《概率与统计》补充内容：正态分布

4.1 多元正态分布

定义 4.1 (**多元正态分布**(Multivariate normal distribution)). 给定n维向量$\vec{\mu}=(\mu_1,\mu_2,\cdots,\mu_n)^T$及$n$阶对称正定矩阵$B$，以

$$\varphi(\vec{x})=\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}|B|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}(\vec{x}-\vec{\mu})^TB^{-1}(\vec{x}-\vec{\mu})\right\}$$

为密度函数的连续型分布称为n元正态分布，记为$N(\vec{\mu},B)$。

定理 4.1 (**n维正态分布的数字特征**). 设n维随机向量$\vec{X}=(X_1,X_2,\cdots,X_n)^T$服从正态分布$N(\vec{\mu},B)$，则

$$E\vec{X}=\vec{\mu},\quad \mathrm{cov}\vec{X}=B.$$

4.2 特征函数

定义 4.2 (**特征函数**(Characteristic function)). 设$F(x)$为一个分布函数，称

$$h(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{itx}dF(x),$$

为$F(x)$的特征函数，其中$i=\sqrt{-1}$为虚数单位。如果$F(x)$为随机变量X的分布函数，则$h(t)$也称为X的特征函数，此时有

$$h(t)=E(e^{itX}).$$

若离散随机变量X的分布为

$$P\{X=x_k\}=p_k,\qquad k=1,2,\cdots,$$

则其特征函数为

$$h(t)=\sum_k e^{itx_k}p_k.$$

若连续随机变量X的密度为$f(x)$，则其特征函数为

$$h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx.$$

例 4.1 (常用离散分布的特征函数). *1.* 几何分布$G(p)$的特征函数为

$$h(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{itk} p q^{k-1} = \frac{pe^{it}}{1 - qe^{it}}.$$

2. 二项分布$B(n,p)$的特征函数为

$$h(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} C_n^k p^k q^{n-k} = (q + pe^{it})^n.$$

3. 泊松分布$P(\lambda)$的特征函数为

$$h(t) = \sum_{k=0}^{n} e^{itk} \cdot \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda(e^{it}-1)}.$$

例 4.2 (常用连续分布的特征函数). *1.* 均匀分布$U[a,b]$的特征函数为

$$h(t) = \int_a^b \frac{e^{itx}}{b-a} dx = \frac{e^{itb} - e^{ita}}{it(b-a)}.$$

2. 指数分布$e(\lambda)$的特征函数为

$$h(t) = \int_0^{+\infty} e^{itx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{\lambda}{\lambda - it}.$$

定理 4.2. 若随机变量X的特征函数为$h_X(t)$，则$Y = a + bX \ (b \neq 0)$的特征函数为

$$h_Y(t) = e^{iat} h_X(bt).$$

例 4.3. 标准正态分布$N(0,1)$的特征函数为$e^{-\frac{t^2}{2}}$，从而一般正态分布$N(\mu,\sigma^2)$的特征函数为

$$\exp\{i\mu t - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\}.$$

证明： 记标准正态分布$N(0,1)$的特征函数为$h(t)$，则

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(itx)^n}{n!} \right] \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(itx)^n}{n!} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \int_{0}^{+\infty} \frac{(-t^2x^2)^k}{(2k)!} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx.$$

注意到

$$\int_0^{+\infty} x^{2k} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} dx \xlongequal[dx=\frac{1}{\sqrt{2y}}dy]{y=\frac{x^2}{2}} \frac{2^k}{\sqrt{2}} \int_0^{+\infty} y^{k-\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \frac{2^k}{\sqrt{2}} \Gamma(k+\frac{1}{2}),$$

我们有

$$h(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!} \cdot 2^k \Gamma(k+\frac{1}{2}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^{2k}}{(2k)!!}$$
$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \cdot \left(-\frac{t^2}{2}\right)^k = e^{-\frac{t^2}{2}}.$$

□

定理 4.3. 设随机变量X与Y相互独立，则它们和的特征函数等于各自特征函数的乘积，即有

$$h_{X+Y}(t) = h_X(t) \cdot h_Y(t).$$

定理 4.4 (唯一性定理). 分布函数由其特征函数唯一确定。

定义 4.3 (**特征函数**(Characteristic function)). 设$F(\vec{x})$为一个n元分布函数，称

$$h(\vec{t}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{i\vec{t}^{\,T}\vec{x}} dF(\vec{x}),$$

为$F(\vec{x})$的特征函数。如果$F(\vec{x})$为随机变量$\vec{X}$的分布函数，则$h(\vec{t})$也称为$\vec{X}$的特征函数，此时有

$$h(\vec{t}) = E(e^{i\vec{t}^{\,T}\vec{X}}).$$

定理 4.5. n元正态分布$N(\vec{\mu}, B)$的特征函数为

$$h(\vec{t}) = \exp\left\{ i\vec{\mu}^T\vec{t} - \frac{1}{2}\vec{t}^{\,T} B\vec{t} \right\}.$$

证明：

□

4.3 正态随机向量的线性变换

定理 4.6 (正态随机向量的线性变换). 设n维随机向量$\vec{X} \sim N(\vec{\mu}, B)$。则对任意的满秩矩阵$C \in \mathbb{R}^{m\times n}$ $(m \leq n)$，m维随机向量$\vec{Y} = C\vec{X}$服从正态分布

$$N(C\vec{\mu}, CBC^T).$$

推论 4.7. 设n维随机向量$\vec{X} \sim N(\vec{\mu}, B)$。则对任意非零向量$\vec{a} \in \mathbb{R}^n$，有

$$\vec{a}^T\vec{X} \sim N(\vec{a}^T\vec{\mu}, \vec{a}^T B\vec{a}).$$

4.4 中心极限定理

符号说明：对独立随机变量序列$\{X_n\}_{n\geq 1}$，记Z_n为序列前n项和$\sum_{i=1}^n X_i$的标准化的随机变量，即

$$Z_n := \frac{\sum_{k=1}^n [X_k - E(X_k)]}{\sqrt{D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)}}, \qquad \forall n \geq 1.$$

另外，记

$$s_n^2 := D\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n DX_k.$$

各种中心极限定理的证明均利用了以下等价关系：

引理 4.8. Z_n的分布函数逐点收敛于标准正态分布函数当且仅当Z_n的特征函数逐点收敛于标准正态分布的特征函数，即对任意$t \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} E(e^{itZ_n}) = e^{-t^2/2}.$$

定理 4.9 (列维定理(Lindeberg - Lévy CLT)). 设独立随机变量序列$\{X_n\}_{n\geq 1}$服从相同的分布，有共同的期望μ及方差$\sigma^2 > 0$，则当$n \to \infty$时，Z_n的分布函数逐点收敛于标准正态分布函数，即对任意$x \in \mathbb{R}$,

$$\lim_{n\to\infty} P\{Z_n \leq x\} = \lim_{n\to\infty} P\left\{\frac{\sum_{k=1}^n X_k - n\mu}{\sqrt{n}\sigma} \leq x\right\} = \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt.$$

证明：

□