14.4 隐函数

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 对于 $f(x,y)=x^2+y^2-1$. 从方程 $f(x,y)=0$, 即 $x^2+y^2=1$, 可以在 $I=[-1,1]$ 中确定两个值域分别包含在 $J_1=[0,1]$ 和 $J_2=[-1,0]$ 上的隐函数:

$$y=f_1(x)=\sqrt{1-x^2}\in J_1 \quad \text{和} \quad y=f_2(x)=-\sqrt{1-x^2}\in J_2.$$

例 2 设有方程 $y^2-2y+\sin x=0$. 判断方程在哪些点存在隐函数 $y=y(x)$ 并且求出 y'.

解: 记 $f(x,y)=y^2-2y+\sin x$, 则 f 连续且偏导数连续. 又

$$F_x=\cos x, \qquad F_y=2(y-1).$$

因此满足方程的点中, 除了 $y=1$ 的点, 都存在连续可导的隐函数 $y=y(x)$, 且

$$y'(x)=-\frac{\cos x}{2(y-1)}.$$

□

例 3 设有方程 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$, 求由此方程所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的导数.

解: 在方程的两端对 x 求导:

$$\frac{1}{2}\frac{2x+2yy'}{x^2+y^2}=\frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\cdot\frac{xy'-y}{x^2}.$$

化简得 $x+yy'=xy'-y$. 因此解得

$$y'=\frac{x+y}{x-y}, \qquad x\neq y.$$

□

例 4 设有方程 $F(x,y,z)=0$ 在 f 连续可微且偏导数不为零. 则 x 在 y 和 z 三个变量中的每一个都可以视为是其他两个变量的隐函数: $z=z(x,y)$, $y=y(x,z)$, $x=x(y,z)$. 求 $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ 在 $\dfrac{\partial x}{\partial y}$ 以及 $\dfrac{\partial y}{\partial z}$.

解: 将 x,y 视为自变量在 z 则是 x,y 的隐函数. 在方程的两端对 x 求导:

$$\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x}=0.$$

由此解得

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}}.$$

同理, 分别将 y, z 视为自变量在 x 则是 y, z 的隐函数; 将 x, z 视为自变量在 y 则是 x, z 的隐函数, 可以得到

$$\frac{\partial y}{\partial z} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial z}}{\frac{\partial F}{\partial y}}, \qquad \frac{\partial x}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial x}}.$$

□

思考题

1. 隐函数存在性的几何意义是什么?

解: 从几何上看, 方程 $F(x, y) = 0$ 能确定隐函数 $y = f(x)$ 表现为曲面 $z = F(x, y)$ 与坐标平面 $z = 0$ 有交线 $y = f(x)$. □

习题

1. 判断方程 $\cos x + \sin y = \ln(e + xy)$ 能否在原点附近的某邻域中确定函数 $y = f(x)$ 或 $x = g(y)$.

解: 令 $F(x, y) = \cos x + \sin y - \ln(e + xy)$, 则有

(1) $F(0, 0) = \cos 0 + \sin 0 - \ln e = 0$;

(2) $F(x, y)$ 在以原点为内点的某一区域中连续;

(3) $F_x = -\sin x - \dfrac{y}{e + xy}, F_y = -\cos y - \dfrac{x}{e + xy}$ 均在上述邻域内连续, 且

$$F_x(0, 0) = 0, \quad F_y(0, 0) \neq 0,$$

由此, 由隐函数存在唯一性定理知, 方程 $\cos x + \sin y = \ln(e + xy)$ 在原点附近的某邻域中能确定隐函数 $y = f(x)$, 但不能由定理确定隐函数 $x = g(x)$. □

2. 判断方程 $x + y + z + xyz - 3\mathrm{e}^{xz} + c = 0$ 能否在点 $(0, 2, 0)$ 的某邻域中确定某一个变量是另外两个变量的函数.

解: 令 $F(x, y) = x + y + z + xyz - 3\mathrm{e}^{xz} + \mathrm{e}^{yz}$, 则有

(1) $F(0, 2, 0) = 0 + 2 + 0 + 0 - 3\mathrm{e}^0 + \mathrm{e}^0 = 0$;

(2) $F(x, y, z)$ 在以点 $(0, 2, 0)$ 为内点的某一区域中连续;

(3) $F_x = 1 + yz - 3z\mathrm{e}^{xz}, F_y = 1 + xz - z\mathrm{e}^{yz}, \quad F_z = 1 + xy - 3x\mathrm{e}^{xz} + y\mathrm{e}^{yz}$ 均在上述邻域内连续, 且

$$\begin{aligned} F_x(0, 2, 0) &= 1 + 0 - 0 = 1 \neq 0, \\ F_y(0, 2, 0) &= 1 + 0 - 0 = 1 \neq 0, \\ F_z(0, 2, 0) &= 1 + 0 - 0 + 2 = 3 \neq 0, \end{aligned}$$

由此, 由定理 14.4.3 可知, 方程 $x + y + z + xyz - 3\mathrm{e}^{xz} + c = 0$ 能在点 $(0, 2, 0)$ 的某邻域中确定某一个变量是另外两个变量的函数. □

3. 求 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, 其中 $y=y(x)$ 是由方程 $y^x=x^y$ 所确定的隐函数.

解: 记 $F(x,y)=x^y-y^x$, 则

$$F_x=yx^{y-1}-y^x\ln y,\quad F_y=x^y\ln x-xy^{x-1},$$

由此

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{F_x}{F_y} &= \frac{y^x\ln y-yx^{y-1}}{x^y\ln x-xy^{x-1}}\\ &= \frac{y^x\ln y-y^{x+1}x^{-1}}{y^x\ln x-xy^{x-1}}\\ &= \frac{y^x\left(\ln y-\dfrac{y}{x}\right)}{y_x\left(\ln x-\dfrac{x}{y}\right)}\\ &= \frac{y(x\ln y-y)}{x(y\ln x-x)}.\end{aligned}$$

□

4. 求由方程 $\mathrm{e}^{x+y}=xy$ 所确定的隐函数 $y=y(x)$ 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解: 解法一: 记 $F(x,y)=\mathrm{e}^{x+y}-xy$, 则

$$F_x=\mathrm{e}^{x+y}-y,\quad F_y=\mathrm{e}^{x+y}-x,$$

$$F_{xx}=\mathrm{e}^{x+y},\quad F_{xy}=\mathrm{e}^{x+y}-1,\quad F_{yy}=\mathrm{e}^{x+y},$$

则

$$y'=-\frac{F_x}{F_y}=\frac{y-\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y}-x},\tag{1}$$

进而有公式 14.4.8 得

$$\begin{aligned}y'' &= -\frac{F_{xx}+2F_{xy}\cdot y'+F_{yy}\cdot y'^2}{F_y}\\ &= -\frac{\mathrm{e}^{x+y}+2(\mathrm{e}^{x+y}-1)\cdot y'+\mathrm{e}^{x+y}\cdot y'^2}{\mathrm{e}^{x+y}-x}\\ &= \frac{\mathrm{e}^{x+y}(1+y')^2-2y'}{x-\mathrm{e}^{x+y}},\end{aligned}$$

其中, $y'=-\dfrac{F_x}{F_y}=\dfrac{y-\mathrm{e}^{x+y}}{\mathrm{e}^{x+y}-x}$.

解法二: 由 (1) 得, $(\mathrm{e}^{x+y}-x)y'=y-\mathrm{e}^{x+y}$, 两端对 x 求偏导, 得

$$(\mathrm{e}^{x+y}-x)y''+[\mathrm{e}^{x+y}(1+y')-1]y'=y'-\mathrm{e}^{x+y}(1+y'),$$

整理, 得

$$y''=\frac{\mathrm{e}^{x+y}(1+y')^2-2y'}{x-\mathrm{e}^{x+y}}.$$

□

5. 求由方程 $xy+yz+xz+\ln(xyz)=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数和全微分.

解: 记 $F(x,y,z)=xy+yz+xz+\ln(xyz)$, 则

$$F_x=y+z+\frac{1}{x},\quad F_y=x+z+\frac{1}{y},\quad F_z=y+x+\frac{1}{z}$$

进而得隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数为:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}=-\frac{y+z+\frac{1}{x}}{y+x+\frac{1}{z}}=-\frac{z}{x}\frac{x(y+z)+1}{z(x+y)+1},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}=-\frac{x+z+\frac{1}{y}}{y+x+\frac{1}{z}}=-\frac{z}{y}\frac{y(x+z)+1}{z(x+y)+1},$$

隐函数 $z=z(x,y)$ 的偏导数为:

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}z &= \frac{\partial z}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial z}{\partial y}\mathrm{d}y\\
&= -\frac{z}{x}\frac{x(y+z)+1}{z(x+y)+1}\mathrm{d}x-\frac{z}{y}\frac{y(x+z)+1}{z(x+y)+1}\mathrm{d}y\\
&= -\frac{z}{z(x+y)+1}\left[\frac{x(y+z)+1}{x}\mathrm{d}x+\frac{y(x+z)+1}{y}\mathrm{d}y\right].
\end{aligned}$$

□

6. 求由方程 $\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z=1$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 的二阶偏导数.

解: 记 $F(x,y,z)=\cos^2 x+\cos^2 y+\cos^2 z-1$, 则

$$\begin{aligned}
F_x &= 2\cos x(-\sin x)=-2\sin x\cos x=-\sin 2x,\\
F_y &= 2\cos y(-\sin y)=-2\sin y\cos y=-\sin 2y,\\
F_z &= 2\cos z(-\sin z)=-2\sin z\cos z=-\sin 2z,\\
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z}=-\frac{-\sin 2x}{-\sin 2z}=-\frac{\sin 2x}{\sin 2z},\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z}=-\frac{-\sin 2y}{-\sin 2z}=-\frac{\sin 2y}{\sin 2z},
\end{aligned}$$

进而得隐函数 $z=z(x,y)$ 的二阶偏导数为:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\sin 2x}{\sin 2z}\right)\\
&= -\frac{\sin 2z\cdot 2\cos 2x-\sin 2x\cdot\left(2\cos 2z\cdot\frac{\partial z}{\partial x}\right)}{\sin^2 2z}\\
&= \frac{2\sin 2x\cdot\cos 2z\cdot\left(-\frac{\sin 2x}{\sin 2z}\right)-2\sin 2z\cdot\cos 2x}{\sin^2 2z}\\
&= -\frac{2\sin^2 2x\cos 2z}{\sin^3 2z}-\frac{2\cos 2x}{\sin 2z};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\sin 2x}{\sin 2z}\right)\\
&= -\frac{\sin 2z\cdot 0-\sin 2x\cdot\left(2\cos 2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\sin^2 2z}\\
&= \frac{2\sin 2x\cdot\cos 2z\cdot\left(-\dfrac{\sin 2y}{\sin 2z}\right)}{\sin^2 2z}\\
&= -\frac{2\sin 2x\sin 2y\cos 2z}{\sin^3 2z};
\end{aligned}$$

由于 $z=z(x,y)$ 的二阶混合偏导数 $z_x(x,y)$ 和 $z_y(x,y)$ 都存在且连续, 故 $z_x(x,y)=z_y(x,y)$, 即

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=-\frac{2\sin 2x\sin 2y\cos 2z}{\sin^3 2z};$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\sin 2y}{\sin 2z}\right)\\
&= -\frac{\sin 2z\cdot 2\cos 2y-\sin 2y\cdot\left(2\cos 2z\cdot\dfrac{\partial z}{\partial y}\right)}{\sin^2 2z}\\
&= \frac{2\sin 2y\cdot\cos 2z\cdot\left(-\dfrac{\sin 2y}{\sin 2z}\right)-2\sin 2z\cdot\cos 2y}{\sin^2 2z}\\
&= -\frac{2\sin^2 2y\cos 2z}{\sin^3 2z}-\frac{2\cos 2y}{\sin 2z}.
\end{aligned}$$

□

7. 证明由方程 $x-az=\varphi(y-bz)$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足如下的微分方程 (φ 是连续可微函数):

$$a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y}=1.$$

证明. 记 $F(x,y,z)=x-az-\varphi(y-bz)$, 则

$$F_x=1,\quad F_y=-\varphi'(y-bz),\quad F_z=-a+b\varphi'(y-bz),$$

从而,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x}&=-\frac{F_x}{F_z}=\frac{1}{a-b\varphi'(y-bz)},\\
\frac{\partial z}{\partial y}&=-\frac{F_y}{F_z}=\frac{\varphi'(y-bz)}{b\varphi'(y-bz)-a},
\end{aligned}$$

因此,

$$
\begin{aligned}
a\frac{\partial z}{\partial x}+b\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{a}{a-b\varphi'(y-bz)}+\frac{b\varphi'(y-bz)}{b\varphi'(y-bz)-a}\\
&= \frac{a-b\varphi'(y-bz)}{a-b\varphi'(y-bz)}\\
&= 1.
\end{aligned}
$$

∎

8. 证明由方程 $f(x+\frac{z}{y},y+\frac{z}{x})=0$ 所确定的隐函数 $z=z(x,y)$ 满足

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy.$$

证明. 引入两个中间变量

$$u=x+\frac{z}{y},\quad v=y+\frac{z}{x},$$

则

$$F_x=f_u-\frac{z}{x^2}f_v,\quad F_y=-\frac{z}{y^2}f_u+f_v,\quad F_z=\frac{1}{y}f_u+\frac{1}{x}f_v,$$

从而,

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial z}{\partial x} &= -\frac{F_x}{F_z}=\frac{\frac{z}{x^2}f_v-f_u}{\frac{1}{y}f_u+\frac{1}{x}f_v}=\frac{yzf_v-x^2yf_u}{x(xf_u+yf_v)},\\
\frac{\partial z}{\partial y} &= -\frac{F_y}{F_z}=\frac{\frac{z}{y^2}f_u-f_v}{\frac{1}{y}f_u+\frac{1}{x}f_v}=\frac{xzf_u-xy^2f_v}{y(xf_u+yf_v)},
\end{aligned}
$$

因此,

$$
\begin{aligned}
x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y} &= \frac{yzf_v-x^2yf_u}{xf_u+yf_v}+\frac{xzf_u-xy^2f_v}{xf_u+yf_v}\\
&= \frac{(z-xy)(xf_u+yf_v)}{xf_u+yf_v}\\
&= z-xy.
\end{aligned}
$$

∎

---

9. 仿照"隐方程 $f(x,y)=0$ 所确定的曲线"定理的证明方法, 给出"隐方程 $f(x,y,z)=0$ 所确定的曲面"定理的证明.

定理 1 (隐函数的存在唯一性) 设函数 $u=F(x,y,z)$ 满足下列条件:

(1) $F(x_0,y_0,z_0)=0$;

(2) F 在以点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为内点的某一区域 $D\subset\mathbb{R}^3$ 中连续;

(3) F 在 D 内关于 z 是严格单调的.

则在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subset D$ 内, 由方程 $F(x,y,z)=0$ 可以唯一地确定一个定义在某区间 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)$ 内的 *(隐)* 函数 $z=f(x,y)$, 使得

1) $f(x_0,y_0)=z_0$, $\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)\}\subset U(P_0)$, 且

$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0,\qquad (x,y)\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha).$$

2) $y=f(x,y)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)$ 内连续.

证明. 先证 1), 即隐函数的存在唯一性.

不失一般性, 可设 $f(x,y,z)$ 在区域 D 中关于 z 是递增的, 进而可以设有 $\beta>0$, 使得

$$[x_0-\beta,x_0+\beta]\times[y_0-\beta,y_0+\beta]\times[z_0-\beta,z_0+\beta]\subset U(P_0)\subset D.$$

任意取定 $(x,y)\in[x_0-\beta,x_0+\beta]\times[y_0-\beta,y_0+\beta]$, 作为 z 的二元函数 $f(x,y,z)$ 在 $[z_0-\beta,z_0+\beta]$ 上是严格增的连续函数. 特别地, 取 $x=x_0,y=y_0$, 由条件 (2) 知

$$F(x_0,y_0,z_0-\beta)<0<F(x_0,y_0,z_0+\beta). \tag{2}$$

f 的连续性条件 (2) 表明作为 x,y 的二元函数 $f(x,y,z_0-\beta)$ 和 $f(x,y,z_0+\beta)$ 在 $[x_0-\beta,x_0+\beta]\times[y_0-\beta,y_0+\beta]$ 上也是连续的, 因此由连续函数局部保号性结合 (2) 式知, 存在正数 $\alpha\le\beta$, 使得

$$F(x,y,z_0-\beta)<0<F(x,y,z_0+\beta) \tag{3}$$

对于每一个 $(x,y)\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)$ 都成立. 由这个关系, 就可以在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)$ 上确定隐函数. 事实上, 对于每一个 $(x,y)\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)$, 因为 (3), 根据连续函数的介值性质, 知道存在唯一的一点 $z\in(z_0-\beta,z_0+\beta)$, 使得 $f(x,y,z)=0$ 在 z 依赖于 x,y, 记其为 $f(x,y)$, 因此就得到了隐函数

$$z=f(x,y),\qquad (x,y)\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha),$$

且其值域含在 $(z_0-\beta,z_0+\beta)$ 中. 则隐函数 $z=f(x,y)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\beta,y_0+\beta)\times(z_0-\beta,z_0+\beta)$ 上满足定理中的第一个结论.

再证 2), 即隐函数的连续性.

任意取定 $(\bar{x},\bar{y})\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)$, 记 $\bar{z}=f(\bar{x},\bar{y})$. 由上面的证明可以知道 $z_0-\beta<\bar{z}<z_0+\beta$, 因为 $f(\bar{x},\bar{y},\bar{z})=0$, 而 $f(\bar{x},\bar{y},z_0+\beta)>0>f(\bar{x},\bar{y},z_0-\beta)$. 因此有 $\min\{z_0+\beta-\bar{z},\bar{z}-z_0+\beta\}>0$. 对于任意的 ϵ 满足 $0<\epsilon\le\min\{z_0+\beta-\bar{z},\bar{z}-z_0+\beta\}$ 使得

$$z_0-\beta\le\bar{z}-\epsilon<\bar{z}+\epsilon\le z_0+\beta.$$

因而有

$$F(\bar{x},\bar{y},\bar{z}-\epsilon)<0<F(\bar{x},\bar{y},\bar{z}+\epsilon).$$

由保号性知存在 $(\bar{x},\bar{y})$ 的邻域 $(\bar{x}-\Delta,\bar{x}+\Delta)\times(\bar{y}-\Delta,\bar{y}+\Delta)\subset(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)$, 使得

$$F(x,y,\bar{z}-\epsilon)<0<F(x,y,\bar{z}+\epsilon)\qquad (x,y)\in(\bar{x}-\Delta,\bar{x}+\Delta)\times(\bar{y}-\Delta,\bar{y}+\Delta).$$

因此存在唯一的 z, 使得 $f(x,y,z)=0$ 在 $|z-\bar{z}|<\epsilon$. 由于 z 的唯一性, 可知 $z=f(x,y)$. 即得: 当 $|x-\bar{x}|<\Delta,|y-\bar{y}|<\Delta$ 时 $|f(x,y)-f(\bar{x},\bar{y})|<\epsilon$, 即 $f(x)$ 在 $\bar{x}$ 点连续, 由 $\bar{x}$ 的任意性, 证得 $z=f(x,y)$, 区间 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)$ 内是连续的. 因此定理的第二个结论也成立. ∎

如果假设 F_z 在 D 中连续且 $F_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$, 则可以保证定理中的条件 (3) 成立. 进而如果再假设 F_x,F_y 也连续, 则不仅隐函数存在连续, 其导数也存在.

定理 2 (隐函数的可微性) *设函数 $u=F(x,y,z)$ 满足下列条件:*

(1) $f(x_0,y_0,z_0)=0$;

(2) f 在以点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 为内点的某一区域 $D\subset\mathbb{R}^3$ 中连续;

(3) f 在 D 内存在连续的偏导数 $f_z(x,y,z)$ 且 $f_z(x_0,y_0,z_0)\neq 0$.

则在点 P_0 的某邻域 $U(P_0)\subset D$ 内, 由方程 $f(x,y,z)=0$ 可以唯一地确定一个定义在某区间 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)$ 内连续的 (隐) 函数 $z=f(x,y)$, 使得

1) $f(x_0,y_0)=z_0$, $\{(x,y,f(x,y))|(x,y)\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)\}\subset U(P_0)$, 且

$$F(x,y,f(x,y))\equiv 0,\qquad (x,y)\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha).$$

2) 假设 $f_x(x,y,z),f_y(x,y,z)$ 在 D 内存在且连续, 则隐函数 $u=f(x,y,z)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)$ 中有连续导函数, 且

$$f_x(x,y,z)=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\quad f_y(x,y,z)=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}\tag{4}$$

证明. 不妨将条件 (4) 写成 $f_z(x_0,y_0,z_0)>0$. 因为对另一种情形, 即 $f_z(x_0,y_0,z_0)<0$, 可以讨论方程 $-F(x,y,z)=0$ 的隐函数.

根据条件 (3), 既然 $f_z(x,y,z)$ 在 D 内连续, 由连续函数的局部保号性, 知存在 P_0 点的邻域 $U(P_0)=[x_0-\beta,x_0+\beta]\times[y_0-\beta,y_0+\beta]\times[z_0-\beta,z_0+\beta]\subset D$, 使得 $f_z(x,y,z)$ 在 $U(P_0)$ 内的每一点都是正的, 因此关于 z 是严格增加的. 利用定理1的结论可以得到本定理的第一个结论.

再证明隐函数的连续可微性. 设 (x,y) 在 $(x+\Delta x,y+\Delta y)\in(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)$, 所对应的函数值满足 $z=f(x,y),z+\Delta z=f(x+\Delta x,y+\Delta y)\in(z_0-\beta,z_0+\beta)$. 注意到

$$F(x,y,z)=0,\quad F(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)=0,$$

由 f_x,F_y,F_z 的连续性, 利用三元函数的中值定理, 有

$$\begin{aligned}0 &= F(x+\Delta x,y+\Delta y,z+\Delta z)-F(x,y,z)\\ &= F_x(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y,z+\theta\Delta z)\Delta x+F_y(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y,z+\theta\Delta z)\Delta y\\ &\quad +F_z(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y,z+\theta\Delta z)\Delta z,\end{aligned}$$

其中 $0<\theta<1$. 因此得到

$$\frac{\Delta z}{\Delta x}=-\frac{F_x(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y,z+\theta\Delta z)}{F_z(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y,z+\theta\Delta z)},\quad \frac{\Delta z}{\Delta y}=-\frac{F_y(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y,z+\theta\Delta z)}{F_z(x+\theta\Delta x,y+\theta\Delta y,z+\theta\Delta z)}.$$

利用 F_x,F_y,F_z 的连续性, 又 $F_z(x,y,z)$ 在 $U(P_0)$ 内不为零, 故有

$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta x}=-\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)},\quad f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta z}{\Delta y}=-\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}.$$

进而容易看出在 $f_x(x,y),f_y(x,y)$ 在 $(x_0-\alpha,x_0+\alpha)\times(y_0-\alpha,y_0+\alpha)$ 内是连续的. ∎

10. 设函数 $z=f(x,y)$ 在区域 D 上可微, 则 f 的梯度与 f 的等高线的切线正交.

证明. 设点 $P_0(x_0,y_0)$ 是区域 D 上任一点, 则

函数 $z=f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处的梯度为

$$\mathbf{grad}\ f(P_0)=(f_x(P_0),f_y(P_0)),$$

设过点 P_0 的等高线的切线方程为

$$y - y_0 = k(x - x_0),$$

其中 $k = \frac{\partial y}{\partial x}\Big|_{P_0} = -\frac{f_x(P_0)}{f_y(P_0)}$, 即过点 P_0 的等高线的切线向量为 $(1, k) = (1, -\frac{f_x(P_0)}{f_y(P_0)})$, 又有

$$\mathbf{grad}\ f(P_0) \cdot (1, k) = (f_x(P_0), f_y(P_0)) \cdot (1, -\frac{f_x(P_0)}{f_y(P_0)}) = 0,$$

因此, 点 $P_0(x_0, y_0)$ 的梯度与过点 P_0 的等高线的切线正交, 又由点 $P_0(x_0, y_0)$ 的任意性, 结论得证. $\blacksquare$