Chapter 2

随机变量及其分布

第二章下半部分（2019.04.15交）：

习题二2.37, 2.38, 2.39, 2.40, 2.41, 2.42, 2.44, 2.47, 2.48

37. 把三个球随机地投入三个盒子中去，每个球投入各个盒子的可能性是相同的。设随机变量X及Y分别表示投入第一个及第二个盒子中的球的个数，求二维随机变量(X, Y)的随机变量联合概率分布及边缘概率分布。

解： 随机变量X及Y的取值范围都是$\{0,1,2,3\}$，且$X+Y \le 3$。对$i = 0,1,2,3$; $j = 0,1,2,3$; $0 \le i+j \le 3$，考察联合概率$p(i,j) = P\{X = i, Y = j\}$。首先三个球随机地投入三个盒子中共有$3^3$种不同的情况；而事件$\{X = i, Y = j\}$可由以下操作完成：先从3个球中任取$i$个球投入第一个盒子中，再从其余$3-i$个球中任取$j$个球投入第二个盒子中，最后把剩余的$3-i-j$个球投入第三个盒子中，所以有

$$C_3^i \cdot C_{3-i}^j = \frac{3!}{i!j!(3-i-j)!}$$

种不同的情况。故

$$p(i,j) = \frac{3!}{i!j!(3-i-j)!} \cdot \frac{1}{3^3}.$$

由此得到二维随机变量(X, Y)的联合概率分布如下：

$X \backslash Y$	0	1	2	3
0	$\frac{1}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{27}$
1	$\frac{3}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{3}{27}$	0
2	$\frac{3}{27}$	$\frac{3}{27}$	0	0
3	$\frac{1}{27}$	0	0	0

把(X,Y)的联合概率分布表中各行的概率相加，即得X的边缘概率分布如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

把(X,Y)的联合概率分布表中各列的概率相加，即得Y的边缘概率分布如下：

Y	0	1	2	3
P	$\frac{8}{27}$	$\frac{12}{27}$	$\frac{6}{27}$	$\frac{1}{27}$

□

38. 10张卡片上分别写有数字$0,1,2,\cdots,8,9$。从这10张卡片中一次任取3张，设随机变量X与Y分别表示取出的3个数字中的最小值与最大值，求：

(1) 二维随机变量(X,Y)的联合概率分布；

(2) 随机变量X及Y的边缘概率分布；

(3) 随机变量X在$Y=8$条件下的条件概率分布以及随机变量Y在$X=2$条件下的条件概率分布。

解：

(1) 随机变量X的可能值有$0,1,\cdots,7$，随便变量Y的可能值有$2,3,\cdots,9$。二维随机变量(X,Y)的联合概率函数

$$p(i,j)=P\{X=i,Y=j\}=\frac{C_{j-i-1}^{1}}{C_{10}^{3}}=\frac{j-i-1}{120},$$

其中$i=0,1,\cdots,7$; $j=2,3,\cdots,9$; $j\geq i+2$。则二维随机变量(X,Y)的联合概率分布如下：

$X \backslash Y$	2	3	4	5	6	7	8	9
0	$\frac{1}{120}$	$\frac{2}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{5}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{7}{120}$	$\frac{8}{120}$
1	0	$\frac{1}{120}$	$\frac{2}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{5}{120}$	$\frac{6}{120}$	$\frac{7}{120}$
2	0	0	$\frac{1}{120}$	$\frac{2}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{5}{120}$	$\frac{6}{120}$
3	0	0	0	$\frac{1}{120}$	$\frac{2}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{4}{120}$	$\frac{5}{120}$
4	0	0	0	0	$\frac{1}{120}$	$\frac{2}{120}$	$\frac{3}{120}$	$\frac{4}{120}$
5	0	0	0	0	0	$\frac{1}{120}$	$\frac{2}{120}$	$\frac{3}{120}$
6	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{120}$	$\frac{2}{120}$
7	0	0	0	0	0	0	0	$\frac{1}{120}$

(2) 把(X,Y)的联合概率分布表中各行的概率相加，即得X的边缘概率分布如下：

X	0	1	2	3	4	5	6	7
$p_X(i)$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{120}$

把(X,Y)的联合概率分布表中各列的概率相加，即得Y的边缘概率分布如下：

Y	2	3	4	5	6	7	8	9
$p_Y(j)$	$\frac{1}{120}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{7}{40}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{3}{10}$

(3) 随机变量X在$Y=8$条件下的条件概率分布函数值为；

$$p_{X|Y}(0|8)=\frac{p(0,8)}{p_Y(8)}=\frac{1}{4},\qquad p_{X|Y}(1|8)=\frac{p(1,8)}{p_Y(8)}=\frac{3}{14},$$
$$p_{X|Y}(2|8)=\frac{p(2,8)}{p_Y(8)}=\frac{5}{28},\qquad p_{X|Y}(3|8)=\frac{p(3,8)}{p_Y(8)}=\frac{1}{7},$$
$$p_{X|Y}(4|8)=\frac{p(4,8)}{p_Y(8)}=\frac{3}{28},\qquad p_{X|Y}(5|8)=\frac{p(5,8)}{p_Y(8)}=\frac{1}{14},$$
$$p_{X|Y}(6|8)=\frac{p(6,8)}{p_Y(8)}=\frac{1}{28},\qquad p_{X|Y}(7|8)=\frac{p(7,8)}{p_Y(8)}=0.$$

所以随机变量X在$Y=8$条件下的条件概率分布为：

X	0	1	2	3	4	5	6
$p_{X\|Y}(i\|8)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{5}{28}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{3}{28}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{28}$

随机变量Y在$X=2$条件下的条件概率分布函数值为：

$$p_{Y|X}(2|2)=\frac{p(2,2)}{p_X(2)}=0,\qquad p_{Y|X}(3|2)=\frac{p(2,3)}{p_X(2)}=0,$$
$$p_{Y|X}(4|2)=\frac{p(2,4)}{p_X(2)}=\frac{1}{21},\qquad p_{Y|X}(5|2)=\frac{p(2,5)}{p_X(2)}=\frac{2}{21},$$
$$p_{Y|X}(6|2)=\frac{p(2,6)}{p_X(2)}=\frac{1}{7},\qquad p_{Y|X}(7|2)=\frac{p(2,7)}{p_X(2)}=\frac{4}{21},$$
$$p_{Y|X}(8|2)=\frac{p(2,8)}{p_X(2)}=\frac{5}{21},\qquad p_{Y|X}(9|2)=\frac{p(2,9)}{p_X(2)}=\frac{2}{7},$$

所以随机变量Y在$X=2$条件下的条件概率分布为：

Y	4	5	6	7	8	9
$p_{Y\|X}(j\|2)$	$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{2}{7}$

□

39. 设二维随机变量X,Y在矩形域$a\le x\le b,\ c\le y\le d$上服从均匀分布，求$(X,Y)$的联合密度及边缘概率密度。随机变量$X$与$Y$是否独立？

解：　二维连续随机变量(X,Y)在某一区域上服从均匀分布，则(X,Y)的

联合概率密度在该区域上为常量，而在该区域外为零。因此，有

$$f(x,y)=\begin{cases}C, & a\le x\le b,\ c\le y\le d,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

其中C为常数。则有

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_c^d\int_a^b Cdxdy=C(b-a)(d-c).$$

由此得

$$C=\frac{1}{(b-a)(d-c)}.$$

所以(X,Y)的联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{(b-a)(d-c)}, & a\le x\le b,\ c\le y\le d,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

当$a\le x\le b$时，有

$$f_X(x)=\int_c^d\frac{1}{(b-a)(d-c)}dy=\frac{1}{b-a},$$

所以X的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & a\le x\le b,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

当$c\le y\le d$时，有

$$f_Y(y)=\int_a^b\frac{1}{(b-a)(d-c)}dx=\frac{1}{d-c},$$

所以Y的边缘概率密度为

$$f_Y(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{d-c}, & c\le y\le d,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

因为对于任意的实数x及y都有$f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，所以随机变量X与Y是独立的。 □

40. 设二维随机变量(X,Y)的联合分布函数为

$$F(x,y)=A\left(B+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(C+\arctan\frac{y}{3}\right).$$

求：

(1) 系数A,B及C；

(2) (X,Y)的联合概率密度；

(3) 边缘分布函数及边缘概率密度，随机变量X与Y是否独立？

解：

(1) 由联合分布函数的性质得方程组

$$\begin{cases} F(+\infty,+\infty)=A\left(B+\dfrac{\pi}{2}\right)\left(C+\dfrac{\pi}{2}\right)=1, \\ F(-\infty,y)=A\left(B-\dfrac{\pi}{2}\right)\left(C+\arctan\dfrac{y}{3}\right)=0, \\ F(x,-\infty)=A\left(B+\arctan\dfrac{x}{2}\right)\left(C-\dfrac{\pi}{2}\right)=0. \end{cases}$$

解之得

$$A=\frac{1}{\pi^2},\quad B=\frac{\pi}{2},\quad C=\frac{\pi}{2}.$$

故(X,Y)的联合分布函数

$$F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3}\right).$$

(2) 求$F(x,y)$的二阶混合偏导数，即得(X,Y)的联合概率密度

$$f(x,y)=\frac{1}{\pi^2}\cdot\frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2+1}\cdot\frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{y}{3}\right)^2+1}=\frac{6}{\pi^2(x^2+4)(y^2+9)}.$$

(3) X的边缘分布函数为

$$\begin{aligned} F_X(x)=F(x,+\infty)&=\frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) \\ &=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2}. \end{aligned}$$

对x求导即得X的边缘概率密度

$$f_X(x) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{1}{2}}{\left(\frac{x}{2}\right)^2 + 1} = \frac{2}{\pi(x^2+4)}.$$

Y的边缘分布函数为

$$\begin{aligned} F_Y(y) = F(+\infty, y) &= \frac{1}{\pi^2}\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)\left(\frac{\pi}{2} + \arctan\frac{y}{3}\right) \\ &= \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{3}. \end{aligned}$$

对y求导即得Y的边缘概率密度

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{y}{3}\right)^2 + 1} = \frac{3}{\pi(y^2+9)}.$$

因为对于任意的实数x及y都有$f(x,y) = f_X(x)f_Y(y)$，所以随机变量X与Y是独立的。

□

41. 设二维随机变量(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} Ae^{-(2x+3y)}, & x > 0,\ y > 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求：

(1) 系数A；

(2) (X,Y)的联合分布函数；

(3) 边缘概率密度；

(4) 条件概率密度；

(5) (X,Y)落在区域$R: x > 0,\ y > 0,\ 2x+3y < 6$内的概率。

解:

(1) 由联合概率密度的性质

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dxdy=\int_{0}^{+\infty}\int_{0}^{+\infty}Ae^{-(2x+3y)}dxdy$$
$$=A\int_{0}^{+\infty}e^{-2x}dx\int_{0}^{+\infty}e^{-3y}dy=A\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}.$$

由此得

$$A=6.$$

(X,Y)的联合概率密度

$$f(x,y)=\begin{cases}6e^{-(2x+3y)}, & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(2) (X,Y)的联合分布函数

$$F(x,y)=\int_{-\infty}^{y}\int_{-\infty}^{x}f(s,t)dsdt.$$

分情况讨论得

i 当$x\le 0$或$y\le 0$时，有$F(x,y)=0$；

ii 当$x>0,\ y>0$时，有

$$F(x,y)=\int_{0}^{y}\int_{0}^{x}6e^{-(2s+3t)}dsdt$$
$$=6\int_{0}^{x}e^{-2s}ds\int_{0}^{y}e^{-3t}dt=(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}).$$

所以(X,Y)的联合分布函数

$$F(x,y)=\begin{cases}(1-e^{-2x})(1-e^{-3y}), & x>0,\ y>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

(3) X的边缘概率密度为

$$f_X(x)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x,y)dy.$$

分情况讨论：

i 当$x \le 0$时，有$f_X(x) = 0$；

ii 当$x > 0$时，有

$$f_X(x) = \int_0^{+\infty} 6e^{-(2x+3y)} dy = 6e^{-2x} dx \int_0^{+\infty} e^{-3y} dy = 2e^{-2x}.$$

综上可得

$$f_X(x) = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

类似可得Y的边缘概率密度

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx = \begin{cases} 3e^{-3y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

(4) 根据课本公式(2.68)得X在$Y = y$条件下的条件概率密度

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_Y(y)} = \begin{cases} 2e^{-2x}, & x > 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

根据课本公式(2.70)得Y在$X = x$条件下的条件概率密度

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = \begin{cases} 3e^{-3y}, & y > 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(5) 将区域R写为X型区域：$R = \{(x, y)|\ 0 < y < \frac{1}{3}(6 - 2x),\ 0 < x < 3\}$。所求概率为：

$$\begin{aligned} P\{(X, Y) \in R\} &= \iint_R 6e^{-(2x+3y)} dxdy \\ &= 6\int_0^3 e^{-2x} dx \int_0^{\frac{1}{3}(6-2x)} e^{-3y} dy \\ &= 2\int_0^3 (e^{-2x} - e^{-6}) dx \\ &= 1 - 7e^{-6} \approx 0.983\ . \end{aligned}$$

□

42. 设随机变量X与Y独立，X在区间[0,2]上服从均匀分布，Y服从指数分布$e(2)$，求：

(1) 二维随机变量(X,Y)的联合概率密度；

(2) 概率$P\{X \le Y\}$。

解：

(1) 已知$X \sim U[0,2]$，则有概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & 0 \le x \le 2, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

又已知$Y \sim e(2)$，则有概率密度

$$f_Y(y) = \begin{cases} 2e^{-2y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

因为X与Y独立，所以(X,Y)的联合概率密度为

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{-2y}, & 0 \le x \le 2,\ y > 0, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

(2) 因为当$x < 0$或$x > 2$时，$f(x,y) = 0$，所以有

$$P\{X \le Y\} = \iint\limits_{x \le y} f(x,y)dxdy = \iint\limits_{D} e^{-2y}dxdy,$$

其中积分域$D = \{(x,y) |\ y \ge x,\ 0 \le x \le 2\}$。由此得所求概率

$$P(X \le Y) = \int_0^2 dx \int_x^{+\infty} e^{-2y}dy = \frac{1}{4}(1 - e^{-4}) \approx 0.2454.$$

□

44. 设随机变量X与Y独立，其概率密度分别为

$$f_X(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} e^{-y}, & y > 0, \\ 0, & y \le 0. \end{cases}$$

求随机变量$Z = X + Y$的概率密度。

解： 由卷积公式

$$f_Z(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) f_Y(z-x)dx = \int_0^1 f_Y(z-x)dx.$$

做变量替换$t = z - x, (dx = -dt)$得

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{z} f_Y(t)dt.$$

考察积分区域$[z-1, z]$与$f_Y(t)$的非零区域$(0, +\infty)$的交的情况，分别讨论如下

i 当$z \le 0$时，$[z-1, z] \cap (0, +\infty) = \varnothing$，即被积函数$f_Y(t)$在积分区间上等于0，所以有$f_Z(z) = 0$；

ii 当$0 < z < 1$时，积分下限$z - 1 < 0$，把积分区间分为两个子区间$[z-1, 0]$及$[0, z]$，被积函数$f_Y(t)$在第一个子区间上等于0，而在第二个子区间上等于e^{-t}，所以有

$$f_Z(z) = \int_0^z e^{-t}dt = 1 - e^{-z}.$$

iii 当$z \ge 1$时，积分下限$z - 1 \ge 0$，所以有

$$f_Z(z) = \int_{z-1}^{z} e^{-t}dt = (e-1)e^{-z}.$$

综上所述，得到随机变量Z的概率密度

$$f_Z(z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ 1 - e^{-z}, & 0 \le z < 1, \\ (e-1)e^{-z}, & z \ge 1. \end{cases}$$

□

47. 设随机变量(X, Y)的联合概率分布为

X \ Y	0	1	2	3	4	5
0	0	0.01	0.03	0.05	0.07	0.09
1	0.01	0.02	0.04	0.05	0.06	0.08
2	0.01	0.03	0.05	0.05	0.05	0.06
3	0.01	0.02	0.04	0.06	0.06	0.05

求：

(1) $U = \max(X, Y)$的概率分布；

(2) $V = \min(X, Y)$的概率分布；

(3) $W = X + Y$的概率分布。

解：

(1) 由(X, Y)的联合概率分布易知，随机变量$U = \max(X, Y)$的可能值$u = 0, 1, 2, 3, 4, 5$。如果$U = u$，则表示X与Y中至少有一个取值

为u，而另一个取值小于或等于u。按概率加法公式，有

$$
\begin{aligned}
P\{U=0\} &= p(0,0)=0,\\
P\{U=1\} &= p(1,0)+p(1,1)+p(0,1)=0.04,\\
P\{U=2\} &= p(2,0)+p(2,1)+p(2,2)+p(0,2)+p(1,2)=0.16,\\
P\{U=3\} &= p(3,0)+p(3,1)+P(3,2)+p(3,3)\\
&\quad +p(0,3)+p(1,3)+p(2,3)=0.28,\\
P\{U=4\} &= p(0,4)+p(1,4)+p(2,4)+p(3,4)=0.24,\\
P\{U=5\} &= p(0,5)+p(1,5)+p(2,5)+p(3,5)=0.28.
\end{aligned}
$$

所以$U=\max(X,Y)$的概率分布如下：

U	1	2	3	4	5
$p_U(u)$	0.04	0.16	0.28	0.24	0.28

(2) 由(X,Y)的联合概率分布易知，随机变量$V=\min(X,Y)$的可能值$v=0,1,2,3$。如果$V=v$，则表示X与Y中至少有一个取值为V，而另一个取的值大于或等于v。按概率的加法公式，有

$$
\begin{aligned}
P\{V=0\} =&p(0,0)+p(0,1)+p(0,2)+p(0,3)+p(0,4)\\
&+p(0,5)+p(1,0)+p(2,0)+p(3,0)=0.28,\\
P\{V=1\} =&p(1,1)+p(1,2)+p(1,3)+p(1,4)+p(1,5)\\
&+p(2,1)+p(3,1)=0.30,\\
P\{V=2\} =&p(2,2)+p(2,3)+p(2,4)+p(2,5)+p(3,2)=0.25,\\
P\{V=3\} =&p(3,3)+p(3,4)+P(3,5)=0.17.
\end{aligned}
$$

所以$V=\min(X,Y)$的概率分布如下：

V	0	1	2	3
$p_V(v)$	0.28	0.30	0.25	0.17

(3) 由(X,Y)的联合概率分布易知，随机变量$W=X+Y$的可能值$\omega=0,1,2,\cdots,8$，有

$$\begin{aligned}
&P\{W=0\}=p(0,0)=0,\\
&P\{W=1\}=p(0,1)+p(1,0)=0.02,\\
&P\{W=2\}=p(0,2)+p(1,1)+p(2,0)=0.06,\\
&P\{W=3\}=p(0,3)+p(1,2)+P(2,1)+p(3,0)=0.13,\\
&P\{W=4\}=p(0,4)+p(1,3)+p(2,2)+p(3,1)=0.19,\\
&P\{W=5\}=p(0,5)+p(1,4)+p(2,3)+p(3,2)=0.24,\\
&P\{W=6\}=p(1,5)+p(2,4)+P(3,3)=0.19,\\
&P\{W=7\}=p(2,5)+p(3,4)=0.12,\\
&P\{W=8\}=p(3,5)=0.05.
\end{aligned}$$

所以$W=X+Y$的概率分布如下：

W	1	2	3	4	5	6	7	8
$p_W(\omega)$	0.02	0.06	0.13	0.19	0.24	0.19	0.12	0.05

□

48. 电子仪器由六个相互独立的部件L_{ij} $(i=1,2;\ j=1,2,3)$组成，链接方式如图2.31所示。设各个部件的使用寿命X_{ij}服从相同的指数分布$e(\lambda)$，求仪器使用寿命的概率密度。

解：　依题意得，X_{ij}的分布函数为

$$F_{ij}(x)=\begin{cases}1-e^{-\lambda x}, & x>0,\\ 0, & x\le 0.\end{cases}$$

其中$i=1,2;\ j=1,2,3$。有题目条件，第j个并联组是由两个部件L_{1j}与L_{2j}并联而成，当L_{1j}与L_{2j}都损坏时，第j个并联组才停止工作，所以第j个并联组的使用寿命

$$Y_j=\max(X_{1j},X_{2j}),\quad j=1,2,3.$$

按题意，X_{1j}, X_{2j}是独立的，故Y_j的分布函数为

$$F_j(y) = F_{1j}(y)F_{2j}(y)\begin{cases}(1-e^{-\lambda y})^2, & y>0,\\ 0, & y\le 0.\end{cases}$$

其中$j=1,2,3$。电子仪器是由三个并联组串联而成，当任一并联组停止工作时，仪器即停止工作，所以仪器的使用寿命

$$Z=\min(Y_1,Y_2,Y_3).$$

按题意，Y_1,Y_2,Y_3是相互独立的，故Z的分布函数为

$$\begin{aligned}F_Z(z) &= 1-[1-F_1(z)][1-F_2(z)][1-F_3(z)]\\ &= \begin{cases}1-[1-(1-e^{-\lambda z})^2]^3, & z>0,\\ 0, & z\le 0,\end{cases}\\ &= \begin{cases}1-e^{-3\lambda z}(2-e^{-\lambda z})^3, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}\end{aligned}$$

对z求导即得仪器使用寿命Z的概率密度

$$f_Z(z)=\begin{cases}6\lambda e^{-3\lambda z}(1-e^{-\lambda z})(2-e^{-\lambda z})^2, & z>0,\\ 0, & z\le 0.\end{cases}$$

□

作业情况：

1 本次作业大家完成得良好，但很多同学直接给出分布列，没有给出分布列的计算过程。

2 部分同学计算条件概率不是特别熟。