复变函数与积分变换

（修订版）

主编：马柏林

（复旦大学出版社）

——课后习题答案

习题一

1. 用复数的代数形式 $a+ib$ 表示下列复数

$$e^{-i\pi/4};\quad \frac{3+5i}{7i+1};\quad (2+i)(4+3i);\quad \frac{1}{i}+\frac{3}{1+i}.$$

①解 $\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}=\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}$

②解： $\frac{3+5\mathrm{i}}{7\mathrm{i}+1}=\frac{(3+5\mathrm{i})(1-7\mathrm{i})}{(1+7\mathrm{i})(1-7\mathrm{i})}=-\frac{16}{25}+\frac{13}{25}\mathrm{i}$

③解： $(2+\mathrm{i})(4+3\mathrm{i})=8-3+4\mathrm{i}+6\mathrm{i}=5+10\mathrm{i}$

④解： $\frac{1}{\mathrm{i}}+\frac{3}{1+\mathrm{i}}=-\mathrm{i}+\frac{3(1-\mathrm{i})}{2}=\frac{3}{2}-\frac{5}{2}\mathrm{i}$

2.求下列各复数的实部和虚部($z=x+iy$)

$$\frac{z-a}{z+a}(a\in\mathbb{R});\quad z^3;\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)^3;\left(\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}\right)^3;i^n.$$

①　：∵设 $z=x+iy$

则 $\frac{z-a}{z+a}=\frac{(x+\mathrm{i}y)-a}{(x+\mathrm{i}y)+a}=\frac{(x-a)+\mathrm{i}y}{(x+a)+\mathrm{i}y}=\frac{\left[(x-a)+\mathrm{i}y\right]\left[(x+a)-\mathrm{i}y\right]}{(x+a)^2+y^2}$ ∴ $\mathrm{Re}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)=\frac{x^2-a^2-y^2}{(x+a)^2+y^2}$ ，

$\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{z+a}\right)=\frac{2xy}{(x+a)^2+y^2}$.

②解： 设 $z=x+iy$

∵ $z^3=(x+\mathrm{i}y)^3=(x+\mathrm{i}y)^2(x+\mathrm{i}y)=\left(x^2-y^2+2xy\mathrm{i}\right)(x+\mathrm{i}y)$ ∴ $\mathrm{Re}\left(z^3\right)=x^3-3xy^2$， $\mathrm{Im}\left(z^3\right)=3x^2y-y^3$.

$$=x\left(x^2-y^2\right)-2xy^2+\left[y\left(x^2-y^2\right)+2x^2y\right]\mathrm{i}$$

$$=x^3-3xy^2+\left(3x^2y-y^3\right)\mathrm{i}$$

③解： ∵ $\left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{\left(-1+\mathrm{i}\sqrt{3}\right)^3}{8}=\frac{1}{8}\left\{\left[-1-3\cdot(-1)\cdot\left(\sqrt{3}\right)^2\right]+\left[3\cdot(-1)^2\cdot\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^3\right]\mathrm{i}\right\}$

$=\frac{1}{8}(8+0\mathrm{i})=1$

∴ $\mathrm{Re}\left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)=1$， $\mathrm{Im}\left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)=0$.

④解： ∵ $\left(\frac{-1+\mathrm{i}\sqrt{3}}{2}\right)^3=\frac{(-1)^3-3\cdot(-1)\cdot\left(-\sqrt{3}\right)^2+\left[3\cdot(-1)^2\cdot\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^3\right]\mathrm{i}}{8}$ $=\frac{1}{8}(8+0\mathrm{i})=1$

$\therefore \operatorname{Re}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)=1$， $\operatorname{Im}\left(\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}\right)=0$.

⑤解： $\because i^n=\begin{cases}(-1)^k, & n=2k\\ (-1)^k\cdot i, & n=2k+1\end{cases}$ $k\in\mathbb{Z}$.

$\therefore$ 当 $n=2k$ 时， $\operatorname{Re}(i^n)=(-1)^k$， $\operatorname{Im}(i^n)=0$；

当 $n=2k+1$ 时， $\operatorname{Re}(i^n)=0$， $\operatorname{Im}(i^n)=(-1)^k$.

3.求下列复数的模和共轭复数

$$-2+i;\quad -3;\quad (2+i)(3+2i);\quad \frac{1+i}{2}.$$

①解： $|-2+i|=\sqrt{4+1}=\sqrt{5}$.

$\overline{-2+i}=-2-i$

②解： $|-3|=3$ $\quad \overline{-3}=-3$

③解： $|(2+i)(3+2i)|=|2+i||3+2i|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{13}=\sqrt{65}$.

$\overline{(2+i)(3+2i)}=\overline{(2+i)}\cdot\overline{(3+2i)}=(2-i)\cdot(3-2i)=4-7i$

④解： $\left|\frac{1+i}{2}\right|=\frac{|1+i|}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

$\overline{\left(\frac{1+i}{2}\right)}=\frac{\overline{(1+i)}}{2}=\frac{1-i}{2}$

4、证明：当且仅当 $z=\bar{z}$ 时，z 才是实数.

证明：若 $z=\bar{z}$， 设 $z=x+iy$，

则有 $x+iy=x-iy$，从而有 $(2y)i=0$，即 $y=0$

$\therefore z=x$ 为实数.

若 $z=x$，$x\in\mathbb{R}$，则 $\bar{z}=\bar{x}=x$.

$\therefore z=\bar{z}$.

命题成立.

5、设 $z,w\in\mathbb{C}$，证明： $|z+w|\leqslant|z|+|w|$

证明 $\because |z+w|^2=(z+w)\cdot\overline{(z+w)}=(z+w)(\bar{z}+\bar{w})$

$=z\cdot\bar{z}+z\cdot\bar{w}+w\cdot\bar{z}+w\cdot\bar{w}$

$=|z|^2+z\bar{w}+\overline{(z\cdot\bar{w})}+|w|^2$

$=|z|^2+|w|^2+2\operatorname{Re}(z\cdot\bar{w})$

$$\leqslant |z|^2+|w|^2+2|z|\cdot|\overline{w}|$$
$$=|z|^2+|w|^2+2|z|\cdot|w|$$
$$=(|z|+|w|)^2$$
$$\therefore |z+w|\leqslant|z|+|w|.$$

6、设 $z,w\in\mathbb{C}$，证明下列不等式.

$$|z+w|^2=|z|^2+2\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)+|w|^2$$

$$|z-w|^2=|z|^2-2\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)+|w|^2$$

$$|z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$$

并给出最后一个等式的几何解释.

证明：$|z+w|^2=|z|^2+2\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)+|w|^2$ 在上面第五题的证明已经证明了.

下面证 $|z-w|^2=|z|^2-2\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)+|w|^2$.

$$\because |z-w|^2=(z-w)\cdot\overline{(z-w)}=(z-w)\left(\overline{z}-\overline{w}\right)$$
$$=|z|^2-z\cdot\overline{w}-w\cdot\overline{z}+|w|^2$$
$$=|z|^2-2\operatorname{Re}\left(z\cdot\overline{w}\right)+|w|^2.$$ 从而得证.

$$\therefore |z+w|^2+|z-w|^2=2\left(|z|^2+|w|^2\right)$$

几何意义：平行四边形两对角线平方的和等于各边的平方的和.

7.将下列复数表示为指数形式或三角形式

$$\frac{3+5i}{7i+1};\quad i;\quad -1;\quad -8\pi(1+\sqrt{3}i);\quad \left(\cos\frac{2\pi}{9}+i\sin\frac{2\pi}{9}\right)^3.$$

①解：$\dfrac{3+5\mathrm{i}}{7\mathrm{i}+1}=\dfrac{(3+5\mathrm{i})(1-7\mathrm{i})}{(1+7\mathrm{i})(1-7\mathrm{i})}$

$=\dfrac{38-16\mathrm{i}}{50}=\dfrac{19-8\mathrm{i}}{25}=\dfrac{\sqrt{17}}{5}\cdot\mathrm{e}^{i\cdot\theta}$ 其中 $\theta=\pi-\arctan\dfrac{8}{19}$.

②解：$i=\mathrm{e}^{i\cdot\theta}$ 其中 $\theta=\dfrac{\pi}{2}$.

$$i=\mathrm{e}^{i\frac{\pi}{2}}$$

③解：$-1=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi}=\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$

④解：$\left|-8\pi\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)\right|=16\pi\quad \theta=-\dfrac{2}{3}\pi$.

$$\therefore -8\pi\left(1+\sqrt{3}\mathrm{i}\right)=16\pi\cdot\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}}$$

⑤解：$\left(\cos\dfrac{2\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\dfrac{2\pi}{9}\right)^3$

解：$\because \left|\left(\cos\frac{2\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{9}\right)^3\right|=1$.

$$\therefore \left(\cos\frac{2\pi}{9}+\mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{9}\right)^3=1\cdot \mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2}{9}\pi.3}=\mathrm{e}^{\frac{2\pi}{3}\mathrm{i}}$$

8.计算：(1)i 的三次根；(2)-1 的三次根；(3) $\sqrt{3}+\sqrt{3}i$ 的平方根.

(1)i 的三次根.

解：

$$\sqrt[3]{\mathrm{i}}=\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)^{\frac{1}{3}}=\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{2}}{3}\quad (k=0,1,2)$$

$$\therefore z_1=\cos\frac{\pi}{6}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}.\qquad z_2=\cos\frac{5}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

$$z_3=\cos\frac{9}{6}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{9}{6}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\mathrm{i}$$

(2)-1 的三次根

解：

$$\sqrt[3]{-1}=(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)^{\frac{1}{3}}=\cos\frac{2k\pi+\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi+\pi}{3}\quad (k=0,1,2)$$

$$\therefore z_1=\cos\frac{\pi}{3}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

$$z_2=\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi=-1$$

$$z_3=\cos\frac{5}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}$$

(3) $\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}$ 的平方根.

解：$\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}=\sqrt{6}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)=\sqrt{6}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}$

$$\therefore \sqrt{\sqrt{3}+\sqrt{3}\mathrm{i}}=\left(\sqrt{6}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}\right)^{\frac{1}{2}}=6^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\cos\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{2k\pi+\frac{\pi}{4}}{2}\right)\quad (k=0,1)$$

$$\therefore z_1=6^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{8}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{8}\right)=6^{\frac{1}{4}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\pi}{8}\mathrm{i}}$$

$$z_2=6^{\frac{1}{4}}\cdot\left(\cos\frac{9}{8}\pi+\mathrm{i}\sin\frac{9}{8}\pi\right)=6^{\frac{1}{4}}\cdot\mathrm{e}^{\frac{9}{8}\pi\mathrm{i}}.$$

9.设 $z=\mathrm{e}^{i\frac{2\pi}{n}},n\geq 2$. 证明：$1+z+\cdots+z^{n-1}=0$

证明：$\because z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\cdot\frac{2\pi}{n}}$ $\quad\therefore z^n=1$，即 $z^n-1=0$.

$$\therefore (z-1)(1+z+\cdots+z^{n-1})=0$$

又$\because n\geqslant 2$. $\quad\therefore z\neq 1$

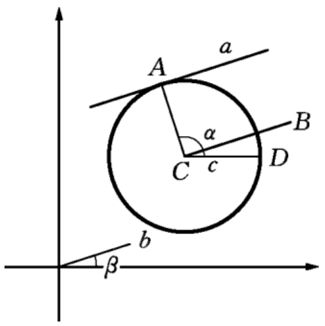
从而 $1+z+z^2+\cdots+z^{n-1}=0$

11.设 Γ 是圆周 $\{z:|z-c|=r\}, r>0, a=c+re^{i\alpha}$. 令

$$L_{\beta}=\left\{z:\mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0\right\},$$

其中 $b=e^{i\beta}$. 求出 L_{β} 在 a 切于圆周 Γ 的关于 β 的充分必要条件.

解：如图所示.



因为 $L_{\beta}=\{z:\ \mathrm{Im}\left(\frac{z-a}{b}\right)=0\}$表示通过点 a 且方向与 b 同向的直线，要使得直线在 a 处与圆相切，则 $CA\perp L_{\beta}$. 过 C 作直线平行 L_{β}，则有$\angle BCD=\beta$，$\angle ACB=90°$

故 $\alpha-\beta=90°$

所以 L_{β} 在 α 处切于圆周 T 的关于 β 的充要条件是 $\alpha-\beta=90°$.

12.指出下列各式中点 z 所确定的平面图形，并作出草图.

(1) $\arg z=\pi$;

(2) $|z-1|=|z|$;

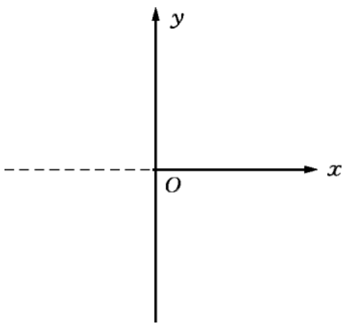
(3) $1<|z+i|<2$;

(4) $\mathrm{Re}\, z>\mathrm{Im}\, z$;

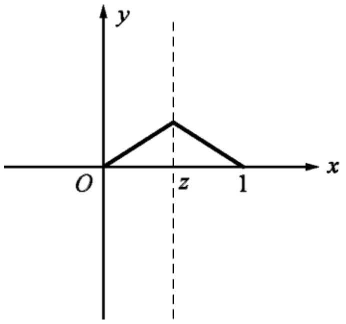
(5) $\mathrm{Im}\, z>1$且$|z|<2$.

解：

(1)、$\arg z=\pi$. 表示负实轴.

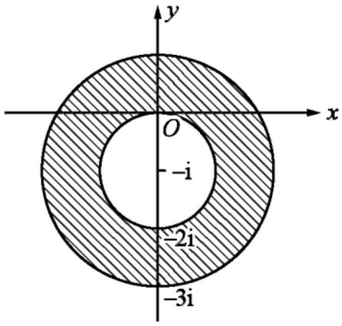


(2)、$|z-1|=|z|$. 表示直线 $z=\frac{1}{2}$.



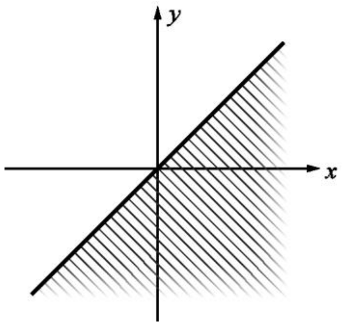
(3)、1<|z+i|<2

解：表示以-i 为圆心，以 1 和 2 为半径的周圆所组成的圆环域。



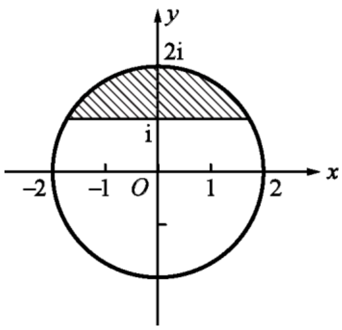
（4）、Re(z)>Imz.

解：表示直线 $y=x$ 的右下半平面



5、Imz>1，且|z|<2.

解：表示圆盘内的一弓形域。



习题二

1. 求映射 $w=z+\dfrac{1}{z}$ 下圆周 $|z|=2$ 的像.

解：设 $z=x+\mathrm{i}y,\quad w=u+\mathrm{i}v$ 则

$$u+\mathrm{i}v=x+\mathrm{i}y+\frac{1}{x+\mathrm{i}y}=x+\mathrm{i}y+\frac{x-\mathrm{i}y}{x^2+y^2}=x+\frac{x}{x^2+y^2}+\mathrm{i}(y-\frac{y}{x^2+y^2})$$

因为 $x^2+y^2=4$,所以 $u+iv=\dfrac{5}{4}x+\dfrac{3}{4}y\mathrm{i}$

所以 $u=\frac{5}{4}x$，$v=+\frac{3}{4}y$

$x=\frac{u}{\frac{5}{4}},y=\frac{v}{\frac{3}{4}}$

所以 $\frac{u}{\left(\frac{5}{4}\right)^2}+\frac{v}{\left(\frac{3}{4}\right)^2}=2$ 即 $\frac{u^2}{\left(\frac{5}{2}\right)^2}+\frac{v^2}{\left(\frac{3}{2}\right)^2}=1$，表示椭圆.

2. 在映射 $w=z^2$ 下，下列 z 平面上的图形映射为 w 平面上的什么图形，设 $w=\rho e^{i\varphi}$ 或 $w=u+iv$.

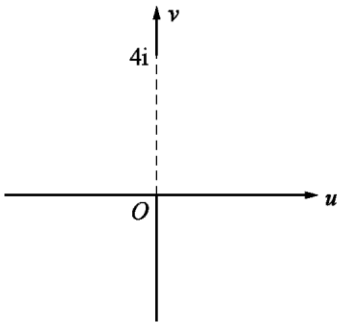
（1）$0<r<2,\theta=\frac{\pi}{4}$；（2）$0<r<2,0<\theta<\frac{\pi}{4}$；

(3) x=a, y=b.(a, b 为实数)

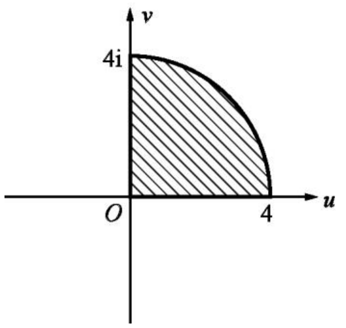
解：设 $w=u+iv=(x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$

所以 $u=x^2-y^2,v=2xy.$

(1) 记 $w=\rho e^{i\varphi}$，则 $0<r<2,\theta=\frac{\pi}{4}$ 映射成 w 平面内虚轴上从 O 到 4i 的一段，即 $0<\rho<4,\varphi=\frac{\pi}{2}.$

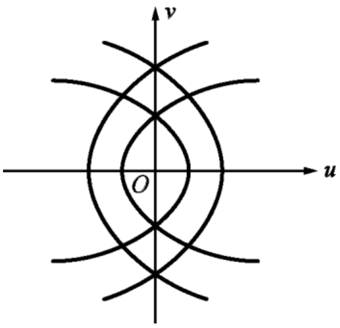


(2) 记 $w=\rho e^{i\varphi}$，则 $0<\theta<\frac{\pi}{4},0<r<2$ 映成了 w 平面上扇形域，即 $0<\rho<4,0<\varphi<\frac{\pi}{2}.$



(3) 记 $w=u+iv$，则将直线 x=a 映成了 $u=a^2-y^2,v=2ay.$ 即 $v^2=4a^2(a^2-u).$ 是以原点为焦点，张口向左的抛物线将 y=b 映成了 $u=x^2-b^2,v=2xb.$

即 $v^2=4b^2(b^2+u)$ 是以原点为焦点，张口向右抛物线如图所示.



3. 求下列极限.

(1) $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{1+z^2}$；

解：令 $z=\dfrac{1}{t}$,则 $z\to\infty, t\to 0$.

于是 $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{1}{1+z^2}=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{t^2}{1+t^2}=0$.

(2) $\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{z}$；

解：设 z=x+yi，则 $\dfrac{\mathrm{Re}(z)}{z}=\dfrac{x}{x+\mathrm{i}y}$ 有

$$\lim_{z\to 0}\frac{\mathrm{Re}(z)}{z}=\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx\to 0}}\frac{x}{x+\mathrm{i}kx}=\frac{1}{1+\mathrm{i}k}$$

显然当取不同的值时 f(z)的极限不同

所以极限不存在.

（3） $\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z-i}{z(1+z^2)}$；

解：$\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z-i}{z(1+z^2)}=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{z-i}{z(i+z)(z-i)}=\lim\limits_{z\to i}\dfrac{1}{z(i+z)}=-\dfrac{1}{2}$.

（4） $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}$.

解：因为 $\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}=\dfrac{(\bar{z}+2)(z-1)}{(z+1)(z-1)}=\dfrac{\bar{z}+2}{z+1}$,

所以 $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z\bar{z}+2z-\bar{z}-2}{z^2-1}=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\bar{z}+2}{z+1}=\dfrac{3}{2}$.

4. 讨论下列函数的连续性：

(1)

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0;\end{cases}$$

解：因为 $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}$,

若令 y=kx,则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy}{x^2+y^2}=\dfrac{k}{1+k^2}$,

因为当 k 取不同值时，f(z)的取值不同，所以 f(z)在 z=0 处极限不存在.

从而 f(z)在 z=0 处不连续，除 z=0 外连续.

(2)

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}, & z\neq 0,\\ 0, & z=0.\end{cases}$$

解：因为 $0\le\left|\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}\right|\le\dfrac{|x^3||y|}{2|x^2||y|}=\dfrac{|x|}{2}$,

所以 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^3y}{x^4+y^2}=0=f(0)$

所以 f(z)在整个 z 平面连续.

5. 下列函数在何处求导？并求其导数.

(1) $f(z)=(z-1)^{n-1}$ (n 为正整数)；

解：因为 n 为正整数，所以 f(z)在整个 z 平面上可导.

$f'(z)=n(z-1)^{n-1}$.

(2) $f(z)=\dfrac{z+2}{(z+1)(z^2+1)}$.

解：因为 f(z)为有理函数，所以 f(z)在 $(z+1)(z^2+1)=0$ 处不可导.

从而 f(z)除 $z=-1, z=\pm\mathrm{i}$ 外可导.

$$\begin{aligned}f'(z)&=\frac{(z+2)'(z+1)(z^2+1)-(z+1)[(z+1)(z^2+1)]'}{(z+1)^2(z^2+1)^2}\\&=\frac{-2z^3+5z^2+4z+3}{(z+1)^2(z^2+1)^2}\end{aligned}$$

(3) $f(z)=\dfrac{3z+8}{5z-7}$.

解：f(z)除 $z=\dfrac{7}{5}$ 外处处可导，且 $f'(z)=\dfrac{3(5z-7)-(3z+8)5}{(5z-7)^2}=-\dfrac{61}{(5z-7)^2}$.

(4) $f(z)=\frac{x+y}{x^2+y^2}+\mathrm{i}\frac{x-y}{x^2+y^2}$.

解：因为

$f(z)=\frac{x+y+\mathrm{i}(x-y)}{x^2+y^2}=\frac{x-\mathrm{i}y+\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)}{x^2+y^2}=\frac{(x-\mathrm{i}y)(1+\mathrm{i})}{x^2+y^2}=\frac{\bar{z}(1+\mathrm{i})}{|z|^2}=\frac{1+\mathrm{i}}{z}$.所以 f(z)除 z=0 外处处可导，且 $f'(z)=-\frac{(1+\mathrm{i})}{z^2}$.

6. 试判断下列函数的可导性与解析性.

(1) $f(z)=xy^2+\mathrm{i}x^2y$;

解：$u(x,y)=xy^2,v(x,y)=x^2y$ 在全平面上可微.

$$\frac{\partial y}{\partial x}=y^2,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=x^2$$

所以要使得

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

只有当 z=0 时,
从而 f(z)在 z=0 处可导，在全平面上不解析.

(2) $f(z)=x^2+\mathrm{i}y^2$.

解：$u(x,y)=x^2,v(x,y)=y^2$ 在全平面上可微.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2y$$

只有当 z=0 时,即(0,0)处有 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}$.

所以 f(z)在 z=0 处可导，在全平面上不解析.

(3) $f(z)=2x^3+3\mathrm{i}y^3$;

解：$u(x,y)=2x^3,v(x,y)=3y^3$ 在全平面上可微.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6x^2,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=0,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=9y^2,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=0$$

所以只有当 $\sqrt{2}x=\pm\sqrt{3}y$ 时，才满足 C-R 方程.

从而 f(z)在 $\sqrt{2}x\pm\sqrt{3}y=0$ 处可导，在全平面不解析.

(4) $f(z)=\bar{z}\cdot z^2$.

解：设 $z=x+\mathrm{i}y$，则

$$f(z)=(x-\mathrm{i}y)\cdot(x+\mathrm{i}y)^2=x^3+xy^2+\mathrm{i}(y^3+x^2y)$$

$$u(x,y)=x^3+xy^2,v(x,y)=y^3+x^2y$$

$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2+y^2,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2xy,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=2xy,\quad \frac{\partial v}{\partial y}=3y^2+x^2$

所以只有当 z=0 时才满足 C-R 方程.
从而 f(z)在 z=0 处可导，处处不解析.
7. 证明区域 D 内满足下列条件之一的解析函数必为常数.

(1) $f'(z)=0$;

证明：因为 $f'(z)=0$，所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$, $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$.

所以 u,v 为常数，于是 f(z)为常数.

(2) $\overline{f(z)}$ 解析.

证明：设 $\overline{f(z)}=u-\mathrm{i}v$ 在 D 内解析,则

$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial(-v)}{\partial y}\Rightarrow\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial(-v)}{\partial x}=+\frac{\partial v}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}$

而 f(z)为解析函数，所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

所以 $\frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial y}$, 即 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

从而 v 为常数，u 为常数，即 f(z)为常数.
(3) Ref(z)=常数.

证明：因为 Ref(z)为常数，即 u=C1, $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$

因为 f(z)解析，C-R 条件成立。故 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$ 即 u=C2

从而 f(z)为常数.
(4) Imf(z)=常数.

证明：与（3）类似，由 v=C1 得 $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}=0$

因为 f(z)解析，由 C-R 方程得 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$,即 u=C2

所以 f(z)为常数.
5. |f(z)|=常数.
证明：因为|f(z)|=C，对 C 进行讨论.
若 C=0，则 u=0,v=0,f(z)=0 为常数.

若 C$\neq$0，则 f(z) $\neq$0,但 $f(z)\cdot\overline{f(z)}=C^2$，即 u2+v2=C2

则两边对 x,y 分别求偏导数，有

$$2u\cdot\frac{\partial u}{\partial x}+2v\cdot\frac{\partial v}{\partial x}=0,\qquad 2u\cdot\frac{\partial u}{\partial y}+2v\cdot\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

利用 C-R 条件，由于 f(z)在 D 内解析，有

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

所以 $\begin{cases} u\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}+v\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \\ v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}-u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}=0 \end{cases}$ 所以 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=0,\qquad \dfrac{\partial v}{\partial x}=0$

即 u=C1,v=C2,于是 f(z)为常数.

(6) argf(z)=常数.

证明：argf(z)=常数，即 $\arctan\left(\dfrac{v}{u}\right)=C$，

于是 $\dfrac{(v/u)'}{1+(v/u)^2}=\dfrac{u^2\cdot(u\cdot\frac{\partial v}{\partial x}-v\cdot\frac{\partial u}{\partial x})}{u^2(u^2+v^2)}=\dfrac{u^2(u\frac{\partial v}{\partial y}-v\frac{\partial u}{\partial y})}{u^2(u^2+v^2)}=0$

得

$$\begin{cases} u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}-v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \\ u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial y}-v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial y}=0 \end{cases}$$

C-R 条件→

$$\begin{cases} u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}-v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \\ u\cdot\dfrac{\partial v}{\partial x}+v\cdot\dfrac{\partial u}{\partial x}=0 \end{cases}$$

解得 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial x}=\dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{\partial v}{\partial y}=0$，即 u,v 为常数，于是 f(z)为常数.

8. 设 f(z)=my3+nx2y+i(x3+lxy2)在 z 平面上解析，求 m,n,l 的值.

解：因为 f(z)解析，从而满足 C-R 条件.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2nxy,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=3my^2+nx^2$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2+ly^2,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=2lxy$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}\Rightarrow n=l$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}\Rightarrow n=-3,l=-3m$$

所以 $n=-3,l=-3,m=1$.

9. 试证下列函数在 z 平面上解析，并求其导数.

(1) f(z)=x3+3x2yi-3xy2-y3i

证明：u(x,y)=x3-3xy2, v(x,y)=3x2y-y3 在全平面可微,且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2,\qquad \frac{\partial u}{\partial y}=-6xy,\qquad \frac{\partial v}{\partial x}=6xy,\qquad \frac{\partial v}{\partial y}=3x^2-3y^2$$

所以 f(z)在全平面上满足 C-R 方程，处处可导，处处解析.

$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=3x^2-3y^2+6xy\mathrm{i}=3(x^2-y^2+2xy\mathrm{i})=3z^2$.(2) $f(z)=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+\mathrm{i}\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y)$.

证明：

$u(x,y)=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y),\qquad v(x,y)=\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y)$ 处处可微，且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y)+\mathrm{e}^x(\cos y)=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\mathrm{e}^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y)=\mathrm{e}^x(-x\sin y-\sin y-y\cos y)$$ $$\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y)+\mathrm{e}^x(\sin y)=\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y+\sin y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=\mathrm{e}^x(\cos y+y(-\sin y)+x\cos y)=\mathrm{e}^x(\cos y-y\sin y+x\cos y)$$ 所以 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，$\frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

所以 f(z)处处可导，处处解析.

$$\begin{aligned}f'(z)&=\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\frac{\partial v}{\partial x}=\mathrm{e}^x(x\cos y-y\sin y+\cos y)+\mathrm{i}(\mathrm{e}^x(y\cos y+x\sin y+\sin y))\\&=\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y+x(\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y)+\mathrm{i}y(\mathrm{e}^x\cos y+\mathrm{i}\mathrm{e}^x\sin y)\\&=\mathrm{e}^z+x\mathrm{e}^z+\mathrm{i}y\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^z(1+z)\end{aligned}$$

10. 设

$$f(z)=\begin{cases}\dfrac{x^3-y^3+\mathrm{i}\left(x^3+y^3\right)}{x^2+y^2}, & z\neq 0.\\ 0. & z=0.\end{cases}$$

求证：(1) f(z)在 z=0 处连续.

(2)f(z)在 z=0 处满足柯西—黎曼方程.

(3)f′(0)不存在.

证明.(1)∵ $\lim\limits_{z\to 0}f(z)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$

而 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}u(x,y)=\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$

∵ $\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=(x-y)\cdot\left(1+\frac{xy}{x^2+y^2}\right)$

∴ $0\leqslant\left|\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}\right|\leqslant\frac{3}{2}|x-y|$

∴ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}=0$

同理 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}=0$

∴ $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(z)=0=f(0)$

∴f(z)在 z=0 处连续.

(2)考察极限 $\lim\limits_{z\to 0}\frac{f(z)-f(0)}{z}$

当 z 沿虚轴趋向于零时，z=iy，有

$$\lim_{y\to 0}\frac{1}{\mathrm{i}y}\left[f(\mathrm{i}y)-f(0)\right]=\lim_{y\to 0}\frac{1}{\mathrm{i}y}\cdot\frac{-y^3(1-\mathrm{i})}{y^2}=1+\mathrm{i}$$.

当 z 沿实轴趋向于零时，z=x，有

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left[f(x)-f(0)\right]=1+\mathrm{i}$$

它们分别为 $\frac{\partial u}{\partial x}+\mathrm{i}\cdot\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial v}{\partial y}-\mathrm{i}\frac{\partial u}{\partial y}$

∴ $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$

∴满足 C-R 条件.

(3)当 z 沿 y=x 趋向于零时，有

$$\lim_{x=y\to 0}\frac{f(x+\mathrm{i}x)-f(0,0)}{x+\mathrm{i}x}=\lim_{x=y\to 0}\frac{x^3(1+\mathrm{i})-x^3(1-\mathrm{i})}{2x^3(1+\mathrm{i})}=\frac{\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}$$

∴ $\lim_{z\to 0}\frac{\Delta f}{\Delta z}$ 不存在. 即 f(z)在 z=0 处不可导.

11. 设区域 D 位于上半平面，D1 是 D 关于 x 轴的对称区域，若 f(z)在区域 D 内解析，求证 $F(z)=\overline{f(\bar{z})}$ 在区域 D1 内解析.

证明：设 f(z)=u(x,y)+iv(x,y)，因为 f(z)在区域 D 内解析.

所以 u(x,y),v(x,y)在 D 内可微且满足 C-R 方程，即 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$.

$\overline{f(\bar{z})}=u(x,-y)-\mathrm{i}v(x,-y)=\varphi(x,y)+\mathrm{i}\psi(x,y)$，得

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial u(x,-y)}{\partial x}\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{\partial u(x,-y)}{\partial y}=-\frac{\partial u(x,-y)}{\partial y}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{-\partial v(x,-y)}{\partial x}\qquad \frac{\partial\psi}{\partial y}=+\frac{\partial v(x,-y)}{\partial y}=\frac{\partial v(x,-y)}{\partial y}$$

故 φ(x,y),ψ(x,y)在 D1 内可微且满足 C-R 条件 $\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial\psi}{\partial y},\quad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=-\frac{\partial\psi}{\partial x}$

从而 $\overline{f(\bar{z})}$ 在 D1 内解析

13. 计算下列各值

(1) e2+i=e2·ei=e2·(cos1+isin1)

(2) $\mathrm{e}^{\frac{2-\pi i}{3}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{3}\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\cdot\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\mathrm{e}^{\frac{2}{3}}\cdot\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{i}\right)$

(3)

$$\begin{aligned}&\operatorname{Re}\left(e^{\frac{x-iy}{x^2+y^2}}\right)\\&=\operatorname{Re}\left(e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cdot e^{-\frac{y}{x^2+y^2}i}\right)\\&=\operatorname{Re}\left(e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cdot\left[\cos\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)+i\sin\left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\right]\right)\\&=e^{\frac{x}{x^2+y^2}}\cdot\cos\left(\frac{y}{x^2+y^2}\right)\end{aligned}$$

(4)

$$\begin{aligned}&\left|e^{i-2(x+iy)}\right|=\left|e^{i}\right|\cdot\left|e^{-2(x+iy)}\right|\\&=\left|e^{-2x}\cdot e^{-2iy}\right|=e^{-2x}\end{aligned}$$

14. 设 z 沿通过原点的放射线趋于∞点，试讨论 f(z)=z+ez 的极限.

解：令 z=reiθ，

对于∀θ，z→∞时，r→∞.

故 $\lim\limits_{r\to\infty}\left(re^{i\theta}+e^{re^{i\theta}}\right)=\lim\limits_{r\to\infty}\left(re^{i\theta}+e^{r(\cos\theta+i\sin\theta)}\right)=\infty$.

所以 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=\infty$.

15. 计算下列各值.

(1)

$$\ln(-2+3i)=\ln\sqrt{13}+i\arg(-2+3i)=\ln\sqrt{13}+i\left(\pi-\arctan\frac{3}{2}\right)$$

(2) $\ln\left(3-\sqrt{3}i\right)=\ln 2\sqrt{3}+i\arg\left(3-\sqrt{3}i\right)=\ln 2\sqrt{3}+i\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\ln 2\sqrt{3}-\frac{\pi}{6}i$

(3)ln(ei)=ln1+iarg(ei)=ln1+i=i

(4)

$$\ln(ie)=\ln e+i\arg(ie)=1+\frac{\pi}{2}i$$

16. 试讨论函数 f(z)=|z|+lnz 的连续性与可导性.

解：显然 g(z)=|z|在复平面上连续，lnz 除负实轴及原点外处处连续.

设 z=x+iy，$g(z)=|z|=\sqrt{x^2+y^2}=u(x,y)+iv(x,y)$

$u(x,y)=\sqrt{x^2+y^2},v(x,y)=0$ 在复平面内可微.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\quad\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$\frac{\partial v}{\partial x}=0\quad\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

故 g(z)=|z|在复平面上处处不可导.

从而 f(x)=|z|+lnz 在复平面上处处不可导.

f(z)在复平面除原点及负实轴外处处连续.

17. 计算下列各值.

(1)

$$(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\ln(1+\mathrm{i})^{1-\mathrm{i}}}=\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\cdot\ln(1+\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{(1-\mathrm{i})\cdot\left(\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}+2k\pi\mathrm{i}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}}+\frac{\pi}{4}\mathrm{i}-\ln\sqrt{2}\mathrm{i}+\frac{\pi}{4}+2k\pi$$

$$=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\ln\sqrt{2}+\frac{\pi}{4}+2k\pi}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right]$$

$$=\sqrt{2}\cdot\mathrm{e}^{2k\pi+\frac{\pi}{4}}\cdot\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)+\mathrm{i}\sin\left(\frac{\pi}{4}-\ln\sqrt{2}\right)\right]$$

(2)

$$(-3)^{\sqrt{5}}=\mathrm{e}^{\ln(-3)^{\sqrt{5}}}=\mathrm{e}^{\sqrt{5}\cdot\ln(-3)}$$

$$=\mathrm{e}^{\sqrt{5}\cdot(\ln3+\mathrm{i}\cdot\pi+2k\pi\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{\sqrt{5}\ln3+\sqrt{5}\mathrm{i}\cdot\pi+2k\pi\sqrt{5}\mathrm{i}}$$

$$=\mathrm{e}^{\sqrt{5}\cdot\ln3}\left(\cos(2k+1)\pi\sqrt{5}+\mathrm{i}\sin(2k+1)\pi\sqrt{5}\right)$$

$$=3^{\sqrt{5}}\cdot\left(\cos(2k+1)\pi\cdot\sqrt{5}+\mathrm{i}\sin(2k+1)\pi\sqrt{5}\right)$$

(3)

$$1^{-\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\ln1^{-\mathrm{i}}}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\ln1}=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot(\ln1+\mathrm{i}\cdot0+2k\pi\mathrm{i})}$$

$$=\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\cdot(2k\pi\mathrm{i})}=\mathrm{e}^{2k\pi}$$

(4)

$$\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{1+\mathrm{i}}=\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)^{1+\mathrm{i}}}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\ln\left(\frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\cdot\left(\ln1+\mathrm{i}\left(-\frac{\pi}{4}\right)+2k\pi\mathrm{i}\right)}=\mathrm{e}^{(1+\mathrm{i})\left(2k\pi\mathrm{i}-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}-2k\pi+\frac{\pi}{4}}=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}-2k\pi}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(2k\pi-\frac{\pi}{4}\right)}$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}-2k\pi}\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)$$

$$=\mathrm{e}^{\frac{\pi}{4}-2k\pi}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\mathrm{i}\right)$$

18. 计算下列各值

(1)

$$\cos(\pi+5\mathrm{i})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\pi+5\mathrm{i})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(\pi+5\mathrm{i})}}{2}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\pi-5}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\pi+5}}{2}$$

$$=\frac{-\mathrm{e}^{-5}+\mathrm{e}^{5}(-1)}{2}=\frac{-\mathrm{e}^{-5}-\mathrm{e}^{5}}{2}=-\frac{\mathrm{e}^{5}+\mathrm{e}^{-5}}{2}=-\mathrm{ch}\,5$$

(2)

$$\sin(1-5\mathrm{i})=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(1-5\mathrm{i})}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(1-5\mathrm{i})}}{2\mathrm{i}}=\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}+5}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}-5}}{2\mathrm{i}}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{5}(\cos1+\mathrm{i}\sin1)-\mathrm{e}^{-5}\cdot(\cos1-\mathrm{i}\sin1)}{2\mathrm{i}}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{5}+\mathrm{e}^{-5}}{2}\cdot\sin1-\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{5}+\mathrm{e}^{-5}}{2}\cos1$$

(3)

$$\tan(3-\mathrm{i})=\frac{\sin(3-\mathrm{i})}{\cos(3-\mathrm{i})}=\frac{\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3-\mathrm{i})}-\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(3-\mathrm{i})}}{2\mathrm{i}}}{\dfrac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(3-\mathrm{i})}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}(3-\mathrm{i})}}{2\mathrm{i}}}=\frac{\sin6-\mathrm{i}\sin2}{2\left(\mathrm{ch}^{2}1-\sin^{2}3\right)}$$

(4)

$$\begin{aligned}|\sin z|^2&=\left|\frac{1}{2i}\cdot\left(e^{-y+xi}-e^{y-xi}\right)\right|^2=|\sin x\cdot\text{ch}\,y+i\cos x\cdot\text{sh}\,y|^2\\&=\sin^2 x\cdot\text{ch}^2 y+\cos^2 x\cdot\text{sh}^2 y\\&=\sin^2 x\cdot\left(\text{ch}^2 y-\text{sh}^2 y\right)+\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\cdot\text{sh}^2 y\\&=\sin^2 x+\text{sh}^2 y\end{aligned}$$

(5)

$$\begin{aligned}\arcsin i&=-i\ln\left(i+\sqrt{1-i^2}\right)=-i\ln\left(1\pm\sqrt{2}\right)\\&=\begin{cases}-i\left[\ln\left(\sqrt{2}+1\right)+i2k\pi\right]\\-i\left[\ln\left(\sqrt{2}-1\right)+i\left(\pi+2k\pi\right)\right]\end{cases}\quad k=0,\pm1,\cdots\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\arctan(1+2i)&=-\frac{i}{2}\ln\frac{1+i(1+2i)}{1-i(1+2i)}=-\frac{i}{2}\cdot\ln\left(-\frac{2}{5}+\frac{1}{5}i\right)\\&=k\pi+\frac{1}{2}\arctan 2+\frac{i}{4}\cdot\ln 5\end{aligned}$$

(6)

19. 求解下列方程

(1) sinz=2.

解：

$$\begin{aligned}z&=\arcsin 2=\frac{1}{i}\ln\left(2i\pm\sqrt{3}i\right)=-\ln\left[\left(2\pm\sqrt{3}\right)i\right]\\&=-i\left[\ln\left(2\pm\sqrt{3}\right)+\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi i\right]\\&=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi\pm i\ln\left(2+\sqrt{3}\right),\quad k=0,\pm1,\cdots\end{aligned}$$

(2) $e^z-1-\sqrt{3}i=0$

解： $e^z=1+\sqrt{3}i$ 即

$$\begin{aligned}z&=\ln\left(1+\sqrt{3}i\right)=\ln 2+i\frac{\pi}{3}+2k\pi i\\&=\ln 2+\left(2k+\frac{1}{3}\right)\pi i\end{aligned}$$

(3)

$$\ln z=\frac{\pi}{2}i$$

解： $\ln z=\frac{\pi}{2}i$ 即 $z=e^{\frac{\pi}{2}i}=i$

(4) $z-\ln(1+i)=0$

解： $z-\ln(1+i)=\ln\sqrt{2}+i\cdot\frac{\pi}{4}+2k\pi i=\ln\sqrt{2}+\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi i$.

20. 若 z=x+iy，求证

(1) sinz=sinxchy+icosx·shy

证明：

$$\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}=\frac{e^{i(x+iy)}-e^{-(x+yi)\cdot i}}{2i}$$
$$=\frac{1}{2i}.\left(e^{-y+xi}-e^{y-xi}\right)$$
$$=\sin x\cdot \operatorname{ch} y+i\cos x.\operatorname{sh} y$$

(2)cosz=cosx·chy-isinx·shy

证明：

$$\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}=\frac{1}{2}\cdot\left(e^{i(x+yi)}+e^{-i(x+yi)}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{-y+xi}+e^{y-xi}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(e^{-y}\cdot(\cos x+i\sin x)+e^{y}.(\cos x-i\sin x)\right)$$
$$=\frac{e^{y}+e^{-y}}{2}.\cos x-\left[i\sin x.\frac{-e^{-y}+e^{y}}{2}\right]$$
$$=\cos x.\operatorname{ch} y-i\sin x.\operatorname{sh} y$$

(3)|sinz|2=sin2x+sh2y

证明：

$$\sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{-y+xi}-e^{y-xi}\right)=\sin x\cdot\operatorname{ch} y+i\cos x\cdot\operatorname{sh} y$$

$$|\sin z|^2=\sin^2 x\operatorname{ch}^2 y+\cos^2 x.\operatorname{sh}^2 y$$
$$=\sin^2 x\left(\operatorname{ch}^2 y-\operatorname{sh}^2 y\right)+\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right)\operatorname{sh}^2 y$$
$$=\sin^2 x+\operatorname{sh}^2 y$$

(4)|cosz|2=cos2x+sh2y

证明：$\cos z=\cos x\operatorname{ch} y-i\sin x\operatorname{sh} y$

$$|\cos z|^2=\cos^2 x.\operatorname{ch}^2 y+\sin^2 x.\operatorname{sh}^2 y$$
$$=\cos^2 x\left(\operatorname{ch}^2 y-\operatorname{sh}^2 y\right)+\left(\cos^2 x+\sin^2 x\right).\operatorname{sh}^2 y$$
$$=\cos^2 x+\operatorname{sh}^2 y$$

21. 证明当 y→∞时，|sin(x+iy)|和|cos(x+iy)|都趋于无穷大.

证明：

$$\sin z=\frac{1}{2i}\left(e^{iz}-e^{-iz}\right)=\frac{1}{2i}\cdot\left(e^{-y+xi}-e^{y-xi}\right)$$

$$|\sin z|=\frac{1}{2}\cdot\left|e^{-y+xi}-e^{y-xi}\right|$$

∴ $\left|e^{-y+xi}\right|=e^{-y}\quad\left|e^{y-xi}\right|=e^{y}$

而 $|\sin z|\geqslant\frac{1}{2}\left(\left|e^{-y+xi}\right|-\left|e^{y-xi}\right|\right)=\frac{1}{2}\left(e^{-y}-e^{y}\right)$

当 y→+∞时，e-y→0，ey→+∞有|sinz|→∞.

当 y→-∞时，e-y→+∞，ey→0 有|sinz|→∞.

同理得 $|\cos(x+iy)|=\frac{1}{2}\left|e^{-y+xi}+e^{y-xi}\right|\geqslant\frac{1}{2}\left(e^{-y}-e^{y}\right)$

所以当 y→∞时有|cosz|→∞.

习题三

1. 计算积分 $\int_C (x-y+ix^2)\mathrm{dz}$,其中 C 为从原点到点 1+i 的直线段.

解 设直线段的方程为 $y=x$,则 $z=x+ix$. $0\le x\le 1$

故
$$\int_C\left(x-y+ix^2\right)dz=\int_0^1\left(x-y+ix^2\right)d\left(x+ix\right)$$
$$=\int_0^1 ix^2(1+i)dx=i(1+i)\cdot\frac{1}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{i}{3}(1+i)=\frac{i-1}{3}$$

2. 计算积分 $\int_C (1-\overline{z})\mathrm{dz}$ ，其中积分路径 C 为

(1) 从点 0 到点 1+i 的直线段;

(2) 沿抛物线 y=x2，从点 0 到点 1+i 的弧段.

解 (1)设 $z=x+ix$. $0\le x\le 1$

$$\int_C\left(1-\overline{z}\right)dz=\int_0^1\left(1-x+ix\right)d\left(x+ix\right)$$

(2)设 $z=x+ix^2$. $0\le x\le 1$

$$\int_C\left(1-\overline{z}\right)dz=\int_0^1\left(1-x+ix^2\right)d\left(x+ix^2\right)=\frac{2i}{3}$$

3. 计算积分 $\int_C |z|\mathrm{dz}$ ，其中积分路径 C 为

(1) 从点-i 到点 i 的直线段;

(2) 沿单位圆周|z|=1 的左半圆周，从点-i 到点 i;

(3) 沿单位圆周|z|=1 的右半圆周，从点-i 到点 i.

解 (1)设 $z=iy$. $-1\le y\le 1$

$$\int_C|z|dz=\int_{-1}^1 ydiy=i\int_{-1}^1 ydy=i$$

(2)设 $z=e^{i\theta}$. θ 从 $\frac{3\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$

$$\int_C|z|dz=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1de^{i\theta}=i\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}de^{i\theta}=2i$$

(3) 设 $z=e^{i\theta}$. θ 从 $\frac{3\pi}{2}$ 到 $\frac{\pi}{2}$

$$\int_C|z|dz=\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}1de^{i\theta}=2i$$

6. 计算积分 $\oint_C \left(|z|-e^z\cdot\sin z\right)dz$,其中 C 为 $|z|=a>0$.

解 $\oint_C \left(|z|-e^z\cdot\sin z\right)dz=\oint_C |z|dz-\oint_C e^z\cdot\sin zdz$

$\because e^z\cdot\sin z$ 在 $|z|=a$ 所围的区域内解析

$\therefore \oint_C e^z\cdot\sin zdz=0$

从而

$$\oint_C \left(|z|-e^z\cdot\sin z\right)dz=\oint_C |z|dz=\int_0^{2\pi} adae^{i\theta}$$

$$=a^2 i\int_0^{2\pi} e^{i\theta}d\theta=0$$

故 $\oint_C \left(|z|-e^z\cdot\sin z\right)dz=0$

7. 计算积分 $\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}dz$,其中积分路径 C 为

（1） $C_1:|z|=\frac{1}{2}$ （2） $C_2:|z|=\frac{3}{2}$ （3） $C_3:|z+i|=\frac{1}{2}$

（4） $C_4:|z-i|=\frac{3}{2}$

解:（1）在 $|z|=\frac{1}{2}$ 所围的区域内, $\frac{1}{z(z^2+1)}$ 只有一个奇点 $z=0$.

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}dz=\oint_{C_1}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\right)dz=2\pi i-0-0=2\pi i$$

（2）在 C_2 所围的区域内包含三个奇点 $z=0,z=\pm i$.故

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}dz=\oint_{C_2}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\right)dz=2\pi i-\pi i-\pi i=0$$

（3）在 C_2 所围的区域内包含一个奇点 $z=-i$,故

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}dz=\oint_{C_3}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\right)dz=0-0-\pi i=-\pi i$$

（4）在 C_4 所围的区域内包含两个奇点 $z=0,z=i$,故

$$\oint_C \frac{1}{z(z^2+1)}dz=\oint_{C_4}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z-i}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{z+i}\right)dz=2\pi i-\pi i=\pi i$$

10.利用牛顿-莱布尼兹公式计算下列积分.

(1) $\int_0^{\pi+2i}\cos\frac{z}{2}dz$ (2) $\int_{-\pi i}^0 e^{-z}dz$ (3) $\int_1^i (2+iz)^2 dz$

(4) $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz$ (5) $\int_0^1 z\cdot\sin zdz$ (6) $\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz$

解 (1)

$$\int_0^{\pi+2i}\cos\frac{z}{2}dz=\frac{1}{2}\sin\frac{z}{2}\Big|_0^{\pi+2i}=2ch1$$

(2)

$$\int_{-\pi i}^0 e^{-z}dz=-e^{-z}\Big|_{-\pi i}^0=-2$$

(3) $\int_1^i (2+iz)^2 dz=\frac{1}{i}\int_1^i (2+iz)^2 d(2+iz)=\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{3}(2+iz)^3\Big|_1^i=-\frac{11}{3}+\frac{i}{3}$

(4) $\int_1^i \frac{\ln(z+1)}{z+1}dz = \int_1^i \ln(z+1)d\ln(z+1) = \frac{1}{2}\ln^2(z+1)\Big|_1^i = -\frac{1}{8}(\frac{\pi^2}{4}+3\ln^2 2)$

(5) $\int_0^1 z\cdot\sin zdz = -\int_0^1 zd\cos z = -z\cos z\Big|_0^1 + \int_0^1 \cos zdz = \sin 1 - \cos 1$

(6) $\int_1^i \frac{1+\tan z}{\cos^2 z}dz = \int_1^i \sec^2 zdz + \int_1^i \sec^2 z\tan zdz = tanz\Big|_1^i + \frac{1}{2}\tan^2 z\Big|_1^i$

$= -\left(\tan 1 + \frac{1}{2}\tan^2 1 + \frac{1}{2}\mathrm{t}h^2 1\right) + ith1$

11. 计算积分 $\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz$,其中 C 为

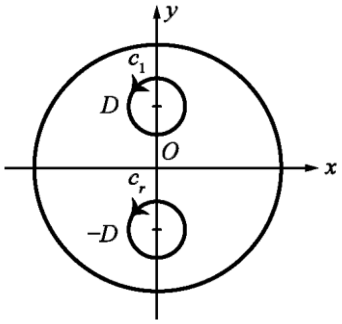
(1) $|z-i| = 1$ (2) $|z+i| = 1$ (3) $|z| = 2$

解 (1)

$$\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz = \oint_C \frac{e^z}{(z+i)(z-i)}dz = 2\pi i\cdot\frac{e^z}{z+i}\Big|_{z=i} = \pi e^i$$

(2) $\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz = \oint_C \frac{e^z}{(z+i)(z-i)}dz = 2\pi i\cdot\frac{e^z}{z-i}\Big|_{z=-i} = -\pi e^{-i}$

(3) $\oint_C \frac{e^z}{z^2+1}dz = \oint_{C_1} \frac{e^z}{z^2+1}dz + \oint_{C_2} \frac{e^z}{z^2+1}dz = \pi e^i - \pi e^{-i} = 2\pi i\sin 1$



16. 求下列积分的值,其中积分路径 C 均为|z|=1.

(1) $\oint_C \frac{e^z}{z^5}dz$ (2) $\oint_C \frac{\cos z}{z^3}dz$ (3) $\oint_C \frac{\tan\frac{z}{2}}{(z-z_0)^2}dz, |z_0| < \frac{1}{2}$

解 (1)

$$\oint_C \frac{e^z}{z^5}dz = \frac{2\pi i}{4!}(e^z)^{(4)}\Big|_{z=0} = \frac{\pi i}{12}$$

(2)

$$\oint_C \frac{\cos z}{z^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}(\cos z)^{(2)}\Big|_{z=0} = -\pi i$$

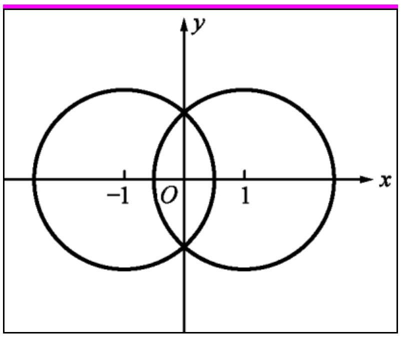
(3)

$$\oint_C \frac{\tan\frac{z}{2}}{(z-z_0)^2}dz = 2\pi i(\tan z)'\Big|_{z=z_0} = \pi i\sec^2\frac{z_0}{2}$$

17. 计算积分 $\oint_C \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3}dz$,其中积分路径 C 为

(1)中心位于点 $z=1$,半径为 $R<2$ 的正向圆周

(2) 中心位于点 $z=-1$,半径为 $R<2$ 的正向圆周



解：(1) C 内包含了奇点 $z=1$

$$\therefore \oint_C \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{1}{(z+1)^3}\right)^{(2)}\Big|_{z=1} = \frac{3\pi i}{8}$$

(2) C 内包含了奇点 $z=-1$,

$$\therefore \oint_C \frac{1}{(z-1)^3(z+1)^3}dz = \frac{2\pi i}{2!}\left(\frac{1}{(z-1)^3}\right)^{(2)}\Big|_{z=-1} = -\frac{3\pi i}{8}$$

19. 验证下列函数为调和函数.

$(1)\omega = x^3-6x^2y-3xy^2+2y^3;$

$(2)\omega = \mathrm{e}^x\cos y+1+i(\mathrm{e}^x\sin y+1).$

解(1) 设 $w=u+i\upsilon$, $u=x^3-6x^2y-3xy^2+2y^3$ $\upsilon=0$

$\therefore$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3x^2-12xy-3y^2 \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-6x^2-6xy+6y^2$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=6x-12y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-6x+12y$$

从而有

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, w 满足拉普拉斯方程,从而是调和函数.

(2) 设 $w=u+i\upsilon$, $u=e^x\cdot\cos y+1$ $\upsilon=e^x\cdot\sin y+1$

$$\therefore \frac{\partial u}{\partial x}=e^x\cdot\cos y \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-e^x\cdot\sin y$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=e^x\cdot\cos y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-e^x\cdot\cos y$$

从而有

$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$, u 满足拉普拉斯方程,从而是调和函数.

$$\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=e^x\cdot\sin y \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial y}=e^x\cdot\cos y$$

$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}=e^x\cdot\sin y \quad \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}=-\sin y\cdot e^x$

$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}=0$, υ 满足拉普拉斯方程,从而是调和函数.

20.证明:函数 $u=x^2-y^2$, $\upsilon=\frac{x}{x^2+y^2}$ 都是调和函数,但 $f(z)=u+i\upsilon$ 不是解析函数

证明:

$\frac{\partial u}{\partial x}=2x \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=2 \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=-2$

$\therefore \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$,从而 u 是调和函数.

$\frac{\partial \upsilon}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \frac{\partial \upsilon}{\partial y}=\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}=\frac{-6xy^2+2x^3}{(x^2+y^2)^3} \quad \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}=\frac{6xy^2-2x^3}{(x^2+y^2)^3}$

$\therefore \frac{\partial^2 \upsilon}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \upsilon}{\partial y^2}=0$,从而 υ 是调和函数.

但 $\because \frac{\partial u}{\partial x}\neq\frac{\partial \upsilon}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}\neq-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$

$\therefore$ 不满足 C-R 方程,从而 $f(z)=u+i\upsilon$ 不是解析函数.

22.由下列各已知调和函数,求解析函数 $f(z)=u+i\upsilon$

(1) $u=x^2-y^2+xy$ (2) $u=\frac{y}{x^2+y^2}, f(1)=0$

解 (1)因为 $\frac{\partial u}{\partial x}=2x+y=\frac{\partial \upsilon}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y}=-2y+x=-\frac{\partial \upsilon}{\partial x}$

所以

$\upsilon=\int_{(0,0)}^{(x,y)}-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy+C=\int_{(0,0)}^{(x,y)}(2y-x)dx+(2x+y)dy+C=\int_0^x -xdx+\int_0^y(2x+y)dy+C$

$=-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+2xy+C$

$f(z)=x^2-y^2+xy+\mathrm{i}(-\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}+2xy+C)$

令 y=0,上式变为

$$f(x)=x^2-\mathrm{i}(\frac{x^2}{2}+C)$$

从而

$$f(z)=z^2-\mathrm{i}\cdot\frac{z^2}{2}+\mathrm{i}\,C$$

(2) $\dfrac{\partial u}{\partial x}=-\dfrac{2xy}{(x^2+y^2)^2}\quad \dfrac{\partial u}{\partial y}=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$

用线积分法，取（x0,y0）为(1,0)，有

$$\upsilon=\int_{(1,0)}^{(x,y)}(-\frac{\partial u}{\partial y}dx+\frac{\partial u}{\partial x}dy)+C=\int_1^x\frac{x^2}{x^4}dx-x\int_0^y\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}dy+C$$

$$=\frac{1}{x}-1+\frac{x}{x^2+y^2}\bigg|_0^y=\frac{x}{x^2+y^2}-1+C$$

$$f(z)=\frac{y}{x^2+y^2}+\mathrm{i}(\frac{x}{x^2+y^2}-1+C)$$

由 $f(1)=0.$，得 C=0

$$\therefore f(z)=i\left(\frac{1}{z}-1\right)$$

23.设 $p(z)=(z-a_1)(z-a_2)\cdots(z-a_n)$,其中 $a_i(i=1,2,\cdots,n)$ 各不相同，闭路 C 不通过 $a_1,a_2,\cdots,a_n$,证明积分

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_C\frac{p'(z)}{p(z)}\mathrm{d}z$$

等于位于 C 内的 p(z)的零点的个数.

证明: 不妨设闭路 C 内 $P(z)$ 的零点的个数为 k, 其零点分别为 $a_1,a_2,\ldots a_k$

$$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{P'(z)}{P(z)}dz=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{\prod_{k=2}^{n}(z-a_k)+(z-a_1)\prod_{k=3}^{n}(z-a_k)+\ldots(z-a_1)\ldots(z-a_{n-1})}{(z-a_1)(z-a_2)\ldots(z-a_n)}dz$$

$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{1}{z-a_1}dz+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{1}{z-a_2}dz+\ldots+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{1}{z-a_n}dz$$

$$=\underbrace{1+1+\ldots+1}_{k个}+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{1}{z-a_{k+1}}dz+\ldots+\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_C\frac{1}{z-a_n}dz$$

$$=k$$

24.试证明下述定理(无界区域的柯西积分公式): 设 f(z)在闭路 C 及其外部区域 D 内解析，且 $\lim\limits_{z\to\infty}f(z)=A\neq\infty$，则

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{f(\xi)}{\xi-z}\mathrm{d}\xi=\begin{cases}-f(z)+A, & z\in D,\\ A, & z\in G.\end{cases}$$

其中 G 为 C 所围内部区域.

证明：在 D 内任取一点 Z，并取充分大的 R，作圆 CR: $|z|=R$，将 C 与 Z 包含在内

则 f(z)在以 C 及 C_R 为边界的区域内解析，依柯西积分公式，有

$$f(z)=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta]$$

因为 $\frac{f(\zeta-z)}{\zeta-z}$ 在 $|\zeta|>R$ 上解析，且

$$\lim_{\zeta\to\infty}\zeta\cdot\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}=\lim_{\zeta\to\infty}f(\zeta)\cdot\frac{1}{1-\frac{z}{\zeta}}=\lim_{\zeta\to\infty}f(\zeta)=1$$

所以，当 Z 在 C 外部时，有

$$f(z)=A-\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta$$

即 $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=-f(z)+A$

设 Z 在 C 内，则 f(z)=0，即

$$0=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}[\oint_{C_R}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta-\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta]$$

故有：$\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{C}\frac{f(\zeta)}{\zeta-z}d\zeta=A$

习题四

1. 复级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\pm b_n)$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 发散. 这个命题是否成立?为什么?

答. 不一定. 反例:

$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\mathrm{i}\frac{1}{n^2},\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}-\frac{1}{n}+\mathrm{i}\frac{1}{n^2}$ 发散

但 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{i}\cdot\frac{2}{n^2}$ 收敛

$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n-b_n)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}$ 发散

$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n=\sum_{n=1}^{\infty}[-(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{n^4})]$ 收敛.

2. 下列复数项级数是否收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\mathrm{i}^{2n+1}}{n}$ (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1+5\mathrm{i}}{2})^n$ (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{i\pi}{n}}}{n}$

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{i}^n}{\ln n}$ (5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\mathrm{i}n}{2^n}$

解 (1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\mathrm{i}^{2n+1}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+(-1)^n\cdot\mathrm{i}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}+\frac{(-1)^n}{n}\cdot\mathrm{i}$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\mathrm{i}^{2n+1}}{n}$ 发散

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1+5\mathrm{i}}{2}\right|^{n}=\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{\sqrt{26}}{2})^{n}$ 发散

又因为 $\lim_{n\to\infty}(\frac{1+5\mathrm{i}}{2})^{n}=\lim_{n\to\infty}(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\mathrm{i})^{n}\neq 0$

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1+5\mathrm{i}}{2})^{n}$ 发散

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{e}^{\frac{\pi\mathrm{i}}{n}}}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 又因为 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{\frac{i\pi}{n}}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n}}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}(\cos\frac{\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{n})$ 收敛, 所以不绝对收敛.

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\mathrm{i}^{n}}{\ln n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$

因为 $\frac{1}{\ln n}>\frac{1}{n-1}$

所以级数不绝对收敛.

又因为当 n=2k 时，级数化为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{\ln 2k}$ 收敛

当 n=2k+1 时，级数化为 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k}}{\ln(2k+1)}$ 也收敛

所以原级数条件收敛

(5) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\cos\mathrm{i}\,n}{2^{n}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{n}}\cdot\frac{\mathrm{e}^{n}+\mathrm{e}^{-n}}{2}=\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\mathrm{e}}{2})^{n}+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2e})^{n}$

其中 $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\mathrm{e}}{2})^{n}$ 发散, $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2e})^{n}$ 收敛

所以原级数发散.

3. 证明:若 $\mathrm{Re}(a_n)\geq 0$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^{2}$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^{2}$ 绝对收敛.

证明:设

$a_n=x_n+\mathrm{i}\,y_n, a_n^2=(x_n+\mathrm{i}\,y_n)^2=x_n^2-y_n^2+2x_ny_n\,\mathrm{i}$

因为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^{2}$ 收敛

所以 $\sum_{n=1}^{\infty}x_n,\sum_{n=1}^{\infty}y_n,\sum_{n=1}^{\infty}(x_n-y_n)^2,\sum_{n=1}^{\infty}x_ny_n$ 收敛

又因为 $\mathrm{Re}(a_n)\geq 0$,

所以 $x_n\geq 0$ 且 $\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}x_n^2=0$

当 n 充分大时， $x_n^2 < x_n$

所以$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^2$收敛

$|a_n|^2 = x_n^2 + y_n^2 = 2x_n^2 - (x_n^2 - y_n^2)$

而$\sum_{n=1}^{\infty} 2x_n^2$ 收敛， $\sum_{n=1}^{\infty}(x_n^2 - y_n^2)$收敛

所以$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ 收敛，从而级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n{}^2$ 绝对收敛.

4. 讨论级数$\sum_{n=0}^{\infty}(z^{n+1} - z^n)$的敛散性

解　因为部分和$s_n = \sum_{k=0}^{n}(z^{k+1} - z^k) = z^{n+1} - 1$，所以，当$|z| < 1$时，$s_n \to -1$

当$z = 1$时，$s_n \to 0$，当$z = -1$时，s_n不存在.

当$z = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$而$\theta \neq 0$时（即$|z| = 1, z \neq 1$），cosn θ 和 sinn θ 都没有极限，所以也不收敛.

当$|z|>1$时，$s_n \to \infty$.

故当$z = 1$和$|z| < 1$时，$\sum_{n=0}^{\infty}(z^{n+1} - z^n)$收敛.

5. 幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-2)^n$ 能否在 z=0 处收敛而在 z=3 处发散.

解：　设$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right| = \rho$，则当$|z-2| < \dfrac{1}{\rho}$时，级数收敛，$|z-2| > \dfrac{1}{\rho}$时发散.

若在 z=0 处收敛，则$\dfrac{1}{\rho} > 2$

若在 z=3 处发散，则$\dfrac{1}{\rho} < 1$

显然矛盾，所以幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} C_n(z-2)^n$ 不能在 z=0 处收敛而在 z=3 处发散

6. 下列说法是否正确?为什么?
(1) 每一个幂级数在它的收敛圆周上处处收敛.
(2) 每一个幂级数的和函数在它的收敛圆内可能有奇点.
答：(1) 不正确，因为幂级数在它的收敛圆周上可能收敛，也可能发散.
(2) 不正确，因为收敛的幂级数的和函数在收敛圆周内是解析的.

7. 若 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 的收敛半径为 R, 求 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_n}{b^n} z^n$ 的收敛半径。

解： 因为 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{b^{n+1}}\Big/\frac{C_n}{b^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|\cdot\left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{R}\frac{1}{|b|}$

所以 $R' = R\cdot|b|$

8. 证明：若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的 系数满足 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \rho$，则

(1) 当 $0<\rho<+\infty$ 时， $R=\frac{1}{\rho}$

(2) 当 $\rho=0$ 时， $R=+\infty$

(3) 当 $\rho=+\infty$ 时， $R=0$

证明：考虑正项级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n z^n| = |a_1 z| + |a_2 z^2| + \ldots + |a_n z^n| + \ldots$$

由于 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n z^n|} = \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}\cdot\sqrt[n]{|z|^n} = \rho\cdot|z|$，若 $0<\rho<+\infty$，由正项级数的根值判别法知，当 $\rho\cdot|z|<1$ 时，即 $|z|<\frac{1}{\rho}$ 时，$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n z^n|$ 收敛。当 $\rho\cdot|z|>1$ 时，即 $|z|>\frac{1}{\rho}$ 时，$|a_n z^n|^2$ 不能趋于零, $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n z^n|}>1$ 级数发散. 故收敛半径 $R=\frac{1}{\rho}$.

当 $\rho=0$ 时， $\rho\cdot|z|<1$, 级数收敛且 $R=+\infty$.

若 $\rho=+\infty$, 对 $\forall z\neq 0$, 当充分大时, 必有 $|a_n z^n|^2$ 不能趋于零, 级数发散. 且 $R=0$

9. 求下列级数的收敛半径，并写出收敛圆周。

(1) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(z-\mathrm{i})^n}{n^p}$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty} n^p\cdot z^n$

(3) $\sum_{n=0}^{\infty}(-\mathrm{i})^{n-1}\cdot\frac{2n-1}{2n}\cdot z^{2n-1}$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{\mathrm{i}}{n})^n\cdot(z-1)^{n(n+1)}$

解：(1)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1}{(n+1)^p}\Big/\frac{1}{n^p}\right| = \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{n+1})^p = \lim_{n\to\infty}(1-\frac{1}{n+1})^p = 1$$

$\therefore R=1$

收敛圆周

$|z-\mathrm{i}|<1$

(2)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(n+1)^p}{n^p}\right|=1$$

$R=1$

所以收敛圆周

$|z|<1$

(3) 记 $f_n(z)=(-\mathrm{i})^{n-1}\cdot\dfrac{2n-1}{2^n}\cdot z^{2n-1}$

由比值法, 有

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{f_{n+1}(z)}{f_n(z)}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n+1)\cdot 2^n\cdot|z|^{2n+1}}{(2n-1)\cdot 2^{2n+1}\cdot|z|^{2n-1}}=\frac{1}{2}|z|^2$$

要级数收敛, 则

$|z|<\sqrt{2}$

级数绝对收敛, 收敛半径为

$R=\sqrt{2}$

所以收敛圆周

$|z|<\sqrt{2}$

(4) 记 $f_n(z)=(\dfrac{\mathrm{i}}{n})^n\cdot(z-1)^{n(n+1)}$

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|f_n(z)|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(z-1)^{n(n+1)}}{n^n}\right|}=\lim_{n\to\infty}\frac{|z-1|^{n+1}}{n}=\begin{cases}0, & \text{若}|Z-1|\le 1\\ \infty, & \text{若}|Z-1|>1\end{cases}$$

所以 $|z-1|\le 1$ 时绝对收敛, 收敛半径 $R=1$

收敛圆周 $|z-1|<1$

10. 求下列级数的和函数.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot nz^n$ (2) $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$

解: (1)

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}=1$$

故收敛半径 R=1, 由逐项积分性质，有：

$$\int_0^z\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n nz^{n-1}dz=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n z^n=\frac{z}{1+z}$$

所以

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot nz^{n-1}=(\frac{z}{1+z})'=\frac{1}{(1+z)^2},|z|<1$$

于是有：

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\cdot nz^n=-z\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot n\,z^{n-1}=-\frac{z}{(1+z)^2}\qquad |z|<1$$

(2) 令：

$$s(z)=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}$$

$$\because\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(2n+1)(2n+2)}=0.$$

故 R=∞，由逐项求导性质

$$s'(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$s''(z)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!}=\sum_{m=0}^{\infty}(-1)^{m+1}\cdot\frac{z^{2m}}{(2m)!}(m=n-1)=-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}$ 由此得到 $s''(z)=-s(z)$

即有微分方程 $s''(z)+s(z)=0$

故有：$s(z)=A\cos z+B\sin z$，　A，B 待定。

$$\text{由S}(0)=A=[\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}]_{z=0}=1\Rightarrow A=1$$

$$s'(0)=-\sin z+B\cos z=[\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}]_{z=0}=0\Rightarrow B=0$$

所以

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{z^{2n}}{(2n)!}=\cos z.\quad R=+\infty$$

11. 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n$ 收敛，而 $\sum_{n=0}^{\infty}|C_n|$ 发散，证明 $\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的收敛半径为 1

证明：因为级数 $\sum_{n=0}^{\infty}C_n$ 收敛

设

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{C_{n+1}Z^{n+1}}{C_nZ^n}\right|=\lambda|z|.$$

若

$\sum_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 的收敛半径为 1

则 $|z|=\dfrac{1}{\lambda}$

现用反证法证明 $\lambda=1$

若 $0<\lambda<1$ 则 $|z|>1$，有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{C_{n+1}}{C_n}\right|=\lambda<1$，即 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|C_n|$ 收敛，与条件矛盾。

若 $\lambda>1$ 则 $|z|<1$，从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 在单位圆上等于 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n$，是收敛的，这与收敛半径的概念矛盾。

综上述可知，必有 $\lambda=1$，所以

$$R=\frac{1}{\lambda}=1$$

12. 若 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 在 z_0 点处发散，证明级数对于所有满足 $|z|>|z_0|$ 点 z 都发散.

证明：不妨设当 $|z_1|>|z_0|$ 时，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 在 z_1 处收敛

则对 $\forall|z\ |>|z_1|$，$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 绝对收敛，则 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 在

点 z_0 处收敛

所以矛盾, 从而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_nz^n$ 在 $|z|>|z_0|$ 处发散.

13. 用直接法将函数 $\ln(1+\mathrm{e}^{-z})$ 在 $z=0$ 点处展开为泰勒级数, (到 z^4 项), 并指出其收敛半径.

解: 因为 $\ln(1+\mathrm{e}^{-z})=\ln(\dfrac{1+\mathrm{e}^{z}}{\mathrm{e}^{z}})$

奇点为 $z_k=(2k+1)\pi\mathrm{i}(k=0,\pm1,\ldots)$

所以 $R=\pi$

又

$$\ln(1+\mathrm{e}^{-z})\big|_{z=0}=\ln 2$$

$$[\ln(1+\mathrm{e}^{-z})]'=-\frac{\mathrm{e}^{-z}}{1+\mathrm{e}^{-z}}\Big|_{z=0}=-\frac{1}{2}$$

$$[\ln(1+\mathrm{e}^{-z})]''=-\frac{\mathrm{e}^{-z}}{(1+\mathrm{e}^{-z})^2}\Big|_{z=0}=-\frac{1}{2^2}$$

$$[\ln(1+\mathrm{e}^{-z})]'''=\frac{-\mathrm{e}^{-z}+\mathrm{e}^{-2z}}{(1+\mathrm{e}^{-z})^3}\Big|_{z=0}=0$$

$$[\ln(1+e^{-z})]^{(4)}=\frac{e^{-z}(1-4e^{-z}+e^{-2z})}{(1+e^{-z})^4}\Big|_{z=0}=-\frac{1}{2^3}$$

于是，有展开式

$$\ln(1+e^{-z})=\ln 2-\frac{1}{2}z+\frac{1}{2!2^2}z^2-\frac{1}{4!2^3}z^4+\dots,R=\pi$$

14. 用直接法将函数 $\frac{1}{1+z^2}$ 在 $|z-1|<\sqrt{2}$ 点处展开为泰勒级数, (到 $(z-1)^4$ 项)

解： $z=\pm i$ 为 $\frac{1}{1+z^2}$ 的奇点，所以收敛半径 $R=\sqrt{2}$

又

$$f(z)=\frac{1}{1+z^2},f(1)=\frac{1}{2}$$

$$f'(z)=\frac{-2z}{(1+z^2)^2},f'(1)=-\frac{1}{2}$$

$$f''(z)=\frac{-2+6z^2}{(1+z^2)^3},f''(1)=\frac{1}{2}$$

$$f'''(z)=\frac{24z-24z^3}{(1+z^2)^4},f'''(1)=0$$

$$f^{(4)}(z)=\frac{24-240z^2+120z^4}{(1+z^2)^5},f^{(4)}(1)=0$$

于是， $f(z)$ 在 $z=1$ 处的泰勒级数为

$$\frac{1}{1+z^2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(z-1)+\frac{1}{4}(z-1)^2-\frac{3}{4!}(z-1)^4+\dots,R=\sqrt{2}$$

15. 用间接法将下列函数展开为泰勒级数，并指出其收敛性.

(1) $\frac{1}{2z-3}$ 分别在 $z=0$ 和 $z=1$ 处

(2) $\sin^3 z$ 在 $z=0$ 处

(3) $\arctan z$ 在 $z=0$ 处

(4) $\frac{z}{(z+1)(z+2)}$ 在 $z=2$ 处

(5) $\ln(1+z)$ 在 $z=0$ 处

解 （1）

$$\frac{1}{2z-3}=-\frac{1}{3-2z}=-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}z}=-\frac{1}{3}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{2}{3}z)^n,|z|<\frac{3}{2}$$

$\frac{1}{2z-3}=\frac{1}{2z-2-1}=\frac{1}{2(z-1)-1}=-\frac{1}{1-2(z-1)}=-\sum_{n=0}^{\infty}2^n(z-1)^n,|z-1|<\frac{1}{2}$

(2) $\sin z=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}z^{2n+1}=z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}+\ldots$

$$\sin^3 z=\frac{3}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{3^{2n}-1}{(2n+1)!}z^{2n+1},|z|<\infty$$

(3) $\because \arctan z=\int_0^z\frac{1}{1+z^2}dz$

$\therefore z=\pm\mathrm{i}$为奇点，$\therefore R=1$

$\arctan z=\int_0^z\frac{1}{1+z^2}dz=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}dz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{2n+1}\cdot z^{2n+1},|z|<1$

(4)

$\frac{1}{(z+1)(z+2)}=\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}=\frac{1}{z-2+3}-\frac{1}{z-2+4}=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{3}}-\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{1+\frac{z-2}{4}}$

$=\frac{1}{3}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(\frac{z-2}{3})^n-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(\frac{z-2}{4})^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot(\frac{1}{3^{n+1}}-\frac{1}{4^{n+1}})(z-2)^n,\qquad |z-2|<3$

(5)因为从 $z=-1$ 沿负实轴 $\ln(1+z)$ 不解析

所以,收敛半径为 R=1

$$[\ln(1+z)]'=\frac{1}{1+z}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^n$$

$$\ln(1+z)=\int_0^z\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^n dz=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot\frac{1}{n}\cdot z^{n+1},|z|<1$$

16. 为什么区域 $|z|<R$ 内解析且在区间 $(-R,R)$ 取实数值的函数 $f(z)$ 展开成 z 的幂级数时，展开式的系数都是实数？

答：因为当 z 取实数值时，$f(z)$ 与 $f(x)$ 的泰勒级数展开式是完全一致的，而在 $|x|<R$ 内，$f(x)$ 的展开式系数都是实数。所以在 $|z|<R$ 内，$f(z)$ 的幂级数展开式的系数是实数.

17. 求 $f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}$ 的以 $z=0$ 为中心的各个圆环域内的罗朗级数.

解:函数 $f(z)$ 有奇点 $z_1=1$ 与 $z_2=-2$，有三个以 $z=0$ 为中心的圆环域,其罗朗级数. 分别为:

在 $|z|<1$ 内，$f(z)=\frac{2z+1}{z^2+z-2}=\frac{1}{z-1}+\frac{1}{z+2}=-\sum_{n=0}^{\infty}z^n+\frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\frac{z}{2})^n$

$=\sum_{n=0}^{\infty}((-1)^n\cdot\frac{1}{2^{n+1}}-1)z^n$

19. 在 $1<|z|<+\infty$ 内将 $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{1-z}}$ 展开成罗朗级数.

解: 令 $t=\dfrac{1}{1-z}$, 则

$$f(z)=\mathrm{e}^{t}=1+t+\frac{1}{2!}\cdot t^{2}+\frac{1}{3!}\cdot t^{3}+\ldots$$

而 $t=\dfrac{1}{1-z}$ 在 $1<|z|<+\infty$ 内展开式为

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\cdot(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^{2}}+\ldots)$$

所以, 代入可得

$$f(z)=1-\frac{1}{z}\cdot(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^{2}}+\ldots)+\frac{1}{2!}\frac{1}{z}\cdot(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^{2}}+\ldots)^{2}+\ldots$$
$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^{2}}-\frac{1}{6z^{3}}+\frac{1}{24z^{4}}+\frac{19}{120z^{5}}+\ldots$$

20. 有人做下列运算, 并根据运算做出如下结果

$$\frac{z}{1-z}=z+z^{2}+z^{3}+\ldots$$

$$\frac{z}{z-1}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^{2}}+\ldots$$

因为 $\dfrac{z}{1-z}+\dfrac{z}{z-1}=0$, 所以有结果

$$\ldots+\frac{1}{z^{3}}+\frac{1}{z^{2}}+\frac{1}{z}+1+1+z+z^{2}+z^{3}+\ldots=0$$

你认为正确吗?为什么?

答: 不正确, 因为 $\dfrac{z}{1-z}=z+z^{2}+z^{3}+\ldots$ 要求 $|z|<1$

而 $\dfrac{z}{1-z}=1+\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z^{2}}+\ldots$ 要求 $|z|>1$

所以, 在不同区域内

$$\frac{z}{1-z}+\frac{z}{z-1}\neq\ldots+\frac{1}{z^{6}}+\frac{1}{z^{2}}+\frac{1}{z}+1+1+z+z^{2}+z^{3}+\ldots\neq 0$$

21. 证明: $f(z)=\cos(z+\dfrac{1}{z})$ 用 z 的幂表示的罗朗级数展开式中的系数为

$$C_{n}=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta.n=0,\pm1,\ldots$$

证明:因为 $z=0$ 和 $z=\infty$ 是 $\cos(z+\frac{1}{z})$ 的奇点，所以在 $0<|z|<\infty$ 内，$\cos(z+\frac{1}{z})$ 的罗朗级数为

$$\cos(z+\frac{1}{z})=\sum_{n=-\infty}^{n=\infty}C_n z^n$$

其中 $C_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int c\frac{\cos(\zeta+\frac{1}{\zeta})}{\zeta^{n+1}}d\zeta, n=0,\pm1,\pm2,\ldots$

其中 C 为 $0<|z|<\infty$ 内任一条绕原点的简单曲线.

$$C_n=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{\cos(z+\frac{1}{z})}{z^{n+1}}dz,(z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta},0\le\theta\le 2\pi)$$
$$=\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+1)\theta}}\mathrm{i}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\cos(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})}{\mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}}d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta})\cdot(\cos n\theta-\mathrm{i}\sin n\theta)d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(2\cos\theta)\cos n\theta d\theta.\qquad n=0,\pm1,\ldots$$

22. $z=0$ 是函数 $f(z)=\frac{1}{\cos(1/z)}$ 的孤立奇点吗?为什么?

解：因为 $f(z)=\frac{1}{\cos(1/z)}$ 的奇点有 $z=0$

$$\frac{1}{z}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow z=\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}(k=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

所以在 $z=0$ 的任意去心邻域，总包括奇点 $z=\frac{1}{k\pi+\frac{\pi}{2}}$，当 $k\to\infty$ 时，z=0。

从而 $z=0$ 不是 $\frac{1}{\cos(1/z)}$ 的孤立奇点.

23. 用级数展开法指出函数 $6\sin z^3+z^3(z^6-6)$ 在 $z=0$ 处零点的级.

解：

$$f(z)=6\sin z^3+z^3(z^6-6)=6\sin z^3+z^9-6z^3$$
$$=6(z^3-\frac{1}{3!}z^9+\frac{1}{5!}z^{15}+\ldots)+z^9-6z^3$$

故 z=0 为 f(z)的 15 级零点

24. 判断 $z=0$ 是否为下列函数的孤立奇点，并确定奇点的类型：

(1) $\mathrm{e}^{1/z}$；　　(2) $\frac{1-\cos z}{z^2}$

解：$z=0$是$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$的孤立奇点
因为

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}=1+\frac{1}{z}+\frac{1}{2!z^2}+\ldots+\frac{1}{n!z^n}+\ldots$$

所以$z=0$是$\mathrm{e}^{\frac{1}{z}}$的本性奇点.

(2)因为

$$\frac{1-\cos z}{z^2}=\frac{1-1+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\ldots}{z^2}=\frac{1}{2!}+\frac{1}{4!}z^2+\ldots$$

所以$z=0$是$\frac{1-\cos z}{z^2}$的可去奇点.

25. 下列函数有些什么奇点？如果是极点，指出其点：

(1) $\frac{\sin z}{z^3}$ (2) $\frac{1}{z^2(\mathrm{e}^z-1)}$ (3) $\frac{1}{\sin z^2}$

解：(1) $\frac{\sin z}{z^3}=\frac{z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\ldots}{z^3}=\frac{1}{z^2}-\frac{1}{3!}+\frac{1}{5!}z^2+\ldots$

所以$z=0$是奇点, 是二级极点.

解：(2) $z=2k\pi\mathrm{i}(k=0,\pm1,\ldots)$

$z=0$是奇点, $2k\pi\mathrm{i}$是一级极点, 0 是二级极点.

解：(3)

$z=0$

$\sin z^2\big|_{z=0}=0,$

$(\sin z^2)'\big|_{z=0}=\cos z^2\cdot 2z=0.$

$(\sin z^2)''\big|_{z=0}=-4z^2\cdot\sin z^2+2\cos z^2=2\neq 0$

$z=0$是$\sin z^2$的二级零点

而$z=\pm\sqrt{k\pi}\,\mathrm{i}$是$\sin z^2$的一级零点，$z=\pm\sqrt{k\pi}$是$\sin z^2$的一级零点

所以

$z=0$是$\frac{1}{\sin z^2}$的二级极点，$\pm\sqrt{k\pi}\,\mathrm{i},\pm\sqrt{k\pi}$是$\frac{1}{\sin z^2}$的一级极点.

26. 判定$z=\infty$下列各函数的什么奇点？

(1) e^{1/z^2} (2) $\cos z-\sin z$ (3) $\frac{2z}{3+z^2}$

解：(1)当 $z\to\infty$ 时，$e^{\frac{1}{z^2}}\to 1$

所以，$z\to\infty$ 是 $e^{\frac{1}{z^2}}$ 的可去奇点.

(2)因为

$$\cos z-\sin z=1-\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{4!}z^4+\ldots+z-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{5!}z^5+\ldots$$

$$=1+z-\frac{1}{2!}z^2-\frac{1}{3!}z^3+\frac{1}{4!}z^4+\frac{1}{5!}z^5+\ldots$$

所以，$z\to\infty$ 是 $\cos z-\sin z$ 的本性奇点.

(3) 当 $z\to\infty$ 时，$\frac{2z}{3+z^2}\to 0$

所以，$z\to\infty$ 是 $\frac{2z}{3+z^2}$ 的可去奇点.

27. 函数 $f(z)=\frac{1}{z(z-1)^2}$ 在 $z=1$ 处有一个二级极点，但根据下面罗朗展开式：

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\cdots+\frac{1}{(z-1)^5}-\frac{1}{(z-1)^4}+\frac{1}{(z-1)^3},\quad |z-1|>1.$$

我们得到“ $z=1$ 又是 $f(z)$ 的本性奇点”，这两个结果哪一个是正确的？为什么？

解： 不对，z=1 是 f(z)的二级极点, 不是本性奇点. 所给罗朗展开式不是在 $0<|z-1|<1$ 内得到的

在 $0<|z-1|<1$ 内的罗朗展开式为

$$\frac{1}{z(z-1)^2}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}=\frac{1}{(z-1)^2}-\frac{1}{z-1}+1-(z-1)+(z-1)^2+\ldots$$

28. 如果 C 为正向圆周 $|z|=3$，求积分 $\oint_C f(z)dz$ 的值

(1) $f(z)=\frac{1}{z(z+2)}$ (2) $f(z)=\frac{z}{(z+1)(z+2)}$

解：(1）先将展开为罗朗级数，得

$$\frac{1}{z(z+2)}=\frac{1}{2}[\frac{1}{z}-\frac{1}{z(1+\frac{2}{z})}]$$

$$=\frac{1}{2}(\frac{2}{z^2}-\frac{4}{z^3}+\frac{8}{z^4}+\ldots),\qquad 2<|z|<+\infty$$

而 $|z|$ =3 在 $2<|z|<+\infty$ 内，$C_{-1}=0$, 故

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\cdot C_{-1}=0$$

(2) $\dfrac{z}{(z+1)(z+2)}$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内处处解析，罗朗展开式为

$$\frac{z}{(z+1)(z+2)}=z[\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}]=\frac{1}{1+\frac{1}{z}}-\frac{1}{1+\frac{2}{z}}$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{3}{z^2}+\frac{7}{z^3}-\ldots,2<|z|<+\infty$$

而 $|z|=3$ 在 $2<|z|<+\infty$ 内，$C_{-1}=1$, 故

$$\oint_C f(z)dz=2\pi\mathrm{i}\cdot C_{-1}=2\pi\mathrm{i}$$

习题五

1．求下列函数的留数.

(1) $f(z)=\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^5}$ 在 z=0 处.

解：$\dfrac{\mathrm{e}^z-1}{z^5}$ 在 0<$|z|$<+∞的罗朗展开式为

$$\frac{1+z+\frac{z^2}{2!}+\frac{z^3}{3!}+\frac{z^4}{4!}+\cdots-1}{z^5}=\frac{1}{z^4}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^2}+\frac{1}{4!}\cdot\frac{1}{z}+\cdots\therefore\operatorname{Res}\left[\frac{\mathrm{e}^z-1}{z^5},0\right]=\frac{1}{4!}\cdot1=\frac{1}{24}$$

(2) $f(z)=\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$ 在 z=1 处.

解：$\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}$ 在 0<$|z-1|$ <+∞的罗朗展开式为

$$\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}}=1+\frac{1}{z-1}+\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{(z-1)^3}+\cdots+\frac{1}{n!}\cdot\frac{1}{(z-1)^n}+\cdots$$

$$\therefore\operatorname{Res}\left[\mathrm{e}^{\frac{1}{z-1}},1\right]=1.$$

2．利用各种方法计算 $f(z)$ 在有限孤立奇点处的留数.

(1) $f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$

解：$f(z)=\dfrac{3z+2}{z^2(z+2)}$ 的有限孤立奇点处有 z=0，z=−2．其中 z=0 为二级极点 z=−2 为一级极点.

$$\therefore\operatorname{Res}[f(z),0]=\frac{1}{1!}\cdot\lim_{z\to0}\left(\frac{3z+2}{z+2}\right)^1=\lim_{z\to0}\frac{3(z+2)-3z-2}{(z+2)^2}=\frac{4}{4}=1$$

$$\operatorname{Res}[f(z),-2]=\lim_{z\to-2}\frac{3z+2}{z^2}=-1$$

3．利用罗朗展开式求函数 $(z+1)^2\cdot\sin\dfrac{1}{z}$ 在∞处的留数.

解：$(z+1)^2\cdot\sin\dfrac{1}{z}=(z^2+2z+1)\cdot\sin\dfrac{1}{z}$

$$=(z^2+2z+1)\cdot\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3}+\frac{1}{5!}\cdot\frac{1}{z^5}+\cdots\right)$$

$$\therefore\operatorname{Res}[f(z),0]=1-\frac{1}{3!}$$

从而 $\operatorname{Res}\left[f(z),\infty\right]=-1+\dfrac{1}{3!}$

5．计算下列积分．

(1) $\oint_c \tan \pi z \mathrm{d}z$，$n$ 为正整数，c 为 $|z|=n$ 取正向．

解：$\oint_c \tan \pi z \mathrm{d}z=\oint_c \dfrac{\sin \pi z}{\cos \pi z}\mathrm{d}z$．

为在 c 内 tanπz 有

$z_k=k+\dfrac{1}{2}$　（k=0, ±1, ±2⋯±(n−1)）一级极点

由于 $\operatorname{Res}\left[f(z),z_k\right]=\left.\dfrac{\sin \pi z}{(\cos \pi z)'}\right|_{z=2k}=-\dfrac{1}{\pi}$

∴ $\oint_c \tan \pi z \mathrm{d}z=2\pi \mathrm{i}\cdot\sum_k \operatorname{Res}\left[f(z),z_k\right]=2\pi \mathrm{i}\cdot\left(-\dfrac{1}{\pi}\right)\cdot 2n=-4n\mathrm{i}$

(2) $\oint_c \dfrac{\mathrm{d}z}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}$　c: $|z|=2$ 取正向．

解：因为 $\dfrac{1}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}$ 在 c 内有 z=1，z=−i 两个奇点．

所以

$$\begin{aligned}\oint_c \frac{\mathrm{d}z}{(z+\mathrm{i})^{10}(z-1)(z-3)}&=2\pi \mathrm{i}\cdot\left(\operatorname{Res}\left[f(z),-\mathrm{i}\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),1\right]\right)\\&=-2\pi \mathrm{i}\cdot\left(\operatorname{Res}\left[f(z),3\right]+\operatorname{Res}\left[f(z),\infty\right]\right)\\&=-\frac{\pi \mathrm{i}}{(3+\mathrm{i})^{10}}\end{aligned}$$

6．计算下列积分．

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{\cos m\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$

因被积函数为 θ 的偶函数，所以 $I=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\cos m\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$

令 $I_1=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin m\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$ 则有

$I+\mathrm{i}I_1=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}m\theta}}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta$

设 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$　$\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$　$\cos\theta=\dfrac{z^2+1}{2z}$ 则

$$\begin{aligned}I+\mathrm{i}I_1&=\frac{1}{2}\oint_{|z|=1}\frac{z^m}{5-4\left(\dfrac{1+z^2}{2z}\right)}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{i}z}\\&=\frac{1}{2\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z^m}{5-2(1+z^2)}\mathrm{d}z\end{aligned}$$

被积函数 $f(z)=\dfrac{z^m}{5z-2(1+z^2)}$ 在 $|z|=1$ 内只有一个简单极点 $z=\dfrac{1}{2}$

但 $\operatorname{Res}\left[f(z),\dfrac{1}{2}\right]=\lim\limits_{z\to\frac{1}{2}}\dfrac{z^m}{\left[5z-2(1+z^2)\right]'}=\dfrac{1}{3\cdot 2^m}$

所以 $I+\mathrm{i}I_1=2\pi\mathrm{i}\cdot\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\dfrac{1}{3\cdot2^m}=\dfrac{\pi}{3\cdot2^m}$

又因为 $I_1=\dfrac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\dfrac{\sin m\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=0$

$\therefore\int_0^{\pi}\dfrac{\cos m\theta}{5-4\cos\theta}\mathrm{d}\theta=\dfrac{\pi}{3\cdot2^m}$

(2) $\int_0^{2\pi}\dfrac{\cos3\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta$，$|a|>1$.

解：令

$I_1=\int_0^{2\pi}\dfrac{\cos3\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta\quad I_2=\int_0^{2\pi}\dfrac{\sin3\theta}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta$

$$I_1+\mathrm{i}I_2=\int_0^{2\pi}\frac{\mathrm{e}^{3\theta\mathrm{i}}}{1-2a\cos\theta+a^2}\mathrm{d}\theta$$

令 $z=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$． $\cos\theta=\dfrac{z^3}{2z}\quad\mathrm{d}\theta=\dfrac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$，则

$$I_1+\mathrm{i}I_2=\oint_{|z|=1}\frac{z^3}{1-2a\cdot\dfrac{z^2+1}{2z}+a^2}\cdot\frac{1}{\mathrm{i}z}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{1}{\mathrm{i}}\oint_{|z|=1}\frac{z^3}{-az^2+\left(a^2+1\right)z-a}\mathrm{d}z$$
$$=\frac{-1}{\mathrm{i}}\cdot2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[f(z),\frac{1}{a}\right]=\frac{2\pi}{a^3\left(a^2-1\right)}$$

得 $I_1=\dfrac{2\pi}{a^3\left(a^2-1\right)}$

(3) $\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{\mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$，$a>0$，$b>0$.

解：令 $R(z)=\dfrac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$，被积函数 $R(z)$ 在上半平面有一级极点 $z=\mathrm{i}a$ 和 $\mathrm{i}b$．故

$$\begin{aligned}I&=2\pi\mathrm{i}\left(\mathrm{Res}[R(z),a\mathrm{i}]+\mathrm{Res}[R(z),b\mathrm{i}]\right)\\&=2\pi\mathrm{i}\left[\lim_{z\to a\mathrm{i}}(z-a\mathrm{i})\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}+\lim_{z\to b\mathrm{i}}(z-b\mathrm{i})\frac{1}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}\right]\\&=2\pi\mathrm{i}\left[\frac{1}{2\mathrm{i}a(b^2-a^2)}+\frac{1}{2\mathrm{i}b(a^2-b^2)}\right]\\&=\frac{\pi}{ab(a+b)}\end{aligned}$$

（4）． $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}x$，$a>0$.

解： $\int_0^{+\infty}\dfrac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}x=\dfrac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\dfrac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}x$

令 $R(z)=\dfrac{z^2}{\left(z^2+a^2\right)^2}$，则 $z=\pm a\mathrm{i}$ 分别为 $R(z)$ 的二级极点

故 $\int_{-\infty}^{0}\frac{x^2}{\left(x^2+a^2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\cdot 2\pi\mathrm{i}\cdot\left(\mathrm{Res}\left[R(z),a\mathrm{i}\right]+\mathrm{Res}\left[R(z),-a\mathrm{i}\right]\right)$ (5) $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\cdot\sin\beta x}{\left(x^2+b^2\right)^2}\mathrm{d}x$，β >0，b>0.

$$=\pi\mathrm{i}\left(\lim_{z\to a\mathrm{i}}\left[\frac{z^2}{(z+a\mathrm{i})^2}\right]'+\lim_{z\to -a\mathrm{i}}\left[\frac{z^2}{(z-a\mathrm{i})^2}\right]'\right)$$

$$=\frac{\pi}{2a}$$

解：

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\left(x^2+b^2\right)^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}\mathrm{d}x=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cdot\cos\beta x}{\left(x^2+b^2\right)^2}\mathrm{d}x+\mathrm{i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cdot\sin\beta x}{\left(x^2+b^2\right)^2}\mathrm{d}x$$

而考知 $R(z)=\frac{z}{\left(z^2+b^2\right)^2}$，则 $R(z)$ 在上半平面有 $z=b\mathrm{i}$ 一个二级极点.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x}{\left(x^2+b^2\right)^2}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[R(z)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z},b\mathrm{i}\right]$$

$$=2\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to b\mathrm{i}}\left[\frac{z\mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta z}}{(z+b\mathrm{i})}\right]'=\frac{\pi\beta}{2b}\cdot\mathrm{e}^{-\beta b}\cdot\mathrm{i}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{x\cdot\sin\beta x}{\left(x^2+b^2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi\beta}{2b}\cdot\mathrm{e}^{-\beta b}$$

从而 $\int_{0}^{+\infty}\frac{x\cdot\sin\beta x}{\left(x^2+b^2\right)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi\beta}{4b}\cdot\mathrm{e}^{-\beta b}=\frac{\pi\beta}{4b\mathrm{e}^{\beta b}}$

(6) $\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x$，$a>0$

解：令 $R(z)=\frac{1}{z^2+a^2}$，在上半平面有 $z=a\mathrm{i}$ 一个一级极点

$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}}{x^2+a^2}\mathrm{d}x=2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[R(z)\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}z},a\mathrm{i}\right]=2\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to a\mathrm{i}}\frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}z}}{z+a\mathrm{i}}=2\pi\mathrm{i}\cdot\frac{\mathrm{e}^{-a}}{2a\mathrm{i}}=\frac{\pi}{a\mathrm{e}^{a}}$ 7. 计算下列积分

(1) $\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x$

解：令 $R(z)=\frac{1}{z\left(1+z^2\right)}$，则 $R(z)$ 在实轴上有孤立奇点 $z=0$，作以原点为圆心、r 为半径的上半圆周 c_r，使 C_R，$[-R,-r]$，C_r，$[r, R]$ 构成封闭曲线，此时闭曲线内只有一个奇点 i，

于是：$I=\mathrm{Im}\left[\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}x}}{x\left(1+x^2\right)}\mathrm{d}x\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left\{2\pi\mathrm{i}\cdot\mathrm{Res}\left[R(z),\mathrm{i}\right]\right\}-\lim_{r\to 0}\int_{c_r}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z\left(1+z^2\right)}\mathrm{d}z$ 而 $\lim_{r\to 0}\int_{c_r}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{\left(1+z^2\right)}\cdot\frac{\mathrm{d}z}{z}=-\pi\mathrm{i}$.

故：

$I=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\lim_{z\to i}\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}}{z(z+i)}+\pi\mathrm{i}\right]=\frac{1}{2}\mathrm{Im}\left[2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\mathrm{e}^{-2}}{2}\right)+\pi\mathrm{i}\right]=\frac{\pi}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-2}\right)$. (2) $\frac{1}{2\pi\mathrm{i}}\int_{T}\frac{a^z}{z^2}\mathrm{d}z$，其中 T 为直线 $\mathrm{Re}z=c$，$c>0$，$0<a<1$

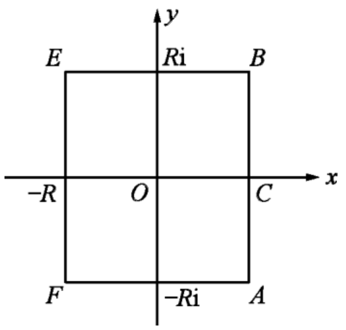
解：在直线 $z=c+\mathrm{i}y$ $(-\infty<y<+\infty)$ 上，令 $f(z)=\frac{a^z}{z^2}=\frac{\mathrm{e}^{z\ln a}}{z^2}$，$\left|f(c+\mathrm{i}y)\right|=\frac{\mathrm{e}^{c\cdot\ln a}}{c^2+y^2}$，$\int_{-\infty}^{+\infty}\left|f(c+\mathrm{i}y)\right|\mathrm{d}y=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{c\cdot\ln a}}{c^2+y^2}\mathrm{d}y$

收敛，所以积分 $\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}f(z)\mathrm{d}z$ 是存在的，并且

$$\int_{c-\mathrm{i}\infty}^{c+\mathrm{i}\infty}f(z)\mathrm{d}z=\lim_{R\to+\infty}\int_{c-\mathrm{i}R}^{c+\mathrm{i}R}f(z)\mathrm{d}z=\lim_{R\to+\infty}\int_{AB}f(z)\mathrm{d}z$$

其中 AB 为复平面从 $c-\mathrm{i}R$ 到 $c+\mathrm{i}R$ 的线段.

考虑函数 f(z)沿长方形 $-R\leqslant x\leqslant c$，$-R\leqslant y\leqslant R$ 周界的积分. ＜如下图＞



因为 $f(z)$ 在其内仅有一个二级极点 $z=0$，而且 $\operatorname{Res}\left[f(z),0\right]=\lim\limits_{z\to 0}\left(z^2\cdot f(z)\right)'=\ln a$

所以由留数定理.

$$\int_{AB} f(z)\mathrm{d}z+\int_{BE} f(z)\mathrm{d}z+\int_{EF} f(z)\mathrm{d}z+\int_{FA} f(z)\mathrm{d}z=2\pi\mathrm{i}\cdot\ln a$$

而 $\left|\int_{BE} f(z)\mathrm{d}z\right|=\left|\int_{C}^{-R}\frac{\mathrm{e}^{(x+R\mathrm{i})\ln a}}{(x+R\mathrm{i})^2}\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_{-R}^{C}\frac{\mathrm{e}^{x\cdot\ln a}}{x^2+R^2}\mathrm{d}x\leqslant\int_{-R}^{C}\frac{\mathrm{e}^{\ln aC}}{R^2}\mathrm{d}x=\frac{\mathrm{e}^{C\cdot\ln a}}{R^2}\cdot(C+R)\xrightarrow{R\to+\infty}0$.

习题六

1. 求映射 $w=\dfrac{1}{z}$ 下，下列曲线的像.

(1) $x^2+y^2=ax$ （$a\neq 0$，为实数）

解：$w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{x+\mathrm{i}y}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}=u+\mathrm{i}v$

$u=\dfrac{x}{x^2+y^2}=\dfrac{x}{ax}=\dfrac{1}{a}$,

所以 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 $x^2+y^2=ax$ 映成直线 $u=\dfrac{1}{a}$.

(2) $y=kx$.（k 为实数）

解：$w=\dfrac{1}{z}=\dfrac{x}{x^2+y^2}-\dfrac{y}{x^2+y^2}\mathrm{i}$

$u=\dfrac{x}{x^2+y^2}\qquad v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}=-\dfrac{kx}{x^2+y^2}$

$v=-ku$

故 $w=\dfrac{1}{z}$ 将 $y=kx$ 映成直线 $v=-ku$.

2. 下列区域在指定的映射下映成什么？

(1) $\operatorname{Im}(z)>0,\quad w=(1+\mathrm{i})z$；

解：$w=(1+\mathrm{i})\cdot(x+\mathrm{i}y)=(x-y)+\mathrm{i}(x+y)$

$u=x-y,v=x+y.\qquad u-v=-2y<0.$

所以 $\operatorname{Im}(w)>\operatorname{Re}(w)$.

故 $w=(1+\mathrm{i})\cdot z$ 将 $\operatorname{Im}(z)>0$, 映成 $\operatorname{Im}(w)>\operatorname{Re}(w)$.

(2) $\operatorname{Re}(z)>0$. $0<\operatorname{Im}(z)<1$, $w=\dfrac{\mathrm{i}}{z}$.

解：设 $z=x+\mathrm{i}y$, $x>0$, $0<y<1$.

$w=\dfrac{\mathrm{i}}{z}=\dfrac{\mathrm{i}}{x+iy}=\dfrac{\mathrm{i}(x-\mathrm{i}y)}{x^2+y^2}=\dfrac{y}{x^2+y^2}+\dfrac{x}{x^2+y^2}\mathrm{i}$

Re(w)>0. Im(w)>0.　若 $w=u+\mathrm{i}v$，则

$$y=\frac{u}{u^2+v^2},x=\frac{v}{u^2+v^2}$$

因为 0<y<1，则 $0<\frac{u}{u^2+v^2}<1,(u-\frac{1}{2})^2+v^2>\frac{1}{2}$

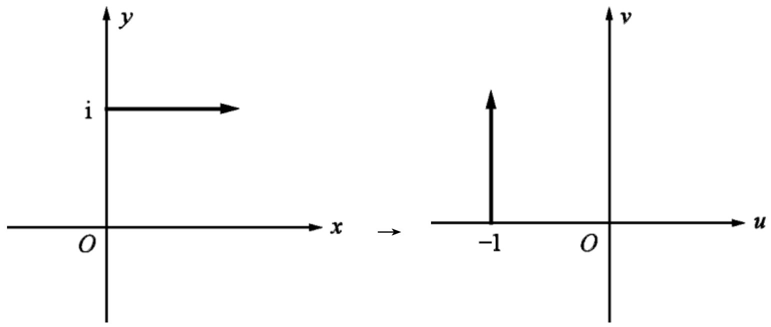
故 $w=\frac{\mathrm{i}}{z}$ 将 Re(z)>0，0<Im(z)<1. 映为

Re(w)>0, Im(w)>0，$\left|w_{\frac{1}{2}}\right|>\frac{1}{2}$　（以（$\frac{1}{2}$，0）为圆心、$\frac{1}{2}$ 为半径的圆）

3. 求 $w=z^2$ 在 $z=\mathrm{i}$ 处的伸缩率和旋转角，问 $w=z^2$ 将经过点 $z=\mathrm{i}$ 且平行于实轴正向的曲线的切线方向映成 w 平面上哪一个方向？并作图.

解：因为 $w'=2z$，所以 $w'(\mathrm{i})=2i$，$|w'|=2$，旋转角 $\arg w'=\frac{\pi}{2}$.

于是，经过点 i 且平行实轴正向的向量映成 w 平面上过点−1，且方向垂直向上的向量. 如图所示.



4. 一个解析函数，所构成的映射在什么条件下具有伸缩率和旋转角的不变性？映射 $w=z^2$ 在 z 平面上每一点都具有这个性质吗？

答：一个解析函数所构成的映射在导数不为零的条件下具有伸缩率和旋转不变性映射 $w=z^2$ 在 $z=0$ 处导数为零，所以在 $z=0$ 处不具备这个性质.

5. 求将区域 0<x<1 变为本身的整体线性质变换 $w=\alpha\cdot z+\beta$ 的一般形式.

6. 试求所有使点 ±1 不动的分式线性变换.

解：设所求分式线性变换为 $w=\frac{az+b}{cz+d}$（$ad-bc\neq0$）由 $-1\to-1$. 得

$$-1=\frac{-a+b}{-c+d}\Rightarrow b=a+c-d$$

因为 $w=\frac{a(z+1)+c-d}{cz+d}$，

即 $w+1=\frac{a(z+1)+c(z+1)}{cz+d}$，

由 $1\to1$ 代入上式，得 $2=2\frac{a+c}{c+d}\Rightarrow a=d$.

因此 $w+1=(z+1)\frac{d+c}{cz+d}=(z+1)\cdot\frac{1+\frac{d}{c}}{z+\frac{d}{c}}$

令 $\frac{d}{c}=q$，得

$$\frac{w+1}{w-1}=\frac{(z+1)(1+q)/(z+q)}{(z+1)(1+q)/(z+q)-2}=\frac{(z+1)(1+q)}{(z-1)(q-1)}=a\cdot\frac{z+1}{z-1}$$

其中 a 为复数.

反之也成立，故所求分式线性映射为 $\frac{w+1}{w-1}=a\cdot\frac{z+1}{z-1}$，　a 为复数.

7. 若分式线性映射，$w=\frac{az+b}{cz+d}$ 将圆周 $|z|=1$ 映射成直线则其余数应满足什么条件？

解：若 $w=\frac{az+b}{cz+d}$ 将圆周 $|z|=1$ 映成直线，则 $z=-\frac{d}{c}$ 映成 $w=\infty$.

而 $z=-\frac{d}{c}$ 落在单位圆周 $|z|=1$, 所以 $\left|-\frac{d}{c}\right|=1$, $|c|=|d|$.

故系数应满足 $ad-bc\neq 0$, 且 $|c|=|d|$.

8. 试确定映射，$w=\frac{z-1}{z+1}$ 作用下，下列集合的像.

(1) $\mathrm{Re}(z)=0$；　(2) $|z|=2$；　(3) $\mathrm{Im}(z)>0$.

解：(1) $\mathrm{Re}(z)=0$ 是虚轴，即 $z=\mathrm{i}y$ 代入得.

$$w=\frac{\mathrm{i}y-1}{\mathrm{i}y+1}=\frac{-(1-\mathrm{i}y)^2}{1+y^2}=\frac{-1+y^2}{1+y^2}+\mathrm{i}\cdot\frac{2y}{1+y^2}$$

写成参数方程为 $u=\frac{-1+y^2}{1+y^2}$，　$v=\frac{2y}{1+y^2}$，　$-\infty<y<+\infty$.

消去 y 得，像曲线方程为单位圆, 即

$$u^2+v^2=1.$$

(2) $|z|=2$. 是一圆围，令 $z=2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}, 0\le\theta\le 2\pi$. 代入得 $w=\frac{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}-1}{2\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}+1}$ 化为参数方程.

$$u=\frac{3}{5+4\cos\theta}\qquad u=\frac{4\sin\theta}{5+4\cos\theta}\qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

消去 θ 得，像曲线方程为一阿波罗斯圆. 即

$$(u-\frac{5}{3})^2+v^2=(\frac{4}{3})^2$$

(3) 当 $\mathrm{Im}(z)>0$ 时，即 $\frac{w+1}{w-1}=-z\Rightarrow \mathrm{Im}(\frac{w+1}{w-1})<0$,

令 $w=u+\mathrm{i}v$ 得

$$\mathrm{Im}(\frac{w+1}{w-1})=\mathrm{Im}(\frac{(u+1)+\mathrm{i}v}{(u-1)+\mathrm{i}v})=\frac{-2v}{(u-1)^2+v^2}<0.$$

即 $v>0$, 故 $\mathrm{Im}(z)>0$ 的像为 $\mathrm{Im}(w)>0$.

9. 求出一个将右半平面 $\mathrm{Re}(z)>0$ 映射成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性变换.

解：设映射将右半平面 z_0 映射成 $w=0$，则 z_0 关于轴对称点 $\overline{z_0}$ 的像为 $w=\infty$，

所以所求分式线性变换形式为 $w=k\cdot\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$ 其中 k 为常数.

又因为 $|w|=|k|\cdot\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right|$, 而虚轴上的点 z 对应 $|w|=1$, 不妨设 $z=0$，则

$$|w|=|k|\cdot\left|\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}\right|=|k|=1\Rightarrow k=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\qquad(\theta\in\boldsymbol{R})$$

故 $w=\mathrm{e}^{i\theta}\cdot\frac{z-z_0}{z-\overline{z_0}}$　　$(\mathrm{Re}(z_0)>0)$.

10. 映射 $w=\mathrm{e}^{i\varphi}\cdot\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}\cdot z}$ 将 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$, 实数 φ 的几何意义显什么？

解：因为

$$w'(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cdot\frac{(1-\overline{\alpha}z)-(z-\alpha)(-\overline{\alpha})}{(1-\overline{\alpha}\cdot z)^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cdot\frac{1-|\alpha|^2}{(1-\overline{\alpha}z)^2}$$

从而 $w'(\alpha)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cdot\dfrac{1-|\alpha|^2}{(1-|\alpha|^2)^2}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}\cdot\dfrac{1}{1-|\alpha|^2}$

所以 $\arg w'(\alpha)=\arg\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}-\arg\cdot(1-|\alpha|^2)=\varphi$

故 φ 表示 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\dfrac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}z}$ 在单位圆内 α 处的旋转角 $\arg w'(\alpha)$.

11. 求将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$, 映射成 $|w|<1$ 单位圆的分式线性变换 $w=f(z)$，并满足条件

(1) $f(\mathrm{i})=0$, $\arg f'(\mathrm{i})=0$；(2) $f(1)=1$, $f(\mathrm{i})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

解：将上半平面 $\mathrm{Im}(z)>0$, 映为单位圆 $|w|<1$ 的一般分式线性映射为 $w=k\cdot\dfrac{z-\alpha}{z-\overline{\alpha}}$ $(\mathrm{Im}(\alpha)>0)$.

(1) 由 $f(\mathrm{i})=0$ 得 $\alpha=\mathrm{i}$，又由 $\arg f'(\mathrm{i})=0$, 即 $f'(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\dfrac{2\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^2}$,

$$f'(\mathrm{i})=\frac{1}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\theta-\frac{\pi}{2})}=0\text{，得 }\theta=\frac{\pi}{2}\text{，所以}$$

$$w=\mathrm{i}\cdot\frac{z-\mathrm{i}}{z+\mathrm{i}}.$$

(2) 由 $f(1)=1$, 得 $k=\dfrac{1-\overline{\alpha}}{1-\alpha}$；由 $f(\mathrm{i})=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$, 得 $k=\dfrac{\mathrm{i}-\overline{\alpha}}{\sqrt{5}(\mathrm{i}-\alpha)}$ 联立解得

$$w=\frac{3z+(\sqrt{5}-2\mathrm{i})}{(\sqrt{5}-2\mathrm{i})z+3}.$$

12. 求将 $|z|<1$ 映射成 $|w|<1$ 的分式线性变换 $w=f(z)$，并满足条件：

(1) $f(\frac{1}{2})=0$, $f(-1)=1$.

(2) $f(\frac{1}{2})=0$, $\arg f'(\frac{1}{2})=\dfrac{\pi}{2}$,

(3) $f(a)=a$, $\arg f'(a)=\varphi$.

解：将单位圆 $|z|<1$ 映成单位圆 $|w|<1$ 的分式线性映射，为

$$w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{z-\alpha}{1-\overline{\alpha}\cdot z}\quad,\quad|\alpha|<1.$$

(1) 由 $f(\frac{1}{2})=0$，知 $\alpha=\dfrac{1}{2}$. 又由 $f(-1)=1$，知

$$\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\frac{-1-\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}(-1)=1\Rightarrow\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}=-1\Rightarrow\theta=\pi.$$

故 $w=-1\cdot\dfrac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}=\dfrac{2z-1}{z-2}$.

(2) 由 $f(\frac{1}{2})=0$，知 $\alpha=\frac{1}{2}$，又 $w'=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\dfrac{5-4z}{(2-z)^2}$

$$f'(\tfrac{1}{2})=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\frac{4}{3}\Rightarrow\theta=\arg f'(\tfrac{1}{2})=\frac{\pi}{2},$$

于是 $w=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\frac{\pi}{2}}(\dfrac{z-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}})=\mathrm{i}\cdot\dfrac{2z-1}{2-z}$.

(3) 先求 $\xi=\varphi(z)$，使 $z=a\to\xi=0$，$\arg\varphi'(a)=\theta$，且 $|z|<1$ 映成 $|\xi|<1$.

则可知 $\xi=\varphi(z)=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\dfrac{z-a}{1-\bar{a}\cdot z}$

再求 $w=g(\xi)$，使 $\xi=0\to w=a$，$\arg g'(0)=0$，且 $|\xi|<1$ 映成 $|w|<1$.

先求其反函数 $\xi=\psi(w)$，它使 $|w|<1$ 映为 $|\xi|<1$，$w=a$ 映为 $\xi=0$，且

$\arg\psi'(w)=\arg(1/g'(0))=0$，则

$$\xi=\psi(w)=\frac{w-a}{1-\bar{a}\cdot w}.$$

因此，所求 w 由等式给出.

$$\frac{w-a}{1-\bar{a}\cdot w}=\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\cdot\frac{z-a}{1-\bar{a}\cdot z}.$$

13. 求将顶点在 0，1，i 的三角形式的内部映射为顶点依次为 0，2，1+i 的三角形的内部的分式线性映射.

解：直接用交比不变性公式即可求得

$$\frac{w-0}{w-2}:\frac{1+\mathrm{i}-0}{1+\mathrm{i}-2}=\frac{z-0}{z-2}:\frac{\mathrm{i}-0}{\mathrm{i}-1}$$

$$\frac{w}{w-2}\cdot\frac{1+\mathrm{i}-2}{1+\mathrm{i}}=\frac{z}{z-1}\cdot\frac{\mathrm{i}-1}{\mathrm{i}}$$

$$w=\frac{-4z}{(\mathrm{i}-1)z-(1+\mathrm{i})}.$$

14. 求出将圆环域 $2<|z|<5$ 映射为圆环域 $4<|w|<10$ 且使 $f(5)=-4$ 的分式线性映射.

解：因为 z=5, −5, −2, 2 映为 w=−4, 4, 10, −10，由交比不变性，有

$$\frac{2-5}{2+5}:\frac{-2-5}{-2+5}=\frac{-10+4}{-10-4}:\frac{10+4}{10-4}$$

故 $w=f(z)$ 应为

$$\frac{z-5}{z+5}:\frac{-2-5}{-2+5}=\frac{w+4}{w-4}:\frac{10+4}{10-5}$$

即 $\dfrac{w+4}{w-4}=-\dfrac{z-5}{z+5}\Rightarrow w=-\dfrac{20}{z}$.

讨论求得映射是否合乎要求，由于 $w=f(z)$ 将 $|z|=2$ 映为 $|w|=10$，且将 $z=5$ 映为 $w=-4$. 所以 $|z|>2$ 映为 $|w|<10$. 又 $w=f(z)$ 将 $|z|=5$ 映为 $|w|=4$，将 $z=2$ 映为 $w=-10$，所以将 $|z|<5$ 映为 $|w|>4$，由此确认，此函数合乎要求.

15. 映射 $w=z^2$ 将 z 平面上的曲线 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$ 映射到 w 平面上的什么曲线？

解：略.

16. 映射 $w=\mathrm{e}^z$ 将下列区域映为什么图形.

(1) 直线网 $\mathrm{Re}(z)=C_1$, $\mathrm{Im}(z)=C_2$;

(2) 带形区域 $\alpha<\mathrm{Im}(z)<\beta, 0\le\alpha<\beta\le 2\pi$；

(3) 半带形区域

$\mathrm{Re}(z)>0, 0<\mathrm{Im}(z)<\alpha, 0\le\alpha\le 2\pi$.

解：(1) 令 $z=x+\mathrm{i}y$, $\mathrm{Re}(z)=C_1$,

$z=C_1+\mathrm{i}y \Rightarrow w=\mathrm{e}^{C_1}\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}$， $\mathrm{Im}(z)=C_2$, 则

$$z=x+\mathrm{i}C_2 \Rightarrow w=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}C_2}$$

故 $w=\mathrm{e}^z$ 将直线 $\mathrm{Re}(z)$ 映成圆周 $\rho=\mathrm{e}^{C_1}$；直线 $\mathrm{Im}(z)=C_2$ 映为射线 $\varphi=C_2$.

(2) 令 $z=x+\mathrm{i}y$，$\alpha<y<\beta$，则 $w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^{x+\mathrm{i}y}=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}, \alpha<y<\beta$

故 $w=\mathrm{e}^z$ 将带形区域 $\alpha<\mathrm{Im}(z)<\beta$ 映为 $\alpha<\arg(w)<\beta$ 的张角为 $\beta-\alpha$ 的角形区域.

(3) 令 $z=x+\mathrm{i}y$，$x>0$，$0<y<\alpha$，$0\le\alpha\le 2\pi$. 则

$w=\mathrm{e}^z=\mathrm{e}^x\cdot\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} \qquad (x>0, 0<y<\alpha)\Rightarrow \mathrm{e}^x>1, 0<\arg w<\alpha$

故 $w=\mathrm{e}^z$ 将半带形区域 $\mathrm{Re}(z)>0$, $0<\mathrm{Im}(z)<\alpha$，$0\le\alpha\le 2\pi$ 映为

$|w|>1$，$0<\arg w<\alpha$ ($0\le\alpha\le 2\pi$).

17. 求将单位圆的外部 $|z|>1$ 保形映射为全平面除去线段 $-1<\mathrm{Re}(w)<1$, $\mathrm{Im}(w)=0$ 的映射.

解：先用映射 $w_1=\dfrac{1}{z}$ 将 $|z|>1$ 映为 $|w_1|<1$, 再用分式线性映射.

$w_2=-\mathrm{i}\cdot\dfrac{w_1+1}{w_1-1}$ 将 $|w_1|<1$ 映为上半平面 $\mathrm{Im}(w_2)>0$，然后用幂函数 $w_3={w_2}^2$ 映为有割痕为正实轴的全平面，最后用分式线性映射 $w=\dfrac{w_3-1}{w_3+1}$ 将区域映为有割痕 $[-1,1]$ 的全平面.

故 $w=\dfrac{w_3-1}{w_3+1}=\dfrac{{w_2}^2-1}{{w_2}^2+1}=\dfrac{\left(-\mathrm{i}\cdot\dfrac{w_1+1}{w_1-1}\right)^2-1}{\left(-\mathrm{i}\cdot\dfrac{w_1+1}{w_1-1}\right)^2+1}=\dfrac{\left(\dfrac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}\right)^2-1}{\left(\dfrac{\frac{1}{z}+1}{\frac{1}{z}-1}\right)^2+1}=\dfrac{1}{2}(z+\dfrac{1}{z})$.

18. 求出将割去负实轴 $-\infty<\mathrm{Re}(z)\le 0$, $\mathrm{Im}(z)=0$ 的带形区域 $-\dfrac{\pi}{2}<\mathrm{Im}(z)<\dfrac{\pi}{2}$ 映射为半带形区域 $-\pi<\mathrm{Im}(w)<\pi$, $\mathrm{Re}(w)>0$ 的映射.

解：用 $w_1=\mathrm{e}^z$ 将区域映为有割痕(0,1)的右半平面 Re(w_1)>0；再用 $w_2=\ln\dfrac{w_1+1}{w_1-1}$ 将半平面映为有割痕(-∞,-1]的单位圆外域；又用 $w_3=\mathrm{i}\sqrt{w_2}$ 将区域映为去上半单位圆内部的上半平面；再用 $w_4=\ln w_3$ 将区域映为半带形 0<Im(w_4)<π, Re(w_4)>0；最后用 $w=2w_4-\mathrm{i}\pi$ 映为所求区域，故

$$w=\ln\frac{\mathrm{e}^z+1}{\mathrm{e}^z-1}.$$

19. 求将 Im(z)<1 去掉单位圆|z|<1 保形映射为上半平面 Im(w)>0 的映射.

解：略.

20. 映射 $w=\cos z$ 将半带形区域 0<Re(z)<π, Im(z)>0 保形映射为∞平面上的什么区域.

解：

因为 $w=\cos z=\dfrac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})$

可以分解为

$w_1=\mathrm{i}z$ ， $w_2=\mathrm{e}^{w_1}$， $w_3=\dfrac{1}{2}(w_2+\dfrac{1}{w_2})$

由于 $w=\cos z$ 在所给区域单叶解析，所以

（1） $w_1=\mathrm{i}z$ 将半带域旋转 $\dfrac{\pi}{2}$，映为 0<Im(w_1)<π, Re(w_1)<0.

（2） $w_2=\mathrm{e}^{w_1}$ 将区域映为单位圆的上半圆内部|w_2|<1, Im(w_2)>0.

（3） $w=\dfrac{1}{2}(w_2+\dfrac{1}{w_2})$ 将区域映为下半平面 Im(w)<0.

习题 七

1. 证明：如果 $f(t)$ 满足傅里叶变换的条件，当 $f(t)$ 为奇函数时，则有

$$f(t)=\int_0^{+\infty}b(\omega)\cdot\sin\omega t\mathrm{d}\omega$$

其中 $b(\omega)=\dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}f(t)\cdot\sin\omega t\mathrm{d}t$

当 $f(t)$ 为偶函数时，则有 $f(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}a(w)\cdot\cos\omega t d\omega$

其中 $a(\omega)=\frac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{+\infty}\mathrm{f(t)}\cdot\cos\omega t\mathrm{d}t$

证明：

因为 $f(t)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}G(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}d\omega$ 其中 $G(\omega)$ 为 $f(t)$ 的傅里叶变换

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-i\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot(\cos\omega t-i\sin\omega t)dt$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\cos\omega t dt-i\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\sin\omega t dt$$

当 $f(t)$ 为奇函数时， $\mathrm{f(t)}\cdot\cos\omega\mathrm{t}$ 为奇函数，从而 $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{f(t)}\cdot\cos\omega\mathrm{t}\mathrm{d}t=0$

$\mathrm{f(t)}\cdot\sin\omega\mathrm{t}$ 为偶函数，从而

$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{f(t)} \cdot \sin\omega \mathrm{tdt} = 2\int_{0}^{+\infty} \mathrm{f(t)} \cdot \sin\omega tdt.$

故 $G(\omega) = -2i\int_{0}^{+\infty} \mathrm{f(t)} \cdot \sin\omega tdt.$ 有

$G(-\omega) = -G(\omega)$ 为奇数。

$f(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \cdot e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \cdot (\cos\omega t + i\sin\omega t) d\omega \quad = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} G(\omega) \cdot i\sin\omega t \mathrm{d}\omega = \frac{i}{\pi}\int_{0}^{+\infty} G(\omega) \cdot \sin\omega t \mathrm{d}\omega$

所以，当 f(t)为奇函数时，有

$f(t) = \int_{0}^{+\infty} \mathrm{b}(\omega) \cdot \sin\omega t \mathrm{d}\omega.$ 其中 $\mathrm{b}(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t) \cdot \sin\omega t \mathrm{dt}.$ 同理，当 f(t)为偶函数时，有

$f(t) = \int_{0}^{+\infty} a(\omega) \cdot \cos\omega t \mathrm{d}\omega$. 其中

$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t) \cdot \cos\omega tdt$

2. 在上一题中，设 $f(t) = \begin{cases} t^2, & |t| < 1 \\ 0, & |t| \geq 1 \end{cases}$. 计算 $a(\omega)$ 的值.

解:

$$a(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{+\infty} f(t) \cdot \cos\omega t \mathrm{dt} = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} t^2 \cdot \cos\omega t \mathrm{dt} + \frac{2}{\pi}\int_{1}^{+\infty} 0 \cdot \cos\omega t \mathrm{dt}$$
$$= \frac{2}{\pi}\int_{0}^{1} t^2 \cdot \cos\omega t \mathrm{dt} = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{1}{\omega}\int_{0}^{1} t^2 \mathrm{d}(\sin\omega t)$$
$$= \frac{2}{\pi\omega} \cdot t^2 \cdot \sin\omega t \Big|_0^1 - \frac{2}{\pi\omega}\int_{0}^{1} \sin\omega t \cdot 2t \mathrm{d}t$$
$$= \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sin\omega}{\omega} + \frac{4}{\pi\omega^2}\int_{0}^{1} t \cdot d(\cos\omega t)$$
$$= \frac{2\sin\omega}{\pi\omega} + \frac{4}{\pi\omega^2}\left[t \cdot \cos\omega t \ \Big|_0^1 - \int_{0}^{1} \cos\omega t dt\right]$$
$$= \frac{2\sin\omega}{\pi\omega} + \frac{4\cos\omega}{\pi\omega^2} - \frac{4\sin\omega}{\pi\omega^3}$$

3. 计算函数 $f(t) = \begin{cases} \sin t, |t| \leq 6\pi \\ 0, |t| \geq 6\pi \end{cases}$ 的傅里叶变换.

解:

$$F[f](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-6\pi}^{6\pi} \sin t \cdot e^{-i\omega t} \mathrm{d}t$$
$$= \int_{-6\pi}^{6\pi} \sin t \cdot (\cos\omega t - i\sin\omega t) \mathrm{d}t$$
$$= -2i\int_{0}^{6\pi} \sin t \cdot \sin\omega t \mathrm{d}t$$
$$= \frac{i\sin 6\pi\omega}{\pi(1-\omega^2)}$$

4. 求下列函数的傅里叶变换

(1) $f(t) = e^{-|t|}$

解：

$$\mathrm{F}[\mathrm{f}](\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|t|} \cdot e^{-i\omega t} \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(|t| + i\omega t)} \mathrm{d}t$$
$$= \int_{-\infty}^{0} e^{t(1-i\omega)} \mathrm{d}t + \int_{0}^{+\infty} e^{-t(1+i\omega)} \mathrm{d}t = \frac{2}{1+\omega^2}$$

(2) $f(t)=t\cdot e^{-t^2}$

解：因为

$$\mathrm{F}[e^{-t^2}]=\sqrt{\pi}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}.\quad 而(e^{-t^2})'=e^{-t^2}\cdot(-2t)=-2t\cdot e^{-t^2}.$$

所以根据傅里叶变换的微分性质可得 $G(\omega)=\mathrm{F}(t\cdot e^{-t^2})=\dfrac{\sqrt{\pi}\omega}{2i}\cdot e^{-\frac{\omega^2}{4}}$

(3) $f(t)=\dfrac{\sin \pi t}{1-t^2}$

解：

$$G(\omega)=\mathrm{F}(f)(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\pi t}{1-t^2}\cdot e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\pi t}{1-t^2}\cdot(\cos\omega t-i\sin\omega t)\mathrm{d}t$$

$$=-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\pi t\cdot\sin\omega t}{1-t^2}\mathrm{d}t=-2i\int_0^{+\infty}\frac{-\frac{1}{2}[\cos(\pi+\omega)t-\cos(\pi-\omega)t]}{1-t^2}\mathrm{d}t$$

$$=i\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\pi+\omega)t}{1-t^2}\mathrm{d}t-i\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\pi-\omega)t}{1-t^2}\mathrm{d}t\quad(利用留数定理)$$

$$=\begin{cases}-\dfrac{i}{2}\sin\omega, & 当|\omega|\le\pi\\ 0, & 当|\omega|\ge\pi.\end{cases}$$

(4) $f(t)=\dfrac{1}{1+t^4}$

解:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{1}{1+t^4}e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t$$

$$=2\int_0^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t$$

令 $\mathrm{R(z)}=\dfrac{1}{1+\mathrm{z}^4}$ ，则 R(z)在上半平面有两个一级极点 $\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i),\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)$.

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{R}(t)\cdot e^{i\omega t}\mathrm{d}t=2\pi i\cdot Res[\mathrm{R}(z)\cdot e^{i\omega z},\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)]+2\pi i\cdot Res[\mathrm{R}(z)\cdot e^{i\omega z},\frac{\sqrt{2}}{2}(-1+i)]$$

故. $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\cos\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t=\mathrm{Re}[\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega t}}{1+t^4}\mathrm{d}t]=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{-|\omega|/\sqrt{2}}(\cos\frac{|\omega|}{2}+\sin\frac{|\omega|}{2})$

(5) $f(t)=\dfrac{t}{1+t^4}$

解:

$$G(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{1+t^4}\cdot e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t}{1+t^4}\cdot\cos\omega t\mathrm{d}t-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\cdot\sin\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t$$

$$=-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\cdot\sin\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t$$

同(4). 利用留数在积分中的应用, 令 $\mathrm{R(z)}=\dfrac{z}{1+z^4}$

则

$$-i\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\cdot\sin\omega t}{1+t^4}\mathrm{d}t=(-i)\,\mathrm{Im}(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{t\cdot e^{i\omega t}}{1+t^4}\mathrm{d}t)$$
$$=-\frac{i}{2}\cdot e^{-|\omega|/\sqrt{2}}\cdot\sin\frac{\omega}{2}$$

5. 设函数 $F(t)$ 是解析函数，而且在带形区域 $|\mathrm{Im}(t)|<\delta$ 内有界. 定义函数 $G_L(\omega)$ 为

$$G_L(\omega)=\int_{-L/2}^{L/2}F(t)\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t.$$

证明当 $L\to\infty$ 时，有

$$\mathrm{p.v.}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}G_L(\omega)\mathrm{e}^{i\omega t}\mathrm{d}\omega\to F(t)$$

对所有的实数 t 成立.

（书上有推理过程）

6. 求符号函数 $\operatorname{sgn} t=\frac{t}{|t|}=\begin{cases}-1, & t<0\\ 1, & t>0\end{cases}$ 的傅里叶变换.

解:

因为 $\mathrm{F}(u(t))=\frac{1}{i\omega}+\pi\cdot\delta(\omega)$. 把函数 $\mathrm{sgn}(t)$ 与 $\mathrm{u}(t)$ 作比较.

不难看出 $\mathrm{sgn}(t)=u(t)-u(-t)$.

故：

$$\mathrm{F}[\mathrm{sgn}(t)]=\mathrm{F}(u(t))-\mathrm{F}(u(-t))=\frac{1}{i\pi}+\pi\cdot\delta(\omega)-[\frac{1}{i(-\omega)}+\pi\cdot\delta(-\omega)]$$
$$=\frac{2}{i\omega}+\pi\left[\delta(\omega)-\delta(-\omega)\right]=\frac{2}{i\omega}$$

7. 已知函数 $f(t)$ 的傅里叶变换 $\mathrm{F}(\omega)=\pi\left(\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right)$, 求 $f(t)$

解:

$$f(t)=\mathrm{F}^{-1}(\mathrm{F}(\omega))=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\pi\cdot\left[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)\right]e^{i\omega t}\mathrm{d}\omega$$

而 $\mathrm{F}(\cos\omega_0 t)=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos\omega_0 t\cdot e^{-i\omega t}\mathrm{d}t$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{e^{i\omega_0 t}+e^{-i\omega_0 t}}{2}\cdot e^{-i\omega_0 t}\mathrm{d}t$$
$$=\pi[\delta(\omega+\omega_0)+\delta(\omega-\omega_0)]$$

所以 $f(t)=\cos\omega_0 t$

8. 设函数 $f(t)$ 的傅里叶变换 $F(\omega)$，a 为一常数. 证明

$$[f(at)](\omega)=\frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right).$$

解：$\mathrm{F}[f(at)](\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\cdot e^{-i\omega t}\mathrm{d}t=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(at)\cdot e^{-i\omega t}\mathrm{d}(at)$

当 $a>0$ 时，令 $u=at$. 则

$$\mathrm{F}[f(at)](\omega)=\frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cdot e^{-i\frac{u}{a}\omega}\mathrm{d}u=\frac{1}{a}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

当 $a<0$ 时，令 $u=at$，则 $\mathrm{F}[f(at)](\omega)=-\frac{1}{a}\mathrm{F}(\frac{\omega}{a})$.

故原命题成立.

9. 设 $F(\omega)=F[f](\omega)$; 证明

$$F(-\omega)=\mathcal{F}[f(-t)](\omega).$$

证明：

$$\begin{aligned}F[f(-t)](\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(-t)\cdot\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t=-\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cdot\mathrm{e}^{i\omega u}\mathrm{d}u\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cdot\mathrm{e}^{-[i\omega\cdot(-u)]}\mathrm{d}u=\int_{-\infty}^{+\infty}f(u)\cdot\mathrm{e}^{-[i(-\omega)\cdot u]}\mathrm{d}u\\&=\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)\cdot\mathrm{e}^{-[i(-\omega)\cdot t]}\mathrm{d}t=F(-\omega).\end{aligned}$$

10. 设 $F(\omega)=F[f](\omega)$，证明：

$$F[f(t)\cdot\cos\omega_0 t](\omega)=\frac{1}{2}\left[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)\right]$$ 以及

$$F[f(t)\cdot\sin\omega_0 t](\omega)=\frac{1}{2}\left[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)\right].$$

证明：

$$\begin{aligned}F[f(t)\cdot\cos\omega_0 t]&=F\left[f(t)\cdot\frac{\mathrm{e}^{i\omega_0 t}+\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}}{2}\right]\\&=\frac{1}{2}\left\{F\left[f(t)\cdot\frac{\mathrm{e}^{i\omega_0 t}}{2}\right]+F\left[f(t)\cdot\frac{\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}}{2}\right]\right\}\\&=\frac{1}{2}\left[F(\omega-\omega_0)+F(\omega+\omega_0)\right]\end{aligned}$$

同理：

$$\begin{aligned}F[f(t)\cdot\sin\omega_0 t]&=F\left[f(t)\cdot\frac{\mathrm{e}^{i\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}}{2i}\right]\\&=\frac{1}{2i}\left\{F\left[f(t)\cdot\mathrm{e}^{i\omega_0 t}\right]-F\left[f(t)\cdot\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}\right]\right\}\\&=\frac{1}{2i}\left[F(\omega-\omega_0)-F(\omega+\omega_0)\right]\end{aligned}$$

11. 设

$$f(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \mathrm{e}^{-t}, & t\geq 0\end{cases}\quad g(t)=\begin{cases}\sin t, & 0\leq \mathrm{t}\leq\frac{\pi}{2}\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

计算 $f*g(t)$.

解： $f*g(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(y)g(t-y)\mathrm{d}y$

当 $t-y\geq o$ 时，若 $t<0,$ 则 $f(y)=0,$ 故

$f*g(t)$=0.

若 $0<t\leq\dfrac{\pi}{2},0<y\leq t,$ 则

$f*g(t)=\int_0^t f(y)g(t-y)\mathrm{d}y=\int_0^t e^{-y}\cdot\sin(t-y)\mathrm{d}y$

若 $t>\dfrac{\pi}{2},0\leq t-y\leq\dfrac{\pi}{2}.\Rightarrow t-\dfrac{\pi}{2}\leq y\leq t.$

则 $f*g(t)=\int_{t-\frac{\pi}{2}}^{t} e^{-y}\cdot\sin(t-y)\mathrm{d}y$

故 $f*g(t)=\begin{cases}0, & t<0\\ \dfrac{1}{2}(\sin t-\cos t+\mathrm{e}^{-t}), & 0<t\leq\dfrac{\pi}{2}\\ \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-t}\left(1+\mathrm{e}^{\frac{\pi}{2}}\right). & t>\dfrac{\pi}{2}\end{cases}$

12. 设 $u(t)$ 为单位阶跃函数，求下列函数的傅里叶变换.

(1) $f(t)=\mathrm{e}^{-at}\sin\omega_0 t\cdot u(t)$

解：
$$\begin{aligned}G(\omega)=F(f)(\omega)&=\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\cdot\sin\omega_0 t\cdot u(t)\cdot\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\cdot\sin\omega_0 t\cdot\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t\\&=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-at}\cdot\frac{\mathrm{e}^{i\omega_0 t}-\mathrm{e}^{-i\omega_0 t}}{2i}\cdot\mathrm{e}^{-i\omega t}\mathrm{d}t\\&=\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left[a+i(\omega-\omega_0)\right]t}\mathrm{d}t-\frac{1}{2i}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\left[a+i(\omega+\omega_0)\right]t}\mathrm{d}t\\&=\frac{\omega_0}{(a+i\omega)^2+\omega_0^{\ 2}}\end{aligned}$$

习题八

1. 求下列函数的拉普拉斯变换.

（1）$f(t)=\sin t\cdot\cos t$，（2）$f(t)=\mathrm{e}^{-4t}$，（3）$f(t)=\sin^2 t$

（4）$f(t)=t^2$，（5）$f(t)=\sinh bt$

解：（1） $f(t)=\sin t\cdot\cos t=\dfrac{1}{2}\sin 2t$

$L(f(t))=\dfrac{1}{2}L(\sin 2t)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{s^2+4}=\dfrac{1}{s^2+4}$

（2） $L(f(t))=\dfrac{1}{2}L(\mathrm{e}^{-4t})=\dfrac{1}{s\ +4}$

（3） $f(t)=\sin^2 t=\dfrac{1-\cos 2t}{2}$

$L(f(t))=L(\frac{1-\cos 2t}{2})=\frac{1}{2}L(1)-\frac{1}{2}(\cos 2t)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{s^2+4}=\frac{2}{s(s^2+4)}$

(4) $L(t^2)=\frac{2}{s^3}$

(5) $L(f(t))=L(\frac{e^{bt}-e^{-bt}}{2})=\frac{1}{2}L(e^{bt})-\frac{1}{2}L(e^{-bt})=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s-b}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{s+b}=\frac{b}{s^2-b^2}$

2. 求下列函数的拉普拉斯变换.

(1) $f(t)=\begin{cases}2,0\le t<1\\1,1\le t<2\\0,t\ge 2\end{cases}$

(2) $f(t)=\begin{cases}\cos t,0\le t<\pi\\0,\quad t\ge\pi\end{cases}$

解：(1)

$L(f(t))=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-st}dt=\int_0^1 2\cdot e^{-st}dt+\int_1^2 e^{-st}dt=\frac{1}{s}(2-e^{-s}-e^{-2s})$

(2) $L(f(t))=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-st}dt=\int_0^{\pi}\cos t\cdot e^{-st}dt=\frac{1}{s}(1+e^{-\pi s})+\frac{1+e^{-\pi s}}{s^2+1}$

3. 设函数 $f(t)=\cos t\cdot\delta(t)-\sin t\cdot u(t)$，其中函数 $u(t)$ 为阶跃函数，求 $f(t)$ 的拉普拉斯变换.

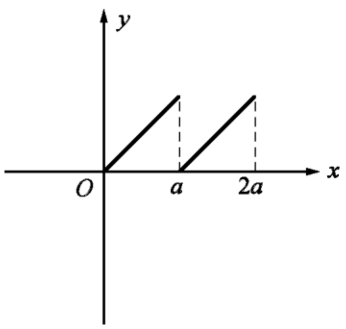
解：

$L(f(t))=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-st}dt=\int_0^{+\infty}\cos t\cdot\delta(t)\cdot e^{-st}dt-\int_0^{+\infty}\sin t\cdot u(t)\cdot e^{-st}dt$

$=\int_{-\infty}^{+\infty}\cos t\cdot\delta(t)\cdot e^{-st}dt-\int_0^{+\infty}\sin t\cdot e^{-st}dt$

$=\cos t\cdot e^{-st}\big|_{t=0}-\frac{1}{s^2+1}=1-\frac{1}{s^2+1}=\frac{s^2}{s^2+1}$

4. 求图 8.5 所表示的周期函数的拉普拉斯变换



解：

$$L(f_T(t))=\frac{\int_0^T f_T(t)\cdot e^{-st}dt}{1-e^{-as}}=\frac{1+as}{s^2}-\frac{a}{s(1-e^{-as})}$$

5. 求下列函数的拉普拉斯变换.

(1) $f(t)=\frac{t}{2l}\cdot\sin lt$ (2) $f(t)=e^{-2t}\cdot\sin 5t$

(3) $f(t)=1-t\cdot e^{t}$ (4) $f(t)=e^{-4t}\cdot\cos 4t$

⑸ $f(t)=u(2t-4)$

⑹ $f(t)=5\sin 2t-3\cos 2t$

(7) $f(t)=t^{\frac{1}{2}}\cdot \mathrm{e}^{\delta t}$ (8) $f(t)=t^2+3t+2$

解：(1)

$$f(t)=\frac{t}{2l}\cdot\sin lt=-\frac{1}{2l}[(-t)\cdot\sin lt]$$

$$F(s)=L(f(t))=L(\frac{t}{2l}\cdot\sin lt)=-\frac{1}{2l}L[(-t)\cdot\sin lt]$$

$$=-\frac{1}{2l}(\frac{l}{s^2+l^2})'=-\frac{1}{2l}\cdot\frac{-2ls}{(s^2+l^2)^2}=\frac{s}{(s^2+l^2)^2}$$

(2) $F(s)=L(f(t))=L(\mathrm{e}^{-2t}\cdot\sin 5t)=\dfrac{5}{(s+2)^2+25}$

(3)$F(s)=L(f(t))=L(1-t\cdot\mathrm{e}^t)=L(1)-L(t\cdot\mathrm{e}^t)=\dfrac{1}{s}+L(-t\cdot\mathrm{e}^t)$

$$=\frac{1}{s}+(\frac{1}{s-1})'=\frac{1}{s}-\frac{1}{(s-1)^2}$$

(4) $F(s)=L(f(t))=L(\mathrm{e}^{-4t}\cdot\cos 4t\ )=\dfrac{s+4}{(s+4)^2+16}$

(5) $u(2t-4)=\begin{cases}1\ ,t>2\\ 0,\text{其他}\end{cases}$

$$F(s)=L(f(t))=L(u(2t-4))=\int_0^{\infty}u(2t-4)\cdot\mathrm{e}^{-st}dt$$

$$=\int_2^{\infty}\mathrm{e}^{-st}dt=\frac{1}{s}\mathrm{e}^{-2s}$$

(6)

$$F(s)=L(f(t))=L(5\sin 2t-3\cos 2t)=5L(\sin 2t)-3L(\cos 2t)$$

$$=5\cdot\frac{2}{s^2+4}-3\cdot\frac{s}{s^2+4}=\frac{10-3s}{s^2+4}$$

(7) $F(s)=L(f(t))=L(t^{\frac{1}{2}}\cdot\mathrm{e}^{\delta t})=\dfrac{\Gamma(1+\frac{1}{2})}{(s-\delta)^{\frac{3}{2}}}=\dfrac{\Gamma(\frac{3}{2})}{(s-\delta)^{\frac{3}{2}}}$

(8) $F(s)=L(f(t))=L(t^2+3t+2)=L(t^2)+3L(t)+2L(1)=\dfrac{1}{s}(2s^2+3s+2)$

6. 记 $L[f](s)=F(s)$，对常数 s_0，若

$\mathrm{Re}(s-s_0)>\delta_0$，证明 $L[\mathrm{e}^{s_0t}\cdot f](s)=F(s-s_0)$

证明:

$$L[e^{s_0 t}\cdot f](s)=\int_0^{\infty}e^{s_0 t}\cdot f(t)\cdot e^{-st}dt$$
$$=\int_0^{\infty}f(t)\cdot e^{(s_0-s)t}dt=\int_0^{\infty}f(t)\cdot e^{-(s-s_0)t}dt=F(s-s_0)$$

7 记 $L[f](s)=F(s)$，证明：$F^{(n)}(s)=L[(-t)^n\cdot f(t)](s)$

证明：当 n=1 时，

$$F(s)=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-st}dt$$

$$F'(s)=[\int_0^{+\infty}f(t)\cdot e^{-st}dt]'$$
$$=\int_0^{+\infty}\frac{\partial[f(t)\cdot e^{-st}]}{\partial s}dt=-\int_0^{+\infty}t\cdot f(t)\cdot e^{-st}dt=-L(t\cdot f(t))$$

所以，当 n=1 时，$F^{(n)}(s)=L[(-t)^n\cdot f(t)](s)$ 显然成立。

假设，当 n=k−1 时，有

$$F^{(k-1)}(s)=L[(-t)^{k-1}\cdot f(t)](s)$$

现证当 n=k 时

$$F^{(k)}(s)=\frac{dF^{(k-1)}(s)}{ds}=\frac{d\int_0^{+\infty}(-t)^{k-1}\cdot f(t)\cdot e^{-st}dt}{ds}$$
$$=\int_0^{\infty}\frac{\partial[(-t)^{k-1}\cdot f(t)\cdot e^{-st}]}{\partial s}dt=\int_0^{+\infty}(-t)^k\cdot f(t)\cdot e^{-st}dt$$
$$=L[(-t)^k\cdot f(t)](s)$$

8. 记 $L[f](s)=F(s)$，如果 a 为常数, 证明:

$$L[f(at)](s)=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

证明：设 $L[f](s)=F(s)$，由定义

$$L[f(at)]=\int_0^{+\infty}f(at)\cdot e^{-st}dt.(\text{令}at=u,t=\frac{u}{a},dt=\frac{du}{a})$$
$$=\int_0^{+\infty}f(u)\cdot e^{-\frac{s}{a}u}\frac{du}{a}=\frac{1}{a}\int_0^{+\infty}f(u)\cdot e^{-\frac{s}{a}u}du$$
$$=\frac{1}{a}F(\frac{s}{a})$$

9. 记 $L[f](s)=F(s)$，证明:

$$L[\frac{f(t)}{t}]=\int_s^{\infty}F(s)ds\text{, 即}\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\cdot e^{-st}dt=\int_s^{\infty}F(s)ds$$

证明：

$$\int_s^{\infty}F(s)ds=\int_s^{+\infty}[f(t)\cdot e^{-st}dt]ds=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot[\int_s^{\infty}e^{-st}ds]dt$$
$$=\int_0^{+\infty}f(t)\cdot[-\frac{1}{t}e^{-st}\Big|_s^{\infty}]dt=\int_0^{+\infty}\frac{f(t)}{t}\cdot e^{-st}dt=L[\frac{f(t)}{t}]$$

10. 计算下列函数的卷积

(1) $1*1$ (2) $t*t$

(3) $t*\mathrm{e}^t$ (4) $\sin at*\sin at$

(5) $\delta(t-\tau)*f(t)$ (6 $\sin at*\sin at$

解：(1) $1*1=\int_0^t 1\cdot 1 d\tau=t$

(2) $t*t=\int_0^t \tau\cdot(t-\tau)d\tau=\frac{1}{6}t^3$

(3)

$$t*\mathrm{e}^t=\int_0^t \tau\cdot \mathrm{e}^{t-\tau}d\tau=\mathrm{e}^t\cdot\int_0^t\tau\cdot\mathrm{e}^{-\tau}d\tau=-\mathrm{e}^t\cdot\int_0^t\tau\cdot d\mathrm{e}^{-\tau}$$

$$=-\mathrm{e}^t[\tau\mathrm{e}^{-\tau}]\Big|_0^t-\int_0^t\mathrm{e}^{-\tau}d\tau=\mathrm{e}^t-t-1$$

(4)

$$\sin at*\sin at=\int_0^t\sin a\tau\cdot\sin a(t-\tau)d\tau=\int_0^t-\frac{1}{2}[\cos at-\cos(2a\tau-at)]d\tau$$

$$=\frac{1}{2a}\sin at-\frac{t}{2}\cos 2at$$

(5)

$$\delta(t-\tau)*f(t)=\int_0^t\delta(t-\tau)\cdot f(t-\tau)d\tau=-\int_0^t\delta(t-\tau)\cdot f(t-\tau)d(t-\tau)$$

$$=-\int_t^0\delta(\tau)\cdot f(\tau)d\tau=\int_0^t\delta(\tau)\cdot f(\tau)d\tau=\begin{cases}0, t<\tau\\ f(t-\tau), 0\le\tau<t\end{cases}$$

(6)

$$\sin t*\cos t=\int_0^t\sin\tau\cdot\cos(t-\tau)d\tau=\frac{1}{2}\int_0^t[\sin t+\sin(2\tau-t)]d\tau$$

$$=\frac{t}{2}\sin t+\frac{t}{2}\int_0^t s\ \mathrm{in}(2\tau-t)d\tau$$

$$=\frac{t}{2}\sin t-\frac{1}{4}\cos(2\tau-t)\Big|_0^t$$

$$=\frac{t}{2}\sin t-\frac{1}{4}[\cos t-\cos(-t)]=\frac{t}{2}\sin t$$

11. 设函数 f, g, h 均满足当 t<0 时恒为零，证明

$f*g(t)=g*f(t)$ 以及

$$(f+g)*h(t)=f*h(t)+g*h(t)$$

证明：

$$f*g(t)=\int_0^t f(\tau)g(t-\tau)\mathrm{d}\tau\xrightarrow{令 t-\tau=u}-\int_t^0 f(t-u)\cdot g(u)\mathrm{d}u$$
$$=\int_0^t f(t-u)\cdot g(u)\mathrm{d}u=\int_0^t g(\tau)\cdot f(t-\tau)\mathrm{d}\tau=g*f(t)$$

$$(f+g)*h(t)=\int_0^t\big(f(\tau)+g(\tau)\big)\cdot h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=\int_0^t f(\tau)\cdot h(t-\tau)\cdot\mathrm{d}\tau+\int_0^t g(\tau)\cdot h(t-\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$=f*h(t)+g*f(t)$$

12. 利用卷积定理证明

$$L[\int_0^t f(t)dt]=\frac{F(s)}{s}$$

证明：设 $g(t)=\int_0^t f(t)dt$ ，则 $g'(t)=f(t),且g(0)=0$

$L[g'(t)]=sL[g(t)]-g(0)=sL[g(t)]$，则

$L[g(t)]=\dfrac{L[g'(t)]}{s}$，所以

$L[\int_0^t f(t)dt]=\dfrac{F(s)}{ds}$

13. 求下列函数的拉普拉斯逆变换.

(1) $F(s)=\dfrac{s}{(s-1)(s-2)}$

(2) $F(s)=\dfrac{s^2+8}{(s^2+4)^2}$

(3) $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}$

(4) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+4)^2}$

(5) $F(s)=\ln\dfrac{s-1}{s+1}$

(6 $F(s)=\dfrac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}$

解：(1) $F(s)=\dfrac{s}{(s-1)(s-2)}=\dfrac{2}{s-2}-\dfrac{1}{s-1}$

$L^{-1}(\dfrac{2}{s-2}-\dfrac{1}{s-1})=2L^{-1}(\dfrac{1}{s-2})-L^{-1}(\dfrac{1}{s-1})=2e^{2t}-e^{t}$

(2)

$F(s)=\dfrac{s^2+8}{(s^2+4)^2}=\dfrac{3}{4}L^{-1}(\dfrac{2}{s^2+4})-\dfrac{1}{2}L^{-1}(\dfrac{s^2-4}{(s^2+4)^2})=\dfrac{3}{4}\sin 2t-\dfrac{1}{2}t\cos 2t$

(3 $F(s)=\dfrac{1}{s(s+1)(s+2)}=\dfrac{1}{2s}-\dfrac{1}{s+1}-\dfrac{1}{2(s+2)}$

故 $L^{-1}(F(s))=\dfrac{1}{2}-e^{-t}+\dfrac{1}{2}e^{-2t}$

(4) $F(s)=\dfrac{s}{(s^2+4)^2}=-\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{-4s}{(s^2+4)^2}=-\dfrac{1}{4}\cdot(\dfrac{2}{s^2+2^2})'$

因为

$$L^{-1}(\frac{2}{s^2+2^2})=\sin 2t$$

所以

$$L^{-1}(F(s))=L^{-1}(-\frac{1}{4}\cdot\frac{s}{(s^2+4)^2})=\frac{t}{4}\sin 2t$$

(5) $F(s)=\ln\frac{s+1}{s-1}=\int_0^{\infty}(\frac{1}{u+1}-\frac{1}{u-1})du=-L(\frac{g(t)}{t})$

其中

$$g(t)=L^{-1}(\frac{1}{s+1}-\frac{1}{s-1})=\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{t}$$

所以

$$F(s)=-L(\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{t}}{t})=L(\frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}{t})$$

$$f(t)=L^{-1}(F(s))=-\frac{\mathrm{e}^{-t}-\mathrm{e}^{t}}{t}=\frac{\mathrm{e}^{t}-\mathrm{e}^{-t}}{t}=2\cdot\frac{sht}{t}$$

(6) $F(s)=\frac{s^2+2s-1}{s(s-1)^2}=-\frac{1}{s}+\frac{2}{s-1}-\frac{2}{(s-1)^2}$

所以

$$L^{-1}(F(s))=L^{-1}(-\frac{1}{s})+L^{-1}(\frac{2}{s-1})-L^{-1}(\frac{2}{(s-1)^2})$$

$$=-1+2\mathrm{e}^{t}+2t\mathrm{e}^{t}=2t\mathrm{e}^{t}+2\mathrm{e}^{t}-1$$

14. 利用卷积定理证明

$$L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)}]=\frac{t}{2a}\cdot\sin at$$

证明：

$$L^{-1}[\frac{s}{(s^2+a^2)^2}]=L^{-1}(\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{a})$$

又因为

$$L(\cos at)=\frac{s}{s^2+a^2},L(\sin at)=\frac{a}{s^2+a^2}$$

所以，根据卷积定理

$$L^{-1}(\frac{s}{s^2+a^2}\cdot\frac{a}{s^2+a^2}\cdot\frac{1}{a})=\cos at*\frac{1}{a}\sin at$$

$$=\int_0^t\cos a\tau\cdot\frac{1}{a}\cdot\sin(at-a\tau)d\tau=\frac{1}{a}\int_0^t\frac{1}{2}[\sin at-\sin(2a\tau-at)]d\tau$$

$$=\frac{t}{2a}\cdot\sin at$$

15. 利用卷积定理证明

$$L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{t}\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-y^2}dy$$

证明：

$$L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}]=L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}}\cdot\frac{1}{s-1}]$$

$$L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}]=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{t}\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-y^2}dy$$

因为

$$L^{-1}(\frac{1}{\sqrt{s}})=\frac{1}{\sqrt{\pi}}t^{-\frac{1}{2}},L^{-1}(\frac{1}{s-1})=\mathrm{e}^{t}$$

所以，根据卷积定理有

$$L^{-1}[\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}]=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\cdot t^{-\frac{1}{2}}*\mathrm{e}^{t}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{t}\mathrm{y}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{(t-y)}dy=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{t}\int_0^{t}\mathrm{y}^{-\frac{1}{2}}\mathrm{e}^{-y}dy$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{t}\int_0^{t}\mathrm{e}^{-y}d\sqrt{y}\xrightarrow{\text{令}\sqrt{y}=u}\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{t}\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-u^2}du^2=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\mathrm{e}^{t}\int_0^{\sqrt{t}}\mathrm{e}^{-y^2}dy$$

16. 求下列函数的拉普拉斯逆变换.

(1) $F(s)=\dfrac{1}{(s^2+4)^2}$ (2) $F(s)=\dfrac{1}{s^4+5s^2+4}$

(3) $F(s)=\dfrac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}$

(4) $F(s)=\dfrac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+3)^2}$

解:(1)

$$F(s)=\frac{1}{(s^2+4)^2}=\frac{1}{16}\cdot\frac{2(s^2+4)}{(s^2+4)^2}-\frac{1}{8}\cdot\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

$$=\frac{1}{16}\cdot\frac{2}{s^2+4}-\frac{1}{8}\cdot\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2}$$

故 $L^{-1}(F(s))=\frac{1}{16}L^{-1}(\frac{2}{s^2+4})-\frac{1}{8}L^{-1}(\frac{s^2-4}{(s^2+4)^2})=\frac{1}{16}\sin 2t-\frac{1}{8}t\cdot\cos 2t$

(2)：

$$F(s)=\frac{1}{s^4+5s^2+4}=\frac{1}{3}(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{s^2+4})$$

$$=\frac{1}{3}(\frac{1}{s^2+1}-\frac{1}{2}\frac{2}{s^2+2^2})$$

$$L^{-1}(F(s))=\frac{1}{3}L^{-1}(\frac{1}{s^2+1})-\frac{1}{6}L^{-1}(\frac{2}{s^2+2^2})$$
$$=\frac{1}{3}\sin t-\frac{1}{6}\sin 2t)$$

(3) $F(s)=\dfrac{s+2}{(s^2+4s+5)^2}=\dfrac{s+2}{[(s+2)^2+1]^2}=-\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{(s+2)^2+1})'$

故 $L^{-1}(F(s))=\dfrac{1}{2}t\cdot e^{-2t}\cdot\sin t$

(4)

$$F(s)=\frac{2s^2+3s+3}{(s+1)(s+3)^2}=\frac{A}{s+1}+\frac{B}{s+3}+\frac{C}{(s+3)^2}+\frac{D}{(s+3)^3}$$
$$\Rightarrow A=\frac{1}{4},B=-\frac{1}{4},C=\frac{3}{2},D=3$$

故

$$F(s)=\frac{\frac{1}{4}}{s+1}+\frac{-\frac{1}{4}}{s+3}+\frac{\frac{3}{2}}{(s+3)^2}+\frac{3}{(s+3)^3}$$

且

$$(\frac{1}{s+3})'=-\frac{1}{(s+3)^2},(\frac{1}{s+3})''=2\cdot\frac{1}{(s+3)^3}$$

所以

$$L^{-1}(F(s))=\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-3t}+\frac{3}{2}t\cdot e^{-3t}-3t^2\cdot e^{-3t}$$

17. 求下列微分方程的解

(1) $y''+2y'-3y=e^{-t},y(0)=0,y'(0)=1$

(2) $y''-y'=4\sin t+5\cos 2t,y(0)=-1,y'(0)=-2$

(3) $y''-2y'+2y=2e^t\cdot\cos 2t,y(0)=y'(0)=0$

(4) $y'''+y'=e^{2t},y(0)=y'(0)=y''(0)=0$

(5) $y^{(4)}+2y''+y=0,y(0)=y'(0)=y'''(0)=0,y''(0)=1$

解：(1) 设

$$L[y(t)]=Y(s),L[(y'(t)]=sY(s)-y(0)=sY(s),$$
$$L[(y''(t)]=s^2Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)-1$$

方程两边取拉氏变换, 得

$$s^2\cdot Y(s)-1+2s\cdot Y(s)-3Y(s)=\frac{1}{s+1}$$

$$(s^2+2s-3)Y(s)=\frac{1}{s+1}+1=\frac{s+2}{s+1}$$

$$Y(s)=\frac{s+2}{(s+1)(s^2+2s-3)}=\frac{s+2}{(s+1)(s-1)(s+3)}$$

$s_1=-1,s_2=1,s_3=-3$ 为 Y(s)的三个一级极点，则

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\sum_{k=1}^{3}\operatorname{Re}s[Y(s)\cdot e^{st};s_k]$$
$$=\operatorname{Re}s[\frac{(s+2)\cdot e^{st}}{(s+1)(s-1)(s+3)};-1]+\operatorname{Re}s[\frac{(s+2)\cdot e^{st}}{(s+1)(s-1)(s+3)};1]$$
$$+\operatorname{Re}s[\frac{(s+2)\cdot e^{st}}{(s+1)(s-1)(s+3)};-3]$$
$$=-\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{3}{8}e^{t}-\frac{1}{8}e^{-3t}$$

(2) 方程两边同时取拉氏变换，得

$$s^2\cdot Y(s)+s+2-Y(s)=4\cdot\frac{1}{s^2+1}+5\cdot\frac{s}{s^2+2^2}$$

$$(s^2-1)Y(s)=4\cdot\frac{1}{s^2+1}+5\cdot\frac{s}{s^2+2^2}-(s+2)$$
$$Y(s)=\frac{4}{(s^2-1)(s^2+1)}+\frac{5s}{(s^2-1)(s^2+2^2)}-\frac{s+2}{(s^2-1)}$$
$$=2(\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2+1})+s\cdot(\frac{1}{s^2-1}-\frac{1}{s^2+2^2})-\frac{s}{s^2-1}-\frac{2}{s^2-1}$$
$$=-\frac{2}{s^2+1}-\frac{s}{s^2+2^2}$$

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=-2\sin t-\cos 2t$$

(3)方程两边取拉氏变换，得

$$s^2\cdot Y(s)-2s\cdot Y(s)+2Y(s)=2\cdot\frac{s-1}{(s-1)^2+1}$$

$$(s^2-2s+2)Y(s)=\frac{2(s-1)}{(s-1)^2+1}$$
$$Y(s)=\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}=-[\frac{1}{(s-1)^2+1}]'$$

因为由拉氏变换的微分性质知，若 L[f(t)]=F(s)，则

$$L[(-t)\cdot f(t)]=F'(s)$$

即

$$L^{-1}[F'(s)]=(-t)\cdot f(t)=(-t)\cdot L^{-1}[F(s)]$$

因为 $L^{-1}[\frac{1}{(s-1)^2+1}]=e^t\cdot\sin t$

所以

$$L^{-1}\{\frac{2(s-1)}{[(s-1)^2+1]^2}\}=-L^{-1}[(\frac{1}{(s-1)^2+1})']$$
$$=-(-t)L^{-1}[\frac{1}{(s-1)^2+1}]=t\cdot e^t\cdot\sin t$$

故有 $y(t)=t\cdot e^t\cdot\sin t$

(4)方程两边取拉氏变换,设 L[y(t)]=Y(s),得

$$s^3\cdot Y(s)-s^2\cdot y(0)-s\cdot y'(0)-y''(0)+s\cdot Y(s)-y(0)=\frac{1}{s-2}$$
$$s^3\cdot Y(s)+s\cdot Y(s)=\frac{1}{s-2}$$
$$Y(s)=\frac{1}{s-2}\cdot\frac{1}{s(s^2+1)}=\frac{1}{s(s-2)(s^2+1)}$$

故

$$y(t)=L^{-1}[Y(s)]=\frac{1}{4}e^{-t}-\frac{1}{4}e^{-2t}+\frac{3}{2}t\cdot e^{-3t}-3t^2\cdot e^{-3t}$$

(5)设 L[y(t)]=Y(s),则

$$L[(y'(t)]=sY(s)-y(0)=sY(s),$$
$$L[(y''(t)]=s^2\cdot Y(s)-sy(0)-y'(0)=s^2Y(s)$$
$$L[(y'''(t)]=s^3\cdot Y(s)-s^2\cdot y(0)-sy'(0)-y''(0)=s^3Y(s)-1$$
$$L[(y^{(4)}(t)]=s^4\cdot Y(s)-s^3\cdot y(0)-s^2\cdot y'(0)-sy''(0)-y'''(0)=s^4\cdot Y(s)-s$$

方程两边取拉氏变换,,得

$$s^4\cdot Y(s)-s+2s^2\cdot Y(s)+Y(s)=0$$
$$(s^4+2s^2+1)\cdot Y(s)=s$$
$$Y(s)=\frac{s}{(s^2+1)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2s}{(s^2+1)^2}=-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{s^2+1})'$$

故

$$y(t)=L^{-1}[\frac{s}{(s^2+1)^2}]=L^{-1}[-\frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{s^2+1})']=\frac{1}{2}t\cdot\sin t$$

18.求下列微分方程组的解

(1) $\begin{cases}x'+x-y=e^t\\ y'+3x-2y=2\cdot e^t\end{cases}$ $\quad x(0)=y(0)=1$

(2) $\begin{cases}x'-2y'=g(t)\\ x''-y''+y=0\end{cases}$ $\quad x(0)=x'(0)=y(0)=y'(0)=0$

解:(1) 设

$$
\begin{aligned}
&L[(x(t)]=X(s),L[(y(t)]=Y(s)\\
&L[(x'(t)]=s\cdot X(s)-x(0)=s\cdot X(s)-1\\
&L[(y'(t)]=s\cdot Y(s)-y(0)=s\cdot Y(s)-1,
\end{aligned}
$$

微分方程组两式的两边同时取拉氏变换, 得

$$
\begin{cases}
s\cdot X(s)-1+X(s)-Y(s)=\dfrac{1}{s-1}\\
s\cdot Y(s)-1+3X(s)-2Y(s)=\dfrac{2}{s-1}
\end{cases}
$$

得

$$
\begin{cases}
Y(s)=(s+1)X(s)-\dfrac{s}{s-1}\ldots(1)\\
3X(s)-(s-2)\cdot Y(s)=\dfrac{2}{s-1}+1=\dfrac{s+1}{s-1}\ldots(2)
\end{cases}
$$

(2)代入(1)，得

$$3X(s)+(s-2)\cdot[(s+1)X(s)-\frac{s}{s-1}]=\frac{s+1}{s-1}$$

$$(s^2-s+1)X(s)=\frac{s+1}{s-1}+\frac{s(s-2)}{s-1}=\frac{s^2-s+1}{s-1}$$

故$X(s)=\dfrac{1}{s-1}$　于是有$x(t)=\mathrm{e}^t\ldots(3)$

(3)代入(1)，得

$$Y(s)=(s+1)\cdot\frac{1}{s-1}-\frac{s}{s-1}=\frac{1}{s-1}\Rightarrow y(t)=\mathrm{e}^t$$

(2)设

$$
\begin{aligned}
&L[(x(t)]=X(s),L[(y(t)]=Y(s),L[(g(t)]=G(s)\\
&L[(x'(t)]=s\cdot X(s),L[(y'(t)]=s\cdot Y(s)\\
&L[(x''(t)]=s^2\cdot X(s),L[(y''(t)]=s^2\cdot Y(s),
\end{aligned}
$$

方程两边取拉氏变换, 得

$$
\begin{cases}
s\cdot X(s)-2s\cdot Y(s)=G(s)\ldots(1)\\
s^2\cdot X(s)-s^2\cdot Y(s)+Y(s)=0\ldots(2)
\end{cases}
$$

$(1)\cdot s-(2)$,得

$$Y(s)=-\frac{s}{s^2+1}\cdot G(s)\ldots(3)$$

$$\therefore y(t)=L^{-1}[Y(s)]=-g(t)*\cos t=-\int_0^t g\tau\cos(t-\tau)d\tau$$

(3)代入(1)：

$$s\cdot X(s)-2s\cdot[-\frac{s}{s^2+1}\cdot G(s)]=G(s)$$

即：

$$s\cdot X(s)=(1-\frac{2s^2}{s^2+1})G(s)=\frac{1-s^2}{s^2+1}\cdot G(s)$$

$$X(s)=\frac{1-s^2}{s\left(s^2+1\right)}G(s)=\left(\frac{1}{s}-\frac{2s}{1+s^2}\right)\cdot G(s)$$

所以

$$\therefore x(t)=L^{-1}[X(s)]=(1-2\cos t)*g(t)=\int_0^t(1-2\cos\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$$

故

$$x(t)=\int_0^t(1-2\cos\tau)\cdot g(t-\tau)d\tau$$

$$y(t)=-\int_0^t g(\tau)\cdot\cos(t-\tau)d\tau$$

19. 求下列方程的解

(1) $x(t)+\int_0^t x(t-\omega)\,e^{\omega}d\omega=2t-3$

(2) $y(t)-\int_0^t(t-\omega)\cdot y(\omega)d\omega=t$

解：(1)设 L[x(t)]=X(s), 方程两边取拉氏变换,得

$$X(s)+X(s)\cdot\frac{1}{s-1}=\frac{2}{s^2}-\frac{3}{s}$$

$$X(s)[1+\frac{1}{s-1}]=\frac{2-3s}{s^2}$$

$$X(s)=\frac{(2-3s)(s-1)}{s^3}=\frac{-3s^2+5s-2}{s^3}=-\frac{3}{s}+\frac{5}{s^2}-\frac{2}{s^3}$$

$$\Rightarrow x(t)=-3+5t-t^2$$

(2)设 L[y(t)]=Y(s), 方程两边取拉氏变换,得

$$Y(s)-L(t*y(t))=\frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)-\frac{1}{s^2}\cdot Y(s)=\frac{1}{s^2}$$

$$Y(s)=\frac{1}{s^2-1}$$

$$\Rightarrow y(t)=L^{-1}(Y(s))=L^{-1}(\frac{1}{s^2-1})=sht$$