_y^2 \frac{u_{\mu}^{n+1} + u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}}}{2}. \end{cases} \quad (1.7.15)$$

这个格式也可以写成

$$\begin{cases} (1 - \frac{r}{2} \delta_x^2) u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} = (1 + \frac{r}{2} \delta_x^2) u_{\mu}^n, \\ (1 - \frac{r}{2} \delta_y^2) u_{\mu}^{n+1} = (1 + \frac{r}{2} \delta_y^2) u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (1.7.16)$$

为了求出格式的截断误差,设法消去(1.7.16)式中的过渡值 $u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}}$. 利用(1.7.16)式可以得到

$$\begin{cases} (1 + \frac{r}{2} \delta_y^2) (1 - \frac{r}{2} \delta_x^2) u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} = (1 + \frac{r}{2} \delta_y^2) (1 + \frac{r}{2} \delta_x^2) u_{\mu}^n, \\ (1 - \frac{r}{2} \delta_x^2) (1 - \frac{r}{2} \delta_y^2) u_{\mu}^{n+1} = (1 - \frac{r}{2} \delta_x^2) (1 + \frac{r}{2} \delta_y^2) u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

由于我们采用的是正方形网格,所以 $\delta_x^2 \delta_y^2 u_{\mu} = \delta_y^2 \delta_x^2 u_{\mu}$, 因此有

$$(1 - \frac{r}{2} \delta_x^2) (1 + \frac{r}{2} \delta_y^2) u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} = (1 + \frac{r}{2} \delta_y^2) (1 - \frac{r}{2} \delta_x^2) u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}},$$

由此可得

$$(1 - \frac{r}{2}\delta_x^2)(1 - \frac{r}{2}\delta_y^2)u_{\mu}^{n+1} = (1 + \frac{r}{2}\delta_x^2)(1 + \frac{r}{2}\delta_y^2)u_{\mu}^n,$$

又

$$(1 + \frac{r}{2}\delta_x^2)(1 + \frac{r}{2}\delta_y^2)u_{\mu}^n = (1 + \frac{r}{2}\delta_x^2)(1 + \frac{r}{2}\delta_y^2)u_{\mu}^n,$$

故有

$$(1 - \frac{r}{2}\delta_x^2)(1 - \frac{r}{2}\delta_y^2)u_{\mu}^{n+1} = (1 + \frac{r}{2}\delta_x^2)(1 + \frac{r}{2}\delta_y^2)u_{\mu}^n.$$

这就是(1.7.6)式,因此避部一维格式(1.7.15)与 $P-R$ 格式等价,二者精度与稳定性相同.

值得指出的是格式(1.7.14)与(1.7.15)与以前所做的格式的差别是,每个单个算式都不逼近原微分方程,只有总体考察时,格式才是相容的.

对三维情形可类似地建立局部一维方程.

§ 1.8 解非线性抛物型方程的差分方法

很多物理问题可以用非线性抛物型方程来描述,因此有必要研究数值求解非线性抛物型方程的问题,目前对此已有很多方法(参见参考书[3]、[4]),下面我们仅介绍求解非线性抛物型方程的预测—校正方法.

在常微分方程数值解法中已讨论过这一做法.例如求解方程

$$y' = f(x, y), \quad (1.8.1)$$

若用通常的方法

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n, y_n), \quad (1.8.2)$$

或

$$y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, \frac{1}{2}(y_n + y_{n+1})), \quad (1.8.3)$$

则可看出(1.8.2)式计算简单,但精度较低,(1.8.3)式有较高的

精度,但差分方程是非线性的,一般要用迭代法求解.

若用下面的预测—校正公式

$$\begin{cases} y_{n+\frac{1}{2}} = y_n + \frac{1}{2}hf(x_n, y_n), \\ y_{n+1} = y_n + hf(x_n + \frac{h}{2}, y_{n+\frac{1}{2}}), \end{cases} \quad (1.8.4)$$

不但能达到(1.8.3)式的精度,而且不需要用迭代法求解,这样可大大节省计算工作量.

现在针对拟线性抛物型方程第一边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f_1(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} + f_2(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} + f_3(x, t, u), \\ 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = \psi_1(t), u(1, t) = \psi_2(t), \quad 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (1.8.5)$$

简单介绍一下相应的预测—校正格式.若对于(1.8.5)式直接应用C—N格式,则有

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2h^2} \delta_x^2 (u_j^n + u_j^{n+1}) \\ &= f_1(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}(u_j^n + u_j^{n+1})) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} \\ &+ f_2(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}(u_j^n + u_j^{n+1})) \frac{1}{2h} \mu \delta x (u_j^{n+1} + u_j^n) \\ &+ f_3(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}(u_j^n + u_j^{n+1})), \end{aligned} \quad (1.8.6)$$

其中 $\mu u_j = \frac{1}{2}(u_{j+\frac{1}{2}} + u_{j-\frac{1}{2}})$. 这是一个非线性方程组,一般要用迭代法求解.现在给出预测—校正格式

预测公式

$$\frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_j^{n+\frac{1}{2}} = f_1(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}, u_j^n) \frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n}{\tau/2}$$

$$\begin{aligned}
 &+ f_2(x_j, t_n + \frac{1}{2}, u_j^n) \frac{1}{h} \mu \delta x u_j^n \\
 &+ f_3(x_j, t_n + \frac{1}{2}, u_j^n), \quad (1.8.7)
 \end{aligned}$$

校正公式

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{2h^2} \delta_x^2 (u_j^n + u_j^{n+1}) &= f_1(x_j, t_n + \frac{1}{2}, u_j^{n+\frac{1}{2}}) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} \\
 &+ f_2(x_j, t_n + \frac{1}{2}, u_j^{n+\frac{1}{2}}) \frac{1}{2h} \mu \delta x (u_j^n + u_j^{n+1}) \\
 &+ f_3(x_j, t_n + \frac{1}{2}, u_j^{n+\frac{1}{2}}), \quad (1.8.8)
 \end{aligned}$$

相应的定解条件离散为

$$\begin{cases} u_j^0 = \varphi(jh), \\ u_0^n = \psi_1(n\tau), u_N^n = \psi_2(n\tau). \end{cases} \quad (1.8.9)$$

以上三式合起来构成求解微分方程问题(1.8.5)的预测—校正格式,前二式都是线性方程组,用追赶法解第一式得预测值 $u_j^{n+\frac{1}{2}}$,将此值代入第二式,同样用追赶法解得 u_j^{n+1} .

在区域: $(0 < x < 1, 0 < t \leq T, -\infty < u < +\infty)$ 内,若问题(1.8.5)中的方程的系数 $f_i(x, t, u)$ 满足不等式 $\left| \frac{\partial f_i}{\partial u} \right| \leq A, (i=1, 2, 3)$ 而且 $f_1(x, t, u) \geq a, (A, a \text{ 均为正的常数})$, 可以证明,差分问题(1.8.7)–(1.8.9)的解当 $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ 时一致收敛于微分问题(1.8.5)的解,逼近误差是 $O(\tau^2 + h^2)$.

习 题

1. 对于求解 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的古典显格式

$$u_j^{n+1} = (1 - 2r)u_j^n + r(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n),$$

当 $r = \tau/h^2$ 取何值时,才能使截断误差达到 $O(\tau^2 + h^4)$?

2. 用古典显格式在 $r=1/6, h=0.2$ 时, 计算

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = 4x(1-x), & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq T, \end{cases}$$

的数值解 $u_j^n, n=1, 2, 3, 4$.

3. 为观察热传导方程

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & -\infty < x < \infty, \quad t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

的 Richardson 格式的不稳定性, 试在网比 $r=1$ 时写出相应的误差方程, 并作出误差传播表. 这里假定初始层的计算是精确的, 只是第一层的一个点 $(j_0, 1)$ 上有误差 ϵ , 这一层的其他点上无误差, 且在计算过程中不再引入新的误差.

4. 写出用古典显格式计算初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \beta u, & 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T, \quad \alpha, \beta \text{ 为正常数}, \\ u(x, 0) = x, & 0 \leq x \leq 1, \\ u(0, t) = t, u(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq T \end{cases}$$

时包括定解条件在内的完整的差分方程问题, 并分析其稳定性.

5. 热传导方程的下列差分格式

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \theta \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} \\ - (1-\theta) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0, \end{aligned}$$

称为加权六点格式 ($0 \leq \theta \leq 1$), 试讨论格式的截断误差和稳定性.

6. 热传导方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的下列两个差分格式

$$(1) \left(3 + \frac{1}{6r}\right) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \left(1 + \frac{1}{6r}\right) \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} = \frac{2}{h^2} \delta_x^2 u_j^{n+1}$$

$$(2) \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{2h^2} \left[\left(1 - \frac{1}{6r}\right) \delta_x^2 u_j^n + \left(1 + \frac{1}{6r}\right) \delta_x^2 u_j^{n-1} \right],$$

是高精度差分格式,证明它们的截断误差均为 $O(\tau^2 + h^4)$,并分析它们的稳定性,其中 $r = \tau/h^2$.

7. 试讨论逼近方程 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的下列两个三层隐式格式

$$(1) \frac{3}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} - \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_j^{n+1} = 0,$$

$$(2) \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} - \frac{1}{3h^2} (\delta_x^2 u_j^{n+1} + \delta_x^2 u_j^n + \delta_x^2 u_j^{n-1}) = 0$$

的精度与稳定性.

8. 证明将格式(1.5.17)改成先隐式预测后显式校正格式,得到的也是一个具有二阶精度的绝对稳定的差分格式.

9. 试讨论解 $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ 的下列差分格式

$$\begin{aligned} & \frac{1}{12} \left(\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) u_{j+1}^{n+1} - 2\alpha u_{j+1}^n + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) u_{j+1}^{n-1} \right) + \frac{10}{12} \left(\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) u_j^{n+1} \right. \\ & \left. - 2\alpha u_j^n + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) u_j^{n-1} \right) + \frac{1}{12} \left(\left(\alpha + \frac{1}{2}\right) u_{j-1}^{n+1} - 2\alpha u_{j-1}^n \right. \\ & \left. + \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) u_{j-1}^{n-1} \right) \\ & = r \left(\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{2}\alpha + \beta\right) \delta_x^2 u_j^{n+1} + \left(\frac{1}{2} - 2\beta\right) \delta_x^2 u_j^n \right. \\ & \left. + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\alpha + \beta\right) \delta_x^2 u_j^{n-1} \right) \end{aligned}$$

的截断误差,其中 α, β 为参变量, $r = \tau/h^2$.

10. 试讨论解二维热传导问题的 D-R (Douglas-Rachford) 格式

$$\begin{cases} \frac{u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} - u_{\mu}^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} (\delta_x^2 u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{\mu}^n), \\ \frac{u_{\mu}^{n+1} - u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{1}{h^2} (\delta_x^2 u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{\mu}^{n+1}) \end{cases}$$

的精度和稳定性。

11. 试证明三维问题的 $P-R$ 格式

$$\begin{cases} (1 - \frac{r}{3}\delta_z^2)u_{\mu}^{n+\frac{1}{2}} = [1 + \frac{r}{3}(\delta_y^2 + \delta_x^2)]u_{\mu}^n, \\ (1 - \frac{r}{3}\delta_y^2)u_{\mu}^{n+\frac{2}{3}} = [1 + \frac{r}{3}(\delta_x^2 + \delta_z^2)]u_{\mu}^{n+\frac{1}{3}}, \\ (1 - \frac{r}{3}\delta_x^2)u_{\mu}^{n+1} = [1 + \frac{r}{3}(\delta_x^2 + \delta_y^2)]u_{\mu}^{n+\frac{2}{3}}. \end{cases}$$

不再是无条件稳定的。

第二章 双曲型方程的差分方法

在研究波的传播以及空气动力学问题中常常遇到双曲型偏微分方程,这类方程中最典型与最简单的就是波动方程与对流方程,本章即以其为基本模型进行讨论.显然,第一章中的有关结论都可以在本章中使用,然而,双曲型方程的解沿着特征线传播的性质要给予足够的重视.

§ 2.1 一阶线性常系数双曲型方程的差分方法

在双曲型方程的研究中,一阶双曲型方程占据着重要地位,这不仅因为许多重要的数学物理问题是由一阶双曲型方程或一阶双曲型方程组描述的,而且高阶的双曲型方程也可以化为一阶的双曲型方程组进行讨论.本节以最简单的一阶线性常系数双曲型方程的模型问题入手,研究差分格式的建立和稳定性问题.

2.1.1 一阶常系数方程初值问题

在双曲型方程的差分方法中,差分格式的性质与定解问题的解析解往往有着密切的关系.为了说明这一点,我们先来研究对流方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \end{cases} \quad (2.1.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty \end{cases} \quad (2.1.2)$$

解的某些特性,其中 a 为常数.

由于(2.1.1)式的解 $u(x, t)$ 沿 $x-t$ 平面上方向为 $\frac{dx}{dt} = a$ 的直线 $x - at = c$ (c 为常数)的变化率为 0

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + a \frac{\partial}{\partial x} = 0,$$

故在直线 $x-at=c$ 上, $u(x,t)$ 为常数. 称平行直线族 $x-at=c$ 为方程 (2.1.1) 的特征线 (见图 2.1). 利用特征线, 容易求出初值问题 (2.1.1)、(2.1.2) 的解. 事实上, 在 $x-t$ 上半平面, 过任意一点 (x_0, t_0) 作特征线 $x-at=c$, 这条特征线与初始线的交点为 $(x_0-at_0, 0)$. 因 $u(x,t)$ 沿特征线之值为常数, 故 $u(x_0, t_0) = u(x_0-at_0, 0) = \varphi(x_0-at_0)$. 根据点 (x_0, t_0) 的任意性得知

$$u(x,t) = \varphi(x-at) \quad (2.1.3)$$

为初值问题 (2.1.1)、(2.1.2) 之解.

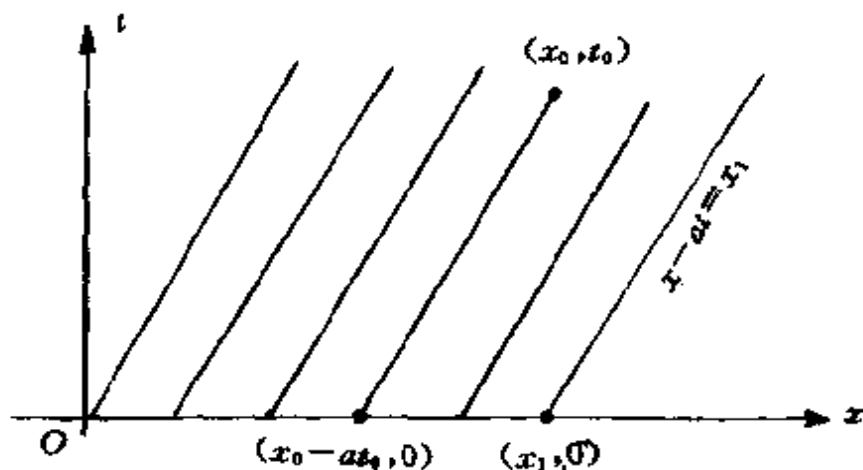


图 2.1 $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 的特征线 ($a > 0$)

由于 $u(x,t)$ 在点 (x_0, t_0) 的值依赖于初值函数 $\varphi(x)$ 在点 $x = x_0-at_0$ 的值, 故初始线上的点 x_0-at_0 , 称为解 $u(x,t)$ 在点 (x_0, t_0) 的依赖区域; 又由于解是沿特征线传播的, 故直线 $x-at=x_1$ 称为点 $(x_1, 0)$ 的影响区域.

为了用差分方法求解问题 (2.1.1)、(2.1.2), 如同第一章, 设已对 $x-t$ 平面进行了矩形网格剖分, x 方向的步长为 h , t 方向的步长为 τ , 网点 (x_j, t_n) 简记为 (j, n) .

2.1.2 迎风格式

对方程(2.1.1)利用直接差化(差商代替导数)方法,容易建立以下两种简单的显式差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad (2.1.4)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0. \quad (2.1.5)$$

利用 Taylor 展式,当 $u(x, t)$ 充分光滑时,可以证得两个格式的截断误差均为 $O(\tau + h)$.

容易求得格式(2.1.4)的传播因子

$$G(\sigma, \tau) = 1 - ar(1 - e^{-i\sigma h}),$$

其中 $r = \tau/h$, 因而

$$|G(\sigma, \tau)|^2 = 1 - 4ar(1 - ar)\sin^2 \frac{\sigma h}{2}.$$

此时 Von Neumann 条件是差分格式(2.1.4)稳定的充要条件,故当 $a > 0$ 且 $ar \leq 1$ 时,格式(2.1.4)稳定,当 $a < 0$ 时,不论 r 如何都有 $|G(\sigma, \tau)| > 1$,因此差分格式(2.1.4)不稳定. 对差分格式(2.1.5)作类似的推算可知,当 $a < 0$ 且 $ar \geq -1$ 时,差分格式(2.1.5)是稳定的,而当 $a > 0$ 时,不论 r 如何,格式均不稳定.

若注意到 a 是方程(2.1.1)的特征线方向,则可知上述两个格式的稳定性与特征线方向有关. 下面我们以格式(2.1.4)来说明这个事实.

用格式(2.1.4)计算 u_j^n ,要用到 u_{j-1}^{n-1}, u_j^{n-1} ;而为了计算它们又要用到 $u_{j-2}^{n-2}, u_{j-1}^{n-2}, u_j^{n-2}$,如此递推下去,为了计算 u_j^n 就要用到 $u_{j-n}^0, u_{j-(n-1)}^0, \dots, u_j^0$ (见图 2.2). 这说明 u_j^n 依赖于初值函数 $\varphi(x)$ 在区间 $[x_{j-n}, x_j] = [A, B]$ 上网格点的值,称 $[A, B]$ 为差分解 u_j^n 的依赖区域. 过点 $p(x_j, t_n)$,微分方程(2.1.1)的特征线(图中的虚线)与 $t = 0$ 的交点才是微分方程的解 $u(x_j, t_n)$ 的依赖区域,当 $a < 0$ 时这

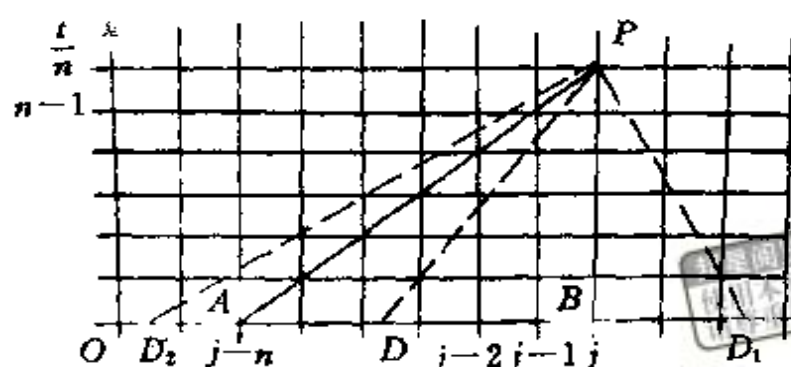


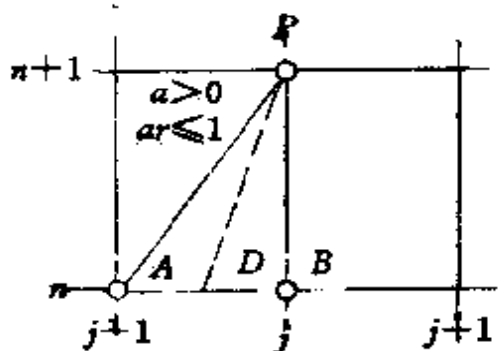
图 2.2 对流方程与其差分方程的依赖区域

个交点为 D_1 , 当 $a > 0, ar > 1$ 时这个交点为 D_2 , 两点均在 $[A, B]$ 之外, 那么用格式 (2.1.4) 算出的 u_j^n 就和微方程的解 $u(x, t)$ 在 D_1 (或 D_2) 点处的值无关, 因此差分方程 (2.1.4) 的解不可能收敛到微分方程的解. 于是, 差分格式收敛的一个必要条件是它的依赖区域包含微分方程的依赖区域. 此条件称为 Courant 条件, 有时也称作 Courant-Friedrichs-Lewy (CFL) 条件. 对格式 (2.1.4) 来说, 方程 (2.1.1) 的依赖区域即点 D 落在 $[A, B]$ 内部, CFL 条件满足, 须 $a > 0$, 且 $ar \leq 1$. 完全类似地可知, 对格式 (2.1.5) 来说, CFL 条件满足, 须 $a < 0$ 且 $ar \geq -1$.

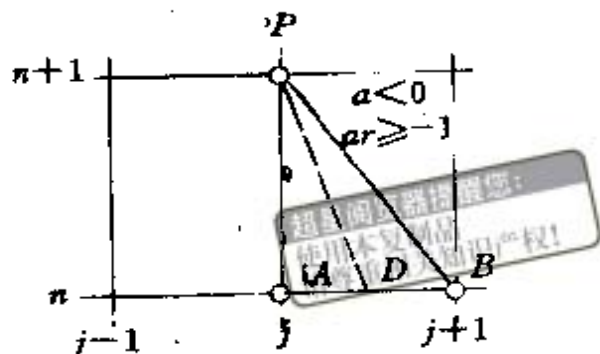
以上讨论也可以想象为风 (特征线) 从左边吹来 (图 2.3(a)), 迎风作向后差分, 所得差分格式 (2.1.4) 才可能是稳定的. 同样, 当风从右边吹来 (图 2.3(b)), 迎风作向前差分, 所得差分格式 (2.1.5) 才可能是稳定的. 因此, 当 $a > 0$ 时的差分格式 (2.1.4) 和当 $a < 0$ 时的差分格式 (2.1.5) 又称为迎风格式.

值得注意的是, CFL 条件只是给人们指出了设计方程 (2.1.1) 的差分格式时应注意的基本事项, 而对符合 CFL 条件的差分格式, 仍需要分析其稳定性. 例如对下面的格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n + u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (2.1.6)$$



(a)



(b)

图 2.3 迎风格式

它以截断误差 $O(\tau + h^2)$ 相容于方程 (2.1.1). 由于它是利用空间的中心差商来逼近相应的关于 x 的偏导数, 故又称其为中心差分格式. 可以看出, 当 $a > 0, ar \leq 1$ 或 $a < 0, ar \geq -1$ 时该格式均满足 CFL 条件, 但用分离变量法可以证明它是一个绝对不稳定的差分格式.

2.1.3 Lax-Friedrichs 格式

中心差分格式 (2.1.6) 是个不能使用的格式, 1954 年 Lax 和 Friedrichs 分别对该格式进行了修改, 用 u_{j+1}^n 和 u_{j-1}^n 的算术平均值代替 u_j^n , 得到了所谓 Lax-Friedrichs 格式

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (2.1.7)$$

容易求得此格式的截断误差是 $O(\tau + h^2 + h^2/\tau)$, 一般取网格比 $r = \tau/h$ 为常数, 因此格式 (2.1.7) 是一个一阶精度的格式, 其节点图式如图 2.4.

用分离变量法可求出格式的传播因子为

$$G(\sigma, \tau) = \cos \sigma h - iars \sin \sigma h,$$

因而

$$|G(\sigma, \tau)|^2 = 1 - (1 - a^2 r^2) \sin^2 \sigma h.$$

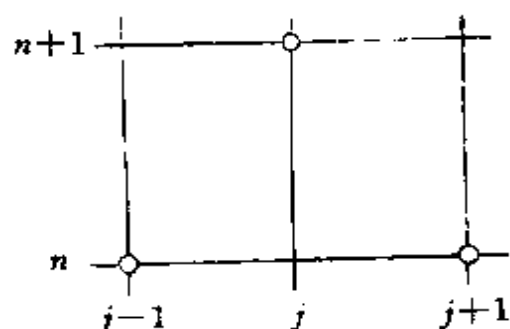


图 2.4 Lax-Friedrichs 格式节点图式

由此看出, 当 $|ar| \leq 1$ 时, 格式(2.1.7)稳定.

Lax - Friedrichs 格式(简称 L-F 格式) 不象迎风格式那样要考虑特征线的走向, 因此在一定程度上是方便的, 但实际效果比迎

风格式差.

2.1.4 跳蛙(Leap-frog)格式

格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2h} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (2.1.8)$$

称为跳蛙格式, 是一个截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$ 的三层显格式, 其节点图式如图 2.5.

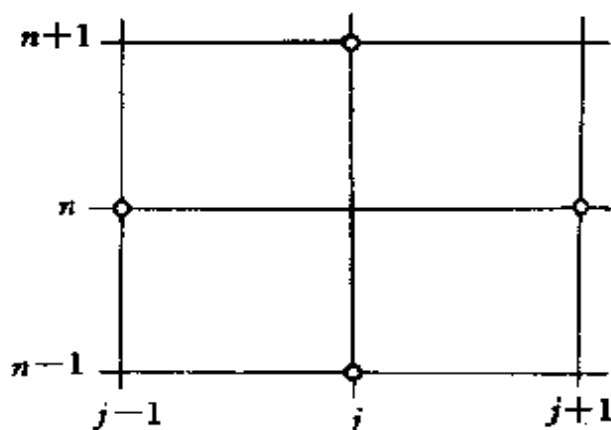


图 2.5 跳蛙格式节点图式

为分析格式(2.1.8)的稳定性, 我们将其化为一个等价的二层差分方程组

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = -ar(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + v_j^n, \\ v_j^{n+1} = u_j^n. \end{cases} \quad (2.1.9)$$

记 $W_j^* = (u_j^*, v_j^*)^T$, 则 (2.1.9) 式可化为

$$W_j^{*+1} = \begin{bmatrix} -ar & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} (W_{j+1}^* - W_{j-1}^*) + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} W_j^*,$$

由此求出格式的传播矩阵

$$G(\sigma, \tau) = \begin{bmatrix} -i2arsin\sigma h & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$



这是一个非正规矩阵, 其特征方程为

$$\lambda^2 + i2arsin\sigma h \lambda - 1 = 0, \quad (2.1.10)$$

特征根为

$$\lambda = -iarsin\sigma h \pm \sqrt{1 - a^2 r^2 \sin^2 \sigma h}.$$

如果 $|ar| \leq 1$, 则有

$$|\lambda|^2 = a^2 r^2 \sin^2 \sigma h + 1 - a^2 r^2 \sin^2 \sigma h = 1.$$

此时, 差分格式 (2.1.8) 满足 Von Neumann 条件. 而当 $|ar| < 1$ 时, G 有两个互不相同的特征值, 根据定理 1.4.5 知, 跳蛙格式是稳定的.

如果 $|ar| = 1$, 不失一般性, 可设 $a > 0$, 根据图 2.1 和 (2.1.3) 式知

$$u(x_j, t_n + \tau) = u(x_j - a\tau, t_n).$$

现在 $ar = 1$, 即 $a\tau = h$, 故有

$$u(x_j, t_n + \tau) = u(x_j - h, t_n) = u(x_{j-1}, t_n) = u(x_{j-2}, t_{n-1}). \quad (2.1.11)$$

仿上可以推得

$$u(x_{j+1}, t_n) = u(x_j, t_{n-1}). \quad (2.1.12)$$

此时 ($ar = 1$), 若假设 t_{n-1} 和 t_n 时间层上差分格式 (2.1.8) 的解是准确的, 则由 (2.1.11) 式和 (2.1.12) 式可知

$$u_{j-1}^* = u(x_{j-1}, t_n) = u(x_{j-2}, t_{n-1}) = u_{j-2}^{*n-1},$$

$$u_{j+1}^* = u(x_{j+1}, t_n) = u(x_j, t_{n-1}) = u_j^{*n-1}.$$

又由格式(2.1.8)有

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - (u_{j-1}^n - u_{j+1}^n) = u_{j-1}^n = u_{j-2}^{n-1} = u(x_{j-2}, t_{n-1}).$$

这正是(2.1.11)式给出的结果. 由此说明, $ar=1$ 时跳蛙格式给出了方程(2.1.1)的准确解, 因而它也是稳定的.

如果 $|ar| > 1$, 对于满足 $a^2 \tau^2 \sin^2 \sigma h > 1$ 的 σh , $G(\sigma, \tau)$ 的两个特征值都是纯虚数, 由(2.1.10)知 $|\lambda_1 + \lambda_2| = |i2arsin\sigma h| > 2$, 由引理 1.5.1 知 $G(\sigma, \tau)$ 的两个特征值中必有一个的绝对值大于 1, 此时跳蛙格式不稳定.

综上所述, 跳蛙格式的稳定性条件是 $|ar| \leq 1$.

2.1.5 Lax-Wendroff 格式

1960 年 Lax 和 Wendroff 构造了一个二阶精度的两层显格式. 格式的构造方法与前面的直接差化方法不同, 除了采用 Taylor 级数展开外, 还利用了方程(2.1.1)自身的关系.

由 Taylor 展开得到

$$u(j, n+1) = u(j, n) + \tau \left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^n + \frac{\tau^2}{2} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right]_j^n + O(\tau^3), \quad (2.1.13)$$

注意到方程(2.1.1), 又有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(-a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

将其代进(2.1.13)式, 则得

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]_j^n = \frac{u(j, n+1) - u(j, n)}{\tau} - \frac{1}{2} a^2 \tau \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n + O(\tau^2).$$

于是在节点 (j, n) 处, 方程(2.1.1)可写成

$$\frac{u(j, n+1) - u(j, n)}{\tau} - \frac{1}{2} a^2 \tau \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_j^n + O(\tau^2) + a \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_j^n = 0.$$

采用中心差商逼近上式中的导数项得

$$\frac{u(j, n+1) - u(j, n)}{\tau}$$

$$-\frac{1}{2}a^2\tau \frac{u(j+1,n)-2u(j,n)+u(j-1,n)}{h^2} + O(\tau h^2) + O(\tau^2) \\ + a \frac{u(j+1,n)-u(j-1,n)}{2h} + O(h^2) = 0.$$

略去误差项, 我们得到截断误差为 $O(\tau^2 + h^2)$ 的差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}ar(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}a^2r^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (2.1.14)$$

格式(2.1.14)称作 **Lax-Wendroff** 格式, 简称为 **L-W** 格式, 其节点图式如图 2.6.

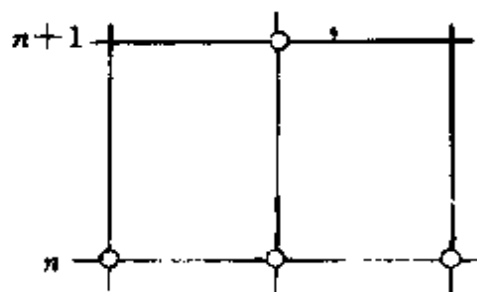


图 2.6 Lax-Wendroff 格式节点图式

容易求出格式(2.1.14)的传播因子为

$$G(\sigma, \tau) = 1 - 2a^2r^2\sin^2 \frac{\sigma h}{2} - iars\sin\sigma h,$$

从而

$$|G(\sigma, \tau)|^2 = 1 - 4a^2r^2(1 - a^2r^2)\sin^4 \frac{\sigma h}{2}.$$

故当 $|ar| \leq 1$ 时, 差分格式(2.1.14)稳定.

L-W 格式是一个二阶精度的显格式, 无需顾及特征线的走向, 因此它是方便实用的.

例 2.1.1 对初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & -\infty < x < \infty, \end{cases} \quad (2.1.15)$$

其中

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ x, & 0 \leq x < 3, \\ 6 - x, & 3 \leq x < 6, \\ 0, & x \geq 6, \end{cases}$$

分别利用迎风格式, L-F 格式和 L-W 格式数值求解. 计算中取 $\tau = 0.4, h = 0.5$. 现将 $n = 10 (t = 4)$ 时的计算结果以及方程 (2.1.15) 的解析解 $u(x, t) = f(x - t)$ 的相应值列于表 2.1 中, 这三个格式的实际计算误差均符合理论分析的结果.

表 2.1 用迎风格式, L-F 格式, L-W 格式
计算 (2.1.15) 式的数值结果

x	解析解	迎风格式	L-F 格式	L-W 格式
0.0	0.0	0.000	0.000	0.000
2.5	0.0	0.004	0.050	-0.019
3.0	0.0	0.020	0.084	-0.078
3.5	0.0	0.080	0.215	-0.065
4.0	0.0	0.242	0.235	0.132
4.5	0.5	0.554	0.658	0.507
5.0	1.0	0.999	0.971	0.981
5.5	1.5	1.493	1.401	1.539
6.0	2.0	1.960	1.831	2.155
6.5	2.5	2.339	2.068	2.633
7.0	3.0	2.517	2.304	2.737
7.5	2.5	2.393	2.160	2.468
8.0	2.0	2.000	2.015	2.009
8.5	1.5	1.504	1.550	1.481
9.0	1.0	1.020	1.085	0.922
9.5	0.5	0.580	0.717	0.433
10.0	0.0	0.242	0.349	0.131
10.5	0.0	0.054	0.174	0.019
13.0	0.0	0.000	0.000	0.000

2.1.6 隐式格式

前面建立的格式都是显式的,下面我们给出两个隐式格式,隐格式的精度和稳定性一般要好于显格式,相应的微分方程(2.1.1)的定解问题是初边值混合问题,为确定起见,设常数 $a > 0$.

下面两个差分格式

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad (2.1.16)$$

$$\frac{1}{2} \left(\frac{u_{j-1}^n - u_{j-1}^{n-1}}{\tau} + \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} \right) + \frac{a}{2} \left(\frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + \frac{u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{h} \right) = 0, \quad (2.1.17)$$

分别称为简单隐格式和 Wendroff 格式(简称 W 格式),它们可用于数值求解初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, 0 < x < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), 0 \leq x < \infty, \\ u(0, t) = \psi(t), t \geq 0. \end{cases} \quad (2.18)$$

从两格式节点图式(图 2.7 与图 2.8)可以看出,两格式对问题(2.1.18)均可显式计算.

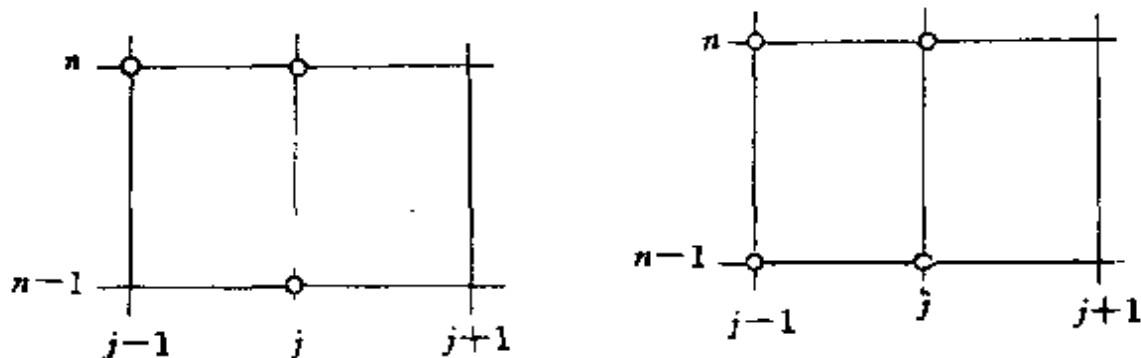


图 2.7 简单隐格式节点图式 图 2.8 Wendroff 格式节点图式

为求出上述两个格式的截断误差和进行稳定性分析,我们给出一个带权的隐格式

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} + a \left[\theta \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + (1-\theta) \frac{u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{h} \right] = 0, \quad (2.1.19)$$

其中 θ 为参数. 当 $\theta = 1$ 时, 格式 (2.1.19) 即为简单隐格式 (2.1.16); 当 $\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2ar}$ ($r = \tau/h$) 时, 格式 (2.1.19) 即为 W 格式 (2.1.17).

容易知道, 格式 (2.1.19) 的截断误差当 $\theta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2ar}$ ($r = \frac{\tau}{h}$) 时为 $O(\tau^2 + h^2)$, 而在其他情形均为 $O(\tau + h)$, 于是简单隐格式 (2.1.16) 具有一阶精度, W 格式 (2.1.17) 具有二阶精度.

用分离变量法可以证明, 当 $\theta \geq 1/2$ 时, 格式 (2.1.19) 对任何 r 稳定 (绝对稳定); 当 $\theta < 1/2$, 且 $ar \leq 1/(1-2\theta)$ 时格式 (2.1.19) 稳定. 由此可知简单隐格式 (2.1.16) 与 W 格式 (2.1.17) 都是绝对稳定的.

2.1.7 利用特征线构造差分格式

我们可以借助于微分方程 (2.1.1) 的解在特征线上为常数这一事实来构造差分格式. 为确定起见, 假定 $a > 0$.

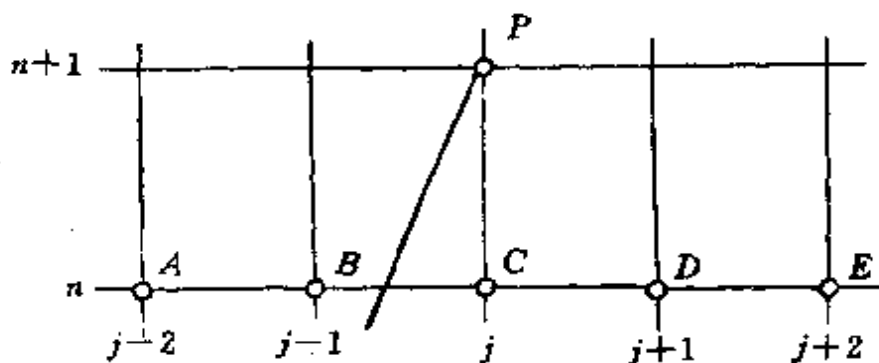


图 2.9 利用特征线作差分格式

设在 $t = t_n$ 层上诸网点处 u 的值已给定 (已计算出或初值定出), 要计算在 $t = t_{n+1}$ 层上的网点 P 处的 u 值 (见图 2.9). 过 P 点作特征线与网格线 $t = t_n$ 交于 Q 点, 根据微分方程 (2.1.1) 解的性质知 $u(P) = u(Q)$. Q 不是网格点, $u(Q)$ 未知, 但可以利用插值来

确定 $u(Q)$. 例如, 利用 B, C 两点作线性插值得

$$u(P) = u(Q) = (1 - a \frac{\tau}{h})u(C) + a \frac{\tau}{h}u(B),$$

由此得出差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - ar(u_j^n - u_{j-1}^n),$$

这正是迎风格式 (2.1.4)

若改用 B, D 两点作线性插值, 则有

$$u(P) = u(Q) = \frac{1}{2}(1 - a \frac{\tau}{h})u(D) + \frac{1}{2}(1 + a \frac{\tau}{h})u(B),$$

由此得出

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(1 - ar)u_{j+1}^n + \frac{1}{2}(1 + ar)u_{j-1}^n,$$

这正是 $L-F$ 格式 (2.1.7).

若采用 B, C, D 三点作二次插值, 则可得到 $L-W$ 格式 (2.1.14).

若采用 A, B, C 三点作二次插值, 则可得到

$$u_j^{n+1} = u_j^n - ar(u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}ar(1 - ar)(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n). \quad (2.1.20)$$

此格式是二阶精度的, 称之为二阶迎风格式, 其稳定性条件是 $ar \leq 2$.

对于 $a < 0$, 二阶迎风格式可以写作

$$u_j^{n+1} = u_j^n + ar(u_{j+1}^n - u_j^n) - \frac{1}{2}ar(1 - ar)(u_j^n - 2u_{j+1}^n + u_{j+2}^n). \quad (2.1.21)$$

其稳定性条件为 $|ar| \leq 2$. 由此看来, 利用二阶迎风格式进行计算, 稳定性条件比较宽.



§ 2.2 一阶常系数双曲型方程组的差分方法

设给定一阶线性常系数双曲型方程组

$$\frac{\partial u_m}{\partial t} + \sum_{s=1}^p a_{ms} \frac{\partial u_s}{\partial x} = 0, m = 1, 2, \dots, p, \quad (2.2.1)$$

其中 $u_m = u_m(x, t)$ ($m = 1, 2, \dots, p$) 是未知函数, a_{ms} ($m, s = 1, 2, \dots, p$) 是已知的实数.

若记 $U = U(x, t) = (u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_p(x, t))^T$, $A = (a_{ms})_{p \times p}$, 则方程组 (2.2.1) 可改写为向量形式

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0. \quad (2.2.2)$$

下面研究方程组 (2.2.2) 在初始条件

$$U(x, 0) = F(x)$$

下的差分解法, 其中 $F(x) = (f_1(x), f_2(x), \dots, f_p(x))^T$ 是给定的函数.

上节对方程 (2.1.1) 所建立的差分格式, 原则上都可以推广到方程组 (2.2.2) 上来, 这里仅取几个格式作为例子说明之.

2.2.1 Lax-Friedrichs 格式

将一个方程的 Lax-Friedrichs 格式 (2.1.7) 直接推广到方程组情形, 可得到方程组 (2.2.2) 的 Lax-Friedrichs 格式

$$\frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)}{\tau} + A \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (2.2.3)$$

一般将 $r = \tau/h$ 取作常数, 因此格式 (2.2.3) 仍是一阶精度的. 现用分离变量法讨论其稳定性.

令 $U_j^n = V^n e^{ij\theta h}$, 代入 (2.2.3) 式可求得传播矩阵

$$G(\sigma, \tau) = \frac{1}{2}(e^{i\sigma h} + e^{-i\sigma h})I + \frac{1}{2}\tau(e^{-i\sigma h} - e^{i\sigma h})A \\ = \cos\sigma h I - i\tau \sin\sigma h A,$$

其中 I 为 p 阶单位矩阵. 根据矩阵多项式的特征值的求法, 可求得 $G(\sigma, \tau)$ 的特征值为

$$\mu_l(G) = \cos\sigma h - i\tau \sin\sigma h \lambda_l(A), l=1, 2, \dots, p,$$

其中 $\lambda_l(A)$ 为 A 的特征值. 因为

$$|\mu_l(G)|^2 = \cos^2\sigma h + \tau^2 \lambda_l^2 \sin^2\sigma h \\ = 1 - (1 - \tau^2 \lambda_l^2) \sin^2\sigma h, l=1, 2, \dots, p.$$

所以当 $\tau\rho(A) \leq 1$ 时就有 $\rho(G) \leq 1$, 于是 $L-F$ 格式(2.2.3)满足 Von Neumann 条件. 又因方程组(2.2.2)是双曲型的, 根据双曲型方程组的性质, A 有 p 个互异的特征值 $\lambda_l(A)$, 从而 $G(\sigma, \tau)$ 的 p 个特征值 $\mu_l(G)$ 互异, 根据定理 1.4.5 知, 当 $\tau\rho(A) \leq 1$ 时, $L-F$ 格式(2.2.3)稳定.

2.2.2 Lax-Wendroff 格式

差分格式

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{2}\tau A(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}\tau^2 A^2(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n),$$

(2.2.4)

其中 $\tau = \tau/h$, 称为方程组(2.2.2)的 Lax-Wendroff 格式, 它类似于单个方程(2.1.1)的 L-W 格式(2.1.14), 该格式仍为二阶精度. 其传播矩阵为

$$G(\sigma, \tau) = I - i\tau \sin\sigma h A - 2\tau^2 \sin^2 \frac{\sigma h}{2} A^2.$$

记 λ_l 和 μ_l 分别为 A 和 $G(\sigma, \tau)$ 的特征值, 则有

$$\mu_l = 1 - i\tau \sin\sigma h \lambda_l - 2\tau^2 \sin^2 \frac{\sigma h}{2} \lambda_l^2,$$

从而

$$|\mu_l|^2 = 1 - 4\tau^2 \lambda_l^2 (1 - \tau^2 \lambda_l^2) \sin^4 \frac{\sigma h}{2},$$

此时, Von Neumann 条件仍是差分格式稳定的充分条件, 故当 $\rho(A) \leq 1$ 时, L-W 格式 (2.2.4) 稳定.



2.2.3 迎风格式

对于迎风格式 (2.1.4) 与 (2.1.5), 不能象 L-F 格式 (2.1.7) 与 L-W 格式 (2.1.14) 那样直接推广到方程组 (2.2.2) 上来. 这是因为 A 的特征值可正可负, 我们无法判断特征线的走向. 由于我们考虑的方程组 (2.2.2) 是双曲型的, 所以存在非奇异矩阵 S , 使得

$$S^{-1}AS = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p),$$

若令

$$V = S^{-1}U,$$

则方程组 (2.2.2) 可改写为

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \Lambda \frac{\partial V}{\partial x} = 0,$$

它相当于 p 个标量方程

$$\frac{\partial V_l}{\partial t} + \lambda_l \frac{\partial V_l}{\partial x} = 0, l = 1, 2, \dots, p, \quad (2.2.5)$$

其中 V_l 是 V 的第 l 个分量, λ_l 为 A 的第 l 个特征值. 此时 λ_l 的符号已定, 可按 § 2.1 中所述方法来建立迎风格式. 省去 V_l 的下标 l , 则 (2.2.5) 式的迎风格式为

$$\begin{cases} \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\tau} + \lambda_l \frac{V_j^n - V_{j-1}^n}{h} = 0, \lambda_l \geq 0, \\ \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\tau} + \lambda_l \frac{V_{j+1}^n - V_j^n}{h} = 0, \lambda_l < 0. \end{cases}$$

上述两种情况均可统一写成

$$\begin{aligned} \frac{V_j^{n+1} - V_j^n}{\tau} + \lambda_l \frac{V_{j+1}^n - V_{j-1}^n}{2h} - \frac{1}{2h} |\lambda_l| (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n) \\ = 0. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

再将其写成向量形式

$$V_j^{n+1} = V_j^n - \frac{\tau}{2} \Lambda (V_{j+1}^n - V_{j-1}^n) + \frac{\tau}{2} |\Lambda| (V_{j+1}^n - 2V_j^n + V_{j-1}^n), \quad (2.2.7)$$

其中 $|\Lambda| = \text{diag}(|\lambda_1|, |\lambda_2|, \dots, |\lambda_p|)$. 这个迎风格式自动地适应了特征值的符号, 从而自动地适应了 CFL 条件.

我们还可以将 (2.2.6) 式写成原来变量的形式

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{\tau}{2} A (U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{\tau}{2} |A| (U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n), \quad (2.2.8)$$

其中 $|A| = S |\Lambda| S^{-1}$. (2.2.8) 式即为方程组 (2.2.2) 的迎风格式. 下面对其作稳定性分析.

首先来分析格式 (2.2.7) 的稳定性, 容易求出该格式的传播矩阵是

$$G_1(\sigma, \tau) = I - i\tau \sin \sigma h \Lambda + \tau (\cos \sigma h - 1) |\Lambda|,$$

其特征值

$$\mu_l(G_1) = 1 - i\tau \lambda_l \sin \sigma h + \tau |\lambda_l| (\cos \sigma h - 1), l = 1, 2, \dots, p.$$

从而

$$|\mu_l(G_1)|^2 = 1 - 4\tau |\lambda_l| (1 - \tau |\lambda_l|) \sin^2 \frac{\sigma h}{2}.$$

如果

$$\tau \rho(A) \leq 1, \quad (2.2.9)$$

那么就有 $\rho(G_1) \leq 1$, 即 Von Neumann 条件满足, 注意到 G_1 是一个对角阵, 因而是正规的, 故条件 (2.2.9) 也是格式 (2.2.7) 稳定的充分条件.

差分格式 (2.2.8) 的稳定性容易由格式 (2.2.7) 的稳定性得到. 事实上, 因 $A = S \Lambda S^{-1}$, 所以格式 (2.2.8) 的传播矩阵是

$$G_2(\sigma, \tau) = S G_1(\sigma, \tau) S^{-1},$$

由此得到

$$G_2^*(\sigma, \tau) = SG_1^*(\sigma, \tau)S^{-1}.$$

由格式(2.2.7)的稳定性知 $\|G_1^*\| \leq M$, 于是 $\|G_2^*(\sigma, \tau)\| \leq M_2$, 故格式(2.2.8)的稳定性条件也是(2.2.9)式.

§ 2.3 一阶变系数双曲型方程及方程组的差分方法

2.3.1 一阶变系数双曲型方程

考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & -\infty < x < \infty, t > 0, \end{cases} \quad (2.3.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), & -\infty < x < \infty. \end{cases} \quad (2.3.2)$$

类似于常系数的情形, 方程(2.3.1)的特征方向是 $\frac{dx}{dt} = a(x, t)$, 在特征线上, (2.3.1)式的左端正好是

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x},$$

故(2.3.1)式写为

$$\frac{d}{dt}u(x, t) = 0,$$

即 $u(x, t)$ 沿特征线为常数, 但此时的特征线是曲线.

采用冻结系数法我们可以把常系数方程中所建立的差分格式推广到变系数方程上来. 例如(2.3.1)式的 $L-F$ 格式可以写为

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + a_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (2.3.3)$$

其中 $a_j^n = a(x_j, t_n)$.

格式(2.3.3)的系数不是常数, 不能直接使用分离变量法来分析其稳定性, 但在网点 (x_j, t_n) 附近, (2.3.3)式是象常系数差分格式一样的, 即将系数 a_j^n 看成与标号 j, n 无关, 所以可利用常系数 $L-F$ 格式(2.1.7)的稳定性条件有 $|a|\tau \leq 1$, 再使标号变化, 则可推

超星阅读器提醒您:
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

知,格式(2.3.3)的稳定性条件是

$$r \max_j |a_j^*| \leq 1.$$

利用冻结系数法,我们也可以给出方程(2.3.1)的迎风格式

$$\begin{cases} \frac{u_j^{*+1} - u_j^*}{\tau} + a_j^* \frac{u_j^* - u_{j-1}^*}{h} = 0, & a_j^* \geq 0, \\ \frac{u_j^{*+1} - u_j^*}{\tau} + a_j^* \frac{u_{j+1}^* - u_j^*}{h} = 0, & a_j^* < 0. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

类似于上述的稳定性分析法得知,格式(2.3.4)的稳定性条件是

$$r \max_j |a_j^*| \leq 1.$$

若引进记号

$$\begin{aligned} a^+(x, t) &= \begin{cases} a(x, t), & a(x, t) \geq 0, \\ 0, & a(x, t) < 0, \end{cases} \\ a^-(x, t) &= \begin{cases} 0, & a(x, t) \geq 0, \\ -a(x, t), & a(x, t) < 0, \end{cases} \end{aligned}$$

则可将格式(2.3.4)写成统一形式

$$\frac{u_j^{*+1} - u_j^*}{\tau} + a_j^{+,*} \frac{u_j^* - u_{j-1}^*}{h} - a_j^{-,*} \frac{u_{j+1}^* - u_j^*}{h} = 0,$$

其中 $a_j^{+,*} = a^+(x_j, t_n)$, $a_j^{-,*} = a^-(x_j, t_n)$.

类似于(2.2.6),我们也可将格式(2.3.4)改写为

$$\frac{u_j^{*+1} - u_j^*}{\tau} + a_j^* \frac{u_{j+1}^* - u_{j-1}^*}{2h} - \frac{1}{2h} |a_j^*| (u_{j+1}^* - 2u_j^* + u_{j-1}^*) = 0.$$

2.3.2 一阶变系数双曲型方程组

为简便起见,考虑简单形式的一阶变系数双曲型方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A(x) \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (2.3.5)$$

其中 $U = U(x, t)$ 是 p 维列向量, $A(x)$ 为 p 阶方阵, 它的元素仅为 x 的光滑函数而与 t 无关.

由于方程组(2.3.5)是双曲型的,所以 A 有 p 个互不相同的实特征值

$$\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_p(x),$$

且存在非奇异矩阵 $S=S(x)$, 使得

$$S^{-1}(x)A(x)S(x) = \text{diag}(\lambda_1(x), \lambda_2(x), \dots, \lambda_p(x)) = \Lambda. \quad (2.3.6)$$

利用冻结系数法,一阶常系数线性方程组(2.2.2)的有关差分格式及其稳定性分析结果都可以直接推广到这里来. 作为例子,我们仅简单叙述一下 Lax-Wendroff 格式和迎风格式.

逼近方程组(2.3.5)的 Lax-Wendroff 格为

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{1}{2}rA_j(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{1}{2}r^2A_j[A_{j+\frac{1}{2}}(U_{j+1}^n - U_j^n) - A_{j-\frac{1}{2}}(U_j^n - U_{j-1}^n)], \quad (2.3.7)$$

其中

$$A_j = A(x_j), A_{j+\frac{1}{2}} = A\left(\frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})\right).$$

格式(2.3.7)的稳定性条件是

$$r \max_j \rho(A_j) \leq 1$$

对方方程组(2.3.5)的迎风格式的构造,我们可以利用(2.3.6)式将其化为如同(2.2.5)式的非耦合形式,然后按 p 个独立方程来建立迎风格式. 也可以按(2.2.8)式进行推广得

$$U_j^{n+1} = U_j^n - \frac{r}{2}A_j(U_{j+1}^n - U_{j-1}^n) + \frac{r}{2}|A_j|(U_{j+1}^n - 2U_j^n + U_{j-1}^n), \quad (2.3.8)$$

其中 $A_j = A(x_j)$, $|A_j|$ 意义同 §2.2 相应的 $|A|$. 格式(2.3.8)的稳定性条件也是

$$r \max_j \rho(A_j) \leq 1.$$

§ 2.4 二阶线性双曲型方程的差分方法

最简单的二阶双曲型方程是波动方程,本节即以其为基本模型,讨论二阶线性双曲型方程定解问题的差分方法.

2.4.1 一维波动方程

考虑一个空间变量的波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad -\infty < x < \infty, t > 0, \quad (2.4.1)$$

其中 $a > 0$. 根据数理方程中的有关知识,与上方程相应的特征方程为

$$dx^2 - a^2 dt^2 = 0,$$

由此可确定两个特征方向

$$\frac{dx}{dt} = \pm a,$$

利用特征方向,即可得到两族特征线

$$x - at = c_1, x + at = c_2,$$

其中 c_1, c_2 为任意常数.

在研究波动方程的各种定解问题时,象一阶常系数双曲型方程的情形一样,特征线起着重要作用.例如,利用特征线可以导出波动方程(2.4.1)满足初始条件

$$\begin{cases} u(x, 0) = \varphi(x), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad -\infty < x < \infty, \quad (2.4.2)$$

的解为

$$u(x, t) = \frac{\varphi(x + at) + \varphi(x - at)}{2} + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} \psi(\xi) d\xi. \quad (2.4.3)$$

这就是熟知的 D'Alembert 公式.

由(2.4.3)式看出,初值问题(2.4.1)、(2.4.2)的解 u 在点 (x_0, t_0) 的值,仅依赖于初值函数 $\varphi(x)$ 、 $\psi(x)$ 在区间 $[x_0 - at_0, x_0 + at_0]$ 上的值,而与此区间外的初值无关,故称此区间为 u 在点 (x_0, t_0) 的依赖区域(图 2.10).

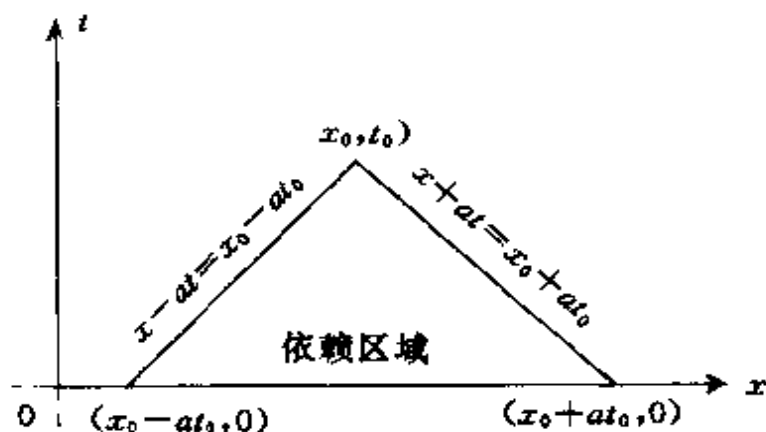


图 2.10 一维波动方程的依赖区域

1. 显式格式

仿对抛物型方程构造差分格式的直接差化方法,可构造方程(2.4.1)的显式格式

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} = a^2 \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad (2.4.4)$$

这是一个二阶精度的三层格式,其节点图式如图 2.11.

格式(2.4.4)可用于求解方程(2.4.1)的初值问题.此时,初始条件(2.4.2)可作如下离散

$$\begin{cases} u_j^0 = \varphi(jh) = \varphi_j, \end{cases} \quad (2.4.5)$$

$$\begin{cases} \frac{u_j^1 - u_j^0}{\tau} = \psi(jh) = \psi_j. \end{cases} \quad (2.4.6)$$

显然(2.4.6)的截断误差是 $O(\tau)$,这与格式(2.4.4)不匹配.为了提高精度,我们采用中心差商代替 $\frac{\partial}{\partial x}u(x,0)$ 得

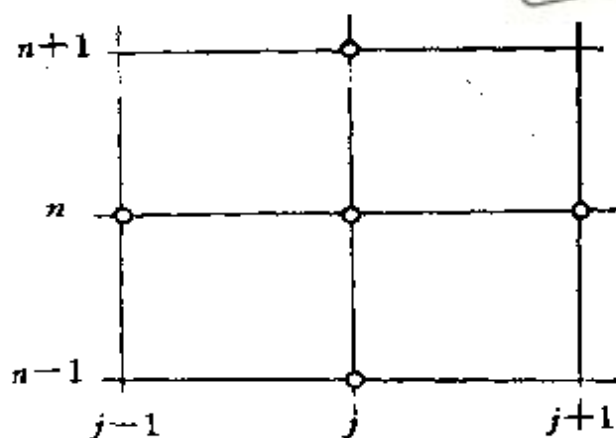


图 2.11 显式格式节点图式

$$\frac{u_j^1 - u_j^{-1}}{2\tau} = \psi_j. \quad (2.4.7)$$

(2.4.7)的截断误差为 $O(\tau^2)$, 与格式(2.4.4)相匹配, 但式中出现了新的未知数 u_j^{-1} , 必须设法消去它. 为此在(2.4.4)式中令 $n=0$, 有

$$u_j^1 - 2u_j^0 + u_j^{-1} - a^2 r^2 (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0) = 0,$$

其中 $r = \tau/h$. 此式与(2.4.7)式联立后消去 u_j^{-1} 得

$$u_j^1 = \frac{1}{2} a^2 r^2 (\varphi_{j-1} + \varphi_{j+1}) + (1 - a^2 r^2) \varphi_j + \tau \psi_j. \quad (2.4.8)$$

这样利用格式(2.4.4)及初始条件的离散(2.4.5)式和(2.4.6)式或(2.4.8)式就可逐层算出整个计算区域内 u 的值.

格式(2.4.4)也可用于求解初边值混合问题, 此时除了用上述方法处理初始条件外, 还需处理边界条件. 关于各类边界条件的处理, 可仿 § 1.2 中的方法.

为用分离变量法来讨论格式(2.4.4)的稳定性, 需要将其化成两层的格式组. 我们采用下面的办法来实现这个转化, 这就是本章开头所说的, 高阶的双曲型方程及其差分格式, 可化为一阶的双曲型方程组及其相应的双层格式组.

事实上,在方程(2.4.1)中引入新的变量

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w = a \frac{\partial u}{\partial x},$$

并利用关系式 $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x}$, 即可将方程(2.4.1)化为等价的一阶方程组

$$\frac{\partial v}{\partial t} = a \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial v}{\partial x}. \quad (2.4.9)$$

对这个一阶方程组建立显格式

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} = a \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{h}, \\ \frac{w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{\tau} = a \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{h}. \end{cases} \quad (2.4.10)$$

它就是 Courant-Friedrichs-Lewy 格式. 若令

$$v_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau}, \quad w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = a \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h},$$

则可推知双层格式组(2.4.10)等价于三层显式格式(2.4.4). 因此格式(2.4.4)的稳定性分析可通过格式(2.4.10)来完成. 令

$$\begin{cases} v_j^n = \bar{v}^n e^{i\sigma j h}, \\ w_{j-\frac{1}{2}}^n = \bar{w}^n e^{i\sigma j h}, \end{cases}$$

代入(2.4.10)式可得

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -ic & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}^{n+1} \\ \bar{w}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & ic \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{v}^n \\ \bar{w}^n \end{bmatrix},$$

其中 $c = 2a\tau \sin \frac{\sigma h}{2}$. 于是得到格式(2.4.10)的传播矩阵为

$$G(\sigma, \tau) = \begin{bmatrix} 1 & ic \\ ic & 1 - c^2 \end{bmatrix},$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - (2 - c^2)\lambda + 1 = 0.$$

特征根为

$$\lambda = 1 - 2a^2 r^2 \sin^2 \frac{\sigma h}{2} \pm \sqrt{(a^2 r^2 \sin^2 \frac{\sigma h}{2} - 1)4a^2 r^2 \sin^2 \frac{\sigma h}{2}}.$$

根据引理 1.5.1, $|\lambda| \leq 1$ 的充要条件为 $|2 - c^2| \leq 2$, 此即

$$ar \leq 1. \quad (2.4.11)$$

于是当 $ar \leq 1$ 时, 格式 (2.4.10) 满足 Von Neumann 条件.

当 $ar < 1$ 且 $\sigma h \neq 2m\pi$ 时, G 有二个相异的特征根, 根据定理 1.4.5, 可知格式 (2.4.10) 是稳定的.

当 $ar < 1$ 且 $\sigma h = 2m\pi$ 时, G 为单位矩阵, 此时格式 (2.4.10) 显然是稳定的.

当 $ar = 1$ 时, $G(\sigma, \tau)$ 于 $\sigma h = \pi$ 取形式

$$G(\pi/h, \tau) = \begin{bmatrix} 1 & 2i \\ 2i & -3 \end{bmatrix},$$

它的初等因子是 $(\lambda + 1)^2$, 故存在非奇异矩阵 S , 使

$$G(\pi/h, \tau) = S \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} S^{-1}$$

于是

$$G^n(\pi/h, \tau) = S \begin{bmatrix} (-1)^n & (-1)^{n-1}n \\ 0 & (-1)^n \end{bmatrix} S^{-1}, \quad n = 1, 2, \dots$$

显然 $\{G^n(\pi/h, \tau)\}$ 关于 n 无界, 从而格式 (2.4.10) 不稳定.

事实上, 当 $ar = 1$ 时, 我们可取一组特殊的初值

$$v_j^0 = (-1)^j, \quad w_{j+\frac{1}{2}}^0 = 0,$$

由此解 (2.4.10) 式有

$$v_j^n = (-1)^{j+n}(1-2n), \quad w_{j+\frac{1}{2}}^n = (-1)^{j+n}2n.$$

这是一组无界的解, 所以当 $ar = 1$ 时, 格式 (2.4.10) 不稳定.

总之, 当 $ar < 1$ 时, 差分格式 (2.4.10) 或 (2.4.4) 稳定, 根据定理 1.3.2 知, 显格式 (2.4.4) 的差分解收敛于波动方程 (2.4.1) 的解.

在 § 2.1 中, 我们曾指出设计一阶双曲型方程 (2.1.1) 的差分格式时应注意的基本事项, 这里对二阶双曲型方程 (2.4.1) 也有类似的问题.

如上所述, 格式 (2.4.4) 稳定的必要条件是 (2.4.11) 式, 这也是该格式的 CFL 条件, 它的直观意义仍然是差分方程解的依赖区域包含微分方程解的依赖区域. 当这个条件不成立时, 差分格式是不稳定的, 也是不收敛的.

事实上, 由图 2.11 看出, u_j^n 依赖前两层的值 $u_{j-1}^{n-1}, u_j^{n-1}, u_{j+1}^{n-1}, u_j^{n-2}$, 依此类推并注意到初始条件的离散 (2.4.5) 式及 (2.4.8) 式知 u_j^n 最终依赖于初始函数 $\varphi(x), \psi(x)$ 在 x 轴上的点列

$$x_{j-n}, x_{j-n+1}, \dots, x_{j+n-1}, x_{j+n}$$

上的值. 这说明 x 轴上含于区间 $[x_{j-n}, x_{j+n}]$ 中的网格点为格式 (2.4.4) 的解 u_j^n 的依赖区域. 它是 x 轴上被过 (x_j, t_n) 的两条直线

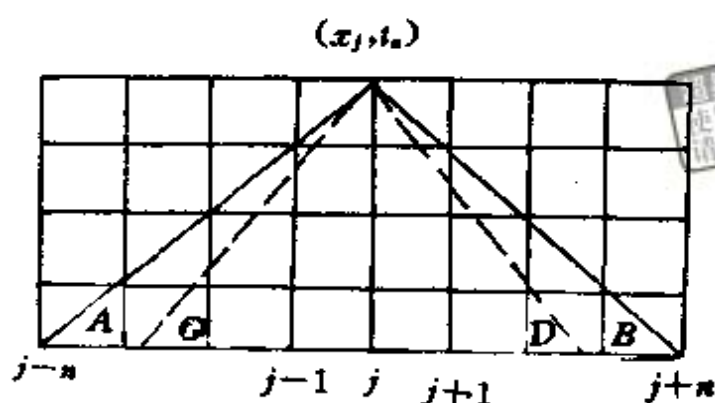
$$t - t_n = \pm r(x - x_j)$$

切割下来的区间 $[A, B]$ 所复盖的网域, 而过点 (x_j, t_n) 微分方程 (2.4.1) 的两条特征线是

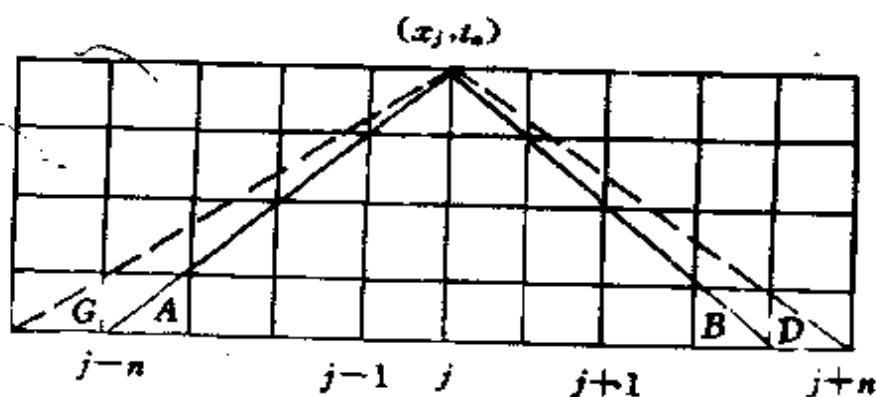
$$t - t_n = \pm \frac{1}{a}(x - x_j).$$

它们分别与 x 轴相交于 $C(x_j - at_n, 0), D(x_j + at_n, 0)$ 两点, $[C, D]$ 为微分方程 (2.4.1) 的解 $u(x, t)$ 在点 (x_j, t_n) 的依赖区域. 当 $ar \leq 1$, 亦即 $r \leq 1/a$ 时, $[C, D] \subseteq [A, B]$, 参见图 2.12(a), 此时显格式 (2.4.4) 可能稳定. 我们前面已证得 $ar < 1$ 时格式稳定, $ar = 1$ 时格式不稳定.

当 $ar > 1$ 时, $[C, D] \supset [A, B]$, 参见图 2.12(b), 固定 (x_j, t_n) , 让网格步长变小, 但网比 r 保持不变, 则依赖区域 $[A, B]$ 与 $[C, D]$ 不变, 若改变区间 (C, A) 和 (B, D) 上的初值而保持 $[A, B]$ 上的初值不变, 则 $u(x_j, t_n)$ 可取不同的值, 而 u_j^n 当 $h, \tau \rightarrow 0$ 时 (r 固定不



(a) $ar \leq 1$ 的情形



(b) $ar > 1$ 的情形

图 2.12 波动方程与其显格式的依赖区域

变)是一串确定的数列,它不可能收敛到不同的 $u(x_j, t_n)$, 因而此时的差分格式(2.4.4)不可能稳定.

在对格式(2.4.4)的稳定性分析中,我们将二阶方程(2.4.1)化成了等价的一阶方程组(2.4.9),参照 § 2.2 中的讨论,我们还可以直接给出一些差分格式.

2. Lax-Friedrichs 格式

首先令 $U = (v, w)^T$, 将方程组(2.4.9)写成

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad (2.4.12)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix}.$$

我们可以直接写出(2.4.12)式的 Lax-Friedrichs 格式

$$\frac{U_j^{n+1} - \frac{1}{2}(U_{j+1}^n + U_{j-1}^n)}{\tau} + A \frac{U_{j+1}^n - U_{j-1}^n}{2h} = 0,$$

如果用分量代入有

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n)}{\tau} - a \frac{w_{j+1}^n - w_{j-1}^n}{2h} = 0, \\ \frac{w_j^{n+1} - \frac{1}{2}(w_{j+1}^n + w_{j-1}^n)}{\tau} - a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} = 0. \end{cases} \quad (2.4.13)$$

这是一个显式格式. 利用 § 2.2 的结论, (2.4.13) 式的稳定性条件是 $\rho(A) \leq 1$. 此处 A 的特征值为 $\pm a$, 所以 (2.4.1) 式的稳定性条件为

$$ar \leq 1. \quad (2.4.14)$$

我们也可以求出 (2.4.13) 式的传播矩阵

$$G(\sigma, \tau) = \begin{bmatrix} \cos \sigma h & iarsin \sigma h \\ iarsin \sigma h & \cos \sigma h \end{bmatrix},$$

G 的特征方程为

$$\lambda^2 - 2\cos \sigma h \lambda + \cos^2 \sigma h + a^2 r^2 \sin^2 \sigma h = 0.$$

G 的特征值为

$$\lambda = \cos \sigma h \pm iarsin \sigma h.$$

由于

$$|\lambda|^2 = \cos^2 \sigma h + a^2 r^2 \sin^2 \sigma h,$$

注意到 G 是正规矩阵, 故当 (2.4.14) 式成立时, 格式 (2.4.13) 稳定.

3. Lax-Wendroff 格式

方程组 (2.4.12) 的 Lax-Wendroff 格式为

$$U_j^{*+1} = U_j^* - \frac{1}{2}rA(U_{j+1}^* - U_{j-1}^*) + \frac{1}{2}r^2A^2(U_{j-1}^* - 2U_j^* + U_{j+1}^*).$$

将分量代入有

$$\begin{cases} v_j^{*+1} = v_j^* + \frac{1}{2}ar(w_{j+1}^* - w_{j-1}^*) + \frac{1}{2}a^2r^2(v_{j+1}^* - 2v_j^* + v_{j-1}^*), \\ w_j^{*+1} = w_j^* + \frac{1}{2}ar(v_{j+1}^* - v_{j-1}^*) + \frac{1}{2}a^2r^2(w_{j+1}^* - 2w_j^* + w_{j-1}^*). \end{cases} \quad (2.4.15)$$

根据 § 2.2 中的结论, 并注意到此处 $\rho(A) = a$, 因此差分格式 (2.4.15) 的稳定性条件也是 $ar \leq 1$.

4. 隐式格式

为了得到方程 (2.4.1) 的绝对稳定的差分格式, 现用 $n-1, n, n+1$ 层上二阶中心差商的加权平均去逼近二阶导数 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$, 则得到一个如下的二阶精度的隐式格式, 亦称为 Von Neumann 格式

$$\frac{1}{\tau^2} \delta_t^2 u_j^* = \frac{a^2}{h^2} [\theta \delta_x^2 u_j^{*+1} + (1-2\theta) \delta_x^2 u_j^* + \theta \delta_x^2 u_j^{*-1}], \quad (2.4.16)$$

其中 $0 \leq \theta \leq 1$ 是参数. 当 $\theta = 0$ 时就是显式格式 (2.4.4), 比较常用的是 $\theta = 1/4$ 的情形, 此时 (2.4.16) 式成为

$$\frac{1}{\tau^2} \delta_t^2 u_j^* = \frac{a^2}{4h^2} \delta_x^2 (u_j^{*+1} + 2u_j^* + u_j^{*-1}). \quad (2.4.17)$$

为讨论格式 (2.4.17) 的稳定性, 我们对一阶方程组 (2.4.9) 建立如下的差分格式

$$\begin{cases} \frac{v_j^{*+1} - v_j^*}{\tau} = \frac{a}{2h} (w_{j+\frac{1}{2}}^* - w_{j-\frac{1}{2}}^* + w_{j+\frac{1}{2}}^{*+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^{*+1}), \\ \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^{*+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^*}{\tau} = \frac{a}{2h} (v_j^{*+1} - v_{j-1}^{*+1} + v_j^* - v_{j-1}^*). \end{cases} \quad (2.4.18)$$

若置

$$v_j^* = \frac{u_j^* - u_j^{*-1}}{\tau}, w_{j+\frac{1}{2}}^* = \frac{a}{2h} [(u_{j+1}^* - u_j^*) + (u_{j+1}^{*-1} - u_j^{*-1})],$$

则可推知双层格式组(2.4.18)与三层隐式(2.4.17)等价.

格式(2.4.18)可以改写成

$$\begin{cases} v_j^{n+1} - \frac{1}{2}ar(w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}) = v_j^n + \frac{1}{2}ar(w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n), \\ w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{1}{2}ar(v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) = w_{j-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2}ar(v_j^n - v_{j-1}^n). \end{cases} \quad (2.4.19)$$

为便于计算,我们利用上述方程组的第二个方程来消去第一个方程中的 $w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$ 和 $w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}$, 得到

$$\begin{aligned} & v_j^{n+1} - \frac{1}{4}a^2r^2(v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1}) \\ &= ar(w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{4}a^2r^2(v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n) + v_j^n. \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

对于适定的定解问题,上式成为一个可解的方程组,用追赶法解得 $n+1$ 层的 v 值后再由(2.4.19)式的第二个方程显式地计算 w 的值.

容易求出格式(2.4.18)的传播矩阵为

$$G(\sigma, \tau) = \begin{bmatrix} \frac{1 - c^2/4}{1 + c^2/4} & \frac{ic}{1 + c^2/4} \\ \frac{ic}{1 - c^2/4} & \frac{1 - c^2/4}{1 + c^2/4} \end{bmatrix},$$

其中 $c = 2arsin \frac{\sigma h}{2}$. 易知 $G(\sigma, \tau)$ 是酉矩阵, 因此 $\|G(\sigma, \tau)\|_0 = 1$, 故格式(2.4.18)绝对稳定.

2.4.2 二维波动方程

考虑二维波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0, & -\infty < x, y < \infty, 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (2.4.21)$$

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, 0) = \psi(x, y). \end{cases} \quad -\infty < x, y < \infty, \quad (2.4.22)$$

对于方程(2.4.21),也可建立类似于二维情形格式(2.4.4)那样的显格式

$$\frac{1}{\tau^2} \delta_t^2 u_\mu^n = \frac{1}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_\mu^n, \quad (2.4.23)$$

这里, x 方向和 y 方向的步长均取为 h 是为了讨论的方便, 仍记网比 $r = \tau/h$, 则上式可改写为

$$u_\mu^{n+1} = 2(1-2r^2)u_\mu^n + r^2(u_{j+1,i}^n + u_{j-1,i}^n + u_{j,i+1}^n + u_{j,i-1}^n) - u_\mu^{n-1}. \quad (2.4.24)$$

格式的初始条件为(2.4.22)式的离散

$$\begin{cases} u_\mu^0 = \varphi_\mu, \\ u_\mu^1 = (1-2r^2)\varphi_\mu + \frac{1}{2}r^2(\varphi_{j+1,i} + \varphi_{j-1,i} + \varphi_{j,i+1} + \varphi_{j,i-1}) + \tau\psi_\mu. \end{cases}$$

用分离变量法可以证明格式(2.4.24)的稳定性条件为 $r < 1/\sqrt{2}$, 这显然比一维的情况苛刻些, 当空间变量的个数增多时, 稳定性条件还会更苛刻. 这就是说, 显格式不适用于多个空间变量的情形. 若将通常的隐式格式(2.4.16)推广用于方程(2.4.21)的初边值问题, 则在每个时间层上需要求解的方程组其系数矩阵已不是三对角了. 因此, 对多维二阶双曲型方程的初边值问题, 仍需象 §1.7 对多维抛物型方程定解问题那样构造具有良好稳定性能又易于求解的差分格式.

考虑二维波动方程初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, & 0 < x, y < 1, 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) = \varphi(x, y), \\ \frac{\partial}{\partial t} u(x, y, 0) = \psi(x, y), & 0 \leq x, y \leq 1, \\ u(x, y, t)|_\Gamma = f(x, y, t), \end{cases} \quad (2.4.25)$$

其中 Γ 表示区域: $0 \leq x, y \leq 1$ 的边界.

对上述问题,给出两个交替方向隐格式
格式 I

$$\begin{cases} \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} \\ = \frac{1}{h^2} \{ \delta_x^2 [\theta u^{n+\frac{1}{2}} + (1-2\theta)u^n + \theta u^{n-1}] \\ + \delta_y^2 [2\theta u^{n-1} + (1-2\theta)u^n] \}, \end{cases} \quad (2.4.26)$$

$$\frac{u^{n+1} - u^{n+\frac{1}{2}}}{\tau^2} = \frac{1}{h^2} \delta_y^2 (\theta u^{n+1} - \theta u^{n-1}), \quad (2.4.27)$$

其中 $0 \leq \theta \leq 1$ 为参数, u^n 为 u_μ^n 的简写,下同. 这是个三层格式,计算分两步进行,如果第 $n-1$ 层和 n 层上的解值已知,则先由 (2.4.26) 式解三对角方程组获得过渡值 $u^{n+\frac{1}{2}}$,然后再解三对角方程组 (2.4.27) 得到第 $n+1$ 层上的解值.

为讨论格式的精度和稳定性,我们由 (2.4.27) 式解出 $u^{n+\frac{1}{2}}$,代入 (2.4.26) 式,得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2} \delta_x^2 u^n &= \frac{1}{h^2} \{ \delta_x^2 [\theta u^{n+1} + (1-2\theta)u^n + \theta u^{n-1}] \\ &+ \delta_y^2 [\theta u^{n+1} + (1-2\theta)u^n + \theta u^{n-1}] \} \\ &- \frac{\tau^2 \theta^2}{h^4} \delta_x^2 \delta_y^2 (u^{n+1} - u^{n-1}). \end{aligned} \quad (2.4.28)$$

如果略去上式中的最后一项,所得格式就是二维情形下标准的 Von Neumann 格式,从而格式 (2.4.28) 即格式 I 以截断误差 $O(\tau^2 + h^2)$ 逼近微分方程 (2.4.25). 用分离变量法可以证明,当 $\theta \geq 1/4$ 时,格式 I 是绝对稳定的. 我们略去这个证明,是由于它同下面格式 II 的稳定性分析是完全类似的.

格式 II

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{u^{n+\frac{1}{2}} - 2u^n + u^{n-1}}{\tau^2} \\ &= \frac{1}{h^2} \{ \delta_x^2 [\theta u^{n+\frac{1}{2}} + (1-2\theta)u^n + \theta u^{n-1}] + \delta_y^2 u^n \}, \quad (2.4.29) \\ & \frac{1}{\tau^2} \delta_t^2 u^n = \frac{1}{h^2} \{ \delta_x^2 [\theta u^{n+\frac{1}{2}} + (1-2\theta)u^n + \theta u^{n-1}] \\ & \quad + \delta_y^2 [\theta u^{n+1} + (1-2\theta)u^n + \theta u^{n-1}] \}, \quad (2.4.30) \end{aligned} \right.$$

其中 $0 \leq \theta \leq 1$ 为参数. 这是二维情形下 Von Neumann 格式的又一变形. 事实上, 由 (2.4.29) 式减去 (2.4.30) 式, 则得

$$u^{n+\frac{1}{2}} = u^{n+1} - \frac{\theta \tau^2}{h^2} \delta_y^2 \delta_t^2 u^n,$$

以之代进 (2.4.30) 式, 消去过渡值 $u^{n+\frac{1}{2}}$, 得

$$\begin{aligned} \frac{1}{\tau^2} \delta_t^2 u^n &= \frac{1}{h^2} \{ \delta_x^2 [\theta u^{n+1} + (1-2\theta)u^n + \theta u^{n-1}] \\ & \quad + \delta_y^2 [\theta u^{n+1} + (1-2\theta)u^n + \theta u^{n-1}] \} - \frac{\tau^2 \theta^2}{h^4} \delta_x^2 \delta_y^2 \delta_t^2 u^n. \end{aligned} \quad (2.4.31)$$

略去最后一项, 即得二维情形的 Von Neumann 格式.

下面用分离变量法分析格式 (2.4.31) 即格式 I 的稳定性.

格式 (2.4.31) 等价于如下的双层格式组

$$\left\{ \begin{aligned} & [1 - \theta r^2 (\delta_x^2 + \delta_y^2) + \theta^2 r^4 \delta_x^2 \delta_y^2] u^{n+1} \\ &= [2 + (1-2\theta)r^2 (\delta_x^2 + \delta_y^2) + 2\theta^2 r^4 \delta_x^2 \delta_y^2] u^n \\ & \quad - [1 - \theta r^2 (\delta_x^2 + \delta_y^2) + \theta^2 r^4 \delta_x^2 \delta_y^2] v^n, \\ & v^{n+1} = u^n. \end{aligned} \right. \quad (2.4.32)$$

令

$$\begin{cases} u^n = \bar{u}^n e^{i(\alpha_1 j h + \alpha_2 k h)}, \\ v^n = \bar{v}^n e^{i(\alpha_1 j h + \alpha_2 k h)}. \end{cases} \quad (2.4.33)$$

经计算得

$$\begin{cases} \delta_x^2 u^n = -4\sin^2 \frac{\sigma_1 h}{2} u^n, \\ \delta_y^2 u^n = -4\sin^2 \frac{\sigma_2 h}{2} u^n, \\ \delta_x^2 \delta_y^2 u^n = 16\sin^2 \frac{\sigma_1 h}{2} \sin^2 \frac{\sigma_2 h}{2} u^n. \end{cases} \quad (2.4.34)$$

将(2.4.33)式与(2.4.34)式代入(2.4.32)式,消去公因子,经整理得

$$\begin{bmatrix} \bar{u}^{n+1} \\ \bar{v}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}^n \\ \bar{v}^n \end{bmatrix},$$

其中

$$b = \frac{1 + 2(2\theta - 1)r^2(\sin^2 \frac{\sigma_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\sigma_2 h}{2}) + 16\theta^2 r^4 \sin^2 \frac{\sigma_1 h}{2} \sin^2 \frac{\sigma_2 h}{2}}{1 + 4\theta r^2(\sin^2 \frac{\sigma_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\sigma_2 h}{2}) + 16\theta^2 r^4 \sin^2 \frac{\sigma_1 h}{2} \sin^2 \frac{\sigma_2 h}{2}}.$$

格式(2.4.32)的传播矩阵为

$$G(\sigma, \tau) = \begin{bmatrix} 2b & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - 2b\lambda + 1 = 0.$$

根据引理 1.5.1, 知此方程的根按模不大于 1 的充要条件为 $|b| \leq 1$, 根据 b 的表达式知此不等式成立的充要条件是 $\theta \geq 1/4$, 于是当 $\theta \geq 1/4$ 时, 格式满足 Von Neumann 条件.

当 $\theta \geq 1/4$ 时, 通过实际计算知 $|b| < 1$, 故 $G(\sigma, \tau)$ 的两个特征值 λ_1, λ_2 互异, 根据定理 1.4.5 知格式 I 稳定(绝对稳定).

值得指出的是, 二维波动方程(2.4.21)也可以化为如下的二维一阶双曲型方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} + B \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad (2.4.35)$$

其中

$$U = \left(\frac{\partial u}{\partial t}, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right)^T,$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

我们在 § 2.2 中讨论过的一维双曲型方程组的很多显式差分格式,原则上都可以推广到关于方程组(2.4.35)的情形,但稳定性的限制比一维情况严格得多.当然也有稳定性限制较宽松的差分格式,详细讨论可参见参考书[3],[4].

§ 2.5 一阶拟线性双曲型方程组的特征线法

一阶拟线性双曲型方程组在流体力学中有着重要的应用,其数值方法一直受到人们的关注,特征线法是常用的方法之一,它与双曲型方程的特征概念有着密切的联系.

2.5.1 一阶线性双曲型方程的特征线法

为了阐明特征线法的基本思想,我们先从最简单的一阶线性双曲型方程谈起,即考虑方程

$$b(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} = c(x,t). \quad (2.5.1)$$

它与常微分方程比较,其复杂之处就在于它包含了两个方向的微商.是否可以将它的左边也化成沿一个方向的微商呢?根据二元函数方向微商的一般公式,如果我们引入由下述方向场决定的曲线

$$a(x,t)dt - b(x,t)dx = 0, \quad (2.5.2)$$

则沿这条曲线有

$$\begin{aligned} b(x,t) \frac{\partial u}{\partial t} + a(x,t) \frac{\partial u}{\partial x} &= b(x,t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{a(x,t)}{b(x,t)} \frac{\partial u}{\partial x} \right) \\ &= b(x,t) \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{dx}{dt} \right) = b(x,t) \frac{du}{dt}. \end{aligned}$$

利用上式可将方程(2.5.1)沿曲线(2.5.2)转化为只包含一个方向微商的常微分方程

$$b(x, t) \frac{du}{dt} = c(x, t), \quad (2.5.3)$$

或

$$a(x, t) \frac{du}{dx} = c(x, t). \quad (2.5.4)$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

这样,对方程(2.5.1)的初值问题的求解,可代之以方程(2.5.3)或方程(2.5.4)的初值问题的求解. 例如,若初值给定在 $x-t$ 平面上的曲线 Γ 上,则在 Γ 上任取一点 (x_0, t_0) ,过此点由(2.5.2)式可作出曲线 $\Gamma_0: x = x(t)$,将其代入(2.5.3)式,可得一常微分方程,解之可得在 Γ_0 上的值,过 Γ 上每一点都这样作,就求出了方程(2.5.1)初值问题之解(见图 2.13).

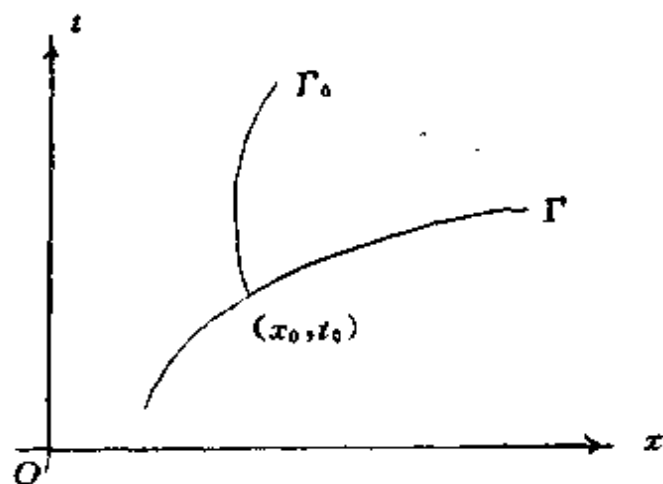


图 2.13 初值问题的特征线

上述解法中,由(2.5.2)式决定的曲线起着重要的作用,沿着它,方程(2.5.1)的求解问题转化为解一常微分方程,具有这种特点的曲线称为特征线,方程(2.5.2)即为特征线所满足的微分方程,由关系式

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(x, t)}{b(x, t)}$$

所定义的方向称为特征方向,未知函数 $u(x, t)$ 沿着特征线所满足的方程(2.5.3)或(2.5.4)称为原方程的特征关系. 初值问题的适

定性要求初始曲线 Γ 处处不与特征方向相切.

2.5.2 一阶拟线性双曲型方程的特征线法

考虑一阶拟线性双曲型方程的 Cauchy 问题

$$\begin{cases} a(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} + b(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} = c(x, t, u), \\ u|_{\Gamma} = \varphi(x, t), \end{cases} \quad (2.5.5)$$

其中 $\varphi(x, t)$ 为已知函数. 这里假定定解问题 (2.5.5) 的解是唯一确定的. 类似前面的讨论, 特征方向为

$$\frac{dx}{dt} = \frac{a(x, t, u)}{b(x, t, u)}. \quad (2.5.6)$$

特征线方程为

$$a(x, t, u)dt - b(x, t, u)dx = 0. \quad (2.5.7)$$

特征关系为

$$a(x, t, u)du - c(x, t, u)dx = 0. \quad (2.5.8)$$

这里, 与线性情形的不同之处在于 (2.5.7) 式与 (2.5.8) 式中的系数 a, b, c 都与未知函数 u 有关, 因此对拟线性情形, 特征线事实上无法象线性那样预先画出来, 于是我们讨论近似解法.

在初始线 Γ 上任取一点 (x_0, t_0) , 解为 u_0 , 特征线 Γ_0 在该点处的方向为

$$\left(\frac{dx}{dt} \right)_{(x_0, t_0)} = \frac{a(x_0, t_0, u_0)}{b(x_0, t_0, u_0)}.$$

根据常微分方程中 Euler 折线法的思想, 对于 (x_0, t_0) 附近的点 (x, t) , Γ_0 可用折线来近似, 于是 (2.5.7) 式近似关系为

$$a(x_0, t_0, u_0)(t - t_0) - b(x_0, t_0, u_0)(x - x_0) = 0. \quad (2.5.9)$$

同样, 常微分方程 (2.5.8) 也可用 Euler 折线法化为近似关系

$$a(x_0, t_0, u_0)(u - u_0) - c(x_0, t_0, u_0)(x - x_0) = 0. \quad (2.5.10)$$

方程组 (2.5.9), (2.5.10) 确定了在特征线上 x, t, u 的近似关系.

我们可先取定 x_1 , 且 $|x_1 - x_0|$ 充分小, 代入方程 (2.5.9), 求出对应的 $t_1^{(1)}$, 再把 $x = x_1, t = t_1^{(1)}$ 代入方程 (2.5.10), 解得 $(x_1, t_1^{(1)})$ 上 u 的近似值 $u_1^{(1)}$. 把所得的点 $(x_1, t_1^{(1)})$ 作为过点 (x_0, t_0) 的特征线上点 (x_1, t_1) 的近似, 而 $u_1^{(1)}$ 作为点 (x_1, t_1) 上方程解 u_1 的近似. 也即假 x_1 已知, 于是 $t_1^{(1)}, u_1^{(1)}$ 满足方程

$$a(x_0, t_0, u_0)(t_1^{(1)} - t_0) = b(x_0, t_0, u_0)(x_1 - x_0), \quad (2.5.11)$$

$$a(x_0, t_0, u_0)(u_1^{(1)} - u_0) = c(x_0, t_0, u_0)(x_1 - x_0). \quad (2.5.12)$$

为了提高近似解的精度, 上述两个方程中的系数 a, b, c , 可用它们在 (x_0, t_0) 和 $(x_1, t_1^{(1)})$ 上的值的平均值代替, 即

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[a(x_0, t_0, u_0) + a(x_1, t_1^{(1)}, u_1^{(1)})](t_1^{(2)} - t) \\ &= \frac{1}{2}[b(x_0, t_0, u_0) + b(x_1, t_1^{(1)}, u_1^{(1)})](x_1 - x_0), \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}[a(x_0, t_0, u_0) + a(x_1, t_1^{(1)}, u_1^{(1)})](u_1^{(2)} - u_0) \\ &= \frac{1}{2}[c(x_0, t_0, u_0) + c(x_1, t_1^{(1)}, u_1^{(1)})](x_1 - x_0). \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

用上述方程解得的 $t_1^{(2)}$ 和 $u_1^{(2)}$ 作为特征线上点 (x_1, t_1) 的纵坐标 t_1 和解 u_1 的进一步近似.

上面的过程重复地进行, 就迭代出 t_1, u_1 的一系列近似值 $t_1^{(1)}, u_1^{(1)}, \dots$, 迭代过程一直到相邻两次迭代所得值之差的绝对值小于某一指定的适当小的正数为止. 以求得的 (x_1, t_1, u_1) 代替 (x_0, t_0, u_0) , 继续上面的作法, 可求得 $(x_2, t_2, u_2), \dots$.

2.5.3 一阶拟线性双曲型方程组的特征线法

考虑一阶拟线性双曲型方程组

$$\sum_{j=1}^p (a_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial x} + b_{ij} \frac{\partial u_j}{\partial t}) = c_i, \quad i = 1, 2, \dots, p, \quad (2.5.15)$$

其中 a_{ij}, b_{ij}, c_i 都是 x, t, u_1, \dots, u_p 在某一区域内的已知的光滑函

数.

若记 $U = (u_1(x, t), \dots, u_p(x, t))^T$, $A = (a_{ij})_{p \times p}$, $B = (b_{ij})_{p \times p}$, $c = (c_1, \dots, c_p)^T$, 则可将(2.5.15)式写成

$$B \frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = C. \quad (2.5.16)$$

因为 A, B, C 与未知函数 U 相关, 且方程组关于最高阶偏导数线性, 故称(2.5.16)式为拟线性偏微分方程组. 若 A, B 与 U 无关, 则说(2.5.16)式是半线性方程组; 若 C 线性地依赖 U , 它就是线性方程组.

假定 B 可逆, 不失一般性, 可认为 $B = I$, 从而可以只考虑下列形式的方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = C. \quad (2.5.17)$$

称方程组(2.5.17)于点 (x, t, U) 为双曲型, 如果在此点处, p 阶矩阵 A 有 p 个实的互异特征值

$$\lambda_1(x, t, U) > \lambda_2(x, t, U) > \dots > \lambda_p(x, t, U).$$

如果(2.5.17)式于每点 $(x, t, U) \in \Omega$ 为双曲型, 则称它是 Ω 上的双曲型方程组.

设行向量 $s_1(x, t, U), \dots, s_p(x, t, U)$ 是矩阵 A 相应于 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$ 的左特征向量, 即

$$s_i A = \lambda_i s_i, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

用 s_i 左乘(2.5.17)式两端得

$$s_i \frac{\partial U}{\partial t} + \lambda_i s_i \frac{\partial U}{\partial x} = s_i c, \quad i = 1, 2, \dots, p.$$

设 $s_i = (s_{i1}, s_{i2}, \dots, s_{ip})$, 则上式可写为

$$\sum_{j=1}^p s_{ij} \left(\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u_j}{\partial x} \right) = \sum_{j=1}^p s_{ij} c_j, \quad i = 1, 2, \dots, p. \quad (2.5.18)$$

称此式为微分方程组(2.5.17)的正规形式.

引入 p 个方向 τ_i , 满足

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i, i = 1, 2, \dots, p \quad (2.5.19)$$

则沿 τ_i , 有

$$\frac{\partial u_j}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u_j}{\partial x} = \left(\frac{du_j}{dt} \right)_{\tau_i}$$

从而(2.5.18)式可以写成常微分方程组

$$\sum_{j=1}^p s_{ij} \left(\frac{du_j}{dt} \right)_{\tau_i} = \sum_{j=1}^p s_{ij} c_j, \quad i = 1, 2, \dots, p \quad (2.5.20)$$

对于给定的 $U=U(x,t)$, 由(2.5.19)式确定 p 个方向, 称为特征方向; 同时也确定 p 族特征线, 简称特征. 沿每一特征的特征常微分方程组(2.5.20)称为原方程的特征关系. 过每一点 (x,t) , 有 p 个特征方向, 有 p 条特征, 特征方向和特征关系是利用特征概念数值求解双曲方程的基础.

例 2.5.1 波动方程(2.4.1)可化成一阶方程组(2.4.12), 即

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix}.$$

A 的特征值为 $\lambda_1 = a, \lambda_2 = -a$, 相应的左特征向量为 $s_1 = (1, -1)$, $s_2 = (1, 1)$. 特征方向为 $\frac{dx}{dt} = \pm a$, 从而方程组的特征是两族直线

$$x - at = c_1, \quad x + at = c_2.$$

正规形式是

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial t} - a \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} - a \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0. \end{cases}$$

例 2.5.2 气体动力学中一维不定常等熵流动的方程组, 在 Euler 坐标下为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{a^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (2.5.21)$$

其中 ρ, u 分别表示流体的密度和速度, $a = a(\rho)$ 为“局部声速”.

令 $U = (\rho, u)^T$, 则可将(2.5.21)式写成

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0, \quad A = \begin{bmatrix} u & \rho \\ a^2/\rho & u \end{bmatrix}.$$

超星浏览器提醒您:
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

A 有两个互异的特征值 $\lambda_1 = u + a, \lambda_2 = u - a$, 所以(2.5.21)式是双曲型的, 其特征方向为

$$\frac{dx}{dt} = u \pm a.$$

容易求出矩阵 A 相应于 λ_1 和 λ_2 的左特征向量是

$$s_1 = (1, \rho/a), \quad s_2 = (1, -\rho/a).$$

由此得到方程组(2.5.21)的正规形式是

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\rho}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u + a) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\rho}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + (u - a) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \end{cases}$$

下面, 我们仅叙述含两个未知函数的一阶拟线性双曲型方程组

$$\begin{cases} b_{11} \frac{\partial u}{\partial t} + a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{12} \frac{\partial v}{\partial t} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial x} = d_1, \\ b_{21} \frac{\partial u}{\partial t} + a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + b_{22} \frac{\partial v}{\partial t} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial x} = d_2 \end{cases} \quad (2.5.22)$$

的特征线法, 其中 $b_{ij}, a_{ij}, d_i (i, j = 1, 2)$ 均为 x, t, u, v 的函数. 方程组的矩阵形式为

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} + A \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = C, \quad (2.5.23)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}.$$

设 A 的两个实的互异特征值为 $\lambda_1(x, t, u, v) > \lambda_2(x, t, u, v)$, 与其对应的左特征向量为 $s_1 = (s_{11}, s_{12}), s_2 = (s_{21}, s_{22})$, 方程组 (2.5.23) 的正规形式为

$$\begin{cases} s_{11} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + s_{12} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_1 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = s_{11}c_1 + s_{12}c_2 = \bar{c}_1, \\ s_{21} \left(\frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) + s_{22} \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \lambda_2 \frac{\partial v}{\partial x} \right) = s_{21}c_1 + s_{22}c_2 = \bar{c}_2. \end{cases}$$

特征线方程为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1(x, t, u, v), & \lambda_1 \text{ 族特征,} \\ \frac{dx}{dt} = \lambda_2(x, t, u, v), & \lambda_2 \text{ 族特征.} \end{cases} \quad (2.5.24)$$

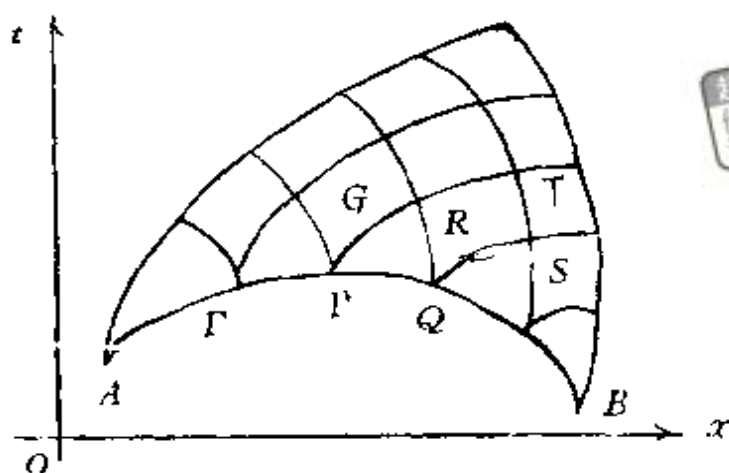
原方程的特征关系为

$$\begin{cases} s_{11}du + s_{12}dv = \bar{c}_1 dt, & \text{沿着 } \lambda_1 \text{ 族特征,} \\ s_{21}du + s_{22}dv = \bar{c}_2 dt, & \text{沿着 } \lambda_2 \text{ 族特征,} \end{cases} \quad (2.5.25)$$

其中 $s_{ij}, \bar{c}_i (i, j=1, 2)$, 都是 x, t, u, v 的函数.

方程 (2.5.22) 的 Cauchy 问题的提法为: 在 $x-t$ 平面上给定了一条处处不与特征方向相切的曲线 Γ (图 2.14), 在 Γ (两端点为 A, B) 上给定未知函数 u, v 的值要在由 Γ 和由 A 点出发的 λ_1 特征以及由 B 点出发的 λ_2 特征所围成的区域 G (决定域) 中求方程 (2.5.22) 的解.

从曲线 Γ 上一系列点出发, 在区域 G 中画两族特征线, 设 P 和 Q 是 Γ 上两个相邻点, 从 P 点出发的 λ_1 特征和从 Q 点出发的 λ_2 特征相交于 R 点. 沿着 λ_1 特征 PR 和 λ_2 特征 QR , 我们有常微分方程组 (2.5.24) 和 (2.5.25). 利用常微分方程的 Euler 折线



超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

图 2.14 初值问题的特征线法

法, 则有联立方程组

$$\begin{cases} x^{(1)}(R) - x(P) = \lambda_1(P)[t^{(1)}(R) - t(P)], \\ x^{(1)}(R) - x(Q) = \lambda_2(Q)[t^{(1)}(R) - t(Q)], \\ s_{11}(P)[u^{(1)}(R) - u(P)] + s_{12}(P)[v^{(1)}(R) - v(P)] \\ \quad = \bar{c}_1(P)[t^{(1)}(R) - t(P)], \\ s_{21}(Q)[u^{(1)}(R) - u(Q)] + s_{22}(Q)[v^{(1)}(R) - v(Q)] \\ \quad = \bar{c}_2(Q)[t^{(1)}(R) - t(Q)], \end{cases} \quad (2.5.26)$$

其中 $\lambda_1(P) = \lambda_1(x(P), t(P), u(P), v(P))$, $\lambda_2(Q) = \lambda_2(x(Q), t(Q), u(Q), v(Q))$ 等.

解这个含未知数 $x^{(1)}(R), t^{(1)}(R), u^{(1)}(R), v^{(1)}(R)$ 的四元一次方程组, 则得 R 点的坐标及 $u(R), v(R)$ 的近似值. 格式 (2.5.26) 求得的 $u^{(1)}(R), v^{(1)}(R)$ 作为 $u(R), v(R)$ 的近似值不够精确, 可用下面的方法提高精度.

用解方程组 (2.5.26) 得出 R 点上矩阵 A 的特征值 $\lambda_1^{(1)}(R), \lambda_2^{(1)}(R)$ 及系数的近似值 $s_{11}^{(1)}(R), s_{12}^{(1)}(R), s_{21}^{(1)}(R), s_{22}^{(1)}(R)$, 再由方程组

$$\left\{ \begin{aligned}
 x^{(2)}(R) - x(P) &= \frac{1}{2} [\lambda_1(P) + \lambda_1^{(1)}(R)] [t^{(2)}(R) - t(P)], \\
 x^{(2)}(R) - x(Q) &= \frac{1}{2} [\lambda_2(Q) + \lambda_2^{(1)}(R)] [t^{(2)}(R) - t(Q)], \\
 \frac{1}{2} [s_{11}(P) + s_{11}^{(1)}(R)] [u^{(2)}(R) - u(P)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [s_{12}(P) + s_{12}^{(1)}(R)] [v^{(2)}(R) - v(P)] \\
 &= \frac{1}{2} [\bar{c}_1(P) + \bar{c}_1^{(1)}(R)] [t^{(2)}(R) - t(P)] \\
 \frac{1}{2} [s_{21}(Q) + s_{21}^{(1)}(R)] [u^{(2)}(R) - u(Q)] \\
 &\quad + \frac{1}{2} [s_{22}(Q) + s_{22}^{(1)}(R)] [v^{(2)}(R) - v(Q)] \\
 &= \frac{1}{2} [\bar{c}_2(Q) + \bar{c}_2^{(1)}(R)] [t^{(2)}(R) - t(Q)]
 \end{aligned} \right. \quad (2.5.27)$$

决定修正值 $x^{(2)}(R)$, $t^{(2)}(R)$, $u^{(2)}(R)$, $v^{(2)}(R)$, 类似地可计算进一步的修正值. 有关 S, T 等点处的近似值可相仿计算.

例 2.5.3 应用特征线法求解 Cauchy 问题

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - u^2 \frac{\partial u}{\partial t} &= 0, \quad t > 0, 0 < x < 1, \\
 u|_{t=0} &= 0.2 + 5x^2, \\
 \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} &= 3x.
 \end{aligned} \right. \quad 0 \leq x \leq 1, \quad (2.5.28)$$

首先将所给的二阶方程化为一阶方程组, 为此令 $\frac{\partial u}{\partial t} = v$, $\frac{\partial u}{\partial x} = w$, 则有方程组

$$\left\{ \begin{aligned}
 \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{u^2} \frac{\partial w}{\partial x} &= 0, \\
 \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial v}{\partial x} &= 0,
 \end{aligned} \right. \quad t > 0, 0 < x < 1 \quad (2.5.29)$$

及初值条件

$$\begin{cases} v|_{t=0} = 3x, \\ w|_{t=0} = 10x, \end{cases} \quad 0 \leq x \leq 1,$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

先用特征线法解出特征线网格点上的 v, w 值, 进而解得 u 值.

方程组(2.5.29)的矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial t} \\ \frac{\partial w}{\partial t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -1/u^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

矩阵

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/u^2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

有两个特征值 $\lambda_1 = 1/u, \lambda_2 = -1/u$, 相应的左特征向量为 $s_1 = (u, -1), s_2 = (u, 1)$. 方程组的正规形式为

$$\begin{cases} u \left(\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{u} \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \left(\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{u} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0, \\ u \left(\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{1}{u} \frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial t} - \frac{1}{u} \frac{\partial w}{\partial x} \right) = 0. \end{cases}$$

如图 2.15 所示, 求过 P 点出发的 λ_1 特征和 Q 点出发的 λ_2 特征交点 R 的坐标及其上 v, w 及 u 值.

先用格式(2.5.26)求出未知量的预估值, 再用格式(2.5.27)对它进行修正. 由

$$\frac{x^{(1)}(R) - 0.2}{t^{(1)}(R) - 0} = \frac{1}{u(P)}, \quad \frac{x^{(1)}(R) - 0.3}{t^{(1)}(R) - 0} = -\frac{1}{u(Q)}$$

及初始条件

$$u(P) = 0.2 + 5 \times (0.2)^2 = 0.4,$$

$$u(Q) = 0.2 + 5 \times (0.3)^2 = 0.65,$$

可得

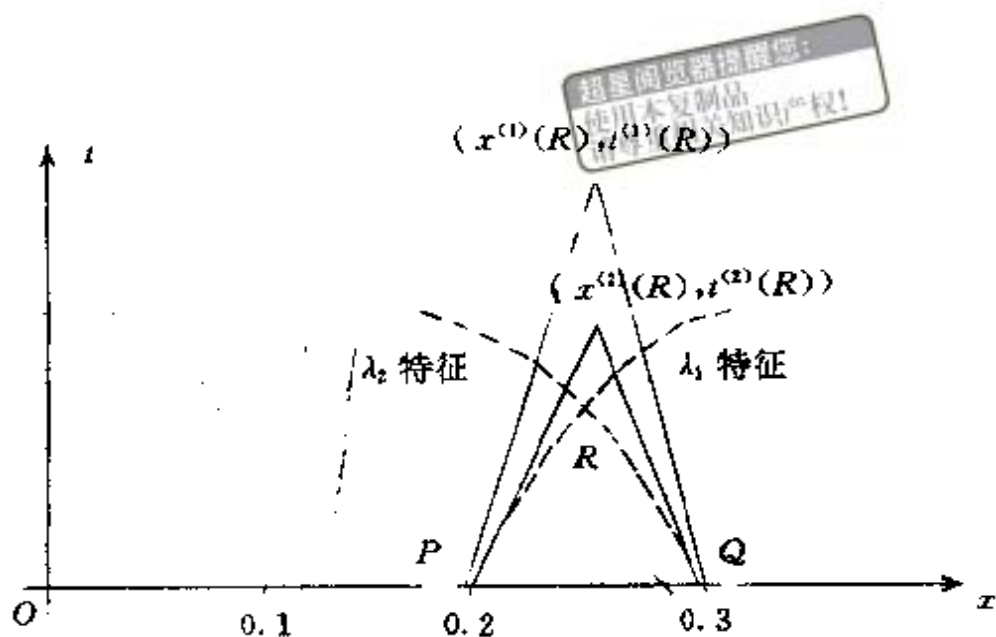


图 2.15 特征线法计算步骤示意图

$$x^{(1)}(R) = 0.26190, t^{(1)}(R) = 0.024762.$$

再根据方程组(2.5.29)的特征关系可得

$$\begin{cases} u(P) \frac{v^{(1)}(R) - v(P)}{t^{(1)}(R) - 0} - \frac{w^{(1)}(R) - w(P)}{t^{(1)}(R) - 0} = 0, \\ u(Q) \frac{v^{(1)}(R) - v(Q)}{t^{(1)}(R) - 0} + \frac{w^{(1)}(R) - w(Q)}{t^{(1)}(R) - 0} = 0, \end{cases}$$

及初始条件

$$\begin{cases} V(P) = 3x \Big|_{x=0.2} = 0.6, V(Q) = 3x \Big|_{x=0.3} = 0.9, \\ W(P) = 10x \Big|_{x=0.2} = 2, W(Q) = 10x \Big|_{x=0.3} = 3, \end{cases}$$

解得

$$V^{(1)}(R) = 1.73810, w^{(1)}(R) = 2.45524.$$

沿着特征线 PR 有

$$du = \frac{\partial u}{\partial t} dt + \frac{\partial u}{\partial x} dx = v dt + w dx,$$

因此

$$u^{(1)}(R) - u(P) = \frac{1}{2} [v^{(1)}(R) + v(P)] [t^{(1)}(R) - t(P)]$$

$$+\frac{1}{2}[w^{(1)}(R)+w(P)][x^{(1)}(R)-x(P)],$$

故

$$\begin{aligned} u^{(1)}(R) &= 0.4 + \frac{1}{2}[1.73810 + 0.6][0.24762 - 0] \\ &\quad + \frac{1}{2}[2.45524 + 2][0.26190 - 0.2] = 0.566840. \end{aligned}$$

应用格式(2.5.27)对 R 点的 x, t, v, w, u 的值作进一步修正如下

$$\begin{cases} \frac{x^{(2)}(R) - 0.2}{t^{(2)}(R) - 0} = \frac{1}{[u(P) + u^{(1)}(R)]/2}, \\ \frac{x^{(2)}(R) - 0.3}{t^{(2)}(R) - 0} = \frac{-1}{[u(Q) + u^{(1)}(R)]/2}, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} t^{(2)}(R) = [x^{(2)}(R) - 0.2][0.4 + 0.56684]/2 \\ t^{(2)}(R) = -[x^{(2)}(R) - 0.3][0.65 + 0.56684]/2. \end{cases}$$

解得

$$x^{(2)}(R) = 0.255724, \quad t^{(2)}(R) = 0.026938.$$

由

$$\begin{cases} \frac{1}{2}[u(P) + u^{(1)}(R)] \frac{v^{(2)}(R) - v(P)}{t^{(2)}(R) - 0} - \frac{w^{(2)}(R) - w(P)}{t^{(2)}(R) - 0} = 0, \\ \frac{1}{2}[u(Q) + u^{(1)}(R)] \frac{v^{(2)}(R) - v(Q)}{t^{(2)}(R) - 0} + \frac{w^{(2)}(R) - w(Q)}{t^{(2)}(R) - 0} = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} v^{(2)}(R) = 1.6830580, \\ w^{(2)}(R) = 2.5235719. \end{cases}$$

最后得到 $u(R)$ 的修正值

$$\begin{aligned} u^{(2)}(R) &= u(P) + \frac{1}{2}[v^{(2)}(R) + v(P)][t^{(2)}(R) - t(P)] \\ &\quad + \frac{1}{2}[w^{(2)}(R) + w(P)][x^{(2)}(R) - x(P)] \\ &= 0.4 + \frac{1}{2}(1.6830580 + 0.6)(0.026938 - 0) \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{2}(2.5235719+2)(0.255724-0.2) \\ =0.5567863.$$

显然修正后的 $x^{(2)}(R), t^{(2)}(R), v^{(2)}(R), w^{(2)}(R), u^{(2)}(R)$ 比 $x^{(1)}(R), t^{(1)}(R), v^{(1)}(R), w^{(1)}(R), u^{(1)}(R)$ 更接近准确值 (图 2.15).



习 题

1. 讨论求解 $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

的精度及稳定性.

2. 直接证明求解 $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 的 $L-W$ 格式是二阶精度的格式.

3. 讨论求解 $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 的下列差分格式

$$(1) u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{r}{2}(3u_j^n - 4u_{j-1}^n + u_{j-2}^n),$$

$$(2) u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{r}{2}(-3u_j^n + 4u_{j+1}^n - u_{j+2}^n),$$

$$(3) u_j^{n+1} = u_j^n - r(2u_j^n - 3u_{j-1}^n + u_{j-2}^n),$$

$$(4) u_j^{n+1} = u_j^n - r(-2u_j^n + 3u_{j+1}^n - u_{j+2}^n).$$

的精度及稳定性.

4. 对于初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & x < 0 \text{ 或 } x > 1. \end{cases} \end{cases}$$

试分别用迎风格式, $L-W$ 格式计算数值解 $u_j^n, n=1, 2, 3, 4$, 计算

时取 $r=\tau/h=1/2, h=0.2$, 并将计算结果与解析解作比较.

5. 对方程 $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ 有如下差分格式

$$(1) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 0,$$

$$(2) \frac{1}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{2} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} + \frac{a}{2h} (u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) \\ + \frac{a}{2h} (u_{j+1}^n - u_j^n) = 0,$$

$$(3) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{2} \left[\frac{a}{2h} (u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + \frac{a}{2h} (u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) \right] = 0.$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

试给出上述格式的截断误差和稳定性条件.

6. 试证明带权格式(2.1.19)当 $\theta \geq 1/2$ 时绝对稳定, 当 $\theta < \frac{1}{2}$ 时, 对 $ar \leq 1/(1-2\theta)$ 的 r 稳定.

7. 证明二阶迎风格式(2.1.20)的稳定性条件是 $a > 0, ar \leq 2$.

8. 构造求解方程组

$$\frac{\partial U}{\partial t} + A \frac{\partial U}{\partial x} = 0,$$

其中 $U = (u, v)^T, A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ 的迎风格式.

9. 试对二维一阶双曲型方程组(2.4.35)构造 $L-W$ 格式, 并讨论其精度和稳定性.

10. 证明差分格式(2.4.28)当 $\theta \geq 1/4$ 时绝对稳定.

11. 试构造求解方程组(2.5.21)的迎风格式.

第三章 椭圆型方程的差分方法

具有各种物理性质的定常过程(即不随时间变化)都可由椭圆型方程来描述,例如,稳定温度场问题,导体中电流分布问题,静电学和静磁学问题,以及弹性理论和渗流理论等问题.然而对于绝大多数椭圆型方程边值问题,因为定解区域和边值条件复杂,解析解极难求.有些问题,即使求得了它的解析表达式,也因表达式过于复杂而难以实际使用,因此必须考虑这类问题的数值解法.

本章讲述的差分方法是常用的一种数值解法.用差分方法解椭圆方程时需要考虑下面三个问题

(1) 适当选取网格,将微分方程离散成差分方程的问题.

(2) 当网格步长趋于零时,差分方程的准确解对微分方程的解是否收敛的问题.

(3) 解相应的代数方程组问题.

关于第三个问题在数值代数中已经讨论过,下面仅对前两个问题进行讨论,并仅讨论 Poisson 方程和 Laplace 方程这类最简单最典型的椭圆型方程,至于较复杂的椭圆型方程的差分方法,读者可以从本书其他各章中得到启发,本章不作赘叙.

§ 3.1 矩形网的差分格式

3.1.1 椭圆型方程的定解问题

考虑 Poisson 方程

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y), (x, y) \in \Omega, \quad (3.1.1)$$

其中 Ω 是 $x-y$ 平面内一有界区域, 其边界 Γ 为分段光滑曲线.

证: 取方程 (2.1.1) 在 Ω 上右端函数 $f(x, y)$ 为任意



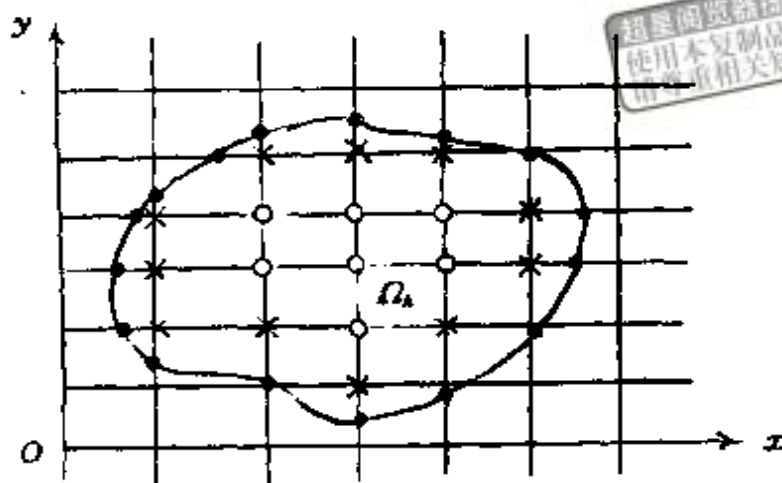


图 3.1 矩形风格剖分

3.1.3 五点差分格式

假设 $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ 在所考虑的区域 Ω 内保持有界, (i, j) 是正则内点,

利用 Taylor 公式可得

$$\frac{u(i+1, j) - 2u(i, j) + u(i-1, j))}{h_1^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{ij} + O(h_1^2),$$

$$\frac{u(i, j+1) - 2u(i, j) + u(i, j-1))}{h_2^2} = \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{ij} + O(h_2^2).$$

利用以上两式可以得到逼近 Poisson 方程 (3.1.1) 的差分格式

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_{ij} = & - \left[\frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_1^2} \right. \\ & \left. + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2} \right] = f_{ij}, \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

其中 $f_{ij} = f(x_i, y_j)$.

由于差分格式 (3.1.5) 中只出现网函数 u 在点 (i, j) 及其四个邻点上的值 (图 3.2), 故称为五点差分格式, 格式的截断误差为 $O(h^2)$. 由 (3.1.5) 式也可写出逼近 Laplace 方程

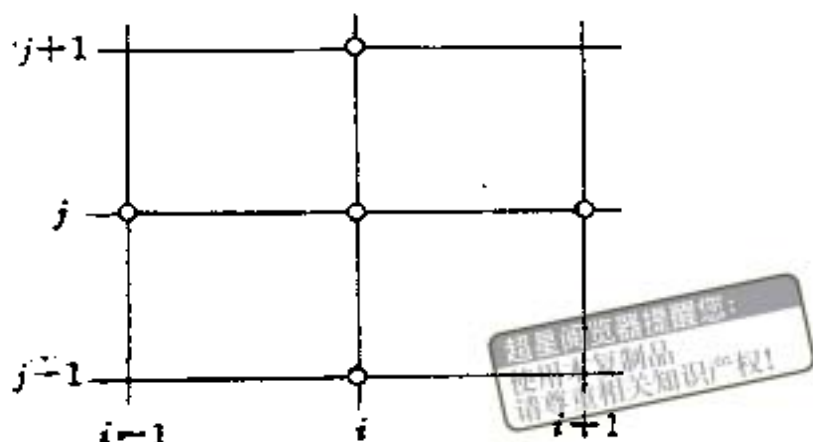


图 3.2 五点差分格式节点图式

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (3.1.6)$$

的五点差分格式

$$\Delta_h u_{ij} = \frac{u_{i+1,j} - 2u_{ij} + u_{i-1,j}}{h_1^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{ij} + u_{i,j-1}}{h_2^2} = 0. \quad (3.1.7)$$

特别地若取正方形网格: $h_1 = h_2 = h$, 则差分格式(3.1.5)简化为

$$u_{ij} - \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) = \frac{h^2}{4} f_{ij}. \quad (3.1.8)$$

格式(3.1.7)简化为

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}). \quad (3.1.9)$$

3.1.4 九点差分格式

为了提高差分格式的精度, 我们构造一个九点差分格式. 为讨论简便起见, 我们取正方形网格: $h_1 = h_2 = h$. 格式的节点图式如图 3.3. 令

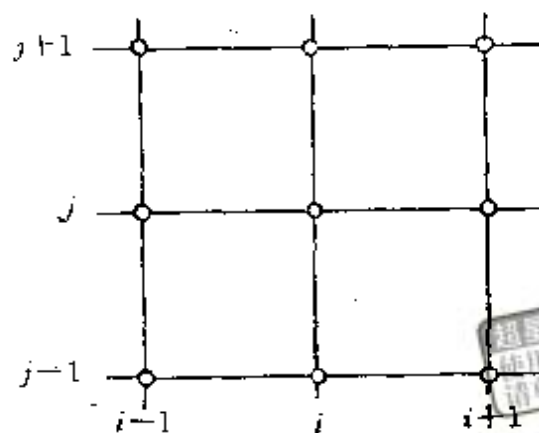


图 3.3 九点差分格式节点图式

$$\xi = h \frac{\partial}{\partial x}, \eta = h \frac{\partial}{\partial y}, \mathcal{D}^2 = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}, \text{ 则有}$$

$$\xi^2 + \eta^2 = h^2 \Delta, \xi \eta = h^2 \mathcal{D}^2,$$

$$\xi^4 + \eta^4 = (\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\xi^2 \eta^2 = h^4 (\Delta^2 - 2\mathcal{D}^4),$$

$$\xi^6 + \eta^6 = (\xi^2 + \eta^2)^3 - 3\xi^2 \eta^2 (\xi^2 + \eta^2) = h^6 (\Delta^3 - 3\mathcal{D}^4 \Delta),$$

$$\begin{aligned} (\xi + \eta)^6 + (\xi - \eta)^6 &= 2(\xi^6 + \eta^6) + 30\xi^2 \eta^2 (\xi^2 + \eta^2) \\ &= 2h^6 (\Delta^3 - 12\mathcal{D}^4 \Delta). \end{aligned}$$

由 Taylor 级数展开知

$$\begin{aligned} u(x+h, y+h) &= u(x, y) + (h \frac{\partial}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial y})u(x, y) \\ &\quad + \frac{1}{2!} (h \frac{\partial}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial y})^2 u(x, y) + \dots \\ &= \exp(h \frac{\partial}{\partial x} + h \frac{\partial}{\partial y}) u(x, y), \end{aligned}$$

从而可以得出

$$u(i+1, j) = e^\xi u(i, j), u(i, j+1) = e^\eta u(i, j), u(i+1, j+1) = e^{\xi+\eta} u(i, j), \text{ 等等.}$$

记

$$S(i, j) = u(i+1, j) + u(i, j+1) + u(i-1, j) + u(i, j-1),$$

$$T(i, j) = u(i+1, j+1) + u(i-1, j+1)$$

$$+u(i-1, j-1)+u(i+1, j-1),$$

将 $u(i+1, j), u(i, j+1), \dots$ 的表示式代入就有

$$\begin{aligned} S(i, j) &= (e^\xi + e^\eta + e^{-\xi} + e^{-\eta})u(i, j) \\ &= (1 + \xi + \frac{\xi^2}{2!} + \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^4}{4!} + \frac{\xi^5}{5!} + \frac{\xi^6}{6!} \\ &\quad + 1 + \eta + \frac{\eta^2}{2!} + \frac{\eta^3}{3!} + \frac{\eta^4}{4!} + \frac{\eta^5}{5!} + \frac{\eta^6}{6!} \\ &\quad + 1 - \xi + \frac{\xi^2}{2!} - \frac{\xi^3}{3!} + \frac{\xi^4}{4!} - \frac{\xi^5}{5!} + \frac{\xi^6}{6!} \\ &\quad + 1 - \eta + \frac{\eta^2}{2!} - \frac{\eta^3}{3!} + \frac{\eta^4}{4!} - \frac{\eta^5}{5!} + \frac{\eta^6}{6!} + \dots)u(i, j) \\ &= (4 + \xi^2 + \eta^2 + \frac{1}{12}\xi^4 + \frac{1}{12}\eta^4 + \frac{1}{360}\xi^6 \\ &\quad + \frac{1}{360}\eta^6)u(i, j) + O(h^8) \\ &= [4u + h^2\Delta u + \frac{1}{12}h^4(\Delta^2 - 2\mathcal{D}^4)u \\ &\quad + \frac{1}{360}h^6(\Delta^3 - 3\mathcal{D}^4\Delta)u]_{ij} + O(h^8). \end{aligned}$$

类似地可得

$$\begin{aligned} T(i, j) &= [4u + 2h^2\Delta u + \frac{1}{6}h^4(\Delta^2 + 4\mathcal{D}^4)u \\ &\quad + \frac{1}{360}h^6(2\Delta^3 + 24\mathcal{D}^4\Delta)u]_{ij} + O(h^8). \end{aligned}$$

在上两式中出现的 Δ^2, Δ^3 为

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2\partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}, \\ \Delta^3 &= \frac{\partial^6}{\partial x^6} + 3\frac{\partial^6}{\partial x^4\partial y^2} + 3\frac{\partial^6}{\partial x^2\partial y^4} + \frac{\partial^6}{\partial y^6}. \end{aligned}$$

利用 $S(i, j)$ 和 $T(i, j)$ 的表示式, 可得

$$\begin{aligned} [\Delta u]_{ij} &= [\frac{4S + T - 20u}{6h^2} - \frac{1}{12}h^2\Delta u \\ &\quad - \frac{1}{360}h^4(\Delta^3 + 2\mathcal{D}^4\Delta)u]_{ij} + O(h^6). \quad (3.1.10) \end{aligned}$$

注意到 $[\Delta u]_{ij} = f_{ij}$, $[\Delta^2 u]_{ij} = [\Delta f]_{ij}$, 我们可以得到逼近 Poisson 方程(3.1.1)的两个九点格式

$$-\frac{1}{6h^2}(4S_{ij} + T_{ij} - 20u_{ij}) = f_{ij} - \frac{1}{12}h^2\Delta f_{ij} - \frac{1}{360}h^4(\Delta^2 f_{ij} + 2\frac{\partial^2 f_{ij}}{\partial x^2 \partial y^2}), \quad (3.1.11)$$

$$-\frac{1}{6h^2}(4S_{ij} + T_{ij} - 20u_{ij}) = f_{ij} - \frac{1}{12}h^2\Delta f_{ij}. \quad (3.1.12)$$

它们分别具有 6 阶和 4 阶精度.

由(3.1.10)式也立即可以得到逼近 Laplace 方程(3.1.6)的有 6 阶精度的九点格式

$$\frac{1}{6h^2}(4S_{ij} + T_{ij} - 20u_{ij}) = 0. \quad (3.1.13)$$

利用我们在 § 1.6 中讨论的算子方法, 上述几个差分格式很容易得到.

取正方形网格, 由(1.6.6)式知

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{2}{h}sh^{-1}\left(\frac{\delta x}{2}\right), \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{2}{h}sh^{-1}\left(\frac{\delta y}{2}\right),$$

于是可将 Laplace 方程(3.1.6)改写成

$$\left[\frac{2}{h}sh^{-1}\left(\frac{\delta x}{2}\right)\right]^2 u + \left[\frac{2}{h}sh^{-1}\left(\frac{\delta y}{2}\right)\right]^2 u = 0$$

对上式中的两项作不同的选取, 可得到方程(3.1.6)的各种不同的差分格式. 例如, 选取

$$\left[\frac{2}{h}sh^{-1}\left(\frac{\delta x}{2}\right)\right]^2 \approx \frac{1}{h^2}\delta_x^2,$$

$$\left[\frac{2}{h}sh^{-1}\left(\frac{\delta x}{2}\right)\right]^2 \approx \frac{1}{h^2}\delta_y^2,$$

则有

$$\left(\frac{1}{h^2}\delta_x^2 + \frac{1}{h^2}\delta_y^2\right)u_{ij} = 0,$$

超星浏览器提醒您:
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

这就是通常使用的五点格式(3.1.9).

若取

$$\left[\frac{2}{h}sh^{-1}\left(\frac{\delta x}{2}\right)\right]^2 \approx \frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2,$$

$$\left[\frac{2}{h}sh^{-1}\left(\frac{\delta y}{2}\right)\right]^2 \approx \frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{1}{12}\delta_y^2\right)^{-1}\delta_y^2,$$

则得一个九点差分格式

$$\left[\frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{1}{12}\delta_y^2\right)^{-1}\delta_y^2 + \frac{1}{h^2}\left(1 + \frac{1}{12}\delta_x^2\right)^{-1}\delta_x^2\right]u_{ij} = 0,$$

此即格式(3.1.13).

§ 3.2 三角网的差分格式

为了逼近 Poisson 方程,除了矩形网格和正方形网格外,有时

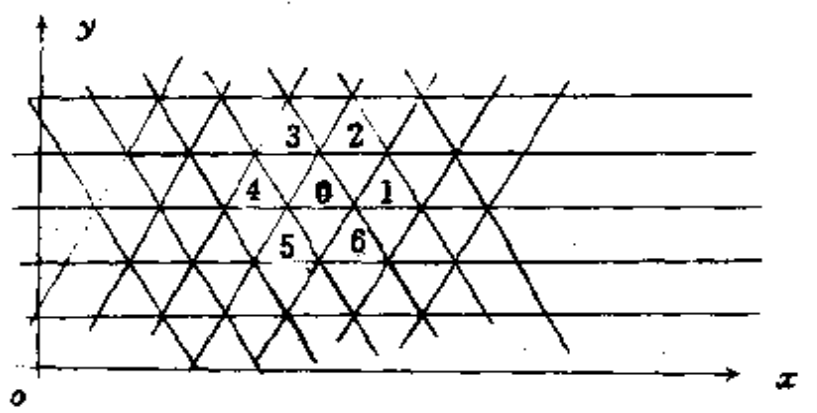


图 3.4 正三角形网格

还采用由边长为 h 的正三角形网格(图 1.4). 现在我们在这样的网格上构造方程(3.1.1)的差分逼近.

设图 3.4 中的正三角形边长为 h ,对网格区域中的任意一点 $O(x, y)$,其周围六个点的坐格为

$$(1)(x+h, y),$$

$$(2)(x+h/2, y+\sqrt{3}h/2),$$

$$(3) (x-h/2, y+\sqrt{3}h/2), \quad (4) (x-h, y),$$

$$(5) (x-h/2, y-\sqrt{3}h/2), \quad (6) (x+h/2, y-\sqrt{3}h/2),$$

利用 Taylor 展开可得

$$u(1)+u(4)=2u(O)+h^2\frac{\partial^2 u(O)}{\partial x^2}+\frac{h^4}{12}\frac{\partial^4 u(O)}{\partial x^4}+O(h^6),$$

$$u(2)+u(5)=2u(O)+\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}h\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u(O) \\ +\frac{1}{12}\left(\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}h\frac{\partial}{\partial y}\right)^4u(O)+O(h^6),$$

$$u(3)+u(6)=2u(O)+\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}h\frac{\partial}{\partial y}\right)^2u(O) \\ +\frac{1}{12}\left(-\frac{h}{2}\frac{\partial}{\partial x}+\frac{\sqrt{3}}{2}h\frac{\partial}{\partial y}\right)^4u(O)+O(h^6).$$

用待定系数法确定以下差分算子

$$L_h u(O) = c_0 u(O) + c_1 \sum_{i=1}^6 u(i) \\ = (c_0 + 6c_1)u(O) + \frac{3}{2}c_1 h^2 [\Delta u]_0 \\ + \frac{3}{32}h^4 c_1 [\Delta^2 u]_0 + c_1 O(h^6).$$

使其逼近 Laplace 算子 $[\Delta u]_0$, 为此, 只须选取 c_0, c_1 满足

$$c_0 + 6c_1 = 0, \quad 3h^2 c_1 = 2,$$

从而得到

$$c_0 = -4/h^2, \quad c_1 = 2/3h^2.$$

于是差分格式

$$\sum_{i=1}^6 u_i - 6u_0 = 0 \quad (3.2.1)$$

逼近 Laplace 方程(3.1.6), 其精度为 $O(h^4)$. 而下列两个差分格式

$$\sum_{i=1}^6 u_i - 6u_0 = -\frac{3h^2}{2}f_0, \quad (3.2.2)$$

$$\sum_{i=1}^4 u_i - 6u_0 = -\frac{3h^2}{2}f_0 - \frac{3h^4}{32}\Delta f_0, \quad (3.2.3)$$

均逼近 Poisson 方程 (3.1.1), 其精度分别为 $O(h^2)$ 和 $O(h^4)$.

§ 3.3 极坐标系网的差分格式

当区域 Ω 是圆形区域, 或者 Ω 的边界包含圆弧时, 用极坐标形式的差分格式来逼近方程 (3.1.6) 可以使边界条件容易处理.

如图 3.5 所示, 在直角坐标系中的一点 $P(x, y)$, 在极坐标系中用 $P(\rho, \theta)$ 表示, 它们之间有如下关系

$$\begin{cases} x = \rho \cos \theta, \\ y = \rho \sin \theta. \end{cases}$$

图 3.5 直角坐标与极坐标的关系

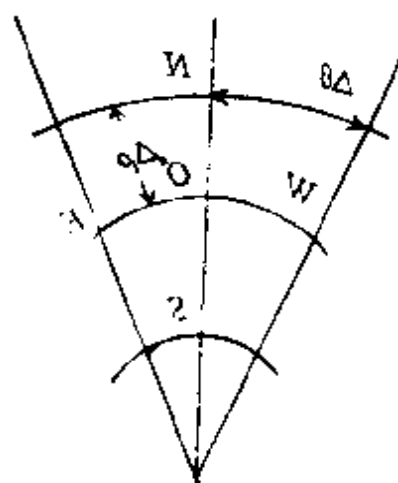


图 3.6 极坐标系下的差分格式

易知

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$\theta = \arctg \frac{y}{x},$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{x}{\rho} = \cos \theta,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial y} = \frac{y}{\rho} = \sin \theta,$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} = -\frac{y}{\rho^2} = -\frac{\sin \theta}{\rho},$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\cos \theta}{\rho}.$$

函数 $z = z(x, y)$ 在此变换下有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \rho} \cos \theta - \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \rho} \sin \theta + \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\cos \theta}{\rho},$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} \cos^2 \theta + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\sin^2 \theta}{\rho} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \\ &\quad + 2 \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial \rho \partial \theta} \frac{\sin \theta \cos \theta}{\rho}, \\ \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} \sin^2 \theta + \frac{\partial z}{\partial \rho} \frac{\cos^2 \theta}{\rho} + \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \frac{\cos^2 \theta}{\rho^2} \\ &\quad + 2 \frac{\partial z}{\partial \rho \partial \theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\rho} - 2 \frac{\partial z}{\partial \theta} \frac{\cos \theta \sin \theta}{\rho^2}. \end{aligned}$$

所以

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial z}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2}.$$

如图 3.6 所示, 利用

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial \rho^2} \right]_0 \approx \frac{1}{(\Delta \rho)^2} (Z(N) - 2Z(0) + Z(s)),$$

$$\left[\frac{\partial z}{\partial \rho} \right]_0 \approx \frac{1}{2\Delta \rho} (Z(N) - Z(s)),$$

$$\left[\frac{\partial^2 z}{\partial \theta^2} \right] \approx \frac{1}{(\Delta \theta)^2} (Z(E) - 2Z(0) + Z(w)),$$

可推知

$$\begin{aligned} [(\Delta \rho)^2 \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right)]_0 &\approx (Z(N) - 2Z(0) + Z(s)) + \frac{\Delta \rho}{2\rho_0} (Z(N) \\ &\quad - Z(s)) + \frac{(\Delta \rho)^2}{(\Delta \theta)^2 \rho_0^2} (Z(E) - 2Z(0) + Z(w)). \end{aligned}$$

因而 Laplace 方程 (3.1.6) 在极坐标系下相应的差分方程为

$$\begin{aligned} (1 + \frac{\Delta \rho}{2\rho_0}) Z_N + (1 - \frac{\Delta \rho}{2\rho_0}) Z_s - 2(1 + \frac{\Delta \rho}{\rho_0 \Delta \theta})^2 Z_0 \\ + \left(\frac{\Delta \rho}{\rho_0 \Delta \theta} \right)^2 (Z_E + Z_w) = 0. \end{aligned} \quad (3.3.1)$$

§ 3.4 边界条件的处理

前几节我们在正则内点处建立了差分格式,对一部分非正则内点和边界点还未建立相应的差分格式.所谓边界条件的处理,就是根据边界条件补上适当的差分方程,使方程的个数同所要求的未知数的个数一致起来.由于第二边界条件(3.1.3)是第三边界条件(3.1.4)的特殊情况,故我们仅讨论第一与第三边界条件的处理.

3.4.1 矩形区域

1. 第一边界条件的处理

对于第一边界条件,即

$$u|_F = \alpha(x, y),$$

只需取

$$u_{ij} = \alpha(x_i, y_j) = \alpha_{ij}, \quad (x_i, y_j) \in \Gamma_k.$$

2. 第三边界条件的处理

设矩形区域已被分成 $N \times M$ 等分, $0 \leq i \leq N, 0 \leq j \leq M$. 为了处理第三边界条件,可在 $\bar{\Omega}_k$ 四周再增一排节点,这样可以在界点上用一阶中心差商来离散(3.1.4)式.其截断误差为 $O(h^2)$.

$$\begin{cases} \frac{u_{-1,j} - u_{1j}}{2h_1} + \delta_{0j} u_{0j} = \gamma_{0j}, \\ \frac{u_{N+1,j} - u_{N-1,j}}{2h_1} + \delta_{Nj} u_{Nj} = \gamma_{Nj}, \\ \frac{u_{i,-1} - u_{i1}}{2h_2} + \delta_{i0} u_{i0} = \gamma_{i0}, \\ \frac{u_{i,M+1} - u_{i,M-1}}{2h_2} + \delta_{iM} u_{iM} = \gamma_{iM}. \end{cases} \quad \begin{matrix} 0 \leq j \leq M, \\ 0 \leq i \leq N, \end{matrix} \quad (3.4.1)$$

关于 $\bar{\Omega}_k$ 之外的函数值 $u_{-1,j}, u_{N+1,j}, u_{i,-1}, u_{i,M+1}$,可用内节点处的差分格式在边界上成立而得到的有关等式与(3.4.1)式中相应的

式子来消去。例如令(3.1.5)式中的 $i=0$, 得

$$-\left[\frac{u_{1j}-2u_{0j}+u_{-1,j}}{h_1^2}+\frac{u_{0,j+1}-2u_{0j}+u_{0,j-1}}{h_2^2}\right]=f_{0j},$$

再与(3.4.1)式中第一式联立, 就可消去 $u_{-1,j}$ 。

3.4.2 一般区域

对于不规则的定解区域, 各类边界条件的处理要比矩形区域时复杂些。

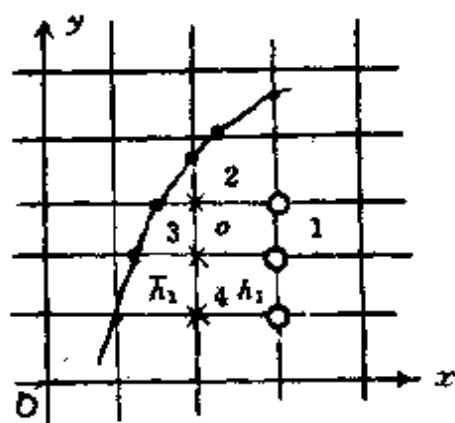


图 3.7 第一边界条件的处理

1. 第一界条件的处理

我们已经在网域的正则内点处建立了差分格式, 在非正则内点处也需要建立合适的差分格式, 我们给出二种作法。

(1) 线性插值法

如图 3.7, 点 O 是非正则内点, 其邻点 1、2、4 是内点, 3 是界点, 沿 x 方向作线性插值可得

$$u_0 = \frac{\bar{h}_1 u_1 + h_1 u_3}{\bar{h}_1 + h_1}, \quad (3.4.2)$$

式中 \bar{h}_1 为点 O 与点 3 的距离, 可以验证, 如此得到的差分格式(3.4.2), 误差阶为 $O(h^2)$ 。

(2) 不等距差分方程法

例如对图 3.7 中的网点 O, 有

$$-\left[\frac{2}{h_1 + \bar{h}_1}\left(\frac{u_1 - u_0}{h_1} - \frac{u_0 - u_3}{\bar{h}_1}\right) + \frac{1}{h_2^2}(u_2 - 2u_0 + u_4)\right] = f_0. \quad (3.4.3)$$

这种处理边界条件的办法有一个缺点, 即破坏了差分方程组系数矩阵的对称性, 而这一点正是五点格式所固有的。若想保持这种对称性, 可将上式修改成

$$-\left[\frac{1}{h_1}\left(\frac{u_1 - u_0}{h_1} - \frac{u_0 - u_1}{h_1}\right) + \frac{1}{h_2^2}(u_1 - 2u_0 + u_1)\right] = f_0. \quad (3.4.4)$$

此时截断误差阶降由 $O(h)$ 为 $O(1)$, 尽管如此, 我们在下一节将证明, 差分解的敛速仍与 $O(h^1)$ 同阶.

2. 第三边界条件的处理

在非矩形区域 Ω 上, 若给定的定解条件是第三边界条件(3.1.4), 则用积分插值法来构造相应的差分方程将是很方便的. 为简单起见, 设网域界点为两族网线的交点. 如图 3.8 所示 $P(i_0, j_0)$ 是界点, $Q(i_0+1, j_0)$ 和 $R(i_0, j_0-1)$ 是与之相邻的内点. 过点 $(i_0 + \frac{1}{2}, j_0)$, $(i_0, j_0 - \frac{1}{2})$ 分别作与 y 轴, x 轴平行的直线, 它们与边界 Γ 一起截出曲边三角形 ABC . 在该三角形上积分(3.1.1)式两端, 利用 Green 公式得到

$$-\int_{\widehat{ABCA}} \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{\Delta ABC} f dx dy. \quad (3.4.5)$$

而

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} \frac{\partial u}{\partial n} ds &\approx \frac{u_R - u_P}{h_2} \overline{AB}, \\ \int_{\widehat{BC}} \frac{\partial u}{\partial n} ds &\approx \frac{u_Q - u_P}{h_2} \overline{BC}, \\ \int_{\widehat{CA}} \frac{\partial u}{\partial n} ds &\approx \int_{\widehat{CA}} (\gamma - \delta(u)) ds \approx (\gamma_P - \delta_P u_P) \overline{CA}, \end{aligned}$$

以之代进(3.4.5)式, 即得逼近边界条件(3.1.4)式的差分方程

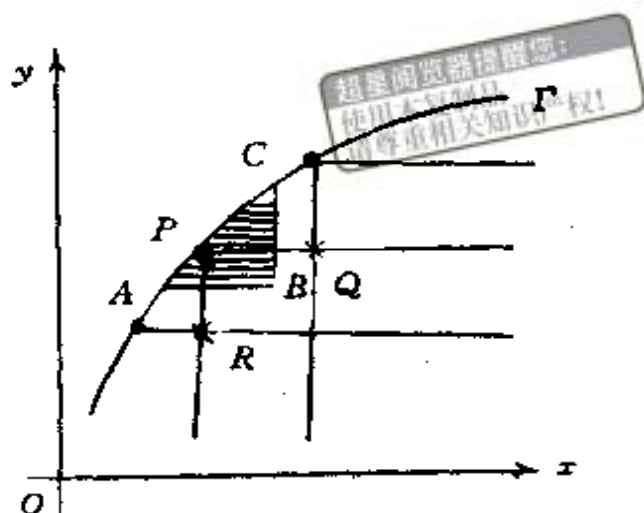


图 3.8 第三边界条件的处理

$$\begin{aligned}
& - \left[\frac{u_R - u_P}{h_1} \overline{AB} + \frac{u_Q - u_P}{h_1} \overline{BC} + (\gamma_P - \delta_P u_P) \overline{CA} \right] \\
& = \iint_{\Delta ABC} f dx dy.
\end{aligned}$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

(3.4.6)

§ 3.5 极值原理与差分格式的收敛性

本节利用极值原理研究差分格式之解的存在唯一性及其对微分方程问题之解的收敛性。

3.5.1 差分方程的一般形式

为简单起见,我们只讨论逼近二阶椭圆型方程第一边值问题的差分格式.沿用 § 3.1 的记号,以 Ω_h 表示网格内点集合, Γ_h 表示界点集合, $\bar{\Omega}_h = \Omega_h \cup \Gamma_h$. 因为 Ω 是连通的,所以可合理地假定 $\bar{\Omega}_h$ 也是连通的,也即对任意两个网点 $\bar{P}, P \in \bar{\Omega}_h$,必有一串网点 $P_i \in \bar{\Omega}_h (i=1, 2, \dots, m-1)$,可与 \bar{P}, P 一起排成如下次序

$$\bar{P}, P_1, P_2, \dots, P_{m-1}, P,$$

使前后两点为相邻网点。

把全部网点按一定次序编号,于是 § 3.1—§ 3.3 的差分格式,在 i 号网点处可写为

$$\begin{cases} L_h v_i = a_{ii} v_i - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} v_j = \varphi_i, i \in \Omega_h, \\ v_i = \alpha_i, i \in \Gamma_h, \end{cases} \quad (3.5.1)$$

式中 $U(i)$ 称为点 i 的邻节点集合,它是 $\bar{\Omega}_h$ 的一个子集,不包含点 i ,仅包含在点 i 列出的差分格式内出现的网点.这里我们约定,当求和号的下标 $j \in \Gamma_h$ 时,含 $v_i = \alpha_j$ 的项移到 (3.5.1) 式右端,方程左端相应地令 $a_{ij} = 0$. 假定 (3.5.1) 式的系数满足下列条件

$$a_{ii} > 0, a_{ij} \geq 0, \quad i \in \Omega_h, j \in U(i), \quad (3.5.2)$$

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{j \in U(i)} a_{ij} \geq 0, \quad i \in \Omega_h, \quad (3.5.3)$$

且存在 i_0 , 使当 $i=i_0$ 有一个邻点是界点时严格不等号成立. 这一假定就是要求差分方程的系数矩阵具有对角占优特点.

例 3.5.1 对于在 § 3.1 建立的 Poisson 方程的常用五点差分格式 (3.1.5), 若设网格内点 (x_i, y_m) 的编号为 i , 其邻点 $(x_i-h_1, y_m), (x_i, y_m-h_2), (x_i+h_1, y_m)$ 及 (x_i, y_m+h_2) 的编号为 p, q, r, s , 就有 $U(i)=\{p, q, r, s\}$, 若 i 为正则内点, 则

$$a_{ii} = \frac{2}{h_1^2} + \frac{2}{h_2^2}, a_{ip} = a_{ir} = \frac{1}{h_1^2}, a_{iq} = a_{is} = \frac{1}{h_2^2}.$$

显然这些系数满足条件 (3.5.2), (3.5.3), 且 $d_{ii}=0$.

当 i 为非正则内点且按列不等距差分方程处理边界条件时, 条件 (3.5.2), (3.5.3) 亦满足. 例如, 设 i 为图 3.7 中之点“0”, 则 $U(i)=\{1, 2, 3, 4\}$, 与 (3.4.4) 式相应的

$$a_{00} = \frac{1}{h_1} \left(\frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_1} \right) + \frac{2}{h_2^2}, \quad a_{01} = \frac{1}{h_1^2},$$

$$a_{02} = a_{04} = \frac{1}{h_2^2}, a_{03} = 0, d_{00} = \frac{1}{h_1 h_1} \geq h^{-2} > 0.$$

3.5.2 极值原理及差分格式之解的先验估计

考虑差分格式 (3.5.1), 假定网域 $\bar{\Omega}_h$ 连通, 条件 (3.5.2), (3.5.3) 满足. 类似于偏微分方程中调和函数的极值原理, 这里我们有

定理 3.5.1 (极值原理) 设定义在网域 $\bar{\Omega}$ 上的网函数 $v_i \neq \text{const}$, 若当 $i \in \Omega_h$ 时有 $L_h v_i \leq 0$ (或 $L_h v_i \geq 0$), 则 v_i 不可能在内点处取正的最大值 (或负的最小值).

证明 假定 v_i 在内点 $l \in \Omega_h$ 取正的最大值 $v_l = \max_{i \in \bar{\Omega}_h} v_i = M$, 因 $v_i \neq \text{const}$, 由 $\bar{\Omega}_h$ 的连通性, 必有 $p \in \Omega_h$, 使 $v_p = M$, 且至少有一个邻点 $q \in U(p)$, 满足 $v_q < v_p = M$. 于是由条件 (3.5.2)、(3.5.3) 可得

$$L_h v_p = a_{pp} v_p - \sum_{j \in U(p)} a_{pj} v_j$$

$$\begin{cases} > (a_{pp} - \sum_{j \in U(p)} a_{pj})M \geq 0, \text{ 当 } q \text{ 是内点,} \\ \geq (a_{pp} - \sum_{j \in U(p)} a_{pj})M > 0, \text{ 当 } q \text{ 是界点.} \end{cases}$$

这与 $L_h v_p \leq 0$ 矛盾, 故定理的第一个论断成立. 若用 $-v_i$ 代替 v_i 进行上述讨论, 即可得到定理的第二个论断. \square

推论 3.5.1 差分方程(3.5.1)唯一可解.

证明 只需证明相应于方程(3.5.1)的齐次方程

$$\begin{cases} L_h v_i = 0, & i \in \Omega_h, \\ v_i = 0, & i \in \Gamma_h \end{cases}$$

只有零解. 事实上, 由 $L_h v_i = 0$, 利用极值原理的第一个结论知 v_i 只能在 Γ_h 上取正的最大值, 但在 Γ_h 上 $v_i = 0$, 因此 $v_i \leq 0, i \in \bar{\Omega}_h$; 利用极值原理的第二个结论又可推知 $v_i \geq 0, i \in \bar{\Omega}_h$. 从而 $v_i \equiv 0, i \in \bar{\Omega}_h$. \square

定理 3.5.2(比较定理) 设 V_i, v_i 是定义在 $\bar{\Omega}_h$ 上的两个网函数, 且满足

$$L_h V_i \geq |L_h v_i|, \quad i \in \Omega_h, \quad (3.5.4)$$

$$V_i \geq |v_i|, \quad i \in \Gamma_h, \quad (3.5.5)$$

则

$$V_i \geq |v_i|, \quad i \in \bar{\Omega}_h. \quad (3.5.6)$$

证明 不等式(3.5.4)等价于

$$L_h(V_i \pm v_i) \geq 0, \quad i \in \Omega_h,$$

不等式(3.5.5)等价于

$$V_i \pm v_i \geq 0, \quad i \in \Gamma_h.$$

根据极值原理的第二个结论有

$$V_i \pm v_i \geq 0, \quad i \in \bar{\Omega}_h$$

亦即(3.5.6)式成立. \square

V_i 称为 v_i 的优函数, 如能求出优函数, 则可以得到 v_i 的最大

模估计.

推论 3.5.2 差分格式

$$\begin{cases} L_h v_i = 0, i \in \Omega_h, \\ v_i = \alpha_i, i \in \Gamma_h \end{cases} \quad (3.5.7)$$

之解 v_i 满足不等式

$$\max_{\bar{\Omega}_h} |v_i| \leq \max_{\Gamma_h} |\alpha_i|. \quad (3.5.8)$$

证明 设 V_i 是格式

$$\begin{cases} L_h V_i = 0, i \in \Omega_h, \\ V_i = \max_{\Gamma_h} |\alpha_i|, i \in \Gamma_h \end{cases}$$

之解,则由比较定理知 V_i 是格式(3.5.7)之解的优函数. 设函数 V_i 在 $\bar{\Omega}_h$ 上某点取最大值,若 $V_i \not\equiv \text{const}$,则这个点不能是内点,故 $\max_{\bar{\Omega}_h} V_i = \max_{\Gamma_h} |\alpha_i|$. 若 $V_i \equiv \text{const}$,则 $V_i = \max_{\Gamma_h} |\alpha_i|$. 因此,总有不等式(3.5.8)成立. \square

以 Ω'_h 表示 Ω_h 中全体正则内点的集合, Ω''_h 表示 Ω_h 中全体非正则内点的集合,我们有

定理 3.5.3 设 Ω'_h 是连通的, φ_i 于其上恒为 0, 则差分方程

$$\begin{cases} L_h v_i = \varphi_i, i \in \Omega_h, \\ v_i = 0, i \in \Gamma_h \end{cases} \quad (3.5.9)$$

的解满足不等式

$$\max_{\Omega_h} |v_i| \leq \max_{\Omega''_h} |\varphi_i| / d_{ii}.$$

证明 设 V_i 为格式

$$\begin{cases} L_h V_i = |\varphi_i|, i \in \Omega_h, \\ V_i = 0, i \in \Gamma_h \end{cases}$$

之解,则根据比较定理知 V_i 是格式(3.5.9)之解的优函数,且可以证明如下不等式成立.

$$\max_{\Omega} V_i \leq \max_{\Omega''} V_i. \quad (3.5.10)$$

用反证法. 设 $l \in \Omega'_h$, 使 $V_l = \max_{\Omega'_h} V_i$, 且 $V_l > \max_{\Omega''_h} V_i$, 当 $U(l) \subset \Omega'_h$, 且有 $p \in U(l)$, 使 $V_p < V_l$ 时,

$$\begin{aligned} L_h V_l &= a_{ll} V_l - \sum_{j \in U(l)} a_{lj} V_j \\ &= d_{ll} V_l + \sum_{j \in U(l)} a_{lj} (V_l - V_j) \\ &> d_{ll} V_l \geq 0 \end{aligned}$$

超星浏览器提醒您:
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

这与当 $l \in \Omega'_h$ 时, $L_h V_l = 0$ 矛盾. 当 $U(l)$ 中至少有一个点属于 Ω''_h 时, 由反证法的假设, 亦有

$$L_h V_l > d_{ll} V_l \geq 0,$$

这又与已知矛盾, 可见 (3.5.10) 成立.

设 V_i 于 $q \in \Omega''_h$ 达到最大值, 即 $V_q = \max_{\Omega'_h} V_i = \max_{\Omega''_h} V_i$, 则

$$|\varphi_q| = L_h V_q = d_{qq} V_q + \sum_{j \in U(q)} a_{qj} (V_q - V_j) \geq d_{qq} V_q,$$

从而

$$\max_{\Omega'_h} V_i = V_q \leq |\varphi_q| / d_{qq}.$$

故有

$$\max_{\Omega'_h} |v_i| \leq |\varphi_q| / d_{qq} \leq \max_{\Omega'_h} |\varphi_i| / d_{ii}. \quad \square$$

定理 3.5.4 (先验估计) 设 Ω'_h 连通, 则差分方程 (3.5.1) 的解 v_i 满足估计式

$$\max_{\Omega'_h} |v_h| \leq \max_{\Gamma_h} |\alpha_i| + \max_{\Omega'_h} |V_i| + \max_{\Omega'_h} |\varphi_i| / d_{ii}, \quad (3.5.11)$$

其中优函数 V_i 是下列方程的解

$$\begin{cases} L_h V_i = |\varphi_i|, & i \in \Omega_h, \\ V_i \geq 0, & i \in \Gamma_h. \end{cases}$$

证明 将 (3.5.1) 的解表为

$$v_i = v_i^{(1)} + v_i^{(2)} + v_i^{(3)},$$

其中 $v_i^{(1)}, v_i^{(2)}, v_i^{(3)}$ 满足下列方程

$$L_h v_i^{(1)} = 0, i \in \Omega_h, v_i^{(1)} = \alpha_i, i \in \Gamma_h;$$

$$L_h v_i^{(2)} = 0, i \in \Omega'_h, L_h v_i^{(2)} = 0, i \in \Omega''_h, v_i^{(2)} = 0, i \in \Gamma_h;$$

$$L_h v_i^{(3)} = 0, i \in \Omega'_h, L_h v_i^{(3)} = \varphi_i, i \in \Omega''_h, v_i^{(3)} = 0, i \in \Gamma_h.$$

由推论 3.5.2 知

$$\max_{\bar{\Omega}_h} |v_i^{(1)}| \leq \max_{\Gamma_h} |\alpha_i|.$$

由比较定理, 函数 $v_i^{(2)}$ 可借助优函数 V_i 估计为

$$|V_i^{(2)}| \leq |V_i|,$$

从而有

$$\max_{\bar{\Omega}_h} |v_i^{(2)}| \leq \max_{\bar{\Omega}_h} |V_i|. \quad (3.5.13)$$

最后, 由定理 3.5.3 有

$$\max_{\bar{\Omega}_h} |v_i^{(3)}| \leq \max_{\bar{\Omega}_h} |\varphi_i| / d_H.$$

注意到 $v_i^{(3)}$ 在 Γ_h 上等于 0, 可得

$$\max_{\bar{\Omega}_h} |v_i^{(3)}| \leq \max_{\bar{\Omega}_h} |\varphi_i| / d_H. \quad (3.5.14)$$

由 $|v_i| \leq |v_i^{(1)}| + |v_i^{(2)}| + |v_i^{(3)}|$ 并利用 (3.5.12) 式, (3.5.13) 式和 (3.5.14) 式, 即可得到不等式 (3.5.11). \square

3.5.3 五点格式的敛速估计

设 $u = u(x, y)$ 表示 Poisson 方程第一边值问题

$$\begin{cases} -(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}) = f(x, y), (x, y) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = \alpha(x, y) \end{cases}$$

之解, $u(i)$ 表示 $u(x, y)$ 在网点 i 处的值, u_i 是五点差分格式

$$\begin{cases} L_h u_i = \varphi_i, i \in \Omega_h, \\ u_i = \alpha_i, i \in \Gamma_h \end{cases} \quad (3.5.15)$$

的解, 其中 L_h 如 (3.5.1) 式及例 3.5.1 所定义. 令 $e_i = u(i) - u_i$, 则 e_i 满足差分格式



$$\begin{cases} L_h e_i = R'_i, i \in \Omega'_h, \\ L_h e_i = R''_i, i \in \Omega''_h, \\ e_i = 0, \quad i \in \Gamma_h, \end{cases} \quad (3.5.16)$$

其中 R'_i, R''_i 依次为正则内点和非正则内点的截断误差. 从 § 3.1 和 § 3.4 知道 $R'_i = O(h^2), R''_i = O(h)$ 或 $R''_i = O(1), h^2 = h_1^2 + h_2^2$.

现在来估计误差函数 e_i , 不妨假定坐标原点位于 Ω 内部, ρ 是原点为中心且包含整个 $\bar{\Omega}$ 的最小圆城的半径. 优函数取为

$$V_i = \frac{M}{4}(\rho^2 - x_i^2 - y_i^2), \quad (3.5.17)$$

其中 (x_i, y_i) 为点 i 的坐标, M 是待定常数. 显然当 $(x_i, y_i) \in \bar{\Omega}_h$ 时 $V_i \geq 0$

当 $i \in \Omega'_h$ 时, 通过简单的计算知 $L_h V_i = M$. 当 $i \in \Omega''_h$ 时,

$$L_h V_i = \gamma M, \gamma > \frac{1}{2}.$$

例如当 i 为图 3.7 中的点 O , 即左侧邻点在 Γ_h 上, 而其他三个邻点为内点, 则由 (3.4.4) 式

$$L_h V_i = \left(\frac{h_1 + \bar{h}_1}{4h_1} + \frac{1}{2} \right) M, \gamma = \frac{h_1 + \bar{h}_1}{4h_1} + \frac{1}{2} > \frac{1}{2}.$$

比较方程

$$\begin{cases} L_h V_i = M, i \in \Omega'_h, \\ L_h V_i = \gamma M, \gamma > \frac{1}{2}, i \in \Omega''_h, \\ V_i \geq 0, \quad i \in \Gamma_h \end{cases}$$

和误差方程 (3.5.16), 取 $M = \max_{\Omega'_h} |R'_i|$, 则由定理 3.5.4

$$\begin{aligned} \max_{\Omega_h} |e_i| &= \max_{\Omega_h} |u(i) - u_i| \leq \max_{\Omega_h} |V_i| + \max_{\Omega_h} |R''_i| / d_{ii} \\ &\leq \frac{\rho^2}{4} \max_{\Omega'_h} |R'_i| + \max_{\Omega''_h} |R''_i| / d_{ii}. \end{aligned}$$

因 $R'_i = O(h^2)$, 又当 $i \in \Omega''_h$ 时, $d_{ii} \geq h^{-2}$, 例如设 i 为图 3.7 中的

“O”点,它的左邻点属于 Γ ,其他三个邻点为内点,则由例 3.5.1 知

$$d_{ii} = \frac{1}{h_1 h_1} \geq h^{-2}.$$

超星阅读器提醒您:
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

于是我们得

定理 3.5.5 若 Poisson 方程第一边值问题(3.1.1), (3.1.2) 之解 $u(x, y) \in C^1(\bar{\Omega})$, 则五点差分格式(3.5.15)之解一致收敛到 u , 且有敛速估计

$$\max_{\Omega_h} |u(i) - u_i| = O(h^2).$$

§ 3.6 变系数方程

我们考虑变系数椭圆型方程

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}(a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x}) - \frac{\partial}{\partial y}(b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}) + c(x, y)u \\ \quad = f(x, y), (x, y) \in \Omega, & (3.6.1) \\ u(x, y) = \alpha(x, y), (x, y) \in \Gamma, & (3.6.2) \end{cases}$$

其中 $a(x, y) > 0, b(x, y) > 0, c(x, y) \geq 0$ 及 $\alpha(x, y)$ 均为已知的函数. 我们假定 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma, \bar{\Omega} = \{(x, y) | 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b\}$.

对于方程(3.6.1)用差商来逼近微商,就得到相应的差分方程

$$\begin{aligned} & -\left[\frac{1}{h_1^2} \delta_x(a_{ij} \delta_x u_{ij}) + \frac{1}{h_2^2} \delta_y(b_{ij} \delta_y u_{ij})\right] + c_{ij} u_{ij} \\ & = f_{ij}, (i, j) \in \Omega_h, \end{aligned} \quad (3.6.3)$$

边界条件的离散是

$$u_{ij} = \alpha_{ij}, \quad (i, j) \in \Gamma_h. \quad (3.6.4)$$

我们还可以用积分插值法来构造方程(3.6.1)的差分格式,这个方法我们在第一章已经用过,它具有一定的好处. 例如对于系数有间断,步长不等距等情况,用该方法处理较为容易,而且得到的差

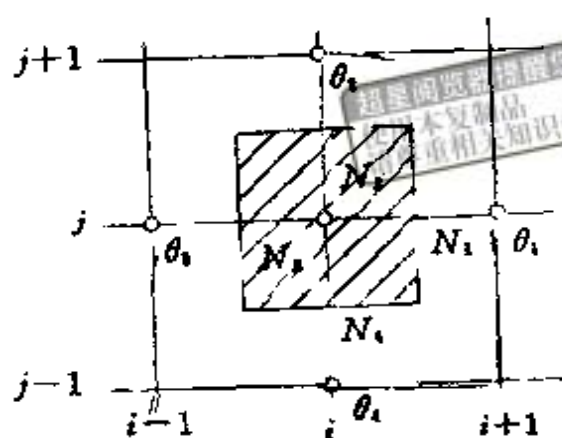


图 3.9 积分插值法的积分区域

分方程将较好地保持微分方程自身的一些特性。

如图 3.9 所示, 设 $P = (x_i, y_j) \in \Omega_k$, 其余四个邻点是 $Q_1 = (x_{i+1}, y_j)$, $Q_2 = (x_i, y_{j+1})$, $Q_3 = (x_{i-1}, y_j)$, $Q_4 = (x_i, y_{j-1})$. 用 N_i 表示 $PQ_i (i=1, 2, 3, 4)$ 的中点, 在有阴影区域 Ω_{ij} 上对方程 (3.6.1) 积分

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{ij}} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy &= \int_{y_j - \frac{1}{2}}^{y_j + \frac{1}{2}} \left[a(x_{i+\frac{1}{2}}, y) \frac{\partial}{\partial x} u(x_{i+\frac{1}{2}}, y) \right. \\ &\quad \left. - a(x_{i-\frac{1}{2}}, y) \frac{\partial}{\partial x} u(x_{i-\frac{1}{2}}, y) \right] dy, \end{aligned}$$

利用中矩形公式有

$$\begin{aligned} \iint_{\Omega_{ij}} \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy &\approx \left[a(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) \frac{\partial}{\partial x} u(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j) \right. \\ &\quad \left. - a(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j) \frac{\partial}{\partial x} u(x_{i-\frac{1}{2}}, y_j) \right] h_2. \end{aligned}$$

类似地有

$$\iint_{\Omega_{ij}} \frac{\partial}{\partial y} \left(b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy \approx \left[b(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) \frac{\partial}{\partial y} u(x_i, y_{j+\frac{1}{2}}) \right.$$

$$-b(x_i, y_{j-\frac{1}{2}}) \frac{\partial}{\partial y} u(x_i, y_{j-\frac{1}{2}})] h_1.$$

此外有

$$\iint_{\tilde{\omega}_{ij}} c(x, y) u dx dy \approx c(x_i, y_j) u(x_i, y_j) h_1 h_2,$$

$$\iint_{\tilde{\omega}_{ij}} f(x, y) dx dy \approx f(x_i, y_j) h_1 h_2.$$

利用上面的四个积分近似式并用差商代替近似式中出现的偏导数, 我们就得到方程(3.6.1)的差分方程

$$\begin{aligned} & - \left\{ \frac{1}{h_1^2} [a_{i+\frac{1}{2}, j} (u_{i+1, j} - u_{ij}) - a_{i-\frac{1}{2}, j} (u_{ij} - u_{i-1, j})] \right. \\ & \left. + \frac{1}{h_2^2} [b_{i, j+\frac{1}{2}} (u_{i, j+1} - u_{ij}) - b_{i, j-\frac{1}{2}} (u_{ij} - u_{i, j-1})] \right\} + c_{ij} u_{ij} = f_{ij}, \end{aligned} \quad (3.6.5)$$

当然, 我们可以采用不同的求积公式而获得不同的差分格式.

§ 3.7 双调和方程

差分方法求解高阶椭圆型方程, 例如双调和方程的边值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} = 0, (x, y) \in \Omega, \end{cases} \quad (3.7.1)$$

$$\begin{cases} u(x, y) = \alpha(x, y), \end{cases} \quad (3.7.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial n} = \beta(x, y), \quad (x, y) \in \Gamma, \end{cases} \quad (3.7.3)$$

也是行之有效的, 式中 $\alpha(x, y), \beta(x, y)$ 均为已知函数.

为简便起见, 设 Ω 为单位正方形, $\Omega = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$, 我们采用正方形网格, 即 $h_1 = h_2 = 1/N$, Ω_h 和 Γ_h 的含义同前.

由 Taylor 级数展开, 容易算出

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x^4}\right]_{ij} = \frac{1}{h^4} \delta_x^4 u(i, j) + O(h^2),$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x^2 \partial y^2}\right]_{ij} = \frac{1}{h^4} \delta_x^2 \delta_y^2 u(i, j) + O(h^2),$$

$$\left[\frac{\partial u}{\partial y^4}\right]_{ij} = \frac{1}{h^4} \delta_y^4 u(i, j) + O(h^2).$$

于是可写出逼近方程(3.7.1)的截断误差为 $O(h^2)$, 节点图式为图 3.10 的十三点差分格式

$$\begin{aligned} 20u_{ij} - 8(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + 2(u_{i+2,j+1} \\ + u_{i+2,j-1} + u_{i-2,j+1} + u_{i-2,j-1}) + u_{i+2,j} + u_{i-2,j} \\ + u_{i,j+2} + u_{i,j-2} = 0 \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

我们注意到使用差分方程(3.7.4)时, 出现了 $u_{i\pm 2,j}$ 和 $u_{i,j\pm 2}$, 这样对于某些内点来说就要使用区域 $\Omega_h \cup \Gamma_h$ 之外的点上的函数值, 这当然是不行的. 此时我们可用离散的边界条件来消去 $u_{i\pm 2,j}$ 和 $u_{i,j\pm 2}$. 下面我们以 $h=1/4$ 来说明这个问题, 此时网点分布如图 3.11.

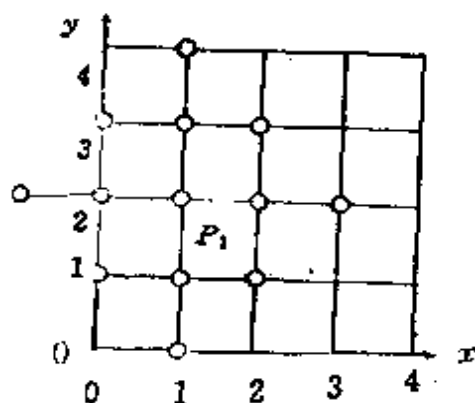
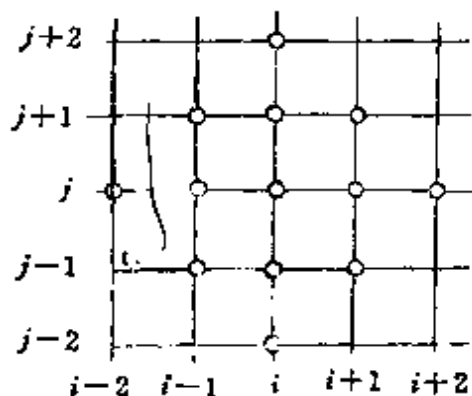


图 3.10 十三点差分格式节点图式 图 3.11 非正则内点处的十三点格式

为了在 P_1 点建立差分方程, 先由(3.7.4)式得到

$$20u_{12} - 8(u_{22} + u_{02} + u_{13} + u_{11}) + 2(u_{23} + u_{21} + u_{03} + u_{01}) + u_{32} + u_{-1,2} + u_{14} + u_{10} = 0, \quad (3.7.5)$$

其中 $u_{-1,2}$ 已经越出求解区域, 边界条件处理如下

对于条件(3.7.2)有

$$u_{01} = \alpha_{01}, u_{02} = \alpha_{02}, u_{03} = \alpha_{03}, u_{10} = \alpha_{10}, u_{14} = \alpha_{14}. \quad (3.7.6)$$

对于条件(3.7.3), 在边 $x=0$ 上, 有 $\frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}$, 因此有

$$-\frac{u_{12} - u_{-1,2}}{2h} = \beta_{02}. \quad (3.7.7)$$

将(3.7.5)式, (3.7.6)式与(3.7.7)式结合起来有

$$\begin{aligned} & 21u_{12} - 8(u_{22} + u_{13} + u_{11}) + 2(u_{23} + u_{21}) + u_{32} \\ & = 8\alpha_{02} - 2(\alpha_{03} + \alpha_{01}) - \alpha_{14} - \alpha_{10} - 2h\beta_{02}. \end{aligned} \quad (3.7.8)$$

对其它靠近边界的内点可作同样处理。

对于双调和方程, 也可以和如下的边界条件

$$\begin{cases} u(x, y) = \alpha(x, y), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} = \beta(x, y). \end{cases} \quad (x, y) \in \Gamma,$$

构成定解问题, 此时的差分化处理方法与上面类似。

习 题

1. 用五点差分格式求解如下的 Laplace 方程的第一边值问题 ($h_1 = h_2 = 1$)

$$\begin{aligned} (1) & \begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x < 4, & 0 < y < 3, \\ u|_{x=0} = (3-y)y, & u|_{x=4} = 0, \\ u|_{y=0} = \sin \frac{\pi}{4}x, & u|_{y=3} = 0. \end{cases} \\ (2) & \begin{cases} \Delta u = 0, & (x-3)^2 + (y-4)^2 < 4, \\ u|_{(x-3)^2 + (y-4)^2 = 4} = 1 - x^2 - y^2. \end{cases} \end{aligned}$$

2. 设在单位正方形 $\bar{\Omega}; 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ 上给定边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = 16, & (x, y) \in \Omega, \\ u|_{x=1} = 0, & \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=1} = -u, \\ \frac{\partial u}{\partial x}|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial y}|_{y=0} = 0, \end{cases}$$

试用 $h=1/4$ 的正方形网格下五点差分格式求上述问题的近似解.

3. 用五点差分格式解 Poisson 方程第一边值问题.

$$\begin{cases} -\Delta u = x + y + 1, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u|_{\Gamma} = 1 + x^2, \end{cases}$$

其中 Γ 为单位正方形区域的边界, 取正方形网格 ($h=1/4$), 具体列出差分方程组, 并指明这个代数方程组的系数矩阵有何特性?

4. 假设 $\square_{ij} = u_{i+1,j+1} + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1} - 4u_{ij}$, 试验证 $\frac{1}{2h^2} \square_{ij} = 0$ 是 Laplace 方程的差分近似, 并指出其截断误差.

5. 列出用五点差分格式求解 Laplace 方程的第三边值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & 0 < x, y < 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x} - u = 1 + y, & x = 0, 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + u = 2 - y, & x = 1, 0 \leq y \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial y} - u = -1 - x, & y = 0, 0 \leq x \leq 1, \\ \frac{\partial u}{\partial y} + u = -2 + x, & y = 1, 0 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

的线性代数方程组 ($h_1 = h_2 = 1/2$).

6. 试在四分之一单位圆域 $\Omega = \{x > 0, y > 0, x^2 + y^2 < 1\}$ 内, 求解 Laplace 方程, 正方形网格, 步长 $h = 1/4$, 边界条件为:

$u(0, y) = 0, 0 \leq y \leq 1, \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, 当 $y = 0, 0 \leq x \leq 1$, 而在圆周上 $u = 16x^5 - 20x^3 + 5x, 0 \leq x \leq 1$. (这个问题的真解为 $u = x^5 - 10x^3y^2 + 5xy^4$).

7. 验证

$$\left\{ \frac{1}{h_1^2} (\delta_x^2 - \frac{1}{12} \delta_x^4) + \frac{1}{h_2^2} (\delta_y^2 - \frac{1}{12} \delta_y^4) \right\} u_{ij} = 0$$

是 Laplace 方程的差分近似, 并指出其截断误差.

8. 若令 $\diamond u_{ij} = u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} - 4u_{i,j}$, $\square u_{ij}$ 的意义已在第四题中述过, 试讨论 c_1, c_2 取何值时, 差分格式

$$c_1 \diamond u_{ij} + c_2 \square u_{ij} = 0$$

逼近 Laplace 方程 $\Delta u = 0$.

9. 设 $i \in \Omega_h$ 时, $d_u > 0$, 对差分方程

$$\begin{cases} L_h v_i = \varphi, i \in \Omega_h, \\ v_i = 0, i \in \Gamma_h \end{cases}$$

之解, 试证明有估计式, $\max_{\Omega_h} |v_i| \leq \max_{\Omega_h} |\varphi| / d_u$. 式中 L_h 的意义如

§ 3.5 所述.

超星阅读器提醒您:
使用本复制品
请尊重相关知识产权!

第四章 变分原理

本章所介绍的变分原理,有着重要的理论和实际意义,它是构造有限元方法的基础.

我们首先用一个简单的物理问题引出一维边值问题的变分原理,然后将它推广到二维情形.最后,介绍两种近似求解变分问题的方法——Ritz 方法和 Galerkin 方法,它们是有限元方法的前身.

§ 4.1 一维变分问题

4.1.1 一个简单的变分问题

我们考虑弦的平衡问题. 设一根长为 l 的弦,其两端分别固定在点 $A(0,0)$ 和点 $B(l,0)$ (见图 4.1). 当没有外力作用时,它的位置沿水平方向与 x 轴重合. 如果有一个连续的负荷 $f(x)$ 垂直向下作用于弦上,则弦变形后处于平衡状态. 假定负荷 $f(x)$ 很小,因而弦的变形也很小.

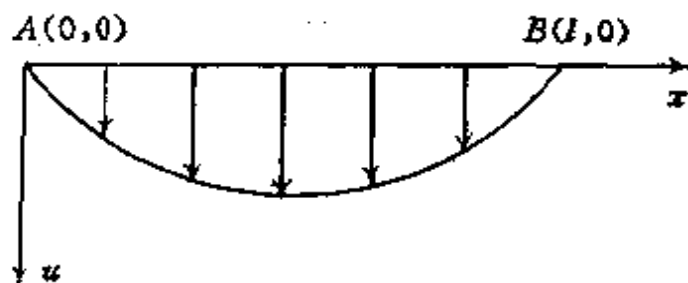


图 4.1 弦平衡图

若用 $u=u(x)$ 表示在负荷 $f(x)$ 作用下弦的平衡位置, 则根据力的平衡条件, $u(x)$ 满足微分方程

$$-Tu_{xx} = f(x), \quad x \in (0, l), \quad (4.1.1)$$

和边条件

$$u(0) = 0, \quad u(l) = 0, \quad (4.1.2)$$

其中 T 是弦的张力(设为常数). 这样, 求弦的平衡位置就归结为求解两点边值问题(4.1.1), (4.1.2).

另一方面, 由力学中的“极小位能原理”, 弦的平衡位置(记为 $u^* = u^*(x)$)是在满足边条件(4.1.2)的一切可能位置中, 使位能取最小者. 我们先来计算弦处于某一可能位置 $u=u(x)$ 时的位能. 此时应变能为

$$W_{\text{内}} = \frac{1}{2} \int_0^l T u_x^2 dx,$$

外力 $f(x)$ 所作的功为

$$W_{\text{外}} = \int_0^l f u dx,$$

从而整根弦所具有的总位能为

$$J(u) = W_{\text{内}} - W_{\text{外}} = \frac{1}{2} [T u_x^2 - 2fu] dx. \quad (4.1.3)$$

根据弦两端固定的假设, 弦的一切可能位置 $u(x)$ 的集合可取为

$$M = \{u \in C^2[0, l] | u(0) = u(l) = 0\},$$

我们称 M 为容许函数类. 根据极小位能原理, 弦的平衡问题可表述为变分问题

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^l T u_x^2 dx - \int_0^l f u dx = \min!, \quad \forall u \in M, \quad (4.1.4)$$

上面定义的 $J(u): M \rightarrow R$ 是函数的函数, 称之为泛函. 所谓变分问题就是求泛函的极值问题, 而求解变分问题的方法称为

Euler 变分法, 或简称变分法.

为进一步了解微分方程(4.1.1)与泛函 $J(u)$ 的关系, 记

$$Lu = -Tu_{xx},$$

则利用分部积分公式及边条件(4.1.2)

$$W_{\text{内}} = \frac{1}{2} \int_0^l Tu_x^2 dx = \frac{1}{2} \int_0^l (-Tu_{xx}) \cdot u dx = \frac{1}{2} \int_0^l (Lu)u dx,$$

于是 $J(u)$ 可写为

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^l uLu dx - \int_0^l f u dx$$

4.1.2 变分法简介

下面就弦平衡的变分问题(4.1.4)叙述变分法的基本思想.

设 $u^*(x)$ 是变分问题(4.1.4)的极小解, 任取 $v(x) \in M$, 则 $u^*(x) + \lambda v(x) \in M$, 其中 λ 为实数. 这时可将 $J(u^* + \lambda v)$ 视为参数 λ 的一个函数

$$\varphi(\lambda) = J(u^* + \lambda v).$$

显然, $u^*(x)$ 使泛函 $J(u)$ 取极小值等价于 $\lambda=0$ 使函数 $\varphi(\lambda)$ 取极小值. 由(4.1.3)式

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= J(u^* + \lambda v) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l T(u_x^* + \lambda v_x)^2 dx - \int_0^l f(u^* + \lambda v) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l T[(u_x^*)^2 + 2\lambda u_x^* v_x + \lambda^2 v_x^2] dx - \int_0^l (fu^* + \lambda f v) dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l T(u_x^*)^2 dx - \int_0^l f u^* dx \\ &\quad + \lambda \left[\int_0^l T u_x^* v_x dx - \int_0^l f v dx \right] + \frac{\lambda^2}{2} \int_0^l T v_x^2 dx, \end{aligned}$$

它是关于 λ 的二次函数. 利用微积分的知识, 如果 $\varphi(0) = 0$, $\varphi''(0) > 0$, 即

$$\varphi(0) = \int_0^l T u_x^* v_x dx - \int_0^l f v dx = 0, \quad \forall v \in M, \quad (4.1.5)$$

$$\varphi''(0) = \int_0^l T v_x^2 dx > 0, \quad (4.1.6)$$

则 $\lambda=0$ 使 $\varphi(\lambda)$ 取极小值, 从而 u^* 使 $J(u)$ 取极小值. 这样, 如果 (4.1.6) 式成立, 则由 (4.1.5) 求出的解 u^* 就是变分问题 (4.1.4) 的解. (4.1.6) 式还保证了解的唯一性.

通常称 (4.1.5) 式为变分方程. 变分方程从形式上可由两点边值问题 (4.1.1)、(4.1.2) 直接得到. 先将微分方程 (4.1.1) 两端乘以 $v \in M$ 并在 $[0, l]$ 上积分, 再由分部积分公式, 得到

$$\int_0^l T u_x v_x dx - T u_x v \Big|_0^l = \int_0^l f v dx,$$

由于 $v \in M$, 所以 $v(0) = v(l) = 0$, 从而可得到变分方程 (4.1.5).

反之, 在一定条件下, 由变分方程 (4.1.5) 也可导出微分方程 (4.1.1) 和边条件 (4.1.2). 为此, 我们先介绍将经常用到的变分预备定理.

变分预备定理 设 $u(x) \in C^0[a, b]$ 且记

$$C_0^2[a, b] = \{v(x) | v(x) \in C^2[a, b], v(a) = v(b) = 0\},$$

如果

$$\int_a^b u(x) v(x) dx = 0, \quad \forall v(x) \in C_0^2[a, b],$$

则 $u(x) \equiv 0, x \in [a, b]$.

证明 用反证法. 如果存在 $\bar{x} \in [a, b]$ 使 $u(\bar{x}) \neq 0$, 不妨设 $u(\bar{x}) > 0$, 则由 $u(x)$ 的连续性, 必存在区间 $[\xi_1, \xi_2] \subset [a, b]$ 且 $\bar{x} \in [\xi_1, \xi_2]$ 使得

$$u(x) > 0, \quad x \in [\xi_1, \xi_2],$$

现构造函数

$$v(x) = \begin{cases} (x - \xi_1)^4 (x - \xi_2)^4, & x \in (\xi_1, \xi_2), \\ 0, & \text{别处.} \end{cases}$$

显然 $v(x) \in C_0^2[a, b]$, 但是

$$\int_a^b u(x)v(x)dx = \int_{\xi_1}^{\xi_2} u(x)(x - \xi_1)^4(x - \xi_2)^4 dx > 0,$$

这与假设矛盾,从而证明了 $u(x) \equiv 0, x \in [a, b]$. \square

此变分预备定理还可推广到二维情形:

设 $\bar{\Omega}$ 为有界闭区域, $u(x, y) \in C^0(\bar{\Omega})$, 记

$$C_0^2(\bar{\Omega}) = \{v(x, y) | v \in C^2(\bar{\Omega}), v|_{\partial\Omega} = 0\},$$

$$\text{如果 } \int_{\bar{\Omega}} u(x, y)v(x, y)dxdy = 0, \quad \forall v(x, y) \in C_0^2(\bar{\Omega}),$$

则 $u(x, y) \equiv 0, (x, y) \in \bar{\Omega}$.

现在来考虑变分方程(4.1.5), 利用分部积分公式并注意到 $v(0) = v(l) = 0$,

$$\begin{aligned} & \int_0^l T u_x^* v_x dx - \int_0^l f v dx \\ &= \int_0^l T \left(-\frac{d^2 u^*}{dx^2} \right) v dx - \int_0^l f v dx + T \frac{du^*}{dx} v \Big|_0^l \\ &= \int_0^l \left[-T \frac{d^2 u^*}{dx^2} - f \right] v dx = 0, \quad \forall v \in M, \end{aligned}$$

由变分预备定理及 $u^* \in M$, 就有

$$\begin{cases} -T \frac{d^2 u^*}{dx^2} = f, & x \in (0, l), \\ u^*(0) = u^*(l) = 0. \end{cases}$$

这就是弦平衡问题的解所满足的微分方程边值问题, 由于它是由 Euler 变分法求得的, 所以也称变分问题导出的微分方程为

由上述讨论可以看出,微分方程的定解问题与变分问题在一定条件下是可以互相转换的. 对于弦平衡问题,由于 $u \in C^2[0, l]$ 且(4.1.6)式成立,所以变分问题(4.1.4)和微分方程边值问题(4.1.1), (4.1.2)都有唯一解,且变分问题的解就是边值问题的解,反之亦然.

前面我们分别用力的平衡原理和极小位能原理描述了弦的平衡问题,接下来我们再介绍一种力学原理——虚功原理.

虚功原理 若物体所受的合力对一切虚位移(即试探函数)所做的功为零,则物体处于静止平衡态.

对弦平衡问题,弦所受的合力为 $-Tu_{xx} - f$, 根据虚功原理,弦平衡时必有

$$\int_0^l (-Tu_{xx} - f)v dx = 0, \quad \forall v \in M,$$

利用分部积分及 v 所满足的边条件,便可得到

$$\int_0^l Tu_x v_x dx = \int_0^l f v dx, \quad \forall v \in M.$$

此式称为**虚功方程**,实际上,它就是变分方程(4.1.5),其中的函数 v 称为**试探函数**.

为揭示变分问题、虚功方程和微分方程边值问题三者之间的联系,我们引进双线性泛函

$$a(u, v) = \int_0^l Tu_x v_x dx$$

和线性泛函

$$F(v) = \int_0^l f v dx,$$

则变分问题为

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - F(u) = \min! \quad \forall u \in M,$$

虚功方程为

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in M.$$

若引进微分算子 L :

$$Lu = -Tu_{xx},$$

那么泛函 $J(u)$ 可由微分方程 $Lu=f$ 直接写出

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_0^l u L u dx - \int_0^l f u dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^l [T u_x^2 - 2fu] dx, \end{aligned}$$

并由此得到 $a(u, v)$ 的形式, 最后给出虚功方程或变分方程.

4.1.3 两点边值问题及其等价的变分形式

下面讨论两点边值问题

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), & x \in (a, b), \\ u(a) = \alpha, \\ p(b)\frac{du(b)}{dx} + g(b)u(b) = \beta, \end{cases} \quad (4.1.7)$$

其中 $p \in C^1[a, b]$, $p(x) \geq \min p(x) = p_{\min} > 0$, $q \in C^0[a, b]$ 且 $q \geq 0$, $f \in C^0[a, b]$, $g \in C^0[a, b]$ 且 $g(x) \geq 0$. 在这些条件下, 两点边值问题 (4.1.7) 有唯一解 $u \in C^2[a, b]$. 特别当 $p(x) \equiv T$, $q(x) \equiv 0$, $u_x(b) = 0$, $\alpha = \beta = 0$ 时, (4.1.7) 就是弦平衡问题.

与弦平衡问题类似, 先构造泛函

$$\begin{aligned} J(u) &= \frac{1}{2} \int_a^b u L u dx - \int_a^b f u dx \\ &= \frac{1}{2} \int_a^b \left[-\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + qu - f \right] u dx. \end{aligned}$$

对右端第一项施行分部积分, 并用 (4.1.7) 中边条件, 得到

$$\begin{aligned} - \int_a^b \frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) u dx &= -p \frac{du}{dx} u \Big|_a^b + \int_a^b p \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx \\ &= \int_a^b p \left(\frac{du}{dx}\right)^2 dx + g(b)u^2(b) - \beta u(b). \end{aligned}$$

定义双线性泛函 $a(u, v)$ 和线性泛函 $F(v)$ 如下

$$a(u, v) = \int_a^b \left(p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + quv \right) dx + g(b)u(b)v(b), \quad (4.1.8)$$

$$F(v) = \int_a^b f v dx + \beta v(b),$$

从而 $J(u)$ 可写为

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - F(u). \quad (4.1.9)$$

定义容许函数类

$$M = \{u | u \in C^2[a, b], u(a) = \alpha\}$$

和试探函数空间

$$M_0 = \{v | v \in C^2[a, b], v(a) = 0\}.$$

现在, 我们可立即建立与 (4.1.7) 式相应的变分问题

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - F(u) = \min! \quad \forall u \in M, \quad (4.1.10)$$

与之相应的变分方程(同时也是虚功方程)为

$$a(u, v) = F(v), \quad u \in M, \quad \forall v \in M_0. \quad (4.1.11)$$

与弦平衡问题的变分方程 (4.1.5) 一样, (4.1.11) 式也可由 (4.1.7) 式中的方程两端同乘 $v \in M_0$, 并在 $[a, b]$ 上积分而得到.

在给出变分问题 (4.1.10), 虚功方程 (4.1.11) 和微分方程边值问题 (4.1.7) 三者之间的等价关系之前, 我们先给出 $a(u, v)$ 的几个简单的性质, 它们在今后的讨论中将起到关键的作用.

显然 $a(u, v)$ 分别对 u, v 都是线性泛函, 即

$$a(c_1 u_1 + c_2 u_2, v) = c_1 a(u_1, v) + c_2 a(u_2, v),$$

$$a(u, c_1 v_1 + c_2 v_2) = c_1 a(u, v_1) + c_2 a(u, v_2)$$

(c_1, c_2 为常数), 所以称之为双线性泛函数或双线性形式. 其次 $a(u, v)$ 还是对称的, 即

$$a(u, v) = a(v, u).$$

另外,还可以证明 $a(v, v) > 0$, 即 $a(v, v)$ 在试探函数空间中是正定的(证明见本章 § 4.1.4).

定理 4.1 u^* 是边值问题(4.1.7)的解的充要条件是 u^* 是变分问题(4.1.10)的解.

证明 任取 $v \in M_0$, 则 $u^* + \lambda v \in M$. 考虑实变量 λ 的函数

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= J(u^* + \lambda v) \\ &= \frac{1}{2}a(u^* + \lambda v, u^* + \lambda v) - F(u^* + \lambda v) \\ &= \frac{1}{2}a(u^*, u^*) + \frac{\lambda}{2}[a(u^*, v) + a(v, u^*)] + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) \\ &\quad - F(u^*) - \lambda F(v),\end{aligned}$$

由 $a(u, v)$ 的对称性得

$$\varphi(\lambda) = J(u^*) + \lambda[a(u^*, v) - F(v)] + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v). \quad (4.1.12)$$

注意, 当 $u^* \in M$, $v \in M_0$ 时

$$\begin{aligned}& a(u^*, v) - F(v) \\ &= \int_a^b \left[p \frac{du^*}{dx} \frac{dv}{dx} + qu^*v - fv \right] dx \\ &\quad - [\beta - g(b)u^*(b)]v(b) \\ &= \int_a^b \left[-\frac{d}{dx} \left(p \frac{du^*}{dx} \right) + qu^* - f \right] v dx + p \frac{du^*}{dx} v \Big|_a^b \\ &\quad - [\beta - g(b)u^*(b)]v(b) \\ &= \int_a^b [Lu^* - f]v dx + [p(b) \frac{du^*(b)}{dx} \\ &\quad + g(b)u^*(b) - \beta]v(b).\end{aligned} \quad (4.1.13)$$

必要性 如果 u^* 是边值问题(4.1.7)的解, 则 $Lu^* - f = 0$ 且

$$p(b) \frac{du^*(b)}{dx} + g(b)u^*(b) - \beta = 0,$$

由(4.1.13)式得

$$\phi(0) = a(u^*, v) - F(v) = 0, \quad \forall v \in M_0.$$

根据(4.1.12)式及 $a(u, v)$ 的正定性, 对任意的 $\lambda \neq 0$ 及 $v \neq 0$, 有

$$J(u^* + \lambda v) = J(u^*) + \frac{\lambda^2}{2} a(v, v) > J(u^*),$$

即 u^* 使 $J(u)$ 达到极小值.

充分性 若 u^* 使 $J(u)$ 达到极小值, 则 $\lambda=0$ 使 $\phi(\lambda)$ 取极小值, 因此 $\phi'(0)=0$, 注意到(4.1.12), (4.1.13)式, 立即得到

$$\begin{aligned} \phi'(0) &= a(u^*, v) - F(v) \\ &= \int_a^b [Lu^* - f]v dx + [p(b) \frac{du^*(b)}{dx} \\ &\quad + g(b)u^*(b) - \beta]v(b) = 0, \quad \forall v \in M_0, \quad (4.1.14) \end{aligned}$$

特别取 $v \in C_0^2[a, b]$, 则

$$\int_a^b [Lu^* - f]v dx = 0, \quad \forall v \in C_0^2[a, b].$$

根据变分预备定理, u^* 满足方程 $Lu^* - f = 0$. 于是(4.1.14)式化为

$$\left[p(b) \frac{du^*(b)}{dx} + g(b)u^*(b) - \beta \right] v(b) = 0, \quad \forall v \in M_0.$$

若取 $v(x) = x - a$, 则 $v \in M_0$ 且 $v(b) > 0$, 从而 u^* 必满足右边值条件

$$p(b) \frac{du^*(b)}{dx} + g(b)u^*(b) = \beta,$$

u^* 的左边值条件因 $u^* \in M$ 而得到满足. \square

从定理 4.1 的证明过程看出, 左边条件 $u(a) = \alpha$ 和右边条件

$$p(b) \frac{du(b)}{dx} + g(b)u(b) = \beta$$

有重要区别. 前者必须强加在变分问题的容许函数类上, 称之为强制边条件或本质边条件. 后者不必对容许函数类作为条件提

出,只要 $u^*(x)$ 使 $J(u)$ 取极小值,则它必然满足该条件,因此称之为自然边条件. 在数值求解边值问题时,区别这两类条件很重要,这是从变分问题出发构造数值方法的一个优点.

定理 4.2 u 是边值问题(4.1.7)的解的充要条件是 u 为虚功方程(4.1.11)的解.

证明 必要性 如果 u 是边值问题(4.1.7)的解,则由(4.1.13)式

$$a(u, v) = F(v), \quad \forall v \in M_0.$$

充分性 如果 u 是虚功方程(4.1.11)式的解,则可按定理 4.1 的充分性证法,推出 u 是边值问题(4.1.7)的解. \square

4.1.4 Sobolev 空间中的一维变分问题

在前面我们讨论了当 $u \in C^2$ 时,变分问题、变分方程和微分方程边值问题这三种数学形式之间的等价性及相互转换关系. 例如弦平衡问题,其变分形式为

$$J(u) = \int_0^l \left[\frac{1}{2} T u_x^2 - f u \right] dx = \min! \quad \forall u \in M,$$

由变分法得到变分方程

$$\int_0^l T u_x v_x dx = \int_0^l f v dx, \quad \forall v \in M,$$

再利用分部积分公式,便可得到虚功原理的表现形式

$$\int_0^l [-T u_{xx} - f] v dx = 0, \quad \forall v \in M.$$

最后,利用变分预备定理得 Euler 方程

$$\begin{cases} -T u_{xx} = f, & x \in (0, l), \\ u(0) = u(l) = 0. \end{cases}$$

在实际问题中,作用于弦的外力 f 可能是间断力甚至是集中力,这时弦的平衡曲线 $u=u(x)$ 不再有连续的二阶导数,某些点甚至是没有导数的“尖点”. 因此,微分方程边值问题无属于 $C^2[0, l]$

的经典解,但变分问题和变分方程仍然有意义,它们只要求 u 连续且分段连续可微. 这就要求人们进一步扩大函数类并在这个更广泛的函数类中研究变分问题、变分方程和微分方程边值问题.

首先,我们定义函数类 $L_2(a, b)$ 为 (a, b) 上平方可积的函数 u 的全体,即

$$L_2(a, b) = \left\{ u(x) \left| \int_a^b |u(x)|^2 dx < +\infty \right. \right\}.$$

对 $u, v \in L_2(a, b)$, 定义它们的内积

$$(u, v) = \int_a^b u(x)v(x)dx,$$

而 u 的范数记为 $\|u\|_{L_2}$ 或 $\|u\|_0$, 即

$$\|u\|_{L_2} = \|u\|_0 = (u, u)^{1/2} = \left[\int_a^b |u(x)|^2 dx \right]^{1/2}.$$

在物理上, $\|u\|_0$ 可反映某函数所具有的某种能量(如势能), $\|u_1 - u_2\|_0$ 表示 u_1 和 $(-u_2)$ 叠加后所具有的能量;从数学上看, $\|u_1 - u_2\|_0$ 则表示这两个函数之间的“距离”. 显然,分段连续函数和阶梯函数都属于 $L_2(a, b)$.

可以证明,在 $L_2(a, b)$ 上成立著名的 Schwarz 不等式

$$|(u, v)| \leq \|u\|_0 \|v\|_0, \quad \forall u, v \in L_2(a, b) \quad (4.1.15)$$

和三角不等式

$$\|u + v\|_0 \leq \|u\|_0 + \|v\|_0, \quad \forall u, v \in L_2(a, b). \quad (4.1.16)$$

事实上,对任何实数 λ , 恒有

$$\int_a^b (\lambda u + v)^2 dx = \lambda^2 \int_a^b u^2 dx + 2\lambda \int_a^b uv dx + \int_a^b v^2 dx \geq 0,$$

因此,上式做为 λ 的二次多式项,其判别式非正,即

$$\left(2 \int_a^b uv dx \right)^2 - 4 \left(\int_a^b u^2 dx \right) \left(\int_a^b v^2 dx \right) \leq 0$$

或

$$\left| \int_a^b uv dx \right| \leq \left(\int_a^b u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_a^b v^2 dx \right)^{1/2},$$

从而(4.1.15)式得证. 其次, 利用(4.1.15)式有

$$\begin{aligned}\|u+v\|_0^2 &= \int_a^b (u^2 + 2uv + v^2) dx \\ &= \|u\|_0^2 + 2(u, v) + \|v\|_0^2 \\ &\leq \|u\|_0^2 + 2\|u\|_0\|v\|_0 + \|v\|_0^2 \\ &= (\|u\|_0 + \|v\|_0)^2,\end{aligned}$$

由此立即可得(4.1.16)式.

另外, 变分预备定理还有更弱的形式:

设 $u(x) \in L_2(a, b)$, 记

$$C_0^\infty[a, b] = \{v(x) \in C^\infty[a, b] \mid \frac{d^i v(a)}{dx^i} = \frac{d^i v(b)}{dx^i} = 0, \\ i=0, 1, 2, \dots\},$$

若

$$\int_a^b u(x)v(x)dx = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty[a, b],$$

则 $u(x)$ 在 $[a, b]$ 上几乎处处为零.

为了在更广泛的函数类中研究变分问题与微分方程边值问题之间的转换关系, 最关键的是它们要满足分部积分公式. 为此, 我们引进广义导数的概念.

对于 $f \in C^k[a, b]$ 和任意 $\varphi \in C_0^\infty[a, b]$, 用分部积分法恒有

$$\int_a^b f'(x)\varphi(x)dx = - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx,$$

$$\int_a^b f^{(m)}(x)\varphi(x)dx = (-1)^m \int_a^b f(x)\varphi^{(m)}(x)dx, \quad m=1, 2, \dots, k.$$

现利用上述公式推广导数的概念.

定义 4.1 设 $f(x) \in L_2(a, b)$, 若存在 $g(x) \in L_2(a, b)$, 使等式

$$\int_a^b g(x)\varphi(x)dx = - \int_a^b f(x)\varphi'(x)dx, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty[a, b]$$

恒成立,则称 $g(x)$ 是 $f(x)$ 的一阶广义导数,记为 $f'(x)$ 或 Df .

注意,如果 $f(x)$ 的经典导数 $f'(x) \in L_2(a, b)$, 则 $f'(x)$ 必是广义导数. 反之,由广义导数的存在不能断定经典导数的存在. 例如,对于函数

$$f(x) = |x|, \quad x \in (-1, 1),$$

它在通常意义下于 $(-1, 1)$ 上是不可导的,但对任意的函数 $\varphi \in C_0^\infty[-1, 1]$,

$$-\int_{-1}^1 |x| \varphi'(x) dx = \int_{-1}^1 x \varphi'(x) dx = \int_0^1 x \varphi'(x) dx + \int_0^0 -x \varphi'(x) dx$$

$f'_i(x)$ 几乎处处相等.

$L_2(a, b)$ 中在区间 (a, b) 上几乎处处相等的两个函数看做是 $L_2(a, b)$ 中的同一个函数. 在此意义下, 广义导数是唯一的.

注意, 并非任何 $f \in L_2(a, b)$ 都有属于 $L_2(a, b)$ 的广义导数. 例如, 对于阶梯函数

$$f(x) = \begin{cases} 0, & -1 < x \leq 0, \\ 1, & 0 < x < 1, \end{cases}$$

显然 $f(x) \in L_2(-1, 1)$, 但它没有属于 $L_2(-1, 1)$ 的广义导数. 因为, 如果 $f(x)$ 有广义导数 $g(x)$, 则

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 g(x) \varphi(x) dx &= - \int_{-1}^1 f(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 \varphi'(x) dx \\ &= - \varphi(x) \Big|_{-1}^1 = \varphi(0), \quad \forall \varphi(x) \in C_0^\infty[-1, 1]. \end{aligned}$$

特别地, 取

$$\varphi(x) = \varphi_\varepsilon(x) = \begin{cases} \exp\left(-\frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right), & \text{当 } |x| \leq \varepsilon \text{ 时,} \\ 0, & \text{在别处,} \end{cases}$$

其中 $0 < \varepsilon < 1$, 则 $\varphi_\varepsilon(x) \in C_0^\infty[-1, 1]$. 一方面

$$\left| \int_{-1}^1 g(x) \varphi(x) dx \right| = \varphi_\varepsilon(0) = e^{-1} > 0;$$

另一方面, 由 Schwarz 不等式

$$\begin{aligned} \left| \int_{-1}^1 g(x) \varphi(x) dx \right| &\leq \|g\|_0 \|\varphi\|_0 \\ &= \|g\|_0 \left(\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \exp\left(\frac{-\varepsilon^2}{\varepsilon^2 - x^2}\right)^2 dx \right)^{1/2} \\ &= \|g\|_0 \left(2\varepsilon \int_{-1}^1 \exp\left(\frac{-1}{1 - t^2}\right)^2 dt \right)^{1/2} \rightarrow 0, \quad (\varepsilon \rightarrow 0), \end{aligned}$$

导致矛盾. 因此, 不可能有 $g(x) \in L_2(-1, 1)$ 成为 $f(x)$ 的广义导数, 即阶梯函数没有广义导数.

仿照一阶广义导数的定义,可定义高阶广义导数.

定义 4.2 设 $f(x) \in L_2(a, b)$, 如果存在 $g(x) \in L_2(a, b)$, 使得

$$\int_a^b g(x) \varphi(x) dx = (-1)^k \int_a^b f(x) \varphi^{(k)}(x) dx,$$

$$\forall \varphi(x) \in C_0^\infty[a, b],$$

则称 $g(x)$ 为 $f(x)$ 的 k 阶广义导数, 记为 $f^{(k)}(x)$ 或 $D^k f$.

现在给出一阶 Sobolev 空间的定义

$$H^1(a, b) = \{f(x) | f(x) \in L_1(a, b), f'(x) \in L_2(a, b)\},$$

其中 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的广义导数. 显然 $H^1(a, b)$ 是线性空间. 引进内积

$$(f, g)_1 = \int_a^b (fg + f'g') dx, \quad \forall f, g \in H^1(a, b)$$

和相应的范数

$$\|f\|_1 = (f, f)_1^{1/2} = \left[\int_a^b (f^2 + (f')^2) dx \right]^{1/2}.$$

可以证明, $H^1(a, b)$ 是完备的内积空间, 因此是 Hilbert 空间, 称之为 Sobolev 空间.

同样可以定义 m 阶 Sobolev 空间

$$H^m(a, b) = \{f(x) | f^{(\alpha)}(x) \in L_2(a, b), \alpha = 0, 1, \dots, m\},$$

其内积和范数分别为

$$(f, g)_m = \sum_{k=0}^m \int_a^b f^{(k)}(x) g^{(k)}(x) dx,$$

$$\|f\|_m = (f, f)_m^{1/2} = \left[\sum_{k=0}^m \int_a^b |f^{(k)}(x)|^2 dx \right]^{1/2}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^m \|f^{(k)}\|_{L_2}^2 \right]^{1/2}.$$

当 $m=0$ 时, $H^0(a, b)$ 就是 $L_2(a, b)$, $(f, g)_0 = (f, g)$.

我们还常用到如下 Sobolev 空间:

$H_0^m(a, b) = \{f(x) | f(x) \in H^m(a, b) \text{ 且 } f(a) = f(b) = 0\}$,
其中 m 为正整数. $H_0^m(a, b)$ 是 $H^m(a, b)$ 的子空间, 也是完备的内积空间.

由于引进了 Sobolev 空间, 我们可以在更广大的函数类和更弱的条件下研究变分问题和微分方程边值问题.

例如前面提到的弦平衡的变分问题就可以在 Sobolev 空间中讨论. 因为泛函 $J(u)$ 和双线性泛函 $a(u, v)$ 的形式为

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^l T u_x^2 dx - \int_0^l f u dx = \frac{1}{2} a(u, u) - F(u),$$

$$a(u, v) = \int_0^l T u_x v_x dx,$$

为保证它们有意义, 我们只需取容许函数类和试探函数空间为

$$H_0^1(0, l) = \{v \in H^1(0, l) | v(0) = v(l) = 0\}.$$

与弦平衡问题 (4.1.1), (4.1.2) 相应的变分问题应描述为

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - F(u) = \min! \quad \forall u \in H_0^1(0, l),$$

虚功方程 (即变分方程) 为

$$a(u, v) = F(v), \quad u \in H_0^1(0, l), \quad \forall v \in H_0^1(0, l).$$

又如 § 4.1.3 中的两点边值问题

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d}{dx} \left(p(x) \frac{du}{dx} \right) + q(x)u = f(x), & x \in (a, b), \\ u(a) = \alpha, \\ p(b) \frac{du(b)}{dx} + g(b)u(b) = \beta. \end{cases} \quad (4.1.7)$$

由于相应的泛函 $J(u)$ 和双线性泛函 $a(u, v)$ 的形式为

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - F(u),$$

$$a(u, v) = \int_a^b \left(p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + quv \right) dx + g(b)u(b)v(b),$$

其中

$$F(u) = \int_a^b f u dx + \beta u(b).$$

为使它们有意义,再考虑到边值条件,我们取容许函数类为

$$H_\varepsilon^1(a,b) = \{u \in H^1(a,b) | u(a) = \alpha\},$$

取试探函数空间为

$$H_{0\varepsilon}^1(a,b) = \{v \in H^1(a,b) | v(a) = 0\}.$$

这样,与两点边值问题(4.1.17)相应的变分问题应叙述为

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u,u) - F(u) = \min! \quad \forall u \in H_\varepsilon^1(a,b), \quad (4.1.18)$$

相应的虚功方程(即变分方程)为

$$a(u,v) = F(v), \quad u \in H_\varepsilon^1(a,b), \quad \forall v \in H_{0\varepsilon}^1(a,b). \quad (4.1.19)$$

对某个具体的问题,除了应使相应的泛函 $J(u)$ 和双线性泛函 $a(u,v)$ 有意义之外,主要是由边值条件确定容许函数类 $H_\varepsilon^1(a,b)$ 和试探函数空间 $H_{0\varepsilon}^1(a,b)$,而做到这一点并不困难.例如,对边值条件

$$u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta,$$

应取

$$H_\varepsilon^1(a,b) = \{u \in H^1(a,b) | u(a) = \alpha, u(b) = \beta\},$$

$$H_{0\varepsilon}^1(a,b) = \{v \in H^1(a,b) | v(a) = v(b) = 0\};$$

又如对边值条件

$$p(a) \frac{du(a)}{dx} + g(a)u(a) = \alpha, \quad u(b) = \beta,$$

应取

$$H_\varepsilon^1(a,b) = \{u \in H^1(a,b) | u(b) = \beta\},$$

$$H_{0\varepsilon}^1(a,b) = \{v \in H^1(a,b) | v(b) = 0\}.$$

一般说来,选取容许函数类 $H_E^1(a,b)$ 和试探函数空间 $H_{0E}^1(a,b)$,应首先保证 $J(u)$ 和 $a(u,v)$ 有意义(如 H_E^1 或 H_{0E}^1 中函数属于 H^1),其次应要求 $H_E^1(a,b)$ 中的函数满足边值问题中的本质边条件(自然边条件不必满足),而 $H_{0E}^1(a,b)$ 中的函数满足本质边条件为零即可.

变分问题(4.1.18)及变分方程(4.1.19)的解与边值问题(4.1.17)的解既有差别又有联系.边值问题(4.1.17)的解在通常意义下要求属于 $C^2(a,b)$,我们称之为经典解.而变分问题(4.1.18)及变分方程(4.1.19)允许有属于 $H^1(a,b)$ 的非光滑解,我们称之为两点边值问题(4.1.17)的广义解.

边值问题可能有广义解而没有经典解.但当边值问题存在经典解时,它一定是广义解.反之,若广义解存在且二次连续可微,则广义解也就是经典解.

接下来,我们来进一步讨论与边值问题(4.1.17)相应的对称双线性泛函 $a(u,v)$ 的性质.

定理 4.3 如果 $p(x) \in C^0[a,b]$ 且 $p_{\min} > 0$; $q(x) \in C^0[a,b]$ 且 $q_{\min} \geq 0$; $g(x) \in C^0[a,b]$ 且 $g_{\min} \geq 0$; 则对称双线性泛函

$$a(u,v) = \int_a^b (pu'v' + quv)dx + g(b)u(b)v(b)$$

有如下性质:

(1) 正定性:存在常数 $\gamma > 0$,使得

$$a(u,u) \geq \gamma \|u\|_1^2, \quad \forall u \in H_{0E}^1(a,b);$$

(2) 有界性:存在常数 $M > 0$,使得

$$|a(u,v)| \leq M \|u\|_1 \|v\|_1, \quad \forall u,v \in H^1(a,b).$$

证明 因为 $q_{\min} \geq 0$, $g_{\min} \geq 0$,有

$$\begin{aligned} a(u,u) &= \int_a^b [p(u')^2 + qu^2]dx + g(b)u^2(b) \\ &\geq p_{\min} \int_a^b (u')^2 dx. \end{aligned} \quad (4.4.20)$$

注意到 $u \in H_{0E}^1(a, b)$, 便有

$$u(x) = \int_a^x u'(t) dt,$$



由 Schwarz 不等式

$$\begin{aligned} |u(x)|^2 &= \left| \int_a^x 1 \cdot u'(t) dt \right|^2 \leq \left(\int_a^x |u'(t)|^2 dt \right) \left(\int_a^x 1^2 dt \right) \\ &\leq (x-a) \int_a^x |u'(t)|^2 dt, \end{aligned}$$

两边积分得

$$\int_a^b |u(x)|^2 dx \leq \frac{1}{2} (b-a)^2 \int_a^b |u'(t)|^2 dt.$$

因而

$$\begin{aligned} \int_a^b |u'|^2 dx &= \frac{1}{2} \left[\int_a^b |u'|^2 dx + \int_a^b |u'|^2 dx \right] \\ &\geq \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b |u|^2 dx + \frac{1}{2} \int_a^b |u'|^2 dx \\ &\geq \bar{\gamma} \|u\|_1^2, \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

其中 $\gamma = \min(\frac{1}{2}, \frac{1}{(b-a)^2}) > 0$, 联结 (4.1.20), (4.1.21) 式并令 $\gamma = \bar{\gamma} p_{min}$, 得

$$a(u, u) \geq \gamma \|u\|_1^2, \quad \forall u \in H_{0E}^1(a, b).$$

有界性的证明从略, 读者可参阅 [4]. \square

§ 4.2 二维变分问题

4.2.1 薄膜平衡问题的变分形式

假设一薄膜固定在空间某一条光滑的封闭边线 $z = g(x, y)$ ($(x, y) \in \Gamma$) 上, Γ 为该边线在 xy 平面上的投影, Γ 围成的平面区域为 Ω . 设有强度为 $f(x, y)$ 的垂直外负荷作用在薄膜上, 使膜产

生垂直方向的位移 $u(x, y)$. 又设膜的张力为常数 T , 则根据力的平衡条件, $u(x, y)$ 满足微分方程边值问题

$$\begin{cases} -T\Delta u = -T(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega; \end{cases} \quad (4.2.1)$$

$$\begin{cases} u(x, y)|_r = g(x, y), \end{cases} \quad (4.2.2)$$

此边值问题称为第一边值问题, 微分算子 Δ 定义为:

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2},$$

并称之为 Laplace 算子.

另一方面, 当薄膜处于位置 $u(x, y)$ 时, 应变内能为

$$W_{\text{内}} = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} T(u_x^2 + u_y^2) dx dy,$$

而外力所作的功是

$$W_{\text{外}} = \iint_{\Omega} f(x, y) u(x, y) dx dy,$$

整个薄膜所具有的总位能是

$$J(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [T(u_x^2 + u_y^2) - 2fu] dx dy. \quad (4.2.3)$$

如果取容许函数类为

$$M = \{u \in C^2(\bar{\Omega}) \mid u|_r = g(x, y)\},$$

则根据极小位能原理, 薄膜的平衡位置是在满足边条件(4.2.2)的一切可能位置中, 使位能取最小者. 因此, 薄膜的平衡问题可表述为变分问题

$$J(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} [T(u_x^2 + u_y^2) - 2fu] dx dy = \min! \quad \forall u \in M. \quad (4.2.4)$$

为下面讨论的需要, 取试探函数空间

$$M_0 = \{v \in C^2(\bar{\Omega}) \mid v|_r = 0\}.$$

仿照一维情形的处理方法, 我们可根据微分方程(4.2.1)直接

作泛函

$$J(u) = \frac{1}{2} \iint_{\Omega} u(-T\Delta u) dx dy - \iint_{\Omega} f \cdot u dx dy.$$

对 $u \in M, v \in M_0$, 利用 Green 公式, 我们得到

$$\iint_{\Omega} v(-T\Delta u) dx dy = \iint_{\Omega} T(u_x v_x + u_y v_y) dx dy - \int_{\Gamma} T \frac{\partial u}{\partial n} v ds, \quad (4.2.5)$$

其中 n 表示边界曲线 Γ 的单位外法向, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 是 u 沿 n 的方向导数.

(4.2.5) 式很重要, 通常称之为 Green 第一公式. 由 $v \in M_0$ 知, $v|_{\Gamma} = 0$, 从而

$$\iint_{\Omega} v(-T\Delta u) dx dy = \iint_{\Omega} T(u_x v_x + u_y v_y) dx dy. \quad (4.2.6)$$

定义双线性泛函

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} T(u_x v_x + u_y v_y) dx dy \quad (4.2.7)$$

和泛函

$$F(v) = \iint_{\Omega} f(x, y) v(x, y) dx dy,$$

则

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - F(u).$$

从而变分问题(4.2.4)可写为

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - F(u) = \min! \quad \forall u \in M. \quad (4.2.9)$$

为建立边值问题(4.2.1), (4.2.2)和变分问题(4.2.9)之间的等价关系, 先指出双线性泛函 $a(u, v)$ 的两个简单性质, 它们在今后的讨论中起着重要的作用.

(1) 对称性. 对任意的 $u, v \in M$, $a(u, v) = a(v, u)$.

(2) 正定性. 对 $v \in M_0$, 当 $v \neq 0$ 时, $a(v, v) > 0$.
正定性的确切定义和讨论在 § 4.2.3.

对于 $u^* \in M$ 及任意的 $v \in M_0$, 考虑实参数 λ 的函数

$$\begin{aligned}\varphi(\lambda) &= J(u^* + \lambda v) \\ &= \frac{1}{2}a(u^* + \lambda v, u^* + \lambda v) - F(u^* + \lambda v) \\ &= \frac{1}{2}a(u^*, u^*) + \frac{\lambda}{2}[a(u^*, v) + a(v, u^*)] \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) - F(u^*) - \lambda F(v),\end{aligned}$$

由 $a(u, v)$ 的对称性, 得到

$$\varphi(\lambda) = J(u^*) + \lambda[a(u^*, v) - F(v)] + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v), \quad (4.2.10)$$

它与 (4.1.12) 的形式完全相同.

由 (4.2.6), (4.2.7) 可知

$$a(u^*, v) - F(v) = \iint_{\Omega} (-T\Delta u^* - f)v dx dy. \quad (4.2.11)$$

如果 u^* 是边值问题 (4.2.1), (4.2.2) 的解, 则

$$\begin{aligned}\varphi(0) &= a(u^*, v) - F(v) \\ &= \iint_{\Omega} (-T\Delta u^* - f)v dx dy = 0, \quad \forall v \in M_0.\end{aligned}$$

从而对任意 $v \in M_0, v \neq 0, \lambda \neq 0$, 有

$$J(u^* + \lambda v) = J(u^*) + \frac{\lambda^2}{2}a(v, v) > J(u^*).$$

这说明 u^* 使 $J(u)$ 达到极小, 即 u^* 是变分问题 (4.2.9) 的解.

反之, 若 u^* 使 $J(u)$ 达到极小, 则 $\lambda=0$ 使 $\varphi(\lambda)$ 取极小值, 由 (4.2.10) 式及 (4.2.11) 式, 得

$$\varphi'(0) = a(u^*, v) - F(v)$$

$$= \iint_{\Omega} [-T\Delta u^* - f]v dx dy = 0, \quad \forall v \in M_0. \quad (4.2.12)$$

由变分预备定理, u^* 满足方程

$$-T\Delta u^* - f = 0.$$

另外, 由 $u^* \in M$, 知 $u^*|_r = g(x, y)$, 即 u^* 是边值问题 (4.2.1), (4.2.2) 的解.

于是得

定理 4.4 设 $u^* \in C^2(\bar{\Omega})$, 则 u^* 是边值问题 (4.2.1), (4.2.2) 的解的充要条件是 u^* 是变分问题 (4.2.9) 的解.

(4.2.12) 式称为变分方程, 由微分方程 (4.2.1) 也可直接得到它. 以 $v \in M_0$ 乘 (4.2.1) 两端并在区域 Ω 上积分得

$$\iint_{\Omega} [(-T\Delta u)v - fv] dx dy = 0. \quad (4.2.13)$$

利用 Green 第一公式 (4.2.5) 及 $v|_r = 0$, 得

$$\iint_{\Omega} T(-\Delta u)v dx dy = \iint_{\Omega} T(u_x v_x + u_y v_y) dx dy = a(u, v).$$

从而 (4.2.13) 式可写为变分方程

$$a(u, v) - F(v) = 0, \quad \forall v \in M_0. \quad (4.2.14)$$

由于 (4.2.14) 式左端在力学上表示虚功, 所以也称 (4.2.14) 式为虚功方程.

类似于定理 4.2 的证明, 可得到

定理 4.5 设 $u \in C^2(\bar{\Omega})$, 则 u 是边值问题 (4.2.1), (4.2.2) 的解的充要条件是 $u \in M$ 且满足变分方程 (4.2.14).

4.2.2 二维边值问题的变分形式

设 Ω 是 xy 平面中的有界区域, 其边界 Γ 是分段光滑的闭曲线, 记 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, 设 Γ 分为互不相交的两部分: Γ_1 和 Γ_2 . 考虑椭圆边值问题

$$\begin{cases} Lu = -\frac{\partial u}{\partial x} \left(p \frac{\partial u}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(p \frac{\partial u}{\partial y} \right) + ru = f, & (x, y) \in \Omega, \\ u(x, y) = \alpha(x, y), & (x, y) \in \Gamma_1, \\ p(x, y) \frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x, y)u = \beta(x, y), & (x, y) \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (4.2.15)$$

其中 $p(x, y) \in C^1(\Omega)$ 且 $p(x, y) \geq p_{\min} > 0$; $r(x, y) \in C^0(\Omega)$ 且 $r(x, y) \geq 0$; $\sigma(x, y) \in C^0(\Omega)$ 且 $\sigma(x, y) \geq 0$; $f(x, y) \in C^0(\Omega)$; $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示 u 沿边界曲线 Γ 的外法向导数(见图 4.2); $\beta(x, y) \in C^0(\Gamma_2)$, $\alpha(x, y) \in C^0(\Gamma_1)$. 在这些条件下, 边值问题 (4.2.15) 存在唯一解 $u \in C^2(\Omega)$. Γ_1 上的边条件称为**第一边条件**, Γ_2 上的边条件称为**第三边条件**($\sigma \equiv 0$ 时为第二边条件), 合起来称为 Γ 上的**混合边条件**.

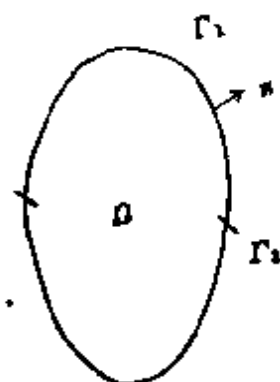


图 4.2 Ω 边界图

当 $p(x, y) \equiv 1, r(x, y) \equiv 0$ 时, (4.2.15) 式中的偏微分方程就是著名的 Poisson 方程

$$-\Delta u = -(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y).$$

许多恒定(驻定)的物理问题, 如薄膜的平衡问题、静电场的势分布问题等等, 这些问题的物理背景虽不同, 但它们在数学上都可统一用边值问题(4.2.15)或 Poisson 方程边值问题表述.

为表述与边值问题(4.2.15)相应的变分问题, 先定义容许函数类 M 试探函数空间 M_0 如下:

$$M = \{u(x, y) \in C^2(\bar{\Omega}) \mid u|_{\Gamma_1} = \alpha(x, y)\},$$

$$M_0 = \{u(x, y) \in C^2(\bar{\Omega}) \mid u|_{\Gamma_1} = 0\}.$$

与薄膜平衡问题的讨论方法类似, 我们先形式地构造出与边值问题(4.2.15)相应的变分问题和变分方程, 然后再证明它们的

等价性.

对 $u \in M, v \in M_0$, 我们考虑

$$\iint_{\Omega} (Lu - f)v dx dy = \iint_{\Omega} [- (pu_x)_x - (pu_y)_y + ru - f]v dx dy.$$

利用 Green 公式

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} [- (pu_x)_x - (pu_y)_y]v dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (pu_x v_x + pu_y v_y) dx dy - \int_{\Gamma} p \frac{\partial u}{\partial n} v ds, \end{aligned}$$

再利用(4.2.15)中 u 在 Γ_2 上的边条件及 $v|_{\Gamma_1} = 0$, 我们得到

$$\begin{aligned} & \iint_{\Omega} (Lu - f)v dx dy \\ &= \iint_{\Omega} (pu_x v_x + pu_y v_y + ruv - fv) dx dy - \int_{\Gamma_1} p \frac{\partial u}{\partial n} v ds \\ &= \iint_{\Omega} (pu_x v_x + pu_y v_y + ruv - fv) dx dy \\ & \quad - \int_{\Gamma_2} (\beta - \sigma u) v ds \\ &= \iint_{\Omega} (pu_x v_x + pu_y v_y + ruv) dx dy + \int_{\Gamma_2} \sigma u v ds \\ & \quad - \left[\iint_{\Omega} f v dx dy + \int_{\Gamma_2} \beta v ds \right]. \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

令(4.2.16)式中的二次(双线性)部分和一次(线性)部分分别为

$$\begin{aligned} a(u, v) &= \iint_{\Omega} (pu_x v_x + pu_y v_y + ruv) dx dy \\ & \quad + \int_{\Gamma_2} \sigma u v ds, \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

$$F(v) = \iint_D f v dx dy + \int_{\Gamma_1} \beta v ds. \quad (4.2.18)$$

从而在形式上可建立与边值问题(4.2.15)相应的变分问题

$$J(u) = \frac{1}{2} a(u, u) - F(u) = \min! \quad \forall u \in M, \quad (4.2.19)$$

和变分方程

$$a(u, v) = F(v), \quad u \in M, \quad \forall v \in M_0. \quad (4.2.20)$$

由(4.2.17)不难看出, $a(u, v)$ 是一个对称的双线性泛函, 并可以证明它还是正定的, 即对任意的 $u \in M_0, u \neq 0$, 有 $a(u, u) > 0$.

下面证明边值问题(4.2.15)与相应的变分问题(4.2.19)的等价性.

定理 4.6 u^* 是边值问题(4.2.15)的解的充要条件是 u^* 是变分问题(4.2.19)的解.

证明 对 $u^* \in M$ 及任意的 $v \in M_0$, 考虑实参数 λ 的函数

$$\begin{aligned} \varphi(\lambda) &= J(u^* + \lambda v) \\ &= \frac{1}{2} a(u^* + \lambda v, u^* + \lambda v) - F(u^* + \lambda v) \\ &= \frac{1}{2} a(u^*, u^*) + \frac{\lambda}{2} [a(u^*, v) + a(v, u^*)] \\ &\quad + \frac{\lambda^2}{2} a(v, v) - F(u^*) - \lambda F(v), \end{aligned}$$

由 $a(u, v)$ 的对称性得

$$\varphi(\lambda) = J(u^*) + \lambda [a(u^*, v) - F(v)] + \frac{\lambda^2}{2} a(v, v). \quad (4.2.21)$$

根据 Green 公式

$$\begin{aligned} &a(u^*, v) - F(v) \\ &= \iint_D (p u_x^* v_x + p u_y^* v_y + r u^* v) dx dy \\ &\quad + \int_{\Gamma_1} \sigma u^* v ds - \iint_D f v dx dy - \int_{\Gamma_1} \beta v ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \iint_{\Omega} [-(pu_x^*)_x - (pu_y^*)_y + ru^*] v dx dy \\
&\quad - \iint_{\Omega} f v dx dy + \int_{\Gamma_1} p \frac{\partial u^*}{\partial n} v ds + \int_{\Gamma_2} (\sigma u^* - \beta) v ds \\
&= \iint_{\Omega} (Lu^* - f) v dx dy \\
&\quad + \int_{\Gamma_2} \left[p \frac{\partial u^*}{\partial n} + \sigma u^* - \beta \right] v ds.
\end{aligned} \tag{4.2.22}$$

必要性 设 u^* 是边值问题(4.2.15)的解, 则有

$$\begin{aligned}
\phi'(0) &= a(u^*, v) - F(v) = \iint_{\Omega} (Lu^* - f) v dx dy = 0, \\
&\quad \forall v \in M_0.
\end{aligned}$$

从而对任意 $v \in M_0, v \neq 0, \lambda \neq 0$, 注意到 $a(u, v)$ 的正定性, 得到

$$J(u^* + \lambda v) = J(u^*) + \frac{\lambda^2}{2} a(v, v) > J(u^*).$$

这说明 u^* 使 $J(u)$ 达到极小.

充分性 若 u^* 是变分问题(4.2.19)的解, 则 u^* 使 $J(u)$ 达到极小, 从而 $\lambda=0$ 使 $\phi(\lambda)$ 达到极小, 由(4.2.21), (4.2.22)式

$$\begin{aligned}
\phi'(0) &= a(u^*, v) - F(v) \\
&= \iint_{\Omega} (Lu^* - f) v dx dy \\
&\quad + \int_{\Gamma_2} \left[p \frac{\partial u^*}{\partial n} + \sigma u^* - \beta \right] v ds = 0, \quad \forall v \in M_0.
\end{aligned} \tag{4.2.23}$$

特别地, 取 $v \in M_0$ 且 $v|_{\Gamma_2} = 0$, 即取 $v \in C_0^\infty(\bar{\Omega})$, 则(4.2.23)式变为

$$\iint_{\Omega} (Lu^* - f) v dx dy = 0, \quad \forall v \in C_0^\infty(\bar{\Omega}).$$

由变分预备定理, u^* 满足方程

$$Lu^* - f = 0.$$

这样, (4.2.23)式变为

$$\int_{\Gamma_2} \left[p \frac{\partial u^*}{\partial n} + \sigma u^* - \beta \right] v ds = 0, \quad \forall v \in M_0,$$

由 v 的任意性, 就有

$$p \frac{\partial u^*}{\partial n} + \sigma u^* - \beta = 0, \quad (x, y) \in \Gamma_2,$$

再由 $u^* \in M$, 直接可得 $u^*|_{\Gamma_1} = \alpha$. 故 u^* 是边值问题 (4.2.15) 的解. \square

仿照定理 4.6 的部分证明, 很容易得到边值问题 (4.2.15) 与变分方程 (4.2.20) 的等价性定理.

定理 4.7 u 是边值问题 (4.2.15) 的解的充要条件是 u 满足变分方程 (4.2.20).

从上述讨论看出, 在建立变分问题时, 只需将 Γ_1 上的本质边条件强加在容许函数类 M 上, 而 Γ_2 上给出的自然边条件是变分问题的解自然满足的.

4.2.3 Sobolev 空间中的二维变分问题

与一维情形一样, 为了在更广大的函数类中研究边值问题 (4.2.15) 相应的变分问题的解 (称为边值问题的广义解), 需要引进二维的 Sobolev 空间.

定义平面有界区域 Ω 上平方可积的函数空间为

$$L_2(\Omega) = \left\{ f(x, y) \mid \iint_{\Omega} |f|^2 dx dy < +\infty \right\},$$

其内积和范数分别为

$$(f, g) = \iint_{\Omega} f \cdot g dx dy,$$

$$\|f\|_{L_2} = \|f\|_0 = (f, f)^{1/2} = \left(\iint_{\Omega} |f|^2 dx dy \right)^{1/2}.$$

对 $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$ 上的任意函数 $u(x, y)$, 称集合

$$\{(x, y) | u(x, y) \neq 0, (x, y) \in \bar{\Omega}\}$$

的闭包为 u 的支集, 记为 $\text{supp} u$. 定义

$$C_0^\infty(\Omega) = \{u(x, y) \in C^\infty(\Omega) | u \text{ 的各阶偏导数的支集均包含于 } \Omega \text{ 中}\}.$$

由此知, 当 $u \in C_0^\infty(\Omega)$ 时, u 在 Ω 的边界 Γ 附近恒为零, 从而各阶偏导数在 Γ 附近也恒为零.

对 $u \in L_2(\Omega)$, 如果存在 $g, h \in L_2(\Omega)$, 使得

$$\iint_{\Omega} g \varphi dx dy = - \iint_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

$$\iint_{\Omega} h \varphi dx dy = - \iint_{\Omega} u \frac{\partial \varphi}{\partial y} dx dy, \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(\Omega),$$

则称 g 为 f 关于 x 的一阶广义导数, h 为 f 关于 y 的一阶广义导数, 记作

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = g, \quad f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = h.$$

类似地, 可定义高阶广义导数.

像一维情形一样, 定义 Sobolev 空间

$$H^1(\Omega) = \{u(x, y) | u, u_x, u_y \in L_2(\Omega)\},$$

其中 u_x, u_y 为 u 的广义导数. 于 $H^1(\Omega)$ 中引内积和范数分别为

$$(f, g)_1 = \iint_{\Omega} [fg + f_x g_x + f_y g_y] dx dy,$$

$$\|f\|_1 = (f, f)_1^{1/2} = \left(\iint_{\Omega} [|f|^2 + |f_x|^2 + |f_y|^2] dx dy \right)^{1/2}.$$

类似地可以定义高阶广义导数及 Sobolev 空间 $H^m(\Omega)$, m 为正整数.

对于前面所讨论的薄膜平衡问题, 由于相应的泛函 $J(u)$ 和双线性泛函 $a(u, v)$ 的形式为

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - F(u),$$

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} T(u_x v_x + u_y v_y) dx dy,$$

$$F(u) = \iint_{\Omega} f u dx dy,$$



再考虑到边条件 $u|_r = g(x, y)$, 我们可以取容许函数类为

$$H_E^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_r = g(x, y)\},$$

而取试探函数空间为

$$H_{OE}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_r = 0\}.$$

在 Sobolev 空间中, 与膜平衡相应的变分问题应表述为

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - F(u) = \min! \quad \forall u \in H_E^1(\Omega).$$

变分方程为

$$a(u, v) = F(v), \quad u \in H_E^1(\Omega), \quad \forall v \in H_{OE}^1(\Omega).$$

对于边值问题(4.2.15), 为建立其变分问题, 我们取容许函数类为

$$H_E^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) \mid u|_{r_1} = \alpha(x, y)\},$$

取试探函数空间为

$$H_{OE}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{r_1} = 0\}.$$

变分问题表述为

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - F(u) = \min! \quad \forall u \in H_E^1(\Omega),$$

(4.2.24)

变分方程为

$$a(u, v) = F(v), \quad u \in H_E^1(\Omega), \quad \forall v \in H_{OE}^1(\Omega),$$

(4.2.25)

这里的 $a(u, v)$ 和 $F(v)$ 分别由(4.2.17)式和(4.2.18)式定义, 并

且双线性对称形式 $a(u, v)$ 还是正定的, 即存在常数 $\gamma > 0$, 使得

$$a(u, u) \geq \gamma \|u\|_1^2, \quad \forall u \in H_{0E}^1(\Omega).$$

证明见参考书[4].

应该注意, 变分问题(或变分方程)的解 $u \in H_E^1(\Omega)$, 一般不属于 $C^2(\Omega)$, 甚至其一阶导数都可能是不存在的, 我们称之为相应的边值问题的广义解或弱解. 仿照定理 4.6 和定理 4.7 的证明, 我们有

定理 4.8 设 $u \in C^2(\bar{\Omega})$ 是边值问题(4.2.15)的解, 则 u 也是变分问题(4.2.24)(或变分方程(4.2.25))的解. 反之, 如果 $u \in C^2(\bar{\Omega})$ 满足变分问题(4.2.24)(或变分方程(4.2.25)), 则 u 必是边值问题(4.2.15)的解.

值得指出的是, 尽管我们将变分问题和变分方程的表述从 C^2 扩展到了 Sobolev 空间 H^1 , 但是我们在 C^2 中曾经做的各种推导在 H^1 中几乎全部成立, 只是经典意义下的导数换成了广义导数. 因此, 微分方程边值问题、变分问题和变分方程三者之间的转换规律保持不变, 特别是由变分问题导出变分方程的方法(即变分法)不变.

§ 4.3 Ritz—Galerkin 方法

前面两节讨论了如何将微分方程边值问题化为等价的变分问题, 但求解变分问题并非易事, 除少数特殊情形外, 一般不可能求得问题的精确解. 因此, 需要研究变分问题或变分方程的各种近似或数值解法. Ritz—Galerkin 方法是最重要的一种近似解法, 它是有限元方法的基础.

用 V 表示容许函数类(如 H_E^1, M 等), V^0 表示试探函数空间(如 H_{0E}^1, M_0 等). L 代表前两节中的微分算子(二阶常微分或偏微分算子), $a(u, v)$ 表示相应的双线性泛函, 它具有对称性和正定

性,即

$$a(u, v) = a(v, u), \quad \forall u, v \in V, \quad (4.3.1)$$

$$a(u, v) \geq \gamma \|u\|_1^2, \quad \forall u \in V^0, \quad (4.3.2)$$

其中 $\gamma > 0$ 是与 u 无关的常数.

此外,还假定 $a(u, v)$ 满足有界性条件

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_1 \|v\|_1, \quad \forall u, v \in H^1, \quad (4.3.3)$$

其中 $M > 0$ 是与 u, v 无关的常数.

将 § 4.1, § 4.2 中的变分问题统一写为

$$J(u) = \frac{1}{2}a(u, u) - F(u) = \min!, \quad \forall u \in V, \quad (4.3.4)$$

变分方程写为

$$a(u, v) = F(v), \quad u \in V, \forall v \in V^0. \quad (4.3.5)$$

求解变分问题(4.3.4)的主要困难是在无穷维空间 V 上求泛函 $J(u)$ 的极小值. Ritz-Galerkin 方法的基本思想在于用有限维空间近似代替无穷维空间,从而可将求泛函的极值问题化为求多元二次函数的极值问题.

设 V_n^0 是 V^0 的 n 维子空间, $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 是 V_n^0 的一组基函数,则对任意一个 $v_n \in V_n^0$ 可表示为

$$v_n = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i.$$

选取一函数 $u_0 \in V$, 它满足边值问题中的本质边条件, 则取 n 维容许函数类为

$$V_n = \{u_n | u_n = u_0 + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i, \quad C_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$$

所谓 Ritz 方法就是在 V_n 上求解变分问题

$$J(u_n) = \frac{1}{2}a(u_n, u_n) - F(u_n) = \min! \quad \forall u_n \in V_n,$$

即

$$\begin{aligned}
J(u_n) &= \frac{1}{2}a(u_0 + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i, u_0 + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i) - F(u_0 + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i) \\
&= [\frac{1}{2}a(u_0, u_0) - F(u_0)] + a(u_0, \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i) \\
&\quad + \frac{1}{2}a(\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i, \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i) - F(\sum_{i=1}^n C_i \varphi_i) \\
&= \text{const.} + \sum_{i=1}^n C_i a(u_0, \varphi_i) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n C_i C_j a(\varphi_i, \varphi_j) \\
&\quad - \sum_{i=1}^n C_i F(\varphi_i) = \min!, \quad C_1, C_2, \dots, C_n \in R.
\end{aligned}$$

这是关于 n 个变元 C_1, C_2, \dots, C_n 的二次函数的极值问题, 根据微分学中多元函数求极值的知识, $J(u_n)$ 取得极小值的必要条件是

$$\frac{\partial J(u_n)}{\partial C_j} = a(u_0, \varphi_j) + \sum_{i=1}^n C_i a(\varphi_i, \varphi_j) - F(\varphi_j) = 0, \quad j = 1, 2, \dots, n$$

或

$$\sum_{i=1}^n C_i a(\varphi_i, \varphi_j) = F(\varphi_j) - a(u_0, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n. \quad (4.3.6)$$

Galerkin 方法是在有限维空间上求解虚功方程(变分方程)

$$a(u_n, v_n) = F(v_n), \quad u_n \in V_n, \quad \forall v_n \in V_n^0$$

或

$$a(u_0 + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i, v_n) = F(v_n), \quad \forall v_n \in V_n^0,$$

$$a(u_0, v_n) + \sum_{i=1}^n C_i a(\varphi_i, v_n) = F(v_n), \quad \forall v_n \in V_n^0.$$

特别取 $v_n = \varphi_j, j=1, 2, \dots, n$, 那么上式可写为

$$\sum_{i=1}^n C_i a(\varphi_i, \varphi_j) = F(\varphi_j) - a(u_0, \varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

这与 Ritz 法导出的代数方程组(4.3.6)完全相同, 因此习惯上称(4.3.6)为 Ritz-Galerkin 方程组. 它是一个线性代数方程组

$$\begin{bmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_1, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_1, \varphi_n) \\ a(\varphi_2, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a(\varphi_n, \varphi_1) & a(\varphi_n, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\varphi_1) - a(u_0, \varphi_1) \\ F(\varphi_2) - a(u_0, \varphi_2) \\ \vdots \\ F(\varphi_n) - a(u_0, \varphi_n) \end{bmatrix} \quad (4.3.7)$$

由 $a(u, v)$ 的对称正定性很容易得出 (4.3.7) 的系数矩阵也是对称正定的, 因此方程组 (4.3.7) 存在唯一解, 其解 C_1, C_2, \dots, C_n 所对应的 u_n 使 $J(u_n)$ 取极小值. 解出 C_1, C_2, \dots, C_n 后, 就可得到变分问题 (4.3.4) 或变分方程 (4.3.5) 的近似解 $u_n = u_0 + \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i$, 且当 $n \rightarrow \infty$ 时, $u_n \rightarrow u$.

尽管 Ritz 法和 Galerkin 法导出的近似解 u_n 及计算方法完全一样, 但二者的基础不同. Ritz 法基于极小位能原理, 而 Galerkin 法基于虚功原理, 虚功原理可以不要求双线性泛函 $a(u, v)$ 的对称正定性, 而极小位能原理则不然. 所以 Galerkin 方法较 Ritz 方法的适用范围更广, 方法推导也更直接. 仅当 $a(u, v)$ 对称正定时, 两者才一致; 否则只能用 Galerkin 法.

例如, 两点边值问题

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + r \frac{du}{dx} + qu = f, & x \in (a, b), \\ u(a) = 0, u'(b) = 0, \end{cases}$$

其中 $p \in C^1[a, b]$, $p(x) \geq p_{\min} > 0$, $r, q \in C^0[a, b]$, $f \in L_2(a, b)$.

与之相应的双线性泛函为

$$a(u, v) = \int_a^b \left[p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + r \frac{du}{dx} v + quv \right] dx.$$

很显然 $a(u, v)$ 非对称正定 (除非 $r \equiv 0, q \geq 0$). 因此不能用 Ritz 法. 但 Galerkin 法仍适用, 且导出的线性方程组与 (4.3.6) 相同 (这时取 $u_0 = 0$).

例 4.1 用 Ritz—Galerkin 方法求解如下边值问题:

$$\begin{cases} u'' + u = -x, & x \in (0, 1), \\ u(0) = u(1) = 0. \end{cases} \quad (4.3.8)$$

此时 $V = V^0 = \{u \in H^1(0, 1) \mid u(0) = u(1) = 0\}$. 于 V 中取一族基函数 $\varphi_i(x) (i=1, 2, \dots)$, 使每个 $\varphi_i(x)$ 满足齐次边值条件且相互线性无关, 以 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ 为基函数构造 n 维空间 V_n (这时 $V_n^0 = V_n$).

通常有两种选取 $\varphi_i(x)$ 的方法. 一种是取 $\varphi_i(x)$ 为三角多项式

$$\varphi_i(x) = \sin(i\pi x), \quad i = 1, 2, \dots;$$

另一种是取 $\varphi_i(x)$ 为代数多项式

$$\varphi_i(x) = \omega(x)x^{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots.$$

为使 $\varphi_i(x)$ 满足边条件, 取 $\omega(x) = x(1-x)$.

我们取后一种基函数, 则任意一个 $u(x) \in V_n$ 可写为

$$u_n = \sum_{i=1}^n C_i \varphi_i(x) = x(1-x)(C_1 + C_2 x + \dots + C_n x^{n-1}).$$

先令 $n=1$, 则 $u_1 = C_1 x(1-x)$. 注意到双线性泛函

$$a(u, v) = \int_0^1 (-u'v' + uv) dx$$

(它对称但不正定), Ritz—Galerkin 方程为

$$C_1 \int_0^1 [-(\varphi_1')^2 + \varphi_1^2] dx = \int_0^1 -x^2(1-x) dx,$$

经计算, 得 $C_1 = \frac{5}{18}$, 从而近似解为

$$u_1(x) = \frac{5}{18} x(1-x).$$

再令 $n=2$, 则

$$u_2(x) = C_1 \varphi_1(x) + C_2 \varphi_2(x) = C_1 x(1-x) + C_2 x^2(1-x).$$

经简单计算, 得 Ritz—Galerkin 方程

$$\begin{cases} -\frac{3}{10}C_1 - \frac{3}{20}C_2 = -\frac{1}{12}, \\ -\frac{3}{20}C_1 - \frac{13}{105}C_2 = \frac{1}{20}. \end{cases}$$

解此方程组, 得到 $C_1 = \frac{71}{369}$, $C_2 = \frac{7}{41}$, 于是

$$u_2(x) = x(1-x)\left(\frac{71}{369} + \frac{7}{41}x\right).$$

表 4.1 例 4.1 的数值表

x	$u(x)$	$u_1(x)$	$u_2(x)$
$\frac{1}{4}$	0.044	0.052	0.044
$\frac{1}{2}$	0.070	0.069	0.069
$\frac{3}{4}$	0.060	0.052	0.060

边值问题(4.3.8)的精确解是

$$u(x) = \frac{\sin x}{\sin 1} - x.$$

表 4.1 列出了精确解 $u(x)$ 和近似解 $u_1(x)$ 与 $u_2(x)$ 在 $x = \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}$ 处的函数值. 从表中数值可见, 利用 Ritz-Galerkin 方法获得的近似解具有良好的精度.

上述例子是简单的, 而实际应用中的问题要复杂得多, 用 Ritz-Galerkin 方法求解会遇到许多原则性的困难. 主要有

(1) 基函数的选取. 基函数必须满足本质边条件. 在有限元方法出现以前, 通常取代数或三角多项式为基函数, 除了特别规则的区域外, 要它们满足边条件是很困难的, 甚至是不可能的.

(2) 求解 Ritz-Galerkin 方程. 按照传统选取基函数的方法, 方程组的条件数大, 会出现数值不稳定现象, 无论用迭代法还是消元法都会遇到很大的困难. 其次, 由于系数矩阵不稀疏, 在形

成和求解 Ritz-Galerkin 方程时,所需的计算量和存储量都大得惊人.

五十年代发展起来的有限元法,提供了一种选取基函数的方法,该方法成功地保持了传统 Ritz-Galerkin 方法的优点,同时又克服了上述困难.

习 题

1. 试求出变分问题

$$J(u) = \iint_{\Omega} \frac{1}{2} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \\ + \int_{\Gamma_1} \beta u \left(\frac{1}{2} u - t \right) ds = \min$$

$$\forall u \in M = \{u \in C^2(\Omega) \mid u|_{\Gamma_2} = g(x, y)\}$$

(t, β 是常数)的解所适合的 Euler 方程,其中 Ω 的边界 $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

2. 设 $p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \geq 0$ 充分光滑,常数 $\sigma_0, \sigma_1 \geq 0$. 对两点边值问题

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx} \left(p \frac{du}{dx} \right) + qu = f, & x \in (0, 1) \\ -u'(0) + \sigma_0 u(0) = \alpha, \\ u'(1) + \sigma_1 u(1) = \beta \end{cases}$$

叙述并证明相应的极小位能原理和虚功原理.

3. 试建立与边值问题

$$\begin{cases} Lu = \frac{d^4 u}{dx^4} + u = f, & x \in (a, b), \\ u(a) = u'(a) = 0, & u(b) = u'(b) = 0 \end{cases}$$

等价的变分问题.

4. 对椭圆型方程的第一边值问题

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left(k\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(k\frac{\partial u}{\partial y}\right) + qu = f, & (x,y) \in \Omega, \\ u|_{\Gamma} = g(x,y) \end{cases}$$

建立相应的变分问题, 其中 $k(x,y) \geq k_0 > 0$, $q(x,y) \geq 0$, $f(x,y)$ 充分光滑, Γ 为 Ω 的边界.

5. 对边值问题

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu = f, & x \in (a,b) \\ u(a) = \alpha, & u'(b) = \beta, \end{cases}$$

若取基函数 $\varphi_i(x) = (x-a)^i (i=1,2,\dots,n)$, 试写出相应的 Ritz—Galerkin 方程.

第五章 有限元方法



在数学上说,有限元方法就是 Ritz—Galerkin 方法. 它与传统的 Ritz—Galerkin 法的主要区别在于选取局部非零的基函数,它们仅是分段(片)光滑的,这一技巧成功地克服了传统 Ritz—Galerkin 方法在应用中的固有困难. 因此,有限元方法得以和差分方法并列,成为求解偏微分方程定解问题的一种有效的数值方法.

用有限元方法解决问题的主要步骤可归纳为:

(1) 将边值问题转化为变分问题,此项工作已在上一章完成.

(2) 对求解区域进行剖分. 根据实际问题的需要,将求解区域分解为有限个“单元”,它们既可以是均匀的,也可以是非均匀的. 一维情形的单元只有小区间. 二维情形的单元主要有两种:三角形和四边形(矩形、任意凸四边形). 三维单元更加复杂多样,本书不予考虑.

(3) 选定容许函数在单元上的形状,通常取为某种多项式,将它写为插值函数的形式,由此构造出基函数. 这是本章的主要工作.

(4) 形成有限元方程(Ritz—Galerkin 方程). 它是一个代数方程组,其系数矩阵还是稀疏的(即含有大量的零元素).

(5) 选用恰当的方法求解有限元方程. 这是数值代数方面的内容.

关于有限元方法的理论问题(即解的收敛性和误差估计)将在第六章研究.

为便于读者理解,我们先介绍一维区域上两点边值问题的线

性有限元法,然后推广到平面区域上二阶椭圆边值问题,最后介绍高次元.

§ 5.1 解一维问题的线性元



考虑两点边值问题

$$\begin{cases} Lu = -\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{du}{dx}\right) + q(x)u = f(x), & x \in (a, b), \\ u(a) = \alpha, \\ p(b)\frac{du(b)}{dx} + g(b)u(b) = \beta \end{cases} \quad (5.1.1)$$

其中 $p \in C^1(a, b)$, $p \geq p_{\min} > 0$, $q \in C^0(a, b)$, $q \geq 0$, $f \in C^0(a, b)$, $g \in C^0(a, b)$, $g \geq 0$.

因为基于虚功原理的 Galerkin 方法比基于极小位能原理的 Ritz 方法适用范围广,而且按 Galerkin 方法推导有限元方程更加方便直接,所以我们仅考虑以 Galerkin 方法出发建立有限元方程.

由 § 4.1.3,我们取容许函数类和试探函数空间分别为

$$H_E^1(a, b) = \{u \in H^1(a, b) \mid u(a) = \alpha\},$$

$$H_{0E}^1(a, b) = \{v \in H^1(a, b) \mid v(a) = 0\},$$

则与边值问题(5.1.1)相应的变分方程(虚功方程)为

$$a(u, v) = F(v), \quad u \in H_E^1(a, b), \forall v \in H_{0E}^1(a, b)$$

其中

$$a(u, v) = \int_a^b \left(p \frac{du}{dx} \frac{dv}{dx} + quv \right) dx + g(b)u(b)v(b),$$

$$F(v) = \int_a^b f v dx + \beta v(b).$$

首先用节点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 将区间 $[a, b]$ 剖分为 n 个不重叠的小区间 $E_{i-1} = [x_{i-1}, x_i]$, $i = 1, 2, \cdots, n$,称之为单元,单元 E_i

的长度为 $h_i = x_{i+1} - x_i$, 记 $h = \max h_i$, 要求当 $n \rightarrow \infty$ 时, $h \rightarrow 0$.

其次, 在 Sobolev 空间 $H_{0E}^1(a, b)$ 及 $H_E^1(a, b)$ 内按如下原则取有限维试探函数空间 V_h^0 和容许函数类 V_h : 它们中的函数在每个单元上为一次多项式, 而在全区间 $[a, b]$ 上连续 (这样的函数称为分段线性函数, 属于 $H^1(a, b)$, 另外 V_h 中函数 $u_h(x)$ 满足 $u_h(a) = \alpha$, V_h^0 中函数 $v_h(x)$ 满足 $v(a) = 0$. 显然 $V_h \subset H_E^1(a, b)$, $V_h^0 \subset H_{0E}^1(a, b)$.

在构造 V_h 的一组基函数之前, 我们指出, 同一空间 V_h 可取各种不同的基函数, 但并非任一组基函数对实际计算都是可取的.

由于有限元解 $u_h \in V_h$ 是分段线性函数, 若设 u_h 在节点 x_0, x_1, \dots, x_n 上分别取值为

$$u_0 = \alpha, u_1, u_2, \dots, u_n,$$

(事实上, $u_i \approx u(x_i)$ ($i = 1, 2, \dots, n$), $u(x)$ 为 (5.1.1) 的解) 则 u_h 可表示为一次 Lagrange 插值函数的形式

$$u_h(x) = u_{i-1} \frac{x_i - x}{h_{i-1}} + u_i \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, \quad x \in E_{i-1}, i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.1.2)$$

其几何形状如图 5.1. 式中 $(x_i - x)/h_{i-1}$ 和 $(x - x_{i-1})/h_{i-1}$ 分别称为相应于节点 x_{i-1} 和 x_i 的单元节点基函数.

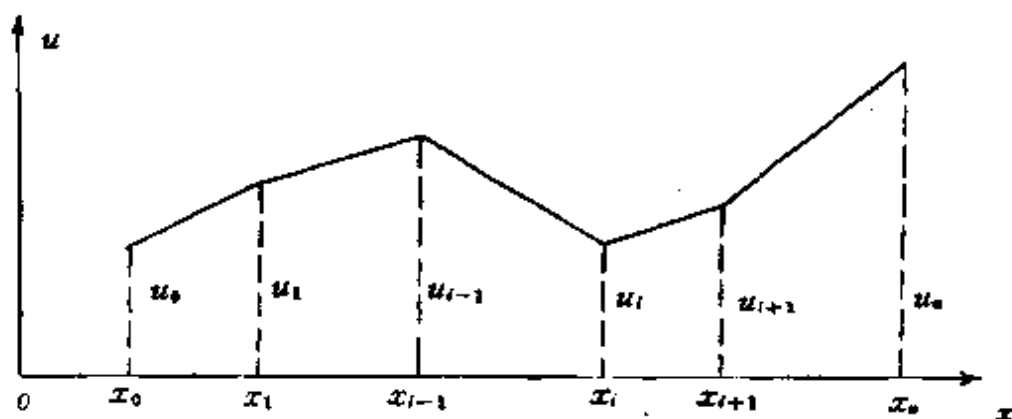


图 5.1 V_h 中函数的几何形状

由 u_k 的表达式(5.1.2)我们得到启示,若想将 u_k 表示为基函数 $\varphi_i(x)$ 的线性组合,且组合系数为 u_i ,可取 $\varphi_i(x)$ 为

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0(x) = \begin{cases} \frac{x_1-x}{h_0} = 1 - \frac{x-x_0}{h_0}, & x \in [x_0, x_1] \\ 0, & \text{别处,} \end{cases} \\ \varphi_i(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}} = 1 + \frac{x-x_i}{h_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ \frac{x_{i+1}-x}{h_i} = 1 - \frac{x-x_i}{h_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0, & \text{别处,} \end{cases} \\ \quad i=1, 2, \dots, n-1, \\ \varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{n-1}}{h_{n-1}} = 1 + \frac{x-x_n}{h_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0, & \text{别处.} \end{cases} \end{array} \right. \quad (5.1.3)$$

$\varphi_i(x)$ 称为相应于节点 x_i 的整体节点基函数,其几何形状如图 5.2 所示,因此也称 $\varphi_i(x)$ 为山形基函数.

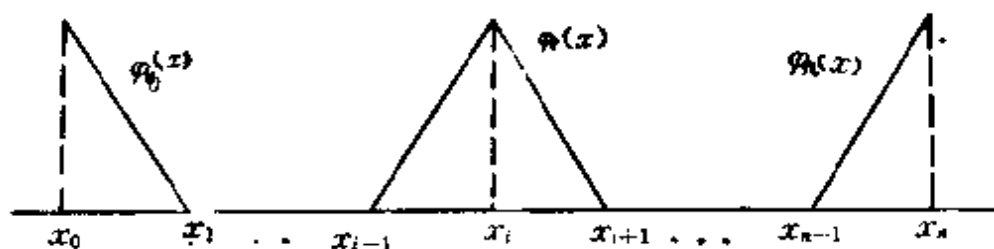


图 5.2 基函数的几何形状

相应于节点 x_i 的整体节点基函数 $\varphi_i(x)$ 可由 $[x_{i-1}, x_i]$ 上和 $[x_i, x_{i+1}]$ 上 x_i 的单元节点基函数与其它单元上的零函数“拼装”而成. 显然, $\varphi_i(x)$ 满足如下条件:



$$\begin{cases} \varphi_i(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \\ \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) = 0, & |i - j| \geq 2, \\ \varphi_i(x) \cdot \varphi_j(x) = 0, & |i - j| \geq 2. \end{cases} \quad (5.1.4)$$

显然 $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$ 线性无关, 且对任意一个 $u_h \in V_h$ 可表为

$$u_h(x) = \alpha \varphi_0(x) + \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x), \quad u_i = u_h(x_i).$$

由于对任意 $v_h \in V_h^0$, 有 $v_h(a) = 0$, 因此 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ 便构成 V_h^0 的一组基函数.

值得指出, 用 $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ 可以构造出适合各种边条件的容许函数类 V_h 和试探函数空间 V_h^0 . 如边条件为 $u(a) = \alpha, u(b) = \beta$, 则取

$$V_h = \{u_h | u_h = \alpha \varphi_0 + \beta \varphi_n + \sum_{i=1}^{n-1} u_i \varphi_i, u_i \in R, i = 1, 2, \dots, n-1\}$$

$$V_h^0 = \{v_h | v_h = \sum_{i=1}^{n-1} v_i \varphi_i, v_i \in R, i = 1, 2, \dots, n-1\}$$

如边条件是 $u(a) = \alpha, u'(b) = \beta$, 则取

$$V_h = \{u_h | u_h = \alpha \varphi_0 + \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i, u_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$$

$$V_h^0 = \{v_h | v_h = \sum_{i=1}^n v_i \varphi_i, v_i \in R, i = 1, 2, \dots, n\}$$

根据第四章的 Galerkin 方程组 (4.3.6) 式或 (4.3.7) 式, 得到有限元方程组

$$\sum_{i=1}^n a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = F(\varphi_j) - a(\alpha \varphi_0, \varphi_j), j = 1, 2, \dots, n$$

或

$$KU = B,$$

其中

$$K = \begin{bmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_1) & \cdots & a(\varphi_n, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_2) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_n, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a(\varphi_1, \varphi_n) & a(\varphi_2, \varphi_n) & \cdots & a(\varphi_n, \varphi_n) \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} F(\varphi_1) - a(\alpha\varphi_0, \varphi_1) \\ F(\varphi_2) - a(\alpha\varphi_0, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots \\ F(\varphi_n) - a(\alpha\varphi_0, \varphi_n) \end{bmatrix}.$$

超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

在力学上,称 K 为刚度矩阵, B 为载荷向量. 由 (1.2.4) 知, K 是对称的三对角矩阵, 且当 $j \geq 2$ 时, B 中的 $a(\alpha\varphi_0, \varphi_j) = 0$.

为便于计算有限元方程中的各积分, 我们用仿射变换

$$\xi = \frac{x - x_i}{h_i}$$

把每个单元 $E_i = [x_i, x_{i+1}]$ 变到 ξ 轴上的参考单元 $[0, 1]$. 再借助 $[0, 1]$ 上的标准山形函数

$$N_0(\xi) = 1 - \xi, \quad N_1(\xi) = \xi,$$

则可将容许函数 u_h 的插值函数形式写为

$$u_h(x) = N_0(\xi)u_{i-1} + N_1(\xi)u_i, \quad x \in E_{i-1} = [x_{i-1}, x_i],$$

对 $i = 1, 2, \dots, n-1$, $\varphi_i(x)$ 可表示为

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} N_1(\xi), & \xi = \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}, & x \in [x_{i-1}, x_i], \\ N_0(\xi), & \xi = \frac{x - x_i}{h_i}, & x \in [x_i, x_{i+1}], \\ 0 & \text{别处,} \end{cases}$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} N_0(\xi), & \xi = \frac{x - x_0}{h_0}, & x \in [x_0, x_1], \\ 0 & \text{别处,} \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} N_1(\xi), & \xi = \frac{x - x_{n-1}}{h_{n-1}}, & x \in [x_{n-1}, x_n], \\ 0 & \text{别处,} \end{cases}$$

由此可看出,若在每个单元上将线性函数表示为上述插值函数的形式,则由参考单元 $[0,1]$ 上的单元节点基函数 $N_0(\xi)$ 和 $N_1(\xi)$ 可直接构造出整体节点基函数 $\varphi_i(x)$ ($i=0,1,\dots,n$).

利用上述仿射变换,我们可将每个单元 E_i 上的积分变为参考单元 $[0,1]$ 上的积分计算. K 和 B 中元素的计算公式如下:

$$\begin{aligned} a(\varphi_i, \varphi_i) &= \int_{x_{i-1}}^{x_i} [p(x)(\varphi'_i)^2 + q(x)\varphi_i^2] dx \\ &\quad + \int_{x_i}^{x_{i+1}} [p(x)(\varphi'_i)^2 + q(x)\varphi_i^2] dx \\ &= h_{i-1}^{-1} \int_0^1 p(x_{i-1} + \xi h_{i-1}) d\xi + h_{i-1} \int_0^1 q(x_{i-1} \\ &\quad + \xi h_{i-1}) \xi^2 d\xi + h_i^{-1} \int_0^1 p(x_i + \xi h_i) d\xi \\ &\quad + h_i \int_0^1 q(x_i + \xi h_i) (1 - \xi)^2 d\xi, \\ &\quad i = 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (5.1.5)$$

$$\begin{aligned} a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) &= \int_{x_i}^{x_{i+1}} [p(x)\varphi'_i \varphi'_{i+1} + q(x)\varphi_i \varphi_{i+1}] dx \\ &= -h_i^{-1} \int_0^1 p(x_i + \xi h_i) d\xi \\ &\quad + h_i \int_0^1 q(x_i + \xi h_i) \xi (1 - \xi) d\xi, \\ &\quad i = 0, 1, 2, \dots, n-1, \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

$$a(\varphi_{i-1}, \varphi_i) = a(\varphi_i, \varphi_{i-1}), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (5.1.7)$$

$$\begin{aligned} a(\varphi_n, \varphi_n) &= \int_{x_{n-1}}^{x_n} [p(x)(\varphi'_n)^2 + q(x)\varphi_n^2] dx + g(b)[\varphi_n(b)]^2 \\ &= h_{n-1}^{-1} \int_0^1 p(x_{n-1} + \xi h_{n-1}) d\xi \\ &\quad + h_{n-1} \int_0^1 q(x_{n-1} + \xi h_{n-1}) \xi^2 d\xi + g(b), \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

$$a(\varphi_0, \varphi_j) = \begin{cases} \alpha a(\varphi_0, \varphi_1), & j = 1, \\ 0, & j > 1, \end{cases} \quad (5.1.9)$$

$$\begin{aligned} F(\varphi_j) &= \int_a^b f(x) \varphi_j(x) dx + \beta \varphi_j(b) \\ &= \int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x) \varphi_j(x) dx + \int_{x_j}^{x_{j+1}} f(x) \varphi_j(x) dx \\ &= h_{j-1} \int_0^1 f(x_{j-1} + \xi h_{j-1}) \xi d\xi \\ &\quad + h_j \int_0^1 f(x_j + \xi h_j) (1 - \xi) d\xi, \\ &\quad j = 1, 2, \dots, n-1 \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

$$\begin{aligned} F(\varphi_n) &= \int_a^b f(x) \varphi_n(x) dx + \beta \varphi_n(b) \\ &= \int_{x_{n-1}}^{x_n} f(x) \varphi_n(x) dx + \beta \\ &= h_{n-1} \int_0^1 f(x_{n-1} + \xi h_{n-1}) \xi d\xi + \beta. \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

例如, 对于边值问题

$$\begin{cases} -\frac{d^2 u}{dx^2} = f(x), & x \in (a, b) \\ u(a) = \alpha, \\ \frac{du(b)}{dx} + g(b)u(b) = \beta. \end{cases}$$

若采用等距剖分, 即 $h_i = h, i = 0, 1, \dots, n-1$, 则 (5.1.5) — (5.1.9) 式中的诸积分很容易算出

$$\begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_i) = \frac{2}{h}, & i = 1, 2, \dots, n-1, \\ a(\varphi_i, \varphi_{i+1}) = a(\varphi_{i+1}, \varphi_i) = -\frac{1}{h}, & i = 0, 1, \dots, n-1, \\ a(\varphi_n, \varphi_n) = \frac{1}{h} + g(b). \end{cases}$$

因此有限元方程为

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & & & \\ -1 & 2 & -1 & & \\ & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & -1 & 1+hg(b) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_{n-1} \\ u_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} hF(\varphi_1) + \alpha \\ hF(\varphi_2) \\ \vdots \\ hF(\varphi_{n-1}) \\ hF(\varphi_n) \end{bmatrix}.$$

一般情形, $p(x)$ 、 $q(x)$ 和 $f(x)$ 都是函数, 对 (5.1.5) — (5.1.11) 式中的每个积分, 通常用 Gauss 求积公式计算. 所用求积公式的精度与有限元解所能达到的精度密切相关. 若采用了低精度的求积公式, 会损害有限元解可以达到的精度, 当然, 使用精度过高的求积公式也没必要. 通常, 所选择的 Gauss 求积公式的精度应等于或略大于有限元解所具有的精度即可.

如果剖分节点是从左向右(或从右向左)顺序编号的, 则 K 是三对角矩阵, 故可用追赶法解有限元方程, 这是较为理想的方法之一. 解出 $u(x_i)$ 的近似值 u_i 后, 还可写出边值问题 (5.1.1) 在 $[a, b]$ 上的有限元解的表达式

$$u_h(x) = \sum_{i=1}^n u_i \varphi_i(x) + \alpha \varphi_0(x),$$

由此可计算其它点上的函数值和导数值(节点除外).

§ 5.2 解二维问题的三角形线性元

用有限元方法解二维椭圆边值问题时, 应用最广的是三角形线性元. 所谓三角形线性元, 就是将定解区域 Ω 剖分成若干个小三角形(称作单元), 取容许函数类和试探函数空间, 使其中函数在每个单元上为二元一次多项式(线性), 而在整个区域上是连续的.

5.2.1 三角形剖分

将定解区域 $\bar{\Omega}$ 分割成有限个小三角形 Δ_i , 使不同的三角形之间无重叠的内部, 每个三角形的顶点只能是相邻三角形的顶点, 即任一三角形的顶点不属于其它三角形的边的内部 (如图 5.3). 这样, 就将 $\bar{\Omega}$ 分割成一个三角形网, 称之为 Ω 的三角剖分. 三角形的顶点称为节点, 每个三角形称为单元. 若考虑混合边值问题, 即在 Γ_1 上给第一边条件, 在 Γ_2 上给第二或第三边条件 ($\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma$), 则 Γ_1 与 Γ_2 的交界点应取为剖分的节点.

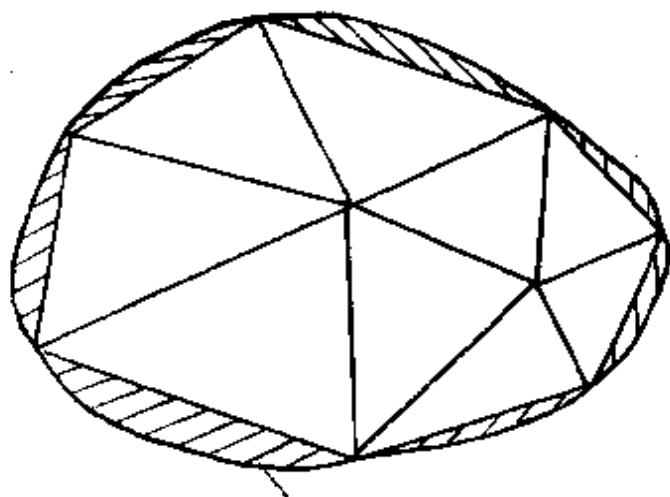


图 5.3 三角剖分示意图

设三角形单元 Δ_i 的外接圆直径和内切圆直径分别为 h_i 和 ρ_i , 那么, 为保证有限元解有较好的精度, 要求三角剖分是“正规”的, 即要求每个单元中尽量避免出现太大的钝角, 且对一切单元来说, h_i/ρ_i 的上、下界越接近越好.

设一切单元的集合为 Ω_h , 其边界记为 Γ_h . Γ_1 和 Γ_2 的交界点将 Γ_h 分为 Γ_h^1 和 Γ_h^2 , 其中 Γ_h^1 上的节点属于 Γ_1 , Γ_h^2 上的节点属于 Γ_2 ($\Gamma_h^1 + \Gamma_h^2 = \Gamma_h$), Γ_h^1 和 Γ_h^2 的交界点可属于 Γ_1 , 也可属于 Γ_2 . Ω_h 是区域 Ω 的离散, 封闭折线 Γ_h 可很好地逼近 Ω 的边界 Γ . 因此, 三角剖分不仅可灵活地构造非均匀网格, 而且能很好地逼近复杂的区域边界.

5.2.2 面积坐标及其性质

先回顾一下一维情形线性元的实现过程. 在那里, 我们可先将每个单元变换到参考单元 $[0,1]$ 上, 然后在 $[0,1]$ 上建立标准山形函数 $N_0(\xi)$ 和 $N_1(\xi)$, 并由它们构造节点基函数. 在二维三角形线性元中, 我们也需要一变换, 它能将每个三角单元变到一个标准三角形. 为此, 我们需要引入三角形的面积坐标.

考虑任意一个三角形单元 $\Delta(A_i, A_j, A_k)$, A_i, A_j, A_k 是按逆时针方向排列的三角形的顶点, 其中 i, j, k 为顶点编号, 三角形面积设为 S . 于 $\Delta(A_i, A_j, A_k)$ 中任取一点 $P(x, y)$, 过点 P 作与三个顶点的连线, 把 $\Delta(A_i, A_j, A_k)$ 分为三个小三角形, 它们的面积分别记为 S_i, S_j, S_k (如图 5.4). 记

$$L_i = \frac{S_i}{S}, L_j = \frac{S_j}{S}, L_k = \frac{S_k}{S}.$$

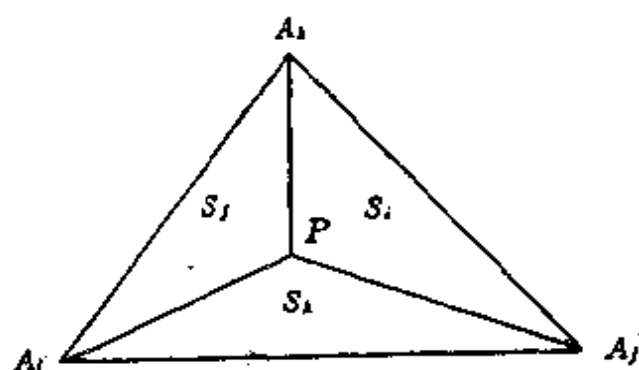


图 5.4 三角单元示意图

显然,

$$\begin{cases} S_i + S_j + S_k = S, \\ L_i + L_j + L_k = 1, \text{ 且 } L_i, L_j, L_k \geq 0, \\ L_m(A_n) = \delta_{mn} = \begin{cases} 1, & m = n, \\ 0, & m \neq n. \end{cases} \end{cases} \quad (5.2.1)$$

给定单元内一点 $P(x, y)$, 可唯一确定一组数 (L_i, L_j, L_k) . 反之, 任给一组数 (L_i, L_j, L_k) , $L_i \geq 0, L_j \geq 0, L_k \geq 0, L_i + L_j + L_k = 1$,

也唯一确定一点 $P(x, y)$. 所以对同一点 P , 既可用直角坐标 (x, y) 表示, 也可用 (L_i, L_j, L_k) 表示. 我们称 (L_i, L_j, L_k) 为点 P 的面积坐标. 三角形的面积坐标与坐标系的选择无关, 这是采用面积坐标的一个优点.

我们知道

$$\begin{aligned} 2S &= \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}, & 2S_i &= \begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}, \\ 2S_j &= \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x & y \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}, & 2S_k &= \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x & y \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

由此可建立面积坐标与直角坐标之间的如下转换关系:

$$\begin{cases} L_i = \frac{2S_i}{2S} = \frac{1}{2S} [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y], \\ L_j = \frac{2S_j}{2S} = \frac{1}{2S} [(x_k y_i - x_i y_k) + (y_k - y_i)x + (x_i - x_k)y], \\ L_k = \frac{2S_k}{2S} = \frac{1}{2S} [(x_i y_j - x_j y_i) + (y_i - y_j)x + (x_j - x_i)y], \end{cases} \quad (5.2.2)$$

及由此得到的

$$\begin{cases} x = x_i L_i + x_j L_j + x_k L_k = x_i + (x_j - x_i)L_j + (x_k - x_i)L_k, \\ y = y_i L_i + y_j L_j + y_k L_k = y_i + (y_j - y_i)L_j + (y_k - y_i)L_k, \end{cases} \quad (5.2.3)$$

这里用到了等式 $L_i + L_j + L_k = 1$.

若记 $\xi = L_j, \eta = L_k$, 则 (5.2.3) 式给出一仿射变换, 它将 xy 坐标系中的任意三角形单元映射为 $\xi\eta$ 坐标中的标准等腰直角三角形, 且将 $\Delta(A_i, A_j, A_k)$ 的顶点 A_i, A_j, A_k 分别映到 $\xi\eta$ 坐标系中标准三角形单元 e 的顶点 $(0, 0), (1, 0), (0, 1)$, 如图 5.5. 此变换的 Jacobi 行列式为

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \right| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_j - x_i & x_k - x_i \\ y_j - y_i & y_k - y_i \end{vmatrix} = 2S. \quad (5.2.4)$$

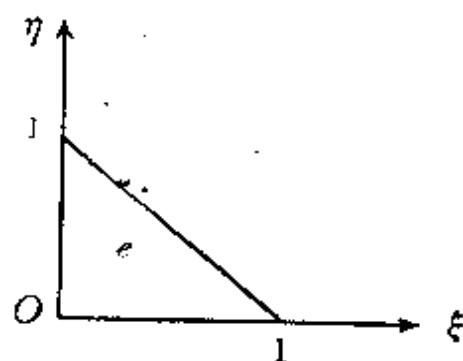


图 5.5 标准三角单元示意图

该变换能将三角形单元上的插值型函数变换为标准三角单元上的同类函数。从而,利用面积坐标可使计算工作(主要是积分计算)简单化、标准化。我们先给出几个常用公式。

由(5.2.2)式得

$$\begin{cases} \frac{\partial L_i}{\partial x} = \frac{1}{2S}(y_j - y_k), & \frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{1}{2S}(x_k - x_j), \\ \frac{\partial L_j}{\partial x} = \frac{1}{2S}(y_k - y_i), & \frac{\partial L_j}{\partial y} = \frac{1}{2S}(x_i - x_k), \\ \frac{\partial L_k}{\partial x} = \frac{1}{2S}(y_i - y_j), & \frac{\partial L_k}{\partial y} = \frac{1}{2S}(x_j - x_i). \end{cases} \quad (5.2.5)$$

由(5.2.3)和(5.2.4)两式得

$$dx dy = J d\xi d\eta, \quad (5.2.6)$$

另由(5.2.2)式得

$$\begin{cases} \frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{y_k - y_i}{J}, & \frac{\partial \eta}{\partial x} = \frac{y_i - y_j}{J}, \\ \frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{x_i - x_k}{J}, & \frac{\partial \eta}{\partial y} = \frac{x_j - x_i}{J}. \end{cases} \quad (5.2.7)$$

利用重积分变量替换公式,不难得出单元 $\bar{e}=\Delta(A_i, A_j, A_k)$ 上的积分公式

$$\iint_{\bar{e}} L_i^p L_j^q L_k^r dx dy = 2S \frac{p!q!r!}{(p+q+r+2)!},$$

其中 p, q, r 为任意非负整数. 此公式在计算有限元方程中的积分时要用到.

5.2.3 三角形线性元的基函数

仿照一维线性元基函数的构造方法,我们首先设三角单元 $\Delta(A_i, A_j, A_k)$ 上线性函数 $u_k(x, y)$ 的插值形式为

$$u_k(x, y) = N_i(x, y)u_i + N_j(x, y)u_j + N_k(x, y)u_k,$$

其中 $u_k(A_m) = u_m (m=i, j, k)$, N_i, N_j, N_k 分别是相应于顶点 A_i, A_j, A_k 的单元节点基函数,它们都是线性函数且分别满足

$$N_i(A_m) = \delta_{im}, \quad m=i, j, k,$$

$$N_j(A_m) = \delta_{jm}, \quad m=i, j, k,$$

$$N_k(A_m) = \delta_{km}, \quad m=i, j, k.$$

另外,在单元 $\Delta(A_i, A_j, A_k)$ 上的面积坐标 $L_i(x, y), L_j(x, y), L_k(x, y)$ 也是线性函数,同时也满足条件

$$L_i(A_m) = \delta_{im}, L_j(A_m) = \delta_{jm}, L_k(A_m) = \delta_{km}, \quad m=i, j, k.$$

由于不在同一直线上的三个点唯一确定一个平面(如 N_i 与 L_i 同过三点 $(x_i, y_i, 1), (x_j, y_j, 0), (x_k, y_k, 0)$), 因此

$$N_i = L_i, \quad N_j = L_j, \quad N_k = L_k.$$

这样,单元 $\Delta(A_i, A_j, A_k)$ 上相应于节点 A_i, A_j, A_k 的三个单元节点基函数就是三个面积坐标 $L_i(x, y), L_j(x, y), L_k(x, y)$, 从而单元上线性函数可写为

$$u_k(x, y) = L_i(x, y)u_i + L_j(x, y)u_j + L_k(x, y)u_k.$$

单元节点基函数的几何图形如图 5.6 所示, $L_i(x, y), L_k(x, y)$ 的几何图形完全类似.

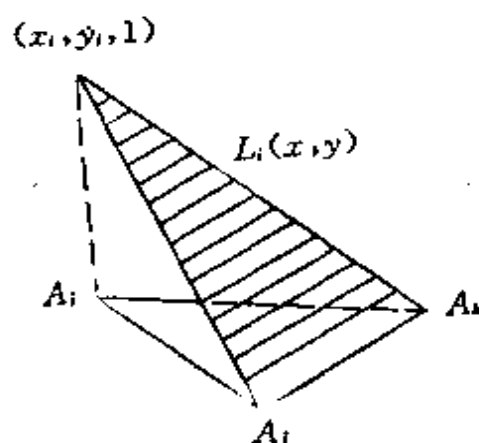


图 5.6 L_i 的几何图形

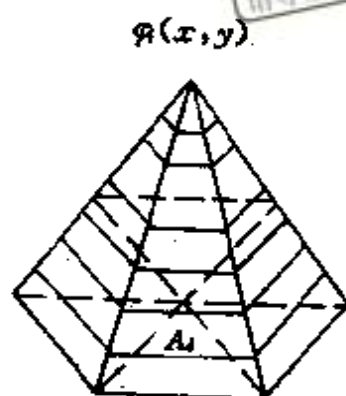


图 5.7 $\varphi(x, y)$ 的几何图形

将所有以 A_i 为顶点的单元上相应于 A_i 的基函数及在其它单元上的零函数“拼接”起来，便得到节点 A_i 的整体节点基函数 $\varphi_i(x, y)$ ，它仅在 A_i 处取值为 1，而在其它所有节点处取值为零，在每个单元上为线性函数，特别地， φ_i 在 $\Delta(A_i, A_j, A_k)$ 上的限制就是 $L_i(x, y)$ 。图 5.7 表示了 φ_i 非零部分的几何图形。整体节点基函数满足条件

$$\begin{cases} \varphi_i(A_m) = \delta_{im} = \begin{cases} 1, & i=m, \\ 0, & i \neq m, \end{cases} \\ \varphi_i(x, y) \text{ 在每个以 } A_i \text{ 为顶点的三角单元上为一次多项式.} \end{cases} \quad (5.2.8)$$

Ω_h 中的每个节点 A_i 都对应着一个整体节点基函数 $\varphi_i(x, y)$ ($i=1, 2, \dots, N, N$ 为 Ω_h 中的节点总数)。由这些基函数很容易构造出分片线性而整体连续的有限维容许函数类 V_h 和试探函数空间 V_h^0 。

需要指出的是，实际计算（指有限元方程的系数和右端项）是在单元上进行的，因此，只需用到 $\varphi_i(x, y)$ 在单元上的限制（单元节点基函数），不必给出 $\varphi_i(x, y)$ 的完整表达式。

5.2.4 有限元方程及其计算公式

与 § 4.2.2 一样, 我们考虑如下椭圆混合边值问题:

$$\begin{cases} Lu = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(p(x,y)\frac{\partial u}{\partial y}\right) \\ \quad + r(x,y)u = f(x,y), (x,y) \in \Omega, \\ u(x,y) = \alpha(x,y), (x,y) \in \Gamma_1, \\ p(x,y)\frac{\partial u}{\partial n} + \sigma(x,y)u = \beta(x,y), (x,y) \in \Gamma_2, \end{cases} \quad (5.2.9)$$

其中 $p(x,y) \in C^1(\Omega)$ 且 $p(x,y) \geq p_{\min} > 0$, $r, \sigma \in C^0(\Omega)$, 此外 $r(x,y) \geq 0, \sigma(x,y) \geq 0, f \in C^0(\Omega)$, $\frac{\partial u}{\partial n}$ 表示 u 沿 Ω 边界 Γ 的外法向导数, $\beta(x,y) \in C^0(\Gamma_2), \alpha(x,y) \in C^0(\Gamma_1), \Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$.

与边值问题 (5.2.9) 相应的变分方程由 § 4.2.2 中 (4.2.20) 式给出, 为建立有限元方程, 我们分别取有限维分片线性而整体连续的容许函数类 V_h 和试探函数空间 V_h^0 为

$$V_h = \{u_h | u_h = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x,y), u_h(A_i) = \alpha(A_i), \text{节点 } A_i \in \Gamma_1^*\}.$$

$$V_h^0 = \{v_h | v_h = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x,y), v_h(A_i) = 0, \text{节点 } A_i \in \Gamma_1^*\}.$$

利用 Ritz—Galerkin 方法及变分方程 (4.2.20)

$$a(u,v) = F(v), \quad u \in M, \quad \forall v \in M_0$$

(M 和 M_0 与 (4.2.10) 式中相同), 我们可立即得到有限元方程

$$a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad u_h \in V_h, \quad \forall v_h \in V_h^0,$$

或代入 $u_h = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x,y)$, 并分别取 $v_h = \varphi_j(x,y), j=1,2,\dots,N$, 得到

$$\sum_{i=1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = F(\varphi_j), \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.2.10)$$

其中

$$\begin{cases} a(\varphi_i, \varphi_j) = \iint_{\Omega_h} [p(\varphi_i)_x(\varphi_j)_x + p(\varphi_i)_y(\varphi_j)_y + r\varphi_i\varphi_j] dxdy \\ \quad + \int_{\Gamma_2^h} \sigma\varphi_i\varphi_j ds, \\ F(\varphi_j) = \iint_{\Omega_h} f\varphi_j dxdy + \int_{\Gamma_2^h} \beta\varphi_j ds. \end{cases} \quad (5.2.11)$$

超星浏览器提醒您：(5.2.11)
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

(5.2.10)中第 j 个方程称为与 x_j 对应的方程。

有限元方程组(5.2.10)是一个形如

$$KU=F$$

的线性代数方程组,其中

$$K = \begin{bmatrix} a(\varphi_1, \varphi_1) & a(\varphi_2, \varphi_1) & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_1) \\ a(\varphi_1, \varphi_2) & a(\varphi_2, \varphi_2) & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a(\varphi_1, \varphi_N) & a(\varphi_2, \varphi_N) & \cdots & a(\varphi_N, \varphi_N) \end{bmatrix}$$

$$U = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} F(\varphi_1) \\ F(\varphi_2) \\ \vdots \\ F(\varphi_N) \end{bmatrix}.$$

同样, K 称为总刚度矩阵, U 称为位移向量, F 为总载荷向量. 由 $a(u, v)$ 的对称性和正定性知, K 是一对称正定矩阵, 所以有限元方程组(5.2.10)或(5.2.12)存在唯一解 (u_1, u_2, \cdots, u_N) , 由此便可得到有限元解

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^N u_i \varphi_i(x, y),$$

它是边值问题(5.2.9)的解 $u(x, y)$ 的一个近似.

下面讨论有限元方程组(5.2.10)或(5.2.12)中各积分的计算

公式。由于基函数 $\varphi(x, y)$ 的局部非零特征, 有限元方程中每个积分 $a(\varphi_i, \varphi_j)$ 都与节点 A_i 和 A_j 所处的位置密切相关, 且仅当 A_i 和 A_j 为相邻节点时, $a(\varphi_i, \varphi_j)$ 才不等于零, 这也说明 K 还是一个稀疏的三对角矩阵。

如果 A_j 及其所有邻节点 A_i 均为内节点时, (5.2.11) 式中的边界积分项为零, 所以, 当 $j \neq i$ 时有

$$\begin{aligned} a(\varphi_i, \varphi_j) &= \iint_{\Omega_k} [p(\varphi_i)_x (\varphi_j)_x + p(\varphi_i)_y (\varphi_j)_y + r \varphi_i \varphi_j] dx dy \\ &= \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} [p(L_i)_x (L_j)_x + p(L_i)_y (L_j)_y + r L_i L_j] dx dy, \end{aligned}$$

其中 \sum_{Δ} 表示关于所有以 $\overline{A_j A_i}$ 为边的三角单元 Δ 上求和, 当 $j = i$ 时, \sum_{Δ} 则表示关于所有以 A_j 为顶点的三角单元 Δ 求和。利用 (5.2.5) 式, 我们得到

$$\begin{aligned} a(\varphi_i, \varphi_j) &= \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} \frac{1}{4S_{\Delta}^2} p(x, y) [(y_j - y_k)(y_k - y_i) \\ &\quad + (x_k - x_j)(x_i - x_k)] dx dy \\ &\quad + \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} r(x, y) L_i L_j dx dy, \end{aligned} \quad (5.2.13)$$

当 $j = i$ 时

$$\begin{aligned} a(\varphi_i, \varphi_i) &= \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} [p(\varphi_i)_x^2 + p(\varphi_i)_y^2 + r \varphi_i^2] dx dy \\ &= \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} \frac{1}{4S_{\Delta}^2} p(x, y) [(y_k - y_i)^2 + (x_i - x_k)^2] dx dy \\ &\quad + \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} r(x, y) L_i^2 dx dy, \end{aligned} \quad (5.2.14)$$

$$F(\varphi_j) = \iint_{\Omega_k} f(x, y) \varphi_j dx dy = \sum_{\Delta} \iint_{\Delta} f(x, y) L_j dx dy.$$

(5.2.15)

(5.2.13)–(5.2.15)式中每个单元之上的积分需由变换化为标准单元上的积分计算。

如果 A_j 为内节点, 设其邻点为 $A_{i_1}, A_{i_2}, \dots, A_{i_{m+r}}$, 其中 A_{i_1}, \dots, A_{i_m} 为内节点, 其余为 Γ_1^A 上节点, 则(5.2.11)式中的边界积分项仍为零, 这时对应于节点 A_j 的有限元方程(5.2.10)可写为

$$\sum_{i=i_1}^{i_{m+r}} a(\varphi_i, \varphi_j) = F(\varphi_j).$$

由于当 $(x_i, y_i) \in \Gamma_1^A$ 时

$$u_i = u_k(x_i, y_i) = u(x_i, y_i) = \alpha_i = \alpha(x_i, y_i),$$

故上式又可写为

$$\sum_{i=i_1}^{i_m} a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = F(\varphi_j) - \sum_{i=i_{m+1}}^{i_{m+r}} a(\varphi_i, \varphi_j) \alpha_i. \quad (5.2.16)$$

(5.2.16)式表明了有限元方程的本质边条件处理的特征。

如果 A_j 为内节点, 而其邻点有些在 Γ_2^A 上时, 由于 $\varphi_j(x, y)$ 在 Γ_2^A 上等于零, 使得(5.2.11)式中的边界积分项也为零, 这时 $a(\varphi_i, \varphi_j)$ 及 $F(\varphi_j)$ 的计算公式仍同于(5.2.13)–(5.2.15)式。

如果 A_j 为 Γ_1^A 上的节点, 则有限元方程(5.2.10)中相应于节点 A_j 的方程((5.2.10)中第 j 个方程)中, 直接取(不必计算)

$$a(\varphi_j, \varphi_j) = 1, \quad a(\varphi_i, \varphi_j) = 0 (i \neq j), \quad F(\varphi_j) = \alpha_j,$$

即与 A_j 相应的有限元方程为 $u_j = \alpha_j$, 此方程一开始就无需列出, 这样, 有限元方程组(5.2.10)的阶数恰好等于未知量的个数。

如果节点 A_j 与其某邻点 A_i 都位于 Γ_2^A 上时, (5.2.11)式中 Ω_k 上的积分计算与(5.2.13)–(5.2.15)式相同, 但(5.2.11)式中的边界积分项不等于零。

5.2.5 举例

我们以 Poisson 方程第一边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = -(u_{xx} + u_{yy}) = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u|_r = \alpha(x, y) \end{cases} \quad (5.2.17)$$

为例,说明用有限元法解题的主要过程.

第一,把边值问题(5.2.17)化为等价的变分方程

$$a(u, v) = F(v), \quad u \in H_E^1(\Omega), \forall v \in H_{OE}^1(\Omega),$$

其中

$$a(u, v) = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] dx dy,$$

$$F(v) = \iint_{\Omega} f v dx dy,$$

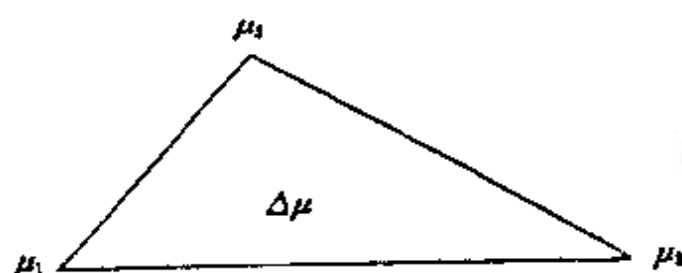
$$H_E^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma} = \alpha(x, y)\},$$

$$H_{OE}^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega) \mid v|_{\Gamma} = 0\}.$$

第二,对求解区域 Ω 作三角形网格剖分. 实际剖分时,先在 Γ 上取有限个点,依次连成一闭多边形 Γ_h (h 表示单元最大外接圆直径),以此近似代替 Γ ,并以 Γ_h 所围成的多边形区域 Ω_h 近似代替 Ω . 选取 Γ_h 时应量减小几何误差. 然后将 Ω_h 分割成有限个三角形单元之和,从而得到 Ω_h 的一个三角剖分(如图5.3). 剖分除应满足前已提到的一般性要求外,若有可能从物理直观或理论分析中判断出解 u 变化的剧烈部位或平坦部位,则应在相应部位使剖分作得“细密些”或“粗糙些”. 究竟应该如何剖分才能做到既能保证所需精度,又能减少计算量(主要是减少单元数量)?这是一个既有实际意义又十分困难的问题,目前主要靠计算者的实践经验.

确定网格剖分后,将节点(三角单元顶点)按一定顺序编号. 第 i 号节点坐标记为 (x_i, y_i) . 设 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, 顶点编号为 μ_1, μ_2, μ_3 的三角单元表示为 $\Delta_{\mu} = \Delta(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$, 其中三角形的顶点 μ_1, μ_2, μ_3 按逆时针方向排列(如图5.8), Δ_{μ} 的面积记为 S_{μ} .

第三,构造线性基函数. 每个节点 i 对应一个基函数 $\varphi_i(x, y)$, 而 $\varphi_i(x, y)$ 仅在以 i 为顶点的三角单元 $\Delta_{\mu} = \Delta(i, j, k)$ ($\mu_1 = i, \mu_2 = j, \mu_3 = k$)上非零. 由§5.2.2及§5.2.3, $\varphi_i(x, y)$ 在 Δ_{μ} 上的限制为



超星阅读器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

图 5.8 三角单元示意图

$$\varphi_i(x, y) = L_i(x, y) = \frac{1}{2S_\mu} [(x_j y_k - x_k y_j) + (y_j - y_k)x + (x_k - x_j)y], \quad (5.2.18)$$

其中

$$2S_\mu = \begin{vmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{vmatrix}. \quad (5.2.19)$$

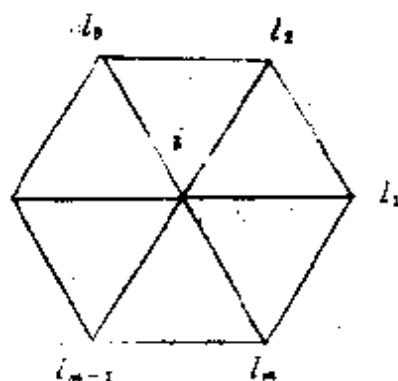
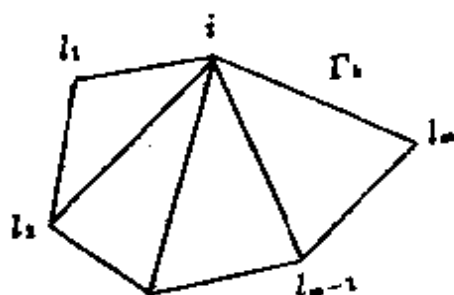


图 5.9 从 i 为顶点的所有单元示意图

设与 i 相邻的所有节点是 $l_e (e=1, 2, \dots, m)$ (如图 5.9), 若 i 为内节点, 则只需在 (5.2.18), (5.2.19) 中依次取 $j=l_e, k=l_{e+1} (e=1, 2, \dots, m), l_{m+1}=l_1$; 若 i 为边界节点, 则依次取 $j=l_e, k=l_{e+1} (e=1,$

2, ..., m-1), 这样便可得到 φ_i 在所有以 i 为顶点的三角单元上的表达式, φ_i 在其余单元上恒为零.

第四, 形成有限元方程. 假定内节点的编号是 $1, 2, \dots, n_1$, 边界节点的编号是 $n_1+1, n_1+2, \dots, n_1+n_2$, 则有限元方程为

$$\sum_{i=1}^{n_1} a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = F(\varphi_j) - \sum_{i=n_1+1}^{n_1+n_2} a(\varphi_i, \varphi_j) \alpha_i, \quad j=1, 2, \dots, n_1,$$

其中 $\alpha_i = \alpha(x_i, y_i)$, $i = n_1+1, n_1+2, \dots, n_1+n_2$, $a(\varphi_i, \varphi_j)$ 和 $F(\varphi_j)$ 的计算公式为 (5.2.13)–(5.2.15).

第五, 有限元方程的解法. 根据问题的规模和计算机的容量、速度, 选取适当的解法. 一般说来, 有限元方程是一类特殊的代数方程组, 通常其系数矩阵是具有稀疏性的带状矩阵, 且当 $a(u, v)$ 对称正定时, 系数矩阵还是对称正定的. 在选取有限元方程的求解方法时, 应充分考虑其系数矩阵的特性, 从而提高计算的效率. 有限元方法的主要计算量都集中在这里. 关于有限元方程解法的详细讨论, 请见参考文献[1], [4].

第六, 编制程序, 上机计算.

§ 5.3 解二维问题的四边形双线性元

为简单起见, 假定求解区域 Ω 可以分割为有限个矩形之和, 且每个小矩形的边平行于坐标轴. 任意两个矩形或者不相交, 或者仅有公共的边或公共的顶点. 我们称这样的分割为矩形剖分, 每个小矩形称为单元. 用 h_1 和 h_2 分别表示 x 和 y 方向的步长, N 为节点总数.

取定剖分后, 对任意一个矩形单元

$$R_{ij} = \{(x, y) | x_i \leq x \leq x_i + h_1, y_j \leq y \leq y_j + h_2\},$$

由仿射变换

$$\xi = (x - x_i)/h_1, \quad \eta = (y - y_j)/h_2, \quad (5.3.1)$$

总可变为单位正方形 $E = \{(x, y) | 0 \leq x, y \leq 1\}$ (如图 5.10).

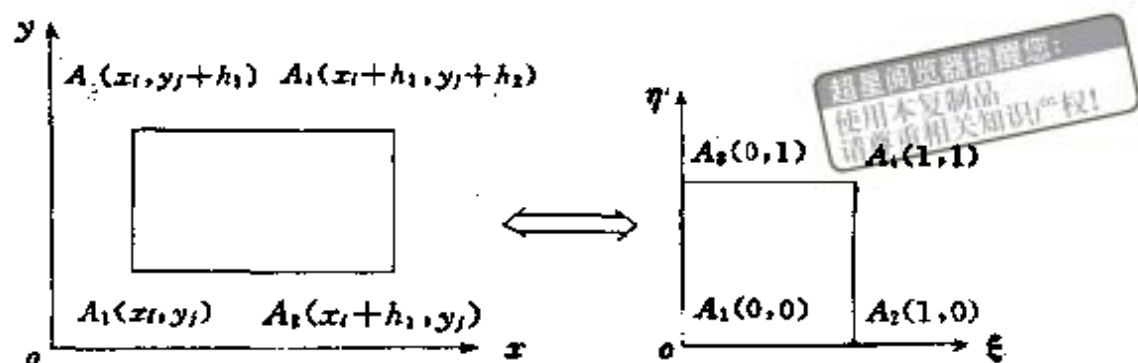


图 5.10 单元变换示意图

先在单位正方形 E 上建立 Lagrange 插值型双线性函数

$$u_h = \sum_{i=1}^4 u_i \tilde{N}_i(\xi, \eta),$$

式中 $u_i = u(A_i)$ ($i=1, 2, 3, 4$), \tilde{N}_i 是 E 上双线性函数且 $\tilde{N}_i(A_j) =$

将节点 (x_i, y_j) 记为 (i, j) , 以节点 (i, j) 为顶点的四个矩形单元分别记为 $R_{ij}, R_{i-1,j}, R_{i-1,j-1}, R_{i,j-1}$ (如图 5.11), 并令

$$E_{ij} = R_{ij} \cup R_{i-1,j} \cup R_{i-1,j-1} \cup R_{i,j-1}.$$

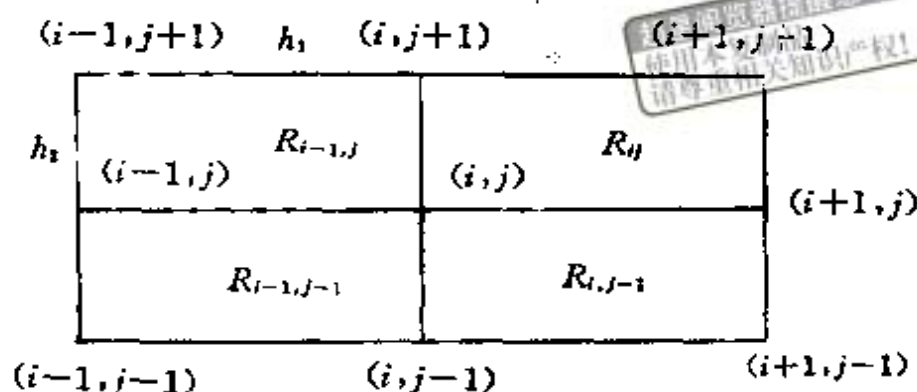


图 5.11 以 (i, j) 为顶点的单元示意图

如果记 (i, j) 处的整体节点基函数为 φ_j , 则由上述讨论, φ_j 在 R_{ij} 上的限制为

$$\varphi_j(x, y) = N_0(\xi)N_0(\eta) = \left(1 - \frac{x-x_i}{h_1}\right)\left(1 - \frac{y-y_j}{h_2}\right),$$

$$(x, y) \in R_{ij}.$$

类似的方法还可得到 φ_j 在其余三个以 (i, j) 为顶点的矩形上的表达式. 综合后, 可将 φ_j 表示为

$$\varphi_j(x, y) = \begin{cases} \left(1 - \left|\frac{x-x_i}{h_1}\right|\right)\left(1 - \left|\frac{y-y_j}{h_2}\right|\right), & (x, y) \in E_{ij}, \\ 0, & \text{在别处.} \end{cases}$$

若对所有节点编号为 $1, 2, \dots, N$, 且将节点 i 相应的基函数记为 $\varphi_i(x, y)$, 则对 Poisson 方程第一边值问题 (5.2.17), 有限维分片双线性容许函数类 V_h 和试探函数空间 V_h^0 为

$$V_h = \left\{u_h \mid u_h = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x, y), u_h(A_i) = \alpha(A_i), \text{节点 } A_i \in \Gamma\right\},$$

$$V_h^0 = \left\{v_h \mid v_h = \sum_{i=1}^N c_i \varphi_i(x, y), v_h(A_i) = 0, \text{节点 } A_i \in \Gamma\right\}.$$

V_k (或 V_k^0) 中分片双线性函数 u_k 在区域 Ω 上是连续的. 事实上, 只需证明在相邻的两单元的边界上 u_k 连续. 由于在公共边上 u_k 只是一个变量 (x 或 y) 的线性函数, 它完全由公共边上两个顶点处的函数值唯一确定. 因此, u_k 在两个单元的公共边上连续.

若假定内节点的编号是 $1, 2, \dots, n_1$, 边界节点的编号是 n_1+1, n_1+2, \dots, N . 则 V_k 中函数可写为

$$u_k = \sum_{i=1}^{n_1} u_i \varphi_i + \sum_{i=n_1+1}^N a(i) \varphi_i, \quad u_i = u_k(i),$$

V_k^0 中函数可写为

$$v_k = \sum_{i=1}^{n_1} v_i \varphi_i, \quad v_i = v_k(i),$$

有限元方程为

$$\sum_{i=1}^{n_1} a(\varphi_i, \varphi_j) u_i = F(\varphi_j) - \sum_{i=n_1+1}^N a(\varphi_i, \varphi_j) a_i, \quad j = 1, 2, \dots, n_1, \quad (5.3.2)$$

其中 $a(\varphi_i, \varphi_j)$ 和 $F(\varphi_j)$ 与 § 5.2.5 中相同. 对每个 $j \leq n_1$, (5.3.2) 式左端求和中至多有 9 个系数非零, 这是由于每个基函数 φ_i 局部非零的缘故.

上述矩形剖分虽简单, 但仅适用于规则区域, 特别对于边界平行于坐标轴的多边形区域才是方便和有效的. 对一般区域 Ω , 其边界通常是一闭曲线, 用矩形剖分的边界 Γ_k 逼近 Ω 的边界 Γ 的几何误差太大. 下面我们简要介绍常用的任意凸四边形剖分, 它和三角剖分一样具有很大的灵活性. 我们主要讨论节点基函数的构造问题.

设 E 是 $\xi\eta$ 平面上的单位正方形即

$$E = \{(\xi, \eta) | 0 \leq \xi \leq 1, \quad 0 \leq \eta \leq 1\},$$

e 是 xy 平面上任一四边形, 其顶点是 $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), A_3(x_3, y_3), A_4(x_4, y_4)$ (如图 5.12). 为将 e 映到 E , 我们作变换

$$\begin{cases} x = x_1 + (x_2 - x_1)\xi + (x_3 - x_1)\eta + (x_4 - x_2 - x_3 + x_1)\xi\eta, \\ y = y_1 + (y_2 - y_1)\xi + (y_3 - y_1)\eta + (y_4 - y_2 - y_3 + y_1)\xi\eta. \end{cases} \quad (5.3.3)$$

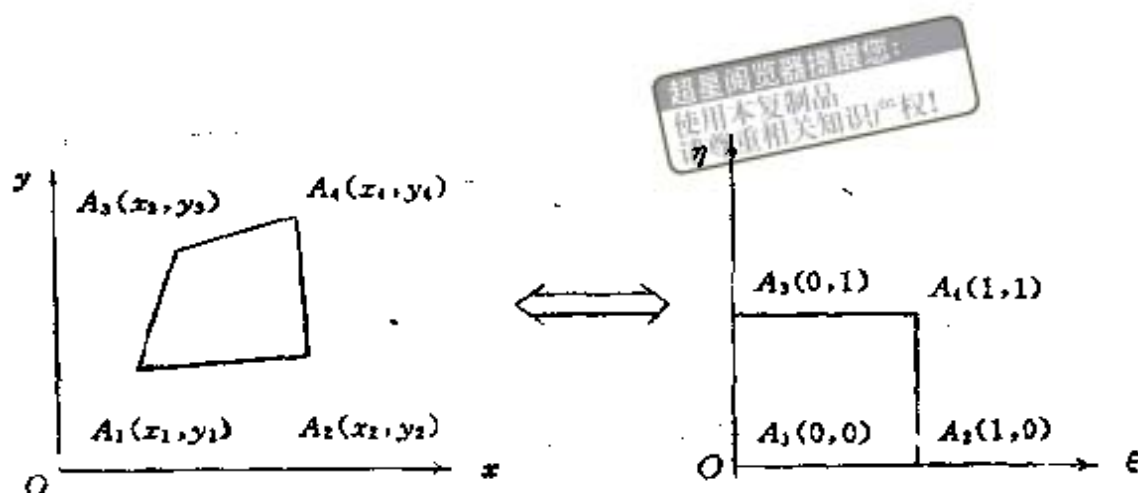


图 5.12 单元变换示意图

显然, 变换(5.3.3)把 E 的每条边变换到 e 的对应边, 把 E 的内部变到 e 的内部.

如果在单位正方形 E 上构造出插值型函数, 利用变换(5.3.3)的逆变换就可得到任一四边形单元上的插值型函数, 由此可得到单元节点基函数, 最后得到整体节点基函数.

假如在 E 的 4 个顶点上给定节点值 $u_i (i=1, 2, 3, 4)$, 则在 E 上的双线性插值型函数可表示为

$$u = \sum_{i=1}^4 u_i \tilde{N}_i(\xi, \eta),$$

式中 $\tilde{N}_i(\xi, \eta)$ 为相应的单元节点基函数, 它们都是 E 上的双线性函数. 根据 $\tilde{N}_i(\xi, \eta)$ 在节点处满足的条件

$$\tilde{N}_i(A_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j \end{cases}$$

和双线性的特点, 不难确定

$$\begin{cases} \bar{N}_1(\xi, \eta) = (1-\xi)(1-\eta), & \bar{N}_2(\xi, \eta) = \xi(1-\eta), \\ \bar{N}_3(\xi, \eta) = \xi\eta, & \bar{N}_4(\xi, \eta) = \eta(1-\xi). \end{cases} \quad (5.3.4)$$

若将(5.3.3)的逆变换代入(5.3.4)式,便可分别得到四边形 e 上相应于 A_1, A_2, A_3, A_4 的单元节点基函数.

对于四边形剖分 Ω_k 中任一节点 P_i , 相应的整体节点基函数 $\varphi_i(x, y)$ 是由以 P_i 为顶点的所有四边形上的单元节点基函数“拼接”而成的. 基函数确定之后, 有限维容许函数类和试探函数空间便不难形成了.

注意, (5.3.3)的逆变换是无理函数, 所以, E 上双线性函数尽管是简单的, 但对应到 e 上则是 x, y 的无理函数. 好在我们不必具体写出单元 e 上的节点基函数, 在实际计算时, 所有的积分都是以 ξ, η 为积分变量在单位正方形 E 上进行计算.

§ 5.4 高次元

为了提高有限元方法的精度, 需要增加试探函数空间的维数. 这有两个途径, 一是加密网格剖分使单元最大直径 h 变小, 节点增加; 另一个途径是增加分段(或分片)多项式的次数, 这就是本节要讨论的高次元. 引进高次元是有限元方法提高精度的重要技巧.

5.4.1 一维高次元

我们主要讨论二次元. 首先, 在任一单元 $e = [x_{i-1}, x_i]$ 上构造二次插值型函数, 并由此得到单元节点基函数, 最后形成整体节点基函数.

由于二次多项式有三个待定常数, 因此, 需要三个条件才能唯一确定一个二次多项式. 在 $e = [x_{i-1}, x_i]$ 上, 除应在端点 x_{i-1}, x_i 上分别取指定值 u_{i-1} 和 u_i 外, 另一条件是在单元中点 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 处取指定值 $u_{i-\frac{1}{2}}$.

我们首先在标准单元 $[0,1]$ 上考虑二次 Lagrange 型插值函数

$$u_h = u_{i-1}\bar{N}_0(\xi) + u_{i-\frac{1}{2}}\bar{N}_{\frac{1}{2}}(\xi) + u_i\bar{N}_1(\xi),$$

其中 $\bar{N}_j(\xi) (j=0, \frac{1}{2}, 1)$ 为二次多项式, 并满足

$$\bar{N}_j(k) = \delta_{jk}, \quad j, k = 0, \frac{1}{2}, 1.$$

下面我们用待定系数法构造 $\bar{N}_j (j=0, \frac{1}{2}, 1)$. 因 $\bar{N}_0(\xi)$ 满足条件

$$\bar{N}_0\left(\frac{1}{2}\right) = \bar{N}_0(1) = 0,$$

且为二次多项式, 故可设

$$\bar{N}_0(\xi) = c\left(\xi - \frac{1}{2}\right)(\xi - 1),$$

再由条件 $\bar{N}_0(0)=1$, 即知 $c=2$, 所以

$$\bar{N}_0(\xi) = (2\xi - 1)(\xi - 1).$$

同理可得

$$\bar{N}_{\frac{1}{2}}(\xi) = 4\xi(1 - \xi), \quad \bar{N}_1(\xi) = \xi(2\xi - 1).$$

若用变换 $\xi = h_{i-1}^{-1}(x - x_{i-1})$ 消去上述 $[0,1]$ 上的二次插值函数中的 ξ . 便可得到单元 $e = [x_{i-1}, x_i]$ 上的二次插值函数

$$u_h = u_{i-1}\bar{N}_0(\xi(x)) + u_{i-\frac{1}{2}}\bar{N}_{\frac{1}{2}}(\xi(x)) + u_i\bar{N}_1(\xi(x)),$$

其中 $\bar{N}_0, \bar{N}_{\frac{1}{2}}, \bar{N}_1$ 分别为相应于节点 $x_{i-1}, x_{i-\frac{1}{2}}, x_i$ 的单元节点基函数.

$\bar{N}_1(\xi(x))$ 就是节点 x_i 的整体节点基函数 $\varphi_i(x)$ 的左半支

$$\varphi_i(x) = h_{i-1}^{-1}(x - x_{i-1})[2h_{i-1}^{-1}(x - x_{i-1}) - 1], \quad x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad (5.4.1)$$

而 $\bar{N}_0(\xi(x))$ 为 x_{i-1} 的整体节点基函数 $\varphi_{i-1}(x)$ 的右半支

$$\begin{cases} \varphi_{i-1}(x) = [2h_{i-1}^{-1}(x - x_{i-1}) - 1][h_{i-1}^{-1}(x - x_{i-1}) - 1], \\ x_{i-1} \leq x \leq x_i. \end{cases} \quad (5.4.2)$$

综合(5.4.1)式和(5.4.2)式,可得 x_i 处整体节点基函数

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} h_{i-1}^{-1}(x-x_{i-1})[2h_{i-1}^{-1}(x-x_{i-1})-1], & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ [2h_i^{-1}(x-x_i)-1][h_i^{-1}(x-x_i)-1], & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{在别处,} \end{cases}$$

$$i=1,2,\dots,n-1,$$

$$\varphi_0(x) = \begin{cases} [2h_0^{-1}(x-x_0)-1][h_0^{-1}(x-x_0)-1], & x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0, & \text{在别处,} \end{cases}$$

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \left(\frac{x-x_{n-1}}{h_{n-1}}-1\right)\left(2\frac{x-x_{n-1}}{h_{n-1}}-1\right), & x_{n-1} \leq x \leq x_n, \\ 0, & \text{在别处.} \end{cases}$$

另外,由 $\bar{N}_{\frac{1}{2}}(\xi(x))$ 可直接给出 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 的整体节点基函数

$$\varphi_{i-\frac{1}{2}}(x) = \begin{cases} 4h_{i-1}^{-1}(x-x_{i-1})[1-h_{i-1}^{-1}(x-x_{i-1})], & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ 0, & \text{在别处,} \end{cases}$$

其中 $i=1,2,\dots,n$. $\varphi_i(x)$ 和 $\varphi_{i-\frac{1}{2}}(x)$ 的几何图形如图 5.13 所示.

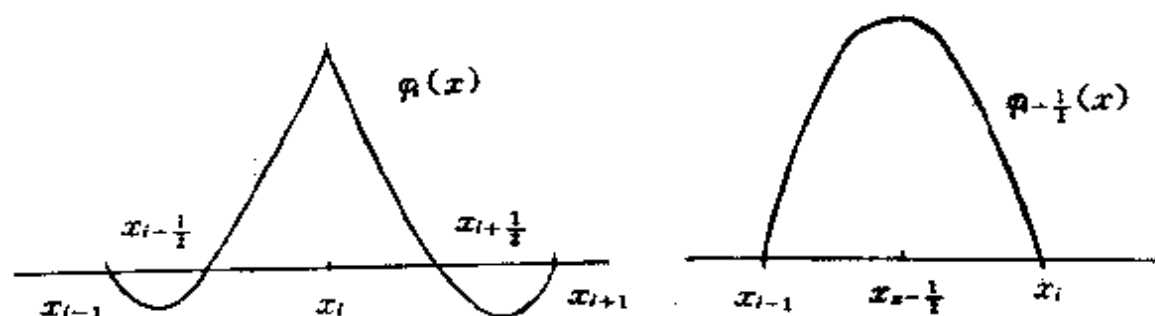


图 5.13 $\varphi_i(x)$ 和 $\varphi_{i-\frac{1}{2}}(x)$ 的几何图形

根据 $\varphi_i(x)$ 和 $\varphi_{i-\frac{1}{2}}(x)$ 及具体的边值问题,可很容易生成容许函数类和试探函数空间,且容许函数可表示为

$$u_h(x) = \sum_{i=0}^n u_i \varphi_i(x) + \sum_{i=1}^n u_{i-\frac{1}{2}} \varphi_{i-\frac{1}{2}}(x),$$

它在每个单元上是二次多项式,在节点 x_i 处连续,即 u_h 是分段二

次且整体连续的函数. 显然, $u_h(x) \in H^1$ 且能适合有限元方法的需要.

注意, 在 x_i 和 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 处的有限元方程是不同的. 相应于 x_i 的方程含有五个未知量: $u_{i-1}, u_{i-\frac{1}{2}}, u_i, u_{i+\frac{1}{2}}, u_{i+1}$; 而相应于 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 的方程仅含三个未知量: $u_{i-1}, u_{i-\frac{1}{2}}, u_i$. 因此, 解有限元方程时, 可先用相应于 $x_{i-\frac{1}{2}}$ 的方程消去 $u_{i-\frac{1}{2}}$, 然后再求解一个阶数几乎小一半的方程组.

下面我们简要介绍三次元.

为了得到 C^1 类的有限元解, 必须取容许函数为分段三次多项式函数. 三次多项式有四个系数要确定, 因此, 确定一个三次多项式需要四个条件. 在任一单元 $e = [x_{i-1}, x_i]$ 上, 三次多项式在端点 x_i 和 x_{i-1} 处除了取指定函数值 u_i 和 u_{i-1} 外, 还应取指定的一阶导数值 u'_i 和 u'_{i-1} . 这种带有导数值的插值型函数称为三次 Hermite 型插值, 每个节点对应两个基函数, 即 x_i 处函数值对应的基函数 $\varphi_i^{(0)}$ 和导数值对应的基函数 $\varphi_i^{(1)}(x)$, 它们满足条件

$$\varphi_i^{(0)}(x_j) = \delta_{ij}, \quad (\varphi_i^{(0)}(x))'|_{x=x_j} = 0, \quad i, j = 0, 1, \dots, n$$

$$\varphi_i^{(1)}(x_j) = 0, \quad (\varphi_i^{(1)}(x))'|_{x=x_j} = \delta_{ij}, \quad i, j = 0, 1, \dots, n.$$

类似于二次元的讨论, 对 $i = 1, 2, \dots, n-1$, 可得到

$$\varphi_i^{(1)}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})^2}{h_{i-1}} \left(\frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}} - 1 \right), & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ (x-x_i) \left(1 - \frac{x-x_i}{h_i} \right)^2, & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{在别处,} \end{cases}$$

$$\varphi_i^{(0)}(x) = \begin{cases} \frac{(x-x_{i-1})^2}{h_{i-1}^2} \left(3 - 2 \frac{x-x_{i-1}}{h_{i-1}} \right), & x_{i-1} \leq x \leq x_i, \\ \left(1 - \frac{x-x_i}{h_i} \right)^2 \left(2 \frac{x-x_i}{h_i} + 1 \right), & x_i \leq x \leq x_{i+1}, \\ 0, & \text{在别处.} \end{cases}$$

与节点 x_0 和 x_n 相应的基函数 $\varphi_0^{(0)}(x)$, $\varphi_0^{(1)}(x)$, $\varphi_n^{(0)}(x)$ 和 $\varphi_n^{(1)}(x)$ 可类似得到, 不过它们分别只有右半支和左半支. Hermite 三次元的基函数 $\varphi_i^{(0)}(x)$ 和 $\varphi_i^{(1)}(x)$ 的几何图形如图 5.14.

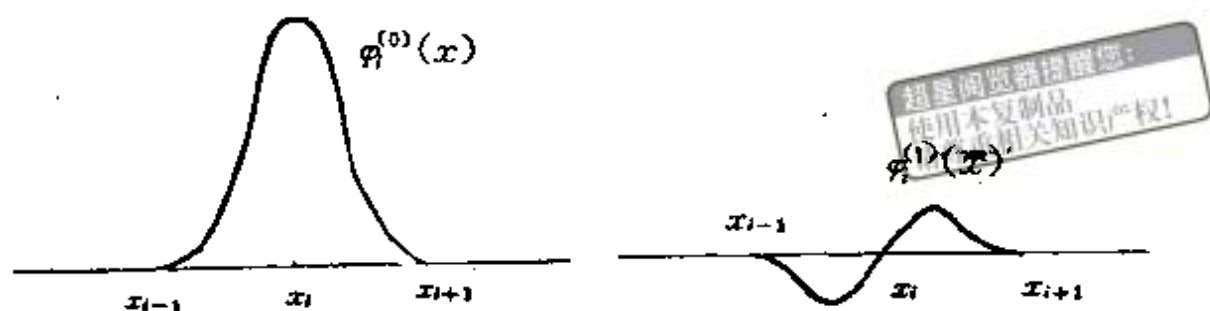


图 5.14 Hermite 三次元基函数图形

作出基函数后, 还要形成有限元方程, 这与线性元基本相同, 只是计算工作量更大些罢了.

可以证明, 上述方法构造的容许函数是属于 C^1 的, 从而有限元解在整个求解区间上不仅连续, 而且导数还是连续的.

同样, 我们还可构造四次元、五次元及更高次元.

5.4.2 二维三角形高次元

我们主要考虑三角单元上的二次元. 设 $\Delta(A_1, A_2, A_3)$ 是以 A_1, A_2, A_3 为顶点的任一三角形单元, A_1, A_2, A_3 的次序按逆时针方向排列. 在三角形单元上构造二次插值型函数, 需要 6 个插值条件, 通常取三角形的三个顶点 A_1, A_2, A_3 及三边的中点 A_4, A_5, A_6 为插值节点, 其中 A_4, A_5, A_6 依次是边 A_2A_3, A_3A_1, A_1A_2 的中点(如图 5.15).

同三角形线性元一样, 要对每个节点 A_i 构造相应的单元节点基函数 $N_i(x, y)$, 使得

- (1) $N_i(x, y)$ 在 $\Delta(A_1, A_2, A_3)$ 上是二次多项式 ($1 \leq i \leq 6$);
- (2) $N_i(A_j) = \delta_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq 6$).

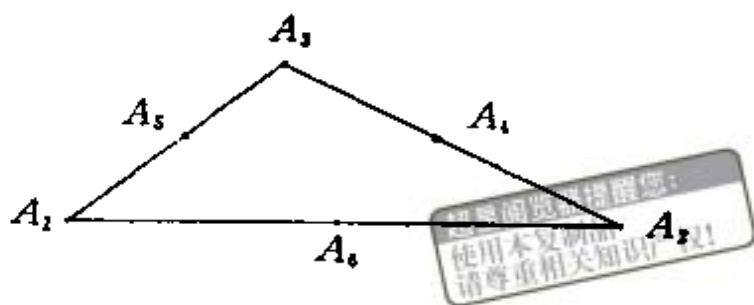


图 5.15 三角单元节点分布图

一旦得到这些单元节点基函数,单元 $\Delta(A_1, A_2, A_3)$ 上的 Lagrange 插值型二次多项式可表示为

$$u_h(x, y) = \sum_{i=1}^6 u_i N_i(x, y),$$

其中 $u_i = u_h(A_i)$. 我们仍用三角形的面积坐标 (L_1, L_2, L_3) 表示这些单元节点基函数.

因为在直线 $A_2 A_4 A_3$ 上 ($L_1 = 0$), $N_1 = 0$, 在直线 $A_2 A_5 A_1$ 上 ($L_1 - \frac{1}{2} = 0$), $N_1 = 0$, 所以, 在 $N_1(x, y)$ 中必含有因子 $L_1(L_1 - \frac{1}{2})$, 它已是二次多项式, 故可设 $N_1 = CL_1(L_1 - \frac{1}{2})$, 再由条件 $N_1(A_1) = 1$, 便知 $C = 2$. 因此

$$N_1 = 2L_1(L_1 - \frac{1}{2}) = L_1(2L_1 - 1).$$

同样可得

$$N_2 = L_2(2L_2 - 1), \quad N_3 = L_3(2L_3 - 1).$$

又因为在直线 $A_1 A_5 A_3$ 上 ($L_2 = 0$), $N_4 = 0$, 在直线 $A_1 A_6 A_2$ 上 ($L_3 = 0$), $N_4 = 0$, 这表明 N_4 必含因子 $L_2 L_3$, 故可设 $N_4 = CL_2 L_3$, 再由条件

$$N_4(A_4) = N_4(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = 1,$$

得 $C=4$. 因此, $N_4=4L_2L_3$.

同理可得

$$N_5=4L_1L_3, \quad N_6=4L_1L_2.$$

利用面积坐标与直角坐标 x, y 的关系式(5.2.2), 便可得到单元节点基函数 $N_i(x, y) (i=1, 2, \dots, 6)$.

对于三角形剖分中的任一节点 P_i (三角单元的顶点或边的中点), 相应的整体节点基函数 $\varphi_i(x, y)$ 是由含 P_i 的所有三角形上对应的单元节点基函数“拼接”而成的. $\varphi_i(x, y)$ 仅在包含节点 P_i 的单元上非零, 而在其它单元上恒等于零. $\varphi_i(x, y)$ 是整体连续的分片二次函数.

基函数确定之后, 可立即生成容许函数类和试探函数空间, 它们都含于 H^1 .

还可构造 Lagrange 型三次及更高次元, 但最常用的是一次和二次元.

此外, 我们还可以在 $\Delta(A_1, A_2, A_3)$ 上建立二次 Hermite 型插值函数 u_h , 这时的六个插值条件是:

(1) u_h 在 $\Delta(A_1, A_2, A_3)$ 的顶点 A_1, A_2, A_3 上分别取给定值 u_1, u_2, u_3 ;

(2) u_h 在三边中点 A_4, A_5, A_6 处的法向导数分别取指定值 $\frac{\partial u_h}{\partial n}(A_4), \frac{\partial u_h}{\partial n}(A_5), \frac{\partial u_h}{\partial n}(A_6)$.

为表示出单元上 Hermite 二次插值函数, 需构造出相应于顶点 A_i 处函数值的单元节点基函数 $N_i (i=1, 2, 3)$ 和相应于三边中点 A_j 处法向导数值的单元节点基函数 $N_j^{(1)} (j=4, 5, 6)$. 这种 Hermite 二次元就是熟知的 Morley (莫勒) 元, 这时容许函数类和试探函数空间仅是 H^0 类的, 其中函数在单元边界上不连续.

同样, 我们也可构造 Hermite 三次元. $\Delta(A_1, A_2, A_3)$ 上的三次 Hermite 型插值函数 u_h 需要 10 个插值条件才能确定. 为此, 我们

在单元 $\Delta(A_1, A_2, A_3)$ 上取四个节点 A_1, A_2, A_3 和形心 A_4 , u_k 在每个顶点 A_i 处取指定的函数值 u_i 和一阶偏导数值 $(u_x)_i, (u_y)_i (i=1, 2, 3)$, 而在形心 A_4 处取指定的函数值 u_4 . 因此, 每个顶点对应三个单元节点基函数, 而在形心处仅对应一个单元节点基函数. 由此产生的容许函数类和试探函数空间是 C^0 类的, 从而是 H^1 的子集.

Hermite 二次和三次元的构造方法请见参考文献[1].

5.4.3 二维矩形高次元

首先, 对求解区域 Ω 进行矩形剖分, 为提高有限元解的精度, 我们在每个单元上取双二次多项式为单元上的插值型函数. 双二次多项式有 9 个待定系数, 因此, 在每个矩形单元上应给出 9 个插值节点, 在每个节点上建立一个单元节点基函数.

类似于矩形双线性元, 先在单位正方形 $E = \{(\xi, \eta) | 0 \leq \xi, \eta \leq 1\}$ 上取 9 个插值节点: $A_1(0, 0), A_2(1, 0), A_3(1, 1), A_4(0, 1), A_5(\frac{1}{2}, 0), A_6(1, \frac{1}{2}), A_7(\frac{1}{2}, 1), A_8(0, \frac{1}{2}), A_9(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ (如图 5.16).

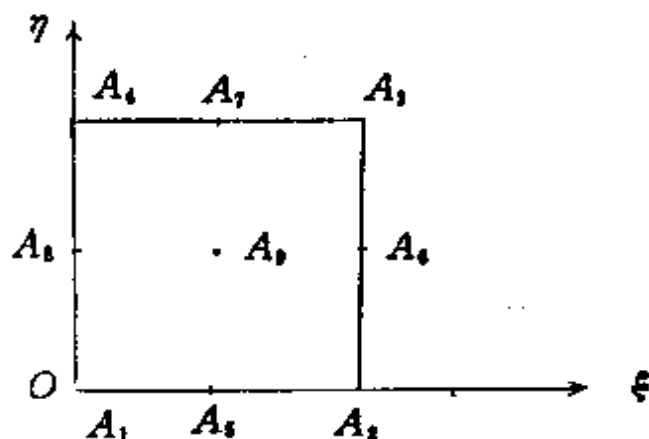


图 5.16 矩形双二次元节点分布图

设 E 上双二次插值型函数为

$$u_k = \sum_{i=1}^9 u_i \bar{N}_i(\xi, \eta),$$

其中 $u_i = u_k(A_i)$ ($i=1, 2, \dots, 9$), \bar{N}_i 为 E 上双二次多项式且满足 $\bar{N}_i(A_j) = \delta_{ij}$ ($1 \leq i, j \leq 9$). 利用 § 5.4.1 中的一维二次元基函数

$$N_0(\xi) = (2\xi - 1)(\xi - 1),$$

$$N_{\frac{1}{2}}(\xi) = 4\xi(1 - \xi),$$

$$N_1(\xi) = \xi(2\xi - 1),$$

可得到单位正方形 E 上的 9 个双二次单元节点基函数:

$$\bar{N}_1 = N_0(\xi)N_0(\eta) = (2\xi - 1)(\xi - 1)(2\eta - 1)(\eta - 1),$$

$$\bar{N}_2 = N_1(\xi)N_0(\eta) = \xi(2\xi - 1)(2\eta - 1)(\eta - 1),$$

$$\bar{N}_3 = N_1(\xi)N_1(\eta) = \xi(2\xi - 1)\eta(2\eta - 1),$$

$$\bar{N}_4 = N_0(\xi)N_1(\eta) = (2\xi - 1)(\xi - 1)\eta(2\eta - 1),$$

$$\bar{N}_5 = N_{\frac{1}{2}}(\xi)N_0(\eta) = 4\xi(1 - \xi)(2\eta - 1)(\eta - 1),$$

$$\bar{N}_6 = N_1(\xi)N_{\frac{1}{2}}(\eta) = 4\xi(2\xi - 1)\eta(1 - \eta),$$

$$\bar{N}_7 = N_{\frac{1}{2}}(\xi)N_1(\eta) = 4\xi(1 - \xi)\eta(2\eta - 1),$$

$$\bar{N}_8 = N_0(\xi)N_{\frac{1}{2}}(\eta) = 4(2\xi - 1)(\xi - 1)\eta(1 - \eta),$$

$$\bar{N}_9 = N_{\frac{1}{2}}(\xi)N_{\frac{1}{2}}(\eta) = 16\xi(1 - \xi)\eta(1 - \eta).$$

通过变换 (5.3.1) 消去 ξ, η 就可得到任一矩形单元

$$R_{ij} = \{(x, y) | x_i \leq x \leq x_i + h_1, y_j \leq y \leq y_j + h_2\}$$

上的插值型双二次函数和相应的 9 个单元节点基函数. 整体节点基函数及有限元方程的形成方法与双线性元类似.

同样的方法还可建立双三次元.

为得到具有连续偏导数的有限元解, 需要引入 Hermite 型元, 即在每个单元上容许函数的插值多项式形式, 除用到节点处的函数值, 还需用到节点处的导数值作为插值条件.

最简单的插值条件是: 取四个顶点为插值节点, 在每个节点上取给定的函数值和两个一阶偏导数值. 插值条件共有 12 个, 而完

全三次多项式 $p_3(x, y)$ 含 10 个系数. 为使插值问题有唯一解, 再加入 x^3y 和 xy^3 两项. 于是, 矩形单元上的 Hermite 型插值多项式的形式取为

$$u_h = p_3(x, y) + \alpha x^3y + \beta xy^3.$$

每个节点对应三个基函数, 而相应的容许函数类的试探函数空间仅是 C^0 类的, 从而是 H^1 中有限维子集. 这种 Hermite 型元称为 Adini(阿底尼)元. 有兴趣的读者可参阅[1][5].

如果求解区域 Ω 的边界 Γ 过于复杂, 以致用折线逼近的几何误差太大, 便需要用分段高次多项式曲线逼近, 这时将出现曲边形单元(如曲边三角形单元). 关于曲边元的讨论可参阅[1].

§ 5.5 抛物型方程的有限元方法

前面, 我们只讨论了用有限元方法求解椭圆型方程的边值问题, 接下来, 我们将有限元方法用于求解抛物型方程的定解问题. 对这种情形, 通常把时间变量 t 视为参数处理, 从而可采用第四章的 Galerkin 方法及本章前面所述的有限元方法. 本节我们简要地介绍一个空间变量的热传导方程的初边值问题的有限元方法. 对多个空间变量的抛物方程定解问题的有限元方法类似可得. 由于篇幅所限, 我们主要叙述方法的主要过程, 对一些理论性问题不作讨论.

考虑热传导方程的初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f(x, t), & x \in (0, l), x \in (0, +\infty), \end{cases} \quad (5.5.1)$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad x \in [0, l], \quad (5.5.2)$$

$$u(0, t) = u(l, t), \quad t \in (0, +\infty). \quad (5.5.3)$$

对固定的 t , 如果 $u(x, t) \in C^1[0, l]$, 在方程(5.5.1)两端同乘以 $v(x) \in H_0^1(0, l)$, 然后在 $(0, l)$ 上积分, 则有

$$\int_0^t \frac{\partial u}{\partial x} v(x) dx - \int_0^t \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v(x) dx = \int_0^t f v(x) dx, \quad (5.4.4)$$

其中 $H_0^1(0, l)$ 为 Sobolev 空间(见第四章). 对上式左端第二项利用分部积分并注意边界条件(5.5.3), 则(5.5.4)化为

$$\int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = \int_0^t f v dx,$$

$$\forall v(x) \in H_0^1(0, l), t > 0.$$

由此, 我们便可得到初边值问题(5.5.1)–(5.5.3)相应的变分方程

$$\begin{cases} \int_0^t \left(\frac{\partial u}{\partial x} v + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} \right) dx = \int_0^t f v dx, \\ u \in H_0^1(0, l), \quad \forall v \in H_0^1(0, l), \quad t > 0, \\ u(x, 0) = g(x). \end{cases} \quad (5.5.5)$$

与椭圆型方程一样, 对固定的 $t > 0$, 如果 $u(x, t) \in H_0^1(0, l)$ 且满足变分方程(5.5.5), 则称 $u(x, t)$ 是抛物型方程初边值问题(5.5.1)–(5.5.3)的广义解.

设 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots, \varphi_n(x)$ 为 $H_0^1(0, l)$ 中一组线性无关的函数, 用 V_n 表示由它们的线性组合构成的子空间. 由于边条件(5.5.3)是齐次的, 因此, 容许函数类和试探函数空间是同一空间 V_n . 所谓 Galerkin 方法, 就是求形如

$$u_n(x, t) = \sum_{j=1}^n \mu_j(t) \varphi_j(x) \quad (5.5.6)$$

的解, 使其系数 $\mu_j(t)$ 满足方程

$$\begin{cases} \int_0^t \left(\frac{\partial u_n}{\partial x} v_k + \frac{\partial u_n}{\partial x} \frac{\partial v_k}{\partial x} \right) dx = \int_0^t f v_k dx, \quad \forall v_k \in V_n, t > 0, \\ u_n(x, 0) = g_n(x), \end{cases} \quad (5.5.7)$$

其中 $g_n \in V_n$ 是 $g(x)$ 的某个近似. 由此得到的 $u_n(x, t)$ 就是初边值问题(5.5.1)–(5.5.3)的 Galerkin 方法近似解.

将 u_n 的表达式(5.5.6)代入(5.5.7), 得到

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d\mu_j}{dt} \int_0^t v_h dx + \mu_j \int_0^t \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{dv_h}{dx} dx \right) = \int_0^t f v_h dx, \\ \forall v_h \in V_h, t > 0, \\ u_h(x, 0) = g_h(x), \end{cases}$$

超星浏览器提醒您：
使用本复制品
请尊重相关知识产权！

特别地, 取 $v_h = \varphi_i, i = 1, 2, \dots, n$, 上式可写为

$$\begin{cases} \sum_{j=1}^n \left(\frac{d\mu_j}{dt} \int_0^t \varphi_j \varphi_i dx + \mu_j \int_0^t \frac{d\varphi_j}{dx} \frac{d\varphi_i}{dx} dx \right) = \int_0^t f \varphi_i dx, \\ i = 1, 2, \dots, n \\ u_h(x, 0) = g_h(x). \end{cases} \quad (5.5.8)$$

它是关于 $\mu_j(t)$ 的常微分方程组. 通常取初始条件 $g_h(x)$ 满足

$$\int_0^t (g_h(x) - g(x)) \varphi_i dx = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

由 (5.5.6) 式, $g_h(x) = \sum_{j=1}^n \mu_j(0) \varphi_j(x)$, 代入上式便得到关于 $\mu_j(0)$ 的代数方程组

$$\sum_{j=1}^n \mu_j(0) \int_0^t \varphi_j \varphi_i dx = \int_0^t g \varphi_i dx, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.5.9)$$

解此方程组可得 $\mu_j(0)$, 从而得到 $g_h(x) = \sum_{j=1}^n \mu_j(0) \varphi_j$. 事实上, $\mu_j(0)$ 才是常微分方程组 (5.5.8) 的初始条件.

记 $\mu(t) = (\mu_1(t), \dots, \mu_n(t))^T$,

$$F(t) = \left(\int_0^t f \varphi_1 dx, \dots, \int_0^t f \varphi_n dx \right)^T,$$

并且 K, M 表示 n 阶方阵, 其第 i 行第 j 列元素分别为

$$\int_0^t \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx, \quad \int_0^t \varphi_i \varphi_j dx.$$

可以证明 K 和 M 均为对称正定矩阵. 利用上述符号可将常微分方程组 (5.5.8) 写为

$$M \frac{d\mu}{dt} + K\mu = F(t), \quad (5.5.10)$$

而初始条件满足的方程(5.5.9)可写为

$$M\mu^0 = G. \quad (5.5.11)$$

与椭圆型方程一样,在 Galerkin 方法中选取特殊的基函数 φ_j 便得到有限元方法. 为此,先用节点 $0=x_0 < x_1 < \cdots < x_N=l$ 将区间 $[0,l]$ 剖分为单元 $I_j=[x_{j-1}, x_j]$, 并记 $h_{j-1}=x_j-x_{j-1}$ ($j=1, 2, \cdots, N$). 将 $\varphi_j(x)$ 取为最简单的分段线性函数

$$\varphi_j(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x-x_j}{h_{j-1}}, & x \in [x_{j-1}, x_j], \\ 1 - \frac{x-x_j}{h_j}, & x \in [x_j, x_{j+1}], \\ 0, & \text{在别处,} \end{cases} \quad (5.5.12)$$

$j=1, 2, \cdots, N-1,$

这时(5.5.10)式就是有限元方程组,但它是一个常微分方程组.

经简单计算可得

$$\begin{cases} \int_0^l \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx = \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i}, \\ \int_0^l \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_{j+1}}{dx} dx = -\frac{1}{h_j}, \\ \int_0^l \frac{d\varphi_i}{dx} \frac{d\varphi_j}{dx} dx = 0, \quad \text{当 } |i-j| > 1 \text{ 时,} \\ \int_0^l \varphi_j^2 dx = \frac{1}{3} (h_{j-1} + h_j), \quad \int_0^l \varphi_j \varphi_{j+1} dx = \frac{1}{6} h_j, \\ \int_0^l \varphi_i \varphi_j dx = 0, \quad \text{当 } |i-j| > 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

由此看出 K 和 M 均为三对角矩阵,其具体形式为

$$K = \begin{bmatrix} h_0^{-1} + h_1^{-1} & -h_1^{-1} & & & \\ -h_1^{-1} & h_1^{-1} + h_2^{-1} & -h_2^{-1} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & -h_{N-2}^{-1} \\ & & & -h_{N-2}^{-1} & h_{N-2}^{-1} + h_{N-1}^{-1} \end{bmatrix},$$

$$M = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} 2(h_0 + h_1) & h_1 & & & \\ h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & h_{N-2} \\ & & & h_{N-2} & 2(h_{N-2} + h_{N-1}) \end{bmatrix}.$$

称 K 为刚度矩阵, M 称为质量矩阵.

当基函数 $\varphi_j(x)$ 取成 (5.5.12) 时, 容许函数在节点 x_i 处取值 $u_h(x_i, t) = \mu_i(t)$, 因此常微分方程组 (5.5.10) 的初值取为 $\mu_i(0) = g(x_i)$ 更方便.

我们这里仅讨论了最简单的基函数, 事实上, §5.4.1 中的各种基函数均可直接用于抛物型方程. 这里就不一一列举了.

有限元方程组 (5.5.10) 的精确解通常无法求得, 为最后得到抛物型方程初边值问题 (5.5.1) — (5.5.3) 的数值解, 原则上可以采用求解常微分方程组的各种方法, 但最简单而且最常用的方法是改进的 Euler 折线法.

将改进的 Euler 折线法用于有限元方程组 (5.5.10) 后, 得到如下格式:

$$M \frac{\mu^{k+1} - \mu^k}{\tau} + K \frac{\mu^{k+1} + \mu^k}{2} = \frac{1}{2} (F^{k+1} + F^k), \quad (5.5.13)$$

其中 μ^k 为 $\mu(t_k) = \mu(k\tau)$ 的近似值, $\tau > 0$ 为时间 t 方向的步长, $F^k = F(t_k)$. (5.5.13) 是六点对称差分格式 (Crank — Nicholson 格式) 的变体. (5.5.13) 可改写为

$$\frac{1}{2}(2M + \tau M)\mu^{k+1} = \frac{1}{2}(2M - \tau K)\mu^k + \frac{\tau}{2}(F^{k+1} + F^k), \quad (5.5.14)$$

由此方程组, 利用初始条件 μ^0 可依次求出 $\mu^1, \mu^2, \dots, \mu^k, \dots$, 每向前计算一层 (如由 μ^k 计算 μ^{k+1}) 都需求解一线性代数方程组 (5.5.14). 通常采用 Doolittle 分解法或 Cholesky 分解法求解方程组 (5.5.14).

方程组 (5.5.14) 的解 μ^k 的分量 μ_j^k 是 $\mu_j(t_k)$ 的近似值, 也是初边值问题解 $u(x_j, t_k)$ 的近似值.

以上的有限元方法完全适用于一般的抛物型方程, 也包括多维情形. 通常所得到的方程仍可写为 (5.5.10) 及 (5.5.13) 的形式, 不同的只是质量矩阵 M 和刚度矩阵 K .

习 题

1. (实习题) 用线性元求下列边值问题的数值解:

$$\begin{cases} -y'' + \frac{\pi^2}{4}y = 2\sin \frac{\pi}{2}x, & x \in (0, 1), \\ y(0) = 0, & y'(1) = 0. \end{cases}$$

2. 对第三边值问题

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + qu = f, & x \in (0, 1), \\ u'(0) + \sigma_0 u(0) = \alpha, \\ u'(1) + \sigma_1 u(1) = \beta \end{cases}$$

导出线性有限元方程, 其中 $p(x) \geq p_0 > 0, q(x) \geq 0$, 常数 $\sigma_0 \geq 0, \sigma_1 \geq 0$.

3. 对两点边值问题

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(p \frac{du}{dx}\right) + qu = f, & x \in (a, b), \\ u(a) = \alpha, & u(b) = \beta, \end{cases}$$

用等距节点线性元导出有限元方程。

4. 用直角三角剖分的线性元求下列问题的数值解(精确到小数点后第四位):

$$\begin{cases} \Delta u = -2, & -1 < x, y < 1, \\ u(x, -1) = u(x, 1) = 0, & -1 < x < 1, \\ u_y(-1, y) = 1, & u_y(1, y) = 0, & -1 < y < 1. \end{cases}$$

第六章 有限元解的误差估计

用有限元方法近似求解微分方程定解问题时,产生误差的原因是多方面的,但其中最主要的误差是用有限维容许函数类 V_n 及试探函数空间 V_n^0 代替无穷维容许函数类 V 及试探函数空间 V^0 所产生的误差. 本章我们对椭圆型方程最简单的一维线性元和二维三角线性元,介绍有限元解的误差估计方法,并给出部分结果.

§ 6.1 Ritz—Galerkin 解的一个逼近性质

设某椭圆型方程边值问题相应的变分方程为

$$a(u, v) = F(v), \quad u \in V, \quad \forall v \in V^0, \quad (6.1.1)$$

其中双线性泛函 $a(u, v)$ 满足对称性、正定性及有界性条件(见第四章(4.3.1)–(4.3.3)), $F(v)$ 为 V^0 中线性泛函. 设 V_n 和 V_n^0 分别为 V 和 V^0 的 n 维子空间, $V \subset H^1, V^0 \subset H_{0g}^1$, 则 Ritz—Galerkin 方程为

$$a(u_n, v_n) = F(v_n), \quad u_n \in V_n, \quad \forall v_n \in V_n^0. \quad (6.1.2)$$

下面给出 Ritz—Galerkin 解 u_n 的一个重要的逼近性质.

定理 6.1 设 u 是变分方程(6.1.1)的解, u_n 是 Ritz—Galerkin 方程(6.1.2)的解, 则存在与 u, n 无关的常数 $\beta > 0$, 使得

$$\|u - u_n\|_1 \leq \beta \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_1. \quad (6.1.3)$$

证明 因 u 和 u_n 分别满足(6.1.1)式和(6.1.2)式, 而 $v_n \in V_n^0 \subset V^0$, 故由(6.1.1)式得

$$a(u, v_n) = F(v_n), \quad \forall v_n \in V_n^0. \quad (6.1.4)$$

(6.1.2)式与(6.1.4)式相减,得

$$a(u - u_n, v_n) = 0, \quad \forall v_n \in V_n. \quad (6.1.5)$$

根据 $a(u, v)$ 的正定性条件:

$$a(v, v) \geq \gamma \|v\|_1^2, \quad \forall v \in H_{0E}^1$$

和有界性条件:

$$|a(u, v)| \leq M \|u\|_1 \|v\|_1, \quad \forall u, v \in H^1,$$

再利用(6.1.5)式,可得

$$\begin{aligned} \|u - u_n\|_1^2 &\leq \frac{1}{\gamma} a(u - u_n, u - u_n) \\ &= \frac{1}{\gamma} [a(u - u_n, u) - a(u - u_n, u_n)] \\ &= \frac{1}{\gamma} [a(u - u_n, u) - a(u - u_n, v_n)] \\ &= \frac{1}{\gamma} a(u - u_n, u - v_n) \\ &\leq \frac{M}{\gamma} \|u - u_n\|_1 \|u - v_n\|_1, \quad \forall v_n \in V_n, \end{aligned}$$

消去不等式两端的共同因子 $\|u - u_n\|_1$, 并且令 $\beta = M/\gamma$, 则得

$$\|u - u_n\|_1 \leq \beta \|u - v_n\|_1, \quad \forall v_n \in V_n,$$

两端关于 $v_n \in V_n$ 取下确界, 即可得(6.1.3)式. \square

由于 $\|u - u_n\|_1$ 表示 Sobolev 空间中元素 u 与 u_n 间的距离, 而 $\inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_1$ 则表示 u 到子空间 V_n 中元素的最小距离. 因此定理 6.1 中的估计式(6.1.3)表明, 如果不考虑常数 β , 那么在 V_n 中 u_n 是 u 的最佳逼近. 另外, 如果当 $n \rightarrow \infty$ 时, $V_n \rightarrow V$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \inf_{v_n \in V_n} \|u - v_n\|_1 = 0.$$

由(6.1.3)式便可知

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u - u_n\|_1 = 0,$$

即 Ritz-Galerkin 解(包括有限元解) u_n 收敛于变分方程的解 u .

§ 6.2 一维线性元的误差估计

为简单起见,考虑两点边值问题

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(p\frac{du}{dx}\right) + qu = f, & x \in (a,b), \\ u(a) = 0, \quad u(b) = 0. \end{cases} \quad (6.2.1)$$

与此边值问题相应的变分方程和有限元方程分别为

$$a(u, v) = F(v), \quad u \in H_{0E}^1(a, b), \quad \forall v \in H_{0E}^1(a, b) \quad (6.2.2)$$

和

$$a(u_h, v_h) = F(v_h), \quad u_h \in V_h, \quad \forall v_h \in V_h, \quad (6.2.3)$$

其中

$$a(u, v) = \int_a^b (pu'v' + quv)dx,$$

$$F(v) = \int_a^b fvdx,$$

$$H_{0E}^1(a, b) = \{v \in H^1(a, b) | v(a) = 0\},$$

V_h 是分段线性连续函数空间, $h = \max h_i, h_i = x_{i+1} - x_i$.

6.2.1 H^1 范数的估计

由于有限元方法就是特殊的 Ritz-Galerkin 方法,所以上节定理 6.1 的结论对线性有限元解 u_h 也成立,即

$$\|u - u_h\|_1 \leq \beta \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1. \quad (6.2.4)$$

设 u 的分段线性插值函数为 u_I , 则 $u_I \in V_h$, 由 (6.2.4) 式推出

$$\|u - u_h\|_1 \leq \beta \|u - u_I\|_1. \quad (6.2.5)$$

这样,有限元解 u_h 的 H^1 范数的误差估计归结为线性插值 u_I 的 H^1 范数的误差估计,这使误差估计问题得到简化.下面给出一维线性有限元解的误差估计.

定理 6.2 设 $u \in C^2[a, b]$ 是 (6.2.1) 或 (6.2.2) 式的解, u_h 是有限元方程 (6.2.3) 的解, 则误差 $u - u_h$ 有估计

$$\|u - u_h\|_1 \leq ch \|u''\|_0,$$

其中 $c > 0$ 是与 h 无关的常数.

证明 在任一单元 $E_{i-1} = [x_{i-1}, x_i]$ 内考虑插值 u_i 的误差

$$e(x) = u(x) - u_i(x),$$

显然 $e(x_{i-1}) = e(x_i) = 0$. 用仿射变换 $\xi = (x - x_{i-1})/h_{i-1}$ 把单元 $[x_{i-1}, x_i]$ 变到 $[0, 1]$, 在 $[0, 1]$ 上将 $e(x)$ 展成 Fourier 级数:

$$\begin{cases} e(x_{i-1} + h_{i-1}\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin n\pi\xi, \\ a_n = 2 \int_0^1 e(x_{i-1} + h_{i-1}t) \sin n\pi t \, dt. \end{cases} \quad (6.2.6)$$

由 Parseval 等式(参见[4])

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} |e(x)|^2 dx = h_{i-1} \int_0^1 |e(x_{i-1} + h_{i-1}\xi)|^2 d\xi = \frac{h_{i-1}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2,$$

而

$$\begin{aligned} a_n &= 2 \int_0^1 e(x_{i-1} + h_{i-1}t) \sin n\pi t \, dt \\ &= \frac{2h_{i-1}}{n\pi} \int_0^1 e'(x_{i-1} + h_{i-1}t) \cos n\pi t \, dt \\ &= -\frac{2h_{i-1}^2}{(n\pi)^2} \int_0^1 e''(x_{i-1} + h_{i-1}t) \sin n\pi t \, dt \\ &= -\frac{2h_{i-1}}{(n\pi)^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} e''(x) \sin(n\pi \frac{x - x_{i-1}}{h_{i-1}}) dx. \end{aligned}$$

由于 $u_i(x)$ 在 $[x_{i-1}, x_i]$ 上为线性函数, 故

$$e''(x) = u''(x) - u''_i(x) = u''(x),$$

根据 Schwarz 不等式(4.1.15), 有

$$\begin{aligned} |a_n| &\leq \frac{2h_{i-1}}{(n\pi)^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |e''(x)| dx = \frac{2h_{i-1}}{(n\pi)^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(x)| dx \\ &\leq \frac{2h_{i-1}^{3/2}}{(n\pi)^2} \left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(x)|^2 dx \right]^{1/2}, \end{aligned}$$

或

$$|a_n|^2 \leq \frac{4h_{i-1}^3}{(n\pi)^4} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(x)|^2 dx,$$

所以

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |e(x)|^2 dx &\leq \frac{2h_{i-1}^4}{\pi^4} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(x)|^2 dx \cdot \left[\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \right] \\ &\leq c_1 h^4 \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(x)|^2 dx, \end{aligned}$$

不等式两端关于所有单元求和, 便得

$$\int_a^b |e(x)|^2 dx \leq c_1 h^4 \int_a^b |u''(x)|^2 dx,$$

或

$$\|e(x)\|_0 \leq \sqrt{c_1} h^2 \|u''(x)\|_0. \quad (6.2.7)$$

下面再来估计 $\|e'(x)\|_0$. 由 (6.2.6) 式和 Parseval 等式

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |e'(x)|^2 dx &= \frac{h_{i-1}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{h_{i-1}} \right)^2 a_n^2, \\ \int_{x_{i-1}}^{x_i} |e''(x)|^2 dx &= \frac{h_{i-1}}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n\pi}{h_{i-1}} \right)^4 a_n^2. \end{aligned}$$

由于

$$\left(\frac{n\pi}{h_{i-1}} \right)^2 a_n^2 \leq \frac{h_{i-1}^2}{\pi^2} \left(\frac{n\pi}{h_{i-1}} \right)^4 a_n^2, \quad n=1, 2, \dots,$$

因此

$$\begin{aligned} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |e'(x)|^2 dx &\leq \frac{h_{i-1}^2}{\pi^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |e''(x)|^2 dx \\ &= \frac{h_{i-1}^2}{\pi^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(x)|^2 dx \\ &\leq \frac{h^2}{\pi^2} \int_{x_{i-1}}^{x_i} |u''(x)|^2 dx. \end{aligned}$$

两端关于 i 求和并开方, 则得到插值误差一阶导数的估计

$$\|e'(x)\|_0 \leq \frac{h}{\pi} \|u''(x)\|_0. \quad (6.2.8)$$

最后,利用(6.2.7)和(6.2.8)式,得到

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_1 &= [\|e(x)\|_0^2 + \|e'(x)\|_0^2]^{1/2} \\ &\leq \|e(x)\|_0 + \|e'(x)\|_0 \\ &\leq ch \|u''\|_0. \end{aligned} \quad (6.2.9)$$

代入(6.2.5)式便可得有限元解的误差估计

$$\|u - u_h\|_1 \leq ch \|u''\|_0. \quad \square$$

6.2.2 L_2 范数的估计

观察(6.2.7)式,线性有限元解在 L_2 范数下的误差估计应该达到 $O(h^2)$. 但是我们并没有关于 L_2 范数的形如(6.1.3)式的最佳估计. 为克服这一困难,需要利用所谓的 Nitsche 技巧.

定理 6.3 设 $u \in C^2[a, b]$ 是(6.2.1)或(6.2.2)式的解, u_h 是有限元方程(6.2.3)的解,则存在与 h 无关的常数 $c > 0$, 使得

$$\|u - u_h\|_0 \leq ch^2 \|u''\|_0.$$

证明 设 z 是辅助边值问题

$$\begin{cases} -\frac{d}{dx}\left(p \frac{dz}{dx}\right) + qz = u - u_h, & x \in (a, b) \\ z(a) = 0, \quad z'(b) = 0 \end{cases} \quad (6.2.10)$$

的解,与边值问题(6.2.10)相应的变分方程是

$$a(z, v) = (u - u_h, v), \quad \forall v \in H_{0E}^1, \quad (6.2.11)$$

双线性泛函 $a(z, v)$ 与(6.2.2)中的相同. 特别取 $v = u - u_h \in H_{0E}^1$, 则得

$$\|u - u_h\|_0^2 = a(u - u_h, z). \quad (6.2.12)$$

另外,由(6.1.5)式

$$a(u - u_h, v_h) = 0, \quad \forall v_h \in V_h. \quad (6.2.13)$$

于是(6.2.12)式可写成

$$\|u - u_h\|_0^2 = a(u - u_h, z - v_h), \quad \forall v_h \in V_h. \quad (6.2.14)$$

利用 $a(\cdot, \cdot)$ 的有界性及定理 6.2, 得

$$\begin{aligned} & |a(u - u_h, z - v_h)| \\ & \leq M \|u - u_h\|_1 \|z - v_h\|_1 \\ & \leq Mc_1 h \|u''\|_0 \|z - v_h\|_1, \quad \forall v_h \in V_h. \end{aligned}$$

将此式代入(6.2.14)式右端, 有

$$\|u - u_h\|_0^2 \leq Mc_1 h \|u''\|_0 \|z - v_h\|_1, \quad \forall v_h \in V_h.$$

两端关于 $v_h \in V_h$ 取下确界, 得到

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_0^2 & \leq Mc_1 h \|u''\|_0 \left(\inf_{v_h \in V_h} \|z - v_h\|_1 \right) \\ & \leq Mc_1 h \|u''\|_0 \|z - z_I\|_1, \end{aligned}$$

其中 z_I 是 z 在 V_h 中的插值函数, 利用估计式(6.2.9), 便得

$$\|u - u_h\|_0^2 \leq c_2 h^2 \|u''\|_0 \|z\|_0,$$

这里 c_2 是与 u 和 h 无关的常数.

(6.2.15)

接下来估计 $\|z''\|_0$. 在(6.2.11)式中取 $v=z$, 并利用 $a(z, z)$ 的正定性, 得

$$\begin{aligned} \gamma \|z\|_1^2 & \leq |a(z, z)| = |(u - u_h, z)| \\ & \leq \|u - u_h\|_0 \|z\|_0 \leq \|u - u_h\|_0 \|z\|_1, \end{aligned}$$

从而有

$$\gamma \|z\|_1 \leq \|u - u_h\|_0,$$

或

$$\|z\|_1 \leq \frac{1}{\gamma} \|u - u_h\|_0. \quad (6.2.16)$$

另外, 由(6.2.10)式

$$\begin{aligned} z''(x) &= \frac{1}{p(x)} \left[\frac{d}{dx} \left(p \frac{dz}{dx} \right) - p'(x) z'(x) \right] \\ &= \frac{1}{p(x)} [-p'(x) z'(x) + q(x) z(x) - (u - u_h)] \end{aligned}$$

故

$$\begin{aligned}\|z''\|_0 &\leq \frac{1}{p_{\min}}[(\max |p'(x)|)\|z'\|_0 + \|u - u_h\|_0 \\ &\quad + (\max |q(x)|)\|z\|_0] \\ &\leq \frac{\alpha_1}{p_{\min}}(\|z\|_1 + \|u - u_h\|_0),\end{aligned}\quad (6.2.17)$$

其中 α_1 为常数. 将(6.2.16)式代入(6.2.17)式右端, 便知存在常数 α 使

$$\|z''\|_0 \leq \alpha \|u - u_h\|_0. \quad (6.2.18)$$

将(6.2.18)式用于(6.2.15)式, 并消去公因子 $\|u - u_h\|_0$, 便得

$$\|u - u_h\|_0 \leq ch^2 \|u''\|_0. \quad \square$$

由定理 6.2 和定理 6.3 给出的误差估计知, 当 $h \rightarrow 0$ 时, 线性有限元解 u_h 按范数 $\|\cdot\|_1$ 和 $\|\cdot\|_0$ 收敛到 u , 收敛阶分别为 $O(h)$ 和 $O(h^2)$. 这里所说的收敛并非逐点收敛, 而是积分意义下的收敛.

§ 6.3 二维三角线性元的误差估计

考虑 Poisson 方程第一边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in \Omega, \\ u|_r = 0. \end{cases}$$

假定 $f \in C^0(\Omega)$, Ω 的边界 Γ 充分光滑, 足以保证解 $u \in C^2(\bar{\Omega})$. 为避免三角剖分 Ω_h 与 Ω 的几何误差及数值积分引起的误差, 我们进一步假定 $\bar{\Omega}$ 是凸多边形区域, 并假定出现在有限元方程中的数值积分都是精确计算的.

设 E_1, E_2, \dots, E_n 是三角剖分的单元, ρ_i 是单元 E_i 的内切圆直径, h_i 是单元 E_i 的外接圆直径, $h = \max h_i$, 我们仅考虑线性元. 设 u_h 是线性有限元解, 则由定理 6.1 有

$$\|u - u_h\|_1 \leq \beta \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|_1,$$

其中 $V_h \subset H^1(\Omega)$ 是分片线性函数空间. 若设 $u_I \in V_h$ 为 u 的分片线性插值函数, 则

$$\|u - u_h\|_1 \leq \beta \|u - u_I\|_1.$$

于是, 有限元解 u_h 的 H^1 范数的误差估计归结为线性插值函数 u_I 的 H^1 范数的误差估计.

为此, 先在任一单元 E 上考虑线性插值函数的误差估计.

设单元 E 的三个顶点的编号为 1, 2 和 3, 若延用第五章的记号, $E = \Delta(1, 2, 3)$, 那么在 E 上的线性元的三个基函数为

$$\begin{cases} L_1 = \frac{1}{2S}[(x_2y_3 - x_3y_2) + (y_2 - y_1)x + (x_3 - x_2)y], \\ L_2 = \frac{1}{2S}[(x_3y_1 - x_1y_3) + (y_3 - y_1)x + (x_1 - x_3)y], \\ L_3 = \frac{1}{2S}[(x_1y_2 - x_2y_1) + (y_1 - y_2)x + (x_2 - x_1)y], \end{cases} \quad (6.3.1)$$

其中 S 表示单元 E 的面积, (x_i, y_i) 是 E 的顶点 i 的坐标 ($i=1, 2, 3$). 此时有限元解 u_h 在 E 上的限制可表示为

$$u_h^E = u_1L_1 + u_2L_2 + u_3L_3.$$

任取一点 $(\alpha_1, \alpha_2) \in E$, 做一个线性辅助函数

$$p(x, y) = u(\alpha_1, \alpha_2) + u_x(\alpha_1, \alpha_2)(x - \alpha_1) + u_y(\alpha_1, \alpha_2)(y - \alpha_2), \quad (6.3.2)$$

它是一个一次多项式, 故

$$p(x, y) = p_I(x, y) = p(x_1, y_1)L_1 + p(x_2, y_2)L_2 + p(x_3, y_3)L_3,$$

于是

$$u - u_I = (u - p) + (p_I - u_I).$$

记 $D^0 = I$ (恒等算子), D^1 为关于 x 或 y 的一阶偏导数算子, 则

$$|D'u - D'u_I| \leq |D'u - D'p| + |D'p_I - D'u_I|$$

$$\leq |D'u - D'p| + \sum_{i=1}^3 |p(x_i, y_i) - u(x_i, y_i)| \cdot |D'L_i|, s = 0, 1. \quad (6.3.3)$$

先来估计(6.3.3)式右端第一部分. 将 u 在点 (a_1, a_2) 处作 Taylor 展开, 展开式的线性部分就是(6.3.2)式中的 $p(x, y)$, 因此

$$D^0(u-p) = \frac{1}{2} [u_{xx}(a_1', a_2')(x-a_1)^2 + 2u_{xy}(a_1', a_2')(x-a_1)(y-a_2) + u_{yy}(a_1', a_2')(y-a_2)^2],$$

同理

$$D_x^1 u - D_x^1 p = u_{xx}(a_1'', a_2'')(x-a_1) + u_{xy}(a_1'', a_2'')(y-a_2),$$

$$D_y^1 u - D_y^1 p = u_{xy}(a_1''', a_2''')(x-a_1) + u_{yy}(a_1''', a_2''')(y-a_2),$$

其中 (a_1', a_2') , (a_1'', a_2'') 和 (a_1''', a_2''') 均为 E 中点. 令

$$M_2^{(E)} = \max(\sup_E |u_{xx}|, \sup_E |u_{xy}|, \sup_E |u_{yy}|),$$

则有

$$\sup_E |u - p| \leq 2M_2^{(E)} h_E^2, \quad (6.3.4)$$

$$\sup_E |D^1 u - D^1 p| \leq 2M_2^{(E)} h_E. \quad (6.3.5)$$

下面我们来估计(6.3.3)式中的第二部分. 由(6.3.1)式并参见图 6.1, 得到

$$\begin{cases} \sup_E |D^0 L_i| = \sup_E |L_i| = \sup_E \left| \frac{S_i}{S} \right| \leq 1, \\ \sup_E |D_x^1 L_i| = \sup_E \left| \frac{y_2 - y_3}{2S} \right| \leq \frac{\sqrt{23}}{23 \cdot 14} \leq \frac{1}{\rho_E}, \\ \sup_E |D_y^1 L_i| = \sup_E \left| \frac{x_3 - x_2}{2S} \right| \leq \frac{\sqrt{23}}{23 \cdot 14} \leq \frac{1}{\rho_E}, \\ i = 1, 2, 3. \end{cases}$$

(6.3.6)

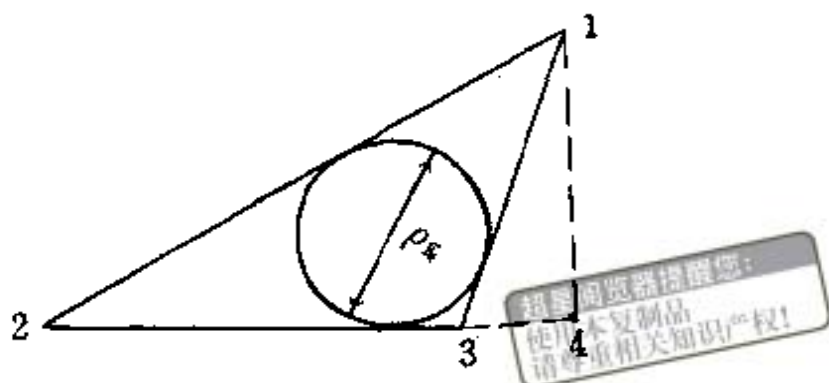


图 6.1 三角单元示意图

将 (6.3.4)–(6.3.6) 式代入 (6.3.3) 式, 便得到任一单元 E 上线性插值函数的误差估计

$$\sup_E |D'u - D'u_I| \leq 2 \left[1 + 3 \left(\frac{h_E}{\rho_E} \right)^2 \right] M_2^{(E)} h_E^{2-s}, \quad s=0,1. \quad (6.3.7)$$

现在对三角剖分加一必要的限制, 当剖分无限细分时 ($h \rightarrow 0$), 要求对一切单元 E 满足

$$c_1 \leq \frac{h_E}{\rho_E} \leq c_2, \quad (6.3.8)$$

这相当于所有单元的最小内角大于一正数. 记 $M_2 = \max_E M_2^{(E)}$, 则在 (6.3.8) 的假设下, Ω 上线性插值函数的误差估计可表示为

$$\sup_E |D'u - D'u_I| \leq c M_2 h^{2-s}, \quad s=0,1. \quad (6.3.9)$$

由 (6.3.9) 可给出 Ω 上线性插值函数关于 H^1 范数的误差估计

$$\begin{aligned} \|u - u_I\|_1 &= \left[\iint_{\Omega} |u - u_I|^2 dx dy + \iint_{\Omega} |D_x^1(u - u_I)|^2 dx dy \right. \\ &\quad \left. + \iint_{\Omega} |D_y^1(u - u_I)|^2 dx dy \right]^{1/2} \\ &\leq (m\Omega)^{1/2} \left[\sum_{s=0}^1 \sup_{\Omega} |D^s(u - u_I)| \right] \end{aligned}$$

$$\leq c(m\Omega)^{1/2}M_2(2+h^2)^{1/2}h,$$

其中 $m\Omega$ 是 Ω 的面积. 由此便可得到线性有限元解 u_h 按 H^1 范数的误差估计

$$\begin{aligned}\|u - u_h\|_1 &\leq \beta \|u - u_I\|_1 \leq \beta c(m\Omega)^{1/2}M_2(2+h^2)^{1/2}h \\ &\leq ch.\end{aligned}\quad (6.3.10)$$

注意, 要得到误差估计 (6.3.10) 式, 必须满足条件 (6.3.8). 如果 (6.3.8) 式不满足, 即当网格无限细分 ($h \rightarrow 0$) 时, h_E/ρ_E 无限增大, 则 $\|u - u_h\|_1 \not\rightarrow 0$ ($h \rightarrow 0$), 此时不能保证有限元解收敛. 另外, 如果剖分中有的单元出现尖角, 则 $\max_E h_E/\rho_E$ 较大, 由 (6.3.10) 式知, 有限元解的误差也随之变大, 因此在网格剖分时, 应避免出现有尖角的单元.

应用 Nitsche 技巧, 可以证明线性有限元按 L_2 范数的误差估计 $\|u - u_h\|_0 \leq ch^2$, 有兴趣的读者可参阅 [6].

习 题

1. 设 θ 是三角单元 E 的最小角, 证明

$$(2\operatorname{tg} \frac{\theta}{2})^{-1} \leq \frac{h_E}{\rho_E} \leq 2(\sin \theta)^{-1}.$$

主要参考书目

- [1] 李荣华、冯里忱,微分方程数值解法,人民教育出版社,1980.
- [2] 苏煜城、吴启光,偏微分方程数值解法,气象出版社,1989.
- [3] 陆金甫、关治,偏微分方程数值解法,清华大学出版社,1987.
- [4] 徐长发,实用偏微分方程数值解法,华中理工大学出版社,1990.
- [5] 汤怀民、胡健伟,微分方程数值方法,南开大学出版社,1990.
- [6] 李德茂,有限元数学基础和误差估计,内蒙古大学出版社,1991.
- [7] 黄明游,发展方程的有限元方法,上海科学技术出版社,1988.
- [8] *P. G. Ciarlet, The Finite Element Method For Elliptic Problems, North-Holland Publishing Company, 1978.*
- [9] *G. I. Marchuk, Methods of Numerical Mathematics, Springer-Verlag New York Heidelberg Berlin, 1981.*
- [10] 李开泰,黄艾香,黄庆怀,有限元方法及其应用,西安交通大学出版社,1992.