# 16.2

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

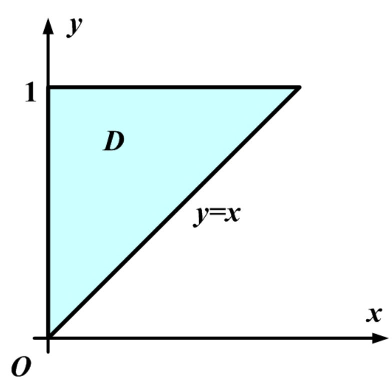
## 课本例题

**例 1** 计算二重积分 $\iint\limits_D (x^2+2xy-3y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,2]\times[0,1]$.

**解:** 由于被积函数在 $D$ 上连续, 当然在 $D$ 上可积, 所以应用定理 **??**, 有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2 \mathrm{d}x\int_0^1 (x^2+2xy-3y^2)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^2 (x^2y+xy^2-y^3)\Big|_0^1 \mathrm{d}x\\ &= \int_0^2 (x^2+x-1)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{x^3}{3}+\frac{x^2}{2}-x\right]_0^2=\frac{8}{3}.\end{aligned}$$

□




**例 2** 设 $D$ 是由直线 $x=0, y=1$ 及 $y=x$ 围成的区域 (图**??**), 试计算二重积分 $I=\iint_D x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 的值.

**解:** 若采用 $x$ 型区域进行积分, 则

$$I=\int_0^1 x^2\mathrm{d}x\int_x^1 \mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y.$$

由于 $\mathrm{e}^{-y^2}$ 的原函数无法用初等函数形式表示, 因此改用另一种顺序的累次积分, 用 $y$ -型区域进行积分, 则有

$$I=\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^y x^2\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\int_0^1 y^3\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y.$$

由分部积分法, 即可算得:

$$I=\frac{1}{6}-\frac{1}{3e}.$$

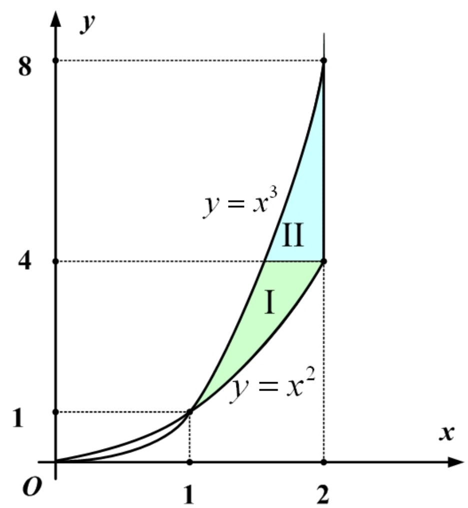
□

可见, 计算二重积分时, 要安排好累次积分顺序. 如果安排不当, 不仅使计算复杂, 有时甚至计算不出结果.

**例 3** 交换下面累次积分的顺序

$$(1)\qquad \int_0^1 \mathrm{d}x\int_3^5 f(x,y)\mathrm{d}y,$$

$$(2)\qquad \int_1^2 \mathrm{d}x\int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\mathrm{d}y.$$



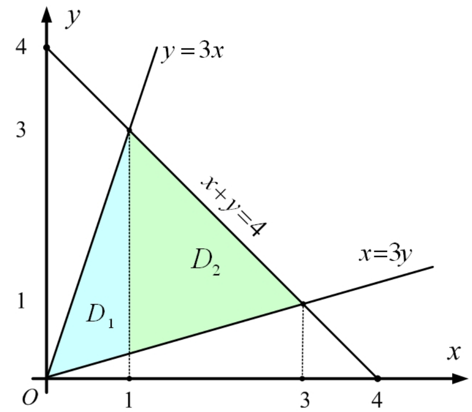

**解:** 在 (1) 中, 积分区域是边平行于坐标轴的矩形 $D=[0,1]\times[3,5]$. 所以可以直接交换积分顺序, 则有

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_3^5 f(x,y)\mathrm{d}y=\int_3^5 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x$$

在 (2) 中, 根据扫描方式在 $x$ 型积分区域 $D=\{(x,y)\mid x^2\le y\le x^3, 1\le x\le 2\}$ 要比第 (1) 题复杂, 为了交换积分顺序, 要将 $D$ 换成 $y$ 型区域.

由于将 $D$ 作为 $y$ 型区域时, 虽然左边界有一个统一的表达式 $x=x_1(y)=\sqrt[3]{y}, 1\le y\le 8$, 但是, 右边界的表达式却是一个分段函数 (图**??**)

$$x=x_2(y)=\begin{cases}2, & 4\le y\le 8,\\ \sqrt{y}, & 1\le y\le 4,\end{cases}$$




所以, 交换积分成 $y$ 型区域时, 要分解成两个 $y$ 型区域 $extrmI$ 和 $extrmII$, 它们无公共内点, 从而

$$\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{x^2}^{x^3} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_1^4 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_4^8 \mathrm{d}y \int_{\sqrt[3]{y}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

□

由例?? 可见, 不同的累次积分顺序, 其繁简程度也不一样.

**例 4** 计算二重积分 $\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D$ 为由直线 $y=3x, x=3y$ 及 $x+y=4$ 所围的三角形区域 (图??).

**解:** 由图??可见, 无论视 $D$ 为 $x$ 型区域还是 $y$ 型区域, 总有一条边界的表达式是分段函数. 将 $D$ 视为 $x$ 型区域, 则有

$$y_1(x) = \frac{x}{3},\ y_2(x) = \begin{cases} 3x, & 0 \le x \le 1, \\ 4-x, & 1 < x \le 3, \end{cases}$$

所以

$$\begin{aligned}
\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int\int D_1 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \int\int D_2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{3x} \mathrm{d}y + \int_1^3 \mathrm{d}x \int_{\frac{x}{3}}^{4-x} \mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(3x - \frac{x}{3}\right) \mathrm{d}x + \int_1^2 \left(4 - x - \frac{x}{3}\right) \mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{4}{3}x^2\right]_0^1 + \left[4x - \frac{2}{3}x^2\right]_1^2 = \frac{10}{3}.
\end{aligned}$$

□

**例 5** 计算由曲面 $y=x^2, y=x^3, z=1+x^2+y^2$ 所围曲顶柱体的体积.

**解:** 所求曲顶柱体的体积为

$$V = \iint\limits_D (1+x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D$ 是 $xy$ 平面上由 $y=x^2, y=x^3$ 所围成的区域, 两曲线交于 $(0,0)$ 及 $(0,1)$ 两点, 自变量 $x \in [0,1]$.

当 $0 \le x \le 1$ 时在 $x^2 \ge x^3$, 所以

$$V = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x^2} (1+x^2+y^2)\mathrm{d}y = \frac{1}{4}.$$

□

## 思考题

1. 举例说明当二重积分存在时, 两个累次积分可能不存在

**解:** 设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}, & \text{当 } x,y \text{ 都是有理数时},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

为定义在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上的函数, 其中 $q_x$ 和 $q_y$ 分别表示有理数 $x$ 和 $y$ 的既约分数的分母, 则 $f(x,y)$ 在 $D$ 上可积, 但两个不同顺序的累次积分都不存在.

**证明.** 定义

$$f_1(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_x}, & \text{当 } x,y \text{ 都是有理数时},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad (0\le t\le\frac{\pi}{2},a>0)$$

$$f_2(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{q_y}, & \text{当 } x,y \text{ 都是有理数时},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}\qquad (0\le t\le\frac{\pi}{2},a>0)$$

则易知 $f_1(x),f_2(x)$ 在 $D$ 上都可积.

事实上, 对 $\forall\epsilon(0<\epsilon<1),(0,1]$ 中分母大于 $\dfrac{1}{\epsilon}$ 的既约分数只有有限多个, 设它们是 $x_1,x_2,x_N$, 且 $0<x_i<x_{i+1}<1(i=1,2,\cdots N-1)$, 令

$$\delta=\frac{\epsilon}{4N_0}\min_{0\le i\le N-1}(x_{i+1}-x_i),\quad (x_0=0,x_{N+1}=1),$$

记

$$I_k=[x_k-\delta,x_k+\delta]\quad(k=1,2,\cdots,N),$$
$$J_k=[x_k+\delta,x_{k+1}-\delta]\quad(k=1,2,\cdots,N-1),$$
$$J_0=[0,x_1-\delta]\quad J_N=[x_N+\delta,1],$$

则得 $D$ 的一个分割 $T$:

$$J_0\times[0,1],\quad I_1\times[0,1],\quad J_1\times[0,1],\quad I_2\times[0,1],\cdots,\quad J_N\times[0,1],$$

依次记为 $\delta_1,\delta 2,\cdots,\delta_{2N+1}$. 再记 $f_1(x,y)$ 在 $\delta_i$ 上的上, 下确界分别为 $M_i,m_i$, 则 $N\ge\delta$ 时,

$$\begin{aligned}S(T)-s(T) &= \sum_{i=1}^{2N+1}(M_i-m_i)\triangle\delta_i=\sum_{k=0}^{N}M_{2k+1}\triangle J_k+\sum_{k=1}^{N}M_{2k}\triangle I_k\\ &\le \sum_{k=0}^{N}\epsilon\cdot\triangle J_k+\sum_{k=1}^{N}1\cdot\triangle I_k\le\epsilon+N\cdot2\delta<2\epsilon,\end{aligned}$$

故 $f_1(x,y)$ 在 $D$ 上可积.

同理, $f_2(x,y)$ 在 D 上亦可积. 于是 $f(x,y)=f_1(x,y)+f_2(x,y)$ 在 $D$ 上可积.

但当 $y$ 取无理数时, $f(x,y)\equiv 0$; 当 $y$ 取有理数时, 在 $x$ 为无理数处, $f(x,y)\equiv 0$; 在 $x$ 为有理数处 $f(x,y)=\dfrac{1}{q_x}+\dfrac{1}{q_y}$, 因此函数 $f(x,y)$ 在任何小区间上的振幅大于 $\dfrac{1}{q_y}>0$, 从而 $f(x,y)$ 关于 $x$ 在 $[0,1]$ 上积分不存在, 显然就不存在先 $x$ 后 $y$ 的累次积分. 同理可证, 先 $y$ 后 $x$ 的累次积分不存在. ∎

□

2. 举出两个累次积分存在而二重积分不存在的例子.

**解:** 设

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 } x=\dfrac{p_1}{q}, y=\dfrac{p_2}{q} \text{ 为既约分数}, p_1,p_2,q \text{ 为自然数},\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

则函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=[0,1]\times\ [0,1]$ 上两个累次积分存在且相等.

**证明.** 因为固定 $x_0\in\ [0,1]$, 当 $x_0$ 为无理数时, $f(x_0,y)=0$; 当 $x_0=\dfrac{p_1}{q}$ 时, $f(\frac{p_1}{q},y)$ 只有 $q$ 个间断点 $y=\dfrac{1}{q},\dfrac{2}{q},\cdots\dfrac{q}{q}$, 所以

$$\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}y=0,$$

同理

$$\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x=0,$$

但是由积分和

$$\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i)\triangle x_i\triangle y_i=\begin{cases}1, & \text{当 } (\xi_i,\eta_i)=\left(\dfrac{p_1}{q},\dfrac{p_2}{q}\right) \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } (\xi_i,\eta_i) \text{ 为其他点时}\end{cases}$$

知 $f(x,y)$ 在 $D$ 上不可积, 即重积分 $\displaystyle\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 不存在. ∎

□

## 习题

1. 计算下列二重积分.

(1) $\displaystyle\iint\limits_D (x^3+xy+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,1]\times[0,1]$ ;

(2) $\displaystyle\iint\limits_D |\sin(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=[0,\pi]\times[0,\pi]$ ;

(3) $\displaystyle\iint\limits_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid 0\le x\le 1,\sqrt{x}\le y\le 2\sqrt{x}\}$ ;

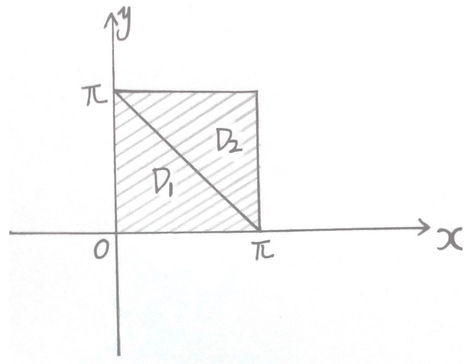
(4) $\displaystyle\iint\limits_D xy^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D$ 由 $y^2=2px$ 与直线 $x=\dfrac{p}{2}$ $(p>0)$ 围成;

(5) $\displaystyle\iint\limits_D \sqrt{x}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 2x\}$.

**解:** (1) 由于被积函数在 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上连续, 当然在 $D$ 上可积, 所以应用定理 16.2.1, 有

$$\begin{aligned}\iint\limits_D (x^3+xy+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^1 (x^3+xy+y^2)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^1\left(x^3+\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}\right)\mathrm{d}x\\ &= \left[\frac{1}{4}x^4+\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{3}x\right]_0^1=\frac{5}{6}.\end{aligned}$$

(2) 将积分区间 $D$ 分为 $D_1$ 和 $D_2$ 两部分,(如下图所示)



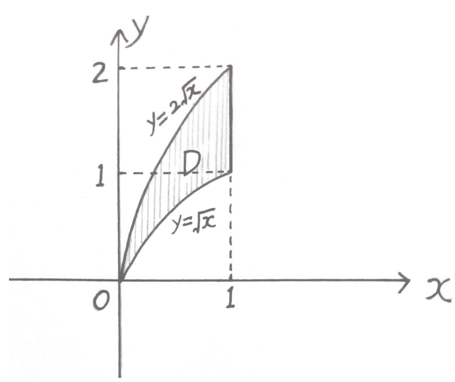

在 $D_1$ 上, $x+y\le\pi$, 则 $|\sin(x+y)|=\sin(x+y)$,

在 $D_2$ 上, $x+y\ge\pi$, 则 $|\sin(x+y)|=-\sin(x+y)$.

采用 $x$ 型区域进行积分, 得

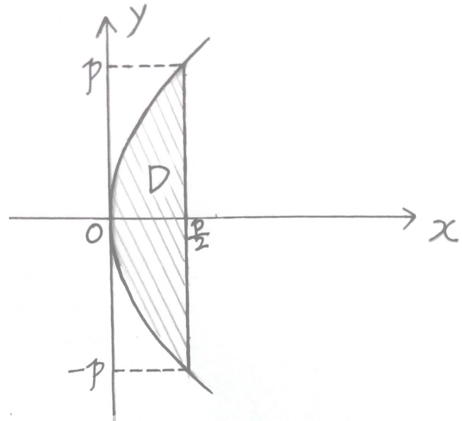
$$\begin{aligned}\iint\limits_{D}|\sin(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_1}|\sin(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}|\sin(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_0^{\pi-x}\sin(x+y)\mathrm{d}y+\int_0^{\pi}\mathrm{d}x\int_{\pi-x}^{\pi}[-\sin(x+y)]\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{\pi}(1+\cos x)\mathrm{d}y+\int_0^{\pi}(1-\cos x)\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{\pi}2\mathrm{d}y=2\pi.\end{aligned}$$

(3) 积分区域如下图所示, 采用 $x$ 型区域进行积分, 得



$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D}(x^2+y^2)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{\sqrt{x}}^{2\sqrt{x}}(x^2+y^2)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(x^y+\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{y=\sqrt{x}}^{y=2\sqrt{x}}\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 \left(x^{5/2}+\frac{7}{3}x^{3/2}\right)\mathrm{d}x \\
&= \left[\frac{2}{7}x^{7/2}+\frac{14}{15}x^{5/2}\right]_0^1=\frac{128}{105}.
\end{aligned}
$$

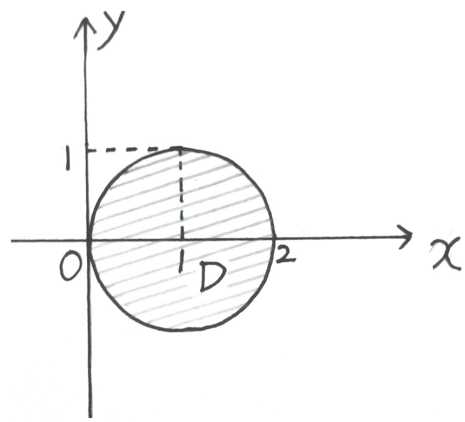
(4) 积分区域如下图所示, 采用 $y$ 型区域进行积分, 得




$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D} xy^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-p}^{p}\mathrm{d}y\int_{\frac{y^2}{2p}}^{\frac{p}{2}}xy^2\mathrm{d}x \\
&= \int_{-p}^{p}\left(\frac{1}{2}x^2y^2\right)\Big|_{x=\frac{p}{2}}^{x=\frac{y^2}{2p}}\mathrm{d}y \\
&= \int_{-p}^{p}\left(\frac{p^2}{8}y^2-\frac{1}{8p^2}y^6\right)\mathrm{d}y \\
&= \left[\frac{p^2}{24}y^3-\frac{1}{56p^2}y^7\right]_{-p}^{p}=\frac{1}{21}p^5.
\end{aligned}
$$

(5) 积分区域如下图所示, 采用 $x$ 型区域进行积分, 得

$$
\begin{aligned}
\iint\limits_{D}\sqrt{x}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^2\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{2x-x^2}}^{\sqrt{2x-x^2}}\sqrt{x}\mathrm{d}y \\
&= \int_0^2\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)\Big|_{y=-\sqrt{2x-x^2}}^{y=\sqrt{2x-x^2}}\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^2 x\sqrt{2-x}\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$




令 $\sqrt{2-x}=t$, 则上述积分可转化为:

$$\begin{aligned}\iint\limits_D \sqrt{x}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 2\int_{\sqrt{2}}^{0}(2-t^2)t(-2t)\mathrm{d}t\\ &= 4\int_0^{\sqrt{2}} t^2(2-t^2)\mathrm{d}t\\ &= \left[\frac{8}{3}t^3-\frac{4}{5}t^5\right]_0^{\sqrt{2}}=\frac{32}{15}\sqrt{2}.\end{aligned}$$

□

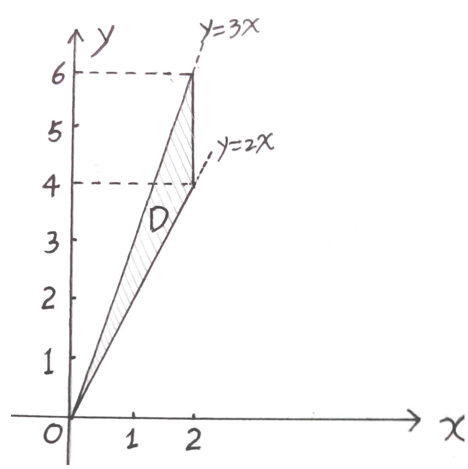
2. 改变下列累次积分的顺序.

(1) $\int_0^2 \mathrm{d}x\int_{2x}^{3x} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(2) $\int_{-1}^1 \mathrm{d}x\int_{x^2-1}^{0} f(x,y)\mathrm{d}y$;

(3) $\int_0^1 \mathrm{d}y\int_0^{y^2} f(x,y)\mathrm{d}x+\int_1^2 \mathrm{d}y\int_0^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x$.

**解:** (1) 积分区域 $D$ 如下图所示:



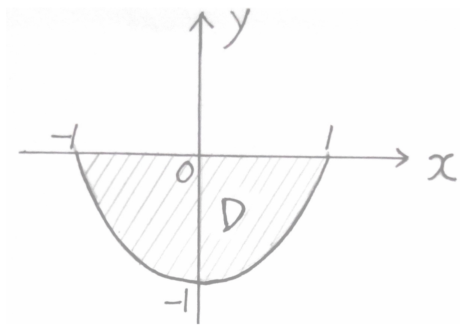
由于将 $D$ 作为 $y$ 型区域时, 虽然左边界有一个统一的表达式: $x = x_1(y) = \dfrac{y}{3}, 0 \le y \le 6$, 但是, 右边界的表达式却是一个分段函数:

$$x = x_2(y) = \begin{cases} 2, & 4 \le y \le 6, \\ \frac{y}{2}, & 0 \le y \le 4, \end{cases}$$

所以, 交换积分成 $y$ 型区域时, 要分解成两个 $y$ 型区域, 它们无公共内点, 从而

$$\int_0^2 \mathrm{d}x \int_{2x}^{3x} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_0^4 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_4^6 \mathrm{d}y \int_{\frac{y}{3}}^{2} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) 积分区域 $D$ 如下图所示:




由于将 $D$ 作为 $y$ 型区域时, 左边界的表达式为: $x = x_1(y) = -\sqrt{y+1}, -1 \le y \le 0$, 右边界的表达式为: $x = x_2(y) = \sqrt{y+1}, -1 \le y \le 0$,

所以, 改写成 $y$ 型积分为:

$$\int_{-1}^1 \mathrm{d}x \int_{x^2-1}^{0} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_{-1}^0 \mathrm{d}y \int_{-\sqrt{y+1}}^{\sqrt{y+1}} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 由于将 $D$ 作为 $x$ 型区域时, 下边界的表达式为: $y = y_1(x) = \sqrt{x}, 0 \le x \le 1$, 上边界的表达式为: $y = y_2(x) = 2 - x, 0 \le x \le 1$,

所以, 改写成 $y$ 型积分为:

$$\int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{\sqrt{x}}^{2-x} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

□

3. 设 $f(x,y)$ 在区域 $D$ 上连续, 试将二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为不同顺序的累次积分.

(1) $D = \{(x,y) \mid |x| + |y| \le 2\}$ ;

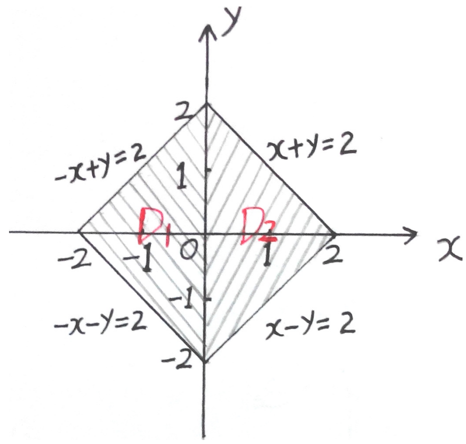
(2) $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4, x + y \ge 1\}$ ;

(3) $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4, y \le x, y \ge 0\}$.

**解:** (1) 积分区域如图所示:

(a) 将区域 $D$ 作为 $x$ 型区域时, 将 $D$ 分为 $D_1$ 和 $D_1$ 两部分, 其中,

在 $D_1$ 上:




上边界函数为: $y = x + 2, \quad -2 \leq x \leq 0;$

下边界函数为: $y = -x - 2, \quad -2 \leq x \leq 0;$

在 $D_2$ 上:

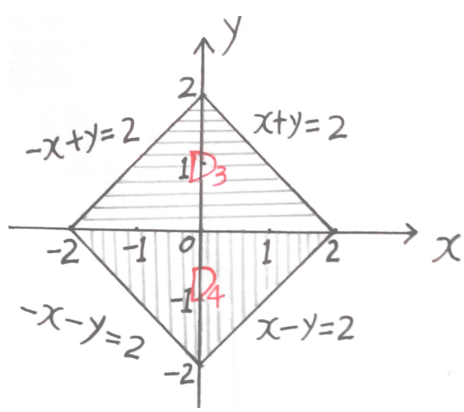
上边界函数为: $y = 2 - x, \quad 0 \leq x \leq 2;$

下边界函数为: $y = x - 2, \quad 0 \leq x \leq 2;$

故 $x$ 型积分为:

$$\iint\limits_D \sqrt{f}(x, y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{0} \mathrm{d}x \int_{-x-2}^{x+2} f(x, y)\mathrm{d}y + \int_{0}^{2} \mathrm{d}x \int_{x-2}^{2-x} f(x, y)\mathrm{d}y.$$

(b) 将区域 $D$ 作为 $y$ 型区域时, 将 $D$ 分为 $D_3$ 和 $D_4$ 两部分, 其中,




在 $D_3$ 上:

左边界函数为: $x = y - 2, \quad 0 \leq y \leq 2;$

右边界函数为: $x = 2 - y, \quad 0 \leq y \leq 2;$

在 $D_4$ 上:

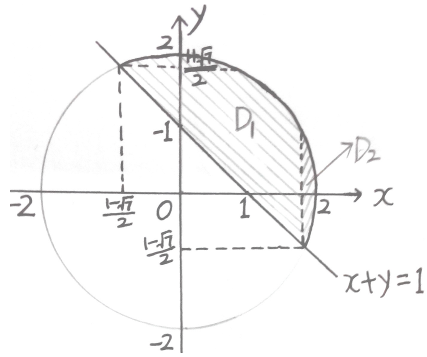
左边界函数为: $x = -y - 2, \quad -2 \leq y \leq 0;$

右边界函数为: $x = y + 2, \quad -2 \le y \le 0$; 故 $y$ 型积分为:

$$\iint\limits_D \sqrt{f}(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{-2}^{0} \mathrm{d}y \int_{-y-2}^{y+2} f(x,y)\mathrm{d}x + \int_0^2 \mathrm{d}x \int_{y-2}^{2-y} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(2) 积分区域如下图所示:

(a) 将区域 $D$ 作为 $x$ 型区域时, 将 $D$ 分为 $D_1$ 和 $D_2$ 两部分, 其中,




在 $D_1$ 上:

上边界函数为: $y = \sqrt{4-x^2}, \quad \dfrac{1-\sqrt{7}}{2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$;

下边界函数为: $y = 1-x, \quad \dfrac{1-\sqrt{7}}{2} \le x \le \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$;

在 $D_2$ 上:

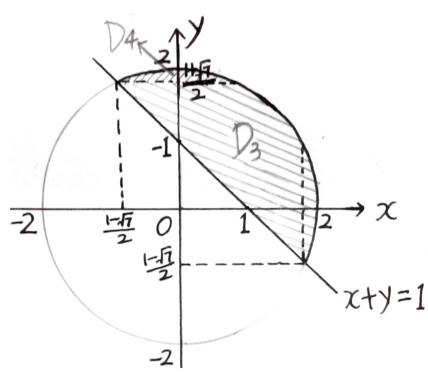
上边界函数为: $y = \sqrt{4-x^2}, \quad \dfrac{1+\sqrt{7}}{2} \le x \le 2$;

下边界函数为: $y = -\sqrt{4-x^2}, \quad \dfrac{1+\sqrt{7}}{2} \le x \le 2$;

故 $x$ 型积分为:

$$\iint\limits_D \sqrt{f}(x,y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_{\frac{1-\sqrt{7}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{7}}{2}} \mathrm{d}x \int_{1-x}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y + \int_{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}^{2} \mathrm{d}x \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(b) 将区域 $D$ 作为 $y$ 型区域时, 将 $D$ 分为 $D_3$ 和 $D_4$ 两部分, 其中,




在 $D_3$ 上:

左边界函数为: $x=1-y,\quad \dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\leq y\leq\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$;

右边界函数为: $x=\sqrt{4-y^2},\dfrac{1-\sqrt{7}}{2}\leq y\leq\dfrac{1+\sqrt{7}}{2}$;

在 $D_4$ 上:

左边界函数为: $x=-\sqrt{4-y^2},\quad \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\leq y\leq 2$;

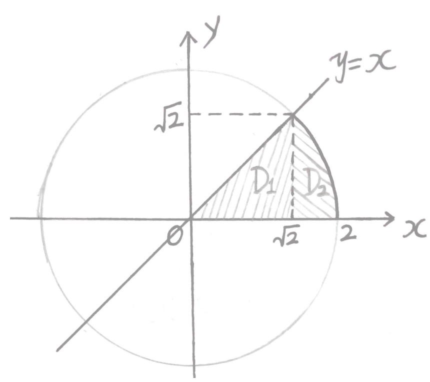
右边界函数为: $x=\sqrt{4-y^2},\quad \dfrac{1+\sqrt{7}}{2}\leq y\leq 2$;

故 $y$ 型积分为:

$$\iint\limits_D \sqrt{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{\frac{1-\sqrt{7}}{2}}^{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}\mathrm{d}y\int_{1-y}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x+\int_{\frac{1+\sqrt{7}}{2}}^{2}\mathrm{d}y\int_{-\sqrt{4-y^2}}^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

(3) 积分区域如图所示:

(a) 将区域 $D$ 作为 $x$ 型区域时, 将 $D$ 分为 $D_1$ 和 $D_1$ 两部分, 其中,




在 $D_1$ 上:

上边界函数为: $y=x,\quad 0\leq x\leq\sqrt{2}$;

下边界函数为: $y=0,\quad 0\leq x\leq\sqrt{2}$;

在 $D_2$ 上:

上边界函数为: $y=\sqrt{4-x^2},\quad \sqrt{2}\leq x\leq 2$;

下边界函数为: $y=0,\quad \sqrt{2}\leq x\leq 2$’

故 $x$ 型积分为:

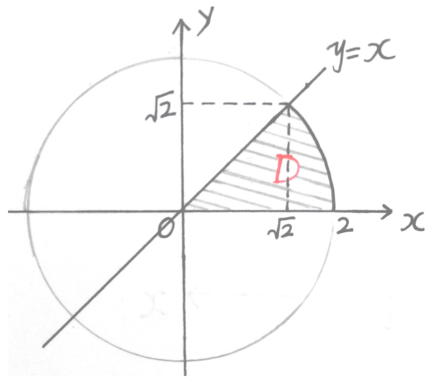
$$\iint\limits_D \sqrt{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}x\int_0^{x}f(x,y)\mathrm{d}y+\int_{\sqrt{2}}^{2}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{4-x^2}}f(x,y)\mathrm{d}y.$$

(b) 将区域 $D$ 作为 $y$ 型区域时,

左边界函数为: $x=y,\quad 0\leq x\leq\sqrt{2}$;

右边界函数为: $x=\sqrt{4-y^2},\quad 0\leq x\leq\sqrt{2}$’ 故 $y$ 型积分为:

$$\iint\limits_D \sqrt{f}(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}y\int_y^{\sqrt{4-y^2}}f(x,y)\mathrm{d}x.$$

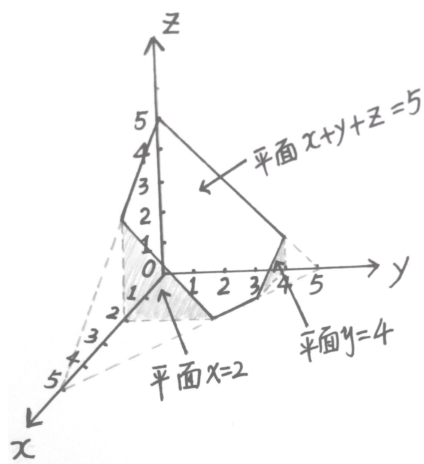



□

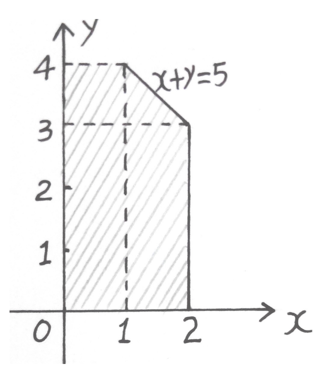
4. 求由坐标平面及 $x=2, y=3, x+y+z=4$ 所围的角柱体的体积.

**解:** 所求角柱体 (如下图所示) 的体积为:

$$V=\iint\limits_{D}(5-x-y)\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$




其中 $D$ 是 $xy$ 平面上由 $0 \le x \le 2, 0 \le y \le 4, x+y=5$ 所围成的区域 (如下图所示):



采用 $y$ 型积分, 得

$$\begin{aligned} V=\iint_D(5-x-y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^3\mathrm{d}y\int_0^2(5-x-y)\mathrm{d}x+\int_3^4\mathrm{d}y\int_0^{5-y}(5-x-y)\mathrm{d}x \\ &= \int_0^3\left((5-y)x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=2}\mathrm{d}y+\int_3^4\left((5-y)x-\frac{1}{2}x^2\right)\Big|_{x=0}^{x=5-y}\mathrm{d}y \\ &= \int_0^3(8-2y)\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\int_3^4(5-y)^2\mathrm{d}y=\frac{97}{6}. \end{aligned}$$

□

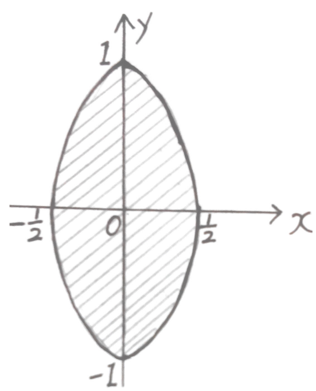
---

5. 计算由 $z=1-4x^2-y^2$ 及 $z=0$ 所围立体的体积.

**解:** 所求立体的体积为:

$$V=\iint_D(1-4x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $D$ 是 $xy$ 平面上由 $4x^2+y^2=1$ 所围成的椭圆区域 (如下图所示):




采用 $x$ 型积分, 得

$$\begin{aligned} V=\iint_D(1-4x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}x\int_{-\sqrt{1-4x^2}}^{\sqrt{1-4x^2}}(1-4x^2-y^2)\mathrm{d}y \\ &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left((1-4x^2)y-\frac{1}{3}y^3\right)\Big|_{y=-\sqrt{1-4x^2}}^{y=\sqrt{1-4x^2}}\mathrm{d}x \\ &= \frac{4}{3}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}(1-4x^2)\sqrt{1-4x^2}\mathrm{d}x \quad (\text{令} \quad 2x=\cos\alpha) \\ &= \frac{2}{3}\int_{-\pi}^{0}\sin^4\alpha\mathrm{d}\alpha=\frac{1}{4}\pi. \end{aligned}$$

□

6. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 证明不等式

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

其中等号当且仅当 $f(x)$ 为常数函数时成立.

**证明.** 证法一: 因为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则 $f(x)f(y)$ 在 $D$ 上连续, 其中 $D=[a,b]\times[a,b]$,

$$\begin{aligned}\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 &= \int_a^b f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f(y)\mathrm{d}y\\ &= \iint\limits_D f(x)f(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &\le \iint\limits_D \frac{1}{2}\left(f^2(x)+f^2(y)\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b \mathrm{d}y\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\\ &= (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

故有

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x,$$

其中, 若等号成立, 则对 $\forall(x,y)\in D$, 有

$$f^2(x)+f^2(y)=2f(x)f(y),$$

$\Longleftrightarrow$

$$(f(x)-f(y))^2=0,$$

$\Longleftrightarrow$

$$f(x)=f(y),$$

故 $f(x)$ 为常量函数时不等式 $\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x$ 中的等号成立.

证法二:

令习题 16.1 第 7 题 Cauchy 不等式

$$\left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 \le \int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x\int_a^b g^2(x)\mathrm{d}x$$

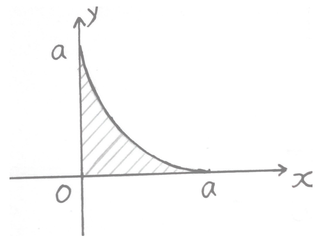
中的 $g(x)=1$ 即可.

∎

7. 计算二重积分 $I=\iint\limits_D xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 $D$ 由直线 $x=0, y=0$, 与曲线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}\quad (0\le t\le\dfrac{\pi}{2}, a>0)$ 围成.

**解:** 曲线 $\begin{cases} x=a\cos^3 t,\\ y=a\sin^3 t,\end{cases}\quad (0\le t\le\dfrac{\pi}{2}, a>0)$ 即为曲线: $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}(x>0,y>0,a>0)$, 因此区域 $D$ 的图像为:

采用 $x$ 型积分计算:




$$
\begin{aligned}
\iint\limits_D xy \,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^{(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}} xy\mathrm{d}y \\
&= \int_0^a \left(\frac{1}{2}xy^2\right)\Big|_{y=0}^{y=(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^{\frac{2}{3}}} \mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a x((a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}})^3)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^a (a^2x-3a^{\frac{4}{3}}x^{\frac{5}{3}}+3a^{\frac{2}{3}}x^{\frac{7}{3}}-x^3)\mathrm{d}x = \frac{1}{80}a^4.
\end{aligned}
$$

□