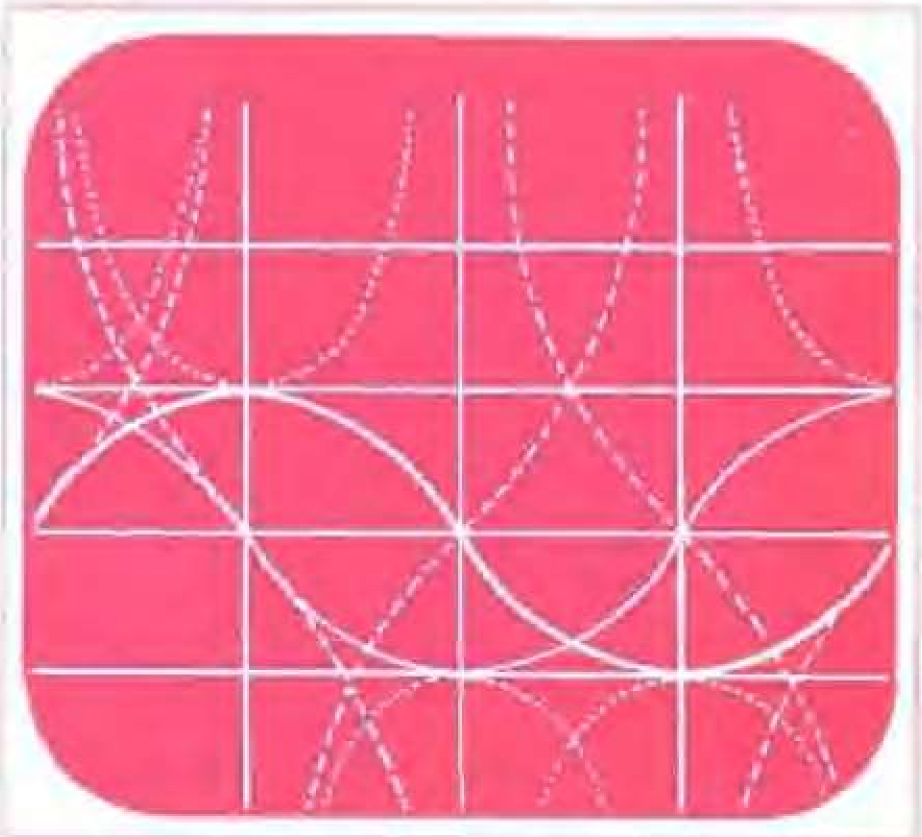
单墫 著

集合及其子集



上海教育出版社

世纪集团

责任编辑　叶中豪

ISBN 7-5320-7482-X

9 787532 074822 >

ISBN 7-5320-7482-X/G・7638

定　　价:7.20 元

集合及其子集

单　　墫著

上海教育出版社

图书在版编目（CIP）数据

集合及其子集／单墫著．—上海：上海教育出版社，2001.6

ISBN 7-5320-7482-X

Ⅰ.集...　Ⅱ.单...　Ⅲ.集论　Ⅳ.O144

中国版本图书馆CIP数据核字（2001）第034491号

集合及其子集

单　墫　著

上海世纪出版集团
上 海 教 育 出 版 社　出版发行

（上海永福路123号　　邮政编码：200031）

各地新华书店经销　　上海市委党校印刷厂印刷

开本 787×1092　1/32　印张 6.5　字数 138,000

2001年7月第1版　　2001年7月第1次印刷

印数 1—5,150本

ISBN 7-5320-7482-X/G・7638　定价：7.20元

序

集论，是全部数学的基础.

数学大师 Cantor，建立了基数、序型等重要概念，将研究从有限集推进到无限集，创立了集论这一数学分支.

近三十年来，随着组合数学的蓬勃发展，关于有限集及其子集族，又有很多的研究，得出很多重要而且优美的结果.

但是，国内至今尚未见到专门介绍集论的通俗读物，希望这本小书能起抛砖引玉的作用.

感谢王文才先生与叶中豪先生，没有他们的鼓励与支持，这本小书是不可能问世的.

单墫

目　　录

第一章　集　　合

1.1　集　　合

具有某种性质的事物，它们的全体称为一个集合．这些事物称为这个集合的*元素*．

集合简称为*集*．元素简称为*元*．

例如，某一学校的学生组成一个集合．某国的官员组成一个集合．地球上的老鼠组成一个集合等等．

正整数（自然数）组成一个集合，通常记为 $\mathbf{N}$．

整数组成一个集合，通常记为 $\mathbf{Z}$．

有理数组成一个集合，通常记为 $\mathbf{Q}$．

实数组成一个集合，通常记为 $\mathbf{R}$．

复数组成一个集合，通常记为 $\mathbf{C}$．

平面上的点组成一个集合，通常称为平面点集．

集合 A 中的元素，如果有无限多个，那么 A 称为无限集；如果 A 中的元素仅有有限多个，那么 A 称为有限集．

用 $|A|$ 表示 A 的元数（即元素的个数）．对于无限集，$|A|=\infty$（无穷大）．

不含任何元素的集合，称为空集．通常记为 $\varnothing$．显然，$|A|=0$ 是 $A=\varnothing$ 的充分必要条件．

1.2 从属关系

如果事物 a 是集合 A 的元素，那么就说"a 属于 A"或"a 在A 中"，并记为

$$a \in A.$$

如果 a 不是 A 的元素，那么就说"a 不属于 A"，并记为

$$a \notin A\text{（也有些书上写成 } a \overline{\in} A\text{）}.$$

在 A 为有限集时，我们常常将 A 的元素全部列举出来，例如

$$A = \{1, 2, 3\},$$

表示 A 是三元集（三个元素的集合），它的元素是 1，2，3（即 $1 \in A$，$2 \in A$，$3 \in A$）。又如

$$B = \{a, b, c, d\},$$

表示 B 是四元集，它的元素是 a，b，c，d.

在上述记号中，花括号内写出的元素应当互不相同，即每个元素恰出现一次. 至于元素出现的顺序，不必考虑. 我们认为

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 3, 2\}, \{2, 1, 3\},$$
$$\{2, 3, 1\}, \{3, 1, 2\}, \{3, 2, 1\}$$

都是同一个集.

仅含一个元素的集称为单元素集，例如

$$A = \{5\}.$$

对于元数较多的集合或者无穷集，常常采用下面的记号. 例如

$$A = \{a \mid a \text{ 为正偶数}\},$$

表示 A 是正偶数组成的集. 又如

$$B=\{(x, y) \mid x, y \text{ 均为整数}\},$$

表示 B 是平面上整点(格点)的集合.

在上述记法中,括号里写一个代表元素,在竖线后面写明它所具有的性质.

在同时讨论几个集合时,下面的从属关系表是很有用的:

表 1.2.1

元素 / 集合	a_1	a_2	a_3	$\cdots$	a_{n-1}	a_n
A_1	1	0	1	$\cdots$	1	0
A_2	1	1	0	$\cdots$	1	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
A_m	1	1	1	$\cdots$	1	0

表的 m 行(最上面一行除外)表示 m 个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_m$; 表的 n 列(最左面一列除外)表示 n 个元素 $a_1, a_2, \cdots, a_n$.

若 $a_i \in A_j (1 \leqslant i \leqslant n, 1 \leqslant j \leqslant m)$, 则在 a_i 所在列与 A_j 所在行的交叉处写上 1. 若 $a_i \notin A_j$, 则写上 0. 例如表 1.2.1 中,

$$a_1 \in A_1, a_1 \in A_2, \cdots, a_1 \in A_m,$$

$$a_2 \notin A_1, a_2 \in A_2, a_3 \notin A_2, \cdots, a_n \notin A_1.$$

还可看出

$$A_1=\{a_1, a_3, \cdots, a_{n-1}\},$$

$$A_2=\{a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n\},$$

$$\cdots\cdots$$

$$A_n=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}\}.$$

当然,也可以用行表示元素,列表示集合,这没有实质性的不同.

1.3 包　　含

如果集合 A 的元素都在集合 B 中,那么 A 称为 B 的子集,并记为

$$A \subseteq B\ (\text{或 } B \supseteq A),$$

读做 B 包含 A 或 A 包含于 B 中.

显然有 $A \subseteq A$, 即每个集合都是它自身的子集.

如果 $A \subseteq B$, 并且 B 中至少有一个元素不属于 A,那么称 A 为 B 的真子集,并记为

$$A \subset B\ (\text{或 } B \supset A)$$

(也有些书上用 $A \subset B$ 表示 A 是 B 的子集,而用 $A \subsetneq B$ 表示 A 是 B 的真子集),读做 B 真包含 A 或 A 真包含于 B 中. 例如

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C},$$

即自然数集是整数集的真子集,整数集是有理数集的真子集,有理数集是实数集的真子集,实数集是复数集的真子集.

如果 $A \subseteq B$ 并且 $B \subseteq A$, 那么 A 的元素都是 B 的元素, B 的元素也都是 A 的元素. 因此 A, B 是同一个集合, 即 $A = B$.

约定空集 $\varnothing$ 为每一个集合的子集.

并不是任意两个集合之间都有包含关系. 例如

$$A = \{1, 2\},\ B = \{4, 5, 6\},$$

则 A 不是 B 的子集, B 也不是 A 的子集.

显然，当 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$ 时，$A\subseteq C$, 即 $\subseteq$ 关系具有传递性.

综上所述，$\subseteq$ 关系具有：

(i) 反身性，即 $A\subseteq A$;

(ii) 传递性，即 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$ 推出 $A\subseteq C$;

(iii) $A\subseteq B$, $B\subseteq A$ 推出 $A=B$.

我们称这样的关系为*半序关系*（或*偏序关系*）.

1.4 并与交

给定两个集合 A, B. 称集合

$$C=\{c\mid c\text{ 属于 }A\text{ 或 }B\}$$

为 A, B 的并集（简称为并），记为 $A\cup B$. 例如，

(i) 若 $A=\{1, 2, 3, 4\}$, $B=\{1, 4, 5, 6\}$, 则

$$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

(ii) 若 A 是猫的集合，B 是黑猫的集合，则 $A\cup B=A$（因为黑猫是猫）. 一般地，若

$$A\supseteq B,$$

则

$$A\cup B=A.$$

反之亦真.

(iii) 若 A 是正实数的集合，B 是负实数的集合，则 $A\cup B$ 是非零实数的集合.

显然 $A\cup B\supseteq A$, $A\cup B\supseteq B$, 并且

$$A\cup B=B\cup A.$$

类似地，可以定义多个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的并集：

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$
$$= \{a \mid a \text{ 至少属于一个 } A_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

例如对(iii)中的 A, B，有

$$A \cup B \cup \{0\} = \mathbf{R}.$$

对于给定的两个集合 A, B，称集合

$$C = \{c \mid c \text{ 同时属于 } A,\ B\}$$

为 A, B 的交集(简称为交)，记为 $A \cap B$. 例如，

(i) 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$，则

$$A \cap B = \{1, 4\}.$$

(ii) 若 A 是猫的集合，B 是白猫的集合，则 $A \cap B = B$. 一般地，若

$$A \supseteq B,$$

则

$$A \cap B = B.$$

反之亦真.

(iii) 若 A 是正实数的集合，B 是负实数的集合，则 $A \cap B = \varnothing$.

显然 $A \cap B \subseteq A$, $A \cap B \subseteq B$, 并且

$$A \cap B = B \cap A.$$

交集符号可以省去，例如 $A \cap B$ 常写成 AB.

类似地，可以定义多个集合 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的交集：

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$

$$= \{a \mid a \text{ 属于每一个 } A_i,\ 1 \leqslant i \leqslant n\}.$$

显然 $A \cup \varnothing = A$, $A \cap \varnothing = \varnothing$, $A \cup A = A \cap A = A$.

1.5 差 与 补

给定两个集合 A, B. 称集合

$$C = \{c \mid c \in A \text{ 并且 } c \notin B\}$$

为 A 减 B，记为 $A - B$. 例如，

(i) 若 $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 4, 5, 6\}$，则

$$A - B = \{2, 3\}.$$

(ii) 若 A 是猫的集合，B 是黑猫的集合，则 $A - B$ 为不是黑色的猫的集合.

(iii) 若 A 是正实数的集合，B 是负实数的集合，则 $A - B = A$.

注意差不具有对称性，即一般说来 $A - B$ 与 $B - A$ 是不相同的. 例如上面的三个例子，在(i)中，$B - A = \{5, 6\}$. 在(ii)中，$B - A = \varnothing$. 在(iii)中，$B - A = B$.

为了方便，常常将一个集合作为全集合，它由一切事物(或我们所考虑的一切事物)组成. 例如，考虑平面上的点集时，可以将平面点集(即平面上所有点组成的点集)作为全集. 考虑实数时，可将 **R** 作为全集，而考虑复数时，应将 **C** 作为全集.

全集通常用 I 表示.

对任一集 A，称 $I - A$ 为 A 的补集，并用 A' 表示. 显然

$$A \cap A' = \varnothing,\ A \cup A' = I.$$

A' 由不属于 A 的元素组成，因此

$$(A')' = A,$$

即补集的补集是原集. 所以 A 与 A' 互为补集. 显然 $\varnothing' = I$, $I' = \varnothing$.

由定义, $A - B = A \cap B'$.

1.6 Venn 图

利用圆(这里指圆盘)来表示集合的 Venn 图,是帮助理解集合之间关系的直观工具.

例如,图 1.6.1 中,两个圆分别表示集合 A 与 B,阴影部分表示 $A \cup B$. 图 1.6.2 中的阴影部分表示 $A \cap B$. 图1.6.3,

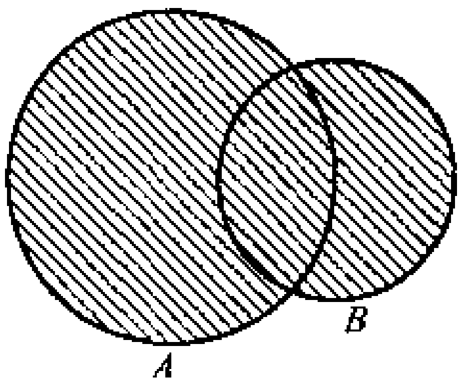


图 1.6.1 $A \cup B$

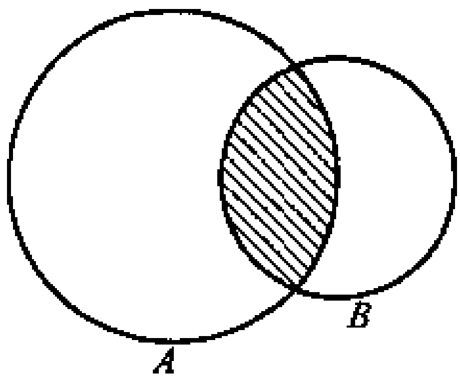


图 1.6.2 $A \cap B$

1.6.4 中的阴影部分分别表示 $A-B$ 与 $B-A$. 图 1.6.5 表示

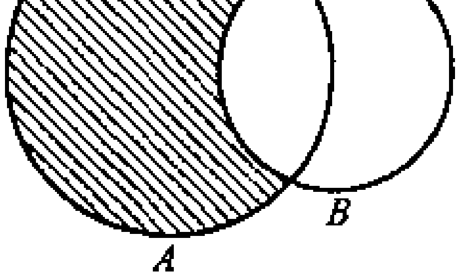


图 1.6.3 $A-B$

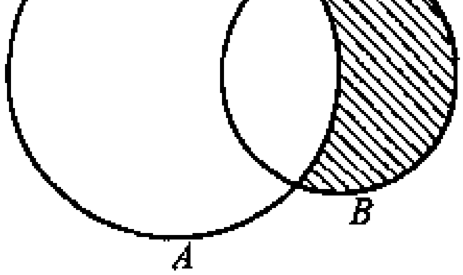


图 1.6.4 $B-A$

$A \subseteq B$. 在图 1.6.6 中,大圆表示全集 I,阴影部分是 A 的补集 A'.

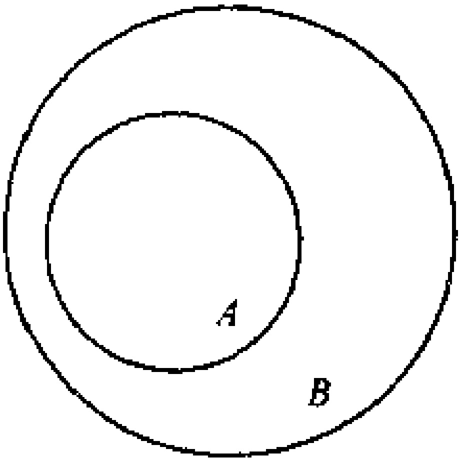


图 1.6.5 $A \subseteq B$

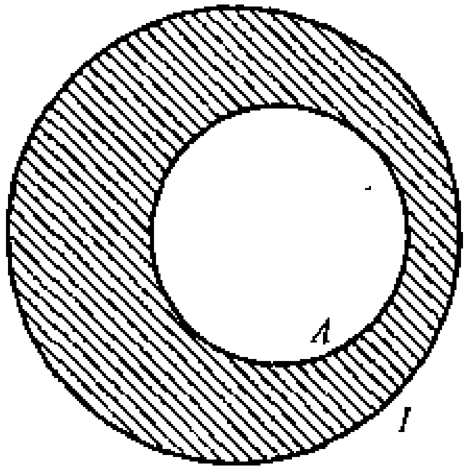


图 1.6.6 A'

将圆改为矩形也无不可,这并不影响问题的实质(谁包含谁).

1.7 有关集合的等式(Ⅰ)

本节讨论一些有关集合的等式.

例 1(De Morgan 公式) 对任意两个集 A, B,均有

$$(A \cup B)' = A' \cap B', \tag{1}$$

$$(A \cap B)' = A' \cup B'. \tag{2}$$

解 首先证明(1). $A \cup B$ 是在 A 或在 B 中的元素组成的集,因此 $(A \cup B)'$ 由不在 A 也不在 B 中的元素组成. 这也就是 $A' \cap B'$.

如果考虑 Venn 图,那么 $(A \cup B)'$ 与 $A' \cap B'$ 都是图 1.7.1 中的阴影部分(为方便起见,全集 I 用一矩形表示).

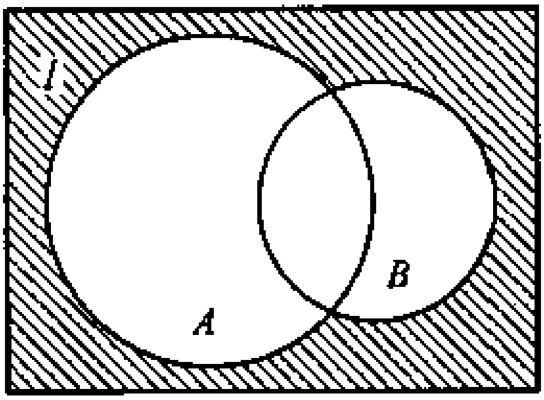


图 1.7.1

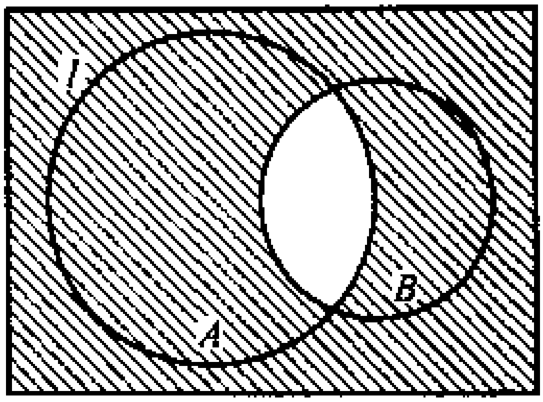


图 1.7.2

同样可证(2). 图 1.7.2 中的阴影部分表示(2)的左边，也表示(2)的右边.

例 2(并与交的结合律)　对任意集合 A, B, C 均有

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C, \tag{3}$$

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C. \tag{4}$$

解　只需注意(3)式两边均表示至少属于 A, B, C 之一的那些元素组成的集合. (4)式两边均表示同时属于 A, B, C 的那些元素组成的集合.

(3), (4)也不难用 Venn 图证明.

于是，证明有关集合的等式，已经有两种方法：

(i) 考虑等式两边(或其他有关式子)的意义；

(ii) 利用 Venn 图.

例 3(并与交的分配律)　对于任意集合 A, B, C 均有

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C), \tag{5}$$

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C). \tag{6}$$

解　仍可用前面所说的两种方法证明，但这里介绍第三种方法，即

(iii) 考虑两边的元素，证明左边的元素必属于右边，右边的元素也必属于左边.

设 $x\in A\cup(B\cap C)$，则 $x\in A$ 或 $x\in B\cap C$. $x\in A$ 时，$x\in A\cup B$, $x\in A\cup C$，所以 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$. $x\in B\cap C$ 时，$x\in B$ 并且 $x\in C$，所以 $x\in A\cup B$, $x\in A\cup C$. 从而仍有 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$.

反之，设 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，则 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$. 若 $x\in A$，则 $A\in A\cup(B\cap C)$. 若 $x\notin A$，则由 $x\in A\cup B$ 且 $x\in A\cup C$ 得 $x\in B$ 且 $x\in C$，即 $x\in B\cap C$. 从而仍有 $x\in A\cup(B\cap C)$.

于是(5)成立.

类似地可以证明(6). 但也可以由(5)得

$$A'\cup(B'\cap C')=(A'\cup B')\cap(A'\cup C') \qquad (5')$$

(将(5)中 A, B, C 用 A', B', C' 代替). 然后在两边取补. 根据 De Morgan 公式

$$(A'\cup(B'\cap C'))'=(A')'\cap(B'\cap C')'$$

$$=A\cap(B\cup C),$$

$$((A'\cup B')\cap(A'\cup C'))'=(A'\cup B')'\cup(A'\cup C')'$$

$$=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

因此(6)式成立.

这就是证明有关集合的等式时，常用的第四个方法，即

(iv) 利用已知的有关集合的等式或公式.

从上述三个例题可以看出并与交是对偶的. 即由一个有关集合的等式，将其中并改为交，交改为并，便可产生另一个有关集合的等式. 例如(1)与(2)，(3)与(4)，(5)与(6)都是

互相对偶的等式.

以上的(1)～(6),都可以推广至更多的集合.例如

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n)' = A_1' \cap A_2' \cap \cdots \cap A_n', \quad (7)$$

$$A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n = A_1 \cup (A_2 \cup \cdots \cup A_n)$$
$$=(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_{n-1}) \cup A_n, \quad (8)$$

$$A_1 \cup (A_2 \cap A_3 \cap \cdots \cap A_n)$$
$$= (A_1 \cup A_2) \cap (A_1 \cup A_3) \cap \cdots \cap (A_1 \cup A_n), \quad (9)$$

等等.

本节的结论都是常用的,应当牢记.

1.8 对 称 差

设 A, B 是两个集合,称

$$(A-B) \cup (B-A)$$

为 A, B 的对称差.并记为 $A \triangle B$. 它由恰属于 A, B 之一的那些元素组成.

采用 Venn 图, $A \triangle B$ 可用图 1.8.1 中的阴影部分表示.

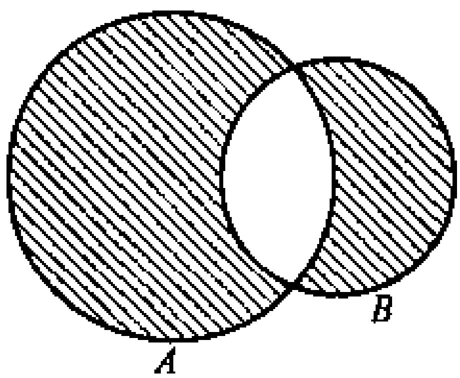


图 1.8.1 $A \triangle B$

根据定义或 Venn 图，当且仅当 $A=B$ 时，$A\triangle B=\varnothing$. 又易知 $A\triangle\varnothing=A$.

显然，对称差是可以交换的(对称性)，即

$$A\triangle B=B\triangle A. \tag{1}$$

例 1(结合律)　对任意集合 A, B, C 均有

$$(A\triangle B)\triangle C=A\triangle(B\triangle C). \tag{2}$$

解　用 Venn 图. 等式两边均由图 1.8.2 中阴影部分表示(即恰属于 A, B, C 之一的元素所成的集合).

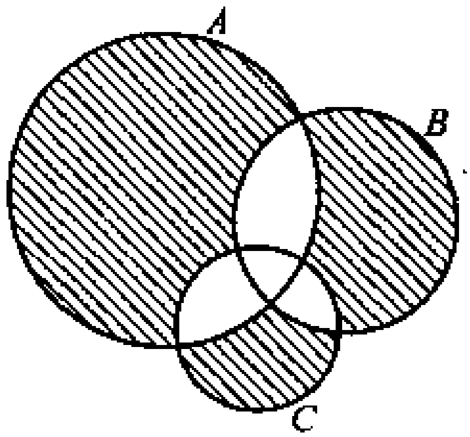


图 1.8.2

例 2　对任意集合 A, B 均有

$$A\triangle B=(A\cup B)-(A\cap B), \tag{3}$$

$$A\triangle B=A'\triangle B'. \tag{4}$$

解　(3)可由图 1.8.1 立即看出.

$A\triangle B$ 是由恰属于 A, B 之一的那些元素组成的集合. 同样，$A'\triangle B'$ 由恰属于 A', B' 之一的那些元素组成，即由属于 A' 而不属于 B' 的元素，或不属于 A' 而属于 B' 的元素组成. 换句话说，$A'\triangle B'$ 由不属于 A 而属于 B 的元素，或属于 A 而不

属于 B 的元素组成，亦即 $A'\triangle B'$ 由恰属于 A，B 之一的元素组成. 所以(4)成立.

例 3 A, B, C 是三个集合. 证明:

$$(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)=A\triangle C. \tag{5}$$

解 由(2),

$$\begin{aligned}(A\triangle B)\triangle(B\triangle C)&=A\triangle(B\triangle(B\triangle C))\\&=A\triangle((B\triangle B)\triangle C)\\&=A\triangle(\varnothing\triangle C)\\&=A\triangle C.\end{aligned}$$

例 4 A, B, C 是任意集合. 以下等式是否恒成立?

$$C\cap(A\triangle B)=(C\cap A)\triangle(C\cap B), \tag{6}$$

$$C\cup(A\triangle B)=(C\cup A)\triangle(C\cup B). \tag{7}$$

解 设 $x\in C\cap(A\triangle B)$，则 $x\in C$ 且 $x\in A\triangle B$. 由 $x\in A\triangle B$ 得 x 恰属于 A，B 之一. 结合 $x\in C$ 得 x 恰属于 $C\cap A$, $C\cap B$ 之一. 因而 $x\in(C\cap A)\triangle(C\cap B)$.

反之，若 $x\in(C\cap A)\triangle(C\cap B)$，则 x 恰属于 $C\cap A$, $C\cap B$ 之一. 因而 $x\in C$ 并且 x 恰属于 A，B 之一，即 $x\in C\cap(A\triangle B)$.

于是(6)成立. 即 $\cap$ 对 $\triangle$ 的分配律成立.

(6)也可以用 Venn 图证明(我们有意采取多种证法).

一般说来，(7)不成立. 例如对于 $C=A$,

$$A\cup(A\triangle B)=A\cup B\text{(请考虑 Venn 图)},$$

而

$$(A\cup A)\triangle(A\cup B)=A\triangle(A\cup B)=B-A.$$

当 A 不是空集时，$A\cup B\neq B-A$.

因此，$\cup$对$\triangle$的分配律不成立.

1.9 有关集合的等式(Ⅱ)

本节再讨论一些有关集合的等式. 证明所用的方法已在1.7节中说过.

所有英文大写字母均表示集合.

例1 证明：

$$A\triangle(A\cup B)=B\triangle(A\cap B)=B-(A\cap B),\tag{1}$$

$$A\cup B=A\triangle B\triangle(A\cap B).\tag{2}$$

解 (1)中 $A\triangle(A\cup B)$，$B\triangle(A\cap B)$，$B-(A\cap B)$ 均为图1.9.1的阴影部分.

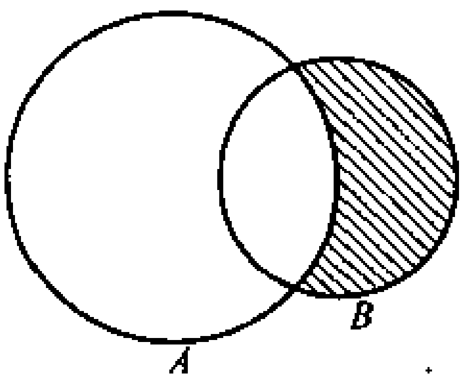


图1.9.1

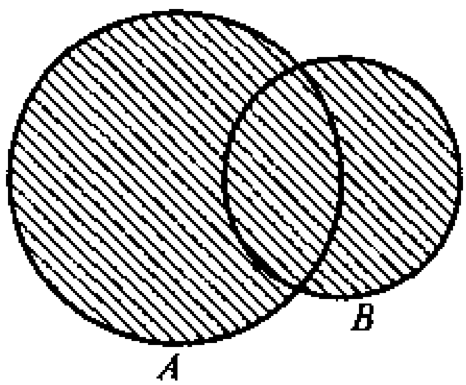


图1.9.2

(2)的两边均为图1.9.2的阴影部分.

特别地，当 $A\cap B=\varnothing$ 时，由(2)得

$$A\cup B=A\triangle B.\tag{3}$$

例2 证明以下关系：

$$(A-K)\cup(B-K)=(A\cup B)-K,\tag{4}$$

$$A-(B-C)=(A-B)\cup(A\cap C),\tag{5}$$

$$A-(A-B)=A\cap B, \tag{6}$$

$$(A-B)-C=(A-C)-(B-C), \tag{7}$$

$$A-(B\cap C)=(A-B)\cup(A-C), \tag{8}$$

$$A-(B\cup C)=(A-B)\cap(A-C), \tag{9}$$

$$A-B=(A\cup B)-B=A-(A\cap B). \tag{10}$$

解 利用补集,可将差 $A-B$ 写成 $A\cap B'$. 在证明中采用这种形式往往更为方便.

$$(A-K)\cup(B-K)=(A\cap K')\cup(B\cap K')$$

$$=(A\cup B)\cap K'=(A\cup B)-K,$$

即(4)成立.

$$A-(B-C)=A\cap(B\cap C')'=A\cap(B'\cup C)$$

$$=(A\cap B')\cup(A\cap C)=(A-B)\cup(A\cap C),$$

即(5)成立.

$$(A-C)-(B-C)=(A\cap C')\cap(B\cap C')'$$

$$=A\cap C'\cap(B'\cup C)=A\cap((C'\cap B')\cup(C'\cap C))$$

$$=A\cap(C'\cap B')=(A\cap C')\cap B'=(A-C)-B,$$

即(7)成立.

$$A-(B\cap C)=A\cap(B\cap C)'=A\cap(B'\cup C')$$

$$=(A\cap B')\cup(A\cap C')=(A-B)\cup(A-C),$$

即(8)成立.

(9)的证法与(8)类似. 它与(8)对偶.

(6), (10)可用上面的证法,也可用 Venn 图. 参看图 1.9.3, 1.9.4.

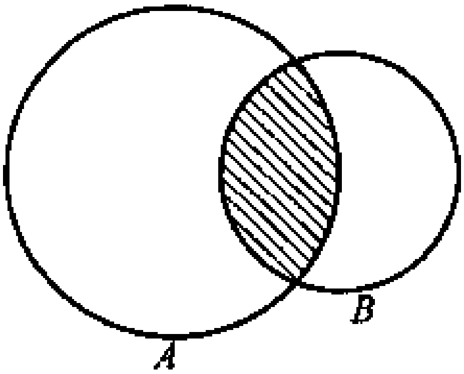


图 1.9.3

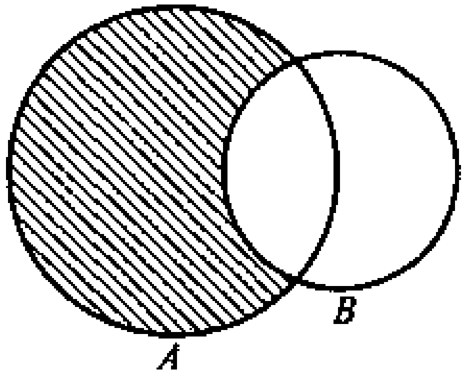


图 1.9.4

例 3 证明：

$$A-D\subseteq(A-B)\cup(B-C)\cup(C-D),\qquad(11)$$

$$A\triangle C\subseteq(A\triangle B)\cup(B\triangle C),\qquad(12)$$

$$(A\cup B)\cap(B\cup C)\cap(C\cup A)$$

$$=(A\cap B)\cup(B\cap C)\cup(C\cap A),\qquad(13)$$

$$(A-B)\triangle B=A\cup B.\qquad(14)$$

解 设 $x\in A-D$，则 $x\in A$，$x\notin D$. 若 $x\notin B$，则 $x\in A-B$. 若 $x\in B$，$x\notin C$，则 $x\in B-C$. 若 $x\in C$，则 $x\in C-D$. 总之，$x\in(A-B)\cup(B-C)\cup(C-D)$. 因此(11)成立.

若 $x\in A\triangle C$，则 x 恰属于 A，C 之一. 不妨设 $x\in A$，$x\notin C$. 若 $x\notin B$，则 $x\in A\triangle B$. 若 $x\in B$，则 $x\in B\triangle C$. 总有 $x\in(A\triangle B)\cup(B\triangle C)$. 因此(12)成立.

若 x 至少属于 A，B，C 中的两个集，则 x 既属于(13)左边，也属于(13)右边. 若 x 至多属于 A，B，C 中的一个集，例如 $x\notin A$，B，则 $x\notin A\cap B$，$B\cap C$，$C\cap A$，因此 $x\notin$ (13) 的右边；又 $x\notin A\cup B$，因此 $x\notin$ (13) 的左边. 所以(13)成立.

显然 $A-B$ 与 B 的交为空集，利用(3)得

$$(A-B)\triangle B=(A-B)\cup B=A\cup B.$$

即(14)成立.

证明有关集合的等式(或关系式)需灵活运用各种方法，切忌执一.

例 4 证明下列各对等价关系：

$$A\cup B=\varnothing\Leftrightarrow A=\varnothing \text{ 且 } B=\varnothing, \tag{15}$$

$$A\cup B=A-B\Leftrightarrow B=\varnothing, \tag{16}$$

$$A-B=A\cap B\Leftrightarrow A=\varnothing, \tag{17}$$

$$A\cup B\subseteq C\Leftrightarrow A\subseteq C \text{ 且 } B\subseteq C, \tag{18}$$

$$C\subseteq A\cap B\Leftrightarrow C\subseteq A \text{ 且 } C\subseteq B, \tag{19}$$

$$A-B=B-A\Leftrightarrow A=B, \tag{20}$$

$$A\cap B=A\cup B\Leftrightarrow A=B, \tag{21}$$

$$A\subseteq B \text{ 且 } C\subseteq D\Leftrightarrow (A-B)\cup(C-D)=\varnothing, \tag{22}$$

$$A-B=A\Leftrightarrow B-A=B, \tag{23}$$

$$A\subseteq B\cup C\Leftrightarrow A-B\subseteq C, \tag{24}$$

$$A\subseteq B\subseteq C\Leftrightarrow A\cup B=B\cap C, \tag{25}$$

$$A=B\Leftrightarrow (A-B)\cup(B-A)=\varnothing, \tag{26}$$

$$A-K=B-K\Leftrightarrow (A\triangle B)\subseteq K. \tag{27}$$

解 (15)～(22)都是显然的. 稍想一想(可结合 Venn 图)就可知道各对关系等价. 应当养成这种直观的洞察力，一目了然. 如果极简单的问题不能迅速解决，那么复杂的问题就难于措手. 这就是学习数学应具备的基本功.

(23)的两个关系都等价于 $A\cap B=\varnothing$.

对于(24)，如果 $A\subseteq B\cup C$，那么 A 不被 B“覆盖”的部分一定被 C 覆盖，即 $A-B\subseteq C$. 反之亦然.

对于(25)，如果 $A\subseteq B\subseteq C$，那么 $B\cap C$ 与 $A\cup B$ 都等于 B. 反之，如果 $A\cup B=B\cap C$，那么 $B\subseteq A\cup B=B\cap C\subseteq B$，从而 $A\cup B$, $B\cap C$ 都等于 B，并由此得出 $A\subseteq B$, $B\subseteq C$.

(26)的 $(A-B)\cup(B-A)$ 即对称差 $A\triangle B$. 对称差为 $\varnothing$ 即没有元素恰属于 A, B 之一. 换句话说，属于 A 的元素必属于 B，属于 B 的元素也必属于 A. 因此(26)成立.

在 $A\triangle B\subseteq K$ 时，恰属于 A, B 之一的元素都属于 K，因此 $A-K$, $B-K$ 都等于 $(A\cap B)-K$；反之，若 $A-K=B-K$，则恰属于 A, B 之一的元素都在 K 中，即 $A\triangle B\subseteq K$. 所以(27)成立.

1.10 有关集合的等式(Ⅲ)

本节所介绍的等式均与对称差有关.

例 1 若 $A\triangle K=B\triangle K$，证明：$A=B$.

解 由 1.8 节例 1(结合律)，

$$A=A\triangle\varnothing=A\triangle(K\triangle K)=(A\triangle K)\triangle K$$
$$=(B\triangle K)\triangle K=B\triangle(K\triangle K)=B\triangle\varnothing=B.$$

例 2 证明：

$$(A\triangle B)'=A'\triangle B=A\triangle B', \tag{1}$$

$$(A\triangle K)\cup(B\triangle K)=(A\cap B)\triangle(K\cup(A\triangle B)). \tag{2}$$

解 $A\triangle B=(A-B)\cup(B-A)=(AB')\cup(BA')$，所以由 De Morgan 公式，

$$(A\triangle B)' = (AB')' \cap (BA')' = (A' \cup B) \cap (B' \cup A)$$
$$=(A' \cup B)B' \cup (A' \cup B)A = (A'B' \cup BB') \cup (A'A \cup BA)$$
$$=A'B' \cup BA. \tag{3}$$

而

$$A'\triangle B = (A' - B) \cup (B - A') = A'B' \cup BA.$$

同样

$$A\triangle B' = A'B' \cup BA.$$

于是(1)成立.

为了证明(2),取补集.

$$((A\triangle K) \cup (B\triangle K))' = (A\triangle K)' \cap (B\triangle K)'$$
$$=(A\triangle K') \cap (B\triangle K') \qquad (利用(1))$$
$$=(A \cap (B\triangle K'))\triangle(K' \cap (B\triangle K')) \qquad (1.8\ (6))$$
$$=AB\triangle AK'\triangle K'B\triangle K'$$
$$=AB\triangle K'(A\triangle B\triangle I)$$
$$=AB\triangle K'(A\triangle B)', \qquad ((A\triangle B)\triangle I = (A\triangle B)')$$
$$(AB\triangle(K \cup (A\triangle B)))' = AB\triangle(K \cup (A\triangle B))' \qquad (利用(1))$$
$$=AB\triangle(K'(A\triangle B)'),$$

于是(2)成立.

为了方便,交 $A \cap B$ 简写作 AB. 并约定交(在没有括号时)比其他运算先进行,类似于数的四则运算中的乘法.

定义 $(A\triangle B)'$ 为 $A \times B$. 显然

$$A \times B = B \times A. \tag{4}$$

又由(1)及(3),

$$A\times B=A'\triangle B=A\triangle B'=A'B'\cup BA, \tag{5}$$

从而

$$A\times B=A'\times B'. \tag{6}$$

又

$$(A\times B)\times C=(A\times B)'\triangle C=(A\triangle B)\triangle C,$$

$$A\times(B\times C)=A\triangle(B\times C)'=A\triangle(B\triangle C),$$

所以

$$(A\times B)\times C=A\times(B\times C). \tag{7}$$

例 3 证明:

$$(A\triangle B)\times C=(A\times C)\triangle B=A\triangle(B\times C), \tag{8}$$

$$(A\times C)\triangle(B\times C)=A\triangle B. \tag{9}$$

解 $(A\triangle B)\times C=(A\triangle B)\triangle C'$ (由(5))

$=(A\triangle C')\triangle B=(A\times C)\triangle B$

$=(A\triangle C')\triangle B=A\triangle(C'\triangle B)=A\triangle(B\times C),$

$(A\times C)\triangle(B\times C)=(A\triangle C')\triangle(B\triangle C')$

$=A\triangle B.$ (1.8 例 3)

例 4 证明方程组:

$$\begin{cases} X\cap(A\cup B)=X, & (10)\\ A\cap(B\cup X)=A, & (11)\\ B\cap(A\cup X)=B, & (12)\\ X\cap A\cap B=\varnothing & (13)\end{cases}$$

有唯一解,并求出这唯一的 X.

解 由(10)得 $X\subseteq A\cup B$. 由(13), $X\cap(A\cap B)=\varnothing$.

从而 $X \subseteq A \triangle B$.

由(11)，$X \supseteq A - B$. 由(12)，$X \supseteq B - A$. 从而 $X \supseteq A \triangle B$.

于是，$X = A \triangle B$. 它显然满足(10)～(13).

1.11 容斥原理(Ⅰ)

并集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的元数满足

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \leqslant |A_1| + |A_2| + \cdots + |A_n| \tag{1}$$

当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中两两的交均为空集时等号成立. 又有

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| \geqslant \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| \tag{2}$$

当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 中每三个的交均为空集时等号成立.

一般地，

$$\begin{aligned} |A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = & \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} |A_i \cap A_j| \\ & + \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} |A_i \cap A_j \cap A_k| - \cdots \\ & + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|. \end{aligned} \tag{3}$$

事实上，设元素 x 恰在 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 的 m 个中，则 x 对(3)式右边的贡献为

$$C_m^1 - C_m^2 + \cdots + (-1)^{m-1} C_m^m = 1 - (1-1)^m = 1.$$

由于 C_m^k 在 $k \leqslant \frac{m}{2}$ 时递增，在 $k \geqslant \frac{m}{2}$ 时递减，如果(3)的右边

略去一个正项及它以后的各项，那么(3)的左边大于右边(某些元素 x 对右边的贡献非正或被略去的贡献非负). 如果(3)的右边略去一个负项及它以后的各项，那么(3)的左边小于右边.

(3) 称为*容斥原理*.

例 1 某班学生中数、理、化优秀的分别有 30 人、28 人、25 人. 数理、理化、数化两科优秀的分别有 20 人、16 人、17 人. 数理化三科全优的有 10 人. 问数理两科至少有一科优秀的有多少人? 数理化三科至少有一科优秀的有多少人?

解 用 A_1, A_2, A_3 分别表示数、理、化优秀的学生组成的集合. 由题意

$$|A_1|=30,\ |A_2|=28,\ |A_3|=25,$$
$$|A_1\cap A_2|=20,\ |A_2\cap A_3|=16,\ |A_3\cap A_1|=17,$$
$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=10.$$

由容斥原理,

$$|A_1\cup A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cap A_2|=30+28-20=38,$$

即数理两科至少有一科优秀的学生为 38 人.

同样，由容斥原理,

$$\begin{aligned}|A_1\cup A_2\cup A_3|&=|A_1|+|A_2|+|A_3|-|A_1\cap A_2|\\&-|A_2\cap A_3|-|A_3\cap A_1|+|A_1\cap A_2\cap A_3|\\&=30+28+25-20-16-17+10\\&=40,\end{aligned}$$

即数理化三科至少有一科优秀的学生为 40 人.

例 2 $n\geqslant 3$. 用数字 1, 2, 3 组成 n 位数(每个数字可以重复)，其中 1, 2, 3 均至少出现一次. 求这种 n 位数的个数.

解 用数字 1，2，3 组成的 n 位数的集合记为 I(全集)，其中不含数字 i 的 n 位数的集合记为 A_i ($i=1, 2, 3$)，则

$$|I|=3^n,\ |A_1|=|A_2|=|A_3|=2^n,$$

$|A_i\cap A_j|=1\ (1\leqslant i<j\leqslant 3)$，$|A_1\cap A_2\cap A_3|=0$.

由容斥原理，

$$|(A_1\cup A_2\cup A_3)'|=|I|-|A_1\cup A_2\cup A_3|$$

$$=3^n-(2^n+2^n+2^n-1-1-1+0)$$

$$=3^n-3\times 2^n+3.$$

例 3 9 名乘客进入 4 个车厢，每个车厢都不空，有多少种分配方法？

解 用 A_i 表示第 i 个车厢空着的分配方法的集合 ($1\leqslant i\leqslant 4$)，I 表示所有分配方法的集合，则

$$|I|=4^9,\ |A_i|=3^9(1\leqslant i\leqslant 4),$$

$$|A_i\cap A_j|=2^9(1\leqslant i<j\leqslant 4),$$

$$|A_i\cap A_j\cap A_k|=1\ (1\leqslant i<j<k\leqslant 4),$$

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=0.$$

由容斥原理，

$$|(A_1\cup A_2\cup A_3\cup A_4)'|$$

$$=4^9-C_4^1\times 3^9+C_4^2\times 2^9-C_4^3\times 1+C_4^4\times 0$$

$$=186\,480,$$

即每个车厢都不空的分配方法有 186 480 种.

例 2、例 3 所用的容斥原理也可以这样表述：

设全集 I 中，不具有性质 P_i 的元素组成集合 A_i($i=1, 2, \cdots, n$)，则具有性质 $P_1, P_2, \cdots, P_n$ 的元素共有

$$|I|-\sum|A_i|+\sum|A_i\cap A_j|-\sum|A_i\cap A_j\cap A_k|$$
$$+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n| \tag{4}$$
个. 特别地，在和式中各项相等时，上述个数为
$$|I|-C_n^1|A_1|+C_n^2|A_1\cap A_2|-C_n^3|A_1\cap A_2\cap A_3|$$
$$+\cdots+(-1)^n|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n|. \tag{5}$$
(4)或(5)也称为逐步淘汰原则.

例 4 从自然数数列
$$1, 2, 3, 4, 5, \cdots \tag{6}$$
中依次划去 3 的倍数、4 的倍数，但其中凡是 5 的倍数均保留不划去. 剩下的数中第 1 995 个是多少?

解 3, 4, 5 的最小公倍数是 60. 在 1, 2, …, 60 中，3 的倍数有 $20\left(=\frac{60}{3}\right)$个，4 的倍数有 $15\left(=\frac{60}{4}\right)$个，3 与 4 的公倍数有 $5\left(=\frac{60}{3\times4}\right)$个. 3 与 5 的公倍数有 $4\left(=\frac{60}{3\times5}\right)$个，4 与 5 的公倍数有 $3\left(=\frac{60}{4\times5}\right)$个，3, 4, 5 的公倍数 1 个. 因此 1, 2, …, 60 中留下
$$60-20-15+5+4+3-1=36$$
个数. 同样道理，在
$$60m+1, 60m+2, \cdots, 60m+60 \quad (m\in\mathbf{N})$$
中也留下 36 个数. 因为
$$1\,995=55\times36+15,$$
而 1, 2, …, 60 中留下的第 15 个数是 25，所以(6)中留下的第 1 995 个数是

$$55\times 60+25=3\ 325.$$

1.12 容斥原理(Ⅱ)

本节再介绍一些利用容斥原理的问题.

例1 一次会议有500名代表参加,每名代表认识的人数>400.证明一定能找到6名代表,每两名互相认识(本题中认识是互相的,即甲认识乙,则乙认识甲).

解 设代表v_i认识的人所成的集合为A_i.不妨设$v_2\in A_1$.因为

$$|A_1\cap A_2|=|A_1|+|A_2|-|A_1\cup A_2|$$
$$>400+400-500>0,$$

所以$A_1\cap A_2$不是空集.不妨设$v_3\in A_1\cap A_2$.

因为

$$|A_1\cap A_2\cap A_3|=|A_1\cap A_2|+|A_3|-|(A_1\cap A_2)\cup A_3|$$
$$>(400\times 2-500)+400-500$$
$$=400\times 3-500\times 2>0,$$

所以$A_1\cap A_2\cap A_3$不是空集,不妨设$v_4\in A_1\cap A_2\cap A_3$.

同样,

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4|=|A_1\cap A_2\cap A_3|$$
$$+|A_4|-|(A_1\cap A_2\cap A_3)\cup A_4|$$
$$>400\times 4-500\times 3>0.$$

设$v_5\in A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4$.再由

$$|A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4\cap A_5|>400\times 5-500\times 4=0,$$

可设 $v_6 \in A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5$. 这样得到的 6 个人 v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6 互相认识.

例 2 设 n 是正整数. 我们说集 $\{1, 2, \cdots, 2n\}$ 的一个排列 $(x_1, x_2, \cdots, x_{2n})$ 具有性质 P, 如果在 $\{1, 2, \cdots, 2n-1\}$ 中至少有一个 i, 使 $|x_i - x_{i+1}| = n$ 成立. 证明具有性质 P 的排列比不具有性质 P 的排列多.

解 对于 $k = 1, 2, \cdots, n$, 令 A_k 为 k 与 $k+n$ 相邻的排列组成的集合, 则

$$|A_k| = 2 \times (2n-1)!$$

(k 与 $k+n$ 排在一起作为一个"数", $2n-1$ 个数有 $(2n-1)!$ 种排列. k 与 $k+n$ 的位置可以交换, 因此这样的排列共 $2 \times (2n-1)!$ 种),

$$|A_k \cap A_h| = 2^2 \times (2n-2)! \quad (1 \leqslant k < h \leqslant n)$$

(将 k 与 $k+n$, h 与 $h+n$ 并在一起, $2n-2$ 个"数"有 $(2n-2)!$ 种排列, k 与 $k+n$, h 与 $h+n$ 可以交换, 各有 2 种可能).

由容斥原理, 具有性质 P 的排列个数 m

$$\begin{aligned}
&\geqslant \sum_{k=1}^{n} |A_k| - \sum_{1 \leqslant k < h \leqslant n} |A_k \cap A_h| \\
&= 2 \times (2n-1)! \times n - C_n^2 \times 2^2 \times (2n-2)! \\
&= 2n \times (2n-2)! \times n \\
&> (2n)! \times \frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

m 超过排列总数 $(2n)!$ 的一半, 即具有性质 P 的排列多于不具有性质 P 的排列.

例 3 在正 $6n+1$ 边形中, k 个顶点染红色, 其余顶点染

蓝色. 证明具有同色顶点的等腰三角形的个数与染色方法无关.

解 设 k 个点染红色, 其余点染蓝色时, 顶点同为蓝色的等腰三角形个数为 a_k, 顶点同为红色的等腰三角形个数为 b_k.

因为 $3 \nmid 6n+1$, 任三个顶点不构成正三角形. 以任一顶点作为等腰三角形的"尖"——两腰的公共点, 有 $6n+1$ 种方法. 其余的 $6n$ 个顶点两两成对, 每一对关于过"尖"与(正 $6n+1$ 边形)中心的直线对称, 它们与"尖"组成等腰三角形. 因此, 共能构成 $(6n+1)\times 3n$ 个(以 $6n+1$ 边形的顶点为顶点的)等腰三角形, 即 $a_0 = (6n+1)\times 3n$.

$a_0 - a_1$ 即恰有一个红点 A 时, 顶点不同为蓝色的等腰三角形的个数. 其中以 A 为尖的有 $3n$ 个, 以其他点为尖(以 A 为一个顶点)的有 $6n$ 个. 因此 $a_0 - a_1 = 9n$.

现在设 k 个点染成红色. 这时全部等腰三角形的个数即 a_0, 以红点 A 为顶点的等腰三角形的个数是 $a_0 - a_1$. 以两个红点 A, B 为顶点的等腰三角形有 3 个. 因此, 由容斥原理,

$$a_k = a_0 - C_k^1(a_0 - a_1) + C_k^2 \cdot 3 - b_k,$$

即顶点同色的等腰三角形的个数为

$$a_k + b_k = a_0 - C_k^1(a_0 - a_1) + 3C_k^2$$

$$= 3n(6n+1) - 9kn + \frac{3}{2}k(k-1).$$

另一种解法见习题 4.

上节的例题只需套用容斥原理, 依样葫芦. 本节的例题, 需要根据情况, 灵活运用原理, 值得细细体会.

第二章 映 射

2.1 映 射

设 X，Y 为两个集合，如果对于每一个元 $x \in X$，有一个元 $y \in Y$ 与它对应，那么就说定义了一个从 X 到 Y 的映射（也称为函数），记作 $f: X \to Y$. 元 y 称为元 x 在映射 f 下的像，记作 $x \longmapsto y$ 或 $y = f(x)$. X 称为 f 的定义域.

用 $f(X)$ 表示集合 $\{f(x) \mid x \in X\}$，称为像集合. 显然 $f(X) \subseteq Y$.

如果 $f(X) = Y$，那么对于每一个 $y \in Y$，至少有一个 $x \in X$，使得 $f(x) = y$. 这时称 f 为满射或 f 是从 X 到 Y 上的映射. 对于满射，显然有 $|X| \geqslant |Y|$.

如果对 X 中任意两个不同的元 x_1，x_2，均有 $f(x_1) \neq f(x_2)$，那么 f 称为单射. 对于单射，显然有 $|X| \leqslant |Y|$.

一个映射既是单射又是满射，就称为一一对应. 这时 $|X| = |Y|$. 并且，对每个 $y \in Y$，有唯一的 $x \in X$ 满足 $f(x) = y$. 令 $y \longmapsto x$，就得到一个从 Y 到 X 的映射，称为 f 的逆映射（即函数 f 的反函数），记作 f^{-1}. f^{-1} 也是一一对应，而且 $f^{-1}(f(x)) = x$，$f(f^{-1}(y)) = y$.

例 1 $X = \{1, 2, 3, 4\}$，$Y = \{0, 1\}$，映射 $f: X \to Y$ 为 $1, 3 \longmapsto 1$；$2, 4 \longmapsto 0$. 这是满射，不是单射.

例 2 $X=\mathbf{R}$，$Y=\mathbf{R}$. $x\longmapsto \sin x\ (x\in\mathbf{R})$ 所表示的映射 f(即 sin)不是满射也不是单射.

例 3 $X=\mathbf{R}$，$Y=\{y\,|-1\leqslant y\leqslant 1\}$. $x\longmapsto \sin x$ $(x\in\mathbf{R})$ 所表示的映射是满射，不是单射.

例 4 $X=\left\{x\,\middle|\,-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right\}$，$Y=\{y\,|-1\leqslant y\leqslant 1\}$. 由 $x\longmapsto \sin x$ 所表示的映射是一一对应. 它的逆映射(反函数)是 $y\longmapsto \arcsin y$.

当 $X=Y$ 时，映射 f：$X\to X$ 是 X 到自身的映射.

若 f:$X\to X$ 使得对每个 $x\in X$，均有 $f(x)=x$，则称 f 为恒等映射，记为 I_X. 在不致混淆时，也写成 I.

若 f 不是恒等映射，则不是每个 $x\in X$ 均满足 $f(x)=x$. 称满足 $f(x)=x$ 的 x 为映射 f 的不动点.

例 5 设 X 是 n 元集，Y 是 m 元集. 求：

(i) 从 X 到 Y 的映射的个数；

(ii) 从 X 到 Y 的满射的个数.

解 (i) 每个 $x\in X$ 的像可为 m 个 $y\in Y$ 中的任意一个，因此从 X 到 Y 的映射共有

$$\overbrace{m\times m\times\cdots\times m}^{n\text{个}}=m^n$$

个.

(ii) 上述 m^n 个映射中，y_i 不是像的有 $(m-1)^n$ 个，y_i，y_j 不是像的有 $(m-2)^n$ 个，…… 根据容斥原理，满射的个数为

$$m^n-C_m^1(m-1)^n+C_m^2(m-2)^n+\cdots+(-1)^kC_m^k(m-k)^n+\cdots+(-1)^{m-1}C_m^{m-1}.$$

2.2 复合映射

设 X, Y,V 为集合,f:$X\to Y$, g:$Y\to V$ 为映射,则产生一个映射 $x\longmapsto g(f(x))$,称为 f, g 的复合映射,用 $g\circ f$:$X\to V$ 表示.

对于 $X\to Y$ 的一一对应 f,显然有

$$f^{-1}\circ f=I_X,\quad f\circ f^{-1}=I_Y. \tag{1}$$

例 1 设 f:$X\to Y$, g:$Y\to V$. 证明:

(i) 若 $g\circ f$ 是单射,则 f 是单射;

(ii) 若 $g\circ f$ 是满射,则 g 是满射.

解 (i) 若有 $f(x_i)=f(x_j)$,则

$$g(f(x_i))=g(f(x_j)).$$

已知 $g\circ f$ 是单射,故由上式得 $x_i=x_j$,即 f 为单射.

(ii) 因为 $g\circ f$ 是满射,所以对任一 $v\in V$,有 $x\in X$ 使 $g(f(x))=v$. 于是有 $y=f(x)\in Y$,使 $g(y)=v$. 从而 g 为满射.

例 2 设 f:$X\to X$ 满足

$$\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k\text{个}f}=I_X, \tag{2}$$

证明 f 是一一对应.

解 I_X 是满射,所以由例 1(ii)(那里的 g, f 分别为现在的 f,$\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k-1\text{个}f}$),$f$ 为满射.

又 I_X 是单射,所以由例 1(i)(那里的 g, f 分别为现在的 $\underbrace{f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k-1\text{个}f}$, f),f 为单射.

于是 f 是一一对应.

$\underbrace{f\circ f\circ f\circ\cdots\circ f}_{k个f}$ 常简记为 $f^{(k)}$.

例 3 映射 $f:X\to X$. 若对所有 $x\in X$, $f(f(x))=f(x)$ 成立,则称为幂等的. 设 $|X|=n$, 试求出幂等映射的个数.

解 设 $|f(X)|=k$,则 $f(X)$ 有 C_n^k 种选择. 对于 $f(X)$ 中任一元 x,显然有 $f(x)=x$. 而 $X-f(X)$ 中的每个元,它的像有 k 种选择. 所以共有幂等映射 $\sum\limits_{k=1}^{n}C_n^k k^{n-k}$ 个.

例 4 若 $f:X\to X$ 满足 $f(f(x))=x$ (所有 $x\in X$),则 f 称为对合. 设 $|X|=n$,求 $X\to X$ 的对合的个数.

解 设 n 个元中有 j 个对 x, y,满足 $f(x)=y$, $f(y)=x$;其余的满足 $f(x)=x$.

$j=0$ 时,仅一种映射,即 $f=I$;

$j>0$ 时,每次取两个作为一对,共取 j 对,有 $C_n^2C_{n-2}^2\cdots C_{n-2j+2}^2$ 种取法. 不考虑 j 对的顺序,有 $\frac{1}{j!}C_n^2C_{n-2}^2\cdots C_{n-2j+2}^2=C_n^{2j}\cdot(2j-1)!!$ 种.

因此 f 的个数为 $1+\sum\limits_{j=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}C_n^{2j}(2j-1)!!$.

2.3 有限集到自身的映射

设 X 为有限集,映射 $f:X\to X$. 这时单射、满射、一一对应三个概念是相同的. 即有

例 1 (i) 若 f 为单射,则 f 为一一对应;

(ii) 若 f 为满射,则 f 为一一对应.

解 (i) 设 X 中元素为 x_1, x_2, $\cdots$, x_n. 由于 f 为单射, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\cdots$, $f(x_n)$各不相同. 因此, $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\cdots$, $f(x_n)$就是 X 的全部元素, $f(X)=X$, f 为满射.

(ii) 设 X 中元素为 x_1, x_2, $\cdots$, x_n. 由于 f 为满射, $f(X)=X$, 所以 $f(x_1)$, $f(x_2)$, $\cdots$, $f(x_n)$ 这 n 个元各不相同, 它们就是 X 的全部元素. f 是单射.

f 既是单射又是满射, 因而是一一对应.

若 $f: X\to Y$, 其中 X, Y 为有限集, 并且 $|X|=|Y|$, 则 (i), (ii) 同样成立.

例 1 是很有用的.

例 2 设自然数 a 与 m 互质, $m>1$, 则对任意整数 b, 同余方程

$$ax\equiv b\ (\mathrm{mod}\ m) \tag{1}$$

有解. 即有一个整数 x, 使 $ax-b$ 被 m 整除.

解 考虑 mod m 的剩余类 $X=\{0, 1, 2, \cdots, m-1\}$ 到自身的映射 f, 定义为

$$x\longmapsto ax\ (\text{所在的剩余类}).$$

f 是单射: 因为 a 与 m 互质, 所以, 当 $ax\equiv ax'\ (\mathrm{mod}\ m)$ 即 $a(x-x')$ 被 m 整除时, $x-x'$ 被 m 整除, 即 $x\equiv x'\ (\mathrm{mod}\ m)$.

根据例 1, f 是满射. 从而对任意的整数 b, 方程(1)有解.

2.4 构造映射(Ⅰ)

许多问题需要构造一个合乎要求的映射.

例 1 是否有一个映射 $f: \mathbf{R}^{+}\to\mathbf{R}$, 满足

$$f^{(1\,989)}(x)=\frac{x}{x+1} \tag{1}$$

（$\mathbf{R}^+$ 表示正实数所成的集）？

解 映射 $f(x)=\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1\,989}}$ 满足要求. 事实上，$\dfrac{1}{f(x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{1\,989}$，$\dfrac{1}{f^{(2)}(x)}=\dfrac{1}{f(x)}+\dfrac{1}{1\,989}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{2}{1\,989}$，…，$\dfrac{1}{f^{(k)}(x)}=\dfrac{1}{x}+\dfrac{k}{1\,989}$，…，$\dfrac{1}{f^{(1\,989)}(x)}=\dfrac{1}{x}+1$.

例 2 是否有一个映射 $f:\mathbf{R}^+\to\mathbf{R}$，满足

$$f^{(64)}(x)=(\sqrt{x}+1)^2? \tag{2}$$

解 映射 $f(x)=\left(\sqrt{x}+\dfrac{1}{64}\right)^2$ 满足要求. 事实上，$\sqrt{f(x)}=\sqrt{x}+\dfrac{1}{64}$，$\sqrt{f^{(2)}(x)}=\sqrt{f(x)}+\dfrac{1}{64}=\sqrt{x}+\dfrac{2}{64}$，…，$\sqrt{f^{(k)}(x)}=\sqrt{x}+\dfrac{k}{64}$，…，$\sqrt{f^{(64)}(x)}=\sqrt{x}+1$.

更一般地，$f(x)=g(g^{-1}(x)+b)$ 满足

$$f^{(n)}(x)=g(g^{-1}(x)+nb), \tag{3}$$

其中 g 是一一对应，b 为任意常数. 事实上，

$$g^{-1}(f(x))=g^{-1}(x)+b,$$

$$g^{-1}(f^{(2)}(x))=g^{-1}(f(x))+b=g^{-1}(x)+2b,$$

……

$$g^{-1}(f^{(n)}(x))=g^{-1}(x)+nb.$$

例 1、例 2 分别是 $g(x)=\dfrac{1}{x}$，x^2 的特殊情况.

例 3 是否存在映射 f：$\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，满足

$$f(f(n))=f(n)+n, \tag{4}$$

$$f(1)=2, \tag{5}$$

$$f(n+1)>f(n)? \tag{6}$$

解 常见的线性函数 $f(x)=ax$ 若满足(4)，则

$$f(f(n))=a^2n=an+n,$$

从而 $a=\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$. 但$\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}x$ 不是 $\mathbf{N}\to\mathbf{N}$ 的映射. 为保证 f 取整值，令 $f(x)=\left[\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}x\right]$. 它满足(6)，不满足(5)，(4)(左边比右边小 1). 因此还需适当修改. 令

$$f(x)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+b\right], \tag{7}$$

其中 $0<b<1$ 是一个待定的常数. 这时

$$f(f(n))=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}f(n)+b\right]=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}f(n)+b\right]+f(n)$$

$$=\left[\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right]+b\right]+f(n)$$

$$=f(n)+n+\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}b-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}\right], \tag{8}$$

其中 $\{x\}=x-[x]$ 为 x 的小数部分. 我们希望(8) 的最后一式中[] 的项为 0，即

$$0<\frac{\sqrt{5}+1}{2}b-\frac{\sqrt{5}-1}{2}\left\{\frac{\sqrt{5}+1}{2}n+b\right\}<1. \tag{9}$$

这只要令 $\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}b=1$ 即 $b=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$. 此时

$$f(x)=\left[\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+\frac{\sqrt{5}-1}{2}\right] \tag{10}$$

满足全部要求.

例 1～例 3 中的映射都不是唯一的.

2.5 构造映射(Ⅱ)

例 1 试求出所有的映射 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使得对于一切 x, $y\in\mathbf{R}$,都有

$$f(x^2+f(y))=y+(f(x))^2. \tag{1}$$

解 $f(x)=x$ 显然满足(1). 问题是有没有其他满足要求的映射.

设 f 满足要求,则由(1)及其中 y 可取一切实数得 f 为满射.

若 $f(y_1)=f(y_2)$,则由(1)得

$$y_1+f^2(x)=f(x^2+f(y_1))$$
$$=f(x^2+f(y_2))=y_2+f^2(x),$$

从而 $y_1=y_2$. 于是 f 为单射.

在(1)中将 x 换为 $-x$,得

$$y+f^2(-x)=f(x^2+f(y))=y+f^2(x),$$

从而

$$f^2(-x)=f^2(x),$$

$$f(-x)=f(x) \text{ 或 } f(-x)=-f(x).$$

由于 f 是单射,当 $x\neq0$ 时,$f(-x)\neq f(x)$. 所以,当 $x\neq0$ 时,$f(-x)=-f(x)$, 并且 $f(-x)$, $f(x)$均非 0.

由于 f 是满射,必有 $f(0)=0$.

在(1)中令 $x=0$,得

$$f(f(y)) = y. \tag{2}$$

因此,对任一实数 y,由(1),(2)得

$$f(x^2+y) = f(x^2+f(f(y))) = f(y)+f^2(x) \geqslant f(y),$$

这表明 f 是增的,即对于 $y'(=x^2+y)>y$,恒有

$$f(y')>f(y). \tag{3}$$

若有 x 使 $f(x)>x$,则由(2),(3),

$$x = f(f(x))>f(x)>x,$$

矛盾. 所以恒有 $f(x) \leqslant x$. 同理 $f(x) \geqslant x$. 因此, $f(x)=x$ 是唯一满足要求的映射.

例 2 构造一个整系数多项式 $f(x)$,使得 f: $\mathbf{Q} \to \mathbf{Q}$ 是单射,而 f:$\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ 不是单射.

解 一次多项式在 $\mathbf{R}$ 上是单射,二次多项式(图象为抛物线)在 $\mathbf{Q}$ 上不是单射. 因此 f 至少是三次多项式.

令 $f(x)=x^3-2x$. 我们证明它满足要求.

若有 $f(x)=f(t)$,即 $x^3-2x=t^3-2t$,则

$$(x-t)(x^2+xt+t^2-2)=0. \tag{4}$$

当 $x \neq t$ 并且 $x^2 \leqslant \frac{8}{3}$ 时,$t=\frac{-x \pm \sqrt{8-3x^2}}{2}$ 使(4)成立. 因此在 $\mathbf{R}$ 上,f 不是单射.

对于有理数 x,若 $\sqrt{8-3x^2}$ 为有理数 y,则 $8-3x^2=y^2$,去分母得

$$8m^2-3n^2=l^2. \tag{5}$$

于是(5)有整数解 l, m, n,其中 m 不等于 0.

若 m, n 有大于 1 的公因数 d,则由(5),$d^2 \mid l^2$,从而 $d \mid l$. 可在(5)的两边同时除以 d. 因此可设(5)中 m, n 互质

$\left(\text{否则用}\dfrac{m}{d}, \dfrac{n}{d}, \dfrac{l}{d}\text{代替}\ m, n, l\ \text{进行讨论}\right)$.

若 $3|m$,则由(5),$3|l$,从而 $3^2|3n^2$, $3|n^2$, $3|n$. 与 m, n 互质矛盾. 若 $3\nmid m$,则 $3\nmid l$. 由(5) mod 3 得

$$2\equiv 1 \pmod 3,$$

矛盾. 因此(5)没有整数解 l, m, n,其中 m 不等于 0.

这样,$\sqrt{8-3x^2}$ 不是有理数. 在 $\mathbf{Q}$ 上,(4)仅当 $t=x$ 时成立. 即在 $\mathbf{Q}$ 上 f 为单射.

例 3 是否存在函数 f:$\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,使得

$$f(f(x))=x^2-2 \tag{6}$$

对所有 $x\in\mathbf{R}$ 成立?

解 考虑映射 $f^{(2)}$ 与 $f^{(4)}$ 的不动点. 由

$$x=f^{(2)}(x)=x^2-2,$$

得 $f^{(2)}$ 的不动点为 2, -1. 由

$$\begin{aligned}x&=f^{(4)}(x)=f^{(2)}(f^{(2)}(x))\\&=(f^{(2)}(x))^2-2=(x^2-2)^2-2,\end{aligned}$$

得 $(x^2-x-2)(x^2+x-1)=0$. 从而 $f^{(4)}$ 的不动点为

$$2, -1, \alpha=\frac{\sqrt{5}-1}{2}, \beta=\frac{-\sqrt{5}-1}{2}.$$

因为 $f^{(4)}(f(\alpha))=f(f^{(4)}(\alpha))=f(\alpha)$,所以 $f(\alpha)$ 也是 $f^{(4)}$ 的不动点.

若 $f(\alpha)=2$,则 $\alpha=f^{(4)}(\alpha)=f^{(3)}(2)=f(2)=f(f(\alpha))=f^{(2)}(\alpha)$. 从而 $\alpha=2$ 或 -1,矛盾. 因此 $f(\alpha)\neq 2$.

同理 $f(\alpha)\neq -1$.

若 $f(\alpha)=\alpha$,则 $f^{(2)}(\alpha)=f(\alpha)=\alpha$,仍得 $\alpha\in\{2, -1\}$,

矛盾.

于是 $f(\alpha)=\beta$. 同理 $f(\beta)=\alpha$. 这样就有

$$f^{(2)}(\alpha)=f(\beta)=\alpha,$$

仍得矛盾.

所求的映射不存在.

注:若限制定义域为$\{x \mid |x| \geqslant 2\}$,则 f 存在. 如

$$f(x)=2\mathrm{ch}\left(\sqrt{2}\mathrm{ch}^{-1}\frac{|x|}{2}\right),$$

其中 $\mathrm{ch}x=\dfrac{\mathrm{e}^{x}+\mathrm{e}^{-x}}{2}$ 称为双曲余弦,ch^{-1} 是它的反函数.

2.6 函数方程(Ⅰ)

求映射的问题也常称为*函数方程*.

函数方程形形色色,没有固定的解法. 前两节已经介绍了一些例题. 本节再举几个例子.

例 1 求所有函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,对任意实数 x, y,均有

$$f(x)f(y)=f(x^2+y^2). \tag{1}$$

解 常数函数 $f(x)=1$ 或 $f(x)=0$ 显然满足要求. 但不知有无其他函数满足要求.

设 f 满足要求. 我们希望通过(1)(应充分利用这个条件)来确定 f.

令 $x=y=0$,由(1)得 $f^2(0)=f(0)$,所以 $f(0)=0$ 或 1.

若 $f(0)=0$,则由(1)

$$f(x^2)=f(x)f(0)=0,$$

即当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=f((\sqrt{x})^2)=0$. 又在(1)中将 y 与 x 都

换成 $-x$,得

$$f^2(-x)=f(2x^2)=f((\sqrt{2}x)^2)=0,$$

所以 $f(x)$ 为常数函数 0.

若 $f(0)=1$,则 $f(x)=f(x)f(0)=f(x^2)$. 只需考虑 f 在正实数上的值. 这时

$$f(x+y)=f((\sqrt{x})^2+(\sqrt{y})^2)=f(\sqrt{x})f(\sqrt{y})=f(x)f(y). \tag{2}$$

在(2)中令 $y=x$,得

$$f(2x)=f^2(x)=f(2x^2),$$

又 $$f(2x)=f((2x)^2)=f(4x^2),$$

所以 $f(2x^2)=f(4x^2)$. 令 $2x^2=y$,则 $f(y)=f(2y)$ 对一切 $y>0$ 成立. 所以 $f^2(x)=f(2x)=f(x)$,$f(x)=0$ 或 1.

若有某个 y 使 $f(y)=0$,则由(2),$f(x+y)=0$,即对比 y 大的 x,$f(x)=0$. 由于

$$f\left(\frac{y}{2^k}\right)=f\left(\frac{y}{2^{k-1}}\right)=\cdots=f(y)=0,$$

所以对一切 $x>0$, $f(x)=0$.

从而本题的解为 $f(x)=0$ 或 $f(x)=1$ 或

$$f(x)=\begin{cases}0, & 若\ x\neq 0;\\ 1, & 若\ x=0.\end{cases}$$

(易知最后这个函数也满足条件.)

例 2 设函数 $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,不恒为 0,满足条件:对所有 x,$y\in\mathbf{R}$,

(i) $f(xy)=f(x)f(y)$;

(ii) $f(x+\sqrt{2})=f(x)+f(\sqrt{2})$.

求 $f(x)$.

解 显然 $f(x)=x$ 满足要求. 下面证明这是唯一的解.

首先,在(i)中令 $x=y=0$,得

$$f(0)=f^2(0),$$

从而 $f(0)=0$ 或 $f(0)=1$.

若 $f(0)=1$, 则对任一 $y\in\mathbf{R}$,

$$f(y)=f(0)f(y)=f(0)=1.$$

但这时 $f(x+\sqrt{2})=f(x)=f(\sqrt{2})=1$,与(ii) 矛盾. 所以 $f(0)=0$.

同样,在(i)中令 $x=y=1$,得

$$f(1)=f^2(1),$$

从而 $f(1)=1$ 或 $f(1)=0$.

若 $f(1)=0$,则对任一 $y\in\mathbf{R}$,

$$f(y)=f(1)f(y)=0,$$

与 $f(x)$不恒为 0 矛盾. 所以 $f(1)=1$.

其次,我们来"改进"(ii). 对任一 $y\neq 0$,

$$\begin{aligned}f(x+y)&=f\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\left(x\cdot\frac{\sqrt{2}}{y}+\sqrt{2}\right)\right)\\&=f\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)f\left(x\cdot\frac{\sqrt{2}}{y}+\sqrt{2}\right)\\&=f\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)\left(f\left(x\cdot\frac{\sqrt{2}}{y}\right)+f(\sqrt{2})\right)\\&=f\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)f\left(x\cdot\frac{\sqrt{2}}{y}\right)+f\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right)f(\sqrt{2})\\&=f(x)+f(y).\end{aligned}$$

上式对 $y=0$ 显然成立. 所以有

(iii) $f(x+y)=f(x)+f(y)$.

于是 $f(x)+f(-x)=f(0)=0$. 从而 $f(x)$是奇函数, 只需考虑 $x>0$.

由 $f(1)=1$ 及(iii), 易知对 $n\in\mathbf{N}$,

$$f(n)=f(n-1)+f(1)=f(n-2)+2f(1)$$

$$=\cdots=nf(1)=n.$$

并且对 m, $n\in\mathbf{N}$,有

$$mf\left(\frac{n}{m}\right)=\underbrace{f\left(\frac{n}{m}\right)+f\left(\frac{n}{m}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{m}\right)}_{m个}$$

$$=f\left(\underbrace{\frac{n}{m}+\frac{n}{m}+\cdots+\frac{n}{m}}_{m个}\right)=f(n)=n,$$

即

$$f\left(\frac{n}{m}\right)=\frac{n}{m}.$$

于是对一切有理数 x,恒有

$$f(x)=x. \tag{3}$$

只要证明此式在 x 为无理数时也成立.

由于 $f(x^2)=f(x)f(x)=f^2(x)\geqslant 0$,所以当 $x>0$ 时, $f(x)$ 非负. 当 $y>0$ 时,

$$f(x+y)=f(x)+f(y)\geqslant f(x),$$

即 $f(x)$递增.

对任一无理数 c,可以找到与 c 任意接近的有理数 r_1, r_2, $r_1<c<r_2$. 由单调性,

$$r_1 = f(r_1) \leqslant f(c) \leqslant f(r_2) = r_2.$$

因为 r_1，r_2 可与 c 任意接近，所以

$$f(c) = c.$$

于是 $f(x) = x$ 对一切 x 均成立.

注：在得到(iii)后，根据 $f(1) = 1$ 推出对一切有理数 x，(3)成立. 这种方法称为 Cauchy 方法. 但要证明(3)对一切实数成立，仅有(iii)是不够的，必须依靠单调性或连续性，而(i)正好提供了这种性质.

2.7 函数方程(Ⅱ)

函数方程中的条件，可以有各种不同的运用，巧拙相差很大. 不应满足于"解出来"，还应寻求优雅的解法，仔细琢磨领悟优雅的解法.

例 1 设 S 表示所有大于 -1 的实数构成的集合. 确定所有的函数：$S \to S$，满足以下两个条件：

(i) 对于 S 内的所有 x 和 y，

$$f(x + f(y) + xf(y)) = y + f(x) + yf(x);$$

(ii) 在区间 $-1 < x < 0$ 与 $x > 0$ 的每一个内，$\dfrac{f(x)}{x}$ 是严格递增的.

解 由(i)得

$$f(x + f(x) + xf(x)) = x + f(x) + xf(x). \tag{1}$$

对固定的 x，令 $x + f(x) + xf(x) = c$，则上式即

$$f(c) = c. \tag{2}$$

将 c 代入(1)并利用(2)，得

$$f(2c+c^2)=2c+c^2. \tag{3}$$

因为 $2+c>2+(-1)=1$,所以 $2c+c^2=c(2+c)$ 与 c 同号.

若 $c>0$,则 $2c+c^2>c$,但(2),(3) 导出

$$\frac{f(2c+c^2)}{2c+c^2}=\frac{f(c)}{c}=1,$$

与$\frac{f(x)}{x}$在 $x>0$ 时严格递增矛盾.

若 $c<0$,同样导出矛盾.

因此 $c=0$. 从而对一切 $x\in S$,

$$x+f(x)+xf(x)=0.$$

即

$$f(x)=-\frac{x}{x+1}.$$

不难验证这一函数满足要求.

这一解法巧妙地利用了$\frac{f(x)}{x}$的严格递增,迅速地达到了目的.

例 2 (i) 设函数 f: $[0,1]\to[0,1]$,严格增(减),f^{-1}是它的反函数,并且对所有定义域中的 x 均有

$$f(x)+f^{-1}(x)=2x, \tag{1}$$

求出 f.

(ii) f: $\mathbf{R}\to\mathbf{R}$,其余条件同(i). 求出 f.

解 (i) 显然 $f(x)=x$ 满足所有要求. 但是否仅有这一个解呢? 这唯一性需要证明.

对任一 $x_0\in[0,1]$,定义

$$x_n = f(x_{n-1}),\ n = 1, 2, \cdots.$$

在(1)中令 $x = x_n$，则

$$x_{n+1} + x_{n-1} = 2x_n,$$

即

$$x_{n+1} - x_n = x_n - x_{n-1}(n = 1, 2, \cdots).$$

从而

$$x_n - x_{n-1} = x_{n-1} - x_{n-2} = \cdots = x_2 - x_1 = x_1 - x_0,$$

$$x_n - x_0 = (x_n - x_{n-1}) + (x_{n-1} - x_{n-2}) + \cdots + (x_1 - x_0)$$
$$= n(x_1 - x_0).$$

因为 $x_n \in [0, 1]$，所以

$$|x_1 - x_0| = \frac{1}{n}|x_n - x_0| \leqslant \frac{1}{n}.$$

由此得 $x_1 = x_0$，即 $f(x_0) = x_0$.

由 x_0 的任意性，$f(x) = x$.

(ii) 上面的证明不再适用. 实际上，解也不唯一. 容易验证，

$$f(x) = x + c,\ c \text{ 为任意实数},$$

满足要求.

下面证明只有这种形式的解.

令 $g(x) = f(x) - x$. 在(1)中用 $f(x)$代替 x 得

$$f(f(x)) = 2f(x) - x. \tag{2}$$

显然当 $k = 0$ 时，

$$f(x + kg(x)) = f(x) + kg(x). \tag{3}$$

假设上式对 k 成立，则

$$f(x+(k+1)g(x))=f(f(x)+kg(x))$$

$$=f(f(x+kg(x)))\qquad (由(3))$$

$$=2f(x+kg(x))-(x+kg(x))\qquad (由(2))$$

$$=2(f(x)+kg(x))-(x+kg(x))\qquad (由(3))$$

$$=f(x)+(k+1)g(x).$$

于是(3)对一切非负整数 k 均成立.

(3)对于负整数 k 也成立. 事实上, $x-g(x)=f^{-1}(x)$, $f^{-1}(f^{-1}(x))=2f^{-1}(x)-x$, 所以由(3)可得

$$f^{-1}(x+kg(x))=f^{-1}(f^{-1}(f(x)+kg(x)))$$

$$=2f^{-1}(f(x)+kg(x))-(f(x)+kg(x))$$

$$=2(x+kg(x))-(f(x)+kg(x))$$

$$=kg(x)+x-g(x),$$

即

$$f(x+(k-1)g(x))=x+kg(x)$$

$$=f(x)+(k-1)g(x).$$

这表明从(3)对 k 成立可导出(3)对 $k-1$ 也成立.

于是(3)对一切整数 k 成立.

不妨设 $f(x)$ 递增. 用 $\wedge$ 表示 $>$, $=$, $<$ 三者之一, $\vee$ 表示与 $\wedge$ 方向相反的不等号. 对任意 $x_2>x_1$,

$$x_2-x_1\ \wedge\ k(g(x_1)-g(x_2))$$

$$\Leftrightarrow\quad x_2+kg(x_2)\ \wedge\ x_1+kg(x_1)$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x_2+kg(x_2))\ \wedge\ f(x_1+kg(x_1))$$

$$\Leftrightarrow\quad f(x_2)+kg(x_2)\ \wedge\ f(x_1)+kg(x_1)$$

(由(3))

$$\Leftrightarrow \quad x_2 + (k+1)g(x_2) \wedge x_1 + (k+1)g(x_1)$$

$$\Leftrightarrow \quad x_2 - x_1 \wedge (k+1)(g(x_1) - g(x_2)).$$

若 $g(x_1) \neq g(x_2)$，则总可选择整数 m，使

$$m(g(x_1) - g(x_2)) < 0 < x_2 - x_1.$$

由上面的证明，

$$(m \pm 1)(g(x_1) - g(x_2)) < x_2 - x_1.$$

$m \pm 1$ 又可换成 $m \pm 2$，……. 这样继续下去，左边可变成任意大的正数，矛盾. 所以

$$g(x) = C,\ C \text{ 为常数}.$$

从而

$$f(x) = x + C.$$

上面的解法固然有很高的技巧，但显得臃肿，下面的解法较为轻灵.

又解 若 $f(x_0) = x_0 + t$，则 $f^{-1}(x_0 + t) = x_0$，

$$f(x_0 + t) = 2(x_0 + t) - x_0 = x_0 + 2t,$$

$$f^{-1}(x_0) = 2x_0 - (x_0 + t) = x_0 - t,$$

$$f(x_0 - t) = x_0,$$

$$\cdots\cdots$$

于是有链

$$\cdots x_0 - 2t \xmapsto{f} x_0 - t \xmapsto{f} x_0 \xmapsto{f} x_0 + t \xmapsto{f} x_0 + 2t \xmapsto{f} \cdots,$$

其中 $a \xmapsto{f} b$ 表示 $f(a) = b$.

(a) 因为 $f(x)$ 的值限制在区间 $[0, 1]$ 内，必有 $t = 0$（否则存在正整数 k，使 $x_0 + kt$ 溢出区间 $[0, 1]$）. 所以 $f(x) = x$.

(b) 设 $x_0' \neq x_0$，$f(x_0') = x_0' + t'$. 又有一链

$$\cdots x_0'-2t' \xrightarrow{f} x_0'-t' \xrightarrow{f} x_0' \xrightarrow{f} x_0'+t' \xrightarrow{f} x_0'+2t' \xrightarrow{f} \cdots.$$

若 $t' \neq t$，不妨设 $t' > t$. 当自然数 k 充分大时，

$$x_0' + kt' - (x_0 + kt) = (x_0' - x_0) + k(t' - t) > 0.$$

由单调性得

$$x_0' + (k-1)t' > x_0 + (k-1)t,$$

$$x_0' + (k-2)t' > x_0 + (k-2)t,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_0' > x_0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_0' - ht' > x_0 - ht.$$

但当自然数 h 充分大时，$x_0' - ht' < x_0 - ht$，矛盾. 因此必有 $t' = t$.

从而 $f(x) = x + C$，C 为常数.

注：(i)不需要单调性. (ii)没有单调性时，函数值可形成许多条链，不同链上 $f(x) - x$ 的值可以不同，如

$$f(x) = \begin{cases} x, & x \in \mathbf{Q}; \\ x + C, & x \in \mathbf{R} - \mathbf{Q} \end{cases}$$

等等，均符合要求.

2.8 链

上一节例 2 中出现的链在构造映射时非常有用.

例 1 是否存在函数 $f:\mathbf{N} \to \mathbf{N}$，使得对每一个 $n \in \mathbf{N}$，都有

$$f^{(1995)}(n) = 2n? \tag{1}$$

解 所述函数是存在的，而且有无穷多个.

为了作出这样的函数，任取一个奇数 j，从 j 出发可以得到一条链

$$j \longmapsto 2j \longmapsto 4j \longmapsto 8j \longmapsto \cdots. \tag{2}$$

这样的链有无穷多条($j=1, 3, 5, 7, 9, 11, \cdots$).

将每 1 995 条链组成一条新链，如下图所示：

$$\begin{tikzcd}
j_1 \arrow[d, mapsto] & 2j_1 \arrow[d, mapsto] & 4j_1 \arrow[d, mapsto] & \\
j_2 \arrow[d, mapsto] & 2j_2 \arrow[d, mapsto] & 4j_2 \arrow[d, mapsto] & \cdots\ \cdots \\
\vdots \arrow[d, mapsto] & \vdots \arrow[d, mapsto] & \vdots \arrow[d, mapsto] & \\
j_{1\,995} \arrow[uuur] & 2j_{1\,995} \arrow[uuur] & 4j_{1\,995} &
\end{tikzcd} \tag{3}$$

这时每一个自然数 n 恰在一条新链中出现.

令 $f(n)$ 为与 n 在同一条新链中，n 后面的那个数，显然 f 满足要求.

由于新链组成的任意性(任 1 995 条组合在一起)，合乎要求的 f 有无穷多个.

解决例 1 的关键是从常见的公式法中跳出来(不能只想到线性函数或其他用公式表示的函数)，考虑一般的映射，其中的对应关系可用 $\longmapsto$ 表示.

上面的(2)，每一项 n 的后一项恰好是 $f^{(1\,995)}(n)$，所以这样的链就表示了函数 $f^{(1\,995)}$(的对应关系). 同样地，新链表示函数 f，它是利用 $f^{(1\,995)}$ 的链作成的(虽然从定义来说，先有

f,后有 $f^{(1995)}$,但在构造时,恰恰将这个顺序反过来. 这有些像"分析法").

例 2 $f(n)$定义在自然数集 $\mathbf{N}$ 上,并且

(i) 对所有 $n \in \mathbf{N}$, $f(f(n)) = 4n + 9$;

(ii) 对所有 $k \in \mathbf{N}$, $f(2^{k-1}) = 2^k + 3$.

问是否一定有 $f(n) = 2n + 3$?

解 $f(n) = 2n + 3$ 显然满足(i), (ii). 但满足(i), (ii)的函数并非只有一个. 为了说明这一点,我们构造一个满足(i), (ii)并且不同于 $2n + 3$ 的函数.

为此,当 $3 \nmid n$ 时,令 $f(n) = 2n + 3$. 而当 $3 \mid n$ 时,依照例 1 编链.

首先作链(链中每一项为前一项的 4 倍加 9):

$$3 \times 1 \longmapsto 3 \times (4 \times 1 + 3) \longmapsto 3 \times (4^2 + 15) \longmapsto \cdots.$$

设已作了 m 条链. 在这些链外还有形如 $3k$ ($k \in \mathbf{N}$)的数(事实上,有无穷多个被 12 整除的正整数 $3k$,而每条链中只有链首可能是这种数),取其中最小的 $3k$,作链(规律同前)

$$3k \longmapsto 3(4k + 3) \longmapsto 3(16k + 15) \longmapsto \cdots.$$

这样,每一个被 3 整除的 n 均在且仅在一条链中出现.

将每两条链$\{a_n\}$, $\{b_n\}$编成一条新链:

$$\begin{tikzcd}
a_1 \arrow[d, mapsto] & a_2 \arrow[d, mapsto] & a_3 \arrow[d, mapsto] & \cdots \\
b_1 \arrow[ur, mapsto] & b_2 \arrow[ur, mapsto] & b_3 \arrow[ur, mapsto] & \cdots
\end{tikzcd}$$

对每个被 3 整除的 n,令 $f(n)$为新链上紧接着 n 的项,则 $f(f(n)) = 4n + 9$.

这样就得出无穷多个合乎要求的函数 f,而 $f(n) = 2n+$

3 并不恒成立.

每一个函数均可用链表示，所以链不仅可用于构造函数，也可用于有关函数的证明题.

例 3 求证存在 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，满足

$$f^{(k)}(n)=n+a\ (n\in\mathbf{N}) \tag{4}$$

的充分必要条件是 a 为非负整数并且 $k\mid a$.

解 条件是充分的. 当 $k\mid a$ 时，令

$$f(n)=n+\frac{a}{k}, \tag{5}$$

则

$$f^{(k)}(n)=n+\underbrace{\frac{a}{k}+\frac{a}{k}+\cdots+\frac{a}{k}}_{k\text{个}}=n+a.$$

条件也是必要的. 由于 $f:\mathbf{N}\to\mathbf{N}$，所以 a 为整数. 由于 $f^{(k)}(1)=1+a\in\mathbf{N}$，所以 a 为非负整数. 为了证明(5)成立，不妨设 $a>0$. 首先注意 f 是单射，即对于不同的自然数 n，函数值 $f(n)$ 也互不相同. 事实上，若

$$f(n_1)=f(n_2),$$

那么由(4)式

$$n_1+a=f^{(k)}(n_1)=f^{(k)}(n_2)=n_2+a$$

导出 $n_1=n_2$（这一结论亦可由 2.2 节例 1 推出，因为 $f^{(k)}(n)=n+a$ 是单射）.

自然数集 $\mathbf{N}$ 可以分为若干条链，链中每一项 n 的后面是 $f(n)$.

由于 f 是单射，每两条链不相交.

每条链的前 k 项

$$b,\ f(b),\ f^{(2)}(b),\ \cdots,\ f^{(k-1)}(b)$$

均不大于 a (若 $f^{(j)}(b)=c>a$，则 $d=c-a$ 满足 $f^{(k)}(d)=c$. 从而 $d,\ f(d),\ \cdots,\ f^{(k)}(d)=c=f^{(j)}(b)$ 均与 $f^{(j)}(b)$ 在同一链中，并且 $f^{(j)}(b)$ 至少是链中的第 $k+1$ 项)，其余的项均大于 a(等于在它前面 k 项的那个数加 a). 因此，1, 2, …, a 这 a 个数分在 l 条链中，每条恰含 k 个这样的数，所以

$$kl=a,$$

即(5)式成立.

这种表示函数(对应)关系的链也可称为轨道，以免与第四章中集合的链混淆.

2.9 图

如果将元素用点表示，某两个元素之间存在一种关系就用一条线(段)相连，那么就得到一个反映这种关系的图. 其中的线通常称为边.

例 1 某地，若一个人的朋友少于 10 个，称为寡合者；若一个人的朋友都是寡合者，称为怪杰. 证明怪杰的个数不大于寡合者的个数.

解 设不是怪杰的寡合者所成集为 A，不是寡合者的怪杰所成集为 B，既是怪杰又是寡合者所成的集为 C. 又设 $|A|=m$，$|B|=n$. 要证

$$m\geqslant n. \tag{1}$$

将人用点表示. 若两个人是朋友，就在相应的两个点之间连一条边. 这样得到一个图.

B 的元素，因为是怪杰，所以只能与 A, C 中的元素相

连. 又因为 C 中的元素是怪杰，而 B 中的元素不是寡合者，所以 B, C 中的元素不相连. 于是 B 中元素只与 A 中元素相连.

B 中每个元素至少引出 10 条边(因为他们都不是寡合者)，所以 A, B 之间至少有 $10n$ 条边.

另一方面，A 中每个元素都是寡合者，所以引出的边数少于 10 条，从而 A, B 之间的边数不超过 $10m$ 条.

因而 $10n \leqslant 10m$，即(1) 成立.

注：当 A, B 都是空集时，(1)成为等式.

例 2 对于任一自然数 k，若 k 为偶数，将它除以 2，若 k 为奇数，将它加上 1，这称为一次运算. 设恰经过 n 次运算变成 1 的数有 a_n 个，试求 a_{15}.

解 将自然数 k 用点表示. 若 k 经一次运算得到 h，就作一条从 k 到 h 的向量. 这样得到的图称为有向图. 如图 2.9.1 所示(这个图应有无穷多个点，我们只作到第 6 层).

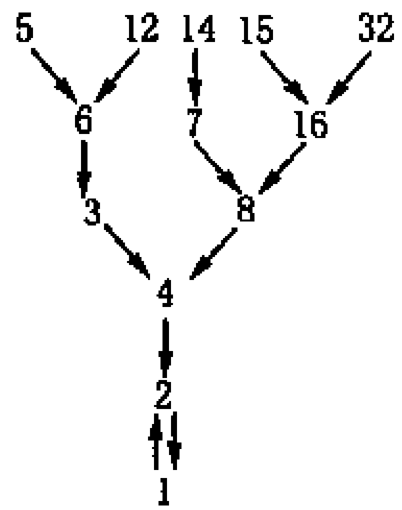


图 2.9.1

显然 $a_1 = 1$ (只有第 2 层的 2 恰经过一次运算变成 1)，$a_2 = 1$ (只有第 3 层的 4 恰经过两次运算变成 1).

对于 $n \geqslant 2$，第 $n+1$ 层的 a_n 个恰经过 n 次运算变成 1 的

数中，每一个奇数 m，只有 $2m$ 恰经过一次运算变成 m；每一个偶数 m，有 $2m$ 与 $m-1$ 两个数恰经过一次运算变成 m. 因此，更上一层的 a_{n+1} 个数比这一层的 a_n 个数多出的个数 $a_{n+1}-a_n$ 就是这 a_n 个数中偶数的个数.

第 $n+1$ 层的偶数经一次运算变为第 n 层的 a_{n-1} 个数. 因此

$$a_{n+1}-a_n=a_{n-1},$$

即

$$a_{n+1}=a_n+a_{n-1}. \tag{2}$$

由递推关系(2)及初始条件 $a_1=a_2=1$，不难逐步推出

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
a_n	1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610

注 1：序列 $\{a_n\}$ 就是著名的 Fibonacci 数列. 在项数不太大时，用递推公式计算 a_n 比用通项公式简单.

注 2："每一个自然数都可以经过有限步运算变为 1"，这称为角谷猜测，至今未能证明.

例 3　30 个足球队，每个队与同样多的队赛过，每次比赛都决出胜负(无平局). 胜的场数大于负的场数的球队至多有多少个?

解　每场比赛一胜一负，因此各队胜的场数之和恰好等于各队负的场数之和.

如果每个队胜的场数均大于负的场数，那么各队胜的场数之和大于各队负的场数之和，矛盾. 所以至多有 29 个队胜的场数大于负的场数.

我们指出 29 个队胜的场数大于负的场数是可能. 为此，

将这 29 个队用 29 个点表示，并记为 v_1, v_2, …, v_{29}. 约定 $v_{i+29} = v_i (i = 1, 2, \cdots)$.

令 v_i 胜 v_{i+1}, v_{i+2}, …, $v_{i+14} (i = 1, 2, \cdots)$，则这 29 个球队每个队各胜 14 场，负 14 场. 再加入一个点 u 表示第 30 个队，它负于 v_1, v_2, …, v_{29}，则 v_1, v_2, …, v_{29} 胜的场数均大于负的场数.

注 1：如果在胜队与负队之间作一向量，那么上面 30 个点每两个点之间均有一条向量，这样的图称为竞赛图. 如果每两个点之间连一条边（而不是向量），这样的图称为完全图. 参见 3.7 节例题.

注 2：更一般地，将 30 改为 $n(\geqslant 2)$，则胜的场数大于负的场数的队至多为：

$$\begin{cases} n-1, & \text{若 } n \text{ 为偶数;} \\ n-2, & \text{若 } n \text{ 为奇数.} \end{cases}$$

第三章　有限集的子集

3.1　子集的个数

从本节起，考虑集 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集. X 的全体子集所成的族记为 $P(X)$. $P(X)$ 也是集，它的元素是 X 的子集. 这种以集为元素的集习惯上称为族或类.

例如 $X=\{1, 2, 3\}$，则

$$P(X)=\{\varnothing, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \{1, 2\}, \\ \{1, 3\}, \{2, 3\}, \{1, 2, 3\}\}.$$

$P(X)$ 有多少个元，即 X 共有多少个子集？

为了回答这一问题，我们考虑如何构成 X 的子集. 元素 $i\,(1\leqslant i\leqslant n)$，可以归入这个子集，也可以不归入这个子集，即 i 有两种归属. n 个元 $1, 2, \cdots, n$ 共有

$$\underbrace{2\times 2\times\cdots\times 2}_{n\text{个}}=2^n$$

种归属. 每一种归属产生 X 的一个子集. 不同的归属产生不同的子集，而且每一个子集均由一种归属产生. 从而

$$|P(X)|=2^n; \tag{1}$$

即 X 有 2^n 个子集.

上面的解法也可以说成每一个从 X 到 $\{0, 1\}$ 的映射产生一个子集 A，它由映射成 1 的那些元素组成. 不同的映射产生

不同的子集，每一个子集都可由这种映射产生(对于子集 A，令

$$\lambda_{A(x)}=\begin{cases}1,\ 若\ x\in A;\\0,\ 若\ x\notin A.\end{cases}\tag{2}$$

则 $\lambda_{A(x)}$ 是 $X\to\{0,1\}$ 的映射，而且 $\lambda_{A(x)}$ 产生子集 A). 所以子集的个数就是映射的个数. 而由于每个元均有映为 0 与映为 1 两种可能，所以映射的个数为 2^n(2.1 节例 3(i) $m=2$ 的特例)，即 X 的子集的个数为 2^n.

映射(2)称为子集 A 的**特征函数**.

本题还有另一种解法：

X 的 k 元子集即从 n 个元中取 k 个的组合，共有 C_n^k 个 $(k=0,1,\cdots,n)$，因此 X 的子集共

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n$$

个. 其中包括空集 $\varnothing$ 与 X 本身.

用上面的方法不难得出含 X 中 k 个指定元素的子集共 2^{n-k} 个. 特别地，含一个指定元素(例如 n)的子集共 2^{n-1} 个.

$P(X)$的子集 $\mathscr{A}$ 也是 X 的子集族，$\mathscr{A}$ 的元是 X 的子集. 有时为了突出 $\mathscr{A}$ 的元 A 是 X 的子集，我们说 A 是 $\mathscr{A}$ 中的子集. 请注意不要与 $\mathscr{A}$ 的子集混淆. $\mathscr{A}$ 的子集是 X 的子集族，$\mathscr{A}$ 中的子集是 X 的子集，即 $\mathscr{A}$ 的元.

子集族也是集. 因此可以讨论子集族 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 的并、交、对称差等. 子集族的子集也称为子族.

3.2 两两相交的子集

设 $\mathscr{A}\subseteq P(X)$ 是 X 的一个子集族，即 X 的一些子集所成的集. $\mathscr{A}$ 中的每两个元(X 的两个子集) X_i, X_j 具有性质

$X_i \cap X_j \neq \varnothing$. 问 $\mathscr{A}$ 中至多有多少个元?

显然在 $X_i \in \mathscr{A}$ 时,它的补集 $X_i' \notin \mathscr{A}$. 因为 X_i 不同时,X_i' 不同. 所以至少有 $|\mathscr{A}|$ 个 X 的子集不属于 $\mathscr{A}$. 从而 $|\mathscr{A}| \leqslant |P(X)| - |\mathscr{A}|$,

$$|\mathscr{A}| \leqslant \frac{1}{2}|P(X)| = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}.$$

另一方面,X 的含 n 的子集共 2^{n-1} 个,每两个的交非空,所以 $\mathscr{A}$ 中至多有 2^{n-1} 个元.

更有趣的,我们有下面的命题:

若子集族 $\mathscr{A}$ 中每两个元 $X_i \cap X_j \neq \varnothing$,并且 $|\mathscr{A}| < 2^{n-1}$,则总可以补充若干个 X 的子集到 $\mathscr{A}$ 中,使得 $\mathscr{A}$ 仍保持每两个元 $X_i \cap X_j \neq \varnothing$ 的性质,并且 $|\mathscr{A}| = 2^{n-1}$.

证明 因为 $|\mathscr{A}| < 2^{n-1}$,所以必有一个 X 的子集 $A \notin \mathscr{A}$ 并且 $A' \notin \mathscr{A}$. 如果 A 与 $\mathscr{A}$ 中每个元的交均非空,将 A 加到 $\mathscr{A}$ 中. 否则 $\mathscr{A}$ 中必有一个元 B,满足 $B \cap A = \varnothing$,从而 $B \subset A'$. 将 A' 加到 $\mathscr{A}$ 中,由于 $\mathscr{A}$ 中每个元与 B 有非空交,所以它们与 A' 有非空交.

于是总可将 A 或 A' 加入 $\mathscr{A}$ 中,使 $|\mathscr{A}|$ 增加 1,同时 $\mathscr{A}$ 中每两个元有非空交. 这样继续下去便可使 $|\mathscr{A}|$ 达到最大值 2^{n-1},并且 $\mathscr{A}$ 中每两个元有非空交.

3.3 奇 偶 子 集

设 A 是 X 的子集. 若 A 中所有数的和为奇数,则称 A 为 X 的奇子集. 若 A 中所有数的和为偶数,则称 A 为 X 的偶子集.

(i) 求 X 的奇子集的个数与偶子集的个数;

(ii) 求 X 的所有奇子集的元素和的和.

解 设 A 是 X 的奇子集. 考虑映射 f:

$$A \longmapsto A - \{1\}, \text{若 } 1 \in A;$$

$$A \longmapsto A \cup \{1\}, \text{若 } 1 \notin A.$$

显然 f 是将奇子集映为偶子集的映射. f 是单射,即对不同的 A, $f(A)$不同.

f 是满射,即对每一个偶子集 B,都有一个 A,满足 $f(A) = B$. 事实上,当 $1 \in B$ 时,令 $A = B - \{1\}$; 当 $1 \notin B$ 时,令 $A = B \cup \{1\}$; 则 $f(A) = B$.

于是 f 是从奇子集族到偶子集族的一一对应. 从而 X 的奇子集与偶子集个数相等,都等于 $\frac{1}{2} \mid P(X) \mid = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$.

作为(i)的推论, X 的含 1 的奇子集有 2^{n-2} $\left(= \frac{1}{2} \times 2^{n-1}\right)$ 个;不含 1 的奇子集也有 2^{n-2} 个.

X 的所有子集的元素和的和是

$$2^{n-1} \times (1 + 2 + \cdots + n) = 2^{n-2} n(n+1)$$

(因为任一元素 i 在 2^{n-1} 个子集中出现).

对应上面的映射 f,每个含 1 的奇子集 A 比偶子集 B 多一个 1,因而元素和多 1. 所有含 1 的奇子集(2^{n-2} 个)的元素和的和比所有不含 1 的偶子集的元素和的和多 2^{n-2}.

同样,所有不含 1 的奇子集的元素和的和比所有含 1 的偶子集的元素和的和少 2^{n-2}.

因此,所有奇子集的元素和的和与所有偶子集的元素和的和相等,都等于

$$\frac{1}{2}\times 2^{n-2}n(n+1)=2^{(n-3)}n(n+1).$$

3.4 另一种奇偶子集

设集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$. 若 X 的非空子集 A 中奇数的个数大于偶数的个数,则称 A 是奇子集. 试求:

(1) X 的奇子集的个数;

(2) X 的所有奇子集的元素和的总和.

解 (1) 若 $n=2k+1$ (k 为非负整数). 设 A 为 X 的子集(包括空集),则 A 与 A' 中恰有一个为奇子集,从而奇子集的个数为 $\frac{1}{2}\times 2^n=2^{n-1}$.

若 $n=2k$ (k 为正整数). 这时一个奇子集有 i ($1\leqslant i\leqslant k$) 个奇数, j ($0\leqslant j<i$) 个偶数,所以奇子集的个数

$$\begin{aligned}M&=\sum_{i=1}^{k}C_k^i\sum_{j=0}^{i-1}C_k^j=\sum_{i=1}^{k}C_k^i\sum_{j=k+1-i}^{k}C_k^j=\sum_{i+j\geqslant k+1}C_k^iC_k^j\\&=(1+x)^k\cdot(1+x)^k \text{ 中次数大于 } k \text{ 的项的系数和}\\&=(1+x)^{2k} \text{ 中次数大于 } k \text{ 的项的系数和}\\&=\sum_{t=k+1}^{2k}C_{2k}^t=\sum_{t=0}^{k-1}C_{2k}^t=\frac{1}{2}\left(\sum_{t=0}^{2k}C_{2k}^t-C_{2k}^k\right)\\&=2^{2k-1}-\frac{1}{2}C_{2k}^k=2^{n-1}-\frac{1}{2}C_n^{\frac{n}{2}}.\end{aligned}$$

(2) 若 $n=2k+1$ (k 为非负整数). 含有奇数 t 的奇子集有 $\sum_{i=0}^{k}C_k^i\sum_{j=0}^{i}C_k^j$ 个. 与(1)类似,

$$\sum_{i=0}^{k} C_k^i \sum_{j=0}^{i} C_k^j = \sum_{i=0}^{k} C_k^i \sum_{j=k-i}^{k} C_k^j = \sum_{i+j\geqslant k} C_k^i C_k^j$$

$=(1+x)^{2k}$ 中次数大于 $k-1$ 的项的系数和

$$= \sum_{j=k}^{2k} C_{2k}^j = 2^{2k-1} + \frac{1}{2}C_{2k}^k.$$

含有偶数 s 的奇子集有 $\sum_{i=2}^{k} C_{k+1}^i \sum_{j=0}^{i-2} C_{k-1}^j$ 个，

$$\sum_{i=2}^{k} C_{k+1}^i \sum_{j=0}^{i-2} C_{k-1}^j = \sum_{i=2}^{k} C_{k+1}^i \sum_{j=k+1-i}^{k} C_{k-1}^j = \sum_{i+j\geqslant k+1} C_{k+1}^i C_{k-1}^j$$

$=(1+x)^{k+1}(1+x)^{k-1}$ 中次数大于 k 的项的系数和

$$= \sum_{j=k+1}^{2k} C_{2k}^j = 2^{2k-1} - \frac{1}{2}C_{2k}^k.$$

因此，所求的和为

$$\left(2^{2k-1} + \frac{1}{2}C_{2k}^k\right)(1+3+5+\cdots+(2k+1))$$

$$+\left(2^{2k-1} - \frac{1}{2}C_{2k}^k\right)(2+4+\cdots+2k)$$

$$=2^{2k-1}\cdot\frac{(2k+1)(2k+2)}{2} + \frac{1}{2}C_{2k}^k\cdot(k+1)$$

$$=n(n+1)\cdot 2^{n-3} + \frac{n+1}{4}C_{n-1}^{\frac{n-1}{2}}.$$

若 $n=2k$ (k 为正整数). 类似地，所求和为

$$n(n+1)\cdot 2^{n-3} - \frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}+1\right)C_{n-1}^{\frac{n}{2}}.$$

3.5 Graham 的一个问题

美国数学家 Graham 曾提出一个问题：

对 X 的一个子集族 $\mathscr{A}$,定义

$$\mathscr{A}^* = \{A \mid A \text{ 是 } \mathscr{A} \text{ 中奇数个集的子集}\}.$$

(例如 $X=\{1, 2, 3\}$, $\mathscr{A}=\{\{1\}, \{1, 2\}, \{1, 2, 3\}\}$, 则 $\mathscr{A}^* = \{\{1\}, \varnothing, \{1, 2, 3\}, \{3\}, \{1, 3\}, \{2, 3\}\}$.)证明:

$$(\mathscr{A}^*)^* = \mathscr{A}. \tag{1}$$

这里提供三种解法.

解法一 对于 $\mathscr{A}$,我们令 f 为它的特征函数. 即 f 是从 $P(X)$到$\{0, 1\}$的映射,满足:

$$f(A) = \begin{cases} 1, \text{ 若 } A \in \mathscr{A}; \\ 0, \text{ 若 } A \notin \mathscr{A}. \end{cases}$$

同样,$\mathscr{A}^*$ 的特征函数 f^* 满足:

$$f^*(A) = \begin{cases} 1, \text{ 若 } A \in \mathscr{A}^*; \\ 0, \text{ 若 } A \notin \mathscr{A}^*. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ 若 } \mathscr{A} \text{ 中奇数个集含 } A; \\ 0, \text{ 其他情况}. \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, \text{ 若 } |\{B \mid B \supseteq A, f(B) = 1\}| \text{ 为奇数}; \\ 0, \text{ 其他情况}. \end{cases}$$

$$= \sum_{B \supseteq A} f(B).$$

(这里的和应 mod 2,即和为奇数时,它就是 1. 和为偶数时,它就是 0.)

$(\mathscr{A}^*)^*$ 的特征函数 f^{**} 满足:

$$f^{**}(\mathscr{A}) = \begin{cases} 1, \text{ 若 } A \in (\mathscr{A}^*)^*; \\ 0, \text{ 若 } A \notin (\mathscr{A}^*)^*. \end{cases}$$

根据上面所说,

$$f^{**}(A)=\sum_{B\supseteq A}f^*(B)=\sum_{B\supseteq A}\sum_{C\supseteq B}f(C)$$
$$=\sum_{C\supseteq A}f(C)\sum_{C\supseteq B\supseteq A}1,$$

后一和号表示满足 $C\supseteq B\supseteq A$ 的子集 B 的个数. 容易知道这个和应为 $2^{|C|-|A|}$（相当于 2.1 节中末段所说的 2^{n-k}）. 于是

$$f^{**}(A)=\sum_{C\supseteq A}f(C)\cdot 2^{|C|-|A|}.$$

当 $C=A$ 时，$2^{|C|-|A|}$ 为奇数(即 1)；$C\neq A$ 时 $2^{|C|-|A|}$ 为偶数(即 0). 所以，

$$f^{**}(A)=f(A). \tag{2}$$

(2) 表明 $\mathscr{A}$ 与 $(\mathscr{A}^*)^*$ 的特征函数相同，因此(1)成立.

另一种与解法一实质相同的叙述见《数学竞赛研究教程》(单墫著，江苏教育出版社 1993 年出版).

解法二 利用对称差，易知

$$X=\{1\}\triangle\{2\}\triangle\cdots\triangle\{n\}. \tag{3}$$

又由 $*$ 的定义，对任一集 A，

$$(\{A\})^*=P(A). \tag{4}$$

(A 的每个子集都含于 $\{A\}$ 的唯一元素 A 中.)

$$(P(A))^*=A. \tag{5}$$

(A 的子集 C 被 $P(A)$ 中 $2^{|A|-|C|}$ 个元包含，仅在 $C=A$ 时，$2^{|A|-|C|}$ 是奇数.)

$*$ 与 $\triangle$ 符合"分配律"，即对 X 的任意两个子集族 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$，有

$$(\mathscr{A}\triangle\mathscr{B})^*=\mathscr{A}^*\triangle\mathscr{B}^*. \tag{6}$$

事实上，$C\in(\mathscr{A}\triangle\mathscr{B})^*\Leftrightarrow C$ 是 $\mathscr{A}\triangle\mathscr{B}$ 中奇数个元(X 的子集)

的子集$\Leftrightarrow C$是$\mathscr{A}$或$\mathscr{B}$之一的奇数个元的子集，但不同时是$\mathscr{A}$与$\mathscr{B}$中奇数个元的子集$\Leftrightarrow C \in \mathscr{A}^* \triangle \mathscr{B}^*$.

现在证明(1). 设$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\}$，则由(3)，(4)，(5)，(6)易得

$$\begin{aligned}\mathscr{A}^* &= (\{A_1\}\triangle\{A_2\}\triangle\cdots\triangle\{A_k\})^* \\ &=(\{A_1\})^*\triangle(\{A_2\})^*\triangle\cdots\triangle(\{A_k\})^* \\ &=P(A_1)\triangle P(A_2)\triangle\cdots\triangle P(A_k),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mathscr{A}^*)^* &= (P(A_1)\triangle P(A_2)\triangle\cdots\triangle P(A_k))^* \\ &=(P(A_1))^*\triangle(P(A_2))^*\triangle\cdots\triangle(P(A_k))^* \\ &=\{A_1\}\triangle\{A_2\}\triangle\cdots\triangle\{A_k\} \\ &=\{A_1, A_2, \cdots, A_k\} = \mathscr{A}.\end{aligned}$$

解法三(需知道矩阵的乘法.)　令$N=2^n$. 设X的全部子集为$A_1, A_2, \cdots, A_N$. 考虑一个$N\times N$的矩阵(数表)F，矩阵F的第i行第j列的元素为a_{ij}，

$$a_{ij} = \begin{cases}1, & \text{若 } A_i \subseteq A_j; \\ 0, & \text{其他情况.}\end{cases}$$

对于X的每一个子集族$\mathscr{A}$，定义列向量$C(\mathscr{A})=(c_1, c_2, \cdots, c_N)^T$，其中

$$c_i = \begin{cases}1, & \text{若 } A_i \in \mathscr{A}; \\ 0, & \text{其他情况.}\end{cases}$$

α^T表示向量α的转置，即

$$(c_1, c_2, \cdots, c_N)^T = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_N \end{pmatrix}.$$

由矩阵的乘法，

$$F\times C(\mathscr{A})=(x_1,x_2,\cdots,x_N)^T,$$

其中 x_i 就是 $\mathscr{A}$ 中包含 A_i 的元数. 因此

$$F\times C(\mathscr{A})\equiv C(\mathscr{A}^*)\pmod 2.$$

从而

$$F^2\times C(\mathscr{A})\equiv F\times C(\mathscr{A}^*)\equiv C((\mathscr{A}^*)^*)\pmod 2. \tag{7}$$

另一方面，$F^2=(b_{ij})$，其中

$$b_{ij}=\sum_{k=1}^{N}a_{ik}a_{kj}.$$

显然，当且仅当 $a_{ik}=a_{kj}=1$ 时，$a_{ik}a_{kj}=1$. 即当且仅当 $A_i\subseteq A_k\subseteq A_j$ 时，$a_{ik}a_{kj}=1$. 于是 b_{ij} 即满足 $A_i\subseteq A_k\subseteq A_j$ 的 A_k 的个数，从而

$$b_{ij}=\begin{cases}2^{|A_j|-|A_i|}, & \text{若 } A_i\subseteq A_j;\\ 0, & \text{其他情况.}\end{cases}$$

$$\equiv\begin{cases}1, \text{若 } i=j;\\ 0, \text{若 } i\neq j.\end{cases}\pmod 2$$

即 $A^2 \pmod 2$ 是恒等矩阵 $\begin{pmatrix}1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1\end{pmatrix}$.

由(7)得 $C(\mathscr{A})=C((\mathscr{A}^*)^*)$，即 $\mathscr{A}=(\mathscr{A}^*)^*$.

三种证法各有千秋，值得细细品味. 其中特征函数、对称差、(0，1)矩阵(元素为 0 或 1 的矩阵)都是有用的工具.

3.6 三元子集族(Ⅰ)

集 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的三元子集族，由 X 的全部或一些三元子集组成，在很多问题中出现. 大概是因为除了二元子集族，三元子集族最为简单，而性质又极丰富.

例 1 $n(\geqslant 4)$ 名学生组成 $n+1$ 个俱乐部，每个俱乐部 3 名学生，并且每两个俱乐部的成员不全相同. 证明必有两个俱乐部恰有一个公共成员.

解 每个俱乐部就是一个三元子集，问题即 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的 $n+1$ 个三元子集中，必有两个恰有一个公共元.

假设没有两个子集恰有一个公共元.

$n+1$ 个子集共有 $3(n+1)$ 个元，其中必有一个元出现的次数 $\geqslant\left\lceil\frac{3(n+1)}{n}\right\rceil=4$ ($\lceil x\rceil$表示不小于实数 x 的最小整数，例如 $\lceil 3.14\rceil=4$. $\lceil x\rceil$称为天花板函数)，即它至少属于 4 个子集.

设 i 至少属于 4 个子集，$\{i, j, k\}$是这样的一个集. 另一个含 i 的集必含 j 或 k，不妨设它为$\{i, j, l\}$.

若有一个含 i 的三元子集不含 j，则它必为$\{i, k, l\}$. 但这时第四个含 i 的三元子集不可能与$\{i, j, k\}$，$\{i, j, l\}$，$\{i, k, l\}$均有两个公共元素. 所以每个含 i 的三元子集必含 j. 由对称性，含 j 的三元子集也必含 i.

设 $n+1$ 个集中有 m 个含 i(从而也含 j)，则这 m 个集(的并)共有 $m+2$ 个元素. 其余的 $n-m+1$ 个集与这 m 个集无公共元素(若有公共元素，则有两个公共元素. 从而这集含 i 或 j). 于是由 $n-(m+2)=n-m-2$ 个元组成 $n-m+1$ 个三元子集.

用 $n-m-2$ 个元与 $n-m+1$ 个子集代替上面的 n 个元

与 $n+1$ 个子集，进行同样的讨论. 依此类推，每次得出一些三元子集，个数大于并的元数. 但这一过程不能无限继续下去. 矛盾表明必有两个三元子集的交恰含一个元素.

又解 假设没有两个子集恰有一个公共元.

若子集 A 与 B 有公共元(从而它们有两个公共元)，则称 A, B 等价，记为 $A \sim B$.

显然 $A \sim B$, $B \sim C$ 时，$A \sim C$(A, B 的两个公共元中至少有一个属于 C). 于是，我们可以利用等价关系将这些子集分类. 同一类的子集互相等价，不同类的子集互不等价(因而没有公共元素).

由于子集数比元数多 1，所以必有一个类中子集数比元数多.

设$\{i, j, k\}$与$\{i, j, l\}$是这个类中的两个子集. 若这类中第三个子集为$\{i, k, l\}$，则这类中只能再有一个集即$\{j, k, l\}$. 若这类中第三个子集为$\{i, j, s\}$，则其他的集也都含 i, j. 前一种情况，子集数$\leqslant$元数 4. 后一种情况，子集数比元数少 2. 均导致矛盾.

例 2 求所有的自然数数对(m, n)，使得集 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 有 m 个三元子集 A_1, A_2, $\cdots$, A_m 满足：

(i) X 的每一对元素(即二元子集)恰含在一个 A_i $(1 \leqslant i \leqslant m)$ 中；

(ii) A_1, A_2, $\cdots$, A_m 中每两个恰有一个公共元.

解 设 $A_1 = \{1, 2, 3\}$. $n = 3$, $m = 1$ 是一个解. 若 $n > 3$，则有含 1 与第四个元 4 的集 $A_2 = \{1, 4, 5\}$. 由(i)，5 与 1, 2, 3, 4 均不同.

又有 $A_3 = \{2, 4, 6\}$, $A_4 = \{3, 4, 7\}$，6, 7 与以前的元素不同.

$A_5=\{1, 6, j\}$. 由(i), $j\neq 1, 2, 3, 4, 5, 6$. 而由(ii), $A_5\cap A_4\neq\varnothing$, 所以 $j=7$.

若有第 8 个元素 8,则由(i)有 $A_6=\{1, 8, t\}$, 其中 $t\neq 2, 3, 4, 5, 6, 7$. 从而 $A_6\cap A_4=\varnothing$, 与(ii)矛盾. 所以 $n=7$. 此时除上面的 $A_1, A_2, \cdots, A_5$ 外,还有 $A_6=\{3, 5, 6\}$, $A_7=\{2, 5, 7\}$. 于是 $m=7$.

$(m, n)=(1, 3), (7, 7)$ 满足本题要求.

又解 每个 A_i 中有三个二元子集,所以

$$mC_3^2=C_n^2. \tag{1}$$

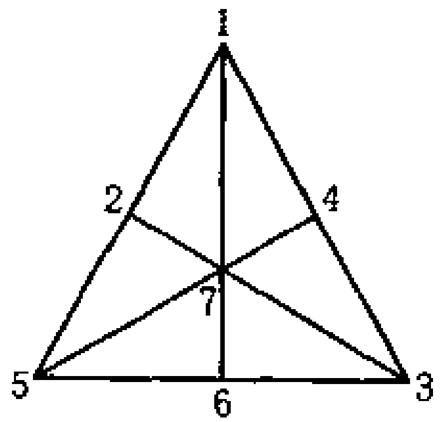
每个含元素 j 的 A_i 中,有两个含 j 的二元子集. X 中含 j 的二元子集共 $n-1$ 个. 由(i),它们均恰属一个 A_i,所以有 $\frac{n-1}{2}$ 个 A_i 含 j.

将 A_i 作为点,每两点之间连一条边. 这样就得到一个图,它有 C_m^2 条边. 由(ii), A_i 与 A_t 之间连的边可标上 A_i 与 A_t 的唯一的公共元素 j. 标 j 的边恰出现 $C_{\frac{n-1}{2}}^2$ 次. 于是

$$C_m^2=nC_{\frac{n-1}{2}}^2. \tag{2}$$

由(1), (2)不难解得 $(m, n)=(1, 3), (7, 7)$.

注:例 2 中 $(m, n)=(7, 7)$ 的情况就是组合学中著名的"有限射影平面". 如果将三元子集作为"直线",那么它可以用下图表示:



但第七条“直线”{2，4，6}无法在欧氏平面上画成真正的直线，颇有点遗憾.

3.7 三元子集族(Ⅱ)

本节再举一些有关三元子集族的问题.

例1 已知$\mathscr{A}$是$X=\{1, 2, \cdots, n\}$的一个三元子集族，$\mathscr{A}$中每两个元(子集)至多有一个公共元. 证明X有一个$[\sqrt{2n}]$元子集，它不包含$\mathscr{A}$中任何元(三元子集).

解 考虑X的不包含$\mathscr{A}$中任何元的子集. 这种子集一定存在，例如X的任一二元子集均是这种子集. 在这种子集中，取一个元数最多的，设它为集M. 我们只需证明M的元数m满足

$$m \geqslant [\sqrt{2n}]. \tag{1}$$

对X中每个$i \notin M$，由M的最大性，$\mathscr{A}$中必有一个元$A_i \subseteq M \cup \{i\}$.

因为A_i不包含在M中，所以$i \in A_i$. 设

$$A_i = \{i\} \cup B_i,$$

其中B_i是二元集，并且$B_i \subseteq M$.

因为$\mathscr{A}$中的每两个元A_i，A_j至多一个公共元素，所以在$i \neq j$时，$B_i \neq B_j$. 从而

$$i \longmapsto B_i$$

是从$X-M$到M的二元子集族的单射. 因此

$$n - m \leqslant C_m^2 = \frac{m(m-1)}{2}.$$

从而

$$m^2+m-2n\geqslant 0,$$

$$m\geqslant\frac{-1+\sqrt{8n+1}}{2}>\sqrt{2n}-1,$$

即(1)成立.

例 2 设例 1 中,$\mathscr{A}$ 的元数的最大值为 $f(n)$. 证明:

$$\frac{1}{6}(n^2-4n)\leqslant f(n)\leqslant\frac{1}{6}(n^2-n). \tag{2}$$

解 先估计 $f(n)$ 的上界,即证明(2)式右边的不等式.

每个三元子集 $\{i, j, k\}$ 含有三个二元子集 $\{i, j\}$, $\{j, k\}$, $\{i, k\}$.

由于 $\mathscr{A}$ 中每两个元(X 的三元子集)至多有一个公共元,所以 $\mathscr{A}$ 中每两个三元子集含有的二元子集均不相同.

X 的二元子集共 C_n^2 个,所以

$$3f(n)\leqslant C_n^2,$$

即

$$f(n)\leqslant\frac{1}{3}C_n^2=\frac{n^2-n}{6}.$$

估计 $f(n)$ 的下界应当用构造法. 造出一批三元子集,个数 $\geqslant\frac{1}{6}n(n-4)$, 每两个的交至多含一个元素.

为此,考虑所有满足条件

$$i+j+k\equiv 0 \pmod n \tag{3}$$

(即 $i+j+k$ 被 n 整除)的三元子集 $\{i, j, k\}$.

如果有 $i'=i$, $j'=j$, 并且

$$i'+j'+k'\equiv i+j+k\equiv 0 \pmod n,$$

那么

$$k' \equiv k \pmod{n}. \tag{4}$$

当 $k', k \in \{1, 2, \cdots, n\}$ 时，(4)式就是 $k' = k$. 所以满足(3)的每两个(不同的)三元子集至多有一个公共元素.

现在来计算满足(3)的三元子集 $\{i, j, k\}$ 的个数 s.

首先取 i，取法有 n 种. i 取定后再取 j，$j \neq i$，并且不满足同余方程

$$2i + j \equiv 0 \pmod{n}$$

(即当 $2i < n$ 时，$j \neq n - 2i$；当 $2i \geqslant n$ 时，$j \neq 2n - 2i$)及

$$i + 2j \equiv 0 \pmod{n}$$

$\left(\text{即 } j \neq \dfrac{n-i}{2}, j \neq \dfrac{2n-i}{2}\right)$. 因此 j 至少有 $n-4$ 种选择. i，j 确定后，由(3)，k 也随之确定，而且与 i，j 均不相同. 所以 $s \geqslant \dfrac{1}{6} n(n-4)$. 从而(2)的另一半成立.

例 3 设 $\mathscr{A}$ 是 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个三元子集族，$n = 6k$. 若 X 的每个二元子集均至少包含在 $\mathscr{A}$ 的一个元(X 的三元子集)中，证明 $\mathscr{A}$ 至少有 $\dfrac{n^2}{6}$ 个元.

解 含有 1 的二元子集有 $n-1$ 个. 每个含 1 的三元子集包含两个含 1 的二元子集. 因此，至少有 $\left\lceil \dfrac{n-1}{2} \right\rceil = 3k$ 个含 1 的三元子集，才能使含 1 的二元子集都至少被 1 个三元子集包含.

对含 $2, 3, \cdots, n$ 的二元子集作同样的讨论. 因为每个三元子集含 3 个元，所以 $\mathscr{A}$ 中至少有

$$\frac{3k\times n}{3}=\frac{n^2}{6}$$

个元(X 的三元子集).

另一方面,可以造出$\frac{n^2}{6}$个三元子集,使得 X 的每个二元子集均至少包含在一个三元子集中,但构造较为复杂,留在 3.9 节中详细说明.

因此 $\mathscr{A}$ 至少含$\frac{n^2}{6}$个元.

例 4 设 $l=\frac{n^2}{6}$, $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_l\}$ 是例 3 中所说的三元子集族, X 的每一个二元子集至少包含在一个 A_j $(1\leqslant j\leqslant l)$ 中. 证明 X 可以拆成 $3k$ 个两两无公共元的二元子集 $P_1, P_2, \cdots, P_{3k}$, 每一个 P_i 恰包含在两个 A_j 中, 而 X 的其他二元子集恰含于一个 A_j 中.

解 因为 $l=\frac{n^2}{6}$, 所以由例 3 的推导可知含有元 i 的三元子集 A_j 恰好 $\frac{n}{2}(=3k)$ 个.

每个含 i 的三元子集包含两个含 i 的二元子集, $\frac{n}{2}$个 A_j 共包含 n 个含 i 的二元子集. 含 i 的不同的二元子集共 $n-1$ 个, 每一个均至少在一个 A_j 中出现, 所以恰有一个含 i 的二元子集在诸 A_j 中共出现两次.

设 $\{i, t\}$ 出现两次. 同样, 含 t 的二元子集中恰有一个被两个 A_j 包含, 而且这个子集就是 $\{i, t\}$. 于是, X 的元素两两配对, 共得 $3k$ 个二元子集 $P_1, P_2, \cdots, P_{3k}$. 每个 P_s(例如 $\{i, t\}$)恰含于两个 A_j 中, 而 X 的其他二元子集均含于一个

A_j 中.

3.8 Steiner 三连系

如果 $\mathscr{A}$ 是集 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个三元子集族，使得 X 的每个二元子集都恰好是 $\mathscr{A}$ 中一个元的子集，那么 $\mathscr{A}$ 就称一个 n 阶 Steiner 三连系.

下面分别列举了阶数是 3，7，9 的 Steiner 三连系：

$n=3$，$\{1, 2, 3\}$；

$n=7$，$\{1, 2, 4\}$，$\{2, 3, 5\}$，$\{3, 4, 6\}$，$\{4, 5, 7\}$，$\{5, 6, 1\}$，$\{6, 7, 2\}$，$\{7, 1, 3\}$；

$n=9$，$\{1, 2, 3\}$，$\{4, 5, 6\}$，$\{7, 8, 9\}$，$\{1, 4, 7\}$，$\{2, 5, 8\}$，$\{3, 6, 9\}$，$\{1, 5, 9\}$，$\{2, 6, 7\}$，$\{3, 4, 8\}$，$\{1, 6, 8\}$，$\{2, 4, 9\}$，$\{3, 5, 7\}$.

其中 7 阶 Steiner 三连系实际上就是 3.6 节例 2 所说的二阶射影平面，只是记号有所不同. 如果将这里的 4，3，6，7 分别改成 3，7，4，6，那么结果就完全一样. 其实 3.6 节例 2 中的图，顶点可任意地标记 1～7，所得的三连系都是同构的.

例 1 证明 Steiner 三连系存在时，

$$n \equiv 1 \text{ 或 } 3 \pmod 6. \tag{1}$$

解 设 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_b\}$ 的元数为 b. 考虑 X 的 C_n^2 个二元子集. 每个二元子集恰在 $A_1, A_2, \cdots, A_b$ 的一个中出现，共出现 C_n^2 次.

另一方面，每个 A_j 包含 3 个二元子集，$A_1, A_2, \cdots, A_b$ 共包含 $3b$ 个二元子集. 所以

$$3b = C_n^2,$$

即

$$b = \frac{n(n-1)}{6}. \tag{2}$$

由于 b 是整数,从(2)得到

$$n \equiv 1, 3, 4, 6 \pmod 6). \tag{3}$$

再考虑 X 中含 1 的二元子集. 显然这样的子集共 $n-1$ 个. 若 $A_1, A_2, \cdots, A_b$ 中有 r 个含 1,则由于含 1 的 A_i 包含两个含 1 的二元子集,每个二元子集恰在 $A_1, A_2, \cdots, A_b$ 的一个中出现,所以

$$2r = n-1,$$

即

$$r = \frac{n-1}{2}. \tag{4}$$

(4) 表明 n 是奇数,结合(3)即得(1).

条件(1)也是充分的. Steiner 曾于 1853 年提出这一问题,1859 年为 Reiss 解决. 其实在他们之前,Kirkman 已于 1847 年提出并解决了这个问题. 证法很多,限于篇幅,这里不作介绍.

例 2 如果有 n_1 阶和 n_2 阶的 Steiner 三连系 $\mathscr{A}_1$ 和 $\mathscr{A}_2$,那么就有 n_1n_2 阶 Steiner 三连系.

解 设 $\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ 分别为 $X_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_{n_1}\}$, $X_2 = \{b_1, b_2, \cdots, b_{n_2}\}$ 的三元子集族. 作 n_1n_2 元集

$$X_3 = \{a_ib_j \mid 1 \leqslant i \leqslant n_1, 1 \leqslant j \leqslant n_2\}.$$

再作 X_3 的三元子集族 $\mathscr{A}_3$ 如下:

$$\{a_ib_r,\ a_jb_s,\ a_kb_t\}\in\mathscr{A}_3,$$

当且仅当

(i) $r=s=t$, $\{a_i,\ a_j,\ a_k\}\in\mathscr{A}_1$;

(ii) $i=j=k$, $\{b_r,\ b_s,\ b_t\}\in\mathscr{A}_2$;

(iii) $\{a_i,\ a_j,\ a_k\}\in\mathscr{A}_1$, $\{b_r,\ b_s,\ b_t\}\in\mathscr{A}_2$

之一成立.

现在证明 $\mathscr{A}_3$ 是 X_3 的 Steiner 三连系.

设 $\{a_ib_r,\ a_jb_s\}$ 是 X_3 的一个二元子集. 若 $i=j$，则因为 $\{b_r,\ b_s\}$恰被 $\mathscr{A}_2$ 的一个元$\{b_r,\ b_s,\ b_t\}$包含，所以$\{a_ib_r,\ a_jb_s\}$恰被 $\mathscr{A}_3$ 中一个元$\{a_ib_r,\ a_ib_s,\ a_ib_t\}$包含. 若 $r=s$，情况同上. 若 $i\neq j$，$r\neq s$，则$\{a_i,\ a_j\}$恰被 $\mathscr{A}_1$ 中一个元$\{a_i,\ a_j,\ a_k\}$包含，$\{b_r,\ b_s\}$恰被 $\mathscr{A}_2$ 中一个元$\{b_r,\ b_s,\ b_t\}$包含. 所以$\{a_ib_r,\ a_jb_s\}$恰被 $\mathscr{A}_3$ 中一个元$\{a_ib_r,\ a_jb_s,\ a_kb_t\}$包含.

下面是 Kirkman 的女生问题，非常著名.

例 3 十五名女生，每天分成五组，每组三人，外出散步. 问能否在一周的七次散步中，每两名女生恰有一次在同一组?

解 下面给出一种排法：

一：{1, 2, 5}, {3, 14, 15}, {4, 6, 12}, {7, 8, 11}, {9, 10, 13};

二：{1, 3, 9}, {2, 8, 15}, {4, 11, 13}, {5, 12, 14}, {6, 7, 10};

三：{1, 4, 15}, {2, 9, 11}, {3, 10, 12}, {5, 7, 13}, {6, 8, 14};

四：{1, 6, 11}, {2, 7, 12}, {3, 8, 13}, {4, 9, 14}, {5, 10, 15};

五：$\{1, 8, 10\}$，$\{2, 13, 14\}$，$\{3, 4, 7\}$，$\{5, 6, 9\}$，$\{11, 12, 15\}$；

六：$\{1, 7, 14\}$，$\{2, 4, 10\}$，$\{3, 5, 11\}$，$\{6, 13, 15\}$，$\{8, 9, 12\}$；

日：$\{1, 12, 13\}$，$\{2, 3, 6\}$，$\{4, 5, 8\}$，$\{7, 9, 15\}$，$\{10, 11, 14\}$.

一个阶数 $6k+3$ 的 Steiner 三连系，如果它的 $b=(2k+1)(3k+1)$ 个元可以分成 $3k+1$ 组，每组含 $2k+1$ 个元，并且原来集合的 $6k+3$ 个元，在每一组的 $2k+1$ 个三元子集中恰好各出现一次，那么这个三连系就称为 Kirkman 三连系. 十五个女生问题就是构造一个 $k=2$ 的 Kirkman 三连系.

Steiner 三连系等是区组设计中的课题，原先只是娱乐的数学，现在发现在科学试验的设计方法中有重要作用.

一个 n 元集 X，可以有很多个 Steiner 三连系. 由于 n 元集有 C_n^3 个三元子集，每个 Steiner 三连系有 $b=\frac{n(n-1)}{6}$ 个元（X 的三元子集），所以 X 至多有

$$\frac{C_n^3}{b}=n-2$$

个两两无公共元的 Steiner 三连系. 如果恰有 $n-2$ 个两两无公共元的 Steiner 三连系，那么就称这 $n-2$ 个 Steiner 三连系为一个大集. 一百三十多年来许多数学家研究过大集的存在问题，直至 1983 与 1984 年，我国数学家陆家羲在连续的六篇论文中证明了对于

$$n>7,\ n\equiv 1,\ 3 \pmod 6$$

的 n 值，除六个可能的例外值，都有大集存在. 从而基本上解

决了这一问题. 对六个例外值,陆家羲已有腹稿,但因心脏病猝然去世,未能完成.

3.9 构　　造

很多组合问题,也就是集合与元素的配置问题,需要构造出符合要求的实例(如上节的女生问题). 这一节我们举几个构造的例题.

例 1　$2n$ 个学生每天出去散步,每两人一组. 如果每一对学生至多在一起散步一次. 这样的散步可以持续多少天?

解　因为每个人有 $2n-1$ 个同学,所以散步至多持续 $2n-1$ 天. 我们证明只要适当安排,确实可以持续散步 $2n-1$ 天.

为此作图,用 $0, 1, \cdots, 2n-1$ 表示 $2n$ 个学生,第一次散步用线表示,即图中的

$$\{0, 1\}, \{2, 2n-1\}, \{3, 2n-2\}, \cdots, \{n, n+1\}.$$

然后绕 O 旋转,每次转过的角度为 $\frac{2\pi}{2n-1}$,这样就得到了 $2n-1$ 次散步的安排(例如第 2 次散步为 $\{0, 2\}, \{1, 3\}, \{2n-1, 4\}, \cdots, \{n+2, n+1\}$).

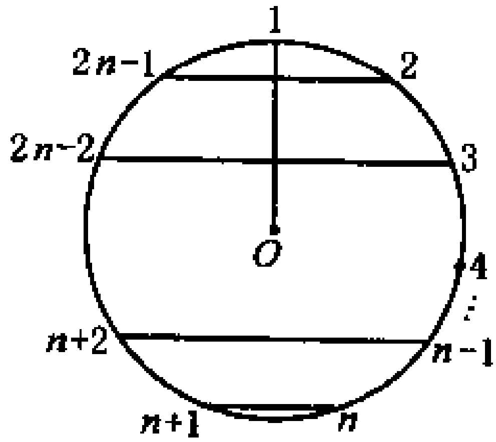


图 3.9.1

n 个点，每两点之间连一条边，所得的图称为完全图 K_n. 例 1 表明完全图 K_{2n}的 C_{2n}^2条边可以分 $2n-1$ 组，每组 n 条，而且这 n 条两两无公共(端)点. 这样的一组边称为图的一个 1—因子(1 意指每个点只引出一条边，即每个元只属于一个二元子集)或一个完全匹配.

现在我们来完成 3.7 节例 3 的剩余部分.

例 2 设 $n=6k$，试构造 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个三元子集族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_l\}$, $l=\frac{n^2}{6}$，使得 X 的每个二元子集均至少包含在 $\mathscr{A}$ 的一个元中.

解 将 X 用 n 个点 1, 2, …, n 表示，形成一个完全图 K_n，每个二元子集是 K_n 的一条边.

问题即在这图中找$\frac{n^2}{6}$个三角形，"吸收"所有的边(线).

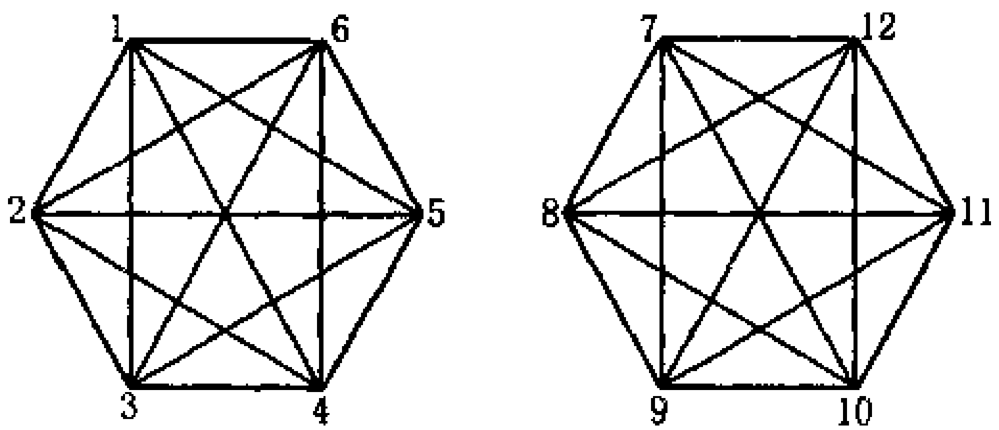


图 3.9.2

$n=6(k=1)$ 的情况很简单：三角形(即三元子集)

$$\{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{3, 4, 5\},$$

$$\{3, 4, 6\}, \{5, 6, 1\}, \{5, 6, 2\},$$

即为所求(参见图 3.9.2 左半边).

其中 $\frac{n}{2}(=3)$ 条边$\{1, 2\}$，$\{3, 4\}$，$\{5, 6\}$出现两次，其他的边恰出现一次. 这在 3.7 节例 4 中已经说过. 以下各种情况也均如此.

$n=12$ 时，首先注意图 3.9.2 右半边，根据例 1，可以分成 5 个 1—因子(下面简称为因子)，每一个由三对无公共点的边(线)组成. 将其中一个因子重复一次，共得 6 个因子. 图 3.9.2 左半边的 6 个顶点各与一个因子搭配，一个顶点与一个因子形成 3 个三角形，共得 18 个三角形. 图 3.9.2 左半边的 K_6，根据上一段，可分成 6 个三角形(其中三条边出现两次). 这样形成的 24 个三角形即为所求.

$n=18$ 时，考虑Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ三个 K_6. Ⅱ，Ⅲ两个 K_6 之间有 $6\times6=36$ 条边，可以分为 6 组(设 b_i, c_i, $i=1, 2, \cdots, 6$, 分别为Ⅱ，Ⅲ的顶点，则第 j 组是 $\{b_1c_{1+j}, b_2c_{2+j}, \cdots, b_6c_{6+j}\}$, $j=0, 1, 2, 3, 4, 5$，并约定 $c_{k+6}=c_k$)，每一组与Ⅰ的一个顶点配合得到 36 个三角形. 又根据上面所证，Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ均可分成 6 个三角形(各有 3 条边出现两次). 这些三角形满足要求.

假设对于 $n=6h<6k$，均可分成合乎要求的三角形. 考虑 $n=6k$.

若 $k=4m$，考虑两个 K_{12m}：Ⅰ与Ⅱ. 根据归纳假设，Ⅰ可以分成三角形满足要求. 如果将Ⅱ看成 K_{2m}(每个顶点是一个 K_6)，那么它有 $2m-1$ 个因子，每个因子由 m 条边组成，每条边就是上面 $n=18$ 时，Ⅱ，Ⅲ两个 K_6 之间的 36 条边. Ⅰ也可以看成 K_{2m}(每个顶点是一个 K_6)，将它的 $2m-1$ 个顶点与上述 $2m-1$ 个因子搭配成 $2m-1$ 组，多余一个顶点. 每一组与上面 $n=18$ 时，Ⅰ与Ⅱ，Ⅲ之间的边搭配的情况类似，共得

$m\times 36$ 个三角形. Ⅰ中多余一个顶点即一个 K_6，将它与Ⅱ中 $2m$ 个 K_6 的每一个搭配，搭配情况如 $n=12$ 的情况（Ⅰ中的 K_6 在图 3.9.2 的左边，它不必再分成三角形，因为作为Ⅰ的一部分，业已用归纳假设分妥）. 整个图形共分成

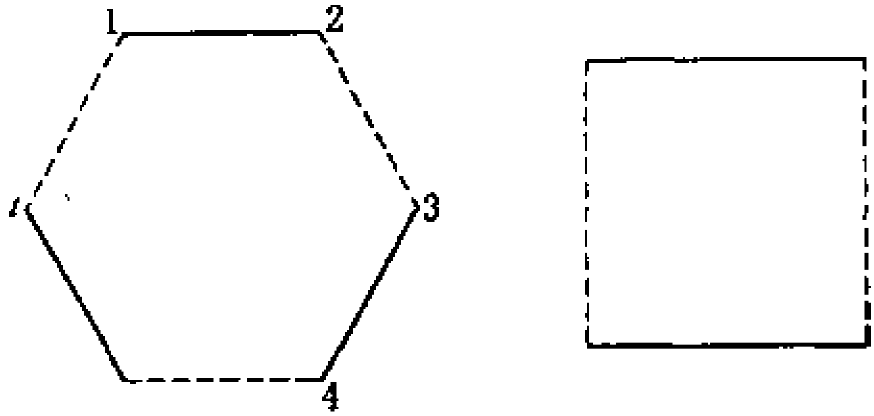
$$\frac{(6\times 2m)^2}{6}+(2m-1)\times m\times 36+2m\times 18=\frac{n^2}{6}$$

个三角形，合乎要求.

若 $n=6(4m+2)$，考虑Ⅰ，Ⅱ两个图，Ⅰ是 K_{12m}，Ⅱ是 $K_{6(2m+2)}$. 根据归纳假设，Ⅰ可分成三角形满足要求. 将Ⅱ看成 K_{2m+2}（每个顶点是一个 K_6），它有 $2m+1$ 个因子. Ⅰ也可以看成 K_{2m}，将它的顶点与上述因子搭配，多余一个因子. 搭配成的每一组可分成三角形. 多出的一个因子即 $2m$ 个 K_6，两两搭配. 每一对 K_6 搭配情况和上面 $n=12$ 相同.

若 $n=6(4m+3)$，考虑Ⅰ，Ⅱ两个图，Ⅰ是 $K_{6(2m+1)}$，Ⅱ是 $K_{6(2m+2)}$. Ⅰ用归纳假设分成三角形. Ⅱ可看成 K_{2m+2}，有 $2m+1$ 个因子，每一个与Ⅰ的一个顶点搭配. K_{2m+2}（即Ⅱ）的每个顶点是 K_6，每一个均分成 6 个三角形（按 $n=6$ 时的做法）.

若 $n=6(4m+1)$，考虑Ⅰ，Ⅱ两个图，Ⅰ是 $K_{6(2m-1)}$，Ⅱ是 $K_{6(2m+2)}$. Ⅰ用归纳法完成分解. Ⅱ看成 K_{2m+2}，它的因子与Ⅰ搭配后多出两个因子. 每个因子有 m 条边无公共端点，第一个因子的边{1, 2}的两端各有一条属于第二个因子的边，不妨设一条为{2, 3}. 3 又接上第一个因子的边{3, 4}，……，依此类推. 因为边共 $2m$ 条，所以上述过程不能无限继续下去，必然形成圈. 圈上的边交错地属于两个因子（如图 3.9.3），因而圈为偶圈（即圈上的边数为偶数）. 因为每个点在



第一因子的边为实线,第二因子的边为虚线.

图 3.9.3

一个因子中恰出现一次,所以圈上的点不与圈外的点相连.对圈外的点进行同样讨论.我们得出:两个因子组成若干个偶圈.

每个偶圈的顶点都是 K_6.对于图 3.9.3 中的第一个圈,按照 $n=12$ 的情况可以将 1,2 间的连线及 2 分成三角形(作为图 3.9.2 左边 K_6 的 1 暂时不动).同样处理 2 与 3,……,最后处理 t 与 1.这样每个 K_6 及每两个相邻的 K_6 间连线已被分成三角形.其他的偶图亦照此办理.

于是对一切 $n=6k$ 均可构造出合乎要求的三元子集族 $\mathscr{A}$.

注:上面的构造借助了归纳法,可称为归纳构造.在构造复杂图形(子集族)时经常采用.

3.10 分　　拆(Ⅰ)

如果集合 $X=A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k$,并且集合 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中每两个的交都是空集,那么 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 称为 X 的一个分拆.

例 1 设 $A_1, A_2, \cdots, A_m$; $B_1, B_2, \cdots, B_m$; $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 是集合 X 的三个分拆.若对每组 i, j, k,均有

$$|A_i \cap B_j| + |A_i \cap C_k| + |B_j \cap C_k| \geqslant m, \tag{1}$$

证明 X 的元数 $n \geqslant \frac{m^3}{3}$,并且在 m 被 3 整除时,元数 $n = \frac{m^3}{3}$ 的集 X 有三个分拆满足题述条件.

解 在(1)左边用 $i = 1, 2, \cdots, m$ 代入然后求和,得

$$|B_j| + |C_k| + m|B_j \cap C_k| \geqslant m^2. \tag{2}$$

(因为 $|A_1 \cap B_j| + |A_2 \cap B_j| + \cdots + |A_m \cap B_j| = |(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_m) \cap B_j| = |X \cap B_j| = |B_j|$.)

同样,在(2)的左边用 $j = 1, 2, \cdots, m$ 代入并求和,得

$$n + m|C_k| + m|C_k| \geqslant m^3. \tag{3}$$

最后,在(3)的左边用 $k = 1, 2, \cdots, m$ 代入并求和,得

$$mn + mn + mn \geqslant m^4, \tag{4}$$

即

$$n \geqslant \frac{m^3}{3}. \tag{5}$$

若 $m = 3s$,考虑 m^2 个集 $M_{11}, M_{12}, \cdots, M_{mm}$,每个集 s 个元,并且两两不相交(例如 M_{11} 是 $\{1, 2, \cdots, s\}$,M_{12} 是 $\{s+1, s+2, \cdots, 2s\}$, $\cdots$, M_{mm} 是 $\{9s^3 - s + 1, 9s^3 - s + 2, \cdots, 9s^3\}$ 即可).

表 X 为集合

$$\begin{aligned} &M_{11}, M_{12}, \cdots, M_{1m}; \\ &M_{21}, M_{22}, \cdots, M_{2m}; \\ &\cdots\cdots \end{aligned} \tag{6}$$

$$M_{m1}, M_{m2}, \cdots, M_{mm}.$$

的并. 又令

$$A_i = \bigcup_{j=1}^{m} M_{ij} \quad (i = 1, 2, \cdots, m),$$

$$B_j = \bigcup_{i=1}^{m} M_{ij} \quad (j = 1, 2, \cdots, m),$$

$$C_k = \bigcup_{j=1}^{m} M_{j,k+j-1} \quad (k = 1, 2, \cdots, m, \text{约定 } M_{j,m+t} = M_{jt}).$$

则显然有 $A_1, A_2, \cdots, A_m$; $B_1, B_2, \cdots, B_m$; $C_1, C_2, \cdots, C_m$ 都是 X 的分拆.

注意 A_i 是对(6)中第 i 行的集合求并,B_j 是对(6)中第 j 列的集合求并,所以

$$|A_i \cap B_j| = |M_{ij}| = \frac{m}{3}.$$

同样,C_k 是对(6)中一条对角线(不同行不同列)的集合求并(如果将(6)在右面重写一遍,那么 C_k 就是从左上到右下的第 k 条对角线的集合的并),所以

$$|A_i \cap C_k| = \frac{m}{3}, \quad |B_j \cap C_k| = \frac{m}{3}.$$

下面两个问题涉及分拆的个数与分拆的链的个数.

例 2 若 n 元集 X 的分拆 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 中有 k_1 个一元集,k_2 个二元集,……,k_n 个 n 元集 ($k_1+k_2+\cdots+k_n=m$, $1k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n$, $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 都是非负整数),则称这个分拆为形如 $1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot\cdots\cdot n^{k_n}$ 的分拆. 求这种分拆的个数.

解 每一个形如 $1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot\cdots\cdot n^{k_n}$ 的分拆,可以将它们的元素依下法排列:

先排一元集的元素(有 k_1! 种排法),再排二元集的元

素，各集的顺序有 $k_2!$ 种，每个集的元素有两种排法，共有 $(2!)^{k_2}\cdot k_2!$ 种排法. 依此类推，k_j 个 j 元集有 $(j!)^{k_j}\cdot k_j!$ 种排法. 共产生 $1^{k_1}\cdot k_1!\cdot 2^{k_2}\cdot k_2!\cdot\cdots\cdot(n!)^{k_n}\cdot k_n!$ 个排列.

每两个不同的形如 $1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot\cdots\cdot n^{k_n}$ 的分拆，至少有一个不同的集，因此用上法产生的排列互不相同.

另一方面，对 n 个元的任一排列，前 k_1 个元产生 k_1 个一元集，它们后面的 $2k_2$ 个元产生 k_2 个二元集(每连续二个元组成一个集)，依此类推，得出一个形如 $1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot\cdots\cdot n^{k_n}$ 的分拆，所给排列正是这个分拆用上法产生的排列.

这样，用上法恰好产生全部 $n!$ 个排列，既无重复也无遗漏，所以 $1^{k_1}\cdot 2^{k_2}\cdot\cdots\cdot n^{k_n}$ 形的分拆共 $\dfrac{n!}{1^{k_1}\cdot k_1!\cdot 2^{k_2}\cdot k_2!\cdot\cdots\cdot(n!)^{k_n}\cdot k_n!}$ 个.

例 3 设 $P_m=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是 n 元集 X 的一个分拆(即 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 是 X 的分拆). 将其中某个 A_i 再拆为两个集，这就产生 X 的一个分拆 P_{m+1}，它由 $m+1$ 个集组成. P_{m+1} 称为 P_m 的加细. 若

$$P_1, P_2, \cdots, P_n \tag{7}$$

都是 n 元集 X 的分拆，并且每一个是前一个的加细(显然这时 P_n 由 n 个集组成，而 P_1 仅由一个集即 X 组成)，则称(7)为长为 n 的链. 求长为 n 的链的个数.

解 由 X 逐步加细可以产生长为 n 的链(7). 这一过程也可以反过来：由 n 个一元集组成的分拆 P_n 出发，将其中两个集合并得到 P_{n-1}，再将 P_{n-1} 中两个集合并起来得到 P_{n-2}，…… 一般地，设已有 $P_n, P_{n-1}, \cdots, P_{k+1}$. 将 P_{k+1} 任两个集合并起来得到 P_k. 由于 P_{k+1} 由 $k+1$ 个集组成，所以 P_k 有

C_{k+1}^2 种. 从而长为 n 的链共

$$\prod_{k=1}^{n-1} C_{k+1}^2 = \frac{n!(n-1)!}{2^{n-1}}$$

种.

3.11 分　　拆(Ⅱ)

上节关于分拆的问题，均与 n 元集 X 的元素无关(仅与元数有关). 本节的问题与元素密切相关. 我们限定 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$.

例 1　设 A, B, C 为 X 的一个分拆，并且从 A, B, C 中各取一个数时，最大的不等于另两个的和. 证明

$$|A|=|B|=|C| \tag{1}$$

不成立.

解　不妨设 $1\in A$, $B\cup C$ 中的最小数 $b\in B$. 设 C 中的数为

$$c_1<c_2<\cdots<c_k. \tag{2}$$

若有 $c_{i+1}-c_i=1$, 不妨设 i 是满足这一条件的最小下标，考虑 c_i-b 与 c_i-b+1 的归属.

因为 $b\in B$, 而

$$(c_i-b)+b=c_i,$$

$$(c_i-b+1)+b=c_{i+1},$$

所以 c_i-b, c_i-b+1 均不属于 A.

又 $(c_i-b)+1=c_i-b+1$, 所以 c_i-b 与 c_i-b+1 不能分别属于 B, C. 由 i 的最小性，差为 1 的 c_i-b 与 c_i-b+1

不能同属于 C,因此 c_i-b 与 c_i-b+1 只能同属于 B. 但比 b 更小的 $b-1\in A$, $(b-1)+(c_i-b+1)=c_i\in C$, 与已知矛盾.

因此恒有 $c_{i+1}-c_i\geqslant 2\quad(i=1,2,\cdots,k-1)$.

这时 $c_i-1\notin B$(因为 $1+(c_i-1)=c_i$), 所以 $c_i-1\in A$, $A\supseteq\{1,c_1-1,c_2-1,\cdots,c_k-1\}$, 从而

$$|A|\geqslant|C|+1>|C|,$$

即(1)不成立.

(1) 表明 $\min(|A|,|B|,|C|)<\frac{n}{3}$. 更精确的结果是下面的(3).

例 2 条件同例 1. 证明:

$$\min(|A|,|B|,|C|)\leqslant\frac{n}{4}. \tag{3}$$

解 例 1 中已经证明恒有

$$c_{i+1}-c_i\geqslant 2\quad(i=1,2,\cdots,k-1).$$

若所有 $c_{i+1}-c_i\geqslant 3$, 则

$$c_1-1,c_2-1,\cdots,c_k-1,c_1+1,c_2+1,\cdots,c_k+1$$

均不在 C 中,也均不在 B 中(因为 $1+(c_i-1)=c_i$, $1+c_i=c_i+1$, $1\in A$, $c_i\in C$). 因此上述 $2k$ 个数及 1 均在 A 中, $|A|>2k$. 若 $|B|\geqslant k$, 则 $|C|=k\leqslant\frac{n}{4}$. 若 $|B|<k$, 则 $|B|<\frac{n}{4}$. (3)成立.

以下设有 $c_{i+1}-c_i=2$ 且 i 是满足这一条件的最小下标.

若 $b\geqslant 3$, 则 $2,b-2\in A$. 考虑 c_i-b 与 c_i-b+2. 因为

$$(c_i - b) + b = c_i,$$

$$(c_i - b + 2) + b = c_{i+1},$$

所以 $c_i - b$, $c_i - b + 2$ 均不属于 A.

又 $(c_i - b) + 2 = c_i - b + 2$, $2 \in A$, 所以 $c_i - b$ 与 $c_i - b + 2$ 不能分别属于 B, C. 由 i 的最小性, $c_i - b$ 与 $c_i - b + 2$ 只能同属于 B. 但 $(b-2) + (c_i - b + 2) = c_i$, 矛盾.

因此 $b = 2$. 我们先证明 $< c_i$ 的奇数 t 及 $c_i - t$ 均在 A 中.

$t = 1$ 是显然的. 设对 t 结论成立, $t+2 < c_i$. 因为 $t \in A$, $2 \in B$, 所以 $t+2 \notin C$. 因为 $c_i - t \in A$, $(c_i - t) + (t+2) = c_{i+1} \in C$, 所以 $t+2 \notin B$. 从而 $t+2 \in A$. 因为 $(c_i - (t+2)) + (t+2) = c_i \in C$, 所以 $c_i - (t+2) \notin B$. 又 $(c_i - (t+2)) + 2 = c_i - t \in A$, 所以 $c_i - (t+2) \notin C$. 从而 $c_i - (t+2) \in A$. 于是上述断言成立.

若 c_i 是奇数, 则根据上面所证 $c_i - 2 \in A$. 但 $(c_i - 2) + 2 = c_i \in C$, 矛盾. 所以 c_i 是偶数.

我们再证明大于 c_i(不超过 n)的奇数 $c_i + t$ 均在 A 中.

$t = 1$ 显然. 设 $c_i + t \in A$, $c_i + t + 2 < n$. 因为 $(c_i + t) + 2 = c_i + t + 2$, 所以 $c_i + t + 2 \notin C$. 又 $t + 2 < c_i + t$, 由上面所证 $t + 2 \in A$. 而 $c_i + (t+2) = c_i + t + 2$, 所以 $c_i + t + 2 \notin B$. 从而 $c_i + t + 2 \in A$. 断言成立.

于是 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 中的奇数均在 A 中, 从而 $|B \cup C| \leqslant \frac{n}{2}$, $\min(|B|, |C|) \leqslant \frac{n}{4}$. 即(3)成立.

如果 A 由 $1, 2, \cdots, 4m$ 中的奇数组成, B, C 从剩下的数中各取一半, 那么 A, B, C 满足要求 $(n = 4m)$, 并且 $\min(|A|, |B|, |C|) = \frac{n}{4}$. 所以估计(3)是最佳的.

下面的例 3 则是构造性的.

例 3 证明有无穷多个 $n=3m$，使得集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 有分拆

$$
\begin{aligned}
A &= \{a_1, a_2, \cdots, a_m\}, \\
B &= \{b_1, b_2, \cdots, b_m\}, \\
C &= \{c_1, c_2, \cdots, c_m\},
\end{aligned}
\tag{4}
$$

满足：

$$a_i+b_i=c_i \quad (i=1, 2, \cdots, m). \tag{5}$$

解 显然 $\{1, 2, 3\}=\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}$ 满足 $1+2=3$. 设对于 m 有形如(4)的$\{1, 2, \cdots, 3m\}$的分拆满足(5). 令

$$A_1=2A\cup\{1, 3, \cdots, 6m+1\},$$

$$B_1=2B\cup\{9m+2, 9m+1, \cdots, 6m+2\},$$

$$C_1=2C\cup\{9m+3, 9m+4, \cdots, 12m+3\},$$

其中 $2A$ 表示将 A 中每一个元素乘以 2 所得的集合. 不难验证 A_1, B_1, C_1 是 $\{1, 2, \cdots, 12m+3\}$ 的分拆，而且满足相应于(5)的等式.

于是，对无穷多个自然数 n(例如 $3, 3\times 5, \cdots, 3\times(4m+1), \cdots$)，$X$ 有分拆满足(5)，即命题成立.

更强的结论是例 4.

例 4 证明 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 有分拆(4)满足(5)的充分必要条件是 $n=3\times 4k$ 或 $3\times(4k+1)$.

解 如果有分拆(4)满足(5)，那么 $n=3m$ 并且

$$1+2+\cdots+(3m)=\frac{(1+3m)\cdot 3m}{2} \tag{6}$$

是 C 中元素的和的 2 倍. (6)是偶数，所以

$$m = 4k \text{ 或 } 4k + 1. \tag{7}$$

(7)也是充分条件.

当 $m = 4k$ 时,可排下表:

1	2	3	4	…	$2k-3$	$2k-2$	$2k-1$	$2k$	$2k+1$	…	$4k-4$	$4k-3$	$4k-2$	$4k-1$	$4k$
$11k$	$6k$	$10k-1$	$6k-1$	…	$9k+2$	$5k+2$	$8k+2$	$5k+1$	$9k+1$	…	$4k+3$	$8k+3$	$4k+2$	$6k+1$	$4k+1$
$11k+1$	$6k+2$	$10k+2$	$6k+3$	…	$11k-1$	$7k$	$10k+1$	$7k+1$	$11k+2$	…	$8k-1$	$12k$	$8k$	$10k$	$8k+1$

第一行自左到右由 1 排至 $4k$. 第二行自右到左,排 $4k+1$, $4k+2$, …, $6k$, 间隔为 1;然后在 $4k-1$, $2k-1$, 1 的下方分别排 $6k+1$, $8k+2$, $11k$, 其余地方自右到左排 $8k+3$, $8k+4$, …, $10k-1$. 第三行的元素是前两行同列元素的和.

将这三行作为 A, B, C 即满足要求.

当 $m = 4k + 1 (k \geqslant 3)$ 时,可排相应的表:

1	3	5	7	…	$4k+1$	$4k$	$2k+2$	2	4	…	$2k$	$2k+4$	…	$4k-2$
$11k+4$	$6k+1$	$6k$	$6k-1$	…	$4k+2$	$6k+3$	$6k+2$	$10k+2$	$10k+1$	…	$9k+3$	$9k+2$	…	$8k+5$
$11k+5$	$6k+4$	$6k+5$	$6k+6$	…	$8k+3$	$10k+3$	$8k+4$	$10k+4$	$10k+5$	…	$11k+3$	$11k+6$	…	$12k+3$

而当 $m = 5, 9$ 时表如下:

1	2	3	4	5
7	13	9	10	6
8	15	12	14	11

1	2	3	4	5	6	7	8	9
12	23	14	22	15	21	11	16	10
13	25	17	26	20	27	18	24	19

本题与 Langford 问题密切相关,参见《对应》(王子侠,单墫著,科技文献出版社 1989 年出版).

3.12 覆　　盖

集 X 的覆盖是指 X 的一族(互不相同的非空)子集 A_1, A_2, …, A_k,它们的并集 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k = X$.

例 1　$X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的覆盖共有多少个(A_1,

A_2，…，A_k 的顺序不予考虑)？

解 X 的非空子集共 2^n-1 个，它们共组成 2^{2^n-1} 个子集族. 其中不含某一元素 i 的子集组成的族有 $2^{2^{n-1}-1}$ 个，不含某两个元素的子集组成的族有 $2^{2^{n-2}-1}$ 个，…… 于是由容斥原理，X 的覆盖共有

$$2^{2^n-1}-C_n^1 2^{2^{n-1}-1}+C_n^2\cdot 2^{2^{n-2}-1}-\cdots=\sum_{j=0}^{n}(-1)^j C_n^j 2^{2^{n-j}-1}$$

个.

例 2 若 A_1，A_2，…，A_k 是 X 的覆盖，并且 X 的每一个元素恰属于 A_1，A_2，…，A_k 中的两个集，则称 A_1，A_2，…，A_k 为 X 的双覆盖. 求 $k=3$ 的双覆盖的个数.

解 X 中每一元素属于 A_1，A_2，A_3 中的某两个，因而有三种可能. n 个元素的归属共有 3^n 种可能. 除去 A_1，A_2，A_3 中恰有一个为空集的三种情况，共有 3^n-3 种. 由于 A_1，A_2，A_3 的顺序不予考虑，所以 $k=3$ 的双覆盖共 $\frac{3^n-3}{3!}$ 个.

注：设由 k 个集组成的双覆盖有 a_k 个，则

$$a_k=\frac{1}{k!}((C_k^2)^n-ka_{k-1}).$$

例 3 设 A_1，A_2，…，A_k 是 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一族子集. 若对 X 中任一对元素 i，j，子集 A_1，A_2，…，A_k 中总有一个恰含 i，j 中的一个，则这族子集称为可分的. 求最小的 k，使得有一族子集 A_1，A_2，…，A_k，既是覆盖又是可分的.

解 考虑 1.2 节所说的从属关系表. 当 A_1，A_2，…，A_k 为覆盖时，每一列至少有一个 1. 当 A_1，A_2，…，A_k 为可分的时，每两列均不完全相同.

由于表有 k 行，表中每个元素为 0 或 1，所以至多可以组

成 2^k-1 个两两不同的列，每列元素不全为 0. 于是

$$2^k-1\geqslant n,$$

即

$$k\geqslant[\log_2 n]+1. \tag{1}$$

另一方面，取 k 满足

$$2^k-1\geqslant n\geqslant 2^{k-1}. \tag{2}$$

作 n 个不同的、由 0 与 1 组成并且不全为 0 的、长为 k 的列 (因为 $2^k-1\geqslant n$，这是可以办到的). 这表的 k 行所代表的 k 个集既覆盖又可分. 因此所求 k 的最小值为 $[\log_2 n]+1$.

3.13 Stirling 数

将 n 元集 X 分拆为 k 个非空子集，分拆的个数(不计子集的顺序)称为第二类 Stirling 数，通常记为 $S_{(n,k)}$. 显然

$$S_{(n,1)}=1, \tag{1}$$

$$S_{(n,n)}=1. \tag{2}$$

(1 分拆，即 $k=1$ 的分拆，只有 $X=X$. n 分拆，只有 $X=\{1\}\cup\{2\}\cup\cdots\cup\{n\}$.) 约定 $S_{(n,0)}=0$.

例 1 证明：

(i) $S_{(n,2)}=2^{n-1}-1$; (3)

(ii) $S_{(n,n-1)}=C_n^2$; (4)

(iii) $S_{(n+1,k)}=S_{(n,k-1)}+kS_{(n,k)}$; (5)

(iv) $S_{(n+1,k)}=\sum\limits_{j=k-1}^{n}C_n^jS_{(j,k-1)}$; (6)

(v) 当 $n\geqslant 2$ 时，

$$S_{(n,1)} - 1!S_{(n,2)} + 2!S_{(n,3)} - \cdots$$
$$+ (-1)^{n-1}(n-1)!S_{(n,n)} = 0. \tag{7}$$

解 (i) 固定 $1 \in A_1$. 其余的 $n-1$ 个元素各有两种归属：属于 A_1 或 A_2. 因此共有 2^{n-1} 种归属. 除去全属于 A_1 的那种，共有 $2^{n-1}-1$ 种分拆.

(ii) 取两个元素作成二元集，有 C_n^2 种方法. 其余的 $n-2$ 个元构成 $n-2$ 个单元集(只含一个元素的集).

(iii) $n+1$ 元集 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的 k 分拆可分为两类：第一类有集 $\{n+1\}$，第二类没有 $\{n+1\}$.

去掉 $n+1$ 后，第一类的分拆成为$\{1, 2, \cdots, n\}$的 $k-1$ 分拆，并且$\{1, 2, \cdots, n\}$的每一个 k 分拆添加 $\{n+1\}$ 后成为第一类的分拆. 因此第一类分拆共 $S_{(n,k-1)}$ 个.

去掉 $n+1$ 后，第二类的分拆成为$\{1, 2, \cdots, n\}$的 k 分拆，并且$\{1, 2, \cdots, n\}$的每一个 k 分拆添加 $n+1$ 有 k 种方法($n+1$ 可放到 k 个子集的任一个中)，添加后就成为第二类的分拆(这些分拆互不相同). 因此第二类分拆共 $kS_{(n,k)}$ 个.

于是(5)成立.

(iv) 在 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的 k 分拆中去掉含 $n+1$ 的子集，得到 $j(k-1 \leqslant j \leqslant n)$ 元集的 $k-1$ 分拆. 这些 $k-1$ 分拆各不相同(否则原来的 k 分拆相同).

反之，从 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 任取 j 个元素(有 C_n^j 种方法)，得到 j 元集 J. J 的任一个 $k-1$ 分拆，添加集 $\{1, 2, \cdots, n+1\}-J$ 后成为 $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ 的 k 分拆. 这样产生的 k 分拆显然各不相同.

因此(6)成立.

(v) 由(5)式，

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^{k-1}(k-1)!S_{(n+1,k)}$$
$$=\sum_{k=2}^{n+1}(-1)^{k-1}(k-1)!S_{(n,k-1)}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k!S_{(n,k)}$$
$$=-\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k!S_{(n,k)}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}k!S_{(n,k)}$$
$$=0.$$

于是(7)对一切 $n \geqslant 2$ 成立.

n 元集的分拆的个数 $\sum_{k=1}^{n}S_{(n,k)}$ 称为 Bell 数，记为 B_n(第 n 个 Bernoulli 数也常记成 B_n，但本书不出现 Bernoulli 数. 因此没有混淆的危险). 显然 $B_1 = 1$. 又约定 $B_0 = 1$.

例 2 证明：

$$B_{n+1}=\sum_{m=0}^{n}C_n^m B_m. \tag{8}$$

解 由(6)，

$$B_{n+1}=\sum_{k=1}^{n+1}S_{(n+1,k)}$$
$$=\sum_{k=1}^{n+1}\sum_{j=k-1}^{n}C_n^j S_{(j,k-1)}$$
$$=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\sum_{k=1}^{j+1}S_{(j,k-1)}$$
$$=\sum_{j=0}^{n}C_n^j\sum_{k=1}^{j}S_{(j,k)}$$
$$=\sum_{j=0}^{n}C_n^j B_j.$$

我们知道 $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=e$. 因此 $B_1=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{k!}$. 借助(8)及归纳法可得 $n=0,1,2,\cdots$ 时,

$$B_n=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^n}{k!}\quad(约定\ 0^0=1). \tag{9}$$

$\Big($设(9)成立,则 $B_{n+1}=\frac{1}{e}\sum_{j=0}^{n}C_n^j\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^j}{k!}=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{n}C_n^jk^j$

$=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\cdot(k+1)^n=\frac{1}{e}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k+1)^{n+1}}{(k+1)!}=\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k^{n+1}}{k!}.\Big)$

例 3 设非空子集 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 是 X 的覆盖,并且 $A_1,A_2,\cdots,A_k$ 中任意 $k-1$ 个的并都是 X 的真子集,则称这一覆盖为既约覆盖. 令 $I_{(n,k)}$ 表示 n 元集 X 的、由 k 个集组成的既约覆盖的个数. 证明:

$$I_{(n,k)}=\sum_{j=k}^{n}C_n^j(2^k-k-1)^{n-j}S_{(j,k)}; \tag{10}$$

$$I_{(n,n-1)}=\frac{1}{2}n(2^n-n-1); \tag{11}$$

$$I_{(n,2)}=S_{(n+1,3)}. \tag{12}$$

解 对每个 $j\geqslant k$, 从 X 中取 j 个元组成集 J. J 有 $S_{(j,k)}$ 个 k 分拆. 对每一个分拆 $B_1,B_2,\cdots,B_k$. 将 $X-J$ 的 $n-j$ 个元分配到这 k 个集中,每个元至少属于两个集. 因此,每个元可属于某个 B_i,也可不属于 B_i,这有 2^k 种可能. 除去不属于任一个 B_i 的一种及仅属于一个 B_i 的 k 种,还有 2^k-k-1 种可能. $n-j$ 个元分配完毕,就产生 X 的由 k 个集组成的覆盖,而且是既约覆盖(因为 J 的每个元只属于这 k 个集中的一个). 这就得到 $\sum_{j=k}^{n}C_n^j(2^k-k-1)^{n-j}S_{(j,k)}$ 个 X 的既约覆盖. 显

然它们各不相同.

反之,对 X 的每一个由 k 个子集组成的既约覆盖,设 J 为仅在一个子集中出现的元素所成的集,则 $|J|\geqslant k$,并且用上述作法便可产生这个既约覆盖.因此(10)成立.

由于 $S_{(n,n-1)}=C_n^2$,所以由(10),

$$I_{(n,n-1)}=S_{(n,n-1)}+n(2^{n-1}-n)=\frac{n}{2}(2^n-n-1).$$

为了求出 $I_{(n,2)}$,设 $y\notin X$. $\{y\}\cup X$ 的每个分拆 $B_1\cup B_2\cup B_3$(不妨设 $y\in B_3$),对应于 X 的既约覆盖 $B_1\cup B_3-\{y\}$, $B_2\cup B_3-\{y\}$.

反之,对 X 的每个既约覆盖 A_1, A_2.令

$$A=A_1\cap A_2,\ B_1=A_1-A,$$
$$B_2=A_2-A,\ B_3=A\cup\{y\},$$

则 B_1, B_2, B_3 是 $\{y\}\cup X$ 的分拆.

由上述一一对应得出(12)成立.

对每个自然数 n,令

$$[x]_n=x(x-1)\cdots(x-n+1). \tag{13}$$

我们有下面的(14).

例 4 证明:

$$x^n=\sum_{k=1}^{n}S_{(n,k)}[x]_k. \tag{14}$$

解 考虑从 n 元集 X 到 m 元集 Y 的映射 f 的个数.这里 $m\leqslant n$.

由 2.1 节例 5,这种映射的个数为 m^n.

另一方面,从 m 元集 Y 中任取 k 个元 y_1, y_2, $\cdots$, y_k 作为 f 的像集(有 C_m^k 种取法),对 n 元集 X 的任一个 k 分拆

$A_1, A_2, \cdots, A_k$，令所有 $x \in A_i$ 的像 $f(x) = y_j(i, j = 1, 2, \cdots, k)$. 这样共产生 $\sum_{k=1}^{m} C_m^k \cdot k! \cdot S_{(n,k)}$ 个互不相同的映射. 显然每个从 X 到 Y 的映射均可这样产生. 所以

$$m^n = \sum_{k=1}^{m} C_m^k \cdot k! \cdot S_{(n,k)} = \sum_{k=1}^{n} [m]_k S_{(n,k)}. \tag{15}$$

(显然 $k > m$ 时，$[m]_k = 0$.)

(15)表明(14)对于 $x = 1, 2, \cdots, n$ 均成立. 由于次数不超过 $n-1$ 的多项式 $x^n - \sum_{k=1}^{n} [x]_k S_{(n,k)}$ 在 n 个 x 值 $(x = 1, 2, \cdots, n)$ 为 0，所以恒有

$$x^n - \sum_{k=1}^{n} [x]_k S_{(n,k)} = 0,$$

即(14)成立.

$[x]_n$ 可以展开成 x 的多项式：

$$[x]_n = \sum_{k=1}^{n} s_{(n,k)} x^k, \tag{16}$$

其中 $s_{(n,k)}$ 称为第一类 Stirling 数. 由 Viete 定理，从 $-1, -2, \cdots, -(n-1)$ 中任取 $n-1-k$ 个相乘，再将这些积相加，所得的和就是 $s_{(n,k)}$.

由于

$$\begin{aligned}
[x]_n &= \sum_{k=1}^{n} s_{(n,k)} x^k \\
&= \sum_{k=1}^{n} s_{(n,k)} \sum_{m=1}^{k} [x]_m S_{(k,m)} \\
&= \sum_{m=1}^{n} \Big(\sum_{k=m}^{n} s_{(n,k)} S_{(k,m)} \Big) [x]_m,
\end{aligned}$$

所以比较$[x]_m$的系数得

$$\sum_{k=m}^{n} s_{(n,k)} S_{(k,m)} = \delta_{n,m}.$$

（其中$\delta_{n,m}$当$n=m$时为1，当$n\neq m$时为0，称为Kronecker符号.）

同样由

$$x^n = \sum_{k=1}^{n} S_{(n,k)}[x]_k = \sum_{k=1}^{n} S_{(n,k)} \sum_{m=1}^{k} s_{(k,m)} x^m,$$

得

$$\sum_{k=m}^{n} S_{(n,k)} s_{(k,m)} = \delta_{n,m}.$$

3.14 $M_{(n,k,h)}$

设X是n元集.$\mathscr{A}$是X的一些h元子集所成的族，并且具有性质$P_k(X)$：X的任一k元子集（$n\geqslant k\geqslant h\geqslant 1$）至少包含$\mathscr{A}$中一个$h$元子集.具有这种性质的$\mathscr{A}$中，$|\mathscr{A}|$的最小值记为$M_{(n,k,h)}$.

例1 证明：

(i) $M_{(n,k,h)} \leqslant \dfrac{n}{h} M_{(n-1,k-1,h-1)}$； (1)

(ii) $M_{(n,k,h)} \geqslant \dfrac{n}{n-h} M_{(n-1,k,h)}$； (2)

(iii) $M_{(n,k,h)} \leqslant M_{(n-1,k-1,h-1)} + M_{(n-1,k,h)}$. (3)

解 (i) 设$\mathscr{A}$具有性质$P_k(X)$，并且$|\mathscr{A}| = M_{(n,k,h)}$. 对任一元素$x\in X$，考虑$n-1$元集$Y = X-\{x\}$. 设$Y$

的$h-1$元子集族$\mathscr{B}$具有性质$P_{k-1}(Y)$，并且$|\mathscr{B}|=M_{(n-1,k-1,h-1)}$. 将$x$添到$\mathscr{B}$中每个$h-1$元子集里成为$h$元集，$\mathscr{A}$中所有不含$x$的$h$元集与它们构成$h$元子集族$\mathbf{C}$.

$\mathbf{C}$具有性质$P_k(X)$. 事实上，设S是X的k元子集. 若$x\notin S$，则由于$\mathscr{A}$具有性质$P_k(X)$，S包含$\mathscr{A}$中一个h元集，这集不含x，因而也是$\mathbf{C}$中的h元集. 若$x\in S$，则$S-\{x\}\subseteq Y$. 由于$\mathscr{B}$具有性质$P_{k-1}(Y)$，$S-\{x\}$包含$\mathscr{B}$中一个$h-1$元集B，S包含h元集$B\cup\{x\}$，$B\cup\{x\}$在$\mathbf{C}$中.

因此$|\mathbf{C}|\geqslant M_{(n,k,h)}=|\mathscr{A}|$，即

$$|\mathscr{B}|\geqslant a_x, \tag{4}$$

其中a_x为$\mathscr{A}$中含x的h元集的个数. 上式即

$$M_{(n-1,k-1,h-1)}\geqslant a_x. \tag{5}$$

对x求和得

$$nM_{(n-1,k-1,h-1)}\geqslant\sum_{x\in X}a_x. \tag{6}$$

由于$\mathscr{A}$中每个子集是h元集，所以每个子集对于和$\sum\limits_{x\in X}a_x$的贡献是h. 从而$\sum\limits_{x\in X}a_x$即$hM_{(n,k,h)}$. 于是(6)导出(1).

(ii) $\mathscr{A}$中不含x的子集构成Y中的h元子集族$\mathscr{A}_x$. 并且Y的每一个k元子集也是X的k元子集，应当包含$\mathscr{A}$中一个不含x的h元子集，即包含$\mathscr{A}_x$中一个h元子集. 所以$\mathscr{A}_x$具有性质$P_k(Y)$，$|\mathscr{A}_x|\geqslant M_{(n-1,k,h)}$.

对x求和得

$$\sum_{x\in X}|\mathscr{A}_x|\geqslant nM_{(n-1,k,h)}. \tag{7}$$

$\mathscr{A}$中每个子集对于和$\sum\limits_{x\in X}|\mathscr{A}_x|$的贡献是$n-h$，所以

$\sum_{x \in X} |\mathscr{A}_x| = (n-h)M_{(n,k,h)}$，从而(7)导出(3).

(iii) 考虑 $n-1$ 元集 Y. 设 Y 的 h 元子集族 $\mathscr{E}$ 具有性质 $P_k(Y)$，$h-1$ 元子集族 $\mathscr{B}$ 具有性质 $P_{k-1}(Y)$，并且 $|\mathscr{E}| = M_{(n-1,k,h)}$，$|\mathscr{B}| = M_{(n-1,k-1,h-1)}$.

令 $X = Y \cup \{x\}$ 为 n 元集. 考虑 X 的 h 元子集族 $\mathscr{A}$，它由 $\mathscr{B}$ 中子集各添加 x(成为 h 元集)及 $\mathscr{E}$ 中子集组成.

对 X 的每个 k 元子集 S. 若 $x \notin S$，则 $\mathscr{E}$ 中有 h 元子集包含在 S 内. 若 $x \in S$，则 $\mathscr{B}$ 中有子集 $B_1 \subseteq S-\{x\}$，即 $B_1 \cup \{x\} \subseteq S$. 所以 $\mathscr{A}$ 具有性质 $P_k(X)$. 从而

$$M_{(n,k,h)} \leqslant |\mathscr{A}| = M_{(n-1,k,h)} + M_{(n-1,k-1,h-1)}.$$

注 1：从(ii)，(iii)可导出(i).

注 2：(i)，(ii)是由 n 元集 X 到 $n-1$ 元集 Y；(iii)则需要先造好 $n-1$ 元集 Y 的两个子集族，再扩充到 X.

例 2 证明：

$$M_{(n,k,h)} \geqslant \left\lceil \frac{n}{n-h} \left\lceil \frac{n-1}{n-h-1} \left\lceil \cdots \left\lceil \frac{k+1}{k-h+1} \right\rceil \cdots \right\rceil \right\rceil \right\rceil. \tag{8}$$

这里$\lceil x \rceil$表示不小于 x 的最小整数，称为天花板函数.

解 显然 $M_{(k,k,h)} = 1$ (k 元集 X 的 k 元子集只有一个即 X 自身，它包含任一个 h 元子集). 由(2)

$$M_{(k+1,k,h)} \geqslant \left\lceil \frac{k+1}{k-h+1} M_{(k,k,h)} \right\rceil = \left\lceil \frac{k+1}{k-h+1} \right\rceil.$$

设(8)对 $n-1$ 成立，则

$$M_{(n,k,h)} \geqslant \left\lceil \frac{n}{n-h} M_{(n-1,k,h)} \right\rceil$$

$$\geqslant\left\lceil\frac{n}{n-h}\left\lceil\frac{n-1}{n-h-1}\left\lceil\cdots\left\lceil\frac{k+1}{k-h+1}\right\rceil\cdots\right\rceil\right\rceil\right\rceil.$$

例 3 证明：

$$\frac{C_n^h}{C_k^h}\leqslant M_{(n,k,h)}\leqslant C_{n-k+h}^h. \tag{9}$$

解 设 X 的 h 元子集的族 $\mathscr{A}$ 具有性质 $P_k(X)$，并且 $|\mathscr{A}|=M_{(n,k,h)}$. 将 $\mathscr{A}$ 中每个 h 元子集作为点，X 的每个 k 元子集也作点. 这样得到两个点集 X_1，X_2，$|X_1|=M_{(n,k,h)}$，$|X_2|=C_n^k$.

如果某个 h 元集包含在某个 k 元集中，就在相应的点间连一条边. 这样得到一个图. 图的两个部分 X_1，X_2 之间的边数有两种算法.

一方面，每个 h 元子集含于 C_{n-h}^{k-h} 个 k 元集中，所以边数 $=C_{n-h}^{k-h}\cdot M_{(n,k,h)}$.

另一方面，每个 k 元集至少含 $\mathscr{A}$ 中一个 h 元集，所以边数至少有 $|X_2|=C_n^k$ 条边.

综合以上两方面即得

$$C_{n-h}^{k-h}M_{(n,k,h)}\geqslant C_n^k.$$

(9)的上界由(3)及归纳法立即得出.

$M_{(n,k,h)}$ 表示最少需要多少张各载有 h 个数的票，才能保证自 n 个数中一次摇出 k 个数时，至少有一张票中奖.

一般的 $M_{(n,k,h)}$ 的表达式仍为未知.

例 4 设 $n\geqslant h(m+1)$，$h\geqslant 1$. 证明：

$$M_{(n,n-m,h)}=m+1. \tag{10}$$

解 X 的 $m+1$ 个 h 元子集

$$\{1,2,\cdots,h\},\{h+1,h+2,\cdots,2h\},\cdots,$$

$$\{mh+1, mh+2, \cdots, (m+1)h\}$$

所成的族 $\mathscr{A}$ 具有性质 $P_{n-m}(X)$. 事实上，对 X 的任一个 $n-m$ 元子集 S，X 恰有 m 个元不属于 S，这 m 个元至多在 $\mathscr{A}$ 中 m 个集里出现，所以 $\mathscr{A}$ 中至少有一个集的元素全属于 S. 于是

$$M_{(n, n-m, h)} \leqslant |\mathscr{A}| = m+1.$$

另一方面，如果子集族 $\mathscr{A}$ 由 $\leqslant m$ 个 h 元子集组成，从 X 中去掉 m 个元素，其中的 $|\mathscr{A}|$ 个元素各属于 $\mathscr{A}$ 中一个 h 元子集. 剩下的 $n-m$ 元集显然不包含 $\mathscr{A}$ 中任一个 h 元子集. 所以 $\mathscr{A}$ 不具有性质 $P_{n-m}(X)$.

可以证明

$$M_{(n, k, 2)} = C_n^2 - \frac{k-2}{k-1} \cdot \frac{n^2-r^2}{2} - C_r^2,$$

其中 r 是 n 除以 $k-1$ 所得的余数，$0 \leqslant r \leqslant k-2$.

第四章　各种子集族

4.1　S　族

若集族 $\mathscr{A}$ 中任意两个子集 A_i, $A_j(i \neq j)$ 互不包含，则称 $\mathscr{A}$ 为 S 族.

例 1　若 n 元集 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{A}$ 是 S 族，则 $\mathscr{A}$ 的元数至多为 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$，即

$$\max_{\mathscr{A}\text{是S族}} |\mathscr{A}| = C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}. \tag{1}$$

这是 Sperner(1905～　)在 1928 年发现的定理(S 族即 Sperner 族的简称).

解　考虑 n 个元素 1, 2, …, n 的全排列，显然全排列的总数为 $n!$

另一方面，全排列中前 k 个元素恰好组成 $\mathscr{A}$ 中某个集 A_i 的，有 $k!(n-k)!$ 个. 由于 $\mathscr{A}$ 是 S 族，所以这种"头"在 $\mathscr{A}$ 中的全排列互不相同. 设 $\mathscr{A}$ 中有 f_k 个 A_i 满足 $|A_i| = k(k = 1, 2, \cdots, n)$，则

$$\sum_{k=1}^{n} f_k \cdot k!(n-k)! \leqslant n!. \tag{2}$$

熟知 C_n^k 在 $k = \left[\frac{n}{2}\right]$ 时最大，所以由(2)得

$$|\mathscr{A}|=\sum_{k=1}^{n} f_k \leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]} \sum_{k=1}^{n} f_k \cdot \frac{k!(n-k)!}{n!} \leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}.$$

当 $\mathscr{A}$ 由 X 中全部 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 元子集组成时，$|\mathscr{A}|=C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$. 因此(1)式成立.

又解 设 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$. $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 中元数最小的为 r 元集，共 f_r 个. 添加 X 的一个元素到这些 r 元集中，使它们成为 $r+1$ 元集. 对每个 r 元集有 $n-r$ 种添加方法，每个 $r+1$ 元集至多可由 $r+1$ 个 r 元集添加而得，所以经过添加后至少产生

$$\frac{f_r \cdot (n-r)}{r+1}$$

个 $r+1$ 元集. 由于 $\mathscr{A}$ 是 S 族，这些 $r+1$ 元集与 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 均不相同.

当 $r<\left[\frac{n}{2}\right]$ 时，

$$\frac{f_r(n-r)}{r+1}>f_r,$$

所以将 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 中的 r 元集换成添加后的 $r+1$ 元集，集合的个数即 $\mathscr{A}$ 的元数严格增加.

同样，设 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 中元数最大的为 s 元集. 当 $s>\left[\frac{n}{2}\right]$ 时，从每个 s 元集删去一个元素变成 $s-1$ 元集. 每个 $s-1$ 元集至多可由 $n-(s-1)$ 个 s 元集删减一个元素而得. 每个 s 元集可产生 s 个 $s-1$ 元集. 而

$$\frac{s}{n-(s-1)} \geqslant 1,$$

所以将 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 中的 s 元集换成删减而得的 $s-1$ 元集，$|\mathscr{A}|$ 增加.

因此，当 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 均为 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 元集时，t 最大，(1)式成立.

现在研究 $|\mathscr{A}|$ 何时取最大值.

从第一种解法立即得出当 n 为偶数时，当且仅当 $\mathscr{A}$ 由 X 的全部 $\frac{n}{2}$ 元集组成，$|\mathscr{A}|$ 取最大值 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

当 n 为奇数 $2m+1$ 时，C_n^k 仅当 $k=m, m+1$ 时最大，从而当 $|\mathscr{A}|$ 最大时，$\mathscr{A}$ 中的子集 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 都是 m 元或 $m+1$ 元集. 假设 $A_1=\{1, 2, \cdots, m\}$，那么对于 $l>m$，集 $\{l, 1, 2, \cdots, m\} \notin \mathscr{A}$. 全排列

$$l, 1, 2, \cdots, m, \cdots \tag{3}$$

的前 $m+1$ 个元组成的集 $\notin \mathscr{A}$. 但既然(2)中等号成立，全排(3)的前 m 个元或前 $m+1$ 个元所成的集在 $\mathscr{A}$ 中. 因此 $\{l, 1, 2, \cdots, m-1\} \in \mathscr{A}$. 这表明对 $\mathscr{A}$ 中任一个 m 元集，将其中一个元换成其他元所得的 m 元集仍在 $\mathscr{A}$ 中. 经过这样的替代，易知 X 的全部 m 元集均在 $\mathscr{A}$ 中. 因此 $\mathscr{A}$ 由 X 的全部 m 元子集组成或者 $\mathscr{A}$ 不含 X 的任一个 m 元子集，后者即 $\mathscr{A}$ 由 X 的全部 $m+1$ 元子集组成.

于是当 n 为奇数 $2m+1$ 时，当且仅当 $\mathscr{A}$ 由 X 的全部 m 元子集组成或 $\mathscr{A}$ 由 X 的全部 $m+1$ 元子集组成，$|\mathscr{A}|$ 取最大值 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

Sperner 定理有众多的应用.

例 2 11 个剧团中，每天有一些剧团演出，其他剧团观看（演出的不能观看）. 如果每个剧团都看过其他 10 个剧团的演

出，问演出至少几天？

解 设共演出 n 天，第 i 个剧团不演的天数组成集 A_i $(i=1, 2, \cdots, 11)$，则 A_1，A_2，$\cdots$，A_{11} 都是 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集.

由于每个剧团都看过其他剧团的演出，所以 A_i，$A_j(1\leqslant i<j\leqslant 11)$ 互不包含（第 i 个剧团看第 j 个剧团演出的那一天属于 A_i 不属于 A_j）. 由 Sperner 定理，

$$11\leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}. \tag{4}$$

$C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 随 n 递增，$C_5^2=10$，$C_6^3=20$，所以 $n\geqslant 6$. 即至少演出 6 天.

Sperner 定理有众多的推广. 下面的例 3 属于 Bollobas (1965).

例 3 若 A_1，A_2，$\cdots$，A_m；B_1，B_2，$\cdots$，B_m 都是 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集，当且仅当 $i=j$ 时，$A_i\cap B_j=\varnothing$. $|A_i|=a_i$，$|B_i|=b_i(i=1, 2, \cdots, m)$，则

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{C_{a_i+b_i}^{a_i}}\leqslant 1. \tag{5}$$

解 考虑 $n!$ 个全排列. A_i 的元素全在 B_i 的元素前面的全排列共有

$$C_n^{a_i+b_i}\cdot a_i!b_i!(n-a_i-b_i)!=\frac{n!}{C_{a_i+b_i}^{a_i}} \tag{6}$$

个. 如果一个全排列中，A_i（的元素）全在 B_i（的元素）前面，A_j 也全在 B_j 前面，$i\neq j$，那么在 A_i 已经结束 B_j 尚未开始的情况中，$A_i\cap B_j=\varnothing$. 而在 A_j 结束前 B_i 已经开始的情况中，$A_j\cap B_i=\varnothing$. 均与已知矛盾. 所以每一个全排列中，至多有一个 A_i 在相应的 B_i 前面. 因此，由(6)对 i

求和得

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n!}{C_{a_i+b_i}^{a_i}} \leqslant n!,$$

即(5)成立.

如果取 $B_i = A_i'$，那么 $A_i \cap B_i = \varnothing$. 并且 $A_i \cap B_j \neq \varnothing$，即 $A_i \not\subseteq A_j$. 这时(5)成为

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{C_n^{a_i}} \leqslant 1.$$

再由 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 的最大性即导出 Sperner 定理.

4.2 链

如果 X 的子集族 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 中的子集满足

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_t, \tag{1}$$

那么 $\mathscr{A}$ 称为一条(长为 t 的)链.

例 1 设 $\mathscr{A}_1, \mathscr{A}_2, \cdots, \mathscr{A}_m$ 为 X 的 m 条链. 每两条均不可比较，即任一条链中的成员(子集)都不是另一条链的成员的子集. 若每条链的长均为 $k+1$，用 $f(n, k)$ 表示 m 的最大值. 证明：

$$f(n, k) = C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}. \tag{2}$$

解 首先设 m 条链

$$A_{i0} \subset A_{i1} \subset \cdots \subset A_{ik} \quad (i = 1, 2, \cdots, m)$$

满足题述条件.

在上节例 3 中取 $A_i = A_{i0}$，$B_i = A_{ik}'$，则 $a_i = |A_{i0}|$，$b_i = n - |A_{ik}| \leqslant n - (a_i + k)$，因此

$$C_{a_i+b_i}^{a_i} \leqslant C_{n-k}^{a_i} \leqslant C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}.$$

显然 $A_i \cap B_i \subseteq A_{ik} \cap A'_{ik} = \varnothing$. 若有 $i \neq j$ 使 $A_i \cap B_j = \varnothing$，则 $A_{i0} \subseteq A_{jk}$，与已知矛盾. 因此 A_i，$B_i(i = 1, 2, \cdots, m)$ 适合上节例 3 的条件，从而

$$m = \sum_{i=1}^{m} 1 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}}{C_{a_i+b_i}^{a_i}} \leqslant C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}.$$

于是

$$f(n, k) \leqslant C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}.$$

其次，设 M_i 为 $\{k+1, k+2, \cdots, n\}$ 的 $\left[\frac{n-k}{2}\right]$ 元子集，这样的子集有 $C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$ 个. 链

$$M_i \subset M_i \cup \{1\} \subset M_i \cup \{1, 2\} \subset \cdots$$
$$\subset M_i \cup \{1, 2, \cdots, k\} (i = 1, 2, \cdots, C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]})$$

满足题述条件.

综上所述，(2)式成立.

当 $k = 0$ 时，例 1 即 Sperner 定理.

如果链(1)中，

$$|A_{i+1}| = |A_i| + 1,\ i = 1, 2, \cdots, t-1,$$

并且

$$|A_1| + |A_t| = n,$$

那么链(1)称为对称链.

显然每条对称链含有一个 X 的 $\left[\frac{n}{2}\right]$ 元子集. 当 n 为偶数 $2m$ 时，对称链(1)的长度 t 为奇数，位于中央的集 $A_{\frac{t+1}{2}}$ 是 m

元集. 当 n 为奇数 $2m+1$ 时，t 是偶数，中央的两个集 $A_{\frac{t}{2}}$，$A_{\frac{t}{2}+1}$ 分别为 m 元与 $(m+1)$ 元集.

例 2　$X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的全体子集可分拆为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$ 条互不相交的对称链(每个子集在且仅在一条链中).

解　对 n 归纳. $n=1$ 时结论显然成立. 设命题对 $n-1$ 成立，即 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的全体子集可分拆为 $C_{n-1}^{[\frac{n-1}{2}]}$ 条互不相交的对称链. 设

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_t \tag{3}$$

为其中任一条. 考虑链

$$A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset A_t \subset A_t \cup \{n\} \tag{4}$$

与

$$A_1 \cup \{n\} \subset A_2 \cup \{n\} \subset \cdots \subset A_{t-1} \cup \{n\} \tag{5}$$

(当 $t=1$ 时，(5)不存在).

显然(4)，(5)是 X 的对称链.

设 A 为 X 的子集. 如果 $n \notin A$，那么 A 必恰在一条形如(3)的链中，从而 A 也恰在一条形如(4)的链中，同时 A 显然不在形如(5)的链中. 如果 $n \in A$，那么 $A-\{n\}$ 恰在一条形如(3)的链中，在它等于 A_t 时，A 恰在一条形如(4)的链中，在它不等于 A_t 时，A 恰在一条形如(5)的链中.

于是 X 的全部子集被分拆为若干条互不相交的对称链. 由于每条对称链中恰有一个$\left[\frac{n}{2}\right]$元集，所以对称链的条数为 $C_n^{[\frac{n}{2}]}$.

显然从每一条链中至多选出一个集合组成 S 族. 所以例 2 导出 Sperner 定理.

链的概念不限于包含关系，它可以推广到任意一种偏序关系. 即只要某个集合 S 的某些元素之间有关系$\succ$，并且 $x\succ y$，$y\succ z$ 时，$x\succ z$（传递性），那么 S 中就存在与(1)类似的链：

$$x_1\succ x_2\succ\cdots\succ x_t. \tag{6}$$

例如，若自然数 $a\mid b$，则称 $a\succ b$. 这就是一种偏序关系. 一个自然数 m 的因数可以按照这种偏序关系排成链 $d_1\succ d_2\succ\cdots\succ d_t$. 当 d_1d_t 与 m 的素因数个数（计及重数）相等，并且 d_{i+1} 比 $d_i(i=1, 2, \cdots, t-1)$ 恰多一个素因数时，这种链称为对称链. 例如

$$1\succ 2\succ 2^2\succ 2^2\times 3\succ 2^2\times 3^2\succ 2^2\times 3^2\times 5,$$

$$3\succ 2\times 3\succ 2\times 3^2\succ 2\times 3^2\times 5,$$

都是 $180=2^2\times 3^2\times 5$ 的对称链.

例 3 自然数 m 的全部（正）因数可以分为互不相交的对称链.

解 当 $m=p^{\alpha}$，p 为质数，α 为非负整数时，m 的因数组成一条对称链

$$1, p, p^2, \cdots, p^{\alpha-1}, p^{\alpha}.$$

设命题对质因数个数（不计重数）小于 n 的数 m_1 成立. 考虑 $m=m_1p^{\alpha}$，$p\nmid m_1$.

将 m_1 的因数分为互不相交的对称链. 设

$$d_1, d_2, \cdots, d_h$$

是其中一条.

作表

$$
\begin{array}{cccccc}
d_1 & d_2 & \cdots & d_{h-2} & d_{h-1} & d_h \\
\hline
d_1 p & d_2 p & \cdots & d_{h-2} p & d_{h-1} p & d_h p \\
d_1 p^2 & d_2 p^2 & \cdots & d_{h-2} p^2 & d_{h-1} p^2 & d_h p^2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
d_1 p^{\alpha-1} & d_2 p^{\alpha-1} & \cdots & d_{h-2} p^{\alpha-1} & d_{h-1} p^{\alpha-1} & d_h p^{\alpha-1} \\
d_1 p^{\alpha} & d_2 p^{\alpha} & \cdots & d_{h-2} p^{\alpha} & d_{h-1} p^{\alpha} & d_h p^{\alpha}
\end{array}
$$

最外层的

$$d_1,\ d_2,\ \cdots,\ d_{h-2},\ d_{h-1},\ d_h,\ d_h p,\ d_h p^2,\ \cdots,\ d_h p^{\alpha}$$

组成 m 的对称链.

同样,从外到内,每一层的数都组成 m 的对称链.

易知 m 的每个因数都在上述形状的对称链中出现.因此命题成立.

例 3 是 de Bruijn 等 1951 年证明的.

设 P_1, P_2, $\cdots$, P_n 都是 n 元集 X 的分拆.如果 P_1 仅一个集即 X,P_i 由 i 个集 A_1, A_2, $\cdots$, A_i($A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i = X$, A_1, A_2, $\cdots$, A_i 两两之交为 $\varnothing$)组成,并且 P_{i+1} 是由 P_i "加细"得到的,即将 A_1, A_2, $\cdots$, A_i 中某一个分拆为两个集,$i=0, 1, \cdots, n-1$,那么 P_1, P_2, $\cdots$, P_n 称为一个长为 n 的分拆链.

例 4 求长为 n 的分拆链的个数.

解 P_n 仅一种,即$\{1\}$, $\{2\}$, $\cdots$, $\{n\}$.若已有

$$P_n,\ P_{n-1},\ \cdots,\ P_{k+1}.$$

每一个是后一个的加细,则可将 P_{k+1} 中任两个集并为一个集产生 P_k,因此 P_k 有 C_{k+1}^2 种可能.从而长为 n 的分拆链共

$$\prod_{k=1}^{n-1} C_{k+1}^{2} = \frac{(n-1)!n!}{2^{n-1}}$$

个.

4.3 Dilworth 定 理

在上节例 2 中,链的条数恰好等于 S 族的元数的最大值.这是下面例 1(Dilworth 定理)的特例.

例 1 集族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 分拆为互不相交的链时,所需用的链的最少条数 m 等于 P 中元数最多的 S 族的元数 s.

解 S 族的 s 个元是互不包含的,每条链至多含一个这样的元,所以 $m \geqslant s$.

为了证明 $s \geqslant m$,我们对 t 进行归纳. $t=1$ 时结论显然.假设命题对小于 t 的值成立.考虑 t 元集 $\mathscr{A}$.

对 $\mathscr{A}$ 中任一元数为 s 的 S 族 $\mathscr{B}$,不在 $\mathscr{B}$ 中的元 A 必与 $\mathscr{B}$ 中某一元 B 有包含关系(否则 A 可添加到 $\mathscr{B}$ 中,与 s 的最大性矛盾).将满足 $A \supset B$ 的 A 归入一族,记为 $\mathscr{B}_1$.满足 $A \subset B$ 的 A 归入另一族,记为 $\mathscr{B}_2$(由于 $\mathscr{B}$ 是 S 族,不存在同时发生 $A \supset B$, $C \supset A$, 而 $B, C \in \mathscr{B}$ 的情况).

如果 $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ 都非空,令

$$\mathscr{A}_1 = \mathscr{B} \cup \mathscr{B}_1,\ \mathscr{A}_2 = \mathscr{B} \cup \mathscr{B}_2,$$

则 $|\mathscr{A}_1|$, $|\mathscr{A}_2|$ 都小于 t. 由归纳假设,$\mathscr{A}_1$, $\mathscr{A}_2$ 均可分拆为 s 条链.因为 $\mathscr{B}$ 为 S 族,所以在 $\mathscr{A}_1$ 中,$\mathscr{B}$ 的元都是最小元,从而 $\mathscr{A}_1$ 的 s 条链的终端正是 $\mathscr{B}$ 的 s 个元.同样,$\mathscr{A}_2$ 的 s 条链的始端也是 $\mathscr{B}$ 的 s 个元(作为最大元).因此可将 $\mathscr{A}_1$ 的链与 $\mathscr{A}_2$ 的链逐对连接起来形成 $\mathscr{A}$ 的链, $s \geqslant m$.

如果对 $\mathscr{A}$ 中任一元数为 s 的 S 族 $\mathscr{B}$ 而言，$\mathscr{B}_1$，$\mathscr{B}_2$ 至少有一个为空，那么 $\mathscr{A}$ 至多有两个元数为 s 的 S 族，即 $\mathscr{A}$ 的最大元(它不包含在 $\mathscr{A}$ 的其他元素中)所成的族 $\mathscr{E}$ 与 $\mathscr{A}$ 的最小元(它不包含 $\mathscr{A}$ 的其他元素)$\mathscr{F}$. 于是有以下三种情况：

(a) 仅集族 $\mathscr{E}$ 有 s 个元. 这时从 $\mathscr{E}$ 中去掉一个元 A，$\mathscr{A}$ 剩下 $t-1$ 个元，并且 $\mathscr{A}$ 中最大的 S 族仅 $s-1$ 个元，所以由归纳假设，可分拆为 $s-1$ 条链，添上 A 单独一个所成的链，共 s 条.

(b) 仅集族 $\mathscr{F}$ 有 s 个元. 与(a)类似，$\mathscr{A}$ 可分拆为 s 条链.

(c) $\mathscr{E}$，$\mathscr{F}$ 均有 s 个元. 任取 $B\in\mathscr{F}$，必有 $A\in\mathscr{E}$，$A\supset B$. 去掉 A，B 后，剩下的元组成 $s-1$ 条链，添上链 $A\supset B$，共 s 条链.

注：例 1 中的集族可改为任意的半序集，$\subset$ 改为半序关系 $\succ$.

Dilworth 定理有很多应用.

例 2 任意的 $mn+1$ 个自然数中，能找出 $m+1$ 个数，使得每一个数能整除比它大的数；或者能找出 $n+1$ 个数，使得每一个数都不整除其他的数.

解 与上节例 3 相同，以 $a|b$ 作为自然数集的半序关系 $a\succ b$.

如果链的长度均不超过 m，那么由于 $\left[\dfrac{mn+1}{m}\right]=n+1$，所以至少有 $n+1$ 条链. 根据 Dilworth 定理，有 $n+1$ 个数组成 S 族，即每一个数都不整除其他的数.

例 3 实数数列

$$a_1, a_2, \cdots, a_{mn+1} \tag{1}$$

中一定能找出一个 $m+1$ 项的递增的子列或能找出一个 $n+1$

项的递减的子列.

解 若 $a_i \leqslant a_j$, $i<j$, 则称 $a_i \succ a_j$. 如果(1)中递增的子列至多 m 项,那么(1)至少能分为 $n+1$ 条链.从而有 $n+1$ 项组成 S 族,即有一个 $n+1$ 项的递减数列.

下面的例 4 与例 1 对偶.

例 4 设 $\mathscr{A}$ 为偏序集,证明若 $\mathscr{A}$ 不含长为 $m+1$ 的链,则 $\mathscr{A}$ 可以表成至多 m 个 S 族的并.

解 $m=0$ 时结论显然.设命题对 $m-1$ 成立.

$\mathscr{A}$ 的极大元组成 S 族 $\mathscr{B}$. $\mathscr{A}-\mathscr{B}$ 不含长为 m 的链.由归纳假设, $\mathscr{A}-\mathscr{B}$ 可以表成至多 $m-1$ 个 S 族的并,加入 $\mathscr{B}$ 即为 m 个 S 族.

4.4 Littlewood-Offord 问题

1943 年,Littlewood 与 Offord 提出下面的问题:设 z_1, z_2, …, z_n 为模 $\geqslant 1$ 的复数,作出 2^n 个形如 $z_{i_1}+z_{i_2}+\cdots+z_{i_t}$ 的和, $\{i_1, i_2, \cdots, i_t\}$ 是集合 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集(对于空集,相应的和为 0).从这些和中最多能选出多少个,每两个的差的模 <1?

1945 年,P. Erdös 首先解决了 z_1, z_2, …, z_n 为实数的情况,这就是例 1.

例 1 设 x_1, x_2, …, x_n 为 n 个绝对值不小于 1 的实数,则从 2^n 个和

$$x_A=\sum_{j\in A} x_j,\ A\subseteq X=\{1, 2, \cdots, n\}$$

中最多能选出 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 个,使得每两个的差小于 1.

解 如果某个 $x_j<0$, 用 $-x_j$ 代替它,并将每个集 A 换

成集

$$B=\begin{cases}A\cup\{j\},\text{如果 } j\notin A;\\ A-\{j\},\text{如果 } j\in A.\end{cases}\tag{1}$$

和 x_A 换为和

$$x_B=x_A+(-x_j).$$

于是,不妨设所有 x_j 均非负.

设 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 X 的子集族,并且当 $i\neq j$ 时,

$$|x_{A_i}-x_{A_j}|<1.\tag{2}$$

若 $A_i\subset A_j$,那么

$$|x_{A_i}-x_{A_j}|=|x_{A_j-A_i}|\geqslant 1,$$

与(2)矛盾,所以 $\mathscr{A}$ 为 S 族,从而

$$t\leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}.\tag{3}$$

另一方面,当 $x_1=x_2=\cdots=x_n=1$ 时,有 $C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$ 个 A $\left(X\text{ 的全部}\left[\frac{n}{2}\right]\text{元子集}\right)$,使 $x_A=\left[\frac{n}{2}\right]$,它们的差为 0,因此(3)中等号成立.

现在设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是 n 个模 $\geqslant 1$ 的向量(特别地,它们可以是平面向量即复数).为了获得与例 1 类似的结果,我们先引入两个概念.

如果 X 的全体子集所成的族 $P(X)$ 被分拆为若干个(互不相交的)族,各族的元数 $\in\left\{n+1, n-1, n-3, \cdots, n+1-2\left[\frac{n}{2}\right]\right\}$,并且其中元数为 $n+1-2i$ $\left(i=0, 1, \cdots, \left[\frac{n}{2}\right]\right)$ 的恰有 $C_n^i-C_n^{i-1}$ 个,我们称这样的分拆为对称分拆.

4.2 节中，$P(X)$被分拆为若干条对称链，每条对称链是一个子集族.容易验证(参见下面例 2 证明的后一半)这一分拆是对称分拆.实际上对称分拆的定义即从例 2 延伸出来.

对称分拆中，族的个数为

$$\sum_{i=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(C_n^i - C_n^{i-1}) = C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}. \tag{4}$$

对于上面所说的向量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$. 如果 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{A}$ 中任意两个子集 A, B 满足

$$|x_A - x_B| \geqslant 1, \tag{5}$$

那么 $\mathscr{A}$ 称为稀疏的.

例 2 $P(X)$有一对称分拆，其中每一个族都是稀疏的.

解 证法与 4.2 节的例 2 类似，对 n 进行归纳，奠基显然.设命题对 $n-1$ 成立，$\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$为一个稀疏的族.

不妨设 x_n 为 x 轴上的向量.函数 f 将一切向量 $\alpha=(x, y, z)$ 映为第一坐标 x，即 $f(\alpha)=x$.

设 $f(x_{A_1}), f(x_{A_2}), \cdots, f(x_{A_t})$中 $f(x_{A_k})$最大(若同时有几个最大的，任取其中之一)，作子集族

$$\{A_1, A_2, \cdots, A_t, A_k \cup \{n\}\} \tag{6}$$

与

$$\{A_1 \cup \{n\}, \cdots, A_{k-1} \cup \{n\}, A_{k+1} \cup \{n\}, \cdots, A_t \cup \{n\}\} \tag{7}$$

(当 $t=1$ 时仅有(6).当 $t \geqslant 2$ 时(6)，(7)同时存在).

(7)显然仍是稀疏的.对(6)中的集 $A_j(1 \leqslant j \leqslant t)$，

$$\begin{aligned}|x_{A_k \cup \{n\}} - x_{A_j}| &\geqslant f(x_{A_k \cup \{n\}} - x_{A_j}) \\ &= f(x_n) + f(x_{A_k}) - f(x_{A_j})\end{aligned}$$

$$\geqslant f(x_n) \geqslant 1,$$

所以(6)也是稀疏的.

最后，我们证明分拆是对称分拆.

原来的族$\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$的元数$t = n-2i$，新族(6)，(7)的元数分别为$n+1-2i$，$n-1-2i = n+1-2(i+1)$. 并且新族中元数为$n+1-2i$的有

$$(C_{n-1}^{i} - C_{n-1}^{i-1}) + (C_{n-1}^{i-1} - C_{n-1}^{i-2}) = C_n^i - C_{n-1}^{i-1}$$

个，所以新族是对称分拆.

本节开头所提问题的答案仍为$C_n^{[\frac{n}{2}]}$. 因为每个稀疏族满足(5)，其中只能选出一个子集A，从而至多有$C_n^{[\frac{n}{2}]}$个A满足每两个x_A的差的模小于1. 另一方面，例1已经表明这个值$C_n^{[\frac{n}{2}]}$是能够取到的.

例3 $x_1, x_2, \cdots, x_n$为模不小于1的向量(或复数)，对任意向量(或复数)x，在2^n个和$x_A = \sum_{i \in A} x_i$中至多可选出多少个与x的差的模小于$\frac{1}{2}$？

解 若$|x_A - x| < \frac{1}{2}$，$|x_B - x| < \frac{1}{2}$，则

$$|x_A - x_B| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1.$$

因此至多选出$C_n^{[\frac{n}{2}]}$个x_A与x的差的模小于$\frac{1}{2}$.

例4 假设同上，证明在2^n个和$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i$ $(\varepsilon_i = \pm 1)$中至多可以选出$C_n^{[\frac{n}{2}]}$个与x的距离小于1.

解 令$y = \sum x_i$，则

$$|x-\sum\varepsilon_i x_i|=|x+y-\sum(1+\varepsilon_i)x_i|$$
$$=2\left|\frac{x+y}{2}-\sum\frac{1+\varepsilon_i}{2}x_i\right|.$$

$\frac{1+\varepsilon_i}{2}=0$ 或 1，这就化为上题.

4.5 I 族

如果集 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 中，每两个子集 A_i，A_j 的交 $A_i\cap A_j\neq\varnothing$ $(1\leqslant i, j\leqslant t)$，那么 $\mathscr{A}$ 称为相交族或 I 族.

例 1 试求 I 族的元数的最大值.

解 I 族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 的元数 t 至多为 2^{n-1}.

一方面，由于 X 的 2^n 个子集可以两两配对：A 与 A 的补集 $X-A$ 配成一对，所以在 $t>2^{n-1}$ 时，$A_1, A_2, \cdots, A_t$ 中必有一个集是另一个的补集，它们的交为空集. 这表明 I 族 $\mathscr{A}$ 的元数 $t\leqslant 2^{n-1}$.

另一方面，含有 n 的子集共 2^{n-1} 个，它们组成 I 集. 所以 $\max t=2^{n-1}$.

注 1：$\max t=2^{n-1}$ 的情况并不仅有上述一种. 例如 n 为奇数时，所有元数 $\geqslant\frac{n+1}{2}$ 的子集组成的族 $\mathscr{A}$ 显然是 I 族，而且 $|\mathscr{A}|=2^{n-1}$. n 为偶数时，设 $\mathscr{B}$ 是 $\{1, 2, \cdots, n-1\}$ 的子集族，$\mathscr{B}$ 是 I 族，$|\mathscr{B}|=2^{n-2}$ 并且 $\mathscr{B}$ 中子集不全含一个固定元素. 作 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{A}$，其中子集由 $\mathscr{B}$ 的子集添加 n 而得. 这时 $\mathscr{A}\cup\mathscr{B}$ 是 X 的 I 族，$|\mathscr{A}\cup\mathscr{B}|=2^{n-1}$，而且 $\mathscr{A}\cup\mathscr{B}$ 中子集不全含一个固定元素.

注 2：若 $\mathscr{A}$ 为 I 族，而 $|\mathscr{A}|<2^{n-1}$，则必有子集 $A\notin\mathscr{A}$ 并且 $A'\notin\mathscr{A}$. 将 A 加到 $\mathscr{A}$ 中后若新族不为 I 族，则必有 $B\in\mathscr{A}$ 而 $A\cap B=\varnothing$. 此时，$B\subseteq A'$，从而 A' 与 $\mathscr{A}$ 中每个集的交非空. 将 A' 加到 $\mathscr{A}$ 中后新族为 I 族. 因此总可不断将不在 $\mathscr{A}$ 中的集 A 或 A' 加到 $\mathscr{A}$ 中，直至 $|\mathscr{A}|=2^{n-1}$.

例 2 设 $2\leqslant r<\frac{n}{2}$. $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 I 族，并且 $|A_i|=r\ (i=1, 2, \cdots, t)$. 求 t 的最大值.

解 显然，当 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 为 X 中含有一固定元素 x 的、全部 r 元子集时，

$$t=C_{n-1}^{r-1}. \tag{1}$$

Erdös—Ko(柯召)—Rado 证明了 C_{n-1}^{r-1} 就是 t 的最大值. 即有

定理 设 $2\leqslant r<\frac{n}{2}$. $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 I 族，并且 $|A_i|=r\ (i=1, 2, \cdots, t)$，则

$$t\leqslant C_{n-1}^{r-1}. \tag{2}$$

当且仅当 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 为 X 中含有一个固定元素 x 的全体集合时，(2)中等号成立.

这个定理在集族理论中极为重要，被誉为里程碑. 它的证明也有多种，下面介绍 Katona 的证明.

我们知道 n 个数排在圆周上，有 $(n-1)!$ 种排法. 完全同样地，将圆周等分为 n 条弧，在各弧标上 n 个数 $1, 2, \cdots, n$，也有 $(n-1)!$ 种方法. 每一种，称为 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的一个圈.

Katona 的证法要点是将 A_j“嵌入”圈中.

如果 r 元子集 A_j 的 r 个元素标在圈 C 的 r 条连续的弧上，那么就称这 r 条弧为 A_j，并称圈 C 含子集 A_j. 由于 A_j 的 r 个

元有 $r!$ 种排列方法，不在 A_j 中的 $n-r$ 个元有 $(n-r)!$ 种排列方法，所以有 $r!(n-r)!$ 个圈含有子集 $A_j(1\leqslant j\leqslant t)$.

另一方面，如果圈 C 含集 $A_1=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$，并且 $\widehat{P_1P_2}, \widehat{P_2P_3}, \cdots, \widehat{P_rP_{r+1}}$ 上标的数分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_r$ ($P_1, P_2, \cdots, P_n$ 为圆周的等分点)，那么 C 上其他的集 A_j 与 A_1 有公共弧. 而对每个 $k\,(1\leqslant k\leqslant r+1)$，以 P_k 为起点的连续 r 条弧有两个(即 $\widehat{P_kP_{k+1}}, \widehat{P_{k+1}P_{k+2}}, \cdots, \widehat{P_{k+r-1}P_{k+r}}$ 与 $\widehat{P_kP_{k-1}}, \widehat{P_{k-1}P_{k-2}}, \cdots, \widehat{P_{k-r+1}P_{k-r}}$)，这两个除 P_k 外无公共点，因此其中至多有一个是某个 $A_j\in\mathscr{A}$(每两个 $A_i, A_j\in\mathscr{A}$ 必有公共弧). 由于以 P_1 或 P_{r+1} 为起点的连续 r 条弧，只有一个是 $\mathscr{A}$ 中的集，即 A_1. 所以，每一个圈 C 至多含 $\mathscr{A}$ 中 r 个集.

综合以上两个方面，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{t}\sum_{C\text{含}A_i}1 &= t\times r!\times(n-r)!\\ &=\sum_{\text{圈}C}\sum_{A_j\text{含于}C}1\leqslant r\times(n-1)!,\end{aligned}\tag{3}$$

即

$$t\leqslant C_{n-1}^{r-1}.\tag{4}$$

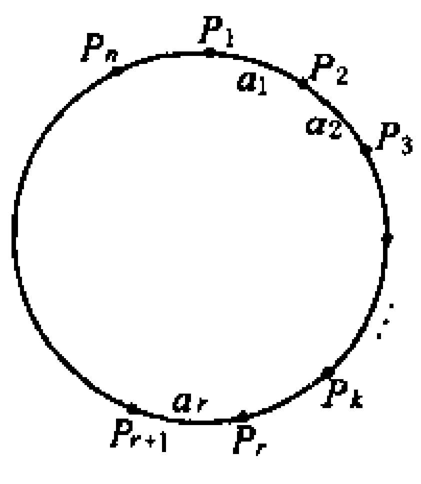


图 4.5.1

下面研究等号成立的情况.

在定理中已经指明当 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 为 X 中含有一固定元素 x 的全体集合时,(2)中等号成立.

反之,设(2)中等号成立,则(3)中等号成立,从而每一圈上恰含 r 个 A_j.

对于圈 C,设分点为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$,并且 $\widehat{P_1P_2}, \widehat{P_2P_3}, \cdots, \widehat{P_rP_{r+1}}$ 标的数分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_r$, $A_1=\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$. 根据上面所证,以 $P_k(1\leqslant k\leqslant r)$ 为起点的连续 r 条弧恰有一个是 $\mathscr{A}$ 中某个子集,不妨设就是 A_k. 这时有两种情况:

(i) 所有 $A_k(1\leqslant k\leqslant r)$ 均含有 a_r(图 4.5.2).

(ii) 有一个 h $(1\leqslant h<r)$, A_h 含有 a_r 而 A_{h+1} 不含有 a_r (这时 $A_{h+2}, \cdots, A_r$ 均不含 a_r. 图 4.5.3).

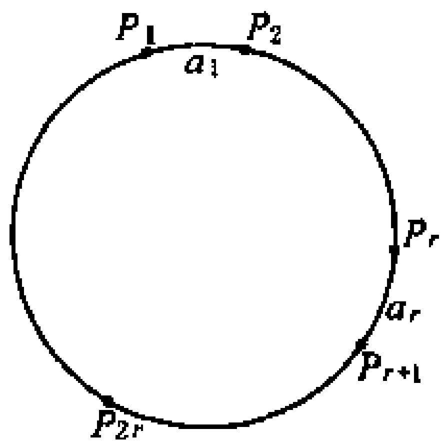


图 4.5.2

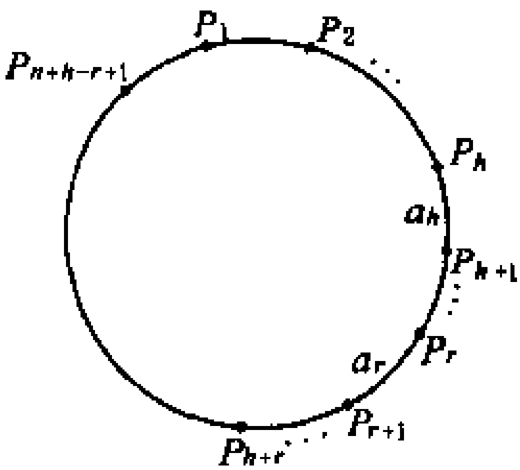


图 4.5.3

无论哪一种情况,这 r 个集(所对应的弧)都只覆盖了圆周上 $2r-1$ 条弧,而不是整个圆周(因为 $n\geqslant 2r$). 这 $2r-1$ 条弧有一个起点(图 4.5.2 中是 P_1,图 4.5.3 中是 $P_{n+h-r+1}$),一个终点(图 4.5.2 中是 P_{2r},图 4.5.3 中是 P_{h+r}). 不失一般性,我们设起点为 P_1, r 个属于 $\mathscr{A}$ 的集为

$$\{a_1, a_2, \cdots, a_r\}, \{a_2, a_3, \cdots, a_{r+1}\}, \cdots,$$
$$\{a_r, a_{r+1}, \cdots, a_{2r-1}\}.$$

又设$\widehat{P_nP_1}$上标的数为 b,则

$$B = \{b, a_1, a_2, \cdots, a_{r-1}\} \notin \mathscr{A}.$$

现在证明任一含 a_r、不含 b 的 r 元子集 A_p 属于 $\mathscr{A}$.

设 A_p 中有 $r-s$ 个数 $\in \{a_1, a_2, \cdots, a_r\}$. 不妨设它们是 $a_{s+1}, a_{s+2}, \cdots, a_r$(否则将 $a_1, \cdots, a_{r-1}$ 重新编号). 又设其余的数为 $c_{r+1}, c_{r+2}, \cdots, c_{r+s}$.

考虑各弧依次标上 $b, a_1, a_2, \cdots, a_r, c_{r+1}, c_{r+2}, \cdots, c_{r+s}, \cdots$ 的圈 C'.

由于 $A_1 = \{a_1, a_2, \cdots, a_r\} \in \mathscr{A}$, $B = \{b, a_1, \cdots, a_{r-1}\} \notin \mathscr{A}$, 根据上面的分析,在圈 C' 上情况 2 不会出现(否则相当于 A_{h+1} 的 $B \in \mathscr{A}$), 即必有情况 1 发生,

$$\{a_2, \cdots, a_r, c_{r+1}\}, \{a_3, \cdots, a_r, c_{r+1}, c_{r+2}\}, \cdots,$$
$$\{a_r, c_{r+1}, \cdots, c_{2r-1}\}$$

都是 $\mathscr{A}$ 中的子集. 特别地, $A_p \in \mathscr{A}$.

进一步,我们证明不含 a_r 的集 A_q 一定不属于 $\mathscr{A}$.

A_q 的补集有 $n-r \geqslant r+1$ 个元,如果这 $n-r$ 个元中有 b, 将 b 去掉,再去掉若干个元,成为含 a_r 的 r 元集. 如果这 $n-r$ 个元中无 b,也可以去掉若干个元,成为含 a_r 的 r 元集. 根据上面所证,这含 a_r 的 r 元子集 $\in \mathscr{A}$. 因此 $A_q \notin \mathscr{A}$.

最后,由 $|\mathscr{A}| = C_{n-1}^{r-1}$ 及不含 a_r 的集不属于 $\mathscr{A}$ 得一切含 a_r 的集组成 $\mathscr{A}$.

因此, $|\mathscr{A}|$ 达到最大值的情况共有 n 种.

例 3 设 $n \leqslant 2r$, $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 I 族,并且 $|A_i| = r\ (i = 1, 2, \cdots, t)$. 求 t 的最大值.

解 当 $n<2r$ 时，X 的每两个 r 元子集均相交，所以 $\mathscr{A}$ 可由 X 的全部 r 元子集组成，$\max|\mathscr{A}|=C_n^r$.

当 $n=2r$ 时，X 的 r 元子集两两互补，因为每两个互补的集至多有一个属于 $\mathscr{A}$，所以 $|\mathscr{A}|\leqslant\frac{1}{2}C_n^r=C_{n-1}^{r-1}$，即(2)仍然成立. 如果在每两个互补的 r 元集中取出一个组成 $\mathscr{A}$，那么 $|\mathscr{A}|=\frac{1}{2}C_n^r=C_{n-1}^{r-1}$，并且 $\mathscr{A}$ 中每两个子集均有公共元(因为这两个集不互补). 即 $\max|\mathscr{A}|=C_{n-1}^{r-1}$，并且达到最大值的情况共有 $2^{C_{n-1}^{r-1}}$ 种.

Erdös、柯召、Rado 的论文在 1938 年已基本完成，但 1961 年才发表于 Quarterly Journal. 在这篇论文中，不仅有上面的定理，而且还提了很多的问题. 这些问题已被其他数学家(Deza, Frankl, Katona 等)逐一解决，只遗留下一个，即

猜测 设 $|X|=4m$, $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$, $|A_i|=2m$ $(1\leqslant i\leqslant t)$, $|A_i\cap A_j|\geqslant 2$ $(1\leqslant i, j\leqslant t)$, 则

$$\max t=\frac{1}{2}(C_{4m}^{2m}-(C_{2n}^{n})^2).$$

Erdös 提供 250 英镑，奖赏解决上述猜测(证明或推翻)的人. Erdös 孤身一人，四海为家，经常提供悬奖的数学问题，但他的收入并不甚丰，悬奖通常在 10～100 美元. 250 英镑对于他，已经是一大笔钱. 这正表明 Erdös 重视这个问题，并且问题的难度甚大.

4.6 EKR 定理的推广

上节的 Erdös—柯召—Rado 定理简记为 EKR 定理，它

有很多推广. 例 1、例 2 去掉 $|A_i|$ 全相等的限制，例 3 去掉 $|A_i|\leqslant\frac{n}{2}$.

例 1 设 n 元集 X 的子集族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 I 族，并且对每个 $i\ (1\leqslant i\leqslant t)$，$|A_i|\leqslant r\leqslant\frac{n}{2}$. 若 $\mathscr{A}$ 又是 S 族. 证明：

$$t\leqslant C_{n-1}^{r-1}. \tag{1}$$

解 由 4.2 例 2，X 的全体子集所成的族 $P(X)$ 可以分拆为对称链. 因为 $\mathscr{A}$ 是 S 族，$A_1, A_2, \cdots, A_t$ 属于不同的链. 将每个 A_i 用链中的 r 元集 B_i 代替（当 $|A_i|=r$ 时，$B_i=A_i$）. 显然 $B_1, B_2, \cdots, B_t$ 仍为 I 族，根据 EKR 定理，(1)成立.

例 2 条件同例 1，证明：

$$\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{C_{n-1}^{|A_i|-1}}\leqslant 1. \tag{2}$$

解 首先注意在上节例 2 的证明中，可以得出若圈 C 含 $\mathscr{A}$ 中的集 A_1，则 C 至多含 $\mathscr{A}$ 中 $|A_1|$ 个子集.

在那里曾考虑和

$$\sum_{i=1}^{t}\sum_{C含A_i}1=\sum_{C}\sum_{A_j含于C}1. \tag{3}$$

现在考虑一个类似的“加权”和

$$\sum_{i=1}^{t}\frac{1}{|A_i|}\sum_{C含A_i}1=\sum_{C}\sum_{A_i含于C}\frac{1}{|A_i|}. \tag{4}$$

由上面所说，设 A_j 含于 C 且 $|A_j|$ 最小，则

$$\sum_{A_i含于C}\frac{1}{|A_i|}\leqslant\frac{1}{|A_j|}\cdot|A_j|=1,$$

于是(4)的右边 $\leqslant \sum_{C} 1 = (n-1)!$.

$$(4)\text{的左边} = \sum_{i=1}^{t} \frac{1}{|A_i|} \cdot |A_i|! \cdot (n-|A_i|)!$$
$$= \sum_{i=1}^{t} \frac{(n-1)!}{C_{n-1}^{|A_i|-1}}.$$

结合以上两方面即得(2).

由于 $|A_i| \leqslant r \leqslant \frac{n}{2}$ 时, $C_{n-1}^{|A_i|-1}$ 随 $|A_i|$ 递增. 所以由(2)可得 $\sum_{i=1}^{t} \frac{1}{C_{n-1}^{r-1}} \leqslant 1$, 即(1)成立.

例 3 设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 n 元集的子集族, 若 $\mathscr{A}$ 既是 I 族又是 S 族. 证明:

$$|\mathscr{A}| \leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}. \tag{5}$$

解 首先证明一个不等式

$$\sum_{\substack{A \in \mathscr{A} \\ |A| \leqslant \frac{n}{2}}} \frac{1}{C_n^{|A|-1}} + \sum_{\substack{A \in \mathscr{A} \\ |A| > \frac{n}{2}}} \frac{1}{C_n^{|A|}} \leqslant 1. \tag{6}$$

为此引进一个权函数 $f(C, A_i)$:

$$f(C, A_i) = \begin{cases} \dfrac{n-|A_i|+1}{|A_i|}, & \text{若 } |A_i| \leqslant \dfrac{n}{2}, \text{并且圈 } C \text{ 含 } A_i; \\ 1, & \text{若 } |A_i| > \dfrac{n}{2}, \text{并且圈 } C \text{ 含 } A_i; \\ 0, & \text{若圈 } C \text{ 不含 } A_i. \end{cases}$$

这里圈 C 含 A_i 的意义与上节例 2 相同.

$$\sum_{i=1}^{t} \sum_{C} f(C, A_i)$$

$$=\sum_{|A_i|\leqslant\frac{n}{2}}\frac{n-|A_i|+1}{|A_i|}\sum_{C含A_i}1+\sum_{|A_i|>\frac{n}{2}}\sum_{C含A_i}1$$

$$=\sum_{|A_i|\leqslant\frac{n}{2}}\frac{n-|A_i|+1}{|A_i|}|A_i|!(n-|A_i|)!$$

$$+\sum_{|A_i|>\frac{n}{2}}|A_i|!(n-|A_i|)!$$

$$=n!\Big(\sum_{\substack{A\in\mathscr{A}\\|A|\leqslant\frac{n}{2}}}\frac{1}{C_n^{|A|-1}}+\sum_{\substack{A\in\mathscr{A}\\|A|>\frac{n}{2}}}\frac{1}{C_n^{|A|}}\Big).\tag{7}$$

另一方面，我们可以证明对每个圈 C,

$$\sum_{i=1}^{t}f(C,A_i)=\sum_{\substack{|A_i|\leqslant\frac{n}{2}\\A_i\in C}}\frac{n-|A_i|+1}{|A_i|}+\sum_{\substack{|A_i|>\frac{n}{2}\\A_i\in C}}1\leqslant n.\tag{8}$$

事实上，不妨设圈 C 上标的数顺次为 $1,2,\cdots,n$. 若所有 $|A_i|>\frac{n}{2}$，因为 $\mathscr{A}$ 是 S 族，所以 $\mathscr{A}$ 中以 j 为“第一个元素”的形如 $\{j,j+1,\cdots,k$ (约定 $n+b=b$)$\}$ 的集至多只有一个. 从而含于 C 的 A_i 至多 n 个，即(8)成立. 若有 $|A_i|\leqslant\frac{n}{2}$. 不妨设 $A_1=\{1,2,\cdots,r\}$ 的元数 r 最小. 这时 $\mathscr{A}$ 中其他子集 A_i 或者以某个 j $(2\leqslant j\leqslant r)$ 为第一元素或者以 $j-1$ $(2\leqslant j\leqslant r)$ 为最后元素，并且以 j 为第一元素或以 $j-1$ 为最后元素的 A_i 均至多一个(因为 $\mathscr{A}$ 是 S 族). 若两者均有，则它们应有公共元(因为 $\mathscr{A}$ 是 I 族)，从而其中必有一个元数 $>\frac{n}{2}$. 它们的权的和(注意 r 的最小性)

$$\leqslant\frac{n-r+1}{r}+1=\frac{n+1}{r},$$

因此(8)式左边$\leqslant \dfrac{n-r+1}{r}+(r-1)\times\dfrac{n+1}{r}=n$.

由(8),

$$\sum_{C}\sum_{i=1}^{t} f(C, A_i) \leqslant n\times(n-1)!=n!. \tag{9}$$

综合(7),(9)即得(6).

因为$|A|\leqslant \dfrac{n}{2}$时,$C_n^{|A|-1}\leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}\leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$;$|A|>\dfrac{n}{2}$时,$C_n^{|A|}\leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$;所以由(6)得

$$\sum_{A\in\mathscr{A}}\frac{1}{C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}}\leqslant 1,$$

即(5)成立.

在$\mathscr{A}$由全体$\left[\dfrac{n}{2}\right]+1$元集组成时,(5)成为等式. 因此上界$C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}$是最佳的.

例 4 集族$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$既是$S$集又是$I$集,并且每两个$A_i$, A_j的并集不是X. 证明:

$$t\leqslant C_{n-1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}. \tag{10}$$

解 考虑$A_1, A_2, \cdots, A_t$及其补集$A_1', A_2', \cdots, A_t'$.

因为$\mathscr{A}$是I族,所以$A_i\cap A_j\neq\varnothing$,从而$A_i$与$A_j'$互不包含.

因为$\mathscr{A}$是S族,A_i与$A_j(i\neq j)$互不包含,从而A_i'与A_j'互不包含,$A_i\cap A_j'\neq\varnothing$.

因为$A_i\cup A_j\neq X$,所以$A_i'\cap A_j'\neq\varnothing$.

将$\{A_1, A_2, \cdots, A_t, A_1', A_2', \cdots, A_t'\}$分拆为两个集族

$\mathscr{B}$, $\mathscr{B}'$. $\mathscr{B}$ 中的集元数均 $\leqslant \frac{n}{2}$，并且在 $|A_t| = \frac{n}{2}$ 时，A_t 与 A_t' 恰有一个在 $\mathscr{B}$ 中.

根据上面所述，$\mathscr{B}$ 是 I 族，也是 S 族，从而由例 2，

$$\sum_{B \in \mathscr{B}} \frac{1}{C_{n-1}^{|B|-1}} \leqslant 1. \tag{11}$$

(11)中的 $|B| \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$，所以 $C_{n-1}^{|B|-1} \leqslant C_{n-1}^{\left[\frac{n}{2}\right]-1}$. 而 $\mathscr{B}$ 中子集恰 t 个，所以(11)导出(10).

4.7 影

设 $\mathscr{A}$ 是 n 元集 X 的子集族，并且 $\mathscr{A}$ 中的子集都是 l 元子集. 集族

$$\{B: |B| = l-1 \text{ 并且 } B \text{ 是 } \mathscr{A} \text{ 中某个集的子集}\}$$

称为 $\mathscr{A}$ 的影子或影，记为 $\Delta\mathscr{A}$, $\Delta\{A\}$ 简记为 ΔA.

在 4.1 节例 1 的第二个证明中实际上已经得到

$$|\Delta\mathscr{A}| \geqslant \frac{l}{n-l+1}|\mathscr{A}| \tag{1}$$

(l 即那里的 s). 为了得出更精确的关系，需要引进一些记号与概念.

例 1 证明对任意的自然数 t, l，存在自然数 $a_l > a_{l-1} > \cdots > a_m \geqslant m$，使得

$$t = C_{a_l}^{l} + C_{a_{l-1}}^{l-1} + \cdots + C_{a_m}^{m}, \tag{2}$$

并且这种表示是唯一的.

解 $t = 1$ 时，有唯一的表示 $t = C_l^l (a_l = l)$.

如果 t 有所述的表示，那么

$$C_{a_l}^{l} \leqslant t < C_{a_l}^{l} + C_{a_{l-1}}^{l-1} + \cdots + C_{a_{m+1}}^{m+1} + C_{a_{m+1}}^{m}$$

$$\leqslant C_{a_l}^{l} + C_{a_{l-1}}^{l-1} + \cdots + C_{a_{m+2}}^{m+2} + C_{a_{m+2}}^{m+1}$$

$$\leqslant \cdots$$

$$\leqslant C_{a_l}^{l} + C_{a_l}^{l-1}$$

$$= C_{a_l+1}^{l},$$

从而 a_l 是满足 $C_x^l \leqslant t$ 的最大整数 x，被 l, t 唯一确定.

取定 a_l 为满足 $C_x^l \leqslant t$ 的最大整数 x 后，

$$t - C_{a_l}^{l} < C_{a_l+1}^{l} - C_{a_l}^{l} = C_{a_l}^{l-1}.$$

因此满足 $C_x^{l-1} \leqslant t - C_{a_l}^{l}$ 的最大整数 $a_{l-1} < a_l$，a_{l-1} 也是唯一确定的. 依此类推，可唯一地定出 t 的表达式(2).

(2)称为 t 的 l-二项式表示.

例 2 设 $\mathscr{A}$ 为 $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族，对 $1 < j \leqslant n$，定义集 A 的位移

$$S_j(A) = \begin{cases} (A - \{j\}) \cup \{1\}, & 若 j \in A,\ 1 \notin A, \\ & (A - \{j\}) \cup \{1\} \notin \mathscr{A}; \\ A, & 其他情况. \end{cases}$$

及 $\mathscr{A}$ 的位移

$$S_j(\mathscr{A}) = \{S_j(A) : A \in \mathscr{A}\}.$$

证明：

(i) $\Delta(S_j(\mathscr{A})) \subseteq S_j(\Delta\mathscr{A})$; (3)

(ii) $|\Delta\mathscr{A}| \geqslant |\Delta(S_j(\mathscr{A}))|$. (4)

解 设 $A \in \mathscr{A}$. 要证明 $\Delta(S_j(A)) \subseteq S_j(\Delta\mathscr{A})$.

若 $A = S_j(A)$，则对任一 $B \in \Delta(S_j(A)) = \Delta(A)$，均有 $A = B \cup \{i\}$. 由 $S_j(\Delta\mathscr{A})$的定义，$B = S_j(B)$（这里 S_j 是 $\Delta\mathscr{A}$ 的位移，不是 $\mathscr{A}$ 的位移），除非 $j \in B$，$1 \notin B$ 而且 $(B-\{j\}) \cup \{1\} \notin \Delta\mathscr{A}$. 但 $j \in B$，$1 \notin B$ 时，$i \neq j$. 在 $i = 1$ 时，$(B-\{j\}) \cup \{1\} = A - \{j\} \in \Delta\mathscr{A}$. 在 $i \neq 1$ 时，$j \in A$，$1 \notin A$，由于 $A = S_j(A)$，必有 $(A-\{j\}) \cup \{1\} \in \mathscr{A}$，从而仍有 $(B-\{j\}) \cup \{1\} \in \Delta\mathscr{A}$. 因此总有 $B = S_j(B) \in S_j(\Delta\mathscr{A})$.

若 $A \neq S_j(A)$，则 $j \in A$，$1 \notin A$，$S_j(A) = (A-\{j\}) \cup \{1\}$. 对任一 $B \in \Delta(S_j(A))$ 有 $B = (A-\{j\}) \cup \{1\} - \{i\}$，$i \in (A-\{j\}) \cup \{1\}$. 当 $i = 1$ 时，$B = A - \{j\} = S_j(A-\{j\}) \in S_j(\Delta\mathscr{A})$. 当 $i \neq 1$ 时，又分两种情况：1° $B \in \Delta\mathscr{A}$. 由于 $j \notin B$，显然 $B = S_j(B) \in S_j(\Delta\mathscr{A})$. 2° $B \notin \Delta\mathscr{A}$，即 $((A-\{i\})-\{j\}) \cup \{1\} \notin \Delta\mathscr{A}$，此时 $B = ((A-\{i\})-\{j\}) \cup \{1\} = S_j(A-\{i\}) \in S_j(\Delta\mathscr{A})$.

因此恒有 $A \in \mathscr{A}$ 时，$\Delta(S_j(A)) \subseteq S_j(\Delta\mathscr{A})$. 从而(3)成立.

显然，$\mathscr{A}$ 中任意两个集 A_1，A_2 经位移后仍不相同. 所以

$$|\Delta\mathscr{A}| = |S_j(\Delta\mathscr{A})| \geqslant |\Delta(S_j(\mathscr{A}))|.$$

现在可以介绍本节的主要内容.

例 3 设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 X 的 l 元子集的族，t 的 l-二项式表示为

$$t = C_{a_l}^{l} + C_{a_{l-1}}^{l-1} + \cdots + C_{a_m}^{m}, \tag{5}$$

$a_l > a_{l-1} > \cdots > a_m \geqslant m$，则

$$|\Delta\mathscr{A}| \geqslant C_{a_l}^{l-1} + C_{a_{l-1}}^{l-2} + \cdots + C_{a_m}^{m-1}. \tag{6}$$

这一结论称为 Kruskal-Katona 定理.

解 对 $\mathscr{A}$ 施行移位运算 S_j，$j = 2, 3, \cdots, n$，使含 1 的

集个数增加. 这样进行有限多次后，必有 $S_j(\mathscr{A})=\mathscr{A}$ 对所有 $j\geqslant 2$ 均成立. 由例 2(3)，在这过程中 $|\Delta\mathscr{A}|$ 不增. 因此不妨假设 $S_j(\mathscr{A})=\mathscr{A}$ 对所有 $j\geqslant 2$ 均已成立. 令

$$\mathscr{A}_1=\{A:A\in\mathscr{A},\ 1\notin A\},$$

$$\mathscr{A}_2=\{A-\{1\},\ A\in\mathscr{A},\ 1\in A\}.$$

对任一 $B\in\Delta\mathscr{A}_1$，有 $i>1$ 使 $B\cup\{i\}\in\mathscr{A}_1$. 从而必有 $B\cup\{1\}\in\mathscr{A}$(否则 $B\cup\{1\}=S_i(B\cup\{i\})\in S_i(\mathscr{A})=\mathscr{A}$，矛盾). 因此 $B\in\mathscr{A}_2$，从而

$$|\mathscr{A}_2|\geqslant|\Delta\mathscr{A}_1|. \tag{7}$$

当 $l=1$ 及 $l=n$ 时结论显然成立(前者 $\Delta\mathscr{A}=\varnothing$，$|\Delta\mathscr{A}|=C_t^0=1$. 后者 $t=1$，$\Delta\mathscr{A}$ 由所有 $n-1$ 元集组成，$|\Delta\mathscr{A}|=C_n^{n-1}=n-1$). 假设结论对 $n<k$ 成立，并且对 $n=k$ 且 $l<h$ 也成立. 考虑 $n=k$，$l=h$ 的情况.

若 $|\mathscr{A}_2|<C_{a_l-1}^{l-1}+\cdots+C_{a_m-1}^{m-1}$，则

$$\begin{aligned}|\mathscr{A}_1|&=|\mathscr{A}|-|\mathscr{A}_2|\\&>(C_{a_l}^{l}-C_{a_l-1}^{l-1})+\cdots+(C_{a_m}^{m}-C_{a_m-1}^{m-1})\\&=C_{a_l-1}^{l}+\cdots+C_{a_m-1}^{m}.\end{aligned}$$

由归纳假设，

$$|\Delta\mathscr{A}_1|\geqslant C_{a_l-1}^{l-1}+\cdots+C_{a_m-1}^{m-1},$$

从而 $|\Delta\mathscr{A}_1|>|\mathscr{A}_2|$，与(7)矛盾. 因此

$$|\mathscr{A}_2|\geqslant C_{a_l-1}^{l-1}+\cdots+C_{a_m-1}^{m-1}. \tag{8}$$

由归纳假设，

$$|\Delta\mathscr{A}_2|\geqslant C_{a_l-1}^{l-2}+\cdots+C_{a_m-1}^{m-2}. \tag{9}$$

(8)，(9)相加得

$$|\mathscr{A}_2|+|\Delta\mathscr{A}_2|\geqslant C_{a_t}^{t-1}+\cdots+C_{a_m}^{m-1}. \tag{10}$$

因为 $\Delta\mathscr{A}_2$ 中任一子集添加 1 后成为 $\Delta\mathscr{A}$ 中子集，并且不同的子集添加 1 后各不相同. 这些子集与 $\mathscr{A}_2$ 中子集(不含 1)不同. 所以

$$|\Delta\mathscr{A}|\geqslant|\mathscr{A}_2|+|\Delta\mathscr{A}_2|. \tag{11}$$

(10), (11)导出(6).

4.8 Milner 定 理

若 n 元集 X 的子集族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 S 族，并且 $\mathscr{A}$ 中任两个集 A_i, A_j 均有 $|A_i\cap A_j|\geqslant k$, Milner 在 1968 年证明了

$$|\mathscr{A}|\leqslant C_n^{\left[\frac{n+k-1}{2}\right]}. \tag{1}$$

我们分三步来证明(1)，即下面的例 1～例 3.

例 1 设 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{A}$ 为 I 族. 对 $1<j\leqslant n$ 及 $A\in\mathscr{A}$, 定义位移

$$S_j(A)=\begin{cases}(A-\{1\})\cup\{j\}, & \text{若 } 1\in A,\ j\notin A,\\ & (A-\{1\})\cup\{j\}\notin\mathscr{A};\\ A, & \text{其他情况.}\end{cases}$$

则 $S_j(\mathscr{A})=\{S_j(A):A\in\mathscr{A}\}$ 仍为 I 族，并且

$$|\Delta\mathscr{A}|\geqslant|\Delta(S_j(\mathscr{A}))|. \tag{2}$$

解 $S_j(A)$实际上与上节相同，只不过将元素的标号 1 与 j 互换. 因此(2)即上节的(4)，无用再证.

为了证明 $S_j(\mathscr{A})$是 I 族，设 A_1, $A_2\in\mathscr{A}$, 往证 $S_j(A_1)\cap$

$S_j(A_2)\neq\varnothing$. 显然只需考虑 $S_j(A_1)=A_1$，$S_j(A_2)=(A_2-\{1\})\cup\{j\}$ 的情况. 设 $a\in A_1\cap A_2$，若 $a\neq 1$，则 $a\in S_j(A_1)\cap S_j(A_2)$. 若 $a=1$，$j\in A_1$，则 $j\in S_j(A_1)\cap S_j(A_2)$. 若 $a=1$，$j\notin A_1$，则由于 $S_j(A_1)=A_1$，必有 $(A_1-\{1\})\cup\{j\}\in\mathscr{A}$. $\mathscr{A}$ 是 I 族，必有 $y\in A_2\cap((A_1-\{1\})\cup\{j\})$. 显然 $y\neq 1$. 因为 $j\notin A_2$，$y\neq j$. 从而 $y\in S_j(A_1)\cap S_j(A_2)$.

例 2 若 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 I 族，并且 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 都是 n 元集 X 的 l 元子集，则

$$|\Delta\mathscr{A}|\geqslant|\mathscr{A}|. \tag{3}$$

解 $n=1$ 时(3)显然成立. 假设(3)对 $n-1(\geqslant 1)$ 成立.

若 $l\geqslant\frac{1}{2}(n+1)$，由 4.2 节例 2，将 $P(X)$ 分解为对称链，每个 $A_i(1\leqslant i\leqslant t)$ 在一条链中，这条链中有一个比 A_i 恰少一个元的集 B_i. 这些 $B_i(1\leqslant i\leqslant t)$ 互不相同(在不同的链中)，因此(3)成立.

以下设 $l\leqslant\frac{1}{2}n$.

若 $l=1$，则 $t=1$，$|\Delta\mathscr{A}|=|\mathscr{A}|$.

若 $l=2$，$t=1$，则 $|\Delta\mathscr{A}|=2>|\mathscr{A}|$. 若 $l=2$，$t\geqslant 2$，又有两种情况：1° X 的每个元素至多属于两个 $\mathscr{A}$ 中子集. 设 $A_1=\{a, b\}$，$A_2=\{a, c\}$，则由于 $\mathscr{A}$ 是 I 族，至多还有一个集，即 $\{b, c\}\in\mathscr{A}$. 从而 $|\Delta\mathscr{A}|=3\geqslant|\mathscr{A}|$. 2° X 的元素 $a\in A_1\cap A_2\cap A_3$. 由于 $\mathscr{A}$ 是 I 族，任一 $\mathscr{A}$ 中的集 A_j 含有 a(否则二元集 A_j 不可能与 A_1、A_2、A_3 均有公共元). 于是 $|\Delta\mathscr{A}|=1+|\mathscr{A}|>|\mathscr{A}|$.

设 $l>2$ 并且将 l 换为较小的自然数时(3)成立.

对 $\mathscr{A}$ 重复施用位移 $S_j(j=2, 3, \cdots, n)$，使得含 1 的集

减少，经有限多步后，不再产生新的集. 由例 1，新的集族仍为 I 族并有不等式(2). 不妨假定 $S_j(\mathscr{A})=\mathscr{A}$, $j=2, 3, \cdots, n$.

如果 1 不属于 $\mathscr{A}$ 中任一个集，那么 $\mathscr{A}$ 是 $n-1$ 元集 $\{2, 3, \cdots, n\}$ 的子集族，从而(3)成立.

设 1 属于 $A_1, A_2, \cdots, A_s$，不属于 $A_{s+1}, \cdots, A_t$. 令 $B_i=A_i-\{1\}$, $i=1, 2, \cdots, s$. 因为 $l\leqslant\frac{1}{2}n$，所以 $|A_1\cup A_2|\leqslant 2l-1<n$. 即有 X 的元素 $j\notin A_1\cup A_2$，但 $S_j(A_1)=A_1$，所以 $(A_1-\{1\})\cup\{j\}\in\mathscr{A}$，即 $B_1\cup\{j\}\in\mathscr{A}$. 因此 $|B_1\cap B_2|=|(B_1\cup\{j\})\cap B_2|=|(B_1\cup\{j\})\cap A_2|\geqslant 1$. 同理 $B_1, B_2, \cdots, B_s$ 中每两个的交非空. 因此 $\mathscr{B}=\{B_1, B_2, \cdots, B_s\}$ 是 I 族，由关于 l 的归纳假设

$$|\Delta\mathscr{B}|\geqslant|\mathscr{B}|. \tag{4}$$

$\{2, 3, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{C}=\{A_{s+1}, A_{s+2}, \cdots, A_t\}$ 也是 I 族，因此由关于 n 的归纳假设

$$|\Delta\mathscr{C}|\geqslant|\mathscr{C}|. \tag{5}$$

由(4)，(5)得

$$|\Delta\mathscr{A}|\geqslant|\Delta\mathscr{B}|+|\Delta\mathscr{C}|\geqslant|\mathscr{B}|+|\mathscr{C}|=|\mathscr{A}|.$$

例 2 是 Katona 1964 年发现的定理.

例 3 证明(1)式成立.

解 记 $l=\left[\frac{n+k+1}{2}\right]$. 若 $\mathscr{A}$ 中所有 A_i 满足 $|A_i|=l$，(1)显然成立. 若 $\mathscr{A}$ 中有元数 $<l$ 的集，不妨设 $A_1, A_2, \cdots, A_s$ 的元数最少，均为 h 元集，$h<l$. 考虑集族

$\mathscr{B}=\{B: B$ 为 X 的 $h+1$ 元子集并且至少包含一个 A_i, $1\leqslant i\leqslant s\}$.

显然 $\mathscr{B}\cup\{A_{s+1},\cdots,A_t\}$ 仍为 S 族. 并且其中任两个集的交集至少有 k 个元.

由于 $|A_1\cap A_2|\geqslant k$, 所以 $|A_1\cup A_2|\leqslant 2h-k$, $|A_1'\cap A_2'|\geqslant n-2h+k\geqslant n-2l+k+2\geqslant 1$. 从而 $A_1',A_2',\cdots,A_s'$ 是 I 族. 由例 2,

$$|\Delta(\{A_1',A_2',\cdots,A_s'\})|\geqslant|\{A_1',A_2',\cdots,A_s'\}|=s. \tag{6}$$

而 $\Delta(\{A_1',A_2',\cdots,A_s'\})$ 正好是 $\mathscr{B}$ 中各集的补集所成的族. 因此(6)表明 $|\mathscr{B}|\geqslant s$.

对族 $\mathscr{B}\cup\{A_{s+1},\cdots,A_t\}$ 进行同样处理, 直至每个集的元数都 $\geqslant l$. 在这过程中 $|\mathscr{A}|$ 不减. 因此可设 $\mathscr{A}$ 中每个集的元数 $\geqslant l$.

将 $P(X)$ 分解为对称链. 因为 $\mathscr{A}$ 为 S 族, $\mathscr{A}$ 中各集在不同的链上. 因为 $l>\frac{n}{2}$, 每个元数大于 l 的集均可换成同一条链上的元数为 l 的集. 这样 $|\mathscr{A}|$ 不减少. 从而 $|\mathscr{A}|\leqslant C_n^l$, 即(1)成立.

例 3 中的 $\mathscr{B}$ 称为 $\mathscr{A}=\{A_1,A_2,\cdots,A_s\}$ 的荫. 荫与影是一对对偶的概念, 它在 4.1 节例 1 的第二个解法中业已出现过.

4.9 上族与下族

设 $\mathscr{A}$ 是 X 的集族. 若 $\mathscr{A}$ 具有性质:

$$A\in\mathscr{A},\ B\subset A\Rightarrow B\in\mathscr{A}, \tag{1}$$

则称 $\mathscr{A}$ 为下族. 类似地, 若 $\mathscr{A}$ 具有性质:

$$A \in \mathscr{A},\ B \supset A \Rightarrow B \in \mathscr{A}, \tag{2}$$

则称 $\mathscr{A}$ 为上族.

显然 $\mathscr{A}$ 为上(下)族,当且仅当

$$\mathscr{A}' = \{A' ; A \in \mathscr{A}\} \tag{3}$$

为下(上)族.

若 $\mathscr{A}$ 为上族,则 $\mathscr{A}$ 中的最小元(即不包含 $\mathscr{A}$ 中其他元的元)组成 S 族. 若 $\mathscr{A}$ 为下族,则 $\mathscr{A}$ 中的最大元(即不被 $\mathscr{A}$ 中其他元包括的元)组成 S 族.

例 1 若 $\mathscr{U}$ 是 n 元集 X 的上族,$\mathscr{D}$ 是 X 的下族,则

$$|\mathscr{U}| \cdot |\mathscr{D}| \geqslant 2^n |\mathscr{U} \cap \mathscr{D}|. \tag{4}$$

解 当 $n = 1$ 时,$\mathscr{U}$ 只有两种可能,即

$$\{\{1\}\}或\{\{1\},\varnothing\}.$$

$\mathscr{D}$ 也仅有两种可能,即

$$\{\varnothing\}或\{\{1\},\varnothing\}.$$

不难验证(4)均成立.

假设将 n 换成 $n-1$ 时,(4)成立. 考虑 n 的情况.

将集族 $\mathscr{U}$ 分拆为集族 $\mathscr{U}_1$,$\mathscr{U}_2$,其中 $\mathscr{U}_1$ 由 $\mathscr{U}$ 中含 n 的那些集组成,$\mathscr{U}_2$ 由 $\mathscr{U}$ 中不含 n 的集组成. 由于 $\mathscr{U}$ 是上族,所以

$$|\mathscr{U}_1| \geqslant |\mathscr{U}_2|. \tag{5}$$

($\mathscr{U}_2$ 中每个集增添 n 后成为 $\mathscr{U}_1$ 中的集.)

同样,将 $\mathscr{D}$ 分拆为 $\mathscr{D}_1$,$\mathscr{D}_2$,其中 $\mathscr{D}_1$ 中的集含 n,$\mathscr{D}_2$ 中的集不含 n. 由于 $\mathscr{D}$ 为下族,所以

$$|\mathscr{D}_2| \geqslant |\mathscr{D}_1|. \tag{6}$$

由(5),(6)及归纳假设

$$
\begin{aligned}
&|\mathscr{U}|\cdot|\mathscr{D}|=(|\mathscr{U}_1|+|\mathscr{U}_2|)(|\mathscr{D}_1|+|\mathscr{D}_2|)\\
=&|\mathscr{U}_1|\cdot|\mathscr{D}_1|+|\mathscr{U}_2|\cdot|\mathscr{D}_2|+|\mathscr{U}_1|\cdot|\mathscr{D}_2|+|\mathscr{U}_2|\cdot|\mathscr{D}_1|\\
=&|\mathscr{U}_1|\cdot|\mathscr{D}_1|+|\mathscr{U}_2|\cdot|\mathscr{D}_2|+|\mathscr{U}_1|\cdot|\mathscr{D}_1|+|\mathscr{U}_2|\cdot|\mathscr{D}_2|\\
&+(|\mathscr{U}_1|-|\mathscr{U}_2|)(|\mathscr{D}_2|-|\mathscr{D}_1|)\\
\geqslant&2(|\mathscr{U}_1|\cdot|\mathscr{D}_1|+|\mathscr{U}_2|\cdot|\mathscr{D}_2|)\\
\geqslant&2(2^{n-1}|\mathscr{U}_1\cap\mathscr{D}_1|+2^{n-1}|\mathscr{U}_2\cap\mathscr{D}_2|)\\
=&2^n|\mathscr{U}\cap\mathscr{D}|.
\end{aligned}
$$

(4) 称为 Kleitman 引理. 1966 年创办的杂志 Journal of Combinatorial Theory，在第一期上刊登了 Kleitman 的这个结果. 这个引理应用极多. 由它引出了一系列的结论.

例 2 若 $\mathscr{D}$, $\mathscr{A}$ 都是 n 元集 X 的下族，则

$$|\mathscr{D}|\cdot|\mathscr{A}|\leqslant 2^n|\mathscr{A}\cap\mathscr{D}|. \tag{7}$$

解 令 $\mathscr{U}=P(X)-\mathscr{A}$, 则 $\mathscr{U}$ 为上族. 事实上，设 $A\in\mathscr{U}$, 而 $B\supseteq A$, 则在 $B\notin\mathscr{U}$ 时，$B\in\mathscr{A}$, 从而 $A\in$ 下族 $\mathscr{A}$, 与 $A\in\mathscr{U}$ 矛盾. 所以 $B\in\mathscr{U}$, $\mathscr{U}$ 为上族.

由例 1，

$$|\mathscr{U}|\cdot|\mathscr{D}|\geqslant 2^n|\mathscr{U}\cap\mathscr{D}|,$$

即

$$(2^n-|\mathscr{A}|)\cdot|\mathscr{D}|\geqslant 2^n(|\mathscr{D}|-|\mathscr{A}\cap\mathscr{D}|),$$

从而(7)成立.

类似地，若 $\mathscr{U}$, $\mathscr{B}$ 都是上族，则

$$|\mathscr{U}|\cdot|\mathscr{B}|\leqslant 2^n|\mathscr{U}\cap\mathscr{B}|. \tag{8}$$

例 3 若 $\mathscr{A}$ 是 I 族，并且 $\mathscr{A}$ 中任两个元 A, B 的并集不等于 X. 证明：

$$|\mathscr{A}|\leqslant 2^{n-2}. \tag{9}$$

解 令

$$\mathscr{U}=\{B:B\supseteq\mathscr{A}\text{中某个集}A\},$$
$$\mathscr{D}=\{B:B\subseteq\mathscr{A}\text{中某个集}A\},$$

则 $\mathscr{U}$ 为上族，$\mathscr{D}$ 为下族，$\mathscr{U}\cap\mathscr{D}=\mathscr{A}$. 由例 1，

$$|\mathscr{U}|\cdot|\mathscr{D}|\geqslant 2^n\cdot|\mathscr{A}|. \tag{10}$$

因为 $\mathscr{A}$ 是 I 族，所以 $\mathscr{U}$ 也是 I 族，从而由 4.5 节例 1，

$$|\mathscr{U}|\leqslant 2^{n-1}. \tag{11}$$

又 $\mathscr{D}$ 中任意两个元素的并集不是 X，因此，由习题 9，

$$|\mathscr{D}|\leqslant 2^{n-1}. \tag{12}$$

由(10)，(11)，(12)得(9).

例 4 若 $\mathscr{A}_1$，$\mathscr{A}_2$，…，$\mathscr{A}_k$ 均为 I 族，则

$$|\bigcup\mathscr{A}_i|\leqslant 2^n-2^{n-k}. \tag{13}$$

解 $k=1$ 的情况即 4.5 节例 1. 假设(13)在 k 换为 $k-1$ 时成立，考虑 k 的情况.

由 4.5 节例 1 的注 2，可设 $|\mathscr{A}_k|=2^{n-1}$. 令

$$\mathscr{D}=\{A:A\notin\mathscr{A}_k\},$$

则 $\mathscr{D}$ 是下族并且 $|\mathscr{D}|=2^{n-1}$.

$\mathscr{B}=\bigcup_{i=1}^{k-1}\mathscr{A}_i$ 如果不是上族，那么有集 B，$B\supseteq A$，$A\in\mathscr{B}$. 因而有 $\mathscr{A}_m(1\leqslant m\leqslant k-1)$ 含 A，将 B 加到 $\mathscr{A}_m$ 中，$\mathscr{A}_m$ 仍为 I 族. 通过这样的添加，直至 $\mathscr{B}$ 成为上族.

于是，由例 1 及归纳假设，

$$|\bigcup_{i=1}^{k}\mathscr{A}_i|=|\mathscr{B}\cup\mathscr{A}_k|\leqslant|\mathscr{B}\cap\mathscr{D}|+|\mathscr{A}_k|$$
$$\leqslant\frac{1}{2^n}|\mathscr{B}|\cdot|\mathscr{D}|+2^{n-1}$$

$$\leqslant \frac{1}{2^n} \cdot (2^n - 2^{n-(k-1)}) \cdot 2^{n-1} + 2^{n-1}$$

$$= 2^n - 2^{n-k}.$$

(13)中的上界是最佳的. 令 $\mathscr{A}_i$ 由含元素 i 并且不含 $1, 2, \cdots, i-1$ 的那些集组成,则 $|\mathscr{A}_i| = 2^{n-i} (1 \leqslant i \leqslant k)$.

$$\left| \bigcup_{i=1}^{k} \mathscr{A}_i \right| = \sum_{i=1}^{k} 2^{n-i} = 2^n - 2^{n-k}.$$

4.10 四函数定理

上节 Kleitman 引理(例 1)导出一系列结果,以 1978 年 Ahlswede 与 Daykin 的四函数定理为顶峰. 本节将介绍这一定理.

设 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 为 X 的子集族,定义

$$\mathscr{A} \vee \mathscr{B} = \{E : E = A \cup B, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}, \tag{1}$$

$$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} = \{E : E = A \cap B, A \in \mathscr{A}, B \in \mathscr{B}\}. \tag{2}$$

例 1 证明:

(i) 若 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 为上族,则

$$\mathscr{A} \vee \mathscr{B} = \mathscr{A} \cap \mathscr{B}; \tag{3}$$

(ii) 若 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$ 为下族,则

$$\mathscr{A} \wedge \mathscr{B} = \mathscr{A} \cap \mathscr{B}. \tag{4}$$

解 (i) 设集 $E \in \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$,则 $E = A \cup B$, $A \in \mathscr{A}$, $B \in \mathscr{B}$. 由于 $\mathscr{A}$ 为上族,所以 $E \in \mathscr{A}$, $E \in \mathscr{B}$, 从而 $E \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$.

反之,设 $E \in \mathscr{A} \cap \mathscr{B}$,则 $E = E \cup E$, $E \in \mathscr{A}$, $E \in \mathscr{B}$, 所以 $E \in \mathscr{A} \vee \mathscr{B}$.

因此(3)成立.

(ii)的证明与(i)类似.

例 2 (四函数定理) 若 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是四个定义在 $P(X)$ 上的非负函数，对任意 $A, B \subseteq X$，满足

$$\alpha(A)\beta(B) \leqslant \gamma(A \cup B)\delta(A \cap B), \tag{5}$$

则对 X 的任意两个子集族 $\mathscr{A}, \mathscr{B}$,

$$\alpha(\mathscr{A})\beta(\mathscr{B}) \leqslant \gamma(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})\delta(\mathscr{A} \wedge \mathscr{B}), \tag{6}$$

其中

$$\alpha(\mathscr{A}) = \sum_{A \in \mathscr{A}} \alpha(A), \tag{7}$$

$\beta(\mathscr{B})$, $\gamma(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$, $\delta(\mathscr{A} \vee \mathscr{B})$ 与此类似.

解 对 X 的元数 n 进行归纳.

$n = 1$ 时，(5)成为

$$\begin{aligned} &\alpha(\varnothing)\beta(\varnothing) \leqslant \gamma(\varnothing)\delta(\varnothing), \\ &\alpha(\varnothing)\beta(X) \leqslant \gamma(X)\delta(\varnothing), \\ &\alpha(X)\beta(\varnothing) \leqslant \gamma(X)\delta(\varnothing), \\ &\alpha(X)\beta(X) \leqslant \gamma(X)\delta(X). \end{aligned} \tag{8}$$

若 $\mathscr{A}$ 或 $\mathscr{B}$ 仅有一个元，则(6)显然成立：例如 $\mathscr{A} = \{\varnothing\}$, $\mathscr{B} = \{\varnothing, X\}$，则(6)式成为

$$\alpha(\varnothing)(\beta(\varnothing) + \beta(X)) \leqslant (\gamma(\varnothing) + \gamma(X))\delta(\varnothing),$$

即(8)的前两个式子之和.

若 $\mathscr{A} = \mathscr{B} = \{\varnothing, X\}$，则(6)式成为

$$\begin{aligned} &(\alpha(\varnothing) + \alpha(X))(\beta(\varnothing) + \beta(X)) \\ &\leqslant (\gamma(\varnothing) + \gamma(X))(\delta(\varnothing) + \delta(X)). \end{aligned} \tag{9}$$

当 $\delta(\varnothing) = 0$ 时，由(8)的前面三式，(9)的左边为

$\alpha(X)\beta(X)$，因而由(8)的第四式，(9)成立. 当 $\gamma(X)=0$ 时，情况类似. 设 $\delta(\varnothing)$ 与 $\gamma(X)$ 均不为 0，则 $\gamma(\varnothing)\geqslant\dfrac{\alpha(\varnothing)\beta(\varnothing)}{\delta(\varnothing)}$，$\delta(X)\geqslant\dfrac{\alpha(X)\beta(X)}{\gamma(X)}$，

$$
\begin{aligned}
&(\gamma(\varnothing)+\gamma(X))(\delta(\varnothing)+\delta(X))\\
&\quad-(\alpha(\varnothing)+\alpha(X))(\beta(\varnothing)+\beta(X))\\
\geqslant&\left(\frac{\alpha(\varnothing)\beta(\varnothing)}{\delta(\varnothing)}+\gamma(X)\right)\left(\delta(\varnothing)+\frac{\alpha(X)\beta(X)}{\gamma(X)}\right)\\
&\quad-(\alpha(\varnothing)+\alpha(X))(\beta(\varnothing)+\beta(X))\\
=&\gamma(X)\delta(\varnothing)+\frac{\alpha(\varnothing)\alpha(X)\beta(\varnothing)\beta(X)}{\delta(\varnothing)\gamma(X)}\\
&\quad-\alpha(\varnothing)\beta(X)-\alpha(X)\beta(\varnothing)\\
=&\frac{1}{\delta(\varnothing)\gamma(X)}(\gamma(X)\delta(\varnothing)\\
&\quad-\alpha(\varnothing)\beta(X))(\delta(\varnothing)\gamma(X)-\alpha(X)\beta(\varnothing))\\
\geqslant&0\ \text{((8)的第二、三式)},
\end{aligned}
$$

即(9)成立.

假设结论对 $n-1$ 元集成立. 考虑 n 元集 $X=Y\cup W$，其中 $Y=\{1,2,\cdots,n-1\}$，$W=\{n\}$.

对每一个集 $A\subseteq X$，令

$$A=A_1\cup A_2,\ A_1=A\cap Y,\ A_2=A\cap W.$$

又对任一集 $C\in P(Y)$（即 $C\subseteq Y$），定义函数

$$\alpha_1(C)=\sum_{\substack{A\in\mathscr{A}\\ A_1=C}}\alpha(A),$$

则

$$\alpha(\mathscr{A}) = \sum_{A\in\mathscr{A}}\alpha(A) = \sum_{C\in P(Y)}\sum_{\substack{A\in\mathscr{A}\\A_1=C}}\alpha(A)$$

$$= \sum_{C\in P(Y)}\alpha_1(C) = \alpha_1(P(Y)).$$

类似地可以定义 β_1，γ_1，δ_1，并且得到

$$\beta(\mathscr{B}) = \beta_1(P(Y)),$$

$$\gamma(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}) = \gamma_1(P(Y)),$$

$$\delta(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}) = \delta_1(P(Y)).$$

若对所有 $C, D\in P(Y)$，

$$\alpha_1(C)\beta_1(D)\leqslant\gamma_1(C\cup D)\delta_1(C\cap D), \tag{10}$$

则由归纳假设，

$$\alpha(\mathscr{A})\beta(\mathscr{B}) = \alpha_1(P(Y))\beta_1(P(Y))$$

$$\leqslant\gamma_1(P(Y))\beta_1(P(Y)) = \gamma(\mathscr{A}\vee\mathscr{B})\delta(\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}).$$

因此只需证明(10).

固定 C, D. 对集 $R\in P(W)$（即 $R\subseteq W$）定义

$$\alpha_2(R) = \begin{cases}\alpha(R\cup C), & \text{若 } R\cup C\in\mathscr{A};\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

$$\beta_2(R) = \begin{cases}\beta(R\cup D), & \text{若 } R\cup D\in\mathscr{B};\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

$$\gamma_2(R) = \begin{cases}\gamma(R\cup(C\cup D)), & \text{若 } R\cup(C\cup D)\in\mathscr{A}\vee\mathscr{B};\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

$$\delta_2(R) = \begin{cases}\delta(R\cup(C\cap D)), & \text{若 } R\cup(C\cap D)\in\mathscr{A}\wedge\mathscr{B};\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

则

$$\alpha_1(C)=\sum_{\substack{A\in\mathscr{A}\\A_1=C}}\alpha(A)=\sum_{R\subseteq W}\sum_{\substack{A\in\mathscr{A}\\A_1=C\\A_2=R}}\alpha(A)$$

$$=\sum_{R\subseteq W}\alpha_2(R)=\alpha_2(P(W)),$$

同样

$$\beta_1(D)=\beta_2(P(W)),\ \gamma_1(C\cup D)=\gamma_2(P(W)),$$

$$\delta_1(C\cap D)=\delta_2(P(W)).$$

若对所有 $R,Q\in P(W)$，均有

$$\alpha_2(R)\beta_2(Q)\leqslant\gamma_2(R\cup Q)\delta_2(R\cap Q),\tag{11}$$

则由 $n=1$ 时的结论，

$$\alpha_1(C)\beta_1(D)=\alpha_2(P(W))\beta_2(P(W))$$

$$\leqslant\gamma_2(P(W))\delta_2(P(W))=\gamma_1(C\cup D)\delta_1(C\cap D),$$

即(10)成立.

最后，我们证明(11)成立. 若 $\alpha_2(R)\beta_2(Q)=0$，(11)显然成立. 设 $\alpha_2(R)\beta_2(Q)\neq 0$，则

$$R\cup C\in\mathscr{A},\ Q\cup D\in\mathscr{B},$$

$$\alpha_2(R)\beta_2(Q)=\alpha(R\cup C)\beta(Q\cup D),$$

并且

$$(R\cup Q)\cup(C\cup D)=(R\cup C)\cup(Q\cup D)\in\mathscr{A}\vee\mathscr{B},$$

$$(R\cap Q)\cup(C\cap D)=(R\cup C)\cap(Q\cup D)\in\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}.$$

$$\gamma_2(R\cup Q)\delta_2(R\cap Q)$$

$$=\gamma((R\cup C)\cup(Q\cup D))\delta((R\cup C)\cap(Q\cup D)).$$

于是由(5)得(11) $(A=R\cup C,\ B=Q\cup D)$.

四函数定理有众多的应用.

例 3 若 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 为 X 的集，则

$$|\mathscr{A}|\cdot|\mathscr{B}|\leqslant|\mathscr{A}\vee\mathscr{B}|\cdot|\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}|. \qquad (12)$$

解 在例 2 中取 $\alpha=\beta=\gamma=\delta=1$ 即得.

例 4 试用四函数定理证明 Kleitman 引理(4.9 节例 1).

解 令 $\mathscr{A}=\mathscr{U}\cap\mathscr{D}$, $\mathscr{B}=P(X)$. $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}$ 中任一元可表为 $A\cup B$, $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{B}$. 因为 $A\in\mathscr{U}$. 而 $\mathscr{U}$ 为上族，所以 $A\cup B\in\mathscr{U}$. 从而 $\mathscr{A}\vee\mathscr{B}\subseteq\mathscr{U}$. $\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}$ 中任一元可表为 $A\cap B$, $A\in\mathscr{A}$, $B\in\mathscr{B}$. 因为 $A\in\mathscr{D}$，而 $\mathscr{D}$ 为下族，所以 $A\cap B\in\mathscr{D}$. 从而 $A\wedge\mathscr{B}\subseteq\mathscr{D}$.

由(12)，

$$\begin{aligned}2^n|\mathscr{U}\cap\mathscr{D}|&=|\mathscr{A}|\cdot|\mathscr{B}|\\&\leqslant|\mathscr{A}\vee\mathscr{B}|\cdot|\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}|\leqslant|\mathscr{U}|\cdot|\mathscr{D}|.\end{aligned}$$

例 5 令 $\mathscr{A}-\mathscr{B}=\{A-B:A\in\mathscr{A},\ B\in\mathscr{B}\}$. 证明对任一集族 $\mathscr{A}$，

$$|\mathscr{A}-\mathscr{A}|\geqslant|\mathscr{A}|. \qquad (13)$$

解 令 $\mathscr{A}'=\{A':A\in\mathscr{A}\}$. 由(12)，

$$\begin{aligned}|\mathscr{A}|\cdot|\mathscr{B}|&=|\mathscr{A}|\cdot|\mathscr{B}'|\\&\leqslant|\mathscr{A}\vee\mathscr{B}'|\cdot|\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}'|\\&=|(\mathscr{A}\vee\mathscr{B}')'|\cdot|\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}'|\\&=|\mathscr{A}'\wedge\mathscr{B}|\cdot|\mathscr{A}\wedge\mathscr{B}'|\\&=|\mathscr{B}-\mathscr{A}|\cdot|\mathscr{A}-\mathscr{B}|.\end{aligned}$$

取 $\mathscr{B}=\mathscr{A}$，得 $|\mathscr{A}|^2\leqslant|\mathscr{A}-\mathscr{A}|^2$，即(13)成立.

4.11 *H* 族

Helly 定理是众所周知的：在平面上的 n 个凸集，如果每

三个均有公共点，那么这 n 个凸集必有公共点(例如参看拙著《覆盖》，上海教育出版社 1983 年出版). 换句话说，如果这 n 个凸集没有公共点，那么其中必有三个凸集没有公共点.

H 族(Helly 族)的定义即由此而来.

设 $\mathscr{A}$ 是 X 的子集族. 如果对于 $\mathscr{A}$ 的任一个子族 $\mathscr{B}=\{B_1, B_2, \cdots, B_s\}\subseteq\mathscr{A}$, 当

$$\bigcap_{B\in\mathscr{B}} B=B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_s=\varnothing \tag{1}$$

时，均可从 $B_1, B_2, \cdots, B_s$ 中取出至多 k 个，它们的交为空集，那么 $\mathscr{A}$ 就称为 H_k 族.

H_1 族中，所有非空子集的交必须非空(否则由(1)导出 $B_1, B_2, \cdots, B_s$ 中至少有一个为空集). 反之，交非空的一些非空子集组成 H_1 族，将空集添加进去也还是 H 族.

H_2 族也常简称为 H 族. 在这种族中，如果每两个非空子集均有公共元，那么族中所有非空子集也有公共元. 数轴上的闭区间所成的族就是 H_2 族.

平面上的凸集所成的族是 H_3 族.

显然，当 $k\geqslant|\mathscr{A}|$ 时，$\mathscr{A}$ 是 H_k 族. 又由定义易知：

(i) H_k 族的子集一定是 H_k 族；

(ii) H_{k-1} 族一定是 H_k 族. 但 H_k 族不一定是 H_{k-1} 族. 如果 $\mathscr{A}$ 是 H_k 族而不是 H_{k-1} 族，那么 $\mathscr{A}$ 中有 k 个集 $A_1, A_2, \cdots, A_k$，满足

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k=\varnothing. \tag{2}$$

但 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中任意 $k-1$ 个的交都不是空集；

(iii) 设 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 H_k 族，那么

$$\mathscr{B}=\{A_{i_1}\cap A_{i_2}\cap\cdots\cap A_{i_s}\mid 1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_s\leqslant t\}$$

也是 H_k 族(若 $\mathscr{B}$ 中子集 $B_1, B_2, \cdots, B_u$ 的交为空集，则由于

每个 B_i 为若干个 $A \in \mathscr{A}$ 的交，所以必有若干个 A 的交为空集，不妨设 $A_1, A_2, \cdots, A_v$ 的交为空集，并且每个 $A_i\ (1 \leqslant i \leqslant v)$ 至少包含一个 $B_{j_i}\ (1 \leqslant j_i \leqslant u)$. 因为 $\mathscr{A}$ 是 H_k 族，在 $A_i\ (1 \leqslant i \leqslant v)$ 中有 $l \leqslant k$ 个的交为空集，含于这 l 个 A_i 中的相应的 B_{j_i} (其中可能有相等的)，个数 $\leqslant l \leqslant k$，而且交为空集).

为了讨论 H 族的最大元数，我们需要一点准备，即下面的例 1，它本身也是很有趣的.

例 1 设 $A_1, A_2, \cdots, A_t$; $B_1, B_2, \cdots, B_t$ 都是 n 元集 X 的子集，满足：

(i) $A_i \cap B_i = \varnothing \quad (i = 1, 2, \cdots, t)$;

(ii) 当 $i \neq j$ 时，A_i 不是 $A_j \cup B_j$ 的子集 $(i, j = 1, 2, \cdots, t)$.

设 $|A_i| = a_i$, $|B_i| = b_i$,

$$w(i) = w(a_i, b_i, n) = \frac{1}{C_{n-b_i}^{a_i}}, \tag{3}$$

则

$$\sum_{i=1}^{t} w(i) \leqslant 1. \tag{4}$$

当且仅当 $B_1 = B_2 = \cdots = B_t = B$, $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 为 $X - B$ 的全部 a 元子集 $(1 \leqslant a \leqslant n - |B|)$ 时，(4)中等号成立.

解 对 n 进行归纳. $n = 1$ 时 $t = 1$, $A_1 = X$, $B_1 = \varnothing$, 结论显然. 设结论对 $n-1$ 成立，考虑 n 元集 X 的情形.

不妨设 $A_i \cup B_i \neq X$ (否则由(ii)得 $t = 1$, 结论显然), $i = 1, 2, \cdots, t$. 因而 $a_i + b_i \leqslant n\ (1 \leqslant i \leqslant t)$.

令 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为 X 的全部 $n-1$ 元子集 $(j \notin X_j,\ j = 1, 2, \cdots, n)$. 对 $1 \leqslant j \leqslant n$, 令

$$I_j = \{i \mid 1 \leqslant i \leqslant t,\ A_i \subseteq X_j\}.$$

又对 $i \in I_j$，令

$$B_{ij} = B_i \cap X_j,\ b_{ij} = |B_{ij}|,$$

$$w_{j(i)} = w(a_i,\ b_{ij},\ n-1) = \frac{1}{C_{n-1-b_{ij}}^{a_i}}.$$

对 $n-1$ 元集 X_j 及其子集 A_i，B_{ij}，$(i \in I_j)$，由归纳假设，

$$\sum_{i \in I_j} w_{j(i)} \leqslant 1,\quad j = 1,2,\cdots,n. \tag{5}$$

含 A_i 的 X_j 共 $n-a_i$ 个，其中含 B_i 的 X_j 共 $n-a_i-b_i$ 个，不含 B_i 的 X_j 共 b_i 个. 对不含在 X_j 中的 B_i，$b_{ij} = |B_{ij}| = b_i - 1$，$w_{j(i)} = \frac{1}{C_{n-b_i}^{a_i}}$. 因此对固定 i，

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I_j} w_{j(i)} &= (n-a_i-b_i) \times \frac{1}{C_{n-1-b_i}^{a_i}} + b_i \times \frac{1}{C_{n-b_i}^{a_i}} \\ &= (n-b_i) \times \frac{1}{C_{n-b_i}^{a_i}} + b_i \times \frac{1}{C_{n-b_i}^{a_i}} = n w(i).\end{aligned} \tag{6}$$

综合(5)，(6)得

$$n = \sum_{j=1}^{n} 1 \geqslant \sum_{j=1}^{n} \sum_{i \in I_j} w_{j(i)} = \sum_{i=1}^{t} \sum_{i \in I_j} w_{j(i)} = n \sum_{i=1}^{t} w(i),$$

即(4)成立.

若(4)中等号成立，则(5)中等号成立. 可由归纳假设得出等号成立的条件，参见习题 31.

注 1：条件(ii)隐含 A_i 均不是空集.

注 2：当 $a_1 = a_2 = \cdots = a_t = a$，$b_1 = b_2 = \cdots = b_t = b$ 时，(4)成为 $t \leqslant C_{n-b}^{a}$.

称 $r+1$ 元集的全部($r+1$ 个)r 元子集所成的族为 $K^{(r+1)}$.

例 2 设子集族 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 中，每个集 A_i 的元数 $\leqslant r$，则 $\mathscr{A}$ 为 H_r 族的充分必要条件是 $\mathscr{A}$ 不含 $K^{(r+1)}$.

解 若 $\mathscr{A}$ 含有 $K^{(r+1)}$，$K^{(r+1)}$ 中各子集的并集为 $\{1, 2, \cdots, r+1\}$，则 $K^{(r+1)}$ 由 $B_i=\{1, 2, \cdots, r+1\}-\{i\}$ $(i=1, 2, \cdots, r+1)$ 这 $r+1$ 个子集组成. B_1 不含 1, B_2 不含 2, $\cdots$, B_{r+1} 不含 $r+1$，因此 $B_1\cap B_2\cap\cdots\cap B_{r+1}=\varnothing$. 但任意 r 个子集的交 $B_1\cap\cdots\cap B_{i-1}\cap B_{i+1}\cap\cdots\cap B_{r+1}=\{i\}\neq\varnothing$. 所以 $\mathscr{A}$ 不是 H_r 族.

反之，设 $\mathscr{A}$ 不是 H_r 族. 因为 $\mathscr{A}$ 是 H_n 族，所以必存在 $k\geqslant r$，使 $\mathscr{A}$ 为 H_{k+1} 族，但不是 H_k 族. 因此 $\mathscr{A}$ 中必存在 A_1, A_2, $\cdots$, A_{k+1} 它们的交为空集，但它们中每 k 个的交非空. 设 $x_i\in\bigcap\limits_{\substack{1\leqslant j\leqslant k+1\\ j\neq i}} A_j$，则 $x_i\notin A_i$. 因此 $x_1, x_2, \cdots, x_{k+1}$ 互不相同，$|A_j|\geqslant k\geqslant r$，但已知 $|A_j|\leqslant r$，所以 $|A_j|=k=r$. A_1, A_2, $\cdots$, A_{r+1} 构成族 $K^{(r+1)}$，即 $\mathscr{A}$ 必含 $K^{(r+1)}$.

从上面的证明顺便得到对任意 $k\geqslant r+1$，$\mathscr{A}$ 一定是 H_k 族.

例 3 若 $k<r$，$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 H_k 族，并且 A_i 都是 r 元集 $(1\leqslant i\leqslant t)$，则

$$t\leqslant C_{n-1}^{r-1}. \tag{7}$$

当且仅当 $\mathscr{A}$ 由含某一元素 $x\in X$ 的所有 r 元子集组成时，等式成立.

解 考虑集族

$$\mathscr{B}=\{B: |B|=r-1, \text{并且 } B=A_i\cap A_j, 1\leqslant i<j\leqslant t\}.$$

由前面的(iii)，(i)，$\mathscr{B}$ 是 H_k 族. 再由(ii)，$\mathscr{B}$ 也是 H_{r-1}

族，因此 $\mathscr{B}$ 不含 $K^{(r)}$. 每个 A_i 是 r 元集，它必有一个 $r-1$ 元子集 $C_i \notin \mathscr{B}$（因为 $\mathscr{B}$ 不含 $K^{(r)}$）. C_i 不含于任一 A_j $(j \neq i)$（否则 $C_i = A_i \cap A_j$, $C_i \in \mathscr{B}$）.

对 $C_1, C_2, \cdots, C_t$ 及 $A_1 - C_1, A_2 - C_2, \cdots, A_t - C_t$，应用例 1 的注 2（$a = |C_1| = \cdots = |C_t| = r-1$, $b = |A_1 - C_1| = \cdots = |A_t - C_t| = 1$）得

$$t \leqslant C_{n-1}^{r-1}.$$

等号成立导出 $A_1 - C_1 = A_2 - C_2 = \cdots = A_t - C_t = \{x\}$，即 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 是含某一元素 $x \in X$ 的全体 r 元子集.

因此，若 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 r 元子集所成的族，并且是 H_k 族. 则当 $k < r$ 时，t 的最大值为 C_{n-1}^{r-1}. 当 $k \geqslant r+1$ 时，t 的最大值为 C_n^r，即 $\mathscr{A}$ 可由全体 r 元子集组成（参见例 2 最后的一句话）. $k = r$ 时，尚无精确的结论. 但下面的例 4 讨论了 $\mathscr{A}$ 中子集的元数为 r 或 $r+1$ 的情况.

例 4 若 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 为 H_r 族，并且 $|A_i| = r$ 或 $r+1$ $(1 \leqslant i \leqslant t)$，则

$$t \leqslant C_n^r. \tag{8}$$

解 将 $\mathscr{A}$ 分为两个部分，$\mathscr{A}_1 = \{A_1, A_2, \cdots, A_s\}$, $\mathscr{A}_2 = \{A_{s+1}, \cdots, A_t\}$. 其中 $|A_1| = \cdots = |A_s| = r+1$, $|A_{s+1}| = \cdots = |A_t| = r$. 与例 3 类似，令

$$\mathscr{B} = \{B: |B| = r, B = A_i \cap A_j, 1 \leqslant i < j \leqslant s\}.$$

因为 $\mathscr{A}$ 为 H_r 族，由前面的(iii)，(i)，$\mathscr{B} \cup \mathscr{A}_2$ 也是 H_r 族. 于是由例 2，$\mathscr{B} \cup \mathscr{A}_2$ 不含 $K^{(r+1)}$. 每个 $A_i (1 \leqslant i \leqslant s)$ 必有一个 r 元子集 $C_i \notin \mathscr{B} \cup \mathscr{A}_2$. C_i 不是 $A_j (1 \leqslant j \leqslant s, j \neq i)$ 的子集（否则 $C_i \in \mathscr{B}$）. 于是 $s \leqslant$ 不属于 $\mathscr{B} \cup \mathscr{A}_2$ 的 r 元子集的个数.

$$t = |\mathscr{A}_1| + |\mathscr{A}_2| \leqslant \text{全部 } r \text{ 元子集的个数 } C_n^r.$$

任取一元素 $x\in X$. 若 $\mathscr{A}$ 由全部含 x 的 r 元与 $r+1$ 元子集组成，则 $\mathscr{A}$ 显然为 H_1 族(因而也是 H_r 族)并且

$$|\mathscr{A}|=C_{n-1}^{r-1}+C_{n-1}^{r}=C_n^r.$$

所以(8)中上界为最佳.

4.12 相距合理的族

本节需量一点线性代数的知识.

$\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 n 元集 X 的子集族. 如果对 $\mathscr{A}$ 中任意两个集 A_i, A_j，均有

$$|A_i\triangle A_j|\geqslant\frac{n}{2}, \tag{1}$$

那么 $\mathscr{A}$ 称为**相距合理的族**.

相距合理的族与编码理论有关.

对每一个集 A_j，可以定义

$$x_i=\begin{cases}1, \text{若 } i\in A_j; \\ -1, \text{若 } i\notin A_j.\end{cases}\quad (i=1, 2, \cdots, n)$$

这就得一个与 A_j 相对应的、长为 n 的、1 与 -1 的码(序列)

$$\alpha_j=(x_1, x_2, \cdots, x_n).$$

对两个码 $\alpha_j=(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $\alpha_k=(y_1, y_2, \cdots, y_n)$，定义它们的积(内积)为

$$\alpha_j\alpha_k=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n. \tag{2}$$

(2)式右边负项的个数就是恰属于 A_j, A_k 之一的那些 i 的个数. 因此

$$\alpha_j\alpha_k=n-2|A_j\triangle A_k|. \tag{3}$$

对相距合理的族，$\alpha_j\alpha_k \leqslant 0$.

为了定出相距合理的族 $\mathscr{A}$ 的元数 t 的最大值，需要一个引理，即下面的例 1.

例 1 若 n 维空间中 $n+r$ 个非零向量 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+r}$，满足内积

$$(\alpha_i, \alpha_j) \leqslant 0, \quad 1 \leqslant i < j \leqslant n+r,$$

(即每两个 α_i, α_j 之间的夹角不是锐角)，则 $r \leqslant n$，并且这 $n+r$ 个向量可分为 r 组，每两个不同组的向量互相垂直(即内积为 0). 当 $r=n$ 时，这 $2n$ 个向量可分为 n 组，每组两个向量. 每两个不同组的向量互相垂直；同一组的两个向量方向相反.

解 采用归纳法. $n=1$ 时，结论显然. 假设结论在 n 换为较小的数时成立，考虑 n 的情况. 从 $n+r$ 个向量中任取 $n+1$ 个，例如 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{n+1}$，它们必线性相关，即有不全为 0 的实数 $k_1, k_2, \cdots, k_{n+1}$ 使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_{n+1}\alpha_{n+1} = 0.$$

不妨设其中 $k_1, k_2, \cdots, k_j$ 为正，其余的非正，移项得

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_j\alpha_j = -k_{j+1}\alpha_{j+1} - \cdots - k_{n+1}\alpha_{n+1}. \tag{4}$$

两边同乘 $k_1\alpha_1 + \cdots + k_j\alpha_j$，得

$$0 \leqslant (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_j\alpha_j)^2$$

$$= (k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_j\alpha_j) \cdot (-k_{j+1}\alpha_{j+1} - \cdots - k_{n+1}\alpha_{n+1}).$$

上式右边用分配律展开后，每一项均不大于 0，因此必有

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_j\alpha_j = 0, \tag{5}$$

其中 $j \leqslant n+1$.

用 $\alpha_i (i > j)$ 乘(5)式，得

$$0 = k_1\alpha_1\alpha_i + k_2\alpha_2\alpha_i + \cdots + k_j\alpha_j\alpha_i \leqslant 0 \tag{6}$$

(因为 k_1, k_2, …, k_j 均为正数),所以

$$\alpha_1\alpha_i = \alpha_2\alpha_i = \cdots = \alpha_j\alpha_i = 0. \tag{7}$$

因此 α_1, α_2, …, α_j 生成的空间维数 $n_1 < n$, 并且 α_{j+1}, …, α_{n+r} 均与这个空间垂直. 设后者生成的空间维数为 n_2,则 $n_1 + n_2 \leqslant n$.

(5)表明 α_1, α_2, …, α_j 线性相关,所以 $j \geqslant n_1 + 1$. 设 $j = n_1 + r_1$, $n + r - j = n_2 + r_2$.

由归纳假设 $r_1 \leqslant n_1$, $r_2 \leqslant n_2$, 并且 α_1, α_2, …, α_j 可分为 r_1 组, α_{j+1}, …, α_{n+r} 可分为 r_2 组,每两个不同组的向量互相垂直. 而

$$r = (r_1 + r_2 + n_1 + n_2) - n \leqslant r_1 + r_2$$
$$\leqslant n_1 + n_2 \leqslant n.$$

当 $r = n$ 时, $n_1 + n_2 = n$, $r_1 = n_1$, $r_2 = n_2$. 仍由归纳假设, $2n_1$ 个向量 α_1, α_2, …, α_j 可分为 n_1 组,每组两个向量, $2n_2$ 个向量 α_{j+1}, …, α_{2n} 也可分为 n_2 组,每组两个向量,并且每两个不同组的向量互相垂直,同一组的两个向量方向相反.

例 2 设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 n 元集 X 的相距合理的族,则

$$t \leqslant \begin{cases} 2n, & \text{若 } n \equiv 0 \pmod 4; & (8) \\ n+1, & \text{若 } n \text{ 为奇数}; & (9) \\ n+2, & \text{若 } n \equiv 2 \pmod 4. & (10) \end{cases}$$

解 定义向量 $\alpha_j (j = 1, 2, \cdots, t)$ 如本节开头所说,则

$$\alpha_i\alpha_j = n - 2 \mid A_j \triangle A_i \mid \leqslant 0. \tag{11}$$

由例 1, $t \leqslant 2n$. 即(8)成立.

若 $t \geqslant n + 2$, 则由例 1, α_1, α_2, …, α_t 至少可分为两个

组，不同组的两个向量 α_i，α_j 垂直，因此

$$n-2\mid A_i\triangle A_j\mid=\alpha_i\alpha_j=0. \tag{12}$$

从而 n 为偶数，即(9)成立.

最后，若 $t\geqslant n+3$，则由例 1，至少有三个向量 α_i，α_j，α_k 两两垂直，从而由(12)，

$$\mid A_i\triangle A_j\mid=\mid A_j\triangle A_k\mid=\mid A_k\triangle A_i\mid=\frac{n}{2};$$

而由 1.10 例 2，

$$\mid A_j'\triangle A_k\mid=\mid X-(A_j\triangle A_k)\mid=n-\frac{n}{2}=\frac{n}{2}.$$

所以

$$\mid A_i\triangle A_j\mid+\mid A_j'\triangle A_k\mid-\mid A_i'\triangle A_k\mid=\frac{n}{2}. \tag{13}$$

由习题 5，(13)的左边是偶数

$$2\mid A_i\cap A_j'\cap A_k'\mid+2\mid A_i'\cap A_j\cap A_k\mid.$$

因此 n 是 4 的倍数，即(10)成立.

(8)，(9)，(10)中等号均可成立. 这与 Hadamard 矩阵有关，请参看有关专著.

例 3 若 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 中，每两个子集 A_i，A_j 均满足

$$\mid A_i\triangle A_j\mid=k, \tag{14}$$

则当 $k=\dfrac{n+1}{2}$ 时，$t\leqslant n+1$，对其他的 k 值，$t\leqslant n$.

解 $n=1$ 的情况是平凡的. 设 $n\geqslant 2$. 定义 α_1，α_2，$\cdots$，α_t 同前，由(11)，对 $i\neq j$，

$$\alpha_i\alpha_j=n-2k, \tag{15}$$

$$\alpha_i^2 = n. \tag{16}$$

若 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关,则 $t \leqslant n$,结论已经成立. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性相关,则有 $k_1, k_2, \cdots, k_t$ 不全为 0,满足

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \cdots + k_t\alpha_t = 0. \tag{17}$$

两边同乘 α_j,得

$$0 = \sum_{i=1}^{t} k_i\alpha_i\alpha_j = (n-2k)\sum_{i=1}^{t} k_i + 2kk_j,$$

从而

$$k_j = \frac{2k-n}{2k}\sum_{i=1}^{t} k_i. \tag{18}$$

由于有 k_j 不全为 0,所以 $\sum_{i=1}^{t} k_i \neq 0$. 将(18)对 j 求和,得

$$\sum_{j=1}^{t} k_j = \frac{t(2k-n)}{2k}\sum_{i=1}^{t} k_i,$$

从而 $\frac{t(2k-n)}{2k} = 1$, 即 $t = \frac{2k}{2k-n}$. 若 $t > n$, 则

$$\frac{2k}{2k-n} > n. \tag{19}$$

(19)表明 $b = 2k - n > 0$, 从而 $n + b > bn$, $1 > (b-1)\cdot(n-1)$. 于是 $b = 1$, $k = \frac{n+1}{2}$.

例 3 中的 $|A_i \triangle A_j|$ 改为 $|A_i \cap A_j|$ 时,有类似的结果.

例 4 设子集族 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 中,每两个子集 A_i, A_j,均满足

$$|A_i \cap A_j| = k, \tag{20}$$

则当 $k = 0$ 时, $t \leqslant n+1$. 其他情况 $t \leqslant n$.

解 若有某个集，例如 A_1，满足 $|A_1|=k$，则所有 $A_j\supset A_1(j=2,3,\cdots,t)$，并且每两个 A_j，A_r 除 A_1 的元外无其他公共元. 因而 $X-A_1$ 的 $n-k$ 个元，每一个至多属于一个 A_j $(j=2,3,\cdots,t)$，同时每个 $A_j(j=2,3,\cdots,t)$ 至少含这 $n-k$ 个元中一个元. 这表明 $n-k\geqslant t-1$，即 $t\leqslant n+1-k$，结论成立.

设每个集 A_i 的元数 $a_i=|A_i|\geqslant k+1$.

对每一个集 A_j，定义：

$$x_i=\begin{cases}1, & 若\ i\in A_j;\\ 0, & 若\ i\notin A_j.\end{cases}\quad (i=1,2,\cdots,n)$$

这样就得到一个与 A_j 对应的、长为 n 的、1 与 0 的序列(码)

$$\alpha_j=(x_1,x_2,\cdots,x_n).$$

显然内积

$$\alpha_i\alpha_j=|A_i\cap A_j|,\quad (i\neq j)\tag{21}$$

$$\alpha_i^2=\alpha_i\alpha_i=a_i.\tag{22}$$

我们证明 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_t$ 线性无关，从而 $t\leqslant n$. 为此，设有

$$\sum_{i=1}^{t}k_i\alpha_i=0.\tag{23}$$

与例 3 相同，在(23)两边同乘 α_j 得

$$0=\sum_{i=1}^{t}k_i\alpha_i\alpha_j=k\sum_{i=1}^{t}k_i+(a_j-k)k_j,$$

从而

$$k_j=\frac{k}{k-a_j}\sum_{i=1}^{t}k_i=\frac{k}{k-a_j}S.\tag{24}$$

再对 j 求和得

$$S=\sum_{j=1}^{t}k_j=S\sum_{j=1}^{t}\frac{k}{k-a_j}. \tag{25}$$

因为 $a_j\geqslant k+1$，所以 $\sum_{j=1}^{t}\frac{k}{k-a_j}<0<1$. 于是由

$$\left(1-\sum_{j=1}^{t}\frac{k}{k-a_j}\right)S=0,$$

得 $S=0$. 再由(24)得一切 $k_j=0$. 从而 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_t$ 线性无关. 结论成立.

第五章 无 限 集

5.1 无 限 集

通俗地说，无限集就是元数为无限(无穷)的集合. 但是，什么是"无限"呢？如果我们回答：

无限就是无限集的元数，

那么不仅成为循环定义. 而且，无法进行更深入的研究.

利用对应可以比较两个集合元素的多寡，也可以定义什么是无限集.

定义 如果集合 A 能够与它的一个真子集一一对应，那么 A 就称为无限集.

显然，两个有限集如果能一一对应，它们的元数就一样多. 因此一个有限集不可能与(元数比它少的)真子集一一对应.

例 1 证明自然数集 $\mathbf{N}$ 与全体正偶数的集 M 之间存在一一对应.

解 令 $n \xmapsto{f} 2n$，则 f 是从 $\mathbf{N}$ 到 M 的对应. 不同的 n，像 $f(n) = 2n$ 也不同. 并且 M 中的每一个数 $2n$，都有原像 n 满足 $f(n) = 2n$. 所以 f 是一一对应.

M 显然是 $\mathbf{N}$ 的真子集. 因此，根据上面的定义，$\mathbf{N}$ 是无限集.

例 2 如果集合 A，B 之间有一对应 f，A 为无限集，那

么 B 也是无限集.

解 因为 A 为无限集，所以有 A 的真子集 A_1 及一一对应 $\varphi: A \to A_1$.

对任一 $b \in B$，有唯一的 $a \in A$，满足 $f(a) = b$. 设 $\varphi(a) = a_1 \in A_1$，$f(a_1) = b_1 \in B$，令

$$\psi(b) = b_1. \tag{1}$$

这一映射可用下面的图来表示：

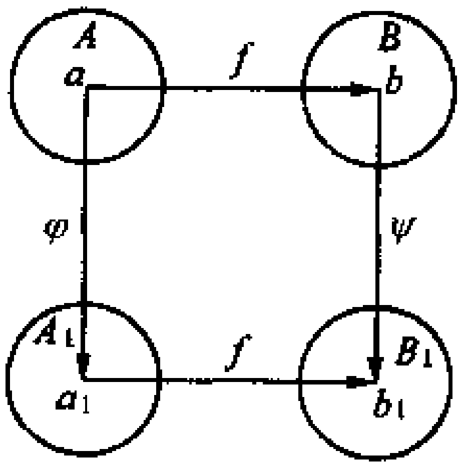


图 5.1.1

设在映射 f 下，A_1 的像 $f(A_1) = B_1$，则 ψ 是从 B 到 B_1 的映射. 易知每个 $b_1 \in B_1$ 均有唯一的 a_1 满足 $f(a_1) = b_1$，由 a_1 又得到唯一的 a 与唯一的 b，因此 ψ 是一一对应.

A_1 是 A 的真子集，所以必有元素 $a \in A - A_1$，这时 $f(a) \in B - B_1$，即 B_1 是 B 的真子集.

因此 B 是无限集.

例 3 集合 B 是集合 A 的子集，如果 B 是无限集，那么 A 也是无限集.

解 因为 B 为无限集，所以必有 B 的真子集 B_1 与一一对应 $f: B \to B_1$.

作 A 到自身的映射 φ，

$$\varphi_{(a)}=\begin{cases} a, & 若\ a\in A-B; \\ f(a), & 若\ a\in B. \end{cases}$$

易知像集 $\varphi(A)=(A-B)\cup B_1$ 是 A 的真子集，并且 φ 是 A 到 $\varphi(A)$ 的一一对应. 因此 A 是无穷集.

若集 A, B 间能建立起一一对应，则称 A 与 B 是对等的，或者称它们有相同的基数(或势)，记为 $A\sim B$.

对于有限集，基数就是它的元数.

对于无限集，基数就是能与它一一对应的集合的族. 通俗地说，就是这些一一对应的集合的共同性质，说成是这个无限集的元数也无不可. 但是，要注意无穷集可以与它的真子集有相同的基数.

5.2 可 数 集

凡与自然数集 $\mathbf{N}$ 对等的集称为可数集. 下面是几个可数集的例子：

$A=\{1, 4, 9, 16, \cdots, n^2, \cdots\}$,

$B=\{1, 8, 27, 64, \cdots, n^3, \cdots\}$,

$C=\{1, 3, 5, 7, \cdots, 2n-1, \cdots\}$,

$D=\left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$,

$E=\{p: p\ 为素数\}$.

显然一个集合 A 为可数集的充分必要条件是它的元素可列成一个形如

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

的(各项不重复出现的)无穷数列，A 的每一个元素恰在(1)中出现一次.

例 1 证明：

(i) 任一无限集 A 必含一真子集是可数集；

(ii) 可数集的任一无限子集是可数的；

(iii) 可数集与有限集的并集是可数集；

(iv) 有限多个可数集的并集是可数集；

(v) 可数个可数集的并集是可数集.

解 (i) A 与它的真子集 A_1 对等. A_1 是无穷集，因而又与真子集 A_2 对等，…… 这样得到

$$A \supset A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \cdots$$

每一个集 A_i 是前一个集的真子集 ($i = 1, 2, \cdots$).

在 $A_1 - A_2$ 中取元 a_1，在 $A_2 - A_3$ 中取元 a_2，……，在 $A_n - A_{n+1}$ 中取元 a_n，…… 得到集合

$$B = \{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\},$$

它是含于 A 中的可数集.

因此，可数集是无限集中"最小的"集.

(ii) 可数集 A 的元素可列成(1)的形式. 它的无限子集可写成(1)的无限子数列，显然是可数集.

(iii) 将可数集 A 的元素列成数列(1). 又设有限集 $B = \{b_1, b_2, \cdots, b_k\}$，则 $A \dot{\cup} B$ 的元素可列成数列

$$b_1, b_2, \cdots, b_k, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots \tag{2}$$

(若 $b_1, b_2, \cdots, b_k$ 中有在 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$中出现的，则将这样的 b 从(2)中划去).

(iv) 设 $A_i = \{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, \cdots\}$, $i = 1, 2, \cdots, k$，是 k 个可数集，则

$$a_{11}, a_{21}, \cdots, a_{k1}, a_{12}, a_{22}, \cdots,$$

$$a_{k2}, \cdots, a_{1n}, a_{2n}, \cdots, a_{kn}, \cdots$$

(必要时划去一些重复元素)是一可数集.

(v) 设 $A_i=\{a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in}, \cdots\}$, $i=1, 2, \cdots$, 是可数个可数集. 先将它们的元素排成矩阵:

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots \\ & \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots \\ & \cdots\cdots & & \end{array}$$

然后再将这些元素排成一列:

$$a_{11}\ a_{12}\ a_{21}\ a_{13}\ a_{22}\ a_{31}\ \cdots \tag{3}$$

即先排下标的和为 2 的元, 再排下标和为 3 的元, ……依照下标的和的大小排列各个元素,在下标和相同时,依照横坐标(第一个下标)的大小排列各个元素(只有有限多个). 这样,每个元素在数列(3)中至少出现一次(或早或迟必然出现). 如果一个元素在(3)中已经出现过一次,那么在它第二、三、……次出现时,将它划去. 这样 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots$ 的每个元素在(3)中恰好出现一次. 因此 $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ 是可数集.

例 3 全体有理数的集 $\mathbf{Q}$ 是可数集.

解 由例 2,只需证明正有理数的集合 $\mathbf{Q}^+$ 是可数集. 考虑集合

$$M_n=\left\{\frac{m}{n} \,\middle|\, m \in \mathbf{N}\right\}.$$

显然 M_n 是可数集,它的元素可排成数列

$$\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \cdots, \frac{m}{n}, \cdots.$$

由例 2(v),

$$\mathbf{Q}^{+} = M_1 \cup M_2 \cup M_3 \cup \cdots \cup M_n \cup \cdots$$

是可数集.

例 4 如果集 A 的每个元素由 n 个互相独立的下标决定,每个下标各自跑遍一个可数集.那么 A 是可数集.

解 $n=1$ 时,结论显然. 设当 $n=m$ 时结论成立,则对元素为 $a_{i_1 i_2 \cdots i_{m+1}}$ 的集 A,因为当 i_{m+1} 固定时,由元素 $a_{i_1 i_2 \cdots i_m i_{m+1}}$ 组成的集 $A_{i_{m+1}}$ 是可数集,根据例 2(v),

$$\bigcup_{i_{m+1}} A_{i_{m+1}} = A$$

也是可数集.

由例 4 立即得到平面上的有理点(即横、纵坐标都是有理数的点)组成的集合是可数集. 空间中的有理点所成的集也是可数集.

例 5 证明整系数多项式

$$a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_n \tag{4}$$

$(n \in \mathbf{N},\ a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n \in \mathbf{Z})$ 的全体 A 是可数集.

解 对固定的 n,形如(4)的整系数多项式与 $n+1$ 维空间的整点$(a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_n)$一一对应,它们都组成可数集. 记前者所成的集为 A_n.

由例 2(v), $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ 是可数集.

(4)的根称为代数数. 因为每个多项式只有有限个根. 所以代数数的全体是可数集.

5.3 连续统的基数

无限集不都是可数集.

例 1 0 与 1 之间的实数组成的集

$$A = \{x \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\} \tag{1}$$

不是可数集.

解 如果 A 是可数集,将它的元素排成

$$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n, \cdots. \tag{2}$$

将每个 α_i 表成十进小数,并排成

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots,\\
\alpha_2 &= 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots,\\
&\cdots\cdots\\
\alpha_n &= 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned} \tag{3}$$

$a_{ij}\,(i, j = 1, 2, \cdots)$ 都是数字,即 0, 1, …, 9.

现在作一个数 $\alpha = 0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$,其中 $a_1, a_2, \cdots$ 都是数字,并且

$$a_n = \begin{cases} a_{nn}+2,\ 若\ a_{nn} < 7; \\ a_{nn}-2,\ 若\ a_{nn} \geqslant 7. \end{cases} \quad (n = 1, 2, \cdots) \tag{4}$$

显然 $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$ 即 $\alpha \in A$. 因此 α 应当在(3)中出现. 设 $\alpha_n = \alpha$. 但由定义 $a_n \neq a_{nn}$ 并且 a_n 与 a_{nn} 的差为 2,因此 $\alpha_n \neq \alpha$,矛盾. 这表明 A 不是可数集.

注:为避免出现 $0.999\cdots = 1.00\cdots$ 的情况,我们取 a_n 与 a_{nn} 相差 2.

上面的证法称为对角线法.

例 1 的 A 及与 A 对等的集,称为具有连续统的基数,或称 A 的基数为$\aleph$(读做阿列夫). 而可数集的基数记为$\aleph_0$.

例 2 区间$[a, b]$, (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$的基数都是$\aleph$.

解 令 $y=a+(b-a)x$. 这是$[0, 1]$与$[a, b]$之间的一一对应. 因此$[a, b]$与$[0, 1]$(即例 1 中的 A)具有相同的基数$\aleph$.

我们也可以给出(a, b), $[a, b)$, $(a, b]$与$[0, 1]$间的一一对应(参见习题 33),但更方便的是利用这样的结论:

无限集 M 去掉有限多个元素后,所得的集 K 与 M 对等.

事实上,由 4.2 节,M 含有一个可数集 E,不妨假定要去掉的有限多个元素均在 E 中(否则将它们加到 E 中). 从 E 中去掉这有限多个元素后所得的集 F 也是可数集. 在 E 与 F 之间有一一对应 φ,令

$$f(x)=\begin{cases} x, & 若\ x\in M-E; \\ \varphi(x), & 若\ x\in E. \end{cases}$$

则 f 是 M 到 K 的一一对应.

例 3 全体实数所成的集 $\mathbf{R}$,基数是$\aleph$.

解 $y=\tan\dfrac{\pi}{2}x$ 是$(-1, 1)$到 $\mathbf{R}$ 的一一对应.

类似地,$[0, +\infty)$的基数是$\aleph$.

例 4 如果集 A 的基数是$\aleph$,证明从 A 中去掉一个可数集 B 后,剩下的集的基数仍为$\aleph$.

解 由于 A 的基数是$\aleph$,所以 $A-B$ 是无限集(否则 $B\cup(A-B)=A$ 是可数集). 由 5.2 节例 $A-B$ 有一真子集 D 是可数集. $B\cup D$ 仍为可数集,它与 D 之间有一一对应 φ. 令

$$f(x)=\begin{cases}x, & 若 x\in A-B-D;\\ \varphi(x), & 若 x\in B\cup D.\end{cases}$$

则 f 是 A 到 $A-B$ 的一一对应. 因此 $A-B$ 的基数是$\aleph$.

由例 4 立即得到全体无理数所成的集，基数为$\aleph$；全体超越数(不是代数数的数)所成的集，基数也是$\aleph$.

例 5 证明自然数集 $\mathbf{N}$ 的全体子集所成的族 $\mathscr{A}$ 的基数为$\aleph$.

解 对 $\mathscr{A}$ 的元素 A ($\subseteq\mathbf{N}$)，令二进制的小数

$$0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$$

与之对应. 其中

$$b_n=\begin{cases}1, & 若 n\in A;\\ 0, & 若 n\notin A.\end{cases}$$

显然这是 $\mathscr{A}$ 到$[0, 1]$中所有二进小数的一一对应. 因此 $\mathscr{A}$ 与$[0, 1]$有同样的基数$\aleph$.

例 6 可数个两两不相交的基数为$\aleph$的集，它们的并集基数为$\aleph$.

解 设 $\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 中每一个 E_i 的基数为$\aleph$，则 E_i 可与区间$[i-1, i)$中的点一一对应. 从而，$\bigcup_{i=1}^{\infty}E_i$ 与$[0, +\infty)$中的点一一对应.

注："两两不相交"这一条件可以去掉. 参见下节例 8.

5.4 基数的比较

如果集合 A, B 的基数分别为 α, β，并且满足：

(i) A 与 B 不对等；

(ii) A 与 B 的一个子集对等，

那么就说 A 的基数小于 B 的基数，或 B 的基数大于 A 的基数. 记为

$$\alpha < \beta \text{或} \beta > \alpha.$$

对有限集，上述概念与元数的大小完全一致.

每个有限集都与 $\mathbf{N}$ 的一个子集对等（n 元集与 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 对等），从而有限集的基数小于 $\aleph_0$.

根据上节所说，$\aleph_0 < \aleph$.

在 $\aleph_0$ 与 $\aleph$ 之间没有基数，即不存在一个集合 A，它的基数大于 $\aleph_0$，小于 $\aleph$. 这称为连续统假设. 大数学家希尔伯特在 1900 年提出的 23 个问题中，连续统假设列为第一个. 根据现代的研究，特别是 1963 年美国数学家科恩(Cohen)所作的工作，连续统假设与 ZF 公理是彼此独立的. 这里的 ZF 公理是由策梅罗(Zermelo, 1871—1953)建立、弗伦克尔(Fraenkel, 1891—1965)加以改进的公理系统，为绝大多数数学家所接受. 因此连续统假设在 ZF 公理系统中是无法证明的（正如平行公设无法用欧几里得的其他公理导出）.

有没有比 $\aleph$ 更大的基数? 回答是肯定的.

例 1 设集 A 的基数为 α，$\mathscr{A}$ 是 A 的一切子集所成的族，则 $\mathscr{A}$ 的基数大于 α.

解 对 A 的任一个元 a，令 $a \longmapsto \{a\}$. 这是 A 到 $\mathscr{A}$ 的子集 $\{\{a\}: a \in A\}$ 的一一对应. 因此 A 与 $\mathscr{A}$ 的一个子集对等.

另一方面，A 与 $\mathscr{A}$ 不对等. 不然的话，设 A 与 $\mathscr{A}$ 之间有一一对应 f.

将 A 中元素分为两类：

设 $a \in A$. 若 $a \in f(a)$，则称 a 为好元素. 若 $a \notin f(a)$，则称 a 为坏元素.

设 A 中坏元素组成的集为 A_1. A_1 与 A 的元素 a_1 对应，即 $A_1 = f(a_1)$.

若 a_1 是好元素，则 $a_1 \in f(a_1) = A_1$. 但这与 A_1 的定义不符. 若 a_1 是坏元素，则 $a_1 \in A_1 = f(a_1)$，这又导出 a_1 为好元素，矛盾.

因此，A 与 $\mathscr{A}$ 不对等.

综合以上两个方面，$\mathscr{A}$ 的基数大于 α.

通常将 A 的全体子集的族 $\mathscr{A}$ 的基数记为 2^α. 在 A 为有限集时，$|\mathscr{A}|$ 确实为 2^α. 在 A 为无限集时，2^α 仅是代表 $\mathscr{A}$ 的基数的一个符号. 例 1 的结论就是

$$2^\alpha > \alpha. \tag{1}$$

上节例 5 表明 $2^{\aleph_0} = \aleph$. 从而由(1)又得到 $\aleph > \aleph_0$.

例 2 设集 $A \supseteq A_1 \supseteq A_2$. 若 $A_2 \sim A$，则 $A_1 \sim A$.

解 设对应 f 使 A 与 A_2 对等. 在对应 f 下，A 的子集 A_1 应与 A_2 的子集 A_3 对等，A_1 的子集 A_2 应与 A_3 的子集 A_4 对等，如此继续下去，得到一串集合

$$A \supseteq A_1 \supseteq A_2 \supseteq A_3 \supseteq A_4 \supseteq A_5 \supseteq \cdots$$

具有性质：

$$A \sim A_2,$$

$$A_1 \sim A_3,$$

$$A_2 \sim A_4,$$

$$A_3 \sim A_5,$$

$$\cdots\cdots$$

并且由 $A_n (n = 1, 2, \cdots)$ 的定义，

$$
\begin{aligned}
A-A_1 &\sim A_2-A_3,\\
A_1-A_2 &\sim A_3-A_4,\\
A_2-A_3 &\sim A_4-A_5,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{2}
$$

因为

$$
\begin{aligned}
A = {} & (A-A_1)\cup(A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\\
& \cup(A_3-A_4)\cup(A_4-A_5)\cup\cdots\cup(AA_1A_2\cdots),
\end{aligned}
\tag{3}
$$

$$
\begin{aligned}
A_1 = {} & (A_1-A_2)\cup(A_2-A_3)\cup(A_3-A_4)\\
& \cup(A_4-A_5)\cup\cdots\cup(AA_1A_2\cdots).
\end{aligned}
\tag{4}
$$

并且由(2)，(3)中的一、三、……诸项分别与(4)中的二、四、……诸项对等，其余的项则两两相同，所以 $A_1\sim A$.

例 3 若 $A\supseteq A_1$，$B\supseteq B_1$，并且 $A\sim B_1$，$B\sim A_1$，则 $A\sim B$.

解 B 与 A_1 有一一对应 f. 在对应 f 下，B 的子集 $B_1\sim A_1$ 的子集 A_2. 因为 $A\sim B_1$，$B_1\sim A_2$，所以 $A\sim A_2$.

因为 $A\supseteq A_1\supseteq A_2$，$A\sim A_2$，所以由上例，$A\sim A_1$. 因为 $B\sim A_1$，所以 $A\sim B$.

例 3 称为 Bernstein 定理，有很多应用.

注：$A\sim B_1\subseteq B$ 可记成 $\alpha\leqslant\beta$. 例 3 即由 $\alpha\leqslant\beta$，$\beta\leqslant\alpha$ 可推出 $\alpha=\beta$. 应当注意，这并不是显然的. 因为关于无穷基数的不等式与通常的不等式意义不尽相同.

例 4 设三个基数 α，β，γ 满足 $\alpha<\beta$，$\beta<\gamma$，则 $\alpha<\gamma$.

解 设集 A，B，C 的基数分别为 α，β，γ. 由已知 $A\sim B_1\subseteq B$，$B\sim C_1\subseteq C$. 从而 $A\sim C_2\subseteq C_1$.

另一方面，若 $A\sim C$，则 $C\sim C_2$. 从而由例 2，$C\sim C_1\sim$

B. 这与 $\beta < \gamma$ 的定义不符，因此 A 不对等于 C.

综合以上两方面得 $\alpha < \gamma$.

例 5 表明关于基数的不等式具有传递性.

注：由关于基数的不等式的定义及例 3，$\alpha = \beta$，$\alpha < \beta$，$\alpha > \beta$ 三式不能同时成立. 但这三个关系是否必有一个成立需要证明. 证明要用到有序集与序数的概念. 我们建议读者阅读有关专著，例如豪斯道夫的《集论》（中译本科学出版社 1960 年出版）.

例 6 平面上点的全体组成的集 A，基数为 $\aleph$.

解 正方形

$$I = \{(x, y) \mid 0 \leqslant x < 1, 0 \leqslant y < 1\}$$

中的点，坐标可写成无限的十进小数

$$\begin{aligned} x &= 0.a_1a_2a_3\cdots, \\ y &= 0.b_1b_2b_3\cdots. \end{aligned} \tag{5}$$

（约定不以 9 为循环节，即 $0.12 = 0.1200\cdots$ 不写成 $0.1199\cdots$. 这样每个坐标的表示是唯一的.）

因此，对于 (x, y)，有区间 $[0, 1)$ 中的一个实数

$$0.a_1b_1a_2b_2a_3b_3\cdots \tag{6}$$

与之对应. 显然不同的 (x, y) 对应的实数(6)也不同. 因此 I 与 $[0, 1)$ 的一个子集对等.

另一方面，显然 $[0, 1) \sim \{(x, 0) \mid 0 \leqslant x < 1\} \subseteq I$. 因此 I 的基数即 $[0, 1)$ 的基数 $\aleph$.

平面点集 $A = \bigcup\limits_{a, b \in \mathbf{Z}} \{(x, y) \mid a \leqslant x < a+1, b \leqslant y < b+1\}$，由上节例 6，$A$ 的基数为 $\aleph$.

同样可证空间中全体点所成集，基数为 $\aleph$.

例 7 区间 $[0, 1]$ 上的全体实函数所成的集，基数为 $2^{\aleph}$.

解 设所成的集为 A. 由于每个实函数 f 对应于平面上一条曲线 $\{(x, f(x)) \mid 0 \leqslant x \leqslant 1\}$，它是平面点集的一个子集，所以 A 的基数 $\leqslant 2^{\aleph}$.

另一方面，$[0, 1]$的每个子集 B 对应于一个函数(即 3.1 节所说的特征函数)：

$$f(x) = \begin{cases} 1, & 若\ x \in B; \\ 0, & 若\ x \notin B. \end{cases}$$

对应是一一的. 因此 A 的基数 $\geqslant 2^{\aleph}$.

综合以上两方面即得 A 的基数为 $2^{\aleph}$.

例 8 可数个基数为$\aleph$的集，它们的并集基数为$\aleph$，即上节例 6“两两不相交”的条件可以取消.

解 设 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 中每一个 E_i 的基数为$\aleph$. 显然 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 的基数 $\geqslant E_1$ 中的基数$\aleph$.

另一方面，将 $E_2 \cap E_1$ 中每个元素 a_1 换成一个新元素 a_1'，将 $E_3 \cap (E_2 \cup E_1)$ 中每个元素 a_2 换成新元素 a_2'，……得到集 E_1, F_2, F_3, …，每两个无公共元素，并且 $F_2 \sim E_2$，$F_3 \sim E_3$，……　基数均为$\aleph$. 因此由上节例 6，$\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ 的基数为$\aleph$. 又显然有 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 的基数 $\leqslant \bigcup_{i=1}^{\infty} F_i$ 的基数$\aleph$.

因此 $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ 的基数 $= \aleph$.

例 9 c 个基数为$\aleph$的集，它们的并集基数为$\aleph$.

解 可设各集两两不相交(否则用例 8 的方法处理). 每一个集对等于平面上一条直线 $y =$ 常数. 它们的并集对等于整个平面.

5.5 直线上的开集与闭集

直线是一维点集. 如果以这直线为数轴，那么直线上的每

一点对应于一个实数(所以称为一维).

设 E 是(直线上的)一个点集. 对于一点 x_0,如果 E 中有一个区间含有 x_0,那么称 x_0 为点集 E 的内点. 这时 x_0 本身当然属于 E.

如果 E 中每一个集都是 E 的内点,那么 E 称为开集.

显然开区间 (a, b) 是开集. 直线本身是开集. 闭区间 $[a, b]$ 不是开集,因为端点 a 与 b 不是 $[a, b]$ 的内点.

空集算作开集.

例 1 任意多个开集的并集是开集.

解 设 $S = \bigcup\limits_{\alpha} E_\alpha$, 其中每个 E_α 都是开集.

对任一点 $x_0 \in S$, x_0 必属于某个 E_α. 因为 E_α 是开集,所以有区间 $(c, d) \subseteq E_\alpha$, 并且 $x_0 \in (c, d)$. 于是 $x_0 \in (c, d) \subseteq S$, x_0 是 S 的内点.

由于 S 的任一点都是内点,所以 S 是开集.

例 2 有限个开集的交集是开集.

解 设 $P = \bigcap_{k=1}^{n} E_k$, 其中每个 E_k 是开集.

对任一点 $x_0 \in P$, x_0 必属于每个 E_k,并且有区间 $(c_k, d_k) \subseteq E_k$, $x_0 \in (c_k, d_k)$, $k = 1, 2, \cdots, n$. 令

$$c = \max c_k (< x_0), \quad d = \min d_k (> x_0),$$

则 $x_0 \in (c, d)$, 并且 $(c, d) \subseteq E_k \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$.

从而 $x_0 \in (c, d) \subseteq P$. 所以 P 是开集.

注意无限多个开集的交未必是开集,如

$$E_k = \left(-1 - \frac{1}{k}, 1 + \frac{1}{k}\right), k = 1, 2, \cdots$$

则

$$P = \bigcap_{k=1}^{\infty} E_k = [-1, 1]$$

不是开集.

可以证明直线上的每个开集都是不相重叠的开区间的并集(下节例 1).

设 E 是一点集. 对于一点 x_0, 如果任一个含有 x_0 的区间, 除 x_0 外至少还含有 E 的一点, 那么 x_0 称为 E 的极限点或聚点.

注意 E 的极限点 x_0 本身不一定属于 E. 如果 x_0 是 E 的极限点, 那么含 x_0 的区间内必有无限多个 E 的点(设含 x_0 的区间 (a, b) 中有 $x_1, x_2, \cdots, x_k$ 属于 E. 又设 $\delta = \min\limits_{1\leqslant i\leqslant k} |x_0 - x_i|$, 则含 x_0 的区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中的点均不同于 $x_1, x_2, \cdots, x_k$. 而这个区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 中又有一点 $x_{k+1} \in E$ 并且 $x_{k+1} \neq x_0$. 这样, (a, b) 中有无穷多个点 $x_1, x_2, \cdots, x_k, x_{k+1}, \cdots$ 属于 E).

如果 $x_0 \in E$, 并且 x_0 不是 E 的极限点, 那么 x_0 称为 E 的孤立点. 如果 x_0 是 E 的孤立点, 那么必有一个区间 (c, d), 在 (c, d) 中只有一个点即 x_0 属于 E.

如果 E 的极限点都属于 E, 那么 E 称为闭集.

显然闭区间是闭集; 直线本身是闭集. 开区间 (a, b) 不是闭集, 因为 a, b 是 (a, b) 的极限点, 它们不在 (a, b) 中. 一个点所成的集也是闭集. 空集 $\varnothing$ 算作闭集. 又开又闭的集只有全直线与空集. $[a, b)$ 非开非闭.

例 3 开集的补集是闭集, 闭集的补集是开集.

解 设 E 为开集. 对任一点 $x_0 \in E$, 必有区间 $(a, b) \subseteq E$, $x_0 \in (a, b)$. 这时 (a, b) 中每一个点都不属于 E'. 因此 x_0 不是 E' 的极限点. 从而 E' 的极限点都属于 E', E' 是闭集.

设 E 为闭集. E' 中的任一点 x_0 不是 E 的极限点, 因而必有区间 (c, d), (c, d) 含 x_0 并且 (c, d) 中没有 E 的点, 即

$(c, d) \subseteq E'$. 从而 x_0 是 E'的内点. E'是开集.

由例 3、例 1、例 2 可知：

任意多个闭集的交是闭集；

有限多个闭集的并是闭集.

5.6 Cantor 的完备集

Georg Cantor(1845. 3. 3.—1918. 1. 6)是集合论的创始者，丹麦一位犹太商人的儿子，出生在彼得堡，1856 年移居德国，1874 年，开始引入基数的概念，由此证明了超越数大大多于代数数(5.3 节例 4). 这一成果当时轰动了整个数学界，同时也遭到强烈的反对. Dedekind, Mittag-Leffler 等人支持他，而 Kronecker 等的反对使他十分苦恼. 他注意到在其他数学分支，例如概率论的历史中，也存在正确的理论未被普遍接受的时期，因而高喊"数学的本质在于它的自由化".

Cantor 还定义了序型，超限序数等概念，并奠定了由基本序列建立实数理论的基础，他将欧氏空间里一般的点集作为研究的对象，定义极限点、闭集、开集等概念. 他也是维数理论的开拓者，为点集理论与拓扑空间理论开辟了道路.

Cantor 晚年病魔缠身，在精神病院去世.

本节着重介绍 Cantor 构造的一个完备集.

例 1 证明直线上每一个非空的有界开集 G 可以表为有限个或可数个不相重叠的开区间的并集.

解 对任一点 $x \in G$，因为 G 是开集，所以 x 是内点，存在一个开区间(a, b)包含 x，并且 $(a, b) \subseteq G$. 可以这样取区间(a, b)，使得 $a, b \notin G$ (例如 b 可这样产生：设$(x, b_1) \subseteq G$，并且 b_1 为有理数 $m + 0.c_1c_2\cdots c_n$，$m \in \mathbf{Z}$，$c_1, c_2, \cdots, c_n \in$

$\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$. 可设 $\left(x, b_1+\frac{1}{10^n}\right)$ 不含在 G 中 $\left(\text{否则用 } b_1+\frac{1}{10^n} \text{ 代替 } b_1\right)$. 令 $b_2=b_1+\frac{c_{n+1}}{10^{n+1}}$, $c_{n+1}\in\{0, 1, 2, \cdots, 9\}$, 使得 $(x, b_2)\subseteq G$ 而 $\left(x, b_2+\frac{1}{10^{n+1}}\right)$ 不含于 G. 这样继续下去,得出一个数 $b=m+0.c_1c_2\cdots c_nc_{n+1}\cdots$. 任一小于 b 而大于 x 的数 y 或小于 b_1;或不小于 b_1 但至少有一位小数小于 b 的相应数字,从而 y 小于那个直到这一位都与 b 相同的 b_k. 因此 $y\in G$. 这表明 $(x, b)\subseteq G$. 另一方面,G 的补集 G' 是闭集. $\left[b_1, b_1+\frac{1}{10^n}\right)$, $\left[b_2, b_2+\frac{1}{10^{n+1}}\right)$, ……中各有一个点 $\in G'$, b 是它们的极限点,因而 $b\in G'$, 即 $b\notin G$. 这样的区间 (a, b),称为 G 的构成区间. 它们是包含 x 的、完全在 G 内的最大的开区间.

根据定义,这些构成区间不相重叠.

对每一个构成区间,取这区间中任一有理数与之对应. 由于区间互不重叠,这些有理数各不相同. 有理数的全体是可数集,因此 G 的构成区间个数为有限或可数.

例 2 将闭区间 $[0, 1]$ 三等分,取去中间的开区间 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$. 将每一个留下来的闭区间 $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, 1\right]$ 又各等分为三等分,并各取去中间的开区间 $\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$ 与 $\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$. 再将每一个留下来的闭区间三等分并取去中间的开区间. 这样无限继续下去. 留下的集记为 P. 证明:

(i) P 是闭集,并且没有孤立点;

(ii) 点集 P 的基数是 $\aleph$,

解 (i) 去掉了可数个开区间，这些开区间的并集是一个开集 G. G'是闭集，所以 $P = G' \cap [0, 1]$ 是闭集.

如果 0 是 P 的孤立点，那么在 0 的一个邻域中，0 右边的点均属于 G. 从而 0 是 G 的一个构成区间的端点. 但由 P 与 G 的构造，G 的每一个构成区间是 $\left[0, \frac{1}{3^n}\right]$ 的中间部分 $\left(\frac{1}{3^{n+1}}, \frac{2}{3^{n+1}}\right)$ 或属于 $\left[\frac{1}{3^n}, 1\right]$，因而 0 不是构成区间的端点. 这一矛盾表明 0 不是 P 的孤立点. 同样 1 也不是 P 的孤立点.

对于 $x \in (0, 1)$，如果 x 是 P 的孤立点，那么必有含 x 的区间 $(a, b) \subseteq [0, 1]$，(a, b)中仅有 $x \in P$. 因而 x 是 G 的两个构成区间的公共点. 但由 G 的构造，每两个构成区间没有公共点. 所以 P 没有孤立点.

(ii) 用三进制小数 $0.a_1a_2\cdots$表示$[0, 1]$中的数. 去掉 $\left(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$，即去掉那些 a_1 必定为 1 的数 $\left(\frac{1}{3} = 0.100\cdots = 0.022\cdots, \frac{2}{3} = 0.122\cdots = 0.200\cdots\right.$，它们的小数第一位都可以不为 1$\left.\right)$. 去掉$\left(\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right)$与$\left(\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right)$即去掉那些 a_2 必定为 2 的数. 依此类推，从而

$$P = \{0.a_1a_2\cdots \mid a_k = 0 \text{ 或 } 2, k = 1, 2, \cdots\}.$$

令

$$b_k = \begin{cases} 0, & \text{若 } a_k = 0; \\ 1, & \text{若 } a_k = 2. \end{cases} \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

则 $0.a_1a_2\cdots \longmapsto 0.b_1b_2\cdots$ 是 P 到$[0, 1]$中的数(用二进制小

数表示)的一一对应. 所以 P 的基数为$\aleph$.

没有孤立点的闭集(即每一点都是极限点的闭集)称为完备集. 例 2 是 Cantor 发明的完备集. 通常称为 Cantor 的完备集.

有趣的是,在例 2 中去掉的区间总长为

$$\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}+\cdots=\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1.$$

因而剩下的 Cantor 完备集 P 的“长度”(或称为测度)为 0,但它的基数却是$\aleph$.

5.7 Kuratowski 定理

拓扑学中有一著名的 Kuratowski 闭包定理:由集 A 经过补与闭的运算,至多产生 14 个集.

这里的闭运算可以定义为集族上的函数.

设 $\mathscr{A}$ 为集 X 的全部子集所成的族. 函数

$$f: \mathscr{A}\to\mathscr{A}$$

如果满足以下条件:

(1) 若集 $A\subseteq B$, 则 $f(A)\subseteq f(B)$;

(2) $f(A)\supseteq A$;

(3) $f(f(A))=f(A)$;

(4) $f(A\cup B)=f(A)\cup f(B)$,

那么便称 f 为闭运算.

其中性质(1), (2), (3), (4)分别称为单调增,扩大,幂等,可加.

同样地,可以定义补运算.

如果 $g: \mathscr{A} \to \mathscr{A}$，满足：

(1) 若集 $A \subseteq B$，则 $g(A) \supseteq g(B)$；

(2) $g(A) \cap A = \varnothing$；

(3) $g(g(A)) = A$；

(4) $g(A \cup B) = g(A) \cap g(B)$，

那么便称 g 为补运算. 其中性质(1)，(3)分别称为单调减，幂零.

显然，通常集的补集与闭包具有以上性质.

现在，我们证明 Kuratowski 定理. 为此先建立两个图：

$$
\begin{tikzcd}
& & f \arrow[d] \arrow[ddll] & \\
& & fgfgf \arrow[dl] \arrow[dr] & \\
A \arrow[ddrr] & fgfg \arrow[dr] & & gfgf \arrow[dl] \\
& & gfgfgfg \arrow[d] & \\
& & gfg &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& fg \arrow[d] \arrow[ddrr] & & \\
& fgfgfg \arrow[dl] \arrow[dr] & & \\
gfgfg \arrow[dr] & & fgf \arrow[dl] & g \arrow[ddll] \\
& gfgfgf \arrow[d] & & \\
& gf & &
\end{tikzcd}
$$

其中 f 是 $f(A)$ 的简写，$fgfgf$ 是 $f(g(f(g(f(A)))))$ 的简写等等. $B \to C$ 即 $B \supseteq C$.

左图的关系建立如下：

(1) 由 $g \subseteq fg$ 得 $A \supseteq gfg$；

(2) 由 $f \supseteq gfg(f)$ 得 $f \supseteq fgfgf$；

(3) 易知 gfg 是单调增的. 因而，由 $f \supseteq A$ 得 $gfgf \supseteq gfg$，从而 $fgfgf \supseteq fgfg$；

(4) $gfgfgfg = gfg(fgfg) \subseteq gfg(f) = gfgf$；

(5) $gfgfgfg = gfg(fgfg) \subseteq fgfg$；

(6) 由 $f(gfg) \supseteq gfg$ 得 $gfgfg \subseteq fg$，从而 $gfgfgfg \supseteq gf(fg) = gfg$.

将 g 作用于左图，就产生右图.

在左、右两个图中已有 14 个集. 未在图中出现的、由复合而得接下去的两个集应当是 $fgfgfgf$ 与 $fgfgfgfg$. 我们证明：

(1) $fgfgfgf = fgf$.

事实上，由右图

$$fgfgfgf = f(gfgfgf) \supseteq f(gf) = fgf;$$

由左图

$$fgf = f(gf) \supseteq fgfgf(gf) = fgfgfgf.$$

(2) $fgfgfgfg = fgfg$.

由(1)(将 A 换作 $g(A)$)，

$$fgfgfgfg = fgfgfgf(g) = fgf(g) = fgfg.$$

于是，用 f, g 复合，除图中 14 个集外，不能产生其他的集.

注：在上述证明中，只利用 f 的性质(1)，(2)，(3)，g 的性质(1)，(3).

例 1 举出一个集 A，它经过 f, g 的复合恰好产生 14 个不同的集.

解 首先注意上面左图(简称左图)的任一集不与右图的集相等. 否则，左图的最大集 f 包含右图的最小集 gf，产生矛盾.

如果左图的 7 个集两两不同，那么它们的补集，即右图的 7 个集也两两不同. 因此，只要左图的 7 个集两两不同，结合右图，我们就得到 14 个两两不同的集.

设 $X = [1, 5]$,

$$A = \{[1, 2] \text{中的有理点}\} \cup [2, 3) \cup (3, 4] \cup \{5\}.$$

则左图的其他六个集合为：

$$f = [1, 4] \cup \{5\},$$
$$gfg = (2, 3) \cup (3, 4),$$
$$fgfg = [2, 4],$$
$$gfgfgfg = (2, 4),$$
$$gfgf = [1, 4),$$
$$fgfgf = [1, 4].$$

左图这 7 个集两两不同，因此它们与右图的 7 个集构成 14 个不同的集.

Kuratowski 定理有许多推广，下面举一个关于自然数的问题.

例 2 对自然数集 $\mathbf{N}$ 的任一子集 A，我们令 $g(A) = \mathbf{N} - A$，$f(A) = \langle A \rangle$，这里 $\langle A \rangle$ 表示 A 经乘法生成的集，即

$$\langle A \rangle = \{\text{任意多个 } A \text{ 中元素(允许相同)相乘的积}\}.$$

(单独一个元素也算作积，所以 $\langle A \rangle \supseteq A$.)

显然 f 具有单调增、扩大、幂等这三个性质. 于是，根据前面的证明，由 f, g 复合，至多产生 14 个不同的集.

我们可以举例表明的确能得出 14 个不同的集.

取 $A = \{2, 2\times 3, 2\times 5, 2\times 3\times 5, 3^3\}$，则

$$gfg = \{2, 2\times 3, 2\times 5, 2\times 3\times 5\} \neq A.$$

$3^3 \in f$, $3 \notin f$, $3 \in gf$, $3, 3^2, 3^3 \in fgf$, $3, 3^2, 3^3 \notin fgfgf$，所以 $fgfgf \neq f$.

$(2\times 3\times 5)^2 \in fgfg$；$2\times 3^2$, $2\times 5^2 \notin f$，所以 2×3^2, $2\times 5^2 \in gf$, $(2\times 3^2)\times(2\times 5^2) \in fgf$，即 $(2\times 3\times 5)^2 \in fgf$, $(2\times 3\times 5)^2 \notin gfgf$.

$2^2\times 3^3 \notin f(gfg) = fgfg$；$2^2\times 3^3 \in f$，并且若 $2^2\times 3^3$

$=n_1n_2\cdots n_k$ $(k\geqslant 2)$，则至少有一个 n_i 中 3 的幂指数不大于 2 的幂指数，因而这个 $n_i\in f$. 从而 $n_i\notin gf$. $2^2\times 3^3\notin fgf$, $2^2\times 3^3\in gfgf$.

综合以上两段，$fgfg$ 与 $gfgf$ 不可比较，从而 $fgfg$, $gfgf$, $fgfgf$, $gfgfgfg$ 两两不等.

$2, 2^2, 2^3, \cdots\in fgfg$; $2, 2^2, 2^3, \cdots\notin gfgfg$; $2, 2^2, 2^3, \cdots\notin fgfgfg$; $2, 2^2, 2^3, \cdots\in gfgfgfg$. 所以 $gfgfgfg$, $fgfg$, $gfgf$, $fgfgf$, f 都是无穷集，不与有限集 A, gfg 相等.

于是左图的 7 个集各不相同. 它们的补集即右图的 7 个集也各不相同.

左图的任一集决不可能等于右图的集. 如果这种情况发生，左图的最大集 f 包含右图的最小集 gf，产生矛盾.

因此，由 $A=\{2, 2\times 3, 2\times 5, 2\times 3\times 5, 3^3\}$ 经 f, g 复合可产生 14 个不同的集.

下面再举两种 Kuratowski 定理的推广.

例 3 设 t 为区间$[0, 1]$中的实数，定义

$$g(t)=1-t.$$

显然 g 具有单调减、幂零这两个性质. 又设函数 f: $[0, 1]\to[0, 1]$满足：

(1) 单调增；

(2) $f(t)\geqslant t$;

(3) $f(f(t))=f(t)$.

则根据前面的证明（将 $\subseteq$ 改为 $\leqslant$），g 与 f 复合，至多产生 14 个不同的函数.

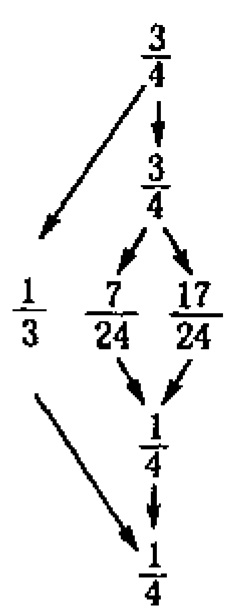
为了举出恰好产生 14 个不同函数的例子，首先注意 $f(t)$

的像集必为一些点或一些区间组成，在每一个区间上，$f(t)=t$. 若(c, d)内的点不属于$f(t)$的像集，而c, d属于$f(t)$的像集，那么$f(c)=c$, $f(d)=d$, 并且在(c, d)上恒有$f(t)=d$.

现在令

$$f(t)=\begin{cases}\frac{1}{6},\ t\in\left[0,\ \frac{1}{6}\right];\\ \frac{7}{24},\ t\in\left(\frac{1}{6},\ \frac{7}{24}\right];\\ \frac{3}{4},\ t\in\left(\frac{7}{24},\ \frac{3}{4}\right];\\ \frac{7}{8},\ t\in\left(\frac{3}{4},\ \frac{7}{8}\right];\\ 1,\ t\in\left(\frac{7}{8},\ 1\right].\end{cases}$$

则当$t=\frac{1}{3}$时，左图中各函数的值为：



而当 $t \in \left(\frac{7}{8}, 1\right)$ 时，$f(t) = 1$，

$$fgfgf = fgf(0) = fg\left(\frac{1}{6}\right) = f\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{7}{8}.$$

当 $t < \frac{1}{8}$ 时，$gfg = 0$，

$$gfgfgfg = gfgfg(1) = gfg\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{8}.$$

于是左图中 7 个函数各不相同，这时右图中 7 个函数也各不相同(用 1 减去左图的函数就得出右图中相应的函数).

左图中的函数决不可能与右图中的函数相同. 否则将导出 $f \geqslant gf$ 恒成立. 但在 $t \leqslant \frac{1}{6}$ 时，$f(t) = \frac{1}{6} < gf = \frac{5}{6}$.

因此，我们得到 14 个不同的函数.

例 4 设数轴上的点所成的集为 X，g_1 是关于原点的对称. $f_1: X \to X$，满足：

(1) 单调增(点的大小顺序即相应的实数大小顺序)；

(2) $f_1(t) \geqslant t$；

(3) $f_1(f_1(t)) = f_1(t)$，

则由 f_1 与 g_1 复合，至多产生 14 个不同的函数.

将例 3 中的自变量 t 改为 $t - \frac{1}{2}$ (即将原点移至原来的点 $\frac{1}{2}$ 处)，则在那里的 g 就是现在的 g_1 $\left(t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]\right)$.

令 $f_1(t) = f\left(t + \frac{1}{2}\right)$，$t \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$；并且在 $t \notin \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 时，$f(t) = t$，则经 g_1，f_1 复合恰产生 14 个不同

的函数.

例 5 平面上的点所成的集为 X. 对于任两个点 (a_1, b_1), (a_2, b_2), 约定当 $a_2 > a_1$ 或 $a_2 = a_1$, $b_2 > b_1$ 时,

$$(a_1, b_1) < (a_2, b_2).$$

如果 g 是关于原点的对称, 而 f_2: $X \to X$, 满足:

(1) 单调增;

(2) 对任一点 t, $f_2(t) \geqslant t$, $f_2(f_2(t)) = f_2(t)$,

那么由 f_2 与 g 复合, 至多产生 14 个不同的函数.

我们可以令 $f_2((a, b)) = (f_1(a), b)$, 以产生 14 个不同的函数.

例 6 平面上的整点所成的集为 X, 大小顺序及 g, f_2 均与例 5 相同. 试举一个 f_2 的实例, 产生 14 个不同的函数.

这只需令 $f_2((a, b)) = \left(24 f_1\left(\frac{a}{24}\right), b\right)$.

习　　题

1. 已知 $A\cup B\cup X=A\cup B$, $A\cap X=B\cap X=A\cap B$. 证明集合 $X=A\cap B$.

2. 用 $n(A)$表示 A 的子集的个数. 已知 $|A|=|B|=100$, $n(A)+n(B)+n(C)=n(A\cup B\cup C)$. 求 $|A\cap B\cap C|$ 的最小值.

3. 从自然数数列 1, 2, 3, 4, 5, …中依次划去 4 的倍数, 7 的倍数, 但其中凡 5 的倍数均保留不划去, 剩下的数中第 1995 个是多少?

4. 在正 $6n+1$ 边形中, k 个顶点染红色, 其余顶点染蓝色. 证明具有同色顶点的等腰三角形的个数 P_k 与染色方式无关, 并且 $P_{k+1}-P_k=3k-9n$, 从而求出 P_k.

5. 证明:

$$|A_1\triangle A_2|+|A_2'\triangle A_3|-|A_1'\triangle A_3|$$
$$=2|A_1\cap A_2'\cap A_3'|+2|A_1'\cap A_2\cap A_3|.$$

6. 证明:

$$\sum_{A_1,\cdots,A_k}|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|=n(2^k-1)2^{k(n-1)}.$$

这里的求和遍及 n 元集 X 的所有子集 A_1, A_2, …, A_k, 其中允许有空集与相同的集, 并且计及顺序(即 $A_1\neq A_2$ 时, $A_1\cup A_2$ 与 $A_2\cup A_1$ 算作不同的).

7. 证明:

$$\sum|A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k|=(2^k-1)\sum|A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_k|.$$

和号意义同上题.

8. $m>n$, $A=\{1,2,\cdots,m\}$, $B=\{1,2,\cdots,n\}$, 求满足 $C\subseteq A$, $C\cap B\neq\varnothing$ 的 C 的个数.

9. $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_m\}$ 是 n 元集 X 的子集族，对 $1\leqslant i<j\leqslant m$，$A_i\cup A_j\neq X$，证明 $m\leqslant 2^{n-1}$. 并且在 $m<2^{n-1}$ 时，一定能补充若干个子集到 $\mathscr{A}$ 中，使得 $|\mathscr{A}|=2^{n-1}$，同时 $\mathscr{A}$ 中每两个子集的并不是 X.

10. 证明 n 元集 X 的满足 $A\subset B$ 的子集对 A, B 共有 3^n-2^n 对.

11. 已知集 S 中的元素均为正实数，S 对加法封闭(即 a, $b\in S$ 时，$a+b\in S$)，并且对任意区间 $[a, b]$ $(a>0)$，均有区间 $[c, d]\subseteq[a, b]\cap S$. 试确定 S.

12. 设 A, B 都是集 $X=\{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集. 如果 A 中的每一个数都严格地大于 B 中的所有的数，那么有序子集对 (A, B) 称为"好的". 求 X 的"好的"子集对的个数.

13. 数轴上 n 个有界闭区间，其中任 k 个中均有两个无公共点. 证明其中至少有 $\left[\frac{n-1}{k}\right]+1$ 个两两不相交.

14. 25 位绅士围一圆桌而坐. 他们中有些人属于一些团体. 同一团体的绅士相邻而坐，并且

(i) 每个团体至多 9 个人；

(ii) 每两个团体至少有一个公共成员.

证明有一位绅士属于所有团体.

15. 设 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是集 X 的 r 元子集的族. 若 $\mathscr{A}$ 中每 $r+1$ 个集的交非空，证明交 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_t\neq\varnothing$.

16. $\mathscr{A}$ 为 X 的子集族，$|\mathscr{A}|=t\geqslant 2$. 证明形如 $A\triangle B$ $(A, B\in\mathscr{A})$ 的子集中，至少有 t 个互不相同.

17. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 为 n 个两两不同的集. $\{A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_r}\}$ 为这族集中不含并集的最大子族(不含并集即对任意不同的 j, s, $t\in\{i_1, i_2, \cdots, i_r\}$，$A_j\cup A_s\neq A_t$). 对一切 $A_1, A_2, \cdots, A_n$，令 $f(n)=\min r$. 证明：

$$\sqrt{2n}-1\leqslant f(n)\leqslant 2\sqrt{n}+1.$$

18. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 都是 r 元集. $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=X$. 若对自然数 k，这族集中每 k 个的并为 X，每 $k-1$ 个的并为 X 的真子集. 证明：$|X|\geqslant$

C_n^{k-1}. 等号成立时,必有 $r = C_{n-1}^{k-1}$.

19. $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 都是 r 元集, $X = \bigcup_{i=1}^t A_i$, 求 $\min|X|$. 这里最小值是对所有 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 的 $|X|$ 的最小值.

20. 设 $\{A_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$, $\{B_i\}_{1\leqslant i\leqslant m}$ 是两族集,具有性质 $|A_1| = |A_2| = \cdots = |A_m| = p$, $|B_1| = |B_2| = \cdots = |B_m| = q$, 并且当且仅当 $i = j$ 时, $A_i \cap B_j = \varnothing$. 证明: $m \leqslant C_{p+q}^p$.

21. n 元集 X 的非空子集族 $\mathscr{A}$ 称为滤子族,如果对每对 $A, B \in \mathscr{A}$, 存在 $C \in \mathscr{A}$, 使得 $C \subset A \cap B$. 求滤子族的个数.

22. 设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是集 X 的 r 元子集的族, $t \leqslant 2^{r-1}$. 证明可将 X 的元素各染成两种颜色之一,使得每个 $A_i (1 \leqslant i \leqslant t)$ 的元素不全同色.

23. 设 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是集 X 的子集族,满足 $|A_i| \geqslant 2$ 并且 $|A_i \cap A_j| \neq 1$ $(i, j = 1, 2, \cdots, t, i \neq j)$. 证明可将 X 的元素各染成两种颜色之一,使得每个 $A_i (1 \leqslant i \leqslant t)$ 的元素不全同色.

24. 设 X 为 n 元集. $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 是 X 的子集族,对所有 $i \neq j$, $1 \leqslant i, j \leqslant t$, $|A_i \cap A_j| = 1$. 证明: $t \leqslant n$.

25. 设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 与 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 是集 X 的两个分拆. 并且当 $A_i \cap B_j = \varnothing$ 时, $|A_i \cup B_j| \geqslant n$ $(1 \leqslant i, j \leqslant n)$. 求证: $|X| \geqslant \frac{n^2}{2}$. 并说明在 n 为偶数时,等号可以成立.

26. $\mathscr{A}$ 是 n 元集 X 的一个子集族. 若 X 的每个子集 B 至少与 $\mathscr{A}$ 中一个子集 A 可比较(即 $B \subseteq A$ 或 $A \subseteq B$),则称 $\mathscr{A}$ 为横截族. 设 $\mathscr{A}$ 为最小的横截族(即 $\mathscr{A}$ 为横截族而 $\mathscr{A}$ 的子族均非横截族),证明: $|\mathscr{A}| \leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

27. $X = \{1, 2, \cdots, n\}$ 的子集族 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$ 称为完全可分的,如果对任意的 i, j $(1 \leqslant i < j \leqslant n)$, 存在 $A_k, A_h \in \mathscr{A}$, 使得 $i \in A_k - A_h$, $j \in A_h - A_k$. 对任一集族 $\mathscr{A} = \{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$, 定义 $B_i = \{k \mid i \in A_k\}$, 产生一个 $\{1, 2, \cdots, t\}$ 的子集族 $\mathscr{A}^* = \{B_1, B_2, \cdots, B_n\}$, $\mathscr{A}^*$ 称为 $\mathscr{A}$ 的对偶. 证明当且仅当 $\mathscr{A}^*$ 是 S 族时, $\mathscr{A}$ 完全可分.

28. X 的子集族 $\mathscr{A}$ 是 S 族，令 $b(\mathscr{A})$ 为 X 的所有与 $\mathscr{A}$ 中每一子集都相交的最小集组成的族. 证明：$b(b(\mathscr{A})) = \mathscr{A}$.

29. 任意 t 个集 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 中，总能找出 $[t^{\frac{1}{2}}]$ 个，每两个的并不等于第三个.

30. 设 $\mathscr{A}$, $\mathscr{B}$ 为 n 元集 X 的子集族，$\mathscr{A}$ 中的每个子集 A 与 $\mathscr{B}$ 中的每一个子集 B 均不可比较. 证明：$\sqrt{|\mathscr{A}|} + \sqrt{|\mathscr{B}|} \leqslant 2^{\frac{n}{2}}$.

31. 研究 4.11 节例 1(4)中等号成立的情况.

32. 列出 5.7 节例 1 中右图的 7 个集.

33. 建立区间 (a, b), $[a, b)$, $(a, b]$ 与 $[0, 1]$ 的一一对应.

34. 对集合 $A_1, A_2, \cdots$，令 $\overline{A} = \bigcap\limits_{m=1}^{\infty}\left(\bigcup\limits_{n=m}^{\infty} A_n\right)$, $\underline{A} = \bigcup\limits_{m=1}^{\infty}\left(\bigcap\limits_{n=m}^{\infty} A_n\right)$. 证明：$\overline{A} \supseteq \underline{A}$. 举一个 $\overline{A} \supset \underline{A}$ 的例子.

35. 设 X 为 n 元集，Y 为 X 的 k 元子集，证明 X 的恰含 Y 中 r 个元的子集，所成的最大的 S 族由 $C_k^r C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$ 个子集组成.

36. 考虑 n 元集 X 到自身的映射 $f(n \geqslant 2)$. 若 a 为 X 中一固定元素，对每个 $x \in X$, 均有 $f(f(x)) = a$. 求这种映射 f 的个数.

37. 设 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ 为两个 n 维向量. 若 $x = y$ 或 $x_i = y_i$ 对 $n-1$ 个 i 成立，则称 y 覆盖 x. 令 X 表示 p^n 个向量 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $x_i \in \{1, 2, \cdots, p\}$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 的集. 若 X 中每个向量至少被 Y 中一个向量覆盖. 求证：$|Y| \geqslant \dfrac{p^n}{n(p-1)+1}$，并且当 $n = 2$ 时，$\min|Y| = p$.

38. 设 X 为 n 元集，$n \geqslant 4$, $A_1, A_2, \cdots, A_{100}$ 为 X 的子集，其中可以有相同的，满足 $|A_i| > \dfrac{3}{4}n$, $i = 1, 2, \cdots, 100$. 证明存在 $Y \subseteq X$, $|Y| \leqslant 4$ 并且 $Y \cap A_i \neq \varnothing$, $i = 1, 2, \cdots, 100$.

39. X 为 n 元集，$n \geqslant 2$, $\mathscr{A}$ 为 X 的子集族. 若 X 的每个真子集与 $\mathscr{A}$ 中偶数个集的交非空，证明 X 的所有非空子集均在 $\mathscr{A}$ 中.

40. 集 X 的元数 $n > 1$，并且有一关系 $\wedge$，满足：

(1) 对任一 $x \in X$, $x \wedge x$ 不成立；

(2) 对任一对不同元素 $x, y \in X$，$x \wedge y$ 与 $y \wedge x$ 恰有一个成立；

(3) 若 $x \wedge y$，则有 $z \in X$，使得 $x \wedge z$，$z \wedge y$.

问 X 至少有几个元素？

习 题 解 答

1. 由 $A\cap X=A\cap B$ 得 $X\supseteq A\cap B$. 由 $A\cup B\cup X=A\cup B$ 得 $X\subseteq A\cup B$, 此式及 $A\cap X=A\cap B$ 得 $X\subseteq B$. 同理 $X\subseteq A$. 因此 $X\subseteq A\cap B$. 综合起来得 $X=A\cap B$.

2. 设 $|C|=c$, $|A\cup B\cup C|=d$, 则 $2^{100}+2^{100}+2^c=2^d$, 即 $2^{101}+2^c=2^d$. 显然 $d>c$ 与 101, 因此 $2^{101}\mid 2^c$, $2^c\mid 2^{101}$, 从而 $c=101$, $d=102$. $A\cap B$ 至少有 $100+100-102=98$ 个元, 其中至多有 $102-101=1$ 个元不属于 C. 所求最小值为 $98-1=97$.

3. 可按 1.11 节例 4 解.

另一种解法: 4, 5, 7 的最小公倍数为 140. 由中国剩余定理(孙子定理), 1 至 140 中的数可唯一地表示成 (a, b, c) 的形式, 其中 a, b, c 分别为该数除以 4, 5, 7 的余数. 保留的数有 $(a, 0, c)$ 及 (a, b, c), $b\neq 0$ 两种. 前者 $a\in\{0, 1, 2, 3\}$, $c\in\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 共 $4\times 7=28$ 个; 后者 $a\in\{1, 2, 3\}$, $b\in\{1, 2, 3, 4\}$, $c\in\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, 共 $3\times 4\times 6=72$ 个. 因此 1 至 140 中共留下 $28+72=100$ 个数, 其中最大的五个数为 140, 139, 138, 137, 135. 在前 $140\times 20=2800$ 个自然数中留下 $100\times 20=2000$ 个数. 因此第 1995 个数是 $2800-(140-135)=2795$.

4. 设 P_k 与染色方式无关. 现在增加一个红点 A, 以 A 为顶点的等腰三角形中, 设顶点全红的有 a_3 个, 两个红点的 a_2 个, 一个红点的 a_1 个, 则 $a_1+a_2+a_3=9n$ (其中 $3n$ 个以 A 为尖, $6n$ 个不以 A 为尖), $a_2+2a_3=3k$ (另一不同于 A 的红点有 k 种取法, 这点与 A 可作为三个等腰三角形的两个顶点. 这样组成的等腰三角形中, 每个顶点全红的三角形被计算了两次). 由以上两方程得 $a_3-a_1=3k-9n$. 而增加红点 A 时, 同色顶点的等腰三角形的个数 P_k 增加 a_3, 减少 a_1 (增加 a_3 个顶点全红

的，减少 a_1 个顶点全蓝的等腰三角形）．因此 P_{k+1} 与染色方式无关，并且 $P_{k+1}-P_k=a_3-a_1=3k-9n$．由于 $P_0=3n(6n+1)$，所以 $P_k=P_0-9kn+3\sum_{i=1}^{k} i=3n(6n+1)-9kn+\frac{3}{2}k(k-1)$．

5. 左边 $=|A_1|-|A_1\cap A_2|+|A_2|-|A_1\cap A_2|+|A_2'|-|A_2'\cap A_3|+|A_3|-|A_2'\cap A_3|-|A_1'|-|A_3|+2|A_1'\cap A_3|$
$=2(|A_1|-|A_1\cap A_2|-|A_2'\cap A_3|+|A_1'\cap A_3|)$
$=2(|A_1\cap A_2'|-|A_2'\cap A_3|+|A_1'\cap A_3|)$
$=2(|A_1\cap A_2'|-|A_1\cap A_2'\cap A_3|-|A_1'\cap A_2'\cap A_3|+|A_1'\cap A_3|)$
$=2(|A_1\cap A_2'\cap A_3'|+|A_1'\cap A_2\cap A_3|)$.

6. X 有 2^n 个子集，每个均可作为 $A_1, A_2, \cdots, A_k$ 中的任一个，因此和共 $(2^n)^k$ 项．不含 i 的子集共 2^{n-1} 个 $(1\leqslant i\leqslant n)$，因此 i 不在 $(2^{n-1})^k$ 项出现，即 i 对和的贡献是 $(2^n)^k-(2^{n-1})^k$．从而和为 $n(2^{nk}-2^{(n-1)k})$．

7. 右边的和 $=\sum|A_1'\cap A_2'\cap\cdots\cap A_k'|$

$$
\begin{aligned}
&=\sum|(A_1\cup\cdots\cup A_k)'|\\
&=\sum(n-|A_1\cup\cdots\cup A_k|)\\
&=n\cdot 2^{nk}-n(2^{nk}-2^{(n-1)k})=n\cdot 2^{(n-1)k}.
\end{aligned}
$$

从而两边相等．

8. C 不是 $\{n+1, n+2, \cdots, m\}$ 的子集，这样的子集有 2^{m-n} 个，因此 C 有 2^m-2^{m-n} 个．

9. $A_i\cup A_j\neq X$ 即 $A_i'\cap A_j'\neq\varnothing$，由 4.5 节例 1，$A_1', A_2', \cdots, A_m'$ 的个数 $m\leqslant 2^{n-1}$，并且可以补充若干个 A_k'，使每两个交非空的集增加到 2^{n-1} 个．从而对 $\mathscr{A}$ 结论成立．

10. $(X-B)\cup(B-A)\cup A$ 是 X 的一个分拆．因此 X 的每个元可以属于三者之一，共有 3^n 种上述分拆，其中 $B-A=\varnothing$ 的有 2^n 种，应当排除．

11. 对任一正实数 t，取正实数 $s<t$．由已知，存在区间 $[c, d]\subseteq[s, t]\cap S$．

在区间 $[t-d, t-c]$ $\left(\text{这是关于}[0, t]\text{的中点}\frac{t}{2}\text{,与}[c, d]\text{对称的}\right.$

$\left.\text{区间}\right)$中,由已知,存在区间 $[e, f] \subseteq S$.

$t-e$ $\left(e\text{ 关于}\frac{t}{2}\text{的对称点}\right)$在区间$[c, d]$中,因而 $t-e \in S$.

由加法封闭性, $t = e + (t-e) \in S$.

所以 S 由全体正实数组成.

12. 设 $|A \cup B| = k$. 元数为 k 的子集有 C_n^k 个. 对任一 k 元子集 $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\} \subseteq X$, $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$, 集 B 可为$\varnothing$, $\{a_1\}$, $\{a_1, a_2\}$, $\cdots$, $\{a_1, a_2, \cdots, a_k\}$, 共有 $k+1$ 种,因此好子集对的个数为

$$\sum_{k=0}^{n}(k+1)C_n^k = 2^n + n \cdot 2^{n-1}.$$

13. 答案可加强为$\left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil$. 对 n 归纳. 考虑各区间中右端点最大的 k 个区间,其中必有两个区间$[a, b]$, $[c, d]$互不相交,即 $b < c$.

再考虑剩下的 $n-k$ 个区间及$[a, b]$. 由归纳假设,其中有$\left\lceil \frac{n-k+1}{k-1} \right\rceil$个两两不相交的区间. 这些区间的右端点均 $\leqslant b$, 因而不与$[c, d]$相交. 连同$[c, d]$共有$\left\lceil \frac{n-k+1}{k-1} \right\rceil + 1 = \left\lceil \frac{n}{k-1} \right\rceil$个两两不相交的区间.

14. 将人依圆桌的(顺时针)次序编号为 1, 2, $\cdots$, 25. 不妨设一个团体由 9, 10, $\cdots$, $8+k$ $(k \leqslant 9)$ 组成. 这时含 1 的团体必为$\{1, 2, \cdots, 9\}$,含 25 的团体必为$\{25, 24, \cdots, 17\}$(否则与(i), (ii)矛盾). 由于$\{1, 2, \cdots, 9\}$与$\{25, 24, \cdots, 17\}$无公共成员,所以这两个团体至多出现一个. 即 1 或 25 中至少有一个不属于任何一个团体.

不妨设 25 不属于任何一个团体. 各团体的最大号数的最小值记为 m,则 m 必属于所有团体. 事实上,m 是某团体 C_1 的最大号数,对任一团体 C_i, C_i 的最大号数 $m_i \geqslant m$. 由于 $C_i \cap C_1 \neq \varnothing$, C_i 的最小号数必不大于 m,从而 $m \in C_i$.

注：如果从 25 那里将圆周剪断，拉成直线，问题便化成直线上若干闭区间，每两个有公共点，则这些闭区间有公共点.

15. 设 $A_1=\{x_1, x_2, \cdots, x_r\}$. 若 $A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_t=\varnothing$，则对每个 i $(1\leqslant i\leqslant r)$，均有一个 $\mathscr{A}$ 中的子集不含 x_i. 这些集(不超过 r 个)与 A_1 的交为空集，矛盾.

16. 设 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$. 由 1.10 节例 1，$A_1\triangle A_i(1\leqslant i\leqslant t)$ 互不相同.

17. 先证 $r\geqslant\sqrt{2n}-1$. 不妨设 A_1 是$\{A_1, A_2, \cdots, A_n\}$中的最小元(即 A_1 不包含其他的集 A_i, $i\neq 1$). 设已有 $A_{i_1}=A_1, A_{i_2}, \cdots, A_{i_s}$，组成无并的族. 因为 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_s}$ 两两的并集至多 C_s^2 个，所以在 $n-s>C_s^2$ 时，总可以在剩下的 $n-s$ 个集中再取出一个不等于 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_s}$ 中任两个的并. 这样继续下去，直至选出无并族 $A_{i_1}, A_{i_2}, \cdots, A_{i_r}$，$r$ 满足 $n-r\leqslant C_r^2$，从而 $r\geqslant\sqrt{2n}-1$.

再证 $\min r<2\sqrt{n}+1$. 设 t 为满足 $\left[\frac{t^2}{4}\right]\geqslant n$ 的最小整数. 考虑 $\left[\frac{t^2}{4}\right]=\left[\frac{t}{2}\right]\left[\frac{t+1}{2}\right]$ 个自然数的集合.

$$A_{i,j}=\{x\mid i\leqslant x\leqslant j\}, 1\leqslant i\leqslant\frac{t}{2}<j\leqslant t.$$

设 $\{A_{i_k,j_k}, 1\leqslant k\leqslant r\}$ 为无并的子族，则对每个 k，以下两种情况不能同时发生：(1)存在 A_{i_s,j_s} 满足 $i_s=i_k$，$j_s<j_k$；(2)存在 A_{i_t,j_t}，满足 $i_t>i_k$，$j_t=j_k$. 否则 $A_{i_s,j_s}\cup A_{i_t,j_t}=A_{i_k,j_k}$. 当(1)不发生时，将 i_k 染红；当(2)不发生时，将 j_k 染红. 这样，对每个 k，$\{1, 2, \cdots, t\}$中有一个对应的红点. 与不同的 k 对应的红点不同(若与 k, k'对应的红点均为 i_k，则(1)发生，与红点定义矛盾. 若与 k, k'对应的红点均为 j_k，则(2)发生，矛盾). 于是 $r\leqslant t$. 从而 $r<2\sqrt{n}+1$.

18. 对每 $k-1$ 个的并，X 至少有一个元不在这并集中，不同的并对应的元不同. 因此 $|X|\geqslant C_n^{k-1}$.

若 $|X|=C_n^{k-1}$，则 X 的每个元恰与一族 $k-1$ 个集对应，这个元不在这 $k-1$ 个集中，在其他 $n-(k-1)$ 个集中. 因此，

$$nr=\sum|A_i|=(n-k+1)|X|=(n-k+1)C_n^{k-1},$$

$$r=\frac{n-k+1}{n}C_n^{k-1}=C_{n-1}^{k-1}.$$

19. 设 n 为满足 $C_n^r\geqslant t$ 的最小整数. 一方面, A_1, A_2, …, A_t 都是 X 的 r 元子集, 所以 $t\leqslant C_{|X|}^r$. 从而 $|X|\geqslant n$.

另一方面, 任一 n 元集 X, 有 $C_n^r\geqslant t$ 个 r 元子集, 从中任取 t 个. 设它们的并集为 Y, 则由上面所说, $|Y|\geqslant n$, 因而 $Y=X$. X 就是所取 t 个 r 元集的并集.

因此, 所求最小值即 n.

20. 在 4.1 节例 3 中, 令 $a_1=a_2=\cdots=a_n=p$, $b_1=b_2=\cdots=b_m=q$ 即得.

21. 设 $\mathscr{A}=\{A_1, A_2, \cdots, A_t\}$, 其中 A_1 最小, 即 A_1 不包含 A_2, A_3, …, A_t 中任何一个. 由于 $A_1\cap A_2$, $A_1\cap A_3$, …, $A_1\cap A_t$ 均在 $\mathscr{A}$ 中, 所以 $A_1\cap A_2=A_1\cap A_3=\cdots=A_1\cap A_t=A_1$, $\mathscr{A}=\{A_1, A_1\cup B_2, \cdots, A_1\cup B_t\}$, 其中 B_2, B_3, …, B_t 是互不相同的非空集合, 且均是 $X-A_1$ 的子集.

设 $|X-A_1|=k$, 则 $0\leqslant k\leqslant n-1$. $\{B_2, B_3, \cdots, B_t\}$ 是 $X-A_1$ 的非空子集的族, $X-A_1$ 有 2^k-1 个非空子集, 每一个均可属于, 也可不属于 $\{B_2, B_3, \cdots, B_t\}$, 因而 $\{B_2, B_3, \cdots, B_t\}$ 有 2^{2^k-1} 个. 而 A_1 有 C_n^{n-k} 种. 所以滤子族的个数为 $\sum\limits_{k=0}^{n-1}C_n^k 2^{2^k-1}$.

22. 设 $|X|=n$. 至少有一个 A_i 同色的种数 $<t\times 2\times 2^{n-r}\leqslant 2^{r-1}\times 2\times 2^{n-r}=2^n$. 其中 2 表示 A_i 的元素可全染红或全染黑, 2^{n-r} 是 $X-A_i$ 的元素的染色的种数. 由于在 X 的元素全同色时, A_1, A_2, …, A_n 均同色, 所以上面的第一个不等号是严格的. X 的染色方法有 2^n 种, 因此必有一种使得每个 A_i 均不同色.

23. 任意地将 X 的元素染成红或黑色, 若 A_1 中的元素全红, 将 A_1 中一个元素 x 改为黑色. 由于 $|A_1|\geqslant 2$, 所以 A_1 不同色. 设已有 A_1, A_2, …, A_i, 每个集的元素不全同色. 若 A_{i+1} 的元素同色, 不妨设全为

红色，将 A_{i+1} 中一个元素 y 改为黑色，这时 A_{i+1} 中的元素不全同色. 若有 $A_j\ (1\leqslant j\leqslant i)$ 变为同色，则 A_j 中元素均与 y 同为黑色，$|A_j \cap A_{i+1}| = |\{y\}| = 1$，矛盾. 因此 $A_1, A_2, \cdots, A_{i+1}$ 每个集的元素不全同色. 继续这样调整，可使 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 各个集的元素不全同色.

24. 对任一个 $x\in X$，用 $d(x)$表示 $\mathscr{A}$ 中含 x 的子集个数. 若有某个 $d(x)=t$，则 $A_1-\{x\}, A_2-\{x\}, \cdots, A_t-\{x\}$ (其中可能有一个空集)两两不相交，因此 $t\leqslant n$.

设恒有 $d(x)<t$. 对 x，$\mathscr{A}$ 中存在 $A_1, A_2, \cdots, A_{d(x)}$ 及 A，满足 $x\in A_1, A_2, \cdots, A_{d(x)}$ 及 $x\notin A$. 由已知 $|A_i\cap A_j|=1$，$A\cap A_1$，$A\cap A_2, \cdots, A\cap A_{d(x)}$ 均是单元素集，并且各不相同，所以 $|A|\geqslant d(x)$.

若 $t>n$，则 $\dfrac{d(x)}{t-d(x)}<\dfrac{d(x)}{n-d(x)}\leqslant\dfrac{|A|}{n-|A|}$. 求和得

$$\sum_{x\in X}\sum_{\substack{x\notin A\\ A\in\mathscr{A}}}\frac{d(x)}{t-d(x)}=\sum_{x\in X}d(x)<\sum_{A\in\mathscr{A}}\sum_{x\notin A}\frac{|A|}{n-|A|}=\sum_{A\in\mathscr{A}}|A|.$$

另一方面，考虑一个两部分图. 一部分有 n 个点，代表 X 的 n 个元素. 另一部分有 t 个点，代表 $\mathscr{A}$ 中的 t 个子集. 若 $x\in A$，就在代表 x 与代表 A 的点之间连一条线. $\sum d(x)$ 与 $\sum|A|$ 都是这个图的线的条数，所以 $\sum d(x)=\sum|A|$. 与上面的不等式矛盾. 这表明 $t\leqslant n$.

25. 令 $k=\min(|A_i|, |B_i|, 1\leqslant i\leqslant n)$. 不妨设 $|A_1|=k$. 因为 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 两两不相交，所以至多有 k 个 B_i 满足 $A_1\cap B_i\neq\varnothing$. 设这些 B_i 为 $B_1, B_2, \cdots, B_m$，$m\leqslant k$，则对于 $i>m$，$|B_i|\geqslant n-|A_1|=n-k$. 当 $k<\dfrac{n}{2}$ 时，

$$\begin{aligned}|X|&=\sum_{i=1}^{m}|B_i|+\sum_{i=m+1}^{n}|B_i|\geqslant mk+(n-m)(n-k)\\&=n(n-k)-m(n-2k)>n(n-k)-k(n-2k)\\&=\frac{n^2}{2}+\left(\frac{n}{\sqrt2}-\sqrt2k\right)^2\geqslant\frac{n^2}{2}.\end{aligned}$$

当 $k \geqslant \frac{n}{2}$ 时，$|X| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| \geqslant nk \geqslant \frac{n^2}{2}$.

若 n 为偶数，将 $\frac{n^2}{2}$ 元集 X 分拆为 n 个 $\frac{n}{2}$ 元集 $A_1, A_2, \cdots, A_n$. 又令 $B_i = A_i\ (1 \leqslant i \leqslant n)$，则题中条件均满足.

26. 对每个 $A \in \mathscr{A}$，必有 X 的子集 A_1，A_1 与 A 可以比较，与 $\mathscr{A}$ 中其他子集均不可比较(否则 A 可取消，与 $\mathscr{A}$ 的最小性矛盾). 令 A，A_1 中较大的为 A^*，$\mathscr{A}^* = \{A^* \mid A \in \mathscr{A}\}$. 显然不同的 A，A^* 不同，所以 $|\mathscr{A}^*| = |\mathscr{A}|$.

$\mathscr{A}^*$ 是 S 族. 事实上，若 $\mathscr{A}^*$ 中有 $C^* \subseteq D^*$，则有四种情况：(1) $C^* = C$, $D^* = D_1$. 这时 D_1 与 C 可比较. (2) $C^* = C$, $D^* = D$. 这时 $C_1 \subseteq C \subseteq D$. (3) $C^* = C_1$, $D^* = D$. 这时 $C_1 \subseteq D$. (4) $C^* = C_1$, $D^* = D_1$，这时 $C \subseteq C_1 \subseteq D_1$. 均导致矛盾.

因此 $|\mathscr{A}| = |\mathscr{A}^*| \leqslant C_n^{\left[\frac{n}{2}\right]}$.

27. "B_i 不是 B_j 的子集"意味着存在 $k \in B_i - B_j$，即 $i \in A_k$，$j \notin A_k$. "B_j 不是 B_i 的子集"意味存在 h 使得 $i \notin A_h$，$j \in A_h$. 从而 $\mathscr{A}^*$ 为 S 族导出 $\mathscr{A}$ 完全可分. 反之亦然.

28. $\mathscr{A}$ 中每一子集与 $b(\mathscr{A})$ 中每一子集均相交，因此 $\mathscr{A}$ 中每一子集必含一个 $b(b(\mathscr{A}))$ 中的子集. 反之，设 A 为 $b(b(\mathscr{A}))$ 中一个子集，则 A 与 $b(\mathscr{A})$ 中每一子集均相交，A' 必不包含 $b(\mathscr{A})$ 中任一子集，即 A' 不可能与 $\mathscr{A}$ 中每一子集均相交. 于是 $\mathscr{A}$ 中有 A_1，$A_1 \cap A' = \varnothing$，即 $A_1 \subseteq A$. 从而 $b(b(\mathscr{A}))$ 中每一子集必含一个 $\mathscr{A}$ 中的子集.

于是，设 $A \in \mathscr{A}$，则有 $B \in b(b(\mathscr{A}))$ 满足 $A \supseteq B$，又有 $C \in \mathscr{A}$ 满足 $B \supseteq C$. 但 $\mathscr{A}$ 为 S 族，所以 $A = B = C$. 因此 $\mathscr{A} \subseteq b(b(\mathscr{A}))$. 反之，对 $B \in b(b(\mathscr{A}))$，存在 $C \in \mathscr{A}$ 满足 $B \supseteq C$. 由于 $C \in b(b(\mathscr{A}))$，它是与所有 $b(\mathscr{A})$ 中子集均相交的最小集，所以 $B = C$. 即 $b(b(\mathscr{A})) \subseteq \mathscr{A}$. 从而 $\mathscr{A} = b(b(\mathscr{A}))$.

29. 考虑由 $A_1, A_2, \cdots, A_t$ 组成的链. 如果有一条链含有至少 $[t^{\frac{1}{2}}]$ 个 $A_i\ (1 \leqslant i \leqslant t)$，这 $[t^{\frac{1}{2}}]$ 个子集满足要求. 否则，对每个 $i\ (1 \leqslant i$

$\leqslant t$). 称以 A_i 为最小元的链的最大长度为 A_i 的层数, 则层数 $\leqslant [t^{\frac{1}{2}}]$. 因此, 必有 $[t^{\frac{1}{2}}]$ 个 A_i 的层数相同. 它们构成 S 族, 满足要求.

30. 设 $\mathscr{H}=\{A \mid A\subseteq X, A$ 包含 $\mathscr{A}$ 中一子集也包含 $\mathscr{B}$ 中一子集$\}$,

$\mathscr{P}=\{A \mid A\subseteq X, A$ 包含 $\mathscr{A}$ 中一子集, 但不包含 $\mathscr{B}$ 中任一子集$\}$,

$\mathscr{Q}=\{A \mid A\subseteq X, A$ 包含 $\mathscr{B}$ 中一子集, 但不包含 $\mathscr{A}$ 中任一子集$\}$,

$\mathscr{K}=\{A \mid A\subseteq X, A$ 不包含 $\mathscr{A}$ 中任一子集, 也不包含 $\mathscr{B}$ 中任一子集$\}$.

$\mathscr{U}=\mathscr{H}\cup\mathscr{P}$, $\mathscr{D}=\mathscr{P}\cup\mathscr{K}$, 则 $\mathscr{U}$ 为上族, $\mathscr{D}$ 为下族. 由 4.9 节(4), $(|\mathscr{H}|+|\mathscr{P}|)(|\mathscr{P}|+|\mathscr{K}|)\geqslant 2^n|\mathscr{P}|$. 又 $|\mathscr{H}|+|\mathscr{P}|+|\mathscr{Q}|+|\mathscr{K}|=2^n$, 代入上式消去 2^n, 然后再化简得 $|\mathscr{P}|\cdot|\mathscr{Q}|\leqslant|\mathscr{H}|\cdot|\mathscr{K}|\leqslant\left(\frac{|\mathscr{H}|+|\mathscr{K}|}{2}\right)^2$ $=\left(\frac{2^n-|\mathscr{P}|-|\mathscr{Q}|}{2}\right)^2$, 从而 $(\sqrt{|\mathscr{P}|}+\sqrt{|\mathscr{Q}|})^2\leqslant 2^n$. 显然有 $\mathscr{A}\subseteq\mathscr{P}$, $\mathscr{B}\subseteq\mathscr{Q}$. 因此 $\sqrt{|\mathscr{A}|}+\sqrt{|\mathscr{B}|}\leqslant\sqrt{|\mathscr{P}|}+\sqrt{|\mathscr{Q}|}\leqslant 2^{\frac{n}{2}}$.

31. 因为 $\sum\limits_{i\in I_j} w_{f(i)}=1$, 所以,

$$B_1\cap X_j=B_2\cap X_j=\cdots=B_t\cap X_j,\ j=1,2,\cdots,n.$$

对 j 求和得

$$B_1=B_1\cap(\bigcup_j X_j)=B_1\cap X=B_2=\cdots=B_t=B.$$

又对每个 j, 凡成为 X_j 子集的 A_i, 元数 a_i 均相等, 并且它们是 X_j-B 的全部 a_i 元子集. 若一切 a_i 均等于 a, 则由 $\sum\limits_{i=1}^{t} w(i)=1$ 得 $t=C_{n-b}^{a}$, 结论成立. 若有 $a_i\neq a_k$, 不妨设 $A_k\subseteq X_1$, $A_i\subseteq X_j$, 并且 $a_k<n-1$. 这时 $j\in A_k$ (因为 $A_k\nsubseteq X_j$), 又有 $h\neq 1$, $h\notin A_k$ (因为 $a_k<n-1$). 所以 $A_k\cup\{h\}-\{j\}\subseteq X_1$ 且元数与 A_k 相同, 因而必为某个 A_q, 并且 $\subseteq X_j$, 所以 $|A_k|=|A_i|$, 与 $a_i\neq a_k$ 矛盾. 因此一切 a_i 均等于 a.

32. $g=\{[1,2]$ 中的无理点$\}\cup\{3\}\cup(4,5)$.

$$gf=(4,5),\quad fg=[1,2]\cup\{3\}\cup[4,5],$$

$$fgf=[4,5],\quad gfgfg=[1,2)\cup(4,5],$$

$$gfgfgf = (4, 5], \quad fgfgfg = [1, 2] \cup [4, 5].$$

33. $f(x) = \begin{cases} x, & 若\ x \neq \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \cdots; \\ 2x, & 若\ x = \frac{1}{2^n}, n = 1, 2, \cdots \end{cases}$ 建立 $[0, 1)$ 与 $[0, 1]$ 之间的一一对应. $f(1-x)$ 建立 $(0, 1]$ 与 $[0, 1]$ 之间的一一对应. $\varphi_{(x)} = \begin{cases} \frac{1 - f(1-2x)}{2}, & 若\ x \in \left(0, \frac{1}{2}\right]; \\ \frac{1 + f(2x-1)}{2}, & 若\ x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}$ 建立 $(0, 1)$ 与 $[0, 1]$ 之间的一一对应. 将 $y=(b-a)x+a$ 与上述函数复合便得到所需的对应. 当然这样的对应决非唯一.

34. $\overline{A}$ 的元素属于无穷多个 A_n. $\underline{A}$ 的元素属于 A_n ($n \geqslant$ 某个与该元素有关的 m), 因而属于无穷多个 A_n, 即属于 $\overline{A}$. 所以 $\underline{A} \subseteq \overline{A}$.

令 $A_1 = A_3 = A_5 = \cdots = A$, $A_2 = A_4 = A_6 = \cdots = B$. 则 $\overline{A} = A \cup B$. $\underline{A} = A \cap B$.

35. 集族 $\left\{A \cup B \mid A \subseteq Y, |A| = r, B \subseteq X - Y, |B| = \left[\frac{n-k}{2}\right]\right\}$ 的元数为 $C_k^r C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$.

另一方面, 设 $\mathscr{A}$ 为满足要求的最大集族. 对 Y 的任一 r 元子集 A, $\mathscr{A}$ 中所有含 A 的子集互不包含, 它们减去 A 后组成 $X-Y$ 的 S 族, 因而个数 $\leqslant C_{n-k}^{\left[\frac{n-k}{2}\right]}$.

36. 显然 $a = f(f(f(a))) = f(a)$. 设除去 a 外, 还有 k 个元的像为 a, 这 k 个元有 C_{n-1}^k 种选择. X 中其他的 $n-k-1$ 个元, 每个元的像可为这 k 个元中任何一个. 于是 f 共有 $\sum_{k=1}^{n-1} C_{n-1}^k \cdot k^{n-k-1}$ 个.

37. 每一个 n 维向量恰盖住 $C_n^1 \times (p-1) + 1$ 个向量, 因此 $|Y| \geqslant \frac{p^n}{n(p-1)+1}$.

当 $n = 2$ 时, $\{(1, 1), (2, 2), \cdots, (p, p)\}$ 可覆盖 X. 另一方面,

对任 $p-1$ 个向量的集 $\{(a_i, b_i), i=1, 2, \cdots, p-1\}$，存在 $a \neq a_i(1 \leqslant i \leqslant p-1)$，$b \neq b_i(1 \leqslant i \leqslant p-1)$. (a, b)不被这 $p-1$ 个向量覆盖. 因此 $\min |Y| = p$.

38. 设 $X = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$，$A_1, A_2, \cdots, A_{100}$ 中含 x_k 的有 n_k 个 $(k=1, 2, \cdots, n)$，则

$$\sum n_k = \sum |A_i| > \frac{3}{4} n \times 100 = 75n.$$

于是必有 k 使 $n_k \geqslant 76$. 不妨设 $n_1 \geqslant 76$.

设 $A_1, A_2, \cdots, A_{100}$ 中不含 x_1 的为 $B_1, B_2, \cdots, B_s$，$s \leqslant 100-76 = 24$. $\sum |B_i| > \frac{3}{4} ns$，因而必有 x_k 属于 $> \frac{3}{4} s$ 个 B_i，不妨设 x_2 属于 $> \frac{3}{4} s$ 个 B_i. $B_1, B_2, \cdots, B_s$ 中不含 x_2 的为 $C_1, C_2, \cdots, C_t$，则 $t < \frac{1}{4} s \leqslant 6$.

最后，$C_1, C_2, \cdots, C_t$ 中不含某个 x_3 的 $< \frac{1}{4} t \leqslant \frac{5}{4}$ 个，即至多一个，设这个为 D.

取 $Y = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$，$x_4 \in D$.

39. 不妨设 $\varnothing \notin \mathscr{A}$. 显然 $\mathscr{A} \neq \{X\}$. 设 $A \in \mathscr{A}$ 并且 $|A| = a \geqslant 1$ 为最小. 因为 $a \leqslant n-1$，$X-A$ 是 X 的真子集，$X-A$ 与 $\mathscr{A}$ 中除 A 外的所有子集的交均非空，因此 $|\mathscr{A}|-1$ 是偶数，$\mathscr{A}$ 含有 X 中奇数个子集.

对任一 $x \in X$，若 $\{x\} \notin \mathscr{A}$，则 $X-\{x\}$ 与 $\mathscr{A}$ 中所有子集(奇数个)均相交，与已知矛盾. 因此 $\{x\} \in \mathscr{A}$.

设每个元数 $< k$ $(< n)$ 的子集 $\in \mathscr{A}$. 对元数为 k 的子集 A，若 $A \notin \mathscr{A}$，则 $X-A$ 与 $\mathscr{A}$ 中除去 $2^{|A|}-2$ 个(A 的真子集共 $2^{|A|}-2$ 个)外的子集相交，与已知矛盾. 于是 X 的真子集均在 $\mathscr{A}$ 中.

若 $X \notin \mathscr{A}$，则 $|\mathscr{A}| = 2^n - 2$ 为偶数，与上面所证矛盾. 所以 $X \in \mathscr{A}$. $\mathscr{A} = P(X)$ 或 $P(X) - \{\varnothing\}$.

40. 设 $x_1, x_2 \in X$. 由(2)可设 $x_1 \wedge x_2$. 由(3)有 $x_3 \in X$，使 $x_1 \wedge x_3 \wedge x_2$(即 $x_1 \wedge x_3$，$x_3 \wedge x_2$).

类似地，有 x_4，x_5，x_6，$x_7 \in X$，满足：

$x_1 \wedge x_2 \wedge x_3$，$x_4 \wedge x_5 \wedge x_3$，$x_3 \wedge x_6 \wedge x_2$，$x_3 \wedge x_7 \wedge x_6$.

由(1)，$x_3 \neq x_1$，x_2，而 $x_4 \neq x_1$，x_3. 由(2)，$x_4 \neq x_2$.

类似地，$x_5 \neq x_1$，x_2，x_3，x_4；$x_6 \neq x_1$，x_2，x_3，x_4，x_5；$x_7 \neq x_1$，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6.

从而 X 至少有 7 个元素.

另一方面，对任一元数 $\geqslant 7$ 的有限集 X，均可建立一个二元关系 $\wedge$，满足(1)，(2)，(3).

情况 1：$X = \{1, 2, \cdots, n\}$，n 为奇数 ($\geqslant 7$).

对于 $1 \leqslant s < t \leqslant n$，定义：

$s \wedge t$，若 $t - s = 1$ 或小于 $n-1$ 的正偶数，

$t \wedge s$，若 $t - s = n - 1$ 或大于 1 的奇数.

显然(1)，(2)成立. 设有 $x \wedge y$. 1° $y - x = 1$，这时又分两种情况：$x \leqslant n-4$ 时，$x \wedge (x+4) \wedge y$. $x > n-4$ 时，$x \wedge (x-n+4) \wedge y$. 2° $y - x$ 为小于 $n-1$ 的正偶数. 当 $y - x > 2$ 时，$x \wedge (x+2) \wedge y$. 当 $y - x = 2$ 时，$x \wedge (x+1) \wedge y$. 3° $x - y = n - 1$ 或大于 1 的奇数. 当 $y \geqslant 3$ 时，$x - y$ 是大于 1 的奇数，$x \wedge (y-2) \wedge y$. 当 $x \leqslant n-2$ 时，$x \wedge (x+2) \wedge y$. 当 $y = 1$ 而 $x = n-1$ 时，$x \wedge n \wedge y$. 当 $y = 1$ 而 $x = n$ 时，$x \wedge (n-3) \wedge y$. 当 $y = 2$ 而 $x = n$ 时，$x \wedge 1 \wedge y$.

于是(3)成立.

情况 2：$X = \{1, 2, \cdots, n+1\}$，$n$ 为奇数 ($\geqslant 7$).

在 $\{1, 2, \cdots, n\}$ 上定义 $\wedge$ 与情况 1 相同. 此外 $x \wedge (n+1)$，$x = 1$，2，$\cdots$，n.

显然(1)，(2)成立. 设 $x \wedge y$. 若 x，$y \leqslant n$，与情况(1)同样，(3)成立. 若 $y = n+1$，而 $x \leqslant n-1$，则 $x \wedge (x+1) \wedge y$. 若 $y = n+1$ 而 $x = n$，则 $x \wedge 1 \wedge y$. 因此(3)成立.

综上所述，X 的最小元数为 7.