目　　录

第一章　灰色数学产生的背景及渊源

§1.1　灰色数学产生的背景

邓聚龙教授在对王清印等撰写的《灰色系统的基本元素——灰数》一文的推荐书中曾经写道："灰色系统的量化需要有量化的根据、量化的关系、量化的基础。"灰色数学是适应灰色系统理论的需要而产生的。

1985年，王清印教授与他的伙伴们在一起学习灰色系统理论及研究"邯郸市工业预测与机械工业经济态势分析"的过程中，深感经典数学难以适应灰色系统建模的需要。作为在本质上不同于经典系统（即白色系统）理论的灰色系统理论，必须有其相应的数学基础——灰色数学，正像模糊系统（Fuzzy System）必须有模糊数学（Fuzzy Mathematics）作为相应的数学基础一样。

邓聚龙教授说："某个只知道大概范围而不知道其确切值的数，称为灰数。"① 可见，描述灰色量的数——"灰数"不是普通的数，也不是模糊数（Fuzzy Number），而是只知其范围而不知其真值的数集。根据这一思想，王清印、吴和琴、刘开第三位教授在分析模糊集合（Fuzzy Set）表示方法的基础上共同给出了灰集合（Grey Set）与灰数（Grey Number）的抽象概念，并于1988年、1990年分别在河北煤炭建工学院学报与华中理工大学学报上发表了《灰数的抽象定义》与《灰色系统的基本元素——灰数》两篇文章。王光远教授和邓聚龙教授分别对这两篇文章给予了高度评价。1987年，

---

① 邓聚龙著．灰色系统基本方法．武汉：华中理工大学出版社，1987.64

王光远教授在河北煤炭建工学院校庆学术报告中说:"《灰数的抽象定义》一文写得很好,要顶住风浪,坚持下去。"邓聚龙教授在推荐书中写道:"一个灰集合被作者巧妙地定义了,一个 Fuzzy 集与一个普通集就自然成了灰集的特例。这表明作者在研究灰集合中,在灰色系统内涵方面下了功夫。一个灰集的一些性质展示清晰,灰代数的关系表述确切,表明了工作的力度。这对灰色系统理论基础的奠定,特别是对灰色数学的形成,具有明显的价值。"在此基础上,在河北煤炭建工学院灰色数学研究室全体同志和全国众多同仁的共同努力之下,先后解决了灰代数、灰极限、灰概率及灰拓扑的基础问题,并于 1990 年先后出版了关于灰色数学的两部雏形专著《灰色系统理论的数学方法及其应用》与《灰色数学引论》。

由于原定义的灰数表达形式受到区间的限制,使得灰数运算很不方便。考虑到灰色性质更主要的是表现在观测值的可信程度方面,王清印教授在研究点模糊数与点模糊度的过程中,于 1990 年给出了常规型灰数与泛灰数概念(而把前面定义的灰数称为区间型灰数),定义了相应的代数运算法则。随后又在众多同仁的共同努力之下,相继讨论了相应的代数运算性质及数学分析初步,并在部分应用课题中展示了它们的优越性。

到目前为止,可以说已初步形成一套灰色数学体系。本书将在讨论灰集合理论的基础上向读者介绍这套灰色数学的基本体系:区间型灰色数学与泛灰数学的代数性质和分析性质。

§1.2 灰色数学产生的渊源

随着科学技术的发展,人类所要求达到的目的越来越高,所涉及的系统越来越复杂,对数学方法的要求也越来越苛刻。不论哪一个方面、哪一个领域的问题,无不涉及到对信息的加工处理;而且人们对信息的认识也越来越深入,已经由简单的确定信息认识到复杂的不确定信息。

信息是系统的要素、结构和功能的统一体现。没有信息特征，系统就不能被描述和表达。信息的产生、传输和接收过程称为信息过程；它包括三个环节：源信息——信道——宿信息。源信息是客观系统(及各个要素)本身固有的信息。这些信息在能量的作用下可以向周围环境发射。信道是传输信息的途径和媒介。通过信道将源信息传播到接收系统。宿信息是接收系统所呈现的信息。

我们认为，人们所能掌握的关于对象系统的信息，只能是宿信息。它决定于对象系统本身所固有的源信息和信道的传播过程，既要受到系统本身能力的限制，又要受到信道的影响，同时还要受到接收系统能力的制约。

由于对象系统本身能量的限制及外界噪音的干扰，源信息经过信道到宿信息，往往会产生失真现象。由于接收系统的接收能力的制约以及再传播过程中噪音干扰，也会给信息带来失真因素。失真的信息不能确切地表征对象系统的本质，这就是系统的不确定性。具有不确定性的信息称为不确定性信息。

目前，人们已认识到了四种不确定性信息：

1. 随机性信息

由于条件提供的不充分或偶然因素的干扰，使得对象系统几种可能结果的出现呈现偶然性，在某次试验中不能预料哪一个结果发生。这里提供的信息便是随机性信息，简称随机信息。

2. 模糊性信息

由于事物的复杂性，对象系统的各要素之间边界不清晰，使其对象系统中的抽象概念不能给出确切的描述，不能给出确定的评定标准，而使其信息呈现不确定性。这种不确定性信息即是模糊性信息，简称模糊信息。

3. 灰色性信息

由于事物的复杂性、信道上的噪音干扰，以及接收系统能力的限制，人们只能把握对象系统的部分信息或信息所呈现的大致范围，而不知其全部信息或确切的信息量。这种不完全的信息称为灰

色性信息，简称灰色信息。

4. 未确知性信息

“纯主观上的、认识上的不确定性信息可以称为未确知信息”，①即未确知性信息。

按照信息量的多少，我们称信息量完全已知的信息为白色信息。根据这个定义，以上四种不确定性信息，除灰色信息外，其它都可划归为白色信息。由信息的传播过程和接收系统对信息辨识过程的复杂性可知，从某种意义上说，对真正的白色信息人类是很难得到的，而灰色信息则无处不在。

根据信息的传播过程，以上四种不确定性信息又可分为客观型、主观型和相兼型不确定性信息。由于对象系统的复杂性和信道上噪音干扰而产生的不确定性信息称为客观型不确定性信息。随机信息和模糊信息属于此类。因为随机信息是“由于条件提供的不充分或偶然因素的干扰”造成的；模糊信息是“由于事物的复杂性，对象系统的各要素之间边界不清晰”造成的。

由于人类的辨识能力所限，信息在再传播过程中受到人为的干扰而产生的不确定性信息称为主观型不确定性信息。未确知信息属于此类。

既有客观因素又有主观因素所产生的不确定性信息称为相兼型不确定性信息。灰色信息就属于此类。因为它是由事物的复杂性、信道上噪音干扰和接收系统能力的限制等主、客观原因造成的。

因此说，各种不确定性信息(特别是灰色信息)的呈现决不是偶然的。它是物质运动的必然结果。

要实现对各种复杂的大系统的描述和控制，就必须实现对各种不确定性信息的抽象描述，研究它们的数学处理方法。然而，由研究简单的确定信息的经典数学到研究各种不确定性信息的不确

---

① 王光远．未确知信息及其数学处理．哈尔滨建筑工程学院学报，1990(4)．

定性数学，其过程是艰苦的、漫长的。

研究和处理随机信息的随机数学——概率论与数理统计，起源于17世纪中叶，经过了200多年的发展才有了它的今天。

研究和处理模糊信息的模糊数学起源于美国自动控制专家扎德（L. A. Zadeh）于1965年发表的论文“模糊集合”（Fuzzy Set）。它是在当今科学发展中面临的一个非常突出的矛盾——精确性与模糊性对立的情况下产生的。正如扎德在互克性原理中所说：“当系统的复杂性日趋增长时，我们作出系统特性的精确而且有意义的描述的能力将应降低，直至达到这样一个阈值，一旦超过它，精确性和有意义性将变成两个几乎互相排斥的特性。”[①]也就是说，复杂程度越高，有意义的精确化的能力就越低。在过去的科学发展中，人类可以回避模糊性而应用传统的经典数学。在当今的高科技时代，人类再也无法回避模糊性了。于是产生了模糊数学。

随机数学与模糊数学研究和处理的是不确定性信息中的白色信息。对于灰色信息的研究和处理它还是无能为力的。但灰色信息又是无处不在的。为了解决对灰色信息的研究和处理，长期从事自动化、系统工程和控制论研究的邓聚龙教授，于1979年开始研究参数不完全的大系统、未知参数的控制问题，并于1982年发表了他的奠基性论文《灰色系统的控制问题》（The Control Problems of Grey Systems），首创了灰色系统理论，提出了灰色信息概念。王清印教授与吴和琴教授一起，在充分研究灰色系统、灰色信息的内涵基础上于1987年建立了灰集合概念，给出了灰色信息的抽象描述，初步建立了研究和处理灰色信息的数学体系——灰色数学。

为了研究和处理未确知信息，王光远教授于1990年在《未确知信息及其数学处理》一文中给出了未确知数的概念，建立了研究和处理未确知信息的数学体系——未确知数学。

---

① 汪培庄．模糊集合论及其应用．上海：上海科学出版社，1983．

随机数学、模糊数学、灰色数学和未确知数学，它们都是不确定性数学的分支。

由认识简单的确定信息到认识复杂的不确定性信息，由建立处理确定性信息的经典数学到建立处理不确定性信息的不确定性数学，其过程是艰苦的、漫长的。它是科学技术发展的需要，是人类对复杂的物质运动深刻认识的产物，作为处理灰色信息的灰色数学也不例外。

第二章　灰集合概论

经典数学的理论基础是康托(Cantor)建立的集合理论，即Cantor集合理论；模糊数学的理论基础是扎德(L. A. Zadeh)建立的模糊集合(Fuzzy Set)理论。本章将讨论灰色数学的理论基础——灰集合(Grey Set)理论。

§2.1　灰集合概念的引入

Cantor集合能够描述确定性信息和随机性信息，能够解决经典系统和随机系统的建模问题，模糊集合能够描述模糊信息，解决模糊系统的建模问题。为了描述灰色信息，更好地解决灰色系统的建模问题，下面首先分析Cantor集合与模糊集合描述信息的方法，然后引入灰集合概念。

一、Cantor 集合的表示法

Cantor集合这一概念"是不可以精确定义的数学基本概念之一，所以我们只给予一种描写。凡是具有某种特殊性质的对象的汇集、总合或集合称之为集"。"任何对象，对于某一集而言，或者属于该集，或者不属于该集，二者必居其一，但不可得兼。"①

Cantor集合有三种表示法：

1. 列举法

把一个集合的元素一一列举出来。如

"阿拉伯字母"＝{0,1,2,…,10}；

---

① И. П. 那汤松. 实变函数论. 北京：高等教育出版社，1955. 1

“英文字母”$=\{a,b,\cdots,y,z\}$

等。含有有限个元素的集合常用这种方法表示。

2. 定义法

用描述集合中的元素所满足的性质表示某个集合。如

$A=\{x\mid x^2-1=0\}$

表示由满足 $x^2-1=0$ 的解所构成的集合。

3. 特征函数法

通过各元素的特征函数值与集合$\{0,1\}$的一一对应关系来刻划一个集合。

定义 2.1.1 设 A 是论域 U 的一个子集，则称映射

$$X_A:U\longrightarrow\{0,1\},$$

$$u\longmapsto\begin{cases}1, & u\in A;\\ 0, & u\notin A,\end{cases}\tag{2-1-1}$$

为集合 A 的特征函数。

例 2.1.1 一家有四口人，记作

$$U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\},$$

其中，{男人}、{女人}都是论域 U 的子集。若这家人中有两男两女，且 u_1、u_3 为男，u_2、u_4 为女，则

$$\{男人\}=1/u_1+0/u_2+1/u_3+0/u_4,$$

$$\{女人\}=0/u_1+1/u_2+0/u_3+1/u_4。$$

上面两式不是分式的代数和，而是表示各元素及其相应的特征函数值的总括。

若令 $A=\{男人\}$，$B=\{女人\}$，上两式还可表示为

$$A=\{u_i\mid X(u_i)=1\}=\{u_1,u_3\},$$

$$B=\{u_i\mid X(u_i)=0\}=\{u_2,u_4\}。$$

A 的特征函数可表示为

$$X_A:U=\{u_1,u_2,u_3,u_4\}\longrightarrow\{0,1\}。$$

$$u\longmapsto\begin{cases}1, & u_i\in A;\\ 0, & u_i\notin A。\end{cases}$$

其中，$i = 1,2,3,4$。

可见，只要给定一个特征函数 X_A，就唯一地确定了一个论域 U 上的子集 A。反之，只要 U 上的子集 $A(A=\{u_i \mid X(u_i)=1\})$ 已经确定，就有唯一的一个特征函数 X_A 与之对应。例如，上面例子的子集与其特征函数具有一一对应关系。基于这个意义，可以说："子集就是特征函数。"

U 上的一切子集所构成的类称为集合的幂集，记作 $P(U)$。A 的特征函数在 u 处的值 $X_A(u)$ 叫做 u 相对于 A 的隶属度。$u \in A$，其隶属度为 1；$u \notin A$，其隶属度为 0。

Cantor 集合的特征函数，确切地描述了"非此即彼"的确定性信息。

二、模糊集合的表示法

为了确切地描述"亦此亦彼"的模糊信息，扎德教授把特征函数中的 U 到 $\{0,1\}$ 的映射拓广为 U 到 $[0,1]$ 闭区间上的映射，建立了模糊集合概念。

定义 2.1.2 所谓 $\underset{\sim}{A}$ 是论域 U 上的一个模糊子集，是指给定了一个从 U 到闭区间 $[0,1]$ 的映射

$$\mu_{\underset{\sim}{A}}: U \to [0,1];$$

$$u \mapsto \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \in [0,1], u \in \underset{\sim}{A}, \tag{2-1-2}$$

称 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 为 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属函数，$\mu_{\underset{\sim}{A}}(u)$ 为 u 相对于 $\underset{\sim}{A}$ 的隶属度。

模糊子集可完全由隶属函数来刻画。当 $\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 的值域为 $\{0,1\}$ 时，$\mu_{\underset{\sim}{A}}$ 就退化为 Cantor 子集的特征函数，$\underset{\sim}{A}$ 退化为 Cantor 子集 A。可见，Cantor 子集是模糊子集的特例。

若记 U 上的全体模糊子集所构成的类为 $F(U)$（称为模糊子集的幂集），则有 $F(U) \supseteq P(U)$。

当 $\underset{\sim}{A} \in F(U) - P(U)$ 时，则称 $\underset{\sim}{A}$ 为真模糊子集。此时，至少有

一个 u_0 使得 $\mu_{\underset{\sim}{A}}(u_0)\notin\{0,1\}$。

通过上面讨论，可了解模糊集合与 Cantor 集合的不同点。但它们之间有一个共同点是值得注意的：它们所描述的都是白信息。

三、灰集合的定义及其表达方法

白信息可以用模糊集合或 Cantor 集合来描述。那么，“部分已知、部分未知”的灰色信息又该如何抽象描述呢？由于灰色信息的范围是已知的，只是内部未知。因此，给出描述范围的两个隶属函数，使未知部分夹在两个隶属度之间即可。

定义 2.1.3 所谓 G 是论域 U 上的一个灰子集是指给定了从 U 到闭区间 $[0,1]$ 的两个映射

$$\overline{\mu}_G: U \longrightarrow [0,1],\quad u \longmapsto \overline{\mu}_G(u) \in [0,1]$$

和

$$\underline{\mu}_G: U \longrightarrow [0,1],\quad u \longmapsto \underline{\mu}_G(u) \in [0,1]; \qquad (2\text{-}1\text{-}3)$$

其中，$\overline{\mu}_G \geqslant \underline{\mu}_G$。$\overline{\mu}_G$ 与 $\underline{\mu}_G$ 分别称为 G 的上隶属函数和下隶属函数；$\overline{\mu}_G(u)$ 与 $\underline{\mu}_G(u)$ 分别称为元素 u 相对于 G 的上隶属度和下隶属度。

此定义表明，所谓灰集合，是指以上、下隶属函数图像以及夹在其间的带形区域为原像的元素所构成的集合。此带形区域可称为灰带。这个集合的上、下隶属度是已知的，但内在隶属度还不知道。这正体现了“部分已知、部分未知”的内涵。其直观图形如图 2.1.1 所示。

当 $\overline{\mu}_G = \underline{\mu}_G$ 时，灰带便退化为一条曲线，正是模糊子集的像。当曲线退化为直线 $\mu=1$ 或 0 时，正是 Cantor 集合的像。可见，Cantor 集合与模糊集合都是灰集合的特例。

一般情况下，灰集合记为 $G|_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}}$ 或 G。由 U 上的灰子集所组成的类被称为灰幂集，并记作 $G(U)$。为了方便，对灰集合给出如下表示方法。

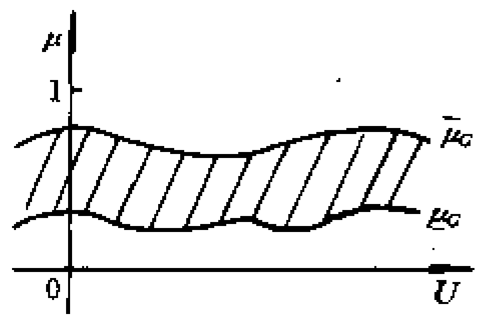

图 2.1.1

1. 向量表示法

设 $U=\{a,b,c\}$，$\overline{\mu}_G(a)=1$，$\overline{\mu}_G(b)=0.8$，$\overline{\mu}_G(c)=0$，$\underline{\mu}_G(a)=0.9$，$\underline{\mu}_G(b)=0.5$，$\underline{\mu}_G(c)=0$，则

$$
\begin{aligned}
G|_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}}&=\{(a,[\underline{\mu}_G(a),\overline{\mu}_G(a)]),(b,[\underline{\mu}_G(b),\overline{\mu}_G(b)]),\\
&\quad(c,[\underline{\mu}_G(c),\overline{\mu}_G(c)])\}\\
&=\{(a,[0.9,1]),(b,[0.5,0.8])\}。
\end{aligned}
$$

其中，每一个分量表示 G 中每个元素及相应的上、下隶属度。因 $\overline{\mu}_G(c)=\underline{\mu}_G(c)=0$，故可不写入。

2. 分式表示法

设 $U=\{a,b,c\}$，$\overline{\mu}_G(a)=1$，$\overline{\mu}_G(b)=0.8$，$\overline{\mu}_G(c)=0$，$\underline{\mu}_G(a)=0.9$，$\underline{\mu}_G(b)=0.5$，$\underline{\mu}_G(c)=0$，则

$$
\begin{aligned}
G|_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}}&=(\underline{\mu}_G(a),\overline{\mu}_G(a))/a+(\underline{\mu}_G(b),\overline{\mu}_G(b))/b+\\
&\quad(\underline{\mu}_G(c),\overline{\mu}_G(c))/c\\
&=(0.9,1)/a+(0.5,0.8)/b。
\end{aligned}
$$

其中，每个分式表示 G 中每个元素及其相应的上、下隶属度，“+”表示 G 的总括。因 $\overline{\mu}_G(c)=\underline{\mu}_G(c)=0$，故可不写入。

3. 积分表示法

对于非离散论域 U（包括有限或无限），规定

$$
G|_{\underline{\mu}}^{\overline{\mu}}=\int_u(\underline{\mu}_G(u),\overline{\mu}_G(u))/u。
$$

其中“$\int$”不是通常意义下的积分，它表示 U 中诸元素及其相应的上、下隶属度的总括。

§2.2 灰集合的运算性质

从灰集合的定义可以看出，灰集合是一个外延很广泛的概念。为了满足进一步研究灰色数学的需要，本节讨论灰集合的运算性质。

一、灰集合之间的包含与相等关系

定义 2.2.1[①] 设 $G_1,G_2\in G(U)$，$u\in U$，若

$$\underline{\mu}_{G_1}(u)\leqslant\underline{\mu}_{G_2}(u),\quad \overline{\mu}_{G_1}(u)\leqslant\overline{\mu}_{G_2}(u),$$

则称 G_1 包含于 G_2，记作 $G_1\subseteq G_2$。

当 $\underline{\mu}_{G_1}(u)=\underline{\mu}_{G_2}(u)$，$\overline{\mu}_{G_1}(u)=\overline{\mu}_{G_2}(u)$时，则称 G_1 与 G_2 相等，记作 $G_1=G_2$。

包含关系具有如下性质：

1. 反对称性

若 $G_1\subseteq G_2$，$G_2\subseteq G_1$，则 $G_1=G_2$。

2. 传递性

若 $G_1\subseteq G_2$，$G_2\subseteq G_3$，则 $G_1\subseteq G_3$。

二、灰集合的并、交、补运算

为便于读者理解灰集合的并、交、补运算的意义，下面首先回顾一下 Cantor 集合与模糊集合相应的定义。

定义 2.2.2 设 $A,B\in P(U)$，则

$$A\cup B\overset{\text{def}}{=}\{u|u\in A\vee u\in B\},$$

① 此定义纠正了参考文献 5 中的印刷错误。

①

$$A \cap B \stackrel{\text{def}}{=} \{u | u \in A \wedge u \in B\},$$
$$A^C \stackrel{\text{def}}{=} \{u | u \notin A\}$$

分别称为 A 与 B 的并集、交集、补集。

补集的定义也可以用特征函数描述：

设 X_A, X_B 分别是 U 上两个子集 A、B 的特征函数，则

$$X_{A\cup B}(u) = X_A(u) \vee X_B(u) = \max\{X_A(u), X_B(u)\},$$
$$X_{A\cap B}(u) = X_A(u) \wedge X_B(u) = \min\{X_A(u), X_B(u)\},$$
$$X_{A^C}(u) = 1 - X_A(u)。$$

定义 2.2.3 设 $\underset{\sim}{A}, \underset{\sim}{B} \in F(U), \forall u \in U$，定义 $\underset{\sim}{A} \cup \underset{\sim}{B}$，$\underset{\sim}{A} \cap \underset{\sim}{B}$，$A^C$ 的隶属函数分别为

$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cup\underset{\sim}{B}}(u) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \vee \mu_{\underset{\sim}{B}}(u),$$
$$\mu_{\underset{\sim}{A}\cap\underset{\sim}{B}}(u) = \mu_{\underset{\sim}{A}}(u) \wedge \mu_{\underset{\sim}{B}}(u),$$
$$\mu_{A^C}(u) = 1 - \mu_{\underset{\sim}{A}}(u)。$$

仿照 Cantor 集合与模糊集合并、交、补的定义方法，可定义灰集合的并、交、补运算。

定义 2.2.4 设 $G_1, G_2 \in G(U), \forall u \in U$，定义 $G_1 \cup G_2$，$G_1 \cap G_2$，G_1^C 的隶属函数分别为

$$\begin{cases} \overline{\mu}_{G_1\cup G_2}(u) = \overline{\mu}_{G_1}(u) \vee \overline{\mu}_{G_2}(u), \\ \underline{\mu}_{G_1\cup G_2}(u) = \underline{\mu}_{G_1}(u) \vee \underline{\mu}_{G_2}(u); \end{cases}$$

$$\begin{cases} \overline{\mu}_{G_1\cap G_2}(u) = \overline{\mu}_{G_1}(u) \wedge \overline{\mu}_{G_2}(u), \\ \underline{\mu}_{G_1\cap G_2}(u) = \underline{\mu}_{G_1}(u) \wedge \underline{\mu}_{G_2}(u); \end{cases}$$

$$\overline{\mu}_{G_1^C}(u) = 1 - \underline{\mu}_{G_1}(u),$$

① 注：这里符号“∨”、“∧”分别表示取上确界(supremum)和取下确界(infimum)；对于有限集合则分别表示取最大值(maximum)、取最小值(minimum)。这两个符号在下面的论述中会经常出现。

$$\underline{\mu}_{G_1^C}(u) = 1 - \overline{\mu}_{G_1}(u)。$$

若令 $\overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_{G_1}(u)$，$\overline{\mu}_2 = \overline{\mu}_{G_2}(u)$，$\underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_{G_1}(u)$，$\underline{\mu}_2 = \underline{\mu}_{G_2}(u)$，则灰集合的并、交、补运算可分别定义为

$$G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1} \cup G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2} = G|_{\underline{\mu}_1 \vee \underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_1 \vee \overline{\mu}_2},$$

$$G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1} \cap G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2} = G|_{\underline{\mu}_1 \wedge \underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_1 \wedge \overline{\mu}_2},$$

$$G^C|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1} = G|_{1-\overline{\mu}_1}^{1-\underline{\mu}_1}。$$

类似地，可定义有限个灰集合的并、交运算。

定义

$$\bigcup_{t=1}^{n} G_t = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_t \cup \cdots \cup G_n,$$

$$\bigcap_{t=1}^{n} G_t = G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_t \cap \cdots \cap G_n$$

的隶属函数分别为

$$\overline{\mu}_{\bigcup_{t=1}^{n} G_t}(u) = \bigvee_{t=1}^{n} \overline{\mu}_{G_t}(u)$$

$$= \max\{\overline{\mu}_{G_1}(u), \cdots, \overline{\mu}_{G_n}(u)\},$$

$$\underline{\mu}_{\bigcup_{t=1}^{n} G_t}(u) = \bigvee_{t=1}^{n} \underline{\mu}_{G_t}(u)$$

$$= \max\{\underline{\mu}_{G_1}(u), \cdots, \underline{\mu}_{G_n}(u)\},$$

$$\overline{\mu}_{\bigcap_{t=1}^{n} G_t}(u) = \bigwedge_{t=1}^{n} \overline{\mu}_{G_t}(u)$$

$$= \min\{\overline{\mu}_{G_1}(u), \cdots, \overline{\mu}_{G_n}(u)\},$$

$$\underline{\mu}_{\bigcap_{t=1}^{n} G_t}(u) = \bigwedge_{t=1}^{n} \underline{\mu}_{G_t}(u)$$

$$= \min\{\underline{\mu}_{G_1}(u), \cdots, \underline{\mu}_{G_n}(u)\}。$$

定义 2.2.5 设 $G_t \in G(U)$，$t \in T$（T 为指标集），$\forall\ u \in U$，定义 $\bigcup G_t$、$\bigcap G_t$ 的隶属函数分别为

$$\bar{\mu}_{\bigcup\limits_{t\in T} G_t}(u) = \sup\{\bar{\mu}_{G_t}(u)\,|\,t \in T\},$$

$$\underline{\mu}_{\bigcup\limits_{t\in T} G_t}(u) = \sup\{\underline{\mu}_{G_t}(u)\,|\,t \in T\};$$

$$\bar{\mu}_{\bigcap\limits_{t\in T} G_t}(u) = \inf\{\bar{\mu}_{G_t}(u)\,|\,t \in T\},$$

$$\underline{\mu}_{\bigcap\limits_{t\in T} G_t}(u) = \inf\{\underline{\mu}_{G_t}(u)\,|\,t \in T\}。$$

三、灰集合的基本运算性质

设 $G_1, G_2, G_3 \in G(U)$，则有

1. 交换律

$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1, \quad G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1。$$

证明： 因为 $\forall\ u \in U$，都有

$$\begin{aligned}\bar{\mu}_{G_1\cup G_2}(u) &= \bar{\mu}_{G_1}(u) \vee \bar{\mu}_{G_2}(u)\\ &= \bar{\mu}_{G_2}(u) \vee \bar{\mu}_{G_1}(u) = \bar{\mu}_{G_2\cup G_1}(u),\\ \underline{\mu}_{G_1\cup G_2}(u) &= \underline{\mu}_{G_1}(u) \vee \underline{\mu}_{G_2}(u)\\ &= \underline{\mu}_{G_2}(u) \vee \underline{\mu}_{G_1}(u) = \underline{\mu}_{G_2\cup G_1}(u),\end{aligned}$$

所以 $G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1$。

同理可证， $G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1$。

2. 结合律

$$G_1 \cup (G_2 \cup G_3) = (G_1 \cup G_2) \cup G_3,$$
$$G_1 \cap (G_2 \cap G_3) = (G_1 \cap G_2) \cap G_3。$$

证明： （略）。

3. 分配律

$$G_1 \cup (G_2 \cap G_3) = (G_1 \cup G_2) \cap (G_1 \cup G_3),$$
$$G_1 \cap (G_2 \cup G_3) = (G_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap G_3)。$$

4. 对偶律

(1) $(G_1 \cup G_2)^C = G_1^C \cap G_2^C$；

(2) $(G_1 \cap G_2)^C = G_1^C \cup G_2^C$。

证明： 只证(1)。

设 $G_1=G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1}, G_2=G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2}, \forall\ u\in U$。

当 $\underline{\mu}_2\leqslant\underline{\mu}_1\leqslant\overline{\mu}_2\leqslant\overline{\mu}_1$ 时，因为

$$(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1}\cup G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C=(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1})^C=G|_{1-\overline{\mu}_1}^{1-\underline{\mu}_1},$$

$$(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1})^C\cap(G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C=G|_{1-\overline{\mu}_1}^{1-\underline{\mu}_1}\cap G|_{1-\overline{\mu}_2}^{1-\underline{\mu}_2}=G|_{1-\overline{\mu}_1}^{1-\underline{\mu}_1},$$

所以

$$(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1}\cup G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C=(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1})^C\cap(G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C。$$

当 $\underline{\mu}_1\leqslant\underline{\mu}_2\leqslant\overline{\mu}_2\leqslant\overline{\mu}_1$ 时，因为

$$(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1}\cup G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C=(G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_1})^C=G|_{1-\overline{\mu}_1}^{1-\underline{\mu}_2},$$

$$(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1})^C\cap(G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C=G|_{1-\overline{\mu}_1}^{1-\underline{\mu}_1}\cap G|_{1-\overline{\mu}_2}^{1-\underline{\mu}_2}=G|_{1-\overline{\mu}_1}^{1-\underline{\mu}_2},$$

所以

$$(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1}\cup G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C=(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1})^C\cap(G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})。$$

当 $\underline{\mu}_1\leqslant\overline{\mu}_1\leqslant\underline{\mu}_2\leqslant\overline{\mu}_2$ 时，因为

$$(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1}\cup G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C=(G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C=G|_{1-\overline{\mu}_2}^{1-\underline{\mu}_2},$$

$$(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1})^C\cap(G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C=G|_{1-\overline{\mu}_1}^{1-\underline{\mu}_1}\cap G|_{1-\overline{\mu}_2}^{1-\underline{\mu}_2}=G|_{1-\overline{\mu}_2}^{1-\underline{\mu}_2},$$

所以

$$(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1}\cup G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C=(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1})^C\cap(G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C。$$

综合如上三种情况可知，对于上、下隶属度的所有情况，均有

$$(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1}\cup G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C=(G|_{\underline{\mu}_1}^{\overline{\mu}_1})^C\cap(G|_{\underline{\mu}_2}^{\overline{\mu}_2})^C。$$

这表明，$\forall\ u\in U$ 均有

$$\overline{\mu}_{G_1\cup G_2}(u)=\overline{\mu}_{G_1^C}(u)\wedge\overline{\mu}_{G_2^C}(u),$$

$$\underline{\mu}_{G_1\cup G_2}(u)=\underline{\mu}_{G_1^C}(u)\wedge\underline{\mu}_{G_2^C}(u),$$

故

$$(G_1 \cup G_2)^C = G_1^C \cap G_2^C \text{ 成立。}$$

同理可证

$$(G_1 \cap G_2)^C = G_1^C \cup G_2^C。$$

5. 幂等律

$$G_1 \cup G_1 = G_1,\quad G_1 \cap G_1 = G_1。$$

6. 吸收律

$$G_1 \cup (G_1 \cap G_2) = G_1,\quad G_1 \cap (G_1 \cup G_2) = G_1。$$

7. 还原律

$$(G_1^C)^C = G_1。$$

四、灰集合的灰度

客观世界提供信息量的多少对不同的系统是有所不同的，已知程度与未知程度也是有所不同的。已知程度可称之为白度，未知程度可称之为灰度。

1. 点灰度

$\forall\, G|_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} \in G(U)$，$u_0 \in U$，称

$$(\bar{\mu}_G(u_0) - \underline{\mu}_G(u_0))/1 = \bar{\mu}_G(u_0) - \underline{\mu}_G(u_0)$$

为 $G|_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}}$ 在 $u = u_0$ 处的点灰度，记作 $d_{G[u_0]}$。

2. 区间灰度

$\forall\, G|_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} \in G(U)$，$u \in U$，称

$$\left[\int_a^b \bar{\mu}_G(u)\mathrm{d}u - \int_a^b \underline{\mu}_G(u)\mathrm{d}u\right]/(b-a)$$

$$= \int_a^b [\bar{\mu}_G(u) - \underline{\mu}_G(u)]\mathrm{d}u/(b-a)$$

$$= \int_a^b \frac{\bar{\mu}_G(u) - \underline{\mu}_G(u)}{b-a}\mathrm{d}u$$

为 $G|_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}}$ 在区间 $[a,b]$ 上的灰度，简称区间灰度，记作 $d_{G[a,b]}$。

3. 绝对灰度

$\forall\ G|_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}} \in G(U), u \in U$，称

$$\lim_{\substack{b \to +\infty \\ a \to -\infty}} \int_a^b \frac{\bar{\mu}_G(u) - \underline{\mu}_G(u)}{b-a} \mathrm{d}u$$

为 $G|_{\underline{\mu}}^{\bar{\mu}}$ 的绝对灰度，记作 d_G。

灰集合是已知信息与未知信息的综合表述，灰度是未知程度的描述，白度是已知程度的描述。当信息量完全确知时，白度为 1，灰度为 0；当信息量完全未知时，灰度为 1，白度为 0。一般地，“白度”=1—“灰度”。Cantor 集合与模糊集合的灰度为 0，它们所描述的都是已知信息，只有灰集合才能描述灰色信息。

§2.3 灰集合概念的扩张

人们在实践中发现，建立在定义 2.1.3 灰集合基础上的区间型灰数确实解决了不少有关灰色系统的建模问题。但由于区间型灰数运算的复杂性给数学运算带来了不少麻烦，也给灰色数学的进一步发展带来了困难。为克服这一缺点，本节讨论灰集合概念的扩张问题。

一、常规灰集合概念的引入

定义 2.1.3 表明，所谓灰集合就是由定义域在 U 中，值域在区间[0,1]中的两个特征函数（即隶属函数）$\bar{\mu}_G$ 与 $\underline{\mu}_G$ 所确定的集合。$\forall\ u \in U$，其可信度（即隶属度）在以 $\underline{\mu}_G(u)$ 与 $\bar{\mu}_G(u)$ 为端点的区间[$\underline{\mu}_G(u)$，$\bar{\mu}_G(u)$]之中。这两个特征函数可由一个双射函数给出。为了简单明确，且使可信度的取值区间[$\underline{\mu}_G(u)$，$\bar{\mu}_G(u)$]$\subseteq$[0,1]符合人们的常规思维，下面引入灰集合的等价定义——常规

灰集合概念。

定义 2.3.1 称 G 是论域 U 上的一个常规灰子集，是指给定了如下映射：

$$\mu_G(\cdot):U \longrightarrow [0,1], \quad u \longmapsto [\underline{\mu}_G(u), \overline{\mu}_G(u)]。 \tag{2-3-1}$$

其中，$u \in U$，$\underline{\mu}_G(u)$，$\overline{\mu}_G(u) \in [0,1]$，且称 $\mu_G(\cdot)$为 G 的特征函数；$[\underline{\mu}_G(u), \overline{\mu}_G(u)]$为 u 的灰信息域，$\overline{\mu}_G(u)$和 $\underline{\mu}_G(u)$为 u 的上、下信息界。记作

$$G = \{(u,[\underline{\mu}_G(u), \overline{\mu}_G(u)]) | u \in U, \underline{\mu}_G(u), \overline{\mu}_G(u) \in [0,1]\}。 \tag{2-3-2}$$

由定义可知，常规灰子集(一般又称为常规灰集合)是由 U 到 $[0,1]$的特征函数 $\mu_G(\cdot)$所确定的集合。$\forall u \in U$，其可信度取值于 $[\underline{\mu}_G(u), \overline{\mu}_G(u)]$之中，而真正的可信度还不清楚。这恰好反映了“部分已知，部分未知”的灰色内涵。

显然，$u(\in U)$与灰信息域$[\underline{\mu}_G(u), \overline{\mu}_G(u)]$之间是一一对应的。$\forall u \in U$，只要灰信息域$[\underline{\mu}_G(u), \overline{\mu}_G(u)]$已经确定，一个相应的常规灰集合便可给出。所以，可把常规灰集合记作

$$G(u) = \{[\underline{\mu}_G(u), \overline{\mu}_G(u)]\}, \quad (\underline{\mu}_G(u), \overline{\mu}_G(u) \in [0,1])。 \tag{2-3-3}$$

在不致发生混淆的情况下可简记为

$$G(u) = \{[\underline{\mu}\ (u), \overline{\mu}\ (u)]\}, \quad (\underline{\mu}\ (u), \overline{\mu}\ (u) \in [0,1])。 \tag{2-3-4}$$

在必要场合，还可以采用如下记法表示常规灰集合。

1. 分式表示法

设 $U=\{a,b,c\}$，则

$$G=[\underline{\mu}(a),\overline{\mu}(a)]/a+[\underline{\mu}(b),\overline{\mu}(b)]/b+$$

$$[\underline{\mu}(c),\overline{\mu}(c)]/c。$$

其中，"+"号不是求和，仅表示 G 的总体。

2. 积分表示法

若 U 为非离散域(含有限或无限)，则

$$G=\int_U[\underline{\mu}_G(u),\overline{\mu}_G(u)]/u。$$

其中，"$\int$"不是通常的积分，仅表示 U 中相应 u 及其灰信息域的总括。

当 $\underline{\mu}(u)=\overline{\mu}(u)=\mu(u)$时，灰集合 G 便蜕化为模糊集

$$\underset{\sim}{A}=\{(u,\mu(u))|u\in U,\mu(u)\in[0,1]\}。$$

当 $\underline{\mu}(u)=\overline{\mu}(u)=1$ 或 0 时，又进一步蜕化为Cantor 集合。可见，模糊集与 Cantor 集都是灰集的特例。

二、泛灰集概念的引入

在实践中还会发现，作为 u 的可信度 $\mu(u)$，它不仅可取$\{0,1\}$中的值，用以表示是与非，或取$[0,1]$中的值，用以表示 u 的可信程度，还有可能取$[0,1]$以外的值。例如，在误差理论中，一个物理量往往表示为$u\pm\Delta u$。它的确切量应取值于$[u-\Delta u,u+\Delta u]$之中。它的灰信息域应为$\left[\frac{u-\Delta u}{u},\frac{u+\Delta u}{u}\right]$。显然，$\frac{u+\Delta u}{u}$是大于 1 的值。又如，在综合评判中，为了区别属于同一类别的不同对象的优劣程度，也往往出现大于 1 的值。还有，由于信道上噪音的干扰和人的辨识能力所限，还可能会得到反面的信息，此时，可信度就应用负数表示。例如，商品装璜的好坏，会影响人们对商品质量的认识，等等。因此，有必要考虑灰信息域的扩张问题。

另外，在数学发展史上也常常为了运算的需要而作某些人为的规定，而暂不考虑它的客观实际意义。例如，复数概念的建立，就是打破了负数不能开平方的戒律而规定 $\sqrt{-1}$ 为虚数单位 i 的基础上给出的。当时，并没有考虑 $\sqrt{-1}$ 的实际意义。在参考文献[16]中，为适应运算的需要建立了泛灰集合概念。

在经典数学中，$\forall\ y,z\in\mathbf{R}$，当 $z=0$ 时，y/z 无意义。为了灰数运算的需要，给出如下定义。

定义 2.3.2 设 y,z 为实数，当 $z=0$ 时，称 y 与 z 之形式商 y/z 为超实数。显然，当 $z\neq0$ 时，y/z 仍为实数。称全体实数与超实数[①] 组成的集合为超实集。记作

$$\widetilde{\mathbf{R}}=\{y/z\,|\,y,z\in\mathbf{R}\},\mathbf{R}\text{ 为实集。}$$

定义 2.3.3 称 G 是论域 U 上的一个泛灰子集，是指给定了一个从 U 到 $\widetilde{\mathbf{R}}$ 上的映射：

$$\mu_G(\cdot):U\longrightarrow\widetilde{\mathbf{R}},u\longmapsto[\![\underline{\mu}_G(u),\overline{\mu}_G(u)]\!]\subset\widetilde{\mathbf{R}},u\in U,\tag{2-3-5}$$

且称 $\mu_G(\cdot)$ 为泛灰子集的特征函数，$[\![\underline{\mu}_G(u),\overline{\mu}_G(u)]\!]$ 为 u 相对于 G 的泛灰信息域，$\overline{\mu}_G(u)$、$\underline{\mu}_G(u)$ 为 u 的上、下信息界，记作

$$G=\{(u,[\![\underline{\mu}_G(u),\overline{\mu}_G(u)]\!])\,|\,u\in U,\underline{\mu}_G(u),\overline{\mu}_G(u)\in\widetilde{\mathbf{R}}\}。\tag{2-3-6}$$

因为 u 与其灰信息域 $[\![\underline{\mu}_G(u),\overline{\mu}_G(u)]\!]$ 是一一对应的，所以泛灰集 G 又可记作

$$G(u)=\{[\![\underline{\mu}_G(u),\overline{\mu}_G(u)]\!]\},\tag{2-3-7}$$

---

① 超实数 $y/z(z=0)$ 无实际意义，但在运算过程中分母中的"0"可以参加运算。

或简记作

$$G(u)=\{〖\underline{\mu}(u),\overline{\mu}(u)〗\}。\qquad (2\text{-}3\text{-}8)$$

由全体泛灰子集组成的集合类称为泛灰幂集，记作 $G(U)$。

这里记号〖 〗有双重意义：一方面是为了区别于定义 2.1.3 中定义的灰集合；另一方面表明泛灰信息域是由上、下信息界 $\overline{\mu}_G(u)$、$\underline{\mu}_G(u)$ 确定的区间。在运算过程中可把〖$\underline{\mu}_G(u)$，$\overline{\mu}_G(u)$〗看作由这两个元素组成的集合，但在运算过程中不能改变原来的次序。

从定义中看出，泛灰集合是灰集合概念的拓广，当 $\widetilde{\mathrm{R}}$ 蜕化为 $[0,1]$ 时，泛灰集就蜕化为常规灰集合。

若 $\forall u\in U$，当 $\underline{\mu}(u)=\overline{\mu}(u)=0$ 时，则称 G 为空集，仍记作 $\varnothing$；当 $\underline{\mu}(u)=\overline{\mu}(u)=1$ 时，称 G 为全集，仍记作 U。在泛灰集合类 $G(u)$ 中不定义全集。

§2.4 常规灰集的运算

由于常规灰集定义与定义 2.1.3 等价，因此常规灰集与灰集合的运算关系和性质相同。为了与泛灰集的运算对照，下面根据常规灰集的概念进行重新定义和阐述。

一、常规灰集合的包含与相等关系

定义 2.4.1 设 $G_1=\{[\underline{\mu}_1(u),\overline{\mu}_1(u)]\}$，$G_2=\{[\underline{\mu}_2(u),\overline{\mu}_2(u)]\}\in G(U)$，若 $\forall u\in U$，有 $\underline{\mu}_1(u)\leqslant\underline{\mu}_2(u)$，$\overline{\mu}_1(u)\leqslant\overline{\mu}_2(u)$，则称 G_1-包含于 G_2，记作 $G_1\subseteq G_2$。

当 $\underline{\mu}_1(u)=\underline{\mu}_2(u)$，$\overline{\mu}_1(u)=\overline{\mu}_2(u)$时，则称 G_1 与 G_2 相等，记作 $G_1=G_2$。

显然，包含关系具有如下性质：

1. 自反性

$G\subseteq G$。

2. 反对称性

若 $G_1\subseteq G_2$，$G_2\subseteq G_1$，则 $G_1=G_2$。

3. 传递性

若 $G_1\subseteq G_2$，$G_2\subseteq G_3$，则 $G_1\subseteq G_3$。

由此可知，$(G(U),\subseteq)$是偏序集，又由于空集$\varnothing$与全集 U 皆属于 $G(U)$，故 $G(U)$中有最大元 U 和最小元$\varnothing$。

二、常规灰集的并、交、补运算

定义 2.4.2 设 $G_1,G_2\in G(U)$，若$\forall\ u\in U$；有

$$G_1\cup G_2=\{[\underline{\mu}_1(u),\overline{\mu}_1(u)]\}\cup\{[\underline{\mu}_2(u),\overline{\mu}_2(u)]\}$$

$$=\{[\underline{\mu}_1(u)\vee\underline{\mu}_2(u),\overline{\mu}_1(u)\vee\overline{\mu}_2(u)]\};$$

$$G_1\cap G_2=\{[\underline{\mu}_1(u),\overline{\mu}_1(u)]\}\cap\{[\underline{\mu}_2(u),\overline{\mu}_2(u)]\}$$

$$=\{[\underline{\mu}_1(u)\wedge\underline{\mu}_2(u),\overline{\mu}_1(u)\wedge\overline{\mu}_2(u)]\};$$

$$G_1^C=\{[\underline{\mu}_1(u),\overline{\mu}_1(u)]\}^C$$

$$=\{[1-\overline{\mu}_1(u),1-\underline{\mu}_1(u)]\}$$

$$=\{[\overline{\mu}_1^C,\underline{\mu}_1^C]\},$$

则称 $G_1\cup G_2$、$G_1\cap G_2$、G^C 分别为 G_1 与 G_2 的并集、G_1 与 G_2 的交

集、G 的补集。

类似地，关于有限个常规灰集的并、交运算可定义为：

$$\bigcup_{i=1}^{n} G_i = G_1 \cup G_2 \cup \cdots \cup G_n$$

$$= \{[\bigvee_{i=1}^{n} \underline{\mu}_i(u), \bigvee_{i=1}^{n} \overline{\mu}_i(u)]\};$$

$$\bigcap_{i=1}^{n} G_i = G_1 \cap G_2 \cap \cdots \cap G_n$$

$$= \{[\bigwedge_{i=1}^{n} \underline{\mu}_i(u), \bigwedge_{i=1}^{n} \overline{\mu}_i(u)]\}。$$

定义 2.4.3 设 $G_t \in G(U)$，$t \in T$（T 为指标集），$\forall u \in U$，定义

$$\bigcup_{t \in T} G_t = \{[\sup\{\underline{\mu}_{G_t}(u) | t \in T\}, \sup\{\overline{\mu}_{G_t}(u) | t \in T\}]\};$$

$$\bigcap_{t \in T} G_t = \{[\inf\{\underline{\mu}_{G_t}(u) | t \in T\}, \inf\{\overline{\mu}_{G_t}(u) | t \in T\}]\}。$$

例 2.4.1 设 $U = \{u_1, u_2, u_3\}$，

$$G_1 = \{[\underline{\mu}(u_1), \overline{\mu}(u_1)], [\underline{\mu}(u_2), \overline{\mu}(u_2)], [\underline{\mu}(u_3), \overline{\mu}(u_3)]\}$$

$$= \{[0.2, 0.7], [1, 1], [0.5, 0.9]\},$$

$$G_2 = \{[0.3, 0.8], [0.6, 0.7], [0.8, 1]\},$$

则

$$\begin{aligned} G_1 \cup G_2 &= \{[0.2, 0.7], [1, 1], [0.5, 0.9]\} \cup \\ &\quad \{[0.3, 0.8], [0.6, 0.7], [0.8, 1]\} \\ &= \{[0.2 \vee 0.3, 0.7 \vee 0.8], [1 \vee 0.6, 1 \vee 0.7], \\ &\quad [0.5 \vee 0.8, 0.9 \vee 1]\} \\ &= \{[0.3, 0.8], [1, 1], [0.8, 1]\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1 \cap G_2 &= \{[0.2 \wedge 0.3, 0.7 \wedge 0.8], [1 \wedge 0.6, 1 \wedge 0.7], \\ &\quad [0.5 \wedge 0.8, 0.9 \wedge 1]\} \\ &= \{[0.2, 0.7], [0.6, 0.7], [0.5, 0.9]\}。 \end{aligned}$$

若用分式表示法，则有

$$G_1 = [0.2, 0.7]/u_1 + [1, 1]/u_2 + [0.5, 0.9]/u_3,$$

$$G_2 = [0.3, 0.8]/u_1 + [0.6, 0.7]/u_2 + [0.8, 1]/u_3,$$

$$\begin{aligned} G_1 \cup G_2 &= [0.2 \vee 0.3, 0.7 \vee 0.8]/u_1 + [1 \vee 0.6, \\ &\quad 1 \vee 0.7]/u_2 + [0.5 \vee 0.8, 0.9 \vee 1]/u_3 \\ &= [0.3, 0.8]/u_1 + [1, 1]/u_2 + [0.8, 1]/u_3; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_1 \cap G_2 &= [0.2 \wedge 0.3, 0.7 \wedge 0.8]/u_1 + [1 \wedge 0.6, \\ &\quad 1 \wedge 0.7]/u_2 + [0.5 \wedge 0.8, 0.9 \wedge 1]/u_3 \\ &= [0.2, 0.7]/u_1 + [0.6, 0.7]/u_2 \\ &\quad + [0.5, 0.9]/u_3。 \end{aligned}$$

同样，有

$$\begin{aligned} G_1^C &= \{[0.2, 0.7], [1, 1], [0.5, 0.9]\}^C \\ &= \{[1 - 0.7, 1 - 0.2], [1 - 1, 1 - 1], \\ &\quad [1 - 0.9, 1 - 0.5]\} \\ &= \{[0.3, 0.8], [0, 0], [0.1, 0.5]\}, \end{aligned}$$

或

$$\begin{aligned} G_1^C &= \{[0.2, 0.7]/u_1 + [1, 1]/u_2 + [0.5, 0.9]/u_3\}^C \\ &= [1 - 0.7, 1 - 0.2]/u_1 + [1 - 1, 1 - 1]/u_2 + \\ &\quad [1 - 0.9, 1 - 0.5]/u_3 \\ &= [0.3, 0.8]/u_1 + [0, 0]/u_2 + [0.1, 0.5]/u_3。 \end{aligned}$$

需要指出的是，当 $\underline{\mu} = \overline{\mu} = 0$ 时，该项可以不写出。

三、常规灰集的基本运算性质

设 $G_1, G_2, G_3 \in G(U)$，则有如下运算性质成立：

1. 交换律

$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1; G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1。$$

证明： 因为 $\forall\ u \in U$，皆有

$$\underline{\mu}_1(u) \vee \underline{\mu}_2(u) = \underline{\mu}_2(u) \vee \underline{\mu}_1(u),$$

$$\overline{\mu}_1(u) \vee \overline{\mu}_2(u) = \overline{\mu}_2(u) \vee \overline{\mu}_1(u),$$

所以

$$G_1 \cup G_2 = G_2 \cup G_1。$$

同理有 $$G_1 \cap G_2 = G_2 \cap G_1。$$

2. 结合律

$$G_1 \cup (G_2 \cup G_3) = (G_1 \cup G_2) \cup G_3;$$
$$G_1 \cap (G_2 \cap G_3) = (G_1 \cap G_2) \cap G_3。$$

证明：（略）。

3. 幂等律

$$G_1 \cup G_1 = G_1; \quad G_1 \cap G_1 = G_1。$$

4. 吸收律

$$(G_1 \cup G_2) \cap G_1 = G_1; \quad (G_1 \cap G_2) \cup G_1 = G_1。$$

证明： 因为 $(G_1 \cup G_2) \cap G_1$

$$=([\underline{\mu}_1(u), \overline{\mu}_1(u)] \cup [\underline{\mu}_2(u), \overline{\mu}_2(u)])$$

$$\cap [\underline{\mu}_1(u), \overline{\mu}_1(u)]$$①

$$=[\underline{\mu}_1(u) \vee \underline{\mu}_2(u), \overline{\mu}_1(u) \vee \overline{\mu}_2(u)] \cap [\underline{\mu}_1(u), \overline{\mu}_1(u)]$$

$$=[(\underline{\mu}_1(u) \vee \underline{\mu}_2(u)) \wedge \underline{\mu}_1(u),$$

$$(\overline{\mu}_1(u) \vee \overline{\mu}_2(u)) \wedge \overline{\mu}_1(u)],$$

当 $\underline{\mu}_1(u) \leqslant \underline{\mu}_2(u)$，$\overline{\mu}_1(u) \leqslant \overline{\mu}_2(u)$时，

$$(\underline{\mu}_1(u) \vee \underline{\mu}_2(u)) \wedge \underline{\mu}_1(u)$$

$$= \underline{\mu}_2(u) \wedge \underline{\mu}_1(u)$$

$$= \underline{\mu}_1(u), \tag{2-4-1}$$

$$(\overline{\mu}_1(u) \vee \overline{\mu}_2(u)) \wedge \overline{\mu}_1(u)$$

---

① 为了书写简便，在不致发生混淆的情况下，常规灰集合定义中的符号"{ }"可以略去。

$$= \overline{\mu}_2(u) \wedge \overline{\mu}_1(u)$$

$$= \overline{\mu}_1(u)。 \tag{2-4-2}$$

当 $\underline{\mu}_1(u) \geqslant \underline{\mu}_2(u)$，$\overline{\mu}_1(u) \geqslant \overline{\mu}_2(u)$时，

$$(\underline{\mu}_1(u) \vee \underline{\mu}_2(u)) \wedge \underline{\mu}_1(u)$$

$$= \underline{\mu}_1(u) \wedge \underline{\mu}_1(u)$$

$$= \underline{\mu}_1(u),$$

$$(\overline{\mu}_1(u) \vee \overline{\mu}_2(u)) \wedge \overline{\mu}_1(u)$$

$$= \overline{\mu}_1(u) \wedge \overline{\mu}_1(u)$$

$$= \overline{\mu}_1(u)。$$

同理可证，在其它情况下仍有式(2-4-1)和(2-4-2)成立。故有$(G_1 \cup G_2) \cap G_1 = G_1$。

类似地，可证 $(G_1 \cap G_2) \cup G_1 = G_1$。

5. 分配律

$$G_1 \cup (G_2 \cap G_3) = (G_1 \cup G_2) \cap (G_1 \cup G_3);$$

$$G_1 \cap (G_2 \cup G_3) = (G_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap G_3)。$$

证明： $G_1 \cup (G_2 \cap G_3)$

$$= [\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1] \cup ([\underline{\mu}_2, \overline{\mu}_2] \cap [\underline{\mu}_3, \overline{\mu}_3])$$

$$= [\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1] \cup ([\underline{\mu}_2 \wedge \underline{\mu}_3, \overline{\mu}_2 \wedge \overline{\mu}_3])$$

$$= [\underline{\mu}_1 \vee (\underline{\mu}_2 \wedge \underline{\mu}_3), \overline{\mu}_1 \vee (\overline{\mu}_2 \wedge \overline{\mu}_3)]$$

$$= [(\underline{\mu}_1 \vee \underline{\mu}_2) \wedge (\underline{\mu}_1 \vee \underline{\mu}_3), (\overline{\mu}_1 \vee \overline{\mu}_2) \wedge (\underline{\mu}_1 \vee \overline{\mu}_3)]$$

$$= (G_1 \cup G_2) \cap (G_1 \cup G_3),$$

同理有 $G_1 \cap (G_2 \cup G_3) = (G_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap G_3)$。

6. 0-1 律

$$G \cup \varnothing = G, \quad G \cap \varnothing = \varnothing,$$
$$G \cup U = U, \quad G \cap U = G。$$

证明： 因为 $G=[\underline{\mu},\overline{\mu}]\in G(U)$，$\varnothing=[0,0]$，$U=[1,1]$，所以

$$G \cup \varnothing = [\underline{\mu},\overline{\mu}] \cup [0,0]$$

$$= [\underline{\mu} \vee 0, \overline{\mu} \vee 0]$$

$$= [\underline{\mu},\overline{\mu}] = G;$$

$$G \cap \varnothing = [\underline{\mu},\overline{\mu}] \cap [0,0]$$

$$= [\underline{\mu} \wedge 0, \overline{\mu} \wedge 0]$$

$$= [0,0] = \varnothing;$$

$$G \cup U = [\underline{\mu},\overline{\mu}] \cup [1,1]$$

$$= [\underline{\mu} \vee 1, \overline{\mu} \vee 1]$$

$$= [1,1] = U;$$

$$G \cap U = [\underline{\mu},\overline{\mu}] \cap [1,1]$$

$$= [\underline{\mu} \wedge 1, \overline{\mu} \wedge 1]$$

$$= [\underline{\mu},\overline{\mu}] = G。$$

7. 还原律

$$(G^C)^C = G。$$

证明： $$(G^C)^C=([\underline{\mu},\overline{\mu}]^C)^C$$

$$=([\overline{\mu}^C,\underline{\mu}^C])^C=[(\underline{\mu}^C)^C,(\overline{\mu}^C)^C]$$

$$=[\underline{\mu},\overline{\mu}]=G。$$

8. 对偶律

$$(G_1\cup G_2)^C=G_1^C\cap G_2^C;$$
$$(G_1\cap G_2)^C=G_1^C\cup G_2^C。$$

证明： 实际上，由并、交、补的定义，有

$$(G_1\cup G_2)^C=([\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1]\cup[\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2])^C$$

$$=[\underline{\mu}_1\vee\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_1\vee\overline{\mu}_2]^C$$

$$=[(1-\overline{\mu}_1)\vee\overline{\mu}_2,(1-\underline{\mu}_1)\vee\underline{\mu}_2]$$

$$=[(1-\overline{\mu}_1)\wedge(1-\overline{\mu}_2),(1-\underline{\mu}_1)\wedge(1-\underline{\mu}_2)]$$

$$=[1-\overline{\mu}_1,1-\underline{\mu}_1]\cap[1-\overline{\mu}_2,1-\underline{\mu}_2]$$

$$=[\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1]^C\cap[\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2]^C$$

$$=G_1^C\cap G_2^C。$$

同理可证 $(G_1\cap G_2)^C=G_1^C\cup G_2^C$。

9. 常规灰集合不满足互补律

$$\forall G\in G(U),G\cup G^C\neq 1,G\cap G^C\neq\varnothing。$$

实际上，

$$G\cup G^C=[\underline{\mu},\overline{\mu}]\cup[1-\overline{\mu},1-\underline{\mu}_1]$$

$$=[\underline{\mu}\vee(1-\overline{\mu}),\overline{\mu}\vee(1-\underline{\mu})]。$$

当 $\underline{\mu},\overline{\mu}\in(0,1)$时，显然有

$$\underline{\mu}\vee(1-\overline{\mu})\neq 1,\quad \overline{\mu}\vee(1-\underline{\mu})\neq 1,$$

故
$$G\cup G^C\neq[1,1]\equiv 1。$$

只有当 $\underline{\mu},\overline{\mu}\in\{0,1\}$时，才有$G\cup G^C=1$。

类似可证 $G\cap G^C\neq\varnothing$。

由性质 9 可知，代数系数$(G(U),\cup,\cap,C)$不是布尔代数，可称之为软代数。

§2.5 泛灰集合的运算

一、泛灰集合的包含与相等关系

定义 2.5.1 设 $G_1=\{[\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1]\}$，$G_2=\{[\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2]\}\in G(U)$，$\forall\, u\in U$，有 $\underline{\mu}_1\leqslant\underline{\mu}_2$，$\overline{\mu}_1\leqslant\overline{\mu}_2$，则称 G_1 包含于 G_2，记作 $G_1\subseteq G_2$。

包含关系具有如下性质：

1. 自反性

$G\subseteq G$。

2. 反对称性

若 $G_1\subseteq G_2$，$G_2\subseteq G_1$，则 $G_1=G_2$。

证明： 由定义 2.5.1，$G_1\subseteq G_2$，即$\forall\, u\in U$，$\underline{\mu}_1\leqslant\underline{\mu}_2$，$\overline{\mu}_1\leqslant\overline{\mu}_2$；$G_1\supseteq G_2$，即$\forall\, u\in U$，$\underline{\mu}_1\geqslant\underline{\mu}_2$，$\overline{\mu}_1\geqslant\overline{\mu}_2$。由此可得

$$\underline{\mu}_1=\underline{\mu}_2,\ \overline{\mu}_1=\overline{\mu}_2,\ G_1=G_2。$$

3. 传递性

若 $G_1 \subseteq G_2, G_2 \subseteq G_3$，则 $G_1 \subseteq G_3$。

由以上三条性质可知，$(G(U), \subseteq)$是偏序集。

二、泛灰集的并、交运算

定义 2.5.2 设 $G_1, G_2 \in G(U)$，$\forall u \in U$，定义

$$G_1 \cup G_2 = \{[\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1]\} \cup \{[\underline{\mu}_2, \overline{\mu}_2]\}$$

$$= \{[\underline{\mu}_1 \vee \underline{\mu}_2, \overline{\mu}_1 \vee \overline{\mu}_2]\},$$

$$G_1 \cap G_2 = \{[\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1]\} \cap \{[\underline{\mu}_2, \overline{\mu}_2]\}$$

$$= \{[\underline{\mu}_1 \wedge \underline{\mu}_2, \overline{\mu}_1 \wedge \overline{\mu}_2]\}。$$

注：因泛灰集隶属度值已超出[0,1]，所以不能定义其补集运算。

类似地，可定义有限个泛灰集的并、交运算。

定义 2.5.3 设 $G_t \subseteq G(U)$，$t \in T$（T 是指标集），$\forall u \in N$，定义

$$\bigcup_{t \in T} G_t = \{[\sup\{\underline{\mu}_{G_t}(u) \mid t \in T\}, \sup\{\overline{\mu}_{G_t}(u) \mid t \in T\}]\};$$

$$\bigcap_{t \in T} G_t = \{[\inf\{\underline{\mu}_{G_t}(u) \mid t \in T\}, \inf\{\overline{\mu}_{G_t}(u) \mid t \in T\}]\}。$$

例 2.5.1 设 $U = \{u_1, u_2, u_3\}$，

$$G_1 = \{[\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1], [\underline{\mu}_2, \overline{\mu}_2], [\underline{\mu}_3, \overline{\mu}_3]\}$$

$$= \{[-0.2, 0.7], [-1, 1], [-0.5, 0.9]\},$$

$$G_2 = \{[-0.3, 1.2], [-0.6, 0.7], [-0.8, 1]\},$$

则

$$G_1 \cup G_2 = \{[-0.2, 0.7], [-1, 1], [-0.5, 0.9]\} \cup \{[-0.3, 1.2], [-0.6, 0.7], [-0.8, 1]\}$$

$$=\{[\![-0.2,1.2]\!],[\![-0.6,1]\!],[\![-0.5,1]\!]\},$$

$$G_1\cap G_2=\{[\![-0.3,0.7]\!],[\![-1,0.7]\!],[\![-0.8,0.9]\!]\}。$$

三、泛灰集合的基本运算性质

设 $G_1,G_2,G_3\in G(U)$，则有

1. 交换律

$$G_1\cup G_2=G_2\cup G_1,G_1\cap G_2=G_2\cap G_1。$$

2. 结合律

$$G_1\cup(G_2\cup G_3)=(G_1\cup G_2)\cup G_3,$$

$$G_1\cap(G_2\cap G_3)=(G_1\cap G_2)\cap G_3。$$

3. 幂等律

$$G_1\cup G_1=G_1,G_1\cap G_1=G_1。$$

4. 吸收律

$$(G_1\cup G_2)\cap G_1=G_1,(G_1\cap G_2)\cup G_1=G_1。$$

证明： 设 $G_1,G_2\in G(U)$，由并、交运算定义有

$(G_1\cup G_2)\cap G_1$

$$=([\![\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1]\!]\cup[\![\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2]\!])\cap[\![\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1]\!]$$

$$=[\![(\underline{\mu}_1\vee\underline{\mu}_2)\wedge\underline{\mu}_1,(\overline{\mu}_1\vee\overline{\mu}_2)\wedge\overline{\mu}_1]\!]$$ ①

当 $\underline{\mu}_1\leqslant\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_1\leqslant\overline{\mu}_2$ 时，

$$(\underline{\mu}_1\vee\underline{\mu}_2)\wedge\underline{\mu}_1=\underline{\mu}_2\wedge\underline{\mu}_1=\underline{\mu}_1;$$

$$(\overline{\mu}_1\vee\overline{\mu}_2)\wedge\overline{\mu}_1=\overline{\mu}_2\wedge\overline{\mu}_1=\overline{\mu}_1。$$

当 $\underline{\mu}_1\geqslant\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_1\geqslant\overline{\mu}_2$ 时，

$$(\underline{\mu}_1\vee\underline{\mu}_2)\wedge\underline{\mu}_1=\underline{\mu}_1\wedge\underline{\mu}_1=\underline{\mu}_1;$$

---

① 为了书写简便，在不致发生混淆的情况下，集合符号“{ }”可以略去。

$$(\overline{\mu}_1 \vee \overline{\mu}_2) \wedge \overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_1 \wedge \overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_1。$$

当 $\underline{\mu}_1 \leqslant \underline{\mu}_2, \overline{\mu}_1 \geqslant \overline{\mu}_2$ 时，

$$(\underline{\mu}_1 \vee \underline{\mu}_2) \wedge \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_2 \wedge \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_1;$$

$$(\overline{\mu}_1 \vee \overline{\mu}_2) \wedge \overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_1 \wedge \overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_1。$$

当 $\underline{\mu}_1 \geqslant \underline{\mu}_2, \overline{\mu}_1 \leqslant \overline{\mu}_2$ 时，

$$(\underline{\mu}_1 \vee \underline{\mu}_2) \wedge \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_1 \wedge \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_1;$$

$$(\overline{\mu}_1 \vee \overline{\mu}_2) \wedge \overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_2 \wedge \overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_1。$$

故

$$(G_1 \cup G_2) \cap G_1 = G_1。$$

同理可证 $\qquad (G_1 \cap G_2) \cup G_1 = G_1。$

例 2.5.2 设 $G_1 = [\![-0.2, 0.9]\!], G_2 = [\![0.3, 1.5]\!]$，则

$$\begin{aligned}
&(G_1 \cup G_2) \cap G_1 \\
&= ([\![-0.2, 0.9]\!] \cup [\![0.3, 1.5]\!]) \cap [\![-0.2, 0.9]\!] \\
&= [\![0.3, 1.5]\!] \cap [\![-0.2, 0.9]\!] \\
&= [\![-0.2, 0.9]\!] \\
&= G_1。
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(G_1 \cap G_2) \cup G_1 \\
&= ([\![-0.2, 0.9]\!] \cap [\![0.3, 1.5]\!]) \cup [\![-0.2, 0.9]\!] \\
&= [\![-0.2, 0.9]\!] \cup [\![-0.2, 0.9]\!] \\
&= [\![-0.2, 0.9]\!] \\
&= G_1。
\end{aligned}$$

5. 分配律

$$G_1 \cup (G_2 \cap G_3) = (G_1 \cup G_2) \cap (G_1 \cup G_3); \quad (2\text{-}5\text{-}1)$$

$$G_1 \cap (G_2 \cup G_3) = (G_1 \cap G_2) \cup (G_1 \cap G_3)。 \quad (2\text{-}5\text{-}2)$$

证明：

$$G_1 \cup (G_2 \cap G_3)$$

$$=[\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1] \cup ([\underline{\mu}_2, \overline{\mu}_2] \cap [\underline{\mu}_3, \overline{\mu}_3])$$

$$=[\underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1] \cup [\underline{\mu}_2 \wedge \underline{\mu}_3, \overline{\mu}_2 \wedge \overline{\mu}_3]$$

$$=[\underline{\mu}_1 \vee (\underline{\mu}_2 \wedge \underline{\mu}_3), \overline{\mu}_1 \vee (\overline{\mu}_2 \wedge \overline{\mu}_3)]$$

$$=[(\underline{\mu}_1 \vee \underline{\mu}_2) \wedge (\underline{\mu}_1 \vee \underline{\mu}_3), (\overline{\mu}_1 \vee \overline{\mu}_2) \wedge (\overline{\mu}_1 \vee \overline{\mu}_3)]$$

$$=(G_1 \cup G_2) \cap (G_1 \cup G_3),$$

故(2-5-1)式成立。

同理可证(2-5-2)式成立。

6. 0-1 律

$$G \cup \varnothing = G, G \cap \varnothing = \varnothing。$$

因泛灰集没有补集运算，没有全集定义，所以在 0-1 律中没有 $G \cup U$、$G \cap U$ 运算，也没有还原律与对偶律及互补律。

第三章　区间型灰数学基础

§3.1　灰数概念及其分类

定义 3.1.1　设论域 $U=\mathbf{R}$，则称由定义 2.1.3 定义的灰集合

$$G|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)}, x \in \mathbf{R}, \underline{\mu}(x), \overline{\mu}(x) \in [0,1]$$

为灰数，并简记为 G。

由全体灰数组成的集合记作 $g(G)$，且称

$$E = \{x \mid \overline{\mu}(x) \neq 0, x \in \mathbf{R}\}$$

为 G 的灰域；

$$e = \{x \mid \overline{\mu}(x) \neq \underline{\mu}(x), x \in \mathbf{R}\}$$

为 G 的真灰域。

例 3.1.1　设有区间 $[a,b] \subset \mathbf{R}$，且

$$\overline{\mu}_G(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b], \end{cases} \quad \underline{\mu}_G(x) \equiv 0, x \in \mathbf{R},$$

由定义知，G 是一个灰数。

例 3.1.2　设有区间 $[a,b] \subset \mathbf{R}$，且

$$\overline{\mu}_{G'}(x) = \underline{\mu}_{G'}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a,b]; \\ 0, & x \notin [a,b]; \end{cases} x \in \mathbf{R},$$

由定义知，G' 是一个灰数。

灰数的表示法与灰集合的表示法基本相同。

1. 向量表示法

$$G = \{(x, \underline{\mu}_G(x), \overline{\mu}_G(x)) \mid x \in \mathbf{R}\}。$$

2. 分式表示法

$$G=\{(\underline{\mu}_G(x),\overline{\mu}_G(x))/x\,|\,x\in\mathbf{R}\}\text{ 或}$$

$$G=\int_{x\in\mathbf{R}}(\underline{\mu}_G(x),\overline{\mu}_G(x))/x。$$

3. 一般表示法

$$G=G|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)},x\in\mathbf{R}。$$

4. 区间表示法

这种方法仅列出 x 的取值范围。如,$G=[a,b]$,$a,b\in\mathbf{R}$。

例 3.1.3 若灰数 G 的上、下隶属度分别为

$$\underline{\mu}_G(x)=\frac{1}{2}|\sin x|,\ \overline{\mu}_G(x)=|\sin x|,x\in[a,b]\subset\mathbf{R},$$

用不同的表示法表示,则有如下不同形式:

(1) $G=\left\{\left(x,\left[\frac{1}{2}|\sin x|,|\sin x|\right]\right)\,|\,x\in[a,b]\right\}$;

(2) $G=\left\{\left(\frac{1}{2}|\sin x|,|\sin x|\right)\Big/x\,|\,x\in[a,b]\right\}$;

(3) $G=G\Big|_{\frac{1}{2}|\sin x|}^{|\sin x|},x\in[a,b]$;

(4) $G=[a,b]$(在不发生混淆的情况下)。

由于所研究的问题不同,所抽象出的灰数也不同。灰数大体上可分为如下三类。

1. 上无界灰数

对于灰数 $G\Big|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)}$,$x\in\mathbf{R}$,$E=\{x\,|\,\overline{\mu}_G(x)\neq 0,x\in\mathbf{R}\}$,若

$$\inf E=a\in\mathbf{R},\ \sup E=+\infty,$$

则称 $G\Big|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)}$ 为上无界灰数。

例 3.1.4 设 $\overline{\mu}_G(x)=\begin{cases}\sin^2x, & x\geqslant 0;\\ 0, & x<0,\end{cases}$ $\underline{\mu}_G(x)=0, x\in\mathbf{R}$，则 $G\Big|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)}$ 为上无界灰数。这里，

$$\inf E=0,\quad \sup E=+\infty。$$

宇宙的总重量就是一个上无界灰数。

2. 下无界灰数

对于灰数 $G\Big|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)}$，$x\in\mathbf{R}$，设 $E=\{x\mid\overline{\mu}_G(x)\neq 0, x\in\mathbf{R}\}$，若

$$\inf E=-\infty, \sup E=b\in\mathbf{R},$$

则称 $G\Big|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)}$ 为下无界灰数。

例 3.1.5 设 $\overline{\mu}_G(x)=\begin{cases}\sin^2x, & x\leqslant 0;\\ 0, & x>0;\end{cases}$ $\underline{\mu}_G(x)=0, x\in\mathbf{R}$，容易验证，$G\Big|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)}$ 是一个下无界灰数。这里，

$$\inf E=-\infty,\quad \sup E=0。$$

3. 有界灰数

对于灰数 $G\Big|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)}$，设 $E=\{x\mid\overline{\mu}(x)\neq 0, x\in\mathbf{R}\}$，若存在实常数 $a,b\in\mathbf{R}$，使得 $\inf E=a$，$\sup E=b$，则称 $G\Big|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)}$ 为有界灰数。

例 3.1.6 正常人的脉搏每分钟跳动的次数是一个有界灰数。这里，$\inf E=65$，$\sup E=80$，且

$$\underline{\mu}_G(x)=\overline{\mu}_G(x)=\begin{cases}1, & x\in E;\\ 0, & x\notin E。\end{cases}$$

例 3.1.1 与例 3.1.2 给出的皆为有界灰数，且是两类特殊的有界灰数，其灰域 $E=[a,b]\subset\mathbf{R}$。在不发生混淆的情况下，常把这

两类灰数直接用区间形式表示，并简称为区间型灰数。

命题 3.1.1 灰数 $G\Big|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)}$ 有上(下)界的充要条件是 $\{x|\overline{\mu}(x)\neq 0\}$ 有上(下)界。

命题 3.1.2 灰数 $G\Big|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)}$ 为区间型灰数的必要条件是 $\{x|\overline{\mu}(x)\neq 0\}$ 有上、下界。

对于灰数 $G\Big|_{\underline{\mu}(x)}^{\overline{\mu}(x)}$，若 $E=\{x|\overline{\mu}(x)\neq 0\}$ 是一个实区间，则称 G 为连续型灰数，否则称 G 为离散型灰数。

例 3.1.7 某人的外貌表明，他的年龄可能在 31～35 岁之间。这就是一个离散型灰数。

其中，

$$E=\{31,32,33,34,35\},$$

$$\overline{\mu}(x)=\begin{cases}1, & x\in E;\\ 0, & x\notin E,\end{cases}$$

$$\underline{\mu}(x)=0。$$

例 3.1.8 人体的重量是一个连续型灰数。一般情况下，最轻(如初生婴儿)为 1kg，最重为 100kg。所以，$E=[1,100]$，

$$\overline{\mu}(x)=\underline{\mu}(x)=\begin{cases}1, & x\in E;\\ 0, & x\notin E。\end{cases}$$

更确切地说，这是一个连续型区间灰数。

在灰色系统理论中，应用最多的是邓聚龙教授提出的信息型灰数和层次型灰数。它们的灰域都是区间，故这两类灰数也是区间型灰数。本章将重点讨论这两类灰数。为了叙述方便，在一般情况下，统称这两类灰数为区间型灰数，故本章的题目称为“区间型灰数学基础”。

§3.2 区间型灰数及其代数运算

一、区间型灰数的概念

定义 3.2.1 设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a\leqslant b$，

$$\overline{\mu}_G(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in[a,b];\\ 0, & \text{当 } x\notin[a,b],\end{cases}$$

$$\underline{\mu}_G(x)\equiv 0, x\in\mathbf{R},$$

则称灰数 G 为信息型灰数，也称为邓氏灰数，记为$[\underset{\sim}{a,b}]$。

在此定义中，因为 $\overline{\mu}_G(x)\neq\underline{\mu}_G(x)$，$x\in[a,b]$，所以灰数 G 的真灰域为$[a,b]$，其几何意义如图 3.2.1 所示。这里，只知道 G 的上隶属度是 1，下隶属度是 0，究竟 G 中每一元素的隶属度是多少，并不知道。因此，通常称这类灰数 G 为真灰数。这样的灰数在实践中经常用到。

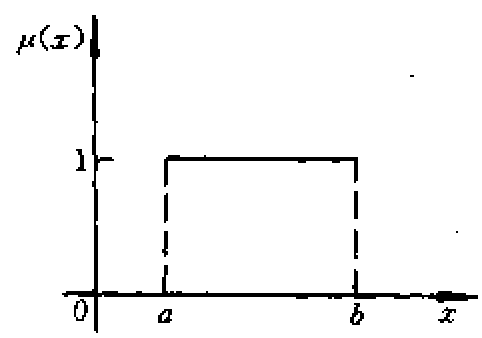

图 3.2.1

例如，说某人在银行的存款在 3000 元到 5000 元之间，但究竟是多少？并不知道。若任取区间[3000，5000]上的一个实值，它相对于 G 的隶属度可能是 1，则该值就是此人的存款。若该实值相对于 G 的隶属度在 0 与 1 之间，则只表明该实值是此人可能的存款，但真正的存款是多少，并不能确定。若某一实值不在 3000 与 5000 之间，它的上下隶属度皆为零，这表明这个值根本不可能是此人的存款。这个灰数就是一个邓氏灰数。

又如，预计某地区今年的粮食产量在 3 亿kg到 3.5 亿 kg 之间，这个灰数也是一个邓氏灰数。

定义 3.2.2 设 $a,b\in\mathbf{R}$，且 $a\leqslant b$，

$$\overline{\mu}_{G'}(x) = \underline{\mu}_{G'}(x) = \begin{cases} 1, & 当\ x \in [a,b]; \\ 0, & 当\ x \notin [a,b], \end{cases}$$

则称灰数 G' 为层次型灰数，也称为区间灰数，记为$[a,b]$。

在此定义中，因为 $\overline{\mu}_{G'}(x) = \underline{\mu}_{G'}(x)$，$x \in [a,b]$，且 $\overline{\mu}_{G'}(x) \neq 0$，$x \in [a,b]$，所以 G' 的灰域为$[a,b]$。它的几何意义如图 3.2.2 所

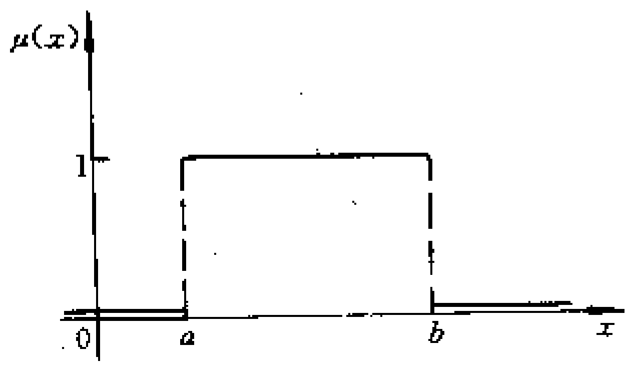

图 3.2.2

示。这里，只要有 $x \in [a,b]$，便有 $\mu_{G'}(x) = \overline{\mu}_{G'}(x) = \underline{\mu}_{G'}(x) = 1$。

当 $x \notin [a,b]$时，便有 $\mu_{G'}(x) = \overline{\mu}_{G'}(x) = \underline{\mu}_{G'}(x) = 0$，它满足 Cantor 集合的定义。所以 G' 是一个实区间$[a,b]$。这样的灰数在实践中也很常见。

例如，根据大量的统计结果，海豹的质量在 20～25kg 之间。只要在区间[20,25]上取一实数值都是海豹的质量数。因为 $\mu_{G'}(x) = 1(x \in [20,25])$。当然，由于地区不同，海豹的年龄不同，所构成的区间$[a,b]$也会不同。这是 G' 的一个层次变化，所以称 G' 为层次型灰数。

邓氏灰数和区间灰数统称为区间型灰数。所有区间型灰数的集合用 $g(I)$表示。

当 $a \geqslant 0$ 时，称$[a,b]$和$[\underset{\sim}{a,b}]$为正区间型灰数。

二、区间型灰数的代数运算

1. 加法运算

规定：

$$\underset{\sim}{[a,b]}+\underset{\sim}{[c,d]}=\underset{\sim}{[a+c,b+d]};$$

$$[a,b]+\underset{\sim}{[c,d]}=\underset{\sim}{[a+c,b+d]};$$

$$\underset{\sim}{[a,b]}+[c,d]=\underset{\sim}{[a+c,b+d]};$$

$$[a,b]+[c,d]=[a+c,b+d]。$$

2. 减法运算

规定：

$$\underset{\sim}{[a,b]}-\underset{\sim}{[c,d]}=\underset{\sim}{[a-d,b-c]};$$

$$[a,b]-\underset{\sim}{[c,d]}=\underset{\sim}{[a-d,b-c]};$$

$$\underset{\sim}{[a,b]}-[c,d]=\underset{\sim}{[a-d,b-c]};$$

$$[a,b]-[c,d]=[a-d,b-c]。$$

3. 乘法运算

规定：

$$\underset{\sim}{[a,b]}\times\underset{\sim}{[c,d]}=\underset{\sim}{[\min\{ac,ad,bc,bd\},\max\{ac,ad,bc,bd\}]};$$

$$[a,b]\times\underset{\sim}{[c,d]}=\underset{\sim}{[\min\{ac,ad,bc,bd\},\max\{ac,ad,bc,bd\}]};$$

$$\underset{\sim}{[a,b]}\times[c,d]=\underset{\sim}{[\min\{ac,ad,bc,bd\},\max\{ac,ad,bc,bd\}]};$$

$$[a,b]\times[c,d]=[\min\{ac,ad,bc,bd\},\max\{ac,ad,bc,bd\}]。$$

4. 除法运算

当 $0\notin[c,d]$时，规定：

$$\underset{\sim}{[a,b]}/\underset{\sim}{[c,d]}=\underset{\sim}{[a,b]}\times\underset{\sim}{\left[\frac{1}{d},\frac{1}{c}\right]};$$

$$[a,b]/\underset{\sim}{[c,d]}=[a,b]\times\underset{\sim}{\left[\frac{1}{d},\frac{1}{c}\right]};$$

$$\underset{\sim}{[a,b]}/[c,d]=\underset{\sim}{[a,b]}\times\left[\frac{1}{d},\frac{1}{c}\right];$$

$$[a,b]/[c,d]=[a,b]\times\left[\frac{1}{d},\frac{1}{c}\right]。$$

例 3.2.1

$$\underset{\sim}{[1,2]}+\underset{\sim}{[3,4]}=\underset{\sim}{[4,6]};$$

$$[1,2]-\underset{\sim}{[3,4]}=\underset{\sim}{[-3,-1]};$$

$$\underset{\sim}{[1,2]}\times[3,4]=\underset{\sim}{[3,8]};$$

$$[1,2]/[3,4]=\left[\frac{1}{4},\frac{2}{3}\right]。$$

定义 3.2.3 设 $G_1,G_2\in g(I)$，若存在实数 k 使

$$G_1=k\cdot G_2=[k,k]G_2,$$

则称 G_1 是 G_2 的 k 倍。

区间型灰数的代数运算具有以下性质。

设 $G_1,G_2,G_3\in g(I)$，$G^{(0)}=[0,0]$，$G^{(1)}=[1,1]$，则有：

性质 3.2.1 $G_1+G_2=G_2+G_1$。

性质 3.2.2 $(G_1+G_2)+G_3=G_1+(G_2+G_3)$。

性质 3.2.3 $G_1+G^{(0)}=G_1$。

性质 3.2.4 $G_1\times G_2=G_2\times G_1$。

性质 3.2.5 $(G_1\times G_2)\times G_3=G_1\times(G_2\times G_3)$。

性质 3.2.6 $G_1\times G^{(1)}=G_1$。

证明： 只证性质 3.2.2、性质 3.2.5。

不妨设 $G_1=[a,b]$，$G_2=[c,d]$，$G_3=[e,f]$，则

$$\begin{aligned}(G_1+G_2)+G_3&=[a+c,b+d]+[e,f]\\&=[a+c+e,b+d+f]\\&=[a,b]+[c+e,d+f]\\&=G_1+(G_2+G_3)。\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(G_1\times G_2)\times G_3=&[\min\{ac,ad,bc,bd\},\\&\max\{ac,ad,bc,bd\}]\times[e,f]\\=&[\min\{ace,acf,ade,adf,bce,bcf,bde,bdf\},\\&\max\{ace,acf,ade,adf,bce,bcf,bde,bdf\}]\end{aligned}$$

$$=[a,b]\cdot[\min\{ce,cf,de,df\},\ \max\{ce,cf,de,df\}]$$
$$=G_1\times(G_2\times G_3)。$$

注 3.2.1 乘法对加法的分配律不成立。

例如，$[-2,2]\times([-1,2]+[-2,1])=[-6,6]$；

$$[-2,2]\times[-1,2]+[-2,2]\times[-2,1]=[-8,8]。$$

但当所论灰数均为正区间型灰数时，有如下定理。

定理 3.2.1 设 G_1,G_2,G_3 为正区间型灰数，则

$$G_1\times(G_2+G_3)=G_1\times G_2+G_1\times G_3。$$

证明：（略）。

注 3.2.2 消去律不成立。

例如，$[-2,2]\times[-1,2]=[-2,2]\times[-2,1]$，但$[-1,2]\neq[-2,1]$。

三、区间型灰数的白化

区间型灰数的白化值是指在其区间上找出的“权”最大，亦即隶属度最大的实值，它可以代表这个区间型灰数参加建模和运算。求灰数白化值的过程称为灰数的白化。

1. 区间灰数的白化

设 $G=[a,b]$，因为

$$\mu_G(x)=\overline{\mu}_G(x)=\underline{\mu}_G(x)=\begin{cases}1, & x\in[a,b];\\ 0, & x\notin[a,b],\end{cases}$$

所以，任取 $x\in[a,b]$，有 $\mu_G(x)=1$，亦即区间$[a,b]$中任何一个实数都具有相同的权重 1。可见，$[a,b]$中任何一个实数都可以作为它的白化值。所以说区间灰数是最不灰的一个灰数。

例如，海豹的质量灰数$=[20,25]$，20 至 25 之间的任何一个数，都可以代表海豹的质量数值，也就是说，20 与 25 之间的任何一个数都可以作为区间灰数$[20,25]$的白化值。

当海豹的产地、年龄等条件明确以后，这个区间将会缩小，但

其白化值仍是这个缩小后的区间中的任何一个实数。可见，区间灰数的白化过程相当简单。

2. 邓氏灰数的白化

邓氏灰数在灰色系统中是最多见的一类。设 $G=[c\underset{\sim}{,}d]$，因为

$$\overline{\mu}_G(x)=\begin{cases}1, & x\in[c,d];\\ 0, & x\notin[c,d],\end{cases}\quad \underline{\mu}_G(x)\equiv 0,\ x\in\mathbf{R},$$

所以它与区间灰数有着截然不同的特点。任取 $x\in[c,d]$，$0\leqslant\mu_G(x)\leqslant 1$，即只知道隶属度处于 0 与 1 之间，而不知道确切值。所以，邓氏灰数的白化相当困难。一般地，只能在补充信息量的基础上，通过分析事物发展规律确定出白化隶属函数 $\mu_G(x)$，从中找出以最大隶属度 $\mu_G(x_0)$ 为像的实数 x_0 作为 $[c\underset{\sim}{,}d]$ 的白化值。从这个意义上说，邓氏灰数是最灰的一个灰数。

例如，土壤对速氮含量的要求不能超过 55×10^{-6} 到 55×10^{-6} 时，其效果就等于零。$[0\underset{\sim}{,}55\times10^{-6}]$ 是一个邓氏灰数。为了寻求其白化值，可通过实验方法求出含量与效果之间的函数关系，进而求得白化值。经实验知道，从 0 到 15×10^{-6} 是越多越好，到 15×10^{-6} 后效果最佳，但超过 40×10^{-6} 效果就逐渐下降，直到 55×10^{-6} 效果变为零。根据这一规律，可确定如下的白化隶属函数：

$$\mu_G(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{15\times10^{-6}}x, & x\in[0,15\times10^{-6});\\ 1, & x\in[15\times10^{-6},40\times10^{-6}];\\ -\dfrac{1}{15\times10^{-6}}x, & x\in(40\times10^{-6},55\times10^{-6}]。\end{cases}$$

容易发现，在 $[15\times10^{-6},40\times10^{-6}]$ 中，隶属度皆为 1，它已转化为区间灰数。因此 15×10^{-6} 到 40×10^{-6} 之间的数值皆可作为 $[0\underset{\sim}{,}55\times10^{-6}]$ 的白化值。根据择优原则，以 15×10^{-6} 为白化值最为理想。

通过上例可以看出，求白化隶属函数的过程与模糊集合论中

求隶属函数的过程是一致的。因此，模糊数学中的一些方法可以借鉴到灰色数学中来。

若灰数 G_1 和 G_2 都是邓氏灰数或都是区间灰数，则称 G_1 和 G_2 为同型灰数。

§3.3 区间型灰距离空间

作为实距离的推广，本节给出区间型灰数间的距离概念。

一、区间型灰数的坐标表达式

对于区间灰数 $A=[a,b]$ 和邓氏灰数 $B=[a\underset{\sim}{,}b]$，当 A 和 B 给定后，两个端点 a 和 b 就确定了。当给定两个实数 $a\leqslant b$ 后，区间型灰数的支架集 E 就确定了，$E=[a,b]$。但这时还不能确定此区间型灰数是区间灰数 A 还是邓氏灰数 B，即灰数的灰度不定。因为区间灰数的灰度为 0，邓氏灰数的灰度为 1，所以可用 0，1 表示区间灰数 A 与邓氏灰数 B 的区别。作对应

$$\lambda: \quad [a,b] \longmapsto (a,b,0);$$
$$[a\underset{\sim}{,}b] \longmapsto (a,b,1)。$$

令

$$\nabla=\{(x,y,z) \mid x\leqslant y, z\in\{0,1\}\},$$

则 λ 是 $g(I)$ 到 ∇ 的一一对应。由于 ∇ 是三维欧氏空间的子集，所以可以用三维欧氏空间中的点 $(a,b,0)$ 来表示区间灰数 $[a,b]$，用点 $(a,b,1)$ 来表示邓氏灰数 $[a\underset{\sim}{,}b]$。称点 $(a,b,0)$ 和 $(a,b,1)$ 分别为区间灰数 $[a,b]$ 和邓氏灰数 $[a\underset{\sim}{,}b]$ 的像点，称 ∇ 为 $g(I)$ 的像点集，并称 $(a,b,0)$ 和 $(a,b,1)$ 为 $[a,b]$ 和 $[a\underset{\sim}{,}b]$ 的坐标表达式，记为

$$A=[a,b]=(a,b,0),$$
$$B=[a\underset{\sim}{,}b]=(a,b,1)。$$

$g(I)$的像点集▽如图 3.3.1 所示。

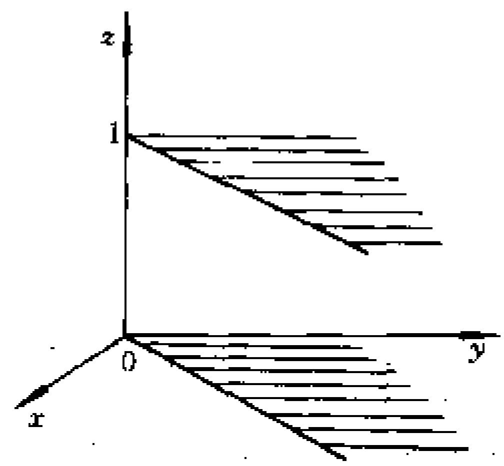

图 3.3.1

为了书写方便，规定：对任意的区间型灰数 A，用 $P(A)$表示 A 的左端点，用 $Q(A)$表示 A 的右端点。当 A 为区间灰数时，令 $R(A)=0$，当 A 为邓氏灰数时，令 $R(A)=1$，则

$$A=(P(A),Q(A),R(A)),$$

其中，$P(A)\leqslant Q(A)$，$R(A)=0$ 或 1。

二、区间型灰数间的距离

由于区间型灰数可以看作是三维欧氏空间中的点，因此，可以依照空间点的距离来定义区间型灰数间的距离。

定义 3.3.1 设$A=(P(A),Q(A),R(A))$，

$B=(P(B),Q(B),R(B))$，

则称

$$\rho(A,B)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{p^2+q^2+r^2},$$

$$p=\sqrt{(P(A)-P(B))^2},$$

$$q=\sqrt{(Q(A)-Q(B))^2},$$

$$r=\sqrt{(R(A)-R(B))^2}$$

为区间型灰数 A,B 间的距离。

例如，$A=[-1,1]=(-1,1,0)$，

$B=[2,3]=(2,3,1)$，

则

$$\rho(A,B)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(-1-2)^2+(1-3)^2+(0-1)^2}$$

$$=\sqrt{7}。$$

因为三维欧氏空间是距离空间，显然，区间型灰数间的距离 ρ 具有下列性质。

对任意的区间型灰数 A,B、C，有

性质 3.3.1 $\rho(A,B)\geqslant 0$；

性质 3.3.2 $\rho(A,B)=\rho(B,A)$；

性质 3.3.3 $\rho(A,B)=0\Leftrightarrow A=B$；

性质 3.3.4 $\rho(A,B)\leqslant\rho(A,C)+\rho(B,C)$。

由性质 3.3.1,3.3.3,3.3.4 知，$g(I)$关于 ρ 构成距离空间，称 $g(I)$为区间型灰距离空间。

性质 3.3.5 设 A,B 是实数，$d(A,B)$表示 A B 间的实距离，则 $\rho(A,B)=d(A,B)$。

证明： 设 $A=[a,a]=(a,a,0)$，$B=[b,b]=(b,b,0)$，

则

$$\rho(A,B)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{(a-b)^2+(a-b)^2+0}$$

$$=|a-b|$$

$$=d(A,B)。$$

由上可知，区间型灰数间的距离 ρ 是实距离 d 的推广。

§ 3.4 灰函数

函数是经典数学中的重要概念，本节给出灰函数的概念，并给出将实函数延拓成灰函数的延拓法则。

一、灰函数的概念

定义 3.4.1 设 $D \subseteq g(I)$，f 为 D 到 $g(I)$ 的一个对应。若 f 满足 $\forall\ x \in D$，$\exists\ y \in g(I)$，使 $x \mapsto y$，则称对应 f 确定了 D 上的一个灰函数，记为 $y=f(x)$；D 称为定义域，集合

$$U = \{f(x) | x \in D\}$$

称为函数 $f(x)$ 的值域。

例 3.4.1 $y=f(x)=[1,2]$，$x \in g(I)$ 为灰常函数。

例 3.4.2 $y=f(x)=x^2$，$x \in g(I)$，为灰幂函数。

当 $D \subseteq \mathbf{R}$，$U \subseteq \mathbf{R}$ 时，灰函数为普通实函数。当 $D \nsubseteq \mathbf{R}$，$U \subseteq \mathbf{R}$ 时，灰函数为实值灰函数。

定义 3.4.2 令 $D=N=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$，则灰函数 $y=f(x)$ 为灰数列 $f(1),f(2),\cdots,f(n),\cdots$

一般地，对于灰数列 $a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots,a_i \in g(I)$，称 a_n 为灰数列的通项或第 n 项，灰数列记为 $\{a_n\}$。

二、实函数的灰延拓

对于实函数 $y=f(x)$，只有当 x 取实数值时，y 才有意义，当 x 取区间型灰数时，y 无意义。

在经典微积分中，基本初等函数起着非常重要的作用。有了灰函数后，自然希望将实函数的定义域扩充到区间型灰数中，使之拓广为灰色数学中的灰函数。为此，下面给出延拓实函数的一般法则。

定义 3.4.3 设 $y=f(x)$，$x \in D$ 为一实函数，对于任意的区

间$[a,b]$，且$[a,b]\cap D\neq\varnothing$，规定

$$f([a,b])\triangleq[\inf_{x\in[a,b]\cap D}f(x),\quad\sup_{x\in[a,b]\cap D}f(x)]$$

$$f([\underset{\sim}{a\ ,}\ b])\triangleq[\inf_{x\in[a,b]\cap D}f(x)\underset{\sim}{,}\ \sup_{x\in[a,b]\cap D}f(x)]$$

这样，实函数$y=f(x)$的定义域就扩充到了区间型灰数中，所得的灰函数仍记为$y=f(x)$，此时的定义域为

$$\mathscr{D}=\{x|x\in g(I),E_x\cap D\neq\varnothing\}。$$

由定义知，只有当$[a,b]\cap D\neq\varnothing$时，$f([a,b])$和$f[(\underset{\sim}{a\ ,}\ b])$才有意义，否则，无意义。

当x取实数值时，灰函数就是原来的实函数。

按此法则，任意的初等函数都可延拓为灰函数。

例 3.4.3 实函数$y=f(x)=x,x\in\boldsymbol{R}$。此函数延拓为灰函数则为

$$y=f(x)=x,\ x\in g(I)。$$

例 3.4.4 实函数$y=2^x,x\in\boldsymbol{R}$。该函数延拓为灰函数则为

$$y=2^x=(2^{P(x)},2^{Q(x)},R(x)),x\in g(I)。$$

例 3.4.5 实函数$y=\sin x,x\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$。该函数延拓为灰函数则为

$$y=\sin x=(\sin t,\sin s,R(x)),\ x\in\mathscr{D}。$$

其中，

$$t=\max\left\{P(x),-\frac{\pi}{2}\right\},s=\min\left\{Q(x),\frac{\pi}{2}\right\};$$

$$\mathscr{D}=\left\{x|x\in g(I),E_x\cap\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]\neq\varnothing\right\}。$$

例 3.4.6 实函数$y=\ln x,x\in[1,+\infty)$。该函数延拓为灰函数则为

$$y=\ln x=(\ln t,\ln Q(x),R(x)),x\in\mathscr{D}。$$

其中，$t=\max\{P(x),1\}$，$\mathscr{D}=\{x|x\in g(I),E_x\cap[1,+\infty)\neq\varnothing\}$。

§ 3.5 灰极限

本节将在上一节的基础上讨论灰函数的极限。

一、灰区域的概念

定义 3.5.1 设 $x_0 \in g(I)$，δ 为实数，且 $\delta > 0$，则称集合 $\{x \mid \rho(x, x_0) < \delta, x \in g(I)\}$ 为以 x_0 为中心，δ 为半径的灰邻域，记为 $N(x_0, \delta)$。

定义 3.5.2 设 $D \subseteq g(I)$，$x_0 \in g(I)$，若对任意的实数 $\delta > 0$，在 $N(x_0, \delta)$ 中恒有无穷多个 D 中的区间型灰数，则称 x_0 为 D 的一个灰极限点。

定义 3.5.3 设 $x_0 \in D$，若存在 $\delta > 0$，使 $N(x_0, \delta) \subseteq D$，则称 x_0 为 D 的灰内点。

定义 3.5.4 若 D 中所有的点都是灰内点，则称 D 为灰开集。

定义 3.5.5 集合 D 的所有极限点的集合称为 D 的灰导集，记为 D'。

定义 3.5.6 若 $D' \subseteq D$，则称 D 为灰闭集。

定义 3.5.7 若 D 中任意两点都可用完全属于 D 的折线连接，则称 D 具有连通性。

定义 3.5.8 若 D 是灰开集，且 D 具有连通性，则称 D 为灰区域。

定义 3.5.9 若 D 为灰区域，则称 $D \cup D'$ 为灰闭区域。

定理 3.5.1 若 D 是灰区域，则 D 中的灰数都是同型灰数。

证明：$\forall\, x \in D$，显然，在以 x 为中心、半径小于 $\frac{1}{2}$ 的邻域内的区间型灰数都与 x 同型。所以，D 中的灰数都是同型灰数。

二、灰数列的极限

定义 3.5.10 设$\{x_n\}$为一灰数列，a 为一区间型灰数。若任给 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $\rho(x_n,a)<\varepsilon$ 成立，则称 a 为灰数列$\{x_n\}$当 n 趋于无穷时的极限，记为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$。

灰数列的极限有如下性质。

性质 3.5.1

$$\lim_{n\to\infty}x_n=a\Longleftrightarrow\begin{cases}\lim\limits_{n\to\infty}P(x_n)=P(a),\\\lim\limits_{n\to\infty}Q(x_n)=Q(a),\\\lim\limits_{n\to\infty}R(x_n)=R(a)。\end{cases}$$

证明：

因为$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，所以，任给$\varepsilon>0$，存在$N>0$，当$n>N$时，有 $\rho(x_n,a)<\dfrac{\varepsilon}{2}$。

当 $n>N$ 时有

$$|P(x_n)-P(a)|\leqslant 2\rho(x_n,a)<\varepsilon,$$
$$|Q(x_n)-Q(a)|\leqslant 2\rho(x_n,a)<\varepsilon,$$
$$|R(x_n)-R(a)|\leqslant 2\rho(x_n,a)<\varepsilon。$$

由定义知$\lim\limits_{n\to\infty}P(x_n)=P(a)$，$\lim\limits_{n\to\infty}Q(x_n)=Q(a)$，$\lim\limits_{n\to\infty}R(x_n)=R(a)$。

任给 $\varepsilon>0$，存在 $N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，有$|P(x_n)-P(a)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$成立；

存在 $N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，有$|Q(x_n)-Q(a)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$成立；

存在 $N_3>0$，当 $n>N_3$ 时，有$|R(x_n)-R(a)|<\dfrac{\varepsilon}{2}$成立。

取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$\rho(x,a)=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{p_n^2+q_n^2+r_n^2}<\varepsilon$$

成立，其中，

$$p_n = \sqrt{(P(x_n) - P(a))^2},$$

$$q_n = \sqrt{(Q(x_n) - Q(a))^2},$$

$$r_n = \sqrt{(R(x_n) - R(a))^2}。$$

由定义知$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$。

由此性质知，求灰数列的极限问题可转化为求三个实数列的极限问题。

性质 3.5.2 若$\{x_n\}$有极限，则极限唯一。

性质 3.5.3 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，则存在 $N_0>0$，当 $n>N_0$ 时，$R(x_n)=R(a)$。

即当 n 充分大时，x_n 与 a 为同型灰数。

性质 3.5.4 设$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n+y_n)=a+b$；

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n-y_n)=a-b$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=a\cdot b$；

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n/y_n)=a/b$，其中，$0\notin E_b$。

证：(1)因为$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = b$，所以，

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n)=P(a),\ \lim_{n\to\infty} P(y_n)=P(b),$$

$$\lim_{n\to\infty}(P(x_n+y_n))=\lim_{n\to\infty}(P(x_n)+P(y_n))$$

$$=P(a)+P(b)=P(a+b)。$$

同理，

$$\lim_{n\to\infty}(Q(x_n+y_n)) = Q(a+b)。$$

当 n 充分大时，有 x_n 与 a 同型，y_n 与 b 同型，所以 x_n+y_n 与 $a+b$ 同型。即当 n 充分大时，有 $R(x_n+y_n)=R(a+b)$，故

$$\lim_{n\to\infty} R(x_n+y_n) = R(a+b);$$

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = a + b。$$

(2)(略)。

$$(3)P(x_n \cdot y_n)=\min\{P(x_n)P(y_n),P(x_n)Q(y_n),\\ Q(x_n)P(y_n),Q(x_n)Q(y_n)\},$$

$$P(ab)=\min\{P(a)P(b),P(a)Q(b),Q(a)P(b),\\ Q(a)Q(b)\}。$$

不妨设 $P(ab)=P(a)\cdot P(b)$。下面分几种情况证明。

①若 $P(a)Q(b)>P(a)P(b)$,
$Q(a)P(b)>P(a)P(b)$,
$Q(a)\cdot Q(b)>P(a)P(b)$,

则由实数列的性质知:存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,有 $P(x_n\cdot y_n)=P(x_n)\cdot P(y_n)$。所以

$$\lim_{n\to\infty}P(x_ny_n)=\lim_{n\to\infty}(P(x_n)\cdot P(y_n))$$
$$=P(a)\cdot P(b)=P(ab)。$$

②若 $P(a)Q(b)=P(a)P(b)$,
$Q(a)P(b)>P(a)P(b)$,
$Q(a)Q(b)>P(a)P(b)$,

则由实数列的性质知:存在 $N>0$,当 $n>N$ 时,有

$$P(x_n\cdot y_n)=\min\{P(x_n)\cdot P(y_n),P(x_n)\cdot Q(y_n)\}。$$

因为

$$\lim_{n\to\infty}[P(x_n)\cdot P(y_n)]=\lim_{n\to\infty}[P(x_n)\cdot Q(y_n)]$$
$$=P(a)\cdot P(b),$$

所以,任给 $\varepsilon>0$,存在 $N_1>0$,当 $n>N_1$ 时,有

$$|P(x_n)P(y_n)-P(a)\cdot P(b)|<\varepsilon,$$

存在 $N_2>0$,当 $n>N_2$ 时,有 $|P(x_n)\cdot Q(y_n)-P(a)P(b)|<\varepsilon$。

取 $N=\max\{N_1,N_2\}$,则当 $n>N$ 时,有

$$|P(x_ny_n)-P(a)\cdot P(b)|<\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n y_n) = P(a \cdot b)。$$

③若 $P(a)P(b)=P(a)Q(b)=Q(a)P(b)$，

$Q(a)Q(b)>P(a)P(b)$，

同理可证 $\lim\limits_{n\to\infty} P(x_n y_n)=P(ab)$。

④若 $P(a)P(b)=P(a)Q(b)=Q(a)P(b)=Q(a)Q(b)$，同理可证$\lim\limits_{n\to\infty} P(x_n y_n)=P(ab)$。

综上四种情况有

$$\lim_{n\to\infty} P(x_n y_n) = P(ab)。$$

同理可证，$\lim\limits_{n\to\infty} Q(x_n y_n)=Q(ab)$。

当 n 充分大时，有 x_n 与 a 同型，y_n 与 b 同型，所以 $x_n y_n$ 与 $a \cdot b$ 同型，即 $R(x_n y_n)=R(ab)$。综上得

$$\lim_{n\to\infty} R(x_n y_n) = R(ab);$$

$$\lim_{n\to\infty} (x_n y_n) = a \cdot b。$$

(4)(略)。

三、灰函数的极限

定义 3.5.11 对于灰函数 $y=f(x)$，$x\in D$，设 x_0 是 D 的一个灰极限点，A 为一区间型灰数。若任给实数 $\varepsilon>0$，存在实数 $\delta>0$，当 $x\in D$ 且 $0<\rho(x,x_0)<\delta$ 时，有 $\rho(f(x),A)<\varepsilon$ 成立，则称 A 为函数 $y=f(x)$ 当 x 沿着 D 趋于 x_0 时的极限，记为$\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ x\in D}} f(x)=A$，简记为$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$。

例 3.5.1 设 $y=f(x)=x$，$x\in g(I)$。对任意的 $x_0\in g(I)$，有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0$。

例 3.5.2 设 $y=f(x)=c$，$x\in g(I)$。对任意的 $x_0\in g(I)$，有 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\lim\limits_{x\to x_0} c=c$，即常函数的极限等于自身。

灰函数的极限具有下列性质。

性质 3.5.5

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A \Longleftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{\substack{P(x)\to P(x_0)\\ Q(x)\to Q(x_0)\\ R(x)\to R(x_0)}} P(f(x)) = P(A), \\ \lim\limits_{\substack{P(x)\to P(x_0)\\ Q(x)\to Q(x_0)\\ R(x)\to R(x_0)}} Q(f(x)) = Q(A), \\ \lim\limits_{\substack{P(x)\to P(x_0)\\ Q(x)\to Q(x_0)\\ R(x)\to R(x_0)}} R(f(x)) = R(A)。 \end{cases}$$

证明:(略)。

由于 $P(f(x))$,$Q(f(x))$,$R(f(x))$是 $P(x)$,$Q(x)$,$R(x)$的三元函数,所以,由此性质知,求一个灰函数的极限问题可转化为求三个三元实函数的极限问题。

性质 3.5.6 设$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=A$,$\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=B$,则

(1)$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)+g(x))=A+B$;

(2)$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)-g(x))=A-B$;

(3)$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x))=A\cdot B$;

(4)$\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)/g(x))=A/B$,其中 $0\notin E_B$。

证明:(略)。

四、灰函数的连续性

定义 3.5.12 设 $y=f(x)$,x,$x_0\in D$,若$\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)$,则称 $f(x)$在 x_0 点连续。

定义 3.5.13 设 $y=f(x)$,$x\in D$,D 为灰区域。若 $f(x)$在 D 中每一点连续,则称 $f(x)$在灰区域 D 内连续。

例 3.5.3 $f(x)=x$,$x\in g(I)$,对于任意的 $x_0\in g(I)$,有$\lim\limits_{x\to x_0} x=x_0=f(x_0)$。所以 $f(x)=x$ 在 x_0 点连续,由 x_0 的任意性知,

$f(x)=x$ 在 $g(I)$ 内连续。

§3.6 区间型灰数的顺序

为了解灰线性规划问题，本节定义区间型灰数的顺序。

定义 3.6.1 设 A 为区间型灰数，称

$$\frac{1}{2}[P(A)+Q(A)]$$

为 A 的心，记为 $\odot A$。

对于任意的区间型灰数 A,B，若 $\odot A=\odot B$，则称 A 与 B 同心，记为 $A\sim B$。

定义 3.6.2 设 A,B 为两个区间型灰数，

(1)若 $\odot A>\odot B$，则称 A 大于 B；

(2)若 $\odot A=\odot B$，且 $P(A)>P(B)$，则称 A 大于 B；

(3)若 $\odot A=\odot B$，$P(A)=P(B)$，$R(A)>R(B)$，则称 A 大于 B。

可用符号 $A>B$ 表示 A 大于 B，也称 B 小于 A，记为 $B<A$。

此处定义的区间型灰数的顺序有下列性质：

性质 3.6.1 设 A,B 为任意两个区间型灰数，则 $A>B$，$A=B$，$A<B$，有且仅有一个成立。

可用"$\leqslant$"表示小于或等于。

性质 3.6.2 $A\leqslant A$。

性质 3.6.3 若 $A\leqslant B$，且 $B\leqslant A$，则 $A=B$。

证明：由 $A\leqslant B$ 知，$\odot A\leqslant\odot B$，又 $B\leqslant A$，$\odot B\leqslant\odot A$，故 $\odot A=\odot B$。

同理有 $P(A)=P(B)$，$R(A)=R(B)$，

所以 $A=B$。

性质 3.6.4 设 A,B,C 为任意三个区间型灰数，若 $A\leqslant B$，$B\leqslant C$，则 $A\leqslant C$。

证明：若 $A=B$ 或 $B=C$，$A\leqslant C$ 显然成立。下面设 $A<B$，$B<C$。

(1) $\odot A=\odot B$

由于 $\odot B\leqslant\odot C$，则 $\odot A<\odot C$，所以 $A<C$。

(2) $\odot A=\odot B$，$P(A)<P(B)$

若 $\odot B<\odot C$，则有 $\odot A<\odot C$，所以 $A<C$。

若 $\odot B=\odot C$，由 $P(B)\leqslant P(C)$，得 $P(A)<P(C)$，所以 $A<C$。

(3) $\odot A=\odot B$，$P(A)=P(B)$，$R(A)<R(B)$

若 $\odot B<\odot C$，则 $\odot A<\odot C$，所以 $A<C$。

若 $\odot B=\odot C$，$P(B)<P(C)$，则 $P(A)<P(C)$，所以 $A<C$。

综上所述，有 $A\leqslant C$ 成立。

性质 3.6.5 设 A，B，C 为任意三个区间型灰数，若 $A\leqslant B$，则 $A+C\leqslant B+C$。

证明：若 $A=B$，显然有 $A+C=B+C$。以下设 $A<B$。

(1) $\odot A<\odot B$。

由于

$$
\begin{aligned}
P(A+C)&=P(A)+P(C),\\
Q(A+C)&=Q(A)+Q(C),\\
P(B+C)&=P(B)+P(C),\\
Q(B+C)&=Q(B)+Q(C),
\end{aligned}
$$

则

$$
\begin{aligned}
\odot(A+C)&=\frac{1}{2}(P(A+C)+Q(A+C))\\
&=\frac{1}{2}(P(A)+Q(A))+\frac{1}{2}(P(C)+Q(C))\\
&=\odot A+\odot C<\odot B+\odot C\\
&=\odot(B+C),
\end{aligned}
$$

所以
$$A+C<B+C。$$

(2) $\odot A=\odot B$，$P(A)<P(B)$。

此时，$\odot(A+C)=\odot A+\odot C=\odot B+\odot C=\odot(B+C)$，

又

$$P(A+C)=P(A)+P(C)$$
$$<P(B)+P(C)=P(B+C),$$

所以

$$A+C<B+C。$$

(3) $\odot A=\odot B, P(A)=P(B), R(A)<R(B)$

此时 $\odot(A+C)=\odot(B+C)$; $P(A+C)=P(B+C)$;

又

$$R(A+C)\leqslant R(B+C),$$

所以

$$A+C\leqslant B+C。$$

综上所述，有 $A+C\leqslant B+C$。

由性质 3.6.2、3.6.3、3.6.4 知，$g(I)$ 关于"$\leqslant$"构成全序集。

性质 3.6.6 设 $A=[P(A),Q(A)], B=[P(B),Q(B)]$，若存在下列情况之一：

(1) $P(A)\leqslant P(B)$, $Q(A)\leqslant Q(B)$,

(2) $Q(A)\leqslant P(B)$, $P(A)\leqslant Q(B)$,

则有 $A\leqslant B$。

证明：由(1)，$P(A)\leqslant P(B)$，$Q(A)\leqslant Q(B)$，可得

$$P(A)+Q(A)\leqslant P(B)+Q(B),$$
$$\frac{P(A)+Q(A)}{2}\leqslant\frac{P(B)+Q(B)}{2}。$$

由定义 3.6.2 知，$A\leqslant B$。

由(2)，$Q(A)\leqslant P(B)$，$P(A)\leqslant Q(B)$，可得，

$$\frac{Q(A)+P(A)}{2}\leqslant\frac{P(B)+Q(B)}{2}。$$

由定义 3.6.2 知，$A\leqslant B$。

故性质 3.6.6 成立。

由性质 3.6.6，可把两个区间型灰数的大小比较由灰数心的比较转换为区间端点的比较。这将给实际应用带来很大方便。

§3.7 区间型灰矩阵及其运算

区间相同的邓氏灰数和区间灰数参加运算后所得的区间是相同的。为表示方便，在不发生混淆的情况下，用 $G_{a,b}$ 来表示区间端点为 a 和 b 的区间灰数或邓氏灰数。

一、灰矩阵的基本概念

定义 3.7.1 设 $G_{a_i,b_j}\in g(I)\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，称 m 行 n 列数表

$$\begin{matrix} G_{a_1,b_1} & G_{a_1,b_2} & \cdots & G_{a_1,b_n} \\ G_{a_2,b_1} & G_{a_2,b_2} & \cdots & G_{a_2,b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{a_m,b_1} & G_{a_m,b_2} & \cdots & G_{a_m,b_n} \end{matrix}$$

为 $m\times n$ 区间型灰矩阵，简称为 $m\times n$ 灰矩阵，记为

$$A=(G_{a_i,b_j})=(G)=\begin{bmatrix} G_{a_1,b_1} & G_{a_1,b_2} & \cdots & G_{a_1,b_n} \\ G_{a_2,b_1} & G_{a_2,b_2} & \cdots & G_{a_2,b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{a_m,b_1} & G_{a_m,b_2} & \cdots & G_{a_m,b_n} \end{bmatrix}。$$

当灰矩阵中有些元素为实数，有些元素为区间型灰数时，矩阵正是邓聚龙教授提出的“矩阵中含有灰元”的矩阵，可称之为拟灰矩阵。拟灰矩阵是灰矩阵的特例。

当 $m=n$ 时，称(G)为 n 阶灰方阵。

在 n 阶灰方阵中，当 $i\neq j$ 时，若 $G_{a_i,b_j}=0$，则称(G)为对角灰方阵，即

$$(G)=\begin{pmatrix} G_{a_1,b_1} & & & \\ & G_{a_2,b_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & G_{a_n,b_n} \end{pmatrix}。$$

在对角灰方阵中，若 $G_{a_i,b_i}=1 \quad (i=1,2,\cdots,n)$，则称$(G)$为单位灰方阵。

当 $m=1$ 时，称$(G)=(G_{a_1,b_1}\ G_{a_1,b_2}\cdots\ G_{a_1,b_n})$为行矩阵。

当 $n=1$ 时，称$(G)=\begin{pmatrix} G_{a_1,b_1} \\ G_{a_2,b_1} \\ \vdots \\ G_{a_m,b_1} \end{pmatrix}$为列矩阵。

若 $\boldsymbol{A}=(G_{a_i,b_j})$与 $\boldsymbol{B}=(G_{c_i,d_j})$都是 $m\times n$ 矩阵，并且它们的对应元素相等，即

$$G_{a_i,b_j}=G_{c_i,d_j} \quad (i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

则称灰矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相等，记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$。

二、灰矩阵的运算

1. 灰矩阵的加法

设有两个 $m\times n$ 灰矩阵 $\boldsymbol{A}=(G_{a_i,b_j})$，$\boldsymbol{B}=(G_{c_i,d_j})$，则 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的和记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$。规定

$$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\overset{\text{def}}{=\!=}(G_{a_i,b_j}+G_{c_i,d_j})。$$

其中，

$$G_{a_i,b_j}+G_{c_i,d_j}=\begin{cases}[a_i+c_i,b_j+d_j], & \text{当 } G_{a_i,b_j}、G_{c_i,d_j} \text{ 为区间灰数时；} \\ [a_i+c_i\underset{\sim}{,}\ b_j+d_j], & \text{其它情况。}\end{cases}$$

注：只有当两个灰矩阵的行数相同列数相同时，才能相加。

2. 区间型灰数与灰矩阵的乘法

设 $\lambda\in g(I)$，$\boldsymbol{A}=(G_{a_i,b_j})$，规定

$$\lambda A \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda \cdot G_{a_i, b_j})。$$

当 $\lambda=0$ 时，显然有 $0 \cdot A = \mathbf{0}$

当 λ 为区间灰数时，$\lambda \cdot G_{a_i,b_j}$ 与 G_{a_i,b_j} 是同型灰数。

当 λ 为邓氏灰数时，$\lambda \cdot G_{a_i,b_j}$ 是邓氏灰数。

3. 灰矩阵的乘法

设 $\boldsymbol{A}=(G_{a_i,b_j})$ 为 $m\times s$ 灰矩阵，$\boldsymbol{B}=(G_{c_i,d_j})$ 为 $s\times n$ 灰矩阵，则

$$\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \stackrel{\text{def}}{=} (G_{e_i,f_j})。$$

其中，

$$G_{e_i,f_j} = G_{a_i,b_1} \cdot G_{c_1,d_j} + G_{a_i,b_2} \cdot G_{c_2,d_j} + \cdots + G_{a_i,b_s} \cdot G_{c_s,d_j}。$$

$$(i = 1,2,\cdots,m; j = 1,2,\cdots,n)。$$

当且仅当矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列元素都是区间灰数时，G_{e_i,f_j} 为区间灰数；否则，G_{e_i,f_j} 为邓氏灰数。

当 $\boldsymbol{A}=\mathbf{0}$，或 $\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$ 时，显然有 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\mathbf{0}$。

显然，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 为 $m\times n$ 矩阵。

注：只有当 $\boldsymbol{A}$ 的列数与 $\boldsymbol{B}$ 的行数相等时，$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ 才有意义。

4. 灰矩阵的转置

把灰矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行换成同序号的列得到的一个新矩阵，称之为 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，记作 $\boldsymbol{A}^T$ 或 $\boldsymbol{A}'$，

$$\begin{pmatrix} G_{a_1,b_1} & \cdots & G_{a_1,b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{a_m,b_1} & \cdots & G_{a_m,b_n} \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} G_{a_1,b_1} & \cdots & G_{a_m,b_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{a_1,b_n} & \cdots & G_{a_m,b_n} \end{pmatrix}。$$

设 $\boldsymbol{A}$ 为 n 阶灰方阵，若 $\boldsymbol{A}'=\boldsymbol{A}$，则称 $\boldsymbol{A}$ 为对称灰方阵。

例如，$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} [1,2] & [3,4] \\ [5,6] & [7,8] \end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}^T=\begin{bmatrix} [1,2] & [5,6] \\ [3,4] & [7,8] \end{bmatrix}$。

三、区间型灰矩阵的运算性质

设 $\lambda,\mu\in g(I)$，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 为 $m\times n$ 灰矩阵，由灰矩阵的加法及数乘定义，显然有如下性质：

性质 3.7.1 $A+B=B+A$，

$$(A+B)+C=A+(B+C)。$$

性质 3.7.2 $(\lambda\cdot\mu)\cdot A=\lambda\cdot(\mu\cdot A)=\mu\cdot(\lambda\cdot A)$。

当 λ,μ 及 A,B 的所有元素都是正区间型灰数时，有

性质 3.7.3 $(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$。

性质 3.7.4 $\lambda\cdot(A+B)=\lambda\cdot A+\lambda\cdot B$。

灰矩阵的乘法显然不满足交换律。由于区间型灰数不满足乘法对加法的分配律，所以，灰矩阵的乘法对加法的分配律也不成立。但在某些特殊条件下，分配律仍然成立。

在运算许可的条件下，有

性质 3.7.5 $(A\times B)\times C=A\times(B\times C)$。

性质 3.7.6 当 $\lambda\in R$ 时，有

$$\lambda\cdot(A\times B)=(\lambda\cdot A)\times B=A\times(\lambda\cdot B)。$$

在运算许可的条件下，灰矩阵的转置运算有如下性质：

性质 3.7.7 $((A)^T)^T=A$。

性质 3.7.8 $(A+B)^T=A^T+B^T$。

性质 3.7.9 $(\lambda A)^T=\lambda\cdot A^T$。

性质 3.7.10 $(A\times B)^T=B^T\times A^T$。

以上性质的证明，与实矩阵相应性质的证明类似，故略。

定理 3.7.1 设灰矩阵 A,B,C 的所有元素都是正区间型灰数，则在运算许可的条件下分配律成立，即

$$A(B+C)=AB+AC。$$

证明：设 A 为 $m\times s$ 灰矩阵，B 和 C 为 $s\times n$ 灰矩阵，$A=(G_{a_i,b_j})$，$B=(G_{c_i,d_j})$，$C=(G_{e_i,f_j})$。

由矩阵的加法与乘法定义知，$A(B+C)$ 与 $AB+AC$ 都是 $m\times n$ 灰矩阵。

位于 $A(B+C)$ 的第 i 行第 j 列元素是

$$\sum_{k=1}^{s}G_{a_i,b_k}(G_{c_k,d_j}+G_{e_k,f_j}) \tag{3-7-1}$$

位于 $AB+AC$ 的第 i 行第 j 列元素是

$$\sum_{k=1}^{s} G_{a_i,b_k} \cdot G_{c_k,d_j} + \sum_{k=1}^{s} G_{a_i,b_k} \cdot G_{e_k,f_j} \tag{3-7-2}$$

由于 A、B、C 的所有元素都是正区间型灰数，由定理 3.2.1 知 (3-7-1)式可化为

$$\sum_{k=1}^{s} [G_{a_i,b_k} \cdot G_{c_k,d_j} + G_{a_i,b_k} \cdot G_{e_k,f_j}]$$

$$= \sum_{k=1}^{s} G_{a_i,b_k} \cdot G_{c_k,d_j} + \sum_{k=1}^{s} G_{a_i,b_k} \cdot G_{e_k,f_j}$$

与(3-7-2)式相等。由矩阵相等的定义知

$$A(B+C) = AB + AC。$$

四、区间型灰向量及其运算性质

定义 3.7.2 设 $G_1, G_2, \cdots, G_n \in g(I)$，则称有序数组 $G_1, G_2, \cdots, G_n$ 为 n 维区间型灰向量，记为 $\boldsymbol{A}=(G_1, G_2, \cdots, G_n)$，称 G_i 为灰向量 A 的第 i 个分量，也称为第 i 个坐标。

称$(0,0,\cdots,0)$为灰零向量，记为 $\boldsymbol{0}$。全体 n 维区间型灰向量的集合记为 $V_n(I)$。

下面定义区间型灰向量的运算。

1. 加法运算

$$(G_1, G_2, \cdots, G_n) + (G'_1, G'_2, \cdots, G'_n)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (G_1 + G'_1, G_2 + G'_2, \cdots, G_n + G'_n)。$$

2. 减法运算

$$(G_1, G_2, \cdots, G_n) - (G'_1, G'_2, \cdots, G'_n)$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} (G_1 - G'_1, G_2 - G'_2, \cdots, G_n - G'_n)。$$

3. 数乘运算

$\forall G \in g(I)$，

$$G \times (G_1, G_2, \cdots, G_n) \stackrel{\text{def}}{=} (G_1, G_2, \cdots, G_n) \times G$$

$$\stackrel{\text{def}}{=}(G\times G_1,G\times G_2,\cdots,G\times G_n)。$$

4. 数量积运算

$$(G_1,G_2,\cdots,G_n)\cdot(G'_1,G'_2,\cdots,G'_n)$$
$$\stackrel{\text{def}}{=}G_1\cdot G'_1+G_2\cdot G'_2+\cdots+G_n\cdot G'_n。$$

由区间型灰数的加法和数乘运算的定义，对$\forall$ $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in V_n(I)$，$\forall$ $G,G'\in g(I)$，有

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $(G\times G')\times A=G\times(G'\times A)=G'\times(G\times A)$。

注：数乘对灰向量加法的分配律不成立。

由定理 3.2.1，易证下定理成立：

定理 3.7.2 设 G,G_i,G'_i 为正区间型灰数，$i=1,2,\cdots,n$，则有

$$G\times[(G_1,G_2,\cdots,G_n)+(G'_1,G'_2,\cdots,G'_n)]$$
$$=G\times(G_1,G_2,\cdots,G_n)+G\times(G'_1,G'_2,\cdots,G'_n)。$$

由数量积的定义知，交换律成立。同样由定理 3.2.1 易证：若向量 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 的所有坐标都是正区间型灰数，则

$$A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C。$$

灰矩阵的每一行可以看成是一个灰向量，每一列也可看成是一个灰向量。这样若 $\boldsymbol{A}$ 为一个 $m\times n$ 灰矩阵，则 $\boldsymbol{A}$ 有 m 个 n 维区间型灰向量，这些灰向量称为 $\boldsymbol{A}$ 的行向量组。同样，$\boldsymbol{A}$ 有 n 个 m 维区间型灰向量，这些灰向量称为 $\boldsymbol{A}$ 的列向量组。

§3.8 区间型灰行列式

在研究灰控制、灰决策、灰方程组时，将会遇到由区间型灰数构成的行列式。本节将给出区间型灰行列式的定义及运算性质。

一、区间型灰行列式的概念

定义 3.8.1 设有 n^2 个区间型灰数，排成 n 行 n 列的数表：

$$\begin{matrix} G_{a_1,b_1} & G_{a_1,b_2} & \cdots & G_{a_1,b_n} \\ G_{a_2,b_1} & G_{a_2,b_2} & \cdots & G_{a_2,b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{a_n,b_1} & G_{a_n,b_2} & \cdots & G_{a_n,b_n} \end{matrix}$$

作出表中位于不同行不同列的 n 个区间型灰数的乘积，并冠以符号$(-1)^t$，得出形如

$$(-1)^t G_{a_1,b_{p1}}, G_{a_2,b_{p2}} \cdots G_{a_n,b_{pn}}$$

的项，其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数，这样的项共有 $n!$ 个，其代数和

$$\sum (-1)^t G_{a_1,b_{p1}} G_{a_2,b_{p2}} \cdots G_{a_n,b_{pn}}$$

称为由这 n^2 个区间型灰数构成的 n 阶区间型灰行列式，简称为 n 阶灰行列式，记为 $\det(G)$或$|G|$，即

$$\det(G) = |G| = \begin{vmatrix} G_{a_1,b_1} & G_{a_1,b_2} & \cdots & G_{a_1,b_n} \\ G_{a_2,b_1} & G_{a_2,b_2} & \cdots & G_{a_2,b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{a_n,b_1} & G_{a_n,b_2} & \cdots & G_{a_n,b_n} \end{vmatrix}。$$

称 G_{a_i,b_j}为 $\det(G)$的元素。

由排列的对换原理，可得：

定义 3.8.2 n 阶区间型灰行列式也可以定义为

$$\det(G) = \sum (-1)^t G_{a_{p1},b_1} G_{a_{p2},b_2} \cdots G_{a_{pn},b_n},$$

其中 $p_1,p_2,\cdots,p_n$ 为 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列，t 为这个排列的逆序数。

当 $n=1$ 时，有 $|G_{a_1,b_1}| = G_{a_1,b_1}$；

当 $n=2$ 时，有

$$\begin{vmatrix} G_{a_1,b_1} & G_{a_1,b_2} \\ G_{a_2,b_1} & G_{a_2,b_2} \end{vmatrix} = G_{a_1,b_1} \cdot G_{a_2,b_2} - G_{a_1,b_2} \cdot G_{a_2,b_1}。$$

例 3.8.1 与实行列式类似，有

$$\begin{vmatrix} G_{a_1,b_1} & & & 0 \\ & G_{a_2,b_2} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & G_{a_n,b_n} \end{vmatrix} = G_{a_1,b_1} G_{a_2,b_2} \cdots G_{a_n,b_n};$$

$$\begin{vmatrix} 0 & & & G_{a_1,b_1} \\ & & G_{a_2,b_2} & \\ & \iddots & & \\ G_{a_n,b_n} & & & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} G_{a_1,b_1} G_{a_2,b_2} \cdots G_{a_n,b_n}。$$

这两个行列式分别称为主对角行列式和副对角行列式。

例 3.8.2 证明

$$\det(G_{\triangle}) = \begin{vmatrix} G_{a_1,b_1} & & & 0 \\ G_{a_2,b_1} & G_{a_2,b_2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ G_{a_n,b_1} & G_{a_n,b_2} & \cdots & G_{a_n,b_n} \end{vmatrix} = G_{a_1,b_1} G_{a_2,b_2} \cdots G_{a_n,b_n}。$$

证明：因为当 $j>i$ 时有 $G_{a_i,b_j}=0$，所以在 $\det(G_{\triangle})$ 中，不为零的项 $(-1)^t G_{a_1,b_{p1}} G_{a_2,b_{p2}} \cdots G_{a_n,b_{pn}}$ 应满足 $p_1 \leqslant 1, p_2 \leqslant 2, \cdots, p_n \leqslant n$，所以有 $p_1=1, p_2=2, \cdots, p_n=n$，即

$$\begin{aligned} \det(G_{\triangle}) &= (-1)^t G_{a_1,b_1} G_{a_2,b_2} \cdots G_{a_n,b_n} \\ &= G_{a_1,b_1} G_{a_2,b_2} \cdots G_{a_n,b_n}。\end{aligned}$$

此行列式称为下三角行列式。

同理，有

$$
\det(G^{\triangle})=\begin{vmatrix} G_{a_1,b_1} & G_{a_1,b_2} & \cdots & G_{a_1,b_n} \\ & G_{a_2,b_2} & \cdots & G_{a_2,b_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ 0 & & & G_{a_n,b_n} \end{vmatrix}
$$

$$
=G_{a_1,b_1}G_{a_2,b_2}\cdots G_{a_n,b_n}。
$$

此行列式称为上三角行列式。

定义 3.8.3 设

$$
\det(G)=\begin{vmatrix} G_{a_1,b_1} & \cdots & G_{a_1,b_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{a_n,b_1} & \cdots & G_{a_n,b_n} \end{vmatrix},
$$

称行列式

$$
\begin{vmatrix} G_{a_1,b_1} & \cdots & G_{a_n,b_1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ G_{a_1,b_n} & \cdots & G_{a_n,b_n} \end{vmatrix}
$$

为 $\det(G)$的转置行列式，记为 $\det(G)^T$。

二、灰行列式的性质

性质 3.8.1 区间型灰行列式与它的转置行列式相等。即 $\det(G)=\det(G)^T$。

由此性质知，灰行列式的行与列具有同等地位，凡对行成立的性质对列也成立。反之亦然。

性质 3.8.2 互换灰行列式的两行(列)，灰行列式变号。

性质 3.8.3 灰行列式的某一行(列)中所有的元素都乘以同一实数 k，等于用 k 乘灰行列式。

推论 灰行列式中某一行(列)的所有元素的实公因式可以提到行列式符号的外面。

推论 若灰行列式的某行(列)元素全为零，则此灰行列式等于零。

性质 3.8.4 设灰行列式的各元素都是正区间型灰数，且某一列(行)的元素都是两个正区间型灰数之和，则

$$\det(G)=\begin{vmatrix} G_{a_1,b_1} & G_{a_1,b_2} & \cdots & (G_{a_1,b_i}+G'_{a_1,b_i}) & \cdots & G_{a_1,b_n} \\ G_{a_2,b_1} & G_{a_2,b_2} & \cdots & (G_{a_2,b_i}+G'_{a_2,b_i}) & \cdots & G_{a_2,b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{a_n,b_1} & G_{a_n,b_2} & \cdots & (G_{a_n,b_i}+G'_{a_n,b_i}) & \cdots & G_{a_n,b_n} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} G_{a_1,b_1} & G_{a_1,b_2} & \cdots & G_{a_1,b_i} & \cdots & G_{a_1,b_n} \\ G_{a_2,b_1} & G_{a_2,b_2} & \cdots & G_{a_2,b_i} & \cdots & G_{a_2,b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{a_n,b_1} & G_{a_n,b_2} & \cdots & G_{a_n,b_i} & \cdots & G_{a_n,b_n} \end{vmatrix}$$

$$+\begin{vmatrix} G_{a_1,b_1} & G_{a_1,b_2} & \cdots & G'_{a_1,b_i} & \cdots & G_{a_1,b_n} \\ G_{a_2,b_1} & G_{a_2,b_2} & \cdots & G'_{a_2,b_i} & \cdots & G_{a_2,b_n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{a_n,b_1} & G_{a_n,b_2} & \cdots & G'_{a_n,b_i} & \cdots & G_{a_n,b_n} \end{vmatrix}。$$

证明：由定义

$$\det(G)=\sum(-1)^t G_{a_{p1},b_1}G_{a_{p2},b_2}\cdots(G_{a_{pi},b_i}+G'_{a_{pi},b_i})\cdots G_{a_{pn},b_n}。$$

由定理 3.2.1 知

$$G_{a_{p1},b_1}G_{a_{p2},b_2}\cdots(G_{a_{pi},b_i}+G'_{a_{pi},b_i})\cdots G_{a_{pn},b_n}$$

$$=G_{a_{p1},b_1}G_{a_{p2},b_2}\cdots G_{a_{pi},b_i}\cdots G_{a_{pn},b_n}+G_{a_{p1},b_1}G_{a_{p2},b_2}\cdots G'_{a_{pi},b_i}\cdots G_{a_{pn},b_n},$$

$$\det(G)=\sum(-1)^t G_{a_{p1},b_1}G_{a_{p2},b_2}\cdots G_{a_{pi},b_i}\cdots G_{a_{pn},b_n}$$

$$+\sum(-1)^t G_{a_{p1},b_1}G_{a_{p2},b_2}\cdots G'_{a_{pi},b_i}\cdots G_{a_{pn},b_n},$$

所以性质 3.8.4 成立。

由于区间型灰数关于加法运算没有负元，及乘法对加法的分配律不成立，所以实行列式的许多性质灰行列式都不具备。如

(1) 即使灰行列式中有两行(列)元素相同灰行列式也不一定为零。例如

$$\begin{vmatrix} [1,2] & [1,3] \\ [1,2] & [1,3] \end{vmatrix} = [1,2]\cdot[1,3] - [1,2]\cdot[1,3]$$

$$= [-3,3] \neq 0。$$

(2) 实行列式的按行(列)展开法则,对灰行列式不成立。如

$$\begin{vmatrix} [1,2] & 0 & 0 \\ 0 & [1,3] & [3,4] \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = [1,2]\cdot[1,3] - [1,2]\cdot[3,4]$$

$$= [-7,3],$$

但

$$[1,2]\begin{vmatrix} [1,3] & [3,4] \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = [1,2]([1,3] - [3,4])$$

$$= [-6,0]。$$

所以计算行列式的最好方法是定义。

§3.9 区间型灰线性方程组的求解

线性方程组是经典数学的重要组成部分,同时也是研究经典系统的理论工具。然而,用线性方程组研究灰色系统,就显得无能为力了。为了更好地研究灰色系统,本节将给出区间型灰线性方程组的定义,并给出它的一般解法。

一、基本概念

邓聚龙教授指出:"含有灰系数的方程称为灰方程。"[①] 下面将灰方程的概念进行推广,并给出灰线性方程组的概念。

定义 3.9.1 $\forall\ A_i, X \in g(G)$,称

$$\sum_{i=0}^{n} A_i X^i = 0 \qquad (3\text{-}9\text{-}1)$$

---

① 邓聚龙. 灰色控制系统. 武汉:华中工学院出版社,1985.

为一元 n 次灰方程。当 $n=1$ 时，称为一元一次灰方程，也称为一元线性灰方程（其中 $g(G)$ 为所有灰数构成的集合）。

定义 3.9.2 $\forall A_i, X_i, B \in g(G)$，称

$$\sum_{i=1}^{n} A_i X_i = B \tag{3-9-2}$$

为 n 元线性灰方程，由有限个 n 元线性灰方程组成的方程组，称为 n 元灰线性方程组。

由于在灰色系统中常见的多为区间型灰数，因此下面仅讨论由区间型灰数组成的方程组。

定义 3.9.3 $\forall G_{a_{ij},b_{ij}}, G_{x_j,y_j}, G_{c_i,d_i} \in g(I)$，称

$$\sum_{j=1}^{n} G_{a_{ij},b_{ij}} G_{x_j,y_j} = G_{c_i,d_i},\ i = 1,2,\cdots,m \tag{3-9-3}$$

为 n 元区间型灰线性方程组，简称为 $m\times n$ 灰线性方程组。

因为 $G_{a_{ij},b_{ij}}=[a_{ij},b_{ij}]$，$G_{x_j,y_j}=[x_j,y_j]$，$G_{c_i,d_i}=[c_i,d_i]$，所以方程组(3-9-3)又可表示成如下形式：

$$\begin{cases} [a_{11},b_{11}][x_1,y_1] + \cdots + [a_{1n},b_{1n}][x_n,y_n] = [c_1,d_1] \\ [a_{21},b_{21}][x_1,y_1] + \cdots + [a_{2n},b_{2n}][x_n,y_n] = [c_2,d_2] \\ \qquad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ [a_{m1},b_{m1}][x_1,y_1] + \cdots + [a_{mn},b_{mn}][x_n,y_n] = [c_m,d_m] \end{cases} \tag{3-9-4}$$

下面就讨论这类灰线性方程组的解法。对方程组(3-9-3)的系数为邓氏灰数或部分为邓氏灰数的情形，下面的讨论同样成立。

二、n 元区间型灰方程组的解法

将式(3-9-4)表为如下通式：

$$[a_{i1},b_{i1}][x_1,y_1] + \cdots + [a_{in},b_{in}][x_n,y_n] = [c_i,d_i] \tag{3-9-5}$$

其中 $a_{ij}\leqslant b_{ij}, x_j\leqslant y_j, c_i\leqslant d_i, i=1,2,\cdots,m$。

根据灰数的运算性质，可把方程组(3-9-5)化为一个与之等价

的实线性方程组。

定理 3.9.1 设灰线性方程组(3-9-5)的解为$[x_j,y_j]$，$j=1,2,\cdots,n$，则 x_j,y_j 可由如下实线性方程组求得：

$$\begin{cases}\min\{a_{i1}x_1,a_{i1}y_1,b_{i1}x_1,b_{i1}y_1\}+\cdots+\min\{a_{in}x_n,a_{in}y_n,b_{in}x_n,b_{in}y_n\} \\ \quad =c_i \\ \max\{a_{i1}x_1,a_{i1}y_1,b_{i1}x_1,b_{i1}y_1\}+\cdots+\max\{a_{in}x_n,a_{in}y_n,b_{in}x_n,b_{in}y_n\} \\ \quad =d_i \\ \qquad i=1,2,\cdots,m。\end{cases} \tag{3-9-6}$$

此定理的成立是显然的，故证明从略。

由定理 3.9.1，可把求解灰线性方程组的问题化成求解实线性方程组的问题。求解方程组(3-9-6)的难点在于确定 $a_{ij}x_j,a_{ij}y_j,b_{ij}x_j,b_{ij}y_j$ 中的最小值和最大值。为此，首先考虑以下最简单的情况。

推论 设有灰方程

$$[a,b][x,y]=[c,d], \tag{3-9-7}$$

则 x,y 可由下面实线性方程组求解：

$$\begin{cases}\min\{ax,ay,bx,by\}=c \\ \max\{ax,ay,bx,by\}=d。\end{cases} \tag{3-9-8}$$

要确定(3-9-8)中的 x,y，只须从 ax,ay,bx,by 中找出最小者和最大者，然后求解一个实二元一次方程组即可。对此，有如下定理。

定理 3.9.2 设 $m=\min\{ax,ay,bx,by\}$，$M=\max\{ax,ay,bx,by\}$，则 m 和 M 的取值可分如下三种情况：

(1)当 $0\leqslant x\leqslant y$ 时，若 $a\geqslant0$，则 $m=ax,M=by$；

若 $a<0<b$，则 $m=ay,M=by$；

若 $b\leqslant0$，则 $m=ay,M=bx$。

(2)当 $x<0<y$ 时，若 $a\geqslant0$，则 $m=bx,M=by$；

若 $a<0<b$，则 $m=ay$ 或 bx，$M=ax$

或 by；

若 $b\leqslant 0$，则 $m=ay, M=ax$。

(3)当 $x\leqslant y\leqslant 0$ 时，若 $a\geqslant 0$，则 $m=bx, M=ay$；

若 $a<0<b$，则 $m=bx, M=ax$；

若 $b\leqslant 0$，则 $m=by, M=ax$。

定理显然是成立的。

根据定理 3.9.2，求解灰线性方程组(3-9-4)，只须按定理中给出的三种情况组合成 3^n 个实线性方程组，分别求解即可。

为便于读者掌握此求解方法，下面通过一范例说明其求解过程。

例 3.9.1 求解灰线性方程组

$$\begin{cases}[-1,1][x_1,y_1]+[1,2][x_2,y_2]=[-4,4]\\ [-2,-1][x_1,y_1]+[0,1][x_2,y_2]=[-5,0]\end{cases}$$

解：为了直观，采取如下步骤：

(1)列表。

根据定理 3.9.2 中的三种情况，确定 $a_{ij}x_j, a_{ij}y_j, b_{ij}x_j, b_{ij}y_j$ 的最大值和最小值，填入表中。对本例列表 3.9.1。

表 3.9.1

类别		$0\leqslant x\leqslant y$		$x<0<y$		$x\leqslant y\leqslant 0$	
		m	M	m	M	m	M
$[a_{i1},b_{i1}][x_1,y_1]$	$i=1$	$-y_1$	y_1	$-y_1$ 或 x_1	$-x_1$ 或 y_1	x_1	$-x_1$
	$i=2$	$-2y_1$	$-x_1$	$-2y_1$	$-2x_1$	$-y_1$	$-2x_1$
$[a_{i2},b_{i2}][x_2,y_2]$	$i=1$	x_2	$2y_2$	$2x_2$	$2y_2$	$2x_2$	y_2
	$i=2$	0	y_2	x_2	y_2	x_2	0

(2) 组合方程组并求解。

因为所有$[x_j,y_j]$$(j=1,2,\cdots,n)$都按定理 3.9.2 分三种情况，所以共有 3^n 种搭配组合。而后，对每一组合按下面方法构成一

个实线性方程组：把每一组合中每一方程（设第 i 个方程）在表 3.9.1 中对应位置的最小值加起来等于 c_i，最大值加起来等于 d_i。于是就构成了含 $2m$ 个方程、$2n$ 个未知量的实线性方程组。这样的方程组共有 3^n 个。若某一方程组解得的 $x_j, y_j(j=1,2,\cdots,n)$ 都对应满足搭配时的条件（指定理 3.9.2 中的三个条件），则此方程组的解就是原灰线性方程组的一个解。如果某方程组有无穷多解，且都对应满足搭配时的条件，则原灰线性方程组也有无穷多解。否则，其它一切方程组的解都不是原灰线性方程组的解。

对于本例有：

$$\text{组合 1}\begin{cases}-y_1+x_2=-4\\-2y_1+0=-5\\y_1+2y_2=4\\-x_1+y_2=0\end{cases}\quad \text{条件}\begin{cases}0\leqslant x_1\leqslant y_1\\0\leqslant x_2\leqslant y_2\end{cases}\quad \text{（无解）；}$$

$$\text{组合 2}\begin{cases}-y_1+2x_2=-4\\-2y_1+x_2=-5\\y_1+2y_2=4\\-x_1+y_2=0\end{cases}\quad \text{条件}\begin{cases}0\leqslant x_1\leqslant y_1\\x_2<0<y_2\end{cases}\quad \text{解得}\begin{cases}x_1=1\\x_2=-1\\y_1=2\\y_2=1\end{cases};$$

$$\text{组合 3}\begin{cases}-y_1+2x_2=-4\\-2y_1+x_2=-5\\y_1+y_2=4\\-x_1+0=0\end{cases}\quad \text{条件}\begin{cases}0\leqslant x_1\leqslant y_1\\x_2\leqslant y_2\leqslant 0\end{cases}\quad \text{（无解）；}$$

$$\text{组合 4}\begin{cases}-y_1+x_2=-4(\text{或 } x_1+x_2=-4)\\-2y_1+0=-5\\-x_1+2y_2=4(\text{或 } y_1+2y_2=4)\\-2x_1+y_2=0\end{cases}$$

$$\text{条件}\begin{cases}x_1<0<y_1\\0\leqslant x_2\leqslant y_2\end{cases}\quad \text{（无解）；}$$

组合 5 $\begin{cases} -y_1+2x_2=-4(\text{或 } x_1+2x_2=-4) \\ -2y_1+x_2=-5 \\ -x_1+2y_2=4(\text{或 } y_1+2y_2=4) \\ -2x_1+y_2=0 \end{cases}$

条件 $\begin{cases} x_1<0<y_1 \\ x_2<0<y_2 \end{cases}$ （无解）；

组合 6 $\begin{cases} -y_1+2x_2=-4(\text{或 } x_1+2x_2=-4) \\ -2y_1+x_2=-5 \\ -x_1+y_2=4(\text{或 } y_1+y_2=4) \\ -2x_1+0=0 \end{cases}$

条件 $\begin{cases} x_1<0<y_1 \\ x_2\leqslant y_2\leqslant 0 \end{cases}$ （无解）；

组合 7 $\begin{cases} x_1+x_2=-4 \\ -y_1+0=-5 \\ -x_1+2y_2=4 \\ -2x_1+y_2=0 \end{cases}$ 条件 $\begin{cases} x_1\leqslant y_1\leqslant 0 \\ 0\leqslant x_2\leqslant y_2 \end{cases}$ （无解）；

组合 8 $\begin{cases} x_1+2x_2=-4 \\ -y_1+x_2=-5 \\ -x_1+2y_2=4 \\ -2x_1+y_2=0 \end{cases}$ 条件 $\begin{cases} x_1\leqslant y_1\leqslant 0 \\ x_2<0<y_2 \end{cases}$ （无解）；

组合 9 $\begin{cases} x_1+2x_2=-4 \\ -y_1+x_2=-5 \\ -x_1+y_2=4 \\ -2x_1+0=0 \end{cases}$ 条件 $\begin{cases} x_1\leqslant y_1\leqslant 0 \\ x_2\leqslant y_2\leqslant 0 \end{cases}$ （无解）。

需要说明的是，若组合 4、5、6 方程组在其条件下有解，还要对所有选在定理 3.9.2 中条件 $x_j\leqslant 0\leqslant y_j$ 对应的 x_j 和 y_j 检验 $a_{ij}x_j$，$a_{ij}y_j$，$b_{ij}x_j$，$b_{ij}y_j$ 中的最大值最小值是否是方程组中所取的。是，其解就是原灰线性方程组的解；否则，不是。

综上所述，组合 2 的解就是原灰线性方程组的解，即

$$\begin{cases}[x_1,y_1]=[1,2]\\ [x_2,y_2]=[-1,1]。\end{cases}$$

从以上步骤可以看出，对一般多元灰线性方程组求解是很麻烦的。但在实际工作中，可利用计算机来迅速完成这一过程。作者已经编写了解一般区间型灰线性方程组的计算机程序。

§3.10 区间型灰线性规划及其求解方法

由于客观事物灰性的存在，使得很多线性规划问题难以(或不能)用经典线性规划方法求解。邓聚龙教授曾在《灰色预测与决策》一书中讨论了含有灰元的线性规划问题，如预测型线性规划问题、漂移型线性规划问题。本节将从实际应用出发，应用区间型灰数建立一般区间型灰线性规划问题的模型(GLP)，并讨论它的一般解法。

一、GLP 模型的建立

引例：某养鸡场共饲养 1000 只鸡，用大豆和谷物两种饲料混合喂养。已知每只鸡每天吃混合饲料 1～1.3kg，而每只鸡每天至少需要 0.21～0.23kg 蛋白质和 0.004～0.006kg 钙。每千克大豆含 48%～52%的蛋白质和 0.5%～0.8%的钙，每千克谷物中含 8.5%～11.5%的蛋白质和 0.3%的钙，每千克大豆和谷物的购价分别为 0.38～0.42 元和 0.20 元。问应怎样混合饲料才能使购买饲料的花费最省？最少花费为多少？

易见，引例中的参数大部分为区间型灰数，这类问题在实践中不乏其数，且难以直接用经典线性规划方法求解。为解决此问题，下面建立线性规划模型。

设整个养鸡场每天大豆需要量为 $x_1$kg、谷物需要量为 $x_2$kg，则有

目标函数：　　$\min z=[0.38,0.42]x_1+0.20x_2$；

约束条件：

$$x_1+x_2=[1,1.3]\times 1000;$$

$$[0.48,0.52]x_1+[0.085,0.115]x_2 \geqslant [0.21,0.23]\times 1000,$$

$$[0.005,0.008]x_1+0.003x_2 \geqslant [0.004,0.006]\times 1000,$$

$$x_1,x_2\geqslant 0;$$

此模型即可称为区间型灰线性规划模型。仿此，下面给出一般区间型灰线性规划模型。

定义 3.10.1 设 $g(I)$ 为区间型灰数集，

$$\forall\ [a_{ij},b_{ij}],[c_j,d_j],[e_i,f_i]\in g(I);x_j\in R,$$

$$i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n,$$

则称模型

$$\begin{cases}\min z=[c_1,d_1]x_1+[c_2,d_2]x_2+\cdots+[c_n,d_n]x_n,\\ [a_{11},b_{11}]x_1+[a_{12},b_{12}]x_2+\cdots+[a_{1n},b_{1n}]x_n\geqslant[e_1,f_1],\\ [a_{21},b_{21}]x_1+[a_{22},b_{22}]x_2+\cdots+[a_{2n},b_{2n}]x_n\geqslant[e_2,f_2],\\ \qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\qquad\qquad\vdots\\ [a_{m1},b_{m1}]x_1+[a_{m2},b_{m2}]x_2+\cdots+[a_{mn},b_{mn}]x_n\geqslant[e_m,f_m],\\ x_1,x_2,\cdots,x_n\geqslant 0\end{cases}$$

为区间型灰线性规划模型，简记为 GLP 模型。

二、GLP 模型的解法

以引例的求解为例，下面说明 GLP 模型的求解过程。

(1)确定约束条件下的最大取值范围和狭义最小取值范围。

先看约束条件：

$$[1,2]x_1+[1,4]x_2\geqslant[2,4]。$$

把它转化为下列一组不等式：

$$1\cdot x_1+1\cdot x_2\geqslant 2,$$

$$1\cdot x_1+1\cdot x_2\geqslant 4,$$

$$2\cdot x_1+4\cdot x_2\geqslant 2,$$

$$2 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geqslant 4,$$
$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geqslant 2,$$
$$2 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geqslant 4,$$
$$1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geqslant 2,$$
$$1 \cdot x_1 + 4 \cdot x_2 \geqslant 4。$$

通过作图可以看出，在 $x_1, x_2 \geqslant 0$ 的区域内，不等式 $2x_1+4x_2 \geqslant 2$ 包括了其它不等式确定的所有区域，而 $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geqslant 4$ 是它们中最小的一个区域。当 x_1、x_2 的系数分别在[1,2]、[1,4]范围内变化，不等式右边常数项在[2,4]范围内变化时，同样可得到这个结论。因此，可称 $2x_1+4x_2 \geqslant 2$ 是在约束条件 $[1,2]x_1+[1,4]x_2 \geqslant [2,4]$ 下的最大取值范围，$1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 \geqslant 4$ 是狭义最小取值范围。

同理，可得约束条件 $[1,2]x_1+[-1,2]x_2 \geqslant [2,4]$ 在 $x_1, x_2 \geqslant 0$ 的区域内，最大取值范围为 $2x_1+2x_2 \geqslant 2$，狭义最小取值范围为 $x_1-x_2 \geqslant 4$；$[1,2]x_1+[-2,-1]x_2 \geqslant [-2,-1]$ 在 $x_1, x_2 \geqslant 0$ 的区域内，最大取值范围为 $2x_1-x_2 \geqslant -2$，狭义最小取值范围为 $x_1-2x_2 \geqslant -1$。

归纳起来，对于约束条件 $[a_1,b_1]x_1+[a_2,b_2]x_2 \geqslant [c,d]$ 在 x_1，$x_2 \geqslant 0$ 的区域内，最大取值范围为 $b_1x_1+b_2x_2 \geqslant c$，狭义最小取值范围为 $a_1x_1+a_2x_2 \geqslant d$。

一般地，有：

定义 3.10.2 若

$$[a_1^{(1)}, a_2^{(1)}]x_1 + [a_1^{(2)}, a_2^{(2)}]x_2 + \cdots + [a_1^{(n)}, a_2^{(n)}]x_n \geqslant [e_1, e_2], \tag{3-10-1}$$

$$x_1, x_2, \cdots, x_n \geqslant 0,$$

则称

$$a^{(1)}x_1 + a^{(2)}x_2 + \cdots + a^{(n)}x_n \geqslant e \tag{3-10-2}$$

为式(3-10-1)的特征式，其中，

$$a^{(k)} \in [a_1^{(k)}, a_2^{(k)}], e \in [e_1, e_2], k = 1, 2, \cdots, n。$$

定义 3.10.3 若某约束不等式的取值范围能包含所有其它约束不等式的取值范围，则称此不等式的取值范围为最大取值范围。若某约束不等式的取值范围包含于其它任意约束不等式的取值范围之中，则称此不等式取值范围为狭义最小取值范围。

定理 3.10.1 设(3-10-2)式为约束条件(3-10-1)式的特征式，则

$$a_2^{(1)} x_1 + a_2^{(2)} x_2 + \cdots + a_2^{(n)} x_n \geqslant e_1 \qquad (3\text{-}10\text{-}3)$$

为(3-10-1)的最大取值范围不等式；

$$a_1^{(1)} x_1 + a_1^{(2)} x_2 + \cdots + a_1^{(n)} x_n \geqslant e_2 \qquad (3\text{-}10\text{-}4)$$

为(3-10-1)的狭义最小取值范围不等式。

证明：①对于(3-10-2)式，设只有某一系数 $a^{(k)}$ 变化，当 $a^{(k)}$ 分别取 $a_1^{(k)}$ 和 $a_2^{(k)}$ 时，(3-10-2)式变为：

$$a^{(1)} x_1 + \cdots + a^{(k-1)} x_{k-1} + a_1^{(k)} x_k + a^{(k+1)} x_{k+1} + \cdots + a^{(n)} x_n \geqslant e \qquad (3\text{-}10\text{-}5)$$

$$a^{(1)} x_1 + \cdots + a^{(k-1)} x_{k-1} + a_2^{(k)} x_k + a^{(k+1)} x_{k+1} + \cdots + a^{(n)} x_n \geqslant e \qquad (3\text{-}10\text{-}6)$$

若 $a^{(k)} \in [a_1^{(k)}, a_2^{(k)}]$，$a_1^{(k)} \leqslant a_2^{(k)}$，$x_k \geqslant 0$，则总可令

$$(a_2^{(k)} - a^{(k)}) x_k = \varepsilon \geqslant 0。$$

于是，(3-10-6)式可分解为两个不等式

$$a^{(1)} x_1 + \cdots + a^{(k)} x_k + \cdots + a^{(n)} x_n \geqslant e$$

与

$$e > a^{(1)} x_1 + \cdots + a^{(k)} x_k + \cdots + a^{(n)} x_n \geqslant e - (a_2^{(k)} - a^{(k)}) x_k = e - \varepsilon$$

取值范围之并。即(3-10-6)式取值范围包含(3-10-2)式，故，当(3-10-2)式只有系数 $a^{(k)}$ 变化时，(3-10-6)式为(3-10-2)式最大取值范围。

同样可得，当(3-10-2)式只有系数 $a^{(k)}$ 变化时，(3-10-2)式取值范围都包含(3-10-5)式，即(3-10-5)式为(3-10-2)式狭义最小取值范围。

由上可知，当(3-10-2)式只有 $a^{(1)}$ 变化时，最大取值范围为

$$a_2^{(1)}x_1 + \sum_{j=2}^{n} a^{(j)}x_j \geqslant e; \qquad (3\text{-}10\text{-}7)$$

当(3-10-7)式只有 $a^{(2)}$ 变化(亦即(3-10-2)式只有 $a^{(1)}$ 和 $a^{(2)}$ 同时变化)时，最大取值范围为

$$a_2^{(1)}x_1 + a_2^{(2)}x_2 + \sum_{j=3}^{n} a^{(j)}x_j \geqslant e;$$

这样一直进行下去，最终可得，当 $a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots, a^{(n)}$ 都变化(e 不变)时，(3-10-2)式最大取值范围为

$$a_2^{(1)}x_1 + a_2^{(2)}x_2 + \cdots + a_2^{(n)}x_n \geqslant e。 \qquad (3\text{-}10\text{-}8)$$

同理可得，当 $a^{(1)}, a^{(2)}, \cdots, a^{(n)}$ 都变化(e 不变)时，(3-10-2)式狭义最小取值范围为

$$a_1^{(1)}x_1 + a_1^{(2)}x_2 + \cdots + a_1^{(n)}x_n \geqslant e。 \qquad (3\text{-}10\text{-}9)$$

②对于(3-10-8)式，当 $e=e_1$ 时变为(3-10-3)式。由于 $e \in [e_1, e_2]$，$e_1 \leqslant e_2$，所以(3-10-3)式可分解为两个不等式

$$a_2^{(1)}x_1 + a_2^{(2)}x_2 + \cdots + a_2^{(n)}x_n \geqslant e$$

与

$$e > a_2^{(1)}x_1 + a_2^{(2)}x_2 + \cdots + a_2^{(n)}x_n \geqslant e_1$$

取值范围之并。即(3-10-3)式取值范围包含(3-10-8)式。故(3-10-3)式是(3-10-8)式的最大取值范围。又由上述①可知，(3-10-8)式是(3-10-2)式在 e 不变化时的最大取值范围。因此，(3-10-3)式是(3-10-2)式的最大取值范围。

同样可得，当 e 取不同值时，(3-10-9)式取值范围都包含(3-10-4)式。故(3-10-4)式是(3-10-9)式的狭义最小取值范围。又由上述①可知，(3-10-9)式是(3-10-2)式在 e 不变化时的狭义最小取值范围。因此，(3-10-4)式是(3-10-2)式的狭义最小取值范围。定理得证。

上定理给出了任一约束条件(3-10-1)的最大取值范围不等式和狭义最小取值范围不等式的确定方法。当约束条件为

$$[a_1^{(1)},a_2^{(1)}]x_1+[a_1^{(2)},a_2^{(2)}]x_2+\cdots+[a_1^{(n)},a_2^{(n)}]x_n=[e_1,e_2]$$

时(包括 $e_1=e_2$ 的情况),可把约束条件转化成

$$[a_1^{(1)},a_2^{(1)}]x_1+[a_1^{(2)},a_2^{(2)}]x_2+\cdots+[a_1^{(n)},a_2^{(n)}]x_n\geqslant e_1$$

和

$$[-a_2^{(1)},-a_1^{(1)}]x_1+[-a_2^{(2)},-a_1^{(2)}]x_2+\cdots$$
$$+[-a_2^{(n)},-a_1^{(n)}]x_n\geqslant -e_2,$$

再由定理就可得到最大取值范围和狭义最小取值范围。

对于由多个不等式(包括等式)组成的约束条件,分别对每个不等式(若是等式可化成两个不等式)按定理的结论,分别得到一个最大取值范围不等式和一个狭义最小取值范围不等式;然后,把所有最大取值范围不等式组在一起就构成整个约束条件的最大取值范围,把所有狭义最小取值范围不等式组在一起就构成整个约束条件的狭义最小取值范围。

对于引例,由约束条件组成的最大取值范围为

$$\begin{cases}1300\geqslant x_1+x_2\geqslant 1000,\\0.52x_1+0.115x_2\geqslant 0.21\times 1000,\\0.008x_1+0.003x_2\geqslant 0.004\times 1000,\\x_1,x_2\geqslant 0;\end{cases}$$

狭义最小取值范围为

$$\begin{cases}1300\geqslant x_1+x_2\geqslant 1000,\\0.48x_1+0.085x_2\geqslant 0.23\times 1000,\\0.005x_1+0.003x_2\geqslant 0.006\times 1000,\\x_1,x_2\geqslant 0。\end{cases}$$

(2)把 GLP 模型转化成两个经典线性规划问题。

由于 GLP 模型所给系数含区间型灰数,因此最后得到的目标值 $\min z$ 也应该是区间型灰数,令为 $[z_1,z_2]$,其中 $z_1\leqslant z_2$。

对于目标函数

$$\min z=[c_1,d_1]x_1+[c_2,d_2]x_2+\cdots+[c_n,d_n]x_n,$$

因为 $x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0$，所以 $\min z$ 的最小值 z_1（下限）和最大值 z_2（上限）应取

$$z_1 = \min z_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$
$$z_2 = \min z_2 = d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n,$$

并且 z_1 应该是 $\min z_1$ 在最大取值范围上的目标值，z_2 应该是 $\min z_2$ 在狭义最小取值范围上的目标值。因此，GLP 模型最终转化成求两个一般线性规划问题。

求 $\min z$ 下限 z_1 的线性规划问题为

$$\begin{cases} \min z_1 = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n, \\ b_{11}x_1 + b_{12}x_2 + \cdots + b_{1n}x_n \geqslant e_1, \\ b_{21}x_1 + b_{22}x_2 + \cdots + b_{2n}x_n \geqslant e_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \cdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ b_{m1}x_1 + b_{m2}x_2 + \cdots + b_{mn}x_n \geqslant e_m, \\ x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0; \end{cases} \tag{3-10-10}$$

求 $\min z$ 上限 z_2 的线性规划问题为

$$\begin{cases} \min z_2 = d_1x_1 + d_2x_2 + \cdots + d_nx_n, \\ a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \geqslant f_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \geqslant f_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \cdots \qquad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geqslant f_m, \\ x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0. \end{cases} \tag{3-10-11}$$

对于引例，求 $\min z$ 下、上限的线性规划问题分别为

$$\begin{cases} \min z_1 = 0.38x_1 + 0.20x_2, \\ 1300 \geqslant x_1 + x_2 \geqslant 1000, \\ 0.52x_1 + 0.115x_2 \geqslant 0.21 \times 1000, \\ 0.008x_1 + 0.003x_2 \geqslant 0.004 \times 1000, \\ x_1,x_2 \geqslant 0; \end{cases} \tag{3-10-12}$$

$$\begin{cases} \min z_2 = 0.42x_1 + 0.20x_2, \\ 1300 \geqslant x_1 + x_2 \geqslant 1000, \\ 0.48x_1 + 0.085x_2 \geqslant 0.23 \times 1000, \\ 0.005x_1 + 0.003x_2 \geqslant 0.006 \times 1000, \\ x_1, x_2 \geqslant 0_{\circ} \end{cases} \tag{3-10-13}$$

(3)利用经典线性规划解法得出结果。

对式(3-10-10)和式(3-10-11)式按经典线性规划问题求解，得到 z_1 和 z_2(有可能无解)，对应的规划值分别为 $x'_1, x'_2, \cdots, x'_n$ 和 $x''_1, x''_2, \cdots, x''_n$。于是得目标值

$$\min z = [z_1, z_2]_{\circ} \tag{3-10-14}$$

规划值可记为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \\ \vdots \\ x''_n \end{pmatrix} \right] \tag{3-10-15}$$

若 z_1 无解，则 z_2 无解。

若 z_1 有解，z_2 无解，则可记为 $\min z = [z_1, +\infty]$。此时，(3-10-15)式中的 x''_i 取为 $+\infty$，$i=1,2,\cdots,n$。

对于引例，解(3-10-12)式得：

$$x'_1 = 234.57, \quad x'_2 = 765.43, \quad z_1 = 242.22;$$

解(3-10-13)式得

$$x''_1 = 1050, \quad x''_2 = 250, \quad z_2 = 491_{\circ}$$

所以，引例的目标值为

$$\min z = [242.22, 491],$$

规划值

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 234.57 \\ 765.43 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1050 \\ 250 \end{pmatrix} \right]_{\circ}$$

结果表明，目标值 $\min z$ 为区间型灰数[242.22,491]，而规划

值$(234.57,765.43)^T$和$(1050,250)^T$分别表示目标值为区间型灰数$[242.22,491]$的下限和上限的规划值。

为了与漂移型线性规划解法和线性规划伪解相比较，下面用本节的方法求解《灰色预测与决策》一书中的一个例子（表示方法有改动）。

例 求下列区间型灰线性规划问题的规划解：

$$\begin{cases} \max z = [1,7]x_1 + [4,12]x_2, \\ [1,21]x_1 + [4,10]x_2 \leqslant 360, \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300, \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 198, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases}$$

解：该模型可转化为

$$\begin{cases} \min z' = -\max z = [-7, -1]x_1 + [12, -4]x_2, \\ [-21, -1]x_1 + [-10, -4]x_2 \geqslant -360, \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300, \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 198, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3-10-16}$$

第一步：把该模型转化为两个一般线性规划问题。求$\min z'$下限z'_1的线性规划问题为

$$\begin{cases} \min z'_1 = -7x_1 - 12x_2, \\ -x_1 - 4x_2 \geqslant -360, \\ 3x_1 + 10x_2 \leqslant 300, \\ 4x_1 + 5x_2 \leqslant 198, \\ x_1, x_2 \geqslant 0. \end{cases} \tag{3-10-17}$$

求$\min z'$上限z_2的线性规划问题为

$$
\begin{cases}
\min z'_2 = -x_1 - 4x_2, \\
-21x_1 - 10x_2 \geqslant -360, \\
3x_1 + 10x_2 \leqslant 300, \\
4x_1 + 5x_2 \leqslant 198, \\
x_1, x_2 \geqslant 0。
\end{cases}
\tag{3-10-18}
$$

第二步：求式(3-10-17)、式(3-10-18)的规划解。

由(3-10-17)式按图解法可得，规划值为$x'_1=19.2$，$x'_2=24.24$，目标值为 $z'_1=-425.28$。

由(3-10-18)式同样可求得，规划值为 $x''_1=3.34$，$x''_2=29$，目标值为 $z''_2=-119.34$。

所以，(3-10-16)式的目标值为

$$\min z' = [-425.28, -119.34],$$

规划值为

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 19.2 \\ 24.24 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3.34 \\ 29 \end{pmatrix}\right]。$$

于是，本例的目标值为

$$\max z = [119.34, 425.28],$$

规划值为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 3.34 \\ 29 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19.2 \\ 24.24 \end{pmatrix}\right]。$$

分析：在《灰色预测与决策》一书中，此例的漂移型最优解为 $x_1=3.34$，$x_2=29$，目标值为 371.18，只是上面求得的目标值(即 $\max z$)范围中的一个确定值。灰色线性规划伪解也是如此。利用本节介绍的方法能明确地求出目标值范围，为决策者提供可选择的数据，具有很强的实用性。

§ 3.11 灰整数及区间型灰整数规划

客观实际中，还经常用到一类特殊的灰数——灰整数。本节将

在介绍灰整数及区间型灰整数的基础上，对整数规划问题的灰性作一初步探讨。

一、灰整数及区间型灰整数的概念

定义3.11.1 设$\mathbf{Z}$是整数集，对于灰数$G\left|\begin{smallmatrix}\bar{\mu}(x)\\ \underline{\mu}(x)\end{smallmatrix}\right.$，若$E=\{x|\bar{\mu}(x)\neq 0,x\in\mathbf{Z}\}$，则称$G$为灰整数，记为$G_Z$。

比如，在例3.1.7中，某人的年龄可能在31～35岁之间，是一个离散型灰数。其中，$E=\{31,32,33,34,35\}$中的元素都是整数。所以，它还是一个灰整数。

对于灰整数G_Z，若是有界灰数，则称之为有界灰整数，否则称之为无界灰整数。

定义3.11.2 对于区间灰数$[a,b]$（或邓氏灰数$[a,\underset{\sim}{b}]$），若灰域E只取实区间$[a,b]$上的整数时，则称该灰数为区间灰整数（或邓氏灰整数）。记作$\{\{a,b\}\}$（或$\{\{a\underset{\sim}{,}b\}\}$）。邓氏灰整数和区间灰整数统称为区间型灰整数。

区间型灰整数和区间型灰数有本质的区别。前者是一种特殊的离散型灰整数，是灰整数中的一种；而区间型灰数则是一种连续型灰数。两者虽有本质的区别，但在运算性质方面又有许多相似之处。

仿照区间型灰数的运算，下面给出区间型灰整数的运算（没有区分邓氏灰整数和区间灰整数。若区分，可仿照区间型灰数运算类推）。

设$A,a,b,c,d\in\mathbf{Z}$（整数集），则运算法则如下。

1. *加法运算*

$$\{\{a,b\}\}+\{\{c,d\}\}=\{\{a+c,b+d\}\},$$
$$A+\{\{c,d\}\}=\{\{A+c,A+d\}\}。$$

2. *减法运算*

$$\{\{a,b\}\}-\{\{c,d\}\}=\{\{a-d,b-c\}\}。$$

3. 乘法运算

$\{\{a,b\}\}\cdot\{\{c,d\}\}=\{\{\min(ac,ad,bc,bd),\max(ac,ad,bc,bd)\}\}$。

例如，

$$\{\{1,3\}\}\cdot\{\{4,7\}\}=\{\{4,21\}\}。$$

4. 除法运算

$$\{\{a,b\}\}/\{\{c,d\}\}=G_Z,\ (c\cdot d>0)。$$

其中，G_Z 的灰域 E 由区间$[a,b]\times\left[\frac{1}{d},\frac{1}{c}\right]$中的整数组成。

例如，

$$\{\{5,10\}\}\div\{\{1,3\}\}=G_Z=\{\{2,10\}\}$$

$$G_Z\text{ 的灰域 }E=\left\{x\,|\,x\in Z,\text{且}\frac{5}{3}\leqslant x\leqslant 10\right\}。$$

注：G_Z 的灰域 E 可能是空集，此时记 $G_Z=\varnothing_Z$。

例如，

$$\{\{1,5\}\}\div\{\{6,8\}\}=\left\{\left\{\frac{1}{8},\frac{5}{6}\right\}\right\}=\varnothing_Z。$$

二、区间型灰整数规划及其求解方法

引例：某企业计划生产甲、乙两种产品。这两种产品都要分别在 A,B,C,D 四个车间加工。按工艺资料规定，在一个月内，生产出甲产品每件需占用 A 车间 2 人，B 车间 1 人或 2 人，C 车间 4 人，不需 D 车间；生产出乙产品每件需占用 A 车间 2 人、B 车间 2 人、D 车间 3 人或 4 人，不需 C 车间。已知四个车间的总人数分别为 12 人、8 人、16 人、12 人，并且 B 车间除 8 人外，还有两名机动人员，随时可作为 B 车间人员。已知每生产一件甲产品企业能获利 2～3 万元，每生产一件乙产品企业能获利 3 万元。问如何安排生产甲、乙产品的数量，使该企业总利润最大？

设该企业在一个月内生产甲产品 x_1 件，乙产品 x_2 件。显然 x_1、x_2 应为整数。

由上节知规划模型为：

$$\begin{cases}\max z = [2,3]x_1 + 3x_2; \\ 2x_1 + 2x_2 \leqslant 12; \\ \{\{1,2\}\}x_1 + 2x_2 \leqslant \{\{8,10\}\}; \\ 4x_1 \leqslant 16; \\ \{\{3,4\}\}x_2 \leqslant 12; \\ x_1, x_2 \geqslant 0，\text{皆为整数。}\end{cases}$$

类似这样的系数中含有区间型灰数(或灰整数)的整数规划模型,称之为区间型灰整数规划模型。

定义 3.11.3 设 $Z(I)$为区间型灰数集或灰整数集,

$$\forall\ [a_{ij},b_{ij}],[c_j,d_j],[e_i,f_i],z \in Z(I),$$

$$i = 1,2,\cdots,m;\ j = 1,2,\cdots,n,$$

则称 $$\begin{cases}\min(\max)z = \sum\limits_{j=1}^{n}[c_j,d_j]x_j; \\ \sum\limits_{j=1}^{n}[a_{ij},b_{ij}]x_j \geqslant (=,\leqslant)[e_i,f_i],\ i = 1,2,\cdots,m; \\ x_1,x_2,\cdots,x_n \geqslant 0，\text{且全部或部分是整数}\end{cases} \tag{3-11-1}$$

为区间型灰整数规划模型,简记为 GIP。

容易看出,这里的 GIP 模型与上节的 GLP 模型很相似。不同之处在于,GIP 模型解的是整数规划问题;但对于灰性的处理是一致的。下面以引例为例,仿上节解法来说明 GIP 模型的求解过程。

(1)模型标准化。

把定义 3.11.3 中的模型化为如下标准型:

$$\begin{cases}\min z = \sum\limits_{j=1}^{n}[c_j,d_j]x_j; \\ \sum\limits_{j=1}^{n}[a_{ij},b_{ij}]x_j \geqslant [e_i,f_i], i = 1,2,\cdots,m; \\ x_j \geqslant 0, j = 1,2,\cdots,n，\text{且 } x_j \text{ 全部或部分是整数。}\end{cases} \tag{3-11-2}$$

具体的转化方法同上节。引例模型的标准型为：

$$\begin{cases}\min z' = [-3,-2]x_1 - 3x_2; \\ -2x_1 - 2x_2 \geqslant -12; \\ \{\{-2,-1\}\}x_1 - 2x_2 \geqslant \{\{-10,-8\}\}; \\ -4x_1 \geqslant -16; \\ \{\{-4,-3\}\}x_2 \geqslant -12; \\ x_1, x_2 \geqslant 0,\text{且为整数。}\end{cases} \tag{3-11-3}$$

(2)确定约束条件下的最大取值范围和狭义最小取值范围。

确定方法同上节。最大取值范围为：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j \geqslant e_i,\ i = 1,2,\cdots,m; \\ x_j \geqslant 0,\text{且全部或部分为整数}, j = 1,2,\cdots,n。\end{cases}$$

狭义最小取值范围为：

$$\begin{cases}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant f_i,\ i = 1,2,\cdots,m; \\ x_j \geqslant 0,\text{且全部或部分为整数}, j = 1,2,\cdots,n。\end{cases}$$

(3)把 GIP 模型转化为两个经典的整数规划问题。

同上节类似，求 $\min z$ 下限 z_1 的整数规划问题为：

$$\begin{cases}\min z_1 = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j; \\ \sum_{j=1}^{n} b_{ij}x_j \geqslant e_i,\ i = 1,2,\cdots,m; \\ x_j \geqslant 0,\text{且全部或部分是整数}, j = 1,2,\cdots,n。\end{cases} \tag{3-11-4}$$

求 $\min z$ 上限 z_2 的整数规划问题为：

$$\begin{cases}\min z_2 = \sum_{j=1}^{n} d_j x_j; \\ \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant f_i,\ i = 1,2,\cdots,m; \\ x_j \geqslant 0,\text{且全部或部分是整数}, j = 1,2,\cdots,n。\end{cases} \tag{3-11-5}$$

引例求下限与上限的模型为：

$$\begin{cases}\min z'_1=-3x_1-3x_2;\\-2x_1-2x_2\geqslant-12;\\-x_1-2x_2\geqslant-10;\\-4x_1\geqslant-16;\\-3x_2\geqslant-12;\\x_1,x_2\geqslant 0,\text{且为整数。}\end{cases}\tag{3-11-6}$$

$$\begin{cases}\min z'_2=-2x_1-3x_2;\\-2x_1-2x_2\geqslant-12;\\-2x_1-2x_2\geqslant-8;\\-4x_1\geqslant-16;\\-4x_2\geqslant-12;\\x_1,x_2\geqslant 0,\text{且为整数。}\end{cases}\tag{3-11-7}$$

(4)利用经典整数规划解法得出结果。

对(3-11-4)和(3-11-5)式按经典整数规划问题求解得到 z_1 和 z_2(有可能无解)，对应的规划值分别为 $x'_1,x'_2,\cdots,x'_n$ 和 $x''_1,x''_2,\cdots,x''_n$。所以，(3-11-2)式的目标值为

$$\min z=\{\{z_1,z_2\}\},$$

规划值可记为

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}=\left\{\left\{\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\\\vdots\\x'_n\end{pmatrix},\begin{pmatrix}x''_1\\x''_2\\\vdots\\x''_n\end{pmatrix}\right\}\right\}。$$

对于引例，解式(3-11-6)可得：

$$z'_1=-18,$$

$$\begin{pmatrix}x'_1\\x'_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\2\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}3\\3\end{pmatrix}\text{或}\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}。$$

可表示成

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix},$$

解式(3-11-7)得：

$$z'_2 = -11, \quad \begin{pmatrix} x''_1 \\ x''_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}。$$

所以，(3-11-3)的目标值为

$$\min z' = \{\{-18, -11\}\},$$

规划值为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left\{\left\{\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right\}\right\},$$

再还原得引例的目标值为

$$\max z = \{\{11, 18\}\},$$

规划值为

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \left\{\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \cup \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}\right\}\right\}。$$

第四章　泛灰代数基础

在第三章中可以发现，当灰数运算复杂时，许多代数性质不能展开。为此，本章将在泛灰数集概念的基础上定义具有广泛适应性的泛灰数运算，讨论它的运算性质，为灰色系统建模开拓新路。

§4.1　泛灰数及其代数运算

一、泛灰数的概念

定义 4.1.1　设论域 $U=\mathbf{R}$（实数集），则称 $\mathbf{R}$ 上的泛灰集为泛灰数集，记作 $g(R)$，且称 $g(R)$ 中的元素为泛灰数，记作

$$g=(x,[\![\underline{\mu},\overline{\mu}]\!]),x\in\mathbf{R};\underline{\mu},\overline{\mu}\in\tilde{\mathbf{R}}。\qquad(4\text{-}1\text{-}1)$$

称(4-1-1)中的 x 为观测部，$[\![\underline{\mu},\overline{\mu}]\!]$为 x 的灰信息部。

$$g_{(0)}\overset{\text{def}}{=}(0,[\![0,0]\!])\text{ 与 }g_{(1)}\overset{\text{def}}{=}(1,[\![1,1]\!])$$

分别称为 $g(R)$ 中的零元与单位元。

为叙述简便，可把观测部为零、灰信息部不为零的泛灰数统记作 $g'_{(0)}$，并称之为亚零元。零元与亚零元统称为泛零，记作 $g''_{(0)}$。

定义 4.1.2　$\forall\ g=(x,[\![\underline{\mu},\overline{\mu}]\!])\in g(R)$，称

$$-g\overset{\text{def}}{=}(-x,[\![\underline{\mu},\overline{\mu}]\!])$$

为 $g(R)$ 中关于 g 的负元；称

$$g^{-1}\overset{\text{def}}{=}(x^{-1},[\![\underline{\mu}^{-1},\overline{\mu}^{-1}]\!]),(g\neq g''_{(0)})$$

为 $g(R)$ 中关于 g 的逆元。

二、泛灰数的代数运算

由于实际问题中所得到的泛灰数都是其灰信息部 $\underline{\mu},\overline{\mu}\in\mathbf{R}$ 的

泛灰数，所以，在以下各章节中如无特别声明，参加运算的初始泛灰数均是指 $\underline{\mu},\overline{\mu}\in \mathbf{R}$ 的泛灰数。

定义 4.1.3 $\forall\ g_1,g_2\in g(R)$，$g_1=g_2$，当且仅当 $x_1=x_2$ 时，

$$\underline{\mu}_1=\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_1=\overline{\mu}_2。$$

定义 4.1.4 $\forall\ g_1,g_2,\cdots,g_n\in g(R)$，其中，

$$g_i=(x_i,[\underline{\mu}_i,\overline{\mu}_i]),i=1,2,\cdots,n,$$

称

$$\sum_{i=1}^{n}g_i=\left(\sum_{i=1}^{n}x_i,\left[\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\underline{\mu}_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i},\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{\mu}_i}{\sum_{i=1}^{n}x_i}\right]\right) \tag{4-1-2}$$

为 n 个泛灰的加法运算，且规定

当 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}x_i\underline{\mu}_i=0$，$\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{\mu}_i=0$ 时，$\sum_{i=1}^{n}g_i=g_{(0)}$；

当 $\sum_{i=1}^{n}x_i\underline{\mu}_i\neq 0$，$\sum_{i=1}^{n}x_i\overline{\mu}_i\neq 0$，而 $\sum_{i=1}^{n}x_i=0$ 时，灰信息部的上、下界呈现超实数形式。规定灰信息部分母上的“0”可以参加运算。

在(4-1-2)式中，当 $i=1,2$ 时，则有

$$g_1+g_2=\left(x_1+x_2,\left[\frac{x_1\underline{\mu}_1+x_2\underline{\mu}_2}{x_1+x_2},\frac{x_1\overline{\mu}_1+x_2\overline{\mu}_2}{x_1+x_2}\right]\right)。$$

定义

$$g_1-g_2\overset{\text{def}}{=}\left(x_1-x_2,\left[\frac{x_1\underline{\mu}_1-x_2\underline{\mu}_2}{x_1-x_2},\frac{x_1\overline{\mu}_1-x_2\overline{\mu}_2}{x_1-x_2}\right]\right) \tag{4-1-3}$$

为两个泛灰数的减法运算。

命题 4.1.1 加法与减法互为逆运算。

证明：设 $g_1,g_2\in g(R)$，由式(4-1-2)，有

$$g_1+g_2=\left(x_1+x_2,\left[\frac{x_1\underline{\mu}_1+x_2\underline{\mu}_2}{x_1+x_2},\frac{x_1\overline{\mu}_1+x_2\overline{\mu}_2}{x_1+x_2}\right]\right);$$

再由式(4-1-3)有

$$g_1+g_2-g_2=\left(x_1+x_2-x_2,[\![\frac{x_1\underline{\mu}_1+x_2\underline{\mu}_2-x_2\underline{\mu}_2}{x_1+x_2-x_2},\right.$$

$$\left.\frac{x_1\overline{\mu}_1+x_2\overline{\mu}_2-x_2\overline{\mu}_2}{x_1+x_2-x_2}]\!]\right)=(x_1,[\![\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1]\!])=g_1。$$

由泛灰数的定义及其加法定义可知，一个泛灰数表达了某物理量的观测值及其可信度的取值范围；有限个泛灰数的加法表达了有限个物理量的观测值之和及其可信度之和的取值范围。

如果假设 $g_1=g_2=(x,[\![\underline{\mu},\overline{\mu}]\!])=g$，则

$$g_1+g_2=(2x,[\![\underline{\mu},\overline{\mu}]\!])=2g。$$

对于 n 个相同的泛灰数求和，则有

$$\underbrace{g+\cdots+g}_{n个}=(nx,[\![\underline{\mu},\overline{\mu}]\!])=ng。$$

由式(4-1-1)可知，当 $\underline{\mu}=\overline{\mu}=1$ 时，有

$$(x,[\![\underline{\mu},\overline{\mu}]\!])=(x,[\![1,1]\!])=x\in\mathbf{R},$$

故 ng 可以看作一个实数 n 与一个泛灰数 g 之积，即

$$ng\overset{\text{def}}{=}(n,[\![1,1]\!])\cdot(x,[\![\underline{\mu},\overline{\mu}]\!])=(nx,[\![\underline{\mu},\overline{\mu}]\!])。$$

类似整数乘法到实数乘法的推广，可作如下关于泛灰数乘法的定义。

定义 4.1.5 $\forall g_i=(x_i,[\![\underline{\mu}_i,\overline{\mu}_i]\!])\in g(R),i=1,2,\cdots,n$，称

$$\prod_{i=1}^{n}g_i\overset{\text{def}}{=}\left(\prod_{i=1}^{n}x_i,[\![\prod_{i=1}^{n}\underline{\mu}_i,\prod_{i=1}^{n}\overline{\mu}_i]\!]\right)\tag{4-1-4}$$

为 n 个泛灰数的乘法运算。当 $i=1,2$ 时，有

$$g_1\cdot g_2=(x_1x_2,[\![\underline{\mu}_1\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_1\overline{\mu}_2]\!])$$

为两个泛灰数的乘法。且称

$$g_1/g_2\overset{\text{def}}{=}(x_1/x_2,[\![\underline{\mu}_1/\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_1/\overline{\mu}_2]\!])\tag{4-1-5}$$

(当 $g_2\neq g'_{(0)}$)为两个泛灰数的除法运算。

命题 4.1.2 泛灰数的乘、除法互为逆运算。

证明： 设 $g_1=(x_1,[\![\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1]\!])$，$g_2=(x_2,[\![\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2]\!])$，由式(4-1-

4)，有

$$g_1 \cdot g_2 = (x_1x_2, \llbracket \underline{\mu}_1\underline{\mu}_2, \overline{\mu}_1\overline{\mu}_2 \rrbracket);$$

由式(4-1-5)，有

$$g_1 \cdot g_2/g_2 = (x_1x_2/x_2, \llbracket \underline{\mu}_1\underline{\mu}_2/\underline{\mu}_2, \overline{\mu}_1\overline{\mu}_2/\overline{\mu}_2 \rrbracket)$$
$$= (x_1, \llbracket \underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1 \rrbracket) = g_1。$$

类似实数运算，下面给出泛灰数的乘幂与开方运算定义。

定义 4.1.6 $\forall\ g \in g(R), n \in \mathbf{J}$(正整数集)，则称

$$g^n \overset{\text{def}}{=} (x^n, \llbracket \underline{\mu}^n, \overline{\mu}^n \rrbracket)$$

为 g 的 n 次幂。当 $n=0$，或指数取 $-n$ 时，则有

$$g^0 = (x^0, \llbracket \underline{\mu}^0, \overline{\mu}^0 \rrbracket) = (1, \llbracket 1, 1 \rrbracket) = g_{(1)};$$

$$g^{-n} = (x^{-n}, \llbracket \underline{\mu}_1^{-n}, \overline{\mu}^{-n} \rrbracket), (g \neq g'_{(0)})。$$

定义 4.1.7 设 $g \in g(R), n \in \mathbf{J}$，则称

$$g^{\frac{1}{n}} \overset{\text{def}}{=} (x^{\frac{1}{n}}, \llbracket \underline{\mu}^{\frac{1}{n}}, \overline{\mu}^{\frac{1}{n}} \rrbracket)$$

为 g 的 n 次方根，并称 g 可开 n 次方。自然，当 n 为偶数时，若 x，$\overline{\mu}$，$\underline{\mu}$ 中有负数，则该运算无意义。

定理 4.1.1 $\forall\ g_1, g_2 \in g(R)$，有

$$(g_1 \cdot g_2)^n = g_1^n \cdot g_2^n。$$

证明：由乘法与乘幂定义，有

$$(g_1 \cdot g_2)^n = \{(x_1, \llbracket \underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1 \rrbracket) \cdot (x_2, \llbracket \underline{\mu}_2, \overline{\mu}_2 \rrbracket)\}^n$$
$$= (x_1x_2, \llbracket \underline{\mu}_1\underline{\mu}_2, \overline{\mu}_1\overline{\mu}_2 \rrbracket)^n$$
$$= (x_1^nx_2^n, \llbracket \underline{\mu}_1^n\underline{\mu}_2^n, \overline{\mu}_1^n\overline{\mu}_2^n \rrbracket)$$
$$= (x_1^n, \llbracket \underline{\mu}_1^n, \overline{\mu}_1^n \rrbracket) \cdot (x_2^n, \llbracket \underline{\mu}_2^n, \overline{\mu}_2^n \rrbracket)$$
$$= g_1^n \cdot g_2^n。$$

定理 4.1.2 $\forall\ g \in g(R), m, n \in \mathbf{J}$，有

(1) $g^m \cdot g^n = g^{m+n}$；

(2) $(g^m)^n = g^{mn}$。

证明：(略)。

§4.2 泛灰数的代数运算性质

一、泛灰数加法的运算性质

性质 4.2.1 $g(R)$对其加法具有封闭性。

性质 4.2.2 泛灰数的加法满足结合律。

性质 4.2.3 泛灰数的加法满足交换律。

以上三个性质显然是成立的。

性质 4.2.4 在 $g(R)$中存在唯一的零元 $g_{(0)}$。

证明：由定义 4.1.1 可知，$g_{(0)}$是唯一的，下面只须证明 $g_{(0)}$的确是 $g(R)$中的零元即可，即

$$\forall g \in g(R), \text{有 } g + g_{(0)} = g \text{ 或 } g_{(0)} + g = g。$$

事实上，由公式(4-1-2)可得，

$$\begin{aligned} g + g_{(0)} &= (x,[\underline{\mu},\overline{\mu}]) + (0,[0,0]) \\ &= \left(x + 0,\left[\frac{x\underline{\mu}+0}{x+0},\frac{x\overline{\mu}+0}{x+0}\right]\right) \\ &= (x,[\underline{\mu},\overline{\mu}]) = g。\end{aligned}$$

同理可证 $g_{(0)}+g=g$

性质 4.2.5 $\forall g\in g(R)$，存在唯一负元$-g\in g(R)$，使得

$$-g + g = g + (-g) = g_{(0)}。$$

证明：$\forall g=(x,[\underline{\mu},\overline{\mu}])\in g(R)$，由定义 4.1.4 得

$$\begin{aligned} -g + g &= (-x,[\underline{\mu},\overline{\mu}]) + (x,[\underline{\mu},\overline{\mu}]) \\ &= \left(-x + x,\left[\frac{-x\underline{\mu}+x\underline{\mu}}{-x+x},\frac{-x\overline{\mu}+x\overline{\mu}}{-x+x}\right]\right) \\ &= (0,[0,0]) = g_{(0)}。\end{aligned}$$

同理，有

$$g + (-g) = g_{(0)}。$$

若还存在$-g'=(x',[\underline{\mu}',\overline{\mu}'])$是 g 的负元，则它应满足

$$-g' + g = g_{(0)},$$

即

$$\left(x' + x, [\![\frac{x'\underline{\mu}' + x\underline{\mu}}{x' + x}, \frac{x'\overline{\mu}' + x\overline{\mu}}{x' + x}]\!]\right) = (0, [\![0, 0]\!]),$$

亦即

$$x' + x = 0, \frac{x'\underline{\mu}' + x\underline{\mu}}{x' + x} = 0, \frac{x'\overline{\mu}' + x\overline{\mu}}{x' + x} = 0,$$

从而有，

$$x' = -x, \quad \underline{\mu}' = \underline{\mu}, \quad \overline{\mu}' = \overline{\mu}。$$

故在 $g(R)$ 中关于任一泛灰数 g 的负元存在并且唯一。

综合如上五个性质，可得如下定理：

定理 4.2.1 泛灰数集 $g(R)$ 上的加法成一个 Abel 群，可称之为泛灰 Abel 加群。

二、泛灰数乘法的运算性质

性质 4.2.6 $g(R)$ 对其乘法封闭，即

$$\forall g_1, g_2 \in g(R), 有\ g_1 \cdot g_2 \in g(R)。$$

性质 4.2.7 泛灰数的乘法满足交换律。

性质 4.2.8 泛灰数的乘法满足结合律。

性质 4.2.9 $g(R)$ 中存在唯一的单位元 $g_{(1)}$，使得 $\forall g \in g(R)$，均有 $g_{(1)} \cdot g = g \cdot g_{(1)} = g$。

证明：

设 $g = (x, [\![\underline{\mu}, \overline{\mu}]\!]) \in g(R)$，则

$$\begin{aligned} g_{(1)} \cdot g &= (1, [\![1, 1]\!]) \cdot (x, [\![\underline{\mu}, \overline{\mu}]\!]) \\ &= (x, [\![\underline{\mu}, \overline{\mu}]\!]) = g; \end{aligned}$$

同理，有

$$g \cdot g_{(1)} = g。$$

若还有 $g'_{(1)} = (x', [\![\underline{\mu}', \overline{\mu}']\!])$ 也是 $g(R)$ 中的单位元，则它必

须满足

$$g'_{(1)} \cdot g = g \cdot g'_{(1)} = g,$$

即

$$(x', \llbracket \underline{\mu}', \overline{\mu}' \rrbracket) \cdot (x, \llbracket \underline{\mu}, \overline{\mu} \rrbracket) = (x, \llbracket \underline{\mu}, \overline{\mu} \rrbracket),$$

$$(x, \llbracket \underline{\mu}, \overline{\mu} \rrbracket) \cdot (x', \llbracket \underline{\mu}', \overline{\mu}' \rrbracket) = (x, \llbracket \underline{\mu}, \overline{\mu} \rrbracket)。$$

由上两式均可得

$$(xx', \llbracket \underline{\mu}' \underline{\mu}, \overline{\mu}' \overline{\mu} \rrbracket) = (x, \llbracket \underline{\mu}, \overline{\mu} \rrbracket),$$

由定义 4.1.5，得

$$x' = 1, \quad \underline{\mu}' = 1, \quad \overline{\mu}' = 1。$$

于是

$$g'_{(1)} = (1, \llbracket 1, 1 \rrbracket) = g_{(1)}。$$

注：泛灰数的乘法满足消去律。

性质 4.2.10 除零元 $g_{(0)}$ 与亚零元 $g'_{(0)}$ 外，$\forall\, g \in g(R)$，皆有唯一的逆元 $g^{-1} = (x^{-1}, \llbracket \underline{\mu}^{-1}, \overline{\mu}^{-1} \rrbracket)$。

证明：因为

$$\begin{aligned} g^{-1} \cdot g &= (x^{-1}, \llbracket \underline{\mu}^{-1}, \overline{\mu}^{-1} \rrbracket)(x, \llbracket \underline{\mu}, \overline{\mu} \rrbracket) \\ &= (1, \llbracket 1, 1 \rrbracket) = g_{(1)}, \end{aligned}$$

且同理有

$$g \cdot g^{-1} = g_{(1)},$$

所以，$g^{-1} = (x^{-1}, \llbracket \underline{\mu}^{-1}, \overline{\mu}^{-1} \rrbracket)$ 是 $g = (x, \llbracket \underline{\mu}, \overline{\mu} \rrbracket)$ 的逆元。

若还存在 $g_1^{-1} = (x_1, \llbracket \underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1 \rrbracket)$ 是 g 的逆元，则有

$$g^{-1} \cdot g = g_{(1)} \text{ 或 } g \cdot g_1^{-1} = g,$$

即

$$(x_1, \llbracket \underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1 \rrbracket) \cdot (x, \llbracket \underline{\mu}, \overline{\mu} \rrbracket) = (1, \llbracket 1, 1 \rrbracket)$$

或

$$(x, \llbracket \underline{\mu}, \overline{\mu} \rrbracket) \cdot (x_1, \llbracket \underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1 \rrbracket) = (1, \llbracket 1, 1 \rrbracket)。$$

由以上两式均得

$$x_1 = x^{-1}, \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}^{-1}, \overline{\mu}_1 = \overline{\mu}^{-1}。$$

可见，$g_1^{-1} = (x^{-1}, \llbracket \underline{\mu}^{-1}, \overline{\mu}^{-1} \rrbracket) = g^{-1}$，即 g 的逆元存在并且唯一。

综合性质 4.2.6～4.2.10，可得如下定理：

定理 4.2.2 泛灰数集 $g(R)$ 上的乘法成一个 Abel 群，可称之为泛灰 Abel 乘群。

一个具有两种运算的代数系统即称之为环。如果某个代数系统中所有元素满足：

(1)加法结合律，

(2)加法交换律，

(3)乘法结合律，

(4)一元一次方程可解，

(5)乘法对加法的分配律，

则这个代数系统构成环。

定理 4.2.3 泛灰数集 $g(R)$ 的乘法和加法两种运算构成环。

证明：要证 $g(R)$ 构成环，只需证明在 $g(R)$ 中，以上五个条件满足即可。

由前面讨论知，条件(1)，(2)，(3)在 $g(R)$ 中是成立的。下面证明条件(4)和(5)。

证明在 $g(R)$ 中一元一次方程可解，即要证明 $\forall g_1, g_2 \in g(R)$，存在 $g \in g(R)$，使得

$$g + g_1 = g_2,$$

亦即

$$(x, \llbracket \underline{\mu}, \overline{\mu} \rrbracket) + (x_1, \llbracket \underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1 \rrbracket) = (x_2, \llbracket \underline{\mu}_2, \overline{\mu}_2 \rrbracket) \quad (4\text{-}2\text{-}1)$$

成立。

根据泛灰数的加法运算规则，在式(4-2-1)两端同时加上 g_1 的负元 $-g_1 = (-x_1, \llbracket \underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1 \rrbracket)$，得

$$\begin{aligned}(x, \llbracket \underline{\mu}, \overline{\mu} \rrbracket) &= (x_2, \llbracket \underline{\mu}_2, \overline{\mu}_2 \rrbracket) + (-x_1, \llbracket \underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1 \rrbracket) \\ &= \left(x_2 - x_1, \left\llbracket \frac{x_2\underline{\mu}_2 - x_1\underline{\mu}_1}{x_2 - x_1}, \frac{x_2\overline{\mu}_2 - x_1\overline{\mu}_1}{x_2 - x_1} \right\rrbracket\right) \in g(R),\end{aligned}$$

(4-2-2)

将式(4-2-2)代入式(4-2-1),得知等式成立,即(4-2-2)式是方程的解。

证明乘法对加法的分配律,即要证明$\forall\ g_1,g_2,g_3\in g(R)$,有

$$g_1(g_2+g_3)=g_1g_2+g_1g_3,$$

或

$$(g_2+g_3)g_1=g_2g_1+g_3g_1。$$

实际上,

$$g_1(g_2+g_3)=(x_1,\llbracket\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1\rrbracket)\{(x_2,\llbracket\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2\rrbracket)+(x_3,\llbracket\underline{\mu}_3,\overline{\mu}_3\rrbracket)\}$$

$$=(x_1,\llbracket\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1\rrbracket)\left(x_2+x_3,\llbracket\frac{x_2\underline{\mu}_2+x_3\underline{\mu}_3}{x_2+x_3},\frac{x_2\overline{\mu}_2+x_3\overline{\mu}_3}{x_2+x_3}\rrbracket\right)$$

$$=\left(x_1x_2+x_1x_3,\llbracket\frac{(x_2\underline{\mu}_2+x_3\underline{\mu}_3)x_1\underline{\mu}_1}{(x_2+x_3)x_1},\frac{(x_2\overline{\mu}_2+x_3\overline{\mu}_3)x_1\overline{\mu}_1}{(x_2+x_3)x_1}\rrbracket\right)$$

$$=\left(x_1x_2+x_1x_3,\llbracket\frac{x_1x_2\underline{\mu}_1\underline{\mu}_2+x_1x_3\underline{\mu}_1\underline{\mu}_3}{x_1x_2+x_1x_3},\frac{x_1x_2\overline{\mu}_1\overline{\mu}_2+x_1x_3\overline{\mu}_1\overline{\mu}_3}{x_1x_2+x_1x_3}\rrbracket\right),$$

$$g_1g_2+g_1g_3=(x_1x_2,\llbracket\underline{\mu}_1\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_1\overline{\mu}_2\rrbracket)+(x_1x_3,\llbracket\underline{\mu}_1\underline{\mu}_3,\overline{\mu}_1\overline{\mu}_3\rrbracket)$$

$$=\left(x_1x_2+x_1x_3,\llbracket\frac{x_1x_2\underline{\mu}_1\underline{\mu}_2+x_1x_3\underline{\mu}_1\underline{\mu}_3}{x_1x_2+x_1x_3},\frac{x_1x_2\overline{\mu}_1\overline{\mu}_2+x_1x_3\overline{\mu}_1\overline{\mu}_3}{x_1x_2+x_1x_3}\rrbracket\right),$$

所以

$$g_1(g_2+g_3)=g_1g_2+g_1g_3。$$

同理可证

$$(g_2+g_3)g_1=g_2g_1+g_3g_1。$$

即泛灰数满足乘法对加法的分配律。

综上可知,定理得证。

注:因为泛灰数的乘法满足交换律,所以,$g(R)$对其乘法和加法构成一个可交换环,称之为泛灰可交换环。

一个至少含有两个元素的环,即称之为域。如果环的乘法运算还具有性质:

(1)有单位元素,

(2)有逆元素,

(3)交换律成立,

则这个环即构成域。

根据性质 4.2.9 和 4.2.10 可知定理 4.2.4 成立。

定理 4.2.4 泛灰数集 $g(R)$上的加法与乘法两种运算构成一个域,可称之为泛灰域。

§4.3 泛灰数的序关系

定义 4.3.1 设 $g_1=(x_1,[\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1])$,$g_2=(x_2,[\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2])\in G(R)$,如果 $x_1<x_2$,则称 g_1 小于 g_2,记作 $g_1<g_2$。

这样规定泛灰数的大小关系是可行的。

如果观测部 x_2 值比 x_1 值大,且灰信息部上、下隶属度 $\underline{\mu}_2$,$\overline{\mu}_2$ 也较 $\underline{\mu}_1$,$\overline{\mu}_1$ 大,则称 $g_1<g_2$,这是比较好理解的。如果观测部 x_2 值比 x_1 值大,而上、下隶属度 $\underline{\mu}_2$,$\overline{\mu}_2$ 比 $\underline{\mu}_1$,$\overline{\mu}_1$ 小,仍然称 $g_1<g_2$,似乎不太好理解。其实这种情况下定义仍是可以理解的。比如用某流速仪测河水的流速,可能会随着河水流速 x 值的增大,测量的精度越来越差,即上、下隶属度越来越小。设甲河实测流速 x_1 大于乙河实测流速 x_2,尽管甲河上、下隶属度小于乙河的,但按实际情况和人们的思维习惯来理解,还只能认为甲河泛灰数大于乙河的。

从定义泛灰数的目的来看,尽管它是在描述观测部的同时,还注意考虑灰信息部,但总体还是以观测部 x 值为主体。因此,仅以 x 值的大小作为确定泛灰数大小关系的依据是可行的。

当然,既然泛灰数是由观测部和灰信息部组成,那么,在有些情况下,在比较泛灰数大小时,不仅要考虑到观测部 x 值大小,而且还要考虑上、下隶属度的大小。比如,§4.10 中介绍的规划问题就是一例。对此,下面将分两种情况再给出泛灰数的序关系定义和表示方法。

定义 4.3.2 设 $g_1=(x_1,[\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1])$,$g_2=(x_2,[\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2])\in g(R)$,且 $x_1<$(或$\leqslant$)x_2,

(1)如果$\frac{\underline{\mu}_1+\overline{\mu}_1}{2}\leqslant\frac{\underline{\mu}_2+\overline{\mu}_2}{2}$，则记$g_1<^{(C)}$(或$\leqslant^{(C)}$)$g_2$；

(2)如果$\frac{\underline{\mu}_1+\overline{\mu}_1}{2}\geqslant\frac{\underline{\mu}_2+\overline{\mu}_2}{2}$，则记$g_1<^{(S)}$(或$\leqslant^{(S)}$)$g_2$。

(1)规定的序关系可称之为层次型序关系；(2)规定的序关系可称之为系统型序关系。下面分别介绍它们的含义。

1. 层次型序关系

从系统论的观点看，系统的灰与白与观测的层次有关。若用高层次代表系统的整体层次、认识的概括层，用低层次代表系统的微观层次、系统的部分(深部、内部)层次、认识的深化层次，则同一个系统中的同一个参数，在高层次中是白的，而到低层次中便可能是灰的。如人的年龄，从"年"这个层次来讲是白的，从"秒"、"微秒"等低层次上来讲就是灰的。从误差理论的观点来看，用同一种测量工具测量高层次的物体很可能接近精确值，而测量低层次的物体就可能带来很大误差，可信度就很小。如用米尺测量房屋的高低、长度，则能达到测量目的的要求，而用它来测量很小的物体(如纸张的厚度)，则其测量值的可信度将难以置信。$\frac{\underline{\mu}_1+\overline{\mu}_1}{2}\leqslant\frac{\underline{\mu}_2+\overline{\mu}_2}{2}$所描述的就是这样的层次关系。其中的"<"是不同层次中泛灰数的大、小比较关系；"="是同一层次中泛灰数的大、小比较关系。这类序关系可统称为层次型序关系。

2. 系统型序关系

从系统论的观点来看，系统的灰与白在很大程度上取决于系统的复杂程度。系统越复杂，获得的可靠信息率可能会越小。比如，河水流速越大，流动状态可能会从层流变成紊流，水流运动性质就变得越复杂，使得观测结果越灰。由于人们对客观世界认识的局限性，研制出的测量工具往往只能适应系统复杂程度不超过一定限度的系统的量的测量。如前面所提到的河水流速的测量。$\frac{\underline{\mu}_1+\overline{\mu}_1}{2}\geqslant\frac{\underline{\mu}_2+\overline{\mu}_2}{2}$描述的就是这种情况，即上、下隶属度小，但实测值大。这种

从系统复杂程度引出的序关系，称为系统型序关系。

§4.4 泛灰向量及其运算

定义 4.4.1 称向量

$$g_\alpha \overset{\text{def}}{=} (g_1, g_2, \cdots, g_n),$$

为 n 维泛灰向量，其中，$g_i \in g(R)$，$i=1,2,\cdots,n$；g_j 称为 n 维泛灰向量 g_α 的第 j 个分量。

分量都是 $g_{(0)}$ 的向量，称为泛灰零向量，记作

$$g_0 = (g_{(0)}, g_{(0)}, \cdots, g_{(0)})。$$

向量$(-g_1, -g_2, \cdots, -g_n)$，称为向量 g_α 的泛灰负向量，记作 $-g_\alpha$，

$$-g_\alpha = (-g_1, -g_2, \cdots, -g_n)。$$

定义 4.4.2 设$g_\alpha = (g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{1n})$，

$$g_\beta = (g_{21}, g_{22}, \cdots, g_{2n}),$$

当且仅当

$$g_{11} = g_{21},\quad g_{12} = g_{22}, \cdots,\quad g_{1n} = g_{2n},$$

称 g_α 与 g_β 相等，记作 $g_\alpha = g_\beta$。

定义 4.4.3 设 $g_\alpha = (g_{11}, g_{12}, \cdots, g_{1n})$，

$$g_\beta = (g_{21}, g_{22}, \cdots, g_{2n}),$$

则向量

$$(g_{11} + g_{21}, g_{12} + g_{22}, \cdots, g_{1n} + g_{2n})$$

称为泛灰向量 g_α 与 g_β 的和，记作 $g_\alpha + g_\beta$。

由负向量，即可定义泛灰向量的减法：

$$\begin{aligned} g_\alpha - g_\beta &= g_\alpha + (-g_\beta) \\ &= (g_{11} - g_{21}, g_{12} - g_{22}, \cdots, g_{1n} - g_{2n})。\end{aligned}$$

定义 4.4.4 设 $g_\alpha = (g_1, g_2, \cdots, g_n)$，$g \in g(R)$，则向量 $(gg_1, gg_2, \cdots, gg_n)$称为泛灰数 g 与泛灰向量 g_α 的乘积，记作 $g \cdot g_\alpha$ 或 $g_\alpha \cdot g$。

泛灰向量的和(称为加法)及泛灰数与泛灰向量的乘积两种运算,统称为泛灰向量的线性运算。它满足如下运算定律(设 $\boldsymbol{g}_\alpha$,$\boldsymbol{g}_\beta$,$\boldsymbol{g}_\gamma$ 都是 n 维泛灰向量;g_1,$g_2\in g(R)$):

(1) $\boldsymbol{g}_\alpha+\boldsymbol{g}_\beta=\boldsymbol{g}_\beta+\boldsymbol{g}_\alpha$;

(2) $(\boldsymbol{g}_\alpha+\boldsymbol{g}_\beta)+\boldsymbol{g}_\gamma=\boldsymbol{g}_\alpha+(\boldsymbol{g}_\beta+\boldsymbol{g}_\gamma)$;

(3) $\boldsymbol{g}_\alpha+\boldsymbol{g}_0=\boldsymbol{g}_\alpha$;

(4) $\boldsymbol{g}_\alpha+(-\boldsymbol{g}_\alpha)=\boldsymbol{g}_0$;

(5) $g_{(1)}\cdot\boldsymbol{g}_\alpha=\boldsymbol{g}_\alpha$;

(6) $g_1(g_2\cdot\boldsymbol{g}_\alpha)=(g_1\cdot g_2)\cdot\boldsymbol{g}_\alpha$;

(7) $g_1(\boldsymbol{g}_\alpha+\boldsymbol{g}_\beta)=g_1\cdot\boldsymbol{g}_\alpha+g_1\cdot\boldsymbol{g}_\beta$;

(8) $(g_1+g_2)\cdot\boldsymbol{g}_\alpha=g_1\boldsymbol{g}_\alpha+g_2\boldsymbol{g}_\alpha$。

证明:这些运算定律均可根据泛灰数的运算性质以及泛灰向量的线性运算定义得到。下面仅给出(2)与(8)的证明。

设 $\boldsymbol{g}_\alpha=(g_{11},g_{12},\cdots,g_{1n})$,

$\boldsymbol{g}_\beta=(g_{21},g_{22},\cdots,g_{2n})$,

$\boldsymbol{g}_\gamma=(g_{31},g_{32},\cdots,g_{3n})$,

则

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{g}_\alpha+\boldsymbol{g}_\beta)+\boldsymbol{g}_\gamma&=\{(g_{11},g_{12},\cdots,g_{1n})+(g_{21},g_{22},\cdots,g_{2n})\}+\\
&\quad(g_{31},g_{32},\cdots,g_{3n})\\
&=(g_{11}+g_{21},g_{12}+g_{22},\cdots,g_{1n}+g_{2n})+\\
&\quad(g_{31},g_{32},\cdots,g_{3n})\\
&=(g_{11}+g_{21}+g_{31},g_{12}+g_{22}+g_{32},\cdots,\\
&\quad g_{1n}+g_{2n}+g_{3n});
\end{aligned}
$$

而
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{g}_\alpha+(\boldsymbol{g}_\beta+\boldsymbol{g}_\gamma)&=(g_{11},g_{12},\cdots,g_{1n})+\{(g_{21},g_{22},\cdots,g_{2n})\\
&\quad+(g_{31},g_{32},\cdots,g_{3n})\}\\
&=(g_{11},g_{12},\cdots,g_{1n})+(g_{21}+g_{31},g_{22}\\
&\quad+g_{32},\cdots,g_{2n}+g_{3n})\\
&=(g_{11}+g_{21}+g_{31},g_{12}+g_{22}+g_{32},\cdots,
\end{aligned}
$$

$$g_{1n}+g_{2n}+g_{3n}),$$

可见 $$(g_\alpha+g_\beta)+g_\gamma=g_\alpha+(g_\beta+g_\gamma);$$

即定律(2)成立。

因为

$$\begin{aligned}(g_1+g_2)g_\alpha &=(g_1+g_2)\cdot(g_{11},g_{12},\cdots,g_{1n})\\ &=((g_1+g_2)g_{11},(g_1+g_2)g_{12},\cdots,(g_1+g_2)g_{1n})\\ &=(g_1g_{11}+g_2g_{11},g_1g_{12}+g_2g_{12},\cdots,g_1g_{1n}+g_2g_{1n})\\ &=(g_1g_{11},g_1g_{12},\cdots,g_1g_{1n})+(g_2g_{11},g_2g_{12},\cdots,g_2g_{1n})\\ &=g_1(g_{11},g_{12},\cdots,g_{1n})+g_2(g_{11},g_{12},\cdots,g_{1n})\\ &=g_1g_\alpha+g_2g_\alpha,\end{aligned}$$

可见定律(8)成立。

由此可见，若将全体 n 维泛灰向量构成的集合记为 $G^n(R)$，则 $G^n(R)$ 构成一个线性空间，可称之为泛灰线性空间。

§4.5 泛灰行列式

为了研究泛灰线性方程组以及泛灰逆矩阵，本节介绍泛灰行列式的概念。

定义 4.5.1 设 $g_{ij}\in g(R)$；$i,j=1,2,\cdots,n$，称

$$g_D\overset{\text{def}}{=}\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n}\\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn}\end{vmatrix}\overset{\text{def}}{=}\sum(-1)^t g_{1p_1}g_{2p_2}\cdots g_{np_n}$$

为 n 阶泛灰行列式，g_{ij} 称为它的元素；$p_1p_2\cdots p_n$ 为自然数 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列。

在此定义下，根据泛灰数的运算性质，可以证明泛灰行列式具有普通行列式相应的性质。

性质 4.5.1 互换泛灰行列式的两行(列)，行列式变号。

性质 4.5.2

$$g_D=\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & (g_{1j}+g'_{1j}) & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & (g_{nj}+g'_{nj}) & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1j} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nj} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g'_{1j} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g'_{nj} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix},$$

$$g_D=\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{j1}+g'_{j1} & \cdots & g_{jn}+g'_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{j1} & \cdots & g_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g'_{j1} & \cdots & g'_{jn} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}。$$

性质 4.5.3 泛灰行列式的某一行(列)中所有元素同乘以泛灰数 g,等于用 g 乘此行列式。

性质 4.5.4

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ki}\cdot g_{A_{kj}}=g_D\delta_{ij}$$

或

$$\sum_{k=1}^{n} g_{ik}\cdot g_{A_{jk}}=g_D\delta_{ij},$$

其中,
$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j;\\ 0, & i\neq j。\end{cases}$$

$g_{A_{ij}}$为 g_D 的元素 g_{ij}的代数余子式,称为泛灰代数余子式。

以上性质的证明从略。

自然，泛灰行列式还具有与普通行列式相应的其他性质，例如，将泛灰行列式的某一行（列）乘以泛灰数 g，加到另一行（列）上，泛灰行列式不变，等等。为了利用这一性质来计算泛灰行列式，定义泛灰行列式

$$\begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{(0)} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{(0)} & g_{(0)} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix}$$

为三角泛灰行列式，它具有与普通三角行列式相同的性质，即其值为 $g_{11} \cdot g_{22} \cdots g_{nn}$。如

$$\begin{aligned} g_D &= \begin{vmatrix} (2,[1,2]) & (1,[0.5,0.8]) \\ (-1,[1,2]) & (0.5,[0.4,0.6]) \end{vmatrix} \\ &= (1,[0.4,1.2]) - (-1,[0.5,1.6]) \\ &= (2,[0.45,1.4]), \end{aligned}$$

若将 g_D 的第 1 行乘以 $\frac{1}{2}$ 加至第 2 行上，得

$$\begin{aligned} g_D &= \begin{vmatrix} (2,[1,2]) & (1,[0.5,0.8]) \\ (0,[0,0]) & (1,[0.45,0.7]) \end{vmatrix} \\ &= (2,[1,2])(1,[0.45,0.7]) \\ &= (2,[0.45,1.4])。 \end{aligned}$$

可见，两种方法结果一致。

行列式可以用于求解线性方程组，其中起主要作用的是克莱姆法则。为此下面将证明克莱姆法则对泛灰数仍然成立。

定义 4.5.2 称方程组

$$\begin{cases} g_{11}g_{x_1} + g_{12}g_{x_2} + \cdots + g_{1n}g_{x_n} = g_1 \\ g_{21}g_{x_1} + g_{22}g_{x_2} + \cdots + g_{2n}g_{x_n} = g_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ g_{n1}g_{x_1} + g_{n2}g_{x_2} + \cdots + g_{nn}g_{x_n} = g_n \end{cases} \tag{4-5-1}$$

为 n 元泛灰线性方程组。其中，$g_{ij}, g_j \in g(R)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 都是

泛灰常数；$g_{x_i}(i=1,2,\cdots,n)$为泛灰未知数。

若存在一组泛灰数 $g_{x_1}=g_1^{(0)},g_{x_2}=g_2^{(0)},\cdots,g_{x_n}=g_n^{(0)}$ 使方程组(4-5-1)恒等，则称 $g_1^{(0)},g_2^{(0)},\cdots,g_n^{(0)}$ 为 n 元泛灰线性方程组(4-5-1)的泛灰解，简称为解；求解过程叫做解泛灰线性方程组。

克莱姆法则 若方程组(4-5-1)的系数行列式不等于 $g''_{(0)}$，即

$$g_D=\begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \neq g''_{(0)}$$

则方程组(4-5-1)有唯一泛灰解：

$$g_{x_1}=g_{D_1}/g_D,g_{x_2}=g_{D_2}/g_D,\cdots,g_{x_n}=g_{D_n}/g_D \qquad (4\text{-}5\text{-}2)$$

其中，$g_{D_i}(i=1,2,\cdots,n)$为将 g_D 中的第 i 列的元素用方程组(4-5-1)右端的泛灰常数代替后所得到的行列式。

证明：设方程组(4-5-1)有解，即有一组泛灰数 $g_{x_1},g_{x_2},\cdots,g_{x_n}$ 满足(4-5-1)，则只要证明 $g_{x_i}(i=1,2,\cdots,n)$将由(4-5-2)式给出即可。

事实上，用 g_D 中第 j 列元素的代数余子式 $g_{A_{1j}},g_{A_{2j}},\cdots,g_{A_{nj}}$ 依次乘方程组(4-5-1)的 n 个方程，并把它们相加，得

$$\left(\sum_{k=1}^{n}g_{k1}g_{A_{kj}}\right)g_{x_1}+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}g_{kj}g_{A_{kj}}\right)g_{x_j}+\cdots+\left(\sum_{k=1}^{n}g_{kn}g_{A_{kj}}\right)g_{x_n}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}g_kg_{A_{kj}}。 \qquad (4\text{-}5\text{-}3)$$

根据性质 4.5.4 可知，(4-5-3)式为

$$g_Dg_{x_j}=g_{D_j} \quad (j=1,2,\cdots,n)。$$

因为 $g_D\neq g''_{(0)}$，所以，(4-5-2)式成立。

为了证明解的唯一性，还需验证(4-5-2)确是方程组(4-5-1)的解。亦即要证明

$$g_{i1}\frac{g_{D_1}}{g_D}+g_{i2}\frac{g_{D_2}}{g_D}+\cdots+g_{in}\frac{g_{D_n}}{g_D}=g_i \quad (i=1,2,\cdots,n)。$$

为此，考虑如下 $n+1$ 阶泛灰行列式：

$$\begin{vmatrix} g_i & g_{i1} & \cdots & g_{in} \\ g_1 & g_{11} & \cdots & g_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_n & g_{n1} & \cdots & g_{nn} \end{vmatrix} \quad (i = 1,2,\cdots,n),$$

它的值为泛灰零元 $g_{(0)}$，把它按第一行展开，即得

$$g_{(0)} = g_i g_{\mathrm{D}} - g_{i1} g_{\mathrm{D}_1} - \cdots - g_{in} g_{\mathrm{D}_n}$$

即

$$g_{i1}\frac{g_{\mathrm{D}_1}}{g_{\mathrm{D}}} + g_{i2}\frac{g_{\mathrm{D}_2}}{g_{\mathrm{D}}} + \cdots + g_{in}\frac{g_{\mathrm{D}_n}}{g_{\mathrm{D}}}$$
$$= \frac{1}{g_{\mathrm{D}}} g_{(0)} + g_i = g_i \quad (i = 1,2,\cdots,n)。$$

例 4.5.1 求解二元泛灰线性方程组

$$\begin{cases} (5,[-2,0.2])g_{x_1} + (4,[0.4,0.8])g_{x_2} = (8,[0.1,1]), \\ (2,[0.6,0.8])g_{x_1} + (2,[1,2])g_{x_2} = (3,[-0.5,2])。 \end{cases}$$

解：因为

$$g_{\mathrm{D}} = \begin{vmatrix} (5,[-2,0.2]) & (4,[0.4,0.8]) \\ (2,[0.6,0.8]) & (2,[1,2]) \end{vmatrix}$$
$$= (10,[-2,0.4]) - (8,[0.24,0.64])$$
$$= (2,[-10.86,-0.56]) \neq g''_{(0)},$$

所以方程组有唯一泛灰解。

$$g_{\mathrm{D}_1} = \begin{vmatrix} (8,[0.1,1]) & (4,[0.4,0.8]) \\ (3,[-0.5,2]) & (2,[1,2]) \end{vmatrix}$$
$$= (16,[0.1,2]) - (12,[-0.2,1.6])$$
$$= (4,[1,3.2]),$$

$$g_{\mathrm{D}_2} = \begin{vmatrix} (5,[-2,0.2]) & (8,[0.1,1]) \\ (2,[0.6,0.8]) & (3,[-0.5,2]) \end{vmatrix}$$
$$= (15,[1,0.4]) - (16,[0.06,0.8])$$

$$=(-1,[-14.04,6.8]),$$

故

$$g_{x_1}=g_{D_1}/g_D=\left(2,\left[-\frac{1}{10.86},\frac{40}{7}\right]\right),$$

$$g_{x_2}=g_{D_2}/g_D=\left(-\frac{1}{2},\left[\frac{702}{543},-\frac{85}{7}\right]\right)。$$

§4.6 泛灰矩阵及其运算

一、泛灰矩阵的概念

定义 4.6.1 设 $g_{ij}\in g(R)(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$，由 $m\times n$ 个泛灰数 g_{ij} 排成的 m 行 n 列的表

$$g_A \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m1} & g_{m2} & \cdots & g_{mn} \end{bmatrix} \tag{4-6-1}$$

称为 m 行 n 列泛灰矩阵。这 $m\times n$ 个泛灰数 g_{ij} 称为泛灰矩阵 g_A 的元素。通常(4-6-1)式也简记为

$$g_A=(g_{ij})_{m\times n}。$$

当行数等于列数时，泛灰矩阵称为泛灰方阵。

当泛灰数都取 $g_{(0)}$ 时，泛灰矩阵称为泛灰零矩阵，记为

$$g_0 \overset{\text{def}}{=} \begin{bmatrix} g_{(0)} & \cdots & g_{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{(0)} & \cdots & g_{(0)} \end{bmatrix}。$$

定义 4.6.2 称方阵

$$g_I \overset{\text{def}}{=} \begin{pmatrix} g_{(1)} & g_{(0)} & \cdots & g_{(0)} \\ g_{(0)} & g_{(1)} & \cdots & g_{(0)} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{(0)} & g_{(0)} & \cdots & g_{(1)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{(1)} & & g_{(0)} \\ & \ddots & \\ g_{(0)} & & g_{(1)} \end{pmatrix}$$

为 n 阶泛灰单位阵，其中 $g_{(0)}$ 为泛灰零元。

设 $g_A=(g_{ij})_{m\times n}$，$g_B=(g'_{ij})_{m\times n}$，如果它们的对应元素相等，即

$$g_{ij}=g'_{ij}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n),$$

那么就称泛灰矩阵 g_A 与 g_B 相等，记作

$$g_A=g_B。$$

二、泛灰矩阵的运算

定义 4.6.3 设 $g_A=(g_{ij})_{m\times n}$，$g_B=(g'_{ij})_{m\times n}$，那么泛灰矩阵

$$g_{A+B}\stackrel{\text{def}}{=}\begin{bmatrix} g_{11}+g'_{11} & g_{12}+g'_{12} & \cdots & g_{1n}+g'_{1n} \\ g_{21}+g'_{21} & g_{22}+g'_{22} & \cdots & g_{2n}+g'_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{m1}+g'_{m1} & g_{m2}+g'_{m2} & \cdots & g_{mn}+g'_{mn} \end{bmatrix}$$

叫做泛灰矩阵 g_A 与 g_B 的和(和运算也称为加法)。

矩阵

$$\begin{bmatrix} -g_{11} & -g_{12} & \cdots & -g_{1n} \\ -g_{21} & -g_{22} & \cdots & -g_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -g_{m1} & -g_{m2} & \cdots & -g_{mn} \end{bmatrix}$$

称为泛灰矩阵 g_A 的负矩阵，记为 $-g_A$。这样，泛灰矩阵的减法定义为

$$g_A-g_B=g_A+(-g_B)。$$

由于泛灰矩阵的加、减法归结为它们的元素的加、减法，也就是泛灰数的加、减法，所以，不难验证泛灰矩阵有如下的运算定律：

结合律： $g_A+(g_B+g_C)=(g_A+g_B)+g_C$；

交换律： $g_A+g_B=g_B+g_A$；

$$g_A+g_0=g_A;\quad g_A-g_A=g_0。$$

定义 4.6.4 泛灰数 g 与泛灰矩阵 g_A 的乘积定义为

$$gg_A=\begin{bmatrix} gg_{11} & \cdots & gg_{1n} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ gg_{m1} & \cdots & gg_{mn} \end{bmatrix}。$$

定义 4.6.5 设 $g_A=(g_{ij})_{m\times s}, g_B=(g'_{ij})_{s\times n}$，则定义泛灰矩阵 g_A 与 g_B 的乘积 g_{AB} 为 $m\times n$ 泛灰矩阵，$g_{AB}\overset{\text{def}}{=}(g''_{ij})$，其中

$$g''_{ij}=\sum_{k=1}^{s}g_{ik}g'_{kj}\quad(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)。$$

泛灰矩阵的乘法满足如下运算规律(假设运算都是可行的)：

(1) $(g_A\cdot g_B)g_C=g_A(g_B\cdot g_C)$；

(2) $g_A(g_B+g_C)=g_Ag_B+g_Ag_C$，

$(g_B+g_C)g_A=g_Bg_A+g_Cg_A$；

(3) $(g_A)_{m\times n}\cdot(g_1)_{n\times n}=(g_A)_{m\times n}=g_A$，

$(g_1)_{m\times m}\cdot(g_A)_{mn}=g_A$。

定义 4.6.6 对于 n 阶泛灰方阵 g_A，定义

$$g_A^k=\underbrace{g_A\cdots g_A}_{k个}\quad(k\ 为正整数)$$

为泛灰方阵 g_A 的 k 次幂。

由于泛灰矩阵的乘法满足结合律，所以泛灰方阵的幂满足以下运算规律：

$$g_A^k\cdot g_A^l=g_A^{k+l};\ (g_A^k)^l=g_A^{kl}。$$

三、泛灰逆阵

定义 4.6.7 对于 n 阶泛灰方阵 g_A，若存在 n 阶泛灰方阵 g_B，使

$$g_A\cdot g_B=g_B\cdot g_A=g_1,$$

则称泛灰方阵 g_A 可逆，并把泛灰方阵 g_B 称为 g_A 的泛灰逆阵，记为

$$g_B=g_{A^{-1}}\ 或\ g_A^{-1}。$$

定理 4.6.1 如果泛灰方阵 g_A 可逆，那么 g_A 的泛灰逆阵是唯一的。

证明：设 g_B、g_C 都是 g_A 的泛灰逆阵，则有

$$g_B=g_Bg_1=g_B(g_Ag_C)=(g_Bg_A)g_C=g_1g_C=g_C$$

所以 g_A 的泛灰逆阵是唯一的。

定理 4.6.2 泛灰方阵 g_A 可逆的充要条件是 $|g_A| \neq g''_{(0)}$

证明：(必要性)

因为 g_A 可逆，即有 g_A^{-1}，使 $g_A g_A^{-1} = g_I$。所以，$|g_A| \cdot |g_A^{-1}| = g_{(1)}$，从而有 $|g_A| \neq g''_{(0)}$。

(充分性)

因为 $|g_A| \neq g''_{(0)}$，所以，可作泛灰方阵

$$g_B = \frac{1}{|g_A|} g_{A^*},$$

其中，

$$g_{A^*} = \begin{pmatrix} g_{A_{11}} & g_{A_{21}} & \cdots & g_{A_{n1}} \\ g_{A_{12}} & g_{A_{22}} & \cdots & g_{A_{n2}} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ g_{A_{1n}} & g_{A_{2n}} & \cdots & g_{A_{nn}} \end{pmatrix}$$

$g_{A_{ij}}$ 为 g_A 的第 i 行第 j 列的元素 g_{ij} 的代数余子式 $(i, j = 1, 2, \cdots, n)$；g_{A^*} 称为 g_A 的泛灰伴随方阵。从而

$$g_A \cdot \frac{1}{|g_A|} g_{A^*} = \frac{1}{|g_A|} g_A g_{A^*} = \frac{1}{|g_A|} \left(\sum_{k=1}^{n} g_{ik} g_{A_{jk}} \right)$$

$$= \frac{1}{|g_A|} (|g_A| g_I) = g_I。$$

同理可证 $\frac{1}{|g_A|} g_{A^*} \cdot g_A = g_I$，所以，按泛灰逆阵的定义，有

$$g_A^{-1} = \frac{1}{|g_A|} g_{A^*}。$$

定理 4.6.3 设 g_A, g_B 为同阶可逆泛灰方阵，$g \neq g''_{(0)} \in g(R)$，则

(1) g_A^{-1} 亦可逆，且 $(g_A^{-1})^{-1} = g_A$；

(2) $g g_A$ 亦可逆，且 $(g g_A)^{-1} = \frac{1}{g} g_A^{-1}$；

(3) $g_A g_B$ 亦可逆，且 $(g_A g_B)^{-1} = g_B^{-1} g_A^{-1}$。

证明:(略)。

例 4.6.1 求泛灰方阵

$$g_A=\begin{bmatrix}(5,[\![1,1.2]\!]) & (2,[\![0.5,1]\!])\\ (2,[\![1,1]\!]) & (1,[\![0.5,0.8]\!])\end{bmatrix}$$

的逆阵,并验证$(g_A^{-1})^{-1}=g_A$。

解:因为

$$\begin{aligned}|g_A|&=(5,[\![0.5,0.96]\!])-(4,[\![0.5,1]\!])\\ &=(1,[\![0.5,0.8]\!])\neq g''_{(0)},\end{aligned}$$

所以,g_A^{-1}存在,并且

$$\begin{aligned}g_A^{-1}&=\frac{1}{|g_A|}g_{A^*}=\frac{1}{(1,[\![0.5,0.8]\!])}\times\\ &\quad\begin{bmatrix}(1,[\![0.5,0.8]\!]) & (-2,[\![0.5,1]\!])\\ (-2,[\![1,1]\!]) & (5,[\![1,1.2]\!])\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}(1,[\![1,1]\!]) & (-2,[\![1,1.25]\!])\\ (-2,[\![2,1.25]\!]) & (5,[\![2,1.5]\!])\end{bmatrix}。\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}|g_A^{-1}|&=\begin{vmatrix}(1,[\![1,1]\!]) & (-2,[\![1,1.25]\!])\\ (-2,[\![2,1.25]\!]) & (5,[\![2,1.5]\!])\end{vmatrix}\\ &=(5,[\![2,1.5]\!])-(4,[\![2,(1.25)^2]\!])\\ &=(1,[\![2,1.25]\!])\neq g''_{(0)},\end{aligned}$$

所以,

$$\begin{aligned}(g_A^{-1})^{-1}&=\frac{1}{|g_A^{-1}|}g_{A^{-1*}}=\frac{1}{(1,[\![2,1.25]\!])}\\ &\quad\times\begin{bmatrix}(5,[\![2,1.5]\!]) & (2,[\![1,1.25]\!])\\ (2,[\![2,1.25]\!]) & (1,[\![1,1]\!])\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}(5,[\![1,1.2]\!]) & (2,[\![0.5,1]\!])\\ (2,[\![1,1]\!]) & (1,[\![0.5,0.8]\!])\end{bmatrix}=g_A。\end{aligned}$$

§4.7 泛灰线性方程组的求解

§4.5给出了特殊泛灰线性方程组的克莱姆法则。运用克莱姆法则求解方程组的方法对二元、三元方程组是有效的，但对规模较大的方程组，由于计算量很大，其求解比较麻烦。因此，本节进一步讨论一般泛灰线性方程组的求解方法。

设有一般泛灰线性方程组

$$\begin{cases} g_{11}g_{x_1} + g_{12}g_{x_2} + \cdots + g_{1n}g_{x_n} = g_1; \\ g_{21}g_{x_1} + g_{22}g_{x_2} + \cdots + g_{2n}g_{x_n} = g_2; \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ g_{m1}g_{x_1} + g_{m2}g_{x_2} + \cdots + g_{mn}g_{x_n} = g_m, \end{cases} \tag{4-7-1}$$

其中，$g_i, g_{ij} \in g(R)$为泛灰常数，$g_{x_j} \in g(R)$为泛灰未知数($i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n$)，则有下面的定理。

定理 4.7.1 设

$$g_i = (b_i, [\underline{\mu}(b_i), \overline{\mu}(b_i)]);$$

$$g_{ij} = (a_{ij}, [\underline{\mu}_{ij}, \overline{\mu}_{ij}]);$$

$$g_{x_j} = (x_j, [\underline{\mu}_j, \overline{\mu}_j]);$$

$$i=1,2,\cdots,m; j=1,2,\cdots,n,$$

则泛灰线性方程组(4-7-1)有解的充分必要条件是下列三个普通线性方程组均有解($\underline{\mu}_{ij}, \overline{\mu}_{ij} \in R$)：

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \vdots \qquad \vdots \qquad \cdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{4-7-2}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{a_{11}\underline{\mu}_{11}x_1\underline{\mu}_1+a_{12}\underline{\mu}_{12}x_2\underline{\mu}_2+\cdots+a_{1n}\underline{\mu}_{1n}x_n\underline{\mu}_n}{a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n}=\underline{\mu}(b_1);\\
\dfrac{a_{21}\underline{\mu}_{21}x_1\underline{\mu}_1+a_{22}\underline{\mu}_{22}x_2\underline{\mu}_2+\cdots+a_{2n}\underline{\mu}_{2n}x_n\underline{\mu}_n}{a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n}=\underline{\mu}(b_2);\\
\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
\dfrac{a_{m1}\underline{\mu}_{m1}x_1\underline{\mu}_1+a_{m2}\underline{\mu}_{m2}x_2\underline{\mu}_2+\cdots+a_{mn}\underline{\mu}_{mn}x_n\underline{\mu}_n}{a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n}=\underline{\mu}(b_m),
\end{cases}
\tag{4-7-3}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{a_{11}\overline{\mu}_{11}x_1\overline{\mu}_1+a_{12}\overline{\mu}_{12}x_2\overline{\mu}_2+\cdots+a_{1n}\overline{\mu}_{1n}x_n\overline{\mu}_n}{a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n}=\overline{\mu}(b_1);\\
\dfrac{a_{21}\overline{\mu}_{21}x_1\overline{\mu}_1+a_{22}\overline{\mu}_{22}x_2\overline{\mu}_2+\cdots+a_{2n}\overline{\mu}_{2n}x_n\overline{\mu}_n}{a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n}=\overline{\mu}(b_2);\\
\qquad\qquad\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots\\
\dfrac{a_{m1}\overline{\mu}_{m1}x_1\overline{\mu}_1+a_{m2}\overline{\mu}_{m2}x_2\overline{\mu}_2+\cdots+a_{mn}\overline{\mu}_{mn}x_n\overline{\mu}_n}{a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n}=\overline{\mu}(b_m)。
\end{cases}
\tag{4-7-4}
$$

证明:(必要性)设方程组(4-7-1)有解

$$
\begin{cases}
g_{x_1^0}=(x_1^0,[\underline{\mu}_1^0,\overline{\mu}_1^0]);\\
g_{x_2^0}=(x_2^0,[\underline{\mu}_2^0,\overline{\mu}_2^0]);\\
\vdots \qquad\qquad \vdots\\
g_{x_n^0}=(x_n^0,[\underline{\mu}_n^0,\overline{\mu}_n^0])。
\end{cases}
\tag{4-7-5}
$$

将(4-7-5)式代入方程组(4-7-1),并根据泛灰数的加法定义,得下列 m 个恒等式:

$$
\left(\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j^0,\left[\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\underline{\mu}_{1j}x_j^0\underline{\mu}_j^0}{\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j^0},\frac{\sum_{j=1}^{n}a_{1j}\overline{\mu}_{1j}x_j^0\overline{\mu}_j^0}{\sum_{j=1}^{n}a_{1j}x_j^0}\right]\right)
$$

$$
\equiv(b_1,[\underline{\mu}(b_1),\overline{\mu}(b_1)]);
$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j^0, \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\underline{\mu}_{2j}x_j^0\underline{\mu}_j^0}{\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j^0}, \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{2j}\overline{\mu}_{2j}x_j^0\overline{\mu}_j^0}{\sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j^0}\right]\right)$$

$$= (b_2, [\underline{\mu}(b_2), \overline{\mu}(b_2)]);$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j^0, \left[\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\underline{\mu}_{mj}x_j^0\underline{\mu}_j^0}{\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_{0j}}, \frac{\sum_{j=1}^{n} a_{mj}\overline{\mu}_{mj}x_j^0\overline{\mu}_j^0}{\sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j^0}\right]\right)$$

$$= (b_m, [\underline{\mu}(b_m), \overline{\mu}(b_m)])。$$

再根据泛灰数相等的定义，得

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0 = b_i \quad (i = 1,2,\cdots,m); \tag{4-7-6}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\underline{\mu}_{ij}x_j^0\underline{\mu}_j^0}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0} = \underline{\mu}(b_i) \quad (i = 1,2,\cdots,m); \tag{4-7-7}$$

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{\mu}_{ij}x_j^0\overline{\mu}_j^0}{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^0} = \overline{\mu}(b_i) \quad (i = 1,2,\cdots,m)。 \tag{4-7-8}$$

由(4-7-6)式知

$$\begin{cases} x_1 = x_1^0; \\ x_2 = x_2^0; \\ \vdots \qquad \vdots \\ x_n = x_n^0 \end{cases}$$

是方程组(4-7-2)的解。

由(4-7-7)式知

$$\begin{cases} \underline{\mu}_1 = \underline{\mu}_1^0; \\ \underline{\mu}_2 = \underline{\mu}_2^0; \\ \vdots \qquad \vdots \\ \underline{\mu}_n = \underline{\mu}_n^0 \end{cases}$$

是方程组(4-7-3)的解。

由(4-7-8)式知

$$\begin{cases} \overline{\mu}_1 = \overline{\mu}_1^0; \\ \overline{\mu}_2 = \overline{\mu}_2^0; \\ \vdots \qquad \vdots \\ \overline{\mu}_n = \overline{\mu}_n^0 \end{cases}$$

是方程组(4-7-4)的解。必要性得证。

(充分性)设方程组(4-7-2)、(4-7-3)、(4-7-4)分别有解：

$$X = \begin{bmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ \vdots \\ x_n^0 \end{bmatrix}, \quad \underline{\mu} = \begin{bmatrix} \underline{\mu}_1^0 \\ \underline{\mu}_2^0 \\ \vdots \\ \underline{\mu}_n^0 \end{bmatrix}, \quad \overline{\mu} = \begin{bmatrix} \overline{\mu}_1^0 \\ \overline{\mu}_2^0 \\ \vdots \\ \overline{\mu}_n^0 \end{bmatrix}。$$

由必要性的证明可知

$$\begin{cases} g_{x_1} = (x_1^0, [\underline{\mu}_1^0, \overline{\mu}_1^0]); \\ g_{x_2} = (x_2^0, [\underline{\mu}_2^0, \overline{\mu}_2^0]); \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ g_{x_n} = (x_n^0, [\underline{\mu}_n^0, \overline{\mu}_n^0])。 \end{cases}$$

就是泛灰线性方程组(4-7-1)的解。充分性得证。

定理 4.7.2 (1) 若方程组(4-7-2)无解，则泛灰线性方程组(4-7-1)亦无解；

(2) 设普通线性方程组(4-7-2)、(4-7-3)、(4-7-4)均有解，若其中一个有无穷多解，则泛灰线性方程组(4-7-1)亦有无穷多解；

(3) 若线性方程组(4-7-2)、(4-7-3)、(4-7-4)均有唯一解，则

泛灰线性方程组(4-7-1)有唯一解。

定理 4.7.1 表明，一个泛灰线性方程组等价于三个普通线性方程组；定理 4.7.2 则指出了判断泛灰线性方程组何时无解，何时有解，有解时，是唯一解还是无穷多组解的方法。这就给求解泛灰线性方程组(4-7-1)提供了方便。

例 4.7.1 求解泛灰线性方程组

$$\begin{cases}(1,\llbracket 0.2,0.5\rrbracket)g_{x_1}+(1,\llbracket 0.2,0.6\rrbracket)g_{x_2}+\\ \left(\frac{1}{2},\llbracket 1,1\rrbracket\right)g_{x_3}=\left(\frac{5}{2},\llbracket 1,1.5\rrbracket\right);\\ (2,\llbracket 0.5,1\rrbracket)g_{x_1}+(-2,\llbracket 0.1,0.4\rrbracket)g_{x_2}+\\ (1,\llbracket 0.2,0.4\rrbracket)g_{x_3}=(3,\llbracket 0.5,1\rrbracket);\\ (-2,\llbracket 1,1\rrbracket)g_{x_1}+(2,\llbracket 0.5,1\rrbracket)g_{x_2}\\ +(1,\llbracket 1,2\rrbracket)g_{x_3}=(-1,\llbracket 0.2,0.4\rrbracket)。\end{cases}$$

解：*方法一*。由定理 4.7.1 得

$$\begin{cases}x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3=\frac{5}{2};\\ 2x_1-2x_2+x_3=3;\\ -2x_1+2x_2+x_3=-1,\end{cases}\tag{4-7-9}$$

$$\begin{cases}\dfrac{0.2x_1\underline{\mu}_1+0.2x_2\underline{\mu}_2+\frac{1}{2}x_3\underline{\mu}_3}{x_1+x_2+\frac{1}{2}x_3}=1;\\ \dfrac{x_1\underline{\mu}_1-0.2x_2\underline{\mu}_2+0.2x_3\underline{\mu}_3}{2x_1-2x_2+x_3}=0.5;\\ \dfrac{-2x_1\underline{\mu}_1+x_2\underline{\mu}_2+x_3\underline{\mu}_3}{-2x_1+2x_2+x_3}=0.2,\end{cases}\tag{4-7-10}$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{0.5x_1\bar{\mu}_1+0.6x_2\bar{\mu}_2+\dfrac{1}{2}x_3\bar{\mu}_3}{x_1+x_2+\dfrac{1}{2}x_3}=1.5;\\[2ex]
\dfrac{2x_1\bar{\mu}_1-0.8x_2\bar{\mu}_2+0.4x_3\bar{\mu}_3}{2x_1-2x_2+x_3}=1;\\[2ex]
\dfrac{-2x_1\bar{\mu}_1+2x_2\bar{\mu}_2+2x_3\bar{\mu}_3}{-2x_1+2x_2+x_3}=0.4,
\end{cases}
\tag{4-7-11}
$$

解线性方程组(4-7-9)，得

$$
\begin{cases}
x_1=\dfrac{3}{2};\\[1ex]
x_2=\dfrac{1}{2};\\[1ex]
x_3=1。
\end{cases}
\tag{4-7-12}
$$

将(4-7-12)式分别代入方程组(4-7-10)、(4-7-11)，得

$$
\begin{cases}
0.3\underline{\mu}_1+0.1\underline{\mu}_2+\dfrac{1}{2}\underline{\mu}_3=\dfrac{5}{2};\\[1ex]
\dfrac{3}{2}\underline{\mu}_1-0.1\underline{\mu}_2+0.2\underline{\mu}_3=\dfrac{3}{2};\\[1ex]
-3\underline{\mu}_1+\dfrac{1}{2}\underline{\mu}_2+\underline{\mu}_3=-0.2,
\end{cases}
\tag{4-7-13}
$$

$$
\begin{cases}
\dfrac{1.5}{2}\bar{\mu}_1+0.3\bar{\mu}_2+\dfrac{1}{2}\bar{\mu}_3=\dfrac{7.5}{2};\\[1ex]
3\bar{\mu}_1-0.4\bar{\mu}_2+0.4\bar{\mu}_3=3;\\[1ex]
-3\bar{\mu}_1+\bar{\mu}_2+2\bar{\mu}_3=-0.4。
\end{cases}
\tag{4-7-14}
$$

分别求解线性方程组(4-7-13)、(4-7-14)，得

$$
\begin{cases}
\underline{\mu}_1=\dfrac{57.8}{9};\\[1ex]
\underline{\mu}_2=\dfrac{179.2}{3};\\[1ex]
\underline{\mu}_3=-10.8,
\end{cases}
\qquad
\begin{cases}
\bar{\mu}_1=\dfrac{61.6}{27};\\[1ex]
\bar{\mu}_2=\dfrac{77}{9};\\[1ex]
\bar{\mu}_3=-\dfrac{19}{18}。
\end{cases}
$$

由定理 4.7.2 知，泛灰线性方程组有唯一解：

$$\begin{cases} g_{x_1}=\left(\frac{3}{2},\left[\frac{57.8}{9},\frac{61.6}{27}\right]\right); \\ g_{x_2}=\left(\frac{1}{2},\left[\frac{179.2}{3},\frac{77}{9}\right]\right); \\ g_{x_3}=\left(1,\left[-10.8,-\frac{19}{18}\right]\right)。\end{cases}$$

方法二（克莱姆法则）

经计算得

$$|g_A| = \begin{vmatrix} (1,[0.2,0.5]) & (1,[0.2,0.6]) & \left(\frac{1}{2},[1,1]\right) \\ (2,[0.5,1]) & (-2,[0.1,0.4]) & (1,[0.2,0.4]) \\ (-2,[1,1]) & (2,[0.5,1]) & (1,[1,2]) \end{vmatrix}$$

$$=\left(-8,\left[\frac{0.06}{8},\frac{2.88}{8}\right]\right);$$

$$|g_{A_1}| = \begin{vmatrix} \left(\frac{5}{2},[1,1.5]\right) & (1,[0.2,0.6]) & \left(\frac{1}{2},[1,1]\right) \\ (3,[0.5,1]) & (-2,[0.1,0.4]) & (1,[0.2,0.4]) \\ (-1,[0.2,0.4]) & (2,[0.5,1]) & (1,[1,2]) \end{vmatrix}$$

$$=\left(-12,\left[\frac{0.578}{12},\frac{9.856}{12}\right]\right);$$

$$|g_{A_2}| = \begin{vmatrix} (1,[0.2,0.5]) & \left(\frac{5}{2},[1,1.5]\right) & \left(\frac{1}{2},[1,1]\right) \\ (2,[0.5,1]) & (3,[0.5,1]) & (1,[0.2,0.4]) \\ (-2,[1,1]) & (-1,[0.2,0.4]) & (1,[1,2]) \end{vmatrix}$$

$$=\left(-4,\left[\frac{1.792}{4},\frac{12.32}{4}\right]\right);$$

$$
\begin{aligned}
&|g_{A_3}| \\
&=\begin{vmatrix}
(1,\llbracket 0.2,0.5\rrbracket) & (1,\llbracket 0.2,0.6\rrbracket) & \left(\dfrac{5}{2},\llbracket 1,1.5\rrbracket\right) \\
(2,\llbracket 0.5,1\rrbracket) & (-2,\llbracket 0.1,0.4\rrbracket) & (3,\llbracket 0.5,1\rrbracket) \\
(-2,\llbracket 1,1\rrbracket) & (2,\llbracket 0.5,1\rrbracket) & (-1,\llbracket 0.2,0.4\rrbracket)
\end{vmatrix} \\
&=\left(-8,\llbracket -\frac{0.648}{8},-\frac{3.04}{8}\rrbracket\right)。
\end{aligned}
$$

由于$|g_A|\neq g'_{(0)}$，所以泛灰线性方程组有唯一解：

$$
\begin{cases}
g_{x_1}=|g_{A_1}|/|g_A|=\left(\dfrac{3}{2},\llbracket\dfrac{57.8}{9},\dfrac{61.6}{27}\rrbracket\right); \\
g_{x_2}=|g_{A_2}|/|g_A|=\left(\dfrac{1}{2},\llbracket\dfrac{179.2}{3},\dfrac{77}{9}\rrbracket\right); \\
g_{x_3}=|g_{A_3}|/|g_A|=\left(1,\llbracket -10.8,-\dfrac{19}{18}\rrbracket\right)。
\end{cases}
$$

方法三(逆阵方法)

因为$|g_A|=\left(-8,\llbracket\dfrac{0.06}{8},\dfrac{2.88}{8}\rrbracket\right)\neq g''_{(0)}$，所以泛灰逆阵存在，并且

$$
g_A^{-1}=\frac{1}{|g_A|}g_A^*=\frac{1}{\left(-8,\llbracket\dfrac{0.06}{8},\dfrac{2.88}{8}\rrbracket\right)}g_A.
$$

$$
=\frac{1}{\left(-8,\llbracket\dfrac{0.06}{8},\dfrac{2.88}{8}\rrbracket\right)}\times
$$

$$
\begin{bmatrix}
(-4,\llbracket 0.1,0.6\rrbracket) & -\left(0,\llbracket\dfrac{-0.3}{0},\dfrac{0.2}{0}\rrbracket\right) & (2,\llbracket 0.07,0.32\rrbracket) \\
-\left(4,\llbracket\dfrac{1.4}{4},1.2\rrbracket\right) & (2,\llbracket 0.6,1\rrbracket) & -\left(0,\llbracket\dfrac{-0.46}{0},\dfrac{-0.8}{0}\rrbracket\right) \\
\left(0,\llbracket\dfrac{0.6}{0},\dfrac{2.4}{0}\rrbracket\right) & -\left(4,\llbracket\dfrac{0.3}{2},\dfrac{1.1}{2}\rrbracket\right) & (-4,\llbracket 0.06,0.4\rrbracket)
\end{bmatrix},
$$

所以，

$$\begin{bmatrix} g_{x_1} \\ g_{x_2} \\ g_{x_3} \end{bmatrix} = g_A^{-1}\begin{bmatrix} \left(\frac{5}{2},[1,1.15]\right) \\ (3,[0.5,1]) \\ (-1,[0.2,0.4]) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{3}{2},\left[\frac{57.8}{9},\frac{61.6}{27}\right]\right) \\ \left(\frac{1}{2},\left[\frac{179.2}{3},\frac{77}{9}\right]\right) \\ \left(1,\left[-10.8,-\frac{19}{18}\right]\right) \end{bmatrix}。$$

值得注意的是，这里在运算过程中出现了诸如$-\left(0,\left[\frac{-0.3}{0},\frac{0.2}{0}\right]\right)$等形式上的泛灰数（参见§4.1）。此时，可规定分母上的零参加运算，以便最终把它消去。例如，对于g_{x_1}的求解过程：

$$\begin{aligned}
g_{x_1} &= \frac{1}{\left(-8,\left[\frac{0.06}{8},\frac{2.88}{8}\right]\right)}\{(-4,[0.1,0.6])\times \\
&\quad \left(\frac{5}{2},[1,1.5]\right)-\left(0,\left[\frac{-0.3}{0},\frac{0.2}{0}\right]\right)\cdot(3,[0.5,1]) \\
&\quad +(2,[0.07,0.32])\cdot(-1,[0.2,0.4])\} \\
&= \frac{1}{\left(-8,\left[\frac{0.06}{8},\frac{2.88}{8}\right]\right)}\{(-10,[0.1,0.9])- \\
&\quad \left(3\times 0,\left[\frac{-0.3\times 0.5}{0},\frac{0.2}{0}\right]\right)+(-2,[0.014,0.128])\} \\
&= \frac{1}{\left(-8,\left[\frac{0.06}{8},\frac{2.88}{8}\right]\right)}\times \\
&\quad \left\{\left(-10-3\times 0,\left[\frac{-1-3(-0.3)\times 0.5}{-10-3\times 0},\right.\right.\right. \\
&\quad \left.\left.\left.\frac{-9-3\times 0.2}{-10-3\times 0}\right]\right)+(-2,[0.014,0.128])\right\} \\
&= \frac{1}{\left(-8,\left[\frac{0.06}{8},\frac{2.88}{8}\right]\right)}\left\{\left(-10,\left[\frac{-0.55}{-10},\frac{-9.6}{-10}\right]\right)+\right. \\
&\quad \left.(-2,[0.014,0.128])\right\}
\end{aligned}$$

$$
=\frac{1}{\left(-8,\llbracket\frac{0.06}{8},\frac{2.88}{8}\rrbracket\right)}\times
$$

$$
\left(-12,\llbracket\frac{-0.55-0.028}{-12},\frac{-9.6-0.256}{-12}\rrbracket\right)
$$

$$
=\left(\frac{3}{2},\llbracket\frac{57.8}{9},\frac{61.6}{27}\rrbracket\right)。
$$

这表明当形式上的泛灰数出现时,其运算与正常泛灰数的运算法则完全一致,只是让分母上的零参加运算而已,并且相乘时符合消去律。

由上可知,各种方法求解泛灰线性方程组其结果是完全一致的。

§4.8　一元二次泛灰代数方程

一元二次方程是研究经典系统(即白色系统)的重要数学模型。本节将把它推广到泛灰数学领域中去。

定义 4.8.1　设 $g_a,g_b,g_c,g_x\in g(R)$,并且,$g_a\neq g''_{(0)}$,则称

$$
g_a g_x^2+g_b g_x+g_c=g_{(0)} \tag{4-8-1}
$$

为一元二次泛灰代数方程。其中,g_a,g_b,g_c 为泛灰常数,g_x 为泛灰未知数;且称满足方程的泛灰数为一元二次泛灰代数方程的解或根。

定理 4.8.1　$\forall\ g_a\neq g''_{(0)},g_b,g_c\in g(R)$,若方程(4-8-1)有解,则有求解公式为

$$
g_{x_{1,2}}=(-g_b\pm\sqrt{g_b^2-4g_a g_c})/(2g_a), \tag{4-8-2}
$$

两个根 g_{x_1},g_{x_2}具有关系:

$$
g_{x_1}+g_{x_2}=-g_b/g_a;\quad g_{x_1}\cdot g_{x_2}=g_c/g_a。
$$

证明:设方程(4-8-1)有解,即存在泛灰数 $g_x=g_{x_0}$满足

$$
g_a g_{x_0}^2+g_b g_{x_0}+g_c=g_{(0)}。
$$

由于 $g_a \neq g'_{(0)}$，所以，有

$$g_{x_0}^2 + \frac{g_b}{g_a} g_{x_0} + \frac{g_c}{g_a} = g_{(0)},$$

亦即

$$\left(g_{x_0} + \frac{g_b}{2g_a} \right)^2 - \left(\frac{g_b}{2g_a} \right)^2 + \frac{g_c}{g_a} = g_{(0)},$$

移项得

$$\begin{aligned} \left(g_{x_0} + \frac{g_b}{2g_a} \right)^2 &= \left(\frac{g_b}{2g_a} \right)^2 - \frac{g_c}{g_a} \\ &= \frac{g_b^2 - 4g_a g_c}{4g_a^2}, \end{aligned}$$

从而

$$g_{x_0} + \frac{g_b}{2g_a} = \pm \sqrt{g_b^2 - 4g_a g_c}/(2g_a),$$

即

$$g_{x_0} = (-g_b \pm \sqrt{g_b^2 - 4g_a g_c})/(2g_a)。$$

这说明，若 g_{x_0} 是方程(4-8-1)的解，则它必由公式(4-8-2)给出。

由(4-8-2)式，即知方程(4-8-1)的两个根 g_{x_1}, g_{x_2} 满足关系：

$$g_{x_1} + g_{x_2} = -\frac{g_b}{g_a};$$

$$g_{x_1} \cdot g_{x_2} = \frac{g_c}{g_a}。$$

定理 4.8.1 表明，一元二次泛灰代数方程的求解公式以及根与系数的关系，与普通一元二次实代数方程的求解公式以及根与系数的关系具有形式上的一致性。因此，要求解一元二次泛灰代数方程(4-8-1)，只需按照公式(4-8-2)求解即可，这就给求解此类方程带来了方便。

由定理 4.8.1 即知下面定理成立。

定理 4.8.2 记 $g_b^2 - 4g_a g_c = (x_0, [\underline{\mu}^0, \overline{\mu}^0])$，则一元二次泛灰

代数方程(4-8-1)有解的充要条件是

$$x_0 \geqslant 0, \underline{\mu}^0 \geqslant 0, \overline{\mu}^0 \geqslant 0。$$

该定理可称之为根的判别定理。

例 4.8.1 求解一元二次泛灰方程

$$(-1, \llbracket 1,1 \rrbracket) g_x^2 + (2, \llbracket 2,4 \rrbracket) g_x + \left(\frac{5}{4}, \llbracket \frac{9}{5}, \frac{17}{5} \rrbracket\right) = g_{(0)}。$$

解:因为

$$\begin{aligned} g_b^2 - 4 g_a g_c &= (2, \llbracket 2,4 \rrbracket)^2 - 4(-1, \llbracket 1,1 \rrbracket) \cdot \left(\frac{5}{4}, \llbracket \frac{9}{5}, \frac{17}{5} \rrbracket\right) \\ &= (4, \llbracket 4,16 \rrbracket) + \left(5, \llbracket \frac{9}{5}, \frac{17}{5} \rrbracket\right) \\ &= \left(9, \llbracket \frac{25}{9}, 9 \rrbracket\right), \end{aligned}$$

满足定理 4.8.2,所以一元二次泛灰代数方程有解。由(4-8-2)式得

$$\begin{aligned} g_x &= \left\{-(2, \llbracket 2,4 \rrbracket) \pm \sqrt{\left(9, \llbracket \frac{25}{9}, 9 \rrbracket\right)}\right\} \Big/ 2 \cdot (-1, \llbracket 1,1 \rrbracket) \\ &= \left\{-(2, \llbracket 2,4 \rrbracket) \pm \left(3, \llbracket \frac{5}{3}, 3 \rrbracket\right)\right\} \Big/ (-2, \llbracket 1,1 \rrbracket)。 \end{aligned}$$

由上式即得方程的两个根:

$$\begin{cases} g_{x_1} = \left\{(-2, \llbracket 2,4 \rrbracket) + \left(3, \llbracket \frac{5}{3}, 3 \rrbracket\right)\right\} \Big/ (-2, \llbracket 1,1 \rrbracket) \\ \quad = \left(-\frac{1}{2}, \llbracket 1,1 \rrbracket\right); \\ g_{x_2} = \left\{(-2, \llbracket 2,4 \rrbracket) - \left(3, \llbracket \frac{5}{3}, 3 \rrbracket\right)\right\} \Big/ (-2, \llbracket 1,1 \rrbracket) \end{cases}$$

$$= \left(\frac{5}{2}, \llbracket \frac{9}{5}, \frac{17}{5} \rrbracket\right)。$$

§ 4.9 泛灰代数在区间分析中的应用

在实际应用中,常把泛灰数 $g = (x, \llbracket \underline{\mu}(x), \overline{\mu}(x) \rrbracket)$ 中的 $\underline{\mu}(x)$

($\bar{\mu}(x)$)理解为对 x 的最低(最高)信任程度。如 $\underline{\mu}(x)=0.8,\bar{\mu}(x)=0.9$,则 x 的可信值在 $0.8x$ 到 $0.9x$ 之间,用区间表示即为 $[0.8x,0.9x]$。可见,一个泛灰数可以表示为一个区间数,即

$$(x,\llbracket\underline{\mu}(x),\bar{\mu}(x)\rrbracket)=[x\underline{\mu}(x),x\bar{\mu}(x)]。$$

当然,此时必须限制:$\underline{\mu}(x),\bar{\mu}(x)\in[-1,1]$。这样,有如下两个问题需要解答:

问题 1　任一个区间数是否可以表示为一个泛灰数?

问题 2　区间分析中的问题是否可以用泛灰代数方法解决?

关于问题 1,有

$\forall\ [a,b]\in I(R)$(区间数集),均可以表示为一个泛灰数 $g=(x,\llbracket\underline{\mu}(x),\bar{\mu}(x)\rrbracket)$。具体地说,

(1)　当 $a>0$ 时,有 $[a,b]=(b,\llbracket\frac{a}{b},1\rrbracket)$;

(2)　当 $ab<0$ 时,且 $\max\{|a|,|b|\}=b$ 时,则有

$$[a,b]=(b,\llbracket\frac{a}{b},1\rrbracket);$$

(3)　当 $ab<0$,且 $\max\{|a|,|b|\}=|a|$ 时,则有

$$[a,b]=(a,\llbracket\frac{b}{a},1\rrbracket);$$

(4)　当 $b<0$ 时,则有 $[a,b]=(a,\llbracket\frac{b}{a},1\rrbracket)$。

以上均有 $\frac{b}{a},\frac{a}{b}\in[-1,1]$。

关于问题 2,下面将会看到泛灰代数不仅具有区间分析的功能,而且具有一定的优越性。为此,下面仅以祁力群同志撰写的《区间分析》一文(见《运筹学杂志》,1982 年第 1 期)中给出的例子说明泛灰代数在区间分析中的应用。

《区间分析》一文给出的例子原文如下:

"[例 2]　证明 $f(x)=x(x-7)-6-\dfrac{1}{x(x-4)-30}$ 在区间 $[8,10]$ 上没有根,并估计 $f(x)$ 在 $[8,10]$ 上的最大值和最小值。

解:$F[8,10]=[8,10]([8,10]-7)-6$

$$-\frac{1}{[8,10]([8,10]-4)-30}$$

$$=\cdots\cdots=\left[1\frac{1}{2},23\frac{29}{30}\right],0\notin F[8,10]。$$

“从而证明了在$[8,10]$上$f(x)$没有实根，并且最小值不小于$1\frac{1}{2}$，最大值不大于$23\frac{29}{30}$。若用8和10分别代入$f(x)$，知这两个值就是$f(x)$在$[8,10]$上的最小值和最大值。

“这道题用普通数学分析求解，则需证明$f'(x)$在$[8,10]$上大于0才行，而这并不容易。

“但同一个有理函数由于运算顺序不同，可以有不同的区间扩展函数，如例2中若将$f(x)$写成$x^2-7x-6-\frac{1}{x^2-4x-30}$，或$(x^4-11x^3-8x^2+234x+179)/(x^2-4x-30)$，结果都不一样，甚至无法计算。”

泛灰代数却可克服以上缺点。

据问题1，$[8,10]=(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)$，$[a,a]=a=(a,\llbracket 1,1\rrbracket)$，从而有

(1) $$F[8,10]=(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)((10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)-7)-6-\frac{1}{(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)((10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)-4)-30}$$

$$=(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)\left(3,\llbracket\frac{1}{3},1\rrbracket\right)-6-\frac{1}{(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)(6,\llbracket 2/3,1\rrbracket)-30}$$

$$=(30,\llbracket\frac{8}{30},1\rrbracket)-6-\frac{1}{(60,\llbracket 8/15,1\rrbracket)-30}$$

$$=\left(24,\llbracket\frac{1}{12},1\rrbracket\right)-\frac{1}{(30,\llbracket 1/15,1\rrbracket)}$$

$$=\left(24,\llbracket\frac{1}{12},1\rrbracket\right)-\left(\frac{1}{30},\llbracket 15,1\rrbracket\right)$$

$$=\left(23\frac{29}{30},\llbracket 1\frac{1}{2}/23\frac{29}{30},1\rrbracket\right)$$

$$=[1\frac{1}{2},23\frac{29}{30}]。$$

(2) 若将原例 2 的 $f(x)$ 写成 $x^2-7x-6-\dfrac{1}{x^2-4x-30}$，则有

$$F[8,10]=(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)^2-7(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)-6-\frac{1}{(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)^2-4(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)-30}$$

$$=(100,\llbracket 0.64,1\rrbracket)-(70,\llbracket 0.8,1\rrbracket)-6-\frac{1}{(100,\llbracket 0.64,1\rrbracket)-(40,\llbracket 0.8,1\rrbracket)-30}$$

$$=\left(30,\llbracket\frac{4}{15},1\rrbracket\right)-6-\frac{1}{(60,\llbracket 8/15,1\rrbracket)-30}$$

$$=\left(24,\llbracket\frac{1}{12},1\rrbracket\right)-\frac{1}{(30,\llbracket\frac{1}{15},1\rrbracket)}$$

$$=\left(24,\llbracket\frac{1}{12},1\rrbracket\right)-(\frac{1}{30},\llbracket 15,1\rrbracket)$$

$$=\left(23\frac{29}{30},\llbracket 1\frac{1}{2}\Big/23\frac{29}{30},1\rrbracket\right)=[1\frac{1}{2},23\frac{29}{30}]。$$

(3) 若将原例 2 的 $f(x)$ 写成

$\dfrac{(x^4-11x^3-8x^2+234x+179)}{x^2-4x-30}$，则仍有

$$F[8,10]=((10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)^4-11(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)^3-)$$
$$8(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)^2+234(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)+$$
$$179/[(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)^2-4(10,\llbracket 0.8,1\rrbracket)-30]$$

$$=\frac{\left(719,\llbracket\frac{3}{719},1\rrbracket\right)}{\left(30,\llbracket\frac{1}{15},1\rrbracket\right)}=\left(719/30,\llbracket\frac{45}{719},1\rrbracket\right)$$

$$=[1\frac{1}{2},23\frac{29}{30}]。$$

由(1)可知，泛灰代数具有区间分析的功能；由(2),(3)可知，泛灰代数可以解决区间分析不能解决的问题。

§4.10 泛灰线性规划及其求解方法

§3.10节在讨论经典线性规划灰性的基础上，给出了一般性区间型灰线性规划模型。如果在线性规划问题中含有泛灰数，则称该线性规划模型为泛灰线性规划模型。

设 $g_{x_i}, g_{c_i}, g_{a_{ji}}, g_{b_j}, z \in g(R), i=1,2,\cdots,n; j=1,2,\cdots,m$。

泛灰线性规划模型一般形式如下：

目标函数 $\max(\min) z = g_{c_1}g_{x_1} + g_{c_2}g_{x_2} + \cdots + g_{c_n}g_{x_n}$

约束条件

$$g_{a_{11}}g_{x_1} + g_{a_{12}}g_{x_2} + \cdots + g_{a_{1n}}g_{x_n} \geqslant$$
$$(\text{或} =, \leqslant, \geqslant^{(C)}, \geqslant^{(S)}, \leqslant^{(C)}, \leqslant^{(S)}) g_{b_1};$$
$$g_{a_{21}}g_{x_1} + g_{a_{22}}g_{x_2} + \cdots + g_{a_{2n}}g_{x_n} \geqslant$$
$$(\text{或} =, \leqslant, \geqslant^{(C)}, \geqslant^{(S)}, \leqslant^{(C)}, \leqslant^{(S)}) g_{b_2};$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$g_{a_{m1}}g_{x_1} + g_{a_{m2}}g_{x_2} + \cdots + g_{a_{mn}}g_{x_n} \geqslant$$
$$(\text{或} =, \leqslant, \geqslant^{(C)}, \geqslant^{(S)}, \leqslant^{(C)}, \leqslant^{(S)}) g_{b_m};$$
$$0 \leqslant \underline{\mu}_{x_i} \leqslant \overline{\mu}_{x_i} \leqslant 1, \quad i=1,2,\cdots,n;$$
$$x_i \geqslant 0, \quad i=1,2,\cdots,n。$$

上述形式很复杂。但对于具体问题，一般可以化成比较简单的形式；而且，根据一些原则还可把它转化为经典的规划问题，这样求解规划问题就方便了。

具体的转化方法有：

1. 目标函数的转化

对于目标函数取最大值的情况，即

$$\max z = g_{c_1}g_{x_1} + g_{c_2}g_{x_2} + \cdots + g_{c_n}g_{x_n} = (c_1x_1 + \cdots + c_nx_n,$$
$$[\frac{c_1x_1\underline{\mu}_{c_1}\underline{\mu}_{x_1} + \cdots + c_nx_n\underline{\mu}_{c_n}\underline{\mu}_{x_n}}{c_1x_1 + \cdots + c_nx_n}, \frac{c_1x_1\overline{\mu}_{c_1}\overline{\mu}_{x_1} + \cdots + c_nx_n\overline{\mu}_{c_n}\overline{\mu}_{x_n}}{c_1x_1 + \cdots + c_nx_n}])。$$

由于按照一般思路，求 z 最大值既要求其实测部最大，也要求灰中心 $c(x)$ 最大，因此，可将其转化为

$$\max f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$
$$\max c(x) = \left(\frac{c_1x_1\underline{\mu}_{c_1}\underline{\mu}_{x_1} + \cdots + c_nx_n\underline{\mu}_{c_n}\underline{\mu}_{x_n}}{c_1x_1 + \cdots + c_nx_n} + \frac{c_1x_1\overline{\mu}_{c_1}\overline{\mu}_{x_1} + \cdots + c_nx_n\overline{\mu}_{c_n}\overline{\mu}_{x_n}}{c_1x_1 + \cdots + c_nx_n}\right) \Big/ 2$$

的多目标规划问题。

同理，对于目标函数取最小值的情况，可转化为

$$\min f(x) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$
$$\min c(x) = \left(\frac{c_1x_1\underline{\mu}_{c_1}\underline{\mu}_{x_1} + \cdots + c_nx_n\underline{\mu}_{c_n}\underline{\mu}_{x_n}}{c_1x_1 + \cdots + c_nx_n} + \frac{c_1x_1\overline{\mu}_{c_1}\overline{\mu}_{x_n} + \cdots + c_nx_n\overline{\mu}_{c_n}\overline{\mu}_{x_n}}{c_1x_1 + \cdots + c_nx_n}\right) \Big/ 2$$

的多目标规划问题。

2. 约束条件的转化

对任一约束不等式：

$$g_{a_{j1}}g_{x_1} + \cdots + g_{a_{jn}}g_{x_n} \geqslant (\text{或} =, \leqslant, \geqslant^{(C)}, \geqslant^{(S)}, \leqslant^{(C)}, \leqslant^{(S)}) g_{b_j},$$

$$\text{令}(X, [\underline{\mu}(X), \overline{\mu}(X)]) = g_{a_{j1}}g_{x_1} + \cdots + g_{a_{jn}}g_{x_n},$$

(1)当取“$\geqslant$”(或“$\leqslant$”)时，可转化为

$$X \geqslant (\text{或} \leqslant) b_j;$$

(2)当取“$=$”时，转化为

$$X = b_j,$$
$$\underline{\mu}(X) = \underline{\mu}(b_j),$$
$$\overline{\mu}(X) = \overline{\mu}(b_j);$$

(3)当取“$\geqslant^{(C)}$”(或“$\leqslant^{(C)}$”)时，转化为

$$X \geqslant (\text{或} \leqslant) b_j,$$

$$\frac{\underline{\mu}(X) + \overline{\mu}(X)}{2} \geqslant (\text{或} \leqslant) \frac{\underline{\mu}(b_j) + \overline{\mu}(b_j)}{2};$$

(4)当取“$\geqslant^{(S)}$”(或“$\leqslant^{(S)}$”)时，可转化为

$$X \geqslant (\text{或} \leqslant) b_j,$$

$$\frac{\underline{\mu}(X) + \overline{\mu}(X)}{2} \leqslant (\text{或} \geqslant) \frac{\underline{\mu}(b_j) + \overline{\mu}(b_j)}{2}。$$

总之，任一个泛灰线性规划问题都可以按照上述方法转化为经典规划问题；然后根据经典规划问题的求解方法求解就可得出结果，所得的规划值和目标值都是泛灰数。下面举例说明。

例 4.10.1 求解规划问题：

$$\begin{cases} \max z = (2, \lfloor 0.6, 0.8 \rceil) \cdot g_{x_1} + 3g_{x_2}; \\ g_{x_1} + (2, \lfloor 0.4, 0.8 \rceil) \cdot g_{x_2} \leqslant^{(C)} (8, \lfloor 0.5, 0.9 \rceil); \\ (4, \lfloor 0.6, 0.8 \rceil) g_{x_1} \leqslant^{(C)} (16, \lfloor 0.8, 1 \rceil); \\ 4g_{x_2} \leqslant^{(C)} (12, \lfloor 0.7, 0.9 \rceil); \\ 0 \leqslant \underline{\mu}_{x_i} \leqslant \overline{\mu}_{x_i} \leqslant 1, i = 1, 2; \\ x_1, x_2 \geqslant 0。 \end{cases}$$

解：目标函数

$$\max z = (2x_1 + 3x_2,$$

$$\left\lfloor \frac{1.2x_1\underline{\mu}_{x_1} + 3x_2\underline{\mu}_{x_2}}{2x_1 + 3x_2}, \frac{1.6x_1\overline{\mu}_{x_1} + 3x_2\overline{\mu}_{x_2}}{2x_1 + 3x_2} \right\rceil)$$

可转化为

$$\max f(x) = 2x_1 + 3x_2, \tag{4-10-1}$$

$$\max c(x) = \frac{1.2x_1\underline{\mu}_{x_1} + 3x_2\underline{\mu}_{x_2} + 1.6x_1\overline{\mu}_{x_1} + 3x_2\overline{\mu}_{x_2}}{2(2x_1 + 3x_2)}; \tag{4-10-2}$$

约束条件可转化为

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 8, \tag{4-10-3}$$

$$\frac{x_1\underline{\mu}_{x_1} + 0.8x_2\underline{\mu}_{x_2} + x_1\overline{\mu}_{x_1} + 1.6x_2\overline{\mu}_{x_2}}{2(x_1 + 2x_2)} \leqslant 0.7, \tag{4-10-4}$$

$$4x_1 \leqslant 16, \tag{4-10-5}$$

$$\frac{0.6\underline{\mu}_{x_1} + 0.8\overline{\mu}_{x_1}}{2} \leqslant 0.9, \tag{4-10-6}$$

$$4x_2 \leqslant 12, \tag{4-10-7}$$

$$\frac{\underline{\mu}_{x_2} + \overline{\mu}_{x_2}}{2} \leqslant 0.8, \tag{4-10-8}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0, \tag{4-10-9}$$

$$0 \leqslant \underline{\mu}_{x_i} \leqslant \overline{\mu}_{x_i} \leqslant 1, (i = 1,2)。 \tag{4-10-10}$$

解上述多目标规划问题是比较麻烦的。为了求解简便，可把上述问题分成两部分进行求解，把式(4-10-1)，(4-10-3)，(4-10-5)，(4-10-7)，(4-10-9)看成一个线性规划问题，求解出规划值 x_1，x_2；把式(4-10-2)，(4-10-4)，(4-10-6)，(4-10-8)，(4-10-10)也看成一个规划问题，并把前面规划问题求得的 x_1，x_2 值代入到该模型中，求出该模型的规划值；综合两个模型的求解值，即可得原规划模型的规划值。具体地，有

模型 Ⅰ：
$$\begin{cases} \max f(x) = 2x_1 + 3x_2; \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 8; \\ 4x_1 \leqslant 16; \\ 4x_2 \leqslant 12; \\ x_1, x_2 \geqslant 0。 \end{cases}$$

求解得规划值

$$\begin{cases} x_1 = 4; \\ x_2 = 2, \end{cases}$$

目标值 $\max f(x) = 14$。

模型 Ⅱ：

$$
\begin{cases}
\max c(x) = \dfrac{4.8\underline{\mu}_{x_1} + 6\underline{\mu}_{x_2} + 6.4\overline{\mu}_{x_1} + 6\overline{\mu}_{x_2}}{28}; \\
\dfrac{4\underline{\mu}_{x_1} + 1.6\underline{\mu}_{x_2} + 4\overline{\mu}_{x_1} + 3.2\overline{\mu}_{x_2}}{16} \leqslant 0.7; \\
\dfrac{0.6\underline{\mu}_{x_1} + 0.8\overline{\mu}_{x_1}}{2} \leqslant 0.9; \\
\dfrac{\underline{\mu}_{x_2} + \overline{\mu}_{x_2}}{2} \leqslant 0.8; \\
\underline{\mu}_{x_1} - \overline{\mu}_{x_1} \leqslant 0; \\
\underline{\mu}_{x_2} - \overline{\mu}_{x_2} \leqslant 0; \\
\overline{\mu}_{x_1}, \overline{\mu}_{x_2} \leqslant 1; \\
\underline{\mu}_{x_1}, \underline{\mu}_{x_2} \geqslant 0。
\end{cases}
$$

采用单纯形法求解，得规划值

$$
\begin{pmatrix} \underline{\mu}_{x_1} \\ \underline{\mu}_{x_2} \\ \overline{\mu}_{x_1} \\ \overline{\mu}_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.84 \\ 0.8 \\ 1 \\ 0.8 \end{pmatrix},
$$

目标值 $$\max c(x) = 0.715。$$

综合模型 I 和 II，得原规划问题的规划值为

$$
\begin{pmatrix} g_{x_1} \\ g_{x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (4,[0.84,1]) \\ (2,[0.8,0.8]) \end{pmatrix},
$$

目标值 $$\max z = (14,[0.63,0.8])。$$

第五章　泛灰数学分析基础

本章主要介绍泛灰数学分析的基础内容，包括泛灰函数及其极限与连续性、泛灰函数的导数等，旨在抛砖引玉。

作为预备知识，先介绍泛灰距离与泛灰距离空间。

§5.1　泛灰距离空间

在研究灰色系统时，常常需要研究系统的状态变化。“泛灰距离”概念就是为了满足这种需要而提出来的。可用它来描述“任意逼近”的概念。

一、泛灰数的距离

对于一个泛灰数 $A=(a,[\underline{\mu},\overline{\mu}])$，当其观测部 a 及其下、上灰信息界 $\underline{\mu},\overline{\mu}$ 唯一确定时，泛灰数就相应确定了。所以，若把 $a,\underline{\mu},\overline{\mu}$ 看作是泛灰数 A 的坐标，则当 $\underline{\mu},\overline{\mu}$ 均为实数时，A 对应于 R^3 中的一个点 $A'(a,\underline{\mu},\overline{\mu})$ 称为泛灰数 A 的像。

令

$$g(R)=\{(a,[\underline{\mu},\overline{\mu}])\,|\,a,\underline{\mu},\overline{\mu}\in\mathbf{R}\},$$

若存在 $g(R)$ 到 R^3 的一个对应 λ，

$$\lambda:\quad A=(a,[\underline{\mu},\overline{\mu}])\in g(R)\to A'(a,\underline{\mu},\overline{\mu})\in R^3,$$

则 λ 是 $g(R)$ 到 R^3 的一一对应。

若 $\underline{\mu}$ 或 $\overline{\mu}\notin\mathbf{R}$，则规定 $(a,[\underline{\mu},\overline{\mu}])$ 对应于 R^3 的无穷远点。

这样，由于一个泛灰数可看作 R^3 中的一个点，所以，可以利用 R^3 中点的距离来定义泛灰数之间的距离。

定义 5.1.1 设 $A=(a,[\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1])\in g(R)$，

$$B=(b,[\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2])\in g(R),$$

则称

$$d(A,B)=\begin{cases}\sqrt{(a-b)^2+(\underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2)^2+(\overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2)^2}, & \\ \underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2, & \text{当 } \overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2\in \mathbf{R}; \\ +\infty, & \text{当 } \underline{\mu}_1-\underline{\mu}_2 \text{ 或 } \overline{\mu}_1-\overline{\mu}_2\notin \mathbf{R}\end{cases}$$

为泛灰数 A 与 B 之间的距离，简称为泛灰距离。

二、泛灰距离的性质

性质 5.1.1 $d(A,B)\geqslant 0$。

性质 5.1.2 $d(A,B)=0\Leftrightarrow A=B$。

性质 5.1.3 $d(A,B)=d(B,A)$。

根据定义，以上性质成立是显然的。

性质 5.1.4 对任意的泛灰数 A,B,C 有

$$d(A,B)\leqslant d(A,C)+d(B,C)。$$

证明：分以下三种情形：

(1) A,B 中都不含超实数

对任意的 C，显然有 $d(A,B)\leqslant d(A,C)+d(B,C)$。

(2) A 中含超实数，B 中不含超实数

对任意的 C，若 $d(C,B)=+\infty$，则结论成立；若 $d(C,B)$ 为有限实数，则 C 中不含超实数，所以 $d(A,C)=+\infty$，即此时结论也成立。

(3) A,B 中都含超实数

若 C 中不含超实数，结论显然成立；

若 C 中含超实数，设 $A=(a,[\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1])$，$B=(b,[\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2])$，$C=(c,[\underline{\mu}_3,\overline{\mu}_3])$。

(i) $d(A,B)$ 为有限实数，此时有

$$\underline{\mu}_2=\underline{\mu}_1+e,\ \overline{\mu}_2=\overline{\mu}_1+f,\ e,f\in\mathbf{R},$$

若 $\underline{\mu}_3=\underline{\mu}_1+g$，$\overline{\mu}_3=\overline{\mu}_1+h$，$g,h\in\mathbf{R}$，则有

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \sqrt{(a-b)^2+e^2+f^2} \\
&\leqslant \sqrt{(a-b)^2+g^2+h^2} \\
&\quad + \sqrt{(b-c)^2+(g-e)^2+(h-f)^2} \\
&= d(A,C)+d(B,C)。
\end{aligned}
$$

若 g 或 h 为超实数，则 $d(A,C)$和 $d(B,C)$为$+\infty$。结论成立。

(ii) $d(A,B)=+\infty$。此时，$\underline{\mu}_2-\underline{\mu}_1$ 或 $\overline{\mu}_2-\overline{\mu}_1$ 为超实数，不妨设 $\underline{\mu}_2-\underline{\mu}_1$ 为超实数。因为 $\underline{\mu}_3-\underline{\mu}_1$ 和 $\underline{\mu}_3-\underline{\mu}_2=\underline{\mu}_3-\underline{\mu}_1-(\underline{\mu}_2-\underline{\mu}_1)$中至少有一个为超实数，所以，

$$d(A,C)+d(B,C)=+\infty,$$

从而结论成立。

综上所述，对任意的泛灰数 A,B,C 有

$$d(A,B)\leqslant d(A,C)+d(B,C)。$$

由于定义的泛灰距离具有距离空间的性质，所以，实际上已经在泛灰数集 $g(R)$上定义了一个距离空间。这个距离空间可称为泛灰距离空间。

定理 5.1.1 若 A,B 都是实数，则

$$d(A,B)=|A-B|。$$

证明：因为 A,B 都是实数，则

$$A=(a,[1,1]),B=(b,[1,1]),$$

从而

$$
\begin{aligned}
d(A,B) &= \sqrt{(a-b)^2+(1-1)^2+(1-1)^2} \\
&= |a-b|;
\end{aligned}
$$

而

$$A=a,B=b,$$

所以，

$$d(A,B)=|a-b|=|A-B|。$$

该定理表明，泛灰数的距离是实数距离的推广。

§5.2 泛灰函数

一、泛灰函数的概念

定义 5.2.1 设 $G(R)$（或 G）表示泛灰数集，$\overline{G}(R)$（或 $\overline{G}$）表示泛灰数集的子集，$\overline{G}\subseteq G$。如果 $f\subseteq\overline{G}\times G=\{(g_x,u)\mid g_x\in\overline{G},u\in G\}$ 满足：

(1) 对任意 $(g_{x_1},u_1)\in f$，$(g_{x_2},u_2)\in f$，且当 $g_{x_1}=g_{x_2}$ 时，必有 $u_1=u_2$；

(2) 对任意的 $g_x\in\overline{G}$，存在唯一的 $u\in G$，使 $(g_x,u)\in f$；

则称 f 是定义在 $\overline{G}$ 上的一个泛灰函数，记为 $u=f(g_x)$，$g_x\in\overline{G}$。

例 5.2.1 设 $\overline{G}=\mathbf{R}$（实数集），若

$$f=\{((g,\llbracket 1,1\rrbracket),(g,\llbracket 1,1\rrbracket))\mid g\in\overline{G}\}\in\overline{G}\times G,$$

则 f 是定义在 $\overline{G}=\mathbf{R}$ 上的泛灰函数，且 $u=f(g)=g$。

这实质上就是定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的一个实常函数。

例 5.2.2 设 $y=f(x)$ 是定义域为 D 的实函数，即 $f=\{(x,f(x))\mid x\in D\}$，把此式改写成为

$$f=\{((x,\llbracket 1,1\rrbracket),(f(x),\llbracket 1,1\rrbracket))\mid x\in D\}\subseteq\overline{G}\times G,$$

则 f 是一个泛灰函数：$u=f(g_x)$。这里，$g_x=(x,\llbracket 1,1\rrbracket)\in\overline{G}$，$u=(f(x),\llbracket 1,1\rrbracket)\in G$。

由此可以看出，任意实函数在广义上都是泛灰函数。也就是说，在泛灰函数中，若泛灰函数 f 的元素 (g_x,u) 中的 g_x 和 u 全部为实数，这时 f 就是微积分学中的一般实函数。所以，泛灰函数是实函数的推广。下面将对实初等函数进行泛灰延拓，使之成为重要的泛灰初等函数。

二、实函数的泛灰延拓

泛灰数是实数的推广，泛灰函数也是一般实函数的推广。经典

微积分学中研究了许许多多的实函数，特别是一些很有用的初等函数。如何将这些函数推广到泛灰函数中去呢？下面将给出一个使一般实函数泛灰延拓的法则，以使所有实函数在此法则下都能推广成为定义域和值域都是泛灰数的泛灰函数。

定义 5.2.2 若 $y=f(x)$，$x\in\mathbf{R}$ 是一元实函数，$g_x\in\overline{G}$ 为任意一个泛灰数，则 $f(g_x)$ 是一个新的泛灰信息量。若把这个泛灰信息量写成泛灰数的形式，记作 $u=f(g_x)$，则称 $u=f(g_x)$ 是 g_x 的泛灰信息延拓函数，简称为泛灰延拓函数。

定义 5.2.2 表明，把实函数 $f(x)$ 中的实数 x 换成泛灰数 g_x，则 $f(x)$ 就变成了一个泛灰信息量。那么，新的泛灰信息量 $u=f(g_x)$ 的泛灰信息表达形式是怎样的呢？根据泛灰数的结构，可由下面定义 5.2.3 给出。

定义 5.2.3 设 $y=f(x)$ 是一般实函数，x 取实数值，y 也只取实数值，则泛灰延拓规定：

对于泛灰数 $=(x,\llbracket\underline{\mu}(x),\overline{\mu}(x)\rrbracket)\in\overline{G}$，

$$
\begin{aligned}
f(g_x)&=f((x,\llbracket\underline{\mu}(x),\overline{\mu}(x)\rrbracket))\\
&=(f(x),\llbracket\frac{f(x\underline{\mu}(x))}{f(x)},\frac{f(x\overline{\mu}(x))}{f(x)}\rrbracket)。
\end{aligned}
$$

这样，就把实函数 $y=f(x)$ 的定义域和值都扩展成到了泛灰数集上，所得泛灰延拓函数记为 $u=f(g_x)$。当只在实数域 $\mathbf{R}$ 上讨论时，泛灰延拓函数 $u=f(g_x)$ 仍是原来的实函数 $y=f(x)$。

定义 5.2.3 实际上给出了泛灰延拓法则。

例 5.2.3 把实函数 $y=\sin x$ 延拓为泛灰函数。

解：由泛灰延拓法则知，对于 $g_x=(x,\llbracket\underline{\mu}(x),\overline{\mu}(x)\rrbracket)\in\overline{G}$，有

$$
\begin{aligned}
u&=\sin g_x=\sin(x,\llbracket\underline{\mu}(x),\overline{\mu}(x)\rrbracket)\\
&=(\sin x,\llbracket\frac{\sin(x\underline{\mu}(x))}{\sin x},\frac{\sin(x\overline{\mu}(x))}{\sin x}\rrbracket)。
\end{aligned}
$$

可把上式称为泛灰正弦函数，显然它是实正弦函数的推广。

事实上，令 $\underline{\mu}(x)=\overline{\mu}(x)=1$，则

$$\sin(x,\llbracket 1,1\rrbracket)=(\sin x,\llbracket 1,1\rrbracket)=\sin x。$$

例 5.2.4 求泛灰延拓指数函数 $u=\mathrm{e}^{g_x}$ 的表达式。

解：由延拓法则，对于 $g_x=(x,\llbracket \underline{\mu}(x),\overline{\mu}(x)\rrbracket)\in\overline{G}$，有

$$\mathrm{e}^{g_x}=\mathrm{e}^{(x,\llbracket \underline{\mu}(x),\overline{\mu}(x)\rrbracket)}=\left(\mathrm{e}^x,\llbracket\frac{\mathrm{e}^{x\underline{\mu}(x)}}{\mathrm{e}^x},\frac{\mathrm{e}^{x\overline{\mu}(x)}}{\mathrm{e}^x}\rrbracket\right)。$$

上式可称之为泛灰指数函数。

特别地，当 g_x 为实数时，即 $g_x=(x,\llbracket 1,1\rrbracket)=x$ 时，有

$$\mathrm{e}^{g_x}=\mathrm{e}^{(x,\llbracket 1,1\rrbracket)}=(\mathrm{e}^x,\llbracket 1,1\rrbracket)=\mathrm{e}^x。$$

例 5.2.5 求泛灰延拓幂函数 $u=g_x^n$ 的表达式。

解：对于 $g_x=(x,\llbracket \underline{\mu}(x),\overline{\mu}(x)\rrbracket)\in\overline{G}$，由延拓法则有

$$\begin{aligned}u=g_x^n&=(x,\llbracket \underline{\mu}(x),\overline{\mu}(x)\rrbracket)^n\\&=\left(x^n,\llbracket\frac{(x\underline{\mu}(x))^n}{x^n},\frac{(x\overline{\mu}(x))^n}{x^n}\rrbracket\right)\\&=(x^n,\llbracket(\underline{\mu}(x))^n,(\overline{\mu}(x))^n\rrbracket)。\end{aligned}$$

上式可称之为泛灰幂函数。其结果显然与泛灰数的乘幂运算定义一致。

例 5.2.6 求对数函数 $y=\ln x$ 的泛灰延拓函数表示式。

解：对于泛灰数 $g_x=(x,\llbracket \underline{\mu}(x),\overline{\mu}(x)\rrbracket)>g_{(0)}$，$g_x\in\overline{G}$，由泛灰延拓法则知，

$$\begin{aligned}u=\ln g_x&=\ln(x,\llbracket \underline{\mu}(x),\overline{\mu}(x)\rrbracket)\\&=\left(\ln x,\llbracket\frac{\ln(x\underline{\mu}(x))}{\ln x},\frac{\ln(x\overline{\mu}(x))}{\ln x}\rrbracket\right)\\&=\left(\ln x,\llbracket 1+\frac{\ln\underline{\mu}(x)}{\ln x},1+\frac{\ln\overline{\mu}(x)}{\ln x}\rrbracket\right)。\end{aligned}$$

上式可称之为泛灰对数函数。

特别地，当 g_x 为实数 x 时，即 $g_x=(x,\llbracket 1,1\rrbracket)$ 时，有

$$\ln(x,\llbracket 1,1\rrbracket)=(\ln x,\llbracket 1,1\rrbracket)=\ln x,$$

即泛灰对数函数是实对数函数的推广。

从以上几个例子可以看出，实基本初等函数都可以通过延拓

法则延拓为相应的泛灰函数。

定义 5.2.4 若 $y=f(x)$ 为实(基本)初等函数，则经过泛灰延拓所得到的泛灰延拓函数，称为泛灰(基本)初等函数。

三、泛灰基本初等函数的性质

性质 5.2.1 $\sin(g_{x_1}+g_{x_2})=\sin g_{x_1}\cdot\cos g_{x_2}+\cos g_{x_1}\cdot\sin g_{x_2}$，

$g_{x_1},g_{x_2}\in G(R)$。

证明： 设 $g_{x_1}=(x_1,[\![\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1]\!])$，$g_{x_2}=(x_2,[\![\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2]\!])$，则

$$\sin g_{x_1}\cdot\cos g_{x_2}=\left(\sin x_1,[\![\frac{\sin(x_1,\underline{\mu}_1)}{\sin x_1},\frac{\sin(x_1,\overline{\mu}_1)}{\sin x_1}]\!]\right)\cdot$$

$$\left(\cos x_2,[\![\frac{\cos(x_2\underline{\mu}_2)}{\cos x_2},\frac{\cos(x_2\overline{\mu}_2)}{\cos x_2}]\!]\right)$$

$$=\left(\sin x_1\cos x_2,[\![\frac{\sin(x_1\underline{\mu}_1)\cos(x_2\underline{\mu}_2)}{\sin x_1\cos x_2},\frac{\sin(x_1\overline{\mu}_1)\cos(x_2\overline{\mu}_2)}{\sin x_1\cos x_2}]\!]\right)。$$

同理，

$$\cos g_{x_1}\cdot\sin g_{x_2}=\Big(\cos x_1\sin x_2,$$

$$[\![\frac{\cos(x_1\underline{\mu}_1)\sin(x_2\underline{\mu}_2)}{\cos x_1\cdot\sin x_2},\frac{\cos(x_1\overline{\mu}_1)\sin(x_2\overline{\mu}_2)}{\cos x_1\sin x_2}]\!]\Big)，$$

于是

$$\sin g_{x_1}\cdot\cos g_{x_2}+\cos g_{x_1}\cdot\sin g_{x_2}$$

$$=\Big(\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2,$$

$$[\![\frac{\sin(x_1\underline{\mu}_1)\cos(x_2\underline{\mu}_2)+\cos(x_1\underline{\mu}_1)\sin(x_2\underline{\mu}_2)}{\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2},$$

$$\frac{\sin(x_1\overline{\mu}_1)\cos(x_2\overline{\mu}_2)+\cos(x_1\overline{\mu}_1)\sin(x_2\overline{\mu}_2)}{\sin x_1\cos x_2+\cos x_1\sin x_2}]\!]\Big)$$

$$=\left(\sin(x_1+x_2),[\![\frac{\sin(x_1\underline{\mu}_1+x_2\underline{\mu}_2)}{\sin(x_1+x_2)},\frac{\sin(x_1\overline{\mu}_1+x_2\overline{\mu}_2)}{\sin(x_1+x_2)}]\!]\right)，$$

而

$$\sin(g_{x_1}+g_{x_2})=\sin(x_1+x_2,[\!(\frac{x_1\underline{\mu}_1+x_2\underline{\mu}_2}{x_1+x_2},\frac{x_1\bar{\mu}_1+x_2\bar{\mu}_2}{x_1+x_2})\!])$$

$$=(\sin(x_1+x_2),[\!(\frac{\sin(x_1\underline{\mu}_1+x_2\underline{\mu}_2)}{\sin(x_1+x_2)},\frac{\sin(x_1\bar{\mu}_1+x_2\bar{\mu}_2)}{\sin(x_1+x_2)})\!]),$$

故有

$$\sin(g_{x_1}+g_{x_2})=\sin g_{x_1}\cos g_{x_2}+\cos g_{x_1}\sin g_{x_2}$$

成立。

性质 5.2.2 $\forall g_{x_1},g_{x_2}\in G(R)$,有

$$e^{g_{x_1}+g_{x_2}}=e^{g_{x_1}}\cdot e^{g_{x_2}}。$$

证明:由于

$$e^{g_{x_1}+g_{x_2}}=e^{(x_1+x_2,[\!(\frac{x_1\underline{\mu}_1+x_2\underline{\mu}_2}{x_1+x_2},\frac{x_1\bar{\mu}_1+x_2\bar{\mu}_2}{x_1+x_2})\!])}$$

$$=(e^{x_1+x_2},[\!(\frac{e^{x_1\underline{\mu}_1+x_2\underline{\mu}_2}}{e^{x_1+x_2}},\frac{e^{x_1\bar{\mu}_1+x_2\bar{\mu}_2}}{e^{x_1+x_2}})\!]),$$

但

$$e^{g_{x_1}}\cdot e^{g_{x_2}}=(e^{x_1},[\!(\frac{e^{x_1\underline{\mu}_1}}{e^{x_1}},\frac{e^{x_1\bar{\mu}_1}}{e^{x_1}})\!])\cdot(e^{x_2},[\!(\frac{e^{x_2\underline{\mu}_2}}{e^{x_2}},\frac{e^{x_2\bar{\mu}_2}}{e^{x_2}})\!])$$

$$=(e^{x_1+x_2},[\!(\frac{e^{x_1\underline{\mu}_1+x_2\underline{\mu}_2}}{e^{x_1+x_2}},\frac{e^{x_1\bar{\mu}_1+x_2\bar{\mu}_2}}{e^{x_1+x_2}})\!])。$$

所以,

$$e^{g_{x_1}+g_{x_2}}=e^{g_{x_1}}\cdot e^{g_{x_2}}$$

成立。

性质 5.2.3 $\forall g_x\in G(R)$,有

$$\ln(e^{g_x})=g_x。$$

证明:(略)。

从上可看到,基本初等泛灰函数保留了实基本初等函数相应的性质。

§5.3 泛灰极限

一、泛灰数列的极限

1. 泛灰数列极限的概念

定义 5.3.1 设 $A_i \in G(R)$，$i=1,2,\cdots,n,\cdots$，称

$$A_1, A_2, \cdots, A_n, \cdots$$

为泛灰数列，记为$\{A_n\}$。

定义 5.3.2 若存在实数 $M>0, N>0$，使得当 $n>N$ 时，有

$$d(A_n, 0) < M,$$

则称泛灰数列$\{A_n\}$为有界数列。

定义 5.3.3 设$\{A_n\}$为一泛灰数列，$A \in G(R)$，若对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$，存在自然数 N，当 $n>N$ 时，有 $d(A_n, A)<\varepsilon$ 成立，则称泛灰数 A 是泛灰数列$\{A_n\}$的极限，记为

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \text{ 或 } A_n \to A(n \to \infty),$$

此时也称$\{A_n\}$收敛。

2. 泛灰数列极限的性质

定理 5.3.1 若$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = B$，则 $A=B$。

证明：由

$$d(A,B) \leqslant d(A,A_n) + d(A_n,B) \to 0(n \to \infty)。$$

知

$$A = B。$$

定理 5.3.2 若$\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$，且 A 中不含超实数，则$\{A_n\}$有界。

证明：由极限定义，对于 $\varepsilon_0 = 1 > 0$，存在 $N_0>0$，当 $n>N_0$ 时，有 $d(A_n, A)<1$。令

$$M = 1 + d(A, 0),$$

则

$$d(A_n,0) \leqslant d(A_n,A) + d(A,0) < 1 + d(A,0) = M,$$

由定义 5.3.2 知$\{A_n\}$有界。

定理 5.3.3 设 $A_n=(a_n,[\underline{\mu}_n,\overline{\mu}_n])$，$A=(a,[\underline{\mu},\overline{\mu}])$，则

$$\lim_{n\to\infty} A_n = A \Leftrightarrow \begin{cases} \lim\limits_{n\to\infty} a_n = a; \\ \lim\limits_{n\to\infty} \underline{\mu}_n = \underline{\mu}; \\ \lim\limits_{n\to\infty} \overline{\mu}_n = \overline{\mu}。\end{cases}$$

证明：(1)A 中不含超实数

（必要性） 因为$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=A$，所以，任意给定 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 $d(A_n,A)<\varepsilon$ 成立。而

$$d(a_n,a) = |a_n - a| \leqslant d(A_n,A) < \varepsilon,$$

$$d(\underline{\mu}_n - \underline{\mu}) = |\underline{\mu}_n - \overline{\mu}| \leqslant d(A_n,A) < \varepsilon,$$

$$d(\overline{\mu}_n - \overline{\mu}) = |\overline{\mu}_n - \overline{\mu}| \leqslant d(A_n, - A) < \varepsilon,$$

所以，由实数列极限定义知，

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a, \quad \lim_{n\to\infty} \underline{\mu}_n = \underline{\mu}, \quad \lim_{n\to\infty} \overline{\mu}_n = \overline{\mu}。$$

（充分性） 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，因为$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$，所以，存在 $N_1>0$，当 $n>N_1$ 时，有

$$|a_n - a| < \frac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon。$$

同理，存在 $N_2>0$，当 $n>N_2$ 时，有$|\overline{\mu}_n-\underline{\mu}|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon$；

存在 $N_3>0$，当 $n>N_3$ 时，有$|\underline{\mu}_n-\overline{\mu}|<\dfrac{1}{\sqrt{3}}\varepsilon$。

取 $N=\max\{N_1,N_2,N_3\}$，则当 $n>N$ 时，有

$$d(A_n - A) = \sqrt{(a_n - a)^2 + (\underline{\mu}_n - \underline{\mu})^2 + (\overline{\mu}_n - \overline{\mu})^2} < \varepsilon$$

成立，由定义 5.3.3 知，$\lim\limits_{n\to\infty} A_n=A$。

(2) A 中含有超实数

如 $\underline{\mu}=\dfrac{k}{0}$，$k$ 为实数，且 $k\neq 0$，则存在 $N>0$，当 $n>N$ 时，有 μ_n

$=\frac{k}{0}$，所以，仍有$\lim\limits_{n\to\infty}\underline{\mu}_n=\underline{\mu}$成立。定理得证。

该定理表明：一个泛灰数列的极限可以转化为三个实数列的极限。所以，可以通过求实数列的极限来求泛灰数列的极限。

定理 5.3.4 有界泛灰数列必有收敛子列。

证明：设 $A_n=(a_n,\llbracket\underline{\mu}_n,\overline{\mu}_n\rrbracket)$，由于$\{A_n\}$有界，所以，存在 $M>0$，$N>0$，当 $n>N$ 时，有

$$d(A_n,0)<M$$

成立，从而，$|a_n-0|=|a_n|<M$。所以，存在 n_k 及实数 a，有$\lim\limits_{n\to\infty}a_{n_k}=a$。

对于$\underline{\mu}_{n'_k}$，存在 n'_k，有$\lim\limits_{k\to\infty}\underline{\mu}_{n'_k}=\underline{\mu}$；

对于$\overline{\mu}_{n''_k}$，存在 n''_k，有$\lim\limits_{k\to\infty}\overline{\mu}_{n''_k}=\overline{\mu}$。

由定理 5.4.3 知，

$$\lim_{k\to\infty}A_{n''_k}=A=(a,\llbracket\underline{\mu},\overline{\mu}\rrbracket)。$$

3. 泛灰数列极限的运算法则

定理 5.3.5 设$\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$，则

$$\lim_{n\to\infty}(A_n\pm B_n)=A\pm B。$$

证明： 设

$$A_n=(a_n,\llbracket\underline{\mu}_n,\overline{\mu}_n\rrbracket),B_n=(b_n,\llbracket\underline{\beta}_n,\overline{\beta}_n\rrbracket),$$
$$A=(a,\llbracket\underline{\mu},\overline{\mu}\rrbracket),B=(b,\llbracket\underline{\beta},\overline{\beta}\rrbracket),$$

则

$$A_n+B_n=(a_n+b_n,\llbracket\frac{a_n\underline{\mu}_n+b_n\underline{\beta}_n}{a_n+b_n},\frac{a_n\overline{\mu}_n+b_n\overline{\beta}_n}{a_n+b_n}\rrbracket),$$

$$A+B=(a+b,\llbracket\frac{a\underline{\mu}+b\underline{\beta}}{a+b},\frac{a\overline{\mu}+b\overline{\beta}}{a+b}\rrbracket)。$$

由定理 5.3.3 及实数列的运算法则，有

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\underline{\mu}_n+b_n\underline{\beta}_n}{a_n+b_n}=\frac{a\underline{\mu}+b\underline{\beta}}{a+b};$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\overline{\mu}_n+b_n\overline{\beta}_n}{a_n+b_n}=\frac{a\overline{\mu}+b\overline{\beta}}{a+b}。$$

所以，

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(A_n+B_n)&=(a+b,[\frac{a\underline{\mu}+b\underline{\beta}}{a+b},\frac{a\overline{\mu}+b\overline{\beta}}{a+b}])\\&=(a,[\underline{\mu},\overline{\mu}])+(b,[\underline{\beta},\overline{\beta}])\\&=A+B。\end{aligned}$$

同理可证减法运算法则成立。

注：在泛灰数集 $G(R)$ 中，当 $a+b=0$ 时，以上诸式仍然成立。

定理 5.3.6 设 $\lim\limits_{n\to\infty}A_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}B_n=B$，则

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}(A_n\cdot B_n)=\lim\limits_{n\to\infty}A_n\cdot\lim\limits_{n\to\infty}B_n=A\cdot B$；

(2) 若 $b\neq0$，则

$$\lim_{n\to\infty}(A_n/B_n)=\lim_{n\to\infty}A_n/\lim_{n\to\infty}B_n=A/B。$$

证明：（略）。

二、泛灰函数的极限

定义 5.3.4 设 $\overline{G}(R)$ 为泛灰数集 $G(R)$ 的子集，g_0 为任一泛灰数，$g_0\in G(R)$，若对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$，总存在 $g\in\overline{G}(R)$，且 $g\neq g_0$，使得 $d(g,g_0)<\varepsilon$，则称 g_0 为 $\overline{G}(R)$ 的聚点。

定义 5.3.5 对于泛灰函数 $u=f(g_x)$，$g_x\in\overline{G}(R)$，设 $g_{x_0}\in G(R)$ 是 $\overline{G}(R)$ 的一个聚点，g_A 为一泛灰常数。若对于任意给定的实数 $\varepsilon>0$，总存在实数 $\delta>0$，使得当 $g_x\in\overline{G}(R)$ 且 $g_x\neq g_{x_0}$，$d(g_x,g_{x_0})<\delta$ 时，恒有

$$d(f(g_x),g_A)<\varepsilon$$

成立，则称当 g_x 趋于 g_{x_0} 时，$f(g_x)$ 的极限为 g_A，记为

$\lim\limits_{d(g_x,g_{x_0})\to0}f(g_x)=g_A$，或 $\lim\limits_{g_x\to g_{x_0}}f(g_x)=g_A$，或 $f(g_x)\to g_A(g_x\to g_{x_0})$。

例 5.3.1 试证泛灰函数 $f(g_x)=g_x$，$g_x\in G(R)$，有

$$\lim_{g_x \to g_{x_0}} f(g_x) = g_{x_0}\text{。}$$

证明:对于任意给定的正实数 ε,取 $\delta=\varepsilon>0$,则当 $d(g_x,g_{x_0})<\delta$ 时,必有 $d(f(g_x),g_{x_0})=d(g_x,g_{x_0})<\varepsilon$ 成立。故由定义 5.3.5 知 $\lim\limits_{g_x \to g_{x_0}} f(g_x)=g_{x_0}$。

定义 5.3.6 在定义 5.3.5 中,特别地,若 $g_A=g_{(0)}$,则称当 $g_x\to g_{x_0}$时,$f(g_x)$为泛灰无穷小量,简称为无穷小,记为 $\alpha(g_x)$。

由定义 5.3.5 及定义 5.3.6 可得下面的定理。

定理 5.3.7

$$\lim_{g_x \to g_{x_0}} f(g_x) = g_A \Leftrightarrow \lim_{g_x \to g_{x_0}} [f(g_x) - g_A] = g_{(0)},$$

即 $f(g_x)-g_A$ 为当 $g_x\to g_{x_0}$时的无穷小量。

定理 5.3.8 设 $g_x=(x,[\underline{\mu}(x),\overline{\mu}(x)])$,$f(x)$为实函数,则

$$\lim_{g_x \to g_{x_0}} f(g_x) = g_A = (A,[\underline{\mu}_0,\overline{\mu}_0])\Leftrightarrow$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = A,\lim_{x\to x_0} f(x\underline{\mu}(x)) = A\underline{\mu}_0,\lim_{x\to x_0} f(x\overline{\mu}(x)) = A\overline{\mu}_0\text{。}$$

证明: 由定理 5.3.7,知

$$\lim_{g_x \to g_{x_0}} f(g_x) = g_A \Leftrightarrow \lim_{g_x \to g_{x_0}} [f(g_x) - g_A] = g_{(0)},$$

而

$$f(g_x)-g_A=\left(f(x),\left[\frac{f(x\underline{\mu}(x))}{f(x)},\frac{f(x\overline{\mu}(x))}{f(x)}\right]\right)-(A,[\underline{\mu}_0,\overline{\mu}_0])$$

$$=\left(f(x)-A,\left[\frac{f(x\underline{\mu}(x))-A\underline{\mu}_0}{f(x)-A},\frac{f(x\overline{\mu}(x))-A\overline{\mu}_0}{f(x)-A}\right]\right),$$

所以

$$\lim_{g_x \to g_{x_0}} f(g_x) = g_A \Leftrightarrow \lim_{g_x \to g_{x_0}} [f(g_x) - g_A] = g_{(0)}$$

$$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = A,\lim_{x\to x_0} f(x\underline{\mu}(x)) = A\underline{\mu}_0,$$

$$\lim_{x\to x_0} f(x\overline{\mu}(x)) = A\overline{\mu}_0\text{。}$$

定理 5.3.8 表明,泛灰函数的极限等价于三个普通极限。这一

结论很重要，它为讨论泛灰函数极限的运算带来了极大的方便，同时，也为求泛灰函数极限提供了方法。

由定理 5.3.8 及实函数极限的性质，即知下面定理成立。

定理 5.3.9 泛灰函数的极限若存在，则必是唯一的。

例 5.3.2 设 $g_x=(x,\llbracket\underline{\mu}(x),\overline{\mu}(x)\rrbracket)=(x,\llbracket\underline{\mu},\overline{\mu}\rrbracket)$，则

$$\lim_{g_x\to g_{(0)}}\frac{\sin g_x}{g_x}=(1,\llbracket 1,1\rrbracket)=g_{(1)}=1。$$

证明：由于

$$\sin g_x=\left(\sin x,\llbracket\frac{\sin(x\underline{\mu})}{\sin x},\frac{\sin(x\overline{\mu})}{\sin x}\rrbracket\right),$$

所以，

$$\frac{\sin g_x}{g_x}=\left(\frac{\sin x}{x},\llbracket\frac{\sin(x\underline{\mu})}{\underline{\mu}\cdot\sin x},\frac{\sin(x\overline{\mu})}{\overline{\mu}\cdot\sin x}\rrbracket\right),$$

从而，

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\underline{\mu})}{\underline{\mu}\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\underline{\mu})}{x\underline{\mu}\cdot\dfrac{\sin x}{x}}=1,$$

同理

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin(x\overline{\mu})}{\overline{\mu}\cdot\sin x}=1。$$

根据定理 5.4.8，有

$$\lim_{g_x\to g_{(0)}}\frac{\sin g_x}{g_x}=(1,\llbracket 1,1\rrbracket)=g_{(1)}=1。$$

例 5.3.3 设 g_x 同例 5.3.2，试证 $\lim\limits_{g_x\to g_{(0)}}(1+g_x)^{\frac{1}{g_x}}=e$。

证明：由于

$$\begin{aligned}(1+g_x)^{\frac{1}{g_x}}&=((1,\llbracket 1,1\rrbracket)+(x,\llbracket\underline{\mu},\overline{\mu}\rrbracket))^{(\frac{1}{x},\llbracket\frac{1}{\underline{\mu}},\frac{1}{\overline{\mu}}\rrbracket)}\\&=\left(1+x,\llbracket\frac{1+x\underline{\mu}}{1+x},\frac{1+x\overline{\mu}}{1+x}\rrbracket\right)^{(\frac{1}{x},\llbracket\frac{1}{\underline{\mu}},\frac{1}{\overline{\mu}}\rrbracket)}\\&=\left((1+x)^{\frac{1}{x}},\llbracket\frac{(1+x\underline{\mu})^{\frac{1}{x\underline{\mu}}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}},\frac{(1+x\overline{\mu})^{\frac{1}{x\overline{\mu}}}}{(1+x)^{\frac{1}{x}}}\rrbracket\right),\end{aligned}$$

而$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=\mathrm{e}$，根据定理 5.3.8，有

$$\lim_{g_x\to g_{(0)}}(1+g_x)^{\frac{1}{g_x}}=\left(\mathrm{e},\left[\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}},\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}}\right]\right)$$

$$=(\mathrm{e},[1,1])=\mathrm{e}。$$

定理 5.3.10 有限个有极限的泛灰函数的和、差、积、商仍有极限，并且相应的极限等于各个泛灰函数极限值的和、差、积、商(商的情形，只在分母的极限不为零的情况下成立)。

证明：仅以两个泛灰函数的和与积为例证之，两个泛灰函数的差与商，同理可证。

(1) 和的情形

设

$$\lim_{g_x\to g_{x_0}} f_1(g_x)=g_A=(A,[\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1]),$$

$$\lim_{g_x\to g_{x_0}} f_2(g_x)=g_B=(B,[\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2]),$$

则

$$f_1(g_x)+f_2(g_x)=\left(f_1(x),\left[\frac{f_1(x\underline{\mu}(x))}{f_1(x)},\frac{f_1(x\overline{\mu}(x))}{f_1(x)}\right]\right)+$$

$$\left(f_2(x),\left[\frac{f_2(x\underline{\mu}(x))}{f_2(x)},\frac{f_2(x\overline{\mu}(x))}{f_2(x)}\right]\right)=(f_1(x)+f_2(x),$$

$$\left[\frac{f_1(x\underline{\mu}(x))+f_2(x\underline{\mu}(x))}{f_1(x)+f_2(x)},\frac{f_1(x\overline{\mu}(x))+f_2(x\overline{\mu}(x))}{f_1(x)+f_2(x)}\right])。$$

由定理 5.3.8，知

$$\lim_{x\to x_0}f_1(x\underline{\mu}(x))=A\underline{\mu}_1,\ \lim_{x\to x_0}f_1(x\overline{\mu}(x))=A\overline{\mu}_1,$$

$$\lim_{x\to x_0}f_2(x\underline{\mu}(x))=B\underline{\mu}_2,\ \lim_{x\to x_0}f_2(x\overline{\mu}(x))=B\overline{\mu}_2,$$

所以，根据实函数极限的运算法则，有

$$\lim_{g_x\to g_{x_0}}(f_1(g_x)+f_2(g_x))=\left(A+B,\left[\frac{A\underline{\mu}_1+B\underline{\mu}_2}{A+B},\frac{A\overline{\mu}_1+B\overline{\mu}_2}{A+B}\right]\right)$$

$$=(A,[\underline{\mu}_1,\overline{\mu}_1])+(B,[\underline{\mu}_2,\overline{\mu}_2])$$

$$= \lim_{g_x \to g_{x_0}} f_1(g_x) + \lim_{g_x \to g_{x_0}} f_2(g_x)。$$

（2） 积的情形

由于

$$f_1(g_x) \cdot f_2(g_x) = \left(f_1(x), \left\llbracket \frac{f_1(x\underline{\mu}(x))}{f_1(x)}, \frac{f_1(x\overline{\mu}(x))}{f_1(x)} \right\rrbracket\right) \times$$

$$\left(f_2(x), \left\llbracket \frac{f_2(x\underline{\mu}(x))}{f_2(x)}, \frac{f_2(x\overline{\mu}(x))}{f_2(x)} \right\rrbracket\right)$$

$$= \left(f_1(x) \cdot f_2(x), \left\llbracket \frac{f_1(x\underline{\mu}(x)) \cdot f_2(x\underline{\mu}(x))}{f_1(x) \cdot f_2(x)}, \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{f_1(x\underline{\mu}(x)) \cdot f_2(x\overline{\mu}(x))}{f_1(x_1) \cdot f_2(x)} \right\rrbracket\right),$$

因此，由定理 5.3.8 及实函数极限的运算法则，有

$$\lim_{g_x \to g_{x_0}} (f_1(g_x) \cdot f_2(g_x)) = \left(A \cdot B, \left\llbracket \frac{A\underline{\mu}_1 \cdot B\underline{\mu}_2}{A \cdot B}, \frac{A\overline{\mu}_1 \cdot B\overline{\mu}_2}{A \cdot B} \right\rrbracket\right)$$

$$= (A \cdot B, \llbracket \underline{\mu}_1 \cdot \underline{\mu}_2, \overline{\mu}_1 \cdot \overline{\mu}_2 \rrbracket)$$

$$= (A, \llbracket \underline{\mu}_1, \overline{\mu}_1 \rrbracket) \cdot (B, \llbracket \underline{\mu}_2, \overline{\mu}_2 \rrbracket)$$

$$= \lim_{g_x \to g_{x_0}} f_1(g_x) \cdot \lim_{g_x \to g_{x_0}} f_2(g_x)。$$

定理 5.3.10 表明，泛灰函数极限具有与实函数相应的运算法则。

定义 5.3.7 若 $\lim\limits_{g_x \to g_{x_0}} f(g_x) = f(g_{x_0})$，则称泛灰函数 $f(g_x)$ 在 $g_x = g_{x_0}$ 处连续；若 $f(g_x)$ 在 $\overline{G}(R)$ 上处处连续，则称泛灰函数 $f(g_x)$ 在 $\overline{G}(R)$ 上连续。

根据泛灰函数的延拓法则，对于实连续函数 $y = f(x)$ 的泛灰延拓函数 $u = f(g_x)$ 有如下定理：

定理 5.3.11 设 $g_x = (x, \llbracket \underline{\mu}(x), \overline{\mu}(x) \rrbracket) = (x, \llbracket \underline{\mu}, \overline{\mu} \rrbracket)$，$g_{x_0} = (x_0, \llbracket \underline{\mu}(x_0), \overline{\mu}(x_0) \rrbracket) \overset{\text{def}}{=} (x_0, \llbracket \underline{\mu}_0, \overline{\mu}_0 \rrbracket)$，若实函数 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 处连续，即 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x_0) = f(x_0)$，则泛灰延拓函数 $u = f(g_x)$ 在 $g_x = g_{x_0}$

处连续，即

$$\lim_{g_x \to g_{x_0}} f(g_x) = f(g_{x_0})。$$

证明：由泛灰延拓法则，知

$$f(g_x) = (f(x), [\![\frac{f(x\underline{\mu})}{f(x)}, \frac{f(x\overline{\mu})}{f(x)}]\!])。$$

由于$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$，所以$\lim\limits_{x \to x_0} f(x\underline{\mu}) = f(x_0\underline{\mu}_0)$，

$$\lim_{x \to x_0} f(x\overline{\mu}) = f(x_0\overline{\mu}_0)，$$

从而

$$\lim_{g_x \to g_{x_0}} f(g_x) = (f(x_0), [\![\frac{f(x_0\underline{\mu}_0)}{f(x_0)}, \frac{f(x_0\overline{\mu}_0)}{f(x_0)}]\!])$$

$$= f(g_{x_0})。$$

定理 5.3.11 说明，若实函数 $y=f(x)$为连续函数，则由 $y=f(x)$按泛灰延拓法则所得到的泛灰函数 $u=f(g_x)$也是连续的。

由定义 5.2.4，可证以下定理成立。

定理 5.3.12 一切初等泛灰函数在其定义区域 $\overline{G}(R)$内都是连续的。

§5.4 泛灰导数

一、泛灰函数的导数概念

定义 5.4.1 设泛灰函数 $u=f(g_x)$，其中泛灰自变量 $g_x=(x, [\![\underline{\mu}(x), \overline{\mu}(x)]\!])$($\underline{\mu}(x)$，$\overline{\mu}(x)$连续，为了书写简便，它们有时也分别记为 $\underline{\mu}, \overline{\mu}$)，则称

$$g_{\Delta x} = (\Delta x, [\![\Delta\underline{\mu}, \Delta\overline{\mu}]\!]) \quad (\Delta x \neq 0)$$

为 g_x 的增量；称

$$g_{\Delta u} = f(g_x + g_{\Delta x}) - f(g_x)$$

为泛灰函数 $u=f(g_x)$在 g_x 处的增量。

显然，若 $f(g_x)$在 g_x 处连续，则有

$$\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}} g_{\Delta u}=0。$$

定义 5.4.2 设泛灰函数 $u=f(g_x)$，$g_x\in\overline{G}$，$g_{x_0}\in\overline{G}$，若泛灰极限

$$\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{g_{\Delta u}}{g_{\Delta x}}=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{f(g_{x_0}+g_{\Delta x})-f(g_{x_0})}{g_{\Delta x}}$$

存在，则称此极限值为泛灰函数 $f(g_x)$在 $g_x=g_{x_0}$处的导数，记作

$$f'(g_{x_0})\text{ 或 }f'(g_x)|_{g_x=g_{x_0}},$$

即

$$f'(g_{x_0})=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{f(g_{x_0}+g_{\Delta x})-f(g_{x_0})}{g_{\Delta x}},$$

此时又称 $f(g_x)$在 g_{x_0}处可导。若 $f(g_x)$在 $\overline{G}(R)$内处处都可导，则称泛灰函数 $f(g_x)$在 $\overline{G}(R)$内可导，并把 $f'(g_x)$称为 $f(g_x)$的泛灰导函数，简称为 $f(g_x)$的泛灰导数。

二、基本初等泛灰函数的导数

例 5.4.1 试证$(g_x^n)'=ng_x^{n-1}$(n 为自然数)。

解：由定义 5.4.2 有

$$\begin{aligned}(g_x^n)' &= \lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{(g_x+g_{\Delta x}{}^n)-g_x^n}{g_{\Delta x}}\\
&= \lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{((x,[\underline{\mu},\overline{\mu}])+(\Delta x,[\Delta\underline{\mu},\Delta\overline{\mu}]))^n-(x,[\underline{\mu},\overline{\mu}])^n}{(\Delta x,[\Delta\underline{\mu},\Delta\overline{\mu}])}\\
&= \lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\left((x+\Delta x)^n,\left[\left(\frac{x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu}}{x+\Delta x}\right)^n,\right.\right.\\
&\qquad\left.\left.\left(\frac{x\overline{\mu}+\Delta x\Delta\overline{\mu}}{x+\Delta x}\right)^n\right]\right)-(x^n,[\underline{\mu}^n,\overline{\mu}^n])\Big/(\Delta x,[\Delta\underline{\mu},\Delta\overline{\mu}])\\
&= \lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\left((x+\Delta x)^n-x^n,\left[\frac{(x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu})^n-x^n\underline{\mu}^n}{(x+\Delta x)^n-x^n},\right.\right.\end{aligned}$$

$$\left.\left.\frac{(x\overline{\mu}+\Delta x\Delta\overline{\mu})^n-x^n\overline{\mu}^n}{(x+\Delta x)^n-x^n}\right)\right]\Big/(\Delta x,[\![\Delta\underline{\mu},\Delta\overline{\mu}]\!])$$

$$=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\left(\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x},[\![\frac{(x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu})^n-x^n\underline{\mu}^n}{\Delta\underline{\mu}[(x+\Delta x)^n-x^n]},\right.$$

$$\left.\frac{(x\overline{\mu}+\Delta x\Delta\overline{\mu})^n-x^n\overline{\mu}^n}{\Delta\overline{\mu}[(x+\Delta x)^n-x^n]}]\!]\right),$$

而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}=nx^{n-1};$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu})^n-x^n\underline{\mu}^n}{\Delta\underline{\mu}[(x+\Delta x)^n-x^n]}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu})^n-x^n\underline{\mu}^n}{\dfrac{(x+\Delta x)^n-x^n}{\Delta x}\cdot\Delta x\Delta\underline{\mu}}=\frac{n(x\underline{\mu})^{n-1}}{nx^{n-1}}。$$

同理可得

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x\overline{\mu}+\Delta x\Delta\overline{\mu})^n-x^n\overline{\mu}^n}{\Delta\overline{\mu}[(x+\Delta x)^n-x^n]}=\frac{n(x\overline{\mu})^{n-1}}{nx^{n-1}}。$$

由定理 5.3.8 知

$$(g_x^n)'=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{(g_x+g_{\Delta x})^n-g_x^n}{g_{\Delta x}}$$

$$=(nx^{n-1},[\![\frac{nx^{n-1}\underline{\mu}^{n-1}}{nx^{n-1}},\frac{nx^{n-1}\overline{\mu}^{n-1}}{nx^{n-1}}]\!])=(nx^{n-1},[\![\underline{\mu}^{n-1},\overline{\mu}^{n-1}]\!])$$

$$=n(x^{n-1},[\![\underline{\mu}^{n-1},\overline{\mu}^{n-1}]\!])=n\cdot(x,[\![\underline{\mu},\overline{\mu}]\!])^{n-1}=ng_x^{n-1}。$$

特别地,当 $n=1$ 时,有 $(g_x)'=1\cdot g_{(1)}=1$。

例 5.4.2 试分别求泛灰指数函数 e^{g_x} 与泛灰对数函数 $\ln g_x$ 的导数。

解:由定义 5.4.2 有

$$(e^{g_x})'=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{e^{g_x+g_{\Delta x}}-e^{g_x}}{g_{\Delta x}}$$

$$=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{e^{g_x}(e^{g_{\Delta x}}-1)}{g_{\Delta x}}$$

$$=e^{g_x}\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{(e^{\Delta x},\llbracket e^{\Delta x\Delta\underline{\mu}}/e^{\Delta x},e^{\Delta x\Delta\overline{\mu}}/e^{\Delta x}\rrbracket)-(1,\llbracket 1,1\rrbracket)}{(\Delta x,\llbracket\Delta\underline{\mu},\Delta\overline{\mu}\rrbracket)}$$

$$=e^{g_x}\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\left(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x},\llbracket\frac{e^{\Delta x\Delta\underline{\mu}}-1}{(e^{\Delta x}-1)\Delta\underline{\mu}},\frac{e^{\Delta x\Delta\overline{\mu}}-1}{(e^{\Delta x}-1)\Delta\overline{\mu}}\rrbracket\right)$$

$$=e^{g_x}\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\left(\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x},\llbracket\frac{e^{\Delta x\Delta\underline{\mu}}-1}{\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\cdot\Delta x\Delta\underline{\mu}},\frac{e^{\Delta x\Delta\overline{\mu}}-1}{\frac{e^{\Delta x}-1}{\Delta x}\cdot\Delta x\Delta\overline{\mu}}\rrbracket\right)$$

$$=e^{g_x}(1,\llbracket\frac{1}{1},\frac{1}{1}\rrbracket)$$

$$=e^{g_x}g_{(1)}=e^{g_x}。$$

同理可得

$$(\ln g_x)'=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{\ln(g_x+g_{\Delta x})-\ln g_x}{g_{\Delta x}}=\frac{1}{g_x}。$$

例 5.4.3 试证$(\sin g_x)'=\cos g_x$，$(\cos g_x)'=-\sin g_x$。

证明：

$$(\sin g_x)'=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{\sin(g_x+g_{\Delta x})-\sin g_x}{g_{\Delta x}}$$

$$=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\left(\sin(x+\Delta x,\llbracket\frac{x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu}}{x+\Delta x},\frac{x\overline{\mu}+\Delta x\Delta\overline{\mu}}{x+\Delta x}\rrbracket)-\right.$$

$$\left.\sin(x,\llbracket\underline{\mu},\overline{\mu}\rrbracket)\right)\Big/(\Delta x,\llbracket\Delta\underline{\mu},\Delta\overline{\mu}\rrbracket)$$

$$=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\left(\sin(x+\Delta x),\llbracket\frac{\sin(x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu})}{\sin(x+\Delta x)},\frac{\sin(x\overline{\mu}+\Delta x\Delta\overline{\mu})}{\sin(x+\Delta x)}\rrbracket)-\right.$$

$$\left.(\sin x,\llbracket\frac{\sin(x\underline{\mu})}{\sin x},\frac{\sin(x\overline{\mu})}{\sin x}\rrbracket)\right)\Big/(\Delta x,\llbracket\Delta\underline{\mu},\Delta\overline{\mu}\rrbracket)$$

$$=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\left(\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x},\llbracket\frac{\sin(x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu})-\sin(x\underline{\mu})}{\frac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\cdot\Delta x\Delta\underline{\mu}},\right.$$

$$\left.\frac{\sin(x\overline{\mu}+\Delta x\Delta\overline{\mu})-\sin(x\overline{\mu})}{\dfrac{\sin(x+\Delta x)-\sin x}{\Delta x}\cdot\Delta x\Delta\overline{\mu}}\rrbracket\right)$$

$$=\left(\cos x,\llbracket\frac{\cos(x\underline{\mu})}{\cos x},\frac{\cos(x\overline{\mu})}{\cos x}\rrbracket\right)$$

$$=\cos(x,\llbracket\underline{\mu},\overline{\mu}\rrbracket)=\cos g_x。$$

类似可证$(\cos g_x)'=-\sin g_x$。

从上可看到，在定义 5.4.2 下，泛灰函数的导数保留了相应实函数的性质，这给研究泛灰函数的导数带来了极大方便。但同时也可看到，用定义求导数很麻烦。为此，下面给出泛灰函数求导定理。

定理 5.4.1 设 $f(x)$为可导实函数，则由 $f(x)$按泛灰延拓所得到的泛灰函数 $u=f(g_x)$也可导，且 $f'(g_x)=\left(f'(x),\llbracket\dfrac{f'(x\underline{\mu})}{f'(x)},\dfrac{f'(x\overline{\mu})}{f'(x)}\rrbracket\right)$(这里 $f'(x\mu)$是对 $x\mu$ 求导)。

证明：由假设可知，

$$f'(g_x)=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{f(g_x+g_{\Delta x})-f(g_x)}{g_{\Delta x}}$$

$$=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{f\left(x+\Delta x,\llbracket\dfrac{x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu}}{x+\Delta x},\dfrac{x\overline{\mu}+\Delta x\Delta\overline{\mu}}{x+\Delta x}\rrbracket\right)-f(x,\llbracket\underline{\mu},\overline{\mu}\rrbracket)}{g_{\Delta x}}$$

$$\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\left\{f(x+\Delta x),\llbracket\frac{f(x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu})}{f(x+\Delta x)},\frac{f(x\overline{\mu}+\Delta x\Delta\overline{\mu})}{f(x+\Delta x)}\rrbracket\right)-\Big(f(x),$$

$$\left.\llbracket\frac{f(x\underline{\mu})}{f(x)},\frac{f(x\overline{\mu})}{f(x)}\rrbracket\right)\Big/(\Delta x,\llbracket\Delta\underline{\mu},\Delta\overline{\mu}\rrbracket)$$

$$=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\left\{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x},\llbracket\frac{f(x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu})-f(x\underline{\mu})}{(f(x+\Delta x)-f(x))\cdot\Delta\underline{\mu}},\right.$$

$$\left.\frac{f(x\overline{\mu}+\Delta x\Delta\overline{\mu})-f(x\overline{\mu})}{(f(x+\Delta x)-f(x))\cdot\Delta\overline{\mu}}\rrbracket\right\}$$

存在，而

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}=f'(x),$$

所以

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu})-f(x\underline{\mu})}{[f(x+\Delta x)-f(x)]\Delta\underline{\mu}}$$

$$=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x\underline{\mu}+\Delta x\Delta\underline{\mu})-f(x\underline{\mu})}{\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\Delta x\Delta\underline{\mu}}$$

$$=\frac{f'(x\underline{\mu})}{f'(x)}。$$

同理可证

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x\overline{\mu}+\Delta x\Delta\overline{\mu})-f(x\overline{\mu})}{[f(x+\Delta x)-f(x)]\Delta\overline{\mu}}=\frac{f'(x\overline{\mu})}{f'(x)}。$$

由定理 5.3.8 知

$$f'(g_x)=(f'(x),[\frac{f'(x\underline{\mu})}{f'(x)},\frac{f'(x\overline{\mu})}{f'(x)}])$$

读者可自行验证例 5.4.1、例 5.4.2 和例 5.4.3。

关于泛灰函数的连续性与可导性的关系，有下面定理成立。

定理 5.4.2 若 $u=f(g_x)$ 在 g_{x_0} 可导，则 $f(g_x)$ 在 g_{x_0} 必连续，即泛灰函数可导必连续。

证明：因为

$$g_{\Delta u}=\frac{g_{\Delta u}}{g_{\Delta x}}\cdot g_{\Delta x},$$

而由假设知

$$\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{g_{\Delta u}}{g_{\Delta x}}=f'(g_{x_0}),$$

所以，$\lim\limits_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}} g_{\Delta u}=g_{(0)}$，

即

$$\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}} f(g_{x_0}+g_{\Delta x})=f(g_{x_0})$$

亦即

$$\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}} f(g_x)=f(g_{x_0})。$$

三、泛灰函数求导法则

定理 5.4.3 设泛灰函数 $f_1(g_x)$，$f_2(g_x)$ 均在 g_x 可导，则 $f_1(g_x)\pm f_2(g_x)$ 也在 g_x 可导，且有

$$(f_1(g_x)\pm f_2(g_x))'=f'_1(g_x)\pm f'_2(g_x)。$$

证明：由泛灰极限的运算法则及泛灰导数定义，有

$$\begin{aligned}
&(f_1(g_x)+f_2(g_x))'\\
&=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\left\{[f_1(g_x+g_{\Delta x})+f_2(g_x+g_{\Delta x})]-[f_1(g_x)+f_2(g_x)]\right\}\Big/ g_{\Delta x}\\
&=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{[f_1(g_x+g_{\Delta x})-f_1(g_x)]+[f_2(g_x+g_{\Delta x})-f_2(g_x)]}{g_{\Delta x}}\\
&=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{f_1(g_x+g_{\Delta x})-f_1(g_x)}{g_{\Delta x}}+\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{f_2(g_x+g_{\Delta x})-f_2(g_x)}{g_{\Delta x}}\\
&=f'_1(g_x)+f'_2(g_x)。
\end{aligned}$$

同理可证，

$$(f_1(g_x)-f_2(g_x))'=f'_1(g_x)-f'_2(g_x)。$$

定理 5.4.4 设泛灰函数 $f_1(g_x)$，$f_2(g_x)$ 均在 g_x 可导，则泛灰函数 $f_1(g_x)\cdot f_2(g_x)$ 也在 g_x 可导，且有

$$(f_1(g_x)\cdot f_2(g_x))'=f'_1(g_x)\cdot f_2(g_x)+f_1(g_x)\cdot f'_2(g_x)。$$

证明：

$$\begin{aligned}
&(f_1(g_x)\cdot f_2(g_x))'\\
&=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\frac{f_1(g_x+g_{\Delta x})f_2(g_x+g_{\Delta x})-f_1(g_x)f_2(g_{\Delta x})}{g_x}\\
&=\lim_{g_{\Delta x}\to g_{(0)}}\Big(f_1(g_x+g_{\Delta x})[f_2(g_x+g_{\Delta x})-f_2(g_x)]+\\
&\quad+f_2(g_x)[f_1(g_x+g_{\Delta x})-f_1(g_x)]\Big)\Big/ g_{\Delta x}\\
&=f_1(g_x)f'_2(g_x)+f_2(g_x)f'_1(g_x)。
\end{aligned}$$

推论：$(gf_1(g_x))'=gf'(g_x)$（g 为泛灰常数）。

定理 5.4.3 及 5.4.4 均可推广至有限个泛灰函数的情形。

定理 5.4.5 若 $f_1(g_x)$，$f_2(g_x)$ 在 g_x 可导，且 $f_2(g_x)\neq g_{(0)}$，则泛灰函数 $\dfrac{f_1(g_x)}{f_2(g_x)}$ 也在 g_x 可导，且

$$\left(\frac{f_1(g_x)}{f_2(g_x)}\right)' = (f'_1(g_x)f_2(g_x) - f'_2(g_x)f_1(g_x))/f_2^2(g_x)。$$

证明：(略)。

定理 5.4.6 设 $u=f(g_V)$ 在 g_V 可导，而 $g_V=\varphi(g_x)$ 在 g_x 可导，则泛灰复合函数 $u=f[\varphi(g_x)]$ 在 g_x 可导，且

$$u' = f'(g_V)\cdot\varphi'(g_x)。$$

证明：设 g_x 有增量 $g_{\Delta x}$ 时，g_V 的增量为 $g_{\Delta V}$，于是 u 也有增量 $g_{\Delta u}$，由假设有

$$\lim_{g_{\Delta V}\to g_{(0)}}\frac{g_{\Delta u}}{g_{\Delta V}} = f'(g_V),$$

亦即

$$g_{\Delta u}/g_{\Delta V} = f'(g_V) + \alpha(g) \quad (\lim_{g_{\Delta V}\to g_{(0)}}\alpha(g) = g_{(0)}),$$

于是，上式可写为

$$g_{\Delta u} = f'(g_V)\cdot g_{\Delta V} + \alpha(g)\cdot g_{\Delta V},$$

所以，

$$\frac{g_{\Delta u}}{g_{\Delta x}} = f'(g_V)\cdot\frac{g_{\Delta V}}{g_{\Delta x}} + \alpha(g)\frac{g_{\Delta V}}{g_{\Delta x}} \to f'(g_V)\cdot\varphi'(g_x)$$

$$(g_{\Delta x}\to g_{(0)}\text{ 时})$$

以上定理表明，泛灰函数具有与实函数相同的求导法则，这为研究泛灰函数的分析性质提供了极大的方便。

参考文献

1 邓聚龙. 灰色系统基本方法. 武汉:华中工学院出版社,1987.

2 邓聚龙. 灰色系统理论教程. 武汉:华中理工大学出版社,1990.

3 王光远. 结构软设计理论. 北京:科学出版社,1992.

4 汪培庄. 模糊集合论及其应用. 上海:上海科学技术出版社,1983.

5 王清印,刘开第,陈金鹏等. 灰色系统理论的数学方法及其应用. 成都:西南交通大学出版社,1990.

6 吴和琴,岳常安,刘凤雷等. 灰色数学引论. 石家庄:河北人民出版社,1990.

7 王清印,吴和琴. 论灰数的抽象定义. 河北煤炭建筑工程学院学报,1988(1):82～85

8 王清印,刘开第,吴和琴. 灰色系统的基本元素——灰数. 华中理工大学学报,1990(1):47～53

9 Wang Qingyin, Wu Heqin, Liu Kaidi. Basic Element of Grey Mathematics and Its Relations With Fuzzy and Real Number. The Journal of Grey System, 1988(1):69～77

10 Wang Qingyin, Wu Heqin. The Concept of Grey Number and Its Property. San Francisco: PROCEEDINGS of NAFIPS', 1988.

11 贺冠军,吴和琴,王清印. 经典灰数. 河北机电学院学报,1990(3):85～90

12 Wu Heqin, Wang Qingyin. A Preliminary Study of the Theory of Generalized Sets. San Francisco: PROCEEDINGS of NAFIPS', 1988.

13 Wu Heqin, Wang Qingyin. The Theory of Compound Fuzzy Sets. San Francisco: PROCEEDINGS of NAFIPS′, 1988.
14 王清印. 灰信息集合与灰代数系统. 见:罗庆成,史开泉,王清印等,灰色系统新方法. 北京:农业出版社,1993. 277～287.
15 李恩忠,吴和琴,王清印等。函数的灰延拓与周期性灰函数. 见:邓聚龙主编. 灰色系统论文集. 华中理工大学出版社,1989.
16 王清印,王峰松. 泛灰集与点灰数. 灰色系统理论与实践. 1991 (1):48～52
17 王清印,王峰松. 泛灰代数系统——泛灰群与泛灰环. 见:罗庆成,史开泉,王清印等. 灰色系统新方法. 北京:农业出版社,1993,304～311
18 B. L. 范德瓦尔登. 代数学. 北京:科学出版社,1963.
19 王清印,王念鹏. 泛灰代数方程及其解法. 见:罗庆成,史开泉,王清印等. 灰色系统新方法. 北京:农业出版社,1993. 321～330
20 王清印,庞彦军. 泛灰代数方程. 见:罗庆成,史开泉,王清印等. 灰色系统新方法. 北京农业出版社,1992. 316～320
21 王清印,王义闹. 泛灰代数在区间分析中的应用. 见:罗庆成,史开泉,王清印等. 灰色系统新方法. 北京:农业出版社,1993. 312～315
22 Ni Tianzhi, Wang Qingyin. Uncertainty Analysis and Its Mathematical Basic System. Warsow: IFAC/IFORS WORKSHOP SUPPORT SYSTEMS FOR DECISION AND NEGOTIATION PRACESSES, 1992.
23 孙万鹏. 灰色价值学. 济南:山东人民出版社,1991.
24 王清印. 常规型灰代数系统. 灰色系统新方法. 见:罗庆成、史开泉,王清印等. 北京:农业出版社,1992,281～285
25 王清印. 区间型灰代数系统. 见:罗庆成,史开泉,王清印等. 灰

色系统新方法.北京:农业出版社,1993:285～287

26 Wang Qingyin, Hu ziao. The Basis of the Grey Matrix. Tornoto:NAFIPS',1990.

27 王清印.区间型灰矩阵及其运算.华中理工大学学报,1992(1):165～168

28 王清印,茹世才.复Fuzzy矩阵的概念及其运算法则.西安石油学院学报,1991(6):60～64

29 王清印,左其亭.区间灰线性规划.见:罗庆成,史开泉,王清印等.灰色系统新方法.北京:农业出版社,1993,288～299

30 Wang Qingyin, Zuo Qiting. Mathematical Model of Generalized Grey Linear Programming and Solution. Warsaw: IFAC/IFORS WORKSHOP SUPPORT SYSTEMS FOR DECISION AND NEGOTIATION PRACESSES,1992.

31 祁力群.区间分析.运筹学杂志,1982(1):88～96.

32 王义闹.区间灰线性规划的几何意义.见:罗庆成,史开泉,王清印等,灰色系统新方法.北京:农业出版社,1993.300～303

33 Wang Qingyin. The Model-Making Its Caculating of Numerical Value of System. Tokyo:Preprints of Second IFSA Congress,1987.

34 左其亭,王清印.灰整数及灰整数规划模型.河北煤炭建筑工程学院学报,1992(3):

35 Wang Qingyin, Wang Fengsong. The Central Grey Target Method on The Situational Decision and Its Application. The Journal of Grey System. 1991(3):49～58

36 Wang Qingyin. A Brief Dicussion on the Situational Policy Central Grey Target. Washington: Third IFSA Congress, 1989.

37 Wang Qingyin. A Primary Inquire on The Policy-Deciding

Method for Optimal Situation. Tokyo: The 13th Interoational Sympusium on Mathemational Programming, 1988.

38 Wang Qingyin, Wang Fengsong. The Synthetix Analysis Model of the Grey System. Dalian: ICIS, 1988.

39 Wang Qingyin, Wang Fengsong. The Synthetix Analysis Model of the Grey System. Dalian: ICIS, 1992.

40 Ni Tianzhi, Wang Qingyin. Compound Fuzzy Nathematical Model For The Comprehensive Appraisal of The System Behavior and Application. Dalian: ICIS, 1992.

41 Wang Qingyin. The Grey Mathematical Model of Economic Stuation Analysis. San Francisco: Proceedings of NAFIPS' 88, 1988.

42 王光远. 未确知信息及其数学处理. 哈尔滨建筑工程学院学报, 1990, 4(4): 1～6

43 程明, 朱筱. 信息论讲座. 北京: 科学普及出版社, 1984.

44 中山大学数学力学系. 概率论及数理统计. 北京: 人民教育出版社, 1980

45 萧南槐. 大系统论. 广州: 广东人民出版社, 1986.

46 王念鹏, 岳常安. 灰导数的概念及简单灰函数的导数. 河北煤炭建筑工程学院学报, 1992(3): 68～75.