# 《概率与统计》内容总结与习题：正态分布

课本例题、习题分类：

1. 一维正态分布（概率、数字特征、函数的分布）：§4.1例1-3, §4.2例1-2, §4.3例1；习题四4.1-4.4, 4.5-4.7, 4.10
2. 二维正态分布：§4.3例1-2；习题四4.8, 4.9, 4.11-4.13
3. 正态随机变量的线性函数的分布：§4.4例1；习题四4.15-4.18
4. 中心极限定理：§4.5例1-2；习题四4.19-4.23

以下课本上没有详细讲、课堂上补充的内容也属于本课程的考察范围：

**定义 1** (**多元正态分布**(Multivariate normal distribution)). 给定$n$维向量$\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^T$及$n$阶对称正定矩阵$B$，以

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^TB^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right\}$$

为密度函数的连续型分布称为$n$元正态分布，记为$N(\vec{\mu},B)$。

**定理 1** ($n$**维正态分布的数字特征**). 设$n$维随机向量$\vec{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$服从正态分布$N(\vec{\mu},B)$，则

$$E\vec{X}=\vec{\mu},\quad \mathrm{cov}\vec{X}=B.$$

**定理 2** (**正态随机向量的线性变换**). 设$n$维随机向量$\vec{X}\sim N(\vec{\mu},B)$。则对任意的满秩矩阵$C\in\mathbb{R}^{m\times n}$ $(m\leq n)$，$m$维随机向量$\vec{Y}=C\vec{X}$服从正态分布

$$N(C\vec{\mu},CBC^T).$$

**推论 1.** 设$n$维随机向量$\vec{X}\sim N(\vec{\mu},B)$。则对任意非零向量$\vec{a}\in\mathbb{R}^n$，有

$$\vec{a}^T\vec{X}\sim N(\vec{a}^T\vec{\mu},\vec{a}^TB\vec{a}).$$

补充习题（本部分习题未涵盖本章的全部主要内容，仅为课本例题、习题的补充）：

1. 判断以下论述正确与否：

   (1) 设$(X,Y)$服从二维正态分布，则对任意实数$a,b,c$（$a,b$不全为零），$aX+bY+c$服从正态分布；（　　）

   (2) 设随机变量$X$和$Y$相互独立，都服从正态分布，则$(X,Y)$一定服从二维正态分布；（　　）

   (3) 设随机变量$X$和$Y$都服从正态分布，则$(X,Y)$一定服从二维正态分布；

   （　　）

   (4) 若$(X,Y)$服从二维正态分布，则$X$和$Y$不相关当且仅当他们相互独立。

   （　　）

   (5) 设随机变量$X$和$Y$都服从正态分布，则$X$和$Y$不相关当且仅当他们相互独立。（　　）

2. 选择题

   (1) 设$\varphi(x)$是标准正态分布的密度函数，则$\varphi(0)=$

   $(A)$ 0;　　$(B)$ $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$;　　$(C)$ $\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}$;　　$(D)$ 1.

   (2) 设某连续型随机变量的概率密度$f(x)$是偶函数，其分布函数为$F(x)$，则对于任意实数$a>0$，$F(-a)=$

   $(A)$ $2F(a)-1$;　　$(B)$ $1-F(a)$;　　$(C)$ $\dfrac{1}{2}-F(a)$;　　$(D)$ $F(a)$.

   (3) 设随机变量$X\sim N(a,4), Y\sim N(b,9)$。记

$$p_1=P\{X\le a+2\},\quad p_2=P\{Y\le b+3\},$$

则

$(A)$ 对任意$a, b,\ p_1 = p_2$; $(B)$ 对任意$a \neq b,\ p_1 \neq p_2$;

$(C)$ 对任意$a, b,\ p_1 < p_2$; $(D)$ 对任意$a < b,\ p_1 < p_2$.

(4) 设随机变量$X \sim N(\mu, 4^2), Y \sim N(\mu, 5^2)$。记

$$p_1 = P\{X \leq \mu - 4\},\ \ p_2 = P\{Y \geq \mu + 5\},$$

则

$(A)$ 对任意$\mu,\ p_1 = p_2$; $(B)$ 对任意$\mu,\ p_1 < p_2$;

$(C)$ 对个别$\mu$的取值, $p_1 = p_2$; $(D)$ 对任意$\mu,\ p_1 > p_2$.

(5) 设随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则随着$\sigma$增大，概率$P\{|X - \mu| \leq \sigma\}$

$(A)$ 单调增大; $(B)$ 单调减小;

$(C)$ 保持不变; $(D)$ 增减不定.

(6) 设随机变量$X \sim N(\mu, \sigma^2)$，则随机变量$Y = aX + b\ (a \neq 0)$服从正态分布

$(A)$ $N(\mu, \sigma^2)$; $(B)$ $N(0, 1)$;

$(C)$ $N(a\mu + b, a^2\sigma^2)$; $(D)$ $N(\frac{\mu}{a}, \frac{\sigma^2}{b^2})$.

(7) 设随机变量$X$服从标准正态分布$N(0, 1)$，则随机变量$Y = 2X - 1$服从正态分布

$(A)$ $N(0, 1)$; $(B)$ $N(-1, 3)$; $(C)$ $N(-1, 4)$; $(D)$ $N(-1, 5)$.

(8) 设随机变量$X$和$Y$相互独立且$X \sim N(0, 1),\ Y \sim N(1, 1)$，则

$(A)$ $P\{X + Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$; $(B)$ $P\{X + Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$;

$(C)$ $P\{X - Y \leq 0\} = \frac{1}{2}$; $(D)$ $P\{X - Y \leq 1\} = \frac{1}{2}$.

(9) 设随机变量$X$和$Y$都服从正态分布，则

$(A)$ $X+Y$一定服从正态分布; $(B)$ $(X,Y)$一定服从二维正态分布;

$(C)$ $X-Y$一定服从正态分布; $(D)$ $(X,-Y)$未必服从二维正态分布.

3. 简答题：简述中心极限定理的意义。