

学校的理想装备

电子图书·学校专集

校园网上的最佳资源

中外科学家发明家丛书

希尔伯特



大卫·希尔伯特（公元 1862—1943）是上世纪末、本世纪初真正伟大的数学家之一。作为一个数学思想家，他精力充沛，眼光深远，富于创造；他始终深深地埋头于他的工作，他把自己的一切都献给了他的科学事业。同时，他还多才多艺，兴趣广泛，这一切都使他成为了许多数学领域的开拓者。在作为一名数学家的同时，他还是最好的教师和领头人——他待人豁达开朗，诲人不倦，有一股不达目的绝不罢休的劲头。

“我们必须知道，我们必将知道。”是这位伟大的德国数家毕生的乐观信念。他数学理论方面的伟大成就和他从事科学事业的那种感人的品格，一直深深地影响着数学科学的发展，直到今天也依然如此。

## 一、少年时代

公元 1861 年 1 月 23 日下午一点钟，奥托·希尔伯特和他的夫人玛丽亚的第一个孩子降生在靠近东普鲁士首府哥尼斯堡的韦洛。夫妇俩给这个孩子起了个名字叫大卫。

大卫和德国国家主义几乎是同时诞生的。他来到人间前几个月，已故普鲁士国王的兄弟到哥尼斯堡进行了一次传统的朝拜，在这座古老城堡的教堂里，他带上了普鲁士皇冠。不久，俾斯麦被选中出任他的首相，并进行了欲将德国统一于普鲁士的战争。战争期间，大卫的父亲做了城市法官，全家也就随之搬到了城内。

大卫的母亲是位哥尼斯堡商人的女儿，她的名字叫玛丽亚·特里施，她可不是一个凡俗的女人，用德国人当时的说法，她可是“一个怪人”，因为作为一个女人，她不仅对哲学和天文学饶有兴趣，而且还醉心于素数。他之所以对素数饶有兴趣，是因为这些数与其他数相比，它们只能被自身和 1 整除。她对这些不凡的“第一等”的数的兴趣也遗传给了她的儿子——大卫·希尔伯特。

希尔伯特一家所居住的哥尼斯堡在一百多年前就被载入了数学史。这个城市位于普雷格尔河的两条支流之间，市内有七座颇具特色的大桥横跨普雷格尔河，其中有五座把河岸同河中的克内福弗岛相连接。这些桥的设置引出了一个著名的数学问题，这个问题涉及著名的拓扑学基础。1736 年，欧拉发表了一篇图论论文《哥尼斯堡七桥问题》解答了这个问题。于是这个哥尼斯堡桥问题作为拓扑学与现代图论的发端而在数学史上变得很有名。

在克内福弗岛上还有哥尼斯堡最伟大的居民，哲学家伊曼努尔·康德的墓地，和哥尼斯堡所有的孩子一样，大卫的成长也深受康德言论的熏陶。每年 4 月 22 日康德诞辰纪念日，大卫总是诚心诚意地陪着爱好哲学的母亲去瞻仰康德的半身像。

大卫的父亲给他的早期教诲，着重在于使他具有普鲁士的美德：准时、俭朴和讲信义；勤奋、遵纪和守法。父亲的这些教诲，一直是大卫·希尔伯特一生做人的准则。

大卫是希尔伯特家唯一的男孩，因此他的父母也就对他寄予了很高的期望，当他 6 岁的时候，有了一个妹妹，教名是伊丽萨。

在大卫 8 岁那年，普鲁士向法国宣战。没出几个月，胜利的捷报就传遍了东普鲁士的首都——法兰西皇帝已作了俘虏。在俾斯麦和他的军队准备包围巴黎的时候，大卫开始上学了，其实那时的孩子一般都是在 6 岁时上学，

他之所以晚了两年大概是父母为了让他在家里多接受一些家教，他的母亲那时因病卧床，所以他的老师很可能就是他的母亲。

他先上了皇家腓特烈预科学校的初级部，学习为进入预科学校所必备的知识，因为如果他希望成为专家、牧师或大学教授的话，那就一定得上这类预科学校。学校的课程包括阅读和书写日耳曼语和罗马语，学习拼法和品词，分析简单的句子和一些重要的圣经的故事。当然还有初步的算术，即小的数的加、减、乘、除。

3年后的一天，俄籍犹太人闵可夫斯基为了躲避沙皇政府的迫害而搬到了哥尼斯堡定居，和希尔伯特家只隔一道普累格尔河。闵可夫斯基家的三兄弟的才华都很出众，其中老三赫尔曼的数学才能尤为突出。有一堂课，老师因把一个数学问题理解错了而被“挂了黑板”，学生们异口同声地叫道：“闵可夫斯基，去帮帮忙。”与赫尔曼相比，希尔伯特小时候却从未被任何人注目过，按他自己的说法：“小时候是个笨孩子”。

希尔伯特求学的腓特烈预科学校，在哥尼斯堡是一所名牌学校，康德也毕业于此。可是它的课程设置却是因循守旧，大部分课程非要死记硬背，数学课的份量不多，其他自然科学课根本不学。这对于希尔伯特来说实在是莫大的不幸，因为他的记忆力很差，理解概念的反应也极慢，然而他十分勤奋，每当要理解一件事情时，非得通过自己的消化，彻底弄清楚不可。所以希尔伯特家族的一个成员在许多年后回忆他时说：“全家人都认为他的脑子有点怪，家里没有一个人真正了解他。她的母亲要帮他完成作文，可是他能给老师讲解数学问题”。

的确，希尔伯特已经找到了一门非常适合他的心意又能给他带来无穷乐趣的课程。正如他后来所说的，数学最合他的口胃，因为它容易，不费力，数学用不着死记硬背，他总是能自己重新推导出结果。不过，他知道，除非他先取得预科学校的毕业文凭，否则按规定是不能上大学和研究数学，从而成为数学家的。于是他眼下只好放松一下自己最喜欢的课目，而集中精力通过拉丁语和希腊语的考试。

1897年9月，预科学校的最后一学期，大卫从腓特烈预科学校转到了威利预科学校，后者很注重数学，这使他十分高兴，老师看出了他的数学天赋，给予了他悉心的辅导。他的成绩进步了——包括德语、拉丁语、希腊语、神学和物理学在内的几乎所有课程都得了“优等”；数学更好，得了最高分“特等”。在获取文凭的毕业考试中，他因笔试成绩极佳而被免去了口试，他的毕业证书背面的品行评语写着：他的勤奋”“堪称模范”，“对科学有浓厚的兴趣”，“他对数学表现出了极强烈的兴趣，而且理解深刻；他能用极好的方法掌握老师讲授的课程，并能正确地、灵活地应用它们”。

## 二、良师益友

希尔伯特很幸运。他的家乡虽然远离柏林这个文化中心，但那里的哥尼斯堡大学是一所具有优良科学传统的大学。高斯时代欧洲仅次于高斯的数学家雅可比就曾执教于此。

1880年秋，希尔伯特一上大学就发现大学的生活和预科学校的严格校规有着天壤之别，简直是要多自由就有多自由：教授们想教什么课就教什么课，学生们想学什么就选什么课上，这里不规定最少必修课的数目，不点名，平

时也不考试，直到为取得学位才考一次。意想不到的自由使许多学生把大学第一年的时间全花到了饮酒和斗剑上——这些是学生互助会的传统活动。不过，这对于 18 岁的希尔伯特来说，这种自由却为他提供了专心攻读数学的良好条件。在他心目中，对他将来的职业从没有过丝毫动摇。他父亲虽然坚持让他学习法律，可他却不顾父亲的反对报名学了数学。

当时经过 19 世纪前半叶的发展，数学这株枝叶繁茂的大树，在一些前辈数学家的精心修剪下已经形整貌美。在大学的第一学期，希尔伯特听了积分学、矩阵论和曲面的曲率论三门课，根据惯例，学生在第二学期可以转到另一所大学听讲，他选择了海德堡大学。在海德堡，希尔伯特选听了著名的拉撒路·富克斯的课，这位先生的课别具一格——他课前不大做准备，课堂上习惯于把自己置于险境：对要讲的内容现想现推，好让学生得到瞧一瞧数学思维的实际过程的一个机会。这种“现想现推”式的数学成了希尔伯特终生难于忘怀的教益。

接下去的一学期，本来允许希尔伯特再转往柏林听课，但他深深地依恋着他出生的家乡，于是他毅然返回了哥尼斯堡大学。1882 年春季，当他再次决定留在家乡的大学的时候，年仅 17 岁的赫尔曼·闵可夫斯基已在柏林学习了三个学期后回到了哥尼斯堡。

年轻的闵可夫斯基当时胸怀壮志，完全沉浸在一项很深奥的研究之中，他希望以此赢得巴黎科学院的数学科学大奖。那年巴黎科学院出榜征解的题目是：将一个数表示成 5 个平方数之和。闵可夫斯基的研究结果大大超过了原问题。科学院接收答案的截止日期到了，按照竞赛的要求，文章非译成法文不可，而闵可夫斯基的文章却来不及译成法文了。事已如此，他还是决定投搞应征。在最后一刻，他听从了大哥麦克斯的建议，在文章开头写了一个短短的附注。他在附注中解释道：因为数学问题本身强烈地吸引着他，致使他疏忽了竞赛规则；他并表示希望，科学院不会以为“假如我少给了些什么，实际我给出了更多的东西。”

1883 年春，比赛揭晓后，刚满 18 岁的闵可夫斯基果然同英国著名的数学家亨利·史密斯共享了这份大奖。此情此景，希尔伯特看在眼里，喜在心头。他不顾父亲的反对，很快和这个与自己家庭背景不同的年青人成了朋友。希尔伯特比闵可夫斯基大 3 岁，两个人的性格在许多方面极不相象。闵可夫斯基十分腼腆、略有些口吃。这使他与任何一个学数学的同学很难在第一年里就建立起亲密的友谊。但是他们两个人的心是相通的，他们都深深地爱数学，而且都怀有一种深沉的乐观主义。尽管当时许多人对一般的科学抱有极度悲观的看法，认为某些问题无论如何是无法解答的。但是希尔伯特和闵可夫斯基却早已确信“每一个确定的数学问题必定能得到一个准确的答案：或者给所提问题以实际的肯定回答；或者证明问题是不可解的，因为所有企图证明它成立的努力必然失败。”

1884 年春天，年仅 25 岁的阿道夫·赫维茨从哥廷根到哥尼斯堡任副教授，他像闵可夫斯基一样，也享有数学天资早熟的盛名：在预科学校上学时，他的老师汉尼巴尔·舒伯特十分欣赏他的数学才能，所以常在星期天专门向赫维茨传授自己擅长的学问——后来人们称之为“舒伯特演算”。在舒伯特的鼓励下，赫维茨的父亲从朋友那借来钱供儿子继续上学。后来赫维茨在菲力克斯·克莱因的门下获得了博士学位。

希尔伯特发现新老师的外表“谦恭、朴实”，而“他那双闪耀着聪慧和

快意的眼睛，就像是他精神的映照”。希尔伯特和闵可夫斯基很快就与赫维茨建立了密切的关系。每天下午“准五点”，三个人必定相会“去苹果树下散步。这种学习方法对希尔伯特来说，要比钻在昏暗的教室或图书馆啃书本好了不知多少倍。

日复一日的“散步”中，他们全都埋头于讨论当前数学的实际问题，他们之间相互交换对问题新近获得的研究体会，交流彼此的想法和研究计划，他们以这种最悠然有趣的学习方式，考察着数学世界中的各个王国。赫维茨有着广泛“坚实的基础知识，又经过很好的整理，”所以他是理所当然的领头人，并使其他两位心悦诚服。从那时起，他们之间就结下了终身的友谊。

亚历山大曾对人抱怨说：“父王将会征服一切，再没有什么留给我们去攻克。”但是，希尔伯特他们没有亚历山大的担忧，因为：

数学这个世界是无穷无尽的。

### 三、从博士到讲师

希尔伯特在大学度过了整整八个学期，走完了取得博士学位的必经之路，他开始考虑该选什么题目来做他的学位论文。起初，他想研究他喜欢的连分数的一种推广，但他的博士论文导师林德曼告诉他：很不幸雅可比早就得到了这种推广。林德曼建议他做个代数不变量理论中的问题，因为这个题目的难度对志愿投考博士学位的人来说是恰到好处，既难而又有望解决。这个题目当时非常热门，希尔伯特在研究中选择了一条和一般人相信能引出结果的办法完全不同的道路。他的创造才能充分显示出他那别出心裁的证明道路。漂亮的工作成绩，使林德曼教授感到相当满意。

希尔伯特没有忘记将论文的抄件用快件寄给闵可夫斯基。他的父亲新近去世，此时他正在威斯巴登陪伴他的母亲。闵可夫斯基以极大的兴趣研读了他的论文，并在回信中高度赞扬了他的伙伴。

1884年12月11日，希尔伯特通过了口试，等待着他的最后考验是1885年2月7日，将在大学里最庄严的大厅里举行公开的晋级典礼仪式。届时，他必须面对两名正式指定的“对手”的质疑。

希尔伯特选来答辩的两个命题横跨了整个数学领地：第一个是关于用实验确定绝对电磁电阻的方法；第二个涉及到哲学。他以富有说服力的论证结束了答辩，获得了哲学博士学位。现在，希尔伯特已经迈出了他科学生涯的第一步，但仅仅是个哲学博士是没有资格给学生们讲课的，为了取得讲课资格，年轻的博士还得通过一种国家考试。

1885年5月，希尔伯特通过了考试。同年夏天，闵可夫斯基回到哥尼斯堡，取得了博士学位，紧接着他就参军服役去了。在大学晋级仪式上，闵可夫斯基的正式“对手”之一就是希尔伯特。

没有被召服兵役的希尔伯特为了弥补居住在小城市的不足，想去作一次学习旅行，赫维茨极力主张他去莱比锡找菲力克斯·克莱因。

当年克莱因虽然刚刚36岁，却已是数学界的一位传奇人物。他23岁时，在爱尔兰根当上了正教授。在就职典礼上，他发表了数学史上称作爱尔兰根纲领的演讲——他大胆地建议，把许多不同的看起来毫无干系的几何，在群的概念下加以统一和分类。

希尔伯特选听了克莱因的课，还参加了一个讨论班。这些活动给他留下

了深刻的印象。克莱因也很器重希尔伯特——他仔细地保存了希尔伯特在讨论班上提出的报告。他后来还说过：“一听希尔伯特的报告，我就知道他是一个数学方面的后起之秀。”

在莱比锡，相当多的人跟希尔伯特一样对不变量理论感兴趣。在这里，希尔伯特很快成了莱比锡数学界内的一员，他结交了几位年轻的数学家——乔治·皮克、爱德华·斯塔迪。本来克莱因特意力促斯塔迪和希尔伯特两位到南方的埃尔兰根去访问他的朋友保尔·果尔丹——当时公认的“不变量之王”。但由于某种原因，大概是希尔伯特不喜欢斯塔迪和他作伴，这趟远征并未成行。

1885年12月初，希尔伯特第一篇关于不变量的文章经克莱因提交给了科学院。

克莱因自己年轻时曾和他的朋友索弗斯·李相伴去巴黎旅行。两个人都学得了有关群论的知识，这些知识在他们的学术生涯中已经发挥了重大作用，所以克莱因总是试图把每个有培养前途的德国青年数学家送往巴黎。因为赫维茨也支持克莱因的忠告，所以在1886年3月的时候，希尔伯特便踏上了去巴黎的旅途。

在巴黎，希尔伯特不得不和那位很难相处的斯塔迪协力合作这次由克莱因建立的数学访问。因为斯塔迪也是按照克莱因的劝告，先期到了那里。

希尔伯特一安顿下来，就给克莱因写信。这封信证明他对这位教授非常之敬重。他首先极细心地打了一份草稿，措词适当而优美，然后用罗马手写体大字精心书写了一遍，而那时候他给赫维茨写信仍旧用的是歌德体，他遵照克莱因的教诲，和斯塔迪一起先后拜访了庞加莱、约当、埃尔米特等数学家。

埃尔米特知道他的年轻客人最关心不变量的课题，他就把他们的注意力引导到这个理论中最著名的，但仍悬而未决的问题上——“果尔丹问题”。这使得埃尔米特成了这些法国科学家中对希尔伯特最有吸引力的一位。

希尔伯特在巴黎一心扑在数学上，从不作观光旅行。他在走访和听课之余，用漂亮的书法编辑并抄写了他为取得讲师资格而写的论文，这件工作进展很顺利。6月底，在回哥尼斯堡的路上，希尔伯特特地到了哥廷根，向正在那里任教的克莱因汇报了在巴黎的情况。

1887年7月，希尔伯特在哥尼斯堡顺利通过了获得讲师资格的学术考试。他对自己决定留在较偏僻的哥尼斯堡任教感到满意和欣慰，因为他可以在这里与赫维茨每天去“散步”。

人的一生中，20岁到30岁是最富于科学创造力的黄金时期，对希尔伯特来说，人生差不多已经过了一半。

#### 四、果尔丹问题

希尔伯特果断地决定，作为一名讲师，他所选择的课目除了教育学生，也要教育自己。跟许多讲师不同，他还决定不教重复的课，同时，在每天去苹果林散步的那段时间，他和赫维茨为他们自己确立了一个目标：“系统地勘查”数学。

第一学期，只有选听他的不变量理论课的学生数目达到了学校规定的开课标准。第二学期，他讲授了第一学期想开设而没能开的课：行列式论和

流体力学。

1888年3月，他感到万事俱备，可以进行他期待已久的旅行了。他选好了旅行路线，使他能顺路访问21位杰出的数学家，其中有果尔丹、克莱因、许瓦尔茨、富克斯、赫尔姆霍斯、克隆尼克等。当然，他首先要去拜会的是埃尔兰根的“不变量之王”——果尔丹。

一段时期以来，希尔伯特已经熟悉了果尔丹问题；现在，他终于听到了果尔丹本人的讲述。他似乎体验到了一种过去从未有过的新境界。这个问题唤起了他那几乎无法思议的完美想象力。

正如希尔伯特本人后来所列举的那样，一个重大的富有成效的数学问题应具备下述的每一个特点：

清晰性和易懂性（“因为清楚、易于理解的问题能吸引人的兴趣。而复杂的问题使人望而却步”）；

困难的（“这才能引诱我们去搞它”）而又不是完全无从下手解决的（“免得我们劳而无功”）；

意义重大（“在通向那隐藏着的真理的曲折路径上，它是一盏指路明灯”）。

果尔丹问题使他像着魔一般怎么也放不下手。在旅行访问结束之后，希尔伯特回到了哥尼斯堡，但他的思想却终日沉浸在这一问题中，甚至在他喜爱的舞会上也没有停止思考它。

9月6日，希尔伯特给哥廷根科学会的《通讯》寄去了一份短短的注记。在这篇注记中，他完全出人意料地开辟出一条全新的路径，表明如何用统一的方法对任意个变数的代数形式建立起果尔丹定理。这个轰动世间的关于不变量系有限基存在性的证明，其基础是一条引理，即关于“模”的有限基的存在性。“模”是希尔伯特在研究克隆尼克的工作时得到的一个数学概念。这条引理如此简单，看起来极其平凡。而果尔丹的一般性定理又可以从它直接导出。这件工作是体现希尔伯特思想之精神实质的第一个例子。

即使完成了1890年的那些工作，果尔丹问题仍萦绕在他的心中。作为一名数学家，比起存在性证明来他还是更喜欢有一个实际的构造。在其后的两年间，他的工作开始发生了变化。代数构成的思想浇灌了他的心田。突然，在1892年，希尔伯特用他的结果结束了一直被人们讨论不休的不变量理论，整个理论的呼吸随之停止了。

随着希尔伯特超凡脱俗地拨开了果尔丹问题的迷雾，他开始认识了自己，也找到了他的研究方法——钻研单个的重要问题，这个问题的解决，其意义将远远超出问题本身。可是，正当大家期望希尔伯特能来重整果尔丹这个学术领域，从而使它摆脱一筹莫展的局面时，却出现了人们无论如何意想不到的情况：希尔伯特不愿再为承担上述工作而花费时日了。最初引起他兴趣的问题被解决了，就意味着他自由了。他将坚决地离开它，迎着更深奥的课程前进。

## 五、转变

紧接着的3年间，希尔伯特在学术界的地位上升了，他做了大多数年轻人在这种年纪要做的一切事情：结婚、生孩子、接受重要的任命，他还做了一项决定，这项决定改变了他的生活进程。

在德国各大学中争夺学术职衔的竞争，当了8年副教授的赫维茨接受

了苏黎世瑞士联邦技术学院正教授提名。虽然这意味着那日复一日的数学散步即将结束，但赫维茨的位置却为希尔伯特打开了希望之门。

1892年8月，教授会一致决议：由希尔伯特接任赫维茨副教授的职位。希尔伯特那经济拮据的讲师生活终于到了头。他欣喜地将此晋升的消息写信告知闵可夫斯基，同时宣布了他举行婚礼的日子。

10月12日，希尔伯特与比自己小两岁的喀梯·耶罗士举行婚礼。实际上希尔伯特和耶罗士家族有着亲戚关系。喀梯为人正直、坚强、贤惠，既体贴人又直率，还总有独创的见解，是希尔伯特理想的伴侣。

随着职务和生活中私事的变迁，希尔伯特开始表现出一种新的数学兴趣，“从现在起，我要献身于数论”这是他在完成了最后一篇关于不变量的文章后曾经告诉过闵可夫斯基的。现在，他真的转向了这个新课题。

众所周知，是高斯把数的理论置于科学之巅。他把它描绘成“一座仓库，贮藏着用之不尽的能引起人们兴趣的真理。”希尔伯特则把它看作“一幢出奇的美丽又和谐的大厦。”像高斯一样，希尔伯特被数论迷住了。但尽管他们对数论的评论相似，他们所谈论的却是数论的两种不同的版本。

高斯称赞经典的数论，它溯源于希腊，讨论存在于自然数之间的关系。其中最重要的是素数间的关系。到了高斯时代，数的概念已经远远超出了自然数的范围。高斯本人是把数论的概念从有理“域”拓展出去的第一位数学家，他认为在有理“域”中，两个数的和、差、积、还有商（这一点，跟自然数的情形不一样）仍然属于有理数域。希尔伯特所称道的正是高斯开创的数论的新发展。

现在，他使用跟他打通攻克果尔丹问题之路差不多的办法，开始了在代数数域方面的工作，他返过头来思考基本概念，直到得出解决办法。他的第一篇关于新课题的论文，给出了域内整数分解成素理想数的唯一分解定理的另一个证明。

希尔伯特一直很难安心于他的新境遇：作一个有薪水。有妻子的副教授。因为这里又有了让人欣喜的消息：林德曼已经接受了慕尼黑大学的邀请，将要离开哥尼斯堡。不久，年仅31岁的希尔伯特接任了林德曼的教授职衔，这也为闵可夫斯基由波恩返回哥尼斯堡接任希尔伯特的副教授之职带来了良机。但是直到1894年春天，闵可夫斯基才在希尔伯特的帮助下摆脱了波恩方面的阻挠，回到了哥尼斯堡。每天在苹果园中散步以及关于数论的讨论终于又重新愉快地开始了。

希尔伯特的新家万事如意，井井有条。1893年8月11日，他的第一个孩子在海滨胜地克拉兹出世了，他给儿子起名叫弗朗士。

此后几星期，希尔伯特到慕尼黑参加了德国数学会年会。这个学会是最近才由包括希尔伯特在内的一群数学家筹建起来的，其目的是为了使不同的数学分支之间有更多的交流。会上，希尔伯特提出了关于将一个域中的数分解成素理想数的两个新证明。虽然他刚刚开始发展代数数论方面的工作，但他的能力显然深深打动了其他成员。学会有一项计划，要按年发表不同数学领域的综述性文章。现在，经大家公认请希尔伯特和闵可夫斯基在两年内准备一篇数论发展现状报告。这样紧急地指定这项任务，是因为库莫尔、克隆尼克和戴德金的革命性工作极其复杂，以至当时大多数数学家依旧无法理解它。现在人们期待希尔伯特和闵可夫斯基来改变这种状况，这种期待不仅是对他们的数学能力的称颂，也是对他们具有简明和清晰的数学表达力的赞



赏。

随着闵可夫斯基在 1894 年返回哥尼斯堡，希尔伯特感到心满意足，因为再不能有更好的合作者来一起写这份年度报告了。现在，年度报告在希尔伯特心中开始成形。对一个年轻数学家来讲，干数学会分派的任务，也许是一件不受欢迎的零活，但希尔伯特并不这样认为，他已经自己的工作表明，他对把互反律推广到代数数域特别感兴趣。目前，他自愿把这些计划搁置一边，而要在写这份指定的报告时看准机会为更深入的研究打下必不可少的基础。虽然他俩不喜欢靠书本来做学问，但他却阅读了自高斯时代以来所有发表的有关数论的著作。对一切已知定理的证明，都要仔细地揣摩以估量优劣。然后，他必须去判定哪些证明中的“原理能够加以推广，对进一步的研究最为有用”。可在能够作出选择之前，进一步的研究必须先开展起来。那些一直阻碍着人们去全面评价和领悟他的前辈工作的那些思想作风方面的困难，必须予以清除。决定已经做出，这份报告应该分成两个部分：闵可夫斯基讨论有理数论；希尔伯特讨论代数数论。在 1894 年期间，希尔伯特为他所承担的那部分报告奠定了基础。

可是没过多久，这两位肝胆相照的挚友又得惜别。12 月初，希尔伯特接到世所公认德国数学界的领袖——克莱因来自哥廷根的信，信中说：“我将尽力让你取得这里的任命。”“为了我的科学团体，我需要你这样的人。因为你的研究方向，你丰富而强有力的教学思想，以及你处在富于创造活动的年龄。”“你还能产生出使我返老还童的影响。”“但是，有件事你今天就得答应我：倘若你接到任命，你将不会拒绝。”

没有记录说明希尔伯特曾考虑过拒绝，事实上，他欣喜若狂地给克莱因回信说：“我的一切努力所追求的最终目的，本希望只能在遥远的未来才能实现的夙愿，已经有了实现的可能。”“你，范围更大的影响力的环境，以及你们这所大学的光荣，都将提供一种科学上的刺激力，这对我来说最有决定意义的。”

## 六、哥廷根教授

哥廷根，是座寂静秀丽的小城市，古老的城墙至今还围绕着哥廷根的内城。哥廷根大学的科学传统为卡尔·弗里德里希·高斯所首创。高斯于 1795 年进入哥廷根大学，在他 21 岁离开大学之前，就已经完成了那篇数论杰作《算术研究》。当他年事已高时，他在数学与应用数学方面赢得了与阿基米德和牛顿相当的荣誉。

希尔伯特 1895 年 3 月来到哥廷根时，差不多刚好是高斯到达这里之后的整整 100 年。当时，这里有两位著名的数学家——克莱因和海因里奇·韦伯。

克莱因的声望吸引着世界各国的学生。他的讲演被奉为经典。因为他每次在开始讲课之前都已经为所有公式、图表和引文作好了周密的安排。讲演过程中写上黑板的东西从来不必擦掉。最后，整个黑板就包含了对讲演的内容的一个绝妙概括，每一个小方块都写得恰到好处井然有序。与之相比，希尔伯特的讲演就远不如其尽善尽美，而是不修边幅，难免错漏，有时还表现出那种忽然有所发现的不适当的冲动，但是希尔伯特惯于回顾他上一次课讲过的内容，这种类似于大学预科学校的讲课技巧是被当时其他教授瞧不起的，但是因为他的讲演充满了精采的观点，不久似乎就给许多学生造成了更

深刻的印象。

在希尔伯特讲授行列式和椭圆函数的时候，闵可夫斯基在哥尼斯堡接受了作为他朋友的继承人的职位，希尔伯特在哥廷根认真地准备着 1893 年德国数学会要求他和闵可夫斯基在两年内合作完成的年度报告，1896 年初，希尔伯特的那部分报告接近完成，手稿全部由喀梯·希尔伯特用清楚圆润的笔迹誊好付印。校样一出来就被邮往哥尼斯堡请闵可夫斯基过目。闵可夫斯基和赫维茨将全部校样极为仔细地审读后，将校正和建议接连地寄往哥廷根，这使得希尔伯特有点不耐烦了。闵可夫斯基便写信安慰他：“细致有好处。”“报告很快就完成，并将获得高度评价，请您想想这点，并以此告慰自己吧！”

报告定稿后，希尔伯特为《报告》写了引言，充分地表达了自己撰写这篇杰作的思想方法。他还在引言中强调了大数学家们对数论所表示的重视。《报告》上署明的最后日期是：1897 年 4 月 10 日。

《报告》出版后，闵可夫斯基又以最大的热忱写信祝贺：“我相信，在不久的将来，您将会列入数论领域中伟大的经典学者的行列。”“同时我还要向您的夫人祝贺，她为所有数学家的妻子作出良好的榜样，这将永远留在人们的记忆之中。”

这份代数数域方面的报告，无论在哪一方面都超过了数学会成员们的期望。他们本来只要求对这门理论当前的状况作一个概述，而收到的却是一篇杰作，它简单而明了地将最近以来全部困难的发展融成了一篇优美而完整的理论。一位同时代的评论家认为，《报告》是一篇令人振奋的艺术佳作，后来有一位作者则称它是数学文献宝库中一件真正的珍品。希尔伯特在这篇报告中所作出的创造性贡献，其重要意义可以举一条定理为例来说明，它今天仍然以简称“定理 90”而闻名，这定理所包含的概念，导致了同调的发展，而同调代数在代数几何和拓扑学中都起着十分重要的作用。

希尔伯特准备《报告》时的工作，使他具备了这一领域的既精湛又全面的知识。他谨慎地但又充满信心地向前迈进着。

次年，希尔伯特又发表了题为《相对阿贝尔域理论》的文章，建立了探讨“类域”论所必需的方法和概念。如果说希尔伯特关于不变量的工作，是一项发展性的成果，则这次在代数数域方面的工作是开创性的，然而对他而言，紧接在开创之后，又在“急转弯”了。

希尔伯特教授将于 1898 至 1899 年冬讲授几何基础的预告，使学生们都感到很惊异。自从 3 年前到哥廷根以来，他对这些学生一直是“只谈数域”的，不过，这种新的兴趣也并不是完全没有先兆的。

还是在做讲师的时候，赫尔曼·维纳在一次讲座中对几何实质的抽象观点影响了希尔伯特。后来希尔伯特想：“我们必定可以用桌子、椅子和啤酒杯来代替点、线、面。”这种朴素的说法，蕴含了他现在打算提出的讲演的实质。

为了理解希尔伯特对几何学所采取的研究途径，我们必须记住，数学起初是一堆并不无严格次序的命题，这些命题或者是自明的，或者是从其他看来是自明的命题通过清楚的逻辑的方式而获得的。这种明显的准则，无保留地被应用来扩展数学知识。

希尔伯特编写了《几何基础》的讲义，这份讲义一经出版，又产生了巨大的影响。在几个月内成了最畅销的数学书，被译成了英语、法语等多种语言。那些三年多来听他谈论代数数域的学生，无不惊异地称赞着这部著作的

成功。但甚至就在他们惊讶的时候，希尔伯特又开始在另一个完全不同的数学领域里发展研究成果了。

1899年夏，他转向了一个著名的老问题——“狄里克莱原理”。这一作为几何函数论的基础的狄里克莱原理，已经提出近半个世纪了，但这时的数学家们却已把这个原理看作濒临绝境。希尔伯特遵循了导师克莱因“用新方法来解决老问题，自然，就会引出新问题”的教导，坚信严格性有助于方法的简化。

没过多久，希尔伯特就向德国数学会提出了挽救狄里克莱原理的初步尝试，他把这个尝试叫做狄里克莱原理的“复活”。整个论文包括引言在内还不到六页，却被赞誉为“妙手回春”之作。（6年以后，在哥廷根科学协会成立150周年之际，希尔伯特又回到了这个问题上，并给出了狄里克莱原理的第二个证明）。

挽救狄里克莱原理获得成功以后，希尔伯特决定于1899至1900年的冬季学期讲授变分法——在他的教授生涯中，他还是第一次开这门课。

希尔伯特在这一时期的数学兴趣，比他在哥尼斯堡当讲师以来的任何时候都要广泛。他继续研究几何学，并发表了几篇有关的论文。他还发表了一篇题为《数的概念》的文章，正是在如此丰富多采的研究活动中，希尔伯特收到了要他在1900年夏天于巴黎举行的第2次国际数学家代表大会上作主要发言的邀请。

## 七、新世纪

1900年，新世纪诱人地展现在他的面前，犹如一张白纸，一支新笔，等待他去写最精采的文章，画最美的图画。希尔伯特此时站在数学发展的最前沿，他在准备发表一篇能与这个重要时机相宜的、替纯粹数学辩护且预计新世纪数学发展方向的演说，他犹豫着该选怎样的题材。闵可夫斯基认为：“最有意义的题材，莫过于展望数学的未来，提出数学家们应当在新世纪里努力解决的问题。这样，你的讲演在往后的数十年中将成为人们议论的中心话题”。

希尔伯特一直在冥思苦想，可是直到6月份还未写出讲稿。已经发出的会议日程表中就没有了他的讲演。到了7月中旬，他才将以《数学问题》为题的讲稿清样寄给了闵可夫斯基。闵可夫斯基和赫维茨花了整整几个星期的时间，极其审慎地研究了希尔伯特的讲稿，他们从讲稿的内容以及讲的方式上都提出了建议，认为讲稿太长了，并且要他把“每个确定的数学问题都应该能得到明确的答案，或者是肯定的回答，或者是证明该问题的不可能性”的这段话，作为整个讲演稿的有力结尾。

8月8日，星期三，上午，一位38岁的数学家登上了讲坛。此人中等身体，矫健敏捷，宽广的前额引人注目，已经光秃的头顶、疏落地留着淡红色的发丝。高高的鼻梁上架着一副眼镜。不大的连鬓胡。略显散乱的唇髭下，一张丰满的大嘴，同细巧的下巴形成鲜明的对照。明亮的蓝眼睛，透过闪亮的镜片射出纯真而又坚定的目光。这位讲演者，虽然外表朴素无华，他那刚强的品格和卓越的才智所酿成的气氛，却驱走了巴黎的炎热，吸引着每一位与会者的心。

他准备了一个法文的讲稿摘要，将它分发给听众。在当时，会议并没有

规定要这样做。大家以感谢的心情等待着讲演的开始。为了照顾不很懂德语的听众，希尔伯特缓慢地、谨慎地开始了他的讲演。

在讲演中，希尔伯特强调了决定着一门科学发展方向的问题的重要性，考察了重大而富有成果的问题的特点，阐述了对于问题的“解答”的要求。然后他就提出讨论了 23 个个别的问题。他相信，这些问题的解决，必将大大推动 20 世纪数学的发展。

头 6 个问题与数学基础有关，希尔伯特认为，刚刚过去的这个世纪里最伟大的成就，乃是非欧几何的发现以及算术连续统概念的明确化。关于数学基础的 6 个问题，正是在这一观点的启发下提出的。这些问题反映出最近在几何基础方面的工作对他的强烈影响和他对公理方法的效用的巨大热情。其他问题有些是众所周知的老问题，有些则是新问题，不过它们全是选自希尔伯特本人过去、现在或将来所关心的领域。最后一个问题与其说是一个问题，不如说是对将来的一个建议。希尔伯特认为变分法这个数学领域在过去受到了不适当的忽视，他希望在下个世纪里数学家们能对这个领域给予更多的注意。他认为所提出的问题只不过是一些例子，数学科学是一个不可分割的有机整体，它的生命力在于各部分之间的联系。

在巴黎国际数学家代表大会的其余日子里，大卫·希尔伯特关于 20 世纪的数学问题吸引了整个数学界的想象力。希尔伯特的实际经验看来保证了这些问题都符合于他在讲演中所提出的标准；他的判断力则使人相信这些问题在今后的年月里一定能得到解决。由于希尔伯特的迅速提高的声望，一个数学工作者只要解决了巴黎问题中的任何一个，就可以使自己一举成名。后来，那些对于解决希尔伯特为 23 个问题作出贡献的数学家们就被称作“荣誉等级”数学家。

这时，希尔伯特已开始享有一个数学家所能享有的最高声誉。从关于不变量理论登峰造极的研究——《数论报告》和深刻、丰富的类域论计划——广泛传播影响深远的几何基础小册子——狄里克莱原理的起死回生——变分学的重要定理——巴黎问题，外国科学院纷纷选他为院士。德国政府授予他“枢密顾问”的头衔。但是希尔伯特并没有用虚伪的谦虚来自扰，而以朴素稳重的喜悦接受了这种成功。

这时，希尔伯特的双亲还健在。长期以来希尔伯特法官对儿子的事业成功一直抱有怀疑。数学有它自己特点，作为门外汉，他不可能真正地鉴赏他儿子的这些成就；但是，希尔伯特获得了许多荣誉，终于驱散了他父亲心中的疑虑。

巴黎会议之后，希尔伯特继续研究几何学，但他的大部分时间是用于探讨分析问题。但是，在 1900 至 1901 年的一个冬日，一个名叫伊凡·弗雷德霍姆的德国年轻人发表的一篇关于积分方程的论文使他认识到：弗雷德霍姆的工作比他自己在变分学方面的工作更接近于他所追求的目标，那就是从方法论的角度达到处理分析学问题的统一途径。因此，他现在毫无反悔地放弃了自己原来的计划而以巨大的热情投入积分方程的研究。

## 八、众望所归

20 世纪初，全世界数学专业的学生都受到同样的忠告：“打起背包，到哥廷根去！”

论数学，在哥廷根克莱因的讲课被人们奉为典范。他备课充分，板书清晰，他还尤其擅长于纵观全局：能在不同的问题中洞察到统一的思想，并有一种集中必要的材料来阐明其统一见解的艺术。他的观点是：学生应该自己来完成数学定理的证明，他只讲解证明方法的轮廓。学生们在课外至少得花费四倍的时间来掌握听课的内容。

相反，希尔伯特的讲课与之迥然不同。他也不能容忍数学课只是填鸭式地给学生灌输各种事实，而不去教会他们怎样提出问题和解决问题，他时常告诉学生：“问题的完善提法意味着问题已经解决了一半”。他常常以极其充分的时间来透彻解释一个问题，使得接下去的证明就显得那么自然，以致常使别人惊异地抱怨自己为什么没想到它。

他在备课时，只注重那些准备在课上提出的基本原理，而不详细准备细目。他认为：“学生们能很容易地填补上这些内容，写出一份很好的笔记。可是由于他的某些讲演的思路太新颖，学生们有时很难跟得上，即使是他的助手阿尔伯特·安德雷的讲义笔记也帮不了学生们多少忙。因为他备课方式的简略，虽然有时在课上由于细节的推错或推不出而下不了台，然而人们认为，哥廷根的数学课没人赶得上他。

他在课上时常会顺着自己的思路讲下去，也会从其他领域引出概念并指出非常好的结果和最新的工作。学生们都被他深深地吸引着：一般来说，在几年中也不可能见到这么多的数学概念和领域的。听他的课，学生们会觉得数学是“活”的。希尔伯特的讲课简炼、自然、逻辑严紧、思路清晰、观点鲜明，与克莱因的那种精心准备，百科全书式的“尽善尽美”讲演相比，多数学生更喜欢希尔伯特的课。

希尔伯特还很讲究教育学。他并不怎么看重学生的天资，而相信绝大多数的事情经过几次才能被接受。当年轻的赫尔曼·魏依尔开始教书生涯时，希尔伯特给他的难忘的忠告是：“五次，赫尔曼，要五次！”“要保持做乘法表那种最低水平的计算”“要从简单的例子开始。”这又是希尔伯特的一些最得意的准则。他自己在提出重要概念时，就总是以生动的方式寻找对照物，使学生加深理解，而又不易忘却。

哥廷根就是因为有了希尔伯特，而成了“德国数学的麦加”。

魏依尔就是慕名来到哥廷根。一开始的时候，希尔伯特所讲的大部分内容只是从他的脑子里一闪而过，但却在他面前“打开了新世界的门户”。希尔伯特的“乐观，热情，他对于科学的价值的无可动摇的信仰，以及对于简明的问题追求简明答案的推理能力的坚定信心”，这一切都对魏依尔有着不可抗拒的魅力。

魏依尔是一个除了数学还对语言有爱好的青年人，他在阅读希尔伯特的《报告》时发现希尔伯特清澈明晰的行文风格，反映着他那特有的希尔伯特式的思维方式。他后来总是把研读《报告》的那几个月说成是他一生中最幸福的日子。

1902年秋，闵可夫斯基来到哥廷根之后，希尔伯特不再感到孤单了。希尔伯特除了自己的课，还和闵可夫斯基一起主持着一个讨论班。由于闵可夫斯基已经具有了相当可观的物理学专门知识，所以这个讨论班学习了一年物理。1905年，他们决定在讨论班上研究运动物体的电动力学。闵可夫斯基是开展这项研究计划的倡导者，希尔伯特是积极的参加和真正的合作者，希尔伯特时常在把一些问题搞得更清晰，而且他永远在追求着清晰性。

讨论班的学生们都觉得这个讨论班的活动扣人心弦而且富于刺激力。他们在那里听到了有关电动力学的种种古怪有趣的论述，就在这一年，希尔伯特他们无独有偶地获得了跟爱因斯坦的狭义相对论类似的结果。但是，当时的哥廷根事先并不知道爱因斯坦的工作。

这期间，希尔伯特还在继续他的积分方程研究，为了让研究和数学保持紧密联系，他时常在讨论班上和课堂上报告他的那些还没有最后成型的结果。这些研究工作也就往往以他跟学生合作的方式继续下去了。希尔伯特后来指出，他的这些学生不断地获得更加精确的系统的理论表述，有时候还真扩展了该领域的研究范围。

1905年，匈牙利科学院突然宣布要颁发一种奖金，使整个数学界大为震惊；有一笔一万克朗的奖金将授予这样一位数学家——他在过去25年中所取得成就为数学的进步作出了巨大的贡献。为了纪念匈牙利人约翰·鲍耶，非欧几何的创始人之一，以及他的父亲沃尔夫冈·鲍耶——高斯的同学和终身密友，奖金被命名为鲍耶奖。

那时，数学界里没有人不清楚，这将在希尔伯特和亨利·庞加莱之中选一个。结果，评定委员会一致决定把鲍耶奖授予庞加莱，因为庞加莱自1879年起就开始从事数学研究了，而希尔伯特当时还只是一个预科学校的学生。但是评委会还是表示了对大卫·希尔伯特的最崇高的敬意。委员们一致决议，在那份提交给科学院的、说明他们所作选择的报告中，用和评述庞加莱工作一样的份量充分阐明了希尔伯特的贡献。

所以，身为评委会成员之一的克莱因从布达佩斯给希尔伯特写的信中说：“没有黄金，但有荣誉。”当克莱因返回哥廷根之后，他向布鲁门萨尔解释说：“这次奖金之所以落入庞加莱之手，起决定作用的因素是这个法国人已经走遍了”数学科学的整个活动范围。同时，他预言：“希尔伯特也一定会像庞加莱那样，遍历数学科学的广阔的领域的！”

克莱因的这个预言说的恰是时候，眼下，希尔伯特正在创造那项即将成为他在分析研究方面的登峰造极的成果——无穷多个变量的理论，即后来人们一般所称的“希尔伯特空间”理论。

时隔五个春秋，1910年秋，匈牙利科学院宣布了第二届鲍耶奖的得主——希尔伯特，作为评奖委员会的秘书，庞加莱准备了一份概要介绍希尔伯特工作的报告，这个报告将向匈牙利科学院提出，然后公开发表。

庞加莱在报告中强调了希尔伯特工作的几个特点：探索范围之广阔，研究问题之重要，方法之简洁、优美，叙述之清晰明了，以及对于绝对的严格性的追求。庞加莱称赞了希尔伯特的著作明快易读，同时还指出：“希尔伯特对数学科学进展的影响，不只是在于他个人的研究成就，而且还在于他所忠诚地从事的教学活动。他给予学生的帮助，使他们能够运用他所创造的方法对数学科学作出自己的贡献。”庞加莱详细介绍了希尔伯特的成就，并且试图阐明这些成就与其他数学家的成就的关系。

庞加莱为鲍耶奖写的报告发表在1911年的《数学学报》上。但当时大家谁也没有料到，庞加莱在报告中概括的内容竟将是希尔伯特对构造性数学的全部贡献了。因为就在第二年，50岁的希尔伯特关于积分方程的工作，把他带到了数学与物理的边缘领域。1912年春，希尔伯特发表了一篇有关气体分子运动论方面的基础性论文，它向人们宣告：这位数学家的注意力现在已经转向了物理学。

## 九、物理学家

1908年，希尔伯特已经跟闵可夫斯基交了四分之一世纪的朋友。希尔伯特现年46岁；闵可夫斯基也44岁了。这时，闵可夫斯基正处在富有创造力的顶峰。可是到了1909年1月12日，闵可夫斯基突然患了急性阑尾炎，撒下妻子和年幼的女儿离开了人世，终年45岁。

好友闵可夫斯基的去世，给希尔伯特在人事和科学两方面造成了难以弥补的空缺。往常非常豪爽乐观的希尔伯特消失了，他变成了一个神经过敏的、精神消沉的人。“亡故者那万无一失的目光已不会在校样上停留。”希尔伯特在精神上极度的重负下工作，但他能以哲学家的冷静来忍受情感上的痛苦。

在柏林的教育部里进行再多的明智协商，也不可能找到一位替代者，替代希尔伯特从闵可夫斯基那里获得的友谊和科学上的激励。生活虽然继续下去了，但向来“高产”的希尔伯特没能在这年春天给哥廷根科学会寄有关积分方程的文章。

他和喀娣花了许多时间来陪伴闵可夫斯基夫人及其幼女，同时，他还担任起了编纂闵可夫斯基著作的总编辑，并且着手准备一篇纪念讲话，为了这篇讲话，他把一直保存着的闵可夫斯基给他的90封信全部重读了一遍，5月1日，希尔伯特在哥廷根科学会举办的专门会议上发表了这篇纪念闵可夫斯基的演说。

随后，希尔伯特试图从哥廷根大学的高年级学生和讲师中寻找闵可夫斯基的继任人。因为他非常清楚：为了自己的科学创造，必须同年轻人密切联系，并说：“我与年轻人坐在一起总能从他们身上获益。”而对那些经常与他一起散步的青年人来说，由于希尔伯特富有创造力，又能摆脱任何偏见和框框，他们称他“保持了青春的朝气”，“我们每次与他相聚，总能取得真正的收益。”

闵可夫斯基去世后，希尔伯特又重新恢复了老习惯：在数学俱乐部每周一次的聚会之后，带领一群年轻人去作长时间的散步。在与他交往的青年朋友中，有一位名叫伦纳德·纳尔逊的哲学讲师，他比希尔伯特小20岁。他们一起散步，讨论哲学、数学和逻辑学交界处的边缘知识。另一位也不是数学家，而是普朗特应用力学研究所的助理，名叫西奥多·冯·卡曼。也是在这段时期，希尔伯特开始了同理查德·库朗的情谊。

1912年春，希尔伯特的老朋友、物理学家阿诺德·索米菲尔德应希尔伯特的请求，让他的学生保尔·爱瓦尔德到哥廷根作他的新助手时，人们把爱瓦尔德当作了“希尔伯特的物理教师”来欢迎。这看来也正是希尔伯特添设这个新的助手职位的本意。他立刻给爱瓦尔德指定了许多物理学课题，这些题目都是希尔伯特本人想要了解的。

其实还是在希尔伯特做讲师期间，赫兹便证明了麦克斯韦所预言的电磁波的存在。回顾起来，希尔伯特认为现代物理的新纪元就是从那时开始的，接着便是一连串的新发现：伦琴发现X射线，居里夫妇发现放射性，汤姆森发现电子等等。在同一时期，普朗克提出了量子理论，爱因斯坦建立了狭义相对论。短短数十年间，伟大的发现如雨后春笋，数量之多，抵得上以往好几个世纪。但是作为一个数学家，他感到在物理学家的胜利中还缺少某种秩

序。虽然希尔伯特坚信公理方法可使物理摆脱混乱，但他承认：光靠数学的力量是解决不了物理问题的。

希尔伯特已经改造了数学，下一步是改造物理学。现在希尔伯特打算对另一门物理分支开展研究，使它建立在可以接受的数学基础之上。他从气体运动论转向一个新的领域，这就是初等辐射理论，在这里，物理概念同样直接引导到积分方程。在随后的两三年内，他发表了一系列论文，以线性积分方程为工具，推导了初等辐射理论的基本定理，为这些定理奠定了公理化基础，并证明了他所提出公理的相容性。希尔伯特对辐射理论的处理，实质上是为他在巴黎提出的将物理学统一成一个整体的途径建立了一个模式。

1912年夏天，庞加莱去世了，终年59岁。人们在问：“究竟谁是活着的最伟大的数学家？”而希尔伯特早已沉浸于物理学了。

1913年春天，希尔伯特召开了一个物质运动理论的讨论会，次年又要他的物理学助手组织了一个关于物质结构课题的讨论班。在讨论班上他的助手用经过提炼的，适合数学家口味的形式向他介绍了随机事件的量子力学。这年冬季，爱因斯坦获得了研究决定引力场的微分形式的10个系数的相互关系方面的结果，于11月11日至25日先后向柏林科学院提出了两篇‘广义相对论’论文；希尔伯特则用了完全不同的，更为直接的方法独立地解决了类似课题，并于同月20日向哥廷根皇家协会提交了他的论文。然而，功力悉敌并没有引起优先权的争论。希尔伯特坦然地承认广义相对论这一伟大的思想应归功于爱因斯坦，认为爱因斯坦理论的漂亮之处在于它的伟大的几何抽象。希尔伯特还在1915年颁发第3次鲍耶奖时推荐了他。

1913年8月，德国卷入了第一次世界大战。希尔伯特认为战争是愚蠢的，他这样想并且也这样说，因为指导希尔伯特一生的最高准则就是绝对的正直和诚实。其他的人们也觉得无法将德国的“粗野”行动同她在科学和艺术上的成就相协调。德国政府为了对付这种舆论，策划了一个“告文明世界”的宣言，要它的一批最著名的科学家和艺术家签名，以表示对德皇拥护，克莱因和希尔伯特在国际上的声望甚高，当然都属被邀之列。

克莱因向来是个极端的爱国主义者，他对宣言的内容不作任何怀疑而签上了名；希尔伯特则从头到尾地逐句检查了宣言的每一个句子后，因怀疑宣言上说的并非事实而拒绝签字。

1914年10月15日，《宣言》发表后，他由此而被斥为卖国贼，许多人甚至不来听他的课了，然而许多人都同情并理解希尔伯特的行动，后来连克莱因也后悔不该签名。巴黎科学院为此开除了克莱因，但仍让希尔伯特保持着头衔。

1915年战争在继续进行，一位年轻妇女埃米·娜脱来到哥廷根。她的外表和举止看起来都不像一位女性——一副粗嗓门，穿着宽松肥大的衣服，像个强健壮实的洗衣妇，但是她的某些数学学科的坚实基础，正是克莱因和希尔伯特研究广义相对论所必需的，所以他们都竭力要让她留在哥廷根。然而当时要为一位女性争取讲师资格是谈何容易呀！“女人怎能当讲师？”“难道将来大学评议会中允许女人进入？”希尔伯特力排众议地表示：“先生们，我不认为性别是不能让她当讲师的理由。大学评议会毕竟不是澡堂！”可是娜脱还是没能取得讲师的资格，希尔伯特只好自己让她留下。有些课用他的名义开，而实际上由娜脱女士主讲。

1917年，法国著名数学家加斯东·达布逝世的消息传到了哥廷根，希尔



伯特对达布的数学成就和高尚品德非常敬佩，便立即写了一篇悼文发表在哥廷根的《通讯》杂志上。一些学生中的不肖之徒竟聚到希尔伯特的住宅前，要他收回这篇悼念“敌国数学家”的文章。他严词拒绝了 this 无理要求，并向校方提出：除非校方就此事向他道歉，否则他就辞职。校方无奈之下，只得道歉。

1918 年战争结束了，一直呆在战壕里的年轻人开始回到了课堂，但是在 1919 年 11 月 8 日，希尔伯特又失去了他另外一位挚友——赫维茨。

## 十、晚年

进入 20 年代，哥廷根最重要的数学活动就要算是数学俱乐部的活动了。它每星期定期举行一次讲演集会，是一种不拘形式，没有负责人，没有会员，也不收取会费的组织，凡是具有博士学位的教授、讲师或者学生都可以自由地在集会上发表讲演。

在这样的会上，有些新参加的优秀的年轻人目睹着大名鼎鼎的希尔伯特的思考过程时，时常惊讶地发觉：许多很容易被理解的想法，希尔伯特却理解得特别慢。他常常听不懂报告人的意思，甚至有时几乎所有到会的人都出来帮他理解报告人的意思。然而希尔伯特却认为：“我之所以能在教学上做一点工作，就是因为我总觉得它特别难。在我阅读或听别人讲解某些问题时，常觉得它很难理解甚至不可能理解。这时便想，这些问题可否化简些呢？往往，我终于弄清楚了，这实际上是一个更简单的问题！”

1922 年 1 月 23 日，希尔伯特的 60 岁寿辰，德国《自然科学》周刊为希尔伯特出版了纪念专辑。专辑以希尔伯特最早的学生奥托·布鲁门萨尔的文章开头，他几乎在整整四分之一世纪的时间里对他这位“学父”进行了深入细致的观察。布鲁门萨尔在文章中概括了希尔伯特的科学生涯和个人特质：希尔伯特的研究生涯发祥于对具体问题的研究；他在科学生活中最显著的特征就是不落窠臼地继续前进，一个问题刚解决，就毫不停顿地往另一个问题进击。人们真的把他看成是一个全能的数学家，问题的解决者和纯粹思维的化身。除了布鲁门萨尔之外别的学生的文章介绍了导师从事研究的五个主要领域——代数、几何、分析、数学、物理和数学哲学。

同年，希尔伯特在一次纪念魏尔斯特拉斯的会议上，发表了著名的题为《论无限》的演说，虽然他还在为数学而奋斗着，但这位战士的健康已不如往昔了。

他仍然希望能实现他的使物理学公理化的宏愿，不过在其助手看来，他已不再是位传奇式的“伟大思想家”了。他已经开始显露出早期衰老的迹象——不易接受新事物，对不少问题抱有成见，固执己见。但即便如此，他与年轻人之间仍然保持着极密切的联系。1924 年，24 岁的冯·诺依曼对希尔伯特的物理学和证明论思想产生的浓厚的兴趣使这两位年龄相差 40 多岁的数学家一起度过了许多时光。

这段时期希尔伯特的真正合作者是贝尔奈斯。有时虽然两人因为学术观点的不一致而激烈地争论，但希尔伯特从来不让学术上的争论影响他与助手的个人关系。

1925 年，希尔伯特的健康每况愈下。他患了恶性贫血，医生预计他最多只能再活几个月。可希尔伯特乐观地认为自己的病并不严重，从没有中断过

工作，当体力不支时，他就把家里的餐厅当作讲演厅。1926年春，在病魔缠身时，他预告了关于量子力学的第一次讲演。

幸运的是，美国人研制出的新药挽救了希尔伯特的生命。恢复健康后，他又致力于数学基础的研究了。1927年，他再次访问了汉堡，总结和发展他5年前曾在这里论述，之后又一直为数学界热烈探讨的关于数学基础的思想的争论。

1928年8月，意大利数学家在筹备1912年以来的第一次正规的国际会议时，向德国的数学界发出了邀请。因为战后德国数学家一直没收到任何国际会议的邀请，所以这次许多人都不愿参加。可是希尔伯特虽然旧病复发，仍毅然率领一个由67名数学家组成的代表团出席了会议。在他看来，“为了我们无比热爱的数学科学的繁荣，我们应该这样做，并且也只能这样做。”“任何形式的限制，特别是民族的限制，都是同数学的本性不相容的。在科学研究中人为地制造民族或种族的隔阂，是对科学极端无知的表现。”“数学不分种族，……对于数学来说，整个文明世界就是一个国家。”

1930年希尔伯特达到了规定的教授退休年龄——68岁，哥廷根弥漫着期待和惋惜相交织的又苦又乐的气氛。因为1925年6月克莱因的逝世和现在希尔伯特的退休结束了哥廷根老的数学体制。人们已经普遍认为，如果说已经证明库朗是新一代的克莱因，则魏依尔就是希尔伯特的理想继承人。

1929年至1930年冬季学期，希尔伯特讲授了他的“告别课程”。讲课的主题追溯到他成名的基础——不变量。这年，他还带了一名美国学生取得了博士学位。

1930年，希尔伯特获得的荣誉像雪片般飞来，其中最使他高兴的似乎来自他的故乡。哥尼斯堡市政会表决授予她著名的儿子以“荣誉市民”的称号。

荣誉市名称号只是在公开的集会上授予的。希尔伯特此时的头发差不多完全秃了，学者风度的宽阔额头跟那纤细的下巴相对照，越发比过去鲜明了；唇下的白须和小巧的上髭修剪得整齐匀称，他透过那副人们熟悉的无边眼镜注视着观众，蓝色的双眼依然锐利而深含探索之情，眼神还是那样天真烂漫。他的讲演充满了哲学味道，他以“认识自然和生命是我们最崇高的职责”开始了他的演说，演说的最后，他铿锵有力地说：“我们必须知道，我们将知道。”这位数学家在他一生的科学生涯将结束时，又一次宏亮地维护了纯粹数学。

然而，几乎就在希尔伯特作演讲的同时，有位25岁的哥德尔在一项高度创造的工作中，证明不能用数学的证明去确立数学的相容性。这说朋希尔伯特从本世纪以来一直花费着极大努力追求的目标落空了。这对希尔伯特简直就是当头一棒，顿时，他十分生气和灰心。但是，紧接着他又开始尝试用建设性的方法讨论这个问题，年已古稀的他竟然还具有对自己的研究计划作重大改变的毅力，这使得人们，尤其是他的助手贝尔奈斯为之深深感动。1931年，通过进一步的研究，希尔伯特发表了两篇“超穷归纳法”方面的文章。而且，他在退休之后仍定期去大学讲课。

1933年1月，希特勒上台不久，学校接到命令：要辞去校中所有从事数学工作的纯犹太血统的人。希尔伯特一向彻底地献身于他的科学，从不允许民族的、性别的或种族的偏见渗杂进去。然而眼下，最后通牒还是落在了这里，眼看库朗、埃米·娜脱、贝尔奈斯，那么多朋友被迫离去，希尔伯特心烦意乱之极。同年夏天，哥廷根几乎只剩下他一个人了。这对希尔伯特无异

于最沉重的打击。但他努力自费留住了贝尔奈斯当他的助手。他俩合作写成了《数学基础》的书稿。在贝尔奈斯的帮助下，他指导了两个学生通过了博士考试。到此为止，已共有 69 名数学家在他的门下获得了学位。到了 1934 年春天，时局越发不利于犹太人，但希尔伯特夫妇仍旧坚持直言不讳的态度，这使得朋友们对希尔伯特夫妇的安全深为担忧，当贝尔奈斯也不得不离去之后，他们也沉默了。

1938 年，希尔伯特在住宅里举行了最后的一次生日宴会，只有几位老朋友出席，那时他夫人的眼睛正在渐渐失明。

1939 年，瑞典科学院将首次米塔格——莱福勒奖授予了希尔伯特和埃米尔·皮卡。皮卡在巴黎一次盛宴上愉快地接受瑞典科学院使者的奖品和热情的颂词。而希尔伯特只是在哥廷根的一家小客栈里一声不响地听这位使者颂词并接受了奖品。不多时，希尔伯特将那部装帧精致的 72 卷的米塔格——莱福勒《数学学报》转让给了另一位数学家。

1942 年，希尔伯特没有举行 80 寿辰的聚会。柏林科学院决定纪念希尔伯特的这次生辰，给他那本《几何基础》以特殊的荣誉。就在这项决定的当天，希尔伯特在哥廷根的大街上跌倒了，摔断了胳膊。

1943 年 2 月 14 日，希尔伯特永远地闭上了他那双深邃、智慧的眼睛，终年 81 岁。只有十来个人参加了在他起居室举行的简单的丧礼。丧礼后，他被安葬在河边的墓地，克莱因也长眠于此。

希尔伯特逝世后，《自然科学》杂志作了这样的评述：

世界上难得有一位数学家的工作不是以某种途径导源于希尔伯特的工作的。希尔伯特像是数学世界的亚历山大，在整个数学版图上，留下了他那巨大显赫的名字。诸如希尔伯特空间，希尔伯特不等式，希尔伯特变换，希尔伯特不变积分，希尔伯特不可约性定理，希尔伯特定理，希尔伯特公理，希尔伯特子群，希尔伯特类域，等等。

数学史家在研究 19 世纪和 20 世纪前半叶的数学发展时，会毫不犹豫地发现：那个时期好几个数学分支趋于严格的发展，都是极大地受惠于希尔伯特的成果。

希尔伯特一生中的最后一件重要工作虽然受到了哥德尔的工作的打击，但他为把数学从矛盾中解脱出来并使人们获得自由的观念，无疑击败了对手所主张的缚人手脚的构造主义思想。这一点连哥德尔也不得不承认。

1950 年，当美国数学会请赫尔曼·魏依尔对 20 世纪前半叶的数学历史作总结时魏依尔说：希尔伯特在巴黎数学会上提出的问题“是一张航图”，过去 50 年间，我们数学家经常按照这张图来衡量自己的进步。

到了今天，你还会在哥廷根希尔伯特墓地上空听到他永不停息的乐观主义的回响：

“我们必须知道，  
我们必将知道。”

