13.5 隐函数组

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

设有隐函数组

$$\begin{cases} F(x,y,z) &= 0 \\ G(x,y,z) &= 0 \end{cases} \qquad (x,y,z) \in V, \tag{1}$$

设方程组 (1) 有一个交点, 记为 $P_0(x_0,y_0,z_0)$.

先考虑第一个方程, 设 $F_z(P_0) \neq 0$, 因此根据定理 14.4.3, 存在 (x_0,y_0) 的邻域 $U(x_0,y_0)$, 由方程组 (1) 中的第一个方程 $F(x,y,z)=0$ 可唯一确定隐函数 $z=f(x,y)$, 满足 $z_0=f(x_0,y_0)$, 且在 $U(x_0,y_0)$ 中

$$F(x,y,f(x,y)) \equiv 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z}, \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z}. \tag{2}$$

在 $U(x_0,y_0)$ 中考虑新的函数 (这里用到了方程组 (1) 中的第二个方程):

$$H(x,y) := G(x,y,f(x,y)), \quad (x,y) \in U(x_0,y_0). \tag{3}$$

如果从方程 $H(x,y)=0$ 可以确定 y 是 x 的隐函数, 则这个隐函数结合 $z=f(x,y)$ 就可以得到一条空间的曲线. 而为了得到这个隐函数, 只需对函数 $H(x,y)$ 在点 (x_0,y_0) 验证隐函数定理所要求的条件即可. 显然

$$H(x_0,y_0) = G(x_0,y_0,f(x_0,y_0)) = G(x_0,y_0,z_0) = 0,$$

假设 $H(x,y)$ 在 $U(x_0,y_0)$ 中具有连续的偏导数, 进而根据复合函数求导法则和 (2), 可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial y} &= G_y + G_z \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= G_y - G_z \cdot \frac{F_y}{F_z} \\ &= -\frac{1}{F_z}\left(F_y G_z - F_z G_y\right). \end{aligned} \tag{4}$$

所以只要再假设

$$\left(F_y G_z - F_z G_y\right)\Big|_{P_0} \neq 0, \tag{5}$$

则 $H_y(P_0) \neq 0$, 由隐函数定理 14.4.2, 可以得到, 方程 $H(x,y)=0$ 在 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 内可以确定唯一的隐函数 $y=\varphi(x)$, 满足 $y_0=\varphi(x_0)$ 且当 $x \in U(x_0)$ 时在 $H(x,\varphi(x)) \equiv 0$. 如果记 $\psi(x)=f(x,\varphi(x))$, 则

$$x=x, \qquad y=\varphi(x), \qquad z=\psi(x), \qquad x \in U(x_0)$$

即是由方程组 (1) 所确定的以 x 为参数的空间曲线.

鉴于条件 (5) 的重要性, 要用专门的术语来描述. 容易看出, 条件 (5) 的表达式可以写成由 F, G 关于自变量 y, z 的偏导数所组成的 2×2 矩阵的行列式在 P_0 点的取值, 将这个行列式记为

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} := \begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix} = F_yG_z - F_zG_y,$$

称之为函数组 F, G 关于自变量 y, z 的 **Jacobi 行列式**.

将上面的分析结果总结成为如下的定理.

定理 1 (隐函数组的存在唯一性) *设函数组 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 满足下列条件:*

(1) $F(x_0,y_0,z_0)=0$ 在 $G(x_0,y_0,z_0)=0$;

(2) F 和 G 在以点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为内点的区域 $V\subset\mathbb{R}^3$ 中连续且存在一阶连续偏导数;

(3) F, G 关于 y, z 的 Jacobi 行列式 $J = \left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0} \neq 0$.

则在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subset V$ 内, 由方程组 (1) 可以唯一地确定一个定义在点 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 内的一元 (隐) 函数组

$$\begin{cases} y = \varphi(x), \\ z = \psi(x), \end{cases} \tag{6}$$

使得

1) $y_0=\varphi(x_0), z_0=\psi(x_0)$ 且 $\{(x,\varphi(x),\psi(x))|x\in U(x_0)\}\subset U(P_0)$, 进而有恒等式

$$\begin{cases} F(x,\varphi(x),\psi(x)) \equiv 0, \\ G(x,\varphi(x),\psi(x)) \equiv 0, \end{cases} \qquad x\in U(x_0); \tag{7}$$

2) $y=\varphi(x)$ 和 $z=\psi(x)$ 在 $U(x_0)$ 内连续;

3) $y=\varphi(x)$ 和 $z=\psi(x)$ 在 $U(x_0)$ 内有一阶连续的导数 $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ 且

$$\frac{d\varphi}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}, \qquad \frac{d\psi}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}, \tag{8}$$

其中

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}, \qquad \frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} = \begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}, \qquad \frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}.$$

证明. 由条件 (3) 知 $(F_yG_z-F_zG_y)\big|_{P_0}\neq 0$, 因此 $F_z(P_0)$ 和 $F_y(P_0)$ 不同时为零. 前面的分析实际上已经证明了在条件 (3) 和 $F_z(P_0)\neq 0$ 的情况下, 方程组 (1) 存在隐函数组 (6) 因此得到定理的结论 1) 和 2). 为了证明 (8) 式, 在恒等式的方程组 (7) 的两端对 x 求导

$$\begin{cases} F_x + F_y\varphi'(x) + F_z\psi'(x) \equiv 0, \\ G_x + G_y\varphi'(x) + G_z\psi'(x) \equiv 0. \end{cases} \tag{9}$$

注意到 $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$ 所对应的系数行列式 $\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)} = F_yG_z - F_zG_y \neq 0$, 因此由这个方程组可以解出 $\varphi'(x)$, $\psi'(x)$, 正是 (8) 式. 显然该隐函数组是连续可导的.

另一种情形, 即 $F_y(P_0)\neq 0$, 仿照上述推导过程, 也可以得到相同的结论. ∎

思考题

1. 为什么说反函数 (组) 是隐函数 (组) 的特例?

解: 反函数组

$$\begin{cases} u &= u(x,y), \\ v &= v(x,y), \end{cases}$$

若设 $F(u,x,y)=u-u(x,y), G(v,x,y)=v-v(x,y)$, 则反函数组就转化为下面的隐函数组

$$\begin{cases} F(x,y,u) &= 0 \\ G(x,y,v) &= 0 \end{cases}$$

所以说反函数 (组) 是隐函数 (组) 的特例 □

2. 保证隐函数组存在唯一性的条件是什么? 具有什么代数意义?

解: 设函数组 $F(x,y,z)$ 和 $G(x,y,z)$ 满足下列条件:

(1) $F(x_0,y_0,z_0)=0$ 在 $G(x_0,y_0,z_0)=0$;

(2) F 和 G 在以点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为内点的区域 $V\subset\mathbb{R}^3$ 中连续且存在一阶连续偏导数;

(3) F,G 关于 y,z 的 Jacobi 行列式 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\Big|_{P_0}\neq 0$.

则在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subset V$ 内, 由方程组 (1) 可以唯一地确定一个定义在点 x_0 的邻域 $U(x_0)$ 内的一元 (隐) 函数组

$$\begin{cases} y &= \varphi(x), \\ z &= \psi(x). \end{cases}$$

□

3. 由两个四元函数所组成的方程组可以确定几个隐函数组?

解: 六个. □

习题

1. 在哪些点, 由隐函数组定理可以保证方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0, \end{cases}$ 关于变量 z 可参数化. 试求 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}$.

解: 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1, G(x,y,z)=x+y+z$, 则 $J=\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\Big|_{P_0}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{J}=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} &= \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2(x-y). \end{aligned}$$

若方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2=1 \\ x+y+z=0, \end{cases}$ 关于变量 z 可参数化, 则需要 $J\neq 0$, 即 $x\neq y$. 即区间 $D=\boldsymbol{r}^3/\{x\neq y\}$ 可以使上述隐函数组关于变量 z 可参数化. 事实上, 对于 $\forall P_0(x_0,y_0,z_0)\in D$, 有

(1) $F(P_0)=0, G(P_0)=0$;

(2) F,G 在 $\boldsymbol{r}^3$ 上是连续的且存在一阶连续的偏导数;

(3) Jacobi 行列式 $J = \left.\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\right|_{P_0} \neq 0$.

于是有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z} &= \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)} = \frac{y-z}{x-y},\\ \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z} &= \frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)} = \frac{z-x}{x-y}.\end{aligned}$$

□

2. 设有方程组 $\begin{cases} x^2+y^2+z^2 = r^2 \\ x^2+y^2 = rx, \end{cases}$ 试求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ 和 $\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y}$.

解: (1) 若方程组能确定隐函数为

$$\begin{cases} y = y(x), \\ z = z(x), \end{cases}$$

则对上述函数组的两边分别对 x 求导, 可得

$$\begin{cases} 2x + 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 0, \\ \\ 2x + 2y\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = r, \end{cases}$$

当

$$\begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2y & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

时, 即 $y \neq 0, z \neq 0$, 可解得方程组的解为:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r-2x}{2y}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = -\frac{r}{2z}.$$

(2) 若方程组能确定隐函数为

$$\begin{cases} x = x(y), \\ z = z(y), \end{cases}$$

则对上述函数组的两边分别对 y 求导, 可得

$$\begin{cases} 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + 2y + 2z\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}y} = 0, \\ \\ 2x\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} + 2y = r\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}, \end{cases}$$

当

$$\begin{vmatrix} 2x & 2z \\ 2x-r & 0 \end{vmatrix} \neq 0,$$

时, 即 $2x-r\neq 0, z\neq 0$, 可解得方程组的解为:

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2y}{r-2x},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=-\frac{ry}{(r-2x)z}.$$

□

3. 方程组 $\begin{cases} xu-yv=0 \\ yu+xv=1, \end{cases}$ 确定了 u,v 是 x,y 的函数, 试求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解: 函数组的两边分别对 x 求偏导, 得

$$\begin{cases} u+x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-y\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=0, \\ \\ y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+v+x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=0, \end{cases}$$

当

$$\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}\neq 0,$$

时, 即 $x\neq 0, y\neq 0$, 可解得方程组的解为:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=-\frac{xv+yu}{x^2+y^2},\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=\frac{-xv+yu}{x^2+y^2}.$$

函数组的两边分别对 y 求偏导, 得

$$\begin{cases} x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}-v-y\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=0, \\ \\ u+y\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}+x\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=0, \end{cases}$$

当

$$\begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix}\neq 0,$$

时, 即 $x\neq 0, y\neq 0$, 可解得方程组的解为:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y}=\frac{xv-yu}{x^2+y^2},\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=-\frac{xv+yu}{x^2+y^2}.$$

□

4. 方程组 $\begin{cases} x-u^2-yv=0 \\ y-v^2-xu=0, \end{cases}$ 确定了 u,v 是 x,y 的函数, 试求 $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial v}{\partial y}$.

解: 函数组的两边分别对 x 求偏导, 得

$$\begin{cases} 1-2ux\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-y\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}=0, \\ \\ -2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}-u-x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0, \end{cases}$$

当

$$\begin{vmatrix} -2u & -y \\ -x & -2v \end{vmatrix} \neq 0,$$

时, 即 $4uv - xy \neq 0$, 可解得方程组的解为:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2v + yu}{4uv - xy}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{2u^2 + x}{4uv - xy}.$$

函数组的两边分别对 y 求偏导, 得

$$\begin{cases} 2u\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} - u - y\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = 0, \\ \\ 1 - 2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} - x\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = 0, \end{cases}$$

当

$$\begin{vmatrix} -2u & -y \\ -x & -2v \end{vmatrix} \neq 0,$$

时, 即 $4uv - xy \neq 0$, 可解得方程组的解为:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = -\frac{2v^2 + y}{4uv - xy}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{2u + xv}{4uv - xy}.$$

□

5. 方程组 $\begin{cases} u = f(xu, y + v) \\ v = g(u - x, v^2 y), \end{cases}$ 确定了 u, v 是 x, y 的函数, 试求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解: 函数组的两边分别对 x 求偏导, 由求导的链式法则可得:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = f_1' u + f_2' \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + f_2' \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}, \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = g_1' \left(\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - 1 \right) + g_2' \left(2yv \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} \right), \end{cases}$$

解得方程组的解为:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{u\left(1 - 2vyg_2'\right) f_1' - f_2' g_1'}{\left(1 - xf_1'\right)\left(1 - 2vyg_2'\right) - f_2' g_1'}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = -\frac{uf_1' g_2' + xf_1' g_1' - g_1'}{(1 - xf_1')(1 - 2vyg_2') - f_2' g_1'}.$$

函数组的两边分别对 y 求偏导, 由求导的链式法则可得:

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = f_1' x \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + f_2' \left(1 + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} \right) \\ \\ \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = g_1' \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + g_2' \left(2yv \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} + v^2 \right), \end{cases}$$

解得方程组的解为:

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{\left(1 - 2vyg_2'\right) f_2' + f_2' g_2' v^2}{\left(1 - xf_1'\right)\left(1 - 2vyg_2'\right) - f_2' g_1'}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = -\frac{v^2(1 - xf_1')g_2' + f_2' g_1'}{(1 - xf_1')(1 - 2vyg_2') - f_2' g_1'}.$$

□

6. 方程组 $\begin{cases} x = u + v \\ y = u^2 + v^2, \end{cases}$ 确定了反函数组, 试求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}$ 和 $\dfrac{\partial v}{\partial y}$.

解: 函数组的两边分别对 x 求偏导, 得:

$$\begin{cases} 1 = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}, \\ 0 = 2u \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + 2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}. \end{cases}$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{v}{v-u}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \frac{u}{v-u}$$

函数组的两边分别对 y 求偏导, 得:

$$\begin{cases} 0 = \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}, \\ 1 = 2u \cdot \dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} + 2v\dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}. \end{cases}$$

解得

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2(u-v)}, \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{2(v-u)}$$

□

---

7. 参照两曲面交曲线的参数化定理的证明给出反函数组的存在唯一性定理的证明.

定理 2 (反函数组的存在唯一性) 设函数组

$$\begin{cases} u = u(x, y), \\ v = v(x, y). \end{cases} \quad (x, y) \in D. \tag{10}$$

中的函数都在 D 上有连续的一阶偏导数, 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 是 D 的内点. 进一步设

$$u_0 = u(x_0, y_0), \quad v_0 = v(x_0, y_0), \quad \left.\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}\right|_{P_0} \neq 0.$$

则在点 $P_0'(u_0, v_0)$ 的某邻域 $U(P_0')$ 内存在唯一的一组反函数 $x = x(u, v), y = y(u, v)$, 使得

$$x_0 = x(u_0, v_0), \quad y_0 = y(u_0, v_0), \quad \{(x(u, v), y(u, v)) | (u, v) \in U(P_0')\} \subset U(P_0).$$

进而, 恒等式

$$\begin{cases} u \equiv u(x(u, v), y(u, v)), \\ v \equiv v(x(u, v), y(u, v)), \end{cases} \quad (u, v) \in D' = T(D), \tag{11}$$

和

$$\begin{cases} x \equiv x(u(x, y), v(x, y)), \\ y \equiv y(u(x, y), v(x, y)), \end{cases} \quad (x, y) \in D. \tag{12}$$

分别在 $U(P_0')$ 和 P_0 的某邻域中成立, 且 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 在 $U(P_0')$ 内存在连续的一阶偏导数:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \frac{\partial v}{\partial y} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, & \frac{\partial x}{\partial v} &= -\frac{\partial u}{\partial y} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, \\ \frac{\partial y}{\partial u} &= -\frac{\partial v}{\partial x} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}, & \frac{\partial y}{\partial v} &= \frac{\partial u}{\partial x} \Big/ \frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}. \end{aligned} \tag{13}$$

证明. 证明仿照最前面的例题部分 考虑函数方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) &= u-u(x,y)=0, \\ G(x,y,u,v) &= v-v(x,y)=0, \end{cases}$$

由假设, 在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 点处

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0.$$

由向量值函数的隐函数存在定理, 在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 附近存在向量值函数 g:

$$\begin{cases} x &= x(u,v), \\ y &= y(u,v). \end{cases} \qquad (x,y)\in O(P_0',\rho).$$

满足

i) $x_0=x(u_0,v_0), y_0=y(u_0,v_0)$;

ii)

$$\begin{cases} u-u(x(u,v),y(u,v)) &= 0, \\ v-v(x(u,v),y(u,v)) &= 0. \end{cases} \qquad (x,y)\in O(P_0',\rho).$$

而且 $x(u,v)$ 和 $y(u,v)$ 在 $O(P_0',\rho)$ 上具有连续的偏导数. 这说明在 $O(P_0',\rho)$ 上 g 为 f 的逆映射.

在 ii) 中对 u 求偏导得

$$\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}=1,$$
$$\frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=0.$$

于是得到:

$$\frac{\partial x}{\partial u}=\frac{\partial v}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}, \frac{\partial y}{\partial u}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)},$$

同理可得:

$$\frac{\partial x}{\partial v}=-\frac{\partial u}{\partial y}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}, \frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial u}{\partial x}\Big/\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}.$$

∎

8. 参照两曲面交曲线的参数化定理的证明给出隐函数组的存在唯一性定理的证明.

定理 3 (隐函数组的存在唯一性) *设函数组 $F(x,y,u,v)$ 和 $G(x,y,u,v)$ 满足下列条件:*

(1) $F(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$ 在 $G(x_0,y_0,u_0,v_0)=0$;

(2) F 和 G 在以点 $P_0(x_0,y_0,u_0,v_0)$ 为内点的区域 $V\subset\mathbb{R}^4$ 中连续;

(3) F 和 G 在 V 内存在一阶连续偏导数且 Jacobi 行列式 $J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}\Big|_{P_0}\neq 0$.

则在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subset V$ 内, 由方程组

$$\begin{cases} F(x,y,u,v) &= 0, \\ G(x,y,u,v) &= 0, \end{cases} \qquad (x,y,u,v)\in V, \tag{14}$$

可以唯一地确定一个定义在点 $Q_0(x_0,y_0)$ 的二维区域 $U(Q_0)$ 内的二元 (隐) 函数组

$$u=f(x,y), \qquad v=g(x,y)$$

使得

1) $U_0=f(x_0,y_0), v_0=g(x_0,y_0)$ 且 $\{(x,y,f(x,y),g(x,y))|(x,y)\in U(Q_0)\}\subset U(P_0)$, 进而有恒等式

$$\begin{cases} F(x,y,f(x,y),g(x,y)) & \equiv & 0, \\ G(x,y,f(x,y),g(x,y)) & \equiv & 0, \end{cases} \qquad (x,y)\in Q_0;$$

2) $u=f(x,y)$ 和 $v=f(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 内连续;

3) $u=f(x,y)$ 和 $v=f(x,y)$ 在 $U(Q_0)$ 内有一阶连续的偏导数 U_x,u_y 在 v_x,v_y 且

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}, \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}, \qquad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}. \end{aligned} \tag{15}$$

证明. 证明仿照最前面的例题部分 我们先证明存在性和连续可偏导性. 由于在点 (x_0,y_0,u_0,v_0) 处

$$\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix} \neq 0,$$

所以 F_u 与 F_v 至少一个在此点不为零. 不妨设 F_u 不等于零, 那么对方程 $F(x,y,u,v)=0$ 应用隐函数存在定理就知道, 在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 附近, 存在具有连续偏导的隐函数 $u=\phi(x,y,v)$, 满足

$$F(x,y,\phi(x,y,v),v)=0, u_0=\phi(x_0,y_0,v_0).$$

将 $u=\phi(x,y,v)$ 代入

$G(x,y,u,v)=0$, 再看函数方程

$$H(x,y,v)=G(x,y,\phi(x,y,v),v)=0.$$

由于在 (x_0,y_0,v_0) 点处, (相应地在 (x_0,y_0,u_0,v_0) 点处),

$$\begin{aligned} H_v &= G_u\phi_v+G_v = G_u\left(-\frac{F_v}{F_u}\right)+G_v \\ &= \frac{F_uG_v-F_vG_u}{F_u} = \frac{1}{F_u}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0, \end{aligned}$$

对方程 $H(x,y,v)=G(x,y,\phi(x,y,v),v)=0$ 应用隐函数存在定理就知道, 在 (x_0,y_0,v_0) 附近, 存在具有连续偏导数的隐函数 $v=g(x,y)$, 它满足 $H(x,y,g(x,y))=0$, 即 $G(x,y,\phi(x,y,g(x,y)),g(x,y))=0$. 如果记 $f(x,y)=\phi(x,y,g(x,y))$, 那么在 (x_0,y_0) 附近必成立

$$\begin{cases} F(x,y,f(x,y),g(x,y))=0, \\ G(x,y,f(x,y),g(x,y))=0 \end{cases}$$

由隐函数存在定理知道函数 $u=\phi(x,y,v)$ 在 (x_0,y_0,v_0) 附近、 $v=g(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 附近都具有连续偏导数. 即向量值函数 $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f(x,y) \\ g(x,y) \end{pmatrix}$ 在某个邻域 $O((x_0,y_0),\rho)$ 内具有连续偏导数.

应用多元函数的链式规则, 就有

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial x}+\dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial x}=0, \end{cases}$$

因此

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} \end{pmatrix}.$$

同理, 由

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial F}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} + \dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial u}{\partial y} + \dfrac{\partial G}{\partial v}\dfrac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases}$$

因此

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

两个矩阵式子合并就得

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

即

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial u} & \dfrac{\partial F}{\partial v} \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial u} & \dfrac{\partial G}{\partial v} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} & \dfrac{\partial F}{\partial y} \\ \\ \dfrac{\partial G}{\partial x} & \dfrac{\partial G}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

∎

9. 叙述和证明 n 个变量在 m $(m \leq n)$ 个函数所构成的函数组的隐函数组存在唯一性定理.

定理 4 *若 $n+m$ 元函数 $F_i(x_1, x_2, \cdots, x_n), i = 1, 2, \cdots, m$ 满足以下条件:*

(1)

$$F_i(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0) = 0, i = 1, 2, \cdots, m;$$

(2) *在闭长方体*

$$D = \{(x_1, x_2, \cdots, x_n) || x_i - x_i^0 | \leqslant a_i, i = 1, 2, \cdots, n\}$$

上, 函数 $F_i, i = 1, 2, \cdots, m$ 连续, 且具有连续偏导数;

(3) *在 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 点处, Jacobi 行列式*

$$\frac{\partial(F_1, F_2, \cdots, F_m)}{\partial(x_{(m+1)}, x_{(m+2)}, x_n)} \neq 0.$$

那么

(i) 在点 $(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$ 的某个邻域上, 可以从函数方程组

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots \\ F_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \end{cases}$$

唯一确定向量函数

$$\begin{pmatrix} x_{m+1} \\ x_{m+2} \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{m+1}(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ f_{m+2}(x_1, x_2, \cdots, x_m) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \cdots, x_m) \end{pmatrix}, (x_1, x_2, \cdots, x_m) \in O(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0, \rho),$$

它满足方程

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_m, f_{m+1}(x_1, x_2, \cdots, x_m), f_{m+2}(x_1, x_2, \cdots, x_m), f_n(x_1, x_2, \cdots, x_m) = 0,$$

以及 $x_i^0 = f_i(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_m^0), i = m+1, m+2, \cdots, n;$

(ii) 这和向量值函数在 $O(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{m^0}, \rho)$ 上连续;

(iii) 这个向量值隐函数在 $O(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_{m^0}, \rho)$ 上具有连续的导数, 且

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x_{m+1}}{\partial x_m} \\ \frac{\partial x_{m+2}}{\partial x_1} & \frac{\partial x_{m+2}}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x_{m+2}}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial x_m}{\partial x_1} & \frac{\partial x_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial x_m}{\partial x_m} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \frac{F_1}{\partial x_{m+1}} & \frac{F_1}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \frac{F_1}{\partial x_m} \\ \frac{F_2}{\partial x_{m+1}} & \frac{F_2}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \frac{F_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{F_m}{\partial x_{m+1}} & \frac{F_m}{\partial x_{m+2}} & \cdots & \frac{F_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}^{-1} .$$

$$\begin{pmatrix} \frac{F_1}{\partial x_1} & \frac{F_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{F_1}{\partial x_m} \\ \frac{F_2}{\partial x_1} & \frac{F_2}{\partial x_2} & \cdots & \frac{F_2}{\partial x_m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{F_m}{\partial x_1} & \frac{F_m}{\partial x_2} & \cdots & \frac{F_m}{\partial x_m} \end{pmatrix}.$$