

第一章实数集与函数

§ 1 实数

授课章节：第一章实数集与函数——§ 1 实数

教学目的：使学生掌握实数的基本性质.

教学重点：

(1) 理解并熟练运用实数的有序性、稠密性和封闭性；

(2) 牢记并熟练运用实数绝对值的有关性质以及几个常见的不等式.(它们是分析论证的重要工具)

教学难点：实数集的概念及其应用.

教学方法：讲授.(部分内容自学)

教学程序：

引 言

上节课中，我们与大家共同探讨了《数学分析》这门课程的研究对象、主要内容等话题. 从本节课开始，我们就基本按照教材顺序给大家介绍这门课程的主要内容. 首先，从大家都较为熟悉的实数和函数开始.

[问题]为什么从“实数”开始.

答：《数学分析》研究的基本对象是函数，但这里的“函数”是定义在“实数集”上的(后继课《复变函数》研究的是定义在复数集上的函数). 为此，我们要先了解一下实数的有关性质.

一、实数及其性质

1、实数

有理数:任何有理数都可以用分数形式 $\frac{q}{p}$ (p, q 为整数且 $q \neq 0$)表示,
也可以用有限十进小数或无限十进小数来表示.
无理数:用无限十进不循环小数表示.

$R = \{x | x \text{ 为实数} \}$ -- 全体实数的集合.

[问题]有理数与无理数的表示不统一，这对统一讨论实数是不利的. 为以下讨论的需要，我们把“有限小数”(包括整数)也表示为“无限小数”. 为此作如下规定：

对于正有限小数 $x = a_0.a_1a_2 \cdots a_n$ ，其中

$0 \leq a_i \leq 9 \quad i=1, 2, \cdots, n; a_n \neq 0$ 为非负整数，记 $x = a_0.a_1 \cdots a_{n-1}(a_n - 1)9999 \cdots$;

对于正整数 $x = a_0$ ，则记 $x = (a_0 - 1).9999 \cdots$ ；对于负有限小数(包括负整数) y ，

则先将 $-y$ 表示为无限小数，现在所得的小数之前加负号. 0 表示为

$0 = 0.0000 \cdots$

例：
 $2.001 \rightarrow 2.0009999\cdots$;
 $3 \rightarrow 2.9999\cdots$;
 $-2.001 \rightarrow -2.009999\cdots$;
 $-3 \rightarrow -2.9999\cdots$

利用上述规定，任何实数都可用一个确定的无限小数来表示。在此规定下，如何比较实数的大小？

2、两实数大小的比较

1) **定义 1** 给定两个非负实数 $x = a_0.a_1\cdots a_n\cdots$, $y = b_0.b_1\cdots b_n\cdots$. 其中 a_0, b_0 为非负整数, a_k, b_k ($k=1,2,\cdots$) 为整数, $0 \leq a_k \leq 9, 0 \leq b_k \leq 9$. 若有 $a_k = b_k, k = 0, 1, \cdots$, 则称 x 与 y 相等, 记为 $x = y$; 若 $a_0 > b_0$ 或存在非负整数 l , 使得 $a_k = b_k, k = 0, 1, 2, \cdots, l$, 而 $a_{l+1} > b_{l+1}$, 则称 x 大于 y 或 y 小于 x , 分别记为 $x > y$ 或 $y < x$. 对于负实数 x, y , 若按上述规定分别有 $-x = -y$ 或 $-x > -y$, 则分别称为 $x = y$ 与 $x < y$ (或 $y > x$).

规定: 任何非负实数大于任何负实数.

2) 实数比较大小的等价条件 (通过有限小数来比较).

定义 2 (不足近似与过剩近似): $x = a_0.a_1\cdots a_n\cdots$ 为非负实数, 称有理数 $x_n = a_0.a_1\cdots a_n$ 为实数 x 的 n 位不足近似; $\overline{x}_n = x_n + \frac{1}{10^n}$ 称为实数 x 的 n 位过剩近似, $n = 0, 1, 2, \cdots$.

对于负实数 $x = -a_0.a_1\cdots a_n\cdots$, 其 n 位不足近似 $x_n = -a_0.a_1\cdots a_n - \frac{1}{10^n}$; n 位过剩近似 $\overline{x}_n = -a_0.a_1\cdots a_n$.

注: 实数 x 的不足近似 x_n 当 n 增大时不减, 即有 $x_0 \leq x_1 \leq x_2 \leq \cdots$; 过剩近似 \overline{x}_n 当 n 增大时不增, 即有 $x_0 \geq x_1 \geq x_2 \geq \cdots$.

命题: 记 $x = a_0.a_1\cdots a_n\cdots$, $y = b_0.b_1\cdots b_n\cdots$ 为两个实数, 则 $x > y$ 的等价条件是: 存在非负整数 n , 使 $x_n > \overline{y}_n$ (其中 x_n 为 x 的 n 位不足近似, \overline{y}_n 为 y 的 n 位过剩近似).

命题应用

例 1. 设 x, y 为实数, $x < y$, 证明存在有理数 r , 满足 $x < r < y$.

证明：由 $x < y$ ，知：存在非负整数 n ，使得 $\overline{x_n} < y_n$ 。令 $r = \frac{1}{2}(\overline{x_n} + y_n)$ ，则 r 为有理数，且

$$x \leq \overline{x_n} < r < y_n \leq y. \text{ 即 } x < r < y.$$

3、实数常用性质（详见附录 II. $P_{289} - P_{302}$ ）.

1) 封闭性（实数集 R 对 $+, -, \times, \div$ ）四则运算是封闭的。即任意两个实数的和、差、积、商（除数不为 0）仍是实数。

2) 有序性： $\forall a, b \in R$ ，关系 $a < b, a > b, a = b$ ，三者必居其一，也只居其一。

3) 传递性： $\forall a, b, c \in R$ ，若 $a > b, b > c$ ，则 $a > c$ 。

4) 阿基米德性： $\forall a, b \in R, b > a > 0 \Rightarrow \exists n \in N$ 使得 $na > b$ 。

5) 稠密性：两个不等的实数之间总有另一个实数。

6) 一一对应关系：实数集 R 与数轴上的点有着一一对应关系。

例 2. 设 $\forall a, b \in R$ ，证明：若对任何正数 ε ，有 $a < b + \varepsilon$ ，则 $a \leq b$ 。

（提示：反证法。利用“有序性”，取 $\varepsilon = a - b$ ）

二、绝对值与不等式

1、绝对值的定义

实数 a 的绝对值的定义为 $|a| = \begin{cases} a, & a \geq 0 \\ -a & a < 0 \end{cases}$ 。

2、几何意义

从数轴看，数 a 的绝对值 $|a|$ 就是点 a 到原点的距离。 $|x - a|$ 表示就是数轴上点 x 与 a 之间的距离。

3、性质

1) $|a| = |-a| \geq 0; |a| = 0 \Leftrightarrow a = 0$ （非负性）；

2) $-|a| \leq a \leq |a|$ ；

3) $|a| < h \Leftrightarrow -h < a < h, |a| \leq h \Leftrightarrow -h \leq a \leq h (h > 0)$ ；

4) 对任何 $a, b \in R$ 有 $|a| - |b| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b|$ （三角不等式）；

5) $|ab| = |a| \cdot |b|$ ；

6) $\left| \frac{a}{b} \right| = \frac{|a|}{|b|} \quad (b \neq 0)$ 。

三、几个重要不等式

1、 $a^2 + b^2 \geq 2|ab|$, $|\sin x| \leq 1$. $|\sin x| \leq |x|$.

2、均值不等式:对 $\forall a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}^+$, 记

$$M(a_i) = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad (\text{算术平均值})$$

$$G(a_i) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right)^{\frac{1}{n}}, \quad (\text{几何平均值})$$

$$H(a_i) = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}} = \frac{n}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{a_i}}. \quad (\text{调和平均值})$$

有平均值不等式: $H(a_i) \leq G(a_i) \leq M(a_i)$, 即:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

等号当且仅当 $a_1 = a_2 = \dots = a_n$ 时成立.

3、Bernoulli 不等式: (在中学已用数学归纳法证明过)

$$\forall x > -1, \text{ 有不等式 } (1+x)^n \geq 1+nx, \quad n \in \mathbf{N}.$$

当 $x > -1$ 且 $x \neq 0$, $n \in \mathbf{N}$ 且 $n \geq 2$ 时, 有严格不等式 $(1+x)^n > 1+nx$.

证: 由 $1+x > 0$ 且 $1+x \neq 0$, $\Rightarrow (1+x)^n + n - 1 = (1+x)^n + 1 + 1 + \dots + 1 >$

$$> n \sqrt[n]{(1+x)^n} = n(1+x). \Rightarrow (1+x)^n > 1+nx.$$

4、利用二项展开式得到的不等式: 对 $\forall h > 0$, 由二项展开式

$$(1+h)^n = 1 + nh + \frac{n(n-1)}{2!} h^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} h^3 + \dots + h^n,$$

有 $(1+h)^n >$ 上式右端任何一项.

[练习] P4. 5

[课堂小结]: 实数: $\begin{cases} \text{一 实数及其性质} \\ \text{二 绝对值与不等式} \end{cases}$.

[作业] P4. 1. (1), 2. (2)、(3), 3

§ 2 数集和确界原理

授课章节：第一章实数集与函数——§ 2 数集和确界原理

教学目的：使学生掌握确界原理，建立起实数确界的清晰概念.

教学要求：

(1) 掌握邻域的概念；

(2) 理解实数确界的定义及确界原理，并在有关命题的证明中正确地加以运用.

教学重点：确界的概念及其有关性质（确界原理）.

教学难点：确界的定义及其应用.

教学方法：讲授为主.

教学程序：先通过练习形式复习上节课的内容，以检验学习效果，此后导入新课.

引 言

上节课中我们对数学分析研究的关键问题作了简要讨论；此后又让大家自学了第一章 § 1 实数的相关内容. 下面，我们先来检验一下自学的效果如何！

1、证明：对任何 $x \in \mathbf{R}$ 有：(1) $|x-1|+|x-2| \geq 1$ ；(2)

$|x-1|+|x-2|+|x-3| \geq 2$.

((1) $\because |x-1| = |1+(x-2)| \geq 1-|x-2|, \therefore |x-1|+|x-2| \geq 1$)

((2) $|x-1|+|x-2| \geq 1, |x-2|+|x-3| \geq 1, |x-2|+|x-3| \geq 2$. 三式相加化简即可)

2、证明： $||x|-|y|| \leq |x-y|$.

3、设 $a, b \in \mathbf{R}$ ，证明：若对任何正数 ε 有 $a+b < \varepsilon$ ，则 $a \leq b$.

4、设 $x, y \in \mathbf{R}, x > y$ ，证明：存在有理数 r 满足 $y < r < x$.

[引申]：①由题 1 可联想到什么样的结论呢？这样思考是做科研时的经常的思路之一. 而不要做完就完了！而要多想想，能否具体问题引出一般的结论：一般的方法？②由上述几个小题可以体会出“大学数学”习题与中学的不同；理论性强，概念性强，推理有理有据，而非凭空想象；③课后未布置作业的习题要尽可能多做，以加深理解，语言应用. 提请注意这种差别，尽快掌握本门课程的术语和工具.

本节主要内容：

1、先定义实数集 \mathbf{R} 中的两类主要的数集——区间与邻域；

2、讨论有界集与无界集；

3、由有界集的界引出确界定义及确界存在性定理（确界原理）.

一、区间与邻域

1、区间（用来表示变量的变化范围）

设 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a < b$. 区间 $\begin{cases} \text{有限区间} \\ \text{无限区间} \end{cases}$, 其中

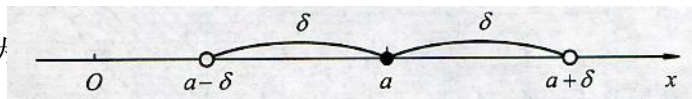
$$\text{有限区间} \begin{cases} \text{开区间: } \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\} = (a, b) \\ \text{闭区间: } \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a, b] \\ \text{半开半闭区间} \begin{cases} \text{闭开区间: } \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\} = [a, b) \\ \text{开闭区间: } \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\} = (a, b] \end{cases} \end{cases}$$

$$\text{无限区间} \begin{cases} \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\} = [a, +\infty). \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\} = (-\infty, a]. \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\} = (a, +\infty). \\ \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\} = (-\infty, a). \\ \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < +\infty\} = \mathbb{R}. \end{cases}$$

2、邻域

联想：“邻居”. 字面意思：“邻近的区域”. 与 a 邻近的“区域”很多，到底哪一类是我们所要讲的“邻域”呢？就是“关于 a 的对称区间”；如何用数学语言来表达呢？

(1) a 的 δ 邻域：设 $a \in \mathbb{R}, \delta > 0$ ，满足不等式 $|x - a| < \delta$ 的全体实数 x 的集合称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a; \delta)$ ，或简记为



$$U(a; \delta) = \{x \mid |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a + \delta).$$

其中 a 称为该邻域的中心， δ 称为该邻域的半径.

(2) 点 a 的空心 δ 邻域

$$U^{\circ}(a; \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\} = (a - \delta, a) \cup (a, a + \delta) \square U^{\circ}(a).$$

(3) a 的 δ 右邻域和点 a 的空心 δ 右邻域

$$U_{+}(a; \delta) = [a, a + \delta) \square U_{+}(a) = \{x \mid a \leq x < a + \delta\};$$

$$U_{+}^{\circ}(a; \delta) = (a, a + \delta) \square U_{+}^{\circ}(a) = \{x \mid a < x < a + \delta\}.$$

(4) 点 a 的 δ 左邻域和点 a 的空心 δ 左邻域

$$U_{-}(a; \delta) = (a - \delta, a] \square U_{-}(a) = \{x \mid a - \delta < x \leq a\};$$

$$U_{-}^{\circ}(a; \delta) = (a - \delta, a) \square U_{-}^{\circ}(a) = \{x \mid a - \delta < x < a\}.$$

(5) ∞ 邻域， $+\infty$ 邻域， $-\infty$ 邻域

$$U(\infty) = \{x \mid |x| > M\}, \text{ (其中 } M \text{ 为充分大的正数);}$$

$$U(+\infty)=\{x|x>M\}, U(-\infty)=\{x|x<-M\}$$

二、有界集与无界集

1、定义1(上、下界): 设 S 为 R 中的一个数集. 若存在数 $M(L)$, 使得一切 $x \in S$ 都有 $x \leq M(x \geq L)$, 则称 S 为有上(下)界的数集. 数 $M(L)$ 称为 S 的上界(下界); 若数集 S 既有上界, 又有下界, 则称 S 为有界集.

闭区间 $[a, b]$ 、开区间 (a, b) (a, b 为有限数)、邻域等都是有界数集,

集合 $E = \{y | y = \sin x, x \in (-\infty, +\infty)\}$ 也是有界数集.

若数集 S 不是有界集, 则称 S 为无界集.

$(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, 0)$, $(0, +\infty)$ 等都是无界数集,

集合 $E = \left\{y \mid y = \frac{1}{x}, x \in (0, 1)\right\}$ 也是无界数集.

注: 1) 上(下)界若存在, 不唯一;

2) 上(下)界与 S 的关系如何? 看下例:

例1 讨论数集 $N_+ = \{n | n \text{ 为正整数}\}$ 的有界性.

解: 任取 $n_0 \in N_+$, 显然有 $n_0 \geq 1$, 所以 N_+ 有下界 1;

但 N_+ 无上界. 因为假设 N_+ 有上界 M , 则 $M > 0$, 按定义, 对任意 $n_0 \in N_+$, 都有 $n_0 \leq M$, 这是不可能的, 如取 $n_0 = [M] + 1$ (符号 $[M]$ 表示不超过 M 的最大整数), 则 $n_0 \in N_+$, 且 $n_0 > M$.

综上所述知: N_+ 是有下界无上界的数集, 因而是无界集.

例2 证明: (1) 任何有限区间都是有界集; (2) 无限区间都是无界集; (3) 由有限数组成的数集是有界集.

[问题]: 若数集 S 有上界, 上界是唯一的吗? 对下界呢? (答: 不唯一, 有无穷多个).

三、确界与确界原理

1、定义

定义2(上确界) 设 S 是 R 中的一个数集, 若数 η 满足: (1) 对一切 $x \in S$,

有 $x \leq \eta$ (即 η 是 S 的上界); (2) 对任何 $\alpha < \eta$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 > \alpha$ (即 η 是 S 的上界中最小的一个), 则称数 η 为数集 S 的**上确界**, 记作 $\eta = \sup S$.

从定义中可以得出: 上确界就是上界中的最小者.

命题 1 $M = \sup E$ 充要条件

1) $\forall x \in E, x \leq M$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in S, \text{使得 } x_0 > M - \varepsilon$.

证明: 必要性, 用反证法. 设 2) 不成立, 则 $\exists \varepsilon_0 > 0$, 使得 $\forall x \in E$, 均有 $x \leq M - \varepsilon_0$, 与 M 是上界中最小的一个矛盾.

充分性 (用反证法), 设 M 不是 E 的上确界, 即 $\exists M_0$ 是上界, 但 $M > M_0$. 令 $\varepsilon = M - M_0 > 0$, 由 2), $\exists x_0 \in E$, 使得 $x_0 > M - \varepsilon = M_0$, 与 M_0 是 E 的上界矛盾.

定义 3 (下确界) 设 S 是 \mathbb{R} 中的一个数集, 若数 ξ 满足: (1) 对一切 $x \in S$, 有 $x \geq \xi$ (即 ξ 是 S 的下界); (2) 对任何 $\beta > \xi$, 存在 $x_0 \in S$, 使得 $x_0 < \beta$ (即 ξ 是 S 的下界中最大的一个), 则称数 ξ 为数集 S 的**下确界**, 记作 $\xi = \inf S$.

从定义中可以得出: 下确界就是下界中的最大者.

命题 2 $\xi = \inf S$ 的充要条件:

1) $\forall x \in E, x \geq \xi$;

2) $\forall \varepsilon > 0, \exists x_0 \in S, \text{有 } x_0 < \xi + \varepsilon$.

上确界与下确界统称为**确界**.

例 3 (1) $S = \left\{ 1 + \frac{(-1)^n}{n} \right\}$, 则 $\sup S = \underline{1}$; $\inf S = \underline{0}$.

(2) $E = \{y \mid y = \sin x, x \in (0, \pi)\}$, 则 $\sup S = \underline{1}$; $\inf S = \underline{0}$.

注: 非空有界数集的上 (或下) 确界是唯一的.

命题 3: 设数集 A 有上 (下) 确界, 则这上 (下) 确界必是唯一的.

证明: 设 $\eta = \sup A$, $\eta' = \sup A$ 且 $\eta \neq \eta'$, 则不妨设 $\eta < \eta'$

$\eta = \sup A \Rightarrow \forall x \in A \text{ 有 } x \leq \eta$

$\eta' = \sup A \Rightarrow \text{对 } \eta < \eta', \exists x_0 \in A \text{ 使 } \eta < x_0, \text{ 矛盾.}$

$$\text{例: } \sup R^- = 0, \quad \sup_{n \in \mathbb{Z}^+} \left(\frac{n}{n+1} \right) = 1, \quad \inf_{n \in \mathbb{Z}^+} \left(\frac{n}{n+1} \right) = \frac{1}{2}$$

$$E = \{-5, 0, 3, 9, 11\} \text{ 则有 } \inf E = -5.$$

开区间 (a, b) 与闭区间 $[a, b]$ 有相同的上确界 b 与下确界 a

例 4 设 S 和 A 是非空数集, 且有 $S \supset A$. 则有 $\sup S \geq \sup A$, $\inf S \leq \inf A$.

例 5 设 A 和 B 是非空数集. 若对 $\forall x \in A$ 和 $\forall y \in B$, 都有 $x \leq y$, 则有 $\sup A \leq \inf B$.

证明: $\forall y \in B$, y 是 A 的上界, $\Rightarrow \sup A \leq y$. $\Rightarrow \sup A$ 是 B 的下界, $\Rightarrow \sup A \leq \inf B$.

例 6 A 和 B 为非空数集, $S = A \cup B$. 试证明: $\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$.

证明: $\forall x \in S$, 有 $x \in A$ 或 $x \in B$, 由 $\inf A$ 和 $\inf B$ 分别是 A 和 B 的下界, 有

$$x \geq \inf A \text{ 或 } x \geq \inf B. \Rightarrow x \geq \min\{\inf A, \inf B\}.$$

即 $\min\{\inf A, \inf B\}$ 是数集 S 的下界,

$$\Rightarrow \inf S \geq \min\{\inf A, \inf B\}. \text{ 又 } S \supset A, \Rightarrow S \text{ 的下界就是 } A \text{ 的下界,}$$

$\inf S$ 是 S 的下界, $\Rightarrow \inf S$ 是 A 的下界, $\Rightarrow \inf S \leq \inf A$; 同理有 $\inf S \leq \inf B$.

$$\text{于是有 } \inf S \leq \min\{\inf A, \inf B\}.$$

综上, 有 $\inf S = \min\{\inf A, \inf B\}$.

1. 数集与确界的关系: 确界不一定属于原集合. 以例 3(2)为例做解释.

2. 确界与最值的关系: 设 E 为数集.

(1) E 的最值必属于 E , 但确界未必, 确界是一种临界点.

(2) 非空有界数集必有确界 (见下面的确界原理), 但未必有最值.

(3) 若 $\max E$ 存在, 必有 $\max E = \sup E$. 对下确界有类似的结论.

4. 确界原理:

Th1.1 (确界原理). 设 S 非空的数集. 若 S 有上界, 则 S 必有上确界; 若 S 有下界, 则 S 必有下确界.

这里我们给一个可以接受的说明 $E \subset \mathbf{R}, E$ 非空, $\exists x \in E$, 我们可以找到一个整数 p , 使得 p 不是 E 上界, 而 $p+1$ 是 E 的上界. 然后我们遍查 $p.1, p.2, \dots, p.9$ 和 $p+1$, 我们可以找到一个 q_0 , $0 \leq q_0 \leq 9$, 使得 $p.q_0$ 不是 E 上界, $p.(q_0+1)$ 是 E 上界, 如果再找第二位小数 q_1 , \dots , 如此下去, 最后得到 $p.q_0q_1q_2\dots$, 它是一个实数, 即为 E 的上确界.

证明: (书上对上确界的情况给出证明, 下面讲对下确界的证明) 不妨设 S 中的元素都为非负数, 则存在非负整数 n , 使得

- 1) $\forall x \in S$, 有 $x > n$;
- 2) 存在 $x_1 \in S$, 有 $x_1 \leq n+1$;

把区间 $(n, n+1]$ 10 等分, 分点为 $n.1, n.2, \dots, n.9$, 存在 n_1 , 使得

- 1) $\forall x \in S$, 有 $x > n.n_1$;
- 2) 存在 $x_2 \in S$, 使得 $x_2 \leq n.n_1 + \frac{1}{10}$.

再对开区间 $(n.n_1, n.n_1 + \frac{1}{10}]$ 10 等分, 同理存在 n_2 , 使得

- 1) 对任何 $x \in S$, 有 $x > n.n_1n_2$;
- 2) 存在 $x_2 \in S$, 使 $x_2 \leq n.n_1n_2 + \frac{1}{10^2}$.

继续重复此步骤, 知对任何 $k=1, 2, \dots$, 存在 n_k 使得

- 1) 对任何 $x \in S$, $x > n.n_1n_2\dots n_k - \frac{1}{10^k}$;
- 2) 存在 $x_k \in S$, $x_k \leq n.n_1n_2\dots n_k$.

因此得到 $\eta = n.n_1n_2\dots n_k\dots$ 以下证明 $\eta = \inf S$.

- (i) 对任意 $x \in S$, $x > \eta$;
- (ii) 对任何 $\alpha > \eta$, 存在 $x' \in S$ 使 $\alpha > x'$.

[作业]: P9 1 (1), (2); 2; 4 (2)、(4); 7

§ 3 函数概念

授课章节: 第一章实数集与函数——§ 3 函数概念

教学目的: 使学生深刻理解函数概念.

教学要求:

(1) 深刻理解函数的定义以及复合函数、反函数和初等函数的定义, 熟悉函数的各种表示法;

(2) 牢记基本初等函数的定义、性质及其图象. 会求初等函数的存在域, 会分析初等函数的复合关系.

教学重点: 函数的概念.

教学难点: 初等函数复合关系的分析.

教学方法: 课堂讲授, 辅以提问、练习、部分内容可自学.

教学程序:

引 言

关于函数概念, 在中学数学中已有了初步的了解. 为便于今后的学习, 本节

将对此作进一步讨论.

一、函数的定义

1. 定义1 设 $D, M \subset R$, 如果存在对应法则 f , 使对 $\forall x \in D$, 存在唯一的一个数 $y \in M$ 与之对应, 则称 f 是定义在数集 D 上的函数, 记作

$$f: D \rightarrow M$$

$$x \mapsto y.$$

数集 D 称为函数 f 的定义域, x 所对应的 y , 称为 f 在点 x 的函数值, 记为 $f(x)$. 全体函数值的集合称为函数 f 的值域, 记作 $f(D)$.

$$\text{即 } f(D) = \{y \mid y = f(x), x \in D\}.$$

2. 几点说明

(1) 函数定义的记号中 “ $f: D \rightarrow M$ ” 表示按法则 f 建立 D 到 M 的函数关系, $x \mapsto y$ 表示这两个数集中元素之间的对应关系, 也记作 $x \mapsto f(x)$. 习惯上称 x 为自变量, y 为因变量.

(2) 函数有三个要素, 即定义域、对应法则和值域. 当对应法则和定义域确定后, 值域便自然确定下来. 因此, 函数的基本要素为两个: 定义域和对应法则. 所以函数也常表示为: $y = f(x), x \in D$.

由此, 我们说两个函数相同, 是指它们有相同的定义域和对应法则.

例如: 1) $f(x) = 1, x \in R, g(x) = 1, x \in R \setminus \{0\}$. (不相同, 对应法则相同, 定义域不同)

2) $\varphi(x) = |x|, x \in R, \psi(x) = \sqrt{x^2}, x \in R$. (相同, 只是对应法则的表达形式不同).

(3) 函数用公式法 (解析法) 表示时, 函数的定义域常取使该运算式子有意义的自变量的全体, 通常称为存在域 (自然定义域). 此时, 函数的记号中的定义域可省略不写, 而只用对应法则 f 来表示一个函数. 即 “函数 $y = f(x)$ ” 或 “函数 f ”.

(4) “映射” 的观点来看, 函数 f 本质上是映射, 对于 $a \in D$, $f(a)$ 称为映射 f 下 a 的象. a 称为 $f(a)$ 的原象.

(5) 函数定义中, $\forall x \in D$, 只能有唯一的一个 y 值与它对应, 这样定义的函数称为“单值函数”, 若对同一个 x 值, 可以对应多于一个 y 值, 则称这种函数为多值函数. 本书中只讨论单值函数 (简称函数).

二、函数的表示方法

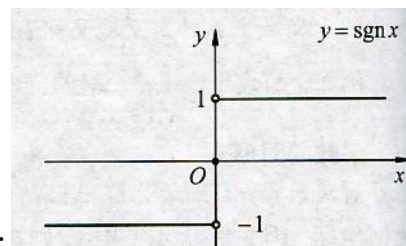
1 主要方法: 解析法 (公式法)、列表法 (表格法) 和图象法 (图示法).

2 可用“特殊方法”来表示的函数.

1) 分段函数: 在定义域的不同部分用不同的公式来表示.

例如 $\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, (符号函数)

(借助于 $\operatorname{sgn} x$ 可表示 $f(x) = |x|$, 即 $f(x) = |x| = x \operatorname{sgn} x$).



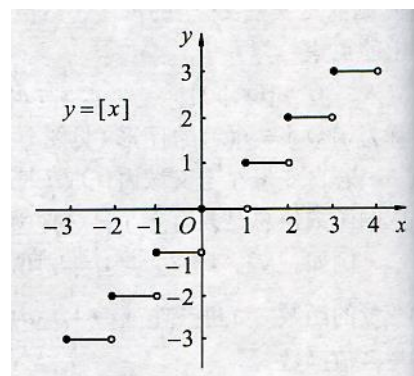
2) 用语言叙述的函数. (注意: 以下函数不是分段函数)

例 1) $y = [x]$ (取整函数)

比如: $[3.5] = 3$, $[3] = 3$, $[-3.5] = -4$.

常有 $[x] \leq x < [x] + 1$, 即 $0 \leq x - [x] < 1$.

与此有关的一个函数 $y = x - [x] = \{x\}$ (非负小数函数) 图形是一条大锯, 画出图看一看.



2) 狄利克雷 (Dirichlet) 函数

$$D(x) = \begin{cases} 1, & \text{当 } x \text{ 为有理数,} \\ 0, & \text{当 } x \text{ 为无理数,} \end{cases}$$

这是一个病态函数, 很有用处, 却无法画出它的图形. 它是周期函数, 但却没有最小周期, 事实上任一有理数都是它的周期.

3) 黎曼 (Riemann) 函数

$$R(x) = \begin{cases} \frac{1}{q}, & \text{当 } x = \frac{p}{q} (p, q \in \mathbb{N}_+, \frac{p}{q} \text{ 为既约分数),} \\ 0, & \text{当 } x = 0, 1 \text{ 和 } (0, 1) \text{ 内的无理数.} \end{cases}$$

三 函数的四则运算

给定两个函数 $f, x \in D_1, g, x \in D_2$, 记 $D = D_1 \cup D_2$, 并设 $D \neq \emptyset$, 定义 f 与 g 在 D 上的和、差、积运算如下:

$$\begin{aligned} F(x) &= f(x) + g(x), x \in D & ; & & G(x) &= f(x) - g(x), x \in D & ; \\ H(x) &= f(x)g(x), x \in D. \end{aligned}$$

若在 D 中除去使 $g(x)=0$ 的值, 即令 $D^{\square}=D\setminus\{x|g(x)\neq 0, x\in D_2\}\neq\phi$, 可在 D^{\square}

上定义 f 与 g 的商运算如下: $L(x)=\frac{f(x)}{g(x)}, x\in D^{\square}$.

注: 1) 若 $D=D_1\cup D_2=\phi$, 则 f 与 g 不能进行四则运算.

2) 为叙述方便, 函数 f 与 g 的和、差、积、商常分别写为:

$$f+g, f-g, fg, \frac{f}{g}.$$

四、复合运算

1. 引言

在有些实际问题中函数的自变量与因变量通过另外一些变量才建立起它们之间的对应关系.

例: 质量为 m 的物体自由下落, 速度为 v , 则功率 E 为

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 \\ v &= gt \end{aligned} \right\} \Rightarrow E = \frac{1}{2}mg^2t^2.$$

抽去该问题的实际意义, 我们得到两个函数 $f(v)=\frac{1}{2}mv^2, v=gt$, 把 $v(t)$ 代

入 f , 即得

$$f(v(t)) = \frac{1}{2}mg^2t^2.$$

这样得到函数的过程称为“函数复合”, 所得到的函数称为“复合函数”.

【问题】任给两个函数都可以复合吗? 考虑下例;

$$y=f(u)=\arcsin u, u\in D=[-1,1], u=g(x)=2+x^2, x\in E=R.$$

就不能复合, 结合上例可见, 复合的前提条件是“内函数”的值域与“外函数”的定义域的交集不空(从而引出下面定义).

2. 定义(复合函数) 设有两个函数 $y=f(u), u\in D, u=g(x), x\in E$,

$E^{\square}=\{x|f(x)\in D\}\cap E$, 若 $E^{\square}\neq\phi$, 则对每一个 $x\in E^{\square}$, 通过 g 对应 D 内唯一一个值 u , 而 u 又通过 f 对应唯一一个值 y , 这就确定了一个定义在 E^{\square} 上的函数, 它以 x 为自变量, y 因变量, 记作 $y=f(g(x)), x\in E^{\square}$ 或 $y=(f\circ g)(x), x\in E^{\square}$. 简记为 $f\circ g$. 称为函数 f 和 g 的复合函数, 并称 f 为外函数, g 为内函数, u 为中间变

量.

3. 例子

例 $y = f(u) = \sqrt{u}$, $u = g(x) = 1 - x^2$. 求 $(f \circ g)(x) = f[g(x)]$ 并求定义域.

例 (1)

$$f(1-x) = x^2 + x + 1, \quad f(x) = \underline{\hspace{2cm}}.$$

$$(2) \quad f\left(x + \frac{1}{x}\right) = x^2 + \frac{1}{x^2}. \quad \text{则}$$

$$f(x) = (\quad)$$

$$\text{A. } x^2, \quad \text{B. } x^2 + 1, \quad \text{C. } x^2 - 2, \quad \text{D. } x^2 + 2.$$

例 讨论函数 $y = f(u) = \sqrt{u}, u \in [0, +\infty)$ 与函数 $u = g(x) = \sqrt{1-x^2}, x \in R$ 能否进行复合, 求复合函数.

4 说明

1) 复合函数可由多个函数相继复合而成. 每次复合, 都要验证能否进行? 在哪个数集上进行? 复合函数的最终定义域是什么?

例如: $y = \sin \sqrt{v}, v = x^2$, 复合成:

$$y = \sin \sqrt{x^2} \quad x \in \mathbb{R}.$$

2) 不仅要会复合, 更要会分解. 把一个函数分解成若干个简单函数, 在分解时也要注意定义域的变化.

$$\textcircled{1} y = \log_a \sqrt{1-x^2}, x \in (0, 1) \rightarrow y = \log_a u, u = \sqrt{z}, z = 1-x^2.$$

$$\textcircled{2} y = \arcsin \sqrt{x^2+1} \rightarrow y = \arcsin u, u = \sqrt{v}, v = x^2+1.$$

$$\textcircled{3} y = 2^{\sin^2 x} \rightarrow y = 2^u, u = v^2, v = \sin x.$$

五、反函数

1. 引言

在函数 $y = f(x)$ 中把 x 叫做自变量, y 叫做因变量. 但需要指出的是, 自变量与因变量的地位并不是绝对的, 而是相对的, 例如: $f(u) = \sqrt{u}, u = t^2 + 1$, 那么 u 对于 f 来讲是自变量, 但对 t 来讲, u 是因变量.

习惯上说函数 $y = f(x)$ 中 x 是自变量, y 是因变量, 是基于 y 随 x 的变化现

时变化. 但有时我们不仅要研究 y 随 x 的变化状况, 也要研究 x 随 y 的变化的状况. 对此, 我们引入反函数的概念.

2. 反函数概念

定义 设 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是一函数, 如果 $\forall x_1, x_2 \in X$, 由 $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

(或由 $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$), 则称 f 在 X 上是 1-1 的.

若 $f: X \rightarrow Y$, $Y = f(X)$, 称 f 为满的.

若 $f: X \rightarrow Y$ 是满的 1-1 的, 则称 f 为 1-1 对应.

$f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 是 1-1 的意味着 $y = f(x)$ 对固定 y 至多有一个解 x , $f: X \rightarrow Y$ 是 1-1 的意味着对 $y \in Y$, $y = f(x)$ 有且仅有一个解 x .

定义 设 $f: X \rightarrow Y$ 是 1-1 对应. $\forall y \in Y$, 由 $y = f(x)$ 唯一确定一个 $x \in X$, 由这种对应法则所确定的函数称为 $y = f(x)$ 的反函数, 记为 $x = f^{-1}(y)$.

反函数的定义域和值域恰为原函数的值域和定义域

$$\begin{aligned} f: X &\rightarrow Y \\ f^{-1}: Y &\rightarrow X \end{aligned}$$

显然有

$$\begin{aligned} f^{-1} \circ f &= I: X \rightarrow X \quad (\text{恒等变换}) \\ f \circ f^{-1} &= I: Y \rightarrow Y \quad (\text{恒等变换}) \\ (f^{-1})^{-1} &= f: X \rightarrow Y. \end{aligned}$$

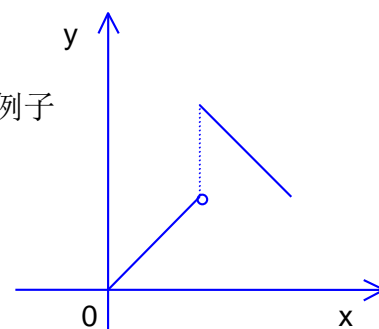
从方程角度看, 函数和反函数没什么区别, 作为函数, 习惯上我们还是把反函数记为 $y = f^{-1}(x)$, 这样它的图形与 $y = f(x)$ 的图形是关于对角线 $y = x$ 对称的.

严格单调函数是 1-1 对应的, 所以严格单调函数有反函数.

但 1-1 对应的函数 (有反函数) 不一定是严格单调的, 看下面例子

$$f(x) = \begin{cases} x, & 0 \leq x < 1 \\ 3-x, & 1 \leq x \leq 2 \end{cases}$$

它的反函数即为它自己.



实际求反函数问题可分为二步进行:

1. 确定 $f: X \rightarrow Y$ 的定义域 X 和值域 Y , 考虑 1-1 对应条件. 固定 $y \in Y$, 解方程 $f(x) = y$ 得出 $x = f^{-1}(y)$.

2. 按习惯, 自变量 x 、因变量 y 互换, 得 $y = f^{-1}(x)$.

例 求 $y = sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 的反函数.

解 固定 y , 为解 $y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$, 令 $e^x = z$, 方程变为

$$2zy = z^2 - 1$$

$$z^2 - 2zy - 1 = 0$$

$$z = y \pm \sqrt{y^2 + 1} \quad (\text{舍去 } y - \sqrt{y^2 + 1})$$

得 $x = \ln(y + \sqrt{y^2 + 1})$, 即 $y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) = sh^{-1}(x)$, 称为反双曲正弦.

定理 给定函数 $y = f(x)$, 其定义域和值域分别记为 X 和 Y ,

若在 Y 上存在函数 $g(y)$, 使得 $g(f(x)) = x$, 则有 $g(y) = f^{-1}(y)$.

分析: 要证两层结论: 一是 $y = f(x)$ 的反函数存在, 我们只要证它是 1-1 对应就行了; 二是要证 $g(y) = f^{-1}(y)$.

证 要证 $y = f(x)$ 的反函数存在, 只要证 $f(x)$ 是 X 到 Y 的 1-1 对应.

$\forall x_1, x_2 \in X$, 若 $f(x_1) = f(x_2)$, 则由定理条件, 我们有

$$g(f(x_1)) = x_1$$

$$g(f(x_2)) = x_2$$

$\Rightarrow x_1 = x_2$, 即 $f: X \rightarrow Y$ 是 1-1 对应.

再证 $g(y) = f^{-1}(y)$. $\forall y \in Y, \exists x \in X$, 使得 $y = f(x)$.

由反函数定义 $x = f^{-1}(y)$, 再由定理条件

$$g(y) = g(f(x)) = x \Rightarrow g(y) = f^{-1}(y)$$

例 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, 若 $f(f(x))$ 存在唯一 ($\exists!$) 不动点, 则 $f(x)$ 也

证 存在性, 设 $x^* = f[f(x^*)]$, $f(x^*) = f \circ f[f(x^*)]$,

即 $f(x^*)$ 是 $f \circ f$ 的不动点, 由唯一性 $f(x^*) = x^*$,

即存在 $f(x)$ 的不动点 x^* .

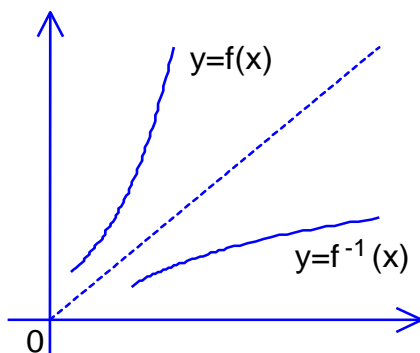
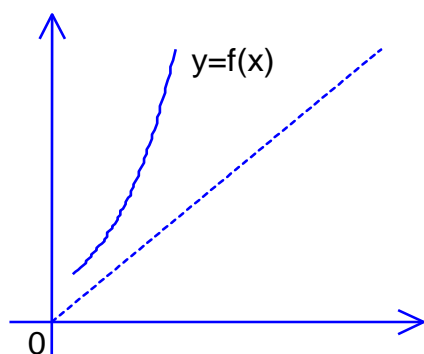
唯一性: 设 $\bar{x} = f(\bar{x})$, $\bar{x} = f(\bar{x}) = f(f(\bar{x}))$,

说明 \bar{x} 是 $f \circ f$ 的不动点, 由唯一性, $\bar{x} = x^*$.

从映射的观点看函数.

设函数 $y = f(x), x \in D$. 满足: 对于值域 $f(D)$ 中的每一个 y ,

且只有一个值 x , 使得 $f(x) = y$, 则按此对应法则得到一个定义在 $f(D)$ 上



的函数, 称这个函数为 f 的反函数, 记作

$f^{-1}: f(D) \rightarrow D, (y \mapsto x) \text{ 或 } x = f^{-1}(y), y \in f(D).$

3、注释

a) 并不是任何函数都有反函数，从映射的观点看，函数 f 有反函数，意味着 f 是 D 与 $f(D)$ 之间的一个一一映射，称 f^{-1} 为映射 f 的逆映射，它把 $f(D) \rightarrow D$;

b) 函数 f 与 f^{-1} 互为反函数，并有： $f^{-1}(f(x)) \equiv x, x \in D$,
 $f(f^{-1}(x)) \equiv y, y \in f(D).$

c) 在反函数的表示 $x = f^{-1}(y), y \in f(D)$ 中，是以 y 为自变量， x 为因变量.

若按习惯做法用 x 做为自变量的记号， y 作为因变量的记号，则函数 f 的反函数 f^{-1} 可以改写为

$y = f^{-1}(x), x \in f(D).$

应该注意，尽管这样做了，但它们的表示同一个函数，因为其定义域和对应法则相同，仅是所用变量的记号不同而已. 但它们的图形在同一坐标系中画出时有所差别.

六、初等函数

1. 基本初等函数（6类）

常量函数 $y = C$ (C 为常数);

幂函数 $y = x^{\alpha} (\alpha \in R)$;

指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$;

对数函数 $y = \log_a x \quad a > 0, a \neq 1$;

三角函数 $y = \sin x, y = \cos x, y = \tan x, y = \cot x$;

反三角函数 $y = \arcsin x, y = \arccos x, y = \arctan x, y = \operatorname{arccot} x$.

注：幂函数 $y = x^{\alpha} (\alpha \in R)$ 和指数函数 $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ 都涉及乘幂，而在中学数学课程中只给了有理指数乘幂的定义. 下面我们借助于确界来定义无理指数幂，便它与有理指数幂一起构成实指数乘幂，并保持有理指数幂的基本性质.

定义 2. 给定实数 $a > 0, a \neq 1$, 设 x 为无理数, 我们规定:

$$a^x = \begin{cases} \sup_{r < x} \{a^r \mid r \text{ 为有理数}\}, & \text{当 } a > 1 \text{ 时,} \\ \inf_{r < x} \{a^r \mid r \text{ 为有理数}\}, & \text{当 } 0 < a < 1 \text{ 时.} \end{cases}$$

这样解决了中学数学仅对有理数 x 定义 a^x 的缺陷.

[问题]: 这样的定义有意义否? 更明确一点相应的“确界是否存在呢?”

2. 初等函数

定义 3. 由基本初等函数经过在有限次四则运算与复合运算所得到的函数, 统称为初等函数

$$\text{如: } y = 2 \sin x + \cos^2 x, y = \sin\left(\frac{1}{x}\right), y = \log_a x + \frac{e^{\sin \sqrt{x}} - 1}{x^2}, y = |x|.$$

不是初等函数的函数, 称为非初等函数. 如 Dirichlet 函数、Riemann 函数、取整函数等都是非初等函数.

注: 初等函数是本课程研究的主要对象. 为此, 除对基本初等函数的图象与性质应熟练掌握外, 还应常握确定初等函数的定义域. 确定定义域时应注意两点.

例 2. 求下列函数的定义域.

$$(1) \quad y = \sqrt{\frac{x}{x-1}}; \quad (2) \quad y = \ln |\sin x|.$$

3. 初等函数的几个特例: 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 都是初等函数, 则

$$(1) \quad |f(x)| \text{ 是初等函数, 因为 } |f(x)| = \sqrt{(f(x))^2}.$$

$$(2) \quad \Phi(x) = \max\{f(x), g(x)\} \text{ 和 } \phi(x) = \min\{f(x), g(x)\} \text{ 都是初等函数,}$$

$$\text{因为 } \Phi(x) = \max\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) + |f(x) - g(x)|],$$

$$\phi(x) = \min\{f(x), g(x)\} = \frac{1}{2}[f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|].$$

$$(3) \quad \text{幂指函数 } (f(x))^{g(x)} \quad (f(x) > 0) \text{ 是初等函数, 因为}$$

$$(f(x))^{g(x)} = e^{\ln(f(x))^{g(x)}} = e^{g(x) \ln f(x)}.$$

[作业] P_{15} : 3; 4: (2)、(3); 5: (2); 7: (3); 11

§ 4 具有某些特性的函数

授课章节: 第一章实数集与函数——§ 4 具有某些特性的函数

教学目的: 熟悉与初等函数性态有关的一些常见术语.

教学目的: 深刻理解有界函数、单调函数的定义; 理解奇偶函数、周期函数的定义;

会求一些简单周期函数的周期.

教学重点: 函数的有界性、单调性.

教学难点: 周期函数周期的计算、验证.

教学方法: 有界函数讲授, 其余的列出自学题纲, 供学生自学完成.

教学程序:

引 言

在本节中, 我们将介绍以后常用的几类具有某些特性的函数, 如有界函数、单调函数、奇偶函数与周期函数. 其中, 有些概念在中学里已经叙述过, 因此, 这里只是简单地提一下. 与“有界集”的定义类似, 先谈谈有上界函数和有下界函数.

一、有界函数

1、有上界函数、有下界函数的定义

定义 1 设 f 为定义在 D 上的函数, 若存在数 $M(L)$, 使得对每一个 $x \in D$ 有 $f(x) \leq M (f(x) \geq L)$, 则称 f 为 D 上的有上(下)界函数, $M(L)$ 称为 f 在 D 上的一个上(下)界.

注: (1) f 在 D 上有上(下)界, 意味着值域 $f(D)$ 是一个有上(下)界的数集;

(2) 又若 $M(L)$ 为 f 在 D 上的一个上(下)界, 则任何大于 M (小于 L) 的数也是 f 在 D 上的上(下)界. 所以, 函数的上(下)界若存在, 则不是唯一的, 例如: $y = \sin x$, 1 是其一个上界, 下界为 -1 , 则易见任何小于 -1 的数都可作为其下界; 任何大于 1 的数都可作为其上界;

(3) 任给一个函数, 不一定有上(下)界;

(4) 由 (1) 及“有界集”定义, 可类比给出“有界函数”定义:

f 在 D 上有界 $\Leftrightarrow f(D)$ 是一个有界集 $\Leftrightarrow f$ 在 D 上既有上界又有下界 $\Leftrightarrow f$ 在 D 上的有上界函数, 也为 D 上的有下界函数.

2、有界函数定义

定义 2 设 f 为定义在 D 上的函数. 若存在正数 M , 使得对每一个 $x \in D$ 有 $|f(x)| \leq M$, 则称 f 为 D 上的有界函数.

注: (1) 几何意义: f 为 D 上的有界函数, 则 f 的图象完全落在 $y = M$ 和 $y = -M$ 之间;

(2) f 在 D 上有界 $\Leftrightarrow f$ 在 D 上既有上界又有下界; 例子: $y = \sin x, y = \cos x$;

(3) 关于函数 f 在 D 上无上界、无下界或无界的定义.

3、例题

例 1 证明 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 有界的充要条件为: $\exists M, m$, 使得对 $\forall x \in X, m \leq f(x) \leq M$.

证明 如果 $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ 有界, 按定义 $\exists M > 0, \forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leq M$, 即

$-M \leq f(x) \leq M$, 取 $m = -M$, $M = M$ 即可.

反之如果 $\exists M, m$ 使得 $\forall x \in X, m \leq f(x) \leq M$, 令 $M_0 = \max\{|M|+1, |m|\}$, 则 $|f(x)| \leq M_0$, 即 $\exists M_0 > 0$, 使得对 $\forall x \in X$ 有 $|f(x)| \leq M_0$, 即 $f: X \rightarrow \mathbf{R}$ 有界.

例 2. 证明 $f(x) = \frac{1}{x}$ 为 $(0, 1]$ 上的无上界函数.

例 3. 设 f, g 为 D 上的有界函数. 证明: (1) $\inf_{x \in D} f(x) + \inf_{x \in D} g(x) \leq \inf_{x \in D} \{f(x) + g(x)\}$;

(2) $\sup_{x \in D} \{f(x) + g(x)\} \leq \sup_{x \in D} f(x) + \sup_{x \in D} g(x)$.

例 4 验证函数 $f(x) = \frac{5x}{2x^2 + 3}$ 在 \mathbf{R} 内有界.

解法一 由 $2x^2 + 3 = (\sqrt{2}x)^2 + (\sqrt{3})^2 \geq 2|\sqrt{2}x \cdot \sqrt{3}| = 2\sqrt{6}|x|$, 当 $x \neq 0$ 时, 有

$$|f(x)| = \left| \frac{5x}{2x^2 + 3} \right| = \frac{5|x|}{2x^2 + 3} \leq \frac{5|x|}{2\sqrt{6}|x|} = \frac{5}{2\sqrt{6}} \leq 3.$$

$$|f(0)| = 0 \leq 3,$$

\therefore 对 $\forall x \in \mathbf{R}$, 总有 $|f(x)| \leq 3$, 即 $f(x)$ 在 \mathbf{R} 内有界.

解法二 令 $y = \frac{5x}{2x^2 + 3}$, \Rightarrow 关于 x 的二次方程 $2yx^2 - 5x + 3y = 0$ 有实数根.

$$\therefore \Delta = 5^2 - 24y^2 \geq 0, \Rightarrow y^2 \leq \frac{25}{24} \leq 4, \Rightarrow |y| \leq 2.$$

解法三 令 $x = \sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{tgt}$, $t \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 对应 $x \in (-\infty, +\infty)$. 于是

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{5x}{2x^2 + 3} = \frac{5\sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{tgt}}{2\left(\sqrt{\frac{3}{2}} \operatorname{tgt}\right)^2 + 3} = \frac{5}{3} \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\operatorname{tgt}}{\operatorname{tg}^2 t + 1} = \frac{5}{\sqrt{6}} \frac{\sin t}{\cos t} \frac{1}{\sec^2 t} = \\ &= \frac{5}{2\sqrt{6}} \sin 2t, \Rightarrow |f(x)| = \left| \frac{5}{2\sqrt{6}} \sin 2t \right| \leq \frac{5}{2\sqrt{6}}. \end{aligned}$$

二、单调函数

定义 3 设 f 为定义在 D 上的函数, $\forall x_1, x_2 \in D, x_1 < x_2$, (1) 若 $f(x_1) \leq f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的增函数; 若 $f(x_1) < f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的严格增函数. (2) 若 $f(x_1) \geq f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的减函数; 若 $f(x_1) > f(x_2)$, 则称 f 为 D 上的严格减函数.

例 5. 证明: $y = x^3$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是严格增函数.

证明: 设 $x_1 < x_2$, $x_1^3 - x_2^3 = (x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$

如 $x_1x_2 < 0$, 则 $x_2 > 0 > x_1 \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$

如 $x_1 x_2 > 0$, 则 $x_1^2 + x_1 x_2 + x_2^2 > 0, \Rightarrow x_1^3 < x_2^3$

故 $x_1^3 - x_2^3 < 0$ 即得证.

例 6. 讨论函数 $y=[x]$ 在 R 上的单调性.

$\because \forall x_1, x_2 \in R$, 当 $x_1 < x_2$ 时, 有 $[x_1] \leq [x_2]$, 但此函数在 R 上的不是严格增函数.

注: 1) 单调性与所讨论的区间有关. 在定义域的某些部分, f 可能单调, 也可能不单调. 所以要会求出给定函数的单调区间;

2) 严格单调函数的几何意义: 其图象无自交点或无平行于 x 轴的部分. 更准确地讲: 严格单调函数的图象与任一平行于 x 轴的直线至多有一个交点. 这一特征保证了它必有反函数.

总结得下面的结论:

定理 1. 设 $y=f(x)$ 为严格增(减)函数, 则 f 必有反函数 f^{-1} , 且 f^{-1} 在其定义域 $f(D)$ 上也是严格增(减)函数.

证明: 设 f 在 D 上严格增函数. 对 $\forall y \in f(D)$, 有 $x \in D$, 使 $f(x)=y$. 下面证明这样的 x 只有一个. 事实上, 对于 D 内任一 $x_1 \neq x$, 由于 f 在 D 上严格增函数, 当 $x_1 < x$ 时 $f(x_1) < y$, 当 $x_1 > x$ 时 $f(x_1) > y$, 总之 $f(x_1) \neq y$. 即 $\forall y \in f(D)$, 都只存在唯一的一 $x \in D$, 使得 $f(x)=y$, 从而

例 7 讨论函数 $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上反函数的存在性; 如果 $y=x^2$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上不存在反函数, 在 $(-\infty, +\infty)$ 的子区间上存在反函数否?

结论: 函数的反函数与讨论的自变量的变化范围有关.

例 8 证明: $y=a^x$ 当 $a>1$ 时在 R 上严格增, 当 $0<a<1$ 时在 R 上严格递减.

三、奇函数和偶函数

定义 4. 设 D 为对称于原点的数集, f 为定义在 D 上的函数. 若对每一个 $x \in D$ 有 (1) $f(-x)=-f(x)$, 则称 f 为 D 上的奇函数; (2) $f(-x)=f(x)$, 则称 f 为 D 上的偶函数.

注: (1) 从函数图形上看, 奇函数的图象关于原点对称 (中心对称), 偶函数的图象关于 y 轴对称;

(2) 奇偶性的前提是定义域对称, 因此 $f(x)=x, x \in [0,1]$ 没有必要讨论奇偶性.

(3) 从奇偶性角度对函数分类:
$$\left\{ \begin{array}{l} \text{奇函数: } y=\sin x \\ \text{偶函数: } y=\cos x \\ \text{非奇非偶函数: } y=\sin x + \cos x \\ \text{既奇又偶函数: } y \equiv 0 \end{array} \right. ;$$

(4) 由于奇偶函数对称性的特点, 研究奇偶函数性质时, 只须讨论原点的左边或右边即可 **四、周期函数**

1、定义

设 f 为定义在数集 D 上的函数, 若存在 $\sigma > 0$, 使得对一切 $x \in D$ 有 $f(x \pm \sigma) = f(x)$, 则称 f 为周期函数, σ 称为 f 的一个周期.

2、几点说明:

(1) 若 σ 是 f 的周期, 则 $n\sigma (n \in N_+)$ 也是 f 的周期, 所以周期若存在, 则

不唯一. 如 $y = \sin x, \sigma = 2\pi, 4\pi, \dots$. 因此有如下“基本周期”的说法, 即若在周期函数 f 的所有周期中有一个最小的周期, 则称此最小周期为 f 的“基本周期”, 简称“周期”. 如 $y = \sin x$, 周期为 2π ;

(2) 任给一个函数不一定存在周期, 即使存在周期也不一定有基本周期, 如: 1) $y = x + 1$, 不是周期函数; 2) $y = C$ (C 为常数), 任何正数都是它的周期.

第二章数列极限

引言

为了掌握变量的变化规律, 往往需要从它的变化过程来判断它的变化趋势. 例如有这么一个变量, 它开始是 1, 然后为 $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$ 如此, 一直无尽地变下去, 虽然无尽止, 但它的变化有一个趋势, 这个趋势就是在它的变化过程中越来越接近于零. 我们就说, 这个变量的极限为 0.

在高等数学中, 有很多重要的概念和方法都和极限有关 (如导数、微分、积分、级数等), 并且在实际问题中极限也占有重要的地位. 例如求圆的面积和圆周长 (已知: $S = \pi r^2, l = 2\pi r$), 但这两个公式从何而来?

要知道, 获得这些结果并不容易! 人们最初只知道求多边形的面积和求直线段的长度. 然而, 要定义这种从多边形到圆的过渡就要求人们在观念上, 在思考方法上来一个突破.

问题的困难何在? 多边形的面积其所以为好求, 是因为它的周界是一些直线段, 我们可以把它分解为许多三角形. 而圆呢? 周界处处是弯曲的, 困难就在这个“曲”字上面. 在这里我们面临着“曲”与“直”这样一对矛盾.

辩证唯物主义认为, 在一定条件下, 曲与直的矛盾可以相互转化. 整个圆周是曲的, 每一小段圆弧却可以近似看成是直的; 就是说, 在很小的一段上可以近似地“以直代曲”, 即以弦代替圆弧.

按照这种辩证思想, 我们把圆周分成许多的小段, 比方说, 分成 n 个等长的小段, 代替圆而先考虑其内接正 n 边形. 易知, 正 n 边形周长为

$$l_n = 2nR \sin \frac{\pi}{n}$$

显然, 这个 l_n 不会等于 l . 然而, 从几何直观上可以看出, 只要正 n 边形的边数不断增加. 这些正多边形的周长将随着边数的增加而不断地接近于圆周长. n 越大, 近似程度越高.

但是, 不论 n 多么大, 这样算出来的总还只是多边形的周长. 无论如何它只是周长的近似值, 而不是精确值. 问题并没有最后解决.

为了从近似值过渡到精确值, 我们自然让 n 无限地增大, 记为 $n \rightarrow \infty$. 直观上很明显, 当 $n \rightarrow \infty$ 时, $l_n \rightarrow l$, 记成 $\lim_{n \rightarrow \infty} l_n = l$. ——极限思想.

即圆周长是其内接正多边形周长的极限. 这种方法是我国刘徽 (张晋) 早在第 3 世纪就提出来了, 称为“割圆术”. 其方法就是——无限分割. 以直代曲; 其思想在于“极限”.

除之以外, 象曲边梯形面积的计算均源于“极限”思想. 所以, 我们有必要对极限作深入研究.

§ 1 数列极限的概念

教学目的: 使学生建立起数列极限的准确概念; 会用数列极限的定义证明数列极限等有关命题.

教学要求: 使学生逐步建立起数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义的清晰概念. 深刻理解数列发散、单调、有界和无穷小数列等有关概念. 会应用数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义证明数列的有关命题, 并能运用 $\varepsilon-N$ 语言正确表述数列不以某实数为极限等相应陈述.

教学重点: 数列极限的概念.

教学难点: 数列极限的 $\varepsilon-N$ 定义及其应用.

教学方法: 讲授为主.

教学程序:

一、什么是数列

1 数列的定义

数列就是“一系列数”, 但这“一系列数”并不是任意的一系列数, 而是有一定的规律, 有一定次序性, 具体讲数列可定义如下:

若函数 f 的定义域为全体正整数集合 N_+ , 则称 $f: N_+ \rightarrow R$ 为数列.

注: 1) 根据函数的记号, 数列也可记为 $f(n), n \in N_+$;

2) 记 $f(n) = a_n$, 则数列 $f(n)$ 就可写作为: $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$, 简记为 $\{a_n\}$, 即 $\{f(n) | n \in N_+\} = \{a_n\}$;

3) 不严格的说法: 说 $f(n)$ 是一个数列.

2 数列的例子

$$(1) \left\{ \frac{(-1)^n}{n} \right\}: -1, \frac{1}{2}, -\frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots; \quad (2) \left\{ 1 + \frac{1}{n} \right\}: 2, 1 + \frac{1}{4}, 1 + \frac{1}{3}, 1 + \frac{1}{5}, \dots;$$

$$(3) \{n^2\}: 1, 4, 9, 16, 25, \dots; \quad (4) \{1 + (-1)^{n+1}\}: 2, 0, 2, 0, 2, \dots$$

二、什么是数列极限

1. 引言

对于这个问题, 先看一个例子: 古代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》引用过一句话: “一尺之棰, 日取其半, 万世不竭”. 把每天截下的部分的长度列出如下 (单位为尺);

$$\text{第 1 天截下 } \frac{1}{2},$$

$$\text{第 2 天截下 } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2^2},$$

$$\text{第 3 天截下 } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^2} = \frac{1}{2^3},$$

\vdots

$$\text{第 } n \text{ 天截下 } \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n},$$

⋮

得到一个数列： $\frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$

不难看出，数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 的通项 $\frac{1}{2^n}$ 随着 n 的无限增大而无限地接近于零。

一般地说，对于数列 $\{a_n\}$ ，若当 n 无限增大时， a_n 能无限地接近某一个常数 a ，则称此数列为收敛数列，常数 a 称为它的极限。不具有这种特性的数列就不是收敛的数列，或称为发散数列。

据此可以说，数列 $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 是收敛数列，0是它的极限。

数列 $\{n^2\}, \{1+(-1)^{n+1}\}$ 都是发散的数列。

需要提出的是，上面关于“收敛数列”的说法，并不是严格的定义，而仅是一种“描述性”的说法，如何用数学语言把它精确地定义下来。还有待进一步分析。

以 $\left\{1+\frac{1}{n}\right\}$ 为例，可观察出该数列具以下特性：

随着 n 的无限增大， $a_n = 1 + \frac{1}{n}$ 无限地接近于1 \Rightarrow 随着 n 的无限增大， $1 + \frac{1}{n}$ 与1的距离无限减少 \Rightarrow 随着 n 的无限增大， $|1 + \frac{1}{n} - 1|$ 无限减少 $\Rightarrow |1 + \frac{1}{n} - 1|$ 会任意小，只要 n 充分大。

如：要使 $|1 + \frac{1}{n} - 1| < 0.1$ ，只要 $n > 10$ 即可；

要使 $|1 + \frac{1}{n} - 1| < 0.01$ ，只要 $n > 100$ 即可；

⋮

任给无论多么小的正数 ε ，都会存在数列的一项 a_N ，从该项之后($n > N$)， $|1 + \frac{1}{n} - 1| < \varepsilon$ 。即 $\forall \varepsilon > 0, \exists N$ ，当 $n > N$ 时， $|1 + \frac{1}{n} - 1| < \varepsilon$ 。

如何找N？（或N存在吗？）解上面的数学式子即得： $n > \frac{1}{\varepsilon}$ ，取 $N = [\frac{1}{\varepsilon}] + 1$ 即可。这样 $\forall \varepsilon > 0$ ，当 $n > N$ 时， $|1 + \frac{1}{n} - 1| = \frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$ 。

综上所述，数列 $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ 的通项 $1 + \frac{1}{n}$ 随 n 的无限增大， $1 + \frac{1}{n}$ 无限接近于1，即是对任意给定正数 ε ，总存在正整数 N ，当 $n > N$ 时，有 $|1 + \frac{1}{n} - 1| < \varepsilon$ 。此即 $\left\{1 + \frac{1}{n}\right\}$ 以1为极限的精确定义，记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1$ 或 $n \rightarrow \infty, 1 + \frac{1}{n} \rightarrow 1$ 。

2. 数列极限的定义

定义 1 设 $\{a_n\}$ 为数列, a 为实数, 若对任给的正数 ε , 总存在正整数 N , 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$, 则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a , 实数 a 称为数列 $\{a_n\}$ 的极限, 并记作 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 或 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

(读作: 当 n 趋于无穷大时, a_n 的极限等于 a 或 a_n 趋于 a). 由于 n 限于取正整数, 所以在数列极限的记号中把 $n \rightarrow +\infty$ 写成 $n \rightarrow \infty$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 或 $a_n \rightarrow a (n \rightarrow \infty)$.

若数列 $\{a_n\}$ 没有极限, 则称 $\{a_n\}$ 不收敛, 或称 $\{a_n\}$ 为发散数列.

[问题]: 如何表述 $\{a_n\}$ 没有极限?

3. 举例说明如何用 $\varepsilon - N$ 定义来验证数列极限

例 1. 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} = 0 (p > 0)$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$ 不妨设 $\varepsilon < \frac{1}{2}$, 要使 $|\frac{1}{n^p} - 0| < \frac{1}{n^p} < \varepsilon$.

$$\text{只要 } n > \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ 取 } N = \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}}\right] + 1$$

则当 $n > N$ 时, 有

$$|\frac{1}{n^p} - 0| = \frac{1}{n^p} \leq \frac{1}{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{p}} + 1\right]^p} < \varepsilon$$

例 2 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0, (0 < q < 1)$.

证明: $\forall \varepsilon > 0$, 不妨设 $\varepsilon < 1$, 要使 $|q^n - 0| = q^n < \varepsilon$, 只要 $n \lg q < \lg \varepsilon$ (注意这里 $\lg q < 0, \lg \varepsilon < 0$), 只要 $n > \frac{\lg \varepsilon}{\lg q}$. 取 $N = \left[\frac{\lg \varepsilon}{\lg q}\right]$, 则当 $n > N$ 时, 就有 $|q^n - 0| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = 0$.

例 3 求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1 (a > 0)$.

证法 1 先设 $a > 1, \forall \varepsilon > 0$, 要使 $|\sqrt[n]{a} - 1| = \sqrt[n]{a} - 1 < \varepsilon$, 只要 $\sqrt[n]{a} < 1 + \varepsilon$, 只要 $\frac{1}{n} \lg a < \lg(1 + \varepsilon)$, 只要 $n > \frac{\lg a}{\lg(1 + \varepsilon)}$.

取 $N = \left[\frac{\lg a}{\lg(1 + \varepsilon)}\right]$, 当 $n > N$ 时, 就有 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$. 对

$0 < a < 1$, 令 $b = \frac{1}{a}$, 则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = \frac{1}{\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{b}} = 1$.

证法 2 令 $\sqrt[n]{a} - 1 = h_n$, 则 $a = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \cdots + h_n^n > nh_n, 0 < h_n < \frac{a}{n}$
 $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|\sqrt[n]{a} - 1| = h_n < \varepsilon$, 只要 $\frac{a}{n} < \varepsilon$, 取 $N = \left[\frac{a}{\varepsilon}\right]$, 只要 $n > N$, 就有 $|\sqrt[n]{a} - 1| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$.

例4 证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0 \quad (a > 1)$.

证明: 因为 $\frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \cdot \frac{a}{2} \cdots \frac{a}{[a]} \cdot \frac{a}{[a]+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^{[a]}}{[a]!} \cdot \frac{a}{n} = c \cdot \frac{a}{n} \quad (c = \frac{a^{[a]}}{[a]!})$,

$\forall \varepsilon > 0$, 要使 $\left| \frac{a^n}{n!} - 0 \right| = \frac{a^n}{n!} < \varepsilon$, 只要 $\frac{c \cdot a}{n} < \varepsilon$, 取 $N = \left[\frac{c \cdot a}{\varepsilon} \right]$, 则只要 $n > N$,

就有 $\left| \frac{a^n}{n!} - 0 \right| < \varepsilon$, 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$.

例5 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2}{4^n} = 0$.

证明: $4^n = (1+3)^n = 1 + n \cdot 3 + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot 3^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot 3^3 + \cdots + 3^n >$
 $> \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot 3^3, \quad n \geq 3.$

注意到对任何正整数 k , $n > 2k$ 时有 $n - k > \frac{n}{2}$, 就有

$$0 < \frac{n^2}{4^n} < \frac{6n^2}{27n(n-1)(n-2)} = \frac{6n}{27(n-1)(n-2)} \stackrel{n>4}{<} \frac{6n \cdot 4}{27 \cdot n^2} = \frac{24}{27} \cdot \frac{1}{n} < \frac{1}{n}.$$

于是, 对 $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \max\{4, \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} \right\rceil\}$. $\cdots \cdots$.

例6 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1, \quad a > 1$.

证法一 令 $\sqrt[n]{a} - 1 = \alpha_n$, 有 $\alpha_n > 0$. 用 Bernoulli 不等式, 有

$$a = (1 + \alpha_n)^n \geq 1 + n\alpha_n = 1 + n(a^{\frac{1}{n}} - 1), \quad \text{或} \quad 0 < a^{\frac{1}{n}} - 1 \leq \frac{a-1}{n} < \frac{a}{n}. \cdots$$

证法二 (用均值不等式)

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 = \sqrt[n]{a \cdot \underbrace{1 \cdots 1}_{n-1 \uparrow}} - 1 \leq \frac{a + n - 1}{n} - 1 = \frac{a-1}{n} < \frac{a}{n}. \cdots$$

例7 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证 一 : $n \geq 2$ 时 ,

$$0 < \sqrt[n]{n} - 1 = \sqrt[n]{\sqrt{n} \sqrt{n} \cdots 1^{n-2}} - 1 \leq \frac{2\sqrt{n} + n - 2}{n} - 1 = \frac{2\sqrt{n} - 2}{n} < \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

证二: $n = (\sqrt[n]{n})^n = (1 + \sqrt[n]{n} - 1)^n > \frac{n(n-1)}{2!} (\sqrt[n]{n} - 1)^2$ (二项式展开)

$$\Rightarrow \sqrt[n]{n} - 1 > \sqrt{\frac{2}{n-1}}$$

因此, $\forall \varepsilon > 0$, 取 $N = \left[\frac{2}{\varepsilon^2} + 1 \right]$, 则当 $n > N$ 时就有 $0 < \sqrt[n]{n} - 1 < \varepsilon$ 即

附：此题请注意以下的错误做法：

$$n = (1 + \sqrt[n]{n} - 1)^n > 1 + n(\sqrt[n]{n} - 1) \Rightarrow \sqrt[n]{n} - 1 < \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} < \varepsilon \Rightarrow 1 - \varepsilon < \frac{1}{n}$$

$$\Rightarrow n < \frac{1}{1-\varepsilon} \quad (\text{注意 } 1 - \frac{1}{n} \text{ 不趋于零})$$

例 8：证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 - 4} = 3$

证明：由于 $\left| \frac{3n^2}{n^2 - 4} - 3 \right| = \frac{12}{n^2 - 4} \leq \frac{12}{n} \quad (n \geq 3) \quad (*)$

因此， $\forall \varepsilon > 0$ 只要取 $\frac{12}{n} < \varepsilon$ 便有 $\left| \frac{3n^2}{n^2 - 4} - 3 \right| < \varepsilon$

由于 (*) 式是在 $n \geq 3$ 的条件下成立的，故应取 $N = \max\{3, [\frac{12}{\varepsilon}]\}$ ，当 $n > N$

时就有 $\left| \frac{3n^2}{n^2 - 4} - 3 \right| < \varepsilon$ 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2}{n^2 - 4} = 3$

总结 用定义求极限或证明极限的关键是适当放大不等式，关键的追求有两点，一是把隐性表达式变成显性表达式，在重锁迷雾中看清庐山真面目，二是抓住主要矛盾，舍去次要矛盾；要取舍合理，不能放大得过份。

4 关于数列的极限的 $\varepsilon - N$ 定义的几点说明

(1) 关于 ε ：① ε 的任意性. 定义 1 中的正数 ε 的作用在于衡量数列通项 a_n 与常数 a 的接近程度， ε 越小，表示接近得越好；而正数 ε 可以任意小，说明 a_n 与常数 a 可以接近到任何程度；② ε 的暂时固定性. 尽管 ε 有其任意性，但一经给出，就暂时地被确定下来，以便依靠它来求出 N ；③ ε 的多值性. ε 既是任意小的正数，那么 $\frac{\varepsilon}{2}, 3\varepsilon, \varepsilon^2$ 等等，同样也是任意小的正数，因此定义 1 中的不等式 $|a_n - a| < \varepsilon$

中的 ε 可用 $\frac{\varepsilon}{2}, 3\varepsilon, \varepsilon^2$ 等来代替. 从而 “ $|a_n - a| < \varepsilon$ ” 可用 “ $|a_n - a| \leq \varepsilon$ ” 代替；④ 正由于 ε 是任意小正数，我们可以限定 ε 小于一个确定的正数。

(2) 关于 N ：① 相应性，一般地， N 随 ε 的变小而变大，因此常把 N 定作 $N(\varepsilon)$ ，来强调 N 是依赖于 ε 的； ε 一经给定，就可以找到一个 N ；② N 多值性. N 的相应性并不意味着 N 是由 ε 唯一确定的，因为对给定的 ε ，若 $N=100$ 时能使得当 $n > N$ 时，有 $|a_n - a| < \varepsilon$ ，则 $N=101$ 或更大的数时此不等式自然成立. 所以 N 不是唯一的. 事实上，在许多场合下，最重要的是 N 的存在性，而不是它的值有多大. 基于此，在实际使用中的 N 也不必限于自然数，只要 N 是正数即可；而且把 “ $n > N$ ” 改为 “ $n \geq N$ ” 也无妨。

(3) 数列极限的几何理解：在定义 1 中，“当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$ ” \Leftrightarrow “当 $n > N$ 时有 $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ ” \Leftrightarrow “当 $n > N$ 时有 $a_n \in (a - \varepsilon, a + \varepsilon) = U(a, \varepsilon)$ ”

\Leftrightarrow 所有下标大于 N 的项 a_n 都落在邻域 $U(a; \varepsilon)$ 内；而在 $U(a; \varepsilon)$ 之外，数列 $\{a_n\}$ 中的项至多只有 N 个（有限个）。反之，任给 $\varepsilon > 0$ ，若在 $U(a; \varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项只有有限个，设这有限个项的最大下标为 N ，则当 $n > N$ 时有 $a_n \in U(a; \varepsilon)$ ，即当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon$ ，由此写出数列极限的一种等价定义（邻域定义）：

定义1' 任给 $\varepsilon > 0$ ，若在 $U(a; \varepsilon)$ 之外数列 $\{a_n\}$ 中的项只有有限个，则称数列 $\{a_n\}$ 收敛于极限 a 。

由此可见：1) 若存在某个 $\varepsilon_0 > 0$ ，使得数列 $\{a_n\}$ 中有无穷多个项落在 $U(a; \varepsilon_0)$ 之外，则 $\{a_n\}$ 一定不以 a 为极限；2) 数列是否有极限，只与它从某一项之后的变化趋势有关，而与它前面的有限项无关。所以，在讨论数列极限时，可以添加、去掉或改变它的有限项的数值，对收敛性和极限都不会发生影响。

例 1. 证明 $\{n^2\}$ 和 $\{(-1)^n\}$ 都是发散数列。

例 2. 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n = a$ ，作数列如下： $\{z_n\}: x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n, \dots$ 。证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$ 。

例 3. 设 $\{a_n\}$ 为给定的数列， $\{b_n\}$ 为对 $\{a_n\}$ 增加、减少或改变有限项之后得到的数列。证明：数列 $\{b_n\}$ 与 $\{a_n\}$ 同时收敛或发散，且在收敛时两者的极限相等。

三、无穷小数列

在所有收敛数列中，在一类重要的数列，称为无穷小数列，其定义如下：

定义 2 若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ，则称 $\{a_n\}$ 为无穷小数列。

如 $\left\{\frac{1}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{n^2}\right\}, \left\{\frac{(-1)^{n+1}}{n}\right\}, \left\{\frac{1}{2^n}\right\}$ 都是无穷小数列。

数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充要条件：

定理 2.1 数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充要条件是 $\{a_n - a\}$ 为无穷小数列。

[作业] 教材 P27 3, 4, 5, 7, 8(2)。

§ 2 收敛数列的性质

教学内容：第二章 数列极限——§ 2 收敛数列的性质。

教学目的：熟悉收敛数列的性质；掌握求数列极限的常用方法。

教学要求：(1) 使学生理解并能证明数列性质、极限的唯一性、局部有界性、保号性、保不等式性；

(2) 掌握并会证明收敛数列的四则运算定理、迫敛性定理，并会用这些定理求某些收敛数列的极限。

教学重点：迫敛性定理及四则运算法则及其应用。

教学难点：数列极限的计算。

教学方法：讲练结合。

教学程序：

引 言

上节引进“数列极限”的定义，并通过例题说明了验证 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 的方法，这是极限较基本的内容，要求掌握. 为了学习极限的技巧及其应用极限来解决问题. 还需要对数列的性质作进一步讨论.

一、收敛数列的性质

性质 1 (极限唯一性) 若数列 $\{a_n\}$ 收敛，则它的极限唯一.

证一： 假设 a 与 b 都是数列 $\{a_n\}$ 的极限，则由极限定义，对 $\forall \varepsilon > 0$ ，
 $\exists N_1, N_2 \in \mathbb{N}$ ，当

$$n > N_1 \text{ 时, 有 } |a_n - a| < \varepsilon; \quad n > N_2 \text{ 时, 有 } |a_n - b| < \varepsilon$$

取 $N = \max(N_1, N_2)$ ，则当 $n > N$ 时有

$$|a - b| = |(a_n - b) - (a_n - a)| \leq |a_n - a| + |a_n - b| < 2\varepsilon$$

由 ε 的任意性，上式仅当 $a = b$ 时才成立.

证二：(反证) 假设 $\{a_n\}$ 极限不唯一，即至少有两个不相等的极限值，设为 a, b

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = b \text{ 且 } a \neq b \text{ 故不妨设 } a < b, \text{ 取 } \varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$$

$$\text{由定义, } \exists N_1 \in \mathbb{N}, \text{ 当 } n > N_1 \text{ 时有 } |a_n - a| < \varepsilon \Rightarrow a_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{又 } \exists N_2 \in \mathbb{N}, \text{ 当 } n > N_2 \text{ 时有 } |a_n - b| < \varepsilon \Rightarrow a_n > b - \varepsilon = \frac{a+b}{2}$$

因此，当 $n > \max(N_1, N_2)$ 时有 $a_n < \frac{a+b}{2} < a_n$ 矛盾，因此极限值必唯一.

性质 2 (有界性) 如果数列 $\{a_n\}$ 收敛，则 $\{a_n\}$ 必为有界数列. 即 $\exists M > 0$ ，使
 对 $\forall n$ 有 $|a_n| \leq M$

证明： 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ 取 $\varepsilon = 1$ ， $\exists N > 0$ 使得当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < 1$

$$\text{即 } |a_n| - |a| \leq |a_n - a| < 1 \Rightarrow |a_n| < |a| + 1$$

令 $M = \max(1 + |a|, |a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|)$

则有对 $\forall n \quad |a_n| \leq M$ 即数列 $\{a_n\}$ 有界

注：①有界性只是数列收敛的必要条件，而非充分条件，如 $\{(-1)^n\}$

②在证明时必须分清何时用取定 ε ，何时用任给 ε 。上面定理 3.2 证明中必须用取定 ε ，不能用任给 ε ，否则 N 随 ε 在变，找到的 M 也随 ε 在变，界 M 的意义就不明确了。

性质 3（保序性）设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$ ，

(1) 若 $a > b$ ，则存在 N 使得当 $n > N$ 时有 $a_n > b_n$

(2) 若存在 N ，当 $n > N$ 时有 $a_n \geq b_n$ ，则 $a \geq b$ （不等式性质）

证明：(1) 取 $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ ，则存在 N_1 ，当 $n > N_1$ 时 $|a_n - a| < \frac{a-b}{2}$

$$\text{从而 } a_n > a - \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{又存在 } N_2, \text{ 当 } n > N_2 \text{ 时 } |b_n - b| < \frac{a-b}{2} \Rightarrow b_n < b + \frac{a-b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

$$\Rightarrow \text{当 } n > \max(N_1, N_2) \text{ 时 } b_n < \frac{a+b}{2} < a_n$$

(2)（反证）如 $a < b$ ，则由(1)知必 $\exists N$ 当 $n > N$ 时 $a_n > b_n$ 这与已知矛盾

推论（保号性）若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a > b$ 则 $\exists N$ ，当 $n > N$ 时 $a_n > b$ 。特别地，若

$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a \neq 0$ ，则 $\exists N$ ，当 $n > N$ 时 a_n 与 a 同号。

思考：如把上述定理中的 $a_n \geq b_n$ 换成 $a_n > b_n$ ，能否把结论改成

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n > \lim_{n \rightarrow \infty} b_n ?$$

例：设 $a_n \geq 0$ ($n=1,2,\dots$)，若 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ，则 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{a}$

证明：由保序性定理可得 $a \geq 0$

若 $a=0$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时有 $a_n < \varepsilon^2 \Rightarrow \sqrt{a_n} < \varepsilon$ 即

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{a_n} = 0 = \sqrt{a}$$

若 $a > 0$, 则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_2$, 当 $n > N_2$ 时有 $|a_n - a| < \sqrt{a}\varepsilon$

$$\Rightarrow |\sqrt{a_n} - \sqrt{a}| = \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a_n} + \sqrt{a}} \leq \frac{|a_n - a|}{\sqrt{a}} < \varepsilon$$

数列较为复杂, 如何求极限?

性质 4 (四则运算法则) 若 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 都收敛, 则 $\{a_n + b_n\}$ 、 $\{a_n - b_n\}$ 、 $\{a_n b_n\}$

也都收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$ 特别地,

$\lim_{n \rightarrow \infty} c a_n = c \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, c 为常数如再有 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n \neq 0$ 则 $\{\frac{a_n}{b_n}\}$ 也收敛, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n}$

证明: 由于 $a_n - b_n = a_n + (-1)b_n$, $\frac{a_n}{b_n} = a_n \times \frac{1}{b_n}$, 故只须证关于和积与倒数运算的结论即可.

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b$, $\forall \varepsilon > 0$, $\exists N_1$, 当 $n > N_1$ 时 $|a_n - a| < \varepsilon$; $\exists N_2$,

当 $n > N_2$ 时 $|b_n - b| < \varepsilon$

取 $N = \max(N_1, N_2)$, 则当 $n > N$ 时上两式同时成立.

$$(1) \quad |a_n b_n - ab| = |(a_n - a)b_n + a(b_n - b)| \leq |a_n - a| |b_n| + |a| |b_n - b|$$

由收敛数列的有界性, $\exists M > 0$, 对 $\forall n$ 有 $|b_n| \leq M$

故当 $n > N$ 时, 有 $|a_n b_n - ab| < (M + |a|)\varepsilon$

由 ε 的任意性知 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = ab$

$$(2) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \neq 0$$

由保号性, $\exists N_0 > 0$ 及 $k > 0$, 对 $\forall n > N_0$ 有 $|b_n| > k$ (如可令 $k = \frac{|b|}{2}$)

取 $N = \max(N_0, N_2)$, 则当 $n > N$ 时有

$$|\frac{1}{b_n} - \frac{1}{b}| = \frac{|b_n - b|}{|b_n b|} < \frac{|b_n - b|}{k |b|} < \frac{\varepsilon}{k |b|}$$

由 ε 的任意性得 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{b}$

用归纳法, 可得有限个序列的四则运算:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^N x_n^{(k)} = \sum_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)},$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{k=1}^N x_n^{(k)} = \prod_{k=1}^N \lim_{n \rightarrow \infty} x_n^{(k)}.$$

但将上述 N 换成 ∞ , 一般不成立. 事实上 $\sum_{k=1}^{\infty}$ 或 $\prod_{k=1}^{\infty}$ 本身也是一种极限, 两种极限交换次序是个非常敏感的话题, 是高等分析中心课题, 一般都不能交换, 在一定条件下才能交换, 具体什么条件, 到后面我们会系统研究这个问题.

性质 5 (两边夹定理或迫敛性) 设有三个数列 $\{a_n\}$ 、 $\{b_n\}$ 、 $\{c_n\}$, 如 $\exists N$, 当 $n > N$ 时有

$$a_n \leq c_n \leq b_n, \text{ 且 } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l, \text{ 则 } \lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$$

证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = l \Rightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N_1, N_2$

当 $n > N_1$ 时, $l - \varepsilon < a_n < l + \varepsilon$; 当 $n > N_2$ 时, $l - \varepsilon < b_n < l + \varepsilon$

取 $N_0 = \max(N_1, N_2, N)$, 则当 $n > N_0$ 时以上两式与已知条件中的不等式同时

成立, 故有 $n > N_0$ 时 $l - \varepsilon < a_n \leq c_n \leq b_n < l + \varepsilon \Rightarrow |c_n - l| < \varepsilon$ 即 $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = l$

该定理不仅提供了一个判定数列收敛的方法, 而且也给出了一个求极限的方法.

推论: 若 $\exists N$, 当 $n > N$ 时有 $a \leq c_n \leq b_n$ (或 $b_n \leq c_n \leq a$) 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$, 则

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = a$$

例：求证 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ ($a > 0$)

证明： $\exists k \in \mathbb{N}$ 使得 $k > a$ ，从而当 $n > k$ 时有

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a}{1} \times \frac{a}{2} \times \cdots \times \frac{a}{k} \times \frac{a}{k+1} \times \cdots \times \frac{a}{n} \leq \frac{a^k}{k!} \times \frac{a}{n}$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^k}{k!} \cdot \frac{a}{n} = \frac{a^k}{k!} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a}{n} = 0$ 由推论即可得结论

例：设 a_1, a_2, \dots, a_m 是 m 个正数，证明

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} = \max(a_1, a_2, \dots, a_m)$$

证明：设 $A = \max(a_1, a_2, \dots, a_m)$ ，则 $A \leq \sqrt[n]{a_1^n + a_2^n + \cdots + a_m^n} \leq \sqrt[n]{mA} = \sqrt[n]{m}A$

$$m > 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{m} = 1, \text{ 由迫敛性得结论.}$$

例 1： $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a} = 1$ ($a > 1$)

在证明中，令 $h_n = \sqrt[n]{a} - 1 > 0$ ， $a = (1 + h_n)^n$ ，得 $0 < h_n < \frac{a}{n}$ ，由此推出

$h_n \rightarrow 0$.

由此例也看出由 $x_n < z_n < y_n$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a = \lim_{n \rightarrow \infty} y_n$ ，也推出 $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = a$.

例 2：证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

证明：令 $\sqrt[n]{n} = 1 + h_n$,

$$n = (1 + h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 + \cdots + h_n^n \geq \frac{n(n-1)}{2} h_n^2 \quad (n > 3),$$

$$0 < h_n < \frac{2}{\sqrt{n-1}}$$

两边夹推出 $h_n \rightarrow 0$ ，即 $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$.

在求数列的极限时，常需要使用极限的四则运算法则. 下举几例；

例 3：求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 6n + 1}{3n^2 + n + 9}$

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4n^2 + 6n + 1}{3n^2 + n + 9} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4 + \frac{6}{n} + \frac{1}{n^2}}{3 + \frac{1}{n} + \frac{9}{n^2}} = \frac{4}{3}.$$

例 4：求极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \cdots + a^n)$ ($0 < a < 1$).

$$\text{解 } \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + a + \cdots + a^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - a^{n+1}}{1 - a} = \frac{1}{1 - a}.$$

$$\begin{aligned} \text{例 5: } \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{3n+1}{n} \times \frac{n+1}{n} \right) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n+1}{n} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n} \right) \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \\ &= \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \right) = 3 \times 1 = 3 \end{aligned}$$

$$\text{例 6: 求 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^m + a_{m-1} n^{m-1} + \cdots + a_1 n + a_0}{b_k n^k + b_{k-1} n^{k-1} + \cdots + b_1 n + b_0}, \quad m \leq k, \quad a_m \neq 0, \quad b_k \neq 0$$

$$\text{解: 原式} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_m n^{m-k} + a_{m-1} n^{m-k-1} + \cdots + a_1 n^{1-k} + a_0 n^{-k}}{b_k + b_{k-1} n^{-1} + \cdots + b_1 n^{1-k} + b_0 n^{-k}} = \begin{cases} \frac{a_m}{b_m}, & m = k \\ 0, & m \neq k \end{cases}$$

即：有理式的极限 $\begin{cases} \text{分子分母最高次数相同，为最高次系数之比} \\ \text{分子最高次低于分母最高次，则为0} \end{cases}$

$$\text{如 } \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^3 + 4n^2 - 5}{3n^3 - 10n - 7} = \frac{2}{3}$$

$$\text{例 7: } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt{n}(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{1}{n}} + 1} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$$

$$\text{例 8: 设 } a, b > 0, \text{ 证明 } \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a^n + b^n} = \max(a, b).$$

$$\text{证明: } \max(a, b) = \sqrt[n]{\max(a, b)^n} \leq \sqrt[n]{a^n + b^n} \leq \sqrt[n]{2 \max(a, b)^n} \rightarrow \max(a, b).$$

二 数列的子列

1、引言

极限是个有效的分析工具. 但当数列 $\{a_n\}$ 的极限不存在时, 这个工具随之失效. 这能说明什么呢? 难道 $\{a_n\}$ 没有一点规律吗? 当然不是! 出现这种情况原因是我们是从“整个”数列的特征角度对数列进行研究. 那么, 如果“整体无序”, “部分”是否也无序呢? 如果“部分”有序, 可否从“部分”来推断整体的性质呢? 简而言之, 能否从“部分”来把握“整体”呢? 这个“部分数列”就是要讲的“子列”.

2、子列的定义

定义 1 设 $\{a_n\}$ 为数列, $\{n_k\}$ 为正整数集 N_+ 的无限子集, 且

$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < \cdots$, 则数列

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \cdots, a_{n_k}, \cdots$$

称为数列 $\{a_n\}$ 的一个子列, 简记为 $\{a_{n_k}\}$.

注1 由定义可见, $\{a_n\}$ 的子列 $\{a_{n_k}\}$ 的各项都来自 $\{a_n\}$ 且保持这些项在 $\{a_n\}$ 中的先后次序. 简单地讲, 从 $\{a_n\}$ 中取出无限多项, 按照其在 $\{a_n\}$ 中的顺序排成一个数列, 就是 $\{a_n\}$ 的一个子列 (或子列就是从 $\{a_n\}$ 中顺次取出无穷多项组成的数列).

注2 子列 $\{a_{n_k}\}$ 中的 n_k 表示 a_{n_k} 是 $\{a_n\}$ 中的第 n_k 项, k 表示 a_{n_k} 是 $\{a_{n_k}\}$ 中的第 k 项, 即 $\{a_{n_k}\}$ 中的第 k 项就是 $\{a_n\}$ 中的第 n_k 项, 故总有 $n_k \geq k$. 特别地, 若 $n_k = k$, 则 $a_{n_k} = a_n$, 即 $\{a_{n_k}\} = \{a_n\}$.

注3 数列 $\{a_n\}$ 本身以及 $\{a_n\}$ 去掉有限项以后得到的子列, 称为 $\{a_n\}$ 的平凡子列; 不是平凡子列的子列, 称为 $\{a_n\}$ 的非平凡子列.

如 $\{a_{2k}\}, \{a_{2k-1}\}$ 都是 $\{a_n\}$ 的非平凡子列. 由上节例知: 数列 $\{a_n\}$ 与它的任一平凡子列同为收敛或发散, 且在收敛时有相同的极限.

那么数列 $\{a_n\}$ 的收敛性与非平凡子列的收敛性又有何关系呢? 此即下面的结果:

定理2.8 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是: $\{a_n\}$ 的任何非平凡子列都收敛.

证明: 必要性 设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的任一子列. 任给 $\varepsilon > 0$, 存在正数 N , 使得当 $k > N$ 时有 $|a_k - a| < \varepsilon$. 由于 $n_k \geq k$, 故当 $k > N$ 时有 $n_k > N$, 从而也有 $|a_{n_k} - a| < \varepsilon$, 这就证明了 $\{a_{n_k}\}$ 收敛 (且与 $\{a_n\}$ 有相同的极限).

充分性 考虑 $\{a_n\}$ 的非平凡子列 $\{a_{2k}\}, \{a_{2k-1}\}$ 与 $\{a_{3k}\}$. 按假设, 它们都收敛. 由于 $\{a_{6k}\}$ 既是 $\{a_{2k}\}$, 又是 $\{a_{3k}\}$ 的子列, 故由刚才证明的必要性,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{6k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k}. \quad (9)$$

又 $\{a_{6k-3}\}$ 既是 $\{a_{2k-1}\}$ 又是 $\{a_{3k}\}$ 的子列, 同样可得

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k}. \quad (10)$$

(9) 式与 (10) 式给出

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1}.$$

所以由课本例7可知 $\{a_n\}$ 收敛.

由定理2.8的证明可见, 若数列 $\{a_n\}$ 的任何非平凡子列都收敛, 则所有这些子列与 $\{a_n\}$ 必收敛于同一个极限. 于是, 若数列 $\{a_n\}$ 有一个子列发散, 或有两个子列收敛而极限不相等, 则数列 $\{a_n\}$ 一定发散. 例如数列 $\{(-1)^n\}$, 其偶数项组成的子列 $\{(-1)^{2n}\}$ 收敛于1, 而奇数项组成的子列 $\{(-1)^{2k-1}\}$ 收敛于-1, 从而 $\{(-1)^n\}$ 发散. 再如数列 $\{\sin \frac{n\pi}{2}\}$, 它的奇数项组成的子列 $\{\sin \frac{2k-1}{2}\pi\}$ 即为 $\{(-1)^{k-1}\}$, 由于这个子列发散, 故数列 $\{\sin \frac{n\pi}{2}\}$ 发散. 由此可见, 定理2.8是判断数列发散的有力工具.

§3 数列极限存在的条件

教学内容: 第二章 数列极限 —— §3 数列极限存在的条件

教学目的: 使学生掌握判断数列极限存在的常用工具.

教学要求: (1) 掌握并会证明单调有界定理, 并会运用它求某些收敛数列的极限;
(2) 初步理解 Cauchy 准则在极限理论中的主要意义, 并逐步会应用 Cauchy 准则判断某些数列的敛散性.

教学重点: 单调有界定理、Cauchy 收敛准则及其应用.

教学难点: 相关定理的应用.

教学方法: 讲练结合.

教学程序:

引 言

在研究比较复杂的极限问题时, 通常分两步来解决: 先判断该数列是否有极限 (极限的存在性问题); 若有极限, 再考虑如何计算些极限 (极限值的计算问题). 这是极限理论的两基本问题. 在实际应用中, 解决了数列 $\{a_n\}$ 极限的存在性问题之后, 即使极限值的计算较为困难, 但由于当 n 充分大时, a_n 能充分接近其极限 a , 故可用 a_n 作为 a 的近似值.

本节将重点讨论极限的存在性问题.

为了确定某个数列是否有极限, 当然不可能将每一个实数依定义一一加以验证, 根本的办法是直接从数列本身的特征来作出判断.

从收敛数列的有界性可知: 若 $\{a_n\}$ 收敛, 则 $\{a_n\}$ 为有界数列; 但反之不一定对, 即 $\{a_n\}$ 有界不足以保证 $\{a_n\}$ 收敛. 例如 $\{(-1)^n\}$. 但直观看来, 若 $\{a_n\}$ 有界, 又 $\{a_n\}$ 随 n 的增大 (减少) 而增大 (减少), 它就有可能与其上界 (或下界) 非常接近, 从而有可能存在极限 (或收敛).

为了说明这一点, 先给出具有上述特征的数列一个名称——**单调数列**.

一、单调数列

定义 若数列 $\{a_n\}$ 的各项满足不等式 $a_n \leq a_{n+1}$ ($a \geq a_{n+1}$), 则称 $\{a_n\}$ 为递增(递减)数列. 递增和递减数列统称为单调数列.

例如: $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ 为递减数列; $\{n^2\}$ 为递增数列; $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 不是单调数列.

二、单调有界定理

〔问题〕 (1) 单调数列一定收敛吗? ; (2) 收敛数列一定单调吗?

一个数列 $\{a_n\}$, 如果仅是单调的或有界的, 不足以保证其收敛, 但若既单调又有界, 就可以了. 此即下面的极限存在的判断方法.

定理 (单调有界定理) 在实数系中, 有界且单调数列必有极限.

几何解释: 单调数列 $\{a_n\}$ 只可能向一个方向移动, 故仅有两种可能: (1) 点 a_n 沿数轴移向无穷远; (2) a_n 无限趋于某一个定点 A , 即 $a_n \rightarrow A (n \rightarrow \infty)$.

证明: 不妨设 $\{a_n\}$ 单调增加有上界, 把 $\{a_n\}$ 看作集合, 有确界原理, $\sup\{a_n\} = \mu$ 存在

即: (1) $\forall n, a_n \leq \mu$; (2) $\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in N$ 使 $a_{n_0} > \mu - \varepsilon$

由于 $\{a_n\}$ 单调增加, 故当 $n > n_0$ 时有 $\mu - \varepsilon < a_{n_0} \leq a_n \leq \mu < \mu + \varepsilon$

即当 $n > n_0$ 时 $|a_n - \mu| < \varepsilon$ 亦即 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \mu$ #

例 1: $a > 0$, 证明数列 $a_1 = \sqrt{a}$, $a_2 = \sqrt{a + \sqrt{a}}$, $a_3 = \sqrt{a + \sqrt{a + \sqrt{a}}}$, \dots ,
 $a_n = \sqrt{a + \sqrt{a + \dots + \sqrt{a}}}$, \dots 收敛, 并求其极限.

证明: 从该数列的构造, 显见它是单调增加的, 下面来证它是有界的.

易见 $a_n \geq \sqrt{a} > 0$, 且 $a_2 = \sqrt{a + a_1}$, $a_3 = \sqrt{a + a_2}$, \dots , $a_n = \sqrt{a + a_{n-1}}$, \dots

从而 $a_n^2 = a + a_{n-1} < a + a_n$ 两端除以 a_n 得 $a_n < 1 + \frac{a}{a_n}$

$\forall n, a_n \geq \sqrt{a} \Rightarrow \sqrt{a} \leq a_n < 1 + \sqrt{a}$ 故 $\{a_n\}$ 有界即得极限存在

设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = l$, 对等式 $a_n^2 = a + a_{n-1}$ 两边取极限, 则有 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \lim_{n \rightarrow \infty} (a + a_{n-1}) =$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n-1} + a \Rightarrow l^2 = l + a \Rightarrow l = \frac{1 \pm \sqrt{1+4a}}{2}$$

因 $\{a_n\}$ 为正数列, 故 $l \geq 0$, 因此取 $l = \frac{1 + \sqrt{1+4a}}{2}$ 即为所求极限

例 2: 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{a^n}$ (k 为一定数, $a > 1$)

解: 记 $c_n = \frac{n^k}{a^n}$, 则 $c_n > 0$ 且 $\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{1}{a} \left(\frac{n+1}{n} \right)^k = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k$ $a > 1$, 则 $\exists N$, 当 $n > N$ 时 $\frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k < 1$,

故 $n > N$ 后, $\{c_n\}$ 单调递减, 又有 $c_n > 0 \Rightarrow$ 极限一定存在, 设为 A

由 $c_{n+1} = \frac{1}{a} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^k c_n$ 两边取极限得 $A = \frac{1}{a} A$ ($a > 1$) $\Rightarrow A = 0$

例 3 设 $a_n = 1 + \frac{1}{2^\alpha} + \frac{1}{3^\alpha} + \cdots + \frac{1}{n^\alpha}$, ($\alpha \geq 2$). 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

例 4 $a > 0, x_1 > 0. x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right)$. 求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$. (计算 \sqrt{a} 的逐次逼近法, 亦即迭代法).

解: 由均值不等式, 有 $x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{a}{x_n} \right) \geq \sqrt{x_n \cdot \frac{a}{x_n}} = \sqrt{a}$. $\Rightarrow \{x_n\}$ 有下界;

注意到对 $\forall n$, 有 $x_n \geq \sqrt{a}$, 有

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{x_n^2} \right) \leq \frac{1}{2} \left(1 + \frac{a}{(\sqrt{a})^2} \right) = 1. \Rightarrow x_n \searrow,$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \sqrt{a}.$$

三、柯西收敛准则

1、引言

单调有界定理只是数列收敛的充分条件，下面给出在实数集中数列收敛的充分必要条件——柯西收敛准则。

2、Cauchy 收敛准则

定理 (Cauchy 收敛准则) 数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是：对任给的 $\varepsilon > 0$ ，存在正整数 N ，使得当 $n, m > N$ 时有 $|a_n - a_m| < \varepsilon$ 。

证明：“ \Rightarrow ” $\{a_n\}$ 收敛，则存在极限，设 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$ ，则 $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists N$ ，当 $n > N$ 时有 $|a_n - a| < \varepsilon/2 \Rightarrow$ 当 $n, m > N$ 时有 $|a_n - a_m| \leq |a_n - a| + |a_m - a| < \varepsilon$

“ \Leftarrow ” 先证有界性，取 $\varepsilon = 1$ ，则 $\exists N$ ， $n, m > N \Rightarrow |a_n - a_m| < 1$

特别地， $n > N$ 时 $|a_n - a_{N+1}| < 1 \Rightarrow |a_n| < |a_{N+1}| + 1$

设 $M = \max\{|a_1|, |a_2|, \dots, |a_N|, |a_{N+1}| + 1\}$ ，则 $\forall n$ ， $|a_n| \leq M$

再由致密性定理知， $\{a_n\}$ 有收敛子列 $\{a_{n_k}\}$ ，设 $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{n_k} = a$

$\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists N_1$ ， $n, m > N_1 \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon/2$

$\exists K$ ， $k > K \Rightarrow |a_{n_k} - a| < \varepsilon/2$

取 $N = \max(K, N_1)$ ，当 $n > N$ 时有 $n_{N+1} \geq N+1 > N$

$\Rightarrow |a_n - a| \leq |a_n - a_{n_{N+1}}| + |a_{n_{N+1}} - a| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$

故 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$

Cauchy 列、基本列（满足 *Cauchy* 收敛准则的数列）

Cauchy 收敛准则的另一表示形式： $\forall \varepsilon > 0$ ， $\exists N$ ，当 $n > N$ 时，对 $\forall p \in \mathbf{Z}^+$ 有

$$|a_{n+p} - a_n| < \varepsilon$$

3、说明

a) Cauchy 收敛准则从理论上完全解决了数列极限的存在性问题.

b) Cauchy 收敛准则的条件称为 Cauchy 条件, 它反映这样的事实: 收敛数列各项的值愈到后面, 彼此愈接近, 以至于充分后面的任何两项之差的绝对值可以小于预先给定的任意小正数. 或者, 形象地说, 收敛数列的各项越到后面越是“挤”在一起.

c) Cauchy 准则把 $\varepsilon-N$ 定义中 a_n 与 a 之差换成 a_n 与 a_m 之差. 其好处在于无需借助数列以外的数 a , 只要根据数列本身的特征就可以鉴别其 (收) 敛 (发) 散性.

例: 如数列 $\{a_n\}$ 满足 $|a_{n+1} - a_n| \leq q |a_n - a_{n-1}|$ ($n = 2, 3, \dots$) 且 $0 < q < 1$, 证明数列 $\{a_n\}$ 收敛.

证明: 令 $|x_2 - x_1| = c > 0$

$$|a_{n+1} - a_n| \leq q |a_n - a_{n-1}| \leq q^2 |a_{n-1} - a_{n-2}| \leq \dots \leq q^{n-1} |x_2 - x_1|$$

$$\Rightarrow |a_{n+p} - a_n| \leq |a_{n+p} - a_{n+p-1}| + |a_{n+p-1} - a_{n+p-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n|$$

$$\leq c(q^{n+p-2} + q^{n+p-3} + \dots + q^{n-1}) = cq^{n-1}(1 + q + \dots + q^{p-1}) \leq c \frac{q^{n-1}}{1-q}$$

$$\forall \varepsilon > 0, \text{ (不妨设 } 0 < \varepsilon < \frac{c}{1-q} \text{), 取 } N = \left[1 + \frac{\ln(\frac{1-q}{c}\varepsilon)}{\ln q} \right], \text{ 则当 } n > N \text{ 时, 对}$$

任给自然数 p 有 $|a_{n+p} - a_n| < \frac{cq^{n-1}}{1-q} < \varepsilon$. 故由 Cauchy 收敛准则知数列 $\{x_n\}$ 收敛.

例: 证明数列 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$ 发散

证明: 要证: $\exists \varepsilon_0 > 0$, 对 $\forall N$, 必有 $m_0 > N$, $n_0 > N$ 使得 $|a_{m_0} - a_{n_0}| \geq \varepsilon_0$

$$\text{设 } m > n \text{ 则 } |a_m - a_n| = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{m} = \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+(m-n)}$$

$$> \frac{1}{m} + \frac{1}{m} + \cdots + \frac{1}{m} = \frac{m-n}{m} = 1 - \frac{n}{m}$$

因此, 如 $m = 2n$, 则 $|a_m - a_n| \geq 1 - 1/2 = 1/2$

这样, 对 $\varepsilon_0 = 1/2$, 不管 N 多大, 如取 $n_0 = N + 1$, $m_0 = 2n_0$ 则 $m_0 > N$, $n_0 > N$

且 $|a_{m_0} - a_{n_0}| \geq 1 - \frac{n_0}{m_0} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, 这说明 $\{a_n\}$ 不是一个 *Cauchy* 数列.

4、应用

例 5 证明: 任一有限十进小数 $\alpha = 0.b_1b_2\cdots b_n\cdots$ ($0 < \alpha < 1$) 的不足近似值所组成的数列

$$\frac{b_1}{10}, \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2}, \cdots, \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n}, \cdots \text{ 收敛. } \quad \text{其中}$$

$b_i (i = 1, 2, \cdots, 9)$ 是 $0, 1, \cdots, 9$ 中的数.

证明: 令 $a_n = \frac{b_1}{10} + \frac{b_2}{10^2} + \cdots + \frac{b_n}{10^n}$, 有

$$\begin{aligned} |a_{n+p} - a_n| &= \frac{b_{n+1}}{10^{n+1}} + \frac{b_{n+2}}{10^{n+2}} + \cdots + \frac{b_{n+p}}{10^{n+p}} \leq \frac{9}{10^{n+1}} \left(1 + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{10^{p-1}} \right) \\ &= \frac{9}{10^{n+1}} \frac{1 - (0.1)^p}{1 - 0.1} = \frac{1}{10^n} (1 - (0.1)^p) < \frac{1}{10^n} < \frac{1}{n}. \quad \cdots \end{aligned}$$

例 6: 设 $0 < q < 1$, $x_n = q \sin q + q^2 \sin \sqrt{q} + \cdots + q^n \sin \sqrt[n]{q}$. 试证明数列 $\{x_n\}$ 收敛.

关于极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e$: ($e \approx 2.71828$) 证明留在下节进行.

例 7: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{n+k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^{kn}.$

例 8: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{c}{n} \right)^{n+k}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{2n} \right)^{3n}.$

例 9: $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2n-3}{2n+1} \right)^n.$

[作业] 教材 P38—39 1, 3, 5, 6, 10, 11;

教材 P40—41 1 (1) (3), 3, 4(1)–(3) (6) (8), 5, 10.

(P38 3 (4) 提示: 考虑 $b_n = \frac{1}{a_n}$, 用双逼原理可求得 $b_n \rightarrow 1$.)

附: 数列 $\left\{ \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \right\}$ 单调有界证法欣赏:

Cauchy (1789—1857) 最先给出这一极限, Riemann (1826—1866) 最先给出以下证法一.

证法一 (Riemann 最先给出这一证法) 设 $x_n = \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$. 应用二项式展

开, 得

$$\begin{aligned} x_n &= 1 + n \cdot \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} \cdot \frac{1}{n^3} + \cdots + \frac{n(n-1)\cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}{n!} \cdot \frac{1}{n^n} \\ &= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) + \cdots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n} \right) \left(1 - \frac{2}{n} \right) \cdots \left(1 - \frac{n-1}{n} \right), \end{aligned}$$

$$x_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) + \frac{1}{3!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \left(1 - \frac{2}{n+1} \right) + \cdots +$$

$$\frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1} \right);$$

$$\text{注意到 } \left(1 - \frac{1}{n} \right) < \left(1 - \frac{1}{n+1} \right), \quad \left(1 - \frac{2}{n} \right) < \left(1 - \frac{2}{n+1} \right), \quad \cdots, \quad \left(1 - \frac{n-1}{n} \right) < \left(1 - \frac{n-1}{n+1} \right).$$

$$\text{且 } x_{n+1} \text{ 比 } x_n \text{ 多一项 } \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) \cdots \left(1 - \frac{n}{n+1} \right) > 0, \quad \Rightarrow x_{n+1} > x_n, \quad \text{即 } x_n \nearrow.$$

$$0 < x_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} < 1 + 1 + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1)n}$$

$$= 1 + 1 + \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} \right) = 1 + 1 + 1 - \frac{1}{n} < 3. \quad \Rightarrow x_n \text{ 有界.}$$

综上, 数列 $\{x_n\}$ 单调有界.

证法二 (利用 Bernoulli 不等式)

注意到 Bernoulli 不等式 $(1+x)^n \geq 1+nx$, ($x > -1$, n 为正整数), 有

$$\begin{aligned}\frac{x_{n+1}}{x_n} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{1 + \frac{1}{n+1}}{1 + \frac{1}{n}}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2n + 1}\right)^n \\ &= \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left[1 - \frac{1}{(n+1)^2}\right]^n, \quad \text{由 } -\frac{1}{(n+1)^2} > -1, \text{ 利用 Bernoulli 不等式, 有}\end{aligned}$$

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} \geq \left(1 + \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n^3 + 3n^2 + 3n + 2}{n^3 + 3n^2 + 3n + 1} > 1. \quad \Rightarrow \quad x_n \nearrow.$$

为证 $\{x_n\}$ 上方有界, 考虑数列 $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}$. 可类证 $y_n \searrow$. 事实上,

$$\begin{aligned}\frac{y_n}{y_{n+1}} &= \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{1}{1 + \frac{1}{n+1}} \left(\frac{1 + \frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n+1}}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2} \left(\frac{n^2 + 2n + 1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \\ &= \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{1}{n^2 + 2n}\right)^{n+1} \geq \frac{n+1}{n+2} \left(1 + \frac{n+1}{n^2 + 2n}\right) \quad (\text{此处利用了 Bernoulli 不等式})\end{aligned}$$

$$= \frac{n^3 + 4n^2 + 4n + 1}{n^3 + 4n^2 + 4n} > 1, \quad \Rightarrow \quad y_n \searrow.$$

显然有 $x_n < y_n \Rightarrow \forall n$, 有 $x_n < y_n \leq \dots \leq y_1 = 4$. 即数列 $\{y_n\}$ 有上界.

证法三 (利用均值不等式) 在均值不等式中, 令

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i, \quad (a_i > 0)$$

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 1 + \frac{1}{n-1}, \quad a_n = 1, \quad \text{就有}$$

$$\sqrt[n]{x_{n-1}} = \sqrt[n]{\left(1 - \frac{1}{n-1}\right)^{n-1} \cdot 1} \leq \frac{1}{n} \left[(n-1) \left(1 + \frac{1}{n-1}\right) + 1 \right] = 1 + \frac{1}{n} = \sqrt[n]{1 + \frac{1}{n}} = \sqrt[n]{x_n},$$

$$\Rightarrow x_{n-1} \leq x_n, \quad \text{即 } x_n \nearrow.$$

令 $a_1 = a_2 = \cdots = a_{n-1} = 1 - \frac{1}{n-1}$, $a_n = 1$, 可仿上证得 $n \geq 3$ 时 $\left\{ \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \right\} \nearrow$,

($n=1$ 时无意义, $n=2$ 时诸 $a_i=0$, 不能用均值不等式.) 当 $n \geq 2$ 时, 由

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n^2} < 1, \Rightarrow 1 + \frac{1}{n} < \frac{1}{1 - \frac{1}{n}}.$$

$$\therefore \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n}. \quad \text{由} \quad \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \nearrow \Rightarrow \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n} \searrow.$$

$$\Rightarrow x_n < \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} < 4.$$

注: 以上证法二和证法三可参阅《数学通报》1980. №4 P22.

证法四 (仍利用均值不等式)

$$\begin{aligned} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n &= \overbrace{\left(1 + \frac{1}{n}\right) \left(1 + \frac{1}{n}\right) \cdots \left(1 + \frac{1}{n}\right)}^{n \uparrow} \cdot 1 < \\ &< \left[\frac{n \left(1 + \frac{1}{n}\right) + 1}{n+1} \right]^{n+1} = \left(\frac{n+2}{n+1} \right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}. \Rightarrow x_n < x_{n+1}, \quad \text{即} \quad x_n \nearrow. \end{aligned}$$

有界性证法可参阅上述各证法.

注: 证法四可参阅《数学教学研究》1991. №1 马德尧文 “均值不等式妙用两则”.

证法五 先证明: 对 $\forall 0 \leq a < b$ 和正整数 n , 有不等式

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} < (n+1)b^n.$$

事实上,

$$\frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{b - a} = \frac{(b - a)(b^n + b^{n-1}a + \cdots + ba^{n-1} + a^n)}{b - a} = b^n + b^{n-1}a + \cdots + ba^{n-1} + a^n <$$

$(n+1)b^n$.

该不等式又可变形为

$$b^n[(n+1)a - nb] < a^{n+1}, \quad (0 \leq a < b, \quad n \text{ 为正整数})$$

在此不等式中, 取 $a = 1 + \frac{1}{n+1}$, $b = 1 + \frac{1}{n}$, 则有 $0 \leq a < b$, 就有

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}, \quad \Rightarrow x_n \nearrow.$$

取 $a = 1$, $b = 1 + \frac{1}{2n}$, 又有 $\left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n \cdot \frac{1}{2} < 1$ 对 $\forall n$ 成立, $\Rightarrow \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^n < 2, \Rightarrow$

$$x_{2n} = \left(1 + \frac{1}{2n}\right)^{2n} < 4. \quad \text{又由 } x_{2n-1} < x_{2n}, \quad \Rightarrow x_n < 4.$$

注: 这一证法可参阅《The American Mathematical Monthly》1974. Vol 81. No9 P10—11

第三章 函数极限

引言

在《数学分析》中, 所讨论的极限基本上分两部分, 第一部分是“数列的极限”, 第二部分是“函数的极限”. 二者的关系是“特殊”与“一般”的关系; 数列极限是函数极限的特例.

通过数列极限的学习, 应有一种基本的观念: “极限是研究变量的变化趋势的”或说: “极限是研究变量的变化过程, 并通过变化的过程来把握变化的结果”. 例如, 数列 $\{a_n\}$ 这种变量即是研究当 $n \rightarrow +\infty$ 时, $\{a_n\}$ 的变化趋势.

我们知道, 从函数角度看, 数列 $\{a_n\}$ 可视为一种特殊的函数 f , 其定义域为 N_+ , 值域是 $\{a_n\}$, 即

$$f: N_+ \rightarrow R(n \rightarrow a_n); \quad \text{或} \quad f(n) = a_n, n \in N_+ \text{ 或 } f(n) = a_n.$$

研究数列 $\{a_n\}$ 的极限, 即是研究当自变量 $n \rightarrow +\infty$ 时, 函数 $f(n)$ 变化趋势.

此处函数 $f(n)$ 的自变量 n 只能取正整数! 因此自变量的可能变化趋势只有一种, 即 $n \rightarrow +\infty$. 但是, 如果代之正整数变量 n 而考虑一般的变量为 $x \in R$, 那么情况又如何呢? 具体地说, 此时自变量 x 可能的变化趋势是否仅限于 $x \rightarrow +\infty$ 一种呢?

为此, 考虑下列函数:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

类似于数列, 可考虑自变量 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 的变化趋势; 除此而外, 也可考虑自变量 $x \rightarrow -\infty$ 时, $f(x)$ 的变化趋势; 还可考虑自变量 $x \rightarrow \infty$ 时, $f(x)$ 的变化趋势; 还可考虑自变量 $x \rightarrow a$ 时, $f(x)$ 的变化趋势, ...

由此可见, 函数的极限较之数列的极限要复杂得多, 其根源在于自变量性质的变化. 但同时我们将看到, 这种复杂仅仅表现在极限定义的叙述有所不同. 而在各类极限的性质、运算、证明方法上都类似于数列的极限.

下面, 我们就依次讨论这些极限.

§ 1 函数极限的概念

教学内容: 第三章 函数极限——§ 1 函数极限的概念

教学目的: 掌握各种函数极限的分析定义, 能够用分析定义证明和计算函数的极限.

教学要求: 掌握当 $x \rightarrow x_0$; $x \rightarrow \infty$; $x \rightarrow +\infty$; $x \rightarrow -\infty$; $x \rightarrow x_0^+$; $x \rightarrow x_0^-$ 时函数极限的分析定义, 并且会用函数极限的分析定义证明和计算较简单的函数极限.

教学建议:

本节的重点是各种函数极限的分析定义. 对多数学生要求主要掌握当 $x \rightarrow x_0$ 时函数极限的分析定义, 并用函数极限的分析定义求函

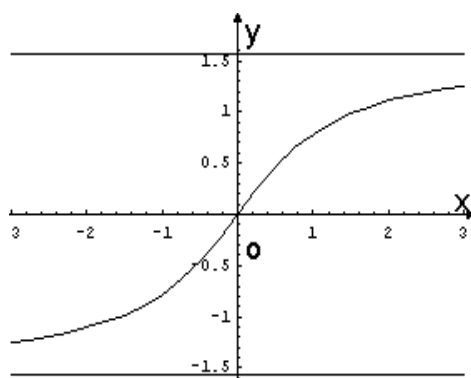
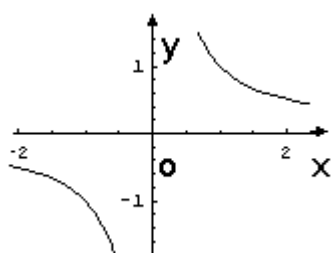
教学过程:

一、 $x \rightarrow +\infty$ 时函数的极限

1、引言

设函数定义在 $[a, +\infty)$ 上, 类似于数列情形, 我们研究当自变量 $x \rightarrow +\infty$ 时, 对应的函数值能否无限地接近于某个定数 A . 这种情形能否出现呢? 回答是可能出现, 但不是对所有的函数都具此性质.

例如 $f(x) = \frac{1}{x}$, x 无限增大时, $f(x)$ 无限地接近于 0; $g(x) = \arctg x$, x 无限增大时, $f(x)$ 无限地接近于 $\frac{\pi}{2}$; $h(x) = x$, x 无限增大时, $f(x)$ 与任何数都不能无限地接近. 正因为如此, 所以才有必要考虑 $x \rightarrow +\infty$ 时, $f(x)$ 的变化趋势. 我们把象 $f(x)$, $g(x)$ 这样当 $x \rightarrow +\infty$ 时, 对应函数值无限地接近于某个定数 A 的函数称为“当 $x \rightarrow +\infty$ 时有极限 A ”.



[问题] 如何给出它的精确定义呢? 类似于数列, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时函数极限的精确定义如下.

2. $x \rightarrow +\infty$ 时函数极限的定义

定义 1 设 f 为定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数, A 为实数. 若对任给的 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $M (\geq a)$, 使得当 $x > M$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称函数 f 当 $x \rightarrow +\infty$ 时以 A 为极限. 记作

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow +\infty).$$

3、几点注记

(1) 定义 1 中作用 ε 与数列极限中 ε 作用相同, 衡量 $f(x)$ 与 A 的接近程度, 正数 M 的作用与数列极限定义中 N 相类似, 表明 x 充分大的程度; 但这里所考虑的是比 M 大的所有实数 x , 而不仅仅是正整数 n .

(2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的邻域描述: $\forall \varepsilon, \exists U(+\infty)$, 当 $x \in U(+\infty)$ 时, $f(x) \in U(\varepsilon A)$;

(3) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的几何意义: 对 $\forall \varepsilon$, 就有 $y = A + \varepsilon$ 和 $y = A - \varepsilon$ 两条直线, 形成以 A 为中心线, 以 2ε 为宽的带形区域. “当 $x > M$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ”表示: 在直线 $x = M$ 的右方, 曲线 $y = f(x)$ 全部落在这个带形区域内.

如果 ε 给得小一点,即带形区域更窄一点,那么直线 $x=M$ 一般往右移;但无论带形区域如何窄,总存在正数 M ,使得曲线 $y=f(x)$ 在 $x=M$ 的右边的全部落在这个更窄的带形区域内.

(4) 现记 f 为定义在 $U(-\infty)$ 或 $U(\infty)$ 上的函数,当 $x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时,若函数值 $f(x)$ 能无限地接近于常数 A ,则称 f 当 $x \rightarrow -\infty$ 或 $x \rightarrow \infty$ 时时以 A 为极限,分别记作,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow -\infty),$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow \infty).$$

这两种函数极限的精确定义与定义1相仿,简写如下:

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \text{当 } x < -M \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon,$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists M > 0, \text{当 } |x| > M \text{ 时, } |f(x) - A| < \varepsilon.$$

(5) 推论: 设 $f(x)$ 为定义在 $U(\infty)$ 上的函数,则

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = A.$$

4. 利用 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = A$ 的定义验证极限等式举例

例1 证明 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$.

例2 证明 1) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg x = -\frac{\pi}{2}$; 2) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \arctg x = \frac{\pi}{2}$.

二、 $x \rightarrow x_0$ 时函数的极限

1、引言

上节讨论的函数 f 当 $x \rightarrow +\infty$ 时的极限,是假定 f 为定义在 $[a, +\infty)$ 上的函数,这事实上是 $U(+\infty)$,即 f 为定义在 $U(+\infty)$ 上,考虑 $x \rightarrow +\infty$ 时 $f(x)$ 是否趋于某个定数 A .

本节假定 f 为定义在点 x_0 的某个空心邻域 $U^0(x_0)$ 内的函数,现在讨论当 $x \rightarrow x_0 (x \neq x_0)$ 时,对应的函数值能否趋于某个定数 A 数列.

先看下面几个例子:

例1 $f(x) = 1 (x \neq 0)$. ($f(x)$ 是定义在 $U^0(0)$ 上的函数,当 $x \rightarrow 0$ 时,
 $f(x) \rightarrow 1$)

例 2 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$. ($f(x)$ 是定义在 $U^0(2)$ 上的函数, 当 $x \rightarrow 2$ 时,

$$f(x) \rightarrow 4)$$

例 3 $f(x) = \frac{1}{x}$. ($f(x)$ 是定义在 $U^0(0)$ 上的函数, 当 $x \rightarrow 0$ 时, $f(x) \rightarrow ?$)

由上述例子可见, 对有些函数, 当 $x \rightarrow x_0 (x \neq x_0)$ 时, 对应的函数值 $f(x)$ 能趋于某个定数 A ; 但对有些函数却无此性质. 所以有必要来研究当 $x \rightarrow x_0 (x \neq x_0)$ 时, $f(x)$ 的变化趋势.

我们称上述的第一类函数 $f(x)$ 为当 $x \rightarrow x_0$ 时以 A 为极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A.$$

和数列极限的描述性说法一样, 这是一种描述性的说法. 不是严格的数学定义. 那么如何给出这类函数极限的精确定义呢?

作如下分析:

“当自变量 x 越来越接近于 x_0 时, 函数值 $f(x)$ 越来越接近于一个定数 A ” \rightarrow 只要 x 充分接近 x_0 , 函数值 $f(x)$ 和 A 的相差就会相当小 \rightarrow 欲使 $|f(x) - A|$ 相当小, 只要 x 充分接近 x_0 就可以了. 即对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时, 都有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 此即 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

2、 $x \rightarrow x_0 (x \neq x_0)$ 时函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义

定义 2 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某个空心邻域 $U^0(x_0; \delta')$ 内有定义, A 为定数, 若对任给的 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta (< \delta') > 0$, 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称函数 f 当 x 趋于 x_0 时以 A 为极限 (或称 A 为 $x \rightarrow x_0$ 时 $f(x)$ 的极限), 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \text{ 或 } (f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0)).$$

3、函数极限的 $\varepsilon - \delta$ 定义的几点说明:

(1) $|f(x) - A| < \varepsilon$ 是结论, $0 < |x - x_0| < \delta$ 是条件, 即由 $0 < |x - x_0| < \delta$ 推出.

(2) ε 是表示函数 $f(x)$ 与 A 的接近程度的. 为了说明函数 $f(x)$ 在 $x \rightarrow x_0$ 的过程中, 能够任意地接近于 A , ε 必须是任意的. 这即 ε 的第一个特性——任意

性, 即 ε 是变量; 但 ε 一经给定之后, 暂时就把 ε 看作是不变的了. 以便通过 ε 寻找 δ , 使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 成立. 这即 ε 的第二特性——暂时固定性. 即在寻找 δ 的过程中 ε 是常量; 另外, 若 ε 是任意正数, 则 $\frac{\varepsilon}{2}, \varepsilon^2, \sqrt{\varepsilon}, \dots$ 均为任意正数, 均可扮演 ε 的角色. 也即 ε 的第三个特性——多值性;
 $(|f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow |f(x) - A| \leq \varepsilon)$

(3) δ 是表示 x 与 x_0 的接近程度, 它相当于数列极限的 $\varepsilon - N$ 定义中的 N . 它的第一个特性是相应性. 即对给定的 $\varepsilon > 0$, 都有一个 δ 与之对应, 所以 δ 是依赖于 ε 而适当选取的, 为此记之为 $\delta(x_0; \varepsilon)$; 一般说来, ε 越小, δ 越小. 但是, 定义中是要求由 $0 < |x - x_0| < \delta$ 推出 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 即可, 故若 δ 满足此要求, 则 $\frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{3}$ 等等比 δ 还小的正数均可满足要求, 因此 δ 不是唯一的. 这即 δ 的第二个特性——多值性.

(4) 在定义中, 只要求函数 f 在 x_0 的某空心邻域内有定义, 而一般不要求 f 在 x_0 处的函数值是否存在, 或者取什么样的值. 这是因为, 对于函数极限我们所研究的是当 x 趋于 x_0 的过程中函数的变化趋势, 与函数在该处的函数值无关. 所以可以不考虑 f 在点 a 的函数值是否存在, 或取何值, 因而限定“ $0 < |x - x_0|$ ”.

(5) 定义中的不等式 $0 < |x - x_0| < \delta \Leftrightarrow x \in U_0(x_0, \delta)$;
 $|f(x) - A| < \varepsilon \Leftrightarrow f(x) \in U(A; \varepsilon)$. 从而定义 2 $\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $x \in U_0(x_0, \delta)$ 时, 都有 $f(x) \in U(A; \varepsilon) \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 使得 $f(U^0(x_0, \delta)) \subset U(A; \varepsilon)$.

(6) $\varepsilon - \delta$ 定义的几何意义.

例1. 设 $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, 证明: $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = 4$.

例2. 设 $f(x) = 1 (x \neq 0)$, 讨论 $x \rightarrow 0$ 时 $f(x)$ 的极限.

例3. 证明 1) $\lim_{x \rightarrow x_0} \sin x = \sin x_0$; 2) $\lim_{x \rightarrow x_0} \cos x = \cos x_0$.

例4. 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 - 1}{2x^2 - x - 1} = \frac{2}{3}$.

例5. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{1-x^2} = \sqrt{1-x_0^2}$ ($|x_0| < 1$).

例6. 证明 $\lim_{x \rightarrow x_0} C = C, \lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$.

例7. 证明 $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{x} = \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$).

证明: 注意到 $\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| = \frac{|x-a|}{|x| \cdot |a|}$, 要想它任意小, $|x-a|$ 可任意小, $|x|$ 却不能任意小, 当 $x \rightarrow a$ 时, 它必须远离零点. 当 $|x-a| < \frac{|a|}{2}$ 时, $|x| \geq |a| - |x-a| > \frac{|a|}{2}$ 就远离零点了.

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \min(\frac{|a|}{2}, \frac{|a|^2}{2} \varepsilon)$, 则当 $0 < |x-a| < \delta$ 时, 有

$$\left| \frac{1}{x} - \frac{1}{a} \right| \leq \frac{2|x-a|}{a^2} < \varepsilon.$$

例8. 证明 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

证明: 先设 $a=0$, 要证 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$, $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \varepsilon$, 取 $\delta = \varepsilon^2$, 则当 $0 < x < \delta$ 时, 有 $|\sqrt{x}| = \sqrt{x} < \sqrt{\delta} < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} = 0$.

再设 $a > 0$, $\forall \varepsilon > 0$, 要使 $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, 注意到

$$|\sqrt{x} - \sqrt{a}| = \frac{|x-a|}{\sqrt{x} + \sqrt{a}} \leq \frac{1}{\sqrt{a}} |x-a|,$$

只要 $\frac{1}{\sqrt{a}} |x-a| < \varepsilon$, 且 $x > 0$, 取 $\delta = \min(\sqrt{a}\varepsilon, \frac{a}{2})$, 则当 $0 < x-a < \delta$ 时, 有 $|\sqrt{x} - \sqrt{a}| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow a} \sqrt{x} = \sqrt{a}$.

例9. 验证 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2+x}{x^2-2} = 2$.

证明: $\left| \frac{2x^2+x}{x^2-2} - 2 \right| = \left| \frac{x+4}{x^2-2} \right| \leq \frac{|x|+4}{|x|^2-2} \stackrel{|x|>3}{\leq} \frac{|x|+4}{|x|^2-2} \stackrel{|x|>4}{\leq} \frac{2|x|}{|x|^2} = \frac{4}{|x|}.$

例10. 验证 $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^3-3x^2+3x-9}{2x^2-7x+3} = \frac{12}{5}$.

证明: 由 $x \neq 3$, $\left| \frac{x^3-3x^2+3x-9}{2x^2-7x+3} - \frac{12}{5} \right| = \left| \frac{(x^2+3)(x-3)}{(2x-1)(x-3)} - \frac{12}{5} \right| =$

$$\left| \frac{x^2+3}{2x-1} - \frac{12}{5} \right| = \frac{|5x-9||x-3|}{5|2x-1|} \leq \frac{|5x-9||x-3|}{|2x-1|}.$$

为使 $|5x-9|=|5x-15+6|\leq 5|x-3|+6\leq 11$, 需有 $|x-3|<1$;

为使 $|2x-1|=|2x-6+5|\geq 5-2|x-3|>1$, 需有 $|x-3|<2$.

于是, 倘限制 $0<|x-3|<1$, 就有

$$\left| \frac{x^3-3x^2+3x-9}{2x^2-7x+3} - \frac{12}{5} \right| \leq \frac{|5x-9||x-3|}{|2x-1|} \leq \frac{11|x-3|}{1} = 11|x-3|. \dots\dots$$

练习: 1) 证明 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3-1}{x-1} = 3$; 2) 证明 $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{6x+5}{x} = 6$.

三、单侧极限

1. 引言

有些函数在其定义域上某些点左侧与右侧的解析式不同, 如

$$f_1(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 0 \\ x, & x < 0 \end{cases}$$

或函数在某些点仅在其一侧有定义, 如

$$f_2(x) = \sqrt{x}, x \geq 0.$$

这时, 如何讨论这类函数在上述各点处的极限呢? 此时, 不能再用前面的定义(讨论方法), 而要从这些点的某一侧来讨论. 如讨论 $f_1(x)$ 在 $x \rightarrow 0$ 时的极限.

要在 $x=0$ 的左右两侧分别讨论. 即当 $x>0$ 而趋于 0 时, 应按 $f_1(x)=x^2$ 来考察函数值的变化趋势; 当 $x<0$ 而趋于 0 时, 应按 $f_1(x)=x$ 来考察函数值的变化趋势;

而对 $f_2(x)$, 只能在点 $x=0$ 的右侧, 即 $x>0$ 而趋于 0 时来考察. 为此, 引进“单侧极限”的概念.

2. 单侧极限的定义

定义 3 设函数 f 在 $U_+^0(x_0; \delta')$ 内有定义, A 为定数. 若对任给的 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta (< \delta') > 0$, 使得当 $x_0 < x < x_0 + \delta$ 时有 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 则称数 A 为函数 f 当 x 趋于 x_0 时的右极限, 记作

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \text{ 或 } f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^+) \text{ 或 } f(x_0+0) = A.$$

类似可给出左极限定义 ($U_-^0(x_0; \delta)$, $x_0 - \delta < x < x_0$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ 或

$f(x) \rightarrow A (x \rightarrow x_0^-)$ 或 $f(x_0-0) = A$).

注：右极限与左极限统称为单侧极限.

3. 例子

例 1 讨论函数 $f_1(x)$ 在 $x=0$ 的左、右极限.

例 2 讨论 $\operatorname{sgn} x$ 在 $x=0$ 的左、右极限.

例 3 讨论函数 $\sqrt{1-x^2}$ 在 ± 1 处的单侧极限.

4. 函数极限 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 与 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$, $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ 的关系.

定理 3.1 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

证明： 必要性， $\forall \varepsilon > 0$ ，由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ， $\exists \delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，特别地当 $0 < x - x_0 < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，故 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$.

同理当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时，也有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，故 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$.

充分性， $\forall \varepsilon > 0$ ，由 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A$ ， $\exists \delta_1 > 0$ ，使得当 $0 < x - x_0 < \delta_1$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，又由 $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = A$ ， $\exists \delta_2 > 0$ ，使得当 $0 < x_0 - x < \delta_2$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$. 令 $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$ ，当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ ，故 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$.

注：1) 利用此可验证函数极限的存在，如由定理 3.1 知： $\lim_{x \rightarrow 0} f_1(x) = 0$. 还可说明某些函数极限不存在，如由例 2 知 $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{sgn} x$ 不存在. 2) $f(x_0 + 0)$, $f(x_0 - 0)$, $f(x_0)$ 可能毫无关系，如例 2.

[作业] 教材 P47—48 2—7.

§ 3 函数极限存在条件

教学章节：第三章函数极限——§ 3 函数极限存在条件

教学目的：理解并运用海涅定理与柯西准则判定某些函数极限的存在性.

教学要求：掌握海涅定理与柯西准则，领会其实质以及证明的基本思路.

教学重点：海涅定理及柯西准则.

教学难点：海涅定理及柯西准则运用.

教学方法：讲授为主，辅以练习加深理解，掌握运用.

教学程序：

引言

在讨论数列极限存在条件时，我们曾向大家介绍过“单调有界定理”和“柯

西收敛准则”。我们说数列是特殊的函数，那么对于函数是否也有类似的结果呢？或者说能否从函数值的变化趋势来判断其极限的存在性呢？这是本节的主要任务。

本节的结论只对 $x \rightarrow x_0$ 这种类型的函数极限进行论述，但其结论对其它类型的函数极限也是成立的。

首先介绍一个很主要的结果——海涅(Heine)定理（归结原则）。

一、归结原则

定理 1 (Heine 定理) 设 f 在 $U^0(x_0; \delta')$ 内有定义， $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 \Leftrightarrow 对任何含于 $U^0(x_0; \delta')$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$ ，极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 都存在且相等。

证：必要性 在 $U^0(x_0)$ 中任取序列 $\{x_n\}$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ，要证 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。

$\forall \varepsilon > 0$ ，由 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ， $\exists \delta > 0$ ，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$ 。

对于 $\delta > 0$ ，由 $x_n \rightarrow x_0$ ， $\exists N$ ，使得当 $n > N$ 时，有 $0 < |x_n - x_0| < \delta$ ，

于是当 $n > N$ 时，有 $|f(x_n) - A| < \varepsilon$ ，即 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 。

充分性，如果不然，即 $x \rightarrow x_0$ 时， $f(x)$ 不以 A 为极限，则 $\exists \varepsilon_0 > 0$ ， $\forall \delta > 0$ ， $\exists x_\delta \in U_0(x_0)$ $0 < |x_\delta - x_0| < \delta$ ，使得 $|f(x_\delta) - A| \geq \varepsilon_0$ 。

令 $\delta = \frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, \dots$)，则 $\exists x_n \in U_0(x_0)$ ， $0 < |x_n - x_0| < \frac{1}{n}$ ，使得 $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ 。对于序列 $\{x_n\}$ ， $x_n \rightarrow x_0$ ， $x_n \in U^0(x_0)$ ，但 $|f(x_n) - A| \geq \varepsilon_0$ ，显然与条件 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$ 矛盾。

判断 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在之方法：在 $U^0(x_0)$ 中找到两个序列 $\{x'_n\}$ 和 $\{x''_n\}$ 都趋向于 x_0 ，两个极限 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n)$ 和 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$ 都存在，但不相等，这实际上是充要条件，充分性的证明用本节定理就行了，必要性的证明要到第七章讲完紧性以后才能证，我们目前也只用到它的充分性。

注 1 $\{f(x_n)\}$ 是数列， $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 是数列的极限。所以这个定理把函数 $f(x)$ 的极限归结为数列 $\{f(x_n)\}$ 的极限问题来讨论，所以称之为“归结原则”。由此，可由数列极限的性质来推断函数极限性质。

注 2 从 Heine 定理可以得到一个说明 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在的方法，即“若可找到一个数列 $\{x_n\}$ ， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x_0$ ，使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n)$ 不存在；”或“找到两个都以 x_0 为极限的数列 $\{x'_n\}, \{x''_n\}$ ，使 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x'_n), \lim_{n \rightarrow \infty} f(x''_n)$ 都存在但不相等，则 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在。

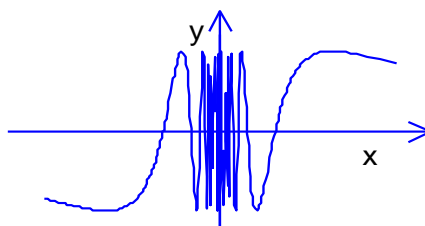
例 1 证明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

证明: 令 $x'_n = \frac{1}{2\pi n} \rightarrow 0$, $x''_n = \frac{1}{(2n + \frac{1}{2})\pi} \rightarrow 0$, $\sin \frac{1}{x'_n} = 0$, 当然趋于 0,
 $\sin \frac{1}{x''_n} = 1$, 当然趋于 1, 故 $\sin \frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow 0$ 时没极限.

注 3. 对于 $x \rightarrow x_0^+$, $x \rightarrow x_0^-$, $x \rightarrow +\infty$, $x \rightarrow -\infty$ 这四种类型的单侧极限, 相应的
 归结原则可表示为更强的形式. 如当 $x \rightarrow x_0^+$ 时有:

定理 2 设函数 f 在 x_0 的某空心邻域 $U_+(x_0)$ 内有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = A \Leftrightarrow$ 对任
 何以 x_0 为极限的递减数列 $\{x_n\} \subset U_+(x_0)$,

有 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = A$.



二、单调有界定理

相应于数列极限的单调有界定理, 关
 于上述四类单侧极限也有相应的定理. 现以 $x \rightarrow x_0^+$ 这种类型为例叙述如下:

定理 3 设 f 为定义有 $U_+(x_0)$ 上的单调有界函数, 则右极限 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在.

注: 定理 3 可更具体地叙述如下: f 为定义在 $U_+(x_0)$ 上的函数, 若

(1) f 在 $U_+(x_0)$ 上递增有下界, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在, 且

$$\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \inf_{x \in U_+(x_0)} f(x);$$

(2) f 在 $U_+(x_0)$ 上递减有上界, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ 存在, 且 $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \sup_{x \in U_+(x_0)} f(x)$.

更一般的有:

定理 设 $f(x)$ 在 $U_0^-(x_0)$ 上定义, 且 $f(x)$ 单调上升, 则 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x)$ 存在且等于
 $\sup_{x \in U_0^-(x_0)} f(x)$.

证明: 令 $A = \sup_{x \in U_0^-(x_0)} f(x)$, 当集合 $\{f(x) | x \in U_0^-(x_0)\}$ 有上界时, $A < +\infty$,
 当它无上界时, $A = +\infty$.

1) $A < +\infty$

$\forall \varepsilon > 0$, 由上确界定义, $\exists x' \in U_0^-(x_0)$, 使得 $f(x') > A - \varepsilon$, 取

$$\delta = x_0 - x' > 0,$$

则当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 由函数单调上升得 $f(x) \geq f(x') > A - \varepsilon$, 再由上确界
 定义

$A + \varepsilon > f(x) > A - \varepsilon$, 或 $|f(x) - A| < \varepsilon$, 即 $\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = A = \sup_{x \in U_0^-(x_0)} f(x)$.

2) $A = +\infty$

因集合无上界, 对 $\forall M > 0$, $\exists x' \in U_0^-(x_0)$, 使得 $f(x') > M$. 取 $\delta = x_0 - x' > 0$, 则当 $0 < x_0 - x < \delta$ 时, 有 $f(x) \geq f(x') > M$, 即

$$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = +\infty = \sup_{x \in U_0^-(x_0)} f(x).$$

类似地我们有: $f(x)$ 在 $U_0^-(x_0)$ 定义, 且 $f(x)$ 单调下降, 则

$\lim_{x \rightarrow x_0-0} f(x) = \inf_{x \in U_0^-(x_0)} f(x)$, 以及关于右极限的相应结果, 同学们自行给出定理的表述和证明.

三函数极限的 Cauchy 收敛准则

定理 4 (Cauchy 准则) 设函数 f 在 $U^0(x_0; \delta')$ 内有定义, $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 存在 \Leftrightarrow

任给 $\varepsilon > 0$, 存在正数 $\delta (< \delta')$, 使得对任何 $x', x'' \in U^0(x_0; \delta)$ 有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$.

证: \Rightarrow (利用极限的定义) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

则 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ ($\delta < \delta'$) 当 $0 < |x - a| < \delta$ 时有

$|f(x) - b| < \varepsilon/2$. 从而当 $0 < |x' - a| < \delta$, $0 < |x'' - a| < \delta$ 时有

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - b| + |f(x'') - b| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

\Leftarrow (利用 Heine 归并原则) 设 $\{a_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a, \delta')$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a$, 由假设,

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 \quad (\delta < \delta'), \text{ 只要 } x', x'' \in \overset{\circ}{U}(a, \delta) \Rightarrow |f(x') - f(x'')| < \varepsilon$$

对此 δ , $\exists n_0$, 当 $m, n > n_0$ 时有 $0 < |a_m - a| < \delta$, $0 < |a_n - a| < \delta$

从而 $|f(a_n) - f(a_m)| < \varepsilon$ 由数列的 Cauchy 收敛准则, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n)$ 存在设为

$\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = b$ 设 $\{b_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a, \delta')$ 为另一数列, 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = a$ 则同上可得 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n)$ 存在设为 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(b_n) = c$

考虑数列 $\{C_n\} = \{a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_n, b_n, \dots\}$ 易见 $\{C_n\} \subset \overset{\circ}{U}(a, \delta')$ 且 $\lim_{n \rightarrow \infty} C_n = a$

如上所证, $\lim_{n \rightarrow \infty} f(C_n)$ 存在, 作为 $\{f(C_n)\}$ 的两个子列 $\{f(a_n)\}$ 、 $\{f(b_n)\}$ 必收敛于同一极限, 即 $b = c$

因此由归结原则得 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$.

注: 按照 Cauchy 准则, 可以写出 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ 不存在的充要条件: 存在 $\varepsilon > 0$,

对任意 $\delta (> 0)$, 存在 $x', x'' \in U^0(x_0; \delta)$ 使得 $|f(x') - f(x'')| \geq \varepsilon$.

例: 用 Cauchy 准则说明 $\lim_{x \rightarrow 0} \sin \frac{1}{x}$ 不存在.

证明: 取 $x' = \frac{1}{n\pi}$, $x'' = \frac{1}{n\pi + \frac{\pi}{2}}$.

例 5 设在 $[a, +\infty)$ 上函数 $f(x) \searrow$. 则极限 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ 存在, $\Leftrightarrow f(x)$ 在

$[a, +\infty)$ 上有界. (简证, 留为作业).

综上所述: Heine 定理和 Cauchy 准则是说明极限不存在的很方便的工具.

[作业] 教材 P55 1, 2, 3, 4, 6.

提示: 第 1 题用反证法, 第 4 题用 Heine 归并原则.