数学分析讲义学习辅导书

（第二版）

下　　册

刘玉琏　杨奎元　刘　伟　吕　凤　编

高等教育出版社

策划编辑　李　蕊
责任编辑　文小西
封面设计　刘晓翔
责任绘图　宗小梅
版式设计　张　岚
责任校对　王效珍
责任印制

图书在版编目(CIP)

数学分析讲义学习辅导书．下册/ 刘玉琏等编．—2版．—北京：高等教育出版社，2003.12

ISBN 7 - 04 - 012940 - X

Ⅰ．数…　Ⅱ．刘…　Ⅲ．数学分析 - 高等学校 - 教学参考资料　Ⅳ．O17

中国版本图书馆 CIP 数据核字

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010 - 64054588
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	免费咨询	800 - 810 - 0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010 - 82028899		
经　　销	新华书店北京发行所		
印　　刷			
		版　　次	1987 年 10 月第 1 版
开　　本	850×1168　1/32		年　月　第 2 版
印　　张	13.625	印　　次	年　月 第　次印刷
字　　数	350 000	定　　价	17.20 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

目　　录

第九章　级　　数

§9.1　数 值 级 数

一、基本内容

本节有五段.

第一段借助于级数部分和数列的收敛和发散的概念相应地给出了级数的收敛和发散的定义.这是本节讨论级数的基础.

第二段给出了与收敛数列平行的收敛级数的两个性质:柯西收敛准则

$$\sum_{n=1}^{\infty}(au_n+bv_n)=a\sum_{n=1}^{\infty}u_n+b\sum_{n=1}^{\infty}v_n,\quad a\text{ 与 }b\text{ 是常数}.$$

第三段给出了同号级数

项级数收敛的必要充分条件是它的部分和数列有界

此出发得到了比较判别法

基础上给出了柯西判别法

第四段给出了级数绝对收敛与条件收敛的定义.判别级数绝对收敛只需应用第三段正项级数的判别法.判别级数条件收敛给出了狄利克雷判别法

特殊的变号级数——交错级数的收敛性有莱布尼茨判别法

9)

一般来说,级数不像有限和那样满足结合律、交换律和分配律.第五段给出了,若级数收敛,则它满足结合律;若级数绝对

收敛，则它满足交换律和分配律

二、学习要求

研究级数及其和数只不过是研究数列及其极限的一种新形式．这种新形式丰富和发展了研究数列的内容和方法，并为进一步研究函数级数和其它数学理论提供了有利的工具．要求：

1. 掌握级数收敛和发散的定义，理解其意义，并熟练地掌握判别级数敛散性的判别法．记住几何级数 $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$ 和广义调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性．

2. 掌握收敛级数和绝对收敛级数的性质及其证明方法．

3. 具有应用级数的敛散定义和收敛级数的性质证明级数中一些理论问题的能力．

三、答疑辅导

问 1. 为什么要学习级数？

答　这个问题在本章的引言中已作了简要的说明．再详述如下：

我们在本书的前八章

虽然初等函数能够描述许多自然现象和工程技术中的客观规律，但是，只有初等函数还远远不能满足描述客观规律的需要．为了使数学分析所讨论的函数能广泛地服务于科学技术和数学理论本身，人们借助于极限、函数方程、微分和积分等工具表述了更多的非初等函数．函数级数就是表述非初等函数的一个重要工具．例如，二阶线性常微分方程

$$xy'' + y' + xy = 0$$

的解就不是初等函数，而这个解却可用函数级数

$$y \quad x) = a_0 \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}}$$

表示 §9.3 问 5)

因为函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $x = x_0$,就是一个数值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$

就是本节要讨论的问题 .

讨论数值级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$,核心问题是何谓级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的“和”?至今我们还不知道什么是无限多个数的“和”,因此需要予以定义 .从有限和

义是很自然的,即无限和 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 应该是有限和 S_n 的极限

$\lim_{n\to\infty} S_n$ $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$.于是,级数与数列就等同起来,即

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \qquad \{S_n\} \qquad 其中\ S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k,$$

$$\{S_n\} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} u_n, \quad 其中\ u_n = S_n - S_{n-1}\ (S_0 = 0)$$

因此,研究级数及其和数只不过是研究数列及其极限的一种新形式 .

数值级数除了服务于函数级数外,它可表示无理数,从而能近似地计算无理数,等等 .

问 2. 正项(同号)

是什么 ? 判别法之间有什么关系 ?

答 正项级数收敛的必要充分条件是它的部分和数列有界 . 这就是正项级数敛散性判别法的理论基础 . 在此基础上得到一些敛散性判别法,而每种判别法都有两种形式:不等式形式与极限形式 . 下面为了书写简单,约定:

$$正项级数\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n\ 用\quad u)$$

正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 用 $v)$

比较判别法

v $N\in\mathbf{N}_+$, " $n\geq N$, v $c>0$, 有

$$u_n\leq cv_n .$$

1) 若 $v)$ $u)$

2) 若 $u)$ $v)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k \quad 0\leq k\leq+\infty)$$

1) 若 $v)$ $k\neq+\infty$, 则 $u)$

2) 若 $v)$ $k\neq 0$, 则 $u)$

以比较判别法为基础将 (v) $\sum_{n=1}^{\infty} q^n$, 即将 $u)$

柯西判别法

1) 若v $N\in\mathbf{N}_+$, " $n\geq N$, 有

$$u_n\leq q^n \text{ 或 } \sqrt[n]{u_n}\leq q,$$

且 $q<1$, 则 (u) 收敛 .

2) 若 " $n\in\mathbf{N}_+$, v $m>n$, 有

$$\sqrt[m]{u_m}\geq 1,$$

则 (u) 发散 .

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l,$$

1) 若 $l<1$, 则 $u)$收敛 .

2) 若 $l>1$, 则(u)

达朗贝尔判别法

1) $N\in\mathbf{N}_+$, " $n\geq N$, 有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leq q \text{ 或 } u_{n+1}\leq qu_n ,$$

且 $q<1$, 则 $u)$

2) 若v $N\in\mathbf{N}_+$, " $n\geq N$, 有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geq 1,$$

则 $u)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l,$$

1) 若 $l<1$, 则 $u)$

2) 若 $l>1$, 则 $u)$

虽然柯西判别法与达朗贝尔判别法都是与几何级数比较得到

的，但是两者也略有区别．由练习题§2.2 第 24 题的(1)

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$，即判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性，若能够用达朗贝尔判别法，也一定能够用柯西判别法．反之，能够用柯西判别法，但不一定能用达朗贝尔判别法．例如，判别正项级数

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^4}+\cdots+\frac{1}{2^{2n-1}}+\frac{1}{3^{2n}}+\cdots$$

的敛散性．若用柯西判别法，有

$$\sqrt[n]{u_n}=\begin{cases}\frac{1}{2}, & \text{当 } n \text{ 是奇数},\\ \frac{1}{3}, & \text{当 } n \text{ 是偶数}.\end{cases}$$

即" $n\in\mathbf{N}_+$，$\sqrt[n]{u_n}\leq\frac{1}{2}$，则该级数收敛．

用达朗贝尔判别法，有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\begin{cases}\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^n<1, & \text{当 } n \text{ 是奇数},\\ \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^n>1, & \text{当 } n \text{ 是偶数}.\end{cases}$$

即用达朗贝尔判别法判别这个级数的敛散性失效．

当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$ 时，柯西判别法

判别法) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1>q$ $0<q<1)$

即v $N\in\mathbf{N}_+$，" $n>N$，有 $\sqrt[n]{u_n}>q$ 或 $u_n>q^n$；另一方面，当 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=1<r$ $r>1)$ $N\in\mathbf{N}_+$，" $n>N$，有 $\sqrt[n]{u_n}<r$ 或 $u_n<r^n$，所以此时，将级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 与几何级数比较不能判别级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 的敛散性．这说明应用几何级数这把“尺子”不能“测量”所有正项级数的敛散性，即几何级数这把“尺子”的“精度”不够．人

们发现广义调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 是比几何级数“精度”更高的一把“尺子”.于是,将正项级数与广义调和级数比较,得到新的更进一步的判别法——拉阿伯(Raabe)判别法,即判别某些正项级数敛散性应用柯西判别法失效,但是应用拉阿伯判别法却能判别其敛散性.(见本节补充例题的例 7)

几何级数这把“尺子”的“精度”更高,但是它仍然不能“测量”所有正项级数的敛散性.人们又发现级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 是比广义调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$“精度”更高的一把“尺子”.于是,将正项级数与级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 比较,又得到新的更进一步的判别法,同样,这个判别法也不能“测量”所有正项级数的敛散性.人们又发现级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ 是比级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$“精度”更高的一把“尺子”,等等.因为“尺子”的“精度”愈来愈高,相应的判别法的形式也愈来愈复杂,一般说来,这些判别法也就失去了判别级数敛散性的实用价值.在理论上,这种“精确化”的过程是没有尽头的,即不存在判别所有正项级数敛散性的万能判别法.下面的问 3 和问 4 是从另一个方面回答了这个问题.

问 3. 何谓一个收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 比另一个收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛得较慢?是否存在收敛最慢的正项级数?

答 在级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 中去掉前 m 项,即

$$R_m = u_{m+1} + u_{m+2} + \cdots$$

称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的 m 项余式或 m 项余和.

我们知道，若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则 $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$.

设收敛正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 m 项余式分别是 A_m 与 B_m . 若 A_m 比 B_m 是高阶无穷小 $m\to\infty)$

$$\lim_{m\to\infty}\frac{A_m}{B_m}=0,$$

称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛得较慢(即 B_m 趋向于 0 的速度比 A_m 趋向于 0 的速度较慢) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛得较快 .

例如，有两个收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$.因为，有

$$\frac{A_m}{B_m}=\frac{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{3^{m+k}}}{\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^{m+k}}}=\frac{3}{4}\ \frac{2}{3}\ ^{m+1}\to 0\ (m\to\infty)$$

所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 比级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}$ 收敛得较慢 .

重要的是，对任意正项收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，总能构造一个比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛得慢的级数 .事实上，设 A_m 是收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 m 项余式 级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty}(\quad A_n - \quad A_{n+1}) \qquad (A_0 = 0)$$

也是收敛级数 . 设它的 m 项余式是 B_m，即

$$B_m=(\quad A_m - \quad A_{m+1})+(\quad A_{m+1} - \quad A_{m+2})+\cdots=\quad A_m .$$

有
$$\frac{A_m}{B_m}=\frac{A_m}{\quad A_m}=\quad A_m\to 0\ (m\to\infty)$$

即收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} (\quad A_n - \quad A_{n+1})$ 　　　　　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛得较慢 .

这个事实说明，正项收敛级数中没有收敛最慢的级数 .

问 4. 何谓一个发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 比另一个发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散得较慢 ?是否存在发散最慢的正项级数 ?

答　设发散正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和分别是 S_n 与 P_n .若部分和 S_n 是比部分和 P_n 高阶的无穷大　$n\to\infty)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{P_n}{S_n} = 0,$$

称级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散得较慢(即 P_n 趋向于无穷大的速度比 S_n 趋向于无穷大的速度较慢)　　　　　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散得较快 .

例如，有两个发散的正项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q_1^n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} q_2^n$,其中 $1 < q_2 < q_1$,有

$$\frac{P_n}{S_n} = \frac{\sum_{k=0}^{n-1} q_2^k}{\sum_{k=0}^{n-1} q_1^k} = \frac{\dfrac{1 - q_2^n}{1 - q_2}}{\dfrac{1 - q_1^n}{1 - q_1}}$$

$$= \frac{q_1 - 1}{q_2 - 1}\quad \frac{q_2}{q_1}\quad {}^{n}\frac{1 - \dfrac{1}{q_2^n}}{1 - \dfrac{1}{q_1^n}} \to 0 \quad (n\to\infty)$$

即发散级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q_2^n$ 比发散级数 $\sum_{n=0}^{\infty} q_1^n$ 发散得较慢 .

重要的是，对任意正项发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$，总能构造一个比级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散得较慢的级数 .事实上，设 S_n 是正项的发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的 n 项部分和 .级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - S_{n-1}) \quad (S_0 = 0)$$

也是发散级数 . 设它的 n 项部分和是 P_n，即

$$P_n = S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) = S_n,$$

有
$$\frac{P_n}{S_n} = \frac{S_n}{S_n} = \frac{1}{S_n} \to 0 \quad (n \to \infty)$$

即发散级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = \sum_{n=1}^{\infty} (S_n - S_{n-1}) \quad S_0 = 0)$ 比 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散得较慢 .

这个事实说明，发散正项级数中没有发散最慢的级数 .

问 5. 可用哪些方法证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的发散性 ?

答　有下列 6 种方法:

1) 证明调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 的部分和数列 $S_n\}$ $S_{2^m}\}$ 发散

$$S_2 = 1 + \frac{1}{2} > \frac{1}{2} \cdot 2 = 1,$$

$$S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} > 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \cdot 2 = 1 + \frac{1}{2} \times 2$$

……

$$S_{2^m} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^{m-1}} + \frac{1}{2^{m-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^m}$$

$$> 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^m} \cdot 2^{m-1} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_{m\text{个}}$$

$$= 1 + \frac{m}{2}.$$

$$\lim_{m\to\infty} S_{2^m} = \lim_{m\to\infty} \left(1 + \frac{m}{2}\right) = +\infty.$$

于是，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散．

2）用柯西收敛判别法，证明部分和数列

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n},$$

是发散的．见　　　§2.2，例 11．

3）证明数列 $\{a_n\}$

$$a_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

存在极限 c　　　　　　　　　　　§2.2 第 19 题)

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n = c + \alpha(n)$$

其中 $\alpha(n) \to 0$（当 $n\to\infty$ 时）

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} = \ln n + c + \alpha(n)$$

显然，$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} [\ln n + c + \alpha(n)] = +\infty$，

即调和级数发散．

4）应用练习题 §9.1

已知 $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \cdots > \frac{1}{n} > \cdots > 0$，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 2^n \frac{1}{2^n} = \sum_{n=1}^{\infty} 1 = +\infty$$

发散，则调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 也发散．

5）用

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

由定积分的几何意义，有

$$\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x \leq S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}.$$

又 $\int_1^{n+1} \frac{1}{x}\mathrm{d}x = \ln\quad n+1)$ $\lim_{n\to\infty}\ln\quad n+1) = +\infty$,

所以 $\lim_{n\to\infty} S_n = +\infty$,

则调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 .

6) 由练习题 9.1 (一)　 11 题的逆否命题:

若 $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq \cdots \geq 0$，且 $\lim_{n\to\infty} na_n = a \neq 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 .

对调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，有 $a_n = \frac{1}{n}$.

$$\lim_{n\to\infty} na_n = \lim_{n\to\infty} n\cdot\frac{1}{n} = 1 \neq 0.$$

于是，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散 .

值得注意的是，调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散　　　　 $+\infty)$

尤拉曾计算过，

$$S_{1\,000} = 7.48\cdots,\qquad S_{1\,000\,000} = 14.39\cdots,$$ 等等 .

问 6. 阿贝尔变换　　　　 §9.1 引理)

答　阿贝尔变换是下面证明狄利克雷判别法与阿贝尔判别法的重要工具 . 阿贝尔变换的一般形式是:

有两个 n 项有限数列:

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \quad 与 \quad b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_n.$$

设 $P_k = b_1 + b_2 + \cdots + b_k\ (k = 1, 2, \cdots, n)$　　　 $b_k = P_k - P_{k-1}(P_0 =$

0)

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} a_k (P_k - P_{k-1})$$

$$= a_1 (P_1 - P_0) + a_2 (P_2 - P_1) + \cdots + a_n (P_n - P_{n-1})$$

$$= P_1 (a_1 - a_2) + P_2 (a_2 - a_3) + \cdots +$$

$$P_{n-1} (a_{n-1} - a_n) + P_n a_n$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} P_k (a_k - a_{k+1}) + P_n a_n .$$

或
$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = a_n P_n - \sum_{k=1}^{n-1} P_k (a_{k+1} - a_k) \qquad (*)$$

(*)

$$\sum_{k=2}^{n} a_k b_k = a_n P_n - a_1 P_1 - \sum_{k=1}^{n-1} P_k (a_{k+1} - a_k)$$

或
$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} b_{k+1} = a_n P_n - a_1 P_1 - \sum_{k=1}^{n-1} P_k (a_{k+1} - a_k)$$

或
$$\sum_{k=1}^{n-1} a_{k+1} (P_{k+1} - P_k) = a_n P_n - a_1 P_1 - \sum_{k=1}^{n-1} P_k (a_{k+1} - a_k) \qquad (**)$$

若 $a_1 > a_2 > \cdots > a_n$，且 $b_k > 0$ $(k = 1, 2, \cdots, n)$

换 *) $n = 4$ 时，有

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_4 b_4$$

$$= P_1 (a_1 - a_2) + P_2 (a_2 - a_3) + P_3 (a_3 - a_4) + P_4 a_4 .$$

上面等式左端是图 9.1 四个横条面积之和，等式右端是图 9.1 四个竖条面积之和，显然二者相等．由此可见，阿贝尔变换实质是按着横竖不同顺序作和

般是代数和)

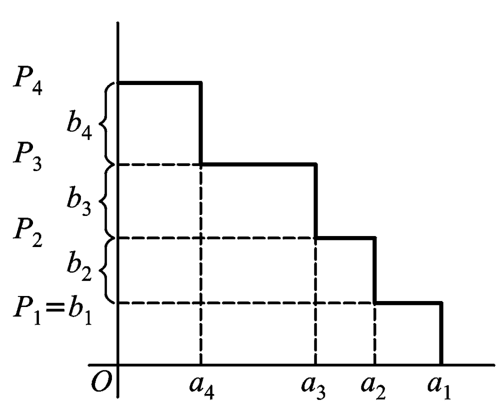


图 9.1

设函数 $a\ \ x)$ $P\ \ x)$ $[\alpha,\beta]$ 上有连续导数 给分法 T 将 $[\alpha,\beta]$ $n-1$ 个小区间，分点是

$$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n.\ x_1=\alpha,\ x_n=\beta.$$

令 $P_k=P\ \ x_k)$ $a_k=a\ \ x_k)$ $k=1,2,\cdots,n$. 代入 $**)$ 有

$$\sum_{k=1}^{n-1} a\ \ x_{k+1})\ \ P\ \ x_{k+1})-P\ \ x_k)]$$

$$=a\ \ x_n)\ P\ \ x_n)-a\ \ x_1)\ P\ \ x_1)$$

$$-\sum_{k=1}^{n-1} P\ \ x_k)\ \ a\ \ x_{k+1})-a\ \ x_k)]$$

根据拉格朗日中值定理，有

$$\sum_{k=1}^{n-1} a\ \ x_{k+1})\ P'\ \ \xi_{k+1})\Delta x_k$$

$$=a\ \ \beta)\ P\ \ \beta)-a\ \ \alpha)\ \mathrm{P}\ \ \alpha)-\sum_{k=1}^{n-1} P\ \ x_k)\ a'\ \ \eta_k)\Delta x_k,$$

其中 $\xi_{k+1}\in(x_k,x_{k+1})$ $\eta_k\in(x_k,x_{k+1})$ $\Delta x_k=x_{k+1}-x_k$. 当 $l\ \ T)\to 0$ 时，有

$$\int_\alpha^\beta a\ \ x)\ P'\ \ x)\,\mathrm{d}x=a\ \ x)\ P\ \ x)\Big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta P\ \ x)\ a'\ \ x)\,\mathrm{d}x,$$

或 $$\int_\alpha^\beta a\ \ x)\,\mathrm{d}P\ \ x)=a\ \ x)\ P\ \ x)\Big|_\alpha^\beta-\int_\alpha^\beta P\ \ x)\,\mathrm{d}a\ \ x)$$

由此可见，定积分的分部积分公式实质也是阿贝尔变换在区间上连续作和的推广.

问 7. 判别变号级数的敛散性

答 有以下四个判别法:

1) 级数的柯西收敛准则 1) 则能够判别变号级数的敛散性，但是对多数级数在实际计算中会遇到一些繁琐的计算，有一些困难. 它在理论上的意义大于在应用上的意义.

2) 绝对收敛判别法　　　10)

数，而不实用于条件收敛的级数 .

3) 狄利克雷判别法　　　11)

个有用的判别法 . 特别是，交错级数收敛的莱布尼茨判别法是它的特殊情况 .

4) 阿贝尔判别法　　　12)

个有用的判别法 .

问 8. 定理 3 的逆命题是否成立？即级数

$$\sum_{k=1}^{\infty}(u_{n_{k-1}+1}+\cdots+u_{n_k}) \qquad (*)$$

收敛，其中 $n_0=0$，$1\leq n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$，去掉括号的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 是否收敛？

答　不一定 .例如，级数

$$(1-1)+(1-1)+\cdots+(1-1)+\cdots$$

收敛，但是去掉括号的级数

$$1-1+1-1+\cdots+1-1+\cdots$$

显然发散，即定理 3 的逆命题不成立 . 那么在什么条件之下它才收敛呢？有定理：

若级数(*)

去掉括号的级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛，且它们的和数相同 .

证明　设 $S_k'=\sum\limits_{m=1}^{k}(u_{n_{m-1}+1}+\cdots+u_{n_m})$　$\lim\limits_{k\to\infty}S_k'=A$, $S_k=\sum\limits_{m=1}^{k}u_m$，显然，$S_{n_{k-1}}=S'_{k-1}$，$S_{n_k}=S'_k$.

" $m\in\mathbf{N}_+$，v $k\in\mathbf{N}_+$，有 $n_{k-1}<m\leq n_k$. 已知每个括号内所有项的符号相同　　　　　　　　　m 从 n_{k-1} 变化到 n_k 时，部分和 S_m 是单调增加或单调减少，即

$$S'_{k-1}<S_m\leq S_k' \quad 或 \quad S'_{k-1}>S_m\geq S_k' .$$

当 $m\to\infty$时, 有 $k\to\infty$, 于是,

$$\lim_{m\to\infty} S_m = \lim_{k\to\infty} S_k' = A,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛,其和也是 A.

问 9. 绝对收敛与条件收敛的级数各有什么特性?对级数区分绝对收敛与条件收敛有什么意义?

答　设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是变号级数.令

$$u_n^+ = \begin{cases} u_n, & 当\ u_n \geq 0, \\ 0, & 当\ u_n < 0. \end{cases} \quad u_n^- = \begin{cases} 0, & 当\ u_n \geq 0, \\ -u_n, & 当\ u_n < 0. \end{cases}$$

有
$$u_n^+ = \frac{|u_n| + u_n}{2}, \quad u_n^- = \frac{|u_n| - u_n}{2}.$$

显然, $u_n = u_n^+ - u_n^-$, $|u_n| = u_n^+ + u_n^-$.

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 分别称为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的正项部分与负项部分.注意负项部分 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 的每项 u_n^- 都是非负数.例如,级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \cdots$$

的正项部分与负项部分分别是:

$$1 + 0 + \frac{1}{3} + 0 + \frac{1}{5} + 0 + \cdots$$

与
$$0 + \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 + \cdots$$

绝对收敛级数有下述特性:

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛　　正项部分 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与负项部分 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都收敛.

证明　因为 $0 \leq u_n^+ \leq |u_n|$ 与 $0 \leq u_n^- \leq |u_n|$, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$

与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都收敛 .

因为 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+ + \sum_{n=1}^{\infty} u_n^- = \sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$,所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛 .

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛,则正项部分 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与负项部分 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都发散

证明 应用反证法 假设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 至少有一个收敛,不妨设 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 收敛 .已知 $u_n^+ = \dfrac{| u_n | + u_n}{2}$,即

$$| u_n | = 2 u_n^+ - u_n .$$

已知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 都收敛,则 $\sum_{n=1}^{\infty} | u_n |$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛,矛盾 .

条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的正项部分 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^+$ 与负项部分 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n^-$ 都发散到正无穷大,而 $u_n^+ \to 0$ 与 $u_n^- \to 0$ $(n \to \infty)$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n^+ - u_n^-)$ $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和 S_n

$= \sum_{k=1}^{n} (u_k^+ - u_k^-)$

取渐趋稳定的变化趋势 .

虽然绝对收敛级数与条件收敛级数都是收敛级数, 但是二者具有不同的特性, 它们的差异表现在某些运算上 . 例如, 绝对收敛的级数具有有限和的性质: 满足结合律、交换律 13)

分配律 14)

足交换律与分配律, 并具有奇特的性质 . 例如, 条件收敛的级数

适当的交换项的位置, 得到的新级数可收敛于预先给定的任意数 (包括 $+\infty$ 与 $-\infty$)

题的例 11)

问 10. 我们已知两个

线的顺序排列)

发散呢 ?

答 不一定 . 例如, 两个发散级数

$$2+2+2^2+2^3+\cdots+2^n+\cdots=2+\sum_{n=1}^{\infty}2^n$$

与
$$-1+1+1+1+\cdots+1^n+\cdots=-1+\sum_{n=1}^{\infty}1^n$$

的乘积

$$2+\sum_{n=1}^{\infty}2^n \quad -1+\sum_{n=1}^{\infty}1^n$$
$$=-2+(2-2)+(2+2-2^2)+\cdots+(2+2+2^2+\cdots+2^{n-1}-2^n)+\cdots$$
$$=-2+0+0+0+\cdots+0+\cdots .$$

显然它是收敛的 .

四、补充例题

例 1. 研究下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \quad a^{\frac{1}{n}}-1 \qquad (a>1)$　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \quad 1-\cos\frac{\pi}{n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \quad \frac{1}{n}-\ln \quad 1+\frac{1}{n}$;　　4) $\sum_{n=1}^{\infty} \quad \mathrm{e}-\quad 1+\frac{1}{n} \quad^{n \quad 2}$.

解 (1) 已知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}}=\ln a>0 \quad (a>1)$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散, 从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \quad a^{\frac{1}{n}}-1$ 发散 .

(2) 已知

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1-\cos\frac{\pi}{n}}{\left(\frac{\pi}{n}\right)^2}=\frac{1}{2}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 收敛.

(3) 已知 $\frac{1}{n+1}<\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}$, §2.2 补充例题的例 1)

$$0<\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\right)$ 收敛.

(4) 已知 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n<\mathrm{e}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$, 有

$$\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2<\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2$$

$$=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2n}\frac{1}{n^2}<\frac{\mathrm{e}^2}{n^2}.$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛,从而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2$ 收敛.

例 2. 证明: 当 $p>1$ 时, 下列级数都收敛:

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$; (2) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$.

证法 应用《讲义》 9.1 (二) 5 题.

证明 (1) 已知 $\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 是正的单调减少数列, 且

$$2^n u_{2^n}=2^n\frac{1}{2^n(\ln 2^n)^p}=\frac{1}{(n\ln 2)^p}=\frac{1}{n^p(\ln 2)^p}.$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n u_{2^n} = \frac{1}{(\ln 2)^p}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，则级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p}$ 收敛．

(2) 已知 $\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ 是正的单调减少数列，且

$$2^n u_{2^n} = 2^n \frac{1}{2^n \ln 2^n \cdot (\ln\ln 2^n)^p}$$

$$= \frac{1}{n\ln 2(\ln n + \ln\ln 2)^p},$$

而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{1}{n\ln 2(\ln n + \ln\ln 2)^p}}{\dfrac{1}{n(\ln n)^p}} = \frac{1}{\ln 2} > 0 .$$

由

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p} \text{ 收敛，则级数}$$

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2(\ln n + \ln\ln 2)^p}$$

也收敛，于是，级数 $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$ 收敛．

说明　当 $p>1$ 时，正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p},\quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p},\quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$$

都收敛，依次后者比前者收敛较慢．类似地可继续写出收敛得更慢的正项级数．当 $p\le 1$ 时，它们都发散．

当读者学习了无穷积分的收敛和发散定义，学习了§12.1之后，不难证明

柯西积分判别法　若 $f(x)$ $[a,+\infty)$ $(a>0)$

减少的连续的函数，则级数 $\sum_{n=0}^{\infty} f(a+n)$

$\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ 同时收敛或同时发散．

应用柯西积分判别法判别下面两个正项级数的收敛性极为简

便 . 当 $p>1$ 时，函数

$$\frac{1}{x(\ln x)^p} \quad 与 \quad \frac{1}{x\ln x(\ln\ln x)^p}$$

分别在 $2,+\infty)$ $3,+\infty)$

积分

$$\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(\ln x)^p}=\int_2^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln x)}{(\ln x)^p}=\frac{1}{(p-1)(\ln 2)^{p-1}}$$

与$$\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x(\ln\ln x)^p}=\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}(\ln\ln x)}{(\ln\ln x)^p}=\frac{1}{(p-1)(\ln\ln 3)^{p-1}}$$

都收敛 . 于是，当 $p>1$ 时，正项级数

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p} \quad 与 \quad \sum_{n=3}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^p}$$

都收敛

例 3. 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^p(\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1})$

解 $\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}$

$$=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})-(\sqrt{n}-\sqrt{n-1})$$

$$=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}-\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}$$

$$=\frac{\sqrt{n-1}-\sqrt{n+1}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})}$$

$$=\frac{-2}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n-1}+\sqrt{n+1})}$$

$$=\frac{-2}{n^{\frac{3}{2}}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)},$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty} n^p\left|\sqrt{n+1}-2\sqrt{n}+\sqrt{n-1}\right| \Big/ n^{p-\frac{3}{2}}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2n^{p-\frac{3}{2}}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)\left(1+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}+\sqrt{1+\frac{1}{n}}\right)}\Bigg/\frac{1}{n^{\frac{3}{2}-p}}$$

$=\frac{1}{4}$.

当$\frac{3}{2}-p>1$时，即 $p<\frac{1}{2}$时，级数收敛；

当$\frac{3}{2}-p\leq 1$时，即 $p\geq\frac{1}{2}$时，级数发散 .

例 4. 讨论下列级数的绝对收敛与条件收敛：

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$；

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^p}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\ln n\right)$.

解 (1) 当 $p\leq 0$ 时，显然，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 发散 .

当 $p>0$ 时，有

$$\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}=\frac{(-1)^n}{n^p}\left(1+\frac{(-1)^n}{n}\right)^{-p}$$

$$=\frac{(-1)^n}{n^p}\left(1-p\frac{(-1)^n}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right)\right)$$

$$=\frac{(-1)^n}{n^p}-\frac{p}{n^{1+p}}+o\left(\frac{1}{n^{1+p}}\right),$$

即 当 $p>0$ 时，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 收敛 .

$$\left|\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}\right|=\frac{1}{[n+(-1)^n]^p},$$

有 $$\frac{1}{(n+1)^p}\leq\frac{1}{[n+(-1)^n]^p}\leq\frac{1}{(n-1)^p},\quad n=2,3,\cdots .$$

已知 $p>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 收敛，即 $p>1$ 时，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 绝对收敛 .

于是，$0<p\leq 1$ 时，级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$ 条件收敛 .

(2) 已知当 $p > 0$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p}$ 收敛，而数列

$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

单调减少，且有界　　　　　　　　　　2.2 第 19 题)
判别法，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \quad 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

收敛 .

$$\frac{\left| \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \quad 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \right|}{\frac{1}{n^p}}$$

$$= 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n \to c \quad n \to \infty, c \text{ 是尤拉常数})$$

即当 $p > 1$ 时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \quad 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

绝对收敛 .

于是，当 $0 < p \leq 1$ 时，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^p} \quad 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$$

条件收敛 .

例 5. 证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\ \ n]}}{n}$ 收敛 .

证法　将级数中相邻的符号相同的项结合在一起作为一项，从而化为新的交错级数 . 用莱布尼茨判别法判别它的收敛性 . 最后应用本节答疑辅导的问 8 中所给的定理 .

证明　" $k \in \mathbf{N}_+$ ，解不等式

$$k \leqslant [\quad n] < k+1,$$

得　$n = k^2,\ k^2+1,\ \cdots,\ \quad k+1)^2-1$，共 $2k+1$ 项．

$k=1$，3 项，　$-\quad 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\quad = -u_1$．

$k=2$，5 项，　$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{8}=u_2$．

……

$k=m$，$2m+1$ 项，　$-1)^m\quad \dfrac{1}{m^2}+\dfrac{1}{m^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{(m+1)^2-1}$

$$=(-1)^m u_m .$$

……

于是，根据问 8 所给的定理，只须证明交错级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^m u_m$ 收敛，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{[\quad n]}}{n}=\sum_{m=1}^{\infty}(-1)^m u_m,$$

其中

$$u_m=\underbrace{\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m^2+1}+\cdots+\frac{1}{m^2+m-1}}_{m\text{项}}+\underbrace{\frac{1}{m^2+m}+\cdots+\frac{1}{(m+1)^2-1}}_{m+1\text{项}}.$$

有
$$u_m < m\frac{1}{m^2}+(m+1)\frac{1}{m^2+m}=\frac{1}{m}+\frac{1}{m}=\frac{2}{m},$$

$$u_m > m\frac{1}{m^2+m}+(m+1)\frac{1}{(m+1)^2}$$
$$=\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+1}=\frac{2}{m+1},$$

即
$$\frac{2}{m+1}<u_m<\frac{2}{m}.$$

显然，数列　$u_m\}$　　　　$\lim\limits_{m\to\infty}u_m=0$．根据莱布尼茨判别法，交错级数 $\sum\limits_{m=1}^{\infty}(-1)^m u_m$ 收敛．从而，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^{[\quad n]}}{n}$ 收敛．

例 6. 证明: **若数列** $u_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, " $n \in \mathbf{N}_+$,

$$(u_1 - u_n) + (u_2 - u_n) + \cdots + (u_{n-1} - u_n)$$

有界, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛** .

证法 **已知** $u_n \geq 0$, **证明级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **的部分和数列有界** .

证明 **已知**v $M > 0$, " $n \in \mathbf{N}_+$, **有**

$$(u_1 - u_n) + \quad u_2 - u_n) + \cdots + \quad u_{n-1} - u_n)$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} u_k - \quad n - 1) u_n \leq M .$$

已知 $u_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$, **即** " $m \in \mathbf{N}_+$, v $n > m$,

有 $u_n \leq \frac{1}{2} u_m$. **从而, 有**

$$M \geq u_1 + u_2 + \cdots + u_m - mu_n +$$

$$(u_{m+1} + \cdots + u_{n-1}) - (n - 1 - m) u_n$$

$$\geq mu_m - \frac{m}{2} u_m + (n - 1 - m) u_n - (n - 1 - m) u_n = \frac{m}{2} u_m,$$

即 $mu_m \leq 2M$. **于是**, " $m \in \mathbf{N}_+$, **有**

$$S_m = \sum_{k=1}^{m} u_k \leq M + mu_m \leq M + 2M = 3M,$$

即部分和数列 $S_m\}$ $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛** .

说明 **证明正项级数的收敛性**(**包括变号级数的绝对收敛性**) **经常是证明它的部分和数列有上界 . 怎样找它的上界, 要根据给定的条件, 采用加强不等式的方法 . 加强不等式要因题而异 . 例如, 应用找上界的方法可证明下列正项级数的收敛性**:

(1) **若级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ **绝对收敛, 而数列** $b_n\}$

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ **绝对收敛**;

(2) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛；

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$ 收敛，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n a_{n+1}$ 绝对收敛；

(4) 若 $\forall n \in \mathbf{N}_+$，$a_n > 0$，$b_n > 0$，且 $b_n \frac{a_n}{a_{n+1}} - b_{n+1} \geq r > 0$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛．

($a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \geq r a_{n+1}$，有 $a_1 b_1 - a_n b_n \geq r \quad a_2 + \cdots + a_n$)

例 7．（拉阿伯判别法） 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 是正项级数，$\exists\ N \in \mathbf{N}_+$，$\forall n \geq N$，有

$$n \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \quad \geq r > 1 \qquad \text{或} \quad n \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \quad \leq 1 \quad ,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛

证法 应用比较判别法，并与广义调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 比较．

证明 首先证明收敛性．不妨设 $\forall n \in \mathbf{N}_+$，有

$$n \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \quad \geq r \quad \text{或} \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} \geq 1 + \frac{r}{n}.$$

取 p，使 $1 < p < r$．当 n 充分大时，有

$$1 + \frac{r}{n} > \quad 1 + \frac{1}{n} \quad ^p.$$

从而
$$\frac{u_n}{u_{n+1}} > \quad \frac{n+1}{n} \quad ^p \qquad \text{或} \qquad u_{n+1} < u_n \quad \frac{n}{n+1} \quad ^p.$$

即 $n = 1$，
$$u_2 < u_1 \quad \frac{1}{2} \quad ^p,$$

$n = 2$，$u_3 < u_2 \quad \frac{2}{3} \quad ^p < u_1 \quad \frac{1}{2} \quad ^p \quad \frac{2}{3} \quad ^p = u_1 \frac{1}{3^p}$，

……

$$u_{n+1} < u_1 \frac{1}{2}^{p} \frac{2}{3}^{p} \cdots \frac{n}{n+1}^{p} = u_1 \frac{1}{(n+1)^p} .$$

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_1}{(n+1)^p}\ (p > 1)$　　　　$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛 .

其次证明发散性 . 已知

$$n \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 \leq 1 \quad \text{或} \quad \frac{u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{n+1}{n} .$$

从而

$$u_{n+1} \geq u_n \frac{n}{n+1} .$$

$$n = 1,\quad u_2 \geq u_1 \frac{1}{2},$$

$$n = 2,\quad u_3 \geq u_2 \frac{2}{3} \geq u_1 \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} = u_1 \frac{1}{3},$$

$$\cdots\cdots$$

$$u_{n+1} \geq u_1 \frac{1}{2} \frac{2}{3} \cdots \frac{n}{n+1} = u_1 \frac{1}{n+1} .$$

已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{u_1}{n+1}$ 发散, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 .

不难证明, 拉阿伯判别法的极限形式, 即若

$$\lim_{n \to \infty} n \frac{u_n}{u_{n+1}} - 1 = R,$$

当 $R > 1$ 时, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛; 当 $R < 1$ 时, 则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散 .

说明　拉阿伯判别法是比达朗贝尔判别法(或柯西判别法)精确的判别法, 即判别正项级数的敛散性, 应用达朗贝尔判别法失效, 而应用拉阿伯判别法却可能判别其敛散性 . 例如, 可用拉阿伯判别法判别下列正项级数的敛散性:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{(2n)} \frac{1}{2n+1}$;

(2) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a(a+1)\cdots(a+n)}{b(b+1)\cdots(b+n)}$, $b-1>a>0$;

(3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}a^{-\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)}$ $(a>0)$ a 取何值时收敛，a 取何值时发散 .

例 8. 证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛，则**

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}ku_k=0$;

(2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_1+2u_2+\cdots+nu_n}{n(n+1)}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$.

证法 (1) **将级数中的项换成部分和的差，应用题 2.2 第 23 题：若** $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，**则** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}a_k=a$.

(2) **应用等式** $\frac{1}{n(n+1)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$，**再整理** .

证明 (1) **已知级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ **收敛 .设部分和**

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}u_k,\quad \lim_{n\to\infty}S_n=S .$$

$$u_n=S_n-S_{n-1},\quad n=1,2,\cdots\ (S_0=0)$$

$$\frac{1}{n}(u_1+2u_2+\cdots+nu_n)$$

$$=\frac{1}{n}[S_1+2(S_2-S_1)+\cdots+n(S_n-S_{n-1})]$$

$$=S_n-\frac{S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n} .$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{S_1+S_2+\cdots+S_{n-1}}{n-1}=S$，**于是**，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}ku_k$$

$$=\lim_{n\to\infty}S_n-\lim_{n\to\infty}\frac{S_1+\cdots+S_{n-1}}{n-1}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}$$

$$= S - S = 0 .$$

(2) $\dfrac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n(n+1)}$

$$= (u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n)\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n} - \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n+1}$$

$$= u_n + \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + (n-1)u_{n-1}}{n} - \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n+1} .$$

于是，$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n(n+1)}$

$$= \sum_{n=1}^{m} u_n + \sum_{n=1}^{m}\left(\frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + (n-1)u_{n-1}}{n} - \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n+1}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{m} u_n - \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + mu_m}{m+1} . \quad (u_0 = 0)$$

当 $m \to \infty$时，由(1)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_1 + 2u_2 + \cdots + nu_n}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n .$$

例 9. 证明：若在调和级数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 中去掉分母中含有数字 0 的项，则得到的新级数收敛，其和不超过 90 .

证法 分别估算分母是一位数、二位数、三位数……不含有数字 0 的项数，及其和的上界，然后再相加 .

证明 新级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} + \cdots + \frac{1}{19} + \cdots + \frac{1}{111} + \cdots + \frac{1}{119} + \cdots .$$

其中 分母是一位数共有 9 项，其和小于 9；

分母是二位数共有 9×9 项，其和小于$\dfrac{1}{10}\cdot 9^2$；

分母是三位数共有 $9\times9\times9$ 项，其和小于 $\frac{1}{100}\cdot 9^3$；

……

分母是 n 位数共有 9^n 项，其和小于 $\frac{1}{10^{n-1}}\cdot 9^n$；

……

于是
$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n} \leq 9 + \frac{9^2}{10} + \frac{9^3}{10^2} + \cdots + \frac{9^n}{10^{n-1}} + \cdots$$
$$= 9\left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} + \cdots\right)$$
$$= 9\times\frac{1}{1-\frac{9}{10}} = 90,$$
即新级数 $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n}$ 收敛，其和不超过 90 .

例 10. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 都收敛，其和分别是 s 和 σ，且 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛，则它的乘积级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n,\ \text{其中}\ u_n = a_1 b_n + a_2 b_{n-1} + \cdots + a_n b_1,$$
也收敛，其和是 $s\sigma$.

证法 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 的 n 项部分和的乘积与 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的 n 项部分和之差能任意小，再取极限，既证明了 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，又证明了它的和是 $s\sigma$.

证明 设部分和分别是
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k,\qquad \sigma_n = \sum_{k=1}^{n} b_k,\qquad q_n = \sum_{k=1}^{n} u_k .$$
有
$$q_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (a_1 b_k + a_2 b_{k-1} + \cdots + a_k b_1)$$

$$= a_1 \sum_{k=1}^{n} b_k + a_2 \sum_{k=1}^{n-1} b_k + \cdots + a_n b_1$$

$$= a_1 \sigma_n + a_2 \sigma_{n-1} + \cdots + a_n \sigma_1 .$$

$$s_n \sigma_n - q_n$$

$$= (a_1 + a_2 + \cdots + a_n)\sigma_n - (a_1 \sigma_n + a_2 \sigma_{n-1} + \cdots + a_n \sigma_1)$$

$$= a_2 (\sigma_n - \sigma_{n-1}) + \cdots + a_{k+1}(\sigma_n - \sigma_m) +$$

$$a_{k+2}(\sigma_n - \sigma_{m-1}) + \cdots + a_n (\sigma_n - \sigma_1)$$

其中 $k + m = n$.

$$|s_n \sigma_n - q_n| \leq |a_2| \cdot |\sigma_n - \sigma_{n-1}| + \cdots + |a_{k+1}| \cdot |\sigma_n - \sigma_m| +$$

$$|a_{k+2}| \cdot |\sigma_n - \sigma_{m-1}| + \cdots + |a_n| \cdot |\sigma_n - \sigma_1| .$$

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 绝对收敛与 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists M > 0$，$\exists N \in \mathbf{N}_+$，$\forall k$，$m > N$，有

$$|a_{k+2}| + \cdots + |a_n| < \varepsilon \quad 与 \quad |a_2| + \cdots + |a_{k+1}| \leq M,$$

$$|\sigma_n - \sigma_{n-1}| < \varepsilon, \ \cdots, \ |\sigma_n - \sigma_m| < \varepsilon,$$

$$|\sigma_n - \sigma_{m-1}| < M, \ \cdots, \ |\sigma_n - \sigma_1| < M .$$

于是，

$$|s_n \sigma_n - q_n| < \varepsilon \ \ |a_2| + \cdots + |a_{k+1}|) + M(|a_{k+2}| + \cdots + |a_n|)$$

$$< \varepsilon M + \varepsilon M = 2M\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty} q_n = \lim_{n\to\infty} s_n \sigma_n = s\sigma .$$

注 《讲义》§9.1 的定理 14 要求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum\limits_{n=1}^{n} b_n$ 都绝对收敛 . 本例指出，如果两个级数乘积的项按照对角线顺序并项，其乘积级数收敛的条件可减弱，即只要求两个级数中有一个绝对收敛即可 .

例 11. (黎曼定理) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 条件收敛，则对任意数 A

$\pm\infty$) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 各项的位置，得到的新级数

将收敛于 A.

证法 应用条件收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的特性

9)

正项部分 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$, 负项部分 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$ $(a_n^- \geq 0)$

且
$$\lim_{n\to\infty} a_n^+ = 0, \quad \lim_{n\to\infty} a_n^- = 0.$$

设 $A > 0$. 按照级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的项的顺序, 先取若干个正项, 使其和刚好大于 A, 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^+ = +\infty$, 这是能够做到的. 接着取若干个负项, 使其和 A. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^- = +\infty$, 这也是能够做到的. 接着再取若干个正项, ……. 按此法无限次作下去, 原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的各项皆被交换到新的位置上, 得到的新级数将收敛于 A.

证明 设 A 是有限数, 不妨设 $A > 0$. 先取 m_1 个正项, 即

$$S_{m_1} = \sum_{k=1}^{m_1} a_k^+ = a_1^+ + a_2^+ + \cdots + a_{m_1}^+,$$

$$S_{m_1 - 1} \leq A, \quad S_{m_1} > A,$$

从而
$$0 < S_{m_1} - A \leq a_{m_1}^+.$$

接着取 n_1 个负项, 即

$$S_{m_1+n_1} = \sum_{k=1}^{m_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_1} a_k^-$$
$$= a_1^+ + \cdots + a_{m_1}^+ - (a_1^- + \cdots + a_{n_1}^-)$$

使
$$S_{m_1+n_1-1} \geq A, \quad S_{m_1+n_1} < A, \text{ 从而}$$
$$0 < A - S_{m_1+n_1} \leq a_{n_1}^-.$$

接着再取 $m_2 - m_1$ ($m_2 > m_1$)

$$S_{m_2+n_1} = \sum_{k=1}^{m_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_1} a_k^- + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_k^+,$$

使
$$S_{m_2+n_1-1} \le A, \quad S_{m_2+n_1} > A, \text{ 从而}$$
$$0 < S_{m_2+n_1} - A \le a_{m_2}^+ .$$

接着再取 $n_2 - n_1$ ($n_2 > n_1$)

$$S_{m_2+n_2} = \sum_{k=1}^{m_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_1} a_k^- + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_k^+ - \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^-,$$

使
$$S_{m_2+n_2-1} \ge A, \quad S_{m_2+n_2} < A, \text{ 从而}$$
$$0 < A - S_{m_2+n_2} \le a_{n_2}^- .$$

按此法无限次地做下去，得级数

$$\sum_{k=1}^{m_1} a_k^+ - \sum_{k=1}^{n_1} a_k^- + \sum_{k=m_1+1}^{m_2} a_k^+ - \sum_{k=n_1+1}^{n_2} a_k^- + \cdots +$$
$$\sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} a_k^+ - \sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} a_k^- + \cdots$$
$$= \sum_{k=1}^{m_1} a_k^+ + -\sum_{k=1}^{n_1} a_k^- + \cdots +$$
$$\sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i} a_k^+ + -\sum_{k=n_{i-1}+1}^{n_i} a_k^- + \cdots \qquad (*)$$

其中
$$S_{m_i+n_{i-1}-1} \le A, \quad S_{m_i+n_{i-1}} > A, \text{ 从而}$$
$$0 < S_{m_i+n_{i-1}} - A \le a_{m_i}^+,$$

又
$$S_{m_i+n_i-1} \ge A, \quad S_{m_i+n_i} < A, \text{ 从而}$$
$$0 < A - S_{m_i+n_i} \le a_{n_i}^- .$$

已知 $\lim_{i\to\infty} a_{m_i}^+ = 0$ 与 $\lim_{i\to\infty} a_{n_i}^- = 0$. 从而级数 *)

于 A . 因为级数 *)

8 的定理知，去掉括号后的新级数收敛于 A .

设 $A=\pm\infty$，不妨设 $A=+\infty$．先取 m_1 个正项，即

$$S_{m_1}=\sum_{k=1}^{m_1}a_k^+=a_1^++a_2^++\cdots+a_{m_1}^+,$$

使 $S_{m_1}>1$．接着取第一个负 a_1^-，然后再取 $m_2-m_1\ (m_2>m_1)$ 正项，即

$$S_{m_2+1}=\sum_{k=1}^{m_1}a_k^+-a_1^-+\sum_{k=m_1+1}^{m_2}a_k^+,$$

使 $S_{m_2+1}>2$．接着取第 2 个负 a_2^-，然后再取 $m_3-m_2\ (m_3>m_2)$

$$S_{m_3+2}=\sum_{k=1}^{m_1}a_k^+-a_1^-+\sum_{k=m_1+1}^{m_2}a_k^+-a_2^-+\sum_{k=m_2+1}^{m_3}a_k^+,$$

使 $S_{m_3+2}>3$．按此法无限次地做下去，得新级数

$$\sum_{k=1}^{m_1}a_k^+-a_1^-+\sum_{k=m_1+1}^{m_2}a_k^+-a_2^-+\cdots+\sum_{k=m_{i-1}+1}^{m_i}a_k^+-a_i^-+\cdots,\qquad (**)$$

其中 $$S_{m_i+(i-1)}>i\,.$$

因为 $\lim\limits_{i\ \infty}a_i^-=0$，所以 $\lim\limits_{i\ \infty}S_{m_i+(i-1)}=+\infty$．于是，新级数 (**) $+\infty$．

例 12．证明：若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n^\sigma}\ (\sigma>0)$

$$\lim_{n\ \infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^\sigma}=0\,.$$

(本题是练习题 9.1 (二) 第 17 题．)

证法 当 $N\in\mathbf{N}_+$ 充分大时，对 " $p\in\mathbf{N}_+$，有

$$\sum_{k=1}^{N+p}\frac{a_k}{(N+p)^\sigma}=\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{(N+p)^\sigma}+\sum_{k=N+1}^{N+p}\frac{a_k}{(N+p)^\sigma}\,.$$

上述等式右端第二个和数，根据柯西收敛准则和阿贝尔变换能任

意小；第一个和数当 p 充分大时也能任意小．

证明　已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\sigma}}(\sigma>0)$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，$\forall p\in\mathbf{N}_+$ 有

$$\left|\frac{a_{N+1}}{(N+1)^{\sigma}}+\frac{a_{N+2}}{(N+2)^{\sigma}}+\cdots+\frac{a_{N+p}}{(N+p)^{\sigma}}\right|<\varepsilon.$$

又有
$$0<\left(\frac{N+1}{N+p}\right)^{\sigma}<\left(\frac{N+2}{N+p}\right)^{\sigma}<\cdots<\left(\frac{N+p}{N+p}\right)^{\sigma}=1.$$

由阿贝尔引理，有

$$\left|\frac{a_{N+1}}{(N+1)^{\sigma}}\left(\frac{N+1}{N+p}\right)^{\sigma}+\frac{a_{N+2}}{(N+2)^{\sigma}}\left(\frac{N+2}{N+p}\right)^{\sigma}+\cdots+\frac{a_{N+p}}{(N+p)^{\sigma}}\left(\frac{N+p}{N+p}\right)^{\sigma}\right|<\varepsilon\cdot 1.$$

或
$$\left|\frac{a_{N+1}}{(N+p)^{\sigma}}+\frac{a_{N+2}}{(N+p)^{\sigma}}+\cdots+\frac{a_{N+p}}{(N+p)^{\sigma}}\right|=\left|\sum_{k=N+1}^{N+p}\frac{a_k}{(N+p)^{\sigma}}\right|<\varepsilon.$$

对固定的 N，$\exists K\in\mathbf{N}_+$，$\forall p>K$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{(N+p)^{\sigma}}\right|=\left|\frac{a_1+a_2+\cdots+a_N}{(N+p)^{\sigma}}\right|<\varepsilon.$$

于是，$\forall\varepsilon>0$，$\exists N+K\in\mathbf{N}_+$，$\forall p>K$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{N+p}\frac{a_k}{(N+p)^{\sigma}}\right|=\left|\sum_{k=1}^{N}\frac{a_k}{(N+p)^{\sigma}}\right|+\left|\sum_{k=N+1}^{N+p}\frac{a_k}{(N+p)^{\sigma}}\right|<2\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n^{\sigma}}=0.$$

同法可证：

(1)　$b_n\}$单调减少　$b_n\to 0\ (n\to\infty)$　$\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_1+a_2+\cdots+a_n)b_n=0.$$

提示: $\sum_{k=1}^{N+p} a_k \quad b_{N+p} = \sum_{k=1}^{N} a_k \quad b_{N+p} +$

$$\sum_{k=N+1}^{N+p} a_k \quad b_{N+p} \mid a_{N+1} b_{N+p} + \cdots + a_{N+p} b_{N+p} \mid < \varepsilon,$$

$$0 < \frac{b_{N+p}}{b_{N+1}} < \cdots < \frac{b_{N+p}}{b_{N+p}} = 1.$$

(2) 若数列 $b_n\}$ $b_n \quad +\infty (n \quad \infty)$

数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则

$$\lim_{n \quad \infty} \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2 + \cdots + a_n b_n}{b_n} = 0.$$

提示: $\sum_{k=1}^{N+p} \frac{a_k b_k}{b_{N+p}} = \sum_{k=1}^{N} \frac{a_k b_k}{b_{N+p}} + \sum_{k=N+1}^{N+p} \frac{a_k b_k}{b_{N+p}} \mid a_{N+1} + \cdots + a_{N+p} \mid < \varepsilon,$

$$0 < \frac{b_{N+1}}{b_{N+p}} < \cdots < \frac{b_{N+p}}{b_{N+p}} = 1.$$

五、练习题 9.1 (一)

3. 证明: 若 $\lim_{n \quad \infty} na_n = a > 0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散 .

证法 $\lim_{n \quad \infty} na_n = \lim_{n \quad \infty} \frac{a_n}{\frac{1}{n}} = a > 0$, 且 " $n > N$, $a_n > 0$.

6. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 且

$$a_n \leq c_n \leq b_n \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ 也收敛 .

证法 应用柯西收敛准则, 可证

$$-\varepsilon < \sum_{k=1}^{p} a_{n+k} < \sum_{k=1}^{p} c_{n+k} < \sum_{k=1}^{p} b_{n+k} < \varepsilon.$$

* * * *

9. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 　　$\lim_{n\to\infty} a_n=0$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 .

证法　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_{2n-1}+a_{2n})$ 　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 部分和分别是 A_n 与 B_n, 设 $\lim_{n\to\infty} A_n=A$, 有

$$B_{2n}=A_n, \text{ 又有 } \quad B_{2n-1}=A_{n-1}+a_{2n-1} .$$

于是, 数列 $B_{2n}\}$ 　$B_{2n-1}\}$ 　　　　　　　$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 .

11. 证明: 若 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq\cdots\geq 0$, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\lim_{n\to\infty} na_n=0$.

证法　应用柯西收敛准则, 有

$$na_{2n}\leq a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}<\varepsilon,$$

证明　$\lim_{n\to\infty} 2na_{2n}=\lim_{n\to\infty}(2n+1)a_{2n+1}=0$.

12. 证明: 若将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 依次若干项结合得新级数 $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ 收敛, 其中 $A_k=a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k}$, 且 A_k 的项有相同的符号, 则原级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 且两个收敛级数的和相等 .

证法　设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和分别是 S_n 与 σ_n, 并设 $\lim_{n\to\infty}\sigma_n=A$. 有

$$\sigma_k=A_1+A_2+\cdots+A_{k-1}+A_k=\sigma_{k-1}+a_{n_{k-1}+1}+\cdots+a_{n_k} .$$

" $n\in\mathbf{N}_+$, v $k\in\mathbf{N}_+$, 使 $n_{k-1}+1\leq n<n_k$ $(n_0=0)$

A_k 中的项有相同的符号, 所以当 n 从 $n_{k+1}+1$ 增加到 n_k 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和 S_n 总介于 σ_{k-1} 与 σ_k 之间, 所以 $\lim_{n\to\infty} S_n=A$,

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，其和也是 A .

▶▶ 练习题 9.1 (二)

1. 判别下列正项级数的敛收性:

(9) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

解法

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \bigg/ \frac{2^n n!}{n^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n = \frac{2}{e} < 1 .$$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$ 收敛 .

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$.

解法 $\forall n \geq 2$，有 $\frac{1}{\ln n} > \frac{1}{n}$.

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散，故级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n}$ 也发散 .

(13) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$.

解法 $\forall n \in \mathbf{N}_+$，有 $1 \leq 2+(-1)^n \leq 3$.

已知 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3} = 1$.

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{2+(-1)^n}}{2} = \frac{1}{2} < 1 .$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^n}{2^n}$ 收敛 .

(15) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos\frac{1}{n}\right)$.

解法 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1-\cos\dfrac{1}{n}}{\left(\dfrac{1}{n}\right)^2}=\dfrac{1}{2}>0$.

又已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$**收敛,故级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-\cos\dfrac{1}{n}\right)$ **也收敛**.

2. 设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ **收敛,下列级数是否收敛,为什么?**

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$.

答:不一定.例如, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}$ **收敛,而** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{n}\right)^2=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ **却发散**.

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_n}\quad(a_n>0)$

答:不一定.例如, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$**收敛,而** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{\dfrac{1}{n^2}}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ **却发散**.

(4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sqrt{a_na_{n+1}}\quad(a_n>0)$

答:收敛.因为" $n\in\mathbf{N}_+$, **有** $\sqrt{a_na_{n+1}}\leq\dfrac{a_n+a_{n+1}}{2}$.

3. 证明:若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ **与** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n^2$ **收敛,则下列级数也收敛:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}|a_nb_n|,\qquad\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2,\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|a_n|}{n}.$$

证法 应用不等式

$$|a_nb_n|\leq\frac{1}{2}(a_n^2+b_n^2)$$

$$\frac{|a_n|}{n}\leq\frac{1}{2}\left(a_n^2+\frac{1}{n^2}\right).$$

4. 证明: 若 $a_n\}$ $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ **发散**.

证法 设 $a_n = a_1 + (n-1)d$.

1) $d=0$, **级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ **发散** $a_n = a_1 \neq 0)$

2) $d\neq 0$, $\lim\limits_{n\ \infty}\dfrac{\dfrac{1}{a_1+(n-1)d}}{\dfrac{1}{n}}=\dfrac{1}{d}$, ……

5. 证明: 若 $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq\cdots\geq 0$, **则级数** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **与级数** $\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$**同时收敛, 同时发散**.

证法一 **只讨论级数** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **的部分和数列** $S_n\}$

$S_{2^k}\}$

$$S_{2^k} < a_1 + (a_2 + a_3) + \cdots + (a_{2^k} + \cdots + a_{2^{k+1}-1})$$
$$< a_1 + 2a_2 + \cdots + 2^k a_{2^k}.$$
$$S_{2^k} = a_1 + a_2 + (a_3 + a_4) + \cdots + (a_{2^{k-1}+1} + \cdots + a_{2^k})$$
$$> \frac{a_1}{2} + a_2 + 2a_4 + \cdots + 2^{k-1}a_{2^k}$$
$$= \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + 4a_4 + \cdots + 2^k a_{2^k}).$$

证法二 **设级数** $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ **与** $\sum_{n=0}^{\infty}2^n a_{2^n}$ **的部分和分别是** S_n **与** σ_n. 当 $n\leq 2^k$ **时, 有** $S_n<\sigma_k$; **当** $n\geq 2^k$ **时, 有** $2S_n>\sigma_k$.

6. 证明: 若 $P\ \ n)$ $Q\ \ n)$ n **的** p **次与** q **次多项式, 且** $Q\ \ n)\neq 0$. **则级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{P\ \ n)}{Q\ \ n)}$**收敛** $q-p\geq 2$.

证法 **设**

$$\frac{P\ \ n)}{Q\ \ n)} = \frac{a_0 n^p + a_1 n^{p-1} + \cdots + a_p}{b_0 n^q + b_1 n^{q-1} + \cdots + b_q}$$

$$=\frac{1}{n^{q-p}}\frac{a_0+\frac{a_1}{n}+\cdots+\frac{a_p}{n^p}}{b_0+\frac{b_1}{n}+\cdots+\frac{b_q}{n^q}}=O\left(\frac{1}{n^{q-p}}\right)\qquad(n\to\infty).$$

7. 判别下列级数的收敛性，并指出是绝对收敛还是条件收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n}{n+1}\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^2}{2^n}$；

(3) $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{12}}{\ln n}$；　(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\sin\frac{1}{n}$.

解法　首先判别每项的绝对值级数是否收敛．如果收敛，则绝对收敛．如果发散，再判别级数本身是否收敛，如果收敛就是条件收敛．

(1) 条件收敛．应用莱布尼茨判别法．注意数列 $\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{\sqrt[5]{n}}$ 单调减少，且趋近于 0．

(2) 绝对收敛．

(3) 条件收敛，应用狄利克雷判别法．

(4) 条件收敛，应用莱布尼茨判别法．

8. 参数 s 取何值，下列级数是绝对收敛和条件收敛：

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^s}$；　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left[\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\right]^s$.

解法　(1) 先证 $s\leq 0$ 时，它发散；其次应用莱布尼茨判别法，证明 $s>0$ 时，它收敛，最后再证 $s>1$ 时，它绝对收敛．从使级数收敛的 $s>0$ 中，去掉使级数绝对收敛的 $s>1$，所剩的部分，即 $0<s\leq 1$，就是使级数条件收敛的部分．

(2) 证法同(1)　　$\forall\, n\in\mathbf{N}_+$，且 $n\geq 2$，有

$$\frac{1}{2\sqrt{n}}<\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}<\frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

右侧不等式见《讲义》 23 页的注④ . 左侧不等式同法可证 . 事实上, 设

$$A = \frac{(2n-1)}{(2n)} = \frac{1\cdot 3\cdots(2n-1)}{2\cdot 4\cdots(2n)}$$

$$= \frac{1}{\frac{2}{3}\;\frac{4}{5}\cdots\frac{2n-2}{2n-1}}\cdot\frac{1}{2n} > \frac{1}{\frac{3}{4}\;\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}}\cdot\frac{1}{2n}$$

$$= \frac{1}{\frac{1}{2}\;\frac{3}{4}\;\frac{5}{6}\cdots\frac{2n-1}{2n}}\cdot\frac{1}{4n} = \frac{1}{A\cdot 4n}.$$

有 $A^2 > \frac{1}{4n}$, 即 $A = \frac{(2n-1)}{(2n)} > \frac{1}{2\quad n}$.

10. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛, 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 也收敛 .

证法 应用柯西收敛准则, 设

$$B_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n.$$

有

$$\begin{aligned}
&|a_{n+1}b_{n+1} + a_{n+2}b_{n+2} + \cdots + a_{n+p}b_{n+p}| \\
= &\ a_{n+1}(B_{n+1} - B_n) + a_{n+2}(B_{n+2} - B_{n+1}) + \cdots + \\
&\ a_{n+p}(B_{n+p} - B_{n+p-1})| \\
= &\ |-B_n a_{n+1} + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + B_{n+p}a_{n+p}| \\
= &\ \underline{B_n a_{n+p} -} B_n a_{n+1} + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + \\
&\ B_{n+p}a_{n+p} - \underline{B_n a_{n+p}|} \\
= &\ |B_n(a_{n+p} - a_{n+1}) + B_{n+1}(a_{n+1} - a_{n+2}) + \cdots + \\
&\ a_{n+p}(B_{n+p} - B_n)| \\
= &\ \cdots\cdots
\end{aligned}$$

* * * *

13. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (a_n > 0)$ $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 也发散 .

证法 已知 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (a_n>0)$ $S_n\}$

调增加无上界，从而，" $n\in\mathbf{N}_+$，v $p\in\mathbf{N}_+$，有

$$S_{n+p}\geq 2S_n \quad \text{或} \quad \frac{S_n}{S_{n+p}}\leq\frac{1}{2}.$$

有
$$\frac{a_{n+1}}{S_{n+1}}+\frac{a_{n+2}}{S_{n+2}}+\cdots+\frac{a_{n+p}}{S_{n+p}}>\frac{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{n+p}}{S_{n+p}}$$
$$=\frac{S_{n+p}-S_n}{S_{n+p}}=1-\frac{S_n}{S_{n+p}}\geq 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}.$$

于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{S_n}$ 发散.

14. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n\ (a_n>0)$ $r_n=\sum_{k=n}^{\infty} a_k$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{r_n}$ 发散.

证法 与第 13 题证法相同.

16. 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha}}$ 收敛，则 " $\beta>\alpha$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\beta}}$ 也收敛.

证法 设 $\beta=\alpha+\lambda$，$\lambda>0$，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\beta}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha+\lambda}}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha}}\cdot\frac{1}{n^{\lambda}},$$

其中数列 $\frac{1}{n^{\lambda}}$ 单调减少，有下界，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^{\alpha}}$ 收敛.应用阿贝尔判别法.

▶▶ 练习题 9.1（三）

1. 证明：将收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 相邻的奇偶项交换位置得到的新级数也收敛，且有相同的和数.

证法 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的部分和是 A_n, $\lim_{n\to\infty} A_n = S$. 有 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 设奇偶项交换位置的新级数的部分和是 S_n

当 $n = 2k$ $(k \in \mathbf{N}_+)$ $S_{2n} = A_{2n}$,

当 $n = 2k+1$ $(k \in \mathbf{N}_+)$ $S_{2n+1} = A_{2n} + a_{2k+2}$.

于是，$\lim_{n\to\infty} S_n = S$，即新级数收敛，且有相同的和.

5. 证明:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln 2 .$$

证法 应用《讲义》 2.2 第 19 题. 设交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 的部分和是 S_n. 偶子列

$$\begin{aligned} S_{2n} &= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n}\right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) \\ &= \ln 2n + c + r_{2n} - (\ln n + c + r_n) \end{aligned}$$

c 是尤拉常数，$\lim_{n\to\infty} r_{2n} = \lim_{n\to\infty} r_n = 0$.

* * * *

6. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，将其项重排，使新级数中每一项的序号与该项在原级数中的序号之差的绝对值不超过 m (m 是指定的自然数)

相等.

证法 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与重排项的新级数的部分和分别是 S_n 与 σ_n. 已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，有

$$|S_n - S| < \varepsilon \quad 和 \quad |a_{n+k}| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \cdots)$$

新级数的部分和 σ_{n+m}，包含着级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 的前 n 项的和，以及第 $n+1$ 项至第 $n+2m$ 项中的 m 项之和，有

$$|\sigma_{n+m} - S| = |S_n + a_{k_1} + a_{k_2} + \cdots + a_{k_m} - S|,$$

其中 $n+1 \leq k_i \leq n+2m$，$i=1, 2, \cdots, m$，…

7. 证明：将级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 重排，首先依次有 p 个正项，其次依次有 q 个负项，以下如此循环，则新级数收敛，其和是

$$\ln 2 + \frac{1}{2} \ln \frac{p}{q}.$$

证法 将重排后的新级数如下结合：

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2q}\right) + \left(\frac{1}{2p+1} + \cdots + \frac{1}{4p-1}\right) - \left(\frac{1}{2q+2} + \cdots + \frac{1}{4q}\right) + \cdots.$$

已知
$$1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2m-1} = H_{2m} - \frac{1}{2} H_m,$$
$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2m} = \frac{1}{2} H_m,$$

应用 2.2 第 19 题．其中 $H_m = \ln m + c + r_m$，c 是尤拉常数，$r_m \to 0\ (m \to \infty)$

$$S_{2n} = \left(1 + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2p-1}\right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2q}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2(n-1)p+1} + \cdots + \frac{1}{2np-1}\right) - \left(\frac{1}{2(n-1)q+2} + \cdots + \frac{1}{2nq}\right)$$
$$= \left(H_{2np} - \frac{1}{2} H_{np}\right) - \frac{1}{2} H_{nq} = \cdots.$$

§9.2 函 数 级 数

一、基本内容

本节有五段 .

第一段给出了函数级数的收敛域

定义 .

第二段给出了在函数级数中占有重要地位的一致收敛的概念 .

第三段在理论上给出了函数级数一致收敛的必要充分条件——柯西一致收敛准则

别函数级数绝对一致收敛的充分条件—— M 判别法 2)

及判别函数级数 3)

法 4)

第四段给出与函数级数平行的函数列的一致收敛的概念以及柯西一致收敛准则 1′)和一致收敛的确界极限判别法 5)

第五段给出了和函数的分析性质: 若函数级数或导函数级数一致收敛

所具有的分析性质 . 换句话说, 极限运算、求积分运算、求导数运算与级数无限和的运算可以交换次序 .

函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $a, b]$

函数 S $x)$

	$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ $a, b]$
一致收敛于和函数 S $x)$	" $\varepsilon > 0$, v $N \in \mathbf{N}_+$, " $n > N$, " $x \in [a, b]$ $\| S_n(x) - S(x) \| < \varepsilon$
非一致收敛于和函数 S $x)$	v $\varepsilon_0 > 0$, " $N \in \mathbf{N}_+$, v $n_0 > N$, v $x_0 \in [a, b]$ $\| S_{n_0}(x_0) - S(x_0) \| > \varepsilon_0$

函数列 $f_n(x)$ 　$a,b]$	
一致收敛于极限函数 f　$x)$	$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbf{N}_+,\ \forall\,n>N,\ \forall\,x\in[a,b]$ $\lvert f_n(x)-f(x)\rvert<\varepsilon$
非一致收敛于极限函数 f　$x)$	$\exists\,\varepsilon_0>0,\ \forall\,N\in\mathbf{N}_+,\ \exists\,n_0>N,\ \exists\,x_0\in[a,b]$ $\lvert f_{n_0}(x_0)-f(x_0)\rvert>\varepsilon_0$

连续性——定理 6: $\lim\limits_{x\to x_0}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)$.

可积性——定理 7: $\int_a^b\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)\,\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n(x)\,\mathrm{d}x$.

可微性——定理 8: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)$.

由于函数级数与函数列可以互相转化，二者只有形式上的差异，并无本质上的区别，因此第五段平行的给出了极限函数的分析性质：

连续性——定理 6′: $\lim\limits_{x\to x_0}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)$.

可积性——定理 7′: $\int_a^b\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim\limits_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x$.

可微性——定理 8′: $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\lim\limits_{n\to\infty}f_n(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}f_n(x)$.

▶▶ 二、学习要求

一致收敛是本节的重要概念，和函数

质是本节的核心内容．要求：

1．深刻理解一致收敛概念的实质，熟练掌握一致收敛的定义及其否定叙述，并能应用一致收敛的定义或适当的判别法判别函数级数的一致收敛性．

2．记住定理 6～8 (**或定理** 6′～8′)

论和函数

三、答疑辅导

问 1. 判别函数列 $f_n(x)\}$　　　I 上一致收敛有哪些判别法?

答　函数列$\{f_n(x)\}$　　　I 上一致收敛

$f(x))$有以下四个等价叙述:

1) 定义

" $\varepsilon>0$, v $N\in \mathbf{N}_+$, " $n>N$, " $x\in I$, 有

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

2) 柯西一致收敛准则　　1′)

" $\varepsilon>0$, v $N\in \mathbf{N}_+$, " $n>N$, " $p\in \mathbf{N}_+$, " $x\in I$, 有

$$|f_n(x)-f_{n+p}(x)|<\varepsilon.$$

3)“确界极限”　　　§9.2 定理 5)

$$\lim_{n\ \infty}(\sup_{x\in I}|f(x)-f_n(x)|)=0.$$

4)“点列极限”　　　§9.2 补充例题的例 2)

对任意数列 $x_n\}$　$x_n\in I$, $n=1,2,\cdots$, 有

$$\lim_{n\ \infty}|f(x_n)-f_n(x_n)|=0.$$

以上四个一致收敛的等价叙述,每个都是函数列 $f_n(x)\}$

间 I 上一致收敛的判别法. 一般来说, 当函数列 $f_n(x)\}$

函数 $f\quad x)$　　　　　　　　　　　　　　3)

简便, 例如,

函数列$\{x^n e^{-n^2x}\}$　　　$x\in[0,+\infty)$

$$f\quad x)=\lim_{n\ \infty}x^n e^{-n^2x}=0.$$

$$\lim_{n\ \infty}(\sup_{x\in[0,+\infty)}|f(x)-f_n(x)|)$$

$$=\lim_{n\ \infty}(\sup_{x\in[0,+\infty)}|x^n e^{-n^2x}|)\le\lim_{n\ \infty}e^{-n}=0,$$

即函数列 $x^n e^{-n^2x}\}$　　$0,+\infty)$

判别函数列非一致收敛应用“点列极限”4)

须找到某个数列 $x_n'\}$　$x_n'\in I$，$n=1$，2，⋯，有

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n')-f_n(x_n')|>0$$

即可.例如,函数列 $\frac{nx}{n^2+(n+1)x}$ 对于" $x\in(0,+\infty)$

函数

$$f\quad x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{n^2+(n+1)x}=0.$$

但在 $0,+\infty)$　　$n\}$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\cdot n}{n^2+(n+1)n}\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n^2}{2n^2+n}=\frac{1}{2}>0,$$

所以函数列 $\frac{nx}{n^2+(n+1)x}$ 在 $0,+\infty)$

问 2. 如果函数列 $f_n(x)\}$　　$a,b)$

都一致收敛　　$f_n(x)\}$在(a,b)内是内闭一致收敛)

么函数列 $f_n(x)\}$　　$a,b)$

答　不一定.例如,函数列 $x^n\}$　　$0,1)$

敛.事实上," $x\in(0,1)$　　$f\quad x)=\lim_{n\to\infty}x^n=0.$

对任意闭区间$[a,b]$　$(0,1)$

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-f_n(x)|\}=\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[a,b]}|x^n|=\lim_{n\to\infty}b^n=0,$$

即函数列 $x^n\}$　$a,b]$　$(0,1)$　　$x_n\}$

开区间 $0,1)$　　$0,1)$

$$\lim_{n\to\infty}\{\sup_{x\in(0,1)}|f(x)-f_n(x)|\}=\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in(0,1)}|x^n|=\lim_{n\to\infty}1=1\neq0,$$

即函数列 $x^n\}$　$0,1)$

问 3. 如果函数列 $f_n(x)\}$　　$f_n(x)$　$a,b)$

意一点都不连续,那么函数列 $f_n(x)\}$　$a,b)$

于连续函数?

答　能.例如,函数列

$$f_n(x)=\begin{cases}\frac{1}{n}, & \text{当 } x \text{ 是 } 0,1)\\ 0, & \text{当 } x \text{ 是 } 0,1)\end{cases}$$

每个函数 $f_n(x)$　　$0,1)$

$$f\quad x) = \lim_{n\quad\infty} f_n(x) = \lim_{n\quad\infty}\begin{array}{c}1\\ \hline n\\ 0\end{array} = 0. \qquad x\in(0,1).$$

显然，极限函数 $f\quad x) = 0$ 在$(0,1)$

$$\lim_{n\quad\infty}\{\sup_{x\in(0,1)}|f(x) - f_n(x)|\} = \lim_{n\quad\infty}\frac{1}{n} = 0,$$

即函数列 $f_n(x)\}$　　$0,1)$

问 4. 不难证明，若函数列 $f_n(x)\}$　　　　m 个)　　　I_i

$(i = 1,2,\cdots,m)$　　　　　　　　$f_n(x)\}$　$\bigcup_{i=1}^{m} I_i$ 上还是一致收敛．当将有限个区间换成无限个区间 $I_i\ (i = 1,2,\cdots)$

数列 $f_n(x)\}$　$\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ 上是否是一致收敛？

答　否．例如，函数列 $\frac{n+1}{n}x$ 在 $I_i = [i - 1, i + 1]$　　$i = 1,2,\cdots)$

$$f\quad x) = \lim_{n\quad\infty}\frac{n+1}{n}x = x,$$

且

$$\lim_{n\quad\infty}\quad\sup_{x\in[i-1,i+1]}\left|x - \frac{n+1}{n}x\right| = \lim_{n\quad\infty}\frac{i+1}{n} = 0,$$

即函数列 $\frac{n+1}{n}x$ 在 $I_i\ (i = 1,2,\cdots)$

$\frac{n+1}{n}x$ 在 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = [0, +\infty)$

事实上，取 $x_n = n$，有

$$\lim_{n\quad\infty}|f(x_n) - f_n(x_n)| = \lim_{n\quad\infty}\left|n - \frac{n+1}{n}\cdot n\right| = 1 > 0,$$

即函数列 $\frac{n+1}{n}x$ 在 $\bigcup_{i=1}^{\infty} I_i = [0, +\infty)$

问 5. 定理 6—定理 8 中的一致收敛是否是必要条件？

答：否．一致收敛仅是定理 6—定理 8 的充分条件而不是必

要条件 . 例如, 函数级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

的部分和 $S_n=\frac{nx}{1+n^2x^2}$, 在 $[0,1]$

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{1+n^2x^2}=0.$$

而这个函数级数在 $[0,1]$

事实上, 在 $[0,1]$ $\frac{1}{n}$, 有

$$\lim_{n\to\infty}\left|S\left(\frac{1}{n}\right)-S_n\left(\frac{1}{n}\right)\right|=\lim_{n\to\infty}\frac{n\cdot\frac{1}{n}}{1+n^2\cdot\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}>0,$$

即函数级数在 $[0,1]$

这个函数级数的每一项在 $[0,1]$

1) " $x_0\in[0,1]$

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}S_n(x)=\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}S_n(x)\qquad 0=0\ .$$

2) $$\int_0^1\lim_{n\to\infty}S_n(x)\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1S_n(x)\,\mathrm{d}x,$$ 即

$$0=\int_0^1 0\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{1+n^2x^2}\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+n^2)}{2n}=0.$$

3) 不难证明, $\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]'$ 在 $[0,1)$ 非一致收敛 .但是, " $x\in[0,1)$

$$0=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}S(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left[\frac{nx}{1+n^2x^2}-\frac{(n-1)x}{1+(n-1)^2x^2}\right]$$

$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{k-k^3x^2}{(1+k^2x^2)^2}-\frac{(k-1)-(k-1)^3x^2}{[1+(k-1)^2x^2]^2}\right]$$

$$= \lim_{n \quad \infty} \frac{n - n^3 x^2}{(1 + n^2 x^2)^2} = 0.$$

四、补充例题

例 1. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad a, b)$

项按原有顺序适当结合, 可使新级数 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k(x) \quad a, b)$

一致收敛, 其中

$$F_0(x) = u_1(x) + \cdots + u_{n_1 - 1}(x)$$

$$F_k(x) = u_{n_k}(x) + \cdots + u_{n_{k+1} - 1}(x) \qquad k = 1, 2, \cdots.$$

证法　应用柯西一致收敛准则和 M **判别法, 取** $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ **为优级数.**

证明　已知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \quad a, b) \qquad \frac{1}{2^k} > 0$

$(k \in \mathbf{N}_+)$ v $n_k \in \mathbf{N}_+$, " $m \geq n_k$, " $x \in (a, b)$

$$|u_{n_k}(x) + \cdots + u_m(x)| < \frac{1}{2^k}.$$

" $k \in \mathbf{N}_+$, v $n_k \in \mathbf{N}_+$, **不妨设**

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots.$$

由 m **的任意性, 取** $m = n_{k+1} - 1$, **即**

$$|u_{n_k}(x) + \cdots + u_{n_{k+1} - 1}(x)| < \frac{1}{2^k}.$$

令

$$F_0(x) = u_1(x) + \cdots + u_{n_1 - 1}(x).$$

$$F_k(x) = u_{n_k}(x) + \cdots + u_{n_{k+1} - 1}(x) \quad k = 1, 2, \cdots.$$

于是, $|F_k(x)| < \frac{1}{2^k}$, $k = 1, 2, \cdots$. **已知** $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$ **收敛. 由** M

判别法知 $\sum_{k=0}^{\infty} F_k(x)$

例 2. **函数列** $f_n(x)\}$ I **上一致收敛于函数** $f\ x)$ **对任意数列** $\{x_n\}$ $x_n \in I$，**有**

$$\lim_{n\ \infty} |f(x_n) - f_n(x_n)| = 0.$$

证法 必要性可应用§9.2 定理 5．充分性可用反证法，存在某子数列 $x_{n_k}\}$ $\lim_{k\ \infty} |f(x_{n_k}) - f_{n_k}(x_{n_k})| > 0$.

证明 " " 已知函数列 $f_n(x)\}$ I 上一致收敛．由§9.2 定理 5，有

$$\lim_{n\ \infty}\{\sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|\} = 0.$$

对任意数列 $\{x_n\}$ $x_n \in I$，有

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \leq \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)|\quad 0\quad (n\quad \infty).$$

于是，

$$\lim_{n\ \infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = 0\ .$$

" " 用反证法．假设函数列 $f_n(x)\}$ I 上非一致收敛于 $f\ x)$ $\varepsilon_0 > 0$，" $N \in \mathbf{N}_+$，v $n_0 > N$，v $x_0 \in I$，有

$$|f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon_0.$$

当 $N = 1$，v $n_1 > 1$，v $\xi_1 \in I$，有 $|f_{n_1}(\xi_1) - f(\xi_1)|\quad \varepsilon_0$，

当 $N = n_1$，v $n_2 > n_1$，v $\xi_2 \in I$，有 $|f_{n_2}(\xi_2) - f(\xi_2)| \geq \varepsilon_0$，

……

当 $N = n_{k-1}$，v $n_k > n_{k-1}$，v $\xi_k \in I$，有 $|f_{n_k}(\xi_k) - f\ \xi_k)|\quad \varepsilon_0$，

……

于是，存在数列 $\xi_k\}$ $\xi_k \in I$，且 $|f_{n_k}(\xi_k) - f(\xi_k)|$ ，矛盾．

例 3. **证明：若函数级数** $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ **在** $a, b]$ **上收敛于函数** $S\ x)$ **而** $u_n(x)$ $a, b]$ $S\ x)$ $a, b]$ **上取**

证法 首先，找到 $S\ x)$ x_0．因为部分和 $S_n(x)$ $a, b]$ $S_n(x)$ $a, b]$

点，设最小值的点是 $x_n \in [a, b]$

$x_0 \in [a, b]$ S $x)$ x_0 取到最小值 .

证明 已知 $u_n(x)$ $a, b]$

$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的部分和 $S_n(x)$ $a, b]$ $S_n(x)\}$

$x \in [a, b]$ $S_n(x)$ $a, b]$

点是 x_n . 得到数列 $x_n\}$ $x_n\}$

的子数列 $x_{n_k}\}$

$$\lim_{k \quad \infty} x_{n_k} = x_0 \in [a, b] .$$

下面证明，函数 S $x)$ $x_0 \in [a, b]$

" $x \in [a, b]$ $S_{n_k}(x_{n_k}) \leq S_{n_k}(x) \leq S$ $x)$.

只需证明，$\lim\limits_{k \quad \infty} S_{n_k}(x_{n_k}) = S$ $x_0)$

已知 $\lim\limits_{k \quad \infty} S_{n_k}(x_0) = S$ $x_0)$

" $\varepsilon > 0$，v $K_1 \in \mathbf{N}_+$ ，" $k > K_1$，有 $| S_{n_k}(x_0) - S(x_0) | < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

取 $k > K_1$ 已知 $S_{n_k}(x)$ x_0 连续，对上述的 $\varepsilon > 0$，v $\delta > 0$ (v $K_2 \in \mathbf{N}_+$ ，" $k > K_2$) $| x_{n_k} - x_0 | < \delta$，有

$$| S_{n_k}(x_{n_k}) - S_{n_k}(x_0) | \quad \frac{\varepsilon}{2} .$$

取 $K = \max\{K_1, K_2\}$. " $k > K$，有

$$| S_{n_k}(x_{n_k}) - S(x_0) | \leq | S_{n_k}(x_{n_k}) - S_{n_k}(x_0) | + | S_{n_k}(x_0) - S(x_0) |$$

$$< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

即 $$\lim_{k \quad \infty} S_{n_k}(x_{n_k}) = S \quad x_0) .$$

例 4. 证明：若函数 f $x)$ $\mathbf{R}$ 上非恒为 0，存在任意阶导数，且 " $x \in \mathbf{R}$，有

$$\left| f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x) \right| < \frac{1}{n^2} ,$$

则 $\lim\limits_{n\quad\infty} f^{(n)}(x) = ce^{x}$，其中 c 是常数．

证法　首先应用柯西一致收敛准则，证明函数列 $f^{(n)}(x)\}$ 　$\mathbf{R}$ 上一致收敛．其次应用定理 6′，解一个简单微分方程即可．

证明　已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2}}$ 收敛，根据柯西一致收敛准则，即

" $\varepsilon > 0$，v $N \in \mathbf{N}_{+}$，" $n > N$ 与 " $p \in \mathbf{N}$，有

$$\frac{1}{n^{2}} + \frac{1}{(n+1)^{2}} + \cdots + \frac{1}{(n+p)^{2}} < \varepsilon.$$

有
$$\begin{aligned} & | f^{(n+p)}(x) - f^{(n-1)}(x) | \\ \leq & | f^{(n+p)}(x) - f^{(n+p-1)}(x) | + \cdots + \\ & | f^{(n)}(x) - f^{(n-1)}(x) | \\ < & \frac{1}{(n+p)^{2}} + \cdots + \frac{1}{n^{2}} < \varepsilon, \end{aligned}$$

即函数列 $f^{(n)}(x)\}$ 　$\mathbf{R}$ 上一致收敛．设

$$f\quad x) = \lim_{n\quad\infty} f^{(n)}(x)$$

根据定理 6′，有 $f\,'\quad x) = \lim\limits_{n\quad\infty} f^{(n+1)}(x) = f(x)$ 　　$f\quad x) \neq 0$ 时，有

$$\frac{f\,'\quad x)}{f\quad x)} = 1 \quad 或 \quad \ln\ f\quad x) = x + a \quad 或 \quad f\quad x) = e^{x+a},$$

其中 a 是常数，令 $x = 0$，有 $f\quad 0) = e^{a} = c$，即

$$f\quad x) = ce^{x}.$$

说明　本题首先要证明函数列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 　$\mathbf{R}$ 上一致收敛，从而一方面证明了它存在极限函数 $f\quad x)$

理 8′．于是，得到 " $x \in \mathbf{R}$，有

$$f\quad x) = f\,'(x).$$

满足这个微分方程的函数 $f(x)$ 　　　　$f(x) \equiv 0$ 或 $f(x) = ce^{x}$．已知 $f(x)$á 0，则 $f(x) = ce^{x}$.然后,再取 x 的特殊值 　　　$x =$ 0) 　　　c．同法可计算:

设函数 $f(x)$ 　$\mathbf{R}$ 上存在任意阶导数，且函数列 $f^{(n)}(x)\}$

R 上一致收敛, $\lim\limits_{n\quad\infty} f^{(n)}(0)=2$, **求极限**

$$\lim_{n\quad\infty} f^{(n)}(x).$$

例 5. 证明: **若** $\{r_n\}$ $\quad 0,1)$

$$S(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{2^n},$$

则函数 $S(x)$ $\qquad \alpha\in(0,1)$ $\qquad r_n\ (n\in\mathbf{N}_+)$
续.

证法 **应用定理** 6.

证明 " $x\in(0,1)$ $\quad \left|\dfrac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{2^n}\right.\leq\dfrac{1}{2^n}$.

已知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^n}$**收敛**, **根据** M **判别法**, **函数级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{2^n}$$

在 $0,1)$ $\qquad S\quad x)$

在任意无理数 $\alpha\in(0,1)$ $\qquad \dfrac{\operatorname{sgn}\quad x-r_n)}{2^n}$**都连续**.

事实上, **对于取定的** n, **不妨设** $r_n<\alpha\quad \alpha<r_n$ **时证法相同**$)$
$x\quad \alpha$**时**, **总会有** $r_n<x<\alpha$, **即当** $|x-\alpha|<|\alpha-r_n|$**时**, **有**

$$\left|\frac{\operatorname{sgn}(\alpha-r_n)}{2^n}-\frac{\operatorname{sgn}\quad x-r_n)}{2^n}\right|=\left|\frac{1}{2^n}-\frac{1}{2^n}\right|=0<\varepsilon,$$

即$\dfrac{\operatorname{sgn}\quad x-r_n)}{2^n}$**在** α **连续** $\ n=1,2,\cdots)$ $\qquad 6$, **函数** $S\quad x)$
无理数 α **连续**.

在任意有理数 $r_n\in(0,1)$ $\qquad k\neq n$ **时**, **级数的每一项**
$\dfrac{\operatorname{sgn}\quad x-r_k)}{2^k}$**在** r_n **都连续** $\qquad \dfrac{\operatorname{sgn}\quad x-r_n)}{2^n}$**在** r_n **不连续**. **事实上**,

$$\lim_{x\quad r_n^-}\frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{2^n}=\frac{-1}{2^n}\quad \text{与}\quad \lim_{x\quad r_n^+}\frac{\operatorname{sgn}(x-r_n)}{2^n}=\frac{1}{2^n}.$$

已知原级数在$(0,1)$ $\dfrac{\operatorname{sgn}\ x - r_k)}{2^k}$,

$k\neq n$，在 r_n 都连续，根据定理6，和函数

$$S_1(x) = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}\ x - r_k)}{2^k}$$

在 r_n 连续．而

$$S(x) = \sum_{\substack{k=1\\ k\neq n}}^{\infty} \frac{\operatorname{sgn}\ x - r_k)}{2^k} + \frac{\operatorname{sgn}\ x - r_n)}{2^n} = S_1(x) + \frac{\operatorname{sgn}\ x - r_n)}{2^n}.$$

有 $\lim\limits_{x\ \ r_n^-} S(x) = S_1(r_n) - \dfrac{1}{2^n}$, $\lim\limits_{x\ \ r_n^+} S(x) = S_1(r_n) + \dfrac{1}{2^n}$.

于是，$S(x)$在 r_n 不连续．

说明 由于$\{r_n\}$ $0,1)$ $\alpha\in$ $(0,1)$ α都连续，根据定理6，和函数$S(x)$ α连续．对任意一个有理数 $r_n\in(0,1)$ $\dfrac{\operatorname{sgn}\ x - r_n)}{2^n}$在 r_n 不连续，于是和函数 $S\ \ x)$ r_n 不连续．同法可证:

(1) 若 $r_n\}$ $0,1)$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x - r_n|}{3^n} \qquad x\in\ 0,1]$$

则函数 $f\ \ x)$ $0,1]$
导．

(2) 若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 收敛 $c_n>0)$ $r_n\}$ $0,1)$
列，设

$$\varphi(x) = \sum_{r_n<x} c_n, \qquad x\in(0,1)$$

则函数 $\varphi\ \ x)$ $\alpha\in(0,1)$ $r_n\ (n\in\mathbf{N}_+)$
连续．

(提示:符号 $\phi(x) = \sum\limits_{r_n < x} c_n$ 表示" $x \in (0,1)$,小于 x 的所有有理数 $r_n < x$,它们的下标 n 所对应的 c_n 之和,即 $\sum\limits_{r_n < x} c_n$ (它是级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$ 的部分项之和,当然收敛)是 x 的函数,表为 $\phi(x)$.)

例 6. 证明: 若函数 $f(x)$ 在 $[-a, a]$ $(a > 0)$ $x \in [-a, a]$ $x \neq 0$,有 $|f(x)| < |x|$.设

$f_1(x) = f(x),\ f_2(x) = f[f_1(x)], \cdots, f_{n+1}(x) = f[f_n(x)], \cdots,$

则 $f_n(x)\}$ $-a, a]$ 0 .

证法 " $\varepsilon > 0$, 首先证明, 在 $-\varepsilon, \varepsilon]$ $|f_n(x)| < \varepsilon$. 其次证明,在 $-a, -\varepsilon]$ $\varepsilon, a]$ $|f_n(x)| < \varepsilon$.

证明 当 $x \neq 0$ 时, 有 $|f(x)| < |x|$ f $x)$

$$f(0) = \lim_{x \quad 0} f(x) = 0,$$

即 " $x \in [-a, a]$ $|f(x)| \leq |x|$.

" $\varepsilon > 0$,函数 $\left|\dfrac{f \quad x)}{x}\right|$ 在 $-a, -\varepsilon]$ $\varepsilon, a]$ 最大值 M $< 1)$ $x \in [-a, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, a]$ $\left|\dfrac{f \quad x)}{x}\right| \leq M$ 或

$$|f(x)| \leq M|x| \leq Ma,$$

即
$$|f_1(x)| \leq Ma.$$

$$|f_2(x)| = |f[f_1(x)]| \leq M|f_1(x)| \leq M^2 a, \cdots,$$

$$|f_n(x)| = |f[f_{n-1}(x)]| \leq M^n a.$$

已知 $\lim\limits_{n \quad \infty} M^n = 0$ $(M < 1)$ $N \in \mathbf{N}_+$, " $n > N$, 有 $M^n < \dfrac{\varepsilon}{a}$. 于是, v $N \in \mathbf{N}_+$, " $n > N$, " $x \in [-a, -\varepsilon] \cup [\varepsilon, a]$

$$|f_n(x)| \leq M^n a < \frac{\varepsilon}{a} a = \varepsilon.$$

在 $-\varepsilon, \varepsilon]$ $|f_n(x)| \leq |x| < \varepsilon$,即函数列 $f_n(x)\}$ $-a, a]$ 0 .

例 7. 证明: **若** $f_n(x)\}$ $a, b]$ $x\in$ $[a, b]$ $f_n(x)\}$ $c, d]$ $[a, b]$ $f_n(x)\}$ $c, d]$

证法 **用反证法**. **假设对任意闭区间** $p, q]$ $[a, b]$ $\{f_n(x)\}$ $p, q]$**上非一致有界**, **即**

$$\forall k>0,\ \exists n_0\in\mathbf{N}_+,\ \exists x_0\in[p,q] \quad |f_{n_0}(x_0)| \quad k.$$

取 $k=1, 2, \cdots$, **作一个闭区间套**, **套出一点**, **产生矛盾**.

证明 **用反证法**. **假设** $f_n(x)\}$ $p, q]$ $[a, b]$ $a, b]$

对 $k=1$, $\exists n_1\in\mathbf{N}_+$, $\exists x_1\in[a, b]$ $|f_{n_1}(x_1)|$. **根据连续函数保号性**, **存在** $a_1, b_1]$ $[a, b]$ $b_1-a_1\le\dfrac{b-a}{2}$, **对** $\forall x\in[a_1, b_1]$

$$|f_{n_1}(x)| \quad .$$

$\{f_n(x)\}$ $a_1, b_1]$ $k=2$, $\exists n_2\in\mathbf{N}_+$, $n_2>n_1$, $\exists x_2\in[a_1, b_1]$ $|f_{n_2}(x_2)|$. **根据连续函数保号性**, **存在** $a_2, b_2]$ $[a_1, b_1]$ $b_2-a_2\le\dfrac{b-a}{2^2}$, $\forall x\in[a_2, b_2]$ **有**

$$|f_{n_2}(x)| \quad .$$

用此法一直作下去, **有** $n_1<n_2<\cdots<n_k<\cdots$,

$$[a, b] \quad [a_1, b_1] \quad \cdots \quad [a_k, b_k] \quad \cdots, \quad b_k-a_k\le\frac{b-a}{2^k}.$$

$\forall k\in\mathbf{N}_+$, $\forall x\in[a_k, b_k]$ $|f_{n_k}(x)|$ k.

根据闭区间套定理, **存在** $x_0\in[a_k, b_k]$ $k=1, 2, \cdots$, **使**

$$|f_{n_k}(x_0)| \quad k,$$

即数列 $f_n(x_0)\}$ $f_{n_k}(x_0)\}$ $f_n(x_0)\}$ **界**. **矛盾**.

例 8. (狄尼(Dini)定理) **若函数列**$\{ f_n(x)\}$ $a, b]$ **收敛于连续函数** $f \quad x)$ $f_n(x)$ $a, b]$ **意** $x\in[a, b]$ $f_n(x)\}$ $f_n(x)\}$ $a, b]$

证法一 " $\varepsilon>0$, **找到** $N\in\mathbf{N}_+$, " $n>N$, " $x\in[a, b]$ **有**

$$|f_n(x) - f(x)| \quad \varepsilon.$$

应用有限覆盖定理, **找** N.

证明 **已知**" $x\in[a, b]$ $n\in\mathbf{N}_+$, $f_n(x)\geq f_{n+1}(x)$

$$g_n(x) = f_n(x) - f \quad x) \quad \geq 0)$$

则 $g_n(x)\geq g_{n+1}(x)$ $g_n(x)\to 0\ (n\to\infty)$

" $\varepsilon>0$, " $x\in[a, b]$ $n_x\in\mathbf{N}_+$, **有**

$$0 < g_{n_x}(x) < \varepsilon.$$

已知 $g_{n_x}(x)$ x **的邻域** $J \quad x)$ $x\in J \quad x)\cap[a, b]$

$$0 < g_{n_x}(x) < \varepsilon.$$

邻域集 $J(x)\,|\,x\in[a, b]\}$ $a, b]$ **理**, **存在有限个邻域** $J \quad x_k)$ $k=1, 2, \cdots, m$, **也覆盖了闭区间** $a, b]$ $J \quad x_k)$ n_{x_k}. **令**

$$N = \max \quad n_{x_k}\,|\,k=1,2,\cdots,m\}$$

于是, " $n>N$, " $x\in[a, b]$ $x\in J \quad x_i)\cap[a, b]$ n_{x_i}, " $n>N\geq n_{x_i}$, **有**

$$0\leq f_n(x) - f \quad x) = g_n(x) < g_{n_{x_i}}(x) < \varepsilon,$$

即 $f_n(x)\}$ $a, b]$ $f \quad x)$

证法二 **用反证法**. **根据致密性定理得到矛盾**.

证明 **已知**" $x\in[a, b]$ $n\in\mathbf{N}_+$, $f_n(x)\geq f_{n+1}(x)$

$$g_n(x) = f_n(x) - f \quad x) \quad (\geq 0)$$

函数 $g_n(x)$ $a, b]$ $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$ $n \in \mathbf{N}_+$，且 " $x \in [a, b]$ $g_n(x) \to 0\ (n \to \infty)$

假设函数列$\{f_n(x)\}$ $a, b]$ f $x)$

函数列 $g_n(x)\}$ $a, b]$ 0，即

v $\varepsilon_0 > 0$，" $m \in \mathbf{N}_+$，v $n_m > m$，v $x_m \in [a, b]$

$$g_{n_m}(x_m) \geq \varepsilon_0 .$$

当 $m = 1$，v $n_1 > 1$，v $x_1 \in [a, b]$ $g_{n_1}(x_1) \geq \varepsilon_0$，

当 $m = 2$，v $n_2 > 2$，v $x_2 \in [a, b]$ $g_{n_2}(x_2) \geq \varepsilon_0$，

当 $m = 3$，v $n_3 > 3$，v $x_3 \in [a, b]$ $g_{n_3}(x_3) \geq \varepsilon_0$，

…….

于是，存在数列 $x_m\}$ $x_m \in [a, b]$ $g_{n_m}(x_m) \geq \varepsilon_0$．根据致密性定理，数列 $x_m\}$ $x_{m_k}\}$ $\lim\limits_{k \to \infty} x_{m_k} = x_0 \in [a, b]$ $g_n(x)$ x_0 连续，即 " $n \in \mathbf{N}_+$，有

$$\lim_{k \to \infty} g_n(x_{m_k}) = g_n(x_0)$$

因为 " $n \in \mathbf{N}_+$，v $k \in \mathbf{N}_+$，有 $m_k > n$，所以对 $x_{m_k} \in [a, b]$ 有

$$g_n(x_{m_k}) \geq g_{m_k}(x_{m_k}) \geq \varepsilon_0 .$$

于是，一方面，" $n \in \mathbf{N}_+$，有 $\lim\limits_{k \to \infty} g_n(x_{m_k}) = g_n(x_0) \geq \varepsilon_0$；另一方面，已知 $\lim\limits_{n \to \infty} g_n(x_0) = 0$．矛盾．

说明 证法一是在闭区间$[a, b]$ 找到了函数列 $f_n(x)\}$ $a, b]$ f $x)$ $N \in \mathbf{N}_+$．证法二是用反证法，根据致密性定理，找到某一点 $x_0 \in [a, b]$ 理与致密性定理都是描述了实数的连续性，是等价的．虽然二者本质相同，但是由于证明使用的方法不同，它们所起的作用也不同．

狄尼定理给出函数列$\{f_n(x)\}$ $a, b]$

性，例如，应用狄尼定理能够判别下列函数列
致收敛性：

(1) $f_n(x) = \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n$, 在 $[a, b]$

(2) $f_n(x) = n\left(x^{\frac{1}{n}} - 1\right)$, 在 $[1,10]$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x^n}{n} - \frac{x^{n+1}}{n+1}\right)$, 在 $[-1,1]$

(4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^2 e^{-nx}$, 在 $[0, 1]$

▶▶ 练习题 9.2 (一)

2. 判别下列函数级数在指定区间的一致收敛或非一致收敛：

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}$, 在 $\mathbf{R}$ 上.

解法 已知 $a^2+b^2\geq 2|ab|$，有 $1+n^5x^2\geq 2|n^{\frac{5}{2}}x|$. 于是，$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leq\frac{n|x|}{2n^{\frac{5}{2}}|x|}=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}.$$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{1}{3^n x}$, 在 $(0, +\infty)$

解法 此函数级数在 $(0, +\infty)$

$\exists\ \varepsilon_0=1$, $\forall N\in\mathbf{N}_+$, $\exists\ n_0>N$, $\exists\ p=1$, $\exists\ x_0=\dfrac{2}{3^{n_0+1}\pi}\in$

$$\left|S_{n_0+1}(x_0)-S_{n_0}(x_0)\right|=\left|2^{n_0+1}\sin\frac{1}{3^{n_0+1}\dfrac{2}{3^{n_0+1}\pi}}\right|=2^{n_0+1}\sin\frac{\pi}{2}=2^{n_0+1}>1.$$

10. 证明：若函数 $f(x)$ (a, b) $f'(x)$

$$f_n(x)=n\left[f\left(x+\frac{1}{n}\right)-f(x)\right],$$

则函数列 $f_n(x)\}$ α, β] (a, b) $f'\ x)$

证法 v $r\in(\beta, b)$ $x\in[\alpha,\beta]$ $N_1\in\mathbf{N}_+$, " $n > N_1$, 有

$$x+\frac{1}{n}\in[\alpha, r]$$

" $n > N_1$, **根据拉格朗日定理**, 有

$$f_n(x) = n\quad f\quad x+\frac{1}{n}\quad - f(x)\quad = f'\quad x+\frac{\theta_n}{n}\quad ,\quad 0<\theta_n<1$$

又有

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{f\quad x+\frac{1}{n}\quad - f\quad x)}{\frac{1}{n}} = f'\quad x)$$

极限函数 $f'\ x)$ α, r]

" $\varepsilon>0$, v $\delta>0$, " x, $x+\frac{1}{n}\in[\alpha, r]$ $\left|\ x+\frac{1}{n}\ - x\right| = \frac{1}{n}<\delta$, **即**v $N_2\in\mathbf{N}_+$, **当** $n > N_2$, **有** $n>\frac{1}{\delta}$, **从而**, **有**

$$|f_n(x) - f'(x)| = \left|f'\quad x+\frac{\theta_n}{n}\quad - f'(x)\right| < \varepsilon.$$

15. 证明: **若函数** $f_0(x)$ 0, $a]$ $n\in\mathbf{N}_+$, **有** $f_n(x) = \int_0^x f_{n-1}(t)\,\mathrm{d}t$. $0\leq x\leq a$, **则函数列** $f_n(x)\}$ 0, $a]$ 敛于 0 .

证法 **已知**v $M>0$, " $x\in[0, a]$ $|f_0(x)|$ M.

$$|f_1(x)| = \left|\int_0^x f_0(t)\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^x |f_0(t)|\,\mathrm{d}t\leq Mx,$$

$$|f_2(x)| = \left|\int_0^x f_1(t)\mathrm{d}t\right|\leq\int_0^x |f_1(t)|\,\mathrm{d}t < \frac{M}{2}x^2,$$

…… .

* * * *

16. 证明: **函数级数** $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ 1-\cos\frac{x}{n}$ **在** $-a,a]\quad a>0)$ **一致收敛,在 R 上非一致收敛** .

证法 $\forall x\in[-a,a]$

$$\left|1-\cos\frac{x}{n}\right|=\left|2\sin^2\frac{x}{2n}\right|\leq 2\frac{|x|^2}{4n^2}<\frac{a^2}{2n^2}.$$

证明在 R 非一致收敛, 应用柯西一致收敛准则的否定叙述:

$$\exists\ \varepsilon_0>0,\ \forall N\in\mathbf{N}_+,\ \exists\ n_0>N,\ p=1,\ \exists\ x_0\in\mathbf{R},\ 有$$

$$|u_{n_0}(x_0)|\quad \varepsilon_0 .$$

适当选取 ε_0 **与** x_0 .

17. 证明: **若** $f_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{n}f\quad x+\frac{k}{n}$ **, 其中函数** $f\quad x)\quad$ **R 连续, 则函数列** $f_n(x)\}\qquad\qquad a,b]$

证法 **函数** $f\quad x)\qquad\qquad f_n(x)\}$ **数是** $\varphi\quad x)$

$$\varphi\quad x)=\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}f\quad x+\frac{k}{n}\quad=\int_0^1 f\quad x+t)\,\mathrm{d}t.$$

$$|\varphi(x)-f_n(x)|=\left|\int_0^1 f(x+t)\mathrm{d}t-\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{n}f\quad x+\frac{k}{n}\quad\right|$$

$$\leq\sum_{k=0}^{n}\int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}}\left|f(x+t)-f\quad x+\frac{k}{n}\quad\right|\mathrm{d}t.$$

已知函数 $f\quad x)\qquad a,b+1]\qquad\qquad\cdots\cdots$.

18. 证明: **若函数列** $f_n(x)\}\qquad I$ **一致收敛于** $f\quad x)$ **每个函数** $f_n(x)\qquad I$ **有界, 则函数列** $f_n(x)\}\qquad I$ **一致有界** .

证法 **已知**, $\exists\ M_n>0,\ \forall x\in I$, **有** $|f_n(x)|\quad M_n$ (**常数**)

应用一致收敛性, 可证当 $n\geq N$ **时**, $f_n(x)\}\quad I$ **一致有界** . **再考虑** $f_1(x)\quad f_2(x)\quad\cdots,\ f_{N-1}(x)$

19. 证明: **若** $\forall n\in\mathbf{N}_+$, **函数** $\varphi_n(x)\qquad a,b]$

$\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(a)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(b)$ $\sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)$ $[a, b]$ 一致收敛 .

证法 设 $\alpha_n = \max \varphi_n(a)|, |\varphi_n(b)|\}$ $n = 1, 2, \cdots$.

再应用柯西一致收敛准则 .

" $x \in [a, b]$

$$|\varphi_n(x)| \leq \alpha_n \leq |\varphi_n(a)| + |\varphi_n(b)|, n = 1, 2, \cdots .$$

20. 证明: 若连续函数列 $f_n(x)\}$ $a, b]$ $f \quad x)$ " $n \in \mathbf{N}_+$, $x_n \in [a, b]$ $x_n \to x \quad n \to \infty)$ $\lim_{n \to \infty} f_n(x_n) = f \quad x)$

证法 $|f_n(x_n) - f(x)| \leq |f_n(x_n) - f(x_n)| \quad f(x_n) - f(x)|$. 由函数 $f \quad x)$ $a, b]$

$$|f(x_n) - f(x)| < \varepsilon .$$

由 $\{f_n(x)\}$

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \quad \varepsilon .$$

练习题9.2 (二)

1. 证明: 函数 $f \quad x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} e^{-\frac{x^2}{n^2}}$ 在 $0, +\infty)$

解法 因为 $0 < e^{-\frac{x^2}{n^2}} \leq 1$, 所以 $0 < \frac{1}{n^2} e^{-\frac{x^2}{n^2}} \leq \frac{1}{n^2}$.

函数级数的每一项在 $[0, +\infty)$ $0, +\infty)$ 致收敛 . 根据定理6, 和函数 $f \quad x)$ $0, +\infty)$

5. 证明: 函数列 $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$ 在 $[0, 1]$

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^1 f_n(x) \, dx = \int_0^1 \lim_{n \to \infty} f_n(x) \, dx .$$

这说明了什么 ?

证法 " $x \in [0, 1]$

$$f\quad x) = \lim_{n\to\infty} f_n\,(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{nx}{nx+1} = \begin{matrix} 0, & x=0, \\ 1, & x\in(0,1] \end{matrix}$$

$$\text{v}\ \ \varepsilon_0 = \frac{1}{3} > 0,\ \ "\ N\in\mathbf{N}_+,\ \text{v}\ \ n_0 > N,\ \text{v}\ \ x_0 = \frac{1}{n_0}\in(0,1]$$

$$|\,f_{n_0}(x_0) - f(x_0)\,| \quad \left|\frac{n_0\,x_0}{n_0\,x_0+1} - 1\right| = \frac{1}{2} > \frac{1}{3} = \varepsilon_0,$$

函数列 $f_n(x)\}$ $0,1]$

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n\,(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{nx}{nx+1}\mathrm{d}x = 1\ .$$

$$\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{nx}{nx+1}\mathrm{d}x = \int_0^1\mathrm{d}x = 1\ .$$

说明 函数列$\{f_n(x)\}$

分条件，不是必要条件.

9. 证明：若函数列 $f_n(x)\}$ **R 一致收敛于极限函数** $f\quad x)$ **且** " $n\in\mathbf{N}_+$，**函数** $f_n\,(x)$ **R 一致连续，则函数** $f\quad x)$ **R 也一致连续.**

证法 由已知条件，

" $\varepsilon>0$，v $N\in\mathbf{N}_+$，" $n>N$，" $x\in\mathbf{R}$，有

$$|\,f_n(x) - f(x)\,| < \varepsilon$$

" $m>N$，又已知 $f_m\,(x)$ **R** 一致连续.

对上述 $\varepsilon>0$，v $\delta>0$，" x_1，$x_2\in\mathbf{R}$，$|\,x_1 - x_2\,| < \delta$，有 $|\,f_m(x_1) - f_m(x_2)\,| < \varepsilon$ 同时又有

$$|\,f_m(x_1) - f(x_1)\,| \quad \varepsilon \quad 与 \quad f_m(x_2) - f(x_2)\,| \quad \varepsilon\ .$$

于是，

$$|\,f(x_1) - f(x_2)\,| \quad f(x_1) - f_m(x_1)\,| +$$
$$|\,f_m(x_1) - f_m(x_2)\,| + |\,f_m(x_2) - f(x_2)\,| \quad \varepsilon,$$

即极限函数 $f\quad x)$ **R** 一致连续.

*　　　　*　　　　*　　　　*

11. 证明：若函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\,(x)$ $a,b]$

数 $S\ \ x)$　　　$n\in\mathbf{N}_+$, 函数 $u_n(x)$　　$a, b]$

$S\ \ x)$ 在 $a, b]$

证法　设 $S_n(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}u_k(x)$　　$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$　　$a, b]$

收敛于 $S\ \ x)$

" $\varepsilon>0$, v $N\in\mathbf{N}_+$, " $n>N$, " $x\in[a, b]$　$|S_n(x)-S(x)|$　ε.

任意取定某个 $m>N$, " $x\in[a, b]$

$$S_m(x)-\varepsilon< S\ \ x)<S_m(x)+\varepsilon.$$

任意给 $[a, b]$　　T: $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$.

设 m_k 与 M_k 分别是 $S_m(x)$　$x_{k-1}, x_k]$

$$\text{"}\ x\in[x_{k-1}, x_k]\qquad m_k-\varepsilon< S\ \ x)<M_k+\varepsilon.$$

设 σ_k 与 ω_k 分别是 $S\ \ x)$　$S_m(x)$　$x_{k-1}, x_k]$

是,

$$\sigma_k\leq M_k-m_k+2\varepsilon=\omega_k+2\varepsilon,\ k=1, 2, \cdots, n. \text{于是}$$

$$\sum_{k=1}^{n}\sigma_k\Delta x_k\leq\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k+2\varepsilon\ \ b-a)$$

即和函数 $S\ \ x)$　$a, b]$

13. 证明: 若函数 $f\ \ x)$　$\mathbf{R}$ 有任意阶导数, 且函数列 $\{f^{(n)}(x)\}$ 在 $\mathbf{R}$ 一致收敛于极限函数 $\varphi\ \ x)$

$$\varphi\ \ x)=c\mathrm{e}^x,\qquad \text{其中 } c \text{ 是常数}.$$

证法　" $x\in\mathbf{R}$, 有 $\lim\limits_{n\to\infty}f^{(n)}(x)=\varphi\ \ x)$

$$\varphi'\ \ x)=\lim_{n\to\infty}f^{(n+1)}(x)=\varphi\ \ x)$$

设 $F\ \ x)=\varphi\ \ x)\mathrm{e}^{-x}$, " $x\in\mathbf{R}$, 有

$$F'\ \ x)=\varphi'\ \ x)\mathrm{e}^{-x}-\varphi\ \ x)\mathrm{e}^{-x}=[\varphi'(x)-\varphi(x)]\mathrm{e}^{-x}=0,$$

即 $F\ \ x)$　　　　$F\ \ x)=c$, 即 $\varphi\ \ x)\mathrm{e}^{-x}=c$ 或 $\varphi\ \ x)=c\mathrm{e}^x$.

14. 验证

$$(2)\ \lim_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin^2 m!\pi x\cos^{2n}m!\pi x=\begin{cases}0, & x\in\mathbf{Q},\\ 1, & x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}.\end{cases}$$

证法 设 $x=\frac{p}{q}\in\mathbf{Q}$, $q\in\mathbf{N}_+$, $p\in\mathbf{Z}$. 当 $m>q$ 时, $m!\frac{p}{q}$ 是整数.

设 $m!\frac{p}{q}=k$ $n\in\mathbf{N}_+$, 有

$$\sin^2 m!\pi x\cos^{2n} m!\pi x=\sin^2 k\pi\cos^{2n}k\pi=0.$$

当 $x\in\mathbf{R}-\mathbf{Q}$ 时, 即 x 是无理数时, 则 $m!\pi x$ 总是无理数

$|\cos m! x\pi|$ $\sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n} m!\pi x$ 收敛,有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n} m!\pi x=\frac{1}{1-\cos^2 m!\pi x}=\frac{1}{\sin^2 m!\pi x}.$$

于是, $\lim\limits_{m\to\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\sin^2 m!\pi x\cos^{2n} m!\pi x=\lim\limits_{n\to\infty}\sin^2 m!\pi x\sum_{n=0}^{\infty}\cos^{2n} m!\pi x=1$.

§9.3 幂 级 数

一、基本内容

本节有六段.

第一段给出了幂级数收敛半径

对一致收敛, 即内闭一致收敛

第二段给出了幂级数的和函数的性质: 连续性

逐项积分

微分之后得到的幂级数的收敛半径不变.

第三段给出了函数 $f(x)$ a 邻域内能展成泰勒级数的充分条件 9,定理 9 的条件实质也是必要条件) 10 给出了函数可展成泰勒级数的充分条件.

第四段给出了七个初等超越函数($\sin x, \cos x, e^x, \ln$　　x)
$1+x)^{\alpha}$，$\arcsin x$，$\arctan x$ 等)

第五段给出了幂级数在数 π、数 e，对数 $\ln x$ 的近似计算上的应用，并给出它们的误差估计．

第六段用幂级数给出了指数函数 e^x 与三角函数 $\sin x$，$\cos x$ 的分析定义，并讨论了它们的性质．

二、学习要求

幂级数是一种特殊的函数级数．幂级数有许多类似于多项式的好的性质．幂级数的重要性主要表现在两个方面：一是将函数(特别是初等超越函数)
数值的近似计算的重要方法；二是用幂级数的和函数表示新的非初等函数，这是解决某些理论问题和实际问题不可缺少的工具．要求：

1．理解幂级数的意义，并知道它的一些好的性质．

2．会求幂级数的收敛半径，掌握和函数的分析性质．

3．记住七个初等超越函数(e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln$　　x)
$1+x)^{\alpha}$，$\arcsin x$，$\arctan x$)
并能将一些简单函数展成泰勒级数或麦克劳林级数．

三、答疑辅导

问 1. 怎样求“缺项”的幂级数的收敛半径？

答　如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不“缺项”，即 $a_n \neq 0, n \in \mathbf{N}_+$，则根据定理 2 不难求出它的收敛半径 r．

如果幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 是“缺项”的，即 $a_{n_k} = 0$，$n_1 < n_2 < \cdots < n_k < \cdots$，一般来说，求它的收敛半径不能应用定理 2，此时可直接应用正项级数的达朗贝尔判别法与柯西判别法求其收敛半

径. 例如, 幂级数

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+3}}{(2n+3)} \middle/ \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^2}{2n+3} = 0 .$$

它的收敛半径是 $r = +\infty$.

2) $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^{2n}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{2^{n+1} x^{2n+2}}{2^n x^{2n}} \right| = \lim_{n\to\infty} 2x^2 = 2x^2 < 1, \quad |x| < \frac{1}{2} .$$

它的收敛半径 $r = \frac{1}{2}$.

3) $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$.

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{(n+1)!}}{x^{n!}} \right| = \lim_{n\to\infty} |x|^{n+1} = 0, \quad |x| < 1 .$$

它的收敛半径 $r = 1$.

问 2. 幂级数在收敛区间的端点上敛散情况如何?

答 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在收敛区间 $-r, r)$ $-r$ 与 r 的敛散情况很复杂:

1)

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ 的收敛区间是 $-1, 1)$ 1, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散; 在端点 -1, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 收敛. 收敛域是 $-1, 1)$

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛区间是 $-1, 1)$ 1 与 -1, 即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 都收敛. 收敛域是 $-1, 1]$

幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!}$ 的收敛区间是 $-1,1)$　　1 与 -1，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 1^{n!}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n!}$ 都发散.收敛域是 $-1,1)$

2)

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^{2n}$ 的收敛区间是 $-1,1)$　　1 与 -1，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ 都是条件收敛.

幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ 的收敛区间是 $-1,1)$　　1 与 -1，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ 都是绝对收敛.

由此可知，幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛域最小就是收敛区间，最大只能是收敛区间再加上收敛区间的两个端点.

幂级数收敛区间的端点是幂级数收敛区间与发散点集的分界点.一般来说，幂级数在这分界点上，若收敛，则收敛的速度很慢；若发散，则发散的速度也很慢.因此，判别幂级数在收敛区间端点的敛散性比较困难，常常要应用更精细的敛散性判别法.通常数学分析教材不讲这些更精细的判别法.关于幂级数在收敛区间端点上的敛散性，或不深入讨论或采用间接的方法讨论

补充例题的例 6)

问 3. 我们知道，幂级数逐项求导之后，收敛半径不变，那么它的收敛域是否也不变呢？

答　不一定.例如，幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} = f\quad x)$

$$f\quad x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2},\ f'\quad x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n},\ f''\quad x) = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2},$$

它们的收敛半径都是 1.但是，它们的收敛域却不同:

$$f\quad x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2} \text{ 的收敛域是 } -1,1]$$

$$f'\quad x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n} \text{ 的收敛域是 } -1,1)$$

$$f''\quad x) = \sum_{n=2}^{\infty}\frac{n-1}{n}x^{n-2} \text{ 的收敛域是 } -1,1)$$

显然, $-1,1)\quad[-1,1)\quad[-1,1]$

问 4. 幂级数在哪些区间上是一致收敛的?

答 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛区间是 $-r,r)$

1) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛区间 $-r,r)$ $a,b]$

$-r,r)$ 3)

一致收敛.

2) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛区间 $-r,r)$ r

$-r)$ 收敛,即收敛域是 $-r,r]$ $-r,r))$ $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在

$[0,r]$ $-r,0])$ §9.2 的例 8)

3) $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在收敛区间 $-r,r)$ r $-r)$

发散,则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $0,r)$ $-r,0])$

事实上,假设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $0,r)$

§9.3 定理 5 的推论,有

$$\lim_{x\to r^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_n\lim_{x\to r^-}x^n = \sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n$$

收敛.矛盾.

问 5. 幂级数

答 幂级数有多种用场 . 例如，可近似计算某些函数值，定义初等超越函数等 . 这里再列举用幂级数的和函数表示非初等函数及它在两个方面的应用 .

1) $f(x)$ **R** (或某个区间)

函数 $f(x)$ **R** 上存在原函数 $F(x)=\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x\in\mathbf{R}$. 但是这个原函数 $F(x)$

数 . 如果原函数 $F(x)$ $f(x)$

幂级数，则它的原函数 $F(x)$

数 $f(x)=\mathrm{e}^{-x^2}$ 在 **R** 上连续，它在 **R** 上存在原函数，但是它的原函数 $F(x)$

$$\mathrm{e}^{-x^2}=1-\frac{x^2}{1\,!}+\frac{x^4}{2\,!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{n\,!}+\cdots .$$

它在任意闭区间上都一致收敛 . 于是，" $x\in\mathbf{R}$，它的原函数

$$F(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{t^{2n}}{n\,!}\,\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\int_0^x\frac{t^{2n}}{n\,!}\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{n\,!\,2n+1)} .$$

函数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ 在 $\mathbf{R}-\{0\}$ 0 作连续开拓 . 令 $f(0)=1$，则函数

$$\varphi(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0\end{cases}$$

在 **R** 上连续 . 因此它在 **R** 上存在原函数，但是它的原函数也不是初等函数 . 已知

$$\frac{\sin x}{x}=\frac{1}{x}\quad x-\frac{x^3}{3\,!}+\frac{x^5}{5\,!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)\,!}+\cdots$$

$$=1-\frac{x^2}{3\,!}+\frac{x^4}{5\,!}-\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-1)\,!}+\cdots .$$

它在任意闭区间上都一致收敛．于是，" $x\in\mathbf{R}$，它的原函数

$$F(x)=\int_0^x\frac{\sin t}{t}\mathrm{d}t=\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{t^{2n-2}}{(2n-1)!}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(2n-1)!}\int_0^x t^{2n-2}\mathrm{d}t$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!(2n-1)}.$$

2)

如，求二阶线性常微分方程

$$xy''+y'+xy=0$$

的解 $y(x)=?)$

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n.$$

求微分方程的解，实质就是求上面级数的未定系数 a_0，a_1，a_2，$\cdots$．

逐项微分两次，

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1},\quad y''(x)=\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-2}.$$

代入方程之中，有

$$\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=1}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^{n+1}=0,$$

或 $$a_1+\sum_{n=2}^{\infty}n(n-1)a_nx^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}na_nx^{n-1}+\sum_{n=2}^{\infty}a_{n-2}x^{n-1}=0,$$

即 $$a_1+\sum_{n=2}^{\infty}(n^2a_n+a_{n-2})x^{n-1}=0.$$

于是，$a_1=0$，$n^2a_n+a_{n-2}=0$，$n=2,3,\cdots$．

$$2^2a_2+a_0=0,\ 3^2a_3+a_1=0,\ 4^2a_4+a_2=0,\ \cdots$$

显然，$a_{2k-1}=0$，$k=1,2,\cdots$．按递推公式

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{(k!)^2\cdot 2^{2k}}.$$

则幂级数的解是

$$y\quad x) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{a_0}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} \cdot x^{2k}$$

$$= a_0 \quad 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}} \quad ,$$

其中 a_0 是任意常数．幂级数收敛半径 $r = +\infty$，其和函数

$$J_0(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(k!)^2 \cdot 2^{2k}}$$

是非初等函数，称为贝塞尔

问 6．我们知道，若 $f\quad x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = 1$ 收敛，且 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ 则 $\lim\limits_{x \to 1^-} f\quad x) = A$ §9.3 定理 5 的推论)

呢？

答 不一定．例如

$$\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n, \qquad -1 < x < 1.$$

有 $\lim\limits_{x \to 1^-} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$，而 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 却发散．

事实说明，逆命题不成立．但是，给幂级数的系数 a_n 一定的限制 6．这个逆命题给出了幂级数在收敛区间端点收敛性的判别法．

四、补充例题

例 1．将函数 $f\quad x) = \dfrac{1}{(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)}$ 展成麦克劳林级数．

解法 首先将函数 $\dfrac{f\quad x)}{1-x}$ 展成麦克劳林级数，其次再化为函数 $f\quad x)$

解 $$\frac{f\quad x)}{1-x} = \frac{1}{(1-x)(1+x)(1+x^2)(1+x^4)(1+x^8)} = \frac{1}{1-x^{16}}$$

$$=1+x^{16}+x^{16\times 2}+x^{16\times 3}+\cdots.$$

于是, $f(x)=(1-x)(1+x^{16}+x^{16\times2}+x^{16\times3}+\cdots)=(1-x)\sum_{n=0}^{\infty}x^{16\times n}$

$$=1-x+x^{16}-x^{17}+x^{32}-x^{33}+\cdots+x^{16\times n}-x^{16\times n+1}+\cdots.$$

例 2. 将函数 $f(x)=\ln(x+\sqrt{1+x^2})$

解法 首先将函数 $f'(x)$

分.

解 $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}=(1+x^2)^{-\frac{1}{2}},\ |x|<1.$

由二项式展开公式,有

$$f'(x)=1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^4+\cdots+(-1)^n\frac{(2n-1)}{(2n)}x^{2n}+\cdots$$

$$=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n},\quad |x|<1.$$

" $x\in(-1,1)$ 0 **到** x **逐项积分, 有**

$$\int_0^x f'(t)\,dt=\int_0^x dt+\int_0^x\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{2n}\,dt,$$

$$f(x)-f(0)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\int_0^x t^{2n}dt\quad(f(0)=0)$$

即 $f(x)=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\dfrac{1}{2n+1}x^{2n+1},\quad |x|<1.$

例 3. (阿贝尔定理) 若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ **的收敛半径是** $r>0$, **且它在** $x=r$ **收敛, 则它的和函数在** $x=r$ **左连续, 即**

$$\lim_{x\to r^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\lim_{x\to r^-}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^n.$$

证法 首先证明幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ **在** $0,r]$

用定理 5.

证明 《讲义》§9.2 **的例** 8 **已经证明幂级数** $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ **在** $0,r]$

5，幂级数的和函数在 $0, r]$

在 $x = r$ 左连续，即

$$\lim_{x\to r^-}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{x\to r^-} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n .$$

说明　根据阿贝尔定理易得如下的推论:

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = -r$ 收敛，则它的和函数在 $x = -r$

右连续，即

$$\lim_{x\to -r^+}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{x\to -r^+} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-r)^n .$$

若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = r$ 收敛，则它在 $0, r]$

分，即

$$\int_0^r \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^r x^n \mathrm{d}x .$$

阿贝尔定理的逆命题不成立．例如，幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n = \frac{1}{1+x}, \qquad -1 < x < 1$$

的和函数 $S\ \ x) = \dfrac{1}{1+x}$ 在 $x = 1$ 左连续，但是幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$

在 $x = 1$，即 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$ 并不收敛．

应用阿贝尔定理能够计算一些级数的和．例如，求级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots$$

的和．已知幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{x^n}{n}$ 的收敛半径是 1，且

$$\ln\ \ + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}, \qquad -1 < x < 1 .$$

因为幂级数在 $x = 1$ 收敛，根据阿贝尔定理，和函数 $\ln\ \ \ \ x)$

$x = 1$ 左连续，即

$$\lim_{x\to 1^-} \ln \quad + x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \lim_{x\to 1^-} \frac{x^n}{n},$$

或 $$\ln 2 = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots .$$

同法可计算下列级数的和:

(1) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{2n+1} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots .$

提示: $\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}, \quad -1 < x < 1 .$

(2) $1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} .$

提示: $\arcsin x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad -1 < x < 1 \quad .$

例 4. 证明: 若级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ 都收敛,其中

$$c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 ,$$

则 $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \quad .$$

证法 考虑对应的三个幂级数:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

再应用阿贝尔定理 .

证明 对应的三个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

在 $x = 1$ 皆收敛 . 从而在 $-1, 1)$ §9.1 定理 14，即绝对收敛的级数可以相乘，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n .$$

根据上面例 3 阿贝尔定理，有

$$\lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \lim_{x \to 1^-} x^n$$

$$= \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \lim_{x \to 1^-} \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} a_n \lim_{x \to 1^-} x^n \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n \lim_{x \to 1^-} x^n ,$$

于是， $$\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \sum_{n=0}^{\infty} b_n .$$

例 5. 计算积分 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \dfrac{1 + y\sin x}{1 - y\sin x} \cdot \dfrac{\mathrm{d}x}{\sin x}$, $\quad |y| < 1$.

解法　点 0 **是被积函数** $\ln \dfrac{1 + y\sin x}{1 - y\sin x} \cdot \dfrac{1}{\sin x}$ **的可去不连续点，即由洛必达法则，有**

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \dfrac{1 + y\sin x}{1 - y\sin x}}{\sin x} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln \quad y\sin x) - \ln \quad y\sin x)}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0^+} y \quad \frac{1}{1 + y\sin x} + \frac{1}{1 - y\sin x} \quad = 2y .$$

首先将被积函数以 $\sin x$ **为变量展成幂级数，并证明它在** $0, \dfrac{\pi}{2}$ **上一致收敛 . 其次在** $0, \dfrac{\pi}{2}$ **上逐项积分 .**

解　已知 $y\sin x|$ ，**有**

$$\ln \frac{1 + y\sin x}{1 - y\sin x}$$

$$= \ln \quad y\sin x) - \ln \quad y\sin x)$$

$$= 2 \quad y\sin x + \frac{y^3}{3} \sin^3 x + \cdots + \frac{y^{2n+1}}{2n+1} \sin^{2n+1} x + \cdots \quad . \qquad (*)$$

" $y \in (-1, 1)$ 　$x \in \ 0, \dfrac{\pi}{2}$ ，**有**

$$\left|\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\sin^{2n+1}x\right| \leq \frac{|y|^{2n+1}}{2n+1}.$$

因为 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{|y|^{2n+1}}{2n+1}$ 收敛,所以级数 *) 0, $\frac{\pi}{2}$ 上一致收敛 . 根据§9.3 定理 6, 级数

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+y\sin x}{1-y\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x}$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\sin x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\sin^{2n+1}x\,dx$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{2n}x\,dx.$$

由§8.4. 例 7 的公式, 有

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\frac{1+y\sin x}{1-y\sin x}\cdot\frac{dx}{\sin x}$$

$$=2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{\pi}{2}$$

$$=\pi\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{y^{2n+1}}{2n+1}\qquad\frac{(-1)!!}{0!!}=1$$

$$=\pi\arcsin y.\qquad(\text{见 } \arcsin y \text{ 的展开式})$$

注 此例也可用积分号下微分法求解 .

例 6. (陶贝尔(Tauber)定理) 若 $f\ x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $-1<x<1$, 且 $\lim_{n\to\infty}na_n=0$ 与 $\lim_{x\to1^-}f\ x)=A$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=A$.

证法 设 $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$.往证

$$|S_n-A|=\left|f(x)-A+\sum_{k=0}^{n}a_k-\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k\right|$$

能任意小 . 用到算术平均的极限, 即

若 $\lim_{n\to\infty}n|a_n|$, 则 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}k|a_k|=0$ (见《讲义》练习题

2.2 第 23 题)

证明　设 $x_n = 1 - \frac{1}{n}$. 已知

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_k\left(1-\frac{1}{n}\right)^k = \lim_{x\to 1^-} f(x) = A.$$

已知 $\lim\limits_{n\to\infty} n|a_n| = 0$, 设 $\sigma_n = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} k|a_k|$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_n = 0$.

又已知 $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$, 即

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\ N \in \mathbf{N}_+,\ \forall\ n > N,\ 有$$

$$\left|f\left(1-\frac{1}{n}\right) - A\right| = |f(x_n) - A| < \frac{\varepsilon}{3},\quad \sigma_n < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$n|a_n| < \frac{\varepsilon}{3} \quad 或 \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{3n}.$$

设 $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$, 当 $0 < x < 1$ 时, 有

$$S_n - A = f(x) - A + \sum_{k=0}^{n} a_k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

$$= f(x) - A + \sum_{k=0}^{n} a_k (1 - x^k) - \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^k,$$

其中 $1 - x^k = (1-x)(1 + x + \cdots + x^{k-1}) \leq k(1-x)$

$$|S_n - A| \leq |f(x) - A| + (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \sum_{k=n+1}^{\infty}|a_k|x^k$$

$$\leq |f(x) - A| + (1-x)\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{\varepsilon}{3n}\frac{1}{1-x}.$$

令 $x = 1 - \frac{1}{n}$, 有

$$|S_n - A| \leq \left|f\left(1-\frac{1}{n}\right) - A\right| + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} k|a_k| + \frac{\varepsilon}{3n}\frac{1}{\frac{1}{n}}$$

$$< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon,$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n = A.$$

五、练习题 9.3 解法提要

2. 求下列函数 $f(x)$ $f'(x)$ $\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t$**,并给出收敛区间**:

(3) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n^2} + \frac{b^n}{n^2}\right) x^n, \quad a>0, \quad b>0$.

解法 **先求收敛半径 . 有** $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1)$

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{a^n}{n^2} + \frac{b^n}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(\sqrt[n]{n})^2} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max\{a, b\}$$

于是, 收敛半径 $r = \min\left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{b}\right\}$ **. 当** $a \geq b$ **时,** $r = \frac{1}{a}$; **当** $b \geq a$ **时,** $r = \frac{1}{b}$.

幂级数在 $\pm r$ **都收敛 . 于是, 收敛区间是** $[-r, r]$

" $x \in [-r, r]$ $f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a^n}{n} + \frac{b^n}{n}\right) x^{n-1}$ **, 收敛区间是** $[-r, r)$

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n^2} t^n \mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n + b^n}{n^2(n+1)} x^{n+1},$$

收敛区间是 $[-r, r]$

3. 求下列级数的和:

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)}$.

解法 **它的收敛区间是** $[-1, 1]$ $x \in [-1, 1]$

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n(n+1)} .$$

首先, 讨论 " $x \in (-1, 1)$ x**, 有**

$$x f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n(n+1)} .$$

然后，逐项微分，求二阶导数，有 $[x f(x)]''=\frac{1}{1-x}$.

再逐项积分，两次还原，就得到和函数

$$f(x)=\begin{cases}1+\frac{1-x}{x}\ln(1-x), & 当\ x\in[-1,1)\quad x\neq 0,\\ 1, & 当\ x=1,\\ 0, & 当\ x=0.\end{cases}$$

4. 将下列函数展成麦克劳林级数

(7) $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)$.

解法 函数$\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$在 0 没有意义，却有极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\mathrm{e}^x}{1}=1.$$

将函数$\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}$在 0 连续开拓. 令$\left.\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right|_{x=0}=1$，有

$$\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}=\frac{1}{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}-1\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}.$$

于是，$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{e}^x-1}{x}\right)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{n-1}}{n!}\right)\cdots .x\in\mathbf{R}.$$

5. 应用级数乘积，将下列函数展成麦克劳林级数:

(3) $\mathrm{e}^x\sin x$.

解法 $f(x)=\sin x$，已知 $f^{(n)}(x)=\sin\left(x+\frac{n\pi}{2}\right)$，$f^{(n)}(0)=\sin\frac{n\pi}{2}$. 从而，

$$\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}x^n.$$

已知 $\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$. 于是，由柯西乘积，有

$$\mathrm{e}^x\sin x=\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n!}x^n\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{0!n!}+\frac{\sin\frac{(n-1)\pi}{2}}{1!(n-1)!}+\cdots+\frac{\sin\frac{\pi}{2}}{(n-1)!1!}\right)x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\sin\frac{(n-k)\pi}{2}}{k!(n-k)!}\right)x^n$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k)!}\sin\frac{(n-k)\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!}$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2}\right)\frac{x^n}{n!}.$$

下面证明: $\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2}=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$.

事实上，一方面，由三角公式和棣莫弗公式，有

$$\left(1+\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^n=\left(2\cos^2\frac{\pi}{4}+2\,\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{4}\right)^n$$

$$=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

另一方面，由二项式公式和棣莫弗公式，有

$$\left(1+\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)\right)^n=C_n^0\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)^n+\cdots+$$

$$C_n^{n-2}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)^2+C_n^{n-1}\left(\cos\frac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\frac{\pi}{2}\right)+C_n^n$$

$$=\sum_{k=0}^{n}C_n^k\cos\frac{(n-k)\pi}{2}+\mathrm{i}\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2}.$$

以上两个等式的等号右端虚部应该相等，即

$$\sum_{k=0}^{n-1}C_n^k\sin\frac{(n-k)\pi}{2}=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}.$$

于是，
$$e^x\sin x=\sum_{n=0}^{\infty}2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}\cdot\frac{x^n}{n!},\quad x\in\mathbf{R}.$$

7. 证明: $\forall\, x, y\in\mathbf{R}$，有

(1) $S(x+y)=S(x)C(y)+C(x)S(y)$

(2) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{S(x)}{x}=1$.

证法(1) $\forall x, y \in \mathbf{R}$，**已知** $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$,

$C(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}$.

$$S(x)C(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n}}{(2n)!}$$

$$= x - \left(\frac{x^3}{3!0!} + \frac{xy^2}{2!1!}\right) + \left(\frac{x^5}{5!0!} + \frac{x^3y^2}{3!2!} + \frac{xy^4}{1!4!}\right) - \cdots,$$

$$C(x)S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= y - \left(\frac{y^3}{0!3!} + \frac{x^2y}{1!2!}\right) + \left(\frac{y^5}{0!5!} + \frac{x^2y^3}{2!3!} + \frac{x^4y}{4!1!}\right) - \cdots .$$

于是，

$$S(x)C(y) + C(x)S(y) = (x+y) - \frac{(x+y)^3}{3!} + \frac{(x+y)^5}{5!} - \cdots$$

$$= S(x+y)$$

$$(2)\ \lim_{x\to 0}\frac{S(x)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$= \lim_{x\to 0}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n+1)!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \lim_{x\to 0}\frac{x^{2n}}{(2n+1)!} = 1 .$$

*　　　　*　　　　*　　　　*

11. 设 $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}, 0 \le x \le 1$.**证明**: $\forall x \in (0,1)$

(1) $f(x) + f(1-x) + \ln x \cdot \ln(1-x) = C$

(2) $C = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$.

证法　(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n^2}$ **的收敛区间是** $[-1,1]$

$\forall x \in [0,1] \Rightarrow 0 \le 1-x \le 1$，$\forall x \in (0,1)$

$$f(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n^2},\quad f'(1-x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}.$$

$$f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}.\text{已知}\ \ln(1-x)=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}.$$

$$\ln x=\ln[1-(1-x)]=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^n}{n}.$$

于是,

$$[f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)]'=f'(x)-f'(1-x)+\frac{\ln(1-x)}{x}-\frac{\ln x}{1-x}$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(1-x)^{n-1}}{n}=0,$$

于是, $\forall x\in(0,1)$

$$f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)=C$$

(2) 因为 $f(x)$ 与 $f(1-x)$ 在 0 右连续, $f(0)=0$. 所以对上述等式两端取极限, 有

$$\lim_{x\to0^+}[f(x)+f(1-x)+\ln x\cdot\ln(1-x)]=f(0)+f(1)=f(1)$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=C.$$

12. 证明: 若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ |x|<r$, 且 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}$ 收敛, 则

$$\int_0^r f(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}.$$

证法 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 在 $[0,r]$

$$\lim_{x\to r^-}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}r^{n+1}.$$

又 $\forall x\in(-r,r)$

$$\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nt^n\right)\mathrm{d}t.$$

13. 证明: 若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, $a_n\geq 0$, 收敛半径 $r=1$, 且 $\lim_{x\to 1^-}f(x)=s$, 则 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛, 且 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n=s$.

证法一　证明部分和 $S_n=\sum_{k=0}^{n}a_k$ 有上界. " $m\in\mathbf{N}_+$,

$$S_m=\sum_{k=0}^{m}a_k=\lim_{x\to 1^-}\sum_{k=0}^{m}a_kx^k\leq\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\cdots$$

又幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $0,1]$　　　　……

证法二　应用反证法. 假设 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 发散, 即 " $M>s$, v $N\in\mathbf{N}_+$, 有 $\sum_{k=1}^{N}a_k>M>s$.

已知 $\lim_{x\to 1^-}\sum_{n=0}^{N}a_nx^n=\sum_{n=0}^{N}a_n$ 及 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\geq\sum_{n=0}^{N}a_nx^n$, $x\in 0,1]$ ……矛盾.

14. 证明: 若 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径是 R, 存在某个数列 $\{x_n\}$　$x_n\in -R,R)$　$m\in\mathbf{N}_+$, v $n>m$, 有 $x_n\neq 0)$　$\lim_{n\to\infty}x_n=0$, 且 $f(x_n)=0$, $n=1,2,\cdots$, 则 $a_n=0$, $n=0,1,2,\cdots$.

证法　　　$a_0=\lim_{n\to\infty}f(x_n)=f(0)=0$.

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}\quad.$$

设 $g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nx^{n-1}$. " $x_n\neq 0$, $g(x_n)=0$. 同理, $a_1=0$.

继续作下去. 可得 $a_2=a_3=\cdots=0$.

§9.4　傅里叶级数

一、基本内容

本节有五段．

第一段给出了几个概念：三角函数系，三角级数，傅里叶系数，傅里叶级数．

为了证明第三段中的傅里叶级数的收敛定理，第二段给出了两个引理：引理 1 给出了部分和 $S_n\ (x)$　　2

(黎曼引理)　　$\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f\quad x)\cos\ px\mathrm{d}x=0$ 与 $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_a^b f\quad x)\sin\ px\mathrm{d}x=0$．

第三段给出了傅里叶级数收敛性(定理 1)

数展成傅里叶级数的实例．

第四段给出了以 2π 为周期的偶函数和奇函数展成傅里叶级数分别是余弦级数和正弦级数，及其 5 个实例．

第五段给出了以 $2l$ 为周期的函数展成傅里叶级数的公式及两个实例．

二、学习要求

我们知道，幂级数很类似于多项式，它是研究函数很理想的工具．但是，函数在某点邻域内能展成幂级数，要求函数在该点必须存在任意阶导数，这对函数的要求太高了．因此，研究不连续函数或不可导函数，幂级数这个工具就无能为力了，而傅里叶级数正是研究这类函数的有力工具，它弥补了幂级数的局限性．要求：

1. 知道本节两个引理的意义，并掌握它们的证明方法．

2. 收敛定理 1)

傅里叶级数的充分条件．理解它的意义，掌握它的证明方法．

3. 会将若干简单函数展成傅里叶级数．

三、答疑辅导

问 **1.** 函数 f $x)$ f $x)$ **R** 上的周期函数？

答 是．由收敛定理 1) f $x)$ 叶级数，函数 f $x)$ **R** 上的以 2π (或 $2l$) 期函数．但是，有时给定的函数 f $x)$ $c, c+2\pi)$ $c, c+2l)$) f $x)$ **R** 上作周期开拓，使之满足收敛定理的条件，然后再进行展开．不过在实际展开过程中，我们并不强调将函数 f $x)$ 2π $l)$ f $x)$ $-\pi, \pi)$ $[-l, l)$ 与 $[c, c+2l))$ 在 **R** 上必收敛．于是，它在区间 $c, c+2\pi)$ $c, c+2l))$ 收敛于函数 f $x)$

问 **2.** 黎曼引理 2) 理论中有什么作用？

答 黎曼引理，即若函数 f $x)$ $a, b]$

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f\quad x)\ \sin\ px\,\mathrm{d}x = 0 .$$

在傅里叶分析中，它有多方面的应用，是一个重要的引理．

已知对任意 $p\in\mathbf{R}$，函数 $\sin\ px$ 可积，从而函数 f $x)\sin\ px$ 在 $a, b]$ $\int_a^b f\quad x)\ \sin\ px\,\mathrm{d}x$ 就是 p 的函数．当 $p\to+\infty$ 时，为什么它的极限却是 0 呢？似难理解．其实从它的几何意义来看，并不难理解这个事实．

不妨设 f $x)$ $a, b]$ p 充分大，

使$\frac{\pi}{p} < \frac{b-a}{2}$. 将区间 $a, b]$ n 个小区间，使每个小区间之长小于$\frac{\pi}{p}$，并使函数 $f\quad x)\sin px$ 在每个小区间上有相同的符号，在相邻的两个小区间上有相异的符号. 于是，函数 $f\quad x)\sin px$ 在相邻小区间上的定积分，正负抵消一部分 9.2)

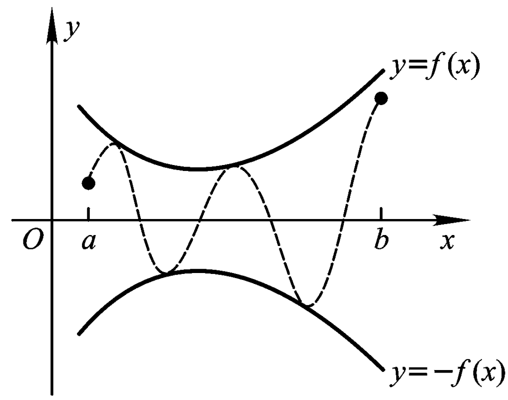


图 9.2

由于函数 $f\quad x)$

当 p 增大时，函数 $\sin px$ 的周期$\frac{2\pi}{p}$就减小. 当 p 充分大时，相邻两个小区间上的定积分正与负几乎相互抵消. 于是，当 $p\to+\infty$时(如图 9.2)

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^b f\quad x)\ \sin px\,\mathrm{d}x = 0 .$$

我们已看到，黎曼引理在收敛定理 1)

现在讨论函数 $f\quad x)$ $2n+1$ 项的部分和

$$S_n\ (x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\ (a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[f(x+t)+f(x-t)]\,D_n\ (t)\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\ \int_0^{\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\ ,\quad 0<\delta<\pi .$$

将上式等号右侧的第二个积分改写为

$$\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f\quad x+t)+f\quad x-t)}{2\sin\ \frac{1}{2}\ t}\sin\quad n+\frac{1}{2}\quad t\mathrm{d}t,$$

其中函数$\frac{f\quad x+t)+f\quad x-t)}{2\sin\frac{1}{2}t}$在 $\delta,\pi]$

有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{\delta}^{\pi}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t=0,$$

即函数 $f(x)$　　x 的敛散性，只与积分

$$\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\delta}\frac{f(x+t)+f(x-t)}{2\sin\frac{1}{2}t}\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\,\mathrm{d}t$$

有关，也就是只与函数 $f(x)$　　$[x-\delta, x+\delta]$ 函数值有关．这就是傅里叶级数敛散性的局部化定理．它说明，如果两个函数 $f(x)$　$g(x)$　x 的充分小的邻域内函数值相等，则不论这两个函数在此邻域外情况怎样，在点 x 与它们相应的傅里叶级数有相同的性质：或两个级数同时收敛并收敛于同一和数，或两个级数同时发散．这是傅里叶级数的一个重要特性．

问 3. 在傅里叶级数中，“平方均值偏差”有什么意义？

答　如果在区间 $[a,b]$　　$f(x)$　$g(x)$ 么这两个函数在 $[a,b]$ 题的不同需要，可用不同的方法定义它们的距离 $d(f,g)$ 如，定义

$$d(f,g)=\sup_{x\in[a,b]}|f(x)-g(x)|.$$

这样定义的距离，若函数列 $\{f_n(x)\}$　$[a,b]$ $f(x)$　$\forall\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}_+$，$\forall n>N$，有

$$d(f_n,f)=\sup_{x\in[a,b]}|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon,$$

则函数列 $\{f_n(x)\}$　$[a,b]$　　$f(x)$

究并不方便，也不必要．因此，经常采用“平方均值偏差”，即

$$\delta^2(f,g)=\frac{1}{b-a}\int_a^b[f(x)-g(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

来定义两个函数 $f(x)$　$g(x)$　$[a,b]$ 义的距离，两个函数 $f(x)$　$g(x)$　x_0 上的差

$$|f(x_0)-g(x_0)|^2$$

不一定很小，甚至可能很大，但是，只要平方均值偏差 $\delta^2(f,g)$ 很小就满足研究某些问题的精度要求．它在泛函分析与概率论等课程中有着广泛的应用．

在傅里叶级数中，我们就是用平方均值偏差作为研究函数 $f\quad x)$的傅里叶级数的 $2n+1$ 项的部分和 $S_n(x)$　　$f\quad x)$

$[-\pi,\pi]$上的距离，即

$$\delta^2(S_n,f)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,\mathrm{d}x,$$

或
$$2\pi\delta^2(S_n,f)=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,\mathrm{d}x.$$

问 4. 傅里叶级数有哪些优点和缺点？

答　傅里叶级数有下列优点：

1)

函数 $f\quad x)$　　2π 为周期，并在

个第一类不连续的函数)

很广．对研究函数它是比幂级数更有力的工具．

2)

两个相邻的区间上有不同的分析表达式

它们在 **R** 上却可用傅里叶级数统一表示，如

和例 7 等，从理论上说，用傅里叶级数统一表示这类函数，对研究这类函数的性质更为重要．

3)　　$f\quad x)$

$-\pi,\pi]$

$f\quad x)$

4)

数的和．例如：

$$\frac{\pi}{4}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}\quad (\text{见《讲义》本节的例 }6)$$

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$ (见《讲义》本节的例5)

$$\frac{\pi^2}{8}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}$$ (见《讲义》本节的例4)

$$\frac{\pi^2}{12}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$$ (见《讲义》本节的例5)

5)

叶变换．它们在偏微分方程、积分方程等课中是不可缺少的工具．

傅里叶级数虽然有上述的优点，但是它也有以下的缺点:

1)

敛域比较简单．

2)

进行复杂的计算，相当麻烦．

3)

将函数 $f\quad x)$

$$f\quad x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(\,a_n\cos\ nx+\ b_n\sin\ nx)$$

而不写等号“ = ”. 为了使其收敛，即将“ ～ ”改为“ = ”，仅连续还不够，要求它逐段光滑　　　　1)

关于构造一个连续函数的傅里叶级数在某些点可能发散的例子，很烦，从略．有兴趣的读者可参见菲赫金哥尔茨著

教程》　　　　　　　　　　p513，费叶

子．

虽然，傅里叶级数有缺点，但是并不因此而影响它在数学中的重要意义．这是因为不同的数学工具它有不同的用途．

问5. 怎样求三角级数的和？

答　一般来说，直接求三角级数的和是很困难的．我们可间接的借助于复数的欧拉

$e^{ix} = \cos x + i\sin x$ 与 $\cos x + i\sin x)^n = \cos nx + i\sin nx$

求三角级数的和 .

设 z **是复数**，**令** $z = \cos x + i\sin x$. $P_n\ (n = 0, 1, 2\cdots)$

有

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} P_n\ (\cos x + i\sin x)^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n\ (\cos nx + i\sin nx)$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos nx + i \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sin nx$$

$$= f\quad x) + i\,\xi\quad x)$$

其中 $f\quad x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \cos nx$ **与** $\xi\quad x) = \sum_{n=0}^{\infty} P_n \sin nx$.

例如，**求下列三角级数的和**:

1) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!}$, (2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!}$.

考虑复数级数

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} .$$

令 $z = \cos x + i\sin x$ **时**，**有**

$$e^z = e^{\cos x + i\sin x} = e^{\cos x} e^{i\sin x}$$

$$= e^{\cos x}(\cos \sin x + i\sin \sin x)$$

$$= e^{\cos x}\cos \sin x + ie^{\cos x}\sin \sin x .$$

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos x + i\sin x)^n}{n!}$$

$$= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx + i\sin nx}{n!}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n!} .$$

于是，
$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\cos nx}{n!} = e^{\cos x}\cos \sin x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\ nx}{n\,!} = e^{\cos\ x} \sin \sin\ x\ .$$

以上承认了函数 e^x 的幂级数展开式, 当 x 是复数时也是成立的. 在复变函数论中, 将给出证明.

四、补充例题

例 1. 用不同的开拓方法, 将函数 $f(x)\quad x^2$ 在区间 展成傅里叶级数.

解法一 在区间

$$F\quad x) = x^2, \qquad x \in (-2, 2]$$

$F\quad x)$ 4 **为周期的偶函数.**

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, \cdots.$$

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_0^2 x^2 \mathrm{d}\,x = \frac{8}{3}\ .$$

$$a_n = \frac{2}{2}\int_0^2 x^2 \cos \frac{n\pi x}{2} \mathrm{d}\,x = \frac{(-1)^n 8}{n^2 \pi^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

有 $$F\quad x) = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 8}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2}, \quad x \in \mathbf{R}\ .$$

从而, $$x^2 = \frac{4}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 8}{n^2\pi^2} \cos \frac{n\pi x}{2}, \quad 0 < x < 2\ .$$

解法二 在区间

即

$$F\quad x) = x^2, \quad x \in (-\pi, \pi]$$

$F\quad x)$ 2π **为周期的偶函数.**

$$b_n = 0, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \mathrm{d}\,x = \frac{2\pi^2}{3}\ .$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x^2 \cos\ nx \mathrm{d}\,x = \frac{(-1)^n 4}{n^2}, \quad n = 1, 2, 3, \cdots.$$

有 $$F\quad x) = \frac{\pi^2}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n 4}{n^2} \cos\ nx, \quad x \in \mathbf{R},$$

从而 $$x^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n 4}{n^2}\cos nx,\quad 0<x<2.$$

解法三 在区间$(-\pi,\pi]$

$$F\quad x)=\begin{cases}0, & -\pi<x\leq -2,\\ x^2, & -2<x<2,\\ 0, & 2\leq x\leq\pi.\end{cases}$$

$F(x)$

$b_n=0,\quad n=1,2,3,\cdots.$

$$a_0=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2}x^2\mathrm{d}x=\frac{16}{3\pi}.$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x^2\cos nx\mathrm{d}x=\frac{2}{\pi}\int_0^{2}x^2\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=\frac{2}{\pi}\quad\frac{4n^2-2}{n^3}\sin 2n+\frac{4}{n^2}\cos 2n\quad,\quad n=1,2,3,\cdots.$$

有 $$F\quad x)=\frac{8}{3\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3\pi}\qquad n^2-2)\sin 2n+4n\cos 2n]\qquad nx,$$

从而 $$x^2=\frac{8}{3\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n^3\pi}\qquad n^2-2)\sin 2n+4n\cos 2n]\qquad nx,$$

$$0<x<2.$$

以上三个傅里叶级数在区间 $f\quad x)=$ x^2，**但是它们的形式很不相同．当然也可作奇开拓．说明一个函数展成傅里叶级数，如果不附加条件**

它有无限多种不同的形式．

例 2．证明：若函数 $f(x)$ a_n，b_n **是函数** $f(x)$**的傅里叶系数，则** $na_n\}$ $nb_n\}$

证法 应用第二积分中值定理．

题的例 11 .)

证明 $$\pi a_n=\int_0^{2\pi}f\quad x)\cos nx\mathrm{d}x$$

$$=f\quad 0)\int_0^{\xi}\cos nx\mathrm{d}x+f\quad 2\pi)\int_{\xi}^{2\pi}\cos nx\mathrm{d}x\quad 0<\xi<2\pi)$$

$$= \frac{f(0) - f(2\pi)}{n} \sin n\xi,$$

有 $$|na_n| \leq \left|\frac{f(0) - f(2\pi)}{\pi}\right| |\sin nx| \leq \frac{|f(0) - f(2\pi)|}{\pi}.$$

$$\pi b_n = \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \mathrm{d}x$$

$$= f(0)\int_0^{\xi} \sin nx \mathrm{d}x + f(2\pi)\int_{\xi}^{2\pi} \sin nx \mathrm{d}x \quad (0 < \xi < 2\pi)$$

$$= \frac{f(0) - f(2\pi)}{n}(1 - \cos n\xi)$$

有 $$|nb_n| \leq \left|\frac{f(0) - f(2\pi)}{\pi}\right| |1 - \cos n\xi| \leq \frac{2|f(0) - f(2\pi)|}{\pi}.$$

于是, $\{na_n\}$ $\{nb_n\}$ $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$, $b_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.

例 3. 设 $f(x)$ 2π **为周期的连续函数**, a_n, b_n **是傅里叶系数, 求函数**

$$F(x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x + t) \mathrm{d}t$$

的傅里叶系数 A_n, B_n, **并利用这个展开式证明帕塞瓦尔等式**:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=0}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \mathrm{d}x.$$

解法 **讨论函数** $F(x)$

数.

解 " $x \in \mathbf{R}$, 有

$$F(x + 2\pi) \quad \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x + t + 2\pi) \quad t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(x + t) \mathrm{d}t = F(x),$$

即 $F(x)$ 2π **为周期的连续函数**

$$F(-x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) f(t - x) \mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi-x}^{\pi-x} f(x + y) f(y) \mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \quad x + y)\ f \quad y)\,\mathrm{d}y = F \quad x)$$

即 $F \quad x)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $F \quad x)$

$$B_n = 0,\quad n = 1,\ 2,\ \cdots .$$

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F \quad x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)f(x+t)\mathrm{d}t \quad \cos nx\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f \quad t)\int_{-\pi}^{\pi} f \quad t + x)\cos nx\mathrm{d}x \quad \mathrm{d}t$$

作变量替换 $t + x = y$, **再由函数** $f \quad x)$

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \quad t + x)\cos nx\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{t-\pi}^{t+\pi} f(y)\cos n(y - t)\,\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{\pi}\cos nt\int_{-\pi}^{\pi} f \quad y)\cos ny\mathrm{d}y + \frac{1}{\pi}\sin nt\int_{-\pi}^{\pi} f(y)\sin ny\mathrm{d}y$$

$$= a_n\cos nt + b_n\sin nt .$$

于是 $A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \quad t) \quad a_n\cos nt + b_n\sin nt)\,\mathrm{d}t$

$$= a_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \quad t)\cos nt\mathrm{d}t + b_n\cdot\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \quad t)\sin nt\mathrm{d}t$$

$$= a_n^2 + b_n^2,\qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots .$$

有 $F \quad x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f \quad t)\ f \quad x + t)\,\mathrm{d}t = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n\cos nx$

$$= \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)\cos nx .$$

在上式中, **令** $x = 0$, **得帕塞瓦尔等式**

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(t)]^2\mathrm{d}t = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2)$$

例 4. 证明: **若函数** $f \quad x)$ $\qquad\qquad$ $f''\ x)$ $\qquad$ $-\pi,\pi]$**上连续**, $f \quad -\pi)$ $\quad f \ \ \pi)$

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f \quad x)\sin nx\mathrm{d}x,\qquad b_n = \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\sin nx\mathrm{d}x,$$

且 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **收敛**, **则**

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| < \frac{1}{2} \quad 2 + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \quad .$$

证法　应用两次分部积分法，找到 a_n 与 b_n 之间的关系．再应用不等式　$|ab| \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$

证明　应用两次分部积分法，有

$$a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = - f(x)\frac{\cos nx}{n}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} + \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\cos nx}{n}\mathrm{d}x$$

$$= \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\cos nx}{n}\mathrm{d}x \qquad (f(-\pi) = f(\pi))$$

$$= f'(x)\frac{\sin nx}{n^2}\Bigg|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\frac{\sin nx}{n^2}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{1}{n^2}\int_{-\pi}^{\pi} f'' x)\sin nx\mathrm{d}x = -\frac{1}{n^2} b_n \ .$$

$$|a_n| = \frac{1}{n^2}|b_n| \ .$$

$$|a_n| = \frac{1}{n} \quad |b_n| \leq \frac{1}{2} \quad \frac{1}{n^2} + |b_n| \quad .$$

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leq \frac{1}{2} \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} + \sum_{k=1}^{n} |b_k| \quad .$$

已知　$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} < 2,\quad \sum_{k=1}^{n} |b_k| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |b_k|$.

于是　$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k| \leq \frac{1}{2} \quad 2 + \sum_{k=1}^{\infty} |b_k| \quad .$

例 5. 证明　$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}$.

证法　将函数

$$f \quad x) = \quad \frac{\pi - x}{2} \quad ^2$$

在 0, 2π]

证明　将函数 $f \quad x) = \quad \frac{\pi - x}{2} \quad ^2$ 展成傅里叶级数．

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{6}.$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^2\cos kx\mathrm{d}x=\frac{1}{k^2}.$$

$$b_k=0.$$

于是, $f(x)=\left(\dfrac{\pi-x}{2}\right)^2=\dfrac{\pi^2}{12}+\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\dfrac{\cos kx}{k^2},\quad 0\leq x\leq 2\pi.$

由帕塞瓦尔等式 函数 $f(x)=\left(\dfrac{\pi-x}{2}\right)^2$ **连续** ,

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^4\mathrm{d}x,$$

有
$$\frac{1}{2}\left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(\frac{\pi-x}{2}\right)^4\mathrm{d}x$$

$$=\frac{1}{16\pi}\int_{-\pi}^{\pi}t^4\mathrm{d}t=\frac{\pi^4}{40},$$

即
$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^4}=\frac{\pi^4}{90}.$$

说明 **求某些数值级数的和,可选择某个特殊的函数在** $[0,2\pi]$ **或** x **值或逐项积分.同法可证:**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^3}=\frac{\pi^3}{32}.$$

提示:将函数 $f(x)=\dfrac{\pi^2}{12}-\dfrac{x^2}{4}$ **在** $0,2\pi]$

然后在 $0,\dfrac{\pi}{2}$ **上逐项积分.**

五、练习题 9.4 解法提要

4. 证明:三角多项式 $P_n(x)=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

里叶级数就是三角多项式 $P_n(x)$

证法 计算多项式 $P_n(x)$

$$a_0' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\,\mathrm{d}x = 2a_0 .$$

$$a_k' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\cos kx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当 } k > n \text{ 时}, \\ a_k, & \text{当 } k \leq n \text{ 时} . \end{cases}$$

$$b_k' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_n(x)\sin kx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当 } k > n \text{ 时}, \\ b_k, & \text{当 } k \leq n \text{ 时} . \end{cases}$$

5. 设函数 $f\ x)$ $-\pi,\pi]$

$f\ -x) = f\ x)$ $f\ \pi - x) = -f\ x)$ $f\ x)$

$$f\ x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1}\cos\ n-1)\ x .$$

(2) 若 $f\ -x) = -f\ x)$ $f\ \pi - x) = f\ x)$ $f\ x)$

$$f\ x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_{2n-1}\sin\ n-1)\ x .$$

证法 计算函数 $f\ x)$**的傅里叶系数** .

$f\ x)$ $b_n = 0,$

$$a_0 = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\ x)\ \mathrm{d}x = 0,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\ x)\cos nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数}, \\ \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\ x)\cos nx\mathrm{d}x, & \text{当 } n \text{ 为奇数} . \end{cases}$$

$f\ x)$ $a_n = 0,$

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f\ x)\sin nx\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{当 } n \text{ 为偶数}, \\ \dfrac{4}{\pi}\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f\ x)\sin nx\mathrm{d}x, & \text{当 } n \text{ 为奇数} . \end{cases}$$

* * * *

7. 证明: **若函数** $f\ x)$ $-\pi,\pi]$ a_k, b_k **是函**

数 $f(x)$ $n\in\mathbf{N}_+$，有不等式

(1) $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leq\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

(2) $\dfrac{a_0^2}{2}+\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)\leq\dfrac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\,\mathrm{d}x$.

后者称为贝塞尔①不等式.

证法 (1) 设 $S_n(x)=\dfrac{a_0}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$

计算积分:

$$\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-S_n(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x-2\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)\mathrm{d}x+\int_{-\pi}^{\pi}[S_n(x)]^2\mathrm{d}x\geq 0,$$

由三角函数系的正交性，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}f(x)S_n(x)\,\mathrm{d}x=\cdots=\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\right].$$

于是，有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

(2) " $n\in\mathbf{N}_+$，不等式

而也有

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2+b_k^2)\leq\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

8. 证明：若函数 $f(x)$ $[-\pi,\pi]$

$$T_n(x)=\frac{A_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}(A_k\cos kx+B_k\sin kx)$$

则当 A_0，A_k，B_k $(k=1,2,\cdots,n)$ $f(x)$

才能使

$$I=\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)-T_n(x)]^2\,\mathrm{d}x$$

取最小值.

证法 已知 $f\quad x)$ $-\pi,\pi]$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\quad x)\cos\ nx\mathrm{d}x,\quad n = 0,1,2,\cdots.$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\quad x)\sin\ nx\mathrm{d}x,\quad n = 1,2,\cdots.$$

考虑积分

$$\begin{aligned} I &= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - T_n(x)]^2\mathrm{d}x \\ &= \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2 - 2\int_{-\pi}^{\pi} f(x)T_n(x)\mathrm{d}x + \int_{-\pi}^{\pi}[T_n(x)]^2\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

其中 $\int_{-\pi}^{\pi} f\quad x)\ T_n\ (x) = \cdots = \pi\ \frac{A_0a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_ka_k + B_kb_k)\quad.$

$$\int_{-\pi}^{\pi}[T_n\ (x)\quad {}^2\mathrm{d}x = \cdots = \pi\ \frac{A_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(A_k^2 + B_k^2)\quad.$$

于是,

$$I = \int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x + \pi\ \frac{A_0^2 - 2A_0a_0 + a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}[(A_k^2 - 2A_ka_k$$

$$+ a_k^2) + (B_k^2 - 2B_kb_k + b_k^2)] - \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k^2 + b_k^2)\quad.$$

上式等号右端第一、三项都是常数, 第二项因 A_0, A_k, B_k $(k = 1,2,\cdots,n)$

有当每项都是 0 时, 即

$$A_0 = a_0,\ A_k = a_k,\ B_k = b_k,\ k = 1,2,\cdots,n$$

时, I 取最小值 . 于是, 当 A_k, B_k 是 $f\quad x)$ I

取最小值 .

9. 证明: 若函数 $f\quad x)$ $-\pi,\pi]$

敛于有界函数 $f\quad x)$

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x)]^2\mathrm{d}x.$$

证法 设 $S_n\ (x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos\ kx + b_k\sin\ kx)$

由题意，即

$\forall \varepsilon > 0,\ \exists N \in \mathbf{N}_+,\ \forall n > N,\ \forall x \in [-\pi, \pi]$

$$|f(x) - S_n(x)| \quad \left| f(x) - \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right| < \varepsilon .$$

从而，

$$\left| \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \mathrm{d}x \right| \leq \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - S_n(x)|^2 \mathrm{d}x < 2\pi\varepsilon^2 .$$

即
$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \mathrm{d}x = 0 .$$

由第 7 题知，

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x) - S_n(x)]^2 \mathrm{d}x = \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \mathrm{d}x - \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right) .$$

于是，

$$\int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \pi \left(\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right),$$

即
$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 \mathrm{d}x = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) .$$

10. 设 $S_n(x) = \dfrac{1}{2} + \sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx,\quad S_0(x) = \dfrac{1}{2},$

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \cdots + S_n(x)}{n+1},$$

证明： 1) $\sigma_n(x) = \dfrac{1}{2(n+1)} \left(\dfrac{\sin \frac{n+1}{2} x}{\sin \frac{1}{2} x} \right)^2$；

$$(2) \int_{-\pi}^{\pi} \sigma_n(x) \mathrm{d}x = \pi .$$

证法 (1) 由已知的三角公式

$$\cos kx = \frac{\sin\left(k + \frac{1}{2}\right)x - \sin\left(k - \frac{1}{2}\right)x}{2\sin \frac{1}{2} x}, \quad S_0(x) = \frac{1}{2} = \frac{\sin \frac{1}{2} x}{2\sin \frac{1}{2} x} .$$

$$S_n(x)=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kx=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}.$$

再由三角公式

$$\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x=\frac{\cos kx-\cos(k+1)x}{2\sin\frac{1}{2}x},$$

$$\sum_{k=0}^{n}\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x=\frac{1}{2\sin\frac{1}{2}x}\sum_{k=0}^{n}[\cos kx-\cos(k+1)x]$$

$$=\frac{\sin^2\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x},$$

于是,

$$\sigma_n(x)=\frac{S_0(x)+S_1(x)+\cdots+S_n(x)}{n+1}=\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}S_k(x)$$

$$=\frac{1}{2(n+1)}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{\sin\frac{1}{2}x}=\frac{1}{2(n+1)}\left(\frac{\sin\frac{n+1}{2}x}{\sin\frac{1}{2}x}\right)^2.$$

(2) 点 0 是 $\sigma_n(x)$ $\sigma_n(x)$ $-\pi,\pi]$
积，且是偶函数，有

$$\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sigma_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

根据引理 1 的推论，有

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}=\frac{\pi}{2}.$$

于是，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\sigma_n(x)\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi}\sigma_n(x)\,\mathrm{d}x=\frac{2}{n+1}\int_0^{\pi}\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x}\mathrm{d}x$

$$= \frac{2}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \int_0^{\pi} \frac{\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{1}{2}x} \mathrm{d}x = \frac{2}{n+1}(n+1)\frac{\pi}{2} = \pi .$$

第九章自我测验题

1. 讨论下列级数的敛散性:

(1) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{an+b}{n(n+1)}$; 2) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{\ln n}{n}\right)^{n}$; 3) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{n!}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^n \quad (a>0)$ 5) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{\cos nx}{n}$.

2. 证明等式 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+10)} = \frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10}\right)$.

3. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ **收敛**, $u_n > 0$, $n = 1, 2, \cdots$, **则级数** $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{\ln u_n}$ **收敛,其逆是否成立?**

4. 设 $u_n\}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1-\frac{u_n}{u_{n+1}}\right)$$

收敛的必要充分条件是数列 $u_n\}$

5. 证明:若在调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ **中去掉分母含有数字** 9 **的项,则新级数收敛,其和不超过** 80 .

6. 证明等式 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1$.

7. 证明:若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **与** $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ **绝对收敛,则函数级数**

$$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

在 R 上一致收敛 .

8. 证明: 若函数列 $f_n(x)\}$ $I_i\ (i = 1, 2, \cdots, m)$

收敛, 则 $f_n(x)\}$ $\bigcup_{i=1}^{m} I_i$ **上一致收敛 .**

9. 证明: 函数级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[nx]}{n^3}$**在任意有限区间上都一致收敛,**

而它的和函数 $S\quad x)$

10. 证明: 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **收敛, 则**

$$\lim_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

11. 证明: 若 $|x| < \frac{1}{2}$, **则**

$$\frac{1}{1 - 3x + 2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1) x^n .$$

12. 证明: 若 $f\quad x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$, $0 \leq x \leq 1$, **则**

$$f\quad x) + f\quad 1 - x) + \ln x \cdot \ln \qquad x) = \frac{\pi^2}{6} .$$

***13. 证明: 若** $a_n\}$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$

在区间 $0, 1]$

$$\lim_{n \to \infty} n a_n = 0 .$$

***14. 证明: 若函数** $f\quad x)$ 2π **为周期, 且有连续的二阶导函数, 则** $f\quad x)$ $f\quad x)$

***15. 证明: 若函数** $f\quad x)$ 2π **为周期, 且**

$$f\quad x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

则 $f\quad x + h) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(x + h) + b_n \sin n(x + h)]$

第十章　多元函数微分学

§10.1　多 元 函 数

一、基本内容

本节有三段

第一段给出 n 维笛卡儿乘积或简称 n 维乘积集 $\mathbf{R}^n$．接着给出 n 维乘积集中距离概念．给出距离之后，这样的 n 维乘积集称为 n 维欧几里得空间．有了距离可引入邻域概念，从而又可给出内点、界点，直径、聚点、孤立点，开区域和闭区域等等．

第二段讲点列、极限，接着给出描述 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的连续性的定理，这里重点给出描述二维欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 连续性的定理：闭矩形套定理，有限覆盖定理，聚点定理，致密性定理以及柯西收敛准则等．

第三段用笛卡儿乘积集 $\mathbf{R}^2$ 的特殊子集 f　$A\times B$, " $x\in A$, 存在唯一 $y\in B$, 使$(x, y)\in f)$
它推广到笛卡儿乘积集 $\mathbf{R}^n$，就得到多元函数．

二、学习要求

我们知道，研究一元函数及其极限必须掌握一维空间
集)$\mathbf{R}$ 的结构和连续性．同样，研究多元函数及其极限，也必须掌握 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的结构和连续性．要求：

1. 掌握平面点集的一些概念，如邻域、内点、界点、聚点、开集、闭集、开区域、闭区域、有界集、无界集等．

2. 掌握描述 $\mathbf{R}^2$ (一般是 $\mathbf{R}^n$)
盖定理、聚点原理　　- 外定理)
证明 .

3. 掌握二元函数　　　n 元函数)

三、答疑辅导

问 **1.** 关于多元函数的概念 .

答　通常给出的多元函数的定义是从一元函数的定义推广而来 .“设 A　$\mathbf{R}^n$, B　$\mathbf{R}^m$ 是两个非空子集, 对 " $x\in A$, 按照对应法则 f, 都对应唯一一个 $y\in B$, 使 f　$x) = y$, 这种对应 f 叫做由 A 到 B 的 n 元函数或 n 元向量值函数”. 这个定义不论怎样推广, “对应法则”还是照样保留了 . 恰恰是这个“对应法则”没有给出严格的数学定义, 因此, 这个函数定义没有得到发展和提高, 还是停留在原有的水平上 . 本节所给出的多元函数定义, 摆脱了不确切的“对应法则”. 首先给出笛卡儿乘积集的概念 . 将 $\mathbf{R}^n$ 中有序 n 数组　$x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbf{R}^n$ 的全体称为 $\mathbf{R}$ 的笛卡儿乘积集 . 其实我们早在空间解析几何中就知道,　$x_1, x_2, x_3)\in\mathbf{R}^3$ 就是 $\mathbf{R}^3$ 中的有序数组, 代表 $\mathbf{R}^3$ 中的一点, $\mathbf{R}^3$ 中不同的点 $P_1(x_1, x_2, x_3)$　$P_2(y_1, y_2, y_3)$　　　x_1, x_2, x_3 与 y_1, y_2, y_3 至少有一个坐标不相同 . 只是在空间解析几何中没有给出笛卡儿乘积集的定义 . 设 A　$\mathbf{R}^n$, B　$\mathbf{R}^m$, 将笛卡儿乘积集 $A\times B$ 的特殊的子集 f　$A\times B$, f 的特殊性就是单值性, 即 " $x\in A$, 存在唯一一个 $y\in B$, 使　$x, y)\in f$. 这种笛卡儿乘积集的特殊的子集 f 叫做由 A 到 B 的函数
合论的语言, 如集合、子集、乘积集等, 不涉及不确定的“对应法则”. 这个函数定义与函数的直观化——函数的图像统一了起来 . 由于笛卡儿乘积集的维数不同, 就有各种不同的多元函数 . 这个函数定义是比较严格的 .

问 **2.** 关于 $\mathbf{R}^m$ 中的度量 .

答 从数学分析来说，仅有了多元函数概念，还不能讨论多元函数的性质，还需要在 $\mathbf{R}^m$ 中引入距离 . 将 $\mathbf{R}^m$ 中两点 $x = (x_1, x_2, \cdots, x_m)$ $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ $d_1(x, y) = \| x - y \|$，定义为

$$d_1(x, y) = \| x - y \| = \sum_{i=1}^{m} (x_i - y_i)^2 . \qquad (1)$$

这个距离公式实质是映射 $d_1: \mathbf{R}^m \times \mathbf{R}^m \to \mathbf{R}$.

显然，距离 d_1 满足下面的距离公理：" $x, y, z \in \mathbf{R}^m$，有

1) $d_1(x, y) \geq 0$, $d_1(x, y) = 0$ $x = y$;

2) $d_1(x, y) = d_1(y, x)$

3) $d_1(x, z) \leq d_1(x, y) + d_1(y, z)$

最后这个不等式

不等式的特殊情况 .

这是定义 $\mathbf{R}^m$ 中两点之间距离的一种方法，我们还可以用另外一种方法定义两点之间的距离 . 如定义

$$d_2(x, y) = \| x - y \| = \sum_{i=1}^{m} | x_i - y_i | . \qquad (2)$$

不难验证，d_2 也满足距离公理，" $x, y, z \in \mathbf{R}^m$，有

1) $d_2(x, y) \geq 0$, $d_2(x, y) = 0$ $x = y$;

2) $d_2(x, y) = d_2(y, x)$

3) $d_2(x, z) \leq d_2(x, y) + d_2(y, z)$

我们还可以用其它方法定义 $\mathbf{R}^m$ 中两点之间的距离 .

从距离公理我们看到，当 $m = 1$ 时，集合 $\mathbf{R}^1$ 就是实数集 $\mathbf{R}$，两点之间的距离也就是两点坐标差的绝对值 .

在 $\mathbf{R}^m$ 中引入了两点之间距离 1) 2) $\mathbf{R}^m$ 就成为度量空间或距离空间，一般就称为 m 维欧几里得空间，简称为 m 维欧氏空间 .

在 $\mathbf{R}^m$ 中引入两点之间距离 1) 2) $\mathbf{R}^m$ 就成为度量空间，这就为数学分析讨论多元函数的许多问题创造了条件 . 首

先可讨论 $\mathbf{R}^m$ 空间的结构，如邻域，内点，界点，聚点，开区域，闭区域，有界集，无界集等，其次可给出多元函数的极限，连续，偏导数等一些重要概念．这里距离是基础，邻域是核心．

按照定义(1) $\mathbf{R}^2$ 中的点 p $a, b)$

为 r 的去心邻域是

$$U\quad p, r) = \{(x, y) \mid 0 < \quad (a - x)^2 + (b - y)^2 < r\}.$$

按照定义 2) $\mathbf{R}^2$ 中以点 P $a, b)$ r

的去心邻域是

$$U\quad p, r) = \{(x, y) \mid |a - x| < r, |b - y| < r, (x, y) \neq (a, b)\}.$$

问 3．n 维欧氏空间有哪些特性？

答　n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 不仅是 n 个有序实数组的集合

$$\{(x_1, x_2, \cdots, x_n) \mid x_k \in \mathbf{R}, k = 1, 2, \cdots, n\},$$

同时还定义了距离 d $x, y)$

对 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的元素 x，可将它看作是具有 n 个坐标 x_1，x_2，…，x_n 的一个点；也可将它看作是具有 n 个分量为 x_1，x_2，…，x_n 的一个向量．虽然，在 n 维欧氏空间中，点与向量被视为同一，但是侧重点不同．在数学分析教材中不加区别，视讨论的具体问题而定．

n $n \geq 2)$

而来，

多的差异，自然它也要产生某些新的特性．这些特性多与连通性有关．我们以二维欧氏空间为例，介绍二维欧氏空间的

定义　若 G 是平面区域，G 内的任意闭折线所包围的内点集都属于 G，则称 G 是单连通区域．否则，称为复

(如图 10.1)

一维欧氏空间 $\mathbf{R}$ 的连通集必是区间

欧氏空间 $\mathbf{R}^2$ 的连通集不一定是单连通，可能是复连通，如图 10.1．

一维欧氏空间 $\mathbf{R}$ 中的闭区间 $a, b]$ a $b)$

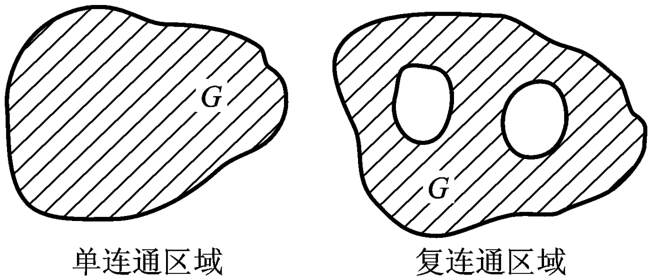


图 10.1

任意点 c∈(a, b) $a, b]$ $a, c]$ $[c, b])$ $\mathbf{R}^2$ 中的闭区域 G 的边界点与 G 的某个内点不一定能用属于 G 的内部的折线连接起来．例如，下列曲线与直线、直线段：

$$y=\cos\frac{1}{x},\quad y=-2,\quad x=-\frac{2}{\pi},\quad x=\frac{2}{\pi},\qquad y)\mid -1\leq y\leq 1\}$$

所围成的闭区域 G．

10.2) y 轴上的点集

$$\{(0, y)\mid -1\leq y\leq 1\}$$

都是边界点．任取一点 $0, y_1)$ $-1<y_1\leq 1)$ G 的任意内点 $x, y)$ G 的内部的折线将边界点 $0, y_1)$ $x, y)$ §10.2 定理 7 种情况，就是因为区域有这样的特殊性．

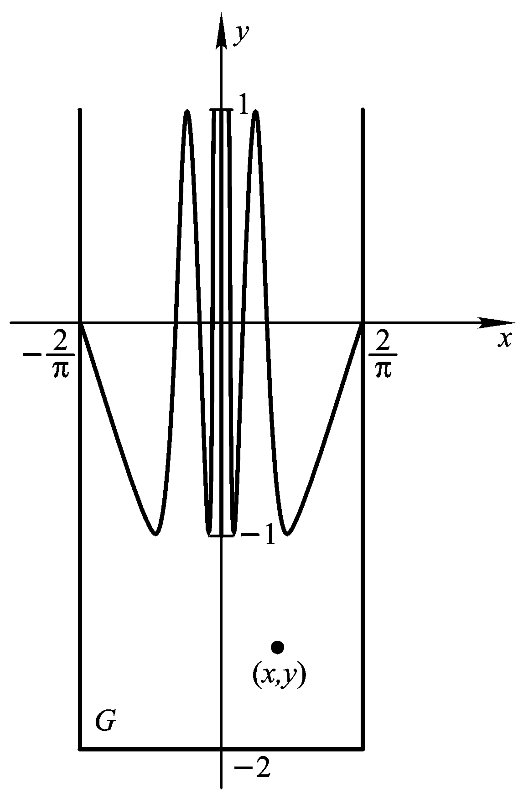


图 10.2

问 4. 何谓向量值函数？

答 当 $f: \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}$ 时，自变量的个数有 n 个时，就是 n 元实值函数．这时自变量是 $x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbf{R}^n$，可看作是

$\mathbf{R}^n$ 中一个向量. 同样, 当 f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 时, 自变量的个数有 n 个, 这时函数值为 $y_1, y_2, \cdots, y_m) \in \mathbf{R}^m$, 由 m 个有序数构成, 是 $\mathbf{R}^m$ 中的一个向量. 自变量是 $\mathbf{R}^n$ 中的向量, 函数值是 $\mathbf{R}^m$ 中的向量, 则称 f 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 中的 n 元向量值函数.

如果将 n 元向量值函数 f: $\mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ 用它的坐标分量表示出来, 就是 m 个 n 元函数构成的函数组:

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$
$$\cdots\cdots$$
$$y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

或用向量简写为 $y = f \quad \boldsymbol{x})$ 或 $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$

显然, 我们所说的 n 元函数是 n 元)
况 $m = 1)$

例如, 半径为 a 的圆的参数方程是

$$x = a\cos t, \qquad x = \varphi_1(t)$$
$$y = a\sin t, \qquad y = \varphi_2(t)$$

它就是函数 φ: $0, 2\pi)$ $\mathbf{R}^2$, $t \in [0, 2\pi)$ $\mathbf{R}$.

再例如 半轴长分别是 a, b, c 的椭球面的参数方程是

$$x = a\sin\varphi\cos\theta, \qquad x = g_1(\varphi, \theta)$$
$$y = b\sin\varphi\sin\theta, \qquad y = g_2(\varphi, \theta)$$
$$z = c\cos\varphi, \qquad z = g_3(\varphi, \theta)$$

它就是函数 g: $0, \pi) \times [0, 2\pi) \to \mathbf{R}^3$, $\mathbf{R}^2$.

问 5. 怎样表示平面上的区域?

答 表示平面区域的工具是不等式, 用举例的方法给出后面用到的某些区域:

1)

$\varphi_1(x) \leq y \leq \varphi_2(x)$ $a \leq x \leq b$, 其中函数 $\varphi_1(x)$ $\varphi_2(x)$
$a, b]$ 13.4 .)

$\alpha \le \frac{y}{x} \le \beta$, $m \le \frac{y^2}{x} \le n$ $0 < m < n, 0 < \alpha < \beta)$

册图 13.11 .)

$a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2$ (如图 10.3)

$|x| + |y| \le 1$ (如图 10.4)

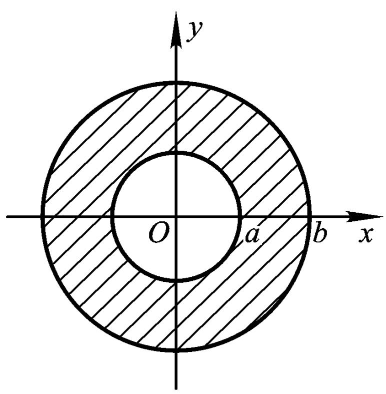


图 10.3

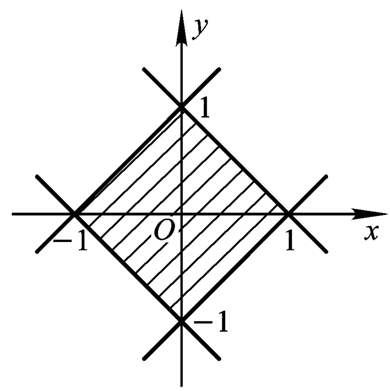


图 10.4

2)

$r_1(\theta) \le r \le r_2(\theta)$ $\alpha \le \theta \le \beta$, 其

中函数 $r_1(\theta)$ $r_2(\theta)$ $\alpha, \beta]$

10.5)

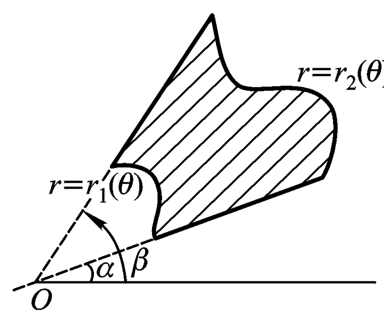


图 10.5

$a \le r \le b$, $0 \le \theta \le 2\pi$ $a > 0)$

环域 .

$r^2 \le 2a^2 \cos 2\theta$, $-\frac{\pi}{4} \le \theta \le \frac{\pi}{4}$ 与

$\pi - \frac{\pi}{4} \le \theta \le \pi + \frac{\pi}{4}$ $a > 0)$ 13.15 .)

$r \le a$ $1 + \cos\theta)$ $0 \le \theta \le 2\pi$ $a > 0)$

8.19 .)

表示区域除用不等式外，也可用几条曲线围成 . 例如:

两条曲线 $y = x^2$ 与 $x = y^2$ 围成的区域 .

8.11 .)

曲线 $x = a$ $t - \sin t)$ $y = a$ $1 - \cos t)$ $a > 0, 0 \le t \le 2\pi)$

x 轴围成的区域. 8.13.)

问 6. 怎样描绘二元函数的图像?

答 后面将要学习的多元函数的积分要用到一些常见的二次曲面和某些简单的曲面. 读者学习空间解析几何时, 侧重在曲面方程的形式及其性质, 不大注意描绘曲面的方法. 这里对描绘二元函数的图像作个简要介绍.

设函数 $z=f(x,y)$ D 上. 函数 $z=f(x,y)$ 域 D 上的图像是三维空间点集

$$\{(x,y,z)\mid(x,y)\in D,z=f(x,y)\}.$$

为了对函数 $z=f(x,y)$ 方法掌握它的局部的不同性态.

1) 用垂直 y 轴或 x 轴的平面 $y=b$ 或 $x=a$ 切割函数 $y=f(x,y)$

$$\begin{cases} z=f(x,y) \\ y=b, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} z=f(x,y) \\ x=a. \end{cases}$$

即 $z=f(x,b)$ $z=f(a,y)$

例如, 函数 $z=e^{-(x^2+y^2)}$ 的图像与平面 $y=b$ 的切口是曲线

$$z=e^{-(x^2+b^2)}=e^{-b^2}\cdot e^{-x^2}.$$

其图像类似 6.17 (这里多了系数 e^{-b^2})

同样, 函数 $z=e^{-(x^2+y^2)}$ 的图像与平面 $x=a$ 的切口是曲线

$$z=e^{-(a^2+y^2)}=e^{-a^2}\cdot e^{-y^2}.$$

2) 用垂直 z 轴的平面 $z=c$ 切割函数 $z=f(x,y)$

$$\begin{cases} z=f(x,y) \\ z=c. \end{cases}$$

一般来说, 它是平面 $z=c$ 上的一条曲线. 它在 xy 平面上的投影是曲线 $f(x,y)=c$. 在该曲线上任意点 (x,y)

c. 曲线 $z = f(x, y)$ $z = c$ 称为等高线.

例如, 函数 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ 的图像与平面 $z = c$ $(0 < c < 1)$ 口是曲线

$$e^{-(x^2+y^2)} = c \quad \text{或} \quad x^2 + y^2 = -\ln c,$$

它是平面 $z = c$ 上原点在 z 轴上半径为 $\sqrt{-\ln c}$ 的圆, 即在该圆周上任意点的函数值都等于 c 10.6)

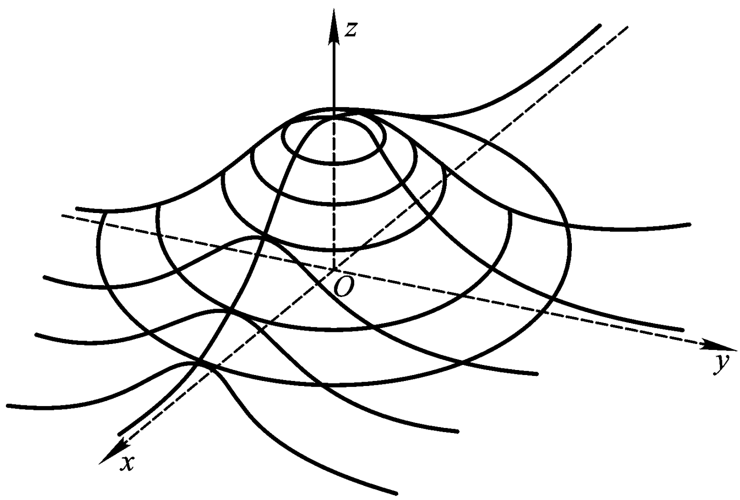


图 10.6

3) 用过 z 轴的半平面 $y = \tan\theta \cdot x$ (θ 是参数) 函数 $z = f(x, y)$

$$z = f(x, \tan\theta \cdot x)$$

一般来说, 它是平面 $y = \tan\theta \cdot x$ 上的一条曲线.

例如, 函数 $z = e^{-(x^2+y^2)}$ 的图像与半平面 $y = \tan\theta \cdot x$ 的切口是曲线

$$z = e^{-(x^2+\tan^2\theta \cdot x^2)} = e^{-(1+\tan^2\theta)x^2},$$

其图像是在过 z 轴的半平面 $y = \tan\theta \cdot x$ 上的一条曲线, 其图像类似 6.17 的 x 轴正半轴上的曲线.

四、补充例题

例 1. 指出下列点集的内点、界点、聚点、并说明是否是有界集、连通域、开区域、闭区域等:

$$E = \quad \frac{1}{n}, \ \frac{1}{m} \ \Big| \ n\in\mathbf{N}_+, \quad m\in\mathbf{N}_+ \quad ;$$

$$F = \{ (x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 \text{ 或} (x - 2)^2 + y^2 < 1 \text{ 与} (1, 0)$$

(3) $G = \{ (x, y) \mid x\in\mathbf{R}, y\in\mathbf{R}, x^2 + y^2 \neq 0 \}$.

解　(1) **任意点** $\frac{1}{n}, \ \frac{1}{m}$ **都是** E **的界点**; **没有内点**; x **轴上的点** $\frac{1}{n}, \ 0$, $n\in\mathbf{N}_+$, y **轴上的点** $0, \ \frac{1}{m}$, $m\in\mathbf{N}_+$ **与** $0, 0)$

E **的聚点**; E **是有界集**; **既不是开区域、闭区域**, **也不是连通区域** .

(2) **集** F **如图** 10.7 . F **中除点** $1, 0)$ $x, y)$ F **的内点**; **圆**: $x^2 + y^2 = 1$ **与** $(x - 2)^2 + y^2 = 1$ **上的点和点** $(1, 0)$ F **的界点**; F **的内点和界点都是** F **的聚点**; F **是有界集**; F **是单连通域**; F **既不是开区域**

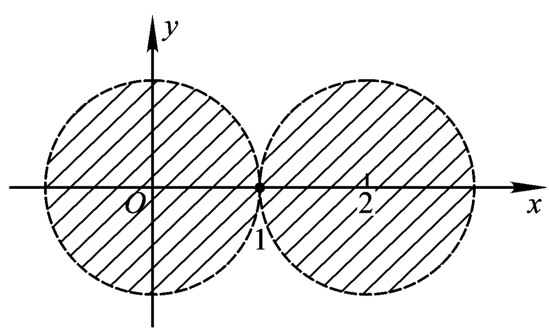


图　10.7

$(1, 0)$**不是** F **的内点** $F)$

(3) **集** G **是坐标平面去掉了原点** $0, 0)$ $0, 0)$ **意一点** $x, y)$ G **的内点**; **只有原点** $0, 0)$ G **的界点**; **坐标平面上任意一点** $x, y)$ $0, 0))$ G **的聚点**; G **是无界集**; G **是复连通域**; G **是开区域** .

例 2. 确定下列函数的定义域:

$$z = \quad y\arcsin \frac{2ax - x^2}{y} + \quad x\arccos \frac{y^2}{2ax}, \qquad a > 0 \ .$$

(2) $u = \quad a^2 - x^2 - y^2 - z^2 - \quad z\arcsin \frac{x^2 + y^2}{3z}, \quad a > 0$.

解 (1) 由等号右端第一项，有不等式组：

$\left|\frac{2ax - x^2}{y}\right| \leq 1,$ 即 $2ax - x^2 \leq y,\ y > 0,\ 0 \leq x \leq 2a$.

$y > 0,$

由等号右端第二项，有不等式组：

$\left|\frac{y^2}{2ax}\right| \leq 1,$ 即 $|y| \leq \quad 2ax,\ x > 0$.

$x > 0,$

于是， 1)

$$\{(x, y)\,|\,0 < x \leq 2a, y > 0, \quad 2ax - x^2 \leq y \leq \quad 2ax\}$$

即定义域是由圆

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

的上半圆，抛物线 $y^2 = 2ax$ 和直线 $x = 2a$ 所围成 10.8)

点 $2a, 0)$ $0, 0)$

(2) 由等号右端第一项，有不等式

$$x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2.$$

由等号右端第二项，有不等式组

$-1 \leq \frac{x^2 + y^2}{3z} \leq 1,$ 即 $0 < x^2 + y^2 \leq 3z$.

$z > 0,$

于是，定义域是 $x, y, z)\,|\,x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ 与 $0 < x^2 + y^2 \leq 3z\}$

即定义域是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2\ (z > 0)$ $x^2 +$

$y^2 = 3z$ 所围成的体，但原点 $0, 0)$ 10.9)

的点与旋转抛物面部分上除原点外的点都属于定义域 .

例 3. 讨论函数 $z = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$ 的图像 .

解 函数的定义域是 $\mathbf{R}^2 -$

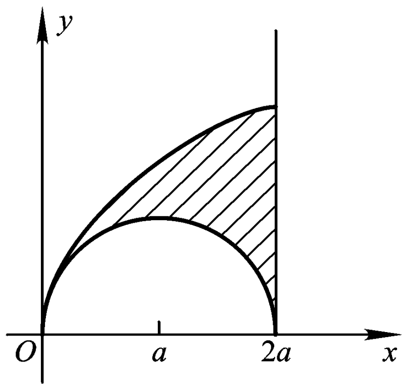


图　10.8

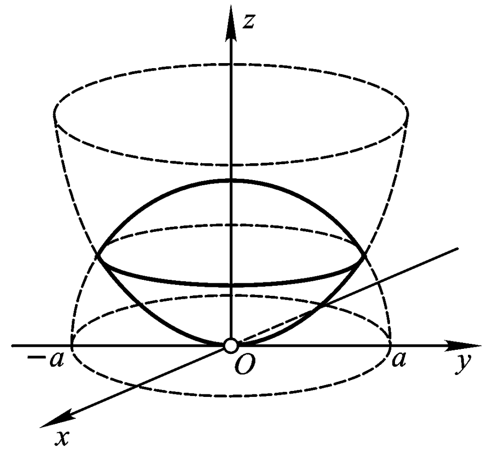


图　10.9

$$\frac{2\quad x)\quad -\ y)}{(\ -\ x)^2+(\ -\ y)^2}=\frac{2xy}{x^2+y^2}=z,$$

即函数图像关于 z 轴对称，又有

$$\frac{2(\ -\ x)y}{(\ -\ x)^2+y^2}=-\frac{2xy}{x^2+y^2}=-z,$$

即函数图像关于 y 轴对称．同样，函数图像也关于 x 轴对称．我们重点讨论 $x,\ y)$

设 xy 平面上过原点的任意一条射线方程是

$$y=x\cdot\tan\varphi,$$

其中 φ $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$ 是射线与 x 轴正向的交角．在该射线上，函数值

$$z=\frac{2x^2\tan\varphi}{x^2+x^2\tan^2\varphi}=\frac{2\tan\varphi}{1+\tan^2\varphi}=\sin 2\varphi,$$

即在射线上的函数值 z 皆相等，且等于 $\sin 2\varphi$，当 $\varphi=0\to\frac{\pi}{4}\to\frac{\pi}{2}$ 时，$z=0\to1\to0$．当 $\frac{\pi}{2}\leq\varphi\leq\pi$ 和 $\frac{3}{2}\pi\leq\varphi\leq2\pi$ 时，$z=\sin 2\varphi<0$，即在第二、四象限函数的图像在 xy 平面下方，且关于 y 轴对称在第一、三象限函数的图像在 xy 平面上方，且关于 y 轴对称．

例 4. 描绘函数 $z = |xy|$ **的图像 .**

解 函数的定义域是 $\mathbf{R}^2$. 有

$$|(-x)(-y)| = |(-x)y| = |x(-y)| = |xy|,$$

即函数图像关于 z 轴对称, 且关于 xz 平面与 yz 平面也对称 .

设 xy 平面上过原点的任意一条射线方程是

$$y = x\cdot \tan \varphi .$$

其中φ $0\leq \varphi < \frac{\pi}{2}$ 是射线与 x 轴正向的交角 . 在该射线上, 函数值

$$z = |x^2 \tan \varphi| \text{ 或 } z = x \quad \tan \varphi \quad (x > 0)$$

即在该射线上函数的图像是一条直线 .

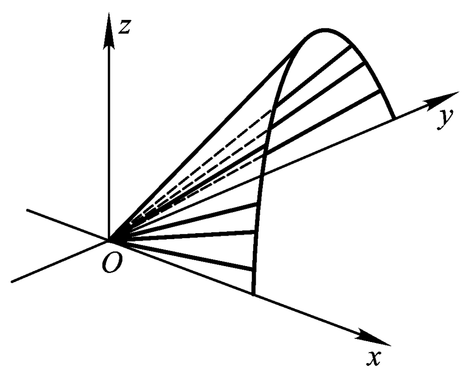


图 10.10

当 $\varphi = 0$ 时, $z = 0$; 当 $\varphi = \frac{\pi}{2}$ 即 $x = 0$ 时, $z = 0$, 即函数的图像通过 x 轴与 y 轴 . 图 10.10 画出了在第一卦限中的函数图像 . 函数的图像仅在第一、二、三、四卦限, 且在 xy 坐标面上方, 每个卦限的图像相同 .

五、练习题 10.1 解法提要

2. 描绘空间区域

域:

(2) $V = (x, y, z)\left|\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} < 1\right.$.

解 V 是以原点 $0,0,0)$ a, b, c 为半轴的椭球内部

(4) $V = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 < z, z < 2\}$

解 V 是以顶点在原点 $0,0,0)$ z 轴为中心轴, 开口向

上的旋转抛物面 $x^2+y^2=z$ **与平面** $z=2$ **所围成的区域的内部，不包含抛物面和平面上的点，是开区域．**

(5)　$V=\{(x,y,z)\,\big|\,|x|+|y|+|z|\leq 1\}$．

解　V **是八个平面** $\pm x\pm y\pm z=1$，ê　$x\pm y\pm z=1$，$\pm x$ê　$y\pm z=1$，$\pm x\pm y$ê　$z=1$ **所围成的区域，八个平面上的点属于区域** V．**这是有界的闭区域．**

5. 指出下列各平面点集 E **的所有聚点所成的集合** E':

(2)　$E=\{(r_1,r_2)\,|\,0<r_1<1, 0<r_2<1,\ r_1$ **与** r_2 **是无理数**$\}$

解　$E'=\{(x,y)\,|\,0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1\}$．

(3)　$E=\ \frac{1}{n},\frac{1}{n}\ \Big|\ n\in\mathbf{N}_+$　．

解　$E'=\{(0,0)\}$．

11. 若 $f\ \ x+y,\frac{y}{x}\ \ =x^2-y^2$，**求** $f(x,y)$

解法　**设** $u=x+y$，$v=\frac{y}{x}$．**解得**

$$x=\frac{u}{1+v},\quad y=\frac{uv}{1+v}.$$

将它代入 x^2-y^2 **化简．**

*　　*　　*　　*

13. 在定理 4 中，将有界闭区域 D **换成有界开区域** D **或无界闭区域** D，**定理 4 都不成立，举例说明．将开区域集合**　$S\}$　**闭区域集合**　$S\}$　　4 **也不成立，举例说明．**

解法　1)　　$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<1\}$

域集

$$\{S_n\}=\ \ (x,y)\,|\,x^2+y^2<1-\frac{1}{n+1},\ n\in\mathbf{N}_+$$

所覆盖……

2)　　$D=\mathbf{R}^2$，**它被开区域集**

$$\{S_n\}=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2<n^2,\ n\in\mathbf{N}_+\}$$

所覆盖……

3)　$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\}$

区域集 $S_n\}$

$$S_1 = \{(x, y) \mid 1 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 1\},$$

$$S_{n+1} = \ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \frac{n}{n+1}, 0 \leq y \leq 1, n \in \mathbf{N}_+$$

所覆盖……

15. 证明定理 2 .

定理 2 (柯西收敛准则)　$P_n\}$

" $\varepsilon > 0$, v $N \in \mathbf{N}_+$, " n, $m > N$, 有 $\| P_n - P_m \| < \varepsilon$.

证法　用点列 $\{P_n\}$

设点列 $\{P_n\} = \{(a_n, b_n)\}$

" $\varepsilon > 0$, v $N \in \mathbf{N}_+$, " n, $m > N$, 有 $\| P_n - P_m \| < \varepsilon$, 即

$$\| P_n - P_m \| = \ (a_n - a_m)^2 + (b_n - b_m)^2 < \varepsilon$$

从而, 有　$|a_n - a_m| < \varepsilon$　与　$|b_n - b_m| < \varepsilon$.

根据数列的柯西准则, 数列 $a_n\}$与$\{b_n\}$

$$\lim_{n \to \infty} a_n = a \quad 与 \quad \lim_{n \to \infty} b_n = b,$$

即点列　$a_n, b_n)\}$　　$P(a, b)$.

§10.2　二元函数的极限与连续

一、基本内容

本节有两段 .

第一段给出了二元函数　　n 元函数)

重极限)

理 1)

第二段给出了二元函数在一点的连续和不连续(间断)

义，以及二元函数在区域上的连续和一致连续的定义．在此基础上，给出了与一元连续函数平行的二元复合函数的连续性

3）　　4）

函数的有界性　5）　6）　7）

致连续性　8）

二、学习要求

多元函数的极限与连续是多元函数微分学和积分学的理论基础．要求：

1．熟练书写二元函数　n 元函数）

二重极限与累次极限的区别及其联系．

2．熟练书写二元函数　n 元函数）

定义．

3．掌握二元复合函数的连续性、二元连续函数的保号性，以及在有界闭区域上连续函数的有界性、取极值性、介值性和一致连续性，及其证明方法，并能应用它们证明一些理论问题．

三、答疑辅导

问1．二元函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

叙述．

答　二元函数极限 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=A$

述，如

" ε > 0, v δ > 0, 当　$x, y): 0<\quad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta$

有 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$

这是用的点 (x_0, y_0)　$x_0, y_0)$

心的方形邻域，即

" ε > 0, v δ > 0, 当　$x, y): |x-x_0|<\delta, |y-y_0|<\delta$, 且

$(x, y) \neq (x_0, y_0)$

$$|f(x, y) - A| < \varepsilon .$$

也可用极坐标的形式，这也是证明或计算极限常用的形式，即设 $x = x_0 + r\cos\theta,\ y = y_0 + r\sin\theta$.

$\forall\ \varepsilon > 0, \exists\ \delta > 0$, **当** $0 < r < \delta,\quad \theta \in [0, 2\pi]$

$$|f(x_0 + r\cos\theta, y_0 + r\sin\theta) - A| < \varepsilon .$$

这里必须对　$\theta \in [0, 2\pi]$

例如　**计算** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$.

解　**设** $x = r\cos\theta,\quad y = r\sin\theta$.　$x, y) \to (0, 0)$

何 θ, **都有** $r \to 0$. **有**

$$\left| xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \right| = \left| r^2 \sin\theta\cos\theta \frac{r^2(\sin^2\theta - \cos^2\theta)}{r^2} \right|$$

$$= \frac{1}{4} r^2 |\sin 4\theta| \leq \frac{r^2}{4} \to 0 \quad .$$

即　$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ \delta = 2\quad \varepsilon > 0$, **当** $0 < r < \delta,\qquad \theta \in [0, 2\pi]$

$$\left| xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} - 0 \right| \leq \frac{r^2}{4} < \varepsilon$$

或

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} xy\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = 0 \quad .$$

问 2. 当动点　$x, y)$　　　$y = kx$ **无限趋近于点**

$0, 0)$　　　$f(x, y)$　　　　　$f(x, y)$

点 $0, 0)$

答　**不能** . **例如，函数**

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2},\qquad D = \mathbf{R} - \{(0, 0)\}$$

当动点　$x, y)$　　x **轴**　$k = 0)$　　　y **轴**　$k = +\infty)$

点 $0, 0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=0}} f(x,y)=0 \quad 与 \quad \lim_{\substack{y\to 0\\ x=0}} f(x,y)=0,$$

当动点 $x, y)$ $y=kx(k\neq 0, k\neq +\infty)$

于点 $0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=kx}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0 .$$

但是，函数 $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 在点 $0,0)$

事实上，当动点 $x, y)$ $y=x^2$ 无限趋近于点 $0,0)$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{x^4+x^4}=\frac{1}{2} .$$

出现上述情况并不奇怪，这是因为函数 $f(x,y)=\frac{x^2y}{x^4+y^2}$ 在抛物线 $y=x^2$ 上每一点的函数值

$$f(x,x^2)=\frac{1}{2} .$$

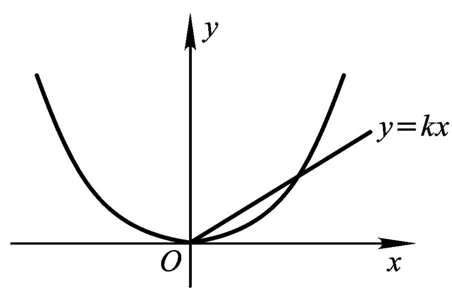


图　10.11

但是当动点 $x, y)$

线 $y=kx$ 无限趋近于点 $0,0)$

无论 k 取何值 $k=+\infty)$ $y=kx$ 与抛物线 $y=x^2$ 总是不同的． 10.11)

从极限定义来说，极限 $\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)=A$

" $\varepsilon>0$, v $\delta>0$, " $(x,y)\in D$: $|x-0|<\delta$ 与 $|y-0|<\delta$, $(x,y)\neq(0,0)$ 有

$$|f(x,y)-A|<\varepsilon$$

要求以点 $0,0)$ 2δ 为边长的去心方形邻域

$$V_\delta=\{(x,y)\,|\,|x-0|<\delta 与 |y-0|<\delta,(x,y)\neq(0,0)\}$$

内所有的点 $x, y)$ $y=kx$ 上的点，也包括抛物线 $y=$

x^2 的点，都要满足不等式 $|f(x,y)-A|<\varepsilon$

对函数 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$ 在点 $0,0)$ A. 事实上，

当 $A=0$ 时，v $\dfrac{1}{4}>0$，" $\delta>0$，$x_0, x_0^2)\in D: |x_0-0|<\delta$

$|x_0|<1$ 时，当然也有 $|x_0^2-0|<\delta)$

$$|f(x_0,x_0^2)-0|=\left|\frac{x_0^4}{x_0^4+x_0^4}-0\right|=\frac{1}{2}>\frac{1}{4}.$$

当 $A\neq0$ 时，v $\dfrac{|A|}{2}>0$，" $\delta>0$，$x_0, kx_0)\in D: |x_0-0|<\delta$

$|kx_0-0|<\delta$ 有

$$|f(x_0,kx_0)-A|=\left|\frac{kx_0}{x_0^2+k^2}-A\right|>\frac{|A|}{2}.$$

因为，当 $k=0, k=+\infty$ 时，显然成立；当 $k\neq0$ 时 $\lim\limits_{x_0\to0}\dfrac{kx_0}{x_0^2+k^2}=0$.

问 3. 函数 $f(x,y)$

么联系？

答 一般来说，二重极限与累次极限没有关系．§10.2 已举例说明：

两个累次极限都存在，且相等

一个存在，另一个不存在)

也可能不存在．

二重极限存在，但是两个累次极

限都可能不存在

不存在)

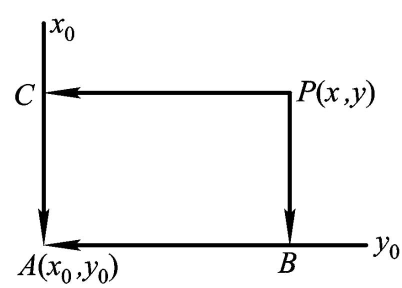


图 10.12

这是因为二重极限与累次极限是分别独立定义的．它们的定义没有必然的联系．

函数 $f(x,y)$ $A(x_0,y_0)$ $A(x_0,y_0)$

内 $f(x,y)$ 定义域的)

它是每次只考虑一个变量变化

的极限 . 例如

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=b.$$

首先只考虑 $x\to x_0$ (y 暂看作常数)

$$\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\varphi(y)$$

其次令 $y\to y_0$，有

$$\lim_{y\to y_0}\lim_{x\to x_0} f(x,y)=\lim_{y\to y_0}\varphi(y)=b.$$

这个累次极限，对任意 y，动点 $P(x,y)$ 　　　　PCA 无限趋近于 $A(x_0,y_0)$ 　　10.12)

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{y\to y_0} f(x,y)=c$$

对任意 x，动点 $P(x,y)$ 　　　　PBA 无限趋近于 $A(x_0,y_0)$

图 10.12)

的 .

因为二元函数在一点的累次极限是连续进行二次一元函数的极限，而计算一元函数的极限正是我们所熟悉的，所以我们希望能将二重极限的计算化为累次极限，但是这需要一定的条件 . 定理 1 就是给出了将二重极限化为累次极限的条件 . 一般来说，我们所遇到的二元函数都能满足这个条件，从而计算二重极限可以化为计算它的累次极限 .

累次极限还有另一方面的应用，可用它表示某些非初等函数 . 例如，狄利克雷函数 $D(x)$

$$D(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}[\cos m!\pi x]^{2n}.$$

显然，当 x 是无理数时，　$m\in\mathbf{N}_+$，$|\cos m!\pi x|<1$，有

$$D(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}[\cos m!\pi x]^{2n}=0.$$

当 x 是有理数时，设 $x=\dfrac{q}{p}$，$p\in\mathbf{N}_+$，q 是整数，且 p 与 q 互质 . 　$m\geq p$，$[\cos m!\pi x]^2=1$，有

$$D(x)=\lim_{m\to\infty}\lim_{n\to\infty}[\cos m!\pi x]^{2n}=1.$$

这是非初等函数——狄利克雷函数 $D(x)$

问 4. 怎样判别二元函数 $f(x,y)$ 　　$x_0, y_0)$

答　当然可以用二元函数 $f(x,y)$ 　　$x_0, y_0)$ 否定叙述进行判别，但这太麻烦，并有一定的技巧．不难证明下述定理：

若在函数 $f(x,y)$ 　　D 中存在两条不同的连续曲线两个不同的点列）　$y=\varphi(x)$ 与 $y=\psi(x)$ 　　$x\to x_0$ 时，有 $\varphi(x)\to y_0$ 与 $\psi(x)\to y_0$，而

$$\lim_{x\to x_0} f[x,\varphi(x)]=A \quad 与 \quad \lim_{x\to x_0} f[x,\psi(x)]=B$$

且 $A\neq B$ 或这两个极限有一个存在另一个不存在，则二元函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0)

这是判别函数 $f(x,y)$ 　　$x_0, y_0)$ 方法．此法关键在于选取这两条连续曲线

由于函数 $f(x,y)$

的连续曲线是选取过点 $x_0, y_0)$ 　　$f(x,y)$

x^2+y^2”，也常进行极坐标替换，然后再选取不同的连续曲线．例如，讨论下列极限的存在性：

1）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2-y^2+x^3-y^3}{x^2+y^2}$．

设 $y=ax$ 与 $y=bx$，$a\neq b$．$\lim\limits_{x\to0}ax=\lim\limits_{x\to0}bx=0$．有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=ax}}\frac{x^2-y^2+x^3-y^3}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-a^2)+x(1-a^3)}{1+a^2}=\frac{1-a^2}{1+a^2},$$

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=bx}}\frac{x^2-y^2+x^3-y^3}{x^2+y^2}=\lim_{x\to0}\frac{(1-b^2)+x(1-b^3)}{1+b^2}=\frac{1-b^2}{1+b^2}.$$

因为 $\dfrac{1-a^2}{1+a^2}\neq\dfrac{1-b^2}{1+b^2}(a\neq b)$

2）$\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$．

设 $\begin{cases} x = r\cos\varphi, \\ y = r\sin\varphi, \end{cases}$ 当 $\varphi = \varphi_1$ 与 $\varphi = \varphi_2$, 设 $0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le \dfrac{\pi}{2}$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0}(\cos^2\varphi_1 - \sin^2\varphi_1) = 1 - 2\sin^2\varphi_1 ,$$

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} = \lim_{r\to 0}(\cos^2\varphi_2 - \sin^2\varphi_2) = 1 - 2\sin^2\varphi_2 .$$

因为 $1 - 2\sin^2\varphi_1 \neq 1 - 2\sin^2\varphi_2 \quad 0 \le \varphi_1 < \varphi_2 \le \dfrac{\pi}{2}$ ，所以该极限不存在 .

问 5. 向量值函数的极限和连续是怎样定义的 ?

答　设 f 是定义在 $A \quad \mathbf{R}^n$ 上的向量值函数, 即

$$f: \ A \to \mathbf{R}^m, \quad A \quad \mathbf{R}^n .$$

P 是 A 的聚点 .

定义　若 v $B \in \mathbf{R}^m$, " $\varepsilon > 0$, v $\delta > 0$, " $x \in A: 0 < \| x - P \| < \delta$, 有

$$\| f(x) - B \| < \varepsilon$$

称 B 是向量值函数 $f(x)$　　P 的极限, 表为

$$\lim_{x\to P} f(x) = B$$

用邻域叙述:

$$\lim_{x\to P} f(x) = B \qquad \text{"}\ \varepsilon > 0, \text{v}\ \delta > 0, \text{有}$$

$$f[U(P, \delta) \cap A] \quad U(B, \varepsilon)$$

其中 $U(P, \delta)$　　P 的 δ 去心邻域, $U(B, \varepsilon)$　　B 的 ε 邻域 .

定义　若 $P \in A$, 且 $\lim\limits_{x\to P} f(x) = f(P)$　　　　$f(x)$ 点 P 连续 .

$f(x)$　　P 连续　　" $\varepsilon > 0$, v $\delta > 0$, " $x \in A: 0 < \| x - P \| < \delta$

$$\| f(x) - f(P) \| < \varepsilon .$$

" $\varepsilon > 0$, v $\delta > 0$, 有 $f[U(P, \delta) \cap A] \quad U[f(P), \varepsilon]$

四、补充例题

例 1. 证明:

(1) **极限** $\lim\limits_{\substack{x\to 3\\ y\to +\infty}} \dfrac{xy-1}{y+1}=3$;

(2) **极限** $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ y\to 1}}(x^2+xy+y^2)=7$.

证法　(1) **只须证明, 对** " $\varepsilon>0$, **找到** $\delta>0$,　　$x, y)$: $|x-3|<\delta$　$y>\dfrac{1}{\delta}$, **有**

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|<\varepsilon$$

证明　" $\varepsilon>0$, **有不等式**　　$y>0)$

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|=\frac{|(x-3)y-4|}{y+1}<|x-3|+\frac{4}{y}$$

取 $\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}>0$. **于是**

" $\varepsilon>0$, v　$\delta=\dfrac{\varepsilon}{5}>0$,　　$x, y)$: $|x-3|<\delta$　$y>\dfrac{1}{\delta}$, **有**

$$\left|\frac{xy-1}{y+1}-3\right|<|x-3|+\frac{4}{y}<\delta+4\delta=5\delta=\varepsilon$$

即

$$\lim_{\substack{x\to 3\\ y\to +\infty}}\frac{xy-1}{y+1}=3 .$$

(2) **证法**　**只须证明: 对** " $\varepsilon>0$, v　$\delta>0$,　　$x, y)$: $|x-2|<\delta$　$|y-1|<\delta (x, y)\neq(2,1)$

$$|(x^2+xy+y^2)-7|<\varepsilon$$

证明　**首先取** $\delta=1$, **限定** $|x-2|<1$, $|y-1|<1$, **即** $-1<x<3$, $0<y<2$. **有**

$$(x^2+xy+y^2)-7|=|x^2-4+xy-2+y^2-1|$$

$$=|(x+2)(x-2)+(x-2)y+2(y-1)+(y+1)(y-1)|$$

$$\leq|x-2||x+y+2|+|y-1||y+3| .$$

其中 $|y+3| = |y-1+4| \le |y-1| + 4 < 5$,

$$|x+y+2| = |x-2+y-1+5| \le |x-2| + |y-1| + 5 < 7 .$$

于是,

$$|(x^2+xy+y^2)-7| \le 7|x-2| + 5|y-1|$$
$$< 7(|x-2| + |y-1|) < \varepsilon$$

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{14}\right\}$, 当 $|x-2| < \delta$, $|y-1| < \delta$, $(x,y) \neq (2,1)$

$$|(x^2+xy+y^2)-7| < \varepsilon$$

即
$$\lim_{\substack{x\to 2\\ x\to 1}} (x^2+xy+y^2) = 7 .$$

例 2. 计算下列极限:

(1) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x}$; (2) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to\infty}} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$;

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to\infty\\ y\to a}} \left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}$; 4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} x^2y^2\ln(x^2+y^2)$

解 (1) $\frac{\sin xy}{x} = \frac{\sin xy}{xy}\cdot y$, 有

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{x} = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to a}} \frac{\sin xy}{xy}\cdot y = 1\cdot a = a$$

(2) 有 $\left|\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\right| \le \frac{x^2+y^2}{2x^2y^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right) \to 0$ (当 $x\to\infty$, $y\to\infty$) $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$, 有

$$\left|\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\right| \le \frac{r^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}{r^4(\cos^4\theta+\sin^4\theta)} \le \frac{1}{r^2}\,\frac{2}{\cos^4\theta+\sin^4\theta} \le \frac{2}{br^2} \to 0$$

($r\to\infty$, 其中 b 是 $\cos^4\theta+\sin^4\theta$ 在 $[0,2\pi]$ 上的下界, 显然 $b>0$.)

或 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists\ \delta > 0$, $\frac{2}{r^2} < \delta$, $\theta \in (0,2\pi)$

$$\left|\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}\right| \le \frac{2}{r^2} < \varepsilon .$$

即

$$\lim_{\substack{x\to+\infty\\y\to+\infty}}\frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}=0\ .$$

(3) $\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{x^2}{x+y}}=\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}$,有

$$\lim_{\substack{x\to\infty\\y\to a}}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\frac{x}{x+y}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x\cdot\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\y\to a}}\frac{x}{x+y}}=e^1=e$$

$$x=r\cos\theta,\quad y=r\sin\theta\ .$$

$$x^2y^2\ln(x^2+y^2)=r^4\cos^2\theta\sin^2\theta\ln r^2$$

$$=\frac{r^4}{2}\sin^2 2\theta\ln r\leqslant\frac{r^3}{2}\cdot r\ln r\to 0(r\to 0)$$

当 $r\to 0$ 时，有 $r^3\to 0$，$r\ln r\to 0$，即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\y\to 0}}x^2y^2\ln(x^2+y^2)=0\ .$$

例 3.　**讨论函数**

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 是无理数},\\ y, & \text{当 } x \text{ 是有理数}\end{cases}$$

在 R 上的连续性 .

证法　" $(a,b)\in\mathbf{R}^2$,且 $b\neq 0$,沿着过点 $a,b)$

$f(x,y)$　　　　$f(x,y)$　$a,b)$

" $(a,0)\in\mathbf{R}^2$,用连续定义证明, $f(x,y)$　　$a,0)$

证明　" $(a,b)\in\mathbf{R}^2$,且 $b\neq 0$.取过点 $a,b)$　　x 轴的直线 $y=b$，这时

$$\lim_{\substack{x\to a\\y=b}}f(x,y)=\lim_{x\to a}f(x,b)=\begin{cases}0, & \text{当 } x \text{ 是无理数},\\ b, & \text{当 } x \text{ 是有理数},\end{cases}$$

即函数 $f(x,y)$　　$a,b)$　　　　$f(x,y)$　　$a,b)$

" $(a,0)\in\mathbf{R}^2$,即 x 轴上任意一点 $a,0)$

" $\varepsilon>0$, v $\delta=\varepsilon>0$, " (x,y): $|x-a|<\delta$, $|y|<\delta$,有

$$|f(x,y)-f(a,0)|=|y-0|=|y|<\delta=\varepsilon$$

即 $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to 0}} f(x, y) = f(a, 0)$ $f(x, y)$ $a, 0)$

例 4. 证明: 函数 $f(x, y) = \sin xy$ 在 $\mathbf{R}^2$ 上非一致连续.

证法 v $\varepsilon_0 > 0$, " $\delta > 0$, v $P_n, Q_n \in \mathbf{R}^2$: $\| P_n - Q_n \| < \delta$,

$$| f(P_n) - f(Q_n) | \geq \varepsilon_0 \ .$$

证明 v $\frac{1}{2} > 0$, " $\delta > 0$, $P_n(\quad n\pi, \quad n\pi)$,

$$Q_n \quad n\pi + \frac{\pi}{2}, \quad n\pi + \frac{\pi}{2} \ :$$

$$\| P_n - Q_n \| = \quad 2 \quad n\pi + \frac{\pi}{2} - \quad n\pi^{\ 2} = 2 \quad n\pi + \frac{\pi}{2} - \quad n\pi$$

$$= \frac{\pi}{2 \quad n\pi + \frac{\pi}{2} + \quad n\pi} < \delta \text{ 只需 } n > \frac{\pi}{8\delta^2} \ ,$$

有 $$| f(P_n) - f(Q_n) | = 1 > \frac{1}{2},$$

即函数 $f(x, y)$ $\mathbf{R}^2$ 上非一致连续.

例 5. 证明: 若函数 $f(x, y)$ $R(a < x < A; b < y < B)$ 连续, 而函数 $x = \varphi(u, v)$ 及 $y = \psi(u, v)$ $R'(a' < u < A'; b' < v < B')$ $x \in (a, A), y \in (b, B)$

$$F(u, v) = f[\varphi(u, v), \psi(u, v)]$$

在 R' 内连续.

证法 " $(u_0, v_0) \in R'$. " $\varepsilon > 0$, 找到 $\delta > 0$, " $(u, v) \in R'$: $| u - u_0 | < \delta$ 与 $| v - v_0 | < \delta$, 有 $| F(u, v) - F(u_0, v_0) | < \varepsilon$

证明 " $(u_0, v_0) \in R'$, 设 $x_0 = \varphi(u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(u_0, v_0)$

已知 $f(x, y)$ $x_0, y_0)$ $\varepsilon > 0$, v $\eta > 0$, $x, y)$ $| x - x_0 | < \eta$ 与 $| y - y_0 | < \eta$, 有

$$| f(x, y) - f(x_0, y_0) | < \varepsilon$$

又已知 $x = \varphi(u, v)$ $y = \psi(u, v)$ $u_0, v_0)$ 的 $\eta > 0$, v $\delta > 0$, $u, v)$: $| u - u_0 | < \delta$ 与 $| v - v_0 | < \delta$,

$$|x - x_0| = |\varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0)| < \eta$$

与
$$|y - y_0| = |\psi(u, v) - \psi(u_0, v_0)| < \eta$$

于是, $\varepsilon > 0(\exists\ \eta > 0), \exists\ \delta > 0, \forall\ (u, v): |u - u_0| < \delta$ 与 $|v - v_0| < \delta$,有 $|x - x_0| = |\varphi(u, v) - \varphi(u_0, v_0)| < \eta$ 与 $|y - y_0| = |\psi(u, v) - \psi(u_0, v_0)| < \eta)$

$$|F(u, v) - F(u_0, v_0)|$$
$$= |f[\varphi(u, v), \psi(u, v)] - f[\varphi(u_0, v_0), \psi(u_0, v_0)]| < \varepsilon$$

即函数 $F(u, v)$ R'内连续.

例 6. **证明**: 若 D 是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的有界闭区域, 向量值函数 $f: D \to R^m$ 连续, 则向量值函数 f 在 D 上一致连续.

证法 用反证法, 并应用有界无限点集必存在收敛的子点列, 从而得到矛盾.

证明 用反证法. 假设向量值函数 $f(x)$ D 上非一致连续, 即 $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, $\forall\ \delta > 0$, $\exists\ P, Q \in D$: $\|P - Q\| < \delta$, 有

$$\|f(P) - f(Q)\| \geq \varepsilon_0 .$$

由于 δ 的任意性, 取

$\delta_1 = 1$, $\exists\ P_1, Q_1 \in D$: $\|P_1 - Q_1\| < \delta_1$, 有

$$\|f(P_1) - f(Q_1)\| \geq \varepsilon_0,$$

$\delta_2 = \dfrac{1}{2}$, $\exists\ P_2, Q_2 \in D$: $\|P_2 - Q_2\| < \delta_2$, 有

$$\|f(P_2) - f(Q_2)\| \geq \varepsilon_0,$$

……

$\delta_n = \dfrac{1}{n}$, $\exists\ P_n, Q_n \in D$: $\|P_n - Q_n\| < \delta_n$, 有

$$\|f(P_n) - f(Q_n)\| \geq \varepsilon_0,$$

……

从而得到有界无限点列 $P_n\}$ $P_{n_k}\}$

$\lim\limits_{k \to \infty} P_{n_k} = P_0 \in D$ D 是闭区域)

$$\| Q_{n_k} - P_0 \| \leq \| Q_{n_k} - P_{n_k} \| + \| P_{n_k} - P_0 \| \to 0 \quad (k\to\infty)$$

即 $\lim\limits_{k\to\infty} Q_{n_k} = P_0$.已知向量函数 f 连续,有

$$\| f(P_{n_k}) - f(Q_{n_k}) \| \to \| f(P_0) - f(P_0) \| = 0 \quad (k\to\infty) .$$

这与 $k\in\mathbf{N}_+ , \| f(P_{n_k}) - f(Q_{n_k}) \| \geq \varepsilon_0$ 矛盾 .

注　此例也可用推广的有限覆盖定理证明 . 参看§4.2 定理 4 的证明 .

例 7. 设 $f(x) = (f_1(x), f_2(x), \cdots, f_m(x)), x\in A \quad \mathbf{R}^n, B = (b_1, b_2, \cdots, b_m)$ 　　$\lim\limits_{x\to P} f(x) = B$ 的充分必要条件是每个坐标函数 $f_k(x)$

$$\lim_{x\to P} f_k(x) = b_k, \quad k = 1, 2, \cdots, m .$$

证法　应用向量值函数的极限定义与 $\mathbf{R}^m$ 中两点间的距离公式 .

证明　“　　”已知 $\lim\limits_{x\to P} f(x) = B$,即 " $\varepsilon > 0$, v　$\delta > 0$, " $x\in A$: $0 < | x - P| < \delta$　有

$$\| f(x) - B \| = \sum_{k=1}^{m} [f_k(x) - b_k]^2 < \varepsilon$$

从而有　$$| f_k(x) - b_k | < \varepsilon, \quad k = 1, 2, \cdots, m,$$

即　$$\lim_{x\to P} f_k(x) = b_k, \quad k = 1, 2, \cdots, m .$$

“　　”已知 $\lim\limits_{x\to P} f_k(x) = b_k$, 　$k = 1, 2, \cdots, m$,即 " $\varepsilon > 0$, v　$\delta > 0$, " $x\in A$: $0 < \| x - P \| < \delta$

$$| f_k(x) - b_k | < \frac{\varepsilon}{m}, \quad k = 1, 2, \cdots, m$$

从而有

$$\| f(x) - B \| = \sum_{k=1}^{m} [f_k(x) - b_k]^2 < m \cdot \frac{\varepsilon^2}{m} = \varepsilon$$

即　$$\lim_{x\to P} f(x) = B$$

说明　此例指出, 向量值函数 $f: A\to\mathbf{R}^m (A \quad \mathbf{R}^n)$ 　　P 的

极限等价于 m 个坐标 n 元) $f_k(x)(k=1,2,\cdots,m)$ P 的极限．因此研究向量值函数的极限可以同时分别研究每一个坐标函数的极限．同法可证．

(1) 设 $a^{(n)}=(a_1^{(n)},a_2^{(n)},\cdots,a_m^{(n)})\in\mathbf{R}^m$, $a=(a_1,a_2,\cdots,a_m)\in\mathbf{R}^m$．$\mathbf{R}^m$ 中的点列 $a^{(n)}\}$ a, 即 $\lim\limits_{n\to\infty}a^{(n)}=a$ 的必要充分条件是

$$\lim_{n\to\infty}a_k^{(n)}=a_k,\ k=1,2,\cdots,m$$

(2) 设 $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))$, $x\in\mathbf{R}^n$, $P\in\mathbf{R}^n$．向量值函数 $f(x)$ P 连续的必要充分条件是每个坐标 n 元) 数 $f_k(x)(k=1,2,\cdots,m)$ P 都连续．

(3) $f(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_m(x))$, $x\in A$ $\mathbf{R}^n$.向量值函数 $f(x)$ A 上一致连续的必要充分条件是每个坐标函数 $f_k(x)$ $(k=1,2,\cdots,m)$ A 上都一致连续．

五、练习题 10.2 解法提要

3. 设函数 $f(x,y)=\dfrac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}$, 证明: 当点 $x,y)$ 的任意直线 $y=mx)$ $0,0)$ $f(x,y)$ 限相等．但是, 此函数在原点不存在极限．

解法

当 $m\neq 0$ 时,

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=mx}}\frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}=\lim_{x\to0}\frac{m^4x^8}{(x^4+m^2x^2)^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{m^4x^8}{x^6(x^2+m^2)^3}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{m^4x^2}{(x^2+m^2)^3}=0\ .$$

当 $m=0$ 时, 即 $y=0$, 显然, 有

$$\lim_{\substack{x\to0\\y=0}}\frac{x^4y^4}{(x^4+y^2)^3}=0\ .$$

但是，当 $y = x^2$ **时，有**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x^2}} \frac{x^4 y^4}{(x^4 + y^2)^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^{12}}{8x^{12}} = \frac{1}{8} .$$

即此函数在原点 0, 0)

6. 求下列极限:

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} (x + y)\ln(x^2 + y^2)$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(1+4x^2)(1+6y^2) - 1}{2x^2 + 3y^2}$.

解 (3) **见本节补充例题的例** 2 **的**(4)

(4)
$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(1+4x^2)(1+6y^2) - 1}{2x^2+3y^2}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{(\quad (1+4x^2)(1+6y^2) - 1)(\quad (1+4x^2)(1+6y^2) + 1)}{(2x^2+3y^2)(\quad (1+4x^2)(1+6y^2) + 1)}$$

$$= \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{2}{(1+4x^2)(1+6y^2)+1} +$$

$$\frac{24x^2y^2}{(2x^2+3y^2)(\quad (1+4x^2)(1+6y^2+1)}$$

$$= 1 + 0 = 1 .$$

7. 写出下列符号的定义:

(3) $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ y\to +\infty}} f(x, y) = +\infty$

" $B > 0$, v $\delta > 0$ **与** $A > 0$, $x, y)$: $|x - a| < \delta$ $y > A$,

有

$$f(x, y) > B .$$

(4) $\lim\limits_{\substack{x\to -\infty\\ y\to b}} f(x, y) = B$

" $\varepsilon > 0$, v $A > 0$ **与** $\delta > 0$, $x, y)$: $x < -A$, $|y - b| < \delta$

$$|f(x, y) - B| < \varepsilon .$$

(5) **证明** $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{x^2+3y^2}=+\infty$.

证法　" $A>0$, **要使不等式**

$$\frac{1}{x^2+3y^2}\geq\frac{1}{3(x^2+y^2)}>A$$

成立, 只须取 $\delta=\frac{1}{6A}$. **于是,**

" $A>0$, v $\delta=\frac{1}{6A}>0$,　　$x, y)$: $|x|<\delta$, $|y|<\delta$, **且**

$(x, y)\neq(0,0)$ **有**

$$\frac{1}{x^2+3y^2}>\frac{1}{6\delta^2}=A$$

即

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\frac{1}{x^2+3y^2}=+\infty.$$

9. 证明: 若　$Q\in U(P, r)$　　$f(Q)\leq g(Q)$

$\lim\limits_{Q\to P}f(Q)$ **与** $\lim\limits_{Q\to P}g(Q)$　　　$\lim\limits_{Q\to P}f(Q)\leq\lim\limits_{Q\to P}g(Q)$

证法　**应用反证法. 假设** $\lim\limits_{Q\to P}f(Q)>\lim\limits_{Q\to P}g(Q)$

$\lim\limits_{Q\to P}[f(Q)-g(Q)]>0$, **由此推出矛盾.**

11. 证明: 函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\dfrac{2xy}{x^2+y^2}, & \text{若 } x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & \text{若 } x^2+y^2=0,\end{cases}$$

在原点 $0,0)$　　　　x **或** y

续, 但是作为二元函数, 在原点 $0,0)$

证法

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y= a}}f(x, y)=\lim_{\substack{x\to 0\\ y= a}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=0\quad(a\neq 0),$$

$$\lim_{\substack{y\to 0\\ x= a}}f(x, y)=\lim_{\substack{y\to 0\\ x= a}}\frac{2xy}{x^2+y^2}=0\quad(a\neq 0)$$

即 $f(x, y)$　　　　x **或** y **都连续. 当** $x=y$ **时, 有**

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y=x}} f(x,y)=\lim_{x\to 0}\frac{2x^2}{x^2+x^2}=1\neq f(0,0)$$

即 $f(x,y)$ 0,0)

14. 应用致密性定理证明定理 5 .

定理 5 (有界性) $f(P)$ D 连续，则函数 $f(P)$ D 有界，即v $M>0$，" $P\in D$，有 $|f(P)|\leq M$

证法 用反证法 假设 $f(P)$ D 无界，即

" $M>0$，v $P_0\in D$，使 $|f(P_0)|\geq M$

当 $M=1$ 时，v $P_1\in D$，使 $|f(P_1)|\geq 1$,

当 $M=2$ 时，v $P_2\in D$，使 $|f(P_2)|\geq 2$,

……

当 $M=n$ 时，v $P_n\in D$，使 $|f(P_n)|\geq n$

……

于是，得到点列 $P_n\}$ $P_n\}$

$P_{n_k}\}$ $\lim_{k\to\infty}P_{n_k}=P'\in D$，有 $\lim f(P_{n_k})=f(P')$

知 $\lim_{k\to\infty}f(P_{n_k})=\infty$，矛盾 . 即 $f(P)$ D 有界 .

15. 证明: 若在开区域 G 函数 $f(x,y)$ x 连续，对变数 y 满足李普希茨条件，即对任意 $x,y_1)\in G$ 与 $(x,y_2)\in G$,

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leq L|y_1-y_2|,$$

其中 L 是常数，则函数 $f(x,y)$ G 连续 .

证法 任取 $(x_0,y_0)\in G$, " $(x,y)\in G$, 对 " $\varepsilon>0$，证明

$$f(x,y)-f(x_0,y_0)|$$

$$\leq|f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

19. 证明: 若函数 $f(x,y)$ x 与 y 都连续，并对 x 是单调的，则函数 $f(x,y)$

证法 任取一点 (x_0,y_0) $f(x,y)$ x 单调增加 . 已知 $f(x,y)$ x 与 y 都连续，即 " $\varepsilon>0$,

v $\delta_1>0$, x: $|x-x_0|\leq\delta_1$，有 10.13)

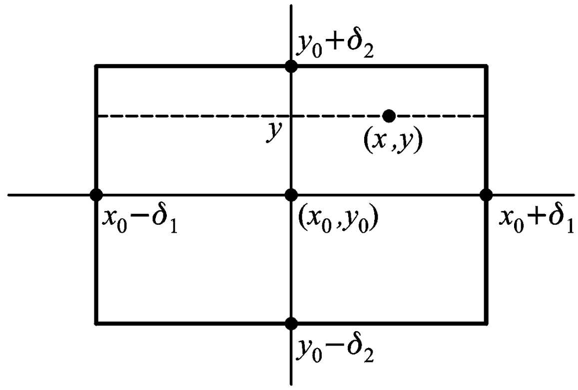


图　10.13

$| f(x, y_0) - f(x_0, y_0) | < \varepsilon$　或　$| f(x_0 \pm \delta_1, y_0) - f(x_0, y_0) | < \varepsilon$.

v $\delta_2 > 0$, " y: $| y - y_0 | \leq \delta_2$, 有

$$| f(x_0 - \delta_1, y) - f(x_0 - \delta_1, y_0) | < \varepsilon$$

与

$$| f(x_0 + \delta_1, y) - f(x_0 + \delta_1, y_0) | < \varepsilon$$

对任意点(x, y)

$$| x - x_0 | \leq \delta_1 \quad 与 \quad | y - y_0 | \leq \delta_2$$

时, 应用$f(x, y)$　x 单调增加性和上述不等式, 可得

$$f(x, y) - f(x_0, y_0) < 2\varepsilon \quad 与 \quad f(x, y) - f(x_0, y_0) > -2\varepsilon$$

20. 证明: 若函数$f(x, y)$　$D = \{(x, y) | a \leq x \leq A, b \leq y \leq B\}$　　$\varphi_n(x)\}$　$a, A]$　　$b \leq \varphi_n(x) \leq B$

则函数列

$$F_n(x) = f(x, \varphi_n(x)), n = 1, 2, \cdots$$

在 $a, A]$

证法　应用柯西一致收敛准则. 只须证明, " $\varepsilon > 0$,　$N \in \mathbf{N}_+$, " $n, m > N$, " $x \in [a, A]$

$$| F_n(x) - F_m(x) | = | f(x, \varphi_n(x)) - f(x, \varphi_m(x)) | < \varepsilon.$$

由$f(x, y)$　D 上一致连续与 $\varphi_n(x)\}$　$a, A]$

能证明

$$| F_n(x) - F_m(x) | < \varepsilon$$

§10.3　多元函数微分法

一、基本内容

本节有五段．

第一段给出了多元函数在一点的偏导数的定义，以及二元函数在一点的两个偏导数的几何意义．

第二段给出了与一元函数拉格朗日定理类似的二元函数

般是 n 元函数)　　1 及引理)

第三段给出了可微的几何意义，即存在切平面，以及用方程

$z = f(x, y)$　　3)

第四段给出了多元复合函数在一点的导数和偏导数的公式(定理 4 和推论)

第五段给出了三元可微函数在一点的方向导数的定义和方向导数与偏导数的关系，即方向导数的公式　　5)

二、学习要求

多元函数微分学的内容与一元函数微分学的内容大体上是平行的，它们的意义和作用也是类似的．但是“多”与“单”也有某些差异，在注意“多”与“单”的共性的同时，特别要注意“多”所具有的特性．求偏导数是多元函数微分学与积分学中的重要运算．要求:

1. 熟练掌握求偏导数，特别是求多元复合函数的偏导数的运算．

2. 理解全微分的概念及其意义．

3. 会求空间曲线的切线方程与法平面方程，会求空间曲面的切平面方程与法线方程．

三、答疑辅导

问 1. 偏导数符号“　”怎样读？

答　符号“　”读作“朗得 - 第” round-d) 很少用它的读音，只把它看作是一个符号．例如，可将符号“$\frac{u}{x}$”简读作“函数 u 关于 x 的偏导数”．

尽管导数$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$与偏导数$\frac{u}{x}$的极限形式是类似的，但是它们有单与多的差别．而导数$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$可以看作是微分 $\mathrm{d}f$ 与 $\mathrm{d}x$ 的商，偏导数$\frac{u}{x}$却不能看作是 u 与 x 的商．例如，见 §10.3 的例 3，有三个偏导数，它们的乘积

$$\frac{P}{V}\cdot\frac{V}{T}\cdot\frac{T}{P}$$

并不是 1，而是 - 1．

问 2. 研究多元函数有哪些基本方法？

答　从总的方面说，研究多元函数有两种基本方法：一是多重法

n 元函数$y = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$　$n \geq 2$，它有 n 个自变量，它们是彼此无关独立变化的．研究 n 元函数考虑 n 个自变量同时变化，这就是多重法．一般来说，凡涉及多元函数一些重要概念和理论多是采用多重法．例如，多元函数的极限、连续、可微、重积分、线、面积分等．为了某种需要，研究 n 元函数暂令其中某一个变量变化，其余的变量都看作常数，即将 n 元函数化为一元函数，如此逐个变量处理 n 次，这就是累次法．一般来说，凡涉及 n 元函数的某些计算多是采用累次法．例如，多元函数的累次极限、偏导数、累次积分，等．

我们知道，多元函数的整体性质并不能简单地化成多重“单”的性质，但是在一定条件下是可能的．因此，在多元函数

的微积分中，有一些将“多”化为“单”的定理．例如，重极限化为累次极限的定理 §10.2 定理 1)

等等．研究多元函数的许多性质常是两种方法混合使用．

研究二元函数 $f(x, y)$ (一般是 n 元函数) $A(x_1, y_1)$ 与 $B(x_2, y_2)$

$$\Delta = f(x_1, y_1) - f(x_2, y_2)$$

用累次法将“多”化为“单”，又有两个方法:

一是折线法．补加一点 $C(x_1, y_2)$ (或 (x_2, y_1))

AC 与 CB 属于函数 $f(x, y)$

$$\Delta = [f(x_1, y_1) - f(x_1, y_2)] + [f(x_1, y_2) - f(x_2, y_2)]$$

上式等号的右端，第一个方括号内仅变数 y 有改变 $x = x_1$)

二个方括号内仅变数 x 有改变 $y = y_2$)

数．本节的定理 1，后面本节补充例题的例 1 以及练习题 10.3 中的第 7、8、9 题的证明都是使用的这个方法．

二是直线法，将线段 AB 表为参数 t 的参数方程

$$\begin{cases} x = x_1 + t(x_2 - x_1), \\ y = y_1 + t(y_2 - y_1), \end{cases} \quad 0 \leq t \leq 1.$$

当 $t = 0$ 时，对应点 $A(x_1, y_1)$ $t = 1$ 时，对应点 $B(x_2, y_2)$

$$f(x, y) = f[x_1 + t(x_2 - x_1), y_1 + t(y_2 - y_1)] = \varphi(t)$$

于是，将点 $x, y)$ AB 上，二元函数 n 元函数) $f(x, y)$ t 的一元函数 $\varphi(t)$ §10.4 泰勒公式的证明就是使用的这个方法．

问 3. 二元函数(一般是 n 元函数)

间有什么关系?

答 二元函数 $f(x, y)$ $x_0, y_0)$

连续 / 偏导数存在．

例如，函数 $z = x^2 + y^2$ 在点 0, 0) 0, 0)

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta_x z}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{|\Delta x|}{\Delta x}=\begin{cases}1, & 当\ \Delta x>0,\\ -1, & 当\ \Delta x<0,\end{cases}$$

不存在．同样极限 $\lim\limits_{\Delta y\to 0}\dfrac{\Delta_y z}{\Delta y}$ 也不存在．

偏导数存在⇸连续．

例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}x^2+y^2, & 当\ x=0\ 或\ y=0,\\ 1, & 当\ xy\neq 0\end{cases}$$

在点 0,0) 0,0)

§10.3 第一段的说明 .)

二元函数 $f(x,y)$ $x_0, y_0)$

偏导数存在⇸可微．

例如，函数 $f(x,y)=\quad|xy|$ $(0,0)$

是它在点 0,0) §10.3 第二段的说明 .)

可微→偏导数存在

问 4. 何谓函数 $f(x,y)$（当 $x\to x_0$ 时） $c, d]$

收敛于函数 $\varphi(y)$

答　《讲义》

了这个问题．下面给出它们的定义．

设函数 $f(x,y)$ $R[a\leq x\leq b, c\leq y\leq d]$ 上，$x_0\in[a,b]$

定义　若 $\forall y\in[c,d]$，$\forall \varepsilon>0$，$\exists\ \delta_y>0$，$\forall x\in[a,b]$：$0<|x-x_0|<\delta_y$，有

$$|f(x,y)-\varphi(y)|<\varepsilon$$

称函数 $f(x,y)$（当 $x\to x_0$ 时）在 $[c,d]$ 收敛于　函数 $\varphi(y)$

表为

$$\lim_{x\to x_0}f(x,y)=\varphi(y)\ .$$

定义　若 $\forall \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，　$x\in[a,b]$：$0<|x-x_0|<\delta$，

" $y \in [c, d]$

$$|f(x, y) - \varphi(y)| < \varepsilon$$

称函数 $f(x, y)$ (**当** $x \to x_0$ **时**)　　$c, d]$　**一致收敛于函数** $\varphi(y)$

它的否定叙述是

v $\varepsilon_0 > 0$, " $\delta > 0$, v $x' \in [a, b]: |x' - x_0| < \delta$, v $y' \in [c, d]$

有

$$|f(x', y') - \varphi(y')| \geq \varepsilon_0,$$

即函数 $f(x, y)$ (**当** $x \to x_0$ **时**) **在** $[c, d]$　　　　$\varphi(y)$

例如,函数 $f(x, y) = e^{xy}$ (**当** $x \to 0^+$ **时**)　　$0, a]$

$1,$　　$0, +\infty)$

事实上, " $\varepsilon > 0$, **有**

$$|e^{xy} - 1| \leq e^{xa} - 1 < \varepsilon$$

解得 $x < \dfrac{1}{a}\ln(1 + \varepsilon)$　　$\delta = \dfrac{1}{a}\ln(1 + \varepsilon)$　　　$\varepsilon > 0$,　　$\delta =$

$\dfrac{1}{a}\ln(1 + \varepsilon)$, " $x: 0 < x < \delta$, " $y \in [0, a]$

$$|e^{xy} - 1| < \varepsilon$$

即 $f(x, y) = e^{xy}$ (**当** $x \to 0^+$ **时**)　　$0, a]$　　　　1 .

v $\varepsilon_0 = e - 1 > 0$, " $\delta > 0$, v $x' = \dfrac{\delta}{2}$: $0 < x' < \delta$, v $y' = \dfrac{2}{\delta}$

$\in [0, +\infty)$

$$|e^{x'y'} - 1| = e^{\frac{\delta}{2} \cdot \frac{2}{\delta}} - 1 = e - 1$$

即 $f(x, y) = e^{xy}$ (**当** $x \to 0^+$ **时**)　　$0, +\infty)$

问 5. 二元函数 $z = f(x, y)$　　$x_0, y_0)$

么 ?

答　二元函数 $z = f(x, y)$　　$x_0, y_0)$

面 $z = f(x, y)$　　$x_0, y_0, z_0)(z_0 = f(x_0, y_0))$

事实上,若二元函数 $z = f(x, y)$　　$x_0, y_0)$

$$z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0) + o(\rho)$$

其中　$z_0 = f(x_0, y_0)$, $\rho = \quad (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$.

去掉 $o(\rho)$　　　Z 代替 z，有

$$Z - z_0 = f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0)$$

或　$f_x'(x_0, y_0)(x - x_0) + f_y'(x_0, y_0)(y - y_0) - (Z - z_0) = 0$.

由《讲义》§10.3 第三段知，上式恰是曲面 $z = f(x, y)$

$x_0, y_0, z_0)$　　　　　　　　$z = f(x, y)$

(x_0, y_0) 可微的几何意义就曲面 $z = f(x, y)$　　$x_0, y_0, z_0)$

平面，由可微的几何意义，很容易判别函数 $f(x, y)$

可微．例如，由函数 $f(x, y) = \quad |xy|$ 的图像(见本书图 10.10)

观看到，函数 $f(x, y)$　x 轴与 y 轴上的图像分别是 x 轴与 y 轴

$f(x, y) = 0)$　　　$f(x, y)$　　$0, 0)$

且 $f_x'(0,0) = 0$，$f_y'(0,0) = 0$ ．函数 $f(x, y)$　　　$0, 0)$

的图像，在点 $0, 0, 0)$　　　　　　　$f(x, y) = \quad |xy|$

点 $(0, 0)$

问 6. 怎样求向量值函数 $f(t) = (f_1(t), f_2(t), f_3(t)): t \to \mathbf{R}^3$ 的导数？

答　向量值函数 $f(t)$

$$x = f_1(t), y = f_2(t), z = f_3(t), t \in (a, b)$$

表示空间一条曲线．如果函数 $f_1(t), f_2(t), f_3(t)$　　　　t

给改变量 $\Delta t (t, t + \Delta t \in (a, b))$

$$\frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$= \left(\frac{f_1(t + \Delta t) - f_1(t)}{\Delta t}, \frac{f_2(t + \Delta t) - f_2(t)}{\Delta t}, \frac{f_3(t + \Delta t) - f_3(t)}{\Delta t} \right),$$

则

$$\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$

$$= \left(\lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_1(t + \Delta t) - f_1(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_2(t + \Delta t) - f_2(t)}{\Delta t}, \lim_{\Delta t \to 0} \frac{f_3(t + \Delta t) - f_3(t)}{\Delta t} \right),$$

即　$f'(t) = (f_1'(t), f_2'(t), f_3'(t))$

或空间曲线在点 t 的切线的方向向量．

四、补充例题

例 1. 证明：若在点 $P(x_0,y_0)$　　G 内，$f_x'(x,y)$ 在点 $P(x_0,y_0)$　　$f_y'(x_0,y_0)$　　$f(x,y)$ $P(x_0,y_0)$ 可微．

证法　应用微分中值定理，偏导数定义与可微定义．

证明　任取一点 $(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)\in G$

$$\begin{aligned}\Delta z &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\\ &= f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)\\ &\quad + f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)\end{aligned}$$

由已知条件，有

$$\begin{aligned}&f(x_0+\Delta x, y_0+\Delta y) - f(x_0, y_0+\Delta y)\\ &= f_x'(x_0+\theta\Delta x, y_0+\Delta y)\Delta x\\ &= f_x'(x_0,y_0)\Delta x + \alpha_1\rho\end{aligned}$$

其中　$\theta<1$, $\alpha_1\to 0$ $(\rho=\quad (\Delta x)^2+(\Delta y)^2\to 0)$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0)}{\Delta y} = f_y'(x_0,y_0)$$

即　$f(x_0, y_0+\Delta y) - f(x_0,y_0) = f_y'(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_2\Delta y$

于是，　$\Delta z = f_x'(x_0,y_0)\Delta x + f_y'(x_0,y_0)\Delta y + \alpha_1\rho + \alpha_2\Delta y$,

其中　$\left|\dfrac{\alpha_1\rho+\alpha_2\Delta y}{\rho}\right|\le|\alpha_1|+|\alpha_2|\to 0\quad(\rho\to 0)$

即　函数 $f(x,y)$　　$P(x_0,y_0)$

说明　此例的条件比定理 2 所述的函数 $f(x,y)$　　$P(x_0,$ $y_0)$

借助于已知一元函数的某些性质．研究多元函数在两点函数值之差的性质，经常使用累次法　　　2）
用折线段还是用直线段，必须使折线段或直线段属于该函数的定义域．这样才能应用一元函数的某些性质．多数情况是，某一点

的邻域属于该函数的定义域，另一个点属于此邻域就能满足上述要求．此例就是取点 $x_0+\Delta x, y_0+\Delta y)$ $P(x_0, y_0)$

用本例证法可证：

若函数 $f(x)$ $a, b)$ $x, y)\in D(a<x<b, y\in$ $\mathbf{R})$ $g(x, y)=f(x)+y$ $g(x, y)$ D 内可微．

例 2. 设 $x^2=vw$，$y^2=uw$，$z^2=uv$，且

$$f(x, y, z)=F(u, v, w)$$

证明

$$xf_x'+yf_y'+zf_z'=uF_u'+vF_v'+wF_w'.$$

证法 首先，解出

$$u=g_1(x, y, z)\quad v=g_2(x, y, z)\quad w=g_3(x, y, z)$$

求出
$$x\frac{u}{x}+y\frac{u}{y}+z\frac{u}{z}=\cdots.$$

其次，对等式 f $x, y, z)=F$ $u, v, w)$ x，y，z 求偏导数……

证明 已知 $x^2=vw$，$y^2=uw$，$z^2=uv$，有

$$y^2z^2=u^2vw \quad \text{或} \quad u^2=\frac{y^2z^2}{x^2},$$

即 $u=\pm\frac{yz}{x}$，同样，$v=\pm\frac{xz}{y}$，$w=\pm\frac{xy}{z}$．得两组解：

$$u=\frac{yz}{x},\quad v=\frac{zx}{y},\quad w=\frac{xy}{z};$$

$$u=-\frac{yz}{x},\quad v=-\frac{zx}{y},\quad w=-\frac{xy}{z}.$$

只讨论其中一组解即可

$$x\frac{u}{x}+y\frac{u}{y}+z\frac{u}{z}=-\frac{yz}{x}+\frac{yz}{x}+\frac{yz}{x}=\frac{yz}{x}=u.$$

同理
$$x\frac{v}{x}+y\frac{v}{y}+z\frac{v}{z}=v,$$

$$x\frac{w}{x}+y\frac{w}{y}+z\frac{w}{z}=w.$$

对等式 $f\quad x, y, z) = F\quad u, v, w)$ 　　　　　　$x,\quad y,\quad z$ 求偏导数，有

$$f_x' = F_u' \frac{u}{x} + F_v' \frac{v}{x} + F_w' \frac{w}{x},$$

$$f_y' = F_u' \frac{u}{y} + F_v' \frac{v}{y} + F_w' \frac{w}{y},$$

$$f_z' = F_u' \frac{u}{z} + F_v' \frac{v}{z} + F_w' \frac{w}{z}.$$

于是，

$$xf_x' + yf_y' + zf_z' = F_u' \quad x\frac{u}{x} + y\frac{u}{y} + z\frac{u}{z} \quad +$$

$$F_v' \quad x\frac{v}{x} + y\frac{v}{y} + z\frac{v}{z} \quad + F_w' \quad x\frac{w}{x} + y\frac{w}{y} + z\frac{w}{z}$$

$$= uF_u' + vF_v' + wF_w'.$$

例 3. 设 $f\quad x, y)$ 　　　　　　　　　　$f\quad x, y) = c$ 是微分方程 $P\quad x, y)\mathrm{d}x + Q\quad x, y)\mathrm{d}y = 0$ 的解的必要充分条件是

$$P\frac{f}{y} = Q\frac{f}{x}.$$

证法　计算偏导数．设 $f\quad x, \varphi(x)] \equiv c,\quad y = \varphi\quad x)$

由 $f\quad x, y) = c$ 对 x 求导数，有

$$\frac{f}{x} + \frac{f}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0.$$

证明　已知

$$\frac{f}{x} + \frac{f}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0. \qquad (*)$$

“　　”已知 $f\quad x, y) = c$ 是微分方程 $P\quad x, y)\mathrm{d}x + Q\quad x, y)\mathrm{d}y = 0$ 的解，即 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{P\quad x, y)}{Q\quad x, y)}$ 的解．代入　$*)$

$$\frac{f}{x} + \frac{f}{y}\quad -\frac{P\quad x, y)}{Q\quad x, y)}\quad = 0,\ \text{即}\quad P\frac{f}{y} = Q\frac{f}{x}.$$

“　　”已知 $P\frac{f}{y} = Q\frac{f}{x}$，由　*)　　　　　　$f\quad x, y) = c$ 满足微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{P\quad x, y)}{Q\quad x, y)},$$

或

$$P\quad x, y)\mathrm{d}x + Q\quad x, y)\mathrm{d}y = 0 .$$

例 4. 证明：曲面　$x + \quad y + \quad z = \quad a\quad a > 0)$　　　　　　　　x_0，y_0，z_0)　$x_0 > 0, y_0 > 0, z_0 > 0)$

是常数．

证法　求出切平面方程，再求出它与三个坐标轴上的截距．

证明　设 $f\quad x, y, z) = \quad x + \quad y + \quad z - \quad a$，有

$$f_x'(x, y, z) = \frac{1}{2\quad x},\quad f_y'(x, y, z) = \frac{1}{2\quad y},\quad f_z'(x, y, z) = \frac{1}{2\quad z}.$$

曲面上任意点　$x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{1}{2\quad x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2\quad y_0}(y - y_0) + \frac{1}{2\quad z_0}(z - z_0) = 0,$$

即

$$\frac{x}{x_0} + \frac{y}{y_0} + \frac{z}{z_0} = \quad x_0 + \quad y_0 + \quad z_0 = \quad a .$$

切平面与三个坐标轴的截距分别是

$$ax_0,\quad ay_0,\quad az_0 .$$

于是，$\quad ax_0 + \quad ay_0 + \quad az_0 = \quad a\quad x_0 + \quad y_0 + \quad z_0) = a$，

即在三个坐标轴上截距之和是常数 a．

例 5. 用逐次微分法消去任意函数 φ 和 ψ：

$$z = \varphi\quad xy) + \psi\quad \frac{x}{y}\quad .$$

解法　求 z 关于 x 和 y 的一阶和二阶偏导数．

解　设 $\xi = xy$，$\eta = \frac{x}{y}$，则 $z = \varphi\quad \xi) + \psi\quad \eta)$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y\varphi'(\xi) + \frac{1}{y}\psi'(\eta) \qquad \frac{\partial z}{\partial y} = x\varphi'(\xi) - \frac{x}{y^2}\psi'(\eta)$$

故
$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = 2xy\varphi'(\xi)$$

再对 x 和 y 求偏导数，有

$$\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 2y\varphi'(\xi) + 2xy^2\varphi''(\xi)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 2x\varphi'(\xi) + 2x^2y\varphi''(\xi)$$

于是，$\frac{1}{y}\left(\frac{\partial z}{\partial x} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + y\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right) = \frac{1}{x}\left(\frac{\partial z}{\partial y} + x\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$，

即
$$x^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} = 0 .$$

例 6. 设 $u = f(x, y, z)$

$l_1(\cos\alpha_1, \cos\beta_1, \cos\gamma_1)$ $l_2(\cos\alpha_2, \cos\beta_2, \cos\gamma_2)$ $l_3(\cos\alpha_3,$ $\cos\beta_3, \cos\gamma_3)$

(1) $\left(\frac{\partial u}{\partial l_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial l_3}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2$;

(2) $\frac{\partial^2 u}{\partial l_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial l_3^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$.

证法 应用方向导数公式及 l_1，l_2，l_3 互相垂直的条件 .

证明 (1) $\frac{\partial u}{\partial l_i} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_i + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_i + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_i$，$i = 1, 2, 3$.

$$\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial l_i}\right)^2 = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha_i + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta_i + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma_i\right)^2 .$$

由于 l_1，l_2，l_3 互相垂直，故可把它们看作是过原点的新的坐标轴，l_1，l_2，l_3 互相垂直的条件是:

$$\sum_{i=1}^{3}\cos^2\alpha_i = \sum_{i=1}^{3}\cos^2\beta_i = \sum_{i=1}^{3}\cos^2\gamma_i = 1,$$

和
$$\sum_{i=1}^{3}\cos\alpha_i\cos\beta_i = \sum_{i=1}^{3}\cos\beta_i\cos\gamma_i = \sum_{i=1}^{n}\cos\gamma_i\cos\alpha_i = 0 .$$

于是, $\sum_{i=1}^{3} \quad \frac{u}{l_i} \quad ^{2} = \sum_{i=1}^{3} \quad \frac{u}{x}\cos\alpha_i + \frac{u}{y}\cos\beta_i + \frac{u}{z}\cos\gamma_i \quad ^{2}$

$$= \quad \frac{u}{x} \quad ^{2} + \quad \frac{u}{y} \quad ^{2} + \quad \frac{u}{z} \quad ^{2} .$$

$$(2) \quad \frac{{}^{2}u}{l_i^{2}} = \quad \cos\alpha_i \frac{}{x} + \cos\beta_i \frac{}{y} + \cos\gamma_i \frac{}{z} \quad \frac{u}{x}\cos\alpha_i \quad +$$

$$\cos\alpha_i \frac{}{x} + \cos\beta_i \frac{}{y} + \cos\gamma_i \frac{}{z} \quad \frac{u}{y}\cos\beta_i \quad +$$

$$\cos\alpha_i \frac{}{x} + \cos\beta_i \frac{}{y} + \cos\gamma_i \frac{}{z} \quad \frac{u}{z}\cos\gamma_i$$

$$= \frac{{}^{2}u}{x^{2}}\cos^{2}\alpha_i + \frac{{}^{2}u}{y^{2}}\cos^{2}\beta_i + \frac{{}^{2}u}{z^{2}}\cos^{2}\gamma_i +$$

$$2 \quad \frac{{}^{2}u}{x \quad y}\cos\alpha_i\cos\beta_i + \frac{{}^{2}u}{y \quad z}\cos\beta_i\cos\gamma_i$$

$$+ \frac{{}^{2}u}{z \quad x}\cos\gamma_i\cos\alpha_i \quad , \quad i = 1, 2, 3 .$$

于是, 三式相加, 再应用 l_1, l_2, l_3 互相垂直的条件, 有

$$\sum_{i=1}^{3} \frac{{}^{2}u}{l_i^{2}} = \frac{{}^{2}u}{x^{2}} + \frac{{}^{2}u}{y^{2}} + \frac{{}^{2}u}{z^{2}} .$$

▶▶ 五、练习题 10.3 解法提要

1. 求函数

$$f \quad x, y) = \begin{matrix} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{matrix}$$

的偏导数 .

解法 不在原点(0,0) 0,0)

定义 .

解 当 $x^2 + y^2 \neq 0$ 时,

$$\frac{f}{x} = \frac{(x^2 + y^2)\cdot y - xy\cdot 2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{y^3 - x^2 y}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{(x^2+y^2)\cdot x-xy\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2}=\frac{x^3-xy^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

当 $x^2+y^2=0$ **时，由偏导数定义**

$$f_x'(0,0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x,0)-f(0,0)}{\Delta x}=0,$$

$$f_y'(0,0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(0,0+\Delta y)-f(0,0)}{\Delta y}=0.$$

2. 求下列函数的偏导数：

(8) $u=\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

解 $\dfrac{\partial u}{\partial x}=z\left(\dfrac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\dfrac{1}{y}=\dfrac{z}{x}\left(\dfrac{x}{y}\right)^z$.

$$\frac{\partial u}{\partial y}=z\left(\frac{x}{y}\right)^{z-1}\cdot\left(-\frac{x}{y^2}\right)=-\frac{z}{y}\left(\frac{x}{y}\right)^z.$$

$$\frac{\partial u}{\partial z}=\left(\frac{x}{y}\right)^z\cdot\ln\frac{x}{y}=(\ln x-\ln y)\left(\frac{x}{y}\right)^z.$$

6. 证明下列各题：

(2) **函数** $z=\arctan\dfrac{x^3+y^3}{x-y}$ **是方程** $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z$ **的一个解**.

证法 **求** $\dfrac{\partial z}{\partial x}$ **与** $\dfrac{\partial z}{\partial y}$ **的偏导数，再代入方程中**.

证 $\dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{1}{1+\left(\dfrac{x^3+y^3}{x-y}\right)^2}\cdot\dfrac{3x^2(x-y)-(x^3-y^3)}{(x-y)^2}$

$$=\frac{2x^3-3x^2y+y^3}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2}.$$

同样， $\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{x^3-3xy^2+2y^3}{(x-y)^2+(x^3-y^3)^2}$

代入方程中，整理，得

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=\sin 2z.$$

7. 证明: 若 $f'_x(x, y)$ $f'_y(x, y)$ D 有界, 则函数 f $x, y)$ D 一致连续 .

证法 应用一致连续定义 . " $x_1, y_1)$ $x_2, y_2) \in D$. 这时点 $x_2, y_1) \in D$. 将 " 多 " 化 " 单 ", 有

$$\begin{aligned} &| f \ \ x_1, y_1) - f \ \ x_2, y_2) | \\ \leq &| f \ \ x_1, y_1) - f \ \ x_2, y_1) | + | f \ \ x_2, y_1) - f \ \ x_2, y_2) | . \end{aligned}$$

再应用一元函数拉格朗日定理 .

8. 证明: 若函数 f $x, y)$ D 对变数 x 连续定的变数 $y)$ $f'_y(x, y)$ D 有界, 则函数 f $x, y)$ D 内连续 .

证法 应用连续定义 . 对任意一点 $x_0, y_0) \in D$, 设 $x_0, y_0)$ U D . " $x, y) \in U$. 这时要求点 $x, y_0) \in D$, 将 " 多 " 化 " 单 ", 有

$$\begin{aligned} &| f \ \ x, y) - f \ \ x_0, y_0) | \\ \leq &| f \ \ x, y) - f \ \ x, y_0) | + | f \ \ x, y_0) - f \ \ x_0, y_0) | . \end{aligned}$$

由已知条件可证, 当 $x, y)$ $x_0, y_0)$ ε .

9. 证明: 若函数 f $x, y)$ D 有连续偏导数, 且对任意 $x, y) \in D$, 有 $f'_x(x, y) = f'_y(x, y) = 0$, 则函数 f $x, y)$ D 是常数 .

证法 在 D 内任意取定一点 $x_0, y_0)$ $x', y') \in D$. 连结点 $x_0, y_0)$ $x', y')$ D, 且线段的参数方程是

$$\begin{aligned} x &= x_0 + t \ \ x' - x_0) \\ y &= y_0 + t \ \ y' - y_0) \end{aligned} \qquad 0 \leq t \leq 1 .$$

设 φ $t) = f$ $x, y) = f$ $x_0 + t(x' - x_0), y_0 + t(y' - y_0)]$ 一元函数的拉格朗日定理, 有

$$\varphi \ \ 1) - \varphi \ \ 0) = \cdots$$

13. 求函数 $z = x^2 - xy + y^2$ 在点 $1, 1)$ x 轴正向组成 α 角的射线 l 的方向导数, α 角取何值, 方向导数: $1)$

2)　　　　　　　　2)　　　0 .

证法　由方向导数的定义 . 与 x 轴正方向组成 α 角的射线,其方向余弦为 $\cos\alpha$ 与 $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$. 求$\frac{z}{x}$与$\frac{z}{y}$以及在点 1,1)

函数值 . 然后再讨论$\frac{z}{l}$的最大值、最小值和等于 0 .

17. 证明: 曲面 $xyz = a^3$ $(a > 0)$　　　　$x_0, y_0, z_0)$　$x_0 \neq 0, y_0 \neq 0, z_0 \neq 0)$

数$\frac{9}{2}a^3$.

证法　首先求出切平面方程 . 其次求出切平面在三个坐标轴上的截距 . 再应用锥体的体积公式 .

§10.4　二元函数的泰勒公式

一、基本内容

本节有三段 .

第一段给出了多元函数高阶偏导数的定义 . 以及二元函数

n 元函数)

分条件　　1)

第二段给出了二元函数(一般是 n 元函数)

勒公式的定理　　2)

第三段给出了二元函数在一点取局部极值的必要条件(定理 3)

极值的充分条件　　4)

二、学习要求

多元函数的高阶偏导数也是经常用到的一种运算 . 二元函数(一般是 n 元函数)

又是高阶偏导数的应用．而泰勒公式是研究二元函数取局部极值的重要工具．要求:

1．熟练掌握求高阶偏导数的运算．

2．能够将简单的二元函数展成泰勒公式或麦克劳林公式，并知道当已知多元函数各高阶偏导数性质要研究函数性质时，使用的工具就是泰勒公式．

3．会求二元函数的局部极值和最大(小)

简单的应用问题．

三、答疑辅导

问 1.　n 元函数 f　$x_1, x_2, \cdots, x_n)$　　k 阶偏导数？如果偏导数与高阶偏导数都连续，又有多少个 k 阶偏导数？

答　n 元函数 f　$x_1, x_2, \cdots, x_n)$　n 个　　n 个不同元素　$x_1, x_2, \cdots, x_n\}$

合数) $A_n = n$．

每个(一阶)　　n 个偏导数，则 n 元函数 f　$x_1, x_2, \cdots, x_n)$　n^2 个二阶偏导数，即从 n 个不同元素　$x_1, x_2, \cdots, x_n\}$　　$A_n^2 = n^2$．

一般情况，从 n 个不同元素　$x_1, x_2, \cdots, x_n\}$　　k 个元素的重排列数 $A_n^k = n^k$ 就是 n 元函数 f　$x_1, x_2, \cdots, x_n)$　k 阶偏导数的个数．

如果偏导数与高阶偏导数都连续，根据定理 1，求偏导数与顺序无关，有

n 元函数 f　$x_1, x_2, \cdots, x_n)$　　n 个不同元素　$x_1, x_2, \cdots, x_n\}$　　C_{n+2-1}^2．

n 元函数 f　$x_1, x_2, \cdots, x_n)$　　n 个不同元素　$x_1, x_2, \cdots, x_n\}$　　C_{n+3-1}^3．

一般情况，n 元函数 f　$x_1, x_2, \cdots, x_n)$　k 阶偏导数的个数

是 n 个不同元素　$x_1, x_2, \cdots, x_n\}$　　　　k 个元素的重复组合数 C_{n+k-1}^{k} .

问 2. 何谓高阶全微分?

答　一般来说，二元函数 $z = f\ \ x, y)$

$$\mathrm{d}z = \frac{z}{x}\mathrm{d}x + \frac{z}{y}\mathrm{d}y$$

仍是 x 与 y 的二元函数，$\mathrm{d}x$ 与 $\mathrm{d}y$ 看作与 x, y 无关的常数 .

定义　如果二元函数 $z = f\ \ x, y)$

分 $\mathrm{d}z$ 的全微分 $\mathrm{d}\,(\mathrm{d}z)$　　　　　$z = f\ \ x, y)$　二阶全微分，表为 $\mathrm{d}^2 z$. 一般情况，$k-1$ 阶全微分 $\mathrm{d}^{k-1}z$ 的全微分 $\mathrm{d}\,(\mathrm{d}^{k-1}z)$ 为函数 $z = f\ \ x, y)$　　$\boldsymbol{k}$ 阶全微分，表为 $\mathrm{d}^k z$. 二阶以及二阶以上的全微分，统称为高阶全微分 .

根据定义，二元函数 $z = f\ \ x, y)$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^2 z &= \mathrm{d}\,(\mathrm{d}z) = \mathrm{d}\ \ \frac{z}{x}\mathrm{d}x + \frac{z}{y}\mathrm{d}y \\
&= \frac{}{x}\ \ \frac{z}{x}\mathrm{d}x + \frac{z}{y}\mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}x + \frac{}{y}\ \ \frac{z}{x}\mathrm{d}x + \frac{z}{y}\mathrm{d}y\ \ \mathrm{d}y \\
&= \frac{{}^2 z}{x^2}\mathrm{d}x^2 + 2\frac{{}^2 z}{x\ \ y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \frac{{}^2 z}{y^2}\mathrm{d}y^2 \\
&= \ \ \mathrm{d}x\frac{}{x} + \mathrm{d}y\frac{}{y}\ \ {}^2\ z\ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathrm{d}^3 z = \mathrm{d}\,(\mathrm{d}^2 z) &= \frac{{}^3 z}{x^3}\mathrm{d}x^3 + 3\frac{{}^3 z}{x^2\ \ y}\mathrm{d}x^2\mathrm{d}y + 3\frac{{}^3 z}{x\ \ y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y^2 + \frac{{}^3 z}{y^3}\mathrm{d}y^3 \\
&= \ \ \mathrm{d}x\frac{}{x} + \mathrm{d}y\frac{}{y}\ \ {}^3 \cdot z\ .
\end{aligned}$$

一般情况，$\mathrm{d}^n z = \ \ \mathrm{d}x\frac{}{x} + \mathrm{d}y\frac{}{y}\ \ {}^n \cdot z$.

并将 $\mathrm{d}^n f\ \ x, y)$　　　　$a, b)$

$$\mathrm{d}^n f\ \ a, b) = \ \ \mathrm{d}x\frac{}{x} + \mathrm{d}y\frac{}{y}\ \ {}^n\ f\ \ a, b)$$

由此不难给出 n 元函数 $u = f\ \ x_1, x_2, \cdots, x_n)$　　k 阶全微分是

$$\mathrm{d}^k u = \quad \mathrm{d}x_1 \frac{\quad}{x_1} + \mathrm{d}x_2 \frac{\quad}{x_2} + \cdots + \mathrm{d}x_n \frac{\quad}{x_n} \quad {}^k \cdot u\ .$$

有了二元函数的高阶全微分，二元函数 $f\ \ x, y)$　　$a, b)$

$$\mathrm{d}x = h, \mathrm{d}y = k)$$

$$f\ \ a + h, b + k) = f\ \ a, b) + \frac{1}{1\ !}\ \ h\frac{\quad}{x} + k\frac{\quad}{y}\ \ f\ \ a, b) +$$

$$\frac{1}{2\ !}\ \ h\frac{\quad}{x} + k\frac{\quad}{y}\ {}^2 f\ \ a, b) + \cdots +$$

$$\frac{1}{n\ !}\ \ h\frac{\quad}{x} + k\frac{\quad}{y}\ {}^n f\ \ a, b) +$$

$$\frac{1}{(n+1)}\ \ h\frac{\quad}{x} + k\frac{\quad}{y}\ {}^{n+1} f\ \ a + \theta h, b + \theta k)$$

可用高阶全微分简单的表为　　$0 < \theta < 1$,

$$f\ \ a + h, b + k) = f\ \ a, b) + \frac{1}{1\ !}\mathrm{d}f\ \ a, b) +$$

$$\frac{1}{2\ !}\mathrm{d}^2 f\ \ a, b) + \cdots + \frac{1}{n\ !}\mathrm{d}^n f\ \ a, b) +$$

$$\frac{1}{(n+1)}\mathrm{d}^{n+1} f\ \ a + \theta h, b + \theta k)\quad 0 < \theta < 1\ .$$

问 3. 在通过原点的任意直线上，二元函数 $f\ \ x, y)$

局部极小值，那么函数 $f\ \ x, y)$

答　不一定．例如，二元函数

$$f\ \ x, y) = (y - x^2)\ \ y - 3x^2)$$

在过原点的任意一条直线 $y = mx$，取 $0 \leq |m| < +\infty$，有

$$g\ \ x) = f\ \ x, mx) = (mx - x^2)\ \ mx - 3x^2)$$

$$= m^2x^2 - 4mx^3 + 3x^4\ .$$

不难验证，$g'\ 0) = 0$．当 $m \neq 0$ 时，$g''\ 0) = 2m^2 > 0$，即二元函数 $f\ \ x, y)$　　$y = mx$ 上，在原点 $0, 0)$

值；当 $m = 0$ 时，即 $y = 0$，$f\ \ x, 0) = 3x^4$；当 $|m| = +\infty$，即 $x = 0$，$f\ \ 0, y) = y^2$．显然，它们在原点 $0, 0)$

但是，二元函数 $f\ \ x, y)$　　$0, 0)$

事实上，在原点 $0, 0)$　　$0, b)\ \ b \neq 0)$

$f\ \ 0,b)=b^2>0$. 在原点 $0,0)$　　　　　　　$a,2a^2)\ \ a\neq 0)$
而 $f\ \ a,2a^2)=(2a^2-a^2)\ \ 2a^2-3a^2)=-a^4<0$，即函数 $f\ \ x,y)$
在原点 $0,0)$

问 4. n 元函数 $f\ \ \boldsymbol{x})=f\ \ x_1,x_2,\cdots,x_n)$　　　$P\ \ x_1^0,x_2^0,\cdots,x_n^0)$

答　n 元可微函数 $f\ \ \boldsymbol{x})$　　　P 取局部极值的必要条件是

$$f'_{x_1}(P)=f'_{x_2}(P)=\cdots=f'_{x_n}(P)=0. \qquad (*)$$

证明方法与二元函数的情况相同. 从略.

因为满足 $(*)$　　　P 对任意 $\mathrm{d}x_1$，$\mathrm{d}x_2$，$\cdots$，$\mathrm{d}x_n$ 等价于

$$\mathrm{d}f\ \ P)=f'_{x_1}(P)\mathrm{d}x_1+f'_{x_2}(P)\mathrm{d}x_2+\cdots+f'_{x_n}(P)\mathrm{d}x_n=0,$$

所以必要条件也可简写为

$$\mathrm{d}f\ \ P)=0.$$

类似的，将满足　$*)$　　　P 称为稳定点. 于是，若 n 元可微函数 $f\ \ \boldsymbol{x})$　　　P 取局部极值，则点 P 必是稳定点.

下面给出 n 元函数 $f\ \ \boldsymbol{x})$　　　P 取局部极值的充分条件:

若 n 元函数 $f\ \ \boldsymbol{x})$　　　P 存在一阶和二阶连续的偏导数，且点 P 是它的稳定点，有二次型

$$A=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\Delta x_i\Delta x_j \quad (a_{ij}=f''_{x_ix_j}(P)\quad i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

当二次型 A 是正定的，则 $f\ \ \boldsymbol{x})$　　　P 取局部极小值;

当二次型 A 是负定的，则 $f\ \ \boldsymbol{x})$　　　P 取局部极大值.

当二次型 A 是不定的，则 $f\ \ \boldsymbol{x})$　　　P 不取局部极值.

证明方法，应用 n 元函数 $f\ \ \boldsymbol{x})$　　　P 的二阶泰勒公式:

$$\Delta=f\ \ P+\Delta\boldsymbol{x})-f\ \ P)=f\ \ x_1^0+\Delta x_1,\cdots,x_n^0+\Delta x_n)-f\ \ x_1^0,\cdots,x_n^0)$$

$$=\frac{1}{2!}\ \ \Delta x_1\frac{\quad}{x_1}+\cdots+\Delta x_n\frac{\quad}{x_n}\ \ ^2 f\ \ x_1^0+\theta\Delta x_1,\cdots,x_n^0+\theta\Delta x_n)$$

其中 $0<\theta<1$.

设 $f''_{x_ix_j}(x_1^0+\theta\Delta x_1,\cdots,x_n^0+\theta\Delta x_n)=f''_{x_ix_j}(x_1^0,\cdots,x_n^0)+\alpha_{ij}$

$$=a_{ij}+\alpha_{ij},$$

且当 $\Delta x_1 \to 0$，…，$\Delta x_n \to 0$ 时，有 $\alpha_{ij} \to 0$．于是，

$$\Delta = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\Delta x_i \Delta x_j + \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\Delta x_i \Delta x_j \quad .$$

当 $\Delta x_k\ (k=1,2,\cdots,n)$　　Δ 的符号由上述等式右端第一项——关于 Δx_1，Δx_2，…，Δx_n 的二次型 A 的符号确定．然后再应用高等代数中的二次型的知识即可．

由高等代数知：

二次型 A 是正定的必要充分条件是

$$a_{11} > 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \cdots,\ \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 .$$

二次型 A 是负定的必要充分条件是

$$a_{11} < 0,\quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} > 0,\ \cdots,\quad -1)^n \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} > 0 .$$

四、补充例题

例 1. 证明：若函数 $f\ \ x,y)$　　$0,0)$
阶偏导数，且这些偏导数在点 $0,0)$

$$f''_{xx}(0,0) = \lim_{h\to 0^+} \frac{f\ \ 2h, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}}) - 2f\ \ h, \mathrm{e}^{-\frac{1}{h}}) + f\ \ 0,0)}{h^2} .$$

这是练习题 10.4 第 19 题．

证法　应用二元函数的泰勒公式，整理之后取极限．

证明　用麦克劳林公式将函数 $f\ \ 2h, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}})$　$f\ \ h, \mathrm{e}^{-\frac{1}{h}})$
点 $0,0)$

$$f(2h, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}}) = f(0,0) + f'_x(0,0)2h + f'_y(0,0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}} + \frac{1}{2} f''_{xx}(2\theta_1 h, \theta_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}})4h^2 + f''_{xy}(2\theta_1 h, \theta_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}})2h\mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}} + \frac{1}{2} f''_{yy}(2\theta_1 h, \theta_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}})\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}}, \quad 0 < \theta_1 < 1 .$$

$$f(h, \mathrm{e}^{-\frac{1}{h}}) = f(0,0) + f'_x(0,0)h + f'_y(0,0)\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}} + \frac{1}{2} f''_{xx}(\theta_2 h, \theta_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{h}})h^2 + f''_{xy}(\theta_2 h, \theta_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{h}})h\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}} + \frac{1}{2} f''_{yy}(\theta_2 h, \theta_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{h}})\mathrm{e}^{-\frac{2}{h}}, \quad 0 < \theta_2 < 1 .$$

于是, $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{f(2h, \mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}}) - 2f(h, \mathrm{e}^{-\frac{1}{h}}) + f(0,0)}{h^2}$

$$= \lim_{h\to 0^+} \Big[f'_y(0,0)\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}} - 2\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}}}{h^2} + 2f''_{xx}(2\theta_1 h, \theta_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}}) - f''_{xx}(\theta_2 h, \theta_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{h}}) + 2f''_{xy}(2\theta_1 h, \theta_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}})\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}}}{h} - 2f''_{xy}(\theta_2 h, \theta_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{h}})\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}}}{h} + \frac{1}{2} f''_{yy}(2\theta_1 h, \theta_1 \mathrm{e}^{-\frac{1}{2h}})\frac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}}}{h^2} - f''_{yy}(\theta_2 h, \theta_2 \mathrm{e}^{-\frac{1}{n}})\frac{\mathrm{e}^{-\frac{2}{n}}}{h^2} \Big]$$

$$= 2f''_{xx}(0,0) - f''_{xx}(0,0) = f''_{xx}(0,0)$$

已知二阶偏导数在点 $(0,0)$ 　　$\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}}}{h^2} = 0, \quad \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^{-\frac{1}{h}}}{h} = 0 .$

例 2. 证明: **若** $u = x^2 f\left(\frac{y}{x}\right) + y^{-2} g\left(\frac{y}{x}\right)$, **则**

$$x^2 u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2 u''_{yy} + xu'_x + yu'_y = 4u . \qquad (*)$$

证明　**将** $f\left(\frac{y}{x}\right)$ **与** $f'\left(\frac{y}{x}\right)$ **表为** f **与** f'. **计算**

$$u'_x = 2xf - yf' - \frac{1}{x^2 y} g', \quad u'_y = xf' - 2y^{-3} g + \frac{1}{xy^2} g' .$$

$$u''_{xx} = 2f - 2\frac{y}{x}f' + \frac{y^2}{x^2}f'' + \frac{1}{x^4}g'' + \frac{2}{x^3 y}g'.$$

$$u''_{xy} = 2f' - \frac{y}{x}f'' - f' + \frac{1}{x^2 y^2}g' - \frac{1}{x^3 y}g''$$

$$= f' - \frac{y}{x}f'' + \frac{1}{x^2 y^2}g' - \frac{1}{x^3 y}g''.$$

$$u''_{yy} = f'' + \frac{6}{y^4}g - \frac{2}{xy^3}g' - \frac{2}{xy^3}g' + \frac{1}{x^2 y^2}g''.$$

$$= f'' + \frac{6}{y^4}g - \frac{4}{xy^3}g' + \frac{1}{x^2 y^2}g''.$$

于是，$x^2 u''_{xx} + 2xyu''_{xy} + y^2 u''_{yy} + xu'_x + yu'_y$

$$= \quad 2x^2 f - 2xyf' + y^2 f'' + \frac{1}{x^2}g'' + \frac{2}{xy}g' \quad +$$

$$2xyf' - 2y^2 f'' + \frac{2}{xy}g' - \frac{2}{x^2}g'' \quad +$$

$$y^2 f'' + \frac{6}{y^2}g - \frac{4}{xy}g' + \frac{1}{x^2}g'' \quad +$$

$$2x^2 f - xyf' - \frac{g'}{xy} \quad + \quad xyf' - \frac{2g}{y^2} + \frac{g'}{xy}$$

$$= 4x^2 f + 4\frac{1}{y^2}g = 4u.$$

说明　此类例题有两个方面的意义：一方面，学习求多元复合函数高阶偏导数的运算；另一方面，通过求高阶偏导数的运算，知道函数 u 满足 *)　　　　　u 是二阶偏微分方程 *)

学物理方程”是有益的．例如，练习题 10.4 第 3 题所给的函数是偏微分方程中典型的拉普拉斯方程的一个解．

例 3. 设 $z = f\quad u, v)$　$u^2 = xy$，$v^2 = \frac{x}{y}$．将偏微分方程

$$u^2 \frac{{}^2 z}{u^2} - 2uv\frac{{}^2 z}{u\quad v} + v^2\frac{{}^2 z}{v^2} + 2v\frac{z}{v} = 0 \qquad (*)$$

的变量 u 与 v 换成 x 与 y．

解　$u^2=xy,\ v^2=\frac{x}{y}$，有 $x^2=u^2v^2$ 或

$$x=\varepsilon uv,\quad y=\varepsilon\frac{u}{v}\quad(\varepsilon=\pm1)$$

$$\frac{\partial z}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}=\frac{\partial z}{\partial x}\varepsilon v+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\varepsilon}{v}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}=\frac{\partial z}{\partial x}\varepsilon u-\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\varepsilon u}{v^2}.$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial y}{\partial u}\\&=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cdot\varepsilon v+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\cdot\frac{\varepsilon}{v}\\&=\varepsilon v\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)+\frac{\varepsilon}{v}\left(\frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}\frac{\partial x}{\partial u}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial u}\right)\\&=v^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+2\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

同法可得

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}=uv\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\frac{u}{v^3}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\varepsilon\frac{\partial z}{\partial x}-\frac{\varepsilon}{v^2}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}=u^2\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}-2\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}+\frac{u^2}{v^4}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{2\varepsilon u}{v^3}\frac{\partial z}{\partial y}.$$

于是，

$$\begin{aligned}&u^2\frac{\partial^2 z}{\partial u^2}-2uv\frac{\partial^2 z}{\partial u\partial v}+v^2\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}+2v\frac{\partial z}{\partial v}\\&=4\frac{u^2}{v^2}\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2\frac{\varepsilon u}{v}\frac{\partial z}{\partial y}\\&=4y^2\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=0,\ \text{即}\ 2y\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}+\frac{\partial z}{\partial y}=0.\end{aligned}$$

说明　此类例题也有两个方面的意义：**一方面，学习求多元复合函数高阶导数的运算；另一方面，通过适当的变量替换**

此例是 $u^2=xy,\ v^2=\frac{x}{y}$，**将比较复杂的偏微分方程** *)

比较简单的偏微分方程

$$2y\frac{{}^{2}z}{y^{2}}+\frac{z}{y}=0\ .$$

显然，这种形式上的变化对研究偏微分方程或函数

导数)　§10.4 第 8，16 题等都是这

种类型的题．如第 16 题：将以 x，y，z 为变量的函数 $u=$

$f\quad x,y,z)$

$$x=r\cos\ \phi,\quad y=r\sin\ \phi,\quad z=z,$$

化为以 r，ϕ，z 为变量的函数 $u=f\quad r\cos\ \phi,\ r\sin\ \phi,\ z)$

从函数说，经过替换，以 x，y，z 为变量的函数 $\frac{{}^{2}u}{x^{2}}+\frac{{}^{2}u}{y^{2}}$

$+\frac{{}^{2}u}{z^{2}}$ 和以 r，ϕ，z 为变量的函数 $\frac{{}^{2}u}{r^{2}}+\frac{1}{r^{2}}\frac{{}^{2}u}{\phi^{2}}+\frac{1}{r}\frac{u}{r}+\frac{{}^{2}u}{z^{2}}$ 相

等．

从偏微分方程说，以 x，y，z 为变量的函数 $u=f\quad x,y,z)$

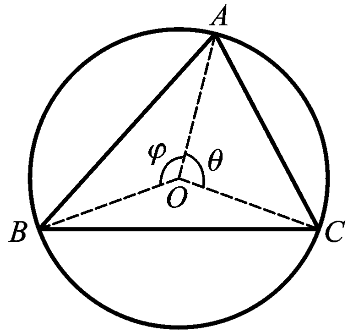
$$\frac{{}^{2}u}{x^{2}}+\frac{{}^{2}u}{y^{2}}+\frac{{}^{2}u}{z^{2}}=0,$$ 则经过替换，以 r，ϕ，z

为变量的函数

$$u=f\quad r\cos\ \phi,\ r\sin\ \phi,\ z)$$

满足偏微分方程 $\frac{{}^{2}u}{r^{2}}+\frac{1}{r^{2}}\frac{{}^{2}u}{\phi^{2}}+\frac{1}{r}\frac{u}{r}+\frac{{}^{2}u}{z^{2}}=0$ ．

例 4． 求内接于定圆的三角形，使其面积为最大．



解法　用符号表示某些未知数．建立未知数的函数．然后求稳定点，再根据定理 4，判别函数在稳定点上是否取极值．

解　设定圆的内接三角形 ABC

图 10.14)　θ，ϕ，　图　10.14

$2\pi-(\theta+\phi)$　a，则三角形 ABC 的面积

$$S=\frac{a^2}{2}[\sin\theta+\sin\varphi+\sin(2\pi-\theta-\varphi)]$$

$$=\frac{a^2}{2}[\sin\theta+\sin\varphi-\sin(\theta+\varphi)]$$

设二元函数 $f(\theta,\varphi)=\sin\varphi+\sin\theta-\sin(\theta+\varphi)$

是区域 D: $0\leq\theta\leq2\pi,\ 0\leq\varphi\leq2\pi,\ 0\leq\theta+\varphi\leq2\pi$.

$$\frac{\partial f}{\partial\theta}=\cos\theta-\cos(\theta+\varphi)\qquad\frac{\partial f}{\partial\varphi}=\cos\varphi-\cos(\theta+\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\theta^2}=-\sin\theta+\sin(\theta+\varphi)\qquad\frac{\partial^2 f}{\partial\theta\partial\varphi}=\sin(\theta+\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial\varphi^2}=-\sin\varphi+\sin(\theta+\varphi)$$

令 $\frac{\partial f}{\partial\theta}=\frac{\partial f}{\partial\varphi}=0$, 在区域 D 内解得唯一稳定点 $\left(\frac{2}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi\right)$.

$$A=f''_{\theta\theta}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}.$$

$$B=f''_{\theta\varphi}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$C=f''_{\varphi\varphi}\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=-\sqrt{3}.$$

$$B^2-AC=-\frac{9}{4}<0,\ \text{而}\ A=-\sqrt{3}<0,$$

则 $f(\theta,\varphi)$ (S) $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$ 取局部极大值.

当点 (θ,φ) D 的边界上, $f(\theta,\varphi)=0$, 则 S 在点 $\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$, 即圆的内接正三角形, 取最大面积, 最大面积是

$$S=\frac{a^2}{2}\left(2\sin\frac{2\pi}{3}-\sin\frac{4\pi}{3}\right)=\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2.$$

例 5. 证明不等式

$$x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}\leq\left(\frac{q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\right)^{q_1+q_2+\cdots+q_n},$$

其中 $q_i>0,\ x_i\geq0\ (i=1,2,\cdots,n)$

证法　将 x_1，x_2，…，x_n 看作是 n 个变数，设

$$q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n=a$$

不等式就是 n 元函数 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}$ 在某点取最大值，最大值是 $\left(\frac{a}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\right)^{q_1+q_2+\cdots+q_n}$.

证明　设 $q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n=a$. 讨论 n 元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}$$

在满足条件 $q_1x_1+q_2x_2+\cdots+q_nx_n=a$ 的最大值.

函数 f 的定义域

$$G=\{(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\geq 0,\ i=1,2,\cdots,n,\ q_1x_1+\cdots+q_nx_n\leq a\}.$$

G 是 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭区域. f 在 G 上连续，则 f 在 G 上定能取到最大值.

讨论 n 元函数

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=x_1^{q_1}x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n}$$

与

$$x_n=\frac{1}{q_n}[a-(q_1x_1+\cdots+q_{n-1}x_{n-1})]$$

的复合函数.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k}=q_kx_1^{q_1}\cdots x_k^{q_k-1}\cdots x_n^{q_n}-q_nx_1^{q_1}\cdots x_n^{q_n-1}\cdot\frac{q_k}{q_n},\quad k=1,2,\cdots,n-1.$$

$$\frac{1}{f}\frac{\partial f}{\partial x_k}=\frac{q_k}{x_k}-\frac{q_k}{x_n},\quad k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1.$$

令 $\frac{\partial f}{\partial x_k}=0\ (f\neq 0)$　　$x_k=x_n$，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$，

即
$$x_1=x_2=\cdots=x_{n-1}=x_n.$$

代入 $q_1x_1+q_1x_2+\cdots+q_nx_n=a$ 之中，得闭区域 G 上唯一稳定点.

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=\frac{a}{q_1+q_2+\cdots+q_n}.$$

f 在区域 G 的边界上　　$x_i=0$)　$f=0$. 于是，函数 f 在此稳定点必取最大值，有不等式

$$x_1^{q_1} x_2^{q_2}\cdots x_n^{q_n} \le \left(\frac{a}{q_1+q+\cdots+q_n}\right)^{q_1+q_2+\cdots+q_n}$$

$$=\left(\frac{x_1q_1+x_2q_2+\cdots+x_nq_n}{q_1+q_2+\cdots+q_n}\right)^{q_1+q_2+\cdots+q_n}.$$

五、练习题 10.4 解法提要

2. 求下列函数的指定阶的偏导数:

(4) $f(x, y) = \mathrm{e}^x\sin y$.　**求**　$f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0)$

解法　$f^{(m)}_{x^m}(x, y) = \mathrm{e}^x\sin y$,

$$f^{(m+n)}_{x^m y^n}(x, y) = \mathrm{e}^x\sin\left(y + n\frac{\pi}{2}\right),$$

$$f^{(m+n)}_{x^m y^n}(0,0) = \mathrm{e}^0\sin\left(0 + n\frac{\pi}{2}\right)$$

$$=\begin{cases}0, & n=2k,\\ (-1)^{k-1}, & n=2k-1,\end{cases}\quad k\in\mathbf{N}_+.$$

4. 求函数

$$f(x, y)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0,\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

的二阶偏导数 $f''_{xx}(0,0)$　$f''_{xy}(0,0)$

解法　首先由偏导数定义，求 $f'_x(0,0)$

$$f'_x(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(0+x,0)-f(0,0)}{x}=0.$$

" (x, y)　$x^2+y^2\neq 0$，**有** $f'_x(x, y)=\dfrac{2x}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2+y^2}}$.

再用导数定义，求

$$f''_{xx}(0,0)=\lim_{x\to 0}\frac{f'_x(0+x,0)-f'_x(0,0)}{x}=0,$$

$$f''_{xy}(0,0)=\lim_{y\to 0}\frac{f'_x(0,0+y)-f'_x(0,0)}{y}=0.$$

即　$f''_{xx}(0,0)=f''_{xy}(0,0)=0$.

8. 证明: **函数** $u = f(x, y, z)$ 在

$$x = a_1 r + b_1 s + c_1 t,\quad y = a_2 r + b_2 s + c_2 t,\quad z = a_3 r + b_3 s + c_3 t$$

下 (a_i, b_i, c_i **都是常数**)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

证法　**首先求** $\frac{\partial u}{\partial r}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}$, $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$, **例如**

$$\frac{\partial u}{\partial r} = a_1 \frac{\partial u}{\partial x} + a_2 \frac{\partial u}{\partial y} + a_3 \frac{\partial u}{\partial z},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = a_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a_2^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + 2\left(a_1 a_2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + a_2 a_3 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} + a_3 a_1 \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial x}\right).$$

同样, 可求出 $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}$ **和** $\frac{\partial u}{\partial t}$, $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$.

然后应用直交变换的条件:

$$a_i^2 + b_i^2 + c_i^2 = 1,\quad a_i a_j + b_i b_j + c_i c_j = 0,\quad i, j = 1, 2, 3,\quad i \neq j.$$

经过计算, 得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

13. 将正数 a **分成三个正数之和, 并使它的乘积为最大, 求此三数.**

解法　**设三个正数分别是** x, y, z, **已知**

$$x + y + z = a.$$

求函数 $f(x, y, z) = xyz = xy(a - x - y)$

14. 在半径为 a **的半球内, 求出体积为最大的内接长方体的边长.**

解法　**设球心在原点, 半径为** a **的球面方程是**

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2.$$

仅在第一卦限讨论即可. 设长方体的各面平行于坐标面, 在第一卦限内与半球面的交点坐标是 (x, y, z) $(x > 0, y > 0, z > 0)$

数

$$V(x, y, z) = 8xyz$$

的最大值．

15． 已知渠道的横截面是等腰梯形，其面积为 A，问等腰梯形的底与高各多大，才能使渠道的湿周

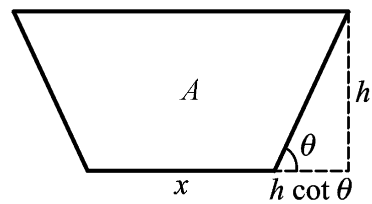


图　10.15

解法　设等腰梯形的下底为 x，高为 h，腰与底的夹角为 θ　10.15)

则

$$A = (x + h\cot\theta)h.$$

湿周之长 $l = x + 2\dfrac{h}{\sin\theta}$．求函数

$$l = \frac{A}{h} - h\cot\theta + \frac{2h}{\sin\theta}$$

的最小值．

*　　*　　*　　*

16． 证明：若 $u = f(x, y, z)$　$x = r\cos\varphi$，$y = r\sin\varphi$，$z = z$，则

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

证法　求出 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial r^2}$ 与 $\dfrac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2}$．按照

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

整理即可．

17． 证明：若 $z = f(u, v)$　$u = u(x, y)$　$v = v(x, y)$　函数 u 与 v 满足柯西 - 黎曼方程：$u'_x = v'_y$ 与 $v'_x = -u'_y$，则

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right)\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right].$$

证法　求出$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$与$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$，再应用柯西 - 黎曼方程又有

$$\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial y\partial x}.$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y},\quad \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}.$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \cdots .$$

20. 若 $f(tx_1, tx_2, \cdots, tx_n) = t^k f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$　n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$　k 次齐次函数．证明：设 $f(x, y, z)$　函数 $f(x, y, z)$　k 次齐次函数

$$xf'_x + yf'_y + zf'_z = kf(x, y, z)$$

证法　"　"对等式 $f(tx, ty, tz) = t^k f(x, y, z)$　t 求导数，然后令 $t = 1$．

"　"将等式 $xf'_x + yf'_y + zf'_z = kf(x, y, z)$　x，y，z 分别换为 tx，ty，tz，整理得

$$\frac{f'_t(tx, ty, tz)}{f(tx, ty, tz)} = \frac{k}{t}.$$

对等式两端从 1 到 t 积分．

21. 证明：若 $f(x, y, z)$　k 次齐次函数，则 $f'_x(x, y, z)$　$f'_y(x, y, z)$　$f'_z(x, y, z)$　$k-1$ 次齐次函数．

证法　已知 $xf'_x + yf'_y + zf'_z = kf$．等式两端对 x 求导，再应用第 20 题的充分性．

22. 证明：若 $f(x, y, z)$　n 次齐次函数，而函数 $x(u, v, w)$　$y(u, v, w)$　$z(u, v, w)$　m 次齐次函数，则

$$F(u, v, w) = f[x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)]$$

是 nm 次齐次函数．

证法一 由第 20 题的充分性，只须证明

$$uF'_u + vF'_v + wF'_w = nmF .$$

求出 F'_u, F'_v, F'_w, **计算** $uF'_u + vF'_v + wF'_w$, **应用第 20 题**, $x \quad u, v, w) \quad y \quad u, v, w) \quad z \quad u, v, w)$ m **次齐次函数的必要性**，**以及** $F \quad x, y, z)$ nm **次齐次函数的充分性**.

第十章自我测验题

1. 证明：**若点** P **是点集** $A \quad \mathbf{R}^2$ **的聚点**，**则点集** A **中存在互不相同的点列** $P_n\}$ $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P$.

2. 证明：**函数** $f \quad x)$ P_0 **连续的必要充分条件是**，**对任意点列** $P_n\}$ $P_n \neq P_0$, $P_n \to P_0\ (n\to\infty)$ $\lim\limits_{n\to\infty} f \quad P_n) = f \quad P_0)$

3. 证明：**函数** $f \quad x, y) = \dfrac{1}{1 - xy}$ **在** $D = \{(x, y) \mid 0 < x < 1, 0 < y < 1\}$ **内非一致连续**.

4. 设函数

$$f \quad x, y) = \begin{cases} \dfrac{|xy|}{x^2 + y^2}\sin(x^2 + y^2) & x^2 + y^2 \neq 0, \\ 0, & \text{当 } x^2 + y^2 = 0, \end{cases}$$

问 1) $f \quad x, y)$ $0, 0)$

2) $f \quad x, y)$ $0, 0)$

5. 设 $w = F \quad x, y, z)$ $z = f \quad x, y)$ $y = \phi \quad x)$ $\dfrac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x}$.

6. 设 $w = h \quad x, u, v)$ $v = g \quad x, y, u)$ $u = f \quad x, y)$ $\dfrac{\quad w}{\quad x}$, $\dfrac{\quad w}{\quad y}$.

7. 设 $t = f \quad x - y, y - z, z - x)$ f **对变量有连续二阶偏导数**，**求** $\dfrac{\ ^2 t}{\ x^2}$, $\dfrac{\ ^2 t}{\ y \ z}$.

8. 设 $u = r^3\cos\theta + \theta\ln r$，而 $r^2 = x^2 + y^2$，$\tan\theta = \frac{y}{x}$，求

$$\frac{^2 u}{x^2} + \frac{^2 u}{y^2}.$$

9. 证明：若 $u = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 \; {}^{1-\frac{n}{2}}$ (整数 $n \geq 3$)

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{^2 u}{x_k^2} = 0.$$

10. 证明：函数 $u = \varphi \frac{y}{x} + x\psi \frac{y}{x}$ 满足偏微分方程

$$x^2 \frac{^2 u}{x^2} + 2xy \frac{^2 u}{x \; y} + y^2 \frac{^2 u}{y^2} = 0.$$

11. 求椭球面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

上一点 $P \quad x_0, y_0, z_0)$

12. 证明：若点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ $z = xy$ 上，则过点 P_0 的两条直线 $z = xy_0$，$y = y_0$ 和 $z = x_0 y$，$x = x_0$ 位于曲面 $z = xy$ 在点 P_0 的切平面上.

13. 证明：曲面 $x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}$ $(a > 0)$

面在三个坐标轴上的截距的平方和是一个常数.

14. 求二元函数 $z = xy\ln(x^2 + y^2)$

15. 设坐标平面上有一三角形 $\triangle M_1 M_2 M_3$，在此平面上求一点 P，使点 P 到三角形每个顶点 M_i $(i = 1, 2, 3)$

最小.

第十一章　隐　函　数

§11.1　隐函数的存在性

一、基本内容

本节有三段.

第一段给出了二元方程和 $n+1$ 元方程所确定的隐函数的定义以及 n 个变数 m 个方程 $m<n)$ m 个函数)

第二段给出了二元方程在一点邻域内存在可微隐函数的充分条件及其证明 1) $n+1$ 元方程在一点邻域内存在有连续偏导数的隐函数的充分条件(定理 2)

第三段给出了四个变数两个方程在一点邻域内存在有连续偏导数的隐函数组的充分条件及其证明 3) 况是 $m+n$ 个变数 m 个方程在一点邻域内存在可微隐函数组 m 个函数) 4) 3 有一个重要的推论: 函数组 $\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$)

二、学习要求

用方程(或方程组) 括了所有的显函数, 重要地是它包括了很多有用的非初等函数, 从而给出了表示非初等函数的一种新方法. 例如, 有些微分方程的解不能用显函数表示, 但是却能用函数方程所确定的隐函数表示 3)

1. 深刻理解隐函数的概念及其意义，掌握二元方程确定可微隐函数的充分条件及其证明　　1)

2. 知道函数组 $(\mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2)$

3. 会求隐函数或隐函数组的偏导数和高阶偏导数．

三、答疑辅导

问 1. 方程 $F \quad x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ **在区间** $[-a, a]$

只有两个隐函数 $y = \quad a^2 - x^2$ **与** $y = - \quad a^2 - x^2$?

答　否．例如，函数

$$y = g \quad x) = \begin{cases} a^2 - x^2, & \text{当 } x \text{ 是 } \quad -a, a] \\ - \quad a^2 - x^2, & \text{当 } x \text{ 是 } \quad -a, a] \end{cases}$$

与

$$y = h \quad x) = \begin{cases} a^2 - x^2, & \text{当 } x \in [0, a] \\ - \quad a^2 - x^2 & \text{当 } x \in [-a, 0) \end{cases}$$

都是方程 $F(x, y) = 0$ **在** $[-a, a]$

$$F[x, g(x)] \equiv 0, \quad F \quad x, h(x)] \equiv 0 .$$

按照同样的方法还能写出一些满足方程 $F(x, y) = 0$ **的隐函数．不难看到，这些隐函数** $y = g(x)$　$y = h(x) \cdots$ **在** $[-a, a]$ **都不连续．**

我们只能说，方程 $F(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ **在区间** $[-a, a]$

$$y = \pm \quad a^2 - x^2 .$$

一般来说，在平面曲线 $F(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ **(圆)** **取一点** $x_0, y_0)$　$x_0 \neq \pm a)$

$F \quad x, y) = 0$ **只存在唯一一个连续隐函数(如图** 11.1)　　a

的左侧 $a - \delta, a]$　　$-a$ **的右侧** $[-a, -a + \delta])$　$0 < \delta < a)$

$F(x, y) = 0$ **的连续的隐函数不是唯一的，此外还存在不连续的隐函数．例如，函数**

$$w \quad x) = \begin{cases} a^2 - x^2, & \text{当 } x \text{ 是 } \ a - \delta, a] \\ - \quad a^2 - x^2, & \text{当 } x \text{ 是 } \ a - \delta, a] \end{cases}$$

就是方程 $F(x, y) = x^2 + y^2 - a^2 = 0$ 在 $[a - \delta, a]$ 数 11.1)

$F[x, w(x)] \equiv 0,\quad x \in [a - \delta, a]$

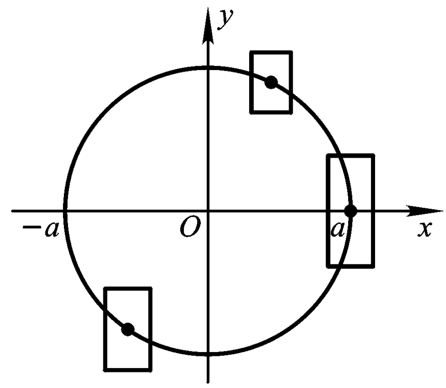


图 11.1

问 2. 怎样讨论隐函数的分析性质(连续性、可微性)

答 讨论方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数 $y = f(x)$ 要借助于函数 $F(x, y)$ 因此，讨论隐函数 $y = f(x)$ $F(x, y)$ 1 的三个条件:

i) $F'_x(x, y)$ $F'_y(x, y)$ $x_0, y_0)$ D 内连续,

ii) $F(x_0, y_0) = 0$,

iii) $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$,

都是指函数 $F(x, y)$ D 内的性质，其结论不仅指出隐函数 $y = f(x)$ $y = f(x)$ 性 .

从定理 1 的证明中看到，如果仅要求隐函数存在性与连续性，不要求可微性，条 i) 与 iii) 可 $F(x, y)$ D 上连续与 $F(x, y)$ y 严格单调 . 如果将条件 iii) $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$，则在点 $x_0, y_0)$ $x = \phi(y)$ 条 iii) 改为 $F'_y(x_0, y_0) \neq 0$ 与 $F'_x(x_0, y_0) \neq 0$，则在点 $x_0, y_0)$ 域内确定的隐函数既可用 $y = f(x)$ $x = \phi(y)$ 二者互为反函数 .

问 3. 设函数组 $x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$ D 变换为开区域 G，并有连续偏导数 . 如果 $u, v) \in D$，$J(u, v) = \dfrac{(x, y)}{(u, v)} \neq 0$，是否存在由 G 到 D 的反函数组 $u = u(x, y)$ $v =$

$v(x, y)$　D 与 G 是一一对应的)

答　不一定．定理 3 的推论指出：若在某一点 P　$u_0, v_0) \in D$，$J(u_0, v_0) \neq 0$，则存在　$Q(x_0, y_0)$ $(x_0 = x(u_0, v_0)$，$y_0 = y(u_0, v_0))$　某个邻域 $U(Q)$　G，在 $U(Q)$　$u = u(x, y)$　$v = v(x, y)$　$x = x(u, v)$　$y = y(u, v)$　D 内仅是局部一一对应的．在整个的开区域 D 内不一定是一一对应的．例如，函数组

$$\begin{aligned} x &= e^u \sin v, \\ y &= e^u \cos v, \end{aligned} \qquad (u, v) \in \mathbf{R}^2$$

将 $\mathbf{R}^2$ 变换为 $\mathbf{R}^2$，并有连续偏导数，且　$u, v) \in \mathbf{R}^2$，有

$$J(u, v) = \frac{(x, y)}{(u, v)} = \begin{vmatrix} e^u \sin v & e^u \cos v \\ e^u \cos v & -e^u \sin v \end{vmatrix}$$

$$= -e^{2u}(\sin^2 v + \cos^2 v) = -e^{2u} \neq 0 .$$

根据定理 3 的推论，对任意一点　$u, v) \in \mathbf{R}^2$，存在一个邻域，函数组在其上是一一对应的，但是由 $\mathbf{R}^2$ 到 $\mathbf{R}^2$ 函数组并不是一一对应的．因为，对任意二点　$u, v)$　$u, v + 2\pi)$　$x, y)$

问 4. 怎样描绘方程 $F(x, y) = 0$ 确定的隐函数的图像？

答　方程 $F(x, y) = 0$ 所确定的隐函数的图像是平面曲线．不难证明曲线 $F(x, y) = 0$ 的下列特性：

1. 如果将 x　$y)$　$-x$(或 $-y)$

$F(x, y) = F(-x, y) = 0$　(或 $F(x, y) = F(x, -y) = 0)$

则曲线关于 y 轴　x 轴)

2. 如果将 x 换为 $-x$，同时将 y 换为 $-y$，有

$$F(x, y) = F(-x, -y) = 0,$$

则曲线关于原点对称．

3. 如果将 x 换为 y，同时将 y 换为 x，有

$$F(x, y) = F(y, x) = 0,$$

则曲线关于直线 $y = x$ 对称．

4. 曲线 $F(x, y) = 0$ 与 x 轴的交点坐标是方程组

$$F(x, y) = 0,$$
$$y = 0$$

的解．曲线 $F(x, y) = 0$ 与 y 轴的交点坐标是方程组

$$F(x, y) = 0,$$
$$x = 0$$

的解．

5．若方程 $F(x, y) = 0$ 关于 x 　　 y) 　　 y 的函数 　　 x 的函数)

近线．若最高次幂的系数是常数则没有渐近线．

若 $F(x, kx + b) = 0$，令 x 的最高次幂与次最高次幂的系数为零，得关于 k 与 b 的联立方程组，解得 k 与 b，则直线 $y = kx + b$ 是曲线的斜渐近线．

例如，讨论曲线 $x^3 + y^3 - 3axy = 0\ (a > 0)$

将 $y = kx + b$ 代入方程，有

$$x^3 + (kx + b)^3 - 3ax\quad kx + b) = 0,$$

或 $$1 + k^3)x^3 + (3k^2 b - 3ak)x^2 + (3kb^2 - 3ab)x + b^3 = 0.$$

令 x 的最高次幂 　x^3) 　　 x^2) 　　 0，即

$$1 + k^3 = 0,\quad 3k^2 b - 3ak = 0,$$ 解得 $k = -1$，$b = -a$，

则直线 $y = -x - a$ 或 $x + y + a = 0$ 是曲线的斜渐近线(见图 11.10)

6．若曲线 $F(x, y) = 0$ 上的点 $P(x_0, y_0)$ 　　 $F(x_0, y_0) = 0$) 满足方程

$$F_x'(x_0, y_0) = 0 \quad 与 \quad F_y'(x_0, y_0) = 0,$$

称 $P(x_0, y_0)$ 　　 F 　$x, y) = 0$ 的奇点．

关于奇点的分类，本书只给出结果，不予讨论．有兴趣的读者可参阅高等教育出版社出版的 Γ.M. 菲赫金哥尔茨著 学教程》 　　 226 段．

设函数 $F(x, y)$ 　　 $F(x, y) = 0$ 的奇点 $P(x_0, y_0)$

偏导数，且

$$A = F''_{x^2}(x_0, y_0), \quad B = F''_{xy}(x_0, y_0), \quad C = F''_{y^2}(x_0, y_0)$$

不同时为零．令 $\Delta = AC - B^2$．奇点有下列几种类型：

1）若 $\Delta > 0$，则 $P(x_0, y_0)$ 11.2）

2）若 $\Delta < 0$，则 $P(x_0, y_0)$ 11.3 是二重点）

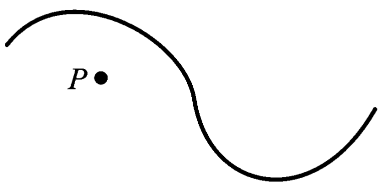


图 11.2

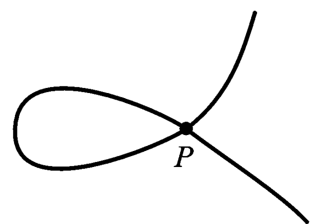


图 11.3

3）若 $\Delta = 0$，则点 $P(x_0, y_0)$ 11.4）

是第二类尖点 11.5）

11.6）

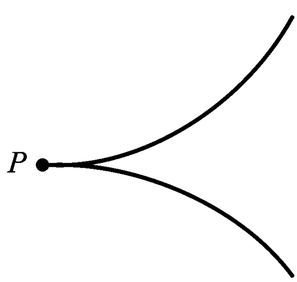


图 11.4

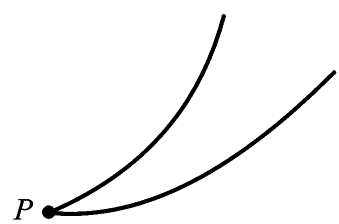


图 11.5

例如，曲线 $y^2 = x^3 + ax^2$，其中 a 是常数．

函数 $F(x, y) = y^2 - x^3 - ax^2$． 令 $F'_x(x, y) = -3x^2 - 2ax = 0$，$F'_y(x, y) = 2y = 0$．

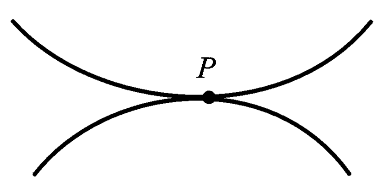


图 11.6

解得两点 0，0） $-\frac{2}{3}a$，0 ．因为点 $-\frac{2}{3}a$，0 不在曲线上，所以有唯一奇点是 0，0）

$$A = F''_{x^2}(0,0) = -2a,\quad B = F''_{xy}(0,0) = 0,\quad C = F''_{y^2}(0,0) = 2.$$

$$\Delta = AC - B^2 = -4a.$$

若 $a > 0$，则 $\Delta < 0$．奇点 $0,0)$ 11.7)

若 $a < 0$，则 $\Delta > 0$．奇点 $0,0)$ 11.8)

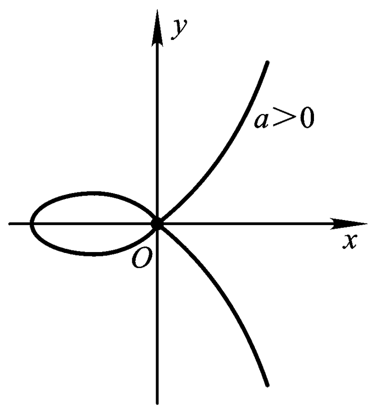


图 11.7

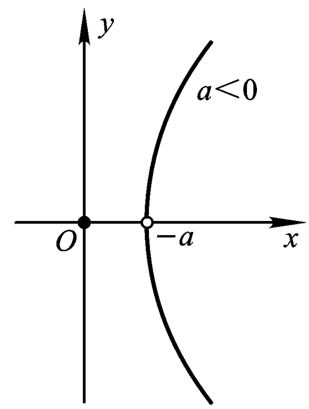


图 11.8

若 $a = 0$，则 $\Delta = 0$．曲线 $y^2 = x^3$ 或 $y = \pm\ \ x^3(x \geq 0)$ $0,0)$ 点 11.9)

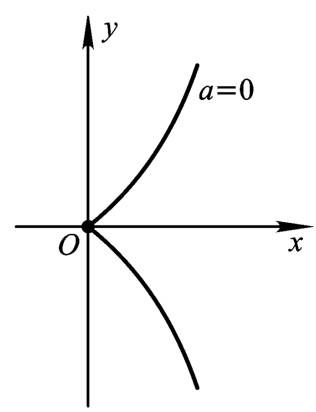


图 11.9

7．为了求曲线 $F(x, y) = 0$ 上的个别点，令 $y = kx$ 代入方程，即

$$F(x, kx) = 0.$$

再求解，设 $x = \varphi(k)$ $F(x, y) = 0$，可求得 $y = \psi(k)$ $\varphi(k), \psi(k))$ 线 $F(x, y) = 0$ 上．斜率 k 的变化，表示曲线 $F(x, y) = 0$ 上点 $(\varphi(k), \psi(k))$

例如，讨论笛卡儿叶形线 $x^3 + y^3 - 3axy = 0\ (a > 0)$

(1) 若将 x 与 y 交换，方程

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

不变，因此笛卡儿叶形线关于直线 $y = x$ 对称．

(2) 已知它有一条斜渐近线 $x + y + a = 0$．

(3) 设 $F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy$.

令 $F'_x = 3(x^2 - ay) = 0$ 与 $F'_y = 3(y^2 - ax) = 0$.

解得两点 $0,0)$ $a, a)$ $a, a)$

有唯一奇点 $0,0)$

$A = F''_{x^2}(0,0) = 0$, $B = F''_{xy}(0,0) = -3a$, $C = F''_{y^2}(0,0) = 0$,

因为 $\Delta = AC - B^2 = -9a^2 < 0$，所以原点 $0,0)$

即曲线自交于奇点 $0,0)$

(4) 令 $y = kx$ 代入方程 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$，有

$$x^3 + (kx)^3 - 3ax(kx) = 0$$

或 $(1 + k^3)x^3 - 3akx^2 = x^2[(1 + k^3)x - 3ak] = 0$.

解得 $x = 0$, $x = \dfrac{3ak}{1 + k^3}$. 将它们代入 $y = kx$ 之中，当 $x = 0$ 时，$y = 0$; 当 $x = \dfrac{3ak}{1 + k^3}$ 时，$y = \dfrac{3ak^2}{1 + k^3}$，即曲线通过点 $0, 0)$ $\dfrac{3ak}{1 + k^3}, \dfrac{3ak^2}{1 + k^3}$. 当 k 由 $-\infty$变化到 -1 时，动点 $x, y)$ $0,0)$ x 轴正向下方趋向于无穷; 当 k 由 -1 变化到 0，动点 $x, y)$ x 轴上方，y 轴左侧，从无穷回到原点 $0,0)$ k 由 0 变化到 $+\infty$时，动点 $x, y)$ 叶形线 . 特别是，当 $k = 1$ 时，曲线通过点 $\dfrac{3}{2}a, \dfrac{3}{2}a$.

方程 $x^3 + y^3 - 3axy = 0$ 的图像是笛卡儿叶形线，如图 11.10 .

再例如，描绘方程$||x| - |y|| = 1$ 的图像 .

显然，曲线关于 x 轴、y 轴、原点都对称 .

只讨论第一象限内的曲线，即

$$|x - y| = 1 .$$

或 $x - y = 1$ 与 $x - y = -1$.

这是两条直线 . 由对称性，它的图像如图 11.11 .

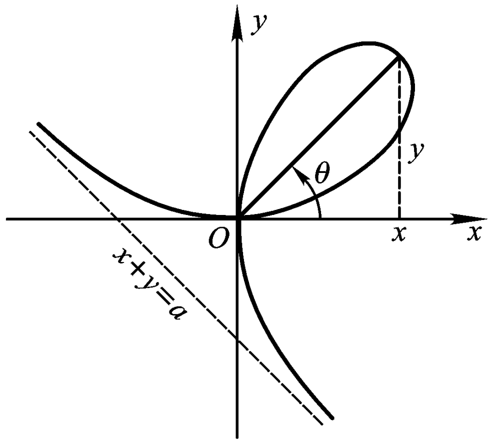


图 11.10

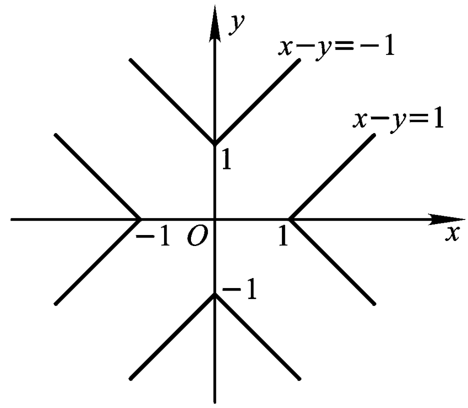


图 11.11

四、补充例题

例 1. 求方程组

$$x+y+z=0,$$
$$x^3+y^3-z^3=10$$

确定的隐函数组 $y=y(x)$ $z=z(x)$ $P(1,1,-2)$ y', z'**与** y'', z''.

解 对方程组中每个方程关于 x **求导数，有**

$$\begin{aligned}&1+y'+z'=0,\\&3x^2+3y^2y'-3z^2z'=0.\end{aligned}\qquad(*)$$

当 $x=1$, $y=1$, $z=-2$, **有**

$$\begin{aligned}&y'+z'=-1,\\&y'-4z'=-1.\end{aligned}\quad \text{解得}\ y'\Big|_P=-1,\ z'\Big|_P=0.$$

对方程组 $*)$ x **求导数，有**

$$y''+z''=0,$$
$$2x+y^2y''+2y\ \ y')^2-z^2z''-2z\ \ z')^2=0.$$

当 $x=1$, $y=1$, $z=-2$, $y'\Big|_P=-1$, $z'\Big|_P=0$, **有**

$$\begin{cases} y''+z''=0, \\ y''-4z''=-4. \end{cases}$$ 解得 $y''\big|_P=-\dfrac{4}{5}$，　$z''\big|_P=\dfrac{4}{5}$．

例 2．证明：若曲线

$$\begin{cases} \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1, \\ lx+my+nz=0, \end{cases}$$

则
$$\frac{\mathrm{d}x}{\dfrac{ny}{b^2}-\dfrac{mz}{c^2}}=\frac{\mathrm{d}y}{\dfrac{lz}{c^2}-\dfrac{nx}{a^2}}=\frac{\mathrm{d}z}{\dfrac{mx}{a^2}-\dfrac{ly}{b^2}}.$$

证法　**对已知两式全微分，再应用三个变量两个方程的齐次方程组的不定解公式．**

证明
$$\begin{cases} \dfrac{2x}{a^2}\mathrm{d}x+\dfrac{2y}{b^2}\mathrm{d}y+\dfrac{2z}{c^2}\mathrm{d}z=0, \\ l\mathrm{d}x+m\mathrm{d}y+n\mathrm{d}z=0. \end{cases}$$

于是，
$$\frac{\mathrm{d}x}{\begin{vmatrix} \dfrac{y}{b^2} & \dfrac{z}{c^2} \\ m & n \end{vmatrix}}=\frac{\mathrm{d}y}{\begin{vmatrix} \dfrac{z}{c^2} & \dfrac{x}{a^2} \\ n & l \end{vmatrix}}=\frac{\mathrm{d}z}{\begin{vmatrix} \dfrac{x}{a^2} & \dfrac{y}{b^2} \\ l & m \end{vmatrix}},$$

即
$$\frac{\mathrm{d}x}{\dfrac{ny}{b^2}-\dfrac{mz}{c^2}}=\frac{\mathrm{d}y}{\dfrac{lz}{c^2}-\dfrac{nx}{a^2}}=\frac{\mathrm{d}z}{\dfrac{mx}{a^2}-\dfrac{ly}{b^2}}.$$

例 3．证明：方程 $\arccos y=n\ln x$ **确定的隐函数** $y=y(x)$ **足微分方程**

$$x^2y^{(n+2)}+(2n+1)xy^{(n+1)}+2n^2y^{(n)}=0.$$

证法　**应用莱布尼茨公式求高阶导数．**

证明　**将方程** $\arccos y=n\ln x$ **对** x **求导数，有**

$$-\frac{y'}{\sqrt{1-y^2}}=\frac{n}{x}\quad \text{或}\quad y'x=-n\sqrt{1-y^2}. \qquad (*)$$

再对 x **求导数，有**

$$xy''+y'=\frac{nyy'}{\sqrt{1-y^2}}.$$

由　*)

$$x^2 y'' + xy' + n^2 y = 0 .$$

将此方程中，每项求 n 次导数，有

$$(x^2 y^{(n+2)} + 2nxy^{(n+1)} + n(n-1)y^{(n)}) + (xy^{(n+1)} + ny^{(n)}) + n^2 y^{(n)} = 0,$$

整理即得

$$x^2 y^{(n+2)} + (2n+1)xy^{(n+1)} + 2n^2 y^{(n)} = 0 .$$

同法可证:

(1) 由方程 $ax + by + cz = x^2 + y^2 + z^2$ 所确定的隐函数 $z = z\ \ x, y)$　足偏微分方程

$$(cy - bz)\frac{z}{x} + (az - cx)\frac{z}{y} = bx - ay .$$

(2) 由方程

$$\frac{x^2}{a^2 + z} + \frac{y^2}{b^2 + z} = 1$$

所确定的隐函数 $z = z(x, y)$

$$\frac{z}{x}\ ^2 + \ \frac{z}{y}\ ^2 = 2\ \ x\frac{z}{x} + y\frac{z}{y}\ \ .$$

例 4. 证明: 若函数 $F(x, y)$　$F'_y(x, y)$　　$x_0, y_0)$ 的矩形区域 D 内连续，且

$$F(x_0, y_0) = 0 \quad 与 \quad F'_y(x_0, y_0) \neq 0,$$

则 1) v　$\delta > 0$ 与 $\eta > 0$，在区间 $\Delta = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$y = f(x)$　　$F[x, f(x)] \equiv 0$，$f(x_0) = y_0$，且 $y_0 - \eta < f(x) < y_0 + \eta$.

2) $y = f(x)$　Δ 内连续 .

证法　此例是定理 1 的部分内容 .

像的分析证法，比较直观，思路清晰 . 但是它只给出解

的存在性，没有给出隐函数的构造 . 这种非构造性的证明对计算隐函数的函数值没有提供可行的计算方法 . 从这个意义来说，这

是一个缺陷．这里采用逐次逼近法证明，即不动点的证法，它不仅证明了解
造．

证明　设 $\varphi(x,y)=y-y_0-\dfrac{F(x,y)}{F_y'(x_0,y_0)}$

$$y=y_0+\varphi(x,y)$$

的解，其中 $\varphi(x,y)$　$\varphi_y'(x,y)$　　D 内连续．条件 $F(x_0,y_0)=0$ 与 $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$，分别改换为

$$\varphi(x_0,y_0)=0 \text{ 与 } \varphi_y'(x_0,y_0)=0\ .$$

于是，v　$\eta>0$，"　$x,y)$：$|x-x_0|<\eta$，$|y-y_0|<\eta$，$\varphi(x,y)$
　$\varphi_y'(x,y)$

$$|\varphi_y'(x,y)|<\lambda(\lambda \text{ 是常数，　且 } 0<\lambda<1)$$

将 $\varphi(x,y)$　　y 取为 y_0，有

$$y_1=y_1(x)=y_0+\varphi(x,y_0)$$

再将 $\varphi(x,y)$　　y 取为 y_1，如此继续取下去，有

$$y_2=y_2(x)=y_0+\varphi(x,y_1),$$

$$y_3=y_3(x)=y_0+\varphi(x,y_2),$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_n=y_n(x)=y_0+\varphi(x,y_{n-1}),$$

$$\cdots\cdots$$

首先用归纳法证明，若 $|x-x_0|<\delta$　$\delta<\eta)$　　　$|y_n-y_0|<\eta$，$n\in\mathbf{N}_+$　．

已知 $\varphi(x,y)$　　$x_0,y_0)$　　　$\varphi(x_0,y_0)=0$，则v　$\delta>0$ $(0<\delta<\eta)$　　x：$|x-x_0|<\delta$，有

$$|\varphi(x,y_0)|<(1-\lambda)\eta\text{，即 }|y_1-y_0|=|\varphi(x,y_0)|<\eta\ .$$

假设 $|y_{n-1}-y_0|<\eta$．于是，由微分中值定理，有

$$\begin{aligned}|y_n-y_0|&=|\varphi(x,y_{n-1})|\\&\leq \varphi(x,y_{n-1})-\varphi(x,y_0)|+|\varphi(x,y_0)|\end{aligned}$$

$$= |\varphi_y'(x, \xi)(y_{n-1} - y_0)| + |\varphi(x, y_0)|$$

$(\xi$ 在 y_0 与 y_{n-1} 之间$)$

$$< \lambda\eta + (1 - \lambda)\eta = \eta.$$

其次证明函数列$\{y_n(x)\}$ $x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

由微分中值定理，对 " $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

$$y_n - y_{n-1}| = |\varphi(x, y_{n-1}) - \varphi(x, y_{n-2})|$$

$$= |\varphi_y'(x, \theta)(y_{n-1} - y_{n-2})|$$

$$< \lambda|y_{n-1} - y_{n-2}|. \qquad (\theta \text{ 在 } y_{n-1} \text{ 与 } y_{n-2} \text{ 之间.})$$

于是，$|y_n - y_{n-1}| < \lambda|y_{n-1} - y_{n-2}| < \cdots < \lambda^{n-1}|y_1 - y_0|$

$$= \lambda^{n-1}|\varphi(x, y_0)| \quad \lambda^{n-1}(1 - \lambda)\eta.$$

已知几何级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}(1 - \lambda)\eta = (1 - \lambda)\eta\sum\limits_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1}$收敛.

根据 M 判别法，函数列 $y_n(x)\}$ $x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

设$y(x) = \lim\limits_{n\to\infty} y_n(x)$ $y(x)$ $x_0 - \delta, x_0 + \delta)$

再次证明，函数$y = y(x)$ $y = y_0 + \varphi(x, y)$

已知 $y_n(x) = y_0 + \varphi[x, y_{n-1}(x)]$

$$\lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty}\varphi \quad x, y_{n-1}(x)]$$

即 $y(x) = y_0 + \varphi[x, y(x)],\quad |y - y_0| \quad \eta.$

不难证明，$y_n(x_0) = y_0\ (n = 1, 2, \cdots)$ $y(x_0) = y_0$.

最后证明$y = y(x)$ $y = y_0 + \varphi \quad x, y)$

假设在$(x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ $y(x)$与 $h(x)$

$$y_0 - \eta < y(x) < y_0 + \eta \quad \text{与} \quad y_0 - \eta < h(x) < y_0 + \eta.$$

有 $y(x) - h(x)| = |\{y_0 + \varphi[x, y(x)]\} - \{y_0 + \varphi[x, h(x)]\}|$

$= |\varphi[x, y(x)] - \varphi[x, h(x)]|$

$= |\varphi_y'(x, \xi)||y(x) - h(x)|$ $(\xi$ 在 $y(x)$与 $h(x)$之间$)$

$< \lambda|y(x) - h(x)|,\quad 0 < \lambda < 1,$

矛盾，即$y = y(x)$ $y = y_0 + \varphi(x, y)$

说明 这里采用逐次逼近的证法，其意义不仅证明了隐函数

的存在性，同时又给出了解
程中被广泛采用．

逐次逼近法的关键是将方程 $F(x,y)=0$
$F(x,y)=y-y_0-\varphi(x,y)=0$，即 $y=y_0+\varphi(x,y)$

为什么要这样改写呢？这样改写的主要目的是为了使

$$|\varphi_y'(x,y)|<\lambda\quad(0<\lambda<1)$$

从而可应用逐次逼近法，得到所求的解．那么函数 $\varphi(x,y)$
$F(x,y)$ 什么样的关系呢？因为 $F_y'(x_0,y_0)\neq 0$，所以方程
$F(x,y)=0$ 的解也是方程 $\dfrac{F(x,y)}{F_y'(x_0,y_0)}=0$ 的解，进而也是方程

$$y-y_0-(y-y_0)+\frac{F(x,y)}{F_y'(x_0,y_0)}=0\qquad(*)$$

的解．当 x 是常数时，上式是 y 的一元方程，为了应用逐次逼近法，设

$$\varphi(x,y)=y-y_0-\frac{F(x,y)}{F_y'(x_0,y_0)},$$

有
$$\varphi_y'(x_0,y_0)=1-\frac{F_y'(x_0,y_0)}{F_y'(x_0,y_0)}=0,$$

于是，在点 $x_0,y_0)$ $|\varphi_y'(x,y)|<\lambda\quad\lambda<1)$
因此，方程 $*)$ $y=y_0+\varphi\quad x,y)$
$F(x,y)=0$ 的解．

例 5. 证明：若函数 $f(x,y)$ 在区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2<1\}$
$f(0,0)=0$，$|f(x,y)|$ ，则方程

$$F(x,y,z)=z^3+z(x^2+y^2)-f(x,y)=0$$

在区域 D 内确定一个连续的隐函数 $z=\varphi(x,y)$ $\varphi(0,0)=0$．

证法　因 $F_z'(0,0,0)=0$，所以隐函数的存在性与连续性不能直接应用定理 1．这里还是用定理 1 的证法证明存在性和连续性．

证明　$F_z'(x,y,z)=3z^2+x^2+y^2$．

$\forall(x,y,z)$，$F_z'(x,y,z)\geq 0$．等号只在点 $0,0,0)$

$F'_z(0,0,0)=0$;　　$x, y, z)\neq(0,0,0)$　$F'_z(x, y, z)>0$. 从而

" $(x, y)\in D$，函数 $F(x, y, z)$　$-1\leq z\leq 1$ 上关于 z 是严格增加的 .

因为 " $(x, y)\in D$，由已知条件，有

$$F(x, y, -1)=-1-(x^2+y^2)-f(x, y)<0$$

与
$$F(x, y, 1)=1+(x^2+y^2)-f(x, y)>0,$$

所以　$x, y)\in D$，由连续函数的介值性，存在唯一 $z\in(-1,1)$ 使 $F(x, y, z)=0$，即 z 是 x 与 y 的函数，设 $z=\varphi(x, y)$

$$\begin{aligned}&F[x, y, \varphi(x, y)]\\&=[\varphi(x, y)]^3+\varphi(x, y)(x^2+y^2)-f(x, y)\equiv 0,\end{aligned}$$

即在区域 D 上方程 $F(x, y, z)=0$ 确定一个隐函数 $z=\varphi(x, y)$

下面证明连续性 . 任取一点 $P(x_0, y_0)\in D$. 设 $z_0=\varphi(x_0, y_0)$. 有 $F(x_0, y_0, z_0)=F[x_0, y_0, \varphi(x_0, y_0)]=0$. 由存在性的证明知，" $\varepsilon>0$ $(-1<z_0-\varepsilon<z_0+\varepsilon<1)$

$$F(x_0, y_0, z_0-\varepsilon)<0,\quad F(x_0, y_0, z_0+\varepsilon)>0,$$

而二元函数 $F(x, y, z_0-\varepsilon)$ 与 $F(x, y, z_0+\varepsilon)$　　$P(x_0, y_0)$

根据连续函数的保号性，v　$\delta>0$ $(\delta<1-\quad x_0^2+y_0^2)$　　$Q(x, y)\in D$: $|P-Q|=\quad(x-x_0)^2+(y-y_0)^2<\delta$，有

$$F(x, y, z_0-\varepsilon)<0,\quad F(x, y, z_0+\varepsilon)>0,$$

于是，隐函数 $z=\varphi(x, y)$　　$F[x, y, \varphi(x, y)]=0$. 从而，有

$$|\varphi(x_0, y_0)-\varphi(x, y)|\quad\varepsilon,$$

即 $z=\varphi(x, y)$　　$P(x_0, y_0)$　　　　$P(x_0, y_0)$　D 上任意一点，所以隐函数 $z=\varphi(x, y)$　D 内连续 .

注　此例说明，定理 1 (一般情况是定理 2) $F'_y(x_0, y_0)\neq 0$ ($F'_y(x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)\neq 0$)　是隐函数存在的充分条件，而不是必要条件 .

例 6. 设 $x=f(u, v, w)$　$y=g(u, v, w)$　$z=h(u, v, w)$

求$\frac{u}{x}$, $\frac{u}{y}$, $\frac{u}{z}$.

解法 将此三式分别对 x, y, z 求偏导数 .

解 $1=\frac{f}{u}\frac{u}{x}+\frac{f}{v}\frac{v}{x}+\frac{f}{w}\frac{w}{x}$,

$0=\frac{g}{u}\frac{u}{x}+\frac{g}{v}\frac{v}{x}+\frac{g}{w}\frac{w}{x}$,

$0=\frac{h}{u}\frac{u}{x}+\frac{h}{v}\frac{v}{x}+\frac{h}{w}\frac{w}{x}$.

由此方程组解得$\frac{u}{x}$,有

$$\frac{u}{x}=\frac{\begin{vmatrix}1 & \frac{f}{v} & \frac{f}{w}\\ 0 & \frac{g}{v} & \frac{g}{w}\\ 0 & \frac{h}{v} & \frac{h}{w}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{f}{u} & \frac{f}{v} & \frac{f}{w}\\ \frac{g}{u} & \frac{g}{v} & \frac{g}{w}\\ \frac{h}{u} & \frac{h}{v} & \frac{h}{w}\end{vmatrix}}=\frac{\frac{(g,h)}{(v,w)}}{\frac{(f,g,h)}{(u,v,w)}}.$$

同法可得

$$\frac{u}{y}=\frac{\frac{(h,f)}{(v,w)}}{\frac{(f,g,h)}{(u,v,w)}}, \quad \frac{u}{z}=\frac{\frac{(f,g)}{(v,w)}}{\frac{(f,g,h)}{(u,v,w)}}.$$

五、练习题 11.1 解法提要

2. 验证下列方程在指定点邻域存在以 x, y 为自变数的隐函数,并求$\frac{z}{x}$与$\frac{z}{y}$.

(2) $x+y-z-\cos(xyz)=0$, 在点 $0,0,-1)$

解法 验证隐函数定理条件，并按公式求$\frac{z}{x}$与$\frac{z}{y}$.

解 设$F(x, y, z) = x + y - z - \cos(xyz)$

$F'_x(x, y, z) = 1 + yz\sin(xyz)$

$F'_y(x, y, z) = 1 + xz\sin(xyz)$

$F'_z(x, y, z) = -1 + xy\sin(xyz)$

在点 0,0,1)

$$F(0,0,-1) = 0,\quad F'_z(0,0,-1) = -1 \neq 0 .$$

由定理2，在 0,0) $z = f(x, y)$，

$$\frac{z}{x} = \frac{1 + yz\sin(xyz)}{1 - xy\sin(xyz)},\quad \frac{z}{y} = \frac{1 + xz\sin(xyz)}{1 - xy\sin(xyz)} .$$

6. 证明：若 $x = x(u, v)$ $y = y(u, v)$ $z = z(u, v)$

导数都连续，且$\begin{vmatrix} \frac{x}{u} & \frac{x}{v} \\ \frac{y}{u} & \frac{y}{v} \end{vmatrix} \neq 0$，则存在有连续偏导数的隐函数组 $z = f(x, y)$ $u = \varphi(x, y)$ $v = \psi(x, y)$

证法 设 $F_1(x, y, u, v) = x - x(u, v) = 0,$
$F_2(x, y, u, v) = y - y(u, v) = 0 .$

根据定理3的推论，存在隐函数组

$$u = u(x, y),\ v = v(x, y)$$

而 $z = z(u, v) = z[u(x, y), v(x, y)] = f(x, y)$.

7. 设有函数方程组 $u = e^y\sin x,\quad v = e^y\cos x,\quad w = 2 - \cos z,$ 问在哪些点$P(x, y, z)$

解 设

$$F_1(x, y, z, u, v, w) = u - e^y\sin x,$$

$$F_2(x, y, z, u, v, w) = v - e^y\cos x,$$

$$F_3(x, y, z, u, v, w) = w - 2 + \cos z .$$

求　$J = \dfrac{(F_1, F_2, F_3)}{(x, y, z)} \neq 0$ 的点.

10. 证明: 若 $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, 则在任意一点 $r_0, \varphi_0)$

$r_0 > 0$, $-\infty < \varphi_0 < +\infty)$

在 $r\varphi$ 平面上不存在反函数组.

证法　设

$$F_1(x, y, r, \varphi) = x - r\cos\varphi,$$

$$F_2(x, y, r, \varphi) = y - r\sin\varphi,$$

求　$J = \dfrac{(F_1, F_2)}{(r, \varphi)} \neq 0$ 的点.

*　　*　　*　　*

11. 证明: 方程 $x^2 + y^2 + z^2 = yf\ \dfrac{z}{y}$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$　足方程

$$(x^2 - y^2 - z^2)\frac{z}{x} + 2xy\frac{z}{y} = 2xz.$$

证法　对方程 $x^2 + y^2 + z^2 = yf\ \dfrac{z}{y}$ 两端分别对 x 与 y 求偏导数.

12. 证明: 方　$F(x + zy^{-1}, y + zx^{-1}) = 0$ 所确定的隐函数 $z = z(x, y)$

$$x\frac{z}{x} + y\frac{z}{y} = z - xy.$$

证法　设 $u = x + zy^{-1}$, $v = y + zx^{-1}$. 对方程 $F(u, v) = 0$ 两端分别对 x 与 y 求偏导数.

14. 设 $F(x, y) = f[x + g(y)]$　　$f(u)$　$g(y)$

导数, 且可微, 求 $F(x, y)$

解法　设 $u = x + g(y)$

$$\frac{F}{x}, \frac{F}{y}, \frac{^2F}{x^2}, \frac{^2F}{y^2}, \frac{^2F}{x\ y}.$$

§11.2　函数行列式

一、基本内容

本节有三段.

第一段给出了由 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的变换 $f=(f_1, f_2, \cdots, f_n)$

函数 $y=f(x)$　$x\in\mathbf{R}^n$, 雅可比行列式, 简称函数行列式

$$\frac{(f_1, f_2, \cdots, f_n)}{(x_1, x_2, \cdots, x_n)}.$$

它相当于向量函数 $y=f(x)$　　$x_1, x_2, \cdots, x_n)$

第二段给出了函数行列式的两个性质: 复合向量函数的函数行列式等于每个向量函数的函数行列式的乘积　　1)

两个向量函数的函数行列式互为倒数　　2)

第三段给出了函数行列式的几何性质: 即函数组 $u(x, y)$ $v(x, y)$将 xy 的面积微元 $\mathrm{d}\sigma$ 变换成 uv 的面积微元 $\mathrm{d}\sigma'$之比 $\dfrac{\mathrm{d}\sigma'}{\mathrm{d}\sigma}$ 恰是 $\left|\dfrac{(u, v)}{(x, y)}\right|$.　　3)

二、学习要求

函数行列式对讨论由 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^n$ 的向量函数的性质和意义类似于导数对讨论由 $\mathbf{R}$ 到 $\mathbf{R}$ 的一元函数的性质和意义. 由此可知, 函数行列式对讨论向量函数的重要作用. 要求:

1. 会求向量函数$(\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^n)$

换和球面坐标替换的函数行列式的结果, 并掌握函数行列式的性质.

2. 记住定理 3 的结果, 知道它的几何意义.

三、答疑辅导

问 1. 何谓雅可比矩阵? 它有什么意义?

答 **首先讨论** n **元函数** $y = f(x)$ $x \in A$ $\mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R})$ $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$

若函数 $y = f(x)$ x **可微，则函数** $y = f$ $x)$ x **的全微分**

$$\mathrm{d}y = \frac{f}{x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{f}{x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{f}{x_n}\mathrm{d}x_n .$$

$\mathrm{d}y$ **可写成向量形式**

$$\mathrm{d}y = \quad \frac{f}{x_1}, \frac{f}{x_2}, \cdots, \frac{f}{x_n} \quad \begin{matrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \cdots \\ \mathrm{d}x_n \end{matrix} .$$

其次讨论一元向量函数 $y = f(x)$ $x \in (a, b)$ $\mathbf{R}, y \in \mathbf{R}^n)$ **点** x **的全微分，其中** $y = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ $f = (f_1, f_2, \cdots, f_n)$

若每个函数 f_k **在点** x **可微** $k = 1, 2, \cdots, n)$ $y = f$ $x)$ **在点** x **的全微分**

$$\mathrm{d}y = \begin{matrix} \mathrm{d}y_1 \\ \mathrm{d}y_2 \\ \cdots \\ \mathrm{d}y_n \end{matrix} = \begin{matrix} f_1'(x)\mathrm{d}x \\ f_2'(x)\mathrm{d}x \\ \cdots \\ f_n'(x)\mathrm{d}x \end{matrix} = \begin{matrix} f_1'(x) \\ f_2'(x) \\ \cdots \\ f_n'(x) \end{matrix} \mathrm{d}x .$$

最后讨论向量函数 $y = f(x)$ $x \in A$ $\mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m)$ x **的全微分，其中** $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ $y = (y_1, y_2, \cdots, y_m)$ $f = (f_1, f_2, \cdots, f_m)$

若每个函数 f_k **在点** x **可微** $k = 1, 2, \cdots, m)$ $y = f(x)$ x **的全微分**

$$\mathrm{d}y = \begin{matrix} \mathrm{d}y_1 \\ \mathrm{d}y_2 \\ \cdots \\ \mathrm{d}y_m \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{f_1}{x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{f_1}{x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{f_1}{x_n}\mathrm{d}x_n \\ \frac{f_2}{x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{f_2}{x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{f_2}{x_n}\mathrm{d}x_n \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ \frac{f_m}{x_1}\mathrm{d}x_1 + \frac{f_m}{x_2}\mathrm{d}x_2 + \cdots + \frac{f_m}{x_n}\mathrm{d}x_n \end{matrix}$$

将 $\mathrm{d}y$ 改写成矩阵形式是

$$
\mathrm{d}y = \begin{matrix} \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_1}{x_2} & \cdots & \frac{f_1}{x_n} \\ \frac{f_2}{x_1} & \frac{f_2}{x_2} & \cdots & \frac{f_2}{x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{f_m}{x_1} & \frac{f_m}{x_2} & \cdots & \frac{f_m}{x_n} \end{matrix} \quad \begin{matrix} \mathrm{d}x_1 \\ \mathrm{d}x_2 \\ \cdots \\ \mathrm{d}x_n \end{matrix} .
$$

定义　若向量函数 $y = f \quad x) \quad x \in A \quad \mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m)$

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
y_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \\
&\cdots\cdots \\
y_n &= f_n(x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}
$$

有连续的偏导数，则

$$
\begin{matrix} \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_1}{x_2} & \cdots & \frac{f_1}{x_n} \\ \frac{f_2}{x_1} & \frac{f_2}{x_2} & \cdots & \frac{f_2}{x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{f_m}{x_1} & \frac{f_m}{x_2} & \cdots & \frac{f_m}{x_n} \end{matrix}
$$

称为 $m \times n$ 雅可比矩阵，表为 $f' \quad x)$

如果 $\mathrm{d}x = (\mathrm{d}x_1, \mathrm{d}x_2, \cdots, \mathrm{d}x_n)$　　　$y = f \quad x) \quad x \in A$ $\mathbf{R}^n, y \in \mathbf{R}^m)$　　x 有连续偏导数，则向量函数 $y = f(x)$　　x 可微，且

$$
\mathrm{d}y = f' \quad x)\mathrm{d}x .
$$

从形式上说，向量函数的微分与一元函数 $\mathbf{R} \to \mathbf{R})$ 全相同，雅可比矩阵 $f' \quad x)$　　　　$f' \quad x)$

特别是，当 $n = m$ 时，雅可比矩阵就变成了雅可比方阵．此

时有函数行列式:

$$\frac{(f_1,\cdots,f_n)}{(x_1,\cdots,x_n)}=\begin{vmatrix}\frac{f_1}{x_1} & \frac{f_1}{x_2} & \cdots & \frac{f_1}{x_n}\\ \frac{f_2}{x_1} & \frac{f_2}{x_2} & \cdots & \frac{f_2}{x_n}\\ \cdots & \cdots & & \cdots\\ \frac{f_n}{x_1} & \frac{f_n}{x_2} & \cdots & \frac{f_n}{x_n}\end{vmatrix}.$$

在向量函数微分学的理论中,雅可比矩阵的作用类似于一元函数微分学的理论中导数所起的作用.

问 2. 讨论向量函数 $f:\ A\to\mathbf{R}^n$, $A\quad\mathbf{R}^n$, **总要求函数行列式**

$$J=\frac{(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\neq 0\ .$$

如果在区域 $D\quad A\quad\mathbf{R}^n$ **内**, $J\equiv 0$, **那么将出现什么情况**?

答　函数 $f:\ A\to\mathbf{R}^n$, $A\quad\mathbf{R}^n$, **即函数组**

$$y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_n=f_n(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

若在某点 $P\quad a_1,a_2,\cdots,a_n)\in A$, **有**

$$J=\left.\frac{(f_1,f_2,\cdots,f_n)}{(x_1,x_2,\cdots,x_n)}\right|_P=0,$$

则在点 P **的邻域内函数组不存在反函数组**. **例如,函数组**

标替换)

$$x=r\cos\phi,$$

$$y=r\sin\phi.$$

$$\frac{(x,y)}{(r,\phi)}=\begin{vmatrix}\cos\phi & -r\sin\phi\\ \sin\phi & r\cos\phi\end{vmatrix}=r\ .$$

在原点　$0,0)$　$\frac{(x,y)}{(r,\phi)}=0$. **不难验证,函数组**　$x=r\cos\phi$,

$y = r\sin\varphi$)在原点 0,0) 0,0)邻域内不是一一对应的 $r\varphi$ 平面上不同二点$(0,\varphi_1)$ $(0,\varphi_2)$对应 xy 平面上一点$(0,0)$))

再例如，在 $\mathbf{R}^3$ 上定义的函数组

$$
\begin{aligned}
u &= x^2 + y^2 + z^2,\\
v &= x + y + z, \qquad\qquad (*)\\
w &= xy + yz + zx .
\end{aligned}
$$

$$
J = \frac{(u, v, w)}{(x, y, z)} = \begin{vmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} \equiv 0,
$$

即" $x, y, z) \in \mathbf{R}^3$, $J = \dfrac{(u, v, w)}{(x, y, z)} = 0$. 不难看到，在 $\mathbf{R}^3$ 中，有恒等式

$$
w = \frac{1}{2}(v^2 - u)
$$

即函数 w 可用其余的两个函数 u 与 v 表示出来，换句话说，三个函数 u, v, w 之间具有相关关系．

定义　设有定义在区域 A $\mathbf{R}^n$ 上的函数组

$$
\begin{aligned}
y_1 &= f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\
y_2 &= f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n)\\
&\cdots\cdots\\
y_m &= f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n)
\end{aligned}
\qquad (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A. \qquad (**)
$$

如果存在一个 $m-1$ 元函数 F，使

$$
f_k = F[f_1, f_2, \cdots, f_{k-1}, f_{k+1}, f_m] \qquad x_1, x_2, \cdots, x_n) \in A,
$$

称此函数组在 A 上函数相关，通常要求 f_1, f_2, $\cdots$, f_m 和 F 有连续偏导数．

如果在 A 上任意部分区域上，都不存在这样的函数 F 是函数相关) A 上是函数无关．

设定义在 A $\mathbf{R}^n$ 上的函数组 $**$) $m \le n$，且每个函数在

A 上存在连续偏导数，它的雅可比矩阵是

$$\boldsymbol{J}\quad x) = \begin{matrix} \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_1}{x_2} & \cdots & \frac{f_1}{x_n} \\ \frac{f_2}{x_1} & \frac{f_2}{x_2} & \cdots & \frac{f_2}{x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{f_m}{x_1} & \frac{f_m}{x_2} & \cdots & \frac{f_m}{x_n} \end{matrix}, \quad x \in A .$$

不难证明，若函数组 $*\ *)$ A 上函数相关，则它的雅可比矩阵 $J(x)$ m $4)$ $m = n$ 时，函数行列式

$$J = \frac{(f_1, f_2, \cdots, f_m)}{(x_1, x_2, \cdots, x_m)} \neq 0, \quad \text{"}\ x \in A \quad \mathbf{R}^n,$$

即它的秩为 m，则函数组 $*\ *)$ A 上函数无关 .

例如，线性函数组

$$\begin{aligned} u_1 &= a_1 x + b_1 y + c_1 z, \\ u_2 &= a_2 x + b_2 y + c_2 z \qquad (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 . \\ u_3 &= a_3 x + b_3 y + c_3 z . \end{aligned}$$

我们已知，若它的函数行列式

$$J = \frac{(u_1, u_2, u_3)}{(x, y, z)} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 .$$

则线性函数组在 $\mathbf{R}^3$ 上是函数无关

不难看到，这里所说的函数相关与函数无关是高等代数中线性相关与线性无关概念的推广 .

四、补充例题

例 1. 若函数组 $u = u(x, y)$ $v = v(x, y)$

且 $\frac{(u, v)}{(x, y)} \neq 0$，求 $\frac{x}{u}$，$\frac{x}{v}$ 与 $\frac{y}{u}$，$\frac{y}{v}$.

解法　应用定理 2，存在反函数组，再求其偏导数 .

解　根据定理 2，存在反函数组

$$x = x \quad u, v)$$

$$y = y \quad u, v)$$

分别对 x 与 y 求偏导数，有

$$\begin{cases} 1 = \frac{x}{u}\frac{u}{x} + \frac{x}{v}\frac{v}{x}, \\ 0 = \frac{x}{u}\frac{u}{y} + \frac{x}{v}\frac{v}{y}. \end{cases} \quad 与 \quad \begin{cases} 0 = \frac{y}{u}\frac{u}{x} + \frac{y}{v}\frac{v}{x}, \\ 1 = \frac{y}{u}\frac{u}{y} + \frac{y}{v}\frac{v}{y}. \end{cases}$$

由这两个方程组，解得

$$\frac{x}{u} = \frac{\frac{v}{y}}{\frac{(u, v)}{(x, y)}}, \quad \frac{x}{v} = \frac{-\frac{u}{y}}{\frac{(u, v)}{(x, y)}}.$$

$$\frac{y}{u} = \frac{-\frac{v}{x}}{\frac{(u, v)}{(x, y)}}, \quad \frac{y}{v} = \frac{\frac{u}{x}}{\frac{(u, v)}{(x, y)}}.$$

例 2. 若函数组(球面坐标变换)

$$x = r\sin\varphi\cos\theta, \quad y = r\sin\varphi\sin\theta, \quad z = r\cos\varphi,$$

其中 $0 < r < +\infty$，$0 < \varphi < \pi$，$0 < \theta < 2\pi$. 求反函数组中每个函数 r，φ，θ 关于 x，y，z 的偏导数 .

解法　首先证明它存在反函数组 . 然后求全微分 $\mathrm{d}x$，$\mathrm{d}y$，$\mathrm{d}z$，得方程组，解得 $\mathrm{d}r$，$\mathrm{d}\varphi$，$\mathrm{d}\theta$. 由全微分得到欲求的偏导数 .

解　函数组每个函数的偏导数都连续，且

$$J = \frac{(x, y, z)}{(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos\theta & r\cos\varphi\cos\theta & -r\sin\varphi\sin\theta \\ \sin\varphi\sin\theta & r\cos\varphi\sin\theta & r\sin\varphi\cos\theta \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= r^2\sin\varphi \neq 0 .$$

它们的全微分

$$\mathrm{d}x=\sin\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}\varphi-r\sin\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\theta,$$
$$\mathrm{d}y=\sin\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}r+r\cos\varphi\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi+r\sin\varphi\cos\theta\,\mathrm{d}\theta,$$
$$\mathrm{d}z=\cos\varphi\,\mathrm{d}r-r\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi.$$

解得

$$\mathrm{d}r=\frac{r^2\sin^2\varphi\cos\theta}{J}\mathrm{d}x+\frac{r^2\sin^2\varphi\sin\theta}{J}\mathrm{d}y+\frac{r^2\sin\varphi\cos\varphi}{J}\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}\varphi=\frac{r\sin\varphi\cos\varphi\cos\theta}{J}\mathrm{d}x+\frac{r\sin\varphi\cos\varphi\sin\theta}{J}\mathrm{d}y-\frac{r\sin^2\varphi}{J}\mathrm{d}z,$$

$$\mathrm{d}\theta=-\frac{r\sin\theta}{J}\mathrm{d}x+\frac{r\cos\theta}{J}\mathrm{d}y.$$

将 $J=r^2\sin\varphi$ 代入上式，得

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\sin\varphi\cos\theta,\qquad \frac{\partial r}{\partial y}=\sin\varphi\sin\theta,\qquad \frac{\partial r}{\partial z}=\cos\varphi,$$
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{1}{r}\cos\varphi\cos\theta,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=\frac{1}{r}\cos\varphi\sin\theta,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=-\frac{1}{r}\sin\varphi,$$
$$\frac{\partial\theta}{\partial x}=-\frac{\sin\theta}{r\sin\varphi},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial y}=\frac{\cos\theta}{r\sin\varphi},\qquad \frac{\partial\theta}{\partial z}=0.$$

例 3. 设 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$ D 上存在连续偏导数．证明：u 与 v 函数相关的必要充分条件是 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\equiv 0$．

证法　应用函数相关的定义．

证明　“　”若 u 与 v 函数相关，即存在可导函数 φ，使

$$u=\varphi(v)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}\frac{\partial v}{\partial x},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}\frac{\partial v}{\partial y}.$$

于是

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial x} & \dfrac{\partial u}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}\dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}v}\dfrac{\partial v}{\partial y}\\[2mm] \dfrac{\partial v}{\partial x} & \dfrac{\partial v}{\partial y}\end{vmatrix}\equiv 0.$$

“　”已知 $\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=0$，则其秩 $r\leq 1$．

若 $r=0$，则在区域 D 上，$\frac{u}{x}=\frac{u}{y}=\frac{v}{x}=\frac{v}{y}=0$，即 u 与 v 是常数，则 u 与 v 函数相关 .

若 $r=1$，则 $\frac{u}{x}$，$\frac{u}{y}$，$\frac{v}{x}$，$\frac{v}{y}$ 至少有一个在 D 中某点 $M_0(x_0, y_0)$ 为零 . 设 $u_x(x_0, y_0)\neq 0$. 根据隐函数存在定理，方程 $u=u\quad x, y)$ 　　M_0 邻域内存在隐函数 $x=\phi\quad u, y)$
$u\equiv u\quad \phi(u, y), y]$ 而

$$\phi'_y(u, y)=-\frac{u'_y}{u'_x}.$$

另一方面，将 $x=\phi(u, y)$ 　　v 中，得

$$v=v\quad \phi(u, y), y]=\psi\quad u, y)$$

函数 ψ 对 y 求导数，有

$$\psi'_y=v'_x\phi'_y+v'_y=\frac{u'_xv'_y-u'_yv'_x}{u'_x}=0,$$

即 ψ 与 y 无关，仅与 u 有关，表为 $v=\psi\quad u)$ 　　u 与 v 在点 M_0 的某个邻域内函数相关，即 u 与 v 函数相关 .

说明　此例的证明根据函数相关的定义和偏导数的运算即可 . 应用此例的结果可证:

(1) 若函数 $f(x)$ 　　$a, b)$
数，则函数组 $u=f(x)+f(y)$ 　$v=f(x)f(y)$ 　　$x, y)\mid$
$a<x<b, a<y<b\}$

(2) 函数组 $u=\ln x+\ln y$，$v=\cos xy$ 在区域 　$x, y)\mid 0<x<+\infty, 0<y<+\infty\}$

(3) 设函数 $f(x, y)$ 　　$f\quad x, y)$

i) x^2+y^2 　或 ii) $\frac{y}{x}$

是函数相关，问函数 $f\quad x, y)$

例 4. 证明: 若函数组

$$y_1 = f_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

$$y_2 = f_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad x_1, x_2, \cdots, x_n) \in G \quad \mathbf{R}^n,$$

$$\cdots\cdots$$

$$y_m = f_m(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad m \leq n$$

在区域 G **上存在连续偏导数，且在** G **上函数相关，则它的雅可比矩阵** $\boldsymbol{J}$ $x)$ 2) m .

证法　应用函数相关的定义和偏导数的运算证明：雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ $x)$ $x \in G)$ m **阶行列式都是** 0 .

证明　已知函数组在 G **上函数相关，则至少存在一个函数**

$y_m)$ F，**使**

$$y_m(x) = F \quad y_1(x), \cdots, y_{m-1}(x)] \quad x \in G,$$

其中函数 F **存在连续偏导数 . 有**

$$\frac{f_m}{x_i} = \frac{F}{y_1}\frac{f_1}{x_i} + \frac{F}{y_2}\frac{f_2}{x_i} + \cdots + \frac{F}{y_{m-1}}\frac{f_{m-1}}{x_i}$$

$$= \sum_{k=1}^{m-1}\frac{F}{y_k}\frac{f_k}{x_i}, \quad i = 1, 2, \cdots, n .$$

于是，

$$\boldsymbol{J}(x) = \begin{matrix} \frac{f_1}{x_1} & \frac{f_1}{x_2} & \cdots & \frac{f_1}{x_n} \\ \frac{f_2}{x_1} & \frac{f_2}{x_2} & \cdots & \frac{f_2}{x_n} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \frac{f_{m-1}}{x_1} & \frac{f_{m-1}}{x_2} & \cdots & \frac{f_{m-1}}{x_n} \\ \sum_{k=1}^{m-1}\frac{F}{y_k}\frac{f_k}{x_1} & \sum_{k=1}^{m-1}\frac{F}{y_k}\frac{f_k}{x_2} & \cdots & \sum_{k=1}^{m-1}\frac{F}{y_k}\frac{f_k}{x_n} \end{matrix} .$$

根据行列式的性质，这个函数组的雅可比矩阵 $\boldsymbol{J}$ $x)$ m **阶行列式** $x \in G)$ 0，**即** $\boldsymbol{J}$ $x)$ m .

五、练习题 11.2 解法提要

3. 证明: **若** $u(x, y, z) \quad v(x, y, z)$

$$\frac{u}{x}\frac{(u, v)}{(y, z)} + \frac{u}{y}\frac{(u, v)}{(z, x)} + \frac{u}{z}\frac{(u, v)}{(x, y)} = 0 \ .$$

证法　求函数行列式 .

证明　$\frac{u}{x}\frac{(u, v)}{(y, z)} + \frac{u}{y}\frac{(u, v)}{(z, x)} + \frac{u}{z}\frac{(u, v)}{(x, y)}$

$$= \frac{u}{x}\begin{vmatrix} \frac{u}{y} & \frac{u}{z} \\ \frac{v}{y} & \frac{v}{z} \end{vmatrix} + \frac{u}{y}\begin{vmatrix} \frac{u}{z} & \frac{u}{x} \\ \frac{v}{z} & \frac{v}{x} \end{vmatrix} + \frac{u}{z}\begin{vmatrix} \frac{u}{x} & \frac{u}{y} \\ \frac{v}{x} & \frac{v}{y} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \frac{u}{x} & \frac{u}{y} & \frac{u}{z} \\ \frac{u}{x} & \frac{u}{y} & \frac{u}{z} \\ \frac{v}{x} & \frac{v}{y} & \frac{v}{z} \end{vmatrix} = 0 \ .$$

5. 证明: **若** $u = u(x, y, z) \quad v = v(x, y, z)$

而 $x = x(s, t) \quad y = y(s, t) \quad z = z(s, t)$

$$\frac{(u, v)}{(s, t)} = \frac{(u, v)}{(x, y)}\frac{(x, y)}{(s, t)} + \frac{(u, v)}{(y, z)}\frac{(y, z)}{(s, t)} + \frac{(u, v)}{(z, x)}\frac{(z, x)}{(s, t)} \ .$$

证法　已知

$$\frac{(u, v)}{(s, t)} = \begin{vmatrix} \frac{u}{s} & \frac{u}{t} \\ \frac{v}{s} & \frac{v}{t} \end{vmatrix} \ .$$

由复合函数求导法则分别求出 $\frac{u}{s}, \frac{u}{t}, \frac{v}{s}, \frac{v}{t}$. **根据行列式的运算法则**, **化简整理** .

§11.3 条 件 极 值

一、基本内容

本节有两段.

第一段回答了何谓条件极值?以及条件极值的数学形式.为了书写简单,给出了在两个四元方程作为联系方程组的条件下四元函数在一点取极值的必要条件
n 元函数 $y=f(x_1,\cdots,x_n)$ m 个联系方程时的条件极值的必要条件.

第二段给出了应用拉格朗日乘数法解条件极值的三个例题.

二、学习要求

实际中的极值问题很多都是条件极值问题.
取条件极值的必要条件,没有给出取条件极值的充分条件.因此,判别在某个稳定点上是否取条件极值,要根据它的实际意义来决定.要求:

1. 掌握取条件极值的必要条件(定理)
格朗日乘数法求条件极值.

2. 能将实际中的某些极值问题抽象为数学中的条件极值问题.

三、答疑辅导

问 1. 条件极值是否都可化为普通极值(无条件极值)

答 我们看到有些条件极值问题可以化为普通极值.例如,§10.4 的例 7.在已知条件 $xyz=V$ 之下,求函数

$$S=xy+(2x+2y)z$$

的最小值．从联系方程 $xyz = V$，解得 $z = \frac{V}{xy}$，于是，这个条件极值问题就化为求二元函数

$$S = xy + (2x + 2y) \cdot \frac{V}{xy}$$

的普通极值问题．

从理论上说，条件极值都可化为普通极值．从解题上说，有很多的条件极值不能直接化为普通极值．这是因为联系方程

联系方程组)

接化成普通极值．例如，求函数

$$f \quad x, y) = x^2 + y^2$$

的极值，联系方程是

$$\ln \quad x^2 + y^2 = \arctan \frac{y}{x}.$$

不难验证，联系方程在点 $0, 1)$

$y = \varphi \quad x)$　　　　　　$f \quad x, y) = x^2 + y^2$ 的条件极值就化为

元)

$$f \quad x, \varphi(x)] = x^2 + [\varphi(x)]^2$$

的普通极值．但是，这个联系方程所确定的隐函数 $y = \varphi \quad x)$ 不是初等函数．因此并不能直接化为普通极值．这说明拉格朗日乘数法的优越性．有的条件极值，例如，求函数

$$f \quad x, y, z) = xy^2 z^3$$

的极值，联系方程组是

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

$$x + y + z = 0.$$

虽然我们能从联系方程组中解出　　　　$x = \varphi \quad z)$　　$y = \psi \quad z)$ 使条件极值化为

$$f \quad \varphi(z), \psi(z), z] = \varphi \quad z) [\psi(z)]^2 z^3$$

的普通极值，但是从联系方程组中解出函数 $x = \varphi \quad z)$　　$y = \psi \quad z)$需要经过复杂的计算，这就失去了化为普通极值的实际意

义. 这也表明拉格朗日乘数法的优越性.

问 2. 条件极值的充分条件是什么?

答 讨论函数 $f\ x_1, x_2, x_3, x_4)$

$$F_1(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0,$$

$$F_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = 0$$

的条件极值. 设函数 f, F_1, F_2 存在连续的二阶偏导数, 且点 $P_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0)$

$$\Phi = f + \lambda_1 F_1 + \lambda_2 F_2$$

的稳定点, 函数 f 在点 $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$

于在点 P_0 的邻域内, 差

$$\Delta = f\ x_1, x_2, x_3, x_4) - f\ x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$$

的符号. 当 $\lambda_1 = \lambda_1^0$, $\lambda_2 = \lambda_2^0$ 时, 函数 f 的改变量可改为辅助函数 Φ 的改变量, 即

$$\Delta = \Phi\ x_1, x_2, x_3, x_4) - \Phi\ x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$$

根据多元函数的泰勒公式,

阶偏导数连续与

$$\frac{\Phi}{x_i} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, 4)$$

有
$$\Delta = \frac{1}{2} \sum_{i,k=1}^{4} A_{ik} \Delta x_i \Delta x_k + \sum_{i,k=1}^{4} \alpha_{ik} \Delta x_i \Delta x_k ,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_i^0$, $A_{ik} = \Phi''_{x_i x_k}(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$ $i, k = 1, 2, 3, 4$. $\alpha_{i,k} \to 0$ 当 $\sum_{i=1}^{4} \Delta x_i^2 \to 0$. 因此当每个 $|\Delta x_i|$ 充分小时, Δ 的符号与二次型 $\sum_{i,k=1}^{4} A_{ik} \Delta x_i \Delta x_k$ $(A_{ik} = A_{ki})$

1) 若二次型 $\sum_{i,k=1}^{4} A_{ik} \Delta x_i \Delta x_k$ 是正定的, 即

$$A_{11} > 0, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} > 0,$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} > 0,$$

则在点 $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$

2) 若二次型 $\sum\limits_{i,k=1}^{4} A_{ik}\Delta x_i \Delta x_k$ 是负定的，即

$$A_{11} < 0, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} > 0, \quad \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} < 0,$$

$$\begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} & A_{14} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} & A_{24} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} & A_{34} \\ A_{41} & A_{42} & A_{43} & A_{44} \end{vmatrix} > 0,$$

则在点 $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$

3) 若二次型 $\sum\limits_{i,k=1}^{4} A_{ik}\Delta x_i \Delta x_k$ 是不定的，则在点 $M_0(x_1^0, x_2^0, x_3^0, x_4^0)$

因为条件极值的充分条件很繁杂，所以没有什么实用价值 .

四、补充例题

例 1. 将一个正数 a 分解为 n 个非负数之和，并使其乘积为最大 .

解法　用拉格朗日乘数法 .

解　设 n 个非负数是 x_1，x_2，…，x_n，求函数

$$f\quad x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 x_2 \cdots x_n, \qquad x_i \geq 0, i = 1, 2, \cdots, n)$$

在条件

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = a$$

之下的最大值 . 我们注意到，它的最小值显然是 0 . 作辅助函数

$$\Phi\quad x_1, x_2, \cdots, x_n, \lambda) = x_1 x_2 \cdots x_n + \lambda\quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a)$$

求

$$\frac{\Phi}{x_1} = x_2 x_3 \cdots x_n + \lambda = 0,$$

$$\frac{\Phi}{x_2} = x_1 x_3 \cdots x_n + \lambda = 0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$\frac{\Phi}{x_n} = x_1 x_2 \cdots x_{n-1} + \lambda = 0,$$

$$\frac{\Phi}{\lambda} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n - a = 0 .$$

将前 n **个方程分别乘上** x_1, x_2, $\cdots$, x_n, **即**

$$x_1 x_2 \cdots x_n + x_1 \lambda = 0,$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n + x_2 \lambda = 0,$$

$$\cdots\cdots$$

$$x_1 x_2 \cdots x_n + x_n \lambda = 0 .$$

有 $x_1 \lambda = x_2 \lambda = \cdots = x_n \lambda$. **再由联系方程**

$$\lambda\quad x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = a, \quad n x_i = a, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

解得 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{a}{n}$, **即等分时** n **个数的乘积为最大，这是唯一一个稳定点，取到最大是显然的，于是，得到**

$$x_1 x_2 \cdots x_n \leq \quad \frac{a}{n}\quad^{n} = \quad \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}\quad^{n},$$

或

$$^{n}\ x_1 x_2 \cdots x_n \leq \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} .$$

即 n **个非负的实数的几何平均值不超过它们的算术平均值．等号当且仅当** $x_1 = x_2 = \cdots = x_n$ **时成立．**

例 2. 求有心二次曲线

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 = 1 \quad (b^2 - ac \neq 0)$$

的长短半轴．

解法 设平面上的动点(x, y)

$$d=\sqrt{x^2+y^2},\quad d^2=x^2+y^2 .$$

求函数 $d^2=x^2+y^2$ **在条件**

$$ax^2+2bxy+cy^2=1$$

下的最大值与最小值．连续函数 d^2 **在有心二次曲线上必取到最大值与最小值．应用拉格朗日乘数法．**

解 **作辅助函数**

$$\Phi=x^2+y^2+\lambda(ax^2+2bxy+cy^2-1)$$

令

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x}=2x+2\lambda(ax+by)=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y}=2y+2\lambda(bx+cy)=0,$$

即

$$(1+\lambda a)x+\lambda by=0, \qquad (*)$$

$$\lambda bx+(1+\lambda c)y=0 . \qquad (**)$$

$(*)$ x **加** $**)$ y，**已知** $ax^2+2bxy+cy^2=1$，**有**

$$x^2+y^2+\lambda(ax^2+2bxy+cy^2)=x^2+y^2+\lambda=0,$$

即 $d^2=-\lambda$．**齐次方程组** $*)$ $**)$

$$\begin{vmatrix} 1+\lambda a & \lambda b \\ \lambda b & 1+\lambda c \end{vmatrix}=0,$$

即

$$(ac-b^2)\lambda^2+(a+c)\lambda+1=0,$$

$$\lambda_{1,2}=\frac{-(a+c)\pm\sqrt{(a+c)^2-4(ac-b^2)}}{2(ac-b^2)}$$

$$=\frac{-(a+c)\pm\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2(ac-b^2)} .$$

于是，$d_1^2=-\lambda_1$ **与** $d_2^2=-\lambda_2$，**即**

$$d_1^2=\frac{a+c-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2(ac-b^2)} \text{ 与 } d_2^2=\frac{a+c+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2(ac-b^2)} .$$

所给的曲线关于原点对称，d_1 与 d_2 即为所求的两个半轴．

例3. 三角形的三个顶点分别位于三条曲线 $f(x, y)=0$，$g(x, y)=0$，$h(x, y)=0$ 上，若三角形面积取极值，证明每条曲线在三角形的顶点处的法线必通过该三角形的垂心．

证法 应用拉格朗日乘数法，若三角形面积取极值，求出三角形的三个顶点坐标．只须证明每条曲线在三角形的顶点处的法线与通过三角形另外两个顶点的直线垂直，即法线必通过该三角形的垂心．

证明 设三角形 ABC 的顶点在三条曲线上的坐标分别是 $A(x_1, y_1)$，$B(x_2, y_2)$ $C(x_3, y_3)$

$$f(x_1, y_1)=0, \quad g(x_2, y_2)=0, \quad h(x_3, y_3)=0 .$$

已知三角形 ABC 的面积

$$S=\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} .$$

作辅助函数

$$\Phi=S+\lambda_1 f(x_1, y_1)+\lambda_2 g(x_2, y_2)+\lambda_3 h(x_3, y_3)$$

令

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x_1}=\frac{1}{2}(y_2-y_3)+\lambda_1 f'_{x_1}=0,$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial y_1}=\frac{1}{2}(x_3-x_2)+\lambda_1 f'_{y_1}=0 .$$

解得

$$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}\times\frac{f'_{y_1}}{f'_{x_1}}=-1 . \qquad (*)$$

不难证明，f'_{y_1}/f'_{x_1}是曲线 $f(x, y)=0$ 在点(x_1, y_1)

斜率，$\frac{y_3-y_2}{x_3-x_2}$是过两点 (x_2, y_2) (x_3, y_3)

$(*)$ $f(x, y)=0$ 在点(x_1, y_1)

另外两个顶点的直线．

同理可证, 三角形的其他两个顶点也具有上述的性质, 即每条曲线在三角形的顶点处的法线必通过该三角形的垂心 .

五、练习题 11.3 解法提要

4. 求椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 在第一卦限部分上的切平面与三个坐标面围成四面体的最小体积 .

解法　在椭球面上任取一点 (x_0, y_0, z_0) 　$x_0>0, y_0>0, z_0>0)$. 　　$x_0, y_0, z_0)$

是点 $x_0, y_0, z_0)$

程 .

5. 求抛物线 $y=x^2$ 与直线 $x-y-2=0$ 之间的距离(即最短距离)

解法　已知动点 (x, y) 　　$x-y-2=0$ 的距离

$$d=\frac{|x-y-2|}{2}.\quad d^2=\frac{1}{2}(x-y-2)^2.$$

求 $d^2=\frac{1}{2}(x-y-2)^2$ 在联系方程 $y=x^2$ 之下的最小值, 其最小值的平方根就是最短距离 .

* 　　* 　　* 　　*

6. 求二次型

$$f\quad x, y, z)=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy$$

满足联系方程

$$x^2+y^2+z^2=1$$

的最小值与最大值 .

解法　作辅助函数

$$\Phi=Ax^2+By^2+Cz^2+2Dyz+2Ezx+2Fxy-\lambda\quad x^2+y^2+z^2-1)$$

令

$$\left.\begin{aligned}\frac{\Phi}{x} &= 2Ax + 2Ez + 2Fy - 2\lambda x = 0,\\ \frac{\Phi}{y} &= 2By + 2Dz + 2Fx - 2\lambda y = 0,\\ \frac{\Phi}{z} &= 2Cz + 2Dy + 2Ex - 2\lambda z = 0,\\ \frac{\Phi}{\lambda} &= x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0 .\end{aligned}\right\} \quad (1)$$

二次型函数 $f\ \ x, y, z)$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上必取到极值，则 Φ 必存在稳定点，即方程组 1)
$(x_1, y_1, z_1, \lambda_1)$ 四个方程，有 $x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1$，$x_1$，$y_1$，$z_1$ 不能同时为 0，从而 $x_1, y_1, z_1, \lambda_1)$ 1)
的线性方程组

$$\left.\begin{aligned}(A-\lambda)x + Fy + Ez &= 0,\\ Fx + (B-\lambda)y + Dz &= 0,\\ Ex + Dy + (C-\lambda)z &= 0,\end{aligned}\right\} \quad (2)$$

的一组非零解，有非零解的充分必要条件是系数行列式等于零，即

$$\begin{vmatrix} A-\lambda & F & E \\ F & B-\lambda & D \\ E & D & C-\lambda \end{vmatrix} = 0 . \quad (3)$$

这是 λ 的三次方程，λ_1 必是这个三次方程的根，即 λ_1 是对称矩阵

$$\begin{matrix} A & F & E \\ F & B & D \\ E & D & C \end{matrix}$$

的特征值．λ 的三次方程 3) λ_1，λ_2，λ_3，设 $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \lambda_3$，Φ 对应三个稳定点是

$$(x_1, y_1, z_1, \lambda_1) \qquad x_2, y_2, z_2, \lambda_2) \qquad x_3, y_3, z_3, \lambda_3)$$

将稳定点 $(x_3, y_3, z_3, \lambda_3)$ 2) x_3，y_3，z_3 分别乘方程组 2)

$$Ax_3^2 + By_3^2 + Cz_3^2 + 2Dy_3z_3 + 2Ez_3x_3 + 2Fx_3y_3 - \lambda_3(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) = 0,$$

即
$$f(x_3, y_3, z_3) = \lambda_3(x_3^2 + y_3^2 + z_3^2) = \lambda_3 .$$

同理有 $f(x_1, y_1, z_1) = \lambda_1$, $f(x_2, y_2, z_2) = \lambda_2$.

二次型函数 $f(x, y, z)$ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的最大(小)是最 $\lambda_3(\lambda_1)$

7. 证明不等式

$$\frac{x^n + y^n}{2} \geq \left(\frac{x + y}{2}\right)^n，其中\ n \geq 1,\ x \geq 0,\ y \geq 0 .$$

证法　如果不论非负数 x 与 y 取什么数，而 $x + y$ 总是常数，设 $x + y = c$，则函数 $u = \frac{1}{2}(x^n + y^n)$ $x + y = c$ 必取最小值，而最小值是 $\left(\frac{c}{2}\right)^n$，即所证的不等式 .

8. 证明：赫尔德不等式

$$\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}},$$

其中 $a_i \geq 0$，$b_i \geq 0$，$i = 1, 2, \cdots, n$，$q > 1$，且 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

证法　将赫尔德不等式改写为

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} a_i b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}},$$

或

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \frac{b_i}{\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^p\right)^{\frac{1}{p}}} \leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}} .$$

不难看出，$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^q\right)^{\frac{1}{q}}$ 就是 n 元函数

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \qquad (*)$$

在条件 $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1$ 之下所取到的最大值．于是，用条件极值证明赫尔德不等式，就是求 n 元函数 $*)$ $\sum_{i=1}^{n} x_i^p = 1$ 之下的最大值．

§11.4　隐函数存在定理在几何方面的应用

一、基本内容

本节有两段．

第一段空间曲线的切线与法平面．由于给出的空间曲线方法不同，它的切线与法平面的形式就不同．这里给出当空间曲线是由参数方程或两个曲面的交线表示时的切线与法平面的方程．

第二段是曲面的切平面与法线．由于给出的曲面方法不同，它的切平面与法线的形式就不同．这里给出空间曲面的方程是 $z = f\quad x, y)$　$F\quad x, y, z) = 0$ 及曲面由参数方程表示时的切平面与法线的方程．

二、学习要求

本节主要是隐函数理论的应用，在求两个曲面的交线的切线与法平面，以及空间曲面的切平面与法线要应用隐函数的理论．

1. 要求知道、会求空间曲线的切线与法平面的方程以及空间曲面的切平面与法线的方程．

2. 知道隐函数的理论在这些几何方面的简单应用．

三、答疑辅导

问 1. 怎样讨论空间两曲面的交线的切线与法平面？

答　首先讨论是由参数方程

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t), \quad t \in I$$

给出的曲线 C 在其上一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$

简单，曲线 C 在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{x - x \quad t_0)}{x' \quad t_0)} = \frac{y - y \quad t_0)}{y' \quad t_0)} = \frac{z - z \quad t_0)}{z' \quad t_0)}.$$

切线的方向向量是 $\boldsymbol{T}(x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$　　切向量．

若曲线是两个曲面

$$F_1(x, y, z) = 0, \quad F_2(x, y, z) = 0$$

的交线，点 $P \quad x_0, y_0, z_0)$　　C 上的一点，即 $F_1(x_0, y_0, z_0) = 0$，$F_2(x_0, y_0, z_0) = 0$．要应用隐函数存在定理，从函数方程中，证明存在隐函数组 $y = y \quad x)$　$z = z \quad x)$

足隐函数定理的条件，为此设函数 F_1，F_2 在点 P 的邻域有连续的偏导数，且

$$\left.\frac{(F_1, F_2)}{(x, y)}\right|_P, \quad \left.\frac{(F_1, F_2)}{(y, z)}\right|_P, \quad \left.\frac{(F_1, F_2)}{(z, x)}\right|_P$$

不同时为 0，不妨设 $\left.\frac{(F_1, F_2)}{(y, z)}\right|_P \neq 0$．这样才能保证存在连续和偏导数连续的隐函数组 $y = y \quad x)$　$z = z \quad x)$

曲面相交的曲线化成了以 x 为参数的参数方程

$$x = x, \quad y = y \quad x) \quad z = z \quad x)$$

于是，应用上面讨论的切线方程公式，知道切向量是 $\boldsymbol{T}\ 1, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}$．然后由隐函数定理，求得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{(F_1, F_2)}{(z, x)}}{\dfrac{(F_1, F_2)}{(y, z)}}, \qquad \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{(F_1, F_2)}{(x, y)}}{\dfrac{(F_1, F_2)}{(y, z)}}.$$

问 2. 将曲线的切线和法平面，曲面的切平面和法线用列表的形式，是否能更清楚，更便于查阅和记忆呢？

答　可以．为更清楚和便于查阅，列表于下：

曲线方程	切 线 方 程	法平面方程
参数式 $x=x(t)$, $y=y(t)$ **在点** $z=z(t)$ $P[x(t_0), y(t_0), z(t_0)]$	$\dfrac{x-x(t_0)}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y(t_0)}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z(t_0)}{z'(t_0)}$.	$x'(t_0)[x-x(t_0)]+y'(t_0)[y-y(t_0)]+z'(t_0)[z-z(t_0)]=0$.
交面式 $F(x,y,z)=0$, $\Phi(x,y,z)=0$. **在点** $P(x_0,y_0,z_0)$ $F(x_0,y_0,z_0)=0$, $\Phi(x_0,y_0,z_0)=0$.	$\dfrac{x-x_0}{\begin{vmatrix}F_y' & F_z' \\ \Phi_y' & \Phi_z'\end{vmatrix}_P}=\dfrac{y-y_0}{\begin{vmatrix}F_z' & F_x' \\ \Phi_z' & \Phi_x'\end{vmatrix}_P}=\dfrac{z-z_0}{\begin{vmatrix}F_x' & F_y' \\ \Phi_x' & \Phi_y'\end{vmatrix}_P}$.	$\begin{vmatrix}F_y' & F_z' \\ \Phi_y' & \Phi_z'\end{vmatrix}_P(x-x_0)+\begin{vmatrix}F_z' & F_x' \\ \Phi_z' & \Phi_x'\end{vmatrix}_P(y-y_0)+\begin{vmatrix}F_x' & F_y' \\ \Phi_x' & \Phi_y'\end{vmatrix}_P(z-z_0)=0$.

曲面方程	切平面方程	法 线 方 程
$z=f(x,y)$ **在点** $P(x_0,y_0)$ $z_0=f(x_0,y_0)$	$z-z_0=f_x'(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y'(x_0,y_0)(y-y_0)$	$\dfrac{x-x_0}{f_x'(x_0,y_0)}=\dfrac{y-y_0}{f_y'(x_0,y_0)}=\dfrac{z-z_0}{-1}$.
$F(x,y,z)=0$ **在点** $P(x_0,y_0,z_0)$ $F(x_0,y_0,z_0)=0$.	$F_x'\big\vert_P(x-x_0)+F_y'\big\vert_P(y-y_0)+F_z'\big\vert_P(z-z_0)=0$.	$\dfrac{x-x_0}{F_x'\big\vert_P}=\dfrac{y-y_0}{F_y'\big\vert_P}=\dfrac{z-z_0}{F_z'\big\vert_P}$.

续表

曲面方程	切平面方程	法 线 方 程
参数式 $x = x\ \ u, v)$ $y = y\ \ u, v)$ $z = z\ \ u, v)$ 在点 $P\ \ u_0, v_0)$ $x_0 = x\ \ u_0, v_0)$ $y_0 = y\ \ u_0, v_0)$ $z_0 = z\ \ u_0, v_0)$	$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u'\big\|_P & y_u'\big\|_P & z_u'\big\|_P \\ x_v'\big\|_P & y_v'\big\|_P & z_v'\big\|_P \end{vmatrix} = 0 .$	$\dfrac{x - x_0}{\begin{vmatrix} y_u' & z_u' \\ y_v' & z_v' \end{vmatrix}_P} = \dfrac{y - y_0}{\begin{vmatrix} z_u' & x_u' \\ z_v' & x_v' \end{vmatrix}_P} = \dfrac{z - z_0}{\begin{vmatrix} x_u' & y_u' \\ x_v' & y_v' \end{vmatrix}_P} .$

四、补充例题

例 1. 求曲线 $x = t,\ \ y = t^2,\ \ z = t^3$ **在点** $\ 1, 1, 1)$ **法平面方程 .**

解 首先求切向量 .

$$\frac{dx}{dt} = 1, \qquad \frac{dy}{dt} = 2t, \qquad \frac{\ z}{\ t} = 3t^2 .$$

在点 $\ 1, 1, 1)$ $\qquad \boldsymbol{T}\ (1, 2, 3)$

$$\frac{x - 1}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 1}{3} .$$

法平面方程是

$$x - 1 + 2(y - 1) + 3(z - 1) = 0$$

或

$$x + 2y + 3z = 6 .$$

例 2. 求曲线 $x^2 + y^2 + z^2 = 6,\ \ x + y + z = 0$ **在点** $(1, -2, 1)$ **切线方程和法平面方程**

解 首先求切向量 . 给定的函数对 x 求偏导数, 得

$$\begin{cases} 2x+2y\dfrac{dy}{dx}+2z\dfrac{dz}{dx}=0, \\ 1+\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=0, \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} y\dfrac{dy}{dx}+z\dfrac{dz}{dx}=-x, \\ \dfrac{dy}{dx}+\dfrac{dz}{dx}=-1 . \end{cases}$$

从中解得

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} -x & z \\ -1 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{z-x}{y-z}, \qquad \frac{dz}{dx}=\frac{\begin{vmatrix} y & -x \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y & z \\ 1 & 1 \end{vmatrix}}=\frac{x-y}{y-z} .$$

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=0, \qquad \left.\frac{dz}{dx}\right|_{(1,-2,1)}=-1 .$$

于是，切向量是 $\boldsymbol{T}(1,0,-1)$

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+2}{0}=\frac{z-1}{-1} .$$

法平面的方程是

$$(x-1)+0(y+2)-(z-1)=0$$

或
$$x-z=0 .$$

例 3. 求两个柱面 $x^2+y^2=a^2$ 与 $x^2+z^2=a^2$ 的交线在点 $P\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ 的曲线方程与法平面方程．

解 设
$$\begin{aligned} \Phi(x,y,z) &= x^2+y^2-a^2, \\ \Psi(x,y,z) &= x^2+z^2-a^2, \end{aligned}$$

首先求切向量．

$$\frac{\partial(\Phi,\Psi)}{\partial(y,z)}=4yz, \quad \frac{\partial(\Phi,\Psi)}{\partial(z,x)}=-4xz, \quad \frac{\partial(\Phi,\Psi)}{\partial(x,y)}=-4xy .$$

在点 $P\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ 的切向量是 $\boldsymbol{T}(2a^2,-2a^2,-2a^2)$

切线方程是

$$\frac{x-\frac{a}{2}}{2a^2}=\frac{y-\frac{a}{2}}{-2a^2}=\frac{z-\frac{a}{2}}{-2a^2},$$

法平面方程是

$$2a^2\left(x-\frac{a}{2}\right)-2a^2\left(y-\frac{a}{2}\right)-2a^2\left(z-\frac{a}{2}\right)=0,$$

或
$$x-y-z+\frac{a}{2}=0\ .$$

例 4. 求球面 $x^2+y^2+z^2=14$ 在点 $(1,2,3)$
线方程 .

解 设 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$, 则

$$F'_x(x,y,z)=2x,\quad F'_y(x,y,z)=2y,\quad F'_z(x,y,z)=2z\ .$$

在点 $(1,2,3)$
$$\boldsymbol{n}\Big|_{(1,2,3)}=(2,4,6)$$

于是, 切平面方程是

$$x+2y+3z-14=0\ .$$

法线方程是

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-2}{2}=\frac{z-3}{3}\ .$$

例 5. 求空间曲线

$$x^2+y^2+z^2=\frac{9}{4},$$

$$3x^2+(y-1)^2+z^2=\frac{17}{4}$$

上对应于 $x=1$ 的点处的切线方程与法平面方程 .

解 当 $x=1$ 时, 有

$$y^2+z^2=\frac{5}{4},$$

$$(y-1)^2+z^2=\frac{5}{4}\ .$$

解得 $\left(\frac{1}{2},1\right)$ 与 $\left(\frac{1}{2},-1\right)$.

对应于 $x=1$ 的点是 $P\left(1,\frac{1}{2},1\right)$, $Q\left(1,\frac{1}{2},-1\right)$.

设

$$F_1 = x^2 + y^2 + z^2 - \frac{9}{4},$$

$$F_2 = 3x^2 + (y-1)^2 + z^2 - \frac{17}{4}.$$

$$\frac{(F_1, F_2)}{(y, z)} = \begin{vmatrix} \frac{F_1}{y} & \frac{F_1}{z} \\ \frac{F_2}{y} & \frac{F_2}{z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2y & 2z \\ 2(y-1) & 2z \end{vmatrix} = 4z.$$

$$\frac{(F_1, F_2)}{(z, x)} = \begin{vmatrix} \frac{F_1}{z} & \frac{F_1}{x} \\ \frac{F_2}{z} & \frac{F_2}{x} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2z & 2x \\ 2z & 6x \end{vmatrix} = 8xz.$$

$$\frac{(F_1, F_2)}{(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{F_1}{x} & \frac{F_1}{y} \\ \frac{F_2}{x} & \frac{F_2}{y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2x & 2y \\ 6x & 2(y-1) \end{vmatrix} = -4x - 8xy.$$

在点 $P\ 1, \frac{1}{2}, 1$ ，**有**

$$\left.\frac{(F_1, F_2)}{(y, z)}\right|_P = 4, \quad \left.\frac{(F_1, F_2)}{(z, x)}\right|_P = 8, \quad \left.\frac{(F_1, F_2)}{(x, y)}\right|_P = -8,$$

于是，切线方程与法平面方程分别是

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{2} = \frac{z-1}{-2}$$

与 $$x + 2y - 2z = 0.$$

在点 $Q\ 1, \frac{1}{2}, -1$ ，**有**

$$\left.\frac{(F_1, F_2)}{(y, z)}\right|_Q = -4, \quad \left.\frac{(F_1, F_2)}{(z, x)}\right|_Q = -8, \quad \left.\frac{(F_1, F_2)}{(x, y)}\right|_Q = -8.$$

于是，切线方程与法平面方程分别是

$$\frac{x-1}{-1} = \frac{y - \frac{1}{2}}{-2} = \frac{z+1}{-2}$$

与 $$x + 2y + 2z = 0 .$$

例 6. 当 $\lambda = \lambda_1$, $\lambda = \lambda_2$, $\lambda = \lambda_3$ **时, 经过一点** $M\ \ x, y, z)$
三个二次曲面

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} = -1 \quad (a > b > c > 0) .$$

证明: **这三个曲面在点** $M\ \ x, y, z)$

证法　就是证明在点 $M\ \ x, y, z)$
互相直交, 即任意两个法向量的内积为 0 .

证明　设 $f\ \ x, y, z) = \frac{x^2}{a^2 - \lambda^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda^2} + 1$,

$$\frac{f}{x} = \frac{2x}{a^2 - \lambda^2}, \quad \frac{f}{y} = \frac{2y}{b^2 - \lambda^2}, \quad \frac{f}{z} = \frac{2z}{c^2 - \lambda^2} .$$

于是, 过 $M\ \ x, y, z)$

$$\frac{X - x}{\frac{x}{a^2 - \lambda_i^2}} = \frac{Y - y}{\frac{y}{b^2 - \lambda_i^2}} = \frac{Z - z}{\frac{z}{c^2 - \lambda_i^2}}, \quad i = 1, 2, 3 .$$

过 $M\ \ x, y, z)$ $\frac{x}{a^2 - \lambda_i^2}$, $\frac{y}{b^2 - \lambda_i^2}$, $\frac{z}{c^2 - \lambda_i^2}$,
$i = 1, 2, 3$.

已知

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda_i^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_i^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda_i^2} = -1, \qquad i, j = 1, 2, 3, \text{ 且 } i \neq j .$$

$$\frac{x^2}{a^2 - \lambda_j^2} + \frac{y^2}{b^2 - \lambda_j^2} + \frac{z^2}{c^2 - \lambda_j^2} = -1,$$

上述二式相减, 整理, 有

$$\frac{x^2 (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)}{(a^2 - \lambda_i^2)\ \ a^2 - \lambda_j^2)} + \frac{y^2 (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)}{(b^2 - \lambda_i^2)\ \ b^2 - \lambda_j^2)} + \frac{z^2 (\lambda_i^2 - \lambda_j^2)}{(c^2 - \lambda_i^2)\ \ c^2 - \lambda_j^2)} = 0 .$$

上式除以 $\lambda_i^2 - \lambda_j^2$, **即**

$$\frac{x^2}{(a^2 - \lambda_i^2)\ \ a^2 - \lambda_j^2)} + \frac{y^2}{(b^2 - \lambda_i^2)\ \ b^2 - \lambda_j^2)} + \frac{z^2}{(c^2 - \lambda_i^2)\ \ c^2 - \lambda_j^2)}$$

$$= \frac{x}{a^2-\lambda_i^2}, \frac{y}{b^2-\lambda_i^2}, \frac{z}{c^2-\lambda_i^2} \cdot \frac{x}{a^2-\lambda_j^2}, \frac{y}{b^2-\lambda_j^2}, \frac{z}{c^2-\lambda_j^2} = 0 .$$

$$i, \ j=1, 2, 3, \text{且 } i \neq j .$$

即上述过 $M \quad x, y, z)$

五、练习题 11.4 解法提要

2. 在曲线 $x=t$, $y=t^2$, $z=t^3$ **上求出一点，使此点的切线平行于平面** $x+2y+z=4$.

解法 $\qquad x'=1, \qquad y'=2t, \qquad z'=3t^2$.

已知切线的方向向量是 $(1, 2t, 3t^2)$ $\qquad x+2y+z=4$ **的法向量是** $(1, 2, 1)$

$1, 2t, 3t^2) \qquad 1, 2, 1)$

$$1\cdot1+2\cdot2t+1\cdot3t^2=0 \quad \text{或} \quad 3t^2+4t+1=0 .$$

解得 $t=-1$, $t=-\frac{1}{3}$. **于是，曲线上的切点是**

当 $t=-1$ **时，切点是** $-1, 1, -1)$

当 $t=-\frac{1}{3}$**时，切点是** $-\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, -\frac{1}{27}$.

3. 求曲线 $x^2+z^2=10$, $y^2+z^2=10$ **在点** $P \quad 1, 1, 3)$ **程与法平面方程** .

解法 设 $F_1(x, y, z)=x^2+z^2-10$,

$F_2(x, y, z)=y^2+z^2-10$.

有 $\left.\frac{(F_1, F_2)}{(y, z)}\right|_P=-12$, $\left.\frac{(F_1, F_2)}{(z, x)}\right|_P=-12$, $\left.\frac{(F_1, F_2)}{(x, y)}\right|_P=4$.

于是，切线方程是

$$\frac{x-1}{-12}=\frac{y-1}{-12}=\frac{z-3}{4} \quad \text{或} \quad \frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{3}=\frac{z-3}{-1} .$$

法平面方程是

$$3(x-1)+3(y-1)-(z-3)=0 \text{ 或 } 3x+3y-z=3 .$$

5. 求曲面 $x^2+2y^2+3z^2=21$ **的切平面，使其平行于平面**

$x+4y+6z=0$.

解法 设 $F\ \ x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$.

$$\frac{F}{x}=2x,\qquad \frac{F}{y}=4y,\qquad \frac{F}{z}=6z\ .$$

于是，在曲面 $F\ \ x,y,z)=0$ **上点**(x_0,y_0,z_0)

向向量是 $2x_0,4y_0,6z_0)$

平面 $x+4y+6z=0$ **的法线的方向向量是**$(1,4,6)$

面平行于平面 $x+4y+6z=0$，**则有**

$$\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{4}=\frac{3z_0}{6}=k$$

解得 $x_0=k$，$y_0=z_0=2k$，**即点** $x_0,y_0,z_0)=(k,2k,2k)$

因为点$(k,2k,2k)$ $F\ \ x,y,z)=0$ **上，有方程**

$$k^2+2\ (2k)^2\ +3\ (2k)^2\ =21\ .$$

解得 $k=\pm1$. $k=1$ **时，切点是** $1,2,2)$ $k=-1$ **时，切点是** $(-1,-2,-2)$ **是，有两个切平面，它们的方程分别是**

$$x\pm1+4\ (y\pm2)+6\ (z\pm2)=0\ \text{或}\ x+4y+6z=\pm21\ .$$

* * * *

8. 证明：**若二曲面** $F_1\ (x,y,z)=0$，$F_2\ (x,y,z)=0$ **在点** $P\ \ x_0,y_0,z_0)$ **交** P **的法线垂直**)

$P\ \ x_0,y_0,z_0)$

$$\frac{F_1}{x}\frac{F_2}{x}+\frac{F_1}{y}\frac{F_2}{y}+\frac{F_1}{z}\frac{F_2}{z}=0\ .$$

并验证二曲面 $3x^2+2y^2=2z+1$，$x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$ **在点**$(1,1,2)$

证法 **二曲面** $F_1\ (x,y,z)=0$，$F_2\ (x,y,z)=0$ **在点** $P\ \ x_0,y_0,z_0)$ **法向量分别是**

$$\boldsymbol{n}_1=\left.\frac{F_1}{x},\ \frac{F_1}{y},\ \frac{F_1}{z}\ \right|_P\ \text{与}\quad \boldsymbol{n}_2=\left.\frac{F_2}{x},\ \frac{F_2}{y},\ \frac{F_2}{z}\ \right|_P\ .$$

已知在点 $P\ \ x_0,y_0,z_0)$ $\boldsymbol{n}_1$ **与** $\boldsymbol{n}_2$ **垂直，则** $\boldsymbol{n}_1\cdot\boldsymbol{n}_2=0$，**即在点**

$P \quad x_0, y_0, z_0)$

$$\frac{F_1}{x}\frac{F_2}{x}+\frac{F_1}{y}\frac{F_2}{y}+\frac{F_1}{z}\frac{F_2}{z}=0 .$$

验证二曲面 $3x^2+2y^2=2z+1,\quad x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$ **在点** $(1,1,2)$

9. 证明: **曲面** $F \quad nx-lz, ny-mz)=0$ **上任意一点的切平面都平行于直线** $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

证法　设 $W=F \quad u,v) \quad u=nx-lz,\ v=ny-mz$.

$$\frac{W}{x}=F'_u\cdot n,\quad \frac{W}{y}=F'_v\cdot n,\quad \frac{W}{z}=-(F'_u\cdot l+F'_v\cdot m)$$

从而, **曲面** $F \quad u,v)=0$ **上任意一点** (x,y,z)

$$(nF'_u, nF'_v, -lF'_u-mF'_v)$$

而直线 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$ **的方向向量是** $l,m,n)$

对曲面 $F \quad u,v)=0$ **上任意一点** (x,y,z)

$$l\cdot nF'_u+m\cdot nF'_v+n \quad -lF'_u-mF'_v \quad =0 .$$

即曲面 $F \quad nx-lz, ny-mz)=0$ **上任意一点** (x,y,z)

平行于直线 $\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$.

第十一章自我测验题

1. 问方程 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ **在** $[-1,1]$

1) **多少个隐函数**? 2) **多少个连续的隐函数**?

2. 求方程 $y-\varepsilon\sin y=x \quad 0<\varepsilon<1)$ $y=f \quad x)$

的导数 $\frac{dy}{dx}$ **与** $\frac{d^2y}{dx^2}$.

3. 求方程组

$$x=u+v,\quad y=u^2+v^2,\quad z=u^3+v^3$$

确定的函数 $z = \varphi\ x, y)$ $\frac{z}{x}, \frac{z}{y}$.

4. 证明: 由方程 $y = x\varphi\ z) + \psi\ z)$ $z = z\ x, y)$ $x\varphi'(z) + \psi'(z) \neq 0)$ 足微分方程

$$\frac{^2 z}{x^2}\ \frac{z}{y}\ ^2 - 2\frac{z}{x}\frac{z}{y}\frac{^2 z}{x\ y} + \frac{^2 z}{y^2}\ \frac{z}{x}\ ^2 = 0 .$$

5. 求曲面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 21$ 的平行于平面

$$x + 4y + 6z = 0$$

的各切平面 .

6. 求在两个曲面

$$F_1(x, y, z) = 3x^2 + 2y^2 - 2z - 1 = 0,$$

$$F_2(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 2z + 2 = 0$$

交线上点 $1,1,2)$

程与法平面方程 .

7. 求曲面 $xyz = 1$ 上任意一点 (α, β, γ)

方程, 并证明切平面与三个坐标面所围成的体积是常数 .

8. 证明: 若函数 $u = f\ x, y, z)$ $\varphi\ x, y, z) = 0$ 的条件下在点 (x_0, y_0, z_0) f 与 φ 存在连续偏导数, 则二曲面 $\varphi\ x, y, z) = 0$ 与 $f\ x, y, z) = u_0\ (u_0 = f(x_0, y_0, z_0))$ $x_0, y_0, z_0)$

9. 证明: 1) 函数 $f\ x, y, z) = x^2 y^2 z^2$ 在球面 $x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2$ 上的最大值是 $\frac{\rho^2}{3}\ ^3$;

2) 函数 $f\ x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 在曲面 $x^2 y^2 z^2 = \frac{\rho^2}{3}\ ^3$ 上的最小值是 ρ^2 .

10. 求方程 $F\ x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0\ (a > 0)$

函数 $y = f\ x)$

11. 求函数 $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^p\ (p > 1)$ $\sum_{i=1}^{n} x_i = a\ \ a > 0)$

12. 求在椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ **内所有内接长方体的最大的体积.**

第十二章　反常积分与含参变量的积分

§12.1　无 穷 积 分

一、基本内容

本节有四段.

第一段给出了三种无穷积分 $\int_a^{+\infty} f\quad x)\mathrm{d}x,\int_{-\infty}^{b} f\quad x)\mathrm{d}x,$ $\int_{-\infty}^{+\infty} f\quad x)\mathrm{d}x$ 的收敛和发散的概念.这是本节的基本概念.

这三种无穷积分，后两种无穷积分经过适当的变量替换都可化为第一种无穷积分 $\int_a^{+\infty} f\quad x)\mathrm{d}x$.而第一种无穷积分与级数有密切联系.

第二段给出了第一种无穷积分与级数收敛性的等价关系　　1)

第三段给出了无穷积分的性质：柯西收敛准则　　2)

敛无穷积分的线性性质　　3 与定理 4)

公式　　5)　　　　　　　　　　6)

第四段给出了无穷积分的绝对收敛和条件收敛概念以及收敛性判别法：优函数的绝对收敛判别法　　7 及其推论)

敛的判别法　　8)

二、学习要求

无穷积分 $\int_a^{+\infty} f\quad x)\mathrm{d}x$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有着内在的联系

理 1)

二者也有区别，这是连续与离散的区别．学习本节内容要经常与无穷级数对照比较，注意共性，抓住特性．要求：

1. 掌握无穷积分的敛散概念及其各种性质．会应用收敛定义和性质计算无穷积分和证明无穷积分的有关问题．

2. 会应用敛散定义和各种敛散性的判别法判别无穷积分的敛散性．

三、答疑辅导

问 1. 收敛的无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 有哪些相同的性质？

答 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 是定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 的推广．收敛的无穷积分承袭了定积分的许多性质．择其要者列表对比如下：

性 质	收敛的无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$	定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
区间可加性	$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \quad (a<c<+\infty)$ $=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$.	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (a<c<b)$ $=\int_a^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\mathrm{d}x$.
线性性质	$\int_a^{+\infty}[c_1 f(x)+c_2 g(x)]\mathrm{d}x$ $=c_1\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x+$ $c_2\int_a^{+\infty} g(x)\mathrm{d}x$.	$\int_a^b[c_1 f(x)+c_2 g(x)]\mathrm{d}x$ $=c_1\int_a^b f(x)\mathrm{d}x+c_2\int_a^b g(x)\mathrm{d}x$.

续表

性 质	收敛的无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$	定积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$
分部积分公式	$\int_a^{+\infty} f(x)g'(x)\mathrm{d}x$ $= f(x)g(x)\Big\vert_a^{+\infty} -$ $\int_a^{+\infty} g(x)f'(x)\mathrm{d}x$.	$\int_a^b f(x)g'(x)\mathrm{d}x$ $= f(x)g(x)\Big\vert_a^b -$ $\int_a^b g(x)f'(x)\mathrm{d}x$.
变量替换公式	$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x \quad (x=\varphi(t))$ $=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$. $(\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=+\infty)$	$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \quad (x=\varphi(t))$ $=\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\mathrm{d}t$. $(\varphi(\alpha)=a, \varphi(\beta)=b)$

问 2. 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 有哪些类似的性质?

答 无穷积分与级数都是求和的问题,前者是连续求和,后者是离散求和,因此二者有许多相似之处,但是也有区别.现将二者相似之处列表对比如下:

	$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
部分	部分区间积分 $\int_a^p f(x)\mathrm{d}x$	部分和 $\sum_{k=1}^{n} a_k$
收敛定义	$\lim_{p\to+\infty}\int_a^p f(x)\mathrm{d}x = I$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists A>0$, $\forall p>A$, 有 $\left\vert\int_a^p f(x)\mathrm{d}x - I\right\vert < \varepsilon$.	$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_k = S$ $\forall \varepsilon>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, $\forall n>N$, 有 $\left\vert\sum_{k=1}^{n} a_k - S\right\vert < \varepsilon$.

续表

	$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$
例子	$\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^\lambda}$ 当 $\lambda>1$ 时，收敛，当 $\lambda\leq 1$ 时，发散．	$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\lambda}$ 当 $\lambda>1$ 时，收敛，当 $\lambda\leq 1$ 时，发散．
柯西收敛准则	$\forall \varepsilon>0, \exists A>0, \forall p_1>A, p_2>A,$ $\left\lvert\int_{p_1}^{p_2} f(x)\mathrm{d}x\right\rvert<\varepsilon.$	$\forall \varepsilon>0, \exists N\in\mathbf{N}_+, \forall n>N, \forall p\in\mathbf{N}_+,$ $\left\lvert\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right\rvert<\varepsilon.$
比较判别法	若 $\forall x\in[a,+\infty)$ $\lvert f(x)\rvert\leq c\varphi(x)$ C 是正常数 1) $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，2) $\int_a^{+\infty}\lvert f(x)\rvert\mathrm{d}x$ 发散，则 $\int_a^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 发散．	若 $\forall n\in\mathbf{N}_+$，$\lvert a_n\rvert\leq cb_n$． C 是正常数 1) $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，2) $\sum_{n=1}^{\infty}\lvert a_n\rvert$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 发散．

	$\int_a^{+\infty} f\quad x)\,g\quad x)\,\mathrm{d}x$	$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$
线性性质	$\int_a^{+\infty}[c_1 f(x)+c_2 g(x)]\,\mathrm{d}x$ $=c_1\int_a^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x+$ $c_2\int_a^{+\infty} g\quad x)\,\mathrm{d}x.$	$\sum_{n=1}^{\infty}[c_1 a_n+c_2 b_n]$ $=c_1\sum_{n=1}^{\infty} a_n+c_2\sum_{n=1}^{\infty} b_n.$ (《讲义》§9.1 定理 2 与定理 4)
狄利克雷判别法	若 1) $g\quad x)$ $\lim_{x\to+\infty} g(x)=0$, 2) " $p>a$, $F\quad p)=$ $\int_a^p f\quad x)\,\mathrm{d}x$ 有界，则 $\int_a^{+\infty} f\quad x)\,g\quad x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. (证明见本节补充例题的例 3)	若 1) $b_n\}$ $\lim_{n\to\infty} b_n=0$, 2) 部分和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ 有界, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. (《讲义》§9.1 定理 11)
阿贝尔判别法	若 1) $g\quad x)$ $a,+\infty)$ 单调有界, 2) $\int_a^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则 $\int_a^{+\infty} f\quad x)\,g\quad x)\,\mathrm{d}x$ 收敛. (证明见本节补充例题的例 4)	若 1) $b_n\}$ 2) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛. (《讲义》§9.1 定理 12)

问 3. 无穷积分 $\int_a^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x$ 收敛是否必有 $\lim_{x\to+\infty} f\quad x)=0$?

答 不一定. 例如，函数

$$\varphi\quad x)=\begin{cases}1, & 当\ x=n\in\mathbf{N}_+,\\ 0, & 当\ x\geq 0,\ 且\ x\neq n\in\mathbf{N}_+,\end{cases}$$

显然, $\int_0^{+\infty}\varphi\quad x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 0) $\lim_{x\to+\infty}\varphi\quad x)$ 在，从而有 $\lim_{x\to+\infty}\varphi\quad x)\neq 0$.

不仅如此，甚至 $f\quad x)$ $\int_a^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x$ 收敛也不一定有 $\lim_{x\to+\infty} f\quad x)=0$. 例如，首先给出非

负连续函数 12.1)

$$g\quad x)=\begin{cases}1, & 当\ x=2,3,\cdots,\\ 折线段, & 当\ x\in\ n-\frac{1}{n^2},n\ \cup\ n,n+\frac{1}{n^2}\ ,n=2,3,\cdots,\\ 0, & 其余的\ x\geq 1\ .\end{cases}$$

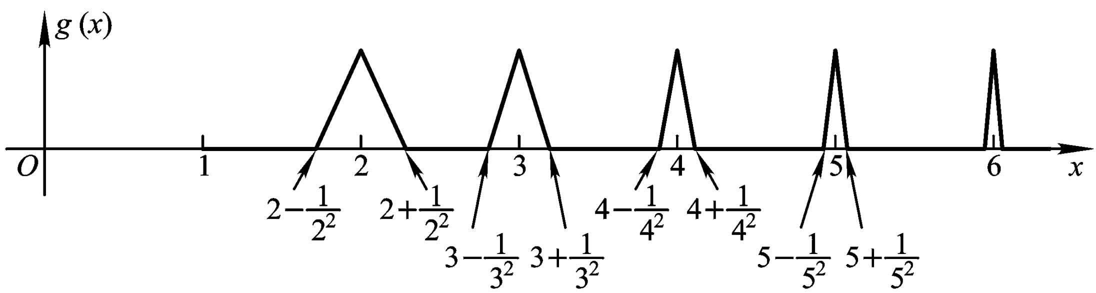


图 12.1

有 $\int_1^{+\infty} g\quad x)\mathrm{d}x=1\cdot\frac{1}{2^2}+1\cdot\frac{1}{3^2}+1\cdot\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-1=\frac{\pi^2}{6}-1\ .$$

显然, $\lim\limits_{x\to+\infty} g\quad x)\neq 0\ .$

其次给出正值连续函数

$$f\quad x)=g\quad x)+\frac{1}{x^2},\quad x\in[1,+\infty)$$

它的无穷积分

$$\int_1^{+\infty} f\quad x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty} g\quad x)\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty}\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$$

收敛, 但是极限

$$\lim_{x\to+\infty} f\quad x)=\lim_{x\to+\infty}\quad g\quad x)+\frac{1}{x^2}$$

不存在, 有 $\lim\limits_{x\to+\infty} f\quad x)\neq 0\ .$

问 4. 函数 $f\quad x)$ $a,+\infty)$

$\int_a^{+\infty} f\quad x)\ \mathrm{d}x$ 是否发散?

答 不一定 例如, 连续函数

如图 12.1)

$$h(x)=\begin{cases} n, & 当\ x=n\in\mathbf{N}_+,\ n\geq 2,\\ 折线段, & 当\ x\in\left(n-\frac{1}{n^3},n\right)\cup\left(n,n+\frac{1}{n^3}\right),\ n\in\mathbf{N}_+,\ n\geq 2,\\ 0, & 其余的\ x\geq 1.\end{cases}$$

显然，函数 $h(x)$ $[1,+\infty)$

$$\int_1^{+\infty} h(x)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\left(2\cdot\frac{2}{2^3}\right)+\frac{1}{2}\left(3\cdot\frac{2}{3^3}\right)+\frac{1}{2}\left(4\cdot\frac{2}{4^3}\right)+\cdots$$

$$=\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-1=\frac{\pi^2}{6}-1$$

却收敛.

问 5. 无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

么联系?

答 一般来说，无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 的敛散性与级数

$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$

例如，问 3 中的函数 $\varphi(x)$ $\int_1^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x$ 收敛，而级

数 $\sum_{n=1}^{\infty}\varphi(n)$

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 可能发散.

例如，函数

$$\psi(x)=\begin{cases} 0, & 当\ x=n\in\mathbf{N}_+,\\ 1, & 其余的\ x>1.\end{cases}$$

显然，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \psi \quad n)$　　　　　　　　　　$\int_{1}^{+\infty} \psi \quad x)\mathrm{d}x$ 发散．

如果对函数 $f \quad x)$

如果函数 $f \quad x)$　　　　$1, +\infty)$

穷积分 $\int_{1}^{+\infty} f \quad x)\mathrm{d}x$ 与级数 $\sum_{n=1}^{\infty} f \quad n)$

明见《讲义》练习题 12.1 第 3 题)

这是判别级数敛散性的柯西积分判别法．判别某些正项级数的敛散性用柯西积分判别法很简便．

例如应用柯西积分判别法判别正项级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \quad \ln \ n)^{p}} \quad 与 \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n\ln n \quad \ln \ln \ n)^{p}} \qquad (p>0)$$

的敛散性很简便　　　　§9.1 补充例题的例 2 的说明)

问 6. 对无穷积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f \quad x)\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{c} f \quad x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f \quad x)\mathrm{d}x, \qquad " \ c \in \mathbf{R}$$

的收敛定义要注意什么问题？

答　首先，要求与 c 无关，即不论 c 取何值都不会影响积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f \quad x)\mathrm{d}x$ 的值．事实上，设 $h \neq c$，有

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f \quad x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{c} f \quad x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f \quad x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{h} f \quad x)\mathrm{d}x + \int_{h}^{c} f \quad x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f \quad x)\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\infty}^{h} f \quad x)\mathrm{d}x + \int_{h}^{+\infty} f \quad x)\mathrm{d}x .
\end{aligned}$$

其次，无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} f \quad x)\mathrm{d}x$ 收敛的定义可改写为

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{+\infty} f \quad x)\mathrm{d}x &= \int_{-\infty}^{c} f \quad x)\mathrm{d}x + \int_{c}^{+\infty} f \quad x)\mathrm{d}x \\
&= \lim_{q \to -\infty} \int_{q}^{c} f \quad x)\mathrm{d}x + \lim_{p \to +\infty} \int_{c}^{p} f \quad x)\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

$$=\lim_{\substack{q\to-\infty\\p\to+\infty}}\left(\int_q^c f(x)\mathrm{d}x+\int_c^p f(x)\mathrm{d}x\right)=\lim_{\substack{q\to-\infty\\p\to+\infty}}\int_q^p f(x)\mathrm{d}x,$$

其中 p **与** q **彼此无关．否则，取** $q=-p$，**若极限** $\lim\limits_{p\to+\infty}\int_{-p}^{p} f(x)\mathrm{d}x$ **存在，称此极限是无穷积分的柯西主值，表为**

$$\mathrm{V}\cdot\mathrm{P}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{p\to+\infty}\int_{-p}^{p} f(x)\mathrm{d}x.$$

无穷积分发散，但是它可能存在柯西主值．例如，无穷积分 $\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x$ **发散，但是它却存在柯西主值**

$$\mathrm{V}\cdot\mathrm{P}\cdot\int_{-\infty}^{+\infty}\sin x\mathrm{d}x=\lim_{p\to+\infty}\int_{-p}^{p}\sin x\mathrm{d}x=0.$$

四、补充例题

例 1．证明无穷积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$ **收敛，其中** $[x^2]$ **超过** x^2 **的最大整数．**

证法　**先将无穷积分化为级数，然后再证明级数的收敛性．**

证明　**已知当** $\sqrt{n}\leq x<\sqrt{n+1}$ **时，有** $[x^2]=n$，$n=0,1,2,\cdots$，

于是， $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\int_{\sqrt{n}}^{\sqrt{n+1}}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}.$$

这是交错级数，一般项 $u_n=\dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$ **是单调减少的，且** $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$．**根据莱布尼茨判别法．级数**

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

收敛，则无穷积分 $\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$ **收敛．**

注 此例说明，无穷积分$\int_0^{+\infty}(-1)^{[x^2]}\mathrm{d}x$收敛，但是被积函数 $f\ \ x) = \ \ -1)^{[x^2]}\not\to 0\ (x\to+\infty)$

例 2. 证明：若函数 $f\ \ x)\qquad 0, +\infty)$

且$\lim\limits_{x\to+\infty} f\ \ x) = 0$，则无穷积分$\int_0^{+\infty} f\ \ x)\,\mathrm{d}x$与极限$\lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\ \ nh)$

$(h > 0)$

$$\int_0^{+\infty} f\ \ x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0} h\sum_{n=1}^{\infty} f\ \ nh)$$

证法 无穷积分$\int_0^{+\infty} f\ \ x)\,\mathrm{d}x$与极限$\lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{n=1}^{\infty} f\ \ nh)$

收敛，另一个就收敛 .可证，当 h 充分小时，有

$$\left|\int_0^{+\infty} f\ \ x)\,\mathrm{d}x - h\sum_{n=1}^{\infty} f\ \ nh)\right| < \varepsilon .$$

证明 已知函数 $f\ \ x)\qquad 0, +\infty)$

方面，有

$$\int_0^{+\infty} f\ \ x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} f\ \ x)\,\mathrm{d}x \leq h\sum_{n=0}^{\infty} f\ \ nh)$$

另一方面，有

$$\int_0^{+\infty} f\ \ x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty}\int_{nh}^{(n+1)h} f\ \ x)\,\mathrm{d}x \geq h\sum_{n=1}^{\infty} f\ \ nh)$$

$$= h\sum_{n=0}^{\infty} f\ \ nh) - hf\ \ 0)$$

于是，

$$h\sum_{n=0}^{\infty} f\ \ nh) - hf\ \ 0) \leq \int_0^{+\infty} f\ \ x)\,\mathrm{d}x \leq h\sum_{n=0}^{\infty} f\ \ nh)$$

显然，无穷积分$\int_0^{+\infty} f\ \ x)\,\mathrm{d}x$与极限$\lim\limits_{h\to 0} h\sum\limits_{n=0}^{\infty} f\ \ nh)$

且

$$\left|\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x - h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)\right| \leq hf(0)$$

即
$$\int_0^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{h\to 0} h\sum_{n=0}^{\infty} f(nh)$$

例 3.（狄利克雷判别法） 若函数 $g(x)$ 在 $(a,+\infty)$ 单调减少，且 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$，而函数 $F(p)=\int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x$ 有界，则 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

证法 应用柯西收敛准则与第二积分中值定理.

证明 已知 $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$，即 $\forall\,\varepsilon>0$，$\exists\,A>a$，$\forall\,x>A$，有 $|g(x)|<\varepsilon$.

又已知函数 $F(p)=\int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x$ 有界，即 $\exists\,M>0$，$\forall\,p\in(a,+\infty)$

$$|F(p)| = \left|\int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq M.$$

从而，$\forall\,\alpha,\beta\in[a,+\infty)$
$$\left|\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \left|\int_a^\beta f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq 2M.$$

$\forall\,p_1>A$，$p_2>A$，根据第二积分中值定理（§8.4 补充例题的例 11）
$$\int_{p_1}^{p_2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(p_1)\int_{p_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x + g(p_2)\int_{\xi}^{p_2} f(x)\,\mathrm{d}x,$$
其中 ξ 在 p_1 与 p_2 之间. 于是，
$$\begin{aligned}\left|\int_{p_1}^{p_2} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right| &\leq |g(p_1)|\left|\int_{p_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x\right| + \\ &\quad |g(p_2)|\left|\int_{\xi}^{p_2} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &< 2M\varepsilon + 2M\varepsilon = 4M\varepsilon.\end{aligned}$$

根据柯西收敛准则，无穷积分$\int_a^{+\infty} f\quad x)\ g\quad x)\,\mathrm{d}x$收敛．

例 4. (阿贝尔判别法) 若函数 $g\quad x)$ $a, +\infty)$

界，而无穷积分$\int_a^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x$收敛，则$\int_a^{+\infty} f\quad x)\ g\quad x)\,\mathrm{d}x$收敛．

证法 应用柯西收敛准则与第二积分中值定理．

证明 已知函数 $g\quad x)$ $a, +\infty)$ $M>0$，

" $x\in[a, +\infty)$ 有 $|g\quad x)|\leq M$．

又已知$\int_a^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x$收敛，根据柯西收敛准则，对 " $\varepsilon>0$，

v $A>0$， " $p_1>A$，$p_2>A$，有

$$\left|\int_{p_1}^{p_2} f\quad x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

根据第二积分中值定理(见本书上册§8.4 补充例题的例 11)

$$\int_{p_1}^{p_2} f\quad x)\ g\quad x)\,\mathrm{d}x = g\quad p_1)\int_{p_1}^{\xi} f\quad x)\,\mathrm{d}x + g\quad p_2)\int_{\xi}^{p_2} f\quad x)\,\mathrm{d}x,$$

其中 ξ 在 p_1 与 p_2 之间．于是，

$$\left|\int_{p_1}^{p_2} f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leq |g(p_1)|\left|\int_{p_1}^{\xi} f(x)\mathrm{d}x\right| + |g(p_2)|\left|\int_{\xi}^{p_2} f(x)\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq M\varepsilon + M\varepsilon = 2M\varepsilon,$$

根据柯西收敛准则，无穷积分$\int_a^{+\infty} f\quad x)\ g\quad x)\,\mathrm{d}x$收敛．

说明 以上狄利克雷判别法与阿贝尔判别法是判别无穷积分条件收剑的两个有效的判别法．证明这两个判别法都是应用柯西收敛准则和第二积分中值定理．

设函数 $g\quad x)$ $a, +\infty)$ $f\quad x)$ $a, b]$

$b> a)$ p_1，$p_2>a$，根据第二积分中值定理，有

$$\left|\int_{p_1}^{p_2} f\quad x)g\quad x)\mathrm{d}x\right| \leq |g\quad p_1)|\left|\int_{p_1}^{\xi} f\quad x)\mathrm{d}x\right| + |g\quad p_2)|\left|\int_{\xi}^{p_2} f\quad x)\mathrm{d}x\right|,$$

其中 ξ 在 p_1 与 p_2 之间 .为了使无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛,根据柯西收敛准则,只须上面不等式的不等号右端能任意小 .有两种情况可能出现:**

1) **当** $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$ (**即** $g(p_1)$ $g(p_2)$)

$\int_a^p f(x)\,\mathrm{d}x$ $p > a)$

2) **当** $g(x)$ $x > a)$ $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛** **即** $\int_{p_1}^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$ **与** $\int_{\xi}^{p_2} f(x)\,\mathrm{d}x$ **能任意小** ,**这就是阿贝尔判别法** .

《讲义》 8 **只是给出了狄利克雷判别法的特殊情况,即** $g(x) = \dfrac{1}{x^{\lambda}}$ ($\lambda > 0$) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{x^{\lambda}} = 0$, **而** $F(x) = \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u$ $x > a)$ **界 .从而** $\int_a^{+\infty} \dfrac{f(x)}{x^{\lambda}}\,\mathrm{d}x$ **收敛** .

应用这两个判别法可判别下列无穷积分收敛:

(1) $\int_0^{+\infty} \dfrac{x\cos x}{x+100}\,\mathrm{d}x$. (2) $\int_0^{+\infty} x\sin x^3)\,\mathrm{d}x$ (**设** $t = x^3$)

(3) $\int_2^{+\infty} \dfrac{\sin x}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$.

例 5. 计算无穷积分:

(1) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$, (2) $\int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$, $n = 0,1,2,\cdots$.

解法 应用分部积分法 .

解 (1) **设** $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x$.

$$I_n = -\int_0^{+\infty} x^n \mathrm{d}(e^{-x})$$

$$= -x^n e^{-x}\Big|_0^{+\infty} + n\int_0^{+\infty} x^{n-1}e^{-x}\,\mathrm{d}x = nI_{n-1} .$$

由这个递推公式，有

$$I_n = nI_{n-1} = n(n-1)I_{n-2} = \cdots = n!I_0 .$$

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1 .于是,$$

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x}dx = n! .$$

这是 $n!$ 的一个分析表达式 .

(2) 设 $J_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2}dx$.

$$J_n = -\frac{1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-1}d(e^{-x^2})$$

$$= -\frac{1}{2}x^{n-1}e^{-x^2}\Big|_0^{+\infty} + \frac{n-1}{2}\int_0^{+\infty} x^{n-2}e^{-x^2}dx = \frac{n-1}{2}J_{n-2} .$$

由这个递推公式，有

当 $n=2k+1$ 时，$J_{2k+1} = kJ_{2k-1} = k(k-1)J_{2k-3}$

$$= \cdots = k!J_1 .$$

$$J_1 = \int_0^{+\infty} xe^{-x^2}dx = \frac{1}{2} .于是,$$

$$J_{2k+1} = \int_0^{+\infty} x^{2k+1}e^{-x^2}dx = \frac{k!}{2} .$$

当 $n=2k$ 时，$J_{2k} = \frac{2k-1}{2}J_{2k-2} = \frac{(2k-1)(2k-3)}{2^2}J_{2k-4}$

$$= \cdots = \frac{(2k-1)!!}{2^k}J_0 .$$

《讲义》§12.3 第六段例 14，有 $J_0 = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.于是,

$$J_{2k} = \int_0^{+\infty} x^{2k}e^{-x^2}dx = \frac{(2k-1)!!}{2^{k+1}}\sqrt{\pi} .$$

例 6. 计算无穷积分(n 是自然数)

(1) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$; (2) $\int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4}$.

解法　应用变量替换.

解　(1) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}}$.　**设** $x = \tan t, \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}t}{\sec^{2n+1} t \cdot \cos^2 t} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} t \mathrm{d}t.$$

已知 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2n-1} x \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2n-1} x \mathrm{d}x = \frac{(2n-2)}{(2n-1)}$

上册 §8.4 例 7)

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)^{n+\frac{1}{2}}} = \frac{(2n-2)}{(2n-1)}.$$

(2) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$. **设** $x = \frac{1}{t}, \mathrm{d}x = -\frac{1}{t^2}\mathrm{d}t$.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^4}\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1+x^4}\mathrm{d}x.$$

于是,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{(1+x^2)\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty} \frac{1+\frac{1}{x^2} \quad \mathrm{d}x}{x^2+\frac{1}{x^2}}.$$

设　$x - \frac{1}{x} = y$, $\mathrm{d}y = 1 + \frac{1}{x^2} \ \mathrm{d}x$. **有**

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4} = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}y}{2+y^2} = \frac{1}{2\quad 2}\arctan \frac{y}{2}\Big|_{-\infty}^{+\infty} = \frac{\pi}{2\quad 2}.$$

例 7. 证明: 若函数 $f\ \ x)$　　　$a, +\infty)$

少, $f\ \ x) \to 0\ (x \to +\infty)$　　　　$\int_a^{+\infty} f\ \ x)\mathrm{d}x$ **收敛, 则无穷积分** $\int_a^{+\infty} x f'(x)\mathrm{d}x$ **收敛**.

证法　应用柯西收敛准则和分部积分法.

证明　已知函数 $f\ \ x)$　　$a, +\infty)$　　　　$f\ \ x) \geq 0)$

$$\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = f(\xi)\left(x - \frac{x}{2}\right) \geq f(x)\frac{x}{2} = \frac{1}{2}xf(x)$$

又已知$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$收敛，即$\forall\,\varepsilon > 0$，$\exists\, A > 0$，$\forall\, p, q > A$ $(> a)$ 有

$$\left|\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon .$$

当$\dfrac{x}{2} > A$ $(x > 2A)$

$$|xf(x)| \leq \left|2\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right| < 2\varepsilon .$$

特别是，$p > 2A$，有$|pf(p)| < 2\varepsilon$.

$q > 2A$，有$|qf(q)| < 2\varepsilon$.

于是，$\forall\,\varepsilon > 0$，$\exists\, A > 0$，$\forall\, p, q > 2A$，有

$$\begin{aligned}\left|\int_p^q xf'(x)\,\mathrm{d}x\right| &= \left|\int_p^q x\mathrm{d}f(x)\right| = \left|\, xf(x)\Big|_p^q - \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &= \left|\, qf(q) - pf(p) - \int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &\leq |qf(q)| + |pf(p)| + \left|\int_p^q f(x)\,\mathrm{d}x\right| \\ &< 2\varepsilon + 2\varepsilon + \varepsilon = 5\varepsilon ,\end{aligned}$$

即无穷积分$\int_a^{+\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x$收敛 .

说明　证明此例的关键是在已知条件下，找到两个无穷积分$\int_a^{+\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x$与$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$之间的联系 .不难看到，应用分部积分法就能将这两个无穷积分联系起来，即

$$\begin{aligned}\int_a^{+\infty} xf'(x)\,\mathrm{d}x &= \int_a^{+\infty} x\mathrm{d}f(x) = xf(x)\Big|_a^{+\infty} - \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \\ &= \lim_{x\to+\infty} xf(x) - af(a) - \int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x .\end{aligned}$$

已知无穷积分$\int_a^{+\infty} f\ \ x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**, $af\ \ a)$

极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf\ \ x)$

一般来说,仅有无穷积分$\int_a^{+\infty} f\ \ x)\,\mathrm{d}x$ **收敛的条件,并不能保证极限** $\lim\limits_{x\to+\infty} xf\ \ x)$ $f\ \ x)$ $a,\ +\infty)$ **调,且** $f\ \ x)\to 0\ (x\to+\infty)$ $\lim\limits_{x\to+\infty} xf\ \ x) = 0$.

也就是在已知的条件下,函数 $f\ \ x)$ $\frac{1}{x}$ **的高阶无穷小,即** $f\ \ x) = o\ \frac{1}{x}\ (x\to+\infty)$ **这正是练习题** 12.1 **的第** 9 **题** .

证明此例,首先应用柯西收敛准则证明 $\lim\limits_{x\to+\infty} xf\ \ x) = 0$;**其次再应用分部积分法证明无穷积分**$\int_a^{+\infty} xf'\ \ x)\,\mathrm{d}x$ **收敛** .

▶▶ 五、练习题 12.1 解法提要

2. 判别下列无穷积分的敛散性:

(4) $\int_1^{+\infty} \frac{x^m}{1+x^n}\mathrm{d}x\qquad (n>0,\ m>0)$

解法　$\lim\limits_{x\to+\infty} x^{n-m}\frac{x^m}{1+x^n}$.

(5) $\int_1^{+\infty} \sin\frac{1}{x^2}\mathrm{d}x$.

解法　$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\sin\frac{1}{x^2}$.

(7) $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{e}^x}$.

解法　$\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\ \frac{1}{\mathrm{e}^x}$.

(8) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x}{\mathrm{e}^x+\mathrm{e}^{-x}}\mathrm{d}x$.

解法 $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2\cdot\dfrac{x}{e^x+e^{-x}}=0$, 于是$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x}{e^x+e^{-x}}dx$ 收敛 .

设 $x=-t$, $dx=-dt$, **有**

$$\int_{-\infty}^{0}\frac{x}{e^x+e^{-x}}dx=-\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t+e^{-t}}dt\ .$$

3. 证明: **若函数** $f\ \ x)$ $\ \ 1,+\infty)$ $f\ \ x)\to 0$

$(x\to+\infty)$ **则无穷积分**$\displaystyle\int_1^{+\infty}f\ \ x)\,dx$ **与级数** $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}f\ \ n)$

或同时发散 .

证法 " $p>1$, v $n\in\mathbf{N}_+$, **使** $n\leq p<n+1$, **有**

$$\sum_{k=2}^{n+1}f\ \ k)\leq\int_1^p f\ \ x)\,dx\leq\sum_{k=1}^{n}f\ \ k)$$

7. 证明: **当** $\lambda\in\ \ 0,1)$ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\ x}{x^\lambda}dx$ **与**

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos\ x}{x^\lambda}dx$ **都是条件收敛** .

证法 **根据定理** 8, **可证** $\lambda\in\ \ 0,1)$ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\sin\ x}{x^\lambda}dx$ **与**

$\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\cos\ x}{x^\lambda}dx$ **皆收敛** .**因为**

$$\left|\frac{\sin\ x}{x^\lambda}\right|\geq\frac{\sin^2 x}{x^\lambda}=\frac{1-\cos 2x}{2x^\lambda}\ .$$

所以, **当** $\lambda\in\ \ 0,1)$ $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin\ x}{x^\lambda}\right|dx$ **发散** .

同法可证, $\displaystyle\int_1^{+\infty}\left|\frac{\cos\ x}{x^\lambda}\right|dx$ **发散** .

* * * *

9. 证明: **若无穷积分**$\displaystyle\int_a^{+\infty}f\ \ x)\,dx$ **收敛**, **函数** $f\ \ x)$ $\ \ a,+\infty)$

单调, **则** $f\ \ x)=o\ \dfrac{1}{x}\ \ (x\to+\infty)$

证法 $f\ \ x)=o\ \dfrac{1}{x}$ $\lim\limits_{x\to+\infty}xf\ \ x)=0$.

不妨设函数 $f\quad x)\qquad a, +\infty)\qquad\qquad f(x)\geq 0)$

柯西收敛准则，即" $\varepsilon>0$, v $A>a$, " $\dfrac{x}{2}>A$，**有**

$$\varepsilon > \int_{\frac{x}{2}}^{x} f\quad t)\,\mathrm{d}t \geq f\quad x)\cdot\frac{x}{2}\quad .$$

10. 证明: **若函数** $f\quad x)\qquad 0, +\infty)$

$\int_0^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**, **则** $\lim\limits_{x\to+\infty} f\quad x) = 0\quad .$

证法一　用反证法. **假设** $\lim\limits_{x\to+\infty} f\quad x)\neq 0$，**则存在** $\varepsilon_0>0$ **与数列** $\{x_n\}\qquad \lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$，**有** $|f(x_n)|\quad \varepsilon_0$.

已知 $f\quad x)\qquad 0, +\infty)\qquad\qquad \dfrac{\varepsilon_0}{2}>0$, v $\delta>0$,

" x: $|x - x_n|\quad \delta$，**有** $|f(x) - f(x_n)|\quad \dfrac{\varepsilon_0}{2}$，**即**

$$|f(x_n)|\qquad f(x)|\quad \frac{\varepsilon_0}{2}\text{或}$$

$$\frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon_0}{2}\leq\quad f(x_n)|\quad \frac{\varepsilon_0}{2} <\quad f(x)|,\quad n=1, 2, \cdots,$$

即" $x\in(x_n - \delta, x_n + \delta)\qquad |f(x)|\quad \dfrac{\varepsilon_0}{2}$, $n=1, 2, \cdots$, **从而**

$$\left|\int_{x_n-\delta}^{x_n+\delta} f(x)\mathrm{d}x\right| = |\ f(\xi)\ |\ 2\delta > \frac{\varepsilon_0}{2}\cdot 2\delta = \varepsilon_0\delta,\ n = 1,2,\cdots,$$

与无穷积分 $\int_0^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x$ **收敛矛盾** .

证法二　已知 $f\quad x)\qquad 0, +\infty)\qquad\qquad \varepsilon>0$,
v $\delta>0\ (\delta\leq\varepsilon)\qquad x_1,\ x_2\in[0, +\infty)\quad |x_1 - x_2|\quad \delta$，**有**

$$|f(x_1) - f(x_2)|\quad \varepsilon\ .$$

又已知 $\int_0^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x$ **收敛**, **根据柯西准则**, **对** $\delta^2>0$, v $A>0$,

" $p > A$, **有** $\left|\int_p^{p+\delta} f(x)\mathrm{d}x\right| = |\ f(\xi)\ |\ \delta < \delta^2$, $\quad \xi\in\quad p, p+\delta]$

即在任意区间 $p, p+\delta]$ $p > A)$ $\xi \in [p, p+\delta]$
$|f(\xi)|$ $\delta \leq \varepsilon)$

于是, $" x > A$, v $\xi > A$, $|x-\xi|$ δ, 有

$$|f(x)| \quad f(x) - f(\xi)| \quad f(\xi)| \quad \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon,$$

即
$$\lim_{x \to +\infty} f \quad x) = 0 .$$

11. 证明:若函数 $f \quad x)$ $a, +\infty)$ $f' \quad x)$
且无穷积分 $\int_a^{+\infty} f \quad x) \mathrm{d}x$ 与 $\int_a^{+\infty} f' \quad x) \mathrm{d}x$ 都收敛,则 $\lim\limits_{x \to +\infty} f \quad x) = 0$.

证法一　已知 $\int_a^{+\infty} f' \quad x) \mathrm{d}x$ 收敛,有

$$\int_a^{+\infty} f' \quad x) \mathrm{d}x = \lim_{p \to +\infty} \int_a^p f' \quad x) \mathrm{d}x = \lim_{p \to +\infty} f \quad p) - f \quad a)$$

即极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f \quad x)$ $f \quad x)$ $a, +\infty)$
题 4.2 第 8 题) 10 题 .

证法二　由证法一知, 极限 $\lim\limits_{x \to +\infty} f \quad x)$

$$\lim_{x \to +\infty} f \quad x) = b .$$

往证 $b = 0$. 用反证法, 若 $b \neq 0$, 应用极限的保号性, 将得到矛盾 .

§12.2 瑕 积 分

一、基本内容

本节有两段 .

第一段首先给出了函数的瑕点和瑕积分的概念, 其次给出了瑕积分收敛和发散概念 .

因为瑕积分经过适当的变量替换可化为无穷积分, 所以第二段给出了与无穷积分平行的瑕积分的绝对收敛和条件收敛的概念, 收敛的瑕积分的性质

柯西收敛准则

推论)

二、学习要求

瑕积分经过适当的变量替换可化为无穷积分，反之亦然，从这个意义上说，瑕积分与无穷积分只有形式上的差异，并没有本质的区别．当然，瑕积分这种形式也是必要的．因此关于瑕积分的敛散性判别法及其性质都可仿照无穷积分平行的写出来．其学习要求与上节无穷积分的“学习要求”相同

三、答疑辅导

问 1. 怎样用“ε - δ”语言叙述瑕积分$\int_a^b f\ \ x)\,\mathrm{d}x\ \ b$是瑕点)的收敛与发散的定义和柯西收敛准则?

答　用列表对比叙述如下:

	$\int_a^b f\ \ x)\,\mathrm{d}x$ 设 b 是 $f\ \ x)$	
	收　　敛	**发　　散**
定义	$\lim\limits_{\eta\to 0^+}\int_a^{b-\eta} f\ \ x)\,\mathrm{d}x = I = \int_a^b f\ \ x)\,\mathrm{d}x$.	$\lim\limits_{\eta\to 0^+}\int_a^{b-\eta} f\ \ x)\,\mathrm{d}x$ 不存在．
	$"\ \varepsilon > 0, \mathrm{v}\ \ \delta > 0, "\ \eta: 0 < \eta < \delta$,有 $\left\lvert I - \int_a^{b-\eta} f(x)\,\mathrm{d}x \right\rvert < \varepsilon$.	$"\ J \in \mathbf{R}, \mathrm{v}\ \ \varepsilon_0 > 0, "\ \delta > 0$, $\mathrm{v}\ \ \eta_0: 0 < \eta_0 < \delta$,有 $\left\lvert J - \int_a^{b-\eta_0} f(x)\,\mathrm{d}x \right\rvert \geq \varepsilon_0$.
柯西收敛准则	$"\ \varepsilon > 0,\ \mathrm{v}\ \ \delta > 0,\ \ "\ \eta,\ \eta'$: $0 < \eta < \delta,\ 0 < \eta' < \delta$，有 $\left\lvert \int_{b-\eta}^{b-\eta'} f(x)\,\mathrm{d}x \right\rvert < \varepsilon$.	$\mathrm{v}\ \ \varepsilon_0 > 0, "\ \delta > 0, \mathrm{v}\ \ \eta_0, \eta_0'$: $0 < \eta_0 < \delta, 0 < \eta_0' < \delta$,有 $\left\lvert \int_{b-\eta_0}^{b-\eta_0'} f(x)\,\mathrm{d}x \right\rvert \geq \varepsilon_0$.

问 2. 怎样叙述瑕积分$\int_a^b f\quad x)\ g\quad x)\,\mathrm{d}x$　b是瑕点)

利克雷判别法与阿贝尔判别法?

答　可仿照无穷积分收敛的狄利克雷判别法与阿贝尔判别法平行地写出:

狄利克雷判别法　若函数 $g\quad x)$　　$a, b)$

$\lim\limits_{x\to b} g\quad x) = 0$, 而函数 $F\quad x) = \int_a^x f\quad t)\,\mathrm{d}t$ 在　$a, b)$

分　b 是瑕点)

$$\int_a^b f\quad x)\ g\quad x)\,\mathrm{d}x$$

收敛.

阿贝尔判别法　若函数 $g\quad x)$　　$a, b)$

分$\int_a^b f\quad x)\,\mathrm{d}x$ 收敛　b 是瑕点)

$$\int_a^b f\quad x)\ g\quad x)\,\mathrm{d}x$$

收敛.

以上两个判别法的证明分别类似无穷积分相应判别法的证明. 读者可自行证之.

问 3. 当　a 是函数 $f\quad x)$　　　　$\lim\limits_{x\to a} f\quad x) = \infty$?

答　不一定. 根据瑕点定义, 当 $\lim\limits_{x\to a} f\quad x) = \infty$ 时,　a 必是函数 $f\quad x)$　　　　a 是函数 $f\quad x)$

点, 不一定有 $\lim\limits_{x\to a} f\quad x) = \infty$, 即无界不一定是无穷大. 例如, 函数

$$f\quad x) = \begin{cases} n, & \text{当 } x = \dfrac{1}{n},\quad n \in \mathbf{N}_+, \\ 1, & \text{当 } x \in (0,1) \quad x \neq \dfrac{1}{n} \end{cases}$$

的瑕积分$\int_0^1 f\quad x)\,\mathrm{d}x$ .0 是函数 $f\quad x)$　　　　$f\quad x)$　　0 的

任意邻域内无界,但是$\lim\limits_{x\to 0} f\quad x) \neq \infty$.

问 4. 无穷积分$\int_a^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x$ 的被积函数 $f\quad x)$

$a, +\infty)$

答 可能 . 例如, 无穷积分

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 (\sin\ x)^{\frac{2}{3}}}$$

的被积函数在区间 $\pi, +\infty)$ $k\pi\quad k = 1, 2, \cdots)$

" $b \in (\pi, +\infty)$ $\pi, b]$

的 . 事实上, 若 $k\pi \in [\pi, b]\quad k = 1, 2, \cdots, m$, 则

$$\lim_{x\to k\pi} (x - k\pi)^{\frac{2}{3}} \frac{1}{x^2 (\sin\ x)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{x\to k\pi} \frac{1}{x^2} \left(\frac{x - k\pi}{\sin\quad x - k\pi)}\right)^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{k^2\pi^2} .$$

$\lambda = \frac{2}{3} < 1$, 从而瑕积分$\int_\pi^b \frac{\mathrm{d}x}{x^2 (\sin\ x)^{\frac{2}{3}}}$ 收敛 .

不难证明, 无穷积分$\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 (\sin\ x)^{\frac{2}{3}}}$ 也收敛 .事实上,

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 (\sin\ x)^{\frac{2}{3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 (\sin\ x)^{\frac{2}{3}}} .$$

设 $x = y + n\pi$, 有

$$\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 (\sin\ x)^{\frac{2}{3}}} = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}y}{(y + n\pi)^2 (\sin\ y)^{\frac{2}{3}}}$$

$$< \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}y}{(\sin\ y)^{\frac{2}{3}}} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\pi^2} \text{(正常数)}$$

于是, 无穷积分$\int_\pi^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^2 (\sin\ x)^{\frac{2}{3}}}$ 收敛 .

问 5. 如果瑕积分$\int_a^b f\quad x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 a 是瑕点)

$$\int_a^b f\quad x)\,\mathrm{d}x = \lim_{l\quad T)\to 0} \sum_{k=1}^{n} f\quad \xi_k)\,\Delta x_k ,$$

其中$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k$是函数$f(x)$ $[a, b]$

答 不一定.例如,瑕积分$\int_0^1 |\ln x| dx$收敛(0是瑕点)

$$\int_0^1 |\ln x| dx = -\int_0^1 \ln x dx = (x - x\ln x)\Big|_0^1 = 1.$$

将(0, 1] n个小区间,分点 $x_k = \frac{k}{n}$, $k = 1, 2, \cdots, n$.在小区间$\left(0, \frac{1}{n}\right]$内任取二点$\xi_1' = e^{-n}$与$\xi_1'' = e^{-2n}$.在其余的小区间$\left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n}\right]$上取$\xi_k' = \xi_k''$, $k = 2, 3, \cdots, n$.于是,有两组:

$$\{\xi_k'\}\quad e^{-n}, \xi_2', \xi_3', \cdots, \xi_n'.$$

$$\{\xi_k''\}\quad e^{-2n}, \xi_2'', \xi_3'', \cdots, \xi_n''.$$

对这两组$\{\xi_k'\}$ $\{\xi_k''\}$

同)

$$\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k'')\frac{1}{n} - \sum_{k=1}^{n} f(\xi_k')\frac{1}{n} = \frac{|\ln e^{-2n}| - |\ln e^{-n}|}{n} = 1,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k'')\frac{1}{n} \neq \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k')\frac{1}{n}.$$

这说明,积分和的极限与$\{\xi_k\}$

说,

$$\int_a^b f(x) dx \neq \lim_{l(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(\xi_k)\Delta x_k.$$

那么函数$f(x)$

若瑕积分$\int_a^b f(x) dx$收敛(a是瑕点) $f(x)$ $[a, b]$

上单调 限定$\xi_k = a + k\frac{b-a}{n}$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(a+\frac{k}{n}(b-a)\right)=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x .$$

证明见本节补充例题的例 5 .

四、补充例题

例 1. 判别无穷积分 $\int_0^{+\infty} x^p\sin(x^q)\,\mathrm{d}x\ (q>0)$ **条件收敛** .

解法 经过变量替换，将无穷积分化为

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t .$$

再分别讨论瑕积分 $\int_0^a\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t$ **与无穷积分** $\int_a^{+\infty}\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t$ **的绝对收敛与条件收敛**

解 设 $x^q=t$. $\mathrm{d}x=\frac{1}{q}t^{\frac{1}{q}-1}\mathrm{d}t$，有

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{q}\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^{1-\frac{p+1}{q}}}\mathrm{d}t .$$

设 $r=1-\frac{p+1}{q}$，则

$$\int_0^{+\infty}x^p\sin(x^q)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{q}\left(\int_0^1\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t+\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t\right) .$$

1. **讨论无穷积分** $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t$.

(1) **当** $r>0$，**即** $\frac{p+1}{q}<1$ **时，由练习题** 12.1 **第** 7 **题和例** 11 **知，无穷积分** $\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t$ **收敛** .

i) **当** $0<r\leq1$，**即** $0\leq\frac{p+1}{q}<1$，**有**

$$\left|\frac{\sin t}{t^r}\right|\geq\frac{|\sin t|}{t},\quad t\in[1,+\infty)$$

由 §12.1 的例 11 知，$\int_1^{+\infty}\frac{|\sin t|}{t}\mathrm{d}t$ 发散，从而 $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin t}{t^r}\right|\mathrm{d}t$ 也发散，即$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t$条件收敛．

) 当 $r>1$，即$\frac{p+1}{q}<0$，有

$$\left|\frac{\sin t}{t^r}\right|\leq\frac{1}{t^r}.$$

已知$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}t}{t^r}$收敛，即$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t$绝对收敛．

(2) 当 $r\leq 0$，即$\frac{p+1}{q}\geq 1$时，对充分大的 n，有

$$\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}t^{-r}\sin t\mathrm{d}t\geq\int_{2n\pi}^{2n\pi+\frac{\pi}{2}}\sin t\mathrm{d}t=1.$$

即$\int_1^{+\infty}\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t$发散．

2. 讨论瑕积分$\int_0^1\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t$．

(1) 当 $r\leq 1$，即$\frac{p+1}{q}\geq 0$时，有极限$\lim\limits_{t\to 0}\frac{\sin t}{t^r}$存在，即$\int_0^1\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t$是定积分

(2) 当 $r>1$ 时，有极限

$$\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t^r}\Big/\frac{1}{t^{r-1}}=1,$$

则$\int_0^1\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t$与$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^{r-1}}$同时收敛同时发散．已知$\int_0^1\frac{\mathrm{d}t}{t^{r-1}}$，当 $r-1<1$时收敛；当 $r-1\geq 1$时发散．于是，当$1<r<2$，即 $-1<\frac{p+1}{q}<0$时，$\int_0^1\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t$收敛．因为被积函数恒为正，所以是绝对收敛；当 $r\geq 2$，即$\frac{p+1}{q}\leq -1$时，$\int_0^{+\infty}\frac{\sin t}{t^r}\mathrm{d}t$发散．

上述结果综合列表如下:

r	$\int_0^1 \frac{\sin t}{t^r} \mathrm{d} t$	$\int_1^{+\infty} \frac{\sin t}{t^r} \mathrm{d} t$	即　　当	$\int_0^{+\infty} x^p \sin x^q) \mathrm{d} x$
$r \leq 0$	定积分	发散	$\frac{p+1}{q} \geq 1$	发散
$0 < r \leq 1$	定积分	条件收敛	$0 \leq \frac{p+1}{q} < 1$	条件收敛
$1 < r < 2$	绝对收敛	绝对收敛	$-1 < \frac{p+1}{q} < 0$	绝对收敛
$r \geq 2$	发散	绝对收敛	$\frac{p+1}{q} \leq -1$	发散

例 2. **计算瑕积分** $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d} x$.

解法　**先验证瑕积分收敛．其次应用变量替换计算之．**

解　" $\lambda > 0$, **如取** $\lambda = \frac{1}{2}$, **有**

$$x^{\lambda} |\ln \sin x| \qquad x^{\lambda} \ln x \cdot \frac{\sin x}{x} = - x^{\lambda} \ln x - x^{\lambda} \ln \frac{\sin x}{x},$$

已知, $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\lambda} \ln x = 0$ **与** $\lim\limits_{x \to 0^+} x^{\lambda} \ln \frac{\sin x}{x} = 0$, **即**

$$\lim_{x \to 0^+} x^{\lambda} |\ln \sin x| \qquad .$$

于是, 瑕积分

设 $x = \pi - y$ **与** $x = \frac{\pi}{2} - y$, **分别有**

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d} x = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \ln \sin y \mathrm{d} y,$$

与

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \mathrm{d} x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos y \mathrm{d} y .$$

于是

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x.$$

设 $x=2\varphi$，有

$$I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\qquad\varphi\cos\varphi)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln 2\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin\varphi\mathrm{d}\varphi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I.$$

于是，$I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$，即 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

说明　这是一个有用的瑕积分(亦称尤拉积分)
积分有一定的技巧．因为正弦函数 $y=\sin x$ 与余弦函数 $y=\cos x$
在区间 $0,\frac{\pi}{2}$ 上的面积相等，从而有

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos x\mathrm{d}x$ 实质是变量替换 $x=\frac{\pi}{2}-y$.

技巧在于借助这个等式，将瑕积分 $I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x$ 改写成关于 I 的一次方程，

$$I=\frac{\pi}{2}\ln 2+2I,$$

很容易解得，$I=-\frac{\pi}{2}\ln 2$.

其实这个技巧我们在求不定积分曾多次用过．

应用这个瑕积分的结果，尚可计算：

(1) $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{x}{\tan x}\mathrm{d}x$.

(2)$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x$.

$$\int_0^1 \frac{\arcsin x}{x}\mathrm{d}x = -\int_0^1 \frac{\ln x}{1-x^2}\mathrm{d}x,$$ 设 $x = \sin t$.

例 3. 计算瑕积分:

$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x$;　　(2)$\int_0^1 x^m (\ln x)^n \mathrm{d}x$, m **与** n **是自然数**.

解

$$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} x\mathrm{d} \quad - \cos x)]$$

$$= x\ln \quad - \cos x)\Big|_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\ln \quad - \cos x)\mathrm{d}x = \pi\ln 2 - J,$$

其中

$$J = \int_0^{\pi}\ln \quad - \cos x) \quad x = \int_0^{\pi}\ln\ 2\sin^2 \frac{x}{2}\ \mathrm{d}x$$

$$= \int_0^{\pi}\ln 2\mathrm{d}x + 2\int_0^{\pi}\ln\sin\frac{x}{2}\mathrm{d}x \qquad \text{设}\frac{x}{2} = t$$

$$= \pi\ln 2 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\ln\sin t\mathrm{d}t$$

$$= \pi\ln 2 + 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x \qquad 2)$$

$$= \pi\ln 2 - 2\pi\ln 2 = -\pi\ln 2.$$

于是,$\int_0^{\pi} \frac{x\sin x}{1-\cos x}\mathrm{d}x = 2\pi\ln 2$.

$$I_{m,n} = \int_0^1 x^m (\ln x)^n \mathrm{d}x = \int_0^1 (\ln x)^n \mathrm{d}\frac{x^{m+1}}{m+1}$$

$$= \frac{x^{m+1}}{m+1}(\ln x)^n\Big|_0^1 - \frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x$$

$$= -\frac{n}{m+1}\int_0^1 x^m(\ln x)^{n-1}\mathrm{d}x = -\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}.$$

于是，

$$I_{m,n}=\int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x=-\frac{n}{m+1}I_{m,n-1}$$

$$=(-1)^2\frac{n(n-1)}{(m+1)^2}I_{m,n-2}=\cdots$$

$$=(-1)^n\frac{n!}{(m+1)^n}I_{m,0}.$$

已知 $I_{m,0}=\int_0^1 x^m\mathrm{d}x=\dfrac{1}{m+1}$，即

$$I_{m,n}=\int_0^1 x^m(\ln x)^n\mathrm{d}x=\frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}.$$

例 4. 证明：若 $f(x)=\int_0^x\cos\dfrac{1}{t}\mathrm{d}t$，则 $f'(0)=0$.

证法 应用导数的定义、变量替换以及第二积分中值定理，已知 $f(0)=0$.

证明

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t.$$

设 $\dfrac{1}{t}=y$，有

$$\frac{f(x)-f(0)}{x}=\frac{1}{x}\int_0^x\cos\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{+\infty}\frac{\cos y}{y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}}\frac{\cos y}{y^2}\mathrm{d}y+\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x^2}}^{+\infty}\frac{\cos y}{y^2}\mathrm{d}y.$$

函数 $\varphi(y)=\dfrac{1}{y^2}$ 是单调减少的. 根据第二积分中值定理，有

$$\left|\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}}\frac{\cos y}{y^2}\mathrm{d}y\right|=\left|\frac{1}{x}\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)^2}\int_{\frac{1}{x}}^{\xi}\cos y\mathrm{d}y\right|$$

$$=\left|x\left(\sin\xi-\sin\frac{1}{x}\right)\right|<2|x|.$$

$$\left|\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x^2}}^{+\infty}\frac{\cos y}{y^2}\mathrm{d}y\right|\le\left|\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x^2}}^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}\right|=|x|$$

$\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta<\dfrac{\varepsilon}{3}$，$\forall x$：$|x|<\delta$，有

$$\left|\frac{f\ \ x)-f\ \ 0)}{x}\right| \leq \left|\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x}}^{\frac{1}{x^2}}\frac{\cos\ \ y}{y^2}\mathrm{d}y\right| + \left|\frac{1}{x}\int_{\frac{1}{x^2}}^{+\infty}\frac{\cos\ \ y}{y^2}\mathrm{d}y\right|$$

$$< 2\quad x|\qquad x|\qquad x|\quad \varepsilon,$$

即
$$f\ '\ 0) = \lim_{x\to 0}\frac{f\ \ x)-f\ \ 0)}{x} = 0\ .$$

例 5. 证明: **若瑕积分** $\int_0^1 f\ \ x)\,\mathrm{d}x$ **收敛** 0 **是瑕点**)

$f\ \ x)\qquad 0,1]$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\ \ \frac{k}{n}\ \ = \int_0^1 f\ \ x)\,\mathrm{d}x\ .$$

证法 **应用两边夹定理**, **证明极限** $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\ \ \frac{k}{n}$ **存在**, **并且极限是** $\int_0^1 f\ \ x)\,\mathrm{d}x$.

证明 **不妨设函数** $f\ \ x)\qquad 0,1]\qquad\qquad 0,1]$

n **等分**, **分点是** $\frac{k}{n}\ \ k=0,1,2,\cdots,n)$

$$\int_{\frac{k-1}{n}}^{\frac{k}{n}} f\ \ x)\,\mathrm{d}x \leq f\ \ \frac{k}{n}\ \ \cdot\frac{1}{n},\qquad k=1,2,\cdots,n\ .$$

从而,
$$\int_0^1 f\ \ x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\ \ \frac{k}{n}\qquad .$$

另一方面, **有**

$$f\ \ \frac{k}{n}\ \ \cdot\frac{1}{n} \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f\ \ x)\,\mathrm{d}x,\qquad k=1,2,\cdots,n-1\ .$$

从而,
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} f\ \ \frac{k}{n}\ \ \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f\ \ x)\,\mathrm{d}x\ .$$

即
$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\ \ \frac{k}{n}\ \ \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f\ \ x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}f\ \ \frac{n}{n}\qquad .$$

于是, $\int_0^1 f\ \ x)\,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} f\ \ \frac{k}{n}\ \ \leq \int_{\frac{1}{n}}^{1} f\ \ x)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{n}f\ \ 1)$

已知瑕积分$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$收敛,有$\lim\limits_{n\to\infty}\int_{\frac{1}{n}}^1 f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$.

又$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}f(1)=0$,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)=\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x.$$

例 6. 付茹兰尼(Froullani)

若函数 $f(x)$ $\quad 0,+\infty)$

$$\lim_{x\to 0^+}f(x)=f(0)\quad 与 \quad \lim_{x\to+\infty}f(x)=f(+\infty)(存在)$$

则

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=[f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a},\quad a>0,b>0.$$

特别是当无穷积分$\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\,\mathrm{d}x$存在时,有

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}=f(0)\ln\frac{b}{a},\quad a>0,b>0.$$

证法 证明前者,首先在任意有限区间 $\alpha,\beta]\quad(0,+\infty)$ 计算积分. 应用变量替换和第一积分中值定理,最后取极限 $\alpha\to 0$ 与 $\beta\to+\infty)$ $\qquad *)$ 极限即可.

证明 任取区间$[\alpha,\beta]\quad(0,+\infty)$

$$\int_\alpha^\beta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta\frac{f(ax)}{x}\,\mathrm{d}x-\int_\alpha^\beta\frac{f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

分别作变量替换, $ax=t$ 与 $bx=t$,有

$$\int_\alpha^\beta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{a\alpha}^{a\beta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_{b\alpha}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\left(\int_{a\alpha}^{b\alpha}+\int_{b\alpha}^{a\beta}-\int_{b\alpha}^{b\beta}\right)\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=\left(\int_{a\alpha}^{b\alpha}-\int_{a\beta}^{b\alpha}-\int_{b\alpha}^{b\beta}\right)\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

$$=\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t.\qquad(*)$$

根据第一积分中值定理,有

$$\int_\alpha^\beta \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = f(\xi)\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{\mathrm{d}t}{t} - f(\eta)\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{\mathrm{d}t}{t}$$

$$= [f(\xi)-f(\eta)]\ln\frac{b}{a},$$

其中 ξ 在 $a\alpha$ 与 $b\alpha$ 之间，η 在 $a\beta$ 与 $b\beta$ 之间．于是，

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\substack{\alpha\to0^+\\ \beta\to+\infty}}\int_\alpha^\beta\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x$$

$$= [\lim_{\xi\to0^+}f(\xi) - \lim_{\eta\to+\infty}f(\eta)]\ln\frac{b}{a} = [f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a}.$$

特别是当无穷积分 $\int_A^{+\infty}\frac{f(x)}{x}\mathrm{d}x$ 存在时　　*)　　　$\beta\to+\infty$，有 $\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t\to0$．于是

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x = \lim_{\alpha\to0^+}\int_{a\alpha}^{b\alpha}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t - \lim_{\beta\to+\infty}\int_{a\beta}^{b\beta}\frac{f(t)}{t}\mathrm{d}t$$

$$= \lim_{\xi\to0^+}f(\xi)\ln\frac{b}{a} = f(0)\ln\frac{b}{a}.$$

说明　从证明的过程可见，第一积分中值定理是证明付茹兰尼积分公式的一个重要工具．对无穷积分，虽然变量替换公式和积分的区间可加性都成立，但是第一积分中值定理不成立．因此首先在任意有限区间 $\alpha,\beta]$　$[0,+\infty)$
式、积分的区间可加性、第一积分中值定理都是成立的．经过计算，最后应用极限方法将有限区间 $\alpha,\beta]$　　　　　　$0,+\infty)$
处理无穷积分的一个常用的方法．

付茹兰尼公式是计算同类型无穷积分的一个有用的公式．例如，应用付茹兰尼公式可以计算下列无穷积分：

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\arctan ax-\arctan bx}{x}\mathrm{d}x$，　$a>0, b>0$．

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\mathrm{d}x$，　$a>0, b>0$．

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax^2}-\mathrm{e}^{-bx^2}}{x}\mathrm{d}x$，　$a>0, b>0$．　$x^2=t)$

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos ax-\cos bx}{x}\,\mathrm{d}x,\quad a>0,\ b>0$.

五、练习题 12.2 解法提要

2.判别下列瑕积分的敛散性:

(4) $\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}}$.

解法 0 是瑕点.

$$x^{\frac{2}{3}}\frac{1}{\sqrt[3]{x(\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x})}}=\frac{1}{\sqrt[3]{\dfrac{\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^{-x}}{x}}}\to\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\ (x\to0^+)$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{1-\sin\theta}$.

解法 $\dfrac{\pi}{2}$是瑕点.

$$\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\frac{1}{1-\sin\theta}=\frac{\frac{\pi}{2}-\theta}{1-\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$$

$$=\frac{2\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)}{2\left|\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\theta}{2}\right)\right|}\to2\quad\left(\theta\to\frac{\pi}{2}^-\right).$$

$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$.

解法 当 $p>0$, $q>0$ 时, 0 与$\dfrac{\pi}{2}$都是瑕点, 有

$$\lim_{x\to0}x^p\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}=1.$$

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^q\frac{1}{\sin^p x\cos^q x}=1.$$

由此确定 p 与 q 取何值, 瑕积分收敛或发散.

*　　　　*　　　　*　　　　*

5. 证明:若瑕积分 $\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$ **收敛,且当** $x\to0^+$ **函数** $f(x)$ **调趋向于** $+\infty$, **则** $\lim\limits_{x\to0^+} xf(x)=0$.

证法　应用柯西收敛准则, $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, $\forall x$: $0<x<\delta$, **有**

$$\left|\int_{\frac{x}{2}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t\right|<\varepsilon.$$

由函数 $f(x)$　　　　$0<xf(x)<2\varepsilon$.

6. 证明:瑕积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{[x(1-\cos x)]^{\lambda}}$ $(\lambda>0)$　　$\lambda<\frac{1}{3}$ **时收敛,当** $\lambda\geq\frac{1}{3}$ **时发散**.

证法　$$\lim_{x\to0^+} x^{3\lambda}\frac{1}{[x(1-\cos x)]^{\lambda}}=\lim_{x\to0^+} x^{3\lambda}\frac{1}{x^{3\lambda}\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^{\lambda}}$$

$$=\lim_{x\to0^+}\frac{1}{\left(\frac{1-\cos x}{x^2}\right)^{\lambda}}=2^{\lambda}.$$

当 $3\lambda<1$ **时,即** $\lambda<\frac{1}{3}$**时,瑕积分收敛;当** $3\lambda\geq1$ **时,即** $\lambda\geq\frac{1}{3}$**时,瑕积分发散**.

§12.3　含参变量的积分

一、基本内容

本节有六段.

第一段给出了有限区间上含参变量积分所定义的函数
一个参变量的一元函数)
微性

3)
微性与导数公式

第二段应用第一段含参变量有限积分的分析性质给出了五个例题，基本上都是计算题．

第三段首先给出了含参变量无穷积分所定义的函数，以及含参变量无穷积分的一致收敛概念和一致收敛的判别法：柯西一致收敛准则
量无穷积分所定义的函数的分析性质：连续性

第四段应用第三段含参变量无穷积分的分析性质给出了四个例题，基本上都是计算题．

第五段给出了两个有用的非初等函数：Γ 函数和 B 函数，及其性质．

第六段给出了应用 Γ 函数和 B 函数的五个计算题．

二、学习要求

含参变量积分是表示初等函数和定义非初等函数的重要工具．自然要讨论在什么条件下新函数具有分析性质：连续性，可微性，可积性，即两种极限运算换序的问题．含参变量无穷积分与求极限、求导数、求积分换序都需要一个充分条件——一致收敛性，因此要讨论含参变量无穷积分的一致收敛及其判别法．

本节共有 18 个例题，基本上都是计算题．它们都是应用含参变量积分的理论计算的反常积分
计算反常积分的题在本节占有重要地位．要求：

1.掌握含参变量的有限积分和无穷积分所定义函数的分析性质，及其证明方法．

2. 掌握含参变量无穷积分的一致收敛定义及其判别法，并会叙述非一致收敛．

3.应用积分号下的可微性与可积性，会计算一些定积分与反

常积分 .

4.记住 Γ 函数和 B 函数的定义及其性质，并会应用 Γ 函数和 B 函数计算一些定积分与广义积分 .

三、答疑辅导

问 1. 何谓无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在区间 I 上一致收敛与非一致收敛 ?

答　由无穷积分收敛的定义知，$\forall u \in I$，有

$$\lim_{p\to+\infty}\int_a^p f(x, u)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x,$$

其中 $\int_a^p f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 是 p 与 u 的二元函数，而它的极限函数 $\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ ($p\to+\infty$) u 的一元函数 .

所谓“无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在区间 I 上一致收敛”，就是二元函数 $\int_a^p f(x, u)\,\mathrm{d}x$ ($p\to+\infty$ 时) I 上一致收敛于极限函数 $\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$.用“ε - A”语言叙述是

$\forall \varepsilon > 0$，$\exists A_0 > 0$，$\forall A > A_0$，$\forall u \in I$，有

$$\left|\int_a^A f(x, u)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} f(x, u)\mathrm{d}x\right| = \left|\int_A^{+\infty} f(x, u)\mathrm{d}x\right| < \varepsilon .$$

我们不难给出无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在区间 I 上非一致收敛的叙述 .二者列表对比如下:

$\int_a^{+\infty} f(x, u)\,\mathrm{d}x$ 在区间 I 上	
一致收敛	$\forall \varepsilon > 0, \exists A_0 > a, \forall A > A_0, \forall u \in I$,有 $\left\lvert\int_A^{+\infty} f(x, u)\mathrm{d}x\right\rvert < \varepsilon$.
非一致收敛	$\exists \varepsilon_0 > 0, \forall A > a, \exists A_0 > A, \exists u_0 \in I$,有 $\left\lvert\int_{A_0}^{+\infty} f(x, u_0)\mathrm{d}x\right\rvert \geq \varepsilon_0$.

例如,无穷积分$\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x$在区间 $0, +\infty)$

事实上,$\exists\ \varepsilon_0 = \mathrm{e}^{-2} > 0$, $\forall A > 0$, $\exists\ A_0 > A$, $\exists\ u_0 = \dfrac{1}{A_0} \in$ $[0, +\infty)$

$$\left|\int_{A_0}^{+\infty} u_0 \mathrm{e}^{-xu_0}\mathrm{d}x\right| = \mathrm{e}^{-A_0u_0} = \mathrm{e}^{-A_0\frac{1}{A_0}} = \mathrm{e}^{-1} > \mathrm{e}^{-2},$$

即无穷积分$\int_0^{+\infty} u\mathrm{e}^{-xu}\mathrm{d}x$在区间 $0, +\infty)$

我们所说的“当 $x\to+\infty$时,二元函数 $g\quad x, u)$ $I\quad u\in I)$上一致收敛于 0”,意即,当 $x\to+\infty$时,$g\quad x, u)$ 间 I上一致收敛于函数$f\quad x, u)\equiv 0$,用“ε - A”语言叙述是

$$\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\ A_0 > 0,\ \forall\ A > A_0,\ \forall\ u\in I,\ 有$$

$$|\ g(x, u) - 0| \qquad g(x, u)| \quad \varepsilon.$$

问 2. 何谓二元函数 $f\quad x, u)$ $\qquad a, b]$ $\qquad u$ 在区间 $\alpha, +\infty)$

答 函数$f\quad x, u)$ $\qquad a, b]$ $\qquad u$ 在区间 $\alpha, +\infty)$ 一致有界,即函数 $f\quad x, u)$ $\qquad a, b]$ $\qquad u$ 无关,用符号表示是

$$\exists\ M > 0,\ \forall\ x\in[a, b] \qquad u\in[\alpha, +\infty)$$

$$|\ f(x, u)| \quad M.$$

显然,若函数 $f\quad x, u)$ $\qquad a, b]$ $u\in[\alpha, +\infty)$ $\qquad f\quad x, u)$ $\quad a, b]$ 一个 $u\in[\alpha, +\infty)$ $\qquad f\quad x, u)$ $\quad a, b]$ $f\quad x, u)$ $\quad a, b]$ $\qquad u\in$ $[0, +\infty)$ $\qquad f\quad x, u) = u\mathrm{e}^{-x}$在 $0, 1]$ $f\quad x, u) = u\mathrm{e}^{-x}$在 $0, 1]$ $\qquad u\in[\alpha, +\infty)$

问 3. 无穷积分$\int_a^{+\infty} f\quad x, u)\,\mathrm{d}x$与函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 类似的性质?

答　无穷积分$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$与函数级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$数的求"和"问题,前者是连续的作和,后者是离散的作和.因此,它们的一致收敛定义及其判别法和各种性质都是平行的,为了便于记忆,列表对比如下:

	$\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x,\ u\in I$	$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\quad x\in J$
一致收敛定义	$\forall\varepsilon>0,\exists A_0>a,\forall A>A_0,\forall u\in I$,有 $\left\|\int_A^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right\|<\varepsilon$.	$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N},\forall n>N,\forall x\in J$,有$\left\|\sum\limits_{k=n}^{\infty} u_k(x)\right\|<\varepsilon$.
柯西一致收敛准则	$\forall\varepsilon>0,\exists A_0>a,\forall A_1>A_0,A_2>A_0,\forall u\in I$,有 $\left\|\int_{A_1}^{A_2} f(x,u)\,\mathrm{d}x\right\|<\varepsilon$.	$\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathbf{N}_+,\forall n_1>N,n_2>N,\forall x\in J$,有 $\left\|\sum\limits_{k=n_1}^{n_2} u_k(x)\right\|<\varepsilon\quad n_2>n_1)$
优函数与优级数判别法	若$\forall x>B,\forall u\in I$,有$\|f(x,u)\|\le F(x)$ $\int_a^{+\infty} F(x)\,\mathrm{d}x$收敛,则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,\mathrm{d}x$在$I$上一致收敛.	若$\forall n\in\mathbf{N}_+,\forall x\in J$,有 $\|u_n(x)\|\le a_n$,且$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$收敛,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$　J上一致收敛.
狄利克雷判别法	若$\forall p>a,\int_a^p f(x,u)\,\mathrm{d}x$在$I$上一致有界,$\forall u\in I,g(x,u)$　x是单调的,且当$x\to+\infty$在I上一致收敛于0,则 $\int_a^{+\infty} f(x,u)\,g(x,u)\,\mathrm{d}x$在$I$上一致收敛. (证明见本节补充例题的例2)	若$\forall n\in\mathbf{N}_+,\sum\limits_{k=1}^{n} u_k(x)$　J上一致有界,$\forall x\in J$,$v_n(x)\}$　n是单调的,且当$n\to+\infty$在J上一致收敛于0,则$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)\,v_n(x)$　J上一致收敛.

续表

	$\int_a^{+\infty} f\quad x,u)\,\mathrm{d}x,\ u\in\ I$	$\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ (x)\quad x\in\ J$
阿贝尔判别法	若$\int_a^{+\infty} f\quad x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛, " $u\in\ I,g\quad x,u)$ x 是单调的, 且在 I 上一致有界, 则$\int_a^{+\infty} f\quad x,u)\quad g\quad x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 I 上一致收敛 . (证明见本节补充例题的例 3)	若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ (x)\quad J$ 上一致收敛, " $x\in\ J,v_n\ (x)\qquad n$ 是单调的, 且在 J 上一致有界, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ (x)\ v_n\ (x)\qquad J$ 上一致收敛 .
两种极限运算换序(这里只给出定理的结果)	§12.3 定理 8　" $u_0\in[\alpha,\beta]$ $\lim\limits_{u\to u_0}\int_a^{+\infty} f\quad x,u)\,\mathrm{d}x$ $=\int_a^{+\infty}[\lim\limits_{u\to u_0} f(x,u)]\,\mathrm{d}x$. 定理 9 $\int_\alpha^\beta\int_a^{+\infty} f(x,u)\mathrm{d}x\quad \mathrm{d}u$ $=\int_a^{+\infty}\quad\int_\alpha^\beta f(x,u)\mathrm{d}u\quad\mathrm{d}x$. 定理 10 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\int_a^{+\infty} f\quad x,u)\,\mathrm{d}x$ $=\int_a^{+\infty}\overline{\quad u} f\quad x,u)\,\mathrm{d}x$.	§9.2 定理 6　" $x_0\in\quad a,b]$ $\lim\limits_{x\to x_0}\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ (x)$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\lim\limits_{x\to x_0} u_n\ (x)$ 定理 7 $\int_a^b\quad\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)\quad\mathrm{d}x$ $=\sum_{n=1}^{\infty}\int_a^b u_n\ (x)\,\mathrm{d}x$. 定理 8 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum_{n=1}^{\infty} u_n\ (x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n\ (x)$

问 4. 含参变量瑕积分的一致收敛是怎样定义的 ?

答　设函数 $f\quad x,u)\qquad\qquad G\quad a<\ x\leq b,\alpha\leq u\leq\beta)$

" $u\in\quad\alpha,\beta]\quad a$ 都是函数 $f\quad x,u)\qquad\qquad\qquad\int_a^b f\quad x,u)\,\mathrm{d}x$ 收敛 这就是含参变量的　　　　a 是瑕点的

这种含参量的瑕积分.它的一致收敛概念及其判别法和两个极限运算换序定理与含参变量的无穷积分都是平行的.

定义 若 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$, $\forall \eta$: $0 < \eta < \delta$, $\forall u \in [\alpha, \beta]$ 有

$$\left|\int_a^{a+\eta} f\ \ x, u)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

称瑕积分 $\int_a^b f\ \ x, u)\,\mathrm{d}x$ a 是瑕点) $\alpha, \beta]$ 一致收敛.

柯西一致收敛准则 $\int_a^b f\ \ x, u)\,\mathrm{d}x$ a 是瑕点) $\alpha, \beta]$ 上一致收敛 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x_1, x_2 \in\ \ a, a + \delta)$ $u \in [\alpha, \beta]$

$$\left|\int_{x_1}^{x_2} f(x, u)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon.$$

***M* 判别法(优函数判别法)** $\delta > 0$, $\forall x \in (a, a + \delta)$ $(a, b]$ $u \in [\alpha, \beta]$

$$|f(x, u)|\ \ \ F\ \ x)$$

并且 $\int_a^b F\ \ x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则瑕积分 $\int_a^b f\ \ x, u)\,\mathrm{d}x$ a 是瑕点) $\alpha, \beta]$

例如, 瑕积分 $\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 0 可能是瑕点) $\alpha_1, +\infty)$ $(\alpha_1 > 0)$ 上是一致收敛的.

事实上, $\forall \alpha \in [\alpha_1, +\infty)$ $x \in (0, 1]$

$$|x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}|\ \ \ x^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

已知瑕积分 $\int_0^1 x^{\alpha_1-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 收敛, 由 M 判别法, 瑕积分 $\int_0^1 x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x$ 在区间 $\alpha_1, +\infty)$

判别含参变量瑕积分的一致收敛也有狄利克雷与阿贝尔判别法以及两个极限的换序定理, 读者可仿照含参变量无穷积分一一写出.

问 5. 到此为止，表示非初等函数都有哪些方法？

答　从函数的角度来说，数学分析课程也是一门不断地用极限的工具表示新的函数，特别是非初等函数，并系统研究它们的分析性质的课程. 到此为止，表示非初等函数都有哪些方法呢？主要有以下几种方法：

1. 用“一句话”给出对应规律. 例如：

符号函数 $y=\operatorname{sgn} x$，狄利克雷函数 $y=D(x)$

2. 用定积分（积分上限函数）

$$f(x)=\int_0^x e^{-t^2}\,dt,\quad g(x)=\int_0^x \frac{\sin t}{t}\,dt,\text{等}.$$

3. 用函数级数. 例如：

$$\zeta(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^x}\ (x>1)\qquad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\sin(n+1)x}{2n+1},\ x\in\mathbf{R},$$

等.

4. 用函数列. 例如：

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sin^n x,\quad x\in\mathbf{R},\qquad g(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^n}{1+x^n},\quad 0\le x<+\infty,$$

等.

5. 用函数方程（稳函数）

$$xy+2^x-2^y=0,\ \text{在点}(0,0)$$

$$xy+2\ln x+3\ln y-1=0,\ \text{在点}(1,1)$$

6. 用含参变量的有限积分. 例如：

$$E(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}\,d\varphi,\quad F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\varphi}}$$

$(0<k<1)$

$$I(a)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\arctan(a\tan x)}{\tan x}\,dx,\ J_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(n\varphi-x\sin\varphi)\,d\varphi,$$

等.

7. 用含参变量的无穷积分. 例如：

$$f(a)=\int_0^{+\infty}e^{-ax^2}dx,\quad g(y)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin yx}{x}dx,$$

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}e^{-x}dx,\quad h(p)=\int_1^{+\infty}\frac{(\ln x)^p}{1+x^2}dx,\ p>0,\text{等}.$$

当然，能表示非初等函数的方法尚不止此，还有累次极限，无穷乘积，含参变量的瑕积分，等等．

为了研究用不同的方法所表示的非初等函数的分析性质，因此每一种方法都有相应的一套理论，以保证用此方法所表示的函数

四、补充例题

例 1. 证明：若函数 $f(x)$ $a, b]$ $x\in[a, b]$ 有

$$\int_a^x\int_a^{t_{n-1}}\cdots\int_a^{t_2}\int_a^{t_1}f(t)dt\,dt_1\cdots dt_{n-1}$$

$$=\frac{1}{(n-1)}\int_a^x(x-t)^{n-1}f(t)dt.$$

证法 应用数学归纳法与定理 4．

证明 当 $n=1$ 时，显然等式成立，即

$$\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(t)dt.$$

假设 $n=k$ 等式成立，即

$$\int_a^x\int_a^{t_{k-1}}\cdots\int_a^{t_2}\int_a^{t_1}f(t)dt\,dt_1\cdots dt_{k-1}$$

$$=\frac{1}{(k-1)}\int_a^x(x-t)^{k-1}f(t)dt,$$

证明 $n=k+1$ 等式也成立．事实上，设

$$I_k(x)=\frac{1}{(k-1)}\int_a^x(x-t)^{k-1}f(t)dt.$$

根据定理 4, 对 $I_{k+1}(x)=\frac{1}{k}\int_a^x(x-t)^k f(t)dt$ 取导数, 有

$$I'_{k+1}(x)=\frac{1}{(k-1)!}\int_a^x (x-t)^{k-1}f(t)\,\mathrm{d}t=I_k(x)$$

已知 $I_{k+1}(a)=0$,**上述等式两端积分,有**

$$I_{k+1}(x)=\int_a^x I_k(t_k)\,\mathrm{d}t_k$$

$$=\int_a^x\left[\int_a^{t_k}\left[\int_a^{t_{k-1}}\cdots\left[\int_a^{t_2}\left[\int_a^{t_1}f(t)\,\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}t_1\right]\cdots\right]\mathrm{d}t_{k-1}\right]\mathrm{d}t_k,$$

即 $n=k+1$ **也成立**.

例 2.(**狄利克雷判别法**)　　$\forall p>a$, $\int_a^p f(x,u)\,\mathrm{d}x$ **在** I **上一致有界**, $\forall u\in I$, $g(x,u)$　　x **是单调的,且当** $x\to+\infty$ **在** I **上一致收敛于** 0, **则** $\int_a^{+\infty}f(x,u)g(x,u)\,\mathrm{d}x$ **在** I **上一致收敛**.

证法　**应用第二积分中值定理**.

证明　**已知** $g(x,u)$　I **上一致收敛于** 0, **即** $\forall\varepsilon>0$, $\exists A_0>a$, $\forall A>A_0$, $\forall u\in I$, **有**

$$|g(A,u)|<\varepsilon.$$

已知 $\forall p>a$, $\int_a^p f(x,u)\,\mathrm{d}x$ **在** I **上一致有界,即** $\exists M>0$, $\forall p>a$, $\forall u\in I$, **有** $\left|\int_a^p f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|\le M$. **从而**, $\forall A_1,A_2>A_0$, **有**

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|\le\left|\int_a^{A_1}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^{A_2}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|\le 2M.$$

根据第二积分中值定理　　　§8.4 **补充例题的例** 11), $\forall u\in I$, **有**

$$\left|\int_{A_1}^{A_2}f(x,u)g(x,u)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\le|g(A_1,u)|\left|\int_{A_1}^{\xi}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|+|g(A_2,u)|\left|\int_{\xi}^{A_2}f(x,u)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\le 4M\varepsilon.$$

根据柯西一致收敛准则, $\int_a^{+\infty}f(x,u)g(x,u)\,\mathrm{d}x$ **在** I **上一致**

收敛 .

例 3. (**阿贝尔判别法**)　**若** $\int_a^{+\infty} f\quad x, u)\,\mathrm{d}x$ **在** I **上一致收敛**, " $u \in I, g\quad x, u)$ 　　x **是单调的,且当** $x \to +\infty$ **在** I **上一致有界,则** $\int_a^{+\infty} f\quad x, u)\ \ g\quad x, u)\,\mathrm{d}x$ **在** I **上一致收敛** .

证法　**应用第二积分中值定理** .

证明　**已知** $\int_a^{+\infty} f\quad x, u)\,\mathrm{d}x$ **在** I **上一致收敛,即** " $\varepsilon > 0$,v $A_0 > a$, " $A_1, A_2 > A_0$, " $u \in I$,**有**

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f\quad x, u)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon .$$

已知 $g\quad x, u)$ 　I **上一致有界, 即**v $M > 0$, " $x > a$, " $u \in I$, **有** $|g\quad x, u)| \leq M$.

根据第二积分中值定理 (**见本书上册** §8.4 **补充例题的例** 11)　　$u \in I$, **有**

$$\left|\int_{A_1}^{A_2} f\quad x, u)\ \ g\quad x, u)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq |g\quad A_1, u)| \left|\int_{A_1}^{\xi} f\quad x, u)\,\mathrm{d}x\right| + |g\quad A_2, u)| \left|\int_{\xi}^{A_2} f\quad x, u)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$< 2M\varepsilon .$$

根据柯西一致收敛准则, $\int_a^{+\infty} f\quad x, u)\ \ g\quad x, u)\,\mathrm{d}x$ **在** I **上一致收敛** .

例 4. **证明**: **若函数** $f\quad x, u)$ 　　$G\quad a \leq x < +\infty, \alpha \leq u < +\infty)$　**连续, 而无穷积分**

$$\int_a^{+\infty} f\quad x, u)\,\mathrm{d}x \quad \text{与} \quad \int_\alpha^{+\infty} f\quad x, u)\,\mathrm{d}u$$

分别在任意有限区间 $\alpha, \beta]$ 　　$a, b]$

$$\int_a^{+\infty} \int_\alpha^{+\infty} |f\quad x, u)|\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x \qquad \text{与} \qquad \int_\alpha^{+\infty} \int_a^{+\infty} |f\quad x, u)|\,\mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}u$$

至少有一个存在,则积分

$$\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x \quad 与 \int_\alpha^{+\infty}\int_a^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}u$$

都存在,且

$$\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x = \int_\alpha^{+\infty}\int_a^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}u .$$

证法　不妨设$\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} |f\ \ x,u)|\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x$存在 .只需证明

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_\alpha^{\beta}\int_a^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}u = \int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x .$$

已知$\int_a^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}x$ 在 $\alpha,\beta]$ 8,只需证明

$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{\beta} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x = \int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x$$

或　$$\lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x - \int_a^{+\infty}\int_\alpha^{\beta} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u - \int_\alpha^{\beta} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x$$

$$= \lim_{\beta\to+\infty}\int_a^{+\infty}\int_\beta^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x = 0 .$$

证明　已知$\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} |f\ \ x,u)|\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x$存在,即 " $\varepsilon > 0$, v $A_0 > a$, " $b > A_0$,有

$$\int_b^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} |f\ \ x,u)|\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x < \varepsilon .$$

从而,$\left|\int_b^{+\infty}\int_\beta^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x\right| \le \int_b^{+\infty}\int_\beta^{+\infty} |f\ \ x,u)|\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x$

$$\le \int_b^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} |f\ \ x,u)|\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x < \varepsilon .$$

于是,$\int_a^{+\infty}\int_\beta^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x = \int_a^{b}\int_\beta^{+\infty} f\ \ x,u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x$

$$+\int_b^{+\infty}\int_\beta^{+\infty} f\ \ x, u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x .$$

已知$\int_\alpha^{+\infty} f\ \ x, u)\,\mathrm{d}u$ 在 $a, b]$ $\varepsilon > 0$,

v $B_0 > \alpha$, " $\beta > B_0$, " $x \in\ \ a, b]$

$$\left|\int_\beta^{+\infty} f\ \ x, u)\,\mathrm{d}u\right| < \varepsilon .$$

从而, $\left|\int_a^b \int_\beta^{+\infty} f\ \ x, u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x\right| \le \int_a^b \left|\int_\beta^{+\infty} f\ \ x, u)\,\mathrm{d}u\right| \mathrm{d}x < \varepsilon\ \ b - a)$

于是, $\left|\int_a^{+\infty}\int_\beta^{+\infty} f\ \ x, u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x\right|$

$$\le \left|\int_a^b \int_\beta^{+\infty} f\ \ x, u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x\right| + \left|\int_b^{+\infty}\int_\beta^{+\infty} f\ \ x, u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x\right|$$

$$<\ \ b - a + 1)\ \varepsilon,$$

即 $\int_a^{+\infty}\int_\alpha^{+\infty} f\ \ x, u)\,\mathrm{d}u\ \ \mathrm{d}x = \int_\alpha^{+\infty}\int_a^{+\infty} f\ \ x, u)\,\mathrm{d}x\ \ \mathrm{d}u .$

例 5. 已知$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{a + x^2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{\ \ a}\ \ a > 0)$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a + x^2)^{n+1}} \quad (n \in \mathbf{N}_+)\ \ .$$

解法 逐次应用积分号下微分法.

解 将 a 看作参变量, " $a > 0$, v $\delta > 0$, 使 $0 < \delta \le a$, " $k \in \mathbf{N}_+$, 有

$$\frac{1}{(a + x^2)^{k+1}} \le \frac{1}{(\delta + x^2)^{k+1}} .$$

因为$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(\delta + x^2)^{k+1}}$收敛,所以$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(a + x^2)^{k+1}}$在 $\delta, +\infty)$ 一致收敛,根据定理 10,逐次应用积分号下微分法,有

$$\int_0^{+\infty} \frac{}{\ \ a}\ \frac{1}{a + x^2}\ \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\ \frac{\pi}{2} a^{-\frac{1}{2}}\ \ ,$$

即

$$1\cdot\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)^2}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{2}\,a^{-\frac{3}{2}},$$

$$1\cdot 2\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)^3}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,a^{-\frac{5}{2}},$$

……

$$n!\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)^{n+1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{2^n}\,a^{-\frac{2n+1}{2}},$$

即

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(a+x^2)^{n+1}}=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{1}{a^n\sqrt{a}}.$$

例 6. 计算无穷积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}\mathrm{d}x,\quad a>0,\ b>0$.

解法　应用积分号下微分法，并用公式 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

解　设 $y=\sqrt{a}x$，$ab=c^2$，有

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-ax^2-\frac{b}{x^2}}\mathrm{d}x=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2-\frac{ab}{y^2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{\sqrt{a}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\mathrm{d}y.$$

下面计算 $I(c)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\mathrm{d}y$.

$$I'(c)=-2c\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y^2-\frac{c^2}{y^2}}\frac{\mathrm{d}y}{y^2}.$$

不难证明，可以应用积分号下微分法，设 $y=\frac{c}{z}$，有

$$I'(c)=-2c\int_{+\infty}^{0}\mathrm{e}^{-\frac{c^2}{z^2}-z^2}\left(-\frac{1}{c}\right)\mathrm{d}z$$

$$=-2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-z^2-\frac{c^2}{z^2}}\mathrm{d}z=-2I(c)$$

$$\frac{I'(c)}{I(c)}=-2,\ \text{从而}\int_0^{c}\frac{I'(t)}{I(t)}\mathrm{d}t=\int_0^{c}(-2)\,\mathrm{d}t.$$

$$\ln I(c)-\ln I(0)=-2c\ \text{或}\ I(c)=I(0)\mathrm{e}^{-2c}.$$

其中 $I(0) = \int_0^{+\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$，即 $I(c) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}$. 于是，

$$\int_0^{+\infty} e^{-ax^2 - \frac{b}{x^2}} dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-2c}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-2\sqrt{ab}} .$$

例 7. 无穷积分

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (p > 0)$$

称为拉普拉斯变换．它将函数 $f(t)$ $F(p)$
函数的拉普拉斯变换：

$f(t) = t^n$ (n 是自然数)； $f(t) = \sqrt{t}$；

$f(t) = e^{\alpha t}$ ($p > \alpha$)； $f(t) = te^{-\alpha t}$ ($p > -\alpha$)．

解法 将函数 $f(t)$ 分别代入拉普拉斯变换之中，计算无穷积分，可得变换之后的函数．

解 (1) $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^n dt$. 设 $pt = x$，有

$$F(p) = \frac{1}{p^{n+1}} \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{1}{p^{n+1}} \Gamma(n+1) = \frac{n!}{p^{n+1}} .$$

(n 是自然数)

$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t^{\frac{1}{2}} dt$. 设 $pt = x$，有

$$F(p) = \frac{1}{p\sqrt{p}} \int_0^{+\infty} x^{\frac{1}{2}} e^{-x} dx = \frac{1}{p\sqrt{p}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{p\sqrt{p}} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2p\sqrt{p}} .$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} e^{\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} e^{-(p-\alpha)t} dt$$

$$= \frac{1}{p - \alpha} \quad (p > \alpha) .$$

$$F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} t e^{-\alpha t} dt = \int_0^{+\infty} t e^{-(p+\alpha)t} dt .$$

设 $(p+\alpha)t=x$，有

$$F(p)=\frac{1}{(p+\alpha)^2}\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\frac{1}{(p+\alpha)^2}\Gamma(2)$$

$$=\frac{1}{(p+\alpha)^2}\Gamma(1)=\frac{1}{(p+\alpha)^2}\qquad(p>-\alpha)$$

说明 本章有三节，包括两个内容：一是反常积分

分与瑕积分)

性的概念和判别法，以及极限换序的理论之外，主要是反常积分

(也包括某些定积分)

是为计算服务的．这一点从

书的补充例题就能看到．因此，反常积分的计算在本章处于重要的地位．例如，下列反常积分：

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\sin x\mathrm{d}x=\frac{1}{2}.$$

$$\int_0^{+\infty}x^{2k}\mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x=\frac{(2k-1)}{2^{k+1}}\pi,\ k\in\mathbf{N}_+.$$

(本书 §12.1 补充例题的例 5 .)

$$\int_0^{\pi}\ln(1+r\cos x)\mathrm{d}x=\pi\ln\frac{1+\quad 1-r^2}{2},\ |r|<1.$$

(《讲义》§12.3 例 2 .)

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin x\mathrm{d}x=-\frac{\pi}{2}\ln 2.\qquad\text{(本书 §12.2 补充例题的例 2 .)}$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\mathrm{d}x=\ f(0)-f(+\infty)]\ln\frac{b}{a},\ a>0,\ b>0.$$

(本书 §12.2 补充例题的例 6 .)

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin yx}{x}\mathrm{d}x=\begin{cases}\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } y>0 \text{ 时},\\ 0, & \text{当 } y=0 \text{ 时},\\ -\dfrac{\pi}{2}, & \text{当 } y<0 \text{ 时}.\end{cases}\qquad\text{(《讲义》§12.3 例 12 .)}$$

$$\Gamma(\alpha+1)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha}e^{-x}\,dx=\alpha\Gamma(\alpha)\quad(\alpha>0)$$

$$\Gamma(n+1)=n!=\int_0^{+\infty} x^{n}e^{-x}\,dx\quad(n\in\mathbf{N}_+)$$

(《讲义》§12.3 第五段.)

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,dx$$

$$=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1)\quad p>0,q>1.$$

(《讲义》§12.3 第五段.)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}dx=\pi,\quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\int_{-\infty}^{0} e^{-x^2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

(《讲义》§12.3 例 14.)

等等．这些积分在其它课程

结果．

计算反常积分常用的方法有：分部积分法，变量替换法，积分号下微分法，积分号下积分法等．有时应用这些方法的同时，还伴随着一些技巧

五、练习题 12.3 解法提要

5. 若 $F(x)=\int_0^h\int_0^h f(x+\xi+\eta)\,d\eta\,d\xi\quad h>0)$

$f(x)$　　　　　　　　$F''(x)$．

解法　设 $y=x+\xi+\eta$ （η是变数） $dy=d\eta$，有

$$F(x)=\int_0^h\int_{x+\xi}^{x+\xi+h} f(y)\,dy\,d\xi.$$

应用定理 4，有

$$F'(x)=\int_0^h f(x+\xi+h)-f(x+\xi)\,d\xi.$$

再设 $u=x+\xi+h$，$du=d\xi$，

　　$v=x+\xi$，　　$dv=d\xi$，

则 $$F' \ x) = \int_{x+h}^{x+2h} f \ u)\,\mathrm{d}u - \int_{x}^{x+h} f \ v)\,\mathrm{d}v .$$

再求 $F'' \ x)$.

7. 证明: 若函数 $f \ x)$ $a, b]$ $x \in [a, b]$ 有

$$\int_a^x \int_a^y f \ t)\,\mathrm{d}t \ \mathrm{d}y = \int_a^x f \ t) \ x - t)\,\mathrm{d}t .$$

证法 首先证明上式两端关于 x 的导数相等, 则有

$$\int_a^x \int_a^y f \ t)\,\mathrm{d}t \ \mathrm{d}y - \int_a^x f \ t) \ x - t)\,\mathrm{d}t = C,$$

其中 C 是常数, 其次确定 $C = 0$.

此题是补充例题的例 1 的特殊情况, $n = 2$.

9. 用积分号下可微分, 计算下列积分:

$$I \ a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln (\sin^2 x + a^2 \cos^2 x)\,\mathrm{d}x, \quad a > 0 .$$

解法 首先证明满足定理 2 的条件, 有

$$I' \ a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a}{\tan^2 x + a^2}\,\mathrm{d}x .$$

计算这个积分, 设 $\tan x = t$, 可得

$$I' \ a) = \frac{\pi}{a+1} .$$

两端积分 $I \ a) = \pi \ln (a+1) + C$. 最后确定常数 C .

14. 应用积分号下可微分, 求下列无穷积分:

$$I \ a) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-x^2} - \mathrm{e}^{-ax^2}}{x}\,\mathrm{d}x, \quad a > 0 .$$

解法 首先证明满足定理 10 的条件, " $a > 0$, 有

$$I' \ a) = \frac{1}{2a} .$$

两端积分之后, 再确定常数 C .

15. 应用积分号下可积分, 求下列无穷积分:

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin\ x dx\ .$$

解法　已知 $\frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} = \int_a^b e^{-yx} dy$, **则**

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin\ x dx = \int_0^{+\infty} \int_a^b e^{-yx} \sin\ x dy\ \ dx\ .$$

证明满足定理 9 **的条件，两个积分可以换序，然后计算之** .

16. 证明:　$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^4} dx = \frac{1}{2}\Gamma\ \ \frac{1}{4}\ \ ;$

($\int_0^{+\infty} x^m e^{-x^n} dx = \frac{1}{n}\Gamma\ \ \frac{m+1}{n}\ \ ,\ \ n > 0, m > -1\ .$

证法　　$x^4 = t$, **可将积分化为 Γ 函数** .

(　　$x^n = t$, **可将积分化为 Γ 函数** .

17. 用 Γ 函数与 B **函数求下列积分**:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{1 + x^4} dx\ .$$

解法　设 $\frac{1}{1 + x^4} = y$.

$$\int_{-1}^1 (1 - x^2)^n dx,\quad n \in \mathbf{N}_+\ .$$

解法　设 $x^2 = y$.

19. 证明: **椭圆积分** $E\ \ k) = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \ 1 - k^2 \sin^2 \varphi d\varphi$ **满足微分方程**

$$E''\ k) + \frac{1}{k} E'\ k) + \frac{E\ \ k)}{1 - k^2} = 0,\qquad 0 < k < 1\ .$$

证法　应用积分号下可微分，有

$$E'\ \ k) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{k \sin^2 \varphi}{\ \ 1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(1 - k^2 \sin^2 \varphi) - 1}{\ \ 1 - k^2 \sin^2 \varphi} d\varphi$$

$$= \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}}\ \ 1 - k^2 \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{k} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\ \ 1 - k^2 \sin^2 \varphi}\ .$$

令

$$F(k)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\varphi}{1-k^2\sin^2\varphi},\text{有}$$

$$E'(k)=\frac{1}{k}\quad E(k)-F(k)\quad .$$

对上式再关于 k 求导，整理之后是 $E''(k)=-\frac{F'(k)}{k}$．于是，

$$E''(k)+\frac{1}{k}E'(k)+\frac{E(k)}{1-k^2}$$

$$=\frac{1}{k}\quad\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}-F'(k)\quad .$$

然后证明

$$\frac{E(k)}{k(1-k^2)}-\frac{F(k)}{k}-F'(k)=0\ .$$

首先求 $F'(k)=\frac{1}{k}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\varphi-F(k)\quad .$

并证明：$\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-k^2\sin^2\varphi)^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}\varphi=\frac{E(k)}{1-k^2}$ ．

20． 证明：若函数 $f(x)$连续，且

$$k(x,y)=\begin{array}{ll} y(1-x) & y<x, \\ x(1-y) & y\geq x, \end{array}$$

则函数 $u(x)=\int_0^1 k(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$ 满足微分方程

$$u''(x)+f(x)=0,$$

$$u(0)=0,\quad u(1)=0\ .$$

证法　已知

$$u(x)=\int_0^x y(1-x)f(y)\,\mathrm{d}y+\int_x^1 x(1-y)f(y)\,\mathrm{d}y\ .$$

等式右端满足定理 4 的条件．等式两端求导数，然后再求一次导数．并验证满足条件 $u(0)=0$，$u(1)=0$．

21． 证明：若函数 $f(x,u)$　　　　$R(a\leq x\leq b,\alpha\leq u\leq\beta)$

$a(u)$　　$b(u)$　　　　$[\alpha,\beta]$　　　　　　$u\in$

$[\alpha,\beta]$ 有

$$a \leq a\quad u) \leq b,\qquad a \leq b\quad u) \leq b,$$

则函数 $\psi\quad u)=\int_{a\ u)}^{b\ u)} f\quad x,u)\,\mathrm{d}x$ 在区间 $\alpha,\beta]$ 连续 .

证法　应用连续定义 . " $u\in[\alpha,\beta]$　$u+\Delta u\in[\alpha,\beta]$，有

$$\psi\quad u+\Delta u)-\psi\quad u)$$

$$=\int_{a\ u+\Delta u)}^{b\ u+\Delta u)} f\quad x,u+\Delta u)\,\mathrm{d}x-\int_{a\ u)}^{b\ u)} f\quad x,u)\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_{a\ u+\Delta u)}^{a\ u)} f\quad x,u+\Delta u)\,\mathrm{d}x+\int_{a\ u)}^{b\ u)}[f(x,u+\Delta u)-f(x,u)]\,\mathrm{d}x+$$

$$\int_{b\ u)}^{b\ u+\Delta u)} f\quad x,u+\Delta u)\,\mathrm{d}x .$$

根据一致连续性、中值定理与 $a\quad u)\quad b\quad u)$

式右端三项的每项绝对值都能任意小 .

23. 证明: Γ 函数在区间 $0,+\infty)$

" $n\in\mathbf{N}_+$，有

$$\Gamma^{(n)}(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}(\ln x)^n\,\mathrm{d}x .$$

证法　　$\Gamma(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x .$

$$\int_0^{+\infty}\frac{}{\alpha}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x$$

$$=\int_0^{1} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x+\int_1^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x .$$

" $\alpha_1,\alpha_2>0$，且 $\alpha_1<\alpha_2$，用 M 判别法可证上述等式右端的瑕积分与无穷积分在区间 $\alpha_1,\alpha_2]$ 上都一致收敛 . 根据定理 10，有

$$\Gamma'(\alpha)=\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\ln x\,\mathrm{d}x .$$

同样方法可继续作下去 .

24. 证明: 若 $f\quad t)=\int_0^t \mathrm{e}^{-x^2}\mathrm{d}x\quad{}^2$，$g\quad t)=\int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-\ 1+x^2)\,t^2}}{1+x^2}\mathrm{d}x$，则

$$f'\ t)+g'\ t)=0,\quad f\quad t)+g\quad t)=\frac{\pi}{4}\quad (t\geq 0).$$

由此求概率积分$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\pi}{2}$.

证法 $f'\ t)=2e^{-t^2}\int_0^t e^{-x^2}dx=2\int_0^t e^{-\ t^2+x^2)}dx.$

$$g'\ t)=-2\int_0^1 e^{-\ 1+x^2)\ t^2}\ t\,dx=-2\int_0^1 e^{-\ t^2+x^2t^2)}\ t\,dx.$$

设 $xt=y$, **有**

$$g'\ t)=-2\int_0^t e^{-\ t^2+y^2)}dy,$$

即 $f'\ t)=-g'\ t)$ **或** $f'\ t)+g'\ t)=0\cdots\cdots$

对等式 $f\ t)+g\ t)=\frac{\pi}{4}$**两端取极限**$(t\to+\infty)$

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

第十二章自我测验题

1. **计算下列反常积分**:

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{(1+x^2)\quad 2+x^2)};\qquad \int_1^2\frac{dx}{x\quad 3x^2-2x-1}.$$

2. **判别下列反常积分的敛散性**:

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln\ x}{x\quad x^2-1}dx;\qquad (\quad \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos\ x}{x^m}dx;$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{dx}{x^p+x^q}.$$

3. **证明**: **若函数** $f\ x)\quad 0,a]\qquad x\in[0,a]$

$$g\ x)=\frac{1}{(n-1)}\int_0^x (x-t)^{n-1}f\ t)dt,$$

则 $g^{(n)}(x)=f\ x)$.

4. 判别下列无穷积分在指定区间上的一致收敛性:

$\int_1^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} \mathrm{d}x$, **在 R 上**;

$\int_0^{+\infty} \frac{x\sin yx}{1 + x^2} \mathrm{d}x$, **在** $a, +\infty)$ $a > 0)$;

$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x \mathrm{d}x$, **在** $0, +\infty)$

5. 应用积分号下微分法,计算无穷积分

$$J\quad \alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos \alpha x}{x} \mathrm{e}^{-2x} \mathrm{d}x .$$

6. 用 Γ 函数表示下列积分,并计算之:

$\int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}\varphi}{3 - \cos \varphi}$; ($\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1 - x^{\frac{1}{4}}}$;

$\int_0^{+\infty} \frac{x^m}{(a + bx^n)^p} \mathrm{d}x$, $a > 0, b > 0, n > 0$.

7. 证明:**若** $g\quad x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \cos 2xt \mathrm{d}t$, **则** $g\quad x)$

程

$$g'\quad x) + 2xg\quad x) = 0 .$$

并由此证明, $g\quad x) = \frac{\pi}{2} \mathrm{e}^{-x^2}$.

8. 证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = x$.

* **9. 证明**:**若函数** $f\quad x, y)$ $D\quad a \leq x < +\infty, c \leq y \leq$

$d)$ $I\quad y) = \int_a^{+\infty} f\quad x, y) \mathrm{d}x$ **在** $c, d]$

续,则 $\int_a^{+\infty} f\quad x, y) \mathrm{d}x$ **在** $c, d]$

* **10. 证明**: **若** $\int_0^{+\infty} f\quad x) \mathrm{d}x$ **收敛,则**

$$\lim_{y \to 0^+} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} f\quad x) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} f\quad x) \mathrm{d}x .$$

第十三章　重　积　分

§13.1　二　重　积　分

一、基本内容

本节有六段.

第一段给出了曲顶柱体的体积，它是第二段给出的抽象的二重积分概念在几何方面的客观背景.

第二段给出了二重积分的定义以及可积的充分必要条件

理 1)

上的连续函数可积

在有限条光滑曲线上的有界函数可积

第三段给出了二重积分的性质：　$\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是有界闭区域 R 的面

R

积　　4)　　5 与定理 6)　　7)

等式与绝对值可积性　　8 与定理 9)　　10)

第四段给出了应用累次法计算二重积分的公式

理 12)

第五段给出了二重积分的变量替换公式　x

$= x\quad u, v)\quad y = y\quad u, v)\quad u_0, v_0)$　$\mathrm{d}\sigma'$和它对应点

$x_0, y_0)$　$\mathrm{d}\sigma$之比恰是函数行列式在该点的绝对值，即

$\frac{\mathrm{d}\sigma}{\mathrm{d}\sigma'} = | J\quad u_0, v_0)|$. 极坐标替换是计算二重积分经常应用的一个重要替换.

第六段给出了计算参数方程表示的光滑曲面的面积公式 .

二、学习要求

二重积分的定义、可积条件、性质与定积分的定义、可积条件、性质，基本上是平行的，它们是定积分在二维空间的推广，一般来说，这些内容不是本节的重点 . 值得注意的是，二重积分的定义、可积条件、性质等都是按二重极限

变化的)

二重积分的计算化为连续两次定积分的计算，从而要安置积分限，有的还要进行变量替换，这是本节的新内容，是本节的重点 . 要求:

1. 与定积分比较，掌握二重积分的定义、可积条件、性质等 .

2. 会用累次积分方法计算二重积分，能够根据积分区域和被积函数的特征进行适当的变量替换，特别是极坐标替换 .

三、答疑辅导

问 1. 函数 $f\ \ x,y)$ $D\ \ 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1)$ 上的二重积分与累次积分有什么关系 ?

答 一般来说，二重积分与累次积分没有关系 . 这很类似二元函数在一点的二重极限与累次极限之间的关系 .

1) $\iint\limits_D f\ \ x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在，而 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f\ \ x,y)\,\mathrm{d}y$ 与 $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f\ \ x,y)\,\mathrm{d}x$ 都可能不存在 .

例如，若 x 是有理数，则可将 x 表为 $x=\dfrac{n}{m}$，其中 m 是正整数，n 是整数，且 m 与 n 互质 .

设 $D\ \ 0\leq x\leq 1, 0\leq y\leq 1)$，令

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{p}, & \text{当}(x,y)\in D, x=\dfrac{n}{m}, y=\dfrac{q}{p}, m,n,p,q\in \mathbf{N}_+, \\ 0, & \text{当}(x,y)\in D, x\text{与}y\text{至少有一个是无理数}.\end{cases}$$

不难证明，函数 $f(x,y)$ D 内任意有理点 (x,y) x 与 y 都是有理数) D 上其余点都连续，且函数 $f(x,y)$ D 上二重积分存在 8.2 第 11 题的证明)，有

$$\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

当 y 是无理数时，对任意 x，有 $f(x,y)=0$，从而

$$\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x=0.$$

当 y 是有理数时，设 $y=\dfrac{q}{p}$.对任意无理数 x，有 $f(x,y)=0$；对任意有理数 $x=\dfrac{n}{m}$，有 $f(x,y)=\dfrac{1}{m}+\dfrac{1}{p}$.当 y 固定时，对 x 积分，函数 $f(x,y)$ $\omega\geq\dfrac{1}{p}$，即定积分 $\int_0^1 f\left(x,\dfrac{q}{p}\right)\mathrm{d}x$ 不存在，从而累次积分

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

也不存在.同法可证，累次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y$ 也不存在.

2) $\iint\limits_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 不存在，而

$$\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}y\text{ 或 }\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f(x,y)\,\mathrm{d}x$$

有一个存在.

例如，函数 $(0\leq x\leq1, 0\leq y\leq1)$

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{当 }x\text{ 是有理数},0\leq y\leq\dfrac{1}{2};\ x\text{ 是无理数},\dfrac{1}{2}<y\leq1,\\ 0, & \text{当 }x\text{ 是有理数},\dfrac{1}{2}<y\leq1;\ x\text{ 是无理数},0\leq y\leq\dfrac{1}{2}.\end{cases}$$

因为对区域 $D\quad 0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1)$ 　　　　T, **函数** $f\quad x,y)$**在任意一个小区域** R_k **上的振幅** $\omega_k=1\ (k=1,2,\cdots,n)$ **所以函数** $f\quad x,y)$ 　　　D **上不可积 . 但是,** " $x\in[0,1]$

$$\text{当 } x \text{ 是有理数,}\int_0^1 f\quad x,y)\,\mathrm{d}y=\int_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}y=\frac{1}{2},$$

$$\text{当 } x \text{ 是无理数,}\int_0^1 f\quad x,y)\,\mathrm{d}y=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\mathrm{d}y=\frac{1}{2}.$$

从而累次积分 $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f\quad x,y)\,\mathrm{d}y=\frac{1}{2}$,**存在 .而另一个累次积分**

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f\quad x,y)\,\mathrm{d}x$$

不存在 .

3) $\underset{D}{}\ f\quad xy)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **不存在, 而累次积分** $\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^1 f\quad x,y)\,\mathrm{d}y$ **与** $\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1 f\quad x,y)\,\mathrm{d}x$ **都存在,但二者不相等 .**

例如函数 f **在** $D\quad 0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1)$**上定义为**

$$f\quad x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y}{(x+y)^3}, & \text{当}\quad x,y)\neq(0,0)\\ 0, & \text{当}(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

因为函数 $f\quad x,y)$ 　　　$0,0)$

$\frac{2}{n},\ \frac{1}{n}$, **有**

$$f\ \frac{2}{n},\ \frac{1}{n}\ =\frac{\frac{2}{n}-\frac{1}{n}}{\frac{2}{n}+\frac{1}{n}\ ^3}=\frac{\frac{1}{n}}{\frac{3}{n}\ ^3}=\frac{n^2}{27}\rightarrow+\infty\ (n\rightarrow\infty)$$

所以函数 $f\quad x,y)$ 　　　$D\quad 0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1)$**二重积分不存在 .**
但是,

$$\int_0^1\mathrm{d}y\int_0^1\frac{x-y}{(x+y)^3}\mathrm{d}x=\int_0^1\ \frac{-x}{(x+y)^2}\ \Big|_0^1\mathrm{d}y=-\int_0^1\frac{\mathrm{d}y}{(1+y)^2}\ =-\frac{1}{2},$$

$$\int_0^1 dx\int_0^1 \frac{x-y}{(x+y)^3}dy=\int_0^1 \frac{y}{(x+y)^2}\Bigg|_0^1 dx=\int_0^1 \frac{dx}{(x+1)^2}=\frac{1}{2},$$

即两个累次积分都存在，但不相等 .

问 2. 计算二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$，将它化成累次积分，怎样安置积分限？

答 将二重积分 $\iint\limits_D f(x, y)\,dxdy$ 化成累次积分，安置积分限是计算二重积分的重要步骤 .如果区域 D 是矩形域

标轴)

D 的边界是由若干条曲线所围成，而上下边界

的，应先对 y x) 6 的

积分区域 D 13.8) $y=$

x 与 $xy=1$，先对 y 积分后对 x 积分就比较简单 .例 7 也是如此 .

在什么样的区域 D 上计算二重积分要把区域 D 分成若干小区域，在其上分别计算二重积分，然后再作和呢？一般来说，这个问题与积分次序有关 . 如果是先对 x 积分，有两种情况：

一是，当区域 D 的左边界或右边界不是由一个解析式而是两个或两个以上解析式给出的，这时要把区域 D 用平行 x 轴的直线将区域 D 分成若干小区域，在其上分别计算二重积分，安置积分限的方法同上 . 例如， 6 的积分区域 D 的左边界是由两个解析式：$y=x$ 与 $xy=1$ 给出的 . 因此先对 x 积分要用直线 $y=1$ ($y=x$ 与 $xy=1$ 的交点的纵坐标) D 分成两个区域，在其上分别计算二重积分 .

二是，当平行 x 轴的直线与区域的边界的交点多于两个

域 D 在 y 轴上投影区间的端点除外) D 分成若干个小区域，使其每个小区域的左右边界都是由一个解析式给出的，然后在其上分别计算二重积分 . 例如 7 的积分区域

D 13.9) x 轴的直线 $y=a$ $0<a<\frac{r^2}{4}$ 与区域

D的边界有三个交点．从而将区域 D 分成 A, B, C 三个小区域，分别在其上计算二重积分．

如果积分区域 D 的上下边界的解析式分别是 $y = \phi_2\ (x)$ $y = \phi_1\ (x)\ \ a \le x \le b)$　　置积分限的方法是，将区域 D 投影到 x 轴上，即区间　$a, b]$　　$x \in [a, b]$　x 暂看作常数)　　y 积分，下限是 $\phi_1\ (x)$　　　$\phi_2\ (x)$

$$\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f \quad x, y)\,\mathrm{d}y\ .$$

这是上、下限与被积函数都含参变量 x 的参变量积分，它是 x 的函数．然后再在投影区间　$a, b]$

$$\underset{D}{}\ f \quad x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f \quad x, y)\,\mathrm{d}y\ .$$

问 3．从计算二重积分的单重化来说，曲顶柱体的体积 $V =$ $\underset{D}{}\ f \quad x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$　D **是连续曲线** $y = \phi_1\ (x)$ **与** $y = \phi_2\ (x)$ **和直线** $x = a$ **与** $x = b$ **所围成**, $\phi_1\ (x) \le \phi_2\ (x), a < b)$ **是怎样得到的？**

答　首先在区域 D 上任取一点　$x, y)$　x 暂看作常数，$f \quad x, y)$是 y 的一元函数，根据微元法，将 $f \quad x, y)\ \ge 0)$　　y 轴从 $\phi_1\ (x)$　$\phi_2\ (x)$

$$\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f \quad x, y)\,\mathrm{d}y$$

是曲面 $z = f \quad x, y)$　　　x 轴的平面　　　　$x)$　　　$z =$ $f \quad x, y)$　x 暂看作常数)　　　$\phi_1(x), \phi_2(x)]$ 上的曲边梯形的面积，如图 13.1．

" $x \in [a, b]$

$$A \quad x) = \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f \quad x, y)\,\mathrm{d}y,$$

它是 x 的函数．根据微元法，将这些曲边梯形的面积 $A \quad x)$ a 到 b “相加”，即

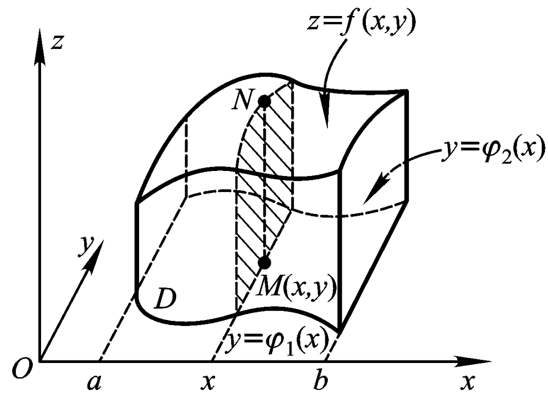


图　13.1

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

就是曲顶柱体的体积 .

由此可见，曲顶柱体的体积是这样得到的：如图 13.1，过 xy 平面上的点 $M(x,y)$ 　　　 xy 平面的线段 MN，当 x 暂时固定，y 从 $\varphi_1(x)$ 　　　 $\varphi_2(x)$ 　　　 MN 连续扫描 成曲边梯形，将这些线段“连续相加”就得到这个曲边梯形的面积 $A(x)$ 　　　 $x\in[a,b]$ 　　　 x 从 a 变化到 b 时，曲边梯形连续扫描 梯形的面积“连续相加”，就得到这个曲顶柱体的体积 .

问 4. 二重积分中值定理(定理 10) 　　　 R 为什么不能换为可求面积的有界集 R？

答　二重积分中值定理的积分区域 R 除可求面积外，最重要的是要求 R 的连通性 . 闭区域 R 已经包含连通性 . 如果将有界闭区域 R 换为可求面积的有界集 R，二重积分中值定理不一定成立，这是因为可求面积的有界集不一定具有连通性 . 例如，函数

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & 当(x,y)\in R_1,\\ -1, & 当(x,y)\in R_2,\end{cases}$$

其中 R_1 与 R_2 分别是图 13.2 的闭正方形域 .

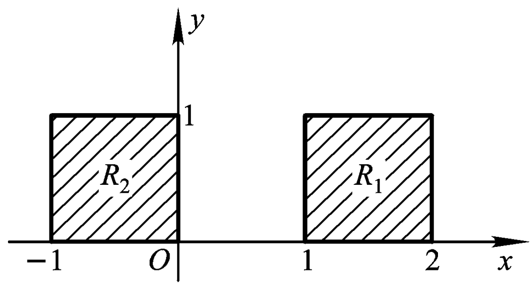


图　13.2

显然，函数 $f(x, y)$ 在 $R_1 \cup R_2$ 上连续，有

$$\iint\limits_{R_1 \cup R_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{R_1} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{R_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 琢_1 - 琢_2 = 0 .$$

因为 $\forall (x, y) \in R_1 \cup R_2$，$f(x, y) \neq 0$，所以不存在 $(\xi, \eta) \in R_1 \cup R_2$，使

$$\iint\limits_{R_1 \cup R_2} f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f(\xi, \eta) \cdot \overline{R_1 \cup R_2} = f(\xi, \eta) \cdot 2,$$

$\overline{R_1 \cup R_2}$ 表示 $R_1 \cup R_2$ 的面积，即二重积分的中值定理不成立 .

问 5. 为什么二重积分的变数替换公式中的函数行列式要取绝对值？

答　为了回答这个问题，首先从定积分的变数替换公式说起 . 例如，计算定积分

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x .$$

显然，$I > 0$. 不论用什么函数作变量替换，它的定积分总是相同的正数 I . 例如，设

$$x = \cos t, \quad \mathrm{d}x = -\sin t\,\mathrm{d}t,$$

当 x 由 0 增加到 1 时，t 由 $\frac{\pi}{2}$ 减少到 0，即

$$I = \int_0^1 \sqrt{1 - x^2}\,\mathrm{d}x = \int_{\frac{\pi}{2}}^0 \sin t(-\sin t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t\,\mathrm{d}t .$$

由此可见，当新变数 t 由$\frac{\pi}{2}$减少到 0 时，积分限由大到小，此时它的导数恰好是负数，保证定积分还是正数 I . 因此，在定积分的变数替换的公式中，它的导数

并不需要取绝对值，而积分的上、下限已作调整，保证定积分不变 .

关于二重积分的变数替换，先看一个例题 . 例如，计算二重积分

$$K = \underset{G}{\qquad}(x + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中区域 G 是直线 $x + y = 1$，$x + y = 2$，$x - y = 1$，$x - y = -1$ 所围成 .

作变数替换，设

$$u = x - y,\quad v = x + y .$$

它将 xy 平面上的区域 G 变换为 uv 平面上的区域 G'如图 13.3 . 而函数行列式

$$J = \frac{(x, y)}{(u, v)} = \frac{1}{\frac{(u, v)}{(x, y)}} = \frac{1}{2} > 0 .$$

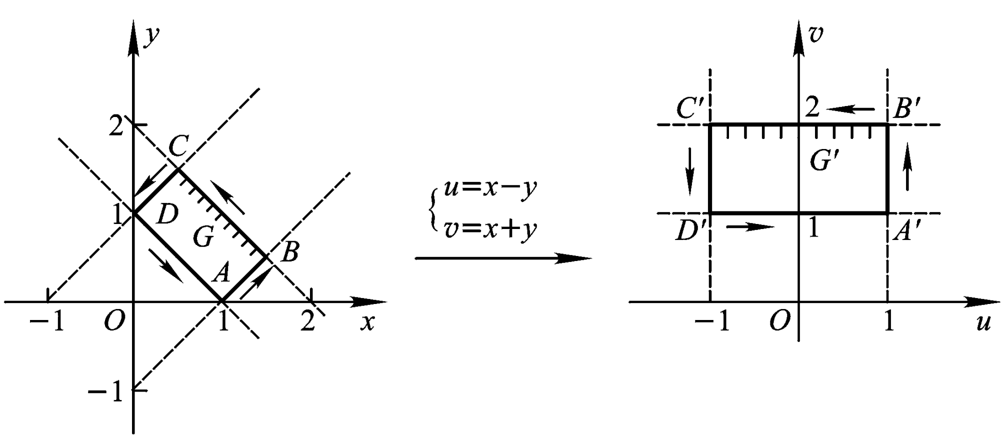


图　13.3

当选定坐标系之后，不难看到，当点(x, y)　　　　G 的边界闭

围线逆时针方向旋转一周，则对应点 $u, v)$ 　　　　　G'的边界闭围线也是逆时针方向旋转一周．此时，区域 G 与对应的区域 G'的边界闭围线走向相同．这时，变数替换的函数行列式

$$\frac{(x, y)}{(u, v)} = \frac{1}{2} > 0 .$$

再另作一个变数替换，设

$$u = x + y, \qquad v = x - y .$$

它将 xy 平面上的区域 G 变换为 uv 平面上的区域 G''. 如图 13.4 . 而函数行列式

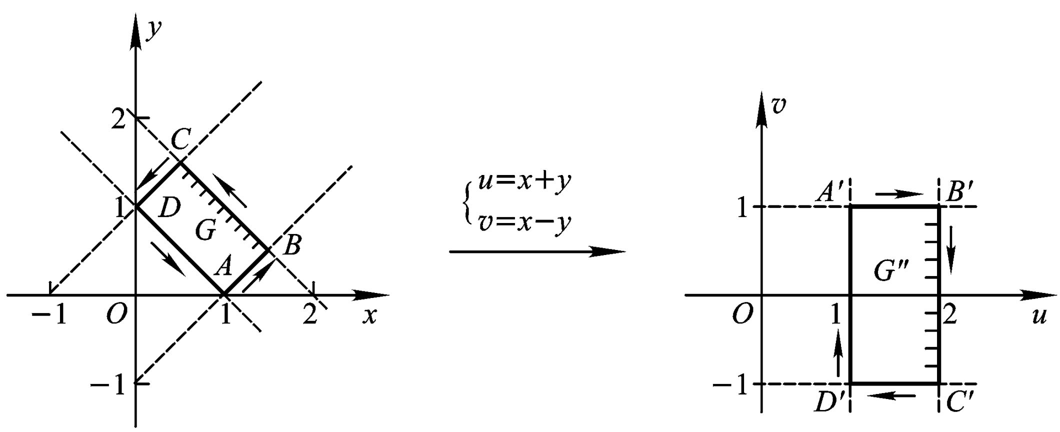


图　13.4

$$J = \frac{(x, y)}{(u, v)} = \frac{1}{\frac{(u, v)}{(x, y)}} = -\frac{1}{2} < 0 .$$

选定相同的坐标系，不难看到，当点(x, y) 　　　　　G 的边界闭围线逆时针方向旋转一周时，则对应点 $u, v)$

G'的边界闭围线顺时针方向旋转一周．此时，称区域 G 与对应的区域 G'的边界闭曲线走向相反．这时，变数替换的函数行列式

$$\frac{(x, y)}{(u, v)} = -\frac{1}{2} < 0 .$$

由此可见，函数行列式 J 的符号与区域 G 和变换的新区域

G' $G'')$ $J>0$，走向相同；$J<0$，走向相反．因为二重积分的变数替换公式是将积分区域 G 换成新区域 G' $G'')$ 而在新区域上将二重积分化为累次积分时，积分限总是下限小于上限，即积分的上、下限不能调整积分的符号，所以二重积分变数换替公式中的函数行列式必须取绝对值，以保证计算结果的不变性．例如，计算上面的二重积分：

按前者作变数替换：

$$K=\iint_G(x+y)\,dxdy=\iint_{G'}v\left|\frac{1}{2}\right|dudv=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}du\int_{1}^{2}vdv=\frac{3}{2}.$$

按后者作变数替换：

$$K=\iint_G(x+y)\,dxdy=\iint_{G''}u\left|-\frac{1}{2}\right|dudv=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}dv\int_{1}^{2}udu=\frac{3}{2}.$$

问 6．何谓反常二重积分的收敛与发散？

答 二重积分 $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ 的积分区域 D 必须是有界的，而被积函数 $f(x,y)$ D 上也必须是有界的．将有界区域推广到无界区域，就有无穷二重积分．将有界函数推广到无界函数，就有瑕二重积分．无穷二重积分与瑕二重积分统称为反常二重积分或广义二重积分，这里只给出无穷二重积分的收敛与发散概念．瑕二重积分的收敛与发散概念读者可仿照瑕积分自行写出．

定义 若函数 $f(x,y)$ D 上，符号

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

称为无穷二重积分．如果任意包含原点的有界区域 G，函数 $f(x,y)$ 在 $G\cap D=E$ 上可积，设

$$d_G=\min \sqrt{x^2+y^2}\mid(x,y)\in C\quad(C\text{ 是区域 }G\text{ 的边界})\ .$$

若极限 $\lim\limits_{d_G\to+\infty}\iint_E f(x,y)\,dxdy$ 存在，称无穷二重积分 $\iint_D f(x,y)\,dxdy$ 收敛，它的极限称为函数 $f(x,y)$ D 上的积分，且

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{d_G\to+\infty}\iint_E f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

若极限不存在，称无穷二重积分 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **发散** .

例如，无穷 $\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **收敛，其中**

$$D\ (0\le x<+\infty, 0\le y<+\infty)$$

事实上， $\forall R>0$**，取以原点为心，半径为** R**，位于第一象限内的扇形区域** D_R **.计算** $\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ **.由极坐标变换，有**

$$\iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R e^{-r^2} r\,\mathrm{d}r = \frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2})$$

于是，

$$\iint_D e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{R\to+\infty}\frac{\pi}{4}(1-e^{-R^2}) = \frac{\pi}{4} .$$

取方形域 $S_a\ (0\le x\le a, 0\le y\le a)$ $D_a \subset S_a \subset D_{2a}$**，有**

$$\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y \le \iint_{D_{2a}} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中

$$\iint_{S_a} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x \cdot \int_0^a e^{-y^2}\mathrm{d}y = \left(\int_0^a e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 .$$

而

$$\lim_{a\to+\infty}\iint_{D_a} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \lim_{a\to+\infty}\iint_{D_{2a}} e^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{\pi}{4} .$$

于是，

$$\left(\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x\right)^2 = \frac{\pi}{4},\text{即}\quad \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2} .$$

四、补充例题

例 1. 计算二重积分

$$K=\iint_D|y-x^2|\,dx\,dy,$$

其中 D 是矩形域: $-1\leq x\leq1;\ 0\leq y\leq2$.

解法 $K=\int_{-1}^{1}dx\int_0^2|y-x^2|\,dy$." $x\in[-1,1]$

$$|y-x^2|=\begin{cases}x^2-y, & \text{当 } 0\leq y\leq x^2,\\ y-x^2, & \text{当 } x^2\leq y\leq 2 .\end{cases}$$

解 $K=\iint_D|y-x^2|\,dx\,dy=\int_{-1}^{1}dx\int_0^2|y-x^2|\,dy$

$$=\int_{-1}^{1}\left[\int_0^{x^2}(x^2-y)\,dy+\int_{x^2}^{2}(y-x^2)\,dy\right]dx$$

前者设 $x^2-y=t$

后者设 $y-x^2=t$

$$=\int_{-1}^{1}\left[-\int_{x^2}^{0}t\,dt+\int_0^{2-x^2}t\,dt\right]dx$$

$$=\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}|x|^3dx+\frac{2}{3}\int_{-1}^{1}(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{4}{3}\int_0^1(2-x^2)^{\frac{3}{2}}dx\quad(\text{设 } x=\sqrt{2}\sin\varphi)$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^4\varphi\,d\varphi=\frac{1}{3}+\frac{16}{3}\left(\frac{3\pi}{32}+\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{5}{3}+\frac{\pi}{2}\ .$$

例 2. **计算二重积分**

$$\iint_D\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)\,dx\,dy,$$

其中 D 是圆域: $x^2+y^2\leq4$.

解法 $\operatorname{sgn}(x^2-y^2+2)=\begin{cases}1, & \text{当 } x^2-y^2+2>0,\\ -1, & \text{当 } x^2-y^2+2<0 .\end{cases}$

应用对称性 .

解　因为被积函数和积分区域关于 x 轴与 y 轴都对称，所以

$$\iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 4\iint_G \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

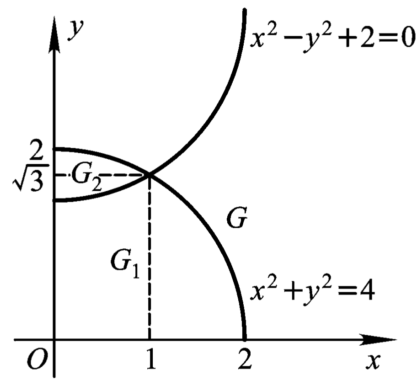


图　13.5

其中 G 是圆域 D 在第一象限的部分．如图 13.5．

双曲线 $x^2 - y^2 + 2 = 0$ 将区域 G 分成两个区域 G_1 和 G_2．

在区域 G_1 上，$x^2 - y^2 + 2 > 0$，

在区域 G_2 上，$x^2 - y^2 + 2 < 0$．

于是，

$$\iint_D \operatorname{sgn}(x^2 - y^2 + 2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\left(\iint_{G_1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{G_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right)$$

$$= 4\left(\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{x^2+2}\mathrm{d}y + \int_1^2 \mathrm{d}x\int_0^{4-x^2}\mathrm{d}y - \int_0^1 \mathrm{d}x\int_{x^2+2}^{4-x^2}\mathrm{d}y\right)$$

$$= 4\left(\int_1^2 4 - x^2\,\mathrm{d}x - \int_0^1 4 - x^2\,\mathrm{d}x + 2\int_0^1 x^2 + 2\,\mathrm{d}x\right)$$

(应用公式)

$$= \frac{4\pi}{3} + 8\ln\frac{1+\ 3}{2}.$$

例 3. 计算下列二重积分：

$$\iint_D (|x| + |y|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D:\ |x| + |y| \leq 1;$$

$$\iint_D (x + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad D: x^2 + y^2 = x + y \text{ 所围成的区域}.$$

解法　　D 关于 x，y 的对称性．

解　　$|x| + |y|$ 和积分区域 D 都关于 x，y 轴对称．于是，

$$\iint_D (|x|+|y|)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\iint_{D_1}(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

区域 D_1 **是区域** D **在第一象限的部分**，**即** D_1 **是** $x+y\leq 1$，$x\geq 0$，$y\geq 0$ **所围成的三角形区域**.

$$\begin{aligned}4\iint_{D_1}(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= 4\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x+y)\,\mathrm{d}y\\ &= 4\int_0^1\left[x(1-x)+\frac{(1-x)^2}{2}\right]\mathrm{d}x\\ &= \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

D **的围线是中心在点** $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$，**半径为** $\frac{1}{2}$ **的圆周**，**即**

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2.$$

作变数替换，**设**

$$x=\frac{1}{2}+r\cos\varphi,$$

$$y=\frac{1}{2}+r\sin\varphi.$$

则

$$\frac{D(x,y)}{D(r,\varphi)}=\begin{vmatrix}\cos\varphi & -r\sin\varphi\\ \sin\varphi & r\cos\varphi\end{vmatrix}=r.$$

于是，

$$\begin{aligned}\iint_D(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{2}}(1+r\cos\varphi+r\sin\varphi)\,r\,\mathrm{d}r\\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{2}}[1+r(\cos\varphi+\sin\varphi)]\,r\,\mathrm{d}r\\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(r+r^2(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)\mathrm{d}r\\ &= \int_0^{2\pi}\left[\frac{r^2}{2}+\frac{r^3}{3}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right]\Bigg|_0^{\frac{1}{2}}\mathrm{d}\varphi\end{aligned}$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{6\sqrt{2}}(\cos\varphi+\sin\varphi)\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$=\frac{1}{4}\cdot 2\pi+\frac{1}{6\sqrt{2}}(\sin\varphi-\cos\varphi)\Big|_0^{2\pi}=\frac{\pi}{2}.$$

例 4. 计算二重积分:

$$\iint_D \sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D:0\le x\le\pi,0\le y\le\pi;$$

$$\iint_D \cos x\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D:|x+y|\le\frac{\pi}{2},|x-y|\le\frac{\pi}{2}.$$

解法 (1) D 用直线 $y=x$ 分成两个三角形区域.

(2) 用三角函数积化和差公式.

解 (1) D 正方形区域, 用直线 $y=x$ 将 D 分成两个相同的三角形区域 D_1 和 D_2. 如图 13.6.

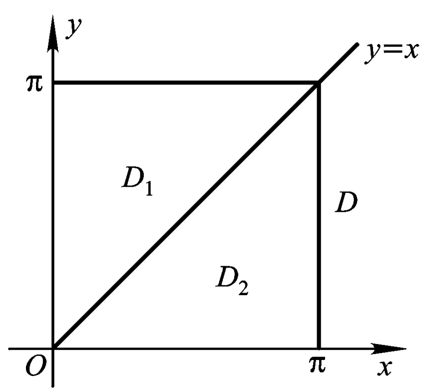


图 13.6

$$\forall (x,y)\in D_1,\quad x\le y,\ 有\ \max\{x,y\}=y.$$

$$\forall (x,y)\in D_2,\quad x\ge y,\ 有\ \max\{x,y\}=x.$$

于是, $\iint_D \sin x\sin y\cdot\max\{x,y\}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$=\iint_{D_1} y\sin x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{D_2} x\sin x\sin y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{\pi} y\sin y\,\mathrm{d}y\int_0^{y}\sin x\,\mathrm{d}x+\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x\int_0^{x}\sin y\,\mathrm{d}y$$

$$= 2\int_0^{\pi} x\sin x\,\mathrm{d}x\int_0^{x}\sin y\,\mathrm{d}y = 2\int_0^{\pi} x\sin x(1-\cos x)\,\mathrm{d}x = \frac{5}{2}\pi.$$

(2) $\iint\limits_D \cos x\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,

区域 D: $|x+y|\leq\frac{\pi}{2}$, $|x-y|\leq\frac{\pi}{2}$**是四条直线** $x+y=\pm\frac{\pi}{2}$ **与** $x-y=\pm\frac{\pi}{2}$**所围成的正方形区域，如图** 13.7 .

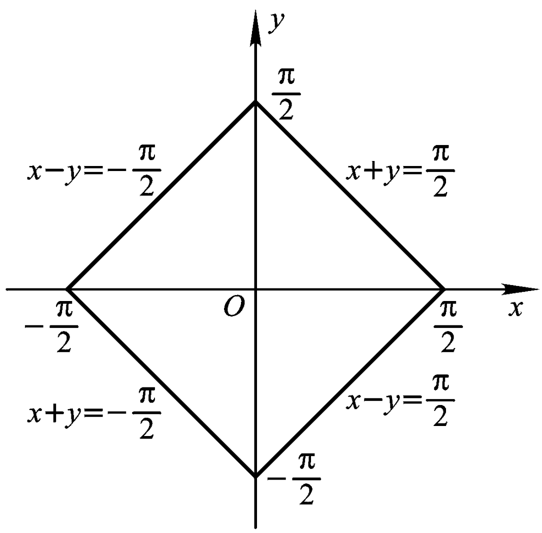


图 13.7

$$\iint\limits_D \cos x\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\iint\limits_D[\cos(x-y)+\cos(x+y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

作变数替换，设 $x-y=u$, $x+y=v$, **或** $x=\frac{1}{2}(u+v)$

$y=\frac{1}{2}(v-u)$

$$\frac{D(x,y)}{D(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{vmatrix} = \frac{1}{2}.$$

于是， $\iint\limits_D \cos x\cos y\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(\cos u+\cos v)\frac{1}{2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$

$$= \frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}v \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos u \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} 2 \cdot \pi = \pi .$$

本题也可以不用变数替换，直接计算 .

例 5. 证明:

$$\iint_D f(ax + by)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\int_{-1}^{1} f(u)\sqrt{1 - u^2}\,\mathrm{d}u,$$

其中 a **与** b **是常数，且** $a^2 + b^2 = 1$， D**∶** $x^2 + y^2 \leq 1$.

证法　作变数替换 . 设

$$\begin{cases} u = ax + by, \\ v = \cdots\cdots, \end{cases} \quad \text{使 } u^2 + v^2 = x^2 + y^2 .$$

证明　设 $\begin{cases} u = ax + by, \\ v = -bx + ay, \end{cases}$ **或** $\begin{cases} x = au - bv, \\ y = bu + av . \end{cases}$

$$J = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} a & -b \\ b & a \end{vmatrix} = a^2 + b^2 = 1 .$$

$$u^2 + v^2 = (ax + by)^2 + (-bx + ay)^2 = x^2 + y^2 \leq 1 .$$

于是，

$$\iint_D f(ax + by)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v \quad (D'\text{∶ } u^2 + v^2 \leq 1)$$

$$= \int_{-1}^{1}\mathrm{d}u \int_{-\sqrt{1-u^2}}^{\sqrt{1-u^2}} f(u)\,\mathrm{d}v = 2\int_{-1}^{1} f(u)\sqrt{1 - u^2}\,\mathrm{d}u .$$

说明　根据证明的要求，显然要设 $u = ax + by$. **怎样设** v **呢？这是证明这类问题的关键 . 设** v **的原则是在** xy **坐标系中，使** u **与** v **垂直 . 根据两条直线垂直的要求，可设** $v = -bx + ay$，**即作线性变换**

$$u = ax + by,$$
$$v = -bx + ay .$$

u **与** v **垂直的条件是** $a^2 + b^2 = 1$， $-ab + ab = 0$. **前者是题设，后者当然成立 .**

由这个线性变换的几何意义知，它将 xy **直角坐标系在原点**

旋转一个角度之后就是新的 uv 直角坐标系．在新的 uv 直角坐标系中，二重积分的被积函数 $f\ \ ax+by)$ $f\ \ u)$ $x^2+y^2\leq 1$ 仍化为单位圆域 $u^2+v^2\leq 1$．于是，二重积分化成了定积分．

同样的方法可以证明练习题§13.2 第 12 题(此题是 $\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^3$ 的线性变换)

例 6．证明：若函数 $f\ \ x, y)$ $D\ \ a\leq x\leq b, c\leq y\leq d)$ D 内任意一点 $x, y)$

$$F\ \ x, y) = \int_a^x \int_c^y f\ \ s, t)\,\mathrm{d}t\ \ \mathrm{d}s,$$

则

$$\frac{{}^2F}{x\ \ y} = \frac{{}^2F}{y\ \ x} = f\ \ x, y)$$

证法　应用§12.3 定理 4 和§8.4 定理 1．

证明　根据§8.4 定理 1，函数 $\int_c^y f\ \ s, t)\,\mathrm{d}t$ 与 $\frac{}{y}\int_c^y f\ \ s, t)\,\mathrm{d}t$ 在 D 内皆连续．根据§12.3 定理 4，有

$$\frac{}{x}F\ \ x, y) = \frac{}{x}\int_a^x \int_c^y f(s, t)\mathrm{d}t\ \ \mathrm{d}s = \int_c^y f\ \ x, t)\,\mathrm{d}t$$

$$\frac{{}^2}{y\ \ x}F\ \ x, y) = \frac{}{y}\int_c^y f\ \ x, t)\,\mathrm{d}t = f\ \ x, y)$$

同理，有 $\frac{}{y}F\ \ x, y) = \frac{}{y}\int_a^x \int_c^y f(s, t)\mathrm{d}t\ \ \mathrm{d}s$

$$= \int_a^x \frac{}{y}\int_c^y f(s, t)\mathrm{d}t\ \ \mathrm{d}s = \int_a^x f\ \ s, y)\,\mathrm{d}s,$$

$$\frac{}{x\ \ y}F\ \ x, y) = \frac{}{x}\int_a^x f\ \ s, y)\,\mathrm{d}s = f\ \ x, y)$$

于是，

$$\frac{{}^2F}{x\ \ y} = \frac{{}^2F}{y\ \ x} = f\ \ x, y)$$

例 7．用 B 函数和 Γ 函数表示下列

$$I = \underset{D}{}\ x^{p-1}y^{q-1}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\qquad p>0, q>0;$$

(2) $J = \underset{D}{\quad} x^{p-1} y^{q-1} (1 - x - y)^{r-1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y,\ p > 0,\ q > 0,\ r > 0,$

其中区域 D: $x = 0,\ \ y = 0,\ \ x + y = 1$ **围成** .

解法 **点**$(0,0)$ $1)$ $2)$ $0,1)$

$1,0)$ $2)$

积分计算，将它化为累次积分，再化为 B **函数** .

解 ($I = \underset{D}{\quad} x^{p-1} y^{q-1}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x \int_0^{1-x} y^{q-1}\mathrm{d}y$

$$= \frac{1}{q}\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^q \mathrm{d}x = \frac{1}{q}\mathrm{B}(p, q+1)$$

$$= \frac{1}{q}\frac{\Gamma\ \ p)\Gamma\ \ q+1)}{\Gamma\ \ p+q+1)} = \frac{\Gamma\ \ p)\Gamma\ \ q)}{\Gamma\ \ p+q+1)}\ .$$

(2) $J = \underset{D}{\quad} x^{p-1} y^{q-1} (1 - x - y)^{r-1} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x\int_0^{1-x} y^{q-1}(1-x-y)^{r-1}\mathrm{d}y\ .$$

设 $y = (1-x)t,\ \ \mathrm{d}y = (1-x)\mathrm{d}t,\ \ \ 1 - x - y) = (1-x)\ \ 1-t)$

有

$$J = \int_0^1 x^{p-1}\mathrm{d}x\int_0^1 (1-x)^{q-1}\ t^{q-1}(1-x)^{r-1}(1-t)^{r-1}(1-x)\mathrm{d}t$$

$$= \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q+r-1}\mathrm{d}x\int_0^1 t^{q-1}(1-t)^{r-1}\mathrm{d}t$$

$$= B\ \ p, q+r)\cdot B\ \ q, r) = \frac{\Gamma\ \ p)\Gamma\ \ q+r)}{\Gamma\ \ p+q+r)},\ \ \frac{\Gamma\ \ q)\Gamma\ \ r)}{\Gamma\ \ q+r)}$$

$$= \frac{\Gamma\ \ p)\Gamma\ \ q)\Gamma\ \ r)}{\Gamma\ \ p+q+r)}\ .$$

例 8. **证明**: **若函数** $f\ \ x)$ $p\ \ x)$ $g\ \ x)$ $a, b]$

续, $p\ \ x)$ $f\ \ x)$ $g\ \ x)$

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b p(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x,$$

此不等式称为切比雪夫不等式 .

证法 **只需证明差**

$$\Delta=\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x$$

非负．为此将上述每项第二个因式中的 x **换为** y

量选择无关)　　　　Δ **化为二重积分，再证明被积函数非负即可．**

证明　考虑差

$$\Delta=\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)\mathrm{d}x-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x$$

$$=\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(y)\mathrm{d}y-\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(y)g(y)\mathrm{d}y$$

$$=\ {}_D\,[p(x)f(x)g(x)p(y)-p(x)f(x)p(y)g(y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\ {}_D\,p(x)f(x)p(y)\quad g(x)-g(y)\quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D **是方形域**: $a\leq x\leq b$; $a\leq y\leq b$. **上式关于** x **与** y **是对称的，从而可以交换** x **与** y **的位置，有**

$$\Delta=\ {}_D\,p\quad x)\ f\quad x)\ p\quad y)\quad g\quad x)-g\quad y)\quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\ {}_D\,p\quad y)\ f\quad y)\ p\quad x)\quad g\quad y)-g\quad x)\quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

将上述二式相加除以 2，**有**

$$\Delta=\frac{1}{2}\ {}_D\,p\quad x)\ p\quad y)\quad f\quad x)-f\quad y)\qquad g\quad x)-g\quad y)\quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

已知 $p\quad x)$　　　　　　$f\quad x)$　$g\quad x)$　　$a,b]$

即 $f\quad x)-f\quad y)$　　$g\quad x)-g\quad y)$　　　　　　　　　　　D **上被积函数**

$$p\quad x)\,p\quad y)\quad f\quad x)-f\quad y)\qquad g\quad x)-g\quad y)\quad\geq 0,$$

从而 $\Delta\geq 0$，**即**

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\leq\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x.$$

说明　不等式不仅能给出两个数之间的大小关系，还能给出

两个变数之间的变化状态和变化趋势，以及它们的制约关系．从这个意义来说，在数学分析中，不等式比等式更为重要．这是因为：一方面，数学分析的基础是极限，而表述极限的基础却是不等式；另一方面，描述函数的很多重要性质也要使用不等式．因此，不等式本身也就成了数学分析不可缺少的内容之一．证明不等式，虽然有多种不同的方法，但是恒等变形却是常见的重要的方法．恒等变形的方法是将不等号某一端的数
端．根据已知条件，利用恒等变形证明这两个数的差非负

正）　$\frac{a^2+b^2}{2} \geq ab$ 就是应用了恒等变形的方法：

$$\frac{a^2+b^2}{2} - ab = \frac{a^2-2ab+b^2}{2} = \frac{1}{2}(a-b)^2 \geq 0$$

$$\text{或}\ \frac{a^2+b^2}{2} \geq ab .$$

切比雪夫不等式是两个定积分乘积之间的不等式．因为定积分与积分变数选择无关，所以切比雪夫不等式可以化为二重积分之间的不等式．应用恒等变形，再根据给定的条件，即可证明．

证明定积分之间的不等式，先将它化为重积分，然后再应用恒等变形，这是证明某些定积分不等式的一种有效的方法．例如，读者可用恒等变形证明下列不等式：

(1) 施瓦茨不等式　　8.4 第 22 题)

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x \cdot \int_a^b [g(x)]^2\mathrm{d}x .$$

(提示：讨论二重积分 $\iint_D [f(x)g(y)-f(y)g(x)]^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \geq 0$，其中区域 $D: a \leq x \leq b, a \leq y \leq b$.)

(2) 若函数 f　$x)$　　$a, b]$　　　f　$x) \geq 0$，则

$$\left(\int_a^b f(x)\cos kx\mathrm{d}x\right)^2 + \left(\int_a^b f(x)\sin kx\mathrm{d}x\right)^2 \leq \left(\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right)^2 .$$

(提示:将每一项改写为二重积分 .如

$$\int_a^b f\quad x)\cos\ kx\mathrm{d}x\quad{}^2 = \int_a^b f\quad x)\cos\ kx\mathrm{d}x\cdot\int_a^b f\quad y)\cos\ ky\mathrm{d}y$$

$$= \quad_D\ f\quad x)\ f\quad y)\cos\ kx\cos\ ky\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中区域 D: $a\leq x\leq b$, $a\leq y\leq b$. 再应用三角公式 .)

从切比雪夫不等式的证明过程不难看到: 若 $f\quad x)\qquad g\quad x)$

$a, b]$

$f\quad x)\qquad g\quad x)\qquad a, b]$

少函数, 则切比雪夫不等式的不等号反向, 即

$$\int_a^b p(x)f(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)g(x)\mathrm{d}x\geq\int_a^b p(x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b p(x)f(x)g(x)\mathrm{d}x .$$

切比雪夫不等式的某些特殊情况是已知重要的不等式 . 读者可应用切比雪夫不等式证明下列不等式:

(1) 若函数 $f\quad x)\qquad a, b]$

$$\int_a^b f\quad x)\mathrm{d}x\quad{}^2\leq\quad b-a)\int_a^b [f(x)]^2\mathrm{d}x .$$

(2) 若函数 $f\quad x)\qquad a, b]$

$$\int_a^b f\quad x)\mathrm{d}x\cdot\int_a^b\frac{\mathrm{d}x}{f\quad x)}\geq\quad b-a)^2 .$$

(3) 若函数 $f\quad x)\qquad 0, 1]$

$$\frac{\int_0^1 [f(x)]^3\mathrm{d}x}{\int_0^1 [f(x)]^2\mathrm{d}x}\leq\frac{\int_0^1 x\quad f(x)]^3\mathrm{d}x}{\int_0^1 x\quad f(x)]^2\mathrm{d}x} .$$

五、练习题 13.1 (一)

5. 证明: 若函数 $f\quad x, y)$ R 连续, 且 $f\quad x, y)>0$, 则

$$_R\ f\quad x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y>0 .$$

证法　已知函数 $f\quad x, y)$ 　　　　　　R 连续，且 $f\quad x, y) > 0$，根据 §10.2 定理 6，$f\quad x, y)$ 　R 取到最小值 m，即 "　$x, y) \in R$，有 $f\quad x, y) \geq m > 0$，从而 $f\quad x, y)$ 　R 的积分和，有

$$\sum_{k=1}^{n} f\quad \xi_k, \eta_k)\, \Delta\sigma_k \geq \sum_{k=1}^{n} m\Delta\sigma_k = m\sum_{k=1}^{n} \Delta\sigma_k = m \cdot \overline{R},$$

其中 $\overline{R}$ 是 R 的面积．

7. 证明：若函数 $f\quad x, y)$ 　　　　R 连续，且对任意有界闭区域 $D\quad R$，都有

$$\iint_D f\quad x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0,$$

则 "　$x, y) \in R$，有 $f\quad x, y) = 0$．

证法　用反证法．假设 v　$P\quad x_0, y_0) \in R$，而 $f\quad x_0, y_0) \neq 0$，不妨设 $f\quad x_0, y_0) > 0$，根据连续函数保号性，v　$r > 0$，即存在以点 $P\quad x_0, y_0)$ 　　　　　r 为半径的邻域 $U\quad P, r)$ 　　　　　$x, y) \in U\quad P, r) \cap R$，有

$$f\quad x, y) \geq \frac{f\quad x_0, y_0)}{2} > 0.$$

从而，有

$$\iint_{U\quad P, r)} f\quad x, y)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y \neq 0.$$

与已知条件矛盾．于是，"　$x, y) \in R$，有 $f\quad x, y) = 0$．

8. 证明：若函数 $f\quad x, y)$ 　$g\quad x, y)$ 　　　　　　　R 可积，则乘积函数 $f\quad x, y)\, g\quad x, y)$ 　R 也可积．

证法　已知函数 $f\quad x, y)$ 　$g\quad x, y)$ 　R 可积，从而 $f\quad x, y)$ 　$g\quad x, y)$ 　R 有界，即

v　$M > 0$，"　$x, y) \in R$，有 $| f\quad x, y)| \leq M$ 与 $| g\quad x, y)| \leq M$．

"　P_k' 与 $P_k'' \in R_k$（R_k 是 R 任意分法 T 的小区域)

$$\begin{aligned} &| f\quad P_k')\, g\quad P_k') - f\quad P_k'')\, g\quad P_k'')| \\ = &| f\quad P_k')\, g\quad P_k') - f\quad P_k'')\, g\quad P_k') \end{aligned}$$

$$+f(P_k'')g(P_k')-f(P_k'')g(P_k'')|$$

$$\leq M|f(P_k')-f(P_k'')|+M|g(P_k')-g(P_k'')|.$$

于是，$\qquad \omega_k(fg)\leq M(\omega_k(f)+\omega_k(g))$

其中 $\omega_k(fg)$，$\omega_k(f)$，$\omega_k(g)$ 分别是 fg 与 f，g 在 R_k 上的振幅，由此可证 $f(x,y)g(x,y)$ 在 R 可积．

10. 证明：若连续函数列 $\{f_n(x,y)\}$ 在 R 上一致收敛于函数 $f(x,y)$，则

$$\lim_{n\to\infty}\iint_R f_n(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

证法 只需证明：当 n 充分大时，有

$$\left|\iint_R f_n(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_R f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|=\iint_R|f_n(x,y)-f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

任意小．已知 $\{f_n(x,y)\}$ 在 R 上一致收敛于 $f(x,y)$，

$$\forall\,\varepsilon>0,\ \exists\,N\in\mathbf{N}_+,\ \forall\,n>N,\ \forall\,(x,y)\in R,\ 有$$

$$|f_n(x,y)-f(x,y)|<\varepsilon.$$

从而可证 $\iint_R|f_n(x,y)-f(x,y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 能任意小．

▶▶ 练习题 13.1（二）

2．将二重积分 $\iint_R f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 化为不同次序（先对 x 后对 y 与先对 y 后对 x）的累次积分，其中 R 分别是：

(3) $x^2+y^2\leq 2y$．

解法 $x^2+y^2\leq 2y$ 或 $x^2+(y-1)^2\leq 1$．区域 R 是以点 $(0,1)$ 为中心，1 为半径的圆域，如图 13.8．

先对 x 积分：x 由 $-\sqrt{2y-y^2}$ 到 $\sqrt{2y-y^2}$；后对 y 积分：y 由 0 到 2．

先对 y 积分：y 由 $1-\sqrt{1-x^2}$ 到 $1+\sqrt{1-x^2}$；后对 x 积分：

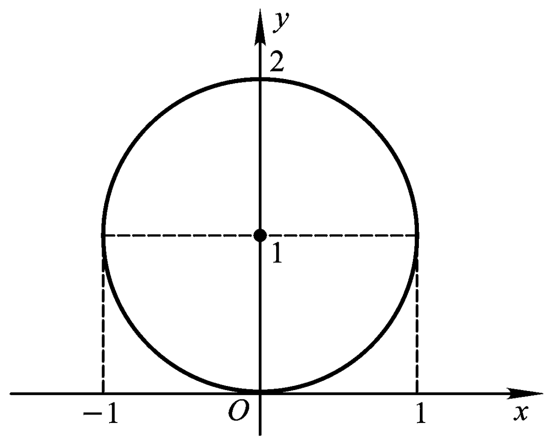


图　13.8

x 由 -1 到 1.

3. 描绘下列积分区域，并改变累次积分的次序：

(2) $\int_1^2 \mathrm{d}x \int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x, y)\, \mathrm{d}y$.

解法　积分区域 R: $1 \leq x \leq 2$, $2-x \leq y \leq \sqrt{2x-x^2}$，**即** R **是直线** $x+y=2$ **与圆周** $x^2+y^2=2x$ **所围成．如图** 13.9．**先对** x

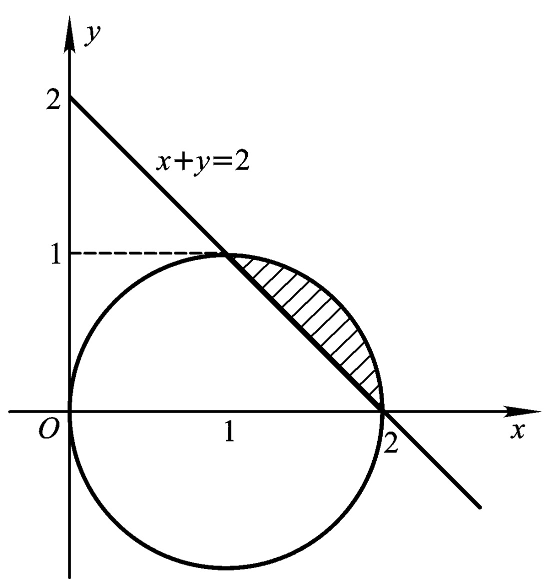


图　13.9

积分由 $2-y$ 到 $1+\quad 1-y^2$，后对 y 积分由 0 到 1．

$$(3)\int_{-6}^{2}\mathrm{d}x\int_{\frac{x^2-4}{4}}^{2-x}f\quad x,y)\,\mathrm{d}y.$$

解法 积分区域 R: $-6\leq x\leq 2$，$\dfrac{x^2-4}{4}\leq y\leq 2-x$，即 R 是抛物线 $x^2=4(y+1)$ 　　 $x+y=2$ 所围成．它们有两个交点，坐标是 $-6,8)$ 　 $2,0)$ 　　 13．10．先对 x 积分用直 $y=0$ 将区域 R 分成两个区域 A 与 B．在区域 A，先对 x 积分由 -2 　 $y+1$ 到 $2-y$；对 y 积分由 0 到 8．在区域 B，先对 x 积分由 -2 　 $y+1$ 到 2 　 $y+1$；对 y 积分由 -1 到 0．

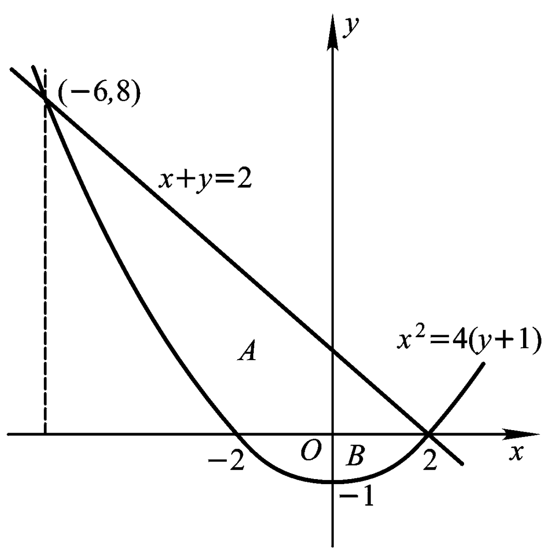


图 13.10

5. 求下列限定在 R 上的曲顶柱体的体积：

(1) $f\quad x,y)=x^2y^2$，R 是 $xy=1$，$xy=2$，$y=x$ 与 $y=4x$ 　 $x>0)$

解法
$$V=\quad x^2y^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$
$$_R$$

其中 R 是由 $xy=1$，$xy=2$，$y=x$ 与 $y=4x$ 　 $x>0)$

作变数替换，设 $u=xy$，$v=\dfrac{y}{x}$．这个变换将 xy 坐标面上的

区域 R 变换为 uv 坐标面上四条直线 $u=1$, $u=2$, $v=1$, $v=4$ 所围成的矩形 R'.

$$\frac{(u,v)}{(x,y)}=\begin{vmatrix} y & x \\ -\frac{y}{x^2} & \frac{1}{x} \end{vmatrix}=\frac{2y}{x}=2v.$$

$$\frac{(x,y)}{(u,v)}=\frac{1}{\frac{(u,v)}{(x,y)}}=\frac{1}{2v}.$$

以下按变数替换公式计算之.

6. 求下列曲线围成区域的面积:

(1) 椭圆 $a_1x+b_1y+c_1)^2+(a_2x+b_2y+c_2)^2=1$, $a_1b_2-a_2b_1\neq 0$.

解法 作变数替换, 设

$$u=a_1x+b_1y+c_1,$$

$$v=a_2x+b_2y+c_2.$$

这个变数替换将椭圆域 R 变换成 uv 坐标面上圆心在原点半径为 1 的圆域 R'; $u^2+v^2\leq 1$.

$$\frac{(u,v)}{(x,y)}=\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}=a_1b_2-a_2b_1\neq 0.$$

$$\frac{(x,y)}{(u,v)}=\frac{1}{\frac{(u,v)}{(x,y)}}=\frac{1}{a_1b_2-a_2b_1}.$$

以下按变数替换公式计算之.

7. 证明下列等式:

(1) $\underset{R}{} f\ x+y)\,dxdy=\int_{-1}^{1} f\ u)\,du$, R: $|x|+|y|\leq 1$.

证法 区域 R: $|x|+|y|\leq 1$ 是由四条直线 $x+y=1$, $x+y=-1$, $x-y=1$, $x-y=-1$ 所围成. 作变数替换

$$u=x+y,$$

$$v=x-y,$$

区域 R 变换成 uv 坐标面上正方形区域 R': $-1\le u\le 1$, $-1\le v\le 1$,

$$\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-2,\quad \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=-\frac{1}{2}.$$

由变数替换公式证明之.

9. 求下列曲面的面积:

(1) 柱面 $x^2+z^2=a^2$ 与 $y^2+z^2=a^2$ 所围成立体的表面积.

解法　两个柱面围成立体的表面关于三个坐标面都对称. 图 13.11. 仅画出第一卦限内那部分曲面. 由图 13.11 看到, 这部分曲面由两部分组成, 它们关于平面 $y=x$ 对称, 因此它的一部分曲面 σ 在 xy 平面投影是三条直线 $y=x$, $x=0$, $y=a$ 围成的三角形区域 R, 即

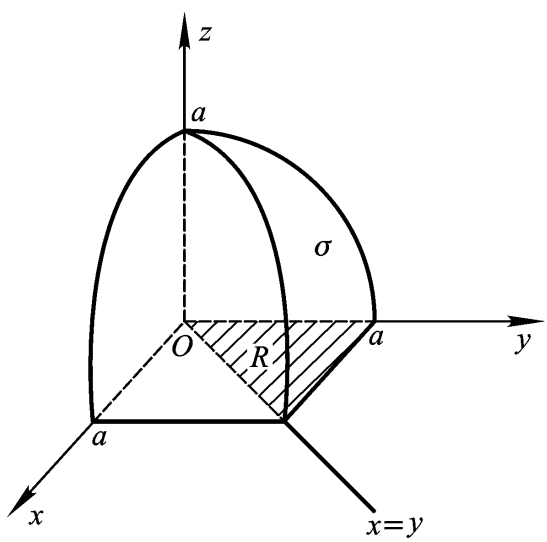


图　13.11

$$\sigma: z=\sqrt{a^2-y^2},\quad (x,y)\in R\ (0\le x\le y, 0\le y\le a)$$

曲面的面积应该是 σ 的面积的 16 倍.

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{-y}{\sqrt{a^2-y^2}},\quad \frac{\partial z}{\partial x}=0,\quad \sqrt{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}=\frac{a}{\sqrt{a^2-y^2}}.$$

于是, 立体的表面积是

$$A = 16\iint_R \frac{a}{a^2 - y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \cdots .$$

10. 求下列二重积分:

(1) $\iint_R |x + y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $R\ \ -1 \leq x \leq 1,\ -1 \leq y \leq 1]$

解法　将正方形 R **用直线** $x + y = 0$ **分成两部分** A **与** B. **在区域** A: $x + y \geq 0$, **区域** B: $x + y \leq 0$. **于是**

$$\iint_R |x + y|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_A (x + y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint_B [-(x + y)]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

(2) $\iint_R |\cos(x + y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, $R\ \ 0 \leq x \leq \pi, 0 \leq y \leq \pi]$

解法　将正方形区域 R **用直线** $x + y = \dfrac{\pi}{2}$ **与** $x + y = \dfrac{3\pi}{2}$ **分成三个区域** R_1, R_2, R_3, **如图** 13.12.

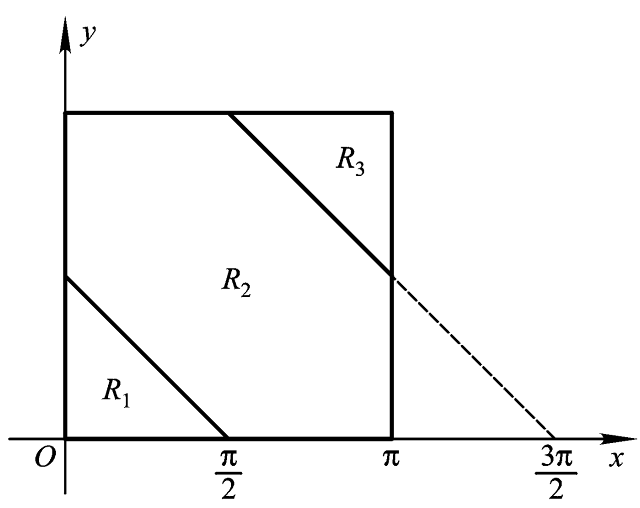


图　13.12

$$|\cos(x + y)| = \begin{cases} \cos(x + y) & (x, y) \in R_1, \\ -\cos(x + y) & (x, y) \in R_2, \\ \cos(x + y) & (x, y) \in R_3 . \end{cases}$$

于是,

$$\iint\limits_{R}|\cos(x+y)|\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{R_1}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{R_2}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{R_3}\cos(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

(3) $\iint\limits_{R}[x+y]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,R:[0\leq x\leq 2,0\leq y\leq 2]$

解法 **将正方形区域** R **用三条直线**: $x+y=1$, $x+y=2$, $x+y=3$ **分成四个区域**: R_1, R_2, R_3, R_4. **如图** 13.13. **有**

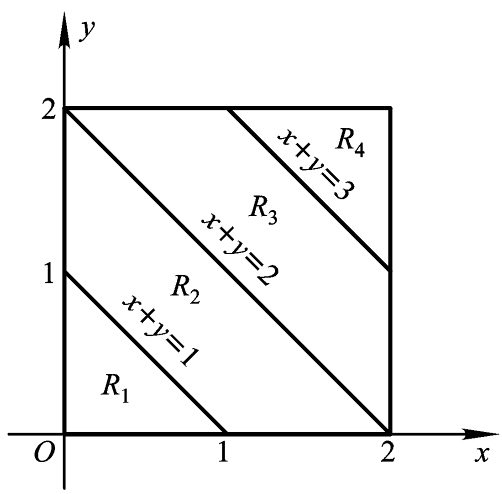


图 13.13

$$[x+y]=\begin{cases}0, & (x,y)\in R_1,\\ 1, & (x,y)\in R_2,\\ 2, & (x,y)\in R_3,\\ 3, & (x,y)\in R_4.\end{cases}$$

于是, $\iint\limits_{R}[x+y]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{R_1}0\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{R_2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{R_3}2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{R_4}3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

11. 设函数 $f(x,y)$ $R=[0\leq x\leq 1,0\leq y\leq 1]$

" $y\in[0,1]$

$$f(x,y)=\begin{cases}1, & \text{若 } x \text{ 是无理数},\\ 3y^2, & \text{若 } x \text{ 是有理数}.\end{cases}$$

证明 (1) $f\quad x, y)$ R 上不可积;

(2) 累次积分$\int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^1 f\quad x, y)\,\mathrm{d}y$ 存在;

(3) 先对 x 后对 y 的累次积分不存在 .

证法 (1) 考虑区域 $D = \quad 0 \leq x \leq 1, \quad \frac{2}{3} \leq y \leq 1 \quad R$.

用平行于坐标轴的直线将区域 D 任意分成 $n \times m$ 个相等的小矩形 $D_{ik}(i = 1, 2, \cdots, n, k = 1, 2, \cdots, m) \quad f\quad x, y) \quad D_{ik}$ 上的振幅

$$\omega_{ik}(f) \geq \left| 1 - 3 \quad \frac{2}{3} \quad ^2 \right| = 1 \quad \cdots$$

(2) " $x \in [0, 1]$

当 x 是无理数, $f\quad x, y) = 1, \int_0^1 f\quad x, y)\,\mathrm{d}y = 1$.

当 x 是有理数 $f\quad x, y) = 3y^2, \int_0^1 3y^2\,\mathrm{d}y = 1 \quad \cdots$

(3) " $y_0 \in [0, 1] \quad y_0 \neq \frac{1}{3}$, 将 $0, 1]$ n 个小区间, 其长 $\Delta x_k = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \cdots, n$. $f\quad x, y_0)$

$$\omega_k [f(x, y_0)] = | 1 - 3y_0^2 | = \delta > 0 \quad \cdots$$

13. 设函数 $f\quad x, y) \quad F\quad t) = \quad\quad_{R_t} f\quad x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 R_t: $x^2 + y^2 \leq t^2$, 求 $F'\quad t)$

解法 应用极坐标替换, 化为累次积分, 再应用 §12.3 定理 2 .

14. 证明: 若函数 $f\quad x, y) \quad R \quad a_1 \leq x \leq b_1; a_2 \leq y \leq b_2]$ 续, " $\alpha, \beta) \in R$, 令 $R_{\alpha\beta} [a_1 \leq x \leq \alpha, a_2 \leq y \leq \beta]$

$$\frac{\quad ^2}{\alpha\ \beta} \quad\quad_{R_{\alpha\beta}} f\quad x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = f\quad \alpha, \beta)$$

证法　设 $F(\alpha,\beta)=\iint\limits_{R_{\alpha\beta}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.将它化为累次积分,然后应用§8.4定理1,连续分别关于 α 与 β 求导数.

§13.2　三 重 积 分

一、基本内容

本节有四段.

第一段从计算物体的质量的实际问题抽象出三重积分定义.

第二段给出了计算三重积分化成累次积分的方法.

第三段给出了三重积分的变数替换公式,特别是柱面坐标替换公式和球面坐标替换公式.

第四段给出了三重积分在物理中的两个应用:计算物体的重心坐标和物体的转动惯量.

二、学习要求

三重积分的定义、可积性、性质以及三重积分的计算与二重积分是完全平行的,二者只是形式上的差别,没有本质的区别.本节的重点是三重积分的计算.因此,学习三重积分的要求与学习二重积分的要求基本相同.要求:

1. 会应用累次法计算三重积分,能够根据三维空间中积分区域的特征,选取适当的累次积分的次序,从而简化计算.

2. 计算某些三重积分,能够根据积分区域和被积函数的特征,选取适当的变量替换,特别是熟练地掌握柱面坐标替换和球面坐标替换.

3. 能够将三重积分的定义、可积性、性质平行的推广到一般的 n 重积分.

三、答疑辅导

问 1. 怎样定义 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 内有界闭区域 Q 上的 n 重积分?

答　从定积分、二重积分与三重积分的定义的共性，不难将积分的定义推广到 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 上.

定义　设 n 元函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 　$\mathbf{R}^n$ 中有界闭区域 Q 上. 用分法 T 将 Q 分成 n 个小区域: Q_1, Q_2, $\cdots$, Q_n. 设它们的“体积”分别是: ΔQ_1, ΔQ_2, $\cdots$, ΔQ_n. 在小区域 Q_k 上任取一点 $P_k(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)})$ 　$k = 1, 2, \cdots, n$, 作和

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta Q_k = \sum_{k=1}^{n} f(\xi_1^{(k)}, \xi_2^{(k)}, \cdots, \xi_n^{(k)})\Delta Q_k .$$

如果当 $\|T\| \to 0$ 时, 上述和数存在极限 J 　T 和 P_k 取法无关)

$$\lim_{\|T\|\to 0} \sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta Q_k = J .$$

则称函数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 　Q 上可积, J 是 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 　Q 上的 ***n* 重积分**, 表为

$$J = \underset{Q}{\int\cdots\int} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n .$$

n 重积分的可积性, 性质与二重积分相同. 计算 n 重积分也是将它化为累次积分.

如果 Q 是 $\mathbf{R}^n$ 中的长方体: $a_1 \leq x_1 \leq b_1$, $a_2 \leq x_2 \leq b_2$, $\cdots$, $a_n \leq x_n \leq b_n$, 则

$$\underset{Q}{\int\cdots\int} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$$
$$= \int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{a_2}^{b_2}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{a_n}^{b_n} f(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,\mathrm{d}x_n .$$

如果 Q 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界闭域:

$$a_1 \le x_1 \le b_1,\quad a_2(x_1) \le x_2 \le b_2(x_1)\quad \cdots,$$
$$a_n(x_1,\cdots,x_{n-1}) \le x_n \le b_n(x_1,\cdots,x_{n-1})$$

则 $\displaystyle\int\cdots\int_Q f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n$

$$=\int_{a_1}^{b_1}\mathrm{d}x_1\int_{a_2(x_1)}^{b_2(x_1)}\mathrm{d}x_2\cdots\int_{a_n(x_1,\cdots,x_{n-1})}^{b_n(x_1,\cdots,x_{n-1})} f(x_1,x_2,\cdots,x_n)\,\mathrm{d}x_n .$$

例如,计算五重积分 $V=\displaystyle\int\int\int\int\int_Q \mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\mathrm{d}x_3\mathrm{d}x_4\mathrm{d}x_5$,

其中 Q: $x_k \ge 0$, $k=1, 2, 3, 4, 5$, $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 \le a$. 按通常方法将五重积分化为累次积分, 即

$$V=\int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{a-x_1}\mathrm{d}x_2\int_0^{a-x_1-x_2}\mathrm{d}x_3\int_0^{a-x_1-x_2-x_3}\mathrm{d}x_4\int_0^{a-x_1-x_2-x_3-x_4}\mathrm{d}x_5$$
$$=\int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{a-x_1}\mathrm{d}x_2\int_0^{a-x_1-x_2}\mathrm{d}x_3\int_0^{a-x_1-x_2-x_3}(a-x_1-x_2-x_3-x_4)\,\mathrm{d}x_4$$
$$=\int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{a-x_1}\mathrm{d}x_2\int_0^{a-x_1-x_2}\frac{1}{2}(a-x_1-x_2-x_3)^2\,\mathrm{d}x_3$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^a \mathrm{d}x_1\int_0^{a-x_1}\frac{1}{3}(a-x_1-x_2)^3\,\mathrm{d}x_2$$
$$=\frac{1}{3!}\int_0^a \frac{(a-x_1)^4}{4}\,\mathrm{d}x_1=\frac{a^5}{5!}.$$

四、补充例题

例 1. 证明: 极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}\iiint_{r<n}[r]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\pi,$$

其中 $r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$, $[r]$ 表示不超过 r 的最大整数, $n\in\mathbf{N}_+$.

证法 将 $[0,n]$ 分成 n 个区间:

$$[0,1),\ [1,2),\ \cdots,\ [n-1,n)$$

当 $r\in[(k-1),k)$ 时, $[r]=k-1$, $k=1, 2, \cdots, n$. 应用积分区域可加性.

证明 $\quad [r]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$\qquad r<n$

$$= \quad [r]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \quad [r]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cdots + \quad [r]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\quad 0\le r<1 \qquad\qquad 1\le r<2 \qquad\qquad n-1\le r<n$$

$$= \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + 2 \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \cdots + \quad n-1) \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\quad 1\le r<2 \qquad\qquad 2\le r<3 \qquad\qquad n-1\le r<n$$

$$= \frac{4\pi}{3}\cdot\{ \quad ^3 - 1^3) + 2 \quad ^3 - 2^3) + \cdots +$$

$$(n-1) \quad n^3 - (n-1)^3]$$

$$= \frac{4\pi}{3} \quad (n-1)\ n^3 - \quad 1^3 + 2^3 + \cdots + \quad n-1)^3]$$

$$= \frac{4\pi}{3} \quad n^3\ (n-1) - \frac{1}{4} n^2\ (n-1)^2 \quad .$$

于是, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4} \quad [r]\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$.

$\qquad\qquad r<n$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{4\pi}{3}\frac{1}{n^4} \quad n^3\ (n-1) - \frac{1}{4} n^2\ (n-1)^2 \quad = \boldsymbol{\pi}\ .$$

例 2. 设 $F \quad t) = \quad f \quad xyz)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,**其中函数** f **可微**,

$\qquad\qquad D$

$$D{:}\ 0\le x\le t, 0\le y\le t, 0\le z\le t,$$

求 $F' \quad t)$

解法 应用变数替换, 将变数 t **由积分限变换到被积函数之中, 然后应用有限参变量积分求导数的公式** .

解 设 $x = tu,\ y = tv,\ z = tw,\ \frac{(x, y, z)}{(u, v, w)} = t^3$, **有**

$$F \quad t) = \int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^1 \mathrm{d}v\int_0^1 t^3 f \quad t^3 uvw)\,\mathrm{d}w$$

$$= t^3\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^1 \mathrm{d}v\int_0^1 f \quad t^3 uvw)\,\mathrm{d}w\ .$$

有 $F' \quad t) = 3t^2\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^1 \mathrm{d}v\int_0^1 f \quad t^3 uvw)\,\mathrm{d}w +$

$$3t^5\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^1 \mathrm{d}v\int_0^1 uvwf' \quad t^3 uvw)\,\mathrm{d}w$$

$$= \frac{3}{t}\cdot t^3\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^1 \mathrm{d}v\int_0^1 f(t^3 uvw)\,\mathrm{d}w +$$

$$\frac{3}{t}\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^1 \mathrm{d}v\int_0^1 t^6 uvwf'(t^3 uvw)\,\mathrm{d}w .$$

上式等号右端第二个累次积分，用原变换

$$x = tu,\quad y = tv,\quad z = tw$$

的逆变换．$J = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \frac{1}{t^3}\ (t > 0)$

$$\frac{3}{t}\int_0^1 \mathrm{d}u\int_0^1 \mathrm{d}v\int_0^1 t^6 uvwf'(t^3 uvw)\,\mathrm{d}w$$

$$= \frac{3}{t}\iiint_D xyzf'(xyz)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

$t = 0$，**显然成立**．**于是**

$$F'(t) = \frac{3}{t}\left(F(t) + \iiint_D xyzf'(xyz)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\right).$$

例 3. 证明：若函数 $f(x, y, z)$

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x \mathrm{d}y\int_a^y f(x, y, z)\,\mathrm{d}z = \int_a^b \mathrm{d}z\int_z^b \mathrm{d}y\int_y^b f(x, y, z)\,\mathrm{d}x .$$

证法　**将累次积分化为三重积分，确定体** V，**然后再交换累次积分的次序**．

证明　**等号左端的累次积分化为三重积分，体** V **是**

$$a\leq z\leq y,\quad a\leq y\leq x,\quad a\leq x\leq b,$$

即 V **是四个平面**：$z = a$，$z = y$，$x = y$，$x = b$ **所围成，如图** 13.14．V **在** yz **平面上的投影是**$\triangle ABC$．**先对** x，**后对** y，**最后对** z **的积分是**

$$\int_a^b \mathrm{d}x\int_a^x \mathrm{d}y\int_a^y f(x, y, z)\,\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_V f(x, y, z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}z\int_z^b \mathrm{d}y\int_y^b f(x, y, z)\,\mathrm{d}x .$$

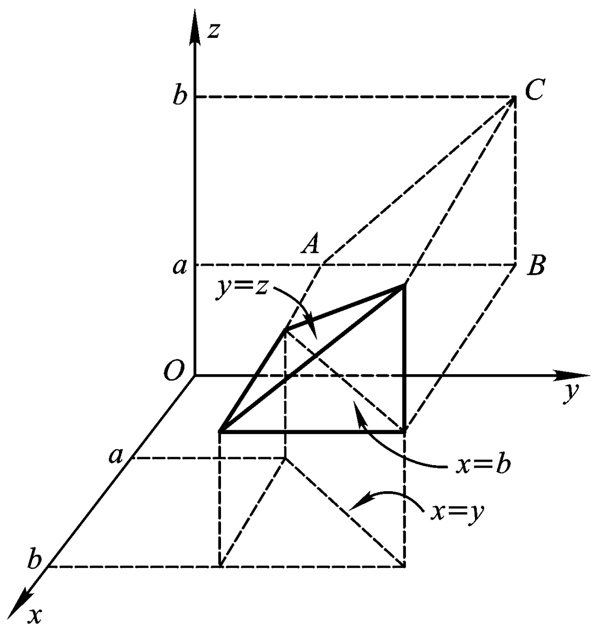


图　13.14

例 4. 计算狄利克雷积分

$$\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中 V **是平面** $x+y+z=1$, $x=0$, $y=0$, $z=0$ **所围成**, $p>0$, $q>0$, $r>0$, $s>0$.

解法　作变数替换，应用 B **函数** .

解　作变数替换，设

$$x+y+z=\xi,\quad y+z=\xi\eta,\quad z=\xi\eta\zeta .$$

或
$$x=\xi(1-\eta),\quad y=\xi\eta(1-\zeta),\quad z=\xi\eta\zeta .$$

它将四面体 V **变换为单位立方体**:

$$0\leq\xi\leq1,\ 0\leq\eta\leq1,\ 0\leq\zeta\leq1 .$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(\xi,\eta,\zeta)}=\begin{vmatrix} 1-\eta & \eta(1-\zeta) & \eta\zeta \\ -\xi & \xi(1-\zeta) & \xi\zeta \\ 0 & -\xi\eta & \xi\eta \end{vmatrix}=\xi^2\eta .$$

于是, $\iiint_V x^p y^q z^r (1-x-y-z)^s \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$= \int_0^1 \mathrm{d}\xi \int_0^1 \mathrm{d}\eta \int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p \zeta^r (1-\zeta)^q \mathrm{d}\zeta$$

$$= \int_0^1 \xi^{p+q+r+2}(1-\xi)^s \mathrm{d}\xi \int_0^1 \eta^{q+r+1}(1-\eta)^p \mathrm{d}\eta \int_0^1 \zeta^r (1-\zeta)^q \mathrm{d}\zeta$$

$$= \mathrm{B}(p+q+r+3, s+1) \cdot \mathrm{B}(q+r+2, p+1) \cdot \mathrm{B}(r+1, q+1)$$

$$= \frac{\Gamma(p+1)\Gamma(q+1)\Gamma(r+1)\Gamma(s+1)}{\Gamma(p+q+r+s+4)}.$$

例 5. 计算闭曲面 $(x^2+y^2+z^2)^2 = a^3 z \ (a>0)$ **体积**.

解法 应用球面坐标替换.

解 因为方程的等号左端恒为正，所以 $z \geq 0$，**即立体在** xy **平面的上方. 因为** x **及** y **都是平方项，所以立体关于** yz **与** xz **平面都对称. 因此，立体体积是第一卦限内那部分立体的体积的四倍**.

应用球面坐标替换

$$x = r\sin\varphi\cos\theta,$$
$$y = r\sin\varphi\sin\theta, \qquad J = r^2\sin\varphi.$$
$$z = r\cos\varphi.$$

在球面坐标系中，曲面方程是 $r^3 = a^3\cos\varphi$ **或** $r = a\sqrt[3]{\cos\varphi}$. **在第一卦限，** $0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. **于是，闭曲面所围成立体的体积**

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{a\sqrt[3]{\cos\varphi}} r^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{2}{3}\pi a^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\cos\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{3}\pi a^3.$$

例 6. 计算闭曲面 $\left(\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\right)^2 = \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}$ **所围成立体的体积**.

解法 应用广义球面坐标替换.

解　因为 x, y, z 都是平方项，所以立体关于三个坐标面都对称．因此立体的体积是第一卦限内那部分立体的体积的八倍．

应用广义球面坐标替换

$$\begin{aligned} x &= ar\sin\varphi\cos\theta, \\ y &= br\sin\varphi\sin\theta, \qquad J = abcr^2\sin\varphi. \\ z &= cr\cos\varphi. \end{aligned}$$

在广义球面坐标系中，曲面方程是 $r = |\sin\varphi|$．在第一卦限．$r = \sin\varphi$，$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$，$0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$．于是，闭曲面所围成立体的体积

$$V = 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\sin\varphi} abcr^2 \sin\varphi \,\mathrm{d}r.$$

$$= \frac{8}{3} abc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4\varphi \,\mathrm{d}\varphi = \frac{\pi^2}{4} abc.$$

例 7. 计算曲面 $\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$ 与三个坐标面在第一卦限所围成立体的体积 $(a > 0, b > 0, c > 0)$

解法　应用适当的变数替换，将曲面替换成第一卦限的球面．

解　作变数替换

$$\begin{aligned} x &= ar\sin\varphi\cos^2\theta, \\ y &= br\sin\varphi\sin^2\theta, \\ z &= cr\cos\varphi. \end{aligned}$$

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \varphi, \theta)} = abcr^2 \begin{vmatrix} \sin\varphi\cos^2\theta & \cos\varphi\cos^2\theta & -2\sin\varphi\cos\theta\sin\theta \\ \sin\varphi\sin^2\theta & \cos\varphi\sin^2\theta & 2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta \\ \cos\varphi & -\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2abcr^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta.$$

在新坐标系中，曲面方程是 $r = 1$．在第一卦限，$0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$，

$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. 于是，在第一卦限中立体的体积

$$V=2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\sin\varphi\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}r$$

$$=2abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r^2\mathrm{d}r$$

$$=\frac{1}{3}abc.$$

证明 上述三例

成立体的体积 . 因为在直角坐标系中所给闭曲面方程的次数较高，所以描绘它们的图像有很大的困难 . 一般来说，计算这类闭曲面所围成立体的体积不必描绘它们的图像，即或能描绘出它们的图像，也不能完全解决计算问题 . 计算这类体积问题的关键是作变数替换，经过适当的变数替换

标替换等)

过球面坐标替换之后，它的方程是 $r=a^3\cos\varphi$，例 6 中的闭曲面，经过广义球面坐标替换之后，它的方程是 $r=|\sin\varphi|$，例 7 中的闭曲面，经过给定的变数替换之后，它的方程是 $r=1$ (单位球面)

多，并根据新方程容易安置积分限 . 例如，例 5 的新方程是 $r=a^3\cos\varphi$. 因为 $r\geq0$，所以角 φ 的变化范围是区间 $0,\frac{\pi}{2}$ (在球面坐标系中, $0\leq\varphi\leq\pi$)

积，在球面坐标系中的三重积分的积分限是 $0\leq r\leq a^3\cos\varphi$，$0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$，$0\leq\theta\leq2\pi$.

如果闭曲面的图像具有某种对称性

坐标原点)

一步简化计算 . 讨论闭曲面的对称性，既可用直角坐标系的闭曲面方程，也可用新坐标系的闭曲面方程 . 例如，例 5 的方程是 r

$= a^3\cos\varphi$. 因为 $0\le\varphi\le\dfrac{\pi}{2}$，所以闭曲面的图像在 xy 平面之上，又因为它与角 θ 无关　　$0\le\theta\le 2\pi)$
不仅关于 z 轴是对称的，并且关于 xz 平面和 yz 平面也是对称的. 于是，它所围成立体的体积是第一卦限那部分立体的体积的 4 倍.

同法可计算本章自我测验题的第 4、5、12 题.

五、练习题 13.2 解法提要

1. 求下列三重积分:

(1) $\underset{V}{\ } xy^2z^3\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 V 是曲面 $z = xy$, $y = x$, $x = 1$, $z = 0$ 所围成.

解法　体 V 是双曲抛物面 $z = xy$ 与三个平面 $y = x$, $x = 1$, $z = 0$ 所围成. 如图 13.15. 体 V 在 xy 坐标面上的投影是三条直线 $y = 0$, $x = 1$, $x = y$ 所围成的三角形区域 D. 先对 z 积分，在 D 上任取一点 $x, y)\in D$，对 z 由 $z = 0$ 到 $z = xy$ 积分，然后在 D 上作二重积分.

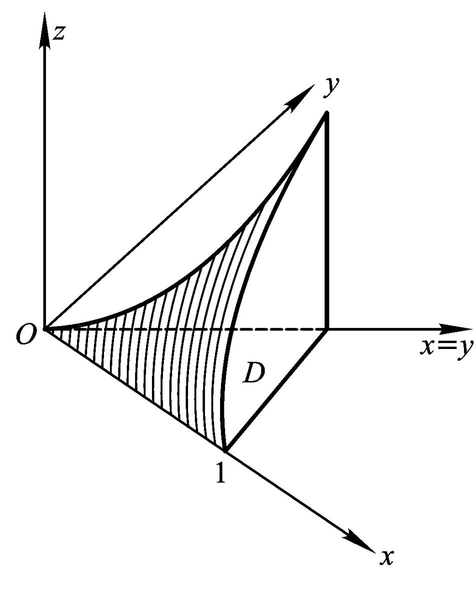


图　13.15

2. 将下列三重积分按不同次序安置积分限:

(1) $\displaystyle\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^{1-x}\mathrm{d}y\int_0^{x+y} f\ \ x, y, z)\,\mathrm{d}z$.

解法　体 V 是: $0\le z\le x+y$, $0\le y\le 1-x$, $0\le x\le 1$，即体 V 是五个平面: $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = z$, $x + y = 1$ 所围成，如图 13.16. 先对 y 积分，将体 V 投影到 xz 坐标面上，投影是正方形区域 D_1 $(0\le x\le 1, 0\le z\le 1)$　　$z = x$ 将体 V 分成

两个体 V_1 与 V_2，它们都是四面体．于是，

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{x+y} f(x,y,z)\,dz$$

$$= \iiint_{V_1} f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_{V_2} f(x,y,z)\,dxdydz.$$

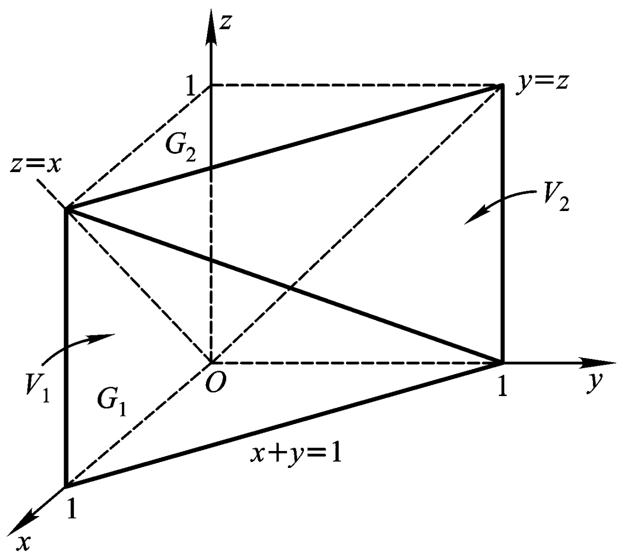


图 13.16

第一种情况，先对 y 积分，其次对 z，最后对 x 积分，将 V_1 投影在 zx 坐标面上是三角形区域 G_1（$x=1, z=0, x=z$ 所围成） y 积分，y 由 0 到 $1-x$，其次对 z 积分，z 由 0 到 x，最后对 x 积分，由 0 到 1．将 V_2 投影到 zx 坐标面上也是三角形区域 G_2（$z=1, x=0, z=x$ 所围成） y 积分，y 由 $z-x$ 到 $1-x$，其次对 z 积分，z 由 x 到 1，最后对 x 积分，x 由 0 到 1．

同法可作第二种情况，先对 x 积分，其次对 y 最后对 z 积分．从略．

3. 用适当的变换求下列三重积分：

(3) $$\iiint_V 1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}\,dxdydz,$$

其中 V 是椭球 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}\leq 1$．

解法　**用广义球面坐标替换**:

$$x = ar\sin\varphi\cos\theta,\quad y = br\sin\varphi\sin\theta,\quad z = cr\cos\varphi .$$

$$\frac{(x, y, z)}{(r, \varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} a\sin\varphi\cos\theta & ar\cos\varphi\cos\theta & -ar\sin\varphi\sin\theta \\ b\sin\varphi\sin\theta & br\cos\varphi\sin\theta & br\sin\varphi\cos\theta \\ c\cos\varphi & -cr\sin\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

$$= abcr^2\sin\varphi .$$

此替换将椭球体 V **变换为球体** V': $0\leq r\leq 1$, $0\leq\varphi\leq\pi$, $0\leq\theta\leq 2\pi$. **代入计算之**.

4. 求下列曲面所围成的体积:

$x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $x^2 + y^2 + z^2 = b^2$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z\geq 0$, $0 < a < b)$.

解法　**体** V **是球心在原点的半径为** a **和** b **的两个同心球面的环体, 被顶点在原点开口向上的锥面所截的那部分环体, 用球面坐标替换**

$$\begin{aligned} x &= r\sin\varphi\cos\theta \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta, \qquad |J| = r^2\sin\varphi . \\ z &= r\cos\varphi . \end{aligned}$$

两个球面与锥面在球面坐标系中分别是

$$r = a,\quad r = b,\quad \varphi = \frac{\pi}{4},\quad 0\leq\theta\leq 2\pi .$$

体 V **在球面坐标系中是长方体** V':

$$a\leq r\leq b,\quad 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{4},\quad 0\leq\theta\leq 2\pi .$$

安限计算之.

6. 求下列曲面所围成的均匀物体(**设** ρ　$x, y, z)\equiv 1)$　　z **轴的转动惯量**.

(2)　$x^2 + y^2 + z^2 = 2$, $x^2 + y^2 = z^2$ $(z\geq 0)$

解法　**作柱面坐标替换**:

$$x = r\cos\varphi,$$
$$y = r\sin\varphi, \qquad |J| = r.$$
$$z = z.$$

体 V **在柱面坐标系是体** V'

$$0 \le r \le 1,\ 0 \le \varphi \le 2\pi,\quad r \le z \le \sqrt{2 - r^2}.$$

按转动惯量的公式计算之.

7. 证明 $\int_0^x dv \int_0^v du \int_0^u f(t)\,dt = \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 f(t)\,dt$.

证法　将等号左端化成三重积分, 确定出体 V **是四个平面:** $t=0$, $t=u$, $u=v$, $v=x$ (x **暂看作常数**) (图 13.17) **改变累次积分的次序, 先对** v, **后对** u **最后对** t **积分, 计算之.**

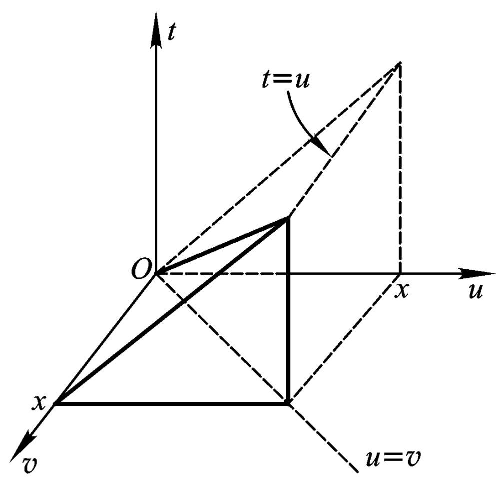


图　13.17

8. 若 $F(t) = \iiint\limits_V f(x^2+y^2+z^2)\,dxdydz$, **其中** V: $x^2+y^2+z^2 \le t^2$, f **是可微函数, 求** $F'(t)$.

解法　用球面坐标替换, 再化成累次积分. 最后应用上限函数求导数公式.

9. 设函数 $f(x, y, z)$ **在** V: $x^2+y^2+z^2 \le 1$ **上连续, 设** V_r: $x^2+y^2+z^2 \le r^2$ $(0 < r \le 1)$

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{3}{r^3} \quad {}_{V_r} \quad f \quad x, y, z)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .$$

解法　应用三重积分的中值定理，取极限用到函数 $f \quad x, y, z)$ 在点 $0,0,0)$

10. 求下列曲面所围成的体积:

$(1)\quad x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 (x^2 + y^2 - z^2)$

解法　因为围成的立体关于三个坐标平面都对称，所以立体的体积是第一卦限那部分体积的 8 倍．应用球面坐标替换，立体在第一卦限那部分是

$$0 \leq r \leq a \quad - \cos 2\varphi,\quad \frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ .$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \quad {}^2 = \frac{x}{h} \quad (h > 0)$$

解法　因为 y 与 z 都是平方项，所以立体关于 xy 与 xz 平面都对称．取 x 轴向上为正，因为 $x \geq 0$，所以立体在 yz 平面的上方．立体的体积是第一卦限内那部分立体的体积的 4 倍．

应用广义球面坐标替换，在第一卦限那部分立体为

$$0 \leq r \leq {}^3 \quad \frac{a}{h} \sin\varphi \cos\theta,\quad 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2},\quad 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\ .$$

12. 证明：若函数 $f \quad x, y, z)$

$$_{V} \quad f \quad ax + by + cz)\, \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = {}_{V'} \quad f \quad ku)\, \mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w,$$

其中 V: $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$, V': $u^2 + v^2 + w^2 \leq 1$, $k = \quad a^2 + b^2 + c^2$.

证法　作变数替换

$$u = l_1 x + m_1 y + n_1 z,$$

$$v = l_2 x + m_2 y + n_2 z,$$

$$w = l_3 x + m_3 y + n_3 z,$$

其中 $l_1 = \dfrac{a}{k},\quad m_1 = \dfrac{b}{k},\quad n_1 = \dfrac{c}{k}$. 且 u, v, w 互相垂直)

$$l_1^2+m_1^2+n_1^2=1,\quad l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2=0,$$
$$l_2^2+m_2^2+n_2^2=1,\quad l_2l_3+m_2m_3+n_2n_3=0,$$
$$l_3^2+m_3^2+n_3^2=1,\quad l_3l_1+m_3m_1+n_3n_1=0.$$

$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=1$. 球 V': $u^2+v^2+w^2=x^2+y^2+z^2\leq 1$.

注 证法见本书§13.1补充例题例5的说明.

第十三章自我测验题

1. 计算下列二重积分:

(1) $\iint_D (x+y)\,dxdy$, **其中** D: $x=0$, $x=3$, $y=0$, $y=\frac{1}{x+1}$ **围成**;

(2) $\iint_D \cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$, **其中** D: $x^2+y^2\leq 1$.

2. 计算二重积分

$$\iint_D (x^2-y^2)\sin(x-y)^2\,dxdy,$$

其中 D: $|x|+|y|\leq 1$.

3. 计算曲面 $z=x^2+y^2$ **在区域** D: $\left||x|+|y|-\frac{3}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$ **上的曲顶柱体的体积**.

4. 计算闭曲线 $\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right)^2=\frac{x^2}{h^2}-\frac{y^2}{k^2}$ **所围成区域** D **的面积** $(a>0, b>0, h>0, k>0)$.

5. 计算闭曲线 $\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}\right)^3=xy$ **所围成区域** G **的面积** $(a>0, b>0)$.

6. 应用曲面面积公式, 计算 xz **平面上的光滑曲线** $z=f(x)$ $(a\leq x\leq b, f(x)>0)$, **绕** x **轴旋转, 旋转体侧面的面积**.

7. 证明: **若函数** $f\ \ x, y) = \frac{2}{x\ y} F\ \ x, y)$ D: $a \leq x \leq b,\ c \leq y \leq d$ **上连续,则**

$$f\ \ x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = F\ \ b, d) - F\ \ b, c) - F\ \ a, d) + F\ \ a, c)$$
D

8. 计算曲面 $z^2 = x^2 + \frac{y^2}{4}$ **与** $2z = x^2 + \frac{y^2}{4}$ **所围成的体积**.

9. 计算三重积分

$$z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
V

其中 V **是两个球** $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ **与** $x^2 + y^2 + z^2 \leq 2az\ \ a > 0)$ **共部分**.

10. 计算三重积分

$$xyz\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$
V

其中 V: $x \leq yz \leq 2x,\ \ y \leq zx \leq 2y,\ \ z \leq xy \leq 3z$.

11. 证明: **若函数** $f\ \ x)$

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x \mathrm{d}y \int_0^y f\ \ x)\ f\ \ y)\ f\ \ z)\,\mathrm{d}z = \frac{1}{3\,!} \int_0^a f\ \ x)\,\mathrm{d}x\ \ ^3.$$

12. 计算闭曲面 $x^2 + y^2 + z^2)^3 = 3xyz$ **所围成立体的体积**.

13. 计算曲面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ **与** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$ **所围成立体的体积** $c > 0)$

14. 计算曲面 $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ **与三个坐标面在第一卦限所围成立体的体积** $(a > 0,\ b > 0,\ c > 0)$

第十四章　曲线积分与曲面积分

§14.1　曲 线 积 分

一、基本内容

本节有五段．

第一段从计算物质曲线的质量抽象出第一型曲线积分定义及其性质，并对参数方程所表示的光滑曲线，给出了计算第一型曲线积分的公式

第二段从计算力场

二型曲线积分定义，并对参数方程所表示的光滑曲线，给出了计算第二型曲线积分的公式

第三段给出了第一型曲线积分与第二型曲线积分互相转换的公式

第四段给出了格林公式

$$\iint_G \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

其中 $P(x, y)$ $Q(x, y)$ $\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial x}$在逐段光滑闭曲线 C 所围成的区域 G 上连续．

第五段给出了曲线积分与路线无关的条件(定理 4 中的四个等价命题)

二、学习要求

平面上的第一型曲线积分也是定积分的一种推广．它将在 x

轴线段上的积分推广到平面曲线段上的积分，或者说，定积分是平面上第一型曲线积分的特殊情况．第二型曲线积分主要是讨论向量函数．它在场论中具有多种不同的物理意义．格林公式是沟通区域上的二重积分与该区域边界
的桥梁．要求：

1．掌握第一型与第二型曲线积分的概念及其物理意义，特别是第二型曲线积分的物理意义．

2．能熟练计算用不同形式给出的曲线方程的第一型和第二型曲线积分，特别是用格林公式计算曲线积分．

3．会应用曲线积分与路线无关的等价命题计算或证明某些问题．

▶▶ 三、答疑辅导

问 1．何谓二元函数 $f\quad x, y)$　　　　$C\quad A, B)$

答　设 $C\quad A, B)$　　　　$C\quad A, B)$　　　　$P\quad x_0, y_0)$ $\in C\quad A, B)$

定义　如果 $"\ \varepsilon > 0,\ \mathrm{v}\ \ \delta > 0,\ \ "\quad x, y) \in C\quad A, B)$ $|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta$，**有**

$$|f\quad x, y) - f\quad x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

称函数 $f\quad x, y)$　　$C\quad A, B)$　　$P\quad x_0, y_0)$**连续**

函数 $f\quad x, y)$　　$C\quad A, B)$　　$P\quad x_0, y_0)$
形式是：

$$"\ \varepsilon > 0,\ \mathrm{v}\ \ \delta > 0,\ \ "\quad x, y) \in C\quad A, B) \cap U\quad \mathbf{P}, \delta)$$

$$|f\quad x, y) - f\quad x_0, y_0)| < \varepsilon .$$

问 2．曲线积分与路线无关的命题　　4)　　　　G
是单连通的？

答　在复连通区域内，命题可能不成立．例如，设

$$P = -\frac{y}{x^2 + y^2},\quad Q = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

在复连通区域 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2>0\}$

$$\frac{P}{y}=\frac{Q}{x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2},$$

但是,$\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\neq 0$,其中 C 是包含原点的一条光滑闭曲线.

事实上, 取 C 是单位圆: $x=\cos\varphi$, $y=\sin\varphi$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, 有

$$\int_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\int_C -\frac{y}{x^2+y^2}\mathrm{d}x+\frac{x}{x^2+y^2}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}[-\sin\varphi\quad -\sin\varphi)+\cos^2\varphi]\,\mathrm{d}\varphi=2\pi\neq 0.$$

问 3. 曲线积分是否也有中值定理?

答 有. 曲线积分的中值定理是:

若函数 $f\ \ x,y)$ $C\ \ A,B)$ A 与 B 也属于 $C)$ $C\ \ A,B)$ $\xi,\eta)$

$$\int_{C\ \ A,B)} f\ \ x,y)\,\mathrm{d}s=f\ \ \xi,\eta)\text{ 瑚}$$

其中瑚表示曲线 $C\ \ A,B)$

证明方法与定积分中值定理证法相同, 读者自行证明. 后面补充例题的例 8 将要用到曲线积分的中值定理.

问 4. 怎样计算第一型曲线积分和第二型曲线积分?

答 计算第一型曲线积分

$$\int_{C\ \ A,B)} f\ \ x,y)\,\mathrm{d}s\text{ 与 }\int_{C\ \ A,B)} f\ \ x,y,z)\,\mathrm{d}s.$$

若光滑曲线 $C\ \ A,B)$ $x=\varphi\ \ t)$ $y=\psi\ \ t)$ $z=\chi\ \ t)$ $\alpha\leq t\leq\beta$ 所给出, 且 $\varphi\ \ t)$ $\psi\ \ t)$ $\chi\ \ t)$ $\alpha,\beta]$ 续, 且不同时为 0, $f\ \ x,y)$ $f\ \ x,y,z)$ $C\ \ A,B)$ 求出弧长微元

$$\mathrm{d}s=\ \ \varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\mathrm{d}t\text{ 或 }\mathrm{d}s=\ \ \varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)\mathrm{d}t,$$

代入第一型曲线积分之中, 化为定积分, 即

$$\int_{C\ A,B)} f\ \ x,y)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f\ \ \varphi(t),\psi(t)]\ \ \ \varphi'^2(t)+\psi'^2(t)\,\mathrm{d}t$$

或

$$\int_{C(A,B)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f[\varphi(t),\psi(t),\chi(t)]\ \ \ \varphi'^2(t)+\psi'^2(t)+\chi'^2(t)\,\mathrm{d}t\ .$$

应用被积函数和曲线 $C\ \ A,B)$

积分的计算 .

若在光滑曲线 $C\ \ A,B)$　　$f\ \ x,y)$　　y 轴　　x 轴)

对称 .

(1) 当 $f\ \ x,y)$　$C\ \ A,B)$　　χ　　$y)$

$$\int_{C\ A,B)} f\ \ x,y)\,\mathrm{d}s = 0\ .$$

(2) 当 $f\ \ x,y)$　$C\ \ A,B)$　　x　　$y)$

$$\int_{C\ A,B)} f\ \ x,y)\,\mathrm{d}s = 2\int_{C\ A,C)} f\ \ x,y)\,\mathrm{d}s,$$

其中 $C\ \ A,C)$　y　　$x)$　　$C\ \ A,B)$

在第一型曲线积分中，可将曲线 $C\ \ A,B)$

入被积函数中，可简化计算 . 例如，计算第一型曲线积分

$$\oint_C (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s,\text{其中 } C\text{ 是椭圆}\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1\ .$$

解　$$I=\oint_C (2xy+3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s$$

$$=\oint_C 2xy\,\mathrm{d}s+\oint_C (3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s\ .$$

已知曲线 C 关于 y 轴对称，被积函数 $2xy$ 是 x 的奇函数，有

$$\oint_C 2xy\,\mathrm{d}s = 0\ .$$

$$\oint_C (3x^2+4y^2)\,\mathrm{d}s = 12\oint_C \frac{3x^2+4y^2}{12}\,\mathrm{d}s = 12\oint_C\ \ \frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}\ \ \mathrm{d}s$$

被积函数 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}$ 可用曲线 C 的方程 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 代换

$$= 12\oint_C 1\mathrm{d}s = 12 \cdot 4 \quad 3\pi = 24 \quad 3\pi$$

$\oint_C 1\mathrm{d}s$是椭圆的周长,已知椭圆之长是 4 3π .

注意, 只有计算第一型曲线积分和第一型曲面积分时, 才可以这样作, 对二、三重积分是不能这样作的 .

其次, 计算第二型曲线积分

$$\int_{C(A,B)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

若光滑曲线 $C(A, B)$ $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, 给出 .首先求微分 $\mathrm{d}x = \varphi'(t)\mathrm{d}t$, $\mathrm{d}y = \psi'(t)\mathrm{d}t$ 积表达式中, 化成定积分, 即

$$\int_{C(A,B)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta \{P[\varphi(t),\psi(t)]\varphi'(t) + Q[\varphi(t),\psi(t)]\psi'(t)\}\mathrm{d}t$$

注意, 积分下限是曲线 $C(A, B)$ A 的参数, 积分上限是终点 B 的参数 .

若光滑曲线 $C(A, B)$ D 一条曲线段, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 且 $P(x, y)$与 $Q(x, y)$ $\frac{P}{y} = \frac{Q}{x}$, 则 $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是某函数 $u(x, y)$ $\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$, 于是,

$$\int_{C(A,B)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$= \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} \mathrm{d}u(x,y) = u(x_2,y_2) - u(x_1,y_1)$$

若$\frac{P}{y} = \frac{Q}{x}$, 则

$$\int_{C(A,B)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_{(x_1,y_1)}^{(x_2,y_2)} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$=\int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1)\mathrm{d}x + \int_{y_1}^{y_2} Q(x_2, y)\mathrm{d}y .$$

若在区域 D 内，有 $\frac{P}{y} = \frac{Q}{x}$，**且曲线 C 是 D 内一条闭曲线，由格林公式，则**

$$\oint_C P(x, y)\mathrm{d}x + Q(x, y)\mathrm{d}y = 0 .$$

若曲线 $C(A, B)$　　D **内非闭曲线，补加** $C_0(B, A)$　　$C + C_0$ **成一条封闭曲线，方向是正向，则**

$$\int_{C(A, B)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \oint_{C+C_0} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y - \int_{C_0(B, A)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

$$= \quad_G \left(\frac{Q}{x} - \frac{P}{y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \int_{C_0(B, A)} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

其中 G 是封闭曲线 $C + C_0$ 所围成的区域．C_0 的方向是由 B 到 A .　　3 .)

四、补充例题

例 1. 计算下列第一型曲线积分：

$\int_C \mathrm{e}^{\quad x^2+y^2}\mathrm{d}s$，**其中 C 为曲线** $r = a, \varphi = 0, \varphi = \frac{\pi}{4}$　r **和** φ **为极坐标）**

解　**曲线 C 是一条闭曲线，如图** 14.1 .

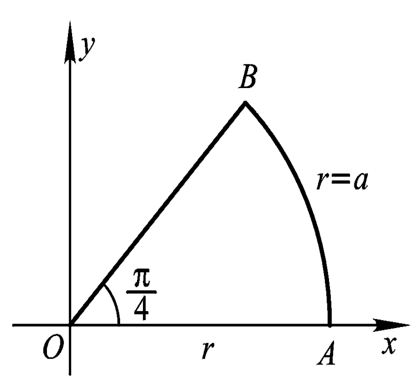


图　14.1

$$\int_C \mathrm{e}^{\quad x^2+y^2}\mathrm{d}s = \int_{OA} \mathrm{e}^{\quad x^2+y^2}\mathrm{d}s + \int_{AB} \mathrm{e}^{\quad x^2+y^2}\mathrm{d}s + \int_{BO} \mathrm{e}^{\quad x^2+y^2}\mathrm{d}s$$

在线段 OA 上，　$x^2 + y^2 = x$，$\mathrm{d}s = \mathrm{d}x$.

在圆弧 AB 上，$\sqrt{x^2+y^2}=r=a$，$\mathrm{d}s=a\mathrm{d}\varphi$.

在线段 OB 上，$\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{2}x$，$\mathrm{d}s=\sqrt{2}\mathrm{d}x$. 分别有

$$\int_{OA} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^a \mathrm{e}^x\mathrm{d}x=\mathrm{e}^a-1,$$

$$\int_{AB} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{e}^a a\mathrm{d}\varphi=\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a,$$

$$\int_{BO} \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=\int_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}} \mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\sqrt{2}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{\sqrt{2}x}\Big|_0^{\frac{a}{\sqrt{2}}}=\mathrm{e}^a-1.$$

于是，$\displaystyle\int_C \mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}}\mathrm{d}s=(\mathrm{e}^a-1)+\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a+(\mathrm{e}^a-1)$

$$=2(\mathrm{e}^a-1)+\frac{\pi}{4}a\mathrm{e}^a.$$

例 2. 计算空间曲线的第一型曲线积分

$$\int_C (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$$

其中 C 是螺线 $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$，$0\leq t\leq 2\pi$ 的一段.

解 由曲线 C: $x=a\cos t$，$y=a\sin t$，$z=bt$，得

$$\mathrm{d}s=\sqrt{\mathrm{d}x^2+\mathrm{d}y^2+\mathrm{d}z^2}=\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}t.$$

于是，$\displaystyle\int_C (x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s=\int_0^{2\pi}(a^2+b^2t^2)\sqrt{a^2+b^2}\mathrm{d}t$

$$=\sqrt{a^2+b^2}\left(a^2t+b^2\frac{t^3}{3}\right)\Bigg|_0^{2\pi}$$

$$=\frac{2\pi}{3}\sqrt{a^2+b^2}(3a^2+4\pi^2b^2).$$

例 3. 计算曲线积分

$$\int_C (\mathrm{e}^x\sin y-my)\mathrm{d}x+(\mathrm{e}^x\cos y-m)\mathrm{d}y$$

其中 C 是点 $A(a,0)$ $O(0,0)$

解法 用 Ox 轴上直线段 OA，使上半圆周和直线段 OA 构成封闭曲线. 如图 14.2.

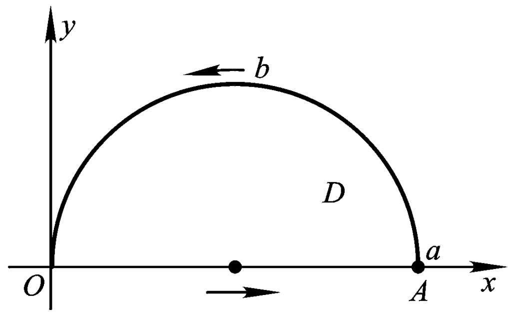


图　14.2

解　$abO + Oa$ 构成封闭曲线，围成的上半圆域是 D . 应用格林公式，

$$P = e^x \sin y - my, \quad Q = e^x \cos y - m,$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = e^x \cos y - (e^x \cos y - m) = m .$$

于是，

$$\oint_{abOa} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$$

$$= \iint_D m dx dy = m \frac{\pi}{2} \left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{\pi m a^2}{8} .$$

其中在直线段 OA 上，$y = 0\ (0 \leq x \leq a)$

$$\int_{OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy = 0 .$$

于是，
$$\int_C (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$$

$$= \frac{\pi m a^2}{8} - \int_{OA} (e^x \sin y - my) dx + (e^x \cos y - m) dy$$

$$= \frac{\pi m a^2}{8} .$$

例 4. 计算曲线积分

$$I = \oint_L \frac{x dy - y dx}{(\alpha x + \beta y)^2 + (\nu x + \delta y)^2}, \quad \Delta = \alpha\delta - \beta\nu \neq 0 ,$$

其中 L 是椭圆 $(\alpha x+\beta y)^2+(\nu x+\delta y)^2=1$.

解法 作变数替换，将椭圆化为圆，再改写为参数方程，计算之 .

解 作变数替换

$$u=\alpha x+\beta y,\quad v=\nu x+\delta y .$$

或 $x=\frac{1}{\Delta}(\delta u-\beta v),\ y=\frac{1}{\Delta}(\alpha v-\nu u)\qquad \Delta=\alpha\delta-\beta\nu$.

$$\mathrm{d}x=\frac{1}{\Delta}(\delta\mathrm{d}u-\beta\mathrm{d}v),\ \mathrm{d}y=\frac{1}{\Delta}(\alpha\mathrm{d}v-\nu\mathrm{d}u)$$

椭圆 L 在新坐标系中化为圆 C: $u^2+v^2=1$. 于是，有

$$I=\frac{1}{\Delta^2}\oint_C(\delta u-\beta v)(\alpha\mathrm{d}v-\nu\mathrm{d}u)-(\alpha v-\nu u)(\delta\mathrm{d}u-\beta\mathrm{d}v)$$

$$=\frac{1}{\Delta}\oint_C u\mathrm{d}v-v\mathrm{d}u$$

圆 C 的参数方程是 $u=\cos\varphi,\ v=\sin\varphi,\ 0\leq\varphi\leq2\pi$. 有

$$I=\frac{1}{\Delta}\int_0^{2\pi}\cos\varphi\mathrm{d}\sin\varphi-\sin\varphi\mathrm{d}\cos\varphi=\frac{1}{\Delta}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi=\frac{2\pi}{\Delta}$$

$$=\frac{2\pi}{\alpha\delta-\beta\nu} .$$

例 5. 计算纽形曲线

$${\frac{x}{a}}^{2n+1}+{\frac{y}{b}}^{2n+1}=c\,{\frac{x}{a}}^{n}{\frac{y}{b}}^{n},\ a>0,\ b>0,\ c>0,\ n>0$$

.

解法 将曲线化成参数方程 . 可知曲线在第一象限是闭曲线 . 应用计算面积的公式 .

解 设 $x=atv,\ y=bv$，代入纽形曲线方程中，有

$$v=\frac{ct^n}{t^{2n+1}+1} .$$

于是，纽形曲线的参数方程是

$$x=\frac{act^{n+1}}{t^{2n+1}+1},\quad y=\frac{bct^n}{t^{2n+1}+1},\quad 0\leq t<+\infty .$$

当 t 由 0 变化到 $+\infty$ 时，曲线由原点 $0,0)$
时针方向描出弧线又回到原点 $0,0)$　　　　　　　　Γ .

$$\mathrm{d}x=\frac{ac[(n+1)t^{n}-nt^{3n+1}]}{(t^{2n+1}+1)^{2}}\mathrm{d}t,$$

$$\mathrm{d}y=\frac{bc[nt^{n-1}-(n+1)t^{3n}}{(t^{2n+1}+1)^{2}}\mathrm{d}t.$$

由计算面积的公式，其面积

$$A=\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=-\frac{abc^{2}}{2}\int_{+\infty}^{0}\frac{t^{2n}}{(t^{2n+1}+1)^{2}}\mathrm{d}t$$

$$=\frac{abc^{2}}{2}\ \frac{1}{2n+1}-\frac{1}{t^{2n+1}+1}\Bigg|_{0}^{+\infty}=\frac{abc^{2}}{2(2n+1)}.$$

例 6. 证明: 平面上格林第二公式

$$\oint_{C}\begin{vmatrix}\frac{u}{n} & \frac{v}{n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s=\iint_{D}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 D 是光滑封闭曲线 C 所围成的有界区域，$\overline{\ \ }_{n}$ 是沿 C 外法线 n 的方向导数 . $\Delta f=\frac{{}^{2}f}{x^{2}}+\frac{{}^{2}f}{y^{2}}$.

证法　将方向导数用偏导数表示出来，再应用格林公式 .

证明　设法线 n 正向与 x 轴、y 轴正向交角分别是 $n,x)$ $n,y)$　　$\cos(n,x)\mathrm{d}s=\mathrm{d}y,\cos(n,y)\mathrm{d}s=-\mathrm{d}x$

$$\oint_{C}\begin{vmatrix}\frac{u}{n} & \frac{v}{n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}s=\oint_{C}\ v\frac{u}{n}-u\frac{v}{n}\ \mathrm{d}s$$

$$=\oint_{C}\ v\ \frac{u}{x}\cos(n,x)+\frac{u}{y}\cos(n,y)\ -$$

$$u\ \frac{v}{x}\cos(n,x)+\frac{v}{y}\cos(n,y)\ \ \mathrm{d}s$$

$$=\oint_{C}\ v\frac{u}{x}-u\frac{v}{x}\ \mathrm{d}y+\ \ u\frac{v}{y}-v\frac{u}{y}\ \mathrm{d}x.$$

于是，由格林公式，有

$$\oint_C \begin{vmatrix} \frac{u}{n} & \frac{v}{n} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}s$$

$$= {}_D \quad \frac{}{x}\; v\frac{u}{x} - u\frac{v}{x} \; - \frac{}{y}\; u\frac{v}{y} - v\frac{u}{y} \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= {}_D \quad v\frac{^2u}{x^2} + v\frac{^2u}{y^2} - u\frac{^2v}{x^2} - u\frac{^2v}{y^2}\; \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= {}_D \quad (v\Delta u - u\Delta v)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = {}_D \begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

例 7. 证明：**若** $u(x,y)$ C **所围成区域** D **上的调和函数，则函数** $u(x,y)$ D **内的值可由闭曲线** C **上的值唯一确定**．

证法 $u(x,y)$ D **上的调和函数，即** $x,y)\in D$

$$\Delta u = \frac{^2u}{x^2} + \frac{^2u}{y^2} = 0 \ .$$

只需证明：对区域 D **上任意两个调和函数** $u_1(x,y)$ $u_2(x,y)$ **如果在闭曲线** C **上每一点函数值都相等，则它们在** D **上恒相等**．

设 $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ $x,y)\in C$, **有** $u(x,y)=0$，**则** $x,y)\in D$, **有** $u(x,y)=0$ ．**应用练习题** 14.1 **第** 15 **题的结果**．

证明 **设** $u_1(x,y)$ $u_2(x,y)$ D **上的两个调和函数**．**考虑函数** $u(x,y) = u_1(x,y) - u_2(x,y)$ $u(x,y)$ **是区域** D **上的调和函数，即**

$$\Delta u = \frac{^2u}{x^2} + \frac{^2u}{y^2} = 0 \ .$$

如果 " $(x,y)\in C$, **有** $u(x,y)=0$, **则** $\oint_C u\frac{u}{n}\mathrm{d}s = 0$.**由练习题** 14.1 **第** 15 **题的结果**，**有**

$$\underset{D}{}\left(\frac{u}{x}\right)^2+\left(\frac{u}{y}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\underset{D}{}u\Delta u\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\oint_C u\frac{u}{n}\mathrm{d}s=0 .$$

从而，　$x, y)\in D$

$$\frac{u}{x}=\frac{u}{y}=0 .$$

再由练习题 10.3 第 9 题，$u(x, y)=a($常数$)$　　C 上，$u(x, y)=0$，则 $a=0$，即　$x, y)\in D, u(x, y)=0$

$$u_1(x, y)=u_2(x, y)$$

例 8. 证明：若 $u(x, y)$　　C 所围成闭区域 D 上的调和函数，则　$x, y)\in D(D$ 的内部$)$

$$u(x, y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C u\frac{\ln r}{n}-\ln r\frac{u}{n}\mathrm{d}s$$

其中 n 是 C 的外法线，$r=\ (\xi-x)^2+(\eta-y)^2, (\xi, \eta)\in C$

证法　以点(x, y)　　ρ 为半径，作圆域 R_ρ，使 R_ρ　D，圆表为 C_ρ．不难证明，函数

$$\ln r=\ln\ (\xi-x)^2+(\eta-y)^2\quad ((x, y)\text{暂看作定点})$$

在区域 $D-R_\rho$ 上是调和函数．应用格林第二公式．　6 .)

证明　以点(x, y)　　ρ 为半径，作圆域 R_ρ，使 R_ρ　D，圆表为 C_ρ．首先证明，函数

$$\varphi(\xi, \eta)=\ln r=\ln\ (\xi-x)^2+(\eta-y)^2$$

在区域 $D-R_\rho$ 上是调和函数．事实上，　$\xi, \eta)\in D-R_\rho$，有

$$\frac{\varphi}{\xi}=\frac{1}{r}\frac{\xi-x}{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2}=\frac{\xi-x}{r^2},\quad \frac{\varphi}{\eta}=\frac{\eta-y}{r^2} .$$

$$\frac{{}^2\varphi}{\xi^2}=\frac{r^2-2(\xi-x)^2}{r^4},\quad \frac{{}^2\varphi}{\eta^2}=\frac{r^2-2(\eta-y)^2}{r^4} .$$

有　$\Delta\varphi=\dfrac{{}^2\varphi}{\xi^2}+\dfrac{{}^2\varphi}{\eta^2}=\dfrac{2r^2-2[(\xi-x)^2+(\eta-y)^2]}{r^4}=0$.

又已知 $\Delta u=0$．在区域 $D-R_\rho$ 上，由格林第二公式

6)

$$0=\iint_{D-R_\rho}\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta\ln r\\ u & \ln r\end{vmatrix}\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta=\oint_{C+C_\rho^-}\begin{vmatrix}\frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial \ln r}{\partial n}\\ u & \ln r\end{vmatrix}\mathrm{d}s$$

$$=\oint_C\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s-\oint_{C_\rho}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s,$$

即
$$\oint_{C_\rho}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\oint_C\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.\quad(*)$$

在 C_ρ 上，$\ln r=\ln\rho$，$\frac{\partial \ln r}{\partial r}=\frac{1}{r}$，有

$$\oint_{C_\rho}\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s=\ln\rho\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s-\oint_{C_\rho}u\frac{1}{r}\mathrm{d}s$$

$$=-\frac{1}{\rho}u(\alpha,\beta)\cdot 2\pi\rho=-2\pi u(\alpha,\beta),\quad(\alpha,\beta)\in C_\rho.$$

(由练习题 14.1 第 14 题，$\oint_{C_\rho}\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}s=0$.第二个积分用了曲线积分的中值定理 (本节问 3 .))

由(*)

$$-2\pi u(\alpha,\beta)=\oint_C\left(\ln r\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial \ln r}{\partial n}\right)\mathrm{d}s.$$

于是，令 $\rho\to0$，$(\alpha,\beta)\to(x,y)$

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\oint_C\left(u\frac{\partial \ln r}{\partial n}-\ln r\frac{\partial u}{\partial n}\right)\mathrm{d}s$$

例 9. 证明：若 $u(x,y)$

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi R}\oint_C u(\xi,\eta)\mathrm{d}s$$

其中 C 是以点 $x,y)$ R 为半径的圆 .

证法 用例 8 .

证明 已知 $u(x,y)$ 14.1 第 14 题，有

$$\oint_C \ln r \frac{u}{n} \mathrm{d}s = \ln R \oint_C \frac{u}{n} = 0 .$$

又有 $$\oint_C u \frac{\ln r}{n} \mathrm{d}s = \oint_C u \frac{\ln r}{r} \mathrm{d}s = \frac{1}{R} \oint_C u(\xi, \eta) \mathrm{d}s$$

于是，由例 8，有

$$u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \oint_C u \frac{\ln r}{n} - \ln r \frac{u}{n} \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi R} \oint_C u(\xi, \eta) \mathrm{d}s .$$

例 10. 证明：若 $u(x, y)$ 　　　　　　 C 所围成闭区域 D 上的调和函数 　　　　　　 D 内不能取到最大 　　　　　　 在曲线 C 上取到最大

证法　应用反证法 .

证明　假设调和函数 $u(x, y)$ 　　　 D 内某一点 $P(x_0, y_0)$ 到最大值 . 以点 $P(x_0, y_0)$ 　　　　　 ρ 为半径作圆域 R_ρ，圆表为 C_ρ，使 R_ρ 　 D . 由例 9，有

$$u(x_0, y_0) = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} u(\xi, \eta) \mathrm{d}s .$$

另一方面，

$$u(x_0, y_0) = u(x_0, y_0) \frac{1}{2\pi\rho} \oint_C \mathrm{d}s = \frac{1}{2\pi\rho} \oint_C u(x_0, y_0) \mathrm{d}s$$

上述二式相减，有

$$\frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] \mathrm{d}s = 0 .$$

因为调和函数 $u(x, y)$ 　 D 上不是常数，且 　 $\xi, \eta) \in C_\rho$，有

$$u(x_0, y_0) > u(\xi, \eta)$$

所以，$$\frac{1}{2\pi\rho} \oint_{C_\rho} [u(x_0, y_0) - u(\xi, \eta)] \mathrm{d}s > 0$$. 矛盾 .

说明　由调和函数的定义可知，二元调和函数 $u(x, y)$ 普拉斯方程 $\frac{{}^2 u}{x^2} + \frac{{}^2 u}{y^2} = 0$ 　　　　 . 在数学物理方程中，为了讨

论拉普拉斯方程的解，要用到上述调和函数的四个性质，即例7—例10．证明它们除了应用第二格林公式 6)
主要是求偏导数的运算．这是列举四个例题的主要目的．顺便也为以后学习数学物理方程做好知识上的准备．

因为调和函数是一类特殊的函数，具有高度的正规性，所以它有一系列很好的性质．一般来说，在有界闭区域 D 上定义的二元函数 $f(x, y)$ D 上的函数值有很大的随意性．在区域 D 的边界封闭曲线上的函数值 $f(x, y)$ D 内点的函数值没有必然的联系．函数 $f(x, y)$ D 上的最大值，既可能在区域 D 内取到，也可能在区域 D 的边界上取到．但是，调和函数则不然．

例 7 指出，调和函数 $u(x, y)$ D 内任意一点的函数值可由调和函数 $u(x, y)$ D 的边界封闭曲线 C 上的值唯一确定．

例 8 指出，调和函数 $u(x, y)$ D 内任意一点
$x, y)$ $u(x, y)$ $u(x, y)$

$u \frac{\ln r}{n} - \ln r \cdot \frac{u}{n}$ 在 D 的边界封闭曲线 C 上的线积分．

例 9 进一步指出，调和函数 $u(x, y)$ $x, y)$
数值 $u(x, y)$ $x, y)$ R 为半径的圆上线积分的平均值，亦称调和函数的中值定理．

例 10 指出，调和函数 $u(x, y)$ D 上必在区域 D 的边界封闭曲线 C 上取到最大

调和函数这四个性质与复变函数论的解析函数完全类似．待读者学习复变函数论时，再进行对比．

这里所讨论的二维欧氏空间区域 D 上的调和函数性质，不难推广到三维欧氏空间体 V 上的调和函数上去．

例 11． 验证下列全微分

$$(4x^3y^3 - 3y^2 + 5)\mathrm{d}x + (3x^4y^2 - 6xy - 4)\mathrm{d}y$$

存在原函数，并求其原函数．

解法 验证条件 $\frac{P}{y} = \frac{Q}{x}$．因此它存在原函数．用两种方法求其原函数．

解 $P(x, y) = 4x^3y^3 - 3y^2 + 5,\ Q(x, y) = 3x^4y^2 - 6xy - 4$．

$$\frac{P}{y} = \frac{Q}{x} = 12x^3y^2 - 6y\ .$$

因此它存在原函数 $u(x, y)$

求法一 从 $(0,0)$ $x,0)$ $x, y)$

$$\int_{(0,0)}^{(x,y)} \mathrm{d}u = \int_0^x 5\mathrm{d}x + \int_0^y (3x^4t^2 - 6xt - 4)\mathrm{d}t$$

$$= 5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y,$$

即 $u(x, y) = 5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y + C \quad (C = u(0,0))$

求法二 已知

$$\mathrm{d}u = (4x^3y^3 - 3y^2 + 5)\mathrm{d}x + (3x^4y^2 - 6xy - 4)\mathrm{d}y\ .$$

有 $\frac{u}{x} = 4x^3y^3 - 3y^2 + 5$． $\frac{u}{y} = 3x^4y^2 - 6xy - 4$．

对 x 积分，$u(x, y) = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x + \phi(y)$

其中 $\phi(y)$ y 的函数) $u(x, y)$ y 求偏导数，有

$$\frac{u}{y} = 3x^4y^2 - 6xy + \phi'(y)$$

二式比较，有 $\phi'(y) = -4$，即 $\phi(y) = -4y + C$

$$u(x, y) = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x - 4y + C \quad (C\text{是常数})$$

例 12．设曲线积分 $\int_L xy^2\mathrm{d}x + y\phi(x)\mathrm{d}y$

$\phi(x)$ $\phi(0) = 0$．计算

$$I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\mathrm{d}x + y\phi(x)\mathrm{d}y\ .$$

解法 根据与路径无关的条件，解出 $\phi(x)$

解 $P = xy^2,\ Q = y\phi\ \ x)$．

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy,\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = y\varphi'(x)$$

已知积分与路径无关，有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2xy = y\varphi'(x) = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

即 $\varphi'(x) = 2x$ $\varphi(x) = x^2 + C$.

确定常数 C. 已知 $\varphi(0) = 0$, 即 $\varphi(0) = 0 + C = 0$ 或 $C = 0$.

于是,

$$\varphi(x) = x^2.$$

从而, $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} xy^2\,dx + x^2y\,dy = \int_0^1 0\,dx + \int_0^1 y\,dy = \frac{1}{2}$.

五、练习题 14.1 解法提要

1. 求下列第一型曲线积分:

(2) $\oint_C xy\,ds$, 其中 C: $|x| + |y| = a$ $(a > 0)$

解法 积分闭曲线 C 关于原点对称. 而被积函数 $z = xy$ 关于 x 轴 y 轴) ……

也可沿闭曲 C 逐段计算.

7. 应用格林公式求下列曲线积分:

(2) $\oint_C \ln\frac{2+y}{1+x^2}\,dx + \frac{x(y+1)}{2+y}\,dy$

其中 C 是四条直线 $x = \pm1$, $y = \pm1$ 所围成正方形的边界.

解法 $P(x,y) = \ln\frac{2+y}{1+x^2}$, $Q(x,y) = \frac{x(y+1)}{2+y}$,

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{1}{2+y},\quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y+1}{2+y}.$$

应用格林公式

$$\oint_C \ln\frac{2+y}{1+x^2}\,dx + \frac{x(y+1)}{2+y}\,dy = \iint_D \left(\frac{y+1}{2+y} - \frac{1}{2+y}\right)dx\,dy,$$

其中 D 是四条直线 $x = \pm1$, $y = \pm1$ 所围成的正方形区域.

*　　*　　*　　*

10. 设函数 $u(x, y)$ 与 $v(x, y)$ 　　R 上存在二阶连续偏导数，且满足柯西 - 黎曼方程：$\frac{u}{x} = \frac{v}{y}$，$\frac{u}{y} = -\frac{v}{x}$. 证明：若已知函数 $u(x, y)$ 　　$v(x, y)$

证法　设有两个函数 $v_1(x, y)$ 与 $v_2(x, y)$ 　　西 - 黎曼方程. 可证得，$\mathrm{d}v_1 = \mathrm{d}v_2$，即 $\mathrm{d}(v_1 - v_2) = 0$. 从而 $v_1 = v_2 + C$（C 是常数）　　5，可将 $v(x, y)$

$$v(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{u}{y}\mathrm{d}x + \frac{u}{x}\mathrm{d}y + v(x_0, y_0)$$

11. 证明：若函数 $P(x, y)$ 　$Q(x, y)$ 　　C 上连续，则

$$\left|\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right| \leq M聊,$$

其中聊是曲线 C 的长，$M = \max\limits_{(x, y) \in C}\{\ P^2(x, y) + Q^2(x, y)\}$
用这个不等式估计

$$I_R = \oint_C \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2 + xy + y^2)^2},$$

其中 C: $x^2 + y^2 = R^2$. 证明：$\lim\limits_{R \to +\infty} I_R = 0$.

证法　$\left|\int_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y\right| = \left|\int_C (P, Q)(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)\right|$

$$\leq \int_C |(P, Q)||(\mathrm{d}x, \mathrm{d}y)| = \int_C \ P^2 + Q^2 \cdot \ \mathrm{d}x^2 + \mathrm{d}y^2$$

$$\leq M\int_C \mathrm{d}s = M聊.$$

另，将 C: $x^2 + y^2 = R^2$ 表为参数方程

$$x = R\cos t,\quad y = R\sin t,\quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

$$P^2 + Q^2 = \frac{1}{R^6\ \ 1 + \frac{1}{2}\sin 2t\ \ ^4},\quad M = \frac{4}{R^3}.$$

最后应用已证的不等式，再取极限.

12. **证明**: 若 C 是平面光滑闭曲线, 且 l 为任意确定方向, 则

$$\oint_C \cos(l, n)\mathrm{d}s = 0,$$

其中 n 是 C 的外法线.

证法 设 $\boldsymbol{l} = (\cos(l, x), \cos(l, y))$ (单位常向量)

$\boldsymbol{n} = (\cos(n, x), \cos(n, y))$ (单位法向量)

$$\cos(l, n) = \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n} = \cos(l, x)\cos(n, x) + \cos(l, y)\cos(n, y)$$

再应用格林公式.

14. 若函数 $f(x, y)$ G 上满足方程

$$\Delta f = \frac{{}^2 f}{x^2} + \frac{{}^2 f}{y^2} = 0,$$

称 $f(x, y)$ G 上的调和函数. 函数 $f(x, y)$ G 上是调和函数 对 G 内任意光滑闭曲线 C, 有

$$\oint_C \frac{f}{n}\mathrm{d}s = 0.$$

证法 “ ” 应用方向导数和格式公式.

“ ” 用反证法. 假设存在某点 $x_0, y_0) \in G$

$$\Delta f = \frac{{}^2 f}{x^2} + \frac{{}^2 f}{y^2} \neq 0 .$$

不妨设 $\Delta f = \frac{{}^2 f}{x^2} + \frac{{}^2 f}{y^2} = a > 0$, 则存在以点 $x_0, y_0)$

G_δ, 使 $x, y) \in G_\delta$, $\Delta f > 0$. G_δ 的边界闭曲线是 G_δ, 有

$$\iint_{G_\delta} \frac{{}^2 f}{x^2} + \frac{{}^2 f}{y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y > 0 .$$

由已知条件 $\oint_{C_\delta} \frac{f}{n}\mathrm{d}s = \iint_{G_\delta} \frac{{}^2 f}{x^2} + \frac{{}^2 f}{y^2} \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0$. 矛盾.

15. **证明**: 若 $u(x, y)$

$$\underset{G}{}\ \frac{u}{x}^{2} + \frac{u}{y}^{2}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = - \underset{G}{}\ u\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + \oint_C u\frac{u}{n}\mathrm{d}s$$

其中 G 是光滑闭曲线 C 所围成的区域，$\Delta u = \frac{{}^2 u}{x^2} + \frac{{}^2 u}{y^2}$.

证法　由方向导数，将曲线积分 $\oint_C u\frac{u}{n}\mathrm{d}s$ 化为第二型曲线积分 .

$$\oint_C u\frac{u}{n}\mathrm{d}s = \oint_C u\ \frac{u}{x}\cos(n, x) + \frac{u}{y}\cos(n, y)\ \mathrm{d}s$$

$$= \oint_C u\frac{u}{x}\mathrm{d}y - u\frac{y}{u}\mathrm{d}x$$

再应用格林公式 .

16. 求高斯积分

$$I(\xi, \eta) = \oint_C \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s$$

其中 C 是无重点的光滑闭曲线，$\boldsymbol{r}$ 是连结曲线 C 上动点 $M(x, y)$

C 上的定点 $A(\xi, \eta)$　　　$r = \ (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2$，$\boldsymbol{n}$ 是曲线 C 在点 $M(x, y)$

解法　　$(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = (x, \boldsymbol{n}) - (x, \boldsymbol{r})$,

$$\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n}) = \cos(x, \boldsymbol{n})\cos(x, \boldsymbol{r}) + \sin(x, \boldsymbol{n})\sin(x, \boldsymbol{r})$$

$$= \frac{x - \xi}{r}\cos(x, \boldsymbol{n}) + \frac{y - \eta}{r}\sin(x, \boldsymbol{n}) .$$

于是，　$I(\xi, \eta) = \oint_C \frac{\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})}{r}\mathrm{d}s$

$$= \oint_C \frac{x - \xi}{r^2}\cos(x, \boldsymbol{n}) + \frac{y - \eta}{r^2}\sin(x, \boldsymbol{n})\ \mathrm{d}s$$

$$= \oint_C \frac{x - \xi}{r^2}\mathrm{d}y - \frac{y - \eta}{r^2}\mathrm{d}x .$$

以下应用格林公式 .

1)　$A(\xi, \eta)$　　　C 之外，由格林公式，有

$$I(\xi,\eta)=0\ .$$

2) $A(\xi,\eta)$ C所围成区域D之内,以点$A(\xi,\eta)$为心,充分小的$\delta>0$为半径的圆域D_δ D,闭曲线C与小圆的边界C_δ,在$D-D_\delta$上应用格林公式,有

$$\oint_{C+C_\delta}\frac{\cos(r,n)}{r}\mathrm{d}s=\oint_{C}\frac{\cos(r,n)}{r}\mathrm{d}s+\oint_{C_\delta}\frac{\cos(r,n)}{r}\mathrm{d}s=0,$$

从而,

$$I(\xi,\eta)=\oint_{C}\frac{\cos(r,n)}{r}\mathrm{d}s=\oint_{C_\delta^-}\frac{\cos(r,n)}{r}\mathrm{d}s=2\pi$$

§14.2 曲 面 积 分

一、基本内容

本节有四段.

第一段从计算物质曲面的质量抽象出第一型曲面积分的定义,并对参数方程所表示的光滑曲面,给出了计算第一型曲面积分的公式

第二段从计算流体的速度场

出第二型曲面积分的定义,并给出第一型曲面积分与第二型曲面积分的转换公式,以及计算第二型曲面积分的公式

第三段给出了奥-高公式

$$_{S}\ P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\ _{V}\ \frac{P}{x}+\frac{Q}{y}+\frac{R}{z}\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中$P(x,y,z),Q(x,y,z),R(x,y,z)$

闭曲面S所围成的体V上连续,取外法线的方向为正.

第四段给出了斯托克斯公式(定理4)

$$\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

$$= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dydz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dzdx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy$$

其中 $P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z)$
S 及其边界光滑闭曲线上连续，曲面正侧与曲线的正向按右手坐标系确定．并给出了空间曲线积分与路线无关的条件　　5 的四个等价命题)

二、学习要求

第一型曲面积分是二重积分的推广，它是将 xy 平面上有界区域推广到 $\mathbf{R}^3$ 中的有界光滑曲面，换句话说，xy 平面上的有界区域是 $\mathbf{R}^3$ 中的一个特殊的光滑“曲面”．第二型曲面积分是向量函数在曲面上的积分，它是力学、电学等学科的重要的数学工具．奥 - 高公式是沟通三重积分与第二型曲面积分之间的桥梁．斯托克斯公式是沟通第二型曲面积分与空间第二型曲线积分之间的桥梁，这两个公式在场论中占有重要的地位．要求:

1. 掌握第一型曲面积分与第二型曲面积分的定义及其性质．

2. 会计算第一型曲面积分与第二型曲面积分，特别是要掌握奥 - 高公式与斯托克斯公式，并能应用它们计算曲面积分．

3. 会应用空间曲线积分与路线无关的条件

三、答疑辅导

问 **1.** 我们先后学过了各种积分定义，它们可否叙述为统一的形式？

答　可．到此为止，我们学过的积分，有

一元函数在 $\mathbf{R}$ 中闭区间上的定积分．

二元函数在 $\mathbf{R}^2$ 中有界闭区域上的二重积分．

二元函数在 $\mathbf{R}^2$ 中有界闭曲线上的曲线积分

包含两个端点,下同 .)

三元函数在 $\mathbf{R}^3$ 中有界闭立体上的三重积分.

三元函数在 $\mathbf{R}^3$ 中有界闭曲线上的曲线积分.

三元函数在 $\mathbf{R}^3$ 中有界光滑曲面上的曲面积分.

尽管由于函数的自变量个数不同,积分所在的几何体不同,但是定义这些积分的思想方法是完全相同的,因此可以把这些积分统一地叙述为抽象形式.

设 Ω 是有界闭 $f(P)$

何体 Ω 上的实值函数,$P\in\Omega$,函数 $f(P)$ Ω 上的黎曼积分 R 积分)

R 和) R 和的极限.

R 和有一个生成过程,在 R 积分定义中,这个过程比较繁琐.首先将几何体 Ω 分成 n 个小几何体:Ω_1,Ω_2,$\cdots$,Ω_n,将这个分法表为 T.要求:

1) T 是任意的;

2) Ω_k 都是连通的 $k=1,2,\cdots,n$)

3) Ω_k 都看作是闭的 $k=1,2,\cdots,n$)

个相邻的小几何体必有部分共同的边界;

4) Ω_k 都有“体积”,确切地说,每个小几何体 Ω_k 都有测度,表为 $\Delta\Omega_k(k=1,2,\cdots,n)$

其次,在小几何体 Ω_k 上任取一点 P_k,点 P_k 可以是小几何体 Ω_k 的边界点 $k=1,2,\cdots,n$) R 和

$$\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\Omega_k .$$

令

$$d(T)=\max\{\Omega_k \text{ 的直径}, k=1,2,\cdots,n\}$$

如果当 $d(T)\to 0$,R 和 $\sum\limits_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\Omega_k$ 存在极限 I,即

$$\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\Omega_k = I,$$

且数 I 与分法 T 无关，也与点 $P_k\in\Omega_k$ 的取法无关．这个极限的确切意义是：

$\exists\ I\in\mathbf{R}$，$\forall\ \varepsilon>0$，$\exists\ \delta>0$，$\forall\ T$：$d(T)<\delta$，$\forall\ P_k\in\Omega_k$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\Omega_k - I\right| < \varepsilon$$

称函数 $f(P)$ 　　　　 Ω 上 $\boldsymbol{R}$ 可积，I 是函数 $f(P)$ 　　　　 Ω 上的 $\boldsymbol{R}$ 积分，表为

$$I=\int_\Omega f(P)\,\mathrm{d}\Omega=\lim_{d(T)\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(P_k)\Delta\Omega_k\ .$$

以上所述就是 R 积分的抽象形式．因几何体 Ω 的不同就有各种不同的积分．例如，

$P=x\in[a,b]=\Omega\subset\mathbf{R}$，就是定积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

$P=(x,y)\in$有界闭区域 $D=\Omega\subset\mathbf{R}^2$，就是二重积分

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

$P=(x,y)\in$光滑曲线 $C(A,B)=\Omega\subset\mathbf{R}^2$，就是平面第一型曲线积分

$$\int_{C(A,B)} f(x,y)\,\mathrm{d}s$$

$P=(x,y,z)\in$有界闭体 $V=\Omega\subset\mathbf{R}^3$，就是三重积分

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$P=(x,y,z)\in$光滑曲线 $C(A,B)=\Omega\subset\mathbf{R}^3$，就是空间第一型曲线积分

$$\int_{C(A,B)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}s$$

$P=(x,y,z)\in$光滑曲面 $S=\Omega\subset\mathbf{R}^3$，就是第一型曲面积分

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$$

关于 R 积分的可积性、性质等都可抽象地讨论 .

第二型曲线积分与第二型曲面积分是向量函数的 R 积分 .

$P=(x,y)\in$光滑曲线 $C(A,B)=\Omega\subset\mathbf{R}^2$, $\boldsymbol{f}(P)=(A(P),B(P))$
$\mathrm{d}\boldsymbol{s}=(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$

$$\int_{C(A,B)}(A(P),B(P))(\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)=\int_{C(A,B)}A(P)\mathrm{d}x+B(P)\mathrm{d}y .$$

$P=(x,y,z)\in$ 光滑曲面 $S=\Omega\subset\mathbf{R}^3$, $\boldsymbol{f}(P)=(A(P),B(P),C(P))$　$\mathrm{d}\boldsymbol{S}=(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$,

$$\iint_S(A(P),B(P),C(P))(\mathrm{d}y\mathrm{d}z,\mathrm{d}z\mathrm{d}x,\mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

$$=\iint_S A(P)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+B(P)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+C(P)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

问 2. 格林公式、奥 - 高公式和斯托克斯公式有哪些共性 ?

答　格林公式

$$\iint_G\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y$$

给出了区域 G 上的二重积分与该区域 G 的边界封闭曲线 C 上的曲线积分之间的关系 . 奥 - 高公式

$$\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z+Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x+R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

给出了立体 V 上的三重积分与该立体 V 的边界封闭曲面 S 上的曲面积分之间的关系 . 斯托克斯公式

$$\iint_S\left(\frac{\partial R}{\partial y}-\frac{\partial Q}{\partial z}\right)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\left(\frac{\partial P}{\partial z}-\frac{\partial R}{\partial x}\right)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\oint_C P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y+R\mathrm{d}z$$

给出了空间曲面 S 上的曲面积分与该曲面 S 的边界封闭曲线 C 上的曲线积分之间的关系 .

这三个公式的共性是, 给出了在几何体上的积分与在该几何体边界上的积分之间的关系 . 一般来说, 在有界几何体上定义的

函数，在几何体内部点上的函数值与几何体边界点上的函数值没有必然的联系，但是在一定条件下和被积函数具有一定的形式

积分．这三个公式，在物理上和数学上都有重要的意义．以计算区域 G 的面积为例，从直观看，区域 G 的面积似乎与区域 G 的边界封闭曲线没有什么关系，但是格林公式却能将区域 G 的面积转化为沿区域 G 边界封闭曲线 C 上的线积分，即

$$G\text{的面积} = \frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

这三个公式等号两端的几何体都带有方向，在通常的直角坐标系中，按右手系定向或外法线定向．等号一端的几何体改变方向　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　-

莱公式是相同的．

问 3. 以同一空间闭曲线 C 为边界的两个不同光滑曲面 S_1 与 S_2，在其上的斯托克斯公式是否相同？

答　相同．从斯托克斯公式的证明可以看到，斯托克斯公式与以空间闭曲线 C 为边界的光滑闭曲面的形状无关，也就是

$$\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

$$= {}_{S_1}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{}{x} & \frac{}{y} & \frac{}{z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = {}_{S_2}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{}{x} & \frac{}{y} & \frac{}{z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

这个事实说明，应用斯托克斯公式计算空间封闭曲线上的积分 $\oint_C P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$，解题者要找一个以闭曲线 C 为边界的光滑曲面，通常找一个计算量比较少的光滑曲面 S．例如，练习题 14.2 第 7 题的(1)　　2)

问 4. 斯托克斯公式在有“洞”的有界光滑曲面块 S 上是否成立？

答　成立. 带“洞”的有界光滑曲面 S，如图 14.3，亦称复连通有界光滑曲面 S. 它的边界是两条光滑闭曲线 C_1 与 C_2. 闭曲线 C_1 与 C_2 的定向原则同前. 图 14.3 的 C_1 与 C_2 的箭头指向就是正方向. 斯托克斯公式是

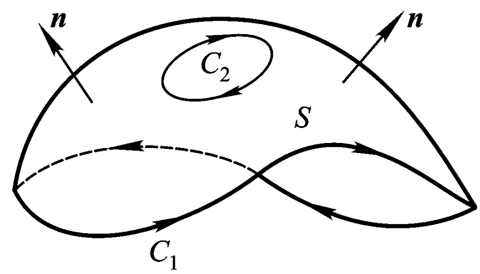


图　14.3

$$\int_{C_1+C_2} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}.$$

问 5. 怎样计算第一型曲面积分和第二型曲面积分?

答　计算第一型曲面积分

$$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma.$$

若曲面块 S 光滑或逐片光滑，由参数方程

$$x = x(u, v)\quad y = y(u, v)\quad z = z(u, v)\quad u, v) \in D$$

给出，其中 D 是有界闭区域，函数 $f(x, y, z)$ S 上连续，则第一型曲面积分可化为 D 上的二重积分，即

$$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f[x(u, v), y(u, v), z(u, v)]\sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v.$$

其中

$$E = x_u'^2 + y_u'^2 + z_u'^2,$$

$$F = x_u'x_v' + y_u'y_v' + z_u'z_v',$$

$$G = x_v'^2 + y_v'^2 + z_v'^2,$$

$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$ 是曲面面积微元.

若曲面块 S 由函数 $z = z(x, y)$　D 是 S 在 xy 坐标面上的投影区域，则

$$\iint_S f(x, y, z)\,\mathrm{d}\sigma = \iint_D f[x, y, z(x, y)]\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 $\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 是曲面面积微元 .

注 若曲面 S 与平行 z 轴的直线的交点多于两个，则必需将曲面 S 分成几块，使每一块与平行于 z 轴的直线只交于一个点，分块计算之 .

应用曲面 S 的对称性以及被积函数 $f(x, y, z)$ x, y, z 的奇偶性可简化计算

计算第一型曲面积分可将曲面 S 的表达式直接代入被积函数之中 . 例如，计算第一型曲面积分

$$\iint_S (ax + by + cz + e)^2\,\mathrm{d}\sigma,\ \text{其中 } S \text{ 是球面：} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 .$$

解 由于对称性，有

$$\iint_S x^2\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S y^2\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S z^2\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$\iint_S x\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S y\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S z\,\mathrm{d}\sigma = 0,$$

$$\iint_S xy\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S yz\,\mathrm{d}\sigma = \iint_S zx\,\mathrm{d}\sigma = 0 .$$

于是，$I = \iint_S (ax + by + cz + e)^2\,\mathrm{d}\sigma$

$$\begin{aligned}
&= \iint_S (a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 + e^2 + \\
&\qquad 2abxy + 2bcyz + 2cazx + 2aex + 2bey + 2cez)\,\mathrm{d}\sigma \\
&= a^2\iint_S x^2\,\mathrm{d}\sigma + b^2\iint_S y^2\,\mathrm{d}\sigma + c^2\iint_S z^2\,\mathrm{d}\sigma + e^2\iint_S \mathrm{d}\sigma \\
&= (a^2 + b^2 + c^2)\iint_S (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}\sigma + e^2\iint_S \mathrm{d}\sigma \\
&= (a^2 + b^2 + c^2)\iint_S R^2\,\mathrm{d}\sigma + e^2\iint_S \mathrm{d}\sigma
\end{aligned}$$

$$= R^2(a^2+b^2+c^2)\cdot 4\pi R^2 + e^2\cdot 4\pi R^2$$
$$= 4\pi R^4(a^2+b^2+c^2) + 4\pi R^2 e^2 .$$

$(x^2+y^2+z^2$ 用球面方程 $x^2+y^2+z^2=R^2$ 代入)

其中 $\iint_S d\sigma$ 是半径为 R 的球面 S 的面积，其值是 $4\pi R^2$.

利用奥 - 高公式计算第二型曲面积分 .

若 P, Q, R 在包含闭曲面 S 的空间 V 中有连续一阶偏导数，则

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

其中闭曲面 S 取外侧为正，用奥 - 高公式，可将曲面积分化成三重积分 .

若曲面 S 不是封闭的，可补加曲面 S_* 使其为封闭的，P, Q, R 在 $S+S_*$ 所围成的空间 V 上有连续一阶偏导数，则

$$I = \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_{S+S_*} P\mathrm{d}y\mathrm{d}t + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{S_*} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint_{S_*} P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

其中 V 是闭曲面 $S+S_*$ 所围成的体，$S+S_*$ 外侧为正 .

见本节补充例题的例 3 .

用向量内积的方法计算 .

设曲面块 S 的方程是 $z = f(x, y)$ S 上的法向量是 $(-f_x', -f_y', 1)$ 册 §10.3 第三段的法向量公式(3))则第二型曲面积分

$$I = \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$
$$= \iint_S (P, Q, R)\ \mathrm{d}y\mathrm{d}z, \mathrm{d}z\mathrm{d}x, \mathrm{d}x\mathrm{d}y)$$

$$= \iint_S (P,Q,R)\left(\frac{-f_x'}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}},\ \frac{-f_y'}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}},\ \frac{1}{\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}}\right)\sqrt{1+f_x'^2+f_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \pm\iint_{D_{xy}} (P,Q,R)\cdot(-f_x',\ -f_y',1)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D_{xy}**是曲面块** S **在** xy **坐标上的投影区域**. “+”, “-”**号的确定**: **若题设中曲面** S **的正侧与** $(-f_x',\ -f_y',1)$
“+”, **否则取**“-”. **例如, 计算第二型曲面积分**

$$I = \iint_S (x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中曲面块 S **是锥面** $z=\sqrt{x^2+y^2}$, **被** $z=1$, $z=2$ **所截部分外侧**

解　**已知** $z=\sqrt{x^2+y^2}$,

$$-\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\quad -\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

于是, $I = \iint_S (x-y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x+y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

$$= \pm\iint_{D_{xy}} (x-y,\ x+y,\ z^2)\cdot\left(\frac{-x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ \frac{-y}{\sqrt{x^2+y^2}},\ 1\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

因为 S **的外侧为正, 它在** xy **坐标面上的投影** D_{xy} **取负号, 所以**

$$I = -\iint_{D_{xy}} \left(-\sqrt{x^2+y^2}+z^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -\iint_{D_{xy}} \left(-\sqrt{x^2+y^2}+x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

投影区域 D_{xy} **是中心在原点半径为** 1 **到** 2 **的环形区域, 作极坐标替换** $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, $1\leq r\leq 2$, $0\leq\varphi\leq 2\pi$, **则**

$$I = -\int_0^{2\pi} d\varphi\int_1^2 (-r+r^2)\,r\mathrm{d}r = -\frac{17}{6}\pi.$$

问 6. 计算平面区域的面积和曲面面积都有哪些公式?

答 计算平面区域的面积有:

若两条曲线 $y = f(x)$ $y = g(x)$ $x = a$ 与 $x = b$ $a < b)$

$$A = \int_a^b | f\ \ x) - g(x) | \mathrm{d}x .$$

若围成区域 D 的边界曲线是逐段光滑的闭曲线 C, 则区域 D 的面积是

$$A = \frac{1}{2}\oint_C x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x .$$

若闭曲线 C 是参数方程 $x = \varphi\ \ t)$ $y = \psi\ \ t)$ $\alpha \leq t \leq \beta$, 则

$$A = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta [\varphi(t)\psi'(t) - \psi(t)\varphi'(t)]\mathrm{d}t .$$

例如, 求笛卡儿叶形线

$$x^3 + y^3 = 3axy \quad (a > 0 \text{ 常数})$$

一圈所围成的面积 .

解 为了求得闭曲线的参数方程, 设 $y = tx$, 则容易求得参数方程

$$x = \frac{3at}{t^3 + 1}, \qquad y = \frac{3at^2}{t^3 + 1}, \quad 0 \leq t < +\infty .$$

当 t 由 0 变到 $+\infty$时, 闭曲线就被描绘出来 因为 $t = \frac{y}{x} = \tan\theta$, 其中 θ 由 0 变到 $\frac{\pi}{2}$, 见本书§11.1 问 4 图 11.10 . 我们有

$$\mathrm{d}x = 3a\frac{1 - 2t^3}{(1 + t^3)^2}\mathrm{d}t, \qquad \mathrm{d}y = 3a\frac{2t - t^4}{(1 + t^3)^2}\mathrm{d}t .$$

于是,

$$A = \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\left[\frac{t}{t^3 + 1}\frac{2t - t^4}{(1 + t^3)^2} - \frac{t^2}{t^3 + 1}\frac{1 - 2t^3}{(1 + t^3)^2}\right]\mathrm{d}t$$

$$= \frac{9a^2}{2}\int_0^{+\infty}\frac{t^2}{(1 + t^3)^2}\mathrm{d}t = \frac{3}{2}a^2 .$$

若曲面 S 是函数 $z = f\ \ x, y)$ xy 坐标面上的投影是区

域 D_{xy}，则曲面 S 的面积是

$$A=\iint_{D_{xy}}\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\mathrm{d}\sigma$ 是曲面面积微元 $\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，或

$$A=\iint_{D_{xy}}\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

若曲面 S 的函数是 $x=f(y,z)$ $y=f(x,z)$ yz 坐标面或 xz 坐标面的投影区域是 D_{yz} 或 D_{xz}，有上述类似的曲面 S 的面积 A 的公式:

$$A=\iint_{D_{yz}}\sqrt{1+x_y'^2+x_z'^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z\quad 或\quad A=\iint_{D_{zx}}\sqrt{1+y_x'^2+y_z'^2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x\ .$$

若曲面块 σ 在某坐标面上的投影是一条逐段光滑曲线 S 时，计算此曲面块 σ 的面积，可按照弧长的第一型曲线积分．若曲面 σ 在 xy 坐标面上的投影是逐段光滑曲线 S，在 S 上一点 $P(x,y)$ $z=f(x,y)$ (≥ 0) σ 上的一条曲线，应用微元法计算曲边梯形面积的同样方法，易得曲面块 σ 上介于曲线 $z=f(x,y)$ 曲线 S 之间的面积 A 是第一型曲线积分

$$A=\int_S f(x,y)\,\mathrm{d}S\ .$$

例如，求柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被平面 $z=y$ 与 $z=-y$ 所截的那部分曲面的面积 14.4)

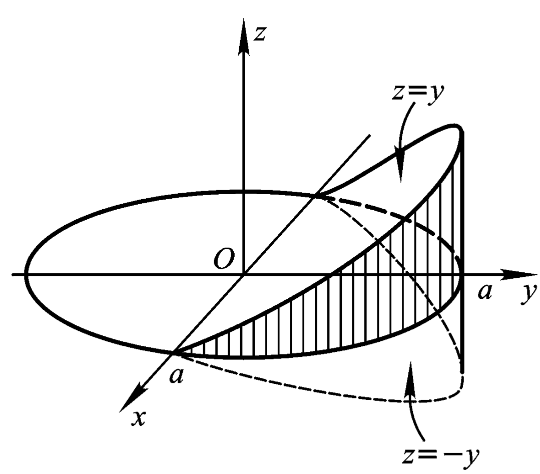


图　14.4

解　柱面 $x^2+y^2=a^2$ 被两平面 $z=y$ 与 $z=-y$ 所截的部分关于 xy 平面对称，是 xy 平面上的那部分曲面的 2 倍．它又关于 zy 平面对称，所以是第一封限那部曲面的 4 倍．

已知函数 $z=f(x,y)=y$，柱面 $x^2+y^2=a^2$ 在 xy 平面上的投影是半圆，设 $x=a\cos\varphi$，$y=a\sin\varphi$，在第一象限 $0\leq\varphi\leq\dfrac{\pi}{2}$，于是，曲面的面积

$$A=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} z\,\mathrm{d}S=4\int_0^{\frac{\pi}{2}} ya\,\mathrm{d}\varphi=4a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$=-4a^2\cos\varphi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=4a^2.$$

四、补充例题

例 1. 计算曲面积分 $\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma$，其中

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & 当\ 0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2},\\ 0, & 当\ z<0\ 与\ z>\sqrt{x^2+y^2},\end{cases}$$

S 是球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

解法 在球面 S 上的不同部分被积函数 $f(x,y,z)$ 解析式. 因此要分块计算.

解 将球面 S 分成三部分 S_1，S_2，S_3.

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}, & S_1:\ x^2+y^2+z^2=1,\ 0\leq z\leq\sqrt{x^2+y^2};\\ & S_2:\ x^2+y^2+z^2=1,\ z\leq 0,\\ 0, & \\ & S_3:\ x^2+y^2+z^2=1,\ z>\sqrt{x^2+y^2}.\end{cases}$$

曲面 S_1 在 xy 平面上的投影是区域 D: $\dfrac{1}{2}\leq x^2+y^2\leq 1$. S_1 的方程 $z=\sqrt{1-x^2-y^2}$，

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y}{\sqrt{1-x^2-y^2}}.$$

于是，

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_{S_1}\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_D \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1-x^2-y^2}}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\frac{r^2}{\sqrt{1-r^2}}\mathrm{d}r$$

$$=2\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1} r\mathrm{d}\left(-\sqrt{1-r^2}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi^2}{4}.$$

例 2. 计算曲面积分

$$\iint_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2-z)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S **是旋转抛物面** $x^2+y^2=a^2z$ $(a>0)$ $0\leq z\leq 1$ **部分，下侧为正**．

解法 **将** S **上口加"盖"，构成闭曲面，再应用奥-高公式**．

解 **在曲面** S **的上口补加圆盘** S_1: $z=1$, $x^2+y^2\leq a^2$. $S+S_1$ **构成闭曲面，取外侧为正．设它围成的立体是** V. **根据奥-高公式，有**

$$\iint_S+\iint_{S_1}=\oiint_{S+S_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2-z)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_V\left\{\frac{\partial}{\partial x}(xz)+\frac{\partial}{\partial y}[(x^2-z)y]+\frac{\partial}{\partial z}(-x^2z)\right\}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0.$$

即 $$\iint_S xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2-z)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=-\iint_{S_1} xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+(x^2-z)y\mathrm{d}z\mathrm{d}x-x^2z\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{S_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(S_1 **在** y,z **坐标面投影** $\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0$, **同样** $\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0$, **在** S_1 **上** $z=1$)

$$=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^3\cos^2\varphi\mathrm{d}r=\frac{a^4}{4}\pi\quad (D: x^2+y^2\leq a^2)$$

例 3. 计算曲面积分

$$I=\iint_S (8y+1)x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S **是曲线** $z=\sqrt{y-1}\ (1\leq y\leq 3)$ $x=0$ **绕** y **轴旋转一周所成**

的曲面，它的法向量与 y 轴正方向的夹角恒大于 $\frac{\pi}{2}$.

解法 曲线 $z=\sqrt{y-1}\,(1\leq y\leq 3)$ $x=0$ 绕 y 轴旋转一周是旋转抛物面，方程是 $y-1=x^2+z^2$. 见图 14.5 . 补加平面 $y=3$ 上圆盘 $x^2+z^2=2$. 表为 σ，它的外法线向量与 y 轴同向 . 设围成的封闭体是 V . 于是，

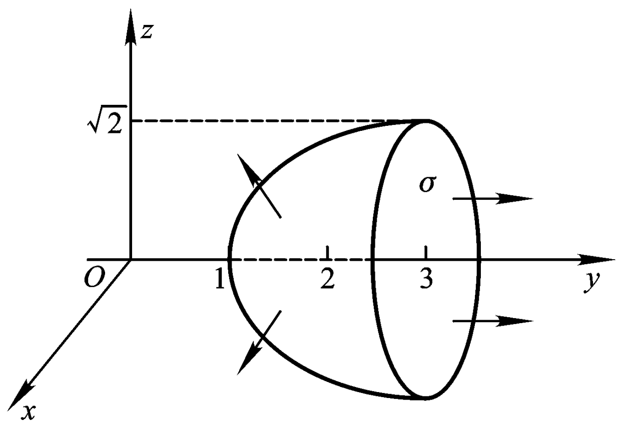


图 14.5

$$I=\iint_{S+\sigma}-\iint_{\sigma}.$$

由奥 - 高公式，有

$$\iint_{S+\sigma}(8y+1)x\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+2(1-y^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x-4yz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_V(8y+1-4y-4y)=\iiint_V\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_{V_{xz}}\mathrm{d}x\mathrm{d}z\int_{1+x^2+z^2}^{3}\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\sqrt{2}}r\mathrm{d}r\int_{1+r^2}^{3}\mathrm{d}y=2\pi\int_0^{\sqrt{2}}r(3-1-r^2)\mathrm{d}r=2\pi.$$

$$\iint_{\sigma}=2\iint_{\sigma}(1-3^2)\mathrm{d}z\mathrm{d}x=-32\pi.$$

于是， $I=\iint_{S+\sigma}-\iint_{\sigma}=2\pi-(-32\pi)=34\pi$.

例 4. 计算曲面积分

$$I = {}_{S}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\quad}{x} & \frac{\quad}{y} & \frac{\quad}{z} \\ x - z & x^3 + yz & -3xy^2 \end{vmatrix},$$

其中曲面 S **是锥面** $z = 2 - \quad x^2 + y^2$ **在** xy **平面上方的部分，锥内侧为正.**

解法　应用斯托克斯公式，再计算闭曲线的积分.

解　曲面 S **的边界闭曲线是** xy **平面上的圆** $C:\ x^2 + y^2 = 4$. **注意** C **的正向是顺时针方向. 根据斯托克斯公式，有**

$$I = {}_{S}\begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\quad}{x} & \frac{\quad}{y} & \frac{\quad}{z} \\ x - z & x^3 + yz & -3xy^2 \end{vmatrix}$$

$$= \oint_C (x - z)\mathrm{d}x + (x^3 + yz)\mathrm{d}y - 3xy^2\mathrm{d}z.$$

因为圆 C **在** xy **平面上，所以** $\mathrm{d}z = 0$. **设圆** C **围成的圆域是** D**，注意** C **的方向再根据格林公式，有**

$$I = \oint_C (x - z)\mathrm{d}x + (x^3 + yz)\mathrm{d}y = - {}_{D}\ \frac{\quad}{x}\ x^3 + yz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= -3 {}_{D}\ x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y \qquad (D:\ x^2 + y^2 \leq 4)$$

$$= -3\int_0^{2\pi} \cos^2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^2 r^3\mathrm{d}r = -12\pi.$$

例 5. 证明：空间格林第二公式

$${}_{V}\begin{vmatrix} \Delta u & \Delta v \\ u & v \end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = {}_{S}\begin{vmatrix} \frac{u}{n} & \frac{v}{n} \\ u & v \end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma,$$

其中 S **是立体** V **的边界封闭曲面.** n **是曲面** S **外法线，函数** $u\quad x, y, z)\quad v\quad x, y, z)$ **连续二阶偏导数；而**

$$\Delta u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2},$$

$$\Delta v=\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial z^2}.$$

证法　**应用奥-高公式，计算曲面积分**

$$\iint_S\left(v\frac{\partial u}{\partial n}-u\frac{\partial v}{\partial n}\right)\mathrm{d}\sigma=\iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\sigma-\iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}\sigma.$$

证明　**根据奥-高公式，有**

$$\iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=\iint_S v\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iiint_V\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(v\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(v\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(v\frac{\partial u}{\partial z}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\iiint_V v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_V\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

将 u **与** v **互换，有**

$$\iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iiint_V u\Delta v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iiint_V\left(\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial z}\frac{\partial v}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

上述二式等号两端相减，有

$$\iint_S v\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\sigma-\iint_S u\frac{\partial v}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=\iiint_V v\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z-\iiint_V u\Delta v\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z,$$

即
$$\iiint_V\begin{vmatrix}\Delta u & \Delta v\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_S\begin{vmatrix}\dfrac{\partial u}{\partial n} & \dfrac{\partial v}{\partial n}\\ u & v\end{vmatrix}\mathrm{d}\sigma.$$

例 6. 证明公式

$$\iiint_V\frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r}=\frac{1}{2}\iint_S\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})\mathrm{d}\sigma,$$

其中 S **是立体** V **的边界封闭曲面，** $\boldsymbol{n}$ **是曲面** S **上动点** (ξ,η,ζ) **处** S **的外法线，** $r=\sqrt{(\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2}$，$\boldsymbol{r}$ **是从点**

(x, y, z)　点　$\xi, \eta, \zeta)$

证法　计算曲面积分，首先将 $\cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})$ 量的数量积，然后再应用奥 - 高公式，　$x, y, z)$　　　$\xi, \eta, \zeta)$

证明　设法线 $\boldsymbol{n}$ 与 ξ, η, ζ 轴的交角分别是 α, β, γ; 向量 $\boldsymbol{r}$ 与 ξ, η, ζ 轴的交角分别是 α', β', γ'. 从而法线 $\boldsymbol{n}$ 与向量 $\boldsymbol{r}$ 的方向余弦分别是

$$(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma) \quad 与 \quad (\cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma')$$

已知　$\cos\alpha' = \frac{\xi - x}{r}$,　$\cos\beta' = \frac{\eta - y}{r}$,　$\cos\gamma' = \frac{\zeta - z}{r}$, 有

$$\begin{aligned}
\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{r}) &= (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)\ \cos\alpha', \cos\beta', \cos\gamma') \\
&= \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' \\
&= \frac{1}{r}\ \ \xi - x)\cos\alpha + (\eta - y)\cos\beta + (\xi - z)\cos\gamma]
\end{aligned}$$

根据奥 - 高公式，有

$$\begin{aligned}
&\iint_S \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\sigma \\
&= \iint_S \left(\frac{\xi - x}{r}\cos\alpha + \frac{\eta - y}{r}\cos\beta + \frac{\zeta - z}{r}\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma \\
&= \iiint_V \left[\frac{\partial}{\partial\xi}\left(\frac{\xi - x}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial\eta}\left(\frac{\eta - y}{r}\right) + \frac{\partial}{\partial\zeta}\left(\frac{\zeta - z}{r}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \\
&= \iiint_V \left[\frac{3}{r} - \left(\frac{(\xi - x)^2}{r^3} + \frac{(\eta - y)^2}{r^3} + \frac{(\zeta - z)^2}{r^3}\right)\right]\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta \\
&= 2\iiint_V \frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r},
\end{aligned}$$

即

$$\iiint_{UV} \frac{\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta\mathrm{d}\zeta}{r} = \frac{1}{2}\iint_S \cos(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{n})\,\mathrm{d}\sigma .$$

五、练习题 14.2 解法提要

1. 求下列第一型曲面积分:

(1) $\iint_S (x+y+z)\mathrm{d}\sigma$，其中 S 是 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z\geq 0$.

解法 S: $z=\sqrt{a^2-x^2-y^2}$ 在 xy 坐标面上的投影是区域 D: $x^2+y^2\leq a^2$.

$$\mathrm{d}\sigma=\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

代入积分中，计算之 .

2. 证明：若 D 是 xy 平面上的有界闭区域，$z=z(x,y)$ D 上的光滑曲面 S，函数 $f(x,y,z)$ S 上连续，则 v $(\xi,\eta,\zeta)\in S$，使

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma=f(\xi,\eta,\zeta)\cdot A,$$

其中 A 是曲面 S 的面积 .

证法 设曲面 S 在 xy 平面上的投影区域是 D，将曲面积分化为区域 D 上的二重积分

$$\iint_S f(x,y,z)\mathrm{d}\sigma=\iint_D f[x,y,z(x,y)]\sqrt{1+z_x'^2+z_y'^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

再应用二重积分的中值定理 13.1(一)第 6 题)

3. 求下列第二型曲面积分：

(2) $\iint_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z+zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中 S 是四面体 $x+y+z=a$ $(a>0)$ $x=0$，$y=0$，$z=0$ 的表面，外法线是正向 .

解法 这是三个第二型曲面积分之和，先计算

$$\iint_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

曲面 S 由四个有向的三角形区域组成，如图 14.6，其中 BOC COA xy 坐标面上面微分 $\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$，ABC AOB xy 坐标面投影是三角形区域 D $x=0$，$y=0$，$x+y=a$ 围成)

$$\iint_S xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{ABC} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{AOB} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{COB} xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y+$$

$$\iint_{COA} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_{D} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint_{D} xy\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y + 0 + 0 = 0\ .$$

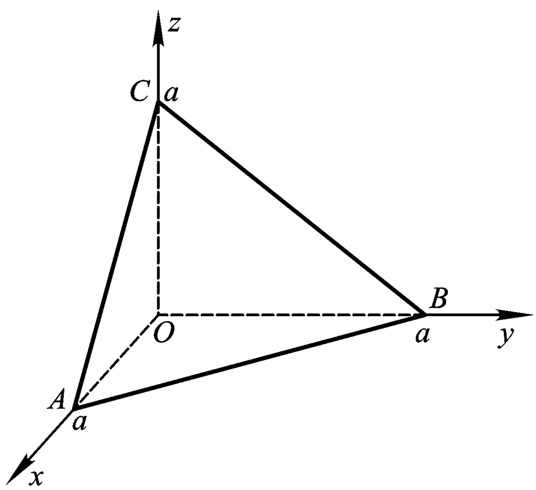


图　14.6

同法可计算其它二个同样的第二型曲面积分也是 0 .

5. 应用奥 - 高公式，求下列第二型曲面积分:

(2) $\iint_S xz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x^2 y - z^3)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (2xy + y^2 z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

其中 S 是 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ 和 $z = 0$ 围成体的表面，外法线为正向 .

解法　$P = xz^2$, $Q = x^2 y - z^3$, $R = 2xy + y^2 z$.

$$\frac{\partial P}{\partial x} = z^2,\quad \frac{\partial Q}{\partial y} = x^2,\quad \frac{\partial R}{\partial z} = y^2\ .$$

曲面 S 围成的体 V 是上半球体:

$$0 \leq z \leq \sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\quad (x, y) \in D:\ x^2 + y^2 \leq a^2\ .$$

由奥 - 高公式，有

$$\iint_S xz^2\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (x^2 y - z^3)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (2xy + y^2 z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \quad_{V} \ (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .$$

计算这个三重积分，可用球面坐标替换．

7. 应用斯托克斯公式计算下列曲线积分：

(2) $\oint_C x^2y^3\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z$，**其中** C **是抛物面** $x^2 + y^2 = a^2 - z$ **与平面** $z = 0$ **相交的圆周，其正方向与** z **轴构成左手螺旋系．**

解法　$P = x^2y^3$，$Q = 1$，$R = 1$．

$$\frac{P}{y} = 3x^2y^2,\quad \frac{Q}{z} = \frac{R}{x} = 0\ .$$

$$\frac{P}{z} = \frac{Q}{x} = \frac{R}{y} = 0\ .$$

取平面 $z = 0$ (**即** xy **坐标面**)　　　C **所围成的圆域** D: $x^2 + y^2 \le a^2$ **为曲面** S，**它的法线** n **的正方向与** z **轴正向相反．由斯托克斯公式，有**

$$\oint_C x^2y^3\mathrm{d}x + \mathrm{d}y + \mathrm{d}z = - \quad_{S}\ 3x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = -3 \quad_{S}\ x^2y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y\ .$$

可取极坐标替换，计算之．

10. 设 $\mathrm{d}u = (x^2 - 2yz)\mathrm{d}x + (y^2 - 2xz)\mathrm{d}y + (z^2 - 2xy)\mathrm{d}z$，**求原函数** $u\ \ x, y, z)$

解法　$P = x^2 - 2yz$，$Q = y^2 - 2xz$，$R = z^2 - 2xy$．

$$\frac{P}{y} = \frac{Q}{x} = -2z,\quad \frac{R}{x} = \frac{P}{z} = -2y,$$

$$\frac{Q}{z} = \frac{R}{y} = -2x\ .$$

曲线积分与路径无关．取　$x_0, y_0, z_0) = (0, 0, 0)$　　　$x, y, z) \in \mathbf{R}^3$，**有**

$$u\ \ x, y, z) = \int_0^x t^2\mathrm{d}t + \int_0^y t^2\mathrm{d}t + \int_0^z (t^2 - 2xy)\mathrm{d}t = \cdots\ .$$

*　　　*　　　*　　　*

11. 证明：若 S **是光滑封闭曲面，** $\boldsymbol{l}$ **是任意常向量，则**

$$\iint_S \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l})\,\mathrm{d}\sigma = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法线 .

证法　设法线 $\boldsymbol{n}$ 与 x, y, z 轴的交角分别为 α, β, γ; 常向量 $\boldsymbol{l}$ 与 x, y, z 轴的交角分别是 α', β', γ'

$$\cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}) = \cos\alpha'\cos\alpha + \cos\beta'\cos\beta + \cos\gamma'\cos\gamma .$$

应用奥 - 高公式, 注意 $\cos\alpha'$, $\cos\beta'$, $\cos\gamma'$ 都是常数 .

12. 求曲面积分

$$\iint_S (x - y + z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y - z + x)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z - x + y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是闭曲面 $|x - y + z| + |y - z + x| + |z - x + y| = 1$, 外侧为正 .

解法　应用奥-高公式, 将曲面积分化为三重积分, 再作变数替换

$$u = x - y + z,\quad v = y - z + x,\quad w = z - x + y .$$

13. 证明泊松公式

$$\iint_S f(ax + by + cz)\,\mathrm{d}\sigma = 2\pi\int_{-1}^{1} f\left(u\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}\right)\mathrm{d}u,$$

其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$.

证法　作正交线性变换

$$u = l_1 x + m_1 y + n_1 z,$$

$$v = l_2 x + m_2 y + n_2 z,$$

$$w = l_3 x + m_3 y + n_3 z .$$

$$l_1^2 + m_1^2 + n_1^2 = 1,\quad l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0,$$

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1,\quad l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0,$$

$$l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1,\quad l_3 l_1 + m_3 m_1 + n_3 n_1 = 0 .$$

其中 $l_1 = \dfrac{a}{k}$, $m_1 = \dfrac{b}{k}$, $n_1 = \dfrac{c}{k}$. $k = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} = 1 .$$

球面 S 在新坐标系中是球面 S': $u^2+v^2+w^2=1$. 在球面 S' 上计算曲面积分. 设

$$u=u,\quad v=\quad 1-u^2\cos\varphi,\quad w=\quad 1-u^2\sin\varphi,$$
$$-1\leq u\leq 1,\ 0\leq\varphi\leq 2\pi.$$

14. 求高斯积分

$$I\quad \xi,\eta,\zeta)=\ _S\ \frac{\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})}{r^2}\mathrm{d}\sigma,$$

其中 S 是光滑封闭曲面, $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 上点 $x,y,z)$ $\boldsymbol{r}$ 是连结曲面 S 上动点 $M\quad x,y,z)$ S 外定点 $\xi,\eta,\zeta)$ 径,

$$r=\quad (\xi-x)^2+(\eta-y)^2+(\zeta-z)^2\ .$$

解法 分两种情况讨论:

1) 定点 $\xi,\eta,\zeta)$ S 围成的体内, 有

$$\cos(\boldsymbol{r},\boldsymbol{n})=\frac{x-\xi}{r}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{x})+\frac{y-\eta}{r}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{y})$$
$$+\frac{z-\zeta}{r}\cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{z})$$

应用奥-高公式. 计算之.

2) 定点 $\xi,\eta,\zeta)$ S 围成的体内. 以点 $\xi,\eta,\zeta)$ 充分小的 $\delta>0$ 为半径作球面 S_r, 使其含于 S 内, 在 $S-S_r$ 上应用奥-高公式, 计算之, 然后再计算在 S_r 上的积分.

15. 证明: 若 $\Delta u=\frac{\ ^2u}{x^2}+\frac{\ ^2u}{y^2}+\frac{\ ^2u}{z^2}$, 则

(1) $\ _S\ \frac{u}{n}\mathrm{d}\sigma=\ _V\ \Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z;$

(2) $\ _S\ u\frac{u}{n}\mathrm{d}\sigma=\ _V\ \ \frac{u}{x}^2+\frac{u}{y}^2+\frac{u}{z}^2\ \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$

$$+\ _V\ u\Delta u\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.$$

其中 S 是包围有界体 V 的光滑封闭曲面，$\frac{u}{n}$是沿曲面 S 外法线 n 的方向导数．

证法 将$\frac{u}{n}$写为

$$\frac{u}{n}=\frac{u}{x}\cos\alpha+\frac{u}{y}\cos\beta+\frac{u}{z}\cos\gamma,$$

再应用奥 - 高公式．

16. 证明定理 5 中) 3) 3) 4)

证法) 3)

数．3) 4)

§14.3 场 论 初 步

一、基本内容

本节有四段．

第一段给出了数量场 f $x, y, z)$ P $x, y, z)$ 义，即

$$\mathbf{grad}\ f=\frac{f}{x}\boldsymbol{i}+\frac{f}{y}\boldsymbol{j}+\frac{f}{z}\boldsymbol{k}.$$

以及梯度在场论中的意义．

第二段给出了向量场 $\boldsymbol{A}$ $P)$ P $x, y, z)$ 经过计算，得

$$\operatorname{div}\boldsymbol{A}(P)=\frac{A_x}{x}+\frac{A_y}{y}+\frac{A_z}{z}.$$

并指出奥 - 高公式在场论中的意义．

第三段给出了向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ P $x, y, z)$ 经过计算，得

$$\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}(P)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}.$$

并指出斯托克斯公式在场论中的意义

第四段给出了纳布拉算子 $\nabla=\frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$. 应用纳布拉算子 ∇，可把“三个度”表示得很简单，也可把五种二阶微分算子表示得很简单.

二、学习要求

场论在力学、电学等学科中处于重要的地位. 数学分析中讲场论的目的，一方面介绍“三个度”的概念及其物理意义；另一方面对抽象的奥-高公式、斯托克斯公式给出物理模型，使读者对它们有进一步的认识. 要求

1. 掌握梯度、散度和旋度的概念，初步理解它们的物理意义.

2. 了解奥-高公式、斯托克斯公式的向量形式及其物理意义.

3. 会应用“三个度”计算一些简单问题.

三、答疑辅导

问 1. 在场论中，奥-高公式

$$\iiint_V \operatorname{div}\boldsymbol{A}(P)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iint_S \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$$

描述了什么样的物理现象?

答 先给一个简单实例. 设河中有水流动，它构成稳定

时间无关) $\boldsymbol{A}(P)$

闭曲面 S，它不阻挡水的流动，设它围成的立体是 V. 如果立体 V 内任意一点 P $x, y, z)$ P **的水分**

子既不增加也不减少，只是在流速场的作用下有流体通过．从场论来说，就是散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)=0$．显然，在立体 V 中所有点 P 的散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)$

$$\underset{V}{}\ \operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0 .$$

另一方面，流速场 $\boldsymbol{A}(P)$　　　　　　　S 的流量
入量必相等)

$$\underset{S}{}\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma=0 .$$

从而，有

$$\underset{V}{}\ \operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\underset{S}{}\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma .$$

如果 V 中的某些点是源，即在这些点不仅有水分子通过，它本身又生出若干水分子．从场论来说，就是在这些点 P 上，散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)>0$．数 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)>0$ 愈大，产生的水分子愈多．显然，在立体 V 中所有点 P 的散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)$

$$\underset{V}{}\ \operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z>0 .$$

这时流速场通过封闭曲面 S 的流量

分恰是诸源所生成水分子的总和)　$\underset{S}{}\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma$ 必与立体 V 中所有点

P 的散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)$

$$\underset{V}{}\ \operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\underset{S}{}\ \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma .$$

一般情况，设有稳定向量场 $\boldsymbol{A}(P)$

$$\boldsymbol{A}(x,y,z)=(A_x(x,y,z),A_y(x,y,z),A_z(x,y,z))$$

向量场 $\boldsymbol{A}(P)$　　　P　$x,y,z)$

$$\operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)=\frac{A_x}{x}+\frac{A_y}{y}+\frac{A_z}{z} .$$

在向量场中如有光滑封闭曲面 S，它围成的立体是 V．立体 V 内

所有点 P 的散度 $\operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)$ $\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 恰好等于向量场 $\boldsymbol{A}(P)$ S 的总流量 $\iint_S \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$，即

$$\iiint_V \operatorname{div} \boldsymbol{A}(P)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S \boldsymbol{A}\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma .$$

问 2. 在场论中，斯托克斯公式

$$\iint_S \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A}(P)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \oint_C \boldsymbol{A}(P)\cdot \boldsymbol{l}\mathrm{d}s$$

描述了什么样的物理现象？

答　先给一个简单的实例．设河中有水流动，构成稳定的流速场 $\boldsymbol{A}(P)$ S，它的边界是空间光滑封闭曲线 C．按右手系由曲面 S 的 $n)$ 曲线 C 的正向．如果曲面 S 上任意一点 P 都不是流体速度场 $\boldsymbol{A}(P)$ 涡旋．从场论来说，就是旋度 $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{A}(P) = 0$．显然，在曲面 S 上所有点 P 的旋度 $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{A}(P)$

$$\iint_S \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A}(P)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = 0 .$$

这时流速场 $\boldsymbol{A}(P)$ C 的环量 S 上每一点都不是流速场的涡旋，波及到它的边界封闭曲线 C 上，也不可能有环流产生)

$$\oint_C \boldsymbol{A}(P)\cdot \boldsymbol{l}\mathrm{d}s = 0 .$$

从而，有

$$\iint_S \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A}(P)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \oint_C \boldsymbol{A}(P)\cdot \boldsymbol{l}\mathrm{d}s .$$

如果 S 上某些点是涡旋，且都是正向，即在这些点 P 上，旋度 $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{A}(P) > 0$．数 $|\mathbf{rot}\, \boldsymbol{A}(P)|$ 愈大，旋转的愈快．因为旋度 $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{A}(P)$ S 上的法线 $\boldsymbol{n}$ 的方向不一定相同图 14.7) S 上点 P 的涡旋强度只是旋度 $\mathbf{rot}\, \boldsymbol{A}(P)$

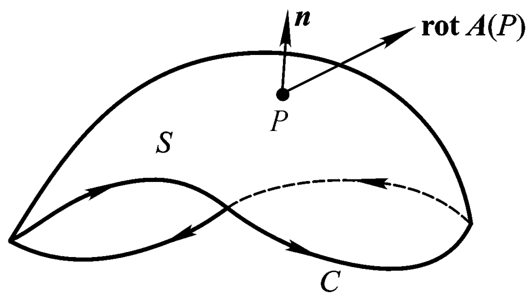


图　14.7

点 P 法线 $\boldsymbol{n}$ 上的投影，即 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{n}=\mathbf{rot}_n\boldsymbol{A}(P)$

曲面 S 上所有点 P 的旋度在点 P 法线 n 上的投影 $\mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{n}$ 的总和

$$\iint\limits_S \mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$$

应该等于曲面 S 上每一点涡旋强度传递到边界封闭曲线 C 上去的总量，即沿封闭曲线 C 的正向环流量 $\oint\limits_C \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{l}ds$，即

$$\iint\limits_S \mathbf{rot}\ \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma=\oint\limits_C \boldsymbol{A}(P)\cdot\boldsymbol{l}ds.$$

四、补充例题

例 1. 有一温度场 $U(x,y,z)$，$\mathrm{d}S$ 是曲面微元，它的法线方向是 n，求在单位时间内沿法线 n 的方向流过 $\mathrm{d}S$ 的热量微元 $\mathrm{d}Q$.

解法　热传导理论认为，$\mathrm{d}Q$ 与 $\mathrm{d}S$ 及 $\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|$ 成正比.

$$\frac{\partial U}{\partial n}=\left(\frac{\partial U}{\partial x},\frac{\partial U}{\partial y},\frac{\partial U}{\partial z}\right)\cdot\boldsymbol{n}=\mathbf{grad}\ U\cdot\boldsymbol{n},$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 表法线 n 的单位向量.

解　热总是从介质温度较高的部分流向温度较低的部分. 温差愈大，热流动的愈快，已知 $\mathrm{d}Q$ 与 $\mathrm{d}S$ 及 $\left|\frac{\partial U}{\partial n}\right|$ 成正比. 设比例

系数是 $K>0$ (介质内部的传导系数)

$$\mathrm{d}Q=-K\frac{\partial U}{\partial n}\mathrm{d}S.$$

其中添加负号“ - ”是因为: 当函数 $U(x, y, z)$ n 的正向减少时 $\frac{\partial U}{\partial n}<0$, 使 $\mathrm{d}Q>0$; 反之, 当函数 $U(x, y, z)$ n 的正向增大时 $\frac{\partial U}{\partial n}>0$, 使 $\mathrm{d}Q<0$ (此时热量流向 n 的反方向)

热量微元

$$\mathrm{d}Q=-K\,\mathbf{grad}\,U\cdot\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}S.$$

例 2. 求向量 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+z\boldsymbol{j}+\frac{e^z}{x^2+y^2}\boldsymbol{k}$ 通过圆台: $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 及 $z=1$, $z=2$ 侧面 S

解法 应用奥 - 高公式.

解 设圆台的上底 $(x^2+y^2\leq 4)$ S_1, 下底 $x^2+y^2\leq 1)$ S_2. $S+S_1+S_2$ 是逐片光滑闭曲面. 通过闭曲面 $S+S_1+S_2$ 的流量是

$$\iint_{S+S_1+S_2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{e^z}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{A}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\iiint_V\frac{e^z}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$=\int_1^2\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^z e^z\mathrm{d}r=2\pi e^2.$$

于是通过侧面 S 的流量

$$Q=\iint_S\mathrm{d}y\mathrm{d}z+z\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{e^z}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=2\pi e^2-\iint_{S_1}\frac{e^z}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_{S_2}\frac{e^z}{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(\mathrm{d}z=0)$$

$$=2\pi e^2-(4\pi e^2-2\pi e)=-2\pi e(e-1)$$

例 3. 证明: 向量场 $\boldsymbol{a}$ 通过曲面块 S:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \quad (u, v) \in D$$

的流量等于

$$\underset{S}{} \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \underset{D}{} \boldsymbol{a} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{u} \times \frac{\boldsymbol{r}}{v} \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S **的单位法向量** .

证法　将曲面 S **的单位法线向量** $\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ **个分量** $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ **分别用曲面** S **的参数方程的偏导数表示出来，再整理即得** .

证明　设 $\boldsymbol{a} = (a_x, a_y, a_z)$　$\boldsymbol{n} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} = a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma .$$

由《讲义》§11.4 的公式(6)　　　S **上一点**　$u, v)$ **方向数是**

$$A = \frac{(y, z)}{(u, v)}, \quad B = \frac{(z, x)}{(u, v)}, \quad C = \frac{(x, y)}{(u, v)} .$$

设 $\Delta = \quad A^2 + B^2 + C^2$，**则法线的方向余弦是**

$$\cos\alpha = \frac{A}{\Delta}, \quad \cos\beta = \frac{B}{\Delta}, \quad \cos\gamma = \frac{C}{\Delta} .$$

由《讲义》§13.1 的公式(14)

$$\mathrm{d}\sigma = \quad EG - F^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v .$$

其中

$$E = \frac{x}{u}^2 + \frac{y}{u}^2 + \frac{z}{u}^2 . \quad G = \frac{x}{v}^2 + \frac{y}{v}^2 + \frac{z}{v}^2 .$$

$$F = \frac{x}{u}\frac{x}{v} + \frac{y}{u}\frac{y}{v} + \frac{z}{u}\frac{z}{v} .$$

经计算得

$$EG - F^2 = A^2 + B^2 + C^2 .$$

有　$\mathrm{d}\sigma = \quad EG - F^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \quad A^2 + B^2 + C^2 \mathrm{d}u\mathrm{d}v = \Delta\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.

于是，$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = (a_x \cos\alpha + a_y \cos\beta + a_z \cos\gamma)\mathrm{d}\sigma$

$$= \quad a_x \frac{A}{\Delta} + a_y \frac{B}{\Delta} + a_z \frac{C}{\Delta} \quad \Delta\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \iint_D \left[a_x \frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)} + a_y \frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)} + a_z \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \right] \mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$= \iint_D \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = \iint_D \boldsymbol{a} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v,$$

即
$$\iint_S \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{n} \mathrm{d}\sigma = \iint_D \boldsymbol{a} \cdot \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right) \mathrm{d}u\mathrm{d}v .$$

五、练习题 14.3 解法提要

2. 证明:

(2) $\mathbf{grad} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{1}{v^2} (v\,\mathbf{grad}\, u - u\,\mathbf{grad}\, v)$

证法　按 grad 的定义

$$\mathbf{grad} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{u}{v} \right) \boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{v} \right) \boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u}{v} \right) \boldsymbol{k}$$

$$= \frac{v \frac{\partial u}{\partial x} - u \frac{\partial v}{\partial x}}{v^2} \boldsymbol{i} + \frac{v \frac{\partial u}{\partial y} - u \frac{\partial v}{\partial y}}{v^2} \boldsymbol{j} + \frac{v \frac{\partial u}{\partial z} - u \frac{\partial v}{\partial z}}{v^2} \boldsymbol{k}$$

$$= \cdots = \frac{1}{v^2} (v\,\mathbf{grad}\, u - u\,\mathbf{grad}\, v)$$

6. 证明:

(2) $\mathrm{div} (u\,\mathbf{grad}\, u) = u \Delta u + (\mathbf{grad}\, u)^2$.

证法　按照 div 和 grad 的定义 .

$$\mathrm{div} (u\,\mathbf{grad}\, u) = \mathrm{div} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \boldsymbol{i} + u \frac{\partial u}{\partial y} \boldsymbol{j} + u \frac{\partial u}{\partial z} \boldsymbol{k} \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x} \left(u \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(u \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(u \frac{\partial u}{\partial z} \right)$$

$$= \cdots$$

$$= u \Delta u + (\mathbf{grad}\, u)^2 .$$

7. 已知向量 $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$, **求** 1) $\quad x^2 + y^2 = a^2$ (0

$\leq z \leq h)$ 2) $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leq z \leq h)$
流量 .

解法　应用流量公式，流量

$$Q = \iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

(1)　S 是圆柱 $x^2 + y^2 = a^2$ $(0 \leq z \leq h)$

(2)　S 是圆锥 $x^2 + y^2 = z^2$ $(0 \leq z \leq h)$

增补适当的面，使围成封闭曲面，应用奥 - 高公式，再计算之 .

8. 证明：若 S 是光滑闭曲面，$\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法线单位向量，V 是 S 所围成的体，A 是 S 的面积，则

$$\iiint_V \mathrm{div}\ \boldsymbol{n}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = A .$$

证法　应用向量形式的奥 - 高公式 . 将三重积分化为曲面积分 .

11. 求向量场

$$\boldsymbol{A} = yz(2x + y + z)\boldsymbol{i} + zx(x + 2y + z)\boldsymbol{j} + xy(x + y + 2z)\boldsymbol{k}$$

的势函数 .

解法　根据势函数的定义，应用斯托克斯公式 .

12. 证明：若 S 是光滑闭曲面，向量场 $\boldsymbol{F}$ 的分量有连续的偏导数，则

$$\iint_S \mathbf{rot}\,\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 外法线单位向量 .

证法　用 S 上任意一条光滑闭曲线 C，将 S 分为两个曲面 S_1 与 S_2 . C 既是 S_1 的边界闭曲线，也是 S_2 的边界闭曲线，但是方向相反 . 应用斯托克斯公式 .

第十四章自我测验题

1. 计算下列曲线积分：

(1) $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s$, 其中 C 是螺线 $x = a\cos t, y = a\sin t$, $z = at, 0 \leq t \leq 2\pi$;

(2) $\int_C z^2 x\mathrm{d}x + x^2 y\mathrm{d}y + y^2 z\mathrm{d}z$, 其中 $C: x = t, y = t^2, z = t^3$, $0 \leq t \leq 1$.

2. 计算曲线积分

$$\oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{|x|+|y|},$$

其中 Γ 是以 A 1,0) B 0,1) C -1,0) D 0,-1) 的正方形边线.

3. 证明:

$$\lim_{R\to+\infty}\oint_C \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^2} = 0,$$

其中 C: $x^2 + y^2 = R^2$.

4. 计算曲线积分

$$I = \int_C \quad x^2 + y^2 \mathrm{d}x + y[xy + \ln(x + \quad x^2 + y^2)]\mathrm{d}y,$$

其中 C 是上半圆周: $x^2 + y^2 = 1$, $y \geq 0$, 逆时针方向.

5. 计算曲线

$$\frac{x}{a}\quad^4 + \quad\frac{y}{b}\quad^4 = 1, \quad a > 0, \quad b > 0$$

在第一象限内与坐标轴围成的区域的面积.

6. 如果使曲线积分

$$\int_{C\ A,\ B)} F \quad x, y) \quad y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)$$

与路线 C 无关, 问可微函数 F $x, y)$

7. 证明: 若 S 是光滑的封闭曲面, 它围成的体是 V, 它的体积

$$V = \frac{1}{3} \iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是曲面 S 的外法线的方向余弦 .

8. 计算曲面积分

$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2 z^2 - x^2 z^2 + 1)\,\mathrm{d}\sigma,$$

其中 S 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2\ (z \geq 0)$　　$x^2 + y^2 = 2x$ 截取的部分 .

9. 计算曲面积分

$$\iint_S (x^3 + \mathrm{e}^{y^2})\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \quad z^3 + \frac{3}{5}a^3 \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $z \geq 0$, 取上侧为正 .

10. 计算曲线积分

$$\oint_C (y - z)\,\mathrm{d}x + \quad z - x)\,\mathrm{d}y + \quad x - y)\,\mathrm{d}z,$$

其中 C 是椭圆: $x^2 + y^2 = a^2$, $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1\ (a > 0, h > 0)$　　x 轴正向看去, 椭圆按逆时针方向为正 .

11. 证明: 若函数 $u \quad x, y, z)$

封闭曲面 S 所围成的体 V 上是调和函数, 则

(1) $\iint_S \frac{u}{n}\mathrm{d}\sigma = 0$;

(2) $\iiint_V \quad \frac{u}{x} \quad ^2 + \quad \frac{u}{y} \quad ^2 + \quad \frac{u}{z} \quad ^2 \quad \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_S u \frac{u}{n}\mathrm{d}\sigma$,

其中 n 是曲面 S 的外法线 .

12. 证明: 若 $\boldsymbol{A}$ 是向量函数, 则

$$\mathbf{rotrot}\ \boldsymbol{A} = \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\boldsymbol{A} - \Delta\boldsymbol{A},$$

其中 $\Delta\boldsymbol{A} = (\Delta A_x, \Delta A_y, \Delta A_z)$

13. 证明: 若 S 是光滑封闭曲面, 它围成的体是 V, 则

$$\mathbf{grad}\, f \cdot \mathbf{rot}\, \boldsymbol{A}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = (\boldsymbol{A}\times \mathbf{grad}\, f)\cdot \boldsymbol{n}\,\mathrm{d}\sigma,$$

$$V \qquad\qquad S$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法线单位向量 .

14. 设 $\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$ 是可微的向量函数，函数 $u\ \ x, y, z)$ V 上二次可微， $\boldsymbol{B} = \mathbf{grad}\, u$ 与 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}$. 证明:

$$\mathrm{div}\, \boldsymbol{C} = 0 \quad \text{函数}\ u\ \ x, y, z) \qquad \Delta u = \mathrm{div}\, \boldsymbol{A} .$$

自我测验题解答

第 九 章

1. ($a\neq 0$ **时**，**有**

$$\frac{an+b}{n\quad n+1)}\Big/\frac{1}{n}\to a\quad(n\quad\infty)$$

于是，**级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an+b}{n\quad n+1)}$ **发散** .

当 $a=0$ **时**，**有**

$$\frac{b}{n\quad n+1)}\Big/\frac{1}{n^2}\quad b\quad(n\quad\infty)$$

于是，**级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an+b}{n\quad n+1)}$ **收敛** .

(2) **讨论** $1-\frac{\ln n}{n}\quad^{n}\Big/\frac{1}{n}=n\ 1-\frac{\ln n}{n}\quad^{n}$，**有**

$$\ln n\ 1-\frac{\ln n}{n}\quad^{n}=\ln n+n\ln\ 1-\frac{\ln n}{n}$$

$$=\ln n-n\quad\frac{\ln n}{n}+\frac{1}{2}\quad\frac{\ln n}{n}\quad^{2}+o\quad\frac{\ln^2 n}{n^2}$$

$$=-\frac{\ln^2 n}{2n}+o\quad\frac{\ln^2 n}{n}\qquad 0\quad(n\quad\infty)$$

即
$$1-\frac{\ln n}{n}\quad^{n}\Big/\frac{1}{n}\quad 1\quad(n\quad\infty)$$

于是，**级数** $\sum_{n=1}^{\infty}\ 1-\frac{\ln n}{n}\quad^{n}$ **发散** .

(3) $\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{(2n+1)}{(n+1)}\cdot\frac{n!}{(2n-1)}=\frac{2n+1}{n+1}\quad 2\quad(n\quad\infty)$

于是，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)}{n!}$ 发散．

(4) $\sqrt[n]{n^2 a^n} = (\sqrt[n]{n})^2 \cdot a \quad a \quad (n \quad \infty)$

当 $a<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^n$ 收敛；当 $a \geq 1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^2 a^n$ 发散．

(5) 已知 " $x \neq 2k\pi$ (k 是整数) $\quad n \in \mathbf{N}_+$，有

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| = \left|\frac{\sin \quad n+\frac{1}{2} \quad x - \sin \frac{x}{2}}{2\sin \frac{x}{2}}\right| \leq \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|},$$

即部分和 $\sum_{k=1}^{n} \cos kx$ 有界．而数列 $\quad 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n}$ ，有

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} - \quad 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1} \quad \frac{1}{n+1}$$

$$= \quad 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1} \quad - \frac{1}{(n+1)^2}$$

$$= \frac{1}{n \quad n+1)} \quad 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} - \frac{n}{n+1} \quad > 0,$$

即数列 $\quad 1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n}$ 单调减少，且

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} = \frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n} \quad 0 \quad (n \quad \infty)$$

根据狄利克雷判别法， " $x \neq 2k\pi$，级数收敛．

当 $x = 2k\pi$ (k 是整数) $\quad \cos 2k\pi = 1$，有

$$1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n} \quad \frac{1}{n} \Big/ \frac{1}{n} \quad \infty \quad (n \quad \infty)$$

于是，当 $x = 2k\pi$ 时，级数发散．

2. $\frac{1}{n \quad n+10)} = \frac{1}{10} \quad \frac{1}{n} - \frac{1}{n+10} \quad .$

于是,
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+10)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+10)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{10}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+10}\right)\qquad(n\geq 20)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{10}\left[\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10}\right)-\underbrace{\left(\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+10}\right)}_{10项}\right]$$
$$=\frac{1}{10}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{10}\right).$$

3. 已知 $u_n\to 0\ (n\to\infty)\Rightarrow\lim\limits_{n\to\infty}\ln u_n=-\infty$, 即

对于$\frac{1}{2}>0$, $\exists N\in\mathbf{N}_+$, $\forall n\geq N$, 有 $|\ln u_n|>\frac{1}{2}$.

从而
$$\left|\frac{u_n}{\ln u_n}\right|<\frac{u_n}{\frac{1}{2}}=2u_n.$$

于是, 级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{u_n}{\ln u_n}$ (绝对)

其逆不成立. 例如, 设 $u_n=\frac{1}{n\ln n}$.

级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{u_n}{\ln u_n}=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{-1}{n\ln n[\ln n+\ln(\ln n)]}$ 收敛.

事实上,
$$\left|\frac{-1}{n\ln n[\ln n+\ln(\ln n)]}\right|\leq\frac{1}{n\ln^2 n}.$$

已知级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^2 n}$ 收敛, 则级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{u_n}{\ln u_n}$ 收敛, 而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 却发散.

4. "$\Rightarrow$" 用反证法. 假设数列 $\{u_n\}$ ... $u_n\to+\infty$ $(n\to\infty)$ ... $\frac{u_n}{u_{n+p}}\to 0\ (p\to\infty, n\in\mathbf{N}_+)$

$$\exists\ \frac{1}{2}>0,\ \exists N\in\mathbf{N}_+,\ \forall p>N_+,\ 有\frac{u_n}{u_{n+p}}<\frac{1}{2}.$$

于是, $\exists\ n>N$, $\exists\ p>N$, 有

$$S_{n+p-1} - S_{n-1}$$

$$= \ 1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} \ + \ 1 - \frac{u_{n+1}}{u_{n+2}} \ + \cdots + \ 1 - \frac{u_{n+p-1}}{u_{n+p}}$$

$$= \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}} + \frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+2}} + \cdots + \frac{u_{n+p} - u_{n+p-1}}{u_{n+p}}$$

$$> \frac{(u_{n+1} - u_n) + (u_{n+2} - u_{n+1}) + \cdots + (u_{n+p} - u_{n+p-1})}{u_{n+p}}$$

$$= \frac{u_{n+p} - u_n}{u_{n+p}} = 1 - \frac{u_n}{u_{n+p}} > 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ 1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}$ 发散，矛盾．

“　” 已知数列 $u_n\}$　　　$u_n\}$　　　$\lim\limits_{n \quad \infty} u_n$

$= a$．根据柯西收敛准则，不难证明，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (u_{n+1} - u_n)$

因为

$$0 \leq 1 - \frac{u_n}{u_{n+1}} = \frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}} \leq \frac{u_{n+1} - u_n}{u_1},$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \ 1 - \frac{u_n}{u_{n+1}}$ 收敛．

5．新级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{8} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{18} + \frac{1}{20} + \cdots.$$

分母是一位数的共有 8 项，其和小于 8．

分母是二位数的共有 8×9 项，其和小于 $\frac{1}{10} \times 9 \times 8$．

分母是三位数的共有 8×9^2 项，其和小于 $\frac{1}{10^2} \times 9^2 \times 8$．

……

分母是 n 位数的共有 $8 \times 9^{n-1}$ 项，其和小于 $\frac{1}{10^{n-1}} \times 9^{n-1} \times 8$．

……

于是, $\sum_{n=1}^{\infty}{}' \frac{1}{n} \le 8 + \frac{9}{10}\cdot 8 + \left(\frac{9}{10}\right)^2 \cdot 8 + \cdots + \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1}\cdot 8 + \cdots$

$$= 8\left(1 + \frac{9}{10} + \left(\frac{9}{10}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{9}{10}\right)^{n-1} + \cdots\right) = 80,$$

即新级数收敛, 其和不超过 80 .

6. 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}$ 都绝对收敛 $a_n = \frac{1}{n!}$, $b_n = \frac{(-1)^n}{n!}$. 设

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n ,$$

其中 $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \cdots + a_n b_0 \ (n = 0,1,2,\cdots)$

$c_0 = a_0 b_0 = 1,$

$$c_n = \frac{1}{n!} - \frac{1}{(n-1)!}\frac{1}{1!} + \frac{1}{(n-2)!}\frac{1}{2!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}$$

$$= \frac{1}{n!}[C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \cdots + (-1)^n C_n^n] = \frac{1}{n!}(1-1)^n = 0,$$

$n = 1, 2, \cdots$, 即

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right) = 1 .$$

事实上, $\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\right) = e \cdot e^{-1} = 1$.

7. $\forall x \in \mathbf{R}$, 有

$$|a_n \cos nx| + |b_n \sin nx| \le |a_n| + |b_n| .$$

已知级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n|$ 收敛, 根据 M 判别法, 函数级数

$\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$ $\mathbf{R}$ 上一致收敛 .

8. 已知函数列 $f_n(x)\}$ $I_i \ (i = 1, 2, \cdots, m)$

即

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N_i \in \mathbf{N}_+, \ \forall n, m > N_i, \ \forall x \in I_i, \text{有}$$

$$| f_m (x) - f_n (x) | < \varepsilon .$$

取 $N = \max \quad N_1 , N_2 , \cdots, N_m \}$ $\qquad n, \quad m > N,$ " $x \in \bigcup_{i=1}^{m} I_i$, 有

$$| f_m (x) - f_n (x) | < \varepsilon,$$

即 $f_n (x) \}$ $\quad \bigcup_{i=1}^{m} I_i$ 上一致收敛 .

9. 对任意有限区间 $a, b]$ $\quad \mathbf{R}$. 令 $M = \max \quad | a| , | b|)$." $x \in [a, b]$ $\quad nx] \leq nM$, 有

$$\frac{[nx]}{n^3} \leq \frac{nM}{n^3} = \frac{M}{n^2} .$$

即 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{[nx]}{n^3}$ 在 $a, b]$ $\qquad S(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[nx]}{n^3}$.

若 α 是任意一个无理点, " $n \in \mathbf{N}_+$, 存在整数 k, 使

$$k < n\alpha < k + 1, \quad k \leq [n\alpha] < k + 1,$$

或
$$\frac{k}{n^3} \leq \frac{[n\alpha]}{n^3} < \frac{k + 1}{n^3},$$

则v $\delta > 0$, " $x: | x - \alpha| < \delta$, 有

$$\left| \frac{[nx]}{n^3} - \frac{[n\alpha]}{n^3} \right| = 0 < \varepsilon,$$

即 " $n \in \mathbf{N}_+ , \frac{[nx]}{n^3}$ 在 α 都连续 . 于是, $S(x)$ $\quad \alpha$ 连续 .

若 β 是任意一个有理点 . 设 $\beta = \frac{p}{q}$, 其中 q 是正整数, p 是整数, 且 p 与 q 互质 . 当 $n = q$ 时, 有

$$[n\beta] = \quad q \cdot \frac{p}{q} \quad = [p] = p .$$

从而 $$\lim_{x \quad \beta^+} [nx] = p \quad 与 \quad \lim_{x \quad \beta^-} [nx] = p - 1,$$

即第 $n = q$ $\qquad n = kq, k \in \mathbf{N}_+)$ $\quad \frac{[qx]}{q^3}$ 在 β 不连续 . 从而除连续的各项外, 它们在 β 都不连续 . 于是, 和函数 $S \quad x)$ $\quad \beta$ 不连续

§9.2的补充例题的例5)

10. 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛 x 都一致收敛)

$\frac{1}{n^x}$ 对任意 $x \in$ 0,1] $x \in$ 0,1]

" $n \in \mathbf{N}_+$,有 $\left|\frac{1}{n^x}\right| \leq 1$.根据阿贝尔判别法,函数级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 0,1]上一致收敛.于是,

$$\lim_{x \to 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to 0^+} \frac{a_n}{n^x} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n .$$

11. $\frac{1}{1-3x+2x^2} = \frac{1}{(1-2x)(1-x)} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$.

当 $|x| < \frac{1}{2}$, 即 $|2x| < 1$ 时, 有

$$\frac{1}{1-2x} = \sum_{n=0}^{\infty} (2x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2^n x^n,$$

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n .$$

于是,
$$\frac{1}{1-3x+2x^2} = \frac{2}{1-2x} - \frac{1}{1-x}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n+1} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (2^{n+1} - 1) x^n .$$

12. " $x \in (0,1)$

$$f' \; x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n} = \frac{1}{x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\frac{1}{x} \ln (1-x)$$

$$f \; 1-x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2},$$

$$-f' \; 1-x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^{n-1}}{n}$$

$$= -\frac{1}{1-x} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-x)^n}{n} = \frac{1}{1-x} \ln x .$$

于是, $[f(x) + f(1-x) + \ln x \cdot \ln (1-x)]'$

$$= f'\ x) - f'\ 1 - x) + \frac{\ln(1-x)}{x} - \frac{\ln x}{1-x} \equiv 0 .$$

从而 $f(x) + f(1-x) + \ln x \cdot \ln(1-x) = C$

$f\ \ 0) = 0, f\ \ 1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ **收敛**. **有**

$\lim_{x\quad 1^-} [f(x) + f(1-x) + \ln x \cdot \ln(1-x)] = f(1) = C,$

即 $C = f(1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (**见《讲义》§**9.4**例** 5)

$$f(x) + f(1-x) + \ln x \cdot \ln(1-x) = \frac{\pi^2}{6} .$$

*__13. 已知__ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nx$ **在** $0, 1]$

" $\varepsilon > 0$, v $N \in \mathbf{N}_+$, " $n > N$, " $x \in [0,1]$

$$| a_n \sin nx + a_{n+1} \sin(n+1)x + \cdots + a_{2n} \sin 2nx | < \varepsilon .$$

特别是取 $x = \frac{1}{2n}$, **有**

$$a_n \sin \frac{1}{2} + a_{n+1} \sin\ \ 1 + \frac{1}{n}\ \ \frac{1}{2} + \cdots + a_{2n} \sin 1 < \varepsilon .$$

已知 $a_n \sin \frac{1}{2} \geq a_{2n} \sin \frac{1}{2}$, $a_{n+1} \sin\ \ 1 + \frac{1}{n}\ \ \frac{1}{2} \geq a_{2n} \sin \frac{1}{2}$,

$\cdots$, $a_{2n} \sin 1 > a_{2n} \sin \frac{1}{2}$.

从而

$$0 < n a_{2n} \sin \frac{1}{2} < a_n \sin \frac{1}{2} + a_{n+1} \sin\ \ 1 + \frac{1}{n}\ \ \frac{1}{2} + \cdots$$

$$+ a_{2n} \sin 1 < \varepsilon,$$

即 $\lim_{n\quad \infty} 2 n a_{2n} = 0$.

同法可证, $\lim_{n\quad \infty} (2n+1) a_{2n+1} = 0$.

于是, $\lim_{n\quad \infty} n a_n = 0$.

*__14. 由练习题__ 5.2 **第** 6 **题知**, $f'(x)$, $f''(x)$ 2π **为周**

期的函数. 对每个傅里叶系数 a_n 与 b_n 应用两次分部积分, 有

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,\mathrm{d}\,\frac{\sin nx}{n}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[f(x)\frac{\sin nx}{n}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\frac{\sin nx}{n}\mathrm{d}x\right]$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,\mathrm{d}\,\frac{\cos nx}{n^2}$$

$$= \frac{1}{\pi}\left[f'(x)\frac{\cos nx}{n^2}\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\frac{\cos nx}{n^2}\mathrm{d}x\right]$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\frac{\cos nx}{n^2}\mathrm{d}x.$$

因为 $f''(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上连续, 所以 $\exists\ M>0$, $\forall\ x\in[-\pi,\pi]$ 有 $|f(x)|\leq M$. 于是,

$$|a_n| = \frac{1}{\pi}\left| -\int_{-\pi}^{\pi} f''(x)\frac{\cos nx}{n^2}\mathrm{d}x\right| \leq \frac{|M|}{\pi n^2}\cdot 2\pi \leq \frac{2M}{n^2}.$$

同法可得
$$|b_n| \leq \frac{2M}{n^2}.$$

从而,
$$|a_n\cos nx| + |b_n\sin nx| \leq \frac{4M}{n^2}.$$

于是, 函数 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $[-\pi,\pi]$ 上一致收敛于 $f(x)$.

*15. 设函数 $f(x+h)$ 的傅里叶系数为 A_0, A_n, B_n, $n=1$, 2, ⋯.

$$A_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+h)\cos nx\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi+h}^{\pi+h} f(t)\cos n(t-h)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(t-h)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt-nh)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{\cos nh}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos nt\,\mathrm{d}t + \frac{\sin nh}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin nt\,\mathrm{d}t$$

$$= a_n\cos nh + b_n\sin nh,\quad n=0,1,2,\cdots.$$

同理
$$B_n = b_n\cos nh - a_n\sin nh,\quad n=1,2,\cdots.$$

于是,

$$f(x+h) \sim \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n\cos nx + B_n\sin nx)$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [(a_n \cos nh + b_n \sin nh) \cos nx +$$

$$(b_n \cos nh - a_n \sin nh) \sin nx]$$

$$= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos n(x+h) + b_n \sin n(x+h)]$$

第　十　章

1. 已知点 P 是点集 A 的聚点，即 $\forall \varepsilon > 0$，存在点 P 的 ε 邻域，其中含有 A 的无限多个点，或其中至少含有异于点 P 的点.

取 $\varepsilon_1 = 1$，$\exists\ P_1 \in A$，$P_1 \neq P$，使 $|P_1 - P| < \varepsilon_1$.

取 $\varepsilon_2 = \min \frac{1}{2}, |P_1 - P|$，$\exists\ P_2 \in A$，$P_2 \neq P$，使

$$|P_2 - P| < \varepsilon_2,$$

……

取 $\varepsilon_n = \min \frac{1}{n}, |P_{n-1} - P|$，$\exists\ P_n \in A$，$P_n \neq P$，使

$$|P_n - P| < \varepsilon_n,$$

……

于是，存在互不相同的点列 $P_n\}$　$P_n \in A$，$P_n \neq P$. 显然，ε_n　$0\ (n\quad \infty)$

$$\lim_{n \quad \infty} P_n = P.$$

2. “　”已知函数 $f(\boldsymbol{x})$ 在点 $\boldsymbol{P}_0$ 连续，即 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists\ \delta > 0$，$\forall \boldsymbol{P}$: $|\boldsymbol{P} - \boldsymbol{P}_0| < \delta$，有 $|f(\boldsymbol{P}) - f(\boldsymbol{P}_0)| < \varepsilon$.

又已知对任意点到$\{\boldsymbol{P}_n\}$　$\boldsymbol{P}_n \neq \boldsymbol{P}_0$，$\boldsymbol{P}_n$　$\boldsymbol{P}_0\ (n\quad \infty)$ $\exists\ N \in \mathbf{N}_+$，$\forall\ n > N$，有 $|\boldsymbol{P}_n - \boldsymbol{P}| < \delta$. 于是，

$$|f(\boldsymbol{P}_n) - f(\boldsymbol{P})| \quad \varepsilon.$$

“　”用反证法. 证明从略　　§2.4 定理 6 充分性的证明)

3. $\exists\ \varepsilon_0 = 1$，$\forall\ \delta > 0$，$\exists\ P_n\left(1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}\right)$，

$Q_n\left(1-\frac{1}{2n}, 1-\frac{1}{2n}\right) \in D$，且 $\|P_nQ_n\| = \sqrt{2\left[\left(1-\frac{1}{2n}\right)-\left(1-\frac{1}{n}\right)\right]^2}$

$= \frac{1}{2n} < \delta$ 只须 $n > \max\left\{\frac{1}{2\delta}, 3\right\}$，有

$$|f(P_n) - f(Q_n)| = \left|\frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{n}\right)^2} - \frac{1}{1-\left(1-\frac{1}{2n}\right)^2}\right|$$

$$= n^2\left|\frac{-4n+3}{(2n-1)(4n-1)}\right|$$

$$= n^2 \cdot \frac{3n + (n-3)}{(2n-1)(4n-1)} > \frac{3n^3}{2n \cdot 4n}$$

$$= \frac{3}{8}n > \varepsilon_0 = 1,$$

即函数 $f(x,y) = \frac{1}{1-xy}$ 在 D 内非一致连续 .

4. 1) 因为已知

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 1,$$

所以

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} \frac{|xy|}{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2) = \lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |xy| \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} = 0,$$

于是，$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} f(x,y) = f(0,0) = 0$，　$f(x,y)$　$(0,0)$

2) 有

$$f'_x(0,0) = \lim_{\Delta x\to 0} \frac{f(0+\Delta x, 0) - f(0,0)}{\Delta x} = 0,$$

$$f'_y(0,0) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(0, 0+\Delta y) - f(0,0)}{\Delta y} = 0,$$

$\Delta f = f(\Delta x, \Delta y) - f(0,0)$

$$= \frac{|\Delta x \Delta y|}{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}\sin[(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2]$$

而 $\Delta f - \mathrm{d}f \neq o \quad \rho)$

当 $\Delta x = \Delta y$ 时，$\rho = \quad (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = \ 2|\Delta x|$,

$$\frac{\Delta f - \mathrm{d}f}{\rho} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin 2\,(\Delta x)^2}{2\,(\Delta x)^2} \quad \frac{1}{2}(\Delta x \quad 0)$$

即函数 $f(x, y) \qquad 0, 0)$

5.

$$\frac{\mathrm{d}w}{\mathrm{d}x} = \frac{F}{x} + \frac{F}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{F}{z}\frac{z}{x}$$

$$= \frac{F}{x} + \frac{F}{y}\varphi'(x) + \frac{F}{z} \quad \frac{f}{x} + \frac{f}{y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

$$= \frac{F}{x} + \frac{F}{y}\varphi'(x) + \frac{F}{z}\frac{f}{x} + \frac{F}{z}\frac{f}{y}\varphi'(x) \ .$$

6. 解

$$\frac{w}{x} = \frac{h}{x} + \frac{h}{u}\frac{u}{x} + \frac{h}{v}\frac{v}{x}$$

$$= \frac{h}{x} + \frac{h}{u}\frac{f}{x} + \frac{h}{v} \quad \frac{g}{x} + \frac{g}{u}\frac{u}{x}$$

$$= \frac{h}{x} + \frac{h}{u}\frac{f}{x} + \frac{h}{v}\frac{g}{x} + \frac{h}{v}\frac{g}{u}\frac{f}{x} \ .$$

$$\frac{w}{y} = \frac{h}{u}\frac{u}{y} + \frac{h}{v}\frac{v}{y}$$

$$= \frac{h}{u}\frac{f}{y} + \frac{h}{v} \quad \frac{g}{y} + \frac{g}{u}\frac{u}{y}$$

$$= \frac{h}{u}\frac{f}{y} + \frac{h}{v}\frac{g}{y} + \frac{h}{v}\frac{g}{u}\frac{f}{y} \ .$$

7. 设 $u = x - y, \quad v = y - z, \quad w = z - x$, **则**

$$t = f(u, v, w)$$

$$\frac{t}{x} = \frac{f}{u}\frac{u}{x} + \frac{f}{w}\frac{w}{x} = \frac{f}{u} - \frac{f}{w} \ .$$

$$\frac{{}^2 t}{x^2} = \frac{}{u} \quad \frac{f}{u} - \frac{f}{w} \quad \frac{u}{x} + \frac{}{w} \quad \frac{f}{u} - \frac{f}{w} \quad \frac{w}{x}$$

$$= \frac{{}^2 f}{u^2} - \frac{{}^2 f}{u \ w} - \frac{{}^2 f}{w \ u} + \frac{{}^2 f}{w^2}$$

$$= \frac{{}^2 f}{u^2} - 2\frac{{}^2 f}{u \ w} + \frac{{}^2 f}{w^2} \ .$$

$$\frac{\partial t}{\partial z}=\frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial z}=-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}.$$

$$\frac{\partial^2 t}{\partial y\partial z}=\frac{\partial}{\partial u}\left(-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\right)\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial}{\partial v}\left(-\frac{\partial f}{\partial v}+\frac{\partial f}{\partial w}\right)\frac{\partial v}{\partial y}$$

$$=\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial v}-\frac{\partial^2 f}{\partial u\partial w}-\frac{\partial^2 f}{\partial v^2}+\frac{\partial^2 f}{\partial v\partial w}.$$

8. $\frac{\partial u}{\partial r}=3r^2\cos\theta+\frac{\theta}{r}$,　　$\frac{\partial u}{\partial \theta}=-r^3\sin\theta+\ln r$.

$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}=6r\cos\theta-\frac{\theta}{r^2}$,　　$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}=-r^3\cos\theta$.

$$\frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r},\quad \frac{\partial r}{\partial y}=\frac{y}{r},\quad \frac{\partial \theta}{\partial x}=-\frac{y}{r^2},\quad \frac{\partial \theta}{\partial y}=\frac{x}{r^2}.$$

$$\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}=\frac{y^2}{r^3},\quad \frac{\partial^2 r}{\partial y^2}=\frac{x^2}{r^3},\quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}=\frac{2xy}{r^4},\quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}=-\frac{2xy}{r^4}.$$

已知

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}$$

将上述结果代入，得

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left[\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial r}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{\partial^2 r}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 r}{\partial y^2}\right)+$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left[\left(\frac{\partial \theta}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial \theta}{\partial y}\right)^2\right]+\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}\left(\frac{x^2}{r^2}+\frac{y^2}{r^2}\right)+\frac{\partial u}{\partial r}\left(\frac{y^2}{r^3}+\frac{x^2}{r^3}\right)+\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}\left(\frac{y^2}{r^4}+\frac{x^2}{r^4}\right)+$$

$$\frac{\partial u}{\partial \theta}\left(\frac{2xy}{r^4}-\frac{2xy}{r^4}\right)$$

$$=\left(6r\cos\theta-\frac{\theta}{r^2}\right)+\left(3r^2\cos\theta+\frac{\theta}{r}\right)\frac{1}{r}-r^3\cos\theta\cdot\frac{1}{r^2}$$

$$=8r\cos\theta.$$

9. $\dfrac{\partial u}{\partial x_k}=\left(1-\dfrac{n}{2}\right)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-\frac{n}{2}}\cdot 2x_k=-(n-2)x_k\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-\frac{n}{2}}$.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=-(n-2)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-\frac{n}{2}}+(n-2)\frac{n}{2}x_k\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}\cdot 2x_k$$

$$=-(n-2)\left[\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-\frac{n}{2}}-nx_k^2\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}\right]$$

$$=-(n-2)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-nx_k^2\right).$$

于是，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=-(n-2)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2-nx_k^2\right)$

$$=-(n-2)\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{-\frac{n}{2}-1}\left(n\sum_{i=1}^{n}x_i^2-n\sum_{k=1}^{n}x_k^2\right)$$

$$=0.$$

10. 设 $z=\dfrac{y}{x}$. $u=\varphi(z)+x\psi(z)$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{y}{x^2}\varphi'(z)+\psi(z)-\frac{y}{x}\psi'(z).$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{1}{x}\varphi'(z)+\psi'(z)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{2y}{x^3}\varphi'(z)+\frac{y^2}{x^4}\varphi''(z)-\frac{y}{x^2}\psi'(z)+\frac{y}{x^2}\psi'(z)+\frac{y^2}{x^3}\psi''(z)$$

$$=\frac{2y}{x^3}\varphi'(z)+\frac{y^2}{x^4}\varphi''(z)+\frac{y^2}{x^3}\psi''(z).$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{1}{x}\varphi'(z)+\psi'(z)\right]$$

$$=-\frac{1}{x^2}\varphi'(z)-\frac{y}{x^3}\varphi''(z)-\frac{y}{x^2}\psi''(z)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\frac{1}{x^2}\varphi''(z)+\frac{1}{x}\psi''(z)$$

于是，

$$x^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+2xy\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+y^2\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

$$=\frac{2y}{x}\varphi'(z)+\frac{y^2}{x^2}\varphi''(z)+\frac{y^2}{x}\psi''(z)-\frac{2y}{x}\varphi'(z)-$$

$$\frac{2y^2}{x^2}\varphi''(z)-\frac{2y^2}{x}\psi''(z)+\frac{y^2}{x^2}\varphi''(z)+\frac{y^2}{x}\psi''(z)$$

$$=0\ .$$

11. 设 $F(x,y,z)=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}=\frac{2}{a^2}x,\quad \frac{\partial F}{\partial y}=\frac{2}{b^2}y,\quad \frac{\partial F}{\partial z}=\frac{2}{c^2}z\ .$$

在椭球面上一点 $P(x_0,y_0,z_0)$

$$\frac{2x_0}{a^2},\ \frac{2y_0}{b^2},\ \frac{2z_0}{c^2}\quad .$$

于是，切平面方程是

$$\frac{2x_0}{a^2}(x-x_0)+\frac{2y_0}{b^2}(y-y_0)+\frac{2z_0}{c^2}(z-z_0)=0,$$

或
$$\frac{x_0}{a^2}x+\frac{y_0}{b^2}y+\frac{z_0}{c^2}z=\frac{x_0^2}{a^2}+\frac{y_0^2}{b^2}+\frac{z_0^2}{c^2}=1\ .$$

法线的方程是

$$\frac{x-x_0}{\frac{2x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{2y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{2z_0}{c^2}},$$

或
$$\frac{x-x_0}{\frac{x_0}{a^2}}=\frac{y-y_0}{\frac{y_0}{b^2}}=\frac{z-z_0}{\frac{z_0}{c^2}}\ .$$

12. $\frac{\partial z}{\partial x}=y,\ \frac{\partial z}{\partial y}=x$. **过曲面** $z=xy$ **上点** $P_0\ (x_0,y_0,z_0)$

平面方程是

$$y_0(x-x_0)+x_0(y-y_0)-(z-z_0)=0\ .$$

或 $$y_0 x + x_0 y - z - x_0 y_0 = 0, \qquad (*)$$

将直线方程 $z = xy_0$，$y = y_0$ 和 $z = x_0 y$，$x = x_0$ 代入 $*)$ 中，有

$$y_0 x + x_0 y_0 - xy_0 - x_0 y_0 = 0$$

和 $$y_0 x_0 + x_0 y - x_0 y - x_0 y_0 = 0,$$

即两条直线位于曲面 $z = xy$ 在点 P_0 的切平面上 .

13. 设 $F(x, y, z) = x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} + z^{\frac{2}{3}} - a^{\frac{2}{3}}$.

$$\frac{F}{x} = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{F}{y} = \frac{2}{3} y^{-\frac{1}{3}}, \quad \frac{F}{z} = \frac{2}{3} z^{-\frac{1}{3}} .$$

设 $P(x_0, y_0, z_0)$是曲面上的任意一点,切平面方程是

$$x_0^{-\frac{1}{3}}(x - x_0) + y_0^{-\frac{1}{3}}(y - y_0) + z_0^{-\frac{1}{3}}(z - z_0) = 0,$$

即 $$x_0^{-\frac{1}{3}} x + y_0^{-\frac{1}{3}} y + z_0^{-\frac{1}{3}} z = x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} + z_0^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}} .$$

切平面与 x 轴，y 轴，z 轴的截距分别是

$$x_0^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}, \quad y_0^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}, \quad z_0^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}} .$$

于是，$$x_0^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}\ {}^2 + y_0^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}\ {}^2 + z_0^{\frac{1}{3}} a^{\frac{2}{3}}\ {}^2$$

$$= a^{\frac{4}{3}}\ x_0^{\frac{2}{3}} + y_0^{\frac{2}{3}} + z_0^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{4}{3}} \cdot a^{\frac{2}{3}} = a^2 \text{ (常数)}$$

14. $z = xy\ln\ x^2 + y^2)$

$$\frac{z}{x} = y\ln\ x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2},$$

$$\frac{z}{y} = x\ln\ x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} .$$

令 $\frac{z}{x} = \frac{z}{y} = 0$，即

$$y\ln\ x^2 + y^2) + \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} = 0,$$

$$x\ln\ x^2 + y^2) + \frac{2xy^2}{x^2 + y^2} = 0 .$$

解得

$$x=0,\quad y=0.\qquad x=0,\quad y=\pm 1.\qquad x=\pm 1,\quad y=0.\qquad x=\pm\frac{1}{2e},\quad y=\pm\frac{1}{2e}.\qquad x=\pm\frac{1}{2e},\quad y=\hat{e}\ \frac{1}{2e}.$$

点 $0,0)$

因为已给函数对变数 x **或** y **都是奇函数，所以稳定点** $0,\pm 1)$ $(\pm 1,0)$**都不是函数的极值点**.

$$A=\frac{{}^{2}z}{x^{2}}=\frac{2xy}{x^{2}+y^{2}}+\frac{4xy^{3}}{(x^{2}+y^{2})^{2}},$$

$$B=\frac{{}^{2}z}{x\quad y}=\ln\,(x^{2}+y^{2})+\frac{2y^{2}}{x^{2}+y^{2}}+\frac{2x^{2}}{x^{2}+y^{2}}-\frac{4x^{2}y^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{2}}$$

$$=2+\ln\quad x^{2}+y^{2})-\frac{4x^{2}y^{2}}{(x^{2}+y^{2})^{2}}.$$

$$C=\frac{{}^{2}z}{y^{2}}=\frac{2xy}{x^{2}+y^{2}}+\frac{4x^{3}y}{(x^{2}+y^{2})^{2}}.$$

在点 $\pm\frac{1}{2e},\ \pm\frac{1}{2e}$ ，$\boldsymbol{\Delta}=B^{2}-AC=0^{2}-2\times 2<0$，**又因** $A>0$，**于是，点** $\pm\frac{1}{2e},\ \pm\frac{1}{2e}$ **是极小点，极小值是**

$$z\Big|_{\pm\frac{1}{2e},\pm\frac{1}{2e}}=-\frac{1}{2e}.$$

在点 $\pm\frac{1}{2e},\ \hat{e}\ \frac{1}{2e}$ ，$\boldsymbol{\Delta}=B^{2}-AC=0^{2}-(-2)\times(-2)<0$，**又因** $A<0$，**于是，点** $\pm\frac{1}{2e},\ \hat{e}\ \frac{1}{2e}$ **是极大点，极大值是**

$$z\Big|_{\pm\frac{1}{2e},\hat{e}\ \frac{1}{2e}}=\frac{1}{2e}.$$

15．设三角形$\triangle M_1M_2M_3$ **三个顶点的坐标是** $M_1(a_1,b_1)$ $M_2(a_2,b_2)$ $M_3(a_3,b_3)$ P **的坐标是**$P(x,y)$.

已知点 P 到每个点 $M_i\ (i=1,2,3)$

$$\overline{PM}_i^2=(x-a_i)^2+(y-b_i)^2,\quad i=1,\ 2,\ 3.$$

求函数 $u(x,y)=\sum_{i=1}^{3}[(x-a_i)^2+(y-b_i)^2]$

令 $\frac{u}{x}=2\sum_{i=1}^{3}(x-a_i)=2[3x-(a_1+a_2+a_3)]=0,$

$$\frac{u}{y}=2\sum_{i=1}^{3}(y-b_i)=2[3y-(b_1+b_2+b_3)]=0.$$

解得唯一稳定点 $\frac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \frac{b_1+b_2+b_3}{3}$.

$$A=\frac{^2u}{x^2}=6,\quad B=\frac{^2u}{x\ y}=0,\quad C=\frac{^2u}{y^2}=6.$$

$$\Delta=B^2-AC=-36<0,\text{ 而 }A>0.$$

于是，函数 $u(x,y)$ $\frac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \frac{b_1+b_2+b_3}{3}$ 取局部极小值. 显然，这个局部极小值，也是函数 $u(x,y)$

即点 P 的坐标是

$$P\quad\frac{a_1+a_2+a_3}{3},\ \frac{b_1+b_2+b_3}{3}.$$

点 P 正是三角形△$M_1M_2M_3$ 的重心.

第 十 一 章

1. 将方程 $x^2+\frac{y^2}{2}=1$ 改写为 $y=\pm\ \ 2(1-x^2)$. 令

$$y_1=\ \ 2(1-x^2)\quad\text{与}\quad y_2=-\ \ 2(1-x^2).$$

1) " $x\in[-1,1]$ x 的函数值是 $y_1=\ \ 2(1-x^2)$ 或 $y_2=-\ \ 2(1-x^2)$，显然， $x,y_1)$ 与 (x,y_2) $x^2+\frac{y^2}{2}=1$. 于是，在 $-1,1]$

2) 在 $-1,1]$

$$y_1 = 2(1-x^2) \text{ 与 } y_2 = -2(1-x^2).$$

2. $\dfrac{dy}{dx} - \varepsilon\cos y \cdot \dfrac{dy}{dx} = 1$，即 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{1-\varepsilon\cos y}$.

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \varepsilon\cos y\frac{d^2y}{dx^2} + \varepsilon\sin y\,\frac{dy}{dx}^{2} = 0,$$

即
$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{\varepsilon\sin y\,\dfrac{dy}{dx}^{2}}{1-\varepsilon\cos y} = -\frac{\varepsilon\sin y}{(1-\varepsilon\cos y)^3}.$$

3. 将 $x = u+v$, $y = u^2+v^2$ 对 x 与 y 分别求偏导数

$$1 = \frac{u}{x} + \frac{v}{x},\qquad 0 = \frac{u}{y} + \frac{v}{y},$$
与
$$0 = 2u\frac{u}{x} + 2v\frac{v}{x}.\qquad 1 = 2u\frac{u}{y} + 2v\frac{v}{y}.$$

解得
$$\frac{u}{x} = \frac{v}{v-u},\qquad \frac{v}{x} = -\frac{u}{v-u}.$$
$$\frac{u}{y} = -\frac{1}{2(v-u)},\qquad \frac{v}{y} = \frac{1}{2(v-u)}.$$

于是，
$$\frac{z}{x} = \frac{z}{u}\frac{u}{x} + \frac{z}{v}\frac{v}{x}$$
$$= 3u^2\frac{v}{v-u} - 3v^2\frac{u}{v-u} = -3uv.$$
$$\frac{z}{y} = \frac{z}{u}\frac{u}{y} + \frac{z}{v}\frac{v}{y}$$
$$= 3u^2\frac{-1}{2(v-u)} + 3v^2\frac{1}{2(v-u)} = \frac{3}{2}(u+v)$$

4. 为了书写简便，令

$$\frac{z}{x} = p,\quad \frac{z}{y} = q,\quad \frac{{}^2z}{x^2} = r,\quad \frac{{}^2z}{x\ y} = s,\quad \frac{{}^2z}{y^2} = t.$$

对方程 $y = x\phi(z) + \psi(z)$ 两端对 x 与 y 求一阶与二阶偏导数，有

$$0 = \phi(z) + [x\phi'(z) + \psi'(z)]p,$$
$$1 = [x\phi'(z) + \psi'(z)]q.$$

$$2\varphi'(z)p+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]p^2+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]r=0,$$

$$\varphi'(z)q+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]pq+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]s=0,$$

$$[x\varphi''(z)+\psi''(z)]q^2+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]t=0.$$

将上述三个等式依次乘以 q^2, $-2pq$, p^2 再相加，有

$$2\varphi'(z)pq^2+[x\varphi''(z)+\psi''(z)]p^2q^2+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]q^2r-$$

$$2\varphi'(z)pq^2-2[x\varphi''(z)+\psi''(z)]p^2q^2-2[x\varphi'(z)+\psi'(z)]pqs+$$

$$[x\varphi''(z)+\psi''(z)]p^2q^2+[x\varphi'(z)+\psi'(z)]p^2t=0,$$

即
$$x\varphi'(z)+\psi'(z)](rq^2-2pqs+tp^2)=0.$$

已知 $x\varphi'(z)+\psi'(z)\neq 0$，则

$$rq^2-2pqs+tp^2=0,$$

即
$$\frac{{}^2 z}{x^2}\left(\frac{z}{y}\right)^2-2\frac{z}{x}\frac{z}{y}\frac{{}^2 z}{x\ y}+\frac{{}^2 z}{y^2}\left(\frac{z}{x}\right)^2=0.$$

5. 设 $F(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2-21$.

$$\frac{F}{x}=2x,\quad \frac{F}{y}=4y,\quad \frac{F}{z}=6z.$$

于是，在曲面 $x^2+2y^2+3z^2-21=0$ 上一点 (x_0,y_0,z_0)

方程是

$$x_0(x-x_0)+2y_0(y-y_0)+3z_0(z-z_0)=0.$$

欲使此切平面平行于平面 $x+4y+6z=0$，必有

$$\frac{x_0}{1}=\frac{2y_0}{4}=\frac{3z_0}{6}=k$$

有 $x_0=k$, $y_0=2k$, $z_0=2k$. 已知点 $x_0,y_0,z_0)$

$$F(x_0,y_0,z_0)=k^2+8k^2+12k^2-21=0.$$

解得 $k=\pm 1$. 曲面上只有两点 $1,2,2)$ $-1,-2,-2)$

面平行于平面 $x+4y+6z=0$. 这两个切平面方程是

$$(x-1)+4(y-2)+6(z-2)=0$$

与
$$x+1)+4(y+2)+6(z+2)=0,$$

或
$$x+4y+6z=\pm 21.$$

6. $\frac{F_1}{x}=6x$, $\frac{F_1}{y}=4y$, $\frac{F_1}{z}=-2$.

$$\frac{F_2}{x}=2x,\quad \frac{F_2}{y}=2y-4,\quad \frac{F_2}{z}=2z-2.$$

曲面 $F_1=0$ 在点$(1,1,2)$

$$\frac{x-1}{6}=\frac{y-1}{4}=\frac{z-2}{-2},$$

即
$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-1}{2}=\frac{z-2}{-1}.$$

曲面 $F_2=0$ 在点$(1,1,2)$

$$\frac{x-1}{2}=\frac{y-1}{-2}=\frac{z-2}{2},$$

即
$$x-1=-(y-1)=z-2.$$

二曲面在点$(1,1,2)$　　　θ是

$$\cos\theta=\frac{3-2-1}{9+4+1\quad 1+1+1}=0,$$

则 $\theta=\frac{\pi}{2}$，即二曲面在点 $1,1,2)$

交线在点$(1,1,2)$

$$\frac{x-1}{\begin{vmatrix}4 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}}=\frac{y-1}{\begin{vmatrix}-2 & 6\\ 2 & 2\end{vmatrix}}=\frac{z-2}{\begin{vmatrix}6 & 4\\ 2 & -2\end{vmatrix}},$$

即
$$\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-4}=\frac{z-2}{-5}.$$

法平面方程是

$$x-1-4(y-1)-5(z-2)=0,$$

即
$$x-4y-5z+13=0.$$

7. 设 $F(x,y,z)=xyz-1$.

$$\frac{F}{x}=yz,\qquad \frac{F}{y}=xz,\qquad \frac{F}{z}=xy.$$

曲面 $xyz=1$ 在点(α,β,γ)

$$\frac{x-\alpha}{\beta\gamma}=\frac{y-\beta}{\gamma\alpha}=\frac{z-\gamma}{\alpha\beta}.$$

切平面方程是

$$\beta\gamma(x-\alpha)+\gamma\alpha(y-\beta)+\alpha\beta(z-\gamma)=0,$$

即 $$\beta\gamma x+\gamma\alpha y+\alpha\beta z=3. \quad (因为\ \alpha\beta\gamma=1.)$$

切平面在三个坐标轴上的截距是$\dfrac{3}{\beta\gamma}$，$\dfrac{3}{\gamma\alpha}$，$\dfrac{3}{\alpha\beta}$. 于是，切平面与三个坐标面围成体的体积

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\left|\frac{3}{\beta\gamma}\cdot\frac{3}{\gamma\alpha}\cdot\frac{3}{\alpha\beta}\right|=\frac{9}{2}.$$

是常数 $\alpha\beta\gamma=1)$

8. 设 $\varphi(x,y,z)=0$ 有隐函数 $z=g(x,y)$ $u=f$ $x,y,z)$在点 $x_0,y_0,z_0)$ $x_0,y_0,z_0)$

$$\frac{u}{x}=\frac{f}{x}+\frac{f}{z}\frac{z}{x}=0 \quad 与 \quad \frac{u}{y}=\frac{f}{y}+\frac{f}{z}\frac{z}{y}=0;$$

又有 $$\frac{\varphi}{x}+\frac{\varphi}{z}\frac{z}{x}=0 \quad 与 \quad \frac{\varphi}{y}+\frac{\varphi}{z}\frac{z}{y}=0.$$

于是，在点 $x_0,y_0,z_0)$

$$\frac{f'_x(x_0,y_0,z_0)}{\varphi'_x(x_0,y_0,z_0)}=\frac{f'_y(x_0,y_0,z_0)}{\varphi'_y(x_0,y_0,z_0)}=\frac{f'_z(x_0,y_0,z_0)}{\varphi'_z(x_0,y_0,z_0)}. \qquad (*)$$

而二曲面 φ $x,y,z)=0$ 与 f $x,y,z)-u_0=0$ 在点(x_0,y_0,z_0)

$$\varphi'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\varphi'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\varphi'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

与 $$f'_x(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+f'_z(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0.$$

由$(*)$

皆通过点 $x_0,y_0,z_0)$ $x_0,y_0,z_0)$

9. 1) 作辅助函数

$$\Phi(x,y,z,\lambda)=x^2y^2z^2+\lambda(x^2+y^2+z^2-\rho^2)$$

令
$$\frac{\Phi}{x} = 2xy^2z^2 + 2\lambda x = 0,$$
$$\frac{\Phi}{y} = 2x^2yz^2 + 2\lambda y = 0,$$
$$\frac{\Phi}{z} = 2x^2y^2z + 2\lambda z = 0,$$
$$\frac{\Phi}{\lambda} = x^2 + y^2 + z^2 - \rho^2 = 0 .$$

解得　$x^2 = y^2 = z^2 = \frac{\rho^2}{3}$.

不难验证，函数$\phi(x, y) = x^2y^2(\rho^2 - x^2 - y^2)$　　$x^2, y^2, z^2)$ $= \frac{\rho^2}{3}, \frac{\rho^2}{3}, \frac{\rho^2}{3}$ 取最大值，最大值是

$$\frac{\rho^2}{3}\cdot\frac{\rho^2}{3}\cdot\frac{\rho^2}{3} = \frac{\rho^2}{3}\quad{}^3 ,$$

即
$$x^2y^2z^2 \leq \frac{\rho^2}{3}\quad{}^3 = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}\quad{}^3$$

或
$$^3\ x^2y^2z^2 \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3} .$$

设 $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$, 则
$$^3\ abc \leq \frac{a + b + c}{3}, \qquad a \geq 0,\quad b \geq 0,\quad c \geq 0 .$$

2) 作辅助函数
$$\Phi\quad x, y, z, \lambda) = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\quad x^2y^2z^2 - \frac{\rho^2}{3}\quad{}^3 \quad .$$

令
$$\frac{\Phi}{x} = 2x + 2\lambda xy^2z^2 = 0,$$
$$\frac{\Phi}{y} = 2y + 2\lambda x^2yz^2 = 0,$$
$$\frac{\Phi}{z} = 2z + 2\lambda x^2y^2z = 0,$$
$$\frac{\Phi}{\lambda} = x^2y^2z^2 - \frac{\rho^2}{3}\quad{}^3 = 0 .$$

解得 $x^2 = y^2 = z^2 = \dfrac{\rho^2}{3}$.

不难验证，函数 $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 + \dfrac{1}{x^2 y^2}\left(\dfrac{\rho^2}{3}\right)^3$ **在点** $(x^2, y^2) = \left(\dfrac{\rho^2}{3}, \dfrac{\rho^2}{3}\right)$ **取最小值，最小值是**

$$\frac{\rho^2}{3} + \frac{\rho^2}{3} + \frac{\rho^2}{3} = \rho^2,$$

即 $$x^2 + y^2 + z^2 \geq \rho^2 = 3\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2},$$

或 $$\sqrt[3]{x^2 y^2 z^2} \leq \frac{x^2 + y^2 + z^2}{3}.$$

设 $a = x^2$, $b = y^2$, $c = z^2$, **则**

$$\sqrt[3]{abc} \leq \frac{a + b + c}{3}, \quad a \geq 0, \quad b \geq 0, \quad c \geq 0 .$$

10. $F_x' = 3(x^2 - ay)$ $\quad F_y' = 3(y^2 - ax)$

$f'(x) = -\dfrac{F_x'}{F_y'}$. **令** $f'(x) = 0$，**有**

$$F(x, y) = x^3 + y^3 - 3axy = 0,$$
$$F_x'(x, y) = 3(x^2 - ay) = 0 .$$

解得稳定点 $(0,0)$ $\quad (\sqrt[3]{2}a, \sqrt[3]{4}a)$

因为 $F_y'(0,0) = 0$, $F_x'(0,0) = 0$，**所以在点** $(0,0)$ **存在隐函数** .

$F_y'(\sqrt[3]{2}a, \sqrt[3]{4}a) > 0$. **而** $F''_{x^2} = 6x$. **而**

$$f''(x) = -\frac{F_y' F''_{x^2} - F_x' F''_{yx}}{(F_y')^2} .$$

在点 $(\sqrt[3]{2}a, \sqrt[3]{4}a)$ $\quad (F_x' = 0)$

$$f''(\sqrt[3]{2}a) = -\frac{F''_{x^2}}{F_y'}\bigg|_{(\sqrt[3]{2}a, \sqrt[3]{4}a)} = -\frac{2}{a} < 0 .$$

即隐函数 $y = f(x)$ **在** $x = \sqrt[3]{2}a$ **取局部极大值，极大值是** $y = \sqrt[3]{4}a$.

11. 作辅助函数

$$\Phi = \sum_{i=1}^{n} x_i^p + \lambda \sum_{i=1}^{n} x_i - a \quad .$$

令 $$\frac{\Phi}{x_i} = p x_i^{p-1} + \lambda = 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n .$$

$$\frac{\Phi}{\lambda} = \sum_{i=1}^{n} x_i - a = 0 .$$

解得 $$x_i^{p-1} = -\frac{\lambda}{p}, \quad i = 1, 2, \cdots, n, \text{即}$$

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_n .$$

代入 $\frac{\Phi}{\lambda} = 0$ 之中，得 $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = \frac{a}{n}$.

n 元函数 $u = \sum_{i=1}^{n} x_i^p$ 在 n 维欧氏空间 $\mathbf{R}^n$ 的平面 $\sum_{i=1}^{n} x_i = a$ 上连续，必能取到最小值.只有一个稳定点 $\frac{a}{n}, \frac{a}{n}, \cdots, \frac{a}{n}$ ，则 u 在此稳定点上必取最小值，最小值是

$$n \quad \frac{a}{n} \quad ^p = \frac{a^p}{n^{p-1}},$$

即 $$\frac{a^p}{n^{p-1}} \leq \sum_{i=1}^{n} x_i^p ,$$

或 $$\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ^p \leq n^{p-1} \sum_{i=1}^{n} x_i^p , \quad \text{即} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ^p \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^p$$

$(p > 1)$

特别是 $p = 2$，有

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \quad ^2 \leq n \sum_{i=1}^{n} x_i^2 , \quad \text{即} \quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \quad ^2 \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i^2 .$$

12. 设长方体在第一卦限中的顶点坐标是 (x, y, z)
方体的体积

$$V = 8xyz .$$

因为顶点坐标 $x, y, z)$ $V = 8xyz$

在满足方程

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

条件之下的最大值 .

作辅助函数

$$\Phi=8xyz+\lambda\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\ .$$

$$\frac{\Phi}{x}=8yz+2\lambda\frac{x}{a^2}=0,$$

$$\frac{\Phi}{y}=8xz+2\lambda\frac{y}{b^2}=0,$$

$$\frac{\Phi}{z}=8xy+2\lambda\frac{z}{c^2}=0,$$

$$\frac{\Phi}{\lambda}=\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{z^2}-1=0\ .$$

此方程组在第一卦限只有唯一一组解 $\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}$.

函数 $V=8xyz$ 在有界闭区域

$$(x,y,z)\left|\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1\right.$$

上连续, 必有最大值与最小值 . 显然, 最小值是零 . x,y,z 有一个为零 .)

函数 $V=8xyz$ 必在稳定点 $\frac{a}{3},\ \frac{b}{3},\ \frac{c}{3}$ 取最大值, 最大值是

$$V=8\ \frac{a}{3}\cdot\frac{b}{3}\cdot\frac{c}{3}=\frac{8abc}{3\ \ 3}\ .$$

第 十 二 章

1. (1) $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\ \ 2+x^2)}=\int_0^{+\infty}\ \frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{2+x^2}\ \mathrm{d}x$

$$= \quad \arctan x - \frac{1}{2}\arctan\frac{x}{2}\Bigg|_0^{+\infty} = \quad 1 - \frac{1}{2}\quad\frac{\pi}{2}\ .$$

$$(2)\int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x \quad 3x^2 - 2x - 1} = \int_1^2 \frac{\mathrm{d}x}{x \quad (2x)^2 - \quad x + 1)^2}$$

$$= -\int_1^2 \frac{\mathrm{d}\ \dfrac{x+1}{2x}}{1 - \quad \dfrac{x+1}{2x}^{\ 2}} = -\arcsin\frac{x+1}{2x}\Bigg|_1^2$$

$$= \frac{\pi}{2} - \arcsin\frac{3}{4}\ .$$

2. (1) $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{\ln x}{x \quad x^2 - 1} = 0$，**所以** 1 **不是瑕点**．**有**

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{3}{2}}\frac{\ln x}{x \quad x^2 - 1} = 0,$$

其中 $\lambda = \dfrac{3}{2} > 1$，**无穷积分** $\displaystyle\int_1^{+\infty}\frac{\ln x}{x \quad x^2 - 1}\mathrm{d}x$ **收敛**．

(2) $m > 2$，0 **是瑕点**．**有**

$$\lim_{x\to 0^+} x^{m-2}\frac{1-\cos x}{x^m} = \lim_{x\to 0^+}\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}\ .$$

当 $\lambda = m - 2 < 1$ **时**，**即** $m < 3$，**瑕积分** $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1-\cos x}{x^m}\mathrm{d}x$ **收敛**．

(3) 0 **可能是瑕点**．**不妨设** $p \le q$．

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p + x^q} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p + x^q} + \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p + x^q}\ .$$

$$\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p + x^q} = \int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p\ (1 + x^{q-p})}\ .\text{有}$$

$$\lim_{x\to 0^+} x^p\frac{1}{x^p\ (1 + x^{q-p})} = \begin{matrix} 1, & \text{当 } q > p, \\ \dfrac{1}{2}, & \text{当 } q = p\ . \end{matrix}$$

当 $\lambda = p < 1\ (p \ge 1)$　$\displaystyle\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{x^p + x^q}$ **收敛**

$$\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p + x^q} = \int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^q\ (1 + x^{p-q})}\ .\text{有}$$

$$\lim_{x\to+\infty} x^q \frac{1}{x^q\ (1+\ x^{p-q})} = \begin{cases} 1, & 当\ q>p, \\ \dfrac{1}{2}, & 当\ q=p. \end{cases}$$

当 $\lambda = q > 1\ (q \leq 1)$ $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p + x^q}$**收敛**

由此可知，**一般情况**，$\min\{p, q\} < 1$ **且** $1 < \max\{p, q\}$

$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^p + x^q}$ **收敛** .

3. 函数 $\varphi\ \ t, x) = (x - t)^{n-1} f\ \ t)$

$$\frac{\varphi}{x} = (n-1)\ \ x - t)^{n-2} f\ \ t)$$

在 $R\ \ 0 \leq t \leq a, 0 \leq x \leq a]$ §12.3 **定理** 4，**有**

$$g'\ \ x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \frac{1}{(n-1)} \int_0^x (x-t)^{n-1} f\ \ t)\,\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{(n-2)} \int_0^x (x-t)^{n-2} f\ \ t)\,\mathrm{d}t.$$

$$g''\ \ x) = \frac{1}{(n-3)} \int_0^x (x-t)^{n-3} f\ \ t)\,\mathrm{d}t.$$

……

$$g^{n-1}(x) = \frac{1}{0\,!} \int_0^x (x-t)^0 f\ \ t)\,\mathrm{d}t = \int_0^x f\ \ t)\,\mathrm{d}t.$$

于是，$\qquad g^{(n)}(x) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \int_0^x f\ \ t)\,\mathrm{d}t = f\ \ x)$

4. (1) $\ A > 1$，" $y \in \mathbf{R}$，**有**

$$\left| \int_A^{+\infty} \frac{y^2 - x^2}{(y^2 + x^2)^2} \mathrm{d}x \right| = \left| \int_A^{+\infty} \frac{y^2 + x^2}{(y^2 + x^2)^2} \mathrm{d}x - \int_A^{+\infty} \frac{2x^2}{(y^2 + x^2)^2} \mathrm{d}x \right|$$

$$= \left| \int_A^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{y^2 + x^2} + \int_A^{+\infty} x\mathrm{d}\ \ \frac{1}{x^2 + y^2}\ \ \right| = \frac{x}{x^2 + y^2} \Bigg|_A^{+\infty}$$

$$= \frac{A}{A^2 + y^2} \leq \frac{1}{A}.$$

于是，" $\varepsilon > 0$，v $A_0 = \frac{1}{\varepsilon}$，" $A > A_0$，" $y \in \mathbf{R}$，**有**

$$\left|\int_A^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\mathrm{d}x\right|\le\frac{1}{A}<\varepsilon,$$

即$\int_1^{+\infty}\frac{y^2-x^2}{(y^2+x^2)^2}\mathrm{d}x$ 在 **R** 一致收敛 .

(2) $\forall p>0$, $\forall y\in[a,+\infty)$

$$\left|\int_0^p\sin yx\mathrm{d}x\right|=\left|\frac{-\cos yx}{y}\right|_0^p\le\frac{2}{a},$$

即 $\forall p>0,\int_0^p\sin yx\mathrm{d}x$ 在 $a,+\infty)$

$\frac{x}{1+x^2}$ 关于 x 是单调的， y 一致的) 0 .

根据狄利克雷判别法，无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{x\sin yx}{1+x^2}\mathrm{d}x$ 在 $a,+\infty)$ 上一致收敛 .

(3) $\exists\ \varepsilon_0=\frac{1}{\mathrm{e}}>0$, $\forall A>0$, $\exists\ 2k\pi$, $2k+1)\pi>A$ k 充分大时) $y_0=\frac{1}{(2k+1)\pi}\in(0,+\infty)$

$$\left|\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\mathrm{e}^{-xy_0}\sin x\mathrm{d}x\right|\ge\mathrm{e}^{-2k+1)\pi\frac{1}{(2k+1)\pi}}\int_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}\sin x\mathrm{d}x$$

$$=\mathrm{e}^{-1}\cdot2=\frac{2}{\mathrm{e}}>\frac{1}{\mathrm{e}}=\varepsilon_0\ .$$

根据柯西一致收敛准则，无穷积分$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin x\mathrm{d}x$ 在 $0,+\infty)$ 非一致收敛 .

5. 因为 $\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1-\cos\alpha x}{x}\mathrm{e}^{-2x}=0$，所以 0 不是瑕点 .

函数 $f\ \ x,\alpha)=\frac{1-\cos\alpha x}{x}\mathrm{e}^{-2x}$ 与 $\frac{f}{\alpha}=\mathrm{e}^{-2x}\sin\alpha x$

在区域 $D\ \ 0\le x<+\infty,\alpha\in\mathbf{R})$

$$\int_0^{+\infty}\frac{}{\alpha}\frac{1-\cos\alpha x}{x}\mathrm{e}^{-2x}\ \mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-2x}\sin\alpha x\mathrm{d}x$$

在 **R** 上一致收敛 $|\mathrm{e}^{-2x}\sin\alpha x|\le\mathrm{e}^{-2x})$ 10，有

$$J'(\alpha)=\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin\alpha x\,dx=\left.\frac{-e^{-2x}(2\sin\alpha x+\alpha\cos\alpha x)}{\alpha^2+4}\right|_0^{+\infty}$$

$$=\frac{\alpha}{\alpha^2+4}.$$

从而 $$J(\alpha)=\int\frac{\alpha}{\alpha^2+4}d\alpha=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+4)+C,$$

其中 C **是常数．令** $\alpha=0$，**有**

$$J(0)=\ln 2+C,\quad \text{而}\ J(0)=0,\quad \text{即}\ C=-\ln 2.$$

于是， $$J(\alpha)=\frac{1}{2}\ln(\alpha^2+4)-\ln 2=\ln\sqrt{1+\frac{\alpha^2}{4}}.$$

6. (1) $\cos\varphi=1-2\sqrt{x}$. $\varphi=\arccos(1-2\sqrt{x})$

$$d\varphi=\frac{dx}{2x^{\frac{3}{4}}\sqrt{1-x^{\frac{1}{2}}}}.\qquad 3-\cos\varphi=2\cdot\left(1+x^{\frac{1}{2}}\right).$$

有 $$\int_0^{\pi}\frac{d\varphi}{3-\cos\varphi}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int_0^1 x^{\frac{1}{4}-1}(1-x)^{\frac{1}{2}-1}dx$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}}B\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}\frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

(2) **设** $x^{\frac{1}{4}}=t$, $x=t^4$, $dx=4t^3dt$，**有**

$$\int_0^1\frac{dx}{\sqrt{1-x^{\frac{1}{4}}}}=4\int_0^1 t^{4-1}(1-t)^{\frac{1}{2}-1}dt$$

$$=4B\left(4,\frac{1}{2}\right)=4\frac{\Gamma(4)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(4+\frac{1}{2}\right)}=4\frac{3!\sqrt{\pi}}{\frac{7}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}$$

$$=\frac{128}{35}.$$

(3) **设** $\frac{b}{a}x^n=t$, $dx=\frac{1}{n}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{1}{n}}t^{\frac{1}{n}-1}dt$，**有**

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{(a+bx^n)^p}dx=\frac{1}{na^p}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^p}dt.$$

再设$\frac{1}{1+t}=y$，$\mathrm{d}y=\frac{-\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$，又有

$$\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^p}\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}\frac{t^{\frac{m+1}{n}-1}}{(1+t)^{p-2}}\frac{\mathrm{d}t}{(1+t)^2}$$

$$=\int_0^1 y^{p-\frac{m+1}{n}-1}(1-y)^{\frac{m+1}{n}-1}\mathrm{d}y=\mathrm{B}\left(p-\frac{m+1}{n},\frac{m+1}{n}\right).$$

于是，$\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{x^m}{(a+bx^n)^p}\mathrm{d}x=\frac{1}{na^p}\left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m+1}{n}}\mathrm{B}\left(p-\frac{m+1}{n},\frac{m+1}{n}\right).$

当$\frac{m+1}{n}>0$与$p-\frac{m+1}{n}>0$时，即$0<\frac{m+1}{n}<p$时，无穷积分存在．

7. $\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt)\right|=|-2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin 2xt|\leq 2t\mathrm{e}^{-t^2}.$$

已知$\int_0^{+\infty}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t$收敛，则无穷积分$\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt)\mathrm{d}t$在$\mathbf{R}$上一致收敛．根据§12.3定理10，有

$$g'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial x}(\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt)\mathrm{d}t=-\int_0^{+\infty}2t\mathrm{e}^{-t^2}\sin 2xt\mathrm{d}t$$

$$=\int_0^{+\infty}\sin 2xt\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-t^2})$$

$$=\mathrm{e}^{-t^2}\sin 2xt\Big|_0^{+\infty}-2x\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\cos 2xt\mathrm{d}t$$

$$=-2xg(x)$$

即
$$g'(x)=-2xg(x)$$

由上式，有$\frac{g'(x)}{g(x)}=-2x$　或　$\ln g(x)=-x^2+C$，

即　$g(x)=A\mathrm{e}^{-x^2}$(A是常数)　　$x=0$，有

$$A=g(0)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{d}t=\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

于是，
$$g(x)=\frac{\sqrt{\pi}}{2}\mathrm{e}^{-x^2}.$$

8. 由公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n \phi \mathrm{d}\phi = \dfrac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \quad (n > -1)$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{1}{4}+1\right)},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}.$$

于是，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\sin x}\,\mathrm{d}x \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\sin x}} = \dfrac{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} \cdot \dfrac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{2\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)}$

$$= \frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right]^2}{4\Gamma\left(\frac{5}{4}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\pi}{4\cdot\frac{1}{4}\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} = \pi.$$

9. 用反证法. 假设 $\int_a^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c, d]$

即 $\exists\ \varepsilon_0 > 0$, $\forall A > a$, $\exists\ A' > A$, $\exists\ y' \in [c, d]$

$$\left|\int_{A'}^{+\infty} f(x, y')\,\mathrm{d}x\right| \geq \varepsilon_0.$$

特别是，$\exists\ A_1 > 1$, $\exists\ y_1 \in [c, d]$　$\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x, y_1)\,\mathrm{d}x\right| \geq \varepsilon_0$.

$\exists\ A_2 > 2$, $\exists\ y_2 \in [c, d]$　$\left|\int_{A_2}^{+\infty} f(x, y_2)\,\mathrm{d}x\right| \geq \varepsilon_0$.

……

$\exists\ A_n > n$, $\exists\ y_n \in [c, d]$　$\left|\int_{A_n}^{+\infty} f(x, y_n)\,\mathrm{d}x\right| \geq \varepsilon_0$.

……

于是，得到 $[c, d]$　$y_n\}$

的子列 $y_{n_k}\}$ $\lim\limits_{k\to+\infty} y_{n_k} = y_0 \in [c, d]$ $n\in\mathbf{N}_+$，有

$$\int_n^{+\infty} f\quad x, y)\,\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} f\quad x, y)\,\mathrm{d}x - \int_a^n f\quad x, y)\,\mathrm{d}x,$$

上式等号右端两项在 $c, d]$

$\int_n^{+\infty} f\quad x, y)\mathrm{d}x$ 在 $c, d]$

" $n\in\mathbf{N}_+$，v $n_k \geq n$ $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = +\infty)$ $f\quad x, y) \geq 0$，有

$$\int_n^{+\infty} f\quad x, y_{n_k})\,\mathrm{d}x \geq \int_{n_k}^{+\infty} f\quad x, y_{n_k})\,\mathrm{d}x \geq \varepsilon_0\ .$$

令 $k\to+\infty$，由连续性，有

$$\int_n^{+\infty} f\quad x, y_0)\,\mathrm{d}x \geq \varepsilon_0,$$

即$\int_a^{+\infty} f\quad x, y_0)\,\mathrm{d}x \geq \varepsilon_0$ 发散，与$\int_a^{+\infty} f\quad x, y)\,\mathrm{d}x$ 在 $c, d]$

盾 .

10. 首先证明$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} f\quad x)\,\mathrm{d}x$ 在 $0, \eta]$

事实上，$\int_0^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x$ 收敛 $\int_0^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x$ 关于 y 一致收敛) e^{-xy} 关于 x 是单调的，在 $0, \eta]$ $x\in(0, +\infty)$ $y\in\ 0, \eta]$ $|\mathrm{e}^{-xy}| \leq 1)$ 据阿贝尔判别法，$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} f\quad x)\,\mathrm{d}x$ 在 $0, \eta]$ $\varepsilon > 0$，v $A_0 > 0$，" $A > A_0$，" $y\in\ 0, \eta]$

$$\left|\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} f\quad x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\ .$$

特别是$[0, \eta]$ 0 与 y，有

$$\left|\int_A^{+\infty} f\quad x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon \quad 与 \quad \left|\int_A^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} f\quad x)\,\mathrm{d}x\right| < \varepsilon\,.$$

已知函数 $f\quad x)$ $0, A_0]$ $M > 0$，" $x\in[0, A_0]$

有 $|f(x)| \leq M$. 又已知 $\lim\limits_{y\to 0} \mathrm{e}^{-yx}=1$, 即 $\forall\ \dfrac{\varepsilon}{MA_0}>0$, $\exists\ \delta>0$, $\forall\ y:\ 0\leq y\leq \delta$, $\forall\ x\in[0, A_0]$

$$|\mathrm{e}^{-xy}-1|<\frac{\varepsilon}{MA_0}.$$

于是, $\forall\ \varepsilon>0$, $\exists\ A_0>0$, $\forall\ A>A_0$, $\exists\ \delta>0$, $\forall\ y:\ 0\leq y\leq \delta$, 有

$$\left|\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\,\mathrm{d}x-\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq\int_0^{A}|\mathrm{e}^{-xy}-1||f(x)|\,\mathrm{d}x+\left|\int_A^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\,\mathrm{d}x\right|+\left|\int_A^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x\right|$$

$$<\frac{\varepsilon}{MA_0}\cdot M\cdot A_0+\varepsilon+\varepsilon=3\varepsilon,$$

即
$$\lim_{y\to 0^+}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}f(x)\,\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x.$$

第 十 三 章

1. (1) $$\iint\limits_D(x+y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^3\mathrm{d}x\int_0^{\frac{1}{1+x}}(x+y)\,\mathrm{d}y$$

$$=\int_0^3\left[\frac{x}{1+x}+\frac{1}{2(1+x)^2}\right]\mathrm{d}x=\frac{27}{8}-2\ln 2.$$

(2) $$\iint\limits_D\cos\pi\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\quad(设\ x=r\cos\varphi,\ y=r\sin\varphi)$$

$$=\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\varphi\int_0^1 r\cos\pi r\,r\mathrm{d}r=2\pi\left[\frac{r\sin\pi r}{\pi}\Big|_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1\sin\pi r\,\mathrm{d}r\right]$$

$$=-\frac{4}{\pi}.$$

2. 区域 D 是四条直线 $x+y=1$, $x+y=-1$, $x-y=1$, $x-y=-1$ 所围成的正方形区域. 作变数替换

$$u=x+y,\quad v=x-y.$$

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{1}{\dfrac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}}=-\frac{1}{2}.\qquad D':\ -1\leq u\leq 1,\ -1\leq v\leq 1.$$

于是，

$$\iint_D (x^2-y^2)\sin(x-y)^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_{D'} uv\sin v^2\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}u\,\mathrm{d}u\cdot\int_{-1}^{1}v\sin v^2\,\mathrm{d}v=0.$$

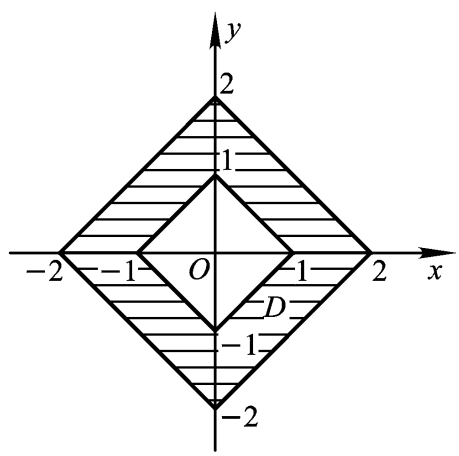
3. **区域** D: $\left|\,|x|+|y|-\frac{3}{2}\right|\leq\frac{1}{2}$，**即**

$$1=-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\leq|x|+|y|\leq\frac{1}{2}+\frac{3}{2}=2.$$

如右图．因为曲面 $z=x^2+y^2$ **关于** z **轴对称，区域** D **关于两个坐标轴都对称，所以曲顶柱体的体积是第一象限曲顶柱体的体积的** 4 **倍．于是，曲顶柱体的体积**

$$V=4\iint_{D'}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 D'**是区域** D **在第一象限的部分**：$x+y=1$，$x+y=2$ **与** $x=0$，$y=0$ **所围成．用直线** $x=1$ **将** D' **分成两部分，有**



第 3 **题图**

$$V=4\iint_{D'}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=4\left[\int_0^1\mathrm{d}x\int_{1-x}^{2-x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y+\int_1^2\mathrm{d}x\int_0^{2-x}(x^2+y^2)\,\mathrm{d}y\right]$$

$$=4\left[\frac{1}{3}\int_0^1(7-9x+6x^2)\,\mathrm{d}x+\frac{4}{3}\int_1^2(2-3x+3x^2-x^3)\,\mathrm{d}x\right]$$

$$=4\left(\frac{3}{2}+1\right)=10.$$

4. **因为闭曲线关于两个坐标轴都对称，所以围成区域** D **的面积是第一象限那部分区域面积的** 4 **倍．作变量替换**

$$x = ar\cos\varphi,\quad y = br\sin\varphi. \qquad J = abr.$$

在广义极坐标系中，曲线方程是 $r^2 = \frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi$.

在第一象限那部分区域是

$$0 \le r \le \sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi},\quad 0 \le \varphi \le \arctan\frac{ak}{bh}.$$

于是，区域 D 的面积

$$A = \iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 4\int_0^{\arctan\frac{ak}{bh}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{\sqrt{\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi}} abr\,\mathrm{d}r$$

$$= 2ab\int_0^{\arctan\frac{ak}{bh}}\left(\frac{a^2}{h^2}\cos^2\varphi - \frac{b^2}{k^2}\sin^2\varphi\right)\mathrm{d}\varphi$$

$$= ab\int_0^{\arctan\frac{ak}{bh}}\left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\right) + \left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\cos 2\varphi\right]\mathrm{d}\varphi$$

$$= ab\left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\right)\arctan\frac{ak}{bh} + \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\sin 2\left(\arctan\frac{ak}{bh}\right)\right]$$

$$= ab\left[\left(\frac{a^2}{h^2} - \frac{b^2}{k^2}\right)\arctan\frac{ak}{bh} + \frac{ab}{hk}\right].$$

因为 $\sin 2\theta = 2\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}$，所以

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\sin 2\left(\arctan\frac{ak}{bh}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\frac{2\left(\frac{ak}{bh}\right)}{1+\left(\frac{ak}{bh}\right)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{h^2} + \frac{b^2}{k^2}\right)\frac{2\left(\frac{ak}{bh}\right)}{1+\left(\frac{ak}{bh}\right)^2} = \frac{ab}{hk}.$$

5. 任意一条直线 $y = kx$ $(k > 0)$ $(0, 0)$

$$\left(\frac{k}{\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{b}\right)^3}, \frac{k^2}{\left(\frac{1}{a}+\frac{k}{b}\right)^3}\right).$$

因为

$$\lim_{k\to 0^+} x = \lim_{k\to+\infty} x = 0 \quad 与 \quad \lim_{k\to 0^+} y = \lim_{k\to+\infty} y = 0,$$

所以闭曲线围成的区域 G 位于第一象限内．作变数替换

$$x = ar\cos^2\varphi,\quad y = br\sin^2\varphi,$$

$$\frac{(x,y)}{(r,\varphi)} = \begin{vmatrix} a\cos^2\varphi & -2ar\cos\varphi\sin\varphi \\ b\sin^2\varphi & 2br\sin\varphi\cos\varphi \end{vmatrix} = abr\sin 2\varphi.$$

在新坐标系中，闭曲线方程是 $r = \frac{ab}{4}\sin^2 2\varphi$，且 $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$．于是，区域 G 的面积

$$A = \ _D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{ab}{4}\sin^2 2\varphi} r\mathrm{d}r$$

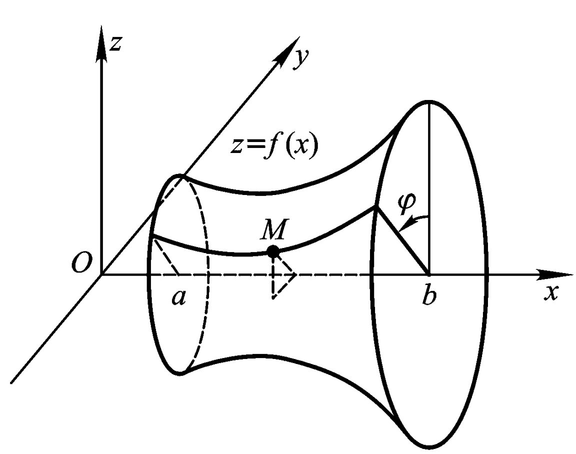
$$= \frac{a^3b^3}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\varphi\sin^4 2\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{a^3b^3}{32}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos^2 2\varphi+\cos^4 2\varphi)\sin 2\varphi\mathrm{d}\varphi = \frac{a^3b^3}{60}.$$

6. 设在旋转中，曲线所在的平面与 xz 平面夹角是 φ，如下图，$M\ \ x, y, z)$

$$x = x,\quad y = f\ \ x)\sin\varphi,\quad z = f\ \ x)\cos\varphi,\quad 0\leq\varphi\leq 2\pi.$$

$$E = x_x'^2 + y_x'^2 + z_x'^2 = 1 + [f'(x)]^2.$$



第 6 题图

$$G = x_\varphi'^2 + y_\varphi'^2 + z_\varphi'^2 = [f(x)]^2 .$$

$$F = x_x' x_\varphi' + y_y' y_\varphi' + z_z' z_\varphi' = 0 .$$

$$EG - F^2 = f^2(x)\{1 + [f'(x)]^2\} .$$

于是，旋转体侧面的面积

$$A = \int_a^b \mathrm{d}x \int_0^{2\pi} \sqrt{EG - F^2}\,\mathrm{d}\varphi = 2\pi \int_a^b f(x)\sqrt{1 + [f'(x)]^2}\,\mathrm{d}x .$$

这与用定积分计算旋转体侧面积的公式相同．

7. 设 $\dfrac{\partial F}{\partial x} = G(x, y)$，$\dfrac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial G}{\partial y} = f(x, y)$，

于是，

$$\iint_D f(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d \frac{\partial G}{\partial y}\mathrm{d}y$$

$$= \int_a^b G(x, y)\Big|_c^d \mathrm{d}x = \int_a^b [G(x, d) - G(x, c)]\,\mathrm{d}x$$

$$= \int_a^b \left[\frac{\partial F(x, d)}{\partial x} - \frac{\partial F(x, c)}{\partial x}\right]\mathrm{d}x$$

$$= [F(x, d) - F(x, c)]\Big|_a^b$$

$$= F(b, d) - F(b, c) - F(a, d) + F(a, c) .$$

8. 椭圆锥面 $z^2 = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$ **与椭圆抛物面** $2z = x^2 + \dfrac{y^2}{4}$ **的交线是平面** $z = 2$ **上的椭圆** $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 4$．**所围成的体在** xy **平面的投影是椭圆** $x^2 + \dfrac{y^2}{4} = 4$．**因为所围成的体关于** xz **平面和** yz **平面对称，所以所围成的体的体积** V **是第一卦限那部分体** W **的体积** 4 **倍，即**

$$V = 4\iiint_W \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

设 $x = r\cos\varphi$，$y = 2r\sin\varphi$，$z = z$．$J = 2r$．W: $\dfrac{r^2}{2} \leq z \leq r$，$0 \leq r \leq 2$，$0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$，**即**

$$V = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\varphi \int_0^2 \mathrm{d}r \int_{\frac{r^2}{2}}^{r} 2r\,\mathrm{d}z = \frac{8}{3}\pi .$$

9. 两个球的交线是圆 $x^2 + y^2 = \frac{3}{4}a^2$，$z = \frac{a}{2}$. 作球面坐标替换

$$\begin{aligned} x &= r\sin\varphi\cos\theta, \\ y &= r\sin\varphi\sin\theta, \qquad J = r^2\sin\varphi . \\ z &= r\cos\varphi . \end{aligned}$$

在球面坐标系中，体 V 分为两部分：$0\leq r\leq a$，$0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{3}$，$0\leq\theta\leq 2\pi$ 与 $0\leq r\leq 2a\cos\varphi$，$\frac{\pi}{3}\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$，$0\leq\theta\leq 2\pi$. 于是，三重积分

$$\iiint_V z^2\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^a r^4\,\mathrm{d}r + \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi\int_0^{2a\cos\varphi} r^4\,\mathrm{d}r$$

$$= \frac{7}{60}\pi a^5 + \frac{64}{5}\pi a^5\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^7\varphi\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{7}{60}\pi a^5 + \frac{1}{160}\pi a^5 = \frac{59}{480}\pi a^5 .$$

10. 体 V：$1\leq\frac{yz}{x}\leq 2$，$1\leq\frac{zx}{y}\leq 2$，$1\leq\frac{xy}{z}\leq 2$.

作变数替换，

$$u = \frac{yz}{x}, \qquad v = \frac{zx}{y}, \qquad w = \frac{xy}{z} .$$

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = \begin{vmatrix} -\frac{yz}{x^2} & \frac{z}{x} & \frac{y}{x} \\ \frac{z}{y} & -\frac{zx}{y^2} & \frac{x}{y} \\ \frac{y}{z} & \frac{x}{z} & -\frac{xy}{z^2} \end{vmatrix} = 4,$$

$$\frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)}=\frac{1}{4}.$$

V': $1\le u\le 2$，$1\le v\le 2$，$1\le w\le 2$．$xyz=uvw$．**于是**

$$\iiint_V xyz\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\frac{1}{4}\int_1^2 u\mathrm{d}u\int_1^2 v\mathrm{d}v\int_1^2 w\mathrm{d}w$$
$$=\frac{1}{4}\left(\int_1^2 t\mathrm{d}t\right)^3=\frac{27}{32}.$$

11. $$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z$$
$$=\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z.$$

首先计算 $A(x)=\int_0^x f(y)\mathrm{d}y\int_0^y f(z)\mathrm{d}z=\int_0^x f(y)\left(\int_0^y f(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y$.

设 $F(y)=\int_0^y f(z)\mathrm{d}z$．**有** $F'(y)=f(y)$，$F(0)=0$．**从而**

$$A(x)=\int_0^x f(y)\left(\int_0^y f(z)\mathrm{d}z\right)\mathrm{d}y=\int_0^x f(y)F(y)\mathrm{d}y$$
$$=\int_0^x F(y)\mathrm{d}F(y)=\frac{1}{2}[F(y)]^2\Big|_0^x=\frac{1}{2}[F(x)]^2.$$

于是，$$\int_0^a\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^y f(x)f(y)f(z)\mathrm{d}z=\int_0^a f(x)\frac{1}{2}[F(x)]^2\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^a[F(x)]^2\mathrm{d}F(x)=\frac{1}{3!}[F(x)]^3\Big|_0^a=\frac{1}{3!}[F(a)]^3$$
$$=\frac{1}{3!}\left(\int_0^a f(x)\mathrm{d}x\right)^3.$$

12. 因为乘积 $xyz\ge 0$，**所以围成的立体只能在前四个卦限之中，因为立体关于三个坐标轴都对称，所以立体的体积是第一卦限那部分立体的体积的** 4 **倍．作球面坐标替换**

$$\begin{aligned}x&=r\sin\varphi\cos\theta,\\ y&=r\sin\varphi\sin\theta,\qquad J=r^2\sin\varphi.\\ z&=r\cos\varphi.\end{aligned}$$

在球面坐标系中,闭曲面方程是 $r = r(\varphi, \theta) = \sqrt[3]{3\sin^2\varphi\cos\varphi\sin\theta\cos\theta}$,

$0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}$, $0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2}$. 于是, 立体的体积

$$V = \iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^{r(\varphi,\theta)} r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r$$

$$= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\varphi\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi = \frac{1}{2}.$$

13. 两个曲面方程联立解是 $\dfrac{z^2}{c^2} + \dfrac{z}{c} = 1$ 或 $z^2 + cz - c^2 = 0$, 解

得 $z = \dfrac{c}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$ $z \geq 0$, 所以取 $z = \dfrac{c}{2}(\sqrt{5} - 1)$

面的交线在 xy 平面上的投影区域是椭圆

$$D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq R^2 \qquad R^2 = \frac{1}{2}(\sqrt{5} - 1) .$$

于是, 立体的体积

$$V = c\iint_D \left[\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}\right)\right]\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

作变数替换

$$x = ar\cos\varphi,\quad y = br\sin\varphi,\quad J = abr .$$

有 $V = 4abc\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\mathrm{d}\varphi\int_0^R \left(\sqrt{1 - r^2} - r^2\right) r\,\mathrm{d}r$

$$= 2\pi abc\left[-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{r^4}{4}\right]\Bigg|_0^R$$

$$= 2\pi abc\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}(1 - R^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4}R^4\right]$$

$$= 2\pi abc\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \frac{3 - \sqrt{5}}{8}\right]$$

$$= 2\pi abc(3 - \sqrt{5})\left[\frac{1}{3(3 - \sqrt{5})} - \frac{1}{6}\left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{8}\right]$$

$$= 2\pi abc(3 - \sqrt{5})\left[\frac{3 + \sqrt{5}}{12} - \frac{1}{6}\cdot\frac{\sqrt{5} - 1}{2} - \frac{1}{8}\right]$$

$$= \frac{5(3-5)}{12}\pi abc .$$

注意 ${\frac{5-1}{2}}^{2} = \frac{3-5}{2}$.

14. 作变数替换

$$x = ar^2\sin^4\varphi\cos^4\theta,\quad y = br^2\sin^4\varphi\sin^4\theta,\quad z = cr^2\cos^4\varphi .$$

$$\frac{(x,y,z)}{(r,\varphi,\theta)} = \begin{vmatrix} \frac{x}{r} & \frac{x}{\varphi} & \frac{x}{\theta} \\ \frac{y}{r} & \frac{y}{\varphi} & \frac{y}{\theta} \\ \frac{z}{r} & \frac{z}{\varphi} & \frac{z}{\theta} \end{vmatrix} = 32abcr^5\sin^7\varphi\cos^3\varphi\sin^3\theta\cos^3\theta .$$

在新坐标系中，曲面方程是 $r = 1$，**且** $0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$，$0\leq\theta\leq\frac{\pi}{2}$. **于是，立体的体积**

$$V = \underset{V}{}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= 32abc\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^7\varphi\cos^3\varphi\mathrm{d}\varphi\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\cos^3\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^5\mathrm{d}r$$

$$= \frac{16}{3}abc\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(2,4)\cdot\frac{1}{2}\mathrm{B}(2,2)$$

$$= \frac{4}{3}abc\frac{\Gamma(2)\Gamma(4)}{\Gamma(6)}\cdot\frac{\Gamma(2)\Gamma(2)}{\Gamma(4)} = \frac{abc}{90} .$$

第 十 四 章

1. (1) $\int_C \frac{z^2}{x^2+y^2}\mathrm{d}s = \int_0^{2\pi}\frac{a^2t^2}{a^2}\quad 2a^2\mathrm{d}t = \frac{8}{3}\quad 2a\pi^3 .\ a>0)$

(2) $\int_C z^2x\mathrm{d}x + x^2y\mathrm{d}y + y^2z\mathrm{d}z = \int_0^1 (t^7 + 2t^5 + 3t^9)\mathrm{d}t = \frac{91}{120}$.

2. 四条直线段的方程:

AB: $x + y = 1, 0\leq x\leq 1, \mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$.

BC: $x - y = 1$, $-1 \le x \le 0$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$.

CD: $x + y = -1$, $-1 \le x \le 0$, $\mathrm{d}x + \mathrm{d}y = 0$.

DA: $x - y = -1$, $0 \le x \le 1$, $\mathrm{d}x = \mathrm{d}y$.

在四条直线段上, $|x| + |y| = 1$. **于是**,

$$\oint_\Gamma \frac{\mathrm{d}x + \mathrm{d}y}{|x| + |y|} = \int_{BC} 2\mathrm{d}x + \int_{DA} 2\mathrm{d}x = 2\int_0^{-1} \mathrm{d}x + 2\int_0^{1} \mathrm{d}x = 0.$$

3. 设 $x = R\cos\varphi$, $y = R\sin\varphi$, $0 \le \varphi \le 2\pi$, **有**

$$\lim_{R\to+\infty} \oint_C \frac{y\mathrm{d}x - x\mathrm{d}y}{(x^2 + y^2)^2} = \lim_{R\to+\infty} \int_0^{2\pi} \frac{-R^2}{R^4} \mathrm{d}\varphi$$

$$= \lim_{R\to+\infty} \frac{-2\pi}{R^2} = 0.$$

4. 将上半圆周 C $A, B)$ x **轴上的线段** BA $-1, 1])$ **构成正向封闭曲线** L. **设它围成的区域** G. **根据格林公式**.

$$P\ x, y) = x^2 + y^2, Q\ x, y) = y\ xy + \ln(x + x^2 + y^2)]$$

$$\frac{P}{y} = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{Q}{x} = y^2 + \frac{y}{x^2 + y^2}.$$

有 $$\oint_L x^2 + y^2 \mathrm{d}x + y\ xy + \ln(x + x^2 + y^2)]\mathrm{d}y = \ _G y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \int_0^{\pi} \sin^2\varphi\mathrm{d}\varphi \int_0^1 r^3 \mathrm{d}r = \frac{\pi}{8}.$$

$$\oint_L = \int_{C\ A, B)} + \int_{BA} = \frac{\pi}{8}.$$ **于是**,

$$I - \frac{\pi}{8} = \int_{BA} = \frac{\pi}{8} + \int_{AB} x^2 + y^2 \mathrm{d}x + y\ xy + \ln(x + x^2 + y^2)]\mathrm{d}y$$

$$= \frac{\pi}{8} + \int_1^{-1} |x| \mathrm{d}x = \frac{\pi}{8} - 1.$$

5. 设 x **轴与** y **轴上的线段分别是** OA **与** OB, **曲线在第一象限内的部分是** C, **则** $\Gamma = OA + C\ A, B) + BO$ **是正向闭曲线**, **区域的面积**

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x .$$

在线段 OA 与 BO 上，有

$$\frac{1}{2}\int_{OA} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0 \quad 与 \quad \frac{1}{2}\int_{BO} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0 .$$

在曲线 $C(A, B)$ 上 $x = a\cos^{\frac{1}{2}}\varphi,\ y = b\sin^{\frac{1}{2}}\varphi,\ 0\leq\varphi\leq\frac{\pi}{2}$，有

$$\frac{1}{2}\int_{C(A,B)} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{ab}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{-\frac{1}{2}}\varphi\cos^{-\frac{1}{2}}\varphi\mathrm{d}\varphi$$

$$= \frac{ab}{8}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) = \frac{ab}{8}\frac{\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

$$= \frac{ab}{8\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 .$$

于是，区域的面积

$$A = \frac{1}{2}\oint_{\Gamma} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = \frac{ab}{8\sqrt{\pi}}\left[\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\right]^2 .$$

6. 根据曲线积分与路线无关的条件，有

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} .$$

这里，$Q(x, y) = xF(x, y)$，$P(x, y) = yF(x, y)$

$$\frac{\partial}{\partial x}[xF(x, y)] = \frac{\partial}{\partial y}[yF(x, y)]$$

或

$$x\frac{\partial F}{\partial x} = y\frac{\partial F}{\partial y} .$$

7. 根据奥 - 高公式 .

$$P = x,\quad Q = y,\quad R = z .$$

有
$$\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 3瘠,$$

即　$$瘠 = \frac{1}{3}\oiint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}\sigma .$$

8. $z = \sqrt{x^2 + y^2}$. $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

$$\mathrm{d}\sigma = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

有　$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - x^2z^2 + 1)\mathrm{d}\sigma$$

$$= \iint_D [x^4 - y^4 + y^2(x^2 + y^2) - x^2(x^2 + y^2) + 1]\sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iint_D \sqrt{2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y .$$

其中 D 是圆: $x^2 + y^2 \leq 2x$. 于是

$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - x^2z^2 + 1)\mathrm{d}\sigma = \sqrt{2}\pi .$$

9. 补加圆盘 $D: x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$, 法线向下为正, 使 $S + D$ 构成闭曲面, 设围成的体为 V, 应用奥 - 高公式, 有

$$\oiint_{S+D^-} (x^3 + e^{y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(z^3 + \frac{3}{5}a^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= 3\iiint_V (x^2 + y^2 + z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \frac{12}{5}\pi a^5 .$$

于是, $$\iint_S (x^3 + e^{y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(z^3 + \frac{3}{5}a^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{12}{5}\pi a^5 - \iint_{D^-} (x^3 + e^{y^2})\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^3\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \left(z^3 + \frac{3}{5}a^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{12}{5}\pi a^5 + \iint_{D^+} \left(z^3 + \frac{3}{5}a^3\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \frac{12}{5}\pi a^5 + \frac{3}{5}\pi a^5 = 3\pi a^5 .$$

10. 应用斯托克斯公式．取在平面 $\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$ 上的以椭圆为封闭曲线的平面块(椭圆) S，有

$$\oint_C (y-z)\,\mathrm{d}x+(z-x)\,\mathrm{d}y+(x-y)\,\mathrm{d}z$$

$$=\iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} = -2\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

椭圆面 S，在 xy 平面上的投影是圆：$x^2+y^2\leq a^2$；在 yz 平面上的投影是椭圆：$\frac{y^2}{a^2}+\frac{(z-h)^2}{h^2}=1$，在 xz 平面上的投影是直线段：$\frac{x}{a}+\frac{z}{h}=1$，$-a\leq x\leq a$．从而，有

$$\iint_S \mathrm{d}y\mathrm{d}z = ah\pi,\quad \iint_S \mathrm{d}z\mathrm{d}x = 0,\quad \iint_S \mathrm{d}x\mathrm{d}y = a^2\pi\,.$$

于是，$\oint_C (y-z)\mathrm{d}x+(z-x)\mathrm{d}y+(x-y)\mathrm{d}z = -2(ah\pi+a^2\pi)$

$$=-2a\pi(a+h)$$

11. 设 $\cos\alpha$，$\cos\beta$，$\cos\gamma$ 是外法线的方向余弦，有

$$\frac{\partial u}{\partial n}=\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\,.$$

根据奥 - 高公式

(1) $$\iint_S \frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=\iint_S\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta+\frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma\right)\mathrm{d}\sigma$$

$$=\iint_S \frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iiint_V\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=0\,.$$

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\sigma=\iint_S u\frac{\partial u}{\partial x}\mathrm{d}y\mathrm{d}z+u\frac{\partial u}{\partial y}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+u\frac{\partial u}{\partial z}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= \iiint_V \left[u\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \iiint_V \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z .$$

12. 证法一　设 $\boldsymbol{A} = (A_x, A_y, A_z)$

$$\mathbf{rot}\,\mathbf{rot}\,\boldsymbol{A} = \mathbf{rot}\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} & \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} & \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{k}$$

$$= \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z \partial x}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y \partial z}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)\boldsymbol{k} - (\Delta A_x \boldsymbol{i} + \Delta A_y \boldsymbol{j} + \Delta A_z \boldsymbol{k})$$

$$= \mathbf{grad}\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A} .$$

证法二　用纳布拉算子

$$\mathbf{rotrot}\ \boldsymbol{A} = \mathbf{rot}\ (\quad \times \boldsymbol{A}) \qquad\qquad \boldsymbol{A})$$

$$= \qquad\qquad \boldsymbol{A}) \qquad\qquad \boldsymbol{A} = \mathbf{grad}\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} - \Delta \boldsymbol{A}\ .$$

13. 用纳布拉　算子．由奥-高公式，有

$$\ \ _S (\boldsymbol{A}\times\mathbf{grad} f)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma = \ \ _S (\boldsymbol{A}\times \quad f)\cdot \boldsymbol{n}\mathrm{d}\sigma$$

$$= \ \ _V \mathrm{div}\ \ \boldsymbol{A}\times \quad f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \ \ _V \quad \cdot(\boldsymbol{A}\times \quad f)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$= \ \ _V \quad f\cdot(\quad \times \boldsymbol{A})\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \ \ _V \mathbf{grad} f\cdot \mathbf{rot}\boldsymbol{A}\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z\ .$$

(应用公式 $\boldsymbol{a}\cdot(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c}) = \boldsymbol{c}\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}\ .))$

14. “　　”已知 $\mathrm{div}\boldsymbol{C} = 0$，**有**

$$\mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \mathrm{div}\ \ \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \qquad \boldsymbol{B} + \mathrm{div}\ \boldsymbol{C}$$

$$= \mathrm{div}\ \boldsymbol{B} = \mathrm{div}\ \mathbf{grad}\, u = \Delta u\ .$$

“　　”已知 $\Delta u = \mathrm{div}\ \boldsymbol{A}$，**有**

$$\Delta u = \mathrm{div}\ \boldsymbol{A} = \mathrm{div}\ \ \boldsymbol{B} + \boldsymbol{C}) \qquad \boldsymbol{B} + \mathrm{div}\ \boldsymbol{C},$$

即

$$\mathrm{div}\boldsymbol{C} = \Delta u - \mathrm{div}\mathbf{grad}\ u = \Delta u - \Delta u = 0\ .$$