§15.2　含参变量反常积分及一致收敛判别法

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 设

$$f(x,y)=\frac{y}{y^2+x^2}\qquad (x,y)\in[0,+\infty)\times(0,+\infty).$$

试确定参变量无穷限积分 $\varphi(y)=\int_0^{+\infty}f(x,y)\mathrm{d}x$ 的收敛区间 J, 并用定义证明 $\varphi(y)$ 在 J 的任何形如 $(0,B]$ 的区间中一致收敛, 其中 b 是任意的正常数.

解: 对于 $y>0$, 利用变量变换, 容易算出含参变量无穷限积分 $\varphi(y)$ 的值为 $\pi/2$, 故 $\varphi(y)$ 的收敛区间 $J=(0,+\infty)$. 当 $y\in(0,B]$, 因为

$$\begin{aligned}\left|\varphi(y)-\int_0^G\frac{y}{y^2+x^2}\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_G^{+\infty}\frac{y}{y^2+x^2}\mathrm{d}x\right|\\ &= \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{x=G}^{x=+\infty}\\ &= \frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{G}{y}\right)\\ &\le \frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{G}{B}\right),\end{aligned}$$

因此对于任意的 $\epsilon>0$, 选取 G 足够大, 可以使得 $\pi/2-\arctan(G/B)<\epsilon$. 因此对于任意的 $G'>G$ 和 $y\in(0,B]$, 也有

$$\left|\varphi(y)-\int_0^{G'}\frac{y}{y^2+x^2}\mathrm{d}x\right|\le\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{G'}{B}\right)\le\frac{\pi}{2}-\arctan\left(\frac{G}{B}\right)<\epsilon.$$

根据一致收敛的定义, 知 $\varphi(y)$ 关于 $y\in(0,B]$ 一致收敛. □

例 2 讨论参变量无穷限积分 $\varphi(y)$, 收敛区间 $J=(0,+\infty)$ 上的一致收敛性:

$$\varphi(y)=\int_0^{+\infty}\frac{y}{y^2+x^2}\mathrm{d}x,\quad y>0.$$

解: 含参变量无穷限积分 $\varphi(y)$, 收敛区间 $J=(0,+\infty)$ 上是不一致收敛的. 因为可以选取 $\epsilon_0=\pi/12>0$. 对于任意大的 $G_1>0$, 可以令 $G_2=\sqrt{3}G_1$, 则只要取 $y=G_1$, 不难看出

$$\begin{aligned}\int_{G_1}^{G_2}\frac{y}{y^2+x^2}\mathrm{d}x &= \arctan\left(\frac{x}{y}\right)\Big|_{x=G_1}^{x=G_2}\\ &= \arctan\left(\frac{G_2}{G_1}\right)-\arctan\left(\frac{G_1}{G_1}\right)\\ &= \arctan\sqrt{3}-\arctan 1=\frac{\pi}{12}=\epsilon_0.\end{aligned}$$

因此根据不一致收敛的 Cauchy 准则在 $\varphi(y)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛. □

例 3 *定义如下两个含参变量无穷限积分:*

$$\varphi(x)=\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\mathrm{d}y, \qquad \psi(y)=\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\mathrm{d}x.$$

证明: (1) $\varphi(x)$ 在区间 $J=[0,+\infty)$ 中一致收敛; (2) 对于任意的 $\epsilon>0$ 在 $\psi(y)$ 在 $[\epsilon,+\infty)$ 中一致收敛.

解: 记 $f(x,y)=y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}$.

(1) 积分 $\varphi(x)$ 关于 $x\in[0,+\infty)$ 一致收敛. 事实上, 因为

$$|f(x,y)|=y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\le y\mathrm{e}^{-y^2}, \quad \forall x\in[0,+\infty),$$

且反常积分 $\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-y^2}\mathrm{d}y$ 是收敛的, 因此根据 M 判别法, 得积分 $\varphi(x)=\int_0^{+\infty} y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\mathrm{d}y$ 关于 $x\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的.

(2) 对于任意的 $\epsilon>0$, 积分 $\psi(y)$ 关于 $y\in[\epsilon,+\infty)$ 一致收敛, 因为

$$0\le y\mathrm{e}^{-(1+x^2)y^2}\le\left(\max_{y\ge 0} y\mathrm{e}^{-y^2}\right)\mathrm{e}^{-\epsilon^2x^2}=\frac{\mathrm{e}^{-(\epsilon x)^2}}{\sqrt{2e}}, \quad \forall x\ge 0, y\ge\epsilon.$$

且反常积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-(\epsilon x)^2}\mathrm{d}x$ 是收敛的, 因此根据 M 判别法, 得 $\psi(y)$ 关于 $y\in[\epsilon,+\infty)$ 一致收敛. □

例 4 *证明: 无穷限积分*

$$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \quad y\in[0,+\infty),$$

在区间 $J=[0,+\infty)$ 上是一致收敛的.

证明. 记 $f(x,y)=\sin x$ 在 $g(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}/x$. 来验证定理 **??** 的三个条件. 首先在 $g(x,y)$ 是 x 的单调减函数, 因为

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}g(x,y)=\frac{d}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{x}=\frac{-\mathrm{e}^{-xy}(1+xy)}{x^2}<0.$$

因此条件 (1) 满足. 又当 $y\ge 0$ 时,

$$\frac{\mathrm{e}^{-xy}}{x}\le\frac{1}{x}.$$

即当 $x\to+\infty$ 时在 $g(x,y)$ 关于 $y\in J$ 一致趋于零, 所以条件 (2) 成立. 最后对于任意的 $b>0$, 对于 $y\in J$, 一致地有

$$\left|\int_0^b f(x,y)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^b\sin x\mathrm{d}x\right|=|1-\cos b|\le 2.$$

即条件 (3) 也成立. 于是根据一致收敛的 Dirichlet 判别法, 含参变量无穷限积分 $I(y)$ 在区间 $J=[0,+\infty)$ 上是一致收敛的. ∎

例 5 *用一致收敛的 Abel 判别法, 即定理 **??** 证明无穷限积分*

$$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x, \quad y\in[0,+\infty)$$

在区间 $J=[0,+\infty)$ 上是一致收敛的.

证明. 记 $f(x,y)=\sin x/x$ 在 $g(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$. 来验证定理 **??** 的三个条件. 首先, 当 $y\geq 0$ 时 $g(x,y)=\mathrm{e}^{-xy}$ 是 x 的单调减函数, 且

$$|g(x,y)|=\mathrm{e}^{-xy}\leq 1,\qquad x\geq 0.$$

因此条件 (1) 和 (2) 都满足. 进而在 $f(x,y)=\sin x/x$ 与 y 无关, 积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$$

收敛, 因此关于 $y\in[0,+\infty)$ 一致收敛, 即条件 (3) 成立. 根据 Abel 一致收敛判别法, 含参变量无穷限积分 $I(y)$ 在区间 $J=[0,+\infty)$ 上是一致收敛的. ∎

思考题

思考题

1. 为什么 M 判别法的结论是含参变量反常积分绝对一致收敛?

证明. 由 M 判别法的证明显然可以看出。 ∎

2. 如果 $g(x,t)=h(x)$, 一致收敛的 Dirichlet 判别法应该怎样叙述?

证明. 设 ∎

3. 如果 $g(x,t)=h(x)$, 一致收敛的 Abel 判别法应该怎样叙述?

证明. ∎

4. 含参变量反常积分 $I(t)=\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 在区间 J 上一致收敛, 能否得出 $I(t)$ 在 J 上是绝对收敛的?

证明. ∎

5. 含参变量反常积分 $I(t)=\displaystyle\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 在区间 J 上一致收敛, 能否得出 $f(x,t)$ 在 J 上一定能被一个可积函数所控制?

证明. ∎

习题

1. 证明: 积分

$$\psi(t)=\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x$$

在区间 $[0,+\infty)$ 上收敛, 但不一致收敛.

证明. 先证明 $\psi(t)$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上收敛

(1) 当 $t=0$ 时, $\psi(t)=\int_0^{+\infty}=0$;

(2) 当 $t \in (0, +\infty)$ 时,

$$\begin{aligned} \psi(t) &= \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}(-xt) \\ &= -\mathrm{e}^{-xt}|_0^{+\infty} = 1. \end{aligned}$$

综上

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

所以 $\psi(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上收敛.

再证明 $\psi(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上不一致收敛:

解法一 $\exists \epsilon_0 = \mathrm{e}$, 使得对 $\forall G > 0$, $\exists G' = G + 1 > G, t_0 = \dfrac{1}{G'} \in (0, +\infty)$ 使得

$$\begin{aligned} |\psi(t)| &= \left| \int_{G'}^{+\infty} t\mathrm{e}^{-xt}\mathrm{d}x \right| \\ &= \left| -\mathrm{e}^{-xt} \,|_{G'}^{+\infty} \right| \\ &= \left| \mathrm{e}^{(G't)} \right| \\ &> \mathrm{e} = \epsilon_0. \end{aligned}$$

因此, 根据不一致收敛 Cauchy 准则, $\psi(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上不一致收敛.

解法二 因为 $t\mathrm{e}^{-xt}$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 为连续函数, 而

$$\psi(t) = \begin{cases} 0, & t = 0, \\ 1, & t \in (0, +\infty). \end{cases}$$

则 $\psi(t)$ 在 $t \in [0, +\infty)$ 不连续, 则有 118 页连续性定理知, $\psi(t)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上不一致收敛. ∎

2. 判断下列含参变量无穷限积分在所给定区间上的一致收敛性:

(1) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x^2}\mathrm{d}x$ 在 $t \in (-\infty, +\infty)$;

(2) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{1 + (x + t)^2}\mathrm{d}x$ 在 $t \in [0, +\infty)$;

(3) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{1 + x^p}\mathrm{d}x$ 在 $t \in (-\infty, +\infty)$, $(p > 1)$;

(4) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}x$ 在 $t \in (-\infty, +\infty)$;

解: (1) 积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x^2}\mathrm{d}x$ 关于 $t \in (-\infty, +\infty)$ 一致收敛. 事实上, 因为

$$|f(x, y)| = \left| \frac{\sin(tx)}{x^2} \right| \leqslant \frac{1}{x^2}, \quad \forall t \in (-\infty, +\infty),$$

且反常积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$ 是收敛的, 因此根据 M 判别法, 得积分 $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(tx)}{x^2}\mathrm{d}x$ 关于 $t \in (-\infty, +\infty)$ 是一致收敛的.

(2) 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+(x+t)^2}\mathrm{d}x$ 在 $t\in[0,+\infty)$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛. 事实上, 因为

$$|f(x,y)|=\left|\frac{1}{1+(x+t)^2}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^2},\quad\forall t\in[0,+\infty),$$

且反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 是收敛的, 因此根据 M 判别法, 得积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{1+(x+t)^2}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 是一致收敛的.

(3) 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{1+x^p}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in(-\infty,+\infty)$ 一致收敛. 事实上, 因为

$$|f(x,y)|=\left|\frac{\sin(xt)}{1+x^p}\right|\leqslant\frac{1}{1+x^p}\leqslant\frac{1}{x^p},\quad\forall t\in(-\infty,+\infty),$$

且反常积分 $\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x(p>1)$ 是收敛的, 因此根据 M 判别法, 得积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{1+x^p}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in(-\infty,+\infty)$ 是一致收敛的.

(4) 积分 $\int_1^{+\infty}\cos(xt)\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in(-\infty,+\infty)$ 一致收敛. 事实上, 因为

$$|f(x,y)|=\left|\cos(xt)\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\right|\leqslant\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\leqslant\mathrm{e}^{-x},\quad\forall t\in(-\infty,+\infty),$$

且反常积分 $\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}x$ 是收敛的, 因此根据 M 判别法, 得积分 $\int_1^{+\infty}\cos(xt)\mathrm{e}^{-x(1+t^2)}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in(-\infty,+\infty)$ 是一致收敛的.

□

3. 证明: 积分

$$\psi(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$$

在区间 $[0,+\infty)$ 上收敛, 但不一致收敛.

证明. (i) 当 $\beta=0$ 时, $\psi(0)\int_0^{+\infty}0\mathrm{d}x=0$,

(ii) 当 $\beta\in(0,+\infty)$ 时, $\forall\beta_0\in(0,+\infty)$,

$$\psi(\beta_0)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta_0 x}{x}\mathrm{d}x=\beta_0\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta_0 x}{\beta_0 x}\mathrm{d}x.$$

因为 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{d}x$, 所以 $\psi(\beta_0)$ 收敛.

综上, 积分

$$\psi(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$$

在区间 $[0,+\infty)$ 上收敛.

下证, 积分

$$\psi(\beta)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x$$

在区间 $[0,+\infty)$ 不一致收敛.

对 $\exists\epsilon_0=\dfrac{1}{2\pi+\frac{\pi}{2}},\forall G>0,\exists\beta=\dfrac{2\pi}{G'},\exists G'=G+1,G"=\dfrac{2\pi+\frac{\pi}{2}}{\beta}>G'$, 使得

$$\begin{aligned}\left|\int_{G'}^{G''}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x\right| &\geqslant \frac{1}{\beta G''}\left|\int_{G'}^{G''}\sin\beta x\mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{1}{\beta G''}\left|-\cos\beta x|_{G'}^{G''}\right| \\ &= \frac{1}{\beta G''}\left|\cos\beta G'-\cos\beta G''\right| \\ &= \frac{1}{\beta G''}(1-0) \\ &= \frac{1}{2\pi+\frac{\pi}{2}} \\ &= \epsilon_0.\end{aligned}$$

结论得证.

对于正整数 n, 取 $\beta=\dfrac{1}{n}$, 这时

$$\begin{aligned}\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\frac{\sin\frac{1}{n}x}{x}\mathrm{d}x\right| \\ &> \frac{1}{\frac{3}{2}n\pi}\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\sin\frac{1}{n}x\mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{2}{3\pi}.\end{aligned}$$

只要取 $\epsilon_0=\dfrac{2}{3\pi}$, 则对 $\forall G>0,\exists n\in N_+$, 满足 $n\pi>G$, 取 $\beta=\dfrac{1}{n}$, 这时

$$\left|\int_{n\pi}^{\frac{3}{2}n\pi}\frac{\sin\beta x}{x}\mathrm{d}x\right|>\frac{2}{3\pi}=\epsilon_0,$$

于是由不一致收敛的 Cauchy 收敛准则结论得证. ∎

---

4. 证明: 对于 $a>0$, 含参变量无穷限积分 $I(p)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x\sin(px)}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 关于 $p\in[a,+\infty)$ 一致收敛.

证明. 记 $f(x,p)=\sin px$ 在 $g(x,p)=\dfrac{x}{1+x^2}$. 来验证定理 **??** 的三个条件. 首先对每个 $p\geqslant a$, $g(x,p)$ 是 $x\in[1,+\infty)$ 的单调减函数, 因为

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}g(x,y)=\frac{d}{\mathrm{d}x}\frac{x}{1+x^2}=\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}<0.$$

又当 $p\geqslant a$ 时,

$$\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}.$$

即当 $x\to+\infty$ 时在 $g(x,p)$ 关于 $p\in[a,+\infty)$ 一致趋于零. 最后对于任意的 $b>1$, 对于 $p\in[a,+\infty)$, 一致地有

$$\left|\int_1^b f(x,p)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_1^b\sin px\mathrm{d}x\right|=|\frac{1}{p}-\frac{\cos b}{p}|\leq\frac{2}{a}.$$

即条件 (1) 存在正常数 M, 使得 $\left|\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\right| \leqslant M$ 对于所有的 b 满足 $a<b<+\infty$ 和 $t\in J$也成立. 于是根据一致收敛的 Dirichlet 判别法, 含参变量无穷限积分 $I(p)$ 在区间 $p\in[a,+\infty)$ 上是一致收敛的. ∎

5. 设 $f(x,t)$ 在 $[a,+\infty)\times J(a>0)$ 上连续且积分 $\phi(x,t)=\int_a^x f(\tau,t)\mathrm{d}\tau$ 在 $[a,+\infty)\times J$ 上有界. 证明: 含参变量无穷积分 $I(t)=\int_a^{+\infty}\dfrac{f(x,t)}{x^\lambda}\mathrm{d}x(\lambda>0)$ 在区间 J 上一致收敛.

证明. 记 $g(x,t)=\dfrac{1}{x^\lambda}(\lambda>0)$. 来验证定理 **??** 的三个条件. 首先对每个 $t\in J$, $g(x,t)$ 是 $x\in[a,+\infty)$ 的单调减函数, 因为

$$\frac{d}{\mathrm{d}x}g(x,y)=\frac{d}{\mathrm{d}x}\frac{1}{x^\lambda}=-\lambda x^{-1-\lambda}<0.$$

所以 $g(x,t)$ 是 $x\in[a,+\infty)$ 的单调减函数又当 $t\in J$ 时,

$$\frac{x}{1+x^2}\leq\frac{x}{x^2}=\frac{1}{x}.$$

即当 $x\to+\infty$ 时在 $g(x,t)$ 关于 $t\in J$ 一致趋于零.

最后因为 $\int_a^x f(\tau,t)\mathrm{d}\tau$ 在 $[a,+\infty)\times J$ 上有界, 所以有对于任意的 $b>1$, 对于 $t\in J$, 一致地有

$$\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x$$

有界, 即条件 (1) 存在正常数 M, 使得 $\left|\int_a^b f(x,t)\mathrm{d}x\right| \leqslant M$ 对于所有的 b 满足 $a<b<+\infty$ 和 $t\in J$也成立. 于是根据一致收敛的 Dirichlet 判别法, 含参变量无穷限积分 $I(t)$ 在区间 J 上是一致收敛的. ∎