15.1

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 *试计算 (**??**) 所定义的极限:* $\lim\limits_{t\to+\infty}\int_0^1 \frac{t}{t+\sqrt{x}+tx^2}\mathrm{d}x.$

解: 只需再验证 (**??**) 式中极限和积分交换顺序的合理性即可. 选取函数为

$$f(x,s)=\frac{1}{1+s\sqrt{x}+x^2},\quad (x,s)\in[0,1]\times[0,1].$$

显然 $f(x,s)$ 是 $[0,1]^2$ 上的连续函数. 对于 $t=\frac{1}{s}$ 在 $t\to+\infty$ 等价于 $s\to 0^+$. 根据定理 **??**, 即有

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^1\frac{t}{t+\sqrt{x}+tx^2}\mathrm{d}x=\lim_{s\to0^+}\int_0^1\frac{1}{1+s\sqrt{x}+x^2}\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{s\to0^+}\frac{1}{1+s\sqrt{x}+x^2}\mathrm{d}x.$$

因此 (**??**) 式中极限和积分交换顺序的计算是合理的. □

例 2 *设 $b>a>0$. 求积分* $\int_0^1\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x.$

解法 1 (积分号下求导法) 考虑如下的含参数 y 的积分:

$$I(y)=\int_0^1 f(x,y)\mathrm{d}x,\quad 其中\quad f(x,y)=\frac{x^y-x^a}{\ln x},\quad a<y\le b.$$

所要求的积分只不过是 $I(y)$ 在 b 点的值. 注意被积函数当 $x=0$ 和 $x=1$ 时没有定义. 而

$$\lim_{x\to0^+}f(x,y)=\lim_{x\to0^+}\frac{x^y-x^a}{\ln x}=0;$$

及

$$\lim_{x\to1^-}f(x,y)=\lim_{x\to1^-}\frac{x^y-x^a}{\ln x}=\lim_{x\to1^-}\frac{yx^{y-1}-ax^{a-1}}{\frac{1}{x}}=y-a.$$

因此, 分别补充定义 $f(0,y)=0$ 和 $f(1,y)=y-a$, 则易证 $f(x,y)$ 在矩形区域 $D=[0,1]\times[a,b]$ 上是连续函数. 进而

$$f_y(x,y)=x^y,\qquad (x,y)\in D,$$

也是 D 上的连续函数. 因此根据含参变量积分的可微性 (定理 **??**),

$$I'(y)=\int_0^1 f_y(x,y)\mathrm{d}x=\int_0^1 x^y\mathrm{d}x=\frac{1}{y+1}x^{y+1}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{y+1}.$$

等式两端在 $[a,b]$ 上积分, 注意到 $I(a)=0$,

$$I(b)=\int_a^b I'(y)\mathrm{d}y-I(a)=\int_a^b\frac{1}{y+1}\mathrm{d}y=\ln(1+y)\Big|_a^b=\ln\frac{1+b}{1+a}.$$

□

思考题

1. 被积函数的连续性是保证含参变量积分对参变量连续的必要条件吗?
2. 在定理 15.1.3 的证明中, 为什么可以断言 (15.1.6) 式所定义的两个函数是连续的?

习题

1. 求极限.

(1) $\lim\limits_{t\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt[2n]{x^{2n}+t^{2n}}\mathrm{d}x$, n 是正整数; (2) $\lim\limits_{t\to 0}\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{x+t^2x^2}\mathrm{d}x$.

解: (1) 函数 $f(x,t)=\sqrt[2n]{x^{2n}+t^{2n}},(n\in Z_+)$ 在矩形区域 $R=[-1,1]\times\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$ 上连续, 根据定理 15.1.1, 有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\int_{-1}^{1}\sqrt[2n]{x^{2n}+t^{2n}}\mathrm{d}x &= \int_{-1}^{1}\lim_{t\to 0}\sqrt[2n]{x^{2n}+t^{2n}}\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{1}|x|\mathrm{d}x\\ &= \int_{-1}^{0}(-x)\mathrm{d}x+\int_{0}^{1}x\mathrm{d}x\\ &= -\frac{1}{2}x^2\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{2}x^2\Big|_{0}^{1}\\ &= \frac{1}{2}+\frac{1}{2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

(2) 函数 $f(x,t)=\mathrm{e}^{x+t^2x^2}$ 在矩形区域 $R=[0,1]\times[0,1]$ 上连续, 根据定理 15.1.1, 有

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\int_{0}^{1}\mathrm{e}^{x+t^2x^2}\mathrm{d}x &= \int_{0}^{1}\lim_{t\to 0}\mathrm{e}^{x+t^2x^2}\mathrm{d}x\\ &= \int_{0}^{1}\mathrm{e}^{x}\mathrm{d}x\\ &= \mathrm{e}^{x}\Big|_{0}^{1}\\ &= \mathrm{e}-1.\end{aligned}$$

□

2. 求 $I'(x)$, 其中 $I(x)=\int_{3x}^{x^3}\frac{\sin(xy)}{y}\mathrm{d}y$.

解: 函数 $f(y,x)=\frac{\sin(xy)}{y}$ 和 $f_x(y,x)=\cos xy$ 均为连续函数, 令 $\varphi(x)=3x,\psi(x)=x^3$, 则 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$

均可导, 由定理 15.1.4 可得

$$
\begin{aligned}
I'(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}I(x) \\
&= \int_{\varphi(x)}^{\psi(x)} \frac{\partial f(y,x)}{\partial x}\mathrm{d}y + f(\psi(x),x)\psi'(x) - f(\varphi(x),x)\varphi'(x) \\
&= \int_{3x}^{x^3} \cos xy\mathrm{d}y + f(x^3,x)\cdot 3x^2 - f(3x,x)\cdot 3 \\
&= \frac{\sin xy}{x}\Big|_{y=3x}^{y=x^3} + \frac{\sin(x\cdot x^3)}{x^3}\cdot 3x^2 - \frac{\sin(x\cdot 3x)}{3x}\cdot 3 \\
&= \frac{\sin x^4}{x} - \frac{\sin 3x^2}{x} + 3\frac{\sin x^4}{x} - \frac{\sin 3x^2}{x} \\
&= 4\frac{\sin x^4}{x} - 2\frac{\sin 3x^2}{x} \\
&= \frac{1}{x}(4\sin x^4 - 2\sin 3x^2).
\end{aligned}
$$

□

3. 应用积分号下对参数积分的方法, 求下列积分 (设 $b > a > 0$):

(1) $\displaystyle\int_0^1 \sin(\ln x)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$; (2) $\displaystyle\int_0^1 \cos(\ln x)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x$.

解: (1) 因为 $\displaystyle\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \frac{x^y}{\ln x}\Big|_{y=a}^{y=b} = \int_a^b x^y\mathrm{d}y$, 于是有

$$
\int_0^1 \sin(\ln x)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \sin(\ln x)\left(\int_a^b x^y\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1\int_a^b (\sin(\ln x))\cdot(x^y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x,
$$

记 $f(x,y) = (\sin(\ln x))\cdot(x^y), \quad (x,y)\in(0,1]\times[a,b]$, 令 $f(0,y)=0$, 则 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续, 所以

$$
\int_0^1\int_a^b (\sin(\ln x))\cdot(x^y)\mathrm{d}y\mathrm{d}x = \int_a^b\left(\int_0^1 \sin(\ln x)x^y\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,
$$

下求 $\displaystyle\int_0^1 \sin(\ln x)x^y\mathrm{d}x$:

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \sin(\ln x)x^y\mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{y+1}\mathrm{d}(-\cos(\ln x)) \\
&= -x^{y+1}\cos(\ln x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \cos(\ln x)\mathrm{d}(x^{y+1}) \\
&= -1-(y+1)\int_0^1 \cos(\ln x)x^y\mathrm{d}x \\
&= -1-(y+1)\int_0^1 x^{y+1}\mathrm{d}(\sin(\ln x)) \\
&= -1-(y+1)x^{(}y+1)\sin(\ln x)\Big|_0^1 + (y+1)^2\int_0^1 \sin(\ln x)x^y\mathrm{d}x \\
&= -1+(y+1)^2\int_0^1 \sin(\ln x)x^y\mathrm{d}x,
\end{aligned}
$$

从而, 得

$$
(1+(y+1)^2)\int_0^1 \sin(\ln x)x^y\mathrm{d}x = -1
$$

故

$$\sin(\ln x)\int_0^1 x^y \mathrm{d}x = -\frac{1}{1+(y+1)^2},$$

因此,

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \sin(\ln x)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x &= \int_a^b \left(\int_0^1 \sin(\ln x) x^y \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_a^b -\frac{1}{1+(y+1)^2}\mathrm{d}y \\
&= -\arctan(y+1)\Big|_a^b \\
&= \arctan(a+1) - \arctan(b+1).
\end{aligned}$$

(2) 因为 $\dfrac{x^b - x^a}{\ln x} = \dfrac{x^y}{\ln x}\Big|_{y=a}^{y=b} = \displaystyle\int_a^b x^y \mathrm{d}y$, 于是有

$$\int_0^1 \cos(\ln x)\frac{x^b - x^a}{\ln x}\mathrm{d}x = \int_0^1 \cos(\ln x)\left(\int_a^b x^y \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_0^1 \left(\int_a^b \cos(\ln x) x^y \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x,$$

记 $f(x,y) = (\cos(\ln x))\cdot x^y, \quad (x,y)\in(0,1]\times[a,b]$, 令 $f(0,y)=0$, 则 $f(x,y)$ 在 $[0,1]\times[a,b]$ 上连续, 所以

$$\int_0^1 \left(\int_a^b \cos(\ln x) x^y \mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x = \int_a^b \left(\int_0^1 \cos(\ln x) x^y \mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y,$$

下求 $\displaystyle\int_0^1 \cos(\ln x) x^y \mathrm{d}x$:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \cos(\ln x) x^y \mathrm{d}x &= \int_0^1 x^{y+1}\mathrm{d}(\sin(\ln x)) \\
&= x^{y+1}\sin(\ln x)\Big|_0^1 - \int_0^1 \sin(\ln x)\mathrm{d}(x^{y+1}) \\
&= -(y+1)\int_0^1 \sin(\ln x) x^y \mathrm{d}x \\
&= -(y+1)\int_0^1 x^{y+1}\mathrm{d}(-\cos(\ln x)) \\
&= (y+1)x^{(}y+1)\cos(\ln x)\Big|_0^1 - (y+1)^2\int_0^1 \cos(\ln x) x^y \mathrm{d}x \\
&= y+1-(y+1)^2\int_0^1 \cos(\ln x) x^y \mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

从而, 得

$$\left(1+(y+1)^2\right)\int_0^1 \sin(\ln x) x^y \mathrm{d}x = y+1,$$

故

$$\int_0^1 \cos(\ln x) x^y \mathrm{d}x = \frac{y+1}{1+(y+1)^2},$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \cos(\ln x)\frac{x^b-x^a}{\ln x}\mathrm{d}x &= \int_a^b\left(\int_0^1\cos(\ln x)x^y\mathrm{d}x\right)\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b\frac{y+1}{1+(y+1)^2}\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\int_a^b\frac{1}{1+(y+1)^2}\mathrm{d}(1+(y+1)^2)\\ &= \frac{1}{2}\ln(1+(y+1)^2)\Big|_a^b\\ &= \frac{1}{2}(\ln(1+(b+1)^2-\ln(1+(a+1)^2)\\ &= \frac{1}{2}\ln\frac{1+(b+1)^2}{1+(a+1)^2}.\end{aligned}$$

□

4. 设函数 $f(s)$ 和 $g(s)$ 分别二阶和一阶连续可导, 则二元函数

$$u(x,t)=\frac{1}{2}[f(x-at)+f(x+at)]+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}g(s)ds$$

是弦振动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的解.

证明. 先求出函数 $u(x,t)$ 关于 x 与 t 的一阶偏导数 u_t 与 u_x:

$$\begin{aligned}u_t&=\frac{1}{2}[-af'(x-at)+af'(x+at)]+\frac{1}{2a}[ag(x+at)+ag(x-at)],\\ u_x&=\frac{1}{2}[f'(x-at)+f'(x+at)]+\frac{1}{2a}[g(x+at)-g(x-at)],\end{aligned}$$

基于上面一阶偏导数, 再求出函数 $u(x,t)$ 关于 x 与 t 的二阶偏导数 u_{tt} 与 u_{xx}:

$$\begin{aligned}u_{tt}&=\frac{a^2}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{a}{2}[g'(x+at)-g'(x-at)],\\ u_{xx}&=\frac{1}{2}[f''(x-at)+f''(x+at)]+\frac{1}{2a}[g'(x+at)-g'(x-at)],\end{aligned}$$

所以, 有

$$u_{tt}=a^2u_{xx},$$

因此, 二元函数 $u(x,t)$ 是弦振动方程 $u_{tt}=a^2u_{xx}$ 的解. ∎

---

5. 设 $u(x)=\int_0^\pi\cos(n\theta-x\sin\theta)\mathrm{d}\theta$, 证明 $u(x)$ 满足如下的 Bessel 常微分方程

$$x^2u''+xu'+(x^2-n^2)u=0.$$

证明. 分别求出 $u(x)$ 的一阶导数 u' 和二阶导数 u'':

$$\begin{aligned}u'&=\int_0^\pi-\sin(n\theta-x\sin\theta)\cdot(-\sin\theta)\mathrm{d}\theta=\int_0^\pi\sin(n\theta-x\sin\theta)\sin\theta\mathrm{d}\theta,\\ u''&=\int_0^\pi\cos(n\theta-x\sin\theta)\cdot\sin\theta(\sin\theta)\mathrm{d}\theta=-\int_0^\pi\cos(n\theta-x\sin\theta)\sin^2\theta\mathrm{d}\theta,\end{aligned}$$

注意到:

$$-x^2\sin^2\theta+(x^2-n^2)=x^2\cos^2\theta-n^2=(x\cos\theta+n)(x\cos\theta-n), \tag{1}$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(n\theta-x\sin\theta)=n-x\cos\theta, \tag{2}$$

于是,

$$\begin{aligned}
x^2u''+(x^2-n^2)u &= -x^2\int_0^{\pi}\sin^2\theta\cos(n\theta-x\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\
&\quad +(x^2-n^2)\int_0^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)[-x^2\sin^2\theta+(x^2-n^2)]\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^{\pi}\cos(n\theta-x\sin\theta)(x\cos\theta+n)(x\cos\theta-n)\mathrm{d}\theta \quad (\text{利用}(1)). \\
&= -\int_0^{\pi}(x\cos\theta+n)\mathrm{d}[\sin(n\theta-x\sin\theta)] \quad (\text{利用}(2)) \\
&= -\sin(n\theta-x\sin\theta)(x\cos\theta+n)\Big|_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\sin(n\theta-x\sin\theta)\mathrm{d}(x\cos\theta+n) \\
&= \int_0^{\pi}\sin(n\theta-x\sin\theta)(-x\sin\theta)\mathrm{d}\theta \\
&= -xu',
\end{aligned}$$

因此, $u(x)$ 满足 $x^2u''+xu'+(x^2-n^2)u=0$. ∎

6. 运用对参数求导的方法, 求含参变量积分:

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2x+\cos^2x)\mathrm{d}x$ ($a\neq 0$);

(2) $I(t)=\displaystyle\int_0^{\pi}\ln(1-2t\cos\tau+t^2)\mathrm{d}\tau$, 其中 $|t|<1$.

解: (1) 设 $I(a)=\displaystyle\int_0^{\pi/2}\ln(a^2\sin^2x+\cos^2x)\mathrm{d}x$, $(a\neq 0)$, 则

(i) 当 $a=\pm 1$ 时,

$$\begin{aligned}
I(a) &= \int_0^{\pi/2}\ln(\sin^2x+\cos^2x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2}\ln 1\mathrm{d}x \\
&= 0,
\end{aligned}$$

(ii) 当 $a\neq\pm 1$ 时, 由于

$$I'(a)=\int_0^{\pi/2}\frac{2a\sin^2x}{a^2\sin^2x+\cos^2x}\mathrm{d}x,$$

记

$$A=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2x}{a^2\sin^2x+\cos^2x}\mathrm{d}x, \quad B=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos^2x}{a^2\sin^2x+\cos^2x}\mathrm{d}x,$$

则有

$$a^2A+B=\int_0^{\pi/2}1\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}, \tag{1}$$

$$\begin{aligned}
A+B &= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}x}{a^2\sin^2 x+\cos^2 x} \\
&= \int_0^{\pi/2} \frac{\mathrm{d}(\tan x)}{a^2\tan^2 x+1} \\
&= \frac{1}{a}\int_0^{\pi/2} \frac{1}{1+(a\tan x)^2}\mathrm{d}(a\tan x) \\
&= \frac{1}{a}\arctan(a\tan x)\Big|_0^{\frac{2}{\pi}} \\
&= \frac{\pi}{2a},
\end{aligned} \tag{2}$$

由 (1),(2) 联立, 解得

$$A=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{a(a+1)},$$

所以,

$$I'(a)=2aA=\frac{\pi}{a+1}$$

对 a 积分, 得

$$I(a)=\int\frac{\pi}{a+1}\mathrm{d}a=\pi\ln|a+1|+C,\quad (\text{其中 C 为任意常数})$$

又由

$$I(0)=\int_0^{\pi/2}\ln\cos^2 x\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{1}{2},$$

注 1 证 $\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$：事实上,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\ln\sin x\mathrm{d}x &= \int_0^{\pi/2}\ln(\frac{1}{2}\sin 2x)\mathrm{d}x \\
&= \int_0^{\pi/2}\ln\frac{1}{2}\mathrm{d}x+\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x \\
&= \left(\ln\frac{1}{2}\right)\Big|_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x \\
&= \frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}+\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x,
\end{aligned}$$

注意到,

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2}\ln(\sin 2x)\mathrm{d}x &= 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin t\mathrm{d}t \\
&= \int_0^{\pi/2}\ln\sin t\mathrm{d}t,
\end{aligned}$$

因此, $\int_0^{\pi/2}\ln\cos x\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\ln\frac{1}{2}$.

故有,

$$C=\pi\ln\frac{1}{2}=-\pi\ln 2,$$

因此,

$$I(a)=\pi\ln|a+1|-\pi\ln 2=\pi\ln\frac{|a+1|}{2},$$

综上可得,

$$I(a)=\begin{cases}0, & a=-1\\ \pi\ln\dfrac{|a+1|}{2}\quad, & a\neq 0\quad 且\quad a\neq -1\quad .\end{cases}$$

(2)

□

(i)$t=0$ 时,

$$I(0)=\int_0^{\pi}\ln 1\mathrm{d}\tau=0,$$

(ii) $|t|<1$ 且 $t\neq 0$ 时, 由于

$$I'(t)=\int_0^{\pi}\frac{2t-2\cos\tau}{1-2t\cos\tau+t^2}\mathrm{d}\tau,$$

作变换 $x=\tan\frac{\tau}{2}$, 则

$$\cos\tau=\frac{1-x^2}{1+x^2},\quad \mathrm{d}\tau=\frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x,$$

故有

$$\begin{aligned}
I'(t) &= \int_0^{\infty}\frac{2t-2\cdot\dfrac{1-x^2}{1+x^2}}{1-2t\cdot\dfrac{1-x^2}{1+x^2}+t^2}\cdot\frac{2}{1+x^2}\mathrm{d}x\\
&= 4\int_0^{\infty}\frac{t-1+(t+1)x^2}{(1+x^2)\left((1+t^2)x^2+(1-t)^2\right)}\mathrm{d}x\\
&= 4\int_0^{\infty}\left(\frac{1}{2t}\cdot\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\cdot\frac{1}{(1+t^2)x^2+(1-t)^2}\right)\mathrm{d}x\\
&= \frac{2}{t}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}+2\left(t-\frac{1}{t}\right)\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+t^2)x^2+(1-t)^2}\\
&= \frac{2}{t}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}-\frac{2}{t}\int_0^{\infty}\frac{\mathrm{d}\left(\dfrac{1+t}{1-t}x\right)}{1+\left(\dfrac{1+t}{1-t}\right)^2x^2}\\
&= \frac{2}{t}\left(\arctan x\Big|_0^{+\infty}-\arctan\left(\frac{1+t}{1-t}x\right)\Big|_0^{+\infty}\right)\\
&= \frac{2}{t}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

故 $I(t)=C$, 又由 $I(0)=0$, 且 $I(t)$ 为连续函数因此, $I(t)=0\quad(|t|<1)$.