非线性孤立波——Dirac 与 klein-gordon 方程

作者：程天任

对于非线性方程的研究始于 19 世纪末。但是，真正的发展是从 20 世纪 60 年代开始。如今，非线性方程已经渗透到自然科学，工程，社会科学的每个领域之中。并且，现今已有大批数学工作者投身到非线性科学研究的潮流中。

本文研究非线性孤立波中的 DIRAC 与 KLEIN-GORDON 方程。共四个部分，分别为：

1.能量守恒（文献 1）

2.判别准则（文献 2）

3.解析函数（文献 3）

4.矩阵分析（文献 3）

首先，我们考虑 klein-gordon 方程中的能量守恒问题。

1. 能量守恒

对于能量守恒，有孤立波方程：

$$\psi''(x,t)=\Delta\psi(x,t)-2\partial_{\lambda}v(x,|\psi(x,t)|^{2})\psi(x,t)$$

一种特殊情况是，设 $v=\frac{m^{2}}{2}\lambda+z$，得到：

$$\psi''(x,t)=\Delta\psi(x,t)-m^2\psi-2\partial_\lambda z(x,\left|\psi(x,t)\right|^2)\psi(x,t)$$

这里，我们考虑将方程转化为线性形式。并探讨这种转化的条件。

因为，$V_X(\lambda)=V(\lambda)=\sum_0^p C_q\lambda^{q+1}$

所以，我们采用级数解法来展开方程中的非线性项。

因为，$v=\frac{m^2}{2}\lambda+z$

所以，有：$m^2+2\partial_\lambda z(x,\lambda)=m^2+2\partial_\lambda(v-\frac{m^2}{2}\lambda)=0$

即，$2\partial_\lambda v=0$

另一方面，根据引理 3.1

可设 $B_X(\lambda,\mu)=\frac{V_X(\lambda)-V_X(\mu)}{\lambda-\mu}=k$

其中，$V_X(\lambda)=v(\varepsilon X,\lambda)=\lambda^{p+1}$

因为 ，$\partial_\lambda v=0$

$$v(x,\lambda)=\sum_0^\infty\sum_0^n a_{nj}x^{n-q}\lambda^q$$

所以，$Y'=\sum_0^\infty\sum_1^n a_{nq}x^{n-q+1}q\lambda^{q-1}=\sum_0^\infty\sum_0^n a_{n(q+1)}x^{n-q}(q+1)\lambda^q$

考虑：$y=V_X(\lambda)=k(\lambda-\mu)+V_X(\mu)=k\lambda+\mu^{p+1}-k\mu$

设$b=\mu^{p+1}-k\mu$

我们可以写出方程：

$Y'+y-kx-b=0$（p=1，2，3，4）

因为，$Y'=\sum_0^\infty\sum_0^n a_{n(q+1)}x^{n-q}(q+1)\lambda^q$

$$y=\sum_0^p C_q\lambda^{q+1}$$

得到系数递推公式：

$$-C_q=(q+2)\sum_0^\infty a_{n(q+2)}x^{n-q-1}$$

其中，

$$C_{-1}=b-\sum_0^\infty a_{n1}x^n$$

$$C_0=k-2\sum_0^\infty a_{n2}x^{n-1}$$

如果，我们设：$C_{q+2}=\sum_0^\infty a_{n(q+2)}$

有，$-C_q=(q+2)C_{q+2}\sum_0^\infty x^{n-q-1}$

于是，我们得到y_1,y_2的公式：

$$y_1 = C_{-1}\left(1 - \frac{1}{\sum_0^\infty x^n}\lambda^2 + \frac{1}{1\bullet 3}\frac{1}{\sum_0^\infty x^{2n-2}}\lambda^4 - \frac{1}{1\bullet 3\bullet 5}\frac{1}{\sum_0^\infty x^{3n-6}} + \ldots\ldots\right)$$

$$y_2 = C_0\left(\lambda - \frac{1}{2\sum_0^\infty x^{n-1}}\lambda^3 + \frac{1}{2\bullet 4}\frac{1}{\sum_0^\infty x^{2n-4}}\lambda^5 - \frac{1}{2\bullet 4\bullet 6}\frac{1}{\sum_0^\infty x^{3n-9}}\lambda^7\ldots\ldots\right)$$

考虑$B_X(\lambda,\mu)$：

当p为偶数时，$\dfrac{\mu^{p+1}-\lambda^{p+1}}{\mu-\lambda} = \mu^p + \mu^{p-1}\lambda + \ldots\ldots + \mu\lambda^{p-1} + \lambda^p$

当p为奇数时，$\dfrac{\mu^{p+1}-\lambda^{p+1}}{\mu-\lambda} = (\mu+\lambda)(\mu^2+\lambda^2)\ldots\ldots$

或者，$\dfrac{\mu^{p+1}-\lambda^{p+1}}{\mu-\lambda} = (\mu^{\frac{p+1}{2}} + \lambda^{\frac{p+1}{2}})(\mu^{\frac{p-1}{2}} + \ldots\ldots)$

因为，$B_X(\lambda,\mu) = \dfrac{V_X(\lambda)-V_X(\mu)}{\lambda-\mu} = k$

所以，取 p=4 的情况：

$$f(\lambda,\mu) = \mu^4 + \mu^3\lambda + \mu^2\lambda^2 + \mu\lambda^3 + \lambda^4$$

这里，我们用y_2得到：

$$C_0\left(\lambda - \frac{1}{2\sum_0^\infty x^{n-1}}\lambda^3 + \frac{1}{2\bullet 4}\frac{1}{\sum_0^\infty x^{2n-4}}\lambda^5\right) =$$

$$(k-2\sum_{0}^{\infty}a_{n2}x^{n-1})\,(\lambda-\frac{1}{2\sum_{0}^{\infty}x^{n-1}}\lambda^{3}+\frac{1}{2\bullet 4}\frac{1}{\sum_{0}^{\infty}x^{2n-4}}\lambda^{5})=$$

$$(\mu^{4}+\mu^{3}\lambda+\mu^{2}\lambda^{2}+\mu\lambda^{3}+\lambda^{4}-2\sum_{0}^{\infty}a_{n2}x^{n-1})\bullet$$

$$(\lambda-\frac{1}{2\sum_{0}^{\infty}x^{n-1}}\lambda^{3}+\frac{1}{2\bullet 4}\frac{1}{\sum_{0}^{\infty}x^{2n-4}}\lambda^{5})=\lambda^{p+1}$$

进而，确定$\sum_{0}^{\infty}x^{n}$

下面，我们来考虑定解问题：

$$\psi^{''}(x,t)=\Delta\psi(x,t)$$

我们考虑降维法，

$$\psi=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\frac{\varphi_{1}}{\sqrt{t^{2}-(x-x^{'})^{2}-(y-y^{'})^{2}}}dxdy$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\varphi_{2}}{\sqrt{t^{2}-(x-x^{'})^{2}-(y-y^{'})^{2}}}dxdy$$

接下来，我们考虑$(x-x^{'})^{2}$与$(y-y^{'})^{2}$

注：这里引用了 REMARK2.12 的结果。

$$|u|^{2}-|v|^{2}=RE\left|(u+v)(u^{-}-v^{-})\right|$$

$$\sum(\left|\psi_X^{T+1}-\psi_X^T\right|^2-\left|\psi_X^T-\psi_X^{T-1}\right|^2)=RE\sum(\psi_X^{-T+1}-\psi_X^{-T-1})(\psi_X^{T+1}-2\psi_X^T+\psi_X^{T-1}$$

这里，我们加上条件$Y=X$.

例如，我们取函数$W=u+iv=\frac{1}{z}$

$$z=x+iy=\frac{u-iv}{u^2+v^2}$$

有公式：

$$\frac{u}{u^2+v^2}=\frac{-v}{u^2+v^2}$$

即，$u=-v$

考虑到$W=u+iv=\frac{1}{z}$

所以，设$W=u+iv=\left|\psi_X^{T+1}-\psi_X^T\right|^2+i\left|\psi_X^T-\psi_X^{T-1}\right|^2$

考虑方程，

$$\sum(\left|\psi_X^{T+1}-\psi_X^T\right|^2-\left|\psi_X^T-\psi_X^{T-1}\right|^2)=RE\sum(\psi_X^{-T+1}-\psi_X^{-T-1})(\psi_X^{T+1}-2\psi_X^T+\psi_X^{T-1})$$

$$\sum(\left|\psi_X^{T+1}-\psi_X^T\right|^2+\left|\psi_X^T-\psi_X^{T-1}\right|^2)=0$$

去掉$\sum$ ，我们得到：

$$\left|\psi_X^{T+1}-\psi_X^T\right|^2=-\left|\psi_X^T-\psi_X^{T-1}\right|^2=$$

$$\frac{1}{2}RE(\psi^{-}{}_{X}^{T+1}-\psi^{-}{}_{X}^{T-1})(\psi_{X}^{T+1}-2\psi_{X}^{T}+\psi_{X}^{T-1})$$

我们设：

$$\psi_{X}^{T+1}=u_3+iv_3$$

$$\psi_{X}^{T}=u_2+iv_2$$

$$\psi_{X}^{T-1}=u_1+iv_1$$

代入方程，得到：

$$RE\sum(\psi^{-}{}_{X}^{T+1}-\psi^{-}{}_{X}^{T-1})(\psi_{X}^{T+1}-2\psi_{X}^{T}+\psi_{X}^{T-1})$$

$$=RE(\psi_{X}^{T+1^2}-2\psi_{X}^{T}\psi^{-}{}_{X}^{T+1}+\psi_{X}^{T-1}\psi^{-}{}_{X}^{T+1}-\psi_{X}^{T+1}\psi^{-}{}_{X}^{T-1}+2\psi_{X}^{T}\psi^{-}{}_{X}^{T-1}$$
$$-\psi_{X}^{T-1^2})$$

代入ψ的表达式，得到：

$$RE\sum(\psi^{-}{}_{X}^{T+1}-\psi^{-}{}_{X}^{T-1})(\psi_{X}^{T+1}-2\psi_{X}^{T}+\psi_{X}^{T-1})=$$

$$u_3^2+v_3^2-u_1^2-v_1^2+2(u_1u_2+v_1v_2)-2(u_2u_3+v_2v_3)$$

考虑，$\left|\psi_{X}^{T+1}-\psi_{X}^{T}\right|^2=-\left|\psi_{X}^{T}-\psi_{X}^{T-1}\right|^2$

$$=u_3^2-v_3^2+u_2^2-v_2^2-2(u_3u_2+iu_3v_2+iu_2v_3-iu_3v_3-iu_2v_2-v_2v_3)$$

所以，$u_3=u_2$

$$=-[u_2^2-v_2^2+u_1^2-v_1^2-2(u_2u_1+iu_2v_1+iu_1v_2-iu_2v_2-iu_1v_1-v_1v_2)]$$

同理，$u_2=u_1$

令两边相等，得到：

$$2(u_1u_2+v_1v_2)-2(u_2u_3+v_2v_3)+v_3^2-v_1^2=-v_3^2-v_2^2+2v_2v_3$$

即，$2(v_1v_2-v_2v_3)+v_3^2-v_1^2=-v_3^2-v_2^2+2v_2v_3$

$$2(v_1v_2-v_2v_3)+v_3^2-v_1^2=v_1^2+v_2^2-2v_2v_1$$

我们得到：$v_1=v_2=v_3$

于是，我们得到波动方程：

$$\psi=\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\iint\frac{\varphi_1}{t}dxdy$$

$$+\frac{1}{2\pi}\iint\frac{\varphi_2}{t}dxdy$$

解答：我们考虑如何确定$\sum_0^\infty x^n$这个问题。对于p为奇数的情况，我们考虑根与系数关系：$\sum\lambda_i=\sum a_{ii}$。对于$p$为偶数的情况，考虑：$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^n+\sum(-1)^iS_i\lambda^{n-i}$（$S_i$为 A 所有 i 阶主子式之和）

2.判别准则

这里，我们考虑 VAKHITOV -KOLOKOLOV 准则。首先，我们

推出一个结论。然后，我们利用这个结论来判别一些内积的大小。

准则：如果$\lambda\in\sigma_d(JL),\lambda>0$。其中，$JL$是孤立波$\phi_w(x)=e^{-iwt}$的线性形式（见文献 2）。充要条件是$\frac{d}{dw}\|\phi_w\|_{L^2}^2>0$.

我们知道，矩阵 J 与 L 有如下形式：

$$J=\begin{bmatrix}0........1\\-1......0\end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix}L_+.......0\\0.........L_-\end{bmatrix}$$

$$L_-=-\frac{1}{2}\partial_x^2+g(\phi^2)-w$$

$$L_+=L_-+2g'(\phi^2)\phi^2$$

对于阵 JL，我们有：

$$JL=L_+L_-$$

定理：对于自伴算子 A,B。AB 是自伴的充要条件是 AB=BA。

考虑L_+L_-的交换性，我们有：

$$L_+L_-=L_-L_+$$

因为$L_-^{\frac{1}{2}}L_+L_-^{\frac{1}{2}}$是自伴的。

所以，

$$JL=\begin{bmatrix}0..........L_-\\-L_+......0\end{bmatrix}$$

考虑自伴算子的性质，我们有：

$$L_{+}+L_{-}=0$$

因为，$\lambda^{2}L_{-}^{-1}V=-L_{+}V$

所以，$\lambda^{2}L_{-}^{-1}V=L\_V$

$$L_{-}=\pm\lambda, L_{+}=\pm\lambda$$

我们设 $L\_r=\alpha r+\beta\phi_{w}$

因为：$\frac{d}{dw}\|\phi_{w}\|_{L^{2}}^{2}>0$

所以，$\left\langle\phi_{w}, L_{-}^{-1}\phi_{w}\right\rangle>0$

另一方面，

$$\phi_{w}=\frac{(\lambda-\alpha)r}{\beta}$$

$$\phi_{w}=\frac{(-\lambda-\alpha)r}{\beta}$$

因为，$<r,\phi_{w}>=0,<r,r>=1$

所以，$\lambda=\pm a$

即，$L_{+}, L_{-}=\pm a$

根据这个结果，我们举出三个内积的例子：

例 1：$\alpha_{j}\alpha_{k}+\alpha_{k}\alpha_{j}=2\delta_{jk}I_{N}, \alpha_{j}\beta+\beta\alpha_{j}=0, \beta^{2}=I_{N}$

因为，$\beta=\begin{bmatrix} I_{N/2}\ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0\ldots\ldots\ldots -I_{N/2}\end{bmatrix}$

所以，$\beta = -I^2_{N/2} < 0$

当 $j=k$ 时，$\alpha_j{}^2 = I_N$

又有，$\beta^2 = I_{N/2}{}^4 = I_N$

所以，$\alpha_j = \pm\beta$

即，$\lambda = I_{N/2}{}^2$

例 2：$L(-i\phi) = L\_(-i\phi) + 2RE(\phi^* \beta(-i\phi)) = 0$

明显的，有：$\pm i\lambda\phi = 2RE(i\beta\phi\phi^*)$

即，$\lambda = \pm 2RE(\beta\phi^*)$

$$\lambda = \pm 2RE(\beta\phi^*) = \pm 2RE(\beta \frac{(\lambda-\alpha)r}{\beta} w)$$

$$\lambda = \pm 2RE((\lambda - \alpha)rw$$

我们取正号，得到：

$$\lambda = \frac{2RE(arw)}{2rw-1}$$

取上例中的a_j，得到:

$$\lambda = \frac{2\beta rw}{2rw-1} = I_{N/2}{}^2$$

有结果，

$$r = \frac{1}{2} \frac{I_{N/2}{}^2}{I_{N/2}{}^2 w - 2\beta w}$$

例 3：考虑矩阵，

$$\Phi = \begin{bmatrix} RE\phi \\ IM\phi \end{bmatrix}, J = \begin{bmatrix} 0 \ldots\ldots\ldots\ldots I_N \\ -I_N \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \end{bmatrix}$$

$$A_J = \begin{bmatrix} REa_j \ldots\ldots\ldots\ldots -IMa_j \\ IMa_j \ldots\ldots\ldots\ldots REa_j \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta \ldots\ldots\ldots\ldots 0 \\ 0 \ldots\ldots\ldots\ldots \beta \end{bmatrix}$$

对于 REMARK4.2 中的 4.6，4.7：

$$\left\langle A_K\Phi - 2wx_k J\Phi, J\partial_K \Phi \right\rangle = \frac{T}{n} + wQ = T + V$$

$$\left\langle A_K\Phi - 2wx_k J\Phi, J\partial_K \Phi \right\rangle = \left\langle A_K\Phi, J\partial_K \Phi \right\rangle + w\int \phi^* \phi dx$$

设$a_j = u + iv$，有：

$$\left\langle A_K\Phi, J\partial_K \Phi \right\rangle = \left\langle u^2 + v^2, I_N{}^2 L \right\rangle \begin{bmatrix} RE\phi \\ IM\phi \end{bmatrix}$$

我们引用上面两个例子的结果：

$$u = \beta$$

$$v^2 - i\beta v - \beta^2 + I_N = 0$$

所以，

$$\left\langle u^2 + v^2, I_N{}^2 L \right\rangle = \left\langle \beta^2 + \beta^2 + i\beta v - I_N, I_N{}^2 L \right\rangle$$

因为$L = L_+ L_-$。并且，解出$v = \gamma$。

我们代入上式，得到：

$$\left\langle \beta^2+\beta^2+i\beta v-I_N, I_N{}^2 L\right\rangle=\left\langle 2\beta^2+i\beta\gamma-I_N, I_N a^2\right\rangle$$

即，$\left\langle 2\beta^2+i\beta\gamma-I_N, I_N a^2\right\rangle\begin{bmatrix} RE\phi \\ IM\phi \end{bmatrix}+w\int\phi^*\phi dx$

$=T+V$

进而，解出$\begin{bmatrix} RE\phi \\ IM\phi \end{bmatrix}$

解答：根据上面的推论与例 2，我们可以确定关于 r 的条件。根据这个条件，运用例 3 的结果。我们可以求出关于 dirac 方程的特解。另外，需要注意的是α_j是实矩阵这个条件。

3.解析函数

这里，我们考虑解析函数：

$$\sum(\xi,w)=\frac{e^{-i\xi X_I}\rho(\xi)}{\xi^2+m^2-w^2}$$

根据引理 2.9，有：

$$\left|\sum(\xi,w)\right|\le\int\left|\frac{\rho(\xi)}{\xi^2+m^2-w^2}\right|\frac{d^n\xi}{(2\pi)^n}\le\int\frac{|\rho(\xi)|}{m|\operatorname{Im}w|}\frac{d^n\xi}{(2\pi)^n}\le\frac{c}{|\operatorname{Im}w|}$$

考虑傅立叶积分，我们取函数：

$$g(u)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{-iut}dt$$

其中，$f(\xi)=\dfrac{\rho(\xi)}{\xi^2+m^2-w^2}$

我们得到变换公式：

对于偶函数，

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\cos utdt$$

对于奇函数，

$$g(u)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f(t)\sin utdt$$

对于奇函数的情况：

$$g(u)\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left|\frac{\rho(\xi)}{\xi^2+m^2-w^2}\right|\frac{d^n\xi}{(2\pi)^n}$$

即，$\sqrt{\dfrac{2}{\pi}}\displaystyle\int_0^\infty f(t)\sin utdt\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\left|\frac{\rho(\xi)}{\xi^2+m^2-w^2}\right|\frac{d^n\xi}{(2\pi)^n}$

$$\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{c}{|\operatorname{Im}w|}$$

因为，

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$$

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$$

代入方程，得到：

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\sin utdt=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^{\infty} f(t)\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}dt$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{i}\int_0^{\infty} f(t)(\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}-e^{-iz})dt$$

$$=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{i}\int_0^{\infty} f(t)(\cos z-e^{-iz})dt\le\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{c}{|\mathrm{Im}\,w|}$$

我们得到，

$$\int_0^{\infty} f(t)\cos zdt\le\frac{c}{|\mathrm{Im}\,w|}(1+\frac{i}{2})$$

对于偶函数，

$$\int_0^{\infty} f(t)\sin zdt\le\frac{c}{|\mathrm{Im}\,w|}(i+\frac{1}{2i})$$

接下来，我们考虑命题 3.3。通过构造两种集合，来进一步探讨这个问题：

$$W^{\varepsilon}=\{\left|w-\sqrt{\lambda^2+m^2}\right|<\varepsilon\}$$

我们构造一个等价的集合：

$$V^{\varepsilon}=\{\left|\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right|\to 0,n\to\infty\}$$

对于V^{ε}，具有性质：

因为 V 是有上界集合，记 N1 是 A 中的最大自然数，令 N2=N1+1。

取 M0:$\sqrt{m_0}>\sqrt{n_0}-a$

$$\sqrt{n_2} < \sqrt{n_1} + b - a < \sqrt{m_0} + b$$

考虑W^{ε}与V^{ε}的联系，

$$\left| w - \sqrt{\lambda^2 + m^2} \right| = \left| \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \right|$$

$$\frac{\varepsilon}{w + \sqrt{\lambda^2 + m^2}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{2\sqrt{n}}$$

$$\sqrt{\lambda^2 + m^2} = \varepsilon(\sqrt{n} - \frac{1}{2})$$

因为，$\sqrt{n_2} - \sqrt{n_1} < b - a$

所以，$\sqrt{\lambda^2 + m^2 + 1} = \sqrt{\varepsilon^2 n + 1} = 1$

用级数公式$(1+x)^n$展开：

我们取：$m = \varepsilon$，$\lambda^2 = \varepsilon^2[(\sqrt{n} - \frac{1}{2})^2 - 1]$

$$\int_{0W}^{\infty} f(t)\cos z dt = 2\varepsilon \int_{0R}^{\infty} f(t)\cos z dt \le \frac{2c\varepsilon}{|\operatorname{Im} w|}(1 + \frac{i}{2}) = 2c(1 + \frac{i}{2})$$

$$\int_{0W}^{\infty} f(t)\sin z dt \le 2c(i + \frac{1}{2i})$$

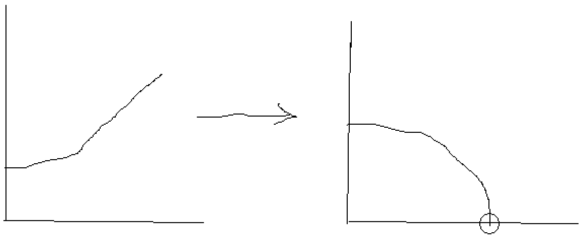
其中，$(\frac{\lambda}{m})^2 = [(\sqrt{n} - \frac{1}{2})^2 - 1]$

即，$\frac{\lambda}{m} = \sqrt{[(\sqrt{n} - \frac{1}{2})^2 - 1]}$

取$a = 1/2$得，

$$(\sqrt{n+1}-b)^2<(\sqrt{n}-\frac{1}{2})^2<m_0.........(b>1/2)$$

解答：构造一个等价的集合，相当于实现了如下的图表转换：



我们取 N 足够大，逼近图二中的奇点。这样，我们可以得到如上所述的正余弦关系。

4.矩阵分析

这里，我们研究如下的矩阵形式：

$$\sum_1^M a_J\begin{bmatrix} e^{-ik\theta_1 Y_J} \\ .... \\ e^{-ik\theta_M Y_J}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix} e^{-ik\theta_1 Y_{M+1}} \\ .... \\ e^{-ik\theta_M Y_{M+1}}\end{bmatrix}=0$$

引理 3.11

$$\delta_\Theta(\theta)\zeta(\tau)=\frac{\delta(\tau-T_I(\theta))}{\left|\det\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial\tau}\right|}\zeta(\tau)$$

接下来，我们引用引理 3.12 中的结果：

$$\left|\det\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial\tau}\right|=\frac{\delta(\tau-T_I(\theta))\zeta(\tau)}{\delta_\Theta(\theta)\zeta(\tau)}=\frac{\delta(\tau-T_I(\theta))}{\delta_\Theta(\theta)}$$

$$\int e^{-ik\theta}\delta(\tau-T_I(\theta))=\int e^{-ikT_I}$$

$$\int e^{-ik\theta}\delta_\Theta(\theta)=\int e^{-ik\Theta J}$$

所以，

$$\int\left|\det\frac{\partial\Theta(\tau)}{\partial\tau}\right|=\int e^{-ik(T-\Theta)}$$

即，

$$A_{IJ}=e^{-ik\Theta X_J}=e^{-ik\int e^{-ik(T-\Theta)}\bullet X_J}$$

$$InA_{IJ}=-ik\int e^{-ik(T-\Theta)}\bullet X_J$$

$$=-X_J e^{-ik(T-\Theta)}$$

接下来，我们考虑如何将矩阵 A 转化为 $\frac{C_j}{k_j+k_a}e^{-(k_j+k_a)x}$ 的形式：

首先，我们考虑矩阵方程：

$$A\psi=f$$

其中，$A_{IJ}=e^{-ik\Theta X_J}=e^{-ik\int e^{-ik(T-\Theta)}\bullet X_J}$

$$f=\sum_1^M a_J\begin{bmatrix}e^{-ik\theta_1 Y_J}\\ \text{............}\\ e^{-ik\theta_M Y_J}\end{bmatrix}=-\begin{bmatrix}e^{-ik\theta_1 Y_{M+1}}\\ \text{............}\\ e^{-ik\theta_M Y_{M+1}}\end{bmatrix}$$

设，$e^{-ik(T-\Theta)}=C_J$

则矩阵 A 可以写成：$\frac{C_j}{k_j+k_a}e^{-(k_j+k_a)x}$ 的形式。

考虑到：$f=-\begin{bmatrix} e^{-ik\theta_1 Y_{M+1}} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ e^{-ik\theta_M Y_{M+1}} \end{bmatrix}$

所以，我们可以写出：

$$\psi_a=\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} \ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots -e^{-ik\theta_1 Y_{M+1}}\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots \\ \ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots \\ \ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots \\ \ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots -e^{-ik\theta_M Y_{M+1}}\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots \end{vmatrix}.$$

设$Y_{M+1}=t_J X_J$ ……………………………………………………………………1

则$ik\theta_j Y_{M+1}=k_j X_j$ ……………………………………………………………2

再设，$K(x,y,t)=\sum C_a\psi_a e^{-k_a X_J}$

则$K(x,y,t)=$

$$\frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} \ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots -C_a e^{-(k_1+k_a)X_J}\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots \\ \ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots \\ \ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots \\ \ldots\ldots a\ldots\ldots\ldots -C_a e^{-(k_n+k_a)X_J}\ldots\ldots\ldots\ldots a\ldots\ldots \end{vmatrix}$$

我们可以写出：

$$K(x,y,t)=\frac{d}{dx}(In(\det A))=-C_J$$

下面，我们考虑积分核$K(x,y,t)$：

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\bullet\int K(x,y,t)\varphi(t)dt$$

代入$K(x,y,t)$并考虑本征值：$\lambda_j=-k_j{}^2$

我们回到开始部分：

$$\sum_1^M a_J\begin{bmatrix}e^{-ik\theta_1 Y_J}\\ \text{............}\\ e^{-ik\theta_M Y_J}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}e^{-ik\theta_1 Y_{M+1}}\\ \text{............}\\ e^{-ik\theta_M Y_{M+1}}\end{bmatrix}=0$$

我们可以取对数：

$$In(a_1F_1+a_2F_2+\text{...........})=-ik\Sigma\theta\bullet Y_{M+1}$$

因为，$Y_1<Y_2<Y_3<\text{..................}$

如果，$a_1<a_2<a_3<\text{..................}$

所以，根据切比雪夫不等式：

$$a_1F_1+a_2F_2+\text{...........}>\frac{\sum a_J}{M}(\sum F_J)$$

$$-ik\Sigma\theta\bullet Y_{M+1}>In(\frac{\Sigma a_j}{M})+In\sum F_J\geq In(\frac{\Sigma a_j}{M})+InM+\frac{1}{M}(-ik\Sigma\theta)\Sigma Y_J$$

$$=\rho+\frac{1}{2}(-ik\Sigma\theta)\Sigma Y_J$$

接下来，我们考虑上面的 1，2 两个式子：

$$t_j = \frac{k_j}{ik\theta_j}$$

$$k_j^2 = -k^2 t_j^2 \theta_j^2$$

$$\lambda_j = -k_j^2 = k^2 t_j^2 \theta_j^2$$

$$t_j = \frac{\sqrt{\lambda_j}}{k\theta_j}$$

考虑不等式：$\iint (k(s,t))^2 dsdt \geq \frac{1}{\sum \lambda_j^2}$

即，$MC_J^2 \geq \frac{1}{\sum \lambda_j^2}$

考虑到 X 与 Y 的正交性，我们可以写出：

$$Y_{M+1} = t_J \sqrt{1 - Y_J^2} = \frac{\sqrt{\lambda_j}}{k\theta_j} \sqrt{1 - Y_J^2}$$

$$\sqrt{\lambda_J} = \frac{Y_{M+1} k\theta_j}{\sqrt{1 - Y_J^2}}$$

$$\lambda_J^2 = \frac{Y_{M+1}^4 k^4 \theta_j^4}{1 - Y_J^2} < \frac{Y_{M+1}^4 k^4 \theta_j^4}{1 - Y_{M+1}^2}$$

我们考虑; $\frac{Y_{M+1}^4}{1 - Y_{M+1}^2}$,

结合 $Y_{M+1} < \frac{1}{M} \Sigma Y_J - \rho / (ik\Sigma\theta)$

我们得到：

$$\lambda_J{}^2 < C\ k^4\theta_j{}^4$$

$$MC_J{}^2 \geq \frac{1}{\sum\lambda_j{}^2} > \frac{1}{C\Sigma\ \ k^4\theta_j{}^4}$$

解答：首先，我们造积分核，作出形如$A\psi = f$的积分方程。

最后，我们根据$C = Y_{M+1} < \dfrac{1}{M}\Sigma Y_J - \rho/(ik_\Sigma\theta)$的大小来判断级数$\Sigma\ \ k^4\theta_j{}^4$的收敛性。

参考文献

1.well-posedness,energy and charge conservation for nonlinear wave equations in discrete space-time............................A.comech1,A.comech2

2.on the meaning of the vakhitov-kolokolov stability criterion for the nonlinear dirac equation..Andrew comech

3.on global attraction to solitary waves.klein-gordon equation with mean field interaction at several points......................................Andrew comech

联系邮箱：pqrs008@126.com