Inventiones math. 35, 261–271 (1976)

Inventiones mathematicae

Théories cohomologiques

Henri Cartan (Paris)

A Jean-Pierre Serre

La théorie de Sullivan ([4, 1]) qui attache à chaque espace topologique $\mathscr{X}$ une $\mathbb{Q}$-algèbre différentielle «minimale», définie à isomorphisme près, et caractérisant le type d'homotopie rationnel de $\mathscr{X}$, s'appuie sur l'existence d'une $\mathbb{Q}$-algèbre de cochaînes de $\mathscr{X}$, qui soit *commutative* (au sens gradué, i.e. $ba=(-1)^{pq}\,ab$ pour a de degré p et b de degré q). Le but de cet article est de poser un cadre général dans lequel peuvent être construites de telles algèbres de cochaînes (sur un anneau de base commutatif k qui n'est pas nécessairement un corps). On s'inspire ici d'un bref article de R.G. Swan [5] en le précisant et le complétant.

Introduction

On se place dans le cadre *simplicial* («semi-simplicial» dans l'ancienne terminologie). Un ensemble simplicial est donc une collection d'ensembles X_n (n entier $\geqq 0$) munie d'applications de face $d_i\colon X_n \to X_{n-1}$ ($0 \leqq i \leqq n$) pour $n \geqq 1$, et d'applications de dégénérescence $s_i\colon X_n \to X_{n+1}$ ($0 \leqq i \leqq n$) pour $n \geqq 0$, satisfaisant aux relations usuelles. Les éléments de X_n s'appellent les n-simplexes de X. On peut dire aussi (cf. [2]) que X est un foncteur contravariant de la catégorie Δ dans la catégorie des ensembles, où Δ désigne la catégorie dont les objets sont les ensembles $\Delta_n = \{0, 1, \ldots, n\}$ et les morphismes les applications croissantes $\Delta_p \to \Delta_q$. L'ensemble Δ_n porte lui-même une structure d'ensemble simplicial dont les p-simplexes sont les applications croissantes $\Delta_p \to \Delta_n$.

Plus généralement, on peut considérer un foncteur contravariant de Δ à valeurs dans n'importe quelle catégorie $\mathscr{C}$: on obtient ainsi un *objet $\mathscr{C}$-simplicial* (exemples: groupe abélien simplicial, k-algèbre simpliciale, etc. ...).

Pour tout ensemble simplicial X, et tout groupe abélien G, $C^n(X; G)$ désigne le groupe des n-cochaînes de X à valeurs dans G, qui s'identifie à $\mathrm{Hom}(C_n(X), G)$, en notant $C_n(X)$ le groupe des n-chaînes de X (groupe abélien libre de base X_n). L'opérateur «bord» $d\colon C_n(X) \to C_{n-1}(X)$ ($n \geqq 1$), égal à la somme alternée des opérations de face d_i, définit par transposition un opérateur différentiel $\delta\colon C^n(X; G) \to C^{n+1}(X; G)$ de carré nul, d'où les groupes de cohomologie

$H^n(X; G)$. De plus, lorsque G est un anneau commutatif, les formules classiques de Whitney définissent sur $C^*(X; G) = \bigoplus_{n \geqq 0} C^n(X; G)$ une structure d'algèbre différentielle graduée (associative mais non commutative), d'où la définition de l'algèbre de cohomologie $H^*(X; G) = \bigoplus_{n \geqq 0} H^n(X; G)$; elle est commutative.

Rappelons enfin qu'on associe à tout espace topologique $\mathscr{X}$ l'ensemble simplicial X de ses «simplexes singuliers»; l'homologie et la cohomologie de $\mathscr{X}$ sont, par définition, l'homologie et la cohomologie de X.

On fixe un anneau commutatif k, à élément-unité, qui pourra notamment être un corps ou l'anneau $\mathbb{Z}$ des entiers naturels. On appellera DG-algèbre une k-algèbre graduée $A^* = \bigoplus_{n \geqq 0} A^n$, dont la multiplication (associative) envoie $A^p \otimes_k A^q$ dans A^{p+q}, et dont la différentielle δ envoie A^n dans A^{n+1} et satisfait à $\delta\delta = 0$, $\delta(xy) = (\delta x)y + (-1)^p x(\delta y)$ pour x de degré p. On ne suppose pas que A^* possède un élément-unité.

1. Données d'une théorie cohomologique

On se donne une DG-algèbre *simpliciale* $A^* = \bigoplus_{n \geqq 0} A^n$. Pour chaque entier $p \geqq 0$, on a donc une DG-algèbre $A_p^* = \bigoplus_{n \geqq 0} A_p^n$; les opérateurs de face $d^i \colon A_p^* \to A_{p-1}^*$ et de dégénérescence $s_i \colon A_p^* \to A_{p+1}^*$ sont des morphismes de DG-algèbres. La multiplication définit des applications k-linéaires simpliciales $A^n \otimes_k A^m \to A^{n+m}$ (le produit tensoriel est celui de deux k-modules simpliciaux).

On précisera plus loin les axiomes auxquels doit satisfaire A^* pour que l'on ait une bonne «théorie cohomologique». De toute façon, sans supposer aucun axiome, on associe à chaque ensemble simplicial X la DG-algèbre $\mathrm{Mor}(X, A^*) = \bigoplus_{n \geqq 0} \mathrm{Mor}(X, A^n)$, où Mor désigne l'ensemble des morphismes de l'ensemble simplicial X dans l'ensemble simplicial sous-jacent à A^n. On notera

$$A^*(X) = \mathrm{Mor}(X, A^*);$$

observons que pour l'ensemble simplicial Δ_p, $A^*(\Delta_p)$ s'identifie à A_p^* (car la donnée d'un p-simplexe de A^* équivaut à celle d'un morphisme simplicial $\Delta_p \to A^*$).

On a alors une *algèbre de cohomologie*

$$H^*(A^*(X)) = \bigoplus_{n \geqq 0} H^n(A^*(X))$$

qui est un foncteur contravariant de X. On a envie que cette algèbre de cohomologie ressemble à l'algèbre $H^*(X; G)$ pour un anneau de coefficients G convenable.

Exemple 1. On prend pour A^* l'algèbre simpliciale C^* que voici: C_p^* est l'algèbre des cochaînes (à valeurs dans $\mathbb{Z}$) de l'ensemble simplicial Δ_p; les opérations de face et dégénérescence sont évidentes. Alors $C^*(X) = \mathrm{Mor}(X, C^*)$ n'est autre que l'algèbre des cochaînes de X à valeurs dans $\mathbb{Z}$, et $H^*(C^*(X)) = H^*(X; \mathbb{Z})$. –

Si maintenant R est un anneau commutatif à élément-unité, $C_p^* \otimes_{\mathbb{Z}} R$ est l'algèbre des cochaînes de Δ_p à valeurs dans R; donc si on pose

$$A^* = C^* \otimes R,$$

l'algèbre $H^*(A^*(X))$ s'identifie à l'algèbre de cohomologie classique $H^*(X; R)$.

Exemple 2. Prenons $k = \mathbb{R}$ (corps des réels), et soit Ω_p^* la DG-algèbre des formes différentielles de classe C^∞ sur le p-simplexe euclidien-type. On obtient une DG-algèbre simpliciale Ω^*. Alors on attache à tout ensemble simplicial X la DG-algèbre $\Omega^*(X) = \mathrm{Mor}(X, \Omega^*)$, dont l'algèbre de cohomologie est naturellement isomorphe à $H^*(X; \mathbb{R})$: on le montrera un peu plus loin. Les DG-algèbres $\Omega^*(X)$ sont *commutatives.*

On verra plus loin d'autres exemples.

2. Axiomes d'une théorie cohomologique

Axiome (a) (axiome homologique): la suite d'applications k-linéaires simpliciales

$$A^0 \xrightarrow{\delta} A^1 \xrightarrow{\delta} \cdots \xrightarrow{\delta} A^n \xrightarrow{\delta} \cdots$$

est *exacte*, et le noyau $Z^0 A$ de $A^0 \xrightarrow{\delta} A^1$ (qui est une k-algèbre simpliciale) est *simplicialement trivial.*

[On dit qu'un $\mathscr{C}$-objet simplicial E est simplicialement trivial si tous les opérateurs de face et de dégénérescence sont des $\mathscr{C}$-isomorphismes. On a alors un unique $\mathscr{C}$-isomorphisme $E_p \xrightarrow{\approx} E_0$ pour tout p, et l'objet E est défini par la donnée du $\mathscr{C}$-objet E_0.]

Nous noterons ici $R(A)$ la k-algèbre $(Z^0 A)_0$, qui détermine l'objet simplicial trivial $Z^0 A$. Dans l'exemple 1 ci-dessus, où $A^* = C^* \otimes R$, on a $R(A) = R$. Dans l'exemple 2, on a $R(\Omega) = \mathbb{R}$.

Axiome (b) (axiome homotopique): tous les groupes d'homotopie $\pi_p(A^n)$ sont *nuls* ($n \geqq 0, p \geqq 0$).

Cet axiome appelle quelques mots d'explication: on définit classiquement des groupes d'homotopie $\pi_p(X)$ pour tout ensemble simplicial X et tout entier $p \geqq 1$; ils sont abéliens pour $p \geqq 2$. Lorsque G est un *groupe abélien simplicial,* les $\pi_p(G)$ se calculent simplement, $\pi_1(G)$ est abélien, et $\pi_0(G)$ est défini comme le groupe abélien des composantes connexes de G. Pour le calcul, on munit G de la différentielle d égale à la somme alternée des opérateurs de face d_i, et $\pi_p(G)$ n'est autre que le groupe d'homologie de la suite $G_{p+1} \xrightarrow{d} G_p \xrightarrow{d} G_{p-1}$ si $p \geqq 1$, resp. $\pi_0(G)$ est le conoyau de $G_1 \xrightarrow{d} G_0$.

Il est immédiat que si G est simplicialement trivial on a

$$\pi_0(G) = G_0, \quad \pi_p(G) = 0 \quad \text{pour } p \geqq 1.$$

Il y a un autre procédé de calcul des $\pi_p(G)$ (cf. [3]): pour $p \geqq 1$, soit G_p^0 le sous-groupe des $x \in G_p$ tels que $d_i x = 0$ pour tout $i > 0$, et posons $G_0^0 = G_0$. Alors d_0 envoie G_{p+1}^0 dans G_p^0, et les $\pi_p(G)$ s'identifient aux groupes d'homologie du complexe

$$\cdots \longrightarrow G_{p+1}^0 \xrightarrow{d_0} G_p^0 \xrightarrow{d_0} G_{p-1}^0 \xrightarrow{d_0} \cdots \xrightarrow{d_0} G_1^0 \xrightarrow{d_0} G_0.$$

D'où la

Proposition 1. *Pour que $\pi_p(G)=0$ $(p\geqq 1)$, il faut et il suffit que tout $x\in G_p$ tel que $d_i x=0$ pour tout $i\geqq 0$ soit de la forme $d_0 y$, avec $y\in G_{p+1}$ et $d_i y=0$ pour $i\geqq 1$. Pour que $\pi_0(G)=0$, il faut et il suffit que tout $x\in G_0$ soit de la forme $d_0 y$, où $y\in G_1$ satisfait à $d_1 y=0$.*

Théorème 1. *Soit A^* une théorie cohomologique satisfaisant aux axiomes* (a) *et* (b). *On a des isomorphismes naturels (fonctoriels en X)*

$$H^n(A^*(X))\approx H^n(X; R(A)).$$

Démonstration. Le noyau $Z^n(A^*(X))$ de $\delta: A^n(X)\to A^{n+1}(X)$ s'identifie évidemment à $\mathrm{Mor}(X, Z^n A)$, en notant $Z^n A$ le noyau de l'application k-linéaire simplicial $A^n\to A^{n+1}$. D'après l'axiome (a), on a des suites exactes (simpliciales)

$$0\to Z^n A\to A^n\to Z^{n+1}A\to 0 \qquad \text{pour tout } n\geqq 0; \tag{1}$$

la suite (1) s'interprète comme un *fibré principal* de groupe $Z^n A$; la suite exacte d'homotopie de ce fibré se calcule comme la suite exacte d'homologie de (1), d'où des isomorphismes

$$\pi_{p+1}(Z^{n+1}A)\approx\pi_p(Z^n A);$$

on en déduit facilement, par récurrence sur n:

$$\pi_p(Z^n A)=0 \quad \text{pour } p\neq n, \qquad \pi_n(Z^n A)\approx\pi_0(Z^0 A)=R(A);$$

on notera ε_n l'isomorphisme naturel $\pi_n(Z^n A)\xrightarrow{\approx} R(A)$.

Ainsi l'ensemble simplicial $Z^n A$ est un $K(R(A), n)$ d'Eilenberg-MacLane.

Pour $n\geqq 1$, l'image $B^n(A^*(X))$ de $\delta: A^{n-1}(X)\to A^n(X)$ se compose des morphismes $X\to Z^n A$ *homotopes au morphisme nul:* cela résulte du fait que A^{n-1} est «contractile» (ses groupes d'homotopie sont nuls) et du relèvement des homotopies dans les fibrés. D'où une bijection de $H^n(A^*(X))$ avec le k-module $[X, Z^n A]$ des classes d'homotopie de morphismes $X\to Z^n A$. Mais comme $Z^n A$ est un $K(R(A), n)$, on obtient classiquement une bijection $[X, Z^n A]\approx H^n(X; R(A))$, d'où finalement

$$H^n(A^*(X))\approx H^n(X; R(A)).$$

Ces isomorphismes de k-modules sont fonctoriels en X.

Le cas $n=0$ se traite facilement:

$$H^0(A^*(X))=\mathrm{Mor}(X, Z^0 A)\approx H^0(X; R(A)).$$

Remarque. Soit Y un sous-ensemble simplicial de X; alors l'application de restriction $\mathrm{Mor}(X, A^n)\to\mathrm{Mor}(Y, A^n)$ est surjective parce que A^n est «contractile»; on note $A^n(X, Y)$ son noyau; la DG-algèbre $A^*(X,Y)=\bigoplus_{n\geqq 0} A^n(X, Y)$ a une algèbre de cohomologie notée $H^*(A^*(X, Y))=\bigoplus_{n\geqq 0} H^n(A^*(X, Y))$, et on a des isomorphismes

$$H^n(A^*(X, Y))\approx[(X, Y), (Z^n A, 0)].$$

La suite exacte $0\to A^*(X, Y)\to A^*(X)\to A^*(Y)\to 0$ donne naissance à la suite exacte de cohomologie relative.

3. Vérification des axiomes; nouvel exemple

La vérification de l'axiome (a) est immédiate dans l'exemple 1 et dans l'exemple 2 (§ 1). Pour vérifier l'axiome (b), on applique la proposition 1: on identifie Δ_p à la 0-ième face de Δ_{p+1}, on se donne $\omega \in A^*(\Delta_p)$, induisant 0 sur toutes les $(p-1)$-faces de Δ_p, et on doit montrer l'existence d'un $\alpha \in A^*(\Delta_{p+1})$ qui induit 0 sur toutes les p-faces de Δ_{p+1} sauf la 0-ième, et qui induit ω sur Δ_p. Ceci vaut pour $p \geqq 1$; pour $p=0$, on se donne $\omega \in A^*(\Delta_0)$, et on cherche $\alpha \in A^*(\Delta_1)$ induisant 0 à l'origine du segment Δ_1 et induisant ω à l'extrémité de ce segment.

Dans le cas de l'exemple 1, c'est immédiat: la n-cochaîne ω étant donnée, on prend pour α la cochaîne qui prolonge ω sur l'ensemble des n-simplexes de la 0-ième face de Δ_{p+1}, et qui prend la valeur zéro sur les autres n-simplexes de Δ_{p+1}. Dans le cas de l'exemple 2, notons encore Δ_p le p-simplexe euclidien type (par abus de langage). Représentons les points de Δ_{p+1} par $p+1$ coordonnées réelles $x_0, x_1, \ldots, x_p$ ($\geqq 0$ et de somme $\leqq 1$); les faces sont représentées respectivement par

$$x_0=0, \quad x_1=0, \ldots, x_p=0, \quad x_0+x_1+\cdots+x_p=1.$$

On se donne une n-forme différentielle $\omega(x_1, \ldots, x_p)$; il suffit alors de prendre

$$\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_p)=\varphi(x_0)\,\omega\left(\frac{x_1}{1-x_0}, \ldots, \frac{x_p}{1-x_0}\right),$$

où φ est une fonction de classe C^∞, égale à 1 pour $x_0=0$, nulle pour x_0 voisin de 1. Le cas $p=0$ est immédiat.

Exemple 3 (Sullivan). Ici l'anneau k est le corps $\mathbb{Q}$ des rationnels. On définit la DG-algèbre simpliciale S^* comme suit: S_p^* est l'algèbre des formes différentielles sur le p-simplexe euclidien Δ_p qui, exprimées avec les coordonnées $x_1, \ldots, x_p$ (cf. ci-dessus) et leurs différentielles, a pour coefficients des polynômes en $x_1, \ldots, x_p$ à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Les d_i: $S_p^* \to S_{p-1}^*$ et s_i: $S_p^* \to S_{p+1}^*$ sont évidents. L'axiome (a) résulte de la formule explicite qui prouve le «lemme de Poincaré» pour un ensemble étoilé de $\mathbb{R}^p$ (elle s'applique parce que tout polynôme à coefficients rationnels a une primitive qui est un polynôme à coefficients rationnels). Ici, $R(S)=\mathbb{Q}$.

L'axiome (b) se vérifie comme dans l'exemple 2: si on se donne la forme différentielle $\omega(x_1, \ldots, x_p)$, on prend

$$\alpha(x_0, x_1, \ldots, x_p)=(1-x_0)^N\,\omega\left(\frac{x_p}{1-x_0}, \ldots, \frac{x_p}{1-x_0}\right),$$

où l'entier N est assez grand pour chasser les dénominateurs.

On donnera plus loin un quatrième exemple.

4. Morphisme d'une théorie cohomologique dans une autre

Soient A^* et B^* deux DG-algèbres simpliciales (sur le même anneau k), satisfaisant aux axiomes (a) et (b). On appelle *morphisme* de la théorie A^* dans la théorie B^*

une application k-linéaire simpliciale $f\colon A^* \to B^*$ qui envoie A^n dans B^n pour tout n et est compatible avec les différentielles δ de A^* et B^*. *Aucune hypothèse de compatibilité avec les structures multiplicatives n'est faite.* On notera $f^n\colon A^n \to B^n$ l'application induite par f, qui définit aussi une application k-linéaire

$$f_0\colon R(A) \to R(B).$$

Il est clair que f induit, pour tout ensemble simplicial X, une application $A^*(X) \to B^*(X)$ conservant le degré et compatible avec les différentielles, d'où des application k-linéaires

$$H^n(A^*(X)) \to H^n(B^*(X)),$$

que l'on notera $H^n(X;f)$.

Proposition 2. *Le diagramme suivant est commutatif:*

$$\begin{array}{ccc} H^n(A^*(X)) & \xrightarrow{H^n(X;f)} & H^n(B^*(X)) \\ \downarrow{\scriptstyle\approx} & & \downarrow{\scriptstyle\approx} \\ H^n(X;R(A)) & \xrightarrow{H^n(X;f_0)} & H^n(X;R(B)); \end{array}$$

les isomorphismes verticaux sont ceux définis au § 2.

La démonstration est laissée au lecteur.

Théorème 2 (théorème d'existence de morphisme). *Soit A^* une théorie cohomologique satisfaisant seulement à l'axiome* (a), *et telle que $A_p^n = 0$ pour $n > p$* (il en est ainsi dans les exemples 2 et 3). *Soit $C^* \otimes R(A)$ la théorie des cochaînes à valeurs dans $R(A)$. Il existe un unique morphisme $f\colon A^* \to C^* \otimes R(A)$ tel que f_0 soit l'application identique de $R(A)$.*

Démonstration. Posons $B^* = C^* \otimes R(A)$. On connaît déjà $Z^0 f\colon Z^0 A \to Z^0 B$ puisque f_0 est l'identité; $Z^0 f$ se prolonge d'une seule manière en une application simpliciale $f\colon A^0 \to B^0$, car une telle application est déterminée par sa restriction à $A_0^0 = (Z^0 A)_0$ (cette égalité résultant du fait que $A_0^1 = 0$). Dans le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & Z^0 A & \longrightarrow & A^0 & \longrightarrow & Z^1 A & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle g^0} & & \downarrow{\scriptstyle f^0} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & Z^0 B & \longrightarrow & B^0 & \longrightarrow & Z^1 B & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

dont les lignes sont exactes, il existe une unique application simpliciale $g^1\colon Z^1 A \to Z^1 B$ qui, insérée dans ce diagramme, le laisse commutatif. On prouve alors l'existence et l'unicité de $f^n\colon A^n \to B^n$ par récurrence sur n: car lorsque l'application linéaire simpliciale $g^n\colon Z^n A \to Z^n B$ est connue, elle se prolonge d'une seule manière en une application linéaire simpliciale $f^n\colon A^n \to B^n$ (en effet, f^n est déterminée par sa restriction à A_n^n, qui est connue parce que $A_n^n = (Z^n A)_n$ à cause de $A_n^{n+1} = 0$). Ensuite on trouve $g^{n+1}\colon Z^{n+1} A \to Z^{n+1} B$ par passage au quotient.

Remarque. Pour tout $\omega \in A_n^n$, $f(\omega) \in B_n^n \approx R(A)$ peut s'appeler l'*intégrale* de ω sur le simplexe Δ_n. En effet, dans l'exemple 2, on retrouve bien l'intégrale de la forme différentielle ω définie par récurrence sur n au moyen de la formule de Stokes. Dans l'exemple 3 (Sullivan), l'intégrale d'une n-forme différentielle sur Δ_n est un nombre rationnel.

5. Structure multiplicative

Théorème 3. *Soient A^* et B^* deux théories cohomologiques* (satisfaisant aux axiomes), *et soit f: $A^* \to B^*$ un morphisme tel que f_0: $R(A) \to R(B)$ soit un homomorphisme de k-algèbres. Si les $Z^n A$ et les $Z^n B$ sont k-plats pour tout $n \geqq 0$, l'homomorphisme $H^*(f, X)$: $H^*(A^*(X)) \to H^*(B^*(X))$ est multiplicatif (c'est un homomorphisme de k-algèbres graduées).*

Démonstration. Il suffit de montrer que le diagramme

$$\begin{tikzcd} Z^p A \otimes Z^q A \arrow[r] \arrow[d] & Z^{p+q} A \arrow[d] \\ Z^p B \otimes Z^q(B) \arrow[r] & Z^{p+q} B, \end{tikzcd}$$

où les flèches verticales sont induites par f, et les flèches horizontales définies par la structure multiplicative de A^* (resp. de B^*), est *homotopiquement commutatif.* (Tous les produits tensoriels sont pris sur k). Il suffit de montrer que l'on obtient un diagramme commutatif lorsqu'on lui applique le foncteur de cohomologie $H^{p+q}(\ ; R(B))$. Or la suite spectrale de Künneth montre que $\pi_n(Z^p A \otimes Z^q A) = 0$ pour $n \neq p+q$ et donne un isomorphisme

$$\pi_{p+q}(Z^p A \otimes Z^q A) \approx \pi_p(Z^p A) \otimes \pi_q(Z^q A) \xrightarrow[\approx]{\varepsilon_p \otimes \varepsilon_q} R(A) \otimes R(A).$$

De même pour B^*. Le théorème de Hurewicz et la formule des coefficients universels montrent alors qu'il suffit de prouver la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_{p+q}(Z^p A \otimes Z^q A) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_{p+q}(Z^{p+q} A) \arrow[d] \\ \pi_{p+q}(Z^p B \otimes Z^q B) \arrow[r] & \pi_{p+q}(Z^{p+q} B). \end{tikzcd} \tag{2}$$

Or si $Z^n A$ est k-plat pour $n \geqq 0$, on prouve facilement la commutativité du diagramme

$$\begin{tikzcd} \pi_{p+q}(Z^p A \otimes Z^q A) \arrow[r] \arrow[d, "\approx"] & \pi_{p+q}(Z^{p+q} A) \arrow[d, "\varepsilon_{p+q}"] \\ R(A) \otimes R(A) \arrow[r] & R(A), \end{tikzcd} \tag{3}$$

où la flèche horizontale du bas est définie par la multiplication de l'algèbre $R(A)$. On superpose alors ce diagramme à celui relatif à B, et on obtient la commutativité du diagramme (2).

Remarque. L'hypothèse de platitude de l'énoncé est toujours vérifiée si k est un corps; elle l'est aussi lorsque $k=\mathbb{Z}$ et que les A_p^n et les B_p^n sont des groupes abéliens libres. Cela va être le cas dans l'exemple 4 ci-dessous.

6. Généralisation

Au lieu d'imposer à l'algèbre simpliciale A^* les axiomes (a) et (b), on va lui imposer d'une part l'axiome (a), d'autre part un axiome plus faible que (b):

Axiome (b'). Pour chaque $n \geqq 0$, les groupes d'homotopie $\pi_p(A^n)$ et $\pi_p(Z^n A)$ sont nuls pour $p \neq n$, et l'homomorphisme naturel $\pi_n(Z^n A) \to \pi_n(A^n)$ est surjectif, le noyau étant facteur direct (au sens des k-modules).

On voit alors que les suites exactes

$$0 \to Z^{n-1}A \to A^{n-1} \xrightarrow{\delta} Z^n A \to 0$$

définissent des injections

$$\dots \pi_{n+1}(Z^{n+1}A) \hookrightarrow \pi_n(Z^n A) \hookrightarrow \dots \hookrightarrow \pi_0(Z^0 A) = R(A),$$

chaque k-module étant facteur direct dans le suivant. On a des bijections naturelles

$$[X, Z^n A] \approx H^n(X; \pi_n(Z^n A)), \qquad [X, A^n] \approx H^n(X; \pi_n(A^n)),$$

et l'application $[X, Z^n A] \to [X, A^n]$ s'identifie à

$$H^n(X; \pi_n(Z^n A)) \to H^n(X; \pi_n(\mathrm{A}^n)),$$

qui est surjective. Il s'ensuit que l'image de

$$[X, A^{n-1}] \to [X, Z^n A]$$

est nulle pour $n \geqq 1$, et par suite les morphismes $X \to Z^n A$ homotopes à zéro ne sont autres que ceux qui se relèvent en $X \to A^{n-1}$; d'où un isomorphisme $H^n(A^*(X)) \approx [X, Z^n A] \approx H^n(X; \pi_n(Z^n A))$.

Par le théorème 2, on a un unique morphisme f de A^* dans $B^* = C^* \otimes_{\mathbb{Z}} R(A)$, tel que f_0 soit l'application identique de $R(A)$.

Le théorème 3 s'étend à ce cas: l'homomorphisme $H^*(A^*(X)) \to H^*(B^*(X))$ défini par f est *multiplicatif*, pourvu que les $Z^n A$ soient des k-modules *k-plats*. (Le seul changement dans la démonstration consiste en ce que les morphismes verticaux du diagramme (3) sont des injections au lieu d'être bijectifs.) Explicitons cette assertion: pour chaque p, l'homomorphisme $H^p(A^*(X)) \to H^p(B^*(X)) = H^p(X; R(A))$ est une injection dont l'image est $H^p(X; \pi_p(Z^p A))$, en identifiant $\pi_p(Z^p A)$ à un sous-module de $R(A)$. Le diagramme affirme la commutativité des diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
H^p(A^*(X)) \otimes H^q(A^*(X)) & \longrightarrow & H^{p+q}(A^*(X)) \\
\downarrow & & \downarrow \\
H^p(X; R(A)) \otimes H^q(X; R(A)) & \longrightarrow & H^{p+q}(X; R(A))
\end{array}$$

où les flèches verticales sont les injections en question, et où la première flèche horizontale est définie par la multiplication dans l'algèbre de cohomologie

$H^*(A^*(X))$, la deuxième flèche horizontale étant définie par la multiplication dans la cohomologie de X à coefficients dans l'anneau $R(A)$.

7. Exemple 4 (Grothendieck)

L'auteur expose ici ce qu'il croit avoir compris lors d'une conférence de Grothendieck à l'I.H.E.S. le 12 décembre 1975.

Notons $\Gamma(t)$ la $\mathbb{Z}$-algèbre formée des combinaisons linéaires, à coefficients dans $\mathbb{Z}$, des monômes $\frac{t^n}{n!}$ (sous-algèbre de $\mathbb{Q}[t]$). Notons $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$ le produit tensoriel $\Gamma(x_1) \otimes \cdots \otimes \Gamma(x_n)$. Soit $\Gamma(x; \delta x)$ la DG-algèbre ayant pour $\mathbb{Z}$-base les $\frac{x^n}{n!}$ et les $\frac{x^n}{n!}\delta x$ (la différentielle de x étant δx, celle de δx étant 0). Il est clair que cette DG-algèbre est acylique sur $\mathbb{Z}$, i.e. la suite

$$0 \to \mathbb{Z} \to \Gamma(x; x)^0 \xrightarrow{\delta} \Gamma(x; x)^1 \to 0$$

est exacte. Le produit tensoriel (sur $\mathbb{Z}$) des $\Gamma(x_i; \delta x_i)$ (pour $i = 1, \ldots, p$) est une DG-algèbre acyclique sur $\mathbb{Z}$, qu'on notera $\Gamma(x_1, \ldots, x_p; \delta x_1, \ldots, \delta x_p)$; l'algèbre de ses éléments de degré 0 est $\Gamma(x_1, \ldots, x_n)$.

Considérons, pour chaque entier $p \geqq 0$, la DG-algèbre

$$Gr_p^* = \Gamma(t) \otimes \Gamma(x_1, \ldots, x_p; \delta x_1, \ldots, \delta x_p).$$

Elle est acyclique sur $\Gamma(t)$. On va faire de la collection de ces DG-algèbres une DG-algèbre simpliciale Gr^*, comme suit. Soit G_p^* la DG-algèbre $\Gamma(x_0, x_1, \ldots, x_p; \delta x_0, \delta x_1, \ldots, \delta x_p)$; si on fait le changement de variables $x_0 + x_1 + \cdots + x_p = t$ (i.e. si on remplace x_0 par $t - x_1 - \cdots - x_p$), puis si on remplace δt par 0, on voit que *l'algèbre Gr_p^* s'identifie au quotient de G_p^* par l'idéal I_p^* engendré par* $\delta(x_0 + x_1 + \cdots + x_p)$. La collection des G_p^* définit une DG-algèbre simpliciale G^*, si on définit les opérations de face d_i: $G_p^* \to G_{p-1}^*$ en associant à une forme différentielle $\omega(x_0, \ldots, x_p)$ la forme $\omega(x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{p-1})$, et les opérations de dégénérescence s_i: $G_p^* \to G_{p+1}^*$ en associant à $\omega(x_0, \ldots, x_p)$ la forme $\omega(x_0, \ldots, x_i + x_{i+1}, \ldots, x_{p+1})$. Il est clair que d_i envoie I_p^* dans I_{p-1}^*, s_i envoie I_p^* dans I_{p+1}^*. Donc s_i et d_i passent au quotient, et définissent sur la collection des Gr_p^* une structure de DG-algèbre simpliciale Gr^*. On observera que tous les opérateurs d_i et s_i transforment t en lui-même.

Il est clair que la DG-algèbre simpliciale Gr^* satisfait à l'axiome (a), et que $R(Gr) = \Gamma(t)$. On va prouver que Gr^* satisfait à l'axiome (b′) et expliciter les groupes d'homotopie $\pi_n(Z^n Gr)$.

Commençons par les groupes d'homotopie $\pi_p(G^n)$. Ils sont nuls pour $p \geqq 1$; car si une forme différentielle $\omega(x_0, \ldots, x_p)$, de degré n, s'annule lorsqu'on remplace x_i par 0 (quel que soit $i = 0, \ldots, p$), la forme différentielle $\alpha(x_0, \ldots, x_{p+1})$ égale à $\omega(x_1, \ldots, x_{p+1})$ satisfait à $d_0 \alpha = \omega$, $d_i \alpha = 0$ pour $i \geqq 1$. La même démonstration montre que $\pi_0(G^n) = 0$, sauf pour $n = 0$: $\pi_0(G^0) \approx \mathbb{Z}$, le générateur étant la constante $1 \in \Gamma(x_0)$.

La multiplication par $\delta(x_0 + \cdots + x_p)$ envoie G_p^n sur I_p^{n+1}, et la collection de ces applications (pour tous les p) définit une application k-linéaire simpliciale $G^n \to I^{n+1}$

qui est surjective; d'où la suite exacte de k-modules simpliciaux

$$0 \to I^n \to G^n \to I^{n+1} \to 0$$

qui identifie I^{n+1} à $G^n/I^n = Gr^n$. Le calcul récurrent des groupes d'homotopie des I^n se fait alors en remarquant que $I^0 = 0$; on trouve que $\pi_p(Gr^n) = 0$ pour $p \neq n$, et que

$$\pi_n(Gr^n) \approx \mathbb{Z},$$

le générateur étant l'élément $(\delta x_1)(\delta x_2) \ldots (\delta x_n) \in Gr_n^n$; pour $n = 0$, le générateur de $\pi_0(Gr^0) \approx \mathbb{Z}$ est l'élément unité 1.

Les suites exactes

$$0 \to Z^n Gr \to Gr^n \xrightarrow{\delta} Z^{n+1} Gr \to 0$$

permettent ensuite le calcul récurrent des $\pi_p(Z^n Gr)$: on voit d'abord que $\pi_p(Z^n Gr) = 0$ pour p distinct de n et $n-1$, et on a la suite exacte

$$0 \to \pi_n(Z^n Gr) \to \pi_{n-1}(Z^{n-1} Gr) \to \pi_{n-1}(Gr^{n-1}) \to \pi_{n-1}(Z^n Gr) \to 0,$$

qui identifie $\pi_n(Z^n Gr)$ à un sous-groupe de $\pi_{n-1}(Z^{n-1} Gr)$. On commence par $\pi_0(Z^0 Gr) = \Gamma(t)$, et on montre alors par récurrence que $\pi_{n-1}(Z^{n-1} Gr) \to \pi_{n-1}(Gr^{n-1})$ est surjectif, ce qui entraîne $\pi_{n-1}(Z^n Gr) = 0$. La récurrence donne

$$\pi_n(Z^n Gr) \approx \Gamma^n(t),$$

en notant $\Gamma^n(t)$ le sous-module de $\Gamma(t)$ formé des polynômes d'ordre $\geqq n$ (pas de terme en $1, t, \ldots, \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$). De plus, l'élément de $\pi_n(Z^n Gr)$ qui correspond à $\frac{t^q}{q!}$ dans cet isomorphisme ($q \geqq n$) est défini par la forme différentielle

$$\frac{(x_n)^{q-n}}{(q-n)!} (\delta x_1) \ldots (\delta x_n) \in Gr_n^n,$$

forme dont le δ est nul. Enfin, l'homomorphisme $\pi_n(Z^n Gr) \to \pi_n(Gr^n)$ envoie $\frac{t^q}{q!}$ en 0 si $q > n$, et $\frac{t^n}{n!}$ sur le générateur de $\pi_n(Gr^n) \approx \mathbb{Z}$, ce qui prouve bien $\pi_{n+1}(Gr^{n+1}) = \Gamma^{n+1}(t)$.

Ainsi l'axiome (b′) est bien vérifié par Gr^*, et on a donc, pour tout ensemble simplicial X, des homomorphismes injectifs

$$H^n(Gr^*(X)) \to H^n(X; \Gamma(t))$$

dont l'image est exactement $H^n(X; \Gamma^n(t))$. Ces homomorphismes sont compatibles avec la multiplication.

Observons que chaque entier N définit un DG-endomorphisme θ^N de Gr^*, à savoir celui qui multiplie t et chaque x_i par l'entier N. Pour chaque entier $r \geqq 0$, les éléments de Gr_p^* qui sont multipliés par N^r dans l'endomorphisme θ^N forment un sous-module $Gr_p^{*,r}$ stable par δ, et la collection des $Gr_p^{*,r}$ (pour r donné, p variable) est un sous-module différentiel simplicial de Gr^*, qu'on notera $Gr^{*,r}$; Gr^* est la somme directe des $Gr^{*,r}$ lorsque r varie.

On a un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} H^*(Gr^*(X)) & \longrightarrow & H^*(Gr^*(X)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ H^*(X;\Gamma(t)) & \longrightarrow & H^*(X;\Gamma(t)) \end{array}$$

où φ désigne l'injection définie plus haut, la première flèche horizontale est définie par l'endomorphisme θ^N, et la deuxième flèche horizontale est définie par l'application $\Gamma(t) \to \Gamma(t)$ qui envoie t en Nt. On en déduit que φ envoie $H^*(Gr^{*,r}(X))$ dans $H^*(X;\Gamma_r(t))$, en notant $\Gamma_r(t)$ le sous-groupe de $\Gamma(t)$ formé des multiples entiers de $\frac{t^r}{r!}$. (On a donc $\Gamma^q(t) = \bigoplus_{r \geqq q} \Gamma_r(t)$). Comme l'image de φ^n: $H^n(Gr^*(X) \to H^n(X;\Gamma(t))$ est $H^n(X;\Gamma^n(t))$, on conclut:

(1) $H^n(Gr^{*,r}(X)) = 0$ pour $r < n$; ce qui résulte aussi du fait que $Gr^{n,r}(X) = 0$ pour $r < n$);

(2) pour $r \geqq n$, φ^n induit un isomorphisme

$$H^n(Gr^{*,r}(X)) \xrightarrow{\approx} H^n(X;\Gamma_r(t)).$$

Observons d'ailleurs que $H^n(X;\Gamma_r(t))$ est isomorphe à $H^n(X;\mathbb{Z})$ (on envoie le générateur de $\Gamma_r(t)$ sur 1). D'où un isomorphisme $H^n(Gr^{*,r}(X)) \xrightarrow{\approx} H^n(X;\mathbb{Z})$ pour chaque entier $r \geqq n$. Quant à la structure multiplicative, on voit que l'on a un diagramme commutatif (pour $r \geqq p$, $s \geqq q$):

$$\begin{array}{ccc} H^p(Gr^{*,r}(X)) \otimes H^q(Gr^{*,s}(X) & \longrightarrow & H^{p+q}(Gr^{*,r+s}(X)) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle\approx} & & \Big\downarrow{\scriptstyle\approx} \\ H^p(X;\mathbb{Z}) \otimes H^q(X;\mathbb{Z}) & \xrightarrow[\mu_{r,s}]{} & H^{p+q}(X;\mathbb{Z}) \end{array}$$

où la première flèche horizontale est définie par la multiplication dans $Gr^*(X)$ (multiplication qui est "commutative"), et où $\mu_{r,s}$ désigne $\frac{(r+s)!}{r!s!}$ fois l'application de multiplication dans la cohomologie entière de X. Comme les entiers $\frac{(r+s)!}{r!s!}$ (lorsque r parcourt l'ensemble des entiers $\geqq p$ et s l'ensemble des entiers $\geqq q$) sont premiers entre eux dans leur ensemble, on voit que la connaissance des applications $\mu_{r,s}$ détermine la multiplication dans l'algèbre de cohomologie $H^*(X;\mathbb{Z})$.

Références

1. Deligne, P., Griffiths, Ph., Morgan, J., Sullivan, D.: Real homotopy theory of Kähler manifolds. Inventiones math. **29**, 245–274 (1975)
2. Godement, R.: Topologie algébrique et théorie des faisceaux. Paris: Hermann 1958
3. Séminaire H. Cartan, 1956–57, Exposé 1, prop. 1.
4. Sullivan, D.: Topology of manifolds and differential forms. Proc. Conference on manifolds, Tokyo 1973
5. Swan, R.G.: Thom's theory of differential forms on simplicial sets. Topology **14**, 271–273 (1975)

Note Added in Proof. En terminant cet article, je prends connaissance d'un preprint d'Edward Y. Miller où des résultats analogues à ceux du no. 7 sont exposés.