线性二阶偏微分方程

董光昌　　著

浙江大学出版社

内容简介

本书以较少篇幅讲述线性二阶偏微分方程，内容侧重估计方法，并以椭圆型方程和抛物型方程为主。对估计方法讲述得既重点突出、又较详尽。对其它方面的内容，有些只列出结论，指出参考文献。例如，虽然列出了嵌入定理的全部定理，但并未全部证明。本书可作为基础数学专业研究生的教材，也可供有关研究人员、大学教师、高年级大学生参考。

线性二阶偏微分方程

董光昌　著

责任编辑　汤国枨

浙江大学出版社出版　浙江大学印刷厂印刷
浙江省新华书店发行　各地新华书店经售

* * *

1987年3月第一版　1987年3月第一次印刷

开本 850×1168毫米1/32　印张 9.25　字数 228千

印数1—2000

ISBN 7-308-00002-8

O·001　定价：平装 1.55元　精装 4.00元

（统一书号13337·002）

序

在为研究生开偏微分方程专门化课程时，发现教材是棘手的问题。已出版的国内研究生教材，据作者所知仅有一种，而它主要是引导研究生向双曲型方面的研究，重要的Schauder估计、Bernstein估计等均未涉及。国内较多学校采用D. Gilbarg与N. S. Trudinger著的“二阶椭圆型偏微分方程”一书作为研究生用的主要教材，这本书确有不少优点，但它显著的不足之处是，仅介绍椭圆型，对双曲与抛物型的材料毫未涉及。国外其他偏微分方程的书虽多，但均不免有题材较偏或篇幅庞大之弊。总之，由于偏微分方程材料实在太多，如何取材使学时较少而不遗漏重要内容，确实很不容易。首先必须有一个目的，其次必须限定范围。

本书是由作者给研究生开课的讲义经修改、整理而成。基本上是为研究二阶非线性椭圆方程、二阶非线性抛物方程作准备，限定范围为二阶线性方程，侧重于估计方法，因而双曲型的材料介绍得较少。

虽然作者希望尽量把重要材料皆收入本书，且力求不要把篇幅弄得太大，但也很可能有若干重要材料未被选入。本书未编入习题，这是由于成书时间较短来不及写。这一重要不足之处希望采用本书作为教材的教师能特别重视，在教学中补足它。本书如能获得再版的机会，作者一定要补上合适的习题。

方程组的教师与研究生在教学以及在本书编写过程中

提出了各种有益的意见，郭竹瑞教授在本书审、校、出版等方面给予了各种帮助，作者在此深表谢意。

成书过程仓促，不妥之处在所难免，名词、术语的使用也有可能考虑欠妥，希望阅读本书的同志能多多提出宝贵意见，不胜感激。

作者　1986年1月

目　　录

引言　偏微分方程概述

Ⅰ　**偏微分方程学科的内容**是研究偏微分方程解的各种性质。通常考虑如下几个问题。

1．对单个方程或方程组，应配以怎样的初值条件与边值条件使之具有解，这是**解的存在性**问题。在研究解的存在性时，附带要明确解赖以存在的函数类。

2．**解的唯一性**或究竟有几个解。附带地要明确使解为唯一的函数类。

3．**解的光滑性**。是否为**经典解**、**强解**还是**弱解**？解具有几阶可微性？

4．**解的连续依赖性**。必须明确是在什么空间、什么范数实现的。通常考虑的是解关于初、边值，或关于方程系数，或在方程为线性时关于自由项的连续依赖性。

5．**定解区域**与**影响区域**。

6．解的**间断线**、**激波线**和**激波面**。

7．**极值原理**。

8．其它性质。

9．解如何逼近？如何计算？这属于偏微分方程与计算数学的边缘分支。

偏微分方程学科研究的重点是解的存在性与唯一性。这是最基本的内容。

Ⅱ　**偏微分方程内容的广泛性**。

仅以一例说明之。偏微分方程与复变函数论同属大学数学系的主要课程。复变函数论研究的是二个自变量x和y，两个函数$u(x,y)$

和$v(x,y)$的一阶方程组

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y} \end{cases}$$

的解的性质，因此，它是偏微分方程的一个很特殊的情况。

II　偏微分方程研究的**发展历史**。

最初，人们试图用研究常微分方程的一套方法来研究偏微分方程。简单的常微分方程，总能通过积分求得通解。一般，几阶方程的通解就含有几个任意常数。例如，

$$y''+y=0$$

的通解

$$y=C_1\cos x+C_2\sin x$$

含有二个任意常数。复杂一些的常微分方程，虽然不能简易地求得通解，但通解总是存在的。对于其中带有初、边值条件的特解，可把其条件代入通解中，决定出任意常数而得到。例如求解

$$\begin{cases} y''+y=0, \\ y|_{x=0}=1, \\ y|_{x=1}=3\,. \end{cases}$$

上述方法能否搬到偏微分方程的求解过程中去？

简单的偏微分方程可以求得通解，例如

$$u_x-u_y=0$$

的通解为

$$u=F(x+y)，F为任意函数。$$

又如

$$u_{xx}-u_{yy}=0$$

的通解为

$$u=F(x+y)+G(x-y),\quad F、G\text{是任意函数。}$$

用这样的通解来定出满足初、边值条件的特解还是较便于应用的。

$u_{xx}+u_{yy}=0$的通解是$u=\mathrm{Re}F(x+iy)$，这里F是任一解析函数。

$u_{xx}-u_y=0$的通解$u=f(x,y)$是关于x为解析，关于y为无穷次可微的二类函数。

在后两种情况下，使用通解来确定满足初、边值条件的特解是不便于应用的。

一阶偏微分方程能套用常微分方程求通解再定特解的方法。线性一阶方程用**特征线**解法，非线性一阶方程用**特征带**解法以及**Hamiton—Jacobi 方法**。解法的精神基本上是这样，所以一阶偏微分方程的解法，常附在常微分方程书本的最后。

高阶方程(包括一阶方程组)开始也是按通解的想法研究。代表性的成果是Ковалевская定理。就二阶方程

$$\begin{cases} u_{yy}=F(x,y,u,u_x,u_y,u_{xx},u_{xy}) \\ u(x,y_0)=\varphi_0(x) \\ u_y(x,y_0)=\varphi_1(x) \end{cases}$$

来说其结果是：当F、φ_0、φ_1均为解析函数时，这问题有一解析解。这是一个类似于通解的解。结果是十分一般的，但用处不大。

以后发展到**分型研究**。从分型研究的结果来考察Ковалевская定理。椭圆型方程边上每点给一个值，在区域内部解为存在唯一。Ковалевская定理要求边上每点给两个值

$$u|_{\partial\Omega}=\varphi(s),\quad \frac{\partial u}{\partial N}\bigg|_{\partial\Omega}=\psi(s),$$

解仍然是存在唯一的。因此，解仅能在小范围存在，不可能延拓到大范围，如果延拓到整个Ω，一定有奇点。这样，Ковалевская 定理的意义不大，但还有某些用处，例如构造双曲型方程初值问题的逼近解。

分型研究，在偏微分方程的研究上是进了一步。后来发现了**无解方程**，在偏微分方程的基础理论上，又跨进了一步。

偏微分方程的通解是难求的，但长期以来，对各类偏微分方程求若干特解是并不困难的。因此，在一段时期里不少人相信，除了属于无意义的情况，例如

$$u_x^2+u_y^2+1=0$$

无实解外，每一偏微分方程有一大类解是不成问题的。特别是相信一般线性方程

$$\sum_{|\mu|\leqslant m}a_\mu(x)D^\mu u(x)=f(x)$$

其中 $D^\mu=\dfrac{\partial^{|\mu|}}{\partial x_1^{\mu_1}\cdots\partial x_n^{\mu_n}}$，$|\mu|=\mu_1+\cdots+\mu_n$

总有一大类解。但是，事实并非如此。例如

$$\left\{\frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+(x^2+y^2)\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\left(x\frac{\partial}{\partial y}-y\frac{\partial}{\partial x}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right]^2+\frac{\partial^2}{\partial t^2}\right\}u$$

$$=\begin{cases}\dfrac{1}{t^2}\exp\left(-\dfrac{1}{t}\right), & t>0,\\ 0, & t\leqslant 0,\end{cases}$$

没有任何实解，不仅没有经典解，也没有任何强解和弱解。[3][4]

但可以证明：常系数线性偏微分方程总有一大类解。

研究方程的无解及方程的有解条件是有兴趣的问题之一，但我们不打算涉及这方面的内容。

我们主要介绍典型的二阶方程，即椭圆、双曲、抛物型方程。如

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j} = f(x)，\ x\text{属于空间的一定范围；}$$

$$u_t = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + f(x,t)；$$

$$u_{tt} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + f(x,t)；$$

在后二式中(x,t)属于空间一定范围且a_{ij}满足

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\alpha_i\alpha_j > 0,\quad \alpha\in\mathbf{R}^n\setminus\{0\}。$$

除了典型的二阶方程外，也还有其它情况。例如

$$u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} - u_{x_3x_3} - u_{x_4x_4} = 0$$

称为**超双曲型方程**。解的性质很特异，定解条件如何提法是较困难的问题，但这方程无物理意义。属于二阶方程的还有混合型方程，这些内容，我们都不打算涉及。

典型的二阶线性椭圆型、抛物型、双曲型方程定解问题的研究，是很深入的，可以说是已经基本成熟了的。

Ⅳ **研究偏微分方程的方法**简介。

方法是很多的。例如证明解存在的方法，就椭圆型方程来说，就有

1. 场位法；

2. 积分方程法；

3. 变分法；

4. 差分法；

5. 闸函数法；

6. 上、下解的方法；

7. 参数延拓法；

8. 泛函的方法，如Hilbert空间的方法。

证明解的唯一性用极值估计、积分等式或共轭方程解存在等方法。当然，有时不是单用一个方法就能解决问题的，而是几个方法混用或联用。

在这些方法中，有的适用面较广，有的则窄一些。

本书不可能介绍所有的方法，祇偏重于估计的方法，以便在一定程度上用于非线性的情况。

第一章　椭圆型方程

§1　椭圆型方程解的极值原理

对$u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$考虑算子

$$\mathscr{L}(u)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}-c(x)u,$$

其中a_{ij}、b_i、$c\in C(\Omega)$。$\Omega\subset\mathbf{R}^n$为有界区域，不妨设

$$a_{ij}(x)=a_{ji}(x)。$$

如果

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\nu\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad x\in\Omega,\quad \nu>0,$$

$$\forall\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n,$$

则称$\mathscr{L}$为**正规椭圆算子**。

以后，我们将以$B(a,r)$表示以a为中心r为半径的球。

引理 1　设$B(y,\rho)\subset\Omega$，在$B(y,\rho)$中$c(x)\leqslant 0$，$\mathscr{L}(u)\leqslant 0$，在点$z\in\partial B(y,\rho)$处$u(z)\leqslant 0$，且$\forall x\in\overline{B(y,\rho)}\setminus z$有$u(z)\leqslant u(x)$。则沿着方向$l$的极限

$$\lim_{x\in l}\inf_{x\to z}\frac{u(x)-u(z)}{\overline{xz}}>0,$$

其中方向l与$B(y,\rho)$在z点的内法线N方向作成锐角，即$\cos(l,\mathrm{N})>0$。

证　作辅助函数

$$v(x)=\exp(-a\overline{xy}^2)-\exp(-a\rho^2)$$

其中 a 为待定常数，则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(v)&=e^{-a\overline{xy}^2}\Big\{4a^2\sum a_{ij}(x_i-y_i)(x_j-y_j)\\&\quad-2a\sum[a_{ii}+b_i(x_i-y_i)]+cve^{a\overline{xy}^2}\Big\}\\&\geqslant e^{-a\overline{xy}^2}\Big\{4a^2\nu\overline{xy}^2-2a\sum[a_{ii}+b_i(x_i-y_i)]+c\Big\}。\end{aligned}$$

当 $\frac{1}{2}\rho\leqslant\overline{xy}\leqslant\rho$ 时，取 a 充分大，由上式可见

$$\mathscr{L}(v)>0.$$

作　　$w(x)=\varepsilon v(x)-u(x)+u(z)$，

其中 ε 为很小的正数，则在 $\partial B(y,\rho)$ 上

$$v(x)=0,\ \ w(x)=-u(x)+u(z)\leqslant 0。$$

在 $\partial B(y,\rho/2)$ 上，

$$u(z)-u(x)\leqslant k<0,$$

又 v 为正常数(因 a 已固定)，所以可取 $\varepsilon>0$ 充分小，使

在 $\partial B(y,\frac{\rho}{2})$ 上，$w(x)\leqslant 0$。

$w(x)$ 在环域 $\frac{\rho}{2}\leqslant\overline{xy}\leqslant\rho$ 中不能为正，否则，有点 x^0 满足 $\frac{\rho}{2}<\overline{x^0y}<\rho$，使 $w(x)$ 在点 x^0 取到最大正值。在此点，一方面有

$$\sum a_{ij}w_{x_ix_j}\leqslant 0,\ \ \sum a_iw_{x_i}=0,\ \ cw\leqslant 0,$$

故　　$\mathscr{L}(w)\leqslant 0$；

另一方面有

$$\mathscr{L}(w)=\varepsilon\mathscr{L}(v)-\mathscr{L}(u)+cu(z)\geqslant\varepsilon\mathscr{L}(v)>0,$$

产生矛盾。因此在$\frac{\rho}{2}\leqslant\overline{xy}\leqslant\rho$中$w(x)\leqslant 0$，即

$$u(x)-u(z)\geqslant\varepsilon[v(x)-v(z)],$$

$$\liminf_{x\in l\, x\to z}\frac{u(x)-u(z)}{\overline{xz}}\geqslant\varepsilon\frac{\partial v}{\partial l}\bigg|_{x=z}>0,$$

引理1证毕。

同理，如果在$B(y,\rho)$中

$$c(x)\leqslant 0,\quad \mathscr{L}(w)\geqslant 0,$$

在$\partial B(y,\rho)$上一点z处

$$u(z)\geqslant 0,\quad u(x)<u(z),\qquad \forall x\in\overline{B(y,\rho)}\backslash z,$$

则有

$$\limsup_{x\in l\, x\to z}\frac{u(x)-u(z)}{\overline{xz}}<0,\text{ 其中}\cos(l,N)>0。$$

注 由证明可知，当$c(x)\equiv 0$时，引理1中的条件$u(z)\leqslant 0$可以取消，结论仍然成立。

定理1 设$u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$，且在$\Omega$中$\mathscr{L}(u)\leqslant 0$。如果$c(x)\leqslant 0$且$u(x)$不为常数，则$u(x)$不在$\Omega$内取到非正的最小值。

证 如果结论不真，即有$x^0\in\Omega$，使$u(x^0)\leqslant 0$为非正最小。由于$u(x)$不为常数，因此由$x\in\overline{\Omega}$，$u(x)=u(x^0)$的点所构成的闭集$D\neq\overline{\Omega}$，从而存在$x^1\in\partial D\cap\Omega$。同样导出在$x^1$附近存在$x^2$，使$x^2\in\Omega\backslash D$，且

$$0<d(x^2,\partial D)<d(x^2,\partial\Omega)。$$

作球$B(x^2,d(x^2,D))$交∂D于x^3，再作球$B((x^2+x^3)/2,\ \overline{x^2x^3}/2)$。显然

$$B((x^2+x^3)/2,\ \overline{x^2x^3}/2)\cap D=\{x^3\}。$$

因而，在这球中引理 1 的条件都满足，于是

$$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_{x=x^3}>0.$$

但另一方面。，$x^3\in\Omega$且$u(x)$于$x=x^3$处取到最小，所以有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_{x=x^3}=0,\quad i=1,2,\cdots,n,$$

二者矛盾。定理 1 证毕。

同理，由

$c\leqslant 0$，$\mathscr{L}(u)\geqslant 0$，$u(x)\neq$常数，$x\in\bar{\Omega}$，可导出$u(x)$不在$\Omega$内取到非负最大值；

$c=0$，$\mathscr{L}(u)\leqslant 0$(或$\mathscr{L}(u)\geqslant 0$)，$u(x)\neq$常数，则在$\Omega$内不能取到最小值(或最大值)。

由定理 1 可直接推出

定理 2 设$u\in C(\bar{\Omega})$是$\mathscr{L}(u)=0$在Ω中的C^2解,即所谓经典解。如果它在$\bar{\Omega}$上不恒等于常数，且$c(x)\leqslant 0$，则

$$|u(x)|<\max_{\xi\in\partial\Omega}|u(\xi)|,\quad \forall x\in\Omega.$$

设$\forall x\in\bar{\Omega}$，$c(x)=0$，则

$$\min_{\xi\in\partial\Omega}u(\xi)<u(x)<\max_{\xi\in\partial\Omega}u(\xi),\quad \forall x\in\Omega.$$

在定理 2 成立所需的条件中，$c(x)\leqslant 0$ 可以稍为放松，但不能完全去掉，至少$c(x)$应不超过算子$\mathscr{L}$的第一个特征值。

例 $u_{xx}+u_{yy}+2u=0$在$\Omega=\{0<x<\pi,0<y<\pi\}$中的解$u=\sin x\sin y$满足$u>0$于$\Omega$，$u=0$于$\partial\Omega$，而不满足

$$|u(x)|<\max_{\xi\in\partial\Omega}|u(\xi)|.$$

这是因为 u 的系数 2 是Laplace算子的特征值。

定理 3 设 $u(x)\in C^2(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$ 是 $\mathscr{L}(u)=f\leqslant 0$ 在Ω的解。如果在Ω

$$c(x)\leqslant 0,\quad u(x)\neq\text{常数}。$$

如果$u(x)$在点 $x^0\in\partial\Omega$ 取非正的最小值,且在x^0点处可作Ω的内切球，则

$$\lim_{x\to x^0}\inf_{x\in l}\frac{u(x)-u(x^0)}{\overline{xx^0}}>0,\ \cos(l,N)>0,\ N\text{为}\Omega\text{的内法线。}$$

证 把内切球弄小一些，使这内切球与$\partial\Omega$仅有一个公共点x^0，应用引理 1 即得定理 3 。

在$\partial\Omega$上处处存在内切球的一个充分条件是$\partial\Omega\in C^2$，但定理3的条件可减弱为$\partial\Omega\in C^{1,\lambda}$，$(0<\lambda\leqslant 1)$。这里 $\partial\Omega\in C^{1,\lambda}$ 的意义是：$\partial\Omega$ 的分片参数表示式

$$x_i=x_i(t_1,\ \cdots,\ t_{n-1})\in C^{1,\lambda}。$$

函数$f\in C^{r,\lambda}$的定义：f的r阶微商满足 λ 阶Hölder条件，其中 r 是正整数。当 $\partial\Omega$ 仅满足 $\partial\Omega\in C^{1,\lambda}$时，不能做内切球，不妨设$u(x)$取到非正最小的点为$x^0=(0,\ 0,\ \cdots 0,\ \rho)$，$(\rho>0)$，且在$x^0$处$\partial\Omega$的切平面为$x_n=\rho$。设在$x^0$附近，$\Omega$在$x_n=\rho$的下方，则可做类似于球的曲面

$$\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2+|x_n|^{2/(1+\lambda)}=\rho^{2/(1+\lambda)}.$$

当ρ足够小，这曲面在Ω内。据此修改$v(x)$为

$$v(x)=\exp\left\{-a\left(\sum_{i=1}^{n-1}x_i^2+|x_n|^{2/(1+\lambda)}\right)\right\}-\exp(-a\rho^{2/(1+\rho)}),$$

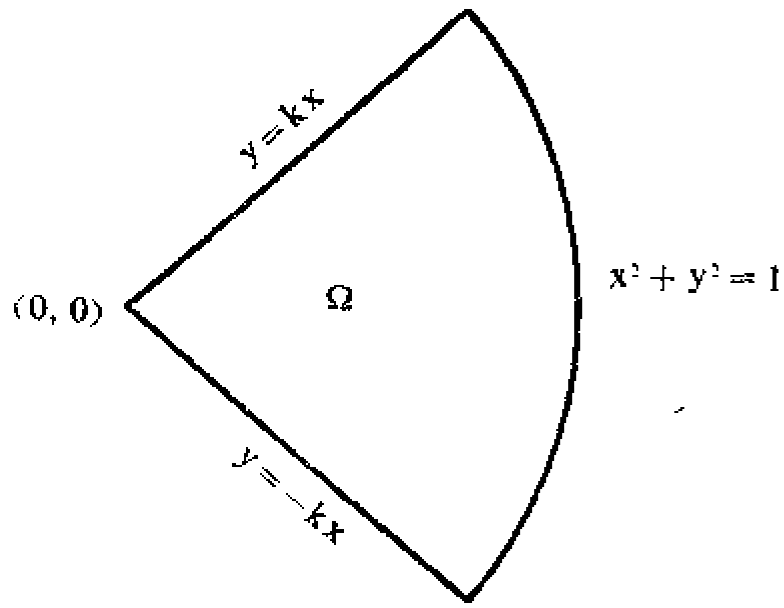
则可推得定理 3 的结论为真。

当区域Ω有角点时，有反例说明定理 3 不再成立。

例 Ω如图所示，

$$\mathscr{L}(u)=u_{xx}+2k^2u_{yy},\quad u=k^2x^2-y^2$$

则在Ω内



$$u>0,\quad \mathscr{L}(u)=-k^2<0,$$

$u(0,0)=0$为最小值，但对任何过原点的 l 皆有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{(0,0)}=0.$$

§2 边值问题解的唯一性与连续依赖性

对于椭圆型方程 $\mathscr{L}(u)=f(x)$，常见的边值问题有下列几种提法。

i) 狄氏问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=f,\quad x\in\Omega;\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi,\quad (\partial\Omega\in C).\end{cases}$$

ii) 诺依曼问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=f,\\ l(u)=\left[a\dfrac{\partial u}{\partial\nu}+bu\right]_{\partial\Omega}=\varphi,\end{cases}$$

其中 $\partial\Omega\in C^1$，$\dfrac{\partial u}{\partial \nu}=\sum\limits_{i,j=1}^{n}a_{ij}\cos(N,x_j)\dfrac{\partial u}{\partial x_i}$，

N为内法线方向，ν 称为**补法线方向**，

$$a=\left\{\sum_{i=1}^{n}\left[\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\cos(N,x_j)\right]^2\right\}^{1/2},$$

b 为 $\partial\Omega$上的函数且$b\leqslant 0$。

iii) 斜微商问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=f,\\ l(u)=\left[a\dfrac{\partial u}{\partial \nu_1}+bu\right]_{\partial\Omega}=\varphi,\end{cases}$$

其中$\partial\Omega\in C^1$，$\cos(\nu_1,\ N)>0$，a、b为$\partial\Omega$上的函数，$a>0$，$b\leqslant 0$。

在斜微商问题中，如有若干点为**切微商**，即$\cos(\nu_1,N)=0$。这是很难的问题，成果很少。因此，一般我们所讨论的斜微商问题是不包含这种情况的。

iv) 混杂问题

在斜微商问题中，设

$$a\geqslant 0,\ b\leqslant 0,\ a^2+b^2\neq 0,$$

且在$\partial\Omega$的部分集合上有$a=0$，但$a\not\equiv 0$。这就是所谓混杂问题。

在上述诸问题中，当$c(x)\leqslant 0$且$c(x)$，$x\in\overline{\Omega}$与$b(\xi)$，$\xi\in\partial\Omega$,不同时恒等于0时，可证明边值问题的解是唯一的。

证 设u_1，u_2为边值问题的两个解。记

$$U=u_2-u_1,$$

则
$$\begin{cases}\mathscr{L}(U)=0,\\ l(U)|_{\partial\Omega}=0.\end{cases}$$

由定理 2，U不在Ω内取到正最大与负最小。当U在$\partial\Omega$上取到正最大时，则在此点

$$U>0,\ \frac{\partial U}{\partial\nu_l}<0,$$

与$l(U)|_{\partial\Omega}=0$相矛盾。同理可证 U 在 $\partial\Omega$上取到负最小，也将导致矛盾。因此，只能有$U=0$。

当$c(x)\equiv 0$，$b(\xi)\equiv 0$时　$u(x)=1$为

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=0\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial\nu_l}\right|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的特征函数，（它所对应的特征值是 0），应用极值原理得出：在容许有一个任意常数的差别的约定下，解是唯一的。

下面我们讨论解对方程自由项 $f(x)$与边值数据 $\varphi(\xi)$的连续性问题。

当$c(x)<0$，$x\in\bar{\Omega}$，$b(\xi)<0$，$\xi\in\partial\Omega$时，成立着

$$|u(x)|\leqslant\frac{\max\limits_{x\in\bar{\Omega}}|f(x)|}{\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}|c(x)|}+\frac{\max\limits_{\xi\in\partial\Omega}|\varphi(\xi)|}{\min\limits_{\xi\in\partial\Omega}|b(\xi)|}.$$

证　记上式右端为M，则

$$\mathscr{L}(M\pm u)=c(x)M\pm f\leqslant 0,$$

$$l(M\pm u)=b(\xi)M\pm\varphi\leqslant 0。$$

由极值原理得到$|u(x)|\leqslant M$。证毕。

由此得到，当u_i为

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=f_i,\\ l(u)=\varphi_i,\end{cases}\quad i=1,2$$

的解时，有

$$|u_2-u_1|\leqslant K(\max_{\bar{\Omega}}|f_2-f_1|+\max_{\partial\Omega}|\varphi_2-\varphi_1|),\qquad (1)$$

其中 $K=\max\left(\dfrac{1}{\min\limits_{x\in\bar{\Omega}}|c(x)|},\ \dfrac{1}{\min\limits_{\xi\in\partial\Omega}|b(\xi)|}\right)$,

(1)式是分别在范数$C(\bar{\Omega})$、$C(\partial\Omega)$之下，解对自由项f和边值数据φ连续依赖性的关系式。

上面证明连续依赖性的条件还可放宽到

$$c(x)\leqslant 0,\ b(\xi)\leqslant 0,$$

但$c(x)\neq 0$，$b(\xi)\neq 0$之一成立的情况。仍可考虑解对方程系数的连续依赖性，但此时需估计解的微商最大值。

在$c(x)\equiv 0$，$b(\xi)\equiv 0$的情况下，解对边值数据的连续依赖性的意义：存在常数C使

$$|u_2-u_1-C|\leqslant K\ |\varphi_2-\varphi_1|,$$

其中常数K与$l(u)=g$的g无关。在这种情况下，证明解的连续依赖性的难度较大，要用到 Harnack 不等式。我们介绍一个特殊情况。

对于$\partial\Omega\in C^2$,

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=\Delta u,\\ l(u)=\dfrac{\partial u}{\partial N}.\end{cases}$$

这时解的连续依赖性，就是要估计

$$\begin{cases}\Delta(u_2-u_1)=0,\\ \dfrac{\partial}{\partial N}(u_2-u_1)|_{\partial\Omega}=\varphi_2-\varphi_1\end{cases}$$

的解u_2-u_1。

取　$C=\min\limits_{\bar{\Omega}}(u_2-u_1)$,

记　$v=\dfrac{u_2-u_1-C}{\max\limits_{\partial\Omega}|\varphi_2-\varphi_1|}$,

则

$$\begin{cases}\Delta v=1,\\ \left|\left[\dfrac{\partial v}{\partial N}\right]_{\partial\Omega}\right|\leqslant 1.\end{cases}$$

要证$|v|$在$\bar{\Omega}$上满足　$|v|\leqslant K$，K是与函数族无关的一常数。如能证明这一点，就得出解对边值的连续依赖性。

证　先定出二个仅依赖于Ω和$\partial\Omega$的常数，固定任一点$P\in\partial\Omega$，由于$\partial\Omega\in C^2$，必存在于P点与$\partial\Omega$相切、除P外含在Ω内的圆，设其半径为r_p。显然，$\sup r_p=R_p$是P点的连续函数。记

$$\inf_{P\in\partial\Omega}R_p=2a,$$

则$a>0$。Ω为连通区域，记

$$\Omega_\sigma=\{x\in\Omega\,|\,d(x,\partial\Omega)>\sigma\}.$$

当σ足够小时，Ω_σ也是连通区域，记

$$\sup_{\Omega_\sigma\text{连通}}\sigma=2b.$$

则a、b是二个仅与Ω、$\partial\Omega$有关的正常数。由于

$$\min_{\bar{\Omega}}v=0,$$

设在$\partial\Omega$上P_1点v取到值0。记

$$\max_{\bar{\Omega}}v(x,y)=M.$$

设在$\partial\Omega$上P_2点$v(x,y)$取到M，因此

$$0\leqslant v(x,y)\leqslant M,\quad \forall(x,y)\in\Omega$$

我们要证M具有与v无关的上界。

由于$v(P_1)=0$，$\left|\left[\dfrac{\partial v}{\partial N}\right]_{P_1}\right|\leqslant 1$，可证$v$在$P_1$点附近数值不会太大。要证明这一点，可和适当的调和函数作比较。

由于$\partial\Omega\in C^2$，因此P_1点有内切圆，取过点P_1半径为a的Ω的内切圆$B(Q_0,a)$。记

$$w(P)=\ln\frac{a}{PQ_0}$$

则$w(P)$为除Q_0点外的调和函数，且

$$w|_{\partial B(Q_0,a)}=0,\quad \left.\frac{\partial w}{\partial N}\right|_{P_1}=\frac{1}{a}\ .$$

记 $\qquad w_1=v-aw$，则$w_1|_{\partial B(Q_0,a)\setminus P_1}>0$.

如果又有$w_1|_{\partial B(Q_0,a/2)}>0$，则在圆环$B(Q_0,a)\backslash B(Q_0,\frac{a}{2})$内成立$w_1>0$。由于$w_1|_{P_1}=0$，故在闭圆环内，$w_1$在$P_1$取到非负的最小值。但这与

$$\left.\frac{\partial w_1}{\partial N}\right|_{P_1}=\left[\frac{\partial v}{\partial N}-a\frac{\partial w}{\partial N}\right]_{P_1}\leqslant 0$$

相矛盾。因此，$\partial B(Q_0,\frac{a}{2})$上至少有一点$Q_1$使$w_1(Q_1)\leqslant 0$，即$v(Q_1)\leqslant a\ln 2$，而$d(Q_1,\partial\Omega)\geqslant\frac{a}{2}$。

同法得到在P_2附近有点Q_2使

$$v(Q_2)\geqslant M-a\ln 2,\ 而d(Q_2,\partial\Omega)\geqslant\frac{a}{2}$$

记$\min(\frac{a}{3},b)=c$，则Ω_c为连通区域，且Q_1，$Q_2\in\Omega_c$。故于Ω_c

可引曲线$\widehat{Q_1Q_2}$联结Q_1与Q_2，设Ω在x，y坐标方向的投影长度分别为l_x，l_y，则$\Omega_{\frac{c}{2}}$被不超过$4(8l_x/c+1)(8l_y/c+1)$个边长为$a/8$的正方形所复盖，且使每一正方形中心是另一正方形的顶点。把每一复盖正方形换为一个中心在$\Omega_{\frac{c}{2}}$内半径为$a/4$的圆,则$\Omega_{\frac{c}{2}}$可被个数仅与Ω，$\partial\Omega$有关的中心在$\Omega_{\frac{c}{2}}$内半径为$c/4$的圆系$\mathscr{A}$所复盖。今证于$\mathscr{A}$中可选出部分圆B_1，B_2，…，B_k,使$Q_1\in B_1$，$Q_2\in B_k$，$B_i\cap B_{i+1}\neq\phi$，$i=1, 2, \cdots, k-1$，$B_i\neq B_j(i\neq j, 1\leqslant i, j\leqslant k)$。事实上,任取$B_1\in\mathscr{A}$使$Q_1\in B_1$。当$Q_2\bar{\in}B_1$时,有向曲线$\widehat{Q_1Q_2}$交$\partial B_1$最初一点记为$Q_1'$。任取$B_2\in\mathscr{A}$使$Q_1'\in B_2$。当$Q_2\bar{\in}B_2$时，有向曲线$\widehat{Q_1Q_2}$交$\partial B_2$的最初一点记为$Q_2'$。任取$B_3\in\mathscr{A}$使$Q_2'\in B_3$，…。这样定出的$B_1$，$B_2\cdots$，$B_k$,如有$B_i=B_j(i\neq j)$，设$i<j$，则用$B_1$，…，$B_i$，$B_{j+1}$，$\cdots B_k$代替$B_1,\cdots$，$B_k$。重复做下去,经有限步骤终可得出$B_i\neq B_j,(i\neq j)$。添加以$Q_1$，$Q_2$为中心，$c/4$为半径的圆$B_0$，$B_{k+1}$，再添加$B_i$, B_{i+1}的圆心联线上的1/4,1/2,3/4诸分点为中心,$c/4$为半径的圆，$i=0, 1, \cdots, k$。把所有的圆记为B_1^*，B_2^*，$\cdots B_l^*$。由于这些分点与$\partial\Omega$的距离大于$c/4$，因此$B_i^*\subset\Omega(i=1, 2, \cdots, l)$。又$B_1^*$，$B_l^*$圆的中心分别为$Q_1$，$Q_2$，而且$B_i^*$，$B_{i+1}^*$的圆心$S_i$，$S_{i+1}$满足

$$\overline{S_iS_{i+1}}<c/8,\quad i=1,2,\cdots,l-1.$$

由调和函数的泊松公式

$$v(r,\phi)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{(R^2-r^2)v(R,\theta)d\theta}{R^2+r^2-2Rr\cos(\phi-\theta)}$$

得到

$$v(r,\phi)\leqslant\frac{1}{2\pi}\frac{R+r}{R-r}\int_0^{2\pi}v(R,\theta)d\theta=\frac{R+r}{R-r}v\Big|_{r=0}.$$

今取　$R=c/4$，$r=|S_iS_{i+1}|$，得到

$$v(S_{i+1})\leqslant 3v(S_i),\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ l-1。$$

因而 $v(Q_2)\leqslant 3^{l-1}v(Q_1)$，由此得到

$$M-b\ln 2\leqslant 3^{l-1}a\ln 2,$$

$$M\leqslant(b+3^{l-1}a)\ln 2=K,$$

K 是与函数族$\{v\}$无关的常数，从而Neumann问题

$$\begin{cases}\left(\dfrac{\partial^2}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2}{\partial y^2}\right)u=0\\ \dfrac{\partial u}{\partial N}\bigg|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

的解对φ的连续依赖性得证。

连续依赖性的证明可推广到

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=\Sigma a_{ij}u_{x_ix_j}+\Sigma b_iu_{x_i}=f,\\ l(u)=\left[a\dfrac{\partial u}{\partial v_1}\right]_{\partial\Omega}=g\end{cases}$$

这是因为上面证明中的$w(P)$，今可取为满足

$$\mathscr{L}(w)\geqslant 0,\quad l(w)>1$$

的任一函数。例如取

$$w(P)=\exp(-k\overline{PQ}^2)-\exp\left(-k\frac{a^2}{4}\right),$$

其中 k 为充分大的正常数。另外由

$$v(S_{i+1})\leqslant Kv(S_i)$$

可推到

$v(Q)\leqslant K_1v(P)$，当$d(P,\partial\Omega)\geqslant\delta$，$d(Q,\ \partial\Omega)\geqslant\delta$ 时成立。这称为**Harnack不等式**，它有专文给出证明。Harnack 不等式不仅对证明连续依赖性有用，在其它方面也有用处，我们将于§11中证明它。

§3 Bernstein估计。附 Laplace方程边值问题的下调和函数解法

考虑椭圆型方程

$$\mathscr{L}(u)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x)u_{x_i}+c(x)u=f(x)\quad x\in\Omega,$$

其中$\Omega\subset\mathbf{R}^n$，$\Omega$为有界区域，$c(x)\leqslant 0$。当系数与自由项$f(x)$适当光滑时，还可用极值原理估计解的微商的有界性。

首先导出微商的内闭有界性。设

a_{ij}，b_i，c，$f\in C^1(\Omega)$，$u\in C^3(\Omega)$ 及 $c(x)\leqslant 0$，并且已用极值原理证明了$|u|\leqslant M$。

设原点$O\in\Omega$，作球$B(O,a)\subset\Omega$，考虑

$$U=(a^2-|x|^2)^2\sum_{k=1}^{n}u_{x_k}^2+Ku^2,$$

K为大的正数，则

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(U)&=\mathscr{L}(U)-2(a^2-|x|^2)^2\sum_{k=1}^{n}u_{x_k}\frac{\partial}{\partial x_k}(\mathscr{L}(u)-f)\\&-2Ku(\mathscr{L}(u)-f)\\&\geqslant 2(a^2-|x|^2)^2\sum_{i,j,k=1}^{n}a_{ij}u_{x_kx_i}u_{x_kx_j}+2K\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\\&-C(a^2-|x|^2)\sum_{i,j,k=1}^{n}|u_{x_k}|(|u_{x_kx_i}|+|u_{x_kx_j}|+|u_{x_ix_j}|)\\&-C\sum_{i,k=1}^{n}(u_{x_k}^2+|u_{x_i}u_{x_k}|)-C\sum_{k=1}^{n}(|u_{x_k}u|+|f_{x_k}u_{x_k}|)\\&-CK(u^2+|fu|),\end{aligned}$$

其中常数C与K无关。由于

$$\Sigma a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geqslant \nu\Sigma\xi_i^2,\quad |u|\leqslant M,$$

由上式应用Schwarz不等式得

$$\mathscr{L}(U)\geqslant\nu[(a^2-|x|^2)^2\sum u_{x_kx_i}^2+K\Sigma u_{x_k}^2]-C_1K,$$

这里C_1为与K无关的常数。

取$x^0\notin\bar{\Omega}$，L为大的正常数，则

$$\mathscr{L}(\exp(L|x-x^0|^2))\geqslant C_2L^2.$$

因此，当L取得充分大时，

$$\mathscr{L}(U+\exp(L|x-x^0|^2))\geqslant C_2L^2-C_1K>0.$$

所以 $U+\exp(L|x-x^0|^2)$ 不在 $B(O,a)$ 的内部取得最大值。在 $\partial B(O,a)$上

$$U+\exp(L|x-x^0|^2)=Ku^2+\exp(L|x-x^0|^2)\leqslant K_1.$$

因此

$$(a^2-|x|^2)^2\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\leqslant K_1,\quad |x|<a.$$

Ω的内闭区域

$$\Omega_\delta=\{x|x\in\Omega,\ d(x,\partial\Omega)>\delta\}$$

可用有限个类似于$B(O,a)$的球$B(x_i,\ a_i)\subset\Omega$复盖，
使$d(\partial\Omega,B(x_i,a_i))\geqslant\delta/2$，故得

$$\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\leqslant K_2\delta^{-2},\quad \forall x\in\Omega_\delta.$$

现考虑近边的Bernstein估计。假设

$$\partial\Omega\in C^2,\ a_{ij},\ b_i,\ c,\ f\in C^1(\bar{\Omega}),\ u\in C^3(\Omega)\cap C^1(\bar{\Omega}),$$

C^2类的非奇异自变量变换，使边界$\partial\Omega$上的一小片σ化为 $x_n=0$的一部分，且使$\partial\Omega\backslash\sigma$全在$x_n>0$内。又假设边值数据$u|_{\partial\Omega}=\varphi$适当光滑，使在小片$\sigma$ 及其邻域$0\leqslant x_n\leqslant\delta$内$\partial\Omega$可用$x_1$, …, x_{n-1}做参数，而

$$\frac{\partial^2\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})}{\partial x_i\partial x_j},\quad i,j=1,2,\cdots,n-1$$

存在且有界。

为了导出近边的Bernstein估计，先用闸函数方法证明$|[Du]_\sigma|$为有界。为此作

$$V(x)=K[(x_n+\delta)^{\frac{1}{2}}-\delta^{\frac{1}{2}}]\pm[u(x)-\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1})],$$

当δ充分小时，

$$\bar{u}=(x_n+\delta)^{\frac{1}{2}}-\delta^{\frac{1}{2}}$$

在区域$\Omega_\delta=\Omega\cap\{x|x_n<\delta\}$中是**闸函数**，它满足

$$\mathscr{L}(\bar{u})<-1,\quad \bar{u}|_\sigma=0,\quad \bar{u}|_{\bar{\Omega}_\delta\backslash\sigma}>0.$$

对上述所定的 $V(x)\in C^2(\Omega_\delta)$，取$K$充分大，使

$$V(x)|_{\partial\Omega_\delta\backslash\sigma}>0,\quad \mathscr{L}(V)<0,\quad x\in\Omega_\delta.$$

则V不在Ω_δ内取到最小值，因此V在$\bar{\Omega}_\delta$的最小值只能在σ上取到。故有

$$\left.\frac{\partial V}{\partial l}\right|_\sigma\geqslant0,\quad 即\frac{K}{2}\delta^{-\frac{1}{2}}\cos(l,x_n)\pm\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_\sigma\geqslant0.$$

因此

$$\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right|_\sigma\leqslant\frac{K}{2}\delta^{\frac{1}{2}}.$$

选取l的方向使 $\left|\frac{\partial u}{\partial l}\right|_\sigma=|\text{grad}\,u|_\sigma$，得到

$$|Du|_\sigma \leqslant \frac{K}{2}\delta^{-\frac{1}{2}}.$$

证明了$\sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2|_\sigma$为有界之后，设$B(O,a)\cap\{x_n>0\}\subset\Omega$。作

$$U=(a^2-|x|^2)^2\sum_{k=1}^{n} u^2_{x_k}+Ku^2.$$

仿内估计做法即可导出Bernstein近边估计。最后得到

$$\sum_{k=1}^{n} u_{x_k}^2\leqslant K_1,\quad x\in\overline{\Omega}.$$

Bernstein 估计的用处：在构造解的方法中，证明所构造的逼近解列为等度连续。为了说明极值原理与 Bernstein估计在证明解存在问题上的用处，我们来研究调和函数的狄氏问题

$$\begin{cases}\Delta u=0, & x\in\Omega;\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi, & \varphi\in C(\partial\Omega).\end{cases}$$

我们构造解的下调和函数来定出解，为此先要知道 $B(O,R)$内调和函数狄氏问题解的公式。

由格林公式，成立着

$$\int_\Omega(u\Delta v-v\Delta u)dy=\int_{\partial\Omega}\left(-u\frac{\partial v}{\partial N}+v\frac{\partial u}{\partial N}\right)d\sigma_y,$$

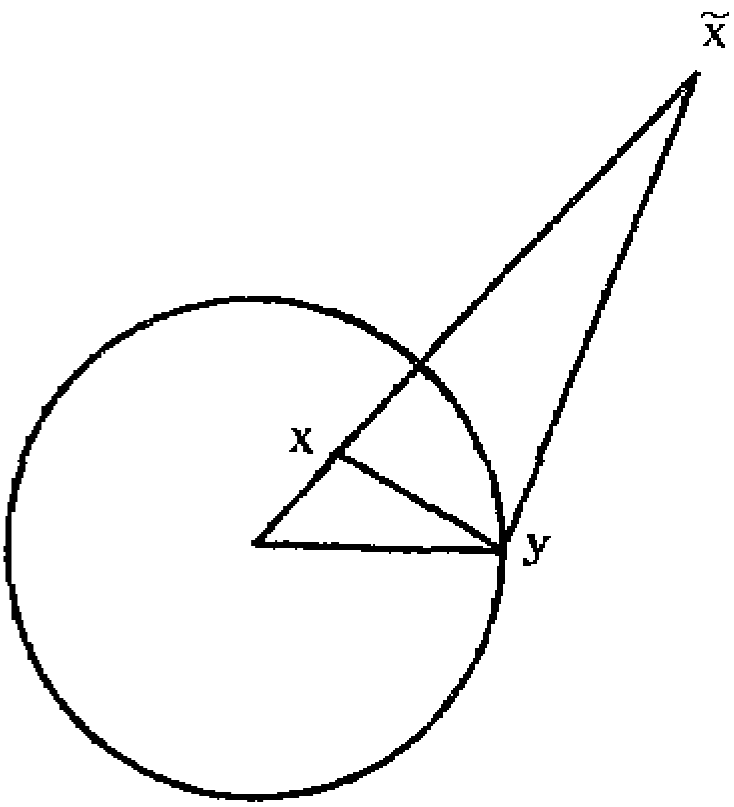
其中N为$\partial\Omega$上的内法线。记

$$H(x,y)=H(x-y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\overline{xy}^{2-n}, & n>2,\\ -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{\overline{xy}}, & n=2,\end{cases}$$

其中ω_n为 n 维空间中单位球面的面积。

我们称$H(x, y)$为**Laplace算子**$\triangle$**的基本解**，即$\Delta_y H(x, y) = \delta(x)$，这里$\delta(x)$为$x$点的Dirac函数。设$x\in\Omega$，$u$为调和函数，取 $v = H(x, y)$代入格林公式得

$$u(x) = \int_{\partial\Omega}\left[-u\frac{\partial H(x,y)}{\partial N} + H(x,y)\frac{\partial u}{\partial N}\right]d\sigma_y .$$



取$\Omega = B(O, R)$，$x(\neq 0)$关于$B(O, R)$的镜象点$\tilde{x} = (R^2x/|x|^2)$，我们有

$$0 = \int_{\partial B}\left[-u\frac{\partial H(\tilde{x},y)}{\partial N} + H(\tilde{x},y)\frac{\partial u}{\partial N}\right]d\sigma_y .$$

在这等式二边同乘$\begin{cases}\left(\dfrac{x}{R}\right)^{2-n}, & n>2,\\ 1, & n=2,\end{cases}$

并将前一式子中的Ω改为B后相减得

$$u(x) = \int_{\partial B} -u\left[\frac{\partial H(x,y)}{\partial N} - \left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\frac{\partial H(\tilde{x},y)}{\partial N}\right]d\sigma_y .$$

这式子的成立，当$n>2$时，是由于

$$\left.\frac{\overline{xy}}{\overline{\tilde{x}y}}\right|_{|y|=R}=\frac{|x|}{R},$$

当$n=2$时，是由于

$$\int_{\partial B}\frac{\partial u}{\partial N}\ln\frac{\overline{\tilde{x}y}}{\overline{xy}}\,d\sigma_y=-\ln\frac{|x|}{R}\int_{\partial B}\frac{\partial u}{\partial N}\,d\sigma_y$$

$$=\ln\frac{|x|}{R}\int_B\Delta u\,dy=0$$

由于

$$-\omega_n\left[\frac{\partial H(x,y)}{\partial N}-\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\frac{\partial H(\tilde{x},y)}{\partial N}\right]_{|y|=R}$$

$$=\left[\overline{xy}^{\,1-n}\frac{\partial\overline{xy}}{\partial y}-\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\overline{\tilde{x}y}^{\,1-n}\frac{\partial\overline{\tilde{x}y}}{\partial y}\right]_{|y|=R}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\overline{xy}^{\,-n}\frac{\partial\overline{xy}^{\,2}}{\partial y}-\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\overline{\tilde{x}y}^{\,-n}\frac{\partial\overline{\tilde{x}y}^{\,2}}{\partial y}\right]_{|y|=R}$$

$$=\left[\overline{xy}^{\,-n}\frac{(y-x)y}{R}-\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2-n}\overline{\tilde{x}y}^{\,-n}\frac{(y-\tilde{x})y}{R}\right]_{|y|=R}$$

$$=\frac{1}{R}\overline{xy}^{\,-n}\left[(y-x)y-\left(\frac{|x|}{R}\right)^{2}\left(y-\frac{R^2}{|x|^2}x\right)y\right]_{|y|=R}$$

$$=\frac{R^2-|x|^2}{R}\overline{xy}^{\,-n}.$$

因此

$$u(x)=\frac{R^2-|x|^2}{\omega_nR}\int_{\partial B}\frac{u(y)}{\overline{xy}^{\,n}}\,d\sigma_y,\quad x\in B.$$

容易验证此式确是

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in B, \\ u|_{\partial B} = \varphi, & \varphi \in C(\partial B), \end{cases}$$

的解。

回到一般情形，求解

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & x \in \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi, & \varphi \in C(\partial\Omega). \end{cases}$$

我们仅需知道球内调和函数狄氏问题的解存在即可，不需要其解的具体表达式。

设 $v \in C(\Omega)$，$v|_{\partial B} \leqslant \bar{v}|_{\partial B} \Rightarrow v|_B \leqslant \bar{v}|_B$，$\forall B \subset \Omega$，$\forall \bar{v} \in C(B)$于$B$内调和。具有这样性质的函数 v 称为(Ω内的)**下调和函数**。

如果下调和函数还具有性质：

$$v \in C(\bar{\Omega}), \quad v|_{\partial\Omega} \leqslant \varphi,$$

则称 v 为(相对于边值 φ 的)**下函数**。

设 $v \in C(\Omega)$，$v|_{\partial B} \geqslant \bar{v}|_{\partial B} \Rightarrow v|_B \geqslant \bar{v}|_B$，$\forall B \subset \Omega$，$\forall \bar{v} \in C(B)$于$B$内调和，则称 v 为(Ω内的)**上调和函数**。

下调和函数的定义其实是

$$v \in C(\bar{\Omega}) \cap C^2(\Omega), \quad \Delta v \geqslant 0, \quad x \in \Omega$$

推广到积分形式。因为$\Delta(v - \bar{v}) \geqslant 0$，在$B$内$v - \bar{v}$不取最小值，因此

$$[v - \bar{v}]_{\partial B} \leqslant 0 \Rightarrow [v - \bar{v}]_B \leqslant 0,$$

下调和函数的光滑性要求较弱一些。

下调和函数满足**强极大值原理**，即当 v 在 Ω 的内部取到最大值时，则v必为常数。这是因为对于 $x_0 \in \Omega$，$v(x_0) = \sup v$，按下调和函数的性质可得：$\forall B \ni x_0$，设$\bar{v}$于B中调和，$\bar{v} \in C(\bar{B})$，而$\bar{v}|_{\partial B} = v|_{\partial B}$。

则一方面由 v 为下函数的定义得

$$v(x_0)\leqslant\bar{v}(x_0).$$

另一方面，$\bar{v}|_{\partial B}=v|_{\partial B}\leqslant\bar{v}(x_0)$，由调和函数性质得 $\bar{v}|_B\leqslant v(x_0)$，因此

$$\bar{v}|_B=v(x_0)=\bar{v}(x_0),$$

再由调和函数性质得到$\bar{v}$于$\bar{B}$中为常数$v(x^0)$，故有

$$v|_{\partial B}=v(x_0)。$$

由于$\forall B\ni x_0$有$v|_{\partial B}=v(x_0)$，因此v在x_0附近为常数。逐步推广 v 为常数的区域得到 v 在 Ω 为常数，强极大值原理得证。

因此，任一下函数 v 的最大值必在$\partial\Omega$上取到，即它满足

$$v\leqslant\sup_{\partial\Omega}\varphi.$$

所有下函数的集合记为V。V非空，因为$\inf\limits_{\partial\Omega}\varphi(x\in\bar{\Omega})$是$V$中的一个元素。

定理 $\forall x\in\Omega$，记

$$u(x)=\sup_{v\in V}v(x),$$

则$u(x)$为 Ω 中的调和函数。

证明分为下面几段。

(i) v_1，v_2为下函数，则 $v_3=\max(v_1,\ v_2)$也是下函数。

证 从$v_3\in C(\bar{\Omega})$以及$v_3|_{\partial\Omega}\leqslant\varphi$，容易得到：$\forall B\subset\Omega$，当$v_3|_{\partial B}\leqslant\bar{v}|_{\partial B}$，而且$\bar{v}_3\in C(\bar{B})$，$\bar{v}_3$于$B$内调和时，可导出

$$\bar{v}_3|_{\partial B}\geqslant v_1|_{\partial B}.$$

由于v_1为下调和函数，所以$v_1|_B\leqslant\bar{v}_3|_B$。同法得到 $v_2|_B\leqslant\bar{v}_3|_B$，因此有

$$v_3|_B=\max(v_1,v_2)|_B\leq \bar{v}_3|_B,$$

所以v_3为下调和。

这性质可推广到有限个，即当 v_1，…，v_m 为下函数时，则 $\max(v_1,\ \cdots,\ v_m)$亦然。

(ii) v为下函数，球$B_1\subset\Omega$，作

$$\begin{cases}\Delta\bar{v}=0\\ \bar{v}|_{\partial B_1}=v|_{\partial B_1}\end{cases}$$

的解v_1，按$\bar{v}|_{\Omega\setminus B}=v|_{\Omega\setminus B}$，延拓 $\bar{v}$ 到整个Ω，则$\bar{v}$为下函数。我们称$\bar{v}$为v在B_1的**调和增值**。

证 $\forall B\subset\Omega$，当$\bar{v}|_{\partial B}\leq \bar{\bar{v}}|_{\partial B}$，$\bar{\bar{v}}$于$B$为调和。由于

$$\bar{\bar{v}}|_{\partial B}\geq\bar{v}|_{\partial B}\geq v|_{\partial B}\Rightarrow \bar{\bar{v}}|_B\geq v|_B,$$

故在$B\cap(\Omega\setminus B_1)$中有$\bar{\bar{v}}\geq v=\bar{v}$。由上面的论证可知在$\partial(B\cap B_1)$上有$\bar{\bar{v}}\geq\bar{v}$。因此，按调和函数的比较性质得到

$$\bar{\bar{v}}\geq\bar{v}\ \text{在}B\cap B_1\text{成立}。$$

由上面二式得到$\bar{v}|_B\leq\bar{\bar{v}}|_B$，从而证得$\bar{v}$为下函数。

(iii) 取定$B(y,R)\subset\Omega$，由$u(x)$的定义可知

$\exists v_k(x)\in V$，$k=1$，2，…，

使得

$$u(y)=\lim_{k\to\infty}v_k(y).$$

可设$v_k(x)$有下界，否则用$\max(v_k,\ \inf\limits_{\partial\Omega}\varphi)$代替$v_k$，仍记为$v_k$即可。

置$\bar{v}_k$为v_k在B上的调和增值。由于$\bar{v}_k\leq\max\limits_{\partial\Omega}\varphi$，因此$\bar{v}_k$ 为一致有界。由Bernstein估计知$D\bar{v}_k$ 在$B(y,R/2)$中为一致有界。因此，$\bar{v}_k$ 在$B(y,R/2)$中一致有界且等度连续，即有子列(仍记为 $\bar{v}_k$)收敛于调和函数$\bar{v}$，且由上面论证知有$\bar{v}(y)=u(y)$。

今证在 $B\left(y,\dfrac{R}{2}\right)$必有$\bar{v}(x)=u(x)$成立。如果此断言不真，即有$x^0\in B\left(y,\dfrac{R}{2}\right)$使$\bar{v}(x^0)<u(x^0)$，则有下函数$\bar{u}(x)$，使$\bar{v}(x^0)<\bar{u}(x^0)$。

取下函数$w_k(x)=\max(\bar{u},v_k)$以及$w_k(x)$的调和增值$\bar{w}_k$。在$B\left(y,\dfrac{R}{2}\right)$上$\bar{w}_k$有子列收敛于调和函数$\bar{w}(x)$，仍记此子列为$\bar{w}_k$。我们有

$$\bar{w}(x)\geqslant\bar{v}(x),\quad \bar{v}(y)=u(y)=\bar{w}(y)。$$

调和函数$\bar{w}(x)-\bar{v}(x)$在$B\left(y,\dfrac{R}{2}\right)$的内点$y$取到最小值0，因此$\bar{w}(x)-\bar{v}(x)\equiv 0$，从而$\bar{w}(x^0)=\bar{v}(x^0)$，得出矛盾。

$u(x)$于$B(y,R/2)$中为调和，由于y为Ω的任意点，故得$u(x)$在Ω内调和，定理证毕。

如果

$$\begin{cases}\Delta u=0,\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi,\quad \varphi\in C(\partial\Omega),\end{cases}$$

存在经典解，即存在解$U(x)\in C(\overline{\Omega})\cap C^2(\Omega)$，则一方面有$U\in V$，因而$U\leqslant u$。另一方面，

$$\forall v\in V,\quad v\leqslant U,$$

因此$u\leqslant U$。从而证得　$U=u$。

至于上面所得的$u(x)$是否属于$C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$，这与$\partial\Omega$的几何形状有关。如果对$\xi\in\partial\Omega$，存在$w(x)$，使$w(x)$在$\Omega$中为上调和，而且

$$w(\xi)=0,\quad w(x)>0,\quad x\in\overline{\Omega}\setminus\{\xi\},$$

则可证明

$$u(x)\to\varphi(\xi),\quad \forall x\in\Omega,\quad x\to\xi。$$

这种ξ称为在$\partial\Omega$上Δ算子的**正则点**，$w(x)$称为在ξ点的**闸函数**。

证　对$\varepsilon>0$，由于$\varphi\in C(\partial\Omega)$，存在$\xi$附近$\partial\Omega$的小片$\sigma$使

$$|\varphi(\eta)-\varphi(\xi)|<\varepsilon,\quad \eta\in\sigma。$$

取正的常数 k 充分大，使

$$k\min_{\partial\Omega\setminus\sigma} w\geqslant 2\max_{\partial\Omega}|\varphi|$$

则 $\varphi(\xi)-\varepsilon-kw(x)$为关于$u|_{\partial\Omega}=\varphi$的下函数，因此有

$$\varphi(\xi)-\varepsilon-kw(x)\leqslant u(x)。$$

设$v(x)$为下函数，则

$$\varphi(\xi)+\varepsilon+kw(x)-v(x)$$

为上调和函数，故不在Ω内取最小值。但是，它在 $\partial\Omega$ 上为非负，因此

$$\varphi(\xi)+\varepsilon+kw(x)-v(x)\geqslant 0,$$

这对任何$v(x)\in V$为真，从而

$$\varphi(\xi)+\varepsilon+kw-u\geqslant 0。$$

结合上面二式得到

$$|u(x)-\varphi(\xi)|\leqslant kw+\varepsilon。$$

当$x\to\xi$时，先令$x\to\xi$，再令$\varepsilon\to 0$得到$u(x)\to\varphi(\xi)$。

当$\partial\Omega$满足外部球条件：$\forall\xi\in\partial\Omega$，$\exists B(y,R)$ 使得 $\bar{B}(y,R)\cap\bar{\Omega}=\{\xi\}$。则

$$w(x)=\begin{cases}R^{2-n}-|x-\xi|^{2-n}, & n>2,\\ \ln\dfrac{|x-\xi|}{R}, & n=2\end{cases}$$

是闸函数，因此$\partial\Omega$上每点都是正则点。当 $\partial\Omega$ 满足外部锥条件时，也可证得这一结论。但当 $n>2$ 而 $\partial\Omega$上向内有太尖的点时，则可举出反例，见[14]，当$x\to\xi$时，u在 $\varphi(\xi)$附近有界振动，故 ξ 不是正

则点，在这种情况下，经典解不存在。上面得出的 $u(x)$ 祇是**广义解**，它在某种平均意义下取边值。

§4 Schauder估计的预备知识

Schauder估计的基本做法是把

$$\mathscr{L}(u)=\Sigma a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+\Sigma b_i(x)u_{x_i}+c(x)u=g$$

拆为

$$\mathscr{L}(u)=\Sigma a_{ij}(x_0)u_{x_ix_j}+\{\Sigma[a_{ij}(x)-a_{ij}(x_0)]u_{x_ix_j}$$
$$+\Sigma b_iu_{x_i}+cu\}=g.$$

第一个常系数线性算子易于求逆，第二个算子影响较小。对椭圆型方程，大区域边值问题可将它化归为常系数边值问题。因此，这方法成为证明方程解存在的有力工具之一，详细内容见下述。

用 $D^ku(x)$表示 $u(x)$ 的 k 阶微商。当 $D^ku(x)\in C(\Omega)$ 时，记为 $u(x)\in C^k(\Omega)$。当$D^ku(x)\in C^\lambda(\Omega)$，$0<\lambda\leqslant1$ 时，记为 $u\in C^{k,\lambda}(\Omega)$。对有界区域 Ω记

$$d(x,\partial\Omega)=d_x,\qquad d_{xy}=\min(d_x,\ d_y)。$$

当$u(x)\in C^k(\Omega)$或$u(x)\in C^{k,\lambda}(\Omega)$，$0<\lambda<1$时，记

$$[u]_{m,k}=\sup_{x\in\Omega}d_x^{m+k}|D^ku(x)|,$$
$$[u]_{m,k+\lambda}=\sup_{x,y\in\Omega}d_{xy}^{m+k+\lambda}\frac{|D^ku(x)-D^ku(y)|}{\overline{xy}^\lambda}$$

其中 m 为非负整数。上面二式中的sup要了解为首先对所有的 k 阶微商取上界。记

$$|u|_{m,k}=\sum_{j=0}^{k}[u]_{m,j},\quad |u|_{m,k+\lambda}=|u|_{m,k}+[u]_{m,k+\lambda}.$$

当 $u(x)\in C^k(\Omega)$且$|u|_{m,k}$为有限数时，记为 $u(x)\in C_{m,k}$，它比

$C^k(\Omega)$弱一些，但比$C^k(\Omega)$强一些。同法可定义$C_{m,k+\lambda}$。易知$C_{m,k}$，$C_{m,k+\lambda}$是以$|u|_{m,k}$，$|u|_{m,k+\lambda}$为范数的Banach空间。

引理1 当$0<\varepsilon<1$且$k>0$时，有

$$|u|_{m,k-1}\leqslant\varepsilon[u]_{m,k}+c(m,k,\varepsilon)[u]_{m,0}$$

证 先证$\forall\mu\in(0,1)$，成立着

$$[u]_{m,k}\leqslant\frac{1}{(1-\mu)^{m+k-1}}\left\{\frac{\mu}{(1-\mu)^2}[u]_{m,k+1}+\frac{1}{\mu}[u]_{m,k-1}\right\}. \quad (*)$$

任取$x\in\Omega$，作球$B(x,\mu d_x)$，由中值定理知有$x'\in B(x,\mu d_x)$使

$$|D^k u(x')|\leqslant\frac{2\sup\limits_B|D^{k-1}u|}{2\mu d_x}.$$

由此得到

$$|D^k u(x)|\leqslant\frac{\sup\limits_B|D^{k-1}u|}{\mu d_x}+\mu d_x\sup_B|D^{k+1}u|.$$

上式右端须理解为首先对所有$k-1$与$k+1$阶微商取最大。由$[u]_{m,k-1}$与$[u]_{m,k+1}$的定义得到

$$|D^k u(x)|\leqslant(\mu d_x)^{-1}\frac{[u]_{m,k-1}}{[(1-\mu)d_x]^{m+k-1}}+\mu d_x\frac{[u]_{m,k+1}}{[(1-\mu)d_x]^{m+k+1}}$$

或

$$d_x^{m+k}|D^k u(x)|\leqslant\frac{1}{(1-\mu)^{m+k-1}}\left\{\frac{\mu}{(1-\mu)^2}[u]_{m,k+1}+\frac{1}{\mu}[u]_{m,k-1}\right\}.$$

由此得到$(*)$。用归纳法可证

$$[u]_{m,l}\leqslant\varepsilon[u]_{m,k}+\varepsilon^{-l/(k-l)}c(m,k)[u]_{m,0},\quad(l<k).$$

证 当$k=2$时，由$(*)$可知上式为真。

由$(*)$得到

$$[u]_{m,k}\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2}[u]_{m,k+1}+\frac{e_1}{\varepsilon_1}[u]_{m,k-1}.$$

由归纳法假定得

$$[u]_{m,k-1}\leqslant\frac{\varepsilon_1}{2e_1}[u]_{m,k}+\varepsilon_1^{1-k}e_2[u]_{m,0}.$$

结合上面二式得到

$$[u]_{m,k}\leqslant\varepsilon_1[u]_{m,k+1}+\varepsilon_1^{-k}e_3[u]_{m,0},\quad e_3=2e_1e_2.$$

对任何$0<l<k$，由归纳法假定得

$$[u]_{m,l}\leqslant\varepsilon_2[u]_{m,k}+\varepsilon_2^{-l/(k-l)}c_4[u]_{m,0},\quad c_4=c(m,k).$$

结合上面二式得到

$$[u]_{m,l}\leqslant\varepsilon_1\varepsilon_2[u]_{m,k+1}+[\varepsilon_2^{-l/(k-l)}c_4+\varepsilon_2\varepsilon_1^{-k}c_3][u]_{m,0}.$$

取 $\varepsilon_1^{k-l}=\varepsilon_2=\varepsilon^{(k-l)/(k-l+1)}$得

$$[u]_{m,l}\leqslant\varepsilon[u]_{m,k+1}+\varepsilon^{-l/(k+1-l)}e_5[u]_{m,0},\quad e_5=e_3+c_4.$$

引理1得证。

现在要用牛顿位势的二阶微商表示式。如前记

$$H(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\overline{xy}^{2-n}, & n>2\\[2mm] -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{\overline{xy}}, & n=2\end{cases}$$

为Laplace算子$\triangle$的基本解，即

$$\Delta_y H(x,y)=\delta(x),$$

这里ω_n为n维单位球面的面积，$\delta(x)$是 Dirac 函数。所谓**牛顿位势**是指

$$v(x)=\int_\Omega H(x,y)g(y)dy.$$

设 $g(x)\in C(\bar{\Omega})$，则 $v(x)$ 在 $x\in\Omega$ 可求一阶微商，由于 $\int_\Omega \frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i}g(y)dy$有意义。因此，有

$$\frac{v(x+\Delta x_i)-v(x)}{\Delta x_i}=\int_\Omega \frac{H(x+\Delta x_i)-H(x,y)}{\Delta x_i}g(y)dy$$

$$=\frac{1}{\Delta x_i}\int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i}d\tau\int_\Omega \frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i}\bigg|_{x_i=\tau}g(y)dy.$$

令$\Delta x_i\to 0$，得到

$$\frac{\partial v}{\partial x_i}=\int_\Omega \frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i}g(y)dy.$$

当 $g(x)\in C^\lambda(\Omega)(0<\lambda<1)$时，还可求 v 的二阶微商。事实上，若记

$$\varphi_i(x,\varepsilon)=\int_{\Omega\setminus B(x,\varepsilon)}\frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i}g(y)dy,$$

其中$B(x,\varepsilon)$是以 x 为中心，ε 为半径的球，上式的成立需设$x\in\Omega_\varepsilon=\{x\,|\,x\in\Omega,\ d(x,\partial\Omega)>\varepsilon\}$。容易算得

$$\frac{1}{\Delta x_j}[\varphi_i(x+\Delta x_j,\varepsilon)-\varphi_i(x,\varepsilon)]$$

$$=\frac{1}{\Delta x_j}\left\{\int_{\Omega\setminus B(x+\Delta x_j,\varepsilon)}\left[\frac{\partial H(x+\Delta x_j,y)}{\partial x_i}-\frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i}\right]g(y)dy\right.$$

$$\left.-\int_{B_j(x,\varepsilon)}\frac{dy}{dy_j}\left(\int_{t_{2j}}^{t_{2j}+\Delta x_j}-\int_{t_{1j}}^{t_{1j}+\Delta x_j}\right)\frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i}g(y)dy_j\right\},$$

两端令$\Delta x_j\to 0$，取极限得

$$\frac{\partial\varphi_i(x,\varepsilon)}{\partial x_j}=\int_{\Omega\setminus B(x,\varepsilon)}\frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i\partial x_j}g(y)dy$$

$$-\int_{B_j(x,\varepsilon)}\frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i}g(y)\bigg|_{y_j=t_{1j}}^{y_j=t_{2j}}\frac{dy}{dy_j}$$

其中$B_j(x,\varepsilon)$为$B(x,\varepsilon)$在平面$y_j=0$上的投影，且

$$\left\{\begin{matrix} f_{1j} \\ f_{2j} \end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix} x_j - \sqrt{\varepsilon^2 - \sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n}(x_i-y_i)^2} \\ x_j + \sqrt{\varepsilon^2 - \sum\limits_{i=1,i\neq j}^{n}(x_i-y_i)^2} \end{matrix}\right. .$$

由此得到

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi_i(x,\varepsilon)}{\partial x_j} &= \int_{\Omega\setminus B(x,\varepsilon)} \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x_i \partial x_j} g(y)dy \\
&\quad - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i} g(y)\cos(N,y_j)d\sigma_y \\
&= \int_{\Omega\setminus B(x,\varepsilon)} \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x_i \partial x_j}\left[g(y)-g(x)\right]dy \\
&\quad + g(x)\left[\int_{\Omega\setminus B(x,\varepsilon)} \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x_i \partial x_j}dy \right. \\
&\quad \left. - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i}\cos(N,y_j)d\sigma_y\right] \\
&\quad - \int_{\partial B(x,\varepsilon)} \frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i}\cos(N,y_j)\left[g(y)-g(x)\right]d\sigma_y, \quad (**)
\end{aligned}$$

这里N表示$\partial B(x,\varepsilon)$的外向法线方向，其中方括号内的项，由于

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial x_j} = -\frac{\partial^2 H}{\partial x_i \partial y_j}$$

可化为$\partial\Omega$上的积分

$$\int_{\partial\Omega} \frac{\partial H}{\partial x_i}\cos(\mathrm{N},y_j)d\sigma_y,$$ N的方向向内。

化简后的$(**)$两边对x_j积分，且令$\varepsilon\to 0$，再对x_j微分得到

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} = \int_\Omega \frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x_i \partial x_j}[g(y)-g(x)]dy$$

$$+g(x)\int_{\partial\Omega} \frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i}\cos(N,y_j)d\sigma_y.$$

引理2 设在球$B(x^0,\rho)$中$u\in C^2$，满足常系数椭圆型方程

$$\mathscr{L}(u) = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}u_{x_ix_j} = g(x).$$

若$g\in C^\lambda(B)$，$0<\lambda<1$，a_{ij}的绝对值不超过K_1，且

$$\Sigma a_{ij}\alpha_i\alpha_j \geqslant K_2\Sigma\alpha_i^2,\ (\forall\alpha\in\mathbf{R}^n),\ K_2>0,$$

则$u\in C^{2,\lambda}(B)$，且有常数K仅依于K_1，K_2，n，λ，使下面二个估计式成立。

$$|D^2u(x^0)| \leqslant K[\rho^{-2}\sup_B|u| + \sup_B|g| + \rho^\lambda H_{x^0,B}(g)] \equiv KI,$$

$$\rho^\lambda \frac{|D^2u(x) - D^2u(x^0)|}{\overline{x^0x}^\lambda} \leqslant KI + K\rho^\lambda H_{x,B}(g),\ (\overline{x^0x} \leqslant \frac{\rho}{4}),$$

其中 $H_{x,B}(g) = \sup\limits_{y\in B}\dfrac{|g(x)-g(y)|}{\overline{xy}^\lambda}$.

证 经过线性变换，变换后的自变量仍记为$(x_1,\ \cdots,\ x_n)$，则方程变为

$$\Delta u = \sum_{i=1}^{n} u_{x_ix_i} = g$$

而球$B(x^0,\rho)$变为椭球Γ。设$\zeta(x)\in C^\infty(\mathbf{R}^n)$满足$0\leqslant\zeta(x)\leqslant 1$以及

$$\zeta(x) = \begin{cases} 1, & \overline{x^0x} \leqslant \dfrac{\tau}{2} \\ 0, & \overline{x^0x} \geqslant \dfrac{3}{4}\tau, \end{cases}$$

$$|D^m\zeta|\leqslant C_m\tau^{-m},\ m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

其中$\tau=k_3\rho$是椭球Γ的短半轴之长，C_m为常数。在格林公式

$$\int_\Gamma(V\Delta U-U\Delta V)dy=\int_{\partial\Gamma}\left(-V\frac{\partial U}{\partial N}+U\frac{\partial V}{\partial N}\right)d\sigma_y$$

(N为Γ的内法线)

中，当$\overline{x^0x}<\frac{\tau}{2}$时，以$U=u(x)$，$V=\zeta(x)H(x,y)$代入，由于$\Delta_y H(x,y)=\delta_x$，得到

$$u(x)=\int_\Gamma\zeta(y)H(x,y)g(y)dy$$

$$-\int_{\tau/2\leqslant\overline{x^0y}\leqslant 3\tau/4}u(y)\Delta_y[\zeta(y)H(x,y)]dy$$

注意到$\zeta(x)g(x)\in C^\lambda(\overline{\Gamma})$，故上式可微分两次。利用上面导出的微分公式得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}=\int_\Gamma\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x_i\partial x_j}[\zeta(y)g(y)-\zeta(x)g(x)]dy$$

$$+g(x)\int_{\partial\Gamma}\frac{\partial H(x,y)}{\partial x_i}\cos(N,y_j)d\sigma_y$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\int_{\tau/2\leqslant\overline{x^0y}\leqslant 3\tau/4}u(y)\Delta_y[\zeta(y)H(x,y)]dy$$

令$x=x^0$，第一个积分拆为$\int_{\overline{x^0y}<\tau/2}$与$\int_{\tau/2\leqslant\overline{x^0y}<3\tau/4}$二部分之和，即得到引理中的第一估计式。

当$\overline{x^0x}\geqslant\frac{\tau}{4}$时，显见由第一估计式得出第二估计式。

当$\overline{x^0x}<\frac{r}{4}$时，上式中第二、三项的估计不成问题。现考察第一项。记$\zeta(x)g(x)=h(x)$，则

$$\int_{\Gamma}\left\{\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x_i\partial x_j}[h(y)-h(x)]-\frac{\partial^2 H(x^0,y)}{\partial x_i\partial x_j}\right.$$

$$\left.\cdot[h(y)-h(x^0)]\right\}dy$$

$$=\int_{|y-(x^0+x)/2|<\overline{x^0x}}\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x_i\partial x_j}\Big[h(y)-h(x)\Big]dy$$

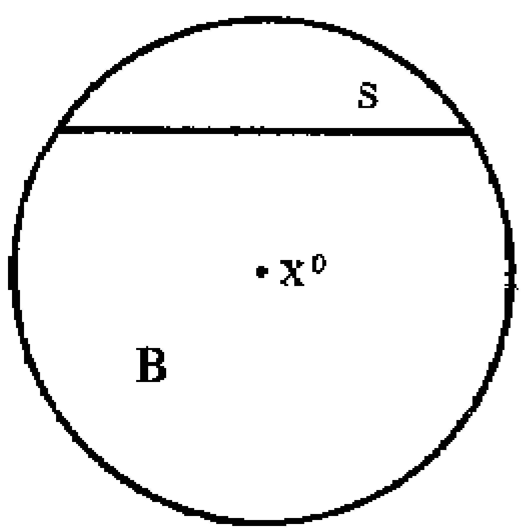
$$-\int_{|y-(x^0+x)/2|<\overline{x^0x}}\frac{\partial^2 H(x^0,y)}{\partial x_i\partial x_j}\Big[h(y)-h(x^0)\Big]dy$$

$$+\int_{\substack{\left|y-\frac{x^0+x}{2}\right|>\overline{x^0x}\\ \overline{x^0y}<3r/4}}\left[\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial^2 H(x^0,y)}{\partial x_i\partial x_j}\right]$$

$$\cdot[h(y)-h(x^0)]dy$$

$$+[h(x)-h(x^0)]\int_{\Gamma\cap\{|y-(x^0+x)/2|<\overline{x^0x}\}}\frac{\partial^2 H(x,y)}{\partial x_i\partial y_j}\,dy$$

上面最后一项化为面积分来估计，每项均出现因子$\overline{x^0x}^{\lambda}$，引理证毕。



球$\overline{x^0x}<\rho$被不过球心x^0的平面切去一小片，剩下大的一片区域记为B，平面在球内部分记为S。

引理3 当$u\in C^2(B\cap S)$，$g\in C^{\lambda}(B\cup S)$且$u|_S=0$时，引理2的两个估计式仍然成立。

注意 这结果与x^0关于平面的相对位置无关。

证 先做线性变换把方程化为$\Delta u=g$，则S仍变为平面的一部分。不失一般性可设它是$x_n=0$的一部分。$\zeta(x)$定义如前，$H(x,y)$改为

$$H_1(x,y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{(n-2)\omega_n}\left(\overline{xy}^{2-n}-\overline{x'y}^{2-n}\right), & n>2,\\[2ex] -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{\overline{x'y}}{\overline{xy}}, & n=2,\end{cases}$$

其中x'是x关于平面$x_n=0$的对称点，显然当y在$x_n=0$上时，$H_1=0$，$\dfrac{\partial H}{\partial x_n}=0$，故得$u(x)$的表达式，同样不包含边界积分。

在计算$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}$ $(j\neq n)$及以后的估计时，由于$\dfrac{\partial H_1}{\partial x_j}=-\dfrac{\partial H_1}{\partial y_j}$，可依照上法进行。对于$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$的估计，应用已有估计及原方程即可得出。引理3证毕。

§5 解的Schauder内估计与近边估计

考虑椭圆型方程

$$\mathscr{L}(u)=\sum a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+\sum b_i(x)u_{x_i}+c(x)u$$
$$=f(x),\quad x\in\Omega,$$

$\Omega\subset\mathbb{R}^n$，$\Omega$为有界区域。设$\lambda$满足$0<\lambda<1$，并使$a_{ij}\in C_{0,\lambda}(\Omega)$，$b_i\in C_{1,\lambda}(\Omega)$，$c$、$f\in C_{2,\lambda}(\Omega)$，(这些假设都比$C^2(\Omega)$为强而比$C^1(\bar{\Omega})$为弱)，且有正的常数$K_1$，$K_2$使

$$|a_{ij}|_{0,\lambda},\ |b_i|_{1,\lambda},\ |c|_{2,\lambda}\leqslant K_1,\ \sum a_{ij}\alpha_i\alpha_j\geqslant K_2\sum\alpha_i^2,$$

$(x\in\Omega, \alpha\in R^1)$

与K_1、K_2、n、λ有关的常数记为K，仅与n有关的常数记为C。

定理1 设$u\in C^{2,\lambda}(\Omega)$是$\mathscr{L}(u)=f$的解，$\sup\limits_{\Omega}|u(x)|=|u|_0$为有限数，则$u\in C_{0,2+\lambda}(\Omega)$，且

$$|u|_{0,2+\lambda}\leqslant K(|u|_0+|f|_{2,\lambda}) \qquad (1)$$

证 不妨设$|u|_{0,2+\lambda}$为有限，否则，先在$\Omega_\varepsilon=\{x|x\in\Omega,\ d(x,\partial\Omega)>\epsilon\}$上进行估计，得到式(1)而常数$K$不依赖于$\varepsilon$，再令$\varepsilon\to0$即可。

由前节引理1，一阶微商可用二阶微商本身的界和函数本身的界来估计，因此只要得出

$$[u]_{0,2}\leqslant K(|u|_0+|f|_{2,\lambda}), \qquad (2)$$

$$[u]_{0,2+\lambda}\leqslant K(|u|_0+|f|_{2,\lambda}), \qquad (3)$$

就得到(1)。

由$[u]_{0,2}$的定义，至少有一点$x^0\in\Omega$与一个特殊的二阶微商$u_{x_ix_j}$使

$$\frac{1}{2}[u]_{0,2}\leqslant d_{x^0}^2\left|\frac{\partial^2u(x^0)}{\partial x_i\partial x_j}\right|$$

把$\mathscr{L}(u)=f$写为

$$\sum a_{ij}(x^0)u_{x_ix_j}=\sum[a_{ij}(x^0)-a_{ij}(x)]u_{x_ix_j}-\sum b_iu_{x_i}$$

$$-cu+f\equiv g$$

记$B=B(x^0,\rho)$，$\rho=\theta d_{x^0}$，$0\leqslant\theta\leqslant\frac{1}{2}$，$\theta=\theta(K_1,\ K_2,\ n,\ \lambda)$的值将于下面定出。在$B$中，应用前节引理2估计$\frac{\partial^2u(x^0)}{\partial x_i\partial x_j}$，可得

$$\left|\frac{\partial^2 u(x^0)}{\partial x_i \partial x_j}\right| \leqslant K[\rho^{-2}\sup_B |u| + \sup_B |g|$$

$$+\rho^\lambda H_{x^0,B}(g)] = KI$$

因此

$$[u]_{0,2} \leqslant 2d_{x^0}^2 KI \tag{4}$$

I 中诸项分别估计如下。由于$d(B, \partial\Omega) \geqslant (1-\theta)d_{x^0}$，当$x \in B$时有

$$|\sum[a_{ij}(x^0) - a_{ij}(x)]u_{x_i x_j}|$$
$$\leqslant K_1[(1-\theta)d_{x^0}]^{-\lambda}\overline{x^0 x}^\lambda[(1-\theta)d_{x^0}]^{-2}[u]_{0,2} \leqslant K\theta^\lambda d_{x^0}^{-2}[u]_{0,2}$$

因此

$$\sup_B |g| \leqslant d_{x^0}^{-2}[K\theta^\lambda[u]_{0,2} + K|u|_{0,1} + C|f|_{2,0}]$$

由式子

$$H_{x^0,B}(h_1 h_2) \leqslant |h_1(x^0)| H_{x^0,B}(h_2) + \sup_B |h_2| H_{x^0,B}(h_1) \tag{5}$$

导出

$$H_{x^0,B}\{\sum[a_{ij}(x^0) - a_{ij}(x)]u_{x_i x_j}\}$$
$$\leqslant [(1-\theta)d_{x^0}]^{-2}[u]_{0,2}K_1[(1-\theta)d_{x^0}]^{-\lambda} \leqslant Kd_{x^0}^{-2-\lambda}[u]_{0,2}$$

由上式应用中值定理估计$H_{x^0,B}(\Sigma b_i u_{x_i} + Cu)$得到

$$H_{x^0,B}(g) \leqslant d_{x^0}^{-2-\lambda}\{K[u]_{0,2} + K|u|_{0,1} + C|f|_{2,\lambda}\}$$

因此

$$d_{x^0}^2 I \leqslant K\theta^{-2}|u|_0 + C|f|_{2,\lambda} + K\theta^\lambda[u]_{0,2} + K|u|_{0,1}$$

综合(4)得到

$$[u]_{0,2} \leqslant K(\theta^{-2}|u|_0 + |f|_{2,\lambda} + \theta^\lambda [u]_{0,2} + |u|_{0,1})$$

选 θ 使 $K\theta^\lambda \leqslant \frac{1}{2}$，代入上式，得到

$$[u]_{0,2} \leqslant K(|u_0| + |f_{2,\lambda}| + |u|_{0,1})$$

由前节引理 1 得

$$|u|_{0,1} \leqslant \varepsilon [u]_{0,2} + c(\varepsilon)|u|_0$$

选 ϵ 足够小且代入上式就得到(2)。

用类似的方法可导出(3)。因为由$[u]_{0,2+\lambda}$的定义可知：必有二点x°、$\tilde{x}^\circ \in \Omega$，（不妨设$d_{x^\circ} \leqslant d_{\tilde{x}^\circ}$），以及一个特殊的二阶微商，使

$$\frac{1}{2}[u]_{0,2+\lambda} \leqslant \left| \frac{\partial^2 u(x^\circ)}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 u(\tilde{x}^\circ)}{\partial x_i \partial x_j} \right| \frac{d_{x^\circ}^{2+\lambda}}{\overline{x^\circ \tilde{x}^\circ}^\lambda}$$

记$B = B(x^0, \theta d_{x^\circ}), (0 < \theta \leqslant \frac{1}{2})$，$\theta = \theta(K_1, K_2, n, \lambda)$待下面选定。

当$\overline{x^\circ \tilde{x}^\circ} \geqslant \frac{1}{4}\theta d_{x^\circ}$时，

$$\frac{1}{2}[u]_{0,2+\lambda} \leqslant 2[u]_{0,2}\, d_{x^\circ}^{-2} \frac{d_{x^\circ}^{2+\lambda}}{(\frac{1}{4}\theta d_{x^\circ})^\lambda} \leqslant K[u]_{0,2}$$

在这情况下由(2)得出(3)。当$\overline{x^\circ \tilde{x}^\circ} < \frac{1}{4}\theta d_{x^\circ}$时，应用前节引理 2 得到

$$[u]_{0,2+\lambda} \leqslant 2 d_{x^\circ}^{2+\lambda} \rho^{-\lambda} [KI + K\rho^\lambda H_{\tilde{x}^\circ, B}(g)],$$

其中$\rho = \frac{1}{4}\theta d_{x^\circ}$，$KI$的估计如前。应用(5)得到

$$H_{\tilde{x}^\circ, B}\{\sum [a_{ij}(x^\circ) - a_{ij}(x)] u_{x_i x_j} \leqslant K d_{x^\circ}^{-2-\lambda} [u]_{0,2}$$
$$+ K\theta^\lambda d_{x^\circ}^{-2-\lambda} [u]_{0,2+\lambda}$$

$H_{\tilde{x}^\circ, B}(\Sigma b_i u_{x_i} + cu)$的估计同前。因此得到

$$[u]_{\sigma,2+\lambda}\leqslant K(\theta^{-2-\lambda}|u|_0+\theta^{-\lambda}|f|_{2,\lambda}+[u]_{0,2}+\theta^{-\lambda}[u]_{0,1}$$
$$+\theta^{\lambda}[u]_{\sigma,2+\lambda}$$

选 θ 使 $K\theta^{\lambda}\leqslant\frac{1}{2}$，就得到(3)。定理 1 证毕。

定理 1 是**内闭性质**的定理，即在 $\bar{\Omega}_\rho=\{x|x\epsilon\Omega,d(x,d\Omega)\geqslant\rho\}$ 中，

$$\rho|Du|,\rho^2|D^2u|,\rho^{2+\lambda}\frac{|D^2u(x)-D^2u(y)|}{\overline{xy}^{\lambda}}$$
$$\leqslant K(\sup_{\Omega}|u|+|f|_{2,\lambda})$$

现在来考虑狄氏问题的**近边估计**。

设 ω 为 $\partial\Omega$ 上的开区域，$\omega\epsilon C^{2,\lambda}$，$(0<\lambda<1)$，即 ω 能被有限个小片所复盖，而每个小片用参数表示 $x_i=x_i(t_1,t_2,\cdots,t_{n-1})$，$x_i\epsilon C^{2,\lambda}$。

当 $x\epsilon\bar{\Omega}$ 时，记 $\bar{d}_x=d(x,\partial\Omega\backslash\omega)$。仿前节 $|u|_{m,k}$ 的定义给出 $|\bar{u}|_{m,k}$，$\bar{C}_{m,k}$ 等的定义，易见前节引理 1 仍然成立。

对于在 ω 上定义的函数 φ，记

$$|\varphi|_k^{\omega}=\sup_{l\leqslant k}\bar{d}_x^l|D^l\varphi|$$

$$|\varphi|_{k+\lambda}^{\omega}=|\varphi|_k^{\omega}+\sup_{\omega}\min(\bar{d}_x,\bar{d}_y)^{k+\lambda}$$

$$\cdot\frac{|D^k\varphi(x)-D^k\varphi(y)|}{\overline{xy}^{\lambda}}$$

在sup内的 $D^k\varphi(x)$、$D^k\varphi(y)$ 先限于对同一种参数求微商，然后再按不同片所代表的不同参数所对应的微商求和。

设　$a_{ij}\epsilon\bar{C}_{0,\lambda}$，$b_i\epsilon\bar{C}_{1,\lambda}$，$c$，$f\epsilon\bar{C}_{2,\lambda}$

$$\left.\begin{array}{l}|\overline{a_{ij}}|_{0,\lambda}\\ |\bar{b}_{ij}|_{1,\lambda}\\ |\bar{c}|_{2,\lambda}\end{array}\right\}\leqslant K_1,$$

$$\sum a_{ij}\alpha_i\alpha_j\geqslant K_2\sum\alpha_i^2,\ K_2>0$$

仅与K_1、K_2、n、λ以及区域Ω、ω有关的常数记为$\overline{K}$。

定理2 设u是$\mathscr{L}(u)=f$的解，且对任何区域Ω_1满足$\overline{\Omega}_1\subseteq\Omega\cup\omega$时，$u\in C^{2,\lambda}(\Omega_1)$，再设$u|_\omega=\varphi\in C^{2,\lambda}(\omega)$，则存在常数$\overline{K}$使

$$|\bar{u}|_{0,2+\lambda}\leqslant\overline{K}(|u|_0+|\bar{f}|_{2,\lambda}+|\varphi|_{2+\lambda})\qquad(6)$$

上式的成立仅要求不等式右边为有限，因而附带地得到

$$u\in C_{0,2+\lambda}(\Omega\cup\omega)。$$

证 由于内估计式(2)、(3)成立，因此要证明(6)成立，只需以ω内的点x^0为中心的小球与Ω相交的区域Ω_1进行证明即可。

设$\overline{\Omega}_1\cap\omega=\omega_1$的参数表示式是

$$\xi_i=\xi_i(t_1,\cdots,t_{n-1})\in C^{2,\lambda},\ i=1,2,\cdots,n$$

设x^0对应于参数$t_1=\cdots=t_{n-1}=0$。由于$\cos(N,\xi_i)\in C^{1,\lambda}$，取$\delta>0$足够小，由

$$\frac{\int_{-\delta}^{t_1}\cdots\int_{-\delta}^{t_{n-1}}\cos(N,\xi_i)dt_1\cdots dt_{n-1}}{(t_1+\delta)\cdots(t_{n-1}+\delta)}=\cos(l,\xi_i)$$

定出方向l。则在x^0附近$\cos(l,\xi_i)\in C^{2,\lambda}$，且当$\delta$小时，$l$方向与法线方向$N$很近似。故$\Omega_1$中存在$x^0$的一个小邻域，其中每点$x$只有一条直线$l$通过。由$x$沿$l$到$\omega_1$上点$\xi$的长度记为$t_n=\overline{x\xi}$，则

$$x_i=x_i(t_1,\cdots,t_{n-1})+t_n\cos(l,\xi_i)\in C^{2,\lambda}$$

逆变换

$$t_i = t_i(x_1, \cdots, x_n) \in C^{2,\lambda}, \quad i = 1, 2, \cdots, n。$$

作自变量变换把$(x_1, \cdots, x_n)$变到$(t_1, \cdots, t_n)$，则把ω_1的小片变为$t_n = 0$的小片，椭圆方程仍变为椭圆方程。因此，不妨预先假设ω_1是平面$x_n = 0$的一部分，并且在减去一个适当的函数之后，可设$\varphi|_{\omega_1} = 0$。

应用前节引理 3，类似于定理 1 的证明得到定理 2。

Neumann问题与斜微商问题有类似的Schauder估计，高阶椭圆方程与椭圆组也有相应的Schauder估计[5],[6]等。

§6 边值问题解的存在性与光滑性

本节介绍Schauder估计的应用，且结合一定的构造性的结果。

引理1 设$0<\lambda<1$，$\partial\Omega \in C^1$，$f \in C_{0,\lambda}(\Omega)$，$\varphi \in C(\partial\Omega)$，则

$$\begin{cases} \Delta u = f \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

的解为存在且唯一，并有$u \in C_{0,2+\lambda}(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$。

证 应用格林公式与Laplace算子$\triangle$的基本解$H(x-y)$，得到

$$u(x) = \int_\Omega H(x-y) f(y) dy - \int_{\partial\Omega} \left[H(x,y) \frac{\partial u}{\partial N} - u \frac{\partial H(x,y)}{\partial N} \right] d\sigma_y,$$

其中N为内法线。由于上式中后二项在Ω内为调和函数，故猜想

$$w(x) = \int_\Omega H(x-y) f(y) dy$$

满足$\Delta w = f(x)$，$x\in\Omega$。

可严格证明如下。对牛顿位势取二阶微商的表达式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = \int_\Omega \frac{\partial^2 H(x-y)}{\partial x_i \partial x_j}[f(y)-f(x)]dy$$

$$+f(x)\int_{\partial\Omega} \frac{\partial H(x-y)}{\partial x_i}\cos(N, y_j)d\sigma_y$$

因此，$$\Delta w = f(x)\sum_{i=1}^n \int_{\partial\Omega} \frac{\partial H(x-y)}{\partial x_i}\cos(N, y_i)d\sigma_y$$

$$= -f(x)\int_{\partial\Omega}\sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x-y)}{\partial y_i}\cos(N, y_i)d\sigma_y$$

$$= -f(x)\left[\int_{\partial B(x,\varepsilon)}\sum_{i=1}^n \frac{\partial H(x-y)}{\partial y_i}\cos(N, y_i)d\sigma_y\right.$$

$$\left.+\int_{\Omega\setminus\overline{B(x,\varepsilon)}} \Delta_y H(x-y)dy\right] = f(x)$$

应用下调和函数构造解的方法知

$$\Delta(u-w) = 0$$

$$(u-w)|_{\partial\Omega} = \varphi - w|_{\partial\Omega}$$

的解为存在且唯一，因此

$$\begin{cases}\Delta u = f, \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi,\end{cases} \quad u\in C^2(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$$

的解为存在且唯一。应用§4引理2得$u\in C_{0,2+\lambda}(\Omega)$。引理证毕。

定理1 在椭圆型方程的狄氏边值问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=\sum a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum b_iu_{x_i}+cu=f\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

中，设$\Sigma a_{ij}\alpha_i\alpha_j\geqslant K_2\Sigma\alpha_i^2$，$(\alpha\in\mathbf{R}^n,\ K_2>0)$，$\partial\Omega\in C^1$，$a_{ij}\in C_{0,\lambda}(\Omega)$，$b_i\in C_{1,\lambda}(\Omega)$，$f$、$c\in C_{2,\lambda}(\Omega)$，$\varphi\in C(\partial\Omega)$，$c\leqslant 0$。则解$u\in C_{0,2+\lambda}(\Omega)\cap C(\bar{\Omega})$为存在且唯一。

证 由极值原理知至多只有一个解。现证明解为存在。取

$$\begin{cases}\Delta v=0\\ v|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

的解v，由§4引理2知$v\in C_{0,2+\lambda}(\Omega)$。考虑$u-v$则可把边值$\varphi$化为0，而其它假设仍为真。因此不失一般性，设为$u|_{\partial\Omega}=0$。可以证明

$$|u|\leqslant K\max_{\Omega}|f| \qquad (*)$$

当$c(x)<0$，$(x\in\bar{\Omega})$时，$(*)$由极值原理的关系式

$$|u|\leqslant\max_{\Omega}|f|/\min_{\Omega}|c|,\ x\in\bar{\Omega}$$

导出。$c(x)\leqslant 0$的情况可化到$c(x)<0$的情况，做法是：取球$B(x^0,\rho)$使$x^0\in\Omega$而$\bar{\Omega}\subset B(x^0,\rho)$。记

$$v=e^{k\rho^2}-e^{k\,\overline{x^0x}^{\,2}}$$

其中k为待定正常数。做变换$u=vw$，得到w的二阶方程

$$\sum a_{ij}w_{x_ix_j}+\sum\tilde{b}_iw_{x_i}+\frac{\mathscr{L}(v)}{v}w=\frac{1}{v}f$$

取k适当大，可使$\mathscr{L}(v)$小于某一固定的负数，而v大于某一正数$(\forall x\in\Omega)$。因此对w有$(*)$式成立。回到u，则$(*)$式仍然成立。由

Schauder内估计结合(*)得到

$$\|u\|_{C_{0,2+\lambda}(\Omega)}\leqslant K\|f\|_{C_{0,\lambda}(\Omega)} \tag{**}$$

这里K仅与方程系数a_{ij}、b_i、c的λ模

$$\sum|a_{ij}|_{0,\lambda}+\sum|b_i|_{1,\lambda}+|c|_{2,\lambda}$$

以及 $\Sigma a_{ij}\alpha_i\alpha_j\geqslant K_2\Sigma\alpha_i^2$ 中的 K_2 有关。(**)是二个 Banach 空间 $C_{0,2+\lambda}(\Omega)$、$C_{0,\lambda}(\Omega)$对应元素间有界映象的关系。作算子方程

$$\begin{cases}\mathscr{L}_\theta(u)=[(1-\theta)\Delta+\theta\mathscr{L}](u)=f,\ (0\leqslant\theta\leqslant1),\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

其中△是Laplace算子。如果

$$\begin{cases}\mathscr{L}_\theta(u)=f\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

$\forall f\in C_{0,\lambda}(\Omega)$可解，则关于解的估计式(**)中的$K$与$\theta$无关。这是因为

$$\mathscr{L}_\theta=\sum[(1-\theta)\delta_{ij}+\theta a_{ij}]\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\theta b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+\theta c$$

的方程系数及λ模的上界，以及

$$\begin{aligned}\sum[(1-\theta)\delta_{ij}+\theta a_{ij}]\alpha_i\alpha_j&\geqslant[(1-\theta)+\theta K_2]\sum\alpha_i^2\\&\geqslant\min(1,K_2)\sum\alpha_i^2\end{aligned}$$

中的$\min(1,K_2)$均可取得与θ无关。因此

$$\forall u\in C_{0,2+\lambda}(\Omega),\ \|(\mathscr{L}-\Delta)(u)\|_{C_{2,\lambda}(\Omega)}\leqslant K_3\|u\|_{C_{0,2+\lambda}(\Omega)},$$

$$\|\mathscr{L}^{-1}_\theta(\mathscr{L}-\Delta)(u)\|_{C_{0,2+\lambda}(\Omega)}\leqslant K_4\|u\|_{C_{0,2+\lambda}(\Omega)},$$

其中 $K_4 = KK_3$ 与 θ 无关。由于

$$\begin{cases} \mathscr{L}_{\theta+\Delta\theta}(u) = f \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

可化为 $C_{0,2+\lambda}(\Omega)$ 空间中的算子方程

$$[I + \Delta\theta \mathscr{L}^{-1}{}_{\theta}(\mathscr{L} - \Delta)](u) = \mathscr{L}^{-1}{}_{\theta}(f)$$

其中 I 为空间 $C_{0,2+\lambda}(\Omega)$ 的单位算子。上述算子方程当 $|\Delta\theta| < 1/K_4$ 时，总可用逐次逼近法求解。

由于当 $\theta = 0$ 时，由引理 2 知为可解，因此经过每步跨出 $1/K_4$，有限步骤之后得到当 $\theta = 1$ 时为可解。定理 1 证毕。

证明的方法叫做**参数延拓法**。

定理2 定理 1 中关于 $\partial\Omega$、a_{ij}、b_i、c、f、φ 的光滑条件分别增强为：$\partial\Omega$ 上有一小片 $\omega \in C^{2+\lambda}$，$a_{ij} \in \overline{C}_{0,\lambda}$、$b_i \in \overline{C}_{1,\lambda}$，$f$、$c \in \overline{C}_{2,\lambda}$，$\varphi \in C^{2+\lambda}(\omega)$。则解 $u \in C^{2+\lambda}(\Omega \cup \omega)$。

证 作自变量的局部非奇异变换 $x = x(y)$，使 Ω 的一部分 Ω_1 化为 $\widetilde{\Omega}$，其中 $\partial\Omega_1 = \omega \cup \omega_1$，而 $\omega_1 \subset \Omega$。设 $x = x(y)$ 把 ω 化为 $y_n = 0$ 上一小片 $\widetilde{\omega}$，ω_1 化为 $\widetilde{\omega}_1$，这变换的存在性见前节定理 2。在此变换下，设 $\mathscr{L}(u) = f$ 化为 $\widetilde{\mathscr{L}}(\widetilde{u}) = \widetilde{f}$，求解

$$\begin{cases} \widetilde{\mathscr{L}}(\widetilde{u}) = \widetilde{f} \\ \widetilde{u}|_{\widetilde{\omega}} = \varphi,\ \widetilde{u}|_{\widetilde{\omega}_1} = u|_{\omega_1} \end{cases}$$

令 $\widetilde{u} - \widetilde{v} = \widetilde{w}$，其中 $\widetilde{v}$ 是由 $\widetilde{v}|_{\widetilde{\omega}} = \varphi$ 延拓到 $\widetilde{\Omega}$ 的 $C^{2+\lambda}$ 函数，这样就把边值 φ 化为 0，解边值问题

$$\widetilde{\mathscr{L}}(\widetilde{w}) = [(1-\theta)\Delta_y + \theta\widetilde{\mathscr{L}}](\widetilde{w}) = \widetilde{f} - \widetilde{\mathscr{L}}(\widetilde{v}),\quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1,$$

$$\tilde{w}|_{\tilde{\omega}_1}=0,\ \tilde{w}|_{\tilde{\omega}_1}=u|_{\tilde{\omega}_1}-\tilde{v}|_{\tilde{\omega}_1}$$

于函数类$\tilde{w}\in\tilde{C}_{0,2+\lambda}$，$\tilde{f}\in\tilde{C}_{2,\lambda}$。

由§4引理3知$\theta=0$时有解，由§5定理2可知应用参数延拓法逐步求解，因而$\theta=1$有解。返回到原变量x，由解的唯一性得到$u\in C^{2+\lambda}(\Omega\cup\omega)$，定理得证。

推论1
$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=\sum a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum b_iu_{x_i}+cu=f\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

当$\Sigma a_{ij}\alpha_i\alpha_j\geqslant K_2\Sigma\alpha_i^2$，$\alpha\in\mathbf{R}^n$，$K_2>0$，$a_{ij}$、$b_i$、$c$、$f\in C^{\lambda}(\bar{\Omega})$，$\partial\Omega\in C^{2+\lambda}$，$\varphi\in C^{2+\lambda}(\partial\Omega)$，$c\leqslant0$，则解$u\in C^{2+\lambda}(\bar{\Omega})$。

现在证明一个关于解的光滑性定理。

定理3 在推论1的假设下，设有开集$\Omega_1\subseteq\Omega$，$\bar{\Omega}_1\cap\partial\Omega=\bar{\omega}$，$\omega$是$\partial\Omega$上的开集。如果$a_{ij}$、$b_i$、$c$、$f\in C^{m,\lambda}(\Omega_1)$，$m\geqslant0$，$\omega\in C^{m+2,\lambda}$，$\varphi\in C^{m+2,\lambda}(\omega)$。则$u\in C^{m+2,\lambda}(\Omega_1\cup\omega)$。

在定理3中，ω可以是整个$\partial\Omega$，也可以是空集。特别，当$\omega=\partial\Omega$时有$u\in C^{m+2,\lambda}(\bar{\Omega})$。

证 仅需证明当$m=1$时定理成立，$m=2$，3…时的证法类似。

设B是一球$B\subset\Omega$，记

$$\frac{u(x+\Delta x_k)-u(x)}{\Delta x_k}=p_h,\quad h=\Delta x$$

则$p_h\to p=\dfrac{\partial u}{\partial x_k}$，$h\to0$，$x\in B$。$p_h$所满足的微分方程是

$$\mathscr{L}(p_h)=g_h=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$-\sum \frac{a_{ij}(x+h)-a_{ij}(x)}{h} \frac{\partial^2 u(x+h)}{\partial x_i \partial x_j}$$

$$-\sum \frac{b_i(x+h)-b_i(x)}{h} \frac{\partial u(x+h)}{\partial x_i}$$

$$-\frac{c(x+h)-c(x)}{h} u(x+h),$$

$$\lim_{h\to 0} g_h = g = f_{x_k} - \sum \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} u_{x_i x_j} - \sum \frac{\partial b_i}{\partial x_k} u_{x_i} - \frac{\partial c}{\partial x_k} u$$

由前节定理 1 Schauder内估计得到

$$|p_h|_{0,2+\lambda} \leqslant K(\sup_B |p_h| + |g_h|_{2,\lambda})$$

易见，当 h 充分小时，上式右端 $\leqslant 2K\left(\sup_B |p| + |g|_{2,\lambda}\right)$，即不超过一常数。由此可选出$p_h$的子列使它以及它的一、二阶微商在$B$内收敛，即$p_h$有一、二阶微商，而且

$$|p_h|_{0,2,\lambda} \leqslant 2K(\sup_B |p| + |g|_{2,\lambda})$$

由此得到$u \in C^{3,\lambda}(B)$。

今设$x^0 \in \omega$。可设在x^0的微小近旁ω是平面$x_n=0$的一部分，否则可作变换

$$x_i = x_i(y) \in C^{3,\lambda},\ i=1,2,\cdots,n,$$

把x^0附近曲面ω的一部分变到平面$y_n=0$上去。仿上面的方法可证得

$$u_{x_k} \in C^{3,\lambda}(\Omega_1 \cup \omega),\ k=1,2,\cdots,n-1,$$

即除了$\dfrac{\partial^3 u}{\partial x_n^3}$之外，对任何$1 \leqslant i,\ j,\ k \leqslant n$,

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x_i \partial x_j \partial x_n} \in C^\lambda(\Omega_1 \cup \omega)$$

把方程$\mathscr{L}(u)=f$关于x_n微分，则$\frac{\partial^3 u}{\partial x_n^3}$可用其它三阶、二阶等微商表示。因此有$\frac{\partial^3 u}{\partial x_n^3} \in C^\lambda(\Omega_1 \cup \omega)$。定理3证毕。

放弃推论1中$c(x)\leqslant 0$的条件，可得出什么结果呢？我们总可取常数σ适当大，使$c(x)-\sigma\leqslant 0$，把$c(x)-\sigma$看作$c(x)$，问题就变为研究

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)+\sigma u=f, & x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

的求解，其中

$$\mathscr{L}=\sum a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j}+\sum b_i \frac{\partial}{\partial x_i}+c, \text{而} c(x)\leqslant 0$$

u减去一个函数，把φ化为0，施行$\mathscr{L}^{-1}$得到

$$(I+\sigma\mathscr{L}^{-1})u=\mathscr{L}^{-1}f, \quad u\in C^{2,\lambda}(\Omega)$$

由Schauder估计，$\mathscr{L}^{-1}(u)$为Banach空间$C^{2,\lambda}(\Omega)$中的紧算子，按紧算子的Fredholm二择一定理得

定理4 或者是

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)+\sigma u=0, x\in\Omega,\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

仅有零解，这时

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)+\sigma u=f\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

的解$\forall f\in C^{\lambda}(\overline{\Omega})$，$\forall\varphi\in C^{2,\lambda}(\partial\Omega)$为存在且唯一；或者是

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)+\sigma u=0\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

有非零解。满足后一条件的σ至多为可数无限个$\{\sigma_i\}$，$i=1, 2, \cdots$，称之为**特征值**，且每一特征值σ_i所对应的**特征函数**为有限个，即齐次方程

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)+\sigma u=0\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

的线性独立解，又$\{\sigma_i\}$不能有非$+\infty$的极限点。

由于在一般泛函分析教本中不介绍Fredholm二择一定理，因此有必要补充一下它的证明。

求解实系数线性赋范空间V中的方程

$$\lambda x-Tx=y,\qquad x,\ y\in V,$$

这里T为上述$\mathscr{L}^{-1}$，是紧算子；λ为上述的$\frac{1}{\sigma}$。我们要证明：当$\lambda x-Tx=0$仅有零解时，则$\forall y\in V$，$\lambda x-Tx=y$有唯一确定的解。反之亦然。这要用到如下赋范线性空间的一般性质。

(i) M是V的真闭子空间，则$\forall 0<\varepsilon<1$，$\exists x_\varepsilon\in V$使得$\|x_\varepsilon\|=1$，且

$$d(x_\varepsilon, M)=\inf_{y\in M}\|x_\varepsilon-y\|\geqslant 1-\varepsilon。$$

证 任取$x\in V\backslash M$，则

$$d(x, M)=\inf_{y\in M}\|x-y\|=d>0\Rightarrow\exists y_\varepsilon\in M，使得$$

$$\|x-y_\varepsilon\|\leqslant\frac{d}{1-\varepsilon}$$

记$x_\varepsilon=\dfrac{x-y_\varepsilon}{\|x-y_\varepsilon\|}$，则$\forall y\in M$

$$\|x_\varepsilon-y\|=\frac{\|x-y_\varepsilon-y\|x-y_\varepsilon\|\|}{\|x-y_\varepsilon\|}\geqslant\frac{d}{\|x-y_\varepsilon\|}\geqslant 1-\varepsilon,$$

证毕。

(ii) 对$\lambda\neq0$，令$N_j=\{x\in V|(\lambda I-T)^jx=0\}$，$(j=1,2,\cdots)$，为$\lambda I-T$的广义核，其中I为单位算子，则存在$l$使得$N_l=N_{l+1}$。

证 事实上，由于T为连续算子，故N_j为闭子空间，又显然有$N_j\subseteq N_{j+1}$，$j=1,2,\cdots$。设这些闭子空间中没有两个重合，即N_j总是N_{j+1}的真闭子空间，$(j=1,2,\cdots。)$。

由(i) $\exists x_j\in N_j$，使得$\|x_j\|=1,d(x_j,N_{j-1})\geqslant\dfrac{1}{2}$，因而$\{x_j\}$为有界列，且当$i<j$时，

$$\|Tx_j-Tx_i\|=\|\lambda x_j-(\lambda I-T)x_j-Tx_i\|$$

$$=\lambda\|x_j-\frac{1}{\lambda}[(\lambda I-T)x_j+Tx_i]\|\geqslant\frac{\lambda}{2}$$

这是因为$\dfrac{1}{\lambda}[(\lambda I-T)x_j+Tx_i]\in N_{j-1}$。

由上式得到$\{Tx_n\}$，$n=1,2,\cdots$，不收敛，这与T的紧性矛盾。因此$\exists l$使$N_l=N_{l+1}$。

今设$\lambda x-Tx=y$对所有y可解，$(\lambda\neq0)$，而$N_1\neq\{0\}$，即$\exists x_1\neq0$使$(\lambda I-T)x_1=0$。

顺次解

$$(\lambda I-T)x_2=x_1,\ (\lambda I-T)x_3=x_2,\ \cdots,$$

得到

$$(\lambda I-T)^lx_l=x_1\neq0,\ (\lambda I-T)^{l+1}x_l=(\lambda I-T)x_1=0\Rightarrow x_l\in N_{l+1},$$

$x_l \notin N_l \Rightarrow \forall l$，$N_l \neq N_{l+1}$，产生矛盾。

这证明了Fredholm二择一定理的一个方面。

(iii) 当$\lambda \neq 0$时，$\lambda I - T$的值域$R = \{x \mid x \in V,\ x = (\lambda I - T)y\}$是$V$的闭子空间。

证 看$y \in \overline{(\lambda I - T)V}$，即$\exists x_n$使得$(\lambda I - T)x_n \to y (n \to \infty)$。先证$d(x_n, N)$为有界，其中$N = N_1$为$\lambda I - T$的核。

如果$d(x_n, N)$无界，记$z_n = x_n / d(x_n, N)$则$d(z_n, N) = 1$。取N中接近于z_n的点t_n，使

$$d(z_n, t_n) = \|z_n - t_n\| < 2,$$

记$z_n - t_n = s_n$，则$\{s_n\}$有界，$d(s_n, N) = d(z_n, N) = 1$。

$$(\lambda I - T)s_n = (\lambda I - T)z_n = \frac{(\lambda I - T)x_n}{d(x_n, N)} \to 0$$

这里最后一步成立是由于$(\lambda I - T)x_n \to y$之故。

由于T为紧，有子列s_{n_i}使$T s_{n_i}$收敛，$s_{n_i} = T s_{n_i} / \lambda$ 也收敛，这是由于$\lambda \neq 0$。设$s_{n_i} \to s$，则$(\lambda I - T)s = 0$，$d(s, N) = 0$，这与$1 = d(s_n, N) \to d(s, N)$相矛盾，故$d(x_n, N)$的有界性得证。

因此$\exists x_n' \in N$，使

$$d(x_n, x_n') = \|x_n - x_n'\| \approx d(x_n, N),$$

即$\|x_n - x_n'\|$为有界。不失一般性，可设$\{x_n\}$为有界而$(\lambda I - T)x_n \to y$，否则以$x_n - x_n'$代替x_n即可。

由于T为紧，有子列x_{n_i}使$T x_{n_i}$收敛，设$T x_{n_i} \to w$。又因为$\lambda \neq 0$，$x_{n_i} = \frac{1}{\lambda}[(\lambda I - T)x_{n_i} + T x_{n_i}]$也收敛。

设$x_{n_i} \to x$，则$(\lambda I - T)x = y$。这证明了R为闭集。

(iv) 记$R_j = \{x \mid (\lambda I - T)^j y = x\}$，$j = 1, 2, \cdots$，

为$\lambda I-T$的广义值域，则由(iii)得$R_j(j=1,2,\cdots)$，为闭子空间，且显然$R_j\supseteq R_{j+1}$。假设它们中没有两个重合，即R_{j+1}是R_j的真闭子空间。于是

$$\exists x_j\in R_j\text{使}\quad \|x_j\|=1,\ d(x_j,R_{j+1})\geqslant\frac{1}{2}。$$

因而$\{x_n\}$为有界列，且当$i>j$时，

$$\|Tx_j-Tx_i\|=\|\lambda x_j-(\lambda I-T)x_j-Tx_i\|$$

$$=\lambda\|x_j-\frac{1}{\lambda}[(\lambda I-T)x_j+Tx_i]\|\geqslant\frac{\lambda}{2},$$

上面最后不等式之所以成立，是因为

$\frac{1}{\lambda}[(\lambda I-T)x_j+Tx_i]\in R_{j+1}$，于是$\{Tx_n\}$不收敛，与$T$的紧性矛盾。

据此，$\exists l$ 使$R_l=R_{l+1}$

今设 $N=\{0\}$，$\forall y\in V$有$(\lambda I-T)^l y\in R_{l+1}$，

因此

$$\exists x\in V,\text{使}(\lambda I-T)^{l+1}x=(\lambda I-T)^l y,$$

故有

$$(\lambda I-T)^l[y-(\lambda I-T)x]=0$$

$$\Rightarrow(\lambda I-T)^{l-1}[y-(\lambda I-T)x]=0,\cdots$$

$$y-(\lambda I-T)x=0,\ \text{即}\ y=(\lambda I-T)x,\ \text{即}\ R=V。$$

Fredholm二择一定理的另一个方面得证，二择一定理证毕。

(v) 现研究算子T的谱的情况

对一般有界线性算子T，设定义域为V，当$\lambda I-T$的值域$R=V$，而$(\lambda I-T)^{-1}$为有界时，称λ为**正则点**；当$R=V$，而$(\lambda I-T)^{-1}$非有界时，称λ属于**连续谱**；当$R\neq V$，而$(\lambda I-T)^{-1}$为有界时，称

λ属于**残谱**，当$R \neq V$，而$(\lambda I - T)^{-1}$又非有界时，称λ属于**点**谱。

当T为紧算子时，如果$\lambda(\neq 0)$属于连续谱，由$(\lambda I - T)^{-1}$非有界，$\exists x_n$，y_n使得

$$(\lambda I - T)x_n = y_n, \quad \|x_n\| = 1, \quad y_n \to 0, \quad (n \to \infty)$$

有子列x_{n_i}使Tx_{n_i}收敛，则

$$x_{n_i} = \frac{1}{\lambda}(y_{n_i} + Tx_{n_i})$$

也收敛，记为

$$x_{n_i} \to x, \quad 则(\lambda I - T)x = 0$$

由$R = V$，根据二择一定理得$x = 0$，这与

$$\|x_{n_i}\| \to \|x\|, \quad \|x_n\| = 1$$

相矛盾，因此无连续谱。

当$\lambda(\neq 0)$属于残谱时，由$R \neq V$，按二择一定理可知$\exists x_0 \neq 0$，使$(\lambda I - T)x_0 = 0$，取$x_m \to x_0 (m \to \infty)$，但$x_m \neq x_0$，记$y_m = (\lambda I - T)x_m$，则

$$y_m = (\lambda I - T)(x_m - x_0), \quad \|y_m\| \leqslant \|\lambda I - T\| \|x_m - x_0\| \to 0,$$

$$m \to \infty$$

但是

$$(\lambda I - T)^{-1} y_m = x_m,$$

因此

$$\|(\lambda I - T)^{-1}\| \geqslant \sup_m \frac{\|x_m\|}{\|y_m\|} \to \infty$$

这与$(\lambda I - T)^{-1}$有界矛盾，因此无残谱。

当$\lambda(\neq 0)$属于点谱时，按二择一定理知有x_0使

$$(\lambda I - T)x_0 = 0,\quad \text{即} Tx_0 = \lambda x_0$$

这时 λ 称为**特征值**，x_0 称为对应于特征值 λ 的**特征函数**，或**特征向量**，当T为紧算子时，一般特征值是存在的，现研究特征值、特征函数的一些性质。

设特征函数列$\{x_i\}$ $(i=1,2,\dots)$对应的特征值序列为$\{\lambda_i\}$，$i=1,2,\dots$，$\lambda_i \neq 0$，λ_i可以重复，但对应于同一λ_i的特征函数在$\{x_i\}$中取为线性独立的。

首先可证 $\forall j>0$，$x_1 x_2$，…，x_j 为线性独立的，如果不然，$\exists n>0$ 使 $x_1, x_2, \dots$，x_n为线性独立，而 $x_1, x_2, \dots$，x_{n+1} 为线性相关，则

$$x_{n+1} = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i,$$

用算子$\lambda_{n+1}I - T$作用之得到

$$\sum_{i=1}^{n} c_i(\lambda_{n+1} - \lambda_i)x_i = 0$$

因此，$\forall \lambda_i \neq \lambda_{n+1}$有$c_i = 0$。对所有的 i 使 $\lambda_i = \lambda_{n+1}$ 者，由于已设对应的特征函数为线性独立，因此$c_i = 0$，$1 \leqslant i \leqslant n$，故有$x_{n+1} = 0$，得到矛盾。

设由x_1，x_2、…、x_j张成的闭子空间为M_j，则 M_{j-1} 是M_j的真子空间，$j=2,3,\dots$。

$\exists y_j \in M_j$使得

$$\|y_j\| = 1,\quad d(y_j, M_{j-1}) \geqslant \frac{1}{2},\quad j=2,3,\cdots$$

记 $\quad y_j = \sum_{m=1}^{j} c_{jm} x_m$，当$i<j$时有

$$\left\|T\left(\frac{y_j}{\lambda_j}\right)-T\left(\frac{y_i}{\lambda_i}\right)\right\|=\left\|\sum_{m=1}^{j}c_{jm}\frac{\lambda_m}{\lambda_j}x_m\right.$$

$$\left.-\sum_{m=1}^{i}c_{im}\frac{\lambda_m}{\lambda_i}x_m\right\|=\|y_j-z\|\geqslant d(y_j,M_{j-1})\geqslant\frac{1}{2},\quad(***)$$

其中

$$z=\sum_{m=1}^{j-1}c_{jm}\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_j}-1\right)x_m-\sum_{m=1}^{i}c_{im}\frac{\lambda_m}{\lambda_i}x_m\in M_{j-1}$$

如果 $\lambda_j\to\lambda\neq0$，$(j\to\infty)$，则由$(***)$式知 当i、j充分大时

$$\|T(y_j)-T(y_i)\|\geqslant\frac{\lambda}{4}>0$$

但另一方面，由于$\|y_m\|=1$，$m=1,2,\dots$及T为紧，有子列 $\{y_{ml}\}$ 使 $T(y_{ml})$收敛，二者矛盾。

因此除$\{0\}$外，$\{\lambda_j\}$不能有另外的极限点，又由于T有界，∞也不可能是$\{\lambda_i\}$的极限点，特别是对应于同一特征值的特征函数的个数为有限，且每一特征值为孤立的，因此特征值至多为可数个。

紧算子 T 的二择一定理尚可与 T^*共同考虑，T^*对一般范线性空间是T的**对偶**(dual)**算子**,对内积空间是T的**共轭**(adjoint)**算子**,我们有

(1) $(\lambda I-T)x=0$ 仅有零解。

(2) $(\lambda I-T)x=y$ 对所有 y 可解。

(3) $(\lambda I-T^*)x=0$ 仅有零解。

(4) $(\lambda I-T^*)x=y$ 对所有 y 可解。

这四个论断之一成立，则其它三者也成立，当 λ 是T的特征值时，则它也是T^*的特征值，二者对应的特征函数的维数均为有限且相同。

$$(\lambda I-T)x=y$$

有解的充要条件是 y 与所有使

$$(\lambda I-T^*)x=0$$

的特征函数正交，同样，

$$(\lambda I-T^*)x=y$$

有解的充要条件是 y 与所有使

$$(\lambda I-T)x=0$$

的特征函数正交。

关于紧算子这一更广一些的二择一定理，我们不证明了，可参考[7]。

由我们已证明的紧算子的性质得知定理 4 成立，但是

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)+\sigma u=0\\ u|_{\partial\Omega}=0\end{cases}$$

对任何椭圆算子 $\mathscr{L}$ 的特征值是否恰为可数无限个，还是一个未解决的问题。

关于 $u|_{\partial\Omega}=\varphi$ 中的 $\partial\Omega$ 与 φ 的光滑性条件，尚可减弱仍能得到

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=\sum a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum b_iu_{x_i}+cu=f\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

的解的存在性，这可参考本章第九节，用 Schauder 估计也可证明二阶椭圆型方程 Neumann 问题、斜微商问题、高阶椭圆型方程边值问题解的存在性及二择一定理等，我们都不介绍了。

下面将介绍椭圆型方程边值问题另一解法——Hilbert 空间方法，为此，先介绍Соболев空间的一些预备知识

§7 Соболев空间

设$u(x)$表示有界区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$上可测函数的等价类，在一测度为0的子集上函数值可以不同，这函数的逐点性质（例如属于C）了解为函数类中有一个确定的函数所具有的性质。

当$1\leqslant p<\infty$时，$L^p(\Omega)$表示由

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega|u|^p dx\right)^{1/p}<\infty$$

为范数的函数所构成的空间，$L^\infty(\Omega)$表示由

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)}=\sup_\Omega|u|<\infty$$

为范数的函数所构成的空间。

空间$L^p(\Omega)$的简单性质：

当$1\leqslant p<\infty$时，$L^p(\Omega)$是可分的，特别是$C^\infty(\bar{\Omega})$是它的一个稠子空间。

当$1<p<\infty$时，$L^p(\Omega)$是自反的。它的对偶空间是$L^q(\Omega)$，其中$q=\dfrac{p}{p-1}$，即$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$。

当$p=q=2$时为Hilbert空间，内积(u,v)由

$$(u,v)=\int_\Omega uv\,dx$$

定出。

再介绍几个常用的不等式，首先，Hölder不等式是熟知的，即对$u\in L^p(\Omega)$，$v\in L^q(\Omega)$，$p>0$，$q>0$，而$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$时，有

$$\left|\int_\Omega uv\,dx\right|\leqslant\|u\|_p\|v\|_q$$

其中

$$\|u\|_p = [\int_\Omega |u|^p dx]^{1/p}$$

多个函数乘积的 Hölder不等式可由二个函数乘积的 Hölder不等式逐步导出：

设$u_i \in L^{p_i}(\Omega)$，$p_i > 0$，$i = 1, 2, \ldots, m$且 $\sum\limits_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1$ 时，有

$$|\int_\Omega u_1 \cdots u_m dx| \leqslant \|u_1\|_{p_1} \cdots \|u_m\|_{p_m}$$

当$u \in L^r(\Omega)$，$r > 0$，且$0 < p < r$时，如果$p < q < r$应用 Hölder不等式得

$$\int_\Omega |u|^q dx = \int_\Omega |u|^{p\alpha} |u|^{r(1-\alpha)} dx \leqslant (\int_\Omega |u|^p dx)^\alpha (\int_\Omega |u|^r dx)^{1-\alpha}$$

其中α由

$$q = p\alpha + r(1-\alpha)$$

定出，由此得到**内插不等式**

$$\|u\|_q \leqslant \|u\|_p^{(p/q)\alpha} \|u\|_r^{(r/q)(1-\alpha)} = \|u\|_p^\lambda \|u\|_r^{1-\lambda}$$

其中λ由

$$\frac{1}{q} = \frac{\lambda}{p} + \frac{1-\lambda}{r}$$

定出，即

$$\lambda = \frac{\frac{1}{q} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{p} - \frac{1}{r}}$$

由 $ab \leqslant a^p/p + b^q/q, a,b \geqslant 0, p>0, q>0, 1/p+1/q=1$

a 用 $(p\varepsilon)^{\frac{1}{p}}a$ 代替，b 用 $(p\varepsilon)^{-\frac{1}{p}}b$ 代替得到

$$ab \leqslant \varepsilon a^p + c\varepsilon^{-q/p}b^q, \quad c = \frac{p}{p^{p/(p-1)}} < 1$$

把这式与内插公式相结合得到

$$\|u\|_q \leqslant \varepsilon\|u\|_r + c\varepsilon^{-(1-\lambda)/\lambda}\|u\|_p$$

其中

$$\frac{1-\lambda}{\lambda} = \frac{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}}。$$

记 $L^p_{loc}(\Omega) = \bigcap\{L^p(\Omega')\,|\,\Omega' \subset\subset \Omega\}, (1 \leqslant p \leqslant \infty)$

其中 $\Omega' \subset\subset \Omega$ 指 $\Omega' \subset \Omega$ 且 $\mathrm{dist}(\Omega', \partial\Omega) > 0$。

空间 $L^p_{loc}(\Omega)$ 中收敛的意义为：$\forall \Omega' \subset\subset \Omega$，$f$ 于 $L^p(\Omega')$ 中为收敛。

定义光滑化子 $\rho(x) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ 如下。

$$\rho(x) = \begin{cases} c\left(\exp\dfrac{1}{|x|^2-1}\right), & |x|<1; \\ 0, & |x| \geqslant 1. \end{cases}$$

其中常数 c 选得使 $\int_{\mathbb{R}^n}\rho(x)dx = 1$ 成立。

对 $u \in L_{loc}(\Omega)$ 与 $h>0$，u 的光滑化函数由下面的卷积定义

$$u_h(x)=h^{-n}\int_\Omega\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)u(y)dy,\quad h<d(x,\partial\Omega)$$

$\forall\,\Omega'\subset\subset\Omega$，当 h 小时有$u_h(x)\in C^\infty(\Omega')$

引理1 (i) 当$u\in C(\Omega)$，则 $u_h\to u(h\to 0)$于Ω，且于 $\Omega'\subset\subset\Omega$中为一致收敛。

(ii) 当$u\in L_{loc}(\Omega)$，$1\leqslant p<\infty$，则

$$\|u_h\|_{L_p(\Omega')}\leqslant\|u\|_{L_p(\Omega'')},\quad \Omega'\subset\subset\Omega,\ d(\Omega',\partial\Omega)>2h,$$

$$\Omega''=\{x\mid d(x,\Omega')>h\}$$

又$u_h\to u$于$L^p_{loc}(\Omega)$

证 $u_h(x)=h^{-n}\int_\Omega\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)u(y)dy=\int_{|z|=1}\rho(z)u(x-hz)dz,$

$$h<d(x,\partial\Omega)\text{时}$$

故当$\Omega'\subset\subset\Omega$且$2h<d(\Omega',\partial\Omega)$时，如果$u\in C(\Omega)$则有

$$\sup_{\Omega'}|u-u_h|\leqslant\sup_{x\in\Omega'}\int_{|z|<1}\rho(z)|u(x)-u(x-hz)|dz$$

$$\leqslant\sup_{x\in\Omega'}\sup_{|z|<1}|u(x)-u(x-hz)|$$

由于 u 在Ω''上为一致连续，故u_h在Ω'上一致趋近于u，(i)证毕。

当$u\in L^p_{loc}(\Omega)$时，

$$|u_h(x)|\leqslant\int_{|z|<1}\rho(z)^{1/q}\rho(z)^{1/p}|u(x-hz)|dz$$

$$\leqslant \left[\int_{|z|\leqslant 1}\rho(z)|u(x-hz)|^p dz\right]^{1/p},$$

$$\int_{\Omega'}|u_h|^p dx \leqslant \int_{\Omega'}dx\int_{|z|\leqslant 1}\rho(z)|u(x-hz)|^p dz$$

$$=\int_{|z|\leqslant 1}\rho(z)dz\int_{\Omega'}|u(x-hz)|^p dx \leqslant \int_{\Omega''_h}|u|^p dx$$

$\forall\varepsilon>0$，取$w\in C(\Omega)$满足$\|u-w\|_{L^p(\Omega)}<\varepsilon$，

当h充分小时，由(i)有

$$\|w-w_h\|_{L^p(\Omega')}<\varepsilon$$

故对充分小的$h<h_0$有

$$\|u-u_h\|_{L^p(\Omega')}\leqslant\|u-w\|_{L^p(\Omega')}+\|w-w_h\|_{L^p(\Omega')}$$

$$+\|u_h-w_h\|_{L^p(\Omega')}<\varepsilon+2\|u-w\|_{L^p(\Omega''_{h_0})}<3\varepsilon$$

因此在$L^p_{loc}(\Omega)$中u_h收敛到u，(ii)得证。

记

$$D^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}},\quad \alpha=(\alpha_1,\cdots,\alpha_n),\ |\alpha|=\sum_{i=1}^n\alpha_i$$

设$\varphi\in C^\infty(\Omega)$且$\varphi$在$\Omega$具**紧支集**，即

$$\Omega'=\{x|x\in\Omega,\varphi(x)\neq 0\},\text{且}d(\Omega',\partial\Omega)>0,$$

记为 $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$。

设u、v在Ω为局部可积，如果$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$成立着

$$\int_\Omega uD^\alpha\varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega v\varphi dx$$

则称u的α次**弱微商**存在，且其值为v。

如果存在$C^\infty(\Omega)$中的函数列$\{u_m\}$，在 $L_{loc}(\Omega)$中，u_m收敛到u，$D^\alpha u_m$收敛到v，则称u的α次强微商存在，且值为v。
不难证明，强弱微商是一致的，因为当v为u的强α次微商时，

$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$有

$$\int_\Omega u_m D^\alpha \varphi dx=(-1)^{|\alpha|}\int_\Omega D^\alpha u_m\varphi dx$$

令$m\to\infty$，得到u、v满足弱微商关系式

其逆，当u、v满足弱微商关系式，则有

$$D^\alpha u_h(x)=v_h(x),\ \forall x\in\Omega_h=\{x\,|\,x\in\Omega, d(x,\partial\Omega)>h\}$$

这是因为

$$D^\alpha u_h(x)=h^{-n}\int_\Omega D_x^\alpha\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)u(y)dy$$

$$=(-1)^{|\alpha|}h^{-n}\int_\Omega D_y^\alpha\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)u(y)dy$$

$$=h^{-n}\int_\Omega\rho\left(\frac{x-y}{h}\right)v(y)dy=v_h(x)$$

按$L_{loc}(\Omega)$的意义，u_h收敛到u，v_h收敛到v，即v为u的强α次微商，证毕。

以下记$v=D^\alpha u$，在Ω内所有$|\alpha|\leqslant k$阶弱微商存在且可积的函数组成的线性空间记为$W_1^k(\Omega)$。当然，$C^k(\Omega)\subset W_1^k(\Omega)$，且有局部一致Lipschitz函数类$C^{0,1}(\Omega)\subset W_1^1(\Omega)$。这是因为$C^{0,1}(\Omega)$中的函数在$\Omega$中的直线段$x_i=$常数，$1\leqslant i\leqslant n$，上为绝对连续，因而弱微商可取为它的几乎处处微商。

弱微商是否与L微商一致？我们考察

例 $u_x+u_y=0$有解$u=f(x-y)$，当f为绝对连续时，弱微商与L微商一致；f连续而处处不可微时，则弱微商仍可存在，而L

微商不存在。

现考虑弱微商的基本运算。当 u 、 v 为弱可微时，uv是否弱可微？又 $D(uv)=uvD+vDu$ 是否成立？当 $u(x)$ 为弱可微时，做变量替换 $x=\phi[y]$，则$v(y)=u(\phi(y))$是否为弱可微？当$f(t),u(x)$均为弱可微时，复合函数 $f(u(x))$ 就否为弱可微？等等。在这些问题中，乘积比较简单，变量替换与复合函数限于C^1类也是简单的。由于我们要用到复合函数不属于C^1类的情况，因此对复合函数的弱可微问题要进行一些讨论，先考察$f\in C^1$的情况，在这里我们用$f\circ u$表示复合函数$f(u(x))$。

定理1 设$f\in C^1(\mathbf{R}^1)$，$f'\in L^\infty(\mathbf{R}^1)$，$u\in W_1^1(\Omega)$，则复合函数 $f\circ u\in W_1^1(\Omega)$，且

$$D(f\circ u)=f'(u)Du$$

证 由于$u\in W_1^1(\Omega)$以及强、弱微商的一致性，知有$C^\infty(\Omega)$中的函数列$\{u_m\}$，$(m=1,2,\ldots)$，使u_m与 Du_m 在$L_{loc}(\Omega)$中分别收敛到u，Du。因此，$\forall\Omega'\subset\subset\Omega$，有

$$\int_{\Omega'}|f(u_m)-f(u)|dx\leqslant\sup_{\mathbf{R}^1}|f'|\int_{\Omega'}|u_m-u|dx\to0,\quad m\to\infty$$

$$\int_{\Omega'}|f'(u_m)Du_m-f'(u)Du|dx\leqslant\sup_{\mathbf{R}^1}|f'|\int_{\Omega'}|Du_m-Du|dx+\int_{\Omega'}|f'(u_m)-f'(u)||Du|dx$$

由$\{u_m\}$可选出子列，使它在Ω'上几乎处处收敛到u，这子列仍记为$\{u_m\}$。因为f'连续，$f'(u_m)$也在Ω'几乎处处收敛到$f'(u)$。由控制收敛定理，上式右端趋近于零，因此 $Df(u)=f'(u)Du$，定理证毕。

定理1的条件可减弱为如下形式。

定理2 设$f\in C(\mathbf{R}^1)$且为分段一阶可微，$f'\in L^\infty(\mathbf{R}^1)$，$u\in W_1^1(\Omega)$，

则$Df(u)=f'(u)Du$成立。

证 先证$\mathrm{mes}\{\Omega\cap\{x|u(x)=0\}\cap\{x|Du(x)\neq 0\}\}=0$

$$\text{取}g(u)=\begin{cases}(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}-\varepsilon, & u>0;\\ 0, & u=0;\\ \varepsilon-(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}, & u<0。\end{cases}$$

易见$g(u)\in C^1(\mathbf{R}^1)$，因此，

$$Dg(u)=g'(u)Du$$

成立，记$g(u)=\tilde{u}$，$\forall\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ 有

$$-\int_\Omega \tilde{u}D\varphi dx=\int_\Omega \varphi D\tilde{u}dx=\int_{\Omega\cap\{u\neq 0\}}\varphi\frac{|u|Du}{(u^2+\varepsilon^2)^{1/2}}dx$$

令$\varepsilon\to 0$，得

$$-\int_\Omega uD\varphi dx=\int_{\Omega\backslash\{u\neq 0\}}\varphi Dudx$$

由于

$$\int_\Omega uD\varphi dx=\int_\Omega \varphi Dudx$$

两式比较得到$\int_{\Omega\cap\{u=0\}}\varphi Dudx=0$，由$\varphi$的任意性得

$$\mathrm{mes}\{\Omega\cap\{u=0\}\cap\{Du\neq 0\}\}=0$$

同样有

$$\mathrm{mes}\{\Omega\cap\{u=c\}\cap\{Du\neq 0\}\}=0,\ \forall c\in\mathbf{R}^1$$

由于f'的不连续点仅有可列个$u_1, u_2, \cdots$，故

$$\mathrm{mes}\{\Omega\cap\{u=u_1, u_2,\cdots\}\cap\{Du\neq 0\}\}=0$$

仿定理1的证明作出 $\{u_m\}$，使在Ω'上 u_m几乎处处收敛于 u，在点$u(x)\neq u_1, u_2, \cdots$，$f'(u_m)\to f'(u)$仍然几乎处处成立。因此

$$f'(u_m)Du\to f'(u)Du$$

在点$u(x)=u_1, u_2, \cdots$处，由于除0测集而外 $Du=0$，因此，除一个零测集外均有

$$f'(u_m)Du\to f'(u)Du$$

应用控制收敛定理得证定理2。

推论 记$u^+=\max\{u,0\}$，$u^-=\min\{u,0\}$，则

$$Du^+=\begin{cases}Du, u>0,\\ 0, \ u\leqslant 0;\end{cases}\qquad Du^-=\begin{cases}0, \quad u\geqslant 0,\\ Du, \ u<0。\end{cases}$$

对 $p>0$ 和非负整数 k，引入Соболев空间$W_p^k(\Omega)$的定义：

$$W_p^k(\Omega)=\{u\in W_1^k(\Omega)\mid\forall|\alpha|\leqslant k, D^\alpha u\in L^p(\Omega)\}。$$

不难证明当$p\geqslant 1$时$W_p^k(\Omega)$在范数

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)}=(\sum_{|\alpha|\leqslant k}\|D^\alpha u\|_p^p)^{1/p}$$

下是Banach空间。

空间$W_p^k(\Omega)(p\geqslant 1)$有多种等价范数(*)，首先由微商的插入估计

$$\sum_{|\alpha|=l}\|D^\alpha u\|_p\leqslant\varepsilon\sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_p+\varepsilon^{-l/(k-l)}c(k)\|u\|_p,(0<l<k)$$

（这估计式的证明与过去的类似），可得出等价范数

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)}=\|u\|_p+\sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_p,$$

---

*) 二范数$\|\varphi\|_1$、$\|\varphi\|_2$称为等价的，如果有正的常数m、M存在，使$m\|\varphi\|_1\leqslant\|\varphi\|_2\leqslant M\|\varphi\|_1$

由L_p的插入估计，还可有等价范数

$$\|u\|_{W_p^k(\Omega)}=\|u\|_1+\sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_p,$$

这些结论后面将给出证明。

$C_0^\infty(\Omega)$中的函数按$W_p^k(\Omega)$范数取闭包，得出的空间记为$\overset{0}{W}{}_p^k(\Omega)$，

由于 Ω 有界，它是$W_p^k(\Omega)$的真子空间。$W_2^k(\Omega)$、$\overset{0}{W}{}_2^k(\Omega)$分别记为$H^k(\Omega)$、$\overset{0}{H}{}^k(\Omega)$，它们在数量积

$$(u,v)_k=\int_\Omega\sum_{|\alpha|\leq k}D^\alpha uD^\alpha v dx$$

之下都是Hilbert空间。

基于有限个$L^p(\Omega)$空间的直积空间为可分（自反）的性质，以及泛函分析中可分（自反）的闭子空间仍为可分（自反）的定理，得到下面的性质。

当 $p\geqslant 1$ 时，$W_p^k(\Omega)$是可分的，$1<p<\infty$时是自反的。

复合函数求微商法则可用于 $W_p^1(\Omega)$ 与$\overset{0}{W}{}_p^1(\Omega)$，这只要在上面定理中用$W_p^1(\Omega)$代替$W_1^1(\Omega)$即可。

今证明下面的**稠密性**定理，这定理对认识$W_p^k(\Omega)$空间有一定作用。

定理3 $C^\infty(\Omega)\cap W_p^k(\Omega)$在$W_p^k(\Omega)$中为稠。

证 前面已导出：在 $L^p{}_{loc}(\Omega)$意义下，当 $h\to 0$时，$D^\alpha u_h$ 趋近于$D^\alpha u$，现在要把这一局部性的结果变为全局性的。

取$\Omega_j(j=1,2,\cdots)$使 $\Omega_j\subset\subset\Omega_{j+1}$，$\bigcup\Omega_j=\Omega$，取 $\varphi_j(x)$使(i) $\varphi_j(x)\in C^\infty(\Omega)$，(ii) $0\leqslant\varphi_j(x)\leqslant 1$，(iii) $\varphi_j(x)=1$，$(x\in\bar{\Omega}_j)$，(iv) $\varphi_j(x)=0$，$x\in\Omega\backslash\Omega_{j+1}$。

现构造$\varphi_j(x)$如下：记

$$h_j=\frac{1}{4}d(\Omega_j,\partial\Omega_{j+1})。$$

取

$$\Phi_j(x)=\begin{cases}1, & d(x,\bar{\Omega}_j)\leqslant h_j,\\ 0, & d(x,\bar{\Omega}_j)\geqslant 3h_j,\end{cases}$$

取$\varphi_j(x)$为$\Phi_j(x)$用h_j为半径作出的光滑化函数即可。记

$\phi_1=\varphi_1$，$\phi_j=(1-\varphi_{j-1})\varphi_j$，$(i=2,3,\cdots)$，

则当$x\in\bar{\Omega}_1$时，$\phi_1=1$，

当$x\in\bar{\Omega}_{j+1}\setminus\Omega_j$时，

$$\phi_j+\phi_{j+1}=1,\phi_1=\phi_2=\cdots=\phi_{j-1}=\phi_{j+2}=\cdots=0,$$

$$j=1,2,\cdots。$$

$\forall\varepsilon>0$，取$\bar{h}_j$相当小使

$$\bar{h}_j\leqslant\min(h_{j-2},h_{j-1},h_j,h_{j+1})$$

及

$$\|(\phi_j u)_{\bar{h}_j}-\phi_j u\|_{W_p^k(\Omega_{j+2})}<\frac{\varepsilon}{4\cdot 2^j}$$

成立。记$v=\sum\limits_{j=1}^{\infty}(\phi_j u)_{\bar{h}_j}$，则由于$\forall x\in\Omega$，级数仅有有限项，因此$v\in C^\infty(\Omega)$，又$\forall\Omega'\subset\subset\Omega$，

$$\|v-u\|_{W_p^k(\Omega')}\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\|(\phi_j u)_{\bar{h}_j}-\phi_j u\|_{W_p^k(\Omega')}$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}4\cdot\frac{\varepsilon}{4\cdot 2^j}=\varepsilon$$

定理证毕。

定理的结论能否改善到$C^\infty(\bar{\Omega})\cap W_p^k(\Omega)$于$W_p^k(\Omega)$中为稠？一般是不可能的。但$\partial\Omega$较光滑，使$u$能向外延拓则成为可能，有关这一问题可参阅[9]。

§8 嵌入定理

先研究下述的位势估计作为预备知识。

设Ω为有界区域，$f(x)\in L(\Omega)$，又设$0<\lambda<n$，则定义**位势**

$$T_\lambda f=\int_\Omega |x-y|^{-\lambda}f(y)dy,$$

$T_\lambda f$是映$L(\Omega)$入$L(\Omega)$的有界线性算子，这是因为

$$\int_\Omega |T_\lambda f|dx\leqslant\int_\Omega |f(y)|dy\int_\Omega |x-y|^{-\lambda}dx$$

$$\leqslant c(n,\lambda,\Omega)\int_\Omega |f(y)|dy。$$

记Ω的测度为$|\Omega|$。

引理1 设$f(x)\in L^p(\Omega)$，则当$\frac{1}{p}+\frac{\lambda}{n}<1$时有

$$\|T_\lambda f\|_\infty\leqslant c(n,\lambda,p)|\Omega|^{1-1/p-\lambda/n}\|f\|_p \tag{1}$$

当$\frac{1}{p}+\frac{\lambda}{n}\geqslant 1$且$p>1$时，取$q$满足$1\leqslant q<\infty$且$\frac{1}{q}>\frac{1}{p}+\frac{\lambda}{n}-1$，则有

$$\|T_\lambda f\|_q\leqslant C(n,\lambda,p,q)|\Omega|^{1+1/q-1/p-\lambda/n}\|f\|_p \tag{2}$$

证 先对$\int_\Omega |x-y|^{-\lambda}dy$作较精确的估计，取$R>0$，使

$$|\Omega|=|B(x,R)|=\frac{\omega_n}{n}R^n,则$$

$$\int_\Omega |x-y|^{-\lambda}dy \leqslant \int_{B(x,R)} |x-y|^{-\lambda}dy = \frac{\omega_n}{n}\int_0^R r^{n-1-\lambda}dr$$

$$= \frac{\omega R^{n-\lambda}}{n(n-\lambda)} = \frac{n^{-\lambda/n}}{n-\lambda}\,\omega_n^{\lambda/n}|\Omega|^{1-\lambda/n}$$

当$\frac{1}{p}+\frac{\lambda}{n}<1$时，由Hölder不等式得

$$\|T_\lambda f\|_\infty \leqslant \left[\int_\Omega |x-y|^{-\lambda p/(p-1)}dx\right]^{1-1/p}\|f\|_p$$

$$\leqslant c(n,\lambda,p)|\Omega|^{1-1/p-\lambda/n}\|f\|_p,$$

(1)得证。

当$\frac{1}{p}+\frac{\lambda}{n}\geqslant 1$，且$1\leqslant q<\infty$，$\frac{1}{q}>\frac{1}{p}+\frac{\lambda}{n}-1$时，

如果 $\frac{1}{q}\leqslant\frac{1}{p}$，则有

$$\left|T_\lambda f\right| \leqslant \int_\Omega \left[|x-y|^{-\lambda/\left(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}\right]^{1-1/p}\left[|f(y)|^p\right]^{1/p-1/q}$$

$$\cdot\left[|x-y|^{-\lambda/\left(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}|f(y)|^p\right]^{1/q}dy \leqslant \left[\int_\Omega |x-y|^{-\lambda/\left(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}dy\right]^{1-1/p}$$

$$\cdot\left[\int_\Omega |f(y)|^p dy\right]^{1/p-1/q}\left[\int_\Omega |x-y|^{-\lambda/\left(1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}|f(y)|^p dy\right]^{1/q}$$

$$\leqslant c(n,\lambda,p,q)|\Omega|^{\left(1-\frac{\lambda}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\right)\left(1-\frac{1}{p}\right)}\|f\|_p^{1-p/q}$$

$$\cdot\left[\int_\Omega |x-y|^{-\frac{\lambda}{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}}|f(y)|^p dy\right]^{1/q}$$

因此估计$\int_\Omega |T_\lambda f|^q dx$时，应用上式并对后一积分改变积分次序得到

$$\|T_\lambda(f)\|_q \leqslant c_1(n,\lambda,p,q)|\Omega|^{\left(1-\frac{\lambda}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{1}{q}-\frac{1}{p}}\right)\left(1-\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right)}\|f\|_p$$

$$=c_1(n,\lambda,p,q)|\Omega|^{1+1/q-1/p-\lambda/n}\|f\|_p$$

如果$\dfrac{1}{q}>\dfrac{1}{p}$，取$q_1$使$\dfrac{1}{q_1}\leqslant\dfrac{1}{p}$满足$\dfrac{1}{q_1}>\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{n}-1$，则有

$$\|T_\lambda f\|_{q_1}|\Omega|^{1/q-1/q_1}\geqslant\|T_\lambda f\|_q$$

即(2)得证，引理 I 证毕。

用$A\hookrightarrow B$表示把A嵌入空间B。

$\mathring{W}^1_p$有如下性质。

定理1

$$\mathring{W}^1_p\hookrightarrow\begin{cases}L^\infty(\Omega),p>n,\\L^q(\Omega),p=n,1\leqslant q<\infty,\\L^{np/(n-p)}(\Omega),p<n,\end{cases}$$

且$\forall u\in\mathring{W}^1_p(\Omega)$有

$$\sup_\Omega|u|\leqslant C(n,p)|\Omega|^{1/n-1/p}\|Du\|_p\ ,\quad p>n;\qquad(3)$$

$$\|u\|_q\leqslant C(n,q)|\Omega|^{1/q}\|Du\|_n\ ,\qquad p=n;\qquad(4)$$

$$\|u\|_{np/(n-p)}\leqslant C\|Du\|_p\ ,\qquad p<n;\qquad(5)$$

证 当$u\in C^1_0(\Omega)$时，延拓u到Ω外为零，则对任何n维单位向量ω有

$$u(x)=-\int_0^\infty D_r u(x+r\omega)dr$$

对ω积分得

$$u(x)=-\frac{1}{\omega_n}\int_0^\infty\int_{|\omega|=1}D_r u(x+r\omega)\,dr\,d\omega$$

$$=\frac{1}{\omega_n}\int_\Omega\sum_{i=1}^n\frac{x_i-y_i}{|x-y|^n}D_i u(y)\,dy$$

由于$C_0^1(\Omega)$在$\overset{0}{W}{}_1^1(\Omega)$中稠，故上式对$u\in\overset{0}{W}{}_1^1(\Omega)$也成立，由此得到

$$|u|\leqslant\frac{n}{\omega_n}T_{n-1}|Du|$$

故当$u\in\overset{0}{W}{}_p^1(\Omega)$时，应用引理得到

$$\sup_\Omega|u|\leqslant C(n,p)|\Omega|^{1/n-1/p}\|Du\|_p,\quad p>n$$

$$\|u\|_q\leqslant C(n,q)|\Omega|^{1/q}\|Du\|_n,\quad p=n,\quad 1\leqslant q<\infty;$$

$$\|u\|_{\frac{np}{n-p}-\varepsilon}\leqslant C(n,p,\varepsilon)|\Omega|^{\frac{\varepsilon(n-p)^2}{np[np-\varepsilon(n-p)]}}\|Du\|_p,\quad p<n \quad (5')$$

(3)、(4)两不等式已经证明，(5′)不同于(5)的是它仅为含有ε的弱不等式，Соболев在[13]中的原结果就是弱的，现在我们用初等方法证明(5)是成立的。

$\forall u\in C_0^1(\Omega)$，拓广$u$到$\Omega$外为零，则

$$u(x)\leqslant\int_{-\infty}^{x_i}|D_i u|\,dx_i,\quad i=1,2,\cdots,n$$

因此

$$|u(x)|^{n/(n-1)}\leqslant\left(\prod_{i=1}^n\int_{-\infty}^\infty|D_i u|\,dx_i\right)^{1/(n-1)}$$

$$\int_{-\infty}^\infty|u(x)|^{n/(n-1)}dx_1\leqslant\left(\int_{-\infty}^\infty|D_1 u|\,dx_1\right)^{1/(n-1)}$$

$$\cdot\int_{-\infty}^\infty\left(\prod_{i=2}^n\int_{-\infty}^\infty|D_i u|\,dx_i\right)^{1/(n-1)}dx_1\leqslant\left(\int_{-\infty}^\infty|D_1 u|\,dx_1\right)^{1/(n-1)}$$

$$\cdot\left(\prod_{i=2}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|D_iu|dx_1dx_i\right)^{1/(n-1)}$$

上式的成立，是用了 $n-1$ 个变量的Hölder不等式。再对 x_2积分，同法可得

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|u(x)|^{n/(n-1)}dx_1dx_2$$

$$\leqslant\left(\prod_{i=1}^{2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|D_iu|dx_1dx_2\right)^{1/(n-1)}$$

$$\cdot\left(\prod_{i=3}^{n}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}|D_iu|\ dx_1dx_2dx_i\right)^{1/(n-1)}$$

最后得到

$$\int_\Omega|u(x)|^{n/(n-1)}dx\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}\int_\Omega|D_iu|dx\right)^{1/(n-1)}$$

因此有

$$\|u\|_{n/(n-1)}\leqslant\left(\prod_{i=1}^{n}\int_\Omega|D_iu|dx\right)^{1/n}\leqslant\frac{1}{n}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}|D_iu|dx$$

用 $|u|^r(r>1)$代替 u 得

$$\||u|^r\|_{n/(n-1)}\leqslant\frac{r}{n}\int_\Omega\sum_{i=1}^{n}|u|^{r-1}|D_iu|dx$$

$$\leqslant\frac{r}{n}\left(\int_\Omega|u|^{(r-1)p/(p-1)}dx\right)^{(p-1)/p}\left(\sum_{i=1}^{n}\int_\Omega|D_iu|^pdx\right)^{1/p}$$

由于$1<p<n$，我们可以选 r 使

$$\frac{rn}{n-1}=\frac{(r-1)p}{p-1}\text{，即}r=\frac{(n-1)p}{n-p}$$

由此得到：

$$\|u\|_{np/(n-p)} \leqslant c\|Du\|_p$$

定理 1 证毕。

重复应用定理 1 多次，当$1/p-(k-l)/n>0$时，

$$\|D^k u\|_p \geqslant C_1\|D^{k-1}u\|_{(1/p-1/n)^{-1}} \geqslant C_2\|D^{k-2}u\|_{(1/p-2/n)^{-1}}$$

$$\geqslant \cdots \geqslant C_l\|D^l u\|_{\left(\frac{1}{p}-\frac{k-l}{n}\right)^{-1}}$$

我们得到

推论 当$p>1$时，

$$\mathring{W}_p^k(\Omega) \hookrightarrow \begin{cases} \mathring{W}^l_{np/(n-(k-l)p)}(\Omega), & (k-l)p<n; \\ \mathring{W}_q^l(\Omega), & (k-l)p=n, 1\leqslant q<\infty; \\ C_B^l(\Omega), & 0\leqslant l<k-\dfrac{n}{p} \end{cases}$$

且 $\forall u \in \mathring{W}_p^k(\Omega)$有

$$\|D^l u\|_{np/(n-(k-l)p)} \leqslant C(n,k,p,\Omega)\|D^k u\|_p, k>l>k-\frac{n}{p};$$

$$\|D^l u\|_q \leqslant C(n,p,q,\Omega)\|D^k u\|_p, l=k-\frac{n}{p}, \quad 1\leqslant q<\infty;$$

$$\sup_{\Omega}|D^l u| \leqslant C(n,k,p,l,\Omega)\|D^k u\|_p, \quad 0\leqslant l<k-\frac{n}{p}$$

由此可见$\mathring{W}_p^k(\Omega)$还有一个等价范数，它是

$$\|u\|_{\mathring{W}_p^k(\Omega)} = \sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_p.$$

现在来研究$W_p^k(\Omega)$的嵌入定理，需要$\partial\Omega$满足一定的几何条件。这与过去椭圆型方程研究中所用的外部球条件、外部锥条件不同，而是需要$\partial\Omega$ 满足**一致内部锥条件**，即存在一个固定的锥K_Ω，使得每点$x\in\partial\Omega$是一个与K_Ω全等的锥$K_\Omega(x)\subset\overline{\Omega}$ 的顶点。这是一个轻微的几何条件。当这条件成立时，就有

$$W_p^k(\Omega)\hookrightarrow\begin{cases}L^{np/(n-kp)}(\Omega),\ kp<n; & (6\\ C_B^l(\Omega),\ 0\leqslant l<k-\dfrac{n}{p}; & (7)\end{cases}$$

其中 $C_B^l(\Omega)=\{u\in C^{l-1}(\Omega)D^\alpha u\in L^\infty(\Omega),\forall|\alpha|\leqslant l\}$

自然也有

$$W_p^k(\Omega)\hookrightarrow W^l_{np/(n-(k-l)p)}(\Omega),\ 0<(k-l)p<n \qquad (8$$

嵌入定理的证明 当Ω对其内的某球B满足锥条件

$$\forall x\in\Omega,\ \overline{xV}=\{z|z\in\overline{xy},y\in B\}\subset\Omega,$$

这时称**Ω关于B成星形域**，先考虑这种Ω。

设$u\in C^k(\Omega)$，则有Taylor展式

$$u(x)=\sum_{l\leqslant k-1}(-1)^l\frac{r^l}{l!}\frac{\partial^l u(x+r\omega)}{\partial r^l}+\frac{(-1)^k}{(k-1)!}$$

$$\cdot\int_0^r\left[\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}u(x+\rho\omega)\right]\rho^{k-1}d\rho=I(x,y)+J(x,y)$$

其中

$$r=|y-x|,\omega=\frac{y-x}{|y-x|}$$

取一个固定的函数$\phi\in C_0^\infty(B)$，使$\int_B\phi(x)dx=1$，则

$$u(x)=\int_B u(x)\psi(y)dy=\int_B I(x,y)\psi(y)dy+\int_B J(x,y)$$
$$\cdot\psi(y)dy$$

其中

$$\int_B I(x,y)\psi(y)dy=\int_B \psi(y)\sum_{l\leq k-1}(-1)^l\frac{r^l}{l!}$$
$$\cdot\frac{\partial^l u(x+r\omega)}{\partial r^l}dy$$

$$=\sum_{|\alpha|\leq k-1}(-1)^{|\alpha|}c_\alpha\int_B\psi(y)\prod_{i=1}^n(y_i-x_i)^{\alpha_i}D^\alpha u(y)dy$$

$$=\sum_{|\alpha|\leq k-1}\prod_{i=1}^n x_i^{\alpha_i}\int_B\zeta_\alpha(y)u(y)dy,$$

其中$\zeta_\alpha(x)$是$\psi(x)$及其直到$|\alpha|$阶微商的多项式的组合，且$\zeta_\alpha(x)\in C_0^\infty(B)$。$C_\alpha$为常数。

以x为中心取球坐标为$y=x+r\omega$，则$dy=r^{n-1}drd\omega$，$d\omega$为立体角元素，Ω的直径记为D，则

$$(-1)^k\int_B J(x,y)\psi(y)dy$$

$$=\int d\omega\int_0^D\psi(x+r\omega)r^{n-1}dr\frac{1}{(k-1)!}\int_0^r\left[\frac{\partial^k}{\partial\rho^k}u(x+\rho\omega)\right]\rho^{k-1}d\rho$$

$$=\frac{1}{(k-1)!}\int d\omega\int_0^D\frac{\partial^k u(x+\rho\omega)}{\partial\rho^k}\rho^{k-1}d\rho\int_\rho^D\psi(x+r\omega)r^{n-1}dr$$

令$y=x+\rho\omega,\rho=|x-y|,dy=\rho^{n-1}d\rho d\omega$，则

$$\frac{\partial^k u(x+\rho\omega)}{\partial\rho^k}=\sum_{|\alpha|=k}\frac{k!}{\prod_{i=1}^n\alpha_i!}$$

$$\cdot \frac{\prod_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^{\alpha}}{\rho^{k}} D^{\alpha}u(y)$$

因此

$$\int_B J(x,y)\phi(y)dy$$

$$=(-1)^k\sum_{|\alpha|=k}\int_{\Omega} D^{\alpha}u(y)\frac{1}{\rho^{n-k}}\left[\frac{k!\prod_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^{\alpha_i}}{\rho^{k}\prod_{i=1}^{n}\alpha_i!}\right.$$

$$\left.\int_{\rho}^{D}\phi(x+r\omega)r^{n-1}dr\right]dy$$

$$=\sum_{|\alpha|=k}\int_{xV}\frac{w_{\alpha}(x,y)}{|x-y|^{n-k}}D^{\alpha}u(y)dy$$

其中

$$w_{\alpha}(x,y)=(-1)^k\frac{k!}{\prod_{i=1}^{n}\alpha_i!}\frac{\prod_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^{\alpha_i}}{\rho^{k}}$$

$$\int_{\rho}^{D}\phi(x+r\omega)r^{n-1}dr$$

上一式子积分范围取为 xV 的原因是：当 y 在 xV 之外时，$\phi(y)=\phi(x+\rho\omega)=0$，因此$w_{\alpha}(x,y)=0$。

易见函数w_{α}对 x 和 y 为有界，且对任意的$\sigma>0$，当$|x-y|\geqslant\sigma$ 时，它为一致连续且为C^{∞}函数，故有Соболев分解式

$$u(x)=\sum_{|\alpha|\leq k-1}\prod_{i=1}^{n}x_i^{\alpha_i}\int_B\zeta_{\alpha}(y)u(y)dy$$

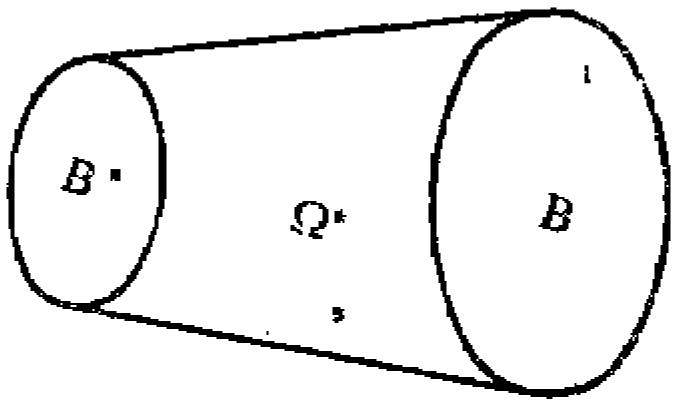
$$+\sum_{|\alpha|=k}\int_{xV}\frac{w_{\alpha}(x,y)}{|x-y|^{n-k}}D^{\alpha}u(y)dy$$

由于$C^k(\Omega)$在$W_p^k(\Omega)$中为稠，取闭包知Соболев分解式对$u\in W_p^k(\Omega)$成立。

由Соболев分解式应用位势估计的引理就得到嵌入关系式(7)以及与(6)、(8)式中的指数差一个ε的嵌入关系式。我们可以用较为复杂一些的初等方法，证得(6)与(8)，参见[9]。

上述嵌入定理成立的几何条件要求较高，且依赖于特殊的球B，即Ω对B满足锥条件，称为Ω关于B成星形区域。这条件是可以放松的。首先，当Ω关于B成星形区域时，由Соболев分解式$W_p^k(\Omega)$空间有等价范数

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k-1}\left|\int_B\zeta_\alpha(y)u(y)\,dy\right|+\sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_p$$



对任何Ω内的球B^*，图示区域Ω^*是B^*关于B的星形区域，因此$\Omega^*\subset\Omega$，Ω^*又是B关于B^*的星形区域，由范数等价性得

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k-1}\left|\int_B\zeta_\alpha(y)u(y)dy\right|\leqslant\sum_{|\alpha|\leqslant k-1}\left|\int_{B^*}\zeta_\alpha(y)u(y)dy\right|$$
$$+\sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_{p(\Omega^*)}$$

因此$W_p^k(\Omega)$又有等价范数

$$\sum_{|\alpha|\leqslant k-1}\left|\int_{B^*}\zeta_\alpha(y)u(y)dy\right|+\sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_{p;\Omega}$$

当$\Omega=\Omega_1\cup\Omega_2$，$\Omega_1\cap\Omega_2\neq\phi$，$\Omega_i$对$B_i$成星形区域，$(i=1,2)$。取球$B^*\subset\Omega_1\cap\Omega_2$，则由上面论证易推出$W_p^k(\Omega)$有等价范数

$$\sum_{|\alpha|\leq k-1}\left|\int_{B^*}\zeta_\alpha(y)u(y)dy\right| + \sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_p$$

即在 Ω 上嵌入定理成立。同理可推广到有限个对区域内不同的球成星形区域的并集 $\Omega_1\cup\Omega_2\cup\cdots\cup\Omega_m$ 嵌入定理仍成立。当 Ω 满足一致内部锥条件时，取 δ 很小，使锥中含有半径大于 δ 的球。由于 $\Omega_\delta=\{x\in\Omega|d(x,\partial\Omega)>\delta\}$ 能被有限个在 Ω 内的球复盖，因此对 Ω_δ 嵌入定理成立。使嵌入定理成立的区域必可拓展到整个 Ω，如果断言不真，即有 $p\in\Omega$ 使 Ω_δ 与 p 附近的并集不能应用嵌入定理，但 p 至少属于一个锥 S，锥 S 内含有半径大于 δ 的球 B，$\Omega_\delta\cap B\neq\phi$。$S$ 对 B 成星形区域，因此 $\Omega_\delta\cup S$ 能应用嵌入定理，得到矛盾，从而得到嵌入定理对满足一致内部锥条件的区域 Ω 成立。

但是，$\overset{0}{W}{}^k_p(\Omega)$ 的嵌入定理成立不需任何几何条件的限制。这是由于 $\overset{0}{W}{}^k_p(\Omega)$ 的函数可拓广到 Ω 外为 0 的缘故。

进一步讨论表明，当 Ω 满足一致内部锥条件，$k=1$ 时有等价范数

$$\left|\int_{\partial\Omega}u(y)dy\right| + \|Du\|_p$$

$k=2$ 时，有等价范数

$$\left|\int_{\partial\Omega}u(y)dy\right| + \sum_{i=1}^{n}\left|\int_{\partial\Omega}\frac{\partial u(y)}{\partial y_i}dy\right| + \sum_{|\alpha|=2}\|D^\alpha u\|_p$$

又，一般 $W^k_p(\Omega)$ 有等价范数

$$\|u\|_1 + \sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_p,\ \|u\|_p + \sum_{|\alpha|=k}\|D^\alpha u\|_p$$

这些性质不很重要，我们不加证明。

我们对嵌入定理进一步阐明下列三点。

第一 上面研究的嵌入定理是**同维嵌入**，即把$\Omega\subset\mathbf{R}^n$的一个函数空间中的一个元素看为$\Omega\subset\mathbf{R}^n$的另一函数空间中的元素。还可有**低维嵌入**，即把Ω中的函数看为Ω内低维流形上的函数空间中的元素例如$\Omega\cap\{x_i=常数\}$，又如$\partial\Omega$等，总之是嵌入$\Omega^m\subset\Omega,1\leqslant m<n$。对这种嵌入的结果，首先要注意的是$W_p^k(\Omega)$中的函数$u$，定义为等价类，即测度为0的子集上函数是可以任意的，低维流形的测度为0。其上的函数原是可以任意的，那么嵌入定理的意义是什么呢？它是指u的类中有一个光滑的函数在低维流形上的性质。

引理2 引理1中的第二种情况可修改为：当$f(x)\in L^p(\Omega)$，则当$1/p+\lambda/n\geqslant1,1\leqslant q^*<\infty$且$m/q^*>\lambda-n(1-1/p)$时有

$$\|T_\lambda f\|_{L^{q^*}(\Omega_m)}\geqslant C(n,m,\lambda,p,q^*,\delta)|\Omega_m|^{\delta}$$

$$|\Omega|^{1+\frac{m}{nq^*}-\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{n}-\frac{m}{n}\delta}\|f\|_{L^p(\Omega)},$$

其中$\Omega_m=\Omega\cap\{x_1=c_1,\cdots,x_m=c_m\}$，$1\leqslant m<n$，而$\delta$满足(i) $\delta>0$，(ii) $\frac{m}{n}\delta<1+\frac{m}{nq^*}-\frac{1}{p}-\frac{\lambda}{n}$，由此有低维嵌入的结果

当$0<(k-l)p<n$时，

$$W_p^k(\Omega)\hookrightarrow W^l_{mp/(n-(k-l)p)-\varepsilon}(\Omega_m).$$

这里的ε也是可去掉的，且有初等证明，参阅[9]。上式的成立还要求Ω满足一致内部锥条件。但是，把$W_p^k(\Omega)$改为$\mathring{W}_p^k(\Omega)$时，则对Ω不需要这一几何条件的约束。

低维嵌入通常用于研究方程解的函数类与初边值函数类相对应的关系。

第二 当$kp>n$时，嵌入定理是可以改进的。

当$k=1$，即$u\in W_p^1(\Omega)$．设$x\in B\subset\Omega$，B为球，由Соболев分解式得到

$$|u(x)-\int_B\xi_0(y)u(y)dy|\leqslant|\sum_{i=1}^n\int_B\frac{w_i(x,y)}{|x-y|^{n-1}}D_iu(y)dy|$$

$$\leqslant C(n,p)|B|^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|Du\|_p.$$

故对$\delta>0$，当$x,y\in B\subset\overline{\Omega}_\delta=\{t|t\in\Omega,d(t,\partial\Omega)\geqslant\delta\}$时，

$$|u(x)-u(y)|\leqslant|u(x)-\int_B\xi_0(z)u(z)dz|+|\int_B\xi_0(z)u(z)dz$$

$$-u(y)|\leqslant 2C(n,p)B^{\frac{1}{n}-\frac{1}{p}}\|Du\|_p.$$

取B的半径小于$\overline{xy}$，得到

$$u\in C^{1-\frac{n}{p}}(\Omega_\delta)\text{且}\|u\|_{C^{1-n/p}(\Omega_\delta)}\leqslant C_1\|Du\|_p.$$

要使这一结果在整个Ω上一致地成立，而不仅是内闭的，需对$\partial\Omega$加上满足Lipschitz条件这一几何条件．和前面一样，当$u\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)$时，对$\partial\Omega$的几何条件可以不要。

一般，当$kp>n$时，有嵌入结果：

$$W_p^k(\Omega)\hookrightarrow\begin{cases}C^{k-\frac{n}{p}}(\Omega), & \text{当}k-\dfrac{n}{p}\text{不是整数时；}\\ C^{k-\frac{n}{p}-1,1}(\Omega), & \text{当}k-\dfrac{n}{p}\text{是整数}\end{cases}$$

第三 **紧嵌入**，前面研究的嵌入算子的性质是由第一Banach空间到第二Banach空间的有界映象，但与有界映象比较，紧映象具有更好的性质。在什么情况下嵌入算子为紧的呢？我们有下列结果：

$$W_p^k(\Omega)\hookrightarrow\begin{cases}C^{k-n/p-\varepsilon}(\Omega), & 当kp>n,\ \varepsilon<k-n/p时,\\ L^{np/(n-kp)-\varepsilon}(\Omega), & 当kp<n,\ \varepsilon<np/(n-kp)时\end{cases}$$

把$W_p^k(\Omega)$换为$\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$时，$\partial\Omega$不需附加几何条件，否则，对$\partial\Omega$需添加轻微几何条件。与前述相似，也有低维嵌入算子的紧性结果。

紧嵌入结果的证明 先估计

$$\int_\Omega[|x+\Delta x-y|^{-\lambda}-|x-y|^{-\lambda}]f(y)dy,$$

然后估计 $u(x+\Delta x)-u(x)$. 记

$$\Omega_{\Delta x}=\{x\,|\,x\in\Omega,\ d(x,\partial\Omega)>|\Delta x|\},$$

则当$kp>n$时有

$$\sup_{\Omega_{\Delta x}}|u(x+\Delta x)-u(x)|<C|\Delta x|^{1-n/p}\|u\|_{W_p^k(\Omega)}$$

当$kp<n$时，而$\varepsilon<\dfrac{np}{n-kp}$，则有

$$\|u(x+\Delta x)-u(x)\|_{L^{np/(n-kp)-\varepsilon}(\Omega_{\Delta x})}$$

$$\leqslant C|\Delta x|^\beta\|u\|_{W_p^k(\Omega)},$$

$$\beta=\min\left\{1,\ \frac{(n-kp)^2\varepsilon}{n[np-(n-kp)\varepsilon]}\right\}.$$

由这二个估计得到我们所要的结果，这些估计式通常叫Кондрашев定理，其证明与嵌入算子有界性的证明很相似，祇是稍繁一些。因此不介绍了，可参考[15]与[8]。

最后，介绍与嵌入定理有关的三方面的结果。

一、 Poincaré不等式

$$\|u\|_p\leqslant C\|Du\|_p,\quad 当u\in\overset{\circ}{W}{}_p^1(\Omega)时;$$

$$\|u-u_\Omega\|_p\leqslant C\|Du\|_p,\ \text{当} u\in W_p^1(\Omega),\ u_\Omega=\int_\Omega u dx/|\Omega| \text{时}.$$

二、 Gagliardo-Nirenberg不等式

$$u\in W_r^m(\Omega)\cap L^q(\Omega),\ 1\leqslant q,\ r\leqslant\infty,$$

则

$$\|D^j u\|_p\leqslant C\|D^m u\|_r^\alpha\|u\|_q^{1-\lambda}+C_1\|u\|_{\tilde{q}}$$

其中 $0\leqslant j<m$, $\frac{j}{m}\leqslant\alpha\leqslant 1$, ($\alpha<1$, 当$1<r<\infty$, $m-j-\frac{n}{r}$为非负整数), $\frac{1}{p}=\frac{j}{n}+\alpha\left(\frac{1}{r}-\frac{m}{n}\right)+(1-\alpha)\frac{1}{q}$,

$\tilde{q}>0$, $C=C(n,m,j,q,r,\alpha,n)$, $C_1=C_1(n,m,j,q,r,\alpha,\Omega,\tilde{q})$.

当$\alpha=1$时，这是嵌入不等式；$\alpha=\frac{j}{m}$时是插值公式，在 $j=0$ 情况下特别看得清楚。

这一由嵌入定理结合插值公式而得出不等式的证明可参阅[12]。

三、各向异性嵌入性质的研究，特别是与抛物型方程有关 t 方向异性的嵌入性质，可参考[10]中的第二章。

§9 弱解及其唯一性

现对方程的系数、边值数据、方程自由项作比较弱的光滑性假定，来讨论二阶线性椭圆方程弱解的存在、唯一等问题。先证弱解为存在、唯一、再提高系数与数据的光滑性条件，得到解的更高光滑性。这是用泛函分析方法为工具，解决方程问题的一般步骤。

考虑

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(x)u_{x_j}+b_i(x)u\right)_{x_i}+\sum_{i=1}^{n}c_i(x)u_{x_i}\\ +d(x)u=\widetilde{f}\equiv g(x)+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x),\quad x\in\Omega\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

设有正的常数 λ 使

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x)\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2,\quad\forall x\in\Omega,\quad\xi\in\mathbf{R}^n,$$

则称方程(1)为**一致椭圆**。设系数 $a_{ij}(x)$、$b_i(x)$、$c_i(x)$、$d(x)$ 为有界可测，即有常数 $\Lambda>0$与$\nu\geqslant0$使

$$\sum|a_{ij}(x)|^2\leqslant\Lambda^2;\quad\lambda^{-2}\sum_{i=1}^{n}(|b_i(x)|^2+|c_i(x)|^2)$$
$$+\lambda^{-1}|d(x)|\leqslant\nu^2.$$

当$\nu=0$时，$b_i(x)=c_i(x)=d(x)=0$，方程(1)称为**散度型的**；$\nu>0$的情形可称为**散度型的推广**。设 f_i、$g\in L^2(\Omega)$，φ能拓广到Ω内使$\varphi\in W_2^1(\Omega)$。对$\partial\Omega$的假设，其一是φ能推广到Ω中，这已间接地包含了对$\partial\Omega$的一定假设在内，另外假设它满足一致内锥条件，使能应用嵌入定理。

$u\in W_2^1(\Omega)$称为上述定解问题的**弱解**，如果$u-\varphi\in\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$，且下式成立：

$$L(u,v)\equiv\int_\Omega\left\{\sum([a_{ij}(x)u_{x_j}+b_iu]v_{x_i}-[c_iu_{x_i}+d(x)u]v\right\}dx$$

$$=F(v)\equiv\int_\Omega(\sum f_iv_{x_i}-gv)dx,\quad\forall v\in C_0^\infty(\Omega)$$

由系数与 u 的假设可见，上式 $\forall v\in C_0^\infty(\Omega)$ 成立，等价于 $\forall v\in$

$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$成立。

先研究弱解的唯一性、有界性等问题。想法是把经典解的极值原理与解的有界模估计，推广到弱解来。为此，我们先给出 u 在$\partial\Omega$上非正的定义。

当$u\in W_2^1(\Omega)$且 $u^+=\max\{u,0\}\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$，则称 u 在$\partial\Omega$上**非正**，记为$u|_{\partial\Omega}\leqslant 0$.

同法定义$u|_{\partial\Omega}\geqslant 0, u|_{\partial\Omega}\leqslant v|_{\partial\Omega}$。后者是指$v\in W_2^1(\Omega)$，且$(u-v)_{\partial\Omega}\leqslant 0$，由此定义得到

$$\sup_{\partial\Omega} u=\inf\{k\,|\,[u]_{\partial\Omega}\leqslant k,\quad \forall k\in \mathbb{R}\}$$

把经典解唯一性的条件之一$c\leqslant 0$，推广到现在的情况。由于 c 对应的量是

$$\sum\frac{\partial}{\partial x_i}b_i+d,$$

而$\frac{\partial}{\partial x_i}b_i$不一定是普通意义下的函数。因此，$c\leqslant 0$ 也应作为弱意义来理解，即假定

$$\int_\Omega(dv-\sum b_i v_{x_i})dx\leqslant 0,\ \ \forall v\geqslant 0,\ \ v\in C_0^1(\Omega). \qquad (2)$$

由于$b_i(x)$、$d(x)$为有界函数，故上式对 $v\geqslant 0$，$v\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ 也为真。同样，如果 u 满足 $L(u)\geqslant \tilde{f}$，则称 u 为$L(u)=\tilde{f}$的**下解**，也是作为弱意义来理解的，即

$$L(u,v)\leqslant F(v),\ \ \forall v\geqslant 0,\ \ v\in C_0^1(\Omega)。$$

定理1 设算子$\mathscr{L}$的系数满足一致椭圆条件和有界可测条件，

以及(2)，再假定有 $q>n$ 使 $f_i\in L^q(\Omega)$，$i=1,2,\cdots,n$，$g\in L^{q/2}(\Omega)$，当 u 是方程 $L(u)=\tilde{f}$ 在 Ω 中的 $W_2^1(\Omega)$ 下解，则有

$$\sup_{\Omega} u\leqslant \sup_{\partial\Omega} u^{+}+CK,$$

其中

$$K=\lambda^{-1}(\|f\|_q+\|g\|_{q/2}),\quad f=(f_1,f_2,\cdots,f_n),$$

$$C=C(n,\nu,q,\Omega)。$$

证 可设 $\sup\limits_{\partial\Omega} u^{+}$ 为有限来证明，否则定理已真，又可进一步设 $\sup\limits_{\partial\Omega} u^{+}=0$ 来证明。因为如果 $\sup\limits_{\partial\Omega} u^{+}=0$ 时定理已证。今设

$$\sup u^{+}=l>0,\ 则$$

$$L(u-l,v)=F(v)+l\int_{\Omega}\left(dv-\sum b_i v_{x_i}\right)dx\leqslant F(v)$$

故得

$$\sup_{\Omega}(u-l)\leqslant CK,\quad \sup_{\Omega} u\leqslant l+CK=\sup_{\partial\Omega} u^{+}+CK$$

由此可见，仅需就 $u^{+}=0(x\in\partial\Omega)$ 来证明定理即可。

当 $u\in W_2^1(\Omega)$，$v\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$ 时，有

$$uv\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),\quad D(uv)=vDu+uDv.$$

要证明这个等式，我们先延拓 u、v 于 $\mathbf{R}^n\backslash\Omega$ 外为 0。记 u_h、v_h 为 u、v 用光滑化算子作用的逼近函数，对此成立着

$$D(u_h v_{h'})=v_{h'}Du_h+u_h Dv_{h'}.$$

先令$h'\to 0$，再令$h\to 0$即得证。故可将不等式

$$L(u,v)\leqslant F(v)$$

写为

$$\int_\Omega\left\{\sum a_{ij}u_{x_j}v_{x_i}-\sum(b_i+c_i)vu_{x_i}\right\}dx$$

$$\leqslant\int_\Omega\left[d(x)uv-\sum b_i(uv)_{x_i}\right]dx+F(v)$$

$$\leqslant F(v)=\int_\Omega\left(\sum f_iv_{x_i}-gv\right)dx,$$

$\forall v\in \dot{W}_2^1(\Omega)$且$v\geqslant 0$、$uv\geqslant 0$皆满足时(3)成立。

记

$$A(k)=\{x|x\in\Omega,\ u(x)\geqslant k\},$$

$A(k)$的测度记为$|A(k)|$，$\forall k\geqslant 0$，取

$$v=(u-k)^+$$

则$v\geqslant 0$与$uv\geqslant 0$皆满足，且对于$x\in A(k)$，$Du=Dv$，代入(3)，得

$$\int_{A(k)}\left[\sum a_{ij}v_{x_i}v_{x_j}-\sum(b_i+c_i)vv_{x_i}\right]dx$$

$$\leqslant\int_{A(k)}\left(\sum f_iv_{x_i}-gv\right)dx.$$

由此得到

$$\lambda\|v\|_{\dot{W}_2^1(A(k))}\leqslant 2\lambda\nu\|v\|_{L^2(A(k))}+\|f\|_{L^2(A(k))}$$

$$+\|g\|_{L^{2n/(n+2)}(A(k))}$$

由于

$$\|v\|_{L^2(A(k))}\leqslant\|v\|_{L^{2n/(n-2)}(A(k))}|A(k)|^{1/n},$$

以及

$$\|v\|_{L^{2n/(n-2)}(A(k))}\leqslant\|v\|_{W_2^1(A(k))}$$

$$k^2|A(k)|\leqslant\int_{A(k)}u^2dx\leqslant\|u\|^2_{L^2(\Omega)}$$

故得

$$\|v\|_{L^2(A(k))}\leqslant\left(\frac{\|u\|_{L^2(\Omega)}}{k}\right)^{2/n}\|v\|_{W_2^1(A(k))}$$

$$\|f\|_{L^2(A(k))}\leqslant\|f\|_{L^q(\Omega)}|A(k)|^{1/2-1/q},$$

$$\|g\|_{L^{2n/(2+n)}(A(k))}\leqslant\|g\|_{L^{q/2}(\Omega)}|A(k)|^{1/2+1/n-1/q}$$

当$k\geqslant\|u\|_2$且使$|A(k)|\leqslant 1$时，由上面诸式得到

$$\|v\|_{W_2^1(A(k))}\left[1-2\nu\left(\frac{\|u\|_2}{k}\right)^{2/n}\right]$$

$$\leqslant K[|A(k)|^{1/2-1/q}+|A(k)|^{1/2+1/n-2/q}]$$

$$\leqslant 2K|A(k)|^{1/2-1/q}$$

故当$k\geqslant[(4\nu)^{n/2}+1]\|u\|_2$时有

$$4K|A(k)|^{1/2-1/q}\geqslant\|v\|_{W_2^1(A(k))}\geqslant\|v\|_{L^{2n/(n-2)}(A(k))}$$

$$\geqslant\|v\|_{L^{2n/(n-2)}(A(h))}\geqslant(h-k)|A(k)|^{1/2-1/n}$$

在上式中我们增设$h>k$，因此$A(h)\subset A(k)$，由上式得

$$|A(h)|\leqslant(4K)^{2n/(n-2)}(h-k)^{-2n/(n-2)}$$
$$\cdot|A(k)|^{n(q-2)/[q(n-2)]}.$$

现在给出

引理1 设$\varphi(t)$当$k_0\leqslant t<+\infty$时为非负增函数，且满足

$$\varphi(h)\leqslant C(h-k)^{-\alpha}\varphi(k)^\beta,\quad h>k>k_0,$$

其中C，α为正的常数，$\beta>1$也是常数，则有

$$\varphi(k_0+l)=0,$$

这里的 l 由下式定出：

$$l^{\alpha}=C\varphi(k_0)^{\beta-1}2^{\alpha\beta/(\beta-1)}.$$

证取数列$k_r=k_0+l-\frac{l}{2^r}$，由假设有

$$\varphi(k_{r+1})\leqslant C\frac{2^{(r+1)\alpha}}{l^{\alpha}}\varphi(k_r)^{\beta}$$

现在用归纳法证明

$$\varphi(k_r)\leqslant\varphi(k_0)2^{-\alpha r/(\beta-1)}.$$

显见 $r=0$ 时此式为真，假设此式到 r 时仍为真，则

$$\varphi(k_{r+1})\leqslant C\frac{2^{(r+1)\alpha}}{l^{\alpha}}\varphi(k_0)^{\beta}2^{-\alpha\beta r/(\beta-1)}$$

$$\leqslant\varphi(k_0)2^{-\alpha(r+1)/(\beta-1)}$$

归纳法完成。由于$\alpha>0$，$\beta>1$，故当 $r\to\infty$时有

$$\varphi(k_r)\leqslant\varphi(k_0)2^{-\alpha r/(\beta-1)}\to 0,$$

因此得到

$$0\leqslant\varphi(k_0+l)\leqslant\varphi(k_r)\to 0,\quad 即\varphi(k_0+l)=0$$

引理证毕。

应用这一引理，取

$$\varphi(h)=|A(h)|,\ C=(4K)^{2n/(n-2)},$$

$$\alpha=\frac{2n}{n-2},\ \beta=\frac{n(q-2)}{q(n-2)}>1,$$

$$k_0 = [(4\nu)^{q/(q-2)} + 1]\|u\|_2 = C_1\|u\|_2,$$

$$l = C^{1/\alpha}\varphi(k_0)^{(\beta-1)/\alpha}\alpha^{\beta/(\beta-1)}$$

$$= 4K|A(k_0)|^{(q-n)/(qn)}2^{n(q-2)/[2(q-n)]}.$$

由于

$$|A(k_0)| \leqslant \frac{\|u\|_2^2}{k_0^2} = \frac{1}{C_1^2},$$

因此

$$l \leqslant 4C_1^{2(q-n)/(qn)}2^{n(q-2)/[2(q-n)]}K = C_2K$$

故得

$$A(C_1\|u\|_2 + C_2K) = 0,$$

即 $$\sup_\Omega u^+ \leqslant C_1\|u\|_2 + C_2K \leqslant C(\|u\|_2 + K).$$

这一结果还不是最终的，因为$\|u\|_2$的有界性尚未证明，我们仅知$\|u\|_2$为有限，因此仅证明了$\sup\limits_\Omega u^+ < \infty$。

记 $\sup\limits_\Omega u^+ = M$，在(3)中用$\dfrac{v}{K+M-u^+}$代替$v$，仍设满足$v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$，$v\geqslant0$与$u\geqslant0$，增设$v|_{u^+=0}=0$，记

$$w = \ln\frac{K+M}{K+M-u^+},$$

则(3)化为

$$\int_\Omega\left\{\Sigma a_{ij}w_{x_j}(v_{x_i} + vw_{x_i}) - \Sigma(b_i + c_i)vw_{x_i}\right\}dx$$

$$\leqslant\int_\Omega\left[\Sigma\frac{f_i(v_{x_i}+vw_{x_i})}{K+M-u^+}-\frac{gv}{K+M-u^+}\right]dx \qquad (4)$$

因此，

$$\int_\Omega\left\{\Sigma a_{ij}w_{x_j}v_{x_i}-\Sigma(b_i+c_i)vw_{x_i}\right\}dx$$

$$\leqslant\int_\Omega(\Sigma\widehat{f}_iv_{x_i}+\widehat{g}v)dx,$$

其中

$$\widehat{f}_i=\frac{f_i}{K+M-u^+},\quad \widehat{g}\leqslant\frac{|g|}{K}+\frac{\Sigma f_i^2}{\lambda K^2},$$

显然有

$$\|\widehat{f}\|_q\leqslant\|\widehat{g}\|_{q/2}\leqslant2\lambda.$$

把上面对 u 的推导用于 w，我们得到

$$\sup_\Omega w\leqslant C(\|w\|_2+1).$$

但 $\|w\|_2$ 可估计如下：取 $v=u^+$ 代入(4)得到

$$\int_\Omega\left[(K+M)\Sigma a_{ij}w_{x_i}w_{x_j}-\Sigma(b_i+c_i)u^+w_{x_i}\right]dx$$

$$\leqslant\int_\Omega\left[(K+M)\Sigma f_iw_{x_i}-gu^+\right]\frac{1}{K+M-u^+}dx.$$

由此推得

$$\lambda\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)}\leqslant\frac{C}{\lambda}\int_\Omega\Sigma(b_i^2+c_i^2)dx+C\lambda.$$

因而

$$\|w\|_2\leqslant\|w\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant C(v,\Omega).$$

故得

$$\sup_{\Omega} w = ln\frac{K+M}{K} \leqslant C,\ \text{即} M \leqslant (e^{C}-1)K = C_1 K$$

$$C_1 = C_1(n, \nu, q, \Omega).$$

定理证毕

注 $n=2$时，$n-2=0$，因而证明$\sup\limits_{\Omega} u^{+} < \infty$的部分要稍作修改.

推论1（弱极值原理） 设$\mathscr{L}$的系数满足一致椭圆条件、有界可测条件以及(2)，如果$u \in W_2^1(\Omega)$满足$L(u) \geqslant 0 (\leqslant 0)$，则

$$\sup_{\Omega} u \leqslant \sup_{\partial\Omega} u^{+} \left(\inf_{\Omega} u \geqslant \inf_{\partial\Omega} u^{-}\right).$$

推论2 当$\mathscr{L}(u)=0$于Ω而$u|_{\partial\Omega}=0$，则 $u=0$，即

$$\begin{cases} \mathscr{L}(u) = \bar{f} \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

的弱解是唯一的。

§10 弱解的存在性与光滑性

求解

$$\begin{cases} \mathscr{L}(u) = \bar{f} = g + \sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{\partial}{\partial x_i} f_i(x) \\ u|_{\partial\Omega} = \varphi \end{cases}$$

设$\mathscr{L}$的系数满足一致椭圆条件与有界可测条件，而$\varphi \in W_2^1(\Omega)$，$f$、

$g\in L^2(\Omega)$，要找出$u\in W_2^1(\Omega)$使$u-\varphi\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$。

注意：这里对f、g的假设比前面证明关于解的有界性为弱，实际上，还可以更减弱，即只要求f、g为一定的分布便可。但我们不想涉及分布，因此，假设f、$g\in L^2(\Omega)$。

记　$u-\varphi=w$，则

$$\mathscr{L}(w)=\mathscr{L}(u)-\mathscr{L}(\varphi)=g-\Sigma c_i\varphi_{x_i}-d\varphi+$$

$$\Sigma(f_i-\Sigma a_{ij}\varphi_{x_j}-b_i\varphi)_{x_i}=\tilde{g}+\Sigma\frac{\partial}{\partial x_i}\tilde{f}_i,$$

仍有$\tilde{f}$、$\tilde{g}\in L^2(\Omega)$。因此，不失一般性可设

$$\varphi=0.$$

我们把

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=\tilde{f}\\ u|_{\partial\Omega}=0,\end{cases}$$

化为　$L(u,v)=F(v)$，$\forall v\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$，要求解$u\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)$。

由于

$$L(u,u)=\int_\Omega\left(\Sigma a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}+\Sigma(b_i+c_i)uu_{x_i}-du^2\right)dx$$

$$\geqslant\int_\Omega\left(\lambda|Du|^2-\frac{\lambda}{2}|Du|^2-3\lambda\nu^2u^2\right)dx$$

$$=\frac{\lambda}{2}\int_\Omega|Du|^2dx-3\lambda\nu^2\int_\Omega u^2dx.$$

故双线性形式

$$L(u,v)+\sigma(u,v),\quad \sigma\text{为常数},$$

当$\sigma\geqslant\frac{1}{2}\lambda\nu^2$时是强迫的，而

$$|F(v)| = \left|\int_\Omega(\Sigma f_i v_{x_i} - gv)dx\right| \leqslant (\|f\|_2 + \|g\|_2)\|v\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)},$$

即$F(v)$于$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$为有界泛函，因此按Lax-Milgram定理知

$$(\mathscr{L} - \sigma I)u = \tilde{f}$$

唯一可解，$u = (L - \sigma I)^{-1}\tilde{f}$.

$$\mathscr{L}(u) = \tilde{f}$$

等价于

$$u + \sigma(\mathscr{L} - \sigma I)^{-1}Iu = (\mathscr{L} - \sigma I)^{-1}\tilde{f}$$

恒等算子I映$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$入$L^2(\Omega)$为嵌入算子，是紧的，$(L-\sigma I)^{-1}$映$L^2(\Omega)$入$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$至少是有界的。因此$(\mathscr{L}-\sigma I)^{-1}$映$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$入$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$为紧算子，所以$Fredholm$二择一定理有效。由前节唯一性的推论2知$\mathscr{L}u=0$仅有零解，因此结合二择一定理$\mathscr{L}u=f$为可解，由于

$$\|(\mathscr{L} - \sigma I)^{-1}\tilde{f}\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \leqslant C(\|f\|_2 + \|g\|_2),$$

而当σ非特征值时$(I+\sigma(\mathscr{L}-\sigma I)^{-1}I)^{-1}$为映$\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$入本身的有界算子，故有

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant C(\|f\|_2 + \|g\|_2 + \|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)}).$$

这估计当σ非特征值为有效，特别由前节的唯一性推论2知$0\leqslant\sigma<\infty$均非特征值，故上式对这些σ皆有效。

至于

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=f\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$

的解的谐的状况，可把 Fedholm 二择一定理中的结果，全部搬过来仍为有效。

现在转而研究弱解在内闭区域上的光滑性。为简单起见，仅讨论方程右端只有一项的情况。一般情况可仿照讨论。

定理1 设$u\in W_2^1(\Omega)$是方程$\mathscr{L}(u)=f$在Ω中的弱解，系数为一致椭圆。如果a_{ij}、b_i，$1\leqslant i,j\leqslant n$，在$\Omega$为一致Lipschitz连续，$c_i$，$1\leqslant i\leqslant n$，$d$皆为有界，$f\in L^2(\Omega)$，则对$\omega\subset\subset\Omega$有$u\in W_2^2(\omega)$且

$$\|u\|_{W_2^2(\omega)}\leqslant C(\|u\|_{W_2^1(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Omega)}),$$

其中$C=C(n,\lambda,K,\delta)$，λ满足$\Sigma a_{ij}\alpha_i\alpha_j\geqslant\lambda\Sigma\alpha_i^2$，$x\in\Omega$，$\alpha\in R^n$，$K=max\{\|a_{ij},\ b_i\|_{C^{0,1}(\Omega)},\ \|c_i,d\|_{C^\infty(\Omega)}\}$，$\delta=d(\omega,\partial\Omega)$，且$u$在$\Omega$中几乎处处满足方程

$$\mathscr{L}(u)=\Sigma a_{ij}u_{x_ix_j}+\Sigma\left(\frac{\partial}{\partial x_i}a_{ij}+b_i+c_i\right)u_{x_i}$$
$$+\left(\Sigma\frac{\partial}{\partial x_i}b_i+d\right)u=f$$

证 $\forall\ v\in C_0^1(\Omega)$有

$$\int_\Omega\Sigma a_{ij}u_{x_i}v_{x_j}dx=\int_\Omega gvdx,$$

其中

$$g=\Sigma(b_i+c_i)u_{x_i}+\left(\frac{\partial}{\partial x_i}b_i+d\right)u-f\in L^2(\Omega)$$

对 $h<\dfrac{1}{2}\min\{\delta,d(\mathrm{sup}\ v,\partial\Omega)\}$，记

$$\Delta_h u = \frac{u(x+he_1)-u(x)}{h},$$

其中$e_1=(1,0,0,\cdots 0)$。用

$$\Delta_{-h}v = \frac{v(x-he_1)-v(x)}{-h}$$

代替v，得到

$$\int_\Omega \Delta_h(\Sigma a_{ij}u_{x_j})v_{x_i}dx = -\int_\Omega \Sigma a_{ij}u_{x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\Delta_{-h}v dx$$
$$= -\int_\Omega g\Delta_{-h}v dx.$$

由于

$$\Delta_h(a_{ij}u_{x_j}) = a_{ij}\Delta_h u_{x_j} + \Delta_h a_{ij}u_{x_j}(x+he_1)$$

故得

$$\int_\Omega \Sigma a_{ij}\frac{\partial}{\partial x_j}\Delta_h u v_{x_i}dx = -\int_\Omega\Big[\Sigma\Delta_h a_{ij}u_{x_j}(x+he_1)v_{x_i}$$
$$+g\Delta_{-h}v\Big]dx \qquad (2)$$

由于$u\in W_2^1(\Omega)$，不难证明

$$\|\Delta_h u\|_{L^2(\omega)} \leqslant \|u_{x_1}\|_{L^2(\omega)}$$

这是因为对$u\in C^1(\Omega)$有

$$\Delta_h u = \frac{1}{h}\int_0^h u_{x_1}(x_1+\xi, x_2\cdots, x_n)d\xi.$$

因此，由$Schwarz$不等式得

$$|\Delta_h u|^2 \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h |u_{x_1}(x_1+\xi, x_2, \cdots, x_n)|^2 d\xi,$$

$$\int_{\omega}|\Delta_h u|^2 dx \leqslant \frac{1}{h}\int_0^h \int_{\{x|d(x,\omega)>h\}} |u_{x_1}|^2 dx d\xi \leqslant \int_{\Omega} |u_{x_1}|^2 dx.$$

而$W_2^1(\Omega)$可用$C^1(\bar{\Omega})$逼近，因此，对$u\in W_2^1(\Omega)$上式仍成立，由此，把 g 的表达式代入(2)得到

$$\int_{\Omega} \Sigma a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_h u v_{x_i} dx \leqslant K(\|Du\|_2 + \|g\|_2)\|Dv\|_2$$

$$\leqslant [K\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_2]\|Dv\|_2.$$

取$\eta(x)\in C_0^\infty(\Omega)$满足$0\leqslant\eta\leqslant 1$及$v=\eta^2\Delta_h u$，其中$h<d(\operatorname{supp}\eta,\Omega)$，得到

$$\lambda\int_{\Omega}|\eta D\Delta_h u|^2 dx \leqslant \int_{\Omega} \Sigma a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} \Delta_h u (\eta^2 \Delta_h u)_{x_i} - 2\eta\eta_{x_i}\Delta_h u \Big] dx$$

$$\leqslant \Big[K\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_2\Big]\Big(\|\eta D\Delta_h u\|_2 + \|\Delta_h u D\eta\|_2$$

$$+ K\|\eta D\Delta_h u\|_2 \|\Delta_h u D\eta\|_2\Big)$$

$$\leqslant \frac{\lambda}{2}\int_{\Omega}|\eta D\Delta_h u|^2 dx + K(1+\sup_{\Omega}|D\eta|)(\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_2)^2$$

因此

$$\|\eta D\Delta_h u\|_2 \leqslant K(1+\sup_{\Omega}|D\eta|)(\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_2).$$

取

$$\eta = \begin{cases} 1, & x\in\omega; \\ 0, & x\in\partial\Omega; \end{cases}$$

且使$|D\eta|\leqslant\frac{K}{\delta}$，$\delta=d(\omega,\partial\Omega)$，记$Du=w$，则由上式得到

$$\|\Delta_h w\|_{L^2(\omega)} \leqslant K(\delta)(\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_2).$$

由于$L^2(\omega)$中的有界集为弱紧，存在$\{h_m\}$与$\|w_1\|_{L^2(\omega)} \leqslant k(\delta)$使

$$\int_\omega \varphi \Delta_{h_m} w\, dx \to \int_\omega \varphi w_1 dx,\quad m\to\infty,\quad \forall \varphi \in C_0^1(\omega),$$

但又有

$$\int_\omega \varphi \Delta_{h_m} w\, dx = -\int_\omega w \Delta_{h_m} \varphi dx \to -\int_\omega w \varphi_{x_1} dx.$$

因此

$$\int_\omega \varphi w_1 dx = -\int_\omega w \varphi_{x_1} dx.$$

故在ω中w的弱微商存在：$w_{x_1} = w_1$。同理

w_{x_i}，$i=2,\cdots,n$皆存在，而又有估计

$$\|u\|_{W_2^2(\omega)} \leqslant K(\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_2).$$

由ω的任意性知$u \in W_{2,loc}^2(\Omega)$及$L(u) \in L^2_{loc}(\Omega)$

由

$$\int_\Omega (\mathscr{L}(u) - f) v dx = 0,\quad \forall v \in C_0^1(\Omega)$$

得到

$\mathscr{L}(u) - f = 0$于Ω内几乎处处成立。

定理证毕。

附注 定理1的成立不必假设解为唯一。因此，包括特征函数光滑性的讨论以及遇到特征值、自由项非0而解存在时，讨论解的光滑性，也不需用唯一性成立时所导出的解的估计式：

$$\|u\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant c(\|f\|_2 + \|g\|_2 + \|\varphi\|_{W_2^1(\Omega)}).$$

当然，由于 u 满足

$$L(u,v) = (f,v),$$

取 $v = u - \varphi$ 知 $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ 的估计式右端 $\|u\|_{W_2^1(\Omega)}$ 的项可换为仅含 $\|u\|_{L^2(\Omega)}$ 的项。

加强系数与方程自由项的光滑性条件，可得出弱解的更高的光滑性，我们有

定理5 设 $u\in W_2^1(\Omega)$ 是 $L(u)=f$ 在 Ω 中的弱解，方程的系数于 Ω 满足一致椭圆条件，且 a_{ij}、$b_i\in C^{k,1}(\bar{\Omega})$，$c_i$、$d\in C^{k-1,1}(\bar{\Omega})$，$f\in W_2^k(\Omega)$，$k\geqslant 1$，则 $\forall\omega\subset\subset\Omega$，有 $u\in W_2^{k+2}(\omega)$ 且

$$\|u\|_{W_2^{k+2}(\omega)} \leqslant C(\|u\|_{W_2^1(\Omega)} + \|f\|_{W_2^k(\Omega)}).$$

其中

$$C = C(n,\lambda,K,\delta,k),\quad \delta = d(\omega,\partial\Omega),$$

$$K = max\{\|a_{ij}, b_i\|_{C^{k,1}(\bar{\Omega})},\ \|c_i, d\|_{C^{k-1,1}(\bar{\Omega})}\}$$

证 $k=1$ 时在

$$\int_\Omega \mathscr{L}(u)v\,dx = \int_\Omega fv\,dx$$

中用 Dv 代 v，经分部积分后，应用定理1即可得证，一般情况用归纳法证明。

当 $\partial\Omega$ 以及边界数据 $u|_{\partial\Omega}=\varphi$ 皆适当光滑时，可得出弱解在整个 Ω 上的光滑性。我们有

定理3 在定理1的诸假设外，增设 $\partial\Omega\in C^2$，且存在 φ 使

$$\varphi \in W_2^2(\Omega),\quad u-\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),$$

则有$u\in W_2^2(\Omega)$满足

$$\|u\|_{W_2^2(\Omega)} \leqslant C(\|u\|_{L^2(\Omega)}+\|f\|_{L^2(\Omega)}+\|\varphi\|_{W_2^2(\Omega)}).$$

其中$C=C(n,\lambda,k,\partial\Omega)$。

证 用$u=\varphi$代替u易见在定理中可假设$\varphi=0$，因而不失一般性可设$u\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$。在

$L(u,v)=(f,v)$中取 $v=u$得到

$$\|u\|_{\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)} \leqslant C(\|u\|_2+\|f\|_2),$$

其中$C=C(n,\lambda,k)$，由于$\partial\Omega\in C^2$，$\forall x^0\in\partial\Omega$，$\exists$球$B_1=B(x^0,R_1)$和映象$\phi:B_1\to D_1\subset \mathbf{R}^n$使

$\phi(B_1\cap\Omega)\subset \mathbf{R}_+^n=\{x\in\mathbf{R}^n|x_n>0\}$，$\phi(B_1\cap\partial\Omega)\subset\partial\mathbf{R}_+^n$，且$\phi\in C^2(B_1)$，$\phi^{-1}\in C^2(D_1)$。

取$R<R_1$，记

$B=B(x^0,R)$，$B^+=B\cap\Omega$，$D=\phi(B)$，$D^+=\phi(B^+)$，易知映象ϕ把B^+中的方程$\mathscr{L}(u)=f$变成D^+中同样形式的方程，变换后常数λ、k可用映象ϕ和原来方程的λ、k来估计，由$u\in\overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$知变换后的解

$$v=u\circ\varphi^{-1}\in W_2^1(D^+),$$

且$\forall\eta C_0^1(D)$有$\eta v\in\overset{0}{W}{}_2^1(D^+)$，于是，对$|h|<\dfrac{1}{2}d(\operatorname{supp}\eta,\partial D)$，有

$\eta^2\Delta_h v\in\overset{0}{W}{}_2^1(D^+)$，定理1的证明适用于此，即有$v_{x_ix_j}\in L^2(\Psi(B\cap\Omega))$，$1\leqslant j\leqslant n$，同法可得

$$v_{x_i x_j} \in L^2(\varphi(B \cap \Omega)),\ 1 \leqslant i \leqslant n-1,\ 1 \leqslant j \leqslant n,$$

而$v_{x_n x_n}$可由方程直接估计。通过映象$\psi^{-1} \in C^2$回到原来区域Ω，得到$u \in W_2^2(B \cap \Omega)$，以及有关的估计式。

由有限复盖定理，$\partial\Omega$可由满足上述性质的有限个球复盖，再结合定理1得到$u \in W_2^2(\Omega)$以及所需要的估计式，定理证毕。

用类似于由定理1推广到定理2的方法，可把定理3推广为

定理4 在定理1的假设外，增设$\partial\Omega \in C^{k+2}$，$k \geqslant 1$。如果存在$\varphi \in W_2^{k+2}(\Omega)$使$u-\varphi \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$，则可得出$u \in W_2^{k+2}(\Omega)$以及

$$\|u\|_{W_2^{k+2}(\Omega)} \leqslant C\|u\|_{C^2(\Omega)} + \|f\|_{W_2^k(\Omega)} + \|\varphi\|_{W_2^{k+2}(\Omega)})$$

其中$C = C(n, \lambda, K, k, \partial\Omega)$，$K = max\{\|a_{ij}, b_i\|_{C^{k,1}(\bar{\Omega})},$
$\|C_i, d\|_{C^{k-1,1}(\bar{\Omega})}\}$

证明类似

§11 弱解的局部性质

（Ⅰ） 回到$\mathscr{L}(u) = \tilde{f}$的讨论

设$\mathscr{L}$满足**条件(A)**，系数满足一致椭圆条件，一致有界可测条件，且

$$\int_\Omega (dv - \Sigma b_i v_{x_i})dx \leqslant 0,\ \ \forall v \in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega),\ v \geqslant 0,$$

又设

$$f_i \in L^q(\Omega),\ i = 1, 2, \cdots, n,\ g \in L^{q/2}(\Omega),\ q > n.$$

在$\mathscr{L}$满足条件(A)的情况下，过去已证明u为有界，我们还要导出关于u的其它一些性质，主要是u的Hölder连续性。为此，先

作弱下解与弱上解的估计。

凡是满足

$$L(u,v)=F(v),\quad \forall v\geqslant 0,\quad v\in C_0^1(\Omega)$$

的$u\in W_2^1(\Omega)$称为$\mathscr{L}(u)=\tilde{f}$在Ω中的**弱下解**。

考察u在以$\bar{\Omega}$中的点为球心的球B内的性质。把u拆为二部分u_1+u_2，其中u_2满足

$$u_2|_{\partial(B\cap\Omega)}=0,\quad L(u_2,v)=F(v),$$

而u_1满足

$$L(u_1,v)\leqslant 0,\ \text{即}u_1\text{是}\mathscr{L}(u)=0$$

在Ω中的弱下解。

先估计u_2。令$x=Ry$，$B\cap\Omega$放大$\dfrac{1}{R}$倍后记为B_1，则$L(u,v)\leqslant F(v)$化为

$$\int_{B_1}\left[\Sigma a_{ij}\frac{\partial u}{\partial y_i}\frac{\partial v}{\partial y_j}+\Sigma\left(b_iRu\frac{\partial v}{\partial y_i}-c_iRv\frac{\partial u}{\partial y_i}\right)\right.$$

$$\left.-dR^2uv\right]dy\leqslant\int_{B_1}\left[\Sigma f_iR\frac{\partial v}{\partial y_i}-gR^2v\right]dy.$$

结合$u|_{\partial B_1}=0$，应用弱解的有界性估计得到

$$\sup_{\Omega\cap B}u_2\leqslant CK(R)=C\lambda^{-1}(R^{1-n/q}\|f\|_q+R^{2(1-n/q)}\|g\|_{q/2}).$$

（Ⅱ）现考察u_1。把u_1看为u，即考察在$B\cap\Omega$中齐次方程$\mathscr{L}(u)=0$的弱下解性质。在§9中已得到

$$\sup_{B\cap\Omega}u^+\leqslant C\|u\|_{C^2(B\cap\Omega)},$$

在本节中将得出更多的类似性质。对任一

$\mathscr{L}(u)=0$在$B\cap\Omega$中的弱下解u，记$M=\sup\limits_{\partial\Omega\cap B}u^+$。当$M<\infty$时，记

$$\max(u,M)=(u-M)^++M=W,$$

则

$$u-W=(u-M)^-$$

$\forall p>1$，$\varepsilon>0$ 取 $v=\xi^2[(W+\varepsilon)^{p-1}-(M+\varepsilon)^{p-1}]$，

则$v\in \overset{0}{W}{}^1_2(\Omega\cap B)$。由于

$$\begin{Bmatrix}(u-M)^- \\ D(u-M)^-\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}(W+\varepsilon)^{p-1}-(M+\varepsilon)^{p-1} \\ D[(W+\varepsilon)^{p-1}-(M+\varepsilon)^{p-1}]\end{Bmatrix}=0,$$

因而$L(u,v)\leqslant 0$化为

$$\begin{aligned}&(p-1)\int_{B\cap\Omega}\xi^2(W+\varepsilon)^{p-2}\Sigma a_{ij}W_{x_i}W_{x_j}dx\\
&\leqslant\int_{B\cap\Omega}\Big\{-(p-1)\Sigma b_i\xi^2W(W+\varepsilon)^{p-2}W_{x_i}+[(W+\varepsilon)^{p-1}-\\
&-(M+\varepsilon)^{p-1}](-2\Sigma a_{ij}\xi\xi_{x_i}W_{x_j}-2\Sigma b_i\xi\xi_{x_i}W+\\
&+\Sigma c_i\xi^2W_{x_i}+\xi^2dW)\Big\}dx\\
&\leqslant C\int_{B\cap\Omega}\Big((W+\varepsilon)^{p-1}\xi(\xi+|D\xi|)(|DW|+W+\varepsilon)\Big)dx\\
&\leqslant\frac{p-1}{2}\int_{B\cap\Omega}\xi^2(W+\varepsilon)^{p-2}\Sigma a_{ij}W_{x_i}W_{x_j}dx\\
&+C\int_{B\cap\Omega}(\xi^2+|D\xi|^2)(W+\varepsilon)^pdx.\end{aligned}$$

因此

$$C\int_{B\cap\Omega}(\xi^2+|D\xi|^2)(W+\varepsilon)^pdx\geqslant\int_{B\cap\Omega}\Big\{D[\xi(W+\varepsilon)^{p/2}]\Big\}^2dx$$

补充定义$W=M$于$B\cap\{\mathbb{R}^n\setminus\Omega\}$。上式两边同加上

$$\int_{B\cap(R^n/\Omega)}|D\xi|^2(W+\varepsilon)^p dx.$$

由于 $\xi(W+\varepsilon)^{p/2}\in \overset{\circ}{W}{}_2^1(B)$，故可于$B$中应用嵌入定理得

$$C\int_B(\xi^2+|D\xi|^2)(W+\varepsilon)^p dx\geqslant\left[\int_B\xi^{2\varkappa}(W+\varepsilon)^{p\varkappa}dx\right]^{1/\varkappa}$$

其中 $\varkappa=\dfrac{n'}{n'-2}$，$n'=\begin{cases}n, & n\geqslant 3,\\ 2+\delta, & n=2,\end{cases}\quad \delta>0.$

令$\varepsilon\to 0$得

$$\left(\int_B\xi^{2\varkappa}W^{p\varkappa}dx\right)^{1/\varkappa}\leqslant C\int_B(\xi^2+|D\xi|^2)W^p dx.$$

设$B=B(y,2R)$，p用$p\varkappa^s$代替，取

$$\xi(x)=\begin{cases}1, & x\in B\left(y,\left(1+\dfrac{1}{2^{s+1}}\right)R\right),\\ 0, & x\in B\setminus B\left(y,\left(1+\dfrac{1}{2^s}\right)R\right),\end{cases}$$

且使$|D\xi|\leqslant C\dfrac{2^s}{R}$，记$B\left(y,\left(1+\dfrac{1}{2^s}\right)R\right)=B_s$得

$$\left(\int_{B_{s+1}}W^{p\varkappa^{s+1}}dx\right)^{1/\varkappa}\leqslant\frac{C4^s}{R^2}\int_{B_s}W^{p\varkappa^s}dx,$$

或

$$\left(\frac{1}{R^n}\int_{B_{s+1}}W^{p\varkappa^{s+1}}dx\right)^{1/(p\varkappa^{s+1})}\leqslant(C4^s)^{1/p\varkappa^s}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{R^n}\int_{B_s}W^{p\varkappa^s}dx\right)^{1/p\varkappa^s}$$

因而

$$\left(\frac{1}{R^n}\int_{B_{s+1}} W^{p\kappa^s}dx\right)^{1/p\kappa^s} \leqslant exp\left(\sum_{k=0}^{s-1}\frac{lnC+kln4}{p\kappa^k}\right)$$

$$\cdot\left(\frac{1}{R^n}\int_B W^p dx\right)^{1/p}.$$

令 $s\to\infty$ 得

$$\sup\max(u,M)\leqslant C\left(\frac{1}{R^n}\int_B W^p\,dx\right)^{1/p},$$

即

$$\sup\ \max(u,M)\leqslant C\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(y,2R)}\max(u,M)^p dx\right)^{1/p}.$$

显然，当$M=+\infty$时，上式也成立

（Ⅲ）估计$\mathscr{L}(u)=0$的弱上解$u(x)$

由于$-u(x)$是弱下解，由上面的结果得到弱上解的一个估计，但这一估计仅当$inf\ u(x)<0$时，才不是平凡的。这是因为上面对弱下解$u(x)$的估计，仅当$\sup\limits_{\Omega\cap B(y,R)}u(x)>0$时，才不是平凡的。

今设弱上解 $u(x)$满足

$$\inf_{\Omega\cap B(y,R)}u(x)\geqslant 0.$$

先考察

$$\inf_{\Omega\cap B(y,R)}u(x)>0.$$

的情况，实际上，我们研究的是在更大范围中$u(x)$为正的情况，即研究$\Omega\cap B(y,4R)$中的正弱上解。记

$$B(y,4R)=B,\ \inf_{\partial\Omega\cap B}u=m,$$

则 $m>0$，令 $\min(u,m)=W$，则 $u-W=(u-m)^+$。

对任何 p 满足 $-\infty<p<1$，取

$$v=\zeta^2(W^{p-1}-m^{p-1}),\ \zeta\in C_c^1(B),\ 0\leqslant\zeta\leqslant 1,$$

则 $v\in \overset{\circ}{W}{}^1_2(\Omega\cap B)$，且

$$\begin{Bmatrix}(u-m)^+\\ D(u-m)^+\end{Bmatrix}\cdot\begin{Bmatrix}W^{p-1}-m^{p-1}\\ D(W^{p-1}-m^{p-1})\end{Bmatrix}=0.$$

这时 $L(u,v)\geqslant 0$ 化为

$$(1-p)\int_{B\cap\Omega}\zeta^2W^{p-2}\sum a_{ij}W_{x_i}W_{x_j}dx\leqslant\int_{B\cap\Omega}\Big\{-(1-p)$$

$$\Sigma b_i\zeta^2W^{p-1}W_{x_i}+(W^{p-1}-m^{p-1})[2\Sigma a_{ij}\zeta\zeta_{x_i}W_{x_j}$$

$$-\Sigma c_i\zeta^2W_{x_i}-\zeta^2dW]\Big\}dx\leqslant\int_{B\cap\Omega}\Big\{-(1-p)\Sigma b_i\zeta^2W^{p-1}W_{x_i}$$

$$+W^{p-1}[2\Sigma a_{ij}\zeta\zeta_{x_i}W_{x_j}+2\Sigma b_i\zeta\zeta_{x_i}W-\Sigma c_i\zeta^2W_{x_i}$$

$$+\zeta^2dW]\Big\}dx,\ (-\infty<p<1).$$

补充定义

$$W=m\text{于}B\cap\{\mathbb{R}^n\backslash\Omega\}。$$

仿照弱下解估计式的推导得到

$$\left(\int_B\zeta^{2\chi}W^{p\chi}dx\right)^{1/\chi}\leqslant C\int_B\left(\zeta^2+|D\zeta|^2\right)W^pdx,\ -\infty<p<1,\ p\neq 0。$$

$$\int_B\zeta^2(D\ln W)^2dx\leqslant C\int_B(\zeta^2+|D\zeta|^2)dx,\ p=0.$$

当 $0<p_0<+\infty$ 时，p 用 $-p_0\chi^s$ 代替，取

$$\zeta(x)=\begin{cases}1, & x\in B_{s+1},\\ 0, & x\in B\backslash B_s,\end{cases}$$

且使 $|D\zeta|\leqslant C\dfrac{2^s}{R}$ 得

$$\left(\frac{1}{R^n}\int_{B_{s+1}}W^{-p_0\kappa^{s+1}}dx\right)^{-1/(p_0\kappa^{s+1})}\geqslant(C4^s)^{-1/(p_0\kappa^s)}$$

$$\cdot\left(\frac{1}{R^n}\int_{B_s}W^{-p_0\kappa^s}dx\right)^{1/(p_0\kappa^s)}$$

由此得到 $\int_{B_s}$ 与 $\int_{B_{s+1}}$ 的一个不等式关系，再令 $s\to\infty$ 得到

$$\inf W\geqslant C\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(y,2R)}W^{-p_0}dx\right)^{-1/p_0}$$

$$\geqslant C\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(y,3R)}W^{-p_0}dx\right)^{-1/p_0},\quad 0<p_0<\infty.$$

当 $0<p<\kappa$ 时，固定正整数 s_0，记 $p_1\kappa^{-s_0}=p_0$，仿上面的方法得

$$\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(y,(2+1/2s_0)R)}W^{p_1}dx\right)^{1/p_1}\leqslant C\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(y,3R)}W^{p_0}dx\right)^{1/p_0}.$$

我们还要导出下面的不等式。

当 $p_0>0$ 很小时，

$$\frac{1}{R^n}\int_{B(y,3R)}W^{p_0}dx\cdot\frac{1}{R^n}\int_{B(y,3R)}W^{-p_0}dx\leqslant C$$

据此，并结合上述三个不等式得出所需要的结果：

$$\inf_{B(y,R)} W \geqslant C\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(y,(2+1/2s_0)R)} W^{p_1}dx\right)^{1/p_1}$$

$$\geqslant C\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(y,2R)} W^{p_1}dx\right)^{1/p_1}.$$

把p_1改写为 p 得

$$\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(y,2R)} \min(u,m)^p dx\right)^{1/p} \leqslant C \inf_{B(y,R)} \min(u,m),$$

$$0 < p < \frac{2n'}{n'-2}.$$

现给出(*)式的证明。记$B(y,3R)$为ω，令

$$\ln W = t,\quad t^0 = \frac{1}{|\omega|}\int_\omega t dx$$

则

$$\frac{1}{R^n}\int_\omega W^{p_0}dx\cdot\frac{1}{R^n}\int_\omega W^{-p_0}dx = \frac{1}{R^{2n}}\int_\omega \exp(p_0(t-t^0))dx.$$

$$\int_\omega \exp(-p_0(t-t^0))dx \leqslant \frac{1}{R^n}\left(\int_\omega \exp(p_0|t-t_0|)dx\right)^2.$$

由Соболев分解式得

$$|t-t^0| \leqslant C\int_\omega |x-X|^{1-n}|Dt(X)|\,dX.$$

应用 $p=0$ 时的弱上解不等式

$$\int_B \zeta^2(D\ln W)^2 dX \leqslant C\int_B(\zeta^2+|D\zeta|^2)dX$$

来估计 $\int_{B(x,\tau)\cap\omega}|Dt|^2dX$, ($x\in\omega$, $0\leqslant\tau\leqslant1$).

当 $\tau<\frac{R}{2}$ 时，取 $\zeta\in C_0^1(B)$ 使

$$\zeta=\begin{cases}1, & X\in B(x,\tau)\\ 0, & X\in B\setminus B(x,2\tau),\end{cases}$$

且 $|D\zeta|\leqslant\frac{C}{\tau}$，则

$$\int_{B(x,\tau)\cap\omega}|Dt|^2dX\leqslant\int_{B(x,2\tau)}\zeta^2|Dt|^2dX$$

$$\leqslant C\int_0^\tau r^{n-1}dr+\int_\tau^{2\tau}r^{n-3}dr\leqslant C\tau^{n-2}.$$

当 $\tau\geqslant\frac{R}{2}$ 时，取

$$\zeta=\begin{cases}1, & X\in\omega\\ 0, & X\in B(y,4R)\setminus\omega\end{cases}$$

$$\int_{B(x,\tau)\cap\omega}|Dt|^2dX\leqslant\int_\omega|Dt|^2dX\leqslant\int_{B(y,4R)}\zeta^2|Dt|^2dX$$

$$\leqslant C\int_{B(y,4R)}(\zeta^2+|D\zeta|^2)dX\leqslant\frac{C}{R^2}R^n=CR^{n-2}\leqslant C_1\tau^{n-2}.$$

结合上面二个估计式得

$$\int_{B(x,\tau)\cap\omega}|Dt|^2dX\leqslant C\tau^{n-2},$$

$$\int_{B(x,\tau)\cap\omega}|Dt|dX\leqslant\left(C\tau^n\int_{B(x,\tau)\cap\omega}|Dt|^2dX\right)^{1/2}\leqslant C\tau^{n-1}.$$

由此对整数 $s\geqslant 1$ 有

$$|t-t_0|\leqslant C\left(\int_\omega|x-X|^{-n+1/s}\,|Dt(X)|dX\right)^{1/s}.$$

$$\left(\int_{\omega}|x-X|^{-n+1+1/s}|Dt(X)|\,dX\right)^{1-1/s}.$$

记$\sigma(\tau)=\int_{B(x,\tau)\cap\omega}|Dt|dX$，注意到可令$Dt$在$\omega$外为零，

则

$$\int_{\omega}|x-X|^{-n+1+1/s}|Dt(X)|\,dX\leqslant\int_{0}^{6R}\tau^{-n+1+1/s}\sigma(\tau)d\tau$$

$$=\left[\tau^{-n+1+(1/s)}\sigma(\tau)\right]_{\tau=0}^{6R}+\left(n-1-\frac{1}{s}\right)\int_{0}^{6R}\tau^{-n+(1/s)}$$

$$\sigma(\tau)d\tau\leqslant CsR^{1/s}.$$

由此得到

$$\frac{1}{R^{n}}\int_{\omega}|t-t_0|^{s}dx\leqslant C^{s}s^{s-1}R^{1-n-1/s}\int\int_{\omega}|x-X|^{-n+1/s}$$

$$|Dt(X)|dX\,d\tau\leqslant C^{s}s^{s}.$$

故得，当$p_0<\frac{1}{Ce}$时，

$$\frac{1}{R^{n}}\int_{\omega}exp(p_0|t-t^0|)dx\leqslant\sum_{s=0}^{\infty}\frac{p_0^sC^{s}s^{s}}{s!}\leqslant C_1.$$

(ϵ)式得证。

对正的弱上解有效的估计式

$$\left(\frac{1}{R^{n}}\int_{B(y,2R)}\min(u,m)^{p}dx\right)^{1/p}\leqslant C\inf_{B(y,R)}\min(u,m),$$

$$0<p<\frac{n'}{n'-2}$$

对非负弱上解仍成立，这是因为如$\forall\epsilon>0$，u是非负弱上解，则

$u+\varepsilon$是正的弱上解，上式对$u+\varepsilon$成立，令$\varepsilon\to 0$即可。

上述估计写为定理如下。

定理1 设$\mathscr{L}(u)=\bar{f}$的系数满足条件(A)，又设Ω满足一致内部锥条件，$f_i\in L^q(\Omega)$，$i=1,\cdots,n$，$g\in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$，$q>n$。若$u\in \overline{W}{}^1_2(\Omega)$为于$\Omega\cap B(y,2R)$中的弱下解，记$\sup\limits_{\partial\Omega\cap B(y,2R)}u^-=M$，则对$1<p<\infty$有

$$\sup_{B(y,R)}\bar{u}\leqslant C\left[\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(y,4R)}\bar{u}^p dx\right)^{1/p}+K(R)\right],$$

其中

$$\bar{u}(x)=\begin{cases}\min(u(x),M), & (x\in\Omega\cap B(y,2R)),\\ M, & x\in\Omega,\end{cases}$$

$$K(R)=\lambda^{-1}(R^{1-n/q}\|f\|_q+R^{2(1-n/q)}\|g\|_{q/2}),$$

$$C=C(n,\ \frac{A}{\lambda},\ \nu R,\ q,\ p)\leqslant C(n,\ \frac{A}{\lambda},\nu,q,p).$$

当$\partial\Omega\cap B(y,2R)=\phi$时(内部估计)，$M$取为零，上式成为

$$\sup_{B(y,R)}\bar{u}\leqslant C\left[\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(y,2R)}u^{+p}dx\right)^{1/p}+K(R)\right].$$

当$B(y,2R)\subset\Omega$时，设$u\in W^1_2(\Omega)$为于$\Omega\cap B(y,4R)$中的非负弱上解。记$\inf\limits_{\partial\Omega\cap B(y,4R)}u=m$，

$$\underline{u}(x)=\begin{cases}\min(u(x),m), & x\in\Omega\cap B(y,4R),\\ m, & x\in\Omega\end{cases}$$

则对 $0<p\leqslant\frac{n'}{n'-2}$ 有

$$\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(y,2R)}u^p dx\right)^{1/p}\leqslant C\left[\inf_{B(y,2R)}u+K(R)\right]$$

当$\partial\Omega\cap B(y,4R)=\phi$(内部估计)。取$m=\sup\limits_{B(y,2R)}u$，则上式成为

$$\left(\frac{1}{R^n}\int_{B(y,2R)}u^p dx\right)^{1/p}\leqslant C\left[\inf_{B(y,R)}u+K(R)\right]$$

证 分解u为$u=u_1+u_2$，其中u_1为$\mathscr{L}(u)=0$的弱下解(弱上解)，u_2为$\mathscr{L}(u)=\bar{f}$的弱解，由

$$|\max(u,m)-\max(u_1,M)|\leqslant|u_2|,$$

得证上面关于弱下解的式子。

对弱上解u_1应用弱极值原理

$$\inf_{\Omega\cap B(y,4R)}u_1\geqslant\inf_{\partial(\Omega\cap B(y,4R))}u_1=\inf_{\partial(\Omega\cap B(y,4R))}\bar{u}=0$$

因此，u_1于$\Omega\cap B(y,4R)$为非负，再结合

$$|\min(u,m)-\min(u_1,m)|\leqslant|u_2|$$

得证上面关于弱上解的式子，定理证毕。

由定理 1 可导出弱下解(上解)的其它性质如下。

定理2(强极值原理) 如$\mathscr{L}$的系数满足条件(A)，则$\mathscr{L}(u)=0$的弱下解$u\in W_2^1(\Omega)$不能在Ω内取到正最大，除非于$\bar{\Omega}$中u恒为常数。

证 如果不然，有球$B\subset\subset\Omega$，使

$$\sup_{B(y,R)}u=\sup_{\Omega}u=M>0.$$

不失一般性可设$B(y,4R)\subset\Omega$。则$M-u$为非负弱上解。弱上解对$p=1$的估计式是

$$\frac{1}{R^n}\int_{B(y,2R)}(M-u)dx\leqslant C\inf_{B(y,R)}(M-u)=0.$$

因此，$u(x)=M$，$\forall x\in B(y,2R)$ 如果 $u\neq$常数于 Ω，有内点 x^0为集合$\{x|u(x)=M\}$的边界点，即$u(x^0)=M$及有$x^i\to x^0$，且当 $i=1,2,\cdots$,满足

$$u(x^i)<M,\qquad i=1,2,\cdots,$$

但由上面论证知x^0有小球邻域，使 $u=M$于此小球内，得到矛盾，**定理 2** 证毕。

定理3(**Harnack不等式**)如$\mathscr{L}$的系数满足条件(A)。则$\mathscr{L}(u)=0$的非负弱解$u\in W_2^1(\Omega)$对任何连络开集$\omega\subset\subset\Omega$皆成立

$$\sup_{\omega} u\leqslant C\inf_{\omega} u,\qquad C=C(n,\frac{A}{\lambda},\nu,\omega,\Omega)$$

证 当$B(x^0,4R)\subset\Omega$时，由定理 1 有

$$\sup_{B(x,R)} u\leqslant C\inf_{B(x,R)} u.$$

于$\bar\omega$ 中取到$\sup u$ 的点记为x^1，取到 $\inf u$的点记为x^2，由于 ω 为连络，所以有连接x^1、x^2的闭弧$\gamma\subset\bar\omega$，选 R 使$R<\frac{1}{4}d(\gamma,\partial\Omega)$，由有限复盖定理，$\gamma$能被有限个（设为$L$个）半径 R 的球所复盖，对每个球应用上面的估计，即得.

$$u(x^1)\leqslant C^L u(x^2),\quad 即\ \sup_{\omega} u\leqslant C^L\inf_{\omega} u.$$

定理 3 证毕。

再推导Hölder条件的关系式。下面考虑的球，球心均为 y，不再写出，固定一半径为R_0的球B_{R_0}，取任何半径为 R 的球 B_R，暂设$4R\leqslant R_0$,设 $\mathscr{L}(u)=\bar f$的系数满足定理 1 中的条件，$u\in W_2^1(\Omega)$为它的

解，记

$$M_0=\sup_{B_{R_0}\cap\Omega}|u|,\quad M_i=\sup_{B_{iR}\cap\Omega}u,\quad m_i=\inf_{B_{iR}\cap\Omega}u,\quad i=1,4,$$

$$M=\sup_{B_{4R}\cap\Omega}u,\quad m=\inf_{B_{4R}\cap\Omega}u.$$

由于

$$\mathscr{L}(M_4-u)=M_4\left(\Sigma\frac{\partial}{\partial x_i}b_i+d\right)-\Sigma\frac{\partial}{\partial x_i}f_i-g,$$

$$\mathscr{L}(u-m_4)=-m_4\left(\Sigma\frac{\partial}{\partial x_i}b_i+d\right)+\Sigma\frac{\partial}{\partial x_i}f_i+g.$$

应用定理 1 中 $p=1$ 的情况于 $M_4-u, u-m_4$，得到当 $y\in\partial\Omega$ 时

$$(M_4-M)\frac{|B_{2R}\cap\{\mathrm{R}^n\backslash\Omega\}|}{R^n}\leqslant\frac{1}{R^n}\int_{B_{2R}}\underline{(m-u_4)}\,dx$$

$$\leqslant C[M_1-m_4+\overline{K}(R)],\tag{1}$$

$$(m-m_4)\frac{|B_{2R}\cap\{\mathrm{R}^n\backslash\Omega\}|}{R^n}\leqslant\frac{1}{R^n}\int_{B_{2R}}\underline{(u-m_4)}\,dx$$

$$\leqslant C[m_1-m_4-\overline{K}(R)]\tag{2}$$

其中

$$\overline{K}(R)=\lambda^{-1}R^{1-n/q}(\|f\|_q+M_0\|b\|_q)+\lambda^{-1}R^{2(1-n/q)}$$

$$(\|g\|_{q/2}+M_0\|d\|_{q/2})\leqslant CKR^{1-n/q},$$

$$K=\lambda^{-1}(\|f\|_q+\|g\|_{q/2}).$$

设 Ω 在 y 附近除了满足内锥条件外，还满足外锥条件，或稍弱一些的

$$\frac{1}{r^n}|B_r\cap\{\mathrm{R}^n\backslash\Omega\}|\geqslant C_y>0,\qquad 当 0<r\leqslant r_0 时$$

设 R 除满足 $4R\leqslant R_0$外，还满足 $2R\leqslant r_0$。将(1)、(2)二式相加得

$$M_4-m_4+m-M\leqslant C[M_4-m_4+m_1-M_1+\overline{K}(R)] \quad (3)$$

当$y\in\Omega$而$B_{4R_0}\subset\Omega$时，所用的式子是

$$\frac{1}{R^n}\int_{B_{2R}}(M_4-u)dx\leqslant C[M_4-M_1+\overline{K}(R)]$$

$$\frac{1}{R^n}\int_{B_{2R}}(u-m_4)dx\leqslant C[m_1-m_4+\overline{K}(R)]$$

把这二式相加得到

$$M_4-m_4\leqslant C[M_4-m_4+m_1-M_1+\overline{K}(R)] \qquad (4)$$

从(3)、(4)二式可得到

$$M_1-m_1\leqslant\left(1-\frac{1}{C}\right)\left(M_4-m_4\right)+\overline{K}(R)+\frac{1}{C}\left(M-m\right) \quad (5)$$

或

$$\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_R} u \leqslant\gamma \operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_{4R}} u +\overline{K}(R)+\operatorname*{osc}_{\partial\Omega\cap B_{4R}} u$$

其中

$$\operatorname*{osc}_{x\in A} u(x)=\sup_{x\in A} u(x)-\inf_{x\in A} u(x), \qquad \gamma=1-\frac{1}{C}$$

$$C=C(n,\frac{\Lambda}{\lambda}, \nu R_0,q,C_y).$$

当$B_{4R_0}\subset\Omega$时，(5)式中最后一项消失。

记 $\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_R} u=w(R)$, $\overline{K}(R)+\operatorname*{osc}_{\partial\Omega\cap B_{4R}} u=\sigma(4R)$,

$\sigma(R)$为非减函数。因此有

$$\omega(R)=\gamma\omega(4R)+\sigma(4R)$$
$$\leqslant\gamma^2\omega(4^2R)+\sigma(4R)+\gamma\sigma(4^2R)$$
$$\leqslant\cdots\leqslant\gamma^m\omega(4^mR)+\sum_{i=1}^{m}\gamma^i\sigma(4^iR)$$
$$\leqslant\gamma^m\omega(4^mR)+\frac{\sigma(4^mR)}{1-\gamma},$$

这不等式当 $4^mR\leqslant\min\left(\frac{R_0}{4},\ \frac{r_0}{2}\right)$时成立。

取 $4^mR\leqslant\sqrt{RR_0}\leqslant4^{m+1}R$,

则当 $R\leqslant\min\left(\frac{R_0}{16},\ \frac{r_0^2}{4R_0}\right)$时，成立着

$$\omega(R)\leqslant\gamma^m\omega(R_0)+\frac{\sigma(\sqrt{RR_0})}{1-\gamma}$$
$$\leqslant\left(\frac{R}{R_0}\right)^{(\ln1/\gamma)/(\ln16)}\omega(R_0)+\frac{\sigma(\sqrt{RR_0})}{1-\gamma}$$

即当$R\leqslant\min(R_0/16,\ r_0^2/4R_0)$时，

$$\operatorname*{osc}_{\Omega\cap B_R}u\leqslant C[R^{\alpha}R_0^{-\alpha}M_0+\sigma\sqrt{RR_0}\,)]$$

$$\alpha=\frac{\ln\frac{1}{\gamma}}{\ln16}\qquad(**)$$

由此导出

定理4 设$u\in W_2^1(\Omega)$是
$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=f\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\end{cases}$$
的解，$\mathscr{L}$的系数满足条件(A)，且有$q>n$使

$$f \in L^q(\Omega),\quad g \in L^{q/2}(\Omega),$$

则对$\omega \subset\subset \Omega$，$u$在$\omega$内满足Hölder条件，$\|u\|_{C^\beta(\omega)} \leqslant Ck$，其中$\beta = (n,\lambda,\nu,q)$，$C = C(n,\lambda,\nu,q,\delta)$，

$$\delta = d(\omega,\partial\Omega),\ k = \lambda^{-1}(\|f\|_q + \|g\|_{q/2}).$$

如果增设Ω满足一致外锥条件，又φ满足Hölder条件，则u在Ω内也满足Hölder条件。

证 对内闭区域ω，成立着

$$\sigma(\sqrt{RR_0}) = \overline{K}\left(\frac{\sqrt{RR_0}}{4}\right) \leqslant CkR^{(1-n/q)/2},$$

因此由(**)得

$$\|u\|_{C^\beta(\omega)} \leqslant Ck,\quad \beta = \min\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{q}\right)\right) = \beta(n,\lambda,\nu,q),$$

$$C = C(n,\lambda,\nu,q,\delta)。$$

现考察近边的情况，设对$T \subset \partial\Omega$有

$$\inf_{y \in T} C_y > 0,$$

又$\exists\ \alpha_0 > 0$使

$$\sup\{R^{-\alpha} \operatorname*{osc}_{\partial\Omega \cap B_R(x^0)} u : \forall R > 0,\ x^0 \in T\} \leqslant K_1$$

则对任何$\omega \subset\subset \Omega \cup T$，由(**)得

$$\|u\|_{C^\beta(\omega)} \leqslant C(K + K_1)$$

其中

$$\beta = \min\left(\alpha,\alpha_0,\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{n}{q}\right)\right) = \beta(n,\lambda,\nu,q,\alpha_0)$$

$$C=C(n,\lambda,\nu,q,\delta_1),\quad \delta_1=d(\omega,\partial\Omega\backslash T)$$

当$\omega=\overline{\Omega}$时，δ_1可取为$\mathrm{diam}\,\Omega$，定理证毕。

当一致外锥条件与$u|_{\partial\Omega}$的Hölder条件二者不同时满足，在满足外锥条件的点y，如果$u|_{\partial\Omega}$在y点连续，即

$$\underset{\partial\Omega\cap B(y,R)}{\mathrm{osc}}\, u\to 0,\text{ 当}R\to 0\text{时}.$$

则由(**)得出

$$\text{当}R\to 0\text{时},\ \underset{\Omega\cap B(y,R)}{\mathrm{osc}}\, u\to 0$$

即$\forall x\in\Omega, x\to y$，成立着$u(x)\to u(y)$，从而$u(x)$在$y$点连续。如果$u|_{\partial\Omega}\in C$，且$\partial\Omega$每点都满足外锥条件，则有$u\in C(\overline{\Omega})$，由此导出

定理5设$\mathscr{L}(u)=\tilde{f}$的系数满足条件(A)，且存在$q>n$使$f\in L^q(\Omega)$，$g\in L^{\frac{q}{2}}(\Omega)$，又设$\partial\Omega$的每一点满足外锥条件与一致内锥条件，则边值问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u)=\tilde{f}\\ u|_{\partial\Omega}=\varphi\qquad \varphi\in C(\partial\Omega)\end{cases}$$

在$u\in W^1_{2,\mathrm{loc}}(\Omega)\cap C(\overline{\Omega})$中为唯一可解。

证 首先，我们连续拓广φ于$\mathbf{R}^n$，并作φ的C^1光滑化，然后取叙列

$$\varphi_m\in C^1(\overline{\Omega}),m=1,2,\cdots,$$

使$\varphi_m|_{\partial\Omega}$一致收敛到$\varphi$，于是

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u_m)=\tilde{f}\\ u_m|_{\partial\Omega}=\varphi_m\end{cases}$$

有唯一解$u_m\in W_2^1(\Omega)$。

由(**)得出$u_m\in C(\bar{\Omega})$，并由弱极值原理得

$$\sup_{\Omega}|u_{m_1}-u_{m_2}|\leqslant\sup_{\partial\Omega}|\varphi_{m_1}-\varphi_{m_2}|\to 0, m_1,m_2\to\infty$$

因此，$\{u_m\}$一致收敛到函数$u\in C(\bar{\Omega})$且$u|_{\partial\Omega}=\varphi$。

$\forall\omega\subset\subset\Omega$，于

$$L(u_{m_2}-u_{m_1}, v)=0, v\in \overset{0}{W}{}_2^1(\Omega)$$

中取

$$v=\zeta^2(u_{m_2}-u_{m_1}),\ \zeta\in C_0^1(\Omega),\ \zeta|_{\omega}=1,$$

$$|D\zeta|\leqslant Cd(\omega,\partial\Omega)^{-1},$$

得到

$$\int_{\omega}|D(u_{m_2}-u_{m_1})|^2dx\leqslant\int_{\Omega}\zeta^2|D(u_{m_2}-u_{m_1})|^2dx$$

$$\leqslant C\int_{\Omega}(\zeta^2+|D\zeta|^2)(u_{m_2}-u_{m_1})^2dx\to 0,\ m_1,m_2\to\infty.$$

据此$u\in W_{2,loc}^1(\Omega)$，且满足方程$\mathscr{L}(u)=\bar{f}$，定理证毕。

在定理 5 的假设中放松$\partial\Omega$的条件，得到有界解 $u\in W_{2,loc}^1(\Omega)\cap C(\Omega)$。从$x^0\in\partial\Omega$满足外锥条件，就有

$$u(x)\to u(x^0), x\in\Omega, x\to x^0.$$

在其它点处，$u(x)\to u(x^0)$是否成立？要看能否作出x^0点的闸函数而定，即看$x^0\in\partial\Omega$是否为正则点而定。

附注 在上述弱解的局部性质的研究中，b_i、$c_i(i=1,2,\cdots n)$、d等为有界的条件可放松为：b_i、$c_i\in L^q(\Omega), i=1,2,\cdots,n$，$d\in L^{q/2}(\Omega)$，$q>n$，则上述诸结论仍为真，这只要把$\nu R$用$\nu R^{1-\frac{n}{q}}$代替即可。

算子$\mathscr{L}$的一致椭圆条件也可以减弱到适应程度，而得到若干结果，这些我们都不介绍了。

第二章　抛物型方程

对抛物型方程，我们介绍的材料大致与椭圆型相当，有的地方多一些，有的少一些。

§1 抛物型方程解的极值原理

在有界区域D中考虑算子

$$\mathscr{L}u=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}+\sum_{i=1}^{n}b_i(x,t)u_{x_i}$$

$$+c(x,t)u-u_t$$

设a_{ij}、b_i、$c\in C(D)$，如果

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\quad \forall(x,t)\in D,\quad \forall\xi\in\mathbf{R}^n$$

其中$\lambda>0$，则称$\mathscr{L}$于D为**抛物算子。**

设函数$u\in C^{2,1}(D)\cap C(\bar{D})$。

引理1 设$\mathscr{L}$为D中的抛物算子，且$c(x,t)\leqslant0$于D。又设$\mathscr{L}u\leqslant0$于球$B\subset D$，$(x^0,t^0)\in\partial B$，而且(x^0,t^0)不是∂B的**南北极**（即∂B上t为最小、最大的点），于$\bar{B}$中$u(x^0,t^0)$取非正的严格极小值，即$u(x^0,t^0)\leqslant0$，且$u(x,t)>u(x^0,t^0)$，$\forall(x,t)\in\bar{B}\backslash(x^0,t^0)$。则沿着方向$l$的极限

$$\lim_{\overline{PP_0}\in l}\ \inf_{P\to P_0}\frac{u(P)-u(P_0)}{\overline{PP_0}}>0$$

其中$P=(x,\ t)$，$P_0=(x^0,\ t^0)$，l 与B在P_0点的内法线方向交成锐角。

证 设B的中心为$(0,\ 0,\ \cdots\cdots 0)$，半径为 R，$(x^0,\ t^0)$不是∂B的南、北极，即$t^{0^2}<R^2$。因此

$$|x^0|^2=\sum_{i=1}^n x_i^{0^2}=R^2-t^{0^2}>0$$

作辅助函数

$$v(P)=\exp(-a(|x|^2+t^2))-\exp(-aR^2)$$

其中 a 为待定正常数，$|x|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2$，则在

$$\Sigma=\{(x,t)\,|\,|x|^2+t^2<R^2,\ |x|^2>\frac{1}{4}|x^0|^2\}$$

中

$$\mathscr{L}v=e^{-a(|x|^2+t^2)}[4a^2\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_ix_j-2a\sum_{i=1}^n(a_{ii}+b_ix_i)$$

$$+2at+cve^{a(|x|^2+t^2)}]$$

$$\geqslant e^{-a(|x|^2+t^2)}[a^2\lambda|x^0|^2-2a\sum_{i=1}^n(a_{ii}+b_ix_i)+2at+c]$$

取a充分大，就可做到

$$\mathscr{L}v>0,\quad \forall(x,\ t)\in\Sigma_0$$

作

$$w(P)=\varepsilon v(P)-u(P)+u(P_0)$$

其中 ε 为小的正数，当

$$|x|^2+t^2=R^2\text{时}\quad w(p)=-u(P)+u(P_0)\leqslant 0$$

当$(x,\ t)\in\partial\Sigma\cap\{|x|^2=\frac{1}{4}|x^0|^2\}$时，存在$\delta>0$使

$$u(P)>u(P_0)+\delta$$

取$\varepsilon>0$充分小使 $w(P)<0$，由此可导出

$$w(P)\leqslant 0,\quad \forall(x,\ t)\in\bar{\Sigma}。$$

如果这断言不真，则有$Q\in\Sigma$使w于Q取正的最大值，于是应有

$$\mathscr{L}w|_Q=\sum a_{ij}w_{x_ix_j}|_Q+cw(Q)\leqslant 0$$

但是，

$$\mathscr{L}w|_Q=\varepsilon\mathscr{L}v|_Q-\mathscr{L}u|_Q+\mathscr{L}u(P_0)>0$$

得到矛盾，这样证明了

$$w(P)\leqslant 0,\quad \forall(x,\ t)\in\bar{\Sigma}$$

再由$w(P_0)=0$导出

$$\lim_{\overline{PP_0}\in l}\inf_{P\to P_0}\frac{u(P)-u(P_0)}{\overline{PP_0}}\geqslant\varepsilon\lim_{\overline{PP_0}\in l}\inf_{P\to P_0}\frac{v(P)}{\overline{PP_0}}>0$$

引理证毕。

在一定条件下，可把引理 1 中$(x^0,\ t^0)$不是南、北极的限制去掉，我们有

引理2 设椭球

$$E=\{|x-\bar{x}|^2/a^2+|t-\bar{t}|^2/b^2<1\}$$

的长、短半轴满足条件$a^2/b>\sup\limits_D\sum\limits_{i=1}^n a_{ii}$，则当$\bar{E}\cap D$含有$\partial E$的北 极

(x^0, t^0)时，引理1的结论对北极仍然成立。

证 设$(\bar{x}, \bar{t})$为原点，则$x^0=(0, 0, \cdots, 0)$，$t^0=b$。作函数

$$v(P)=1-|x|^2/a^2-t^2/b^2$$

在$\Sigma=\{(x, t)\mid |x|^2/a^2+t^2/b^2<1, t>b-\delta\}$中，取$\delta$足够小使$\Sigma\subset E\cap D$以及

$$\mathscr{L}v=-\frac{2}{a^2}\sum_{i=1}^{n}(a_{ii}+b_ix_i)+cv+2t/b^2$$

$$=2\left(\frac{1}{b}-\sum_{i=1}^{n}a_{ii}/a^2\right)+O(\delta^{\frac{1}{2}})>0$$

皆成立，以下重复引理1的证明，即可得到引理2。

附注1 引理1中(x^0, t^0)不是南极的限制不能去掉，例如

$$\mathscr{L}u=u_{xx}-u_t,\quad P_0=(0,0),\quad u(x,t)=t^2-1$$

$$\mathscr{L}u=-2t\leqslant 0,\quad 当t\geqslant 0,$$

而$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=0$，当$P_0$为任何切于$x$轴的球或椭球的南极，即对南极引理1不真。

附注2 由证明可见，当$c(x, t)\equiv 0$时，引理1、2中关于$u(x^0, t^0)$非正的限制可以去掉。

设P_0为区域D的内点，记$S(P_0)=\{Q\in\bar{D}\mid Q$能与$P_0$用一条简单曲线$\widehat{QP_0}$联结，且$\widehat{QP_0}\setminus\{Q\}\subset D$，使得点沿$\widehat{QP_0}$由$Q$向$P_0$移动时，坐标$t$不减$\}$，这里所谓**简单曲线**指的是连续且无分支。

定理1 $\mathscr{L}$为区域D中的抛物算子，$u\in C^{2,1}(D)\cap C(\bar{D})$，$\mathscr{L}u\leqslant 0$于$D$，如果在$P_0\in D$内函数$u(P)$取到$\bar{D}$中的非正最小值$m$，则在$S(P_0)$中有$u(P)=m$。

证 首先注意到 $F=\{P|P\in\bar{D},\ u(P)=m\}$ 为一闭集。

任取一简单曲线$\widehat{P_1P_0}$使点沿$\widehat{P_1P_0}$自 P_1 移向 P_0 时所对应的 t 不减，而且使$\widehat{P_1P_0}\setminus\{P_1\}\subset D$，$\widehat{P_1P_0}$上第一个属于的$F$点记为$P_2=(x^2,t^2)$，当$P_2=P_1$时定理已真，否则$P_2\neq P_1$，$P_2\in\partial F$，$(\widehat{P_1P_2}\setminus\{P_2\})\cap F=\phi$。取$P_3=(x^3,\ t^3)\in\widehat{P_1P_2}$ 使 $|\widehat{P_3P_2}|<d(P_2,\ \partial D)$，则

$$d(\widehat{P_3P_2},\ \partial D)\geqslant d(P_2,\ \partial D)-\overline{P_3P_2}>0$$

由于 $P_2\in F$，故可取 $t^{3\prime}<t^3\leqslant t^2$及$t^{3\prime}$与$t^3$相差很小，使$Q^3=(x^3,t^{3\prime})\bar{\in}F$，而且 $d(\widehat{Q_3P_2},\ \partial D)>0$。

考察椭球

$$E_\sigma=\{(x,t)\,|\,|x-(1-\sigma)x^3-\sigma x^2|^2/a^2$$
$$+[t-(1-\sigma)t^3-\sigma t^2]^2/b^2<1\},\ \ 0\leqslant\sigma\leqslant1$$

取常数a、b充分小使

$$\bar{E}_\sigma\cap F=\phi,\ \ a<d(\widehat{Q_3P_2},\ \partial D),\ \ a^2/b>\sup_D\sum_{i=1}^{n}a_{ii}$$

则必有 $\bar{E}_\sigma\subset\bar{D}$

如果$\exists\sigma_0\in(0,\ 1)$，使

$\bar{E}_\sigma\cap F=\phi$，$0\leqslant\sigma<\sigma_0$，$E_{\sigma_0}\cap F=\phi$，$\partial E_{\sigma_0}\cap F\neq\phi$，则任取$Q\in\partial E_{\sigma_0}\cap F$，$Q$不能是$E_{\sigma_0}$的南极点$Q_0$：$((1-\sigma_0)x^3+\sigma_0x^2,\ -b+(1-\sigma_0)t^{3\prime}-\sigma_0t_2)$，这是因为当

$$\sigma>\min\left(0,\sigma_0-\frac{2b(t^2-t^{3\prime})}{\frac{b^2}{a^2}|x^2-x^3|^2+(t^2-t^{3\prime})^2}\right)$$

时，$Q_0\in F_{\sigma_0}$。

当Q也不是E_{σ_0}的北极点时，作过Q的E_{σ_0}的内切球B使$\overline{B}\setminus\{Q\}\subset E_{\sigma_0}$，则$Q$不是$B$的南、北极，自引理1得

$\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_Q>0$，$N$为$B$在$Q$的内法线方向，但由于$Q$是$D$内使$u$为极小的点，故应有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_Q=\left.\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|_Q=0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,n,$$

因此有 $\left.\frac{\partial u}{\partial N}\right|_Q=0$，矛盾。

当Q是E_{σ_0}的北极点时，应用引理2亦可得出矛盾。

因此 $\overline{E}_\sigma\cap F=\phi$，$\forall\sigma\in[0,\ 1]$，但这与$P_2\in E_1\cap F$相矛盾，定理证毕。

附注3 定理1中P_0是D的内点，这条件可放宽为：P_0是D的内点或上边界内点，即是$D_1=\overline{D}\cap\{t=t^0\}\setminus(\partial D\cap\{t=t^0\})$中的点，但要设$a_{ij}$、$b_i$、$c$、$u_{x_ix_j}$、$u_t\in C(D\cup D_1)$，故在$D\cup D_1$中有$c\leqslant0$，$\mathscr{L}u\leqslant0$。

这是因为在$D\cup D_1$中，u在P_0点取非正最小，当这一非正最小点在$D\cup\{P_0\}$中为孤立点时，则

$$\sum a_{ij}u_{x_ix_j}|_{P_0}\geqslant0,\quad u_{x_i}|_{P_0}=0$$

由引理2，$u_t|_{P_0}<0$，因此 $\mathscr{L}u|_{P_0}>0$，这与$\mathscr{L}u\leqslant0$矛盾

当这一非正最小点在$D\cup\{P_0\}$中非孤立点时，存在$\{P_i\}\subset D$，$P_i\to P_0$，$i\to\infty$，$u(P_i)=u(P_0)$，由定理1可知u在$S(P_i)$中为常数，$i\to\infty$即可知u在$S(P_0)$为常数。

在附注3的条件下，可得到

推论（弱极值原理） $\mathscr{L}u\leqslant0$时，u的非正最小值必在$\partial D\setminus(D\cap D_1)$上取到。

附注4 当$c(x, t)\equiv 0$时，**定理1**中的条件$u(P_0)$为非正最小值中非正的限制可以取消。

设有区域D在$0<t<T$中，$\partial D\cap\{t=T\}$的内区域记为D_T，抛物算子$\mathscr{L}$的**第一边值问题**为

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=f(x, t), & (x, t)\in D\cup D_T\\ u|_{\partial D\setminus D_T}=\varphi(\xi, t)\end{cases}$$

第三边值问题 当$\partial D\cap\{0<t<T\}$的每点均有切平面时，

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=f(x, t), \quad (x, t)\in D\cup D_T\\ u|_{\partial D\cap\{t=0\}}=\varphi(x)\\ a(\xi,t)\dfrac{\partial u}{\partial\nu}+b(\xi,t)u=\psi(\xi,t),\\ \qquad\qquad\qquad (\xi,t)\in\partial D\cap\{0<t<T\}\end{cases}$$

其中ν与$\partial D\cap\{0<t<T\}$的内法线N的夹角小于$\pi/2$。

定理2 设f, φ连续，$u\in C^{2,1}(D)\cap C(\bar{D})$是第一边值问题的解，则有

$$|u(x,t)|\leqslant e^{\alpha t}\max\left\{\frac{\sup\limits_{D\cup D_T}|f(x,t)|}{\alpha-\sup\limits_{D\cup D_T}c(x,t)},\ \sup_{\partial D\setminus D_T}|\varphi(\xi,t)|\right\}$$

其中α为满足$\alpha-\sup\limits_{D\cup D_T}c(x, t)>0$的任一常数。

证 作变换 $u=e^{\alpha t}v$，把方程化为

$$\sum a_{ij}v_{x_ix_j}+\sum b_iv_{x_i}+(c-\alpha)v-v_t=fe^{-\alpha t}$$

由于$c-\alpha<0$于$D\cup D_T$，故当v的正最大在$D\cup D_T$中取到时，在该

点有

$$\sum a_{ij}v_{x_ix_j}\leqslant 0,\quad v_{x_i}=0,\quad v_t\geqslant 0$$

故有

$$(\alpha-\sup c)\sup v\leqslant \sup(-f)$$

当v的负最小在$D\cup D_T$中取到时，有

$$\sup(-v)(\alpha-\sup c)\leqslant \sup f$$

当$|v|$的最大值在$\partial D\setminus D_T$上取到时，有

$$\sup|v|\leqslant \sup_{\partial D\setminus D_T}|\varphi|$$

结合这三式以及

$$|u(x,t)|\leqslant e^{\alpha t}|v(x,t)|$$

得到定理的结论。

由定理 2 就可得到第一边值问题解的唯一性，即 $f=\varphi=0\Longrightarrow u=0$。解连续依赖于$f$、$\varphi$的性质也不难得出。

现在研究 $\mathbf{R}^n\times[0,T]$ 的情形，设 $u\in C^{2,1}(\mathbf{R}^n\times[0,T])$，$\mathscr{L}u$ 于$\mathbf{R}^n\times(0,T]$中为抛物算子，考虑初值问题：

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=f(x,t), & (x,t)\in\mathbf{R}^n\times(0,T]\\ u(x,0)=\varphi(x), & x\in\mathbf{R}^n\end{cases}$$

我们证明

定理3 设K、L、M为正的常数，在$\mathbf{R}^n\times(0,T]$中

$|a_{ij}(x,t)|\leqslant K$，$|b_i(x,t)|\leqslant K(|x|+1)$，$|c(x,t)|\leqslant K(|x|^2+1)$。则在函数类 $u\in C(\mathbf{R}^n\times[0,T])$之满足$|u(x,t)|\leqslant Le^{M|x|^2}$中，初值问题解为唯一。

证 当$f=\varphi=0$时，要证明$u=0$。对于正的常数k、μ、ν，函数

$$H(x,t)=\exp\left(\frac{k|x|^2}{1-\mu t}+\nu t\right),\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2\mu}$$

满足

$$\frac{\mathscr{L}H}{H}=\frac{4k^2}{(1-\mu t)^2}\sum a_{ij}x_ix_j+\frac{2k}{1-\mu t}\left(\sum a_{ii}\right.$$

$$\left.+\sum b_ix_i\right)+c-\mu k|x|^2/(1-\mu t)^2-\nu$$

$$\leqslant(16k^2n^2K+6knK+K-\mu k)|x|^2$$

$$+(2nkK+K-\nu)$$

对任给的正数k，可取充分大的正数μ、ν使在$\mathbb{R}^n\times\left(0,\ \frac{1}{2\mu}\right]$中

$$\frac{\mathscr{L}H}{H}\geqslant 0$$

得以成立，取$k>M$，做变换 $u=Hv$，我们得到

$$\sum a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum\left(b_i+2\sum a_{ij}H_{x_j}/H\right)v_x$$

$$+\frac{\mathscr{L}H}{H}v-v_t=0$$

应用极值原理于v，在区域$\left\{(x,\ t)\,|\,|x|\leqslant R,\ 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2\mu}\right\}$中，得到

$$|v(x,t)|\leqslant\sup_{|x|=R,\,0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2\mu}}\frac{|u(x,t)|}{H(x,t)}$$

$$\leqslant L\exp[(M-k)R^2]\to 0,\quad 当R\to\infty时,$$

即$v=0$，因此，

$$u(x,t)=0,\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad 0\leqslant t\leqslant\frac{1}{2\mu}$$

同样可得

$$u(x,t)=0,\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad \frac{i}{2\mu}\leqslant t\leqslant\frac{i+1}{2\mu},\quad i=1,\ 2,\ \cdots$$

结合上述诸式得到

$$u(x,\ t)=0,\quad x\in\mathbf{R}^n,\quad 0\leqslant t\leqslant T$$

定理证毕。

关于第三边值问题解的唯一性，我们有

定理4 当$c(x,\ t)\leqslant 0$于$D\cup D_T$，$a\geqslant 0$，$b\leqslant 0$，$a^2+b^2\neq 0$于$\partial D\cap\{0<t\leqslant T\}$，则第三边值问题解为唯一，又当$v$与$t$无关时，即使没有$c\leqslant 0$的条件，解仍然是唯一的。

证 当$f=\varphi=\psi=0$时，要证明$u=0$，对定理的后一断言做变换$v=e^{-\gamma t}u$，取常数$\gamma\geqslant\max\limits_{\bar{D}} c(x,\ t)$而考察$v$，就化为定理的前一断言了。

现证前一断言，如果$u\neq 0$，则在$\bar{D}$中u必有正最大或负最小，设有最小值$m<0$，m必在$\partial D\backslash D_T$中取到，由于$\varphi=0$，故它不在$\partial D\cap\{t=0\}$中取到；又由于$\psi=0$，所以它也不在

$$\partial D\cap\{0<t\leqslant T\}\cap\{(\xi,t)\,|\,a(\xi,t)=0\}$$

中取到，当它在

$$\partial D\cap\{0<t\leqslant T\}\cap\{(\xi,t)\,|\,a(\xi,t)\neq 0\}$$

上的P_0点取到时，在P_0点成立着

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}=-\frac{b}{a}u\leqslant 0$$

这与引理 1 矛盾，定理 4 证毕。

关于解连续依赖于f、φ、ψ的性质，在这里不详细讨论了。

抛物型方程解的极值原理，可推广到超抛物型方程去[10]。

§2 Schauder估计的预备知识

证明抛物型方程边值问题解存在的方法，与椭圆型方程类似。常系数时用下解法，这相当于椭圆型方程的下调和函数法，当方程为变系数时，在 Schauder 估计的基础上，用参数延拓法。这是区域不规则的情况。如果区域很特殊，例如，是柱状区域$\Omega\times(0, T]$，则有较好的解法，如半群方法。当区域与方程的系数都很特殊时，解可用显式表示，其出发点是格林公式与基本解。

现在介绍格林公式

$$\mathscr{L}u=\sum a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j}+\sum b_i(x,t)u_{x_i}+c(x,t)u-u_t$$

$$\begin{aligned}\mathscr{L}^*v&=\sum(a_{ij}v)_{x_ix_j}-\sum(b_iv)_{x_i}+cv+v_t\\&=\sum a_{ij}v_{x_ix_j}+\sum b_i^*v_{x_i}+c^*v+v_t\end{aligned}$$

$$b_i^*=-b_i+2\sum_{j=1}^{n}(a_{ij})_{x_j}$$

$$c^*=c-\sum(b_i)_{x_i}+\sum(a_{ij})_{x_ix_j}$$

在经典的情形是假定所出现的微商都连续，由此得到**格林公式**

$$v\mathscr{L}u-u\mathscr{L}^*v=\sum_i\frac{\partial}{\partial x_i}\Big[\sum_j a_{ij}(vu_{x_j}-uv_{x_j})-$$

$$uv\sum_i (a_{ij})_{x_j} + b_i uv \Big] - (uv)_t$$

而

$$\mathscr{L}_0 u = \Delta u - u_t = 0$$

的基本解是

$$\Gamma(x,t,\xi,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{[4\pi(t-\tau)]^{n/2}} \exp[-\sum(x_i - \xi_i)^2/[4(t-\tau)]], & (t>\tau), \\ 0 & t \leqslant \tau \end{cases}$$

关于变量(x, t)，$\Gamma(x, t, \xi, \tau)$满足$\mathscr{L}_0 u = 0$，而当$(x,t) \neq (\xi,\tau)$时，关于变量(ξ, τ)，它满足

$$\mathscr{L}_0^* v = \Delta_\xi v + v_\tau = 0$$

令$\xi_i = x_i + 2(t-\tau)^{1/2}\sigma_i$，我们得到

$$\int_{\mathbf{R}^n} \Gamma(x,t,\xi,\tau) d\xi = \begin{cases} \prod_{i=1}^{n} [\dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_i^2} d\sigma_i] = 1, & t>\tau \\ 0 & t \leqslant \tau \end{cases}$$

当方程的系数是变量时，求它的基本解是一专门问题，我们不在这里介绍。现在用上述的基本解来求

$$\begin{cases} \mathscr{L}_0 u = f(x,t), & (x,t) \in \mathbf{R}^n \times (0,T] \\ u|_{t=0} = \varphi(x) & x \in \mathbf{R}^n \end{cases}$$

的解，其中f, φ连续，而且有常数$K < \dfrac{1}{4T}$，使

$$f=O(e^{K|x|^2}),\qquad \varphi=O(e^{K|x|^2})。$$

所求的解限制在函数类

$$u=O(e^{K|x|^2}),\qquad Du=O(e^{K|x|^2})$$

中。

把格林公式中的$\mathscr{L}$取为$\mathscr{L}_0$，在区域

$$N_{a,\varepsilon}=\{(\xi,\tau)\,|\,|\xi_i|\leqslant a,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ 0\leqslant\tau\leqslant t-\varepsilon\}$$

上积分，把格林公式中的u写为$u(\xi,\ \tau)$，取$v=\Gamma(x,\ t,\ \xi,\ \tau)$，得到

$$\int_{N_{a,\varepsilon}}\Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\int_{\partial N_{a,\varepsilon}\cap\{0<\tau<t-\varepsilon\}}(\Gamma u_{\xi_i}-u\Gamma_{\xi_i})\frac{d\xi}{d\xi_i}d\tau$$

$$-\int_{\partial N_{a,\varepsilon}\cap\{\tau=t-\varepsilon\}}\Gamma u dx+\int_{\partial N_{a,\varepsilon}\cap\{\tau=0\}}\Gamma u dx$$

由于对f、φ、u的限制，可令$a\to\infty$，得到

$$\int_0^{t-\varepsilon}\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$=-\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(x,t,\xi,\tau)u(\xi,\tau)|_{\tau=t-\varepsilon}d\xi$$

$$+\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi$$

令$\varepsilon\to0$得到

$$u(x,t)=\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)d\xi-$$

$$-\int_0^t\int_{\mathbf{R}^n}\Gamma(x,t,\zeta,\tau)f(\zeta,\tau)d\zeta d\tau$$

要验证这是经典解，需对 $f(x, t)$加更强一点的条件，即 $f(x,t)$ 满足对 x 局部而对 t 一致的Hölder 条件。否则，u只能是广义地满足方程。

设$\Omega\subset\mathbf{R}^n$为有界区域，$f(x, t)\in C(\overline{\Omega}\times[t^0, T])$，则

$$V(x,t)=\int_{t_0}^t\int_\Omega\Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

称为**热势**。

可证 $\dfrac{\partial}{\partial x_i}V(x, t)$，$i=1, 2, \cdots, n$ 于$\Omega\times[t^0, T]$存在。这是因为积分

$$\int_{t_0}^t\int_\Omega\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

为绝对一致收敛，即

$$\int_{t_0}^t\int_\Omega\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)\right|d\xi d\tau$$

$$\leqslant K\int_{t_0}^t\int_\Omega\frac{|x_i-\xi_i|}{(t-\tau)^{n/2+1}}\exp[-\sum(x_i$$

$$-\xi_i)^2/[4(t-\tau)]]d\xi d\tau\equiv\mathrm{I}$$

令

$$\xi_j=x_j+2(t-\tau)^{\frac{1}{2}}\sigma_j$$

则

$$I \leqslant \int_{t_0}^{t} d\tau \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\sigma_i|}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} e^{-\sigma_i^2} d\sigma_i \prod_{j\neq i} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\sigma_j^2} d\sigma_j$$

$$\leqslant K \int_{t_0}^{t} \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}} d\tau \leqslant K。$$

由于

$$\frac{V(x+\Delta x_i, t) - V(x,t)}{\Delta x_i}$$

$$= \int_{t_0}^{t} \int_{\Omega} \frac{\Gamma(x+\Delta x_i, t, \xi, \tau) - \Gamma(x, t, \xi, \tau)}{\Delta x_i} f(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

$$= \frac{1}{\Delta x_i} \int_{t_0}^{t} \int_{x_i}^{x_i+\Delta x_i} d\sigma \int_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x, t, \xi, \tau)\Big|_{x_i=\sigma} f(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

令$\Delta x_i \to 0$，得

$$\frac{\partial V(x,t)}{\partial x_i} = \int_{t_0}^{t} \int_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x_i}(x,t,\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau。$$

当$f(x,\ t) \in C^{\lambda,\frac{\lambda}{2}}(\Omega \times [t^0, t])$，$0<\lambda<1$

时，还可以求$V(x,\ t)$对x的二阶导数，事实上，若记

$$\varphi_i(x,t,\varepsilon) =$$

$$\int_{\Omega \times \{t^0<\tau<t\} \setminus N(x,t,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x,t,\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

其中，$N(x,\ t,\ \varepsilon)$为长方体

$$\{(\xi,\tau) \mid |\xi_i - x_i| < \varepsilon,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n,\ t-\varepsilon^2<\tau<t\},$$

取$\varepsilon>0$足够小，使

$$N(x, t, \varepsilon) \subset \Omega \times (t^0, t),$$

则

$$\varphi_i(x+\Delta x_i, t, \varepsilon) - \varphi_i(x, t, \varepsilon)$$

$$\approx \int_{(\Omega \times (t^0<\tau<t)) \setminus N(x,t,\varepsilon)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Gamma(x,t,\xi,\tau) f(\xi,\tau) d\xi d\tau$$

$$- \sum_{m=0}^{1} \int_{\partial N(x,t,\varepsilon)} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x,t,\xi,\tau) f(\xi,\tau) \right.$$

$$\left. \cdot \Delta x_j \cos(\nu, \xi_j) \right] \frac{d\xi}{d\xi_j} d\tau$$

$$\xi_j = x_j + (-1)^{m-1} \varepsilon$$

其中 ν 为 $\partial N(x, t, \varepsilon)$ 的外法线，而 $\frac{d\xi}{d\xi_j} = d\xi_1 \cdots d\xi_{j-1} d\xi_{j+1} \cdots d\xi_n$，

因此

$$\frac{\partial \varphi_i(x,t,\varepsilon)}{\partial x_j} = \int_{(\Omega \times (t^0<\tau<t)) \setminus N(x,t,\varepsilon)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Gamma(x,t,\xi,\tau)$$

$$(f(\xi,\tau) - f(x,t)) d\xi d\tau + f(x,t)$$

$$\left\{ \int_{(\Omega \times (t^0<\tau<t)) \setminus N(x,t,\varepsilon)} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \Gamma(x,t,\xi,\tau) d\xi d\tau \right.$$

$$- \int_{\partial N(x,t,\varepsilon)} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x,t,\xi,\tau) \cos(\nu, \xi_j) \right]_{\xi_j = x_j + (-1)^{m-1}\varepsilon}$$

$$\left. \frac{d\xi}{d\xi_j} d\tau \right\} - \sum_{m=0}^{1} \int_{\partial N(x,t,\varepsilon)} \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x,t,\xi,\tau) (f(\xi,\tau) \right.$$

$$-f(x,t))\cos(\nu,\xi_j)\Big]\frac{d\xi}{d\xi_j}d\tau$$

$$\xi_j=x_j+(-1)^{m-1}\varepsilon$$

由于

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Gamma(x,t,\xi,\tau)=-\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial\xi_j}\Gamma(x,t,\xi,\tau)$$

花括号内的项仅剩下$\partial\Omega\times\{t^0<\tau<t\}$上的积分

$$\int_{\partial\Omega\times\{t^0<\tau<t\}}\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x,t,\xi,\tau)\cos(\nu,\xi_j)d_\xi\omega d\tau$$

ν 的方向向内，

上式两边关于x_j作不定积分，令$\varepsilon\to0$，再对x_j微分得

$$\frac{\partial^2 V(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}=\int_{t^0}^t\int_\Omega\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Gamma(x,t,\xi,\tau)(f(\xi,\tau)$$

$$-f(x,t))d\xi d\tau+f(x,t)\int_{t^0}^t\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x,t,\xi,\tau)$$

$$\cos(\nu,\xi_j)d_\xi\omega d\tau$$

上式中令$\varepsilon\to0$以及对x_j微分的合法性，可由下面二式推知

$$\int_{N(x,t,\varepsilon)}\left|\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Gamma(x,t,\xi,\tau)[f(\xi,\tau)-f(x,t)]\right|d\xi d\tau$$

$$\leqslant K\int_{N(x,t,\varepsilon)}\frac{1}{(t-\tau)^{n/2+1}}\left[1+\frac{|x_i-\xi_i||x_j-\xi_j|}{(t-\tau)}\right]$$

$$\cdot[|x-\xi|^{\lambda}+(t-\tau)^{\lambda/2}]\exp(-\sum(x_k$$

$$-\xi_k)^2/[4(t-\tau)]d\xi d\tau$$

$$\leqslant K\int_{t-\varepsilon^2}^{t}(t-\tau)^{\lambda/2-1}d\tau\int_{\mathbf{R}^n}(1+\sum_k\sigma_k^2)^{1+\lambda/2}e^{-\sum_k\sigma_k^2}d\sigma$$

$$\leqslant K\varepsilon^\lambda\to 0,\quad 当\varepsilon\to 0$$

在推导过程中，我们作了变量替换

$$\xi_i=x_i+2(t-\tau)^{1/2}\sigma_i$$

此外，

$$\int_{\partial N(x,t;\varepsilon)}\left|\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x,t,\xi,\tau)[f(\xi,\tau)-f(x,t)]\right.$$

$$\left.\cos(\nu,\xi_j)\right|_{\xi_j=x_j\pm\varepsilon}\frac{d\xi}{d\xi_j}d\tau$$

$$\leqslant K\int_{\partial N(x,t;\varepsilon)}\frac{|x_i-\xi_i|}{(t-\tau)^{n/2+1}}\Big[\sum|x_k-\xi_k|^\lambda$$

$$+(t-\tau)^{\lambda/2}\Big]e^{-\sum(x_k-\xi_k)^2/[4(t-\tau)]}\Big|_{\xi_k=x_k\pm\varepsilon}\frac{d\xi}{d\xi_j}d\tau$$

$$\leqslant K\int_{t-\varepsilon^2}^{t}\frac{\varepsilon^{n+\lambda}}{(t-\tau)^{n/2+1}}e^{-\varepsilon^2/[4(t-\tau)]}d\tau$$

$$\leqslant K\int_{\frac{1}{4}}^{\infty}\varepsilon^\lambda e^{-\sigma}\sigma^{n/2-1}d\sigma\leqslant K\varepsilon^\lambda\to 0,\quad 当\varepsilon\to 0$$

附注　求$V(x,\ t)$对x的二阶微商时，对f的条件可减弱为$f(x,\ t)$关于$x\in\overline{\Omega}$满足Hölder条件，且这条件对$t^0\leqslant t\leqslant T$为一致，要使这一要求成为可能，我们在上面的估计中，用$f(\xi,\ \tau)-f(x,\ \tau)$代替$f(\xi,\ \tau)-f(x,\ t)$即可。

考察$u(x,\ t)$的Hölder条件时，$(x,\ t)$空间的范数，不用欧氏范数

$$(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + t^2)^{1/2}$$

而用

$$(\sum x_i^2 + |t|)^{1/2}$$

二点$P(x, t)$、$Q(\bar{x}, \bar{t})$的距离是

$$d(P,Q) = [|x-\bar{x}|^2 + |t-\bar{t}|]^{1/2}$$

所谓u在区域$D\subset R^n\times(0, T)$中满足指数λ、$\frac{\lambda}{2}$的Hölder 条件是指条件

$$\sup_{P,Q\in D} \frac{|u(P)-u(Q)|}{(d(P,Q))^\lambda} < \infty$$

成立，记为$u\in C^{\lambda,\lambda/2}(D)$。

顶部中心点为$P(x^0, t^0)$、边长为2δ的半长方体记为N，即

$$N = \{(x,t) \mid |x_i - x_i^0| < \delta, \ (i=1, 2, \cdots, n),$$
$$t^0 - \delta^2 < t \leqslant t^0\}$$

其中 $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$，对$Q\in N$，记

$$H_{Q,N}[g] = \sup_{P\in N} |g(Q)-g(P)|/(d(P,Q))^\lambda$$

引理1 设$f(x, t)\in C^{\lambda,\lambda/2}(N)$，$(0<\lambda<1)$，$u\in C^{2,1}(N)$是

$$\mathscr{L}_0 u = \Delta u - u_t = f, \ (x,t)\in N$$

的解，则$D_x^2 u\in C^{\lambda,\lambda/2}(N)$，且有以下二个估计式，

$$|D_x^2 u(P)| \leqslant K(\delta^{-2}\sup_N|u| + \sup_N|f| + \delta^\lambda H_{P,N}[f])$$

$$= KI$$

$$\delta^2 |D_x^2 u(P) - D_x^2 u(Q)| / (d(P,Q))^\lambda$$

$$\leqslant K(I + \delta^\lambda H_{Q,N}[f])$$

当$d(P, Q) \leqslant \dfrac{\delta}{4}$时成立，其中$K$仅与$n$、$\lambda$有关。

证 上顶中心为P、边长为 $2\eta\delta$ 的半长方体记为 N_η，取 $\zeta(Q) \in C^\infty(N)$满足

$$0 \leqslant \zeta(Q) \leqslant 1, \quad \zeta(Q) = \begin{cases} 1, & \text{当} Q \in N_{1/2} \\ 0, & \text{当} Q \in N \backslash N_{3/4} \end{cases}$$

且

$$|D_x^k D_t^h \zeta(x,t)| \leqslant K\delta^{-k-2h}, \quad 0 \leqslant k + h \leqslant 2$$

现说明满足上述条件的$\zeta(Q)$的作法如下，先作

$$\zeta_1(Q) = \begin{cases} 1, & Q \in N_{5/8} \\ 0, & Q \in N \backslash N_{5/8} \end{cases}$$

其次，作$\zeta_1(Q)$的中值函数光滑化。

记N的下底为M。把u写成$u(\xi, \tau)$，取

$$v(\xi, \tau) = \zeta(\xi, \tau)\Gamma(x, t, \xi, \tau),$$

这里Γ为

$$\mathscr{L}_0 u - u_t = 0$$

的基本解，把这样取的u、v代入格林公式，并在$M \times \{t^0 - \delta < \tau < t - \varepsilon\}$中积分得

$$\int_{t^0 - \delta^2}^{t-\varepsilon} \int_M [\zeta(\xi,\tau)\Gamma(x,t,\xi,\tau) f(\xi,\tau)$$

$$-u(\xi,\tau)\mathscr{L}_0^*(\zeta(\xi,\tau)\Gamma(x,t,\xi,\tau))]d\xi d\tau$$

$$=-\int_M\zeta(\xi,\tau)\Gamma(x,t,\xi,\tau)u(\xi,\tau)|_{\tau=t-\varepsilon}d\xi$$

当$(x,\ t)\in N_{\frac{1}{2}}$时，在上式中令$\varepsilon\to 0$得到

$$u(x,\ t)=-\int_{t^0-\delta^2}^{t}\int_M\zeta(\xi,\tau)f(\xi,\tau)\Gamma(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$+\int_{t^0-\delta^2}^{t-0}\int_M u(\xi,\tau)\mathscr{L}_0^*[\zeta(\xi,\tau)\Gamma(x,t,\xi,\tau)]d\xi d\tau$$

注意到上式第二个积分仅在$N_{\frac{3}{4}}\backslash N_{\frac{1}{2}}$中不为0。记$\zeta(Q)f(Q)=\tilde{f}(Q)$，由于$f(Q)\in C^{\lambda,\lambda/2}(\bar{N})$，所以

$$|\tilde{f}(Q)-\tilde{f}(R)|\leqslant K(H_{Q,\bar{N}}[f]+\delta^{-\lambda}\sup_{\bar{N}}|f|)(d(Q,R))^{\lambda}$$

因此，上面$u(x,\ t)$的表达式，可对x微分二次得

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i\partial x_j}=-\int_{t^0-\delta^2}^{t}\int_M\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Gamma(x,t,\xi,\tau)[f(\xi,\tau)$$

$$-\tilde{f}(x,t)]d\xi d\tau-\tilde{f}(x,t)\int_{t^0-\delta^2}^{t}\int_{\partial M}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\Gamma(x,t,\xi,\tau)\cos(\nu,\xi_j)\frac{d\xi}{d\xi_j}d\tau$$

$$+\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\int_{t^0-\delta}^{t-0}\int_M u(\xi,\tau)\mathscr{L}_0^*[\zeta(\xi,\tau)$$

$$\Gamma(x,t,\xi,\tau)]d\xi d\tau=-G-H+J$$

其中G、H、J依次表示上式中的三项积分

记 $Q=(x,\ t)$，则

$$J(O)=\int_{t^0-\delta^2}^{t-0}\int_M u(\xi,\tau)\{(\Delta_\xi+D_\tau)[\zeta(\xi,\tau)D_x^2$$

$$\cdot\Gamma(x,t,\xi,\tau)]\}d\xi d\tau$$

$$=\int_{t^0-\delta^2}^{t-0}\int_M u(\xi,\tau)\{2\sum\zeta_{\xi_i}D_x^2\Gamma_{\xi_i}$$

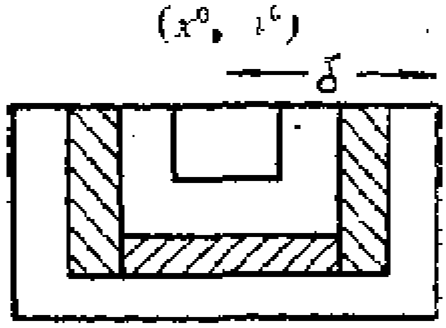
$$+(\Delta_\xi+D_\tau)\zeta\cdot D_x^2\Gamma\}d\xi d\tau$$

当$(x,\ t)\in N_{\frac{1}{4}}$时，由于积分的区域是$(\xi,\tau)\in N_{\frac{3}{4}}\setminus N_{\frac{1}{2}}$，因此，

$$J=J_1+J_2,$$

其中J_1的积分区域（见图中向左斜线的部分）中，由于

$$t\geqslant t^0-\left(\frac{\delta}{4}\right)^2,\quad \tau\leqslant t^0-\left(\frac{\delta}{2}\right)^2$$



所以有

$$t-\tau\geqslant\left(\frac{\delta}{2}\right)^2-\left(\frac{\delta}{4}\right)^2=\frac{3}{16}\delta^2$$

于是有

$$|J_1| \leqslant K \sup_N |u| \int_{t^0-\delta^2}^{t-3\delta^2/16} \int_M \frac{1}{\delta^2 (t-\tau)^{n/2+1}} \Big[1 + \frac{\delta (\sum (x_i-\xi_i)^2)^{1/2}}{t-\tau} \Big] \Big[1 + \frac{\sum (x_i-\xi_i)^2}{t-\tau} \Big]$$

$$\exp\Big[-\frac{\sum (x_i-\xi_i)^2}{4(t-\tau)} \Big] d\xi d\tau$$

$$\leqslant K \sup_N |u| \int_{t^0-\delta^2}^{t-3\delta^2/16} \int_{\mathbf{R}^n} \frac{1}{\delta^2 (t-\tau)} \Big[1 + \frac{\delta\sigma}{(t-\tau)^{1/2}} \Big] (1+\sigma^2) e^{-\sigma^2} d\sigma d\tau$$

$$\leqslant K \sup_N |u| \int_{t^0-\delta^2}^{t-3\delta^2/16} \Big[\frac{1}{t-\tau} + \frac{\delta}{(t-\delta)^{3/2}} \Big] d\tau$$

$$\leqslant K \sup_N |u| \Big(\delta^2 - \frac{3}{16}\delta^2\Big) \delta^{-2} \Big[\frac{1}{\frac{3}{16}\delta^2} + \frac{\delta}{\big(\frac{3}{16}\delta^2\big)^{3/2}} \Big]$$

$$\leqslant \frac{K}{\delta^2} \sup_N |u|$$

J_2 的积分区域是图中向右斜线部分，它满足$2\delta \geqslant |x-\xi| \geqslant \delta/4$。把关于 ξ 积分的被积函数用最大值估计，得到

$$|J_2| \leqslant K \sup_N |u| \int_{t^0-\delta^2}^{t} \frac{\delta^{n-2}}{(t-\tau)^{n/2+1}} \Big(1 + \frac{\delta^2}{t-\tau} \Big)^2 \exp\Big(- \frac{\delta}{64(t-\tau)} \Big) d\tau$$

$$\leqslant K \sup_N |u| \int_{t^0-\delta^2}^{t} \frac{\delta^{n+2}}{(t-\tau)^{n/2+3}} \exp\Big(- \frac{\delta^2}{64(t-\tau)} \Big) d\tau$$

$$\leqslant K\sup_N|u|\int_{1/16}^{\infty}\frac{1}{\delta^2}e^{-\sigma}\sigma^{n/2+1}d\sigma$$

$$\leqslant K\delta^{-2}\sup_N|u|$$

现在对 J 进行关于Hölder条件的估计。

$$|J(P)-J(Q)|\leqslant\Big|\int_{t^0-\delta^2}^{t}\int_M u(\xi,\tau)\{2\sum\zeta_{\xi_j}D_x^2D_{\xi_j}$$

$$[\Gamma(x^0,t^0,\xi,\tau)-\Gamma(x,t,\xi,\tau)]+(\Delta_\xi+D_\tau)\zeta$$

$$D_x^2[\Gamma(x^0,t^0,\xi,\tau)-\Gamma(x,t,\xi,\tau)]\}d\xi d\tau\Big|$$

$$+\Big|\int_t^{t^0}\int_M u(\xi,\tau)[2D_\xi\zeta\cdot D_x^2D_\xi\Gamma(x^0,t^0,\xi,\tau)$$

$$+(\Delta_\xi+D_\tau)\zeta\cdot D_x^2\Gamma(x^0,t^0,\xi,\tau)]d\xi d\tau\Big|$$

$$=|J_3|+|J_4|$$

应用中值定理以及当 $|x-\xi|\geqslant c\delta$ 或 $t-\tau\geqslant c\delta^2$ 时，

$$|D_x^k\Gamma|\leqslant C\delta^{-n-k},\quad |D_x^kD_t\Gamma|\leqslant C\delta^{-n-k-2}$$

我们得到

$$|J_3|\leqslant K\sup_N|u|\int_{(N_{3/4}\setminus N_{1/2})\cap\{\xi,\tau\,|\,t^0-\delta^2<\tau<t\}}\{|x^0-x|$$

$$\Big[\frac{1}{\delta}|D_x^2D_\xi\Gamma(\bar{x},t^0,\xi,\tau)|+\frac{1}{\delta}|D_x^2\Gamma(\bar{x},t^0,\xi,\tau)|\Big]$$

$$+(t^0-t)\Big[\frac{1}{\delta}|D_x^2D_tD_\xi\Gamma(x,\bar{t},\xi,\tau)|$$

$$+\frac{1}{\delta^2}|D_x^2D_t\Gamma(x,\bar{t},\xi,\tau)|\Big]\}d\xi d\tau$$

$$\leqslant K\sup_N|u|\left(\frac{|x^0-x|}{\delta^3}+\frac{t^0-t}{\delta^4}\right)$$

其中$\bar{x}$在x^0、x之间，$t<\bar{t}<t^0$

在估计J_4时，注意到

$$(N_{\frac{3}{4}}\backslash N_{\frac{1}{2}})\cap\{(\xi,\tau);t<\tau<t^0\}$$

不包含图中左斜线区域，而右斜线区域满足

$$|x^0-\xi|\geqslant\delta/2,$$

故得

$$|J_4|\leqslant K\sup_N|u|\int_{(N_{3/4}\backslash N_{1/2})\cap\{(\xi,\tau);t<\tau<t^0\}}\left[\frac{1}{\delta}\left|D_x^2D_t\right.\right.$$

$$\left.\left.\Gamma(x^0,t^0,\xi,\tau)\right|+\frac{1}{\delta^2}\left|D_x^2\Gamma\right|\right]d\xi d\tau$$

$$\leqslant K\sup_N|u|\int_t^{t_0}\frac{\delta^{n+2}}{(t^0-\tau)^{n/2+3}}\exp\left(-\frac{\delta^2}{16(t^0-\tau)}\right)d\tau$$

$$\leqslant K\sup_N|u|\frac{1}{\delta^2}\int_{\delta^2/(16(t^0-t))}^{\infty}e^{-\sigma^2}\sigma^{n/2+1}d\sigma$$

$$\leqslant K\sup_N|u|\frac{1}{\delta^2}\int_{\delta^2/(16(t^0-t))}^{\infty}\sigma^{-m-1}d\sigma$$

$$\leqslant K\sup_N|u|\frac{1}{\delta^2}\left(\frac{t^0-t}{\delta^2}\right)^m$$

其中$m>0$为任意正数，特别取$m=1$得到

$$|J(P)-J(Q)|\leqslant K\sup_N|u|\left(\frac{|x^0-x|}{\delta^3}+\frac{(t^0-t)}{\delta^4}\right)$$

$$\leqslant K\sup_N|u|\left[\frac{d(P,Q)}{\delta}+\frac{(d(P,Q))^2}{\delta^2}\right]$$

$$\leqslant \frac{K}{\delta^2} \sup_N |u| \frac{(d(P,Q))^\lambda}{\delta^\lambda}$$

现在着手估计

$$H(Q) = \bar{f}(x,t) \int_{t^0-\delta^2}^{t} \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x,t,\xi,\tau)$$

$$\cos(\nu,\xi_i) \frac{d\xi}{d\xi_i} d\tau$$

当 $Q=(x, t) \in N_{\frac{1}{4}}$时，

$$|\xi - x| \geqslant |\xi_j - x_j| \geqslant \frac{3}{4}\delta$$

因此

$$|H(Q)| \leqslant K \sup_N |f| \int_{t^0-\delta^2}^{t} \int_{\partial M} \frac{|x_i - \xi_i|}{(t-\tau)^{n/2+1}}$$

$$\exp\left(-\sum (x_k - \xi_k)^2 / 4(t-\tau)\right) \frac{d\xi}{d\xi_j} d\tau$$

$$\leqslant K \sup_N |f| \int_{t^0-\delta^2}^{t} \frac{\delta^n}{(t-\tau)^{n/2+1}}$$

$$\exp\left(-\frac{9\delta^2}{16(t-\tau)}\right) d\tau$$

$$\leqslant K \sup_N |f|$$

$$|H(P) - H(Q)|$$

$$\leqslant \left|\bar{f}(x^0,t^0) - \bar{f}(x,t)\right| \left| \int_{t^0-\delta^2}^{t} \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial x_i} \Gamma(x,t,\xi,\tau)\right.$$

$$\left.\cos(\nu,\xi_i) \frac{d\xi}{d\xi_i} d\tau \right| + \left| \bar{f}(x^0,t^0) \int_{t^0-\delta^2}^{t} \int_{\partial M} \frac{\partial}{\partial x_i}\right.$$

$$\cdot [\Gamma(x^0,t^0,\xi,\tau)-\Gamma(x,t,\xi,\tau)]\cos(\nu,\xi_i)\frac{d\xi}{d\xi_i}d\tau\Bigg|$$

$$+\left|\tilde{f}(x^0,t^0)\right|\left|\int_t^{t_0}\int_{\partial M}\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x^0,t^0,\xi,\tau)\right.$$

$$\left.\cdot\cos(\nu,\xi_i)\frac{d\xi}{d\xi_i}d\tau\right|$$

$$\leqslant K(H_{P,\bar{N}}[f]+\delta^{-\lambda}\sup_N|f|)(d(P,Q))^\lambda$$

$$+K\sup_N|f|\left[\frac{|x^0-x|}{\delta}+\frac{|t^0-t|}{\delta^2}+\left(\frac{t^0-t}{\delta^2}\right)^m\right]$$

特别取 $m=1$，我们有

$$|H(P)-H(Q)|\leqslant K(H_{P,\bar{N}}[f]+\delta^{-\lambda}\sup_N|f|)(d(P,Q))^\lambda$$

现在我们估计

$$G(Q)=\int_{t^0-\delta^2}^{t}\int_M\frac{\partial^2\Gamma(x,t,\xi,\tau)}{\partial x_i\partial x_j}\Big[\tilde{f}(\xi,\tau)$$

$$-\tilde{f}(x,t)\Big]d\xi d\tau$$

我们有

$$|G(Q)|\leqslant K(H_{Q,N}[f]+\delta^{-\lambda}\sup_N|f|)$$

$$\cdot\int_{t^0-\delta^2}^{t}\int_M\frac{1}{(t-\tau)^{n/2+1}}\left[1+\frac{\sum(x_i-\xi_i)^2}{t-\tau}\right]$$

$$\cdot\left[|x-\xi|^\lambda+(t-\tau)^{\lambda/2}\right]\exp\left(-\frac{\sum(x_i-\xi_i)^2}{4(t-\tau)}\right)d\xi d\tau$$

用估计J_1的类似方法，我们得到

$$|G(Q)|\leqslant K(\delta^{\lambda}H_{Q,N}[f]+\sup_{N}|f|)$$

特别有

$$|G(P)|\leqslant K(\delta^{\lambda}H_{P,N}[f]+\sup_{N}[f])$$

我们考察

$$G(P)-G(Q)=\int_{t^0-\delta^2}^{t}\int_{M}\left\{\frac{\partial^2\Gamma(x^0,t^0,\xi,\tau)}{\partial x_i\partial x_j}\right.$$

$$\left[\bar{f}(\xi,\tau)-\bar{f}(x^0,t^0)\right]-\frac{\partial^2\Gamma(x,t,\xi,\tau)}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$[\bar{f}(\xi,\tau)-\bar{f}(x,t)]d\xi d\tau+\int_{t}^{t^0}\int_{M}\frac{\partial^2\Gamma(x^0,t^0,\xi,\tau)}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$[\bar{f}(\xi,\tau)-\bar{f}(x^0,t^0)]d\xi d\tau$$

$$=\int_{t^0-\delta^2}^{t-(1/4)(d(P,Q))^2}\int_{M}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Big[\Gamma(x^0,t^0,\xi,\tau)$$

$$-\Gamma(x,t,\xi,\tau)\Big]\Big[\bar{f}(\xi,\tau)-\bar{f}(x,t)\Big]d\xi d\tau$$

$$+\Big[\bar{f}(x,t)-\bar{f}(x^0,t^0)\Big]\int_{t^0-\delta^2}^{t-(1/4)(d(P,Q))^2}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$\Gamma(x^0,t^0,\xi,\tau)d\xi d\tau-\int_{t-(1/4)(d(P,Q))^2}^{t}\int_{M}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}$$

$$\Gamma(x,t,\xi,\tau)[\bar{f}(\xi,\tau)-\bar{f}(x,t)]d\xi d\tau$$

$$+\int_{t-(1/4)(d(P,Q))^2}^{t^0}\int_{M}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Gamma(x^0,t^0,\xi,\tau)$$

$$[\bar{f}(\xi,\tau)-\bar{f}(x^0,t^0)]d\xi d\tau$$

$$= G_1 + G_2 - G_3 + G_4$$

我们有

$$|G_4| \leqslant K(H_{P,N}[f] + \delta^{-\lambda}\sup_N |f|$$

$$\cdot \int_{t-(1/4)(d(P,Q))^2}^{t^0} \int_{R^n} \left[\frac{1}{(t-\tau)^{n/2+1}} \right.$$

$$\left. + \frac{|x_i^0 - \xi_i||x_j^0 - \xi_j|}{(t^0 - \tau)^{n/2+2}} \right] \left[|x^0 - \xi|^2 + (t^0 - t) \right]^{\lambda/2}$$

$$\exp\left(- \frac{\sum (x_i^0 - \xi_i)^2}{4(t^0 - \tau)} \right) d\xi d\tau$$

$$\leqslant K(H_{P,N}[f] + \delta^{-\lambda}\sup_N |f|) \int_{t-(1/4)(d(P,Q))^2}^{t^0} (t^0 - \tau)^{-1+\lambda/2} d\tau$$

$$\leqslant K(H_{P,N}[f] + \delta^{-\lambda}\sup_N |f|)[t^0 - t + \frac{1}{4}(d(P,Q))^2]^{\lambda/2}$$

$$\leqslant K(H_{P,N}[f] + \delta^{-\lambda}\sup_N |f|)(d(P,Q))^\lambda$$

类似可得

$$|G_3| \leqslant K(H_{Q,N}[f]) + \delta^{-\lambda}\sup_N |f|)(d(P,Q))^\lambda$$

$$G_2 = [\tilde{f}(x^0, t^0) - \tilde{f}(x, t)] \int_{t^0-\delta^2}^{t-(1/4)(d(P,Q))^2} \int_M \frac{\partial \Gamma(x^0, t^0, \xi, \tau)}{\partial x_i}$$

$$\cos(\nu, \xi_j) \frac{d\xi}{d\xi_j} d\tau$$

仿$H(Q)$的估计方法可得

$$|G_2| \leqslant K(H_{P,N}[f] + \delta^{-\lambda}\sup_N |f|)(d(P,Q))^\lambda$$

又

$$G_1=\int_{t^0-\delta^2}^{t-(1/4)(d(P,Q))^2}\int_M (x^0-x)D_x^2\Gamma(\bar{x},t,\xi,\tau)+$$

$$+(t^0-t)D_x^2D_t\Gamma(x^0,\bar{t},\xi,\tau)][\bar{f}(\xi,\tau)-\bar{f}(x,t)]d\xi d\tau$$

其中$\bar{x}$在x与x_i之间，$t<\bar{t}<t^0$。

因此，

$$|G_1|\leqslant K(H_{Q,N}[f]+\delta^{-\lambda}\sup_N|f|)G_5$$

其中

$$G_5=\int_{t^0-\delta^2}^{t-(1/4)(d(P,Q))^2}\int_M\left[|x^0-x|\frac{|\xi-\bar{x}|}{|t-\tau|^{n/2+2}}\left(1\right.\right.$$

$$\left.+\frac{|\xi-\bar{x}|^2}{t-\tau}\right)\exp\left(-\frac{|\xi-\bar{x}|^2}{4(t-\tau)}\right)+(t^0-t)\frac{1}{(\bar{t}-t)^{n/2+2}}$$

$$\left.\left(1+\frac{|\xi-x^0|^2}{\bar{t}-t}\right)\exp\left(-\frac{|\xi-x^0|^2}{4(\bar{t}-t)}\right)\right]$$

$$[|\xi-x|^\lambda+(t-\tau)^{\lambda/2}]d\xi d\tau$$

$$\leqslant K\left\{\int_{-\infty}^{t-(1/4)(d(P,Q))^2}\int_{\mathbf{R}^n}|x^0-x||\sigma|(1+|\sigma|^2)(t\right.$$

$$-\tau)^{\lambda/2-3/2}\left[1+|\sigma|^\lambda+\frac{|\bar{x}-x|^\lambda}{(t-\tau)^{\lambda/2}}e^{-|\sigma|^2}\right]d\sigma d\tau$$

$$+\int_{-\infty}^{\bar{t}-(1/4)(d(P,Q))^2}\int_{\mathbf{R}^n}(t^0-t)(1+|\sigma|^2)(\bar{t}-t)^{\lambda/2-2}\cdot$$

$$\cdot\left[1+|\sigma|^\lambda+\frac{(\bar{t}-t)^{\lambda/2}}{(\bar{t}-\tau)^{\lambda/2}}\right]e^{-|\sigma|^2}d\sigma d\tau$$

$$\leqslant K\left\{\int_{-\infty}^{t-(1/4)(d(P,Q))^2} |x^0-x|(t-\tau)^{\lambda/2-3/2}d\tau\right.$$

$$\left.+\int_{-\infty}^{\bar{t}-(1/4)(d(P,Q))^2}(t^0-t)(\bar{t}-\tau)^{\lambda/2-2}d\tau\right\}$$

$$\leqslant K\{|x^0-x|d(P,Q)^{\lambda-1}+|t^0-t|(d(P,Q))^{\lambda-2}\}$$

$$\leqslant K(d(P,Q))^{\lambda}$$

综合上述对G、H、J的估计，便证明了引理 1。

引理 1 可推广为如下较一般的方程但是常系数的情形。

$$\tilde{\mathscr{L}}u=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}-u_t=f$$

其中a_{ij}为常数且

$$\max_{i,j}|a_{ij}|=k_1,\quad \sum_{i,j}a_{ij}\alpha_i\alpha_j\geqslant k_2|\alpha|^2,\quad \forall\alpha\in\mathbf{R}^n,$$

$k_2>0$是常数。

引理1′ 对方程$\mathscr{L}u=f$，引理 1 的两估计式仍为真，但其中的常数K与n、λ、k_1、k_2有关，$d(p,Q)\leqslant\dfrac{\delta}{4}$要改为$d(p,Q)\leqslant k\delta$，而$k$与$n$、$\lambda$、$k_1$、$k_2$有关。

证 经过适当的转轴变换，把a_{ij}变为$\tilde{a}_{ij}$，其中

$$\tilde{a}_{ij}=0\quad i\neq j,\quad \tilde{a}_{ii}>0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

它们的最大最小值仅与k_1、k_2有关，作变换

$$\frac{x_i}{\sqrt{\tilde{a}_{ii}}}=\tilde{x}^i$$

则方程化为

$$\sum_i \tilde{u}_{\tilde{x}_i \tilde{x}_i} - \tilde{u}_t = f$$

N变为$\tilde{N}$，在$\tilde{N}$内截出小的正方体应用引理1，再复原就得到引理1′的结果。

为了介绍引理2，我们设$0 \leqslant \bar{\delta} \leqslant \frac{\delta}{4}$，记

$$M = \{x \mid |x_i - x_i^0| < \delta, \ i = 1, 2, \cdots, n-1,$$

$$-\delta < x_n - x_n^0 < \bar{\delta}\}$$

$$N = M \times \{0 < t < t^0\}$$

其中t^0满足 $t^0 \leqslant \delta^2$。

引理2 设$u(x, t) \in C^{2,1}(N) \cap C(\bar{N})$满足

$$\mathscr{L}_0 u = f \quad 于N,$$

$f(x, t) \in C^{\lambda, \lambda/2}(\bar{N})$，$0 < \lambda < 1$。如果

$$u = 0于\partial N的x_n = x_n^0 + \bar{\delta}与t = 0$$

$$f = 0于\partial N \cap \{x_n = x_n^0 + \bar{\delta}_n\} \cap \{t = 0\}$$

上，则存在常数K仅依赖于n、λ使

$$|D_x^2 u(P)| \leqslant K(\delta^{-2}\sup_N |u| + \sup_N |f| + \delta^\lambda H_{P,N}[f])$$

$$\equiv KI$$

$$\delta^\lambda |D_x^2 u(P) - D_x^2 u(Q)| / (d(P,Q))^\lambda \leqslant KI + K\delta^\lambda H[f]$$

当$d(P, Q) \leqslant \delta/4$，$Q \in N$时成立，其中$P = (x^0, t^0)$，$H[f]$为$f$于$\bar{N}$中指数为$\lambda$的Hölder系数。

附注 $f = 0于\partial N \cap \{x_n = x_n^0 + \bar{\delta}_n\} \cap \{t = 0\}$

是保证方程

$$\mathscr{L}_0 u = f \quad 于 \partial N \cap \{x_n = x_n^0 + \bar{\delta}\}$$

上成立的必要条件。因为当

$$x_n = x_n^0 + \bar{\delta} 时，\ u_{x_1 x_1} = \cdots = u_{x_{n-1} x_{n-1}} = u_t = 0,$$

以及

当$t = 0$时，$u_{x_n x_n} = 0$

因此，如果有

$$\mathscr{L}_0 u = f 于 \partial N \cap \{x_n = x_n^0 + \bar{\delta}\} \cap \{t = 0\}$$

则必有

$$0 = \mathscr{L}_0 u = f 于 \partial N \cap \{x_n = x_n^0 + \bar{\delta}\} \cap \{t = 0\}$$

引理2之证 我们用函数延拓法，先考察单变量函数 $g(x) \in C^\lambda[-\alpha, 0]$向$\alpha > 0$的延拓，我们用下述方法把 g 延拓于$x > 0$使得仍然保持$g \in C^2$。令

$$g(x) = pg(-x) + qg\left(-\frac{9}{10}x\right) + rg\left(-\frac{4}{5}x\right), \quad \left(0 < x < \frac{4}{5}\right)$$

选取常数p、q、r使之满足

$$p + q + r = 1, \quad p + \frac{9}{10}q + \frac{4}{5}r = -1, \quad p + \frac{81}{100}q + \frac{16}{25}r = 1$$

在这一选取之下，我们有$g(x) \in C^2[-\alpha, \frac{4}{5}\alpha)$；如果$g \in C^\lambda[-\alpha, 0]$，则按上述方法延拓后有$g(x) \in C^\lambda[-\alpha, \frac{4}{5}\alpha]$，因为当 $x_1 < 0$、$x_2 > 0$时有

$$\begin{aligned}|g(x_2) - g(x_1)| &\leqslant |g(0) - g(x_1)| + |g(x_2) - g(0)| \\ &\leqslant K[|g(0) - g(x_1)| + |g(0)\end{aligned}$$

$$-g(-x_2)|+|g(0)-g(-\frac{9}{10}x_2)|$$

$$+|g(0)-g(-\frac{4}{5}x_2)|]$$

$$\leqslant KH(g)[(-x_1)^\lambda+x_2{}^\lambda]$$

$$\leqslant 2KH[g](x_2-x_1)^\lambda$$

现在来推导 $u(x,t)$ 的关系式，在格林公式中把 u 写成 $u(\xi,\tau)$ 而取

$$v(\xi,\tau)=\zeta(\xi,\tau)\bar{\Gamma}(x,t,\xi,\tau)$$

其中 $\zeta(\xi,\tau)$ 与引理 1 中的一样，而

$$\bar{\Gamma}(x,t,\xi,\tau)=\Gamma(x,t,\xi,\tau)-\Gamma(x',t,\xi,\tau)$$

这里 Γ 是算子 $\mathscr{L}_0$ 的基本解，$x'=(x_1',\ \cdots,\ x_n')$。由

$$x_i'=x_i,\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ \ x_n'=2(\bar{\delta}+x_n^0)-x_n$$

定义，则有

$$\bar{\Gamma}(x,t,x_n^0+\delta,\tau)=0$$

又由于

$$u|_{x_n=x_n^0+\delta}=u|_{t=0}=0$$

由格林公式得

$$u(x,t)=-\int_0^t\int_M \tilde{f}(\xi,\tau)\bar{\Gamma}(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$+\int_0^{t-0}\int_M u(\xi,\tau)\mathscr{L}_0^*[\zeta(\xi,\tau)\bar{\Gamma}(x,t,\xi,\tau)]d\xi d\tau$$

其中

$$\tilde{f}(\xi,\tau)=\zeta(\xi,\tau)f(\xi,\tau)$$

在上面 $u(x,t)$ 的表达式二边对 x 微二次，仿引理1的推导得

$$u\in C_2^1(N\cup\{\partial N\cap\{t=0,\ x_n^0-\delta<x_n<x_n^0+\delta\}\})。$$

由于

$$\frac{\partial\bar{\Gamma}}{\partial x_i}=-\frac{\partial\bar{\Gamma}}{\partial\xi_i}\qquad i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$$

仿引理1的推导可得

$$u_{x_ix_i}\in C^{\lambda,\lambda/2}[N\cup(\partial N\cup\{t=0,\ x_n=x_n^0+\delta\})],\quad i\neq n$$

这里还缺少 $u_{x_nx_n}$ 的估计，我们先估计 u_t，然后由方程可得 $u_{x_nx_n}$ 的估计。为此考虑

$$\frac{1}{\Delta t}[u(x,t+\Delta t)-u(x,t)]=-\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\int_M\tilde{f}(\xi,\tau)$$

$$\cdot\bar{\Gamma}(x,t+\Delta t,\xi,\tau)d\xi d\tau-\int_0^t\int_M\frac{1}{\Delta t}[\bar{\Gamma}(x,t$$

$$+\Delta t,\xi,\tau)-\bar{\Gamma}(x,t,\xi,\tau)][\tilde{f}(\xi,\tau)-\tilde{f}(x,t)]d\xi d\tau$$

$$-\tilde{f}(x,t)\int_0^t\int_M\frac{1}{\Delta t}[\bar{\Gamma}(x,t+\Delta t,\xi,\tau)-\bar{\Gamma}(x,t,\xi,$$

$$\tau)]d\xi d\tau+\int_0^{t+\Delta t-0}\int_M u(\xi,\tau)\mathscr{L}_0^*[\zeta(\xi,\tau)\bar{\Gamma}(x,t$$

$$+\Delta t,\xi,\tau)]d\xi d\tau-\int_0^{t-0}\int_M u(\xi,\tau)\mathscr{L}_0^*[\zeta(\xi,\tau)$$

$$\cdot\bar{\Gamma}(x,t,\xi,\tau)]d\xi d\tau$$

而

$$\int_0^t\int_M \frac{1}{\Delta t}\,[\bar{\Gamma}(x,t+\Delta t,\xi,\tau)-\bar{\Gamma}(x,t,\xi,\tau)]d\xi d\tau$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\left(\int_0^t-\int_{-\Delta t}^{t-\Delta t}\right)\int_M\bar{\Gamma}(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\left(\int_{t-\Delta t}^{t}-\int_{-\Delta t}^{0}\right)\int_M\bar{\Gamma}(x,t,\xi,\tau)d\xi d\tau$$

当$Q\in\bar{N}$，$d(P,\ Q)\leqslant\dfrac{\delta}{2}$时，令$\Delta t\to0$得

$$D_t u(x,t)=-\tilde{f}(x,\ t)-\int_0^t\int_M D_t\bar{\Gamma}(x,t,\xi,\tau)[\tilde{f}(\xi,\tau)$$

$$-\tilde{f}(x,t)]d\xi d\tau+\tilde{f}(x,t)[1-\int_M\bar{\Gamma}(x,t,\xi,0)d\xi]$$

$$+\int_0^{t-0}\int_M u(\xi,\tau)\mathscr{L}_\xi^* D_t[\zeta(\xi,\tau)\bar{\Gamma}(x,t,\xi,\tau)]d\xi d\tau$$

$$=-\tilde{f}(x,t)-G+H+J$$

当 $d(P,\ Q)\leqslant\dfrac{\delta}{4}$，$d(P,\ R)\leqslant\dfrac{\delta}{3}$时

仿引理 I 证得

$$|J(Q)-J(R)|\leqslant K\sup_{N}\frac{(d(P,Q))^{\lambda}}{\delta^{2+\lambda}}.$$

故当$Q\in\bar{N}$、$d(P,\ Q)\leqslant\dfrac{\delta}{4}$时，$J$ 对Q为连续，仿引理 1 的证明可知$G(Q)$的积分为绝对一致收敛，所以$G(Q)$连续。

其次考察H，我们有

$$\int_M\bar{\Gamma}(x,t,\xi,0)d\xi=\int_M\frac{1}{(4\pi t)^{n/2}}\exp\left(-\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\xi_i)^2}{4t}\right)$$

$$\left[\exp\left(-\frac{(x_n-\xi_n)^2}{4t}\right)-\exp\left(-\frac{(\xi_n+x_n-2x_n^0-2\delta)^2}{4t}\right)\right]d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi^{n/2}}\prod_{i=1}^{n-1}\int_{(x_i^0-x_i-\delta)/(2\sqrt{t})}^{(x_i^0-x_i+\delta)/(2\sqrt{t})}e^{-\sigma_i^2}d\sigma_i\left(\int_{(x_n^0-x_n-\delta)/(2\sqrt{t})}^{(x_n^0-x_n+\delta)/(2\sqrt{t})}\right.$$

$$\left.-\int_{(x_n-x_n^0-\delta-2\bar{\delta})/(2\sqrt{t})}^{(x_n-x_n^0-\bar{\delta})/(2\sqrt{t})}\right)e^{-\sigma_n^2}d\sigma_n$$

$$=\frac{1}{\pi^{n/2}}\prod_{i=1}^{n-1}\int_{(x_i^0-x_i-\delta)/(2\sqrt{t})}^{(x_i^0-x_i-\delta)/(2\sqrt{t})}e^{-\sigma_i^2}d\sigma_i\left(\int_{(x_n-x_n^0-\delta)/(2\sqrt{t})}^{(x_n^0-x_n+\delta)/(2\sqrt{t})}\right.$$

$$\left.-\int_{(x_n-x_n^0-\delta-2\bar{\delta})/(2\sqrt{t})}^{(x_n^0-x_n-\delta)/(2\sqrt{t})}\right)e^{-\sigma_n^2}d\sigma_n$$

由此可见，在$\partial N\cap\{x_n=x_n^0+\bar{\delta}\}$附近，当$t\neq0$时$\int_M\Gamma(x,\ t,\ \xi,0)d\xi$是$(x,\ t)$的连续函数；当$t=0$时，它仅是有界函数，随$(x_n^0+\bar{\delta}-x_n)/\sqrt{t}$极限值的不同而取不同的数值。由于

$$f(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ x_n^0+\bar{\delta},\ 0)=0$$

因此得到H在$N\cup(\partial N\cap\{x_n=x_n^0+\bar{\delta}\})$上为连续，$u_t$于$N\cap\{\partial N\cap\{x_n=x_n^0+\delta\}\}$上为连续。从

$$u_{x_nx_n}=u_t-f-\sum_{i=1}^{n-1}u_{x_ix_i}$$

得到$u_{x_nx_n}$在$N\cup(\partial N\cap\{x_n=x_n^0+\delta\})$上为连续。

从上面u_t的表达式估得

$$|u_t(P)|\leqslant K\delta^{-2}\sup_N|u|+\sup_N|f|+\delta^\alpha H_{P,N}[f])$$

$$=KI$$

据此并结合

$$|u_{x_i x_j}(P)|\leqslant KI$$

的估计，我们得到

$$|u_{x_n x_n}(P)|\leqslant KI$$

由关系式

$$u(x,t)=pu(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ 2\bar{\delta}+x_n^0-x_n,\ \ t)$$

$$+qu(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ \frac{19}{10}\bar{\delta}+x_n^0-\frac{9}{10}x_n,\ \ t)$$

$$+ru(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{n-1},\ \frac{9}{5}\bar{\delta}+x_n^0-\frac{4}{5}x_n,\ \ t)$$

延拓$u(x,t)$于$x_n^0+\bar{\delta}<x\leqslant x_n^0+\bar{\delta}+\frac{4}{5}\delta$。记

$$\widetilde{M}=\{x\,|\,|x_i-x_0|<\frac{4\delta}{5},\ \ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$$

则$u\in C_x^2(\widetilde{M}\times[0,\ t^0])$，对$f$作类似的延拓，则$f$在$\widetilde{N}=\widetilde{M}\times[0,\ t^0]$上满足Hölder条件：

$$H_{P,\widetilde{N}}[f]\leqslant KH_{P,N}[f]$$

$$H_{Q,\widetilde{N}}[f]\leqslant KH_N[f]$$

在$\widetilde{N}$上应用引理 1，就得到引理 2 的二个结果。

引理2′ 对常系数方程

$$\widetilde{\mathscr{L}}u=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}-u_t=f$$

其中

$$\max_{i,j}|a_{ij}|\leqslant k_1,\quad \sum a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant k_2|\xi|^2$$

设 $u\in C^{2,1}(N)\cap C(\overline{N})$，$N$ 的定义见引理 2，$f(x,t)\in C^{\lambda,\lambda/2}(\overline{N})$，$0<\lambda<1$，且设

$u=0$ 于∂N的$x_n=x_n^0+\delta$与$t=0$上，

$f=0$ 于$\partial N\cap\{x_n=x_n^0+\delta\}\cap\{t=0\}$，

则存在仅依赖于n、λ、k_1、k_2的常数K使

$$|D_x^2u|\leqslant K(\delta^{-2}\sup_N|u|+\sup_N|f|+\delta^\lambda H_{P,N}[f])$$

$$=KI$$

$$\delta^\lambda|D_x^2u(P)-D_x^2u(Q)|/(d(P,Q))^\lambda\leqslant K(I+H_N[f])$$

当$Q\in\overline{N}$，$d(P,Q)\leqslant k\delta$时成立。

证 作转轴变换与倍乘变换，长方体变为边长不等的斜长方体，在斜方向作延拓，在其内截取小长方体，按引理 1 得到估计，再作逆变换返回即可。

§3 第一边值问题解的Schauder内估计与近边估计

设有界区域 $D\subset\mathbf{R}^n\times(0,T]$，$\partial D\cap\{t=0\}$与$\partial D\cap\{t=T\}$皆非空，置$P=(x,t)$，$Q=(\xi,\tau)$。令

$$d(P,Q)=[|\xi-x|^2+|\tau-t|]^{1/2}$$

记

$$d_P = \inf_{Q\in\partial D\cap\{0\le t\le T\}\cup D\times\{t=0\}} d(P,Q)$$

$$d_{PQ} = \min(d_P,\ d_Q)$$

对非负整数p、m与$\lambda\in(0,\ 1)$，记

$$|g|_{p,m} = \sum_{j=0}^{m}[g]_{p,j}$$

$$|g|_{p,m+\lambda} = |g|_{p,m} + \sum_{j=0}^{m}[g]_{p,j+\lambda}$$

其中

$$[g]_{p,j} = \sup_{P\in D} d_P^{p+j}|D_x^j g(P)|$$

$$[g]_{p,j+\lambda} = \sup_{P,Q\in D} d_{PQ}^{p+j+\lambda}|D_x^j g(P) - D_x^j g(Q)|/(d(P,Q))^\lambda$$

注意：这里取sup要包括写为D_x^j中不同的微商。

定理1 设$|a_{ij}|_{0,\lambda}\leqslant k_1$，$|b_i|_{1,\lambda}\leqslant k_1$，$|c|_{2,\lambda}\leqslant k_1$，$(i,\ j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。$\forall\xi\in\mathbf{R}^n$，$(x,\ t)\in D$有

$$\sum_{i,j}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant k_2|\xi|^2,\ \ k_2>0$$

且设$|f|_{2,\lambda}<\infty$，则存在仅依赖于k_1、k_2、n、λ的K使当$u\in C^{2,1}(D)$为

$$\mathscr{L}u = f$$

的解，$|u|_0<\infty$时，有$u\in C^{2+\lambda,1+\lambda/2}(D)$且

$$|u|_{0,2+\lambda}\leqslant K(|u|_0 + |f|_{2,\lambda})$$

证 与椭圆型的情况基本类似，但有差别。不失一般性可设

$[u]_{0,2}<\infty$，$[u]_{0,i+\lambda}<\infty$，$i=0, 1, 2$。

否则，先在内部区域 $D_\varepsilon(\{P|P\in D, d_P\geq\varepsilon\})$ 上得到结果，再令 $\varepsilon\to 0$ 即可。由于 $[u]_{0,2}<\infty$，故存在点 $P=(x^0, t^0)\in D$ 与一个固定的微商 D_x^2 使

$$\frac{1}{2}[u]_{0,2}\leq d_P^2|D_x^2(P)|。$$

记上顶中心为 P，半边长为 $\delta=\theta d_P$ 的半正方体为 N，其中 $\theta<1/2(n+1)^{\frac{1}{2}}$ 为待定正常数，我们把方程 $\mathscr{L}u=f$ 写为

$$\begin{aligned}\sum a_{ij}(P)u_{x_ix_j}-u_t&=\sum[a_{ij}(P)-a_{ij}(Q)]u_{x_ix_j}\\&\quad-\sum b_i(Q)u_{x_i}-c(Q)u+f(Q)\\&\equiv F(Q),\quad Q=(x,t)。\end{aligned}$$

应用前节引理1′的估计得

$$\begin{aligned}|D_x^2u(P)|&\leq K(\delta^{-2}\sup_N|u|+\sup_N|F|+\delta^\lambda H_{P,N}[F])\\&\equiv KI\end{aligned}$$

我们有

$$\delta^{-2}\sup_N|u|\leq\theta^{-2}d_P^{-2}\sup_D|u|$$

当 $Q\in N$ 时有

$$d_Q\geq(1-\theta(n+1)^{\frac{1}{2}})d_P\geq\frac{1}{2}d_P$$

故有

$$\sup_N|F|\leqslant\sup_N\{|f|+\sum|b_i||u_{x_i}|+|c||u|$$

$$+\sum|a_{ij}(P)-a_{ij}(Q)||u_{x_ix_j}|\}$$

$$\leqslant Kd_P^{-2}(|f|_{2,\lambda}+|u|_{1,2})+K\frac{(\theta d_P)^\lambda}{(d_P/2)^2}d_P^{-2}[u]_{0,2}$$

$$\leqslant Kd_P^{-2}\{|f|_{2,\lambda}+|u|_{0,2}+\theta^\lambda[u]_{0,2}\}$$

由于

$$H_{P,N}[gh]\leqslant|g(P)|H_{P,N}[h]+\sup_N|h|H_{P,N}[g]$$

故有

$$\delta^\lambda H_{P,N}[F]\leqslant K\delta^\lambda d_P^{-2-\lambda}|f|_{2,\lambda}+K\delta^\lambda\{\sum|b_i(P)|$$

$$\cdot H_{P,N}[D_xu]+|c(P)|H_{P,N}[u]\}$$

$$+K\delta^\lambda\{\sum H_{P,N}[a_{ij}]\sup|D_x^2u|$$

$$+\sum H_{P,N}[b_i]\sup_N|D_xu|+H_{P,N}[c]\sup_N|u|\}$$

$$\leqslant K\theta^\lambda d_P^{-2}|f|_{2,\lambda}+K\theta^\lambda d_P^{\lambda-2}\sum_{i=0}^{1}d_P^iH_{P,N}[D_x^iu]$$

$$+K\theta^\lambda d_P^{-2}|u|_{0,2} \qquad (*)$$

而

$$H_{P,N}[D_xu]=\sup_{Q\in N,i=1,2,\cdots,n}|u_{x_i}(P)-u_{x_i}(Q)|$$

$$/(d(P,Q))^\lambda,$$

对 $P=(x^0,t^0)$，记

$$Q=(x^1,\ t^1),\ R=(x^0,\ t^1)$$

则

$$\frac{|u_{x_i}(P)-u_{x_i}(Q)|}{(d(P,Q))^\lambda}\leqslant\frac{|u_{x_i}(R)-u_{x_i}(Q)|}{|x^0-x^1|^\lambda}$$

$$\cdot\left(\frac{|x^0-x^1|^2}{|x^0-x^1|^2+|t^0-t^1|}\right)^{\lambda/2}+\frac{|u_{x_i}(P)-u_{x_i}(R)|}{|t^0-t^1|^{\lambda/2}}$$

$$\cdot\frac{|t^0-t^1|^{\lambda/2}}{(|x^0-x^1|^2+|t^0-t^1|)^{\lambda/2}}$$

记

$$\Delta x_i=(0,\ 0,\ \cdots 0,(t_0-t_1)^{\frac{1}{2}},\ 0,\ \cdots,\ 0),$$

则

$$|u_{x_i}(P)-u_{x_i}(R)|=|(u(P+\Delta x_i)-u(P))/(t_0-t_1)^{1/2}$$

$$+\frac{(t_0-t_1)^{1/2}}{2}u_{x_ix_i}(P+\theta\Delta x_i)-(u(R+\Delta x_i)$$

$$-u(R))/(t_0-t_1)^{1/2}-\frac{(t_0-t_1)^{1/2}}{2}u_{x_ix_i}(R+\theta'\Delta x_i)|$$

$$\leqslant|t_0-t_1|^{\frac{1}{2}}\overline{PR}\cdot 2\sup|u_t|+|t_0-t_1|^{\frac{1}{2}}\sup|u_{x_ix_i}|$$

$$\leqslant|t_0-t_1|^{\frac{1}{2}}(2\sup|\sum a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum b_iu_{x_i}+cu$$

$$+f|+\sup|u_{x_ix_j}|)$$

在估计不等式的过程中，出现的θ、θ'满足$0<\theta$，$\theta'<1$，因此有

$$|u_{x_i}(P)-u_{x_i}(Q)|/(d(P,Q))^\lambda\leqslant|x^0-x^1|^{1-\lambda}d_P^{-2}[u]_{0,2}$$

$$+K|t_0-t_1|^{1/2-\lambda/2}d_P^{-2}([u]_{0,2}+|f|_{2,0})$$

$$\leqslant K\theta^{1-\lambda}d_P^{1-\lambda}d_P^{-2}(|u|_{0,2}+|f|_{2,\lambda})$$

故得

$$H_{P,N}[D_x u]\leqslant K\theta^{1-\lambda}d_P^{-1-\lambda}(|u|_{0,2}+|f|_{2,\lambda}) \qquad (**)$$

类似且更简单地得到

$$H_{P,N}[u]\leqslant K\theta^{1-\lambda}d_P^{-\lambda}(|u|_{0,2}+|f|_{2,\lambda}) \qquad (***)$$

将(**)、(***)代入(*)式得到

$$\delta^\lambda H_{P,N}[F]\leqslant K\theta^\lambda d_P^{-2}(|f|_{2,\lambda}+|u|_{0,2})$$

因此有

$$d_P^2 I\leqslant K(\theta^{-2}|u|_3+|f|_{2,\lambda}+|u|_{0,1}+\theta^\lambda|u|_{0,2})$$

u 的一阶微商可用函数本身及二阶微商估计，即

$$|u|_{0,1}\leqslant\varepsilon|u|_{0,2}+\frac{C}{\varepsilon}\|u\|_0,\quad C\text{与}\varepsilon\text{无关}$$

取 $\varepsilon=\theta^\lambda$代入前式，得到

$$|u|_{0,2}\leqslant 2Kd_P^2 I$$

$$\leqslant K(\theta^{-2}|u|_0+|f|_{2,\lambda}+\theta^\lambda|u|_{0,2})$$

取 θ 使 $K\theta^\lambda=\frac{1}{2}$由此得到

$$|u|_{0,2}\leqslant K(|u|_0+|f|_{2,\lambda}) \qquad (1)$$

现估计$|u|_{0,2+\lambda}$，由于它为有限，因此存在P、$Q\in D$及确定的微商D_x^2使

$$\frac{1}{2}|u|_{0,2+\lambda}\leqslant d_{PQ}^{2+\lambda}|D_x^2u(P)-D_x^2u(Q)|/(d(P,Q))^\lambda$$

对二点 $Q=(x, t)$、$P=(x^0, t^0)$，不失一般性可设$t\leqslant t^0$，θ为待定常数。

当 $d(P,Q)\geqslant\theta d_{PQ}/[4(n+1)^{\frac{1}{2}}]$时，有

$$|u|_{0,2+\lambda}\leqslant Kd_P^{\lambda}\theta^{-\lambda}|D_x^2u(P)|+Kd_Q^{\lambda}\theta^{-\lambda}|D_x^2u(Q)|$$

$$\leqslant K\theta^{-\lambda}|u|_{0,2}$$

当$d(P,Q)<\theta d_{PQ}/[4(n+1)^{1/2}]^2$时，$d(P,Q)$

$$<\theta d_P/[4(n+1)^{1/2}]$$

设N是上顶中心为P、半边长为$\delta=\theta d_p$的正方体，应用前节引理1′得

$$\delta^{\lambda}|D_x^2u(P)-D_x^2u(Q)|/(d(P,Q))^{\lambda}\leqslant KI+K\delta^{\lambda}H_{Q,N}[F]$$

其中I的估计前面已经得到，而

$$\delta^{\lambda}H_{Q,N}[F]\leqslant K\theta^{\lambda}d_P^{-2}(|f|_{2,\lambda}+|u|_{0,2})$$

$$+K\delta^{\lambda}\sum|a_{ij}(P)-a_{ij}(Q)|H_{QN}[D_x^2u]$$

上式右端最后一项可估计如下：

$$K(\theta d_P)^{\lambda}d_{PQ}^{-\lambda}(d(P,Q))^{\lambda}H_{Q,N}[D_x^2u]$$

$$\leqslant K\theta^{2\lambda}d^{\lambda}{}_PH_{Q,N}[D_x^2u]$$

$$\leqslant K\theta^{2\lambda}d_P^{-2}|u|_{0,2+\lambda}$$

结合上述估计得到

$$|u|_{0,2+\lambda}\leqslant K\theta^{-\lambda}d_P^{\lambda}I+K\theta^{-\lambda}d_P^{\lambda}\delta^{\lambda}H_{Q,N}[F]$$

$$\leqslant K(\theta^{-2-\lambda}|u|_0+\theta^{-\lambda}|f|_{2,\lambda}+|u|_{0,2}+\theta^{\lambda}|u|_{0,2+\lambda})$$

综合二种情形得

$$|u|_{0,2+\lambda}\leqslant K(\theta^{-2-\lambda}|u|_0+\theta^{-\lambda}|f|_{2,\lambda}+\theta^{-\lambda}|u|_{0,2}$$

$$+\theta^{\lambda}|u|_{0,2+\lambda})$$

取 θ 适当小使$K\theta^{\lambda}\leqslant\frac{1}{2}$，并结合(1)得到，

$$|u|_{0,2+\lambda}\leqslant K(|u|_0+|f|_{2,\lambda})$$

定理 I 证毕。

现考虑近边估计问题，记

$$\overline{D}_0=\partial D\cap\{t=0\},$$

$\overline{D}_0$的内区域为D_0，$\partial D\cap\{0<t\leqslant T\}=S$,

$$S\cap\{0<t\leqslant\sigma\}=S_\sigma。$$

设∂D内的区域$R\subset\overline{D}_0\cup S$，$\forall P=(x,\ t)\in D$，记

$$\overline{d}_P=d(P,\overline{D}_0\cup S_\sigma\backslash R),\quad \overline{d}_{PQ}=\min(\overline{d}_P,\overline{d}_Q)$$

置

$$|g|^R_{P,m}=\sum_{j=0}^{m}[g]^R_{P,j},\quad |g|^R_{P,m+\lambda}=|g|^R_{P,m}+\sum_{j=0}^{m}[g]^R_{P,j+\lambda}$$

其中

$$[g]^R_{P,j}=\sup_{P\in D}\overline{d}_P^{\,\mu+j}|D^j_xg(P)|$$

$$[g]^R_{P,j+\lambda}=\sup_{P,Q\in D}\overline{d}_{PQ}^{\,\mu+j+\lambda}|D^j_xg(P)-D^j_xg(Q)|/(d(P,Q))^{\lambda}$$

上面定义了D中函数的范数，下面定义 R 上函数 ϕ 的范数，如能延拓 ϕ 成为Ψ于$D\cup D_T\cup R$中，使

$$\Psi|_R=\phi,\quad \Psi\in C^{2+\lambda,1+\lambda/2}(D\cup D_T\cup R)$$

以及

$$|\Psi|^{*}=|\Psi|^{R}_{0,2+\lambda}+\left|\frac{\partial\Psi}{\partial t}\right|^{R}_{2,\lambda}<\infty,$$

那么我们定义

$$|\phi|^{R}_{2+\lambda}=\inf|\Psi|^{*},$$

这里$\inf$是在满足上述诸性质的拓广类中取的。

定理2 设$u\in C^{2,1}(D)\cap C(\bar{D})$，于$D$中满足 $\mathscr{L}u=f$，又$R\subset\bar{D}_0\cup S$，于$R\cap\bar{S}$附近存在足标i，使它能用

$$x_i=h(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n,\ t)$$

表示，其中h、D_xh、D_x^2h、D_th都是指数为λ的Hölder 连续函数，又设

$$|a_{ij}|^{R}_{0,\lambda}\leqslant\bar{K}_1,\quad |b_i|^{R}_{0,\lambda}\leqslant\bar{K}_1,\quad |c|^{R}_{0,\lambda}\leqslant\bar{K}_1$$

$\forall\xi\in\mathbf{R}^n$，$(x,\ t)\in D$有

$$\sum a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j\geqslant K_2|\xi|^2,\quad (K_2>0)$$

再设

$$|f|^{R}_{0,\lambda}<\infty,\quad \sup_D|u|<\infty,\quad u=\phi\text{于}R$$

其中$|\phi|^{R}_{2+\lambda}<\infty$，在$R\cap\partial D_0$上满足连接条件。如果$R_0\subset R$且$d(R_0,$ $(\bar{D}_0\cup S)\setminus R)>0$，则存在仅依赖于$\bar{K}_1$、$K_2$、$n$、$\lambda$、$R_0$、$R$ 与D的正常数$\bar{K}$使

$$|u|^{R_0}_{0,2+\lambda}\leqslant\bar{K}(|u|_0+|\phi|^{R}_{2+\lambda}+|f|^{R}_{2+\lambda})$$

证 由于内估计成立，因此，要证明上式成立，仅需在近边薄

层中证明即可，近边薄层可用有限个球心在 $P_0\in R_0$、半径 r 很小的球 $B(P_0,r)$ 去复盖，因此仅需在 $B(P_0,r)$ 中证明即可。这里 $P_0\in\overline{D}_0$ 或者是 $P_0\in\overline{S}_0$，或者是 $P_0\in\overline{D}_0\cap\overline{S}_0$。由于前二种情况是后者的特殊情况，因此仅需考察后者即可。

取 r 充分小，使 $\overline{D}_0\cup S$ 在球 B 内的部分就是 R 在球 B 内的部分，且 $\overline{S}$ 在 B 内部分不妨设有表达式

$$x_n=h(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ t),$$

这里 h、D_xh、D_x^2h，D_th 都是指数为 λ 的Hölder连续函数。

变换

$$t'=t,\ x_i'=x_i,\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,$$

$$x_n'=x_n-h(x_1,\ \cdots,\ x_{n-1},\ t)$$

是一对一的，经过这一变换，有正的常数 k_1、k_2 使

$$k_1d(P,\ Q)\leqslant d(P',\ Q')\leqslant k_2d(P,\ Q)$$

成立，这变换把抛物型方程化到抛物型方程，这是因为固定 t 时，上述 x 的变换使椭圆型方程仍变与椭圆型方程，且

$$|a_{ij}|_{0,\lambda}\leqslant\overline{K}_1,\ \cdots,\ \sum a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant K_2|\xi|^2$$

中的 $\overline{K}_1$、K_2 等变为它们自身的某一倍数。因此不失一般性，可设 $S\cap B$ 为 $x_n=0$ 的一部分，$D_0\cap B$ 为 $t=0$ 的一部分，$D\cap B\subset\{(x,\ t)|x_n>0,\ t>0\}$，应用前节引理2′得

$$|u-\Psi|^{R_0\cap B}_{t,2+\lambda}\leqslant K(|u-\Psi|^{R\cap B}_{0}+|f-\mathscr{L}\Psi|^{R\cap B}_{2,\lambda})$$

由此得到定理 2 的结论。

§4 第一边值问题解的存在性与可微性

首先介绍抛物算子

$$\mathscr{L}u=f$$

的闸函数，这里

$$\mathscr{L}=\sum a_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}+\sum b_i\frac{\partial}{\partial x_i}+c-\frac{\partial}{\partial t}$$

记

$$\bar{D}_0=\partial D\cap\{t=0\},\ S=\partial D\cap\{0<t\leqslant T\}$$

对$Q\in\bar{D}_0\cup S$，如$w_Q(x,t)$满足

$$w_Q\in C^{2,1}(D\cup D_T)\cap C(\bar{D}),$$

和

$$w_Q(Q)=0,\ w_Q(P)>0,\ P\in\bar{D}\setminus\{Q\}$$

以及

$$\mathscr{L}w_Q\leqslant-1\text{于}D\cup D_T,$$

则称w_Q为$\mathscr{L}$于Q的**闸函数**。

当 $Q=(x^0,0)\in\bar{D}_0$时，

$$w_Q(x,t)=(|x-x^0|^2+At)e^{\gamma t}$$

为闸函数、此处$\gamma\geqslant c(x,t)$，A为足够大的常数，这是因为

$$\mathscr{L}w_Q=[2\sum a_{ii}+2b_i(x_i-x_i^0)+(c-\gamma)(|x-x^0|^2+At)-A]e^{\gamma t}\leqslant-1$$

当$Q=(x^0,t^0)\in S$，设有以$(\bar{x},\bar{t})$为中心的球B使$B\cap D=\phi$，$\bar{B}\cap\bar{Q}=\{Q\}$，且设$\bar{x}\neq x$，$\forall(x,t)\in\bar{D}$，则于Q存在闸函数w_Q，例如可取

$$w_Q(x,t)=ke^{\gamma t}(R_0^{-p}-R^{-p})$$

其中

$$R_0=[|x^0-\bar{x}|^2+|t^0-\bar{t}|^2]^{1/2},\quad R=[|x-\bar{x}|^2$$
$$+|t-\bar{t}|^2]^{1/2}$$

取γ使$\gamma\geqslant c(x,\ t)$，又k、p为适当选取的常数。这是因为

$$\mathscr{L}w_Q=kpe^{\gamma t}R^{-p-4}\{-(p+2)\sum a_{ij}(x_i-\bar{x}_i)(x_j-\bar{x}_j)$$
$$+R^2[\sum a_{ii}+\sum b_i(x_i-\bar{x}_i)-(t-\bar{t})]\}+(c-\gamma)w_Q$$

由于$|x-\bar{x}|$大于某一常数，取p很大可使花括弧内的项之值为负，再取k很大可使

$$\mathscr{L}w_Q\leqslant-1\text{于}D。$$

$\forall Q=(x^0,t^0)\in S$，如果有以$(\bar{x},\bar{t})$为中心的球B使$\bar{B}\cap\bar{D}=\{Q\}$，且

$$|\bar{x}-x|\geqslant\mu(Q)>0,\quad\forall(x,t)\in\bar{D},\quad|t-t_0|<\varepsilon$$

其中ε与Q无关，则称S具有**局部强外球性质**。在此条件下，在区域

$$D\cap\{\tau<t<\min(\tau+\varepsilon,\ T)\}$$

的斜边

$$S\cap\{\tau<t\leqslant\min(\tau+\varepsilon,\ T)\}$$

上每点可构造局部闸函数如上，由于闸函数仅用于证明方程的解取边值，所以局部闸函数已足够应用了。

对闸函数的讨论暂到此处为止，我们转而讨论第一边值问题解的存在性，与椭圆型方程的情况一样，Schauder估计不能单独使用，

必需结合常系数方程边值问题的解来用。关于常系数方程有如下定理。

定理1 设$S=\partial D\cap\{0<t\leqslant T\}$上每一点均有局部闸函数，则对任何$\phi\in C(\overline{D}_0\cup S)$存在

$$\begin{cases}\mathscr{L}_0 u=\Delta u-u_t=0\,, & x\in D\cup D_T\,,\\ u\big|_{\overline{D}_0\cup S}=\phi(\xi)\,, & \xi\in D_0\cup S\end{cases}$$

的唯一解。

证 解的唯一性由极值原理得出，现证明解的存在性。仿椭圆型方程的下调和函数法，用下热解法。第一步是做出标准区域上

$$\mathscr{L}_0 u=0,\quad u\big|_{\overline{D}_0\cup S}=\phi$$

的显式解。与椭圆型方程的情况略有差异的是：对圆柱体不易求出显式解，但对长方体却易于求格林函数$G(x,t,\xi,\tau)$，而得出显式解。这是因为

$$u_{xx}-u_t=0 \text{ 于 } -a<x<a,\ 0<t<T$$

的格林函数，可由基本解

$$\Gamma(x,t,\xi,\tau)=\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right)\left[4\pi(t-\tau)\right]^{-\frac{1}{2}}$$

用镜象法得

$$G(x,t,\xi,\tau,)=\sum_{m=-\infty}^{\infty}\Big[\Gamma(x+4ma,t,\xi,\tau)-$$

$$\Gamma(2a-x+4ma,t,\xi,\tau)\Big]$$

$$u_{x_1x_1}+u_{x_2x_2}-u_t=0 \quad \text{于}\ -a_1<x_1<a_1,\ -a_2<x_2<a_2$$

$$0<t<T$$

的格林函数为

$$G(x,t,\zeta,\tau)=\sum_{m_1,m_2=-\infty}^{\infty}[\Gamma(x_1+4m_1a,x_2+4m_2a_2,t,\xi,\tau)$$

$$-\Gamma(2a_1-x_1+4m_1a_1,x_2+4m_2a_2,t,\xi,\tau)$$

$$-\Gamma(x_1+4m_1a_1,2a_2-x_2+4m_2a_2,t,\xi,\tau)$$

$$+\Gamma(2a_1-x_1+4m_1a_1,2a_2-x_2+4m_2a_2,t,\xi,\tau)]。$$

对于一般的情况，在长方体中的格林函数可类似地得到。经过平移可得

N： $a_i<x_i<b_i$， $i=1, 2, \cdots, n$， $a_0<t<T$

中的格林函数$G(x,t,\xi,\tau)$，于是

$$u(x,t)=\int_{\partial N\cap\{t=a_0\}} u(\xi,a_0)G(x,t,\xi,a)d\xi$$

$$+\sum_{i=1}^{n}\int_{a_0}^{t}\int_{\partial N\cap\{\xi_i=a_i\}}\left[u\frac{\partial G(x,t,\xi,\tau)}{\partial\xi_i}\right]_{\xi_i=a_i}\frac{d\xi}{d\xi_i}d\tau$$

$$-\sum_{i=1}^{n}\int_{a_0}^{t}\int_{\partial N\cap\{\xi_i=b_i\}}\left[u\frac{\partial G(x,t,\xi,\tau)}{\partial\xi_i}\right]_{\xi_i=b_i}\frac{d\xi}{d\xi_i}d\tau。$$

解法的第二步是证明Du为内闭一致有界，这可作Bernstein估计或直接估计上述解的表达式的微商。

解法的第三步是定义下热、下热增值，等等。证明由每点下热的sup得出的函数满足方程

$$\mathscr{L}_3u=0。$$

解法的最后一步是应用局部闸函数证明构造出的解在 $\bar{D}_0\cup S$上确实取边值，这只要先在 $D\cap\{0<t\leqslant\varepsilon\}$上证明，进而在 $D\cap\{\varepsilon<t\leqslant 2\varepsilon\}$上证明即可。

上述的第三、第四步从略，作为练习自行证明。

定理2 设 $S=\partial D\cap\{0<t<T\}$ 的每一点均有局部闸 函 数，则对任何$f\in C^{\lambda,\lambda/2}(D)$与任何$\varphi\in C(\bar{D}_0\cup S)$皆存在

$$\begin{cases}\mathscr{L}_0 u=f, & (x,t)\in D\cup D_T\\ u\Big|_{\bar{D}_0\cup S}=\varphi\end{cases}$$

的解$u(x,t)\in C^{2+\lambda,1+\lambda/2}(D)\cap C(\bar{D})$

证 令

$$v(x,t)=\int_{\tilde{D}\cap\{\tau<t\}}\Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

易证$\mathscr{L}_0 v=f$。

取半正方体

$$N=\Big\{(\xi,\tau)\Big|\,|\xi-x^0|<\delta,\ \ 0\leqslant t^0<\tau\leqslant T\Big\},$$

使$N\subset D$。当$(x,t)\in N$时，

$$\int_{(\tilde{D}\setminus N)\cap\{\tau<t\}}\Gamma(x,t,\xi,\tau)fd\xi d\tau=w(x,t)$$

满足

$$\mathscr{L}_0 w=0,$$

因此，仅需证明$(x,t)\in N$时

$$U(x,t)=\int_{N\cap\{\tau<t\}}\Gamma(x,t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

满足

$$\mathscr{L}_0 U=f。$$

由于$f\in C^{\lambda,\lambda/2}(D)$，以前已证明$D_x^2U$的存在，且有表达式

$$U_{x_ix_j}=\int_{t_0}^{t}\int_{M}\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}\Gamma(x,t,\xi,\tau)\Big[f(\xi,\tau)-f(x,t)\Big]d\xi d\tau$$

$$+f(x,t)\int_{t^0}^{t}\int_M \frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x,t,\xi,\tau)\cos(\nu,\xi_i)d_\xi\sigma d\tau$$

其中$M=\mathrm{N}\cap\{t=t^0\}$，$\nu$为内法线，又当$\Delta t>0$时有

$$\frac{1}{\Delta t}\left[U(x,t+\Delta t)-U(x,t)\right]$$

$$=\frac{1}{\Delta t}\int_t^{t+\Delta t}\int_M \Gamma(x,t+\Delta t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$+\frac{1}{\Delta t}\int_{t^0}^{t}\int_M [\Gamma(x,t+\Delta t,\xi,\tau)-\Gamma(x,t,\xi,\tau)]f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$=I+J$$

当$d(x,\ \partial M)\geqslant\varepsilon>0$时

$$\int_M \Gamma(x,t+\Delta t,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi$$

是τ的连续函数，因此，存在τ'满足$t<\tau'<t+\Delta t$使

$$I=\int_M \Gamma(x,t+\Delta t,\xi,\tau')f(\xi,\tau')d\xi$$

$$=f(x,t)\int_M \Gamma(x,t+\Delta t,\xi,\tau')d\xi$$

$$+\int_M \Gamma(x,t+\Delta t,\xi,\tau')[f(\xi,\tau')-f(x,t)]d\xi$$

$$\to f(x,t),\qquad\qquad 当\Delta t\to 0时。$$

又存在t^2满足$t<t^2<t+\Delta t$使

$$J=\int_{t^0}^{t}\int_M \frac{\partial\Gamma}{\partial t}(x,t^2,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$=\int_{t^0}^{t}\int_M \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Gamma(x,t^2,\xi,\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau$$

$$=\int_{t^0}\int_{M}\sum\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Gamma(x,t^2,\xi,\tau)[f(\xi,\tau)-f(x,t^2)]d\xi d\tau$$

$$+f(x,t^2)\sum\int_{t^0}^{t}\int_{\partial M}\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x,t^2,\xi,\tau)\cos(\nu,\xi_i)\frac{d\xi}{d\xi_i}d\tau$$

$$\to\int_{t^0}^{t}\int_{M}\sum\frac{\partial^2}{\partial x_i^2}\Gamma(x,t,\xi,\tau)[f(\xi,\tau)-f(x,t)]d\xi d\tau$$

$$+f(x,t)\sum\int_{t^0}^{t}\int_{\partial M}\frac{\partial}{\partial x_i}\Gamma(x,t,\xi,\tau)\cos(\nu,\xi_i)\frac{d\xi_i}{d\xi}d\tau$$

（当$\Delta t\to 0$）

$$=\sum_{i=1}^{n}U_{x_ix_i}$$

由此得到$\mathscr{L}_0U=f$，因而有$\mathscr{L}_0v=f$。对

$$\begin{cases}\mathscr{L}_0(u-v)=0\\ u-v\big|_{\overline{D_0}\cup S}=\varphi-v\big|_{D_0\cup S}\end{cases}$$

应用定理1，即可知其有解$u-v\in C^{2,1}(D)\cap C(\bar{D})$。因此

$$\begin{cases}\mathscr{L}_0u=f\\ u\big|_{D_0\cup S}=\varphi\end{cases}$$

有解$u\in C^{2,1}(D)\cap C(\bar{D})$，由极值原理可得

$$|u|_0\leqslant K\left(\sup_{D}|f|+\sup_{\bar{D}_0\cup S}|\varphi|\right),$$

故由前节定理1 Schauder内估计得$u\in C^{2+\lambda,1+\lambda/2}(D)$。定理证毕。

现在证明抛物型方程第一边值问题解的存在性定理。

定理3 设有$\lambda\in(0,1)$使

$|a_{ij}|_{0,\lambda}\leqslant K_1$，$|b_i|_{1,\lambda}\leqslant K_1$，$|c|_{1,\lambda}\leqslant K_1$，

且$\forall(x,t)\in D$，$\xi\in\mathbf{R}^n$有

$$\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant K_2|\xi|^2,\quad K_2>0。$$

又设$|f|_{2,\lambda}<\infty$，$S=\partial D\cap\{0<t\leqslant T\}$上的每一点对$\mathscr{L}_0$及$\mathscr{L}$均有局部闸函数*，则第一边值问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=\sum a_{ij}u_{x_ix_j}+\sum b_iu_{x_i}-cu-u_t=f,\quad (x,t)\in D\cup D\\ u\big|_{\overline{D_0}\cup S}=\varphi(\xi,\tau),\quad \varphi\in C(\overline{D_0}\cup S)\end{cases}$$

存在唯一解$u(x,t)$，且$|u|_{0,2+\lambda}<\infty$。

证 结合上面定理2与前节定理1（Schauder内估计），并应用参数延拓法解

$$\begin{cases}(1-\lambda)\mathscr{L}_0u+\lambda\mathscr{L}u=f,\\ u\big|_{\overline{D_0}\cup S}=\varphi,\end{cases}$$

由于λ由0到1均为唯一可解，这就证明了定理。

当$v(P)$满足

$$\sup_{P,Q\in D}|v(P)-v(Q)|/(d(P,Q))^\lambda\leqslant K$$

时，就称v于D满足**指数为λ的一致Hölder条件**$|v|_\lambda\leqslant K$。

定理4 设$|a_{ij}|_\lambda\leqslant K_1$，$|b_i|_\lambda\leqslant K_1$，$|c|_\lambda\leqslant K_1$，

$$\sup_{P,Q\in\overline{D}}|f(P)-f(Q)|/(d(P,Q))^\lambda<\infty,$$

Ψ能延拓到$\overline{D}$记为Φ且满足

$$|D_x^2\Phi|_\lambda+|D_t\Phi|_\lambda<\infty,$$

---

*进一步的研究表明，$\mathscr{L}_0$与$\mathscr{L}$之一有局部闸函数，则另一也有。

且$\forall Q\in\bar{S}$有邻域$D_1\subset D$，$Q\in S\cap\partial D_1$使得有i存在，能把$\bar{D}_1\cap\bar{S}$表为

$$x_i=h(x_1,\ \cdots,\ x_{i-1},\ x_{i+1},\ \cdots,\ x_n,\ t)$$

而h、D_xh、D_th、D_x^2h，D_xD_th都是指数为λ的Hölder连续函数。如果又满足连接条件

$$\mathscr{L}\varphi=f\quad 于\quad \partial D_3,$$

则

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=f, & (x,t)\in D\cup D_T\\ u\Big|_{\bar{D}_0\cup S}=\varphi\end{cases}$$

存在唯一解$u\in C^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\bar{D})$。

证 由于$\bar{D}_0\cup S$上的每一点皆存在局部闸函数，由定理3得知方程存在解$u\in C^{2+\lambda,1+\lambda/2}(D)$，作类似于Schauder边界估计的变换，把$S$的一部分变为平直，应用Schauder边界估计知在平直部分有

$$|u|_{0,2+\lambda}^{R_0}<\infty,$$

其中R_0为邻近平直部分的内部，返回到原变量，证得在$S_1\subset\bar{D}_0\cup S$附近$u\in C^{2+\lambda,1+\lambda/2}$。$\bar{D}_0\cup S$可用有限个这种$S_1$复盖，故得$u\in C^{2+\lambda,1+\lambda/2}(\bar{D})$，定理证毕。

§5 解的先验估计（系数不光滑情形）

设有界区域$\Omega\subset\mathbb{R}^n$，$T>0$，$Q_T=\Omega\times(0,\ T]$。$C(Q_T)$、$C(\bar{Q}_T)$按通常意义定义。

定义$C^{\alpha,\beta}(Q_T)$为满足

$$|u(x,t)-u(x',t')|/[|x-x'|^{\alpha}+|t-t'|^{\beta}]<\infty$$

的函数u的全体，其中$(x,\ t)$、$(x',\ t')\in Q_T$

同样可定义$C^{2,\beta}(\bar{Q}_T)$。

当u、u_{x_i}、u_t、$u_{x_ix_j}$，i，$j=1$，2，…，n于Q_T为连续时，称$u\in C^{2,1}(Q_T)$。

类似地定义$C^{2,1}(\bar{Q}_T)$。

$C^{\alpha,\alpha/2}(Q_T)$的范数定义为

$$|u|_{\alpha,Q_T}=\sup_{(x,t)\in Q_T}|u(x,t)|$$

$$+\sup_{(x,t),(x',t')\in Q_T}|u(x,t)-u(x',t')|/(|x-x'|^2+|t-t'|)^{\alpha/2}。$$

设$\partial\Omega$满足类似于外锥的条件，即$\exists\, a_0>0$、$\theta_0\in(0,1)$使对$\forall x^0\in\partial\Omega$，以$x^0$为中心，$\rho$为半径的闭球$K(\rho)$，$\rho\leqslant a_0$，成立若下面不等式

$$\text{mes}\,(K(\rho)\cap\Omega)\leqslant(1-\theta_0)\text{mes}\,K(\rho) \qquad (A)$$

设在$\Gamma=\partial\Omega\times[0,T]\cup\Omega\times\{t=0\}$上，函数$\varphi(x,t)$满足指数为$\alpha$ (>0)的Hölder 条件。范数定义为

$$|\varphi|_{\alpha,\Gamma}=\sup_{(x,t),(x',t')\in\Gamma}\frac{|\varphi(x,t)-\varphi(x',t')|}{(|x-x'|^2+|t-t'|)^{\alpha/2}}<\infty。$$

在$Q_T=\Omega\times(0,T]$上考虑方程

$$\mathscr{L}u=u_t-\sum_{i=1}^n\frac{\partial}{\partial x_i}\left[\sum_{j=1}^n a_{ij}(x,t)u_{x_j}+a_i(x,t)u+f_i(x,t)\right]$$

$$+\sum_{i=1}^n b_i(x,t)u_{x_i}+a(x,t)u+f(x,t)=0 \qquad (B)$$

设有$q>n\geqslant2$使(B)中的系数满足

$$\sum|a_{ij}|+\sum\|a_i,b_i,f_i\|_{L^q(\Omega)}+\|a,f\|_{L^{q/2}(\Omega)}\leqslant\mu,$$

$$0<t\leqslant T;$$

$$\sum a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \nu|\xi|^2,\quad \nu>0,$$

$$\forall \xi\in\mathbf{R}^n,\ (x,t)\in Q_T。$$

为了研究弱解的存在等性质，先研究经典解的性质，即 u 与 Du 的 L^2 估计、u 的 L^∞ 估计、u 的Hölder估计（再阐明弱解的存在性），Du 的 L^4、L^6、…估计、Du 的 L^∞ 估计、Du 的Hölder估计。

引理1 设抛物方程 (B) 有经典解 $u\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\overline{Q}_T)$，且 $u|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0$，则有

$$\int_\Omega u^2(x,t)dx+\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^2dxdt$$

$$\leqslant C\left[\int_0^t\int_\Omega\sum f_i^2dxdt+\int_0^t\|f\|^2_{2q/(q-2)}dt\right.$$

$$\left.+\int_\Omega u^2(x,0)dx\right]$$

其中 C 仅依赖于 μ、ν、T，而记号 $\|f\|_q$ 为记号 $\|f\|_{L^q(\Omega)}$ 的简写。

证 用 u 乘 $\mathscr{L}u=0$ 两边并在 $\Omega\times(0,T)$ 上积分得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2(x,t)dx\Big|_0^t+\int_0^t\int_\Omega\Big[\sum\Big(\sum a_{ij}u_{x_j}+a_iu+f_i\Big)u_{x_i}$$

$$+\Big(\sum b_iu_{x_i}+au+f\Big)u\Big]dxdt=0。$$

应用不等式

$$2ab\leqslant\varepsilon a^2+\frac{1}{\varepsilon}b^2,\qquad \varepsilon>0,$$

当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时，由上式以及

$$\sum a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\nu|\xi|^2$$

得

$$\frac{1}{2}\int_\Omega u^2 dx\Big|_0^t+\frac{\nu}{2}\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^2 dxdt$$

$$\leqslant C_1\int_0^t\int_\Omega[\sum(a_i^2u^2+f_i^2+b_i^2u^2)$$

$$+|a|u^2+|fu|]dxdt。$$

由系数满足的条件以及

$$\int_\Omega|fu|dx\leqslant\left[\int_\Omega|f|^{\frac{2q}{q+2}}dx\right]^{\frac{q+2}{2q}}\left[\int_\Omega|u|^{\frac{2q}{q-2}}dx\right]^{\frac{q-2}{2q}}$$

$$\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\left[\|f\|^2_{\frac{2q}{q-2}}+\|u\|^2_{\frac{2q}{q+2}}\right],$$

得到

$$\int_0^t u^2 dx\Big|_0^t+\nu\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^2 dxdt$$

$$\leqslant C_2\int_0^t\|u\|^2_{\frac{2q}{q-2}}dt+C_1\int_0^t\left[\int_\Omega\sum f^2_i dx+\|f\|^2_{\frac{2q}{q+2}}\right]dt$$

其中C_1、C_2仅依赖于$\|a_i,\ b_i\|_{L_Q(\Omega)}$及$\|a\|_{L_{q/2}(\Omega)}$。我们知道当$p<q<r$时有

$$\|u\|_Q\leqslant\varepsilon\|u\|_r+\varepsilon^{-(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})/(\frac{1}{q}-\frac{1}{r})}\|u\|_p,\quad\forall\varepsilon>0$$

用于我们现在的情况得到

$$\|u\|_{2q/(q-2)}\leqslant\varepsilon\|u\|_{2n/(n-2)}+C(\varepsilon)\|u\|_2$$

$$\leqslant\varepsilon K\|\nabla u\|_2+C(\varepsilon)\|u\|_2$$

取 ε 使 $\varepsilon K=\dfrac{\nu}{2C_2}$，得到

$$\int_\Omega u^2dx\Big|_0^t+\frac{\nu}{2}\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^2dxdt$$

$$\leqslant C_3\int_0^t\Big[\int_\Omega u^2dx+\int_\Omega\sum f_i{}^2dx+\|f\|^2_{2q/(q-2)}\Big]dt$$

由上式导出

$$e^{-C_3t}\int_0^t\int_\Omega u^2dxdt\leqslant\int_0^t\Big[C_3\int_0^\tau\Big(\int_\Omega\sum f_i{}^2(x,\sigma)dx$$

$$+\|f(\cdot,\sigma)\|^2_{2q/(q+2)}d\sigma+\int_\Omega u^2(x,0)dx\Big]e^{-C_3\tau}d\tau$$

结合上面二式得

$$\int_\Omega u^2(x,t)dx+\int_0^t\int_\Omega|\nabla u|^2dxdt\leqslant$$

$$C\Big\{\int_0^t\int_\Omega\sum f_i{}^2dxdt+\int_0^t\|f\|^2_{2q/(q-2)}dt+\int_\Omega u^2(x,0)dx\Big\}$$

C 仅依赖于 μ、ν、T，引理证毕。

当 $u|_{\partial\Omega\times[0,T]}$ 不为0时，$u|_\Gamma=\varphi$。记

$$M_0=\max_\Gamma|\varphi|,\quad v_1=[u-M_0]^+,\quad v_2=[u+M_0]^-,$$

则对 v_1、v_2 可以应用引理1，再由

$$\int_\Omega u^2(x,t)dx\leqslant 2\int_\Omega(v_1{}^2+v_2{}^2+M_0{}^2)dx\leqslant\text{常数},$$

就得到 $\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(x,t)\|_{L^2(\Omega)}$ 的估计。

现在来估计 $\max\limits_{\bar{Q}_T}|u|$。取 $k\geqslant M_0=\max\limits_\Gamma|u|$，用 $[u(x,t)-k]^+$ 乘

(B)的二端，然后在Ω上积分，并作初步估计得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{A_k(t)}(u-k)^2dx+\frac{\nu}{2}\int_{A_k(t)}|\nabla u|^2dx$$

$$\leqslant C\int_{A_k(t)}\left\{\sum\left[a_i^2u^2+f_i^2+b_i^2(u-k)^2\right]+|au|(u-k)\right.$$

$$\left.+|f|(u-k)\right\}dx,$$

其中

$$A_k(t)=\left\{x\,\middle|\,x\in\Omega,\ u(x,t)>k\right\}。$$

现对上一式子的右端进行估计，第一项为

$$\int_{A_k(t)}a_i^2u^2dx\leqslant\left(\int_{A_k(t)}|a_i|^qdx\right)^{2/q}\left(\int_{A_k(t)}|u|^{\frac{2q}{q-2}}dx\right)^{1-\frac{2}{q}}$$

$$\leqslant C\|a_i\|_q^2\left[\left(\int_{A_k(t)}(u-k)^{\frac{2q}{q-2}}dx\right)^{1-\frac{2}{q}}+k^2mes^{1-\frac{2}{q}}A_k(t)\right],$$

类似估计其它的项得到

$$\frac{d}{dt}\int_{A_k(t)}(u-k)^2+\nu\int_{A_k(t)}|\nabla u|^2dx$$

$$\leqslant\gamma_1\left[\left(\int_{A_k(t)}(u-k)^{2q/(q-2)}dx\right)^{1-2/q}+k^2mes^{1-2/q}A_k(t)\right]\quad(*)$$

其中$k\geqslant M_0=\max\limits_{\Gamma}|u|$，$\gamma_1$仅依赖于$\mu$、$\nu$。

引理2 $\forall u(x)\in\overset{0}{W}{}_m^1(\Omega)$，$1<m<n$，下面不等式成立

$$\int_{A_0} u^l dx \leqslant C(\mathrm{mes} A_0)^{1-\frac{l(n-m)}{nm}} \left(\int_{A_0} |\nabla u|^m dx\right)^{\frac{l}{m}}$$

$$0 < l < \frac{nm}{n-m}$$

其中$A_0 = \{x : x \in \Omega,\ u(x) > 0\}$，而$C$仅依赖于$l$、$m$、$n$。

证　由Hölder不等式得

$$\int_{A_0} u^l dx \leqslant \left(\int_{A_0} u^{\frac{nm}{n-m}} dx\right)^{\frac{l(n-m)}{nm}} \left(\mathrm{mes}\ A_0\right)^{1-\frac{l(n-m)}{nm}},$$

由Соболев不等式得

$$\| u \|_{\frac{nm}{n-m}} \leqslant C_1 \| \nabla u \|_m,$$

因此有

$$\int_{A_0} u^l dx \leqslant C_1^l (\mathrm{mes} A_0)^{1-\frac{l(n-m)}{nm}} \|\nabla u\|_m^l,$$

引理证毕。

引理3　满足(*)的$u(x,t)$具有常数上界，这常数仅与M_0、ν、γ_1及$\max\limits_{0\leqslant t\leqslant T}\|u(x,t)\|_{L^2} = M_1$有关。

证　由引理2得

$$\left(\int_{A_k(t)} (u-k)^{2q/(q-2)} dx\right)^{(q-2)/q} \leqslant$$

$$\leqslant C\int_{A_k(t)} |\nabla u|^2 dx \cdot \mathrm{mes}^\lambda A_k(t)$$

其中

$$\lambda = 1 - \frac{2}{q} - \left(1 - \frac{2}{n}\right) = \frac{2}{n} - \frac{2}{q} > 0,$$

又

$$M_1{}^2 \geqslant \int_\Omega u^2(x,t)dx \geqslant k^2 \ \mathrm{mes}\ A_k(t),$$

把这二式代入(•)得

$$\frac{d}{dt}\int_{A_k(t)}(u-k)^2dx + \left[\ \nu - C\ \left(\frac{M_1}{k}\right)^\lambda\right]\int_{A_k(t)}|\nabla u|^2dx$$

$$\leqslant \gamma_1 k^2 \mathrm{mes}^{1-\frac{2}{q}}\ A_k(t)\ ,\qquad k \geqslant M_0\text{。}$$

故当

$$k \geqslant M_2 = \max\left\{M_0,\left(\frac{2C}{\nu}\ \right)^{\frac{1}{\lambda}}M_1\right\}$$

时，由上式得

$$\frac{d}{dt}\int_{A_k(t)}(u-k)^2dx + \frac{\nu}{2}\int_{A_k(t)}|\nabla u|^2dx$$

$$\leqslant \gamma_1 k^2 \mathrm{mes}^{1-\frac{2}{q}}\ A_k(t),$$

记

$$I_k(t) = \int_{A_k(t)}(u-k)^2dx,\quad \mu_k = \max_{0\leqslant t\leqslant T}\ \mathrm{mes}\ A_k(t),$$

上式化为

$$I_k'(t) + \frac{\nu}{2}\int_{A_k(t)}|\nabla u|^2dx \leqslant \gamma_1 k^2 \mu_k{}^{1-\frac{2}{q}}\ ,$$

由引理 2 可知

$$I_k(t) \leqslant \beta\ \mathrm{mes}^{\frac{2}{n}}\ A_k(t)\ \int_{A_k(t)}|\nabla u|^2dx,$$

这里β为引理2中对应于$l=m=2$的常数。故当$I_k'(t)\geqslant 0$，由上面二式得

$$I_k(t)\leqslant(2\gamma_1\beta/v)k^2\mu_k^{1-2/q+2/n}, \quad k\geqslant M_2 \qquad (**)$$

当$I_k'(t)<0$时，即$I_k(\sigma)$在$\sigma=t$附近为单调减少函数。如果$I_k(\sigma)$在$0\leqslant\sigma\leqslant t$为单调减少，则$I_k(0)>I_k(t)\geqslant 0$，这与$I_k(0)=0$相矛盾。

否则取最接近于t的$I_k(\sigma)$的极大点τ，$0<\tau<t$，则

$$I_k(t)\leqslant I_k(\tau)\leqslant\frac{2\gamma_1\beta}{v}k^2\mu_k^{1-2/q+2/n},$$

即在任何情况下$(**)$均成立。由于当$\tilde{k}>k$时

$$I_k(t)\geqslant(\tilde{k}-k)^2\operatorname{mes}A_{\tilde{k}}(t),$$

以之代入$(**)$得

$$\mu_{\tilde{k}}\leqslant\frac{2\gamma_1\beta}{v}\frac{k^2}{(\tilde{k}-k)^2}\mu_k^{1-\frac{2}{q}+\frac{2}{n}}, \quad \tilde{k}>k\geqslant M_2。$$

取

$$k=M_2+M(2-1/2^h), \quad \tilde{k}=M_2+M(2-1/2^{h+1}),$$

M待定但设$M\geqslant M_2$。改记μ_k为μ_h，记

$$1+2\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{q}\right)=1+2\lambda=\sigma,$$

则由上式得

$$\mu_{h+1}\leqslant\frac{2\gamma_1\beta}{v}\frac{(M_2+2M)^2}{M^2}2^{2(h+1)}\mu_h^\sigma\leqslant\frac{72\gamma_1\beta}{v}2^{2h}\mu_h^\sigma。$$

这不等式的μ_h与μ_0关系是

$$\ln \mu_h \leqslant \frac{\sigma^h - 1}{\sigma - 1} \ln\left(\frac{72\gamma_1\beta}{\nu}\right) + 2\,\frac{\sigma^h - 1 - h(\sigma - 1)}{(\sigma - 1)^2} \ln 2$$

$$+ \sigma^h \ln \mu_0。$$

由于$\sigma>1$，故当

$$\ln \mu_0 + \frac{1}{\sigma - 1} \ln\left(\frac{72\gamma_1\beta}{\nu}\right) + \frac{2\ln 2}{(\sigma - 1)^2} < 0$$

时，有$\mu_h \to 0$，$h \to \infty$，即当

$$\mu_0 < \left(\frac{\nu}{72\gamma_1\beta}\right)^{1/(\sigma-1)} 2^{-2/(\sigma-1)^2}$$

$$= \left(\frac{\nu}{72\gamma_1\beta}\right)^{nq/[2(q-n)]} 2^{-n^2q^2/[2(q-n)^2]};$$

时，$\mu_h \to 0$，$h \to \infty$，由于

$$\mu_0 = \max_{0 \leqslant t \leqslant T} \operatorname{mes} A_{M_2+M}(t) \leqslant M_2^2/(M_2 + M)^2。$$

所以只要取

$$M = \max\left\{M_2,\ M_1\left(\frac{72\gamma_1\beta}{\nu}\right)^{nq/[4(q-n)]} 2^{n^2q^2/[4(q-n)^2]}\right\},$$

就得出

$$\operatorname{mes} A_{M_2+2M}(t) = 0,\quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

即 $u(x,\ t) \leqslant M_2 + 2M$。

引理 3 证毕。

同样的方法可估计$u(x,\ t)$的下界。

结合引理 1、3 得到

定理1 设$u(x,\ t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$是

$$\mathscr{L} u = 0$$

的解，则$\max\limits_{\bar{Q}_T}|u|$可用常数估计，这常数仅与$\mu$、$\nu$、$T$及$\max\limits_{\Gamma}|u(x,t)|$有关。

现在进行解的局部性质的研究，即关于$u(x,t)$满足Hölder条件的问题。

取定$x^0\in\bar{\Omega}$。设$K(\rho)$为球$|x-x^0|<\rho$，记

$$A_{k,\rho}(t)=\{x\,|\,x\in K(\rho)\cap\Omega,\ u(x,t)>k\}。$$

设$\zeta(x)\in C^1(\Omega)$满足

$$0\leqslant\zeta(x)\leqslant1,\ \zeta(x)=0,\ x\notin K(\rho)。$$

用$[u(x,t)-k]^+\zeta^2(x)$乘$\mathscr{L}u=0$的两边，然后分部积分，要使分部积分不出现含边界的积分项，充分条件是：

$$K(\rho)\cap\partial\Omega=\phi,$$

或者是

$$K(\rho)\cap\partial\Omega\neq\phi,\ 但k>\max_{K(\rho)\cap\partial\Omega}u(x,t)。$$

当这条件之一满足时，相应得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{A_{k,\rho}(t)}\left[u(x,t)-k^2\right]\zeta^2(x)dx+\int_{A_{k,\rho}(t)}\Big\{\sum(\sum a_{ij}u_{x_j}+$$

$$+a_iu+f_i)\left[u_{x_i}\zeta^2+(u-k)2\zeta\zeta_{x_i}\right]+$$

$$(\sum b_iu_{x_i}+au+f)(u-k)\zeta^2\Big\}dx=0;$$

或者

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2\zeta^2dx+\frac{3\nu}{4}\int_{A_{k,\rho}(t)}|\nabla u|^2\zeta^2dx$$

$$\leqslant r\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2|\nabla\zeta|^2dx+r\int_{A_{k,\rho}(t)}\Big\{\sum[a_i^2u^2+f_i^2+$$

$$+b_i^2(u-k)^2+|au|(u-k)+|f|u-k)\Big\}\zeta^2dx$$

现在估计上式最后一个积分，它的第一项为

$$\int_{A_{k,\rho}(t)}a_i^2u^2\zeta^2dx\leqslant\left(\int_{A_{k,\rho}(t)}|a_i|^qdx\right)^{2/q}$$

$$\cdot\left(\int_{A_{k,\rho}(t)}|u\zeta|^{2q/(q-2)}dx\right)^{1-2/q}$$

$$\leqslant C\|a_i\|_q^2\left[\left(\int_{A_{k,\rho}(t)}\left|\left(u-k\right)\zeta\right|^{2q/(q-2)}dx\right)^{1-2/q}+\right.$$

$$\left.+k^2\,\mathrm{mes}^{1-2/q}A_{k,\rho}(t)\right]\leqslant r\left\{\int_{A_{k,\rho}(t)}\left\{\varepsilon\left|\nabla\left((u-k)\zeta\right)\right|^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+C(\varepsilon)\left[(u-k)\zeta\right]^2\right\}dx+M^2\mathrm{mes}^{1-q/2}A_{k,\rho}(t)\right\}$$

$$\leqslant r\left\{\varepsilon\int_{A_{k,\rho}(t)}\left[|\nabla u|^2\zeta^2+(u-k)^2|\nabla\zeta|^2\right]dx\right.$$

$$\left.+C(\varepsilon)M^2\mathrm{mes}^{1-2/q}A_{k,\rho}(t)\right\}$$

其中$M=\max\limits_{\bar{Q}_T}|u|$，取$|k|\leqslant M$。

另外一些项的估计与此类似。取 ε 使$\varepsilon\gamma$不超过$\nu/4$，得到

$$\frac{d}{dt}\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2\zeta^2dx+\nu\int_{A_{k,\rho}(t)}|\nabla u|^2\zeta^2dx$$

$$\leqslant r\left[\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2|\nabla\zeta|^2dx+(M^2+1)\mathrm{mes}^{1-2/q}A_{k,\rho}(t)\right] \tag{***}$$

其中γ仅依赖于μ、ν。

仿此，记

$$B_{k,\rho}(t)=\{x|x\in K(\rho)\cap\Omega,\ \ u(x,t)<k\},$$

当$|k|\leqslant M$时得

$$\frac{d}{dt}\int_{B_{k,\rho}(t)}(u-k)^2\zeta^2dx+v\int_{B_{k,\rho}(t)}|\nabla u|^2\zeta^2dx$$

$$\leqslant r\left[\int_{B_{k,\rho}(t)}(u-k)^2|\nabla\zeta|^2dx+(M^2+1)\mathrm{mes}^{1-2/q}B_{k,\rho}(t)\right]。\tag{****}$$

现定义**函数类**$\mathscr{B}_2$。当函数$u(x,t)$在Q_T上有定义，且u、Δu在Q_T上可测，又

$$\operatorname*{ess\,sup}_{Q_T}|u|\leqslant M,$$

且存在正数δ，使当

$$k\geqslant\max\left\{\max_{K(\rho)\cap\Omega}u(x,t)-\delta,\ \max_{K(\rho)\cap\partial\Omega}u(x,t)\right\}$$

时，(***)对任何$0\leqslant t\leqslant T$成立；而当

$$k\leqslant\min\left\{\min_{K(\rho)\cap\Omega}u(x,t)+\delta,\ \min_{K(\rho)\cap\partial\Omega}u(x,t)\right\}$$

时，(****)对任何$0\leqslant t\leqslant T$成立，则称$u\in\mathscr{B}_2(Q_T,M,\gamma,\ \nu,\infty,\ 1/q)$。

对上述$\mathscr{L}u=0$的解$u\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$，我们有$u\in\mathscr{B}_2(Q_T,M,\ \gamma,\ \nu,\ \infty,\ \frac{1}{q})$，定义中的常数$\delta$是由于对非线性情况有用而添加的。

为了研究函数类$\mathscr{B}_2(Q_T,\ M,\ \gamma,\ \nu,\ \delta,\ \frac{1}{q})$，先证

引理4 ($E.Giorgi$) $\forall u(x)\in W_m^1(K(\rho))$，$m\geqslant1$，则

$$(\lambda-k)\mathrm{mes}^{1-1/n}A_{\lambda,\rho}\leqslant\beta\rho^n/\mathrm{mes}(K(\rho)\setminus A_{k,\rho})\int_{A_{k,\rho}\setminus A_{\lambda,\rho}}|\nabla u|dx,$$

其中

$$\lambda>k,\quad A_{k,\rho}=\{x|x\in K(\rho),\ u(x)>k\},$$

β 为仅依赖于 λ 的常数。

附注 当$u\in\overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega)$时，$u$ 可拓广于Ω外为 0 。因此，对$\overset{\circ}{W}{}^1_1(\Omega)$中的 u，可在任意球$K(\rho)$中应用引理 4 。

证 先设$u\in C^1(K(\rho))$，考察非负函数

$$v(x)=\begin{cases}0, & x\in K(\rho)\setminus A_{k,\rho}\\ u-k, & x\in A_{k,\rho}\setminus A_{\lambda,\rho}\\ \lambda-k, & x\in A_{\lambda,\rho}\end{cases}$$

$\forall x,\ y\in K(\rho)$有

$$v(y)-v(x)=\int_0^{|x-y|}v_r(x+r\omega)dr,$$

其中$\omega=(y-x)/|y-x|$，上式对$y\in K(\rho)\setminus A_{k,\rho}$积分得到

$$\mathrm{mes}(K(\rho)\setminus A_{k,\rho})v(x)=-\int_{K(\rho)\setminus A_{k,\rho}}dy\int_0^{|x-y|}v_r(x+r\omega)dr$$

$$\leqslant\int_0^{2\rho}\int_{|\omega|=1}\sigma^{n-1}d\sigma d\omega\int_0^{2\rho}|v_r(x+r\omega)|dr$$

(延拓v_r于$K(\rho)$外为0)

$$=\frac{(2\rho)^n}{n}\int_0^{2\rho}\int_{|\omega|=1}|v_r(x+r\omega)|drd\omega$$

$$=\frac{(2\rho)^n}{n}\int_{|x+r\omega|\leqslant 2\rho}\frac{|v_r(x+r\omega)|}{r^{n-1}}r^{n-1}drd\omega$$

$$\leqslant \frac{(2\rho)^n}{n}\int_{K(\rho)}|\nabla v(\xi)|/|x-\xi|^{n-1}d\xi。\tag{1}$$

(1)式两边关于$x\in A_{\lambda,\rho}$积分得到

$$\operatorname{mes}(K(\rho)\setminus A_{k,\rho})(\lambda-k)\operatorname{mes}A_{\lambda,\rho}$$

$$\leqslant \frac{(2\rho)^n}{n}\int_{K(\rho)}|\nabla v(\xi)|d\xi\int_{A_{\lambda,\rho}}|x-\xi|^{1-n}dx。$$

对任何区域Ω与$0<\lambda<n$，我们作以x为中心与Ω等体积的球K_Ω，则

$$\int_\Omega|x-y|^{-\lambda}dy\leqslant\int_{K_\Omega}|x-y|^{-\lambda}dy$$

$$=n^{\lambda/n-1}/(n-\lambda)\omega_n^{\lambda/n}\operatorname{mes}^{1-\lambda/n}(\Omega)。$$

因此，(1)式右端不超过

$$\frac{2^n}{n}\cdot n^{1/n}\omega_n^{1-1/n}\rho^n\operatorname{mes}^{1/n}A_{\lambda,\rho}\int_{K(\rho)}|\nabla v(\xi)|d\xi$$

$$=C(n)\rho^n\operatorname{mes}^{1/n}A_{\lambda,\rho}\int_{A_{k,\rho}\setminus A_{\lambda,\rho}}|\nabla u(\xi)|d\xi。$$

所以当$u\in C^1(K(\rho))$时，**Giorgi不等式得证。**

当$u\in W_m^1(K(\rho))$时，用光滑函数u_h逼近u。由于球面为光滑，$C^1(K(\rho))$中的函数可向外延拓使仍保持为C^1，取极限知$W_m^1(K(\rho))$中的函数可向外延拓使之仍为W_m^1中的函数。作延拓后的函数u的光滑化函数，取之为u_h即可。当$h\to0$时，可证

$$\operatorname{mes}A_{k,\rho}^h\to\operatorname{mes}A_{k,\rho}$$

对几乎所有的k成立，这是由于在L^m意义下，$u_h(x)\to u(x)$，因此，存在子叙列（仍记为u_h）使得除了一个测度为任意小的集合外一致

收敛，即

$$\forall \varepsilon>0,\quad \exists\, \Sigma_\varepsilon\subset K(\rho),\quad \ni \operatorname{mes}(K(\rho)\setminus\Sigma_\varepsilon)<\varepsilon$$

而$\forall\delta>0$，皆有

$$|u_h-u|<\delta,\quad 当x\in\Sigma_\varepsilon,\quad h<h_0(\varepsilon,\delta)$$

时成立。因此

$$A_{k+\delta,\rho}\cap\Sigma_\varepsilon\subset A^h_{k,\rho}\cap\Sigma_\varepsilon\subset A_{k-\delta,\rho}\cap\Sigma_\varepsilon,$$

先令$h\to0$，后令$\delta\to0$，$\varepsilon\to0$得

$$\operatorname{mes}A_{k,\rho}\leqslant\liminf_{h\to0}A^h_{k,\rho}\leqslant\limsup A^h_{k,\rho}$$

$$\leqslant\operatorname{mes}A_{k,\rho}+\operatorname{mes}\{x\mid x\in K(\rho),\ u(x)=k\}。$$

能满足

$$\operatorname{mes}\{x\mid x\in K(\rho),\ u(x)=k\}>0$$

的k至多为可列个，这是因为

$$\operatorname{mes}\{x\mid x\in K(\rho),\ u(x)=k\}>\frac{1}{l},\quad l=1,2,\cdots$$

的k的个数不超过$l\operatorname{mes}K(\rho)$，即为有限个，对$l=1$，2，… 总和起来，$k$的个数至多为可列个，其全体记为$K_0$，这就证明了

$$\operatorname{mes}A^h_{k,\rho}\to\operatorname{mes}A_{k,\rho},\quad h\to0,$$

对$k\in\mathbf{R}\setminus K_0$成立。

同样可得

$$\operatorname{mes}[A^h_{k,\rho}\cap(K(\rho)\setminus A_{k,\rho})]\to0,$$

$$\operatorname{mes}[A_{k,\rho}\cap(K(\rho)\setminus A^h_{k,\rho})]\to0,\quad h\to0,$$

对$k\in\mathbf{R}\setminus K_0$成立。由于

$$\left|\int_{A_k{}^h{}_{,\rho}}|\nabla u_h|dx-\int_{A_{k,\rho}}|\nabla u|dx\right|\leqslant\int_{A_k{}^h{}_{,\rho}}\left||\nabla u_h|-|\nabla u|\right|dx$$

$$+\left\{\int_{A_{k,\rho}\cap(K(\rho)\setminus A_{k,\rho})}+\int_{A_k{}^h{}_{,\rho}\cap(K(\rho)\setminus A_{k,\rho})}\right\}|\nabla u|dx$$

而当$k\in\mathbf{R}\setminus K_0$时，上式中花括号内的积分趋于0，当$h\to0$时又因 。

$$\int_{A_k{}^h{}_{,\rho}}\left||\nabla u_h|-|\nabla u|\right|dx\leqslant\int_{K(\rho)}|\nabla u_h-\nabla u|dx\to0,$$

$$(h\to0)$$

因此得

$$\int_{A_k{}^h{}_{,\rho}}|\nabla u_h|dx\to\int_{A_{k,\rho}}|\nabla u|dx,\quad h\to0$$

当$k\in\mathbf{R}\setminus K_0$时成立。由于Giorgi不等式对$u_h$成立，令$h\to0$得到它对$k$、$\lambda\in K_0$而$k<\lambda$时成立。

$\forall k$、$\lambda\in\mathbf{R}$，$k<\lambda$，取$k^+\geqslant k$，$\lambda^-\leqslant\lambda$使$k^+$、$\lambda^-\notin K_0$，则

$$\begin{aligned}\beta\int_{A_{k,\rho}\setminus A_{\lambda,\rho}}|\nabla u|dx&\geqslant\beta\int_{A_{k^+,\rho}\setminus A_{\lambda^-,\rho}}|\nabla u|dx\\&\geqslant(\lambda^--k^+)\mathrm{mes}^{1-1/n}A_{\lambda^-,\rho}\mathrm{mes}(K(\rho)\setminus A_{k^+,\rho})\rho^{-n}\\&\geqslant(\lambda^--k^+)\mathrm{mes}^{1-1/n}A_{\lambda,\rho}\mathrm{mes}(K(\rho)\setminus A_{k,\rho})\rho^{-n}\end{aligned}$$

令$k^+\to k$，$\lambda^-\to\lambda$，就知道Giorgi不等式对任何k、$\lambda\in\mathbf{R}$，$k<\lambda$时成立。引理4证毕。

现在研究$u\in\mathscr{B}_2(Q_T,\ M,\ \gamma,\ \delta,\ \nu,\ \frac{1}{q})$的性质，就是要证明它能满足Hölder条件。为此需要先证一系列引理。

引理5 设$\mathrm{mes}A_{k,\rho}(t^0)\leqslant\frac{1}{2}K_n\rho^n$，$K_n=\mathrm{mes}K(1)$。则$\forall\beta\in(1/\sqrt{2}$，

1)，$\exists\, a(\beta)$、$b(\beta)$满足

$$0<a(\beta)<b(\beta)<1,$$

使当

$$k\geqslant \max_{\substack{\partial\Omega\cap K(\rho)\\ t\in[t^0,t^0+a\rho^2]}} u(x,t) \tag{2}$$

以及

$$H\geqslant \max_{\substack{x\in A_{k,\rho}\\ t\in[t^0,t^0+a\rho^2]}}[u(x,t)-k],\quad H\geqslant (m^2+1)^{1/2}\rho^{1-n/q}$$

时有

$$\mathrm{mes}(K(\rho)\setminus A_{k+\beta H,\rho}(t))\geqslant b(\beta)K_n\rho^n,$$

$$\forall t\in[t^0,t^0+a(\beta)\rho^2]。$$

注 当$\partial\Omega\cap K(\rho)=\phi$时，条件(2)可以取消。

证 当$t\geqslant t^0$时，由(***)对 t 从t^0到 t 积分得到

$$\int_{A_{k,\rho}}(u-k)^2\zeta^2dx\leqslant\int_{A_{k,\rho}(t^0)}(u-k)^2\zeta^2dx$$

$$+\gamma\Big\{\int_{t^0}^{t}dt\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2|\nabla\zeta|^2dx$$

$$+(M^2+1)\int_{t^0}^{t}\mathrm{mes}^{1-2/q}A_{k,\rho}(t)dt\Big\}。$$

对$x\in K(\rho)$，取定$\zeta(x)$为

$$\zeta(x,\rho,(1-\sigma)\rho)=\begin{cases}1, & |x-x^0|\leqslant\rho(1-\sigma),\\ \dfrac{\rho-|x-x^0|}{\sigma\rho}, & \rho(1-\sigma)\leqslant|x-x^0|\leqslant\rho,\end{cases}$$

其中x^0为$K(\rho)$的中心，$\sigma\in(0,1)$为待定常数。对这样选取的ζ，当$t\in[t^0,\ t^0+a(\beta)\rho^2]$时，成立着

$$\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2\zeta^2dx\geqslant\int_{A_{k,\rho(1-\sigma)}(t)}(u-k)^2dx$$
$$\geqslant(\beta H)^2\mathrm{mes}A_{k+\beta H,\rho(1-\sigma)}(t)$$

且有

$$\int_{t^0}^{t}dt\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2|\nabla\zeta|^2dx\leqslant\frac{H^2}{(\sigma\rho)^2}(t-t^0)K_n\rho^n。$$

此外，

$$(M^2+1)\int_{t_0}^{t}\mathrm{mes}^{1-2/q}A_{k,\rho}(t)\leqslant$$
$$\leqslant(M^2+1)(t-t^0)(K_n\rho^n)^{1-2/q}$$
$$\leqslant(t-t^0)H^2K_n^{1-2/q}\rho^{n-2},$$
$$\int_{A_{k,\rho}(t^0)}(u-k)^2\zeta^2dx\leqslant\frac{1}{2}K_n\rho^nH^2,$$

结合上述诸式，并由于$0<H\leqslant M<\infty$，得到

$$\mathrm{mes}A_{k+\beta H,\rho(1-\sigma)}(t)\leqslant\frac{\gamma}{\beta^2}(t-t^0)K_n\rho^{n-2}(\sigma^{-2}+K_n^{-2/q})$$
$$+\frac{1}{\beta^2}K_n\rho^n。$$

固定$\beta\in(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1)$，取定$\sigma=\sigma_0$使

$$(1-\sigma_0)^n>\frac{1}{2\beta^2},$$

再取$a=a(\beta)$使

$$\frac{\gamma}{\beta^2}a(\sigma_0^{-2}+K_n^{-(2/q)})=\frac{1}{2}\left[(1-\sigma_0)^n-\frac{1}{2\beta^2}\right]。$$

故当$t\in[t^0,\ t^0+a\rho^2]$时，

$$\text{mes}[K(\rho)\setminus A_{k+\beta H,\rho}(t)]\geqslant\text{mes}[K((1-\sigma_0)\rho)\setminus A_{k+\beta H,\rho(1-\sigma_0)}(t)]$$

$$\geqslant\frac{1}{2}[(1-\sigma_0)^n]K_n。$$

取

$$b(\beta)=\frac{1}{2}\left[(1-\sigma_0)^n-\frac{1}{2\beta^2}\right]$$

即可。

下面取定$\beta=\frac{3}{4}$来讨论，分别记$a(\frac{3}{4})$、$b(\frac{3}{4})$为a、b。作标准柱体Q_ρ，底为球$K(\rho)$，高为$a\rho^2$。记$\Gamma_\rho=Q_\rho\cap\Gamma$。

考察$K_{2\rho}\subset\Omega$的情况，这里$K_{2\rho}$是$K_\rho=K(\rho)$的半径增大一倍的同心球。记

$$Q_{2\rho}=K_{2\rho}\times[t^0,t^0+4a\rho^2],\qquad \mu_1=\min_{Q_{2\rho}}u,$$

$$\mu_2=\max_{Q_{2\rho}}u,\qquad\qquad \omega=\mu_2-\mu_1。$$

引理6 $\forall\theta_1>0$，$\exists\ s=s(\theta_1)>0$，$\ni Q_{2\rho}\subset Q_T$，且下面三种情况之一为真：

$$\omega\leqslant 2^s(M^2+1)^{1/2}\rho^{1-n/q};\tag{a}$$

$$\int_{t^0+3a\rho^2}^{t^0+4a\rho^2}\text{mes}A_{\mu_2-\omega/2^{s+1},\rho}(t)dt\leqslant\theta_1\rho^{n+2};\tag{b}$$

$$\int_{t^0+3a\rho^2}^{t_0+4a\rho^2} \operatorname{mes} B_{\mu_1+\omega/2^{s+1},\rho}(t)\,dt \leqslant \theta_1 \rho^{n+2} \tag{c}$$

证 设r为正整数满足

$$2^r > \frac{2M}{\delta} \geqslant \frac{\omega}{\delta}。$$

令

$$s = r + 1 + \frac{a\beta^2(2ar+1)K_n{}^{2/n}2^{n+1}}{\theta_1{}^2 b^2 \nu},$$

这里β为引理 4 中的常数，则下面二个不等式中至少有一成立：

$$\operatorname{mes} A_{\mu_2-\omega/2^r,\rho}(t^0+3a\rho^2) \leqslant \frac{1}{2}K_n\rho^n,$$

$$\operatorname{mes} B_{\mu_1+\omega/2^r,\rho}(t^0+3a\rho^2) \leqslant \frac{1}{2}K_n\rho^n。$$

假如第一个不等式成立，我们证明当

$$\omega > 2^S(M^2+1)^{1/2}\rho^{1-n/2}$$

时可得出(b)，为此取

$$k = \mu_2 - \frac{\omega}{2^r},\quad H = \frac{\omega}{2^r},\quad \beta = \frac{3}{4},$$

应用引理 5 得到

$$\operatorname{mes}(K(\rho)\backslash A_{\mu_2-\omega/2^{r+2},\rho}(t)) \geqslant bK_n\rho^n,$$

$$\forall t \in [t^0+3a\rho^0, t^0+4a\rho^2]。$$

由于$u(x,t)\in W_2^{2,1}(K(\rho))$故可应用引理4，并在其中取

$$k = \mu_2 - \frac{\omega}{2^r},\quad \lambda = \mu_2 - \frac{\omega}{2^{l+1}},\quad r+2 \leqslant l \leqslant s,$$

我们得到，

$$\frac{\beta}{bK_n}\int_{D_{\lambda_l}(t)}|\nabla u|dx \geqslant \frac{\omega}{2^{l+1}}\mathrm{mes}^{1-1/n}A_{\mu_2-\omega/2^{l+1},\rho}(t)$$

$$\geqslant \frac{\omega}{2^{l-1}K_n^{1/n}\rho}\mathrm{mes}A_{\mu_2-\omega/2^{l+1},\rho}(t),$$

其中

$$D_{\lambda_l}(t)=A_{\mu_2-\omega/2^l,\rho}(t)/A_{\mu_2-\omega/2^{l+1},\rho}(t),$$

由此有

$$\frac{\omega^2}{2^{2l+2}K_n^{2/n}\rho^2}\left(\int_{t^0+3a\rho^2}^{t^0+4a\rho^2}A_{\mu_2-\omega/2^{l+1},\rho}(t)dt\right)^2$$

$$\leqslant \frac{\beta^2}{K_n^2b^2}\int_{t^0+3a\rho^2}^{t^0+4a\rho^2}\int_{D_{\lambda_l}(t)}|\nabla u|^2dxdt\int_{t^0+3a\rho^2}^{t^0+4a\rho^2}\mathrm{mes}\,D_{\lambda_l}(t)dt。$$

就 $\zeta=\zeta(x,2\rho,\rho)$ 应用定义$\mathscr{B}_2$的不等式，估计上式中关于 t 积分的部分如下：

$$\nu\int_{t^0+3a\rho^2}^{t^0+4a\rho^2}\int_{D_{\lambda_l}(t)}|\nabla u|^2dxdt$$

$$\leqslant\nu\int_{t^0+3a\rho^2}^{t^0+4a\rho^2}\int_{A_{\mu_2-\omega/2^l,2\rho}(t)}\zeta^2|\nabla u|^2dxdt$$

$$\leqslant\int_{A_{\mu_2-\omega/2^l,2\rho}(t^0-3a\rho^2)}\left(u-\mu_2+\frac{\omega}{2^l}\right)^2\zeta^2dx$$

$$+\gamma\left[\int_{t^0+3a\rho^2}^{t^0+4a\rho^2}\int_{A_{\mu_2-\omega/2^l,2\rho}(t)}\left(u-\mu_2+\frac{\omega}{2^l}\right)^2|\nabla\zeta|^2dxdt\right.$$

$$\left.+(M^2+1)\int_{t^0+3a\rho^2}^{t^0+4a\rho^2}\mathrm{mes}^{1-2/q}A_{\mu_2-\omega/2^l,2\rho}(t)dt\right]$$

$$\leqslant \frac{\omega^2}{2^{2l}} K_n(2\rho)^n + \gamma a\rho^2 \left[\frac{\omega^2}{2^{2l}\rho^2} K_n(2\rho)^n \right.$$

$$\left. + (M^2+1) K_n^{1-2/q} (2\rho)^{n-2n/q} \right] \leqslant C_1 \frac{\omega^2}{2^{2l}} \rho^n,$$

最后不等式的成立，是由于按我们的假设得

$$\omega > 2^S(M^2+1)^{1/2}\rho^{1-n/q} \geqslant 2^l(M^2+1)^{1/2}\rho^{1-n/q},$$

即

$$(M^2+1)^{1/2}\rho^{1-(n/q)} \leqslant \frac{\omega}{2^l},$$

因此

$$C_1 = K_n 2^n + \gamma a(K_n 2^n + K_n^{1-2/q} 2^{n-2n/q}) < (1+2a\gamma) K_n 2^n。$$

结合上面二个不等式得

$$\left(\int_{t^0+3a\rho^2}^{t^0+4a\rho^2} \operatorname{mes} A_{\mu_2-\omega/2^{l+1},\rho}(t)dt \right)^2$$

$$\leqslant C\rho^{n+2} \int_{t^0+3a\rho^2}^{t^0+4a\rho^2} \operatorname{mes} D_{A_l}(t)dt,$$

其中

$$C = \frac{\beta^2(1+2a\gamma)2^{n+2}}{\nu K_n^{1-2/n} b^2}。$$

在上式中令 $l = r+2,\ r+3,\ \cdots\cdots s$ 相加得

$$(s-r-1)\left(\int_{t^0+3a\rho^2}^{t^0+4a\rho^2} \operatorname{mes} A_{\mu_2-\omega/2^{s+1},\ \rho}(t)dt \right)^2$$

$$\leqslant C\rho^{n+2} \int_{t^0-3a\rho^2}^{t^0+4a\rho^2} \operatorname{mes} K(\rho)dt = CaK_n\rho^{2n+4}。$$

把θ_1与s的关系取为

$$\theta_1=\left\{\frac{CaK_n}{(s-r-1)}\right\}^{\frac{1}{2}}。$$

如果给定θ_1，由此定出的s不是整数，取它的整数部分加1即可。这样，我们得到(b)式，引理6证毕。

引理7 $\forall\theta_2>0$，$\exists\,\theta_1>0$，使当

$$k>\max_{\Gamma_\rho}u(x,t),\quad \min(\delta,M)\geqslant H\geqslant\max_{Q_\rho}(u-k),$$

$$H\geqslant(M^2+1)^{1/2}\rho^{1-n/q}$$

时，若不等式

$$\int_{t_0}^{t^0+a\rho^2}\mathrm{mes}A_{k,\rho}(t)dt<\theta_1\rho^{n+2}$$

成立，则对$t\in[t^0+\frac{3}{4}a\rho^2,\ t^0+a\rho^2]$成立着

$$\mathrm{mes}A_{k+H/2,\rho/2}(t)\leqslant\theta_2\left(\frac{\rho}{2}\right)^n。$$

如果 $\mathrm{mes}A_{k,\rho}(t)=0$，则上面的估计对$t\in[t^0,t^0+a\rho^2]$成立。

证 取 $\zeta=\zeta(x,\ \rho,\ \frac{\rho}{2})$ 代入定义$\mathscr{B}_2$的不等式(***)，对t积分得

$$\left(\frac{H}{2}\right)^2\mathrm{mes}A_{k+H/2,\rho/2}(t)\leqslant\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2\zeta^2dx$$

$$\leqslant\int_{A_{k,\rho}(\tau)}(u-k)^2\zeta^2dx$$

$$+r\Big[\int_\tau^t d\sigma\int_{A_{k,\rho}(\sigma)}(u-k)^2|\nabla\zeta|^2dx$$

$$+(M^2+1)\int_\tau^t\mathrm{mes}^{1-2/q}A_{k,\rho}(\sigma)d\sigma\Big]$$

$$\leqslant H^2\text{mes}A_{k,\rho}(\tau)+\gamma\left[\frac{H^2}{\left(\frac{\rho}{2}\right)^2}\int_\tau^t\text{mes}A_{k,\rho}(\sigma)d\sigma\right.$$

$$\left.+(M^2+1)(a\rho^2)^{2/q}\left(\int_\tau^t\text{mes}A_{k,\rho}(\sigma)d\sigma\right)^{1-2/q}\right],$$

$$t^0\leqslant\tau\leqslant t^0+a\rho^2$$

由引理的条件与上面的不等式得

$$\text{mes}A_{k+H/2,\rho/2}(t)\leqslant 4\text{mes}A_{k,\rho}(\tau)+4\gamma\rho^n(4\theta_1+a^{2/q}\theta_1^{1-2/q})。$$

如果$A_{k,\rho}(t^0)=0$，在上式中令$\tau=t^0$得到

$$\text{mes}A_{k+H/2,\rho/2}(t)\leqslant\theta_2\left(\frac{\rho}{2}\right)^2,\quad t^0\leqslant t\leqslant t^0+a\rho^2,$$

其中θ_1、θ_2的关系为

$$4\gamma(4\theta_1+a^{2/q}\theta_1^{1-2/q})=\theta_2/2^n。$$

如果 $\text{mes}A_{k,\rho}(t^0)\neq 0$，由于

$$\int_{t_0}^{t_0+\frac{3}{4}a\rho^2}\text{mes}A_{k,\rho}(t)dt<\theta_1\rho^{n+2},$$

因此，至少有一个τ满足 $t^0\leqslant\tau\leqslant t^0+\frac{3}{4}a\rho^2$，使得

$$\text{mes}A_{k,\rho}(\tau)<\frac{4\theta_1}{3a}\rho^n,$$

对于这样的τ，得到

$$\text{mes}A_{k+H/2,\rho/2}(t)\leqslant\theta_2\left(\frac{\rho}{2}\right)^n,\quad t^0+\frac{3}{4}a\rho^2\leqslant t\leqslant t^0+a\rho^2。$$

θ_1与θ_2的关系为

$$4\gamma(4\theta_1+a^{2/q}\theta_1^{1-2/q})+\frac{16\theta_1}{3a}=\frac{\theta_2}{2^n}。$$

给定θ_2总可定出θ_1，引理证毕。

引理8 存在$\theta_2>0$，使于Q_ρ中如有

$$\sup_{t\in[t^0,t^0+a\rho^2]} \operatorname{mes} A_{k,\rho}(t)\leqslant\theta_2\rho^n$$

$$k\geqslant\max_{\Gamma_\rho} u(x,t),\quad H\geqslant(M^2+1)^{1/2}\rho^{1-n/q}$$

$$\min(\delta,M)\geqslant H\geqslant\max_{Q_\rho}(u-k)$$

则有

$$\operatorname{mes} A_{k+H/2,\rho/2}(t)=0,\quad \forall t\in\left[t^0+\frac{3}{4}a\rho^2,\ t^0+a\rho^2\right]。$$

如果 $\operatorname{mes} A_{k,\rho}(t^0)=0$，则

$$\operatorname{mes} A_{k+H/2,\rho/2}(t)=0,\quad \forall t\in[t^0,t^0+a\rho^2]。$$

证 记

$$I_{k,\rho}(t)=\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2\zeta^2dx$$

取 $\tilde\rho<\rho$，$\zeta=\zeta(x,\ \rho,\ \tilde\rho)$。设$\tilde k>k$，则

$$(\tilde k-k)^2\operatorname{mes} A_{\tilde k,\tilde\rho}(t)\leqslant\int_{A_{k,\tilde\rho}(t)}(u-k)^2dx\leqslant I_{k,\rho}(t)。$$

取$l=m=2$应用引理2，得

$$I_{k,\rho}(t)=\int_{A_{k,\rho}(t)}(u-k)^2\zeta^2dx$$

$$\leqslant C\operatorname{mes}^{2/n}A_{k,\rho}(t)\int_{A_{k,\rho}(t)}\left[|\nabla u|^2\zeta^2+(u-k)^2|\nabla\zeta|^2\right]dx$$

$$\leqslant C\mathrm{mes}^{2/n}A_{k,\rho}(t)\left[\int_{A_{k,\rho}(t)}|\nabla u|^2\zeta^2dx+\frac{H^2}{(\rho-\bar{\rho})^2}A_k\right]。$$

(3)

由定义$\mathscr{B}_2$的不等式(***)得到

$$I'_{k,\rho}(t)+\nu\int_{A_{k,\rho}(t)}|\nabla u|^2\zeta^2dx$$

$$\leqslant\gamma\left[\frac{H^2}{(\rho-\bar{\rho})^2}\mathrm{mes}A_{k,\rho}(t)\right.$$

$$\left.+(M^2+1)\ \mathrm{mes}^{1-2/q}A_{k,\rho}(t)\ \right]。\tag{4}$$

记

$$\sup_{t\in[\bar{t},t^0+a\rho^2]}\mathrm{mes}A_{k,\rho}(t)=A$$

这里的$\bar{t}$满足$t_0+\frac{a}{2}\rho^2\leqslant\bar{t}\leqslant t^0+a\rho^2$，将于下面取定。当在点$t\in[\bar{t},t^0+a\rho^2]$处成立着

$$I'_{k,\rho}(t)\geqslant 0$$

时，由上面二式得

$$I_{k,\rho}(t)\leqslant\frac{C}{\nu}H^2\left\{\frac{(\gamma+\nu)A^{1+2/n}}{(\rho-\bar{\rho})^2}\right.$$

$$\left.+\ \gamma(M^2+1)\ A^{1-2/q+2/n}/H^2\ \right\}。\tag{5}$$

如果 $I'_{k,\rho}(t)<0$，但在$[\bar{t},\ t]$中能找到最接近于t的τ使$I'_{k,\rho}(\tau)=0$，则此时有

$$I_{k,\rho}(t)\leqslant I_{k,\rho}(\tau),$$

因此(5)成立。如果

$$I'_{k,\rho}(\tau)<0,\qquad \forall\tau\in[\tilde{t},\ t],$$

自$\tilde{t}$到t积分(4)得

$$\nu\int_{\tilde{t}}^{t}\int_{A_{k,\rho}(\tau)}|\nabla u|^2\zeta^2dxd\tau\leqslant(t-\tilde{t})\gamma\Big[\frac{H^2A}{(\rho-\tilde{\rho})^2}$$

$$+(M^2+1)A^{1-2/q}\Big]+\int_{A_{k,\rho}(\tilde{t})}(u-k)^2\rho^2dx,$$

由(3)知上式左端不小于

$$\frac{\nu}{C}\Big[A^{-2/n}\int_{\tilde{t}}^{t}I_{k,\rho}(\tau)d\tau-\frac{CH^2A}{(\rho-\tilde{\rho})^2}(t-\tilde{t})\Big]$$

$$\geqslant\frac{\nu}{C}(t-\tilde{t})\Big[A^{-2/n}I_{k,\rho}(t)-\frac{CH^2A}{(\rho-\tilde{\rho})^2}\Big],$$

因此结合(2)得

$$(\tilde{k}-k)^2\mathrm{mes}A_{\tilde{k},\tilde{\rho}}(t)\leqslant I_{k,\rho}(t)$$

$$\leqslant\frac{C}{\nu}\Big[\frac{(\gamma+\nu)H^2A^{1+2/n}}{(\rho-\tilde{\rho})^2}+\gamma(M^2+1)A^{1-2/q+2/n}$$

$$+H^2A^{1+2/n}/(t-\tilde{t})\Big]。$$

与(5)相比较可见，当$t>\tilde{t}$时，上式对各种情况皆成立，改变与选取诸量为

$h=0,1,2,\cdots$，k 用 k_h 代替，而

$$k_h=k+\frac{H}{2}-\frac{H}{2^{h+1}};$$

ρ 用 ρ_h 代替，$\rho_h=\frac{\rho}{2}+\frac{\rho}{2^{h+1}}$。令

$$\tilde{k}=k_{h+1},\ \tilde{\rho}=\rho_{h+1},\ \tilde{t}=t_h=t^0+\frac{3a\rho^2}{4}-\frac{3a\rho^2}{2^{h+2}},$$

A 用 μ_h 代替，则由上式得

$$\mu_{h+1}\leqslant\frac{C_1H^2}{(k_h-k_{h+1})^2}\left[\frac{\mu_h^{1+2/q}}{(\rho_h-\rho_{h+1})^2}\right.$$

$$\left.+\frac{(M^2+1)\mu_h^{1-2/q+2/n}}{H^2}+\frac{\mu_h^{1+2/n}}{t_{h+1}-t_h}\right].$$

记　$y_h=\frac{\mu_h}{\rho n}$，由上式得

$$y_{h+1}\leqslant C_2 2^{4h}y_h^{1+\lambda},$$

其中

$$\lambda=\frac{2}{n}-\frac{2}{q}>0,$$

上式的一般规律为

$$y_h\leqslant C_2^{[(1+\lambda)^h-1]/\lambda}2^{[(1+\lambda)^h-1-\lambda h]4/\lambda^2}y_0^{(1+\lambda)^h}$$

$$\leqslant\left(y_0C_2^{1/\lambda}2^{4/\lambda^2}\right)^{(1+\lambda)^h}$$

因此当

$$y_0=\frac{\mu_0}{\rho^n}=\frac{1}{\rho^n}\sup_{[t^0,t^0+a\rho^2]}\mathrm{mes}A_{k,\rho}(t)\leqslant\theta_2$$

时，只要

$$\theta_2 C_2^{1/\lambda}2^{4/\lambda^2}<1,$$

就有$y_h\to 0$，$h\to\infty$，即

$$\mathrm{mes}A_{k+H/2,\rho/2}(t)=0,\ \forall t\in[t^0+\frac{3}{4}a\rho^2,t^0+a\rho^2]。$$

这证明了引理的第一部分。

如果有

$$\mathrm{mes}A_{k,\rho}(t^0)=0,$$

可取$\bar{t}=t^0$，在这种情况下，不会发生

$$I'_{k,\rho}(\tau)<0,\quad \tau\in[t^0,\ t]。$$

否则，$I_{k,\rho}(\tau)$为单调减少，

$$I_{k,\rho}(t^0)>I_{k,\rho}(\tau)\geqslant 0,$$

这与

$$I_{k,\rho}(t^0)=\int_{A_{k,\rho}(t^0)}(u-k)^2\zeta^2dx=0$$

相矛盾。因此(5)成立。由此得出引理的第二部分，引理证毕。

上顶点同为$(x^1,\ t^1)$的一个套一个的标准柱体记为

$$Q_{p\rho}=K(x^1,p\rho)\times[t^1-a(p\rho)^2,t^1],\quad p=1,2,4,8。$$

综合引理6、7、8得到

引理9 $\exists\, s>0$，使当$Q_{8\rho}\subset Q_T$ 时，下面二个不等式至少有一个成立：

$$\operatorname{osc}\{u,Q_\rho\}\leqslant 2^{s+3}(M^2+1)^{1/2}\rho^{1-n/q},$$

$$\operatorname{osc}\{u,Q_\rho\}\leqslant(1-2^{-(s+3)})\operatorname{osc}\{u,Q_{8\rho}\}。$$

证 取θ_2满足引理 8 的条件，由θ_2定出θ_1满足引理 7 的条件。由θ_1定出$s(\theta_1)$满足引理 6 的条件，由此 s 是一个已知的常数，当

$$\operatorname{osc}\{u,Q_\rho\}\geqslant 2^{s+3}(M^2+1)^{1/2}\rho^{1-n/q}$$

时有

$$\omega=\operatorname{osc}\{u,Q_{8\rho}\}\geqslant 2^{s+3}(M^2+1)^{1/2}\rho^{1-n/q}$$

$$\geqslant 2^{s}(M^2+1)^{1/2}(4\rho)^{1-n/q}。$$

应用引理于 6 $Q_{4\rho}$得

$$\int_{t^1-a(4\rho)^2}^{t^1}\operatorname{mes}A_{\mu_2-\omega/2^{s+1},4\rho}(t)dt\leqslant\theta_1(4\rho)^{n+2}。$$

(或把$A_{\mu_2-\frac{\omega}{2^{s+1}},4\rho}$换为$B_{\mu_1+\frac{\omega}{2^{s+1}},4\rho}$)，其中$\mu_2=\max\limits_{Q_{8\rho}}u$。由于在$Q_{4\rho}$上引理 7 所需条件

$$\frac{\omega}{2^{s+1}}\geqslant(M^2+1)^{1/2}(4\rho)^{1-n/q}$$

成立，应用引理 7 于$Q_{4\rho}$得到

$$\operatorname{mes}A_{\mu_2-\omega/2^{s+2},2\rho}(t)\leqslant\theta_2(2\rho)^n,\quad\forall t\in[t^1-a(2\rho)^2,t^1]。$$

又由于在$Q_{2\rho}$上引理 8 所需条件

$$\frac{\omega}{2^{s+2}}\geqslant(M^2+1)^{1/2}(2\rho)^{1-n/q}$$

亦成立，应用引理 8 于$Q_{2\rho}$得到

$$mes A_{\mu_2-\omega/2^{s+3},\ c}(t)=0,\quad \forall t\in[t^1-a\rho^2, t^1]。$$

即有

$$u(x,t)\leqslant\mu_2-\frac{\omega}{2^{s+3}},\quad \forall(x,t)\in Q_c,$$

或

$$osc\{u,Q_\rho\}\leqslant\left(1-\frac{1}{2^{s+3}}\right)osc\{u,Q_{8\rho}\},$$

引理证毕。

定理2 $\forall u(x,t)\in\mathscr{B}_2(Q_T,\ M,\ \gamma,\ v,\ \delta,\ \frac{1}{q})$与$(x^0,t^0)\in Q_T$，$\forall\rho<\rho^0=\min(1,\sqrt{\frac{t^0}{a}},\ d(x^0,\partial\Omega))$以及$Q_\rho\subset Q_T$，$Q_\rho$的顶点为$(x^0,t^0)$，下面的Hölder条件的不等式成立：

$$osc\{u,Q_\rho\}\leqslant C(M^2+1)^{1/2}\rho_0^{-\alpha}\rho^\alpha,$$

其中正的常数C与α依赖于$\mathscr{B}_2$的诸参数，但M除外。

证 令

$$C_0=\max\left(\frac{2}{\rho_0^{1-n/q}},\ 2^{s+3}\right)$$

其中s由引理9定出。作与Q_{ρ_0}有共同上顶点的标准柱体Q_{ρ_k}，$\rho_k=\frac{\rho_0}{8^k}$，$k=0,1,2,\cdots$。记

$$osc\{u,Q_{\rho_k}\}=\omega_k,$$

显然有

$$\omega_0\leqslant 2M\leqslant C_0(M^2+1)^{1/2}\rho_0^{1-n/q}。$$

由引理 9， $\forall k=1,2,\cdots$， 或者有不等式

$$\omega_k \leqslant C_0(M^2+1)^{1/2}\rho_k^{1-n/q} = \frac{C_0(M^2+1)^{1/2}}{8^{k(1-n/q)}}\rho_0^{1-n/q}$$

或者有

$$\omega_k \leqslant \left(1-\frac{1}{2^{s+3}}\right)\omega_{k-1}$$

记

$$\eta = \max\left\{1-\frac{1}{2^{s+3}},\ \frac{1}{8^{1-n/q}}\right\}<1。$$

则 $\forall k\geqslant 0$有

$$\omega_k \leqslant C_0(M^2+1)^{1/2}\eta^k\rho_0^{1-n/q}$$

$$\leqslant 2^{s+3}(M^2+1)^{1/2}\eta^k = 2^{s+3}(M^2+1)^{1/2}\rho_0^{-\alpha}\rho_k^{\alpha},$$

$$\alpha = \log_8\frac{1}{\eta},$$

对任何 $\rho\leqslant\rho_0$，可找到 k 使

$$\rho_{k+1}<\rho\leqslant\rho_k$$

故有

$$osc\{u,Q_\rho\}\leqslant\omega_k\leqslant 2^{s+3}(M^2+1)^{1/2}\rho_0^{-\alpha}\rho_k^{\alpha}$$

$$= C(M^2+1)^{1/2}\rho_0^{-\alpha}\rho_{k+1}^{\alpha}\leqslant C(M^2+1)^{1/2}\rho_0^{-\alpha}\rho^{\alpha},$$

其中

$$C=2^{s+3}8^{\alpha}。$$

定理证毕。

我们已证得 u 满足内闭的 Hölder 条件，现来推导 u 满足近边的

Hölder条件。对近边估计，要设$\partial\Omega$满足条件(A)及$u|_\Gamma$满足 Hölder 条件

$$u|_\Gamma \in C^{\varepsilon, \varepsilon/2}(\Gamma)$$

这样，就不再需要引理5了。因此常数a的取法没有什么限制。但是，为了要和内部估计联合去证明定理，因此用内部取定的a作为近边的a来用，引理6用下面的引理来代替。

引理6′ $\forall\theta_1>0$，可找到$s(\theta_1)>0$，使对

$$Q_{2\rho}=K(2\rho)\times[t^0, t^0+4a\rho^2],$$

$$Q_\rho=K(\rho)\times[t^0+3a\rho^2, t^0+4a\rho^2],$$

满足条件

$$\operatorname{mes}[K(\rho)\setminus(K(\rho)\cap\Omega)]\geqslant b_1\rho^n,$$

则下面的不等式(a')与引理6中的(b)、(c)至少有一个成立。

$$\omega=\operatorname{osc}\{u, Q_{2\rho}\}<2^s(M^2+1)^{1/2}\rho^{\varepsilon_0}, \qquad (a')$$

其中

$$\varepsilon_0=\min\left\{1-\frac{n}{q}, \varepsilon\right\}。$$

如果$t^0+3a\rho^2\leqslant 0$，这时设$-4a\rho^2<t^0<T$。则于(b)、(c)中积分限改为由0到$t^0+4a\rho^2$，并分别增加补充条件

$$\operatorname{mes}A_{\mu_2-\omega/2^{s+1}, \rho}(o)=o,$$

或者

$$\operatorname{mes}B_{\mu_1+\omega/2^{s+1}, \rho}(o)=o。$$

证 由于$u|_\Gamma\in C^{\varepsilon, \frac{\varepsilon}{2}}(\Gamma)$，所以存在常数$L$使

$$\omega_1 = osc\{u, \Gamma_{2\rho}\} \leqslant L\rho^{\varepsilon}, \quad \Gamma_{2\rho} = \Gamma \cap Q_{2\rho}\text{。}$$

选取 r 满足

$$2^r > \max\left\{\frac{2M}{\delta}, 4L\right\},$$

则当

$$\omega \geqslant 2^s (M^2+1)^{1/2} \rho^{\varepsilon_0} \quad (s \geqslant r)$$

时有

$$\omega_1 \leqslant L\rho^{\varepsilon} \leqslant \frac{1}{4} 2^r \rho^{\varepsilon_0} \leqslant \frac{\omega}{4},$$

因此u在$\Gamma_{2\rho}$中的值至多只能与$[\mu_1, \mu_1+\frac{\omega}{4}]$，$[\mu_2-\frac{\omega}{4}, \mu_2]$之一相交，这里

$$\mu_1 = \min_{Q_{2\rho}} u, \qquad \mu_2 = \max_{Q_{2\rho}} u\text{。}$$

设它不与后者相交，我们证明由此可以得出(b)。

这是因为当

$$k > \mu_2 - \frac{\omega}{2^r} \geqslant \mu_2 - \frac{\omega}{4}$$

时

$$A_{k,\rho}(t) \cap \Gamma_{2\rho} = \phi, \quad A_{k,\rho}(t) \cap K(2\rho) \cap \partial\Omega = \phi\text{。}$$

因而

$$A_{k,\rho}(t) \cap K(\rho) \cap \partial\Omega = \phi, \quad A_{k,\rho}(t) \subset K(\rho) \cap \Omega,$$

$$\operatorname{mes}[K(\rho) \backslash A_{k,\rho}(t)] \geqslant \operatorname{mes}[K(\rho) \backslash (K(\rho) \cap \Omega)] \geqslant \theta_0 \rho^n\text{。}$$

上式是类似于引理 5 的结论，故仿引的理 6 证明得到(b)成立。

又当　$t^0+3a\rho^2\leqslant 0$时，

$$A_{\mu_2-\omega/2^{s+1},\rho}(o)\subset A_{\mu_2-\omega/4,\rho}(o)$$
$$\subset\Gamma\cap\{t=0\}\cap K(2\rho)=\phi,$$

因此

$$\text{mes}A_{\mu_2-(\omega/2^{s+1}),\rho}(o)=0,$$

引理6′证毕。

引理9′　设$\partial\Omega$满足条件(A)，$u|_\Gamma\in C^{\varepsilon,\frac{\varepsilon}{2}}(\Gamma)$。当柱体$Q_\rho$与$\Gamma$相交时，存在正整数$s$使

$$osc\{u,Q_\rho\cap Q_T\}\leqslant 2^{s+3}(M^2+1)^{1/2}\rho^{\varepsilon_0},$$

其中

$$\varepsilon_0=\min\left\{1-\frac{n}{q},\varepsilon\right\},$$

或者

$$\text{osc}\{u,Q_\rho\cap Q_T\}\leqslant\left(1-\frac{1}{2^{s+3}}\right)osc\{u,Q_{4\rho}\cap Q_T\}。$$

引理9′的证明除了用引理6′代替引理 6 外，其它与引理 9 的证明一样。

定理8　设$\partial\Omega$满足条件

$$\text{mes}(K(\rho)\cap\Omega)\leqslant(1-\theta_0)\text{mes}K(\rho)\qquad(A)$$

其中$K(\rho)$的中心在$\partial\Omega$上，$\rho\leqslant a_0$，$0<\theta_0<1$。设$u(x,t)\in\mathscr{B}_2(Q_T,$ M，ν，$r,\delta,\frac{1}{q}),u|_\Gamma\in C^{\varepsilon,\frac{\varepsilon}{2}}(\Gamma)$ $(0<\varepsilon<1)$。则$\forall Q_\rho$其顶为$(x^0,t^0)\in Q_T$，有估计式

$$\operatorname{osc}\{u, Q_\rho \cap Q_T\} \leqslant C(M^2+1)^{1/2}\rho^\alpha \tag{6}$$

其中C、$\alpha>0$仅依赖于$\mathscr{B}_2$的参数(但M除外)以及与$\|u\|_{C^{\epsilon,\frac{\epsilon}{2}}(\Gamma)}$和条件($A$)有关的常数。

证 仅需对 $\rho\leqslant a_0$证明(6)式成立即可。对应于$\rho_0=a_0$的标准柱体Q_{ρ_0}，作以(x^0,t^0)为顶点的缩小的标准柱体Q_{ρ_k}，$\rho_k=\frac{\rho_0}{8^k}$。记

$$\omega_k=\operatorname{osc}\{u, Q_{\rho_k}\cap Q_T\},$$

$$C_0=\max\left\{\frac{2}{a_0^{\varepsilon_0}},\ 2^{s+3}\right\},$$

$$\eta=\max\left\{1-\frac{1}{2^{s+3}},\ \frac{1}{8^{\varepsilon_0}}\right\},$$

其中ε_0取自引理6′，而s为引理6与引理6′对应量中较大的一个。$Q_{\rho_{k-1}}$与Q_{ρ_k}的关系分三种情况：二者均与Γ相交，二者均不与Γ相交，$Q_{\rho_{k-1}}$与Γ相交而Q_{ρ_k}不与Γ相交。前二种情况由引理9与9′得到结论：或者是

$$\omega_k\leqslant C_0(M^2+1)^{1/2}\rho_k^{\varepsilon_0}=C_0(M^2+1)^{1/2}\rho_0^{\varepsilon_0}8^{-k\varepsilon_0}$$
$$\leqslant C_0(M^2+1)^{1/2}\eta^k\rho_0^{\varepsilon_0};$$

或者是

$$\omega_k\leqslant\eta\omega_{k-1};$$

第三种情况只可能出现一次，取为

$$\omega_k\leqslant\omega_{k-1}。$$

综合以上三种情况得到

$$\omega_k\leqslant C_0(M^2+1)^{1/2}\eta^{k-1}\rho_0^{\varepsilon_0},\quad k=1,2,\cdots。$$

因此有

$$\operatorname{osc}\{u, Q_\rho \cap Q_T\} \leqslant C(M^2+1)^{1/2}\rho^\alpha,$$

其中 $\alpha = \log_8 \dfrac{1}{\eta}$，$C = 8\eta^{-1}\max\{2, 2^{s+3}a_0^{\alpha_0}\}a_0^{-\alpha}$。定理3证毕。

结合定理2、3得

定理4 设$u(x,t) \in C^{2,1}(Q_T) \cap C(\bar{Q}_T)$为

$$\mathscr{L}u = u_t - \sum \frac{\partial}{\partial x_i}(a_{ij}u_{x_j} + a_i u + f_i)$$

$$+ \sum b_i u_{x_i} + au + f = 0$$

的解，且有

$$\Sigma a_{ij}(x,t)\xi_i\xi_j \geqslant \nu \Sigma \xi_i^2, \ \forall \xi \in R^n, (x,t) \in Q_T,$$

其中 $\nu > 0$。又存在$q > n \geqslant 2$使

$$\Sigma |a_{ij}| + \|a_i, b_i, f_i\|_q + \|a, f\|_{q/2} \leqslant \mu (0 \leqslant t \leqslant T)。$$

则$|u|_{\alpha, Q'_T}$，$\alpha > 0$，对每一

$$Q'_{\Sigma, T} = \Omega' \times [\varepsilon, T], \ \Omega' \subset \Omega, \ \varepsilon > 0,$$

可由 $\max\limits_{\Gamma}|u|$、μ、ν、ε以及$d(\Omega'、\partial\Omega)$来估计。如果增设$\partial\Omega$满足条件$(A)$，则$\|u\|_{\alpha, Q_T}$，可由$\mu$、$\nu$、$\|u\|_{\beta,1}(\beta > 0)$以及条件$(A)$中的常数来估计。

§6 弱解的存在、唯一与光滑性

现考察前节定理4考虑过的方程

$$\mathscr{L} u=0,$$

其系数所满足的条件不变，现研究其初、边值问题：

$$u|_{t=0}=\varphi(x),\quad u|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0。$$

定理1 设$\varphi(x)\in C^{\beta}(\bar{\Omega})$，$0<\beta<1$，且 $\varphi|_{\partial\Omega}=0$，$\partial\Omega$ 满足条件(A)，则

$$\begin{cases}\mathscr{L} u=0,\\ u|_{t=0}=\varphi(x),\\ u|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0\end{cases}$$

有唯一解 $u\in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$，$0<\alpha<1$，且 $u_{x_i}\in L^2(Q_T)$，这里 u 取初边值是按经典意义，u 满足方程是按下列拓广的意义：

$$\int_{\Omega}u\Phi dx\Big|_0^t+\int_0^t\int_{\Omega}[-u\Phi_t+\sum_i(\sum_j a_{ij}u_{x_j}+a_iu+f_i)\Phi_{x_i}$$

$$+(\sum_i b_iu_{x_i}+au+f)\Phi]dxdt=0,$$

$$\forall\Phi\in C^{2,1}(Q_T),\quad \Phi|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0。$$

当$\partial\Omega$不满足条件(A)或$\varphi(x)$仅是属于 $L^2(Q)$，u 在内闭区域(其上方边界可直到$t=T$)满足Hölder条件。

证 先延拓系数a_{ij}、a_i、b_i、a、f_i、f到$\bar{Q}_T$外，使能保持前节定理4的第二个条件。这只要令

$$a_{ij}=\nu\delta_{ij},\quad i,j=1,2,\cdots,n$$

以及

$$a_i=b_i=a=f_i=f=0,\quad (x,t)\bar{\in}\bar{Q}_T,$$

$$\varphi(x)=0,\quad x\bar{\in}\bar{\Omega}。$$

然后做上述诸函数的光滑化逼近，得到方程

$$\begin{cases} \mathscr{L}_h u = 0, \\ u|_{t=0} = \varphi_h, \\ u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0。\end{cases}$$

由§4可知这一初、边值问题有解 $u_h \in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$。根据极值估计得$u_h$的一致有界性，由Hölder估计得知 $u_h \in C^{\alpha,\alpha/2}(\bar{Q}_T)$，$\alpha$ 以及Hölder系数是一致的。选$\{u_h\}$的一致收敛子列，由于

$$\int_\Omega u_h^2 dx + \int_0^t\int_\Omega |\nabla u_h|^2 dx \leqslant C\Big[\int_0^t\int_\Omega \Sigma f_i^2 dx dx$$

$$+ \int_0^t \|f\|^2_{\frac{2q}{q+2}} dt + \int_\Omega u_h^2(x,0)dx,$$

所以 $\frac{\partial u_h}{\partial x_i}$ 在$L^2(Q_T)$中为弱收敛。根据函数u满足定理1的要求，当$\partial\Omega$不满足(A)或 $\varphi \in L^2(\Omega)$ 时，作内闭区域逼近，再仿上法进行即可。

解为唯一的证明。二解之差记为v，则

$$v|_\Gamma = 0。$$

在

$$\int_\Omega v\Phi dx\Big|_0^t + \int_0^t\int_\Omega[-v\Phi_t + \Sigma(\Sigma a_{ij}v_{x_j} + a_i v)\Phi_{x_i}$$

$$+ (\Sigma b_i v_{x_i} + va)\Phi]dxdt = 0$$

中，令

$$\Phi(x,t) = \frac{1}{2\rho}\int_{t-\rho}^{t+\rho} v(x,\tau)d\tau,$$

这里ρ为常数，且当$t<0$时，令$v(x,t)=0$，则有

$$\Phi_t = \frac{1}{2\rho}[v(x,t+\rho) - v(x,t-\rho)],$$

$$\int_0^t v\Phi_t dt = \frac{1}{2\rho}\Big[\int_0^t v(x,t)v(x,t+\rho)dt -$$

$$\int_0^t v(x,t)v(x,t-\rho)dt\Big]$$

$$= \frac{1}{2\rho}\int_t^{t+\rho} v(x,t)v(x,\ t-\rho)dt \to \frac{1}{2}v^2(x,t),\rho\to 0,$$

因此令$\rho\to 0$得到

$$\frac{1}{2}\int_\Omega v^2(x,t)dt + \int_0^t\int_\Omega\Big[\sum_{i,j}a_{ij}v_{x_j}v_{x_i} + \sum_i(a_i+b_i)vv_{x_i}$$

$$+ av^2\Big]dxdt = 0,$$

由此应用前节引理 1 得

$$\int_\Omega v^2(x,t)dx + \int_0^t\int_\Omega |\nabla v|^2 dxdt = 0。$$

因此 $v=0$，唯一性得证。定理 1 证毕。

当方程的系数与f_i、f以及$u|_\Gamma$满足较强的光滑性条件时，还可得出弱解更强的光滑性。我们先研究 $C^{2,1}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$ 中的解的先验估计，仅作出 $u_{x_i}(i=1,2,\cdots\cdots,n)$ 的内闭估计。至于近边估计，先要估出 $\left.\frac{\partial u}{\partial v}\right|_{\partial\Omega\times[0,T]}$，这里 v 为 $\partial\Omega$ 的法线。在系数的假设较弱的条件下，要作此估计需克服一定的困难，我们不去研究它。

定理2 设$u(x,t)\in C^{2,1}(Q_T)\cap C(\bar{Q}_T)$为

$$\begin{cases} \mathscr{L}u=0 \quad (x,t)\in Q_T, \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \\ u|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0 \end{cases}$$

的解，$\partial\Omega$满足条件(A)，$\mathscr{L}$的系数满足前节定理4 的二个条件以及

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, a_i, \frac{\partial a_i}{\partial x_k}, \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, b_i, a, f\right|_{L^q(\Omega)} \leqslant C < \infty,$$

$$\left|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}, a_i, b_i\right|_{L^{q+2}(Q_T)} \leqslant C < \infty。$$

其中常数q为大于n的偶整数，则

$$\forall Q_T' = \Omega' \times [0,T],\ \Omega' \subset\subset \Omega,$$

$\max\limits_{Q_T'}|\nabla u|$ 可由前节定理4中二个条件的常数 μ、ν 与上面二式中的常数 C、$\max\limits_{\Omega}|\nabla u(x,o)|$ 以及$d(\Omega',\partial\Omega)$来估计。

证 先估计

$$\int_\Omega (\nabla u)^{2s+2}\zeta^2 dx, 0 \leqslant t \leqslant T,\ s = 0, 1, 2, \cdots, \frac{q}{2} - 1,$$

其中$\zeta(x)$为Ω中内闭区域外为0的光滑函数。

记 $p(x,t) = |\nabla u(x,t)|$，则

$$0 = -\int_0^t dt \int_\Omega \sum_{k=1}^n \mathscr{L} u \cdot \frac{\partial}{\partial x}(p^{2s} u_{x_k} \zeta^2) dx$$

$$= \int_0^t \int_\Omega \left\{ \sum_k \left[u_{tx_k} - \sum_i \left(\sum a_{ij} u_{x_j} + a_i u + f_i \right)_{x_i x_k} \right] p^{2s} u_{x_k} \zeta^2 \right.$$

$$\left. - \sum_k \left(\sum_i b_i u_{x_i} - au + f \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(p^{2s} u_{x_i} \zeta^2 \right) \right\} dx dt$$

$$= \frac{1}{2(s+1)} \int_\Omega p^{2s+2} \zeta^2 dx \bigg|_0^t + \int_0^t \int_\Omega \left\{ \sum_{k,i} \left(\sum_j a_{ij} u_{x_j} + a_i u \right. \right.$$

$$\left. + f_i \right)_{x_k} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(p^{2s} u_{x_k} \zeta^2 \right) - \sum_k \left(\sum_i b_i u_{x_i} + au \right.$$

$$\left. \left. + f \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \left(p^{2s} u_{x_k} \zeta^2 \right) \right\} dx dt。$$

上面的推导中，分部积分时需要 u_{tx_k}，$u_{x_ix_jx_k}$ 的存在，但最终并不出现这些函数，因此，假设 $u\in C^{2,1}(Q_T)$ 就已足够了。因为可在分部积分前先作光滑逼近，分部积分后取极限。

从上式得

$$\frac{1}{2(s+1)}\int_\Omega p^{2s+2}\zeta^2 dx\Big|_0^t+\nu\int_0^t\int_\Omega\Big[p^{2s}\sum_{i,k}u_{x_ix_k}^2$$

$$+2sp^{2s-2}\sum_j\Big(\sum_k u_{x_kx_j}u_{x_k}\Big)^2\Big]\zeta^2 dxdt$$

$$\leqslant C_\varepsilon\int_0^t\int_\Omega\Big[\sum_{i,k}\Big(\sum_j\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}u_{x_j}+a_iu_{x_k}+\frac{\partial a_i}{\partial x_k}u+\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\Big)^2$$

$$+\Big(\sum_i b_iu_{x_i}+au+f\Big)^2\Big]p^{2s}\zeta^2 dxdt$$

$$+C\int_0^t\int_\Omega p^{2s+2}|\nabla\zeta|^2 dxdt+\varepsilon\int_0^t\int_\Omega p^{2s}\sum_{i,k}u_{x_ix_k}^2\zeta^2 dxdt,$$

上式中 $\varepsilon>0$ 是任意的，C_ε 仅与 ε、n 有关。取 $\varepsilon=\frac{\nu}{2}$，应用Young 不等式

$$ab\leqslant\varepsilon_1a^p+\varepsilon_1^{-q/p}b^q,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$$

由上式得

$$\frac{1}{2(s+1)}\int_\Omega p^{2s+2}\zeta^2 dx\Big|_0^t+\frac{\nu}{2}p^{2s}\sum u_{x_ix_k}^2\zeta^2 dxdt$$

$$\leqslant\varepsilon_1\int_0^t\int_\Omega p^{2s+4}\zeta^2 dxdt+C_{\varepsilon_1}\int_0^t\int_\Omega(A^{2(s+2)}+B^{s+2})dxdt$$

$$+C_{\varepsilon_1}\int_0^t\int_\Omega p^{2s+2}|\nabla\zeta|^2 dxdt。\qquad (*)$$

其中

$$A=\sum_i\Big(\sum_{j,k}\Big|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}\Big|+|a_i|+|b_i|\Big),\qquad (1)$$

$$B=\sum_{i,k}\left(\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\right|+\left|\frac{\partial a_i}{\partial x_k}\right|\right)+|a|+|f|。\tag{2}$$

由定理的假设得

$$\int_{Q_T}A^{2(s+2)}dxdt\leqslant C\int_{Q_T}A^{q+2}dxdt\leqslant C,$$

$$\int_{Q_T}B^{s+2}dxdt\leqslant C\int_{Q_T}B^{q}dxdt\leqslant C。$$

由 u 的有界性我们得到

$$\int_{\Omega}p^{2s+4}\zeta^2dx=-\int_{\Omega}u\sum_k(p^{2s+2}u_{x_k}\zeta^2)_{x_k}dx$$

$$\leqslant\max_{\bar{Q}_T}|u|\int_{\Omega}\left(\varepsilon_2p^{2s+4}\zeta^2+\frac{C}{\varepsilon_2}p^{2s}\Sigma u^2_{x_ix_k}\zeta^2\right.$$
$$\left.+\frac{C}{\varepsilon_2}p^{2s+2}|\nabla\zeta|^2\right)dx。$$

取 $\varepsilon_2=\dfrac{1}{2\max\limits_{\bar{Q}_T}|u|}$，由上式得

$$\int_{\Omega}p^{2s+4}\zeta^2dx\leqslant C_1\int_{\Omega}p^{2s}\Sigma u^2_{x_ix_k}\zeta^2dx+C_1\int_{\Omega}p^{2s+2}|\nabla\zeta|^2dx。$$

把这些不等式代入(*)式消去

$$\int_0^t\int_{\Omega}p^{2s}\Sigma u^2_{x_ix_k}\zeta^2dxdt,$$

得到

$$\frac{1}{2(s+1)}\int_{\Omega}p^{2s+2}\zeta^2dx+\left(\frac{\nu}{2C_1}-\varepsilon_1\right)\int_0^t\int_{\Omega}p^{2s+4}\zeta^2dxdt$$
$$\leqslant\tilde{C}_{\varepsilon_1}+\tilde{C}_{\varepsilon_1}\int_0^t\int_{\Omega}p^{2s+2}|\nabla\zeta|^2dxdt。$$

取 $\varepsilon_1=\dfrac{\nu}{4C_1}$，由上式得

$$\int_\Omega p^{2s+2}\zeta^2dx+\int_0^t\int_\Omega p^{2s+4}\zeta^2dxdt$$
$$\leqslant C+C\int_\Omega|\nabla u(x,0)|^{2s+2}\zeta^2dx+C\int_0^t\int_\Omega p^{2s+2}|\nabla\zeta|^2dxdt$$
$$\leqslant C+C\int_0^t\int_\Omega p^{2s+2}|\nabla\zeta|^2dxdt。$$

当 $s=0$ 时，由前节引理1得

$$\int_{Q_T}p^4dxdt\leqslant C。$$

对内闭的 $\Omega'\subset\subset\Omega$，记

$$2\rho=d(\Omega',\partial\Omega)。$$

当 $x\in\Omega'$ 时，取

$$\zeta=\zeta\left(x,\rho+\frac{\rho}{2^s},\rho+\frac{\rho}{2^{s+1}}\right),\quad s\geqslant0。$$

于是逐步地得到：当 $s\leqslant\dfrac{q}{2}-1$ 时，

$$\int_\Omega p^{2s+2}\zeta^2dx+\int_0^t\int_\Omega p^{2s+4}\zeta^2dxdt\leqslant C,$$

即有

$$\int_{K(\rho)}p^{2s+2}dx\leqslant C。$$

由于 Ω' 能用有限个 $K(\rho)$ 复盖，因此

$$\int_{\Omega'}p^{2s+2}\zeta^2dx\leqslant C。$$

故对任何内闭区域外为零的光滑的 $\zeta(x)$ 有

$$\int_{\omega} p^{2s+2}\zeta^2 dx \leqslant C,$$

这里 $2s+2 \leqslant q$。

现估计 $\max\limits_{Q_T'} |\nabla u|$。记

$$\zeta^2(x)p^2 = w(x,t),$$

其中 $p=|\nabla u|$，$\zeta(x)$为光滑且于Ω的内闭区域外为0。置

$$A_\lambda(t)=\{x|(x,t)\in Q_T,\ w(x,t)>\lambda\},\ \lambda>0,$$

我们得到

$$0=-\int_{A_\lambda(t)} \sum \mathscr{L} u \frac{\partial}{\partial x_k}[(w-\lambda)\zeta^2 u_{x_k}]dx$$

$$=\frac{1}{4}\int_{A_\lambda(t)} (w-\lambda)^2 dx+\int_{A_\lambda(t)}\Big\{\sum_{i,k}\Big(\sum_j a_{ij}u_{x_j x_k}+\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k}u_{x_j}$$

$$+a_i u_{x_k}+\frac{\partial a_i}{\partial x_k}u+\frac{\partial f_i}{\partial x_k}\Big)\Big[w_{x_i}\zeta^2 u_{x_k}+(w-\lambda)u_{x_k x_i}\zeta^2$$

$$+(w-\lambda)u_{x_k}2\zeta\zeta_{x_i}\Big]-\Big(\Sigma b_i u_{x_i}+au+$$

$$+f\Big)\Big[\Sigma w_{x_k}\zeta^2 u_{x_k}+(w-\lambda)\Sigma u_{x_k x_k}\zeta^2+$$

$$+(w-\lambda)u_{x_k}2\zeta\zeta_{x_k}\Big]\Big\}dxdt。$$

应用Schwartz不等式，当$\lambda\geqslant 1$时由上式得

$$\frac{d}{dt}\int_{A_\lambda(t)}(w-\lambda)^2 dx+2\nu\int_{A_\lambda(t)}[\Sigma u_{x_i x_k}^2\zeta^2(w-\lambda)+\frac{1}{2}|\nabla w|^2]dx$$

$$\leqslant\gamma\int_{A_\lambda(t)}(p^2 w|\nabla\zeta|^2+A^2 w^2+Bw\zeta^2)dx$$

$$\leqslant\gamma_1\int_{A_\lambda}(p+A+B)^2 w^2 dx$$

这里A, B由(1)、(2)给出。根据定理的条件得

$$\|A,B\|_q \leqslant C_{\circ}$$

又上面已证得 $\|p\|_2 \leqslant C$，故有

$$\frac{d}{dt}\int_{A_\lambda(t)}(w-\lambda)+\nu\int_{A_\lambda(t)}|\nabla w|^2dx$$

$$\leqslant \gamma_1\left[\int_{A_\lambda(t)}(p+A+B)^q\right]^{2/q}\left[\int_{A_\lambda(t)}u^{2q/(q-2)}\,dx\right]^{(q-2)/q}$$

$$\leqslant C\left\{\left[\int_{A_\lambda(t)}(w-\lambda)^{2q/(q-2)}dx\right]^{1-2/q}\text{mes}^{1-2/q}A_\lambda(t)\right\},$$

应用§5引理3，由

$$\frac{d}{dt}\int_{A_\lambda(t)}(u-k)^2dx+\nu\int_{A_k(t)}|\nabla u|^2dt$$

$$\leqslant \gamma_1\left[\int_{A_k}|u-k|^{2q/(q-2)}dx\right]^{1-2/q}+k^2\,\text{mes}^{1-2/q}A_k(t)$$

以及当$k \geqslant M_0=\max\limits_{\Gamma}|u|$，可导出$\sup\limits_{Q_T}|u|\leqslant C$，其中$C$仅与$\nu$、$\gamma_1$、$M_0$及$\|u\|_{L^2(Q_T)}$有关。用于现在的情况，即得

$$\sup_{Q_T} w \leqslant C_{\circ}$$

因此$\max\limits_{Q_T'}|\nabla u|$为有界，定理证毕。

定理3 当定理2的条件满足时，对某$\delta>0$，

$$\|u_{x_i}\|_{\delta, Q_T'} \quad i=1,2,\cdots,n$$

可由前节定理 4 中的μ、ν 以及本节定理 2 中的C，$d(\Omega', \partial\Omega)$，$|u_{x_l}|_{\delta,\Omega}$来估计。

证 设$K(\rho)\subset\Omega$,$\zeta(x)$是 $K(\rho)$ 外为0的光滑函数，$l=1,2,\cdots,n$，则

$$0=-\int_0^t\int_\Omega \mathscr{L}u\,\frac{\partial}{\partial x_l}\{[u_{x_l}(x,t)-k]^+\zeta^2\}dxdt$$

$$=\frac{1}{2}\int_{A_{k,\rho}(t)}(u_{x_l}-k)^2\zeta^2dx\Big|_0^t$$

$$+\int_0^t\int_{A_{k,\rho}(t)}\Big\{\sum_{l,j}\frac{\partial}{\partial x_l}(\Sigma a_{ij}u_{x_j}+a_iu+f_i)[u_{x_lx_i}\zeta^2$$

$$+(u_{x_l}-k)2\zeta\zeta_{x_i}](\Sigma b_iu_{x_i}+au+f)[u_{x_lx_l}\zeta^2$$

$$+(u_{x_l}-k)2\zeta\zeta_{x_l}]\Big\}dxdt,$$

其中

$$A_{k,\rho}(t)=\{x\,|\,x\in K(\rho),\ u_{x_l}(x,t)>k\},$$

上式的中间步骤用到u_{tx_i}、$u_{x_ix_jx_l}$，但因最后不出现，故可用光滑逼近解决。

由上式得

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{A_{k,\rho}(t)}(u_{x_l}-k)^2\zeta^2dx+\nu\int_{A_{k,\rho}(t)}|\nabla u_{x_l}|^2\zeta^2dx$$

$$\leqslant\sum_{i,j}\int_{A_{k,\rho}(t)}\Big\{|a_{ij}u_{x_lx_j}|(u_{x_l}-k)2\zeta|\nabla\zeta|+\Big[\Big|\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_l}\Big|M_1$$

$$+|a_i|M_1+\Big|\frac{\partial a_i}{\partial x_l}\Big|M_1+\Big|\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\Big|+|b_i|M_1+|a|M$$

$$+|f|\Big]\zeta[|\nabla u_{x_l}|\,|\zeta|+2(u_{x_l}-k)|\nabla\zeta|]\Big\}dx$$

其中

$$M=\sup_{Q_T}|u|,\quad M_1=\sup_{Q_T'}|\nabla u|。$$

应用

$$ab\leqslant\varepsilon a^2+\frac{1}{\varepsilon}b^2$$

得到

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_{A_{k,\rho}(t)}(u_{x_l}-k)^2\zeta^2dx+\nu\int_{A_{k,\rho}(t)}|\nabla u_{x_l}|^2\zeta^2dx$$

$$\leqslant C\int_{A_{k,\rho}(t)}\Big\{\varepsilon|\nabla u_{x_l}|^2\zeta^2+\frac{1}{\varepsilon}(u_{x_l}-k)^2|\nabla\zeta|^2$$

$$+\frac{(M_1^2+1)^{\frac{1}{2}}}{\varepsilon}(A^2+B^2)\zeta^2dx。$$

取 $\varepsilon=\dfrac{\nu}{2C}$，并应用Hölder不等式得

$$\int_{A_{k,\rho}(t)}(A+B)^2\zeta^2dx\leqslant\Big[\int_{A_{k,\rho}(t)}(A+B)^qdx\Big]^{2/q}\cdot\mathrm{mes}^{1-2/q}A_{k,\rho}(t)$$

$$\leqslant\gamma\,\mathrm{mes}^{1-2/q}A_{k,\rho}(t)。$$

故得

$$\frac{d}{dt}\int_{A_{k,\rho}(t)}(u_{x_l}-k)^2\zeta^2dx+\nu\int_{A_{k,\rho}(t)}|\nabla u_{x_l}|^2\zeta^2dx$$

$$\leqslant\gamma\Big[\int_{A_{k,\rho}(t)}(u_{x_l}-k)^2|\zeta|^2dx+(M_1^2+1)^{\frac{1}{2}}\mathrm{mes}^{1-2/q}A_{k,\rho}(t)\Big]。$$

同法可证关于$B_{k,\rho}(t)$的关系式，因此

$$u_{x_l}\in\mathscr{B}_2\Big(Q_T,M_1,\gamma,\nu,\infty,\frac{1}{q}\Big),$$

所以

$$|u_{x_i}|_{\delta, Q'_T} \leqslant C, \quad i=1,2,\cdots,n。$$

定理 3 证毕。

定理4 当定理 2 中的系数条件均满足时，

$$\begin{cases} \mathscr{L}u=0, & (x,t)\in Q_T, \\ u|_{t=0}=\varphi(x), \\ u|_{\partial\Omega\times[0,T]}=0 \end{cases}$$

有唯一的广义解 $u\in C^{1,\frac{\alpha}{2}}(Q_T)$，且在$Q_T$中具有通常意义的微商

$$u_{x_i}\in C^{\delta,\delta/2}(Q'_T), \quad i=1,2,\cdots,n。$$

证 在定理 1 关于解存在的证明中，对逼近解列u_k可添加条件，即取为使

$$\{u_k\}_{x_i}, \quad i=1,2,\cdots,n$$

于$C^{\delta,\frac{\delta}{2}}(Q'_T)$收敛的列$\{u_k\}$，这样构造的解$u(x,t)$就具有定理中所述的性质。证毕。

定理 4 表明，$u(x,t)$对 x 的光滑性高于对t的光滑性。其实，亦可提高 u 关于 t 的光滑性，但在本书中不拟研究这一问题，可参看非线性方程解的光滑性的有关成果。

§7 解的L^p估计

关于解的L^p估计，椭圆型方程与抛物型方程的情况基本类似。因此，我们仅研究抛物型方程的情况。

对于线性抛物型方程

$$\mathscr{L}u = \Sigma a_{ij}(x,t)u_{x_ix_j} + \Sigma b_i(x,t)u_{x_i} + c(x,t)u - u_t$$

$$= f(x,t)$$

当$f\in C^{\alpha}$时，有$u\in C^{2+\alpha,1+\alpha/2}$,这是Schauder估计的结果。与此相平行的有：当$f\in L^p$时，有D_x^2u、$D_tu\in L^p$，对$1<p<\infty$成立，这称为**L^p估计**。这时u满足方程的意义为：微商$u_{x_ix_j}$、u_t是按弱微商的意义得到，解满足方程是按几乎处处相等的意义。因此，解满足方程比经典意义为弱，而比弱解意义为强。由于按几乎处处相等的意义满足方程，我们称之为**强解**。

我们先介绍L^p估计的预备知识：**Marcinkiewicz插值定理**。

设f于有界区域$\Omega\subset\mathbf{R}^n$上定义，记

$$A(k) = A_f(k)\text{为}\{x\in\Omega \mid f(x)>k\}$$

的测度。当$f\in L^p(\Omega)$，$1<p<+\infty$，时有

$$\int_\Omega |f|^p dx = \int_0^\infty A(k)dk^p = p\int_0^\infty k^{p-1}A(k)dk,$$

因此有 $A(k)\leqslant\left(\dfrac{\|f\|_p}{k}\right)^p$。

可以证明凡满足

$$A_f(k)\leqslant\left(\frac{M}{k}\right)^p$$

的函数空间是 *Banach*空间。满足这式子的最小的M取为f的范数，称为**弱$L^p(\Omega)$空间**。不难证明

$$L^p(\Omega)\subset\text{弱}L^p(\Omega)\subset L^{p-\varepsilon}(\Omega),\quad \forall\varepsilon>0,$$

且这里的两个包含关系都是真正的包含关系。

定理1（**Marcinkiewicz 插值定理**） 设T为$L^q(\Omega)\cap L^r(\Omega)$，$1\leqslant q$

$<r<\infty$，上的线性映象，有界地映$L^q(\Omega)\cap L^r(\Omega)$入弱$L^q(\Omega)$与弱$L^r(\Omega)$，分别记其范数为$T_1$、$T_2$，则$T$映$L^p(\Omega)$入$L^p(\Omega)$为有界，$\forall q<p<r$，且

$$\|Tf\|_p\leqslant CT_1^{\alpha}T_2^{1-\alpha}\|f\|_p \tag{1}$$

$$\forall f\in L^q(\Omega)\cap L^r(\Omega),$$

其中

$$\frac{1}{p}=\frac{\alpha}{q}+\frac{1-\alpha}{r},$$

且C仅依赖于p、q、r。

证　我们要由

$$A_{Tf}(k)\leqslant\left(\frac{T_1\|f\|_q}{k}\right)^q,\quad A_{Tf}(k)\leqslant\left(\frac{T_2\|f\|_r}{k}\right)^r \tag{2}$$

导出(1)，令

$$f=f_1+f_2,$$

则由

$$g_1+g_2-k>0\Rightarrow g_1-\frac{k}{2}>0,\text{ 或 }g_2-\frac{k}{2}>0$$

得

$$A_{Tf}(k)\leqslant A_{Tf_1}\left(\frac{k}{2}\right)+A_{Tf_2}\left(\frac{k}{2}\right)$$

$$\leqslant\left(\frac{2T_1\|f_1\|_q}{k}\right)^q+\left(\frac{2T_2\|f_2\|_r}{k}\right)^r$$

$$\int_\Omega|Tf|^p=p\int_0^\infty k^{p-1}A_{Tf}(k)dk$$

$$\leqslant p(2T_1)^q\int_0^\infty k^{p-1-q}dk\int_\Omega|f_1|^qdx$$

$$+p(2T_2)^r\int_0^\infty k^{p-1-r}dk\int_\Omega|f_2|^rdx$$

选取

$$f_1=\begin{cases}0, & |f|\leqslant\sigma k\\ f, & |f|>\sigma k\end{cases};$$

$$f_2=\begin{cases}f, & |f|\leqslant\sigma k\\ 0, & |f|>\sigma k\end{cases},$$

这里 σ 为待定常数，则

$$\int_\Omega|Tf|^p dx\leqslant p(2T_1)^q\sigma^{q-p}\int_0^\infty k^{p-1-q}dk\int_{|f|>k}|f|^q dx$$

$$+p(2T_2)^r\sigma^{r-p}\int_0^\infty k^{p-1-r}dk\int_{|f|<k}|f|^r dx$$

$$=\left[\frac{p}{p-q}(2T_1)^q\sigma^{q-p}+\frac{p}{r-p}(2T_2)^r\sigma^{r-p}\right]\int_\Omega|f|^p dx。$$

选取 σ 使上面的方括号内为最小，即取

$$\sigma=\frac{1}{2}T_1^{r/(r-q)}T_2^{-r/(r-q)}$$

得到

$$\|Tf\|_p\leqslant CT_1^{\alpha}T_2^{1-\alpha}\|f\|_p,$$

其中

$$C=2\left(\frac{p}{p-q}+\frac{p}{r-p}\right)^{1/q},$$

插值定理得证。

现介绍热势估计。由 $\Delta-\dfrac{\partial}{\partial t}$ 的基本解

$$\Gamma(x-\xi,t-\tau)=\begin{cases}\dfrac{1}{[4\pi(t-\tau)]^{n/2}}\exp\left[-\dfrac{\Sigma(x_i-\xi_i)^2}{4(t-\tau)}\right] & t>\tau\\ 0 & t\leqslant\tau\end{cases}$$

作出热势

$$V(x,t)=\int_{\Omega}\Gamma(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)d\xi d\tau \qquad (3)$$

其中

$$Q=\Omega\times[0,T],$$

Ω为$\mathbf{R}^n$中的有界区域，$T>0$。

延拓f于Q外为0，先设

$$f\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\times[0,T]),$$

则 $\quad V\in C^\infty(\mathbf{R}^n\times[0,T])$，$V|_{t=0}=0$，

$$\Delta V-V_t=f。$$

记

$$\{x|\,|x|<R\}=B_R,\quad B_R\times[0,T]=Q_R,$$

再取R充分大使f的支集在Q_R内，则有

$$\int_{Q_R}f^2dxdt=\int_{Q_R}(\Delta V-V_t)^2dxdt$$

$$=\int_{Q_R}(\Sigma V^2_{x_ix_j}+V_t^2)dxdt$$

$$+\int_{\partial B_R\times[0,T]}[\Sigma V_{x_i}V_{x_jx_j}\cos(N,x_i)-\Sigma V_{x_i}V_{x_ix_j}\cos(N,x_j)]dSdt$$

$$-2\int_{\partial B_R\times[0,T]}V_tV_{x_i}\cos(N,x_i)dSdt+\int_{B_R}\Sigma V^2_{x_i}\Big|_{t=0}^{t=T}dx$$

当$|x|$大时，D_xV、$D_x^2V=0(e^{-a|x|^2})$。

因此，令$R\to\infty$得

$$\int_{\mathbf{R}^n\times[0,T]}(|D_x^2V|^2+V_t^2)dxdt+\int_{\mathbf{R}^n}|D_xV|^2\Big|_{t=T}dx$$

$$\leqslant\int_Q f^2dxdt,$$

特别有

$$\int_Q(|D_x^2V|^2+V_t^2)dxdt\leqslant\int_Q f^2dxdt。$$

当 f 非光滑时，由光滑逼近取极限，我们得到$\forall f\in L^2(Q)$ 上式为真，其中D_x^2V、V_t为 V 的弱微商。

我们要拓广这一结果到L^p上去，即要证明

定理2 当$f\in L^p(\Omega)$，$1<p<+\infty$ 时，由(3)定出的热势满足

$$V\in W_p^{2,1}(Q),\ \Delta V-V_t=f,$$

$$\|V\|_{2,p,Q}\leqslant C\|f\|_{p,Q},\ C=C(n,p),$$

其中

$$\|V\|_{2,p,Q}=\Sigma\|D_{x_ix_j}V\|_{p,Q}+\|V_t\|_{p,Q}。$$

证 f 对D_x^2V的映象

$$D_x^2V=Tf$$

是强奇性核映象。自然，可对核函数作较深入的研究而得出我们所需要的结果。但这一做法较繁。由于$p=2$时定理已为真，我们对 f 作适当的分解，由此证明Tf映$L\cap L^2$函数入弱L函数，以便应用Marcinkiewicz插值定理而得出我们所需要的结果。

对$\tilde{f}\in L(Q)$，$\tilde{f}\geqslant 0$，延拓$\tilde{f}$于Q外为0。

$\forall k>0$，取正方体$K_0\supset\Omega$，它的边长$h\geqslant T^{\frac{1}{2}}$，且 h 足够大使

$$\int_{K_0\times(T-h^2,T)}\tilde{f}dxdt\leqslant k|K_0\times[T-h^2,T]|,$$

其中$|A|$表示点集A的测度，$\hat{k}$为常数。记

$$K_0\times(T-h^2,T)=Q_0$$

Q_0在x_i，$1\leqslant i\leqslant n$方向二等分，t方向四等分，成为2^{n+2}个小柱体$\tilde{Q}$。凡是小柱体满足

$$\int_{\tilde{Q}}\tilde{f}\,dxdt\leqslant k|\tilde{Q}|$$

的再同样地分为2^{n+2}个小柱体，如此继续进行。所有满足

$$\int_{\tilde{Q}}\tilde{f}\,dxdt>k|\tilde{Q}|$$

的柱体个数为可列，记为

$$Q_l,\quad l=1,\ 2,\ \cdots。$$

Q_l的原柱体$\tilde{Q}_l$满足

$$\int_{\tilde{Q}_l}\tilde{f}\,dxdt\leqslant k|\tilde{Q}_l|,$$

因此，

$$k<\frac{1}{|Q_l|}\int_{Q_l}\tilde{f}\,dxdt\leqslant\frac{1}{|Q_l|}\int_{\tilde{Q}_l}\tilde{f}\,dxdt\leqslant 2^{n+2}k。$$

我们又有

$$\tilde{f}\leqslant k\ \ a.e.,\ \forall(x,\ t)\in Q_0\setminus\bigcup_{l=1}^{\infty}Q_l,$$

这是由

$$\frac{1}{|Q_{l_i}|}\int_{Q_{l_i}}\tilde{f}\,dxdt\leqslant k,\ \ Q_{l_1}\supset Q_{l_2}\supset\cdots\to(x,t)$$

令$l_i\to 0$得出的。

今设$f\in L^2(Q)$，因此又有$f\in L(Q)$。取$\tilde{f}=|f|$，由上面得到

$$k<\frac{1}{|Q_l|}\int_{Q_l}|f|\,dxdt\leqslant 2^{n+2}k,$$

$$|f|\leqslant k \quad a.e.,\ (x,t)\in Q_0\setminus\bigcup_{l=1}^{\infty}Q_l。$$

令

$$\bar{f}(x,t)=\begin{cases} f(x,t), & (x,t)\in Q_0\setminus\bigcup\limits_{l=1}^{\infty}Q_l,\\ \dfrac{1}{|Q_l|}\displaystyle\int_{Q_l}f\,dxdt, & (x,t)\in Q_l, \end{cases}$$

$\bar{f}$基本上是f的平均函数，

$$|\bar{f}|\leqslant 2^{n+2}k,\ a.e.。$$

令 $\tilde{f}=f-\bar{f}$，则$\tilde{f}$为f的剩余部分，我们有

$$\tilde{f}(x,t)=0,\ (x,t)\in Q_0\setminus\bigcup_{l=1}^{\infty}Q_l,$$

$$\int_{Q_l}\tilde{f}\,dxdt=0,\ l=1,2,\cdots,$$

$$Tf=T\bar{f}+T\tilde{f},$$

$$A_{Tf}(k)\leqslant A_{T\bar{f}}\left(\frac{k}{2}\right)+A_{T\tilde{f}}\left(\frac{k}{2}\right), \tag{4}$$

$$A_{T\bar{f}}\left(\frac{k}{2}\right)\leqslant\left(\frac{2\|T\bar{f}\|_2}{k}\right)^2\leqslant\left(\frac{2\|\bar{f}\|_2}{k}\right)^2$$

$$=\frac{4}{k^2}\int\bar{f}^2dxdt\leqslant\frac{2^{n+4}}{k}\int|\bar{f}|\,dxdt$$

$$\leqslant\frac{2^{n+4}}{k}\int|f|\,dxdt。$$

记

$$\tilde{f}_l=\begin{cases}\tilde{f}, & (x,t)\in Q_l,\\ 0, & (x,t)\bar{\in}Q_l。\end{cases}$$

则

$$T\tilde{f}=\sum_{l=1}^{\infty}T\tilde{f}_l。$$

作 $\{\tilde{f}_{lm}\}\in C_0^{\infty}(Q_l)$ 使 $\tilde{f}_{lm}\to\tilde{f}_l$，$m\to\infty$

于$L^2(Q)$，且使

$$\int_{Q_l}\tilde{f}_{lm}dxdt=\int_{Q_l}\tilde{f}_l dxdt=0,$$

$$T\tilde{f}_{lm}=\int_{Q_l}D_{x_ix_j}\Gamma(x-\xi,t-\tau)\tilde{f}_{lm}(\xi,\tau)d\xi d\tau,$$

其中柱体Q_l的上顶中心点为$(\bar{\xi},\bar{\tau})$，Q_l的边长记为δ。

当 $|x-\bar{\xi}|>n^{1/2}\delta$ 时，由于 $|\xi-\bar{\xi}|\leqslant\frac{n^{1/2}\delta}{2}$，有

$$|x-\xi|\geqslant\frac{n^{1/2}\delta}{2},$$

$$|D_{x_ix_j}[\Gamma(x-\xi,t-\tau)-\Gamma(x-\bar{\xi},\ t-\tau)]|$$

$$\leqslant\begin{cases}\dfrac{K\delta\left(1+\dfrac{|x-\bar{\xi}|^2}{t-\tau}\right)^{3/2}}{(t-\tau)^{(n+2)/2}}\exp\left(-\dfrac{|x-\bar{\xi}|^2}{t-\tau}\right), & t>\tau\\ 0, & t\leqslant\tau\end{cases}$$

$$\leqslant\begin{cases}\dfrac{K\delta}{|x-\bar{\xi}|^{n-1}}\cdot\dfrac{1}{(t-\tau)^2}\exp\left(-\dfrac{|x-\bar{\xi}|^2}{t-\tau}\right), & t>\tau\\ 0, & t\leqslant\tau\end{cases}$$

$$|D_{x_ix_j}[\Gamma(x-\bar{\xi},t-\tau)-\Gamma(x-\bar{\xi},\ t-\bar{\tau})]|$$

$$
\leqslant \begin{cases} K\delta^2 \dfrac{1+\dfrac{|x-\bar{\xi}|^2}{t-\tau}}{(t-\tau)^{n/2+2}} \exp\left(-\dfrac{|x-\bar{\xi}|^2}{t-\tau}\right) \\ \quad \leqslant \dfrac{K\delta^2}{|x-\bar{\xi}|^n} \dfrac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\dfrac{|x-\bar{\xi}|^2}{(t-\tau)^2}\right), & t \geqslant \bar{\tau}, \\ K \dfrac{1+|x-\bar{\xi}|^2}{(t-\tau)^{n+1}} \exp\left(-\dfrac{|x-\bar{\xi}|^2}{t-\tau}\right) \\ \quad \leqslant \dfrac{K\delta^2}{|x-\bar{\xi}|^n} \dfrac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\dfrac{|x-\xi|^2}{t-\tau}\right), & \bar{\tau}-\delta^2 < t < \bar{\tau} \\ 0 & , t \leqslant \bar{\tau}-\delta^2 \end{cases}
$$

又当 $|x-\bar{\xi}| \leqslant n^{1/2}\delta$，$t \geqslant \bar{\tau}+\delta^2$ 时，

$$
|D_{x_ix_j}\Gamma(x-\xi, t-\tau)| \leqslant \frac{K}{(t-\tau)^{n/2+1}},
$$

$$
|D_{x_ix_j}\Gamma(x-\bar{\xi}, t-\bar{\tau})| \leqslant \frac{K}{(t-\tau)^{n/2+1}}。
$$

当 $|x-\bar{\xi}| \leqslant n^{1/2}\delta$，$t \leqslant \bar{\tau}-\delta^2$ 时，

$$
D_{x_ix_j}\Gamma(x-\xi, t-\tau) = D_{x_ix_j}\Gamma(x-\bar{\xi}, t-\bar{\tau}) = 0。
$$

记

$$
\tilde{Q}_l = \{(x,t) \mid |x-\bar{\xi}| \leqslant n^{1/2}\delta, |t-\bar{\tau}| \leqslant \delta^2\},
$$

则有

$$
\begin{aligned}
\int_{Q_1 \setminus \tilde{Q}_l} |T\bar{f}_{lm}| dxdt \leqslant K \Bigg[\iint_{|x-\bar{\xi}| \geqslant n^{1/2}\delta} \left(\frac{\delta}{|x-\bar{\xi}|^{n+1}} \right. \\
\left. + \frac{\delta^2}{|x-\bar{\xi}|^n} \right) dx \int_{\tau}^{\infty} \frac{1}{(t-\tau)^2} \exp\left(-\frac{|x-\bar{\xi}|^2}{t-\tau}\right) dt \\
+ \delta^n \int_{\tau+\delta^2}^{\infty} \frac{dt}{(t-\tau)^{n/2+1}} \Bigg] \iint_{Q_l} |\bar{f}_{lm}| d\xi d\tau \leqslant K(n) \int_{Q_l} |\bar{f}_{lm}| d\xi d\tau。
\end{aligned}
$$

令$m\to\infty$再对$l=1$，2，……求和得

$$\int_{Q_0\setminus\bigcup_{l=1}^{\infty}\tilde{Q}_l}|T\tilde{f}|\,dxdt\leqslant C(n)\int|\tilde{f}|\,d\xi d\tau\leqslant 2C(n)\int|f|\,dxdt。$$

因此，

$$\left|\left\{(x,t)\in Q_0\setminus\bigcup_{l=1}^{\infty}\tilde{Q}_l\,\middle|\,|T\tilde{f}|>\frac{k}{2}\right\}\right|\leqslant\frac{4C(n)\int|f|\,dxdt}{k},$$

$$\left|\left\{(x,t)\in\bigcup_{l=1}^{\infty}\tilde{Q}_l\,\middle|\,|T\tilde{f}|>\frac{k}{2}\right\}\right|\leqslant\left|\bigcup_{l=1}^{\infty}\tilde{Q}_l\right|$$

$$\leqslant C\left|\bigcup_{l=1}^{\infty}Q_l\right|\leqslant\frac{C\int|f|\,dxdt}{k},$$

合并上面二式得到

$$A_{T\tilde{f}}\left(\frac{k}{2}\right)\leqslant\frac{C\int|f|\,dxdt}{k}。$$

结合(4)、(5)得

$$A_{Tf}(k)\leqslant\frac{C\int|f|\,dxdt}{k}。$$

应用Marcinkiewicz插值定理我们得到

$$\|Tf\|_p\leqslant C(n,p)\|f\|_p,$$

$1<p\leqslant 2$，当$f\in L^2(Q)$。

当$2<p<\infty$时，取p'使

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1。$$

f、$g\in C_0^\infty(Q)$时

$$\int_Q (Tf)g\,dxdt = \int_Q V(x,t)D_{x_ix_j}g\,dxdt$$

$$= \int_Q\int_Q \Gamma(x-\xi,t-\tau)f(\xi,\tau)D_{x_ix_j}g(x,t)\,dxdtd\xi d\tau$$

$$= \int_Q f(Tg)\,dxdt \leqslant \|f\|_p\|Tg\|_{p'},$$

$$\|Tf\|_p = \sup\left\{\int(Tf)g \mid \|g\|_{p'}=1\right\} \leqslant C(n,p')\|f\|_p。$$

所以(6)当$1<p<\infty$时都成立，从而得

$$\|V_t\|_p = \|f-\Delta V\|_p \leqslant C\|f\|_p。$$

上面证明了当$f\in C_0^\infty$时定理为真。当$f\in L_p(Q)$时，用光滑函数逼近再取极限即可，定理 2 证毕。

设区域Ω是$\mathbf{R}^n$中的有界区域，对区域$Q=\Omega\times[0,T]$，记

$$\partial' Q = \partial\Omega\times[0,T]\cup\Omega\times\{t=0\}。$$

$u\in C^0(Q)$指$u\in C(Q)$且$u|_{\partial' Q}=0$。

同法定义$\overset{0}{W}{}_p^{2,1}(Q)$、$W_{p,\text{loc}}^{2,1}(Q)$。

由定理 2 得到

推论 Ω于$\mathbf{R}^n$为有界区域，$Q=\Omega\times[0,T]$，$u\in\overset{0}{W}{}_p^{2,1}(Q)$，则

$$\|u\|_{W_p^{2,1}(Q)} \leqslant C(n,p)\|\Delta u-u_t\|_p。$$

现在研究L^p内估计与近边、近底估计问题。

定理3 **(内估计)** 设Ω于$\mathbf{R}^n$为有界区域，$Q=\Omega\times[0,T]$，$u\in W_{p,\text{loc}}^{2,1}(Q)\cap L^p(Q)$，$1<p<+\infty$为

$$\mathscr{L}u = \Sigma a_{ij}u_{x_ix_j} + \Sigma b_iu_{x_i} + cu - u_t = f$$

于Q的强解。又设系数与自由项满足条件

$$a_{ij}\in C(Q),\quad b_i,\quad c\in L^\infty(Q),\quad f\in L^p(Q),$$

$$\Sigma a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2,\quad \lambda>0,\quad \forall\xi\in R^n,$$

$$|a_{ij}|、|b_i|,|c|\leqslant\Lambda,\quad 1\leqslant i,j\leqslant n。$$

则$\forall Q'\subset\subset Q$有

$$\|u\|_{2,p,Q'}\leqslant C(\|u\|_{p,Q}+\|f\|_{p,Q}),$$

C仅依赖于n、p、λ、Λ、Q、Q'与a_{ij}在Q'上的连续模。

证　固定一点$(x^0,t^0)\in Q'$。记

$$\mathscr{L}_0=\Sigma a_{ij}(x^0,t^0)\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_j}-\frac{\partial}{\partial t}$$

由于矩阵$[a_{ij}]$于Q'一致连续，所以存在正数δ使当$|x-x_0|\leqslant\delta$，$t^0-\delta\leqslant t\leqslant t^0$时，

$$|a_{ij}(x,t)-a_{ij}(x^0,t^0)|\leqslant\frac{\lambda}{2C}。$$

因此当$R\leqslant\delta$时，

$$\|V\|_{2,p,Q_R}\leqslant C\|\Sigma a_{ij}V_{x_ix_j}-V_t\|_{p,Q_R}。\tag{7}$$

取截断函数$\eta(x)$、$\zeta(t)$使$\eta\in C_0^\infty(B_R)$，

$$\eta(x)=\begin{cases}1, & 2|x-x^0|\leqslant R,\\ 0, & \dfrac{1+\delta}{2}R\leqslant|x-x^0|\leqslant R,\end{cases}$$

$$|D\eta|\leqslant\frac{4}{(1-\sigma)R},\quad |D^2\eta|\leqslant\frac{16}{(1-\sigma)^2R^2}。$$

$$\zeta(t)=\begin{cases}1, & t^0-\delta^2R^2\leqslant t\leqslant t^0,\\ 0, & t_0-R^2\leqslant t\leqslant t^0-\left(\frac{1+\delta}{2}\right)^2R^2,\end{cases}$$

$$|\zeta'|\leqslant\frac{4}{(1-\sigma)R^2}。$$

设　$u\in W^{2,1}_{p,loc}(Q)$满足

$\mathscr{L}u=f$于Q。

令$v=\eta\zeta u$，代入(7)得

$$\|v\|_{2,p,Q_{\sigma R}}\leqslant C\|\eta\zeta(\Sigma a_{ij}u_{x_ix_j}-u_t)+2\Sigma a_{ij}\zeta\eta_{x_i}u_{x_j}$$

$$+u(\zeta\Sigma a_{ij}\eta_{x_ix_j}-\eta\zeta_t)\|_{p,Q_R}$$

$$\leqslant C\left[\|f\|_{p,Q_R}+\frac{1}{(1-\delta)R}\|D_xu\|_{p,Q_{(1+\delta)R/2}}+\frac{1}{(1-\sigma)^2R^2}\|u\|_{p,Q_R}\right],$$

当　　　$R\leqslant\delta<1$

时，记

$$\varphi_k=\sup_{0<\delta<1}(1-\delta)^kR^k\|D_x^ku\|_{p,Q_{\delta R}},\quad k=0,1,2,$$

则上式成为

$$\varphi_2\leqslant C(R^2\|f\|_{p,Q_R}+\varphi_1+\varphi_0)。\tag{8}$$

φ_1可由下面的插值公式估出

$$\varphi_1\leqslant\varepsilon\varphi_2+\frac{C(n)}{\varepsilon}\varphi_0,\ \forall 0<\varepsilon<1,\tag{9}$$

这是因为$\forall r>0$，$\exists\delta=\delta_r$使

$$\varphi_1\leqslant(1-\delta)R\|D_xu\|_{p,Q_{\delta R}}+\gamma,$$

现考察单变量函数$g(x_1)\in C^2[-a, a]$。设$y_1>0$，则

$$\frac{g(x_1+y_1)-g(x_1)}{y_1}=g'(x_1)+\int_0^1[g'(x_1)+\theta y_1)-g'(x_1)]d\theta$$

$$=g'(x_1)+\int_0^1 d\theta\int_0^{\theta y_1}g''(x_1+\xi)d\xi,$$

因此，

$$|g'(x_1)|\leqslant\frac{|g(x_1+y_1)|+|g(x_1)|}{y_1}+\int_0^{y_1}|g''(x_1+\xi)|d\xi$$

$$\int_{-a}^0|g'(x_1)|^p dx_1$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{y_1}\right)^p\int_{-a}^{y_1}|g(x_1)|^p dx_1+y_1^{p-1}\int_0^{y_1}d\xi\int_{-a}^0|g''(x_1+\xi)|^p dx$$

$$\leqslant\left(\frac{2}{y_1}\right)^p\int_{-a}^{a}|g(x)|^p dx_1+y_1^p\int_{-a}^{a}|g''(x_1)|^p dx,\quad \text{当 } y_1\leqslant a.$$

用$-y_1$代替y_1估计$\int_0^a|g'(x_1)|^p dx_1$，然后结合二式得

$$\int_{-a}^{a}|g'(x_1)|^p dx_1\leqslant 2\left(\frac{2}{y_1}\right)^p\int_{-a}^{a}|g(x_1)|^p dx_1$$

$$+2y_1^p\int_{-a}^{a}|g'(x_1)|^p dx_1。$$

取$a=(\delta R^2-x_2^2-\cdots-x_n^2)^{\frac{1}{2}}$，关于$x_2$，…，$x_n$，$t$积分。取$y_1=C_\varepsilon(1-\delta)^2R^2$，再做$x_1$、$x_2$、…$x_n$的轮换式并相加得

$$\varphi_1\leqslant\gamma+(1-\delta)R\|D_x u\|_{p,\delta R}\leqslant\gamma+\varepsilon(1-\delta)^2R^2\|D_x^2 u\|_{p,\delta R}$$

$$+\frac{C}{\varepsilon}\|u\|_{p,\delta R}\leqslant\gamma+\varepsilon\varphi_2+\frac{C(n)}{\varepsilon}\varphi_0,$$

令$\gamma\to 0$得到(9)。用C^2函数逼近$W_p^{2,1}(Q_R)$函数，(9)仍成立。(8)、(9)结合得

$$\|u\|_{2,p,Q_{\delta R}} \leqslant \frac{C}{(1-\delta)^2 R^2}(R^2\|f\|_{p,Q_R} + \|u\|_{p,Q_R})。$$

取$\delta=\frac{1}{2}$，$R\leqslant\frac{1}{2}\min(\delta, d(Q', \partial' Q))$。用有限个这样的 Q_R 复盖Q'，定理 3 得证。

至于近边与近底估计，需要下述预备知识。设

$$\Omega^+ = \Omega\cap \mathbf{R}_+^n = \{x\in\Omega\,|\,x_n>0\},\ (\partial\Omega)^+ = \partial\Omega\cap \mathbf{R}_+^n$$
$$= \{x\in\partial\Omega\,|\,x_n>0\},\quad Q^+ = \Omega^+\times[0,T]。$$

引理1 设 $u\in \overset{0}{W}{}^{1,1}(Q^+)$，$f\in L^p(Q^+)$，$1<p<\infty$，按弱意义满足

$$\Delta u - u_t = f \text{ 于 } Q^+,$$

则 $u\in W_p^{2,1}(Q^+)$，且

$$\|u\|_{2,p,Q^+}\leqslant C\|f\|_{p,Q^+},\ C=C(n,p)。$$

证 延拓 u 与 f 到$\mathbf{R}_+^n\times[-T,T]$，令$u=f=0$ 于 $\mathbf{R}_+^n\times[-T,T]\backslash Q$，再奇延拓到 $\mathbf{R}^n\times[-T,T]$。我们要证明这一延拓函数按弱意义满足

$$\Delta u - u_t = f$$

于$\mathbf{R}^n\times[-T,T]$。

取任一函数$\varphi\in C_0^1(\mathbf{R}^n\times[-T,T])$，$\varphi$在所有边界上为 0 。取偶函数$\eta(x_n)\in C^1(\mathbf{R})$使

$$\eta=0,\ \text{当}\ |x_n|\leqslant\varepsilon,$$
$$\eta=1,\ \text{当}\ |x_n|>2\varepsilon;$$

且使 $|\eta'|\leqslant\dfrac{2}{\varepsilon}$，则

$$-\int\eta(x_n)f\varphi dxdt = \int\{\Sigma u_{x_i}[\varphi\eta(x_n)]_{x_i} + \varphi\eta(x_n)u_t\}dxdt$$
$$= \int\eta(x_n)(\Sigma u_{x_i}\varphi_{x_i} + \varphi u_t)dxdt$$
$$+\int\varphi\eta'(x_n)u_{x_n}dxdt,$$

$$\left|\iint \varphi\eta'(x_n)u_{x_n}dxdt\right.$$
$$=\left|\iint_{\substack{0<x_n<2\varepsilon\\ -T<t<T}}[\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1},x_n)-\varphi(x_1,\cdots,x_{n-1},-x_n)]\right.$$
$$\cdot\eta'(x_n)u_{x_n}dxdt$$
$$\leqslant 8\max|D\varphi|\iint_{\substack{0<x_n<2\varepsilon\\ -T<t<T}}|u_{x_n}|dxdt\to 0,\ \text{当}\varepsilon\to 0\text{时。}$$

令$\varepsilon\to 0$得到

$$-\iint f\varphi dxdt=\int(\Sigma u_{x_i}\varphi_{x_i}+u_t\varphi)dxdt。$$

因此，$u\in \overset{0}{W}{}_1^{1,1}(\mathbf{R}^n\times[-T,\ T])$为

$$\Delta u-u_t=f$$

的弱解。作光滑化函数逼近$u_h\in C_0^\infty(\mathbf{R}^n\times[-T+h_0,\ T-h_0])$，$h\leqslant h_0$。

由推论得到：当$h\to 0$时$u_h\to u$于 $W_p^{2,1}(\mathbf{R}^n\times[-T+h_0,\ T-h_0])$，且

$$\|u\|_{2,p,R^n\times[-T+h_0,T-h_0]}\leqslant C\|f\|_{p,R^n\times[-T+h_0,T-h_0]}。$$

令$h_0\to 0$，得到

$$\|u\|_{2,p,Q^+}\leqslant 2C\|f\|_{p,Q^+}。$$

引理得证。

现在规定u按$W^{1,1}(Q)$的意义取初、边值如下：设S为$\partial'Q$的子集，称u按$W_p^{1,1}(Q)$意义$u=0$于S，指u为$C^1(Q)$在S上为0的函数列于$W_p^{1,1}(Q)$空间取极限而得。

近边、近底估计的结果是

定理4 设Ω为$\mathbf{R}^n$中的有界区域，$\omega\subset\partial\Omega$，$\omega$为$C^{1,1}$。记

$$\Omega\times[0,\ T]=Q,\ \omega\times[0,\ T]\cup\Omega\times\{t=0\}=S。$$

设在$W_p^{1,1}(Q)$意义下$u=0$于S，$\mathscr{L}$ 的系数与自由项满足定理3的条

件，且$a_{ij}\in C(Q\cup S)$，则对任何$Q'\subset\subset Q\cup S$有

$$\|u\|_{2,p,Q'}\leqslant C(\|f\|_{p,Q}+\|u\|_{p,Q}),$$

这里C仅依赖于n、p、λ、Λ、Q、Q'、S与a_{ij}于Q'的连续模。

证 由于$\omega\in C^{1,1}$，施行$C^{1,1}$非奇变换$x\to y$，把ω的一部分变直。在(y,t)空间中应用引理代替推论，得到估计再返回(x,t)空间。有限个这种估计，添上L^p内估计便可证得定理4。

当$\omega=\partial\Omega$时，定理4的估计写成

$$\|u\|_{2,p,Q}\leqslant C(\|f\|_{p,Q}+\|u\|_{p,Q})。$$

由于u取零初、边值，在这种情况下，上面的不等式右端$\|u\|_{p,Q}$一项能否去掉？对抛物型方程总是可能的。事实上，我们有

定理5 对于$\mathbb{R}^n$中有界的区域$\Omega\in C^{1,1}$，$Q=\Omega\times(0,T)$，$\mathscr{L}$的系数与自由项满足定理3的条件且$a_{ij}\in C(\bar{Q})$。则当$u\in W_p^{2,1}(Q)\cap\mathring{W}_p^{1,1}(Q)$，$1<p<\infty$时有

$$\|u\|_{2,p,Q}\leqslant C\|f\|_{p,Q}。$$

这里C仅依赖于n、p、λ、Λ、Q及a_{ij}的连续模。

证 令 $\mathscr{L}_0=\mathscr{L}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_{n+1}^2}$于$Q_0=Q\times(-1,1)$，作函数

$$v(x,t)=u(x,t)\cos(\delta^{\frac{1}{2}}x_{n+1}),$$

显然，$v\in W_p^{2,1}(Q_0)$且v于$\partial Q\times(-1,1)$上按$W_p^{1,1}(Q_0)$意义下为0，又

$$\mathscr{L}_0v=(\mathscr{L}u-\delta u)\cos(\delta^{\frac{1}{2}}x_{n+1})。$$

$\forall 0<\varepsilon\leqslant\frac{1}{2}$，在$Q_{0\varepsilon}=Q\times(-\varepsilon,\varepsilon)$上应用定理4得到

$$\|D_{x_{n+1}}^2v\|_{p,Q_{0\varepsilon}}\leqslant C(\|\mathscr{L}u-\delta u\|_{p,Q}+\|u\|_{p,Q})。\qquad(10)$$

取 $\varepsilon=\frac{\pi}{3\delta^{1/2}}$，我们有

$$\|D_{x_{n+1}}^2 v\|_{p,Q_{0\varepsilon}}=\delta\|v\|_{p,Q_{0\varepsilon}}\geqslant\delta\cos(\delta^{1/2}\varepsilon)(2\varepsilon)^{1/p}\|u\|_{p,Q}$$

$$=\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi}{3}\right)^{1/p}\delta^{1-1/(2p)}\|u\|_{p,Q},$$

取δ充分大代入(10)得

$$\|u\|_{p,Q}\leqslant C\|\mathscr{L}u-\delta u\|_{p,Q},$$

比式结合

$$\|u\|_{2,p,Q}\leqslant C(\|\mathscr{L}u-\delta u\|_{p,Q}+\|u\|_{p,Q})$$

我们得到

$$\|u\|_{2,p,Q}+\|u\|_{p,Q}\leqslant C\|\mathscr{L}u-\delta u\|_{p,Q},$$

用$e^{\delta t}u$代替u，上式成为

$$\|ue^{\delta t}\|_{2,p,Q}+\|ue^{\delta t}\|_{p,Q}\leqslant C\|(\mathscr{L}u-\delta u)e^{\delta t}\|_{p,Q}$$

$$\leqslant C_1\|\mathscr{L}u\|_{p,Q},\qquad C_1=Ce^{\delta T},$$

因此

$$\|u\|_{2,p,Q}\leqslant C_2\|\mathscr{L}u\|_{p,Q},\quad C_2=C_1+\delta。$$

定理 5 证毕。

下面的讨论，需要多次用到二个结果。第一是各向异性的特殊情况：方向异性嵌入性质的研究。在这种情况下，由嵌入定理与插值公式得出下列不等式，其证明见[12]第二章，这里只列出结果。

当Ω满足一致内锥条件，$Q=\Omega\times[0,T]$，$\forall\zeta\in(0,(\min(\mathrm{diam}\,\Omega,T^{\frac{1}{2}}))^{\frac{1}{s-2}})$，当$p>\frac{2-s}{2}(n+2)$，$\delta=0$，1 时有

$$\|D_x^2u\|_{\infty,Q}\leqslant C_1\delta^{(2-s)/(n+2)-1/p}\|u\|_{2,p,Q}+C_2\delta^{-2/(n+2)-1/p}\|u\|_{p,Q}\tag{11}$$

且当$p>\frac{n}{2}+1$时

$$u\in C(\bar{Q}) \tag{12}$$

当　$p\leqslant\frac{2-s}{2}(n+2)$，　$q\leqslant\frac{(n+2)p}{(n+2)-(2-s)p}$时有

$$\|D_x^s u\|_{q,Q}\leqslant C_3\delta^{(2-s)/(n+2)-1/p+1/q}\|u\|_{2,1,p,Q}$$
$$+C_4\delta^{-(2-s)/(n+2)-1/p+1/q}\|u\|_{p,Q} \tag{13}$$

其中C_1、C_2、C_3、C_4仅依赖于n、s、p及内锥的张角。

第二个结果是拓广的Aleksandrov极值原理(见[17])。

设　$u\in W_{n+1}^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})$满足

$$\mathscr{L}u=\Sigma a_{ij}u_{x_ix_j}+\Sigma b_iu_{x_i}+cu-u_t=0。$$

$\mathscr{L}$的系数满足

$$a_{ij}、b_i、c\in L^\infty(Q)；\ \Sigma a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda|\xi|^2，\ \xi\in\mathrm{R}^n，\ \lambda>0；$$
$$c\leqslant 0，\ |b_i|\leqslant -Kc。$$

则

$$\sup_Q|u|\leqslant\sup_{\partial'Q}|u|。 \tag{14}$$

定理3、4、5中对b_i、c的条件：b_i、$c\in L^\infty(Q)$可否减弱使结论仍保持成立？减弱到下面的程度是可以的：

$$b_i\in L^q(Q)，\ c\in L^r(\theta)，$$

其中

$$\begin{cases} q>n+2，& 当p\leqslant n+2；\\ q>p，& 当p>n+2；\end{cases}\qquad \begin{cases} r>\frac{n}{2}+1，& 当p\leqslant\frac{n}{2}+1；\\ r=p，& 当p>\frac{n}{2}-1。\end{cases}$$

这是因为当$p>n+2$时，由(11)得

$$\|b_i u_{x_i}\|_{p,Q} \leqslant \|b_i\|_{p,Q} \|D_x u\|_{\infty,Q}$$
$$\leqslant \|b_i\|_{p,Q} (C\delta^{1-(n+2)/p} \|u\|_{2,p,Q} + \tilde{C}\delta^{-1-(n+2)/p} \|u\|_{p,Q})$$

当$p \leqslant n+2$，$q>n+2$时，由(13)得

$$\|b_i u_{x_i}\|_{p,Q} \leqslant \|b_i\|_{q,Q} \|D_x u\|_{(1/p-1/q)^{-1},Q}$$
$$\leqslant \|b_i\|_{q,Q} (C\delta^{1-(n+2)/q} \|u\|_{2,p,Q} + \tilde{C}\delta^{-1-(n+2)/q} \|u\|_{p,Q})$$

对cu项的估计可类似地进行。取δ充分小可得出在这种情况下定理3、4、5仍成立。

关于提高解的光滑性问题，在Schauder估计中是放在解的存在、唯一性的后面介绍的。在L^p估计中要提前介绍一部分，这是因为在证明解为唯一时需要用到。

引理2 在定理4中增设$f \in L^q(Q)$，$p<q<\infty$。则结论可改善为

$$u \in W^{2,1}_{q,loc}(Q')。$$

且在$W_q^{1,1}(Q)$的意义下，

$$u=0 \quad 于 S=(\omega \times [0,T]) \cup (\Omega \times \{t=0\}),$$

又

$$\|u\|_{2,q,Q'} \leqslant C(\|f\|_{q,Q} + \|u\|_{q,Q})。$$

证 先考察内部估计的情况。在定理3中用了

$$Q_R = B_R(x_0) \times [t^0-R^2, t^0] \subset\subset Q, \quad v=\eta\zeta u,$$
$$\mathscr{L}_0 v = \Sigma[a_{ij}(x^0,t^0)-a_{ij}]v_{x_i x_j} + g,$$
$$g = \Sigma a_{ij} v_{x_i x_j} - v_t = \eta\zeta(f - \Sigma b_i v_{x_i} - cv)$$
$$+2\Sigma a_{ij}\zeta\eta_{x_i} u_{x_j} + u(\zeta\Sigma a_{ij}\eta_{x_i x_j} - \eta\zeta_t)。$$

当$u \in W_p^{2,1}$时，由(11)、(13)得到

$$u_{x_i}\in\begin{cases}L^{1/p-1/(n+2)-1}, & \text{当}\ p<n+2,\\ L^s \quad \forall s<\infty, & \text{当}\ p=n+2,\\ L^\infty, & \text{当}\ p>n+2。\end{cases}$$

因此

$$g\in L^r(Q),\ \frac{1}{r}=\max\left\{\frac{1}{q},\ \frac{1}{p}-\frac{1}{n+2}\right\}。$$

作线性变换$x\to\tilde{x}$将$[a_{ij}(x_0,\ t_0)]$化为单位矩阵。变换后的v、a_{ij}、g分别记为$\tilde{v}$、$\tilde{a}_{ij}$，$\tilde{g}$则

$$\left(\Delta-\frac{\partial}{\partial t}\right)\tilde{v}=\Sigma(\delta_{ij}-\tilde{a}_{ij}(\tilde{x},\tilde{t}))\tilde{v}_{\tilde{x}_i\tilde{x}_j}+g,$$

$$\tilde{v}=\int_{\tilde{Q}_R}\Gamma(\tilde{x}-\tilde{\xi},\ \tilde{t}-\tau)\{\Sigma[\delta_{ij}-\tilde{a}_{ij}(\tilde{\xi},\tau)]\tilde{v}_{\tilde{\xi}_i\tilde{\xi}_j}+\tilde{g}\}d\tilde{\xi}d\tau,$$

返回原坐标得

$$v=Tv+h。\tag{15}$$

其中T为有界算子，映$W_p^{2,1}(B_R)$，$1<p<\infty$到自身。当$R\leqslant\delta$时，由定理3的证明得

$$\|T\|\leqslant\frac{1}{2},\ h\in L^r(B_R),$$

因此，用逐次逼近法解(15)得

$$v=\eta\zeta u\in W_r^{2,1}(B_R),$$

由于(x^0,t^0)为Q中任意的点，得到 $u\in W_{r,loc}^{2,1}(Q)$。至于近边估计，可先延拓然后用类似的方法处理。引理得证。

现在陈述初、边值问题解的存在、唯一性的定理。

定理6 设$\mathbf{R}^n$中有界区域$\Omega\in C^{1,1}$，$Q=\Omega\times[0, T]$，若算子$\mathscr{L}$为严格抛物于Q且

$$a_{ij}\in C(\bar{Q}),\quad b_i, c\in L^\infty(Q),$$

则当

$$f\in L^p(Q),\quad \varphi\in W_p^{2,1}(Q),\quad 1<p<\infty$$

时，初、边值问题

$$\begin{cases} \mathscr{L}u=f \quad (x,t)\in Q, \\ u-\varphi\in \overset{0}{W}{}_p^{2,1}(Q) \end{cases}$$

的解$u\in W_p^{2,1}(Q)$为存在且唯一。

证 解存在性的证明用参数延拓法，逐步求解$v_\theta\in W_p^{2,1}(Q)$满足

$$\begin{cases} (1-\theta)(\Delta v-v_t)+\theta\mathscr{L}v=f-\mathscr{L}\varphi,\quad 0\leqslant\theta\leqslant 1, \\ v\in \overset{0}{W}{}_p^{2,1}(Q)。 \end{cases}$$

$\theta=0$时用定理2与引理1求解，再用内估计与近边估计（定理3、4）逐步推到$\theta=1$为可解。

解的唯一性的证明，当u满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}u=0 \\ u\in W_p^{2,1}(Q)\cap \overset{0}{W}{}_p^{2,1}(\Omega) \end{cases}$$

时，要证明$u=0$。用$ue^{\delta t}$代替u使$c-\delta\leqslant -1$。因此，不失一般性可设$c\leqslant -1$。应用引理2得到

$$u\in \overset{0}{W}{}_q^{2,1}(Q)\cap \overset{0}{W}{}_q^{2,1}(\Omega),\quad \forall q\in(p,\infty)$$

成立。取$q=\max(p, n+1)$，应用(12)得到$u\in C(\bar{Q})$。应用(14)得

到$u=0$。定理证毕。

$\mathbb{R}^n\times[0, T]$中的初值问题是定理 6 的特殊情况。

关于解的光滑性问题，有下面的定理。

定理7 设 u 为抛物型方程

$$\mathscr{L}u=f$$

于区域$Q=\Omega\times[0, T]$中的$W^{2,1}_{p,\mathrm{loc}}(Q)$的解，而 $\mathscr{L}$ 的系数属于 $C^{k-1,1,\frac{k}{2}}(\bar{Q})$，这里$k-1$，1指对 x 微商、$\frac{k}{2}$指对 t 微商的次数。$f\in W^{k,\frac{k}{2}}_{q,\mathrm{loc}}(Q)$，$1<q$，$p<\infty$，$k\geqslant1$。则$u\in W^{k+2,\frac{k}{2}+1}_{q,\mathrm{loc}}(Q)$。

如果$\Omega\in C^{k+1,1}$，$\mathscr{L}$为严格抛物于Q，系数属于$C^{k-1,1,\frac{k}{2}}(\bar{Q})$，且$f\in W^{k,\frac{k}{2}}_{q}(Q)$，则$u\in W^{k+2,\frac{k}{2}+1}_{q}(Q)$。

定理可用差分法证明，或仿引理 2 证明，从略。

在解的存在、唯一性的定理 6 中，当$p>\frac{n}{2}+1$时，参考(12)可知提经典的初、边值问题是有意义的。对此，我们有

定理8 设Ω为$\mathbb{R}^n$中有界的 $C^{1,1}$ 区域，$Q=\Omega\times(0,T]$，算子$\mathscr{L}$为严格抛物于 Q，且 $a_{ij}\in C(\bar{Q})$，b_i、$c\in L^\infty(Q)$，则当 $f\in L^p(Q)$，$p>\frac{n}{2}+1$，$\varphi\in C(\partial' Q)$时，初、边值问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=f & 于Q,\\ u=\varphi & 于\partial' Q\end{cases}$$

存唯一的解 $u\in W^{2,1}_{p,\mathrm{loc}}(Q)\cap C(\bar{Q})$。

证 在证明解的唯一性时，不妨设$c\leqslant-1$，

当 $u\in W^{2,1}_{p,\mathrm{loc}}(Q)\cap C(\bar{Q})$，

$$\mathscr{L}u=0,\quad u|_{\partial' Q}=0$$

时，应用引理 2 得

$$u\in W_{n+1,loc}^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})。$$

取Q的光滑内闭区域Q_δ使

$$\delta\leqslant d(\partial' Q_\delta,\partial' Q)\leqslant 2\delta,$$

在Q_δ上应用(14)得

$$\sup_{Q_{\delta_0}}|u|<\sup_{Q_\delta}|u|\leqslant\sup_{\partial' Q_\delta}|u|,\quad 当\delta_0>\delta,$$

由于$u\in C(\bar{Q})$，因此上式左右端当 $\delta\to 0$ 时趋于 0。于是$u=0$于Q。

解的存在性的证明。由于$\varphi\in C(\partial' Q)$，延拓$\varphi$到$\mathbf{R}^n\times\mathbf{R}$使$\varphi\in C$。作$C^\infty$函数列$\varphi_m$于$\partial' Q$附近一致逼近$\varphi$。由于$\partial\Omega\in C^{1,1}$，因此，$\varphi_m\in C^{1,1}(\partial' Q)$。解

$$\begin{cases}\Delta\varphi_m-(\varphi_m)_t=0 & 于Q,\\ \varphi_m|_{\partial' Q}=\varphi_m|_{\partial' Q}\end{cases}$$

则$\varphi_m\in W_p^{2,1}(Q)\cap C(\bar{Q})$，$1<p<\infty$。

由定理 6 得出

$$\begin{cases}\mathscr{L}u_m=f & 于Q,\\ u_m-\varphi_m\in \overset{\circ}{W}{}_p^{2,1}(Q)\end{cases}$$

有解　$u_m\in W_p^{2,1}(Q)$。

由于$p>\frac{n}{2}+1$，由(12)得$u_m\in C(\bar{Q})$，故有

$$\begin{cases}\mathscr{L}(u_l-u_m)=0,\\ [u_l-u_m]_{\partial' Q}=[\varphi_l-\varphi_m]_{\partial' Q}。\end{cases}$$

$\forall Q'\subset\subset Q$，由引理 1 得到

$$\|u_l - u_m\|_{2,p,Q'} \leqslant C\|u_l - u_m\|_{p,Q} \leqslant C_1 \sup_Q |u_l - u_m|。$$

又由引理 2 得

$$u_l - u_m \in W_{n+1}^{2,1}(Q)。$$

因此应用(14)得

$$\sup_Q |u_l - u_m| \leqslant \sup_{\partial' Q} |\varphi_l - \varphi_m| \to 0, \quad l, m \to \infty。$$

因此，$\{u_m\}$在$W_{p,loc}^{2,1}(Q) \cap C(\bar{Q})$收敛到一个函数$u$，而$u$满足

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f & 于Q, \\ u|_{\partial' Q} = \varphi, \end{cases}$$

定理得证。

在定理 8 中 $\Omega \in C^{1,1}$ 的条件能否去掉？当$p \geqslant n+1$时，由(14)及由它导出的解满足一系列其它的性质，如 Hölder 条件等，因此可与L^p估计结合得知，在这种情况下，无须 $\Omega \in C^{1,1}$ 的条件仍有初、边值问题的解是存在且唯一的。这一问题将在考虑非线性定解问题时，一起研究。

关于椭圆型方程的L^p估计，参看[12]。

第三章　双曲型方程

由于我们对椭圆型、抛物型方程的材料已介绍得相当多，因而对双曲型方程就讲得少些。

过去考虑椭圆型与抛物型方程的定解问题，都是把常系数情况的结果逐步推广到变系数。对双曲型方程说来，处理初值问题所用的方法较为不同，是从Cauchy-Ковалевская 定理得出关于解析系数与解析解，推到一般变系数初值问题的解。关于常系数时定解问题的解，在某些情况下，能得到解的表达式，这对研究解的性质较为方便。有关这方面的内容，其它的书介绍得较多，我们就不介绍了。

双曲型方程对广义微商、广义解等概念的需要，比椭圆型、抛物型更为迫切。例如

$$\frac{\partial^2 u(x,y)}{\partial x\partial y}=0$$

的解是

$$u(x,y)=f(x)+g(y),$$

这里f、g为任意函数。当f、$g\in C^1$时，解按经典意义满足方程；但是，当f、$g\in C^1$，可逼近C函数，因此，f、$g\in C$时，上式被认为依然有解，这是很自然的事。但在这种情况下，$u(x,y)$满足方程就要理解为广义微商了。

§1　双曲型方程及柯西问题

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{ij}(x)u_{x_i x_j}+\sum_{i=0}^{n} B_i(x)u_{x_i}+C(x)u=F(x), \qquad (1)$$

$x=(x_0, x_1, \cdots, x_n)$.设

$A_{ij}=A_{ji}, i,j=0,1,\cdots,n$

记 $\xi=(\xi_0, \xi_1\cdots, \xi_n)\in\mathbf{R}^{n+1}$，如果

$$\sum_{i,j=0}^{n} A_{ij}(x)\xi_i\xi_j \tag{2}$$

在点x_0可由非奇异线性变换化为

$$\eta_0^2-\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2, \tag{3}$$

则称方程(1)在点x_0处为**二阶双曲型**。如在所考察的区域的每一点，(2)皆可由非奇异线性变换化为(3)，则称方程在整个考察的**区域上为二阶双曲型**。

不失一般性，可设x_0方向为$(1,0,\cdots 0,)$，因此当方程为双曲型时，

$A_{00}(x)>0$,

这个条件在整个考察的区域上成立。

在上述假设下，我们对方程进行初步化简。记$x_0=t$，解

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{A_{0i}}{A_{00}}, i=1,2,\cdots n,$$

得到

$$x_i=x_i(t, C_1, \cdots, C_n)。$$

由此得到

$$C_i(t, x_1, \cdots x_n)=常数。$$

作自变量替换：

$y_0=x_0=t$, $y_i=C_i(t, x_1, \cdots x_n)$, $i=1, 2, \cdots, n$,

则

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial y_1}{\partial x_k}\frac{\partial y_k}{\partial t}+\frac{\partial y_i}{\partial t}=0$$

经过自变量为$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$到$(y_0, y_1, \cdots, y_n)$的变换，二阶方程变为

$$\sum_{k,l}\left(\sum_{i,j=0}^{n}A_{ij}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\frac{\partial y_l}{\partial x_j}\right)\frac{\partial^2 U}{\partial y_k\partial y_l}+\cdots=\Sigma\tilde{A}_{kl}\frac{\partial^2 U}{\partial y_k\partial y_l}+\cdots=0,$$

其中

$$\tilde{A}_{k0}=\sum_{i=0}^{n}A_{i0}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}=A_{00}\frac{\partial y_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}A_{i0}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

$$=A_{00}\left(\frac{\partial y_k}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial y_k}{\partial x_i}\right)=0$$

所以方程化为

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\frac{\partial^2 U}{\partial y_i\partial y_j}+\sum_{i=0}^{n}b_i\frac{\partial U}{\partial y_i}+cU=\tilde{F}(x),$$

其中

$$t=y_0,\quad -\frac{\tilde{A}_{il}}{A_{00}}=a_{il},\quad \frac{F}{A_{00}}=\tilde{F}。$$

现在作函数变换

$$U=exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t B_0(t_1, y_1, \cdots, y_n)dt_1\right]u$$

并改记自变量y_i为x_i，$i=1, 2, \cdots, n$，得到

$$\mathscr{L}u=u_{tt}-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}u_{x_ix_j}-\sum_{i=1}^{n}b_iu_{x_i}-cu=f \qquad (*)$$

由于(*)所对应的二次型

$$\xi_0^2-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j$$

可化为

$$\eta_0^2-\sum_{i=1}^{n}\eta_i^2,$$

所以有

$$\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\xi_i\xi_j\geqslant\lambda\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2,\lambda>0,\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\in\mathbf{R}^n。$$

如果在所考察的区域内，化简了的双曲型方程(*)的系数与自由项满足条件

$$a_{ij}\in C^1,b_i\in C,\|c\|_{L^{n+1}}\leqslant K,n>1;$$

$$\|c\|_{L^{n+1+\varepsilon}},n=1,\forall\varepsilon>0;\ \|f\|_{L^2}<\infty,$$

在上述诸条件下，可作出(*)的**能量积分估计**，即**先验估计**如下：

方程(*)乘以$2e^{-\lambda t}u_t$，这里λ为待定正的常数，在适当的区域V内积分得到

$$\int_{\partial V}\Big[u_t^2\cos(\nu,t)-2\Sigma a_{ij}u_tu_{x_i}\cos(\nu,x_j)+\Sigma a_{ij}u_{x_i}u_{x_j}\cos(\nu,t)\Big]e^{-\lambda t}dS+\int_V\Big[\lambda u_t^2+2\Sigma\frac{\partial a_{ij}}{\partial x_j}u_tu_{x_i}+\sum_{i,j=1}^{n}\Big(\lambda a_{ij}-\frac{\partial a_{ij}}{\partial t}\Big)u_{x_i}u_{x_j}\Big]e^{-\lambda t}dV=2\int_V\Big(f+\Sigma b_iu_{x_i}+cu\Big)e^{-\lambda t}u_tdV \qquad (**)$$

其中ν为∂V的外法线，选取λ充分大，则显然可见上式左端体积分

内被积函数为正，又面积分$e^{-\lambda t}dS$的系数A有表达式

$$A=\frac{1}{\cos(\nu,t)}\Big\{\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}[u_t\cos(\nu,x_i)-u_{x_i}\cos(\nu,t)][u_t\cos(\nu,x_j)-u_{x_j}\cos(\nu,t)]$$

$$+u_t^2[\cos^2(\nu,t)-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\cos(\nu,x_i)\cos(\nu,x_j)]\Big\}。$$

设∂V的方程可分片表示为

$$\varphi(t,x_1,\cdots,x_n)=0,$$

且$\frac{\partial\varphi}{\partial t}>0$，则

$$\cos^2(\nu,t)-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\cos(\nu,x_i)\cos(\nu,x_j)$$

$$=\frac{1}{\varphi_t^2+\sum_{i=1}^{n}\varphi_{x_i}^2}\Big(\varphi_t^2-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}\Big)。$$

凡满足条件

$$\varphi_t^2-\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j}\gtreqqless 0$$

的曲面，分别称为**空向曲面、特征曲面与非空向曲面。**

由上面二式可见在空向曲面上A为定号，在特征曲面上A为半定号。今设$\partial V=S_0\cup S_1\cup S_2$，$S_1$为有限且为在$V$上方的空向曲面，这里所谓在上方指

$$\cos(\nu,t)|_{S_1}>0$$

S_2连接S_t与S_1且在V上方，即满足

$$\cos(\nu,t)\big|_{S_2}>0$$

的特征曲面。

在S_1上，A对u_t、u_{x_i}，为正定型，因此

$$A\Big|_{S_1}\geqslant\lambda_1\Big(u_t^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2\Big),$$

这里λ_1由$\cos(\nu,\ t)$在S_1上的max、min及

$$\cos^2(\nu,t)-\Sigma a_{ij}\cos(\nu,x_i)\cos(\nu,x_j)$$

在S_1上的min定出，因此由(**)并在

$$\int_{\partial V}u^2\cos(\nu,t)e^{-\lambda t}dS=\lambda\int_V u^2e^{-\lambda t}dV=\int_V 2uu_te^{-\lambda t}dV$$

中取λ适当大得到

$$\lambda_1\int_{S_1}(\sigma u^2+u_t^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2)e^{-\lambda t}dS+\frac{\lambda}{2}\int_V(\sigma u^2+u_t^2$$

$$+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2)e^{-\lambda t}dV\leqslant 2\int_V[f+\Sigma b_iu_{x_i}+(c+\sigma u)]e^{-\lambda t}u_tdV+$$

$$K\int_{S_2}\sigma u^2+u_t^2+\sum_{i=1}^n u_{x_i}^2)e^{-\lambda t}dS,$$

又

$$\int_V(f+\Sigma b_iu_{x_i})e^{-\lambda t}u_tdV\leqslant K\int_V(u_t^2+\Sigma u_{x_i}^2+f^2)e^{-\lambda t}dV,$$

$$\int_V\sigma uu_te^{-\lambda t}dV\leqslant\frac{\lambda}{9}\left\|u_te^{-\frac{\lambda t}{2}}\right\|^2_{L^2(V)}+\frac{9\sigma^2}{\lambda}\left\|ue^{-\frac{\lambda t}{2}}\right\|^2_{L^2(V)},$$

$$\int_V c u u_t e^{-\lambda t} dV \leqslant \|c\|_{L^{n+1}(V)} \left\|u e^{-\frac{\lambda}{2}t}\right\|_{L^{\frac{2(n+1)}{n-1}}(V)} \left\|u_t e^{-\frac{\lambda}{2}t}\right\|_{L^2(V)}$$

$$\leqslant \frac{K}{\lambda}\left\|u e^{-\frac{\lambda}{2}t}\right\|^2_{W_2^1(V)} + \frac{\lambda}{9}\left\|u_t e^{-\frac{\lambda}{2}t}\right\|^2_{L^2(V)}.$$

结合上面诸式，取$\sigma>k$及适当大的λ，得到**能量不等式**

$$\|u\|_{W_2^1(V)} + \|u\|_{W_2^1(\Gamma)} \leqslant K\left(\|u\|_{W_2^1(S_0)} + \|f\|_{L^2(V)}\right).$$

附注 上面能量不等式的成立，对曲面S_0没有什么要求。它可以是空向曲面、特征曲面或非空向曲面，也可以是它们的混合，只要$S_0\cup S_1\cup S_2$能包围成区域V即可。例如

$$\mathscr{A}u = u_{tt} - u_{xx} - u_{yy} = 0,$$

$$S_0:\ x^2+y^2 = 1+\frac{t^2}{2},\quad -2\leqslant t\leqslant 0,$$

$$S_1:\ x^2+y^2\leqslant \frac{1}{4},\quad t=\frac{1}{2},$$

$$S_2:\ x^2+y^2 = (1-t)^2,\quad 0\leqslant t\leqslant \frac{1}{2},$$

这例子中的S_0部分为非空向曲面。

定理1 双曲型方程初值问题[*]

$$\begin{cases} \mathscr{L}u = f, \\ u|_{S_0} = u_0, \\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_0} = u_1 \end{cases}$$

的广义解 $u\in W_2^1(V)\cap W_2^1(S)$，在条件$a_{ij}\in C^1(V)$，$b\in C^0(V)$，

(*)详细说来，这是向前即t增加的初值问题，还有向后初值问题，它可以类似地讨论。以后总讨论向前初值问题。

$$c\in\begin{cases}L^{n+1}(V),(n>1)\\ L^{n+1+\epsilon}(V),(n=1)\end{cases},\quad f\in L^2(V)$$

之下为唯一，其中S为V中任一曲面。

这里广义解的定义是按下面拓广的意义满足方程：

$$\forall\tilde{V}\subset\subset V,\forall v(x,t)\in C^2(\tilde{V}),\ v|_{V\setminus\tilde{V}}=0$$

$$\int_{\tilde{V}}[-u_t v_t+\Sigma u_{x_i}(a_{ij}v)_{x_j}-(\Sigma b_i u_{x_i}+cu)v]dV=\int_{\tilde{V}}fvdV$$

解满足初值条件$u|_{S_0}=u_1$是按W_2^1意义满足，

$$\frac{\partial u}{\partial v}=u_1$$

是按L^2意义。自然，先设 $u_0\in W_2^1(S_0)$，$u_1\in L^2(S_0)$。按L^2意义就是按平行平面意义为L^2逼近，其严格叙述为：

记 $t-\delta\cos(\nu,t)=t^\delta$，$x_i-\delta\cos(\nu,x_i)=x_i^\delta$

$$\sigma^\delta=\begin{cases}1,&(t^\delta,x^\delta)\in V,\\0,&(t^\delta,x^\delta)\bar{\in} V,\end{cases}$$

有

$$\lim_{\delta\to 0}\int_{S_0}[u(t,x)-\sigma^\delta\frac{\partial u}{\partial\nu}(t^\delta,x^\delta)]^2dS=0$$

$u|_{S_0}$按W_2^1意义的严格含义可以类似地给出。

唯一性定理的证明。二个解之差仍记为u，则u在S_0上取零初值以及所满足的方程中$f=0$。记

$$\eta(x,t)=\begin{cases}0,\\ \theta,\\ 1,\end{cases}\text{当}d\Big((t,x),\partial V\Big)\begin{cases}\leqslant\delta,\\ =\delta(1+\theta)\quad(0<\theta<1),\\ \geqslant 2\delta。\end{cases}$$

记ηu的光滑化逼近函数为u_h，其中h为逼近半径。取$v=u_h e^{-\lambda t}$，代入广义解的表达式，先令$h\to 0$，再令$\delta\to 0$。而$\delta\to 0$恰是导出初值与自由项为0的能量不等式，由此得到

$$u|_V=0。$$

至于广义解的存在性问题，我们有下列结果。

定理2 双曲型方程初值问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}u=f,\\ u|_{S_0}=u_0,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_0}=u_1\end{cases}$$

的广义解$u\in W_2^1(V)\cap W_2^1(S)$，这里$S$是任何空向曲面且$S\subset\overline{V}$，在条件：$S_0$为空向曲面，$a_{ij}\in C^1(\overline{V})$，$b_i\in W^1_{n+1}(V)$，$c\in W^1_{(n+1)/2}(V)$，$f\in W_2^1(V)$，$u_0\in W_2^2(S_0)$，$u_1\in W_2^1(S_0)$之下为存在，而且广义解具有更强一些的光滑性：

$$u\in W_2^2(V)\cap W_2^2(S)。$$

注当$n=2$、3时，定理中加于c的条件，要稍作改变，详见证明。

证假设光滑逼近的初值问题

$$\begin{cases}\mathscr{L}^h u=f^h,\\ u|_{S_0^h}=u_0^h,\\ \left.\dfrac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{S_0^h}=u_1^h\end{cases}$$

有光滑解$u^h(t,x)$，$(t,x)\in V^h$。这里所说的**光滑逼近**是指S_0、a_{ij}、b_i、c、f、u_0、u_1用光滑化函数逼近，即先作a_{ij}保持C^1的延拓，其

次作b_i、c、f的C^1延拓，然后作适当的多项式逼近。

从光滑解u^h满足的

$$\int_{V^h} e^{-\lambda t}\left[u_{t t}^h \frac{\partial}{\partial t}(\mathscr{L}^h u^h - f^h) + \sum_{i=1}^{n} u_{t x_i}^h \frac{\partial}{\partial x_i}(\mathscr{L} u^h - f^h)\right] dV = 0$$

出发，作进一步的能量不等式

$$\|u^h\|_{W_2^2(S_1)} + \|u^h\|_{W_2^2(V^h)} \leqslant K\left[\|u_0^h\|_{W_2^2(S_0^h)} + \|u_1^h\|_{W_2^1(S_0^h)} + \|f^h\|_{W_2^1(V^h)}\right] \leqslant K_1,$$

其中K、K_1都是与h无关的常数。

我们在得出上式时，用到估计式

$$\int_V e^{-\lambda t}\frac{\partial c}{\partial x_i} u u_{t x_i} dx dt$$

$$\leqslant \left\|\frac{\partial c}{\partial x_i}\right\|_{L^{\frac{n+1}{2}}(V)} \left\|u e^{-\frac{\lambda t}{2}}\right\|_{L^{\frac{2n+2}{n-3}}} \left\|u_{t x_i} e^{-\frac{\lambda}{2}t}\right\|_{L^2(V)},$$

因此得到

$$\|u^h\|_{W_2^2(V^h)} \leqslant K_1 。$$

应用嵌入定理得到：在任何n维面$S\subset V$，u^h于$W_2^1(S)$为紧，且关于S按平行平面意义为连续。选出u^h的子列u^{h_1}，u^{h_2}，…，使它们在$W_2^1(V)\cap W_2^1(s)$中收敛于u，u广义地满足方程与连续地满足初值条件。u^h于$W_2^2(V)\cap W_2^2(S)$弱收敛于u，因此$u\in W_2^2(V)\cap W_2^2(S)$。

现在证明光滑逼近问题有光滑解。设a_{ij}、b_i、c、f、u_0、u_1、$S_0\in C^\infty$，S_0为空间曲面，满足条件

$$\varphi_t^2 > \Sigma a_{ij}\varphi_{x_i}\varphi_{x_j},\quad \varphi_t \neq 0。$$

故把S_0表为

$$t-\phi(x_1, \cdots, x_n)=0,$$

作自变量变换，将方程

$$\mathscr{L}u=f$$

化为

$$(1-\Sigma a_{ij}\phi_{x_i}\phi_{x_j})u_{t^*t^*}+\cdots=f。$$

由于S_0为空向曲面，

$$[1-\Sigma a_{ij}\phi_{x_i}\phi_j]|_{S_0}\neq 0,$$

我们把t^*改写为t，再作一次初值与方程系数的多项式逼近，得到逼近的初值问题

$$\begin{cases} u_{tt}=\sum_{j=1}^{n}b_{0j}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t\partial x_j}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}\dfrac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}+b_0\dfrac{\partial u}{\partial t}+\sum_{i=1}^{n}b_i\dfrac{\partial u}{\partial x_i} \\ \quad +bu+F, \\ u|_{t=0}=u_0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_1。 \end{cases}$$

令$u_t=v_0$，$u_{x_i}=v_i$，$(i=1, 2, \cdots, n)$，$u=v_{n+1}$，则上述问题化为下面方程组的初值问题。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_0}{\partial t}=\sum_{j=1}^{n}b_{0j}\dfrac{\partial v_0}{\partial x_j}+\sum_{i,j=1}^{n}b_{ij}\dfrac{\partial v_i}{\partial x_j}+\sum_{i=0}^{n}b_i v_i+bv_{n+1}+F, \\ \dfrac{\partial v_i}{\partial t}=\dfrac{\partial v_0}{\partial x_i}, \quad i=1,2\cdots,n, \\ \dfrac{\partial v_{n+1}}{\partial t}=v_0。 \end{cases}$$

初值条件是

$$v_0|_{t=0}=u_1,$$

$$v_i|_{t=0}=(u_0)_{x_i},$$

$$v_{n+1}|_{t=0}=u_0。$$

这一阶方程组与二阶方程二者的初值问题等价。这是因为当 v_0、v_1、v_2、…、v_{n+1}是最后问题的解，则

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j}-\frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)=0,$$

结合初值得到

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_j}=\frac{\partial v_j}{\partial x_i};$$

结合

$$\frac{\partial v_i}{\partial t}=\frac{\partial v_0}{\partial x_i}$$

得到v_0、v_1、…、v_n为全积分；结合

$$\frac{\partial v_{n+1}}{\partial t}=v_0$$

得到全积分为$v_{n+1}=u_0$，因此u满足二阶方程，至于u满足初值是容易验证的。

上面所述方程组的初值问题写为

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v_i}{\partial t}=\sum\limits_{j=1}^{m}\sum\limits_{k=1}^{n}B_{ijk}\dfrac{\partial v_j}{\partial x_k}+\sum\limits_{j=0}^{m}B_{ij}v_j+B_i, \\ v_i|_{t=0}=v_i^{(0)}, \qquad i=1,2,\cdots,n,\end{cases} \tag{1}$$

在原点附近求解析解时，仅需把系数与解展成幂级数，一一代入，

求得解的展开式的系数即可。我们用强函数法证明解的展开式有正的收敛半径如下。

记$x=(x_0, x_1\cdots, x_n)$，$x_0=t$。当$\phi_1(x)$、$\phi_2(x)$在原点附近为解析函数，即

$$\varphi_i=\sum a_\nu^{(i)}x^{(\nu)},\ \nu=(\nu_0,\cdots,\nu_n),\ |\nu|=\nu_0+\nu_1+\cdots+\nu_n,$$

且

$$|a_\nu^{(1)}|\leqslant a_\nu^{(2)}$$

时，称$\phi_2(x)$为$\phi_1(x)$的强函数，记为

$$\phi_1\ll\phi_2。$$

设B_{ijk}、B_{ij}、B_i的强函数为

$$\frac{M}{(1-t)(1-x_1)\cdots(1-x_n)}\ll\frac{M}{1-(t+x_1+\cdots+x_n)},$$

这是因为B_{ijk}、B_{ij}、B_i是多项式，可取其收敛半径为1。

又设$v_i^{(0)}(i=1, 2, \cdots, n)$的强函数为

$$\frac{K}{1-(x_1+\cdots+x_n)},$$

则可作出强初值问题

$$\frac{\partial V_i}{\partial t}=\frac{M}{1-(t+x_1+\cdots+x_n)}\left(\sum_{j,k}\frac{\partial V_j}{\partial x_k}+\Sigma V_j+1\right),\qquad (2)$$

$$V_i|_{t=0}=\frac{K}{1-(x_1+\cdots x_n)},$$

必有

$$V_i\ll V_i\quad i=1,\ 2,\ \cdots\ m.$$

这是因为(1)、(2)两方程系数与解析解的展开为幂级数以及代入方程时的运算规律是一样的。由强函数的定义可知$v_i\ll V_i$。要证明V_i,

…、V_m所满足的初值问题，必有收敛半径为正的正系数幂级数解，由对称知

$$V_1 = V_2 = \cdots = V_m,$$

记$V = V_1$，以及$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = X$，则初值问题化为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial V}{\partial t} = \dfrac{M}{1-t-X}\left(mn\dfrac{\partial V}{\partial X} + mV + 1\right), \\ V\big|_{t=0} = \dfrac{K}{1-X}. \end{cases}$$

对这一定解问题求显式解有困难，因此，再找一个适当的可求显式解的强定解问题如下：

$$\begin{cases} \dfrac{\partial W}{\partial t} = \dfrac{M(mn+1)}{1-t-X}\left(\dfrac{\partial W}{\partial X} + \dfrac{W+1}{1-t-X}\right) + \dfrac{\partial W}{\partial X}, \\ W\big|_{t=0} = \dfrac{K+1}{1-X} - 1。 \end{cases}$$

记 $W + 1 = \overline{W}$，并令

$$\begin{cases} t = t_1, \\ t + X = X_1 \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{W}}{\partial t_1} = \dfrac{M(mn+1)}{1-X_1}\left(\dfrac{\partial \overline{W}}{\partial X_1} + \dfrac{\overline{W}}{1-X_1}\right), \\ \overline{W}\big|_{t=0} = \dfrac{K+1}{1-X_1}, \end{cases}$$

或

$$\frac{\partial}{\partial t_1}\left(\frac{\overline{W}}{1-X_1}\right) = \frac{M(mn+1)}{1-X_1}\frac{\partial}{\partial X_1}\left(\frac{\overline{W}}{1-X_1}\right),$$

$$\frac{\overline{W}}{1-X_1}=f\left(M(mn+1)t+X_1-\frac{X_1^2}{2}\right),$$

这里f为任意函数，又

$$\left.\frac{\overline{W}}{1-X_1}\right|_{t_1=0}=\frac{K+1}{(1-X_1)^2}=\frac{K+1}{1-2\left(X_1-\frac{X_1^2}{2}\right)}=f\left(X_1-\frac{X_1^2}{2}\right),$$

因此

$$f(y)=\frac{K+1}{1-2y}\text{。}$$

即

$$\frac{\overline{W}}{1-X_1}=\frac{K+1}{1-2\left[M(mn+1)t+X_1-\frac{X_1^2}{2}\right]},$$

$$\overline{W}=\frac{(K+1)(1-X_1)}{(1-X_1)^2-2M(mn+1)t_1}$$

$$=(K+1)\sum_{j=0}^{\infty}[2M(mn+1)t_1]^j(1-X_1)^{-(2j+1)},$$

$$W=(K+1)\sum_{j=0}^{\infty}[2M(mn+1)t]^j(1-t-X)^{-(2j+1)}-1$$

为正系数幂级数解，收敛半径至少有$\frac{1}{4M(mn+1)}$，即收敛半径仅与方程系数的上界有关。

这就证明了光滑逼近问题的光滑解在$V\cap\{d((x,t),\ S_0)\leqslant K_0\}$内为存在，其中$K_0$为仅依赖于方程系数上界的常数，而不依赖于$S_0$的具体位置与$S_0$上初值的大小。

既然已经证明了广义解u在S_0附近一薄层内存在，重复上述作法有限回，得到广义解在V内直到S_1上为存在，定理2证毕。

当 $\mathscr{L}u=f$ 的方程系数，自由项与初值有更高的光滑性时，可得到能量不等式

$$\|u\|_{W_2^k(S_t)}+\|u\|_{W_2^k(V)}\leqslant K\left(\|u\|_{W_2^k(S_0)}+\|f\|_{W_2^{k-1}(V)}\right),$$

$$k=1,2,\cdots。$$

当$k=\left[\dfrac{n}{2}\right]+3$ 时在各种S_t上用嵌入定理得到$u\in C^2(V)$，这时u为经典解。在这里对系数光滑性的要求不详细介绍。对初值与自由项的要求是

$$u\Big|_{S_0}=u_0\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(S_0),\quad \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_{S_0}=u_1\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(S_0),$$

$$f\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(V)。$$

在此指出双曲型方程与椭圆型方程(抛物型方程)在解的连续性上的重大差异。二阶椭圆型方程 $\mathscr{L}u=f$，为证明解$u\in C^2(\Omega)$，仅需$u\in C(\partial\Omega)$，$f\in C^\lambda(\Omega)$，$0<\lambda<1$即可，当 $f=0$时只要方程系数为解析，则u为解析函数，这个结论我们未加证明，对双曲型方程

$$\mathscr{L}u=f,$$

为保证 $u\in C^2(V)$，需要

$$u_0\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+3}(S_0),\ u_1\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(S_0),\ f\in W_2^{\left[\frac{n}{2}\right]+2}(V)。$$

当$f=0$时，要求没有什么变化，由此可见，椭圆型方程的解比数据的光滑性强，而双曲型方程解的光滑性比数据要弱得多(当n大时)。而且为保证解$u\in C^2(V)$，对数据光滑性的要求，是不能减少太多的，举例如下。

例 $u_{tt}-\sum_{j=1}^{5}u_{x_jx_j}=0$

的仅依赖于t与 $r=\left(\sum_{i=1}^{5}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}$

的通解可表示为(*)

$$u=\frac{f(t+r)-g(t+r)}{r^3}+\frac{f'(t-r)+g'(t+r)}{r^2},$$

这里f、g是任意函数。

取$g=f$，则在$t=0$的初值是

$$u_0=u\Big|_{t=0}=-\frac{f(r)-f(-r)}{r^3}+\frac{f'(r)+f'(-r)}{r^2},$$

$$u_1=\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=-\frac{f'(r)-f'(-r)}{r^3}+\frac{f''(r)+f''(-r)}{r^2},$$

又有

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{f''(t-r)-f''(t+r)}{r^3}+\frac{f'''(t-r)+f'''(t+r)}{r^2}。$$

(*)当u仅依赖于t、r时，方程化为

$$u_{tt}-u_{rr}-\frac{4}{r}u_r=0。$$

记 $\tilde{u}=\int r u dr$，得到 $\tilde{u}_{tt}-\tilde{u}_{rr}-\frac{2}{r}\tilde{u}_r=0$，

再记 $\bar{u}=\int r\tilde{u}dr$，得到 $\bar{u}_{tt}-\bar{u}_{rr}=0$，

因此 $\bar{u}=F(t-r)+G(t+r)$，

这里 F、G为任意函数，且

$$\tilde{u}=\frac{-F'(t-r)+G'(t+r)}{r},$$

$$u=\frac{F'(t-r)-G'(t+r)}{r^3}+\frac{F''(t-r)+G''(t+r)}{r^2}。$$

当$f(y)\in C^5(-\infty, +\infty)$时不难得到$u_{tt}$与$u_{xx}$为连续，这是因为，

$$\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{r=0}=\lim_{r\to 0}\frac{[f''(t-r)-f''(t+r)]+[f'''(t-r)+f'''(t+r)]}{r^3}$$

$$=\frac{2}{3}f^{(5)}(t),$$

同法得到

$$\left.\frac{u_r}{r}\right|_{r=0}=\left.u_{rr}\right|_{r=0}=\frac{2}{15}f^{(5)}(t)。$$

因此，当$f\in C^6$时，$u\in C^2$为经典解。

取

$$f(y)=\begin{cases}0, & y<1,\\ (y-1)^{\alpha}, & y>1,\end{cases}$$

则

$$u_0=\begin{cases}0, & r<1\\ -\dfrac{(r-1)^{\alpha-1}}{r^3}+\alpha\dfrac{(r-1)^{\alpha-1}}{r^2}, & r>1,\end{cases}$$

$$u_1=\begin{cases}0, & r<1;\\ -\alpha\dfrac{(r-1)^{\alpha-1}}{r^3}+\alpha(\alpha-1)\dfrac{(r-1)^{\alpha-2}}{r^2}, & r>1,\end{cases}$$

由此得到

当 $\frac{9}{2}<\alpha<\frac{1}{2}$时，$u_0\in W_2^4$，$u_1\in W_2^3$，

但是

$u_0\notin W_2^5, u_1\notin W_2^4$。

当 $\frac{9}{2}<\alpha\leqslant 5$时，$u_0\notin W_2^5, u_1\notin W_2^4$，

且$u(r, t)$不是二阶连续，仅是广义解。

当 $5<\alpha<\frac{11}{2}$时，$u_0\notin W_2^5, u_1\notin W_2^4$，

但是$f^{(5)}(0)=0$，u为二阶连续，$u(r, t)$是经典解。

这例子说明，保证u为二阶连续的条件

$$u_0\in W_2^{[\frac{n}{2}]+3},\quad u_1\in W_2^{[\frac{n}{2}]+2}$$

也许可稍降低一些，但降低不了太多。

二阶双曲型方程

$$\mathscr{L}u=f$$

的定解问题，除初值问题而外，常见的还有初边值问题：

Ω为$(x_1, x_2, \cdots, x_n)\in\mathbf{R}^n$中的有界区域，

$$\Omega\times[0, T]=V。$$

在空向曲面$\Omega\times\{t=0\}$上提初值条件

$$u\Big|_{t=0}=u_0,\quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=u_1,$$

在非空向曲面$S=\partial\Omega\times[0, T]$上提边值 $u|_S=\phi$，则仿初值问题的作法，在V中可导出能量不等式，做逼近解时，应用 Ковалевская 定理在近边附近有困难，可用差分法作出逼近解，由此得出初值问题解的存在唯一性。

§ 2 特征的讨论

讨论二阶双曲方程

$$\sum_{i,j=0}^{n} a_{ij}(x)u_{x_ix_j}+\sum_{j=0}^{n} b_j(x)u_{x_j}+c(x)u=f(x)$$

$$a_{ij}=a_{ji},x=(x_0,x_1,\cdots,x_n)$$

的特征，这可以推广到一般的高阶方程

$$\mathscr{L}u=\sum_{|p|\leqslant m} a_pD^pu=f, p=(p_0,p_1,\cdots,p_n), |p|=p_0+p_1+\cdots+p_n,$$

$$D^p=\left(\frac{\partial}{\partial x_0}\right)^{p_0}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n},$$

与高阶方程组

$$\mathscr{L}u=\sum_{|p|\leqslant m} A_pD_pu=f,$$

$$u=\begin{pmatrix}u_1\\ \vdots\\ u_k\end{pmatrix},\qquad f=\begin{pmatrix}f_1\\ \vdots\\ f_k\end{pmatrix}$$

对A_p为k阶方阵来讨论，因为作法是一样的。

特征曲面的定义，在$(x_0, x_1, \cdots, x_n)$空间中的n维曲面Γ上给定

$$u\Big|_\Gamma, \frac{\partial u}{\partial\nu}\Big|_\Gamma, \cdots, \frac{\partial^{m-1}u}{\partial\nu^{m-1}}\Big|_\Gamma,$$

添加方程

$$\mathscr{L}u=f,$$

如能由此决定$D^mu|_\Gamma$，则称Γ为**自由面**，否则，称Γ为算子$\mathscr{L}$的**特征曲面**。

设Γ的方程为

$$\Gamma(x)=0,$$

易见Γ为特征曲面的充要条件是

$$Q(x, D\Gamma)|_{\Gamma}=0,$$

此中$D\Gamma$为Γ的梯度

$$Q(x,\xi)=det(\sum_{|p|=m}A_p(x)\xi^p)\quad(\xi=(\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_n))$$

这表示特征矩阵

$$A(\xi)=\sum_{|p|=m}A_p\xi^p$$

在Γ上为奇异的。

$$Q(x,D\Gamma)|_{\Gamma}=0$$

的特殊情况是

$$Q(x,D\Gamma)=0,$$

这表示对任一常数C，$\Gamma(x)=C$都是特征曲面。一般情况并不 都是这样。例如

$$u_{x_0x_0}-\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}=0,\quad Q(\xi)=\xi_0^2-\sum_{i=1}^{n}\xi_i^2。$$

曲面

$$\Gamma(x)=x_0^2-\sum_{i=1}^{n}x_i^2$$

满足

$$Q(D\Gamma)=4\Gamma,$$

因此,

$$\Gamma(x)=0$$

是特征曲面。而

$$\Gamma(x)=C\neq 0$$

则不是，但是，

$$\Gamma(x)=x_0-\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)^{\frac{1}{2}}=C$$

则对任何C都是

$$u_{x_0x_0}-\sum_{i=1}^{n}u_{x_ix_i}=0$$

的特征曲面，这一张特征曲面，可嵌在一系列特征曲面中，这结论总是对的(*)。因此，任一特征曲面都可由解

$$Q(x,\ D\Gamma)=0$$

而得出。这是曲面Γ所满足的齐mk次一阶偏微分方程，它的解法主要步骤是构造特征线与特征带。这

$$Q(x,\ D\Gamma)=0$$

的特征线与特征带称为算子$\mathscr{L}$次特征线与次特征带，次特征带消

(*)设已给的特征曲面为

$$\Gamma(x_0,x_1,\cdots,x_n)=0,$$

不失一般性可设在某点

$$\left.\frac{\partial Q(x,\xi)}{\partial \xi_0}\right|_{\xi=D\Gamma}\neq 0,$$

在该点附近

$$\left.\frac{\partial Q(x,\xi)}{\partial \xi_0}\right|_{\substack{\xi=D\Gamma\\ x_0=0}}\neq 0。$$

解

$$\begin{cases} Q(x,D\varphi)=0\\ \varphi|_{x_0=0}=\Gamma(0,x_1,\cdots,x_n)+C\end{cases}$$

得到一系列特征曲面，而$\Gamma=0$嵌在其中。

去参数得特征面，把次特征线的曲线参数记为λ，次特征带由解常微分方程组

$$\frac{d\xi_i}{d\lambda}=-\frac{\partial Q(x,\xi)}{\partial x_i},i=0,1,2,\cdots,n$$

具初值条件满足

$$Q(x,\ \xi)=0。$$

定出，易证由此定出的次特征带，处处满足

$$Q(x,\ \xi)=0$$

通常遇到的求特征曲面有二种情况，其一是求过任一$n-1$维流形的特征曲面，设这$n-1$维流形为n维曲面S_0与另一n维曲面$w=0$的交。这一特征曲面可由解

$$\begin{cases}Q(x,D\varphi)=0,\\ \varphi|_{S_0}=w\end{cases}$$

而得到。为简明计，设S_0为$x_0=0$，这不失一般性，因为$Q(x,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x})$是自变量变换下的不变量．此外，设$W=0$为

$$W(x_1,\ \cdots,\ x_n)=0,$$

要求解

$$\begin{cases}Q(x,D\varphi)=0,\\ \varphi(0,x_1,x_2,\cdots x_n)=w(x_1,x_2,\cdots,x_n),\end{cases}$$

则

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\right|_{x_0=0}=\frac{\partial w}{\partial x_i},i=1,2,\cdots,n,$$

因此

$$\left.Q\left(x,\ \frac{\partial\varphi}{\partial x_0},\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right)\right|_{x_0=0}=0。$$

解这一mk阶的代数方程，求出

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}\right|_{x_0=0},$$

由此得到参量个数为$n-1$，初值为

$$\left(0,x_1^0,\cdots,x_n^0,\frac{\partial\varphi}{\partial x_0},\cdots,\frac{\partial\varphi}{\partial x_n}\right),$$

其中x_1^0，$\cdots$，x_n^0满足

$$w(x_1^0,\cdots,x_n^0)=0$$

的次特征线与次特征带。由次特征线消去参数λ、x_1^0、$\cdots$、x_n^0得出过$n-1$维流形

$$x_0=0\cap w(x_0^0,\cdots,x_n^0)=0$$

的特征曲面。

其二，求过一点$0(x_0^0,\ \cdots,\ x_n^0)$的特征锥面。这时定出次特征带常微分方程组初值为$(x_0^0,\cdots,\ x_n^0,\ \xi_0,\ \cdots,\ \xi_n)$，其中$\xi_0$，$\xi_1\cdots$，$\xi_n$满足

$$Q(x^0,\xi)=0,$$

参量个数为$n-1$(只考虑ξ的方向)，仍可定出次特征带及消去n个参数而得出特征锥面方程。

特征锥面一般是曲锥面，当

$$\mathscr{L}u=\sum_{|p|\leqslant m}A_pD^pu=f$$

中，所有A_p当$|p|=m$时是常数矩阵，则特征曲面是**直锥面**。固定$(x_0^0,\ x_1^0,\ \cdots,\ x_n^0)$时，

$$Q(x^0,\xi)=0$$

或

$$Q(x_0^0,\cdots x_n^0,x_0-x_0^0,\cdots x_n-x_n^0)=0$$

称为**法锥面**。由

$$\eta_i=\frac{\partial Q}{\partial\xi_i}\quad i=0,1,2,\cdots,n$$

与

$$Q(x^0,\xi)=0$$

消去ξ_0，…，ξ_n，得出

$$\tilde{Q}(x^0,\ \eta_0,\ \cdots,\ \eta_n)=0,$$

它以及

$$\tilde{Q}(x_0^0,\cdots,x_n^0,x_0-x_0^0,\cdots,x_n-x_n^0)=0$$

是特征锥面在点$(x_0^0,\ \cdots,\ x_n^0)$的切锥面。

现在可给出偏微分方程(及组)为双曲的一般定义，易见前节所述二阶双曲的定义，是包含在这一定义之内的。

定义如果在点0存在向量ξ，使得$\forall$向量θ，

$$Q(0,\ \lambda\xi+\theta)=0$$

有mk个相异实根，则称

$$\mathscr{L}u=f$$

为**狭义双曲型**(组)；当mk个根为实，但可以有重根时，则称

$$\mathscr{L}u=f$$

为**广义双曲型**(组)。

过0点垂直于ξ的曲面，在0点称为**空向**，如果曲面上点点为空向，则称此曲面为**空向曲面**。

定义中在0点存在向量ξ，等价于存在以0点为空向的曲面。又

对于一般的ξ，计算讨论皆不大方便，经坐标变换，总可以把ξ化为$\xi=(1, 0, \cdots, 0)$。在这情况下，不失一般性，可设$Q=(0, \theta_1, \cdots, \theta_n)$。因此

$$Q(0, \lambda\xi+\theta)=Q(0, \cdots, 0, \lambda, \theta_1, \cdots, \theta_n)=0$$

或

$$Q(0, \cdots, 0, \xi_0, \xi_1, \cdots, \xi_n)=0$$

解ξ_0有mk个相异或有的相重的实根，存在坐标变换使

$$\mathscr{L}u=f$$

能化为具有上述性质，亦可作为

$$\mathscr{L}u=f$$

为双曲的定义。

法锥面上一点，对应于特征锥面上一点，因此，0点的特征锥面也有mk个方向。在最外层的特征锥面内的方向，称为**时向**。

易证法锥面朝里面是一个封闭的凸锥面，否则，

$$Q(0, \lambda\xi+\theta)=0$$

将在某一方向超过mk个根，得到矛盾。因此，法锥面最里层的一个锥面，提法是有意义的。所以特征锥面具有最外层，且是凸锥面。

如果一曲线上点点为时向，则称此曲线为**时向曲线**。

二阶双曲型方程特征锥面的几何结构，更为简单一些，即过任一$n-1$维流形的特征曲面为双叶，而特征锥面总是单一凸锥面，因此，可分为向前即时间增加，与向后即时间减少二个部分。二阶双曲方程

$$\mathscr{L}u=f$$

一点的依赖区域是向后特征锥面内的部分。任一初值点的影响区域是向前特征锥面内的部分。锥面内过顶点的任一方向为时向。

后　　记

这份教材是给研究生开课用的，希望估计方法中较常用的内容都能加以介绍，但事实上有困难。我们没有涉及下述两个重要方面的内容。

一是建立基本解的问题，对于线性椭圆型方程，只要系数基本上属于C^α，就能建立基本解，对抛物型方程，其系数对x为C^α，对t为连续，也能建立基本解，这一较重要的结果，本教材没有涉及，可参考[11]。

二是椭圆型方程的 Александров 极值原理及其向抛物型方程的推广，我们也没有涉及。

椭圆型方程

$$\Sigma a_{ij}u_{x_ix_j} = f$$

与推广的Monge-Ampere方程

$$det(z_{x_ix_j}) = \frac{1}{det(a_{ij})}\left(\frac{f}{n}\right)^n$$

相比较而得到极值原理。

抛物型方程

$$u_t - \Sigma a_{ij}u_{x_ix_j} = f$$

与Monge-Ampere方程的推广

$$z_t det(z_{x_ix_j}) = \frac{(-1)^n}{det(a_{ij})}\left(\frac{f}{n+1}\right)^{n+1}$$

相比较而得到极值原理。

这二个极值原理及其应用于线性方程及非线性方程，是很重要的，在第二章§7中它的重要性已显示出来了。有关这方面的内容的本教材也没有涉及。

关于这两个极值原理的内容，可参考[5、16、17]。

参 考 文 献

[1] 周毓麟，非线性椭圆型方程与非线性抛物型方程理论选讲(讲义)，1959

[2] 吴新谋等，数学物理方程，第三册，科学出版社，1959，

[3] L. Hörmander, Linear Partial Differential Operators, Spring-Verlag, 1963.

[4] M. Schechter, Mordern Methods in Partial Differential Equations, Mcgraw-Hill, 1977.

[5] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, Elliptic Partial Dif-ferential Equations of Second Order, Spring-Varlag, 1984.

[6] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates Near the Boundary for Solutions of Elliptic Partial Dif-ferential Equations Satisfying General Boundary Condition I, Comm. Pure Appl. Math. 12(1959), 623-727.

[7] L. Nirenberg, Functional Analysis(Lecture), New York university.

[8] R. A. Adams, Sobolev Spaces, New York, Academic press, 1975.

[9] D. Kinderlehrer and Stampacchia, An Introduction to Variational Inequalities and their Applications, Academic press, 1980.

[10] A. Friedman, Partial Differential Equations of Para-

bolic Type, Printice-Hill, 1964.
[11] R. Courant and D. Hilbert, Methods of Mathematical Physics, Vol.2, New York, 1962.
[12] L. Nirenberg, On Elliptic Partial Differential Equations, Ann.Scuola Norm. Sup. Pisa 3, 13(1959), 115-162.
[13] О. А. Олейник, О свойствах решений некоторлых краевых задача для уравнений эллиптического типа. мат. сб. (1952), 30(72)3, 695-702.
[14] О. А. Ладыженская и н.н. Уралцева, Краевеля задача дла линейных и квазилиенейиых параболических уравнений I, Изв Акад. Наук СССР—Серия мам. 26(1962), 5-25.
[15] С.Л.Соболев, Некоторые применения функционольного анализа в математической физике. Изд. Ленен унив, 1950.
[16] А. Д. Александров, Мажорирование решений линейнкх уравнений второго порядка, Вестник ДГУ. но. 1 вып. 1 (1966) 5-25.
[17] Н. В. Крылов, Последовательности выпуклых функций и оценки максимума решения параболи-ческого уравнения. СИБ. Мат. Журнал, 17.2 (1976) 290-303.

记 号 索 引

（仅列出较特殊的）

$\bar{\Omega}$： Ω的闭包

$\partial\Omega$： Ω的边界

$d(x,D)$： 点x与集合D的距离，$d(x,D)=\inf\limits_{y\in D}d(x,y)$。

$\dfrac{\partial u}{\partial N}$： N表示边界曲面的法线方向，$\dfrac{\partial u}{\partial N}$表示$u$的法向微商在曲面上的值。

ϕ： 空集

$C^{k,\lambda}$或$C^{k+\lambda}$： u仅是$x=(x_1, x_n)$的函数时表示u关于x_1，…，x_n为k次可微，且k次微商满足λ次的$Hölder$条件，u是$x=(x_1, …, x_n)$与t的函数时，其意义见下面。

$C^{2,1}$： u关于x_1，…，x_n是二次连续可微，对t一次连续可微。

$C^{2+\lambda,1+\lambda/2}$： $u_{x_ix_j}(1\leqslant i\leqslant n, 1\leqslant j\leqslant n)$与$u_t$对$x$满足$\lambda$次、对$t$满足$\dfrac{\lambda}{2}$次的$Hölder$条件

$d_y\sigma$： $\partial\Omega$的曲面微元（当Ω中的点用$y=(y_1, …, y_n)$表示时

$\forall$： 对于所有

$\exists$： 存在

$\ni$： 使

$\Rightarrow$： 导出

$\|u\|_p$： $\|u\|_p=[\int_\Omega|u|^pdx]^{1/p}$，当$\Omega$已指定时

$\lvert\Omega\rvert$:	集合Ω的测度
$a.e.$:	几乎处处
$\mathbf{R}$:	所有实数构成的一维欧氏空间
$\mathbf{R}^n$:	n个实数组成的n维欧氏空间
$\dfrac{d\xi}{d\xi_i}$:	$\dfrac{d\xi}{d\xi_i}=d\xi_1\cdots d\xi_{i-1}d\xi_{i+1}\cdots d\xi_n$
ω_n:	n维欧氏空间的单位球面积，即$n-1$维单位球面积
k_n:	n维欧氏空间单位球体积
$W_p^k(\Omega)$:	于区域Ω中k次弱微商均属于$L_p(\Omega)$的函数空间
$\overset{\circ}{W}{}_p^k(\Omega)$:	$W_k^p(\Omega)$中在$\partial\Omega$附近为0的函数，按W_p^k的范数取闭包的函数空间（也是$C_0^\infty(\Omega)$按$W_p^k(\Omega)$范数取闭包的函数空间）
$A\subset\subset B$:	表示$A\supseteq C\subset B$，且$dist(C,\ \partial B)>0$
$A\langle\langle B$:	表示$B\geqslant 0$且$\lvert A\rvert\leqslant B$