18.2 Gauss 公式

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 求

$$I=\iint\limits_{S} 4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

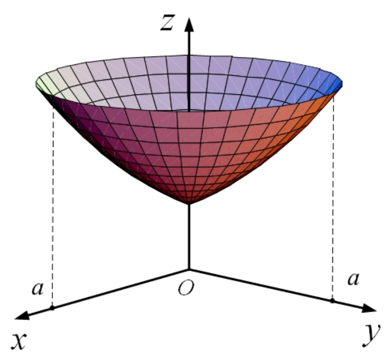

图 1:

其中 S 是曲线 $z=\mathrm{e}^y(0\le y\le a)$ 绕 z 轴旋转生成的旋转面, 取下侧.

解: S 的方程为

$$z=\mathrm{e}^{\sqrt{x^2+y^2}},\ \ x^2+y^2\le a^2,\ \ \text{取下侧}.$$

直接计算比较困难. 考虑用 Gauss 公式, 由于 S 不封闭, 需要添加辅助面

$$S_1:\ z=\mathrm{e}^a,\ \ x^2+y^2\le a^2\quad \text{取上侧}.$$

见图 1, 设 S 与 S_1 围成的区域为 V, 令

$$P=4xz,\ \ Q=-2yz,\ \ R=1-z^2.$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0.$$

由公式 (18.2.1) 得

$$\begin{aligned}I &= \Big(\iint\limits_{S}+\iint\limits_{S_1}-\iint\limits_{S_1}\Big)4xz\mathrm{d}y\mathrm{d}z-2yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= -\iint\limits_{S_1}(1-z^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{2a}-1)\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(\mathrm{e}^{2a}-1)\pi a^2.\end{aligned}$$

$\square$

例 2 设 S 为分片光滑的封闭曲面, $\boldsymbol{l}$ 为固定方向, 证明

$$\oiint\limits_S \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}s = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 是曲面 S 的外法向量.

证明. 不妨设 $\boldsymbol{n},\boldsymbol{l}$ 都是单位向量, 记 $\boldsymbol{l}=(l_1,l_2,l_3)$, 其中 l_1,l_2,l_3 都是常数, $\boldsymbol{n}=(\cos(\boldsymbol{n},x),\cos(\boldsymbol{n},y),\cos(\boldsymbol{n},z))$. 用 V 表示由 S 为围成的立体. 由于

$$\boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n} = |\boldsymbol{l}|\cdot|\boldsymbol{n}|\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}) = \cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}),$$

因此

$$\cos(\boldsymbol{l},\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{l}\cdot\boldsymbol{n} = l_1\cos(\boldsymbol{n},x)+l_2\cos(\boldsymbol{n},y)+l_3\cos(\boldsymbol{n},z).$$

由公式 (18.2.2),

$$\begin{aligned}\oiint\limits_S \cos(\boldsymbol{n},\boldsymbol{l})\mathrm{d}s &= \oiint\limits_S \Big[l_1\cos(\boldsymbol{n},x)+l_2\cos(\boldsymbol{n},y)+l_3\cos(\boldsymbol{n},z)\Big]\mathrm{d}s \\ &= \iiint\limits_V \left(\frac{\partial l_1}{\partial x}+\frac{\partial l_2}{\partial y}+\frac{\partial l_3}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 0.\end{aligned}$$

∎

思考题

1. 如何利用 Gauss 公式求立体图形的体积?

解: 习题 18.2 第 2 题.

> 2. 证明光滑曲面 S 包围的立体 V 的体积
>
> $$\Delta V = \frac{1}{3}\oiint\limits_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}s,$$
>
> 其中 $\cos\alpha$ 在 $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是曲面 S 的外法向方向余弦.

□

2. 利用 Gauss 公式证明阿基米德原理: 浸在液体中的物体所受的浮力等于物体排开液体的重量, 方向是向上的.

解: 设物体的外表面为 S, 整个体积为 V, p 为压强, 因为物体所受浮力等于总表面的压力之和 (矢量之和), 由 Gauss 公式可得

$$F = \int_S p\mathrm{d}S = \iint_V \frac{\partial p}{\partial h}\mathrm{dV}. \quad \text{这里 } h \text{ 表示水面的高度}$$

又

$$\frac{\partial p}{\partial h} = \frac{\partial \rho g h}{\partial h} = \rho g,$$

于是有

$$\begin{aligned}F &= \iint_V \frac{\partial p}{\partial h}\mathrm{d}V \\ &= \rho g \iint_V \mathrm{d}V \\ &= \rho g \triangle V \\ &= M,\end{aligned}$$

其中 $\triangle V$ 表示排开水的体积, M 表示排开水的质量. 结论得证

$\square$

习题

1. 利用 Green 公式求下列积分:

(1) $\displaystyle\oiint_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是正方体 $(0,a)^3$ 的外侧;

(2) $\displaystyle\oiint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是椭球面 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 的外侧;

(3) $\displaystyle\oiint_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 f,g,h 为连续可微函数在 S 为长方体 $(0,a)\times(0,b)\times(0,c)$ 的外表面.

解: (1) 令

$$P = y(x-z),\ \ Q = z+z^2,\ \ R = x+(y^2+xz).$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z} = x+y.$$

注意到, 空间区域 $V=(0,a)^3$ 是由分片光滑的双侧曲面 S 围成的, 且函数 P,Q,R 在 V (连同 S) 上有一阶连续偏导数, 由公式 (18.2.1) 得

$$\begin{aligned}& \oiint_S y(x-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (y^2+xz)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ =& \iiint\limits_V (x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ =& \int_0^a \mathrm{d}z \int_0^a \mathrm{d}y \int_0^a (x+y)\mathrm{d}x \\ =& a\cdot\int_0^a \left(\frac{x^2}{2}+xy\right)\bigg|_0^a \mathrm{d}y \\ =& a\cdot\int_0^a \left(\frac{a^2}{2}+ay\right)\mathrm{d}y \\ =& a\cdot\int_0^a \left(\frac{a^2}{2}y+a\frac{y^2}{2}\right)\bigg|_0^a \\ =& a^4.\end{aligned}$$

(2) 令

$$P = y - z,\ \ Q = z - x,\ \ R = x - y.$$

则

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0.$$

注意到, 空间区域 V 是由分片光滑的双侧曲面椭球面 S 围成的, 且函数 P, Q, R 在 V (连同 S) 上有一阶连续偏导数, 由公式 (18.2.1) 得

$$\begin{aligned}
& \oiint_S (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (z-x)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
= & \iiint\limits_V 0\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
= & \ 0.
\end{aligned}$$

(3) 注意到, 空间区域 $V = (0,a)\times(0,b)\times(0,c)$ 是由分片光滑的双侧曲面 S 围成的, 且函数 P, Q, R 在 V (连同 S) 上有一阶连续偏导数, 由公式 (18.2.1) 得

$$\begin{aligned}
& \oiint_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
= & \iiint\limits_V \left(f_x + g_y + h_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

设

$$\iiint\limits_V \left(f_x + g_y + h_z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = I_1 + I_2 + I_3, \tag{1}$$

其中

$$\begin{aligned}
I_1 = \iiint\limits_V f_x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c \mathrm{d}z \int_0^a f_x\mathrm{d}x \\
&= bc\int_0^a f_x\mathrm{d}x \\
&= bc\left(f(a) - f(0)\right).
\end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned}
I_2 = \iiint\limits_V g_y\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^c \mathrm{d}z \int_0^b g_y\mathrm{d}y \\
&= ac\int_0^b g_y\mathrm{d}y \\
&= ac\left(g(b) - g(0)\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

$$\begin{aligned}
I_3 = \iiint\limits_V h_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z &= \int_0^a \mathrm{d}x \int_0^b \mathrm{d}y \int_0^c h_z\mathrm{d}z \\
&= ab\int_0^c h_z\mathrm{d}z \\
&= ab\left(h(c) - h(0)\right).
\end{aligned} \tag{4}$$

把 (2), (3) 和 (4)代入 (1)可得

$$\oint\!\!\!\oint_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = bc\,(f(a)-f(0)) + ac\,(g(b)-g(0)) + ab\,(h(c)-h(0))\,.$$

□

2. 证明光滑曲面 S 包围的立体 V 的体积

$$\Delta V = \frac{1}{3}\oint\!\!\!\oint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}s,$$

其中 $\cos\alpha$ 在 $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 是曲面 S 的外法向方向余弦.

证明. 利用 Gauss 公式 (18.2.2) 有

$$\begin{aligned}
\oint\!\!\!\oint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\mathrm{d}s &= \iiint_V \left(\frac{\partial}{\partial x}x + \frac{\partial}{\partial y}y + \frac{\partial}{\partial z}z\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 3\iiint_V \mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 3\Delta V \quad \text{其中 } \Delta V \text{ 为立体 } V \text{ 的体积.}
\end{aligned}$$

故结论得证. ∎

3. 证明公式

$$\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{1}{2}\oint\!\!\!\oint_S \cos(\boldsymbol{n}, r)\mathrm{d}S,$$

其中光滑曲面 S 是包围 V 的曲面, 坐标原点在 S 外在 $\boldsymbol{n}$ 是 S 的外法向在 $\boldsymbol{r} = (x, y, z)$.

证明. 记 $\vec{l} = \frac{\vec{r}}{|r|} = (\frac{\vec{x}}{|r|}, \frac{\vec{y}}{|r|}, \frac{\vec{z}}{|r|}) = (l_1, l_2, l_3)$, 其中 $|r| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, 则由课本 225 页例二可得

$$\begin{aligned}
\oint\!\!\!\oint_S \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l})\mathrm{d}S &= \oint\!\!\!\oint_S \left[l_1\cos(\boldsymbol{n}, x) + l_2\cos(\boldsymbol{n}, y) + l_3\cos(\boldsymbol{n}, z)\right]\mathrm{d}S \\
&= \iiint_V \left(\frac{\partial l_1}{\partial x} + \frac{\partial l_2}{\partial y} + \frac{\partial l_3}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint_V \left(\frac{r - \frac{x^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{y^2}{r}}{r^2} + \frac{r - \frac{z^2}{r}}{r^2}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint_V \left(\frac{1}{r} - \frac{x^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{y^2}{r^3} + \frac{1}{r} - \frac{z^2}{r^3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint_V \left(\frac{3}{r} - \frac{r^2}{r^3}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iiint_V \left(\frac{2}{r}\right)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= 2\iiint_V \frac{\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.
\end{aligned}$$

故结论得证. ∎