目　　次

一　什么是数学？……………………………………………… 1

从科学技术的基础谈起（1）　什么是数学？（2）　关于数学的两种不同看法（3）

二　风格独特的中国数学发展史…………………………… 7

悠久的中国数学史（7）　中国数学史的分期问题（8）　萌芽时期和初步发展时期（9）　繁荣的时期(18)　全盛的时期(22)　西方数学传入的时期(28)　转折的时期(34)　现代数学迅速发展的时期(39)　中国古代数学的特征和它在世界数学史上的地位(45)

三　兴衰交替的外国数学发展史……………………………53

外国数学发展史的分期(53)　萌芽时期(54)　巴比仑的古代数学(55)　古代埃及的数学(58)　古印度的数学(62)　初等数学时期(63)　古典希腊时期的数学(64)　亚历山大里亚时期的数学(69)　古希腊数学的成就和局限性(73)　东方数学发展时期(76)　蓬勃发展的印度数学(77)　阿拉伯和中亚的数学进展(80)　东方时期数学的主要成就(83)　文艺复兴时期(85)　变量数学时期(89)　解析几何和微积分产生的阶段(91)　数学分析发展的阶段(94)　几何学的新发展(98)　代数学的新成就(105)　数学分析的巨大进展(107)　现代数学时期(109)

四　数学主要分支简介 ……………………………………………118

有哪些数学分支？(118)　代数学(119)　数论(128)　几何学(131)　解析几何学(133)　非欧几何学(139)　数学分析(144)　函数论(150)　微分方程(153)　概率论和数理统计(157)　运筹学(161)　数理逻辑(169)　计算数学(172)

五　数学的发展规律和未来展望 ……………………………175

数学的特点(175)　数学发展有些什么规律？(181)　数学发展的趋势(186)　数学的未来(192)

一　什么是数学？

从科学技术的基础谈起

(一)

探索广漠的宇宙，研究微细的粒子，考察地球的变化，揭露生命的奥秘，设计宏伟的高楼大厦，生产精巧的化工产品，等等，这是现在人类正在从事的、已经取得了许多成果的科学技术事业。这些科学技术的壮举，看起来千差万别，各不相同。但是，它们都有一个共同的地方，那就是不论哪一项科学技术活动都要用到数学，都要用数学作基础。

现代的社会，无论是工厂管理、物资调配，还是农业生产，市场供应，或者是军事训练、日常生活，哪一方面都要用到数学。可见数学的用场是多么广泛！

简单的说，数学是科学技术发展的基础，也是学习和掌握科学技术的基础。是人类理解自然、征服自然的有力武器，是掌握自然的一把钥匙。

(二)

数学，由于生产实践的需要在远古时代就已经产生，随着社会和科学技术的发展，现在已经成为分支众多、系统庞大的

一门科学了。

为了加速实现我国的四个现代化，把社会主义和共产主义宏伟的蓝图变成光辉灿烂的现实，我们要很好地学习数学，掌握数学，利用它为实现四个现代化服务，并使数学得到充分的发展。

那么，什么是数学？有哪些分支？数学发展的历史和规律性是怎样的？它有什么特点？现代数学进展的情况又是怎样的？这些问题是需要了解清楚的。本书想就这些问题进行简要的叙述，使我们对数学有一个大致的了解。

什么是数学？

（一）

一谈起数学，很自然会联想到小学里学的算术，中学里学的代数、平面几何、立体几何和平面三角等等。中小学的数学是一门基本工具学科，是学习数学的基础。数学由浅到深，由少到多，由简单到复杂，真是五花八门，琳琅满目。

数学的内容是那样的繁多，但是，如果我们把这些内容仔细分析一下，就可以看出数学大致可以分成两类：一类是研究现实世界的数量关系的；一类是研究空间形式的。比如算术、代数是研究数量关系的，几何是研究空间形式的，三角是两类情况都研究。整个数学，包括初等数学和高等数学都是以数和形作为研究对象的。

（二）

恩格斯在谈到数学的时候，曾经指出："纯数学的对象是

现实世界的空间形式和数量关系，所以是非常现实的材料。”（«反杜林论»，人民出版社1970年版，第35页）他并且明确地说：“数学是数量的科学；它从数量这个概念出发。”（«自然辩证法»，1971年版，第235页）什么是数学呢？可以这样地说，数学是一门研究客观物质世界的数量关系和空间形式的科学。

说得具体一些，数学以数和形的性质、变化、变换和它们的关系作为研究对象，探索它们的有关的规律，给出对象性质的系统分析和描述；在这个基础上分析实际问题，给出具体的解法。

关于数学的两种不同看法

（一）

关于什么是数学这个问题，现在是十分清楚了。但是，几千年来，众说纷纭，直到十九世纪以前，都没有一个公认的准确定义。有不少人从唯心主义观点出发来回答这个问题。这些观点妨碍过数学和其他科学的发展。

早在公元前五世纪前后，古希腊人运用演绎推理法所得到的结果跟观察到的结果非常符合，他们当时无法解释这种现象，因而形成了数学是宇宙结构的基础的观念。在这些人的头脑中，数学离开了自然界的现实，并且把数学和自己顶礼膜拜的天神等同起来了。这些人的格言是“数统治着宇宙”，他们所指的数，就是自然数。古希腊哲学家毕达哥拉斯（约前580－前500）就有一句名言，叫做“凡物皆数”。

十五世纪，以德国的哲学家、主教、泛神论者库萨的尼古

拉(1401－1464)为代表的一些人，曾经提出数学是以某种方式独立于、而且先于经验的直观的知识的观念。十六、十七世纪，德国著名的天文学家刻卜勒(1571－1630)和意大利的物理学家、天文学家、数学家伽利略(1564－1642)也都认为自然之书以数学特征写成，否认了除数量关系以外的其他物质的属性。

到了十九世纪，德国哲学家康德(1724－1804)的唯心主义对欧洲的影响很大，人们对数学的看法也都受到这种思想的影响。对于几何公理，康德把它叫做“先验的”，认为数学公理是天赋的真理，他说人自从一生下来就有空间的观念。德国数学家康托尔(1829－1920)在数学发展方面曾做出过成绩，集合的理论就是首先由他提出的。但是在什么是数学这个问题上，他的观点也是唯心主义的，他公然说集合论中无穷集合在神的理智中有着绝对的存在。

(二)

对于这些形形色色的唯心主义的观点，在十九世纪中叶以前，一直没有人给予过系统的、强有力的批判。1875年，无产阶级的革命导师恩格斯针对当时跳出来向马克思主义挑战的杜林(1833－1921)的唯心主义理论进行了强有力的批判。恩格斯用辩证唯物主义的观点指出：“数和形的概念不是从其他任何地方，而是从现实世界中得来的。人们曾用来学习计数，从而用来作第一次算术运算的十个指头，可以是任何别的东西，但是总不是悟性的自由创造物。为了计数，不仅要有可以计数的对象，而且还要有一种在考察对象时撇开对象的其

他一切特性而仅仅顾到数目的能力，而这种能力是长期的以经验为依据的历史发展的结果。和数的概念一样，形的概念也完全是从外部世界得来的，而不是在头脑中由纯粹的思维产生出来的。”(《反杜林论》,第35页)

恩格斯在《反杜林论》中的观点，不但批判了杜林的所谓数学具有“脱离特殊经验和现实的世界内容而独立的意义”的错误言论,同时也对什么是数学作出了科学的定义,那就是数学是一门研究现实世界的数量关系和空间形式的科学。

(三)

唯心主义和形而上学的观点并不是一经批判就会销声匿迹。十九世纪末,二十世纪初,关于什么是数学的唯心主义观点,仍旧不时抬头,影响着数学的发展。直到现在,关于数学的唯心主义仍在向辩证唯物主义挑战。比如，德国数学家希尔伯特(1862－1943)就提出数学的对象只是符号以及跟它们的实际意义不相关的运算规则；人们把他的观点叫做形式主义。美籍荷兰数学家布劳威尔(1881－1966)提出数学的真理在数学家的头脑中；他的观点叫做直觉主义。还有一种观点叫做逻辑主义,认为全部数学是从逻辑概念中导出来的。

直觉主义认为数学来源于直觉，只有能直觉感受的东西才有意义，他们认为象 n 次代数方程有 n 个根的定理是空洞的,没有意义。极个别的直觉主义者甚至认为,世界上有多少数学家，就有多少种数学。当代美国数学史家波耶的观点也是唯心主义的,他认为数学既不是对自然界的描述,也不是对自然界的作用的解释,数学仅仅是可能关系的符号逻辑。

但是，数学本身的发展表明，任何一个有意义的数学公理体系都不是完全脱离客观物质世界的产物。数学来源于物质世界，是从人们感性经验中提炼和概括出来的。有许多高度抽象的数学理论，虽然是从其他数学理论发展而产生出来的，但归根结底，它仍然来源于非常现实的客观物质世界。反过来，数学理论又帮助人们去揭示客观物质世界。我们应该用这种辩证唯物主义的观点来认识什么是数学，正确地看待数学的产生和发展。只有运用辩证唯物主义的观点才能正确地认识数学的作用，深刻地理解数学作为基础科学和其他学科的相互渗透的关系，从而掌握好数学把科学推向前进。

二　风格独特的中国数学发展史

悠久的中国数学史

（一）

我们伟大的祖国，是世界上公认的四大文明古国之一，有悠久的历史和灿烂的文化。上下五千年的中国文化，丰富多彩，为今天的世界文明作出了不朽的贡献。中国数学是中国文化的一个重要组成部分，在中国文化史的宝库里，中国数学史也是闪闪发光的部分，值得我们认真地研究和学习。

我国古代，开化很早，由于社会生产比较发达，在数学方面，积累了极其丰富的知识，有许多杰出的成就。中国数学的发展和成就，在世界数学史上占有非常重要的地位，在世界数学宝库里，中国古代数学是影响深远、风格独特的体系。

（二）

有关中国数学的历史资料，内容浩瀚，我国著名的数学史家李俨（1892－1963）先生、钱宝琮（1892－1974）先生、严敦杰先生等写过许多专门著作，介绍了中国的数学史。这里只作简略的叙述，着重介绍中国古代数学的特点、中国古代数学在世界数学史上的地位。

几千年的中国数学发展史，既有蓬勃发展、繁荣昌盛的时候，也有停滞不前、黯然失色的时候。但是，正象其他的文化史一样，总是随着社会的发展而不断地向前发展，形成了从萌芽状态的零散知识到分支庞杂的科学体系这样一部悠久的中国数学史。

中国数学史的分期问题

(一)

研究历史就会碰到分期的问题，研究中国数学史同样也存在分期的问题，因为数学的发展既和历史紧密地联系在一起，又有它本身的特点。

研究中国数学的历史，怎样分期才能确切地反映数学发展的阶段性，是十分重要的。但是，直到现在，我国数学史界还没有一个公认的定论。

(二)

本书参考了李俨先生的《中国算学史》，把中国数学的发展按照下面六个不同的时期加以介绍。这六个时期是：

第一个时期，汉朝初年(公元前一世纪)以前整个两三千年的漫长时期，是数学萌芽和初步发展的时期。

第二个时期，从汉朝初年到隋朝中叶(公元七世纪)大约七百多年的时期，是数学迅速发展和繁荣的时期。

第三个时期，从隋朝中叶到元朝末年(公元十四世纪中叶)大约七百多年的时期，是数学发展的全盛时期。

第四个时期，从明朝初年到清朝中叶(公元十八世纪中

叶)大约三百年的时期，是西方数学传入中国的时期。

第五个时期，从清朝中叶到中华人民共和国成立的时候大约二百年的时期，是中国数学发展的转折时期。

第六个时期，从中华人民共和国成立到现在，是现代数学迅速发展的时期。

应该指出，这种分法不是十分严格的，有些数学家的研究活动和他们的研究成果可能跨越两个时期，那就根据他们的主要活动和历史情况列入相应的时期了。

萌芽时期和初步发展时期

(一)

萌芽时期和初步发展时期的中国数学是怎样的呢？我国古代数学究竟从什么时候开始萌芽的？我们远古时代的祖先究竟什么时候开始掌握数和形的概念的？这些都是十分有趣但是又不容易回答的问题。

远古年代还没有产生文字，对于数学的萌芽没有文字记录供我们考证，但是我们可以从古代传说、古书记载和考古发现中推断出，在很久很久以前的年代起，我们中华民族勤劳的祖先，就已经懂得数和形的概念了。

萌芽时期和初步发展时期的数学主要成就有：

结绳记数；发明规矩用来作图和测量；发明了一套十进位的记数方法；把数的概念从整数扩充到分数、负数，建立了数的四则运算的算术系统；发明了算筹用作计算工具；几何方法广泛应用；方程的解法达到很高的水平；产生了许多有关数学

的著作，特别是编出了系统的数学专著。

（二）

结绳记数就是用绳子打结来表示数的一种方法，我国古书有很多这方面的记载。

战国时期的学者庄周（约前 369－约前 286）就在他的著作中提过："伏羲作结绳"，伏羲是中国神话中人类的始祖，这说明结绳在十分久远的年代就有了。周代（公元前 1000 年前后）的《易经》中也有"上古结绳而治"的说法，这就是说，远古时代我国劳动人民是用绳子打结作记录工具和记数的。

（三）

战国时期的另外一个学者尸佼[①]（约前 390－约前 330）著有《尸子》，他写道："古者，倕为规、矩、准、绳，使天下仿焉。"这个倕，传说是距离现在四千五百年左右黄帝或唐尧时候的能工巧匠。从尸佼的言论中可以看出，四千五百年前，我们的祖先已有测量作图的工具，懂得了"圆、方、平、直"的概念。

汉朝武梁祠造象（规矩图）。

其实比尸佼更早，春秋战国时期的学者墨子、孟子、荀子、韩非子等人都说过规矩方面的事。规就是圆规，矩就是现在木工所用的角尺一类的工具。

流传至今的汉朝武梁

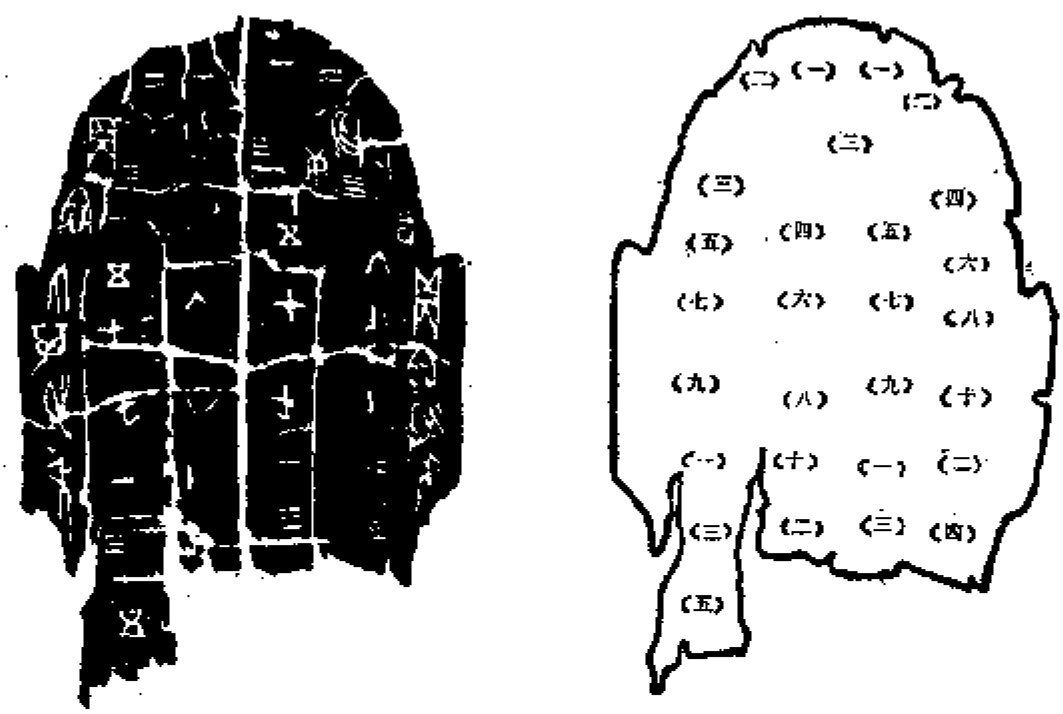
① 尸佼，晋国人，另一说是鲁国人，曾参与秦国商鞅的变法的策划，著有《尸子》等书，已佚，唐代辑有其中的《劝学》等十三篇。

祠的浮雕象中，有伏羲手执矩、女娲手执规的造象。根据不止一处发现的这种造象来推测，规矩的产生应该是很早的事情。汉朝著名史学家司马迁（约前145或135－？）在《史记》中曾说过：夏禹治水的时候，是“左准绳，右规矩”。这就是说，夏禹是左手拿着水准工具和绳尺，右手带着规和矩去进行测量规划工作的。

规矩的使用，对于后来的几何学的产生和发展，有很重要的意义。

（四）

十进位值制记数法，我国发明最早。1899年从河南安阳发掘出来的龟甲和兽骨上所刻的象形文字，是大约三千多年前的殷代文字，叫做甲骨文。其中载有许多数字记录，比如有一片甲骨上刻着：“八日辛亥允戈伐二千六百五十六人。”



甲骨文中的数字。

意思是说在八日辛亥[1]那天的一次战争中，消灭了敌方二千六百五十六人。这段文字值得注意的是，当时已经采用"十进位值制"的记数方法，和我们现代所用的记数方法是完全一致的。

除甲骨文外，还有一种刻铸在金属的钟或鼎的文字，叫做"钟鼎文"或"金文"，是周代文字，也有记数符号流传下来。到了汉朝，记数符号略有改变，但是变化不大。下面列出甲骨文、金文、汉朝文字和现代汉字的十个数目字形，通过比较，可以看出数字的发展情况。

（五）

除了整数之外，我国古代人认识分数也是比较早的。开始人们只认识一些单分数，就是分子等于1的分数，后来逐渐认识到一般分数。在我国最早的算书《周髀算经》中就有用文字来表示分数的记载。

负数的使用，在汉朝初年就有记载。

至于整数和分数的四则运算和应用，也是很早的事了。我们都知道"九九歌"，是个正整数的乘法歌诀；在古时候，这个歌诀是从"九九八十一"开始而不是从"一一如一"开始的，

---

[1] 我国殷商时代的纪日法是干支六十周期的体系，用干支纪年，是西汉末期（公元一世纪）才开始的，这里辛亥是八日的干支。

所以叫做“九九歌”。“九九”在古书《荀子》、《管子》中有记载，在出土文物的汉竹简上也有记录。相传春秋时期的齐桓公，专设一个招贤馆征求各方人才，等了很久也没有人来应召；一年以后来了一人，把“九九歌”当作见面礼献给齐桓公。齐桓公笑道：“‘九九歌’能当见面礼吗？”这人答道：“‘九九歌’确实不够资格拿来作为见面礼，但是您对我这个仅懂得‘九九’的人都能重视的话，还愁比我高明的人不接连而来吗？”齐桓公认为很对，就把他请进招贤馆隆重招待，果然不出一个月，许多有才能的人都从四面八方前来应召了。这故事告诉我们，在春秋时期，“九九歌”已经被人们广泛地掌握了。

(六)

我国古代人用的计算工具是“算筹”。所谓“筹”，就是一般粗细、一般长短的小竹棍。由于那时还没有纸张，古代数学家就用这些小竹棍摆成不同的行列来进行计算。用算筹进行的计算，叫做“筹算”。算字的古代写法是“筭”，竹字头，下面一个弄字，字的结构是值得推敲寻味的。

使用算筹来表示数目有纵横两种摆法：

纵式	𝍠	𝍡	𝍢	𝍣	𝍤	𝍥	𝍦	𝍧	𝍨
横式	𝍩	𝍪	𝍫	𝍬	𝍭	𝍮	𝍯	𝍰	𝍱
	1	2	3	4	5	6	7	8	9

如果使用算筹来表示各种大于9的数目，方法是：纵横交错摆放，个位数用纵式表示，十位数用横式表示；百位、万位用纵式，千位、十万位用横式。例如6614这个四位数用算筹表示出来是𝍮𝍥𝍩𝍣。遇到某位数是零的时候，最早的方法是不

摆放算筹，让它空位，例如86021，用算筹表示是𝍧𝍮　＝｜；后来才改用圆圈〇表示零，86021又摆成𝍧𝍮〇＝｜。

这种算筹究竟开始于什么时候，无从考证。但是我们可以肯定，到春秋战国时代，人们已经能熟练地运用它，到西汉天汉元年（公元前100年），人们已经用它进行四则运算、开平方、开立方了。

（七）

我国古代几何学的应用很早，而且相当广泛。有一本叫做《周髀算经》的书里，就记载有著名的几何定理。

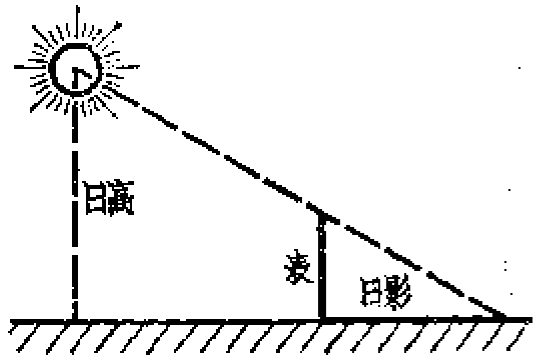
《周髀算经》是一部汉人撰写的古人讨论“盖天说”的书，髀的原意是股或股骨，这里的意思是指长八尺用来测量太阳影子的表，这本书的内容记述了周代的问题，所以叫做《周髀算经》。其中第一章叙述了西周开国时候（约在公元前1100年左右）周公同一个名叫商高[①]的人的一段问答。商高在答话中提到了“故折矩以为句广三、股修四、径偶五”，句是古代勾字。这就是著名的“勾三股四弦五”的勾股定理，又叫做商高定理。所谓勾股定理，是指一个直角三角形两腰的平方（勾平方加上股平方）和等于斜边（弦）的平方。国外把这个定理叫做“毕达哥拉斯定理”，其实古希腊数学家毕达哥拉斯要比商高晚生六百多年。

古代人用勾股定理来进行测量计算，他们用“两个直角三角形对应边成比例”的关系来计算太阳的高度，结果当然不能

---

① 商高（生卒年代不详）周朝数学家，据史料记载，是世界上最早提出勾股定理的人。

正确，但是利用它来进行地面上的远近、高低的测量，是能够做到十分精确的。由此看来，我国上古数学已经发展到一个相当高的水平，几何知识相当丰富。《春秋》一书记录着"初税亩"，这说明在这以前应当有测量田亩面积的计算方法；战国时期各方的统治者为了要储备粮食，应当有计算仓库容积的方法；修建渠道、防洪堤和其他土木工事，应能计算工程人工；要修订一个适应农业生产的历法，必须作好太阳、月亮的循环周期的计算工作。那时候的"畴人子弟"① 是积累了不少实用的数学知识和计算技能的。



测日示意图。

关于《周髀算经》，书中有两点值得注意：一是复杂的分数计算，二是关于勾股定理和用勾股定理测量的记载。两千多年前，占星术和卜筮占支配地位，但书内讨论天文地理的现象，丝毫不带迷信成分，完全运用科学的说理和计算，这是很可贵的。

（八）

我国古代的代数在初步发展时期，更是世界上遥遥领先的。关于方程、开方等方面的知识，在一本叫做《九章算术》的古书里，专门作了叙述。

《九章算术》的作者和成书年代都很难确切考证出来，它

---

① 古代计算天文历法的人叫做畴人，世代相传都是计算天文历法的人，就叫做畴人子弟。

的全称最早出现在公元 179 年的两个青铜量器的铭文中。有些学者推测这部书大概是公元前二世纪秦朝或西汉时期的著作。这是一部现在还有传本的、最古老的中国古代数学的经典著作，总结了周朝、秦朝以来的数学研究成果。它的出现标志着我国古代数学体系的完整形成。它的内容共分九章：

第一章“方田”，主要讲田亩面积的计算，还详细叙述了分数的计算法。

第二章“粟米”，主要讲各种粮食比例交换的计算法。

第三章“衰分”，主要讲按比例分配的问题。

第四章“少广”，讲开平方、开立方的计算方法。

第五章“商功”，讲各种形状的体积的计算方法。

第六章“均输”，讲怎么样按照人口、路途远近等条件合理安排各地的赋税和分派工程等问题的计算方法。

第七章“盈不足”，讲用假设有余或不足的方法来解决某些难算的问题。

第八章“方程”，讲关于联立一次方程组的普遍解法。

第九章“勾股”，讲怎样用勾股定理，怎样用直角三角形的相似形按比例进行计算的问题。

第八章中联立一次方程组的普遍解法，第九章中的二次方程的普遍解法，是中国古代数学非凡的成就之一，欧洲过了一千多年，才由法国数学家获得了类似的成果。正负数的概念和正负数的运算法则，也是我国提出最早，更是具有世界意义的重大成果。

《九章算术》的内容和生产实际紧密联系，丰富多采，高度显示了我国古代劳动人民的智慧和才能。这部书不但在中国史上而且在世界数学史上都占有重要的地位，一直受到中外数学史家的重视。

（九）

萌芽时期和初步发展时期除了《周髀算经》和《九章算术》这两部数学专著外，其他一些重要的古代科学著作中，也都记有许多有关数学的知识。

比如战国时期齐国人撰写的《考工记》，就记有尺寸的分数比例，角度大小的区分，标准容器的计算等。

墨子和他的弟子所编的《墨经》，是古老的自然科学巨著，它里面也有许多数学概念，特别是几何学方面的。他们在书中叙述的"圆，一周同长也"的概念，现在看来也是十分准确的。

繁荣的时期

（一）

从汉朝初年开始到隋朝中叶，社会生产逐步扩大，我国的数学进入了迅速发展的繁荣时期。

这个时期的数学有哪些新的发展？又有哪些重大的成就呢？

这个时期我国数学发展的最重要的成就有：

整理和注解《九章算术》；圆周率的计算；几何学的应用；编出了更多的数学专著。

这个时期出现的著名数学家有刘徽、祖冲之、祖暅等。

（二）

《九章算术》前一时期已经提到，它从汉初流传下来以后，经过许多数学家的研究整理和补充，内容变得更加丰富了。现在的传本共有九卷，是东汉初年编纂后经过各个朝代的数学家注释过的。书内收进了246个数学问题，采用问题集的形式编写，有许多还是秦朝以前传下来的老问题，汉朝以后添补进去的新问题也不少。注家中最著名的要算魏晋时代的刘徽。

刘徽是魏晋时代的数学家，生卒年代不详，只知道他在公

元 263 年(魏景元四年)给《九章算术》加注。刘徽研究数学的特点是：善于用文字讲清道理，用图形来解释各种问题。

(三)

刘徽在数学方面有不少创见，最主要的成就是用割圆术求圆周率。《九章算术》原来用 3 代表圆周率进行计算，很不精确，刘徽研究后发现并指出了这个错误。怎样才能算出正确的圆周率？刘徽从圆内接正六边形算起，再算正十二边形、正二十四边形，直算到正三千零七十二边形，求得圆周率是 $\frac{3927}{1250}$，相当于 3.1416，刘徽认为只要不断把圆内接正多边形的边数扩大，就能算出精确的圆周率。这种方法叫做割圆术。

刘徽算出的圆周率，在那个时代已是很先进的了。到了南北朝时期，一位数学家算出的圆周率更为精确。这位数学家就是祖冲之(429-500)。祖冲之当过县令、校尉，制造过指南车、千里船、水碓磨等机器，是一位杰出的科学家。他求出的圆周率，用现在的符号表示就是：

$3.1415926 < \pi < 3.1415927$。

用分数表示是：

约率 $= \frac{22}{7}$，密率 $= \frac{355}{113}$。

密率这个数值比欧洲人早发现1100多年，直到现在还在使用。所以人们建议把密率改叫“祖率”，以纪念这位杰出的人物。

祖冲之。

祖冲之还和他儿子祖暅合撰了《缀术》，这是一部水平很高的数学专著，可惜到了隋唐时代失落了，这实在是古代数学的很大损失。

（四）

西汉以后，对于天文历法、气象、地震预测的研究有了很大的发展，生产也扩大了，这些都促使数学的迅速发展。

这个时期几何学的应用特别广泛，几何学的发展也比较迅速。刘徽除注《九章算术》外，还撰写了《重差术》一卷，《九章重差图》一卷。《重差术》就是一部运用几何知识测量远处目标的高、远、深、广的数学著作，因为这本书开头的第一个问题是测量海岛高度和距离多远的问题，所以也叫做《海岛算经》。

祖冲之的儿子祖暅，也是一位博学多才的数学家。他得出的求球体体积公式十分巧妙，如果用现在的符号表示出来，就是

$$V=\frac{4}{3}\pi r^{3}。\qquad (r\text{是圆球半径})$$

这是直到现在都在使用的几何公式。可见当时数学发展的水平是很高的。

祖暅还发现了关于两个几何体的体积相等的"祖暅定理"，比意大利数学家卡瓦列利（1598-1647）的相同定理早一千二百年。

（五）

古代数学的繁荣时期，数学家编著了许多数学专著，丰富了古代数学的宝库。这个时期的著名数学专著，除了上面提到

的《缀术》和《海岛算经》外，还有《孙子算经》、《夏侯阳算经》、《张丘建算经》、《五曹算经》、《数术记遗》和《五经算术》等。

《孙子算经》是谁编著的，没有考证出来，著作的年代也不清楚。从南北朝的书中提到这本书的情况推算，它应该是比南北朝更早的年代编写的。全书共分三卷，上卷讲算筹计算法则，中卷讲筹算分数和开平方法，下卷是各种计算题举例。

《夏侯阳算经》原本早已失传，著作年代无法考证。现在的传本是后来的人转刻的，内容包括用乘除快算方法解日常生活中的应用题。

《张丘建算经》是南北朝时代的张丘建撰写的。内容包括等差级数、二次方程、不定方程等问题的解法。

《五曹算经》据说是魏晋时代的著作，因为全书内容包括田曹、兵曹、集曹、仓曹、金曹五部分，所以得名。主要是叙述计算各种形状的田亩面积、军队给养、粟米互换、租税、仓库储存物品的容积、丝帛和物品的交易等问题。

《数术记遗》和《五经算术》的内容有许多相同的问题和计算方法。著作年代都不详细，《数术记遗》据说是汉朝徐岳撰写的，《五经算术》是谁编著的就不清楚了。

这些数学著作总结了当时的数学成果，对后来的数学发展，起了很大的作用。

这里简单地介绍一下《孙子算经》里的一个有趣的问题。这个问题记在下卷的“物不知数”。内容大意是：有一堆物品，不知道共有多少；如果三个三个地数，剩下两个；如果五个五个地数，剩下三个；如果七个七个地数，剩下两个；问这堆物品

共有多少？答数是二十三。后面还有解题的方法。这个问题的解法，后世的人编成了一首诗歌：

三人同行七十稀， 五树梅花廿一枝，

七子团圆正半月， 除百零五便得知。

第一句是说用“三”数后的剩余数乘七十，第二句是说用“五”数后的剩余数乘二十一，第三句是说用“七”数后的剩余数乘十五，第四句是说把前面三个相乘的积加起来再减去一百零五的倍数便得到答数。

用诗歌形式来表示解题方法是饶有兴味吸引人的，因为“物不知数”出自《孙子算经》，所以这个问题被后世人叫做《孙子问题》，那首诗也被叫做“孙子歌”。“孙子歌”还随着对外文化交流，远渡重洋传到了日本等国。

全盛的时期

（一）

隋朝中叶到元朝末年，大约七百多年，这个时期，我国经济迅速发展，特别是在唐朝初年和宋朝初年，封建王朝的政治家总结了历代王朝覆灭的教训，采取了比较开明的政策，在特定的短时期内，这些政策有利于生产的发展。我国的科学技术也得到了极大的发展。世界上最大运河是在隋朝末年开凿的，中国的四大发明中的火药、活字印刷也都是在唐朝和宋朝发明的。原始火箭也在宋朝出现，到了元朝已使用在军事上。

由于生产和科学技术的发展，要求数学提供更为精确简便的计算方法，因此，数学发展到了盛极一时的时期，代数、几

何都有许多新的成就，达到了同时代世界的最高水平。数学界人才辈出，他们的研究成果，传到国外，影响了外国数学的发展，深受人们的尊敬。

全盛时期的数学成就主要有：全国建立数学教育制度，学校设立数学专业；《算经十书》的编辑；数学新理论不断出现，比如高次方程解法、隙积术和垛积术、大衍求一术等等。

(二)

隋朝以前，我国的各种学校都没有专门学数学的专业，隋朝在相当于现在的大学里，开设算学专业，这是我国数学教育制度的开始。在《隋书·百官志》里面就记有国子监(大学)祭酒(校长)的职权范围，说祭酒管理算学等专业。到了唐朝显庆元年(656年)，国子监添设算学馆，设有博士、助教，指导学生学习数学。这相当于现在的大学设立数学系，有教授、助教上课辅导，专门培养数学人才。

有算学专业，就要有教材，以前的教材是《周髀算经》、《九章算术》等。唐朝的数学家李淳风(?-714)等人奉命审定历代数学著作，作为国子监中算学馆的教科书。他们共审定了十部古书，这十部书是：《周髀算经》、《九章算术》、《孙子算经》、《五曹算经》、《夏侯阳算经》、《张丘建算经》、《海岛算经》、《五经算术》、《缀术》、《缉古算经》。这十部书后世的人就叫做《算经十书》。但是传到后世，因为《缀术》失传，有些书的真本也丢失了，所以《算经十书》包括的十本书也不相同。

国子监规定了教科书，定出了学习年限，每月都有考试，数学教育逐步正规完善起来，对数学的发展有很重要的意义。

(三)

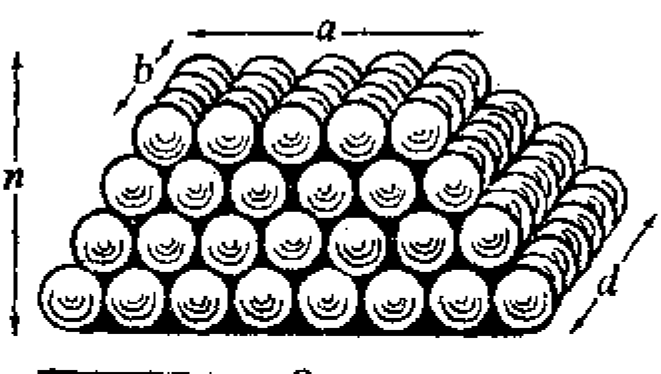
这个时期的著名数学家有：王孝通、李淳风、一行、沈括、李冶、贾宪、杨辉、秦九韶、郭守敬、朱世杰等。

王孝通是唐朝数学家，著有《缉古算经》又叫做《缉古算术》。王孝通的数学研究集中在解方程的问题，主要成就是利用三次方程来解决体积问题和勾股问题。

李淳风的贡献，主要是校注和编定《算经十书》等，他自己还撰写了《九章算经要诀》一卷。

一行(683-727)是唐代的高僧，原名张遂，是一个著名的天文学家。他在编纂历法的时候，运用和提出了许多数学定理，如"不等间距的二次内插公式"等。

沈括(1031-1095)是宋朝的大科学家，著有《梦溪笔谈》等著作，他在数学方面的主要成就有"会圆术"，是最早提出由弦到矢的长度来求弧长的近似公式，开辟了球面三角法的途径。他还提出了"隙积术"，这是一种级数求和法。他提出一个长方台垛积着物体，假如顶层宽有 a 个物体，顶层长有 b 个物体；底层宽有 c 个物体，底层长有 d 个物体；垛积的高度共



垛积图。

有 n 层；那么，整个垛积着的物体总数 S 就是：

$$S=ab+(a+1)(b+1)+\cdots+cd$$
$$=\frac{n}{6}[(2b+d)a+(2d+b)c]+\frac{n}{6}(c-a)。$$

这个公式，现在来看也是正确的。

贾宪是宋朝数学家，他的生卒年代不清楚，可能是十一世纪的人。他曾经写过《黄帝九章算法细草》等书，都失传了。比他晚大约二百年的数学家杨辉，1261年著有《详解九章算法》，后来又继续著有《乘除通变本末》、《田亩比类乘法捷法》、《续古摘奇算法》等数学著作，在他的《详解九章算法》中，载有"开方作法本源图"，这个图是二项展开式系数所构成的表。如：

$$(x+a)^0=1,$$
$$(x+a)^1=x+a,$$
$$(x+a)^2=x^2+2ax+a^2,$$
$$(x+a)^3=x^3+3ax^2+3a^2x+a^3,$$
$$(x+a)^4=x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4,$$

………………………………………………

它的系数所构成的表是：

1

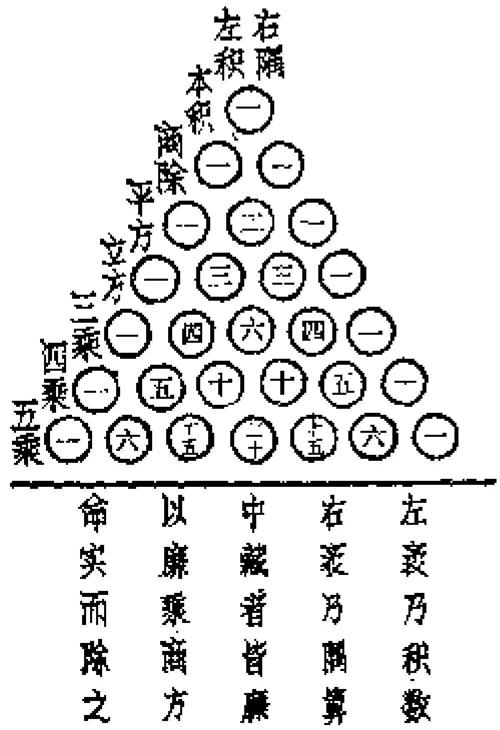
1　1

1　2　1

1　3　3　1

1　4　6　4　1

………………………………………………



开方作法本源图。

左面的图就是杨辉著作中的《开方作法本源图》。

欧洲人通常把这个表叫做"帕斯卡三角"，以为它是法国数学家帕斯卡（1623-1662）首先发现的，这是很不正确的，事实上杨辉比帕斯卡要早发现几百年。在《详解九章算法》中，杨辉自注说，这个方法出于《释锁算书》，贾宪曾用这个方法，这说明1200年以前，中国就已经发现和使用这个方法了。因此，应该叫做杨辉三角或贾宪三角。

李冶(1192-1279)是宋朝的数学家，1248年著成《测圆海镜》十二卷，这是一部涉及代数、几何等多方面的数学著作。他的另一部数学著作叫做《益古演段》。这些书都总结了当时数学发展的一些成就，对后来的数学研究是很重要的资料。

秦九韶(1202-1261)是宋朝最著名的数学家。他的父亲是宋朝的官吏，秦九韶从小就随他父亲到杭州，向太史局(一个主管天文历法的机构)的官员学习天文历法，数学成就十分显著。他著有《数书九章》十八卷，对于"正负开方术"和"大衍求一术"，研究得很深。"正负开方术"是数字高次方程的求正根法。这种方法，在秦九韶提出五百多年以后，西方人才研究出来。他的"大衍求一术"是用来求解不定方程的，不定方程

问题如前面提到的“孙子问题”，可归结为一次同余问题。秦九韶在求一次同余问题方面有特殊的创见，所以倍受国内外数学家的称赞，认为秦九韶在很早以前就在一次同余问题上取得这样重大的成就，很了不起，是“他那个民族，他那个时代，而且确实也是所有时代最伟大的数学家之一。”相同的理论，西方一直到了十八世纪和十九世纪，才由著名的瑞士数学家欧勒(1707-1783)和德国的数学家高斯(1777-1855)分别研究出来。所以谈到一次同余理论和“大衍求一术”的时候，外国数学家都把它叫做“中国剩余定理”。有关“中国剩余定理”的具体运用，限于篇幅，这里就不介绍了。读者如果有兴趣，可以参阅中国青年出版社出版的《中国古代科技成就》中的《中国剩余定理》一文。

郭守敬(1231-1316)是元朝的天文学家、水利学家和数学家。他和王恂(1235-1281)、许衡(1209-1281)等人编制了《授时历》，在数学方面研究了“招差术”，对日、月、五星运行不等速度的计算方面，他认为距离是时间的三次函数，用“招差术”可以解决这个问题。这种方法对后来的天文计算和数学都很有影响。

朱世杰也是元朝数学家，生卒年代不详，他在1299年著有《算学启蒙》三卷，1303年著有《四元玉鉴》三卷。对于高阶等差级数和“招差术”都有独到的研究。对于多元高次方程的解法，他的《四元玉鉴》集中叙述了前人的学说，是一部高水平的代数学著作。他的高阶等差级求和法可用现在的方式归纳成：

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{p!}r(r+1)(r+2)\cdots\cdots(r+p-1)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots\cdots(n+p)。$$

$$(p=1、2、3、4\cdots\cdots)$$

当招差术在我国达到如此完善的地步的时候，在欧洲，直到1670年，苏格兰人格里高里(1638-1675)才作出了说明，到了1676-1678年，在英国大科学家牛顿(1642-1727)的公式中才出现这种普遍的公式。可见，在全盛时期的我国古代数学，在许多方面都超过西方，处于遥遥领先的地位。

(四)

我国的古代文明，很早就通过各种渠道传到国外，外国的古老文明也通过宗教、贸易等渠道传入我国。接近我国的朝鲜、日本等国受我国的影响最大。

象上面提到的"孙子歌"曾传到日本，除了具体的数学知识外，连我国的数学教育制度，日本也仿照实行。据史书记载，日本在701-703年也开始确立了类似的数学教育制度。

朝鲜在918-1392年这段时期的王氏高丽王朝，也仿照我国设立学校的算学馆，采用我国唐朝和宋朝编定的《算经十书》作教材，连教授和考试的方法也和我国的一样。这些都说明我国的数学发展对一些国家的影响是深远的。

西方数学传入的时期

(一)

从宋朝末年起，到元朝中央集权建立，连年战火不断，经

济生产、科学技术受到极大的破坏。

明朝建立后，封建统治阶级仍然支配着国家，在一个短暂的时期内，生产得到了恢复和发展，但是，很快又由于封建统治阶级的腐朽而处于衰败的境地。农民起义彼伏此起。明朝覆灭后，到清朝初年，生产才又一度恢复和发展。

在我国还继续巩固封建统治的时候，西方已从中世纪的黑暗中苏醒，开始向资本主义转变。资本主义的萌芽和发展到了一定阶段，为了寻找原料、市场和廉价劳动力等，就要向外侵略。天主教的传教士也和海盗商人一样充当了资本主义向外侵略的开路先锋。

西方国家的科学文化就伴随着那些传教士的侵略活动带到了中国。

（二）

从数学方面来说，外国的一些算法从七世纪开始，就曾随着佛教、伊斯兰教传入我国，但是，对我国的数学发展几乎没有影响。

到了明朝万历十年（1582年），意大利人，耶稣会教士利玛窦（1552-1610）随西方商船来到中国，通过他的翻译和传授，西方数学开始传入，对我国数学的发展产生了比较大的影响。

这段时间叫做西方数学传入时期，并不是说我国的数学没有发展，我国的许多学者在发展传统的数学方面，著书立说，仍然做出了很大的贡献。

西方数学传入时期，我国数学发展的主要成就是：计算工

具珠算盘算法的编撰，珠算盘在民间得到广泛应用，对古代数学著作的研究和加注，翻译了大量西方的数学著作等。

(三)

关于计算工具，我国以前使用的“算筹”，在进行除法运算的时候，手续非常繁复，据说唐朝有人搞过简化手续进行了改革，从商业实用算术开始，编了计算歌诀，可惜这种方法没有往后延传。

到了明朝，用珠算盘代替算筹计算已很普遍，接着就出现了许多介绍珠算方法的书，珠算方法在全国民间广为流传。

珠算盘是什么时候、什么人发明的？现在还没有人能够说清楚。有一本书叫做《鲁班木经》，书内载有制造算盘的规格，这本书写于明永乐末年(1424 年) 以后。但是，有一本叫做《南村辍耕录》，是元朝末年陶宗仪在 1366 年写的，书里已提到珠算盘的算法，可见，珠算盘的出现要比《鲁班木经》出书早得多。

1450 年，明朝数学家吴敬写了《九章算法比类大全》一书，其中就提到了珠算盘的计算。1524 年，王守素写《算学宝鉴》也对珠算进行了介绍。系统介绍珠算的书，最早的是1573年徐心鲁校订的《盘珠算法》。以后柯尚迁写了《数学通轨》，书内所讲的珠算盘规格，已和现代的相似。

珠算盘这种计算工具，适时的满足了经济发展的需要，只要背熟了运算歌诀，文盲也能进行计算，使数学更加广泛地为劳动人民掌握，珠算的意义是十分深远的。

珠算盘计算法，还传到了朝鲜、日本、越南、泰国等国家，

对这些国家的数学普及和发展，起了很大的作用。

（四）

这个时期，除了计算工具珠算盘的广泛使用外，数学的其他领域，没有新的重大成就和突破。但是许多数学家仍然研究数学，收集整理宋朝重版的《算经十书》，重新刻印，同时撰写数学著作。

1407年，明朝编选《永乐大典》，其中就收进了《算经十书》中的二十二卷。

这个时期的数学家有吴敬、程大位、柯尚迁、顾应祥、周述学、徐光启、李之藻、薛凤祚、梅文鼎、王锡阐、方中通、陈世仁、年希尧等。其中最著名的要算是程大位、徐光启、梅文鼎。

吴敬、柯尚迁都撰了不少数学专著。柯尚迁的《数学通轨》一书在日本流传很广，日本数学家著书还引用他的说法。明朝的数学家顾应祥（1483-1565）还著有《勾股算术》二卷、《测圆海镜分类释术》十卷，《弧矢算术》、《测圆算术》四卷。周述学也是明朝数学家，著有《神道大编》、《历宗算会》十五卷，书内附图说明，对代数、几何的论述，都有创见。

程大位《直指算法统宗》师生问难图。

程大位（1533-？）对于珠算盘算法的研究很深，他从小经

商，到了老年编成《直指算法统宗》十七卷，这是一部影响极大的数学专著，书刻印出来后，风行全国一百多年，凡是研究算法的人，几乎人手一册，把这本书奉为经典，这是任何其他古代数学书籍都不能相比的。

梅文鼎(1633-1721)是清初的天文学家、数学家。他毕生写书七十多种，其中数学著作占了三分之二，包括方程论、算筹、平面三角和弧三角、勾股、几何、方圆幂积、比例问题等。后人把他的著作编成《梅氏丛书辑要》六十卷，数学书就有四十卷。这是和他同时代的数学家都无法相比的。

王锡阐(1628-1682)是清朝数学家，著有《圜解》一卷，主要是讨论三角学的。方中通也是清朝人，著有《数度衍》二十四卷，内容比较广泛。陈世仁(1676-1722)著有《少广补遗》，专门研究"垛积术"。年希尧著有《测量刀圭》、《面体比例便览》、《视学》等著作。

(五)

利玛窦是天主教耶稣会的传教士，他是意大利人，在葡萄牙殖民势力的支持下，奉教会派遣在1582年来到我国现在的广东省，他把从西方带来的一些当时制造比较精巧的自鸣钟、各国地图、西洋琴等献给当地的官吏，获得了官吏的欢心。他在那里学了一年的中国语言，尔后到广东肇庆进行传教活动，在那里又通过贡献物品认识了更多的上层官吏。然后又到南京等地活动。他看到当时使用的"回回历"和实际天时有较大误差的缺点，用欧洲的方法推算出日食、月食出现的时间，取得了明朝政府的信任。于是他建议译书改历，这个建议得到

了明朝政府的同意。

1606年，利玛窦和明朝数学家徐光启(1562-1633)共同翻译了古希腊数学家欧几里得(约前330-前275)的《几何原本》前六卷。几何学这个名称，在我国就是从这个时候开始正式使用的。

徐光启是明朝的高级官员，曾经当过礼部尚书、翰林院学士、文渊阁大学士，对数学很有研究。他和利玛窦翻译了《几何原本》以后，又一起编译了《同文算指》、《图容较义》、《测量法义》、《测量异同》、《勾股义》 等书。这些书的内容都是当时西方迅速发展的数学知识，包括代数学、几何学、三角学等。徐光启翻译十分认真，这些书对后来的数学发展很有影响。徐光启后来又和明朝数学家李之藻(1565-1630)编著了《崇祯历书》一百三十七卷，编写的方法都是根据利玛窦介绍的西方历法进行的。数学的基础理论和计算工具也大都是西方的。李之藻当过明朝南京工部员外郎，他自己还编有《天学初函》二十种，详细地介绍西方的数学。

利玛窦动手改编历法的时候，深深感到自己天文学知识的不足，他写信给派遣他的耶稣会，请求派天文学家来华，不久，一批批西方教士来到中国，有的进入京都参加编写历法，有的在各地传教，但有的也充当资本主义势力扩张的工具。

波兰传教士穆尼阁(1611-1656)到南京后，向数学家薛凤祚(?-1680)传授对数，这是对数传入中国的开始。同时穆尼阁还和薛凤祚共同翻译了讲述三角函数的《比例四线新表》一卷。穆尼阁死后，薛凤祚根据穆尼阁所传授的内容，编著了

《历学会通》一书，其中包括《比例对数表》、《比例四线新表》、《三角算法》各一卷。

西方数学的传入，对我国传统数学的发展影响极大。清朝初年，许多朝廷的官吏、民间的学者都学习西方数学。据记载康熙皇帝也在1689年把法国传教士传入宫廷，向他们学习西洋数学。

从顺治皇帝开始，请德国传教士汤若望(1591-1666)掌管“钦天监”，推行西方的新历法。直到清道光十七年(1837年)，“钦天监”都由外国人掌管。

当时西方数学的最新发展，大部分都由这些传教士传到中国来了。只有《微积分》和系统的《解析几何》一直没有传来，可能是这些传教士的数学知识有限。他们自己也没有弄清楚这些数学新分支的基本原理。因此，《微积分》的传入就是以后的事情了。

转折的时期

(一)

从清朝雍正年间(1723年)开始，封建统治阶级内部争权夺利、互相倾轧，政局动荡不定，国内民族矛盾不断加深，资本主义萌芽受到压抑，社会经济停滞不前。到了清朝道光年间，政府日趋腐败，帝国主义乘机入侵。鸦片战争失败后，清政府向帝国主义割地赔款，开放商埠，承认不平等条约。从此，我国沦为半封建半殖民地。欧美各帝国主义国家竞相来华，进行经济掠夺和文化侵略。

封建主义、帝国主义的双重压迫，迫使农民高举义旗起来反抗。太平天国运动极大地动摇了清朝的统治。1911 年，孙中山领导的旧民主主义革命，推翻了帝制，建立了中华民国。但是革命成果很快又落入了军阀的手里。一直到 1949 年，我国中央政府，一直被封建主义、官僚资本主义和帝国主义的代表人物把持着。

从清朝中叶(1750 年左右)到 1949 年，大约二百年这段时间，我国古老的传统数学有一段"回光返照"的时期，许多数学家研究整理了古代数学著作，写出了新的见解和方法，使我国古代数学有了新的发展。但是，由于帝国主义的文化侵略，数学这门学科，从教育制度上、研究方法上都全盘西方化，中国古代数学被搁到一边去了。从此，我国的数学转折到向现代数学发展。

（二）

西方传教士从明朝开始来华，传播西方的历法，曾在统治阶级中间引起了新旧历法的争论。最后是原来的"回回历"被抛弃。

1723年，雍正皇帝登基，统治集团内部有人提出，大批外国人在华对他们的统治不利，于是由皇帝下令，除了少数在钦天监编制历法的外国人外，其他传教士一律被驱逐到澳门，不允许他们擅自进入内地。

从这个时候起，大约一百年的时间里，西方数学的传入暂时停止了。中国的数学家又由刚刚接触西方数学转向我国的古代数学，他们研究和整理了古代的各种算学经典著作，挖掘

一度被遗忘和埋没了的古代精湛数学理论，取得了可喜的成果。有些学者继续加工整理已翻译过来的西方数学，起着承先启后的作用。

(三)

这个时期著名的数学家有明安图、焦循、汪莱、李锐、项名达、罗士琳、董祐诚等人。

明安图（?-1765）是蒙古族数学家，同时也是天文学家。他曾在钦天监担任监正，当时钦天监主要由西方传教士掌管，明安图和这些外国人一起编制历法。外国人介绍求圆周率等三个无穷级数表达式，但没有证明。明安图经三十多年的刻苦钻研，通过自己研究古代数学，并和西方数学结合起来，用割圆连比例进行统一，终于得出了证明，并且进一步推导出展开三角函数和反三角函数等六个新公式，写了《割圆密率捷法》一书。书未写成就去世了。这部书后来由他的儿子明新和他的学生陈际新共同续写完成。

焦循(1763-1820)著有《乘方释例》等各种数学著作四十多卷，其中《大衍求一术》一卷，对秦九韶的原理进行了挖掘和研究。

汪莱(1768-1813)和李锐(1773-1817)主要是钻研宋元数学家的高次方程解法，在方程论方面取得了新的成果。汪莱著有《衡斋算学》等书，李锐和焦循是好朋友，一起研究了秦九韶的开方法，著有《方程新术草》、《开方说》等书。

项名达(1789-1850)的主要成就是研究"椭圆求周术"，对三角函数的展开式的研究也取得成果，著有《象数一原》等书。

董祐诚(1791-1823)著有《割圆连比例图解》三卷、《椭圆求周术》一卷、《斜弧三边求角补述》和《堆垛求积术》各一卷。

罗士琳(1774-1853)对《九章算术》、《海岛算经》、《缉古算术》、《四元玉鉴》作出注疏和解题详草,他自己也写了《勾股容三事拾遗》等多种数学著作。

这个时期,大批数学家对我国古代数学深入研究,一反前一百多年间由于西方数学传入而使传统数学被搁置的情况,古代数学又老树吐新芽,蓬勃发展起来。特别是明安图、项名达等人的研究,成果十分显著。但是,由于清朝统治者的腐败,帝国主义加紧侵略,这种对古代数学深入研究的兴旺景象,只是延续了很短一段时间,就象“回光返照”一样,一会儿就过去了。随着鸦片战争的失败,国家的半殖民地化,我国古代数学在宋元时期以前一直处于世界领先地位,到后来落后了,并且被完全搁置起来了。除了计算工具的珠算盘仍在民间广泛使用以外,数学已转向西方化。进入了现代数学的发展时期。

(四)

从鸦片战争失败以后,在统治集团中出现了“洋务派”,他们派人出国留学,在学校里设立算学课程,教授数理启蒙、代数学、几何原本、平三角和弧三角、微积分和航海测算等。从教育制度到教学内容都是抄袭西方的。我国古代数学除了一些研究数学史的学者之外,再也没有人过问了。中国数学的发展开始了新的转变。

这段时期里,对数学发展作出贡献的数学家有戴煦、李善

兰等。

戴煦(1805-1860)对项名达的《象数一原》作了续写，著有《四元玉鉴细草》，同时对西方数学进行了编辑工作。

李善兰(1811-1882)主要是从事西方数学的翻译，他曾经在北京的同文馆(学校)教书，他所翻译的书包括力学、天文学等共八十多卷，自己也写了《方圆阐幽》、《弧矢启秘》、《对数探源》、《四元解》、《麟德历解》等数学著作。我国第一部关于微积分的书叫做《代微积拾级》，就是李善兰和英国人伟烈亚力①(1815-1887)合译的。同时还译出《代数学》一书，这是第一部应用代数符号进行演算的读本，这些书对我国数学的发展，起了十分重要的作用。现在我国数学中的许多名词和术语，都是从李善兰翻译过来的书中沿袭使用下来的。他还翻译了《圆锥曲线说》等书，对近世数学发展作出了不小的贡献。

还有许多数学家，在翻译和研究西方数学方面，也都取得了一定的成果。值得一提的是有关中国数学史的研究，从阮元(1764-1849)撰写《畴人传》起，华蘅芳(1823-1902)、华世芳(1854-1905)、诸可实(1845-1903)、罗士琳等人都陆续写过《畴人传》，对历代数学家和数学的发展进行了考证和叙述，是研究我国古代数学史的重要文献。

(五)

辛亥革命以后，形式上叫做共和，实际上军阀割据，长期

① 伟烈亚力，英国人，1847年到上海经营《墨海书馆》.1853年他用中文著有《数学启蒙》二卷，并和李善兰等合译了多种西方数理化基础读物，介绍西方的数理化知识。

混战，国家处在四分五裂的状态，蒋介石独裁统治时期，实行反共反人民的反动政策，对外屈膝投降，对内血腥镇压。在三座大山的压迫下社会经济崩溃，人民啼饥号寒，生产力受到严重的阻碍，科学技术极端落后，数学除了抄袭西方的东西之外，谈不上有任何的发展。

解放前，我国也有一批数学家在某些领域研究出新的成果。这些成果大都是一些留学生在远离祖国的留学过程中，奋发图强、立志为祖国增光、刻苦钻研而取得的。他们的成就在世界数学史也占有一定的位置，为现代数学的发展，做出了贡献。比较著名的数学家有苏步青(1902-)、陈建功(1893-1971)、陈省身(1911-)、周炜良、许宝騄、华罗庚(1910-)、林家翘。

日本帝国主义的侵略，迫使当时为数不多的大学不断迁徙，没有安定的教学环境，加上蒋介石集团的腐败，政府根本不关心科学的发展，所以出现了一个奇怪的现象，中国人的数学论文拿到外国杂志上发表。国内有一份《数学学报》，解放前一共才出了两卷。数学论文只有34篇。研究工作大部分是西方数学的延续，新的学派没有形成，没有新的突破。

现代数学迅速发展的时期

(一)

在中国共产党的领导下，中国人民推翻了压在头上的三座大山，1949年十月一日，中华人民共和国成立，神州大地，阳光普照，人民当家作主了。随着社会主义制度的建立，生产力

得到了极大的解放。我国的经济建设、文化建设取得不小的成就。数学的发展也和其他事业一样在迅速前进。

解放后，我国现代数学的发展，和旧中国的情形迥然不同。旧中国主要是依附于西方的科学，研究的内容也是步西方的后尘，捡别人已经研究过的东西。新中国的数学不再是从西方国家的本干上剪下来的残缺不全的枝叶，而是在自己的肥沃土地上开始生根长大的树苗了。

生产扩大了，科学技术发展了，迫使数学适应这种迅速发展的需要，这棵树苗现在已经是枝叶繁茂的大树了。

(二)

党和国家十分重视科学事业，关心人材的培养和使用，创造必要的条件放手让数学家们从事创造性的研究，大大促进了数学事业的发展。

1950 年，成立了《中国科学院数学研究所》，1951 年，创办了《数学学报》，1955 年，又创办了《数学进展》等刊物。

解放后不久，华罗庚和一些著名的数学家陆续从国外回来。他们和国内的老数学家一道带领一批年青后起的数学家共同努力，使过去比较有基础的、个别成了学派的微分几何、拓扑学、数论、函数论等分支学科蓬勃发展起来了。

从 1949 年到 1958 年，这段时间，出版了不少数学专著和书籍，为后来培养大批数学工作者和教师打下了良好的基础。主要著作有，华罗庚的《堆垒数论》(1953)、《数论导引》(1957)、《多复变函数论中的典型域的调和分析》(1958)；苏步青的《射影曲线概论》(1954)，陈建功的《直交函数级数的和》

(1954)、«实函数论»(1958)；吴新谋等人的《数学物理方程》(1955)；关肇直(1919-)的«拓扑空间概论» (1958)；李国平(1910-)的«半纯函数的聚值线理论»(1958)；秦元勋的《运动稳定性理论》(1958)和吴文俊(1919-)的«示性类及示嵌类的研究»等。

和解放前对比，我国数学研究工作者的队伍扩大了。旧中国发表过数学论文的总人数只不过七十四人，而解放后短短十年就出现了三百四十二名新作者，现在有成千的人发表论文。成果也大大丰富了，解放前发表论文总篇数是652篇，而从1949年到1958年共发表1193篇。现在每年都有几百篇论文发表，而且有些达到世界先进水平。研究的范围也广泛了。

解放前有人研究的分支现在都在进一步取得进展，许多空白、薄弱的部门都迅速被填补和加强。在数理逻辑、数论、代数、微分几何、拓扑学、函数论、泛函分析和积分方程、常微分方程、偏微分方程、概率论、运筹学、控制论、计算数学等各门分支现在都有一批研究工作者。我国数学工作者不同程度地取得了一些成果，有些工作还受到国际上的重视。

(三)

1956-1966年是新中国数学发展中极其重要的十年。1956年国务院召开了国家科学十二年规划会议，会上提出，要在理论和实际相结合的方针指导下，为数学研究开辟新的发展道路。会议还制订了数学学科发展规划，目的要使数学既能和生产实际相结合，而又能扎扎实实地壮大基础理论研究。这

一宏伟规划在全国科学工作者共同努力下于1962年提前实现了。到1966年，数学的不少分支学科的研究工作者有比较系统的成果，这一时期出版了相当数量的专著，《数学学报》、《数学进展》上刊登了大量的论文。

1958年数学得到了迅速的发展，主要表现在以下三个方面：

第一，增设了和数学有关的专业机构，如计算技术研究所和计算中心；有条件的大学开设了新专业，如数理逻辑、计算数学、力学、应用数学等。

第二，数学工作者广泛联系生产实际。数学在生产实际中用得比较多、比较直接的分支有微分方程、数理统计、计算数学、运筹学等，通过生产实际又促使了这些分支学科的系统发展。

第三，新生力量迅速成长，许多青年数学工作者参加新的领域的研究工作。在高等院校里，青年教师提前开课，有的还开了过去从未开设过的专业课。青年教师纷纷组织起来，开讨论班，参加小型科学报告会，提高了业务水平。

到1966年，我国的数学水平经过十七年的努力正在接近当时的国际水平，某些分支学科已经作出了相当出色的成绩。

正如1976年美国纯粹和应用数学访华代表团回国报告中所指出的："解放(1949年)到文化革命开始(1966年)，这段时间是中国数学向独立和成熟发展过程中的形成阶段。在这十七年中，中国数学比它历史上任何阶段都更有活力。从可得的材料来看，中国数学家的成就总的说来是值得赞扬的，那

时的杂志——《数学学报》的论文反映了数学活动方面在数量上和质量上有相当大的增进。”

(四)

1966-1976年，这段时间的中国数学和其它学科一样，发展处于低潮，理论研究工作处于停顿状态，有些数学研究机构被取消，例如1965年发展起来的复旦大学数学研究所当时已经有三十四名专职研究人员和九名兼职研究人员，开展了六七个研究方向。“文化大革命”中这个研究所被解散了，人员也流散了，到1976年虽得恢复，但是只剩下七个人。这样使原来和国际水平缩小了的差距又被拉大了。

但是也有不少数学工作者坚持理论研究工作，取得了第一流水平的成果。比如，陈景润(1933-)定理是关于“哥德巴赫猜想”到目前为止最好的结果；在古典的值分布理论方面，杨乐(1939-)、张广厚在关于半纯函数的波莱尔方向和亏值方面得到了既新又深的结果；侯振挺在齐次可列马尔可夫过程构造论的研究中得到了非保守Q过程的唯一性准则。

在应用方面，以华罗庚为首的一部分数学工作者把优选法、统筹方法向全国推广，他们做了大量的推广研究工作，使这两个分支被广泛应用到实际生产部门。苏步青教授从1974年开始到上海江南造船厂参加船体数学放样的工作，开展了参数样条曲线的奇点和拐点的理论研究工作，和这项工作相结合，又开展了计算几何的研究。

(五)

1976年粉碎“四人帮”后，中国人民的政治生活发生了重

大的变化，开始拨乱反正，着手进行恢复、整顿工作。

1977年在北京又制订了新的数学发展规划，恢复了全国数学会和各地数学会，加强了基础理论的研究工作。1978年在成都召开了第三次全国数学年会，出席会议的代表有五百多人，会上宣读了四百多篇论文，数学研究又如雨后春笋那样生气勃勃了。

《中国科学》、《数学学报》、《应用数学学报》等全国性刊物和各大学学报上的论文越来越多，质量越来越高。

（六）

解放后，数学教育方面的发展情况，也是十分可喜的。

解放前，全国公立大学和私立大学几十所，各大学大部设立有数学系，但是每年招收学生只有几百名，实在少得可怜。

全国解放后，数学教育事业蓬勃发展，培养出了一大批数学人才。1952年全国高等学校经过调整后，改革了旧中国的一套教育体制，初步确立了教学大纲、教学方法、培养目标等。但是当时新中国刚成立，缺乏经验，所以课程设置、教材以及教学参考书大部分是沿用苏联的一套。1958年，全国各高等学校数学系都进行不同程度的教学改革，取得了一定的成绩。但是这些通过实践而初步确立起来的教育体制，在“文化大革命”中也被破坏，最近几年经过整顿，才基本回到以往形成的道路上。

从数学教育的发展规模来说，现在和解放初期比较，更是大幅度地增长了。目前全国培养数学人才的数学专业的情况是：综合大学、师范院校、师范专科学校设有数学专业的有一

百多所，工科大学设有数学专业的也不少，高等学校的数学教师大约在五千人以上，每年招收学生两三万人左右。从这些数字大致可以看出我国培养数学人才的规模。

由于林彪和“四人帮”的干扰，科学事业停顿了近十年，除个别领域外，整个数学水平和国际上发达国家水平相比有一段差距。但是我们坚信，在党的正确方针的指导下，通过广大数学工作者的努力，具有悠久历史的中国数学一定会兴旺发达起来，迅速赶上和超过世界先进水平。

中国古代数学的特征和它在世界数学史上的地位

（一）

中国的数学有悠久的历史和优良的传统，长期位于世界数学的前列，只是近几百年才落后了。

中国古代数学的绝大部分是自己发展起来的。无论是在算术方面，还是在代数或者几何方面，都有它鲜明的特色。有很多数学思想和计算方法发展得特别早，并且传播到国外。但是也有些发展得比较迟，如代数的符号系统、几何的演绎体系、变量数学的思想和方法等。直到十七世纪初叶西方数学传入中国后，才弥补了中国古代数学的不足。为什么有的发展得特别早，有的又比较迟呢？我国古代数学有些什么特征？它在世界数学史上占着什么样的地位？这些都是值得我们深入研讨的问题。这里仅就中国古代数学的特征和它在世界数学史上的地位，作简要的论述。

（二）

我们先谈谈算术。我国古代算术十分发达，并且对印度、阿拉伯数学的发展产生过积极的影响。

第一，自古以来，我国的计数法就遵循十进位制。从十进位制的记数法出发，促进度量衡单位十进位制的实现和十进位小数法的引用。殷商时代的甲骨文可以证明，那时候就采用十进位制了。公元前二世纪，大部分度量衡也都采用十进位制。到宋朝以后，1斤仍旧等于十六两，遵循十六进制，其余都是十进位制了。古巴比仑、古埃及、古印度和西方各国度量衡单位名目繁多，进位法杂乱无章，很不统一。印度采用十进位制比较早。欧洲直到十八世纪末，法国议会规定十进位制，到1840年才在国内通行。到了二十世纪，大多数国家才开始采用公制度量衡单位。十进位小数也是我国发明最早，从史料上看，小数事实上是大约公元263年由刘徽发明的。中亚细亚人阿尔·卡西（?~1429或1436）在1427年才发明小数，欧洲人更晚，到了十六世纪才发明十进位小数。

第二，无论是古代用算筹记数，还是近代用算珠记数，都采用了位值制；也无论是口语或者文字表达一个数字都是遵守位值制。比如“三万四千四百一十六”，这个数中的“万”、“千”、“百”、“十”是表示每个字前面数码的位置的。如果省略万、千、百、十，单说“三四四一六”，还是可以从位值制上理解成三万四千四百一十六的。因此，位值制不但利于计数，而且对加、减、乘、除运算都很方便，这在世界上也是最早最先进的。对数码“0”的认识我国也是世界上最早的。

第三，分数算法很早就有完整的体系。用算筹做除法，除不尽的时候便以余数做分子，除数做分母，明确规定了分子在上、分母在下的分数记数法。因此，分数的加、减、乘、除法得到发展。最大公因数和最小公倍数也得到应用，算术中各种应用问题，包括各种比例问题在内，都有合理的解法。

在西方古代数学里，碰到分数计算，或者采用埃及人的单分数方法，或者采用巴比仑人的六十分制，乘除演算都很麻烦。近代算术里的分数算法，大约十五世纪中叶才开始在欧洲流行。当时的数学家多说这种算法起源于印度，是由阿拉伯人传到欧洲的。关于印度分数算法，628 年婆罗摩笈多（约 598-665）和以后的印度数学家都把分子写在上面、分母写在下面，分数的加、减、乘、除算法都和《九章算术》里的方法相同。所不同的是印度人改中国的筹算为笔算。印度算术传入阿拉伯，阿拉伯人添一条横线在分子、分母之间，和现在的分数记法相同。

（三）

我们再看代数。我国的代数有悠久的历史，而且方法也很独特，取得很高的成就，在中国数学中一直占优势地位。

第一，最早认识负数的存在。在《九章算术》一书的方程中，未知数的系数有负数的，也有常数项是负数的。比如第八题中有一个方程用代数符号表达出来是

$$-5x+6y+8z=-600。$$

还建立了正负数加、减法则。但是，印度人在七世纪才认识负数，欧洲人十七世纪才认识负数，十八世纪在英国还有人对负

数提出抗议。

第二，十三世纪中叶中国古代数学家掌握了天元术以后，很快把它扩充到多元高次方程组的解法，发明了“四元术”，中国的代数学具备了比较完整的体系。西方数学史家怀疑中国的天元术是受伊斯兰数学的影响。实际上，花剌子模人穆罕默德·伊本·穆斯阿尔(约780-850)的“代数”是用文字推论，而中国的天元术是用算筹或者数码演算的；“代数”中的方程两端不许有负数项，而天元术开方或者各项有正有负；“代数”只能解一次或者二次方程，而天元术能解任何高次方程。总之，天元术的发展有它的历史根源，是中国土生土长的，同穆罕默德的“代数”体系截然不同。

第三，汉朝的数学家用“盈不足术”解决算术难题，这是一种原始的解题方法，后来的数学家并不十分重视，但是它流传到西方后，却有它光辉的历程，在世界数学史上占有光荣的地位。阿拉伯数学家把它叫做《契丹算法》，意大利数学家斐波那契(1170-1250)著书介绍这个算法，意译是“盈不足”。因为盈不足求解一般算术问题要通过两次的假设，所以欧洲各国的书后来都把这个方法叫做“假借法”。在十六、十七世纪，欧洲人的代数学还没有发展到充分利用符号的阶段，这种万能的算法便长期统治了他们的数学王国。盈不足术在高等数学中求实根的近似值也很有用处。

第四，著名的“孙子问题”，“百鸡问题”和“大衍求一术”都是世界数学史上的先进成就。中国这种一次同余式问题的解决方法，外国叫做“中国剩余定理”，西方直到十八世纪才得到

相同的定理。

第五，现在代数中的分离系数法在我国应用很早，主要表现在：

开方式用分离系数法表达。《九章算术》中“少广”章开平方术中，“借一算”表示未知数的平方幂，开立方术中，“借一算”表示未知数的立方幂；这些就有用分离系数法表示开方的意义。带从的平方和带从的立方都有直接的开法。十一世纪以后的增乘开方法更推广到求数学高次方程的正根。这些都是开方式的合理化表达法引起的辉煌成就。

分离系数法还利用来表达包含几个不同未知数的方程。《九章算术》中“方程”章联立一次方程组问题，每一个多元方程都用分离系数法表达。消元的时候也用分离系数法计算。在十三世纪，数学家解联立二元、三元或四元的高次方程组，所有算式也都用分离系数法表达。

十一世纪发现“开方作法本源”图（指数是正整数的二项式定理系数表），比西方早五个世纪，并且研究了它的构造原则，发明了增乘开方法。开方作法本源图也是分离系数法的重要表现。

(四)

在几何方面，中国古代数学家注重面积、体积的计算，而不重视演绎体系的建立，因而只能取得个别的成就。

第一，面积和体积的计算。面积的计算起源于田地的量法，《九章算术》中“方田”章以长、宽相乘得长方形的面积作为公理。三角形、梯形等都以“以盈补虚”法补成长方形求它

的面积。有关线段的几何定理也用面积图形来证明。比如“少广”章的开平方术、“勾股”章的勾股容圆式等。

体积计算起源于工程建筑。《九章算术》中“商功”章以长、宽、高连乘得长方柱体的体积作为一个公理。把长方柱体分解成二堑堵①，又把堑堵分解成一阳马②、一鳖臑③，并证明了堑堵体积是长方柱体体积的二分之一，阳马体积是长方柱体的三分之一，鳖臑体积是长方柱体的六分之一。古代数学家以长方柱体、堑堵、阳马、鳖臑作基本立体。一般直线性的立体都可以用这些基本立体拼凑起来，它的体积就是所含基本立体体积的和。体积公式的简化是需要代数技能的，中国古代代数比较发达起了很大的作用。

圆锥和球的体积。刘徽在解释《九章算术》中“商功”章圆亭术的时候说：“从方亭求圆亭之积，亦犹方幂中求圆幂”，方亭就是方锥台，圆亭就是圆锥台。他的意思是说圆锥体积是外切方锥体积的$\frac{\pi}{4}$。他又在“少广”章开立圆术注中根据同样的原则说：“合盖者，方率也。丸居其中，圆率也”。丸就是球。意思是说球体积是外切牟合方盖体积的$\frac{\pi}{4}$。后来，祖冲之发

① “堑堵”是指两底面是直角三角形的正柱体，设一正柱体底面直角两边是a、b，柱体长是h，那么，堑堵的体积就是$\frac{1}{2}abh$。也就说一个立方体的二分之一，叫一堑堵。

② “阳马”是指底面是长方形而有一棱和底面垂直的锥体，它的体积是$\frac{1}{3}abh$。也就是说一个立方体的三分之一，叫一阳马。

③ “鳖臑”是指底面是直角三角形而有一棱和底面垂直的锥体，它的体积是$\frac{1}{6}abh$。也就是说一个立方体的六分之一，叫一鳖臑。

现牟合方盖的水平剖面面积等于立方体内挖去两个正方锥体的水平剖面面积，因而得出牟合方盖体积是

$$D^3-2\times\frac{1}{3}D^2\times\frac{D}{2}=\frac{2}{3}D^3,$$

所以球体积是

$$\frac{\pi}{4}\times\frac{2}{3}D^3=\frac{\pi}{6}D^3。$$

第二，勾股弦定理和勾股测量。勾股定理的结论商高比毕达哥拉斯早，但是当时没有证明。公元一世纪有有关勾、股、弦和勾股形面积的许多定理。三世纪初，三国时期的赵爽著《勾股圆方图注》，用面积图形证明这些定理的正确性。中国古代的"勾股术"是建立在几何图形的基础上的。但是勾股术后来发展成代数的一部分，就不再是只在几何图形中使用了。

古人在平地上竖立标杆测量太阳的影子，标杆的高（勾）和影子的长（股）常成正比例。推广这种从经验得来的知识，在古代就产生了勾股测量法，后来进一步发展取得了"重差术"成就。

第三，圆周率的成就是举世公认的。刘徽利用圆内接正多边形的边数越多、正多边形的面积越接近于圆面积的原理，创立了一个符合"极限存在准则"的不等式

$$S_{2n}<S<S_{2n}+(S_{2n}-S_n),$$

式内 S 是圆面积，S_n、S_{2n} 是圆内接正 n、$2n$边形的面积，它计算了圆内接正三千零七十二边形面积，得到 $\pi=\frac{3927}{1250}$，化成小数是3.1416。祖冲之又更精密地推算得到

$$3.1415926<\pi<3.1415927$$

的结果。这是在世界上领先了一千年的光辉成就。在那个时候，使用小数并不普遍，一般都用分数表示近似值。祖冲之用 $\pi=\frac{22}{7}$ 表示约率，但不是他的创造，在祖冲之幼年的时候，南朝的天文学家何承天(370-447)已经采用过这个近似值，密率 $\pi=\frac{355}{113}$ 准确到小数点后第六位，这是具有世界意义的光辉成就。

(五)

总之，中国古代数学在算术和代数方面比较发达，几何取得一些突出的成就。许多伟大成就传播到国外，对世界数学发展很有影响，在许多领域长时间遥遥领先。

1949 年全国解放以后，在中国共产党的领导下，我国数学起了根本性的变化，有了蓬蓬勃勃的发展，呈现一派兴旺景象，出现了和国际先进水平的差距越来越小的势头。随着尖端科学的发展，如人造地球卫星的发射和回收，证明了我国数学已经高速度发展到一个新的阶段。我国数学界人才济济，他们在各个方面的研究，成绩卓著，蜚声国内外，不少数学家都具有世界先进水平。展望未来，我国广大数学工作者在数学上一定能够有所创造，有所发明，有所前进，一定能建立具有我国特色的数学学派，并且培养出一批在国际上有影响的数学家，为独立自主地解决社会主义建设中提出的问题，为四个现代化，为世界数学宝库作出更大的贡献。

三　兴衰交替的外国数学发展史

外国数学发展史的分期

（一）

现代数学的宏伟大厦，是世界各国各民族的共同财富。和中国数学发展的历史一样，外国数学的发展过程，也是各民族对于数和形两个基本概念认识不断深化的历史。

限于篇幅，本书不可能详细介绍各国数学发展的情况。这里仅仅介绍对数学发展起主流影响的一些国家和杰出人物在数学进展起决定性作用的事件和功绩。使我们对世界数学发展的情况，有一个大致的了解。

（二）

关于外国数学发展历史的叙述，一般说来，可以按照数学本身由低级到高级分阶段进行。也就是分成四个本质不同的发展时期加以介绍。这四个时期是：萌芽时期（从数学产生到公元前五世纪）；初等数学时期（公元前五世纪到公元十七世纪）；变量数学时期（十七世纪到十九世纪末）；现代数学时期（十九世纪末到现在）。

当然，截然划断这些时期是不可能的，因为每个时期的本

质特征是逐渐形成的，有时候两个时期是相互交错的。特别是有些国家和民族，他们的兴盛和衰亡，有时候正好跨越我们所分的两个时期，而数学的发展总是和国家、民族的兴盛、衰亡分不开的。这样，就只能根据实际情况列入更为合适的时期去叙述了。

萌 芽 时 期

（一）

人类的文明首先在中国的黄河、巴比仑[①]的幼发拉底河、底格里斯河、印度的印度河和埃及的尼罗河等几条大河的流域中诞生，数学也是首先在这些地方产生的。

随着生产实践的需要，大约在公元前三千年左右，开始出现了巴比仑、埃及和中国的萌芽数学。就象当时的生产发展十分缓慢一样，数学发展也很缓慢，直到公元前五世纪，数学都未形成一门科学，只有一些几何和算术的零碎知识。那时人类处于原始公社和早期奴隶制社会，生产水平低下，征服自然的力量很微弱，理解自然的能力很有限。

（二）

人类早期过着农牧业的生活，在从事生产和分配中，需要计算捕获的野兽的多少，奴隶的多少，需要计算面积、体积和农作物产量，需要测量土地。几何就是起源于测量土地。我国很早就有“方田”的记载，“方田”就是测量地面面积。

---

① 巴比仑，古代美索不达米亚的一个古国，位于幼发拉底和底格里斯两河流域，相当于现在的伊拉克一带。

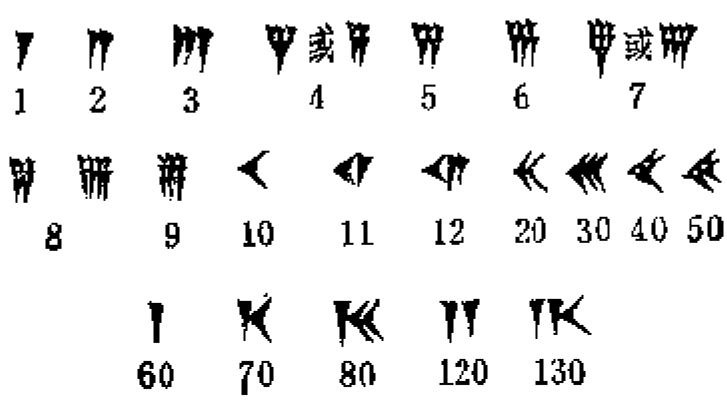
大约四千年前，埃及人因为尼罗河每年都要泛滥成灾，两岸田亩的地界，经常被淹没冲掉，所以要进行测量，重新勘定田亩的界线，几何学就应运而生。那时候的几何学，大多数是关于面积、体积的计算方法，是人们对几何认识的感性阶段。拉丁文和希腊文中的“几何学”的意译就是“测地术”。“几何学”这个名词，原是我国明朝数学家徐光启根据读音译出的。

下面分别介绍巴比仑、埃及、印度数学发展的情况。

巴比仑的古代数学

（一）

在巴比仑、埃及、中国、印度这四大文明古国中，巴比仑人获得数学知识是比较早的，根据来自巴比仑泥版。这些泥版是在胶泥还软的时候刻上字，然后晒干制成的，有些泥版一直保存到现在。现存泥版的小部分是公元前两千年左右制作的，大部分是公元前七世纪左右制作的。比较早期的泥版上刻的是阿卡得文字，阿卡得人用一种断面呈三角形的笔斜刻泥版，在版上按不同方向刻出楔形刻痕，因此叫楔形文字。



楔形数字。

阿卡得人的算术是巴比仑文化中发展程度最高的算术。他们的整数写法就象上页的图"楔形数字"中所表示的那样。巴比仑数系是以 60 为基底，并采用进位记号。

巴比仑人不仅采用 60 进位制，而且还以 24、12、10、6、2 混合进位制写出的数，表示日期、面积、重量、钱币，这种多重进位制后来成为西方度量衡的基础，比如度、分、秒、英尺、加仑和蒲式耳就是采取这些进位制的。

(二)

巴比仑人对天文、历法很有研究，因而算术和代数比较发达。在四千年前的泥版中发现过"乘法表"、平方表和立方表。公元前 1950 年左右，巴比仑人能解两个变数的一次和二次方程，得出 $\sqrt{2}=\frac{17}{12}$；出现了算术书，包含各种各样的算术问题并附有解答，这些方法都出现在具体问题和数字的例子中。

巴比仑的代数相当发达，早期巴比仑代数的一个基本问题是求出一个数，使它和它的倒数的和等于已给数，用现代的记号来说，就是要求出这样的 x 和 x 的倒数 $\frac{1}{x}$，使

$$x+\frac{1}{x}=b,$$

从这两个方程得出 x 的一个二次方程，就是

$$x^2-bx+1=0。$$

他们求出 $\left(\frac{b}{2}\right)^2$，再求出 $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}$，然后得出解答：

$$\frac{b}{2}+\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1} \quad 和 \quad \frac{b}{2}-\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-1}\ 。$$

这就是说巴比仑人实际上知道二次方程根的公式。由于巴比仑人不知道负数，因此负根是略而不提的。虽然他们只能解具体的例题，但好些问题是打算说明二次方程的一般解法的，他们用量的变换把更加复杂的代数问题化成简单问题。

几何在巴比仑人的心目中是不重要的，不是他们的一门独立学科。除了计算一个给定的等腰三角形的外接圆半径之类这一些特殊的实际知识外，巴比仑人的几何内容只是收集了一些计算简单平面图形面积和简单立体体积的法则，平面图形中包括正多边形。他们不专门研究几何，总是在解决实际问题的时候才去研究几何。

（三）

尽管巴比仑人的数学知识有限，但是数学在他们生活的许多方面起作用。巴比仑位于古代贸易通道上，商业活动范围很广。他们用算术和简单代数知识来计算长度和重量，兑换钱币和交换商品，计算单利和复利，计算税额，给农民、教会和国家之间分配收获的粮食，划分土地和解决遗产问题。牵涉到数学的大多数楔形文字著作都是关于经济问题的。在他们的早期历史中，经济对算术发展的影响是很大的。

巴比仑人的天文学知识很丰富，在公元前七世纪的亚述时代，开始有了对天文现象的数学描述，有系统地记录观测数据。公元前的最末三个世纪，数学的应用多了起来，特别是应用于计算月球和行星的运动。出现了天文历书和怎样计算天文历法的书。

总之，巴比仑人的算术和代数达到一定的高度，他们对整

数和分数有系统的写法，把算术推进到相当高的程度，并用它来解决许多实际问题特别是天文上的问题。他们用特殊的记号和名称来表示未知量，采用了少数几个运算记号，解出了含有一个或几个未知量的几种形式的方程，特别是解出了二次方程，这些都是代数的开端。在解特殊类型高次方程方面具有一些代数技能。但是总的来说，他们的算术和代数是很初等的，他们的计算步骤和法则，都是根据具体事实边试边改和从直观得出的结果，如果这些方法行之有效，就继续加以采用。他们没有证明的想法，没有逻辑结构的思想，没有考虑问题的解在什么条件下成立。简单地说，就是没有数学的理论。

古代埃及的数学

(一)

埃及人的数学兴趣是测量土地，就是几何图形的面积、体积。古埃及人创造了几套文字，最早的是象形文字，公元前2500年左右，开始用僧侣文作日常书写文字，书写方式是用墨水写在纸草纸上。纸草是尼罗河下游的一种植物，把它的茎制成薄片，压平后，用来缮写材料，用时，一般是把许多张纸草纸粘在一起连成长幅，卷在杆干上，形成卷轴。因为纸草纸会干裂成粉末，所以古埃及的纸草文书很少保存下来。

现存的数学文件主要是两批纸草文书，一批是保存在莫斯科的，叫莫斯科纸草文书；一批是1858年英国人莱因德发现的，现存英国博物馆，叫莱因德纸草文书，因为它的作者叫阿

摩斯，是公元前1700年左右的一位埃及僧人，所以又叫阿摩斯纸草文书。据这位僧人记载，这份纸草文书的内容是从公元前2200年第十二王朝时代的旧纸草文书上转录下来的。他在这份纸草文书的开头题着："获知一切秘奥的指南。"上面记有关于分数和普通算术四则运算的一些说明，乘法是用屡次相加的方法运算的，还有测量的规则。

在莱因德纸草文书里有八十五道数学问题和解答，莫斯科纸草文书里有二十五道。这些问题很可能是作为一些典型问题和典型解法的示范例子记下来的，所含的数学知识可能是埃及人早在公元前3500年就已经知道的。

（二）

古埃及人创造了一套一到一百万的有趣的象形数字记号。1是垂直的一根木棒𓏺，10是放牛的时候使用的弯曲工具𓎆，100是一端卷起的测量绳𓍢或𓍢，1000是莲花的叶子𓆼，10000是手指头𓂭，100000是一个蝌蚪𓆐，1000000是坐着举起双手表示受惊的人形𓁨。介于这些数字中间的各数就由这些记号累加组成。这套数字是以10为底的，但不是进位制的。书写的方式是由右向左，如𓏺𓏺𓏺𓏺𓎆𓎆就表示24。

埃及僧侣文一到十的写法是：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10

算术主要用叠加法。做加减法，只是靠添上或划掉一些记号。乘除法也是化成叠加步骤来做的。

埃及数系中分数的记法比较复杂。记号⬭是一个卵形，原来表示$\frac{1}{320}$蒲式耳，用来表示一个分数。在僧文中把这卵形改成一个点，这卵形或点通常记在整数上端，表明这个数是一个分数，如在象形文字写法中，

 $=\frac{1}{5}$，　 $=\frac{1}{10}$，　 $=\frac{1}{15}$。

少数几个分数用特殊记号表示。如象形记号⊂表示$\frac{1}{2}$；

表示$\frac{2}{3}$；×表示$\frac{1}{4}$。

除了几个特殊分数之外，所有分数都用单分数(分子是1的分数)或单分数的和来表示，比如阿摩斯把$\frac{2}{5}$写成两个单分数$\frac{1}{3}$同$\frac{1}{15}$的和，两数之间没有加法记号，只是从上下文看可以找出加的意思。埃及人利用单位分数就可以对分数进行四则运算，但是运算方法繁复，这也就是埃及算术和代数不能发展到高水平的原因之一。

(三)

埃及的算术和巴比仑一样未能认识无理数，代数中出现的简单平方根，他们是用整数和分数来表达的。

纸草文书中有求一个未知量的解法，相当于现在的一元一次方程，他们用纯粹算术的方法，没有解方程的概念。用文字叙述，仅告诉得出解的步骤，不说明为什么用这些方法，也不说明为什么这些方法能行。纸草文书曾涉及到最简单的二次方程，如$ax^2=b$，有时候也出现两个未知数的方程，如

$$x^2+y^2=100，\qquad y=\frac{3}{4}x，$$

但是消去 y 后，x 的方程仍是前面那种类型。纸草文书中也牵涉到等差数列和等比数列的具体问题。

在埃及人有限的代数里实际上没有成套的记号。在阿摩斯纸草文书中，加法和减法用一个人走近和走开（来和去）的腿形⊿和△来表示，记号┌用来表示平方根。

埃及人不把算术和几何分开，纸草文书中都有这两方面的问题，同巴比仑人一样，仅把几何看作实用工具。他们能计算矩形、三角形、梯形面积，圆面积公式是 $A=(8d/9)^2$，其中d是直径。就是取 $\pi=\frac{256}{81}$。还有计算立方体、箱体、柱体和其他图形体积的法则，有些是比较准确的，有些只是近似的。如截锥水钟的体积，它们的公式用我们的记号表示是

$$V=\frac{h}{12}\left[\frac{3}{2}(D+d)\right]^2,$$

这里 h 是高，$(D+d)/2$ 是平均周长，相当于取$\pi=3$。

埃及的几何有一个计算截棱锥体的体积公式，锥体的底是正方形，这个公式用现代的记号表示就是

$$V=\frac{h}{3}(a^2+ab+b^2),$$

其中 h 是高，a 和 b 是上下底的边，不但正确，而且表达式是对称的。

埃及人应用数学的范围十分广泛，他们用数学确定付给劳役者的报酬，求出谷仓的容积和田地的面积，征收按土地面积估出的地税，从一种度量单位换算成另一种度量单位，计算修造房屋和防御工程所需的砖数。纸草文书中还有一些是计

算酿酒所需各种谷物的数量等的问题。

(四)

埃及数学的一个主要用途是天文，也在研究天文中得到发展。尼罗河流域是埃及人的发源地，尼罗河每年泛滥冲毁许多田地的界限和住房，也带来大量沃泥，他们需要预报洪水到来的准确日期，以免受到洪水的危害。

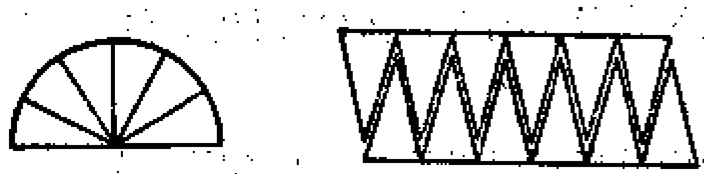
埃及人也有历法，靠观察天狼星算出一年是365天，但是他们的天文知识远不如巴比伦人。

埃及人把天文知识和几何知识结合起来用于建造神庙，使一年里某几天的阳光能以特定方式照射到庙宇里。比如他们把某些庙宇修成能使一年中白昼最长的那天阳光恰好直接进入庙宇，照亮祭坛上的神像。金字塔是埃及人的骄傲，金字塔的方位朝向天上特定的方向，而狮身人面像斯芬克斯的面却是朝东的。金字塔的底有正确的形状，底和高有一定的比例。从金字塔的修建也可以看出古埃及人对几何的另一种用法。

古印度的数学

(一)

印度的文明可以追溯到公元前2000年，印度人的数学也有悠久的历史。大约在公元前1000年左右，印度的数学家戈涅西巳经知道圆的面积等于一个矩形的面积，矩形的底等于半个圆周长，矩形的高等于圆的半径。他所用的证明方法就是下面这个有名的图形。



圆和矩形面积相等证明图(古印度)。

从这个例子分析，可知古代印度有很丰富的几何知识。

古代印度的文字除了极少数是刻在石上、竹片、木片或铜器上之外，大量是写在贝多罗树的树叶上，可能是树叶不好保存，所以古代印度的数学史料很少，后世的人了解得并不多。

（二）

印度的数学和占星术有很大关系，而占星术又和宗教有密切联系。在举行宗教仪式的祭坛的建筑法规中，有一种叫做“绳子的规则”，在这些规则里，包含有公元前五世纪或更早得多的时期的印度数学知识。其中有勾股定理，它求出的正方形对角线的长度$\sqrt{2}=1.414215686$，是相当好的近似值。但是印度人求出的$\pi=3.088$，就不是太准确的了。

公元前500年左右，波斯王大流士征服了印度一部分土地，后来的印度数学就受到外国的影响。

初等数学时期

（一）

初等数学时期从公元前五世纪到公元十七世纪，延续了两千多年，由于高等数学的建立而结束。这个时期最明显的结果就是系统地创立了初等数学，也就是现在中小学课程中

的算术、初等代数、初等几何(平面几何和立体几何)和平面三角等内容。

初等数学时期可以根据内容的不同分成两部分，几何发展的时期(到公元二世纪)和代数优先发展时期(从二世纪到十七世纪)。又可以按照历史条件的不同把它分成“希腊时期”、“东方时期”和“欧洲文艺复兴时期”。

(二)

希腊时期正好和希腊文化普遍繁荣的时代一致。希腊也是一个文明的古国，但是，和四大文明古国巴比仑、埃及、印度、中国相比，在文明史上，希腊文明要晚一段时间。

希腊的文明延续了一千年之久，从数学的发展情况来分，又可以分成古典时期和亚历山大里亚时期。

东方时期主要指古希腊衰亡后，西方数学发展中心转移到东方的印度、阿拉伯等的时期。

欧洲的文艺复兴时期是初等数学发展到一定阶段，为数学向更高阶段发展作准备的时期。

古典希腊时期的数学

(一)

希腊人吸取了周围其他文明古国的文化，创造了自己灿烂的文明和文化，这是对现代西方文化发展影响最大的文化。古希腊的数学在世界数学史上占有极其重要的地位，对现代数学也起了决定性的奠基作用。

古希腊人定居在小亚细亚(这可能是他们的老家)，欧洲

大陆上的如今希腊所在地区，以及意大利南部、西西里、克里特、罗德斯、第罗斯和北非。在公元前775年左右，希腊人把他们用过的各种象形文字书写系统改换成腓尼基人的拼音字母后，文字变得容易掌握，书写简便多了，因此，希腊人更有能力来记载他们的历史和思想，发展他们的文化了。

到了公元前五世纪和六世纪，由于希腊跟埃及、巴比仑通商，希腊的许多学者也先后到埃及、巴比仑留学，埃及的几何学和古巴比仑的算术随之传入希腊。手工业、商业和造船业的发展需要力学、航海和天文知识，又推动了几何和代数的发展。实际活动的扩大，增加了人们的见识，同时提出了更高的要求，孤立片断的经验已经不够用，需要比较全面系统的算术和几何知识来解决实践中所碰到的各种问题。古代西方世界的各条知识之流都在希腊汇合起来，经过古希腊哲学家和数学家的过滤和澄清，形成了长达一千年的灿烂的古希腊文化。

古典希腊时期(公元前600年-公元前300年)在整个数学史上是数学萌芽时期和初等数学时期交替的时期，主要的是属于初等数学时期。这段时期在古希腊形成了很多学派，他们广泛探讨哲学和数学问题。在数学上对初等几何的建立和整个数学的发展作出了巨大的贡献，数学成就的精华是欧几里得的«几何原本»和阿波罗尼斯(前260-前170)的«圆锥曲线»。

希腊有许多学派，最早的学派是爱奥尼亚地区的泰勒斯(前624-前547)创立的，所以叫做爱奥尼亚学派。其后依次是对数学进行抽象研究、数学成就很高的毕达哥拉斯学派，提出

悖论的哲学家巴门尼德(约前520–约前450)和芝诺建立的埃利亚学派，雅典的诡辩学派(前五世纪下半叶)，著名的柏拉图(前427–前347)学派，在数学上引入变量和比例理论、发明穷竭法的欧多克斯(前409–前356)学派，和建立逻辑学、讨论数学基本原理的亚里士多德(前384–前322)学派。

(二)

古典希腊时期的数学主要是研究几何。他们不仅把几何形成了系统的理论，而且创造了研究数学的方法。它们坚持用演绎法来作证明，重视抽象而不注重具体问题，使对数学的认识从感性阶段提高到理性阶段。

希腊人在研究几何方面的功绩之一是：根据几何材料的内在联系，把复杂的几何事实分析成为简单的事实，用概念作为判断和推理的基础逐步形成了数学证明的观念，这是对数学认识的一个质的飞跃。

另一伟大成就是把数学变成为抽象化的科学。希腊人竭力主张寻找事物的普遍性，他们想从自然界和人的思想的千变万化的过程中，分离抽象出某些共同点，这对数学方法和科学方法是非常重要的。古希腊的数学家都是哲学家，希腊人的哲学思想使数学形成一门科学有巨大的影响。这时候，几何不再停留在经验的数量变化上，而逐步提高到理性阶段，为发展成为严密的科学作准备了。

(三)

泰勒斯是建立演绎法的首创人，他是一个大旅行家，从埃及人那儿学过几何学，在巴比仑学过天文学。回到希腊后，他

把这些学科的原理传授给他的学生。传说他曾经通过测量杆影和金字塔影的长，求出了金字塔的高度。他用相似三角形的原理计算过船舶到海岸的距离。

把数学构成一个数学体系的是毕达哥拉斯，他把几何学的研究纳入普通教育，从头考察科学的基本原则，并以抽象的理性的方式来探讨理论。毕达哥拉斯建立的学派学习知识完全是秘密传授的。他和他的学生，数学造诣很深，公元前五世纪左右，他们发现了：三角形的内角和等于两个直角(180°)；可以用几何作图法解代数二次方程；作一个多边形相似于一个已知多边形，并和另一已知多边形的面积相等；存在着无公度的两线段；存在着五种宇宙体(现在的立体几何中叫做正多面体，当时叫做宇宙体)；直角三角形斜边上的正方形等于两直角边上的正方形的和。

据说毕达哥拉斯在证明出勾股定理以后，曾经宰了一百头牛表示庆祝。

(四)

古典希腊时期数学工作的精华由欧几里得和阿波罗尼斯的著作流传至今。从生活的年代来说，这两个人属于希腊数学史的亚历山大里亚时期，但是因为他们的著作的内容和精神都属于古典时期的，因此通常把他们的成就归到古典时期。

公元前三世纪，欧几里得总结了前人在生产实践中得到的大量数学知识，写成了《几何原本》。这本书的第一卷中的四十八个定理，完全是根据三十五个定义、五个公设和五个公

理使用逻辑推理的方法给以演绎证明的。这种几何后来叫做欧几里得几何，又简称欧氏几何。欧几里得的定义、公设和公理是从经验中来的，它所体现的空间概念完全建立在直观基础上的一种抽象，是符合当时人类的认识水平的。

《几何原本》十三卷包含四百六十七个命题。第一卷到第四卷讲直边形和圆的基本性质；第五卷是比例论；第六卷是相似形；第七、八、九卷是数论；第十卷是不可公度量的分类；第十一到十三卷是立体几何和穷竭法。

《几何原本》是最早一本内容丰富的数学书，它对数学发展的影响超过任何一本书。欧几里得独创了新的陈述方式：先摆出公理、公设、定义，然后有条不紊地、由简单到复杂地证明一系列定理。这种方式一直沿用到现代，大大推进了数学的发展。书中内容丰富，论证精彩，逻辑周密，结构严谨，这些都是其他数学书不能相比的。现代广泛流传的中学几何课本的写法是仿照法国数学家拉格朗日（1736-1813）对《几何原本》的改写本写的。

当然，《几何原本》由于时代的限制，也有它不完善的地方，基础部分不够严密，有些证明有遗漏和错误，不少地方用特例来证明一般，全书并未呵成一气，某种程度上是前人著作的堆砌等等。但是《几何原本》仍不失为科学著作的典范。一般说来，科学著作容易被新著作淘汰，很少流传两三百年的，唯独欧几里得的《几何原本》流芳千古，传诵至今。

欧几里得还写了一些重要数学著作。重要性仅次于《几何原本》的是《二次曲线》，这本失传的著作后来成为阿波罗尼

斯《圆锥曲线》中头三卷的主体内容。欧几里得还写了供复习《几何原本》用的《数据》、《辨伪术》，前者是一批练习题，后者包含有正确和错误的几何证明，目的是为训练学生。还有失传的《衍论》、《曲面——轨迹》等著作。

(五)

阿波罗尼斯生于小亚细亚的城市珀加，青年时代在亚历山大里亚欧几里得的门人那里学习数学。

阿波罗尼斯的代表作是《圆锥曲线》，共八篇，有四百八十七个命题。在他之前很早就有人研究圆锥曲线，但是阿波罗尼斯做了去粗存精并使它系统化的工作，他是第一个依据同一个圆锥的截面来研究圆锥曲线理论的人，首先发现双曲线有两支。《圆锥曲线》综合、总结了前人的成就，包含有非常独创的材料，写得巧妙、灵活，结构也很出色。这是古希腊的一部非凡的数学著作。

亚历山大里亚时期的数学

(一)

希腊数学的第二期——亚历山大里亚时期的数学也取得了辉煌的成就。几何进一步发展了，在计算长度、曲边形面积和体积方面取得了巨大进展，甚至接近"高等"数学；创立和发展了三角学；算术和代数得到新的发展，成为独立的学科。

数学家还积极参与力学方面的工作，算出了各种形体的重心，研究了力、斜面、滑车和联动齿轮，他们往往是发明家，在光学、天文学等研究方面成绩卓著。他们和哲学断了交，同

工程结了盟。

这个时期的著名数学家有阿基米得(前287-前212)、埃拉托色尼(前275-前194)、希帕克(前二世纪)、尼寇马克(一世纪)、希罗(一世纪)、梅内劳(一世纪)、托勒密(二世纪)、刁藩都(三世纪)和帕普斯(四世纪)。

(二)

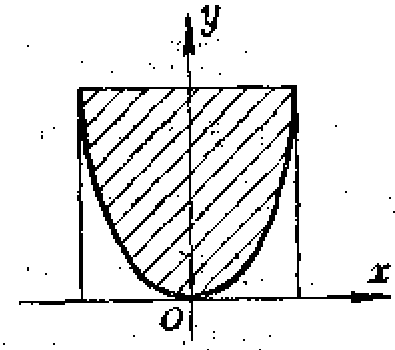
阿基米得生于西西里岛一个希腊殖民城市叙拉古。青年时代在亚历山大里亚受教育，后来一直住在叙拉古。他才智高超，兴趣广泛，具有非凡的机械技巧。他的发明创造远远超出当时一般的技术水平。他年青的时候造了一个行星仪，是一个水力推动的模仿太阳、月球和行星运动的机构；发明了螺旋提水器；发现了杠杆原理；造了一组滑车把船吊到河里。后来，当叙拉古遭到罗马人攻击的时候他发明军器和投石炮防守叙拉古，用抛物镜面集中阳光把攻城的罗马船烧毁。他洗澡的时候发现了浮力定律竟光着身子跑到街上兴奋地高喊“攸勒加！”意思是“有啦！”因为他有了测定王冠是否是纯金的方法。

阿基米得。

阿基米得的几何著作是古希腊数学的顶峰。他用穷竭法求曲边形面积和体积，计算 π，算出了 π 的平方根的不足近似值和过剩近似值。在求面积和体积的计算中接近于积分计算，他证明了抛物线弓形的面积等于包住它的长方形面积的$\frac{2}{3}$。他的无限小量的概念到了十七世

纪被牛顿作为微积分的基础。

阿基米得的《论劈锥曲面体和球体》一书论述圆锥线旋转形体的性质。阿基米得在《抛物线的求积》一书中用力学和数学两种方法求出抛物线弓形面积，对物理论证和数学论证分得非常清楚。



弓形面积计算图。

阿基米得的著作都以小册子的形式出现而不是大部头巨著，他的文字优美，条理性、周密性和针对性都很强。

阿基米得在公元前212年罗马人攻入叙拉古的时候被害。当时他正在沙地上画数学图形，由于沉醉于数学中以致没有听到刚攻进城的罗马士兵的喝问，那个士兵就把他杀死了。被害的时候75岁，死前他仍然精力充沛。

（三）

阿基米得时代以后，希腊几何的倾向更侧重于应用。他的继承人——希帕克、希罗、托勒密等人转而研究各种和数学有关的科学，如天文学、力学和光学。

天文学的发展对于预报天体的运行路线和位置，以帮助报时、历法、航海和地理研究等，要求加深了。希帕克和后来的梅内劳、托勒密创立了希腊定量几何中一门全新的学科三角术。亚历山大里亚希腊人的三角术是球面三角，因为球面三角对天文学更加适用。但是他们的三角术也包括了平面三角的内容。梅内劳发表《球面学》，建立了球面几何，其中包括球面三角和天文学的内容。公元150年前后，托勒密求出

$$\pi = 3.14166,$$

提出透视投影法和球面上经纬度的讨论，他的《数学汇编》继承了希帕克和梅内劳在三角和天文学方面的成就，是古希腊三角术的发展和在天文学上的应用的顶点。这本书把三角术定了型，此后一千多年保持不变。

这时期的几何成就还有一世纪的希罗在面积和体积方面的成果。他写了关于几何学的、计算的和力学科目的百科全书。在其中的《度量论》中，他以几何形式推算出三角形面积的著名公式

$$\triangle = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}。$$

公式里的△是三角形面积，s 是周边的一半，a、b、c 是三边。

希罗还是一个优秀的测绘员，继承和丰富了埃及人的测地科学，他的测地术著作几百年间一直被人们使用。

（四）

从一世纪开始，亚历山大里亚的几何开始衰落了，但是算术和代数却复兴了。

公元100年前后，尼寇马克撰写了两卷本的《算术入门》一书。这是第一本完全脱离几何讲法的算术书，从历史意义来讲，它对算术的重要性可以和欧几里得的《几何原本》对于几何的重要性相比。它的主要内容是介绍早期毕达哥拉斯派在算术方面的工作，讲述了偶数、奇数、正方形数①、矩形数和多角形数，论述了质数和合数，还定义了别的许多数。书中的乘

① 毕达哥拉斯学派把数描绘成沙滩上的点，1、4、9、16……这些数叫做正方形数，因为用点表示的时候可以把它们排成正方形。

法九九表和现在的一模一样。

尼寇马克对整数进行了深入的研究，得出了许多一般性的关系。他常用一些特殊的数来讨论数的各种分类和比例。《算术入门》这本书一直是它出现后一千年间的一本标准课本。

亚历山大里亚时期的希腊代数，刁藩都研究得最为完善。他的十三卷《算术》巨著代表了古希腊代数思想的最高成就。这是一本问题集，包含了一百八十九个问题，每个问题都有不同的解法，共有五十多种类型。

刁藩都的重大成就是在代数中采用了一套符号，系统地引进了某些循环量和运算的字母缩写法，代表一种"字母代数"。比如运用字母符号表示未知数和它的方次，还有加、减号等特殊记号，能写出代数方程。再就是他对不定方程的解法有研究。他广泛研究了 $x^2+y^2=z^2$ 等不定方程的解，创立了现代叫做刁藩都分析的一门代数分支。他是一个巧妙而聪明的解题能手，是个纯代数学家。

古希腊数学的成就和局限性

(一)

古希腊的数学由于吸取了其他民族数学的精华，加以提炼和发展，因而成就巨大。亚历山大里亚时期的算术和代数深受埃及和巴比仑的影响。但是，今天数学里非常重要的一件事却在希腊代数里遗漏了，这就是用字母来代表一类数，比如方程的系数。此外，希腊代数缺乏明晰的演绎结构，整数、

分数和无理数[1]也都没有给出定义。

现在简单归纳一下希腊人的数学成就，大致有以下几点：

第一，使数学成为抽象性的科学。这对数学的理论和发展是个重大贡献。

第二，建立了演绎证明。这是了不起的一步。

第三，在几何方面，他们的研究水平已经很接近“高等”数学。除了阿基米得在面积和体积的计算接近积分计算外，阿波罗尼斯关于圆锥曲线的研究接近于解析几何。古希腊人还知道，在所有给定表面积的物体中，球有最大的体积。

第四，希腊人发现定理和证明定理的时候，逻辑结构严密，论证认真细致，这种精神一直影响着后来的数学。

第五，希腊人充实了数学的许多内容，创立平面和立体几何、平面和球面三角，奠定了数论基础，发展了巴比仑和埃及的算术和代数，这些贡献都是巨大的。

第六，希腊人把数学看成是物质世界的实质，提出了宇宙是按数学规律设计的、是有条理、有规律并且能被人认识的观念。这对鼓舞人类去认识自然是有一定促进作用的。

（二）

希腊的数学有伟大的成就，但是也有它的缺点和局限性。

第一，古希腊人没有掌握无理数概念。这不仅限制了算术和代数，而且使他们转向并过分强调几何，因为在几何中他们可以避免回答无理数是不是数的问题。希腊人专注几何，

① 无理数是和有理数相对来说的，古希腊人把不能用整数和分数表示线段长的数叫做无理数，相反就叫做有理数。

摈弃无理数，迷糊了后世纪几代人的视界，结果把代数和几何看成互不相干的学科。

第二，希腊人把数学仅限于几何又产生了另一个局限性，这就是他们认为几何方法是数学证明的唯一方法。而随着数学范围的扩大，只用几何方法就使证明越来越复杂，特别是在立体几何中。这种观念占统治地位达一千多年，限制了数学的发展。

第三，希腊人不仅把数学限制于几何，他们甚至把几何只限于那些能用直线和圆作出的图形。

第四，希腊人坚持要把他们的几何学搞得统一、完整和简单，把抽象思维同实用分开，使古希腊几何成为一门成就有限的学科。

第五，希腊人的哲学思想又从另一方面限制了希腊数学的发展。在整个古典时期，他们相信数学事实不是人创造的，而是先于人而存在的，人只要肯定这些事实并记录下来就行了。

阿基米得被罗马士兵杀死预告了整个希腊世界将要遭受的厄运。罗马人征服了希腊，也摧毁了希腊的文化。罗马人公元前146年征服了希腊本土，公元前64年征服了美索不达米亚。公元前 47 年罗马人焚毁亚历山大里亚的埃及舰队，大火也烧掉了图书馆，两个半世纪以来收集的藏书和五十万份手稿竟付之一炬。基督教给希腊和东方的文明带来了不幸。希腊书成千地被焚毁。在宣布取缔异教的那一年，基督教徒焚毁了当时唯一尚存大量希腊图书的塞劳毕斯神庙，大约有三

十万种手稿被焚。

后来崛起的回教徒在640年征服埃及，给亚历山大里亚以最后致命一击。残留的书籍被阿拉伯征服者欧默尔下令焚毁，他的理由是："这些书的内容或者是古兰经里已有的，那样的话，我们不需要读它们；或者它们的内容是违反古兰经的，那样的话，我们不该去读它们。"因此在亚历山大里亚的浴堂里接连有六个月用书来烧水。

由于外族入侵和古希腊后期数学本身缺少活力，希腊数学从一世纪开始衰落，虽然托勒密和刁藩都等人创立了三角，复兴了算术和代数，然而这不过是希腊数学衰亡前的回光返照。数学发展的中心开始移到了东方。

东方数学发展时期

(一)

随着希腊数学的终结，数学发展的中心又移回到东方的印度、中亚细亚、阿拉伯国家和中国。

东方时期从五世纪到十五世纪的一千多年时间里，数学主要是由于计算的需要，特别是由于天文学的需要而得到迅速发展。以前希腊的数学家大多数是哲学家，后来东方的数学家大多数是天文学家。

(二)

这个时期的数学，无论是算术、代数，还是几何、三角学，都取得了进展。

现代数学的许多记数符号，都是这个时期的数学家根据

前人积累的知识，经过提炼整理提出来的。

这个时期中国数学发展的成就是巨大的，前面已作过介绍，因此，主要是叙述印度和阿拉伯国家的数学发展情况。

蓬勃发展的印度数学

（一）

在数学史上，希腊人的后继者是印度人。印度的数学在受到希腊数学的影响后，有了很大的发展。

在公元前三世纪之初，印度河流域的摩亨佐·达罗、哈拉巴① 等地方已经采用十进位制。大约在公元前三世纪后，出现了数的记号，但是每个世纪都有相当大的变动。典型的是婆罗门式记号：

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 20 30 40 50 60

这一组记号的出色的地方是给 1 到 9 每个数都有单独的记号。这里还没有零和进位记法。这种写法也许是由于以某个数的名称的第一个字母来代替它而产生的。据考证现代数码就是由这种数码脱胎而来的。

印度人祭坛最常用的三种形状是方、圆和半圆；但是不管用哪种形状，祭坛面积必须相等。因此印度人要作出和正方形等面积的圆，或两倍于正方形面积的圆以便采用半圆形的祭坛。另外一种形状是等腰梯形。这里还可以用相似形。在

① 摩亨佐·达罗和哈拉巴是印度河流域上古文明的重要遗址。

作相似形的时候会引起新的几何问题。

在设计这种规定形状的祭坛的时候，印度人必须懂得一些基本的几何事实，比如勾股定理。他们是这样说的："矩形对角线生成的面积等于矩形两边各自生成的两块面积的和。"所谓某线生成的面积就是用这条线作边的正方形的面积。一般说来，这段时期的几何只不过是一些不相连贯的用文字表达的求面积和体积的近似法则。没有几何证明，法则都是经验性的。

（二）

从200年到1200年是印度数学的高潮时期。这段时期的初期，他们向希腊人学习几何，向巴比仑人学习代数，并从中国得到借鉴，进一步发展了算术和代数。

五世纪阿耶波多(476-？)著书研究了一次不定方程式的解法等问题；七世纪婆罗摩笈多研究了定方程和不定方程，给出了方程

$$ax \pm by = c \qquad (a、b、c\text{是整数})$$

的第一个一般解。

628年左右婆罗摩笈多使用负数并提出了负数的四则运算。这时候印度人引用负数表示欠债，正数表示财产，并把正负数和直线上两个方向也就是数轴联系起来。

十进位制的记数法在七世纪通行以后，到九世纪的数学家摩诃毗罗，又把零看成一个数。他说，一数乘以零得零，并说减去零并不使一数变小。但是他又说一数除以零后不变。他说，这正如万世不易的神不会因世界的创生和毁灭而有所

改变。这显然是不对的。但是，他又说一数除以零叫做无穷量。

至于天文上的分数，印度人是用六十进位制的，其他方面的分数他们用整数的比来表示，但没有用横线，比如：$\frac{3}{4}$。

印度人的算术运算同现在的相象，比如摩诃毗罗给出和我们今天相同的除以分数的法则：把分数颠倒相乘。

印度人正视了无理数的问题，并能进行正确的运算。十二世纪，印度数学家拜斯迦罗(1114-1185)出版了东方算术和计算方面的重要著作——《立剌瓦提》，其中论述了无理式的加减乘除和开平方的法则。

印度人在代数上还获得一些进展，他们用缩写文字和一些记号来描述运算，比刁藩都的缩写代数用得多。对问题和解答都用半符号方式书写，但是只写出运算步骤，没有接着说明理由或者证明。他们还认识到二次方程有两个根，包括负根和无理根。在不定方程方面印度人超过了刁藩都。

(三)

值得指出的是，印度人对许多数学问题兴趣很浓，常用故事或诗歌的形式提出来，或夹杂在历史读物中吸引人们，目的是帮助记忆。婆罗门的老习惯是把事情记在心上而尽可能避免写在纸上。

代数应用在普通商业上，如算利息、折扣、合股分红、财产划分等，但主要用途是在天文学上。

这段时期的印度几何没有出色的进展，只是一些求面积和体积的公式，有些是正确的，有些还不正确。但是在三角术

方面作出了一些推进。

到1200年左右印度科学活动衰落了，数学上的进展也停止了。

阿拉伯和中亚的数学进展

(一)

从九世纪开始，数学发展的中心转向了阿拉伯和中亚细亚。

阿拉伯人的祖先是住在现今阿拉伯半岛的游牧民族。他们在穆罕默德的领导下统一起来，并在他死(632年)后不到半个世纪内征服了从印度到西班牙的大片土地，包括北部非洲和南意大利。755年，阿拉伯帝国分裂成两个独立王国；东部王国以巴格达作为首都，西部王国以西班牙的科尔多瓦作为首都。

征战完成之后，这批早先的游牧者就定居下来创造他们的文明和文化了。他们相当快地关心起艺术和科学，东西方的两个首府都吸引科学家并支持他们的工作，巴格达是比较大的文化中心。他们在那里设立了一个学院，一个图书馆和一个观象台。他们广泛搜罗人材，聘请印度科学家来巴格达住，设法控制或取得拜占庭(东罗马)帝国、埃及、叙利亚、波斯等地的人材。他们对别的种族和教派宽大，容许异教徒自由活动。他们迅速翻译亚里士多德、欧几里得、托勒密、阿波罗尼斯、阿基米得、希罗、刁藩都和印度人的著作，不断改进译文并且加以评注。阿拉伯的文明和文化在接收外来文化中迅速

发展起来，直到1300年还充满活力。阿拉伯的学术传播四方，欧洲受益最大。

(二)

阿拉伯人在数学上没有作出重要的推进，他们所做的是吸收了希腊和印度的数学，把它们保存下来，并且把它传给了欧洲。阿拉伯文明在1000年前后达到顶点。在1100年到1300年间，东部阿拉伯世界先被基督教十字军打击削弱，后来又遭到了蒙古人的蹂躏。到1258年巴格达的回教国君已经不复存在，鞑靼人把阿拉伯的文明摧毁殆尽。1492年西部阿拉伯世界被基督教徒征服，阿拉伯的数学和科学到此告一段落了。

印度的记数法和在算术、代数方面的成就是经阿拉伯文明的媒介传到欧洲的。阿拉伯数学是一种典型的折衷，既含有希腊的因素，也含有印度的因素。阿拉伯的记数法是从印度来的，而阿拉伯的几何显示出欧几里得和阿基米得的影响，阿拉伯的代数却回到了希腊几何的观念，而且避免负数。

一般人认为阿拉伯人在数学领域有很大功绩是历史的误会。七世纪，阿拉伯的哈里发政权扩张后，阿拉伯语言不仅是阿拉伯国家的语言；而且成为近东、中东、中亚细亚许多国家的官方语言。甚至在九世纪哈里发政权瓦解以后，这些地区还很普遍地使用阿拉伯语，很多学者和诗人用阿拉伯文写作，好象欧洲人使用拉丁文一样，这也是阿拉伯人被认为在数学上具有很高成就的基本原因。当然，阿拉伯文化仍有它不朽的功绩。通过阿拉伯文化，东方的文明传到了中世纪黑暗的欧洲，而且希腊人的许多著作是靠阿拉伯人翻译成阿拉伯文

才得以保存下来，也是通过阿拉伯人把它们传到了欧洲的。

（三）

在九到十五世纪，中亚细亚的数学家创造了很高的数学成就。

在算术和组合论方面，改进了六十进位计数制；发现了小数；创造了数的开方法；第一次精确地建立了指数是任意自然数的牛顿二项式公式①，扩大了实数（正实数）的概念。

在代数方面，使代数成为数学的一个专门学科；在度量几何中应用了数值代数、发明了用累进计算法解某种三次方程，建立了解三次方程的几何理论。

在三角学方面，建立了平面三角学和球面三角学体系；计算出十分精确和完整的三角函数表。

（四）

中亚细亚最著名的有下面几位数学家：

乌兹别克数学家和天文学家穆罕默德·伊本·穆斯阿尔·花剌子模②所写的《代数》，曾被译成拉丁文，好几个世纪作为代数学基本教科书，内容包括解一次和二次方程的基本方法。现在的二次方根的计算公式（首项系数是1的）

$$x=\frac{-b}{2}\pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2-C},$$

① 这个公式以牛顿的名字命名，不是因为他第一次发现了它，而是因为他把这个公式从正整数n推广到任意分数和无理数。

② 穆罕默德·伊本·穆斯阿尔·花剌子模意思是花剌子模人穆斯之子名穆罕默德。

第一次出现在他的书中。他所著的《算术》一书系统叙述了十进位值制记数法，有六十进位制和小数的运算法，对近东、中东和欧洲国家普及十进位值制起了很大的作用。

阿布尔·威发（940-988）在平面三角和球面三角学的发展上做了很多工作，他编的正弦表、正切表精确到$\frac{1}{60^4}$。他的著作中首先发现了球面三角形的正弦定理，记述了开三、四、五次方根的方法，引入了“正割线”、“余割线”概念。

塔吉克诗人、数学家奥马尔·哈雅姆（1036或1040-1123或1124）所著的《代数》详尽地研究了一次方程的解和三次方程根的几何作图法、有数（有理数和无理数）的一般定义，系统地给出了用圆锥曲线图解求根的理论。

阿拉伯数学家阿尔·卡西比较早发明小数，1427年他的著作《算术之钥》中给出了小数的运算法则，比欧洲人斯提文（1548-1620）再度发明小数要早一百五十年。值得一提的是阿尔·卡西在《关于弦和正弦》一文中计算了圆内接和外切805306368边形（3×2^{28}）的周长，计算的圆周率精确到十七位，他的成果是

$$2\pi=6.2831853071795865。$$

欧洲数学家直到十六世纪末才达到这一精度。

东方时期数学的主要成就

（一）

现在我们简单总结一下东方时期的印度、阿拉伯、中亚细亚的数学。这段时期，现代十进记数法、初等代数和三角差不

多完成了。中国的数学成就传入邻国，对他们数学的发展有一定影响。

印度的十进位记数法（就是1到9这九个数码用特别的数字记号，并把零看作一个数）、负数的引入、把无理数当作数来自由运算，不仅大大推广了算术的范围，而且为更有意义的代数开辟了广阔的道路。

他们都是从算术方面而不是从几何方面来处理确定的和不确定的方程。代数，埃及和巴比仑人在开始的时候是立足于算术的，但是希腊人却颠倒了这个基础，把它立足于几何。印度和阿拉伯人使代数重新立足于原来的基础上，加进了许多技巧，并且把它变成独立的学科。

他们使三角学取得进展，引用正弦等概念。在处理三角恒等式和三角计算上使用算术和代数技巧都加快了这门学科的发展，并且使三角术脱离了天文学而独立发展成为一门用途广泛的学科。

(二)

东方时期的数学进展有两点是值得提出来的，这两点对后来的数学发展起了很大的作用。这两点就是：承认无理数，用代数方法解方程。

承认无理数是数以后，就有可能给所有线段以及二、三维的图形用数来表示长度、面积和体积。另外，阿拉伯人用代数方法解方程，然后用几何图形说明步骤的合理性，展示了代数和几何存在一致性，进一步发展便导致了解析几何的产生。

更应该指出，印度人和阿拉伯人把算术和代数提高到同

几何并驾齐驱的地位以后，就确立了数学的两种独立的系统，促进了数学向深度和广度发展。

文艺复兴时期

(一)

当阿拉伯和中亚细亚数学开始衰落的时候，西欧和中欧进入数学发展时期。

在巴比仑、埃及、希腊和罗马人各自盛极一时的年代里，欧洲(除意大利和希腊外)只有原始的文明，数学方面的知识十分贫乏。直到十二世纪以前，基督教的欧洲对数学发展贡献极少，数学水平非常低下。原因是在中世纪占统治地位的基督教对现实世界缺乏兴趣，他们重视死后的生活，并且非常重视为死后而进行的准备。他们认为研究科学、探讨自然的工作是卑下的、微不足道的，主要关心的是精神生活。

当时，教会指望教士能用说理来捍卫神学和驳斥论敌，因此认为数学是训练神学说理的最好学科。促使他们学习一点数学的另一动机是占星术。占星术基本信条是说天体能影响和控制人的命运。为了了解天体的影响并预报特殊的天象事件如行星的会合和日月食所展示的吉凶祸福，那就需要有天文知识，也就需要懂得点数学。

这些虔诚的基督教徒整日研读圣经。他们认为："从圣经以外获得的任何知识，如果它是有害的，理应加以排斥；如果它是有益的，那它是会包含在圣经里的。"因此在长达七百年(从五世纪到十二世纪)的中世纪初期和中期的前半段，欧洲

发展不了数学，他们不研究自然，甚至连古代希腊和埃及的数学著作都不熟悉。欧几里得的著作，主要是通过六世纪初罗马数学家波伊提乌（约480-524）所编译的《几何学》有关命题的阐述而知道的，而这些命题又未加以证明。传到欧洲的阿基米得的著作也不多，仅限于球、圆柱和圆的度量，以及杠杆定律等著作。到十二世纪，阿拉伯文、希伯来文和希腊文的数学著作被译成拉丁文译本，起初也没有引起欧洲学者的兴趣，这些人的兴趣仍是神学和形而上学。

（二）

在十三世纪初的1202年，意大利的数学家斐波那契写了一本《计算之书》之后大约近三百年，整个拉丁世界对数学仍一无进展，直到1494年出现了意大利数学家帕奇欧里（1445-约1514）所写的《算术集成》，欧洲人才逐渐取得进展。

十六世纪初，当意大利数学家塔他利亚（1500-1557）、卡当（1501-1576）、弗拉利（1522-1560）能够把三次方程、四次方程用代数法解，找到了三次和四次方程的求根公式，欧洲人才第一次超过了东方人，也才建立起能够超过东方人的信心。

（三）

欧洲文艺复兴是从十五世纪后半期开始的，正如恩格斯所指出的："这是一次人类从来没有经历过的最伟大的、进步的变革，是一个需要巨人而且产生了巨人——在思维能力、热情和性格方面，在多才多艺和学识渊博方面的巨人的时代。""从那时开始的自然科学最初一个时期中的主要工作，是掌握手边现有的材料。在大多数部门中必须完全从头做起。古代留

传下欧几里得几何学和托勒密太阳系，阿拉伯人留传下十进位制、代数学的发端、现代的数字和炼金术；基督教的中世纪什么也没留下。在这种情况下，占首要地位的，必然是最基本的自然科学，即关于地球上物体的和天体的力学，和它同时并且为它服务的，是数学方法的发现和完善化。这里有了一些伟大的成就。”（《自然辩证法》，第7、第9页）

在这些伟大成就中，对后来数学的发展产生巨大影响的是波兰天文学家哥白尼（1473-1543）和刻卜勒领导的天文学革命。1542年，哥白尼提出太阳中心说，认为恒星天层不动，地球每天绕它的轴旋转一周，并且作为一个行星每年绕太阳运行一周。1543年，《天体运行论》出版，从此自然科学便开始从神学中解放出来，大踏步前进。1609年到1618年，刻卜勒发现行星运动的三大定律，彻底摧毁了亚里士多德的地球中心的学说和托勒密体系。哥白尼和刻卜勒使人们树立了这样一个信念：科学研究是独立于一切哲学和神学教条的；数学可以考察假说是否正确；假说和推理必须通过实践来检验。

对于太阳为中心的哥白尼学说，一开始只得到了数学家的支持，因为只有数学家认为宇宙是按照数学方式设计的，也只有他们才能产生足够坚强的信心摆脱那些在哲学上、宗教上、天文学上流行的唯心主义信念。直到伽利略把他的望远镜对着天空，天文学的物证才支持了数学的理论。

（四）

文艺复兴时期在数学方面没有出现什么杰出的新成就，数学领域的微小进展不能同文学、绘画、建筑、天文学领域的

进展相比。对于数学来说，文艺复兴时期的数学家只是翻译了希腊和阿拉伯的著作，编辑了百科全书，吸收了希腊成果，并且为欧洲数学研究的高涨作了些准备。

在数学发展史上值得一提的是，这段时期又象亚历山大里亚时期那样建立了数学和科学技术的密切联系。在科学方面，认识到数学定律归根到底是终极的目标；在技术方面，认识到以数学式子来表达研究结果是知识的最完善、最有用的形式，是设计和施工的最有把握的向导。数学逐渐成为科学技术的基础，成为最有力量的一门科学。

在十六、十七世纪，欧洲人在数系、算术、代数、方程论和数论方面取得了进展。

在1500年左右，欧洲人已经把“零”看作是一个数了，斯提文和卡当不仅按印度人和阿拉伯人的传统使用无理数，而且引入了种类越来越多的无理数。斯提文在方程里用了正的、负的系数，并且承认负根，复数逐渐被认识，数系逐步完善了。卡当发现复数根成对，意大利数学家邦别利(1530-1572以后)有了复数根的记号。1572年，邦别利出版《代数学》，引入了虚数，确定了复数运算，最终解决了三次方程代数解的问题。

在这期间，算术方面的成就还有连分数的使用。

在代数方面，取得重大进展的是法国数学家、代数学的奠基人之一韦达(1540-1603)，1591年，他在代数中建立了抽象量的符号，用a、b、c表示已知数，用x、y、z表示未知数，推进了代数问题的一般讨论。1614年，英国数学家耐普尔(1550-1617)制定了对数，1624年，英国数学家布利格(1561-1631)计

算出第一批以十为底的常用对数表。

在方程方面，卡当引入复数根后曾一度认为一个方程可以有任意多个根，不久他认识到三次方程有三个根，四次方程有四个根，吉拉德(1595-1632)推测n次方程有n个根(包括重根)。在十七世纪，对于正根、负根和复根的研究很详细。韦达还得出了方程的根和系数之间关系的著名定理。法国数学家笛卡儿(1596-1650)引入了待定系数原理。

指数是正整数的二项式展开定理早在1261年中国数学家杨辉就知道了，1654年法国数学家帕斯卡又得到了这一结果，牛顿在1665年把指数推广到分数和实数的情况，得到了普遍公式。1654年，帕斯卡、法国数学家费尔马(1601-1665)研究了概率论的基础，得到了排列组合的公式。在这之前，欧洲数学家就知道了一些级数的知识。所以到十七世纪上半叶，初等代数的理论和内容才算真正完成了。

费尔马对初等数论起了奠基的作用。他确定了数论的研究方向，提出了许多定理，如1670年提出了著名的“费尔马大定理”，预测如果x、y、z、n都是整数，那么方程$x^n+y^n=z^n$当$n>2$的时候没有整数解。

初等代数的建立，标志着常量数学也就是初等数学时期的结束，接着是向高等数学——变量数学过渡。

变量数学时期

(一)

十七世纪生产力的发展推动了自然科学和技术的发展，

不但已有的数学成果得到进一步巩固、充实和扩大，而且由于实践的需要，开始研究运动着的物体和变化中的量，这样就获得了变量的概念。这是数学发展史上的一个转折点。研究变化着的量的一般性质和它们之间的依赖关系又得出了函数的概念，数学对象的扩展就使数学进入了一个崭新的时期。

圆锥曲线的椭圆和抛物线的几何性质早在古希腊时期就研究得很详细了，然而是把它当作几何概念来研究的。后来，刻卜勒发现行星是沿椭圆轨道绕太阳运行的，伽利略又发现抛出去的石头沿抛物线的轨道飞去，这就促使人们要去计算椭圆，求出炮弹飞行所走过的抛物线了。同时，也使人们去发掘由帕斯卡发现的大气压力随高度而迅速减少的法则。

（二）

由于研究运动着变化着的量，这些问题引起了人们的深入思考，在数学中随着发生了极其罕见的情景；在一二十年里面出现了巨大的、全新的两门数学分支，它们是解析几何和微积分（包括微分法和积分法），微积分又叫数学分析。这些数学分支都是以非常简单的、但是以前一直未受到应有注意的观念作为基础的。这两门新的学科从本质上改变了整个数学的面貌，它们使先前无法解决的问题变得容易解决了。

欧洲数学家在不到三个世纪的时间里所创造的成果比希腊人在大约十个世纪中所创造的要多得多。这个时期是现代科学早期发展的重要时期，也是人类社会发展史上的重要时期。

从十七世纪上半叶开始的新时期——变量数学时期，又

可以分做两个阶段，就是变量数学的出现和发展两个阶段。

解析几何和微积分产生的阶段

(一)

十七世纪最伟大的成就是建立了解析几何和微积分，最伟大的数学家是费尔马、笛卡儿、牛顿和莱布尼茨(1646-1716)。

在十七世纪前半叶，一系列最优秀的数学家已经接近了解析几何的观念，但是只有两位数学家认识到并且创立了解析几何。一位是法国数学家费尔马，另一位是法国著名哲学家、数学家笛卡儿。

一般认为，解析几何的主要创立者是笛卡儿。因为作为哲学家的笛卡儿，提出了它的全面推广问题。笛卡儿发表了长篇哲学论著«关于下列方法的讨论：为了很好地在科学中指出它的精神和发掘真理并应用于折射光学、气象学和几何学»，也叫做«方法谈»，这著作的前两部分是«折光学»、«论流星»，后一部分以«几何学»作为题目发表于1637年，其中包含着解析几何理论的十分完备的叙述，是解析几何的基础。

笛卡儿。

笛卡儿建立了坐标法，引进了变量和函数等重要概念，把几何和代数密切联系了起来。这是数学的一个转折点，也是变量数学发展的第一个决定性步骤。

（二）

牛顿和莱布尼茨在十七世纪后半叶各自独立地建立了微积分，这是变量数学发展的第二个决定性步骤。牛顿和莱布尼茨只是把许多数学家都曾经参加过的巨大准备工作完成了。微积分的原理可以追溯到古希腊人阿基米得所建立的确定面积和体积的方法。它起源于作曲线的切线和计算曲线图形的面积、体积。在十六世纪末、十七世纪初，刻卜勒、卡瓦列利和牛顿的老师、英国数学家巴罗（1630－1677）等人也研究过这些问题，但是没有形成理论和普遍适用的方法。由于力学问题的研究、函数概念的产生和几何问题可以用代数方法来解决的影响，促使了微积分的产生。牛顿是从物理学观点上来研究数学的，他创立的微积分学原理是同他的力学研究分不开的。他发现了力学三大定律和万有引力定律。1687年牛顿出版了他的名著《自然哲学的数学原理》，这本书是研究天体力学的，微积分的一些基本概念和原理就包括在这本书里。莱布尼茨却是从几何学观点上独立发现微积分的，他从1684年起发表了一系列微积分著作，他力图找到普遍的方法来解决数学分析中的问题。莱布尼茨最大的功绩是创造了反映事物本质的数学符号。数学分析中的基本概念的记号，例如微分 dx，二阶微分 d^2x，积分 $\int ydx$，导数 $\frac{d}{dx}$ 都是莱布尼茨提出来的，这些记号沿用至今，非常适合、便利。

牛顿。

在十七世纪探索微积分的至少有十几位大数学家和几十位小数学家。牛顿和莱布尼茨分别进行了创造性的工作，各自独立地跑完了“微积分”这场接力赛的最后一棒。

莱布尼茨。

牛顿和莱布尼茨的创造性工作也有很大的不同。两个人工作的主要区别是，牛顿把x和y的无穷小增量作为求导数的手段。当增量越来越小的时候，导数实际上就是增量的比的极限。而莱布尼茨却直接用x和y的无穷小增量(就是微分）求出它们之间的关系。这个差别反映了牛顿的物理学方向和莱布尼茨的几何学方向。在物理学方向中，速度之类是中心的概念，而几何学却着眼于面积体积的计算。

他们的差别还在于，牛顿自由地用级数表示函数；而莱布尼茨宁愿用有限的形式。

他们的工作方式也不同。牛顿是经验的、具体的和谨慎的，而莱布尼茨是富于想象的、喜欢推广的而且是大胆的。

他们对记号的关心也有差别，牛顿认为用什么记号无关紧要，而莱布尼茨却花费很多时间来选择富有提示性的符号。

（三）

不幸的是牛顿和莱布尼茨各自创立了微积分后，历史上发生过优先权的争论，从而使数学家分裂成两派。欧洲大陆的数学家，尤其是瑞士数学家雅科布・贝努利(1654-1705)和约翰・贝努利(1667-1748)兄弟支持莱布尼茨，而英国数学家

捍卫牛顿。两派激烈争吵，甚至尖锐地互相敌对、嘲笑。牛顿和莱布尼茨死了很久以后，经调查证实，事实上，他们各自独立地创立了微积分，只不过牛顿（1665-1666）先于莱布尼茨（1673-1676）制定了微积分，莱布尼茨（1684-1686）早于牛顿（1704-1736）公开发表微积分。

这件事的结果，英国和大陆的数学家停止了思想交换，使英国人在数学上落后了一百年。因为牛顿的《原理》一书使用的是几何方法，英国人差不多一百年中照旧以几何作为主要工具。而大陆的数学家继续用莱布尼茨的分析法，并且使微积分更加完善。在这一百年中，英国人甚至连大陆通用的微积分符号都不认识。

数学分析发展的阶段

（一）

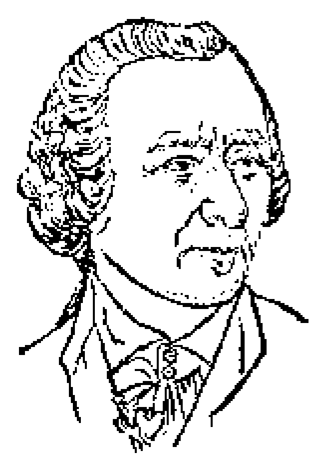
在数学上，有人把十七世纪叫做天才的时期，也有人把十八世纪叫做发明的时期。这两个世纪的数学成就是巨大的。

这个时期的数学有三个显著的特征。第一个特征是数学家从物理学、力学、天文学的研究中发现、创立了许多数学新分支，这些分支在十八世纪有的处于萌芽状态，大都未形成系统严密的理论。英国数学家泰勒（1685-1731）和马克劳林（1698-1746）研究弦振动理论和天文学得到级数展开理论，法国数学家克雷洛（1713-1765）、欧勒研究曲线曲面的力学问题、光学问题、大地测量和地图绘制产生了微分几何；欧勒、拉格朗日和贝努利兄弟研究力学和天体运行建立了变分法和

常微分方程；法国科学家达兰贝尔(1717-1783)、拉普拉斯(1749-1827)、拉格朗日研究弦振动、弹性力学和万有引力建立偏微分方程理论(主要是一阶的)；欧勒，法国数学家柯西(1789-1857)研究流体力学建立复变函数论等等。

十八世纪的数学家大多数为物理学问题所激动，他们的目标不是数学，而是解决物理学问题，他们认为数学只是物理学的一个工具，他们关心的是数学对天文学、物理学的价值。可以说十八世纪数学的推动力是物理学和天文学。在这批数学家中，出类拔萃的是瑞士数学家、彼得堡科学院士欧勒。

欧勒是十八世纪最著名的数学家、理论物理学家，数学界的中心人物。欧勒出生在瑞士巴塞尔附近的一个牧师家里，十五岁大学毕业，十八岁开始发表论文。著作之多、领域之广是惊人的。在数学领域中，微积分、微分方程、曲线曲面的解析几何和微分几何、数论、级数和变分法，他无所不及。他还把数学应用到物理学领域中去，创立了分析力学、刚体力学，计算了行星轨道中的天体的摄动影响和阻尼介质中的弹道。他的潮汐理论、船舶航行和设计有助于航海。他研究了梁的弯曲，计算了柱的安全载荷。他是十八世纪唯一赞成光的波动学说、反对微粒说的物理学家，对化学、地质学、制图学也有兴趣，还绘制了一张俄国地图。他写了力学、化学、数学分析、解析几何、微分几何和变分法的课本，一百多年来都成了标准课本。他以


欧勒。

每年大约八百页的速率发表高质量的独创性的研究文章。

1766年他双目失明，生命的最后十七年是在全盲中度过的，他的许多书和四百篇研究文章是在双目失明后写的。他的著作如果全部出完将有七十四卷，在数学的大多数分支中都可以找到他的名字，其中有欧勒公式、欧勒多项式、欧勒常数、欧勒积分和欧勒线。

他有惊人的记忆力，能背出三角和分析的全部公式，能记住前一百个质数的前六次幂，能背诵许多诗文和剧本。许多有才能的数学家在纸上作起来也很困难的计算，他却能心算出结果。

他品格高尚，赢得了广泛的尊敬。他晚年的时候，欧洲所有的数学家都把他当作老师。他是能够同阿基米得、牛顿、高斯和爱因斯坦(1879-1955)并列的世界上少有的大科学家。

（二）

十八世纪数学的第二个特征是从古以来采用的几何论证的方法开始逐渐被代数的、分析的方法代替。那时候，代数和分析还没有分开来。十七世纪的时候，代数是人们兴趣的中心，但是到了十八世纪，它变成从属于数学分析，而且除了数论以外，促进代数研究的因素大部分来自数学分析。

十八世纪的前三十年，几何方法仍然广泛使用着，但是欧勒和拉格朗日，认识到分析方法具有更大的效用后，就慎重地、逐渐地把几何论证换成分析论证，欧勒的许多教科书都说明怎样使用分析。拉格朗日在他的《分析力学》的序言中大力推广分析论证，拉普拉斯在他的《宇宙体系论》中强调分析的

力量。十八世纪的许多数学家都认识到分析的重要性，普遍地采用了数学分析的思想方法。

（三）

十八世纪数学的另一特征是不严密。因为没有数学理论作为指导，由物理学见解所指引，所以是直观的，又因为领域太广阔，还来不及打基础，因而是不严密的。

数学分析中任何一个比较细致的问题如级数和积分的收敛性，微分和积分次序交换，高阶微分的使用，以及微分方程解的存在性问题等等，那时几乎没有人过问。

把物理学问题用数学形式表达出来后，数学家就开始工作，新的一套方法和结论就涌现出来。欧勒完全被公式迷住了，以致他一看到公式，就情不自禁地要对它进行演算。许多数学家对严密性掉以轻心，1743年达兰贝尔说："直到现在……，表现出更多关心的是去扩大建筑，而不是在入口处张灯结彩；是把房子盖得更高些，而不是给基础补充适当的强度。"因此，十八世纪的数学家开垦了许多新的处女地，数量之多是惊人的，但是他们的工作是粗糙的，不严密的，是刀耕火耨式的工作方法。

（四）

由于十八世纪的数学家忙于应用解析几何和微积分这两种强有力的数学工具去解决科学和技术中的许多实际问题，并被新方法的成功所陶醉，而无暇顾及所依据的理论是否可靠，基础是否扎实，这就出现谬误越来越多的混乱局面。

十九世纪的数学家在德国数学家的倡导下对数学进行了

一场批判性的检查运动。这场运动不仅使数学奠定了坚实的基础，而且产生了公理化方法和许多新颖学科。如实变函数论、点集拓扑学、抽象代数等，使十九世纪的数学在坚实的基础上迅速发展。

十九世纪数学的特征是，基础变得坚实牢固，十八世纪形成的分支趋于成熟，新分支不断涌现，构成数学本体和核心的几何、代数、数学分析得到蓬勃发展。

几何学的新发展

(一)

十九世纪可以说是几何复兴时期。整整一个世纪，几何的新思想、新概念、新方法不断涌现。1799年法国数学家蒙日(1746-1818)创立画法几何，1809年蒙日出版第一本微分几何著作《分析在几何上的应用》。1816年德国数学家高斯发现非欧几何的轮廓，由于害怕别人不理解会受嘲笑而一直未予发表。1822 年法国数学家彭色列 (1789-1867)研究几何图形在投影变换下的不变性质，建立了射影几何。射影几何在十九世纪后半期成了几何的中心。1826年，俄国数学家罗巴切夫斯基 (1792-1856)，改变欧几里得几何学中的平行公理，提出非欧几何的理论，开创了几何的新时代。也是同一时候，匈牙利数学家鲍耶·亚诺什(1802-1860)也独立地发现了非欧几何。

非欧几何的产生，经历了十分曲折的过程，这里对于高斯、鲍耶、罗巴切夫斯基研究发现非欧几何的历史情况略加叙述。

从公元前三世纪到十九世纪初的两千多年期间，许多著名数学家都在试证第五公设，付出了巨大的代价。这就是几何发展的第五公设研究、非欧几何产生的时期。由于他们都没有越出欧几里得的空间概念，当他们声称已经证明第五公设的时候，实际上又提出了一个新的需要应用第五公设才能证明的命题。也就是说他们在证明过程中往往自觉或不自觉地引进了和第五公设相等价的命题，如“三角形的内角和等于两直角”，“在平面上，过直线外一点只能作一条直线和这条直线平行”等，这些都犯了逻辑循环的错误。证明虽然失败了，但是人们却从中受到了启示，提出了一些新问题，如到底能不能证明以及用相反命题代替会怎样等。同时，也有一些数学家如意大利的萨开里(1667-1733)、瑞士的兰伯特(1728-1777)，德国的施外卡尔特(1780-1859)等，发表了一些很有价值的研究成果。1818年施外卡尔特寄给高斯的短文中说：“存在两类几何，狭义的几何——欧几里得几何和星形几何。在后一个里面，三角形有一特点，就是三角的和不等于两个直角……”这些优秀的数学家为突破欧氏几何、创立非欧几何作了理论上的准备。

到十九世纪二十年代，德国的高斯、俄国的罗巴切夫斯基和匈牙利的鲍耶，几乎同时提出了非欧几何的思想，创立了非欧几何。

这三位数学家认真总结了前人和自己试证第五公设的失败教训，通过艰苦的研究工作，首先肯定了第五公设是不能用数学证明的，然后再否定它，用一个和第五公设相反的命题

(如"罗氏平行公理"：在平面上过直线外一点至少可以引两条直线和已知直线不相交；或三角形内角的和小于两直角)来代替它，结果建立了一种跟欧氏几何不同的新的几何理论，这就是非欧几何学。

(二)

高斯生于1777年，十岁时就显露出惊人的数学才能。有一次，老师提出一个等差级数求和的问题，其他同学正在一项一项加起来，他却很快地报出了答数。原来他应用了位于级数首尾等距项的和相等的这一性质。在大学念书的几年里，他主要从事独立研究，并且有许多重要的发现，十八岁的时候，他研究出了最小二乘法，十九岁他用圆规直尺作出了正十七边形。按他自己的话说，他是从作出正十七边形起才决心致力于研究数学的。

高斯在数论、代数、数学分析、概率论、级数理论等许多数学领域都有重要的发现。在高斯之前，复数虽然已经出现，但是人们总认为虚数是虚无缥缈的。高斯创立了用纵轴代表虚数轴的高斯平面，使每一个复数和平面上的一点相对应，才使复数理论大大发展起来。

高斯。

具有世界声望的高斯开始也不例外地试图证明第五公设，直到1804年以前，他并未放弃希望。后来，他逐渐相信第五公设是不可证明的。

尽管高斯很早就已经明瞭非欧几何

学的轮廓,但是由于怕新的理论不会被人理解,而会被人嘲笑,按他自己的话说:“怕引起某些人的喊声”,因此他一辈子都没有公开提出它的勇气。不仅如此,甚至在别人已经提出这个问题的时候,他也从来没有公开地表示支持。高斯研究非欧几何的情况,只是在他死后,从他跟一些数学家的通信和他的遗稿中才披露出来的。

(三)

高斯的大学同学匈牙利数学家鲍耶·法尔卡什(1775-1856)终生从事第五公设的证明。他的工作没有突出成就,而且思想保守。但是他的儿子鲍耶·亚诺什,却获得了出色的成绩。亚诺什1817年到1822年在维也纳工学院读书的时候,就醉心于第五公设的证明。在1820年以前,他和萨开里的方法差不多,以后他逐渐认识到第五公设不能证明,决心创造新几何学。鲍耶·法尔卡什知道儿子也在搞第五公设的时候,非常生气,多次写信坚决阻止他。信上说:“希望你再不要做克服平行线理论的尝试。……我熟知了一切方法到尽头,……并且我在这里面埋没了人生的一切光明,一切快乐。”“老天啊!希望你放弃这个问题。……因为它会剥夺你的生活的一切时间、健康、休息、一切幸福”,“它会使千个牛顿那样的灯塔熄灭,这个夜任何时候也不会在地面上明朗化。……这是我的心里大的永远的创伤……”。亚诺什根本不理睬父亲的劝告,继续他的新几何的研究。

在父亲感到绝望的时候,儿子却有了新发现。1823年,亚诺什写成了摈弃第五公设的《空间的绝对几何学》,他对他父

亲说："我已经在乌有中创造了整个世界。"法尔卡什既不相信二十一岁的儿子会超过自己，更不相信他有什么作为。1825年，亚诺什已经基本上完成了非欧几何学，请求父亲帮助出版，遭到了他父亲的拒绝。又过了四年，父亲仍持这种态度。1826年，他把自己创立的非欧几何学的德文抄本，寄给母校的数学教授艾克维尔，但是这个抄本被遗失了。1831年由于亚诺什的再三请求，父亲才决定把儿子的创作作为一个附录出版在自己的著作中。出版前，父子俩都很想听听当时欧洲数学权威高斯的意见。1831年六月寄了一封信和打样的«附录»给高斯，但是不幸中途被遗失了。1832年一月又寄去一份。但是高斯害怕当时保守舆论的指责，已经终止了非欧几何的研究，接到信和«附录»后非常吃惊，三月他回信说："……称赞他等于称赞我自己，因为这研究的一切内容、你的儿子所采用的方法和他所达到的一些结果几乎和我的一部分在三十到三十五年前已开始的个人沉思相符合，我真是被这些吓坏了。……使我快乐地感到惊奇的是现在可以免去这劳力的耗费，并且特别高兴的，在我面前有这样惊异姿态的正是老友的儿子。"

高斯的回信大大刺痛了满怀希望的鲍耶·亚诺什，他不相信有人在他之前做了这些工作，他认为高斯在利用已有的权威争他的优先权。从此，性情变得非常孤僻，身体也显著变坏。

由于没有获得任何人的理解、同情和精神上的支持，亚诺什陷入了失望。因为学术争论和家庭纠纷，亚诺什被父亲驱

逐到偏僻的多马尔德居住，晚年过着疾苦的生活。五十八岁就与世长辞了。

（四）

第五公设问题的彻底解决者是罗巴切夫斯基。1793年十一月二十二日，他出生在俄国一个测量家的穷苦家庭，三岁死了父亲，有毅力的母亲把他送进中学。1807年他进入新设的喀山大学，1810年获得硕士学位，1814年获得纯粹数学副教授职称，1816年二十三岁就成为数学教授。

年轻的罗巴切夫斯基开始也想找出第五公设的证明，从1815年到1817年他的讲义笔记中可以说明这点。不久，他就认识到，这样证明是不可能的。罗巴切夫斯基断定可能存在另一种几何学，决心创造新的几何学。这种几何学采用了欧氏几何的第五公设以外的所有公理，他把第五公设放到一边，提出了另外一个公理："过已知直线外一点至少可以作两条直线和已知直线不相交。"他建立了自己的公理系统，提出了新的几何，严密性并不比欧几里得几何差。

罗巴切夫斯基。

罗巴切夫斯基在1826年二月十一日喀山大学物理数学系会议上，宣读了报告《关于几何原理的讨论》。这一天被公认是"非欧几何学诞生日"。1829年，就是鲍耶·亚诺什的《附录》出现前的三年，在《喀山通报》上发表了他的题目是《关于几何原本》的著

作，在报告和著作中罗巴切夫斯基叙述了自己关于新几何的研究。

从此，他不断研究，不断有著作出版。到逝世前，先后发表了八本著作。1855年，他的眼睛差不多瞎了，他还用口述写作了他最后的著作《泛几何学》。

罗巴切夫斯基是几何学上的哥白尼，他创立的新几何学动摇了旧世界观的基础，因而引起了教廷的反对。总主教宣布他的学说是邪说，有人用匿名信在反动杂志上谩骂罗巴切夫斯基，荒唐无理的程度是史无前例的。嘲笑、侮辱，甚至宣布他是疯子，最好的态度也不过是"对一个错误的怪人的宽容的惋惜态度。"这一切正如高斯所估计到的，也正是高斯所害怕的。高斯是了解罗巴切夫斯基理论的人，但是他从来不肯公开地站在科学上的革命者这一边，只在私人通信里说到自己对罗巴切夫斯基理论的钦佩。

但是罗巴切夫斯基却从不屈服，坚持真理，一个人英勇奋斗到生命的最后一分钟，在没有看到自己见解胜利的时候就逝世了！

(五)

1854年，德国数学家黎曼(1826-1866)建立了更广泛的一类非欧几何——黎曼几何，同时产生了拓扑流形的概念。1887年到1896年，法国数学家达尔布(1842-1917)出版四卷《曲面的一般理论的讲义》，总结了一个世纪来关于曲线和曲面的《微分几何》的成就。1899年德国数学家希尔伯特的名著《几何学基础》出版，提出了欧几里得几何学的严格公理系

统——希尔伯特公理系统，克服了欧几里得《几何原本》的缺陷，并对数学的公理化思潮产生了巨大的影响。

我们看到，在十九世纪，不仅古老的几何——欧几里得几何的基础得到充实完善，而且产生了许多新分支——画法几何、射影几何、微分几何和非欧几何（包括罗巴切夫斯基几何和黎曼几何）。非欧几何的产生，突破了空间概念的唯一性（就是只承认欧氏空间），是人类空间认识史上的一次飞跃。开始了几何原则的新发展，改变了什么是几何的理解，几何应用对象和范围也很快地扩展了。正如希尔伯特所说的："十九世纪最有启发性、最重要的数学成就是非欧几何的发现。"

代数学的新成就

（一）

在十八世纪末和十九世纪初，方程的代数解法是数学的中心问题。意大利人在十六世纪解决了三次、四次方程根式求解的一般法则后，数学家一直在寻找五次或五次以上代数方程的求解问题。将近三个世纪，数学家绞尽脑汁，却毫无进展。1770年到1771年，拉格朗日把置换概念用于代数方程求解，这是群[①]论思想的萌芽。1799年德国数学家高斯证明了代数基本定理——n次多项式在复数体内至少有一个根。1824年年青的挪威数学家阿贝尔（1802-1829）证明了用根式（就是代数解法）求解五次方程是不可能的。1830年法国一位

① 群是近世代数的一个重要概念，在本节内还提出了许多近世代数学的新概念，关于它们的定义，可参阅本书第四部分。

伽罗华。

更年青的数学家伽罗华(1811-1832)彻底解决了这一难题，并引进了"群"的概念，揭开了近世代数的序幕。这一概念对结晶学、物理学、几何学都有重要应用。

同时，由于代数方程解的研究的需要，也由于解析几何、特别是射影解析几何研究的需要，1841 年德国数学家雅可比 (1804-1851) 建立了行列式的系统理论。从此，行列式和矩阵论、二次型和线性变换理论、不变量理论迅速发展起来了。这些代数工具现代都统一叫做线性代数学，它已经被广泛应用到力学、物理学、数学的各个领域，成为近代数学和物理学的重要工具。

(二)

在十九世纪的后半期，力学、物理学和数学本身越来越多地研究向量、矩阵、张量、旋量、超复数、群等各种对象，对这些对象的运算规则的研究，形成了一系列的新的代数部门。德国代数学派的戴德金 (1831-1916)、希尔伯特起了主要作用，到二十世纪初，近世代数得到蓬勃发展，广泛应用在近代物理和数学的其他部门。

十九世纪代数的成就还有：1831 年高斯建立了复数的代数学，用平面上的点表示复数，破除了复数的神秘性。1847年英国数学家布尔(1815-1864)创立布尔代数，对后来的电子计算机有重要的应用。1870 年挪威数学家李 (1842-1899)发现

"李"群。同一年，德国数学家克朗尼格(1823-1891)给出了群论的公理结构，成为研究抽象群的出发点。1895年法国数学家彭加勒(1854-1912)提出同调概念，开创了代数拓扑学。

总之，在十九世纪，高等代数(包括线性代数和古典多项式理论)形成了系统的理论，近世代数已经打下了坚实的基础，代数的概念、方法和对象都发生了巨大的变化，应用越来越广。

数学分析的巨大进展

(一)

对数学分析的批判、系统化和严格论证是1821年法国数学家柯西开始的，这一年他出版了《分析教程》，用极限概念严格定义了函数的连续、导数和积分，研究了无穷级数的收敛性。1856年德国数学家魏尔斯特拉斯(1815-1897)建立了极限理论中的 $\varepsilon-\delta$ 方法，确定了一致收敛性概念，1872年德国数学家戴德金、康托尔、魏尔斯特拉斯建立了实数的严格定义，捷克斯洛伐克数学家波尔察诺(1781-1848)和其他一些数学家在使分析的基本概念变量、函数、极限、积分等精确化方面做了很多工作，从此，数学分析的理论建立在精确和坚实的基础上。

分析的精确化跟代数和几何的新发展几乎是在同一时期里完成的。

为研究变量和函数概念的精确化而产生的集合论是由康托尔建立起来的，他并且发展了超穷基数的理论，为数学分析

的新分支——实变函数论①奠定了基础。实变函数论是在十九世纪末、二十世纪初由法国数学学派的鲍莱尔（1871-1956）、贝尔（1874-1932）和勒贝格（1875-1941）建立的。

数学分析中最重要的一个分支——微分方程的稳定性理论是彭加勒和俄国数学家李雅普诺夫（1857-1918）从力学问题研究出发建立起来的。1881年到1886年彭加勒连续发表《微分方程所确定的积分曲线》的论文，李雅普诺夫1892年建立稳定性理论，使微分方程的应用大大推广。在十九世纪中叶，由法国数学家泊松（1781-1840）、傅立叶（1768-1830）、柯西和俄国数学家奥斯特洛夫斯基（1801-1861）深入研究一些方程，逐渐形成了偏微分方程（数学物理方程）的一般理论。

数学分析的另一重要分支——复变函数论的建立，是从法国数学家柯西1825年发现复变函数的柯西积分定理开始的，到1876年德国数学家魏尔斯特拉斯发表《解析函数论》，把复变函数论建立在幂级数的基础上，才形成了严谨的理论。

数学分析的新分支还有函数逼近论，它是研究利用初等函数（首先是多项式）逼近复杂函数学的理论，这是俄国数学家车比雪夫（1821-1894）创立的。

（二）

数学分析蓬勃地发展着，它不仅成为数学的中心和主要部分，而且还渗入到数学古老的部门，如代数、几何和数论，产生了代数函数论、微分几何和解析数论等新分支。

---

① 实变函数论是属于分析类的一门分支。有关数学分支的内容和本节提出的许多属于高等数学的术语，可参阅本书第四部分“现代数学分支简介”。

十九世纪的数学还产生了一个新部门——概率论，它是研究大量随机现象的一门新学科。1812年法国数学家拉普拉斯的《分析概率论》出版，这是近代概率的先驱。

到了十九世纪末，变量数学时期进入结束阶段，进入了现代数学开始发展的新时期。我们看到在变量数学时期，数学分析成了数学的核心，它产生了许多分支，它深入渗透到数学各个领域。通过数学分析的发展，变量、极限等概念和运动变化等思想使辩证法思想渗入数学。数学分析成为自然科学和技术发展中精确表述它们的规律和解决它们的问题的有力工具，它深刻地影响着数学的各部门。

变量数学时期的数学包括很多分支，主要有解析几何、数学分析、级数理论、微分方程论、数学物理方程、积分方程论、复变函数论、实变函数论、高等代数(包括线性代数)、射影几何、微分几何、函数逼近论、概率论、数论等等。这十多门学科每一门都是重大的创新，都形成了严密、系统的理论，每一门都使希腊人的巨大成就——欧几里得几何相形见绌。

这些学科主要是高等学校数学专业的课程，工科大学生、工程师也必须具备其中某些知识。它们的内容、方法、意义和发展概况，我们将在第四部分简略进行介绍。

现代数学时期

(一)

现代数学时期很难用一个确定的年代作为开始的时间，一般说来是从十九世纪末开始的；但是现代数学中的近世代

数要早一些，一般都从十九世纪三十年代伽罗华创立群论开始算起。

如果说在变量数学中是研究变化着的量的一般性质和它们之间的依赖关系，那么现代数学不仅研究各种变化着的量之间的关系，而且研究各种量之间的可能关系和形式。

随着科学技术和生产实践的需要，代数、几何、数学分析变得更为抽象，各数学基础学科之间、数学和物理等其他学科之间相互交叉和渗透，形成了许多新的边缘学科和综合性学科。集合论、应用数学、计算数学、电子计算机等的出现和发展，构成了现在丰富多采、渗透到各个科学技术部门的现代数学。

(二)

这个时期数学家提出了许多新的理论，创立了许多影响巨大的分支，这里简要地按照时间顺序列出一些重要理论和分支的创立和发展。这些理论和分支的许多概念，我们只是提一下，不作进一步的解释，有兴趣的读者，可参阅有关的读物和参考资料。

1895年，彭加勒提出同调概念，开创了代数拓扑学。1901年，法国数学家勒贝格提出勒贝格测度和勒贝格积分，推广了长度、面积积分概念，奠定了实变函数论的基础。1906年，法国弗勒锡(1878-1973)和匈牙利黎斯(1880-1956)把由函数组成的无限集合作为研究对象，引入函数空间概念，开始形成希尔伯特空间，这是泛函分析的发源，过了不久，希尔伯特空间理论就形成了。1908年，德国的忻弗里斯(1853-1928)提出了

点集拓扑学;同年,策墨洛(1871-1953)提出集合论的公理化系统。1910年,德国的施坦尼茨(1871-1928)总结了十九世纪末二十世纪初的各种代数系统如群、域等的研究,开创了现代抽象代数;同年,美籍荷兰人路·布劳威尔(1881-1966)发现不动点原理,后来又发现了维数定理、单纯性逼近方法,使代数拓扑成为系统理论。1913年,法国的厄·嘉当(1869-1951)、德国的魏尔(1885-1955)完成了半单纯李代数有限维表示,奠定了李群表示理论的基础。1914年,德国的豪斯道夫(1868-1942)提出拓扑空间的公理系统,为一般拓扑建立了基础。1926年,德国女数学家纳脱(1882-1936)完成对近世代数有重大影响的理想群论。1930年,美国的毕尔霍夫(1884-1944)创立了格论。1936年,荷兰的范·德·瓦尔登等人提出了现代的代数几何学。1938年,法国的布尔巴基学派①开始出版布尔巴基丛书《数学原本》,提出从公理结构出发,以非常抽象的方式叙述全部现代数学。

丹麦数学家爱尔朗在1918年为改进自动电话交换台设计提出排队论,从这个时候起,又出现了一系列的新理论,新学科。1933年,苏联的柯尔莫哥洛夫(1903-)提出概率论的公理化系统。1942年,美国的诺·维纳(1894-1964)和苏联的柯尔莫哥洛夫开始研究随机过程的预测,产生了统计力学。

---

① 第一次世界大战使法国的科学队伍遭受惨重损失,数学界后继乏人。一批年青人组成小组,以十九世纪一位法国将军布尔巴基的名字命名叫做布尔巴基小组。他们刻苦钻研数学,提出了数学结构的新观点。所以人们也把他们叫做布尔巴基学派,几十卷的《数学原本》叫做布尔巴基丛书。

1944年，美籍匈牙利人冯·诺伊曼(1903-1957)等人建立了对策论(又叫博弈论)。1946年，美国宾夕法尼亚大学莫尔电工学院的一批青年科技工作者研制成功第一台电子计算机ENIAC①。1949年，英国剑桥大学试制成一台通用电子管计算机EDSAC②。这台电子计算机已经具备了现代电子计算机的各种特点，这就是通称的第一代计算机。1948年，美国诺·维纳出版《控制论》；同年，波兰的爱伦伯克(1913-)和美国桑·麦克伦(1909-)提出了"范畴论"；美国的申农(1916-)提出了通信的数学理论；苏联的康脱洛维奇(1912-)把泛函分析用于计算数学。

1950年，美国的斯丁路德(1910-)和美籍华人陈省身提出纤维丛理论。五十年代以来，美国的埃·霍夫曼(1924-)和马·霍尔(1900-)等人研究《组合数学》取得很大进展，并且广泛应用于试验设计、规划理论、网络理论、信息编码等。1953年，美国的基费(1924-)等人提出了优选法。1956年，美国的杜邦公司采用了一种统筹方法(也叫计划审评法)，是一种安排计划和组织生产的数学方法。同年，英国的邓济希(1914-)等提出线性规划的单纯形法。1957年，苏联的庞特里雅金(1908-)发现最优控制的变分原理，美国的贝尔曼(1920-)创立动态规划理论。1958年，欧洲的一个GAMM(德意志联邦

① ENIAC是第一台电子计算机名称"电子数值积分和计算机"英文名字头的缩写。

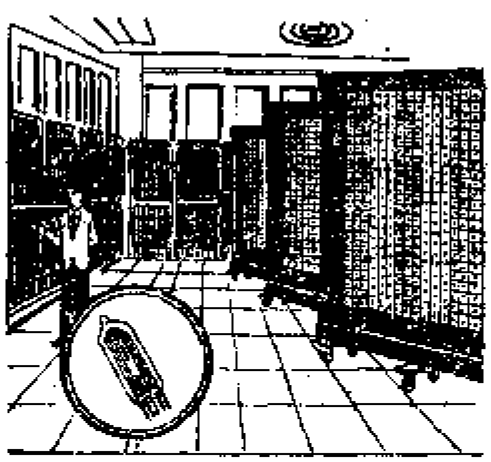
② EDSAC是英国第一台电子计算机名称"电子延迟存贮自动计算机"英文名字头的缩写。

共和国应用数学和力学协会）小组、美国的一个ACM（美国计算机协会）小组创立了算法语言，用于电子计算机程序自动化。1960年，美国的卡尔门（1930-）提出数学滤波理论，进一步发展了随机过程在制导系统中的应用。

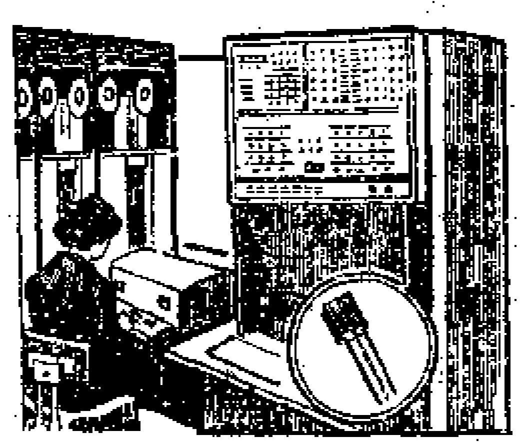
（三）

六十年代以后，由于现代生产、军事、科学的需要，特别是尖端技术的需要，数学的思想、方法和现代计算工具起着越来越显著的作用。任何时候，计算工具的水平都显示数学发展的水平，并对数学方法本身产生重大的影响。电子计算机的出现是二十世纪最伟大的科学技术成就之一。自从瓦特（1736-1819）1768年制造出蒸汽机以来，再没有什么新发明比电子计算机更激动人心的了。

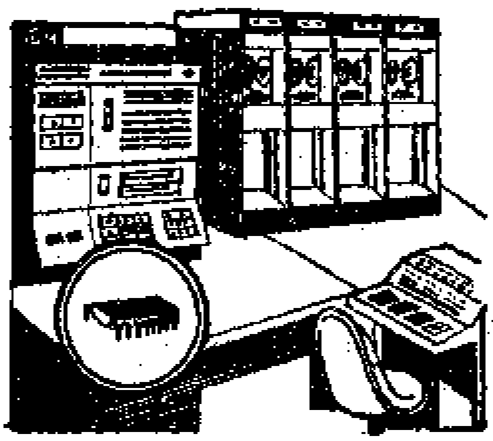
第一台电子数字计算机诞生到现在虽然只有三十五年的历史，但是已经经历了"三代"的变革。每次变革都是以更新电子计算机所用的元件作为标志的。第一代是电子管计算机，第二代是晶体管计算机，第三代是集成电路计算机。目前



第一代——电子管计算机。



第二代——晶体管计算机。



第三代——集成电路计算机。

正向第四代——大规模集成电路计算机过渡。第五代正在研制。

电子计算机的特点是：运算速度快、逻辑判断能力准确、记忆力强、精确度高。

拿运算速度来说，五十年代的第一代电子计算机最快的计算速度是每秒钟运算五六万次；第二代电子计算机最快的计算速度是每秒钟运算二三百万次；第三代电子计算机最快的计算速度是每秒钟运算几千万次到上亿次。现在正在研制每秒钟运算一百亿次的电子计算机。拿每秒钟运算一亿次的电子计算机来说，它在一分钟里能完成的计算量，如果用算盘或手摇计算机来运算，就算是一天二十四小时，一秒钟也不停顿地连续算下去，少说也得算十年、二十年。如果用笔算，需用的时间就更长了。

第一代电子计算机总的来说，体积都比较庞大，主要是用于科学计算。第二代电子计算机经过改善，体积相对小了，重量轻了，而且使用了程序语言，使用十分方便。这样，不但是在科技领域使用，许多管理部门在编制计划、特别是生产部门、企业单位连财会计算也使用了电子计算机。第三代电子计算机更是小型化了，因此，用途更加广泛。

电子计算机不但是大大缩短了计算时间，而且解决了过去很难解决的问题，极大地推动了科学技术的发展。对于数学来说，电子计算机还能帮助人们证明数学定理和推导数学

表达式，比如，一百多年来未能证明的"四色猜想"① 这个数学难题在电子计算机的帮助下已得到了证明。

现在，电子计算机在科学研究、工程技术、国民经济、地质勘探、文字翻译、医学、军事、社会服务部门都有广泛的应用。据统计，世界各国计算机的用途已达二千六百多种。电子计算机已经深入到生产和社会的各个方面。

七十年代大规模集成电路的研制成功，促进电子计算机向微型化发展。世界上第一台电子计算机ENIAC重三十吨，占地一百七十平方米；1975 年制成的 F 8 微型电子计算机重不到半公斤，体积只有 ENIAC 的三十万分之一，但计算速度和可靠性都远远超过ENIAC。

电子计算机的一个重要发展方向是智能模拟，也就是使电子计算机具有认识文字、识别图象或景物、听懂语言、学习和推理等功能。智能模拟目前还处于探索研究阶段，一旦突破，将使电子计算机的功能和应用得到划时代的发展。

(四)

最后，我们谈谈现代数学的一般特征。

第一，数学对象的大大扩展，它的应用范围也大大扩展。比如，几何不仅研究物质世界的空间和形式，而且研究同空间形式和关系相似的其他形式和关系。产生了各种新"空间"：罗巴切夫斯基空间、射影空间、四维的黎曼空间、各种拓

---

① "四色猜想"——就是证明画彩色地图只要用四种颜色就可以区分不同的区域，问题提出后，一直没有人能加以证明，所以叫做"四色猜想"。1976 年美国的阿贝尔和哈肯运用电子计算机作出了证明。

扑空间等，都成为几何研究的对象。

现代代数考察的对象是具有更普遍的“量”，如向量、矩阵、张量、旋量、超复数、群等，并且研究这些量的运算。这些运算在某种程度上和算术中的四则运算类似，但复杂得多。矢量是简单的例子，矢量的加法是按照平行四边形法则相加的。在现代代数中进行的抽象达到这样的程度，以致“量”这个术语也失去本身的意义，而一般地变成讨论“对象”了。对于这种“对象”可以进行同普通代数运算相似的运算。比如，两个相继进行的运动显然相当于某一个总的运动，一个公式的两种代数变换可以相当于一个总的变换等等。和这相应，就可以研究运动或变换所特有的一类“加法”。其他类似的运算也是这样在广泛抽象形式上研究的。

分析的对象也大大扩展。不但“数”是变的，在泛函分析中，函数本身也被看作是变的。某一给定函数的性质在这里不能单独地确定，而是在这个函数对另外一些函数的关系上确定的。因此考察的已经不是一些单个的函数，而是所有以这种或那种共同性质作为特征的函数的集合。函数的这种集合结合成“函数空间”。比如，我们可以考察平面上所有曲线的集合或一定力学系统的所有可能运动的集合，在单个曲线或运动同其他曲线或运动的关系上来确定单个曲线或运动的性质。

数学对象的扩展使得数学应用的范围也大大扩展了。数学观念广泛引入到物理学中，比如，爱因斯坦就把黎曼几何应用到广义相对论，1930 年冯·诺伊曼把希尔伯特空间应用到

量子力学。

第二，新的概括性概念的建立，达到更高的抽象程度。数学的分支不断成长而且多种多样，一些看来相距很远的领域，由于概括性概念和理论的建立，揭示了它们之间存在统一和一般的共性。

第三，集合论观点占统治地位。这个观点是总结了以前的数学发展新积累起来的丰富内容而建立起来的。自从1883年德国数学家康托尔建立集合论以来，"集合"已经成为现代数学最基本的概念。集合论的思想方法已经渗透到几乎所有的领域。集合论的观点不仅使数学的基础变得严密可靠，而且应用极其广泛；不仅成为纯粹数学（基础数学）的基本理论，而且成了边缘数学、综合数学的桥梁和工具。它的运算和理论成为许多数学学科的基础。

第四，新的计算工具——电子计算机的出现并随着而产生的许多新理论新分支对数学带来巨大的冲击性的变革，这是现代数学的一个显著特征。一方面电子计算机将使数学象其他自然科学一样，参加到科学实验的行列里，使数学问题可以先在电子计算机上进行试验，甚至取得突破；另一方面，电子计算机将使数学家从数学定理证明和运算的繁琐工作中解脱出来，得以把聪明才智更多地用到创造性的工作中去。

四 数学主要分支简介

有哪些数学分支？

(一)

几千年的中外数学发展史告诉我们，经过世界各民族的共同努力，数学从远古时代发展到现在，已经成为一门系统庞大、分支众多的基础科学了。所谓分支众多，就是说数学包含了许许多多具有基本理论、自成系统的学科。就象一棵根深叶茂的大树一样，从粗壮的树干向周围分出了许多粗细不等的枝杈。

那么，数学都有哪些分支呢？要完全准确地把所有的数学分支都罗列出来，也不是很容易的。因为科学技术不断地发展，数学各门分支的内容也在迅速地发展，现代数学的许多部门常常和其他学科相互交叉和渗透，又形成一门门新的分支学科。但是有许多新的学科，从它的内容、方法、意义和应用范围来说，已经不单单属于数学的范畴了。比如，系统工程、信息科学等就是数学和其他学科相互渗透、凝合而成的新兴边缘学科。

生产和科技事业的发展，总是要求数学帮助解决新产生

的问题，一些数学分支结合某些实际问题，又可能促使它向前发展，得出更新的理论。但是，正象树干上新长出的嫩芽一样，一开始，很难预言这个小嫩芽会不会长成树枝。因此，关于数学到底有哪些分支，只能根据现在数学界已经公认的资料，作一般的介绍。

(二)

现在数学的分支一般包括：代数学、数论、几何学、数学分析(微积分学)、函数论、泛函分析、微分方程、概率论和数理统计、运筹学、数理逻辑、计算数学等。

在代数学中，又包括线性代数学、群论、环论、域论等。在几何学中又包括解析几何学、非欧几何学、微分几何学、拓扑学、射影几何学等。在函数论中又包括实变函数论、复变函数论等。还有一些分支又再分出更细的分支，这里就不一一列出了。

现在列出的分支已经有二十多门了，要对这么多的分支都作出介绍是需要更多的篇幅的，下面仅就几门主要分支的内容和意义作简要粗略的叙述。

代　数　学

(一)

代数学是数学中最古老的分支之一，也是基础性的重要数学分支。

代数学起源于算术，是由算术推广发展起来的。但是代数和算术不同，算术所研究的内容是具体的正整数、零和正分

数相互之间的加、减、乘、除四种运算，并解答和这类计算有关的具体的简单应用题；代数不但讨论正的整数、分数和零，而且讨论负数、虚数和复数，数的概念大大地扩大了。代数的特点是用字母符号来表示各种数。这样，许多复杂的计算问题，代数学都可以通过一套字母符号列成方程来求解，使应用题的解法大大简化。

代数学的发展，研究对象进一步扩大，代数学也就由低级到高级，由初等代数发展到高等代数。一个多世纪以来，代数的内容更加抽象了。

（二）

初等代数也叫古典代数，就是现在中学课程中的“代数”，它所包括的基本内容，很多人都学习过并且是比较熟悉的。初等代数的内容一般包括：有理数的四则运算，代数式，指数和幂，方程和恒等式，分式，根式，多项式，因式分解，复数等。

随着科学技术的发展，更多地需要数学的计算，许多自然现象和社会实践常常归结成各种代数方程，要求数学求出方程的解，代数方程的解法成了古典代数学的中心问题，古典代数学也被叫做方程的科学。

代数中的未知数叫做元，因此，含有多少个未知数的方程，就相应地叫做几元方程。方程中未知数的指数最高那项的指数是多少，方程也叫做几次方程。比如

$$ax^2+bx+c=0$$

就叫做一元二次方程。它的代数一般解法，可用求根公式，当方程中的 $a\neq 0$ 的时候，它的求根公式是

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}。$$

公式中的$b^2-4ac=0$，或$b^2-4ac>0$，或$b^2-4ac<0$，能够判定方程的解是实数还是虚数，因此，b^2-4ac叫做一元二次方程$ax^2+bx+c=0$的根的判别式。

在实践中，常常遇到许多比二次更高次的代数方程，比如象

$$f(x)\equiv a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots\cdots+a_n=0,\qquad (a_0\neq 0)$$

这种一般形式的方程，叫做n次代数方程。这里$f(x)$是表示一个代数式，括号(　)内是表示式中的未知数，代数式还可以用其他的符号来表示，比如$P(x)$，$F(x)$，$\varphi(x)$等；后面式中的a_0，a_1，a_n等是表示按顺序排列的各项未知数的系数或常数，n，$n-1$等是表示按顺序排列的各项未知数的指数。关于系数和指数的表示法，可根据情况采用不同的符号。

一般形式的实系数或复系数的n次代数方程，高斯曾经证明，至少有一个实根或者复根，这就是"代数方程的基本定理"。许多数学家反复研究，证明了n次代数方程正好有n个根，其中有可能是数值相同的根，叫做重根。

关于方程的一般解法，经过伽罗华等数学家的证明，当代数方程的次数$n\geqq 5$的时候，不能象二次方程那样用求根公式获得方程的解。也就是说，方程的解不能由未知数的系数和常数项通过加、减、乘、除、乘方和开方等代数运算表示出来。

（三）

高等代数在初等代数的基础上发展，研究对象进一步扩

充，引进了和通常的数很不相同的量，这些量具有和数相类似的运算的特点，运算和研究的方法更加繁复了。

矩阵、向量、集、群、环、域、向量空间等就是数的概念扩充以后引进的基本概念。

矩阵、向量和集这几个概念，现在在中学的课本里也已经引入了。

把数排成横的叫做行，排成纵的叫做列，把几行几列排在一起组成长方形的表，比如

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

就叫做矩阵。行和列数目相同的矩阵叫做方阵。

向量也叫做矢量，具体地说，除了数值，还具有方向的量叫做向量。如一个有方向的直线段就是向量。向量通常用 $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ 等表示。向量 $\vec{a}$ 的数值的绝对值叫做向量 $\vec{a}$ 的模或者长，记成 $|\vec{a}|$。$\vec{a^0}$ 表示 $\vec{a}$ 的单位向量，也就是 $|\vec{a^0}|=1$。如果向量的模等于零，这个向量叫做零向量。

集也叫做集合，具有某种相同性质的事物的全体就叫做集合。比如，全体正整数组成一个集合。集合指的是全体，不是单指其中的某一事物。正整数集合就是指全体正整数。至于集合中的个别数，叫做这个集合的元素。习惯上集合都用大写字母 A、B、C 等来表示，集合中的元素用小写字母 a、b、c 等来表示。如果 a 是集合 A 的元素，就说元素 a 属于集合 A，并记成 $a \in A$，符号 $\in$ 表示“属于”。如果 c 不属于集合 A，就说元素 c 不属于 A，并记成 $c \notin A$，符号 $\notin$ 表示“不属于”。不

含任何元素的集合叫做空集，有时候也叫做零集。比如，方程 $x^2+1=0$ 的实数解集合就是空集。因为这个方程不可能有实数解，所以这个方程的实数解集合就不会有任何的元素。空集用符号 ϕ 表示。如果集合 D 的每一个元素都属于集合 E，那么就把集合 D 叫做集合 E 的子集，并记成 $D\subset E$ 或 $E\supset D$，符号"$\subset$"表示"包含在"，"$\supset$"表示"包含"。

群是从许多有代数运算的具体集合中总结出来的一个基本概念，它的应用范围十分广泛。因此，群是近世代数甚至整个现代数学里一个很重要的概念。

关于群的概念一般是这样来定义的：假设对于任何非空集合 B 中的元素确定了一个规则，在这个集合中按一定顺序取出的两个元素 a 和 b，并且规定了在这个集合中有另一个确定的元素 c 和它们对应，这个对应规则叫做运算，如果满足下面三个条件：

第一，元素对于这个运算，也就是乘法，满足结合律。具体地说，对于集合 B 中的元素 a、b、c，结合律成立。

$$a(bc)=(ab)c。$$

第二，有单位元素，这个元素和集合 B 中任何元素的乘积还是这个元素。具体地说就是集合 B 中有元素 e，a 和 b 是集合 B 中的任意元素，那么，$ae=ea=a$，$be=eb=b$，这个 e 就叫做单位元素，集合 B 中只有一个这样的元素。

第三，集合 B 中的每个元素都有逆元素，集合中的任意一个元素和它的逆元素的乘积是单位元素。具体地说就是 c 是 B 中的任一元素，它有逆元素 c^{-1}，那么，$cc^{-1}=e$，e 是单位

元素。

这样，集合 B 就叫做对于所定义的运算来说，组成了一个群。

群的元素可以是各种不同性质的对象，群的运算可以是加法或者是乘法。如果运算是乘法，运算结果用 ab 来表示；单位元素叫做恒等元素，逆元素用 a^{-1} 或 b^{-1} 来表示。如果运算是加法，运算结果用 $a+b$ 来表示；单位元素是 0，逆元素用 $-a$ 表示。

要指出的是这些所谓乘法或者加法，只是用来表示群的运算，群的运算和普通数的乘法、加法是不相干的。

如果一个群的元素的个数是有限的，这个群叫做有限群，否则就叫做无限群。如果有一个集合 D 只具备上面所讲的三个条件中的第一条，那就把这个集合 D 叫做半群。如果一个群的代数运算同时还满足交换律，那么，这个群叫做交换群，也可以叫做阿贝尔群。

环是由集合的某些基本特性总结出来的概念。环是这样定义的：如果有一个非空集合，给它规定加法和乘法这两种代数运算，使得加法运算满足结合律和交换律，乘法满足结合律，乘法对于加法满足分配律；这个集合还有这样一个元素，集合中任何某个元素和它相加都等于某个元素，这样的一个元素叫做零元素；这个集合的每个元素还有负元素，每个元素和它的负元素相加都等于零元素；这样的一个集合就叫做环。

举例来说，F 是一个集合，a 和 b 是集合 F 中的任意两个元素，c 也是 F 的元素，如果

$$a+b\in F,\quad ab\in F;$$

$$a+b=b+a,\quad (a+b)+c=a+(b+c);$$

同时，F 中有元素 0，$a+0=a$，$b+0=b$；F 中有元素 $-a$，$-b$，$a+(-a)=0$，$b+(-b)=0$；另外，$(ab)c=a(bc)$，$a(b+c)=ab+ac$，$(b+c)a=ba+ca$；那么，集合 F 就叫做环。由数做元素组成的环叫做数环。如果环的乘法还满足交换律，也就是 $ab=ba$，那么，这种环也叫做交换环。

域也叫做体，是一种特殊的环，也是近世代数的重要概念。

域是这样定义的：如果 B 是一个交换环，在 B 里至少含有一个不等于零的元素，比如 a 是 B 的元素，而且 $a\neq 0$，a 元素还存在一个逆元素 a^{-1}，$a^{-1}a=1$，那么，这个交换环 B 就叫做域。元素是数的域叫做数域。

向量空间也叫做线性空间，是近世代数中的一个基本概念。

向量空间的概念可以这样简略地叙述：如果一个域的元素都是向量，也就是说这个域是一个向量的集合，这个域的向量之间有加法运算，又有数和向量的乘法运算，这两种运算都满足加法的交换律、结合律，满足加法和乘法的分配律；每个向量都有负向量，集合中还有零向量，那么，这个集合就叫做向量空间。举例来说，普通的三维空间就是向量空间。

（四）

从上面叙述的一些高等代数的基本概念可以看出，初等代数和高等代数有了很大的差别，初等代数是高度计算性的，

并且限于研究一般以实数和复数为基础的特定数系。和初等代数不同，高等代数是概念性的、公理化的，它所讨论的对象已不是特定的实数或复数，而是非特定的任意元素集合的系统，这些集合系统都规定了各自的合成法，这些合成法也就是集合系统的公理化。比如象上述的群、环、域等就都规定了集合必须满足的某些条件。

初等代数和高等代数同样都是要求出问题的解，但是研究的方法差别比较大。举例来说，初等代数的行列式和比较抽象的线性代数大致都是讨论数学的同一部分内容，但是，在研究对象和方法方面，二者的差别是很明显的。

线性代数是代数学的一个分支，用来求多元一次方程组的解。现在许多纯粹数学和应用数学的问题，常常化为线性代数的问题来讨论，所以线性代数是近代数学的基础，是十分重要的分支。多元一次方程组也叫做线性方程组，线性代数在讨论线性方程组的解的基础上，研究向量空间的结构、线性变换的标准形式和不变量等。所谓线性变换是指向量空间的一个变换。线性代数和初等代数的行列式一样，在求问题的解的时候，也运用行列式、矩阵的概念；但是初等代数的行列式用的是直接论述的方法，强调矩阵的运算；线性代数用的是公理的和几何的观点，它把向量空间和线性变换当作基本的概念，而把矩阵作为比较次要的概念。

（五）

简单地说，代数学的发展，由于研究对象的变化，引入了许多更为抽象的概念，这些概念不仅针对具体的数，而且包括

各种复杂的量，这样就使近世代数学的应用范围更加广泛，比如线性代数在工程力学、物理学、化学等许多学科中都得到广泛的应用。

近世代数学的分支很多，除了线性代数外，还有群论、环论、域论等等。群论是在群的概念的基础上发展的一门分支，主要研究群的性质和群的运算。环论和域论也是研究环和域的性质的数学分支。

(六)

布尔代数也是代数学的一门分支学科，是由英国数学家布尔(1815-1864)于1847年首先提出的。布尔代数对逻辑规律进行了数学的分析，因此，也叫做逻辑代数。这门学科后来在线路设计、自动化系统、电子计算机设计方面得到广泛应用，这样，也有人把它叫做开关代数。

布尔代数有三种运算，这三种运算符号是$\cup$、$\cdot$、$'$。假设有一个集合R，它有两个固定的元素0和1，也就是$0, 1\in R$，而且$0\neq 1$；0、1叫做布尔定元，或布尔常量；集合R还有待确定的元素x、y、z等，叫做布尔变元，或布尔变量；这样x'叫做x的布尔补，$x\cup y$叫做x和y的布尔和，$x\cdot y$叫做x和y的布尔积；如果对集合R中的任意元x、y、z下面六个基本定律都成立：

交换律：$\begin{cases} x\cup y=y\cup x, \\ x\cdot y=y\cdot x, \end{cases}$

结合律：$\begin{cases} x\cup(y\cup z)=(x\cup y)\cup z, \\ x\cdot(y\cdot z)=(x\cdot y)\cdot z, \end{cases}$

分配律：$\begin{cases} x\cup(y\cdot z)=(x\cup y)\cdot(x\cup z), \\ x\cdot(y\cup z)=(x\cdot y)\cup(x\cdot z), \end{cases}$

吸收律：$\begin{cases} x\cup(x\cdot y)=x, \\ x\cdot(x\cup y)=x, \end{cases}$

0－1律：$\begin{cases} x\cup 1=1, \\ x\cdot 0=0, \end{cases}$

求补律：$\begin{cases} x\cup x'=1, \\ x\cdot x'=0, \end{cases}$

那么，集合 R 叫做布尔集，布尔集加上它的布尔定元和布尔运算就构成布尔代数。上述六个定律是布尔代数的原始公理，可以由它们推导出其他的定理。

关于群论、环论、域论、布尔代数等数学分支的具体内容；以及近世代数其他一些分支如格论、伽罗华理论、李代数、同调代数等的理论和具体内容，有兴趣的读者可参阅有关的读本，这里就不叙述了。

数 论

(一)

数的概念的形成和发展经过了漫长的历史阶段。最初是自然数，也就是正整数，后来出现了正分数、零和负数；由于实践的需要，为了解决度量连续量的问题，在数的计算中又引入了无理数；为了解决开方可以实施的问题，引进了虚数，这样又出现了复数的概念。

整数是最简单明显的数学概念，它和客观实际紧密相联。

从1、2、3……这些正整数本身看来，它们是十分简单的，但是它们又都具有一定的特性。比如，可以把它们用各种方法进行分类，把它们分成奇数(1、3、5……)和偶数(2、4、6……)，素数和合数。所谓素数，也叫做质数，就是指一切大于1的正整数除了1和本身以外不能被其他正整数整除的数，比如2、3、5、7、11、……等；所谓合数，是指一切正整数中能被1和它本身以外的正整数整除的数，比如4、6、8、9、10……等。

正整数的数和数之间有一定的排列次序，相互之间有一定的关系，从上面列举的正整数的类别还可以看出，正整数具有自己的特性。研究正整数的性质和相互关系，就形成了一门分支学科，这门学科就叫做数论。

(二)

数论中提出了许多重要的概念，比如“自然数数列是无穷的”、“整数有次序”、“由整数运算可以导出代数运算概念”等等，这些对于数学的许多部门都起着重要的作用。

一般认为数论是一门纯数学理论，实际应用不多。但是，数值计算实质上是利用整数进行的，自动计算机、算术计算器和各种数学表格也都是这样的；数论并不只研究整数，比如计算任意实数（比如π）的时候，实际上是用有理数来代替的，$\pi=\frac{355}{113}$或3.1416；数论还研究怎样用有理数来逼近实数，从而达到所要求的精确度；现代天文学在计算闰月、日月食等，就应用了数论这门分支的理论。

(三)

按照方法来分，数论可以分成初等数论、解析数论、代数

数论和几何数论。

初等数论不借助于其他数学分支的知识而研究整数的性质。比如，由欧勒恒等式

$$
\begin{aligned}
&(x^2+y^2+z^2+w^2)(a^2+b^2+c^2+d^2)\\
&\quad=(xa+yb+zc+wd)^2+(xb-ya+zd-wc)^2\\
&\quad+(xc-za+wb-yd)^2+(xd-wa+zc-yb)^2
\end{aligned}
$$

出发，可以相当快地证明，每一个正整数 N 可以分解成四个整数的平方和，就是

$$N=e^2+f^2+g^2+h^2,$$

其中 e、f、g、h 都是整数。

解析数论是用数学分析的工具来解决数论问题，比如可以证明每一充分大的奇数都可以表示成三个素数的和。数论的这一部分和复变函数论、级数论、概率论等数学分支关系密切，它的研究方法对代数数论和几何数论都有重要的应用。

代数数论的基本概念是代数数。满足有理系数的代数方程的数叫做代数数，也就是说，代数数是既约方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$$

的根。

这里 a_0、$a_1\cdots a_n$ 都是整数，当 $a_0=1$ 的时候，方程的根就是代数整数。代数数论中的概念和方法对代数学的发展有很大的影响。

几何数论研究的对象是“空间格网”，通俗地说，也就是怎样估计给定区域中具有整数坐标的点的问题。几何数论对于结晶学和某些物理学的研究十分重要。

几 何 学

(一)

几何学和代数学一样也是基础性的重要数学分支，它在两千多年前就形成了严密的体系，是最古老的、成熟最早的数学分支。

几何学发展到现在，内容丰富，应用广泛，分支繁多。最早的几何学就是上面提过的欧几里得几何学，或叫欧氏几何。后来又产生了解析几何、非欧几里得几何、射影几何等分支，到了近代，和其他数学分支的结合，又形成了拓扑、微分几何和代数几何等近世几何学。

(二)

欧氏几何是以演绎推理来证明各种定理的。现在中学里所学的几何学概括起来，构成欧氏几何基础的三大支柱：第一是点、直线、平面、角、圆和三角形等对象的定义；第二是公设；第三是公理。定义一共有三十五个，公设和公理都是五个。

按照欧氏几何的定义，点是不可分的，线只有长度而没有宽度。当两条直线相交在交点的邻角相等的时候，这些角叫做直角，这两条直线叫做互相垂直。

关于五个公理，欧几里得认为它是无需证明而自明的公认真理。这五个公理是：等于同一个量的各个量是相等的；等量加上等量，它的总量是相等的；等量减去等量，它的差是相等的；彼此完全重合的图形是相等的；整体大于部分。

五个公设中，最著名的是第五公设，也叫做平行公设，或

平行公理。它的内容是：平面上一直线和两直线相交，当同旁两内角的和小于两个直角的时候，那么，这两条直线在这一侧充分延长一定相交。简单地说，就是在平面上通过给定直线外的任意一个点，只能作一条和这条直线平行的直线。

欧氏几何所研究的点、线、面、角、圆等都是不变动的，也就是说欧氏几何是讨论图形在运动下的不变性质的科学，比如，欧氏几何中的两点之间的距离、两条直线相交的交角大小、半径是 r 的某一圆的面积等都是一些运动不变量。

（三）

在几何学的众多分支中，解析几何学的产生对于微积分学的建立有很重要的作用，非欧几里得几何学提出了一些和欧氏几何截然不同的概念，因此，本书下面把这两个分支单独列成两节，分别简要地叙述一下。

至于近世几何学的几个分支，这里只大略说一说它们的基本概念。

射影几何学是一种专门讨论在把点射影到直线或平面上的时候，图形的不起变化性质的几何学。我们都很熟悉放幻灯片，幻灯片的图画是很小的，经过放大透视，银幕上出现的图画却是比较大的，但是图形的性质并没有变化。幻灯片上的点、线，经过幻灯机的照射投影，在银幕上的图画中，都有相对应的点、线。这种一组图形经过有限次透视以后变成另外一组图形，在数学上就叫做射影对应。射影几何学在航空、摄影和测量等各个方面都有广泛的应用。

拓扑学是Topology的译音，它是几何图形经过一对一双

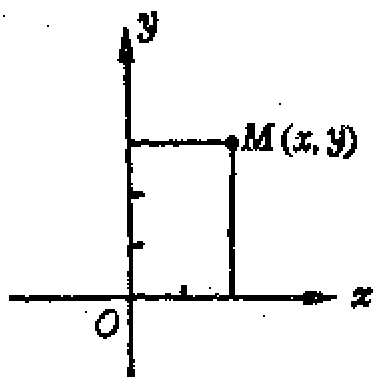
方连续变换下而保持不变的性质的一门几何分支。什么是连续变换呢？举例来说，拉长或者压缩一张橡皮膜，在橡皮膜上刻、画的图形就发生连续变换。如果这张橡皮膜没有破裂或者折叠，图形的形状变了，但是图形的某些性质不变，比如原来曲线是闭合的，就仍旧闭合，原来两曲线相交的就仍旧相交。拓扑学就是研究这些不变性质的。近年来拓扑学发展迅速，它渗透到数学的其他部门和理论物理、化学、生物等各个学科，是十分活跃的数学分支。

微分几何这门分支主要是研究三维欧氏空间中曲线和曲面的内在性质。什么是内在性质呢？同几何对象在空间中的方法无关的性质就是内在性质。从这门分支的名称可以看出，它是以后面要介绍到的数学分析、微分方程这些分支的理论作研究工具的。现在我们还没有具体地接触到微分等概念，因此，关于微分几何的内容和方法也就不加介绍了。

解析几何学

（一）

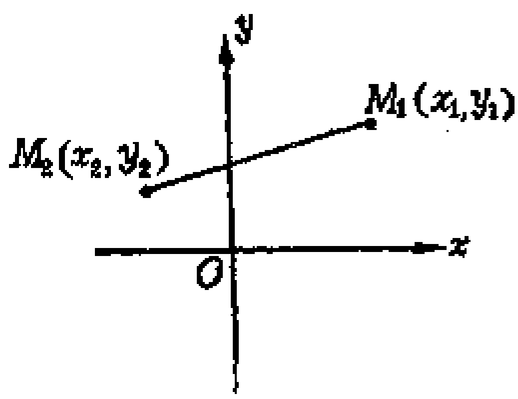
解析几何包括平面解析几何和立体解析几何两部分。平面解析几何最基本的概念是直角坐标系。什么叫做直角坐标系呢？就是在平面上把两条相交并且互相垂直的直线 x、y 的交点定做原点，定出直线的正方向，一般用 O 表示原点，它的数值是 0，横的直线叫做横轴用 Ox 表示，竖的直线叫做纵轴用 Oy 表示，在轴上定出单位长，由原点向正方向的表示正数值，反方向的表示负数值。横轴的正向一般向右，纵轴的正向



直角坐标系。

一般向上。这样，Ox 和 Oy 就构成一个平面直角坐标系。

在直角坐标平面内的任意一点，都有唯一的一对实数和它对应，这对实数用 (x,y) 来表示，括号内的 x 表示这个点对应于 Ox 轴的等长数值，也叫做坐标值；y 表示这个点对应于 Oy 轴的等长数值。反过来说，如果在横轴和纵轴上确定了等长数值 x、y，那么，就能在平面内确定一个点。比如，左上图的点 M 和一对实数 x、y 就建立了一一对应的关系。



平面上两点间的距离。

通过直角坐标系，可以求出平面上两个点之间的距离。比如，平面上有两个点 M_1、M_2，如右图所示，这两个点的坐标值是 $M_1(x_1,y_1)$，$M_2(x_2,y_2)$，那么，按照勾股定理，可以求出两点间的距离 d，也就是

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}\ 。$$

如果两个点中有一个是原点，因为原点的坐标值是 $(0,0)$，所以，另一点 $M(x,y)$ 到原点的距离就是

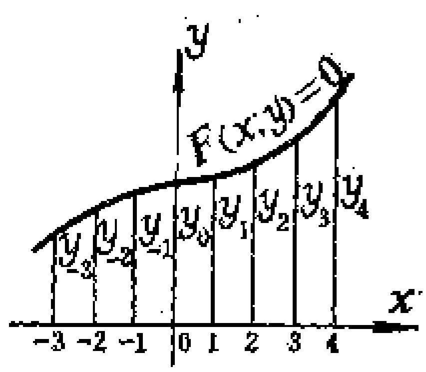
$$d=\sqrt{x^2+y^2}\ 。$$

（二）

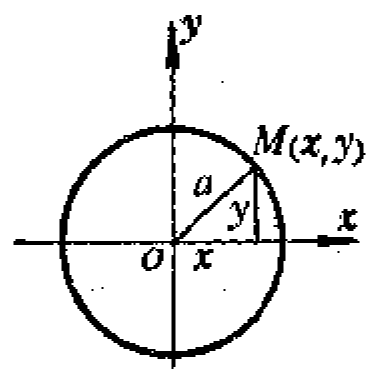
在直角坐标系内，还可以把含有两个未知数的方程和平面上的一条曲线一一对应起来。比如，$F(x,y)=0$ 是一个代

数方程，括号内的 x、y 表示两个未知数，这个代数方程叫做“不定方程”，从代数的观点看来没有什么意义。但是，通过直角坐标系用几何的观点来看，这个方程就是一条曲线。

方程中的 x 可以看成是一个点在横轴 Ox 的坐标值，y 是纵轴 Oy 的坐标值。如果让 x 的坐标值连续地改变，因为在方程中 x 和 y 是对应的，所以，对于每个改变了的 x 都可以从方程中算出完全确定的 y，这样，一般地就可以在平面上得到一组点，把这些点连接起来，就是一条曲线，如下左图所示。



方程 $F(x,y)=0$ 图象。



方程 $x^2+y^2=a^2$ 图象。

对于含有两个未知数的代数方程 $x^2+y^2=a^2$，可以确定 a 等于 M 点到原点的距离，于是，按照勾股定理，x^2+y^2 等于从原点到 M 点的距离 a 的平方。如上面右图所示，方程确定了同原点的距离等于 a 的那些点的轨迹，也就是以坐标原点作圆心，半径是 a 的一个圆。

（三）

平面解析几何能解决的主要问题有，

第一，通过计算解决作图问题。比如分线段成已知比，计算三角形面积，求两曲线的交点等等。

第二，求出由某种几何性质给定曲线的方程。比如从到两个定点的距离的和等于一个常数这个条件得到椭圆的标准方程：

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1。$$

这里 a、b 表示构成椭圆的长半轴和短半轴。从到两个定点的距离的差等于常数的条件得到双曲线标准方程：

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1。$$

从到一定点和到一定直线的距离相等的条件可以得到抛物线标准方程：

$$y^2=2px。$$

所谓抛物线就是指平面内一动点 $M(x,y)$ 到一定点 F 和一定直线的距离相等，这动点的轨迹就叫做抛物线；定点叫做它的焦点，定直线叫做它的准线。方程中的 p 是焦点做准线的距离，也叫做焦参数。

通过证明，可以得到这样有趣的规律：一次方程和平面上的直线对应，二次方程和平面上的二次曲线（椭圆、双曲线、抛物线）对应。可以根据一个二次方程

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

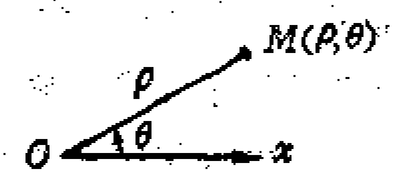
中各系数之间的关系来判别它属于哪一种二次曲线。

第三，用代数方法来证明新的几何定理，也可以从几何方面来看代数方程，说明代数方程的性质。

（四）

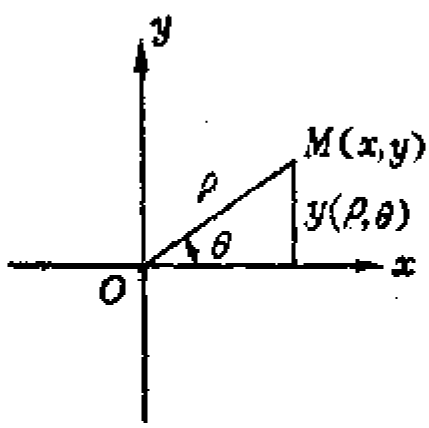
除了直角坐标系外，还可以建立极坐标系。什么是极坐

标呢？如右图所示，在平面内取一固定点 O，叫做极点，从 O 引一射线 Ox 叫做极轴，再确定一个长度单位，这样就建立了一个极坐标系。图中 OM 的长叫做点 M 的极半径，以 ρ 表示，以极轴 Ox 作始边，射线 OM 作终边所成的角 xOM 叫做点 M 的极角，以 θ 表示，(ρ, θ) 就叫做点 M 的极坐标。



极坐标系。

极坐标和直角坐标的关系，可以通过下图来说明，当 ρ 取正值的时候，就得到



极坐标和直角坐标的关系。

$$\begin{cases} x=\rho\cos\theta, \\ y=\rho\sin\theta。\end{cases}$$

$$\rho^2=x^2+y^2,$$

$$\theta=\operatorname{arctg}\frac{y}{x},$$

$$\cos\theta=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

$$\sin\theta=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},$$

（五）

如果某一点的直角坐标 x, y 都是另一个变数 t 的函数的时候，也就是方程组

$$\begin{cases} x=f(t), \\ y=g(t)。\end{cases}$$

如果对于 t 的每一个允许值，方程组所确定的点 $M(x,y)$ 都在某一条曲线上，同时，这条曲线上的任何一个点 M 的坐标 x, y

都可由 t 的某一个允许值通过方程组得到，那么，这个方程组就叫做这条曲线的参数方程，t 叫做参数。

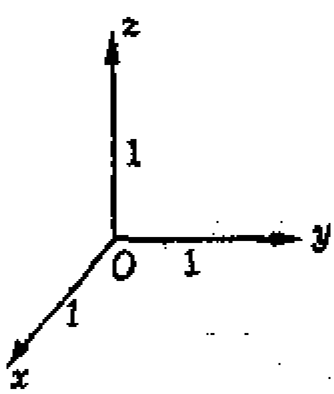
从方程组的两个方程消去参数 t，就可以得出 x、y的普通方程。

（六）

空间解析几何最基本的概念是空间直角坐标系。

在空间任意取定一个点 O，过 O 点可以作三条互相垂直的直线，对于这三条直线分别用箭头来表示它们的正方向，并且定出相同长度的单位，这三条直线分别用 Ox、Oy、Oz 表示，成为三条坐标轴，这样就建立了空间直角坐标系。

如下图就是一个空间直角坐标系，用 $Oxyz$ 表示。图中 O 点叫做原点，Ox，Oy，Oz 分别叫做 x 轴，y 轴，z 轴。



空间直角坐标系。

在空间直角坐标系中，每两个坐标轴决定一个坐标平面，这一共有三个坐标平面。它们互相垂直，垂直于 Ox 的叫做 yz 平面，用 Oyz 表示；垂直于 Oy 的叫做 zx 平面，用 Ozx 表示；垂直于 Oz 的叫做 xy 平面，用 Oxy 表示。

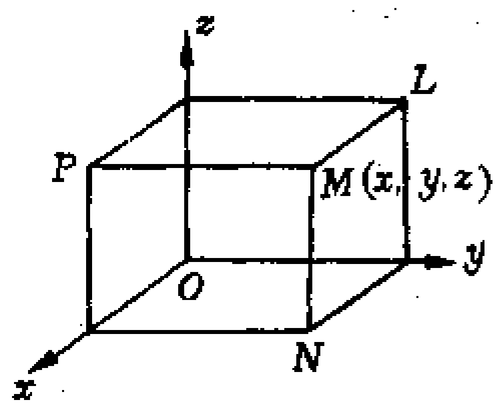
（七）

建立了空间直角坐标系之后，对于空间的任何一点，就可以确定它的坐标了。

如下页右图的 M 是空间的一个点，通过点 M，可以作三个平面分别和三个坐标平面平行，它们和坐标轴 Ox、Oy、Oz

五

依次交于 A、B、C，它们对三个坐标轴 Ox、Oy、Oz的坐标分别是x、y、z，x、y、z 就叫做点 M的坐标，用 $M(x,y,z)$来表示。



空间一点M在空间直角坐标系的坐标。

反过来说，已经知道一个有秩序的三个数组(x,y,z)，在空间总有唯一的一个点和它们对应，这个点的坐标就是(x,y,z)。也就是说，空间的点 M 和有序三数组建立了一一对应关系。

空间解析几何研究空间中的曲面方程和曲线方程。和平面类似，它研究任意一个带三个变数的二次方程

$$A_1x^2+A_2y^2+A_3z^2+2B_1yz+2B_2xz+2B_3xy$$
$$+2C_1x+2C_2y+2C_3z+D=0$$

对应于空间中的哪一种二阶曲面，这些曲面在力学、物理学和工程技术中都起着重要的作用。

非欧几何学

(一)

前面已经提过，非欧几何是和欧氏几何不同的一种几何学，不同点是：欧氏几何建立在经验的、三维的公理系统基础上；非欧几何却是建立在另一组公理系统的基础上；非欧几何改变了欧氏几何的平行公理。

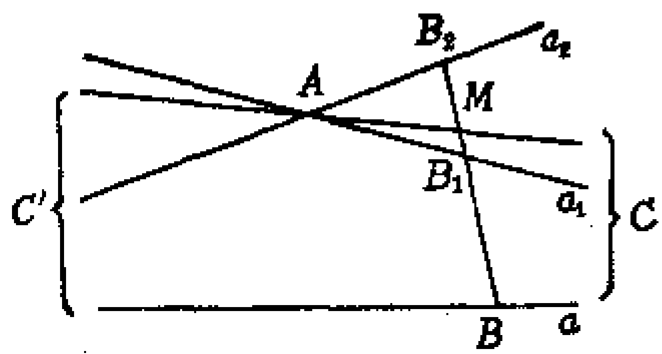
虽然欧氏几何和非欧几何都反映了现实空间的相对真

理，用欧氏几何的形式还可以把非欧几何在某些曲面上表达出来，但是，非欧几何的概念和公理跟欧氏几何是不同的。

非欧几何有狭义的、广义的和通常意义的这三种不同的含义，狭义的非欧几何是单指罗巴切夫斯基几何，广义的非欧几何泛指一切和欧氏几何不同的几何，通常意义的非欧几何是指罗氏几何(也叫做双曲几何)和黎氏几何(也叫做椭圆几何)。

(二)

关于罗巴切夫斯基的平行线定义，这里简单地叙述一下。罗巴切夫斯基关于平行线是这样规定的：存在着这样的直线 a 和不在它上面的点 A，使得通过点 A 至少有两条直线，不和直线 a 相交但是和它在一个平面上。



罗氏几何平行线定义示意图。

如上图所示，设 a_1 和 a_2 是通过点 A 而且不同 a 相交的两条直线；这是由罗巴切夫斯基公理提出的。在直线 a_2 上取这样的点 B_2，使得它对于直线 a_1 来说，位置在直线 a 所不在的那一侧。连结 B_2 和直线 a 的某个点 B。线段 B_2B 和直线 a_1 相交在一个点 B_1。用 M 表示线段 B_1B_2 的任意点。这样就

很容易断定，直线 AM 不和直线 a 相交。

这里可以运用德国数学家帕士 (1843-1930)的关于几何元素在平面上的位置的公理来加以证明。这条公理是："设A，B，C是不在一条直线上的三个点，a是平面 ABC 上的一条直线，不包含点 A，B，C 的任何一个。那么，如果直线 a 通过线段 AB 的点，同时它还通过或者是线段 AC 的点，或者是线段 BC 的点。" 这条公理也叫做帕士公理。

事实上，如果直线 AM 和直线 a 相交，必定有一个交点，设这个交点是 C，它落在从 A 到 M 的那个方向，那么就会形成三角形 MBC，三角形 MBC 的边 MB 和直线 a_1 是相交的。按照帕士公理，直线 a_1 应该和 a 相交。但是这和假设中 a_1和 a 不相交是矛盾的，a_1 和a 相交应该排除，直线 AM 和直线 a 相交于 c 点也就不存在。

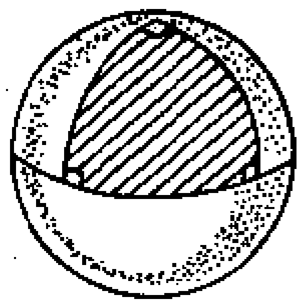
现在再来证明另一种情况，如果直线 AM 和直线 a 相交于另一个点 C'，C' 落在从 M 到 A 的那个方向，那么就会形成三角形MBC'，三角形MBC'的边MC'是和直线 a_2 相交的。按照帕士公理，直线 a_2 应该和 a 相交。但是这和假设中 a_2和 a 不相交是矛盾的，a_2 和a 相交应该排除，直线 AM 和直线 a 相交于 C' 也同样是不存在的。

这样一来，就可以总结出：如果 a_1 和 a_2 通过 A 点而且不跟 a 相交，那么通过点 A 而且落在由直线 a_1 和 a_2 所组成的一对确定的对顶角里的所有直线，都不跟直线 a 相交。也就是说，在同一个平面上，通过点 A 有无穷多条直线不和直线 a 相交。

（三）

三角形的三个内角的和等于 180°，这是欧氏几何的内角和定理，也是欧氏几何的一个显著特征。如果有某一种几何学，这种几何学里存在着内角和不等于 180° 的三角形，那么这种几何学就不是欧氏几何，而是非欧几何。

任何空间中，是否存在一种内角和不等于 180° 的三角形呢？实际上是存在的。拿很早以前就产生的球面几何学来说，取赤道作底线，东经 10° 和东经 100° 的两条子午线作两条边所构成的大三角形，它的内角和就不是 180°。如左图所示，东经 10° 和东经 100° 两条子午线相交所成的夹角应该是 $100°-10°=90°$，子午线和赤道是互相垂直的，因此，两条子午线和赤道相交所构成的夹角，也各是90°。这样，这个大三角形的三个内角的和就不是 180°，而是 $3\times 90°=270°$。也就是说，客观上存在着内角和大于180°的三角形。球面几何学就是非欧几何学的一种。

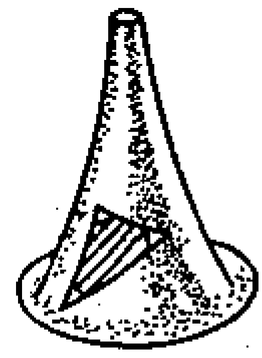


内角和大于180°的三角形。

还有一种几何叫做曲面的内蕴几何，主要是把平面上的直线推广到曲面上的测地线，把平面三角形推广到曲面上的测地三角形，因而又引出了"高斯曲率"这个概念。所谓高斯曲率，就是指表示曲面在一点附近的弯曲程度的量。

高斯曲率的计算是这样规定的：平面上的每一点的高斯曲率都等于零；半径是 R 的球面在每一点的高斯曲率都等于 $\frac{1}{R^2}$；如果一个曲面象球面或者鸡蛋壳那样是向外凸起的，高斯

曲率是正数；如果一个曲面象高音喇叭、锅底或者马鞍形那样向内凹陷的，高斯曲率是负数。



伪球面。

球面的高斯曲率是正数，球面三角形的内角和大于180°。向内凹陷的曲面，如高音喇叭形的特殊曲面，如右图所示，一般叫做伪球面，它的高斯曲率是负数，三角形的内角和就小于180°。

（四）

欧氏几何的三角形内角和是等于180°的，罗氏几何的三角形的内角和小于180°，黎曼几何和球面几何一样，它的三角形的内角和是大于180°的。这是黎曼几何跟欧氏几何、罗氏几何的一个不同的显著点。

在黎曼几何里，作为直线的是球面的大圆弧，因此，两条“直线”（也就是两个大圆弧）总是相交在球面的两个对径点上。这样，对于欧氏几何和罗氏几何里关于通过两个不同的点只能引一条直线这个基本命题，在黎曼几何里是不成立的。

在黎曼几何里还有欧氏几何和罗氏几何里都不成立的命题。这个命题是：每两条直线都有（一个）公共点。这个命题很明显，因为每两个大圆都有一对对径的交点。换句话说，就是在黎曼几何的平面上没有平行直线。

黎曼几何在爱因斯坦提出的广义相对论上有很大用处。关于它和罗氏几何的其他许多特性，这里就不再介绍了。

数学分析

(一)

我们前面曾说数学分析就是指微分学和积分学，其实它还包括级数论、函数论、微分方程、积分方程、变分法、泛函分析等许多门数学分支。这些分支都以函数作为研究对象，构成了内容广泛的分析领域。

但是，由于这许多分支都已经发展成为内容庞杂的独立的学科，所以有时候就把数学分析看成单指微积分学。我们这里也只说微积分学。后面把函数论和微分方程单列成节，略加介绍，其他分支本书就不叙述了。

(二)

微积分学是微分学和积分学的统称，是研究函数的导数、积分的性质和应用的一门数学分支学科。

函数是高等数学中最重要的基本概念之一。函数的概念，举例来说，如果在重力作用下，自由下落的物体下落的距离是 s，经过的时间是 t，那么，距离 s 和时间 t 的关系，可以用公式 $s=\frac{1}{2}gt^2$ 表示出来。式中的 g 是重力加速度。s 和 t 都是变化着的量，就叫做变量。时间 t 由初始的 t_0 经过 t_1、t_2 到 t，物体下落的距离也对应地由初始的 s_0 经过 s_1、s_2 到 s。这样，我们就说时间 t 和距离 s 构成了函数关系。距离 s 依赖于时间 t，时间 t 是自变量，距离 s 是因变量。于是就得出关于函数的定义：设在某一个变化的过程中，有两个变量 x 和 y，变量 y 随着变量 x 一起变化，而且依赖于 x；如果变量 x 取某

一个特定的值，变量 y 总是按照某种规定取相应的值和变量 x 对应，那么，变量 y 叫做变量 x 的函数。变量 x 是自变量，变量 y 是因变量。这种函数关系，一般用 $y=f(x)$ 来表示，也可以用 $y=\varphi(x)$ 或者 $y=F(x)$ 来表示。字母"f"、"φ"、"F"等，仅仅是一种记号，用来表示 y 对于 x 存在着函数关系。

从函数的定义又引出一系列概念：变量 x 的变化范围，叫做函数的定义域；和 x 对应的 y 的值叫做函数值；定义域和函数值合起来叫做值域，等等。

(三)

在实践中遇到求某种变化着的量的值，就会产生怎样才能求出更接近于精确值的问题。比如，运动着的火车的即时速度，不规则的曲边形面积等等。因而产生了极限的概念。

极限的定义一般是这样来叙述的：如果变量 x 按照某一种规律变化，终于无限地接近一个常数 C，那么，就说 C 是 x 的极限，并且用记号 $\lim x=C$ 或者 $x\to C$ 来表示。如果有一个数列 $a_1,a_2,\cdots\cdots a_n,\cdots\cdots$ 当 n 无限增大的时候，数列的项 a_n 终于无限地接近一个常数 C，那么，C 就叫做这个数列的极限，或者说这个数列收敛于 C，记成

$$\lim_{n\to\infty} a_n = C\ 。$$

伴随极限的研究，产生了无穷大量和无穷小量的问题，又有无穷大、无穷小的概念。无穷大、无穷小是指函数在变化中，它的绝对值要大于任意大的一个具体的正数，小于任意小的一个具体的正数。它和很大很大、很小很小的具体数不是

一个概念，不能混为一谈。无穷小量是研究函数的重要工具，所以有时候还有人把数学分析叫做无穷小量分析。

在微积分学的极限内容中，有两个极限通常用来证明判定极限存在准则，被认为是十分重要的。这两个重要极限是：

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1。$$

和

$$\lim_{x\to\infty}(1+\frac{1}{x})^x=e。$$

后一个极限也可以这样表示：

$$\lim_{n\to\infty}(1+n)^{\frac{1}{n}}=e。$$

e 是一个无理数，$e=2.71828\cdots\cdots$是自然对数的底。

(四)

微积分学最重要的就是导数、微分、积分的概念，只有引入这些概念，数学才能精确地回答力学、物理学、工程学、几何学等提出的一些问题，比如即时速度、比热、密度、面积等问题。导数、微分的概念是利用极限的概念才得到的。

导数的概念是这样的：对于一个给定的函数 $y=f(x)$，设自变量在点 x 处有增量 Δx，函数 $y=f(x)$ 有对应的增量 Δy，如果当 $\Delta x\to 0$ 的时候，函数的增量Δy 和自变量增量 Δx 的比有极限存在，那么，这个极限

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

叫做函数 $y=f(x)$在点 x 的导数。

函数的导数通常用记号 y' 或者 $f'(x)$ 来表示。

利用曲线的切线，可以明白地解释导数的几何意义，也就是说，当函数关系 $y=f(x)$ 以图形来表示的时候，它在某一点的导数 y' 等于这条曲线上过这点的切线斜率 k（切线斜率就是切线和横轴交角的正切函数），也就是

$$k=y'=f'(x)。$$

因为 $y'=f'(x)$ 仍然是 x 的函数，所以还可以再求它的导数。这样，就把 $y'=f'(x)$ 叫做一阶导数，把一阶导数的导数叫做函数 $f(x)$ 的二阶导数，二阶导数记成 $y''=f''(x)$。相应地，二阶导数的导数叫做函数 $f(x)$ 的三阶导数，记成 $y'''=f'''(x)$。一般来说，$n-1$ 阶导数的导数叫做函数 $f(x)$ 的 n 阶导数，记成 $y^{(n)}=f^{(n)}(x)$。

什么叫做微分呢？微分又建立在导数概念的基础上，它的定义是这样的：设函数 $y=f(x)$ 在某点 x 处有导数，于是函数 $f(x)$ 在 x 处的导数 $f'(x)$ 和自变量在 x 处的增量 Δx 的乘积 $f'(x)\cdot\Delta x$，叫做函数 $f(x)$ 在 x 处的微分。用记号 dy 或 $df(x)$ 来表示，也就是

$$dy=f'(x)\cdot\Delta x。$$

自变量 x 的增量 Δx 就是它的微分 dx，也就是 $\Delta x=dx$，因此，函数的微分写成

$$dy=f'(x)\cdot dx。$$

简单地说，函数的微分等于函数的导数和自变量增量的乘积。

从 $dy=f'(x)\cdot dx$ 可以看出导数和微分的关系：函数 $y=f(x)$ 的导数 $f'(x)$，等于函数的微分 dy 和自变量的微分 dx

的比，也就是

$$y'=f'(x)=\frac{dy}{dx}。$$

因此，导数也用$\frac{dy}{dx}$这种记号表示，并且叫做微商。

导数在解决实际问题方面，用途十分广泛。如果 y 是 x 的函数，那么导数$\frac{dy}{dx}$可以解释成 y 对 x 的变化率。在实际问题中，如果 y 是距离，x 是时间，那么，$\frac{dy}{dx}$就是速度；如果 y 是力做的功，x 是时间，那么，$\frac{dy}{dx}$就是功率。微分在进行近似计算方面很有用处。

(五)

积分和微分的意义相反。微分是在已知函数中去求导数或微分，积分却是反过来，由已知的导数或微分，去求原来的函数。

原来的函数也叫做原函数，它的定义是这样的：如果函数 $F(x)$的导数是 $f(x)$，或者说函数 $F(x)$ 的微分是 $f(x)dx$，那么，函数 $F(x)$ 叫做函数 $f(x)$ 的原函数。比如，设函数 $F(x)=x^4$，按照微分学中求导数的公式，它的导数是 $f'(x)=4x^3$，或者说 $F(x)$ 的微分是 $4x^3dx$，象这样，x^4 就是 $f(x)=4x^3$ 的原函数。

由已知函数 $f(x)$去求它的原函数 $F(x)$，也就是说，去求导数等于 $f(x)$或者微分等于 $f(x)dx$ 的函数，叫做积分法。

积分又分不定积分和定积分等。

不定积分的概念是：如果函数 $F(x)$是函数$f(x)$的一个原

函数，那么，函数 $F(x)$ 加上一个常数 C，就是 $F(x)+C$，它的导数仍然是 $f'(x)$，换句话说，$f(x)$ 的原函数就是 $F(x)+C$，这叫做函数 $f(x)$ 的不定积分。因为 $F(x)+C$ 表示原函数的一族，所以不定积分又叫做原函数族。对于 $f(x)$ 的不定积分，通常用 $\int f(x)dx$ 来表示。也就是

$$\int f(x)dx=F(x)+C。$$

在这个符号里，$\int$ 是积分记号，$f(x)$ 叫做“被积函数”，$f(x)dx$ 叫做被积式，x 叫做“积分变量”，$F(x)$ 就是原函数，C 是任意常数，叫做“积分常数”。

定积分和不定积分的区别在于积分是有定值的，也就是说有当 x 值是在一定区间的时候的积分值。定积分通常用下列符号表示：

$$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)。$$

从符号可以看出，定积分记号比不定积分多了 b 和 a，b 表示积分上限，a 表示积分下限，也就是说表示积分的范围是积分变量 x 的值在 $[a,b]$ 这个闭区间。所以 $[a,b]$ 也叫做“积分区间”。

从符号的“$=$”号右边也可以看出，一个函数的定积分等于它的任意一个原函数在积分上下限的值的差。$F(b)-F(a)$ 通常也用记号 $[F(x)]_a^b$ 或 $F(x)\Big|_a^b$ 来表示，所以，上面的积分符号也可以写成

$$\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b，\text{或者}\int_a^b f(x)dx=F(x)\Big|_a^b。$$

积分学在工程学、力学、物理学等各个学科领域都得到广泛的应用。

函 数 论

(一)

函数论包括实变函数论、复变函数论等。以实数作为自变量的函数叫做实变函数。实变函数论是微积分学的进一步发展。实变函数论的基础是点集论，点集论是专门研究点所成的集合的性质的理论。

实变函数论就是在点集论的基础上研究分析数学中一些最基本的概念和性质的。比如研究点集函数、序列、极限、连续性、可微性、积分等等。实变函数论主要解决实变函数的分类问题、结构问题、基本运算规则和各种表达方法问题。实变函数论在数学各分支的广泛应用成了现代数学的一个特征，它是数学的重要分支之一。

实变函数论的内容主要包括有积分论、逼近论、傅立叶分析和积分变换、描述理论等几个方面的理论。

积分论研究各种积分的推广方法和它们的运算规则。由于积分归根到底是数的运算，所以在进行积分的时候，必须给各种点集以一个数量的概念——测度(比如，一条线段的测度就是它的长度)。研究点集测度的理论叫做测度论。建立在测度论基础上的研究方向叫做度量性实变函数论。

如果能把甲类函数表示成乙类函数（比如多项式）的极限，就说甲类函数能以乙类函数来逼近。如果已经掌握了乙

类函数的某些性质，那么往往可以由此推出甲类函数的相应性质。逼近论就是研究那类函数可以用另外一类函数来逼近、逼近的方法、逼近的程度、以及在逼近中出现的各种现象的。同逼近论密切相关的有正交级数理论。三角级数也是一种正交级数。当 $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2\cdots$是常数的时候，

$$\frac{1}{2}a_0+(a_1\cos x+b_1\sin x)+(a_2\cos 2x+b_2\sin 2x)+\cdots$$

就叫做三角级数。同逼近论相关的还有函数构造论，就是从某一类已知函数出发构造出新的函数类型。

为了研究某些函数的性质，往往需要进行变换，就是把研究这些函数的问题化做研究另一类比较熟悉或者比较容易讨论的函数问题。这种变换经常采取积分的形式，比如，傅立叶变换就是一种特殊的积分变换。傅立叶分析一般是指有关三角级数和傅立叶积分变换的研究。

如果在实变函数的研究中避免使用测度等数量概念而探讨一些基本概念和问题，这就是描述性（非度量性）实变函数论。

（二）

以复数作自变量的函数叫做复变函数。复变函数论所研究的问题，有些是由它本身在发展中提出的，有些是由实际问题或其他学科提出的。对于自然科学其他部门如空气动力学、流体力学、电学、热学、理论物理学等，以及数学的其他分支如微分方程、积分方程、概率论、数论等，复变函数论都有重要的应用。

复变函数论的内容主要包括有单值解析函数理论、黎曼曲面理论、几何函数论、自守函数和模函数理论、广义解析函数等几个方面的理论。

如果变量取某一定数值的时候，函数就有一个唯一确定的值，这个函数就叫做单值解析函数。比如，多项式就是这样的函数。单值解析函数论主要包括整函数和亚纯函数。亚纯函数也叫做半纯函数，是除了在无穷远点外只有极点的函数。有理分函数就是最简单的亚纯函数。

函数也可以是多值的，比如 $W=\sqrt{z}$，当 $z=1$ 的时候，函数值就可以是 $+1$ 或者 -1。代数函数就是多值函数。为了研究多值函数，引进了黎曼曲面的概念，把一般平面上的多值函数化作黎曼曲面上的单值函数来讨论。所谓黎曼曲面就是指黎曼几何的曲面理论。近年来黎曼曲面的研究逐渐趋向独立地探讨它的拓扑性质和解析性质。

复数可以代表平面上的点，如果把变数和函数之间的关系看作是平面上点和点之间的关系，那么解析函数的关系可以看作是一种由平面点集构成的几何图形的变化。促成这种变化的变换叫做保角变换，也叫做共形映象。所谓保角变换，具体是指在平面映象的时候，保持任意两条曲线的交角大小不变，但是不一定保持它的方向不变。这里主要是研究一种叫做单叶函数的保角变换。这种把解析函数关系看作是由平面点集构成的几何图形的变化的理论就是几何函数论。几何函数论在空气动力学（飞机机翼的设计）、弹性力学（房屋建筑）和地下水运动学（水坝设计）等方面都有比较广泛的应用。

把一个区域变成它自身的保角变换的全体叫做这个区域的解析自同胚群。经过某种解析自同胚群的变换后，它的值保持不变的函数叫做自守函数。模函数就是一种自守函数。自守函数和模函数的理论是比较完备的，所以在复变函数中也是一种重要的理论。

实际生活中的问题往往比较复杂，不能完全用单值解析函数来描述。比如，在空气动力学中，当飞行速度不大的时候，可以把空气看作是不可压缩的流体，于是它可以用解析函数来描述；但是当飞行是跨声速或者超声速的时候，空气就不能看作是不可压缩的了。为了描述这种现象，必须把定义解析函数的条件适当改变，这样就出现了广义解析函数。它所代表的几何图形的变化叫做拟保角变换。解析函数的一些基本性质，稍加改变后，同样适用于广义解析函数。广义解析函数的应用范围比较广，除了上面所讲的流体力学外，还涉及薄壳理论等固体力学部门，因此这门新兴的分支发展比较快。

复变函数论除了以上这些基本理论外，还有其他一些理论，这里就不一一说了。

微 分 方 程

（一）

凡是表示未知函数和未知函数的导数以及自变量之间的关系的方程，叫做微分方程。

如果在一个微分方程中出现的未知函数只含一个自变量，那么这个方程就叫做常微分方程。

如果在一个微分方程中出现有多元函数的，也就是未知函数是多元的，那么这个方程就叫做偏微分方程。

微分方程的基本问题是：在一定条件下，确定由微分方程所描述的运动状态或者从所给微分方程解出的未知函数，也就是通常所说的定解问题。所求的未知函数叫做方程的解。此外，附加于方程的对解的限制条件就叫做定解条件(包括初始条件和边界条件等)。

现代的科学技术如空间技术、现代物理学、力学等都有许多问题需要用微分方程来求解，甚至在化学、生物学、医药学、经济学等方面，微分方程的应用也越来越多，这些情况反过来又推动了微分方程的发展。

(二)

常微分方程的基本理论主要是研究解在一点附近的存在和唯一，解和初值、参数的依赖关系等问题。

常微分方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0。$$

在这个方程中，x 是自变量，y 是 x 的未知函数：$y=y(x)$，$y',\cdots,y^{(n)}$ 依次是函数 $y=y(x)$ 对 x 的一阶、…、n 阶导数。在方程中出现的各阶导数中最高的阶数叫做微分方程的阶。比如微分方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-a^2y \qquad \text{是二阶的，}$$

$$3y^2\frac{dy}{dx}-2x=0 \quad \text{是一阶的。}$$

常微分方程研究初期，人们力图把方程的积分用已知函

数来表示出来，或者把方法的求积问题化做求已知函数的积分。这只能对特殊的微分方程求得解决，在多数情况下，积分本身不见得能表示已知函数的有限运算。这样就提出了从微分方程本身来研究积分性质的问题。

首先是不限制初等函数的范围，针对所研究的方程引入新的函数，这样就使得微分方程能够包含比较多的特殊函数，同时也扩展了微分方程的可能领域，促使微分方程和函数论、特别是和复变函数论紧密结合。

现在假设某一个函数（显函数或者隐函数）$y=y(x)$ 满足微分方程

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,$$

也就是说，当我们用 $y=y(x)$，$y'=y'(x)$，…，$y^{(n)}=y^{(n)}(x)$代入这个方程后，能使这个方程成为恒等式，那么，函数$y=y(x)$就叫做这个微分方程的解（或者积分）。举例来说，比如微分方程

$$3y^2dy-2xdx=0$$

的一个解就是函数 $y=x^{\frac{2}{3}}$，或者说这个方程的解是由方程

$$y^3-x^2=0$$

所表示的隐函数。

其次，微分方程还从几何方面来考虑方程的解，也就是说，微分方程的一个解对应着平面上的一条曲线，叫做这个方程的积分曲线。比如，曲线 $y=x^{\frac{2}{3}}$ 就是微分方程

$$3y^2dy-2xdx=0$$

的一条积分曲线。研究这些曲线的一般性质、曲线的奇点、极

限环和一般分布等等属于定性理论。

对常微分方程实际问题的要求往往不止于知道方程的解是否存在和某些定性性质，还要求给出解的某种近似公式和某种渐近表达式、它们和真正解之间的误差估计等等。这些就属于定量理论的范围。

（三）

偏微分方程也叫做数学物理方程，原因是这种方程特别适用于解决许多物理学方面的问题，也是指在解决物理学、力学等的问题中得到的。

具有两个自变量的二阶偏微分方程的一般形式可以由方程

$$F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy},u_{yy})=0$$

给出。式中 x 和 y 是自变量；$u=u\ (x,y)$ 是一个函数；$u_x=\frac{\partial u}{\partial x}$，$u_y=\frac{\partial u}{\partial y}$，$u_{xx}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$，$u_{xy}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$，$u_{yy}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$，这些都是 u 的导数；这个方程含有八个变量，$F(x,y,u,p,q,r,s,t)$ 就是八个变量的已知函数。∂ 是偏微分的符号。

举例来说，$u_{xy}=0$ 是一个二阶偏微分方程。很容易进行检验，对于任意选定的函数 h 和 g，$u=h(x)+g(y)$ 就是这个方程的解。

偏微分方程的解同常微分方程一样，一般有无穷多个，但是在解决具体的物理学等问题的时候，必须从中选取所需要的解，因此，在求解的时候还必须知道附加条件。比如，研究的对象是物理现象，就必须知道初始条件和边界条件。

偏微分方程理论的主要内容包括：双曲型偏微分方程，抛物型偏微分方程，椭圆型偏微分方程。许多物理问题的分析导致二阶线性偏微分方程，如果这种方程存在两个自变量的情形，这种类型的最一般方程是下面这种形式：

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=g_{\circ}$$

式中的系数 $a, b, \cdots, f, g$ 是 x 和 y 的已给函数。现在假设 $a^2+b^2+c^2\neq 0$，那么，如果 $b^2-ac>0$，就说这个方程是双曲型偏微分方程；如果 $b^2-ac=0$，就说这个方程是抛物型偏微分方程；如果 $b^2-ac<0$，就说这个方程是椭圆型偏微分方程。一般说来，描述声波、光波、电磁波的传播和弹性体的振动等现象的微分方程，都是双曲型偏微分方程；描述热的传导、带粘性的流体运动等的微分方程，都属于抛物型偏微分方程；凡是一个自然现象，经历长时间以后渐趋稳定的，就都用椭圆型偏微分方程来描述，比如牛顿万有引力定律的研究和理想流体的流动，都是相当经典的椭圆型偏微分方程问题。

概率论和数理统计

（一）

概率论和数理统计是研究随机事件的数量规律的科学。

什么叫做随机事件呢？这里需要讲讲有关几个概念。在一定条件下，必然会出现的现象叫做必然事件。比如，在标准大气压下，水加热到 100°C 的时候，必定会沸腾，这就是必然事件。在一定条件下，必然不出现的现象叫做不可能事件。比如，“同性的电互相吸引”、“没有水分种子会发芽”，这都是

不可能出现的现象，是不可能事件。在一定条件下，可能出现也可能不出现的现象，就叫做随机事件。自然界中存在大量的随机事件，比如，“掷五分钱硬币国徽面朝上”、“明年七月间的平均温度是28°C”、“射击命中目标”等等都是随机事件。

由于随机事件是普遍存在的，因此概率论和数理统计的概念、方法具有极其普遍的意义，已经被广泛应用到各门自然科学、各个工业部门和经济部门中去。

（二）

概率也叫做“几率”、“或然率”，是概率论中最基本的概念。概率是用来表示随机事件发生的可能性大小的一个量。比如，如果我们大量试验掷五分硬币，据实验统计，国徽面朝上和伍分面朝上的次数几乎各占一半，那么我们就说每个面朝上的概率是50%。这种规律性也叫做大量现象规律。概率论正是研究这种大量随机事件的数量规律的数学分支。

概率论的主要问题之一是说明大量的偶然因素相互影响而产生的规律。为了研究大量的随机现象，常常采用极限的形式，这就引导到极限定理的研究。极限定理的内容很广泛，其中最重要的是大数定理和说明分布的正态规律起重大作用的中心极限定理。

概率论的主要内容包括随机变量和分布函数、极限定理、马尔可夫过程和平稳随机过程等等。

马尔可夫过程又叫做无后效的随机过程，它是一种常见的、重要的随机过程。它的特点是，当现在的情况已经知道的时候，以后的一切统计特性就和过去的状况无关。马尔可夫

过程可以按照时间和状态的离散、连续情况分做三个部分来深入讨论。

平稳过程，粗略地说，就是指它的统计特性不随时间的推移而变化的过程。一般来说，当产生随机现象的一切主要条件可以看作不随时间的推移而改变的时候，我们常把它看作是平稳的。在实际应用，如通信技术、造船、气象、纺织等所遇到的过程有很多可以认为是平稳过程，因此对平稳过程的理论研究很重要，平稳过程在自动控制、无线电电子学等方面都有重要的应用。

因为马尔可夫过程和平稳过程的理论比较完备，所以应用范围比较广泛。

概率论在物理、化学、生物、生态、天文、地质、医学等学科，在控制论、信息论、电子技术、预报、滤波、运筹、随机搜索、随机规划等工程技术中的应用，都非常广泛。近年来，由于科学技术的日益精确化，概率论除了纯理论研究和应用概率取得比较大的进展外，计算概率也有很大的发展。

所谓计算概率，开始于法国科学家布丰(1707-1788)用掷针实验以求 π 的近似值，随后发展成为蒙特-卡罗方法，由于电子计算机的出现，这个方法得以付诸实用。其中包括计算积分的值、解代数方程、微分方程、积分方程以及随机模拟等。

(三)

数理统计是数学中联系实际最直接最广泛的分支之一。在国防建设中，在工农业生产中，在国民经济的其他许多领域里，在物理、化学、气象、水文、医学、卫生等方面都有广泛的应

用。社会主义建设事业迫切需要运用数理统计的理论和方法创造性地解决国民经济中许许多多的问题。比如，大量产品怎样检查，怎样在生产过程中进行质量控制，怎样进行长期天气预报，怎样检验药物疗效，怎样总结农业丰产经验等等，都需要利用数理统计方法来进行解决。

数理统计的研究对象是自然界和生产中的大量现象，它应用概率来研究这种大量现象的统计规律性，方法的主要特征在于通过部分的材料得到关于整体的充分正确的了解。具体地说，数理统计就是从实际观察资料出发来研究随机变量的分布函数和数字特征的，它的中心任务就是研究怎样合理地搜集资料，并且利用观察的资料来对随机变量的数字特征、分布函数等进行估计、分析和推断。

数理统计使人们能够通过概率来判断某种事物发生的可能程度和正确程度、算出发生错误判断的可能性。这就使得我们所作的判断既有分寸又有力量，既能保证足够的正确性和工作质量，又能最大限度地节省调查工作的人力、物力和时间，达到多快好省地开展工作的目的。

数理统计经常处理的是估值问题和假设检验两类问题。数理统计基本理论方面的研究内容，包括抽样理论、参数估计、假设检验、实验设计、相关分析、统计判决函数等方面。就它处理问题的方法来说，又分成参数方法和非参数方法两大类。

数理统计结合各个专门领域的具体特征，形成了许多专业统计分支，比如，工程技术中的数理统计方法、生物统计、水

文统计、田间的试验设计和分析等等。

运 筹 学

(一)

运筹学是一门比较新的数学分支。它可以用来解决生产实践中有关安排、筹划、调度、使用、控制等方面的问题。

运筹学的内容庞杂，应用范围很广，从发展趋势来看，不仅它本身有发展成为一门独立学科的趋向，而且它所包含的一些分支也有发展成为一些独立学科的趋向。

运筹学的主要分支有规划论、优选法、对策论、排队论等。

(二)

规划论也叫做数学规划论。在生产实践中，经常遇到要对许多事物进行安排和调度的问题，比如调运商品，当然会出现各种不同的方案，但是怎样从这些可行的方案中选择一个最好的方案，这就是规划论的研究内容。规划论主要研究物资调运、巡回路线(如邮递员送信路线)、装卸工人的调配、最大通过能力、场地选择、合理下料、机器的合理利用等线性规划问题和非线性规划问题。

这些问题的共性在数学上可以概括成为：求某一函数在一定约束条件下的最大(或者最小)值问题。如果约束条件和目标函数都是线性函数的规划问题，叫做线性规划问题，否则就叫做非线性规划问题。

(三)

优选法，简单地说就是寻求最好的方式来解决最优化问

题。在工程设计、生产技术、科学试验等许多方面，人们总想采取种种措施以得最好的结果。这类问题，经过数学的归纳和提炼就是应用很广的最优化问题。

优选法不仅要找出问题的最优解，而且要提高求解的效率。优选法名目繁多，大的方面可以分成单因素优选法和多因素优选法两类；单因素优选法又包括对分法、0.618法、分数法等；多因素优选法又包括爬山法、调优法等等。

对分法就是每次取因素所在范围的中点处做试验，每次可以去掉一半的范围，这是比较简单的方法，对于试验和节省贵重原料很有成效，还可以帮助求一些代数方程的根。举例来说，某生产队使用80%敌敌畏防治棉花红蜘蛛，为了确定棉花红蜘蛛死亡率达90%以上的药液稀释倍数，他们这样来进行试验：试验范围取3000—4000倍，试验的时候，第一点稀释倍数取试验范围的中点$\frac{1}{2}(3000+4000)=3500$(倍)，试验结果，棉花红蜘蛛死亡率是86.9%；因为死亡率达不到要求，药液嫌稀，去掉3500倍以上部分，在3000—3500范围内继续取中点进行第二次试验，第二点的稀释倍数是$\frac{1}{2}(3000+3500)=3250$(倍)，试验结果，棉花红蜘蛛死亡率是90%，达到了要求，因此选用3000—3250倍稀释药液，棉花红蜘蛛的死亡率可达90%以上。这个方法就是对分法。

0.618法是取试验点是所在试验范围的0.618比例处做第一次试验的方法。举例来说，某工厂酸洗钢材，假定根据以往的经验估计或者从理论上计算出酸液的稀释倍数是1000倍到2000倍之间，那么为了选取最优点的试验范围就在

1000—2000(倍)之间。按照0.618法的选点办法，首先在试验范围的0.618处做第一次试验，第一点的稀释倍数可由下式得出：

第一点＝小＋(大－小)×0.618，

这样，第一点的稀释倍数就是：

1000＋(2000－1000)×0.618＝1618(倍)。

然后，再在这一点关于试验范围的中点的对称点处做第二次试验，这一点的加入量可由下式得出：

第二点＝大＋小－中，

也就是“加两头、减中间”，第二点的稀释倍数是：

2000＋1000－1618＝1382(倍)。

做了两次试验以后，就可以进行比较，如果第一点比第二点好，就保留第一点，去掉第二点以外的部分，试验范围变成1382—2000，如果第二点比第一点好，就去掉第一点以外部分，试验范围变成1000—1618。经过这样的处理以后，再来做第三次试验。假定前面试验的结果是第二点比第一点好，那么就在留下的试验范围1000—1618内找出中间一点(第二点)的对称点，做第三次试验，按照前面的式子，第三点的稀释倍数是：

1618＋1000－1382＝1236(倍)。

再比较两次试验的结果，如果第三次比第二次好，保留第三点，去掉第二点以外的部分，就是去掉1382－1618这一部分，试验范围变成1000－1382。然后继续进行第四次、第五次…试验，直到找到最好的结果。

分数法是在试验点只能取整数，或者受条件限制，只允许做一定次数的试验的时候使用的方法。因为分数法要用到斐波那契数列，所以分数法也叫做斐波那契法。所谓斐波那契数列是这样一种数列，从数列第三项起，每一项都是它前面两项的和，这个数列的前10项是：

$$\begin{array}{cccccccccc} F_1 & F_2 & F_3 & F_4 & F_5 & F_6 & F_7 & F_8 & F_9 & F_{10}\cdots \\ 1 & 2 & 3 & 5 & 8 & 13 & 21 & 34 & 55 & 89\cdots \end{array}$$

从这个数列可以有下列递推关系：

$$F_1=1, \qquad F_2=2,$$

$$F_n=F_{n-1}+F_{n-2} \quad (n\geqslant 3)。$$

由数列相邻两项的比$\frac{F_n}{F_{n+1}}$$(n=1,2\cdots)$又构成一系列分数：

$$\frac{1}{2}、\frac{2}{3}、\frac{3}{5}、\frac{5}{8}、\frac{8}{13}\cdots\frac{F_n}{F_{n+1}}\cdots。$$

分数法的试验过程和0.618法一样，只是第一个试验点用斐波那契数列构成的$\frac{F_n}{F_{n+1}}$分数数列的某一个分数来代替0.618。至于选择哪一个分数，取决于规定的试验次数或者试验的范围来确定。

爬山法是从盲人爬山的方法归纳得出的。盲人想要爬上山顶，就用明杖前、后、左、右地试，那儿高就往那儿走，不高就退回来换一个方向再走，这样一步一步向高处走。这种朴素的选优思想目前在大生产中安排试验的时候，应用很多。

调优法是从一些选定的构成一定规则形状的基本试验点开始，然后根据试验结果，用对称道理决定新试验点，一步一

步调向更优的地方。

(四)

对策论又叫博弈论，是从策略的观点出发，研究竞赛性、斗争性活动怎样取胜的一门分支学科。

在竞赛或斗争中，胜负常常取决于双方策略的选择。比如，在我国历史上，齐王同田忌赛马的故事，就是运用对策论的典型事例。有一天，齐王要田忌和他赛马，规定各人从自己的上马(头等好马)、中马、下马(比较差的马)中各选一匹马来赛，并且说好每输一匹马就得付出千金，每胜一匹马就可以获得千金。当时同等级的马，齐王的马比田忌的马强，田忌要输三千金好象已成定局了。但是田忌的谋士孙膑出了一个主意，叫田忌用下马对齐王的上马，中马对齐王的下马，上马对齐王的中马。比赛结果，田忌的下马输了，而中马和上马都胜了，田忌反而赢得了千金。由此可见，在各类对策现象中，参与者应该怎样决策的问题是大可研究的。对策论最主要的就是证明在某些竞赛活动中这种最好的策略是存在的。

对策论是由于实际需要而产生和发展起来的，比如，在作战中，飞机怎样侦察潜水艇的活动，兵力怎样部署，物资怎样调运；在生产中，设备和技术力量怎样安排调配；商品和市场需要怎样协调；在体育竞赛中，怎样根据对手情况安排分组和采取制胜的方法等等，这些都是“对策现象”，研究这些现象就形成了一门新的分支科学。

对策论一般具有这样几个最基本的要素，也是对策论的重要概念，那就是“局中人”、“策略”集、“赢得函数”。构成对

策必然最少有两个相互斗争或者竞赛两个方面。也许是一个人(或一个集团)跟另外一个人(或一个集团)斗争(竞赛)；或者是一个人为一方，跟另外若干个人为一方的斗争(竞赛)；或者是一个人(或若干个人)为一方，跟自然界为一方的斗争；等等。任何一方面，都叫做"局中人"。在斗争或者竞赛中，"局中人"采取的各种办法，就叫做"策略"，一般来说，每一"局中人"都可能具有两个以上的"策略"，所以也叫"策略"集。应该指出，"策略"这个概念是数学上的术语，它和政治上的方针、政策等概念毫不相干，不要混为一谈。对策的结果，总是有胜负之分的，胜的"局中人"一方总是在对策的结果取得一定数量的"赢得"，"赢得"实际上是全体局势集合上的函数。每一个"局中人"都有自己的"赢得函数"。比如，胜的一方的"赢得函数"是 1，那么负的一方相应地就得到 -1 的"赢得函数"。

对策论中现在有很多种对策类型，这里只简单地介绍"二人有限零和对策"。在对策论的各种类型对策中，这是一种最简单的也是最典型的对策。在这种对策中有两个局中人，这两个局中人的利益是完全相反的，双方所处的地位真正是对抗的，两个局中人的策略集很小，只有有限的个数，两个局中人赢得函数的和恒等于零。因此，这种对策就叫做"二人有限零和对策"。

举一个简单的例子来说，假定有两个人进行一种游戏，分别把他们叫做第一局中人和第二局中人，他们手中各有三张牌，第一局中人的牌用 a_1, a_2, a_3 表示，第二局中人的牌用 b_1，b_2, b_3 表示；游戏规则规定，双方都不知道对方的出牌，只是各

自独立出一张，然后按照下面这个表：

	b_1	b_2	b_3
a_1	3	0	2
a_2	-4	-1	3
a_3	2	-2	-1

来计算局中人的赢得数。比如，第一局中人出牌 a_1，第二局中人出牌 b_3，那么第一局中人就赢得 2 分，也就是第二局中人输2分。又如第一局中人出牌 a_2，第二局中人出牌 b_2，那么第一局中人就赢得-1分，也就是输 1 分，第二局中人赢得 1 分。从这个表可以看出，赢得分数由双方出牌来决定，怎样出牌才能赢得分数，就要根据牌的情况和对方可能出牌情况来研究办法了。出哪张牌就是局中人的"策略"，所以 $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ 就是这两个局中人的策略集。两个局中人的策略集所构成的表，实际上是一个矩阵，第一局中人的策略集是行，第二局中人的策略集是列，也就是形成一个 $m\times n$ 的矩阵，m 代表行，n 代表列。因此，二人有限零和对策，也叫做矩阵对策，又因为两个局中人的赢得之和是零，表示双方的利益是冲突的，所以这种对策有时候也叫做有限对抗对策。至于对策的具体计算，这里就不谈了。

（五）

排队论又叫随机服务系统理论。在日常生活和工作中，经常出现排队现象，有排队就必须等待。比如，打电话碰到占线，飞机抵达机场后遇到跑道还在占用等等。我们把打电话

的人、到达的飞机等统一叫做顾客，电话线路、飞机跑道等统一叫做服务机构(或随机服务系统)。这样，排队现象就可以分做三个步骤：第一，顾客的到达；第二，排队规划；第三，得到服务机构的安排。但是顾客到来的时刻和进行服务的时间都随不同的时机和条件而变化，因此，服务系统的状况也是随机的，也就是随各种时机和条件而波动。服务质量和设备利用率是一对矛盾，要使打电话方便，就得线路多，线路多了使用率就低，又会造成不必要的浪费。怎样细致地、定量地研究这个矛盾问题，也就是研究队的长度、等待时间等等的平均数和分布情况，使服务系统安排最合理，这就是排队论研究的问题。

举例来说，有一个百货公司的存货仓库，每天都有几十个、几百个分公司(商店)的提货员要到仓库取货，提货员到达仓库的时间不同，要提取的货物品种也不同，这样就形成一个排队问题，需要仓库的管理人员解决。仓库作为服务系统，应该研究怎样合理安排各个分公司的提货员到达仓库后，减少排队等待时间，迅速把货取走，满足市场需要。这里面就存在这样一些问题需要研究：首先，提货员的到达不一定形成随机过程，比如，提货员按预约时间到达仓库，按照事先安排的预约，每个提货员到仓库的时间相距同样的时间间隔。但是，实际上他们到达的时间不一定是准确地等间隔的，因为提货员路上可能会遇到各种各样的偶然因素，所以到达的时间也是随机的。当然，这种随机又要比随机过程可能有更均匀的间隔。其次，排队规则“先来先服务”有时候不一定适用，比如，

某些提货员所要提的货物是市场上特急的商品，仓库按规定可以优先照顾提取的，这样就可能排到非优先的提货员前面。再其次，可以有多于一个发货员，如果这样，提货员可以在每一个发货员前面形成单独的排队，于是，怎样分配新来到的提货员参加排队就有各种各样可能的规则可供考虑。另外，提货员到达的频率和付货速度随着排队长度而变化的情况也可能发生，比如，当排队太长的时候，新到的提货员可能等不了而离去。这样，在对同样的提货员提供一连串的服务（也就是付货过程）的时候，就形成复合的排队系统。

目前，排队论的发展着重于随机服务系统最优化问题的研究，也就是研究怎样改进系统的设计和控制，以提高系统的效率，取得最大的收益。

数 理 逻 辑

（一）

数理逻辑（或叫做符号逻辑）是用数学的方法研究推理的规律，研究正确思维所遵循的规律的科学。数理逻辑还以数学中的逻辑问题、数学理论的形式结构、数学中所使用的方法等作为自己特殊的研究对象，这种研究往往叫做数学基础。

采用数学方法是数理逻辑的学科特点之一。所谓采用数学方法，就是说数理逻辑象近代数学一样，系统地使用符号、公式来陈述处理自己的问题，对于理论中的概念作出严格的定义。对于定理作出严格的证明等等。数理逻辑从它的研究对象来说，是一门逻辑学。但是，由于采用了数学方法，就使

得它本身也成为一门数学了。

研究数理逻辑扩大了逻辑学(形式逻辑)的范围，把逻辑学的应用范围扩大到其他科学技术方面。用数理逻辑来研究某些数学理论中的命题，并且规定统一的方法判定它们是不是定理，用统一的方法对定理给予证明，这些都给数学提供了新的研究方法，影响着数学的发展。

(二)

数理逻辑有以下几个方面的基本理论：

第一，演绎逻辑。它以演绎推理作为研究对象。演绎逻辑是数理逻辑中的基本部分，属于这个范围的主要研究有命题演算、谓词演算、模态逻辑等。

命题演算研究使用“非”、“与”、“或”、“如果…则…”(这些叫做连接词)等构成更复杂命题的规律和命题之间的逻辑推理规律。

谓词演算研究使用连接词和“所有…”、“存在…”(这些叫做量词)等构成更复杂命题的规律和命题之间的逻辑推理规律。

模态逻辑研究使用“可能”、“必然”(这些叫做模态词)等构成更复杂命题的规律和命题之间的逻辑推理规律。

第二，概率逻辑。它以归纳推理作为研究对象。在归纳推理中前提和结论之间的联系是随机的联系，这是概率逻辑区别于演绎逻辑的地方。概率逻辑常常把推理规律系统地转换成带有计算性质的规律，从而使推理更加精确有效。

第三，证明论。它以数学的概念、命题、推理、证明作为研

六

究对象。它也研究数学理论的逻辑结构，解决数学中的逻辑问题；研究数学中的基本方法(如公理学方法、集合论方法、使用公式化语言的方法、证明的方法等)，探索它们的规律，确定它们的有效性和局限性；并且提供数学其他分支以新的方法。属于证明论范围的重要研究有公理学、判定理论、公理化集合论、代数证明论等。

公理学研究数学理论公理系统的无矛盾性、完全性、独立性等问题。

判定理论研究判定某一个数学理论的命题中的命题是或者不是这个理论的定理，给出定理证明的统一的机械的方法，也就是这个理论的判定方法。

公理化集合论就是集合论基础，它研究集合论的公理系统和怎样解决集合论中悖论等问题。

代数证明论是在代数学中进行证明论的研究，它也包括一般证明论在代数学中的应用。

第四，算法理论或能行性理论。能行性理论又叫递归论，它是以计算作为研究对象的，比如，研究计算的一般特征，算法的可能性或不可能性问题。

第五，可计算分析和其他构造论的数学和逻辑系统。数学中的构造论是这样一种研究趋向，它要求给出构造数学对象的确定的方法和步骤。

数理逻辑的这一分支就是以数学中的构造性方法作为研究对象的，其中的可计算分析是研究数学分析中的构造方法的分支。

计 算 数 学

(一)

现代科学技术的迅速发展，特别是电子计算机出现以后，由于计算工具的大变革，数值计算对于生产的发展开始显出巨大的作用和潜力。因此，数学中的一个虽有悠久历史、但是发展比较缓慢的分支——计算数学也开始取得了新的实践意义，发展了新的内容。

现代计算数学，就它的主要部分来说，可以看做是关于运用现代化计算技术解决具体问题的数学方法的科学。它的主要任务是对于科学、技术、经济、文化生活中提出的数学问题，进行研究怎样运用计算机来解决的途径和方法，并且相应地发展关于计算过程的基本理论。现代计算数学的一个特点是跟实践的联系和应用都十分广泛。

(二)

目前，计算数学大致可以分成两个方面。

第一，数值计算方法。为了运用电子计算机解决实际问题，需要进行一系列的数学准备工作。首先要把具体问题数学化，就是建立一个反映问题本质的数学模型，比如列出方程，提出定解的条件，形成一个要求定解的数学问题。这项工作是和以后的解题工作密切相关的，但是通常不属于计算数学的范围，而是各专业本身或者应用数学方面的工作。

数学问题形成以后，进一步的数学准备工作就是制定问题的数值解算方法，也就是计算方法。计算方法作为计算数

学的一个分支的任务是：研究实践中提出的数学问题的数值解法（特别是适应于电子计算机的数值解法）和数值计算过程本身的规律性。在研究计算方法的时候，一方面要针对问题的数学特征，充分运用数学上成果发展的数学方法和原理；另一方面也要结合问题的物理本质，用它来指导或提示解题方案的制定。

第二，程序设计和程序自动化。在利用电子数字计算机解题的准备工作中，在已经拟定了解题的计算方法以后，还要把这个方法规定的计算过程分解成计算机所能执行的各个基本计算步骤，就是用机器指令来编写控制计算机工作步骤的程序单，这也就是所谓的程序设计。计算机按照程序单上的各道指令进行所规定的操作，以进行解题计算。

各种牌号的计算机都有自己的一套指令系统，不管是什么计算机，由于技术和成本的限制，所能执行的基本操作都是比较简单的，因此只有受过比较专门训练的人员才能胜任程序设计工作。由于这一工作的烦琐困难，目前整个解题过程所花费的人力和时间绝大部分都用于程序的编写和检查上。为了提高解题准备工作的效率，主要采用两种方法，就是程序标准化和程序自动化。

程序标准化，就是把经常要用到的典型的计算过程，一次编写好标准程序，以后任何计算问题要用这个过程的时候，就不再重新编程序，而是直接用已经编好的标准程序。

程序自动化是计算机在数值计算之外的一种新应用，属于人工智能问题或者信息加工的范畴，它的目的在于把程序

设计工作尽可能交给计算机自己去作。它建立算法语言系统和相应的编译程序，在以后每次要解题的时候，人们就不再用机器指令写程序，而是用算法语言写程序(这个程序叫做源程序)，算法语言中的数学公式接近于通常使用的数学公式，它所用的文字符号也符合人们的习惯。计算机首先在编译程序的控制下加工用算法语言写的源程序，把它编译成用机器指令写的程序(这个程序叫做目的程序)。编译完了以后，机器再在目的程序控制下进行解题计算。

程序自动化使解题准备工作简易化，提高了计算工作的效率。学习用算法语言写源程序比学习机器指令系统和用它编程序要容易，为更多的人使用计算机提供了方便和可能。

现代计算数学现在还处在发展时期，理论上还不象其他数学分支那样成熟定型。但是它正向科学技术的许多领域渗透，发挥它的重要作用。

五 数学的发展规律和未来展望

数学的特点

(一)

对于数学的发展情况，我们已经作了研究，对于数学的过去和现在有了一个大致的了解。那么，数学有些什么特点呢？

关于数学所具有的特点，可以把数学和其他学科相比较，这种特点就十分明显了。

(二)

同其他学科相比，数学是比较抽象的。数学的抽象性表现在哪里呢？那就是暂时撇开事物的具体内容，仅仅从抽象的数方面去进行研究。比如在简单的计算中，2+3既可以理解成两棵树加三棵树，也可以理解成两部机床加三部机床。在数学里，我们撇开树、机床的具体内容，而只是研究2+3的运算规律，掌握了这个规律，那就不论是树、机床，还是汽车或者别的什么事物都可以按加法的运算规律进行计算。乘法、除法等运算也都是研究抽象的数，而撇开了具体的内容。

数学中的许多概念都是从现实世界抽象出来的。比如几何学中的“直线”这一概念，并不是指现实世界中的拉紧的线，

而是把现实的线的质量、弹性、粗细等性质都撇开了，只留下了“向两方无限伸长”这一属性，但是现实世界中是没有向两方无限伸长的线的。几何图形的概念、函数概念都是比较抽象的。但是，抽象并不是数学独有的属性，它是任何一门科学乃至全部人类思维都具有的特性。只是数学的抽象性有它不同于其他学科抽象的特征罢了。

数学的抽象性具有下列三个特征：第一，它保留了数量关系或者空间形式。第二，数学的抽象是经过一系列的阶段形成的，它达到的抽象程度大大超过了自然科学中的一般抽象。从最原始的概念一直到象函数、复数、微分、积分、泛函、n维甚至无限维空间等抽象的概念都是从简单到复杂、从具体到抽象这样不断深化的过程。当然，形式是抽象的，但是内容却是非常现实的。正如列宁所说的那样：“一切科学的（正确的、郑重的、不是荒唐的）抽象，都更深刻、更正确、更完全地反映着自然。”（《黑格尔“逻辑学”一书摘要》，《列宁全集》第38卷第181页）第三，不仅数学的概念是抽象的，而数学方法本身也是抽象的。物理或化学家为了证明自己的理论，总是通过实验的方法；而数学家证明一个定理却不能用实验的方法，必须用推理和计算。比如虽然我们千百次地精确测量等腰三角形的两底角都是相等的，但是还不能说已经证明了等腰三角形的底角相等，而必须用逻辑推理的方法严格地给予证明。在数学里证明一个定理，必须利用已经学过或者已经证过的概念、定理用推理的方法导出这个新定理来。我们都知道数学归纳法，它就是一种比较抽象的数学证明方法。它的原理是把研

究的元素排成一个序列，某种性质对于这个序列的首项是成立的，假设当第 k 项成立，如果能证明第 $k+1$ 项也能成立，那么这一性质对这序列的任何一项都是成立的，即使这一序列是无限序列。

（三）

数学的第二个特点是准确性，或者说逻辑的严密性，结论的确定性。

数学的推理和它的结论是无可争辩、毋容置疑的。数学证明的精确性、确定性从中学课本中就充分显示出来了。

欧几里得的几何经典著作《几何原本》可以作为逻辑的严密性的一个很好的例子。它从少数定义、公理出发，利用逻辑推理的方法，推演出整个几何体系，把丰富而零散的几何材料整理成了系统严明的整体，成为人类历史上的科学杰作之一，一直被后世推崇。二千多年来，所有初等几何教科书以及十九世纪以前一切有关初等几何的论著都以《几何原本》作为根据。“欧几里得”成为几何学的代名词，人们并且把这种体系的几何学叫做欧几里得几何学。

但是数学的严密性不是绝对的，数学的原则也不是一成不变的，它也在发展着。比如，前面已经讲过《几何原本》也有不完美的地方，某些概念定义得不明确，采用了本身应该定义的概念，基本命题中还缺乏严密的逻辑根据。因此，后来又逐步建立了更严密的希尔伯特公理体系。

（四）

第三个特点是应用的广泛性。

我们几乎每时每刻都要在生产和日常生活中用到数学，丈量土地、计算产量、制订计划、设计建筑都离不开数学。没有数学，现代科学技术的进步也是不可能的，从简单的技术革新到复杂的人造卫星的发射都离不开数学。

而且，几乎所有的精密科学、力学、天文学、物理学甚至化学通常都是以一些数学公式来表达自己的定律的，并且在发展自己的理论的时候，广泛地应用数学这一工具。当然，力学、天文学和物理学对数学的需要也促进了数学本身的发展，比如力学的研究就促使了微积分的建立和发展。

（五）

数学的抽象性往往和应用的广泛性紧密相连，某一个数量关系，往往代表一切具有这样数量关系的实际问题。比如，一个力学系统的振动和一个电路的振荡等用同一个微分方程来描述。撇开具体的物理现象中的意义来研究这一公式，所得的结果又可用于类似的物理现象中，这样，我们掌握了一种方法就能解决许多类似的问题。对于不同性质的现象具有相同的数学形式，就是相同的数量关系，是反映了物质世界的统一性，因为量的关系不只是存在于某一种特定的物质形态或者它的特定的运动形式中，而是普遍存在于各种物质形态和各种运动形式中，所以数学的应用是很广泛的。

正因为数学来自现实世界，正确地反映了客观世界联系形式的一部分，所以它才能被应用，才能指导实践，才表现出数学的预见性。比如，在火箭、导弹发射之前，可以通过精密的计算，预测它的飞行轨道和着陆地点；在天体中的未知行星

未被直接观察到以前，就从天文计算上预测它的存在。同样的道理也才使得数学成为工程技术中的重要工具。

下面举几个应用数学的光辉例子。

第一，海王星的发现。太阳系中的行星之一的海王星是在1846年在数学计算的基础上发现的。1781年发现了天王星以后，观察它的运行轨道总是和预测的结果有相当程度的差异，是万有引力定律不正确呢，还是有其他的原因？有人怀疑在它周围有另一颗行星存在，影响了它的运行轨道。1844年英国的亚当斯(1819-1892)利用引力定律和对天王星的观察资料，推算这颗未知行星的轨道，花了很长的时间计算出这颗未知行星的位置，以及它出现在天空中的方位。亚当斯于1845年九月——十月把结果分别寄给了剑桥大学天文台台长查理士和英国格林尼治天文台台长艾里，但是查理士和艾里迷信权威，把它束之高阁，不予理睬。

1845年，法国一个年青的天文学家、数学家勒维烈(1811-1877)经过一年多的计算，于1846年九月写了一封信给德国柏林天文台助理员加勒(1812-1910)，信中说："请你把望远镜对准黄道上的宝瓶星座，就是经度三百二十六度的地方，那时你将在那个地方一度之内，见到一颗九等亮度的星。"加勒按勒维烈所指出的方位进行观察，果然在离所指出的位置相差不到一度的地方找到了一颗在星图上没有的星——海王星。海王星的发现不仅是力学和天文学特别是哥白尼日心学说的伟大胜利，而且也是数学计算的伟大胜利。

第二，谷神星的发现。1801年元旦，意大利天文学家皮

亚齐(1746-1826)发现了一颗新的小行星——谷神星。不过它很快又躲藏起来，皮亚齐只记下了这颗小行星是沿着9°的弧运动的，对于它的整个轨道，皮亚齐和其他天文学家都没有办法求得。德国的二十四岁的高斯根据观察的结果进行了计算，求得了这颗小行星的轨道。天文学家们在这一年的十二月七日在高斯预先指出的方位又重新发现了谷神星。

第三，电磁波的发现。英国物理学家麦克斯韦(1831-1879)概括了由实验建立起来的电磁现象，呈现为二阶微分方程的形式。他用纯数学的观点，从这些方程推导出存在着电磁波，这种波以光速传播着。根据这一点，他提出了光的电磁理论，这理论后来被全面发展和论证了。麦克斯韦的结论还推动了人们去寻找纯电起源的电磁波，比如由振动放电所发射的电磁波。这样的电磁波后来果然被德国物理学家赫兹(1857-1894)发现了。这就是现代无线电技术的起源。

第四，1930年，英国理论物理学家狄拉克(1902-)利用数学演绎法和计算预言了正电子的存在。1932年，美国物理学家安德逊(1905-)在宇宙射线实验中发现了正电子。

类似的例子不胜枚举。总之，在天体力学中，在声学中，在流体力学中，在材料力学中，在光学中，在电磁学中，在工程科学中，数学都作出了异常准确的预言。

另外，从数学本身产生的抽象数学体系和它的结果也会产生极有价值的应用。比如复数$a+bi(b\neq 0)$在代数中出现了很长的时间都没有被理解，直到上世纪三十年代高斯给予了几何解释以后，虚数$i=\sqrt{-1}$才在数学中站住了脚跟。以后

又建立了复变函数论，成了解决技术问题的有力工具，例如解决了飞机飞行理论、热运动理论、电场理论和弹性理论的某些问题。俄国的茹可夫斯基（1847-1921）关于机翼上升力的基本定理就是以这个理论作工具来证明的。交流电的理论、流体力学理论和堤坝渗水等理论都广泛应用了复变函数论。

上面的例子说明，数学的理论往往具有非常抽象的形式，但是它同时也是现实世界中量的关系和空间形式的深刻反映，因而可以广泛地应用到自然科学和技术的各个部门里，对人类认识自然、改造自然起着重要的作用。

正象前面关于数学的两种不同观点所叙述过的，数学来源于实践，研究数学切不可脱离实际，但是，数学往往又在它自身的抽象理论中得到深入的发展，因此，应该辩证地分析数学发展的特点，不然的话，就有可能在研究中陷入唯心主义的泥潭，或者走向实用主义的道路。

数学发展有些什么规律？

（一）

数学的发展并不是一些新定理的简单积累，它包含着数学本身许多根本的变化，也可以说是质的变化。

但是这些质的变化不是用破坏和取消原有理论的方式，而是用深化和推广原有理论的方式，用以前的发展作准备并提出新的概括理论的方式进行的。

简单地说，数学向前发展的时候，产生新的理论，新的理论总是把先前的成就包括到自身中来，把先前的成就加以精

确化、补充和推广。

(二)

数学发展的一般规律表现在这样几个方面：

首先，数学作为一门科学，它不是任何一个历史时代，任何一个民族单独的产物，它是若干个时代、许多民族世代劳动的产物。数学的最初的概念和原理在远古时代就产生了，但是经过四千多年世界各民族的共同努力，才发展到今天这样内容丰富，分支众多，应用广泛的庞大系统。

其次，数学越发展，它的领域越广阔，概念越抽象，分支越众多，应用越广泛，而它的基础也就更加深化、更加牢固。正如一株苍劲、粗壮的樟树在生长过程中，新的树层使老枝变粗，长出新枝，枝叶往上长高，根又往下长深一样。数学在它的发展过程中把新的材料添加在已经形成的领域中，形成新的方向，升到新的高度，产生广阔的边缘学科，并且彼此互相渗透，而它的基础更加深化，更加坚实。

第三，数学的发展是以数和形两个基本概念作为主干的。整个数学就是围绕着这两个概念的提炼、演变和发展而发展的。数学在各个领域中千变万化的应用也是通过这两个概念进行的。社会的不断发展，生产的不断提高，为数学提供了无穷的源泉和新颖的课题，促使数和形的概念不断深化，由此推动了数学的不断前进，形成了多种多样的分支，使数学这一学科日益壮大，在应用方面也越来越广泛深入。

但是数和形并不是互相割裂的，早在数学的萌芽时期，就通过长度、面积和体积的量度把形和数联系起来了。我国宋

元时期更系统地引进了几何代数化的方法，把一些几何特征用代数式来表达，把几何关系表达成代数式间的代数关系，成为解析几何的先驱，使空间形式的研究归结为比较成熟也容易驾驭得多的数量关系的研究。就是在近代的数学中，这个方法原则也一直被广泛地使用。

不仅几何学由于代数化而获得了有力的武器，而且代数学（以及数学分析）也往往由于借用了几何术语和运用几何类比而得到了新的生命力，促进了它们的发展。比如，早在十八世纪中，法国数学家拉格朗日就把时间因素作为和三个空间坐标并列的第四个坐标而引入了四维空间，推动了力学的研究。同样，力学家和物理学家往往把各种物理参数作为不同坐标而引进了高维的相空间等概念，使几何方法得以在物理学中发挥作用。现代的相对论，就是在这种方法下和四维时空流形的几何学研究密切结合的。现代数学中还有一个常用的方法，就是把一个个函数看作一个个“点”，而把某类函数的全体看作一个“空间”，函数间的相异程度看作“点”之间的“距离”，由此得到了各种无穷维的函数空间。一个微分积分方程组的求解，往往归结为相应函数空间中一个几何变换的不动点问题。这样，分析的问题就具有了几何“直观”的意义。

正如一棵大樟树的枝丫，有的枝叶茂密，有的枯萎夭折，数学的分支学科也有盛衰兴替，各个分支学科并不是一成不变的。随着时间的推移，新的学科不断产生，旧的学科却有时不免销声匿迹，默默无闻。比如十九世纪的射影几何学，由于基本上已搞清楚而被作为档案搁置在图书馆的书架上。本世

纪二十年代盛极一时的射影微分几何学，后来发现它的意义不如预期的那样，也受到了冷落。有些早已消逝的理论，后来又重新被发掘出来，在新的观点、新的方法之下，成为现代数学中很活跃的研究课题。

然而，不管数学各个学科经历着怎样的分、合、变、革，也不管数学内部怎样此消彼长，数学王国的疆土总是在不断扩张之中，而且始终是由数和形两大基本概念所统治的“世袭”领土。伟大的革命导师恩格斯对数学所作出的“纯数学的对象是现实世界的空间形式和数量关系”的这一精辟刻划不仅是对数学过去的总结，也是对数学现状的忠实描绘，又是对数学未来发展的指导和准绳。

第四，数学以现实世界的空间形式和数量关系作为对象，为了在纯粹形态上研究这些形式和关系，必须和内容割裂开来。但是离开内容的形式和关系是不存在的，数学的形式和关系不能绝对地同内容无关。因此，数学按它的本质企图实现这种割裂，是企图实现一种不可能的事情，这就是在数学的本质中的根本矛盾。这种矛盾是认识的普遍矛盾在数学方面的特殊表现。一般说来，思想反映世界的任何现象、任何方面、任何因素，都把这些现象、方面、因素粗糙化了，简单化了，把它们从自然界的普遍联系中割开了。当我们研究空间的性质、确定空间具有欧几里得几何的性质的时候，我们完成了一个极其重要的认识步骤，但是，在这之中就蕴藏着一个问题：空间的现实的性质就简单化了，公式化了，抽象得离开物质了。但是，没有这个步骤就根本不可能有几何学，正是在这种

抽象的基础上产生了和巩固了新的几何理论。

在越来越接近现实的各个认识阶段上不断解决和重复上述的矛盾，就是认识发展的本质，数学就是这样认识的，依上升的路线前进着，发展着，不断克服它的不精确性和局限性。

第五，社会实践从三个方面影响着数学的发展。社会实践向数学提出新的问题，刺激数学向这个或那个方向发展，并且提供检验数学结论的真理性的唯一标准。

从数学分析产生的这个例子可以清楚地看到这一点。正是力学和技术的发展提出了从一般的形态上研究变量间的依赖关系的问题。古代虽然也有了朴素的极限思想，但是那时[illegible]科学技术不发达，研究都停留在静力学和固定不动的范围内。到了研究运动的时候，变量的概念出现了，并且成了数学的研究对象，同时也产生了函数的概念。数学向研究变量和函数方面发展，随着就产生了微积分等数学分支。微积分的基本理论在实践中应用，证明它反映了科学技术发展的某些客观规律。在中世纪以前，生产水平的客观实际没有也不可能提出这些问题，因此那时候不可能产生数学分析。数学发展的各个时期，各个分支的产生和发展都说明了这一点。

第六，社会条件影响着数学的发展。数学受社会和政治影响很大，几何在古希腊最发达时期的辉煌进步，代数在意大利文艺复兴时期的成就，数学分析在英国产业革命后的发展，数学在法国资产阶级革命时代的进展，苏联十月革命后的数学成就，我国解放后数学面貌焕然一新，这些都说明了社会的进步、经济的繁荣会极大地推动数学的发展。而在中世纪黑

暗的欧洲，在国民党反动统治下的旧中国，数学却停滞不前。

数学发展的趋势

(一)

在数学发展的全部历史中，一直存在着经常起作用的两种重要趋势，一种是学科不断分化的趋势，另一种是不断综合的趋势。这两种似乎是相互对立的趋势，相互联结和渗透构成了数学发展的重要方面。从数学发展来看，这两种矛盾的趋势的辩证运动表现为一个否定的否定的过程。

自然界作为一个无限多样性的统一整体，通过感觉和知觉进入人类的意识。古时候，数学是在总体的数和形的关系上把握自然界的，算术、代数、几何没有彼此分开，古代任何一本著名数学著作都包括了这三方面的内容，并且把它们溶化在一起。因此，古代的数学本质上是一种感性直观的关于数和形的综合的科学。

从十七世纪产生解析几何和微积分以后，数学分化的趋势一直居于主导地位。单一的未经分化的数学学科向许多专门分支学科发展，每一门学科所研究的都是具体完整的数学中数和形的某一方面。数学的这种不断分化到十九世纪下半叶达到了相当精细的程度，代数、几何、数学分析等学科已经形成了各自不同的研究领域，特别是分析领域的发展更是蓬蓬勃勃。这时候，数学家热心的是探索个别的事例，认识数和形的一个小领域里的最微细特征并且对它作系统的整理。每个学科都可以互不联系地单独向前发展，各学科在理论、语

言、方法等方面都互不相通，每个数学家往往以毕生的精力研究其中的某个部分，根本谈不上统一的数学的图景。十九世纪下半叶以前，数学本身的发展还没有达到使数学家去揭示整个数学各学科内在联系的程度。

从十九世纪下半叶开始，也可以说是从1872年克莱因用“群”的观点统一各种形形色色的几何开始，到康托尔建立集合论和公理化运动后，越来越分化的数学走向综合的趋势越来越明显。到二十世纪初，数学的分化和综合这两种趋势都明显加快了。现代自然科学发展的鲜明特点是既高度分化又高度综合。从本世纪三十年代起，特别是在第二次世界大战以后，在整个现代科学的发展中，综合的趋势已经占主导地位。现代数学的发展趋势也是这样。学科的继续分化实际上已经是综合化趋势的一种表现形式，因为新学科的不断出现正在越来越消除各种学科之间的传统界限。对于数和形的深入认识，越来越采用多学科的方法的综合认识形式。因此，各门学科更加紧密地联系起来。现代数学发展的辩证法是这样的，越是精确地理解了整体的各个方面，我们就越是接近于综合地把握各个数学部门所获得的成果。迅速分化了的各门学科，不是孤立地存在着，而是作为同一座统一的数学大厦的一个有机部分而存在着。

现代数学的高度分化和高度综合的深刻一致性，导致了现代数学发展的整体化的趋势，这种趋势就是：门类繁多的各门学科越来越相互渗透，紧密地联系在一起，将形成统一完整的体系；各门学科共同的语言、概念和方法正在形成；一门学

科所取得的成果可以迅速转移到其他学科去，促进和带动其他学科的发展；每一门学科都是在和整个数学体系的紧密联系中向前发展的。长期以来单科突进的孤立发展已经很困难了。当代重大的数学问题都具有高度综合的特点，必须综合运用多种学科的知识才能解决。

（二）

现代数学发展的整体化表现在以下几个方面：

第一，对于数和形概念的不断深化，形成了多种多样的边缘学科。

人类对自然界物质运动和社会运动规律的不断深化的认识，为数学提供了无穷的源泉。科学技术和生产实践对数学越来越高的新的要求，促使数和形的概念不断深化，推动了数学的不断进步，不断发展。在近代数学中不断形成了多种多样的边缘学科。比如，现代大工业要求对工程系统的操作更可靠、更经济并且能自动控制，特别是由于航天技术的发展，对控制系统提出了高精度的要求，这样就出现了一门介于数学和工程之间的控制论这一边缘学科分支。工程以至生物中各种复杂的信息传递的研究，推动了另一边缘学科分支信息论的诞生和发展。大量数学问题的解决，最终需要取得有一定精确度的数据而出现了各种具体的计算理论和计算方法，又促进了计算数学的发展，产生了计算机科学这门边缘学科分支。当前，计算机科学已经成为近代数学的一个新的大分支，其中包括计算方法、数据处理、逻辑设计、自动机理论、信息加工、控制过程的数学模型、软件等。这是数学研究中十分

活跃的领域，发展非常迅速。计算机科学的重大突破必然将使人类在处理信息方面发生新的飞跃。

现代数学的发展，在代数、几何、分析等原有基础学科的邻接领域产生出一系列的边缘学科。这些学科不仅没有加深各学科间的分离，而且导致了各学科的互相联系和渗透，使以前各基本分离的领域互相沟通了起来，并且填满了各基本学科之间中断了的部分。各门学科形成了一个牢固联系的有机整体。边缘学科不仅在相互邻接的领域产生，而且在相距很远的领域之间也不断产生。边缘学科的一个共同特点是，应用一门科学的方法去研究另外一门科学的对象，使得不同的科学方法和对象有机地结合起来。边缘学科的出现正是物质运动形式相互转化的反映。研究它们，不但对于弄清楚各门科学的一般关系十分重要，而且对于深刻揭示每种物质运动形式的实质，都有非常重大的意义。

第二，基础学科相互渗透产生了许多综合性学科。

综合性学科是以特定的数学的客体作为对象，采用多学科的理论知识和方法对它进行研究的学科。比如，随机函数的微分方程研究，产生了概率论和分析学的综合性学科分支——随机微分方程论。象这样的综合性学科分支正在不断涌现之中。这些综合性学科的出现和蓬勃发展，标志着现代科学的发展已经由学科领先阶段过渡到课题领先的新阶段。各学科之间的这种相互渗透，是数学中数和形两大基本概念紧密联系在一起的辩证法的反映。用一种或几种学科的方法研究另一种学科的研究对象是当前学科发展最有前途的方向。

数学方法在学科中转移的规律是，在研究数学中比较复杂的数和形之间的联系的比较高级形式的时候，可以采用研究数学中比较简单的数和形之间的联系的比较低级的形式的方法。因此，代数、几何、分析的概念和方法原则上可以应用于一切数学领域。充分认识这一点，对于促进新学科的建立和改造原有的古老学科具有重要的意义，在学科相互渗透已经成为数学发展主流的今天，尤其显得重要了。

第三，各门科学的"数学化"，也就是数学同各门科学的相互渗透，是当前自然科学发展的一种趋势。

客观世界的任何一种物质形态和它的运动形式都具有空间形式和数量关系，这就决定了数学和它的方法可以普遍地运用于任何一门科学。但是，由于数学是一种研究客观事物的高度抽象的科学，因此，一门科学的发展只有达到一定阶段，科学的抽象深入到一定程度，才可以具备运用数学的条件。而且现象越是复杂，它的量的参数也就越复杂，对它进行准确的量的分析也就越加困难。但是随着各门科学本身的进步，任何现象，即使最复杂的社会现象，它们量的方面将越来越多地被阐明，运用数学的可能性就越来越大。

科学认识的一般规律是这样的：一开始对事物进行定性的研究，然后再研究它们的量的规律性，精确的定量研究使人们能够深入地认识事物的本质。因此，任何一门科学只有在充分地运用了数学的时候，才算达到真正完善的地步。现代科学的发展已经进入了这样一个阶段，无论是自然科学、技术科学，还是各种社会科学，都普遍处于数学化的过程中，电子计

算机的发展更加速了科学数学化的趋势。

自然科学、技术科学的数学化，现在已经是普遍熟悉的事情。至于社会科学的数学化，许多人还不很理解。其实，十九世纪马克思就十分重视把数学运用于社会科学的研究。他认为数学方法是研究经济过程的有力武器，不但可能而且必须运用数学来研究经济现象的规律性。在《资本论》里，他就大量应用数学形式来描述和阐释经济规律。比如，为了分析资本主义的经济危机，马克思不止一次地想计算出这些作为不规则曲线的升降，想运用数学方式来得出危机的主要规律；他一直坚信，如果有足够的经过检验的材料，这是可能的。马克思之所以这样重视运用数学，是因为数量分析是提高研究问题的严密性和精确性的可靠途径。社会科学的数学化目前在国际上进展很快，这是因为：当代科学技术革命提出了对社会进步进行预测和控制，以及对社会经济活动管理的最优化等一系列课题，这就要求对社会现象的研究更加精确化、定量化；控制论、系统论等学科的出现和它们向社会科学渗透，为把社会问题表现成数学对象的形式提供了可能；电子计算机的出现为研究复杂社会现象的数量关系以及处理大量社会科学资料提供了物质手段。把数学运用于各门社会科学，不仅可以大大提高社会科学研究的质量和效率，而且是社会科学实现手段现代化和课题现代化、增强社会科学研究的实用性的重要途径。社会科学的数学化也向数学研究提出了新的任务，要求大大扩充现在应用的数学工具，尤其要求建立和发展为解决复杂社会问题所需要的各种数学分支。

科学的数学化，使得形式化的认识方法和手段在各门科学中起着越来越大的作用，科学中的新理论的抽象特征越来越加强；使得数学和其他学科交叉并且结合，出现诸如计算物理学、生物数学、经济数学、数学语言学、计算化学等等学科。这些学科又派生出许多小的学科分支。以生物数学为例，现在已经派生出诸如数量遗传学、数量分类学和数量进化论、分子生物数学、生化数学、生物力学数学、生物统计、生物概率论、生物运筹学等小的学科分支。这些分支学科不仅促进了各门学科的发展，而且也丰富和发展了数学学科本身。

数学的未来

(一)

展望未来，数学绚丽多彩的广阔天地将日新月异。数学的研究对象将会更加广泛，表现形式将会越加抽象，数学的分支会越来越多，彼此交错，内容和方法却高度综合。

随着数学的发展，数学将逐步走向综合和统一，而它的应用却越来越广泛，渗透到各门科学技术领域，深入到社会生活的各个部门。电子计算机的迅速发展，对自然科学、社会科学和数学本身产生了巨大的冲击，将把数学的作用提高到一个新的境界，数学发展的前途将无限美好。

(二)

未来的数学发展将更加迅速，分支将纵横交织，并且形成统一完整的数学体系。

现代自然科学，随着时间的推移，发展更加迅速。恩格斯

早在1844年《政治经济学批判大纲》中说："科学，它的进步和人口的增长一样，是永无止境的，……在最普通的情况下，科学也是按几何级数发展的。"(《马克思恩格斯全集》第1卷第621页)1875年，在论述哥白尼的太阳中心说所引起的科学革命的时候，恩格斯又进一步指出："科学的发展从此便大踏步地前进，而且得到了一种力量，这种力量可以说是与从其出发点起的(时间的)距离的平方成正比的。"(《自然辩证法》第8页)恩格斯揭示的科学技术加速发展的规律已经被历史充分证明了。

数学在十九世纪的成就，超过了十八世纪的许多倍。二十世纪的前半叶所取得的数学成果又超出整个十九世纪的许多倍。近三十年来，数学新的理论新的分支已经大大超过了十八、十九世纪的总和。预计未来十年的数学成就又将会比现在的十年成倍地增长。历史上，推动数学发展的是人类在天文学、物理学、力学方面的实践活动。在近代还直接来源于工程技术，特别是尖端技术，也来自化学、生物学和国民经济中的生产管理、组织计划等方面，因而使数学逐步成为一门研究内容非常丰富、分支学科纵横交织的基础学科。

(三)

数学的应用将更加广泛，数学越来越多地渗透到科学技术乃至社会生活的各个领域。

近十多年来，数学已经得到广泛的应用。现在，不仅是微分方程、计算数学已经得到更多的应用，而且就连被认为是高度抽象的数学分支学科，如泛函分析、抽象代数、拓扑学等等也已经在许多工程技术中(特别是控制工程、通讯工程等)得

到广泛应用；概率论、随机过程在工程技术中的应用也相当广泛而深入；由于电子计算机的广泛应用，以及各种仪表提供的脉冲式信号，对工程系统的描述从连续时间转向离散时间，使代数、数论的实用价值也越来越大。另外，象计算数学、运筹学、信息论、统计数学、控制论等这样一些所谓工程应用数学(就是依据自然科学的已知规律、运用现代数学方法来阐明自然现象或解决工程实际问题的一种工具)也都不断地发展和获得应用。比如，量子力学创始人狄拉克，曾经为从天然铀分离出原子弹的原料铀二三五的工艺提出“最优化级联理论”，这一理论为美国原子能工业节省了几亿美元的生产费用。我国数学家华罗庚大力推广优选法，仅解放牌汽车优选化油器的合理尺寸，一辆汽车一年可以节约汽油一吨左右，如果全国现有民用汽车都来推广，一年就可以节约汽油六十万吨左右。

应用优选法，在不添人、不增设备、不加或少加投资的情况下，就可以收到优质、高产、低耗的效果。例如，小型化铁炉，优选炉形尺寸和操作条件，可以使焦铁比一般达到1:18。机械加工优选刀具的几何参数和切削用量，工效可以成倍提高。粮食加工优选加工工艺，一般可以提高出米率百分之一到三，提高出粉率百分之一；如果按全国人数的口粮加工总数计算，一年就等于增产几亿斤粮食。在大型化工设备上搞优选，提高效率潜力更大。在炼油厂设计方面，目前只要对一二升石油进行分析，根据分析数据，就可以设计出一个现代化的炼油厂，这就是最优化设计和相似放大原理的具体运用。

六十年代中期兴起了一门新的数学分支——模糊数学，

这是1965年美国人查德提出来的。十多年来，模糊数学作为一个新的数学分支得到了迅速的发展。它的内容包括模糊聚类分析、模糊图象识别、模糊综合评判、模糊博弈、模糊规划、模糊系统、模糊逻辑、模糊语言、模糊拓扑等众多方面。虽然这门分支的理论还很不完备，但是它的触角已经伸进了科学技术和国民经济的多种领域。它不仅用在电子计算机，也武装人类自身，用来回答复杂现象对人的认识能力提出的挑战。

这些例子都说明数学在目前已经取得了广泛的应用，将来会获得更广泛的应用。

(四)

现代科学有一个重要的特点：一方面分科越来越细，另一方面是逐步走向综合和统一。数学的发展也是这样。

从古以来，许多数学家都在探讨数学的“本质”，随着数学的不断前进，在数学中不断出现新的理论和更简单的方法，使数学不断更新，删繁就简，去粗存精。为了要使庞大的数学知识变得简而精，数学家们经常依据数学各领域间潜在的共性，提出统一数学各部分的新观点、新方法。比如1872年德国数学家克莱因提出了用“群”的观点来统一当时杂乱的各种几何学；1930年美国数学家毕尔霍夫提出了“格”的概念，以统一代数系统的各种理论和方法；上世纪末和本世纪初出现了公理化运动，以公理系统作为数学统一的基础。1938年法国布尔巴基学派不但继承了公理化运动的成果，而且提出数学公理结构概念，以非常抽象的方式叙述全部数学，把数学的核心部分在结构这一概念下统一成一个整体，依据研究结构的

异同来划分成不同领域；1948年波兰爱伦伯克和美国桑·麦克伦提出范畴和函子理论，数学的分门别类就是以研究所属范畴作为依据，用这个作为统一数学的基础。总之，各种不同学派，根据他们对数学的不同认识，提出了多种多样统一数学，以建立数学体系的不同方案，最终的目的大体上是相同的。也许将来会出现一种新观点、新方法、新理论，把目前的数学统一起来。但是，这种统一不是绝对的、静止不变的，而是暂时的、相对的。随着科学技术的不断发展和深入，以及各学科之间的相互渗透，将对数学提出大量的千差万别的新课题，使数学研究得更加深入；这些问题的解决，反过来又将促使数学更进一步发展。

（五）

这里简略地介绍一下对现代数学发展有巨大影响的布尔巴基学派，有助于我国数学界借鉴。

第一次世界大战给法国科学事业带来了灾难性的破坏。当时，德国的科学家被留在后方，进行科学研究，致力于提高德军的战斗力。而法国恰恰相反，年青的科学家，几乎都上了前线，遭受了一场浩劫。战后，打开大学的名册，发现有三分之二除了名。数学界出现了青黄不接、后继乏人的局面。许多战时年幼、战后第一代的大学生，缺乏适当的导师。老一辈的法国数学家，虽然曾经在分析、函数论方面作出过杰出成绩，但是都是五十岁上下的人，他们对当代数学一般只有相当含糊的观念，对德国数学学派的优秀成果，对迅速发展的苏联学派，以及诞生不久就红极一时的波兰学派都毫无所知。法

国数学落后了。

年青的布尔巴基小组就是在这样的历史条件下出现的。这些年轻人敢于从比较低的起点出发，向世界先进水平瞄准。他们如饥似渴地大量阅读、研讨最新发表的数学论文，分析琢磨数学发展中大量新概念，每年聚会多次，热烈争鸣，严谨治学。他们还走出国界，直接倾听国外优秀数学家的讲学和介绍，学习最先进的技巧。他们方向对头，敢想敢干，在深入研究现代数学的基础上，形成了自己独创的观点——数学结构的观点，用以统一概括现代纯粹数学的新成果，在不长的时期中，把法国的数学水平推进到世界的前列。同时还造就一大批象魏尔、狄多涅、歇瓦莱、德尔商特、嘉当等在数学各领域(代数几何、拓扑空间、泛函分析、李群、可换环、多复变函数论等)作出重要贡献的数学家。

布尔巴基学派把数学看成关于结构的科学，认为整个数学学科的宏伟大厦可以建立在丝毫不求助于直观的彻底公理化基础上，他们从集合论出发，对全部数学分支给以完备的公理化。在他们的工作中，结构的观点处于数学的中心地位。

布尔巴基学派认为最普遍、最基本的数学结构有三类，这就是代数结构、顺序结构、拓扑结构。而群结构是最基本的代数结构之一。

这三类结构，布尔巴基学派叫做母结构，对每一种母结构再附加上新的公理的时候，就可以构成一种新的结构。如果在群的公理结构中，加上有限的规定，就变成有限群的结构，加上可交换的规定，就变成可换群结构。类似地在顺序结构中，

如果加上最小元素的规定，就构成良序结构等。另外，母结构之间还可以相互交叉，有机地组成一些新的关系，衍生出一些多重结构，比如拓扑代数、李群等就是代数、拓扑几种母结构结合的产物。因此在布尔巴基学派看来，三大基本结构就象神经网络，渗透到各种理论、贯穿全部数学，整个数学大厦就是由各类数学结构所构成，门类万千的数学分支统一于结构之中，这就是他们的基本观点。

结构的观点为数学研究提供了有力的工具，借助于它，一眼望去，就能看清广阔的数学领域。

布尔巴基学派的建立过程，对我们有很多启示。当代自然科学正在迅猛发展，数学特别是电子计算机问世后的应用数学也在迅速前进，学科之间的联系不断发现，边缘学科不断形成，自然科学孕育着新的突破。当前我国科学事业和最先进的西方国家相比，是比较落后的，和布尔巴基学派初创时期的条件类似，要迅速赶超世界先进水平，困难比较大。我们不仅要有勇气，有决心，而且还要善于运用各种攀登高峰的工具和方法。因此正确处理好分析和综合的关系很重要。布尔巴基集体坚持事物之间有联系的观点，又鼓励独创的作法，的确有可以借鉴之处。世界万事万物永远处于总的联系之中，努力发掘事物之间的本质联系，是非常重要的。

布尔巴基学派也存在形式主义的东西，一味追求形式主义的公理化，脱离实际，为数学而数学，忽视了数学和其他科学的联系，在初等数学中过早引入抽象概念，这些都是不利的。但是，布尔巴基学派年青人富有创造的精神是令人敬佩

的，他们的治学态度又是非常严肃的，一卷著作甚至推倒重写十次，经过十多年才去付印，《数学原本》仅第一部分就花了三十年才出版完。布尔巴基小组对自己成员要求严格，既要求有广泛的兴趣、深厚的基础，又要求有独立作战的精神，一丝不苟的态度。这些都是他们成功的原因，我们要学习布尔巴基学派的这些可贵精神，树雄心，立壮志，勇敢向世界科学高峰登攀，在我们祖国的科学春天里，开放出一簇簇更为瑰丽鲜艳的花朵来。

（六）

最后我们再来谈谈电子计算机对数学的影响。对于数学未来发展具有决定性影响的一个不可估量的方面是，电子计算机对数学带来的巨大冲击。在不久的将来，电子计算机对于数学家，必将象显微镜对于生物学家、望远镜对于天文学家那样不可缺少。

目前，每秒钟运行一亿五千万次的巨型电子计算机已经在运转，正研制十亿次甚至百亿次的巨型机。电子计算机目前还只处在迅速发展阶段，预计到公元2000年，电子计算机工业将成为首屈一指的最大工业，发展前景是不可估量的。

在数学方面，电子计算机有三种新的用途，第一，用来证明一些数学问题，这种数学问题，如果从概念上看来应当得出某种结果，但是要证明它却要进行异常巨量的计算工作。第二，用来先算出一个数学问题，应该得到什么样的结果，然后再用传统的方法把这一结果证明出来。第三，用来作为一种新的验证方法，对于某一个数学问题的结果进行验证。

此外，电子计算机还给数学工作者提供了一种有效的实验工具。

电子计算机已经使人们从烦琐复杂而又十分单调的加减乘除的劳动中解放出来。某些数学定理的证明，完全可以借助于电子计算机来完成。事实上，某些或某类定理的证明，可以采用虽然看来烦琐刻板但是比较容易的方式。这样电子计算机就可以使人们从某些逻辑推理的脑力劳动中解放出来，使数学家得以把聪明才智更多地用到真正创造性的工作上去。这是当前数学发展中值得也是应该认真考虑的问题。

数学家把聪明给了电子计算机，电子计算机将使数学家变得更聪明。

(七)

当代数学进展非常迅速，展望未来，数学的许多老学科将进一步发展，新学科将不断产生。数学不仅能表达力学和物理学的宏观运动规律，而且将发展到可以用来揭示化学和生物学中的极其复杂的微观运动规律。对宏观和微观世界的研究，数学家将象力学家、物理学家、化学家、生物学家在实验室里进行研究一样，在电子计算机上进行定性或定量的分析和描述，帮助人们去揭开宏观和微观世界的秘密。

总之，放眼未来，数学将深入到宇宙之大、粒子之微、生物之秘、技术之巧，还可以出现我们所不能料到的新方面，使科学技术迈向新的水平。

历史和现实正在表明，数学已经进入一个新时代的起点。