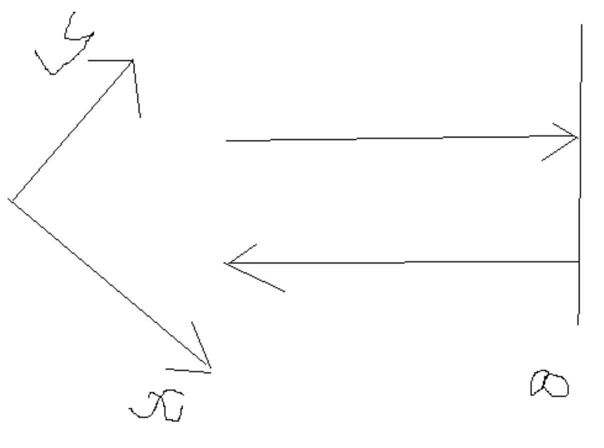
有趣的数学

作者：程天任

本文介绍我在大学学习期间研究数学得到的五个结果。其中，即有留数方面的想法，也有力学方面的，甚至还包括了一个 java 语言方面的研究。当然，它们都是属于非常简明的推论。但是，简明之中不失趣味性。更重要的是，趣味性引出启发性。所以，本文取名有趣的数学。下面，我们来看第一个例子：

1.无穷远处的留数

首先，看图：



我们注意到，关于无穷远处留数有两个著名定理。

定理 1：

设 $z=\infty$ 为函数 $f(z)$ 的孤立奇点，c 为圆周 $|z|=\rho$。若 $f(z)$ 在

$R<|z|<\infty$内解析$(R<\rho)$，则称$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c^-} f(z)dz$为函数在无穷远处留数。记作：$res(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c^-} f(z)dz=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{c} f(z)dz$

$$=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}(\ldots+\frac{c_{-1}}{z}+\Sigma_0^{\infty}c_n z^n)$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}c_{-1}(2\pi i)$$
$$=-c_{-1}$$

定理 2：

若函数$f(z)$在整体平面上有有限多个奇点，则它的所有留数（包括无穷远点的留数）之和等于 0。

如果从留数的导数来考虑，有对称性：

当x轴趋于 0，$f'(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}$

当y轴趋于 0，$f'(z)=\frac{\partial v}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$

由定理 1，得：

$$res(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c^-} f(z)dz=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{c} f(z)dz$$

对它沿 x 轴求导，运用格林公式：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c^-} f\ \ (z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int f(\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x})dx$$

我们注意到：对方程乘以i相当于翻转整个闭合体。于是，得到如下公式：

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c} f\ (z)dz=\frac{1}{2\pi i}\int f(i\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial x})dx$$

注：在无穷远处，x 与 y 相交。

再沿 x 轴求一次导数，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{l} f\ (z)dz=\frac{1}{2\pi i}\iint f(i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})dxdx$$

所以，

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{l} f\ (z)dz=\frac{1}{2\pi i}\iint f(i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})dxdx$$

$$=-\frac{1}{2\pi i}\iint f(i\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 v}{\partial x^2})dxdx$$

注：对于$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c^-} f\ (z)dz$取积分上限为$\int_0^1\int_0^1$ ，求导。

我们注意到：要得到定理 2，可以在第一次积分过程中从 0 到 1 积分；第二次积分过程中从-1 到 0 积分。这样，可以得到：

$$\sum res(a_1,a_2,......,\infty)=0$$

相当于在两次积分过程中翻转了包含无穷远点的闭曲线。

我们考虑用a代替 1，其中$a\to\infty$。

$$res(\infty)=\frac{1}{2\pi i}\int f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\sum\int_0^a\int_0^a f(z)z_{xy}dxdy$$

$$res(a)=\frac{1}{2\pi i}\int f(z)dz=\frac{1}{2\pi i}\sum\int_{-a}^{0}\int_{0}^{a} f(z)z_{xx}dxdx$$

其中，第二个 $f(z)$经过翻转变化。

如果我们把第二个式子的积分改为$dydy$还具有这种性质吗？

解答：本例运用了趣味数学中经典的方法：无穷远直线。揭示了实数与虚数在留数意义下的区别与联系。

2.单纯形

首先，来看一下单纯形理论的基础：

我来介绍单纯形法的代数解法,这种方法可以对所有满足线性规划标准形式和可以化为标准形式的问题给出一个准确解,并且可以编程序实现.用代数形式处理线性规划问题,必须首先把方程化为标准形式.下面有一个简单的例子,讲的就是怎么化为标准形式.

max 4X1+3X2 = min -4x1-3x2

s.t.2X1+X2<=10 = 2X1+X2+X3=10

X1+X2<=8 = X1+X2+X4=8

X2<=7 = X2+X5=7

附加条件:X1,X2,X3,X4,X5>=0

左边的是非标准形式,右边的是标准形式.转换方法一目了然.

下面,我们来看看什么叫做基本解:

在满足右边的标准形式的情况下,取阵 A 的基矩阵 B(m 个线性无关的列)对应的是 Xb.其余 n-m 列构成 m*(n-m)的阵 N.

令 Xn=0 则,Xb=B'b(B'是逆阵)

X=(B'b,0) (基本解)

再来看看可行解的含义:基本解 X 满足非负约束就是可行解.

B'b>0

关于解的最优性质,我们可以用极点来表示(对应图象法的多边形边界点取最优值).当可行解 X 满足两个条件的时候,我们就说它是极点.

1.Ax=b

2.x>=0

现在转入正题,介绍单纯形法.先讲一下理论基础.这个比较复杂,我们可以简单理解如下:

1.取一个初始可行基,用高斯-若当消去法得出基本可行解

$$\begin{bmatrix} C'' & 0 \\ A & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cb'' & Cn'' & 0 \\ B & N & b \end{bmatrix}$$

C"表示转置阵.其中,C"=Cb"+Cn",A=B+N;

上面右边的阵可以转化为:

$$\begin{bmatrix} Cb'' & Cn'' & 0 \\ BB' & B'N & B'b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Cb'' & Cn'' & 0 \\ I & B'N & B'b \end{bmatrix}$$

C"表示转置阵,B'表示逆阵.最后有高-若消去得到右边的形式.由这个阵,可以得到如下算式:

Z=Cb"*Xb+Cn"*Xn=Cb"*B'b+(Cn"-Cb"*B'N)*Xn

=C"*X0+(Cn"-Cb"*B'N)*Xn

于是得到判定条件:

令 Rn=Cn"-Cb"*B'N

若 Rn>=0,则 X0 必为最优解;否则,无最优解.

在单纯形模型中,用得最多的就是转轴法.转轴法是整个单纯形应用和后续改进算法"康希表"在实际操作中的基本方法.

下面，来看两个例子：这些单纯形可以用特殊的方法算出。根据这些算法，我们提出两个定义。

min -4X1-3X2

s.t. 2X1+X2+X3=10

X1+X2+X4=8

X2+X5=7

Xi>=0

画出表格如下:

	X1	X2	X3	X4	X5	
	2	1	1	0	0	10
	1	1	0	1	0	8
Rj	-4	-3				0(Rn)

在初始情况下 Rj 那一栏的值等于 min 式子的系数

当规划目标值 Rn=0 时,得到最优解.

开始转轴操作:

1.令 X1=0,由 X3=10-X1 得-4X1-3X2=-X2+X3-20;

2.令 X2=0,由 X4=8-X1 得 X1=(10-X3)/2

则-X2+X3=X3+2X4-6

3.所以-20-6=-26.Rj 最优值为 26;

定义 1：

可以把这种令主基为 0，求出最优值的单纯形称为主零单纯形。

我们再来看一个复杂的辅助单纯形法的转轴操作:

首先,我们应该认识到:基础单纯形法无法解决不满足极点和 Rj 约束条件的情况.所以我们可以尽量把非基础形式转化为基础形式.

min	4X1+X2+X3	min	X4+X5
s.t.	2X1+X2+2X3=4	s.t.	2X1+X2+2X3+X4=4
	3X1+3X2+X3=3		3X1+3X2+X3+X5=3
	Xi>=0		Xi>=0

这里的转轴比较难,先介绍几个技巧:

X4+X5=-5X1-4X2-3X3

这里 Rj 对应 Xi 的值为:-5,-4,-3,0,0;

原始基 X1,X2,X3;辅助基 X4,X5;回到刚才那个题目:

	X1	X2	X3	X4	X5	Rn
X4						
X5						

把这个表左下角 X4,X5 换成 X4,X1.这个过程中 X1 进基 X5 退基.

继续下一个步骤,把左下角变成 X3,X1.这个时候,全部辅助基已经进基完毕另外一个需要注意的地方是:在消除 X1 运算中,令 Rj 中 X1=0.(以 X1 为例子)

	X1	X1
	1	0
	0	1
Rj	0	0

以上这个表就是消除 X1 之后的理想状态表.(由 0 和 1 组成)

这样一来,左边带有辅助基的表可以让辅助基进基,达到消除辅助基的目标.把表转化为原始表.这样就可以依照原始表计算.

	X1	X2	X3	X4	X5	Rn
X3	0	-3/4	1	3/4	-1/2	3/2
X1	1	5/4	0	-1/4	1/2	1/2
Rj	0	0	0	1	1	0

消除 X4,X5 得到简化表(下面的方法与对原始表的操作基本相同):

	X1	X2	X3	Rn
X3	0	-3/4	1	3/2

X1	1	5/4	0	1/2
Rj		&'		&

具体步骤如下:

1.min X4+X5 = min 4X1+X2+X3

2.x4+x5=3/4+(-1)/2 = (-1)/4+1/2

3.min 4X1+X2+X3

4.X3=3/2 X1=1/2

5.X3+4X1=7/2

6.所以,&处填-7/2

7.X2+7/2=X4+X5=1/4 X2=(-13)/4

8.所以&'填(-13)/4

9.X2 进基,得到最终的表

		X2	X3	Rn
X3		0	1	
X2		1	0	
Rj	13/5	0	0	(-11)/5

最优值 11/5

定义 2:

可以把这种能够根据主基与辅助基相等算出最优值的单纯形称

为主辅相等单纯形。

解答：这里，提出两个定义。揭示了在理想状态下：

	X1	X1
	1	0
	0	1
Rj	0	0

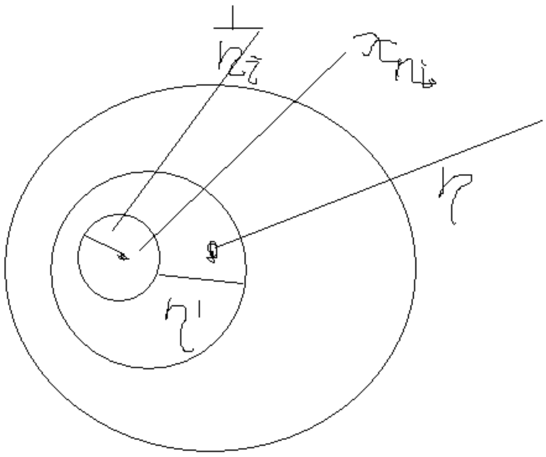
在这种特殊情况下，单纯形的特殊性质与求解最优值的特殊方法。

3.有限子覆盖

定理：

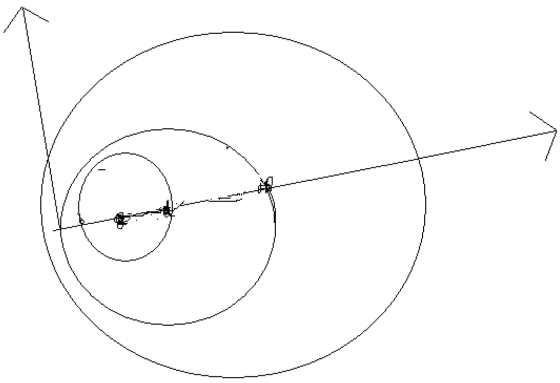
设 F 是一有界闭集，M 是一族开领域。M 完全覆盖了 F(即 F 中任一点 x，恒有领域 N 包含于 M，x 是 N 中一点)。则在 M 中有有限多个领域：N1,N2,......，它们完全覆盖了 F。

图 1：



（可以参考江泽坚的实变函数论第 32 页）

如果 x_0, x_{ni}, y_0 在一条直线上，有图 2：



这三个点分别为 x_0, x_{ni}, y_0,其中 $\rho(x_0, x_{ni}) = \frac{1}{n_i} = r' \to 0$

因为，$r' < \frac{\eta'}{2}$ 。如果 x_0, x_{ni}, y_0 在一条直线上，且有圆相切。

可以设：$\eta = 2\eta' = \eta' + 2r' + r$

如果，$r' > r$

有：$r < \frac{1}{3}\eta' < r'$

即：$6r < \eta < 6r'$,则：

要么$r+r' > \frac{2}{3}\eta'$

要么$r+r' < \frac{2}{3}\eta'$

取第一种情况：

因为，

$$\eta = 2\eta' = \eta' + 2r' + r$$

所以，

$$\eta = 2\eta' = \eta' + 2r' + r > \eta' + r' + \frac{2}{3}\eta'$$

即，$\eta > 2\eta'$ 矛盾。

所以，$r+r' < \frac{2}{3}\eta'$

要保证这个不等式，

因为：$r' \in (\frac{1}{3}\eta', \frac{1}{2}\eta')$

所以：$r \in (0, \frac{1}{6}\eta')$

我们得到，

$$r < \frac{1}{6}\eta' < \frac{1}{3}\eta' < r'$$

明显有：$r+r' > \frac{1}{3}\eta'$

类似的，取它们的中点，有：

$$r+r' > \frac{1}{2}\eta'$$

$$r+r^{'}<\frac{1}{2}\eta^{'}$$

同样的推理：

$$r+r^{'}>\frac{1}{2}\eta^{'}$$

$$r^{'}\in(\frac{1}{3}\eta^{'},\frac{1}{2}\eta^{'})$$

$$r\ \ \in(\frac{1}{6}\eta^{'},\frac{1}{3}\eta^{'})$$

结合$r+r^{'}<\frac{5}{6}\eta^{'}$，得到$\frac{2}{3}\eta^{'}$有：

$$r^{'}\in(\frac{1}{3}\eta^{'},\frac{1}{2}\eta^{'})$$

$$r\ \ \in(0,\frac{1}{6}\eta^{'})$$

继续这个过程，我们将得到关于$\eta^{'}$的一个周期数列。其中，

r 在相邻的区间$(0,\frac{1}{6}\eta^{'})$和$(\frac{1}{6}\eta^{'},\frac{1}{3}\eta^{'})$之间来回跳动。

解答：这里，我们考虑一个定理：不存在具有这种性质的 lebesgue 可测集$E\subset[0,1]$,对于$\forall(a,b)\subset[0,1]$有：

$m(E\bigcap(a,b))=\frac{b-a}{2}$。我们考虑如下的情况：一个有界闭集，被一族开领域完全覆盖，即有限子覆盖。如果它是 lebesgue 可测集。则对于覆盖的余集，即整个覆盖除去邻域的部分。上面例子中的手续可以不断做下去。因为不存在：

$m(E\bigcap(a,b))=\dfrac{b-a}{2}$的情况。所以，我们可以通过不断地判断$r+r'$与$\dfrac{1}{2}\eta'$的大小。使得：

r 在相邻的区间$(0,\dfrac{1}{6}\eta')$和$(\dfrac{1}{6}\eta',\dfrac{1}{3}\eta')$之间来回跳动。

4.平行轴定理

考虑如下这种系统（如图）：

在剪断绳子的瞬间，杆球联合体受到的力是多少呢？

$$ma_M=(m+M)g-F$$

利用杠杆原理确定质心

$$mg\bullet r=Mg(\frac{l}{2}-r)$$

面对质心的动量矩定理需要确定相对质心的转动惯量，我们考虑平行轴定理：

$$J_1\bullet a_{AB}=F\bullet(\frac{l}{2}-r)$$

其中，$a_M=(\dfrac{l}{2}-r)a_{AB}$

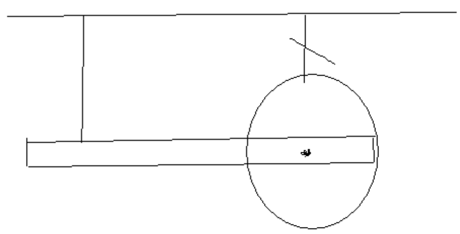
$$J=J_1+(m+M)d^2$$

$$d=\frac{l}{2}-r$$

其中，

$$J = \frac{1}{3} ml^2 + M(l-R)^2$$

图：



解答：在球与杆的质量比例在一定范围的条件下，使用平行轴定理计算剪断绳子时的受力。

5.基于 notes 的邮件收发统计系统

下面介绍我在大学实习期间的一个 java 方面的想法,具体是关于 notes 平台上的邮件收发统计系统，一共有十个部分。

1.notes 入口程序：

首先，我们在标准的 IBM 的 notes 入口程序上添加方法体。

```
Public static void main(string[] args)
{
New loggins();
New timertask();
```

}

其中，方法 New loggins()代表登录界面。这里，需要导入登录界面的类 class loggins extends jpanel。另外，还需要添加页面刷新方法体 timertask();下面，先介绍登录界面模块。

2.登录界面：

我们选用 java swing 登录界面，代码选自清华大学出版社的书籍 java swing 图形界面开发与案例详解一书第 340 页到 342 页。（王鹏编著）

3.主界面模块：

我们在主界面方法 mainframe()中添加一个 try()catch()方法：

```
Mainframe()
{
Jframe mainframe=new jframe();
Container c=mainframe.getcontentpane();
c.setlayout(new gridlayout(,));
c.add(new jtext("tongji"));
source=new bufferedreader(new filereader(filename));
source1=new bufferedreader(new filereader(filename1));
source2=new bufferedreader(new filereader(filename2));
```

```
}
Public xinjian()
{
Try
{
Dataoutputstream out=new dataoutputstream(
New bufferedoutputstream(
New fileoutputstream(filename));
Dataoutputstream out1=new dataoutputstream(
New bufferedoutputstream(
New fileoutputstream(filename1));
Dataoutputstream out2=new dataoutputstream(
New bufferedoutputstream(
New fileoutputstream(filename2));
}
Catch(IOexception IOX)
{
New tongji();
}
Private copy()
{
Try
```

```
{
Line=source.readline();
While(line!=null)
{
Jtext. showmessagedialog (line);
}
Line1=source1.readline();
While(line1!=null)
{
Jtext.showmessagedialog(line1);
}
Line2=source2.readline();
While(line2!=null)
{
Jtext. showmessagedialog (line2);
}
Catch___-
```

4.邮件统计模块：

在这里，我们用循环体，

```
Int j,k=0;
Int fasong[i][j];
```

```
Int jieshou[i][k];
Public int find(string id){
For(int i=0;i<n;i++){
If(persons[i].getid().equals(id))
Return i;
Out.write(persons[i].getname());
{
if(con 1)
 {
j++;
fasong[i][j]=fasong[i][j-1]+1;
out1.writeint(fasong[i][j]);
}
Else if(con 2)
 {
k++;
jieshou[i][k]=jieshou[i][k-1]+1;
out2.writeint(jieshou[i][k]);
}
}
}
```

注：dat 文件具有自动覆盖功能。

5.侦听模块：

这里，我们需要为系统的发送按钮添加侦听。

```
Jbutton b=new button(“发送”);
b.addactionlistener(this);
```

6.数据库模块，获取个人信息：

在邮件统计模块中，我们需要对比个人信息。

```
Public void actionperformed(actionevent e)
{
String cmd=e.getactioncommand();
If(cmd.equals(“发送”))
 {
Try{
Class.forname(“com.microsoft.jdbc.sqlserver.sqlserverdriver”).newinstan
ce();
Connection con=drivermanager.getconnection(“”,””,””);
Statement stmt=con.createstatement(resultset._,resultset._,resultset._);
String sql=”select * from person”;
Resultset rs=stmt.executequery(sql);
While(rs.next()) {%>
Id：<%=rs.getstring(1)%> <br>
```

Name：<%=rs.getstring(2)%>

....

7.条件判断模块：

在邮件统计模块中，我们需要根据条件判断是收还是发。

这里，我们根据文件名来判断

Boolean con1,con2;

String name;

String name=system.io.path.getextension(filename);

if(name=”c:/data1.dat1”)

Con1=1;

Else con1=0;

if(name=“c:/data2.dat2”)

Con2=1;

Else con2=0;

8.邮件发送模块：

String filename=”c:/data.dat”;

String filename1=”c:/data1.dat”;

String filename2=“c:/data2.dat”;

这里，我们利用 IO 流的方向来设计，模块 9 也是运用这个方法。

Datainputstream in1=new datainputstream(

New bufferedinputstream(

New fileinputstream(filename1));

注意：模块 7 需要从 IO 流中获取文件名，模块 8 和 9 定义了输入相应的文件名。

9.邮件接收模块：

同理，

Datainputstream in2=new datainputstream(

New bufferedinputstream(

New fileinputstream(filename2));

10.定时刷新模块：

因为，系统需要定时刷新，我们考虑 java 定时器。可供选择的有多种方法，代码。

例如：

```
import java.util.Date;
import java.util.Timer;
public class Server {
public Server() {
}
public static void main(String[] args){
System.out.println("启动后台服务器......");
Timer timer = new Timer();
```

```
timer.schedule(new UpdateDB(), 1000, 6*60*60*1000);
//在 1 秒后执行此任务,每次间隔 6 个小时
System.out.println("服务器已经启动。输入字母'c'关闭服务器,'r'刷新服务器");
while(true){
try {
int ch = System.in.read();
if(ch-'c'==0){
System.out.println("关闭服务器");
timer.cancel();//关闭定时器
System.exit(0);
}
if(ch-'r'==0)
System.out.println("刷新服务器");
new UpdateDB().run();
System.out.println("刷新完毕");
System.out.println("输入字母'c'关闭服务器,'r'刷新服务器");
}
} catch (IOException e) {
// TODO Auto-generated catch block
e.printStackTrace();
}
```

```
}
static class UpdateDB extends java.util.TimerTask{
public void run() {
}
}
}
```

刷新数据库之后，又要重新对比个人信息，进行顺序查询。这样，可以令数组重新从零开始计算。这里，我们用到多线程，使得统计邮件数与刷新界面同时进行。

解答：本例给出一个算法，用于统计收发邮件数目。为按钮添加侦听功能，一旦发送，就将被记录。通过 trycatch 方法，为这个方法添加函数，用于计算收发邮件数目。引入条件判断模块，通过文件存储，用文件名来区别是接收方还是发送方。最后，我们用数据库实现定时刷新功能，使得数组重新对比个人信息，进行顺序查询，并从零开始计算。

联系邮箱：pqrs008@126.com