

高等学校试用教材

# 偏微分方程 差分方法

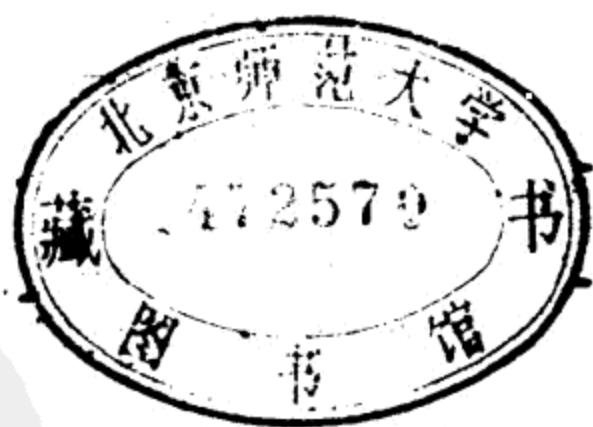
陆金甫 顾丽珍 陈景良



高等学校试用教材

541140/07  
**偏微分方程差分方法**

陆金甫 顾丽珍 陈景良



高等教育出版社

## 内 容 提 要

本书共分五章。第一章为偏微分方程差分方法引论。第二章为线性差分格式的基本概念和理论。第三章为双曲型方程的差分方法,讨论了一阶线性双曲型方程(组)、波动方程、守恒形式和非守恒形式的拟线性双曲型方程组,第四章为抛物型方程的差分方法,讨论了扩散方程、对流扩散方程和非线性抛物型方程。第五章为椭圆型方程的差分方法,讨论了线性和非线性方程、数值求解差分方程组的方法及多重网格法。

本书兼顾了偏微分方程有限差分方法的理论和实际应用,同时也注意到新近数值方法和技巧。

本书经高等工科学学校应用数学教材委员会评审通过,可作为工科院校的计算数学、应用数学专业开设“偏微分方程的有限差分方法”课程的教材。本书也可供有关专业的学生、研究生、教师以及从事科学计算的科技工作者参考。

高等学校试用教材

### 偏微分方程差分方法

陆金甫 顾丽珍 陈景良

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

北京印刷一厂印刷

开本 $850 \times 1168$  1/32 印张11.5 字数280 000

1988年2月第1版 1988年2月第1次印刷

印数 0001—3 110

ISBN 7-04-000783-5/O·307 定价 2.30 元

PDG

## 前 言

半个多世纪以来,偏微分方程的差分方法在理论上和实践上都获得了巨大的发展,目前在科学研究和工程技术的领域内有着广泛的应用,偏微分方程差分方法已成为计算数学专业和应用数学专业的一门基础课程,本书可作为这门课程的教材。

本书兼顾了偏微分方程差分方法的基本理论及实际应用两个方面,同时也注意到了近年来的新发展。对基本概念和基本理论的论述力求做到严格和容易接受,对实际问题 and 具体计算实例给予充分重视。

全书共分五章。第一章是引论,初步介绍偏微分方程差分方法的基本概念,使读者对差分方法的概况有个了解。第二章是线性差分格式理论,着重叙述了差分格式的概念,Lax 等价定理以及研究稳定性的 Fourier 方法和能量方法。后三章是讨论三类方程的差分方法。在第三章中讨论了线性双曲型方程(组)的各种差分格式及其性质,并对理论上和实用上有重要意义的拟线性双曲型方程组给予了特别的重视。第四章详细地讨论了扩散方程的差分格式,并介绍了具有重要应用的对流扩散方程、非线性方程和二维问题的差分方法。第五章讨论椭圆型方程,叙述了差分格式和性质,高精度格式以及非线性方程的解法,简单地讨论了差分格式的求解方法,对行之有效的多重网格方法作了介绍。

使用本书需要有数值分析,偏微分方程的基本知识及少量泛函分析的知识。未学过泛函分析的读者,对一些概念及定理的证明可先跳过,并不影响对具体的计算方法的掌握。

本书的初稿得到了李德元教授、陈光南副研究员和滕振寰教授审查,提出了许多宝贵意见和建议,谨此向他们表示衷心的感谢。

谢。对高等工科学学校应用数学专业教材委员会和高等教育出版社的支持和帮助,我们也表示衷心的感谢。

由于我们水平所限,时间也较匆忙,一定有疏漏、错误的地方,敬请读者批评指正。

编 者

一九八六年十月

# 目 录

|                                 |     |
|---------------------------------|-----|
| <b>第一章 有限差分方法的基本知识</b> .....    | 1   |
| § 1 差分方程 .....                  | 1   |
| § 2 截断误差 .....                  | 8   |
| § 3 收敛性 .....                   | 11  |
| § 4 稳定性 .....                   | 17  |
| § 5 差分格式的构造方法 .....             | 21  |
| <b>第二章 线性差分格式的收敛性和稳定性</b> ..... | 29  |
| § 1 线性偏微分方程组的初值问题 .....         | 29  |
| § 2 线性差分格式 .....                | 36  |
| § 3 线性常系数差分格式 .....             | 45  |
| § 4 能量不等式方法 .....               | 58  |
| § 5 关于多维问题的附注 .....             | 67  |
| <b>第三章 双曲型方程</b> .....          | 71  |
| § 1 一阶线性常系数方程(I) .....          | 71  |
| § 2 一阶线性常系数方程(II) .....         | 82  |
| § 3 一阶线性常系数方程组 .....            | 93  |
| § 4 一阶线性变系数方程及方程组 .....         | 98  |
| § 5 二阶双曲型方程 .....               | 102 |
| § 6 拟线性方程组 .....                | 116 |
| § 7 特征线方法 .....                 | 124 |
| § 8 守恒律与弱解 .....                | 128 |
| § 9 守恒型差分格式 .....               | 137 |
| § 10 气体动力学方程组 .....             | 151 |
| § 11 二维空间中的一阶双曲型方程组 .....       | 164 |
| § 12 混合初边值问题 .....              | 171 |
| <b>第四章 抛物型方程</b> .....          | 191 |

|                      |                        |            |
|----------------------|------------------------|------------|
| § 1                  | 常系数扩散方程 .....          | 191        |
| § 2                  | 扩散方程的初边值问题 .....       | 203        |
| § 3                  | 变系数扩散方程 .....          | 210        |
| § 4                  | 具有间断系数的扩散方程 .....      | 225        |
| § 5                  | Richardson 外推方法 .....  | 228        |
| § 6                  | 对流扩散方程 .....           | 233        |
| § 7                  | 非线性方程 .....            | 249        |
| § 8                  | 多维扩散方程 .....           | 263        |
| <b>第五章</b>           | <b>椭圆型方程 .....</b>     | <b>276</b> |
| § 1                  | Poisson 方程 .....       | 276        |
| § 2                  | 边界条件处理 .....           | 285        |
| § 3                  | 极值定理 .....             | 291        |
| § 4                  | 差分格式的稳定性与收敛性 .....     | 295        |
| § 5                  | 椭圆型差分方程解法 .....        | 300        |
| § 6                  | 变系数方程和非线性方程 .....      | 312        |
| § 7                  | Navier-Stokes 方程 ..... | 316        |
| § 8                  | 提高精度的方法 .....          | 326        |
| § 9                  | 特征值问题 .....            | 337        |
| § 10                 | 多重网格方法 .....           | 340        |
| <b>习题解答与提示 .....</b> |                        | <b>356</b> |
| <b>主要参考资料 .....</b>  |                        | <b>359</b> |

# 第一章 有限差分方法的基本知识

对于求解的偏微分方程定解问题,有限差分方法的主要步骤如下:利用网格线将定解区域化为离散点集;在此基础上,通过适当的途径将微分方程离散化为差分方程,并将定解条件离散化,一般把这一过程叫做构造差分格式,不同的离散化途径得到不同的差分格式;建立差分格式后,就把原来的偏微分方程定解问题化为代数方程组,通过解代数方程组,得到由定解问题的解在离散点集上的近似值组成的离散解,应用插值方法便可从离散解得到定解问题在整个定解区域上的近似解。

可见,有限差分方法有大体固定的模式,它有较强的通用性。但是,不能误认为不去了解这种逼近方法的基本知识,只是单纯模仿,便能轻易获得满意的结果。因为在应用这种逼近方法时会发生许多重要的有时还是相当困难的数学问题,包括精度、稳定性与收敛性等。

本章的目的是介绍有限差分方法的一些基本概念和构造差分格式的基本方法。

## §1 差分方程

### 1.1 对流方程与扩散方程

我们将以简单的一维对流方程与扩散方程为例,引入用差分方法求偏微分方程数值解的一些概念,说明求解的基本过程和原理,



最简单的一维对流方程形如

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (1.1)$$

其中  $c$  是常数。这是双曲型方程,可以刻画流体运动等某些物理现象。例如流体在粗细均匀和平直管道中以等速单向流动,并忽略管壁与流体的摩擦,便可从质量守恒原理导出方程(1.1),这时  $u$  是流体的密度,它是时间  $t$  和沿管道方向的坐标  $x$  的函数,常数  $c$  是流速。

在研究热的传导,粒子的扩散等问题时,常可用扩散方程来描述。最简单的一维扩散方程形如

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (1.2)$$

其中  $a > 0$  是常数。这是简单的抛物型方程。对于细长绝缘杆的热传导问题来说,在材料的密度、比热和导热系数均为常数的假设下,方程(1.2)中的  $a$  是由这些材料特性确定的常数,而  $u$  是温度,它是时间  $t$  和沿杆的方向的坐标  $x$  的函数。

现在我们考虑对流方程(1.1)的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & x \in R, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in R, \end{cases} \quad (1.3)$$

和扩散方程(1.2)的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & x \in R, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in R, \end{cases} \quad (1.4)$$

其中  $R = (-\infty, \infty)$ 。当初始函数  $f$  分别满足一定条件时,初值问题(1.3)和(1.4)都能得出精确解的表达式,这样,将便于比较差分方法得出的计算结果。

## 1.2 定解区域的离散化

利用网格线将定解区域化为离散的节点集,这是将微分方程定解问题离散化为差分方程的基础.

问题(1.3)和(1.4)的定解区域是  $x-t$  平面的上半平面,分别引入平行于  $x$  轴和平行于  $t$  轴的两族直线,将区域划分为矩形网格,这两族直线称为**网格线**,它们的交点称为**节点**或**网格点**.通常,平行于  $t$  轴的网格线取成等距的,间距  $h>0$  称为**空间步长**;平行于  $x$  轴的网格线则可取成不等距,间距大小视具体问题而定.为了简单起见,这里取平行于  $x$  轴的网格线也是等距的,间距  $\tau>0$  称为**时间步长**.所取两族网格线如下(见图 1.1);

$$x = x_j, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

$$t = t_n, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

其中  $x_j = jh, t_n = n\tau$ . 节点  $(x_j, t_n)$  常简记为  $(j, n)$ .

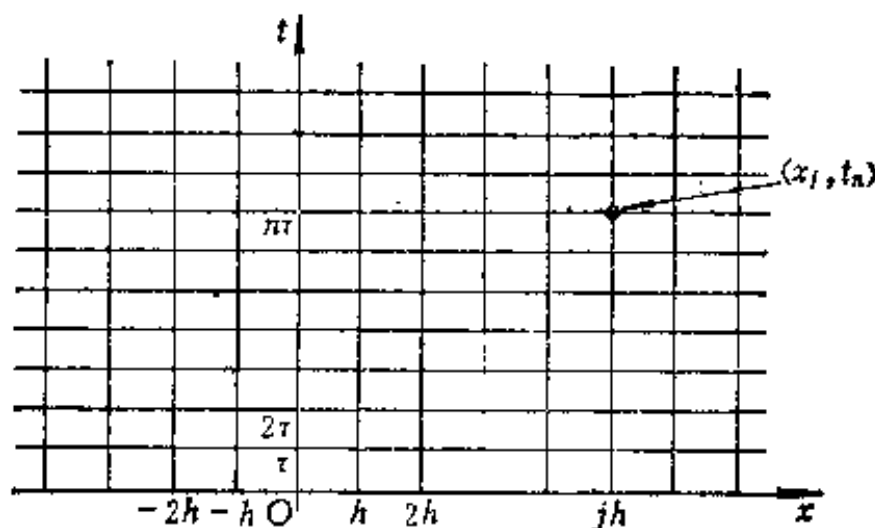


图 1.1

初值问题(1.3)或(1.4)的解  $u$  都是依赖连续变化的变量  $x$  与  $t$  的函数.为了进行数值求解,按上述方式将定解区域离散化后,我们考虑求解  $u$  在各个节点上的近似值.也就是说,把依赖连续变化变量  $x$  与  $t$  的问题归结为依赖离散变化变量  $x_j$  与  $t_n$  (或者  $j$  与  $n$ ) 的问题.

### 1.3 差分格式

我们先考虑对流方程初值问题(1.3)的一种差分解法. 设  $u$  是(1.3)的解, 对于任何节点  $(j, n)$ ,  $u$  的微商与向前差商之间成立关系式

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} = \frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) + O(\tau), \quad (1.5)$$

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{h} = \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) + O(h). \quad (1.6)$$

这两个明显的关系式提供了用代数方程逼近微分方程的一种方式. 由于  $u$  满足

$$\frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) + c \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) = 0,$$

因此从(1.5)和(1.6)得到

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} + c \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{h} = O(\tau + h). \quad (1.7)$$

为了保证逼近的精度要求, 实际上总取步长  $h$  与  $\tau$  是较小的量, 特别, 在进行理论分析的极限过程中它们都趋向于零. 这样, (1.7)式可以用方程

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0 \quad (1.8)$$

来近似地代替, 其中  $u_j^n$  表示  $u(x_j, t_n)$  的近似值. 方程(1.8)是问题(1.3)中的微分方程在任一节点  $(j, n)$  的近似方程. 将它改写成便于计算的形式, 我们得到

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\lambda(u_{j+1}^n - u_j^n), \\ j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.9)$$

这里  $\lambda = \tau/h$  称为**网格比**. (1.8)称为(1.3)中的微分方程的**(有限)差分方程**.

问题(1.3)中的初始条件的离散形式是

$$u_j^0 = f_j, j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.10)$$

其中  $f_j = f(x_j)$ .

通常,把定解问题中的微分方程的差分方程和定解条件的离散形式统称为定解问题的一个差分格式. 于是,(1.8)和(1.10)构成初值问题(1.3)的一个差分格式,简记为

$$\begin{cases} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0 \\ u_j^0 = f_j \end{cases}$$

然而,有时定解条件的离散形式是很明显的,主要是构造差分方程. 在这种情况下,常把得到的差分方程直接称为一个差分格式. 例如,对于问题(1.3),可称

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0 \quad (1.11)$$

是一个差分格式.

建立差分格式(1.11)后,因为在初始时间层(即直线  $t=0$  上的节点全体),解  $u$  的值  $u_j^0$  已知,所以可按时间层(第  $n$  层是直线  $t=t_n$  上的节点全体,  $n=1, 2, \dots$ )逐层推进,算出解  $u$  在  $n=1, 2, \dots$  各层的近似值  $u_j^n$ .

构造同一差分格式存在不同的途径,这将在本章 §5 中讨论. 而且对同一微分方程和定解条件可以建立种种不同形式的差分格式.

在(1.6)中  $u$  对  $x$  采用了向前差商,如果改为分别采用向后差商和中心差商,即利用关系式

$$\frac{u(x_j, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{h} = \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) + O(h) \quad (1.12)$$

和

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2h} = \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) + O(h^2), \quad (1.13)$$

而  $u$  对  $t$  仍利用关系式(1.5),那么我们就立即得出初值问题(1.3)

的另外两个差分格式,它们是

$$u_j^{n+1} = u_j^n - c\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n) \quad (1.14)$$

和

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{c\lambda}{2}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n). \quad (1.15)$$

基于用差商逼近微商的方式不同,我们称(1.15)为中心格式,统称(1.11)和(1.14)为偏心格式.

对于扩散方程初值问题(1.4),设 $u$ 是它的解,则由关系式(1.5)及关系式

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{h^2} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t_n) + O(h^2) \quad (1.16)$$

推出

$$\begin{aligned} \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} &= \alpha \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{h^2} \\ &= O(\tau + h^2). \end{aligned} \quad (1.17)$$

由此可建立一种差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \alpha\mu(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (1.18)$$

其中 $\mu = \tau/h^2$ 也称为网格比,它和对流方程的差分格式中的网格比 $\lambda$ 不同,是属于不同类型方程的差分格式的,因而两者并不会混淆,故一般我们也用字母 $\lambda$ 来代替字母 $\mu$ . 问题(1.4)的初始条件的离散形式仍形如(1.10),从它出发,利用(1.18)可依 $n=1, 2, \dots$ 算出解 $u$ 在各时间层上的近似值 $u_j^n$ .

#### 1.4 显式格式与隐式格式

至此已经建立的差分格式有两个共同的特征:一是格式仅涉及两个时间层,如此格式称为二显格式,采用这种格式来计算第 $n+1$ 层的 $u_j^{n+1}$ 时均只用第 $n$ 层的信息,二是从第 $n$ 层推进到第 $n+1$ 层时,格式提供了逐点计算 $u_j^{n+1}$ 的直接表达式,具有这种特征的格式称之为显式格式. 因此前面的差分格式都是二层显式格

式.

并非所有差分格式都是显式的. 在(1.16)中将  $n$  改为  $n+1$ , 而且用向后差商逼近  $u$  对  $t$  的微商, 即利用关系式

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} = \frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_{n+1}) + O(h), \quad (1.19)$$

我们得到扩散方程初值问题(1.4)的又一种差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \alpha \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0,$$

或者改写成

$$- \alpha \lambda u_{j+1}^{n+1} + (1 + 2\alpha \lambda) u_j^{n+1} - \alpha \lambda u_{j-1}^{n+1} = u_j^n, \quad (1.20)$$

其中  $\lambda = \tau/h^2$ . 这样, 我们得到的是解  $u$  在第  $n+1$  层的各个节点上的近似值  $u_j^{n+1}$  满足的一系列方程, 而不是计算  $u_j^{n+1}$  的直接公式. 此类差分格式一般运用于初边值混合问题或解  $u$  具有周期性的初值问题. 下面考虑解  $u$  具有周期性的情形.

设  $h = 1/N$ ,  $N$  是自然数, 且有

$$u(x_{j+N}, t_n) = u(x_j, t_n), \quad j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots,$$

这时只须计算  $u_j^{n+1}$ ,  $j = 0, 1, 2, \dots, N-1$ . 令

$$\mathbf{u}^n = (u_0^n, u_1^n, \dots, u_{N-1}^n)^T.$$

由差分格式(1.20)得到

$$A \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{u}^n, \quad (1.21)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 1+2\alpha\lambda & -\alpha\lambda & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\alpha\lambda \\ -\alpha\lambda & 1+2\alpha\lambda & -\alpha\lambda & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\alpha\lambda & 1+2\alpha\lambda & -\alpha\lambda \\ -\alpha\lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha\lambda & 1+2\alpha\lambda \end{bmatrix}. \quad (1.22)$$

是对称的对角占优的  $N$  阶矩阵, 因此线性代数方程组(1.21)有唯一解. 针对矩阵  $A$  的特征, 容易推导出求解方程组(1.21)的固定

算法,它与通常的追赶法只是稍有不同。

由差分格式(1.20)看到,它在  $t=(n+1)\tau$  的时间层上包含了三个网格点,如果一个差分格式在  $t=(n+1)\tau$  时间层上包含了多于一个的网格点,则称它是隐式格式。一般来说,求解隐式格式必须解一个代数方程组,如同格式(1.20)。直观地看,显式格式比隐式格式简单。但是,有些情况使用隐式格式更为有利,这种情况以后将会多次碰到。

关于对流方程初值问题(1.3)和扩散方程初值问题(1.4),已经给出的差分格式都是易导出的格式,还有其它差分格式,以后将逐步给出。

## § 2 截断误差

### 2.1 截断误差的概念

对于一个微分方程建立的各种差分格式,为了有实用意义,一个共同的基本要求是它们能够任意逼近原来的微分方程。在网格确定的条件下,不同差分格式逼近同一微分方程的程度往往是不同的,这种逼近程度一般用截断误差来描述。下面以对流方程(1.1)的差分格式(1.11)即(1.8)为例,引出截断误差的概念。

对于齐次微分方程问题,可以将所讨论的微分方程和差分格式写成

$$Lu=0$$

和

$$L_h u_i^n = 0,$$

其中  $L$  是微分算子,  $L_h$  是相应的差分算子。对于方程(1.1)和格式(1.11),微分算子  $L$  的定义是

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x},$$

相应的差分算子  $L_h$  应当由下式定义:

$$L_h u_j^n = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}.$$

然后, 设  $u$  是所讨论的微分方程的充分光滑的解, 将算子  $L$  和  $L_h$  分别作用于  $u$ , 记两者在任意的节点  $(x_j, t_n)$  处的差为  $E$ , 即

$$E = L_h u(x_j, t_n) - Lu(x_j, t_n). \quad (2.1)$$

通常, 差分格式的截断误差是指对  $E$  的估计. 因为  $u$  是微分方程的解, 有  $Lu(x_j, t_n) = 0$ , 故

$$E = L_h u(x_j, t_n). \quad (2.2)$$

由于算子  $L_h$  是算子  $L$  的近似,  $L_h u(x_j, t_n)$  一般不为零, 因此截断误差实际上就是对  $L_h u(x_j, t_n)$  的大小的估计. 截断误差越小, 说明算子  $L_h$  越近似算子  $L$ , 从而差分方程越近似微分方程.

回到方程(1.1)和格式(1.11)的具体情形,

$$\begin{aligned} Lu(x_j, t_n) &= \frac{\partial u(x_j, t_n)}{\partial t} + c \frac{\partial u(x_j, t_n)}{\partial x} = 0, \\ L_h u(x_j, t_n) &= \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} + c \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_j, t_n)}{h}. \end{aligned}$$

由此及(1.7), 差分格式(1.11)的截断误差

$$E = L_h u(x_j, t_n) = O(\tau + h).$$

类似地, 对 § 1 中的其它几个差分格式, 容易从它们的建立过程得出相应的截断误差.

我们也用“精度”一词来说明截断误差. 一般, 如果一个差分格式的截断误差  $E = O(\tau^q + h^p)$ , 就说差分格式对时间  $t$  是  $q$  阶精度的, 对空间  $x$  是  $p$  阶精度的. 特别, 当  $p = q$  时, 说差分格式是  $p$  阶精度的. 例如, 上面所引用的差分格式(1.11)是一阶精度的.

## 2.2 推导截断误差的方法



在 § 1 中的差分格式都是通过某种微商与差商的关系而建立的, 这些关系式本身可利用带余项的 Taylor 级数展开等方法推出, 由这些关系式中包含的用差商近似微商时的余项, 可得到所建立的差分格式的截断误差。

现在, 对于一个给定的差分格式, 我们可以从它出发, 利用 Taylor 级数展开推导其截断误差。我们以扩散方程 (1.2) 的差分格式 (1.18) 为例来说明。

将方程 (1.2) 和 (1.18) 分别写成  $Lu = 0$  和  $L_h u^n = 0$ , 算子  $L$  和  $L_h$  定义如下:

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$L_h u^n = \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{\tau} - a \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}.$$

设  $u$  是 (1.2) 的充分光滑的解,  $E$  是差分格式 (1.18) 的截断误差, 依截断误差的概念,

$$E = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\tau} - a \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)}{h^2} - \left\{ \frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_n) - a \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_n) \right\}.$$

在此式中, 带花括号部分为零, 其余部分代入下列在节点  $(x_i, t_n)$  的带余项的 Taylor 级数展开式:

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) + \tau \frac{\partial}{\partial t} u(x_i, t_n) + O(\tau^2),$$

$$u(x_{i+1}, t_n) = u(x_i, t_n) + h \frac{\partial}{\partial x} u(x_i, t_n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, t_n) + \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_i, t_n) + O(h^4),$$

$$u(x_{j-1}, t_n) = u(x_j, t_n) - h \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t_n) - \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_j, t_n) + O(h^4),$$

并注意到  $u$  满足方程(1.2), 我们得到

$$E = O(\tau + h^2).$$

这同我们在建立差分格式(1.18)过程中给出的结论是一致的. 这个差分格式对时间  $t$  的精度是一阶的, 对空间  $x$  的精度是二阶的.

为了提高对时间  $t$  的精度, 我们可以改用中心差商去逼近  $u$  对  $t$  的微商, 由此得出扩散方程(1.2)的另一个差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} - \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0,$$

或者写成

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} + 2\alpha\lambda(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \quad (2.3)$$

其中  $\lambda = \tau/h^2$ , 这个差分格式称为 **Richardson 格式**. 用 Taylor 级数展开容易验证这个格式的截断误差为  $O(\tau^2 + h^2)$ . 单从截断误差看, 格式(2.3)比格式(1.18)要好些. 我们看到, 差分格式(2.3)是一个三层格式, 计算第  $n+1$  层的  $u_j^{n+1}$  时要用到第  $n-1$  层的  $u_j^{n-1}$  及第  $n$  层的值. 三层格式比二层格式需要更多的存储单元, 而且计算第一层的  $u_j^1$  时需选用其它的差分格式, 这使三层格式在实际应用中受到一定的限制.

## § 3 收敛性

### 3.1 差分格式的收敛性

一个差分格式能否在实际中使用, 最终要看差分方程的解能否任意地逼近微分方程的解. 这样, 对于每一个差分格式, 人们便

从如下两个方面加以考察,一是引入收敛性的概念,考察差分格式在理论上的准确解能否任意逼近微分方程的解;二是引入稳定性的概念,考察差分格式在实际计算中的近似解能否任意逼近差分方程的解.本节讨论一下收敛性的概念.

设  $u$  是微分方程的准确解,  $u_j^n$  是相应差分方程的准确解. 如果当步长  $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$  时, 对任何  $(j, n)$  有

$$u_j^n \rightarrow u(x_j, t_n),$$

则称差分格式是收敛的.

应当注意,在这个收敛性的概念中,仅涉及差分方程准确解当步长缩小时的性态. 也就是说,不考虑差分方程实际求解过程中出现的误差,包括舍入误差等. 这当然是一种理想的简化假设,也是差分格式的收敛性概念严格区别于 §4 中的稳定性概念之所在.

我们希望得到判别差分格式收敛性的一些准则,并在使用任何差分格式之前,最好能对它的收敛性作出明确的回答. 但是,目前对很多实际问题尚没有给出这种回答.

### 3.2 收敛和不收敛举例

考虑扩散方程初值问题(1.4)的  $a=1$  的特殊情形,即

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & x \in \mathbb{R}, t > 0, \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (3.1)$$

这时,按(1.17)建立的差分格式的直接形式是

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2},$$

可改写成

$$u_j^{n+1} = (1 - 2\lambda)u_j^n + \lambda(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n), \quad (3.2)$$

这里  $\lambda = \tau/h^2$  是网格比.

现在,我们按照收敛性的概念来分析差分格式(3.2)的收敛性. 设  $u$  是初值问题(3.1)的解,  $u_j^n$  是差分格式(3.2)的解. 令  $E$

是差分格式(3.2)的截断误差,它是依赖于节点的量,记在节点 $(x_j, t_n)$ 处的截断误差为 $E_{j,n}$ .按截断误差的定义(2.1)即(2.2),

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} - \frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{h^2} = E_{j,n}. \quad (3.3)$$

利用 Taylor 级数展开,可得

$$E_{j,n} = \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_j, t_n) - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(\xi, t_n). \quad (3.4)$$

将(3.3)改写成

$$u(x_j, t_{n+1}) - (1 - 2\lambda)u(x_j, t_n) + \lambda\{u(x_{j+1}, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)\} + \tau E_{j,n}. \quad (3.5)$$

令

$$e_{j,n} = u_j^n - u(x_j, t_n).$$

从(3.2)与(3.5)得到

$$e_{j,n+1} = (1 - 2\lambda)e_{j,n} + \lambda(e_{j+1,n} + e_{j-1,n}) - \tau E_{j,n}. \quad (3.6)$$

我们有如下结论:

若  $0 < \lambda = \tau/h^2 \leq \frac{1}{2}$ , 且初值问题(3.1)有足够光滑的解 $u$ (比如, $u$ 对 $t$ 有有界的二阶偏导数,对 $x$ 有有界的四阶偏导数),则当 $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$ 时,对任何 $(j, n)$ 有 $e_{j,n} \rightarrow 0$ ,即差分格式(3.2)是收敛的;若 $\lambda > \frac{1}{2}$ ,则差分格式(3.2)不收敛.

事实上,若  $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$ , 则  $1 - 2\lambda \geq 0$ . 令

$$e_n = \sup_j |e_{j,n}|, \quad M = \sup_{j,n} |E_{j,n}|.$$

于是由(3.6)有

$$\begin{aligned} |e_{j,n+1}| &\leq (1 - 2\lambda)|e_{j,n}| + \lambda(|e_{j+1,n}| + |e_{j-1,n}|) + \tau |E_{j,n}| \\ &\leq e_n + \tau M, \end{aligned}$$

此不等式右端与 $j$ 无关,从而

$$\hat{e}_{n+1} \leq e_n + \tau \hat{M}_n.$$

利用这个不等式递推, 得出

$$e_n \leq e_0 + n\tau M = e_0 + t_n M. \quad (3.7)$$

注意到在初始时间层上:

$$u_j^0 = u(x_j, 0) = f(x_j), \quad e_j, 0 = 0,$$

因此,  $e_0 = \sup_j |e_j, 0| = 0$ . 这样, 从(3.4)和(3.7)立即看出, 只要假设初值问题(3.1)的解  $u$  对  $t$  的二阶偏导数和对  $x$  的四阶偏导数均有界, 便有

$$|u_j^n - u(x_j, t_n)| \leq e_n \leq t_n M = t_n O(\tau + h^2). \quad (3.8)$$

由此, 当  $h \rightarrow 0, \tau \rightarrow 0$  时,  $u_j^n \rightarrow u(x_j, t_n)$ . 我们完成了  $0 < \lambda \leq \frac{1}{2}$  情形差分格式(3.2)收敛的证明.

为了证明  $\lambda > \frac{1}{2}$  情形差分格式(3.2)不收敛, 我们首先构造差分方程的显式解. 设函数  $v_\alpha$  的定义为

$$v_\alpha(x, t) = \operatorname{Re}(e^{i\alpha x - \omega t}),$$

我们尝试用这种形式的函数作为网格函数 (即在网格节点上的函数). 由于有

$$\begin{aligned} \frac{v_\alpha(x, t + \tau) - v_\alpha(x, t)}{\tau} &= \frac{v_\alpha(x + h, t) - 2v_\alpha(x, t) + v_\alpha(x - h, t)}{h^2} \\ &= v_\alpha(x, t) \left( \frac{e^{-\omega\tau} - 1}{\tau} - \frac{e^{i\alpha h} - 2 + e^{-i\alpha h}}{h^2} \right) \\ &= v_\alpha(x, t) \frac{1}{\tau} \left\{ e^{-\omega\tau} - [(1 - 2\lambda) + \lambda e^{i\alpha h} + \lambda e^{-i\alpha h}] \right\} \\ &= v_\alpha(x, t) \frac{1}{\tau} \left[ e^{-\omega\tau} - \left( 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{\alpha h}{2} \right) \right]. \end{aligned}$$

因此要使  $v_\alpha$  成为差分方程的解, 只须使  $\omega$  与  $\alpha$  满足

$$e^{-\omega\tau} = 1 - 4\lambda \sin^2 \frac{\alpha h}{2}.$$

$v_\alpha$  满足的初始条件是

$$v_\alpha(x, 0) = \operatorname{Re}(e^{i\alpha x}) = \cos \alpha x. \quad (3.9)$$

这样, 利用  $e^{-\omega t} = (e^{-\omega \tau})^{t/\tau}$ , 所求差分方程的解  $v_\alpha$  的表达式可以写成

$$v_\alpha(x, t) = \left(1 - 4\lambda \sin^2 \frac{\alpha h}{2}\right)^{t/\tau} \cos \alpha x. \quad (3.10)$$

函数  $v_\alpha$  在网格节点上的值满足差分方程(3.2), 并且满足初始条件(3.9).

从(3.10)容易看出, 对于使得  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  的任何  $h$  和  $\tau$  以及任何实数  $\alpha$ , 均有  $|v_\alpha(x, t)| \leq 1$ ; 但是, 若  $\lambda > \frac{1}{2}$ , 则对某些  $\alpha$  与  $h$ , 有  $|1 - 4\lambda \sin^2(\alpha h/2)| > 1$ , 并因此对充分大的  $t/\tau$  使  $|v_\alpha(0, t)|$  达到任意大.

我们指出, 只要初始函数  $f$  连续且有界, 初值问题(3.1)便有唯一的有界解  $u$ , 而且解  $u$  在  $t > 0$  时对  $x$  和  $t$  有任意阶连续偏导数. 因此, 对于具有光滑有界的初始函数  $f$  的初值问题(3.1)来说, 如果相应的一个差分格式的解是无界的, 那末这个差分格式一定是不收敛的. 上述讨论表明, 当  $\lambda \leq \frac{1}{2}$  时, 对任何连续有界的初始函数  $f$ , 差分格式(3.2)收敛, 从而有有界解. 然而, 当  $\lambda > \frac{1}{2}$  时, 确实存在这样的情形: 初始函数  $f$  是光滑有界的, 而差分格式(3.2)的解无界.

利用形如(3.10)的函数的迭加, 我们可以得到差分方程(3.2)的其它解. 取  $\alpha = \alpha_k = 2^k \pi$  及系数  $\beta_k > 0, k = 0, 1, 2, \dots$ , 令

$$v(x, t) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k v_{\alpha_k}(x, t)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left(1 - 4\lambda \sin^2 \frac{2^k \pi h}{2}\right)^{t/\tau} \cos 2^k \pi x. \quad (3.11)$$

如果  $\beta_k \rightarrow 0 (k \rightarrow \infty)$  充分快, 那么对应的初始函数

$$v(x, 0) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \cos(2^k \pi x) \quad (3.12)$$

有任意阶导数. 设  $h = 2^{-m}$ ,  $\tau = \lambda 4^{-m}$ , 那么从(3.11)得到

$$\begin{aligned} v(0, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \beta_k \left[1 - 4\lambda \sin^2 \left(2^{k-m} \frac{\pi}{2}\right)\right]^{t/\tau} \\ &= \sum_{k=0}^m \beta_k \left[1 - 4\lambda \sin^2 \left(2^{k-m} \frac{\pi}{2}\right)\right]^{t/\tau} + \sum_{k=m+1}^{\infty} \beta_k, \end{aligned}$$

这里利用了当  $k > m$  时  $\sin^2 \left(2^{k-m} \frac{\pi}{2}\right) = 0$ , 注意到

$$\sin^2 \left(2^{k-m} \frac{\pi}{2}\right) \leq \frac{1}{2}, k = 0, 1, \dots, m-1,$$

对于  $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$ , 考虑到  $\beta_k > 0$ , 有

$$\begin{aligned} |v(0, t)| &\geq - \sum_{k=0}^m \beta_k + \beta_m (4\lambda - 1)^{t/\tau} \\ &= -f(0) + \beta_m (4\lambda - 1)^{t/4^m \lambda}. \end{aligned}$$

取  $\beta_k = e^{-2^k}$ , 那么初始函数  $f(x)$  是一个光滑函数, 并对于  $\frac{1}{2} < \lambda \leq 1$  有

$$|v(0, t)| \geq -v(0, 0) + e^{2^m [(t/\lambda) 2^m \ln(4\lambda - 1) - 1]}.$$

由于  $4\lambda - 1 > 1$ , 因此对任意有限的  $t > 0$ , 当  $m \rightarrow \infty$  时,  $|v(0, t)|$  变成无界. 因此由函数  $v$  在各网格节点上的值组成的差分格式(3.2)的解, 并不收敛于相应初值问题的解.

通常,一个差分格式仅当网格比  $\lambda$  满足一定条件时是收敛的,就称此格式是条件收敛的. 上面的例子中给出的差分格式(3.2)是条件收敛的. 存在对于任何网格比  $\lambda$  均收敛的差分格式,很自然称这种格式是无条件收敛的.

## § 4 稳 定 性

### 4.1 稳定性概念

在 § 3 中已经指出,建立差分格式之后,除了讨论其收敛性之外,还有一个重要的概念必须考虑,即差分格式的稳定性问题. 差分格式的计算是逐层进行的,计算第  $n+1$  层上的  $u_j^{n+1}$  时,要用到第  $n$  层上计算出来的结果  $u_j^n$ . 因此计算  $u_j^n$  时的舍入误差,必然会影响到  $u_j^{n+1}$  的值,从而就要分析这种误差传播的情况. 如果误差的影响越来越大,以致差分格式的精确解的面貌完全被掩盖,那么此种差分格式称为不稳定的. 相反地,如果误差的影响是可以控制的,差分格式的解基本上能计算出来,那么这种差分格式就认为是稳定的. 下面我们较为确切地来叙述稳定性概念. 设初始层上引入了误差  $e_j^0, j=0, \pm 1, \dots$ , 令  $e_j^n, j=0, \pm 1, \dots$  是第  $n$  层上的误差,如果存在常数  $K$  使得

$$\|e^n\|_h \leq K \|e^0\|_h \quad (4.1)$$

那么称差分格式是稳定的,其中  $\|\cdot\|_h$  是某种尺度(范数),它可以是

$$\|e^n\|_h = \sqrt{\sum_{j=-\infty}^{\infty} (e_j^n)^2 h}$$

也可以取

$$\|e^n\|_h = \max_j |e_j^n|.$$

### 4.2 实例分析



例 1 考虑逼近扩散方程(1.2)的二层显式差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n + a\lambda(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n). \quad (4.2)$$

假定用(4.2)进行计算直至第  $n-1$  层误差均为 0, 但在第  $n$  层上的一个点  $(x_j, t_n)$  出现了误差  $\epsilon$ , 其余点上误差仍为 0. 用列表来考虑误差传播情况. 取  $a\lambda=1$ , 计算结果见表 1.1.

由表 1.1 看出, 误差是逐层增加的. 这表明格式(4.2)在  $a\lambda=1$  的情况下是不稳定的. 如果在上面的计算中不取  $a\lambda=1$ , 而是取  $a\lambda=\frac{1}{2}$ , 那么我们将看到相反的情况, 计算结果见表 1.2.

由表 1.2 可以看出, 误差的传播是逐层减小的, 因此当  $a\lambda=\frac{1}{2}$  时差分格式可能会是稳定的.

表 1.1

|           | ... | $x_{j-3}$    | $x_{j-2}$     | $x_{j-1}$     | $x_j$         | $x_{j+1}$     | $x_{j+2}$     | $x_{j+3}$    | $x_{j+4}$    | $x_{j+5}$  | ... |
|-----------|-----|--------------|---------------|---------------|---------------|---------------|---------------|--------------|--------------|------------|-----|
| ...       |     |              |               |               |               |               |               |              |              |            | ... |
| $t_{n-1}$ |     | 0            | 0             | 0             | 0             | 0             | 0             | 0            | 0            | 0          | ... |
| $t_n$     |     | 0            | 0             | 0             | $\epsilon$    | 0             | 0             | 0            | 0            | 0          | ... |
| $t_{n+1}$ |     | 0            | 0             | $\epsilon$    | $-\epsilon$   | $\epsilon$    | 0             | 0            | 0            | 0          | ... |
| $t_{n+2}$ |     | 0            | $\epsilon$    | $-2\epsilon$  | $3\epsilon$   | $-2\epsilon$  | $\epsilon$    | 0            | 0            | 0          | ... |
| $t_{n+3}$ |     | $\epsilon$   | $-3\epsilon$  | $6\epsilon$   | $-7\epsilon$  | $6\epsilon$   | $-3\epsilon$  | $\epsilon$   | 0            | 0          | ... |
| $t_{n+4}$ |     | $-4\epsilon$ | $10\epsilon$  | $-16\epsilon$ | $19\epsilon$  | $-16\epsilon$ | $10\epsilon$  | $-4\epsilon$ | $\epsilon$   | 0          | ... |
| $t_{n+5}$ |     | $15\epsilon$ | $-30\epsilon$ | $45\epsilon$  | $-51\epsilon$ | $45\epsilon$  | $-30\epsilon$ | $15\epsilon$ | $-5\epsilon$ | $\epsilon$ | ... |
|           |     | $\vdots$     | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$      | $\vdots$     | $\vdots$     | $\vdots$   | ... |

例 2 考虑逼近对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \quad (4.3)$$

表 1.2

|           | ... | $x_{j-3}$              | $x_{j-2}$             | $x_{j-1}$              | $x_j$                 | $x_{j+1}$              | $x_{j+2}$             | $x_{j+3}$              | $x_{j+4}$              | $x_{j+5}$              | ... |
|-----------|-----|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|-----------------------|------------------------|------------------------|------------------------|-----|
| ...       |     |                        |                       |                        |                       |                        |                       |                        |                        |                        |     |
| $t_{n-1}$ | ... | 0                      | 0                     | 0                      | 0                     | 0                      | 0                     | 0                      | 0                      | 0                      | ... |
| $t_n$     | ... | 0                      | 0                     | 0                      | $\epsilon$            | 0                      | 0                     | 0                      | 0                      | 0                      | ... |
| $t_{n+1}$ | ... | 0                      | 0                     | $\frac{1}{2}\epsilon$  | 0                     | $\frac{1}{2}\epsilon$  | 0                     | 0                      | 0                      | 0                      | ... |
| $t_{n+2}$ | ... | 0                      | $\frac{1}{4}\epsilon$ | 0                      | $\frac{1}{2}\epsilon$ | 0                      | $\frac{1}{4}\epsilon$ | 0                      | 0                      | 0                      | ... |
| $t_{n+3}$ | ... | $\frac{1}{8}\epsilon$  | 0                     | $\frac{3}{8}\epsilon$  | 0                     | $\frac{3}{8}\epsilon$  | 0                     | $\frac{1}{8}\epsilon$  | 0                      | 0                      | ... |
| $t_{n+4}$ | ... | 0                      | $\frac{1}{4}\epsilon$ | 0                      | $\frac{3}{8}\epsilon$ | 0                      | $\frac{1}{4}\epsilon$ | 0                      | $\frac{1}{16}\epsilon$ | 0                      | ... |
| $t_{n+5}$ | ... | $\frac{5}{32}\epsilon$ | 0                     | $\frac{7}{16}\epsilon$ | 0                     | $\frac{7}{16}\epsilon$ | 0                     | $\frac{5}{32}\epsilon$ | 0                      | $\frac{1}{32}\epsilon$ | ... |
| $\vdots$  |     | $\vdots$               | $\vdots$              | $\vdots$               | $\vdots$              | $\vdots$               | $\vdots$              | $\vdots$               | $\vdots$               | $\vdots$               |     |

的稳定性.

设在第 0 层上每个网格点上的  $u_j^0$  有误差  $e_j^0$ , 即初值为  $u_j^0 + e_j^0$  而不是  $u_j^0$ . 用  $u_j^0 + e_j^0$  为初值进行计算, 得到的为  $u_j^n + e_j^n$ . 设想在这一计算过程中没有引进别的误差, 那么  $u_j^n + e_j^n$  应满足 (4.3), 即

$$\frac{(u_j^{n+1} + e_j^{n+1}) - (u_j^n + e_j^n)}{\tau} + \frac{(u_j^n + e_j^n) - (u_{j-1}^n + e_{j-1}^n)}{h} = 0,$$

此式减去 (4.3) 得

$$\frac{e_j^{n+1} - e_j^n}{\tau} + \frac{e_j^n - e_{j-1}^n}{h} = 0, \quad (4.4)$$

这就是误差所满足的方程. 改写其形式

$$\begin{aligned} e_j^{n+1} - e_j^n - \lambda(e_j^n - e_{j-1}^n) \\ = (1 - \lambda)e_j^n + \lambda e_{j-1}^n, \end{aligned}$$

其中  $\lambda = \tau/h$  为网格比. 如果

$$\lambda \leq 1, \quad (4.5)$$

那么有

$$\begin{aligned} |e_j^{n+1}| &\leq (1-\lambda)|e_j^n| + \lambda|e_{j+1}^n| \\ &\leq (1-\lambda)\sup_j |e_j^n| + \lambda\sup_j |e_j^n| \\ &= \sup_j |e_j^n|, \end{aligned}$$

由此得

$$\sup_j |e_j^{n+1}| \leq \sup_j |e_j^n|,$$

从而可以知道

$$\sup_j |e_j^n| \leq \sup_j |e_j^{n-1}| \leq \cdots \leq \sup_j |e_j^0|.$$

这就是说,误差是不增长的,我们就认为,差分格式(4.3)在条件(4.5)下是稳定的. 如果令  $\|e^n\|_\infty = \sup_j |e_j^n|$ , 那么

$$\|e^n\|_\infty \leq \|e^0\|_\infty$$

上而是论述了在极大模下的稳定性.

### 4.3 数值例子

考虑扩散方程的简单的初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin \pi x, & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

采用差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \quad (4.7)$$

进行计算. 取  $h=0.1$ , 用  $\lambda=0.25, 1.0$  分别计算到  $t=0.4$ , 结果见表 1.3.

问题(4.6)的解析解为  $u(x, t) = \exp(-\pi^2 t) \sin \pi x$ . 表 1.3 中列出了计算结果与解析解的比较.  $\lambda=1.0$  时, 计算了 40 个时间步长, 结果已全貌皆非, 因此是不稳定的.  $\lambda=0.25$  时, 计算了

表 1.3

| $x$ | 计算解( $\lambda=1.0$ )       | 计算解( $\lambda=0.25$ )     | 解 析 解                     |
|-----|----------------------------|---------------------------|---------------------------|
| 0.1 | $-0.851568 \times 10^{-1}$ | $0.535624 \times 10^{-2}$ | $0.596280 \times 10^{-2}$ |
| 0.2 | $0.154260 \times 10^{-1}$  | $0.111582 \times 10^{-1}$ | $0.113421 \times 10^{-1}$ |
| 0.3 | $-0.220976 \times 10^{-1}$ | $0.155580 \times 10^{-1}$ | $0.156110 \times 10^{-1}$ |
| 0.4 | $0.278773 \times 10^{-1}$  | $0.180544 \times 10^{-1}$ | $0.183519 \times 10^{-1}$ |
| 0.5 | $-0.301563 \times 10^{-1}$ | $0.189835 \times 10^{-1}$ | $0.192363 \times 10^{-1}$ |
| 0.6 | $0.294832 \times 10^{-1}$  | $0.180544 \times 10^{-1}$ | $0.183519 \times 10^{-1}$ |
| 0.7 | $-0.256939 \times 10^{-1}$ | $0.153580 \times 10^{-1}$ | $0.156110 \times 10^{-1}$ |
| 0.8 | $0.190244 \times 10^{-1}$  | $0.111582 \times 10^{-1}$ | $0.113421 \times 10^{-1}$ |
| 0.9 | $-0.101216 \times 10^{-1}$ | $0.586624 \times 10^{-2}$ | $0.596280 \times 10^{-2}$ |

160 个时间步长, 计算结果基本正确, 此时格式稳定。

由上面的实例分析及数值计算使我们了解到, 差分格式的稳定性不仅与差分格式的构造有关, 而且与网格比关系密切。

## § 5 差分格式的构造方法

### 5.1 数值微分法

从微分方程出发, 利用数值微分的方法, 将各个微商用适当的差商近似地代替, 从而得出能够任意逼近微分方程的差分格式, 这是建立差分格式最常用和最直接的一种方法。这种方法比较简单, 而且容易直接列出差分格式, 对双曲型方程和抛物型方程更为常用。

§ 1 中关于对流方程和扩散方程的各种差分格式, 都是通过数值微分法构造的。因此, 这里不必再专门举例说明。

构造差分格式还有一些其它方法, 下面介绍两种常用的方法, 它们是积分插值法和待定系数法。

## 5.2 积分插值法

在实际问题中得出的微分方程，常常反映着物理上的某种守恒原理，例如质量守恒，动量守恒，能量守恒，粒子数守恒等。这些守恒原理一般也可

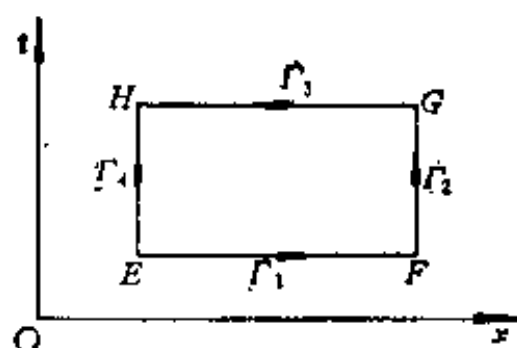


图 1.2

通过积分形式来表示，因此有时可以不从微分方程出发，而从守恒原理的积分形式出发来建立差分格式。通过积分路径的不同选取，以

及联系网格节点上函数值的不同方式，可以构造出各种各样的差分格式。

我们以对流方程(1.1)即

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (5.1)$$

为例来说明。在  $x-t$  平面上，取矩形域  $\Omega$  为积分区域， $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3 + \Gamma_4$  是  $\Omega$  的边界(见图 1.2)，将方程(5.1)在  $\Omega$  上积分，得到

$$\iint_{\Omega} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dt = 0.$$

利用 Green 公式，上面方程左端的积分可以化成以  $\Gamma$  为路径的曲线积分，我们有

$$\int_{\Gamma} (u n_t + c u n_x) ds = 0, \quad (5.2)$$

其中  $n_x$  与  $n_t$  分别是  $\Gamma$  的外法向单位向量  $\mathbf{n}$  沿  $x$  方向与沿  $t$  方向的两个分量。把(5.2)左端分成在  $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$  上的四个积分，可以得到方程(5.2)的近似方程

$$-u_1 \tilde{h} + c u_2 \tilde{\tau} + u_3 \tilde{h} - c u_4 \tilde{\tau} = 0,$$

即

$$u_3 = u_1 - \frac{c\tilde{\tau}}{\tilde{h}}(u_2 - u_4), \quad (5.3)$$

这里  $\tilde{h}$  是  $\Gamma_1$  与  $\Gamma_3$  的长度,  $\tilde{\tau}$  是  $\Gamma_2$  与  $\Gamma_4$  的长度,  $u_i$  是可按不同方式确定的  $u$  在  $\Gamma_i$  上的近似函数值.

如图 1.3 所示, 在网格中, 点  $E, F, G, H$  依次为

$$\left(n - \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right), \left(n - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right), \left(n + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}\right), \\ \left(n + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}\right),$$

并取

$$u_1 = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j-1}^{n-1}), \quad u_2 = \frac{1}{2}(u_j^n + u_{j+1}^n),$$

$$u_3 = \frac{1}{2}(u_{j+1}^{n+1} + u_j^n), \quad u_4 = \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_j^n).$$

于是  $\tilde{h} = h, \tilde{\tau} = \tau$ , 从 (5.3) 得到

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \frac{c\tau}{h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \quad (5.4)$$

这是一个常用的差分格式, 称为蛙跳格式.

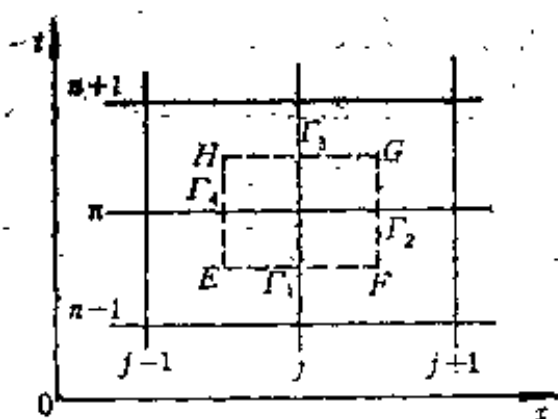


图 1.3

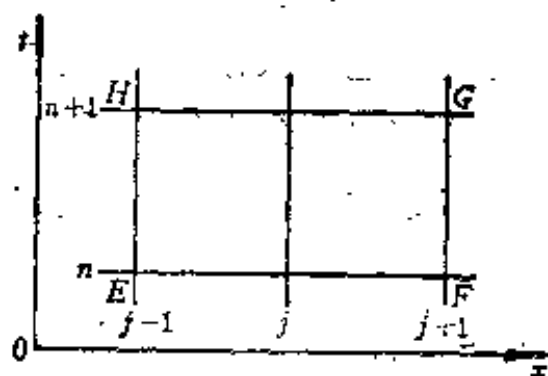


图 1.4

现在再换一种方式, 如图 1.4 所示, 在网格中, 点  $E, F, G, H$  依次为

$$(n, j-1), (n, j+1), (n+1, j+1), (n+1, j-1),$$

并取

$$u_1 = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n), \quad u_2 = u_{j+1}^n, \quad u_3 = u_j^{n+1}, \quad u_4 = u_{j-1}^n.$$

于是  $\tilde{h} = 2h, \tilde{\tau} = \tau$ , 从(5.3)得到

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{c\tau}{2h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n),$$

也可写成

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (5.5)$$

这个格式称为 **Lax-Friedrichs 格式**.

我们看到, 利用守恒原理的积分形式来构造差分格式, 比直接从微分方程出发构造差分格式要复杂一些. 但是, 这种构造差分格式的方法有一些引人注意的优点, 例如比较容易得到守恒形式 (保持某些物理量的守恒性质) 的差分格式, 应用于复杂的网格不会产生特别的困难, 而直接从微分方程来构造差分格式时并非如此.

### 5.3 待定系数法

待定系数法的基本步骤是: 首先选取形式确定而系数待定的差分方程逼近微分方程, 然后在截断误差可能达到的范围内, 按精度要求定出差分方程的系数, 构成具体的差分格式.

以建立方程(5.1)的显式格式为例. 设逼近(5.1)的差分方程形如

$$u_j^{n+1} = \sum_k \alpha_k u_{j+k}^n \quad (5.6)$$

等式右端表示某些  $u_{j+k}^n$  的一个线性组合,  $\alpha_k$  是待定系数. 将(5.6)写成相应于(5.1)的形式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c \frac{\left(-\frac{h}{c\tau}\right) \left(\sum_k \alpha_k u_{j+k}^n - u_j^n\right)}{h} = 0.$$

这种写法自然是为了便于理解,实际上即

$$\frac{1}{\tau} \left( u_j^{n+1} - \sum_k \alpha_k u_{j+k}^n \right) = 0.$$

因此(5.6)的截断误差  $E$  依定义为

$$E = \frac{1}{\tau} \left[ u(x_j, t_{n+1}) - \sum_k \alpha_k u(x_{j+k}, t_n) \right],$$

其中  $u$  是(5.1)的解. 利用 Taylor 级数展开,

$$u(x_j, t_{n+1})$$

$$= u(x_j, t_n) + \tau \frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) + \frac{\tau^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial t^2} u(x_j, t_n) \\ + \frac{\tau^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial t^3} u(x_j, t_n) + O(\tau^4)$$

$$= u(x_j, t_n) + \tau \frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) + c^2 \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t_n) \\ - c^3 \frac{\tau^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_j, t_n) + O(\tau^4)$$

$$u(x_{j+k}, t_n)$$

$$= u(x_j, t_n) + kh \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) + \frac{k^2 h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t_n) \\ + \frac{k^3 h^3}{6} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_j, t_n) + O(h^4).$$

我们得到

$$E = \frac{1}{\tau} \left( 1 - \sum_k \alpha_k \right) u(x_j, t_n) + \frac{\partial}{\partial t} u(x_j, t_n) \\ + \left( - \sum_k k \alpha_k \right) \frac{h}{\tau} \frac{\partial}{\partial x} u(x_j, t_n) \\ + \frac{1}{2} \left[ c^2 \tau - \left( \sum_k k^2 \alpha_k \right) \frac{h^2}{\tau} \right] \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_j, t_n)$$



$$-\frac{1}{6}\left[c^3\tau^2+\left(\sum_k k^3\alpha_k\right)\frac{\tau^3}{h}\right]\frac{\partial^3}{\partial x^3}u(x_i,t_n)+O(\tau^3) \\ +O\left(\frac{h^4}{\tau}\right). \quad (5.7)$$

令

$$\sum_k \alpha_k = 1, \quad (5.8)$$

$$\sum_k k\alpha_k = -c\frac{\tau}{h}, \quad (5.9)$$

$$\sum_k k^2\alpha_k = c^2\frac{\tau^2}{h^2}, \quad (5.10)$$

$$\sum_k k^3\alpha_k = -c^3\frac{\tau^3}{h^3}, \quad (5.11)$$

容易看出,对于任何确定的网格比  $\lambda=\tau/h$ ,当条件(5.8)和(5.9)成立时,  $E=O(\tau)+O(h)$ ,差分格式(5.6)具有一阶精度;当条件(5.8)~(5.10)成立时,  $E=O(\tau^2)+O(h^2)$ ,差分格式(5.6)具有二阶精度;当条件(5.8)~(5.11)成立时,  $E=O(\tau^3)+O(h^3)$ ,差分格式(5.6)具有三阶精度.

例如,取差分格式的形式为

$$u_i^{n+1}=\alpha_{-1}u_{i-1}^n+\alpha_0u_i^n+\alpha_1u_{i+1}^n,$$

这时,条件(5.8)和(5.9)成为

$$\alpha_{-1}+\alpha_0+\alpha_1=1, \quad -\alpha_{-1}+\alpha_1=-\sigma,$$

其中  $\sigma=c\tau/h$ . 由此可得

$$\alpha_{-1}=\frac{\alpha+\sigma}{2}, \quad \alpha_0=1-\alpha, \quad \alpha_1=\frac{\alpha-\sigma}{2},$$

这里  $\alpha$  是任意参数. 这样,我们得到关于方程(5.1)的一类具有一阶精度的差分格式

$$u_i^{n+1}=\frac{\alpha+\sigma}{2}u_{i+1}^n+(1-\alpha)u_i^n+\frac{\alpha-\sigma}{2}u_{i-1}^n. \quad (5.12)$$

如果考虑条件(5.8)~(5.10),我们得到方程组

$$\begin{cases} \alpha_{-1} + \alpha_0 + \alpha_1 = 1, \\ -\alpha_{-1} + \alpha_1 = -\sigma, \\ \alpha_{-1} + \alpha_1 = \sigma^2 \end{cases}$$

由此解得

$$\alpha_{-1} = \frac{\sigma^2 + \sigma}{2}, \quad \alpha_0 = 1 - \sigma^2, \quad \alpha_1 = \frac{\sigma^2 - \sigma}{2}.$$

于是得到方程(5.1)的一个具有二阶精度的差分格式

$$u_j^{n+1} = \frac{\sigma^2 + \sigma}{2} u_{j-1}^n + (1 - \sigma^2) u_j^n + \frac{\sigma^2 - \sigma}{2} u_{j+1}^n. \quad (5.13)$$

这个格式是(5.12)当  $\alpha = \sigma^2$  的特殊情况.

待定系数法能够建立精度较高的差分格式.

## 习 题

1. 试讨论逼近对流方程  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  的差分格式

$$(i) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = 0,$$

$$(ii) \quad \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

的截断误差.

2. 试讨论逼近扩散方程  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\tau} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$$

的截断误差为  $O(\tau^2 + h^2)$ .

3. 试讨论逼近扩散方程  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{2} \left[ \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} + \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \right]$$

的截断误差.

4. 试用积分插值法推导逼近  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  的差分格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0.$$

## 第二章 线性差分格式的收敛性和稳定性

差分格式的收敛性和稳定性是差分格式理论和使用差分格式进行实际计算的极为重要的问题。对它们的研究可以使我们采用较好的差分格式来进行计算，从而可以花较少的计算机费用达到预期的结果。本章讨论一维线性方程组的差分格式理论，阐明收敛性和稳定性的基本概念，讨论两者之间的联系，并对于判别稳定性的两个基本方法——Fourier 分析方法和能量方法进行了讨论。最后稍提及一下多维线性差分格式的问题。

### § 1 线性偏微分方程组的初值问题

#### 1.1 例子

线性偏微分方程组可以描述许多物理现象。例如，在静止气体中小扰动(声音)传播的现象可以用线性方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

来描述，其中  $u$  和  $\rho$  分别表示扰动后的质点速度和密度， $\rho_0$  和  $c_0$  为正的常数，表示未受扰动时静止气体的密度和音速，如果给定初值

$$u(x, 0) = f(x), \rho(x, 0) = g(x), \quad (1.2)$$

那么(1.1)和(1.2)就构成了一个初值问题.

自然会提出这样的问题: 是否每个初值问题都反映一定的物理现象呢? 为此我们考虑例子

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x}, \quad (1.3)$$

其中  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) = [u_1(x, t), u_2(x, t)]^T$ , 取初始条件为

$$\mathbf{u}(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A_1}^{A_1} e^{i\omega x} \hat{f}(\omega) d\omega, \quad (1.4)$$

其中  $A_1$  为某一正的常数,  $\hat{f}$  是  $L^2(\mathbf{R})$  中函数  $f$  的 Fourier 变换,  $\mathbf{R} = (-\infty, \infty)$ . 于是, 初值问题(1.3)和(1.4)的解可以表示为

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A_1}^{A_1} e^{i\omega x} \hat{\mathbf{u}}(\omega, t) d\omega, \quad (1.5)$$

其中  $\hat{\mathbf{u}}$  是  $\mathbf{u}$  关于变量  $x$  的 Fourier 变换. 把(1.5)代入(1.3), 对每个  $\omega$ , 我们得

$$\begin{cases} \frac{d\hat{\mathbf{u}}(\omega, t)}{dt} = i\omega \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{u}}(\omega, t), \\ \hat{\mathbf{u}}(\omega, 0) = \hat{f}(\omega). \end{cases} \quad (1.6)$$

(1.6) 的解是

$$\hat{\mathbf{u}}(\omega, t) = \lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} e^{\omega t} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{-\omega t}, \quad (1.7)$$

其中常数  $\lambda_j = \lambda_j(\omega)$  ( $j=1, 2$ ) 由方程

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} = \hat{f}(\omega) = \begin{bmatrix} \hat{f}^{(1)}(\omega) \\ \hat{f}^{(2)}(\omega) \end{bmatrix}$$

所确定. 由(1.7)可以看出, 初值问题(1.3)和(1.4)的解以  $e^{A_1 t}$  增长 ( $A_1$  为任意的正数), 所以初值问题(1.3)和(1.4)具有增长得

任意快的解。这就表明这个初值问题不具有一般的物理意义。

下面我们考虑另一个例子：方程组

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \quad (1.8)$$

以及初始条件(1.4)构成了初值问题。仿前题所述,可以得到解

$$\mathbf{u}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-A_1}^{A_1} e^{i\omega x} \hat{\mathbf{u}}(\omega, t) d\omega,$$

其中

$$\hat{\mathbf{u}}(\omega, t) = \frac{1}{2}(\hat{f}^{(1)} + \hat{f}^{(2)}) \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} e^{i\omega t} + \frac{1}{2}(\hat{f}^{(1)} - \hat{f}^{(2)}) \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} e^{-i\omega t},$$

并且有

$$\begin{aligned} |\hat{\mathbf{u}}(\omega, t)|^2 &= |\hat{u}^{(1)}(\omega, t)|^2 + |\hat{u}^{(2)}(\omega, t)|^2 \\ &= |\hat{f}^{(1)}(\omega)|^2 + |\hat{f}^{(2)}(\omega)|^2 = |\hat{f}(\omega)|^2. \end{aligned}$$

对于每个固定的  $t$ , 由 Parseval 关系得到

$$\begin{aligned} \|\mathbf{u}(t)\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}(x, t)|^2 dx = \int_{-A_1}^{A_1} |\hat{\mathbf{u}}(\omega, t)|^2 d\omega \\ &= \int_{-A_1}^{A_1} |\hat{f}(\omega)|^2 d\omega = \int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{u}(x, 0)|^2 dx = \|\mathbf{u}(0)\|^2. \end{aligned}$$

这种情况,  $L_2$  范数是常数, 即如果初值很小, 那么其解在全部时间内也是很小的。这种现象描述了正常的物理现象。

## 1.2 初值问题的适定性

我们在区域  $\mathcal{D} = \{(x, t); |x| < \infty, 0 \leq t \leq T\}$  内考虑一般的线性偏微分方程组

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = L(D)\mathbf{u}, \quad (1.9)$$

其中  $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t) = [u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_r(x, t)]^T$  是一个向量函数,  $L(D)$  是一个微分算子, 它的系数为  $p$  阶方阵

$$L(D) = \sum_{\alpha=0}^M A_{\alpha}(x, t) D^{\alpha}, \quad D = \frac{\partial}{\partial x}.$$

如果函数  $u$  在  $\mathcal{D}$  内具有方程组 (1.9) 中所出现的各阶连续导数, 且将  $u$  以及它的各阶导数代入方程组 (1.9) 得到恒等式, 则称  $u$  为方程组 (1.9) 的解. 因此, 作为方程组 (1.9) 的解  $u$ , 就要对  $t$  连续可微并对任意  $t \in [0, T]$  有连续导数  $\frac{\partial^M u}{\partial x^M}$ .

对于 (1.9) 可以给出初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (1.10)$$

这样 (1.9) 和 (1.10) 构成了初值问题. 由于线性齐次边界条件形成的初边值问题可以作周期性扩充. 因此初值问题 (1.9) 和 (1.10) 也包括了具有线性齐次边界条件的初边值问题.

为了确切地叙述初值问题的适定性, 我们先引入一些常用的概念.

先定义空间  $C^q(\mathbf{R})$ , 在  $C^q(\mathbf{R})$  中的元素是在  $\mathbf{R}$  中有  $q$  次连续导数的函数, 在  $C^q(\mathbf{R})$  中的拓扑规定为, 若有  $C^q(\mathbf{R})$  中的序列  $\{\varphi_v\}$ , 且对任一有界闭集  $S$  成立

$$\sup_{x \in S} \left| \frac{\partial^{\alpha} \varphi_v}{\partial x^{\alpha}} \right| \rightarrow 0 (v \rightarrow \infty), \text{ 每个 } \alpha \leq q,$$

则称  $\varphi_v \rightarrow 0 (C^q(\mathbf{R}))$ , 其中 1.1 表示 Euclid 范数.

对于在  $\mathbf{R}$  内定义的函数  $\varphi(x)$ , 称集合

$$\{x: x \in \mathbf{R}, \varphi(x) \neq 0\}$$

的闭包为  $\varphi$  的支集, 记作  $\text{supp } \varphi$ .

可见,  $\varphi$  的支集是包含集合  $\{x: x \in \mathbf{R}, \varphi(x) \neq 0\}$  的最小闭集, 在此集外  $\varphi$  为 0.

如果  $\varphi$  的支集是紧集, 则称  $\varphi$  有紧支集.

再引进空间  $C_0^q(\mathbf{R})$ , 在  $C_0^q(\mathbf{R})$  中的元素是  $q$  次连续可微, 且有紧支集的函数, 在  $C_0^q(\mathbf{R})$  中的拓扑规定为, 若有  $C_0^q(\mathbf{R})$  中的函

数序列 $\{\varphi_v\}$ , 满足条件

- (i) 所有  $\varphi_v$  的支集在一个共同的紧集  $S$  内,
- (ii) 对每个  $\alpha (\leq q)$ , 在上述紧集  $S$  内成立

$$\sup_{x \in S} \left| \frac{\partial^\alpha \varphi_v}{\partial x^\alpha} \right| \rightarrow 0 (v \rightarrow \infty),$$

则称  $\varphi_v \rightarrow 0 (C_0^q(\mathbf{R}))$ .

我们假定, 对于任意的初始函数  $u_0 \in C_0^q(\mathbf{R})$  ( $q \geq M$ ), 初值问题(1.9), (1.10) 存在唯一解  $u$ , 由此建立了  $u(0) = u_0$  与  $u(t)$  ( $t \leq T$ ) 之间的对应关系. 此关系可以表示为

$$u(t) = E_0(t)u(0), \quad (1.11)$$

其中  $E_0(t)$  称为解算子. 容易看出,  $E_0(t)$  是一个线性算子. 如果对任意的初始函数  $u_0 \in C_0^q(\mathbf{R})$ , 初值问题(1.9), (1.10) 的解  $u(t) \in C_0^q(\mathbf{R})$  ( $t \leq T$ ), 那么称方程组(1.9) 在  $C_0^q(\mathbf{R})$  中具有延拓性质.

我们知道, 在很多偏微分方程的初值问题中, 有些初始函数  $u_0$  不属于  $C_0^q(\mathbf{R})$ , 甚至于是间断函数. 此外, 如果  $u_0 \in C_0^q(\mathbf{R})$ , 而初值问题的解  $u(t)$  不属于  $C_0^q(\mathbf{R})$ , 即方程组(1.9) 在  $C_0^q(\mathbf{R})$  内不具有延拓性. 对于上述两种情况, 初值问题(1.9), (1.10) 就不可能有上面定义的解(古典解). 为此我们必须拓广解的概念.

由于  $C_0^q(\mathbf{R})$  在  $L_2(\mathbf{R})$  中稠密, 所以可以把解的概念拓广到  $L_2(\mathbf{R})$  上来.

我们假定, 对任意  $u_0 \in C_0^q(\mathbf{R})$ , 任意  $t \in [0, T]$ , 都存在唯一的元素  $u(t) \in L_2(\mathbf{R})$ , 使得当  $\tau \rightarrow 0$  时, 对  $t \in [0, T]$  一致成立

$$\left\| \frac{u(t+\tau) - u(t)}{\tau} - L(D)u(t) \right\| \rightarrow 0, \quad (1.12)$$

其中范数  $\|\cdot\|$  是通常的  $L_2$  范数, 即

$$\|u(t)\|^2 = \sum_{i=1}^p \int_{-\infty}^{\infty} [u_i(x, t)]^2 dx.$$

由此存在一个线性算子, 记为  $E_0(t)$ . 当  $u_0 \in C_0^q(\mathbf{R})$  时,  $u(t) =$



$E_0(t)u_0 \in L_2(R)$ . 称  $u(t)$  给出了初值问题 (1.9), (1.10) 的解. 特别当  $u(t) \in C_0^\infty(R)$  时, 就是前面所说的古典解.

我们称初值问题 (1.9), (1.10) 是适定的, 如果线性算子  $E_0(t)$  是一致有界的, 即存在正的常数  $K$  使得对一切  $t \in [0, T]$  都有

$$\|E_0(t)\| \leq K,$$

其中算子范数定义为

$$\|E_0(t)\| = \sup_{u \neq 0} \frac{\|E_0(t)u\|}{\|u\|}.$$

根据 Hahn-Banach 定理, 可以把  $E_0(t)$  由  $C_0^\infty(R)$  扩张到  $L_2(R)$  上, 扩张后的线性算子记为  $E(t)$ , 这种扩张是保范扩张. 于是, 对任意的  $u_0 \in L_2(R)$ , 当  $t \in [0, T]$  时, 都存在唯一的元素  $u(t) = E(t)u_0 \in L_2(R)$ . 我们称  $u$  为初值问题 (1.9), (1.10) 的广义解.

线性算子  $E(t)$  称为解算子, 对于适定的初值问题,  $E(t)$  也是一致有界的. 此外  $E(t)$  还满足如下性质:

$$\begin{cases} E(0) = I, \\ E(s+t) = E(s)E(t), s, t \geq 0, \end{cases} \quad (1.13)$$

其中  $I$  是恒等算子.

我们还可以指出, 对任意  $u \in L_2(R)$  有

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \|E(\tau)u - u\| = 0. \quad (1.14)$$

事实上, 取  $u_0 \in C_0^\infty(R)$ , 那么有

$$\|E(\tau)u - u\| \leq \|E(\tau)(u - u_0)\| + \|E(\tau)u_0 - u_0\| + \|u - u_0\|.$$

由  $E(t)$  的一致有界性, 可以得  $\|E(\tau)(u - u_0)\| \leq K\|u - u_0\|$ . 由于  $C_0^\infty(R)$  在  $L_2$  中稠密, 所以可以使  $\|u - u_0\|$  任意小. 利用 (1.12) 可知  $\|E(\tau)u_0 - u_0\|$  可任意小, 所以 (1.14) 成立.

上面我们给出了初值问题 (1.9) 和 (1.10) 的适定性概念. 这里的定义与数学物理方程课程中的适定性定义是一致的, 主要是解的存在性、唯一性和稳定性. 在此仅讨论一下稳定性, 其含义是

当解的定解条件作很小变化时, 问题的解是否也作很小的变化? 解的稳定性可以由解算子的一致有界性推出. 事实上, 设  $u^{(l)}$  的初值是  $u_0^{(l)}$ ,  $l=1, 2$ , 则有

$$\|u^{(1)}(t) - u^{(2)}(t)\| \leq K \|u_0^{(1)} - u_0^{(2)}\|.$$

利用适定性的定义, 我们立即可以看出, 初值问题 (1.3) 和 (1.4) 是不适定的, 而初值问题 (1.8) 和 (1.4) 是适定的.

可以证明, 扩散方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & |x| < \infty, 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), & |x| < \infty, \end{cases}$$

当  $u_0 \in L_2(R)$  时是适定的.

我们考虑一阶线性双曲型方程组的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}, & |x| < \infty, 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (1.15)$$

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (1.16)$$

其中  $u = u(x, t) = [u_1(x, t), u_2(x, t), \dots, u_p(x, t)]^T$ ,  $A(x, t)$  为  $p$  阶方阵. 称一阶线性方程组 (1.15) 是双曲型方程组. 如果  $A$  的特征值是实的, 并存在光滑的非奇异矩阵  $S = S(x, t)$ , 使得

$$S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1(x, t) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2(x, t) & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & & \lambda_p(x, t) \end{bmatrix}.$$

可以证明, 如果  $u_0 \in L_2(R)$ , 那么一阶双曲型方程组的初值问题 (1.15) 和 (1.16) 是适定的.

利用这个例子的结论来考虑一下方程组 (1.1) 的初值问题.

方程组 (1.1) 的特征方程为

$$\begin{bmatrix} \lambda & -\frac{C_0^2}{\rho_0} \\ -\rho_0 & \lambda \end{bmatrix} = \lambda^2 - C_0^2 = 0,$$

特征值为  $\lambda_1 = C_0, \lambda_2 = -C_0$ , 它们是实的并相互不同, 因此存在非奇异矩阵  $S$  使方程组 (1.1) 的系数矩阵对角化, 所以方程组 (1.1) 是一阶双曲型偏微分方程组. 如果把初值取为  $L_2(R)$  中的向量函数, 那么形成的初值问题是适定的.

## § 2 线性差分格式

本节讨论线性差分格式的基本概念: 相容性、收敛性和稳定性, 并给出阐明收敛性和稳定性之间关系的 Lax 等价定理, 最后讨论 Kreiss 关于稳定性的扰动定理.

### 2.1 线性差分格式

在第一章中我们已经讨论过不少差分格式, 例如逼近扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0$$

的古典显式差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}.$$

现引入位移算子  $T$ :

$$T^v u_j = u_{j+v}, \quad v = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

显然,  $T^0 = I$  为恒等算子. 采用位移算子可以把古典显式差分格式改写为

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= [a\lambda T^{-1} + (1 - 2a\lambda)T^0 + a\lambda T]u_j^n \\ &= \sum_{\beta=-1}^1 \alpha_\beta T^\beta u_j^n, \end{aligned}$$

其中  $\lambda = \frac{\tau}{h^2}, \alpha_{-1} = a\lambda, \alpha_0 = 1 - 2a\lambda, \alpha_1 = a\lambda$ .

对于方程组(1.1),我们可以构造出差分方程组

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{c_0^2}{\rho_0} \frac{\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n}{2h} = 0, \\ \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + \rho_0 \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0, \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\tau}{2h} \frac{c_0^2}{\rho_0} (\rho_{i+1}^n - \rho_{i-1}^n), \\ \rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \frac{\tau}{2h} \rho_0 (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n). \end{cases}$$

如果令  $\alpha_i^n = [u_i^n, \rho_i^n]^T$ , 那么上面方程组可以写为

$$\begin{aligned} \alpha_i^{n+1} = & \begin{bmatrix} 0 & \frac{\tau}{2h} \frac{C_0^2}{\rho_0} \\ \frac{\tau}{2h} \rho_0 & 0 \end{bmatrix} \alpha_{i-1}^n + \alpha_i^n \\ & + \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\tau}{2h} \frac{C_0^2}{\rho_0} \\ -\frac{\tau}{2h} \rho_0 & 0 \end{bmatrix} \alpha_{i+1}^n. \end{aligned}$$

采用位移算子, 则上式可以写为

$$\alpha_i^{n+1} = \sum_{\beta=-1}^1 A_\beta T^\beta \alpha_i^n, \quad (2.1)$$

其中

$$\begin{aligned} A_{-1} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\tau}{2h} \frac{C_0^2}{\rho_0} \\ \frac{\tau}{2h} \rho_0 & 0 \end{bmatrix}, \quad A_0 = I, \\ A_1 &= \begin{bmatrix} 0 & -\frac{\tau}{2h} \frac{C_0^2}{\rho_0} \\ -\frac{\tau}{2h} \rho_0 & 0 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

可以看出, 平移算子  $T^\beta$  之前的系数为矩阵.

现在我们来讨论逼近方程组 (1.9) 的较为一般的差分格式. 为方便起见, 假定微分算子  $L(D)$  中系数矩阵  $A_\alpha(x, t)$  不依赖于  $t$ , 那么差分格式可以写作

$$\sum_{\beta=-l_1}^{l_1} B_1^{(\beta)}(x, \tau) T^\beta u^{n+1}(x) = \sum_{\beta=-l_0}^{l_0} B_0^{(\beta)}(x, \tau) T^\beta u^n(x), \quad (2.2)$$

其中  $x$  为网格点, 即  $x = jh$ ,  $T^\beta u^n(x) = u^n(x + \beta h)$ ,  $\tau$  和  $h$  分别为时间步长和空间步长. 一般  $h = g(\tau)$ , 即  $h$  和  $\tau$  有一定关系. 因此系数矩阵  $B_1^{(\beta)}$ ,  $B_0^{(\beta)}$  仅依赖于网格点  $x$  和时间步长  $\tau$ . 令

$$B_i(x, \tau) = \sum_{\beta=-l_i}^{l_i} B_i^{(\beta)}(x, \tau) T^\beta, \quad i=0, 1,$$

并假定算子  $B_1(x, \tau)$  有逆存在, 则差分方程组 (2.2) 可以写为

$$u^{n+1}(x) = B_1^{-1} B_0 u^n(x).$$

若令  $C(x, \tau) = B_1^{-1}(x, \tau) B_0(x, \tau)$ , 那么上式改写为

$$u^{n+1}(x) = C(x, \tau) u^n(x), \quad (2.3)$$

其中  $C$  称为差分算子. (2.3) 为逼近线性偏微分方程 (1.9) 的差分方程. 如果再加上初始条件的离散, 则 (2.3) 就给出了一个计算格式, 因此我们也称 (2.3) 为一个差分格式.

注意, 我们已假定  $A_\alpha(x, t)$  不依赖于  $t$ , 因此差分算子  $C$  不依赖于  $n$ . 这样由 (2.3) 作递推可以得到

$$u^n(x) = [C(x, \tau)]^n u^0(x). \quad (2.4)$$

## 2.2 差分格式的相容性

差分方程组 (2.4) 应该是微分方程组 (1.9) 的某种近似, 对于这种近似我们引进相容性概念来描述.

把差分方程组 (2.3) 改写为

$$\frac{u^{n+1}(x) - u^n(x)}{\tau} - \frac{C(x, \tau) - I}{\tau} u^n(x) = 0,$$

其中  $x$  为网格点,  $\tau$  为时间步长. 设  $u$  是微分方程组(1.9)的解并假定  $u \in C_0^1(R)$ . 把  $u$  代入上式, 其截断误差为

$$\begin{aligned} E_\tau[u(x, t)] &= \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} - \left[ \frac{C(x, \tau) - I}{\tau} \right] u(x, t) \\ &= \left[ \frac{E(\tau) - C(x, \tau)}{\tau} \right] u(x, t). \end{aligned}$$

**定义 2.1** 称差分格式(2.3)与初值问题(1.9)和(1.10)是相容的, 如果对于初值问题的解  $u \in C_0^1(R)$  和任意  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当  $\tau \leq \delta$  时有

$$\| [C(\tau) - E(\tau)] u(t) \| < \varepsilon \tau, \quad \text{对任意 } t \in [0, T]. \quad (2.5)$$

由此看出, 相容性反映了截断误差, 也反映了差分格式是否收敛到相应的初值问题.

利用(1.12), 可以把相容性表示式(2.5)换成

$$\left\| \left( \frac{C(\tau) - I}{\tau} - L \right) u(t) \right\| < \varepsilon. \quad (2.6)$$

### 2.3 差分格式的收敛性

建立了偏微分方程初值问题的差分格式之后, 当然希望差分格式的解逼近于偏微分方程初值问题的解, 这就是收敛性问题.

**定义 2.2** 称差分格式(2.3)是收敛的, 如果对于任意  $u_0 \in L_2(R)$  和  $\varepsilon > 0$ , 存在  $\delta > 0$ , 使得当趋于 0 的时间步长序列  $\{\tau_j\}$  及最接近  $t/\tau_j$  的正整数序列  $\{n_j\}$  满足  $\tau_j < \delta, |t - n_j \tau_j| < \delta$  时有

$$\| [C(\tau_j)]^{n_j} u_0 - E(t) u_0 \| < \varepsilon. \quad (2.7)$$

我们应当注意到, 相容性和收敛性是两个完全不同的概念. 在相容性概念中根本不涉及到差分格式的解, 而收敛性才涉及到差分格式和偏微分方程初值问题的解. 事实上, 相容的差分格式可以是不收敛的.

### 2.4 差分格式的稳定性

在第一章中我们对差分格式的稳定性进行了分析和描述, 现在给出稳定性的定义.

**定义 2.3** 称差分格式(2.3)是对初值稳定的(简称稳定的), 如果对于  $u_0$  的误差  $\tilde{u}_0$  及  $u^n$  的误差  $\tilde{u}^n$ , 存在正的常数  $K$ , 使得当  $\tau \leq \tau_0, n\tau \leq T$  时一致地有

$$\|\tilde{u}^n\| \leq K \|\tilde{u}_0\|. \quad (2.8)$$

我们注意到, 利用差分格式进行计算是在网格上实施的, 因此(2.8)中的范数可以理解为  $l^2$  的范数, 即

$$\|f\|_h^2 = \sum_{k=1}^p \left( \sum_{j=-\infty}^{\infty} |f_j^{(k)}|^2 \right) h.$$

这样的范数可与  $L_2(\mathbf{R})$  的范数相联系. 令

$$f(x) = f_j, x_j - \frac{1}{2}h < x \leq x_j + \frac{1}{2}h,$$

那么对于  $f \in L_2(\mathbf{R})$ , 就可以采用  $L_2(\mathbf{R})$  范数

$$\|f\|^2 = \sum_{k=1}^p \int_{-\infty}^{\infty} |f^{(k)}(x)|^2 dx.$$

显然  $\|f\|_h = \|f\|$ . 因此对于(2.8)中的范数也可以按上述意义下理解为  $L_2(\mathbf{R})$  的范数.

由于差分格式是线性的, 因此稳定性定义中的(2.8)式与下面两个不等式等价:

$$\|[C(\tau)]^n\| \leq K, \quad (2.9)$$

及

$$\|u^n\| \leq K \|u^0\|. \quad (2.10)$$

## 2.5 Lax 等价定理

差分格式的收敛性和稳定性是两个极为重要的概念, 它们之间的联系由 Lax 等价定理揭示出来. 因此, 在线性差分格式的理论 and 实践中, Lax 等价定理具有十分重要的意义,

**定理 2.1** 如果偏微分方程的初值问题 (1.9) 和 (1.10) 是适定的, 差分格式 (2.3) 对它的逼近是相容的, 那么差分格式的收敛性和稳定性是等价的.

**证明** 先讨论从收敛性推出稳定性. 我们将证明, 对于每个  $u_0 \in L_2(R)$ , 存在一个常数  $K_0(u_0)$ , 使得当  $\tau \leq \tau_0, n\tau \leq T$  时一致地有

$$\| [C(\tau)]^n u_0 \| \leq K_0(u_0) \| u_0 \|. \quad (2.11)$$

注意到, 上式中  $K_0$  依赖于  $u_0$ , 所以 (2.11) 还不是稳定性的真正含义, 但利用线性算子的一致有界性定理 (共鸣定理), 我们就得到

$$\| [C(\tau)]^n \| \leq K.$$

这就是稳定性的要求, 为此我们只要证明 (2.11).

我们用反证法. 设 (2.11) 不成立, 则存在  $\tau_j, n_j, n_j \tau_j \leq T$ , 有

$$\| [C(\tau_j)]^{n_j} u_0 \| > j. \quad (2.12)$$

由于  $n_j \tau_j \leq T, \tau_j \leq \tau_0$ , 因此可以抽取收敛子序列. 不失一般性, 可设  $\tau_j \rightarrow \tau \in [0, \tau_0], n_j \tau_j \rightarrow t \in [0, T]$ . 现分两种情况进行讨论.

(1)  $\tau = 0$ , 利用收敛性, 当  $j \rightarrow \infty$  时有

$$\| [C(\tau_j)]^{n_j} u_0 - E(t) u_0 \| \rightarrow 0,$$

而

$$\| [C(\tau_j)]^{n_j} u_0 \| \leq \| E(t) u_0 \| + \| [C(\tau_j)]^{n_j} u_0 - E(t) u_0 \|.$$

由于偏微分方程的初值问题是适定的, 所以不等式右边的第一项有界, 而第二项趋于 0, 因此  $\| [C(\tau_j)]^{n_j} u_0 \|^j$  有界.

(2)  $\tau > 0$ , 那么由  $\tau, n_j \rightarrow t$ , 所以从某一指标起,  $n_j$  为一常数, 显然  $\| C(\tau_j) \|^j$  有界. 不妨设  $\| C(\tau_j) \| > 1$ , 由此

$$\| [C(\tau_j)]^{n_j} \| \leq \| C(\tau_j) \|^{n_j}$$

是有界的.

两种情况都与 (2.12) 相矛盾, 所以我们就证明了 (2.11).

下面讨论从稳定性推出收敛性. 设  $u_0 \in C_0^1(R), E(t) u_0 (0 < t \leq T)$  是偏微分方程初值问题 (1.9) 和 (1.10) 的解, 并假定  $E(t) u_0$



$\in C_0^1(R)$ . 令时间步长序列  $\tau_j \rightarrow 0$ ,  $n_j$  为最接近于  $t/\tau_j$  的正整数, 当  $j \rightarrow \infty$  时有  $n_j \tau_j \rightarrow t$ . 下面要证明

$$\| [C(\tau_j)]^{n_j} u_0 - E(t) u_0 \| \rightarrow 0. \quad (2.13)$$

考虑等式

$$\begin{aligned} & [C(x, \tau_j)]^{n_j} u_0(x) - E(t) u_0(x) \\ &= [(C(x, \tau_j))^{n_j} u_0(x) - E(n_j \tau_j) u_0(x)] \\ &+ [E(n_j \tau_j) u_0(x) - E(t) u_0(x)]. \end{aligned} \quad (2.14)$$

首先估计上式右边的第一项,

$$\begin{aligned} \psi_j &= [(C(x, \tau_j))^{n_j} u_0(x) - E(n_j \tau_j) u_0(x)] \\ &= \left\{ (C(x, \tau_j))^{n_j} + \sum_{k=1}^{n_j-1} (C(x, \tau_j))^k E([n_j - k] \tau_j) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^{n_j-1} (C(x, \tau_j))^k E([n_j - k] \tau_j) - E(n_j \tau_j) \right\} u_0(x) \\ &= \left\{ \sum_{k=1}^{n_j} (C(x, \tau_j))^k E([n_j - k] \tau_j) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{n_j-1} (C(x, \tau_j))^k E([n_j - k] \tau_j) \right\} u_0(x) \\ &= \left\{ \sum_{k=0}^{n_j-1} (C(x, \tau_j))^k C(x, \tau_j) E([n_j - k - 1] \tau_j) \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=0}^{n_j-1} (C(x, \tau_j))^k E(\tau_j) E([n_j - k - 1] \tau_j) \right\} u_0(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n_j-1} (C(x, \tau_j))^k [C(x, \tau_j) \\ &\quad - E(\tau_j)] E([n_j - k - 1] \tau_j) u_0(x) \end{aligned}$$

$$= \sum_{k=0}^{n_j-1} (C(x, \tau_j))^k [C(x, \tau_j) - E(\tau_j)] u(x, [n_j - k - 1] \tau_j).$$

由相容性条件我们知道,

$$\|(C(\tau_j) - E(\tau_j))u([n_j - k - 1]\tau_j)\| \leq e\tau_j,$$

其中  $\epsilon$  为任意给定的正数. 利用差分格式的稳定性得

$$\|(C(\tau_j))^k\| \leq K.$$

由此我们有

$$\|\psi_j\| \leq K \sum_{k=0}^{n_j-1} e\tau_j = K\epsilon n_j \tau_j \leq eKT.$$

由  $\epsilon$  的任意性, 所以当  $j \rightarrow \infty$  时有  $\|\psi_j\| \rightarrow 0$ .

再来估计 (2.14) 右边的第二项, 令  $t' = \min(t, n_j \tau_j)$ , 那么有

$$\begin{aligned} E(t)u_0(x) - E(n_j \tau_j)u_0(x) \\ = \text{sign}(t - n_j \tau_j) E(t') [E(|t - n_j \tau_j|)u_0(x) - u_0(x)]. \end{aligned}$$

利用初值问题的适定性有

$$\|E(t)u_0 - E(n_j \tau_j)u_0\| \leq C_0 \|E(|t - n_j \tau_j|)u_0 - u_0\|.$$

利用 (1.14), 当  $|t - n_j \tau_j| < \delta$  时有

$$\|E(|t - n_j \tau_j|)u_0 - u_0\| < \epsilon,$$

由此得出, 当  $n_j \tau_j \rightarrow t$  时有  $\|E(t)u_0 - E(n_j \tau_j)u_0\| \rightarrow 0$ . 由 (2.14) 右边二项的估计我们立即得到 (2.13).

最后我们假定  $u_0 \in L_2(\mathbf{R})$ ,  $E(t)u_0 \in L_2(\mathbf{R})$ . 由于  $C_0^\infty(\mathbf{R})$  在  $L_2(\mathbf{R})$  中稠密, 所以对  $u_0$ , 存在  $u^{(\nu)} \in C_0^\infty(\mathbf{R})$  使

$$\|u^{(\nu)} - u_0\| \rightarrow 0 \quad (\nu \rightarrow \infty).$$

而对于每个  $\nu$  有

$$\begin{aligned} \|E(t)u_0 - (C(\tau_j))^{n_j}u_0\| &\leq \|E(t)(u_0 - u^{(\nu)})\| + \|E(t)u^{(\nu)} \\ &\quad - (C(\tau_j))^{n_j}u^{(\nu)}\| + \|(C(\tau_j))^{n_j}(u^{(\nu)} - u_0)\| \end{aligned}$$

利用偏微分方程初值问题的适定性及差分格式的稳定性, 我们可

以得到

$$\begin{aligned} \|E(t)u_0 - (C(\tau_j))^n u_0\| &\leq \|E(t)u^{(v)} - (C(\tau_j))^n u^{(v)}\| \\ &\leq M \|u_0 - u^{(v)}\|. \end{aligned}$$

对于任一固定的正整数 $v$ , 由于 $u^{(v)} \in C_0^\infty(R)$ , 我们已证得对 $t \in [0, T]$ 一致地有

$$\lim_{\substack{j \rightarrow \infty \\ \tau_j \rightarrow 0 \\ n \tau_j = t}} \|E(t)u^{(v)} - (C(\tau_j))^n u^{(v)}\| = 0.$$

由此对 $u_0 \in L_2(R)$ , 收敛性证得.

根据 Lax 等价定理, 为了证明差分格式的解收敛于微分方程初值问题的解, 我们只要证明相容的差分格式是稳定的即可. 构造一个相容的差分格式并不是困难的事情, 因而着重是要讨论差分格式的稳定性. 对于很多线性差分格式来说, 稳定性的证明比收敛性证明容易.

## 2.6 Kreiss 扰动定理

对于一个稳定的差分格式, 对差分算子作微小的扰动后是否还保持其稳定性? 下面的定理作了确切的回答.

**定理 2.2** 如果差分格式

$$u^{n+1} = C(\tau)u^n \quad (2.15)$$

是稳定的,  $Q(\tau)$  是一个有界算子族, 那么差分格式

$$u^{n+1} = [C(\tau) + \tau Q(\tau)]u^n \quad (2.16)$$

仍是稳定的.

**证明** 根据差分格式(2.15)的稳定性, 有

$$\|(C(\tau))^n\| \leq K_1.$$

而  $Q(\tau)$  是一个有界算子族, 那么有

$$\|Q(\tau)\| \leq K_2.$$

现在考虑  $(C(\tau) + \tau Q(\tau))^n$ . 展开这个二项式共有  $2^n$  项, 其中有  $\binom{n}{j}$  项是  $n-j$  个  $C(\tau)$  和  $j$  个  $\tau Q(\tau)$  的乘积. 但这  $n-j$  个  $C(\tau)$

被  $j$  个  $\tau Q(\tau)$  分割为  $j+1$  个  $C(\tau)$  的幂. 利用差分格式 (2.15) 的稳定性, 我们知道这  $j+1$  个  $C(\tau)$  的幂中每个幂的模都小于常数  $K_1$ , 因而有

$$\begin{aligned}\| [C(\tau) + \tau Q(\tau)]^n \| &\leq \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} K_1^{j+1} (\tau K_2)^{n-j} \\ &= K_1 \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (\tau K_1 K_2)^{n-j} \\ &= K_1 (1 + \tau K_1 K_2)^n \leq K_1 e^{\tau K_1 K_2}, n\tau \leq T.\end{aligned}$$

所以差分格式 (2.16) 是稳定的.

### § 3 线性常系数差分格式

#### 3.1 差分格式的 Fourier 变换和增长矩阵

如果偏微分方程组 (1.9) 是常系数的, 那么可以用 Fourier 变换来进行求解和讨论. 例如, 考虑常系数线性偏微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} = \sum_{\nu=0}^M A_{\nu} \frac{\partial^{\nu} \mathbf{u}}{\partial x^{\nu}}, t > 0, |x| < \infty, \\ \mathbf{u}(x, 0) = \mathbf{u}_0(x), |x| < \infty, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中  $A_{\nu}, \nu=1, 2, \dots, M$  为  $p$  阶常数方阵.

考虑到 Fourier 的性质,

$$\begin{aligned}\widehat{\frac{\partial^{\nu} \mathbf{u}}{\partial x^{\nu}}}(\omega, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial^{\nu} \mathbf{u}}{\partial x^{\nu}}(x, t) e^{-i\omega x} dx \\ &= (i\omega)^{\nu} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{u}(x, t) e^{-i\omega x} dx\end{aligned}$$

$$= (i\omega)^v \hat{u}(\omega, t).$$

所以对(3.1)中偏微分方程的两边进行 Fourier 变换就可以得到

$$\frac{\partial}{\partial t} \hat{u}(\omega, t) = \sum_{v=0}^M A_v (i\omega)^v \hat{u}(\omega, t). \quad (3.2)$$

此外,初始条件的 Fourier 变换

$$\hat{u}(\omega, 0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(x) e^{-i\omega x} dx. \quad (3.3)$$

(3.2)和(3.3)构成了一个以  $\omega$  为参数的常微分方程组. 容易解出

$$\hat{u}(\omega, t) = e^{tP(i\omega)} \hat{u}(\omega, 0),$$

其中

$$P(i\omega) = \sum_{v=0}^M A_v (i\omega)^v.$$

由此得到

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} e^{P(i\omega)t} \hat{u}(\omega, 0) d\omega. \quad (3.4)$$

我们看到,利用 Fourier 变换简化了偏微分方程的求解. Fourier 变换应用到线性常系数差分方程组上,将会得到有用的判别稳定性的准则.

我们考虑逼近(3.1)的线性常系数差分格式

$$\sum_{\beta=-l_1}^{l_1} B^{(\beta)}_1(\tau) T^\beta u^{n+1}(x) = \sum_{\beta=-l_0}^{l_0} B^{(\beta)}_0(\tau) T^\beta u^n(x), \quad (3.5)$$

其中  $B^{(\beta)}_i(\tau), i=0,1$ , 不依赖于网格点  $x$ . 注意到,差分格式(3.5)中  $u^n(x)$ 和  $u^{n+1}(x)$ 是定义在网格点上,但是 Fourier 变换仅对连续变量  $x$  的函数才能应用,因此必须将(3.5)中的函数定义域扩展到整个实数轴  $\mathbb{R}$  上. 设  $j$  为一整数,令  $x_j = jh$ ,  $h$  为空

间步长. 在  $\left(j - \frac{1}{2}\right)h \leq x < \left(j + \frac{1}{2}\right)h$  上, 将  $u^n(x)$  表示成

$$u^n(x) = u^n(x_j) \quad (3.6)$$

(为方便起见, 采用了同样的记号). 对于这样定义的阶梯函数  $u^n(x)$ , 无论  $x$  选在哪里, 差分方程(3.5)都能写成同样的形式, 而且给出同样的解. 对于(3.1)中的初值  $u_0(x)$ , 先进行离散, 再把定义域按(3.6)的方式进行扩充. 扩充后的定义域就是  $\mathbb{R}$  了, 从而可以用 Fourier 变换.

把(3.5)两边的函数都按 (3.6) 的方式对定义域进行扩充, Fourier 变换得

$$\sum_{\beta=-l_1}^{l_1} B_1^{(\beta)}(\tau) \widehat{T^\beta u^{n+1}}(\omega) = \sum_{\beta=-l_2}^{l_2} B_0^{(\beta)}(\tau) \widehat{T^\beta u^n}(\omega)$$

考虑到

$$\begin{aligned} \widehat{T^\beta u^n}(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} T^\beta u^n(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} u^n(x + \beta h) e^{-i\omega x} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{i\beta h \omega} \int_{-\infty}^{\infty} u^n(x) e^{-i\omega x} dx \\ &= e^{i\omega \beta h} \widehat{u^n}(\omega), \end{aligned}$$

因此得到

$$\begin{aligned} \sum_{\beta=-l_1}^{l_1} B_1^{(\beta)}(\tau) e^{i\beta h \omega} \widehat{u^{n+1}}(\omega) \\ = \sum_{\beta=-l_2}^{l_2} B_0^{(\beta)}(\tau) e^{i\beta h \omega} \widehat{u^n}(\omega). \end{aligned} \quad (3.7)$$

假定空间步长  $h$  以函数关系  $h = g(\tau)$  随  $\tau \rightarrow 0$  而趋于 0, 因此可

以令

$$H_q(\tau, \omega) = \sum_{\beta=-l_q}^{l_q} B_q^{(\beta)}(\tau) e^{i\beta h \omega}, \quad q=0, 1.$$

这样(3.7)可以简写为

$$H_1(\tau, \omega) \hat{u}^{n+1}(\omega) = H_0(\tau, \omega) \hat{u}^n(\omega).$$

为使方程组可解, 假定  $H_1(\tau, \omega)$  有逆算子存在, 因此有

$$\hat{u}^{n+1}(\omega) = G(\tau, \omega) \hat{u}^n(\omega), \quad (3.8)$$

其中

$$G(\tau, \omega) = (H_1(\tau, \omega))^{-1} H_0(\tau, \omega) \quad (3.9)$$

为  $p$  阶方阵. 可以看出,  $G(\tau, \omega)$  决定了差分方程组(3.5) 的解的 Fourier 系数的增长, 因此我们称  $G(\tau, \omega)$  为增长矩阵.

由于  $G(\tau, \omega)$  不依赖于  $n$ , 因此由(3.8) 就可以得到

$$\hat{u}^n(\omega) = [G(\tau, \omega)]^n \hat{u}^0(\omega).$$

下面我们将用增长矩阵  $G(\tau, \omega)$  来研究线性常系数差分格式的稳定性. 为此先引入矩阵范数

$$\|G(\tau, \omega)\| = \max_{|u| \neq 0} \frac{|G(\tau, \omega)u|}{|u|},$$

其中  $|u|$  是向量  $u$  的 Euclid 范数, 即

$$|u| = \sqrt{\sum_{i=1}^p |u^{(i)}|^2},$$

$$|G(\tau, \omega)u| = \sqrt{\sum_{j=1}^p \left| \sum_{i=1}^p G_{ji}(\tau, \omega) u_i \right|^2}.$$

采用增长矩阵来研究差分格式的稳定性是基于下面的定理

**定理 3.1** 差分格式(3.5)稳定的充要条件是存在正数  $\tau$  和  $K$ , 使得当  $\tau \leq \tau_0$  时, 对所有  $\omega \in \mathbf{R}$ ,  $n\tau \leq T$  一致地有

$$\|G(\tau, \omega)^n\| \leq K, \quad (3.10)$$

**证明** 先证充分性. 应用 Parseval 关系式可以得

$$\begin{aligned}\|C(\tau)^n u_0\|^2 &= \|u^n\|^2 = \|\hat{u}^n\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}^n(\omega)|^2 d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} |G(\tau, \omega)^n \hat{u}_0(\omega)|^2 d\omega\end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned}\|C(\tau)^n u_0\|^2 &\leq \left( \sup_{\omega} \|G(\tau, \omega)^n\|^2 \right) \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{u}_0(\omega)|^2 d\omega \\ &= \sup_{\omega} \|G(\tau, \omega)^n\|^2 \|\hat{u}_0\|^2.\end{aligned}$$

利用条件(3.10)及 Parseval 关系式就得到

$$\|C(\tau)^n u_0\|^2 \leq K^2 \|u_0\|^2.$$

再证必要性. 用反证法证. 设(3.10)不成立, 那么存在  $\tau, \leq \tau_0, n, \tau, \leq T, \omega$ , 使得

$$\|G(\tau, \omega)^n\| > j.$$

由于  $G(\tau, \omega)$  对  $\omega$  的连续性, 因此对于每个  $j$ , 存在向量  $b_j$  以及  $\omega_j$  的一个邻域  $\varepsilon_j = \{\omega: |\omega - \omega_j| \leq \delta_j\}$ , 使得当  $\omega \in \varepsilon_j$  时有

$$|G(\tau, \omega)^n b_j| > \frac{1}{2} j \|b_j\|.$$

考虑向量  $u_j(x)$ , 使其 Fourier 变换为

$$\hat{u}_j(\omega) = \begin{cases} b_j, & \text{当 } |\omega - \omega_j| \leq \delta_j, \\ 0, & \text{当 } |\omega - \omega_j| > \delta_j. \end{cases}$$

根据 Parseval 关系式有

$$\begin{aligned}\|C(\tau)^n u_j\|^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} |G(\tau, \omega)^n \hat{u}_j(\omega)|^2 d\omega \\ &\geq \frac{1}{4} j^2 \|\hat{u}_j\|^2 = \frac{1}{4} j^2 \|u_j\|^2.\end{aligned}$$

所以  $C(\tau)^n (n\tau \leq T)$  的一致有界性破坏了, 即差分格式不稳定.

### 3.2 稳定性的判别准则

根据定理 3.1, 差分格式稳定性问题被归结为 增长矩阵幂的



一致有界性问题。这是一个线性代数问题，因此利用已有的知识可以给出一系列的判别准则。特别是采用增长矩阵  $G(\tau, \omega)$  的特征值来进行判别，可以大大简化差分格式的稳定性问题的讨论。

设  $\lambda^{(l)}(G(\tau, \omega))$ ,  $l=1, 2, \dots, p$  是增长矩阵  $G(\tau, \omega)$  的特征值。令

$$\rho(G) = \max_{1 \leq l \leq p} |\lambda^{(l)}(G)|,$$

则称  $\rho(G)$  为  $G(\tau, \omega)$  的谱半径。容易看出，存在  $l_0$  使

$$\rho(G) = |\lambda^{(l_0)}(G)| = \frac{|G(\tau, \omega)V^{(l_0)}(G)|}{|V^{(l_0)}(G)|} \leq \|G(\tau, \omega)\|,$$

其中  $V^{(l_0)}(G)$  是对应于  $\lambda^{(l_0)}(G)$  的  $G(\tau, \omega)$  的特征向量。此外

$$\begin{aligned} \|G(\tau, \omega)\|^2 &\leq \max_{\substack{|V| \neq 0 \\ |W| \neq 0}} \frac{|G(\tau, \omega)V|}{|V|} \cdot \frac{|G(\tau, \omega)W|}{|W|} \\ &\leq \|G(\tau, \omega)\|^2. \end{aligned}$$

一般地有

$$[\rho(G)]^n \leq \|G(\tau, \omega)^n\| \leq \|G(\tau, \omega)\|^n. \quad (3.11)$$

下面我们来讨论差分格式稳定性的条件。

**定理 3.2** 差分格式(3.5)稳定的必要条件是当  $\tau \leq \tau_0$  时，对一切  $\omega$  有估计式

$$|\lambda^{(l)}(G(\tau, \omega))| \leq 1 + O(\tau), l=1, 2, \dots, p. \quad (3.12)$$

在定理的证明之前，我们先证明一个将要用到的简单事实。

**引理 3.1** 设  $K > 1$ ，那么对于  $x \in [0, 1]$  就有

$$K^x \leq 1 + Kx.$$

**证明** 令  $f(x) = K^x$ ，则  $f(0) = 1$ ， $f(1) = K$ 。把  $f(x)$  改写为

$$f(x) = e^{x \ln K},$$

则容易求出

$$f'(x) = (\ln K)e^{x \ln K} > 0, f''(x) = (\ln K)^2 e^{x \ln K} > 0.$$

所以  $f(x)$  在  $(0,1)$  内是一个增函数而且是凸函数. 过点  $(0,1)$  和点  $(1,K)$  的直线方程为

$$y = 1 + (K-1)x.$$

利用凸函数的性质有

$$f(x) \leq 1 + (K-1)x,$$

从而有

$$f(x) \leq 1 + Kx,$$

即得

$$K^x \leq 1 + Kx.$$

现在给出定理 3.2 的证明. 如果差分格式 (3.5) 是稳定的, 那么利用定理 3.1 可知, 当  $\tau \leq \tau_0$  时, 对一切  $\omega \in R$ ,  $n\tau \leq T$  一致地有

$$\|G(\tau, \omega)^n\| \leq K.$$

由 (3.11) 知

$$\rho(G(\tau, \omega))^n \leq K.$$

不失一般性, 我们可以取  $K > 1$  及  $n\tau = T$ , 这样我们可得

$$\rho(G(\tau, \omega)) \leq K^{\frac{1}{n}} = K^{\frac{\tau}{T}}.$$

利用引理 3.1 我们立即得 (3.12).

条件 (3.12) 称为 von Neumann 条件. 它是差分格式稳定的必要条件, 但在很多情况下它也是差分格式稳定的充分条件. 因此这样一个简单的条件特别引起重视.

下面考虑几个简单的充分条件.

**定理 3.3** 如果当  $\tau \leq \tau_0$  时, 对一切  $\omega \in R$  都有  $\|G(\tau, \omega)\| \leq 1 + O(\tau)$ , 则差分格式 (3.5) 是稳定的.

**证明** 利用 (3.11) 有

$$\|G(\tau, \omega)^n\| \leq (1 + C_1\tau)^n \leq \left(1 + C_1 \frac{T}{n}\right)^n \leq e^{C_1 T}.$$

定理证毕.

用  $G^*$  表示  $G$  的共轭转置, 如果  $G^*G = GG^*$ , 则称  $G$  为正规矩阵. 对于正规矩阵就有  $\|G\| = \rho(G)$ , 即正规矩阵的谱半径等于其范数. 利用这个性质我们可以得下面定理.

**定理 3.4** 如果对于一切  $\tau \leq \tau_0$  和  $\omega \in R$ ,  $G(\tau, \omega)$  都是正规矩阵, 那么 von Neumann 条件是稳定的充分必要条件.

这个定理包括了  $G(\tau, \omega)$  是对称矩阵的情况. 特别是  $p=1$  的简单情况, 此时增长矩阵退化为一个元素, 一般称其为增长因子. 这种特殊情况是经常使用的. 可以把其结论归纳为下面的推论.

**推论 3.1** 对于仅有一个因变量的二层差分格式, von Neumann 条件是稳定的充分必要条件.

**定理 3.5** 如果对于  $\tau \leq \tau_0$ ,  $\omega \in R$ , 存在非奇异矩阵  $S(\tau, \omega)$ , 使得

$$S^{-1}(\tau, \omega)G(\tau, \omega)S(\tau, \omega) = A(\tau, \omega),$$

其中  $A(\tau, \omega)$  是对角矩阵, 并且存在与  $\tau, \omega$  无关的常数  $C_0$ , 满足

$$\|S(\tau, \omega)\| \leq C_0, \quad \|S^{-1}(\tau, \omega)\| \leq C_0,$$

那么 von Neumann 条件是差分格式稳定的充分必要条件.

**证明** 利用定理的条件我们有

$$G(\tau, \omega) = S(\tau, \omega)A(\tau, \omega)S^{-1}(\tau, \omega).$$

重复使用上式有

$$G(\tau, \omega)^n = S(\tau, \omega)A(\tau, \omega)^nS^{-1}(\tau, \omega).$$

利用 von Neumann 知

$$|\lambda^{(l)}(G(\tau, \omega))| \leq 1 + O(\tau), \quad l=1, 2, \dots, p,$$

由此得

$$\rho(A(\tau, \omega)) \leq 1 + O(\tau).$$

由于  $A(\tau, \omega)$  是对角矩阵, 所以有  $\|A(\tau, \omega)\| = \rho(A(\tau, \omega))$ , 因此我们得到

$$\begin{aligned}\|G(\tau, \omega)^n\| &\leq C_0^2 \|A(\tau, \omega)^n\| \leq C_0^2 \|A(\tau, \omega)\|^n \\ &\leq C_0^2 (1 + K\tau)^n \leq C_0^2 e^{K\tau}, \quad n\tau \leq T.\end{aligned}$$

所以差分格式稳定.

定理 3.5 的条件一般也称为一致对角化条件.

**定理 3.6** 如果  $G(\tau, \omega) = \tilde{G}(\sigma)$ , 其中  $\sigma = \omega h$ ,  $h = \tau/\lambda$  或  $h = \sqrt{\frac{\tau}{\lambda}}$ , 并对于任意给定的  $\sigma \in \mathbb{R}$ , 下列条件之一成立:

- (1)  $\tilde{G}(\sigma)$  有  $p$  个不同的特征值,
- (2)  $\tilde{G}^{(\mu)}(\sigma) = \gamma_\mu I$ ,  $\mu = 0, 1, \dots, s-1$ ,  $\tilde{G}^{(s)}(\sigma)$  有  $p$  个不同的特征值,
- (3)  $\rho(\tilde{G}(\sigma)) < 1$ .

那么 von Neumann 条件是差分格式稳定的充要条件.

这个定理的证明很繁, 在此我们省略了, 有兴趣的读者可参见 [19]. 在定理 3.6 的三个条件中, (1) 可以看成 (2) 的特例, 即  $s = 0$ . 但条件 (1) 经常使用, 所以单独列出.

利用矩阵幂的一致有界性来研究差分格式的稳定性已有完满的结果, 其充分且必要条件已由 Kreiss 矩阵定理所阐明, 完整的结果可参阅 [23]. 我们这里仅介绍由此导出的一个经常使用的充分条件.

**定理 3.7** 如果对于一切  $\tau \leq \tau_0$ ,  $\omega \in \mathbb{R}$ , 增长矩阵  $G(\tau, \omega)$  的元素一致有界并且

$$\begin{aligned}|\lambda^{(1)}(G)| &\leq 1 + O(\tau), \\ |\lambda^{(l)}(G)| &\leq \tau < 1, \quad l = 2, 3, \dots, p,\end{aligned}$$

那么差分格式稳定.

### 3.3 例子

应用增长矩阵的特征值的估计判别差分格式的稳定性是简单而且应用很广的方法, 为此我们列举一些具体例子进行讨论.

例 1 讨论逼近对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (3.13)$$

的显式中心差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0 \quad (3.14)$$

的稳定性.

首先把上面差分格式变形

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{a}{2} \lambda (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad (3.15)$$

其中  $\lambda = \tau/h$ . 再把在网络点上定义的函数的定义域按通常办法进行扩充, 即当  $x \in [x_j - \frac{1}{2}h, x_j + \frac{1}{2}h)$  时  $u^n(x) = u_j^n$ . 这样就有

$$u^{n+1}(x) = u^n(x) - \frac{a\lambda}{2} [u^n(x+h) - u^n(x-h)], \quad x \in R.$$

对上式两边作 Fourier 变换有

$$\hat{u}^{n+1}(\omega) = \hat{u}^n(\omega) - \frac{a\lambda}{2} [e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}] \hat{u}^n(\omega).$$

我们得出其增长因子

$$\begin{aligned} G(\tau, \omega) &= 1 - \frac{a\lambda}{2} (e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}) \\ &= 1 - a\lambda i \sin \omega h. \end{aligned}$$

由此得到

$$|G(\tau, \omega)|^2 = 1 + a^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h.$$

当  $\sin \omega h \neq 0$  时, 不管怎样选取网格比  $\lambda$  总有  $|G(\tau, \omega)| > 1$ . 因此不满足差分格式稳定的必要条件——von Neumann 条件, 所以差分格式(3.14)是不稳定的.

对于具体问题, 增长矩阵是容易计算的, 实际上只要取  $u_i^n =$

$v^n e^{i\omega jh}$  代入相应的差分方程, 再把公因子消去, 就可以求得增长矩阵  $G(\tau, \omega)$ 。以上面的差分格式为例, 令  $u_j^n = v^n e^{i\omega jh}$ , 把它代入差分格式(3.15)有

$$v^{n+1} e^{i\omega jh} = v^n \left\{ 1 - \frac{a\lambda}{2} (e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}) \right\} e^{i\omega jh}.$$

消去公因子  $e^{i\omega jh}$ , 我们得到

$$v^{n+1} = \left\{ 1 - \frac{a\lambda}{2} (e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}) \right\} v^n.$$

由此得到增长因子  $G(\tau, \omega) = 1 - \frac{a\lambda}{2} (e^{i\omega h} - e^{-i\omega h})$ 。显然这个方法比上面直接用 Fourier 变换求增长因子的方法简单多了。

例 2 讨论逼近对流方程(3.13) ( $a > 0$ ) 的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0 \quad (3.16)$$

的稳定性。

先把差分格式改写为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda (u_j^n - u_{j-1}^n).$$

令  $u_j^n = v^n e^{i\omega jh}$ , 并将它代入上式就得到

$$v^{n+1} e^{i\omega jh} = v^n e^{i\omega jh} - a\lambda v^n (1 - e^{-i\omega h}) e^{i\omega jh}.$$

消去公因子  $e^{i\omega jh}$  有

$$v^{n+1} = [1 - a\lambda(1 - e^{-i\omega h})] v^n.$$

由此得增长因子

$$\begin{aligned} G(\tau, \omega) &= 1 - a\lambda(1 - e^{-i\omega h}) \\ &= 1 - a\lambda(1 - \cos \omega h) - a\lambda i \sin \omega h. \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} |G(\tau, \omega)|^2 &= [1 - a\lambda(1 - \cos \omega h)]^2 + a^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h \\ &= \left[ 1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2} \right]^2 + 4a^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(1 - \sin^2 \frac{\omega h}{2}\right) \\ & = 1 - 4 a \lambda (1 - a \lambda) \sin^2 \frac{\omega h}{2}. \end{aligned}$$

如果  $a\lambda \leq 1$ , 那么有  $|G(\tau, \omega)| \leq 1$ , 即 von Neumann 条件满足. 利用定理 3.4 的推论知差分格式(3.16)在条件

$$a\lambda \leq 1$$

之下是稳定的.

**例 3** 讨论逼近扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad a > 0 \quad (3.17)$$

的隐式差分格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} - a \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} = 0 \quad (3.18)$$

的稳定性.

先把差分格式变形

$$-a\lambda u_{i-1}^{n+1} + (1 + 2a\lambda)u_i^{n+1} - a\lambda u_{i+1}^{n+1} = u_i^n,$$

其中  $\lambda = \tau/h^2$ . 令  $u_i^n = v^n e^{i\omega x}$ , 并把它代入上面方程且消去公因子  $e^{i\omega x}$ , 容易求出其增长因子为

$$G(\tau, \omega) = \frac{1}{1 + 4a\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2}}.$$

由于  $a > 0$ , 所以对任何网格比  $\lambda$  都有  $|G(\tau, \omega)| \leq 1$ . 由定理 3.4 的推论知隐式格式(3.18)是稳定的.

**例 4** 讨论逼近扩散方程(3.17)的 Richardson 差分格式

$$u_i^{n+1} = u_i^{n-1} + 2a\lambda(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n)$$

的稳定性, 其中  $\lambda = \tau/h^2$ .

我们注意到, 这是一个三层差分格式. 讨论这种类型的差分格式的稳定性, 一般先化成与其等价的二层差分方程组, Richar-

Richardson 差分方程的等价的二层差分方程组是

$$\begin{cases} u_i^{n+1} = v_i^n + 2\alpha\lambda(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n) \\ v_i^{n+1} = u_i^n \end{cases}$$

如果令  $u_i^n = [u_i^n, v_i^n]^T$ , 那么上面的方程组可以写成

$$u_i^{n+1} = \begin{bmatrix} 2\alpha\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_{i+1}^n + \begin{bmatrix} -4\alpha\lambda & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_i^n + \begin{bmatrix} 2\alpha\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_{i-1}^n.$$

设  $u_i^n = v^n e^{i\omega ih}$ , 将它代入上式并消去公因子  $e^{i\omega ih}$ , 得

$$v^{n+1} = \begin{bmatrix} -8\alpha\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v^n.$$

因此增长矩阵为

$$G(r, \omega) = \begin{bmatrix} -8\alpha\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2} & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

其特征值为

$$\mu_{1,2} = -4\alpha\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2} \pm \sqrt{1 + 16\alpha^2 \lambda^2 \sin^4 \frac{\omega h}{2}}.$$

考虑其中之一

$$\mu_1 = -4\alpha\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2} + \sqrt{1 + 16\alpha^2 \lambda^2 \sin^4 \frac{\omega h}{2}},$$

当  $\sin \frac{\omega h}{2} \neq 0$  时, 对任何网格比  $\lambda$  都有  $|\mu_1| > 1$ , 即不满足差分格式稳定的 von Neumann 条件, 所以 Richardson 差分格式是不稳定的。

上面我们用 Fourier 方法考察了一些差分格式的稳定性情况, 同时也说明了此方法在差分方程和差分方程组上的应用。从



讨论的例子我们看到,有的差分格式,如差分格式(3.16),在条件 $a\lambda \leq 1$ 之下才是稳定的;有的差分格式,如差分格式(3.18),对任何网格比 $\lambda = \tau/h^2$ 都是稳定的;有的差分格式,如差分格式(3.14)和 Richardson 差分格式,对任何网格比 $\lambda$ (分别为 $\lambda = \tau/h$ 和 $\lambda = \tau/h^2$ )都是不稳定的。为了区别这几种不同的情况,我们称第一种情况的差分格式是**条件稳定的**,称第二种情况的差分格式是**无条件稳定(或绝对稳定)**的,最后一种情况的差分格式则称为**绝对不稳定的(或无条件不稳定)**。

上面例子的稳定性分析也给我们一个启示,对于构造出来的差分格式进行分析是非常必要的。Richardson 格式有二阶精度,但无实用价值。在实际应用中,首先要排除不稳定的差分格式,其次寻求稳定性限制较为弱的差分格式。当然最好是无条件稳定的差分格式,但也要注意其它因素的制约。

## § 4 能量不等式方法

在上节中,我们讨论了线性常系数差分格式的稳定性问题,建立了判别差分格式的稳定性准则,从而比较容易地判断一些差分格式是否稳定。但对于变系数问题,初边值混合问题以及非线性问题来说,一般就不能采用 Fourier 方法来分析稳定性,而能量不等式方法则是讨论差分格式的收敛性和稳定性的一个有力工具。用能量方法研究差分格式的稳定性,是从稳定性的定义出发,通过一系列估计式来完成的。这个方法是偏微分方程中常用的能量方法的离散模拟。在此我们不作一般的讨论,仅通过简单的例子说明其基本思想,更多的例子将在后面的第三章和第四章中给出。

### 4.1 变系数对流方程的差分格式

考虑对流方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, |x| < \infty, 0 \leq t \leq T, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), |x| < \infty. \end{cases} \quad (4.2)$$

先对初值问题 (4.1) 和 (4.2) 推导出一个解的积分估计式, 它对差分格式的能量方法很有启发. 在下面的推导中, 我们假定  $\lim_{x \rightarrow \pm \infty} u(x, t) = 0$ . 在积分估计式的推导中, 将要用到下面的简单事实.

**引理 4.1** 设  $v(t), t \in [0, \infty)$ , 是一个正的函数, 如果

$$\frac{dv(t)}{dt} \leq Mv(t), \quad (4.3)$$

其中  $M$  为一正常数, 那么有

$$v(t) \leq v(0)e^{Mt}. \quad (4.4)$$

**证明** 对 (4.3) 从 0 到  $t$  积分得

$$v(t) \leq v(0) + M \int_0^t v(s) ds. \quad (4.5)$$

改写

$$\frac{Mv(t)}{v(0) + M \int_0^t v(s) ds} \leq M.$$

再对此式从 0 到  $t$  积分

$$\int_0^t \frac{Mv(s)}{v(0) + M \int_0^s v(\tau) d\tau} ds \leq Mt,$$

而

$$\begin{aligned} & \int_0^t \frac{Mv(s)}{v(0) + M \int_0^s v(\tau) d\tau} ds \\ &= \ln \left[ v(0) + M \int_0^t v(\tau) d\tau \right] - \ln v(0) \end{aligned}$$

$$= \ln \frac{v(0) + M \int_0^t v(\tau) d\tau}{v(0)},$$

由此得

$$\frac{v(0) + M \int_0^t v(\tau) d\tau}{v(0)} \leq e^{Mt}.$$

由于  $v(0) > 0$ , 所以有

$$v(0) + M \int_0^t v(\tau) d\tau \leq v(0) e^{Mt}.$$

结合(4.5)就得(4.4).

现在来推导初值问题(4.1)和(4.2)的解的积分估计式. 用  $u$  乘(4.1)并在  $R = (-\infty, +\infty)$  上进行积分, 得

$$\int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial t} dx + \int_{-\infty}^{\infty} a(x, t) u \frac{\partial u}{\partial x} dx = 0.$$

令

$$E(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{2} dx,$$

则有

$$\begin{aligned} \frac{dE(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{u^2}{2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} u \frac{\partial u}{\partial t} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} a(x, t) u \frac{\partial u}{\partial x} dx \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} a(x, t) \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial a}{\partial x} \frac{u^2}{2} dx. \end{aligned}$$

如果令

$$\sup_{x,t} \left| \frac{\partial a}{\partial x} \right| = M,$$

那么有

$$\frac{dE(t)}{dt} \leqslant ME(t).$$

利用引理 4.1 我们有

$$E(t) \leqslant E(0)e^{Mt}.$$

从  $E(t)$  的定义知问题(4.1)和(4.2)是适定的.

我们假定  $a(x, t) \geqslant 0$ , 仿上节中的差分格式 (3.16) 来构造逼近(4.1)和(4.2)的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0. \quad (4.6)$$

下面用能量不等式方法来证明这个差分格式的稳定性. 把 (4.6) 改变形式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a_j^n \lambda (u_j^n - u_{j-1}^n),$$

其中  $\lambda = \tau/h$ . 用  $u_j^{n+1}$  乘上式的两边,

$$(u_j^{n+1})^2 = (1 - a_j^n \lambda) u_j^n u_j^{n+1} + a_j^n \lambda u_{j-1}^n u_j^{n+1}.$$

如果  $\lambda$  满足条件

$$\lambda \max_j a_j^n \leqslant 1, \quad (4.7)$$

那么有

$$\begin{aligned} (u_j^{n+1})^2 &\leqslant \frac{1 - \lambda a_j^n}{2} [(u_j^n)^2 + (u_j^{n+1})^2] + \frac{\lambda a_j^n}{2} [(u_{j-1}^n)^2 + (u_j^{n+1})^2] \\ &= \frac{1}{2} (u_j^{n+1})^2 + \frac{1 - \lambda a_j^n}{2} (u_j^n)^2 + \frac{\lambda a_j^n}{2} (u_{j-1}^n)^2. \end{aligned}$$

移项后有

$$\begin{aligned} (u_j^{n+1})^2 &\leqslant (1 - \lambda a_j^n) (u_j^n)^2 + \lambda a_j^n (u_{j-1}^n)^2 \\ &= (u_j^n)^2 - \lambda a_j^n (u_j^n)^2 + \lambda a_j^n (u_{j-1}^n)^2. \end{aligned}$$

用  $h$  乘上面不等式的两边, 并对  $j$  求和, 令

$$\|u^n\|_1^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (u_j^n)^2 h,$$

那么有

$$\|u^{n+1}\|_h^2 \leq \|u^n\|_h^2 + \lambda \sum_{j=-\infty}^{\infty} (a_{j+1}^n - a_j^n) (u_j^n)^2 h.$$

如果

$$\sup_{x,t} \left| \frac{\partial a}{\partial x} \right| \leq C, \quad (4.8)$$

或者

$$\sup_{x,t} \left| \frac{a(x+h,t) - a(x,t)}{h} \right| \leq C, \quad (4.9)$$

那么有

$$\|u^{n+1}\|_h^2 \leq (1 + C\tau) \|u^n\|_h^2,$$

由此可得

$$\begin{aligned} \|u^n\|_h^2 &\leq (1 + C\tau)^n \|u^0\|_h^2 \\ &\leq e^{C\tau} \|u^0\|_h^2, \quad n\tau \leq T. \end{aligned}$$

我们知道,如果条件(4.8)成立,那么容易推出条件(4.9)也成立,即关于  $x$  是 Lipschitz 连续并且 Lipschitz 常数不依赖于  $t$ . 从上面讨论得到,当微分方程的系数  $a$  满足条件(4.8)时,差分格式在条件(4.7)下是稳定的.

从差分格式稳定性的证明过程来看,与微分方程初值问题的适定性证明是十分类似的.

## 4.2 一阶线性双曲型方程组的差分格式

考虑一阶线性双曲型方程组的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x}, & (4.10) \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & (4.11) \end{cases}$$

其中  $u = [u_1(x, t), \dots, u_p(x, t)]^T$ ,  $A$  为  $p$  阶对称矩阵. 我们采用显式差分格式来逼近初值问题(4.10)和(4.11).

$$u_i^{n+1} = \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} B_{\alpha}(x_i, t_n, \tau, h) T^{\alpha} u_i^n, \quad (4.12)$$

其中  $T^\sigma u_i^n = u_{i+\sigma}^n$ , 假定(4.12)满足

$$\sum_{\sigma=-q_1}^{q_1} B_\sigma = I, \quad (4.13)$$

其中  $I$  是单位矩阵. 这个条件说明, 如果  $u^n \equiv \text{const}$ , 那么  $u^n$  也是差分方程(4.12)的解. 若条件

$$\frac{\tau}{h} \sum_{\sigma=-q_1}^{q_1} \sigma B_\sigma = A + O(\tau) \quad (4.14)$$

满足, 那么差分格式(4.12)是微分方程初值问题的一个相容逼近. 对于差分格式(4.12)有下面定理.

**定理 4.1** 如果差分格式(4.12)中矩阵  $B_\sigma$  是对称、非负定的和关于  $x$  是 Lipschitz 连续的, 并设  $0 < \sigma \leq \frac{\tau}{h} \leq 1$ , 那么差分格式(4.12)是稳定的.

**引理 4.2** 设  $p$  阶方阵  $B$  是对称和非负定的, 那么对任意向量  $u$  和  $v$  有

$$(Bu, v) \leq \sqrt{(Bu, u)} \sqrt{(Bv, v)},$$

其中  $(u, v)$  表示向量内积.

**证明** 由于  $B$  是对称矩阵, 所以存在酉矩阵  $Q$  使得

$$Q^{-1} B Q = \Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p).$$

由于  $B$  是非负定的, 所以有  $\lambda_i \geq 0, i=1, 2, \dots, p$ . 这样我们有

$$B = Q \Lambda Q^{-1} = Q \Lambda^{\frac{1}{2}} \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^{-1} = Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^{-1} \cdot Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^{-1},$$

其中

$$\Lambda^{\frac{1}{2}} = \text{diag}(\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \lambda_2^{\frac{1}{2}}, \dots, \lambda_p^{\frac{1}{2}}).$$

令  $C = Q \Lambda^{\frac{1}{2}} Q^{-1}$ , 则  $C$  是对称非负定矩阵

$$\begin{aligned} (Bu, v) &= (C \cdot C u, v) = (C u, C v) \\ &\leq \sqrt{(C u, C u)} \sqrt{(C v, C v)} \\ &= \sqrt{(C \cdot C u, u)} \sqrt{(C \cdot C v, v)} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{(Bu, u)} \sqrt{(Bv, v)}$$

**定理 4.1 的证明** 用向量  $u_j^{n+1}$  对(4.12)两边作内积,

$$\begin{aligned} (u_j^{n+1}, u_j^{n+1}) &= \left( \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} B_\alpha T^\alpha u_j^n, u_j^{n+1} \right) \\ &= \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} (B_\alpha T^\alpha u_j^n, u_j^{n+1}). \end{aligned}$$

利用引理 4.2 有

$$\begin{aligned} (u_j^{n+1}, u_j^{n+1}) &\leq \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} \sqrt{(B_\alpha u_j^{n+1}, u_j^{n+1})} \sqrt{(B_\alpha u_{j+\alpha}^n, u_{j+\alpha}^n)} \\ &\leq \frac{1}{2} \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} (B_\alpha u_j^{n+1}, u_j^{n+1}) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} (B_\alpha u_{j+\alpha}^n, u_{j+\alpha}^n) \\ &= \frac{1}{2} \left( \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} B_\alpha u_j^{n+1}, u_j^{n+1} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} (B_\alpha (x_j + \alpha h) u_{j+\alpha}^n, u_{j+\alpha}^n) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} ([B_\alpha (x_j + \alpha h) \\ &\quad - B_\alpha (x_j)] u_{j+\alpha}^n, u_{j+\alpha}^n). \end{aligned}$$

利用条件(4.13)有

$$\begin{aligned} (u_j^{n+1}, u_j^{n+1}) &\leq \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} (B_\alpha (x_j + \alpha h) u_{j+\alpha}^n, u_{j+\alpha}^n) \\ &\quad - \sum_{\alpha=-q_1}^{q_1} ([B_\alpha (x_j + \alpha h) \end{aligned}$$

$$-B_a(x_i)]u_{j+a}^n, u_{j+a}^n).$$

用  $h$  乘上面不等式的两边, 对  $j$  求和并令

$$\|u^n\|_h^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (u_j^n, u_j^n) h,$$

则有

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_h^2 &\leq \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{a=-q_1}^{q_1} (B_a(x_i + \alpha h) u_{j+a}^n, u_{j+a}^n) \right\} h \\ &\quad - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{a=-q_1}^{q_1} ([B_a(x_i + \alpha h) \right. \\ &\quad \left. - B_a(x_i)] u_{j+a}^n, u_{j+a}^n) \right\} h. \end{aligned} \quad (4.15)$$

我们考虑到

$$\begin{aligned} &\sum_{j=-\infty}^{\infty} \left\{ \sum_{a=-q_1}^{q_1} (B_a(x_i + \alpha h) u_{j+a}^n, u_{j+a}^n) \right\} h \\ &= \sum_{a=-q_1}^{q_1} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} (B_a(x_i + \alpha h) u_{j+a}^n, u_{j+a}^n) h \right\} \\ &= \sum_{a=-q_1}^{q_1} \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} (B_a(x_i) u_j^n, u_j^n) h \right\} \\ &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{a=-q_1}^{q_1} B_a(x_i) u_j^n, u_j^n \right) h \\ &= \|u^n\|_h^2, \end{aligned}$$

此外,  $B_a$  关于  $x$  是 Lipschitz 连续的, 因此有

$$\frac{h}{\tau} \left\| \frac{B_a(x_i + h) - B_a(x_i)}{h} \right\| \leq b,$$

其中范数是矩阵范数. 这样由 (4.15) 我们得到

$$\|u^{n+1}\|_h^2 \leq (1 + b\tau) \|u^n\|_h^2.$$



由此可知, 差分格式(4.12)是稳定的.

### 4.3 扩散方程的差分格式

我们考虑变系数扩散方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & |x| < \infty, 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (4.16)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & |x| < \infty, \end{cases} \quad (4.17)$$

其中  $a(x, t) \geq a_0 > 0$ , 我们采用显式格式逼近初值问题(4.16)和(4.17)有

$$\begin{cases} \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = a_i^n \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}, \end{cases} \quad (4.18)$$

$$\begin{cases} u_i^0 = u_0(x_i). \end{cases} \quad (4.19)$$

首先改写(4.18)为

$$u_i^{n+1} = a_i^n \lambda u_{i-1}^n + (1 - 2a_i^n \lambda) u_i^n + a_i^n \lambda u_{i+1}^n, \quad (4.20)$$

其中  $\lambda = \tau/h^2$ .

如果令

$$\|u^n\|_\infty = \sup_i |u_i^n|, \quad (4.21)$$

那么有

$$|u_i^{n+1}| \leq (a_i^n \lambda + |1 - 2a_i^n \lambda| + a_i^n \lambda) \|u^n\|_\infty.$$

令

$$\lambda \sup_{i,n} a_i^n \leq \frac{1}{2}, \quad (4.22)$$

那么得到

$$|u_i^{n+1}| \leq \|u^n\|_\infty,$$

由此得

$$\|u^{n+1}\|_\infty \leq \|u^n\|_\infty.$$

反复应用此式有  $\|u^n\|_\infty \leq \|u^0\|_\infty$ . 此不等式表明, 差分格式的解的极大值在初始线  $t = 0$  上达到. 上面的推导中用到条件(4.22), 这是一个充分条件.

注意到, 我们采用了(4.21)所定义的范数. 这个范数称为离散极大模范数. 因此不等式  $\|u^n\|_1 \leq \|u^0\|_1$  也表示了差分格式在极大模下是稳定的. (4.22)称为稳定性条件.

## § 5 关于多维问题的附注

前面讨论了一个空间变量(一维)问题, 但一切概念和结论皆可推广到多维情况. 我们不作详细论述, 但考虑到以后的应用, 在此稍作说明.

设  $R_d$  为  $d$  维 Euclid 空间, 偏微分方程的初值问题为

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = L(D)u, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases} \quad (5.1)$$

$$(5.2)$$

其中  $u = [u_1, u_2, \dots, u_p]^T$ ,  $x \in R_d$ ,  $0 \leq t \leq T$ .  $L(D)$  是  $m$  阶微分算子

$$L(D) = \sum_{|\nu| \leq m} A_\nu \frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x_1^{\nu_1} \partial x_2^{\nu_2} \dots \partial x_d^{\nu_d}},$$

其中  $\nu = [\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_d]$ ,  $\nu_i$  ( $i=1, 2, \dots, d$ ) 是非负整数,  $|\nu| = \nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_d$ ,  $A_\nu$  是  $p$  阶方阵, 它们是  $x$  和  $t$  的光滑函数. 为构造差分格式及其性质的讨论简单起见, 以后假定  $A_\nu$  只依赖于  $x$  而不依赖于  $t$ . 同一维问题一样, 可以定义初值问题 (5.1) 和 (5.2) 的适定性. 二维扩散方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad a > 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad -\infty < x, y < \infty, \end{cases}$$

是一个多维问题的简单例子.

为构造逼近(5.1)和(5.2)的差分格式, 首先要剖分网格. 时

间步长仍取  $\tau$ , 并将整个空间  $R_d$  用  $d-1$  维超平面

$$x_l^{(j)} = jh_l, \quad l=1, 2, \dots, d; j=0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

来剖分. 仿一维问题可以建立差分格式

$$\begin{cases} B_1 u^{n+1}(x) = B_0 u^n(x), \\ u^0(x) = u_0(x), \end{cases} \quad (5.3)$$

$$(5.4)$$

其中  $x$  为网格点,  $B_0, B_1$  为依赖于  $x, \tau, h (h=[h_1, h_2, \dots, h_d])$  的差分算子. 它们可以写成

$$B_1 = \sum_{\beta \in \mathcal{N}_1} B_1^\beta T^\beta, \quad B_0 = \sum_{\beta \in \mathcal{N}_0} B_0^\beta T^\beta,$$

这里  $B_0^\beta, B_1^\beta$  为  $P$  阶方阵,  $\beta = [\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d]$ ,  $\mathcal{N}_0, \mathcal{N}_1$  为  $\beta = [0, 0, \dots, 0]$  附近的二个有限集合.  $T^\beta$  为平移算子

$$\begin{aligned} T^\beta u^n(x) &= T^{[\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_d]} u^n(x_1, x_2, \dots, x_d) \\ &= u^n(x_1 + \beta_1 h_1, x_2 + \beta_2 h_2, \dots, x_d + \beta_d h_d). \end{aligned}$$

我们假定, 当  $\tau \rightarrow 0$  时,  $h$  也以一定方式趋于 0, 因此  $B_0, B_1$  可以看成仅依赖于  $x$  和  $\tau$  的差分算子, 并设  $B_1$  有逆算子存在, 则有

$$u^{n+1}(x) = C(x, \tau) u^n(x), \quad (5.5)$$

其中  $C(x, \tau) = B_1^{-1} B_0$ . 由于  $C$  不依赖于  $t$ , 所以有

$$u^n(x) = C(x, \tau)^n u^0(x). \quad (5.6)$$

可以看到, (5.5) 和 (5.6) 与一维问题有同样形式. 相应的概念及结论可平行地推广过来.

如果考虑常系数问题, 那么我们可以对方程 (5.3) 进行 Fourier 变换, 得到

$$\hat{u}^{n+1}(\omega) = G(\tau, \omega) \hat{u}^n(\omega), \quad (5.7)$$

其中  $\omega = [\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_d]$ ,

$$\hat{u}^n(\omega) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right)^d \int_{-\infty}^{\infty} dx_1 \cdots \int_{-\infty}^{\infty} dx_d e^{-i(\omega, x)} u^n(x),$$

$$(x, \omega) = \sum_{k=1}^d x_k \omega_k.$$

$Q(\tau, \omega)$  为增长矩阵. 由此我们可以仿一维情形得到稳定性的判别准则. 增长矩阵的求法可以按定义来求, 但只要把差分格式中的  $u^n(x)$  和  $u^{n+1}(x)$  分别用  $v^n e^{i(\omega, x)}$  和  $v^{n+1} e^{i(\omega, x)}$  代入就可以求得. 具体例子将在以后给出.

## 习 题

### 1. 试讨论逼近扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad |x| < \infty, \quad t \geq 0$$

的差分格式

$$(1+\theta) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \theta \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{\tau} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2}, \quad \theta \geq 0$$

的稳定性.

### 2. 试讨论逼近对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad |x| < \infty, \quad t \geq 0$$

的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$$

的稳定性.

### 3. 试讨论逼近对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = 0$$

的稳定性.

### 4. 试举出三个相容的但不收敛的差分格式.

### 5. 试讨论逼近对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\sin x - 1) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的差分格式。

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + (\sin x_i - 1) \frac{u_{i+1}^n - u_i^n}{h} = 0$$

的稳定性。

## 第三章 双曲型方程

本章讨论双曲型方程及双曲型方程组的差分解法。对一阶线性双曲型方程的差分格式作了全面的介绍,并讨论了稳定性及其它性质。对一阶线性双曲型方程组的差分格式也作了相应的叙述。仅以波动方程为例介绍了二阶双曲型方程的各种求解方法。对于具有理论和实用价值的拟线性方程组作了详细的讨论。最后对初边值混合问题及二维问题进行了讨论。

### § 1 一阶线性常系数方程(I)

我们仅考虑简单的一阶线性常系数双曲型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, |x| < \infty, 0 < t \leq T. \quad (1.1)$$

这是最简单的双曲型方程,一般称其为对流方程。虽然(1.1)非常简单,但是对它的差分格式的构造以及各种性质的讨论是讨论复杂的双曲型方程和方程组的基础。它的差分格式可以推广到变系数方程、方程组以及拟线性双曲型方程组。

#### 1.1 对流方程的初值问题

如果对(1.1)附以初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x), |x| < \infty, \quad (1.2)$$

那么(1.1)和(1.2)构成了对流方程的初值问题。在 $(x-t)$ 平面上满足方程

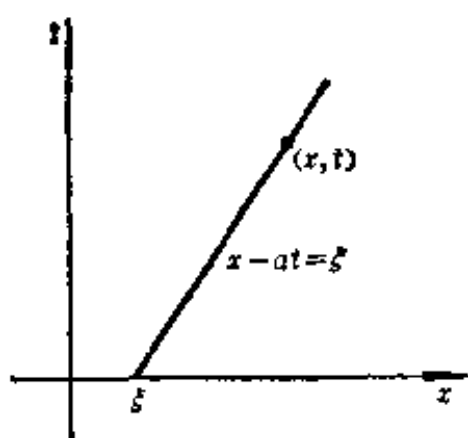


图 3.1

$$\frac{dx}{dt} = a$$

的一族直线

$$x - at = \xi \quad (1.3)$$

( $\xi$  为参数) 是方程(1.1)的特征线.

沿着特征线(1.3), (1.1)的解  $u$  满足

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0.$$

由此可知,  $u$  沿  $x-t$  平面上任何一条特征线是常数, 并且其解仅依赖于参数  $\xi$ . 因此初值问题(1.1)和(1.2)的解可以表示为

$$u(x, t) = u_0(\xi) = u_0(x - at). \quad (1.4)$$

反之, 如果  $u_0 \in C^1(\mathbf{R})$ ,  $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ , 即  $u_0$  一次连续可微, 那么直接验证可知公式(1.4)表示了初值问题(1.1)和(1.2)的解.

注意到, 在任一点  $(x, t)$  上, 初值问题(1.1)和(1.2)的解  $u$ , 仅依赖于单个自变量  $\xi$  的初始函数  $u_0$ .  $\xi$  就是通过点  $(x, t)$  的特征线与  $x$  轴交点的横坐标. 由此看出, 初值问题的解  $u$  关于初值的依赖区域是用单个点来表示的, 而在一特殊点  $\xi$  上的初值的影响区域正是特征线(1.3)本身(见图3.1)

## 1.2 迎风格式

近年来, 迎风差分格式在实际计算中引起了普遍的重视, 从而产生了很多好的方法和技巧. 迎风格式的基本思想是简单的, 就是在微分方程中关于空间导数用偏在特征线方向一侧的单边差商来代替. (1.1)的迎风差分格式是

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad a \geq 0, \quad (1.5)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad a < 0, \quad (1.6)$$

其中  $\tau$  和  $h$  分别为时间步长和空间步长.

我们在第二章中曾用 Fourier 方法讨论了(1.5)的稳定性。当 $a\lambda \leq 1$ 时差分格式(1.5)是稳定的。同样的分析可知,差分格式(1.6)的稳定性条件是 $|a|\lambda \leq 1$ 。由此看出,(1.5)和(1.6)都是条件稳定的。如果我们采用差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, a \geq 0, \quad (1.7)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, a < 0 \quad (1.8)$$

来代替(1.5)和(1.6)。容易看出,它们都是一阶精度的差分格式。我们用 Fourier 方法来讨论(1.7)的稳定性。令 $u_j^n = v^n e^{i\omega jh}$ , 把它代入(1.7)并移项得

$$v^{n+1} e^{i\omega jh} = v^n [(1 + a\lambda) e^{i\omega jh} - a\lambda e^{i\omega (j+1)h}],$$

其中  $\lambda = \tau/h$ 。

消去公因子 $e^{i\omega jh}$ 得差分格式(1.7)的增长因子

$$G(\tau, \omega) = 1 + a\lambda - a\lambda e^{i\omega h},$$

由此得到

$$\begin{aligned} |G(\tau, \omega)|^2 &= [1 + a\lambda(1 - \cos \omega h)]^2 + a^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h \\ &= 1 + 4a\lambda(1 + a\lambda) \sin^2 \frac{\omega h}{2}. \end{aligned}$$

取 $\sin \frac{\omega h}{2} \neq 0$ , 由于 $a > 0$ , 所以有 $|G(\tau, \omega)| > 1$ 。因此破坏了 von Neumann 条件, 得出差分格式(1.7)是绝对不稳定的。同样可证差分格式(1.8)也是绝对不稳定的。

我们看到,差分格式(1.5)与差分格式(1.8)在形式上是一样的,但前者是条件稳定而后者是绝对不稳定的,看来与 $a$ 的符号有关,相应地与微分方程的特征线走向有关。从上而分析知道,如果构造出来的差分格式(所用的网格点)与微分方程的特征线走向一致,则网格比满足一定条件之下是稳定的,反之,不论如何选取网格比,差分格式总是不稳定的,



### 1.3 Lax-Friedrichs格式

前面给出了逼近(1.1)的一个中心差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (1.9)$$

其截断误差是 $O(\tau + h^2)$ ,在第二章中用 Fourier 方法讨论它的稳定性,知道它是绝对不稳定的.

可能为了克服上述格式的不稳定性质,在1954年Lax和Friedrichs提出逼近(1.1)的另一个差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (1.10)$$

差分格式(1.10)一般称为Lax-Friedrichs格式.从差分格式的构造可以看出,(1.10)是用 $\frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)$ 来代替(1.9)中的 $u_j^n$ 而得到的.容易求出,(1.10)的截断误差是 $O(\tau + h^2) + O(h^2/\tau)$ .在双曲型方程的计算中,一般取网格比 $\lambda = \tau/h$ 为常数.所以Lax-Friedrichs格式是一阶精度的差分格式.下面我们来考察(1.10)的稳定性.令 $u_j^n = v^n e^{i\omega jh}$ ,代入(1.10)有

$$v^{n+1} = \left[ \frac{1}{2}(e^{i\omega h} + e^{-i\omega h}) - \frac{\alpha}{2}\lambda(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}) \right] v^n.$$

因此增长因子为

$$\begin{aligned} G(\tau, \omega) &= \frac{1}{2}(e^{i\omega h} + e^{-i\omega h}) - \frac{\alpha}{2}\lambda(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h}) \\ &= \cos \omega h - i\alpha\lambda \sin \omega h, \end{aligned}$$

从而有

$$\begin{aligned} |G(\tau, \omega)|^2 &= \cos^2 \omega h + \alpha^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h \\ &= 1 - (1 - \alpha^2 \lambda^2) \sin^2 \omega h. \end{aligned}$$

所以当

$$|\alpha| \lambda \leq 1 \quad (1.11)$$

时有  $|G(\tau, \omega)| \leq 1$ , 因此 Lax-Friedrichs 格式的稳定性条件为 (1.11).

我们注意到, Lax-Friedrichs 格式和迎风格式都是一阶精度的差分格式. 在实际应用中, Lax-Friedrichs 格式可以不考虑对应的微分方程的特征线的走向, 前面讨论的迎风格式则要顾及对应的微分方程的特征线的走向. 如果我们把迎风格式写成统一形式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{2}(a + |a|) \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} - \frac{1}{2}(a - |a|) \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad (1.12)$$

那么也可以不考虑微分方程的特征线的走向而可以直接应用. 这二个格式的稳定性条件都是 (1.11). 由此看来, 它们有很多相似之处, 但是它们还是有很大的区别. 我们仅从这二个格式的截断误差来考虑. 不失一般性, 可设  $a > 0$ . 此时迎风格式可以写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{ah}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad (1.13)$$

而 Lax-Friedrichs 格式可以写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{h}{2\lambda} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}. \quad (1.14)$$

由此看出, (1.13) 和 (1.14) 的左边是相同的, 它们都以  $O(\tau + h^2)$  趋近于对流方程. 因此 Lax-Friedrichs 格式和迎风格式的截断误差的比较取决于 (1.13) 和 (1.14) 的右端项的大小. 我们把 Lax-Friedrichs 格式 (1.14) 的右端项改写为

$$\frac{1}{a\lambda} \cdot \frac{ah}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}.$$

注意到, 由稳定性的限制就要求有  $a\lambda \leq 1$ . 如果取  $a\lambda = 1$ , 则 (1.14) 恒等于 (1.13), 即 Lax-Friedrichs 与迎风格式一样. 但在实际的计算中总是取  $a\lambda < 1$ . 所以, 一般来说 Lax-Friedrichs 格式的截断误差比迎风格式的截断误差大.

## 1.4 单调差分格式

我们知道,初值问题(1.1)和(1.2)的解是 $u(x,t)=u_0(x-at)$ 。因此,如果 $u_0$ 是 $x$ 的单调函数,那么对任意的 $t>0$ ,解 $u$ 也是 $x$ 的单调函数。现在要问,这种性质是否能在差分方法求解中反映出来?下面我们给出这样的概念及有关性质。如果初始函数是单调非增(或非减)的,那么差分格式的解也保持单调非增(或非减)的性质,我们称这种保持单调性质的差分格式为**单调差分格式**。

### 性质 1 差分格式

$$u_j^{n+1} = \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l u_{j+l}^n \quad (1.15)$$

是单调差分格式的充分必要条件是所有的 $c_l \geq 0$ 。

**证明** 如果所有的 $c_l \geq 0$ ,令初值 $\{u_j^n\}$ 是单调的,为确定起见假定它是单调非减,即对所有 $j$ 有

$$u_{j+1}^n \geq u_j^n,$$

那么有

$$\begin{aligned} u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1} &= \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l u_{j+1+l}^n - \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l u_{j+l}^n \\ &= \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l (u_{j+1+l}^n - u_{j+l}^n) \geq 0. \end{aligned}$$

下面来证必要性。设存在某个 $c_m < 0$ ,  $-q_1 \leq m \leq q_1$ 。对任意固定的 $j_0$ ,取单调非减的 $u_j^n$ 如下,

$$u_j^n = \begin{cases} 1, & \text{当 } j > j_0 + m, \\ 0, & \text{当 } j \leq j_0 + m. \end{cases}$$

于是有

$$u_{j_0+1}^{n+1} - u_{j_0}^{n+1} = \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l u_{j_0+1+l}^n - \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l u_{j_0+l}^n$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{l \neq m} c_l (u_{j_0+l+1}^n - u_{j_0+l}^n) + c_m (u_{j_0+m+1}^n - u_{j_0+m}^n) \\
&= c_m (u_{j_0+m+1}^n - u_{j_0+m}^n) = c_m < 0.
\end{aligned}$$

这就破坏了单调性.

**性质 2** 差分格式(1.15)的相容性条件是

$$\sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l = 1, \quad (1.16)$$

$$\sum_{l=-q_1}^{q_1} l c_l = -a\lambda, \quad (1.17)$$

其中  $\lambda = \tau/h$ .

**证明** 设  $u$  是对流方程初值问题(1.1)和(1.2)的光滑解, 考虑其表达式

$$E = \frac{1}{\tau} \left\{ u(x_j, t_{n+1}) - \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l u(x_j + lh, t_n) \right\}.$$

对上式中的  $u(x_j, t_{n+1})$  和  $u(x_j + lh, t_n)$  在  $(x_j, t_n)$  进行 Taylor 级数展开

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{\tau} \left\{ \left[ u(x_j, t_n) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + O(\tau^2) \right] \right. \\
&\quad \left. - \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l \left[ u(x_j, t_n) + lh \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) + O(h^2) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

由于  $u$  是微分方程的解, 所以  $\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x}$ , 由此得到

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{\tau} \left( 1 - \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l \right) u(x_j, t_n) \\
&\quad - \frac{1}{\tau} \left( a\tau + \sum_{l=-q_1}^{q_1} lh c_l \right) \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) \\
&\quad + O(\tau) + O(h^2/\tau).
\end{aligned}$$

取  $\tau/h$  为常数, 要使  $\tau, h \rightarrow 0$  时有  $E \rightarrow 0$ , 那么就要求

$$1 - \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l = 0, \quad a\tau + \sum_{l=-q_1}^{q_1} lh c_l = 0.$$

这就是(1.16)和(1.17).

这个性质对形如(1.15)的差分格式都成立.

**性质 3** 相容的单调差分格式(1.15), 在极大模下是稳定的.

**证明** 令

$$\|u^n\|_h = \sup_j |u_j^n|,$$

则有

$$|u_j^{n+1}| \leq \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l |u_{j+l}^n| \leq \sum_{l=-q_1}^{q_1} a_l \|u^n\|_h = \|u^n\|_h,$$

从而有

$$\|u^{n+1}\|_h \leq \|u^n\|_h.$$

即格式是稳定的.

**性质 4** 相容的单调差分格式(1.15)的截断误差是一阶的.

**证明** 设  $u$  是初值问题(1.1)和(1.2)的光滑解.

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{\tau} \left\{ u(x_j, t_{n+1}) - \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l u(x_j + lh, t_n) \right\} \\ &= \frac{1}{\tau} \left\{ u(x_j, t_n) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_n) + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j, t_n) \right. \\ &\quad + O(\tau^3) - \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l \left[ u(x_j, t_n) + lh \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_n) \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(lh)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j, t_n) + O(h^3) \right] \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{\tau} \left\{ u(x_i, t_n) - a\tau \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) + \frac{a^2 \tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) \right. \\
&\quad + O(\tau^3) - \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l \left[ u(x_i, t_n) + lh \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) \right. \\
&\quad \left. \left. + \frac{(lh)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) + O(h^3) \right] \right\}.
\end{aligned}$$

利用相容性条件(1.16)和(1.17)我们得到

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{\tau} \left[ \left( \frac{a^2 \tau^2}{2} - \sum_{l=-q_1}^{q_1} \frac{l^2 h^2}{2} c_l \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) + O(\tau^3) \right. \\
&\quad \left. + O(h^3) \right] \\
&= \frac{h^2}{2\tau} \left( a^2 \lambda^2 - \sum_{l=-q_1}^{q_1} l^2 c_l \right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) + O(\tau^2) \\
&\quad + O(h^3/\tau).
\end{aligned}$$

由于  $\lambda = \tau/h$  为常数, 因此我们只要证明

$$a^2 \lambda^2 - \sum_{l=-q_1}^{q_1} l^2 c_l \neq 0. \quad (1.18)$$

再次利用(1.17)并考虑到性质 1, 我们有

$$a^2 \lambda^2 = \left( \sum_{l=-q_1}^{q_1} l c_l \right)^2 = \left( \sum_{l=-q_1}^{q_1} l \sqrt{c_l} \sqrt{c_l} \right)^2.$$

利用 Cauchy 不等式有

$$a^2 \lambda^2 \leq \sum_{l=-q_1}^{q_1} l^2 c_l \cdot \sum_{l=-q_1}^{q_1} c_l = \sum_{l=-q_1}^{q_1} l^2 c_l,$$

其中等号成立的充分必要条件是存在数  $\alpha, \beta$ , 使对  $l = -q_1, \dots, q_1$  都有

$$\alpha l \sqrt{c_l} + \beta \sqrt{c_l} = 0.$$

因此只能存在一个系数  $c_{l_0} \neq 0$  而其它的  $c_l = 0$ , 此时差分格式

(1.15)变为

$$u_j^{n+1} = c_{l_0} u_{j+l_0}^n.$$

利用(1.16)知  $u_j^{n+1} = u_{j+l_0}^n$ . 当然此时为解析解,再用差分格式求解无实际意义. 由此我们得到

$$a^2 \lambda^2 < \sum_{l=-q_1}^{q_1} l^2 c_l,$$

所以(1.18)成立.

下面我们给出单调格式的具体例子,为验证一个差分格式是单调格式,应用性质1只要验证所有的  $c_l \geq 0$ . 首先考虑 Lax-Friedrichs 格式(1.10). 为方便,把它改写为

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(a\lambda + 1)u_{j-1}^n + \frac{1}{2}(1 - a\lambda)u_{j+1}^n.$$

如果网格比  $\lambda$  满足稳定性条件  $|a|\lambda \leq 1$ , 那么  $u_{j-1}^n$  和  $u_{j+1}^n$  的系数  $c_{-1} = \frac{1}{2}(1 + a\lambda)$  和  $c_1 = \frac{1}{2}(1 - a\lambda)$  为非负. 所以 Lax-Friedrichs 格式在条件  $|a|\lambda \leq 1$  之下是单调差分格式.

现在考虑迎风格式(1.12),改写其形式

$$\begin{aligned} u_j^{n+1} &= u_j^n - \frac{1}{2}(a + |a|)\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n) \\ &\quad - \frac{1}{2}(a - |a|)\lambda(u_{j+1}^n - u_j^n) \\ &= \frac{1}{2}(a + |a|)\lambda u_{j-1}^n + (1 - |a|\lambda)u_j^n \\ &\quad - \frac{1}{2}(a - |a|)\lambda u_{j+1}^n. \end{aligned}$$

显然,  $u_{j-1}^n$  和  $u_{j+1}^n$  的系数  $c_{-1} = \frac{1}{2}(a + |a|)$ ,

$c_1 = -\frac{1}{2}(a - |a|)$  非负. 此外,如果满足稳定性条件  $|a|\lambda \leq 1$ , 则

$u_j^n$  的系数  $c_0 \geq 0$ . 所以迎风格式在条件  $|a|\lambda \leq 1$  之下也是单调格

式.

### 1.5 一阶双曲型方程的 C. F. L 条件

我们先分析差分格式解的依赖区域, 然后从差分格式解的依赖区域和对流方程初值问题解的依赖区域的关系推导出差分格式收敛的一个必要条件, 即 C. F. L 条件.

为确定起见, 我们令对流方程(1.1)中的常数  $a > 0$ . 用迎风差分格式作例子来进行具体分析. 由(1.5)知, 计算  $u_j^n$  就要用到  $u_{j-1}^{n-1}$  和  $u_j^{n-1}$ ; 而计算  $u_{j-1}^{n-1}$  和  $u_j^{n-1}$  就要用到  $u_{j-2}^{n-2}, u_{j-1}^{n-2}$  和  $u_j^{n-2}$ . 由此递推下去, 为了计算  $u_j^n$  就要用到  $u_{j-n}^0, u_{j-n+1}^0, \dots, u_j^0$ . 见图 3.2. 这说明  $u_j^n$  依赖于初值  $u_0$  在区间  $[x_{j-n}, x_j]$  上网格点的值. 我们称区间  $[x_{j-n}, x_j]$  上所有网格点为差分格式的解在点  $P = (x_j, t_n)$  的依赖区域.

过点  $P$ , 微分方程(1.1)的特征线  $x - at = x_j - at_n$  与  $x$  轴的交点为  $D$ , 对于对流方程(1.1)的初值问题来说,  $D$  才是其解在点  $P$  的依赖区域. 如果  $D$  在区间  $[x_{j-n}, x_j]$  之外, 那么用迎风格式计算出来的解  $u_j^n$  就和对流方程初值问题的解毫无关系, 因此差分格式的解就不可能收敛到微分

方程初值问题的解. 于是, 要求差分格式的解收敛到微分方程初值问题的解, 其必要条件是  $D \in [x_{j-n}, x_j]$ , 即差分格式解的依赖区域端点构成的区间必须包含相应的微分方程初值问题解的依赖区域, 或简单地说, 差分格

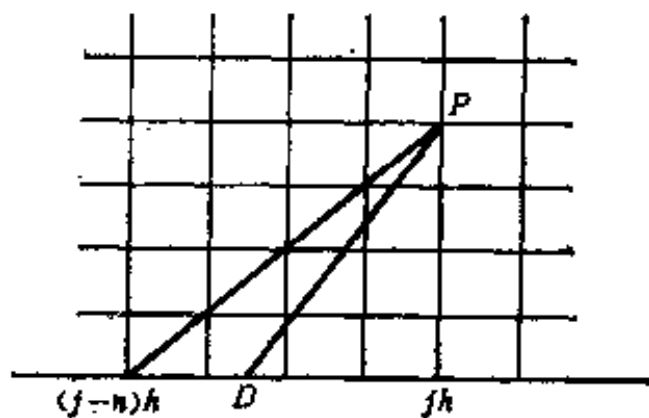


图 3.2

式的依赖区域包含微分方程的依赖区域, 这个条件称为 Courant-Friedrichs-Lewy 条件, 简称 C. F. L 条件. 有时也称 Courant 条件或依赖区域条件.



下面来推导 C. F. L 条件的一个表达式. 过  $P=(x_i, t_n)$  的特征线  $x-at=x_i-at_n$  与  $x$  轴的交点  $D$  的横坐标为  $x_i-at_n$ , 因此 C. F. L 条件可以表示为

$$x_{i-n} \leq x_i - at_n \leq x_i.$$

由于  $x_i = jh, t_n = n\tau$ , 因此上式等价于

$$a\lambda \leq 1, \quad (1.19)$$

其中  $\lambda = \tau/h$ , 即网格比. 由此可知迎风格式的 C. F. L 条件为 (1.19).

从上面讨论可以知道, C. F. L 条件仅为差分格式收敛的必要条件. 自然要问, 这个条件是否充分? 这对于不同的差分格式有不同的回答. 以迎风格式来说, 这是一个相容的差分格式, 并且我们已经证明, 在条件 (1.19) 之下迎风格式稳定. 利用 Lax 等价定理知, C. F. L 条件是差分格式收敛的充分条件. 容易验证, Lax-Friedrichs 格式的 C. F. L 条件是  $|a|\lambda \leq 1$ , 同样这是一个收敛的充分条件. 如果我们考虑逼近对流方程的不稳定的差分格式 (1.9), 容易求出其 C. F. L 条件是  $|a|\lambda \leq 1$ , 显然它不是收敛的充分条件.

## § 2 一阶线性常系数方程(II)

### 2.1 蛙跳格式

Lax-Friedrichs 格式和迎风差分格式都是一阶精度的差分格式. 为提高精度, 很自然地想到, 在对流方程 (1.1) 中对  $t$  的偏导数和对  $x$  的偏导数都用中心差商来逼近. 如此得到的 (1.1) 的差分格式是

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} + a \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = 0. \quad (2.1)$$

一般称这个格式为蛙跳格式。先把上面格式改写为

$$u_j^{n+1} = u_j^{n-1} - \alpha \lambda (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \quad (2.2)$$

这是一个三层格式。在计算  $u^{n+1}$  (下标省略, 表示  $j=0, \pm 1, \dots$ ) 时要用到  $u^n$  和  $u^{n-1}$ , 因而增加了计算机的存储量。其次, 在起算时必须给出两层初始数据  $u^0$  和  $u^1$ 。通常先由二层格式 (Lax-Friedrichs 格式等) 给出  $u^1$ , 然后再用蛙跳格式去做。

如果我们把  $n+j$  = 偶数的网格点  $(x_j, t_n)$  称为“偶点”, 把  $n+j$  = 奇数的网格点  $(x_j, t_n)$  称为“奇点”。用蛙跳格式进行计算时, 奇点和偶点将各自形成一组解答。其结果在邻点之间有显著的“波动”现象, 这当然不是所期望的。偶、奇点的分布及蛙跳格式的图示见图 3.3。

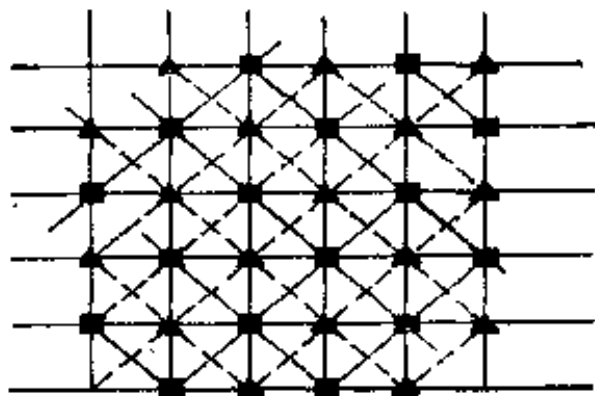


图 3.3

下面我们来考察蛙跳格式的稳定性。由于这个格式是三层格式, 因此在研究其稳定性

时必须要把它化成等价的二层差分方程组

$$\begin{cases} u_j^{n+1} = v_j^n - \alpha \lambda (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), \\ v_j^{n+1} = u_j^n. \end{cases}$$

令  $\alpha = [u, v]^T$ , 那么可以把这个方程组写成向量形式

$$\alpha_j^{n+1} = \begin{bmatrix} -\alpha \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha_{j+1}^n + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \alpha_j^n + \begin{bmatrix} \alpha \lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \alpha_{j-1}^n.$$

令  $\alpha_j^n = v^n e^{i\omega j h}$ , 把它代入上式就可以求得增长矩阵

$$G(\tau, \omega) = \begin{bmatrix} -2\alpha \lambda i \sin \omega h & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$G$  的特征值为

$$\mu = -\alpha \lambda i \sin \omega h \pm \sqrt{1 - \alpha^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h}.$$

如果  $|\alpha| \lambda \leq 1$ , 则有

$$|\mu|^2 = a^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h + 1 - a^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h = 1$$

因此当  $|a|\lambda \leq 1$  时, 蛙跳格式满足 von Neumann 条件. 如果  $|a|\lambda < 1$ , 那么  $G$  有两个互不相同的特征值, 利用第二章定理 3.6 知蛙跳格式是稳定的.

现在来讨论  $|a|\lambda = 1$  的情况. 取  $\sin^2 \omega h = 1$ , 则增长矩阵的特征值相等. 因此不能直接采用第二章定理 3.6 的 (i) 来判别. 可以看出, 也不能应用这个定理的 (ii) 和 (iii) 来判别. 为了讨论方便起见, 取  $a\lambda = 1$ ,  $\omega h = -\frac{\pi}{2}$ , 那么增长矩阵变为

$$G(\tau, \omega) = \begin{bmatrix} 2i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

利用 Jordan 标准形存在定理, 容易得到

$$G(\tau, \omega) = THT^{-1},$$

其中

$$T = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 0 & i \end{bmatrix}, \quad T^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix}.$$

注意到,

$$\begin{aligned} G^n(\tau, \omega) &= TH^nT^{-1} = \begin{bmatrix} i & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} i^n \begin{bmatrix} 1 & -ni \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -i \end{bmatrix} \\ &= i^n \begin{bmatrix} n+1 & -ni \\ -ni & 1-n \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

记

$$M_n = \begin{bmatrix} n+1 & -ni \\ -ni & 1-n \end{bmatrix},$$

则有

$$\|G^n\| = |i^n| \cdot \|M_n\| = \|M_n\|.$$

为估计  $M_n$  的范数, 取向量  $u = [1, 0]^T$ ,

$$M_n u = \begin{bmatrix} n+1 \\ -ni \end{bmatrix},$$

$$\|M_n u\| = \sqrt{(n+1)^2 + n^2} > \sqrt{2} n.$$

由此得出

$$\|M_n\| > \sqrt{2} n.$$

从而有

$$\|G^n\| > \sqrt{2} n.$$

立即看出, 当  $|\alpha|\lambda=1$  时, 蛙跳格式不稳定.

## 2.2 Lax-Wendroff 格式

前而讨论的迎风格式和Lax-Friedrichs 格式是一阶精度的格式. 蛙跳格式是二阶精度的格式, 但它是一个三层格式, 因此使用不很方便. 1960 年 Lax 和Wendroff 构造出一个二阶精度的二层格式, 它的构造方法与前面几个格式的推导不同, 主要是采用 Taylor 级数展开及微分方程本身. 下面来作具体推导.

设  $u(x, t)$  是微分方程(1.1) 的光滑解. 将  $u(x_i, t_{n+1})$  在点  $(x_i, t_n)$  处作 Taylor 展开

$$\begin{aligned} u(x_i, t_{n+1}) &= u(x_i, t_n) + \tau \frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_n) \\ &\quad + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_i, t_n) + O(\tau^3). \end{aligned}$$

利用微分方程(1.1) 有

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left( -a \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -a \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right) = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

把这两式代入前面式子有

$$u(x_i, t_{n+1}) = u(x_i, t_n) - a\tau \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n)$$

$$+\frac{1}{2}\tau^2 a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) + O(\tau^3). \quad (2.3)$$

利用中心差商

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_n) = \frac{1}{2h} [u(x_{i+1}, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)] + O(h^2),$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_i, t_n) = & \frac{1}{h^2} [u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) \\ & + u(x_{i-1}, t_n)] + O(h^2), \end{aligned}$$

我们有

$$\begin{aligned} u(x_i, t_{n+1}) = & u(x_i, t_n) - \frac{1}{2} \frac{a\tau}{h} [u(x_{i+1}, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)] \\ & + \frac{1}{2} \frac{a^2\tau^2}{h^2} [u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) \\ & + u(x_{i-1}, t_n)] + O(\tau h^2) + O(\tau^2 h^2) + O(\tau^3). \end{aligned} \quad (2.4)$$

略去 $O(\tau h^2)$ ,  $O(\tau^2 h^2)$ ,  $O(\tau^3)$  我们得差分格式

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} a \lambda (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2} a^2 \lambda^2 (u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n), \quad (2.5)$$

其中  $\lambda = \tau/h$ . 这个差分格式称为 Lax-Wendroff 格式. 从构造方法可以看出, 这是一个二阶精度的差分格式.

下面我们来分析(2.5) 的稳定性. 容易求出(2.5) 的增长因子

$$\begin{aligned} G(\tau, \omega) &= 1 - 2 a^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2} - i a \lambda \sin \omega h, \\ |G(\tau, \omega)|^2 &= \left[ 1 - 2 a^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2} \right]^2 + a^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h \\ &= 1 - 4 a^2 \lambda^2 (1 - a^2 \lambda^2) \sin^4 \frac{\omega h}{2}. \end{aligned}$$

于是, 如果满足条件

$$|a| \lambda \leq 1, \quad (2.6)$$

那么有  $|G(\tau, \omega)| \leq 1$ , 所以 Lax-Wendroff 格式的稳定性条件为 (2.6).

### 2.3 利用特征线构造差分格式

特征概念在双曲型方程中有很重要作用. 藉助于微分方程初值问题的解在特征线上为常数这一简单事实, 我们可以构造出逼近 (1.1) 的各种差分格式. 为确定起见, 设  $a > 0$ .

设在  $t = t_n$  层上网格点  $A, B, C$  和  $D$  上  $u$  的值已给定. 要计算出在  $t = t_{n+1}$  层上网格点  $P$  上  $u$  的值. 见图 3.4. 我们假定 C.F.L

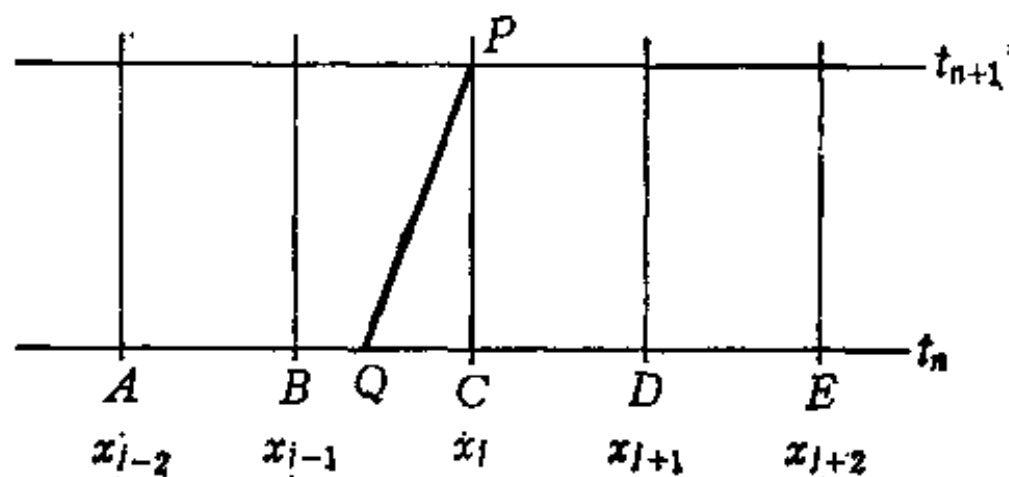


图 3.4

条件成立, 则过  $P$  点画出微分方程 (1.1) 的特征线交  $BC$  于  $Q$ . 由微分方程解的性质知  $u(P) = u(Q)$ . 但  $Q$  不是网格点, 因此  $u(Q)$  仍是未知的. 由于  $u(A), u(B), u(C)$  和  $u(D)$  均已知, 所以可利用它们来确定  $u(Q)$ . 利用  $B, C$  两点进行线性插值就得到

$$u(Q) = \left(1 - a \frac{\tau}{h}\right) u(C) + a \frac{\tau}{h} u(B),$$

由此我们可以导出差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a \lambda (u_j^n - u_{j-1}^n),$$

其中  $\lambda = \tau/h$ . 这就是以前讨论过的迎风差分格式. 如果我们改用  $B, D$  两点来进行线性插值求出  $u(Q)$ , 则就可以导出 Lax-

Friedrichs 格式.

如果用  $B, C, D$  三点作二次插值求  $u(Q)$ , 即

$$u(Q) = u(C) - a\lambda[u(C) - u(B)] - \frac{1}{2}a\lambda(1 - a\lambda)[u(B) - 2u(C) + u(D)],$$

那么我们就可以导出 Lax-Wendroff 格式. 如果我们采用  $A, B, C$  三点作二次插值求  $u(Q)$ , 容易得到差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - a\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}a\lambda(1 - a\lambda)(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n), \quad (2.7)$$

这是二阶精度的格式, 也称其为二阶迎风格式. 可以求出(2.7)的增长因子是

$$G(\tau, \omega) = 1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2} - \frac{a\lambda}{2}(1 - a\lambda) \times \left( 4 \sin^4 \frac{\omega h}{2} - \sin^2 \omega h \right) - ia\lambda \sin \omega h \left[ 1 + (1 - a\lambda) \sin^2 \frac{\omega h}{2} \right],$$

由此得

$$|G|^2 = 1 - 4a\lambda(2 - a\lambda)(1 - a\lambda)^4 \sin^4 \frac{\omega h}{2},$$

于是, 当  $a\lambda \leq 2$  时有  $|G| \leq 1$ , 即此时差分格式(2.7) 稳定. 我们特别注意到, 二阶迎风格式(2.7) 的稳定性限制比较宽, 这对实际计算很有好处.

## 2.4 隐式差分格式

前面我们构造的差分格式是显式的, 由稳定性分析知道, 有的是不稳定的, 有的是条件稳定的. 为寻求稳定性好的格式, 我们只能在隐式格式中找到. 我们知道, 隐式格式应用于周期的初值问题或初边值混合问题.

逼近(1.1) 的显式差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$$

是不稳定的。现考虑相应的隐式格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0. \quad (2.8)$$

容易看出,其截断误差也是  $O(\tau + h^2)$ 。格式(2.8) 的增长因子为

$$G(\tau, \omega) = \frac{1}{1 + \frac{a\lambda}{2}(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h})} = \frac{1}{1 + a\lambda i \sin \omega h},$$

$$|G(\tau, \omega)|^2 = \frac{1}{1 + a^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h} \leq 1.$$

由此推出,格式(2.8) 是绝对稳定的。

为了提高精度,我们把隐式格式(2.8) 修改为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a}{2} \left( \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) = 0. \quad (2.9)$$

这个格式有时也称作Crank-Nicolson 型的差分格式。首先来推导(2.9) 的截断误差。设  $u$  是微分方程(1.1) 的光滑解,

$$E = \frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} + \frac{a}{2} \left[ \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2h} + \frac{u(x_{j+1}, t_{n+1}) - u(x_{j-1}, t_{n+1})}{2h} \right].$$

把上式右边几项在  $(x_j, t_n + \frac{\tau}{2})$  处进行Taylor 级数展开

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} = \frac{\partial u}{\partial t}(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\tau^2),$$

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_j, t_{n+\frac{1}{2}}).$$



$$\begin{aligned}
& -\frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\tau^2 + h^2), \\
& \frac{u(x_{i+1}, t_{n+1}) - u(x_{i-1}, t_{n+1})}{2h} = \frac{\partial u}{\partial x}(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) \\
& + \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}(x_i, t_{n+\frac{1}{2}}) + O(\tau^2 + h^2),
\end{aligned}$$

其中  $t_{n+\frac{1}{2}} = t_n + \frac{1}{2}\tau$ . 把上面几个式子代入  $E$  的表达式, 得出  $E = O(\tau^2 + h^2)$ , 即差分格式(2.9) 是二阶精度的.

格式(2.9) 的增长因子

$$G(\tau, \omega) = \frac{1 - \frac{a\lambda}{4}(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h})}{1 + \frac{a\lambda}{4}(e^{i\omega h} - e^{-i\omega h})} = \frac{1 - \frac{a\lambda}{2}i \sin \omega h}{1 + \frac{a\lambda}{2}i \sin \omega h}.$$

容易验证  $|G(\tau, \omega)| = 1$ , 所以差分格式(2.9) 是绝对稳定的.

很多隐式格式是绝对稳定的, 但并非所有的隐式格式都如此. 设对流方程(1.1) 中  $\alpha > 0$ , 我们知道差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \alpha \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$$

是绝对不稳定的. 现考虑相应的隐式格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \alpha \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} = 0. \quad (2.10)$$

显然其截断误差是  $O(\tau + h)$ , 其增长因子是

$$G(\tau, \omega) = \frac{1}{1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2} + ia\lambda \sin \omega h},$$

$$|G(\tau, \omega)|^2 = \frac{1}{1 - 4a\lambda(1 - a\lambda) \sin^2 \frac{\omega h}{2}}.$$

由此可知, 隐式格式(2.10) 的稳定性条件是

$$a\lambda \geq 1. \quad (2.11)$$

在求解逼近微分方程问题的隐式差分格式中,一般来说由时刻  $t_n$  到  $t_{n+1}$  要解线性代数方程组,这将比显式格式的工作量增加

表 3.1 关于方程  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  的差分格式

| 格 式                   | 差 分 方 程   | 稳定条件                | 截断误差                               |
|-----------------------|---|---------------------|------------------------------------|
| 迎风格式<br>( $a > 0$ )   | $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$  | $a\lambda \leq 1$   | $O(\tau + h)$                      |
| 迎风格式<br>( $a < 0$ )   | $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$  | $ a \lambda \leq 1$ | $O(\tau + h)$                      |
| Lax-Friedrichs        | $\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n)}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$  | $ a \lambda \leq 1$ | $O(\tau + \frac{h^2}{\tau} + h^2)$ |
| 隐式格式                  | $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0$   | 无条件稳定               | $O(\tau + h^2)$                    |
| 迎风隐式格式<br>( $a > 0$ ) | $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h} = 0$  | 无条件稳定               | $O(\tau + h)$                      |
| Lax-Wendroff          | $u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2}a\lambda(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2}a^2\lambda^2(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n)$                    | $ a \lambda \leq 1$ | $O(\tau^2 + h^2)$                  |
| 蛙跳格式                  | $\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0$  | $ a \lambda \leq 1$ | $O(\tau^2 + h^2)$                  |
| Crank-Nicolson        | $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{a}{2} \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) = 0$ | 无条件稳定               | $O(\tau^2 + h^2)$                  |
| 二阶迎风格式<br>( $a > 0$ ) | $u_j^{n+1} - u_j^n - a\lambda(u_j^n - u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}a\lambda(1-a\lambda)(u_j^n - 2u_{j-1}^n + u_{j-2}^n)$                           | $a\lambda \leq 2$   | $O(\tau^2 + h^2)$                  |

很多。但是由于隐式格式的稳定性好,一般可以采用较长的时间步长进行计算。当然,时间步长的选取,要受到计算问题所需要的精确程度的制约,此外,双曲型方程的许多隐式格式也可以显式

地求解。这是很有利的。

表 3.1 列举了对流方程  $\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  的一些常用的差分格式。对于每种格式给出了附图，标明了其中涉及到的网格点。表中还列出了这些格式的稳定性条件及截断误差的阶。

## 2.5 数值例子

考虑初值问题

表 3.2  $t=2.5$  的数值结果

| $x$ | Lax-Wendroff格式 | 蛙跳格式   | 解析解 |
|-----|----------------|--------|-----|
| -2  | 0              | 0.006  | 0   |
| -1  | -0.002         | -0.032 | 0   |
| 0   | 0.020          | 0.014  | 0   |
| 1   | -0.045         | -0.067 | 0   |
| 2   | -0.068         | -0.022 | 0   |
| 3   | 0.502          | 0.490  | 0.5 |
| 4   | 1.591          | 1.620  | 1.5 |
| 5   | 2.651          | 2.592  | 2.5 |
| 6   | 2.433          | 2.413  | 2.5 |
| 7   | 1.452          | 1.436  | 1.5 |
| 8   | 0.421          | 0.440  | 0.5 |
| 9   | 0.043          | 0.066  | 0   |
| 10  | 0.001          | 0.004  | 0   |
| 11  | 0              | 0      | 0   |
| 12  | 0              | 0      | 0   |

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

其中

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x < 0, \\ x, & \text{当 } 0 \leq x < 3, \\ 6-x, & \text{当 } 3 \leq x < 6, \\ 0, & \text{当 } 6 \leq x. \end{cases}$$

利用Lax-Wendroff 格式和蛙跳格式进行计算，并把计算结果与解析解相比较。

计算时取空间步长  $h=0.5$ ，网格比  $\lambda=0.5$ ，由此可知， $\tau=0.25$ 。对于Lax-Wendroff 格式，初值离散后就可以直接计算下去。蛙跳格式是三层格式，因而必须先求得第一时间层上的值之后才能按公式计算下去。一般来说，要采用另外的二层格式来计算第一层上的值。为简单起见，针对这个简单例子可以利用对流方程初值问题的解析表达式  $u(x,t)=u_0(x-t)$  计算第一层，取  $u_j^1=u_0(x_j-\tau)$ ， $j=0, \pm 1, \dots$ 。这样利用  $u_j^0, u_j^1$ ， $j=0, \pm 1, \dots$  就可以用蛙跳格式进行计算。Lax-Wendroff 格式，蛙跳格式的结果以及解析解见表 3.2。

### § 3 一阶线性常系数方程组

我们考虑一阶线性常系数方程组

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (3.1)$$

其中  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x,t)=[u_1(x,t), \dots, u_p(x,t)]^T$ ， $A$  是  $p \times p$  的常数矩阵。

**定义 3.1** 称方程组(3.1)是双曲型方程组，如果  $A$  的特征值是实的并且存在非奇异矩阵  $S$ ，使得

$$A = S^{-1}AS = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_p \end{bmatrix},$$

其中  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p$  是  $A$  的特征值.

如果  $A$  是对称矩阵, 那么 (3.1) 称为对称双曲型方程组. 如果  $A$  的特征值是实的且互不相同, 则称 (3.1) 为严格的双曲型方程组.

对 (3.1) 给定初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (3.2)$$

那么 (3.1) 和 (3.2) 就构成了初值问题. 在 §1, §2 中讨论的差分格式都可以推广到方程组上来. 在此我们不一一进行讨论, 仅以几个例子作说明.

### 3.1 Lax-Friedrichs 格式

从对流方程的 Lax-Friedrichs 格式直接推广有

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + A \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0, \quad (3.3)$$

一般取  $\lambda = \tau/h$  为常数, 所以 (3.3) 是一阶精度的格式. 下面我们讨论其稳定性. 令  $u_j^n = v^n e^{i\omega jh}$ , 代入 (3.3) 可以求得增长矩阵

$$\begin{aligned} G(\tau, \omega) &= \frac{1}{2}(e^{i\omega h} + e^{-i\omega h})I + \frac{1}{2}\lambda(e^{-i\omega h} - e^{i\omega h})A \\ &= \cos \omega h \cdot I - i\lambda \sin \omega h A, \end{aligned}$$

其中  $I$  为  $p$  阶单位矩阵. 注意到  $G$  是  $A$  的多项式, 因此  $G$  的特征值

$$\mu_l(G) = \cos \omega h - i\lambda \sin \omega h \cdot \lambda_l, \quad l = 1, \dots, p,$$

其中  $\lambda_l$  为  $A$  的一个特征值.

$$|\mu_l|^2 = \cos^2 \omega h + \lambda^2 \lambda_l^2 \sin^2 \omega h$$

$$= 1 - (1 - \lambda^2 \lambda_l^2) \sin^2 \omega h.$$

如果

$$\lambda \rho(A) \leq 1, \quad (3.4)$$

那么就有  $\rho(G) \leq 1$ , 这就是 von Neumann 条件. 但要注意, 这仅是格式稳定的一个必要条件.

由于方程组是双曲型的, 所以存在非奇异矩阵  $S$  使  $S^{-1}AS = A$ . 由此可得

$$S^{-1}GS = \cos \omega h I - i \lambda \sin \omega h A.$$

这是一个对角矩阵. 利用第二章定理 3.5, von Neumann 条件是稳定的充分条件, 因此条件 (3.4) 是 Lax-Friedrichs 格式的稳定性条件.

### 3.2 Lax-Wendroff 格式

我们把对流方程的 Lax-Wendroff 格式直接推广到方程组 (3.1), 其格式可以写为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \lambda A(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \frac{1}{2} \lambda^2 A^2(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n). \quad (3.5)$$

容易看出, 这个格式是二阶精度的. 下面讨论其稳定性. 格式 (3.5) 的增长矩阵

$$G(\tau, \omega) = I - i \lambda \sin \omega h A - \lambda^2 (1 - \cos \omega h) A^2.$$

设  $A$  的特征值为  $\lambda_l, l=1, 2, \dots, p$ , 那么  $G(\tau, \omega)$  的特征值为

$$\mu_l(G) = 1 - i \lambda \lambda_l \sin \omega h - \lambda^2 \lambda_l^2 (1 - \cos \omega h), l=1, 2, \dots, p,$$

所以有

$$|\mu_l|^2 = 1 - 4 \lambda^2 \lambda_l^2 (1 - \lambda^2 \lambda_l^2) \sin^4 \frac{\omega h}{2}.$$

如果条件 (3.4) 成立, 那么有  $\rho(G) \leq 1$ , 即 von Neumann 条件满足. 利用方程组的双曲型性质, 存在  $S$  使

$$A = S^{-1}AS.$$

由此我们也有

$$S^{-1}A^2S = S^{-1}AS \cdot S^{-1}AS = A^2.$$

因此

$$S^{-1}GS = I - i\lambda \sin \omega h A - \lambda^2 (1 - \cos \omega h) A^2$$

是对角矩阵。由第二章定理 3.5 知, von Neumann 条件是 Lax-Wendroff 格式稳定的充分必要条件, 所以 Lax-Wendroff 格式的稳定性条件是 (3.4)。

### 3.3 迎风差分格式

对于迎风差分格式, 不像前面两个格式可以作形式的推广, 主要由于  $A$  的特征值可正可负。但我们考虑到方程组是双曲型的, 所以存在非奇异矩阵  $S$ , 使

$$S^{-1}AS = A_1$$

令

$$w = S^{-1}u$$

那么可以把方程组 (3.1) 化为

$$\frac{\partial w}{\partial t} + A \frac{\partial w}{\partial x} = 0. \quad (3.6)$$

此时方程已经不是耦合形式了。它相当于  $p$  个标量方程

$$\frac{\partial w^{(l)}}{\partial t} + \lambda_l \frac{\partial w^{(l)}}{\partial x} = 0, \quad l = 1, 2, \dots, p \quad (3.7)$$

其中  $w^{(l)}$  是向量  $w$  的第  $l$  个分量,  $\lambda_l$  是矩阵  $A$  的第  $l$  个特征值。对于方程 (3.7) 可以按 §1 对流方程的迎风格式来处理。为书写简便起见, 对于  $w^{(l)}$  省掉指标  $l$ , 这样 (3.7) 的迎风格式是

$$\frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\tau} + \lambda_l \frac{w_j^n - w_{j-1}^n}{h} = 0, \quad \text{当 } \lambda_l \geq 0,$$

$$\frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\tau} + \lambda_l \frac{w_{j+1}^n - w_j^n}{h} = 0, \quad \text{当 } \lambda_l < 0.$$

把这两个格式写成统一形式

$$\frac{w_{j+1}^n - w_j^n}{\tau} + \lambda_l \frac{w_{j+1}^n - w_{j-1}^n}{2h} = -\frac{1}{2h} |\lambda_l| (w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n) \quad (3.8)$$

由(3.8)出发,就容易写成向量形式

$$w_j^{n+1} = w_j^n - \frac{\lambda}{2} A (w_{j+1}^n - w_{j-1}^n) + \frac{\lambda}{2} |A| (w_{j+1}^n - 2w_j^n + w_{j-1}^n), \quad (3.9)$$

其中  $\lambda = \tau/h$ ,  $|A|$  为对角矩阵, 其元素  $|A|_{ij} = |\lambda_l| \delta_{ij}$ , 由此我们可以得到(3.1)的迎风格式的另一形式

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\lambda}{2} A (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{\lambda}{2} |A| (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \quad (3.10)$$

其中  $|A| = S|A|S^{-1}$ .

先来证明(3.9)的稳定性. 容易求出(3.9)的增长矩阵

$$G(\tau, \omega) = I - i\lambda \sin \omega h A + \lambda (\cos \omega h - 1) |A|,$$

其中  $I$  为单位矩阵,  $G$  的特征值为

$$\mu_l(G) = 1 - i\lambda \lambda_l \sin \omega h + \lambda |\lambda_l| (\cos \omega h - 1), l = 1, 2, \dots, p,$$

$$|\mu_l|^2 = \left( 1 - 2\lambda |\lambda_l| \sin^2 \frac{\omega h}{2} \right)^2 + \lambda^2 \lambda_l^2 \sin^2 \omega h$$

$$= 1 - 4\lambda |\lambda_l| (1 - \lambda |\lambda_l|) \sin^2 \frac{\omega h}{2},$$

$$l = 1, 2, \dots, p.$$

如果

$$\lambda \max_l |\lambda_l| \leq 1,$$

那么有  $\lambda \rho(G) \leq 1$ . 也就是说, 如果条件(3.4)满足, 那么 von Neumann 条件满足. 显然, 增长矩阵  $G$  是一个对角矩阵, 所以 von Neumann 条件是差分格式稳定的充分必要条件. 由此得出, 差分格式(3.9)的稳定性条件为(3.4).



下面来讨论差分格式(3.10)的稳定性. 其增长矩阵为

$$G(\tau, \omega) = I - i\lambda \sin \omega h A - (1 - \cos \omega h) \lambda |A|.$$

我们已经证明(3.9)在条件(3.4)之下是稳定的, 如果令

$$G_1(\tau, \omega) = I - i\lambda \sin \omega h A + \lambda (\cos \omega h - 1) |A|,$$

则有

$$\|G_1(\tau, \omega)^n\| \leq K, n\tau \leq T.$$

根据 $|A|$ 的定义有

$$G(\tau, \omega) = SG_1(\tau, \omega)S^{-1}.$$

由此得

$$G(\tau, \omega)^n = SG_1(\tau, \omega)^n S^{-1},$$

所以有

$$\begin{aligned} \|G(\tau, \omega)^n\| &\leq \|S\| \cdot \|G_1(\tau, \omega)^n\| \cdot \|S^{-1}\| \\ &\leq K \|S\| \cdot \|S^{-1}\| = \tilde{K}, \quad n\tau \leq T \end{aligned}$$

所以当满足条件(3.4)时差分格式(3.10)稳定.

## § 4 一阶线性变系数方程及方程组

前面我们讨论了常系数方程及方程组的差分格式, 这是我们研究双曲型差分格式的基础. 实际问题是非常复杂的, 很多现象必须用变系数方程和非线性方程来描述. 本节考虑变系数方程和方程组的差分格式和它的稳定性. 差分格式的构造可以由常系数的情况直接推广过来, 但稳定性的分析将出现复杂性.

### 4.1 一阶变系数双曲型方程

考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & |x| < \infty, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & |x| < \infty. \end{cases} \quad (4.1)$$

$$(4.2)$$

我们先讨论迎风格式。由于  $a(x, t)$  可能要改变符号, 因此迎风格式可以写作

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a_j^n \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0, \quad \text{当 } a_j^n \geq 0, \quad (4.3)$$

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + a_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0, \quad \text{当 } a_j^n < 0. \quad (4.4)$$

在第二章中, 我们用能量方法讨论了差分格式(4.3)在条件

$$\lambda \max_j a_j^n \leq 1 \quad (4.5)$$

之下是稳定的。能量方法是讨论变系数差分格式的一个基本方法, 但一般都比较麻烦。对于变系数差分格式来说, 又不能直接使用 Fourier 方法来讨论其稳定性。在实际应用中如果能给出一个粗略的稳定性条件也是很好的, 所谓“冻结”系数法就可以达到此目的。这个方法就是把差分格式(4.3)中的系数  $a_j^n$  看成与标号  $j$  和  $n$  无关(即  $a_j^n$  取某一固定的标号值), 这样(4.3)就变成了常系数差分方程, 那么就可以用 Fourier 分析方法进行讨论。我们知道, 常系数差分格式(4.3)的稳定性条件是  $a\lambda \leq 1$ , 得到这个条件之后再使标号变化, 立即可得(4.3)的稳定性条件是

$$\max_j a_j^n \lambda \leq 1.$$

变系数差分格式的稳定性都可以用冻结系数法来进行讨论, 但我们必须注意到, 这不是严格的方法。因此可能会出现, 当网格比  $\lambda$  满足这样得到的稳定性条件时, 会出现不稳定。由于“冻结”系数方法简单而大体能用, 所以实际问题使用中的变系数差分格式大都仅进行这样的粗略分析。

应用“冻结”系数法我们立即可知, 差分格式(4.4)的稳定性条件是

$$\max_j |a_j^n| \lambda \leq 1. \quad (4.6)$$

下面来考察 Lax-Friedrichs 格式

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + \alpha_j^n \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (4.7)$$

用“冻结”系数法容易求出其稳定性条件是(4.6), 现在我们用能量方法来严格地讨论其稳定性. 先把(4.7)改写为

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\alpha_j^n \lambda (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n),$$

其中  $\lambda = \tau/h$ . 用  $u_j^{n+1}$  乘上式的两边, 得

$$(u_j^{n+1})^2 = \frac{1}{2}(1 + \alpha_j^n \lambda) u_{j-1}^n u_j^{n+1} + \frac{1}{2}(1 - \alpha_j^n \lambda) u_{j+1}^n u_j^{n+1}.$$

如果假定网格比  $\lambda$  满足条件(4.6), 那么就有

$$\begin{aligned} (u_j^{n+1})^2 &\leq \frac{1}{4}(1 + \alpha_j^n \lambda) [(u_{j-1}^n)^2 + (u_j^{n+1})^2] \\ &\quad + \frac{1}{4}(1 - \alpha_j^n \lambda) [(u_{j+1}^n)^2 + (u_j^{n+1})^2] \\ &= \frac{1}{4}(1 + \alpha_j^n \lambda) (u_{j-1}^n)^2 + \frac{1}{2} (u_j^{n+1})^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}(1 - \alpha_j^n \lambda) (u_{j+1}^n)^2, \end{aligned}$$

从而得到

$$(u_j^{n+1})^2 \leq \frac{1}{2} [(u_{j-1}^n)^2 + (u_{j+1}^n)^2] + \frac{1}{2} \alpha_j^n \lambda [(u_{j-1}^n)^2 - (u_{j+1}^n)^2].$$

用  $h$  乘上式两边并对  $j$  进行求和, 如果记

$$\|u^n\|_1^2 = \sum_{j=-\infty}^{\infty} (u_j^n)^2 h,$$

那么我们有

$$\|u^{n+1}\|_1^2 \leq \|u^n\|_1^2 + \frac{1}{2} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \alpha_j^n \lambda [(u_{j-1}^n)^2 - (u_{j+1}^n)^2] h$$

$$= \|u^n\|_A^2 + \frac{1}{2} \lambda \sum_{i=-\infty}^{\infty} (a_{i+1}^n - a_{i-1}^n) (u_i^n)^2 h.$$

如果

$$\sup_{x,t} \left| \frac{\partial a}{\partial x} \right| \leq M, \quad (4.8)$$

那么有

$$|a_{i+1}^n - a_{i-1}^n| \leq 2 M h.$$

因此有

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_A^2 &\leq \|u^n\|_A^2 + \frac{1}{2} \tau \cdot 2 M \|u^n\|_A^2 \\ &= (1 + \tau M) \|u^n\|_A^2. \end{aligned}$$

重复使用有

$$\begin{aligned} \|u^n\|_A^2 &\leq (1 + \tau M)^n \|u^0\|_A^2 \\ &\leq e^{n\tau} \|u^0\|_A^2, \quad n\tau \leq T. \end{aligned}$$

从上述推导我们知道, 如果方程 (4.1) 的系数  $a(x, t)$  满足 (4.8) 或关于  $x$  是一致 Lipschitz 连续, 且网格比  $\lambda$  满足条件 (4.6), 那么变系数 Lax-Friedrichs 格式是稳定的.

逼近 (4.1) 的 Lax-Wendroff 格式要重新推导, 由于系数依赖于  $t$ , 所以比较麻烦, 一般不采用.

## 4.2 变系数方程组

我们考虑变系数双曲型方程组的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & (4.9) \\ u(x, 0) = u_0(x), & (4.10) \end{cases}$$

其中  $u$  和  $u_0$  是具有  $p$  个分量的列向量,  $A(x, t)$  是  $p \times p$  的光滑矩阵. 为构造差分格式方便起见, 我们假定  $A$  仅依赖于  $x$ , 即  $A = A(x)$ .

Lax-Wendroff 格式可以仿常系数方程那样推导, 其格式为

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \frac{1}{2} \lambda A_j^n (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) + \frac{1}{2} \lambda^2 A_j [A_{j+\frac{1}{2}} (u_{j+1}^n - u_j^n) - (A_{j-\frac{1}{2}} - u_j^n - u_{j-1}^n)], \quad (4.11)$$

其中  $\lambda = \tau/h$ ,  $A_j = A(x_j)$ ,  $A_{j+\frac{1}{2}} = A\left(\frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})\right)$ .

利用“冻结”系数法可以导出 Lax-Wendroff 格式的稳定性条件是

$$\lambda \max_x \rho(A(x)) \leq 1. \quad (4.12)$$

Lax-Friedrichs 格式可以直接写出

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + A_j \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (4.13)$$

利用“冻结”系数法知其稳定性条件是(4.12). 如果  $A(x)$  是对称并满足 Lipschitz 条件, 那么我们还可以应用第二章定理 4.1 来严格推导其稳定性. 首先把(4.13)改写为

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2} (I + \lambda A_j) u_{j-1}^n + \frac{1}{2} (I - \lambda A_j) u_{j+1}^n,$$

其中  $I$  为单位矩阵. 如果网格比  $\lambda$  满足条件(4.12), 那么矩阵  $I + \lambda A_j$  和  $I - \lambda A_j$  是非负定的, 由此得到差分格式是稳定的.

## § 5 二阶双曲型方程

### 5.1 波动方程的初值问题

最简单的二阶双曲型方程是波动方程, 我们考虑波动方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & |x| < \infty, t > 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = f(x), & |x| < \infty, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x), & |x| < \infty, \end{cases} \quad (5.3)$$

其中  $a > 0$ . 其解可由熟知的 D'Alembert 公式给出

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x+at) + f(x-at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} g(\xi) d\xi. \quad (5.4)$$

直线族

$$x + at = \text{const},$$

$$x - at = \text{const}$$

是方程(5.1)的两族特征线.

初值问题(5.1)和(5.2)的解  $u$  在任一点  $(x^*, t^*)$  的值  $u(x^*, t^*)$ , 由 D'Alembert 公式不难看出: 它仅依赖于  $x$  轴上的区间  $[x^* - at^*, x^* + at^*]$ , 这个区间是用过  $(x^*, t^*)$  的两条特征线在  $x$  轴上划出来的, 并称这个区间为点  $(x^*, t^*)$  的依赖区间(或称依赖区域). 波动方程的特征线和依赖区间见图 3.5.

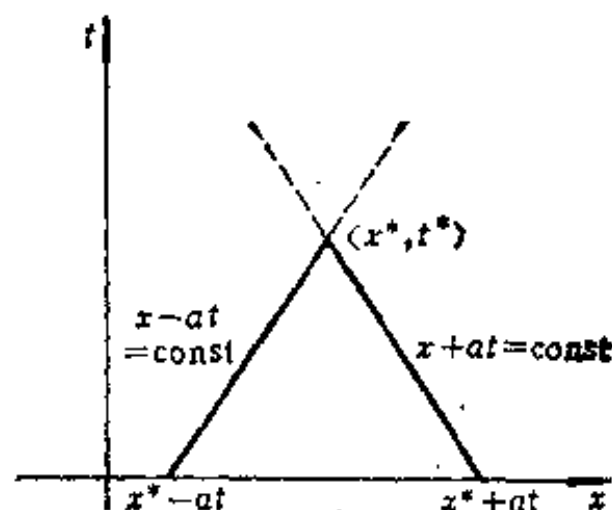


图 3.5

我们能够把波动方程(5.1)化为一阶对称双曲型方程组. 令

$$v = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad w = a \frac{\partial u}{\partial x},$$

那么有

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - a \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} + a \frac{\partial v}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

如果令  $\mathbf{u} = [v, w]^T$ , 那么方程组可以写成向量形式

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (5.7)$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$$

是一个对称矩阵.

对于(5.7)可附以初始条件

$$\mathbf{u}(x, 0) = [g(x), af'(x)]^T. \quad (5.8)$$

这样, (5.7)和(5.8)形成了一阶方程组的初值问题.

## 5.2 二阶方程的显式格式

将波动方程(5.1)中的偏导数  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$  和  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  都用中心差商来逼近, 这样就得到差分格式

$$\frac{u_i^{n+1} - 2u_i^n + u_i^{n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} = 0. \quad (5.9)$$

这是一个二阶精度的逼近. 初始条件(5.2)和(5.3)的离散如下,

$$\begin{cases} u_i^0 = f_i, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\begin{cases} \frac{u_i^1 - u_i^0}{\tau} = g_i, \end{cases} \quad (5.11)$$

其中  $f_i = f(x_i)$ ,  $g_i = g(x_i)$ . 注意到, (5.9)的截断误差是  $O(\tau^2 + h^2)$ , 而(5.11)的截断误差是  $O(\tau)$ , 显然两者是不匹配的. 为了提高(5.11)的精度, 可以利用一个虚构的函数值  $u(x_i, t_{-1})$  和中心差商公式

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, 0) = \frac{u(x_i, t_1) - u(x_i, t_{-1})}{2\tau} + O(\tau^2),$$

这样就得到(5.3)的另一逼近

$$u_j^1 - u_j^{-1} = 2\tau g_j, \quad (5.12)$$

此式中出现的  $u_j^{-1}$  必须设法消去, 为此我们在(5.9)中令  $n=0$ , 有

$$u_j^1 - 2u_j^0 + u_j^{-1} - \alpha^2 \lambda^2 (u_{j+1}^0 - 2u_j^0 + u_{j-1}^0) = 0,$$

其中  $\lambda = \tau/h$  是网格比. 此式与(5.12)联立消去  $u_j^{-1}$ , 就得到

$$u_j^1 = \frac{1}{2} \alpha^2 \lambda^2 (f_{j-1} + f_{j+1}) + (1 - \alpha^2 \lambda^2) f_j + \tau g_j. \quad (5.13)$$

利用(5.9)与(5.10)和(5.13)(或(5.11))就可以计算了.

下面我们来讨论差分格式(5.9)的稳定性. 容易验证, (5.9)等价于逼近方程组(5.7)的一个显式格式

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} - \alpha \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} = 0, \\ \frac{w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{\tau} - \alpha \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{h} = 0, \end{cases} \quad (5.14)$$

其中

$$v_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau}, \quad w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} = \alpha \frac{u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{h}.$$

因此我们只要分析差分格式(5.14)的稳定性就行了. (5.14)的增长矩阵是

$$G(\tau, \omega) = \begin{bmatrix} 1 & ic \\ ic & 1 - c^2 \end{bmatrix},$$

其中  $c = 2\alpha\lambda \sin \frac{\omega h}{2}$ .  $G$  的特征方程是

$$\mu^2 - (2 - c^2)\mu + 1 = 0.$$

所以  $G$  的特征值是

$$\mu = 1 - 2\alpha^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2} \pm \sqrt{\left(\alpha^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2} - 1\right) 4\alpha^2 \lambda^2 \sin^2 \frac{\omega h}{2}}.$$

如果  $\alpha\lambda \leq 1$ , 那么有



$$\mu = 1 - 2a^2\lambda^2\sin^2\frac{\omega h}{2} \pm i\sqrt{\left(1 - a^2\lambda^2\sin^2\frac{\omega h}{2}\right)4a^2\lambda^2\sin^2\frac{\omega h}{2}},$$

从而有

$$|\mu|^2 = \left(1 - 2a^2\lambda^2\sin^2\frac{\omega h}{2}\right)^2 + \left(1 - a^2\lambda^2\sin^2\frac{\omega h}{2}\right)4a^2\lambda^2\sin^2\frac{\omega h}{2} = 1.$$

由此得到, 当  $a\lambda \leq 1$  时, 差分格式 (5.14) 满足 von Neumann 条件. 令  $\sigma = \omega h$ , 我们有

$$\tilde{G}(\sigma) = \begin{bmatrix} 1 & 2a\lambda i \sin\frac{\sigma}{2} \\ 2a\lambda i \sin\frac{\sigma}{2} & 1 - 4a^2\lambda^2\sin^2\frac{\sigma}{2} \end{bmatrix}.$$

$$\tilde{G}^{(1)}(\sigma) = \begin{bmatrix} 0 & a\lambda i \cos\frac{\sigma}{2} \\ a\lambda i \cos\frac{\sigma}{2} & -2a^2\lambda^2\sin\sigma \end{bmatrix}.$$

如果  $a\lambda < 1, \sigma \neq 2k\pi$ , 那么  $G$  有两个相异的特征值. 如果  $a\lambda < 1, \sigma = 2k\pi$ , 此时有

$$\tilde{G}(\sigma) = \tilde{G}(2k\pi) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

而

$$\tilde{G}^{(1)}(2k\pi) = \begin{bmatrix} 0 & (-1)^k a\lambda i \\ (-1)^k a\lambda i & 0 \end{bmatrix}$$

有两个不同的特征值. 利用第二章定理 3.6, 当  $a\lambda < 1$  时, von Neumann 条件是稳定性的充分条件, 此时差分格式 (5.14) 稳定.

如果  $a\lambda = 1$ , 我们取一组特殊的初值

$$v_i^0 = (-1)^i, w_{i+\frac{1}{2}}^0 = 0,$$

由此可以求得(5.14)的解为

$$v_j^n = (-1)^{n+j}(1-2^{-n}), w_{j+\frac{1}{2}}^n = (-1)^{j+\frac{n}{2}}2^{-n}.$$

这是一组无界的解,所以当  $a\lambda = 1$  时差分格式(5.14)不稳定.

### 5.3 二阶方程的 C. F. L 条件

我们可以仿照一阶双曲型方程的差分格式的讨论,从差分格式解的依赖区域和微分方程初值问题解的依赖区域之间的关系推导出 C. F. L 条件.

由方程(5.9)可以看出,  $u_j^n$  依赖于前两层上函数值  $u_{j-1}^{n-1}$ ,  $u_{j+1}^{n-1}$  和  $u_j^{n-2}$ , 这四个值又依赖于  $u_{j-2}^{n-2}$ ,  $u_{j-1}^{n-2}$ ,  $u_j^{n-2}$ ,  $u_{j+1}^{n-2}$ ,  $u_{j+2}^{n-2}$ ,  $u_{j-1}^{n-3}$ ,  $u_{j+1}^{n-3}$  和  $u_j^{n-4}$ , 依次类推, 可知  $u_j^n$  最后依赖于初始层的值:

$$u_{j-n}^0, u_{j-n+1}^0, \dots, u_j^0, \dots, u_{j+n-1}^0, u_{j+n}^0$$

这说明  $x$  轴上含于区间  $[x_{j-n}, x_{j+n}]$  上的网格点为差分格式的解  $u$  在点  $(x_j, t_n)$  的依赖区域, 它就是过点  $(x_j, t_n)$  的两条直线

$$x - x_j = \pm \frac{h}{\tau}(t - t_n)$$

在  $x$  轴上切割下来的区间  $[A, B]$  上的网格点. 注意, 过点  $(x_j, t_n)$  的微分方程的两条特征线为

$$x - x_j = \pm a(t - t_n),$$

它们在  $x$  轴切割下来的区间  $[D, E]$  为微分方程初值问题的解在点  $(x_j, t_n)$  的依赖区域. 见图 3.6. 我们假定初始条件沿  $DA$  和  $BE$  是改变的, 这些变化将影响着微分方程初值问题的解在点  $P$  的值, 但没有改变用差分格式(5.9), (5.10)和(5.13) (或(5.11)) 计算出来的  $u_j^n$ . 因此, 当  $\lambda = \tau/h$  固定,  $\tau$  和  $h$  趋于 0 时, 差分格式的解不可能收敛到微分方程初值问题的解. 由此我们看出, 差分格式收敛的必要条件是差分格式解的依赖区域 (实际上是以依赖区域端点所构成的区间) 包含微分方程初值问题解的依赖区域, 这就是 C. F. L 条件. 利用表达式来表示就是  $a\lambda \leq 1$ . 前面我们曾讨论了差分格式的稳定性, 稳定性条件为  $a\lambda < 1$ . 根

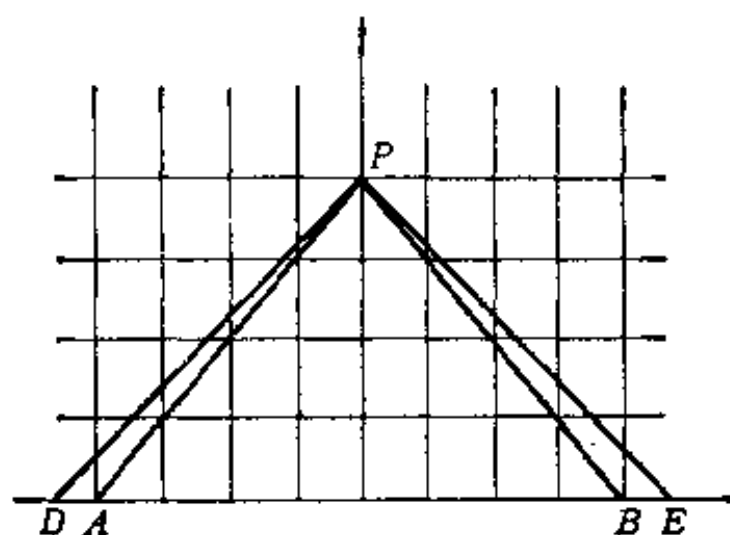


图 3.6

据 Lax 等价定理, 这个条件也是差分格式收敛的充分条件. 而  $a\lambda=1$ , 差分格式不稳定, 所以也不收敛. 最后我们可以推得 C. F. L 条件是差分格式 (5.9), (5.10) 和 (5.13) 收敛的必要条件, 但不是充分条件.

#### 5.4 等价方程组的差分格式

我们从一阶方程组 (5.7) 出发先构造 Lax-Friedrichs 格式, 直接写出有

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + A \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0. \quad (5.15)$$

写成分量形式有

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - \frac{1}{2}(v_{j+1}^n + v_{j-1}^n)}{\tau} - a \frac{w_{j+1}^n - w_{j-1}^n}{2h} = 0, \\ \frac{w_j^{n+1} - \frac{1}{2}(w_{j+1}^n + w_{j-1}^n)}{\tau} - a \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} = 0. \end{cases}$$

显然, 这是一个一阶程度的格式. 由于方程组 (5.7) 是严格双曲型

方程组, 所以可以利用 Lax-Friedrichs 格式的结论, 即稳定性条件是  $\lambda \rho(A) \leq 1$ . 由于矩阵  $A$  的特征值为  $\pm a$ , 因此我们得到差分格式 (5.15) 的稳定性条件是

$$a\lambda \leq 1. \quad (5.16)$$

关于 Lax-Wendroff 格式, 我们直接写出分量形式

$$\begin{cases} v_j^{n+1} = v_j^n + \frac{a\lambda}{2} (w_{j+1}^n - w_{j-1}^n) + \frac{1}{2} a^2 \lambda^2 (v_{j+1}^n \\ \quad - 2v_j^n + v_{j-1}^n), \\ w_j^{n+1} = w_j^n + \frac{a\lambda}{2} (v_{j+1}^n - v_{j-1}^n) + \frac{1}{2} a^2 \lambda^2 (w_{j+1}^n \\ \quad - 2w_j^n + w_{j-1}^n). \end{cases} \quad (5.17)$$

容易证明, Lax-Wendroff 格式的稳定性条件为 (5.16).

隐式格式可以用来求解波动方程 (5.1), 对等价的方程组 (5.7) 也同样适用. 我们先考虑 Crank-Nicolson 型格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{1}{2} A \left( \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) = 0.$$

利用 §3 讨论的结论知, 这个格式是无条件稳定的, 具体写出是

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} - \frac{1}{2} a \left( \frac{w_{j+1}^{n+1} - w_{j-1}^{n+1}}{2h} + \frac{w_{j+1}^n - w_{j-1}^n}{2h} \right) = 0, \\ \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\tau} - \frac{1}{2} a \left( \frac{v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{2h} + \frac{v_{j+1}^n - v_{j-1}^n}{2h} \right) = 0. \end{cases} \quad (5.18)$$

下面我们讨论一个经常使用的隐式格式

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} - \frac{1}{2} a \left( \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1}}{h} + \frac{w_{j+\frac{1}{2}}^n - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} \right) = 0, \\ \frac{w_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{j-\frac{1}{2}}^n}{\tau} - \frac{1}{2} a \left( \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{h} + \frac{v_j^n - v_{j-1}^n}{h} \right) = 0. \end{cases} \quad (6.19)$$

可以注意到,差分格式(5.19)与差分格式(5.18)有十分相似之处,我们把(5.19)改写成

$$\begin{cases} v_i^{n+1} - \frac{1}{2}a\lambda \left( w_{i+\frac{1}{2}}^{n+1} - w_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = v_i^n + \frac{1}{2}a\lambda \left( w_{i+\frac{1}{2}}^n - w_{i-\frac{1}{2}}^n \right) \\ w_{i-\frac{1}{2}}^{n+1} - \frac{1}{2}a\lambda (v_{i+1}^{n+1} - v_{i-1}^{n+1}) = w_{i-\frac{1}{2}}^n + \frac{1}{2}a\lambda (v_i^n - v_{i-1}^n). \end{cases} \quad (5.20)$$

由第二个方程得到的  $w_{i-\frac{1}{2}}^{n+1}$ ,  $w_{i-\frac{1}{2}}^{n-1}$  代入第一个方程后我们得到

$$\begin{aligned} v_i^{n+1} - \frac{1}{4}a^2\lambda^2 (v_{i+1}^{n+1} - 2v_i^{n+1} + v_{i-1}^{n+1}) &= v_i^n + a\lambda \left( w_{i+\frac{1}{2}}^n \right. \\ &\quad \left. - w_{i-\frac{1}{2}}^n \right) + \frac{1}{4}a^2\lambda^2 (v_{i+1}^n - 2v_i^n + v_{i-1}^n). \end{aligned} \quad (5.21)$$

如果给定边界条件,那么方程组(5.21)可以用追赶法求解. 求出  $v$  之后代入(5.20)的第二式,此时是显式的,不用解线性代数方程组就可以求出  $w$ .

下面来证明差分格式(5.19)的稳定性. 令

$$v_i^n = v^n e^{i\omega i h}, \quad w_{i-\frac{1}{2}}^n = w^n e^{i\omega (i-\frac{1}{2})h}.$$

把它们代入(5.20)有

$$\begin{aligned} v^{n+1} - \frac{1}{2}a\lambda (e^{i\omega \frac{h}{2}} - e^{-i\omega \frac{h}{2}}) w^{n+1} \\ = v^n + \frac{1}{2}a\lambda (e^{i\omega \frac{h}{2}} - e^{-i\omega \frac{h}{2}}) w^n, \\ e^{-\frac{1}{2}i\omega h} w^{n+1} - \frac{1}{2}a\lambda (1 - e^{-i\omega h}) v^{n+1} \\ = e^{-\frac{1}{2}i\omega h} w^n + \frac{1}{2}a\lambda (1 - e^{-i\omega h}) v^n. \end{aligned}$$

如果令  $\mathbf{v}^n = [v^n, w^n]^T$ , 那么有

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 1 & -a\lambda i \sin \frac{\omega h}{2} \\ -a\lambda i \sin \frac{\omega h}{2} & 1 \end{bmatrix} v^{n+1} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & a\lambda i \sin \frac{\omega h}{2} \\ a\lambda i \sin \frac{\omega h}{2} & 1 \end{bmatrix} v^n.
\end{aligned}$$

由此可得到差分格式(5.19)的增长矩阵

$$\begin{aligned}
G(\tau, \omega) &= \begin{bmatrix} 1 & -a\lambda i \sin \frac{\omega h}{2} \\ -a\lambda i \sin \frac{\omega h}{2} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\
&\cdot \begin{bmatrix} 1 & a\lambda i \sin \frac{\omega h}{2} \\ a\lambda i \sin \frac{\omega h}{2} & 1 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1 - \frac{c^2}{4}}{1 + \frac{c^2}{4}} & \frac{ic}{1 + \frac{c^2}{4}} \\ \frac{ic}{1 + \frac{c^2}{4}} & \frac{1 - \frac{c^2}{4}}{1 + \frac{c^2}{4}} \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

其中  $c = 2 a \lambda \sin \frac{\omega h}{2}$ .  $G$  的特征方程是

$$\left( \frac{1 - \frac{c^2}{4}}{1 + \frac{c^2}{4}} - \mu \right)^2 + \frac{c^2}{\left(1 + \frac{c^2}{4}\right)^2} = 0,$$

即

$$\left(1 + \frac{c^2}{4}\right) \mu^2 - 2\left(1 - \frac{c^2}{4}\right) \mu + \left(1 + \frac{c^2}{4}\right) = 0,$$

由此得到  $G$  的特征值

$$\mu = \left(1 + \frac{c^2}{4}\right)^{-1} \cdot \left[\left(1 - \frac{c^2}{4}\right) \pm ic\right].$$

容易验证  $|\mu| = 1$ , 因此 von Neumann 条件满足. 此外我们注意到,  $G^*G$  是单位矩阵, 知  $G$  是酉矩阵, 所以 von Neumann 条件是稳定的充分必要条件. 由此得出, 差分格式 (5.19) 是无条件稳定的.

如果对辅助变量  $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ ,  $w = a \frac{\partial u}{\partial x}$  引进差分离散

$$v_j^n = \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau},$$

$$w_{j-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}a \left[ \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} + \frac{u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1}}{h} \right],$$

那么我们就从差分格式 (5.19) 得到逼近波动方程 (5.1) 的隐式差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} - a^2 \frac{\delta^2 u_{j+\frac{1}{2}}^n + 2\delta^2 u_j^n + \delta^2 u_{j-\frac{1}{2}}^n}{4h^2} = 0, \quad (5.22)$$

其中  $\delta^2 u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$ . 由上节讨论可知, 差分格式 (5.22) 是无条件稳定的.

## 5.5 变系数波动方程

我们仅考虑一阶方程组的形式

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - a \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - a \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (5.23)$$

其中  $0 < a_0 \leq a(x, t) \leq a_1 < \infty$ . 假定  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} v(x, t) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} w(x, t) =$

0. 我们首先推导(5.23)的一个能量估计式,然后用能量方法证明一个隐式格式的稳定性.

用  $2av$  乘(5.23)的第一个方程,用  $2aw$  乘(5.23)的第二个方程,相加得到

$$\begin{aligned} 2a \left[ v \frac{\partial v}{\partial t} + w \frac{\partial w}{\partial t} \right] &= 2a^2 v \frac{\partial w}{\partial x} - 2a^2 w \frac{\partial v}{\partial x} \\ &= 2a^2 \frac{\partial(vw)}{\partial x} \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x} (a^2 vw) - 2vw \frac{\partial a^2}{\partial x}, \end{aligned}$$

由此得

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} [a(v^2 + w^2)] &= 2 \frac{\partial}{\partial x} (a^2 vw) - 2vw \frac{\partial a^2}{\partial x} \\ &\quad + (v^2 + w^2) \frac{\partial a}{\partial t}, \\ &= 2 \frac{\partial}{\partial x} (a^2 vw) - 2avw \left( \frac{1}{a} \frac{\partial a^2}{\partial x} \right) \\ &\quad + a(v^2 + w^2) \frac{\partial \ln a}{\partial t}. \end{aligned}$$

利用  $-2vw \leq v^2 + w^2$ , 得到

$$\frac{\partial}{\partial t} [a(v^2 + w^2)] \leq 2 \frac{\partial}{\partial x} (a^2 vw) + b[a(v^2 + w^2)],$$

其中

$$b = \max \left| \frac{1}{a} \frac{\partial a^2}{\partial x} \right| + \max \left| \frac{\partial \ln a}{\partial t} \right|.$$

对上面不等式积分有

$$\frac{\partial}{\partial t} \|u(t)\|^2 \leq b \|u(t)\|^2, \quad (5.24)$$

其中

$$u = [v, w]^T,$$



$$\|u(t)\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} a(x, t) [v(x, t)^2 + w(x, t)^2] dx.$$

利用(5.24)及第二章引理 4.1 有

$$\|u(t)\|^2 \leq e^{bt} \|u(0)\|^2, \quad t \leq T. \quad (5.25)$$

此式说明了微分方程组(5.23)的初值问题是适定的。

现在我们讨论(5.23)的一个隐式格式

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} - a_j^{n+1} \frac{w_{j+1}^{n+1} - w_j^{n+1}}{h} = 0, \\ \frac{w_j^{n+1} - w_j^n}{\tau} - a_j^{n+1} \frac{v_j^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}}{h} = 0. \end{cases} \quad (5.26)$$

下面为书写方便, 引入差分记号

$$\Delta_- f_i = f_i - f_{i-1}, \quad \Delta_+ f_i = f_{i+1} - f_i.$$

用  $2 a_i^{n+1} v_i^{n+1}$  乘(5.26)的第一式, 用  $2 a_i^{n+1} w_i^{n+1}$  乘(5.26)的第二式, 并对得到的结果相加, 经简单运算有

$$\begin{aligned} & [a_i^{n+1} (v_i^{n+1})^2 + a_i^{n+1} (w_i^{n+1})^2] - [a_i^n (v_i^n)^2 + a_i^n (w_i^n)^2] \\ &= 2 a_i^{n+1} v_i^n v_i^{n+1} + 2 (a_i^{n+1})^2 v_i^{n+1} \lambda \Delta_+ w_i^{n+1} \\ & \quad + 2 a_i^{n+1} w_i^n w_i^{n+1} + 2 (a_i^{n+1})^2 w_i^{n+1} \lambda \Delta_- v_i^{n+1} \\ & \quad - a_i^{n+1} (v_i^{n+1})^2 - a_i^{n+1} (w_i^{n+1})^2 - a_i^n (v_i^n)^2 - a_i^n (w_i^n)^2 \\ &= -a_i^{n+1} (v_i^{n+1} - v_i^n)^2 - a_i^{n+1} (w_i^{n+1} - w_i^n)^2 \\ & \quad + (a_i^{n+1} - a_i^n) (v_i^n)^2 + (a_i^{n+1} - a_i^n) (w_i^n)^2 \\ & \quad + 2 \lambda (a_i^{n+1})^2 (v_i^{n+1} \Delta_+ w_i^{n+1} + w_i^{n+1} \Delta_- v_i^{n+1}). \end{aligned} \quad (5.27)$$

容易验证

$$\begin{aligned} \Delta_+ (f_i g_i) &= (\Delta_+ f_i) g_i + f_{i+1} \Delta_+ g_i \\ &= (\Delta_+ f_i) g_{i+1} + f_i \Delta_+ g_{i+1}, \\ \Delta_- (f_i g_i) &= (\Delta_- f_i) g_i + f_{i-1} \Delta_- g_i \\ &= (\Delta_- f_i) g_{i-1} + f_i \Delta_- g_{i-1}. \end{aligned}$$

所以有

$$\Delta_+ [(a_i^{n+1})^2 w_i^{n+1} v_i^{n+1}]$$

$$\begin{aligned}
&= v_i^{n+1} \Delta_+ [(a_i^{n+1})^2 w_i^{n+1}] - (a_i^{n+1})^2 w_i^{n+1} \Delta_- v_i^{n+1} \\
&= v_i^{n+1} (a_i^{n+1})^2 \Delta_+ w_i^{n+1} + v_i^{n+1} w_{i+1}^{n+1} \Delta_+ (a_i^{n+1})^2 \\
&\quad + (a_i^{n+1})^2 w_i^{n+1} \Delta_- v_i^{n+1},
\end{aligned}$$

由此我们可以得到

$$\begin{aligned}
&(a_i^{n+1})^2 (v_i^{n+1} \Delta_+ w_i^{n+1} + w_{i+1}^{n+1} \Delta_- v_i^{n+1}) \\
&= \Delta_+ [(a_i^{n+1})^2 w_i^{n+1} v_{i+1}^{n+1}] - v_i^{n+1} w_{i+1}^{n+1} \Delta_+ (a_i^{n+1})^2.
\end{aligned}$$

把此式代入(5.27)得

$$\begin{aligned}
&[a_i^{n+1} (v_i^{n+1})^2 + a_i^{n+1} (w_i^{n+1})^2] - [a_i^n (v_i^n)^2 + a_i^n (w_i^n)^2] \\
&\leq (a_i^{n+1} - a_i^n) (v_i^n)^2 + (a_i^{n+1} - a_i^n) (w_i^n)^2 \\
&\quad + 2 \lambda \Delta_+ [(a_i^{n+1})^2 v_{i+1}^{n+1} w_i^{n+1}] - 2 \lambda v_i^{n+1} w_{i+1}^{n+1} \Delta_+ (a_i^{n+1})^2 \\
&\leq 2 \lambda \Delta_+ [(a_i^{n+1})^2 v_{i+1}^{n+1} w_i^{n+1}] \\
&\quad + \frac{1}{a_i^n} (a_i^{n+1} - a_i^n) [a_i^n (v_i^n)^2 + a_i^n (w_i^n)^2] \\
&\quad - 2 \lambda \frac{1}{\sqrt{a_i^{n+1} a_{i+1}^{n+1}}} (\Delta_+ (a_i^{n+1})^2) \sqrt{a_i^{n+1}} v_i^{n+1} \sqrt{a_{i+1}^{n+1}} w_{i+1}^{n+1}.
\end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
b_1 &= \sup_{x, n, \tau} \left| \frac{a(x, t_{n+1}) - a(x, t_n)}{\tau a(x, t_n)} \right|, \\
b_2 &= \sup_{x, n, h} \left| \frac{1}{\sqrt{a(x, t_{n+1}) a(x+h, t_{n+1})}} \frac{\Delta_+ (a_i^{n+1})^2}{h} \right|,
\end{aligned}$$

那么就有

$$\begin{aligned}
&[a_i^{n+1} (v_i^{n+1})^2 + a_i^{n+1} (w_i^{n+1})^2] - [a_i^n (v_i^n)^2 + a_i^n (w_i^n)^2] \\
&\leq 2 \lambda \Delta_+ [(a_i^{n+1})^2 v_{i+1}^{n+1} w_i^{n+1}] + b_1 \tau [a_i^n (v_i^n)^2 + a_i^n (w_i^n)^2] \\
&\quad + b_2 \tau [a_i^{n+1} (v_i^{n+1})^2 + a_{i+1}^{n+1} (w_{i+1}^{n+1})^2]. \tag{5.28}
\end{aligned}$$

取范数

$$\|u^n\|_h^2 = \sum_{i=-\infty}^{\infty} [a_i^n (v_i^n)^2 + a_i^n (w_i^n)^2] h.$$

对(5.28)两边求和有

$$\|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 \leq b_1 \tau \|u^n\|_h^2 + b_2 \tau \|u^{n+1}\|_h^2,$$

取  $\tau$  使  $1 - b_2 \tau > 0$ , 我们得

$$\|u^{n+1}\|_h^2 \leq \frac{1 + b_1 \tau}{1 - b_2 \tau} \|u^n\|_h^2,$$

因而有

$$\begin{aligned} \|u^n\|_h &\leq (1 + b_1 \tau) \|u^{n-1}\|_h \\ &\leq e^{b_1 \tau} \|u^0\|_h, n\tau \leq T. \end{aligned}$$

所以格式稳定.

## § 6 拟线性方程组

### 6.1 严格双曲型方程组

拟线性双曲型方程组的差分方法在计算流体力学中有重要应用,几十年来一直受到人们的重视,至今新的方法和技巧仍不断地出现. 我们仅讨论在实际问题中有重要应用的拟线性严格双曲型方程组.

考虑一阶拟线性方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.1)$$

其中  $u = [u_1, \dots, u_p]^T$ ,  $A$  是  $p \times p$  矩阵, 它的元素是  $x, t$  和  $u$  的充分光滑的函数.

**定义 1** 称拟线性方程组(6.1)在变量  $(x, t, u)$  的一个区域  $\Omega$  内是严格双曲型的, 如果在区域  $\Omega$  内的每一点上  $A(x, t, u)$  的特征值  $\lambda_1(x, t, u), \dots, \lambda_p(x, t, u)$  是实的并相异.

设行向量

$$l^{(1)}(x, t, u), \dots, l^{(p)}(x, t, u)$$

是矩阵  $A(x, t, u)$  相应于特征值  $\lambda_1(x, t, u), \dots, \lambda_p(x, t, u)$  的左特征向量, 即

$$l^{(i)} A = \lambda_i l^{(i)}, i = 1, 2, \dots, p.$$

用左特征向量  $l^{(i)}$  左乘(6.1), 则有

$$l^{(i)}(x, t, u) \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + \lambda_i(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, i = 1, \dots, p. \quad (6.2)$$

我们称(6.2)为方程组(6.1)的特征形式.

设  $l^{(i)} = (l_1^{(i)}, \dots, l_p^{(i)})$ , 则可将(6.2)写成

$$\sum_{k=1}^p l_k^{(i)} \left( \frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u_k}{\partial x} \right) = 0, i = 1, \dots, p. \quad (6.3)$$

沿特征方向

$$\tau_i: \frac{dx}{dt} = \lambda_i, i = 1, \dots, p.$$

我们有

$$\frac{\partial u_k}{\partial t} + \lambda_i \frac{\partial u_k}{\partial x} = \left( \frac{du_k}{dt} \right) \tau_i, \quad i = 1, \dots, p.$$

因此特征形式也可以写作

$$\sum_{k=1}^p l_k^{(i)} \left( \frac{du_k}{dt} \right) \tau_i = 0, i = 1, \dots, p.$$

**例 6.1** 气体动力学中一维不定常等熵流动的方程组(Euler坐标系)为

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

其中  $\rho, u$  分别表示流体的密度和速度,  $c = c(\rho)$  为“局部声速”.

令  $u = [\rho, u]^T$ , 方程组(6.4)可以写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{bmatrix}.$$

$A$  有两个相异的特征值  $\lambda_1 = u + c$ ,  $\lambda_2 = u - c$ , 所以方程组(6.4)是严格双曲型的, 而且特征方向为

$$\tau_1: \frac{dx}{dt} = u + c,$$

$$\tau_2: \frac{dx}{dt} = u - c.$$

容易算出, 相应于  $\lambda_1, \lambda_2$  的左特征向量分别是

$$l^{(1)} = \left[ 1, \frac{\rho}{c} \right], l^{(2)} = \left[ 1, -\frac{\rho}{c} \right].$$

由此得到方程组(6.4)的特征形式

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\rho}{c} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\rho}{c} \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial x} \right] = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

## 6.2 间断解

拟线性双曲型方程组与线性双曲型方程组有重大的区别。对于拟线性双曲型方程组的初值问题, 甚至在初始条件充分光滑的情况下, 一般来说其连续可微解只能在  $t=0$  的附近存在, 当  $t$  充分大时, 一般不再会有连续可微的解。为了说明这一点, 我们考察一阶拟线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (6.6)$$

这个方程的特征方向为  $\frac{dx}{dt} = u$ , 沿特征线有  $\frac{du}{dt} = 0$ , 即  $u = \text{const}$ , 因此方程(6.6)的特征线为直线。我们知道, 特征线的斜率依赖于解  $u$ , 因此特征线可能相交。

若给定初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad (6.7)$$

那么通过  $x$  轴上任一点  $x_1$ , 方程(6.6)的特征线为

$$x - x_1 = u_0(x_1)t,$$

沿此特征线  $u$  取定值  $u_0(x_1)$ 。如果对  $x$  轴上某二点  $x_1, x_2$ , 使得

$$\frac{u_0(x_1) - u_0(x_2)}{x_1 - x_2} < 0,$$

那么分别通过点  $(x_1, 0)$  和  $(x_2, 0)$  的两条特征线在上半平面  $t > 0$  内的某一点  $(x, t)$  就会相交(见图 3.7)。在交点处,  $u$  的数值就不能单值确定。因此, 在这样的情况下, 不论  $u_0(x)$  如何光滑, 初值问题(6.6)和(6.7)的连续可微解只能在局部范围中存在。拟线性双曲型方程的这个事实, 在流体力学中有着重要的意义。解的间断与空气动力学中的“激波”有密切的联系。间断解的计算成为一个很重要的课题。

### 6.3 迎风差分格式

迎风差分格式在拟线性双曲型方程组的计算中是很成功的, 它不但能应用于解的光滑区域, 而且当解出现间断时仍能顺利地进行计算。但是在相当长的一段时间内应用不太普遍, 其原因可能是需要将方程组化为特征形式。目前利用迎风格式计算拟线性双曲型方程组,

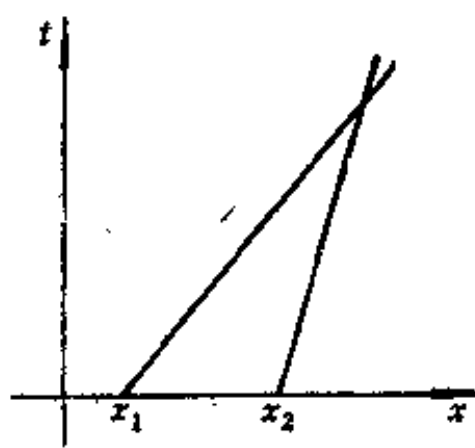


图 3.7

特别是在流体力学的计算中已相当流行。

现在由方程组(6.1)的特征形式(6.3)来构造迎风差分格式。在网格点 $(x_i, t_n)$ 处,如果 $A$ 的特征值 $\lambda_i(x_i, t_n, u_i^n) \geq 0$ ,那么用向后差商 $\frac{1}{h}(u_{k,i}^n - u_{k,i-1}^n)$ 来逼近 $\frac{\partial u_k}{\partial x}$ ;如果 $A$ 的特征值 $\lambda_i(x_i, t_n, u_i^n) < 0$ ,那么用向前差商 $\frac{1}{h}(u_{k,i+1}^n - u_{k,i}^n)$ 来逼近 $\frac{\partial u_k}{\partial x}$ 。这样得到逼近方程组(6.3)的迎风差分格式

$$\sum_{k=1}^p l_{k,i}^{(i,n)} \left[ \frac{u_{k,i+1}^{n+1} - u_{k,i}^{n+1}}{\tau} + \lambda_{k,i}^n \frac{1}{h} \tilde{\Delta} u_{k,i}^n \right] = 0, \quad (6.8)$$

其中 $i=1, \dots, p, l_{k,i}^{(i,n)} = l_k^{(i)}(x_i, t_n, u_i^n), \lambda_{k,i}^n = \lambda_k(x_i, t_n, u_i^n)$ ,

$$\tilde{\Delta} u_{k,i}^n = \begin{cases} u_{k,i}^n - u_{k,i-1}^n, & \text{当 } \lambda_{k,i}^n \geq 0, \\ u_{k,i+1}^n - u_{k,i}^n, & \text{当 } \lambda_{k,i}^n < 0. \end{cases}$$

为了保证差分格式(6.8)的收敛性,当然必须满足C. F. L条件,即差分格式的依赖区间(由差分格式的依赖区域两个端点所确定的区间)包含微分方程初值问题的依赖区间。为此,在

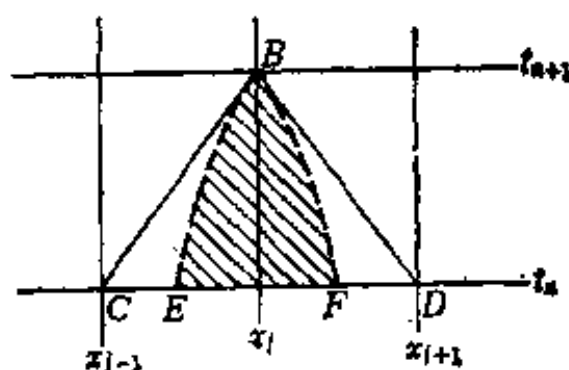


图 3.8

定解区域中使 $\lambda = \frac{\tau}{h}$ 满足条件

$$\max_i \lambda |\lambda_{k,i}^n| < 1, i=1, 2, \dots, p. \quad (6.9)$$

这样,对于任一网格点 $B=(x_i, t_{n+1})$ 来说(见图3.8),由于 $\lambda_k(x, t, u)$ 是一个光滑的函数,所以当 $\lambda_{k,i}^n$ 是正的, $\tau$ 取充分小时,在 $B$ 点的特征值 $\lambda_{k,i+1}^{n+1}$ 也是正的,并且有 $\lambda < \frac{1}{\lambda_{k,i+1}^{n+1}}$ ,即过 $B$ 点的特征线的

斜率  $\frac{\lambda}{\lambda_{ij}^{n+1}}$  大于直线  $BC$  的斜率, 反之, 当  $\lambda_{ij}^n$  是负的,  $\tau$  取充分小时,  $\lambda_{ij}^{n+1}$  也是负的, 并且有  $\lambda < \frac{1}{|\lambda_{ij}^{n+1}|}$ . 由此我们得到  $[E, F] \subset [C, D]$ , 即 C.F.L 条件满足. 所以在通常计算中取网格比满足

$$\lambda < \frac{1}{\max_j |\lambda_{ij}^n|}$$

来保证计算的收敛性. 我们必须注意到, C.F.L 条件是差分格式收敛性的必要条件, 因此上面的说法仅是一种粗糙的不严格的叙述.

拟线性双曲型方程组差分格式的稳定性讨论比较复杂, 原则上是可以利用能量方法进行讨论, 但实际上困难不少. 此外在拟线性情况下, Lax 等价定理也不成立. 因此上面关于收敛性的不严格的讨论所得到的条件不能认为是差分格式稳定性的条件. 在实际应用中, 讨论拟线性方程组的差分格式的稳定性, 一般采用所谓 **线性化稳定性分析方法**. 其方法是把方程组的系数看成既不依赖于  $u$ , 也不依赖于  $x$  和  $t$ , 即看成常数. 然后用 Fourier 分析方法去求出稳定性条件, 最后把稳定性条件中的常数恢复到关于  $u$ ,  $x$  和  $t$  的依赖关系. 这样得到的条件当然也是不严格的. 利用这种方法来分析差分格式 (6.8) 的稳定性, 可以得到其稳定性条件是 (6.9).

**例 6.2** 构造双曲型方程组 (6.4) 的迎风差分格式. 采用 (6.4) 的特征形式 (6.5) 来具体构造. 我们可以很方便地写出

$$\begin{cases} \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\tau} + (u_j^n + c_j^n) \frac{\Delta_1 \rho_j^n}{h} \\ + \frac{\rho_j^n}{c_j^n} \left[ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + (u_j^n + c_j^n) \frac{\Delta_1 u_j^n}{h} \right] = 0, \\ \frac{\rho_j^{n+1} - \rho_j^n}{\tau} + (u_j^n - c_j^n) \frac{\Delta_2 \rho_j^n}{h} \\ - \frac{\rho_j^n}{c_j^n} \left[ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + (u_j^n - c_j^n) \frac{\Delta_2 u_j^n}{h} \right] = 0, \end{cases} \quad (6.10)$$



其中

$$\Delta_1 \rho_i^n = \begin{cases} \rho_i^n - \rho_{i-1}^n, & \text{当 } u_i^n + c_i^n \geq 0, \\ \rho_{i+1}^n - \rho_i^n, & \text{当 } u_i^n + c_i^n < 0; \end{cases}$$

$$\Delta_2 \rho_i^n = \begin{cases} \rho_i^n - \rho_{i-1}^n, & \text{当 } u_i^n - c_i^n \geq 0, \\ \rho_{i+1}^n - \rho_i^n, & \text{当 } u_i^n - c_i^n < 0; \end{cases}$$

$$\Delta_1 u_i^n = \begin{cases} u_i^n - u_{i-1}^n, & \text{当 } u_i^n + c_i^n \geq 0, \\ u_{i+1}^n - u_i^n, & \text{当 } u_i^n + c_i^n < 0; \end{cases}$$

$$\Delta_2 u_i^n = \begin{cases} u_i^n - u_{i-1}^n, & \text{当 } u_i^n - c_i^n \geq 0, \\ u_{i+1}^n - u_i^n, & \text{当 } u_i^n - c_i^n < 0. \end{cases}$$

下面采用线性化稳定性分析方法来讨论差分格式(6.10)的稳定性。首先把差分格式(6.10)中的系数看成与  $x_i, t_n, u_i^n$  和  $\rho_i^n$  无关。用  $u, \rho$  和  $c$  来表示相应的量。为讨论方便起见,不妨假定  $u - c \geq 0$ , 此时也有  $u + c \geq 0$ 。这样差分格式(6.10)可以化简为

$$\begin{cases} \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + (u + c) \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{h} \\ + \frac{\rho}{c} \left[ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + (u + c) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right] = 0, \\ \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + (u - c) \frac{\rho_i^n - \rho_{i-1}^n}{h} \\ - \frac{\rho}{c} \left[ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + (u - c) \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right] = 0. \end{cases}$$

令  $\mathbf{u}_i^n = [\rho_i^n, u_i^n]^T$ , 那么可把差分格式写为

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{c} \\ 1 & -\frac{\rho}{c} \end{bmatrix} \frac{\mathbf{u}_i^{n+1} - \mathbf{u}_i^n}{\tau} + \begin{bmatrix} u + c & \frac{\rho}{c}(u + c) \\ u - c & -\frac{\rho}{c}(u - c) \end{bmatrix} \frac{\mathbf{u}_i^n - \mathbf{u}_{i-1}^n}{h} = 0.$$

容易求出, 矩阵  $\begin{bmatrix} 1 & \frac{\rho}{c} \\ 1 & -\frac{\rho}{c} \end{bmatrix}$  的逆矩阵为  $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{c}{2\rho} & -\frac{c}{2\rho} \end{bmatrix}$ , 因此可以

把上面差分格式化为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \begin{bmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{bmatrix} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0. \quad (6.11)$$

容易求出差分格式(6.11)的增长矩阵为

$$G(\tau, \omega) = I - \lambda(1 - \cos \omega h + i \sin \omega h) \begin{bmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{bmatrix}.$$

其特征方程是

$$\begin{aligned} & [1 - \lambda(1 - \cos \omega h + i \sin \omega h) - \mu]^2 \\ & - \lambda^2 c^2 (1 - \cos \omega h + i \sin \omega h)^2 = 0, \end{aligned}$$

因此特征值

$$\mu_{1,2} = 1 - \lambda(u \pm c)[(1 - \cos \omega h) + i \sin \omega h].$$

容易得出

$$|\mu_1|^2 = 1 - 4\lambda(u - c)[1 - \lambda(u - c)] \sin^2 \frac{\omega h}{2},$$

$$|\mu_2|^2 = 1 - 4\lambda(u + c)[1 - \lambda(u + c)] \sin^2 \frac{\omega h}{2}.$$

如果  $\lambda(u + c) \leq 1$ , 则有  $|\mu| \leq 1$ , 即满足 von Neumann 条件. 由于

矩阵  $\begin{bmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{bmatrix}$  有相异的特征值, 因此存在非奇异矩阵  $S$  使

$S^{-1} \begin{bmatrix} u & \rho \\ \frac{c^2}{\rho} & u \end{bmatrix} S = A$  是对角矩阵. 由此可知, 利用  $S$  也可以把增

长矩阵对角化. 利用第二章定理 3.5, 可知 von Neumann 条件是

稳定的充分必要条件. 上述证明是在  $u-c \geq 0$  的假定下得到的, 如果去掉这个假定, 我们同样可以得出. 若把差分格式(6.10)的系数看成与  $x_i, t_n, \rho_i^n$  和  $u_i^n$  无关, 则其稳定性条件是  $\lambda(|u|+c) \leq 1$ . 由此得出(6.10)的稳定性条件为

$$\lambda \leq \frac{1}{\max_i (|u_i^n| + c_i^n)}.$$

## § 7 特征线方法

特征线方法是求解双曲型方程和双曲型方程组的一个古老方法. 它与通常的差分方法不同, 特征线方法不是预先在求解区域内剖分好网格, 而是随时间的推进, 逐步地采用近似特征线来形成网格. 在计算中, 区域的离散和近似解的计算是交替进行的. 严格说来, 特征线方法不属于差分方法的范畴. 但它在计算流体运动等方面仍有用, 因此我们作简单的介绍.

考虑拟线性双曲型方程组的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = \varphi(x), \end{cases} \quad (7.1)$$

$$(7.2)$$

其中  $u = [u_1, \dots, u_p]^T$ ,  $\varphi = [\varphi_1, \dots, \varphi_p]^T$ ,  $A$  为  $p \times p$  矩阵, 它的每个元素是  $x, t$  和  $u$  的函数. 为了讨论简单起见, 假定问题(7.1)和(7.2)在所考虑的区域内有光滑解. 关于解的间断等问题可参见[14], [29].

首先把(7.1)写成特征形式

$$r_i: \frac{dx}{dt} = \lambda_i, \quad (7.3)$$

$$\sum_{k=1}^p l_k^{(n)} \left( \frac{du_k}{dt} \right)_{t_i} = 0. \quad (7.4)$$

我们仅对  $p = 2$  的情况进行讨论, 一般情形没有原则上的区别.

设  $u = [u, v]^T$ , 此时(7.3)成为

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = \lambda_1(x, t, u, v) & (\text{第一族特征线}), \\ \frac{dx}{dt} = \lambda_2(x, t, u, v) & (\text{第二族特征线}). \end{cases} \quad (7.5)$$

(7.4)可以写成

$$\begin{cases} \alpha du + \beta dv = 0 & (\text{沿第一族特征线}), \\ \gamma du + \delta dv = 0 & (\text{沿第二族特征线}), \end{cases} \quad (7.6)$$

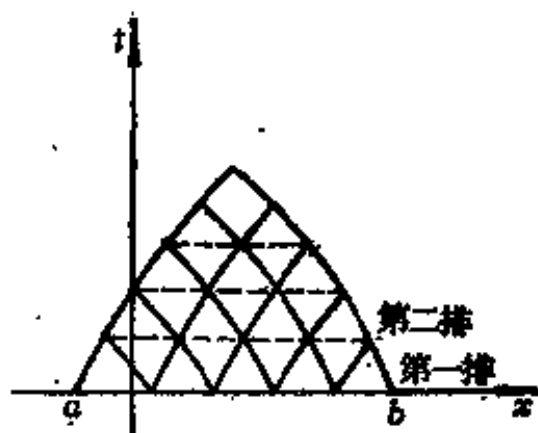
其中  $du$  和  $dv$  是  $u$  和  $v$  沿特征线的微分. 将  $x$  轴上区间  $[a, b]$  剖分为一系列小区间

$$[x_j, x_{j+1}], j = 1, 2, \dots, J,$$

且  $x_1 = a, x_{J+1} = b$ . 在  $x-t$  的上半平面中, 点集

$$\{(x_j, 0) | j = 1, 2, \dots, J+1\}$$

构成了第一排节点, 它们是初始线上节点; 第二排节点由第一排节点出发的两族特征线的交点所组成; 第三排节点由第二排节点出发的两族特征线的交点所组成; 如此等等. 图 3.9 表示了节点分布. 我们必须注意, 在实际求解中, 并不是用真实的特征线而是仅用近似特征线(折线)来确定节点.



• 图 3.9

具体计算步骤: (1) 节点坐标的计算, 用  $(x_j^n, t_j^n)$  表示第  $n$  排节点的坐标; (2) 计算函数  $u$  和  $v$  的近似值  $u_j^n$  和  $v_j^n$ ,

$$u_j^n \approx u(x_j^n, t_j^n), \quad v_j^n \approx v(x_j^n, t_j^n),$$

(3) 进行修正,提高计算精度。下面依次讨论。

假定已经确定第  $n$  排节点  $(x_j^n, t_j^n)$  以及相应的函数  $u$  和  $v$  的近似值,下一排节点  $(x_{j+1}^{n+1}, t_{j+1}^{n+1})$  由下面公式(第一次近似)确定,

$$\begin{cases} \frac{x_j^{n+1} - x_j^n}{t_j^{n+1} - t_j^n} = \lambda_{1,j}^n, \\ \frac{x_j^{n+1} - x_{j+1}^n}{t_j^{n+1} - t_{j+1}^n} = \lambda_{2,j+1}^n, \end{cases} \quad (7.7)$$

其中

$$\lambda_{1,j}^n = \lambda_1(x_j^n, t_j^n, u_j^n, v_j^n), \lambda_{2,j+1}^n = \lambda_2(x_{j+1}^n, t_{j+1}^n, u_{j+1}^n, v_{j+1}^n).$$

$u_j^n, v_j^n$  和  $u_{j+1}^n, v_{j+1}^n$  分别是  $u, v$  在  $(x_j^n, t_j^n)$  和  $(x_{j+1}^n, t_{j+1}^n)$  上的近似值。

由(7.7)解出

$$x_j^{n+1} = x_j^n - \frac{\lambda_{1,j}^n}{\lambda_{2,j+1}^n - \lambda_{1,j}^n} (x_{j+1}^n - x_j^n) + \frac{\lambda_{1,j}^n \lambda_{2,j+1}^n}{\lambda_{2,j+1}^n - \lambda_{1,j}^n} (t_{j+1}^n - t_j^n), \quad (7.8)$$

$$t_j^{n+1} = t_j^n - \frac{1}{\lambda_{2,j+1}^n - \lambda_{1,j}^n} (x_{j+1}^n - x_j^n) + \frac{\lambda_{2,j+1}^n}{\lambda_{2,j+1}^n - \lambda_{1,j}^n} (t_{j+1}^n - t_j^n).$$

利用(7.8)确定的第  $n+1$  排网格点来离散方程组(7.6)

$$\begin{cases} \alpha_j^n (u_{j+1}^{n+1} - u_j^n) + \beta_j^n (v_{j+1}^{n+1} - v_j^n) = 0, \\ \gamma_{j+1}^n (u_j^{n+1} - u_{j+1}^n) + \delta_{j+1}^n (v_j^{n+1} - v_{j+1}^n) = 0, \end{cases} \quad (7.9)$$

其中

$$\alpha_j^n = \alpha(x_j^n, t_j^n, u_j^n, v_j^n), \beta_j^n = \beta(x_j^n, t_j^n, u_j^n, v_j^n),$$

$$\gamma_{j+1}^n = \gamma(x_{j+1}^n, t_{j+1}^n, u_{j+1}^n, v_{j+1}^n), \delta_{j+1}^n = \delta(x_{j+1}^n, t_{j+1}^n, u_{j+1}^n, v_{j+1}^n).$$

解(7.9)得

$$\begin{cases} u_{j+1}^{n+1} = u_j^n - \frac{\beta_j^n \gamma_{j+1}^n}{\alpha_j^n \delta_{j+1}^n - \beta_j^n \gamma_{j+1}^n} (u_{j+1}^n - u_j^n) \\ \quad - \frac{\beta_j^n \delta_{j+1}^n}{\alpha_j^n \delta_{j+1}^n - \beta_j^n \gamma_{j+1}^n} (v_{j+1}^n - v_j^n), \\ v_{j+1}^{n+1} = v_j^n + \frac{\alpha_j^n \gamma_{j+1}^n}{\alpha_j^n \delta_{j+1}^n - \beta_j^n \gamma_{j+1}^n} (u_{j+1}^n - u_j^n) \\ \quad + \frac{\alpha_j^n \delta_{j+1}^n}{\alpha_j^n \delta_{j+1}^n - \beta_j^n \gamma_{j+1}^n} (v_{j+1}^n - v_j^n). \end{cases} \quad (7.10)$$

我们知道,用(7.7)来代替由第  $n$  排节点出发的特征线以及沿特征线采用 Euler 方法来求解(7.6)都是一阶精度的,为提高计算的精确性,需要修正第  $n+1$  排节点的位置以及相应的函数值,在(7.7)中的右边采用算术平均的技巧来代替原来的第  $n$  排节点上取值.

$$\begin{cases} \frac{\tilde{x}_j^{n+1} - x_j^n}{\tilde{t}_j^{n+1} - t_j^n} = \frac{1}{2}(\lambda_{1j}^n + \lambda_{1j}^{n+1}), \\ \frac{\tilde{x}_{j+1}^{n+1} - x_{j+1}^n}{\tilde{t}_{j+1}^{n+1} - t_{j+1}^n} = \frac{1}{2}(\lambda_{2,j+1}^n + \lambda_{2,j+1}^{n+1}), \end{cases} \quad (7.11)$$

其中

$$\lambda_{\alpha j}^{n+1} = \lambda_{\alpha}(x_j^{n+1}, t_j^{n+1}, u_j^{n+1}, v_j^{n+1}), \quad \alpha = 1, 2,$$

$x_j^{n+1}, t_j^{n+1}, u_j^{n+1}, v_j^{n+1}$  已由(7.8)和(7.10)计算出来. 在  $(\tilde{x}_j^{n+1}, \tilde{t}_j^{n+1})$  上的函数值由下式确定:

$$\begin{cases} \frac{\alpha_j^n + \alpha_j^{n+1}}{2}(\tilde{u}_j^{n+1} - u_j^n) + \frac{\beta_j^n + \beta_j^{n+1}}{2}(\tilde{v}_j^{n+1} - v_j^n) = 0, \\ \frac{\gamma_{j+1}^n + \gamma_{j+1}^{n+1}}{2}(\tilde{u}_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n) + \frac{\delta_{j+1}^n + \delta_{j+1}^{n+1}}{2}(\tilde{v}_{j+1}^{n+1} - v_{j+1}^n) = 0, \end{cases} \quad (7.12)$$

其中

$$\alpha_j^{n+1} = \alpha(\tilde{x}_j^{n+1}, \tilde{t}_j^{n+1}, u_j^{n+1}, v_j^{n+1}); \quad \beta_j^{n+1}, \gamma_j^{n+1}, \delta_j^{n+1} \text{ 意义相同,}$$

$$\alpha_j^n, \beta_j^n, \gamma_{j+1}^n, \delta_{j+1}^n \text{ 意义见(7.9)中的说明.}$$

由(7.11)和(7.12)计算出的  $\tilde{x}_j^{n+1}, \tilde{t}_j^{n+1}, \tilde{u}_j^{n+1}$  和  $\tilde{v}_j^{n+1}$  提高了精度,更接近于微分方程的精确解.

**例 7.1** 考虑气体的一维不定常等熵流动的方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (6.4)$$

我们知道两族特征线为

$$\begin{cases} \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\tau_1} = u + c, \\ \left. \frac{dx}{dt} \right|_{\tau_2} = u - c. \end{cases} \quad (7.13)$$

(6.4)的特征形式是

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\rho}{c} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial \rho}{\partial x} - \frac{\rho}{c} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0. \end{cases} \quad (6.5)$$

从而我们得

$$\begin{cases} du + c\rho^{-1}d\rho = 0 \quad (\text{沿特征线}\tau_1), \\ du - c\rho^{-1}d\rho = 0 \quad (\text{沿特征线}\tau_2). \end{cases} \quad (7.14)$$

有了(7.13)及(7.14)就容易用前面描述的方法在解的光滑区域内求解了. 详细叙述见[14].

## § 8 守恒律与弱解

### 8.1 守恒律

考虑非线性方程组

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{f}(\mathbf{u})}{\partial x} = 0, \quad (8.1)$$

其中向量  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_p]^T$  是  $x$  和  $t$  的函数,  $\mathbf{f}$  是  $x, t$  和  $\mathbf{u}$  的  $p$  维向量函数. 方程组 (8.1) 的形式称为守恒形式或散度形式. 可以写作守恒形式的微分方程 (组) 称为守恒律. 如果把  $\mathbf{f}(\mathbf{u})$  对  $\mathbf{u}$  的 Jacobi 矩阵记为  $A(\mathbf{u})$ , 即

$$A(\mathbf{u}) = \frac{\partial (f_1, \dots, f_p)}{\partial (u_1, \dots, u_p)},$$

那么(8.1)可以写作

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (8.2)$$

显然, 这是一个拟线性方程组. 但很多情况下, (8.1) 的形式更能反映物理量的守恒性质, 所以引起很大重视. 如果对于每个解  $u$ ,  $A(u)$  有  $p$  个实的并且互不相等的特征值  $\mu_1(u), \dots, \mu_p(u)$ , 那么称守恒律 (8.1) 是严格双曲型的. 于是我们看到, 严格双曲型的性质不但依赖于方程而且还依赖于其解.

把一阶拟线性方程 (6.6) 改写成守恒形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{1}{2} u^2 \right) = 0,$$

这是守恒律的简单例子, 但它反映了双曲型守恒律的基本特征. 流体力学方程组是守恒律的很典型的例子. 例如, 在 Lagrange 坐标中的无粘、无热传导气体的动力学方程组可以写成 (8.1) 的形式

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0 & (\text{质量守恒}), \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0 & (\text{动量守恒}), \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial (up)}{\partial x} = 0 & (\text{能量守恒}), \end{cases} \quad (8.3)$$

其中  $v$  是比容;  $v = \frac{1}{\rho}$ ,  $\rho$  是密度;  $u$  是速度;  $E$  是能量,

$$E = e + \frac{1}{2} u^2,$$

$e$  是内能. 压力  $p$  是  $E$  和  $v$  的给定的函数, 它依赖于所考虑的特定气体, 这个关系的表达式称作状态方程, 通常记为  $p = p(E, v)$ .

## 8.2 守恒律的弱解

我们在 §6 中曾经说过, 不论初始数据怎样光滑, 拟线性双曲型方程的解将出现间断. 为此我们来推广守恒律 (8.1) 的解的概念. 在  $t > 0$  的上半平面内考虑初值问题 (8.1) 和



$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (8.4)$$

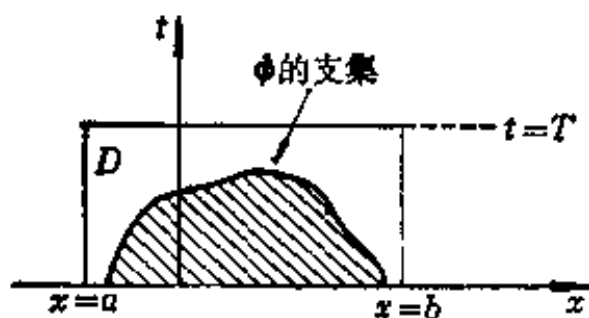


图 3.10

暂时我们假定(8.1)和(8.4)有古典解(满足微分方程的连续可微的解). 令  $\phi$  是在上半平面  $t \geq 0$  内的具有紧支集的一阶连续可微函数, 即  $\phi \in C_0^1$ , 不妨假定

$$(\text{supp}(\phi)) \cap (t \geq 0) \subseteq D,$$

其中  $D = \{(x, t) : a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq T\}$ . 我们选取在  $D$  的外面和在  $t=T$ ,  $x=a$  和  $x=b$  的三条边上  $\phi=0$  (见图 3.10). 用  $\phi$  来乘(8.1)的两边并对  $t \geq 0$  积分就得到

$$\begin{aligned} \int_{t \geq 0} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \phi dx dt &= \int_D \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \phi dx dt \\ &= \int_a^b \int_0^T \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \phi dx dt \\ &= 0. \end{aligned}$$

由分部积分法得

$$\begin{aligned} \int_a^b \int_0^T \frac{\partial u}{\partial t} \phi dx dt &= \int_a^b u \phi \Big|_{t=0}^{t=T} dx - \int_a^b \int_0^T u \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt \\ &= - \int_a^b u_0(x) \phi(x, 0) dx - \int_a^b \int_0^T u \frac{\partial \phi}{\partial t} dx dt, \end{aligned}$$

和

$$\int_0^T \int_a^b \frac{\partial f}{\partial x} \phi dx dt = \int_0^T f \phi \Big|_{x=a}^{x=b} dt - \int_0^T \int_a^b f \frac{\partial \phi}{\partial x} dx dt.$$

于是, 我们得到

$$\int_{t \geq 0} \left( u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{t=0} u_0 \phi dx = 0.$$

(8.5)

从上面推导我们可以看到,如果  $u$  是(8.1)和(8.4)的古典解,那么对所有  $\phi \in C_0^1$  有(8.5). 但是,如果  $u$  和  $u_0$  仅是有界可测的函数,那么(8.5)仍是有意义的. 于是我们可以引入初值问题(8.1)和(8.4)的下述意义的解.

**定义 8.1** 设  $u$  和  $u_0$  是有界可测函数,如果(8.5)对所有  $\phi \in C_0^1$  都成立,那么  $u$  称为初值问题(8.1)和(8.4)的弱解.

下面我们将说明,由定义 8.1 所确定的初值问题的弱解的概念确实是推广了古典解的概念. 设(8.5)对所有  $\phi \in C_0^1$  都成立,那么当  $u \in C^1$  时就可以推出  $u$  是一个古典解. 现在来验证这一事实. 如果  $\phi$  在  $t \geq 0$  内有支集,那么对(8.5)进行分部积分,对所有这样的  $\phi$  就有

$$\iint_{t \geq 0} \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \phi dx dt = 0.$$

所以我们有  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$ .

取  $\phi \in C_0^1$ , 用  $\phi$  乘方程  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0$  并在  $D$  上积分

$$\iint_D \left( \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} \right) \phi dx dt = 0.$$

用分部积分有

$$\iint_{t \geq 0} \left( u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt + \int_{t=0} u(x, 0) \phi(x, 0) dx = 0.$$

此式与(8.5)相比较得

$$\int_{t=0} [u_0(x) - u(x, 0)] \phi(x, 0) dx = 0,$$

由于  $u_0(x)$  是连续的且  $\phi$  是任意的,所以我们有  $u(x, 0) = u_0(x)$ .

弱解的概念推广了古典解的概念,那么自然要问,是否每个间断都允许? 事实上,(8.5)是在间断线上加了很强的限制. 下面来

推导这个限制.

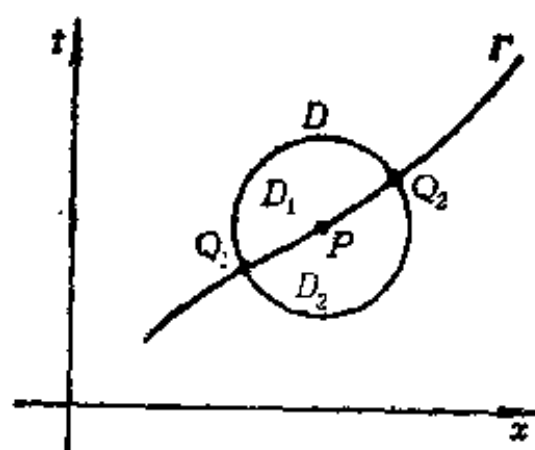


图 3.11

令  $\Gamma$  是一条光滑的曲线,  $u$  穿过它有一个跳跃间断, 即在  $\Gamma$  的两边有确定的极限. 稍离开  $\Gamma$ ,  $u$  是光滑的. 设  $P$  是  $\Gamma$  上任意一个点,  $D$  是中心在  $P$  的一个小圆. 我们假定, 在  $D$  内  $\Gamma$  用  $x = x(t)$  表示. 令  $D_1$  和  $D_2$  是

由  $\Gamma$  确定的  $D$  的两个部分 (见图 3.11). 令  $\phi \in C_0^1(D)$ , 那么从 (8.5) 得

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_D \left( u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \\ &= \iint_{D_1} \left( u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \\ &\quad + \iint_{D_2} \left( u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt. \end{aligned}$$

由于在  $D_1$  和  $D_2$  内  $u$  是光滑的, 不妨设  $u \in C^1$ , 那么利用 Green 公式得

$$\begin{aligned} &\iint_{D_i} \left( u \frac{\partial \phi}{\partial t} + f(u) \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dt \\ &= \iint_{D_i} \left[ \frac{\partial}{\partial t} (u\phi) + \frac{\partial}{\partial x} (f\phi) \right] dx dt \\ &= \int_{\partial D_i} \phi (-u dx + f dt) \quad (i=1, 2). \end{aligned}$$

在第一个等式推导中注意到  $u$  在  $D_i$  内满足微分方程 (8.1). 由于在  $\partial D$  上  $\phi = 0$ , 因此上述线积分仅沿  $\Gamma$  非零. 于是, 如果令  $u_i =$

$u(x(t)-0, t), u_r = u(x(t)+0, t)$ , 那么我们有

$$\begin{aligned}\int_{\partial D_1} \phi(-\dot{u}dx + fdt) &= \int_{Q_1}^{Q_2} \phi(-u_t dx + f(u_t) dt), \\ \int_{\partial D_2} \phi(-\dot{u}dx + fdt) &= - \int_{Q_1}^{Q_2} \phi(-u_r dx + f(u_r) dt).\end{aligned}$$

因此我们得出

$$0 = \int_{\Gamma} \phi(-[u]dx + [f(u)]dt),$$

其中  $[u] = u_l - u_r$ , 为穿过  $\Gamma$  的跳跃. 类似地,  $[f(u)] = f(u_l) - f(u_r)$ . 由于  $\phi$  是任意的, 所以我们得出结论, 在  $\Gamma$  的每个点上有

$$s[u] = [f(u)], \quad (8.6)$$

其中  $s = \frac{dx}{dt}$ , 我们称  $s$  为间断传播速度, 它是间断线斜率的倒数. 上面从守恒律的弱解定义(8.5)推导出了关系式(8.6), 即把在间断线两边的  $u$  的值与  $f(u)$  的值同间断传播速度联系起来. 一般称(8.6)为跳跃条件, 在气体动力学中称作 Rankine-Hugoniot 条件.

利用关系式(8.6)也可以把守恒律的弱解特征描写出来. 为参考起见, 我们再给出关于弱解的两个等价定义. 详细的讨论可看[29].

**定义 8.2** 称  $u$  是守恒律(8.1)的弱解, 如果在连续可微区域内  $u$  是古典解, 即满足微分方程(8.1), 而在  $u$  的间断线上满足跳跃条件(8.6).

**定义 8.3** 称  $u$  是守恒律(8.1)的弱解, 如果在对于  $t > 0$  的上半平面内与函数  $u$  的间断线只在有限个点相交的任意逐段光滑闭曲线  $C$  上, 有

$$\int_C u dx - f dt = 0. \quad (8.7)$$

### 8.3 熵条件

上面我们给出了弱解的定义及其特性,但是,这样定义的函数包含太多,导致了弱解的不唯一,有的问题甚至可以有无穷多个弱解.

1957年 Олейник 提出了所谓熵条件,并证明了单个守恒律 ( $p=1$ ) 满足熵条件的弱解是唯一的.

设  $u$  是定义在  $t \geq 0$  上半平面内的,除了在有限条光滑曲线上间断外是连续可微的函数(将这样的函数集合记为  $\mathcal{K}_1$ ). Олейник 的结论是: 设  $u$  是单个守恒律

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (8.8)$$

和初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (8.9)$$

的初值问题的弱解,如果在其间断线上满足

$$\frac{f(u_l) - f(v)}{u_l - v} \geq s \geq \frac{f(u_r) - f(v)}{u_r - v}, \text{ 对任意 } v \in I, \quad (8.10)$$

其中  $I = (\min\{u_r, u_l\}, \max\{u_r, u_l\})$ ,  $s = \frac{f(u_r) - f(u_l)}{u_r - u_l}$ , 那么这样的弱解在函数类  $\mathcal{K}_1$  中是唯一的.

不等式(8.10)称为熵条件,并称满足熵条件的弱解为物理解. 如果不等式(8.10)对一切  $v \in I$ , 不等号严格成立,那么这种间断称为激波;如果不等式(8.10)对一切  $v \in I$ , 等号恒成立,那么这种间断称为接触间断.

对于接触间断来说,当  $v$  在  $u_r$  和  $u_l$  之间时,可以得到

$$f(v) = s(v - u_r) + f(u_r),$$

这是一个线性函数. 于是当  $v$  在  $u_r$  和  $u_l$  之间时, 单个守恒律(8.8)是线性方程.

对于单个守恒律(8.8)也可以写作非守恒形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (8.11)$$

其中  $a(u) = f'(u)$ . 利用  $a(u)$  的表达式我们有

$$a(u_l) = f'(u_l) = \lim_{v \rightarrow u_l} \frac{f(u_l) - f(v)}{u_l - v},$$

$$a(u_r) = f'(u_r) = \lim_{v \rightarrow u_r} \frac{f(u_r) - f(v)}{u_r - v}.$$

于是利用熵条件(8.10)有

$$a(u_l) \geq s \geq a(u_r). \quad (8.12)$$

不等式(8.12)可以理解为间断线两侧的特征线都是走向间断线的.

关于一般守恒律的唯一性问题还未很好解决, 有关的论述可参看[26], [29].

#### 8.4 Riemann 问题

考虑单个守恒律(8.8)和初始条件由阶梯函数

$$u(x, 0) = u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0, \\ u_r, & x > 0 \end{cases} \quad (8.13)$$

给定的初值问题, 这样的问题称为 Riemann 问题.

我们仅对  $f'' > 0$  的情况进行讨论.

如果  $u$  是初值问题(8.8)和(8.13)的解, 那么对任意常数  $\lambda > 0$ , 由

$$u_\lambda(x, t) = u(\lambda x, \lambda t)$$

定义的函数  $u_\lambda$  也是初值问题(8.8)和(8.13)的解. 由于我们是求唯一解, 所以仅考虑依赖于  $\xi = \frac{x}{t}$  的解就可以了. 这种类型的解称为自型解.

Riemann 问题(8.8)和(8.13)的解可分三种情况进行讨论.

(a)  $u_l = u_r$ , 此时  $u = u_r = u_l$  是古典解.

(b)  $u_i > u_r$ , 由于  $f'' > 0$ , 所以  $a(u)$  单调增加, 因此有  $a(u_i) > a(u_r)$ . 此时解是联结  $u_i$  和  $u_r$  的速度为  $s$  的激波其表达式可以写为

$$u(x, t) = \begin{cases} u_i, & \text{当 } x < st, \\ u_r, & \text{当 } x > st. \end{cases}$$

激波图示见图 3.12.

(c)  $u_r > u_i$ , 此时不产生激波, 出现连续解, 称其为稀疏波. 由于  $f'' > 0$ , 我们有  $a(u_r) > a(u_i)$ , 方程  $\xi = a(u(\xi))$  有解  $u(\xi)$ , 其中  $a(u_r) > \xi > a(u_i)$ . 稀疏波的具体表达式是

$$u(x, t) = \begin{cases} u_i, & \text{当 } \frac{x}{t} < a(u_i), \\ a\left(\frac{x}{t}\right), & \text{当 } a(u_i) < \frac{x}{t} < a(u_r), \\ u_r, & \text{当 } \frac{x}{t} > a(u_r), \end{cases}$$

其中  $a\left(\frac{x}{t}\right)$  由  $a(a(\xi)) = \xi$  所确定. 稀疏波图示见图 3.13.

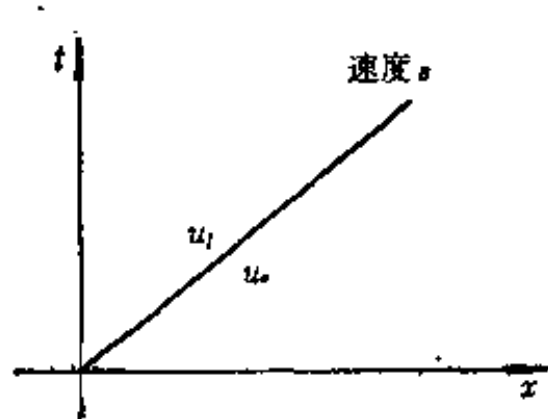


图 3.12

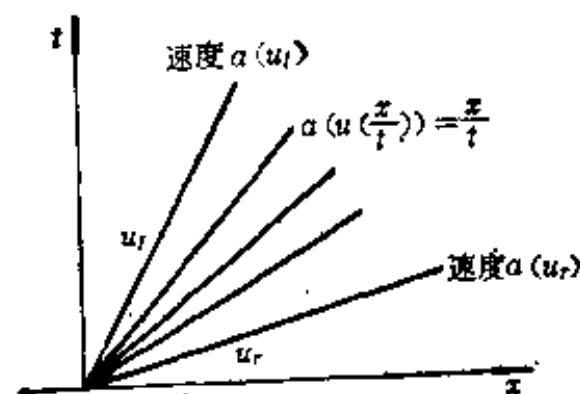


图 3.13

一般守恒律及气体动力学方程组的 Riemann 问题可参考 [26].

## § 9 守恒型差分格式

### 9.1 守恒型差分格式

前面讨论的关于线性问题的很多差分格式, 可以推广到守恒律上来. 比如逼近守恒律 (8.1) 的 Lax-Friedrichs 格式可以写作

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\lambda(f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)), \quad (9.1)$$

其中  $\lambda = \tau/h$  为网格比. 这是一个非线性差分方程组. 关于稳定性问题我们不作严格的讨论, 采用前面提到过的线性化稳定性分析方法来讨论 (9.1) 的稳定性. 首先把守恒律 (8.1) 改写为非守恒形式 (8.2), 再令  $A(u)$  与  $u$  无关. 由此先考虑常系数双曲型方程组的 Lax-Friedrichs 格式

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{1}{2}\lambda A(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)$$

的稳定性. 由 § 3 讨论知, 稳定性条件为  $\lambda\rho(A) \leq 1$ , 所以 (9.1) 的稳定性条件为

$$\lambda\rho(A(u_j^n)) \leq 1. \quad (9.2)$$

在实际计算中还需增加一些安全系数, 如可取

$$\lambda\rho(A(u_j^n)) \leq 1 - e, \quad (9.3)$$

其中  $e$  是一个正的小数. 从稳定性条件可以看出, 它不但依赖于网格点的位置 (如变系数线性方程的情况), 而且还依赖于问题的解  $u$ . 所以使用起来比较复杂, 一般可以采用试算的办法来确定稳定性的范围.

采用线性化稳定性分析方法讨论非线性差分格式的稳定性时, 如果得出的格式不稳定, 那么一般无需作进一步分析了.



下面我们将考虑由守恒律建立的差分格式的收敛性问题。1960年 Lax 和 Wendroff 证明了从守恒律出发建立的一类所谓守恒型差分格式的收敛性问题。首先我们引入逼近守恒律(8.1)的守恒型差分格式的概念。

**定义 9.1** 称差分格式

$$u_i^{n+1} = G(u_{i-l}^n, u_{i-l+1}^n, \dots, u_{i+l}^n) \quad (9.4)$$

是守恒型差分格式, 如果

$$\begin{aligned} & G(u_{i-l}^n, u_{i-l+1}^n, \dots, u_{i+l}^n) \\ &= u_i^n - \lambda (g_{i+\frac{1}{2}}^n - g_{i-\frac{1}{2}}^n), \end{aligned} \quad (9.5)$$

其中  $\lambda = \frac{\tau}{h}$ ,

$$g_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_{i-l+1}^n, u_{i-l+2}^n, \dots, u_{i+l}^n). \quad (9.6)$$

为了使守恒型差分格式(9.4)与守恒律(8.1)是相容的, 则  $g$  必须满足

$$g(\omega, \omega, \dots, \omega) = f(\omega). \quad (9.7)$$

2l 个自变量的向量函数  $g$ , 一般称做做值通量。相容性条件(9.7)也在一定意义下反映了数值通量  $g$  和物理通量  $f$  的相容性。

由守恒型差分格式的定义可以看出, 它是直接由守恒律得出来的, 即是守恒律的一个离散化。因此它与守恒律一样, 可以保持物理量的某种守恒性质。

前面我们讨论过的 Lax-Friedrichs 格式是一个相容的守恒型差分格式。事实上, 取  $l=1$ ,

$$\begin{aligned} g_{i+\frac{1}{2}}^n &= g(u_i^n, u_{i+1}^n) \\ &= \frac{1}{2} [f(u_i^n) + f(u_{i+1}^n)] - \frac{1}{2\lambda} (u_{i+1}^n - u_i^n), \end{aligned}$$

$$g(\omega, \omega) = f(\omega).$$

下面考虑单个守恒律

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(u) = 0 \quad (9.8)$$

的两个具体差分格式.

**例 9.1** 迎风差分格式.

对于单个守恒律(8.8), 假定  $a(u) = f'(u) \geq 0$ , 那么迎风格式取

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda [f(u_i^n) - f(u_{i-1}^n)]. \quad (9.9)$$

取  $l=1$ ,

$$g_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f(u_i^n).$$

相容性是显然的.

**例 9.2** E. O 格式

1981 年 Engquist 和 Osher 构造了一个很好的格式, 令

$$\begin{aligned} \chi(u) &= 1, \text{ 如果 } f'(u) > 0, \\ \chi(u) &= 0, \text{ 如果 } f'(u) < 0, \end{aligned}$$

并定义

$$\begin{aligned} f_+(u) &= \int_0^u \chi(s) f'(s) ds, \\ f_-(u) &= \int_0^u (1 - \chi(s)) f'(s) ds, \end{aligned}$$

那么 E. O 格式为

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda [\Delta_+ f_-(u_i^n) + \Delta_- f_+(u_i^n)], \quad (9.10)$$

其中  $\Delta_+ f_i = f_{i+1} - f_i$ ;  $\Delta_- f_i = f_i - f_{i-1}$ . 取  $l=1$ ,

$$g_{i+\frac{1}{2}}^n = g(u_i^n, u_{i+1}^n) = f_-(u_{i+1}^n) + f_+(u_i^n),$$

$$\begin{aligned} g(\omega, \omega) &= f_-(\omega) + f_+(\omega) \\ &= \int_0^\omega \chi(s) f'(s) ds + \int_0^\omega (1 - \chi(s)) f'(s) ds \end{aligned}$$

$$= \int_0^{\omega} f'(s) ds = f(\omega).$$

因此 E. O 格式是相容的守恒型差分格式.

关于守恒型差分格式的收敛性有下面的定理.

**定理 9.1** 设守恒型差分格式(9.4)和守恒律(8.1)相容, 如果  $h, \tau$  趋于零时, (9.4)的满足初始条件  $u_j^0 = u_0(x_j)$  的解几乎处处有界收敛到某个函数  $u$ , 那么  $u$  是初值问题(8.1)和(8.4)的一个弱解.

**证明** 根据守恒型差分格式的定义, 把(9.4)写成

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} = 0.$$

任取  $\phi \in C_0^1$ , 记  $\phi_j^n = \phi(jh, n\tau)$ , 将  $\phi_j^n$  乘上式并对所有的  $j$  和  $n$  求和, 则有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j^n \left[ \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{g_{j+\frac{1}{2}}^n - g_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} \right] h\tau = 0.$$

经过上下指标的变化, 上式可以写为

$$\begin{aligned} & \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\phi_j^{n-1} - \phi_j^n}{\tau} u_j^n h\tau - \sum_{j=-\infty}^{\infty} \phi_j^0 u_0(jh) h \\ & + \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{\phi_j^n - \phi_{j-1}^n}{h} g_{j+\frac{1}{2}}^n h\tau = 0. \end{aligned} \quad (9.11)$$

当  $h, \tau$  趋于 0 时, 由于满足初始条件的差分方程的解几乎处处有界收敛到  $u$ , 同时  $g_{j+\frac{1}{2}}^n = g(u_{j-l+1}^n, \dots, u_{j+l}^n)$  的值也趋于  $g(u, u, \dots, u)$ . 利用相容性, 我们知道这就是  $f(u)$  由此可知, (9.11) 趋于积分关系式

$$\int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial \phi}{\partial t} u + \frac{\partial \phi}{\partial x} f(u) \right] dx dt$$

$$+ \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, 0) u_0(x) dx = 0.$$

所以  $u$  是初值问题(8.1)和(8.4)的一个弱解.

利用这个定理可以知道, Lax-Friedrichs、迎风格式、E.O 格式都是收敛的.

## 9.2 高阶精度的守恒型差分格式

六十年代以来, 从守恒律出发建立了一系列高阶精度的守恒型差分格式. 这里所谓的高阶精度格式是一种显式格式, 而它的截断误差对  $\tau$  和  $h$  至少都是二阶的. 典型的例子就是 Lax-Wendroff 格式. 这个格式在线性问题中已进行了讨论, 但在守恒律中有些差别, 所以我们重新进行推导.

$$u(x, t + \tau) = u(x, t) + \tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\tau^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + O(\tau^3). \quad (9.12)$$

根据方程,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= -\frac{\partial f}{\partial x}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial f}{\partial x} \right) = -\frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial f}{\partial t} \right) \\ &= -\frac{\partial}{\partial x} \left( A(u) \frac{\partial u}{\partial t} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left( A(u) \frac{\partial f}{\partial x} \right) \end{aligned}$$

将上面二式代入(9.12), 并用中心差商逼近微商, 这样就得到逼近守恒律(8.1)的 Lax-Wendroff 格式

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} &= u_i^n - \frac{1}{2} \lambda (f_{i+1}^n - f_{i-1}^n) \\ &\quad + \frac{1}{2} \lambda^2 \left[ A_{i+\frac{1}{2}}^n (f_{i+1}^n - f_i^n) - A_{i-\frac{1}{2}}^n (f_i^n - f_{i-1}^n) \right] \end{aligned} \quad (9.13)$$

其中  $A_{j+\frac{1}{2}}^n = A\left(\frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2}\right)$ ,  $f_j^n = f(u_j^n)$ .

从差分格式的构造知, 这是二阶精度的差分格式. 如果令

$$g_{j+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(f_{j+1}^n + f_j^n) - \frac{1}{2}\lambda A_{j+\frac{1}{2}}^n(f_{j+1}^n - f_j^n),$$

则立即可知差分格式 (9.13) 是一个守恒型差分格式. 容易看出,

$$g(\omega, \omega) = f(\omega),$$

所以 (9.13) 也是相容的. 通过采用线性化稳定性分析方法可知, 其稳定性条件为  $\lambda \rho(A(u_j^n)) \leq 1$ .

在 Lax-Wendroff 格式中我们看到, 要计算 Jacobi 矩阵  $A$  以及矩阵和向量的乘积. 显然, 这是不方便的. 为此, 1962 年 Richtmyer 进行了修改. 他考虑了二步方法, 一般称为二步 Lax-Wendroff 格式

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_j^n) - \frac{1}{2}\lambda(f_{j+1}^n - f_j^n), \quad (9.14 a)$$

$$u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda\left(f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - f_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right), \quad (9.14 b)$$

其中  $f_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = f\left(u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right)$ . 这是一个守恒型差分格式, 并且与守恒律 (8.1) 是相容的. 这个格式的第一步 (9.14 a) 是一阶精度的 Lax-Friedrichs 格式, 它计算了在网格的半点上的临时值. 这个格式的第二步 (9.14 b) 是二阶精度的蛙跳格式, 计算了在整数网格点上的最终值. 整个格式是二阶精度的.

如果  $f(u)$  对  $u$  的 Jacobi 矩阵为常数矩阵, 那么把 (9.14 a) 代入 (9.14 b) 就得到常系数双曲型方程组的 Lax-Wendroff 格式 (3.5), 由此我们得到差分格式 (9.14 a), (9.14 b) 的稳定性条件是

$$\lambda \rho(A(u_i^n)) \leq 1.$$

我们应该注意, Lax-Wendroff 格式(9.13) 和 二步 Lax-Wendroff 格式并不相同, 只有当  $f(u) = Au$  时才等价. 实际上, 二步 Lax-Wendroff 格式是一个预测-校正格式, 这种方法在常微分方程数值求解中经常使用, 在抛物型方程的求解中也将碰见.

继 Richtmyer 的二步法之后, 出现了许多变形和推广, 它们一般都具有如下特点:

- (a) 显式守恒型;
- (b) 二步预测-校正;
- (c) 三点, 二层( $u_i^{n+1}$  依赖于  $n$  层上  $u$  的三个值);
- (d) 对时间和空间都是二阶精度的.

我们列出一般的格式, 记为  $S_\beta^\alpha$ ,

$$\tilde{u}_i^n = (1 - \beta)u_i^n + \beta u_{i+1}^n - \alpha \lambda (f_{i+1}^n - f_i^n), \quad (9.15 a)$$

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{1}{2} \lambda \frac{1}{\alpha} [(\alpha - \beta)f_{i+1}^n + (2\beta - 1)f_i^n + (1 - \alpha - \beta)f_{i-1}^n + \tilde{f}_i^n - \tilde{f}_{i-1}^n], \quad (9.15 b)$$

其中  $\tilde{f}_i^n = f(\tilde{u}_i^n)$ ,  $\alpha \neq 0$ . 取  $l=1$ ,

$$\begin{aligned} g_{i+\frac{1}{2}}^n &= g(u_i^n, u_{i+1}^n) \\ &= \frac{1}{2\alpha} [(\alpha - \beta)f(u_{i+1}^n) - (1 - \alpha - \beta)f(u_i^n)] \\ &\quad + \frac{1}{2\alpha} f\{\beta u_{i+1}^n + (1 - \beta)u_i^n - \alpha \lambda [f(u_{i+1}^n) - f(u_i^n)]\}, \\ g(\omega, \omega) &= f(\omega). \end{aligned}$$

由此推得(9.15 a), (9.15 b)是相容的守恒型差分格式. 特别当 Jacobi 矩阵为常数, 格式  $S_\beta^\alpha$  就化为 Lax-Wendroff 格式(3.5). 因此(9.15 a), (9.15 b)的稳定性条件为  $\lambda \rho(A(u)) \leq 1$ .

如果取  $\alpha = \beta = \frac{1}{2}$ , 那么预测一步是在网格中心计算的, 容易看出这就是 Richtmyer 的二步方法 (9.14 a), (9.14 b). 如果  $\alpha = 1, \beta = \frac{1}{2}$ , 那么我们就得到由 Rubin 和 Bursten (1967) 提出的二步法.

特别引起注意的是  $\alpha = 1$  和  $\beta = 0$  或  $\beta = 1$ . 先取  $\alpha = 1$  和  $\beta = 0$ , 我们得到

$$\tilde{u}_i^n = u_i^n - \lambda(f_{i+1}^n - f_i^n), \quad (9.16 a)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_i^n + \tilde{u}_i^n) - \frac{1}{2}\lambda(\tilde{f}_{i+1}^n - \tilde{f}_{i-1}^n). \quad (9.16 b)$$

这是交替使用了向前差分和向后差分. 取  $\alpha = 1$  和  $\beta = 1$ , 可以得到 (为清楚起见, 在写法上稍作改变)

$$\tilde{u}_i^n = u_i^n - \lambda(f_i^n - f_{i-1}^n), \quad (9.17 a)$$

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{2}(u_i^n + \tilde{u}_i^n) - \frac{1}{2}\lambda(\tilde{f}_{i+1}^n - \tilde{f}_i^n). \quad (9.17 b)$$

格式 (9.16 a), (9.16 b) 和 (9.17 a) (9.17 b) 是 1970 年 MacCormack 提出的, 一般称其为 MacCormack 格式. 这是在空气动力学的计算中广泛采用的格式.

### 9.3 单调差分格式及物理解的计算

在这一小节中我们仅对单个守恒律作些说明, 并不进行深入的讨论.

我们知道, 守恒型差分方程的解, 如果几乎处处有界收敛, 则收敛到守恒律的弱解. 但是我们已经注意到, 守恒律的弱解是不唯一的, 只有满足熵条件的弱解 (即物理解) 才是唯一的. 那么自然会产生这样的问题, 守恒型差分格式的解是否一定收敛到物理解呢? 实际计算已经表明, 很多高阶精度的守恒型差分格式可以计算出非物理解来.

为保证差分格式解的极限满足熵条件, 差分格式必须满足一

些附加的条件或对差分格式进行一定的修改, 首先我们把线性问题中关于单调差分格式的概念推广到单个守恒律上来.

**定义 9.2** 称守恒型差分格式

$$u_j^{n+1} = G(u_{j-l}^n, u_{j-l+1}^n, \dots, u_{j+1}^n)$$

是一个单调差分格式, 如果对于  $m = -l, -l+1, \dots, l$  有

$$\frac{\partial G}{\partial u_{j+m}^n} \geq 0.$$

著名的 Lax-Friedrichs 格式是单调差分格式, 因为此时

$$\begin{aligned} G(u_{j-1}^n, u_j^n, u_{j+1}^n) &= \frac{1}{2}(u_{j-1}^n + u_{j+1}^n) \\ &\quad - \frac{1}{2}\lambda[f(u_{j+1}^n) - f(u_{j-1}^n)], \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial u_{j-1}^n} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\lambda a(u_{j-1}^n), \\ \frac{\partial G}{\partial u_j^n} &= 0, \\ \frac{\partial G}{\partial u_{j+1}^n} &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\lambda a(u_{j+1}^n), \end{aligned}$$

其中  $a(u) = f'(u)$ . 如果满足条件 (C.F.L 条件)

$$\lambda, \max |\alpha(u_j^n)| \leq 1,$$

那么就有

$$\frac{\partial G}{\partial u_{j+m}^n} \geq 0, \quad m = -1, 0, 1.$$

所以 Lax-Friedrichs 格式是单调格式. 同样可证, E.O 格式也是单调差分格式.

1976 年 Harten, Hyman 和 Lax 证明了单个守恒律的单调守恒型差分格式的解, 如果几乎处处有界收敛, 那么极限函数是物理解. 这个结论是很重要的. 对于单个守恒律的单调差分格式同以前



线性情况一样,可以证明守恒型的单调差分格式是一阶精度的,因此,高阶精度的守恒型差分格式不是单调差分格式。对于非单调差分格式,可能计算出非物理解来。如 Lax-Wendroff 格式和 MacCormack 格式都可以计算出非物理解来。

我们注意到,在线性问题中定义的单调差分格式,实质上是保持单调性的差分格式,容易看出,在线性问题中两者是等价的。而对于非线性守恒律问题中的守恒型差分格式来说,两者是不等价的。保持单调性的差分格式并非都是单调差分格式。

我们也应注意到,很多非单调格式也可以计算出物理解来。例如,对于  $f$  是一个凸函数的情况, Majda 和 Osher (1979) 对 Lax-Wendroff 格式进行了修改,构造了如下格式:

$$\begin{aligned} u_i^{n+1} = & u_i^n - \frac{1}{2} \lambda \Delta_0 f(u_i^n) \\ & + \frac{1}{2} \lambda^2 \Delta_- \left[ \frac{\Delta_+ f(u_i^n)}{\Delta_+ u_i^n} \Delta_+ f(u_i^n) \right] + \lambda \Delta_- \\ & \left[ c \theta \left( \frac{|\Delta_+ u_i^n|}{h^\alpha} \right) \Delta_+ a(u_i^n) \Delta_+ u_i^n \right], \end{aligned} \quad (9.18)$$

其中  $\Delta_0 u_i = u_{i+1} - u_{i-1}$ ,  $\Delta_+ u_i = u_{i+1} - u_i$ ;  $c$  是一个适当的常数,  $\alpha > 0$ ,  $\theta$  是如下定义的函数:

$$\theta(s) = \begin{cases} 0 & \text{当 } |s| < 1, \\ 1 & \text{当 } |s| \geq 1. \end{cases}$$

显然,(9.18)在解的光滑区是二阶精度的。Majda 和 Osher 证明了当

$$\lambda, \max |a(u_i^n)| \leq 0.14 \quad (9.19)$$

时,(9.18)的解收敛到物理解。实际计算验证,(9.19)是太严了,一般可以取  $\lambda, \max |a(u_i^n)| \leq e_0$ ,  $e_0$  接近于 1。

#### 9.4 Годунов 格式, Glimm 格式和 Roe 格式

Годунов 方法是五十年代 Годунов 为求解气体动力学方程组而提出的数值方法,在实际计算中取得良好的效果。可能由于要不断地求解 Riemann 问题而显得比较麻烦,因而应用不很普遍。但近来已受到了极大的重视,特别是在理论研究中,这是一个基础性的方法。

我们讨论单个守恒律

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0 \quad (8.8)$$

的 Годунов 方法。假定在  $t=t_n$  这个时间层上  $u_j^n (j=0, \pm 1, \dots)$  已经求出,定义

$$v^n(x) = u_j^n, \quad x \in I_{j-\frac{1}{2}} = (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}).$$

显然,  $v^n$  是一个阶梯函数。令

$$u(x, t_n) = v^n(x) \quad (9.20)$$

那么(8.8)和(9.20)构成了一个初值问题。为了把解从  $t_n$  推进到  $t_{n+1}$ , 首先就求解这个初值问题。在每个区间  $[x_j, x_{j+1}]$  上, 这个初值问题定义了一个(局部)Riemann 问题。因此初值问题(8.8)和(9.20)定义了一系列的(局部)Riemann 问题。我们在 § 8 中讨论了 Riemann 问题(8.8)和(8.13), 其解仅依赖于  $x/t, u_l$  和  $u_r$ , 因此可以把解  $u$  以表达式

$$u(x, t) = R(x/t; u_l, u_r) \quad (9.21)$$

来表示。如果

$$\max_j s_{j+\frac{1}{2}} \lambda \leq \frac{1}{2}, \quad (9.22)$$

其中  $s_{j+\frac{1}{2}}$  为间断传播的速度, 那么每个(局部)Riemann 问题的解是不相交的, 利用(9.21)我们立即得到初值问题(8.8)和(9.20)的解为

$$u_n(x, t) = R\left(\frac{x - x_{i+\frac{1}{2}}}{t - t_n}; u_i^n, u_{i+1}^n\right), x \in I_i, \\ t_n \leq t \leq t_{n+1} \quad (9.23)$$

其中  $I_i = [x_i, x_{i+1}]$ . 为得到  $t_{n+1}$  时刻的  $u_i^{n+1}$  ( $i=0, \pm 1, \dots$ ), Годунов 的方法是

$$u_i^{n+1} = \frac{1}{h} \int_{x_i - \frac{1}{2}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_n(x, t_n + \tau) dx. \quad (9.24)$$

由于(9.23)定义的  $u_n$  是初值问题(8.8)和(9.20)的解, 所以满足积分关系式(8.7). 在  $(x_i - \frac{1}{2}, x_{i+\frac{1}{2}}) \times (t_n, t_{n+1})$  上积分有

$$\int_{x_i - \frac{1}{2}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_n(x, t_n) dx - \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u_n(x_{i+\frac{1}{2}}, t)] dt \\ - \int_{x_i - \frac{1}{2}}^{x_{i+\frac{1}{2}}} u_n(x, t_{n+1}) dx + \int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u_n(x_i - \frac{1}{2}, t)] dt = 0. \quad (9.25)$$

注意到,

$$u_n(x_{i+\frac{1}{2}}, t) = R(0; u_i^n, u_{i+1}^n),$$

$$u_n(x_i - \frac{1}{2}, t) = R(0; u_{i-1}^n, u_i^n)$$

是不依赖于  $t$  的, 所以有

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u_n(x_{i+\frac{1}{2}}, t)] dt = f[R(0; u_i^n, u_{i+1}^n)] \tau,$$

$$\int_{t_n}^{t_{n+1}} f[u_n(x_i - \frac{1}{2}, t)] dt = f[R(0; u_{i-1}^n, u_i^n)] \tau.$$

由此, 由(9.25)得

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(f_{i+\frac{1}{2}}^n - f_{i-\frac{1}{2}}^n), \quad (9.26)$$

其中  $f_{i+\frac{1}{2}}^n = f(u_{i+\frac{1}{2}}^n)$ ,  $u_{i+\frac{1}{2}}^n = R(0; u_i^n, u_{i+1}^n)$ . 差分格式(9.26)

称为 Годунов 格式. Годунов 格式可以看成是根据积分关系式来建立的, 关键是要求出  $R(0; u_i^n, u_{i+1}^n)$ ,  $R(0; u_{i-1}^n, u_i^n)$ .

Glimm 格式是 1965 年为证明非线性双曲型方程组弱解的存在性而引入的格式, 1976 年 Chorin 发展成用于实际计算的格式 (也称随机选取法). Glimm 方法和 Годунов 方法一样, 都要解 Riemann 问题. 所不同的是, Годунов 方法采用平均方法来得到  $u_j^{n+1}$  (用 (9.24)), 而 Glimm 方法则采用随机抽样办法来得到  $u_j^{n+1}$ . 相应于 (9.24) 有

$$u_j^{n+1} = u_n((j + \xi_n)h, t_n + \tau), \quad (9.27)$$

其中  $\xi_n$  是在区间  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  内的均匀分布的随机变量. 利用 (9.23) 有

$$u_j^{n+1} = \begin{cases} R\left(\left(\xi_n - \frac{1}{2}\right)h, u_{j-1}^n, u_j^n\right), & \text{当 } \xi_n < 0, \\ R\left(\left(\xi_n + \frac{1}{2}\right)h, u_j^n, u_{j+1}^n\right), & \text{当 } \xi_n > 0. \end{cases}$$

注意,  $\xi_n$  为每个时间步选取一个值, 即对这个时间步内的不同  $j$  同取  $\xi_n$ .

Glimm 方法使解由  $t_n$  推进到  $t_n + \tau = t_{n+1}$  是由二步来完成的.

设  $u_j^n$  和  $u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$  是  $u(x_j, t_n)$  和  $u(x_{j+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}})$  的近似值, 并设  $u_j^n$  已知

(已经计算出或初始给定). 第一步先求  $u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}$ .

令

$$v^n(x) = u_j^n, \quad x \in (x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}). \quad (9.20)$$

在 Годунов 方法叙述中已知 (8.8) 和 (9.20) 的解为

$$u_n(x, t_{n+\frac{1}{2}}) = R\left(\frac{x - x_{j+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}}; u_j^n, u_{j+1}^n\right), x \in (x_j, x_{j+1}).$$

根据(9.27)得

$$u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = u_n\left(\left(j + \frac{1}{2} + \xi_n\right)h, t_n + \frac{\tau}{2}\right). \quad (9.28)$$

第二步是求  $u_j^{n+1}$ , 即  $u(x_j, t_{n+1})$  的近似值. 令

$$\bar{v}^{n+\frac{1}{2}}(x) = u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, x_j < x < x_{j+1},$$

取

$$u(x, t_{n+\frac{1}{2}}) = \bar{v}^{n+\frac{1}{2}}(x) \quad (9.29)$$

现在求解初值问题(8.8)和(9.29), 这个初值问题也是一系列(局部)Riemann 问题所构成的. 仿前面讨论, 其解为

$$u_n(x, t_n + \tau) = R\left(\frac{x - x_j}{\tau/2}; u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right).$$

由此得

$$u_j^{n+1} = R\left(\frac{\xi_n h}{\tau/2}; u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}\right). \quad (9.30)$$

为了使每个(局部)Riemann问题的解不相交, 我们仍要求满足 C.F.L 条件(9.22).

在 Годунов 方法和 Glimm 方法中都要求解真实的 Riemann 问题, 这是很费时间的, 而且很多守恒律的 Riemann 问题也不可能解析地求解. 因此近似地求解 Riemann 问题是十分重要的. Roe 方法为此而建立. Roe 方法不是求解 Riemann 问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

其中

$$u_0(x) = \begin{cases} u_l, & x < 0, \\ u_r, & x > 0, \end{cases}$$

而是求解相应的局部线性化问题。即是用局部线性化方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(u_l, u_r) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (9.31)$$

来代替单个守恒律, 其中  $a(u_l, u_r)$  满足

$$f(u_r) - f(u_l) = a(u_l, u_r)(u_r - u_l).$$

线性化 Riemann 问题的解可以表示为

$$r\left(\frac{x}{t}; u_l, u_r\right) = \begin{cases} u_l, & \frac{x}{t} < s, \\ u_r, & \frac{x}{t} > s, \end{cases} \quad (9.32)$$

其中  $s$  为间断传播速度, 注意到  $s = a(u_l, u_r)$ 。我们在(9.31)中用  $a(u_l, u_r)$  而不写  $s$ , 仅为了推广到一般守恒律, 此时  $a$  将被相应的 Jacobi 矩阵所代替。(9.32)给出了非线性 Riemann 问题的近似解。

当然, Roe 方法很容易, 但是计算中会出现非物理解, 经修改后的 Roe 方法将保证计算出物理解来, 详细讨论可见[27]。

## § 10 气体动力学方程组

气体动力学方程组是拟线性方程组的典型例子。我们知道, 拟线性方程组的特点是, 不论初始数据多么光滑, 也可能在以后的时间内自发地形成解的间断。因此拟线性方程组的计算方法都要

考虑到这个事实，当然气体动力学方程组的计算也是如此。前面讨论过的关于拟线性方程组的迎风格式和关于守恒律的守恒型差分格式都可以用来计算气体动力学方程组。由于气体动力学方程组的计算实用意义很大，因此几十年来一直受到特别的重视。各种各样的方法相继出现，我们仅讨论关于计算的处理和程序的编制较为方便的、称之为激波捕捉法的一类方法。这类方法的基本思想是不论气体动力学方程组（或一般拟线性双曲型方程组）的解有无间断，不加区别地按统一的差分格式进行计算。此时，间断是作为解的一部分进行计算，解的间断处是被表示为具有一定过渡层的连续区。这样整个解就是一个连续的解。但基本上能反映出间断的特性。当然这类方法也有缺点，主要是有些格式把过渡区拉得过宽，有些格式在间断的前后会产生不应有的振荡。此外有些格式还会计算出非物理解来。

### 10.1 气体动力学方程组

在 Lagrange 坐标系中的气体动力学方程组可以写为

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + p \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (10.1)$$

其中  $v$  为比容， $u$  为速度， $p$  为压力， $e$  为内能。压力  $p$  是  $e$  和  $v$  的一个给定的函数，它依赖于所考虑的气体；这个关系称为状态方程。给出状态方程之后，方程组(10.1)是封闭的。

如果用  $u$  乘(10.1)的第二个方程并把得到的结果加到第三个方程上去，这样就得到了(10.1)的守恒型方程组

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} v \\ u \\ E \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} -u \\ p \\ up \end{bmatrix} = 0, \quad (10.2)$$

其中  $E$  为总能量。这就是已讨论过的(8.3)。

在 Euler 坐标系中气体动力学方程组的守恒形式为

$$\frac{\partial \mathbf{W}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} f(\mathbf{W}) = 0, \quad (10.3)$$

其中

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix}, \quad f(\mathbf{W}) = \begin{bmatrix} 0 \\ p \\ up \end{bmatrix} + u \mathbf{W},$$

$\rho, u, p$  和  $E$  分别为密度、速度、压力和总能。  $m = \rho u$  为动量，状态方程取  $p = (\gamma - 1) \left( E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right), \gamma > 1$ 。

## 10.2 von Neumann-Richtmyer 方法

我们知道，理想气体（忽略粘性和热传导）运动可以产生激波。但如果考虑了粘性效应，那么激波就有一个过渡层，使得所有物理量都是连续的。1950年 von Neumann 和 Richtmyer 发表的文章中，他们正是基于物理上的考虑，提出了“人工粘性”差分方法。他们在气体动力学方程组中引进了人工粘性项  $q$ ，在此之后，间断就被一个薄的过渡层来代替，从而使得气体动力学方程组的解处处都是连续的。

von Neumann 和 Richtmyer 最初是在 Lagrange 坐标系中的非守恒形式方程组(10.1)上加上人工粘性  $q$  的。此时(10.1)改写为

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (p + q) = 0, \\ \frac{\partial e}{\partial t} + (p + q) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \end{cases} \quad (10.4)$$

人工粘性

$$q = \frac{l^2}{v} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 \mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (10.5)$$



其中

$$\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 1, \text{ 如果 } \frac{\partial u}{\partial x} \leq 0,$$

$$\mu \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) = 0, \text{ 如果 } \frac{\partial u}{\partial x} > 0,$$

$l$  是一个具有长度量纲的正的常数.

对于加了人工粘性的方程组(10.4), 可以采用各种差分方法来逼近, 作为例子我们仅列出一个差分格式.

$$\begin{cases} \frac{v_j^{n+1} - v_j^n}{\tau} - \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} = 0, \\ \frac{u_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n}{\tau} + \frac{p_{j+1}^n - p_j^n + q_{j+1}^n - q_j^n}{h} = 0, \\ \frac{e_{j+1}^{n+1} - e_j^n}{\tau} + (p_j^n + q_j^n) \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} = 0, \end{cases} \quad (10.6)$$

其中

$$q_j^n = \begin{cases} \frac{l^2}{v_j^n} \left( \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n}{h} \right)^2, & \text{当 } u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n \leq 0, \\ 0, & \text{当 } u_{j+\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^n > 0. \end{cases}$$

人工粘性项  $q$  同样可以加到 Euler 坐标系的方程组中, 对于守恒形式的方程组(10.3)加了  $q$  之后可以写作

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) = 0, \\ \frac{\partial m}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (m u + p + q) = 0, \\ \frac{\partial E}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (E u + (p + q) u) = 0. \end{cases} \quad (10.7)$$

对于方程组(10.7)可以采用如下差分格式

$$\begin{cases} \rho_i^{n+1} = \rho_i^n - \lambda \left[ \langle \rho \rangle_{i+\frac{1}{2}}^n u_{i+\frac{1}{2}}^n - \langle \rho \rangle_{i-\frac{1}{2}}^n u_{i-\frac{1}{2}}^n \right], \\ m_i^{n+1} = m_i^n - \lambda \left[ \langle m \rangle_{i+\frac{1}{2}}^n u_{i+\frac{1}{2}}^n - \langle m \rangle_{i-\frac{1}{2}}^n u_{i-\frac{1}{2}}^n \right. \\ \quad \left. - (p+q)_{i+\frac{1}{2}}^n - (p+q)_{i-\frac{1}{2}}^n \right], \\ E_i^{n+1} = E_i^n - \lambda \left[ E_{i+\frac{1}{2}}^n u_{i+\frac{1}{2}}^n - E_{i-\frac{1}{2}}^n u_{i-\frac{1}{2}}^n \right. \\ \quad \left. + (p+q)_{i+\frac{1}{2}}^n u_{i+\frac{1}{2}}^n - (p+q)_{i-\frac{1}{2}}^n u_{i-\frac{1}{2}}^n \right], \end{cases} \quad (10.8)$$

其中  $\lambda = \tau/h$ , 在此格式中下标在半整数点上的量为

$$u_{i+\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(u_i^n + u_{i+1}^n), \quad \langle Q \rangle_{i+\frac{1}{2}}^n = \begin{cases} Q_i^n, & \text{当 } u_{i+\frac{1}{2}}^n \geq 0, \\ Q_{i+1}^n, & \text{当 } u_{i+\frac{1}{2}}^n < 0. \end{cases}$$

在(10.8)中的第一式和第二式所采用的方法称为**贡献网格法**。

最后我们必须说明一下采用人工粘性而不采用真实粘性的道理。如果采用真实粘性,那么算出来的激波只有几个平均自由程。要计算出这样薄的激波层,采用通常的网格无法计算出来,而采用非常精细的网格,将受到各种条件的制约,不易做到。利用人工粘性方法进行计算时,目的是正确地求出激波过渡区之外的无粘流动和激波的位置与速度,而不是去得到激波过渡的细节。

### 10.3 Courant-Isaacson-Rees 格式

1952年 Courant, Isaacson 和 Rees 对化成特征型的拟线性双曲型方程组构造的差分格式(见 §6),对气体动力学方程组是很适用的。我们以 Euler 坐标系中的方程组(10.3)来讨论。在实践上往往改取  $\rho, u, p$  为独立因变量,经简化得

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A(\mathbf{u}) \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} = 0, \quad (10.9)$$

其中

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \rho \\ u \\ p \end{bmatrix}, \quad A(\mathbf{u}) = \begin{bmatrix} u & \rho & 0 \\ 0 & u & \frac{1}{\rho} \\ 0 & \rho c^2 & u \end{bmatrix}, \quad c = \sqrt{\gamma p / \rho},$$

$c$  是局部声速、容易计算出  $A$  的特征值为  $\lambda = u - c, u, u + c$ 。相应的左特征向量是

$$L^{(1)} = [0, -\rho c, 1], L^{(2)} = [-c^2, 0, 1], L^{(3)} = [0, \rho c, 1].$$

由此得到(10.9)的特征型

$$\begin{cases} -\rho c \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial p}{\partial t} + (u - c) \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ -c^2 \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} \right] + \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \\ \rho c \left[ \frac{\partial u}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial p}{\partial t} + (u + c) \frac{\partial p}{\partial x} = 0. \end{cases} \quad (10.10)$$

由特征型(10.10)出发, Courant-Isaacson-Rees 格式为

$$\begin{cases} -\rho_i^n c_i^n \left[ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + (u_i^n - c_i^n) \frac{1}{h} \Delta_1 u_i^n \right] + \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\tau} \\ \quad + (u_i^n - c_i^n) \frac{1}{h} \Delta_1 p_i^n = 0, \\ -(c_i^n)^2 \left[ \frac{\rho_i^{n+1} - \rho_i^n}{\tau} + u_i^n \frac{1}{h} \Delta_2 \rho_i^n \right] + \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\tau} + u_i^n \frac{1}{h} \Delta_2 p_i^n = 0, \\ \rho_i^n c_i^n \left[ \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + (u_i^n + c_i^n) \frac{1}{h} \Delta_3 u_i^n \right] + \frac{p_i^{n+1} - p_i^n}{\tau} \\ \quad + (u_i^n + c_i^n) \frac{1}{h} \Delta_3 p_i^n = 0, \end{cases} \quad (10.11)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_1 f_i &= \begin{cases} f_i - f_{i-1}, & \text{当 } u_i^n - c_i^n \geq 0, \\ f_{i+1} - f_i, & \text{当 } u_i^n - c_i^n < 0; \end{cases} \\ \Delta_2 f_i &= \begin{cases} f_i - f_{i-1}, & \text{当 } u_i^n \geq 0, \\ f_{i+1} - f_i, & \text{当 } u_i^n < 0; \end{cases} \\ \Delta_3 f_i &= \begin{cases} f_i - f_{i-1}, & \text{当 } u_i^n + c_i^n \geq 0, \\ f_{i+1} - f_i, & \text{当 } u_i^n + c_i^n < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

可以看到, 在 Courant-Isaacson-Rees 格式中视特征值的正负来

确定采用后差还是采用前差。一般也称为迎风格式。

#### 10.4 Lax-Friedrichs 格式和格式粘性

von Neumann-Richtmyer 人工粘性方法是在偏微分方程组中加入了一个人工粘性项来使解的间断具有一个连续的过渡。考虑对流方程的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & |x| < \infty, t > 0, \end{cases} \quad (10.12)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad |x| < \infty, \quad (10.13)$$

其中

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0, \\ 0.4, & x < 0. \end{cases}$$

显然,初值问题(10.12), (10.13)的解是间断的,人工粘性项的引入相当于把(10.12)右端加上一项,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = \epsilon \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (10.14)$$

这是一个抛物型方程,初值问题(10.14)和(10.13)的解是连续的。当  $\epsilon$  很小时,问题(10.14)和(10.13)的解基本上能反映出问题(10.12)和(10.13)的解的特性 (见图 3.14)。

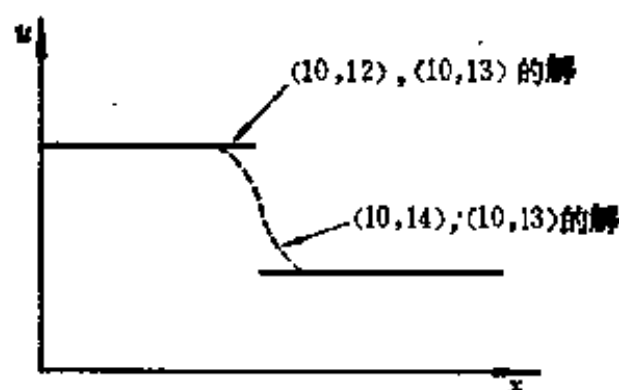


图 3.14

Lax-Friedrichs 格式可以计算气体动力学方程组,即使解发生间断时仍能顺利地计算,其实质就是格式本身带有类似于人工粘性这样的项,因此可以使间断有一个连续的过渡,我们仍利用

对流方程(10.12)来考察. Lax-Friedrichs 格式为

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = 0.$$

可以把上式改写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = -\frac{h}{2\lambda} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2},$$

其中  $\lambda = \tau/h$ . 上式右边项可以看作  $\varepsilon(h) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  的差分离散, 此项称作格式粘性或数值粘性. 虽然当  $h \rightarrow 0$  时有  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$ , 但是在数值计算中  $h \neq 0$ , 因此这一项总是起作用的. 从而 Lax-Friedrichs 格式可以和 von Neumann-Richtmyer 方法一样用于计算间断解.

考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = 0, & (10.15) \\ u(x, 0) = u_0(x), & (10.16) \end{cases}$$

其中

$$u_0(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x < 0, \\ 0, & \text{当 } x > 0. \end{cases}$$

初值问题(10.15)和(10.16)的解析解  $u$  表达式为

$$u(x, t) = \begin{cases} 1, & \text{当 } \frac{x}{t} < \frac{1}{2}, \\ 0, & \text{当 } \frac{x}{t} > \frac{1}{2}. \end{cases}$$

利用 Lax-Friedrichs 格式

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) - \frac{\lambda}{4} [(u_{j+1}^n)^2 - (u_{j-1}^n)^2]$$

进行计算,取  $\lambda=1.0, n=44$ . 计算结果见图3.15.

我们可以看出,计算得到的解比较好地与准确解相符合. 但也注意到,对应于解的间断处,连续的过渡区比较大.

1954年 Lax 本人利用 Lax-Friedrichs 格式计算了方程组(10.3)和初值为

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= \begin{cases} 2, & \text{当 } x < 0, \\ 0, & \text{当 } x > 0; \end{cases} \\ p(x, 0) &= \begin{cases} 50, & \text{当 } x < 0, \\ 0, & \text{当 } x > 0; \end{cases} \\ \rho(x, 0) &= \begin{cases} 50, & \text{当 } x < 0, \\ 10, & \text{当 } x > 0 \end{cases} \end{aligned}$$

的初值问题. 取  $\gamma=1.5$ , 计算取  $\lambda=0.25, n=99$ . 结果见图3.16.

由结果看出,计算解基本上与准确解相符合,但是也把间断的过渡区拉得过宽. 在具有间断的解的计算中,把间断的过渡区拉得过宽是一阶精度格式的一个特点,也是一个缺点.

上面提到了格式粘性的作用,事实上,迎风格式可以用来计算具有间断的解也是同样的道理. 还是以对流方程(10.12)为例说明这个问题. 逼近(10.12)的迎风格式是

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = 0,$$

改变其形式

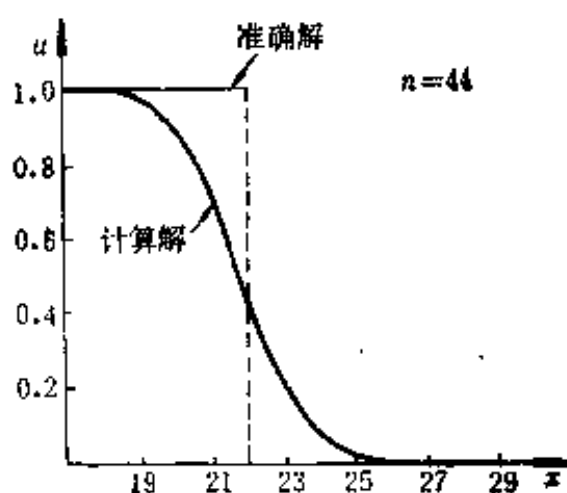


图 3.15

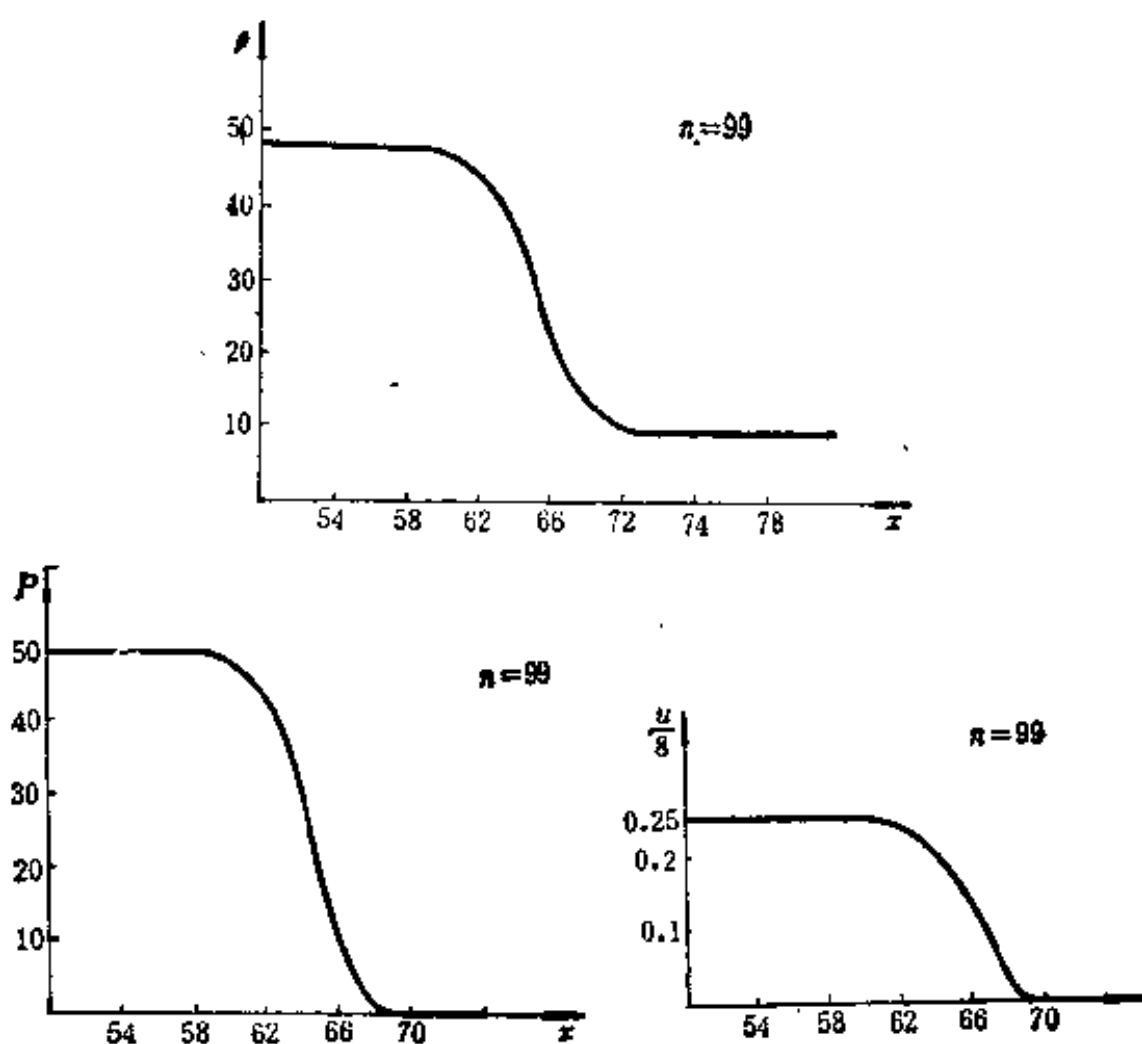


图 3.16

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \frac{h}{2} \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}.$$

由此可见，与 Lax-Friedrichs 格式一样，把右端项看作  $\varepsilon_1(h) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  的差分离散，此项也是格式粘性项。

### 10.5 Lax-Wendroff 格式及其二步方法

Lax-Wendroff 格式是一个二阶精度的格式，因此应用到气体动力学方程组的计算是很可取的，但计算中也发现一些不足。为考察这些，我们用 Lax-Wendroff 格式来计算双曲型方程的初值问题(10.15)和(10.16)。首先取网格比  $\lambda = 0.5$ ,  $n = 88$ ，计算结果见图 3.17。可以看出，计算解和准确解符合较好，间断的过渡区

比较小,但明显地看到,间断后面有较大的振荡。如果改变网格比,取  $\lambda=1.0$ ,  $n=44$ ,其结果也在图 3.17 中示出,可以看出,振荡稍有减小,但仍明显地看到这种振荡的存在。

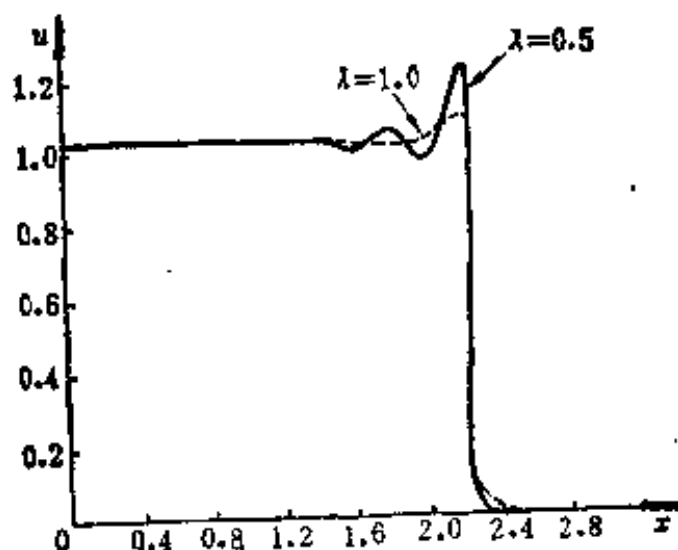


图 3.17

间断附近有振荡,这是不符合实际情况的。但这种现象是很多二阶精度格式所共有的。为消去这种不应有的振荡引起了极大的重视。

用二步方法计算时,通常采用 Richtmyer 格式和 Mac Cormack 格式,它们便于使用且保持二阶精度。要注意的是,在间断附近仍出现振荡。

### 10.6 自动调节的混合格式

由前面讨论知道,利用一阶精度的格式(如 Lax-Friedrichs 格式)来计算具有间断的解,在间断处把过渡区拉得很宽,但间断附近无振荡,在解的光滑区是一阶精度,即精度不高。利用二阶精度格式来计算时,在光滑区精度高,间断的过渡区不宽,但间断附近有振荡。自动调节的混合格式,是吸取一阶精度格式在间断附近无振荡及二阶精度格式在解的光滑区有较高精度这二个优点而构造的。从 1972 年 Harten 和 Zwas 引入,至今还是受欢迎的方法。

自动调节的混合格式是在守恒型差分格式上进行构造的。令



$L_1$ 是没有振荡的一阶精度的格式,  $L_2$ 是二阶精度的格式, 并写成(9.5)的形式,

$$(L_1 u)_j = u_j - \lambda (h_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} - h_{j-\frac{1}{2}}^{(1)}), \quad (10.17)$$

$$(L_2 u)_j = u_j - \lambda (h_{j+\frac{1}{2}}^{(2)} - h_{j-\frac{1}{2}}^{(2)}), \quad (10.18)$$

自动调节的混合格式如下:

$$(Lu)_j = u_j - \lambda (h_{j+\frac{1}{2}} - h_{j-\frac{1}{2}}), \quad (10.19)$$

其中

$$h_{j-\frac{1}{2}} = \theta_{j+\frac{1}{2}} h_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} + (1 - \theta_{j+\frac{1}{2}}) h_{j+\frac{1}{2}}^{(2)},$$

$\theta$  是一个标量函数(称其为开关),  $0 \leq \theta \leq 1$ , 在间断处使自动开关  $\theta \approx 1$ , 而在光滑区域  $\theta \approx 0$ . 由此可知, 在间断处混合格式基本上是无振荡的一阶精度的格式, 在解的光滑区域, 混合格式取为精度较高的二阶精度格式. 可以看出, 混合格式(10.19)是一个守恒型差分格式.

可以把(10.19)改写为

$$(Lu)_j = (L_2 u)_j - \lambda [\theta_{j+\frac{1}{2}} (h_{j+\frac{1}{2}}^{(1)} - h_{j+\frac{1}{2}}^{(2)}) - \theta_{j-\frac{1}{2}} (h_{j-\frac{1}{2}}^{(1)} - h_{j-\frac{1}{2}}^{(2)})], \quad (10.20)$$

如果在解的光滑区取  $\theta = O(h^p)$ ,  $p \geq 1$ , 此时有

$$(Lu)_j = (L_2 u)_j + O(h^3).$$

由此可以看出, 在解的光滑区  $L$  和  $L_2$  有同阶的截断误差. 此外, 由(10.19)知, 混合格式相当于用一个适当的人工粘性来修改格式  $L_2$ .

## 10.7 通量向量分裂方法

迎风格式一般是从非守恒型方程组出发的. 这里对气体动力学方程组进行通量向量的分裂来达到关于守恒型方程组的类似迎风格式的格式.

考虑守恒型气体动力学方程组(10.3), 可以求出其 Jacobi 矩

阵

$$A(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \frac{\gamma-3}{2} \frac{m^2}{\rho^3} & (3-\gamma) \frac{m}{\rho} \\ -\frac{\gamma m E}{\rho^2} - (\gamma-1) \frac{m^3}{\rho^3} & \frac{\gamma E}{\rho} - \frac{3(\gamma-1)}{2} \frac{m^2}{\rho^2} \\ 0 & (\gamma-1) \\ & \frac{\gamma m}{\rho} \end{bmatrix}$$

容易验证

$$\begin{aligned} f(\omega) &= \begin{bmatrix} m \\ \frac{m^2}{\rho} + (\gamma-1) \left( E - \frac{1}{2} \frac{m^2}{\rho} \right) \\ \frac{m}{\rho} E + (\gamma-1) \left( E - \frac{1}{2} \frac{m^3}{\rho} \right) \end{bmatrix} = A(\omega) \begin{bmatrix} \rho \\ m \\ E \end{bmatrix} \\ &= A(\omega) \cdot \omega. \end{aligned}$$

对于矩阵  $A$ , 存在非奇异矩阵  $S$  使

$$S^{-1}AS = \Lambda,$$

其中  $\Lambda$  为对角矩阵, 其对角线元素为  $A$  的特征值  $\lambda_1 = u + C$ ,  $\lambda_2 =$

$u$ ,  $\lambda_3 = u - C$ ,  $C = \sqrt{\frac{\gamma p}{\rho}}$  为局部声速.

对于任意的特征值  $\lambda_l, l=1, 2, 3$ , 都可以表示为

$$\lambda_l = \lambda_l^+ + \lambda_l^-,$$

其中  $\lambda_l^+ = \frac{1}{2}(\lambda_l + |\lambda_l|)$ ,  $\lambda_l^- = \frac{1}{2}(\lambda_l - |\lambda_l|)$  利用特征值的表示式, 我们可以把对角矩阵  $\Lambda$  分裂为

$$\Lambda = \Lambda^+ + \Lambda^-,$$

其中  $\Lambda^+$  和  $\Lambda^-$  分别是以对角线元素为  $\lambda_l^+$  和  $\lambda_l^-$  的对角矩阵. 因此

通量向量  $f(w)$  可以分裂为

$$\begin{aligned} f(w) &= S(A^+ + A^-)S^{-1}w \\ &= (A^+ + A^-)w = f^+ + f^- \end{aligned} \quad (10.21)$$

其中

$$\begin{aligned} A^+ &= SA^+S^{-1}, \quad A^- = SA^-S^{-1} \\ f^+ &= A^+w, \quad f^- = A^-w. \end{aligned}$$

显然有  $A = A^+ + A^-$ ,  $A^+$  的特征值为正,  $A^-$  的特征值为负.

利用(10.21)可以把(10.3)改写为

$$\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\partial f^+}{\partial x} + \frac{\partial f^-}{\partial x} = 0.$$

基于通量向量的这个简单分裂, 可以构造格式

$$w_i^{n+1} = w_i^n - \lambda \Delta_-(f^+)_i^n - \lambda \Delta_+(f^-)_i^n, \quad (10.22)$$

其中

$$\begin{aligned} \Delta_-(f^+)_i^n &= (f^+)_i^n - (f^+)_{i-1}^n, \\ \Delta_+(f^-)_i^n &= (f^-)_{i+1}^n - (f^-)_i^n. \end{aligned}$$

在本节中讨论的差分格式都没有进行稳定性讨论. 读者不难用线性化稳定性分析的方法进行讨论.

## § 11 二维空间中的一阶双曲型方程组

以前我们都是讨论一个空间变量的双曲型方程和双曲型方程组的差分方法, 原则上都可以推广到二维空间中的一阶双曲型方程组上来. 但在实际计算中也存在着一些问题, 例如, 显式格式所允许的步长将比一维显式格式要小.

### 11.1 一阶双曲型方程

考虑双曲型方程的初值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad -\infty < x, y < \infty, \quad t > 0, \quad (11.1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad -\infty < x, y < \infty. \quad (11.2)$$

与一维空间情形一样, 初值问题的解可以表为  $u(x, y, t) = u_0(x - at, y - bt)$ . 下面以 Lax-Friedrichs 格式为例具体说明稳定性条件的状况. 为方便起见, 不妨设  $x$  方向和  $y$  方向是等步长的, 即  $\Delta x = \Delta y = h$ . 这样逼近初值问题(11.1) 和(11.2)的Lax-Friedrichs 格式为

$$\begin{aligned} & \frac{u_{j,m}^{n+1} - \frac{1}{4}(u_{j,m+1}^n + u_{j,m-1}^n + u_{j+1,m}^n + u_{j-1,m}^n)}{\tau} \\ & + a \frac{u_{j+1,m}^n - u_{j-1,m}^n}{2h} \\ & + b \frac{u_{j,m+1}^n - u_{j,m-1}^n}{2h} = 0. \end{aligned} \quad (11.3)$$

取  $\lambda = \tau/h$  为常数, 则 Lax-Friedrichs 格式(11.3)是一阶精度的. 下面来讨论(11.3)的稳定性. 仿一维讨论, 令

$$u_{j,m}^n = v^n e^{i(\omega_1 j h + \omega_2 m h)}.$$

代入(11.3)有

$$v^{n+1} = \left[ \frac{1}{2}(\cos \omega_1 h + \cos \omega_2 h) - i\lambda(a \sin \omega_1 h + b \sin \omega_2 h) \right] v^n.$$

所以增长因子

$$G(\tau, \omega) = \frac{1}{2}(\cos \omega_1 h + \cos \omega_2 h) - i\lambda(a \sin \omega_1 h + b \sin \omega_2 h),$$

其中  $\omega = [\omega_1, \omega_2]$ .

$$\begin{aligned} |G(\tau, \omega)|^2 &= \frac{1}{4}(\cos \omega_1 h + \cos \omega_2 h)^2 + \lambda^2(a \sin \omega_1 h \\ &+ b \sin \omega_2 h)^2 \end{aligned}$$

$$= 1 - (\sin^2 \omega_1 h + \sin^2 \omega_2 h) \left[ \frac{1}{2} - \lambda^2 (a^2 + b^2) \right] \\ - \frac{1}{4} (\cos \omega_1 h - \cos \omega_2 h)^2 - \lambda^2 (a \sin \omega_1 h - \\ b \sin \omega_2 h)^2.$$

注意到第二个等号右边的最后二项是负的，因此有

$$|G(\tau_1 \omega)|^2 \leq 1 - (\sin^2 \omega_1 h + \sin^2 \omega_2 h) \left[ \frac{1}{2} - \lambda^2 (a^2 + b^2) \right].$$

如果

$$(a^2 + b^2) \lambda^2 \leq \frac{1}{2},$$

即

$$\sqrt{a^2 + b^2} \lambda \leq \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad (11.4)$$

那么 von Neumann 条件满足，所以格式(11.3)是稳定的。如果

在方程(11.1)中令  $b = a$ ，那么条件(11.4)就化为  $|a| \lambda \leq \frac{1}{2}$ 。由

此看出，二维问题的 Lax-Friedrichs 格式比一维问题的 Lax-Friedrichs 格式的稳定性条件要严。

为了放宽稳定性条件，出现了各种技巧。在此仅讨论分数步长法，这是一个二步方法。第一步是由  $x$  方向的差分把  $t_n$  推进到  $t_n + \frac{\tau}{2}$ ；第二步是由  $y$  方向的差分把  $t_n + \frac{\tau}{2}$  推进到  $t_{n+1}$ 。

$$\begin{cases} u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} = u_{j,m}^n + \tau D_1 u_{j,m}^n, \end{cases} \quad (11.5)$$

$$\begin{cases} u_{j,m}^{n+1} = u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} + \tau D_2 u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}, \end{cases} \quad (11.6)$$

其中  $D_1$  和  $D_2$  分别是关于  $x$  方向和  $y$  方向的差分算子。这样的二步法称为分数步长法，亦称局部一维格式。

考虑由 Lax-Wendroff 格式来完成这二步算法。此时

$$D_1 = -a \frac{1}{2h} \Delta_0^x + \frac{\tau}{2} a^2 \frac{1}{h^2} \Delta_+^x \Delta_-^x,$$

$$D_2 = -b \frac{1}{2h} \Delta_0^y + \frac{\tau}{2} b^2 \frac{1}{h^2} \Delta_+^y \Delta_-^y,$$

其中  $\Delta_0^x u_{j,m} = u_{j+1,m} - u_{j-1,m}$ ;  $\Delta_+^x u_{j,m} = u_{j+1,m} - u_{j,m}$ ;  $\Delta_-^x u_{j,m} = u_{j,m} - u_{j-1,m}$ ; 对于  $\Delta_0^y, \Delta_+^y, \Delta_-^y$  可以同样定义。

为了讨论用 Lax-Wendroff 格式构成的分数步长法的精度, 先构造二维问题 (11.1) 的 Lax-Wendroff 格式. 设  $u$  是方程 (11.1) 的充分光滑的解, 那么有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

因此有

$$u(x_j, y_m, t_n + \tau) = \left[ I - \tau \left( a \frac{\partial}{\partial x} + b \frac{\partial}{\partial y} \right) + \frac{\tau^2}{2} \left( a^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \right] u(x_j, y_m, t_n) + O(\tau^3).$$

对于上式右边的偏导数皆用中心差商来代替, 就得到逼近 (11.1) 的 Lax-Wendroff 格式

$$\begin{aligned} u_{j,m}^{n+1} = & \left[ I - \frac{\lambda}{2} (a \Delta_0^x + b \Delta_0^y) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} \lambda^2 \left( a^2 \Delta_+^x \Delta_-^x + \frac{1}{2} ab \Delta_0^x \Delta_0^y + b^2 \Delta_+^y \Delta_-^y \right) \right] u_{j,m}^n. \end{aligned} \quad (11.7)$$

易知这是二阶精度的差分格式。

对于分数步长法 (11.5) 和 (11.6), 容易得到

$$\begin{aligned} u_{j,m}^{n+1} &= [(I + \tau D_1) + \tau D_2 (I + \tau D_1)] u_{j,m}^n \\ &= [I + \tau (D_1 + D_2) + \tau^2 D_2 D_1] u_{j,m}^n. \end{aligned}$$

用一维的 Lax-Wendroff 格式代入有

$$\begin{aligned} u_{j,m}^{n+1} = & \left[ I - \frac{\lambda}{2} (a \Delta_0^x + b \Delta_0^y) + \frac{1}{2} \lambda^2 \left( a^2 \Delta_+^x \Delta_-^x + b^2 \Delta_+^y \Delta_-^y + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{2} ab \Delta_0^x \Delta_0^y \right) \right] u_{j,m}^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2}ab^2\tau^3 - \frac{1}{2h}\Delta_0^x\frac{1}{h^2}\Delta_+^y\Delta_-^y - \frac{1}{2}a^2b\tau^3 - \frac{1}{2h}\Delta_0^y\times \\
& \frac{1}{h^2}\Delta_+^x\Delta_-^x + \frac{1}{4}a^2b^2\tau^4\frac{1}{h^4}\Delta_+^x\Delta_-^x\Delta_+^y\Delta_-^y \Big] u_{j,m}^n \\
& = \left[ I - \frac{\lambda}{2}(a\Delta_0^x + b\Delta_0^y) + \frac{1}{2}\lambda^2(a^2\Delta_+^x\Delta_-^x + b^2\Delta_+^y\Delta_-^y \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{2}ab\Delta_0^x\Delta_0^y) \right] u_{j,m}^n + O(\tau^3).
\end{aligned}$$

此式与(11.7)相比较,分数步长法是二阶精度的格式.

分数步长法的稳定性是容易得到的. 设  $G_1(\tau, \omega)$  是对应于(11.5)的增长因子,  $G_2(\tau, \omega)$  是对应于(11.6)的增长因子, 因此整个格式(11.5)和(11.6)的增长因子  $G(\tau, \omega) = G_2(\tau, \omega) \cdot G_1(\tau, \omega)$ . 由一维 Lax-Wendroff 格式的稳定性条件(2.6)得, 当  $|a|\lambda \leq 1$  时有  $|G_1(\tau, \omega)| \leq 1$ , 当  $|b|\lambda \leq 1$  时有  $|G_2(\tau, \omega)| \leq 1$ . 由此可知, 分数步长法(用 Lax-Wendroff 方法)的稳定性条件是

$$|a|\lambda \leq 1, \quad |b|\lambda \leq 1. \quad (11.8)$$

## 11.2 一阶双曲型方程组

考虑最简单的一阶常系数方程组

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + A \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} + B \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} = 0, \quad (11.9)$$

其中  $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_p]^T$ ,  $A, B$  为实的  $p \times p$  矩阵.

我们称方程组(11.9)是双曲型方程组, 如果对所有的  $\alpha, \beta$ ,  $\alpha + \beta = 1$ , 有非奇异矩阵  $S$  使得

$$A = S(\alpha A + \beta B)S^{-1},$$

其中  $A$  是对角线元素为实数的对角矩阵.

显然, 如果  $A, B$  是对称矩阵, 则方程组(11.9)是双曲型方程组, 此时称对称双曲型方程组.

仍以 Lax-Wendroff 格式为例来讨论. 仿二维方程的推导, 逼近方程组(11.9)的 Lax-Wendroff 格式是

$$u_{j,m}^{n+1} = L_{\lambda} u_{j,m}^n, \quad (11.10)$$

其中  $L_{\lambda}$  是差分算子,

$$\begin{aligned} L_{\lambda} = I - \frac{1}{2} \lambda (A \Delta_0^x + B \Delta_0^y) + \frac{1}{2} \lambda^2 (A^2 \Delta_+^x \Delta_-^x + B^2 \Delta_+^y \Delta_-^y) \\ + \frac{1}{2} \lambda^2 [(AB + BA) \Delta_0^x \Delta_0^y]. \end{aligned}$$

利用 Fourier 方法来讨论(11.10)的稳定性. 令

$$u_{j,m}^n = v^n e^{i(\omega_1 j h + \omega_2 m h)},$$

代入(11.10)可得增长矩阵

$$\begin{aligned} G(\tau, \omega) = I + i \lambda (A \sin \omega_1 h + B \sin \omega_2 h) \\ + \lambda^2 [A^2 (\cos \omega_1 h - 1) + B^2 (\cos \omega_2 h - 1)] \\ - \frac{1}{2} \lambda^2 (AB + BA) \sin \omega_1 h \sin \omega_2 h, \end{aligned}$$

其中  $\omega = [\omega_1, \omega_2]$ . 如果  $A, B$  是对称矩阵, 那么可以证明 Lax-Wendroff 格式的稳定性条件是

$$\lambda \rho(A) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \quad \lambda \rho(B) \leq \frac{1}{2\sqrt{2}}. \quad (11.11)$$

可以看出, 比一维 Lax-Wendroff 格式的稳定性条件  $\lambda \rho(A) \leq 1$  要严得多.

为放宽稳定性条件, Lax 和 Wendroff 还提出差分格式

$$u_{j,m}^{n+1} = L_{\lambda}^{(1)} u_{j,m}^n, \quad (11.12)$$

其中  $L_{\lambda}^{(1)}$  为差分格式,

$$L_{\lambda}^{(1)} = L_{\lambda} - \frac{1}{8} \lambda^4 (A^2 + B^2) \Delta_+^x \Delta_-^x \Delta_+^y \Delta_-^y.$$

这时的稳定性条件为  $2 \lambda^2 \rho(A^2 + B^2) \leq 1$ , 此条件虽比条件(11.11)有所放宽, 但是放宽甚微. 此外, 由于加了一项, 因此计算变得复杂了, 所以从计算时间上看还是不合算的.

1968 年 Strang 提出了一个很好的方法, 在此稍作讨论. 考虑一维一阶常系数双曲型方程组



$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0. \quad (11.13)$$

逼近它的 Lax-Wendroff 格式可以写作

$$u_j^{n+1} = L_h^x(\tau) u_j^n, \quad (11.14)$$

其中差分算子

$$L_h^x(\tau) = I - \frac{1}{2} \lambda A \Delta_0^x + \frac{1}{2} \lambda^2 A^2 \Delta_+^x \Delta_-^x.$$

容易看出, 差分算子  $L_h^x$  逼近微分算子

$$L' = I - \tau A \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{2} \tau^2 A^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2}.$$

同样地, 差分算子

$$L_h^y(\tau) = I - \frac{1}{2} \lambda B \Delta_0^y + \frac{1}{2} \lambda^2 B^2 \Delta_+^y \Delta_-^y$$

逼近微分算子

$$L' = I - \tau B \frac{\partial}{\partial y} + \frac{1}{2} \tau^2 B^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

现在引入差分算子

$$\tilde{L}_h(\tau) = L_h^x\left(\frac{\tau}{2}\right) L_h^y(\tau) L_h^x\left(\frac{\tau}{2}\right)$$

来构造差分格式

$$u_{j,m}^{n+1} = \tilde{L}_h(\tau) u_{j,m}^n. \quad (11.15)$$

容易看出, 差分格式 (11.15) 是以二阶精度逼近方程组 (11.9).

对于差分算子

$$L_h^x\left(\frac{\tau}{2}\right) = I - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2}\right) A \Delta_0^x + \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda}{2}\right)^2 A^2 \Delta_+^x \Delta_-^x.$$

的稳定性条件是  $\lambda \rho(A) \leq 2$ , 而  $L_h^y(\tau)$  的稳定性条件是  $\lambda \rho(B) \leq 1$ . 由于

$$\|\tilde{L}_h\| \leq \left\| L_h^x\left(\frac{\tau}{2}\right) \right\| \cdot \|L_h^y(\tau)\| \cdot \left\| L_h^x\left(\frac{\tau}{2}\right) \right\|,$$

所以差分格式 (11.15) 的稳定性条件是比较宽的,

## § 12 混合初边值问题

先考虑一阶线性双曲型方程的初边值问题的提法, 并以简单的差分格式为例用能量方法证明差分格式的稳定性. 对一阶线性双曲型方程组也作了相应的简单的讨论. 最后叙述了波动方程的边界处理.

### 12.1 一阶线性双曲型方程

考虑常系数方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1, t > 0. \quad (12.1)$$

设初始条件为

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1.$$

现在讨论边界条件的合理提法. 为确定起见, 不妨设  $a > 0$ . 此种情况, 方程(12.1)的特征线由  $x$  轴( $t=0$ )出发向右倾斜, 因此不能在区域

$$\mathcal{D} = \{(x, t); \\ t \geq 0, 0 \leq x \leq 1\}$$

的右边界给边界条件 (见图 3.18). 在  $\mathcal{D}$  的左边界  $x=0$  处可给出边界条件,

$$\text{设} \quad u(0, t) = g(t), \quad t > 0.$$

当然还要求满足相容性条件  $g(0) = u_0(0)$ . 反之, 当  $a < 0$  时, 特征线的走向换了方向. 因此在左边界  $x=0$  处不能给条件, 而在右边界  $x=1$  处必须给出边界条件.

下面考虑变系数方程的混合初边值问题

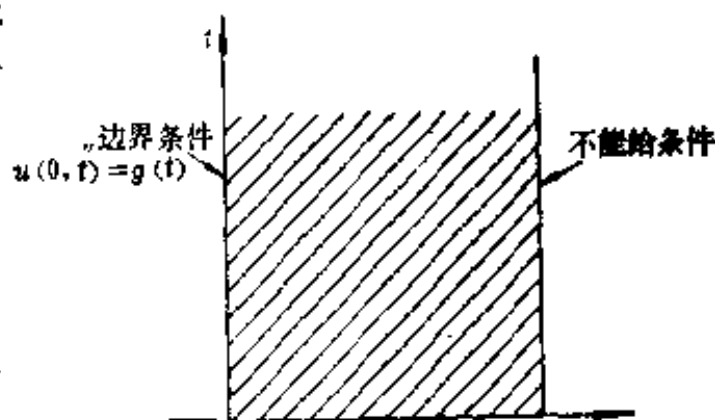


图 3.18

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, & 0 < x < \infty, \quad 0 < t \leq T, \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ u(0, t) = 0, \end{cases} \quad (12.2)$$

其中  $0 < a \leq a(x) \leq A$ . 由于  $a(x) > 0$ , 所以(12.2)的提法是正确的. 设逼近(12.2)的差分格式为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{\tau} \right) + a_{i-\frac{1}{2}} \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h} \right) \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left( \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} \right) \right] = 0, \end{aligned} \quad (12.3)$$

$$n = 0, 1, \dots; \quad j = 1, 2, \dots.$$

把这个格式改变写法,

$$u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} + \lambda a_{i-\frac{1}{2}} \Delta_- u_i^{n+1} = u_i^n + u_{i-1}^n - \lambda a_{i-\frac{1}{2}} \Delta_- u_i^n, \quad (12.4)$$

其中  $\Delta_- u_i = u_i - u_{i-1}$ . 下面用能量方法来证 (12.4) (即(12.3)) 的稳定性. 对(12.4)的两边平方, 乘  $h$  再对  $j$  求和

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} (u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1} + \lambda a_{i-\frac{1}{2}} \Delta_- u_i^{n+1})^2 h \\ = \sum_{i=1}^{\infty} (u_i^n + u_{i-1}^n - \lambda a_{i-\frac{1}{2}} \Delta_- u_i^n)^2 h. \end{aligned} \quad (12.5)$$

令

$$S_n = \sum_{i=1}^{\infty} ([u_i^n + u_{i-1}^n]^2 + [\lambda a_{i-\frac{1}{2}} \Delta_- u_i^n]^2) h,$$

则由(12.5)可以得到

$$S_{n+1} - S_n = \sum_{i=1}^{\infty} ([u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}]^2 + [\lambda a_{i-\frac{1}{2}} \Delta_- u_i^{n+1}]^2) h$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_{i=1}^n ([u_i^n + u_{i-1}^n]^2 + [\lambda a_{i-\frac{1}{2}} \Delta_- u_i^n]^2) h \\
& = -2 \sum_{i=1}^n (u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}) \lambda a_{i-\frac{1}{2}} \Delta_- u_i^{n+1} h \\
& \quad - 2 \sum_{i=1}^n (u_i^n + u_{i-1}^n) \lambda a_{i-\frac{1}{2}} \Delta_- u_i^n h \\
& = -2 \lambda \sum_{i=1}^n \{ [(u_i^{n+1})^2 - (u_i^n)^2] \\
& \quad - [(u_{i-1}^{n+1})^2 + (u_{i-1}^n)^2] \} a_{i-\frac{1}{2}} h \\
& = -2 \lambda \sum_{i=1}^n a_{i-\frac{1}{2}} \Delta_- [(u_i^{n+1})^2 + (u_i^n)^2] h.
\end{aligned}$$

令

$$(u, v)_h = \sum_{i=1}^n u_i v_i h, \quad \|u\|_h^2 = (u, u)_h,$$

那么就有

$$S_{n+1} - S_n = -2 \lambda (\Delta_- [(u^{n+1})^2 + (u^n)^2], a_{-\frac{1}{2}})_h.$$

利用边界条件  $u_0^n = 0$ , 所以

$$\begin{aligned}
(\Delta_- (u^n)^2, a_{-\frac{1}{2}})_h &= \sum_{i=1}^n \Delta_- (u_i^n)^2 a_{i-\frac{1}{2}} h \\
&= \sum_{i=1}^n (u_i^n)^2 a_{i-\frac{1}{2}} h - \sum_{i=1}^n (u_{i-1}^n)^2 a_{i-\frac{1}{2}} h \\
&= - \sum_{i=1}^n (u_i^n)^2 (a_{i+\frac{1}{2}} - a_{i-\frac{1}{2}}) h \\
&= - ((u^n)^2, \Delta_+ a_{-\frac{1}{2}})_h.
\end{aligned}$$

同理,

$$(\Delta_-(u^{n+1})^2, a_{-\frac{1}{2}}) = -((u^{n+1})^2, \Delta_+ a_{-\frac{1}{2}}).$$

由此得到

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &= 2 \lambda ((u^{n+1})^2 + (u^n)^2, \Delta_+ a_{-\frac{1}{2}}) \\ &= 2 \lambda \sum_{j=1}^{\infty} [(u_j^{n+1})^2 + (u_j^n)^2] (a_{j+\frac{1}{2}} - a_{j-\frac{1}{2}}) h \\ &\leq 2 \lambda \sum_{j=1}^{\infty} [(u_j^{n+1})^2 + (u_j^n)^2] |a_{j+\frac{1}{2}} - a_{j-\frac{1}{2}}| h. \end{aligned}$$

如果假定  $a(x)$  是 Lipschitz 连续, 并设 Lipschitz 常数为  $L$ , 那么就有

$$\begin{aligned} S_{n+1} - S_n &\leq 2 \lambda L \cdot h \sum_{j=1}^{\infty} \{ (u_j^{n+1})^2 + (u_j^n)^2 \} h \\ &= 2 \lambda L \cdot h (\|u^{n+1}\|_h^2 + \|u^n\|_h^2). \end{aligned} \quad (12.6)$$

由  $S_n$  的定义可以得出

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{j=1}^{\infty} [(u_j^n + u_{j-1}^n)^2 + \lambda^2 a_{j-\frac{1}{2}}^2 (u_j^n - u_{j-1}^n)^2] h \\ &\leq \max(1, \lambda^2 A^2) \sum_{j=1}^{\infty} [(u_j^n + u_{j-1}^n)^2 + (u_j^n - u_{j-1}^n)^2] h \\ &= 2 \max(1, \lambda^2 A^2) \sum_{j=1}^{\infty} [(u_j^n)^2 + (u_{j-1}^n)^2] h \\ &= 4 \max(1, \lambda^2 A^2) \|u^n\|_h^2. \end{aligned}$$

同样可证,

$$S_n \geq 4 \min(1, \lambda^2 a^2) \|u^n\|_h^2.$$

结合这两个不等式有

$$4 \min(1, \lambda^2 a^2) \|u^n\|_h^2 \leq S_n \leq 4 \max(1, \lambda^2 A^2) \|u^n\|_h^2. \quad (12.7)$$

把此式与(12.6)联合有

$$\begin{aligned} 4 \min(1, \lambda^2 \alpha^2) \|u^n\|_h^2 &\leq S_n \leq S_{n-1} + 2 \lambda L h (\|u^n\|_h^2 + \|u^{n-1}\|_h^2) \\ &\leq \dots \leq S_0 + 4 \lambda L h \sum_{m=0}^n \|u^m\|_h^2. \end{aligned}$$

利用(12.7)知

$$S_0 \leq 4 \max(1, \lambda^2 A^2) \|u^0\|_h^2.$$

所以有

$$\|u^n\|_h^2 \leq K_1 \|u^0\|_h^2 + K_2 h \sum_{m=0}^n \|u^m\|_h^2, \quad (12.8)$$

其中

$$K_1 = \frac{\max(1, \lambda^2 A^2)}{\min(1, \lambda^2 \alpha^2)}, \quad K_2 = \frac{\lambda L}{\min(1, \lambda^2 \alpha^2)}.$$

下面用归纳法来证明, 由(12.8)可以得出

$$\|u^n\|_h^2 \leq (K_1 + K_2 h)(1 - K_2 h)^{-n} \|u^0\|_h^2. \quad (12.9)$$

当  $n=0$  时, 由(12.8)知

$$\begin{aligned} \|u^0\|_h^2 &\leq K_1 \|u^0\|_h^2 + K_2 h \|u^0\|_h^2 \\ &= (K_1 + K_2 h) \|u^0\|_h^2. \end{aligned}$$

所以  $n=0$ , (12.9) 成立.

现设  $m < n$  时, (12.9) 成立. 由(12.8)得

$$(1 - K_2 h) \|u^n\|_h^2 \leq (K_1 + K_2 h) \|u^0\|_h^2 + K_2 h \sum_{m=1}^{n-1} \|u^m\|_h^2.$$

利用归纳假设有

$$\begin{aligned} (1 - K_2 h) \|u^n\|_h^2 &\leq (K_1 + K_2 h) \|u^0\|_h^2 \\ &\quad + K_2 h \sum_{m=1}^{n-1} (K_1 + K_2 h)(1 - K_2 h)^{-m} \|u^0\|_h^2 \\ &= (K_1 + K_2 h) \|u^0\|_h^2 \end{aligned}$$

$$+ K_2 h (K_1 + K_2 h) \|u^0\|_k^2 \sum_{m=1}^{n-1} (1 - K_2 h)^{-m}.$$

注意到

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{n-1} (1 - K_2 h)^{-m} &= \frac{(1 - K_2 h)^{-1} [(1 - K_2 h)^{-(n-1)} - 1]}{(1 - K_2 h)^{-1} - 1} \\ &= \frac{(1 - K_2 h)^{-(n-1)} - 1}{K_2 h}, \end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned} (1 - K_2 h) \|u^n\|_k^2 &\leq (K_1 + K_2 h) \|u^0\|_k^2 \\ &\quad + (K_1 + K_2 h) \|u^0\|_k^2 [(1 - K_2 h)^{-(n-1)} - 1] \\ &= (K_1 + K_2 h) (1 - K_2 h)^{-(n-1)} \|u^0\|_k^2. \end{aligned}$$

用  $(1 - K_2 h)^{-1}$  乘不等式的两边就得到

$$\|u^n\|_k^2 \leq (K_1 + K_2 h) (1 - K_2 h)^{-n} \|u^0\|_k^2.$$

由此得出, 当  $m = n$  时 (12.9) 也成立. 这样就证明了 (12.9).

在得到最后的稳定性结论之前, 先给出一个简单的引理

**引理 12.1** 令  $a > 1$ , 则对于  $0 < x < 1 - \frac{1}{a}$  有不等式

$$(1 - x)^{-1} < e^{ax}. \quad (12.10)$$

**证明** 令

$$q(x) = (1 - x)e^{ax} - 1,$$

可以求出

$$q'(x) = (a - 1 - ax)e^{ax}.$$

如果  $a - 1 - ax > 0$ , 则有  $q'(x) > 0$ . 由此得到, 当  $0 < x < 1 - \frac{1}{a}$  时,  $q$  是严格单调增函数. 此外注意到  $q(0) = 0$ , 所以当  $0 < x < 1 - \frac{1}{a}$  时有  $q(x) > 0$ . 显然  $x \neq 1$ , 这样直接有不等式 (12.10).

现在再转到差分格式 (12.3) 的稳定性讨论. 利用引理 12.1,

特别地取  $\alpha=2$ , 那么当  $0 < x < \frac{1}{2}$  时有  $(1-x)^{-1} < e^{2x}$ . 把这个结

果应用到(12.9), 取  $h$  使  $K_2 h < \frac{1}{2}$ , 那么就得到

$$(1 - K_2 h)^{-n} \leq \exp(2 K_2 n h).$$

此外容易看出

$$(K_1 + K_2 h) = K_1 \left( 1 + \frac{K_2}{K_1} h \right) \leq K_1 \exp\left(\frac{K_2}{K_1} h\right).$$

结合上述二个不等式有

$$\begin{aligned} \|u^n\|_h^2 &\leq K_1 e^{\frac{2K_2}{\lambda} \left(n + \frac{1}{2K_1}\right)\tau} \|u^0\|_h^2 \\ &\leq K_1 e^{\frac{K_2}{\lambda} 3\tau} \|u^0\|_h^2. \end{aligned}$$

由此我们得到, 如果  $a(x)$  是 Lipschitz 连续, 那么差分格式(12.3)是无条件稳定的.

上面讨论的是仅有左边界的情况. 但是其证明容易推广到有限区间的情况, 不妨设  $0 \leq x \leq 1$ , 此时无论是微分方程还是差分方程都不需要在右边加上边界条件. 在这种情况下, 如果  $Jh=1$ , 那么内积、范数和  $S_n$  定义如下:

$$(u, v)_h = \sum_{i=1}^J u_i v_i h, \quad \|u\|_h^2 = (u, u)_h,$$

$$S_n = \sum_{i=1}^J ([u_i^n + u_{i-1}^n]^2 + [\lambda a_{i-\frac{1}{2}} \Delta - u_i^n]^2) h.$$

对于不等式(12.7)的上界不变, 下界减少一半.

$$\begin{aligned} S_n &\geq 2 \min(1, \lambda^2 \alpha^2) \left[ \sum_{i=1}^J |u_i^n|^2 h + \sum_{i=1}^{J-1} |u_i^n|^2 h \right] \\ &\geq 2 \min(1, \lambda^2 \alpha^2) \|u^n\|_h^2. \end{aligned}$$

由于  $a(x) \geq 0$ , 所以不等式(12.6)仍成立, 事实上



$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= -2 \lambda (\Delta_- [(u^{n+1})^2 + (u^n)^2], a_{-\frac{1}{2}})_h \\
&= -2 \lambda \sum_{j=1}^J \Delta_- [(u_j^{n+1})^2 + (u_j^n)] a_{j-\frac{1}{2}} h,
\end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^J \Delta_- (u_j^n)^2 a_{j-\frac{1}{2}} h &= - \sum_{j=0}^{J-1} (u_j^n)^2 [a_{j+\frac{1}{2}} - a_{j-\frac{1}{2}}] h \\
&\quad + (u_J^n)^2 a_{J-\frac{1}{2}} h,
\end{aligned}$$

所以有

$$\begin{aligned}
S_{n+1} - S_n &= 2 \lambda \sum_{j=0}^{J-1} [(u_j^{n+1})^2 + (u_j^n)^2] (a_{j+\frac{1}{2}} - a_{j-\frac{1}{2}}) h \\
&\quad - 2 \lambda [(u_J^{n+1})^2 + (u_J^n)^2] a_{J-\frac{1}{2}} h \\
&\leq 2 \lambda \sum_{j=0}^{J-1} [(u_j^{n+1})^2 + (u_j^n)^2] (a_{j+\frac{1}{2}} - a_{j-\frac{1}{2}}) h \\
&\leq 2 \lambda L h (\|u^{n+1}\|_h^2 + \|u^n\|_h^2).
\end{aligned}$$

其余的论证与前面一样.

为应用方便, 可以把上面论述的关键部分归纳为一个一般性的引理

**引理 12.2** 如果存在一个实数序列  $\{S_n\}$  和二个正的常数  $K_1$  和  $K_2$  使得

$$K_1^{-1} \|u^n\|_h^2 \leq S_n \leq K_1 \|u^n\|_h^2 \quad (12.11)$$

和

$$S_{n+1} - S_n \leq K_2 \tau (\|u^{n+1}\|_h^2 + \|u^n\|_h^2). \quad (12.12)$$

那么对于充分小的  $\tau$  和  $n\tau \leq T$  有

$$\begin{aligned}
\|u^n\|_h^2 &\leq K_1 (K_1 - 2 K_2 \tau) (1 - 2 K_1 K_2 \tau)^{-n} \|u^0\|_h^2 \\
&\leq \text{const} \|u^0\|_h^2.
\end{aligned}$$

## 12.2 一阶线性方程组

先考虑双曲型方程方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0, \quad (12.13)$$

其中  $u = [u_1, \dots, u_p]^T$ ,  $A$  为  $p \times p$  常数矩阵. 初始条件为

$$u(x, 0) = u_0(x). \quad (12.14)$$

为考虑边界条件方便, 不失一般性可以假定

$$A = A = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix}$$

是对角矩阵, 并设

$$A_1 = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & & & \lambda_r \end{bmatrix} > 0,$$

$$A_3 = \begin{bmatrix} \lambda_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_{m+1} & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & \dots & & & \lambda_p \end{bmatrix} > 0,$$

其中  $A_i > 0 (i=1, 3)$  表示对角线元素大于 0,  $A$  的对角线上的零表示  $[m-(r+1)] \times [m-(r+1)]$  的零矩阵. 对应于  $A$  的分块,  $u$  可以写为

$$u = \begin{bmatrix} u^I \\ u^{II} \\ u^{III} \end{bmatrix}.$$

因此方程组(12.13)可分裂为

$$\frac{\partial u^I}{\partial t} - A_1 \frac{\partial u^I}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u^{II}}{\partial t} = 0,$$

$$\frac{\partial u^{III}}{\partial t} + A_3 \frac{\partial u^{III}}{\partial x} = 0,$$

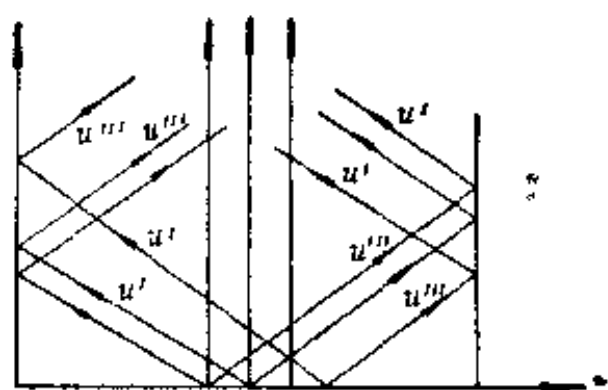


图 3.19

其解沿特征线为常数 (见图 3.19)。易知, 相应于  $u^I$  的特征线向左倾斜, 因此在右边界  $x=1$  处要给出边界条件。

例如

$$u^I(1, t) = g^I(t).$$

相应地, 对于  $u^{III}(x, t)$  则有

$$u^{III}(0, t) = g^{III}(t).$$

对于  $u^I(x, t)$  不需要给出任何边界条件。我们也能够把边界条件耦合起来得到

$$u^I(1, t) = S^I \begin{bmatrix} u^{II}(1, t) \\ u^{III}(1, t) \end{bmatrix} + g^I(t),$$

$$u^{III}(0, t) = S^{III} \begin{bmatrix} u^I(0, t) \\ u^{II}(0, t) \end{bmatrix} + g^{III}(t),$$

其中  $S^I, S^{III}$  分别是  $r \times (p-r)$ ,  $(p-m+1) \times (m-1)$  矩阵, 它们描述了沿“出发”特征线上的值如何被反射和转移到“进入”特征线上的值。

要特别引起注意的是, 在边界  $x=1$  上, 给出的边界条件的数目等于  $A$  的负的特征值的数目, 而对于边界  $x=0$ , 边界条件的数目则等于  $A$  的正的特征值的数目。

现在考虑对称双曲型方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A \frac{\partial u}{\partial x} + Bu = 0, \quad 0 < x < 1, \quad 0 < t \leq T \quad (12.15)$$

其中  $A$  为对称矩阵。初始条件为

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad 0 < x < 1. \quad (12.16)$$

在  $x=0, x=1$  处的边界条件为

$$\Gamma_0 u(0, t) = 0, \quad \Gamma_1 u(1, t) = 0, \quad (12.17)$$

其中  $\Gamma_0$  和  $\Gamma_1$  是矩阵,  $\Gamma_0$  的行数等于  $A$  的正的特征值的数目,  $\Gamma_1$  的行数等于  $A$  的负的特征值的数目.

下面引入关于耗散边界条件的概念. 称边界条件(12.17)在  $x=0$  处是耗散的, 如果对于满足  $\Gamma_0 v=0$  的所有  $v$  有

$$v^T A(0, t) v \leq 0.$$

相应地, 在  $x=1$  处, 边界条件(12.17)称为是耗散的, 如果对于满足  $\Gamma_1 v=0$  的全部  $v$  有

$$-v^T A(1, t) v \leq 0.$$

**例 12.1** 若

$$A = \begin{bmatrix} -A_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{bmatrix},$$

边界条件取

$$u^I(1, t) = S^I u^{III}(1, t), \quad u^{III}(0, t) = S^{III} u^I(0, t).$$

如果  $S^I, S^{III}$  的范数  $\|S^I\|, \|S^{III}\|$  充分小, 则边界条件是耗散的.

事实上,

$$\begin{aligned} v^T A(0, t) v &= -(v^I)^T A_1 v^I + (v^{III})^T A_3 v^{III} \\ &= -(v^I)^T (A_1 - (S^{III})^T A_3 S^{III}) v^I. \end{aligned}$$

如果  $\|S^{III}\|$  充分小, 则有  $A_1 - (S^{III})^T A_3 S^{III} \geq 0$ . 因此得到

$$v^T A(0, t) v \leq 0.$$

即边界条件在  $x=0$  处是耗散的. 同样可证边界条件在  $x=1$  也是耗散的.

现在考虑逼近方程组(12.15)的差分格式

$$\frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n}{\tau} + A \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + B u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} = 0, \quad (12.18)$$

其中  $u_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(u_{i+1} + u_i)$ .

在用能量方法来证明差分格式(12.18)的稳定性之前,先导出关于偏微分方程的解  $u$  的一个估计式

$$\|u(t)\| \leq e^{\alpha t} \|u_0\|, \quad (12.19)$$

其中范数  $\|u\|$  是通过内积来定义的,

$$(u, v) = \int_0^1 u^T v dx, \quad \|u\|^2 = (u, u).$$

先考虑内积的导数

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(u, u) &= \left(u, \frac{\partial u}{\partial t}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial t}, u\right) \\ &= -\left(u, A \frac{\partial u}{\partial x}\right) - (u, Bu) - \left(A \frac{\partial u}{\partial x}, u\right) \\ &\quad - (Bu, u), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left(u, A \frac{\partial u}{\partial x}\right) &= \int_0^1 u^T A \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_0^1 \sum_i u_i \left( \sum_k a_{ik} \frac{\partial}{\partial x} u_k \right) dx \\ &= \sum_i \sum_k \int_0^1 u_i a_{ik} \frac{\partial}{\partial x} u_k dx \\ &= \sum_i \sum_k a_{ik} u_i u_k \Big|_0^1 - \sum_i \sum_k a_{ik} \int_0^1 u_k \frac{\partial}{\partial x} u_i dx, \end{aligned}$$

利用  $A$  的对称性,我们得到

$$\begin{aligned} \left(u, A \frac{\partial u}{\partial x}\right) &= u^T A u \Big|_0^1 - \sum_k \int_0^1 \left( \sum_i a_{ik} \frac{\partial u_i}{\partial x} \right) u_k dx \\ &= u^T A u \Big|_0^1 - \int_0^1 \left( A \frac{\partial u}{\partial x} \right)^T u dx \\ &= u^T A u \Big|_0^1 - \left( A \frac{\partial u}{\partial x}, u \right). \end{aligned}$$

由于边界条件是耗散的,所以

$$u^T A u \Big|_0^1 = u(1, t)^T A u(1, t) - u(0, t)^T A u(0, t) \leq 0.$$

由此可以得

$$\frac{\partial}{\partial t}(u, u) \leq -(u, Bu) - (Bu, u) = -((B^T + B)u, u).$$

取  $\alpha = \frac{1}{2} \|B^T + B\|$ , 这样就有

$$\frac{\partial}{\partial t}(u, u) \leq 2\alpha \|u\|^2,$$

即

$$\frac{\partial}{\partial t} \|u\|^2 \leq 2\alpha \|u\|^2.$$

利用第二章引理 4.1 得

$$\|u(t)\|^2 \leq e^{2\alpha t} \|u(0)\|^2,$$

此式立即就得到(12.19).

类似于(12.19)的证明可以导出差分格式(12.18)的稳定性.

用  $2u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}$  对(12.18)作数积

$$\begin{aligned} & \left( \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n}{\tau}, 2u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) + \left( A \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h}, 2u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) \\ & = -2(Bu_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}). \end{aligned}$$

下面对上式中每项进行估计.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\tau} (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n, 2u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \\ & = \frac{1}{\tau} (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n, (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + u_{j+\frac{1}{2}}^n) + (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n)) \\ & \geq \frac{1}{\tau} (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + u_{j+\frac{1}{2}}^n). \\ & \left( A \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h}, 2u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = \frac{1}{h} (A(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}), u_{j+1}^{n+1} + u_j^{n+1}) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h} \{ (Au_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) - (Au_j^{n+1}, u_j^{n+1}) - (Au_{j+1}^{n+1}, u_{j+1}^{n+1}) \\ + (Au_{j+\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^n) \},$$

利用  $A$  的对称性有

$$\left( A \frac{u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h}, 2u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} \right) = \frac{1}{h} \{ (Au_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) - (Au_j^{n+1}, u_j^{n+1}) \}.$$

此外,

$$2(Bu_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \leq (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) + (Bu_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}, Bu_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \\ \leq (1 + \|B\|^2) (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}).$$

由上面的几个估计式, 可以得到

$$\frac{1}{\tau} (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} - u_{j+\frac{1}{2}}^n, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1} + u_{j+\frac{1}{2}}^n) + \frac{1}{h} \{ (Au_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}) \\ - (Au_j^{n+1}, u_j^{n+1}) \} \\ \leq (1 + \|B\|^2) (u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}, u_{j+\frac{1}{2}}^{n+1}).$$

用  $h$  乘不等式的两边, 并对  $j$  由 0 到  $J-1$  求和得到

$$\frac{1}{\tau} (\|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2) + (Au_J^{n+1}, u_J^{n+1}) - (Au_0^{n+1}, u_0^{n+1}) \\ \leq (1 + \|B\|^2) \|u^{n+1}\|_h^2,$$

其中

$$\|u\|_h^2 = \sum_{j=0}^{J-1} (u_{j+\frac{1}{2}}, u_{j+\frac{1}{2}}) h.$$

利用边界条件的耗散性质就得出

$$\frac{1}{\tau} (\|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2) \leq (1 + \|B\|^2) \|u^{n+1}\|_h^2.$$

移项并设  $K = 1 + \|B\|^2$ , 我们就有

$$(1 - K\tau) \|u^{n+1}\|_h^2 \leq \|u^n\|_h^2.$$

取  $\tau$  使  $1 - K\tau > 0$ , 那么有

$$\|u^{n+1}\|_h^2 \leq \frac{1}{1-K\tau} \|u^n\|_h^2,$$

注意到  $\frac{1}{1-K\tau} = 1 + \frac{K\tau}{1-K\tau}$ , 因此有

$$\|u^{n+1}\|_h^2 \leq (1+K\tau) \|u^n\|_h^2.$$

由此得到差分格式是稳定的。

### 12.3 波动方程

讨论波动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, t > 0 \quad (12.20)$$

的初边值混合问题。由于初始条件的离散我们已在前面讨论过，在此主要是讨论各种边界条件的差分方法。

首先考虑第一种边界条件，这是最简单的情况。

$$u(0, t) = \Phi_0(t), u(1, t) = \Phi_1(t). \quad (12.21)$$

对于这种边界条件在离散时采取直接转移的办法。如果网格剖分为  $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_J = 1, x_j = jh$ , 那么有

$$u_0^n = \Phi_0(n\tau), u_J^n = \Phi_1(n\tau). \quad (12.22)$$

第三种边界条件可以写为

$$\begin{cases} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_0(t)u \right) \Big|_{x=0} = \psi_0(t), \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_1(t)u \right) \Big|_{x=1} = \psi_1(t). \end{cases} \quad (12.23)$$

当  $\alpha_0(t) = \alpha_1(t) = 0$  时，称其为第二种边界条件，所以第二种边界条件就不作特别讨论了。(12.23)的差分离散可以是

$$\begin{cases} \frac{u_1^n - u_0^n}{h} + \alpha_0(n\tau)u_0^n = \psi_0(n\tau), \\ \frac{u_J^n - u_{J-1}^n}{h} + \alpha_1(n\tau)u_J^n = \psi_1(n\tau). \end{cases} \quad (12.24)$$

可以看出，这样的处理是一阶精度的。如果波动方程，初始条件均用较高精度来离散，那么相应的边界条件也应如此。为此，在(12.23)中的关于  $x$  的偏导数采用中心差商来逼近，这样就有



$$\begin{cases} \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} + \alpha_0(n\tau)u_0^n = \psi_0(n\tau), \\ \frac{u_{J+1}^n - u_{J-1}^n}{2h} + \alpha_1(n\tau)u_J^n = \psi_1(n\tau). \end{cases} \quad (12.25)$$

显然,这样处理精度提高了,但是引进了区域之外的未知量  $u_{-1}^n$ ,  $u_{J+1}^n$ . 我们要设法消去它们. 对此可以在点  $(x_0, t_n)$  和点  $(x_J, t_n)$  上列出波动方程的差分方程

$$\begin{cases} u_0^{n+1} + u_0^{n-1} - a^2\lambda^2(u_1^n + u_{-1}^n) - 2(1 - a^2\lambda^2)u_0^n = 0, \\ u_J^{n+1} + u_J^{n-1} - a^2\lambda^2(u_{J+1}^n + u_{J-1}^n) - 2(1 - a^2\lambda^2)u_J^n = 0. \end{cases} \quad (12.26)$$

由(12.25)和(12.26)联立消去  $u_{-1}^n$  和  $u_{J+1}^n$ , 从而得

$$\begin{cases} u_0^{n+1} = -u_0^{n-1} + 2a^2\lambda^2u_1^n + 2(1 - a^2\lambda^2)u_0^n \\ \quad + a^2\lambda^2h\alpha_0^n u_0^n - 2ha^2\lambda^2\psi_0^n \\ u_J^{n+1} = -u_J^{n-1} + 2a^2\lambda^2u_{J-1}^n + 2(1 - a^2\lambda^2)u_J^n \\ \quad - a^2\lambda^2h\alpha_1^n u_J^n + 2ha^2\lambda^2\psi_1^n, \end{cases} \quad (12.27)$$

其中  $\alpha_0^n = \alpha_0(n\tau)$ ,  $\alpha_1^n = \alpha_1(n\tau)$ ,  $\psi_0^n = \psi_0(n\tau)$ ,  $\psi_1^n = \psi_1(n\tau)$ .

利用(12.27)来逼近边界条件,虽然精度提高了,但是比较繁. 下面将网格改变一下,不但可以提高差分格式的精度,而且计算不太复杂. 网格改变如下:

$$x_j = \left(j + \frac{1}{2}\right)h, Jh = 1, j = -1, 0, 1, \dots, J,$$

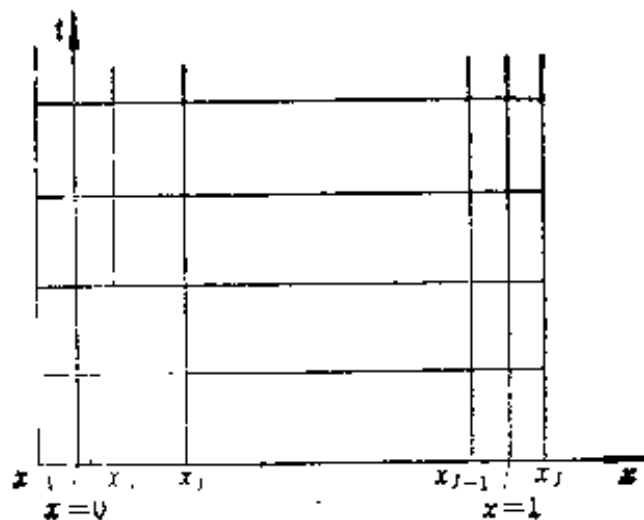


图 3.20

$$t_n = n\tau, n \geq 0,$$

(见图 3.20). 这样改变相当于把网格平移了半个步长.

在改变后的网格上取第三种边界条件的差分近似为

$$\begin{cases} \frac{u_0^n - u_{-1}^n}{h} + \alpha_0^n \frac{u_0^n + u_{-1}^n}{2} = \psi_0^n, \\ \frac{u_J^n - u_{J-1}^n}{h} + \alpha_1^n \frac{u_J^n + u_{J-1}^n}{2} = \psi_1^n. \end{cases} \quad (12.28)$$

可以看出, 边界条件的这种处理是二阶精度的, 而且很方便, 要求  $u_{-1}^n$  (或  $u_J^n$ ) 时, 只需要知道同一层上的  $u_0^n$  (或  $u_{J-1}^n$ ) 就可以了. 但我们也要注意, 计算中要用到区域之外的点  $(-\frac{h}{2}, 0)$  和点  $(1 + \frac{h}{2}, 0)$  上的初值, 对此可用外推方法求出. 此外, 当全部  $u_i^n$  求出之后, 再用插值法把边界  $x=0, x=1$  上  $u$  的值求出.

## 习 题

### 1. 试讨论求解对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的差分格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} + \frac{1}{2h}(u_{i+1}^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}) + \frac{1}{2h}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) = 0$$

的稳定性.

### 2. 直接证明求解对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的 Lax-Wendroff 格式是二阶精度的.

### 3. 试讨论求解对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的差分格式

$$(i) \quad u_i^{n+1} = u_i^n - \lambda(2u_i^n - 3u_{i-1}^n + u_{i-2}^n),$$

$$(ii) u_j^{n+1} = u_j^n - \lambda(-2u_j^n + 3u_{j+1}^n - u_{j+2}^n)$$

的稳定性, 这二个格式是否满足 C. F. L 条件?

4. 试讨论求解对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的半隐格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{a\lambda}{2+a\lambda}(u_j^{n+1} - u_{j+1}^n)$$

的相容性及稳定性.

5. 考虑逼近对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的隐式格式

$$\begin{aligned} & \left[ (\alpha + \beta) - (\beta - \alpha) \frac{1}{4} a^2 \lambda^2 \Delta_+ \Delta_- + \frac{\alpha}{2} a \lambda \Delta_0 \right] u_j^{n+1} \\ &= \left[ (\alpha + \beta) + (\beta - \alpha) \frac{1}{4} a^2 \lambda^2 \Delta_+ \Delta_- - \frac{1}{2} \beta a \lambda \Delta_0 \right] u_j^n, \end{aligned}$$

其中  $\Delta_+ u_j = u_{j+1} - u_j$ ,  $\Delta_- u_j = u_j - u_{j-1}$ ,  $\Delta_0 u_j = u_{j+1} - u_{j-1}$ .

试讨论

(i) 对任意的  $\alpha$  和  $\beta$ , 差分格式的截断误差,

(ii) 稳定性条件.

6. 考虑逼近对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

的差分格式

$$u_j^{n+1} = u_j^n + \frac{1}{2} \lambda (4u_{j+1}^n - u_{j+2}^n - 3u_j^n) + \frac{1}{2} \lambda^2 (u_{j+2}^n - 2u_{j+1}^n + u_j^n),$$

试讨论其稳定性.

7. 试用能量方法讨论逼近对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

( $a$  为常数) 的下列差分格式的稳定性:

(i) Lax-Wendroff 格式,

(ii) 隐式格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a \frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j-1}^{n+1}}{2h} = 0.$$

8. 用极大范数讨论求解对流方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a(x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad a(x) \geq 0$$

的迎风格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau} + a_j \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = 0$$

的稳定性.

9. 考虑双曲型方程组

$$\frac{\partial u}{\partial t} - A \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

其中  $A$  为常数对称矩阵. 试讨论下列差分格式的稳定性:

$$(i) \quad u_j^{n+1} = \left( I + \lambda \sigma I \Delta_+ \Delta_- + \frac{1}{2} \lambda A \Delta_+ \right) u_j^n,$$

其中  $\sigma > 0$  是常数,  $I$  单位矩阵.

$$(ii) \quad u_j^{n+1} = \left( I + \frac{\lambda}{2} A \Delta_+ + \frac{1}{2} \left( \lambda^2 A^2 + \frac{1}{4} I \right) \Delta_+ \Delta_- \right) u_j^n.$$

10. 试讨论逼近方程组

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} - a \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \\ \frac{\partial w}{\partial t} - a \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \end{cases}$$

的差分格式

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau} (v_j^{n+1} - v_j^n) - a \frac{1}{2h} (w_{j+1}^n - w_{j-1}^n) = 0, \\ \frac{1}{\tau} (w_j^{n+1} - w_j^n) - a \frac{1}{2h} (v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1}) = 0 \end{cases}$$

的稳定性.

11. 考虑非线性方程

$$u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

试构造出一个显式格式并用线性化稳定性方法讨论其稳定性.

12. 用 Lax-Wendroff 格式求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), \end{cases}$$

其中

$$u_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ \frac{x}{2}, & 0 \leq x \leq 2, \\ 2 - \frac{x}{2}, & 2 < x \leq 4, \\ 0, & x > 4. \end{cases}$$

取  $h = \frac{1}{2}$ ,  $\lambda = \frac{1}{2}$ , 计算二个时间步长后把计算结果与精确解进行比较。

## 第四章 抛物型方程

本章讨论求解抛物型偏微分方程的主要差分方法。从简单的常系数方程入手,推导了各种差分格式,然后对变系数方程、非线性方程、对流扩散方程以及二维空间中的问题作了讨论,同时分别用 Fourier 分析方法和能量方法研究了各类问题的稳定性。

### § 1 常系数扩散方程

最简单的抛物型偏微分方程是常系数扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad t > 0, \quad |x| < \infty, \quad (1.1)$$

其中  $a > 0$ , 给定初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad |x| < \infty, \quad (1.2)$$

就构成了初值问题。

我们知道, 初值问题(1.1)和(1.2)是适定的, 其解可以表示为

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{a\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} u_0(\xi) e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4at}} d\xi. \quad (1.3)$$

#### 1.1 古典格式

在第一章中曾经建立了逼近(1.1)和(1.2)的古典显式格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0, \quad (1.4)$$

$$u_j^0 = u_0(jh),$$

并得出其截断误差是  $O(\tau + h^2)$ 。下面来讨论其稳定性。这是一个常系数差分方程, 可以用Fourier方法进行讨论。容易求出(1.4)的增长因子

$$G(\tau, \omega) = 1 - 4a\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2},$$

其中  $\lambda = \tau/h^2$ , 如果  $a\lambda \leq \frac{1}{2}$ , 那么有  $|G(\tau, \omega)| \leq 1$ , 即 von Neumann 条件满足。这是单个方程, 所以 von Neumann 条件也是稳定的充分条件, 即差分格式(1.4)的稳定性条件是

$$a\lambda \leq \frac{1}{2}. \quad (1.5)$$

在第一章中, 还讨论了逼近(1.1)和(1.2)的古典隐式格式

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0. \quad (1.6)$$

这个格式是无条件稳定的, 其截断误差也是  $O(\tau + h^2)$ 。

## 1.2 加权隐式格式

先把显式格式(1.4)改写为

$$\frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} - a \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{h^2} = 0.$$

用  $1-\theta, 0 \leq \theta \leq 1$ , 来乘上式, 用  $\theta$  乘(1.6), 把得到的结果相加就得到差分格式

$$\begin{aligned} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} - a \left\{ \theta \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} \right. \\ \left. + (1-\theta) \frac{u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1}}{h^2} \right\} = 0. \end{aligned} \quad (1.7)$$

称差分格式(1.7)为逼近(1.1)的加权隐式格式。可以把(1.7)改写为

$$\begin{aligned} & -a\lambda\theta u_{j+1}^n + (1+2\theta a\lambda)u_j^n - a\lambda\theta u_{j-1}^n \\ & = a\lambda(1-\theta)u_{j+1}^{n-1} + [1-2a\lambda(1-\theta)]u_j^{n-1} + a\lambda(1-\theta)u_{j-1}^{n-1}, \end{aligned}$$

其中  $\lambda = \tau/h^2$ 。

可以求出差分格式(1.7)的截断误差为

$$E = a \left( \frac{1}{2} - \theta \right) \tau \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} + O(\tau^2 + h^2).$$

由此可以看出, 当  $\theta = \frac{1}{2}$  时, 差分格式(1.7)的截断误差为  $O(\tau + h^2)$ , 而当  $\theta = \frac{1}{2}$  时, 差分格式(1.7)的截断误差为  $O(\tau^2 + h^2)$ , 即差分格式(1.7)是二阶精度的. 正因为如此,  $\theta = \frac{1}{2}$  特别重要, 并且经常使用. 具体表达式为

$$\begin{aligned} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{a}{h^2} [(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n) \\ + (u_{j+1}^{n-1} - 2u_j^{n-1} + u_{j-1}^{n-1})] = 0. \end{aligned} \quad (1.8)$$

此格式一般称为 Crank-Nicolson 格式.

下面来讨论加权隐式格式(1.7)的稳定性. 可以求出其增长因子

$$G(\tau, \omega) = \frac{1 - 4(1 - \theta)a\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2}}{1 + 4a\lambda \theta \sin^2 \frac{\omega h}{2}}.$$

对于单个方程, von Neumann 条件是差分格式稳定的充要条件, 因此只要有  $|G(\tau, \omega)| \leq 1$  就可以了. 而  $|G(\tau, \omega)| \leq 1$  相当于

$$-1 \leq \frac{1 - 4(1 - \theta)a\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2}}{1 + 4a\lambda \theta \sin^2 \frac{\omega h}{2}} \leq 1.$$

右边的不等号对  $\lambda \geq 0$  恒成立. 留下来考虑左边的不等号, 即要求

$$-\left(1 + 4a\lambda \theta \sin^2 \frac{\omega h}{2}\right) \leq 1 - 4(1 - \theta)a\lambda \sin^2 \frac{\omega h}{2},$$



即是

$$4\alpha\lambda(1-2\theta)\sin^2\frac{\omega h}{2}\leq 2.$$

考虑到  $\sin^2\frac{\omega h}{2}\leq 1$ , 因此当

$$2\alpha\lambda(1-2\theta)\leq 1$$

时, 就满足要求. 由此可以得出如下结论: 加权隐式格式 (1.7) 的稳定性条件是

$$\begin{cases} \alpha\lambda\leq\frac{1}{2(1-2\theta)}, \text{ 当 } 0\leq\theta<\frac{1}{2}, \\ \text{无限制, 当 } \theta\geq\frac{1}{2}. \end{cases} \quad (1.9)$$

由加权隐式格式的构造可以看出, 当  $\theta=1$  时就是古典隐式格式, 由 (1.9) 知, 古典隐式格式是无条件稳定的. 当  $\theta=0$  时, 加权隐式格式化为古典显式格式, 由 (1.9) 立即可知, 稳定性条件为  $\alpha\lambda\leq\frac{1}{2}$ . 由 (1.9) 可知, Crank-Nicolson 格式是无条件稳定的.

### 1.3 Du Fort-Frankel 格式

在第一章中为了提高截断误差, 讨论了二阶精度的显式格式——Richardson 格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau} - \alpha \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0.$$

已经证明这是一个不稳定的格式.

1953 年 Du Fort 和 Frankel 对 Richardson 格式进行了修正, 提出了一个三层显式格式

$$\frac{u_j^{n+1}-u_j^{n-1}}{2\tau} - \alpha \frac{u_{j+1}^n - (u_j^{n+1} + u_j^{n-1}) + u_{j-1}^n}{h^2} = 0. \quad (1.10)$$

可以看出, 这个格式是用  $\frac{1}{2}(u_j^{n+1} + u_j^{n-1})$  来代替了 Richardson 格式中的  $u_j^n$ . 一般称差分格式 (1.10) 为 Du Fort-Frankel 格式.

在讨论 Du Fort-Frankel 格式的稳定性之前, 先考察一下它的相容性. 设  $u$  是扩散方程(1.1)的充分光滑的解, 那么差分格式(1.10)的截断误差可以表示为

$$\begin{aligned} E &= \frac{u(x_j, t_n + \tau) - u(x_j, t_n - \tau)}{2\tau} \\ &- \alpha \frac{u(x_j + h, t_n) - [u(x_j, t_n + \tau) + u(x_j, t_n - \tau)] + u(x_j - h, t_n)}{h^2} \\ &= \alpha \cdot \frac{\tau^2}{h^2} \frac{\partial^2 u(x_j, t_n)}{\partial t^2} + O(\tau^2 + h^2) + O\left(\frac{\tau^4}{h^2}\right). \end{aligned}$$

由此可以看出, 相容性要求是当  $\tau \rightarrow 0$  时, 有  $\frac{\tau}{h} \rightarrow 0$ . 也就是说, 差分格式(1.10)与扩散方程(1.1)相容的充分条件是  $\tau$  趋于 0 的速度比  $h$  趋于 0 的速度快. 相反地, 如果  $\tau/h$  保持常数, 比如说为  $\beta$ , 那么差分格式(1.10)与扩散方程(1.1)不相容, 而与双曲型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

相容.

现在来考虑 Du Fort-Frankel 格式的稳定性. 由于这个格式是一个三层格式, 所以先把它化为与其等价的二层差分方程组

$$\begin{cases} (1 + 2\alpha\lambda)u_i^{n+1} = (1 - 2\alpha\lambda)v_i^n + 2\alpha\lambda(u_{i+1}^n + u_{i-1}^n), \\ v_i^{n+1} = u_i^n. \end{cases}$$

令  $u = [u, v]^T$ , 则上面方程组可以写成向量形式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 + 2\alpha\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} u_i^{n+1} &= \begin{bmatrix} 2\alpha\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_{i-1}^n \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & 1 - 2\alpha\lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix} u_i^n + \begin{bmatrix} 2\alpha\lambda & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} u_{i+1}^n. \end{aligned}$$

令  $u_i^n = v^n e^{i\omega jh}$ , 代入上式有

$$\begin{bmatrix} 1+2a\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} v^{n+1} = \begin{bmatrix} 2a\lambda(e^{i\omega h} + e^{-i\omega h}) & 1-2a\lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix} v^n,$$

因此增长矩阵

$$\begin{aligned} G(\tau, \omega) &= \begin{bmatrix} 1+2a\lambda & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 4a\lambda \cos \omega h & 1-2a\lambda \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{2a \cos \omega h}{1+a} & \frac{1-a}{1+a} \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

其中  $a=2a\lambda$ ,  $G(\tau, \omega)$  的特征方程是

$$\mu^2 - \left( \frac{2a}{1+a} \cos \omega h \right) \mu - \frac{1-a}{1+a} = 0. \quad (1.11)$$

为了给出  $G$  的特征值估计, 我们先讨论

### 引理 1.1 实系数二次方程

$$\mu^2 - b\mu - c = 0$$

的根按其模小于或等于 1 的充分必要条件是

$$|b| \leq 1-c, \quad |c| \leq 1.$$

**证明** 先证必要性, 令  $\mu_1, \mu_2$  是方程的二个根, 并满足  $|\mu_i| \leq 1, i=1, 2$ . 利用根与系数的关系有

$$\mu_1 \mu_2 = -c,$$

因此有

$$|c| = |\mu_1| |\mu_2| \leq 1.$$

再次利用根与系数的关系有  $\mu_1 + \mu_2 = b$ . 如果  $\mu_1 + \mu_2 \geq 0$ , 那么有

$$1-c-|b| = 1 + \mu_1 \mu_2 - (\mu_1 + \mu_2) = (1-\mu_1)(1-\mu_2) \geq 0.$$

如果  $\mu_1 + \mu_2 < 0$ , 那么有

$$\begin{aligned} 1-c-|b| &= 1 + \mu_1 \mu_2 + (\mu_1 + \mu_2) \\ &= (1+\mu_1)(1+\mu_2) \geq 0. \end{aligned}$$

由此推出, 不论那种情况都有  $|b| \geq 1-c$ .

再证充分性. 如果  $\mu_1 + \mu_2 \geq 0$ , 则有

$$1-c-|b|=(1-\mu_1)(1-\mu_2)\geq 0.$$

所以  $1-\mu_1, 1-\mu_2$  同时取正号或同时取负号. 此外  $c=-\mu_1\mu_2$ , 所以  $\mu_1, \mu_2$  不可能同时使其模大于 1. 不妨设  $|\mu_1|>1$ , 那么就有  $|\mu_2|\leq 1$ . 另一方面, 当  $\mu_1>1$  时, 由于  $1-\mu_1, 1-\mu_2$  同号, 必有  $\mu_2>1$ , 这是不可能的. 当  $\mu_1<-1$  时, 由于假定  $\mu_1+\mu_2\geq 0$ , 从而就要求  $\mu_2>1$ , 这也不可能. 所以必有  $|\mu_i|\leq 1, i=1, 2$ .

如果  $\mu_1+\mu_2<0$ , 则

$$1-c-|b|=(1+\mu_1)(1+\mu_2)\geq 0.$$

由此  $(1+\mu_1), (1+\mu_2)$  必须同号. 由于  $|c|=|\mu_1\mu_2|\leq 1$ , 所以  $|\mu_1|, |\mu_2|$  中最多只能有一个大于 1. 不妨设  $|\mu_1|>1$ , 则必有  $|\mu_2|\leq 1$ . 另一方面, 当  $\mu_1>1$  时, 由于  $\mu_1+\mu_2<0$ , 所以必有  $\mu_2<-1$ , 这是不可能的. 当  $\mu_1<-1$  时, 由  $1+\mu_1, 1+\mu_2$  同号也推得  $\mu_2<-1$ , 这是不可能. 从而有  $|\mu_i|\leq 1, i=1, 2$ .

下面再回来讨论 Du Fort-Frankel 格式的稳定性. 利用引理 1.1 就可以得到  $G$  的特征方程 (1.11) 的两个根有  $|\mu_i|\leq 1, i=1, 2$ . 具体写出就是

$$\mu_{1,2}=\frac{\alpha\cos\omega h\pm\sqrt{1-\alpha^2\sin^2\omega h}}{1+\alpha}.$$

分两种情况进行讨论.

(i) 重根

$$\mu_1=\mu_2=\frac{\alpha\cos\omega h}{1+\alpha},$$

由此得

$$|\mu_{1,2}|\leq\frac{\alpha}{1+\alpha}<1.$$

(ii) 两根相异并  $|\mu_{1,2}|\leq 1$

利用第二章的定理 3.6 就知道, 无论那种情况 Du Fort-Frankel 格式是无条件稳定的, 但必须注意到, Du Fort-Frankel 格式的相

容性是有条件的.

### 1.4 三层隐式格式

Du Fort-Frankel 格式是无条件稳定的差分格式, 并且可以显式求解. 但相容性是有条件的, 因此时间步长还是受到很大限制. 下面考虑三层的隐式格式. 首先考虑

$$\frac{3}{2} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{1}{2} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} - \alpha \frac{u_{j+1}^{n+1} - 2u_j^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}}{h^2} = 0. \quad (1.12)$$

容易推导出, 这个格式是二阶精度的差分格式. (1.12) 的稳定性讨论仿 Du Fort-Frankel 格式, 先把 (1.12) 化为与其等价的二层方程组, 再求出增长矩阵, 容易得到

$$G(\tau, \omega) = \begin{bmatrix} \frac{4}{3 + 8\alpha \sin^2 \frac{\omega h}{2}} & \frac{-1}{3 + 8\alpha \sin^2 \frac{\omega h}{2}} \\ 1 & 0 \end{bmatrix},$$

其中  $\alpha = \alpha \lambda$ ,  $G$  的特征方程是

$$\mu^2 - \frac{4}{3 + 8\alpha \sin^2 \frac{\omega h}{2}} \mu + \frac{1}{3 + 8\alpha \sin^2 \frac{\omega h}{2}} = 0.$$

其系数满足引理 1.1 的条件, 因此有  $|\mu_{1,2}| \leq 1$ . 把  $\mu_i$  具体写出有

$$\mu_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{1 - 8\alpha \sin^2 \frac{\omega h}{2}}}{3 + 8\alpha \sin^2 \frac{\omega h}{2}}.$$

如果重根, 则有

$$\mu_1 = \mu_2 = \frac{2}{3 + 8\alpha \sin^2 \frac{\omega h}{2}} < 1.$$

利用第二章的定理 3.6 就得出差分格式 (1.12) 是稳定的.

如果把 (1.12) 改写为

$$(3 + 4a\lambda)u_j^{n+1} - 2a\lambda(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n) = 4u_j^n - u_j^{n-1}.$$

可以看出, 计算工作量与 Crank-Nicolson 格式相当, 当然这个格式具有三层格式的固有缺点, 即计算机内存多和计算第一时间层时必须用另外格式来实现.

还可以形式地把二层 Crank-Nicolson 格式推广到三层格式上来, 可以得到二阶精度的无条件稳定的隐式格式,

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{2\tau} - \frac{a}{3h^2}(\delta^2 u_j^{n+1} + \delta^2 u_j^n + \delta^2 u_j^{n-1}) = 0, \quad (1.13)$$

其中  $\delta^2 u_j = \Delta_+ \Delta_- u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$ . 此格式与 Crank-Nicolson 格式相比较, 显然较繁, 因此实际使用意义不大. 但值得注意的是, Lees 把它用到拟线性抛物型方程上去取得了良好的效果.

### 1.5 跳点格式

首先把网格点  $(x_j, t_n)$  按  $n+j$  等于偶数或等于奇数分成两组, 分别称作偶数网格点和奇数网格点. 从时刻  $t_n$  推进到时刻  $t_{n+1}$ , 先是在偶数点上用显式格式

$$\frac{1}{\tau}(u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{a}{h^2}\delta^2 u_j^n = 0, \quad (1.14)$$

$$n+1+j = \text{偶数},$$

进行计算, 求得  $t_{n+1}$  时刻的值. 然后在奇数点上用隐式格式

$$\frac{1}{\tau}(u_j^{n+1} - u_j^n) - \frac{a}{h^2}\delta^2 u_j^{n+1} = 0, \quad (1.15)$$

$$n+1+j = \text{奇数},$$

进行计算. 我们要特别注意到, 在隐式格式(1.15)中,  $u_{j+1}^{n+1}$  和  $u_{j-1}^{n+1}$  都处于偶数网格点上, 因此已有(1.14)计算出来了. 所以(1.15)仅是形式上是隐式的, 实质上是显式的.

还可以把上面的算法稍加改变以节省计算量. 事实上, 每当用隐式格式(1.15)算出奇数点上值  $u_j^{n+1}$  时, 由于  $n+2+j$  为偶数, 所以用(1.14)有显式表达式

$$\frac{1}{\tau}(u_j^{n+2} - u_j^{n+1}) - \frac{\alpha}{h^2} \delta^2 u_j^{n+1} = 0, \quad (1.16)$$

此式与(1.15)相减就得到

$$u_j^{n+2} = 2u_j^{n+1} - u_j^n \quad (1.17)$$

由此看出, 求出奇数点上的值  $u_j^{n+1}$  之后可马上求出偶数点上的值  $u_j^{n+2}$ , 因此无须保留在奇数点上的值  $u_j^{n+1}$ . 用(1.17)来代替(1.14), 工作量节省很多. 利用(1.17)求出  $u_j^{n+2}$  则要保留.

上述方法可以叙述如下: 在初始层  $u_j^0$  的基础上, 首先对于  $n=1$  层上的偶数点用显式(1.14)进行计算, 再在该层的奇数点用隐式(1.15)(实际上是显式)计算, 然后计算第2层, 在偶数点上用显式(1.17)在奇数点用隐式(1.15), 如此循环下去直至计算得到所需要的层上的值.

注意到, 由格式(1.15)和(1.17)消去  $u_j^{n+1}$  得到

$$\frac{1}{2\tau}(u_j^{n+2} - u_j^n) - \frac{\alpha}{h^2}(u_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} - u_j^{n+2} - u_j^n + u_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}}) = 0,$$

其中  $n+j$  = 偶数. 可以看出, 这就是 Du Fort-Frankel 格式. 但它只在偶数点网格上进行. 在跳点格式中, 奇偶两套网格是相互独立的, 因此跳点格式等价于 Du Fort-Frankel 格式. 由此可知稳定性和精度同 Du Fort-Frankel 格式一样. 但是算法上有所改进. 首先存储上同二层格式一样, 只要存一个时间层的量, 其次并不用另外的二层格式来计算第一层的值. 最后, 有一半的网格点利用(1.17)进行计算, 大大节省了工作量.

我们也要注意, 跳点格式的相容性是有条件的, 即要求  $\tau$  比较小, 取  $\frac{\tau}{h} = \text{const}$  是不行的, 而  $\frac{\tau}{h^2} = \text{const}$  是可行的.

求解扩散方程的主要差分格式见表 4.1

表 4.1 关于方程  $\frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$  的一些主要差分格式

| 格 式                       | 差分方程与截断误差   | 稳 定 性 条 件   |
|---------------------------|---|---|
| 1. 显式格式                   | $\frac{1}{\tau}(u_i^{n+1} - u_i^n) - \frac{a}{h^2} \delta^2 u_i^n = 0$ $E = O(\tau + h^2)$  | $a\lambda \leq \frac{1}{2}$   |
| 2. 隐式格式                   | $\frac{1}{\tau}(u_i^{n+1} - u_i^n) - \frac{a}{h^2} \delta^2 u_i^{n+1} = 0$ $E = O(\tau + h^2)$  | 无   |
| 3. 加权隐式格式                 | $\frac{1}{\tau}(u_i^{n+1} - u_i^n) - \frac{a}{h^2} [\theta \delta^2 u_i^{n+1} + (1-\theta) \delta^2 u_i^n] = 0$ $E = \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \cdot O(\tau) + O(\tau^2 + h^2)$   | $a\lambda \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}, 0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$<br>无, $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$ |
| 4. Crank-Nicolson<br>格 式  | 在(3)中取 $\theta = \frac{1}{2}$ ,<br>$E = O(\tau^2 + h^2)$  | 无   |
| 5. (1)的特例                 | 在(1)中取 $a\lambda = \frac{1}{6}$<br>$E = O(\tau^2) + O(h^4)$   | 无   |
| 6. (3)的特例<br>(Douglas格式)  | 在(3)中取 $\theta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{6a\lambda}\right)$<br>$E = O(\tau^2 + h^4)$   | 无   |
| 7. Richardson<br>格 式      | $\frac{1}{2\tau}(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) - \frac{a}{h^2} \delta^2 u_i^n = 0$ $E = O(\tau^2 + h^2)$   | 不稳定   |
| 8. Du Fort-Frankel<br>格 式 | $\frac{1}{2\tau}(u_i^{n+1} - u_i^{n-1}) - \frac{a}{h^2} \times (u_{i+1}^n - u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n-1} + u_{i-1}^{n-2}) = 0$ $E = O(\tau^2 + h^2) + O\left(\frac{\tau^2}{h^2}\right)$ <p>要求当 <math>\tau, h \rightarrow 0</math> 时有 <math>\frac{\tau}{h} \rightarrow 0</math></p> | 无   |



续表

| 格 式                             | 差分方程与截断误差   | 稳 定 性 条 件 |
|---------------------------------|---|-----------|
| 9. 跳点格式                         | $\frac{1}{\tau}(u_j^{n+1}-u_j^n)-\frac{a}{h^2}\delta^2 u_j^n=0,$ $n+1+j=\text{偶}$ $\frac{1}{\tau}(u_j^{n+1}-u_j^n)-\frac{a}{h^2}\delta^2 u_j^{n+1}=0,$ $n+1+j=\text{奇}$ $E=O(\tau^2+h^2)+O\left(\frac{\tau^2}{h^2}\right)$ <p>要求当 <math>\tau, h \rightarrow 0</math> 时有 <math>\frac{\tau}{h} \rightarrow 0</math></p> | 无         |
| 10.                             | $(1+\theta)\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}-\theta\frac{u_j^n-u_j^{n-1}}{\tau}$ $-\frac{a}{h^2}\delta^2 u_j^{n+1}=0$ $E=(2\theta-1)\cdot O(\tau)+O(\tau^2+h^2)$   | 无         |
| 11 (10)的特例<br>Richtmyer<br>隐式格式 | $(10) \text{ 中 } \theta=\frac{1}{2}$ $E=O(\tau^2+h^2)$  | 无         |
| 12. (10)的特例                     | $(10) \text{ 中 } \theta=\frac{1}{2}+\frac{1}{12a\lambda}$ $E=O(\tau^2+h^4)$   | 无         |
| 13.                             | $\frac{1}{12}\frac{u_{j+1}^{n+1}-u_{j+1}^n}{\tau}+\frac{5}{6}\frac{u_j^{n+1}-u_j^n}{\tau}+$ $\frac{1}{12}\frac{u_{j-1}^{n+1}-u_{j-1}^n}{\tau}$ $=a\frac{1}{2h^2}(\delta^2 u_j^{n+1}+\delta^2 u_j^n)$ $E=O(\tau^2+h^4), \text{ 与 (6) 同}$   | 无         |
| 14.                             | $\frac{1}{2\tau}(u_j^{n+1}-u_j^{n-1})-\frac{a}{3h^2}(\delta^2 u_j^{n-1}+$ $\delta^2 u_j^n+\delta^2 u_j^{n+1})=0$ $E=O(\tau^2+h^2)$  | 无         |
| 15 Саульев格式                    | $(a) u_j^{n+1}-u_j^n=$ $a\lambda(u_{j+1}^n-u_j^n-u_j^{n+1}+u_{j-1}^n),$ $(b) u_j^{n+2}-u_j^{n+1}=$ $a\lambda(u_{j+1}^{n+1}-u_j^{n+1}-u_j^{n+2}+u_{j-1}^{n+1})$  | 无         |

## § 2 扩散方程的初边值问题

在 § 1 中主要讨论了各种差分格式, 尽管有些差分格式 (隐式格式) 求解时要用到边界条件, 但我们未对边界条件进行讨论. 本节主要是讨论边界条件的处理, 以及数值例子, 最后讨论了 Саульев 格式

### 2.1 初边值问题及数值方法

对于扩散方程来说, 可以提第一种、第二种和第三种边界条件. 由于第二种边界条件是第三种边界条件的特殊情况, 所以我们就作特别的讨论.

第一边值问题是解问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = \varphi_1(t), \\ u(1, t) = \varphi_2(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

还要求满足相容性条件  $u_0(0) = \varphi_1(0), u_0(1) = \varphi_2(0)$ .

(2.1) 的差分离散分三部分, 差分方程的建立和初始条件的离散在上节已作过讨论, 在此仅讨论边界条件的离散. 由于空间变量  $x \in [0, 1]$ , 所以网格可构造如下:

$$x_j = jh, j = 0, 1, \dots, J, Jh = 1,$$

$$t_n = n\tau, n = 0, 1, \dots,$$

其中网格点  $(x_0, t_n), (x_J, t_n), n \geq 0$  和  $(x_j, t_0), j = 1, \dots, J-1$  称为边界结点, 其余均称为内部结点. 第一种边界条件可采用直接转移

$$\begin{cases} u_0^n = \varphi_1^n, n \geq 0, \\ u_J^n = \varphi_2^n, n \geq 0. \end{cases} \quad (2.2)$$

下面来讨论第三种边界条件的问题:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), 0 < x < 1, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x} - \alpha_1(t)u \right) \Big|_{x=0} = \psi_1(t), t \geq 0, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2(t)u \right) \Big|_{x=1} = \psi_2(t), t \geq 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

其中  $\alpha_1, \alpha_2$  为  $t$  的非负函数. 由于在边界条件中包含了偏导数, 所以处理就带来了复杂性. 在这里介绍三种方法.

$$(i) \quad \begin{cases} \frac{u_1^n - u_0^n}{h} - \alpha_1^n u_0^n = \psi_1^n, \\ \frac{u_J^n - u_{J-1}^n}{h} + \alpha_2^n u_J^n = \psi_2^n. \end{cases} \quad (2.4)$$

容易看出, 这样的边界处理是一阶精度的.

$$(ii) \quad \begin{cases} \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} - \alpha_1^n u_0^n = \psi_1^n, \\ \frac{u_{J+1}^n - u_{J-1}^n}{2h} + \alpha_2^n u_J^n = \psi_2^n. \end{cases} \quad (2.5)$$

这样处理截断误差是  $O(h^2)$ , 但注意到, 在 (2.5) 中使用了求解区域之外的点  $(x_{-1}, t_n)$  和  $(x_{J+1}, t_n)$ , 对此必须在边界点上建立差分方程来消去, 当然比较麻烦.

(iii) 采用网格

$$\begin{cases} x_j = \left( j + \frac{1}{2} \right) h, h = \frac{1}{J}, j = -1, 0, \dots, J, \\ t_n = n\tau, n = 0, 1, 2, \dots, \end{cases}$$

即将原来的网格在  $x$  轴方向上移动了半个步长  $\frac{h}{2}$ . 取第三种边界

条件的差分近似

$$\begin{cases} \frac{u_0^n - u_1^n}{h} - \alpha_1^n \frac{u_0^n + u_1^n}{2} = \psi_1^n, \\ \frac{u_J^n - u_{J-1}^n}{h} + \alpha_2^n \frac{u_J^n + u_{J-1}^n}{2} = \psi_2^n. \end{cases} \quad (2.6)$$

容易看出,截断误差也是  $O(h^2)$ . 但必须指出,利用这一差分近似时,在算出所有的  $u_j^n$  在内部结点上的值之后,再应用插值方法求出在  $x=0$  和  $x=1$  上的  $u$  的值. 网格的剖分及讨论可参见波动方程的相应的边界处理.

## 2.2 数值例子

用简单的例子来考察一些差分格式的数值结果以及边界处理对结果的影响.

**例 2.1** 考虑扩散方程的初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin \pi x, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

问题(2.7)的解析解为

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x.$$

取  $J=10$ ,  $h=\frac{1}{10}$  为空间步长,  $x_j = jh$ ,  $j=0, 1, \dots, J$ ,  $\tau$  为时间步长,  $\lambda = \frac{\tau}{h}$  为网格比. 对于不同的  $\lambda$ , 用加权隐式格式的计算结果见表 4.2.

由表中容易看出, 由于显式格式受稳定性条件限制, 所以当  $\lambda = 1$  时得不稳定值, 因此只能采用小的网格比进行计算. 古典隐式格式是无条件稳定的, 但精度不够高. 对于 Crank-Nicolson 格式来说, 这是十分可取的. 当  $\lambda = 4$  时, 即相当于古典显式格式可允许网格比的 8 倍, 而计算结果比古典显式格式精确.

表 4.2 用加权隐式格式数值逼近  $u(0.4, 0.4)$ 

| $\lambda$ | 古典显式格式<br>$\theta = 0$    | 古典隐式格式<br>$\theta = 1$ | Crank-Nicolson<br>$\theta = \frac{1}{2}$ | 解 析 解     |
|-----------|---------------------------|------------------------|--|-----------|
| 0.25      | 0.0180544                 | 0.0188705              | 0.0189519                                | 0.0183519 |
| 0.5       | 0.0171677                 | 0.0207088              | 0.0189407                                | 同 上       |
| 1.0       | $0.278773 \times 10^{11}$ | 0.0226935              | 0.0188963                                | 同 上       |
| 2.0       | —                         | 0.0266211              | 0.0187186                                | 同 上       |
| 4.0       | —                         | 0.0349321              | 0.0180093                                | 同 上       |
| 8.0       | —                         | 0.0527634              | 0.0152002                                | 同 上       |

这个简单的例子可能由于结果的量值太小,有些现象不明显,更复杂的例子可以在[21], [25]中找到.

**例 2.2** 考虑第三种边界条件问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & 0 < x < 1, \\ u(x, 0) = 1, & 0 < x < 1, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x} - u \right) \Big|_{x=0} = 0, & t > 0, \\ \left( \frac{\partial u}{\partial x} + u \right) \Big|_{x=1} = 0, & t > 0. \end{cases} \quad (2.8)$$

为了简单起见,采用古典显式格式来比较边界处理(i)和(ii)的结果.

取  $J = 10$ ,  $h = \frac{1}{J} = 0.1$ ,  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, 10$ ; 取  $\lambda = 0.25$ , 由此我们得  $\tau = 0.0025$ .

先采用边界条件处理(ii)来进行计算,在  $x=0$  处有

$$\frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} = u_0^n. \quad (2.9)$$

为消去  $u_{-1}^n$ , 在  $x=0$  处列出古典显式格式

$$u_0^{n+1} = u_0^n + \lambda(u_{-1}^n - 2u_0^n + u_1^n). \quad (2.10)$$

由(2.9)及(2.10)可消去  $u_{-1}^n$ , 就得到

$$u_0^{n+1} = u_0^n + 2\lambda(u_1^n - (1+h)u_0^n). \quad (2.11)$$

在  $x=1$  处, 边界处理取

$$\frac{u_{j1}^n - u_9^n}{2h} = -u_{j0}^n, \quad (2.12)$$

在  $x=1$  处列出古典显式格式

$$u_{j0}^{n+1} = u_{j0}^n + \lambda(u_9^n - 2u_{j0}^n + u_{j1}^n). \quad (2.13)$$

利用(2.12)和(2.13)消去区域外的值  $u_{j1}^n$ , 这样得到

$$u_{j0}^{n+1} = u_{j0}^n + 2\lambda(u_9^n - (1+h)u_{j0}^n). \quad (2.14)$$

由于问题关于  $x = \frac{1}{2}$  是对称的, 因此可以仅考虑  $[0, \frac{1}{2}]$  就可以了.

这样差分格式化为

$$u_0^{n+1} = \frac{1}{2}(0.9u_0^n + u_1^n). \quad (2.15)$$

$$u_j^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{j-1}^n + 2u_j^n + u_{j+1}^n), \quad j=1, 2, 3, 4. \quad (2.16)$$

利用对称性而不用边界条件处理(2.14)来确定  $x = \frac{1}{2}$  处的值

$$u_5^{n+1} = \frac{1}{2}(u_4^n + u_6^n). \quad (2.17)$$

初始条件采用

$$u_j^0 = 1, \quad j=1, 2, 3, 4, 5. \quad (2.18)$$

表 4.3 用古典显式格式在边界条件处理(i), (ii)下的结果

| 时刻 $t$ | 解析解<br>( $x=0.2$ ) | 差分解(i)<br>( $x=0.2$ ) | 差分解(ii)<br>( $x=0.2$ ) | 百分误差(i) | 百分误差(ii) |
|--------|--------------------|-----------------------|------------------------|---------|----------|
| 0.005  | 0.9984             | 0.9943                | 1.0000                 | -0.4    | 0.16     |
| 0.050  | 0.9120             | 0.8912                | 0.9126                 | -2.3    | 0.07     |
| 0.100  | 0.8342             | 0.8102                | 0.8345                 | -2.9    | 0.04     |
| 0.250  | 0.6454             | 0.6142                | 0.6425                 | -4.8    | -0.03    |
| 0.500  | 0.4212             | 0.3873                | 0.4205                 | -8.0    | -0.16    |
| 1.000  | 0.1794             | 0.1540                | 0.1786                 | -14.2   | -0.45    |

利用差分格式(2.15)至(2.18)进行计算,其结果见表 4.3.

如果采用边界处理(i),则差分格式为

$$\begin{cases} u_1^{n+1} = \frac{8}{11}u_1^n + \frac{1}{4}u_2^n, \\ u_0^{n+1} = \frac{10}{11}u_1^{n+1}, \\ u_j^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{j-1}^n + 2u_j^n + u_{j+1}^n), j=2,3,4, \\ u_5^{n+1} = \frac{1}{2}(u_4^n + u_5^n), \\ u_j^0 = 1, j=1,2,3,4,5. \end{cases} \quad (2.19)$$

利用差分格式(2.19)计算结果见表 4.3.

从表 4.3 可以看出,边界条件处理(i)确比边界条件处理 (ii) 差. 但一般实际问题,边界条件处理(i)也是可以接受的,并且比较简. 因此边界条件处理(i)还是经常应用的.

### 2.3 Саульев 算法

我们已注意到,显式格式的稳定性(限制较严,而隐式格式要解线性代数方程组. 1957 年,Саульев 提出了一个半隐算法,它具有一般隐式格式的稳定性好的特点,但又不需解线性代数方程组. 下面来构造这个格式. 在点  $(x_j, t_{n+\frac{1}{2}})$  上微分方程可以写作

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^{n+\frac{1}{2}} - a \left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_j^{n+\frac{1}{2}} = 0.$$

时间偏导数用中心差商近似

$$\left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_j^{n+\frac{1}{2}} = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + O(\tau^2). \quad (2.21)$$

空间偏导数近似如下:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} &= \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{h} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\
&\quad \left. - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right) + O(h^2) \\
&= \frac{1}{h} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{j+\frac{1}{2}}^n - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{j-\frac{1}{2}}^{n+1} + O(\tau) \right) + O(h^2) \\
&= \frac{1}{h} \left( \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} - \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}}{h} + O(h^2) \right) \\
&\quad + O(\tau/h + h^2). \tag{2.21}
\end{aligned}$$

把(2.20)和(2.21)代入扩散方程并忽略  $O\left(\frac{\tau}{h} + \tau^2 + h^2\right)$  有

$$u_j^{n+1} = \frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda} u_j^n + \frac{\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda} (u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n). \tag{2.22}$$

上式中使用的网格点见图 4.1. 从已给定的边界值  $u_0^{n+1}$  开始, 依次可以计算出  $j=1, 2, \dots, J-1$  的值  $u_j^{n+1}$ . 在每次应用(2.22)时,  $u_{j+1}^n$  已经知道, 所以隐式格式可以显式地计算.

完全类似的推导, 按图 4.2 方式有公式

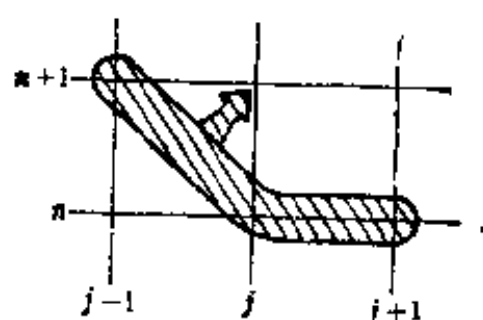


图 4.1

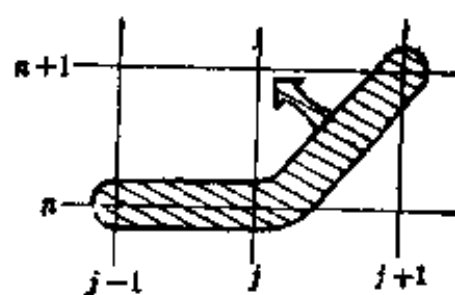


图 4.2

$$\begin{aligned}
u_j^{n+1} &= \frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda} u_j^n + \frac{\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda} (u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^n), \tag{2.23} \\
j &= J-1, J-2, \dots, 1.
\end{aligned}$$

利用(2.23)进行计算时, 从已知的边界值  $u_J^{n+1}$  开始, 从右向左一



直计算出  $u_1^{n+1}$ 。计算同样是显式的。

对于  $n=1, 3, 5, \dots$  我们采用(2.23)从右向左进行计算; 对于  $n=2, 4, 6, \dots$ , 则采用(2.22)从左向右进行计算, 这样形成的方法称为 Саульев 方法。

下面分析 Саульев 算法的稳定性。(2.22) 的增长因子为

$$G^{(1)}(\tau, \omega) = \frac{1 - a\lambda + a\lambda \cos \omega h + i a\lambda \sin \omega h}{1 + a\lambda - a\lambda \cos \omega h - i a\lambda \sin \omega h},$$

而(2.23)的增长因子为

$$G^{(2)}(\tau, \omega) = \frac{1 - a\lambda + a\lambda \cos \omega h - i a\lambda \sin \omega h}{1 + a\lambda - a\lambda \cos \omega h + i a\lambda \sin \omega h}.$$

因此整个 Саульев 算法的增长因子为

$$G(\tau, \omega) = G^{(2)} \cdot G^{(1)} = \frac{[1 - a\lambda(1 - \cos \omega h)]^2 + a^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h}{[1 + a\lambda(1 - \cos \omega h)]^2 + a^2 \lambda^2 \sin^2 \omega h}.$$

由于  $1 - \cos \omega h \geq 0$ , 所以有  $0 \leq G \leq 1$ 。从而得出 Саульев 算法是无条件稳定的。

### § 3 变系数扩散方程

许多物理现象可以用变系数抛物型方程来描述, 本节讨论变系数扩散方程。首先讨论差分格式的构造方法, 其次用能量方法进行稳定性讨论, 最后对求解隐式格式的方法作了说明。

#### 3.1 Taylor 级数展开方法

考虑初值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - a(x) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, & |x| < \infty, t > 0, \end{cases} \quad (3.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), & |x| < \infty, \end{cases} \quad (3.2)$$

其中  $a(x) \geq a_1 > 0$ 。

注意到

$$\frac{u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n))}{h^2} \\ = \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + O(h^2).$$

对于  $\frac{\partial u}{\partial t}$ , 用  $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau}$  来逼近. 这样可以得到 (3.1), (3.2) 的一个差分格式

$$\frac{1}{a_j} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} - \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2} = 0. \quad (3.3)$$

显然, 其截断误差为  $O(\tau + h^2)$ . 差分格式 (3.3) 是古典显式格式的推广. 同样方法可以推广古典隐式格式和其它的格式.

在推广高精度格式时, 必须小心, 以防精度的丧失. 下面构造一个高精度格式. 首先注意到

$$\frac{1}{h^2} \delta_x^2 u(x_j, t_n) = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_j^n + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_j^n + O(h^4).$$

其中  $\delta_x^2 u(x_j, t_n) = u(x_{j+1}, t_n) - 2u(x_j, t_n) + u(x_{j-1}, t_n)$ . 为了表明关于  $x$  的二阶中心差分, 在此用  $\delta_x$  表示.

利用方程 (3.1) 有

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u(x_j, t_n) &= \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right]_j^n + O(h^4) \\ &= \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{h^2}{12} \left[ \frac{1}{h^2} \delta_x^2 \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n \right. \\ &\quad \left. + O(h^2) \right] + O(h^4) \\ &= \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{1}{12} \delta_x^2 \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + O(h^4) \\ &= \frac{5}{6} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^n + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{j+1}^n \\ &\quad + \frac{1}{12} \left( \frac{1}{a} \frac{\partial u}{\partial t} \right)_{j-1}^n + O(h^4). \end{aligned}$$

引入时间差商, 得到差分格式

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{12 a_{j+1}} \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n}{\tau} + \frac{5}{6 a_j} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} \\
& + \frac{1}{12 a_{j-1}} \frac{u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n}{\tau} \\
& = \frac{1}{2 h^2} \{ \delta^2 u_j^{n+1} + \delta^2 u_j^n \},
\end{aligned} \tag{3.4}$$

其中  $\delta^2 u_j = u_{j+1} - 2 u_j + u_{j-1}$ .

容易证明, 差分格式(3.4)逼近(3.1)的精度是  $O(\tau^2 + h^4)$ . 可以看出, 差分格式(3.4)是表 1.1 中第 13 个格式的推广. 我们还注意到, 上面的推导中, 除了假定  $u$  充分光滑外, 还需要假定系数  $a$  是一个二次连续可微的函数.

### 3.2 积分插值法

考虑变系数扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \tag{3.5}$$

其中  $0 < k_* \leq k(x) \leq k^*$ ,  $k_*$ ,  $k^*$  是二个常数.

令

$$w(x, t) = k(x) \frac{\partial u}{\partial x}, \tag{3.6}$$

那么(3.5)可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}. \tag{3.7}$$

令  $x_{j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_j + x_{j+1})$ , 并设  $\mathcal{D} := \{(x, t): x_{j-\frac{1}{2}} \leq x \leq x_{j+\frac{1}{2}}, t_n \leq t \leq t_{n+1}\}$ . 在  $\mathcal{D}$  上对(3.7)进行积分,

$$\begin{aligned}
& \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} [u(x, t_{n+1}) - u(x, t_n)] dx \\
& = \int_{t_n}^{t_{n+1}} [w(x_{j+\frac{1}{2}}, t) - w(x_{j-\frac{1}{2}}, t)] dt.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

对(3.8)中的积分作如下近似:

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} u(x, t) dx \approx h u(x_i, t). \quad (3.9)$$

$$\frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} w(x_{i-1/2}, t) dt \approx \theta w(x_{i-1/2}, t_{n+1}) + (1-\theta) w(x_{i-1/2}, t_n), \quad (3.10)$$

其中“ $\approx$ ”表示近似号,  $\theta$  为一个参数,  $0 \leq \theta \leq 1$ .

利用(3.6)可以导出

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{\partial u}{\partial x} dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{w(x, t)}{k(x)} dx \approx w(x_{i-1/2}, t) \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)} dx.$$

如果令

$$a_i = h \left[ \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{1}{k(x)} dx \right]^{-1}, \quad (3.11)$$

那么有

$$u(x_i, t) - u(x_{i-1}, t) \approx -\frac{h}{a_i} w(x_{i-1/2}, t),$$

即

$$w(x_{i-1/2}, t) \approx a_i \frac{1}{h} [u(x_i, t) - u(x_{i-1}, t)]. \quad (3.12)$$

把(3.9), (3.10)和(3.12)代入(3.8)有

$$\begin{aligned} \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\tau} &\approx \frac{1}{h^2} [\theta \Delta_+ (a_i \Delta_- u(x_i, t_{n+1})) \\ &+ (1-\theta) \Delta_+ (a_i \Delta_- u(x_i, t_n))]. \end{aligned}$$

其中  $\Delta_+$  和  $\Delta_-$  分别表示向前差分及向后差分. 由此得到差分格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} [\theta \Delta_+ (a_i \Delta_- u_i^{n+1}) + (1-\theta) \Delta_+ (a_i \Delta_- u_i^n)]. \quad (3.13)$$

其中  $a_i$  由(3.11)决定. 当  $\theta = 0$  时为古典显式格式. 当  $\theta = 1$  时为古典隐式格式. 当  $\theta = \frac{1}{2}$  时为 Crank-Nicolson 格式.

上述构造的差分格式是从扩散方程的积分出发, 通过插值导

出的, 因此把这种构造方法称为积分插值法. 不难求出, 当  $\theta = \frac{1}{2}$  时, 格式(3.13)的精度为  $O(\tau^2 + h^2)$ , 当  $\theta \neq \frac{1}{2}$  时, 格式(3.13)的精度为  $O(\tau + h^2)$ .

### 3.3 变系数差分格式的稳定性

在变系数差分格式的稳定性讨论中, 常用的有“冻结”系数法及能量法. 冻结系数法在使用上很简单, 因此在实际计算中经常使用, 但是不很严格. 能量方法是严格的, 但推导往往很费事. 两者都仅给出稳定性的充分条件.

“冻结”系数法在第三章中已用多次, 所以不再详细叙述. 利用“冻结”系数法可以求得差分格式(3.3)的稳定性条件为

$$\max_{\alpha} \alpha, \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (3.14)$$

差分格式(3.13), 当  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  时, 稳定性条件为

$$\max_{\alpha} \alpha, \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}, \quad (3.15)$$

当  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$  时, 则无条件稳定.

下面我们将用能量方法讨论差分格式(3.13)的稳定性. 在第二章中我们曾经讨论了初值问题的差分格式(3.13) ( $\theta=0$ ) 在极大范数下的稳定性. 在此我们将考虑在离散的  $L_2$  范数下的稳定性. 考虑初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), 0 < x < 1, \end{cases} \quad (3.17)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u(1, t) = 0, 0 < t \leq T. \end{cases} \quad (3.18)$$

差分方法中应用的能量方法, 本质上是微分方程中能量方法的离散模拟. 为比较起见, 首先推导微分方程初值问题(3.16)至(3.18)的解所满足的积分不等式.

用  $u$  乘方程(3.16)的两边并在  $(0, 1)$  上对  $x$  进行积分

$$\int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial t} dx = \int_0^1 u \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx.$$

注意到

$$\begin{aligned} \int_0^1 u \frac{\partial u}{\partial t} dx &= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 u^2 dx, \\ \int_0^1 u \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx &= u k \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_0^1 - \int_0^1 k(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx. \end{aligned}$$

利用边界条件(3.18)有

$$\int_0^1 u \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx = - \int_0^1 k(x) \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx.$$

由于  $0 < k_* \leq k(x) \leq k^*$ , 所以有

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^1 [u(x, t)]^2 dx \leq 0.$$

由此得出

$$\int_0^1 [u(x, t)]^2 dx \leq \int_0^1 [u(x, 0)]^2 dx = \int_0^1 [u_0(x)]^2 dx.$$

如果引入数积和范数

$$(u, w) = \int_0^1 u w dx, \quad \|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

那么就有

$$\|u(t)\| \leq \|u_0\|.$$

此不等式说明这个初值问题是适定的.

下面考虑差分格式(3.13)的稳定性. 将区间  $[0, 1]$  剖分为  $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_J = 1, x_j = jh, Jh = 1$ . 这样差分格式(3.13)为

$$\begin{cases} \frac{1}{\tau} (u_j^{n+1} - u_j^n) = \frac{1}{h^2} [\theta \Delta_+(a, \Delta_- u_j^{n+1}) + (1-\theta) \Delta_+(a, \Delta_- u_j^n)], \\ j = 1, 2, \dots, J-1, \end{cases} \quad (3.19)$$

$$u_j^0 = u_0(x_j), \quad j = 1, 2, \dots, J-1, \quad (3.20)$$

$$u_0^n = u_{j0}^n, \quad n \geq 0. \quad (3.21)$$

相应于连续情况的范数,对离散后定义数积和范数如下,  $u$  和  $v$  的数积

$$(u, v)_h = \sum_{i=1}^{J-1} u_i v_i h,$$

$u$  的范数

$$\|u\|_h = \sqrt{(u, u)_h}.$$

在给出稳定性证明之前,先叙述一个相应于分部积分的分部求和公式.

设  $u_i, v_i, j=0, 1, \dots, J-1, J$  皆为实数并有  $u_0 = u_J = 0$ , 则有

$$\sum_{i=1}^{J-1} u_i \Delta_+ v_i = - \sum_{i=1}^J v_i \Delta_- u_i. \quad (3.22)$$

此式证明是容易的. 首先注意到

$$\begin{aligned} u_{i+1} v_{i+1} - u_i v_i &= u_{i+1} v_{i+1} - u_i v_{i+1} + u_i v_{i+1} - u_i v_i \\ &= (\Delta_- u_{i+1}) v_{i+1} + u_i \Delta_+ v_i, \end{aligned}$$

上式对  $j$  求和有

$$\sum_{i=0}^{J-1} (u_{i+1} v_{i+1} - u_i v_i) = \sum_{i=0}^{J-1} (\Delta_- u_{i+1}) v_{i+1} + \sum_{i=0}^{J-1} u_i \Delta_+ v_i.$$

由于  $u_0 = u_J = 0$ , 因此有

$$\sum_{i=0}^{J-1} (u_{i+1} v_{i+1} - u_i v_i) = u_J v_J - u_0 v_0 = 0.$$

所以得到

$$\sum_{i=0}^{J-1} (\Delta_- u_{i+1}) v_{i+1} = - \sum_{i=0}^{J-1} u_i \Delta_+ v_i.$$

利用指标变换有

$$\sum_{i=0}^{J-1} (\Delta_- u_{i+1}) v_{i+1} = \sum_{i=1}^J (\Delta_- u_i) v_i$$

由此(3.22)证得.

我们先对差分格式(3.19)中  $\theta=0$  进行证明, 然后再对一般  $\theta$  进行.

用  $(u_i^{n+1} + u_i^n)h$  来乘(3.19), 并对  $j$  求和

$$\sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+1})^2 h - \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^n)^2 h = \lambda \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+1} + u_j^n) \Delta_+ (a_j \Delta_- u_j^n) h,$$

其中  $\lambda = \tau/h^2$ . 上式也可以写成

$$\|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 = \lambda \sum_{j=1}^{J-1} (u_j^{n+1} + u_j^n) \Delta_+ (a_j \Delta_- u_j^n) h.$$

利用分部求和公式(3.22)得

$$\|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 = -\lambda \sum_{i=1}^J a_i \Delta_- u_i^n \Delta_- (u_i^{n+1} + u_i^n) h.$$

此式化为

$$\|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 = -\lambda \sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^n)^2 h - \lambda \sum_{i=1}^J a_i \Delta_- u_i^n \Delta_- u_i^{n+1} h \quad (3.23)$$

令

$$E_n = \|u^n\|_h^2 - \frac{1}{2} \lambda \sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^n)^2 h,$$

显然有

$$E_n \leq \|u^n\|_h^2. \quad (3.24)$$

容易得到

$$E_{n+1} - E_n = \|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^{n+1})^2 h +$$



$$+\frac{\lambda}{2}\sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^n)^2 h.$$

利用(3.23), 可以得

$$\begin{aligned} E_{n+1} - E_n &= -\lambda \sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^n)^2 h - \lambda \sum_{i=1}^J a_i \Delta_- u_i^n \Delta_- u_i^{n+1} h \\ &\quad - \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^{n+1})^2 h + \frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^n)^2 h \\ &= -\frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^J a_i \{ (\Delta_- u_i^n)^2 + 2 \Delta_- u_i^n \Delta_- u_i^{n+1} + (\Delta_- u_i^{n+1})^2 \} h \\ &= -\frac{\lambda}{2} \sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^n + \Delta_- u_i^{n+1})^2 h \leq 0. \end{aligned}$$

因此有

$$E_{n+1} \leq E_n. \quad (3.25)$$

注意到,

$$(\Delta_- u_i^n)^2 \leq 2[(u_i^n)^2 + (u_{i-1}^n)^2].$$

由  $E_n$  的定义得

$$\begin{aligned} E_n &\geq \|u^n\|_h^2 - \lambda \sum_{i=1}^J a_i [(u_i^n)^2 + (u_{i-1}^n)^2] h \\ &\geq \|u^n\|_h^2 - \lambda \max_i a_i \sum_{i=1}^J [(u_i^n)^2 + (u_{i-1}^n)^2] h \\ &\geq (1 - 2\lambda \max_i a_i) \|u^n\|_h^2. \end{aligned}$$

如果满足条件

$$(\max_i a_i) \lambda < \frac{1}{2}, \quad (3.26)$$

则有

$$\|u^n\|_h^2 \leq \frac{1}{1-2\lambda \max_i \alpha_i} E_n.$$

利用(3.25)及(3.24)可以得到

$$\|u^n\|_h^2 \leq \frac{1}{1-2\lambda \max_i \alpha_i} \|u^0\|_h^2.$$

令  $K = (1-2\lambda \max_i \alpha_i)^{-1}$ , 则有

$$\|u^n\|_h^2 \leq K \|u^0\|_h^2.$$

由此得出, 当  $\theta=0$  时, 差分格式(3.19)在条件(3.26)之下是稳定的. 条件(3.26)称为稳定性条件. 可以看出, 它与“冻结”系数法求出的条件是相仿的.

现在对  $\theta(0 < \theta \leq 1)$  来证明差分格式(3.19)的稳定性. 仿  $\theta=0$  的证明. 用  $(u_j^{n+1} + u_j^n)h$  来乘(3.19)的两边并对  $j$  求和得

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 &= \lambda \sum_{j=1}^{J-1} [\theta \Delta_+ (\alpha_j \Delta_- u_j^{n+1}) \\ &\quad + (1-\theta) \Delta_+ (\alpha_j \Delta_- u_j^n)] (u_j^{n+1} + u_j^n) h. \end{aligned}$$

利用分部求和公式(3.22)得

$$\begin{aligned} \|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 &= -\lambda \sum_{j=1}^J \theta \alpha_j (\Delta_- u_j^{n+1})^2 h \\ &\quad - \lambda \sum_{j=1}^J \theta \alpha_j \Delta_- u_j^n \Delta_- u_j^{n+1} h \\ &\quad - \lambda \sum_{j=1}^J (1-\theta) \alpha_j (\Delta_- u_j^n)^2 h \\ &\quad - \lambda \sum_{j=1}^J (1-\theta) \alpha_j \Delta_- u_j^n \Delta_- u_j^{n+1} h. \end{aligned} \quad (3.27)$$

仿  $\theta=0$ , 要引入  $E_n$  使  $E_n \leq \|u^n\|_h^2$  及  $E_{n+1} \leq E_n$ , 这样就立即可以得出差分格式的稳定性. 令

$$\tilde{E}_n = \|u^n\|_k^2 - \alpha \lambda \sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^n)^2 h,$$

其中  $\alpha$  是一个待定的常数, 先选取  $\alpha$  使其满足

$$\tilde{E}_{n+1} \leq \tilde{E}_n.$$

$$\tilde{E}_{n+1} - \tilde{E}_n = \|u^{n+1}\|_k^2 - \|u^n\|_k^2$$

$$- \alpha \lambda \sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^{n+1})^2 h + \alpha \lambda \sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^n)^2 h.$$

利用(3.27)有

$$\begin{aligned} \tilde{E}_{n+1} - \tilde{E}_n &= -\lambda \sum_{i=1}^J \theta a_i (\Delta_- u_i^{n+1})^2 h \\ &\quad - \lambda \sum_{i=1}^J \theta a_i \Delta_- u_i^n \Delta_- u_i^{n+1} h \\ &\quad - \lambda \sum_{i=1}^J (1-\theta) a_i (\Delta_- u_i^n)^2 h \\ &\quad - \lambda \sum_{i=1}^J (1-\theta) a_i \Delta_- u_i^n \Delta_- u_i^{n+1} h \\ &\quad - \alpha \lambda \sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^{n+1})^2 h + \alpha \lambda \sum_{i=1}^J a_i (\Delta_- u_i^n)^2 h \\ &= -\lambda \sum_{i=1}^J (\theta + \alpha) a_i (\Delta_- u_i^{n+1})^2 h \\ &\quad - \lambda \sum_{i=1}^J (1 - (\theta + \alpha)) a_i (\Delta_- u_i^n)^2 h \\ &\quad - \lambda \sum_{i=1}^J a_i \Delta_- u_i^n \Delta_- u_i^{n+1} h. \end{aligned}$$

由此可见,如果

$$\theta + \alpha = \frac{1}{2}, 1 - (\theta + \alpha) = \frac{1}{2}, \quad (3.28)$$

那么有

$$\tilde{E}_{n+1} - \tilde{E}_n = -\frac{1}{2}\lambda \sum_{i=1}^J \alpha_i [\Delta_- u_i^{n+1} + \Delta_- u_i^n]^2 h \leq 0,$$

即有  $\tilde{E}_{n+1} \leq \tilde{E}_n$ . 满足条件(3.28)的  $\alpha$  可取  $\alpha = \frac{1}{2} - \theta$ , 此时

$$\tilde{E}_n = \|u^n\|_A^2 - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \lambda \sum_{i=1}^J \alpha_i (\Delta_- u_i^n)^2 h.$$

下面分两种情况进行讨论:

(i)  $\frac{1}{2} - \theta > 0$ , 此时有  $\tilde{E}_n \leq \|u^n\|_A^2$ , 此外

$$\begin{aligned} \tilde{E}_n &\geq \|u^n\|_A^2 - \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \lambda \max_i \alpha_i \sum_{i=1}^J (\Delta_- u_i^n)^2 h \\ &\geq \|u^n\|_A^2 - 4 \left(\frac{1}{2} - \theta\right) \lambda (\max_i \alpha_i) \|u^n\|_A^2 \\ &= [1 - 2(1 - 2\theta) \lambda \max_i \alpha_i] \|u^n\|_A^2. \end{aligned}$$

如果

$$1 - 2(1 - 2\theta) \lambda \max_i \alpha_i > 0,$$

则

$$(\max_i \alpha_i) \lambda < \frac{1}{2(1 - 2\theta)}, \quad (3.29)$$

那么有

$$\|u^n\|_A^2 \leq \frac{1}{1 - 2(1 - 2\theta) \lambda \max_i \alpha_i} \tilde{E}_n$$

$$\leq \frac{1}{1-2(1-2\theta)\lambda \max_i \alpha_i} \|u^0\|_1^2.$$

所以格式(3.19)在条件(3.29)下是稳定的.

(ii)  $\frac{1}{2}-\theta \leq 0$ , 此时

$$\tilde{E}_n = \|u^n\|_1^2 + \left(\theta - \frac{1}{2}\right) \lambda \sum_{i=1}^J \alpha_i (\Delta u^n)^2 h$$

$$\leq \|u^n\|_1^2 + 4\left(\theta - \frac{1}{2}\right) \lambda \max_i \alpha_i \|u^n\|_1^2$$

$$= (1 + 2(2\theta - 1)\lambda \max_i \alpha_i) \|u^n\|_1^2.$$

而显然有

$$\tilde{E}_n \geq \|u^n\|_1^2.$$

由此我们可以得到

$$\|u^n\|_1^2 \leq \tilde{E}_n \leq \dots \leq \tilde{E}_0 \leq (1 + 2(2\theta - 1)\lambda \max_i \alpha_i) \|u^0\|_1^2.$$

这说明差分格式(3.19)无条件稳定. 综合上述两种情况, 我们得

出, 当  $\theta \geq \frac{1}{2}$  时, 差分格式(3.19)无条件稳定. 当  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  时, 差

分格式(3.19)在条件(3.29)下稳定, 此结论与常系数类似.

### 3.4 Keller 盒式格式

H. B. Keller 在 1971 年提出了一个很有趣的差分格式, 在线性和非线性抛物型方程的求解中都取得了很好的效果. 由于方法的推导是在一个小矩形上进行, 因此称作盒式格式

考虑初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + c(x)u + s(x, t), \\ 0 < x < 1, t > 0, \end{cases} \quad (3.30)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), 0 < x < 1, \quad (3.31)$$

$$\alpha_0 u(0, t) + \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x}(0, t) = \alpha_2(t), t > 0, \quad (3.32)$$

$$\beta_0 u(1, t) + \beta_1 \frac{\partial u}{\partial x}(1, t) = \beta_2(t), t > 0, \quad (3.33)$$

其中  $k(x) \geq k_0 > 0$ . 首先把方程(3.30)化为等价的方程组, 那么(3.30)至(3.33)就化为

$$\begin{cases} k(x) \frac{\partial u}{\partial x} = v(x, t), \\ \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial v}{\partial x} + c(x)u + s(x, t), \\ u(x, 0) = u_0(x), \\ \alpha_0 u(0, t) + \alpha_1 \frac{1}{k(0)} v(0, t) = \alpha_2(t), \\ \beta_0 u(1, t) + \beta_1 \frac{1}{k(1)} v(1, t) = \beta_2(t). \end{cases} \quad (3.34)$$

令

$$x_{i-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i-1}),$$

$$t_{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t_n + t_{n-1}),$$

$$\phi_i^{n-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(\phi_i^n + \phi_i^{n-1}),$$

$$\phi_{i-\frac{1}{2}}^n = \frac{1}{2}(\phi_i^n + \phi_{i-1}^n),$$

其中  $\phi$  可以表示  $u$  或  $v$ .

在小矩形  $\mathcal{D} = \{(x, t); t_{n-1} \leq t \leq t_n, x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$  上用中心差分来构造(3.34)的差分格式

$$\begin{cases} k_{j-\frac{1}{2}} \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = v_{j-\frac{1}{2}}^n, \\ \frac{u_{j-\frac{1}{2}}^n - u_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{\tau} = \frac{v_{j-\frac{1}{2}}^n - v_{j-\frac{1}{2}}^{n-1}}{h} + c_{j-\frac{1}{2}} u_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}} + g_{j-\frac{1}{2}}^{n-\frac{1}{2}}, \\ u_j^0 = u_0(x_j), \\ \alpha_0 u_0^n + \frac{1}{k(0)} \alpha_1 v_0^n = \alpha_2(t_n), \\ \beta_0 u_j^n + \frac{1}{k(1)} \beta_1 v_j^n = \beta_2(t_n). \end{cases} \quad (3.35)$$

差分格式(3.35)称为 **Keller 盒式格式**

### 3.5 隐式方程的解法

利用隐式差分格式解微分方程的初边值问题，一般都具有稳定性好的优点。但也要注意，在每个时间步长上必须求解线性代数方程组。现在以差分格式(3.4)为例，说明求解过程中应注意的问题。先把(3.4)式改写为

$$-A_j u_{j+1}^{n+1} + B_j u_j^{n+1} - C_j u_{j-1}^{n+1} = D_j, \quad j=1, 2, \dots, J-1, \quad (3.36)$$

其中

$$A_j = \frac{1}{2} - \frac{1}{12 \alpha_{j+1}},$$

$$B_j = 1 + \frac{5}{6 \alpha_j},$$

$$C_j = \frac{1}{2} - \frac{1}{12 \alpha_{j-1}},$$

$$D_j = \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{12 \alpha_{j+1}} \right) u_{j+1}^n - \left( 1 - \frac{5}{6 \alpha_j} \right) u_j^n \\ + \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{12 \alpha_{j-1}} \right) u_{j-1}^n,$$

$$\alpha_j = \lambda a_j.$$

求解方程组(3.36)，我们必须在  $j=0, j=J$  处附以边界条件，比如说  $u_0^n = u_J^n = 0$ 。可以看出，(3.36)的系数矩阵是三对角矩阵。

采用追赶法求解是相当方便的, 但应注意用追赶法求解要满足一定的条件, 其条件是:

- (i)  $|B_1| > |C_1| > 0$ ,
- (ii)  $|B_j| \geq |A_j| + |C_j|$ ,  $A_j, C_j \neq 0$ ,  $j = 2, \dots, J-2$ ,
- (iii)  $|B_{J-1}| > |A_{J-1}| > 0$ .

对于(3.36)来说, 如果  $\alpha_i > \frac{1}{6}$ , 则我们有

$$-A_i > 0, B_i > 0, C_i > 0.$$

并满足条件(i), (ii), (iii).

由此看来, 求解隐式差分格式还是受到一定条件的制约, 一般空间前长预先剖分好, 所以应调节时间步长  $\tau$  使得求解条件满足.

## § 4 具有间断系数的扩散方程

间断系数的扩散方程在实际问题中经常碰到, 比如, 在不同介质中的扩散问题. 本节着重讨论差分格式的截断误差, 其余问题, 如收敛性, 可参见[30].

考虑扩散方程的初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( k(x) \frac{\partial u}{\partial x} \right), 0 < x < 1, 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (4.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), 0 < x < 1, \end{cases} \quad (4.2)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u(1, t) = 0, 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (4.3)$$

其中  $0 < k_* \leq k(x) \leq k^*$ ,  $k_*$ ,  $k^*$  为两个常数.

假定  $k(x)$  在  $x = \xi$  处有第一类间断点, 而除  $x = \xi$  外,  $k(x)$  是充分光滑的. 还假定初边值问题(4.1)至(4.3)的解  $u$  在系数间断处满足联结条件



$$\begin{cases} u_l(t) = u_r(t), \\ \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_l(t) = \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_r(t). \end{cases} \quad (4.4)$$

$$(4.5)$$

其中  $u_l(t) = u(\xi - 0, t)$ ,  $u_r(t) = u(\xi + 0, t)$ .

网格剖分如下:  $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_J = 1$ ,  $x_j = jh$ ,  $h = \frac{1}{J}$ ;

$t_n = n\tau$ ,  $n \geq 0$ ;  $\tau$  和  $h$  分别为时间步长和空间步长.

采用积分插值法可以构造出逼近(4.1)的差分格式(见§3)

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \Delta_+ (a_j \Delta_- u_j^n), \quad j = 1, 2, \cdots, J-1, \quad (4.6)$$

其中

$$a_j = h \left\{ \int_{x_{j-1}}^{x_j} \frac{1}{k(x)} dx \right\}^{-1}. \quad (4.7)$$

假定  $\xi = x_i + \theta h$ ,  $0 \leq \theta \leq 1$ ,  $i \geq 1$ . 如果  $j \neq i, i+1$ , 那么容易求出差分格式(4.6)的误差

$$\begin{aligned} E_j^n &= \frac{1}{h^2} \Delta_+ (a_j \Delta_- u(x_i, t_n)) \\ &\quad - \frac{1}{\tau} (u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)) \\ &= O(\tau + h^2). \end{aligned}$$

其中  $u$  是初边值问题(4.1)至(4.3)的光滑解. 对于  $j = i$  或  $i+1$ , 那么  $k(x)$  有间断出现. 此时差分格式(4.6)的误差将如何, 这是要特别讨论的. 下面来考虑这个问题.

考虑

$$\begin{aligned} hE_i^n &= a_{i+1} \frac{\Delta_- u(x_{i+1}, t_n)}{h} - a_i \frac{\Delta_- u(x_i, t_n)}{h} \\ &\quad - h \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\tau}. \end{aligned} \quad (4.8)$$

为方便起见, 令

$$w_i^n = a_i \frac{\Delta_- u(x_i, t_n)}{h}.$$

由于在区间  $(x_{i-1}, x_i)$  内  $k$  和初边值问题 (4.1) 至 (4.3) 的解  $u$  都是光滑的, 因此有

$$\begin{aligned} w_i^n &= \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{i-\frac{1}{2}}^n + O(h^2) \\ &= \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n - \left( \theta + \frac{1}{2} \right) h \left[ \frac{\partial}{\partial x} k \frac{\partial u}{\partial x} \right]_i^n + O(h^2). \end{aligned} \quad (4.9)$$

利用 Taylor 级数展开有

$$\begin{aligned} u(x_i, t_n) &= u(\xi, t_n) - \theta h \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n \\ &\quad + \frac{1}{2} \theta^2 h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + O(h^3), \\ u(x_{i+1}, t_n) &= u(\xi, t_n) + (1-\theta) h \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_r^n \\ &\quad + \frac{1}{2} (1-\theta)^2 h^2 \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_r^n + O(h^3). \end{aligned}$$

由此得到

$$\begin{aligned} w_{i+1}^n &= a_{i+1} \frac{\Delta_- u(x_{i+1}, t_n)}{h} \\ &= a_{i+1} \frac{1}{h} \left[ (1-\theta) h \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_r^n \right. \\ &\quad \left. + \theta h \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n \right] + O(h) \\ &= a_{i+1} \left[ \frac{1-\theta}{k_r} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_r^n + \frac{\theta}{k_i} \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n \right] + O(h). \end{aligned}$$

由假定  $\left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_r^n = \left( k \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n$ , 不妨记其为  $w(\xi, t_n)$ , 这样有

$$w_{i+1}^n = a_{i+1} \left( \frac{\theta}{k_i} + \frac{1-\theta}{k_r} \right) w(\xi, t_n) + O(h). \quad (4.10)$$

把(4.9), (4.10)代入(4.8)就得到

$$hE_i^n = \left[ a_{i+1} \left( \frac{\theta}{k_i} + \frac{1-\theta}{k_r} \right) - 1 \right] w(\xi, t_n) + O(h). \quad (4.11)$$

下面我们来估计  $a_{i+1}$ . 由定义知

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{i+1}} &= \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{1}{k(x)} dx \\ &= \int_0^1 \frac{1}{k(x_i + sh)} ds \\ &= \int_0^\theta \frac{1}{k(x_i + sh)} ds + \int_\theta^1 \frac{1}{k(x_i + sh)} ds \\ &= \int_0^\theta \left[ \frac{1}{k_i} + (s-\theta)h \left( \frac{1}{k} \right)'_i + O(h^2) \right] ds \\ &\quad + \int_\theta^1 \left[ \frac{1}{k_r} + (s-\theta)h \left( \frac{1}{k} \right)'_r + O(h^2) \right] ds \\ &= \frac{\theta}{k_i} + \frac{1-\theta}{k_r} + O(h). \end{aligned}$$

把这个表达式代入(4.11), 最后得到

$$hE_i^n = O(h). \quad (4.12)$$

由此可以看出, 当系数存在第一类间断点时, 截断误差就要下降.

## § 5 Richardson外推方法

利用收敛的差分格式来求解偏微分方程的定解问题(初值问题或初边值问题), 原则上当  $\tau, h$  取充分小时, 差分格式的解与偏微分方程定解问题的解之差就可以充分小. 但在实际求解中, 由于计算费用, 计算机的速度等因素的制约, 有时难于实现. 因此构造高精度的计算格式就成为很迫切的问题. 高精度的差分格式已作过讨论, 比如 Crank-Nicolson 格式与古典隐式格式相比较, 一

般说来, Crank-Nicolson 格式就好些. 另一个方法就是通过网格序列来增加逼近的精度. Richardson 外推方法就是其中之一.

考虑扩散方程的初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, 0 < x < 1, 0 < t \leq T, a > 0, \end{cases} \quad (5.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), 0 < x < 1, \end{cases} \quad (5.2)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = u(1, t) = 0, 0 < t \leq T, \end{cases} \quad (5.3)$$

设网格为

$$x_j = jh, j = 0, 1, \dots, J; Jh = 1,$$

$$t_n = n\tau, n \geq 0.$$

取古典隐式格式

$$\begin{cases} \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} = a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \end{cases} \quad (5.4)$$

$$\begin{cases} u_j^0 = u_0(x_j), \end{cases} \quad (5.5)$$

$$\begin{cases} u_0^n = u_J^n = 0, \end{cases} \quad (5.6)$$

来逼近(5.1)至(5.3). 在构造外推格式之前, 先证明二个引理.

**引理 5.1** 设  $\eta_j^n$  是下面差分问题的解,

$$\begin{cases} \frac{\eta_j^n - \eta_j^{n-1}}{\tau} = a \frac{\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + \eta_{j-1}^n}{h^2} + \sigma_j^n, \\ j = 1, 2, \dots, J-1, \end{cases} \quad (5.7)$$

$$\begin{cases} \eta_j^0 = 0, \end{cases} \quad (5.8)$$

$$\begin{cases} \eta_0^n = \eta_J^n = 0, \end{cases} \quad (5.9)$$

则  $\eta_j^n$  满足估计式

$$\max_{0 \leq j \leq J} |\eta_j^n| \leq n\tau \max_{\substack{0 \leq j \leq J \\ 1 \leq n \leq N}} |\sigma_j^n|. \quad (5.10)$$

**证明** 采用归纳法进行证明. 对于  $n=0$ , 则由初始条件(5.8)就可得到(5.10). 现设  $n=m$  时(5.10)成立, 考虑  $n=m+1$  的情况. 取  $j_0$  使

$$|\eta_{j_0}^{m+1}| = \max_{0 \leq j \leq J} |\eta_j^{m+1}|.$$

显然  $j_0 \neq 0, J$ , 利用差分方程(5.7)有

$$\begin{aligned} \left( \frac{1}{\tau} + \frac{2a}{h^2} \right) |\eta_{j_0}^{n+1}| &= \left| \frac{1}{\tau} \eta_{j_0}^n + \frac{a}{h^2} \eta_{j_0-1}^{n+1} + \frac{a}{h^2} \eta_{j_0+1}^{n+1} + \sigma_{j_0}^{n+1} \right| \\ &\leq \frac{2a}{h^2} |\eta_{j_0}^{n+1}| + \frac{1}{\tau} |\eta_{j_0}^n| + |\sigma_{j_0}^{n+1}|, \end{aligned}$$

由此得出

$$\frac{1}{\tau} |\eta_{j_0}^{n+1}| \leq \frac{1}{\tau} |\eta_{j_0}^n| + |\sigma_{j_0}^{n+1}|.$$

改写为

$$|\eta_{j_0}^{n+1}| \leq |\eta_{j_0}^n| + \tau |\sigma_{j_0}^{n+1}|.$$

利用归纳假设

$$\begin{aligned} |\eta_{j_0}^{n+1}| &\leq m\tau \max_{\substack{0 \leq j \leq J \\ 1 \leq n' \leq m}} |\sigma_j^{n'}| + \tau |\sigma_{j_0}^{n+1}| \\ &\leq (m+1)\tau \max_{\substack{1 \leq n' \leq m+1 \\ 0 \leq j \leq J-1}} |\sigma_j^{n'}|. \end{aligned}$$

由此直接可以得到(5.10).

利用引理 5.1 可以得出相应于问题(5.4)至(5.6)的齐次问题 (即  $u_0(x_j) = 0, j = 0, 1, 2, \dots, J$ ) 只有零解, 因此(5.4)至(5.6)有唯一解.

**引理 5.2** 设  $u_j^n$  是差分格式(5.4)至(5.6)的解, 那么

$$\begin{aligned} u_j^n &= u(x_j, t_n) + \tau v(x_j, t_n) + h^2 w(x_j, t_n) + \eta_j^n, \quad (5.11) \\ j &= 0, 1, \dots, J, \end{aligned}$$

其中  $u$  是问题(5.1)至(5.3)的光滑解,  $v$  是问题

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t} = a \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ v(x, 0) = 0, 0 < x < 1, \\ v(0, t) = v(1, t) = 0, 0 < t \leq T \end{cases} \quad (5.12)$$

的解,  $w$  是问题

$$\begin{cases} \frac{\partial w}{\partial t} = a \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{a}{12} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4}, 0 < x < 1, 0 < t \leq T \\ w(x, 0) = 0, 0 < x < 1, \\ w(0, t) = w(1, t) = 0, 0 < t \leq T \end{cases} \quad (5.13)$$

的解,  $\eta_i^n$  满足估计式

$$\max_{0 \leq j \leq J} |\eta_j^n| \leq c_1(\tau^2 + h^4), \quad n\tau \leq T. \quad (5.14)$$

**证明** 把(5.11)的右边代入差分方程(5.4),  $u, v, w$  为满足所述问题的光滑解, 如果得估计式(5.14), 则引理 5.2 证完. 把(5.11)的右边代入(5.4)有

$$\begin{aligned} & \frac{\eta_i^n - \eta_i^{n-1}}{\tau} - a \frac{\eta_{i+1}^n - 2\eta_i^n + \eta_{i-1}^n}{h^2} + \frac{1}{\tau} \{ (u + \tau v + h^2 w)_i^n \\ & - (u + \tau v + h^2 w)_i^{n-1} \} - a \frac{1}{h^2} \{ (u + \tau v + h^2 w)_{i+1}^n \\ & - 2(u + \tau v + h^2 w)_i^n + (u + \tau v + h^2 w)_{i-1}^n \} \\ & = \frac{\eta_i^n - \eta_i^{n-1}}{\tau} - a \frac{\eta_{i+1}^n - 2\eta_i^n + \eta_{i-1}^n}{h^2} \\ & + \left( \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial v}{\partial t} + h^2 \frac{\partial w}{\partial t} \right)_i^n + \rho_i^n \\ & = a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right)_i^n + \tilde{\rho}_i^n, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} |\rho_i^n| & \leq c_2 \tau^2 + c_3 \tau h^2 \leq \left( c_2 + \frac{c_3}{2} \right) \tau^2 + \frac{c_3}{2} h^4, \\ |\tilde{\rho}_i^n| & \leq c_4 h^4 + c_5 \tau h^2 \leq \frac{1}{2} c_5 \tau^2 + \left( c_4 + \frac{1}{2} c_5 \right) h^4. \end{aligned}$$

利用  $u, v, w$  是相应的初边值问题的解, 因此有

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\tau}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \tau \frac{\partial v}{\partial t} + h^2 \frac{\partial w}{\partial t} \\ & = a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + h^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \tau \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \right) = 0. \end{aligned}$$

所以我们得到

$$\frac{\eta_j^n - \eta_j^{n-1}}{\tau} = a \frac{\eta_{j+1}^n - 2\eta_j^n + \eta_{j-1}^n}{h^2} + \sigma_j^n, \\ j=1, 2, \dots, J-1; n\tau \leq T, \quad (5.15)$$

其中

$$|\sigma_j^n| \leq c_6(\tau^2 + h^4).$$

注意到,  $\eta_j^n$  满足(5.11), 再利用  $u_j^n$  以及  $u, v, w$  的初边界条件有

$$\eta_0^n = \eta_J^n = 0, n\tau \leq T, \quad (5.16)$$

$$\eta_j^0 = 0, j=1, 2, \dots, J-1. \quad (5.17)$$

由引理 5.1 知, 差分格式(5.15)至(5.17)有估计式

$$|\eta_j^n| \leq T c_6(\tau^2 + h^4), n\tau \leq T, \quad (5.18)$$

引理证毕.

下面来构造差分格式. 首先用步长  $\tau, h$  进行计算得  $u_h^\tau$ , 再用

步长  $\frac{\tau}{4}$  及  $\frac{h}{2}$  进行计算得  $u_{\frac{h}{2}}^{\frac{\tau}{4}}$ . 线性组合有

$$\bar{u}_j^n = \frac{4}{3} u_{\frac{h}{2}}^{\frac{\tau}{4}}(x_j, t_n) - \frac{1}{3} u_h^\tau(x_j, t_n).$$

利用引理 5.2 有

$$u_h^\tau(x_j, t_n) = u(x_j, t_n) + h^2 w(x_j, t_n) + \tau v(x_j, t_n) + O(\tau^2 + h^4),$$

$$u_{\frac{h}{2}}^{\frac{\tau}{4}}(x_j, t_n) = u(x_j, t_n) + \frac{h^2}{4} w(x_j, t_n) \\ + \frac{\tau}{4} v(x_j, t_n) + O(\tau^2 + h^4).$$

由此可以得到

$$\bar{u}_j^n = u(x_j, t_n) + O(\tau^2 + h^4).$$

我们知道, 古典隐式格式的截断误差为  $O(\tau + h^2)$ , 这里采用了 Richardson 外推方法使截断误差提高到  $O(\tau^2 + h^4)$ .

## § 6 对流扩散方程

考虑简单的对流扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, |x| < \infty, t > 0, \quad (6.1)$$

其中  $a, c$  为常数,  $a > 0$ . 如果给定初始条件

$$u(x, 0) = u_0(x), |x| < \infty, \quad (6.2)$$

那么(6.1)和(6.2)构成了初值问题. 我们已经讨论过对流方程和扩散方程的差分方法, 两者结合起来就可以得出求解对流扩散方程的差分格式. 但另一方面, 对流扩散方程也有自己的特点, 因此也有不同的差分格式出现. 我们既讨论一般的方法, 也讨论适用于对流占优问题的解法.

### 6.1 中心显式格式

时间导数用向前差商, 空间导数用中心差商来逼近, 这样就得到了逼近(6.1)的差分格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = a \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}. \quad (6.3)$$

显然, 其格式的截断误差是  $O(\tau + h^2)$ . 如果  $a = 0$ , 那么(6.3)就是对流方程的一个差分格式. 我们知道, 这是一个不稳定的差分格式. 下面对于  $a \neq 0$  来讨论差分格式(6.3)的稳定性. 先把(6.3)改写成形式

$$u_i^{n+1} = u_i^n - \frac{\lambda}{2}(u_{i+1}^n - u_{i-1}^n) + \mu(u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n),$$

其中  $\lambda = c\tau/h$ ,  $\mu = a\tau/h^2$ . 容易求出这个差分格式的增长因子

$$G(\tau, \omega) = 1 - 2\mu(1 - \cos \omega h) - i\lambda \sin \omega h.$$

其模的平方为



$$\begin{aligned}
|G(\tau, \omega)|^2 &= [1 - 2\mu(1 - \cos\omega h)]^2 + \lambda^2 \sin^2 \omega h \\
&= 1 - 4\mu(1 - \cos\omega h) + 4\mu^2(1 - \cos\omega h)^2 \\
&\quad + \lambda^2 \sin^2 \omega h \\
&= 1 - (1 - \cos\omega h)[4\mu - 4\mu^2(1 - \cos\omega h) \\
&\quad - \lambda^2(1 + \cos\omega h)].
\end{aligned}$$

由于  $1 - \cos\omega h \geq 0$ , 所以  $|G(\tau, \omega)|^2 \leq 1$  (即差分格式稳定) 的充分条件是

$$4\mu - 4\mu^2(1 - \cos\omega h) - \lambda^2(1 + \cos\omega h) \geq 0.$$

改写上式为

$$(2\lambda^2 - 8\mu^2) \frac{1 - \cos\omega h}{2} + 4\mu - 2\lambda^2 \geq 0.$$

注意到,  $\frac{1 - \cos\omega h}{2} \in [0, 1]$ , 所以上面不等式满足的条件为

$$(2\lambda^2 - 8\mu^2) + 4\mu - 2\lambda^2 \geq 0, \quad 4\mu - 2\lambda^2 \geq 0.$$

由此我们得到差分格式(6.3)的稳定性条件是

$$\tau \leq \frac{2a}{c^2} \quad (6.4)$$

和

$$a \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (6.5)$$

## 6.2 修正中心显式格式

设  $u$  是对流扩散方程(6.1)的充分光滑的解, 那么有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - 2ac \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{\partial^3 u}{\partial t^3} = a^3 \frac{\partial^6 u}{\partial x^6} - 3a^2c \frac{\partial^5 u}{\partial x^5} + 3ac^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} - c^3 \frac{\partial^3 u}{\partial x^3}.$$

利用 Taylor 级数展开有

$$\frac{u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)}{\tau} + c \frac{u(x_{j+1}, t_n) - u(x_{j-1}, t_n)}{2h}$$

$$\begin{aligned}
& -a \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2} \\
& = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i + \frac{\tau}{2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right)_i + \frac{\tau^2}{6} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i \\
& \quad + \frac{h^2}{6} c \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i - a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i - \frac{h^2}{12} a \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i + O(\tau^3 + h^4) \\
& = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i - a \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i + \frac{\tau}{2} \left[ a^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i \right. \\
& \quad \left. - 2ac \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \right] + \frac{\tau^2}{6} \left[ a^3 \left(\frac{\partial^6 u}{\partial x^6}\right)_i \right. \\
& \quad \left. - 3a^2c \left(\frac{\partial^5 u}{\partial x^5}\right)_i + 3ac^2 \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i - c^3 \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i \right] \\
& \quad + \frac{h^2}{6} c \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i - \frac{h^2}{12} a \left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i + O(\tau^3 + h^4) \\
& = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i + c \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_i - \left(a - \frac{\tau}{2} c^2\right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i \\
& \quad + \frac{1}{6} c h^2 (1 - 6\mu - \lambda^2) \left(\frac{\partial^3 u}{\partial x^3}\right)_i + \dots
\end{aligned}$$

如果略去高阶导数项,那么可以看出利用中心显式差分求解相当于求解微分方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \left(a - \frac{\tau}{2} c^2\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (6.6)$$

当然当  $\tau$  趋于零时,方程(6.6)与对流扩散方程(6.1)是相同的。但是在差分计算中  $\tau \neq 0$ , 因此采用显式中心差分格式(6.3)来进行计算时,导致了扩散效应的减少。特别当  $\frac{\tau}{2} c^2$  接近于  $a$  时(稳定性条件保证了  $a - \frac{\tau}{2} c^2 \geq 0$ )更为显著

为了使扩散效应不致于减少,设法在差分格式的构造上进行补救,由此导出了修正中心显式格式

$$\frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{\tau} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \left( a + \frac{\tau}{2} c^2 \right) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}. \quad (6.7)$$

显然, 此差分格式逼近对流扩散方程 (6.1) 的截断误差为  $O(\tau + h^2)$ . 下面来讨论差分格式 (6.7) 的稳定性. 把差分格式 (6.7) 与 (6.3) 相比较就可以看出, (6.7) 中的  $\alpha = a + \frac{\tau}{2} c^2$  在形式上相当于 (6.3) 中的  $\alpha$ , 因此可以应用中心显式格式的稳定性条件立即可以得到修正中心显式格式的稳定性条件是

$$\tau \leq \frac{2\alpha}{c^2}$$

和

$$\alpha \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

用  $\alpha$  代入即有

$$\tau \leq \frac{2\alpha}{c^2} + \tau \quad \text{和} \quad \alpha \frac{\tau}{h^2} + \frac{1}{2} c^2 \frac{\tau^2}{h^2} \leq \frac{1}{2}.$$

注意到, 第一个条件是恒成立的, 因此修正中心显式格式的稳定性条件是

$$2\alpha \frac{\tau}{h^2} + c^2 \frac{\tau^2}{h^2} \leq 1. \quad (6.8)$$

我们看到, 对于修正中心显式格式来说, 当  $\alpha = 0$  时, 就化为逼近对流方程的 Lax-Wendroff 格式. Lax-Wendroff 格式的稳定性条件是  $|c|\lambda \leq 1$ , 其实这个条件也可以从 (6.8) 直接得到. 但是, 对于中心显式格式来说, 当  $\alpha = 0$  时, 相应的差分格式是不稳定的.

### 6.3 指数型差分格式

先考虑定态的对流扩散方程

$$d + c \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.9)$$

其中  $d$  为常数。积分(6.9)式可以得到

$$u = \beta_1 e^{\lambda x} + \beta_2 - \frac{d}{c} x, \quad (6.10)$$

其中  $\lambda = \frac{c}{a}$ 。通解(6.10)中有两个待定常数。对空间进行剖分，设  $h$  为空间步长， $x_j = jh$ ， $j = 0, \pm 1, \dots$ ，相应于  $x_j$  上的  $u$  的值记为  $u_j$ ，那么由

$$u_{j-1} = \beta_1 e^{\lambda(j-1)h} + \beta_2 - \frac{d}{c}(j-1)h$$

和

$$u_{j+1} = \beta_1 e^{\lambda(j+1)h} + \beta_2 - \frac{d}{c}(j+1)h,$$

可以得到

$$\beta_1 = \frac{u_{j+1} - u_{j-1} + 2h \frac{d}{c}}{e^{\lambda(j+1)h} - e^{\lambda(j-1)h}},$$

$$\beta_2 = u_{j-1} - \frac{u_{j+1} - u_{j-1} + \frac{d}{c}2h}{e^{\lambda h} - 1} + \frac{d}{c}(j-1)h.$$

由此得出

$$u_j = \frac{u_{j+1} + e^{\lambda h} u_{j-1}}{1 + e^{\lambda h}} - d \frac{h}{c} \frac{e^{\lambda h} - 1}{1 + e^{\lambda h}}.$$

改变写法

$$d = \frac{c[(1 + e^{\lambda h})u_j - (u_{j+1} + e^{\lambda h}u_{j-1})]}{h(1 - e^{\lambda h})}.$$

再改变形式，

$$d = -c \frac{u_{j+1} - u_{j-1}}{2h} - \frac{ch}{2} \frac{1 + e^{\lambda h}}{1 - e^{\lambda h}} \frac{u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}}{h^2}.$$

如果令  $d = \frac{\partial u}{\partial t}$ ，那么定态方程(6.9)就化为我们已经考虑过的对

流扩散方程(6.1). 用向前差商来逼近 $\frac{\partial u}{\partial t}$ , 那么就得到逼近(6.1)

的一个指数型差分格式

$$\begin{aligned} & \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} \\ &= -\frac{ch}{2} \frac{1 + e^{\lambda h}}{1 - e^{\lambda h}} \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}. \end{aligned}$$

注意到

$$\begin{aligned} \frac{1 + e^{\lambda h}}{1 - e^{\lambda h}} &= -\frac{e^{\frac{\lambda h}{2}} + e^{-\frac{\lambda h}{2}}}{e^{\frac{\lambda h}{2}} - e^{-\frac{\lambda h}{2}}} = -\coth\left(\frac{\lambda h}{2}\right) \\ &= -\coth\left(\frac{ch}{2a}\right), \end{aligned}$$

因此指数型差分格式可以改写为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = a\sigma \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}, \quad (6.11)$$

其中

$$\sigma = \frac{ch}{2a} \coth\left(\frac{ch}{2a}\right).$$

一般称 $\sigma$ 为拟合因子.

为讨论差分格式(6.11)的截断误差, 先把它改变形式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_{i+1}^n - u_{i-1}^n}{2h} = a \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} + \rho(u_i^n), \quad (6.12)$$

其中

$$\rho(u_i^n) = a(\sigma - 1) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}.$$

如果在(6.12)中不考虑 $\rho(u_i^n)$ , 那么差分格式就化为中心显式格式, 所以其截断误差为 $O(\tau + h^2)$ . 留下来考虑 $\rho(u_i^n)$ 这一项. 我们知道

$$\frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2} = \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i + O(h^2).$$

此外, 利用 Taylor 级数展开有

$$\coth x = \frac{1}{x} + \frac{x}{3} - \frac{x^3}{45} + \dots,$$

应用到  $a(\sigma-1)$  有

$$\begin{aligned} a(\sigma-1) &= a \left\{ \frac{ch}{2a} - \frac{2a}{ch} + \frac{1}{3} \left( \frac{ch}{2a} \right) + O(h^3) \right\} - 1 \\ &= O(h^2). \end{aligned}$$

由此得到  $\rho(u(x_i, t_n)) = O(h^2)$ . 因此差分格式 (6.11) 的截断误差为  $O(\tau + h^2)$ .

下面来讨论差分格式 (6.11) 的稳定性. 与中心显式格式作形式上的比较, 稳定性条件是

$$\tau \leq \frac{1}{c^2} 2 a \sigma$$

和

$$a \sigma \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (6.13)$$

利用第二个条件可以得到

$$\begin{aligned} \frac{\tau c^2}{2 a \sigma} &= a \sigma \frac{\tau}{h^2} \left( \frac{c^2 h^2}{2 a^2 \sigma^2} \right) \leq \left( \frac{ch}{2 a \sigma} \right)^2 \\ &= \left[ \frac{1}{\coth \left( \frac{ch}{2 a} \right)} \right]^2 \leq 1. \end{aligned}$$

由此得出稳定性的第一个条件. 所以差分格式的稳定性条件为 (6.13).

当  $a \ll |c|$  时, 这就是奇异摄动问题. 在这类问题的数值求解研究中, 指数型差分格式 (6.11) 具有良好的性质, 近几年来受到了充分重视.

#### 8.4 迎风格式

迎风格式就是在中心显式格式中把对流项的中心差商换成由  $c$  的符号所确定的单边差商. 设对流扩散方程(6.1)中  $c > 0$ , 那么逼近(6.1)的迎风格式为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = a \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}, \quad (6.14)$$

显然, 迎风格式的截断误差为  $O(\tau + h)$ .

现在来分析(6.14)的稳定性. 为此先改变(6.14)的形式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = \left( a + \frac{hc}{2} \right) \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}. \quad (6.15)$$

此式与中心显式格式相比较, 稳定性条件为

$$\tau \leq \frac{2}{c^2} \left( a + \frac{hc}{2} \right)$$

和

$$\left( a + \frac{hc}{2} \right) \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (6.16)$$

注意到, 稳定性的第一个条件等价于  $\frac{\tau}{\frac{2a}{c^2} + \frac{h}{c}} \leq 1$ , 而

$$\frac{\tau}{\frac{2a}{c^2} + \frac{h}{c}} = \frac{2a \frac{\tau}{h^2} \left( \frac{ch}{2a} \right)^2}{1 + \frac{ch}{2a}}.$$

利用初等不等式

$$\frac{\left( \frac{ch}{2a} \right)^2}{1 + \frac{ch}{2a}} \leq 1 + \frac{ch}{2a},$$

我们就得到

$$\frac{\frac{\tau}{2a} + \frac{h}{c}}{c^2} \leq 2a \frac{\tau}{h^2} \left(1 + \frac{ch}{2a}\right) = 2 \left(a + \frac{hc}{2}\right) \frac{\tau}{h^2}.$$

利用条件(6.16)就有  $\frac{\tau}{\frac{2a}{c^2} + \frac{h}{c}} \leq 1$ , 因此迎风格式的稳定性条件是 (6.16).

迎风格式是一阶精度的差分格式, 但在实际计算中还是经常采用的, 特别是当对流项系数比扩散项系数大很多的情况, 即所谓对流占优的问题, 采用中心显式格式已不能计算出问题结果, 而用迎风格式可以计算出粗糙的近似结果.

### 6.5 Самарский 格式

采用 Самарский 提出的方法来建立差分格式, 为方便起见, 设  $c > 0$ , 先不考虑对流扩散方程(6.1)而考虑相应的另一个对流扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + c \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{1+R} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad (6.17)$$

其中  $R = \frac{1}{2a}hc$ . 对于(6.17)的迎风格式为

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + c \frac{u_i^n - u_{i-1}^n}{h} = \frac{1}{1+R} a \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2}. \quad (6.18)$$

称差分格式(6.18)为逼近对流扩散方程(6.1)的 Самарский 格式

首先来考察(6.18)的截断误差. 设  $u$  是对流扩散方程(6.1)的充分光滑的解, 那么

$$\begin{aligned} E_i^n &= \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\tau} + c \frac{u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{h} \\ &\quad - \frac{1}{1+R} a \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n)}{h^2} \\ &= \alpha_i^n + \beta_i^n, \end{aligned}$$



其中

$$\alpha_i^n = \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\tau} \\ - a \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2},$$

$$\beta_i^n = c \frac{u(x_i, t_n) - u(x_{i-1}, t_n)}{h} \\ - \left( \frac{1}{1+R} - 1 \right) a \frac{u(x_{i+1}, t_n) - 2u(x_i, t_n) + u(x_{i-1}, t_n))}{h^2}.$$

显然,  $\alpha_i^n = \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^n - a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + O(\tau + h^2)$ ,

$$\beta_i^n = c \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n - \frac{ch}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + \frac{R}{1+R} a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + O(h^2) \\ = c \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n - Ra \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + \frac{R}{1+R} a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + O(h^2) \\ = c \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n - \frac{R^2}{1+R} a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_i^n + O(h^2).$$

由于  $\frac{R^2}{1+R} = O(h^2)$ , 所以  $\beta_i^n = c \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)_i^n + O(h^2)$ . 由此得到差分格式(6.18)逼近对流扩散方程(6.1)的截断误差是  $O(\tau + h^2)$ . 仿迎风格式的稳定性的证明, 不难得到 Самарский 格式的稳定性条件为

$$\left( \frac{ch}{2} + \frac{a}{1 + \frac{ch}{2a}} \right) \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (6.19)$$

Самарский 格式也可以从指数型差分格式中  $e^*$  展成 Taylor 级数取前三项得到. 这不但给出了一个构造 Самарский 格式的方法而且也给出了指数型差分格式与 Самарский 格式之间的联系

先把指数型差分格式改写为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + c \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} = -\frac{c}{h(1 - e^{\lambda h})} (u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n),$$

当  $h$  充分小时,  $e^{\lambda h}$  可以按 Taylor 级数展开, 取前三项即  $e^{\lambda h} \approx 1 + \lambda h + \frac{1}{2} \lambda^2 h^2$ , 这样就得到 Самарский 格式。特别应注意到, 如果在  $e^{\lambda h}$  的 Taylor 级数展开中仅取二项, 那么可得到迎风格式 (6.14)。

我们可以看到, 用 Самарский 格式进行实际计算时, 其工作量仅稍多于迎风差分格式, 但是截断误差从  $O(\tau + h)$  提高到  $O(\tau + h^2)$ 。因此在计算对流占优的问题中采用 Самарский 格式是十分有利的。指数型差分格式在理论上具有很好的性质, 特别是其收敛性可不依赖于  $a$ , 即所谓一致收敛性。但是在实际计算中将出现问题, 其一是当  $a$  充分小时, 计算机上溢不能直接计算  $\coth\left(\frac{ch}{2a}\right)$  而必须在程序上作处理; 其二是求解变系数, 甚至于非线性问题时, 由于要大量计算  $e$  的指数函数是特别费计算机时间的。而 Самарский 格式具有与指数型格式相同的精度, 计算又方便, 这是很好的格式。

## 6.6 隐式格式

前面讨论了求解对流扩散方程的一些显式格式, 它们都是条件稳定的。为了放松稳定性条件, 可以采用隐式格式进行求解。利用上面的显式格式很容易构造出隐式格式。在此仅对由中心显式格式出发构成的 Crank-Nicolson 格式稍作叙述, 其余就不作讨论了。

逼近对流扩散方程 (6.1) 的 Crank-Nicolson 格式为

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{c}{2} \left[ \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} + \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} \right] \\ = \frac{a}{2h^2} \delta^2 (u_j^{n+1} + u_j^n), \end{aligned} \quad (6.20)$$

其中  $\delta^2 u_i = u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}$ . 容易证明, 其截断误差是  $O(\tau^2 + h^2)$ , 即这是一个二阶精度的差分格式. 格式(6.20)的增长因子是

$$G(\tau, \omega) = \frac{1 - s + s \cos \omega h - \frac{1}{2} i r \sin \omega h}{1 + s - s \cos \omega h + \frac{1}{2} i r \sin \omega h},$$

其中  $s = a \frac{\tau}{h^2}$ ,  $r = c \frac{\tau}{h}$ .

$$|G(\tau, \omega)|^2 = \frac{(1 - s + s \cos \omega h)^2 + \left(\frac{1}{2} r \sin \omega h\right)^2}{(1 + s - s \cos \omega h)^2 + \left(\frac{1}{2} r \sin \omega h\right)^2},$$

由此得到

$$|G(\tau, \omega)|^2 - 1 = \frac{-4s(1 - \cos \omega h)}{(1 + s - s \cos \omega h)^2 + \frac{1}{4}(r \sin \omega h)^2}.$$

容易看出, 对任意的  $s$  和  $r$  有  $|G| \leq 1$ . 所以 Crank-Nicolson 格式是无条件稳定的.

## 6.7 变系数方程

考虑变系数对流扩散方程的初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + b(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \\ \quad - c(x, t) u, 0 < x < 1, t > 0, & (6.21) \\ u(x, 0) = u_0(x), 0 < x < 1, & (6.22) \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, t > 0, & (6.23) \end{cases}$$

其中  $0 < v \leq a(x, t) \leq \mu$ ,  $0 \leq c(x, t) \leq \mu$ ,  $|b(x, t)| \leq \mu$ .

设  $h$  为空间步长, 网格点  $x_j = jh$ ,  $j = 0, 1, \dots, J$ ,  $Jh = 1$ ,  $\tau$  为时间步长,  $t_n = \tau n$ ,  $n \geq 0$ .

差分格式的构造类似于常系数对流扩散方程. 下面仅以迎风

格式和 Самарский 格式为例进行构造,其余格式不再叙述.

令  $b^+ = \frac{1}{2}(b + |b|)$ ,  $b^- = \frac{1}{2}(b - |b|)$ , 那么有  $b^+ \geq 0$ ,  $b^- \leq 0$ ,

并且  $b = b^+ + b^-$ . 逼近(6.21)的迎风格式可以写作

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = & \frac{1}{h^2} \Delta_+ \left( a_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta_- u_j^n \right) + (b^+)_j^n \frac{\Delta_+ u_j^n}{h} \\ & + (b^-)_j^n \frac{\Delta_- u_j^n}{h} - c_j^n u_j^n, \end{aligned} \quad (6.24)$$

其中  $\Delta_+ u_j = u_{j+1} - u_j$ ,  $\Delta_- u_j = u_j - u_{j-1}$ ,  $(b^+)_j^n = b^+(x_j, t_n)$ ,  $(b^-)_j^n = b^-(x_j, t_n)$ . 显然,差分格式的截断误差为  $O(\tau + h)$ .

变系数对流扩散方程的 Самарский 格式,在构造上基本同常系数方程,但稍有不同.其格式是

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = & \frac{1}{1 + R_j^n} \frac{1}{h^2} \Delta_+ \left( a_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta_- u_j^n \right) \\ & + \frac{(b^+)_j^n}{a_j^n} a_{j+\frac{1}{2}}^n \frac{1}{h} \Delta_+ u_j^n \\ & + \frac{(b^-)_j^n}{a_j^n} a_{j-\frac{1}{2}}^n \frac{1}{h} \Delta_- u_j^n - c_j^n u_j^n, \end{aligned} \quad (6.25)$$

其中  $R_j^n = \frac{1}{2} h \frac{|b_j^n|}{a_j^n}$ . 可以证明 Самарский 格式的截断误差为  $O(\tau + h^2)$ .

下面用能量方法来证明迎风格式(6.24)的稳定性. 为方便起见,令  $b(x, t) \geq 0$ , 在这种情况下差分格式(6.24)可以写成

$$\begin{aligned} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = & \frac{1}{h^2} \Delta_+ \left( a_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta_- u_j^n \right) + b_j^n \frac{\Delta_+ u_j^n}{h} \\ & - c_j^n u_j^n, \end{aligned} \quad (6.26)$$

用  $2\tau h u_j^{n+1}$  乘(6.26)的两边并对  $j$  求和有

$$\sum_{j=0}^J (u_j^{n+1} - u_j^n) u_j^{n+1} 2h$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^J \Delta_+ \left( a_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta_- u_i^n \right) 2 \tau h u_i^{n+1} \\
&\quad + \sum_{i=0}^J \frac{1}{h} b_i^n (\Delta_+ u_i^n) 2 \tau h u_i^{n+1} - \sum_{i=0}^J c_i^n u_i^n 2 \tau h u_i^{n+1}.
\end{aligned} \tag{6.27}$$

注意到

$$2(u_i^{n+1} - u_i^n) u_i^{n+1} = (u_i^{n+1})^2 - (u_i^n)^2 + (u_i^{n+1} - u_i^n)^2,$$

所以有

$$\begin{aligned}
\sum_{i=0}^J (u_i^{n+1} - u_i^n) u_i^{n+1} 2 h &= \|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 \\
&\quad + \|u^{n+1} - u^n\|_h^2,
\end{aligned}$$

其中

$$\|u\|_h^2 = \sum_{i=0}^J (u_i)^2 h.$$

利用分部求和公式

$$\sum_{j=0}^{J-1} u_j \Delta_+ v_j = - \sum_{j=1}^J v_j \Delta_- u_j - u_0 v_0 + u_J v_J,$$

(6.27)的右边第一项可以化为

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{h^2} \sum_{i=0}^J \Delta_+ \left( a_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta_- u_i^n \right) 2 \tau h u_i^{n+1} \\
&= \frac{1}{h^2} 2 \tau h \sum_{i=0}^{J-1} u_i^{n+1} \Delta_+ \left( a_{i-\frac{1}{2}}^n \Delta_- u_i^n \right) \\
&= -\frac{1}{h^2} 2 \tau h \sum_{j=1}^J a_{j-\frac{1}{2}}^n \Delta_- u_j^n \Delta_- u_j^{n+1}
\end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{h^2} 2 \tau h \sum_{j=0}^{J-1} a_{j+\frac{1}{2}} \Delta_+ u_j^n \Delta_+ u_j^{n+1}.$$

考虑到

$$\begin{aligned} 2 \Delta_+ u_j^n \Delta_+ u_j^{n+1} &= [\Delta_+ u_j^n + \Delta_+ (u_j^{n+1} - u_j^n)] \Delta_+ u_j^n \\ &\quad + [\Delta_+ u_j^{n+1} - \Delta_+ (u_j^{n+1} - u_j^n)] \Delta_+ u_j^{n+1} \\ &= (\Delta_+ u_j^n)^2 + (\Delta_+ u_j^{n+1})^2 \\ &\quad + \Delta_+ u_j^n \Delta_+ (u_j^{n+1} - u_j^n) \\ &\quad - \Delta_+ u_j^{n+1} \Delta_+ (u_j^{n+1} - u_j^n) \\ &= (\Delta_+ u_j^n)^2 + (\Delta_+ u_j^{n+1})^2 \\ &\quad - [\Delta_+ u_j^{n+1} - \Delta_+ u_j^n]^2, \end{aligned}$$

所以我们得到

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h^2} \sum_{j=0}^J \Delta_+ (a_{j+\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \Delta_- u_j^n) 2 \tau h u_j^{n+1} \\ &= -\frac{\tau h}{h^2} \sum_{j=0}^{J-1} a_{j+\frac{1}{2}} [(\Delta_+ u_j^n)^2 + (\Delta_+ u_j^{n+1})^2 \\ &\quad - (\Delta_+ u_j^{n+1} - \Delta_+ u_j^n)^2]. \end{aligned}$$

把此式代入(6.27)得

$$\begin{aligned} &\|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 + \|u^{n+1} - u^n\|_h^2 \\ &\quad + \tau \sum_{j=0}^{J-1} a_{j+\frac{1}{2}} \left[ \left( \frac{\Delta_+ u_j^n}{h} \right)^2 + \left( \frac{\Delta_+ u_j^{n+1}}{h} \right)^2 \right] h \\ &= \tau \sum_{j=0}^{J-1} a_{j+\frac{1}{2}} \left( \frac{\Delta_+ u_j^{n+1}}{h} - \frac{\Delta_+ u_j^n}{h} \right)^2 h \\ &\quad + \sum_{j=1}^J b_j^n \frac{\Delta_+ u_j^n}{h} u_j^{n+1} 2 \tau h \\ &\quad - \sum_{j=0}^J c_j^n u_j^n 2 \tau h u_j^{n+1}. \end{aligned}$$

考虑到  $a, b, c$  的界, 可以得到

$$\begin{aligned}
 & \|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 + \|u^{n+1} - u^n\|_h^2 \\
 & + \nu\tau \left[ \left\| \frac{\Delta_+ u^{n+1}}{h} \right\|_h^2 + \left\| \frac{\Delta_+ u^n}{h} \right\|_h^2 \right] \\
 & \leq \tau\mu \left\| \frac{\Delta_+(u^{n+1} - u^n)}{h} \right\|_h^2 + 2\mu\tau \left\| \frac{\Delta_+ u^n}{h} \right\|_h^2 \cdot \|u^{n+1}\|_h^2 \\
 & + 2\tau\mu \|u^n\|_h \cdot \|u^{n+1}\|_h.
 \end{aligned} \tag{6.28}$$

由于

$$\frac{1}{h} \Delta_+(u_j^{n+1} - u_j^n) \leq \frac{1}{h} (|u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n| + |u_j^{n+1} - u_j^n|),$$

所以有

$$\left\| \frac{\Delta_+(u^{n+1} - u^n)}{h} \right\|_h^2 \leq \frac{4}{h^2} \|u^{n+1} - u^n\|_h^2.$$

此外注意到

$$\begin{aligned}
 2\mu\tau \left\| \frac{\Delta_+ u^n}{h} \right\|_h \cdot \|u^{n+1}\|_h &= \sqrt{\nu\tau} \left\| \frac{\Delta_+ u^n}{h} \right\|_h \\
 &\quad \cdot 2\mu \sqrt{\frac{\tau}{\nu}} \|u^{n+1}\|_h \\
 &\leq \frac{\nu\tau}{2} \left\| \frac{\Delta_+ u^n}{h} \right\|_h^2 + 2\mu^2 \frac{\tau}{\nu} \|u^{n+1}\|_h^2.
 \end{aligned}$$

因此(6.28)可以化为

$$\begin{aligned}
 & \|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 + \left(1 - \frac{4\tau\mu}{h^2}\right) \|u^{n+1} - u^n\|_h^2 \\
 & + \frac{\nu\tau}{2} \left\| \frac{\Delta_+ u^n}{h} \right\|_h^2 + \nu\tau \left\| \frac{\Delta_+ u^{n+1}}{h} \right\|_h^2 \\
 & \leq \mu\tau \left(1 + \frac{2\mu}{\nu}\right) \|u^{n+1}\|_h^2 + \tau\mu \|u^n\|_h^2.
 \end{aligned}$$

如果条件

$$4\mu \frac{\tau}{h^2} \leq 1 \tag{6.29}$$

满足, 则可以得到

$$\|u^{n+1}\|_h^2 - \|u^n\|_h^2 \leq \mu\tau\left(1 + \frac{2\mu}{\nu}\right)\|u^{n+1}\|_h^2 + \tau\mu\|u^n\|_h^2,$$

用  $\|u^{n+1}\|_h + \|u^n\|_h$  除以上式, 并注意到  $\frac{\|u^n\|_h}{\|u^{n+1}\|_h + \|u^n\|_h}$ ,

$\frac{\|u^{n+1}\|_h}{\|u^{n+1}\|_h + \|u^n\|_h}$  都小于等于 1, 所以有

$$\|u^{n+1}\|_h - \|u^n\|_h \leq \mu\tau\left(1 + \frac{2\mu}{\nu}\right)\|u^{n+1}\|_h + \tau\mu\|u^n\|_h.$$

取  $\tau$  满足

$$1 - \mu\tau\left(1 + \frac{2\mu}{\nu}\right) > 0, \quad (6.30)$$

那么有

$$\|u^{n+1}\|_h \leq \frac{1 + \tau\mu}{1 - \mu\tau\left(1 + \frac{2\mu}{\nu}\right)}\|u^n\|_h$$

$$\leq (1 + K\tau)\|u^n\|_h,$$

其中  $K = 2\mu\left(1 + \frac{\mu}{\nu}\right)$ . 所以差分格式 (6.26) 在条件 (6.29) 和 (6.30) 下是稳定的. 必须注意到, 能量方法仅给出差分格式稳定的一个充分条件.

## § 7 非线性方程

这一节主要讨论求解非线性抛物型方程的一些基本方法以及一些特殊的非线性抛物型方程的差分格式.

考虑非线性抛物型方程的初边值问题



$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = f\left(x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right), 0 < x < 1, t > 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} u(x, 0) = u_0(x), 0 < x < 1, \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\begin{cases} u(0, t) = \psi_0(t), t > 0, \end{cases} \quad (7.3)$$

$$\begin{cases} u(1, t) = \psi_1(t), t > 0, \end{cases} \quad (7.4)$$

其中

$$-\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)} \geq \alpha > 0. \quad (7.5)$$

求解常系数线性抛物型方程的许多方法和技巧都可以推广到非线性抛物型方程上来，但是非线性方程的求解中也存在着一定的困难。因此使用差分方法求解时，还必须对适用于线性问题的差分格式作些说明和补充。非线性抛物型方程(7.1)的显式格式是

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = f\left(x_j, t_n, u_j^n, \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}, \frac{1}{h^2} \delta^2 u_j^n\right), \quad (7.6)$$

其中  $\delta^2 u_j = u_{j+1} - 2u_j + u_{j-1}$ 。看起来，这个差分格式是十分简单的，但可能不是一个很好的格式，甚至于可能是无实用价值的差分格式。关于这一点就要从差分格式的稳定性来分析。正如非线性双曲型方程一样，非线性抛物型方程的差分格式的稳定性研究是很复杂的，一般可粗略地采用线性化稳定性分析方法。例如考虑简单的非线性抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2} u^n, \quad (7.7)$$

那么显式差分格式的稳定性条件为

$$n u^{n-1} \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2}. \quad (7.8)$$

可以看出，稳定性条件不但依赖于差分格式，而且还依赖于  $f$  的形式和方程的解  $u$ 。由此可能使满足稳定性条件的时间步长  $\tau$  很小，从而失去实用价值。为改善稳定性条件，可以采用隐式格式。

逼近(7.1)的 Crank-Nicolson 格式为

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = f \left[ x_i, t_{n+\frac{1}{2}}, \frac{1}{2}(u_j^n + u_j^{n+1}), \right. \\ \left. \frac{1}{4h}(\Delta_0 u_j^n + \Delta_0 u_j^{n+1}), \frac{1}{2h^2}(\delta^2 u_j^n + \delta^2 u_j^{n+1}) \right], \quad (7.9)$$

其中  $t_{n+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(t_n + t_{n+1})$ ,  $\Delta_0 u_j = u_{j+1} - u_{j-1}$ .

一般来说,格式(7.9)的稳定性是好的,其问题是求解  $u^{n+1}$  的代数方程组非常复杂. 在每个时间层上都要解非线性代数方程组,因此在某些情况下也带来了很大困难.

从上面对一般的显式、隐式格式的分析可以看出,解非线性抛物型方程确实存在着在线性问题中没有的困难,但也不等于说不能用显式格式和隐式格式来求解非线性问题. 在具体问题中,采用什么方法要作具体分析,有时也靠实践经验. 我们通过具体的方程介绍一些求解非线性抛物型方程的方法.

### 7.1 隐式格式

考虑非线性抛物型方程

$$r(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( p(x, t) \frac{\partial u}{\partial x} \right) - q(x, t, u). \quad (7.10)$$

这个方程与条件(7.2), (7.3)和(7.4)一起组成了初边值问题. 为了使问题是适定的,我们假定  $r > 0, p > 0$ .

与变系数问题相类似,考虑差分格式

$$r_i^{n+1, n} \left( \frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} \right) = \frac{1}{h^2} \Delta_- \left( p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \Delta_+ u_i^{n+1} \right) - q_i^{n+1, n}, \quad (7.11)$$

其中

$$r_i^{n+1, n} = r(x_i, t_{n+1}, u_i^n),$$

$$p_{i+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} = p(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{n+\frac{1}{2}}),$$

$$q_i^{n+1, n} = q(x_i, t_{n+1}, u_i^n).$$

$$\Delta_+ u_j^n = u_{j+1}^n - u_j^n,$$

$$\Delta_- u_j^n = u_j^n - u_{j-1}^n.$$

首先来考察其截断误差. 设  $u$  是初边值问题(7.10), (7.2), (7.3) 和(7.4)的充分光滑的解. 对  $u$  在点  $(x_j, t_{n+1})$  进行 Taylor 级数展开有

$$\begin{aligned} \frac{1}{h^2} \Delta_- \left( p(x_{j+\frac{1}{2}}, t_{n+1}) \Delta_+ u(x_j, t_{n+1}) \right) \\ = \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_j^{n+1} + O(h^2), \\ r(x_j, t_{n+1}, u(x_j, t_n)) = r(x_j, t_{n+1}, u(x_j, t_{n+1})) \\ - [u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n)] \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}, \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} = \frac{\partial r}{\partial u}(x_j, t_{n+1}, u^*), \min(u(x_j, t_n), u(x_j, t_{n+1})) \\ < u^* < \max(u(x_j, t_n), u(x_j, t_{n+1})). \end{aligned}$$

利用

$$u(x_j, t_{n+1}) - u(x_j, t_n) = \tau \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^{n+1} + O(\tau^2),$$

那么有

$$\begin{aligned} r(x_j, t_{n+1}, u(x_j, t_n)) = r(x_j, t_{n+1}, u(x_j, t_{n+1})) \\ - \left[ \tau \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^{n+1} + O(\tau^2) \right] \frac{\partial \bar{r}}{\partial u}. \end{aligned}$$

同样地,

$$\begin{aligned} q(x_j, t_{n+1}, u(x_j, t_n)) = q(x_j, t_{n+1}, u(x_j, t_{n+1})) \\ - \left[ \tau \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_j^{n+1} + O(\tau^2) \right] \frac{\partial \bar{q}}{\partial u}, \end{aligned}$$

其中

$$\frac{\partial \bar{q}}{\partial u} = \frac{\partial q}{\partial u}(x_i, t_{n+1}, u^{**}), \min(u(x_i, t_n), u(x_i, t_{n+1})) \\ < u^{**} < \max(u(x_i, t_n), u(x_i, t_{n+1})).$$

由上述表达式, 我们得到

$$\begin{aligned} & r(x_i, t_{n+1}, u(x_i, t_n)) \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\tau} \\ & - \frac{1}{h^2} \Delta_- (p(x_{i+\frac{1}{2}}, t_{n+1}) \Delta_+ u(x_i, t_{n+1})) + q(x_i, t_{n+1}, u(x_i, t_n)) \\ & = \left\{ r(x_i, t_{n+1}, u(x_i, t_{n+1})) - \left[ \tau \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n+1} + O(\tau^2) \right] \frac{\partial \bar{r}}{\partial u} \right\} \\ & \times \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n+1} + O(\tau) \right] - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_i^{n+1} + O(h^2) \\ & + \left\{ q(x_i, t_{n+1}, u(x_i, t_{n+1})) - \left[ \tau \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n+1} + O(\tau^2) \right] \frac{\partial \bar{q}}{\partial u} \right\} \\ & = r(x_i, t_{n+1}, u(x_i, t_{n+1})) \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)_i^{n+1} - \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( p \frac{\partial u}{\partial x} \right) \right]_i^{n+1} \\ & + q(x_i, t_{n+1}, u(x_i, t_{n+1})) + O(\tau + h^2). \end{aligned}$$

由于  $u$  是初边值问题的解, 所以有

$$\begin{aligned} & r(x_i, t_{n+1}, u(x_i, t_n)) \frac{u(x_i, t_{n+1}) - u(x_i, t_n)}{\tau} \\ & - \frac{1}{h^2} \Delta_- (p(x_{i+\frac{1}{2}}, t_n) \Delta_+ u(x_i, t_{n+1})) \\ & + q(x_i, t_{n+1}, u(x_i, t_n)) = O(\tau + h^2). \end{aligned}$$

因此差分格式(7.11)的截断误差为  $O(\tau + h^2)$ .

我们注意到,  $r$  和  $q$  是在  $u^n$  计算值的. 由差分格式(7.11)得到的代数方程组是线性的, 并且系数矩阵是三对角矩阵, 因此可用追赶法求解.

为了改进计算精度, 可以采用 Crank-Nicolson 型格式. 此时  $r$  和  $q$  应在点  $(x_i, t_n + \frac{\tau}{2})$  上计算其值, 因此格式为

$$\begin{aligned} r_{j, n+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \Delta_- \left( p_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \Delta_+ \left( \frac{u_j^n + u_j^{n+1}}{2} \right) \right) \\ - q_{j, n+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (7.12)$$

其中

$$\begin{aligned} r_{j, n+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} &= r\left(x_j, t_n + \frac{\tau}{2}, u_{j, n+\frac{1}{2}}\right), \\ q_{j, n+\frac{1}{2}, n+\frac{1}{2}} &= q\left(x_j, t_n + \frac{\tau}{2}, u_{j, n+\frac{1}{2}}\right), \end{aligned}$$

我们注意到, 在差分格式(7.12)中要计算  $u_{j, n+\frac{1}{2}}$ , 这是不方便的, 一般应该避免. 为此给出(7.12)的变形

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(r_{j, n+\frac{1}{2}, n-1} + r_{j, n+\frac{1}{2}, n}) \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \Delta_- \left( p_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \right. \\ \left. \times \Delta_+ \left( \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2} \right) \right) - \frac{1}{2}(q_{j, n+\frac{1}{2}, n+1} + q_{j, n+\frac{1}{2}, n}). \end{aligned} \quad (7.13)$$

可以证明, 差分格式(7.13)的截断误差为  $O(\tau^2 + h^2)$ .

由差分格式(7.13)得到的方程组是非线性方程组, 因此必须用迭代方法来求解. 令  $u_j^{n+1, 0} = u_j^n$ , 并设  $u_j^{n+1, m-1}$  是已知的, 那么差分格式(7.13)的迭代公式可以写作

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(r_{j, n+\frac{1}{2}, n+1, m-1} + r_{j, n+\frac{1}{2}, n}) \frac{u_j^{n+1, m} - u_j^n}{\tau} \\ = \frac{1}{h^2} \Delta_- \left( p_{j+\frac{1}{2}}^{n+\frac{1}{2}} \Delta_+ \left( \frac{u_j^{n+1, m} + u_j^n}{2} \right) \right) \\ - \frac{1}{2}(q_{j, n+\frac{1}{2}, n+1, m-1} + q_{j, n+\frac{1}{2}, n}), \end{aligned} \quad (7.14)$$

其中

$$r_{j, n+\frac{1}{2}, n+1, m-1} = r\left(x_j, t_n + \frac{\tau}{2}, u_{j, n+1, m-1}\right),$$

$$q_{i^{n+\frac{1}{2}, n+1, m-1}} = q\left(x_i, t_n + \frac{\tau}{2}, u_{i^{n+1, m-1}}\right),$$

$m$  为迭代指标.

在(7.14)中的  $r$  和  $q$  均在前一次迭代  $u_{i^{n+1, m-1}}$  上计算, 所以得到的是线性方程组. 容易看出, 可用追赶法求解. 如果  $u_{i^{n+1, m}}$  满足

$$\max_i \left| \frac{u_{i^{n+1, m}} - u_{i^{n+1, m-1}}}{u_{i^{n+1, m-1}}} \right| < \varepsilon,$$

其中  $\varepsilon$  是一容许的误差, 那么迭代结束, 取  $u_i^{n+1} = u_{i^{n+1, m}}$ .

## 7.2 Richtmyer 线性化方法

考虑非线性抛物型方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}(u^5), \quad (7.15)$$

仿常系数抛物型方程的隐式加权格式, 对(7.15)可以构造出相应的差分格式

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \{ \theta [\delta^2(u^5)]_i^{n+1} + (1-\theta) [\delta^2(u^5)]_i^n \}. \quad (7.16)$$

其中

$$[\delta^2(u^5)]_i^n = (u^5)_{i+1}^n - 2(u^5)_i^n + (u^5)_{i-1}^n,$$

$0 \leq \theta \leq 1$ . 由于有非线性项  $[\delta^2(u^5)]_i^{n+1}$  的存在, 直接对上式求解较为困难. 采用线性化可克服其困难. 当然线性化方法是多种多样的, Richtmyer 提出的办法是很有效的. 对于非线性项  $[\delta^2(u^5)]_i^{n+1}$  中的  $(u^5)_i^{n+1}$  作近似

$$(u^5)_i^{n+1} \approx (u^5)_i^n + 5(u^4)_i^n (u_i^{n+1} - u_i^n),$$

如果令  $w_i = u_i^{n+1} - u_i^n$ , 那么就可以得到

$$\frac{w_i}{\tau} = \frac{5\theta}{h^2} [(u^4)_{i+1}^n w_{i+1} - 2(u^4)_i^n w_i + (u^4)_{i-1}^n w_{i-1}]$$

$$= -\frac{1}{h^2} [\delta^2(u^n)]_j, \quad (7.17)$$

这是关于  $w_j$  的线性方程组, 如果附以适当的边界条件, 那么可以用追赶法求解. 然后用  $u_j^{n+1} = u_j^n + w_j$  得到这个时间步的最终结果.

关于这个方法的稳定性问题, 仅作粗略地启示性分析. 可以把微分方程(7.15)改写成形式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( 5 u^4 \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

其中  $5 u^4$  可以看作扩散方程的扩散系数, 这是一个非线性扩散方程. 采用线性化稳定性分析方法我们可以得到差分格式(7.16)的稳定性条件: 当  $0 \leq \theta < \frac{1}{2}$  时

$$5 u^4 \frac{\tau}{h^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)},$$

当  $\frac{1}{2} \leq \theta \leq 1$  时, 格式无条件稳定.

我们再一次看到, 对于非线性问题, 稳定性不仅依赖于差分格式的结构, 而且还依赖于所求得解. 因此, 在实际求解过程中, 必须经常检验稳定性条件, 随时调整  $\tau$  使计算不致于因为不满足稳定性条件而失败. 具体的计算例子可参阅[6]和[23].

### 7.3 预测校正方法

预测校正方法在求解非线性偏微分方程中引起了特别的重视. 这个方法在第三章中曾经作过叙述, 在求解守恒律双曲型方程组时, 所用的 Richtmyer 的二步法, Mac Cormack 格式都属于预测校正方法的范围. 预测校正方法在非线性的抛物型方程的求解中是经常使用的.

考虑非线性抛物型方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \psi \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial t} \right), \quad (7.18)$$

适定性的要求是

$$\frac{\partial \psi}{\partial \left( \frac{\partial u}{\partial t} \right)} \geq \alpha > 0.$$

我们可取

$$\psi = f_1(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial t} + f_2(x, t, u) \frac{\partial u}{\partial x} + f_3(x, t, u) \quad (7.19)$$

或

$$\psi = g_1 \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right) \frac{\partial u}{\partial t} + g_2 \left( x, t, u, \frac{\partial u}{\partial x} \right). \quad (7.20)$$

上面两类方程是十分有用的。我们可以看出，它们都包含了 Burgers 方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial t} + uu_x$  和 非线性扩散方程  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \alpha(u) \frac{\partial u}{\partial t}$ 。对于常见的非线性扩散方程  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right)$  可以通过变换，化成上面的形式。如果  $\psi$  取(7.19)，那么预测校正格式可以构造如下。第一步(预测)为

$$\frac{1}{h^2} \delta^2 u_i^{n+\frac{1}{2}} = \psi \left[ x_i, t_n + \frac{\tau}{2}, u_i^n, \frac{1}{2h} \Delta_0 u_i^n, \frac{2}{\tau} \left( u_i^{n+\frac{1}{2}} - u_i^n \right) \right], \quad (7.21)$$

第二步(校正)为

$$\begin{aligned} \frac{1}{2h^2} \delta^2 (u_i^{n+1} + u_i^n) &= \psi \left[ x_i, t_n + \frac{\tau}{2}, u_i^{n+\frac{1}{2}}, \right. \\ &\quad \left. \frac{1}{4h} \Delta_0 (u_i^n + u_i^{n+1}), \frac{1}{\tau} (u_i^{n+1} - u_i^n) \right]. \end{aligned} \quad (7.22)$$

可以证明，其截断误差为  $O(\tau^2 + h^2)$ ，而且由(7.19)，(7.21)和



(7.22)可以看出,关于未知函数都是线性的. 加上适当的边界条件, 采用二次追赶法可完成一个时间步长的计算. 如果  $\psi$  取 (7.20), 那么预测校正格式的第一步(预测)取(7.21), 第二步(校正)取

$$\frac{1}{2h^2} \delta^2(u_i^{n+1} + u_i^n) = \psi \left[ x_i, t_n + \frac{\tau}{2}, u_i^{n+\frac{1}{2}}, \right. \\ \left. \frac{1}{2h} \Delta_0 u_i^{n+\frac{1}{2}}, \frac{1}{\tau} (u_i^{n+1} - u_i^n) \right]. \quad (7.23)$$

预测校正格式(7.21)和(7.23)的截断误差为  $O[h^2 + \tau^{\frac{3}{2}}]$ . 在一个时间步长的求解仍是用二次追赶法来完成的.

从上面叙述看到, 预测校正方法精度比较高, 而且求解容易. 所以在实际问题中经常采用.

#### 7.4 三层隐式格式

考虑非线性方程

$$\alpha(u) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (7.24)$$

其中  $\alpha(u) > 0, K(u) > 0$ . 逼近(7.24)的最简单的三层格式应是

$$\alpha(u_i^n) \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} = \frac{1}{h^2} \Delta_- [K(u_{i+\frac{1}{2}}^n) \Delta_+ u_i^n]. \quad (7.25)$$

这个格式的右边是通常的中心差分. 如果  $\alpha = K = 1$ , 则就化为无条件不稳定的 Richardson 格式, 因此无须对(7.25)多作讨论.

在线性常系数扩散方程中, 我们用  $\frac{1}{3} \delta^2(u_i^{n+1} + u_i^n + u_i^{n-1})$  来代替  $\delta^2 u_i^n$ , 就得到了一个无条件稳定的三层隐式格式. 现在按照这个办法来构造差分格式. 先把(7.25)改写形式

$$\alpha(u_i^n) \frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} = \frac{1}{h^2} [K(u_{i+\frac{1}{2}}^n) (u_{i+1}^n - u_i^n)$$

$$-K(u_{j+\frac{1}{2}}^n)(u_j^n - u_{j-1}^n)]],$$

对上式右边的  $u_{j+1}^n$ ,  $u_j^n$  和  $u_{j-1}^n$  分别用  $\frac{1}{3}(u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n + u_{j+1}^{n-1})$ ,  $\frac{1}{3}(u_j^{n+1} + u_j^n + u_j^{n-1})$  和  $\frac{1}{3}(u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n + u_{j-1}^{n-1})$  来代替, 这样就得到差分格式

$$\begin{aligned} \alpha(u_j^n) \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} = \frac{1}{3h^2} \{ & K^+ [(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) + (u_{j+1}^n - u_j^n) \\ & + (u_{j+1}^{n-1} - u_j^{n-1})] - K^- [(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}) + \\ & (u_j^n - u_{j-1}^n) + (u_j^{n-1} - u_{j-1}^{n-1})] \}, \end{aligned} \quad (7.26)$$

其中

$$K^+ = K\left(\frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2}\right), \quad K^- = K\left(\frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{2}\right).$$

注意到, 在形成差分格式(7.26)时, 为了使得差分格式中的函数都在网格点上取值, 我们已经用  $K\left(\frac{u_{j+1}^n + u_j^n}{2}\right)$  和  $K\left(\frac{u_j^n + u_{j-1}^n}{2}\right)$  来代替  $K(u_{j+\frac{1}{2}}^n)$  和  $K(u_{j-\frac{1}{2}}^n)$ . 这样的代替没有损失差分格式的精度.

差分格式(7.26)在  $t=t_{n+1}$  上是求解线性方程组, 并且精度较高, 这是这个格式的好处. 当然, 它与通常的三层格式一样, 对于  $t=\tau$ , 还必须采用另外的二层方法给出.

## 7.5 非线性扩散方程

考虑简单的非线性扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( K(u) \frac{\partial u}{\partial x} \right), \quad (7.27)$$

其中  $K(u) > 0$ . 这是实际中经常碰到的方程. 前面讨论的方法都是可以应用的.

简单的显式格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} [K(u_{j+\frac{1}{2}}^n)(u_{j+1}^n - u_j^n) - K(u_{j-\frac{1}{2}}^n)(u_j^n - u_{j-1}^n)],$$

受稳定性条件限制很严，所以我们主要讨论隐式格式。考虑隐式格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} [a_{j+1}(u^n)(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) - a_j(u^n)(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})] \quad (7.28)$$

和

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} [a_{j+1}(u^{n+1})(u_{j+1}^{n+1} - u_j^{n+1}) - a_j(u^{n+1})(u_j^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})], \quad (7.29)$$

其中  $a_j(u)$  可以取

$$a_j(u) = \frac{1}{2} [K(u_{j-1}) + K(u_j)],$$

$$a_j(u) = K\left(\frac{u_{j-1} + u_j}{2}\right),$$

$$a_j(u) = \frac{2K(u_{j-1})K(u_j)}{K(u_{j-1}) + K(u_j)}.$$

我们把差分格式(7.28)和(7.29)进行一下比较，它们的截断误差都是  $O(\tau + h^2)$ 。用线性化稳定性分析方法可知，它们都是无条件稳定的，其差别是，用差分格式(7.28)来求解在  $t = t_{n+1}$  时的值仅用追赶法解线性方程组即可，而用差分格式(7.29)来求解在  $t = t_{n+1}$  时的值就要解非线性方程组，对此采用类似于(7.14)的迭代方法。令  $u_j^{n+1,0} = u_j^n$ ，假定  $u_j^{n+1,m-1}$  已知，其中  $m$  为迭代指标，那么求解(7.29)的迭代公式为

$$\frac{u_j^{n+1,m} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} [a_{j+1}(u^{n+1,m-1})(u_{j+1}^{n+1,m} - u_j^{n+1,m}) - a_j(u^{n+1,m-1})(u_j^{n+1,m} - u_{j-1}^{n+1,m})]. \quad (7.30)$$

由于系数是在  $u^{n+1, m-1}$  处计算, 因此(7.30)形成了线性方程组, 并可用追赶法求解. 对于大多具有实际意义的扩散系数  $K(u)$  来说, 迭代收敛很快, 一般二, 三次就够了. 采用(7.30)进行迭代时, 必须预先给出迭代的容许误差  $e$ . 当  $u_j^{n+1, m}$  满足

$$\max_j \left| \frac{u_j^{n+1, m} - u_j^{n+1, m-1}}{u_j^{n+1, m-1}} \right| < e$$

时, 迭代结束, 取  $u_j^{n+1} = u_j^{n+1, m}$ .

采用差分格式(7.29)计算时, 存储量比用(7.28)计算要多, 其原因是在计算  $u_j^{n+1}$  时,  $u_j^n$  和  $u_j^{n+1, m-1}$  都要保留. 此外, 利用(7.29)时, 在每个时间层上都要进行一定次数的迭代. 由此自然会想到, 差分格式(7.29)与差分格式(7.28)相比无可取之处. 然而, 情况并非全是如此, 很多实际计算表明, 差分格式(7.29)的实际效果是相当好的, 差分格式(7.29)可以采用较大的时间步长. 因而与差分格式(7.28)相比, 达到同样的效果, 差分格式(7.29)更为有利.

为了提高差分格式的精度, 可以采用 Crank-Nicolson 格式

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{2h^2} \Delta_- \{ a_{j+1}(u^{n+1}) \Delta_+ u_j^{n+1} + a_{j+1}(u^n) \Delta_+ u_j^n \}. \quad (7.31)$$

这是一个二阶精度的格式.

采用预测校正格式可以避免求解非线性方程组并且可以达到二阶精度. 逼近非线性扩散方程(7.27)的预测校正格式可以写为

$$\frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} - u_j^n}{\frac{\tau}{2}} = \frac{1}{h^2} \Delta_- \left[ K \left( \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} \right) \Delta_+ u_j^{n+\frac{1}{2}} \right] \quad (7.32)$$

和

$$\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} = \frac{1}{h^2} \Delta_- \left[ K \left( \frac{u_j^{n+\frac{1}{2}} + u_{j+1}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right) \Delta_+ \left( \frac{u_j^n + u_{j+1}^n}{2} \right) \right]. \quad (7.33)$$

## 7.6 Burgers 方程

Burgers 方程可以作为描述粘性流体流动的 Navier-Stokes 方程的简单模式, 因此它的求解受到了充分重视, 求解的方法和技巧也不断出现. 我们仅讨论最简单的差分格式.

考虑 Burgers 方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.34)$$

常用的方法是预测校正方法, 其格式可直接由(7.21)和(7.22)得到,

$$\frac{u_i^{n+\frac{1}{2}} - u_i^n}{\frac{\tau}{2}} + u_i^n \frac{1}{2h} \Delta_0 u_i^n = \frac{\nu}{h^2} \delta^2 u_i^{n+\frac{1}{2}} \quad (7.35)$$

和

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + u_i^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{4h} \Delta_0 (u_i^n + u_i^{n+1}) = \frac{\nu}{2h^2} \delta^2 (u_i^n + u_i^{n+1}). \quad (7.36)$$

可以把方程(7.34)改写成

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{u^2}{2} \right) = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

如果  $\nu=0$ , 则方程为单个双曲型守恒律. 因此双曲型守恒律的很多格式可以推广到 Burgers 方程上来. 我们还可以考虑更一般的方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial f(u)}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \quad (7.37)$$

可以用 Mac Cormack 方法求解(7.37),

$$\begin{cases} \bar{u}_j^{n+1} = u_j^n - \frac{\tau}{h}(f_j^n - f_{j-1}^n) + \frac{\nu\tau}{h^2}(u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n), \\ u_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left[ u_j^n + \bar{u}_j^{n+1} - \frac{\tau}{h}(\bar{f}_{j+1} - \bar{f}_j) \right. \\ \quad \left. + \frac{\nu\tau}{h^2}(\bar{u}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{u}_j^{n+1} + \bar{u}_{j-1}^{n+1}) \right]. \end{cases} \quad (7.38)$$

其余方法可类似地构造。

## § 8 多维扩散方程

在实际问题中,经常碰到二维和三维的问题。虽然它们是一维问题的直接推广,但其差分格式将具有多种多样的变化。本节中仅讨论二维问题。考虑扩散方程的初边值问题

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), 0 < x, y < 1, t > 0, \quad (8.1)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), 0 < x, y < 1. \quad (8.2)$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, t > 0. \quad (8.3)$$

其中  $a$  为正常数。

先将定义域

$$D = \{(x, y, t); 0 \leq x, y \leq 1, t \geq 0\}$$

剖分为网格

$$D_h = \{(x_j, y_m, t_n); x_j = jh, j = 0, 1, \dots, J, Jh = 1;$$

$$y_m = mh, m = 0, 1, \dots, J; t_n = n\tau, n \geq 0\},$$

其中  $\tau$  和  $h$  分别为时间步长和空间步长。为了方便起见,已经取  $x$  方向和  $y$  方向的步长相等。在实际应用中也经常取不同的空间步长。

## 8.1 显式格式和隐式格式

一维扩散方程的差分格式容易推广到二维扩散方程,仿一维扩散方程的古典显式格式,可以得差分格式

$$\frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} = a \frac{1}{h^2} (\delta_x^2 u_{j,m}^n + \delta_y^2 u_{j,m}^n), \quad (8.4)$$

其中

$$\delta_x^2 u_{j,m}^n = u_{j+1,m}^n - 2u_{j,m}^n + u_{j-1,m}^n,$$

$$\delta_y^2 u_{j,m}^n = u_{j,m+1}^n - 2u_{j,m}^n + u_{j,m-1}^n.$$

显然,差分格式(8.4)的截断误差为  $O(\tau + h^2)$ . 下面来考虑(8.4)的稳定性. 先把差分格式写为

$$u_{j,m}^{n+1} = u_{j,m}^n + a\lambda(\delta_x^2 u_{j,m}^n + \delta_y^2 u_{j,m}^n). \quad (8.5)$$

其中  $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ . 利用 Fourier 分析方法来讨论稳定性. 令

$$u_{j,m}^n = v^n e^{i(\omega_1 j h + \omega_2 m h)},$$

代入(8.5)得增长因子

$$G(\tau, \omega) = 1 - 4a\lambda \left( \sin^2 \frac{\omega_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\omega_2 h}{2} \right),$$

其中  $\omega = [\omega_1, \omega_2]$ . 当  $a\lambda \leq \frac{1}{4}$  时, 有  $|G(\tau, \omega)| \leq 1$ . 所以差分格式(8.4)的稳定性条件是

$$a\lambda \leq \frac{1}{4}.$$

一般对于  $p$  维常系数扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a \sum_{i=1}^p \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$

的显式格式, 相应的稳定性条件应是  $a\lambda \leq \frac{1}{2p}$ .

把一维扩散方程的古典隐式格式推广到二维方程(8.1)的差分格式是

$$\frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 u_{j,m}^{n+1} + \delta_y^2 u_{j,m}^{n+1}). \quad (8.6)$$

此格式的截断误差是  $O(\tau + h^2)$ 。容易求出它的增长因子

$$G(\tau, \omega) = \frac{1}{1 + 4a\lambda \left( \sin^2 \frac{\omega_1 h}{2} + \sin^2 \frac{\omega_2 h}{2} \right)}.$$

由此看出差分格式(8.6)是无条件稳定的。

由上述可以看出,对于显式格式稳定性条件较为苛刻,必须用很小的时间步长才能计算,显然是不利的。对于隐式格式,由于无条件稳定,所以时间步长可以不受限制。求解隐式格式(8.6)要解代数方程组在一维的情形,其系数矩阵是三对角线矩阵,因而可用追赶法求解方程组,计算量小。但对于方程组(8.6),其系数矩阵不是三对角矩阵,因而求解代数方程组较困难。

## 8.2 交替方向隐式格式

为克服显式格式和隐式格式的缺点,1955年 Peaceman 和 Rachford 提出了交替方向隐式格式,

$$\begin{cases} \frac{u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j,m}^n}{\frac{\tau}{2}} = \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{j,m}^n), \\ \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}}{\frac{\tau}{2}} = \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} + \delta_y^2 u_{j,m}^{n+1}). \end{cases} \quad (8.7)$$

这个格式一般称为 Peaceman-Rachford 格式。格式(8.7)由两步组成,每一步都是一维形式的隐式格式,即仅对一个空间方向( $x$ 方向或 $y$ 方向)采取隐式。由此可知,用二次追赶法可完成一个时间层上的求解。

现在来讨论差分格式(8.7)的精度及稳定性。先设法消去  $u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}$ 。将(8.7)两式相加,得到



$$\frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\frac{\tau}{2}} = a \frac{2}{h^2} \delta_x^2 u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{a}{h^2} \delta_y^2 (u_{j,m}^{n+1} + u_{j,m}^n). \quad (8.8)$$

将(8.7)的两式相减,得到

$$4 u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} = 2(u_{j,m}^{n+1} + u_{j,m}^n) - a \frac{\tau}{h^2} \delta_y^2 (u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n).$$

将此式代入(8.8),经整理有

$$\begin{aligned} & \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{a^2 \tau^2}{h^4} \delta_x^2 \delta_y^2 \right) \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} \\ &= -\frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) \frac{u_{j,m}^{n+1} + u_{j,m}^n}{2}. \end{aligned} \quad (8.9)$$

设  $u$  是初边值问题(8.1)至(8.3)的充分光滑的解,那么利用 Taylor 级数展开有

$$\begin{aligned} E &= \left( 1 + \frac{1}{4} \frac{a^2 \tau^2}{h^4} \delta_x^2 \delta_y^2 \right) \frac{u(x_j, y_m, t_{n+1}) - u(x_j, y_m, t_n)}{\tau} \\ &\quad - \frac{a}{2 h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) (u(x_j, y_m, t_{n+1}) + u(x_j, y_m, t_n)) \\ &= O(\tau^2 + h^2). \end{aligned}$$

由此可知,Peaceman-Rachford 格式是二阶精度的格式. 它与 Crank-Nicolson 型格式具有相同的精度.

为讨论 Peaceman-Rachford 格式的稳定性,先将(8.9)改写为

$$\begin{aligned} & \left( 1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_x^2 \right) \left( 1 - \frac{a\lambda}{2} \delta_y^2 \right) u_{j,m}^{n+1} \\ &= \left( 1 + \frac{a\lambda}{2} \delta_x^2 \right) \left( 1 + \frac{a\lambda}{2} \delta_y^2 \right) u_{j,m}^n. \end{aligned} \quad (8.10)$$

容易计算出,其增长因子为

$$G(\tau, \omega) = \frac{\left(1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{\omega_1 h}{2}\right) \left(1 - 2a\lambda \sin^2 \frac{\omega_2 h}{2}\right)}{\left(1 + 2a\lambda \sin^2 \frac{\omega_1 h}{2}\right) \left(1 + 2a\lambda \sin^2 \frac{\omega_2 h}{2}\right)}.$$

可以看出, 对任意的  $\omega_1, \omega_2$  及  $\lambda$  都有  $|G(\tau, \omega)| \leq 1$ , 所以 Peaceman-Rachford 格式是无条件稳定的.

### 8.3 分裂格式

考虑逼近(8.1)的差分格式

$$\frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} = \theta A_h u_{j,m}^{n+1} + (1-\theta) A_h u_{j,m}^n, \quad (8.11)$$

其中差分算子  $A_h = \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2)$ . 此格式是一维扩散方程的加权隐式格式的直接推广. 可以把(8.11)改写为

$$(I - \theta \tau A_h) \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} = A_h u_{j,m}^n, \quad (8.12)$$

其中  $I$  为恒等算子, 差分格式(8.11)还可以写为

$$(I - \theta \tau A_h) u_{j,m}^{n+1} = (I + (1-\theta) \tau A_h) u_{j,m}^n.$$

注意到

$$\left(I - \theta \tau \frac{a}{h^2} \delta_x^2\right) \left(I - \theta \tau \frac{a}{h^2} \delta_y^2\right) \approx I - \theta \tau A_h,$$

其近似的误差为  $O(\tau^2)$ . 由此我们可以得到逼近方程(8.1)的不同的差分格式

$$\left(I - \theta \frac{a\tau}{h^2} \delta_x^2\right) \left(I - \theta \frac{a\tau}{h^2} \delta_y^2\right) \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} = A_h u_{j,m}^n, \quad (8.13)$$

$$\begin{aligned} & \left(I - \theta \frac{a\tau}{h^2} \delta_x^2\right) \left(I - \theta \frac{a\tau}{h^2} \delta_y^2\right) u_{j,m}^{n+1} \\ &= (I + (1-\theta) \tau A_h) u_{j,m}^n, \end{aligned} \quad (8.14)$$

和

$$\begin{aligned} & \left( I - \theta \frac{a\tau}{h^2} \delta_x^2 \right) \left( I - \theta \frac{a\tau}{h^2} \delta_y^2 \right) u_{j,m}^{n+1} \\ &= \left( I + (1-\theta) \frac{a\tau}{h^2} \delta_x^2 \right) \left( I + (1-\theta) \frac{a\tau}{h^2} \delta_y^2 \right) u_{j,m}^n. \end{aligned} \quad (8.15)$$

显然,差分格式(8.13),(8.14)和(8.15)是各不相同的,但当 $\theta=1$ 时,差分格式(8.14)和(8.15)是一样的,当 $\theta=\frac{1}{2}$ 时,差分格式(8.13)和(8.15)是一样的.

差分格式(8.13),(8.14)和(8.15)一般称为带有可分解算子的差分格式.利用这些差分格式的左边差分算子的可分解性质,可以把多维问题分解为若干个简单的问题来解.例如,对于差分格式(8.14)来说,如果令 $\left( I - \theta \frac{a\tau}{h^2} \delta_y^2 \right) u_{j,m}^{n+1} = u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}$ ,那么(8.14)就化为

$$\begin{cases} \left( I - \theta \frac{a\tau}{h^2} \delta_x^2 \right) u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} = (I + (1-\theta)\tau A_1) u_{j,m}^n, \\ \left( I - \theta \frac{a\tau}{h^2} \delta_y^2 \right) u_{j,m}^{n+1} = u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}, \end{cases}$$

其中每个方程对未知因变量来说都是一维的.这种分解的办法是多种多样的,因而就产生了不同的交替方向隐式差分格式以及其它的差分格式.采用这些差分格式进行计算,计算量可以大大减少,所以这类差分格式也统称为经济格式.

下面我们从差分格式(8.13),(8.14)和(8.15)可以得到一些常用的差分格式.在推导中取 $\theta=\frac{1}{2}$ 在(8.13)中引入中间量

$u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}$ , 令

$$\frac{u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j,m}^n}{\tau} = \left( I - \frac{1}{2} a \lambda \delta_y^2 \right) \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau},$$

其中  $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ . 此式可以化为

$$\frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \alpha \frac{1}{h^2} \delta_y^2 (u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n).$$

由此我们得到逼近(8.1)的 Douglas 差分格式

$$\begin{cases} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \lambda \delta_x^2\right) \frac{u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j,m}^n}{\tau} = A_h u_{j,m}^n, \\ \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau/2} = \alpha \frac{1}{h^2} \delta_y^2 (u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n). \end{cases} \quad (8.16)$$

我们注意到, Peaceman-Rachford 格式等价于当  $\theta = \frac{1}{2}$  时的格式(8.15), 而此时(8.15)等价于(8.13), 由此得出 Douglas 格式等价 Peaceman-Rachford 格式. 因此 Douglas 是一个二阶精度的无条件稳定的差分格式.

在差分格式(8.15)中引入中间量  $u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}$ , 可以得到差分格式

$$\begin{cases} \left(I - \frac{1}{2} \alpha \lambda \delta_x^2\right) u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} = \left(I + \frac{1}{2} \alpha \lambda \delta_x^2\right) \left(I + \frac{1}{2} \alpha \lambda \delta_y^2\right) u_{j,m}^n, \\ \left(I - \frac{1}{2} \alpha \lambda \delta_y^2\right) u_{j,m}^{n+1} = u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases} \quad (8.17)$$

此格式称为 Дьяконов 格式. 显然它也是二阶精度的无条件稳定的差分格式.

#### 8.4 局部一维格式

1959 年 Яненко 提出求解多维问题的一种算法, 其差分格式是

$$\begin{cases} \frac{u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j,m}^n}{\tau} = \frac{\alpha}{h^2} \delta_x^2 \left( \frac{u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} + u_{j,m}^n}{2} \right), \\ \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{\alpha}{h^2} \delta_y^2 \left( \frac{u_{j,m}^{n+1} + u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}}{2} \right). \end{cases} \quad (8.18)$$

下面来考察这个格式的精度及稳定性。首先把(8.18) 改写为

$$\begin{cases} \left( I - \frac{a}{2} \lambda \delta_x^2 \right) u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} = \left( I + \frac{a}{2} \lambda \delta_x^2 \right) u_{j,m}^n, \\ \left( I - \frac{a}{2} \lambda \delta_y^2 \right) u_{j,m}^{n+1} = \left( I + \frac{a}{2} \lambda \delta_y^2 \right) u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

由此可以得到

$$\begin{cases} \left( I + \frac{a}{2} \lambda \delta_y^2 \right) \left( I - \frac{a}{2} \lambda \delta_x^2 \right) u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} \\ = \left( I + \frac{a}{2} \lambda \delta_y^2 \right) \left( I + \frac{a}{2} \lambda \delta_x^2 \right) u_{j,m}^n, \\ \left( I - \frac{a}{2} \lambda \delta_x^2 \right) \left( I - \frac{a}{2} \lambda \delta_y^2 \right) u_{j,m}^{n+1} = \\ \left( I - \frac{a}{2} \lambda \delta_x^2 \right) \left( I + \frac{a}{2} \lambda \delta_y^2 \right) u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

利用 $\delta_x^2 \delta_y^2 = \delta_y^2 \delta_x^2$ , 我们可以得到

$$\begin{aligned} & \left( I - \frac{a}{2} \lambda \delta_x^2 \right) \left( I - \frac{a}{2} \lambda \delta_y^2 \right) u_{j,m}^{n+1} \\ & = \left( I + \frac{a}{2} \lambda \delta_x^2 \right) \left( I + \frac{a}{2} \lambda \delta_y^2 \right) u_{j,m}^n. \end{aligned}$$

这就是(8.10), 因此差分格式(8.18) 是二阶精度的无条件稳定的差分格式.

由于差分格式(8.18) 在每一步上所解的都是一个纯粹一维的问题, 所以一般称其为局部一维格式. 还可以把(8.18) 写成更一般的形式

$$\begin{cases} \frac{u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j,m}^n}{\tau} = \frac{a}{h^2} \delta_x^2 \left[ \theta u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} + (1-\theta) u_{j,m}^n \right], \\ \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} = \frac{a}{h^2} \delta_y^2 \left[ \theta u_{j,m}^{n+1} + (1-\theta) u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} \right]. \end{cases} \quad (8.19)$$

容易证明, 此格式等价于差分格式(8.15).

某些交替方向隐式格式, 如 Peaceman-Rachford 格式(8.7), 如果多引入两个中间量也可以写成局部一维的格式,

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{u_{j,m}^{n+\frac{1}{4}} - u_{j,m}^n}{\tau} &= \frac{1}{2} a \frac{1}{h^2} \delta_y^2 u_{j,m}^n, \\ \frac{u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j,m}^{n+\frac{1}{4}}}{\tau} &= \frac{1}{2} a \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_{j,m}^{n+\frac{1}{4}}, \\ \frac{u_{j,m}^{n+\frac{3}{4}} - u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}}{\tau} &= \frac{1}{2} a \frac{1}{h^2} \delta_y^2 u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}, \\ \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^{n+\frac{3}{4}}}{\tau} &= \frac{1}{2} a \frac{1}{h^2} \delta_x^2 u_{j,m}^{n+\frac{3}{4}}. \end{aligned} \right. \quad (8.20)$$

把(8.20)的前两式相加消去  $u_{j,m}^{n+\frac{1}{4}}$ , 把(8.20)的后两式相加消去  $u_{j,m}^{n+\frac{3}{4}}$ , 这样立即就得到(8.7)。

### 8.5 预测校正格式

预测校正格式已讨论过多次, 例如双曲型方程组中的二步方法, 非线性抛物型的预测校正格式。本节提到的 Douglas 格式也可以看作预测校正格式。预测校正格式的基本特点是在一个时间层上分为二步计算, 首先采用精度不高但稳定性好的格式计算出在时刻  $t = t_n + \frac{\tau}{2}$  处的近似值(预测), 然后采用预测值来构造二阶精度的格式(校正), 以求得  $t_{n+1}$  时的最终值。

逼近(8.1)的预测校正格式可以写作

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{u_{j,m}^{n+\frac{1}{4}} - u_{j,m}^n}{\tau/2} &= \frac{a}{h^2} \delta_x^2 u_{j,m}^{n+\frac{1}{4}}, \\ \frac{u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} - u_{j,m}^{n+\frac{1}{4}}}{\tau/2} &= \frac{a}{h^2} \delta_y^2 u_{j,m}^{n+\frac{1}{4}}, \\ \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} &= \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right. \quad (8.21)$$

从(8.21)的前两式消去  $u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}$  得到

$$\begin{cases} \left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2 \right) \left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2 \right) u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}} = u_{j,m}^n, \\ \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}. \end{cases}$$

消去  $u_{j,m}^{n+\frac{1}{2}}$  就得到

$$\begin{aligned} \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} &= \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) \left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2 \right)^{-1} \\ &\quad \left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2 \right)^{-1} u_{j,m}^n. \end{aligned}$$

用差分算子  $\left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2 \right) \left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2 \right)$  对上式进行作用有

$$\begin{aligned} &\left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2 \right) \left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2 \right) \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} \\ &= \left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2 \right) \left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2 \right) \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) \left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2 \right)^{-1} \\ &\quad \left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2 \right)^{-1} u_{j,m}^n. \end{aligned}$$

利用  $\delta_x^2 \delta_y^2 = \delta_y^2 \delta_x^2$  可以得到

$$\left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_x^2 \right) \left( I - \frac{a\lambda}{2}\delta_y^2 \right) \frac{u_{j,m}^{n+1} - u_{j,m}^n}{\tau} = \frac{a}{h^2} (\delta_x^2 + \delta_y^2) u_{j,m}^n.$$

由此式可得到(8.9), 因此预测校正格式是二阶精度的无条件稳定的格式.

## 习 题

### 1. 试讨论逼近扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - \frac{1}{2}(u_{j+1}^n + u_{j-1}^n)}{\tau} = \frac{1}{h^2} \delta^2 u_j^n$$

的稳定性。

2. 试讨论逼近扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的差分格式。

$$\theta \frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} + (1-\theta) \frac{u_j^n - u_j^{n-1}}{\tau} = \frac{1}{h^2} \delta^2 u_j^{n+1} \quad 0 \leq \theta \leq 1,$$

的截断误差及稳定性,并调整 $\theta$ 使得截断误差为 $O(\tau^2 + h^4)$ 。

3. 试讨论扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的差分格式

$$(i) \left[ I - \frac{1}{2} \left( \lambda - \frac{1}{6} \right) \delta^2 \right] u_j^{n+1} = \left[ I + \frac{1}{2} \left( \lambda + \frac{1}{6} \right) \delta^2 \right] u_j^n.$$

$$(ii) u_j^{n+1} = \frac{4}{3} u_j^n - \frac{1}{3} u_j^{n-1} + \frac{2}{3} \lambda \delta^2 u_j^{n+1}$$

的截断误差和稳定性,其中  $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ 。

4. 试讨论逼近扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的差分格式

$$\frac{u_j^{n+1} - (1-\theta)u_j^n - \theta u_j^{n-1}}{(1+\theta)\tau} = \frac{1}{h^2} \delta^2 u_j^n, \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

的稳定性。

5. 试构造出逼近变系数方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( [0.1 + \sin^2 x] \frac{\partial u}{\partial x} \right)$$

的一个二阶精度的可行的差分格式。

6. 利用积分插值法构造出逼近扩散方程



$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的Crank-Nicolson 格式。

7. 对非线性方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( u^2 \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

试构造出一个预测校正格式。

8. 讨论逼近对流扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} = a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

的Du Fort-Frankel 格式

$$\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2\tau} + a \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} = a \frac{u_{j+1}^n - (u_{j+1}^{n+1} + u_{j-1}^{n+1}) + u_{j-1}^n}{h^2}$$

的相容性。

9. 证明变系数对流扩散方程 Самарский 格式 (6.25) 的截断误差为  $O(\tau + h^2)$ 。

10. 试构造逼近二维扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

的DuFort-Frankel 格式,并讨论其稳定性。

11. 试用能量方法证明解二维扩散方程的第一边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( a(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right), 0 < x, y < 1, t > 0, \\ u(x, y, 0) = u_0(x, y), 0 < x, y < 1, \\ u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0, t > 0 \end{cases}$$

( $a(x, y) > 0$ ) 的Crank-Nicolson 格式是绝对稳定的。

12. 试讨论逼近扩散方程

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

的Douglas-Rachford 格式

$$\begin{cases} \left( I - \frac{\lambda}{2} \delta_x^2 \right) \bar{u}_{j,m}^{n+1} = \left( I + \frac{\lambda}{2} \delta_x^2 \right) u_{j,m}^n + \lambda \delta_y^2 u_{j,m}^n, \\ \left( I - \frac{\lambda}{2} \delta_y^2 \right) u_{j,m}^{n+1} = \bar{u}_{j,m}^{n+1} - \frac{\lambda}{2} \delta_x^2 u_{j,m}^n \end{cases}$$

的截断误差和稳定性。

13. 考虑初边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, & 0 < x < 1, t > 0, \\ u(x, 0) = \sin \pi x, & 0 < x < 1, \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t > 0. \end{cases}$$

用下列方法来求解:

- (i) 古典显式格式,
- (ii) 古典隐式格式,
- (iii) Crank-Nicolson 格式,
- (iv) DuFort-Frankel 格式.

取  $h = \frac{1}{3}$ ,  $\tau = \frac{1}{36}$ , 计算二个时间层后与解析解相比较.

## 第五章 椭圆型方程

本章以 Poisson 方程为例说明在不同坐标下离散椭圆型偏微分方程的方法以及边界条件的处理方法, 并从理论上阐明差分格式的可解性、与原微分方程的相容性、计算的稳定性以及解的收敛性. 在实际问题中, 常常出现非线性椭圆型方程, 我们将讨论其解法, 并以流体力学中的 Navier-Stokes 方程的数值解为例. 本章力图介绍一些提高格式精确度的方法, 解差分方程组的快速迭代解法以及为节省计算机内存采用的压缩存储技巧. 这些都是提高在电子计算机上解椭圆型方程的很有效的措施. 此外, 还引进了一种新方法——多重网格法.

### § 1 Poisson 方程

考虑 Poisson 方程

$$-\Delta u = -\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) = f(x, y), (x, y) \in D. \quad (1.1)$$

$D$  是  $x$ - $y$  平面上的有界区域, 设它的边界  $\partial D$  是分段光滑的曲线. 在  $\partial D$  上,  $u$  满足下列三类边界条件之一:

$$u|_{\partial D} = \alpha(x, y) \quad (\text{第一边值条件}), \quad (1.2a)$$

$$\left.\frac{\partial u}{\partial n}\right|_{\partial D} = \beta(x, y) \quad (\text{第二边值条件}), \quad (1.2b)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial n} + \kappa(x, y)u\right)_{\partial D} = \gamma(x, y) \quad (\text{第三边值条件}), \quad (1.2c)$$

其中,  $\frac{\partial u}{\partial n}$  为函数  $u$  沿边界外法线方向的导数,  $\alpha(x, y), \beta(x, y), \gamma(x, y), \kappa(x, y)$  都是连续函数, 并假定  $\kappa(x, y) \geq 0$ .

### 1.1 五点差分格式

假设解域  $D$  为矩形区域

$$D = \{(x, y) | 0 < x < a, 0 < y < b\},$$

其边界由四条线段所组成,

$$\partial D = \{(x, y) | x=0, a, 0 \leq y \leq b; y=0, b, 0 \leq x \leq a\}.$$

首先, 将解域分成矩形网格, 在  $x$ - $y$  平面上, 作两族平行于  $x$  轴和  $y$  轴的直线

$$\begin{aligned} x &= ih \quad (i=0, 1, 2, \dots, I+1), \\ y &= jk \quad (j=0, 1, 2, \dots, J+1). \end{aligned}$$

$x$  方向的步长  $h = \frac{a}{I+1}$ ,  $y$  方向的步长  $k = \frac{b}{J+1}$ . 用  $D_h$  表示  $D$  的内点的集合

$$D_h = \{(x_i, y_j) \in D\} = \{(x_i, y_j) | 1 \leq i \leq I, 1 \leq j \leq J\}.$$

用  $\partial D_h$  表示边界点的集合

$$\begin{aligned} \partial D_h &= \{(x_i, y_j) \in \partial D\} = \\ &= \{(x_i, y_j) | i=0, I+1, j=0, 1, \dots, J+1; \\ &\quad j=0, J+1, i=1, 2, \dots, I\}. \end{aligned}$$

在图 5.1 中,  $\Delta$  表示内点,  $\circ$  表示边界点.  $u(x_i, y_j)$  表示网格点  $(x_i, y_j)$  上满足微分方程 (1.1) 的函数值.

下面我们来建立在  $D_h$  上的五点差分格式. 利用 Taylor 展开式有

$$\begin{aligned} &\frac{1}{h^2} \left\{ u(x_i + h, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i - h, y_j) \right\} \\ &= \frac{\partial^2 u(x_i, y_j)}{\partial x^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 u(\xi, y_j)}{\partial x^4} + O(h^4), \quad (1.3a) \end{aligned}$$

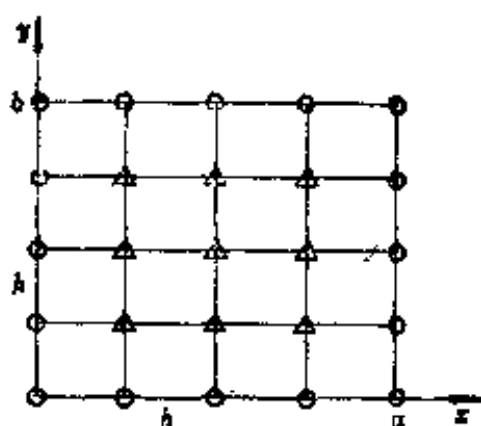


图 5.1 矩形网格

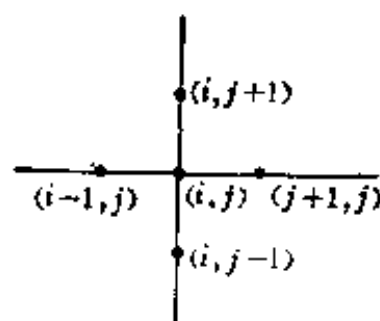


图 5.2

$$\begin{aligned} & \frac{1}{k^2} \left\{ u(x_i, y_i + k) - 2u(x_i, y_i) + u(x_i, y_i - k) \right\} \\ &= \frac{\partial^2 u(x_i, y_i)}{\partial y^2} + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, \eta)}{\partial y^4} + O(k^4), \end{aligned} \quad (1.3b)$$

其中,  $x_{i-1} \leq \xi \leq x_{i+1}, y_{j-1} \leq \eta \leq y_{j+1}$ . 用  $u_{i,j}$  表示  $u(x_i, y_j)$  的近似值. 由(1.3a)和(1.3b)可以得出方程(1.1)的差分格式

$$\begin{aligned} -\Delta_h u_{i,j} = & - \left\{ \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{h^2} + \right. \\ & \left. + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{k^2} \right\} = f_{i,j}, \end{aligned} \quad (1.4)$$

其中,  $f_{i,j} = f(x_i, y_j)$ . 由于差分方程(1.4)中只出现  $u$  在  $(x_i, y_j)$  与其四个邻点上的值, 故称之为五点差分格式, 见图5.2.

容易看出差分算子  $-\Delta_h$  的截断误差

$$\begin{aligned} E_{i,j} &= -\Delta u(x_i, y_j) - (-\Delta_h u_{i,j}) \\ &= \frac{1}{12} \left\{ h^2 \frac{\partial^4 u(\xi, y_j)}{\partial x^4} + k^2 \frac{\partial^4 u(x_i, \eta)}{\partial y^4} \right\} \\ &\quad + O(h^4 + k^4) \\ &= O(h^2 + k^2). \end{aligned} \quad (1.5)$$

若取正方形网格,  $h = k$ , 则差分方程(1.4)可以简化为

$$u_{i,j} - \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1}) = \frac{h^2}{4} f_{i,j}, \quad (1.6)$$

若  $f \equiv 0$  (Laplace 方程), 则有

$$u_{i,j} = \frac{1}{4} (u_{i-1,j} + u_{i,j-1} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1}).$$

**例 1.1** 求解单位方域内 Poisson 方程第一边值问题

$$-\Delta u = f(x, y) \quad (x, y) \in D, \quad (1.1)$$

$$u|_{\partial D} = \alpha(x, y), \quad (1.2a)$$

其中,  $D = \{(x, y) | 0 < x, y < 1\}$ . 取  $h = k = \frac{1}{4}$ , 节点排列见图 5.3b 和 5.3c. 由于边界点上的函数值已知, 内点上的函数值为我们要求的未知量, 故只排内点的序号, 边界点不参加排序.

首先考虑图 5.3b 所示的 9 个节点的差分方程组, 每个点上的函数值  $u$  满足差分方程(1.6), 将它们联立后变成

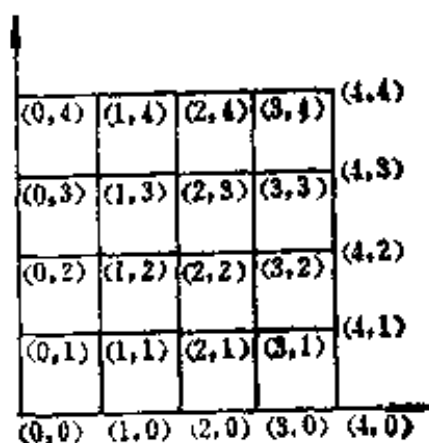


图 5.3a  $(i, j)$  位置

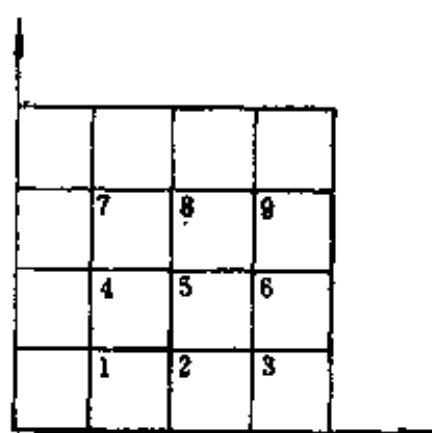


图 5.3b 节点排列

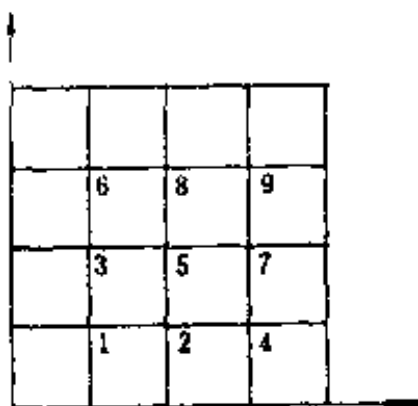


图 5.3c 节点排列

$$\begin{bmatrix}
 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 \hline
 -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\
 \hline
 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 \hline
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6 \\
 \hline
 u_7 \\
 u_8 \\
 u_9
 \end{bmatrix}
 =$$

$$=
 \begin{bmatrix}
 \frac{1}{16}f_1 + \alpha_{10} + \alpha_{01} \\
 \frac{1}{16}f_2 + \alpha_{20} \\
 \frac{1}{16}f_3 + \alpha_{30} + \alpha_{41} \\
 \hline
 \frac{1}{16}f_4 + \alpha_{02} \\
 \frac{1}{16}f_5 \\
 \frac{1}{16}f_6 + \alpha_{42} \\
 \hline
 \frac{1}{16}f_7 + \alpha_{03} + \alpha_{14} \\
 \frac{1}{16}f_8 + \alpha_{24} \\
 \frac{1}{16}f_9 + \alpha_{34} + \alpha_{43}
 \end{bmatrix}
 \quad (1.7)$$

方程(1.7)中的系数矩阵具有五条非零对角线,其余元素均为零,呈块三对角型,而且每个对角块都是三对角矩阵。

再看图 5.3 c 所示的 9 个节点的差分方程组

$$\begin{bmatrix}
 4 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 4 & 0 & -1 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & 0 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & -1 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 4
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 u_1 \\
 u_2 \\
 u_3 \\
 u_4 \\
 u_5 \\
 u_6 \\
 u_7 \\
 u_8 \\
 u_9
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 \frac{1}{16}f_1 + \alpha_{10} + \alpha_{01} \\
 \frac{1}{16}f_2 + \alpha_{20} \\
 \frac{1}{16}f_3 + \alpha_{02} \\
 \frac{1}{16}f_4 + \alpha_{30} + \alpha_{41} \\
 \frac{1}{16}f_5 \\
 \frac{1}{16}f_6 + \alpha_{03} + \alpha_{14} \\
 \frac{1}{16}f_7 + \alpha_{42} \\
 \frac{1}{16}f_8 + \alpha_{24} \\
 \frac{1}{16}f_9 + \alpha_{34} + \alpha_{43}
 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix}
 \frac{1}{16}f_1 + \alpha_{10} + \alpha_{01} \\
 \frac{1}{16}f_2 + \alpha_{20} \\
 \frac{1}{16}f_3 + \alpha_{02} \\
 \frac{1}{16}f_4 + \alpha_{30} + \alpha_{41} \\
 \frac{1}{16}f_5 \\
 \frac{1}{16}f_6 + \alpha_{03} + \alpha_{14} \\
 \frac{1}{16}f_7 + \alpha_{42} \\
 \frac{1}{16}f_8 + \alpha_{24} \\
 \frac{1}{16}f_9 + \alpha_{34} + \alpha_{43}
 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$



方程(1.8)中的系数矩阵是块三对角矩阵,每个对角块矩阵是对角阵,非对角块矩阵是长方阵。

(1.7)式和(1.8)式中右端项是用(1.1)式中的右端项和相应的边界条件得到的,求解(1.7)式或(1.8)式得节点上的函数值 $u_1, u_2, \dots, u_9$ 。

## 1.2 极坐标下的差分格式

如果要求在圆、环、扇形或环扇形区域内解 Poisson 方程(1.1)时,采用极坐标可以使边界容易处理。

作为例子,我们考虑在极坐标 $(r, \theta)$ 下的 Laplace 方程

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0, 0 \leq r < \infty, 0 \leq \theta \leq 2\pi. \quad (1.9)$$

当 $r=0$ 时,方程(1.9)的系数具有奇异性,因此只有在 $r>0$ 的情况下其解才有意义。为了定出有意义的解,需要补充在 $r=0$ 处 $u$ 有界的条件。设 $u$ 满足

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} r \frac{\partial u}{\partial r} = 0. \quad (1.10)$$

以圆为例,沿径向 $r$ 和角度 $\theta$ 方向取等步长 $\Delta r$ 和 $\Delta\theta$ 作网格剖分,见图 5.4a。

$$r_i = \left( i + \frac{1}{2} \right) \Delta r, i = 0, 1, 2, \dots,$$

$$\theta_j = j \Delta\theta, j = 0, 1, 2, \dots, J-1$$

$$\Delta\theta = \frac{2\pi}{J}$$

这种剖分在 $r-\theta$ 平面上形成矩形网格,如图 5.4b。

极坐标下的差分格式与 $x-y$ 坐标下的差分格式相比,有两处需要作特殊处理。一是在 $\theta=\theta_0$ 和 $\theta=\theta_{J-1}$ 的两直线上建立差分方程时,要加循环边界条件,也就是说在 $\theta=\theta_0$ 上建立差分方程时,要用到 $\theta=\theta_{J-1}$ 线上的值,而在 $\theta=\theta_{J-1}$ 上建立差分方程时,要用到 $\theta=\theta_0$ 上的值;二是从网格点中除去坐标 $r=0$ 的点,产生了当

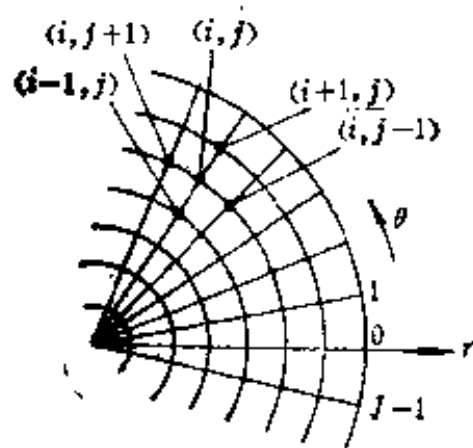


图 5.4a

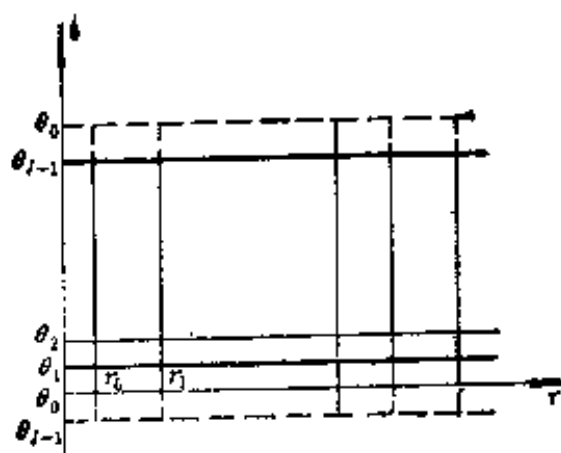


图 5.4b

$r_0 = \frac{1}{2}\Delta r$  处逼近方程(1.9)的问题.

现列出方程(1.9)的差分方程

$$\frac{1}{r_i(\Delta r)^2} \delta_r(r, \delta_r u_{i,j}) + \frac{1}{r_i^2(\Delta \theta)^2} \delta_\theta^2 u_{i,j} = 0, \quad (1.11)$$

其中,  $\delta_r$  和  $\delta_\theta$  分别表示  $r$  方向和  $\theta$  方向的中心差分算子, 如  $f$  在  $(x_i, y_i)$  的中心差分记为

$$\delta_r f_{i,j} = f_{i+\frac{1}{2},j} - f_{i-\frac{1}{2},j},$$

$$\delta_\theta f_{i,j} = f_{i,j+\frac{1}{2}} - f_{i,j-\frac{1}{2}}.$$

利用循环边界条件  $u(r, \theta) = u(r, \theta + 2\pi)$ , 具体写出方程(1.11)在  $j=0$  和  $j=J-1$  上的差分方程为

$$\begin{aligned} j=0, & \frac{1}{r_i(\Delta r)^2} \left[ r_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1,0} - \left( r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}} \right) u_{i,0} \right. \\ & \left. + r_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1,0} \right] + \frac{1}{r_i^2(\Delta \theta)^2} (u_{i,1} - 2u_{i,0} + u_{i,J-1}) = 0, \\ & i=1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (1.12)$$

$$\begin{aligned} j=J-1, & \frac{1}{r_i(\Delta r)^2} \left[ r_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1,J-1} - \left( r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}} \right) u_{i,J-1} \right. \\ & \left. + r_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1,J-1} \right] + \frac{1}{r_i^2(\Delta \theta)^2} (u_{i,0} - 2u_{i,J-1} \end{aligned}$$

$$+u_{i,j-2})=0 \quad i=1,2,\dots, \quad (1.13)$$

当  $j=1,2,\dots,J-2$  时方程为

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r_i(\Delta r)^2} \left[ r_{i+\frac{1}{2}} u_{i+1,j} - \left( r_{i+\frac{1}{2}} + r_{i-\frac{1}{2}} \right) u_{i,j} + r_{i-\frac{1}{2}} u_{i-1,j} \right] \\ & + \frac{1}{r_i^2 (\Delta \theta)^2} (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = 0, \\ & i=1,2,\dots. \end{aligned} \quad (1.14)$$

下面我们用积分插值法推导  $(r_0, \theta_i)$  处的差分方程. 将方程 (1.9) 乘以  $r$  并将它由  $\varepsilon$  到  $\Delta r$  对  $r$  积分, 再由  $\theta_{i-\frac{1}{2}}$  到  $\theta_{i+\frac{1}{2}}$  对  $\theta$  积分

$$\begin{aligned} I_i &= \int_{\theta_{i-\frac{1}{2}}}^{\theta_{i+\frac{1}{2}}} d\theta \left\{ \int_{\varepsilon}^{\Delta r} \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \right] dr \right\} \\ &= \int_{\theta_{i-\frac{1}{2}}}^{\theta_{i+\frac{1}{2}}} \left( r \frac{\partial u}{\partial r} \right) \Big|_{\varepsilon}^{\Delta r} d\theta + \int_{\varepsilon}^{\Delta r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) \Big|_{\theta_{i-\frac{1}{2}}}^{\theta_{i+\frac{1}{2}}} dr. \end{aligned}$$

令  $\varepsilon \rightarrow 0$ , 并利用条件 (1.10) 和中值定理, 则有

$$\begin{aligned} I_0 &= \int_{\theta_{i-\frac{1}{2}}}^{\theta_{i+\frac{1}{2}}} \Delta r \frac{\partial}{\partial r} u(\Delta r, \theta) d\theta + \int_0^{\Delta r} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u \left( r, \theta_{i+\frac{1}{2}} \right) \right. \\ & \quad \left. - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} u \left( r, \theta_{i-\frac{1}{2}} \right) \right\} dr \\ &\approx \Delta r \frac{\partial}{\partial r} u(\Delta r, \theta_i) \Delta \theta + \frac{1}{\frac{\Delta r}{2}} \frac{\partial}{\partial \theta} u \left( \frac{\Delta r}{2}, \theta_{i+\frac{1}{2}} \right) \\ & \quad - \frac{\partial}{\partial \theta} u \left( \frac{\Delta r}{2}, \theta_{i-\frac{1}{2}} \right) \Delta r \\ &\approx \frac{u_{1,i} - u_{0,i}}{\Delta r} \Delta r \Delta \theta + 2[u_{0,i+1} - u_{0,i} - (u_{0,i} - u_{0,i-1})] / \Delta \theta = 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

上式是微分方程(1.9)在 $(r_0, \theta_0)$ 处的差分方程。其实只要令  $r_i = \frac{\Delta r}{2}$ , 则方程(1.14)就化为(1.15)。至此, 我们已经建立了所有网格点上的差分方程。

## § 2 边界条件处理

我们仍然考虑 Poisson 方程(1.1)的各种边值问题。

### 2.1 矩形区域

设  $D, \partial D$  同 1.1 中的定义。在作网格剖分时, 应该力求使  $\partial D_h$  与  $\partial D$  重合, 矩形均匀网格的步长  $h$  和  $k$  应与矩形域  $D$  的边长  $a$  和  $b$  相协调, 即选取  $h = a/I, k = b/J$ , 其中正整数  $I$  和  $J$  分别是  $x$  和  $y$  方向区域剖分的间隔数, 可得

$$\begin{aligned} D_h &= \{(x_i, y_j) \in D\} = \{(x_i, y_j) | \\ &\quad 1 \leq i \leq J-1, 1 \leq j \leq J-1\}, \\ \partial D_h &= \{(x_i, y_j) \in \partial D\} = \{(x_i, y_j) | \\ &\quad i=0, I, 0 \leq j \leq J; j=0, J, 1 \leq i \leq I-1\}. \end{aligned}$$

对于第一类边界条件, 如式

(1.2a), 我们已作过处理

$$u_{ij} = a_{ij}, \quad (x_i, y_j) \in \partial D_h. \quad (2.1)$$

对于第二类边界条件, 如式(1.2b), 先把网格平行扩展到  $D_h \cup \partial D_h$  之外, 即在域外四周一个步长处各虚设一排节点(图 5.5), 然后用中心差商逼近式(1.2b)

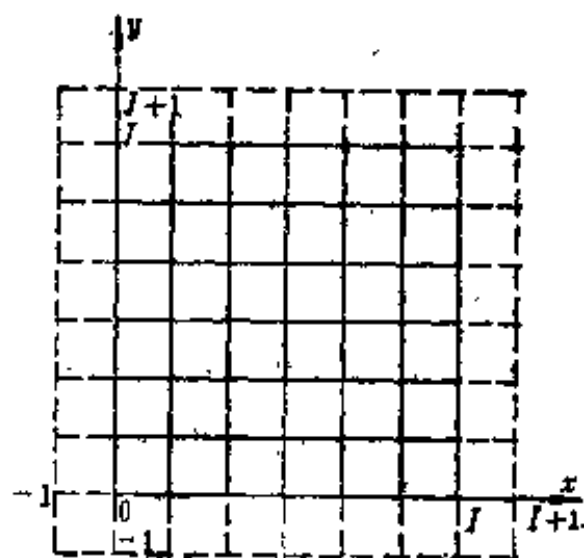


图 5.5 虚设的节点

中的微商项,得第二类边界条件的差分公式

$$\begin{cases} u_{-1,j} - u_{1,j} = 2h\beta_{0,j}, & 0 \leq j \leq J, \\ u_{I+1,j} - u_{I-1,j} = 2h\beta_{I,j}, & 0 \leq j \leq J, \\ u_{i,-1} - u_{i,1} = 2k\beta_{i,0}, & 0 \leq i \leq I, \\ u_{i,J+1} - u_{i,J-1} = 2k\beta_{i,J}, & 0 \leq i \leq I, \end{cases} \quad (2.2)$$

其中,  $u_{-1,j}, u_{I+1,j}, 0 \leq j \leq J, u_{i,-1}, u_{i,J+1}, 0 \leq i \leq I$  是虚设点上的附加函数值。按(1.4)式建立四周边界网格点上的差分方程,然后与(2.2)式联立消去这些附加的函数值,再与内点上的差分方程(1.4)联立,得到关于  $u_{ij}, 0 \leq i \leq I, 0 \leq j \leq J$  的线性代数方程组。

最后,对于第三类边界条件,如式(1.2c),和第二类边界条件类似,我们直接列出相应边界条件的格式

$$\begin{cases} \frac{u_{-1,j} - u_{1,j}}{2h} + \kappa_{0,j} u_{0,j} = \gamma_{0,j}, & 0 \leq j \leq J, \\ \frac{u_{I+1,j} - u_{I-1,j}}{2h} + \kappa_{I,j} u_{I,j} = \gamma_{I,j}, & 0 \leq j \leq J, \\ \frac{u_{i,-1} - u_{i,1}}{2k} + \kappa_{i,0} u_{i,0} = \gamma_{i,0}, & 0 \leq i \leq I, \\ \frac{u_{i,J+1} - u_{i,J-1}}{2k} + \kappa_{i,J} u_{i,J} = \gamma_{i,J}, & 0 \leq i \leq I. \end{cases} \quad (2.3)$$

## 2.2 特殊曲线边界区域

如果区域  $D$  是圆、直角三角形或曲边三角形,需要对这三种情况分别作特殊处理。

设  $D$  是半径为  $R$  的圆,采用极坐标,在  $r$  和  $\theta$  方向分别取步长

$$\Delta r = \frac{R}{I+0.5}, \quad \Delta \theta = \frac{2\pi}{J}, \text{ 则}$$

$$D_\Delta = \{(r_i, \theta_j) | 0 \leq i \leq I-1, 0 \leq j \leq J-1\},$$

$$\partial D = \{(R, \theta_j) | 0 \leq j \leq J-1\}.$$

作为例子,我们仍考虑极坐标 $(r, \theta)$ 下的 Laplace 方程(1.9), 内点 $(r_i, \theta_i) \in D_i$  的差分方程为(1.12)~(1.15), 边界点为

$$u(R, \theta_i) = \alpha(\theta_i),$$

其中,  $\alpha(\theta_i)$  为已知函数.

设  $D$  是直角三角形, 它的两直角边位于坐标轴上

$$D = \left\{ (x, y) \mid 0 < x < a, \quad 0 < y < -\frac{b}{a}x + b \right\},$$

其中,  $a > 0, b > 0$  是直角边的长度.

我们将每个直角边分成数目相同的  $N$  份, 令  $h = \frac{a}{N}, k = \frac{b}{N}$ ,

$N$  是整数. 矩形网格由两族直线

$$x_i = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, N-1,$$

$$y_j = jk, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N-1.$$

相交构成. 当用这样的方式选取  $h$  和  $k$  时, 两族直线与斜边相交于同样的一些点上, 这些交点就是网格的边界节点. 称这样的网格为协调网格. 它沿每个方向都是均匀的, 则

$$D_k = \{(x_i, y_j) \mid 0 < i < N, 0 < j < N-i\},$$

$$\partial D_k = \left\{ (x_i, y_j) \mid i = 0, 0 \leq j \leq N, j = 0, 0 \leq i \leq N, \right.$$

$$\left. y_j = -\frac{b}{a}x_{N_i} + b \right\},$$

其中,  $x_{N_i}$  为第  $j$  条网格线上的右端边界点. 不难写出差分公式

$$\begin{cases} -\Delta_k u_{ij} = f_{ij}, & (x_i, y_j) \in D_k, \\ u_{ij} = \alpha_{ij}, & (x_i, y_j) \in \partial D_k. \end{cases}$$

设  $D$  是曲线三角形, 它的两直角边也位于坐标轴上

$$D = \{(x, y) \mid x, y > 0, y < F(x)\},$$

其中,  $F(x)$  是单调下降的连续函数值, 且

$$-\infty < F'(x) < 0.$$

我们对曲边三角形作两种剖分, 见图 5.6 和 5.7. 在图 5.6 中, 沿

每个坐标轴

$$\begin{aligned}x_i &= ih, & i &= 0, 1, \dots, I, \\y_j &= jk, & j &= 0, 1, \dots, J,\end{aligned}$$

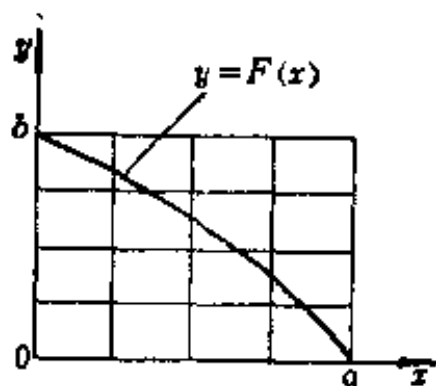


图 5.6 二个方向均为均匀网格

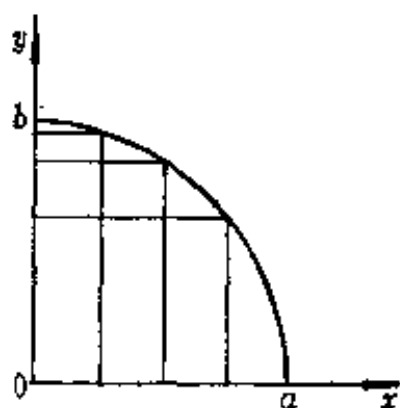


图 5.7 一个方向为均匀网格

其中,  $h = \frac{a}{I}$ ,  $k = \frac{b}{J}$ . 从图 5.6 可见,  $\partial D_h$  与  $\partial D$  不重合, 这给边界条件的逼近带来困难. 因而引进协调的非均匀网格有时是方便的. 如图 5.7, 沿  $x$  轴取步长  $h = \frac{a}{I}$  的均匀网格, 沿  $y$  轴的网格取为

$$\begin{aligned}y_j &= F(x_{I-j}), & j &= 0, 1, \dots, I, \\x_{I-j} &= (I-j)h.\end{aligned}$$

这样, 网格的所有边界节点都位于曲边三角形的边界上, 即  $\partial D_h$  与  $\partial D$  重合, 网格是协调的. 它沿  $y$  轴的步长由下列关系式给出:

$$\begin{aligned}k_j &= y_j - y_{j-1} = F(x_{I-j}) - F(x_{I-j+1}) \\&= F'(x_{I-j} + \theta h)h = O(h), \\&0 \leq \theta \leq 1,\end{aligned}$$

即  $k = O(h)$ .

### 2.3 一般区域

设  $\partial D$  是一般形式的分段光滑曲线, 这时已经不可能采用前面所述的方法定义网格了. 我们分别沿  $x, y$  轴方向取步长为  $h$  和  $k$ , 作网族与坐标轴平行的直线

$$x_i = ih, \quad i = 0, \pm 1, \dots,$$

$$y_j = jk, \quad j = 0, \pm 1, \dots.$$

两族直线的交点 $(ih, jk)$ 称为**网格点**, 记为 $(x_i, y_j)$ .

令

$$D_h = \{(x_i, y_j) | (x_i, y_j) \in D, \text{ 并且 } (x_{i+1}, y_j), (x_{i-1}, y_j), \\ (x_i, y_{j+1}), (x_i, y_{j-1}) \in D\}.$$

称属于 $D_h$ 的点为**内点**, 令

$$\partial D_h = \{(x_i, y_j) | (x_i, y_j) \in D \setminus D_h\}.$$

称属于 $\partial D_h$ 中的网格点为**网格边界点**, 见图 5.8. 我们用 $\triangle$ 表示网格内点, 用 $\circ$ 表示网格边界点.

先考虑第一类边界条件.

由图 5.8 可以看出,  $\partial D_h$  与  $\partial D$  不重合, 由此产生边界条件的转移问题.

### 1. 直接转移

$$u(x_i, y_j) = \alpha(\bar{x}_i, \bar{y}_j), \quad (x_i, y_j) \in \partial D_h,$$

其中,  $(\bar{x}_i, \bar{y}_j) \in \partial D$  是最靠近 $(x_i, y_j)$ 的边界节点. 如图 5.9

$$u_s = \alpha(S),$$

$$u_p = \alpha(T).$$

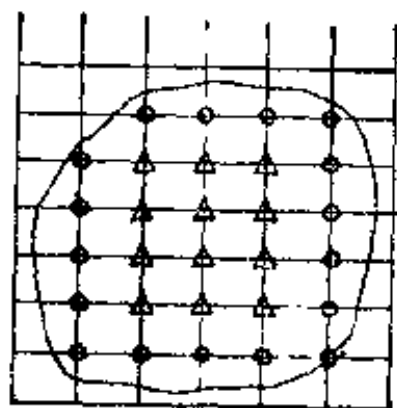


图 5.8

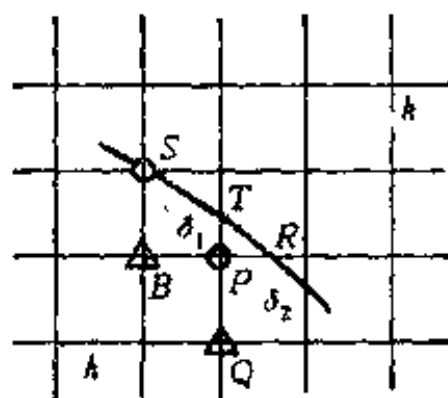


图 5.9

### 2. 线性插值.

在 $P$ 点, 我们可以用 $T, Q$ 两点作线性插值. 设 $TP = \delta < k$ ,



$PQ=k$ , 则有

$$u_P = \frac{k}{k+\delta_1} u(T) + \frac{\delta_1}{k+\delta_1} u_Q.$$

近来, 实际上并不用直接转移和线性插值.

### 3. 在非均匀网格上逼近方程.

设  $PR=\delta_2 < h$ ,  $PB=h$ . 将节点  $P$  看作内点, 按非均匀网格上的五点差分格式逼近方程 (1.1). 在图 5.9 中,  $T$  和  $R$  是边界节点,  $B$  和  $Q$  是内点. 我们有

$$-\frac{1}{h+\delta_2} \left( \frac{u(R)-u_P}{\delta_2} - \frac{u_P-u_B}{h} \right) - \frac{1}{k+\delta_1} \left( \frac{u(T)-u_P}{\delta_1} - \frac{u_P-u_Q}{k} \right) = f_P.$$

下面我们考虑第二、第三类边界条件. 不失一般性, 我们仅讨论第三类边界条件, 而且使用正方形网格.

#### 1. 边界网格点位于 $\partial D$ 上.

如果外法线与坐标轴平行, 则有  $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y}$  (见图 5.10), (1.2c)

式可写成

$$\left( \frac{\partial u}{\partial y} + \kappa(x, y)u \right) \Big|_{\partial D} = \gamma(x, y).$$

在  $P$  点离散成

$$\frac{u(P)-u_Q}{h} + \kappa(P)u(P) = \gamma(P).$$

如果外法线方向与坐标轴不平行, 则有

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial n} \Big|_P &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(n, x) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(n, y) \right\}_P \\ &= \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \cos(\pi - \alpha) + \frac{\partial u}{\partial y} \cos(\pi - \beta) \right\}_P \end{aligned}$$

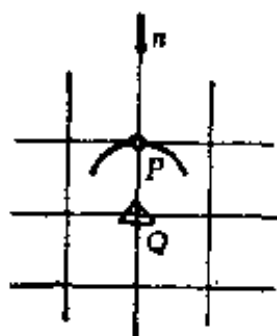


图 5.10

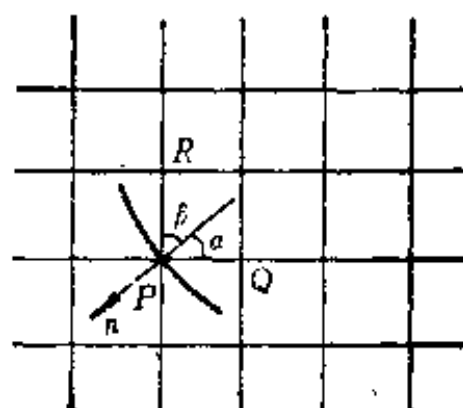


图 5.11

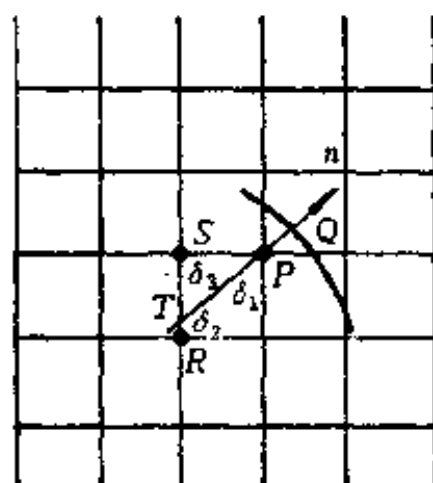


图 5.12

$$= \left\{ -\frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha - \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta \right\}_P.$$

见图 5.11, 在  $P$  点将 (1.2 c) 式离散成

$$\frac{u(P) - u_O}{h} \cos \alpha + \frac{u(P) - u_R}{h} \cos \beta + \kappa(P)u(P) = \gamma(P).$$

2. 边界网格点不在  $\partial D$  上.

设  $P$  是不在  $\partial D$  上的一个边界点. 过  $P$  作  $\partial D$  的外法线交  $\partial D$  于  $Q$ , 与内部网格线  $SR$  相交于  $T$  (见图 5.12), 令  $PT = \delta_1$ ,  $TR = \delta_2$ ,  $TS = \delta_3$ ,  $\delta_2 + \delta_3 = h$ . 在  $Q$  点将 (1.2 c) 式离散成

$$\frac{u_P - u_T}{\delta_1} + \kappa(Q)u(Q) = \gamma(Q),$$

或者可以写成

$$\frac{1}{\delta_1} \left[ u_P - \frac{\delta_3 u_R + \delta_2 u_S}{h} \right] + \kappa(Q)u(Q) = \gamma(Q).$$

### § 3 极值定理

在这一节, 我们研究某一类差分算子, 对于这一类差分算子成立极值定理. 极值定理可用于证明差分问题的存在唯一性并可得

到差分问题解的先验估计. 对于不含混合偏导数的二阶椭圆型方程边值问题, 其大多数差分算子属于我们研究的这类算子. Laplace 算子  $\Delta_h u_i$ , 就是其中一例. 下面讨论一般形式的差分算子.

### 3.1 一般形式的差分方程

用  $\bar{D}_h$  表示网格内节点  $D_h$  和边界节点  $\partial D_h$  的和集, 即  $\bar{D}_h = D_h \cup \partial D_h$ . 假定在每一个点  $(x_i, y_i) \in \bar{D}_h$  选定了一种差分格式,  $G(x_i, y_i)$  表示格式中除  $(x_i, y_i)$  点之外相邻网格节点的集合, 简称 **G 邻域**. 考虑线性微分方程边值问题

$$\begin{cases} Lu = -s(x, y), & (x, y) \in D, \\ u = \alpha(x, y), & (x, y) \in \partial D, \end{cases} \quad (3.1)$$

其中,  $L$  是线性微分算子. (3.1) 式一般形式的差分方程是

$$L_h u_i = -g_i, \quad (3.2)$$

其中, 差分算子

$$L_h u_i = a_{ii} u_i - \sum_{(x_i, y_k) \in G(x_i, y_i)} b_{ik} u_{ik},$$

$g_i$  除了包含原微分方程的右端项  $s(x, y)$  之外, 还包含  $u_i = \alpha_i$  的项. 假定系数满足条件

$$a_{ii} > 0, \quad (x_i, y_i) \in D_h, \quad (3.3)$$

$$b_{ik} > 0, \quad (x_i, y_k) \in G(x_i, y_i), \quad (3.4)$$

$$d_{ii} = a_{ii} - \sum_{(x_i, y_k) \in G(x_i, y_i)} b_{ik} \geq 0, \quad (3.5)$$

且至少存在一个点  $(x_0, y_0)$ , 使得当  $(x_i, y_i) = (x_0, y_0)$  且有一个邻点是边界点时, (3.5) 式严格不等号成立.

**例 3.1** Poisson 方程的五点差分格式(1.6)

$$a_{ii} = 1, \quad b_{i-1,i} = b_{i+1,i} = b_{i,i-1} = b_{i,i+1} = \frac{1}{4}.$$

当  $(x_i, y_i)$  的邻点都是内点时,  $d_{ii} = 0$ . 当  $(x_i, y_i)$  的邻点中有一个点是边界点时,  $d_{ii} > 0$ .

现在我们引进**连通网格**的概念. 若对任意二个节点  $\bar{P}, \bar{\bar{P}}$ , 它们不能同时都是边界点, 即  $\bar{P} \in D_h, \bar{\bar{P}} \in \bar{D}_h$ , 则必有一串节点  $P_i \in \bar{D}_h (i=1, 2, \dots, m)$ , 使得每个节点属于前一节点的  $G$  邻域, 即

$$P_1 \in G(\bar{P}), P_2 \in G(P_1), P_3 \in G(P_2), \dots, P_m \in G(P_{m-1}), \\ \bar{\bar{P}} \in G(P_m), \quad (3.6)$$

那么我们称网格  $\bar{D}_h$  是连通的.

以下讨论仅限于连通域网格  $\bar{D}_h$  及其子域.

### 3.2 极值定理

**定理 3.1 (极值定理)** 设  $\bar{D}_h = D_h \cup \partial D_h$  是连通域, 在  $\bar{D}_h$  上, 算子的系数满足 (3.3) ~ (3.5).  $u_{ij}$  是定义在  $\bar{D}_h$  上的函数,  $u_{ij} \neq \text{常数}$ . 如果  $L_h u_{ij} \leq 0, (x_i, y_j) \in D_h$ , 则  $u_{ij}$  不可能在内点取正的最大值,  $\max_{D_h} u_{ij} \leq \max_{\partial D_h} u_{ij}$ ; 如果  $L_h u_{ij} \geq 0, (x_i, y_j) \in D_h$ , 则  $u_{ij}$  不可能在内点取负的最小值,  $\min_{D_h} u_{ij} \geq \min_{\partial D_h} u_{ij}$ .

**证明** 用反证法先证  $L_h u_{ij} \leq 0$  的情况. 假定  $u_{ij}$  在内点  $(x_{i_0}, y_{j_0}) \in D_h$  取正的最大值  $M = \max_{(x_i, y_j) \in \bar{D}_h} u_{ij} > 0$ ,

$$u_{i_0, j_0} = M \geq u_{ij}, \quad (x_i, y_j) \in D_h, \quad (3.7)$$

$$u_{i_0, j_0} = M > u_{ij}, \quad (x_i, y_j) \in \partial D_h. \quad (3.8)$$

由差分格式 (3.2) 可知

$$L_h u_{i_0, j_0} = a_{i_0, j_0} u_{i_0, j_0} - \sum_{(x_l, y_k) \in G(x_{i_0}, y_{j_0})} b_{lk} u_{lk} \\ = d_{i_0, j_0} u_{i_0, j_0} + \sum_{(x_l, y_k) \in G(x_{i_0}, y_{j_0})} b_{lk} (u_{i_0, j_0} - u_{lk}). \quad (3.9)$$

由 (3.5) 式  $d_{i_0, j_0} \geq 0$ , 又因为  $u_{i_0, j_0} = M > 0$ , 所以 (3.9) 式的第一项非负. 由 (3.7) 式,  $u_{i_0, j_0} \geq u_{lk}, (x_l, y_k) \in G(x_{i_0}, y_{j_0})$ , 再由 (3.4) 式,  $b_{lk} > 0$ , 因此 (3.9) 式的第二项非负, 从而

$$L_h u_{i_0, j_0} \geq 0.$$

在这个结论中有两种可能, 或者

$$L_h u_{i_0, j_0} > 0, \quad (3.10)$$

或者 
$$L_h u_{i_0, j_0} = 0. \quad (3.11)$$

结论(3.10)显然不成立,因为它与定理的假设条件  $L_h u_{i,j} \leq 0$  相矛盾. 从而推知  $u_{i,j}$  在内点取正的最大值这一假设不正确,定理得证. 现在讨论第二种可能(3.11). 从(3.7), (3.8), (3.9)和条件(3.5)推得当  $d_{i_0, j_0} > 0$  时,结论(3.11)不成立,因为  $u_{i,j}$  在内点取正的最大值这一假设不正确,定理得证. 当  $d_{i_0, j_0} = 0$  时,由(3.9), (3.11)推得

$$u_{i_0, j_0} = u_{i_k}, \quad (x_i, y_j) \in G(x_{i_0}, y_{j_0}). \quad (3.12)$$

由  $\bar{D}_h$  的连通性,可以找到满足条件(3.6)的一串节点  $P_1, P_2, \dots, P_m (P_i \in \bar{D}_h)$ . 根据(3.12)有  $u(P_1) = u(P_2)$ , 不失一般性可推出

$$u(P_1) = u(P_2) = \dots = u(P_m) = u(P_0) = M.$$

如果上述点的  $G$  邻域有一个边界点如  $P_B$ , 则

$$u(P_B) = M, \quad P_B \in \partial D_h.$$

这就与假设(3.8)  $M > u_{i,j}, (x_i, y_j) \in \partial D_h$  相矛盾,定理得证.

对于  $L_h u_{i,j} \geq 0$  的情况,只要将  $u_{i,j}$  换成  $(-u_{i,j})$ , 有  $L_h(-u_{i,j}) \leq 0$ , 再利用上面的论证即可,定理 3.1 证完.

### 3.3 差分方程解的存在性与唯一性

**定理 3.2** 差分方程(3.2)的解存在唯一.

**证明** 欲证差分方程(3.2)唯一可解,由线性代数理论,只需证明相应的齐次方程

$$\begin{cases} L_h u_{i,j} = 0, & (x_i, y_j) \in D_h, \\ u_{i,j} = 0, & (x_i, y_j) \in \partial D_h, \end{cases}$$

只有零解. 若  $u_{i,j} \equiv c$  (常数),  $(x_i, y_j) \in \bar{D}_h$ , 则  $c = 0$ , 得证. 若  $u_{i,j} \neq$  常数, 则由定理 3.1 的第一个结论可知

$$\max_{D_h} u_{i,j} \leq \max_{\partial D_h} u_{i,j} = 0, \quad (3.13)$$

由此推出  $u_{ij} \leq 0, (x_i, y_j) \in \bar{D}_h$ . 另一方面, 由定理 3.1 的第二个结论可知

$$\min_{D_h} u_{ij} \geq \min_{\partial D_h} u_{ij} = 0, \quad (3.14)$$

由此推出  $u_{ij} \geq 0, (x_i, y_j) \in \bar{D}_h$ . 因为等式  $L_h u_{ij} = 0$  在两种情况下都是允许的, 仅当

$$u_{ij} \equiv 0, (x_i, y_j) \in \bar{D}_h$$

时, 这两个条件(3.13), (3.14)才相容. 定理得证.

## § 4 差分格式的稳定性收敛性

### 4.1 基本概念

差分格式的稳定性概念是差分格式理论中的一个基本概念. 就椭圆型差分格式而言, 如果差分格式稳定并与相应的微分方程相容, 它就一定收敛.

我们首先给出差分格式稳定性定义. 考虑一般形式线性微分方程的边值问题

$$\begin{cases} Lu = -f(x, y), & (x, y) \in D, \\ lu = -g(x, y), & (x, y) \in \partial D. \end{cases} \quad (4.1)$$

假设给出某一格式

$$\begin{cases} L_h u_{ij} = -f_{ij}, & (x_i, y_j) \in D_h, \\ l_h u_{ij} = -g_{ij}, & (x_i, y_j) \in \partial D_h, \end{cases} \quad (4.2)$$

其中,  $L, l$  为微分算子,  $L_h, l_h$  为差分算子. 如果存在既不依赖于网格  $D_h$  也不依赖于右端项的正常数  $h_0, k_0$  和  $M$  使得当  $h \leq h_0, k \leq k_0$  时, 不等式

$$\max_{D_h} |u_{ij}| \leq M (\max_{D_h} |f_{ij}| + \max_{\partial D_h} |g_{ij}|) \quad (4.3)$$

成立,则称差分格式(4.2)是稳定的. 差分格式的稳定性意味着, 问题(4.2)的解 $\{u_{ij}\}$ 关于 $h$ 和 $k$ 是一致地连续依赖于右端(初始数据) $\{f_{ij}, g_{ij}\}$ , 因此, 如果初始数据变化很小, 则相应的解的变化也很小. 差分格式(4.2)的稳定性研究, 实际上归结为求形如(4.3)不等式的先验估计.

差分格式相容性和收敛性定义与第一章中的定义相同. 令 $e_{ij} = u_{ij} - u(x_i, y_j)$ ,  $u_{ij}$ 是差分格式(4.2)的解,  $u(x_i, y_j)$ 是原问题(4.1)的解. 所得差分格式的收敛性即当 $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ 时, 有 $|e_{ij}| = |u_{ij} - u(x_i, y_j)| \rightarrow 0$ .

由截断误差的定义, 我们有

$$\begin{cases} L_h u(x_i, y_j) = -f(x_i, y_j) + E_L\{u(x_i, y_j)\}, \\ l_h u(x_i, y_j) = -g(x_i, y_j) + E_l\{u(x_i, y_j)\}. \end{cases} \quad (4.4)$$

所谓差分格式的相容性即当 $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ 时, 有 $\|E_L\{u(x_i, y_j)\}\| \rightarrow 0, \|E_l\{u(x_i, y_j)\}\| \rightarrow 0$ .

由(4.2)式减(4.4)式, 有

$$\begin{cases} L_h e_{ij} = -E_L\{u(x_i, y_j)\}, \\ l_h e_{ij} = -E_l\{u(x_i, y_j)\}. \end{cases} \quad (4.5)$$

由格式稳定性, 对(4.5)式应用不等式(4.3)得

$$\max_{D_h} |e_{ij}| \leq M_1 \max_{\partial D_h} |E_L\{u(x_i, y_j)\}| + \max_{\partial D_h} |E_l\{u(x_i, y_j)\}|. \quad (4.6)$$

由格式相容性, 当 $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ 时,  $\max_{\partial D_h} |E_L\{u(x_i, y_j)\}| \rightarrow 0, \max_{\partial D_h} |E_l\{u(x_i, y_j)\}| \rightarrow 0$ , 则由(4.6)式可知, 当 $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$ 时,  $|e_{ij}| = |u_{ij} - u(x_i, y_j)| \rightarrow 0$ , 格式收敛. 不等式(4.6)也说明, 差分方程(4.2)的解 $u_{ij}$ 的精确度取决于差分格式的截断误差.

总之, 差分格式的稳定性 and 收敛性最后归结为求形如(4.3)和(4.6)的先验估计.

## 4.2 Poisson 方程第一边值问题的稳定性和收敛性

本节我们利用极值原理对 Poisson 方程第一边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in D(\text{矩形}), \end{cases} \quad (1.1)$$

$$\begin{cases} u = \alpha(x, y), & (x, y) \in \partial D \end{cases} \quad (1.2 a)$$

的五点差分格式

$$\begin{cases} -\Delta_h u_{ij} = f_{ij}, & (x_i, y_j) \in D_h, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$\begin{cases} u_{ij} = \alpha_{ij}, & (x_i, y_j) \in \partial D_h \end{cases} \quad (2.1)$$

作出形如(4.3)和(4.6)的先验估计.

可以验证,在矩形网格或正方形网格上,五点差分算子系数满足条件(3.3)~(3.5). 在作先验估计时,可应用极值定理.

**定理 4.1** 设  $u_{ij}$  是定义在  $D_h \cup \partial D_h$  上的函数,则有

$$\max_{D_h} |u_{ij}| \leq \max_{\partial D_h} |u_{ij}| + \frac{a^2}{2} \max_{D_h} |\Delta_h u_{ij}|, \quad (4.7)$$

其中,  $a$  为矩形域  $D$  的  $x$  方向的长.

**证明** 欲用极值原理来证明此定理,首先要构造一个函数  $v_{ij}$ , 使

$$-\Delta_h v_{ij} \geq 0, \quad (x_i, y_j) \in D_h,$$

再根据极值定理(本章定理 3.1),  $\max_{D_h} v_{ij} \leq \max_{\partial D_h} v_{ij}$ , 然后才能推出 (4.7).

现在来构造函数  $v_{ij}$ , 令

$$v_{ij} = \pm u_{ij} + \phi_{ij} \max_{D_h} |\Delta_h u_{ij}|$$

是定义在  $D_h \cup \partial D_h$  上的函数, 其中,  $\phi(x, y) = \frac{1}{2}x^2$ , 此函数具有性质

$$0 \leq \phi_{ij} \leq \frac{a^2}{2},$$

$$(x_i, y_j) \in \bar{D}_h,$$

$$\Delta_h \phi_{ij} = 1,$$

则



$$\begin{aligned}\Delta_h v_{ij} &= \pm \Delta_h u_{ij} + \max_{D_h} |\Delta_h u_{ij}| \Delta_h \phi_{ij} \\ &= \pm \Delta_h u_{ij} + \max_{D_h} |\Delta_h u_{ij}| \geq 0, (x_i, y_j) \in D_h.\end{aligned}$$

根据根值定理有

$$\begin{aligned}\max_{D_h} v_{ij} &\leq \max_{D_h} v_{ij} = \max_{D_h} [\pm u_{ij} + \phi_{ij} \max_{D_h} |\Delta_h u_{ij}|] \\ &\leq \max_{D_h} |u_{ij}| + \max_{D_h} \phi_{ij} \max_{D_h} |\Delta_h u_{ij}| \\ &= \max_{D_h} |u_{ij}| + \frac{a^2}{2} \max_{D_h} |\Delta_h u_{ij}|.\end{aligned}$$

由  $v_{ij}$  的定义有

$$\pm u_{ij} \leq v_{ij} \leq \max_{D_h} v_{ij}, (x_i, y_j) \in D_h,$$

因此,  $|u_{ij}| \leq v_{ij} \leq \max_{D_h} v_{ij}$ ,

$$\max_{D_h} |u_{ij}| \leq \max_{D_h} v_{ij} \leq \max_{D_h} |u_{ij}| + \frac{a^2}{2} \max_{D_h} |\Delta_h u_{ij}|.$$

定理证毕.

对五点差分格式(1.4), (2.1)用定理 4.1, 我们有

$$\max_{D_h} |u_{ij}| \leq \max_{D_h} |a_{ij}| + \frac{a^2}{2} \max_{D_h} |f_{ij}|, \quad (4.8)$$

得到了形如(4.3)的先验估计, 其中,  $M = \frac{a^2}{2} > 0$ , 说明五点差分格式是稳定的.

下面利用 Taylor 展开式推导五点差分格式的截断误差  $E\{u(x_i, y_j)\} = \Delta_h u(x_i, y_j) - \Delta u(x_i, y_j)$ ,  $(x_i, y_j) \in D_h$ , 由于

$$\begin{aligned}u(x_i \pm h, y_j) &= u(x_i, y_j) \pm h \frac{\partial}{\partial x} u(x_i, y_j) + \frac{h^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, y_j) \\ &\quad \pm \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_i, y_j)}{\partial x^3} + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x_i + \theta_1 h},\end{aligned}$$

$$u(x_i, y_j \pm k) = u(x_i, y_j) \pm k \frac{\partial}{\partial y} u(x_i, y_j) + \frac{k^2}{2!} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x_i, y_j)$$

$$\pm \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3 u(x_i, y_i)}{\partial x^3} + \frac{k^4}{4!} \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{x_i, y_i + \theta_2 h},$$

其中,  $|\theta_1| \leq 1, |\theta_2| \leq 1$ , 于是

$$\begin{aligned} E\{u(x_i, y_i)\} &= \frac{u(x_i + h, y_i) - 2u(x_i, y_i) + u(x_i - h, y_i)}{h^2} \\ &\quad + \frac{u(x_i, y_i + k) - 2u(x_i, y_i) + u(x_i, y_i - k)}{k^2} \\ &\quad - \left[ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{x_i, y_i} \\ &= \frac{1}{12} \left[ h^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} \Big|_{x_i + \theta_1 h} + k^2 \frac{\partial^4 u}{\partial y^4} \Big|_{x_i, y_i + \theta_2 h} \right] \\ &= O(h^2 + k^2), \end{aligned} \quad (4.9)$$

由此可见, 当  $h \rightarrow 0, k \rightarrow 0$  时,  $E\{u(x_i, y_i)\} \rightarrow 0$ , 所以格式(1.4), (2.1)与原方程(1.1), (1.2 a)相容. 从 4.1 节可知, 只要能得到形如(4.6)的误差估计式, 那么格式(1.4), (2.1)一定收敛.

**定理 4.2** 如果 Poisson 方程第一边值问题 (1.1), (1.2 a) 的解在  $D \cup \partial D$  上有四阶连续导数, 则五点差分格式(1.4), (2.1)收敛并有估计式

$$\max_{D_h} |u_{i,j} - u(x_i, y_j)| \leq O(h^2 + k^2). \quad (4.10)$$

**证明** 根据截断误差定义

$$\begin{cases} \Delta_h u(x_i, y_j) \equiv E\{u(x_i, y_j)\} - f(x_i, y_j), & (x_i, y_j) \in D_h, \end{cases} \quad (4.11 a)$$

$$\begin{cases} u(x_i, y_j) = \alpha(x_i, y_j), & (x_i, y_j) \in \partial D_h, \end{cases} \quad (4.11 b)$$

用(1.4)减(4.11 a)(2.1)减(4.11 b), 我们有

$$\begin{cases} \Delta_h e_{i,j} = E\{u(x_i, y_j)\}, & (x_i, y_j) \in D_h, \\ e_{i,j} = 0, & (x_i, y_j) \in \partial D_h. \end{cases} \quad (4.12)$$

对(4.12)应用定理 4.1, 则有

$$\max_{D_h} |e_{i,j}| \leq \max_{\partial D_h} |e_{i,j}| + \frac{\alpha^2}{2} \max_{D_h} |\Delta_h e_{i,j}|. \quad (4.13)$$

由(4.12)的第二式推出  $\max_{\partial D_h} |e_{i,j}| = 0$ , 由(4.12)的第一式知  $\max_{D_h}$

$|\Delta_i e_{ij}| = \max_{D_A} |E\{u(x_i, y_j)\}|$ , 由(4.9),  $E\{u(x_i, y_j)\} = O(h^2 + k^2)$ .

综上所述, (4.13)式变成  $\max_{D_A} |e_{ij}| \leq O(h^2 + k^2)$ . 定理证毕.

## § 5 椭圆型差分方程解法

实际上, 常常用隐式差分格式去逼近非定态多维微分方程问题. 在每个时间步, 需要求解大型的差分方程组. 对于定态的多维问题, 离散后也是大型的椭圆型差分方程组, 需要花费大量的计算机时间和内存, 为此, 采用压缩存储技巧以及研究和采用快速解法是非常必要的.

我们看到, Poisson 方程五点差分格式(1.7)其系数矩阵只有五条对角线有非零元素; 高精度的九点差分格式(8.17)其系数矩阵只有九条对角线有非零元素; 定态 Navier-Stokes 方程的离散形式(7.6a), (7.6b)亦是五条非零对角线元素, 其它大量的是零元素. 一般的椭圆型差分方程的系数矩阵都有这种形式, 稀疏呈带状. 针对这些特点, 我们介绍几种迭代法常用的压缩存储技巧: 只存非零元素不存零元素. 从而大大地节省了内存.

在数值分析中, 我们已学过线性代数方程组的一般解法. 有直接法和迭代法, 如 Gauss 消去法及其变形, 基本迭代法有 Jacobi 法, Gauss-Seidel 迭代法和 SOR 迭代法. 本节简单介绍求解椭圆型差分方程常用的迭代方法, 特别是 ADI 法即交替方向隐式方法. 此外, 不完全 LU 分解法和 CG 法即共轭梯度法都是快速有效的方法. 读者若感兴趣, 可参阅其它有关著作. 第 10 节的多重网格法是更通用的快速解法. 近十几年来, 也出现了一些很有效的直接方法, 如矩形域上的快速 Fourier 方法等, 这不是本书重点, 故不作介绍.

### 5.1 迭代方法简介

最基本和应用最广泛的迭代方法是 Jacobi 迭代法, Gauss-Seidel 迭代法, SOR 迭代法和 SSOR 迭代法. 把它们应用于一般的二阶椭圆型微分方程

$$\begin{cases} a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + c \frac{\partial u}{\partial x} + d \frac{\partial u}{\partial y} + gu = f, (x, y) \in D, \\ u = \phi(x, y), (x, y) \in \partial D. \end{cases} \quad (5.1)$$

相应的五点差分格式是

$$\begin{cases} a_{ij}^L u_{i-1,j} + a_{ij}^B u_{i,j-1} + a_{ij}^R u_{i+1,j} + a_{ij}^T u_{i,j+1} - a_{ij}^0 u_{ij} \\ = f_{ij}, (x_i, y_i) \in D_h, \\ u_{ij} = \phi_{ij}, (x_i, y_i) \in \partial D_h, \end{cases} \quad (5.2)$$

其中 
$$a_{ij}^L = \frac{a_{ij}}{h^2} - \frac{c_{ij}}{2h}, \quad a_{ij}^B = \frac{b_{ij}}{k^2} - \frac{d_{ij}}{2k},$$

$$a_{ij}^R = \frac{a_{ij}}{h^2} + \frac{c_{ij}}{2h}, \quad a_{ij}^T = \frac{b_{ij}}{k^2} + \frac{d_{ij}}{2k},$$

$$a_{ij}^0 = a_{ij}^L + a_{ij}^R + a_{ij}^B + a_{ij}^T - g_{ij},$$

$$a_{ij} = a(x_i, y_i), b_{ij} = b(x_i, y_i), c_{ij} = c(x_i, y_i), d_{ij} = d(x_i, y_i),$$

$$g_{ij} = g(x_i, y_i), f_{ij} = f(x_i, y_i).$$

方程组(5.2)的矩阵形式是

$$Au = F. \quad (5.3)$$

**例 5.1** 由图 5.3 b, 共有 9 个内点, 则差分方程组(5.3)式变成

$$\begin{bmatrix} -a_{11}^O & a_{11}^R & 0 & a_{j1}^T & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{21}^L & -a_{21}^O & a_{21}^R & 0 & a_{21}^T & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{31}^L & -a_{31}^O & 0 & 0 & a_{31}^T & 0 & 0 & 0 \\ a_{12}^B & 0 & 0 & -a_{12}^O & a_{j2}^R & 0 & a_{j2}^T & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}^B & 0 & a_{22}^L & -a_{22}^O & a_{22}^R & 0 & a_{22}^T & 0 \\ 0 & 0 & a_{32}^B & 0 & a_{32}^L & -a_{32}^O & 0 & 0 & a_{32}^T \\ 0 & 0 & 0 & a_{31}^B & 0 & 0 & -a_{13}^O & a_{13}^R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_{23}^B & 0 & a_{23}^L & -a_{23}^O & a_{23}^R \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & a_{33}^B & 0 & a_{33}^L & -a_{33}^O \end{bmatrix}$$

将(5.3)式中的  $A$  分解使

$$A = D + L + U,$$

其中,  $D$  是对角阵,  $L$  是严格下三角阵,  $U$  是严格上三角阵, 以例 5.1 中的系数矩阵为例

$$D = \begin{bmatrix} -a_{11}^0 & & & & \\ & -a_{21}^0 & & & \\ & & -a_{31}^0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & a_{23}^0 \\ & & & & & -a_{33}^0 \end{bmatrix}$$

$$L = \begin{bmatrix} 0 & & & & & & \\ a_{21}^L & 0 & & & & & \\ 0 & a_{31}^L & 0 & & & & \\ a_{12}^R & 0 & 0 & \cdot & & & \\ & a_{22}^R & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & a_{23}^L & \cdot \\ & & & & & a_{33}^R & 0 & a_{33}^L & 0 \end{bmatrix},$$

$$U = \begin{bmatrix} 0 & a_{11}^R & 0 & a_{11}^T & & & \\ & 0 & a_{21}^R & 0 & a_{21}^T & & \\ & & 0 & 0 & \cdot & & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & a_{32}^T \\ & & & & & a_{13}^R & 0 & \\ & & & & & & a_{23}^R & \\ & & & & & & & 0 \end{bmatrix}.$$

将(5.2)两边除以 $-a_{ii}^0$ , 则差分方程为

$$\begin{cases} u_{i,j} = \alpha_{i,j} u_{i+1,j} + \beta_{i,j} u_{i-1,j} + \gamma_{i,j} u_{i,j+1} + \delta_{i,j} u_{i,j-1} + e_{i,j}, & (x_i, y_j) \in D_h, \\ u_{i,j} = \varphi_{i,j}, & (x_i, y_j) \in \partial D_h, \end{cases} \quad (5.4)$$

其中,  $\alpha_{i,j} = a_{i,j}^R / a_{i,j}^0$ ,  $\beta_{i,j} = a_{i,j}^L / a_{i,j}^0$ ,  $\gamma_{i,j} = a_{i,j}^T / a_{i,j}^0$ ,  $\delta_{i,j} = a_{i,j}^B / a_{i,j}^0$ . 现列出基本迭代公式

1. Jacobi 迭代(或称简单迭代).

$$\begin{cases} u_{i,j}^{(k+1)} = \alpha_{i,j} u_{i+1,j}^{(k)} + \beta_{i,j} u_{i-1,j}^{(k)} + \gamma_{i,j} u_{i,j+1}^{(k)} \\ \quad + \delta_{i,j} u_{i,j-1}^{(k)} + e_{i,j}, & (x_i, y_j) \in D_h, \\ u_{i,j}^{(k+1)} = \varphi_{i,j}, & (x_i, y_j) \in \partial D_h, \end{cases} \quad (5.5)$$

其矩阵形式为

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = -D^{-1}(L+U)\mathbf{u}^{(k)} + D^{-1}\mathbf{e} = B_J\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{F}_J, \quad (5.6)$$

其中,  $B_J = -D^{-1}(L+U) = I - D^{-1}A$ ,  $\mathbf{F}_J = D^{-1}\mathbf{e}$ , 称  $B_J$  为 Jacobi 迭代矩阵.

## 2. Gauss-Seidel 迭代.

$$\begin{cases} u_{i,j}^{(k+1)} = \alpha_{i,j} u_{i+1,j}^{(k)} + \beta_{i,j} u_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma_{i,j} u_{i,j+1}^{(k)} \\ \quad + \delta_{i,j} u_{i,j-1}^{(k+1)} + e_{i,j}, & (x_i, y_j) \in D_h, \\ u_{i,j}^{(k+1)} = \varphi_{i,j}, & (x_i, y_j) \in \partial D_h, \end{cases} \quad (5.7)$$

其矩阵形式为

$$\mathbf{u}^{(k+1)} = -(L+D)^{-1}U\mathbf{u}^{(k)} + (L+D)^{-1}\mathbf{e} = B_{GS}\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{F}_{GS}, \quad (5.8)$$

其中,  $B_{GS} = -(L+D)^{-1}U$ , 称  $B_{GS}$  为 Gauss-Seidel 迭代矩阵.

## 3. SOR 迭代(Symmetric Over Relaxation).

先由 G-S 迭代算出中间结果  $\tilde{u}_{i,j}$ , 再与  $u_{i,j}^{(k)}$  加权平均

$$\begin{cases} u_{i,j}^{(k+1)} = \omega \tilde{u}_{i,j} + (1-\omega)u_{i,j}^{(k)} \\ \quad = \omega\{\alpha_{i,j} u_{i+1,j}^{(k)} + \beta_{i,j} u_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma_{i,j} u_{i,j+1}^{(k)} + \delta_{i,j} u_{i,j-1}^{(k+1)} \\ \quad \quad + e_{i,j}\} + (1-\omega)u_{i,j}^{(k)}, & (x_i, y_j) \in D_h \\ u_{i,j}^{(k+1)} = \varphi_{i,j}, & (x_i, y_j) \in \partial D_h, \end{cases} \quad (5.9)$$

重新整理, 则有

$$\begin{aligned} u_{i,j}^{(k+1)} - \omega\beta_{i,j} u_{i-1,j}^{(k+1)} - \omega\delta_{i,j} u_{i,j-1}^{(k+1)} \\ = (1-\omega)u_{i,j}^{(k)} - \omega\alpha_{i,j} u_{i+1,j}^{(k)} + \omega\gamma_{i,j} u_{i,j+1}^{(k)} + \omega e_{i,j}, \end{aligned}$$

表示成矩阵形式

$$\begin{aligned} \mathbf{u}^{(k+1)} &= (D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]\mathbf{u}^{(k)} + \omega(D + \omega L)^{-1}\mathbf{e} \\ &= B_{SOR}\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{F}_{SOR}, \end{aligned} \quad (5.10)$$

其中,  $B_{SOR} = (D + \omega L)^{-1}[(1-\omega)D - \omega U]$ , 称  $B_{SOR}$  为 SOR 迭代矩阵.

## 4. SSOR 迭代法(Symmetric Successive Over Relaxation).

SSOR 方法的迭代过程是先按自然次序用向前的 SOR 法逐点计算, 然后按相反的次序用向后的 SOR 法逐点计算.

$$\begin{cases} u_{ij}^{(k+\frac{1}{2})} = \omega \{ \alpha_{ij} u_{i+1,j}^{(k)} + B_{ij} u_{i-1,j}^{(k+\frac{1}{2})} + \gamma_{ij} u_{i,j+1}^{(k)} + \delta_{ij} u_{i,j-1}^{(k+\frac{1}{2})} + e_{ij} \} \\ \quad + (1-\omega) u_{ij}^{(k)}, \\ u_{ij}^{(k+1)} = \omega \{ \alpha_{ij} u_{i+1,j}^{(k+\frac{1}{2})} + \beta_{ij} u_{i-1,j}^{(k+1)} + \gamma_{ij} u_{i,j+1}^{(k+\frac{1}{2})} + \delta_{ij} u_{i,j-1}^{(k+1)} + e_{ij} \} \\ \quad + (1-\omega) u_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}, \end{cases} \quad (5.11)$$

表示成矩阵形式

$$\begin{cases} \mathbf{u}^{(k+\frac{1}{2})} = B_{FSOR} \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{F}_{FSOR}, \\ \mathbf{u}^{(k+1)} = B_{BSOR} \mathbf{u}^{(k+\frac{1}{2})} + \mathbf{F}_{BSOR} = B_{SSOR} \mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{F}_{SSOR}, \end{cases} \quad (5.12)$$

其中,  $B_{FSOR} = (D + \omega L)^{-1} [-\omega U + (1-\omega)D]$  为向前的 SOR 迭代矩阵,

$B_{BSOR} = (D + \omega U)^{-1} [-\omega L + (1-\omega)D]$  为向后的 SOR 迭代矩阵,

因此, SSOR 迭代矩阵

$$B_{SSOR} = (D + \omega U)^{-1} [-\omega L + (1-\omega)D] (D + \omega L)^{-1} [-\omega U + (1-\omega)D].$$

用以上各种迭代方法求解差分方程 (5.3) 能否收敛取决于矩阵  $A$  或迭代矩阵  $B$  ( $B_J, B_G, B_{SOR}, B_{SSOR}$ ) 的性质.

(1) 迭代法收敛的充要条件是迭代矩阵  $B$  的谱半径  $\rho(B) < 1$ .

(2) 如果迭代矩阵  $B$  的某一种范数  $\|B\|_p < 1$  ( $p=1, 2, \infty$ ), 则迭代收敛.

(3) 如果  $A$  为严格对角占优阵或不可约弱对角占优阵, 则 Jacobi 迭代法和  $G-S$  迭代法收敛.

(4) 如果矩阵  $A$  正定, 则  $G-S$  迭代法收敛.

(5) 如果矩阵  $A$  正定, 且  $0 < \omega < 2$ , 则 SOR 法和 SSOR 法收敛, 其中  $\omega$  为松弛因子.



在微分方程(5.1)中,若  $c=d=0$ , 则五点差分格式(1.7)和九点差分格式(8.17)所得方程组的系数矩阵  $A$  是对称正定的, 对角占优的. 若  $c, d$  不为零, 则矩阵性质取决于所采用的差分格式, 如迎风格式其系数矩阵  $A$  是对角占优的.

1950年由 Young 建立了最佳松弛因子  $\omega_{opt}$  的理论. 对于 SOR, 如果系数矩阵  $A$  对称正定且有性质“ $A$ ”和相容次序, 给出了  $\omega_{opt}$  的公式

$$\omega_{opt} = \frac{1}{1 + \sqrt{1 - \rho^2(B_J)}}, \quad (5.13)$$

其中,  $\rho(B_J)$  为 Jacobi 迭代矩阵的谱半径. 但实际计算  $\rho(B_J)$  是困难的. 我们提供一个自动选取  $\omega_{opt}$  的方法, 实际中已成功地应用了这个方法. 该方法过程如下:

(1) 选一个  $\omega$ , 使  $\omega < \omega_{opt}$ , 比如令  $\omega = 1$ .

(2) 设伪余量  $e^{(k)} = u^{(k+1)} - u^{(k)}$ , 作几次 SOR 迭代, 连续二次迭代所得的伪余量之比

$$R^{(k)} = \|e^{(k)}\|_2 / \|e^{(k-1)}\|_2$$

作为  $\rho(B_{SOR}) = \mu$  的估值.

(3) 由  $\mu$  和  $\omega$  计算相应的  $\lambda_J = \rho(B_J)$ ,

$$\lambda_J = \frac{\mu + \omega_{opt} - 1}{\omega_{opt} \sqrt{\mu}}.$$

(4) 由  $\lambda_J$  计算改进的  $\omega_{opt}$ ,

$$\omega_{opt} \approx \frac{2}{1 + \sqrt{1 - \lambda_J^2}}, \quad (5.14)$$

然后回到(2), 这是一个自适应过程. 到底迭代多少次用一次自适应过程? 如果有经验的话, 则不需花多少机时就能比较容易地求出  $\omega_{opt}$ , 使 SOR 的收敛速度显著地提高.

SSOR 方法的收敛速度对松弛因子  $\omega$  不敏感, 1971 年 Young

给出了一个计算 SSOR 法的  $\omega$  计算公式

$$\omega^* = \frac{2}{1 + \sqrt{2(1 - \rho(B_J))}}. \quad (5.15)$$

Jacobi 方法和 SSOR 法可用共轭梯度法或 Chebyshev 多项式进行加速, 加速后收敛速度比 SOR 法快.

## 5.2 快速迭代和 ADI 迭代法

上述的迭代方法, 每迭代一次只修正一个点上的函数值. 其实, 我们可以把内节点分成组(见图 5.3 a), 每一条线上的点为一组, 如第一条线上的点  $(x_1, y_1), (x_2, y_1), (x_3, y_1)$  为一组, 第二条线上的点  $(x_1, y_2), (x_2, y_2), (x_3, y_2)$  为另一组等. 每迭代一次同时修正一条线上的各点的函数值. 因采用的是逐线迭代, 故称此为 **线迭代**. 下面分别列出差分公式

$$u_{i,j} - (\alpha_{i,j} u_{i+1,j} + \beta_{i,j} u_{i-1,j} + \gamma_{i,j} u_{i,j+1} + \delta_{i,j} u_{i,j-1}) = e_{i,j}.$$

在第  $j$  条线上的线 Jacobi 迭代法, 线 Gauss-Seidel 迭代法和线 SOR 迭代法的迭代公式, 分别命名为 LJ, LGS 和 LSOR.

$$\begin{aligned} \text{LJ: } & -\beta_{i,j} u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i,j}^{(k+1)} - \alpha_{i,j} u_{i+1,j}^{(k+1)} \\ & = \gamma_{i,j} u_{i,j+1}^{(k)} + \delta_{i,j} u_{i,j-1}^{(k)} + e_{i,j}, \quad i=1,2,3, \end{aligned} \quad (5.16)$$

$$\begin{aligned} \text{LGS: } & -\beta_{i,j} u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i,j}^{(k+1)} - \alpha_{i,j} u_{i+1,j}^{(k+1)} \\ & = \gamma_{i,j} u_{i,j+1}^{(k)} - \delta_{i,j} u_{i,j-1}^{(k+1)} + e_{i,j}, \quad i=1,2,3, \end{aligned} \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned} \text{LSOR: } & -\beta_{i,j} u_{i-1,j}^{(k+1)} + u_{i,j}^{(k+1)} - \alpha_{i,j} u_{i+1,j}^{(k+1)} \\ & = \omega(\gamma_{i,j} u_{i,j+1}^{(k)} + \delta_{i,j} u_{i,j-1}^{(k+1)} + e_{i,j} + (1-\omega)(-\beta_{i,j} u_{i-1,j}^{(k)} \\ & \quad + u_{i,j}^{(k)} - \alpha_{i,j} u_{i+1,j}^{(k)})), \quad i=1,2,3 \end{aligned} \quad (5.18)$$

逐线计算方程组(5.16)(或(5.17)或(5.18)), 即  $j$  分别取 1, 2, 3. 以 LJ 为例, 可表示成矩阵形式

$$A_j \mathbf{u}_j^{(k+1)} = B_j \mathbf{u}_j^{(k)} + C_j \mathbf{u}_{j+1}^{(k)} + \mathbf{E}_j, \quad j=1,2,3, \quad (5.19)$$

其中,  $\mathbf{u}_j = (u_{1,j}, u_{2,j}, u_{3,j})^T$ , 以 Poisson 方程的五点差分格式为例(见 1.7),  $A_j$ ,  $B_j$  和  $C_j$  的具体形式实际上是将(1.7)的系数矩阵

按线进行分块即用虚线划分的块,得到如下块矩阵中的矩阵块

$$\begin{bmatrix} A_1 & C_1 & \\ B_2 & A_2 & C_2 \\ & B_3 & A_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{bmatrix}.$$

故又把线迭代称为块迭代.

对于 Poisson 方程的五点差分格式分别求出点迭代矩阵和线迭代矩阵的谱半径,得到收敛速率之比.

$$R(B_{LJ}) \approx 2 R(B_J), \quad (5.20 a)$$

$$R(B_{LGS}) \approx 2 R(B_{GS}), \quad (5.20 b)$$

$$R(B_{LSOR}) \approx \sqrt{2} R(B_{SOR}), \quad (5.20 c)$$

其中,  $R(B) = -\ln \rho(B)$ ,  $\rho(B)$  为迭代矩阵  $B$  的谱半径.

ADI 法即交替方向隐式方法,有好几种类型. 本节仅仅考虑 Peaceman-Rachford 方法. 以单位正方形上的 Poisson 方程为例

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y).$$

用中心差商逼近二阶导数,有下列差分方程

$$(u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}) + (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}) = h^2 f_{i,j}. \quad (5.21)$$

按自然次序排列节点见图 5.3 b. 上述差分方程的系数矩阵是  $A = A_1 + A_2$ , 即

$$\begin{bmatrix} 4 & -1 & 0 & -1 & & & & \\ -1 & 4 & -1 & 0 & -1 & & & \\ 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 & & \\ -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 & -1 & \\ & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ & & & -1 & 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ & & & & & -1 & 0 & -1 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & & & & & & \\ -1 & 2 & -1 & & & & & \\ & -1 & 2 & & & & & \\ & & 2 & -1 & & & & \\ & & & -1 & 2 & -1 & & \\ & & & & -1 & 2 & & \\ & & & & & 2 & -1 & \\ & & & & & -1 & 2 & -1 \\ & & & & & & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & -1 & & & \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 & \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & -1 \\ & & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ & & & -1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ & & & & -1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

于是差分方程

$$Au = F \quad (5.3)$$

等价于

$$(A_1 + \alpha I)u = F - (A_2 - \alpha I)u, \quad (5.22 a)$$

$$(A_2 + \alpha I)u = F - (A_1 - \alpha I)u, \quad (5.22 b)$$

其中,  $\alpha$  为任意参数.

Peaceman Rachford ADI 方法

$$(A_1 + \alpha I)u^{(k+\frac{1}{2})} = F - (A_2 - \alpha I)u^{(k)}, \quad (5.23 a)$$

$$(A_2 + \alpha I)u^{(k+1)} = F - (A_1 - \alpha I)u^{(k+\frac{1}{2})}, \quad (5.23 b)$$

其中,  $\alpha$  为加速参数, 通常  $A_1 + \alpha I$  是三对角矩阵,  $A_2 + \alpha I$  经适当变换后也是三对角矩阵. ADI 的计算过程相当于先用  $u_{ij}^{(k)}$  沿水平线方向逐线解三对角方程组 (5.23 a), 得  $u_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}$ , 然后用  $u_{ij}^{(k+\frac{1}{2})}$  沿垂直线方向逐线解三对角方程组 (5.23 b), 得  $u_{ij}^{(k+1)}$ . 两步合起来才算完成一次迭代. 用矩阵表示

$$u^{(k+1)} = B_{ADI} u^{(k)} + F_{ADI}, \quad (5.24)$$

其中,  $B_{ADI} = (A_2 + \alpha I)^{-1}(A_1 - \alpha I)(A_1 + \alpha I)^{-1}(A_2 - \alpha I)$ , 称它为 ADI 法迭代矩阵.

设  $\mu$  是矩阵  $A_1$  的特征值,  $0 < a \leq \mu \leq b$ ,  $\lambda$  是矩阵  $A_2$  的特征值,  $0 < a \leq \lambda \leq b$ ,  $\xi$  是矩阵  $B_{ADI}$  的特征值, 则有

$$\xi = \frac{(\mu - \alpha)(\lambda - \alpha)}{(\mu + \alpha)(\lambda + \alpha)}. \quad (5.25)$$

选取参数  $\alpha$  使  $\xi$  达到最小, 经详细分析后选取

$$\alpha = \sqrt{ab}. \quad (5.26)$$

用可变的参数  $\alpha_k$  更有效, 循环使用参数  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_k, \dots$ .  $\alpha_k$  可用下面的公式计算

$$\alpha_k = b(a/b)^{(2k-1)/2K}, k=1, 2, \dots, K. \quad (5.27)$$

当  $K=1$  时即(5.26).

### 5.3 压缩存储技巧

对于大型稀疏矩阵, 为节省机器内存, 一般只存储它的非零元素和一些必要的信息, 这就是通常所说的压缩存储法. 压缩存储方式很多, 本节介绍几种适合于迭代法用的压缩存储方式.

#### 1. 按行随机存储非对称稀疏矩阵.

以循环边界条件问题的系数矩阵为例

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & & a_{1,10} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & & \\ & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & & a_{9,10} \\ a_{10,1} & & & a_{10,9} & a_{10,10} \end{bmatrix}.$$

用三个一维数组来存储  $A$  的非零元素及相应的信息.

AA(30)      存储  $A$  的 30 个非零元素.

JA(30)      30 个非零元素在矩阵  $A$  中相应的列号.

IFIRST(11) 每行第一个非零元素在数组 AA 中的位置. 最后一个元素是 AA 和 JA 的数组界加 1.

以上述矩阵  $A$  为例

$$AA = (a_{11}, a_{12}, a_{1,10}, a_{21}, a_{22}, a_{23}, \dots, a_{10,1}, a_{10,9}, a_{10,10}),$$

$$JA = (1, 2, 10, 1, 2, 3, \dots, 1, 9, 10),$$

$$\text{IFIRST} = (1, 4, 7, \dots, 28, 31).$$

如果要找对角线元素  $a_{22}$ ,  $a_{22} \neq 0$  必在第 2 行第 1 个非零元素和第 3 行第 1 个非零元素位置之间, 即在  $\text{IFIRST}(2)=4$  和  $\text{IFIRST}(3)=7$  之间, 一定能找到  $a_{22}$  的列指标, 因  $\text{JA}(4)=1$ ,  $\text{JA}(5)=2$ , 所以  $a_{22}$  在  $\text{AA}(5)$  中.

2. 按行压缩存储对称矩阵.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & & & & \\ a_{21} & a_{22} & & & \\ & a_{32} & a_{33} & & \\ & a_{42} & 0 & a_{44} & \\ & a_{52} & a_{53} & 0 & a_{55} \end{bmatrix} \quad \text{对称}$$

$$\text{AA} = (a_{11}, a_{21}, a_{22}, a_{32}, a_{33}, a_{42}, 0, a_{44}, a_{52}, a_{53}, 0, a_{55})$$

$$\text{JPD} = (1, 3, 5, 8, 12).$$

数组  $\text{AA}$  存放矩阵  $A$  的元素. 每一行从最左边的非零元素到对角线之间的所有元素, 包括对角线元素及夹在中间的零元素. 数组  $\text{JPD}$  存放矩阵  $A$  的对角线元素在数组  $\text{AA}$  中的位置.

如果要找  $a_{53}$ , 因  $\text{JPD}(5) - (5-3) = 12 - 2 = 10 > \text{JPD}(4) = 8$ , 所以  $a_{53}$  存放在  $\text{AA}(10)$  中. 如果要找  $a_{ij}$ , 若  $\text{JPD}(i) - (i-j) > \text{JPD}(i-1)$ , 则  $\text{JPD}(i) - (i-j)$  是  $a_{ij}$  在  $\text{AA}$  中的位置, 这说明  $a_{ij}$  在第  $i$  行的第 1 个非零元素的右边. 否则说明在左边, 可左边不可能有第  $i$  行的非零元素, 故  $a_{ij} = 0$ .

3. 等带宽对称稀疏矩阵的存储.

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{11} & & & \\ & 0 & a_{21} & a_{22} & & \\ & & a_{31} & 0 & a_{33} & \\ & & & a_{42} & 0 & a_{44} \\ & & & & a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ & & & & & a_{64} & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$$

在左上角人为地添加 3 个零, 用一个二维数组  $AA(6, 3)$ ,

$$AA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_{11} \\ 0 & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & 0 & a_{33} \\ a_{42} & 0 & a_{44} \\ a_{53} & a_{54} & a_{55} \\ a_{64} & 0 & a_{66} \end{bmatrix}$$

或用三个一维数组  $A1, A2, A3$  即

$$A1 = (0, 0, a_{31}, a_{42}, a_{53}, a_{64}),$$

$$A2 = (0, a_{21}, 0, 0, a_{54}, 0),$$

$$A3 = (a_{11}, a_{22}, a_{33}, a_{44}, a_{55}, a_{66})$$

存储。特别是后者又简单又省机器时间。

## § 6 变系数方程和非线性方程

我们考虑二类方程, 一类是线性变系数方程

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - c(x, y)u = f(x, y),$$

另一类是在扩散-反应问题和涡流等问题中, 我们感兴趣的方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u,$$

这是关于  $u$  的非线性方程。这二类方程的处理方法与常系数线性微分方程的处理方法不同。

### 6.1 变系微椭圆型方程

我们对变系数椭圆型方程的第一边值问题

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y} \right) - c(x, y) u \\ = f(x, y), \quad (x, y) \in D, \\ a(x, y) > 0, \quad b(x, y) > 0, \quad c(x, y) > 0, \\ u(x, y) = \alpha(x, y), \quad (x, y) \in \partial D, \end{cases} \quad (6.1)$$

$$(6.2)$$

在矩形网格域上，用两种方式建立相应的差分格式。

首先用直接差分方式。对(6.1)用差商来近似代替微商，并引入记号

$$\delta_x f_{i,j} = f_{i+2,j} - f_{i-\frac{1}{2},j},$$

$$\delta_y f_{i,j} = f_{i,j+\frac{1}{2}} - f_{i,j-\frac{1}{2}},$$

则差分格式为

$$\begin{cases} \frac{1}{h^2} \delta_x (a_{i,j} \delta_x u_{i,j}) + \frac{1}{k^2} \delta_y (b_{i,j} \delta_y u_{i,j}) - c_{i,j} u_{i,j} \\ = f_{i,j}, \quad (x_i, y_j) \in D_h, \\ u_{i,j} = \alpha_{i,j}, \quad (x_i, y_j) \in \partial D_h. \end{cases} \quad (6.3)$$

$$(6.4)$$

其次用积分插值法，它也是推导差分格式的一种通用方法。其优点是更好地保持了微分方程的一些性质并且比较容易处理系数间断和不等距步长。

设  $P = (x_i, y_j) \in D_h$ ,

其四个邻点是  $P_1(x_{i+1}, y_j)$ ,

$P_2(x_i, y_{j+1})$ ,  $P_3(x_{i-1}, y_j)$ ,

$P_4(x_i, y_{j-1})$ ,  $N_i$  表示  $PP_i$

的中点，见图5.13。在阴影

区域  $D_{i,j}$  上对方程(6.1)的

各项进行积分

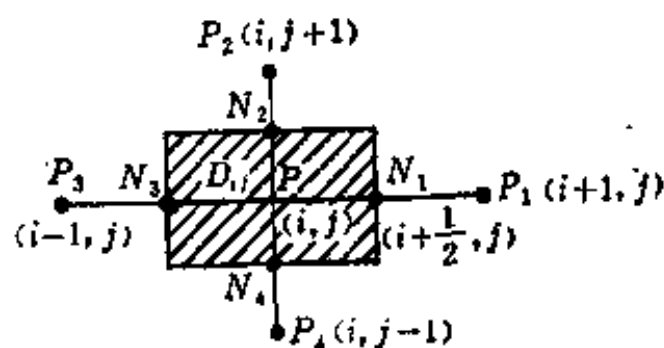


图 5.13

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{D_{i,j}} \frac{\partial}{\partial x} \left( a(x, y) \frac{\partial u}{\partial x} \right) dx dy \\ &= \int_{y_j - \frac{1}{2}}^{y_j + \frac{1}{2}} \left[ a(x_{i+\frac{1}{2}}, y) \frac{\partial u}{\partial x} (x_{i+\frac{1}{2}}, y) \right. \end{aligned}$$



$$-a\left(x_{i-\frac{1}{2}}, y\right) \frac{\partial u}{\partial x}\left(x_{i-\frac{1}{2}}, y\right)\left] d y .\right.$$

利用中点公式得出近似式

$$I_1 \approx\left(a_{i+\frac{1}{2}, j} \frac{\partial u}{\partial x}\left|_{x_{i+\frac{1}{2}, j}}^{y,}-a_{i-\frac{1}{2}, j} \frac{\partial u}{\partial x}\left|_{x_{i-\frac{1}{2}, j}}^{y,}\right.\right) k .$$

在上式中我们用差商代替微商, 得到

$$I_1 \approx \frac{k}{h}\left\{a_{i+\frac{1}{2}, j}\left(u_{i+1, j}-u_{i, j}\right)-a_{i-\frac{1}{2}, j}\left(u_{i, j}-u_{i-1, j}\right)\right\} .$$

类似地可以推出

$$I_2=\iint_{D_{i, j}} \frac{\partial}{\partial y}\left(b(x, y) \frac{\partial u}{\partial y}\right) d x d y \approx \frac{h}{k}\left\{b_{i, j+\frac{1}{2}}\left(u_{i, j+1}-u_{i, j}\right)\right. \\ \left.-b_{i, j-\frac{1}{2}}\left(u_{i, j}-u_{i, j-1}\right)\right\} .$$

此外有

$$\iint_{D_{i, j}} c(x, y) u d x d y \approx c_{i, j} k h , \\ \iint_{D_{i, j}} f(x, y) d x d y \approx f_{i, j} k h .$$

最后, 我们得到(6.1)的差分方程

$$\frac{1}{h^2}\left[a_{i+\frac{1}{2}, j}\left(u_{i+1, j}-u_{i, j}\right)-a_{i-\frac{1}{2}, j}\left(u_{i, j}-u_{i-1, j}\right)\right] \\ +\frac{1}{k^2}\left[b_{i, j+\frac{1}{2}}\left(u_{i, j+1}-u_{i, j}\right)-b_{i, j-\frac{1}{2}}\left(u_{i, j}-u_{i, j-1}\right)\right]-c_{i, j} u_i=f_{i, j} . \quad (6.5)$$

用直接差分得到的差分方程(6.3)和用积分插值法得到的差分方程(6.5)都是五点差分格式.

## 6.2 非线性方程

对于非线性方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^u. \quad (6.6)$$

我们首先讨论它的两种线性化方法.

1. Picard 线性化方法,

$$\frac{\partial^2 u^{(K+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(K+1)}}{\partial y^2} = e^{u^{(K)}}, \quad (6.7)$$

其中,  $K$  是迭代次数.

2. Newton 线性化方法.

把  $\frac{\partial^2 u^{(K+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(K+1)}}{\partial y^2} = e^{u^{(K+1)}}$  的右端项  $e^{u^{(K+1)}}$  在  $u^{(K)}$  处按

Taylor 展开, 则有

$$e^{u^{(K+1)}} \approx e^{u^{(K)}} + (u^{(K+1)} - u^{(K)})e^{u^{(K)}}.$$

由此得到 Newton 线性化迭代公式

$$\frac{\partial^2 u^{(K+1)}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u^{(K+1)}}{\partial y^2} - e^{u^{(K)}} u^{(K+1)} = (1 - u^{(K)})e^{u^{(K)}}. \quad (6.8)$$

方程(6.7)和(6.8)是关于  $u^{(K+1)}$  的线性微分方程. 已知  $u^{(K)}$  从(6.7)或(6.8)求  $u^{(K+1)}$  的迭代过程称为外迭代. 当  $h=k$  时的五点差分格式

$$u_{i+1,j}^{(K+1)} + u_{i-1,j}^{(K+1)} + u_{i,j+1}^{(K+1)} + u_{i,j-1}^{(K+1)} - 4 u_{i,j}^{(K+1)} = e^{u_{i,j}^{(K)}}, \quad (6.9)$$

是关于  $u^{(K+1)}$  的线性代数方程组. 如果用迭代法, 以  $u^{(K)}$  作为  $u^{(K+1)(r)}$  的初值  $u^{(K+1)(0)}$ , 得到迭代序列  $\{u^{(K+1)(r)}\}$ ,  $r=0, 1, 2, \dots$ , 这种迭代过程称为内迭代, 其中  $r$  为内迭代指标,  $k$  为  $y$  方向步长,  $K$  为外迭代指标, 每次外迭代需用  $M$  次内迭代或一次交替方向迭代. 下面用  $m$  表示内迭代指标,  $m=0, 1, 2, \dots, M$ .

如果对非线性椭圆型方程直接应用有限差分逼近, 则有

$$u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4 u_{i,j} = e^{u_{i,j}}, \quad (6.10)$$

这是关于  $u_{i,j}$  的非线性方程, 其一般形式为

$$F_{i,j}(u_{11}, u_{12}, \dots, u_{NN}) = 0, \quad i, j = 1, 2, \dots, N. \quad (6.11)$$

下面列举两种数值解非线性方程组的解法。

### 1. 非线性 SOR-Newton 迭代

对(6.11)用 Newton 迭代并引入松弛因子  $\omega$

$$u_{11}^{m+1} = u_{11}^m - \omega \frac{F_{11}(u_{11}^{(m)}, u_{12}^{(m)}, \dots, u_{NN}^{(m)})}{F'_{11}(u_{11}^{(m)}, u_{12}^{(m)}, \dots, u_{NN}^{(m)})},$$

$$u_{ij}^{m+1} = u_{ij}^m - \omega \frac{F_{ij}(u_{11}^{(m+1)}, u_{12}^{(m+1)}, \dots, u_{i,j-1}^{(m+1)}, u_{i,j}^{(m)}, \dots, u_{NN}^{(m)})}{F'_{ij}(u_{11}^{(m+1)}, u_{12}^{(m+1)}, \dots, u_{i,j-1}^{(m+1)}, u_{i,j}^{(m)}, \dots, u_{NN}^{(m)})},$$

其中,  $F'_{ij} = \frac{\partial F_{ij}}{\partial u_{ij}}$ . 这种方法实质上是 Gauss-Seidel 迭代法。此

法对于得到的每一个新值  $u_{ij}^{(m+1)}$ , 在计算下一个量时马上可以用到。如果  $F_{ij}$  是关于  $u_{ij}$  的线性函数, 则这方法就变成 SOR 迭代法, 故称它为 SOR-Newton 法。可以证明, SOR-Newton 迭代法的收敛标准与 SGR 方法的收敛标准一样。

### 2. Newton-SOR 迭代法

首先将 Newton 法应用于非线性方程组(6.11)有

$$u_{ij}^{(m+1)} = u_{ij}^{(m)} - \frac{F_{ij}(u_{11}^{(m)}, u_{12}^{(m)}, \dots, u_{NN}^{(m)})}{F'_{ij}(u_{11}^{(m)}, u_{12}^{(m)}, \dots, u_{NN}^{(m)})}. \quad (6.12)$$

令  $\Delta u_{ij}^{(m)} = u_{ij}^{(m+1)} - u_{ij}^{(m)}$ , 则上式可以写成

$$F'_{ij}(u_{11}^{(m)}, u_{12}^{(m)}, \dots, u_{NN}^{(m)}) \Delta u_{ij}^{(m)} = F_{ij}(u_{11}^{(m)}, u_{12}^{(m)}, \dots, u_{NN}^{(m)}). \quad (6.13)$$

已知  $u_{ij}^{(m)}$ , 应用 SGR 法于(6.13)可解出  $\Delta u_{ij}^{(m)}$ , 从而求得  $u_{ij}^{(m+1)}$ 。

## § 7 Navier-Stokes 方程

不可压缩平面流动情况的 Navier-Stokes 方程, 是一组非线性方程。本节讨论定态和非定态情况下流函数-涡度形式的 Navier-Stokes 方程的数值解法和边界处理。

### 7.1 非定态方程

在不可压缩非定态平面流动情况下, N-S 方程的流函数-涡

度形式可以写成

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \omega - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega = 0, \end{cases} \quad (7.1)$$

$$\begin{cases} \Delta \psi + \omega = 0. \end{cases} \quad (7.2)$$

初始条件

$$\begin{cases} u(x, y, 0) = u^0(x, y), \\ v(x, y, 0) = v^0(x, y), \end{cases} \quad (x, y) \in D. \quad (7.3)$$

边界条件

$$\begin{cases} \psi(x, y, t) = f(x, y, t), \\ \frac{\partial \psi}{\partial n}(x, y, t) = g(x, y, t), \end{cases} \quad (x, y) \in \partial D. \quad (7.4)$$

其中,  $\omega$  为涡度,  $\psi$  为流函数,  $\text{Re}$  为 Reynolds 数,  $\mathbf{V} = (u, v)^T$ ,  $u$ ,  $v$  分别为  $x$  方向和  $y$  方向的速度分量, 并可以用流函数  $\psi$  来表示

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

$$v = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

式中一些记号的含意是

$$\mathbf{V} \cdot \nabla = u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y},$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

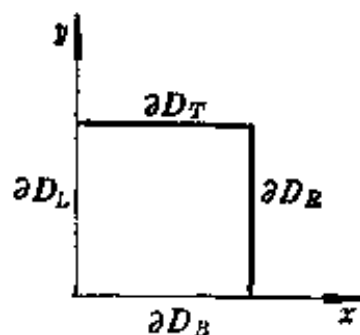


图 5.14 左边界

方程(7.1)和(7.2)是由抛物型方程和椭圆型方程耦合在一起组成的。

由(7.3)我们可以得到  $\omega$  的初始条件

$$\omega(x, y, 0) = \omega^0(x, y), \quad (x, y) \in D. \quad (7.5)$$

方程(7.1)和(7.2), 初始条件(7.3)和(7.5)及边界条件(7.4)构成一个偏微分方程组的定解问题。

令解域  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 左, 右, 上, 下四个边

界分别为  $\partial D_L, \partial D_R, \partial D_T, \partial D_B$ , 见图 5.14.

我们用交替方向隐式格式离散涡度方程(7.1),

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{ij}^n}{\Delta t/2} + u_{ij}^n \frac{\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} \\ & + v_{ij}^n \frac{\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n}{2\Delta y} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{ij}^n + \omega_{i,j-1}^n}{(\Delta y)^2} = 0 \end{aligned} \right. \quad (7.6a)$$

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}}{\Delta t/2} + u_{ij}^n \frac{\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{2\Delta x} \\ & - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}}{(\Delta x)^2} \\ & + v_{ij}^n \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - \omega_{i,j-1}^{n+1}}{2\Delta y} - \frac{1}{\text{Re}} \frac{\omega_{i,j+1}^{n+1} - 2\omega_{ij}^{n+1} + \omega_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} = 0. \end{aligned} \right. \quad (7.6b)$$

求解(7.6a)和(7.6b)时,分别用一次追赶法就可以解出. 但我们注意到,求解(7.6a)时需要在边界  $\partial D_L = \{(x, y) | x=0, 0 \leq y \leq 1\}$  和  $\partial D_R$  上给出  $\omega$  的条件. 同样地,在求解(7.6b)时,需要在边界  $\partial D_T$  和  $\partial D_B$  上给出  $\omega$  的条件. 这些条件在微分方程初边值问题中是不需要给出的,而用有限差分法求解时必须给出.

导出关于涡度  $\omega$  的边界条件方法很多,并引起了不少实际工作者的兴趣. 这里我们仅选取一种较为简单的方法来说明这个问题,其它方法就不再叙述了. 各种方法的阐述可见文献[22].

下面以  $\partial D_L$  为例来推导涡度  $\omega$  的条件. 由边界条件(7.4), 我们可以得到

$$\psi(0, y, t) = f(0, y, t), \quad (7.7a)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial x}(0, y, t) = -g(0, y, t), \quad (7.7b)$$

由(7.2)可知

$$\omega_{\partial D_L} = -(\Delta \psi)_{\partial D_L}, \quad (7.8)$$

$$\text{即} \quad \omega(0, y, t) = -\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(0, y, t) - \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(0, y, t), \quad (7.9)$$

利用(7.7a), 我们有

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2}(0, y, t) = \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(0, y, t).$$

而  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(0, y, t)$  可以用  $\psi(\Delta x, y, t)$  的 Taylor 展开式

$$\begin{aligned} \psi(\Delta x, y, t) &= \psi(0, y, t) + \Delta x \frac{\partial \psi}{\partial x}(0, y, t) \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(0, y, t) + \dots \\ &= f(0, y, t) - \Delta x g(0, y, t) \\ &\quad + \frac{\Delta x^2}{2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(0, y, t) + \dots \end{aligned}$$

来推出

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(0, y, t) &= \frac{2}{\Delta x^2} [\psi(\Delta x, y, t) - f(0, y, t)] \\ &\quad + \frac{2}{\Delta x} g(0, y, t) + O(\Delta x). \end{aligned} \quad (7.10)$$

从而我们得到

$$\begin{aligned} \omega(0, y, t) &= -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, y, t) - \frac{2}{\Delta x^2} [\psi(\Delta x, y, t) - f(0, y, t)] \\ &\quad - \frac{2}{\Delta x} g(0, y, t). \end{aligned} \quad (7.11)$$

从(7.10)看出,  $\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2}(0, y, t)$  精确到一阶, 所以在  $\partial D_L$  上边界

(7.11)是一阶精度的, 此外, 还应注意, (7.11)中包含了未知量

$\psi(\Delta x, y, t)$ , 在计算过程中, 一般可采用前一时刻的值来代替. 对于其余三个边界  $\partial D_R, \partial D_T, \partial D_B$  可以同样处理.

下面解流函数方程(7.2), 这是 Poisson 方程, 首先采用五点差分格式进行离散,

$$\begin{cases} \Delta_h \psi_{ij} = \frac{\psi_{i+1,j}^{n+1} - 2\psi_{ij}^{n+1} + \psi_{i-1,j}^{n+1}}{(\Delta x)^2} + \frac{\psi_{i,j+1}^{n+1} - 2\psi_{ij}^{n+1} + \psi_{i,j-1}^{n+1}}{(\Delta y)^2} \\ \quad = -\omega_{ij}^{n+1}, & (x_i, y_j) \in D_h, \\ \psi_{ij}^{n+1} = f_{ij}^{n+1}, & (x_i, y_j) \in \partial D_h. \end{cases} \quad (7.12)$$

然后, 利用超松弛方法解上述方程组求得  $\psi_{ij}^{n+1}$ .

综上所述, 我们可以得到求解方程组(7.1), (7.2)的方法, 即由上一时刻的  $\omega_{ij}^n, \psi_{ij}^n$ , 对(7.1)式采用交替方向隐式格式(7.6)求解  $\omega_{ij}^{n+1}$ ; 对(7.2)式采用五点差分格式(7.12), 再用逐次超松弛迭代求解  $\psi_{ij}^{n+1}$ , 重复此过程, 直到迭代收敛.

## 7.2 定态问题

当  $\frac{\partial \omega}{\partial t} = 0$  时, 非定态方程(7.1)就变成定态 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \mathbf{V} \cdot \nabla \omega - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega = 0, \\ \Delta \psi + \omega = 0. \end{cases} \quad (7.13)$$

与它等价的守恒型方程是

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\mathbf{V} \omega) - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega = 0, \\ \Delta \psi + \omega = 0. \end{cases} \quad (7.14)$$

这是因为有连续性方程

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (7.15)$$

即

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = 0, \quad (7.16)$$

则

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}\omega) = \mathbf{V} \cdot \nabla \omega + \omega \nabla \cdot \mathbf{V} = \mathbf{V} \cdot \nabla \omega, \quad (7.17)$$

下面我们仅讨论守恒型 Navier-Stokes 方程, 而且限于平面流动. 方程为

$$\begin{cases} \frac{\partial(u\omega)}{\partial x} + \frac{\partial(v\omega)}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \Delta \omega = 0, & (x, y) \in D, \\ \Delta \psi + \omega = 0, & (x, y) \in D, \end{cases} \quad (7.18)$$

$$\text{边界条件为 } \begin{cases} \psi(x, y) = f(x, y), & (x, y) \in \partial D, \\ \frac{\partial \psi}{\partial n}(x, y) = g(x, y), & (x, y) \in \partial D. \end{cases} \quad (7.19)$$

(7.18)是关于涡度  $\omega$  和流函数  $\psi$  的二个非线性椭圆型偏微分方程. 各个量的物理意义同上一节, 但  $\psi, \omega, u$  和  $v$  皆不依赖于时间  $t$ . 这类定解问题的解法基本上有二种, 其一是迭代方法, 其二是伪-非定态方法.

我们先简单地介绍一下迭代方法. 首先把(7.18)进行离散, 式中的一阶导数用中心差商逼近, Laplace 算子用五点差分格式逼近, 这样就得到

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1,j}\omega_{i+1,j} - u_{i-1,j}\omega_{i-1,j}}{2\Delta x} + \frac{v_{i,j+1}\omega_{i,j+1} - v_{i,j-1}\omega_{i,j-1}}{2\Delta y} \\ - \frac{1}{\text{Re}} \Delta_h \omega_{i,j} = 0, \end{cases} \quad (7.20)$$

$$\Delta_h \psi_{i,j} + \omega_{i,j} = 0. \quad (7.21)$$

下面处理边界条件. 在  $\partial D_L$  上(见图 5.14), (7.19)式及涡度边界条件变成

$$\psi_{0,j} = f_{0,j}, \quad (7.22)$$

$$\omega_{0,j} = -\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)_{0,j} - \frac{2}{\Delta x^2} (\psi_{1,j} - f_{0,j}) - \frac{2}{\Delta x} g_{0,j} = \varphi_{0,j}, \quad (7.23)$$



其它三个边界可以用同样的方式进行离散。

设  $\psi_{ij}^s, \omega_{ij}^s$  为已知, 计算  $\psi_{ij}^{s+1}, \omega_{ij}^{s+1}$  的线性化迭代过程称为外迭代,  $s$  为外迭代指标, 一次外迭代过程如下:

1 由

$$\begin{cases} \Delta_h \tilde{\psi}_{ij}^{s+1} = -\omega_{ij}^s, & (x_i, y_j) \in D_h, \\ \tilde{\psi}_{ij}^{s+1} = f_{ij}, & (x_i, y_j) \in \partial D_h, \end{cases} \quad (7.24)$$

计算  $\tilde{\psi}_{ij}^{s+1}$

2 利用松弛公式

$$\psi_{ij}^{s+1} = \alpha \tilde{\psi}_{ij}^{s+1} + (1-\alpha) \psi_{ij}^s, \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad (x_i, y_j) \in D_h$$

来计算  $\psi_{ij}^{s+1}$ .

3. 由  $\psi_{ij}^{s+1}, \omega_{ij}^s$ , 利用 Gauss-Seidel 公式迭代涡度离散方程

$$\begin{cases} \frac{u_{i+1,j}^{s+1} \omega_{i+1,j}^{(l)} - u_{i-1,j}^{s+1} \omega_{i-1,j}^{(l+1)}}{2h} - \frac{v_{i,j+1}^{s+1} \omega_{i,j+1}^{(l)} - v_{i,j-1}^{s+1} \omega_{i,j-1}^{(l+1)}}{2k} \\ - \frac{1}{\text{Re}} \left\{ \frac{\omega_{i+1,j}^{(l)} - 2\omega_{ij}^{(l+1)} + \omega_{i-1,j}^{(l+1)}}{h^2} \right. \\ \left. + \frac{\omega_{i,j+1}^{(l)} - 2\omega_{ij}^{(l+1)} + \omega_{i,j-1}^{(l+1)}}{k^2} \right\} = 0, & (x_i, y_j) \in D_h, \\ \omega_{ij}^{l+1} = \varphi_{ij}, & (x_i, y_j) \in \partial D_h, \end{cases} \quad (7.25)$$

其中,  $u_{ij}^{s+1} = \frac{\psi_{i,j+1}^{s+1} - \psi_{i,j-1}^{s+1}}{2k}$ ,  $v_{ij}^{s+1} = \frac{-(\psi_{i+1,j}^{s+1} - \psi_{i-1,j}^{s+1})}{2h}$ . 已知

$\omega_{ij}^{(l)}$  计算  $\omega_{ij}^{(l+1)}$  的迭代过程称为内迭代,  $l$  为内迭代指标, 用  $\omega_{ij}^s$  作为  $l=0$  时内迭代的初始值. 一直迭代到达到预定精度为止.  $\varphi_{ij}$  的计算公式见(7.8), 其它三个边界类似. 迭代的收敛值为  $\tilde{\omega}_{ij}^{s+1}$ .

4. 对涡度的内点值和边界值分别松弛,

$$\omega_{ij}^{s+1} = \beta \tilde{\omega}_{ij}^{s+1} + (1-\beta) \omega_{ij}^s, \quad (x_i, y_j) \in D_h,$$

$$\omega_{ij}^{s+1} = \gamma \tilde{\omega}_{ij}^{s+1} + (1-\gamma) \omega_{ij}^s, \quad (x_i, y_j) \in \partial D_h,$$

其中,  $\beta$  和  $\gamma$  分别是内点和边界点的松弛因子,  $0 < \beta, \gamma \leq 1$ .

## 5. 收敛准则

$$\frac{\max(|\phi_{i,j}^{s+1} - \phi_{i,j}^s|)}{\max(|\phi_{i,j}^{s+1}|)} \leq \varepsilon_\phi \quad (\phi = \psi \text{ 或 } \omega).$$

至此整个迭代过程终止. 这时,  $\psi^{s+1}$  和  $\omega^{s+1}$  为原问题(7.1), (7.2)和在边界条件(7.3)下的近似解. 否则, 重复步骤 1 至 5.

计算第一步不会产生困难. 计算第三步, 当  $|u_{i,j}| \operatorname{Re} h > 2$  或  $|v_{i,j}| \operatorname{Re} h > 2$  时, (7.25) 存在收敛问题. 此时, (7.25) 的系数矩阵不再对角占优. 当  $\operatorname{Re}$  很大, 网格剖分又较粗即  $h$  和  $k$  也大时, 就会出现这种现象. 所以在高  $\operatorname{Re}$  的情况下, (7.18) 中的对流项需采用迎风差分格式, 才能保证离散涡度方程的系数矩阵对角占优.

**例 7.1** 求方腔中 Navier-Stokes 方程的解.

方程同(7.18), 边界条件见图 5.15.

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = -16x^2(1-x)^2, \text{ 在 } AB \text{ 上,}$$

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial n} = 0, \text{ 在 } BC, CD, DA \text{ 上,}$$

$$\omega(0, y) = -\frac{2}{\Delta x^2} \psi(\Delta x, y),$$

$$\omega(1, y) = -\frac{2}{\Delta x^2} \psi(1 - \Delta x, y),$$

$$\omega(x, 0) = -\frac{2}{\Delta y^2} \psi(x, \Delta y),$$

$$\omega(x, 1) = -\frac{2}{\Delta y} \left[ \frac{1}{\Delta y} \psi(x, 1 - \Delta y) + 16x^2(1-x)^2 \right].$$

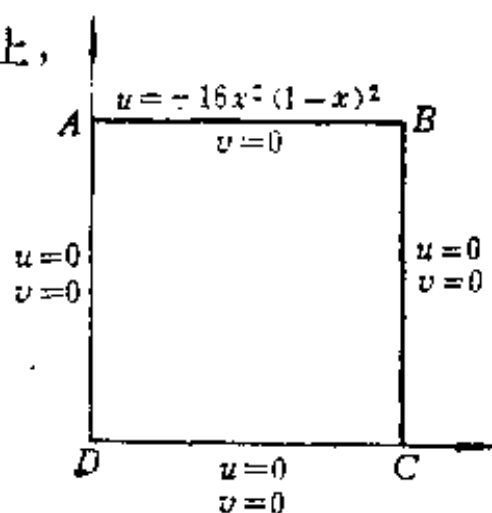


图 5.15 边界条件

对  $\operatorname{Re} = 100$  和  $\operatorname{Re} = 400$ ,  $\Delta x = \Delta y = \frac{1}{20}$ ,  $\alpha = 1$ ,  $\beta = \gamma = 0.5$ , 按上

述 5 个步骤进行计算. 用超松弛因子为 1.5 的 SOR 法解(7.24), 用 Gauss-Seidel 法解(7.25). 内迭代的终止标准是前后二次迭代值之间的差小于  $10^{-2}$ . 外迭代的终止标准是

$$R_\phi^{(1)} = \max(|\phi_{i,j}^{s+1} - \phi_{i,j}^s|) \leq \varepsilon_\phi, \quad \phi = \psi \text{ 或 } \omega,$$

$$R_{\phi}^{(2)} = \frac{\max(\phi_{ij}^{s+1} - \phi_{ij}^s)}{\max(|\phi_{ij}^{s+1}|)} \leq \varepsilon_{\phi}, \quad \phi = \psi \text{ 或 } \omega,$$

$$R_{\phi}^{(3)} = \frac{1}{N} \sum_{ij} |\phi_{ij}^{s+1} - \phi_{ij}^s| \leq \varepsilon_{\phi}, \quad \phi = \psi \text{ 或 } \omega,$$

$$R_{\phi}^{(4)} = \frac{1}{N} \left( \sum_{ij} |\phi_{ij}^{s+1} - \phi_{ij}^s|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq \varepsilon_{\phi}, \quad \phi = \psi \text{ 或 } \omega.$$

把(7.25)改成算子形式

$$\left[ L_h(\psi_{ij}) - \frac{\Delta h}{\text{Re}} \right] \omega_{ij} = 0,$$

因此, 另一种外迭代终止标准是

$$R_{\omega}^{(5)} = \max_{ij} \left\{ \left| \left[ L_h(\psi_{ij}^{s+1}) - \frac{\Delta h}{\text{Re}} \right] \omega_{ij}^{s+1} \right| \right\},$$

$$R_{\psi}^{(5)} = \max_{ij} (|\Delta_h \psi_{ij}^{s+1} + \omega_{ij}^{s+1}|).$$

计算结果见表 7.1,  $\text{Re}=400$  时的流线示于图 5.16, 涡度等高线示于图 5.17.

表 7.1

| Re               | 网格尺寸           | 总迭代次数 <sup>a</sup> | 内迭代次数<br>$\psi$ $\omega$ | $\max_{x,y} \psi(x,y)^b$ | $\max_x \omega(x,1)$ | $\int_0^1 \omega(x,1) dx^c$ | $\max_{(0.5,y)} u_y$ |
|------------------|----------------|--------------------|--------------------------|--------------------------|----------------------|-----------------------------|----------------------|
| 100              | $\frac{1}{10}$ | 62                 | 71   388                 | 0.0735                   | 9.48                 | 4.44                        | 0.133                |
| 100              | $\frac{1}{20}$ | 138                | 144   737                | 0.0806                   | 12.61                | 4.80                        | 0.153                |
| 100 <sup>d</sup> | $\frac{1}{20}$ |                    |                          | 0.0835                   | 13.31                | 5.14                        | 0.163                |
| 400 <sup>e</sup> | $\frac{1}{20}$ |                    |                          | 0.0593                   |                      | 7.99                        | 0.116                |

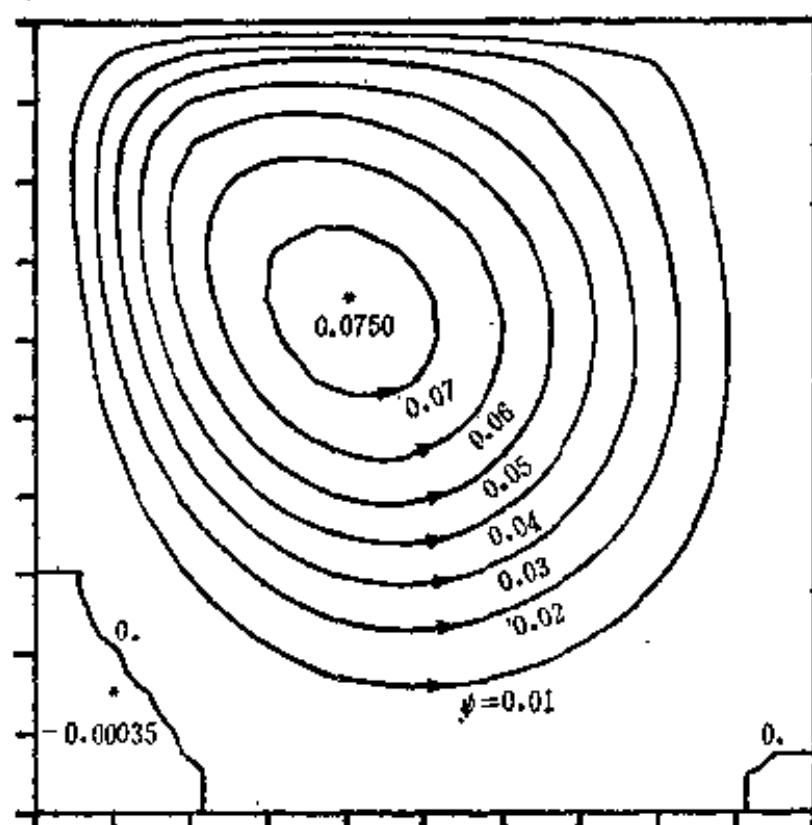


图 5.16  $Re=400$ , 方腔内流线图

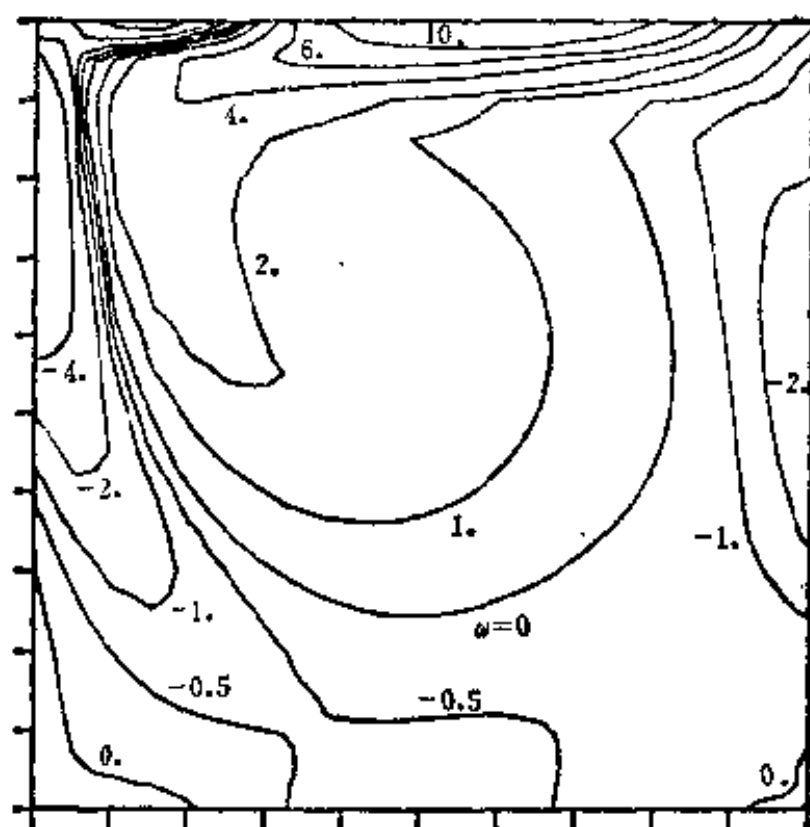


图 5.17  $Re=400$ , 方腔内涡度等高线图

表 7.1 中的  $a, b, c, d, e, f$  分别表示:

$$a. \operatorname{Re}=100, \max(R_{\varphi}^{(4)}, R_{\omega}^{(4)}) < \varepsilon, h = \frac{1}{10} \text{ 时}, \varepsilon = 5 \times 10^{-5},$$

$$h = \frac{1}{20} \text{ 时}, \varepsilon = 10^{-5},$$

$$\operatorname{Re}=400, \max(R_{\varphi}^{(1)}, R_{\omega}^{(1)}) < 10^{-5},$$

$$\max(R_{\varphi}^{(5)}, R_{\omega}^{(5)}) < 6 \times 10^{-5}.$$

$$b. \operatorname{Re}=100, x=0.4, y=0.8; \operatorname{Re}=400, x=0.4, y=0.65.$$

$$c. \operatorname{Re}=100, x=0.6, \text{ 用矩形公式积分且}$$

$$\omega(0,1) = \omega(1,1) = 0.$$

$d$  参考值.

$e. \operatorname{Re}=400$  时, 以  $\operatorname{Re}=100$  的计算结果为初值.

## § 8 提高精度的方法

一般说来, 差分解的精确度随着网格剖分的加密即网格步长的减小而增加, 但网格愈小, 网点就愈多, 差分方程系数矩阵阶数愈高, 存储量愈大. 所以, 加密网格仅仅是提高精确度的方法之一. 本节我们介绍另外两种方法: 外推法和高阶精度差分格式.

### 8.1 Richardson 外推法

以二维为例. 和前面几节一样, 令  $u(x_i, y_i)$  为原始微分方程在节点  $(x_i, y_i)$  上的精确解,  $u_{ij}^{h_1}, u_{ij}^{h_2}$  分别表示当步长为  $h_1$  和  $h_2$  时在同一节点  $(x_i, y_i)$  上差分方程的解. 它们的误差与  $h^p$  成正比.

$$u(x_i, y_i) - u_{ij}^{h_1} = Ah_1^p, \quad (8.1)$$

$$u(x_i, y_i) - u_{ij}^{h_2} = Ah_2^p. \quad (8.2)$$

用  $h_2^p$  乘 (8.1),  $h_1^p$  乘 (8.2), 然后两式相减得外推公式

$$u(x_i, y_i) = \frac{h_2^p u_{ij}^{h_1} - h_1^p u_{ij}^{h_2}}{h_2^p - h_1^p}. \quad (8.3)$$

**例 8.1** Poisson 方程的五点差分公式为

$$4u_{i,j} - u_{i+1,j} - u_{i-1,j} - u_{i,j+1} - u_{i,j-1} = h^2 f_{i,j}.$$

如果边界上的函数光滑, 则在矩形域上解的离散误差与  $h^2$  成正比. 若取  $h_2 = 2h_1$ , 根据(8.3)有

$$u(x_i, y_j) = u_{ij}^{h_2} + \frac{1}{3}(u_{ij}^{h_2} - u_{ij}^{h_1}). \quad (8.4)$$

使用外推公式(8.3)时, 需要预先知道误差阶  $p$  的值. 在  $p$  值不知道的情况下, 除了(8.1), (8.2)之外, 再加一个公式

$$u(x_i, y_j) - u_{ij}^{h_3} = Ah_3^p. \quad (8.5)$$

比如, 当  $h_3 = \frac{1}{2}h_2 = \frac{1}{4}h_1$  时, (8.1), (8.2)和(8.3)变成

$$u(x_i, y_j) - u_{ij}^{h_1} = 4^p Ah_3^p, \quad (8.6)$$

$$u(x_i, y_j) - u_{ij}^{h_2} = 2^p Ah_3^p, \quad (8.7)$$

$$u(x_i, y_j) - u_{ij}^{h_3} = Ah_3^p. \quad (8.8)$$

(8.6)减(8.7), (8.7)减(8.8), 再将二个等式相比, 结果得到

$$\frac{u_{ij}^{h_2} - u_{ij}^{h_1}}{u_{ij}^{h_3} - u_{ij}^{h_2}} = 2^p. \quad (8.9)$$

因此, 只要算出节点  $(x_i, y_j)$  上三个不同步长之值, 就可以从(8.9)式得到误差阶  $p$  的估计式.

如果解的离散误差估计式能表示成  $h^p$  的函数, 那么 Richardson 外推法得到的值是可信的. 但在曲线边界附近, 在内角大于  $180^\circ$  的角点附近, 在函数不光滑的边界附近, Richardson 外推值的精度不一定高.

## 8.2 九点差分格式

九点差分格式是五点差分格式的发展. 它以五点差分格式为基础, 作 Taylor 展开. 再利用原 Poisson 方程(1.1), 推出当  $x$  方向步长  $h$  与  $y$  方向步长  $k$  不相等时, 截断误差为  $O(h^4 + k^4)$ , 即四阶逼近的九点差分格式; 当  $h = k$  时, 截断误差为  $O(h^6)$ , 即六阶逼近

近的九点差分格式.

Taylor 展开

$$\begin{aligned}
 u(x_{i\pm 1}, y_i) = & u(x_i, y_i) \pm h \frac{\partial}{\partial x} u(x_i, y_i) + \frac{h^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x_i, y_i) \\
 & \pm \frac{h^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial x^3} u(x_i, y_i) + \frac{h^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial x^4} u(x_i, y_i) \\
 & \pm \frac{h^5}{5!} \frac{\partial^5}{\partial x^5} u(x_i, y_i) \\
 & + \frac{h^6}{6!} \frac{\partial^6}{\partial x^6} u(x_i + \theta_1 h, y_i), \quad (8.10)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 u(x_i, y_{j\pm 1}) = & u(x_i, y_j) \pm k \frac{\partial}{\partial y} u(x_i, y_j) \\
 & + \frac{k^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} u(x_i, y_j) \\
 & \pm \frac{k^3}{3!} \frac{\partial^3}{\partial y^3} u(x_i, y_j) + \frac{k^4}{4!} \frac{\partial^4}{\partial y^4} u(x_i, y_j) \\
 & \pm \frac{k^5}{5!} \frac{\partial^5}{\partial y^5} u(x_i, y_j) \\
 & + \frac{k^6}{6!} \frac{\partial^6}{\partial y^6} u(x_i, y_j + \theta_2 k), \quad (8.11)
 \end{aligned}$$

其中,  $|\theta_1| \leq 1, |\theta_2| \leq 1$ . 将(8.10), (8.11)代入 Laplace 算子

$$\begin{aligned}
 \Delta_h u(x_i, y_j) = & \frac{u(x_{i+1}, y_j) - 2u(x_i, y_j) + u(x_{i-1}, y_j))}{h^2} \\
 & + \frac{u(x_i, y_{j+1}) - 2u(x_i, y_j) + u(x_i, y_{j-1}))}{k^2} \\
 = & \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x_i, y_j) \\
 & + \frac{1}{12} \left( h^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + k^2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) u(x_i, y_j) \\
 & + \frac{1}{360} \left( h^4 \frac{\partial^6}{\partial x^6} + k^4 \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right) u(x_i, y_j) \\
 & + O(h^6 + k^6). \quad (8.12)
 \end{aligned}$$

我们看到, (8.12)式右端有若干项, 截取的项数不同, 可推出逼近阶不同的差分格式.

如果(8.12)式的右端截取一项, 再利用Poisson方程(1.1), 我们有  $\Delta_h u(x_i, y_j) = -f(x_i, y_j) + O(h^2 + k^2)$ , 用  $u_{ij}$  近似代替  $u(x_i, y_j)$ , 就得到二阶精度的五点差分格式(1.4).

如果(8.12)式右端截取二项, 同样利用(1.1), 有

$$\begin{aligned}\Delta_h u(x_i, y_j) &= -f(x_i, y_j) + \frac{1}{12} \left( h^2 \frac{\partial^4}{\partial x^4} + k^2 \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) u(x_i, y_j) \\ &\quad + O(h^4 + k^4) \\ &= -f(x_i, y_j) + \frac{1}{12} \left( h^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \\ &\quad \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x_i, y_j) \\ &\quad - \frac{h^2 + k^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} + O(h^4 + k^4) \\ &= - \left\{ f(x_i, y_j) + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{k^2}{12} \frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial y^2} \right\} \\ &\quad - \frac{h^2 + k^2}{12} \frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} + O(h^4 + k^4). \quad (8.13)\end{aligned}$$

为方便起见, 引入记号

$$\delta_x^2 v(x_i, y_j) = v(x_{i+1}, y_j) - 2v(x_i, y_j) + v(x_{i-1}, y_j),$$

$$\delta_y^2 v_{i,j} = v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}.$$

对  $y$  有类似的记号, 用差商逼近(8.13)中的导数

$$\frac{\partial^4 u(x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} = \frac{1}{h^2 k^2} \delta_x^2 \delta_y^2 u(x_i, y_j) + O(h^2 + k^2), \quad (8.14)$$

$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_j)}{\partial x^2} = \frac{1}{h^2} \delta_x^2 f(x_i, y_j) + O(h^2), \quad (8.15)$$



$$\frac{\partial^2 f(x_i, y_i)}{\partial y^2} = \frac{1}{h^2} \delta_y^2 f(x_i, y_i) + O(k^2). \quad (8.16)$$

将(8.14)~(8.16)代入(8.13)有

$$\begin{aligned} \Delta_h u(x_i, y_i) &+ \frac{h^2 + k^2}{12 h^2 k^2} \delta_x^2 \delta_y^2 u(x_i, y_i) + (h^2 + k^2) O(h^2 + k^2) \\ &= - \left\{ f(x_i, y_i) + \frac{1}{12} \delta_x^2 f(x_i, y_i) + \frac{1}{12} \delta_y^2 f(x_i, y_i) + h^2 O(h^2) \right. \\ &\quad \left. + k^2 O(k^2) \right\} + O(h^4 + k^4). \end{aligned}$$

用  $u_{ij}$  近似代替  $u(x_i, y_i)$ ,  $f_{ij}$  近似代替  $f(x_i, y_i)$ , 推出下列差分格式

$$- \left( \Delta_h u_{ij} + \frac{h^2 + k^2}{12 h^2 k^2} \delta_x^2 \delta_y^2 u_{ij} \right) = f_{ij} + \frac{1}{12} \delta_x^2 f_{ij} + \frac{1}{12} \delta_y^2 f_{ij}. \quad (8.17)$$

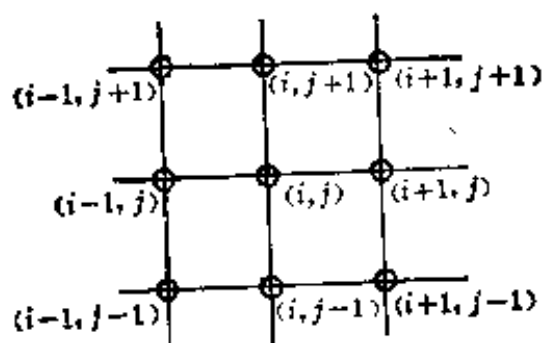


图 5.18

(8.17) 式是四阶逼近的, 其截断误差为  $O(h^4 + k^4)$ , 此格式在  $(x_i, y_i)$  点周围有八个邻点  $(x_{i+1}, y_{i+1})$ ,  $(x_{i+1}, y_i)$ ,  $(x_{i+1}, y_{i-1})$ ,  $(x_i, y_{i+1})$ ,  $(x_i, y_{i-1})$ ,  $(x_{i-1}, y_{i+1})$ ,  $(x_{i-1}, y_i)$ ,  $(x_{i-1}, y_{i-1})$ , 故称格式(8.17)为四阶精度的九点差分格式。见图 5.18。

在正方形网格上( $h=k$ )可以构造具有六阶精度的差分格式, 如果(8.12)式右端截取三项, 再利用 Poisson 方程(1.1), 有

$$\begin{aligned} \Delta_h u(x_i, y_i) &= -f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) u(x_i, y_i) \\ &\quad + \frac{h^4}{360} \left( \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right) u(x_i, y_i) + O(h^6), \quad (8.18) \\ \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) u(x_i, y_i) &= \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right)^2 u(x_i, y_i) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} u(x_i, y_i) \\
& = -\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x_i, y_i) \\
& -2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} u(x_i, y_i), \\
& \left( \frac{\partial^6}{\partial x^6} + \frac{\partial^6}{\partial y^6} \right) u(x_i, y_i) = \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right. \\
& \quad \left. + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x_i, y_i) \\
& = -\left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) f(x_i, y_i).
\end{aligned}$$

于是(8.18)式可以写成

$$\begin{aligned}
\Delta_h u(x_i, y_i) &= -f(x_i, y_i) - \frac{h^2}{12} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) f(x_i, y_i) \\
& - \frac{h^4}{360} \left( \frac{\partial^4}{\partial x^4} - \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \right) f(x_i, y_i) \\
& - \frac{h^2}{6} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} u(x_i, y_i) + O(h^5). \quad (8.19)
\end{aligned}$$

用具有精度  $O(h^5)$  的差商逼近上式中的微商, 由(8.10)和(8.11)式可以推得

$$\begin{aligned}
& \delta_x^2 \delta_y^2 u(x_i, y_i) \\
& = \frac{\partial^4 u(x_i, y_i)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) u(x_i, y_i) + O(h^4) \\
& = \frac{\partial^4 u(x_i, y_i)}{\partial x^2 \partial y^2} - \frac{h^2}{12} \frac{\partial^4 f(x_i, y_i)}{\partial x^2 \partial y^2} + O(h^4),
\end{aligned}$$

代入(8.19)式有

$$\begin{aligned}
& -\left\{ \Delta_h u(x_i, y_i) + \frac{h^2}{6} \delta_x^2 \delta_y^2 u(x_i, y_i) \right\} \\
& = f(x_i, y_i) + \frac{h^2}{12} \Delta f(x_i, y_i) + \frac{h^4}{360} [\Delta^2 f(x_i, y_i)
\end{aligned}$$

$$+ 2 \frac{\partial^4 f(x_i, y_i)}{\partial x^2 \partial y^2} \Big] + O(h^6),$$

由此得到六阶精度的差分格式

$$\begin{aligned} - \left( \Delta_h u_{i,j} + \frac{h^2}{6} \delta_x^2 \delta_y^2 u_{i,j} \right) &= f_{i,j} + \frac{h^2}{12} \Delta f_{i,j} \\ &+ \frac{h^4}{360} \left( \Delta^2 f_{i,j} + 2 \frac{\partial^4 f_{i,j}}{\partial x^2 \partial y^2} \right). \end{aligned} \quad (8.20)$$

为便于在计算机上计算, 既保持格式的精度, 又不包含函数  $f(x, y)$  的导数, 将下列表达式代入(8.20):

$$\begin{aligned} \Delta f(x_i, y_j) &= \Delta_h f(x_i, y_j) - \frac{h^2}{12} (\delta_x^4 + \delta_y^4) f(x_i, y_j) + O(h^4), \\ \Delta^2 f(x_i, y_j) &= (\delta_x^2 + \delta_y^2)^2 f(x_i, y_j) + O(h^2) \\ &= (\delta_x^4 + 2 \delta_x^2 \delta_y^2 + \delta_y^4) f(x_i, y_j) + O(h^2), \\ \frac{\partial^4 f(x_i, y_j)}{\partial x^2 \partial y^2} &= \delta_x^2 \delta_y^2 f(x_i, y_j) + O(h^2), \end{aligned}$$

且保留到  $O(h^4)$  的项, 得到便于数值计算的差分格式

$$\begin{aligned} - \left( \Delta_h u_{i,j} + \frac{h^2}{6} \delta_x^2 \delta_y^2 u_{i,j} \right) &= f_{i,j} + \frac{h^2}{12} \Delta_h f_{i,j} - \frac{h^4}{240} (\delta_x^4 + \delta_y^4) f_{i,j} \\ &+ \frac{h^4}{90} \delta_x^2 \delta_y^2 f_{i,j}. \end{aligned} \quad (8.21)$$

此格式亦是九点格式, 称它为正方形网格上具有六阶精度的九点差分格式.

现在我们考察四阶精度的九点差分格式(8.17)的收敛性. 其左端

$$\begin{aligned} - \left( \Delta_h u_{i,j} + \frac{h^2 + k^2}{12 h^2 k^2} \delta_x^2 \delta_y^2 u_{i,j} \right) &= \frac{5}{3} \left( \frac{1}{h^2} + \frac{1}{k^2} \right) u_{i,j} \\ &- \frac{1}{6} \left( \frac{5}{h^2} - \frac{1}{k^2} \right) (u_{i+1,j} + u_{i-1,j}) \\ &- \frac{1}{6} \left( \frac{5}{k^2} - \frac{1}{h^2} \right) (u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) \end{aligned}$$

$$-\frac{1}{12}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)(u_{i+1,j-1}+u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j-1}+u_{i-1,j+1}),$$

经整理后,按(3.2)的形式,其中系数

$$a_{ii}=\frac{5}{3}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)>0, \quad (8.22)$$

$$b_{i+1,j}=b_{i-1,j}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{h^2}-\frac{1}{k^2}\right), \quad (8.23)$$

$$b_{i,j+1}=b_{i,j-1}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{k^2}-\frac{1}{h^2}\right), \quad (8.24)$$

$$b_{i+1,j+1}=b_{i+1,j-1}=b_{i-1,j+1}=b_{i-1,j-1}=\frac{1}{12}\left(\frac{1}{h^2}+\frac{1}{k^2}\right)>0, \quad (8.25)$$

$$d_{ii}=\begin{cases} 0, & (x_i, y_i) \text{ 的邻点都是内点,} \\ >0, & (x_i, y_i) \text{ 的邻点有一个是边界点.} \end{cases} \quad (8.26)$$

如果仿五点差分格式用极值定理证明格式(8.17)的收敛性,那么算子系数必须满足条件(3.3)~(3.5). 看算子系数(8.22)~(8.25),其中,(8.22)和(8.25)自然满足,(8.23)和(8.24)必须满足下列关系:

$$\frac{5}{h^2}-\frac{1}{k^2}\geq 0,$$

$$\frac{5}{k^2}-\frac{1}{h^2}\geq 0,$$

等价于网格比  $k/h$  需满足

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\leq \frac{k}{h}\leq \sqrt{5} \quad (8.27)$$

可应用极值定理讨论九点差分格式(8.17)在条件(8.27)下的收敛性.

九点差分格式第一边值问题满足的误差方程是

$$\begin{cases} \Delta_h e_{ij} - \frac{h^2 + k^2}{12 h^2 k^2} \delta_x^2 \delta_y^2 e_{ij} = E\{u(x_i, y_j)\}, \\ e_{ij} = 0. \end{cases} \quad (8.28)$$

对(8.28)应用定理 4.1, 则有误差估计式

$$\begin{aligned} \max_{D_h} |e_{ij}| &\leq \max_{\partial D_h} |e_{ij}| + \frac{a^2}{2} \max_{D_h} \left| \Delta_h e_{ij} - \frac{h^2 + k^2}{12 h^2 k^2} \delta_x^2 \delta_y^2 e_{ij} \right|, \\ \max_{D_h} |e_{ij}| &\leq \frac{a^2}{2} \max_{D_h} |E\{u(x_i, y_j)\}| = O(h^4 + k^4). \end{aligned} \quad (8.29)$$

因此, 若原问题的解  $u(x, y) \in C^{(6)}(\bar{D})$ , 那么矩形网格的九点差分格式(8.17)在条件(8.27)下一致收敛.

在方形网格上, 格式(8.17)可写成

$$\begin{aligned} 20 u_{ij} - 4(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) - (u_{i+1,j+1} \\ + u_{i+1,j-1} + u_{i-1,j+1} + u_{i-1,j-1}) \\ = \frac{h^2}{2} (8 f_{ij} + u_{i+1,j} + u_{i,j+1} + u_{i-1,j} + u_{i,j-1}), \end{aligned} \quad (8.30)$$

其系数满足条件(3.3)~(3.5), 同样可以得到误差估计式(8.29), 故差分格式一致收敛.

### 8.3 Kreiss 差分格式

九点差分格式的系数矩阵不是三对角的, 而 Kreiss 提出的差分格式, 其精度和九点差分格式一样, 是四阶的, 然而其系数矩阵是紧凑的, 呈三对角型, 且严格对角占优, 可直接用追赶法解方程组.

Kreiss 提出下列差分逼近公式.

$$u'_h = \frac{1}{2h} \left( \frac{\Delta + \nabla}{1 + \frac{1}{6} \Delta \nabla} \right) u_h, \quad (8.31)$$

$$u''_h = \frac{1}{h^2} \left( \frac{\Delta \nabla}{1 + \frac{1}{12} \Delta \nabla} \right) u_h, \quad (8.32)$$

其中

$$\Delta u_k = u_{k+1} - u_k,$$

$$\nabla u_k = u_k - u_{k-1},$$

$$(\Delta + \nabla) u_k = u_{k+1} - u_{k-1}.$$

与一般方法不同之点是, 不仅函数本身是未知量, 函数的一阶导数和二阶导数也是未知量. 故令

$$\begin{cases} u'_k = F_k, \\ u''_k = S_k, \end{cases} \quad (8.33)$$

代入(8.31)和(8.32), 分别用分母乘两边, 得到

$$\frac{1}{6} F_{k+1} + \frac{2}{3} F_k + \frac{1}{6} F_{k-1} = \frac{1}{2h} (u_{k+1} - u_{k-1}), \quad (8.34)$$

$$\frac{1}{12} S_{k+1} + \frac{5}{6} S_k + \frac{1}{12} S_{k-1} = \frac{1}{h^2} (u_{k+1} - 2u_k + u_{k-1}). \quad (8.35)$$

很明显, 这是二个三对角方程组. 把  $F_k$  和  $S_k$  代入待求解的微分方程, 得到第三组关于  $u_k$  的方程组. 联立这三个方程组, 可解出  $u_k, F_k, S_k$ . 称这种差分格式为紧凑差分格式.

把(8.34), (8.35)左右二边作 Taylor 展开有

$$F_k = u'_k - \frac{1}{180} h^4 u^{(V)}, \quad (8.36)$$

$$S_k = u''_k - \frac{1}{240} h^4 u^{(VII)}. \quad (8.37)$$

显然, 紧凑差分格式是四阶精度的.

**例 8.2** 应用 Kreiss 格式列出下列非定态 Navier-Stokes 方程

$$\begin{cases} \frac{\partial \omega}{\partial t} + u \frac{\partial \omega}{\partial x} + v \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{1}{\text{Re}} \left( \frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2} \right) = 0, & (8.38 a) \\ \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \omega = 0 & (8.38 b) \end{cases}$$

的差分格式.

首先令  $\omega, \omega_x, \omega_y, \omega_{xx}, \omega_{yy}, \psi, \psi_x, \psi_y$  为未知量, 然后列出方程(8.38 a)的交替方向迭代公式即 ADI 公式为

$$\frac{2}{\Delta t} (\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{ij}^n) + u_{ij}^n (\omega_x)_{ij}^n + v_{ij}^n (\omega_y)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} = -\frac{1}{\text{Re}} ((\omega_{xx})_{ij}^n + (\omega_{yy})_{ij}^{n+\frac{1}{2}}), \quad (8.39 a)$$

$$\begin{aligned} \frac{2}{\Delta t} (\omega_{ij}^{n+1} - \omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}) + u_{ij}^n (\omega_x)_{ij}^{n+1} + v_{ij}^n (\omega_y)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} \\ = -\frac{1}{\text{Re}} ((\omega_{xx})_{ij}^{n+1} + (\omega_{yy})_{ij}^{n+\frac{1}{2}}), \end{aligned} \quad (8.39 b)$$

其中  $u_{ij}^n = (\psi_y)_{ij}^n, v_{ij}^n = -(\psi_x)_{ij}^n$ . 仿(8.34)式和(8.35)式分别列出关于  $\omega_x, \omega_{xx}, \omega_y, \omega_{yy}$  的方程组

$$\begin{cases} \frac{1}{6} (\omega_y)_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{2}{3} (\omega_y)_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{6} (\omega_y)_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \\ \quad = \frac{1}{2h} (\omega_{i,j+1}^n - \omega_{i,j-1}^n), \\ \frac{1}{12} (\omega_{yy})_{i,j+1}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{5}{6} (\omega_{yy})_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \frac{1}{12} (\omega_{yy})_{i,j-1}^{n+\frac{1}{2}} \\ \quad = \frac{1}{h^2} (\omega_{i,j+1}^n - 2\omega_{ij}^n + \omega_{i,j-1}^n). \end{cases} \quad (8.40 a)$$

$$\begin{cases} \frac{1}{6} (\omega_x)_{i+1,j}^{n+1} + \frac{2}{3} (\omega_x)_{ij}^{n+1} + \frac{1}{6} (\omega_x)_{i-1,j}^{n+1} \\ \quad = \frac{1}{2h} (\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - \omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}), \\ \frac{1}{12} (\omega_{xx})_{i+1,j}^{n+1} + \frac{5}{6} (\omega_{xx})_{ij}^{n+1} + \frac{1}{12} (\omega_{xx})_{i-1,j}^{n+1} \\ \quad = \frac{1}{h^2} (\omega_{i+1,j}^{n+\frac{1}{2}} - 2\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}} + \omega_{i-1,j}^{n+\frac{1}{2}}), \end{cases} \quad (8.41 a)$$

在方程组(8.39)~(8.41)中,  $0 < i < I, 0 < j < J$ . 由具体问题确定了初始条件和边界条件后, 若已知第  $n$  步的  $\omega$  及其一阶导数和二阶导数, 则由(8.40)式算出  $(\omega_y)_{ij}^{n+\frac{1}{2}}, (\omega_{yy})_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ , 再将它们代入

(8.39 a) 式求得  $\omega_{ij}^{n+\frac{1}{2}}$ , 就完成了 ADI 法的前半部. 然后由 (8.41) 算出  $(\omega_x)_{ij}^{n+1}, (\omega_{xx})_{ij}^{n+1}$ , 将它们代入 (8.40 b) 求得  $\omega_{ij}^{n+1}$ , 完成 ADI 法的后半部. 在 (8.40) 和 (8.41) 中, 四个方程组的系数矩阵都呈三对角型, 只要用追赶法就可简便地求得它们的解.

对于流函数方程 (8.38 b), 先把它改写成非定态型

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \omega = 0, \quad (8.42)$$

然后与涡度方程 (8.38 a) 作同样的处理, 用 Kreiss 格式列出类似 (8.39), (8.40), (8.41) 的差分方程组. 在求出  $\omega_{ij}^{n+1}$  后, 同样可以用 ADI 法解出  $\psi_{ij}^{n+1}$ . 当  $\psi_{ij}$  不再随时间  $t$  改变时, 它就是稳态方程 (8.38 b) 的解.

这种方法的特点是求解简单, 因为系数矩阵呈三对角型, 而且能获得高精度.

## § 9 特征值问题

Laplace 算子  $\Delta$  的特征值问题是求

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u, & (x, y) \in D, \\ u = 0, & (x, y) \in \partial D \end{cases} \quad (9.1)$$

$$(9.2)$$

的不为零的解  $u$  (特征函数) 及参数  $\lambda$  (特征值).

我们仍假定  $D$  为单位正方形,  $D = \{(x, y) | 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$ , 取步长  $h = 1/N$  的正方形网格,  $\bar{D}_h = D_h \cup \partial D_h$ .

### 9.1 分离变量法

令  $u(x, y) = f(x)g(y)$ , 由 (9.1) 得到

$$-\frac{f''(x)}{f(x)} - \frac{g''(y)}{g(y)} = \lambda.$$

由 (9.2) 得到



$$f(0)=f(1)=g(0)=g(1)=0.$$

容易求出(9.1)和(9.2)的特征函数和特征值是

$$\begin{aligned} u_{p,q}(x,y) &= \sin p\pi x \sin q\pi y, \\ \lambda_{p,q} &= \pi^2(p^2+q^2), \quad p,q=1,2,\dots \end{aligned} \quad (9.3)$$

可以证明这些特征函数是相互独立的。

## 9.2 差分方法

### 1. 线性差分方程的解.

我们只讨论二阶常系数线性差分方程的解, 设

$$u_{k+2} + a u_{k+1} + b u_k = 0, \quad k=0,1,2,\dots, \quad (9.4)$$

其中,  $a, b$  为实数. 假定  $u_k = A\xi^k$  是(9.4)的解, 其中  $A$  和  $\xi$  为非零常数, 代入(9.4)有

$$\xi^2 + a\xi + b = 0. \quad (9.5)$$

我们称(9.5)为差分方程(9.4)的特征方程,  $\xi$  是特征方程的根, 它们可以是等根或不等根, 实根或复根.

(i) 不等实根  $\xi_1 \neq \xi_2$ , 则  $u_k = A\xi_1^k + B\xi_2^k$ ,

(ii) 重根  $\xi_1 = \xi_2 = \xi$ , 则  $u_k = (A + Bk)\xi^k$ ,

(iii) 共轭复根  $\xi_1 = re^{i\theta}, \xi_2 = re^{-i\theta}$ .

由于  $\xi_1 + \xi_2 = -a$ , 即  $-2r \cos \theta = a$ ,  $\xi_1 \xi_2 = b$ , 即  $r^2 = b$ , 则  $u_k = Ar^k e^{ik\theta} + Br^k e^{-ik\theta} = b^{\frac{1}{2}k} (C \cos k\theta + D \sin k\theta)$ , 其中,  $A, B, C, D$  是任意常数, 它们由边界条件确定.

### 2. 求特征值的差分方法.

求简单的五点差分格式

$$\begin{cases} u_{i-1,j} + u_{i+1,j} + u_{i,j-1} + u_{i,j+1} + (\bar{\lambda} h^2 - 4)u_{i,j} = 0, & (x_i, y_j) \in D_h, \\ u_{i,j} = 0, & (x_i, y_j) \in \partial D_h \end{cases} \quad (9.6)$$

的特征值  $\bar{\lambda}$ . 利用分离变量法, 令  $u_{i,j} = \phi_i \psi_j$ , 代入(9.6)有

$$-[(\delta_x^2 \phi_i) \psi_j + (\delta_y^2 \psi_j) \phi_i] = \bar{\lambda} h^2 \phi_i \psi_j, \quad (9.7)$$

方程两边除以  $\phi_i \psi_i$ , 则有

$$-\frac{\delta_x^2 \phi_i}{\phi_i} - \frac{\delta_y^2 \psi_i}{\psi_i} = \bar{\lambda} h^2$$

如果令  $\bar{\lambda} = \xi + \eta$ , 则有

$$-\delta_x^2 \phi_i = \xi h^2 \phi_i, \quad (9.8)$$

$$-\delta_y^2 \psi_i = \eta h^2 \psi_i, \quad (9.9)$$

如果  $\xi, \eta$  已知, 那么 (9.8), (9.9) 是二阶常系数差分方程, 按上述方法解得

$$\phi_i^{(p)} = \sin\left(i \frac{p\pi}{N}\right),$$

$$p = 1, 2, \dots, N-1,$$

$$\xi_p = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{p\pi}{2N},$$

$$\psi_j^{(q)} = \sin\left(j \frac{q\pi}{N}\right),$$

$$q = 1, 2, \dots, N-1.$$

$$\eta_q = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{q\pi}{2N},$$

由此得出 (9.6) 的特征值和特征向量为

$$\bar{\lambda}_{pq} = \frac{4}{h^2} \left( \sin^2 \frac{p\pi}{2N} + \sin^2 \frac{q\pi}{2N} \right), \quad p, q = 1, 2, \dots, N-1.$$

$$u_{ij}^{(p,q)} = \sin \frac{ip\pi}{N} \sin \frac{jq\pi}{N},$$

这里应当注意, 9.1 节所述微分方程有无限个特征值, 而相应的差分方程仅有  $(N-1)^2$  个. 一般说来, 它们逼近微分方程中那些最小的特征值. 利用 Taylor 展开式有

$$\bar{\lambda}_{pq} = \lambda_{pq} + O(h^2),$$

微分问题的前五个特征值 (不计重复数) 与当  $N=10$  时差分问题的特征值比较如下:

|                 |        |        |        |         |         |
|-----------------|--------|--------|--------|---------|---------|
| $\lambda$       | 14.739 | 49.368 | 78.957 | 128.305 | 177.653 |
| $\bar{\lambda}$ | 19.577 | 47.985 | 76.393 | 120.640 | 164.886 |

可以看出,最小的特征值逼近比较好,而物理上有意义的正是最小的特征值,所以这样的近似求解是有价值的。

## § 10 多重网格方法

**多重网格**(Multiple Grid Method)简称 MG 方法。1977 年以来,它已广泛地用于求解椭圆型边值问题,此外还可用于求解非线性问题,奇摄动问题,本征值和奇性方程,分歧问题等, MG 方法亦可有效地用于求解积分方程。在向量机上或并行计算机上使用将更加有效。MG 方法是解线性或非线性代数方程组的一种近乎最优的通用迭代法,达到预定精确度所需要的计算工作量仅与未知数的个数或方程组的阶数  $n$  成正比即  $O(n)$ 。当然这并不意味着对于上述的一切问题存在一种固定的最佳的 MG 算法, MG 算法的实际计算效率与 MG 方法的各种参数的选取密切相关。这里只简单介绍它的基本思想和计算过程。

### 10.1 MG 方法的基本原理

要求解的连续问题是

$$Lu = f,$$

其中  $L$  为微分算子或积分算子或泛函求极值算子。例如二维 Poisson 方程第一边值问题

$$\begin{cases} -\Delta u = f(x, y), & (x, y) \in D, \\ u = \alpha(x, y), & (x, y) \in \partial D, \end{cases} \quad (10.1)$$

其中  $L = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)$ 。

将  $D$  域剖分成矩形网格,不失一般性,令  $\Delta x = \Delta y = h$ , 用  $D_h$  表示网格内点的集合,  $\partial D_h$  表示边界网格点的集合,则相应于 (10.1) 式的五点差分格式是

$$\begin{cases} -\Delta_h u_{ij} = f_{ij}, & (x_i, y_j) \in D_h, \\ u_{ij} = \alpha_{ij}, & (x_i, y_j) \in \partial D_h, \end{cases} \quad (10.2)$$

其矩阵形式为

$$L_h u = f_h, \quad (10.3)$$

其中  $L_h$  为  $n \times n$  的大型稀疏矩阵, 在本章第 5 节中所述的求解 (10.3) 的各种迭代方法是在确定的一种网格  $D_h$  上进行迭代. 而多重网格法恰恰不是在一种确定的网格上求解, 它采用不同等级的网格剖分  $D_{h_0}, D_{h_1}, \dots, D_{h_M}$ , 称它们为网格序列  $D_{h_k} (k=0, 1, 2, \dots, M)$ , 简写为  $D_k (k=0, 1, \dots, M)$ .  $k$  越大, 差分网格越细, 它们用相同的剖分方式, 都逼近同一个解域  $D$ . 相应地有网格步长序列  $h_k (k=0, 1, \dots, M)$ , 差分算子序列  $L_k (k=0, 1, \dots, M)$ .

我们称在  $D_k$  上求解差分方程

$$L_k u_k = f_k, \quad (10.4)$$

的问题为  $D_k$  问题, 在  $D_M$  上求解差分方程

$$L_M u_M = f_M \quad (10.5)$$

的问题为  $D_M$  问题. 由于  $D_k$  问题的代数方程组比  $D_M$  问题的小得多, 解起来既方便又省计算机时间, 因此, 首先近似地求解  $D_k$  问题, 再将  $D_k$  上的函数值插值转移到  $D_M$  上, 作为迭代解  $D_M$  问题的初始近似值. 同样, 在求解  $D_k$  问题时, 用  $D_{k-1}$  上的近似函数值作为  $D_k$  问题的迭代初值. 最终求得  $D_M$  问题的解, 这就是 MG 方法的基本思想.

对于线性问题, 令  $u_M$  是  $D_M$  问题的精确解,  $\bar{u}_M$  是其近似解, 则有

$$u_M = \bar{u}_M + v_M, \quad (10.6)$$

其中  $v_M$  为修正量, 将上式代入 (10.5) 得

$$L\bar{u}_M + Lv_M = f_M. \quad (10.7)$$

令

$$d_M = f_M - L\bar{u}_M,$$

则由(10.7)式得

$$L_H v_H = d_H, \quad (10.8)$$

称  $d_H$  为亏损量, (10.8) 式为亏损方程.

线性 MG 方法是把在细网  $D_h$  上迭代求解 (10.5) 与在粗网  $D_H$  上求解亏损方程

$$L_h v_h = d_h \quad (10.9)$$

相结合的一种方法, 而求解亏损方程 (10.9) 本身又是与  $D_{h-1}$  网格上的亏损方程相结合. 以上是线性 MG 方法的基本原理.

## 10.2 双网格方法

### 10.2.1 双网格算法.

双网格方法只用二套网格, 粗网节点分布和细网节点分布见图 5.20,  $\bullet$  表示细网节点,  $\square$  表示粗网节点,  $h$  和  $H$  分别表示网格步长,  $D_h$  (或  $D_{h_1}$ ) 表示  $\bullet$  点的集合,  $D_H$  (或  $D_{h_0}$ ) 表示  $\square$  点的集合,  $L_h$  和  $L_H$  分别表示  $D_h$  和  $D_H$  上的差分算子并设其逆  $L_h^{-1}$  和  $L_H^{-1}$  存在.  $I_h^H$  为限制算子, 表示由细网到粗网上函数值的转移,  $I_H^h$  为插值算子, 表示由粗网到细网上函数值的转移.

为直观起见, 用下列路径图表示用双网格方法迭代求解方程组

$$L_h u_h = f_h \quad (10.10)$$

时, 由已知  $u_h^{(n)}$  计算  $u_h^{(n+1)}$  的一个迭代步或者一个循环,  $n$  表示迭代指标.

$$\begin{array}{c} D_h: u_h^{(n)} \xrightarrow{\nu_1 \text{ Relax}} \bar{u}_h^{(n)} \rightarrow \\ \quad d_h^{(n)} = f_h - L_h \bar{u}_h^{(n)} \xrightarrow{\nu_2 \text{ Relax}} \hat{u}_h^{(n)} = \bar{u}_h^{(n)} + v_h^{(n)} \rightarrow u_h^{(n+1)} \\ \quad \downarrow I_h^H \qquad \qquad \uparrow I_H^h \\ D_H: d_H^{(n)} \longrightarrow L_H v_H^{(n)} = d_H^{(n)} \end{array}$$

一个循环分三个阶段.

1. 给定初值  $u_h^{(n)}$ , 在  $D_h$  上对 (10.10) 作  $\nu_1$  次迭代 (后面称

松弛,简写 Relax),得近似值  $\bar{u}^{(n)}$ ,用下列符号表示

$$\bar{u}_k^{(n)} := \text{Relax}^{v_1}(u_k^{(n)}, L_k, f_k),$$

其中:  $=$  表示将迭代结果赋值给  $\bar{u}_k^{(n)}$ .

## 2. 粗网修正.

### (1) 计算细网亏损量

$$d_k^{(n)} = f_k - L_k \bar{u}_k^{(n)}.$$

### (2) 限制亏损量(从 $D_k$ 到 $D_H$ 转移亏损量)

$$d_H^{(n)} = I_H^H d_k^{(n)}.$$

### (3) 在 $D_H$ 上求 $L_H d_H^{(n)} = d_H^{(n)}$ 的精确解 $v_H^{(n)}$ .

### (4) 插值(从 $D_H$ 到 $D_k$ 转移修正量)

$$v_k^{(n)} = I_H^k v_H^{(n)}.$$

### (5) 修正 $D_k$ 上的解向量

$$\hat{u}_k^{(n)} = \bar{u}_k^{(n)} + v_k^{(n)}.$$



图 5.19 双网格法

3. 以  $\hat{u}_k^{(n)}$  为初始近似值,在  $D_k$  上对(10.10)作  $v_2$  次松弛,将松弛结果赋给  $u_k^{(n+1)}$ ,即

$$u_k^{(n+1)} := \text{Relax}^{v_2}(\hat{u}_k^{(n)}, L_k, f_k).$$

用符号表示上述过程更加简单明瞭,见图 5.19,其中  $\circ$  表示松弛,  $\searrow$  表示限制亏损,  $\nearrow$  表示插值修正量并修正  $D_k$  上的解向量,  $\square$  表示在  $D_H$  上求精确解.

## 10.2.2 双网格方法的参数.

MG 方法的实际计算效率与它的各种参数的选取及综合考虑密切相关,双网格方法的若干个重要参数如下:

### 1. 网格变粗方式.

常用的变粗方式有标准变粗(图 5.20 a),半变粗(图 5.20 b),红黑变粗(图 5.20 c).

标准变粗即  $H_x = 2 h_x, H_y = 2 h_y$  最常用;半变粗即一个方向变粗而另一个方向不变,如  $H_x = h_x, H_y = 2 h_y$  或  $H_x = 2 h_x, H_y = h_y$ ,它适用于各向异性问题和奇摄动问题;红黑变粗即  $H = \sqrt{2} h$ ,

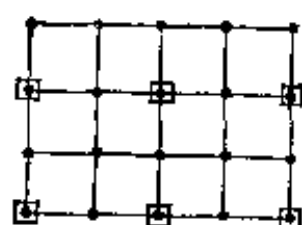


图 5.20 a



图 5.20 b

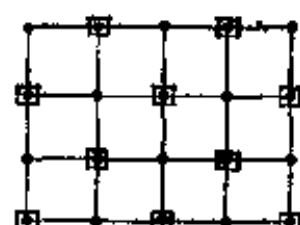


图 5.20 c

适用于方网格。

## 2. 细网松弛方法或光滑化迭代法。

可供选择的方法有 Jacobi- $\omega$  迭代法 (10.13), Gauss-Seidel 迭代法, 块迭代和 ADI 迭代法, 共轭梯度法<sup>[11]</sup>, 不完全 LU 分解法<sup>[11]</sup> 等等, 根据情况灵活运用。比如 RB 松弛, 先在红点上后在黑点上进行 Jacobi- $\omega$  松弛; 又如 ZEBRA 松弛, 先在编号为偶数的线上后在编号为奇数的线上进行 Gauss-Seidel 线松弛。反之亦然。

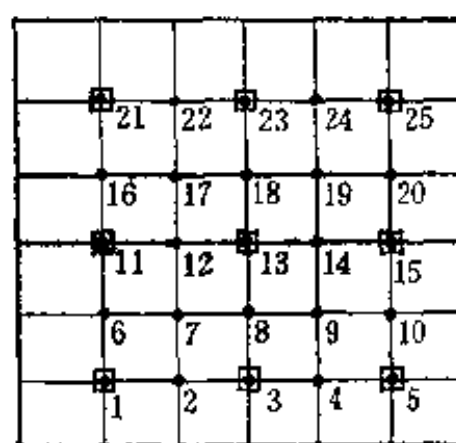


图 5.21 网格编号

3. 粗网修正前后, 在细网上松弛的次数  $\nu_1$  和  $\nu_2$ 。通常,  $\nu_1=1$  或 2 ( $l=1$  或 2), 对于 Poisson 方程取  $\nu_1=\nu_2$ , 效果较好。

4. 限制算子  $I_A^H$  (表示从细网到粗网的值的转移)。

先对解域内网格节点编号见图

5.21, 然后列举三种转移方式;

(1)  $I_A^H = [1]_k^H$  称为直接映射

即

$$(I_k^H u_k)(x, y) = u_k(x, y), (x, y) \in D_k,$$

其中  $u_k(x, y)$  为细网点上的函数值, 事实上, 与细网点相重合的粗网点上的函数值就取该点的细网值, 如  $u_H^7 = u_k^7$ 。

(2) 9 点限制算子或称完全加权转移算子, 即

$$I_h^H \triangleq \frac{1}{16} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

如粗网点 13 上的值按定义为

$$u_H^{13} = \frac{1}{16} (4 u_h^{13} + 2 u_h^{14} + 2 u_h^{18} + 2 u_h^{12} + 2 u_h^8 + \\ + u_h^{19} + u_h^{17} + u_h^7 + u_h^9),$$

其中记号  $\triangleq$  表示定义的意思。

(3) 7 点限制算子

$$I_h^H \triangleq \frac{1}{8} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

5. 插值算子  $I_H^h$  (表示从粗网到细网的值的转移)。

一般采用分段线性插值, 列举二种。

(1) 双线性插值

$$I_H^h \triangleq \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

表示粗网点上的值按此权系数分配给邻近细网点, 即

$$u_h^7 = \frac{1}{4} (u_H^{13} + u_H^{11} + u_H^3 + u_H^1),$$

$$u_h^8 = \frac{1}{2} (u_H^3 + u_H^{13}),$$

$$u_h^{12} = \frac{1}{2} (u_H^{11} + u_H^{13}),$$

$$u_h^6 = \frac{1}{2} (u_H^{11} + u_H^1),$$

$$u_h^2 = \frac{1}{2} (u_H^1 + u_H^3),$$



$$u_h^{13} = u_H^{13}, u_h^{11} = u_H^{11}, u_h^1 = u_H^1, u_h^3 = u_H^3.$$

(2)

$$I_H \triangleq \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

含意同(1), 仅仅权系数不同, 它适用于线性三角形有限元.

### 10.2.3 双网格分析.

双网格方法计算过程的算子表达式为

$$u_h^{(n+1)} = M_h^H u_h^{(n)} + S_h[f_h], \quad (10.11)$$

其中  $M_h^H = S_h^{\nu_2} (I_h - I_h^H L_H^{-1} I_h^H L_h) S_h^{\nu_1}$  为双网格迭代算子,  $S_h[f_h] = (I_h - M_h^H) L_h^{-1} f_h$ ,  $I_h$  为单位算子,  $S_h^{\nu_1}$  和  $S_h^{\nu_2}$  为粗网修正前和后在  $D_h$  上的迭代算子. 从理论上可以证明, 当  $\nu_2 = 0, \nu_1 \rightarrow \infty$  时, 对一般问题, 双网格方法是收敛的且与  $h$  取何值无关.

从双网格方法的计算过程看出, 它由二个要素组成: 其一是在细网上松弛, 其二是粗网修正. 在细网上松弛的作用是, 比如, Jacobi- $\omega$  松弛对于椭圆型边值问题起到光滑误差的作用. 为了说明  $S_h$  使误差光滑的性质, 以单位正方形域上 Poisson 方程的五点差分格式(10.2)为例, 方程可缩写成(10.3), 先求出  $L_h$  的特征值和特征函数, 它们分别是

$$\text{特征值 } \lambda_{n_1, n_2} = 1 - \frac{1}{2} (\cos(n_1 \pi h) + \cos(n_2 \pi h)), \quad (10.12 a)$$

$$\text{特征函数 } \psi_{n_1, n_2}(x, y) = 2 \sin(n_1 \pi x) \sin(n_2 \pi y), \quad (10.12 b)$$

其中  $(x, y) \in D_h$ ,  $\max(n_1, n_2) \leq N-1$ ,  $N = \frac{1}{h}$ .

Jacobi- $\omega$  迭代公式是

$$\bar{u}_h^{(n)} = u_h^{(n)} + \omega(Z_h - u_h^{(n)}), \quad (10.13)$$

$$\begin{aligned} \frac{4}{h^2} Z_h(x, y) &= (L_h u_h^{(n)}(x, y) - \frac{4}{h^2} u_h^{(n)}(x, y)) \\ &= f_h(x, y), \quad (x, y) \in D_h. \end{aligned}$$

容易推出 Jacobi- $\omega$  迭代算子是

$$S_h = S_h(\omega) = I_h - \frac{\omega h^2}{4} L_h,$$

$S_h$  的特征值和特征函数分别是

$$\begin{aligned} \text{特征值} \quad \xi_{n_1, n_2} &= \xi_{n_1, n_2}(\omega) \\ &= 1 - \frac{\omega h^2}{8} (2 - \cos n_1 \pi h - \cos n_2 \pi h), \end{aligned} \quad (10.14 a)$$

$$\begin{aligned} \text{特征函数} \quad \varphi_{n_1, n_2}(x, y) &= 2 \sin(n_1 \pi x) \sin(n_2 \pi y), \\ (x, y) \in D_h, \max(n_1, n_2) &\leq N-1. \end{aligned} \quad (10.14 b)$$

把松弛前的误差

$$V_h = u_h - u_h^{(n)}$$

和松弛后的误差

$$\bar{V}_h = u_h - \bar{u}_h^{(n)}$$

展成离散的  $S_h$  特征函数  $\varphi_{n_1, n_2}$  的级数

$$V_h = \sum_{\max(n_1, n_2) \leq N-1} \alpha_{n_1, n_2} \varphi_{n_1, n_2}, \quad (10.15 a)$$

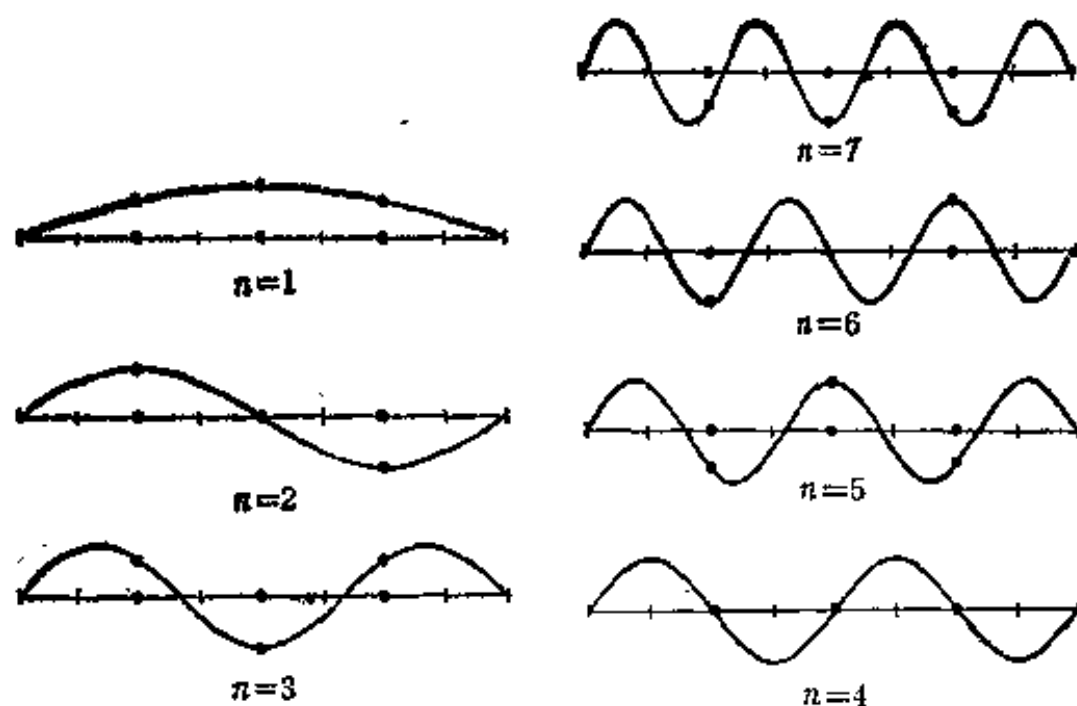
$$\bar{V}_h = \sum_{\max(n_1, n_2) \leq N-1} \xi_{n_1, n_2} \alpha_{n_1, n_2} \varphi_{n_1, n_2}. \quad (10.15 b)$$

把级数 (10.15) 中各项分成高频和低频二部分。所谓低频即在粗网上能表现出来的那部分特征函数，而高频是在  $D_h$  上根本看不见的那部分特征函数，具体定义如下：

$$\text{低频: } \varphi_{n_1, n_2}, \quad \max(n_1, n_2) < \frac{N}{2},$$

高频:  $\varphi_{n_1, n_2}, \quad \frac{N}{2} \leq \max(n_1, n_2) \leq N-1.$

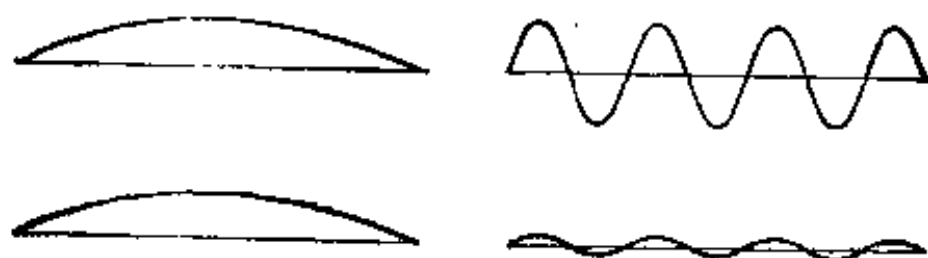
图 5.22 显示高频分量和低频分量, 图 5.23 显示高频分量和低频分量在松弛前后其振幅的变化.



在  $D_h$  上的可见分量

在  $D_h$  上的不可见分量

图 5.22 对  $\frac{1}{8}, fI = \frac{1}{4}, \sin(m\pi x)$  的低频分量 ( $m=1, 2, 3$ ) 和高频分量 ( $m=4, 5, 6, 7$ )



低频: 振幅稍减

高频: 振幅显著减小

图 5.23 松弛方法典型的光滑误差特性

由此可见, 在网格上作松弛能使误差的高频分量迅速衰减, 而低频分量则减少得相当缓慢, 因而误差的光滑效应好, 但收敛很慢. 最光滑的特征函数  $\varphi_{11}$  是造成 Jacobi 方法收敛慢的主要原因, 因为

它所对应的特征值  $\xi_{11}$  是最大特征值, 这由(10.14 a)式可以看出. 在粗网上由于未知量少, 因而计算工作量比起细网来就小得多, 当然精确度会降低一些, 但在粗网上高频分量显示不出来, 低频分量却很容易近似, 促使收敛加快. 通过限制和插值把细网松弛和粗网修正结合起来组成双网格方法. 双网格方法把在细网上松弛使误差光滑化的优点与在粗网上低频分量容易收敛的优点相结合. 虽然它在实际中用得不多, 但它是 MG 方法的理论基础, 通过它阐明 MG 方法的基本原理.

### 10.3 线性多重网格方法

MG 方法是在越来越粗的网格上递归地使用双网格方法, 仅在最粗的网格上精确地求解差分方程. 现定义 MG 方法所用的符号和算子.

网格步长序列  $h_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, M$ ),

$$\text{通常 } h_k = \frac{h_{k-1}}{2} = 2^{-k} h,$$

网格序列  $D_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, M$ );

差分算子序列  $L_k$  ( $k=0, 1, 2, \dots, M$ ) 设  $L_k^{-1}$  存在;

松弛算子序列  $\text{Relax}(u_k, L_k, f_k)$ ;

限制算子序列  $I_k^{*-1}$  ( $k=1, 2, \dots, M$ );  $G(D_k) \rightarrow G(D_{k-1})$ ;

插值算子序列  $I_{k-1}^*$  ( $k=1, 2, \dots, M$ );  $G(D_{k-1}) \rightarrow G(D_k)$ ;

其中  $G(D_k)$  为网格函数空间.

下面叙述多重网格方法迭代求解方程组

$$L_M u_M = f_M$$

的计算过程. 已知  $u_M^{(n)}$  求  $u_M^{(n+1)}$  的一个循环, 和双网格方法一样, 有三个阶段.

1. 光滑部分 I (由于迭代能起光滑误差的作用). 给定初值  $u_M^{(n)}$ , 在  $D_M$  上作  $\nu_1$  次光滑得

$$\bar{u}_M^{(n)} := \text{Relax}^{\nu_1}(u_M^{(n)}, L_M, f_M).$$

## 2. 粗网修正.

### (1) 计算亏损量

$$\mathbf{d}_M^{(n)} = \mathbf{f}_M - L_M \mathbf{u}_M^{(n)}.$$

### (2) 限制亏损量

$$\mathbf{d}_{M-1}^{(n)} := I_M^{M-1} \mathbf{d}_M^{(n)}.$$

### (3) 在 $D_{M-1}$ 上近似计算亏损方程

$$L_{M-1} \mathbf{V}_{M-1}^{(n)} = \mathbf{d}_{M-1}^{(n)}. \quad (10.16)$$

求修正量  $\mathbf{V}_{M-1}^{(n)}$  的近似值  $\hat{\mathbf{V}}_{M-1}^{(n)}$ . 以零网格函数值作为初始近似值, 对(10.16)作  $M$ -网格法  $r(\geq 1)$  型迭代 (见图 5.24).  $M$ -网格法是用网格  $D_{M-1}, D_{M-2}, \dots, D_0$  以及相应的网格算子  $L_{M-1}, L_{M-2}, \dots, L_0$ , 在最粗的网格  $D_0$  上精确求解

$$L_0 \mathbf{V}_0 = \mathbf{d}_0.$$

$M=1$  双网格法



$M_2=2$  三网格法

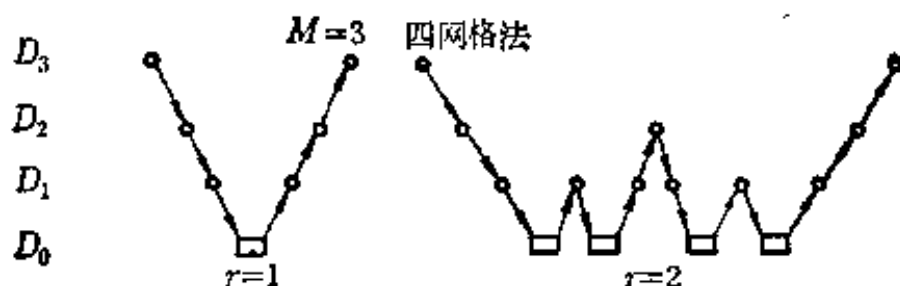


图 5.24 不同  $M$  值和不同  $r$  值的 MG 循环  
 $r=1$  为  $V$  循环,  $r=2$  为  $w$  循环

### (4) 插值

$$\mathbf{V}_M^{(n)} := I_{M-1}^M \hat{\mathbf{V}}_{M-1}^{(n)}.$$

(5) 修正  $D_M$  上的值

$$\hat{u}_M^{(n)} = \bar{u}^{(n)} V_M^{(n)}.$$

3. 光滑部分 II.

在  $D_M$  上作  $\nu_2 (\geq 0)$  次光滑得

$$u_M^{(n+1)} := \text{Relax}^{\nu_2}(\hat{u}_M^{(n)}, L_M, f_M).$$

粗网修正中的  $r$  是循环参数, 一般  $r = 1, 2$  或  $3$ , 当  $r > 3$  时, MG 方法就不太有效了.

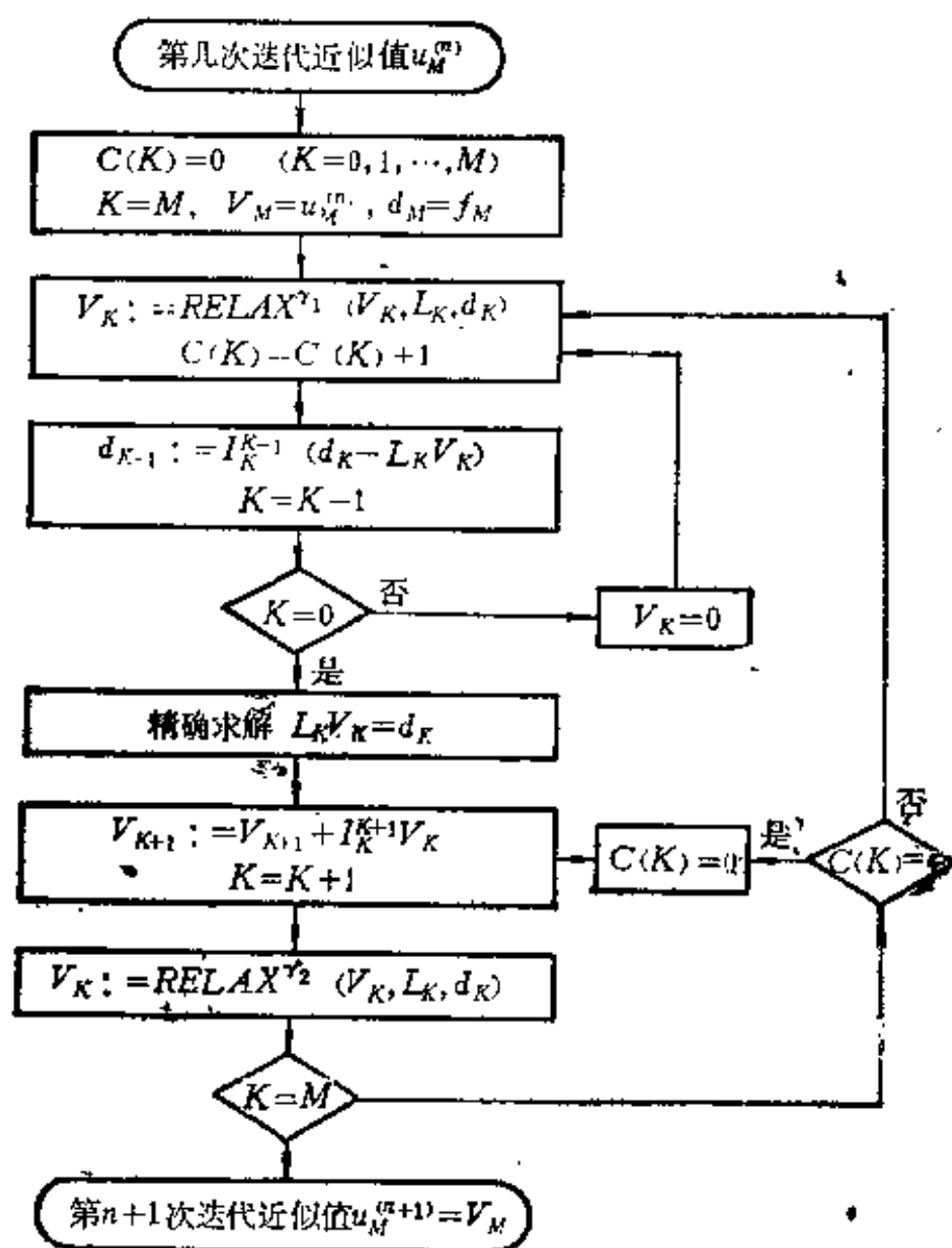


图 5.25 求解  $L_M u_M = f_M$  的一个 MG 迭代步的框图

用图 5.19 中的符号分别表示  $M = 1, 2, 3$  时,  $r = 1, 2, 3$  的 MG 方法的一个循环, 见图 5.24.

图 5.25 用框图表示一个多重网格的迭代步, 其中引入一个开关数  $0 \leq C(k) \leq r$ , 用来控制什么时候转粗网以及什么时候返回到细网.

以上是线性 MG 方法的计算步骤.

#### 10.4 完整的多重网格方法

完整的多重网格方法 (Full Multigrid Technique) 简称为 FMG 方法. MG 方法是求解离散椭圆型边值问题的一种快速迭

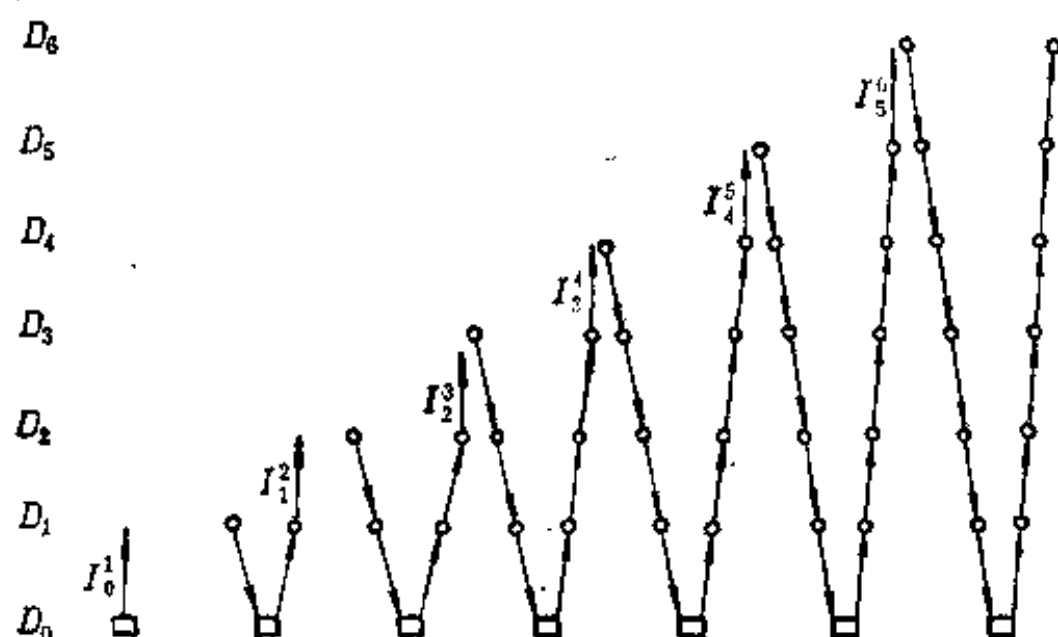


图 5.26  $V$  循环 MG 方法与套迭代相结合的 FMG 方法

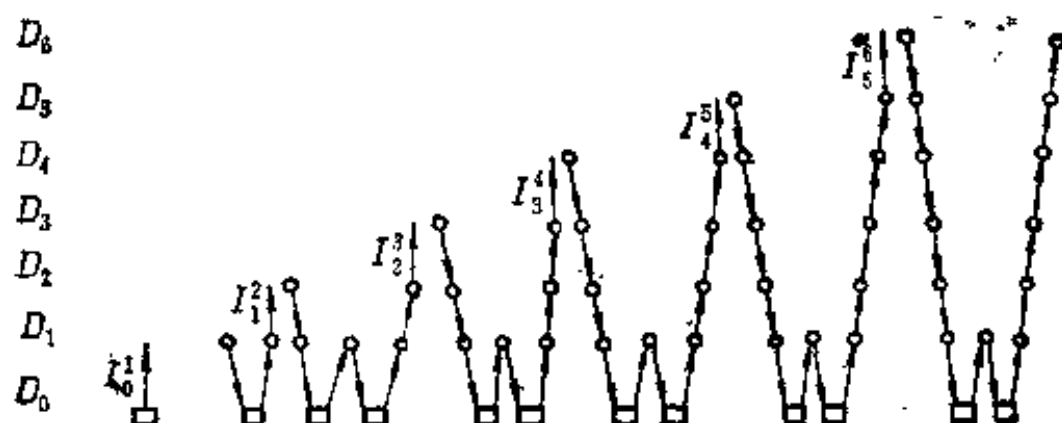


图 5.27  $W$  循环 MG 方法与套迭代相结合的 FMG 方法

代法,如果将 MG 方法与完整网格技巧或者说与套迭代相结合的话,则效果更加明显.所谓套迭代就是粗网为细网提供良好的近似.这是古典的方法例如 SOR 法不可能做到的.

FMG 方法的计算步骤见图 5.26,图 5.27,图 5.28

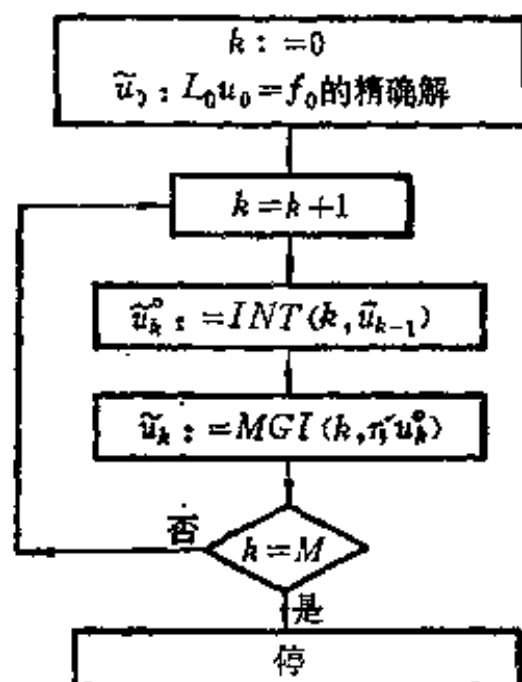


图 5.28 近似求解  $L_M u_M = f_M$  FMG 方法框图

在图 5.28 中,INT 表示插值,MGI表示在  $D_k(k=1,2,\dots)$  上用多重网格  $r$  型迭代求解方程  $L_k u_k = f_k(k=1,2,\dots)$ ,  $r=1$  为  $V$  循环,  $r=2$  为  $W$  循环. 当  $M=6$ ,  $r=1$  时,为图 5.26 所示的 FMG 过程;当  $M=6$ ,  $r=2$  时,为图 5.27 所示的 FMG 过程.

## 10.5 数值结果

为说明 MG 方法的计算效率,以 poisson 方程为例

$$\begin{cases} -\Delta u = 2, & 0 < x < 1, 0 < y < 1, \\ u(0, y) = y(1-y), \\ u(1, y) = y(1-y), \\ u(x, 0) = x(1-x), \\ u(x, 1) = x(1-x). \end{cases}$$



用  $h = \frac{1}{256}$  的正方形网格, 列举三种迭代方法在 IBM/370-158 计算机上进行计算. 计算结果见下表

| 方 法 | 运算次数            | 计算时间          | $\tilde{\delta}_h$   |
|-----|-----------------|---------------|----------------------|
| SOR | $\sim N^{1.5}$  | $\sim 1200$ 秒 | —                    |
| ADI | $\sim N \log N$ | 127 秒         | $0.5 \times 10^{-3}$ |
| FMG | $\sim N$        | 7.7 秒         | $0.2 \times 10^{-4}$ |

其中  $N$  为方程组的阶数  $\tilde{\delta}_h = \|u_h - \tilde{u}_h\|_{\infty} \|u\|_{\infty}$

## 习 题

1. 用五点差分格式求解微分方程的边值问题.

$$\begin{cases} \Delta u = 16, & -1 < x, y < 1, \\ u = 0, & |x| = 1 \text{ 或 } |y| = 1 \end{cases}$$

(i) 用正方形网格 ( $h = \frac{1}{2}$ ) 列出相应的差分方程.

(ii) 对  $h = 1, h = \frac{1}{2}$  分别求解.

2. 在正方形区域  $\{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\}$  内试用五点差分格式数值求解 Poisson 方程边值问题.

$$\begin{cases} \Delta u = -1, \\ u|_{x=0} = u|_{x=1} = 1 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial x} + u\right)|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=1} = 1. \end{cases}$$

取  $h = k = \frac{1}{2}$ .

3. 求出解 Poisson 方程  $-\Delta u = f(x, y)$  的差分格式

$$-(u_{i+1, j+1} + u_{i+1, j-1} + u_{i-1, j+1} + u_{i-1, j-1} - 4u_{i, j}) = 2h^2 f_{i, j}$$

的截断误差.

4. 推导出 Laplace 方程在网格点  $(ih, jk)$  的五点差分格式

$$\lambda^{-1}(u_{i+1, j} + u_{i-1, j}) + \lambda(u_{i, j+1} + u_{i, j-1}) - 2(\lambda + \lambda^{-1})u_{i, j} = 0,$$

其中  $\lambda = h/k$ . 求出该差分格式的截断误差.

5. 对于变系数椭圆型方程第一边值问题

$$\begin{cases} -\frac{\partial}{\partial x}\left[(x+y)^2 \frac{\partial u}{\partial x}\right] - \frac{\partial}{\partial y}\left[(x+y)^2 \frac{\partial u}{\partial y}\right] + xy = 1, \\ u(x, 1) = u(x, 0) = 1, \\ u(0, y) = 2, \\ u(1, y) = 0. \end{cases}$$

(i) 用正方形网格  $h=k=\frac{1}{3}$ , 列出相应的差分方程.

(ii) 列出Peaceman-Rachford ADI 迭代公式.

## 习题解答与提示

### 第一章

1. (i)  $O(\tau+h)$ ,  
(ii)  $O(\tau+h^2)$ .
3.  $O(\tau^2+h^2)$ .

### 第二章

1. 稳定.
2. 稳定.
3. 稳定性条件为  $\lambda = \frac{\tau}{h} \geq 1$ .
4. 逼近扩散方程  $\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  的Richardson 格式  $\frac{u_j^{n+1} - u_j^{n-1}}{2\tau} =$   
 $\frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$  逼近对流方程  $\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} = 0$  的格式  $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$   
 $= 0$  及格式  $\frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{\tau} + \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} = 0$ .
5. 采用能量不等式方法, 稳定性条件为  $\lambda \leq \frac{1}{2}$ .

### 第三章

1. 稳定.
2. 用 Taylor 级数展开.
3. 不稳定, 格式(i)满足 C.F.L 条件, (ii)不满足 C.F.L 条件.
4. 相容、稳定.
5. (i) 截断误差为  $O(\tau^2+h^2)$ .  
(ii) 对于  $\beta^2 \geq \alpha^2$  无条件稳定.
6. 对于  $0 < \lambda \leq 2$  稳定, 对于  $\lambda > 2$  不稳定.
7. (i) 把 Lax-wendroff 格式写成

$$u_j^{n+1} = \frac{\alpha^2 \lambda^2 + \alpha \lambda}{2} u_{j-1}^n + (1 - \alpha^2 \lambda^2) u_j^n + \frac{\alpha^2 \lambda^2 - \alpha \lambda}{2} u_{j+1}^n$$

两边平方,然后在等式右边加长一个非负的量( $|a|\lambda \leq 1$ )

$$\frac{\alpha^2 \lambda^2 (1 - \alpha^2 \lambda^2)}{4} (u_{j-1}^n - 2u_j^n + u_{j+1}^n).$$

8. 稳定性条件  $\max_x a(x) \lambda \leq 1$ .

9. (i) 取  $\lambda$  使  $\lambda^2 |\mu_l|^2 < \lambda |\mu_l| \leq 2$   $\sigma \lambda < 1$  ( $l=1, \dots, p$ ,  $\mu_l$  为  $A$  的特征值), 则稳定.

(ii)  $\lambda \rho(A) \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$  时稳定.

10.  $\alpha \lambda < 2$  时稳定.

11.  $u_j^n \frac{u_j^{n+1} - 2u_j^n + u_j^{n-1}}{\tau^2} = \frac{u_{j+1}^n - 2u_j^n + u_{j-1}^n}{h^2}$ , 稳定性条件为

$$(\max_j u_j^n) \frac{\tau}{h} < 1.$$

12.  $x_i: -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, \frac{5}{2}, 3, \frac{7}{2}, 4, \frac{9}{2}, 5.$

$$u_i^2: \frac{1}{256}, -\frac{5}{128}, \frac{9}{256}, \frac{1}{4}, \frac{63}{128}, \frac{53}{64}, \frac{119}{128}, \frac{3}{4}, \frac{129}{256},$$

$$\frac{27}{128}, \frac{9}{256}, 0.$$

$$u(x_i, t_2): 0, 0, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, 1, \frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 0, 0.$$

#### 第四章

1. 不稳定.

2. 截断误差为  $O(\tau^3 + h^3)$ , 无条件稳定. 取  $\theta = \frac{1}{2} - \frac{h^2}{12\tau}$  时截断误差为  $O(\tau^3 + h^4)$ .

3. (i) 截断误差  $O(\tau^3 + h^4)$ , 无条件稳定. (ii)  $O(\tau^3 + h^2)$ , 无条件稳定.

4. 稳定性条件为  $\lambda \leq \frac{1-\theta}{2(1+\theta)}$ ,  $\lambda = \frac{\tau}{h^2}$ .

5. 可取 Crank-Nicolson 型格式.

6. 关于时间积分采用梯形公式.

7. 作为一般非线性扩散方程考虑.

8.  $\tau \ll h$ .

9. 采用常系数问题办法.

10. 无条件稳定.

12. 截断误差  $O(\tau^2 + h^2)$ , 无条件稳定.

13. (i)  $u_1^2 = 0.4871$ ,  $u_2^2 = 0.4871$ .

(ii)  $u_1^2 = 0.5541$ ,  $u_2^2 = 0.5541$ .

(iii)  $u_1^2 = 0.5239$ ,  $u_2^2 = 0.5239$ .

(iv)  $u_1^2 = 0.5052$ ,  $u_2^2 = 0.5052$ .

解析解  $u(x_1, t_2) = 0.5005$ ,  $u(x_2, t_2) = 0.5005$ .

## 第五章

1. (i)  $u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 4u_{i,j} = 16h^2$ .

(ii) 当  $h=1$ ,  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = 0$ .

当  $h = \frac{1}{2}$ , 中心  $u_5 = -1$ , 其余  $u_1 = u_2 = u_3 = u_4 = u_6 = u_7 = u_8 = u_9 = 0$ .

2. 中心  $u_5 = \frac{3}{8}$ , 中心左边  $u_4 = \frac{1}{2}$ , 此外  $u_1 = u_2 = u_3 = u_6 = u_7 = u_8 = u_9 = 0$ .

3. 截断误差为  $O(h^2)$ .

4. 截断误差  $O(\lambda h^2 + \lambda^{-1} h^2)$ .

## 主 要 参 考 资 料

- [1] 李荣华、冯果忱, 微分方程数值解法, 人民教育出版社, 1980.
- [2] 南京大学计算数学专业, 偏微分方程数值解法, 科学出版社, 1979.
- [3] 秦元勋, 计算物理学, 四川科学技术出版社, 1984.
- [4] 清华大学、北京大学《计算方法》编写组, 计算方法 (下册), 科学出版社, 1980.
- [5] 复旦大学数学系主编, 数学物理方程, 人民教育出版社, 1979.
- [6] 朱家骥, 计算流体力学, 科学出版社, 1985.
- [7] 北京大学数学系计算数学教研室, 初值问题差分方法(讲义), 1983.
- [8] 李德元, 非定常问题的差分方法(讲义), 1980.
- [9] 郭本瑜, 偏微分方程的差分方法(讲义), 第一、二分册, 1982.
- [10] 陆金甫、关治, 偏微分方程的数值解法, 清华大学出版社, 1987.
- [11] 蔡大用, 数值代数, 清华大学出版社, 1987.
- [12] 李德元, 拟线性双曲型方程物理解的计算, 力学进展, 第 15 卷, 409-424(1985).
- [13] 周毓麟、李德元, 非定常流体力学数值方法的若干问题, 数学进展, 第 10 卷, 48-56, 131-143(1981).
- [14] Ames, W. F., Numerical methods for partial differential equations (2nd Ed.), Academic Press, 1977.
- [15] Hachbusch, W. Multi-Grid methods and application, Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [16] Jain, M. K., S. R. K. Iyengar and R. K. Jain, Numerical methods for scientific and engineering computation, John Wiley & Sons, 1985.
- [17] Kreiss, H. O. and J. Oliger, Methods for the approximate solution of time dependent problems, GARP Publ. No. 10, World Meteorol. Organ., Geneva, 1973 (中译本, 依赖时间问题的近似解法, 朱本仁译, 高等教育出版社, 1985).
- [18] Marchuk, G. I. Methods of numerical mathematics (2ed), Springer-Verlag, 1982.
- [19] Meis, T. and U. Marcowitz, Numerical solution of partial differential equations.
- [20] Mitchell, A. R. and D. F. Griffiths, The finite difference methods in partial differential equations, John Wiley & Sons, 1980.

- [21] Noye, J. (ed), Computational techniques for differential equations, North-Holland, 1984.
- [22] Peyret, R. and T. D. Taylor, Computational methods for fluid flow, Springer-Verlag, 1983.
- [23] Richtmyer, R. D. and K. W. Morton, Difference methods for initial-value problems, 2ed., John Wiley & Sons, 1967.
- [24] Roache, P. J., Computational fluid dynamics, Hermosa Publishers, 1972.
- [25] Smith, G. D. Numerical solution of partial differential equations. 2ed. Clarendon Press, 1978.
- [26] Smoller, J., Shock Waves and reaction-diffusion equations, Springer-Verlag, 1982.
- [27] Sod, G. A., Numerical methods in fluid dynamics, Cambridge university press. 1985.
- [28] Stuben, K and U. Trottenberg, Multigrid methods: fundamental algorithms, model problem analysis and application, Multigrid methods proceeding of the conference held at Köln-Porg, november 23-27, 1981, Springer-Verlag Berlin, 1982.
- [29] Рождественский, Б. Л., Яненко, Н.Н. Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике, издание второе, «наука», москва, 1978.
- [30] Самарский, А. А., Теория разностных схем, «Наука», Москва, 1983.
- [31] Самарский, А. А., Агдеев, В. В., Разностные методы для эллиптических уравнений, «Наука», Москва, 1976 (中译本, 椭圆型方程差分方法, 武汉大学计算数学教研室译, 科学出版社, 1984)
- [32] 矢岛信男, 野木达夫, 发展方程の数値解析, 岩波书店, 1977 (中译本, 发展方程数值分析, 王宝兴, 殷广济, 雷光耀译, 人民教育出版社 1983).

[ G e n e r a l   I n f o r m a t i o n ]

书名 = 偏微分方程差分方法

作者 = 陆金甫      顾丽珍   陈景良

页数 = 3 6 0

S S 号 = 1 0 0 7 0 5 4 6

出版日期 = 1 9 8 8 年 0 2 月第 1 版



前言  
目录

|     |                              |
|-----|------------------------------|
| 第一章 | 有限差分方法的基本知识                  |
| 1   | 差分方程                         |
| 2   | 截断误差                         |
| 3   | 收敛性                          |
| 4   | 稳定性                          |
| 5   | 差分格式的构造方法                    |
| 第二章 | 线性差分格式的收敛性和稳定性               |
| 1   | 线性偏微分方程组的初值问题                |
| 2   | 线性差分格式                       |
| 3   | 线性常系数差分格式                    |
| 4   | 能量不等式方法                      |
| 5   | 关于多维问题的附注                    |
| 第三章 | 双曲型方程                        |
| 1   | 一阶线性常系数方程 ( )                |
| 2   | 一阶线性常系数方程 ( )                |
| 3   | 一阶线性常系数方程组                   |
| 4   | 一阶线性变系数方程及方程组                |
| 5   | 二阶双曲型方程                      |
| 6   | 拟线性方程组                       |
| 7   | 特征线方法                        |
| 8   | 守恒律与弱解                       |
| 9   | 守恒型差分格式                      |
| 1 0 | 气体动力学方程组                     |
| 1 1 | 二维空间中的一阶双曲型方程组               |
| 1 2 | 混合初边值问题                      |
| 第四章 | 抛物型方程                        |
| 1   | 常系数扩散方程                      |
| 2   | 扩散方程的初边值问题                   |
| 3   | 变系数扩散方程                      |
| 4   | 具有间断系数的扩散方程                  |
| 5   | R i c h a r d s o n 外推方法     |
| 6   | 对流扩散方程                       |
| 7   | 非线性方程                        |
| 8   | 多维扩散方程                       |
| 第五章 | 椭圆型方程                        |
| 1   | P o i s s o n 方程             |
| 2   | 边界条件处理                       |
| 3   | 极值定理                         |
| 4   | 差分格式的稳定性与收敛性                 |
| 5   | 椭圆型差分方程解法                    |
| 6   | 变系数方程和非线性方程                  |
| 7   | N a v i e r - S t o k e s 方程 |
| 8   | 提高精度的方法                      |
| 9   | 特征值问题                        |

