近世代数基础

北京师大刘绍学教授编著的教材

宿州学院数学系代数教研室作答

第一章：对称与群

§1　平面的运动群

书后练习1.1. $P_4, Ex1$

证明：因为 O 是正交矩阵，且 $\det O = -1$，所以可设

$$O = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}.$$

显然，O 有特征值 ± 1，且在 $1-\cos\theta \neq 0$ 时，属于特征值 1 的特征向量在直线

$$(1-\cos\theta)x - \sin\theta y = 0$$

上．取直线 l：$(1-\cos\theta)x - \sin\theta y = 0$．下面验证：

任意的 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$，都有 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$，$O\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta x + \sin\theta y \\ \sin\theta x - \cos\theta y \end{pmatrix}$ 关于直线 l 对称．

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 到直线 l 的距离是

$$\frac{|(1-\cos\theta)x - \sin\theta y|}{\sqrt{2-2\cos\theta}};$$

$O\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 到直线 l 的距离是

$$|\frac{(1-\cos\theta)(\cos\theta x + \sin\theta y) - \sin\theta(\sin\theta x - \cos\theta y)|}{\sqrt{2-2\cos\theta}} = \frac{|(1-\cos\theta)x - \sin\theta y|}{\sqrt{2-2\cos\theta}};$$

且 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 与 $O\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 的连线与 l 之间的斜率之积：

$$\tfrac{\sin\theta x-\cos\theta y-y}{\cos\theta x+\sin\theta y-x}\cdot\tfrac{1-\cos\theta}{sin\theta}=-1;$$

所以 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 与 $O\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 关于直线 l 对称．这时，运动 ϕ 是绕直线 l 的一个翻摺．

在 $1-\cos\theta=0$ 时，属于特征值 1 的特征向量在直线

$$\sin\theta x-(1+\cos\theta)y=0$$

上．取直线 l_1： $\sin\theta x-(1+\cos\theta)y=0$．同样可以验证：

$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 与 $O\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ 关于直线 l_1 对称．

运动 ϕ 是绕直线 l_1 的一个翻摺． □

书后练习1.2. $P_4, Ex2$

证明：任取 $\phi,\varphi,\theta\in T(M)$，要验证 $(\phi\cdot\varphi)\cdot\theta=\phi\cdot(\varphi\cdot\theta)$，只要验证：$\forall m\in M$，都有

$$[(\phi\cdot\varphi)\cdot\theta](m)=[\phi\cdot(\varphi\cdot\theta)](m).$$

事实上，$[(\phi\cdot\varphi)\cdot\theta](m)=(\phi\cdot\varphi)(\theta m)=\phi[\varphi(\theta m)]$；

$[\phi\cdot(\varphi\cdot\theta)](m)=\phi[(\varphi\cdot\theta)(m)]=\phi[\varphi(\theta m)]$；

所以 $[(\phi\cdot\varphi)\cdot\theta](m)=[\phi\cdot(\varphi\cdot\theta)](m)$．即 $(\phi\cdot\varphi)\cdot\theta=\phi\cdot(\varphi\cdot\theta)$． □

书后练习1.3. $P_4, Ex3$

解：$S(K)$ 是由：恒等运动；绕其中心转 $60°$；$120°$；$180°$；$240°$；$300°$ 的旋转；以及关于它的三条对角线；三组对边中点的连线所作的翻摺．一共是 12 个运动组成． □

§2　数域的对称

书后练习2.1. $P_8, Ex1$

证明：显然 F 是含有 0，1 的复数域 $\mathbb{C}$ 的一个子集．

任意的 $a_i+b_i\sqrt{2}\in F$，a_i，$b_i\in\mathbb{Q}$，$i=1,2$，都有：

$(a_1+b_1\sqrt{2})\pm(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1\pm a_2)+(b_1\pm b_2)\sqrt{2}\in F$；

$(a_1+b_1\sqrt{2})(a_2+b_2\sqrt{2})=(a_1a_2+2b_1b_2)+(a_1b_2+b_1a_2)\sqrt{2}\in F$；

$\frac{1}{a_1+b_1\sqrt{2}}=\frac{a_1}{a_1^2-2b_1^2}+(-\frac{b_1}{a_1^2-2b_1^2}\sqrt{2})\in F$.

即 F 对数的加法、减法和乘法是封闭的；且 $\forall 0\neq a=a_1+b_1\sqrt{2}\in F$，都有 $a^{-1}=\frac{a_1}{a_1^2-2b_1^2}+(-\frac{b_1}{a_1^2-2b_1^2}\sqrt{2})\in F$.

所以 F 是一个数域. □

书后练习2.2. $P_8, Ex2$

证明：对任意的数域 F，都有 $\mathbb{Q}\subset F$.

且显然有 $Aut(F:\mathbb{Q})\subset Aut(F)$；

下只要证明：$Aut(F)\subset Aut(F:\mathbb{Q})$. 即数域 F 的任何一个自同构都保持 $\mathbb{Q}$ 不变.

事实上：$\forall\phi\in Aut(F)$，则 $\phi(1)=1$，从而对任意的正整数 n，$\phi(n)=n$，$\phi(-n)=-n$，$\phi(n^{-1})=n^{-1}$；所以对任意的 $q=\frac{m}{n}\in\mathbb{Q}$，$m$，$n\in\mathbb{Z}$，$\mathbb{Z}$ 为整数集，都有 $\phi(\frac{m}{n})=\phi(m\cdot n^{-1})=\phi(m)\cdot\phi(n^{-1})=m\cdot n^{-1}=\frac{m}{n}$. 所以 $\phi\in Aut(F:\mathbb{Q})$. □

书后练习2.3. $P_8, Ex3$

证明: (*1*) 首先证明: 对任意的 x, $y\in\mathbb{Q}$, 若 $x+y\sqrt{2}=0$, 则 $x=y=0$.

对 x，$y\in\mathbb{Q}$ 不全为 0，则存在 $z\in\mathbb{Q}$，使得 zx，zy 都是整数，且 $(zx,\ zy)=1$. 不失一般性，假设 x，y 是不全为 0 的整数且 $(x,\ y)=1$.

由 $x+y\sqrt{2}=0$ 可知：$x^2=2y^2$.

所以 x 是偶数，可设 $x=2k$，k 为整数. 从而 $2k^2=y^2$，y 也是偶数. 这与 $(x,\ y)=1$ 矛盾. 所以 $x=y=0$.

(*2*) 同样可以证明：对任意的 x, $y\in\mathbb{Q}$, 若 $x+y\sqrt{6}=0$, 则 $x=y=0$.

事实上：只要证明对任意的整数 x，y，若 $x+y\sqrt{6}=0$，则 $x=y=0$. 不失一般性，假设 x，y 是不全为 0 的整数且 $(x,\ y)=1$.

由 $x+y\sqrt{6}=0$ 可知：$x^2=6y^2$.

所以 x 是偶数，可设 $x=2k$，k 为整数. 从而 $2k^2=3y^2$，y 也是偶数. 这与 $(x,\ y)=1$ 矛盾. 所以 $x=y=0$.

(3) 同样可以证明：对任意的 $x,\ y\in\mathbb{Q}$, 若 $x+y\sqrt{3}=0$, 则 $x=y=0$.

事实上：只要证明对任意的整数 $x,\ y$，若 $x+y\sqrt{3}=0$，则 $x=y=0$. 不失一般性，假设 $x,\ y$ 是不全为 0 的整数且 $(x,\ y)=1$.

由 $x+y\sqrt{3}=0$ 可知：$x^2=3y^2$.

所以 x 是 3 的倍数，可设 $x=3k$，k 为整数. 从而 $3k^2=y^2$，y 也是 3 的倍数. 这与 $(x,\ y)=1$ 矛盾. 所以 $x=y=0$.

(4) 再证明：对任意的 $x,\ y,\ z\in\mathbb{Q}$, 若 $x+y\sqrt{2}+z\sqrt{3}=0$, 则 $x=y=z=0$.

由 $x+y\sqrt{2}+z\sqrt{3}=0$ 可得

$$x^2=(y\sqrt{2}+z\sqrt{3})^2=2y^2+2yz\sqrt{6}+3z^2,$$
$$2y^2+3z^2-x^2+2yz\sqrt{6}=0.$$

由 (2) 的结论，知 $yz=0$，即 $y=0$ 或者 $z=0$.

若 $y=0$，则 $x+y\sqrt{2}+z\sqrt{3}=0\Leftrightarrow x+z\sqrt{3}=0$，由 (3) 的结论，$x=z=0$.

若 $z=0$，则 $x+y\sqrt{2}+z\sqrt{3}=0\Leftrightarrow x+y\sqrt{2}=0$，由 (1) 的结论，$x=y=0$.

所以由 $x+y\sqrt{2}+z\sqrt{3}=0$ 可得 $x=y=z=0$.

(5) 再证明：对任意的 $a,\ b,\ c,\ d\in\mathbb{Q}$, 若 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0$, 则 $a=b=c=d=0$.

由 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0$ 得

$$(b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6})^2=(-a)^2,$$
$$2b^2+3c^2+6d^2+4bd\sqrt{3}+6dc\sqrt{2}=a^2,$$

所以由 (4) 的结论，知 $bd=0$ 且 $dc=0$.

若 $d=0$，则 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0\Leftrightarrow a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}=0$，由 (4) 的结论，$a=b=c=0$;

若 $b=0$ 且 $c=0$，则 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0\Leftrightarrow a+d\sqrt{6}=0$，由 (2) 的结论，$a=d=0$;

所以由 $a+b\sqrt{2}+c\sqrt{3}+d\sqrt{6}=0$，可得 $a=b=c=d=0$. □

书后练习2.4. $P_8, Ex4$

证明：(*1*) 只要直接验证.

显然 $0,\ 1 \in \mathbb{Q}(i)$；

任意的 $a_k + b_k i \in \mathbb{Q}(i),\ k = 1, 2$，都有

$$(a_1 + b_1 i) \pm (a_2 + b_2 i) = (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i \in \mathbb{Q}(i);$$
$$(a_1 + b_1 i) \cdot (a_2 + b_2 i) = (a_1 a_2 - b_1 b_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2) i;$$

若 $0 \neq a_1 + b_1 i \in \mathbb{Q}(i)$，则

$$(a_1 + b_1 i)^{-1} = \tfrac{a_1}{a_1^2 + b_1^2} + (-\tfrac{b_1}{a_1^2 + b_1^2}) i \in \mathbb{Q}(i);$$

所以 $\mathbb{Q}(i)$ 是数域.

显然 $0,\ 1 \in \mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})$；

任意的 $a_k + b_k i + c_k\sqrt{5} + d_k\sqrt{5}i \in \mathbb{Q}(i),\ k = 1, 2$，都有

$(a_1 + b_1 i + c_1\sqrt{5} + d_1\sqrt{5}i) \pm (a_2 + b_2 i + c_2\sqrt{5} + d_2\sqrt{5}i)$
$= (a_1 \pm a_2) + (b_1 \pm b_2) i + (c_1 \pm c_2)\sqrt{5} + (c_1 \pm c_2)\sqrt{5}i \in \mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})$;
$(a_1 + b_1 i + c_1\sqrt{5} + d_1\sqrt{5}i) \cdot (a_2 + b_2 i + c_2\sqrt{5} + d_2\sqrt{5}i)$
$= (a_1 a_2 - b_1 b_2 + 5c_1 c_2 - 5d_1 d_2) + (a_1 b_2 + b_1 a_2 + 5c_1 d_2 + 5d_1 c_2) i$
$+ (a_1 c_2 + c_1 a_2 - d_1 b_2 - b_1 d_2)\sqrt{5} + (a_1 d_2 + d_1 a_2 + c_1 b_2 + b_1 c_2)\sqrt{5}i \in \mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})$;

若 $0 \neq a + bi + c\sqrt{5} + d\sqrt{5}i \in \mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})$，则

$(a + bi + c\sqrt{5} + d\sqrt{5}i)^{-1}$
$= \frac{a(a^2+5c^2+b^2+5d^2)-5c(2ac+2bd)}{(a^2+5c^2+b^2+5d^2)^2-5(2ac+2bd)^2} + \frac{5d(2ac+2bd)-b(a^2+5c^2+b^2+5d^2)}{(a^2+5c^2+b^2+5d^2)^2-5(2ac+2bd)^2} i$
$+ \frac{c(a^2+5c^2+b^2+5d^2)-a(2ac+2bd)}{(a^2+5c^2+b^2+5d^2)^2-5(2ac+2bd)^2}\sqrt{5} + \frac{d(a^2+5c^2+b^2+5d^2)+b(2ac+2bd)}{(a^2+5c^2+b^2+5d^2)^2-5(2ac+2bd)^2}\sqrt{5}i \in \mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})$;

所以 $\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})$ 是数域.

(*2*) 由 $Ex2$ 知，$Aut(F : \mathbb{Q}) = Aut(F)$.

所以任意的 $\phi \in Aut(F),\ a + bi \in \mathbb{Q}(i)$，都有 $\phi(a + bi) = a + b\phi(i)$.

即 ϕ 完全被 $\phi(i)$ 所确定.

又因为 $i \cdot i = -1$，所以 $\phi(i \cdot i) = \phi(-1) = -1$. 即 $\phi(i) \cdot \phi(i) = -1$，所以 $\phi(i) = i$ 或者 $\phi(i) = -i$.

若 $\phi(i) = i$，则

$$\begin{aligned} \phi : \mathbb{Q}(i) &\to \mathbb{Q}(i) \\ a + bi &\mapsto a + bi \end{aligned}$$

是 $\mathbb{Q}(i)$ 上的恒等映射.

若 $\phi(i)=-i$，记

$$\begin{gathered}\phi_1:\mathbb{Q}(i)\to\mathbb{Q}(i)\\ a+bi\mapsto a-bi\end{gathered}$$

是 $\mathbb{Q}(i)$ 上的自同构.

所以 $Aut(F)$ 中有两个元素，$Aut(\mathbb{Q}(i))=\{I,\ \phi_1\}$，其中 I 是 $\mathbb{Q}(i)$ 上的恒等映射.

由 $Ex2$ 知，$Aut(E:\mathbb{Q})=Aut(E)$.

所以任意的 $\phi\in Aut(E)$，$a+bi+c\sqrt{5}+d\sqrt{5}i\in\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})$，都有 $\phi(a+bi)=a+b\phi(i)+c\phi(\sqrt{5})+d\phi(\sqrt{5})\phi(i)$.

即 ϕ 完全被 $\phi(i)$ 和 $\phi(\sqrt{5})$ 所确定.

又因为 $i\cdot i=-1$，所以 $\phi(i\cdot i)=\phi(-1)=-1$. 即 $\phi(i)\cdot\phi(i)=-1$，所以 $\phi(i)=i$ 或者 $\phi(i)=-i$.

而 $\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}=5$，所以 $\phi(\sqrt{5}\cdot\sqrt{5})=\phi(5)=5$. 即 $\phi(\sqrt{5})\cdot\phi(\sqrt{5})=5$，所以 $\phi(\sqrt{5})=\sqrt{5}$ 或者 $\phi(\sqrt{5})=-\sqrt{5}$.

从而 $Aut(\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5}))$ 中可能有 4 个元素

$$\begin{gathered}I:\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})\to\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})\\ a+bi+c\sqrt{5}+d\sqrt{5}i\mapsto a+bi+c\sqrt{5}+d\sqrt{5}i;\\ \phi_1:\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})\to\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})\\ a+bi+c\sqrt{5}+d\sqrt{5}i\mapsto a-bi+c\sqrt{5}-d\sqrt{5}i;\\ \phi_2:\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})\to\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})\\ a+bi+c\sqrt{5}+d\sqrt{5}i\mapsto a+bi-c\sqrt{5}-d\sqrt{5}i;\\ \phi_3:\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})\to\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5})\\ a+bi+c\sqrt{5}+d\sqrt{5}i\mapsto a-bi-c\sqrt{5}+d\sqrt{5}i;\end{gathered}$$

且容易验证：$I,\phi_1,\phi_2,\phi_3\in Aut(\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5}))$，
所以 $Aut(\mathbb{Q}(i,\ \sqrt{5}))=\{I,\phi_1,\phi_2,\phi_3\}$.

任意 $\phi\in Aut(E:F)$，则 $\forall a\in\mathbb{Q},\phi(a)=a,\ \phi(i)=i$，且 $Aut(E:F)\subset Aut(E)$，所以 $Aut(E:F)$ 中有两个元素 I,ϕ_2，即
$Aut(E:F)=\{I,\phi_2\}$. □

§3　多项式的对称

书后练习3.1. $P_{11}, Ex1$

解：$S_f = \{\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\1 & 2 & 3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\3 & 2 & 1\end{pmatrix}\}$. □

书后练习3.2. $P_{11}, Ex2$

解：含有 $x_1^3x_2$ 的项数最小的对称多项式：

$$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^3x_2 + x_2^3x_1 + x_1^3x_3 + x_3^3x_1 + x_2^3x_3 + x_3^3x_2$$

□

书后练习3.3. $P_{11}, Ex3$

证明：在方程 $f(x, y) = 0$ 确定的图形 K 上任取一点 $(a,\ b)$，则 $f(a,\ b) = 0$. 而 $f(x, y)$ 是对称多项式，所以 $f(x, y) = f(y, x)$，从而 $f(b,\ a) = 0$. 即如果点 $(a,\ b)$ 在 K 上，则其关于直线 $x - y = 0$ 的对称点 $(b,\ a)$ 也在 K 上，所以 K 关于直线 $x - y = 0$ 对称. □

书后练习3.4. $P_{11}, Ex4$

证明：显然 E 中含有 $\pm\sqrt{2}$，包含多项式 $f = x^2 - 2$ 的全部根. E 是数域.

下面只要证明：E 是含有多项式 $f = x^2 - 2$ 的全部根的最小数域. 即：如果数域 F 中含有 $\pm\sqrt{2}$，则 $E \subset F$.

事实上：由于 F 是数域，所以有理数域 $\mathbb{Q} \subset F$. 而 $\sqrt{2} \in F$，且 F 对数的运算封闭，从而任意的 $a,\ b \in \mathbb{Q} \subset F$，$\sqrt{2} \in F$，都有 $a + b\sqrt{2} \in F$，所以 $E \subset F$. 所以 E 是包含 $\pm\sqrt{2}$ 的最小数域. 即 E 是多项式 $f = x^2 - 2$ 的分裂域. □