目　录

第一章　有理分数的展式

1.1　引言

设想一个学代数的学生试图用下面的方法去解二次方程式

$$x^2-3x-1=0. \tag{1.1}$$

他首先用x遍除各项，接着把这方程式写成形式

$$x=3+\frac{1}{x}.$$

未知量x仍出现在这个方程式的右边，因此可用与它相等的量，即$3+1/x$来代替它．这就给出

$$x=3+\frac{1}{x}=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}.$$

反复几次用$3+1/x$代替x，就得到表达式

$$x=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{x}}}}}. \tag{1.2}$$

因为x连续在右端这个“多层”分数中出现，它似乎并没有更接近于求出方程式(1.1)的解。

但是让我们更仔细地来考察一下方程式(1.2)的右端．每进行一步停一次，我们看到，它包含一系列的分数

$$3,\quad 3+\frac{1}{3},\quad 3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}},\quad 3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3}}},\quad \cdots, \tag{1.3}$$

把它们化为简分数，并进而化为十进小数，便依次得出下面的数

$$3,\ \frac{10}{3}=3.333\cdots,\ \frac{33}{10}=3.3,\ \frac{109}{33}=3.30303\cdots.$$

终于令人惊喜地发现，这些数（以后我们将把它们叫做渐近分数）给出了给定的二次方程式(1.1)的正根的越来越好的近似值（或者如以后我们将要称呼的，收敛到这个正根）。二次方程式的求根公式指出，这个根实际上等于

$$x=\frac{3+\sqrt{13}}{2}=3.302775\cdots,$$

它约等于 3.303，与上面最后一个结果的前三位小数是一致的。

这些初步的计算提出了一些有趣的问题。首先，如果我们算出越来越多地渐近分数(1.3)，是否能不断得到 $x=(3+\sqrt{13})/2$ 的越来越好的近似值呢？其次，假定我们把得出(1.2)的步骤无限继续下去，以至取代(1.2)得出一个尚无名字的表达式

$$x=3+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{3+\ddots}}, \tag{1.4}$$

其中三个黑点代表字“等等”，并指出接续的分数是无穷无尽的。那么，(1.4)右边的表达式是等于$(3+\sqrt{13})/2$吗？

这使我们想起了无限十进位小数。例如，我们说无限小数0.333…等于1/3是什么意思？显然，这些问题以及许多其它问题最后都需要讨论和回答。

象(1.2)和(1.4)那样的多层分数称为连分数。连分数以及它们的性质和应用的研究在数学中形成了最令人感兴趣的篇章之一。但是，我们必须从比较简单的东西开始。首先是引进基本定义。

1.2 定义和符号

形如

$$a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cfrac{b_3}{a_4+\ddots}}} \tag{1.5}$$

的表达式叫做连分数。在一般情况下，数$a_1,a_2,a_3,\cdots$，b_1，$b_2,b_3,\cdots$可以是实数或复数，项数可以有限，也可以无限。

但是在这本小册子中，我们将限于讨论简单连分数。它们取如下的形式

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots}}}, \tag{1.6}$$

这里第一项a_1通常是正的或负的整数（但是可以是零），项$a_2,a_3,a_4,\cdots$是正整数。实际上，在第三章以前我们只限于讨论有限简单连分数。它们取形式

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\ddots+\cfrac{1}{a_{n-1}+\cfrac{1}{a_n}}}}},\tag{1.7}$$

式中仅含有有限个项$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$。这样的分数叫有限连分数。从现在起，除非声明，连分数一词指的是有限简单连分数。

一个比(1.7)方便得多的记法是

$$a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\cdots+\frac{1}{a_n},\tag{1.8}$$

上式中第一个 + 号之后的 + 号都写低了，这是为了使我们记起在构成一个连分数的过程中“降了一层”。用符号〔a_1, $a_2, \cdots, a_n$〕表示连分数(1.8)也是方便的，所以

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n]=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}.\tag{1.9}$$

项$a_1, a_2, \cdots, a_n$叫做连分数的部分商。

1.3 有理分数的展式

一个有理数是一个形如p/q的分数，这里p和q是整数，$q\neq 0$。我们将在下一节证明，每一个有理分数，或者有理数，都能被表示成一个有限简单连分数。

例如，67/29的连分数是

$$\frac{67}{29}=2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2},$$

或者

$$\frac{67}{29}=[2,3,4,2].$$

我们是怎样得到这个结果的呢？首先，我们用29去除67，得出商数 2 和余数 9 ，所以

$$\frac{67}{29}=2+\frac{9}{29}=2+\frac{1}{\frac{29}{9}}. \tag{1.10}$$

注意，我们在等式的右边用29/ 9 的倒数代替了 9 /29。下一步用 9 除29得出

$$\frac{29}{9}=3+\frac{2}{9}=3+\frac{1}{\frac{9}{2}}. \tag{1.11}$$

最后，用 2 除 9 得出

$$\frac{9}{2}=4+\frac{1}{2}, \tag{1.12}$$

到这一步展开过程就结束了。现在把(1.12)代入(1.11)，再把(1.11)代入(1.10)就得到

$$\frac{67}{29}=2+\frac{1}{\frac{29}{9}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{9}{2}}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{4+\frac{1}{2}}},$$

或

$$\frac{67}{29}=[2,3,4,2]=[a_1,a_2,a_3,a_4]. \tag{1.13}$$

我们应当注意到，在方程式(1.10)中数 2 ·29是比67小的29的最大倍数，因此余数（这种情况下是 9 ）一定是一个

$\geqslant 0$ 的数，又一定是 <29 的数①。

其次我们考虑方程式(1.11)。这里 $3\cdot 9$ 是比29小的 9 的最大倍数。余数 2 一定是一个 $\geqslant 0$ 而 <9 的数。

在(1.12)中数 $4\cdot 2$ 是比 9 小的 2 的最大倍数，余数 1 是一个 $\geqslant 0$ 但 <2 的数。

最后，关于方程式(1.12)我们不能再做了，因为如果我们写出

$$\frac{9}{2}=4+\frac{1}{\frac{2}{1}}=4+\frac{1}{2},$$

这时 $2\cdot 1$ 是除尽 2 的 1 的最大倍数，我们就简单地以

$$\frac{2}{1}=2\cdot 1+0=2$$

来收尾，所以计算也就结束了。

求67/29的连分数展式的过程可以安排如下：

$$\begin{array}{lll}
29)67(2=a_1 & \text{用29除67。} & \\
\quad 58 & 2\cdot 29=58; & \text{67减去58。} \\
\quad 9)29(3=a_2 & \text{用 9 除29。} & \\
\qquad 27 & 3\cdot 9=27; & \text{29减去27} \\
\qquad 2)\ 9\ (4=a_3 & \text{用 2 除 9 。} & \\
\qquad\quad 8 & 4\cdot 2=8; & \text{9减去8} \\
\qquad\quad 1)\ 2\ (2=a_4 & \text{用 1 除 2} & \\
\qquad\qquad 2 & 2\cdot 1=2; & \text{2 减去 2} \\
\qquad\qquad 0 & & \text{过程完成。}
\end{array}$$

---

① 若数a比数b小，我们就记作 $a<b$. 若a小于或等于 b，我们就记作$a\leqslant b$. 类似地，若a大于b，或者a大于或者等于 b，我们就分别记作$a>b$，$a\geqslant b$. 对于不等式的详细讨论见 E. Beckenbach and R. Bellman〔1〕.

因此

$$\frac{67}{29}=[a_1, a_2, a_3, a_4]=[2,3,4,2].$$

从这个例子中我们观察到，在一系列除法中余数 9，2，1 正是被确定的非负数，它们中的每一个都比相应的除数小。例如，余数 9 比除数29小，余数 2 比除数 9 小，等等。每一次除法中的余数都变成下一次除法的除数，所以这些相继的余数变为越来越小的非负整数。这样一来，最后一定会得到余数零，因而过程一定会结束。

在这种过程中得到的每一个余数是一个唯一确定的非负数。例如，你能用29去除67得出最大商 2，却以一个异于 9 的数做余数吗？这就是说，对于给定的分数67/29，我们的过程恰产生一个余数序列。

作为第二个例子，让我们来求29/67的连分数展式。我们得到

$$\begin{array}{l}
67\overline{)29}(0=a_1\\
\quad\ \ \underline{0}\\
\quad 29)67(2=a_2\\
\qquad\ \ \underline{58}\\
\qquad\ \ 9)29(3=a_3\\
\qquad\qquad \underline{27}\\
\qquad\qquad 2)\,9\,(4=a_4\\
\qquad\qquad\quad\ \underline{8}\\
\qquad\qquad\quad 1)\,2\,(2=a_5\\
\qquad\qquad\qquad\ \underline{2}\\
\qquad\qquad\qquad\ 0
\end{array}$$

因此

$$\frac{29}{67}=[0,2,3,4,2]=[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5].$$

注意，在这个例子中$a_1=0$.为了核对我们的结果，只要化简连分数就可以了：

$$0+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{2}{9}}}=\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{29}}=\frac{29}{67}.$$

展式$67/29=[2,3,4,2]$与它的倒数的展式$29/67=[0,2,3,4,2]$相比较，给我们提示了一个这样的结果：若p比q大，并且

$$\frac{p}{q}=[a_1,a_2,\cdots,a_n],$$

则

$$\frac{q}{p}=[0,a_1,a_2,\cdots a_n].$$

对于$p<q$的情况，請读者叙述一个类似的结果。

下面的例子有助于回答用心的学生可能发生的一些问题。

首先，展式

$$\frac{67}{29}=[2,3,4,2]=[a_1,a_2,a_3,a_4]$$

作为67/29的一个简单有限连分式，是它的唯一展式吗？如果我们回过头来研究获得展式的方法，答案看来是“是”。事实确是如此，除去对最后一项，或最后一个部分商a_4稍作改变外；而这种修改总是能做到的。因为$a_4=2$，所以我们可写出

$$\frac{1}{a_4}=\frac{1}{2}=\frac{1}{1+\frac{1}{1}}.$$

因此

$$\frac{67}{29}=[2,3,4,1,1]$$

也是正确的．很明显，展示$[2,3,4,1,1]$可以变回到它的原始形式$[2,3,4,2]$．通过下面更一般的讨论，我们将会看到，这是我们能够得出“不同”展式的唯一方法．

其次，让我们来考虑如何去求得一个负有理数$-p/q$的展式．这只需对已有的展开过程稍作改变，即可得出．例如，求$-37/44$的连分数展式的过程如下：

```
44)-37(-1
   -44
   ------
      7)44(6
        42
        ----
         2)7(3
           6
           ----
           1)2(2
             2
             --
             0
```

（求一个负商，使得从-37中减去它与44相乘后剩下的是最小正余数）

于是

$$-\frac{37}{44}=[-1,6,3,2]=[-1,6,3,1,1]$$

$$=[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5].$$

注意a_1是负的，但a_2,a_3,a_4,a_5是正的．

第三个问题是：如果我们用同一个数，比如说3，去乘

67/29的分子和分母，然后展开所得到的分数为 201/87，那么，201/87 的连分数和67/29的连分数一样吗？我们将看到展式是一样的，因为

(1.14)

```
87)201(2
   174
   ------
    27)87(3
       81
       ------
        6)27(4
          24
          -----
           3)6(2
             6
             --
             0
```

于是

$$\frac{201}{87}=\frac{67}{29}=[2,3,4,2].$$

以上说明了连分数的一个有趣性质。如果算出

$$[2,3,4,2]=2+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2},$$

我们一定回到67/29，而不是201/87。这样所得到的有理分数p/q总是既约分数，即这个分数中的p和q**没有比1大的公因子**。你能找出产生这种情况的理由吗？后面将给出解释。

习 题 1

1．把下面的每一个都化为有限简单连分数。

(a) $\frac{17}{11}$； (b) $\frac{51}{33}$；

(c) $3.54=\frac{354}{100}$； (d) $\frac{233}{177}$；

(e) $0.23=\frac{23}{100}$；　　(f) $\frac{355}{106}$；

(g) 3.14159.

2．如果

$$\frac{p}{q}=3+\frac{1}{4}+\frac{1}{1}+\frac{1}{5},$$

求p/q.

3．若$p/q=[0,2,1,4,2]$，求p/q.

4．若$p/q=[3,7,15,1]$，求p/q.把p/q化为十进位小数并与π的值相比较。

5．求(a) 11/17，(b) 33/51的简单连分式，并把它们与问题1中的(a)，(b)的展式相比较。

6．证明：如果$p>q$，且$p/q=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$，则$q/p=[0,a_1,a_2,\cdots,a_n]$；反过来，若$q/p=[0,a_1,a_2,\cdots,a_n]$，则$p/q=[a_1,a_2,\cdots,a_n]$.

1.4 有理分数的展式(一般讨论)

到现在为止，我们引进了研究连分数的专门术语，并考察了一些特殊的例子。但是，为了使我们的研究工作取得真正的进展，必须讨论更一般的结果。用符号代替具体数字可使我们的心智得到解放，从而能抽象地去思考问题。所以，尽管我们的第一个定理只不过是以一般的术语表达了我们在例子中已经做过的事情，但是一旦完成了这一步，许多其它想法就会很快地接踵而来。

定理1.1 任一有限简单连分式表示一个有理数。反过来，任一有理数p/q也都能表示为一个有限简单连分式；除开下面提到的例外，表达式或展式是唯一的。

证明 由前面我们在例子中所解释的，可清楚看出，定理的第一部分是正确的。因为任何一个有限的展式都可循着原路化回去而成为一个有理分数。

为了证明定理的第二部分，设p/q是任一有理分数，其中$q>0$。用q去除p，得到

$$\frac{p}{q}=a_1+\frac{r_1}{q},\qquad 0\leqslant r_1<q,$$

式中a_1是使余数大于或等于0而小于q的唯一整数。正如我们在例中看到的，a_1可以是负数、零或正数。如果$r_1=0$，那么过程就结束了，p/q的连分式就是$[a_1]$。

若$r_1\neq 0$，则我们写

$$\frac{p}{q}=a_1+\frac{1}{\frac{q}{r_1}},\qquad 0<r_1<q,\tag{1.15}$$

重复刚才的除法过程，用r_1除q，得到

$$\frac{q}{r_1}=a_2+\frac{r_2}{r_1},\qquad 0\leqslant r_2<r_1.\tag{1.16}$$

现在注意，q/r_1是一个正分数，所以a_2是使得余数r_2介乎0与r_1之间的唯一最大的正整数。如果$r_2=0$，那么过程就终止了，把(1.16)中的$q/r_1=a_2$代入(1.15)就得到

$$\frac{p}{q}=a_1+\frac{1}{a_2}=[a_1,a_2],$$

作为p/q的连分数展式。

若$r_2\neq 0$，则把(1.16)写成形式

$$\frac{q}{r_1}=a_2+\frac{1}{\frac{r_1}{r_2}},\qquad 0<r_2<r_1,\tag{1.17}$$

并对r_1/r_2重复刚才的除法过程。

我们看到，只要得到一个余数$r_n=0$，计算就结束。可能达不到一个等于0的r_n，而使除法过程无限继续下去吗？这显然是不可能的，因为余数$r_1,r_2,r_3,\cdots$形成了一个非负整数的递减序列$q>r_1>r_2>r_3>\cdots$，除非我们得到一个等于零的余数r_n，否则我们将会处于一种荒谬的境地：发现了无穷多个彼此不同的正整数都比一个有限正整数q小。

因此，根据辗转相除法，我们得到一系列的方程：

$$\left.\begin{array}{ll}
\dfrac{p}{q}=a_1+\dfrac{r_1}{q}, & 0<r_1<q,\\[2ex]
\dfrac{q}{r_1}=a_2+\dfrac{r_2}{r_1}, & 0<r_2<r_1,\\[2ex]
\dfrac{r_1}{r_2}=a_3+\dfrac{r_3}{r_2}, & 0<r_3<r_2,\\[2ex]
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\[2ex]
\dfrac{r_{n-3}}{r_{n-2}}=a_{n-1}+\dfrac{r_{n-1}}{r_{n-2}}, & 0<r_{n-1}<r_{n-2},\\[2ex]
\dfrac{r_{n-2}}{r_{n-1}}=a_n+\dfrac{0}{r_{n-1}}=a_n+0, & r_n=0,
\end{array}\right\}\tag{1.18}$$

在有限次除法之后，就以一个含有余数r_n等于零的方程结束了。

现在容易把p/q表示为有限简单连分数了。由(1.18)的前两个方程式，我们有

$$\frac{p}{q}=a_1+\cfrac{1}{\cfrac{q}{r_1}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\cfrac{r_1}{r_2}}}.$$

利用(1.18)的第三个方程式，以

$$a_3+\frac{1}{\frac{r_2}{r_3}}$$

代替r_1/r_2，如此继续下去，直到得出表达式

$$\frac{p}{q}=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}$$

$$=\left[a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\right]. \tag{1.19}$$

由a_i的计算方法就可推出表达式(1.19)的唯一性。但是，这个论断必须跟上一个说明：表达式一经得到，我们总可以修改最后一项a_n，使得表达式中所含的项数是奇的，或者是偶的，依我们的选择而定。为了弄明白这一点，注意，当a_n比1大时，我们可以写出

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{(a_n-1)+\frac{1}{1}},$$

所以(1.19)可由

$$\frac{p}{q}=\left[a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n-1,1\right] \tag{1.20}$$

来替代。另一方面，当$a_n=1$时，则有

$$\frac{1}{a_{n-1}+\frac{1}{a_n}}=\frac{1}{(a_{n-1}+1)},$$

所以(1.19)变为

$$\frac{p}{q}=\left[a_1,a_2,\cdots,a_{n-2},a_{n-1}+1\right]. \tag{1.21}$$

因此我们有下面的定理：

定理1.2 任何一个有理数p/q都能展为有限简单连分数，并可对展式的最后一项作修改，使得展式中的项数或者是奇数或者是偶数。

有趣的是，方程式(1.18)恰是著名的求整数p和q的最大公约数①的欧几里得算法.〔这种算法出现在欧几里得的“原本”第七篇中(公元前300年)；但据知它起源更早.〕

为了利用欧几里得算法求p和q的最大公约数，我们把方程式(1.18)写成下述形式：

$$\left.\begin{array}{ll}
p\ \ =a_1q+r_1, & 0<r_1<q,\\
q\ \ =a_2r_1+r_2, & 0<r_2<r_1,\\
r_1=a_3r_2+r_3, & 0<r_3<r_2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots\\
r_{n-3}=a_{n-1}r_{n-2}+r_{n-1}, & 0<r_{n-1}<r_{n-2},\\
r_{n-2}=a_nr_{n-1}+0=a_nr_{n-1}, & 0=r_n.
\end{array}\right\}\quad(1.22)$$

第一个方程式$p=a_1q+r_1$，是由(1.18)的第一个方程式两边乘以分母q得到的；其它方程式也是用类似的方法得到的。

我们来证明最后一个非零余项r_{n-1}是p和q的g.c.d..为此，我们首先叙述两个整数的g.c.d.必须满足的两个条件。数d是两个整数p和q的g.c.d.，如果

(a) d同时除尽p和q；

---

① 任何两个整数p和q的最大公约数（g.c.d.）是既除尽p又除尽q的最大整数. 在数论中整数p和q的g.c.d. 用符号(p,q)来表示；于是$(p,q)=d$ 意味着d是p和q的最大的整数公因子.

（b）p和q的任何公因子 c 都能除尽 d。例如，设

$$p=3\cdot5\cdot11,\qquad q=3^2\cdot5\cdot13,$$

那么p和q的 g.c.d. 是$d=3\cdot5$，因为(a) $d=3\cdot5$，既除尽p又除尽q；（b）p和q的公因子 3和5 都能除尽d.

我们需要再仔细看一看：如果a,b,c是整数，满足

$$a=b+c,$$

那么任何同时整除a和b的整数d一定整除c. 因为如果 d 整除 a，则$a=da_1$，这里a_1是一个整数；如果d整除b，则$b=db_1$，b_1是整数. 由于$a-b=c$，我们看到

$$a-b=da_1-db_1=d(a_1-b_1)=c,$$

所以d整除c。类似地，任何同时除尽b和c的整数d也将除尽a。

现在来看方程式(1.22). 其中最后一个方程式

$$r_{n-2}=a_nr_{n-1}$$

指出，r_{n-1}可除尽r_{n-2}，或者说r_{n-1}是r_{n-2}的因子. 紧挨着它上面的一个方程式，即

$$r_{n-3}=a_{n-1}r_{n-2}+r_{n-1}$$

指出，r_{n-1}可除尽r_{n-3}，因为它可以除尽r_{n-1}和r_{n-2}。根据相同的方法，由方程式

$$r_{n-4}=a_{n-2}r_{n-3}+r_{n-2},$$

可知，r_{n-1}可除尽r_{n-4}，因为它既可除尽 r_{n-2}，又可除尽r_{n-3}。以这种方式逐步向上，我们就发现r_{n-1}除尽r_3和r_2，因而也除尽r_1.除尽r_1和r_2就能除尽q；除尽r_1和q也就最后能除尽p。因此，r_{n-1}既能除尽p也能除尽q，所以条件(a)是满足的。

接着我们必须证明，若c是p和q的任一公因子，则c就除尽r_{n-1}。这一次我们从(1.22)的第一个方程式开始，逐个向下进行。若c能除尽p和q，则(1.22)的第一个方程式指出，c除尽r_1。但是如果c除尽q和r_1，则(1.22)的第二个方程式指出，c除尽r_2。按这种办法继续下去，我们一直到倒数第二个方程式

$$r_{n-3}=a_{n-1}r_{n-2}+r_{n-1}.$$

在这个方程式中，c除尽r_{n-3}和r_{n-2}，因此也除尽r_{n-1}，这样一来条件(b)也是满足的。于是我们做出结论：r_{n-1}是p和q的g.c.d..

作为一个例子，让我们用欧几里得算法去定出$p=6381$和$q=5163$的g.c.d.。我们算出

$$\begin{aligned}
6381&=1\cdot5163+1218,\\
5163&=4\cdot1218+291,\\
1218&=4\cdot291+54,\\
291&=5\cdot54+21,\\
54&=2\cdot21+12,\\
21&=1\cdot12+9,\\
12&=1\cdot9+3,\\
9&=3\cdot3+0;
\end{aligned}$$

因此3是6381和5163的g.c.d.。事实上，$6381=3^2\cdot709$，这里709是一个素数，而$5163=3\cdot1721$，这里1721也是一个素数。（素数是这样的数，它只有两个整数因子：1和它自己。）这样一来只有3是这两个数的公因数，因此3是它们的g.c.d..

习 题 2

1．把下面的有理分数展为含有偶数项以及含有奇数项的有限简单连分式：

(a) $\frac{29}{5}$； (b) $\frac{5}{29}$； (c) $-\frac{29}{5}$；

(d) $\frac{123}{31}$； (e) $-\frac{123}{31}$； (f) $\frac{31}{123}$.

2．用欧几里得算法找出下述数对的最大公因数（g.c.d.）：

(a) 1380，1449； (b) 1517，2015；

(c) 2299，3800； (d) 3528，7455.

1.5 渐近分数及其性质

连分数在解决许多有趣问题中是一个得力工具，但是在给出它们各种有效的应用之前，我们必须详尽地研究它们的某些性质。

1.4节指出，任何有理分数p/q都可展为有限简单连分式

$$\frac{p}{q}=[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}, a_n], \tag{1.23}$$

这里a_1是正的，或者负的，或者是零，而$a_2, a_3, \cdots, a_n$都是正整数。从现在起我们把数$a_1, a_2, \cdots, a_n$叫做连分式的**部分商**或连分式的**商**。我们可以利用它们构成分数

$$c_1=\frac{a_1}{1}, \quad c_2=a_1+\frac{1}{a_2}, \quad c_3=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}, \quad \cdots,$$

它们分别由原连分数在第一，第二，第三层，…处切断而得到.

这些分数分别叫做连分式(1.23)的第一个、第二个、第三个、…渐近分数，第n个渐近分数

$$c_n = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \cdots \frac{1}{+ a_n} = [a_1, a_2, \cdots, a_n]$$

等于连分数自己。

重要的是发展一种计算这些渐近分数的方法。我们写

$$c_1 = \frac{a_1}{1} = \frac{p_1}{q_1},$$

这里$p_1 = a_1$，$q_1 = 1$；接着我们写

$$c_2 = a_1 + \frac{1}{a_2} = \frac{a_1 a_2 + 1}{a_2} = \frac{p_2}{q_2},$$

这里$p_2 = a_1 a_2 + 1$，$q_2 = a_2$；然后

$$c_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3} = \frac{a_1 a_2 a_3 + a_1 + a_3}{a_2 a_3 + 1} = \frac{p_3}{q_3},$$

$$c_4 = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \frac{1}{a_4}$$

$$= \frac{a_1 a_2 a_3 a_4 + a_1 a_2 + a_1 a_4 + a_3 a_4 + 1}{a_2 a_3 a_4 + a_2 + a_4} = \frac{p_4}{q_4},$$

如此等等。

现在让我们来更仔细地看看c_3。注意到

$$c_3 = \frac{a_3(a_1 a_2 + 1) + a_1}{a_3(a_2) + 1} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{p_3}{q_3},$$

所以

$$\begin{aligned} p_3 &= a_3 p_2 + p_1 (= a_3 a_1 a_2 + a_3 + a_1), \\ q_3 &= a_3 q_2 + q_1 (= a_3 a_2 + 1). \end{aligned} \tag{1.24}$$

还有，由c_4分解因子我们看到

$$c_4=\frac{a_4(a_1a_2a_3+a_1+a_3)+(a_1a_2+1)}{a_4(a_2a_3+1)+(a_2)}=\frac{a_4p_3+p_2}{a_4q_3+q_2}=\frac{p_4}{q_4},$$

所以

$$p_4=a_4p_3+p_2,\qquad q_4=a_4q_3+q_2. \tag{1.25}$$

从(1.24)和(1.25)我们可以猜测，若

$$c_5=[a_1,a_2,\cdots,a_5]=\frac{p_5}{q_5},$$

则

$$p_5=a_5p_4+p_3,\qquad q_5=a_5q_4+q_3. \tag{1.26}$$

在一般情况下，对于$i=3,4,5,\cdots,n$,

$$c_i=[a_1,a_2,\cdots,a_i]=\frac{p_i}{q_i},$$

其中

$$p_i=a_ip_{i-1}+p_{i-2},\qquad q_i=a_iq_{i-1}+q_{i-2}. \tag{1.27}$$

方程式(1.26)的正确性通过直接算一算就可确立。当然，当$i=3,4,5,\cdots,n$时，这种方法不能给出方程式(1.27)的正确性的证明。不过这的确是一个用归纳法思考的例子。从前面不多的几个计算我们就能猜到这个公式；接着，尽管我们确信它们的正确性，我们还必须给出一个正式的证明。因而我们叙述并用归纳法证明下面的定理：

定理1.3 连分数$[a_1,a_2,\cdots,a_n]$的第i个渐近分数c_i的分子p_i和分母q_i满足方程式

$$p_i=a_ip_{i-1}+p_{i-2},\qquad q_i=a_iq_{i-1}+q_{i-2} \tag{1.28}$$
$$i=3,4,5,\cdots,n.$$

初始值为

$$\begin{aligned} p_1 &= a_1, & p_2 &= a_2 a_1 + 1, \\ q_1 &= 1, & q_2 &= a_2. \end{aligned} \tag{1.29}$$

证明 我们已经看到了，

$$c_1 = p_1/q_1 = a_1/1, \qquad c_2 = p_2/q_2 = (a_2 a_1 + 1)/a_2.$$

如果在方程式(1.28)中把$i=3$代入就得到

$$c_3 = \frac{p_3}{q_3} = \frac{a_3 p_2 + p_1}{a_3 q_2 + q_1} = \frac{a_3(a_2 a_1 + 1) + a_1}{a_3(a_2) + 1},$$

又和c_3的直接计算相一致．我们假定定理1.3对于整数3,4,5,…，一直到某个整数k是正确的，也就是，对于$j=3,4,5,\cdots,k-1,k$,

$$\begin{aligned} c_j &= [a_1, a_2, \cdots, a_{j-1}, a_j] \\ &= \frac{p_j}{q_j} = \frac{a_j p_{j-1} + p_{j-2}}{a_j q_{j-1} + q_{j-2}}. \end{aligned} \tag{1.30}$$

在这个假设之下，我们希望去证明，对于下一个整数$k+1$定理1.3一定成立．为此我们借助方程式（1.30）给出下式一个证明，

$$\begin{aligned} c_{k+1} &= [a_1, a_2, \cdots, a_k, a_{k+1}] \\ &= \frac{a_{k+1} p_k + p_{k-1}}{a_{k+1} q_k + q_{k-1}} = \frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

下面几步需要集中精神去看．首先注意，c_{k+1}与c_k的差别仅在于在a_k的位置上换上$\left(a_k + \frac{1}{a_{k+1}}\right)$.

把

$$c_k = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_{k-1}} + \frac{1}{a_k}$$

与

$$c_{k+1}=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_{k-1}+}\frac{1}{\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)}$$

做一简单比较就会看到这一点。这就提示我们利用这个公式可从c_k算出c_{k+1}；而c_k可由在(1.30)中用k代替j得出，即

$$\begin{aligned}c_k&=\langle a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},a_k\rangle\\&=\frac{p_k}{q_k}=\frac{a_kp_{k-1}+p_{k-2}}{a_kq_{k-1}+q_{k-2}}.\end{aligned}\tag{1.32}$$

只要我们确信在替换a_k时不会改变$p_{k-2},q_{k-2},p_{k-1},q_{k-1}$的值，我们就一定能从$c_k$算出$c_{k+1}$。

为了说明$p_{k-2},q_{k-2},p_{k-1},q_{k-1}$不依赖于$a_k$，我们来看看它们是如何算出来的。在方程式(1.30)中，先用$k-2$代替j，再用$k-1$代替j，我们就依次得到：

$$\frac{p_{k-2}}{q_{k-2}}=\frac{a_{k-2}p_{k-3}+p_{k-4}}{a_{k-2}q_{k-3}+q_{k-4}}$$

和

$$\frac{p_{k-1}}{q_{k-1}}=\frac{a_{k-1}p_{k-2}+p_{k-3}}{a_{k-1}q_{k-2}+q_{k-3}}.$$

我们看到了，数p_{k-1},q_{k-1}只依赖于数a_{k-1}和数$p_{k-2},q_{k-2},p_{k-3},q_{k-3}$，而这些又都依次依赖于前面的$a_i$，$p_i$和$q_i$。这样一来，数$p_{k-2},q_{k-2},p_{k-1},q_{k-1}$只依赖于前$k-1$个商$a_1,a_2,\cdots,a_{k-1}$，因此不依赖于$a_k$。这意味着当用$(a_k+1/a_{k+1})$代替$a_k$时，它们不会改变。

现在我们来计算c_{k+1}。如前面所说明的，在(1.32)中用(a_k+1/a_{k+1})代替a_k，得到

$$c_{k+1}=\left[a_1,a_2,\cdots,a_{k-1},\left(a_k+\frac{1}{a_{k+1}}\right)\right]$$

$$=\frac{\left(a_k+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)p_{k-1}+p_{k-2}}{\left(a_k+\dfrac{1}{a_{k+1}}\right)q_{k-1}+q_{k-2}}.$$

再用a_{k+1}乘分子和分母．有

$$c_{k+1}=\frac{(a_ka_{k+1}+1)\,p_{k-1}+a_{k+1}p_{k-2}}{(a_ka_{k+1}+1)\,q_{k-1}+a_{k+1}q_{k-2}},$$

重新安排各项，得出

$$c_{k+1}=\frac{a_{k+1}(a_kp_{k-1}+p_{k-2})+p_{k-1}}{a_{k+1}(a_kq_{k-1}+q_{k-2})+q_{k-1}}.$$

在这里我们用公式(1.30)对$j=k$成立的假设，即

$$a_kp_{k-1}+p_{k-2}=p_k,\qquad a_kq_{k-1}+q_{k-2}=q_k.$$

因此，在c_{k+1}的最后一个表达式的分子和分母的括号中，可分别用p_k和q_k来代替．这样一来，得到

$$c_{k+1}=\frac{a_{k+1}p_k+p_{k-1}}{a_{k+1}q_k+q_{k-1}}=\frac{p_{k+1}}{q_{k+1}}.$$

于是，我们证明了，如果由(1.30)给出的渐近分数c_j的表示式对于$j=3,4,5,\cdots,k$成立，那么它对下一个渐近分数$c_{k+1}=p_{k+1}/q_{k+1}$也成立．但是由直接计算我们实际上已知道(1.30)对于$j=k=3$成立．因此它对下一个整数$k+1=4$成立．类似地，对于$k=5,6,7,\cdots,n$也成立．这就证明了定理1.3．

考察一下这个证明就会注意到，我们到处都沒用到商a_i是整数这一事实．尽管每个a_i都是整数，可数a_k+1/a_{k+1}不

必是整数。即使不是，在证明中用它去代替a_k也不会妨碍讨论的进行。

要是从方程式(1.28)也能算出由(1.29)给出的前两个渐近分数，就方便了.若在(1.28)中设$i=1,2$，我们就得出四个**未定项**p_0,p_{-1},q_0,q_{-1}。如果对这几个未定项我们指定它们的值：

$$p_0=1,\quad p_{-1}=0, \qquad (1.33)$$
$$q_0=0,\quad q_{-1}=1,$$

那么方程式(1.28)就对$i=1,2,3,\cdots,n-1,n$成立了，并且由前两个值$i=1,2$可产生出方程(1.29)。在(1.28)中设$i=1$，并利用(1.33)，我们得到

$$c_1=\frac{p_1}{q_1}=\frac{a_1p_0+p_{-1}}{a_1q_0+q_{-1}}=\frac{a_1 1+0}{a_1 0+1}=\frac{a_1}{1},$$

对于$i=2$，有

$$c_2=\frac{p_2}{q_2}=\frac{a_2p_1+p_0}{a_2q_1+q_0}=\frac{a_2a_1+1}{a_2 1+0}=\frac{a_2a_1+1}{a_2}.$$

因此，指定值(1.33)可使我们免去方程式(1.29)，而只用方程式(1.28)，其中$i=1,2,\cdots,n$。但是要注意，p_{-1}/q_{-1}和p_0/q_0不是渐近分数。

相继渐近分数的计算可以系统化。用例子来说明更清楚。120/49的连分数展式是

$$\frac{120}{49}=[2,2,4,2,2]=[a_1,a_2,a_3,a_4,a_5].$$

我们列出表1。表中

$$p_i=a_ip_{i-1}+p_{i-2},\quad q_i=a_iq_{i-1}+q_{i-2},\quad i=1,2,\cdots$$

表的解释：表中第1排的整数是i的值：$i=-1,0,1,2,$

表　1

i	-1	0	1	2	3	4	5
a_i			2	2	4	2	2
p_i	0	1	2	5	22	49	120
q_i	1	0	1	2	9	20	49
$c_i=\frac{p_i}{q_i}$			$\frac{2}{1}$	$\frac{5}{2}$	$\frac{22}{9}$	$\frac{49}{20}$	$\frac{120}{49}$

…。在每一个i值的下边列出了a_i, p_i, q_i, c_i的相应值。例如，在$i=4$的下边我们找到$a_4=2$，$p_4=49$，$q_4=20$，$c_4=49/20$。

我们是以下面的方法构成此表的：在相应的i的下边，在第2排里写出a_i的值。在$i=-1, i=0$的下边是特殊值$p_{-1}=0$，$p_0=1$，$q_{-1}=1$，$q_0=0$，列在中间一格。然后再计算p_i。首先，对$i=1$，从方程式(1.28)可得

$$p_1=a_1p_0+p_{-1}=2\cdot 1+0=2.$$

$$\begin{array}{ccc} & & 2 \\ & \swarrow & \\ 0 \leftarrow 1. & & \end{array}$$

（由第1组箭头表示$0\leftarrow 1$。）

在$i=1$下面的第3排里写下$p_1=2$。对$i=2$，我们得到

$$p_2=a_2p_1+p_0=2\cdot 2+1=5, \qquad \begin{array}{ccc} & & 2 \\ & \swarrow & \\ 1 \leftarrow 2, & & \end{array}$$

把它记入$i=2$下面的同一排里。对$i=3$，

$$p_3 = a_3p_2 + p_1 = 4\cdot 5 + 2 = 22, \quad \begin{array}{ccc} & & 4 \\ & \swarrow & \\ 2 & \leftarrow & 5 \end{array},$$

如此继续下去。我们以同样的方案计算q_i，把所得到的值记入q_i所在的一排里。例如，

$$q_4 = a_4q_3 + q_2 = 2\cdot 9 + 2 = 20, \quad \begin{array}{ccc} & & 2 \\ & \swarrow & \\ 2 & \leftarrow & 9 \end{array},$$

所以20记入$i=4$下面的第4排里。

习　题　3

注意：带星号的问题较难，第一次做时可先放过去。

1．把下列的有理数展成简单连分数，并对每一个数算出相继的渐近分数c_i。

(a) $\frac{121}{21}$；　　(b) $\frac{290}{81}$；

(c) $\frac{177}{292}$；　　(d) $\frac{126}{23}$。

2．把下列的每一个连分数表示为等价形式，但要具有奇数个部分商。

(a) [2,1,1,4,1,1]；　　(b) [4,2,1,7,7,1]；

(c) [0,4,2,6]；　　(d) [4,2,6,1]。

3．对问题2中的每一个连分数，设n是部分商的个数，计算$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n$；然后把这些分数表示为具有奇数个部分商的连分数再计算相应的量。例如在2(a)中，取最后一个

渐近分数，$p_n/q_n = p_6/q_6$。

4．计算连分数$[1,2,3,4,5,6]$的渐近分数，并证明$p_6 = 5p_5 + 5p_4 + 4p_3 + 3p_2 + 2p_1 + 2$（见下面的问题8）。

5．对于$[3,1,4,1,5]$，计算p_5和p_4。然后把p_5/p_4化为简单连分数，并与原来的分数相比较。对q_5/q_4也这么做（见问题7）。

6．下面的数是括号中的数的近似值，依次算出它们的渐近分数。

(a) 3.14159 （π）　　(b) 2.718 （e）；

(c) 0.4771 （$\log_{10}3$）；(d) 0.3010 （$\log_{10}2$）。

7．证明，若$a_1 \neq 0$，则

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_1]$$

和

$$\frac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots, a_2]。$$

提示　我们知道，$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$；因此

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\dfrac{p_{n-1}}{p_{n-2}}}。$$

我们也知道，$p_{n-1} = a_{n-1}p_{n-2} + p_{n-3}$；因此

$$\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{1}{\dfrac{p_{n-2}}{p_{n-3}}},$$

等等。

8*．推广问题4．若$p_1/q_1, p_2/q_2, \cdots, p_n/q_n$是$[1,2,3,4,\cdots,n]$的渐近分数，证明

$$p_n=(n-1)p_{n-1}+(n-1)p_{n-2}+(n-2)p_{n-3}$$
$$+\cdots+3p_2+2p_1+(p_1+1).$$

提示　在关系式$p_i=ip_{i-1}+p_{i-2}$中设i等于1,2,3,…,n，并把所得到的结果加起来．注意，$a_n=n$。

1.6 渐近分数的差

谁做了前面的习题谁就会猜到，有限简单连分数的渐近分数总在它们的最低项中。这是下述的基本定理的系。

定理1.4　设$p_i=a_ip_{i-1}+p_{i-2}$和$q_i=a_iq_{i-1}+q_{i-2}$是定理1.3所定义的，那么

$$p_iq_{i-1}-p_{i-1}q_i=(-1)^i,\qquad 这里i\geqslant 0.$$

证明　直接计算可证明，当$i=0,1,2$时定理是正确的．当$i=0$时，

$$p_0q_{-1}-p_{-1}q_0=1\cdot1-0\cdot0=1=(-1)^0;$$

当$i=1$时，

$$p_1q_0-p_0q_1=a_1\cdot0-1\cdot1=(-1)^1;$$

当$i=2$时，

$$p_2q_1-p_1q_2=(a_2a_1+1)\cdot1-a_1a_2=1=(-1)^2.$$

我们来证明，若定理对于$i=k$成立，那么它对于下一个整数$i=k+1$也成立。由定理1.3〔见方程式(1.28)〕我们知道，对于$i=k+1$，

$$p_{k+1}=a_{k+1}p_k+p_{k-1},\qquad q_{k+1}=a_{k+1}q_k+q_{k-1};$$

因此可写出

$$\begin{aligned}p_{k+1}q_k-p_kq_{k+1}&=(a_{k+1}p_k+p_{k-1})q_k-p_k(a_{k+1}q_k+q_{k-1})\\&=a_{k+1}p_kq_k+p_{k-1}q_k-a_{k+1}p_kq_k-p_kq_{k-1}\\&=(-1)(p_kq_{k-1}-p_{k-1}q_k).\end{aligned}\qquad(1.34)$$

我们假定定理对于$i=k$成立，也就是，

$$p_k q_{k-1}-p_{k-1}q_k=(-1)^k.$$

把这个结果代入(1.34)的最后一行，我们就看到

$$p_{k+1}q_k-p_k q_{k+1}=(-1)(-1)^k=(-1)^{k+1}.$$

但这正是$i=k+1$时定理的结论，于是我们证明了，如果定理对于$i=k$成立，则它对$i=k+1$也成立. 我们知道，定理对于$i=0$成立；因此它对于$i=0+1=1$也成立，接着对于$i=1+1=2$成立，如此继续下去，所以定理对$i=0,1,2,\cdots,n$的所有值都成立.

系1.5 简单连分数的每一个渐近分数$c_i=p_i/q_i$（$i\geqslant 1$），都在它的最低项中. 即，p_i和q_i除去$+1$或-1外没有公因子.

证明 由

$$p_i q_{i-1}-p_{i-1}q_i=(-1)^i,$$

可知，同时除尽p_i和q_i的数一定是$(-1)^i$的因数. 但是$(-1)^i$的因数只有$+1$和-1；因此数$+1$和-1是p_i和q_i仅有的因数. 在讨论欧几里得计算法时，我们曾用符号$d=(a,b)$来表示d是a和b的g.c.d.；现在我们写成$(p_i,q_i)=1$，因为1是同时除尽p_i和q_i的最大的数.

习 题 4

1．利用连分数$[3,1,2,2,1,5]$通过依次计算$p_0q_{-1}-p_{-1}q_0, p_1q_0-p_0q_1, p_2q_1,-p_1q_2$等来检验定理1.4.同时验证每一个渐近分数$p_1/q_1, p_2/q_2,\cdots,p_6/q_6$都是其最低项中的有理分数.

2．利用下面的提示，给出定理1.4的另一证明. 注意

$$
\begin{aligned}
& p_i q_{i-1} - p_{i-1} q_i \\
&\qquad = (a_i p_{i-1} + p_{i-2}) q_{i-1} - p_{i-1}(a_i q_{i-1} + q_{i-2}) \\
&\qquad = (-1)(p_{i-1} q_{i-2} - p_{i-2} q_{i-1}).
\end{aligned}
$$

只要用$i-1$代替i，表达式$p_{i-1}q_{i-2}-p_{i-2}q_{i-1}$就与表达式$p_iq_{i-1}-p_{i-1}q_i$一样．因此，这种从$i$到$i-1$的还原可以重复进行，于是

$$p_{i-1}q_{i-2}-p_{i-2}q_{i-1}=(-1)(p_{i-2}q_{i-3}-p_{i-3}q_{i-2}).$$

i步之后，我们得出最后的结果，

$$
\begin{aligned}
p_iq_{i-1}-p_{i-1}q_i &= (-1)^i(p_0q_{-1}-p_{-1}q_0) \\
&= (-1)^i\cdot 1=(-1)^i.
\end{aligned}
$$

1.7 一些历史说明

在结束本章的时候，我们对连分数理论的历史作些简要说明。连分数思想的最早期的线索是不甚了然的，因为许多古代的数学结果只是对这种分数的一种启发，当时并不存在这一课题的系统发展。

我们已经看到了，求两个数的g.c.d.的欧几里得算法在本质上就是把一个分数化为连分数的方法．这或许是连分数的概念发展的最早的（公元300年前）重要一步．

连分数的文献出现在印度数学家阿利亚伯哈塔（Āryabhata）的著作中，他大约死于公元550年．他的著作中包含了最早用连分数去求线性不定方程（见下章）的一般解的一个尝试。连分数的一般概念的进一步线索是偶然地在阿拉伯和希腊的著作中发现的。

大多数权威认为连分数的近代理论开始于R．蓬贝利（Rafael Bombelli）（生于1530年），他是波伦亚人。他的

$a^2+b^2+2ab=(a+b)^2$

$x^2=a^2+b$

关于代数方面的论文（1572）包括一章平方根。例如，用现代符号来写，他指出

$$\sqrt{13} = 3 + \frac{4}{6} + \frac{4}{6} + \cdots.$$

这说明在本质上他已经知道，

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a} + \frac{b}{2a} + \cdots.$$

下一个考虑这些分数的作者是P. A. 卡塔尔迪（Pietro Antonio Cataldi）（1548—1626），也是波伦亚人。在一篇关于根的理论的论文中，他把$\sqrt{18}$表示为

$$4. + \frac{2}{8.} \ \& \ \frac{2}{8.} \ \& \ \frac{2}{8.}.$$

为了印刷上的方便，他又修改为

$$4. \& \frac{2}{8.} \ \& \ \frac{2}{8.} \ \& \ \frac{2}{8.},$$

这实际上就是现代的形式：

$$\sqrt{18} = 4 + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \frac{2}{8} + \cdots.$$

应当提到的第三个作者是D. 施温特（Daniel Schwenter）（1585—1636），他是法国阿尔特道夫大学教授，在不同的时间教过希伯来语，东方语和数学.在他的著作《实用几何》（Geometrica Practica）中通过求177和233的g.c.d.，发现了求177/233的近似值的方法。通过计算他定出了渐近分数79/104，19/25，3/4，1/1和0/1。

另一个使用连分数的卓越数学家是布龙克尔勋爵（Brouncker）(1620—1684），他是皇家协会的第一任会长。他把由英国数学家 J. 瓦里斯（John Wallis）(1655）所发现的有趣的无穷乘积

$$\frac{4}{\pi}=\frac{3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9\cdot9\cdots}{2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8\cdot10\cdots},$$

转化为连分数

$$\frac{4}{\pi}=1+\frac{1^2}{2}+\frac{3^2}{2}+\frac{5^2}{2}+\frac{7^2}{2}+\cdots,$$

但是他沒有给出这些分数的进一步应用。

在瓦里斯发表于1655年的无穷小算术（Arithmetica Infinitorum）一书中讨论了布龙克尔的连分数，叙述了一般连分数的渐近分数的许多初等性质，其中包括它们的构成法则。他第一次使用了“连分数”这一术语。

伟大的荷兰数学家、力学家、天文学家和物理学家 C. 惠更斯（Christiaan Huygens)(1629—1695）为了给出天文馆（1698）的齿轮的正确设计一个好的近似使用了连分数并把此写在了他的论文《自动描述天象仪》（Descriptio Automati Planetarii）中，这篇论文是在他去世后于 1698 年发表的。

由此开始，象欧拉（Euler）(1707—1783)，兰伯特（Lambert）(1728—1777)，拉格朗日（Lagrange)(1736—1813）等大数学家，以及其他许多数学家发展了象我们今天所知道的这些理论。欧拉的重要论文《连分数》(De Fractionibus Continius）(1737）为连分数的现代理论奠定了基础。

连分数的理论在今天的数学中起着重要的作用。在数论

和丢番图逼近的新发现中，它成为一个最重要的工具。连分数有一个重要的推广，称为连分数的解析理论，这是现在和今后的一个广阔的研究领域。在计算机的领域中，连分数常被用来绘出各种复杂函数的近似，并且一旦为电子计算机编码之后就迅速地给出对于科学和应用数学有价值的数值结果①。

---

① 见F. B. Hildebrand, Introduction to Numerical Analysis, New York, McGram-Hill Book Company, 1956 (Chapter 9).

第二章　丢番图方程式

2.1　引言

许多难题、谜和智力游戏都归结为解一个其解必须是整数的数学方程。这里有一个典型的例子：一个农民买了一些乳牛，每头 80 元，还买了一些猪，每头 50 元，他总共用去810元。他买了多少头乳牛和多少头猪？

若用x表示乳牛的数目，用y表示猪的数目，那么我们有方程式

$$80x+50y=810, \qquad (2.1)$$

这个方程式等价于

$$8x+5y=81. \qquad (2.2)$$

如果在方程式(2.2)中对x的值不作任何限制，则我们能给x以任何值。譬如说$x=1/2$，然后对于y，解所得到的方程式

$$4+5y=81,$$

得出$y=77/5$.在这种意义下，(2.2)是一个不定方程式。这就是说，对于我们选定的x的任何值总能找到y的一个对应值。

但是，如果我们限定 x 和 y 的值是整数，好象农民真的去买（因为或许他对于半个乳牛不感兴趣），那么我们的例子就属于一类范围很广的问题：研究不定方程式的整数解 x 和 y。具有整数解（有时是有理数解）的不定方程式通常叫做丢番图方程式，以纪念大约生于公元三世纪的希腊数学家丢番图，他写了一本关于这种方程的书。需要指出，在我们

上面的问题中，还有进一步的限制，x和y不仅是整数，而且必须是正数。

方程式(2.2)，因此还有方程式(2.1)可以多种方式求解。事实上，这种方程式不妨这样解：用尝试与纠错的办法，或用猜测的办法。例如，如果我们把方程式(2.2)写成形式

$$81-8x=5y,$$

那么，我们只需要寻求x的正整数值，使得$81-8x$是5的倍数。让x依次取$0,1,2,3,\cdots,10$等值，我们发现，只有$x=2$和$x=7$是使$81-8x$是5的非负倍数的值。计算如下：

$$x=2,\quad 81-8x=81-16=65=5\cdot 13=5y,$$
$$y=13;$$
$$x=7,\quad 81-8x=81-56=25=5\cdot 5=5y,$$
$$y=5.$$

因此问题的两个解是$(x,y)=(2,13)$和$(x,y)=(7,5)$。所以这个农民可买到2头乳牛和13头猪，或者7头乳牛和5头猪。

解丢番图方程式还有其他方法。我们将给出两种另外的方法：其中第一个方法是欧拉在他的通俗教本《代数》(Algebra)一书中广泛使用的，此书在1770年出版；第二种方法将指出如何用连分数解丢番图方程式。

2.2 欧拉所广泛使用的方法①

让我们仍考虑方程式

$$8x+5y=81. \qquad (2.3)$$

① 另外的例子见 O. Ore〔10〕

因为y的系数比较小，所以对y解方程式，得

$$y=\frac{81-8x}{5}. \tag{2.4}$$

81和 8 都包含 5 的倍数，即

$$81=5\cdot16+1 \quad 和 \quad 8=5\cdot1+3.$$

因此，由(2.4)我们有

$$y=\frac{(5\cdot16+1)-(5\cdot1+3)x}{5}$$

$$=(16-x)+\frac{1-3x}{5}$$

$$=(16-x)+t, \tag{2.5}$$

这里

$$t=\frac{1-3x}{5}$$

或

$$3x+5t=1. \tag{2.6}$$

因为x和y一定是整数，所以由方程式(2.5)可以断定t一定是整数。因此我们的任务是求满足方程式(2.6)的整数x和t。这就是欧拉方法的核心所在。即，把求已给方程式的整数解转化为求另一个含有较小系数的类似方程式的整数解。

正象我们把(2.3)化为(2.6)一样，现在把方程式(2.6)化为一个更简单的方程式，对于x解(2.6)，这时系数更小，我们得出

$$x=\frac{1-5t}{3}=\frac{1-(2\cdot 3-1)t}{3}$$

$$=-2t+\frac{t+1}{3}=-2t+u, \qquad (2.7)$$

这里

$$u=\frac{t+1}{3},$$

或者

$$t=3u-1. \qquad (2.8)$$

仍然由于x和t必是整数，所以u也一定是整数。

反过来，若u是整数，则方程式(2.8)指出

$$t=3u-1$$

是整数；x也是整数，因为由(2.7)，

$$x=-2t+u=-2(3u-1)+u=2-5u.$$

把$x=2-5u$和$t=3u-1$代入(2.5)得到

$$y=16-2+5u+3u-1=8u+13,$$

所以y是一整数. 这就指出了(2.3)的一般整数解是

$$x=2-5u, \qquad y=13+8u, \qquad (2.9)$$

这里u是任一整数，正的，负的或零，即

$$u=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots.$$

直接代入(2.3)可以证实

$$8x+5y=8(2-5u)+5(13+8u)=81.$$

因此(2.3)有无穷多个解，对u的每一个整数值都有一个解。下页表中列出了一些解.

如果问题限定x和y取正值，那么必须解两个不等式. 例

u	-2	-1	0	1	2	3
x	12	7	2	-3	-8	-13
y	-3	5	13	21	29	37

如，若在(2.9)中的x和y都是正的，则我们必须对u解两个不等式

$$2-5u>0,\quad 13+8u>0.$$

由此，u是整数且满足不等式

$$u<\frac{2}{5}\quad 和\quad u>-\frac{13}{8}.$$

由图1一眼可看出，u的可能整数值只有0和-1。依次把$u=0$和$u=-1$代入(2.9)得到$(x,y)=(2,13)$和$(x,y)=(7,5)$。这就是农民问题的原来的答案。

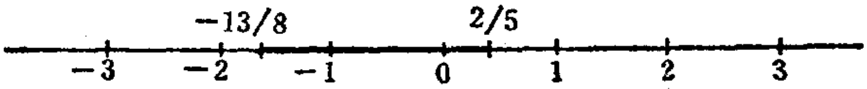

图 1

回过头来，再看看方程式(2.3)的求解过程，我们可以提出一些问题。例如，为什么我们解y，而不解x，就是因为y的系数简单吗？如果我们先对x求解，会更简单吗？在(2.4)下边的第二行，我们用$5\cdot 1+3$代替8。为什么不用$5\cdot 2-2$来代替8呢？在解方程式(2.3)的时候，作者心中的确没有打算介绍最简单的求解过程。我们留给读者去实验，去设

法以最少的步骤求得一般解。

习 题 5

1. 用欧拉法去解下面的线性丢番图方程式。如果有解的话，在每种情况下列出正整数解。

(a) $15x+47y=2$; (b) $31x+7y=1$;

(c) $15x+47y=4$; (d) $13x+21y=295$.

2. 不定方程式 $6x+15y=17$ 有整数解吗？注意这个方程式的左边可以被 3 除尽。右边怎么样？如果我们用欧拉方法去求解将会怎样？

3. 回到方程式(2.9)对于u的指定值填出下表：

u	-3	-2	-1	0	1	2	3	4
x								
y								

在普通的坐标纸上，画出点(x,y)，并用直线把它们连起来。利用这个图去找出方程式$8x+5y=81$的正解来。

4. 某人买马和乳牛共花了2370元。如果一匹马值 37 元，一头乳牛值22元，那么他买了几匹马，几头牛？

5. 证明，方程式$17x-15y=5$有无穷多个正整数解。

6. 求整数u和v，使得$u+v=84$，并且u可被 9 除尽，而v可被13除尽。

提示 设$u=9x$，$v=13y$。

7．求一数N，当它被20除时余2，被30除时余12。

提示　找整数x和y，使所求的数$N=20x+2=30y+12$。因此，解方程式$20x-30y=10$。

2.3　不定方程式$ax-by=\pm1$

现在我们就来说明如何用连分数去解线性不定方程式$ax+by=c$，这里a,b和c是已知整数，而x和y是未知整数。

我们的求解是逐步达到的，通过一些容易的阶梯最后达到熟练解任何可解的形式如$ax+by=c$的方程式的目的.在开始我们限定x和y的系数是不同号的，而且它们沒有比1大的公因子。这样一来我们首先学会解方程式

$$ax-by=1,\qquad (a,b)=1,\qquad\qquad (2.10)$$

这里a和b是正整数.〔方程式$-ax+by=1$，$(a,b)=1$，是同一类型的，只不过交换了x和y的地位而已。〕整数a和b沒有比1大的公因数；因为如果整数d同时除尽a和b，则它一定也能除尽方程右边的1，因此只能有$d=1$。换言之，a和b一定是互素的，或$d=(a,b)=1$。现在我们叙述并证明

定理2.1　方程式$ax-by=1$有无穷多个整数解(x,y)，其中a和b是互素的正整数.

我们首先把a/b化为有限简单连分数

$$\frac{a}{b}=[a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},\ a_n],\qquad\qquad (2.11)$$

并算出渐近分数$c_1,c_2,\cdots,c_{n-1},c_n$。最后两个渐近分数

$$c_{n-1}=\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}},\qquad c_n=\frac{p_n}{q_n}=\frac{a}{b}$$

是求解的关键，因为它们满足定理1.4中的关系式，也就是

$$p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^n,$$

因为$p_n = a$，$q_n = b$，这就给出

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = (-1)^n. \qquad (2.12)$$

如果 n 是偶数，也就是如果我们有偶数个部分商$a_1, a_2, \cdots, a_n$，则 $(-1)^n = 1$，(2.12)就变为

$$a q_{n-1} - b p_{n-1} = 1. \qquad (2.13)$$

同已知方程式

$$ax - by = 1$$

相比较，就知道这个方程式的一个解是

$$x_0 = q_{n-1}, \quad y_0 = p_{n-1}.$$

不过这是一个特解，而不是一般解。我们用记号 (x_0, y_0) 表示特解。

另一方面，如果 n 是奇数，$(-1)^n = -1$，那么我们可以修改连分数展式(2.11)，用

$$\frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}} \quad 代替 \quad \frac{1}{a_n}，若a_n > 1，$$

或用

$$\frac{1}{a_{n-1} + 1} \quad 代替 \quad \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}，若a_n = 1.$$

这样一来，若(2.11)有奇数个部分商，则它可化为

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n - 1, 1]，若a_n > 1，$$

或化为

$$[a_1, a_2, \cdots, a_{n-1} + 1]，若a_n = 1;$$

在这两种情况下，部分商的个数都是偶数。利用这些连分数，对这一情况或另一情况，我们来重新计算 p_{n-1}/q_{n-1} 以及 $p_n/q_n=a/b$，方程式(2.13)仍被满足。

一旦(2.10)的特解(x_0,y_0)找到了，求一般解就是一件容易的事情了。为此，设(x,y)是(2.10)的任一其它解。那么

$$ax-by=1$$

和

$$ax_0-by_0=1,$$

两式相减得

$$a(x-x_0)=b(y-y_0). \qquad (2.14)$$

这说明b能除尽方程式的左边。但是因为a和b是互素的，所以b不能除尽a；因此b一定除尽$x-x_0$。这就是说，$x-x_0$是b的整数倍，所以可以写出

$$x-x_0=tb \quad (t\text{是整数})$$

或

$$x=x_0+tb.$$

但是，如果这是对的，那么(2.14)就给出

$$a(tb)=b(y-y_0).$$

所以

$$y-y_0=at.$$

由此，$ax-by=1$的任何另外一解(x,y)具有下面的形式：

$$\begin{gathered}x=x_0+tb, \quad y=y_0+ta,\\ t=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots.\end{gathered} \qquad (2.15)$$

反过来，若(x_0,y_0)是$ax-by=1$的任一特解，而方程式(2.15)中的t取任何整数，那么数值(x,y)就满足已给方程式，因为

$$
\begin{aligned}
ax-by&=a(x_0+tb)-b(y_0+ta)\\
&=(ax_0-by_0)+tab-tab\\
&=ax_0-by_0=1.
\end{aligned}
$$

我们把由方程式(2.15)所给出的 x 和 y 的值叫做不定方程式 $ax-by=1$ 的一般解。

例1 求不定方程式

$$205x-93y=1$$

的整数解。这里整数 $205=5\cdot41$，而 $93=3\cdot31$，它们是互素的，所以方程式有解。

解 连分数

$$\frac{205}{93}=[2,4,1,8,2]$$

有奇数个部分商，但它可以换为等价表示

$$\frac{205}{93}=[2,4,1,8,1,1].$$

它具有偶数个部分商。其渐近分数计算如下：

i	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_i			2	4	1	8	1	1
p_i	0	1	2	9	11	97	108	205
q_i	1	0	1	4	5	44	49	93
c_i			$\frac{2}{1}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{97}{44}$	$\frac{108}{49}$	$\frac{205}{93}$

这里$n=6$，$p_{n-1}=p_5=108=y_0$，$q_{n-1}=q_5=49=x_0$，因此根据(2.15)，方程式$ax-by=205x-93y=1$的一般解是

$$x=x_0+tb=49+93t,\quad y=y_0+ta=108+205t,$$
$$t=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

令$t=1$，我们来作一次验算；这时$x=142$，$y=313$，而

$$205(142)-93(313)=29110-29109=1.$$

对一般情况的验证我们有

$$205(49+93t)-93(108+205t)=1,$$

因为含有 t 的项消掉了。

解方程

$$ax-by=-1,\quad (a,b)=1$$

的方法十分类似于解(2.10)用的方法。我们把 a/b 化为一个具有奇数个渐近分数的有限简单连分数。在这种情况下，(2.12)变为

$$aq_{n-1}-bp_{n-1}=(-1)^n=-1,$$

因为n是奇数。把这一方程式同

$$ax-by=-1$$

相比较，我们就知道

$$x_0=q_{n-1},\quad y_0=p_{n-1}$$

是给定方程式的**特解**。和前面一样，**一般解**是

$$x=x_0+tb,\quad y=y_0+ta,$$
$$t=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots.$$

例2 求方程式

$$205x-93y=-1$$

的整数解。

解 数205和93是互素的，因此给定方程式有整数解。

205/93的连分数展式是

$$\frac{205}{93}=[2,4,1,8,2],$$

并有奇数个部分商，所以 $(-1)^n=(-1)^5=-1$，正是所要求的。为了求出各渐近分式，我们列出下表：

i	-1	0	1	2	3	4	5
a_i			2	4	1	8	2
p_i	0	1	2	9	11	97	205
q_i	1	0	1	4	5	44	93
c_i			$\frac{2}{1}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{11}{5}$	$\frac{97}{44}$	$\frac{205}{93}$

上面的计算指出，$c_{n-1}=p_{n-1}/q_{n-1}=p_4/q_4=97/44$；因此所给方程式的一个特解是$x_0=q_4=44$和$y_0=p_4=97$。所以一般解是

$$x=x_0+tb=44+93t,$$

$$y=y_0+ta=97+205t,$$

$$t=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

令$t=-1$，作一次验算；这时$(x,y)=(-49,-108)$，

$$205(-49)-93(-108)=-10045+10044=-1.$$

有趣的是，一旦我们算出了方程式

$$ax-by=1$$

的特解$(x_0,y_0)=(q_{n-1},p_{n-1})$，我们就立刻能得到方程式

$$ax-by=-1 \tag{2.16}$$

的特解，把它记为(x_1, y_1)．方程式(2.16)的特解是

$$x_1 = b - x_0 = b - q_{n-1},$$
$$y_1 = a - y_0 = a - p_{n-1}. \qquad (2.17)$$

因为由(2.13)我们知道$aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1$，所以

$$\begin{aligned} ax_1 - by_1 &= a(b - q_{n-1}) - b(a - p_{n-1}) \\ &= ab - ab - (aq_{n-1} - bp_{n-1}) \\ &= (-1)(aq_{n-1} - bp_{n-1}) \\ &= (-1)(+1) = -1. \end{aligned}$$

于是，方程式$ax - by = -1$的一般解是

$$x = x_1 + tb, \quad y = y_1 + ta,$$
$$t = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots. \qquad (2.18)$$

这可通过直接代入而得到验证．

例 3 证明，如果我们已经解了例 1，那么我们就能解例2．即，已知$(x_0, y_0) = (49, 108)$是方程式$205x - 93y = +1$的特解，求解方程$205x - 93y = -1$．

解 利用方程式(2.17)我们求出

$$x_1 = b - x_0 = 93 - 49 = 44,$$
$$y_1 = a - y_0 = 205 - 108 = 97$$

是方程式$205x - 93y = -1$的特解．因此，根据(2.18)一般解是

$$x = 44 + 93t, \quad y = 97 + 205t,$$
$$t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \qquad (2.19)$$

这与例 2 所给出的解答是一致的．

只要我们知道了例 1 的特解，解例 2 还有另外的方法．下面的例子中将给以说明．

例 4 给出方程式$205x-93y=-1$的第三种解法.

解 因为$(x_0,y_0)=(49,108)$是方程式$205x-93y=+1$的特解，所以我们知道

$$205(49)-93(108)=+1.$$

用-1遍乘上式的两边，我们得到

$$205(-49)-93(-108)=-1;$$

因此$(x_1,y_1)=(-49,-108)$是$205x-93y=-1$的特解，从而一般解为

$$\left.\begin{aligned} x&=x_1+tb=-49+93t,\\ y&=y_1+tb=-108+205t,\\ t&=0,\pm1,\pm2,\cdots. \end{aligned}\right\} \tag{2.20}$$

注意，由方程式(2.19)和(2.20)产生出同样的x值和y值，但不是由同一个t值产生的。例如，在(2.19)中$t=2$给出了$(x,y)=(230,507)$，而在(2.20)中当$t=3$时产生同一组值。

习 题 6

1．求下列方程式的一般解。验证每一个答案。

(a) $13x-17y=1$; (b) $13x-17y=-1$;

(c) $65x-56y=1$; (d) $65x-56y=-1$;

(e) $56x-65y=1$.

2.4 $ax-by=c$的一般解，$(a,b)=1$

一旦我们学会了解不定方程式

$$ax-by=1, \tag{2.21}$$

式中a和b是彼此互素的正整数，解方程式

$$ax-by=c \tag{2.22}$$

就是一件简单的事情了，这里 c 是任一整数。因为，假定 (x_0,y_0) 是(2.21)的任一特解；那么

$$ax_0-by_0=1.$$

上式两边乘以 c，得出

$$a(cx_0)-b(cy_0)=c.$$

所以 (cx_0,cy_0) 是(2.22)的一个特解。从而(2.22)的一般解将是

$$x=cx_0+bt,\quad y=cy_0+at,\quad t=0,\pm1,\pm2,\cdots. \tag{2.23}$$

直接代入(2.22)容易得到验证。

例 1 解方程式

$$205x-93y=5.$$

解 由2.3节的例 1，我们知道 $(x_0,y_0)=(49,108)$ 是方程式 $205x-93y=1$ 的特解。也就是

$$205(49)-93(108)=1.$$

两边用 5 乘，我们得到

$$205(5\cdot49)-93(5\cdot108)=5.$$

所以 $(5x_0,5y_0)=(245,540)$ 是已给方程式的特解。根据(2.23)，一般解是

$$x=245+93t,\quad y=540+205t,$$
$$t=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

取 $t=1$ 来验证，这时 $(x,y)=(338,745)$，

$$205(338)-93(745)=69290-69285=5.$$

例 2 解方程式

$$205x-93y=-5.$$

解 我们记得，在本节的例 1 中

$$205(49)-93(108)=1.$$

用-5乘两边，得到

$$205(-5\cdot 49)-93(-5\cdot 108)=-5,$$

或

$$205(-245)-93(-540)=-5.$$

所以$(x_0,y_0)=(-245,-540)$是所给方程式的特解．于是，根据方程式(2.23)，一般解是

$$x=-245+93t,\qquad y=-540+205t,$$

$$t=0,\pm 1,\pm 2,\cdots.$$

为了验证它，取$t=2$，这时$(x,y)=(-59,\ -130)$，

$$205(-59)-93(-130)=-12095+12090=-5.$$

习 题 7

1．利用从(2.3)节末尾的习题中所得到的特解，去求下述的方程式的一般解，并验证每一个答案．

(a) $13x-17y=5$;　　　(b) $65x-56y=7$;

(c) $56x-65y=-3$.

2.5 $ax+by=c$的一般解，$(a,b)=1$

除去一些微小的更动以外，这一个方程式的讨论类似于$ax-by=c$的讨论。仍假定a和b是正整数。我们先求方程式

$$ax+by=1,\qquad (a,b)=1$$

的一个特解．为此把a/b展为具有偶数个部分商的简单连分数。从渐近分数表上求出p_{n-1}和q_{n-1}。于是与前面一样，

$$aq_{n-1}-bp_{n-1}=1.$$

这里的技巧在于，把给定方程式$ax+by=c$写成形式

$$ax+by=c\cdot 1=c(aq_{n-1}-bp_{n-1}).$$

重排各项，得到

$$a(cq_{n-1}-x)=b(y+cp_{n-1}). \tag{2.24}$$

这说明b可除尽方程式的左边；但是$(a,b)=1$，所以b不能除尽a。因此b能除尽$cq_{n-1}-x$，从而存在一个整数t，使得

$$cq_{n-1}-x=tb, \tag{2.25}$$

或

$$x=cq_{n-1}-tb. \tag{2.26}$$

把(2.25)代入(2.24)得到

$$a(tb)=b(y+cp_{n-1}).$$

对y求解，得到

$$y=at-cp_{n-1}. \tag{2.27}$$

反过来，对任何整数t，我们把(2.26)和(2.27)直接代入$ax+by$给出

$$\begin{aligned}ax+by&=a(cq_{n-1}-tb)+b(at-cp_{n-1})\\&=acq_{n-1}-tab+tab-bcp_{n-1}\\&=c(aq_{n-1}-bp_{n-1})=c\cdot 1=c,\end{aligned}$$

所以满足方程式$ax+by=c$。这样一来，方程式$ax+by=c$的一般解是

$$\begin{gathered}x=cq_{n-1}-tb,\qquad y=at-cp_{n-1},\\ t=0,\pm 1,\pm 2,\pm 3,\cdots.\end{gathered} \tag{2.28}$$

例1　解不定方程式

$$13x+17y=300.$$

解　我们找出$(x_0,y_0)=(4,3)$是方程式

$$13x-17x=1$$

的特解，即$13(4)-17(3)=1$。所以方程式可写成

$$13x+17y=300(13\cdot4-17\cdot3)$$

或

$$13x-13(4\cdot300)=-17y-17(3\cdot300).$$

这说明

$$13(x-1200)=-17(y+900), \tag{2.29}$$

所以17可以除尽$x-1200$，或

$$x=1200+17t.$$

在(2.29)中用$17t$代替$x-1200$，得到

$$y=-13t-900.$$

因此，所给方程式的一般解是

$$x=1200+17t, \quad y=-13t-900,$$

$$t=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots.$$

例 2 解不定方程式

$$13x+17y=-300.$$

解 在例1的求解过程中的第二个方程式现在变为

$$13x+17y=-300(13\cdot4-17\cdot3),$$

并且方程式(2.29)由

$$13(x+1200)=-17(y-900) \tag{2.29a}$$

所替代。由此可知，17除尽$x+1200$，或

$$x=-1200+17t.$$

用$17t$代替$x+1200$得到

$$y=900-13t.$$

因此所给方程式的一般解为

$$x=-1200+17t, \quad y=900-13t,$$

$$t=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots.$$

2.6 $Ax \pm By = \pm C$的一般解

任何形如

$$\pm Ax \pm By = C$$

的方程式，用 -1乘两边，都可化为下面两种形式

$$Ax + By = \pm C, \qquad Ax - By = \pm C \tag{2.30}$$

中的一种，这里A和B是正整数．例如，下面四个方程式

$$3x + 7y = 10, \qquad 3x - 7y = 10,$$

$$-3x - 7y = 10, \qquad -3x + 7y = 10$$

中，前两个已经是所要求的形式，而后面两个可分别化为

$$3x + 7y = -10 \quad 和 \quad 3x - 7y = -10.$$

不是所有形如(2.30)的方程式都是可解的．为了弄清这一点，设d是A和B的最大公约数．这时如果d不能除尽C，则方程式(2.30)中的任何一个都不存在x和y的整数解，因为每一个方程式的左边可被d除尽，而右边不能被d除尽．

另一方面，若d能除尽C，则我们可以用d除方程式(2.30)的两边，分别把它们化为我们刚才讨论过的那种形式的方程式，即

$$ax + by = c, \qquad ax - by = c, \tag{2.31}$$

这里a和b是互素的，并且我们知道如何解它们．反过来，方程式(2.31)的任何解自然是方程式(2.30)的解．

例1 解方程式

$$410x - 186y = 10.$$

解 因为$410 = 2 \cdot 5 \cdot 41$，$186 = 2 \cdot 3 \cdot 31$，所以410和186的最大公约数是$d = 2$。因为$d = 2$可除尽10，所以方程式可解。

用2除所给方程式，得

$$205x - 93y = 5,$$

现在式中的205和93是互素的。这是在2.4节例1里解过的方程式。$205x - 93y = 5$的一般解是

$$x = 245 + 93t, \qquad y = 540 + 205t.$$

把它代入$410x - 186y$，我们发现

$$\begin{aligned} &410(245 + 93t) - 186(540 + 205t) \\ &= 410 \cdot 245 - 186 \cdot 540 = 10. \end{aligned}$$

我们对线性丢番图方程式研究所得到的主要结果可综合如下：

小结 任何一个形如$Ax \pm By = \pm C$的方程式仅当A和B的最大公因数除尽C的时候才有整数解x, y。在这种情况下，用$d = (A, B)$除A, B和C，把所给方程式化为形式

$$ax + by = c, \tag{i}$$

或形式

$$ax - by = c. \tag{ii}$$

在这两个方程式中a和b都是彼此互素的正整数，而c是正的或负的整数。下一步是把a/b展为具有偶数个部分商的简单连分数，然后我们从渐近分数表上查出p_{n-1}和q_{n-1}。这时$aq_{n-1} - bp_{n-1} = 1$，从而(i)的一般解是

$$\begin{gathered} x = cq_{n-1} - tb, \qquad y = ta - cp_{n-1}, \\ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \end{gathered} \tag{iii}$$

类似地，(ii)的一般解是

$$\begin{gathered} x = cq_{n-1} + tb, \qquad y = cp_{n-1} + ta, \\ t = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots. \end{gathered} \tag{iv}$$

解(iii)和(iv)分别表示了相应于情况(i)和(ii)的方程式

$Ax\pm By=\pm C$的一般解。

习 题 8

1．下面6个方程式中有两个沒有整数解。找出有整数解的其它几个方程式的一般解来。

(a) $183x+174y=9$；　　(b) $183x-174y=9$；

(c) $77x+63y=40$；　　(d) $34x-49y=5$；

(e) $34x+49y=5$；　　(f) $56x+20y=11$。

2．把68/77表示为两个分数的和，它们的分母分别是7和11。

提示　求整数x和y，使得$68/77=x/7+y/11$。

3．两个正整数a和b的和是100。若a被7除余5，b被9除也余5，试求a和b。

提示　设$a=7x+5$，$b=9y+5$，然后利用$a+b=100$。

4．求$13x+17y=300$的正整数解(x,y)。

2.7 水手、椰子和猴子

下面的问题相当古老，以这一或那一形式不断地出现于不同的时代。

五个水手被抛弃在一个岛上．为了提供食物他们采集了所能找到的一切椰子．在夜里一个水手醒了，决定拿出他自己的一份椰子．他把椰子分成了相等的五堆，还发现剩下一个，所以他就把这个额外的果子扔给了猴子．然后他把他的一份藏起来就回去睡了．不一会儿第二个水手醒了，并产生了和第一个水手一样的念头．他把剩下的椰子分成相等的五堆，也发现剩下一个，就扔给了猴子．然后他藏起他自己的

一份．剩下的三个水手也依次做了同样的事情，每一个人都扔了一个椰子给猴子．第二天早晨所有的水手都装得无事一样，把剩下的果子分成了相等的五堆，但这次一个果子也没有多出来．问题是求原来这堆果子的最小数．

为了求解这一问题，设椰子原来的数目是x．第一个水手取走了$\frac{1}{5}(x-1)$个椰子，留下$\frac{4}{5}(x-1)$个．类似地，第二个水手取走了

$$\frac{1}{5}\left[\frac{4}{5}(x-1)-1\right]=\frac{4x-9}{25}$$

个椰子，留下来的个数是4倍于这个数的数目，即

$$\frac{16x-36}{25}.$$

类似地，我们求出第三个、第四个、第五个水手留下的椰子数目，它们分别是

$$\frac{64x-244}{125},\quad \frac{256x-1476}{625},\quad \frac{1024x-8404}{3125}.$$

现在，最后一堆的果子数一定是5的倍数，因为可把它公平的分成5堆而不剩果子．因此

$$\frac{1024x-8404}{3125}=5y,$$

这里y是某一个整数，两边用3125乘，我们得到不定方程式

$$1024x-15625y=8404. \tag{2.32}$$

分解成素因数我们得到$1024=2^{10}$和$15625=5^6$；因此这两个数是互素的，从而方程式(2.32)有整数解。我们先找方程式由

$$1024x-15625y=1 \tag{2.33}$$

的一个特解(x_1, y_1)．为此，算出连分数

$$\frac{1024}{15625}=[0,15,3,1,6,2,1,3,2,1]$$

的诸渐近分数：

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
a			0	15	3	1	6	2	1	3	2	1
p_i	0	1	0	1	3	4	27	58	85	313	711	1024
q_i	1	0	1	15	46	61	412	885	1297	4776	10849	15625
c_i											$\frac{711}{10849}$	

由渐近分数c_9得出方程式(2.33)的特解$x_1=q_9=10849$．$y_1=p_9=711$． 因此 $x_0=8404x_1=91174996$， $y_0=8404y_1=5975244$是方程式(2.32)的一组特解．一般解是

$$\left.\begin{aligned}&x=91174996+15625t,\\&y=5975244+1024t,\\&t=0,\pm1,\pm2,\cdots.\end{aligned}\right\}\qquad(2.34)$$

因为x和y都必须是正的，所以我们来求给出x的最小正值并使y取正值的t．由(2.34)我们发现t必须是满足两个不等式

$$t>-\frac{91174996}{15625}=-5835.2\cdots,$$

$$t > -\frac{5975244}{1024} = -5835.1\cdots$$

的一个整数. 因此要求的值是$t=-5835$. 把t的这个值代入(2.34), 我们最后得到

$$x = 91174996 - 91171875 = 3121,$$

$$y = 5975244 - 5975040 = 204,$$

这就意味着椰子的原来数目是3121, 在最后一次分配中每个水手得到204个.

对这一问题的有趣讨论以及与之相关的问题见《数学游戏》(Mathematical Games) 一文, 作者是 M. 加德纳 (Martin Gardner), 发表在一九五八年四月号《科学美国人》(Scientific American, April, 1958)上.

第三章　无理数的展式

3.1　引言

到现在为止，我们的讨论仅限于有理数的展开式．我们证明了：一个有理数可以展为有限简单连分数；反过来，每一个有限简单连分数表示一个有理数．

这一章处理无理数的简单连分数展开式，并将看到这样的分数可永远展下去而没有头．

无理数是这样的数，它不能表示为两个整数的比．数

$$\sqrt{2},\ \sqrt{3},\quad 1\pm\sqrt{2},\ \frac{3\pm\sqrt{7}}{5}$$

都是无理数．任何形如

$$\frac{P\pm\sqrt{D}}{Q}$$

的数都是无理数，其中P,D,Q是整数，D是一个非完全平方的正整数．这种形式的数叫做二次无理数或二次不尽根，因为它是二次方程式

$$Q^2x^2-2PQx+(P^2-D)=0$$

的根．我们的讨论将只限于二次无理数的展式．

存在不是二次无理数的无理数．无理数$\pi=3.14159\cdots$就是一个例子．无理数$\sqrt{2}$是代数方程式$x^2-2=0$的解，因此称它为"代数数"．所谓代数数就是这样的数x，它满足一个代数方程式，即形如

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n = 0$$

的方程式，这里$a_0, a_1, \cdots$是不全为0的整数。一个数，它不是代数数，就称为超越数。可以证明，π是超越数，但证明是不容易的①。数e也是超越数。把超越数展为连分数是相当困难的；利用这些数的十进位小数的近似值，例如$\pi = 3.14159\cdots$和$e = 2.71828\cdots$，我们可以计算它们的连分数展式的前若干项。获得π和e的展式的方法超出了本书的范围，π和e的展式在附录2中给出。

希望学习这两类无理数——代数数和超越数——并深入研究这两类数的读者請看"新数学丛书"（NML）中的第一本书I．尼溫著的《数：有理数和无理数》一书。

3.2 预备性的例子

展开无理数的步骤基本上与用于有理数的办法相同．设x是一个给定的无理数。算出a_1，它是比x小的最大整数，从而x可表示为形式

$$x = a_1 + \frac{1}{x_2}, \qquad 0 < \frac{1}{x_2} < 1,$$

这里数

$$x_2 = \frac{1}{x - a_1} > 1$$

是无理数；因为从一个无理数中减去一个整数所得的数以及它的倒数都是无理数。

继续算a_2，它是比x_2小的最大整数，从而x_2可表示为形

① 见I. Niven[8]．

式

$$x_2=a_2+\frac{1}{x_3},\quad 0<\frac{1}{x_3}<1,\ a_2\geqslant 1,$$

这里仍有数

$$x_3=\frac{1}{x_2-a_2}>1$$

是无理数。

这种计算可以无限次地重复下去，产生一系列方程式

$$\left.\begin{array}{lll}
x=a_1+\dfrac{1}{x_2}, & x_2>1, & \\
x_2=a_2+\dfrac{1}{x_3}, & x_3>1, & a_2\geqslant 1,\\
x_3=a_3+\dfrac{1}{x_4}, & x_4>1, & a_3\geqslant 1,\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots,\\
x_n=a_n+\dfrac{1}{x_{n+1}}, & x_{n+1}>1, & a_n\geqslant 1,\\
\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots,
\end{array}\right\}\qquad (3.1)$$

这里$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$都是整数，而数 $x_1,x_2,x_3,\cdots$都是无理数。这个过程是沒有穷尽的，除非出现某个整数a_n等于x_n，但这是不可能的，因为每个x_i都是无理数。

把(3.1)中的第2个方程式的x_2代入第1个方程式，然后再把x_3代入所得的结果，并不断继续这一过程，就得到了所需要的无限简单连分数

$$x=a_1+\frac{1}{x_2}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{x_3}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{x_4}}}=\cdots,$$

或

$$x=[a_1,a_2,a_3,a_4,\cdots],$$

式中 3 个点，表示过程无限继续下去。

在对无限简单连分数的某些更“理论”方面的内容讨论之前，为了帮助理解展开的步骤先举一两个例子。

例 1 把$\sqrt{2}$展为无限简单连分数。

解 小于$\sqrt{2}=1.414\cdots$的最大整数是$a_1=1$，所以

$$\sqrt{2}=a_1+\frac{1}{x_2}=1+\frac{1}{x_2}.$$

对于x_2解这一方程式，我们得到

$$x_2=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1.$$

因此

$$\sqrt{2}=a_1+\frac{1}{x_2}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}.$$

小于$x_2=\sqrt{2}+1=2.414\cdots$的最大整数是$a_2=2$，所以

$$x_2=a_2+\frac{1}{x_3}=2+\frac{1}{x_3},$$

其中

$$x_3=\frac{1}{x_2-2}=\frac{1}{(\sqrt{2}+1)-2}=\frac{1}{\sqrt{2}-1}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}-1}\cdot\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}+1>1.$$

在这一步我们知道

$$\sqrt{2}=a_1+\frac{1}{x_2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x_3}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\sqrt{2}+1}}.$$

因为$x_3=\sqrt{2}+1$与$x_2=\sqrt{2}+1$一样，所以对$x_4,x_5,\cdots$的计算也会得出同样的结果，即$\sqrt{2}+1$。这样一来后面的部分商也都等于2，从而$\sqrt{2}$的无穷展开式是

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots=[1,2,2,2,\cdots]=[1,\overline{2}].$$

上式右边2上面的一横表示数2无限次重复。

即刻出现了一些问题，例如，能否证明无限连分数$[1,2,2,\cdots]=[1,\overline{2}]$就表示无理数$\sqrt{2}$呢？当然还有比这个一眼就看得出的问题更多的问题，这个问题将是本章所要讨论的较困难的问题之一。对于这个问题，我们可以给出一个形式的回答。所谓形式的回答，粗糙地说，是指我们可以通过某些步骤来做到，但不必证明每一步的合理性。有了这一理解，我们就可写出

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}},$$

或

$$x-1=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\ddots}}}.$$

因此

$$x = 1 + (x - 1),$$

或者 1 = 1，关于x它没有告诉我们任何东西。但是，利用同样的思想，我们可以写出

$$x = 1 + \cfrac{1}{2 + \left(\cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}\right)}$$

$$= 1 + \frac{1}{2 + (x - 1)} = 1 + \frac{1}{x + 1},$$

由此我们看到

$$x - 1 = \frac{1}{x + 1},$$

所以

$$(x - 1)(x + 1) = 1, \qquad 或 \quad x^2 = 2.$$

这样一来，

$$x = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots = \sqrt{2}.$$

一些类似的补充例子是：

$$\sqrt{3} = [1, 1, 2, 1, 2, 1, 2, \cdots] = [1, \overline{1, 2}],$$

$$\sqrt{15} = [3, 1, 6, 1, 6, \cdots] = [3, \overline{1, 6}],$$

$$\sqrt{31} = [5, \overline{1, 1, 3, 5, 3, 1, 1, 10}].$$

这些例子中每一个在横线下面的数，形成了展式的循环节，数$\sqrt{31}$有一个十分长的循环节。这些例子是对首先由拉格朗日在1770年证明的一个定理的说明。这个定理的大意是：任何一个二次无理数的连分数展式都在某一点后是循环的。这个定理将在第四章证明。

例2 求

$$x=\frac{25+\sqrt{53}}{22}$$

的无穷连分式展式。

解 我们象例1一样地去做。因为$\sqrt{53}$在7和8之间，所以小于x的最大整数是$a_1=1$。这时

$$x=\frac{25+\sqrt{53}}{22}=a_1+\frac{1}{x_2}=1+\frac{1}{x_2},$$

这里

$$x_2=\frac{1}{x-1}=\frac{22}{3+\sqrt{53}}\cdot\frac{3-\sqrt{53}}{3-\sqrt{53}}=\frac{\sqrt{53}-3}{2}>1.$$

小于x_2的最大整数是$a_2=2$，所以

$$x_2=a_2+\frac{1}{x_3}=2+\frac{1}{x_3},$$

其中

$$x_3=\frac{1}{x_2-2}=\frac{2}{\sqrt{53}-7}=\frac{\sqrt{53}+7}{2}.$$

小于x_3的最大整数是$a_3=7$，所以

$$x_3=a_3+\frac{1}{x_4}=7+\frac{1}{x_4},$$

这里

$$x_4=\frac{1}{x_3-7}=\frac{2}{\sqrt{53}-7}=\frac{\sqrt{53}+7}{2}.$$

于是$x_4=x_3$，所以后面的计算将一再重复。因此，所求的展式是

$$x=1+\frac{1}{x_2}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x_3}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{x_4}}}=\cdots.$$

最后我们得到

$$x=\frac{25+\sqrt{53}}{22}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{7}+\cdots$$

$$=[1,2,7,7,\cdots]=[1,2,\overline{7}].$$

现在让我们把这一过程倒转过来，我们从无穷展式开始去试着找x原来的值。用

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}$$

去代替

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\ddots}}}}$$

是方便的，其中

$$y=7+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{7+\ddots}}=7+\frac{1}{y}.$$

于是y满足方程式

$$y^2-7y-1=0.$$

对于y解此方程式（利用二次方程式的求根公式），并注意到$y>0$，我们求得

$$y=\frac{7+\sqrt{53}}{2}.$$

因此

$$x=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{y}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{2}{7+\sqrt{53}}}.$$

把右边化简，我们得到

$$x=\frac{23+3\sqrt{53}}{16+2\sqrt{53}}\cdot\frac{16-2\sqrt{53}}{16-2\sqrt{53}}=\frac{25+\sqrt{53}}{22}.$$

这就是x原来的值。

3.3 渐近分数

无限连分数

$$x=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots=[a_1,a_2,a_3,\cdots]$$

的渐近分数的计算恰与以前一样。渐近分数 $c_n=p_n/q_n$ 用同一公式

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},$$
$$q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}$$

来计算，公式对一切$n\geqslant1$成立。与以前一样，这里我们定义$p_{-1}=0$，$p_0=1$，$q_{-1}=1$和$q_0=0$。计算办法也一样。

例1 $\pi=3.14159\cdots$的无穷连分式前几项如下：

$$\pi=[3,7,15,1,292,1,1,\cdots].$$

试算前5个渐近分数。这些渐近分数给出了π的越来越好的近似值。

解 渐近分数表如下：

i	-1	0	1	2	3	4	5
a_i			3	7	15	1	292
p_i	0	1	3	22	333	355	103993
q_i	1	0	1	7	106	113	33102
c_i			$\frac{3}{1}$	$\frac{22}{7}$	$\frac{333}{106}$	$\frac{355}{113}$	$\frac{103993}{33102}$

说到这里指出对π最早的近似是有趣的。这是在莱因德（Rhind）草片文书中查到的，文献保留在大英博物馆里，时间大约是公元前1700年。用十进位小数表示这个近似值是3.1604。

巴比伦人用近似值$\pi=3$，这不及上面提到的埃及人用的值精确。阿基米德（公元前225年）指出，任何一个圆的周长和半径的比，比$3\frac{1}{7}=\frac{22}{7}=3.14285\cdots$小，而比$3\frac{10}{71}=3.14084\cdots$大；这个结果是十分惊人的，因为他处理这个问题的工具是很有限的。近似值

$$\frac{355}{113}=3.141592\cdots$$

到第六位小数都是正确的。用连分数给出无理数的有理逼近的更多的内容在第五章继续讨论。

习题 9

1．检验下面的展式，并计算前5个渐近分数：

(a) $\sqrt{6}=[2,2,4,2,4,\cdots]=[2,\overline{2,4}]$；

(b) $\sqrt{7} = [2, \overline{1, 1, 1, 4}]$;

(c) $\sqrt{43} = [6, \overline{1, 1, 3, 1, 5, 1, 3, 1, 1, 12}]$;

(d) $\dfrac{24 - \sqrt{15}}{17} = [1, 5, \overline{2, 3}]$;

(e) $\dfrac{\sqrt{30} - 2}{13} = [0, 3, \overline{1, 2, 1, 4}]$.

2．象3.2节例2的后一半一样，验证下面的连分数表示写在右边的无理数。

(a) $[2, \overline{2, 4}] = \sqrt{6}$； (b) $[5, \overline{1, 1, 1, 10}] = \sqrt{32}$.

3．讨论题　下述问题是一个经典的直尺圆规问题．只用圆规和直尺去构造一个其面积等于半径为1的圆的面积的正方形．半径为1的圆的面积为$A = \pi r^2 = \pi$，所以具有同样面积的正方形其边长为$\sqrt{\pi}$．要是能构造出长度π，则按下述办法就能构造出长度$\sqrt{\pi}$：设$AB = \pi$，$BC = 1$，以O为中心作一个半圆通过A和C，见图2．引BD垂直于AC．那么，$x = BD = \sqrt{\pi}$．要证明这一点只要利用三角形ABD与CBD相似就可以了．

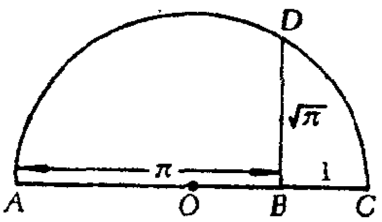

图　2

可以证明借助直尺和圆规不能构造出长度为π的线段来．但是有许多有趣的近似构造法．例如，在1849年J．d．盖尔德（Jakob de Gelder）利用了在3.3节末讨论的渐近分数

$(355/113)=3.141592\cdots$，给出了下面的构造法．因为

$$\frac{355}{113}=3+\frac{4^2}{7^2+8^2},$$

所以π的近似值容易用下面的办法构造出来：设O是半径为$OE=1$的圆的中心．设AB是垂直于OE的直径．设$OD=8/7$，$AF=1/2$；见图3．引FG平行于EO，FH平行于DG．接着证明$AH=4^2/(7^2+8^2)$．剩下的问题只是构造长度为$3+AH$的线段了．

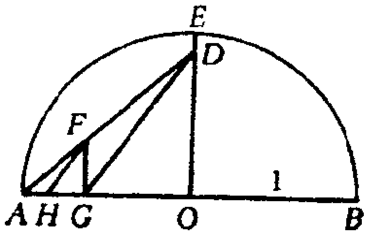

图　3

4．证明 $(\sqrt{5}+1)/2=[1,1,1,1,\cdots]$，并验证其渐近分数是

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \cdots;$$

其分子和分母都是由斐波那奇级数

$$1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 13,\ 21,\ 34,\ 55,\ \cdots$$

构成的．这些数中的每一个都是前两数的和．对这些有趣的数的讨论在3.10节给出．

5．斐波那奇数$F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3,\cdots$可由下面的一般公式代入$n=1,2,3,\cdots$而得出：

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right].$$

把$n=1,2,3,4$代入这个公式去验证它。

6．想象某一树的每一分枝按下述方式生长：在它生长的第一年不出现新的分枝；在第二年它长出一个新枝，然后"休息"一年，然后再长一枝，这样继续下去．画出这样一株树生长五年后的草图，并证明，如果我们把它的树干和树杈都作为分枝，那么在这棵树生长的第一年中它只有一个分枝（树干），在第二年中有两个分枝．一般地，分枝的数目是斐波那奇数1，2，3，5，8，…．

7．外索夫（Wythoff）游戏（外索夫1907年发明）．两个玩者A和B交替地从两堆签子中按照下面的规则取出签子：轮到谁，谁就可以从第一堆或第二堆取出任意个数的签子．如果他希望从两堆中都取，那么他必须从每堆中取出数量相等的签子．在桌子上取出最后一根签子的玩者算胜利．

为了使玩者A获胜，在他取过之后，下面的组合是安全的（对A安全）：

$$(1,2),\quad (3,5),\quad (4,7),\quad (6,10)$$
$$(8,13),\quad (9,15),\quad (11,18),\quad (12,20),\cdots.$$

这时不管下一步B怎样取，他将剩下一个不安全的组合（对B不安全），而A总能返回到安全的组合（对A安全）．所以除非A犯了错误，否则他一定在此游戏中获胜．

可以证明，由

$$(\{n\tau\},\{n\tau^2\}),\quad n=1,2,3,\cdots$$

组成的第n对数形成一个安全的组合，这里$\tau=(\sqrt{5}+1)/2$，$\{x\}$代表小于或等于x的最大整数．对$n=1,2,3$验证此论断．

关于这个游戏以及与它相关的问题更详细的讨论见H. S. M. 考克塞特（Coxeter）的论文①。

8. 只用直尺和圆规在线段AB上定出一点G，使$AG=\tau(GB)$，其中$\tau=(1+\sqrt{5})/2$。

9. 利用第8题的结果去说明，如何只用直尺和圆规做出正五边形。

3.4 关于渐近分数的补充定理

无限简单连分数

$$[a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$$

的渐近分数$c_n=p_n/q_n$的分子p_n和分母q_n满足基本递推关系

$$p_n q_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n, \quad n\geqslant 0. \qquad (3.2)$$

这是在定理1.4中所证明的，证明与连分数是有限的还是无限的无关。

这个方程的两边除以$q_n q_{n-1}$，得

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\frac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}, \quad n\geqslant 2. \qquad (3.3)$$

因为$c_n=p_n/q_n$，方程(3.3)可叙述为：

定理3.1 $c_n-c_{n-1}=\dfrac{(-1)^n}{q_n q_{n-1}}, \quad n\geqslant 2.$

类似地可证明

定理3.2 $c_n-c_{n-2}=\dfrac{a_n(-1)^{n-1}}{q_n q_{n-1}}, \quad n\geqslant 3.$

---

① *The Golden Section, Phyllotaxis, and Wythoff's Game, Scripta Mathematica,* Vol. 19(1953), pp. 135—143.

证明 显然

$$c_n-c_{n-2}=\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n}{q_nq_{n-2}}.$$

在右边的分子上，代入

$$p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2},\quad q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2},$$

得出

$$\begin{aligned}&p_nq_{n-2}-p_{n-2}q_n\\&\quad=(a_np_{n-1}+p_{n-2})q_{n-2}-p_{n-2}(a_nq_{n-1}+q_{n-2})\\&\quad=a_n(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})=a_n(-1)^{n-1},\end{aligned}$$

其中最后一个方程是由方程(3.2)把n换成$n-1$而得到的。这就证明了定理3.2.

这些定理给了我们关于渐近分数c_n当n增大时如何改变的重要信息。如果在定理3.1中设$n=2$，再设$n=3$，并记着q_n是正的，那么我们就分别得出

$$c_2-c_1=\frac{1}{q_2q_1}>0,\quad c_3-c_2=\frac{-1}{q_3q_2}<0.$$

这两个不等式指出

$$c_1<c_2\quad 和\quad c_3<c_2.\tag{3.4}$$

另一方面，在定理3.2中设$n=3$，得

$$c_3-c_1=\frac{a_3(-1)^2}{q_3q_1}=\frac{a_3}{q_3q_1}>0,$$

因为q_3, q_1, a_3都是正数。因此$c_1<c_3$，把这个结果和(3.4)的结果结合起来就证明了

$$c_1<c_3<c_2.$$

类似地，在定理3.1中先用$n=3$，再用$n=4$，接着在定理3.2中用$n=4$，我们就有

$$c_3<c_4<c_2.$$

用这个办法一步一步地推进，我们得出下面的不等式

$$c_3<c_5<c_4,$$
$$c_5<c_6<c_4,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.$$

把这些不等式结合起来，就得到一个基本结果

$$c_1<c_3<c_5<\cdots<c_{2n+1}<\cdots<c_{2n}<\cdots<c_6<c_4<c_2.$$

我们把它叙述成一个定理：

定理3.3 一个无限简单连分数的奇渐近分数c_{2n+1}形成一个递增序列，并且每一个奇渐近分数比任何一个偶渐近分数小。此外，每一个渐近分数c_n（$n\geqslant 3$），位于前两个渐近分数之间。

习 题 10

1．利用$\sqrt{2}$的渐近分数给出定理3.3的一个数值验证．

3.5 有关极限的一些概念

正如我们已经看到的，把一个无理数x化为无限连分数，陆续地给出

$$x=a_1+\frac{1}{x_2},\qquad x_2=a_2+\frac{1}{x_3},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$x_{n-1}=a_{n-1}+\frac{1}{x_n},\qquad\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

所以到第$n-1$步计算处打住，我们有

$$x=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x_n},\tag{3.5}$$

这里x_n是无理数．这个计算过程可以无限继续下去．为了表示去实现这一过程，（正象我们已经做过的）人们就写成

$$x=a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n+}\cdots.$$

这式子的含义是，右边的无限连分数的确表示无理数x．应该考虑一下这样论述的意义是什么．这含义是，我们可以设法对无限个数进行运算，并得到一个确定的数，它就是给定的无理数x．我们将看到，对这样一个无限过程赋予数学意义的唯一途径是引进极限概念．

为了说得更清楚起见，我们先回到通常的加法．下面的无穷和中的哪一个有意义呢？

$$A=1+1+1+1+\cdots$$

$$B=1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots.$$

显然，如果我们把1一个接一个地加起来，可以得出要多大就有多大的“和”．所以我们说，当项数无限增加时，和变到无穷．这样的结果对于我们用处不大．另一方面，如果我们把数1，1/2，1/4，1/8，…加起来，我们就依次得到部分和

$$S_1=1,$$

$$S_2=1+\left(\frac{1}{2}\right)^1,$$

$$S_3=1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2,$$

………………………………

$$S_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

…………………………………………………………………．

可以用图把它们表示出来，如图 4 所示。这里

$$S_1<S_2<S_3<\cdots<S_n<\cdots,$$

所以部分和是不断增大的。但是每一个部分和都比 2 小；即，它们都以常数 2 为上界。

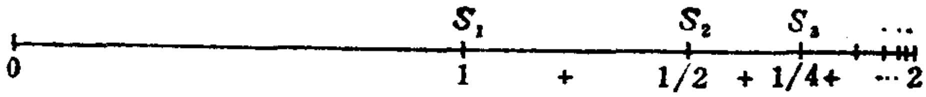

图 4

为了证明它们连续趋向于这个上限 2，我们写出

$$S_n=1+\left(\frac{1}{2}\right)^1+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1},$$

所以

$$\frac{1}{2}S_n=\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^3+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由前一式减后一式，得

$$S_n\left(1-\frac{1}{2}\right)=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

由此

$$S_n=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{\frac{1}{2}}=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}.$$

当n无限增大时，即当$n\to\infty$时，$(1/2)^{n-1}$趋向于0，所以S_n越来越接近于 2，或以 2 为极限。我们说，当$n\to\infty$时，S_n收敛到值 2，用符号来写就是

$$\lim_{n\to\infty} S_n = 2.$$

这时，我们指定 2 作为所要求的无限和的值，并写为

$$1+\left(\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^n+\cdots=2.$$

这就以一种允许的粗糙方式说明了极限的数学概念；对于无穷连分式来说，需要补充上的正是这一概念。这里我们也用图示法说明了数学分析的一个基本定理，今叙述如下，但不加证明①．

定理3.4 如果一个数列$S_1,S_2,S_3,\cdots$是连续递增的，并且对于每一个n，S_n都比U小，这里U是某个固定的数，则数$S_1,S_2,S_3,\cdots$有极限l_U，这里$l_U\leqslant U$．如果数$S_1,S_2,S_3,\cdots$连续递减且都比L大，则它们有极限l_L，其中$l_L\geqslant L$．

我们再回到对于简单无穷连分数的讨论．

3.6 无穷连分数

我们的任务是给出无穷连分数

$$a_1+\frac{1}{a_2+}\frac{1}{a_3+}\cdots+\frac{1}{a_n+}\cdots$$

一个意义．定理3.3说，奇渐近分数$c_1,c_3,c_5,\cdots$形成一个递增数列，都以渐近分数$c_2=U$为上界，即，

$$c_1<c_3<\cdots<c_{2n+1}<\cdots<c_{2n}<\cdots<c_4<c_2=U;$$

因此，它们将收敛到极限$l_U\leqslant U$．但是因为所有奇渐近分数比所有偶渐近分数都来得小，所以极限l_U一定是一个比一切偶渐近分数都小的数．

---

① 关于序列极限的讨论见L. Zippin〔15〕，其中也处理了数学分析的这一基本定理（定理3.4）．

另一方面，偶渐近分数$c_2, c_4, c_6, \cdots, c_{2n}, \cdots$形成一个递减序列，都以$c_1 = L$为下界，即，

$$L = c_1 < c_3 < \cdots < c_{2n+1} < \cdots < c_{2n} < \cdots < c_4 < c_2,$$

所以偶渐近分数趋于极限$l_L \geqslant L$，这里l_L是一个比每一个 奇渐近分数都大的数。从图上看看这些渐近分数 （见 图5），我们就知道，迄今为止我们已经证明了的是，偶渐近分数有l_L，奇渐近分数有l_U。要是$l_U \neq l_L$就麻烦了，但是我们可以证明：$l_U = l_L$.

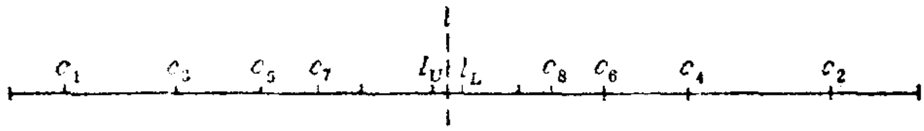

图　5

为证明这一点，我们回到定理3.1，用$2k$代替n，用$2k-1$代替$n-1$，得

$$c_{2k} - c_{2k-1} = \frac{(-1)^{2k}}{q_{2k}q_{2k-1}},$$

或．由$(-1)^{2k} = 1$,

$$c_{2k} - c_{2k-1} = \frac{1}{q_{2k}q_{2k-1}}. \tag{3.6}$$

数q_n是用递推公式

$$q_n = a_n q_{n-1} + q_{n-2}$$

来计算的．因为每一个a_n $(n \geqslant 2)$和每一个q_n $(n \geqslant 1)$都是正整数，所以当n增大时q_n无限增大。因此，(3.6)式中的分数的分子$q_{2k}q_{2k-1}$随k的增大而无限增大，即，当k无限增大时分数$1/q_{2k}q_{2k-1}$趋向于0．但这时由方程式(3.6)我们可推出，当k无限增大时，差$c_{2k} - c_{2k-1}$趋向于0，从而唯

一的可能是c_{2k}和c_{2k-1}有同一个极限值$l=l_U=l_L$.我们证明了：

定理3.5 每一个无限简单连分数都收敛到一个极限l，l比任何奇渐近分数大，比任何偶渐近分数小。

我们取得了多少进展呢？这个极限l是起初生成这个连分式的数x吗？它的确是，但这需要给以证明。

为了证明这一点，设x是给定的无理数.回到展式(3.5)，

$$x=a_1+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x_n},$$

其中x_n是这个分数的"余项"，即

$$\begin{aligned} x_n &= a_n+\frac{1}{a_{n+1}}+\frac{1}{a_{n+2}}+\cdots \\ &= a_n+\frac{1}{x_{n+1}}. \end{aligned} \tag{3.7}$$

这里又有

$$x_{n+1}=a_{n+1}+\frac{1}{a_{n+2}}+\cdots. \tag{3.8}$$

(3.7)的第二行指出，

$$x_n>a_n,$$

因为x_{n+1}是正的。类似地，(3.8)指出

$$x_{n+1}>a_{n+1} \quad 或 \quad \frac{1}{x_{n+1}}<\frac{1}{a_{n+1}}.$$

再根据(3.7)的第二行，

$$x_n=a_n+\frac{1}{x_{n+1}}$$

及

$$\frac{1}{x_{n+1}}<\frac{1}{a_{n+1}},$$

得

$$x_n<a_n+\frac{1}{a_{n+1}}.$$

于是把这些结果结合起来，得

$$a_n<x_n<a_n+\frac{1}{a_{n+1}}. \tag{3.9}$$

证明的下一步是指出x位于c_n和c_{n+1}之间．为了证明这一点，我们比较下面三式：

$$\left.\begin{aligned} c_n&=a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n},\\ x&=a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{x_n},\\ c_{n+1}&=a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}}+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{a_{n+1}}. \end{aligned}\right\} \tag{3.10}$$

我们首先观察到这些表达式都会有一公共项

$$a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{n-1}},$$

所以只要比较它们之间所差的项就行了，也就是比较

$$\frac{1}{a_n},\ \frac{1}{x_n}\quad 和\quad \frac{1}{a_n+\frac{1}{a_{n+1}}}.$$

根据(3.9)我们知道

$$\frac{1}{a_n}>\frac{1}{x_n}>\frac{1}{a_n+\frac{1}{a_{n+1}}},$$

从而由(3.10)我们可以肯定，x 将总落在两个相邻的渐近分数c_n和c_{n+1}之间，即，或者

$$c_n<x<c_{n+1} \quad 或者 \quad c_n>x>c_{n+1}.$$

直接算一算就可证明

$$c_1<x<c_2.$$

事实上，(3.9)给出了$a_1<x_1$．由$c_1=a_1$和$x_1=x$，可知$c_1<x$．另一方面，$x=a_1+1/x_2$，再由(3.9)，$a_2<x_2$或$1/x^2<1/a_2$，所以

$$x=a_1+\frac{1}{x_2}<a_1+\frac{1}{a_2}=c_2,$$

从而

$$c_1<x<c_2.$$

类似地，方程式(3.10)指出，x位于c_2和c_3之间，c_3和c_4之间，c_4和c_5之间，等等．因为所有的奇渐近分数都比所有的偶渐近分数小，我们必然得到

$$c_{2k-1}<x<c_{2k},\quad k=1,2,3,\cdots$$

的结论，或者写成展开的形式是

$$c_1<c_3<\cdots<c_{2k-1}<\cdots<x<\cdots<c_{2k}<\cdots<c_4<c_2.$$

这样一来，我们看到了，渐近分数$c_1,c_3,\cdots$从左边趋向于x，而$c_2,c_4,\cdots$从右边趋向于x．但是我们知道，奇渐近分数c_{2k-1}和偶渐近分数c_{2k}当k无限增大时都趋向于极限l；所以x和l一定是同一个数．因此，写成

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \cdots \frac{1}{+ a_n +} \cdots$$

是容许的。我们证明了

定理3.6 如果一个无理数x依所述规则展为一个无限简单连分数$[a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$，那么，分数$[a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$的渐近分数$c_1, c_2, \cdots, c_n, \cdots$所收敛到的极限就是产生此连分数的数$x$。

这个定理应该跟上一个附加定理：把任何无理数展为无限简单连分数的展式是唯一的。这个定理是正确的，正如所述，读者会发现，不可能把任何给定的无理数以两种不同方式展开。

3.7 逼近定理

我们在连分数方面的经验，特别是我们关于定理3.6的研究，已经十分清楚地指出，一个无理数x的连分数展式的每一个渐近分数都比前一个渐近分数更接近于x的值。在把这一结果叙述成为一个定理之前，我们先作些预备性的说明。

设无理数x的展式是

$$x = a_1 + \frac{1}{a_2 +} \frac{1}{a_3 +} \cdots \frac{1}{+ a_n +} \frac{1}{x_{n+1}}, \tag{3.11}$$

其中

$$x_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2} +} \frac{1}{a_{n+3} +} \cdots.$$

我们假定$x_2, x_3, \cdots$都是正数；还要注意到$x_1 = x$，x_{n+1}中包含无穷多个整数的部分商$a_{n+1}, a_{n+2}, \cdots$，但它自己不必是整数，因此，我们无权把它当作一个合法的部分商来处理。

不过，我们假定把（3.11）写成“有限”连分数的形式：

$$x=[a_1,a_2,\cdots,a_n,x_{n+1}],$$

并把x_{n+1}视为一个合法的部分商。这时，如果我们以通常的方式计算渐近分数，则最后一个“渐近分数”（在定理1.3中取$i=n+1,a_{n+1}=x_{n+1}$）应是

$$\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}}.$$

与有限连分数的研究相类比，它应等于给定的无理数x.这样一来，下面的写法看来是合理的

$$x=[a_1,a_2,\cdots,a_n,x_{n+1}]=\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}}. \qquad (3.12)$$

这里应该强调，像以前一样，p_n,q_n,p_{n-1},q_{n-1}只依赖于整数$a_1,a_2,\cdots,a_n$。特别地，当$n=0$时，方程（3.12)给出了

$$\frac{x_1p_0+p_{-1}}{x_1q_0+q_{-1}}=\frac{x_1\cdot 1+0}{x_1\cdot 0+1}=x.$$

根据定义，

$$x_1=a_1+\frac{1}{a_2+\cdots}=x.$$

当$n=1$时，(3.12)给出了

$$[a_1,x_2]=\frac{x_2p_1+p_0}{x_2q_1+q_0}=\frac{x_2\cdot a_1+1}{x_2\cdot 1+0}=a_1+\frac{1}{x_2}$$

$$=a_1+\frac{1}{a_2+\cdots}=x.$$

可以用证明定理1.3的同样方法证明，（3.12）对于一切n成立，递推步骤几乎也是一样的。现在我们可以叙述本节的主

要定理了。

定理3.7 每一个渐近分数都比前一个渐近分数更接近于无穷简单连分数的值。

证明 设已知的无理数x的展式为

$$x=[a_1,a_2,\cdots,a_n,x_{n+1}],$$

其中

$$x_{n+1}=[a_{n+1},a_{n+2},\cdots].$$

于是，根据（3.12），

$$x=\frac{x_{n+1}p_n+p_{n-1}}{x_{n+1}q_n+q_{n-1}},$$

由此我们得到

$$x(x_{n+1}q_n+q_{n-1})=x_{n+1}p_n+p_{n-1}.$$

重新安排各项，对$n\geqslant 2$我们有

$$\begin{aligned} x_{n+1}(xq_n-p_n)&=-(xq_{n-1}-p_{n-1})\\ &=-q_{n-1}\left(x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right), \end{aligned}$$

遍除$x_{n+1}q_n$，可得

$$x-\frac{p_n}{q_n}=\left(-\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right)\left(x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right).$$

如果$a=b\cdot c$，则$|a|=|b|\cdot|c|$和$|-a|=|a|$①；因此

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right|\cdot\left|x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|. \qquad (3.13)$$

---

① 符号$|a|$读作“a的绝对值”，意思是

$$|a|=a\ ,\quad 当a\geqslant 0时，$$
$$|a|=-a,\quad 当a<0时.$$

例如，$|7|=7$，$|-7|=7$.

我们知道，当$n\geqslant 2$时，$x_{n+1}>1$及$q_n>q_{n-1}>0$；因此

$$0<\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}<1,$$

所以

$$0<\left|\frac{q_{n-1}}{x_{n+1}q_n}\right|<1.$$

于是（3.13）指出

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\left|x-\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}\right|,\qquad n\geqslant 2,$$

或者，换一种形式写

$$|x-c_n|<|x-c_{n-1}|,\qquad n\geqslant 2.$$

这就说明c_n比c_{n-1}更接近于x，定理得证。

对于c_n逼近于x的程度给以某种度量或估计是件有趣的事。事实上，由定理3.1，把定理中的n换为$n-1$，我们已经知道，

$$c_{n+1}-c_n=\frac{(-1)^{n+1}}{q_{n+1}q_n}.$$

两边取绝对值，得

$$|c_{n+1}-c_n|=\frac{1}{q_{n+1}q_n},\qquad n\geqslant 1.$$

但是从定理3.7我们知道，在c_n和c_{n+1}中，x更接近于c_{n+1}。由此可知，x和c_n的差的绝对值总比c_n和c_{n+1}的差的绝对值的一半大。从图上看这是很清楚的。图6指出了n是奇数，从而是c_n在c_{n+1}的左边的情况。显然，$AB<AC<AD$，或者

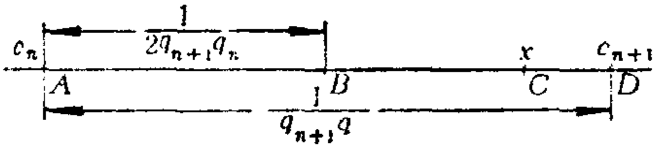

图 6

$$\frac{1}{2q_nq_{n+1}}<\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}.$$

因为$q_{n+1}>q_n$，所以$q_nq_{n+1}>q_n^2$，从而$1/q_nq_{n+1}<1/q_n^2$。因此，我们可以给出

定理3.8 $\frac{1}{2q_nq_{n+1}}<\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}<\frac{1}{q_n^2}$，$n\geqslant1$。

倘若x是无理数，那么就存在无限多个满足定理3.8的渐近分数。这样一来，我们有下面的定理：

定理3.9 如果x是一个无理数，则存在无穷多个有理分数p/q，$q>0$，$(p,q)=1$，使得

$$\left|x-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}.$$

这一定理是对无理数作有理逼近的理论的开始，这一论题我们将在第五章进行简要地讨论。

例1 证明，数

$$e=2.718282\cdots$$

的前几个渐近分数对这个数给出了越来越好的逼近。这些渐近分数可以通过求 2.718282 的前几个渐近分数而得到。2.718282是e的准确到小数后第6位的近似值。

注 无理数e是在微积分的研究中很自然地出现的，它被定义为

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

从下表的数值中就可猜测到序列$\left(1+\frac{1}{1}\right)^1,\left(1+\frac{1}{2}\right)^2,\cdots,$

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，…实际上趋近于一个极限：

n	$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$
10	2.5937…
20	2.6533…
100	2.7048…
200	2.7115…
1000	2.7169…
……	………

数e被取为自然对数的底，这正如数10取为常用对数的底一样。e的连分数展式为

$$e=[2,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\cdots];$$

其证明是相当困难的。

解 假定已知e的上面的展式，或者e的近似表达式

$$e=2.718282=\frac{1359141}{500000},$$

我们求得

$$e=[2,1,2,1,1,4,1,\cdots].$$

相应的渐近分数是

$$\frac{2}{1},\ \frac{3}{1},\ \frac{8}{3},\ \frac{11}{4},\ \frac{19}{7},\ \frac{87}{32},\ \frac{106}{39},\cdots.$$

化为十进小数的形式就可看出，这些分数的确接连不断地对e给出了一个比一个更好的近似值.

作为对定理3.9的验证，看$p_7/q_7=106/39$，应有

$$\left|e-\frac{p_7}{q_7}\right|<\frac{1}{q_7^2}$$

成立，或

$$\left|e-\frac{106}{39}\right|<\frac{1}{39^2}$$

成立. 数值计算表明

$$e-\frac{106}{39}=0.00033264\cdots,$$

它比$(1/39^2)=0.00065746\cdots$小. 我们观察到，$e-(106/39)$的值近似地等于$1/39^2$的二分之一. 这启发我们，作为近似定理的定理3.9还可以考虑去改进它. 我们将在第五章看到这的确是可以做到的.

定理3.8中的不等式

$$\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}$$

对有理数或无理数x都是成立的. 在下面的例子中我们去逼近一个有理数.

例2 给定一个分数2065/902，求一个具有较小分子和较小分母的分数，它是已知分数的保持三位十进小数正确的近似值.

解 把2065/902化为连分数，并算出各渐近分数。下面的表给出了数值结果：

i	-1	0	1	2	3	4	5	6	7
a_i			2	3	2	5	5	1	3
p_i	0	1	2	7	16	87	451	538	2065
q_i	1	0	1	3	7	38	197	235	902
c_i			$\frac{2}{1}$	$\frac{7}{3}$	$\frac{16}{7}$	$\frac{87}{38}$	$\frac{451}{197}$	$\frac{538}{235}$	$\frac{2065}{902}$

现在参看定理3.8，我们来寻找两个渐近分数 $c_n=p_n/q_n$ 和 $c_{n+1}=p_{n+1}/q_{n+1}$，它们使

$$\left|\frac{2065}{902}-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_nq_{n+1}}<0.0005$$

成立。这是说，我们希望用p_n/q_n去逼近2065/902，其误差是第四位十进小数的单位的一半。稍加验算就知，

$$\frac{87}{38}=\frac{p_4}{q_4}, \qquad \frac{451}{197}=\frac{p_5}{q_5}$$

满足要求。因为

$$\left|\frac{2065}{902}-\frac{87}{38}\right|<\frac{1}{q_4q_5}=\frac{1}{38\cdot197}<0.00013.$$

因此所求的分数是87/38。如果我们不取分数 $1/q_nq_{n+1}$ 而取

分数$1/q_n^2$，那么我们的答案是下一个渐近分数451/197，因为$1/38^2$不比0.0005小。为了求q_nq_{n+1}的值，使得$(1/q_nq_{n+1})<\varepsilon$（这里$\varepsilon$是一个任意给定的数），我们可以使用平方表，先检查$q_n^2>(1/\varepsilon)$是否成立，接着再作一些补充验算看是否$q_nq_{n+1}>(1/\varepsilon)$成立。

习 题 11

1．给定分数 2893/1323，求一个具有较小分子和较小分母的分数，它是已给分数的准确到第三位十进小数的近似值，即，误差小于第四位十进小数的单位的 5 倍。

2．把$\sqrt{19}$展为无穷简单连分数，求一个分数，它是$\sqrt{19}$的准确到第四位十进小数的近似值。

3．π的连分数是$[3,7,15,1,292,1,1,1,\cdots]$。利用定理3.8去研究前四个渐近分数对于$\pi$逼近的程度。

3.8 连分数的几何解释

一个无理数的连分数的渐近分数$c_1,c_2,\cdots,c_n,\cdots$收敛到已给的数，这一事实的一个引人注目的几何解释是在1897年由F.柯莱茵[①](Klein)给出的。F.柯莱茵不仅是一位卓越的数学家，而且是一个最通俗的数学解释者。他的一些著作直到今天还在重印与使用。

设α是一个无理数，它的展式是

$$[a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots].$$

它的渐近分数是

① F. Klein, Ausgewählte Kapitel der Zahlentheorie, Teubner, 1907, pp. 17—25.

$$c_1=\frac{p_1}{q_1},\quad c_2=\frac{p_2}{q_2},\quad \cdots,\quad c_n=\frac{p_n}{q_n},\quad \cdots.$$

为简单计，设α是正的。在图纸上标出横坐标x和纵坐标y都是整数的点(x,y)，这些点称为格点。想象在这些点处钉上一个钉或插上一个大头针。接着画一条线

$$y=\alpha x.$$

这条线不会通过任何一个格点；因为，如果有一个坐标为整数的点(x,y)满足方程$y=\alpha x$，则$\alpha=y/x$是有理数。这是不可能的，因为α是无理数。

现在想象，把一条细的黑线的一端绑在直线$y=\alpha x$的无限遥远的一点上，而把另一端拿在我们的手中。我们把线拉紧，使得在手中的一端位于原点。保持线是拉紧的，从原点出发向左移动我们的手，这条线就会从它的上面碰到一些钉。如果向另一个方向移动，这条线就会碰到另一些钉。见图7。

从下面触及这条线的那些钉位于具有坐标

$$(q_1,p_1),\ (q_3,p_3),\ (q_5,p_5),\cdots$$

的格点上。它们分别对应于奇渐近分数

$$c_1=\frac{p_1}{q_1},\qquad c_3=\frac{p_3}{q_3},\qquad c_5=\frac{p_5}{q_5},\qquad \cdots,$$

都比α小。从上面触及这条线的那些钉子位于格点

$$(q_2,p_2),\ (q_4,p_4),\ (q_6,p_6),\ \cdots$$

上，它们对应于偶渐近分数

$$c_2=\frac{p_2}{q_2},\qquad c_4=\frac{p_4}{q_4},\qquad c_6=\frac{p_6}{q_6},\qquad \cdots,$$

这些分数都比α大。这两条线中的每一条都是折线。我们向

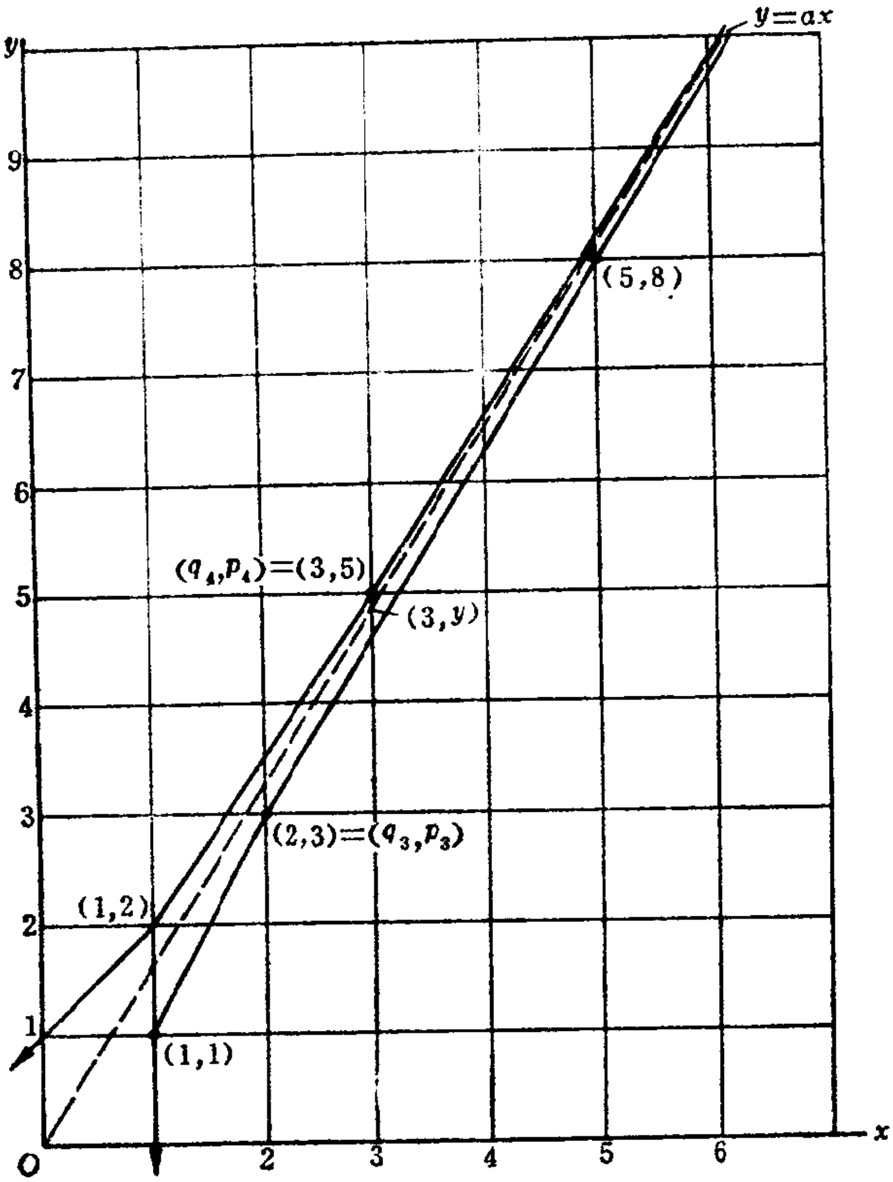

图 7

外走得越远，它们就越逼近于直线$y=\alpha x$.

例 画出数

$$\alpha=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=[1,1,1,1,\cdots]$$

的连分数展式的柯莱茵图示.

解 渐近分数是

$$\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{5}{3},\ \frac{8}{5},\ \frac{13}{8},\ \cdots.$$

对应于奇渐近分数的钉子或点是(1,1),(2,3),(5,8),…，它们都在线的下面，见图7.对应于偶渐近分数的点是(1,2),(3,5),(8,13),…，它们都在线的上面.

例如，让我们证明点$(q_4,p_4)=(3,5)$对应于偶渐近分数$p_4/q_4=5/3$，它比α大．考虑图7中已标出的点$(3,y)$．因为它在直线$y=\alpha x$上，所以$y=\alpha\cdot 3$,或$\alpha=y/3$.点(3,5)在这条直线的上面，所以$5>y$，或者$5/3<y/3=\alpha$，因此渐近分数$5/3>\alpha$.

连分数的大部分基本性质都有几何上的解释．实际上简单连分数的理论可以从几何上发展起来①.

习 题 12

1．构造$(\sqrt{5}-1)/2$的连分数展式的柯莱茵图示.

2．构造$\sqrt{3}$的连分数展式的柯莱茵图示.

3.9 方程式$x^2=ax+1$的解

连分数可以用来给出任何多项式方程的正根的近似值，当然，条件是该方程式有这样的根．我们现在来考察二次代数方程式

① 见H. Hancock,Development of the Minkowski Geometry of Numbers, New York: The Macmillan Company, 1939,(Chapter 8).

$$x^2 = ax + 1. \tag{3.14}$$

如果$a<0$，则形如(3.14)的任何二次方程式的正根有连分数展式

$$x = a + \frac{1}{a\ +}\ \frac{1}{a\ +}\ \cdots.$$

为了看到这一点，我们只要在(3.14)的两边除以x就得到

$$x = a + \frac{1}{x},$$

所以

$$x = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{x}} = a + \cfrac{1}{a + \cfrac{1}{a + \ddots}}.$$

例如，当$a = 1$时，方程式

$$x^2 = x + 1$$

有正根

$$x = [1, 1, 1, 1, \cdots].$$

这个连分数的前后相继的渐近分数对实际解$(1 + \sqrt{5})/2$给出了一个比一个更好的近似值。参看3.3节问题4．对这个特殊数的更详细的讨论见下节。

习 题 13

1．利用二次方程式的求根公式求出下列方程式的正根，算出这些正根的连分数展式的前几个渐近分数，并把准确解与由渐近分数所算得的近似解作比较。

(a) $x^2 - 3x - 1 = 0$;　　(b) $x^2 - 5x - 1 = 0$.

2．设

$$x = b + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \cdots = [\overline{b, a}],$$

b是a的倍数，即$b = ac$（这里 c 是一个整数）。证明，这时x满足方程式

$$x^2 - bx - c = 0,$$

并有值

$$x = \frac{b + \sqrt{b^2 + 4c}}{2}.$$

3．借助给定正整数a和b的特殊值及选出特殊的渐近分数p_{n-2}/q_{n-2}，p_n/q_n，p_{n+2}/q_{n+2}的办法验证，如果

$$x = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \cdots,$$

则
$$p_{n+2} - (ab + 2)p_n + p_{n-2} = 0.$$

3.10 斐波那奇数

在所有无限连分数中最简单的是

$$\tau = [1, 1, 1, \cdots],$$

这里τ满足方程式

$$\tau = 1 + \frac{1}{\tau}, \quad 或 \quad \tau^2 - \tau - 1 = 0.$$

它有正根

$$\tau = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

τ的渐近分数是

$$\frac{1}{1}, \frac{2}{1}, \frac{3}{2}, \frac{5}{3}, \frac{8}{5}, \frac{13}{8}, \cdots. \qquad (3.15)$$

它们的分子和分母都是由整数序列

$$1，1，2，3，5，8，13，21，34，\cdots \qquad (3.16)$$

所组成。在这些数中，位于前两个数后的每一个数都是它前面的两个数的和；例如$2=1+1$，$3=2+1$，等等。（3.16）中的数以斐波那奇数而著称。它们是以十三世纪的伟大数学家F。斐波那奇（Leonardo Fibonacci）（1170—1250）的名字命名的，尽管他不是第一个使用这种数的人。

希腊人声称，自然和艺术的创造应将其美丽归功于一些基本的数学模型。其中之一就是黄金分割，它有多种形式。在几何上，它来自用点C分线段AB产生的“最合意的”分割。这就是说，用C去做分割，使得分割所得的两部分a对b的比与b对整个线段$a+b$的比一样大（见图8），即

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{a+b} \quad 或 \quad \frac{b}{a}=\frac{a}{b}+1.$$

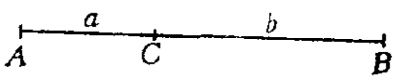

图 8

如果设$x=b/a$，则我们有

$$x=\frac{1}{x}+1 \quad 或 \quad x^2-x-1=0,$$

所以$x=b/a=(1+\sqrt{5})/2=\tau$，或 $b=\tau a$。这样一来，说一个线段依黄金分割进行了分割，若一段是另一段的τ倍。

1509年L．潘西奥里（Luca Pacioli）发表了一本书①，

① 书名为Dirinu Proportione。

书中对数τ进行了研究。图是里奥拿道·达·芬奇（Leonardo da Vinci）画的。在这本书中潘西奥里描述了τ的十三条有趣的性质。

黄金分割出现在许多意料不到的場合里：在某些有五瓣对称的花中，在一些海生动物中，在人体的某些比例中，等等。人们已经把黄金分割应用到创造性的艺术中，应用到当代设计的各个方面，特别是印刷术和广告业中。例如大多数人都把两边的比近似等于1比τ的矩形看作是好看的。3×5的索引卡片应用很广泛就是一个证明；3与5的比近似地等于1比τ。

在几何上，黄金分割是构造正五边形的关键。数τ出现在许多数学游戏中，τ的渐近分数也出现在某些几何诡辩中，或许最熟知的一个例子如图9a所示，一个8乘8的正方形从表面上看似乎可以被分割而后再重新拼成一个5乘13的矩形。正方形的面积是$8\cdot 8=64$，而看上去含有相同部分的矩形的面积却是$5\cdot 13=65$，所以面积增加了一个单位。

这个诡辩是基于下述事实：（3.15）的渐近分数有这样的性质，每一个渐近分数的分母是前一个渐近分数的分子。特别地，

$$\frac{p_5}{q_5}=\frac{8}{5},\qquad \frac{p_6}{q_6}=\frac{13}{8},\qquad q_6=p_5=8.$$

现在考虑关系式

$$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n.$$

当$n=6$时，变为

$$13\cdot 5-8\cdot 8=1.$$

我们选取p_6,q_5作为矩形的边，选取p_5,q_6（$p_5=q_6$）作为正

方形的边，上边的关系式告诉我们两个图形的面积的差是1.

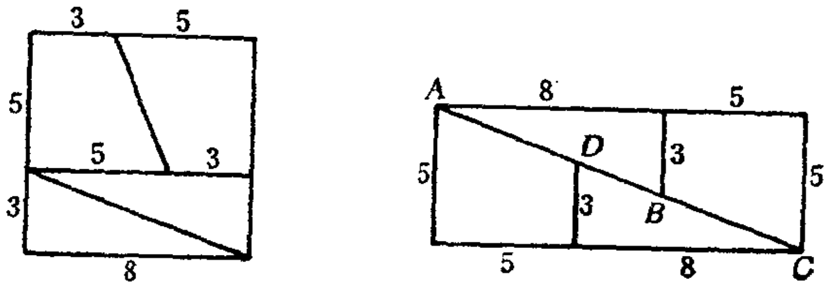

图 9 a

实际上，点A,B,C,D不放在同一条直线上，而是平行四边形$ABCD$的顶点（一个夸大了的图形见图 9 b），它的面积恰是“多出的”一个单位的面积，在图 9 a的矩形中，钝角ADC和ABC与平角的差小于$1\frac{1}{4}^{\circ}$.

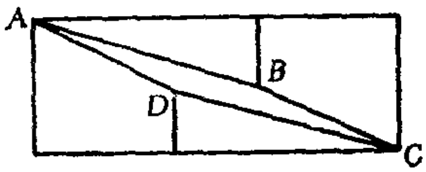

图 9 b

更一般地，如果斐波那奇数由下面的关系式所确定：

$F_1=1$, $F_2=1$ 和 $F_k=F_{k-2}+F_{k-1}$, $k>2$. 且正方形的边等于斐波那奇数F_{2n}（具有偶数的脚标），它被分成的部分如图 9 c所示，那么，可以证明，当把各部分重新拼起来形成一个矩形的时候，将出现一个大小为单位面积的平行四边形$ABCD$的洞，这个平行四边形的高是

$$1/\sqrt{F_{2n}^2+F_{2n-2}^2}.$$

如果F_{2n}很大（譬如说 $F_{2n}=144$, $F_{2n-2}=55$），那么这个洞

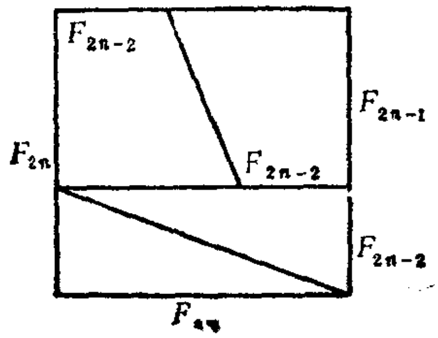

图 9。

就非常窄，以至很难发觉它。

3.11 一种计算对数的方法①

D.山克斯(Daniel Shanks)在一本数值计算的杂志上②叙述了一种计算对数的方法。这是一个有价值的方法，因为它可以被用于高速计算机。

为了计算以b_0为底b_1的对数$\log_{b_0} b_1$（这里$1<b_1<b_0$），我们要计算序列

$$b_2, \ b_3, \ b_4, \ \cdots$$

和正整数序列

$$n_1, \ n_2, \ n_3, \ \cdots;$$

这里$n_1, b_2, n_2, b_3, \cdots$由关系式

$$b_1^{n_1}<b_0<b_1^{n_1+1}, \qquad b_2=\frac{b_0}{b_1^{n_1}},$$

---

① 本节技巧性很高，可略而不读，不至影响下面的学习。

② *Mathematical Tables and Other Aids to Computation* Vol. 8, No.45, April 1954, pp. 60—64.

$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}, \qquad b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$b_k^{n_k} < b_{k-1} < b_k^{n_k+1}, \qquad b_{k+1} = \frac{b_{k-1}}{b_k^{n_k}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

所确定．这样，我们首先求整数n_1，使得

$$b_1^{n_1} < b_0 < b_1^{n_1+1},$$

由此知

$$b_0 = b_1^{n_1 + \frac{1}{x_1}}, \tag{3.17}$$

这里$1/x_1 < 1$；然后我们算出

$$b_2 = \frac{b_0}{b_1^{n_1}} \tag{3.18}$$

并确定整数n_2，使得

$$b_2^{n_2} < b_1 < b_2^{n_2+1}.$$

如果n_2是这样的整数，那么

$$b_1 = b_2^{n_2 + \frac{1}{x_2}}, \quad x_2 > 1. \tag{3.19}$$

把这种步骤继续下去．算出

$$b_3 = \frac{b_1}{b_2^{n_2}}$$

并求出整数n_3，使得

$$b_3^{n_3} < b_2 < b_3^{n_3+1},$$

这里

$$b_2 = b_3^{\,n_3+\frac{1}{x_3}}, \quad x_3 > 1,$$

如此等等.

为了看到我们实际上正在计算 $\log_{b_0} b_1$，注意从方程(3.17)和(3.18)我们有

$$b_2 = b_0 b_1^{-n_1} = b_1^{\,n_1+\frac{1}{x_1}} b_1^{-n_1} = b_1^{\frac{1}{x_1}},$$

或

$$b_1 = b_2^{x_1}.$$

另一方面，由(3.19)，

$$b_1 = b_2^{\,n_2+\frac{1}{x_2}},$$

因此我们可写出

$$x_1 = n_2 + \frac{1}{x_2}.$$

类似地可证明

$$x_2 = n_3 + \frac{1}{x_3},$$

等等. 关于b_1解方程式(3.17)，并利用这些结果，我们得到

$$b_1 = b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{x_1}}} = b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{x_2}}}} = b_0^{\frac{1}{n_1+\frac{1}{n_2+\frac{1}{n_3+\cdots}}}},$$

所以根据对数的定义，

$$\log_{b_0} b_1 = \cfrac{1}{n_1 + \cfrac{1}{n_2 + \cfrac{1}{n_3 + \cdots}}}.$$

例 计算$\log_{10}2$.

解 取$b_0=10$，$b_1=2$，我们求得

$$2^3<10<2^4,$$

所以$n_1=3$，$b_2=10/2^3=1.25$。利用指数表，我们知道

$$(1.25)^3<2<(1.25)^4.$$

于是$n_2=3$，$b_3=2/(1.25)^3=1.024$。接着的计算将更困难，但是借助台式计算机就不难求出了。山克斯的论文给出了下面的结果：

$$\begin{array}{ll}
b_1=2, & n_1=3,\\
b_2=1.25, & n_2=3,\\
b_3=1.024, & n_3=9,\\
b_4=1.009741958, & n_4=2,\\
b_5=1.004336279, & n_5=2,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots.
\end{array}$$

这就指出，

$$\log 2=\frac{1}{3+}\frac{1}{3+}\frac{1}{9+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots$$

$$=[0,3,3,9,2,2,\cdots].$$

下面我们来算渐近分数：

i	-1	0	1	2	3	4	5	6
a_i			0	3	3	9	2	2
p_i	0	1	0	1	3	28	59	146
q_i	1	0	1	3	10	93	196	485
c_i			0	$\frac{1}{3}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{28}{93}$	$\frac{59}{196}$	$\frac{146}{485}$

渐近分数c_6给出了近似值 0.30103093; log 2 到11位的值是0.30102999566。在一般情况下可以证明，每一个渐近分数对log 2 的近似都比它前面的一个渐近分数至少多 位正确的十进位小数。

第四章　循环连分数

4.1　引言

至此我们的研究已经表明，有理数具有有限的连分数展式，无理数具有无穷无尽的或无限的连分数展式。

在第三章里，我们主要涉及的是二次无理数或二次不尽根，即形如

$$\frac{P \pm \sqrt{D}}{Q}$$

的无理数，这里P, Q, D是整数，而D是正的非完全平方数。在考虑过的一切例子中，这些数的展式或者是纯循环的，如下面的$(1+\sqrt{10})/3$；或者从某一点往后是循环的，例如

$$\sqrt{2} = [1,2,2,2,\cdots] = [1,\overline{2}],$$

$$\sqrt{19} = [4,\overline{2,1,3,1,2,8}],$$

$$\frac{1+\sqrt{10}}{3} = [1,2,1,1,2,1,\cdots] = [\overline{1,2,1}],$$

象以前一样，上面式中部分商上面的横线指出，这些数是无穷次重复下去的。不难证明，任何纯循环连分数，以及任何从某一点往后是循环的连分数都代表一个二次无理数。更困难的定理是：任何一个二次无理数都有一个从某一位后是循环的连分数展式。这个定理是1770年首先由拉格朗日证明的。本章的目的就是给出这些定理的证明。这要分几步来完成。

首先证明一个纯循环连分数表示一类特殊的二次无理

数，称为既约的二次无理数．在4.2节的开头给出了一个这样的例子，接着是一般情况的证明．

4.3节对二次无理数提供了一个更详尽的讨论，4.4节对既约的无理数做了深入研究．这两节还包含了证明4.5节的一个定理所需要的必要工具，这个定理说，任何既约的二次无理数都有一个纯循环的连分数展式．由此可得出拉格朗日定理的证明．拉格朗日定理说，任何一个二次无理数的连分数展式都从某一位开始是循环的；反过来，每一个循环连分数都表示一个二次无理数．

这一章的结尾将对不定方程式

$$x^2 - Ny^2 = 1 \tag{4.1}$$

作一简要讨论，式中x和y是未知整数，N是一个给定的非完全平方的整数．在1657年费马（Fermat）指出，方程式（4.1）有无穷多个解，但是他没有给出证明①．布龙克尔勋爵在同一年给出了解这种方程式的系统方法．对（4.1）的第一次完备的讨论是在1766年左右由拉格朗日给出的．通常，方程式（4.1）叫做彼尔方程式．但这是不恰当的，因为彼尔对这一课题没有做出任何独立的贡献②．许多作者称这一方程式为费马方程式

---

① 事实上这是费马对当时的英国数学家提出的挑战．关于这一课题的完整史见 Dickson[4, Vol.2, p.341]

② J.彼尔（John Pell 1611—1685）是一个伟大的学者和教师，在他十三岁的时候就进入了剑桥的三一学院．在廿岁以前他就掌握了八门外语．他是阿姆斯特丹（Amsterdam）（1643—1646）和布瑞达（Breda）（1646—1652）的数学教授，是克伦威尔派在瑞士的代表（1654—1658）．1663年他当选为皇家协会的会员．

彼尔型的不定方程式在数学史上到处出现。一个最有趣的例子与称为阿基米德的“牛问题”有关①。这个问题的解包含8个未知量(每一个表示一类牛的数目)，它们满足某些方程式和条件。这个问题可化为下面的方程式：

$$x^2-4729494y^2=1.$$

满足方程的最小解x是45位数，y是41位数。对应于x和y这些值的牛问题的最小解的数字也异常大。沒有证据说明古代人在什么地方接近了问题的解。事实上，一些历史学家怀疑这个问题与阿基米德有任何联系；而另外一些人却相信这是阿基米德提给厄拉多塞(Eratosthenes)的问题②。

4.2 纯循环连分数

某些连分数，如

$$\sqrt{11}=[3,3,6,3,6,\cdots]=[3,\overline{3,6}]$$

只是在某一位之后才是循环的。其它的，如

$$\sqrt{11}+3=[6,3,6,3,6,\cdots]=[\overline{6,3}]$$

从一开始就是循环的，这种连分数称为纯循环连分数。由纯循环连分数所表示的数是一类特殊的二次无理数。现在我们来研究如何把它们从其它的二次无理数中区别出来。

(a) 一个数例　考虑某些纯循环连分数，例如

---

① 牛问题的叙述见“The World of Mathematics” by James R. New man, New York: Simon and Schuster, 1956, pp. 197—198.

② 参见(Heath)〔6, p. 121〕, Dickson〔4, Vol. 2, p.342〕.

$$\alpha = [3,1,2,3,1,2,\cdots] = [\overline{3,1,2}].$$

我们可把它写成

$$\alpha = 3 + \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{\alpha}. \tag{4.2}$$

现在有必要回忆一下在 3.7 节所研究的一个结果。在那里我们证明了，如果

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}, \tag{4.3}$$

其中

$$\alpha_{n+1} = a_{n+1} + \frac{1}{a_{n+2}} + \cdots, \tag{4.4}$$

则有

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}, \tag{4.5}$$

这里p_{n-1}/q_{n-1}和p_n/q_n分别是对应于部分商a_{n-1}和a_n的渐近分数。事实上，(4.5)表明，我们可以把(4.3)象一个有限连分数一样来处理，在计算α的时候把 α_{n+1} 看作好象是一个合法的部分商。

在纯循环连分数的情况下，

$$\alpha = [\overline{a_1,a_2,\cdots,a_n}] = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\alpha_{n+1}}.$$

我们知道

$$\alpha_{n+1} = a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots = \alpha,$$

因此方程式(4.5)指出，α可由方程式

$$\alpha = \frac{\alpha p_n + p_{n-1}}{\alpha q_n + q_{n-1}} \tag{4.6}$$

来计算。

现在把(4.6)用于特殊情况（4.2），取$a_1=3$，$a_2=1$，$a_3=2$，$\alpha=[\overline{3,1,2}]$。我们造出下表。

i	-1	0	1	2	3	4
a_i			3	1	2	α
p_i	0	1	3	4	11	$11\alpha+4$
q_i	1	0	1	1	3	$3\alpha+1$

因此，得出

$$\alpha=\frac{\alpha p_3+p_2}{\alpha q_3+q_2}=\frac{11\alpha+4}{3\alpha+1}.$$

由此导出二次方程式

$$3\alpha^2-10\alpha-4=0, \tag{4.7}$$

这个方程式与(4.2)得到的方程式是同一个方程式。

现在我们考虑数β，它是由α将其循环周期倒过来而得到的，也就是数

$$\beta=[\overline{2,1,3}]=2+\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{\beta}.$$

对β应用(4.6)，得到

$$\beta=\frac{11\beta+3}{4\beta+1}, \tag{4.8}$$

这就引出二次方程式

$$4\beta^2-10\beta-3=0. \tag{4.9}$$

方程式(4.9)可化为形式

$$3\left(-\frac{1}{\beta}\right)^2-10\left(-\frac{1}{\beta}\right)-4=0. \qquad (4.10)$$

比较（4.7）与（4.10）我们就知道二次方程式

$$3x^2-10x-4=0 \qquad (4.11)$$

有根$x=\alpha$和$x=-1/\beta$. 这两个根不可能相等，因为α和β都是正的，所以α和$-1/\beta$符号相反。但是$\beta>1$，所以$-1<-1/\beta<0$。这就指出，二次方程式（4.7）或（4.11）有正根α和负根$\alpha'=-1/\beta$，这里$-1<\alpha'<0$。

不难用数值计算来验证这一结果. 求根公式指出（4.7）有两个根，

$$\alpha=\frac{5+\sqrt{37}}{3} \quad 和 \quad \alpha'=\frac{5-\sqrt{37}}{3}.$$

（4.9）的正根β是

$$\beta=\frac{5+\sqrt{37}}{4},$$

因此

$$-\frac{1}{\beta}=\frac{-4}{5+\sqrt{37}}=\frac{-4}{5+\sqrt{37}}\cdot\frac{5-\sqrt{37}}{5-\sqrt{37}}=\frac{5-\sqrt{37}}{3},$$

这就证明了$-1/\beta$等于α'. 算出三位小数，$\alpha=3.694>1$，$\alpha'=-0.361$，所以$-1<\alpha'<0$。这个纯循环连分数α的确是二次无理数。

（b）一般情况　我们来证明

定理4.1　如果$a_1, a_2, \cdots, a_n$是正整数，那么纯循环连分数

$$\alpha=[\overline{a_1,a_2,\cdots,a_n}]$$

比 1 大，并且是一个具有整系数的二次方程的正根。此外，如果$\beta=[\overline{a_n,a_{n-1},\cdots,a_1}]$是与$\alpha$的循环周期正好相反的连分数，则$-1/\beta=\alpha'$是这个二次方程的第二个根，是与$\alpha$互为共轭的根；并且同样重要的是，$\alpha'$位于$-1$与 0 之间。

证明 我们需要第27页习题 3 的问题 7 中所述的两个结果，即，如果

$$\frac{p_n}{q_n}=[a_1,a_2,\cdots,a_{n-1},a_n], \tag{4.12}$$

则

$$\frac{p_n}{p_{n-1}}=[a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1]=\frac{p_n'}{q_n'} \tag{4.13}$$

和

$$\frac{q_n}{q_{n-1}}=[a_n,a_{n-1},\cdots,a_3,a_2]=\frac{p_{n-1}'}{q_{n-1}'}, \tag{4.14}$$

这里p_n'/q_n'和p_{n-1}'/q_{n-1}'分别表示连分数$[a_n,a_{n-1},\cdots,a_2,a_1]$的第$n$个和第$(n-1)$个渐近分数。因为渐近分数是在它们的最低项中，所以

$$\begin{aligned} p_n'=p_n\quad, &\qquad p_{n-1}'=q_n\quad,\\ q_n'=p_{n-1}, &\qquad q_{n-1}'=q_{n-1}. \end{aligned} \tag{4.15}$$

因为α是纯循环的，所以我们可以把它写成形式

$$\alpha=a_1+\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{+a_n+}\frac{1}{\alpha}.$$

根据(4.6)，又有

$$\alpha=\frac{\alpha p_n+p_{n-1}}{\alpha q_n+q_{n-1}},\tag{4.16}$$

这里p_n/q_n和p_{n-1}/q_{n-1}分别作为$[\overline{a_1,a_2,\cdots,a_n}]$的第$n$个和第$(n-1)$个渐近分数而被确定。方程式(4.16)等价于二次方程式

$$q_n\alpha^2-(p_n-q_{n-1})\alpha-p_{n-1}=0。\tag{4.17}$$

把α的循环周期倒过来，我们得到

$$\beta=a_n+\frac{1}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{\beta}.$$

再根据(4.6)，我们知道，

$$\beta=\frac{\beta p'_n+p'_{n-1}}{\beta q'_n+q'_{n-1}},\tag{4.18}$$

这里p'_n/q'_n和p'_{n-1}/q'_{n-1}分别是$[\overline{a_n,a_{n-1},\cdots,a_1}]$的第$n$个和第$(n-1)$个渐近分数。利用在(4.15)中所述的结果，我们可以用

$$\beta=\frac{\beta p_n+q_n}{\beta p_{n-1}+q_{n-1}}$$

代表(4.18)，所以β满足方程式

$$p_{n-1}\beta^2-(p_n-q_{n-1})\beta-q_n=0;$$

它等价于方程式

$$q_n\left(-\frac{1}{\beta}\right)^2-(p_n-q_{n-1})\left(-\frac{1}{\beta}\right)-p_{n-1}==0.\tag{4.19}$$

比较方程式(4.17)和(4.19)，我们断言，二次方程式

$$q_nx^2-(p_n-q_{n-1})x-p_{n-1}=0$$

有两个根：根$x_1=\alpha$，和根$x_2=-1/\beta$。现在，β代表纯循环连分数$[\overline{a_n,a_{n-1},\cdots,a_1}]$，其中$a_n,a_{n-1},\cdots,a_1$都是正整数；

于是我们有$\beta>1$，$0<1/\beta<1$，所以$-1<-1/\beta<0$. 换句话说，根$\alpha'=-1/\beta$位于-1和0之间。这就完成了证明。

定理4.1的逆定理也是成立的（将在4.5节给以证明）．这就是说，如果$\alpha>1$是一个二次无理数，那么它满足一个整系数的二次方程式；如果这个二次方程式的第二个根α'位于-1和0之间，那么，α的连分数展式是纯循环的。这个著名事实首先是伽罗瓦（Galois）在1828年证明的，尽管在拉格朗日的早期著作中已暗含了这一结果。应该强调的是，加于α和α'上的这几个条件完全刻划了具有纯循环连分数展式的数。

简单循环连分数可以总括如下：

(i) 没有非循环部分的分数，例如

$$\alpha=[\overline{a_1,a_2,\cdots,a_n}].$$

(ii) 非循环部分仅由一个商a_1所构成的分数，例如

$$\alpha=[a_1,\overline{b_1,b_2,\cdots,b_n}].$$

(iii) 非循环部分至少含有两个商的分数，例如

$$\alpha=[a_1,a_2,a_3,\overline{b_1,b_2,\cdots,b_n}].$$

对于(i)类型的分数，我们已经证明了：α是一个二次无理数，它满足一个整系数的二次方程式，这个方程式的第二个根α'位于-1和0之间。在情况(ii)和(iii)也可证明，α是一个二次无理数，它满足一个整系数的二次方程式，但是在情况(ii)，这个方程式的第二个根α'或者比-1小，或者比0大，而在情况(iii)，第二个根必须比0大，最后这两个结果我们不证明。

习 题 14

1．若$\alpha=[\overline{2,6}]$和$\beta=[\overline{6,2}]$，

(a) 用数値计算验证$\alpha>1$和$\beta>1$；

(b) 找一个方程式，使α是它的根；

(c) 证明这一方程式的另一根α'满足关系式$\alpha'=-1/\beta$，因此α'位于-1和0之间。

2. 用数値计算验证

(a) $\alpha=[1,\overline{2,3}]$满足一方程式，这方程式的另一根$\alpha'$不在$-1$和0之间；

(b) $\gamma=[1,2,\overline{3}]$满足一方程式，这方程式的另一根$\gamma'$是正的。

4.3 二次无理数

在这一节里我们将主要处理形如

$$A+B\sqrt{D}$$

的数，其中A和B是任意有理数，D是一个固定的非完全平方的正整数，所以$\sqrt{D}$是无理数，从而$A+B\sqrt{D}$也是无理数。

首先我们注意到，对于一个任意的但是固定的、非完全平方的正整数D，只有一种方式写出数$A+B\sqrt{D}$，除去诸如

$$\frac{3}{2}+\frac{1}{3}\sqrt{5}=\frac{6}{4}+\frac{2}{6}\sqrt{5}$$

这种显然变形外。换言之，

$$A_1+B_1\sqrt{D}=A_2+B_2\sqrt{D}$$

当且仅当$A_1=A_2$和$B_1=B_2$。为了证明这一点，我们把上面的方程式写成形式

$$A_1-A_2=(B_2-B_1)\sqrt{D};$$

若$B_2\neq B_1$，则

$$\sqrt{D}=\frac{A_1-A_2}{B_2-B_1}$$

是一个有理数，这与假设相矛盾。因此假定 $B_1\neq B_2$就会引出矛盾，所以我们一定有$B_1=B_2$的结论，从而 $A_1-A_2=0$，或$A_1=A_2$。

其次，我们指出，对于这种形式的数进行算术基本运算（加、减、乘、除）的时候，其结果仍是这种形式的数。我们把这些性质的证明留给读者（见习题15第1题）；但是要注意这样一个事实，形如 $A+B\sqrt{D}$ 的数包含$B=0$的数，即包含通常的有理数。不过，在我们谈论二次无理数的时候，将假定$B\neq 0$，因为否则所考虑的数就变成有理数了。

下边我们来证明，每一个数$x=A+B\sqrt{D}$，其中A和$B\neq 0$是有理数，D是一个非完全平方的正整数，都是一个二次方程式$ax^2+bx+c=0$的根，这里系数$a>0$，b，c是整数，而$b^2-4ac>0$。显然，若$a=0$，则$x=-c/b$是一个有理数，因此不代表无理数 $A+B\sqrt{D}$。

为了证明上述论断，我们记得任何二次方程式

$$ax^2+bx+c=0,\qquad a>0$$

有根

$$x=r_1=-\frac{b}{2a}+\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=A+B\sqrt{D},$$

$$x=r_2=-\frac{b}{2b}-\frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=A-B\sqrt{D},$$

这里$D=b^2-4ac$，因此

$$r_1+r_2=-\frac{b}{a}=2A,$$

$$r_1 r_2 = \frac{c}{a} = A^2 - B^2 D.$$

因此，如果$a \neq 0$，则我们可以用

$$x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right) x + \frac{c}{a} = 0$$

或用

$$x^2 - 2Ax + (A^2 - B^2 D) = 0$$

来代替 $ax^2 + bx + c = 0$。

反过来，直接把

$$x = A + B\sqrt{D} \qquad (\text{或}x = A - B\sqrt{D})$$

代入就知它满足后一方程式

$$\begin{aligned}&(A \pm B\sqrt{D})^2 - 2A(A \pm B\sqrt{D}) + (A^2 - B^2 D)\\ &= A^2 \pm 2AB\sqrt{D} + B^2 D - 2A^2\\ &\quad \mp 2AB\sqrt{D} + A^2 - B^2 D = 0.\end{aligned}$$

$A + B\sqrt{D}$和$A - B\sqrt{D}$满足的方程式$x^2 - 2Ax + (A^2 - B^2 D) = 0$不一定具有整系数，但是，如果我们用有理数$2A$和$A^2 - B^2 D$的公分母$a$来遍乘它，那么我们就得到二次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

这里3个系数$a > 0$，$b = -2aA$和$c = a(A^2 - B^2 D)$都是整数。

最后，这个方程式的判别式是正的；因为

$$\begin{aligned}b^2 - 4ac &= (-2aA)^2 - 4a^2(A^2 - B^2 D)\\ &= 4a^2 B^2 D > 0,\end{aligned}$$

我们已假定D是正的。还要注意到$b^2 - 4ac$不是一个完全平方数。

上面的讨论给我们引出了**二次无理数**或**二次不尽根**的精确定义。二次无理数是这样的数，它满足一个系数是整数的

二次方程式，这个二次方程式的判别式是正的，且不是一个完全平方数。因此，根据这个定义，只要$B\neq 0$，我们一直在讨论的数 $A+B\sqrt{D}$ 就都是二次无理数。

二次无理数$A+B\sqrt{D}$，$B\neq 0$，满足且仅满足一个二次方程式 $ax^2+bx+c=0$，这里a,b,c没有公因子。因为，若$x=A+B\sqrt{D}$是

$$g_1(x)=a_1x^2+b_1x+c_1=0$$

和

$$g_2(x)=a_2x^2+b_2x+c_2=0$$

的根，则它一定是方程式

$$\begin{aligned} &a_2g_1(x)-a_1g_2(x)\\ &\quad=(a_2b_1-a_1b_2)x+\ +(a_2c_1-a_1c_2)=0 \end{aligned}$$

的根。现在，若$a_2b_1-a_1b_2\neq 0$，则可推出

$$x=-\frac{a_2c^1-a_1c_2}{a_2b_1-a_1b_2}$$

是有理数，这与x是无理数相矛盾.故此时$x=A+B\sqrt{D}$不会满足两个方程式。另一方面，若$a_2b_1-a_1b_2=0$，则由方程式

$$(a_2b_1-a_1b_2)x+(a_2c_1-a_1c_2)=0$$

可推出$a_2c_1-a_1c_2=0$，因此

$$\frac{a_2}{a_1}=\frac{b_2}{b_1}=\frac{c_2}{c_1}=k,$$

所以$a_2=ka_1$，$b_2=kb_1$，$c_2=kc_1$，从而方程式 $g_1(x)=0$ 和$g_2(x)=0$实际上是等价的，一个仅是另一个的常数倍。

每一个二次无理数

$$\alpha = A + B\sqrt{D}$$

都有一个共轭数

$$\alpha' = A - B\sqrt{D},$$

由改变$\sqrt{D}$的系数B的符号而得到. 这个定义有一系列有用的推论:

1. 如果α满足二次方程式$ax^2+bx+c=0$, 则α'也满足这一方程式. (为什么?)

2. 二次无理数α的共轭数的共轭数是α. 这可直接从共轭数的定义推出,或从推论1推出, 因为一个二次方程式只有两个根.

3. 两个二次无理数α_1和α_2的和、差、积和商的共轭数分别等于它们的共轭数的和、差、积和商. 用符号写就是

$$(\alpha_1+\alpha_2)' = \alpha_1' + \alpha_2',$$
$$(\alpha_1-\alpha_2)' = \alpha_1' - \alpha_2',$$
$$(\alpha_1\cdot\alpha_2)' = \alpha_1' \cdot \alpha_2',$$
$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)' = \frac{\alpha_1'}{\alpha_2'}.$$

我们来证明第一个论断, 其余的留作习题. 设

$$\alpha_1 = A_1 + B_1\sqrt{D} \quad 和 \quad \alpha_2 = A_2 + B_2\sqrt{D},$$

于是两数和的共轭数是

$$(\alpha_1+\alpha_2)' = [A_1 + A_2 + (B_1+B_2)\sqrt{D}]'$$
$$= (A_1 + A_2) - (B_1+B_2)\sqrt{D}.$$

另一方面, 共轭数的和是

$$\alpha_1' + \alpha_2' = (A_1 + B_1\sqrt{D})' + (A_2 + B_2\sqrt{D})'$$
$$= A_1 - B_1\sqrt{D} + A_2 - B_2\sqrt{D}$$
$$= A_1 + A_2 - (B_1+B_2)\sqrt{D}.$$

比较这两个结果，我们就看到

$$(\alpha_1+\alpha_2)'=\alpha_1'+\alpha_2'.$$

习 题 15

1．证明，如果$\alpha_1=A_1+B_1\sqrt{D}$，$\alpha_2=A_2+B_2\sqrt{D}$(这里A_1,A_2,B_1,B_2是有理数，D是非完全平方的正整数)，那么，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_1-\alpha_2$，$\alpha_1\cdot\alpha_2$，α_1/α_2每一个都可表示为$A+B\sqrt{D}$的形式，其中A,B是有理数.

2．利用第1题中对于α_1和α_2的表达式，仍用α'表示α的共轭数，证明

$$(\alpha_1-\alpha_2)'=\alpha_1'-\alpha_2';\quad(\alpha_1\cdot\alpha_2)'=\alpha_1'\cdot\alpha_2';$$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)'=\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'}.$$

3．若$A+B\sqrt{M}+C\sqrt{N}=0$，并设A,B,C是有理数，M,N是非完全平方的正整数，使得$\sqrt{M}/\sqrt{N}$不是有理数，证明$A=B=C=0$.

4.4 既约二次无理数

二次方程式

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0,\qquad a>0,$$

这里a,b,c是整数，有根

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{P+\sqrt{D}}{Q}\tag{4.20}$$

和

$$\alpha'=\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{P-\sqrt{D}}{Q},\tag{4.21}$$

这里

$$P=-b,\quad D=b^2-4ac,\quad Q=2a>0 \tag{4.22}$$
是整数。如果我们假设$D>0$不是一个完全平方数，则根α和α'是形如$A\pm B\sqrt{D}$的二次不尽根，这里$A=P/Q$和$B=1/Q$是有理数。

在这些假定之下，说由(4.20)所给的无理数α是既约的，如果α比1大，并且由(4.21)所给的它的共轭数α'位于-1与0之间。重要的是，找出既约二次无理数的更多性质及表示方式。遍及本章的其余部分，P,Q,D将都由(4.22)所确定。

然后，假定由(4.20)所给的α的值是既约的二次无理数，即

$$\alpha=\frac{P+\sqrt{D}}{Q}>1\quad 和\quad -1<\alpha'=\frac{P-\sqrt{D}}{Q}<0.$$

条件$\alpha>1$和$\alpha'>-1$可推出$\alpha+\alpha'>0$，或者

$$\frac{P+\sqrt{D}}{Q}+\frac{P-\sqrt{D}}{Q}=\frac{2P}{Q}>0.$$

因为$Q>0$，所以我们推出$P>0$。还有，从

$$\alpha'=\frac{P-\sqrt{D}}{Q}<0\quad 和\quad Q>0$$

可推出$P-\sqrt{D}<0$，或$0<P<\sqrt{D}$。不等式$\alpha>1$蕴含着$P+\sqrt{D}>Q$；不等式$\alpha'>-1$表明$P-\sqrt{D}>-Q$，或$\sqrt{D}-P<Q$。最后我们注意到

$$P^2-D=(-b)^2-(b^2-4ac)=4ac=2c\cdot Q.$$

我们已经证明了，如果α是形如(4.20)的既约的无理数，则整数P,Q,D满足条件

$$0<P<\sqrt{D}\quad 和\quad \sqrt{D}-P<Q<\sqrt{D}+P<2\sqrt{D}. \tag{4.23}$$

我们还没有解释引进既约二次不尽根这一概念的理由．但是，这个概念在数论中是早已建立好了的概念，它最初与既约二次型有关．就我们的目的而言，这一概念的重要性基于这样的事实：对于给定的D，只有有限个形如(4.20)的既约二次不尽根．这可直接由不等式（4.23）推出；因为一旦D确定了，只有有限个正整数P和Q满足

$$P<\sqrt{D} \text{ 和 } Q<2\sqrt{D}.$$

对于一个给定的D，不存在形如$(P+\sqrt{D})/Q$的既约二次不尽根的情形可能发生吗？要是发生这种情形，我们就可以谈论既约二次不尽根的空集了．但是，对任何给定的非完全平方的$D>1$，总至少存在一个与D相联系的既约二次不尽根，这就是

$$\alpha=\lambda+\sqrt{D},$$

这里λ是比$\sqrt{D}$小的最大整数．由λ的确定法可知，$\lambda+\sqrt{D}=\alpha$显然比1大，并且它的共轭数$\alpha'=\lambda-\sqrt{D}$满足$-1<\alpha'<0$．α和α'所满足的方程式是

$$x^2-2\lambda x+\lambda^2-D=0.$$

下面的结果是需要的：如果α是一个既约二次不尽根，则它可以表示为形式

$$\alpha=a_1+\frac{1}{\alpha_1},$$

这里a_1是比α_1小的最大整数，α_1是另一个既约二次不尽根．

为了建立这一结果，设既约二次不尽根α是二次方程式$ax^2+bx+c=0$的根

$$\alpha=\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{P+\sqrt{D}}{Q},$$

其中a,b,c是整数，$a>0$，$P=-b$，$Q=2a$，$D=b^2-4ac>0$不是完全平方数；见(4.22)。把α写成形式$\alpha=a_1+1/\alpha_1$，这里a_1是比α小的最大整数。显然$\alpha=a_1+1/\alpha_1$满足二次方程式

$$a\left(a_1+\frac{1}{\alpha_1}\right)^2+b\left(a_1+\frac{1}{\alpha_1}\right)+c=0,$$

或

$$(aa_1^2+ba_1+c)\alpha_1^2+(2aa_1+b)\alpha_1+a=0.$$

解出正根α_1，我们得到

$$\alpha_1=\frac{P_1+\sqrt{D_1}}{Q_1},$$

这里

$$P_1=-(2aa_1+b),\qquad Q_1=2(aa_1^2+ba_1+c)$$

和

$$\begin{aligned}D_1&=(2aa_1+b)^2-4a(aa_1^2+ba_1+c)\\&=b^2-4ac=D.\end{aligned}$$

这些表达式给出了α_1的显式表示．同样明显的是，P_1,Q_1和$D_1=D$都是整数，而

$$\alpha_1=\frac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1}$$

与α有同样的无理部分．

现在来证明，α_1是既约二次不尽根．为了证明这一点，我们记得，a_1是比α小的最大整数；因此$0<1/\alpha_1<1$，从而$\alpha_1>1$，这是我们所需要的．剩下只要证明$-1<\alpha_1'<0$．关于α_1解方程式$\alpha=a_1+1/\alpha_1$，并对所得结果取共轭(见第116页)，

我们得到

$$\alpha_1' = \left(\frac{1}{\alpha - a_1}\right)' = \frac{1}{\alpha' - a_1}.$$

因此

$$-\frac{1}{\alpha_1'} = a_1 - \alpha' > 1,$$

这是由于 $a_1 \geqslant 1$ 以及假设 $-1 < \alpha' < 0$。由此，$0 < -\alpha_1' < 1$，或 $-1 < \alpha_1' < 0$。这样一来，α_1是既约二次不尽根，从而不等式(4.23)自然地为P_1，Q_1和$D_1 = D$所满足.

最后，我们证明，若α是一既约二次无理数，则与它相联系的$\beta = -1/\alpha'$也是一个既约二次无理数；因不等式$\alpha > 1$，$-1 < \alpha' < 0$蕴含着$\beta > 1$ 和 $\beta' = -1/\alpha$ 位于 -1和0之间。

习 题 16

1．证明，若将$\alpha = (5 + \sqrt{37})/3$表为形式 $\alpha = a_1 + 1/\alpha_1$，这里$a_1$是比$\alpha$小的最大整数，则 α_1 是既约二次无理数。

2．证明，条件(4.23)对α是一个既约二次无理数而言（α是由方程式(4.20)所定义的）是必要且充分的，换言之，证明条件(4.23)蕴含着$1 < \alpha$和$-1 < \alpha' < 0$。

3．求出所有形如$(P + \sqrt{43})/Q$的既约二次无理数.

4.5 定理4.1的逆定理

我们现在来证明

定理4.2（定理4.1的逆定理）如果α是一个既约二次无理数，使得$\alpha > 1$是带有整系数的二次方程式的根，它的共轭数α'位于-1和0之间，则α的连分数是纯循环的。

证明 我们首先研究把α展为连分数的实际展式，然后证明这个展式一定是纯循环的。

第一步是把既约二次无理数α表示为下述形式

$$\alpha=\frac{P+\sqrt{D}}{Q}=a_1+\frac{1}{\alpha_1}, \qquad (4.24)$$

这里a_1是比α小的最大整数，而

$$\alpha_1=\frac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1}>1,$$

又是一个与D相联系的二次无理数。这是我们在 4.4 节证明的。

(4.24)这一步是把α展为连分数的第一步。对α_1重复这一步骤，我们得到

$$\alpha_1=\frac{P_1+\sqrt{D}}{Q_1}=a_2+\frac{1}{\alpha_2},$$

这里a_2是比α_1小的最大整数，而

$$\alpha_2=\frac{P_2+\sqrt{D}}{Q_2}>1$$

是一个既约二次无理数。到此我们有

$$\alpha=a_1+\frac{1}{\alpha_1}, \qquad \alpha_1=a_2+\frac{1}{\alpha_2},$$

这里α,α_1,α_2都是既约的，并且

$$\alpha=a_1+\frac{1}{a_2+}\,\frac{1}{\alpha_2}.$$

继续这个过程，我们逐步地得出下列方程式

$$\alpha_0=a_1+\frac{1}{\alpha_1},$$

$$\alpha_1 = a_2 + \frac{1}{\alpha_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{n-1} = a_n + \frac{1}{\alpha_n},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,$$

这里$\alpha_0=\alpha, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$都是与$D$相联系的既约二次无理数，并且

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \cdots.$$

因为α是一个无理数，所以这个过程永远不会结束，因此，表面看来我们得到了无穷多个既约不尽根 $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_n, \cdots$，它们都是与$D$相联系的．但是在4.4节我们证明了，与$D$相联系的既约$\alpha_i$只有有限个，因此，我们一定会达到一个前面出现过的既约不尽根．这时，假定在序列

$$\alpha_0,\ \alpha_1,\ \cdots,\ \alpha_{k-1},\ \alpha_k\ \cdots,\ \alpha_{l-1},\ \alpha_l,\ \cdots \qquad (4.25)$$

中所有的完全商$\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_l$ 都是不同的，α_l是第 1 个前面出现过的值，使得 $\alpha_l=\alpha_k$，$0 \leqslant k < l$，于是，有可能证明下列事实：

（i）一旦有一个完全商被重复了，完全商的子序列就要重复；换句话说，$\alpha_k=\alpha_l$蕴含着

$$\alpha_{k+1}=\alpha_{l+1},\ \alpha_{k+2}=\alpha_{l+2},\ \cdots.$$

（ii）第一个完全商$\alpha=\alpha_0$自己被重复；换句话说，序列$\alpha=\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \cdots$是纯循环的．

为了证明(i)，我们只要记得

$$\alpha_k = a_{k+1} + \frac{1}{\alpha_{k+1}} = \alpha_l = a_{l+1} + \frac{1}{\alpha_{l+1}},$$

因为a_{k+1}和a_{l+1}是比$\alpha_k = \alpha_l$小的最大整数，所以我们可以得到$a_{k+1} = a_{l+1}$的结论。由此可推出α_{k+1}和α_{l+1}的倒数相等，从而$\alpha_{k+1} = \alpha_{l+1}$。重复这一讨论就可得出

$$\alpha_{k+2} = \alpha_{l+2}, \quad \alpha_{k+3} = \alpha_{l+3}, \cdots.$$

为了证明(ii)，我们来证明，当 $0 < k < l$时，由 $\alpha_k = \alpha_l$ 可推出

$$\alpha_{k-1} = \alpha_{l-1}, \quad \alpha_{k-2} = \alpha_{l-2}, \quad \cdots, \quad \alpha_0 = \alpha_{l-k}.$$

为此，我们利用由相等的完全商α_k和α_l所得出的共轭数相等：$\alpha_k' = \alpha_l'$。由此推出

$$\beta_k = -\frac{1}{\alpha_k'} = -\frac{1}{\alpha_l'} = \beta_l. \tag{4.26}$$

现在，当$k \neq 0$时，我们有

$$\alpha_{k-1} = a_k + \frac{1}{\alpha_k} \quad 和 \quad \alpha_{l-1} = a_l + \frac{1}{\alpha_l};$$

取共轭可得

$$\alpha_{k-1}' = a_k + \frac{1}{\alpha_k'} \quad 和 \quad \alpha_{l-1}' = a_l + \frac{1}{\alpha_l'},$$

因此

$$-\frac{1}{\alpha_k'} = a_k - \alpha_{k-1}' \quad 和 \quad -\frac{1}{\alpha_l'} = a_l - \alpha_{l-1}'.$$

同样地，或写为

$$\beta_k = a_k + \frac{1}{\beta_{k-1}} \quad 和 \quad \beta_l = a_l + \frac{1}{\beta_{l-1}}. \tag{4.27}$$

因为α_{k-1}和α_{l-1}是既约的，所以我们有

$$-1<\alpha_{k-1}<0 \quad 和 \quad -1<\alpha_{l-1}<0,$$

所以

$$0<-\alpha'_{k-1}=\frac{1}{\beta_{k-1}}<1$$

和

$$0<-\alpha'_{l-1}=\frac{1}{\beta_{l-1}}<1.$$

这就证明了，(4.27)中的a_k和a_l分别是不超过β_k和β_l的最大整数；因为$\beta_k=\beta_l$，接着$a_k=a_l$，因此也有

$$a_k+\frac{1}{\alpha_k}=a_l+\frac{1}{\alpha_l}. \tag{4.28}$$

因为（4.28）的左边是α_{k-1}，右边是α_{l-1}，所以我们证明了$\alpha_k=\alpha_l$蕴含着$\alpha_{k-1}=\alpha_{l-1}$。现在，在$k-1\neq0$的情况下，也就是当$\alpha_k$不是第一个完全商时，我们可以把这一讨论重复$k$次，可证出

$$\alpha_{k-2}=\alpha_{l-2}, \qquad \alpha_{k-3}=\alpha_{l-3},$$

等等．直到我们达到第一个α，并得到

$$\alpha_{k-k}=\alpha_0=\alpha_{l-k}=\alpha_s.$$

这样一来，在把既约二次无理数α展为连分数的过程中，我们得出一串方程式

$$\alpha=a_1+\frac{1}{\alpha_1},$$

$$\alpha_1=a_2+\frac{1}{\alpha_2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\alpha_{s-2}=a_{s-1}+\frac{1}{\alpha_{s-1}},$$

$$\alpha_{s-1}=a_s+\frac{1}{\alpha_s}=a_s+\frac{1}{\alpha},$$

这里$\alpha,\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_{s-1}$都是不同的，而$\alpha_s=\alpha$。由此开始再对$\alpha_i$（$i=1,2,\cdots,s-1$）重复。

因为对于每一个$\alpha_k>1$恰存在一个比α_k小的最大整数a_k所以显然序列$a_1,a_2,\cdots,a_s$也将重复

$$\alpha_s=a_{s+1}+\frac{1}{\alpha_{s+1}}=\alpha_0=a_1+\frac{1}{\alpha_1},$$

因此，α的连分数是有下述形式

$$\alpha=[\overline{a_1,a_2,\cdots,a_s}]$$

的一个纯循环连分数。这就完成了定理4.2的证明。

在把这个证明推广到所有二次无理数（既约的和非既约的）之前，我们对表达式

$$\alpha=a_1+\frac{1}{\alpha_1},\quad \alpha_1=a_2+\frac{1}{\alpha_2},\quad \cdots,\quad \alpha_k=a_{k+1}+\frac{1}{\alpha_{k+1}},\quad \cdots$$

中的完全商$\alpha_1,\alpha_2,\cdots$的循环性特征提供一个图示说明。我们要定义两个函数$F(x)$和$G(x)$，F把α_n映射为$1/\alpha_{n+1}$，而G将$1/\alpha_{n+1}$映射为它的倒数α_{n+1}。首先对某一α_n应用F，然后对$F(\alpha_n)$应用G，我们就得到α_{n+1}。

为了定义函数F，注意到

$$\frac{1}{\alpha_{k+1}}=\alpha_k-a_{k+1},$$

这里α_{k+1}是比α_k小的最大整数。用符号$\{x\}$表示比x小的最大整数①。这时我们可以写出

$$\frac{1}{\alpha_{k+1}}=\alpha_k-\{\alpha_k\},$$

因此我们将函数F定义为：

$$F(x)=x-\{x\}。$$

现在我们得到了一个函数，对每一个α_k，它的值为下一个α的倒数；即

$$F(\alpha_k)=\alpha_k-\{\alpha_k\}=\frac{1}{\alpha_{k+1}}.$$

现在，因为一个数的倒数的倒数就是它自己，所以适于G的定义就是

$$G(x)=\frac{1}{x}，所以G\left(\frac{1}{\alpha_{k+1}}\right)=\alpha_{k+1}.$$

换言之，

$$G[F(\alpha_k)]=\alpha_{k+1}.$$

为了从图形上应用这一方案，在同一张图纸上画出函数$F(x)=x-\{x\}$和$G(x)=1/x$；见图10。$F(x)$的图形由平行线段组成，对于正的x，$G(x)$的图形是等轴双曲线$y=1/x$的一支。

设α是一个给定的二次无理数。在水平轴上找出它的位置（点A），测量从A到$F(x)$的图形的垂直距离〔也就是从这一点到$F(\alpha)=B$的距离〕以定出$F(\alpha)=1/\alpha_1$。然后在$G(x)$

① 表示“比x小的最大整数”的经典记号是$[x]$；但是因为这里用此记号表示连分数，所以我们改用花括号来表示.

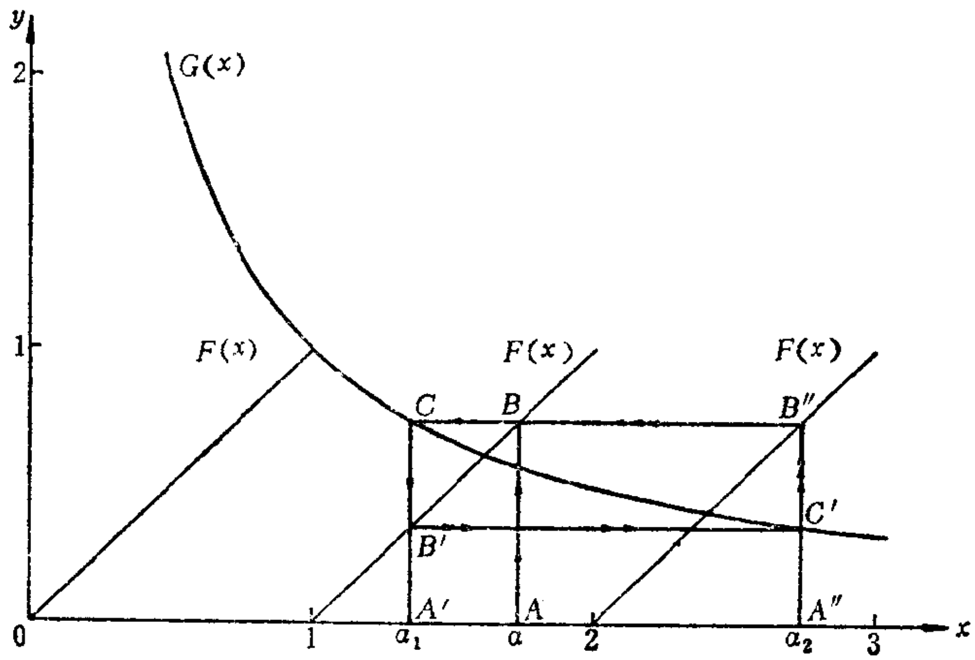

图 10

的图上找出与点B有同样纵坐标的点，即$1/\alpha_1$；我们把这一点称为C，C在x轴上的投影表示α_1的值，因为

$$G(\alpha_1)=\frac{1}{\alpha_1}.$$

现在我们从α_1开始，重复这一过程，从A'到B'再到C'；C'的横坐标表示α_2的值。

图中的箭头指出了从每一个α到下一个的路径，单箭头从α引导到α_1，双箭头从α_1引导到α_2，等等。沿着我们的路径走，如果我们来到双曲线上的一点，而这一点是在这一路径的前一段已经遇到过，那末就有一个重复，从而α_i是循环的。反过来，如果α_i是循环的，那末路径终将产生自身的重复。

习 题 17

1．证明$\alpha=1+\sqrt{2}$是既约的，验证它的展式是纯循环

连分数 $[\overline{2}]$.

2．证明$\sqrt{8}$不是既约的，它的连分数展式不是纯循环的。

3．利用本节末尾所解释的图示法去说明，尽管$\sqrt{5}$不是纯循环的，但是它有一个循环的连分数展式 $[2,\overline{4}]$.注意，部分商$a_1, a_2, \cdots$可以这样地确定：它们分别是从 $\alpha, \alpha_1, \cdots$出发的路径碰到$F(x)$的线段的序数。

4.6 拉格朗日定理

定理4.3 任何一个二次无理数α都有一个连分数展式，这个展式从某点往后是循环的。

证明 证明的中心思想在于指出，当把一个二次无理数α展为连分数的时候，最后总得到一个既约的完全商α_{n+1}，然后根据定理4.2，由此开始的连分数将是循环的。

设α的展式是

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{\alpha_{n+1}}.$$

然后根据方程(4.5)，我们知道

$$\alpha = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}},$$

这里α和α_{n+1}是二次无理数，并且$\alpha_{n+1} > 1$。在这个方程式的两边取共轭，我们得到

$$\alpha' = \frac{\alpha'_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha'_{n+1} q_n + q_{n-1}},$$

或者，解出α'_{n+1}，

$$\alpha'_{n+1} = -\frac{\alpha' q_{n-1} - p_{n-1}}{\alpha' q_n - p_n}.$$

在分子和分母中提出公因子，得到

$$\alpha'_{n+1} = -\frac{q_{n-1}}{q_n}\left(\frac{\alpha' - \dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}}{\alpha' - \dfrac{p_n}{q_n}}\right)$$

$$= -\frac{q_{n-1}}{q_n}\left(\frac{\alpha' - c_{n-1}}{\alpha' - c_n}\right), \qquad (4.29)$$

这里$c_{n-1} = p_{n-1}/q_{n-1}$和$c_n = p_n/q_n$是α的渐近分数．但是，根据第三章对于渐近分数的研究，我们知道，当n无限增大时，c_{n-1}和c_n都以α为极限，因此，当n无限增大时，

$$\frac{\alpha' - c_{n-1}}{\alpha' - c_n}$$

趋向于

$$\frac{\alpha' - \alpha}{\alpha' - \alpha} = 1. \qquad (4.30)$$

我们还知道，渐近分数c_n交替地比α小和比α大，因此，当n增大时，分数(4.30)的值不仅越来越接近于1，并且它们将交替地比1稍大和比1稍小．我们也注意到，在(4.29)中的数q_n和q_{n-1}都是正整数，并且（见77页）$0 < q_{n-1} < q_n$，所以$q_{n-1}/q_n < 1$．这样一来，一旦我们找到了一个n的值，它使(4.30)的分数比1稍小，那么由(4.29)给出的α'_{n+1}的值一定位于-1和0之间．这就证明了α_{n+1}是既约的；根据定理4.2，α的连分数将由此开始是循环的．于是拉格朗日定理得到．

习 题 18

1．证明$\alpha = (8 + \sqrt{37})/9$不是既约的，但是，如果

$$\alpha = a_1 + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{\alpha_{n+1}},$$

则我们将终于到达一个α_{n+1}，它是既约的，并验证由此开始展式是循环的。

4.7 $\sqrt{N}$的连分数

设$N>0$是一个非完全平方的整数，$\sqrt{N}$的连分数取有趣的形式。首先注意到$\sqrt{N}$比1大，因此它的共轭数$-\sqrt{N}$不能位于-1和0之间，所以$\sqrt{N}$不是既约的，从而它的展式

$$\sqrt{N} = a_1 + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_n} + \cdots \qquad (4.31)$$

不是纯循环的。另一方面，因为a_1是比$\sqrt{N}$小的最大整数，所以$\sqrt{N}+a_1$比1大，它的共轭数$-\sqrt{N}+a_1$位于-1与0之间，所以$\sqrt{N}+a_1$是既约的。(4.31)的两边加a_1，我们得到

$$\sqrt{N} + a_1 = 2a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots.$$

因为这一展式是纯循环的，所以它一定取形式

$$\begin{aligned}\alpha &= \sqrt{N} + a_1 \qquad (4.32)\\ &= 2a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots.\end{aligned}$$

因此，$\sqrt{N}$的展式是

$$\begin{aligned}\sqrt{N} &= a_1 + \frac{1}{a_2} + \frac{1}{a_3} + \cdots + \frac{1}{a_n} + \frac{1}{2a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots \qquad (4.33)\\ &= [a_1, \overline{a_2, a_3, \cdots, a_n, 2a_1}],\end{aligned}$$

这里循环从第二项开始到$2a_1$这一项为止。

例如

$$\sqrt{29}=[5,\overline{2,1,1,2,10}],$$
$$\sqrt{19}=[4,\overline{2,1,3,1,2,8}].$$
注意，除去$2a_1$这项外，循环部分是对称的。对称部分可以有中心项，也可以沒有中心项。

为了研究对称部分回顾4.2节，我们记得，如果
$$\alpha'=-\sqrt{N}+a_1$$
是$\alpha=\sqrt{N}+a_1$的共轭数，那么$-1/\alpha'$与α的展式相同，但循环相反。因此，在(4.32)中把周期逆过来，得到
$$-\frac{1}{\alpha'}=\frac{1}{\sqrt{N}-a_1}=a_n+\frac{1}{a_{n-1}}+\cdots+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{2a_1}+\cdots. \tag{4.34}$$
另一方面，我们可以很容易地从(4.33)得到$(\sqrt{N}-a_1)^{-1}$的展式；从(4.33)的两边减去a_1可得
$$\sqrt{N}-a_1=0+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{a_1}+\cdots,$$
这表达式的倒数是
$$\frac{1}{\sqrt{N}-a_1}=a_2+\frac{1}{a_3}+\cdots+\frac{1}{a_n}+\frac{1}{2a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots. \tag{4.35}$$
但是我们知道，连分数展式是唯一的；因此，比较(4.34)与(4.35)，我们推出
$$a_n=a_2,\quad a_{n-1}=a_3,\quad \cdots,\quad a_3=a_{n-1},\quad a_2=a_n.$$
由此可知，$\sqrt{N}$的连分数一定具有形式
$$\sqrt{N}=[a_1,\overline{a_2,a_3,a_4,\cdots,a_4,a_3,a_2,2a_1}].$$
见第136—137页的表2的附加例题。

4.8 彼尔方程式$x^2-Ny^2=\pm1$

在本章的一开始我们就提到了，阿基米德的牛问题可以

归结为解方程式

$$x^2 - 4729494y^2 = 1.$$

在这一节里我们要讨论方程式

$$x^2 - Ny^2 = 1 \tag{4.36}$$

的整数解x和y，其中 $N>0$ 是一个给定的整数，x和y是我们要求的未知整数。我们假定N不是一个完全平方数；否则这一方程式就比较乏味，因为两个完全平方数的差永远不会等于1，除非$(\pm 1)^2 - 0^2$这一特殊情况。（为什么？）

$\sqrt{N}$的连分数展式为我们提供了解彼尔方程式

$$x^2 - Ny^2 = 1 \quad \text{或} \quad x^2 - Ny^2 = -1$$

所需要的一切工具，只要它们是可能的。我们知道，

$$\begin{aligned}\sqrt{N} &= a_1 + \frac{1}{a^2+} \cdots \frac{1}{+a_n+} \frac{1}{2a_1+} \frac{1}{a_2+} \cdots \\ &= a_1 + \frac{1}{a_2+} \cdots \frac{1}{+a_n+} \frac{1}{\alpha_{n+1}},\end{aligned} \tag{4.37}$$

这里

$$\alpha_{n+1} = 2a_1 + \frac{1}{a_2+} \cdots = \sqrt{N} + a_1. \tag{4.38}$$

我们再利用

$$\sqrt{N} = \frac{\alpha_{n+1} p_n + p_{n-1}}{\alpha_{n+1} q_n + q_{n-1}}, \tag{4.39}$$

这里p_{n-1}, q_{n-1}, p_n和q_n是由两个渐近分数$c_{n-1} = p_{n-1}/q_{n-1}$，$c_n = p_n/q_n$算出的，就是(4.37)中$2a_1$这一项前面的渐近分数。(4.39)中的$\alpha_{n+1}$用(4.38)的右边代替，可得

$$\sqrt{N} = \frac{(\sqrt{N} + a_1) p_n + p_{n-1}}{(\sqrt{N} + a_1) q_n + q_{n-1}},$$

然后，两边用分母去乘，我们得到

$$\sqrt{N}(\sqrt{N}+a_1)q_n+q_{n-1}\sqrt{N}=(\sqrt{N}+a_1)p_n+p_{n-1},$$

它等价于

$$Nq_n+(a_1q_n+q_{n-1})\sqrt{N}=(a_1p_n+p_{n-1})+p_n\sqrt{N}.$$

现在，这是一个形如$a+b\sqrt{N}=c+d\sqrt{N}$的方程式，其中a, b, c, d是整数，$\sqrt{N}$是无理数，由此可推出$a=c$和$b=d$（见4.3节）。因此最后一个方程式要求

$$Nq_n=a_1p_n+p_{n-1}\quad 和\quad a_1q_n+q_{n-1}=p_n.$$

把p_n和q_n当作已知数，把p_{n-1}和q_{n-1}当作未知数解这两个方程式，我们求出

$$p_{n-1}=Nq_n-a_1p_n,\qquad q_{n-1}=p_n-a_1q_n. \tag{4.40}$$

但是由定理1.4我们知道

$$p_nq_{n-1}-q_np_{n-1}=(-1)^n.$$

把(4.40)中p_{n-1}和q_{n-1}的值代入，这一方程式就取下面的形式

$$p_n(p_n-a_1q_n)-q_n(Nq_n-a_1p_n)=(-1)^n,$$

即

$$p_n^2-Nq_n^2=(-1)^n. \tag{4.41}$$

如果n是偶数，则方程式(4.41)就变为

$$p_n^2-Nq_n^2=(-1)^n=1.$$

因此彼尔方程式的一个特解是

$$x_1=p_n,\qquad y_1=q_n.$$

如果n是奇数，则

$$p_n^2-Nq_n^2=(-1)^n=-1.$$

从而

$$x_1=p_n,\qquad y_1=q_n$$

给出了方程式$x^2-Ny^2=-1$的一个特解.

如果n是奇数,我们还希望求方程$x^2-Ny^2=1$的一个解.在$\sqrt{N}$的展式中，我们向前移动到第二个循环，也就是移动到a_n这一项第二次出现的时候. 注意到

$$\sqrt{N}=a_1+\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{+a_n+}\frac{1}{2a_1+}\cdots\frac{1}{+a_n+}\frac{1}{2a_1+}\cdots$$

$$=a_1+\frac{1}{a_2+}\cdots\frac{1}{+a_n+}\frac{1}{a_{n+1}+}\cdots\frac{1}{+a_{2n}+}\frac{1}{a_{2n+1}+}\cdots,$$

所以当a_n这一项再次出现的时候，它实际上是a_{2n}这一项；这时

$$p_{2n}^2-Nq_{2n}^2=(-1)^{2n}=1.$$

从而

$$x_1=p_{2n},\quad y_1=q_{2n}$$

又给了方程式$x^2-Ny^2=1$的一个特解.

上面的分析表明，我们总可以找到方程式

$$x^2-Ny^2=1$$

的特解，有时找到方程式$x^2-Ny^2=-1$的特解.并不是所有的形如$x^2-Ny^2=-1$的方程式都是可解的。例如,可以证明(见本书末尾的附录Ⅰ)，方程式$x^2-3y^2=-1$没有整数解。这里我们将只限于考虑那些可解的例子。见表 2。

例1　求方程式$x^2-21y^2=1$的一个特解.

解　这里$N=21$，在表 2 中给出的连分数展式是

$$\sqrt{21}=[4,\overline{1,1,2,1,1,8}]=[a_1,\overline{a_2,a_3,a_4,a_5,a_6,2a_1}]$$

这就指出了$a_n=a_6$，所以$n=6$是偶数。通过计算可得$c_6=55/12$，从而

表 2

N	$\sqrt{N}$的连分数	x_1	y_1	$x_1^2-Ny_1^2$
2	$[1,\overline{2}]$	1	1	-1
3	$[1,\overline{1,2}]$	2	1	$+1$
5	$[2,\overline{4}]$	2	1	-1
6	$[2,\overline{2,4}]$	5	2	$+1$
7	$[2,\overline{1,1,1,4}]$	8	3	$+1$
8	$[2,\overline{1,4}]$	3	1	$+1$
10	$[3,\overline{6}]$	3	1	-1
11	$[3,\overline{3,6}]$	10	3	$+1$
12	$[3,\overline{2,6}]$	7	2	$+1$
13	$[3,\overline{1,1,1,1,6}]$	18	5	-1
14	$[3,\overline{1,2,1,6}]$	15	4	$+1$
15	$[3,\overline{1,6}]$	4	1	$+1$
17	$[4,\overline{8}]$	4	1	-1
18	$[4,\overline{4,8}]$	17	4	$+1$
19	$[4,\overline{2,1,3,1,2,8}]$	170	39	$+1$
20	$[4,\overline{2,8}]$	9	2	$+1$
21	$[4,\overline{1,1,2,1,1,8}]$	55	12	$+1$
22	$[4,\overline{1,2,4,2,1,8}]$	197	42	$+1$
23	$[4,\overline{1,3,1,8}]$	24	5	$+1$
24	$[4,\overline{1,8}]$	5	1	$+1$

N	$\sqrt{N}$的连分数	x_1	y_1	$x_1^2-Ny_1^2$
26	$[5,\overline{10}]$	5	1	-1
27	$[5,\overline{5,10}]$	26	5	$+1$
28	$[5,\overline{3,2,3,10}]$	127	24	$+1$
29	$[5,\overline{2,1,1,2,10}]$	70	13	-1
30	$[5,\overline{2,10}]$	11	2	$+1$
31	$[5,\overline{1,1,3,5,3,1,1,10}]$	1520	273	$+1$
32	$[5,\overline{1,1,1,10}]$	17	3	$+1$
33	$[5,\overline{1,2,1,10}]$	23	4	$+1$
34	$[5,\overline{1,4,1,10}]$	35	6	$+1$
35	$[5,\overline{1,10}]$	6	1	$+1$
37	$[6,\overline{12}]$	6	1	-1
38	$[6,\overline{6,12}]$	37	6	$+1$
39	$[6,\overline{4,12}]$	25	4	$+1$
40	$[6,\overline{3,12}]$	19	3	$+1$

$$x_1=p_6=55,\qquad y_1=q_6=12$$

和

$$x_1^2-21y_1^2=55^2-21\cdot12^2=3025-3024=1;$$

因此$x_1=55$，$y_1=12$是所给方程式的特解。

例 2　求方程式$x^2-29y^2=1$的一个特解。

解　$\sqrt{29}$的展式是

$$\sqrt{29}=[5,\overline{2,1,1,2,10}]=[a_1,\overline{a_2,a_3,a_4,a_5,2a_1}].$$

从而$n=5$是奇数．前5个渐近分数是

$$\frac{5}{1},\quad \frac{11}{2},\quad \frac{16}{3},\quad \frac{27}{5},\quad \frac{70}{13}=\frac{p_5}{q_5}.$$

但是$x_1=p_5=70$，$y_1=q_5=13$给出x^2-29y^2的值是$70^2-29\cdot 13^2=-1$，而不是$+1$．所以我们必须推移到下一个循环节．下一个循环节给出的渐近分数是

$$\frac{727}{135},\quad \frac{1524}{283},\quad \frac{2251}{418},\quad \frac{3775}{701},\quad \frac{9801}{1820}=\frac{p_{10}}{q_{10}},$$

所以，如果我们取

$$x_1=9801,\qquad y_1=1820,$$

就得到

$$x_1^2-29y_1^2=96059601-96059600=1.$$

在例1中所得到的解可以对照表2进行核对．在这个表中对着$N=21$，我们找到展式

$$\sqrt{N}=\sqrt{21}=[4,\overline{1,1,2,1,1,8}].$$

进而在右边找出列出的方程式$x^2-21y^2=1$的解

$$x_1=55,\qquad y_1=12.$$

同样地，我们可以检验例2．这个表中给出

$$\sqrt{N}=\sqrt{29}=[5,\overline{2,1,1,2,10}],$$

并给出方程式$x^2-29y^2=-1$的一个解$x_1=70$，$y_1=13$．这就指出我们要得到方程式$x^2-29y^2=1$的解必须推移到下一个循环节．

习 题 19

1．证明，表2中的$x_1=8$和$y_1=3$是方程式$x^2-7y^2=1$的解．

2．证明$x_1=18$，$y_1=5$是方程式$x^2-13y^2=-1$的解。继续前进到下一个循环节去求出方程式$x^2-13y^2=1$的一个解。

4.9　如何求出彼尔方程式的其它解

我们已经看到了，彼尔方程式$x^2-Ny^2=1$总是可解的，这里N是一个非完全平方的正整数。但是方程式$x_2-Ny^2=-1$并不都是有解的。不过，如果这些方程式中的任一个有解，则由4.8节所概括的方法总得出最小的正数解；也就是，它总是产生两个最小的正数$x_1>0$，$y_1>0$，使得$x_1^2-Ny_1^2=1$或$x_1^2-Ny_1^2=-1$。一旦求得了这个最小正解，我们就可以依下述办法求出所有其它的正解。我们不来证明这些论断，只叙述主要定理，然后用例子去解释和说明它们。

定理4.4　如果(x_1,y_1)是$x^2-Ny^2=1$的最小正解，则所有其它正解(x_n,y_n)可以通过依次设$n=1,2,3,\cdots$而由方程式

$$x_n+y_n\sqrt{N}=(x_1+y_1\sqrt{N})^n \qquad (4.42)$$

得到。

利用二项式定理展开$(x_1+y_1\sqrt{N})^n$，在所得到的方程式中，使有理部分与有理部分相等，使纯无理部分相等就可得到x_n和y_n的值。例如，如果(x_1,y_1)是$x^2-Ny^2=1$的最小正解，那末在方程式(4.42)中设$n=2$就能求得解(x_2,y_2)．这就给出

$$\begin{aligned}x_2+y_2\sqrt{N}&=(x_1+y_1\sqrt{N})^2\\&=(x_1^2+Ny_1^2)+(2x_1y_1)\sqrt{N},\end{aligned}$$

所以$x_2 = x_1^2 + Ny_1^2$和$y_2 = 2x_1y_1$。利用这些值直接算一算就证明了

$$\begin{aligned}x_2^2 - Ny_2^2 &= (x_1^2 + Ny_1^2)^2 - N(2x_1y_1)^2\\ &= x_1^4 + 2Nx_1^2y_1^2 + N^2y_1^4 - 4Nx_1^2y_1^2\\ &= x_1^4 - 2Nx_1^2y_1^2 + N^2y_1^4\\ &= (x_1^2 - Ny_1^2)^2 = 1,\end{aligned}$$

因为根据假设（x_1, y_1）是方程式$x^2 - Ny^2 = 1$的解。

容易证明，如果x_n, y_n是由方程式（4.42）算出的，则$x_n^2 - Ny_n^2 = 1$。由（4.42）我们有

$$x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})(x_1 + y_1\sqrt{N})\cdots(x_1 + y_1\sqrt{N}),$$

在这个表达式的右边有n个因子。因为乘积的共轭等于共轭的乘积，这就给出

$$x_n - y_n\sqrt{N} = (x_1 - y_1\sqrt{N})(x_1 - y_1\sqrt{N})\cdots(x_1 - y_1\sqrt{N}),$$

或

$$x_n - y_n\sqrt{N} = (x_1 - y_1\sqrt{N})^n. \tag{4.43}$$

现在分解$x_n^2 - Ny_n^2$，并利用（4.42）和（4.43）

$$\begin{aligned}x_n^2 - Ny_n^2 &= (x_n + y_n\sqrt{N})(x_n - y_n\sqrt{N})\\ &= (x_1 + y_1\sqrt{N})^n(x_1 - y_1\sqrt{N})^n\\ &= (x_1^2 - Ny_1^2)^n = 1.\end{aligned}$$

这样一来，x_n和y_n是方程式$x^2 - Ny^2 = 1$的解。

例1　在4.8节的例1中，我们求得$x_1 = 55$和$y_1 = 12$是方程式$x^2 - 21y^2 = 1$的一个（最小的）解。在（4.42）中设$n = 2$可得第二个解(x_2, y_2)；这就给出

$$\begin{aligned}x_2 + y_2\sqrt{21} &= (55 + 12\sqrt{21})^2\\ &= 3025 + 1320\sqrt{21} + 3024\end{aligned}$$

$$= 6049 + 1320\sqrt{21}.$$

由此推出$x_2 = 6049$，$y_2 = 1320$. 这两个值满足方程式

$$x^2 - 21y^2 = 1,$$

因为

$$(6049)^2 - 21(1320)^2 = 36590401 - 36590400 = 1.$$

一般说来，彼尔方程式的解变大得很快.

例2 表2指出，$x_1 = 2$，$y_1 = 1$是方程式$x^2 - 3y^2 = 1$的解. 第二个解(x_2, y_2)由方程式

$$x_2 + y_2\sqrt{3} = (2 + 1\sqrt{3})^2 = 7 + 4\sqrt{3}$$

给出，所以$x_2 = 7$，$y_2 = 4$，$7^2 - 3\cdot 4^2 = 1$. 第三个解(x_3, y_3)由方程式

$$x_3 + y_3\sqrt{3} = (2 + 1\sqrt{3})^3 = 26 + 15\sqrt{3}$$

给出，所以$x_3 = 26$，$y_3 = 15$. 这是对的，因为

$$(26)^2 - 3(15)^2 = 676 - 675 = 1.$$

这个过程可一直继续下去.

定理4.5 设$x^2 - Ny^2 = -1$是可解的，并设(x_1, y_1)是最小正解. 那末，设$n = 1, 3, 5, 7, \cdots$可由方程式

$$x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n \tag{4.44}$$

算出$x^2 - Ny^2 = -1$的全部正解. 另外，利用同一组值x_1, y_1，设$n = 2, 4, 6, \cdots$可从方程式

$$x_n + y_n\sqrt{N} = (x_1 + y_1\sqrt{N})^n \tag{4.45}$$

中得出$x^2 - Ny^2 = 1$的全部正解.

例3 表2指出，$x_1 = 3$，$y_1 = 1$是$x^2 - 10y^2 = -1$的最小正解. 在(4.44)中令$n = 3$可得出第二个解. 我们有

$$x_3 + y_3\sqrt{10} = (3 + 1\sqrt{10})^3 = 117 + 37\sqrt{10},$$

所以$x_3 = 117$，$y_3 = 37$是解，因为

$$(117)^2-10(37)^2=13689-13690=-1.$$

如果在（4.45）中取$n=2$，我们得到

$$x_2+y_2\sqrt{10}=(3+1\sqrt{10})^2=19+6\sqrt{10}.$$

这就给出$x_2=19$，$y_2=6$ 及 $19^2-10\cdot 6^2=1$，所以这两个值是$x^2-10y^2=1$的解.

在结束本节时，我们指出，对于研究更一般的形如

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

的两个变量的二次方程式而言，方程式 $x^2-Ny^2=1$ 的研究是预备性的，这里A,B,C,D,E,F是整数，x和y是未知整数。借助对于变量x和y的某种替换可使这个方程式的解（如果它们存在）依赖于一个形如$x^2-Ny^2=M$ 的方程式的解。这包含了一个范围广阔的研究领域，所以我们必须满足于这样一个引论。

习 题 20

1．表 2 中指出，$x_1=17, y_1=4$ 是方程式$x^2-18y^2=1$的最小解。利用定理4.4求出下两个解。

2．表 2 中指出，$x_1=18$，$y_1=5$是$x^2-13y^2=-1$的最小解。利用定理4.5求下一个解。并求方程式$x^2-13y^2=1$的两组解。

3．考虑毕达哥拉斯方程式$x^2+y^2=z^2$；如果m和n是整数，那么值

$$x=2mn,\quad y=m^2-n^2,\quad z=m^2+n^2$$

总给出$x^2+y^2=z^2$的整数解，因为恒等式

$$(2mn)^2+(m^2-n^2)^2=(m^2+n^2)^2$$

成立。现在提出一个问题：求一个勾长和股长分别为x和y的

直角三角形，见图11，使得x和y是相邻的整数．这时

$$y-x=m^2-n^2-2mn=(m-n)^2-2n^2=\pm 1.$$

设$m-n=u$，$n=v$，所以$m=u+n=u+v$。于是问题化为求方程式

$$u^2-2v^2=\pm 1$$

的整数解．解此方程式，并列出$x^2+y^2=z^2$的前四个满足$y-x=\pm 1$的解．

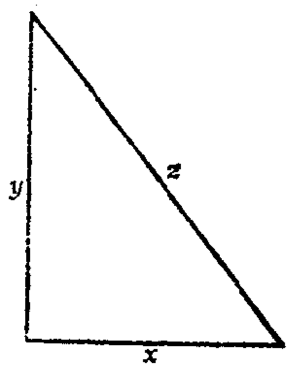

图 11

4．求一组整数(x,y,z)，使之构成一直角三角形的三个边，如图11所示，并使这三个整数是递增的，x和z之间的夹角θ取60°。

第五章　后　记

5.1 引　言

在这一章，我们将预告某些结果，这些结果一旦掌握了本书的前四章的内容后就能着手研究。我们已经指出，可以对彼尔方程式$x^2-Ny^2=M$进行全面的研究，并引出方程式

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

的整数的一般解。但是，现在我们将集中力量去研究一些用有理分数去逼近无理数的定理。

5.2 问题的陈述

本章α表示一个给定的无理数，p/q表示有理分数，其中p和q没有公因子。显然，我们总能找到一个有理分数p/q，q是正的，要离α多近就能离α多近；换言之，如果ε是任一给定的正数，不管多小，我们总能找到互素的整数p,q，使得

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\varepsilon. \tag{5.1}$$

但是有趣的不在这里。我们想要知道的是：在(5.1)中给定了α和ε，q必须多大？或者，给定α和q后，可把ε取多小？

我们已经沿着这条路径做了一些工作了。在第三章我们证明了定理3.9．如果α是一个无理数，则存在无穷多个形如p/q，$q>0$，的最低项的有理分数，使得

$$\left|\alpha-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{q^2}. \tag{5.2}$$

---

① 参看Niven〔8〕和 Hardy and Wvight〔5〕.

α的连分数展式的渐近分数 $p_1/q_1, p_2/q_2, \cdots, p_n/q_n, \cdots$ 中的任何一个都可取为(5.2)中的分数p/q.

正如下面的定理所指出的，不等式(5.2)可以得到改进．这里只给出这个定理的叙述而不给证明.

定理5.1 α的连分数展式的任何两个相继的渐近分数p_n/q_n和p_{n+1}/q_{n+1}中至少有一个(把它叫做p/q)满足不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2}. \tag{5.3}$$

此外，不等式（5.3）有这样一个有趣的特点：如果α是任何一个无理数，并且p/q是一个满足 $q\geqslant1$ 的在最低项中的有理分数，使得

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{2q^2},$$

那么，可以证明，p/q一定是α的简单连分数展式的某个渐近分数.

5.3 胡尔维茨定理

不等式(5.3)立刻提出了下面的有关更佳逼近的问题．给定一个无理数α，是否存在一个数$k>2$，使得不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{kq^2}, \quad q\geqslant1, \tag{5.4}$$

有无穷多个解p/q？如果是这样的话，k能多大？

可以证明，如果α的连分数展式是$[a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots]$，而$p_n/q_n$是第$n$个渐近分数，那么

$$\left|\alpha - \frac{p_n}{q_n}\right| < \frac{1}{a_n q_n^2}; \tag{5.5}$$

因此，只要数$a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$变大得很快，我们可以获得对

α的很好的逼近。另一方面，如果在序列$a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots$中不管我们走多远总有小的数存在的话，那么有理逼近 p_n/q_n 对于小的a_n来说不能太好。

从逼近的观点来看，"最简单的"数在下述意义下是最坏的："最简单的"无理数是

$$\xi = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = [0,1,1,\cdots] = [0,\overline{1}],$$

这里的每一个a_i都是最小可能的值。ξ的渐近分数是

$$\frac{0}{1},\quad \frac{1}{1},\quad \frac{1}{2},\quad \frac{2}{3},\quad \frac{3}{5},\quad \frac{5}{8},\cdots,$$

所以$q_{n-1} = p_n$，及

$$\frac{q_{n-1}}{q_n} = \frac{p_n}{q_n} \to \xi.$$

可以证明，对于很大的n，表达式

$$\left|\xi - \frac{p_n}{q_n}\right| = \left|\frac{\sqrt{5}-1}{2} - \frac{p_n}{q_n}\right|$$

越来越接近于$1/\sqrt{5}\,q_n^2$。

这些注记说明了下面的定理是正确的，这个定理首先是胡尔维茨在1891年证明的。

定理5.2 任何一个无理数α都有无穷多个满足不等式

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{\sqrt{5}\,q^2}, \qquad q \geqslant 1 \tag{5.6}$$

的有理逼近p/q。数$\sqrt{5}$是一个最好可能的数；若用更大的数去代替$\sqrt{5}$，则定理不真。

"不真"在这里的含义是，如果$\sqrt{5}$用任何其它的数$k > \sqrt{5}$来代替，那么只存在有限个这种逼近α的有理数p/q，

而不是无限个。关于$\sqrt{5}$是在这种意义下最好可能的数，尼温〔8〕给出了一个初等证明。

定理5.2的一个证明（借助于连分数）依赖于下面的事实：在α的连分数展式中，除去前三个渐近分数外，每三个相继的渐近分数中至少有一个满足不等式(5.6)。

在胡尔维茨对定理5.2的原始证明中，他没有用连分数；他的证明基于某些分数的性质，这类分数叫做法瑞序列。对任何一个正整数n，序列F_n是有理数a/b的集合，它们满足条件$0 \leqslant a < b \leqslant n$，$(a,b)=1$，并依其大小增加的顺序排列，前四个序列是

$$F_1:\quad \frac{0}{1},\ \frac{1}{1},$$

$$F_2:\quad \frac{0}{1},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{1},$$

$$F_3:\quad \frac{0}{1},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{1},$$

$$F_4:\quad \frac{0}{1},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{1}{1}.$$

这些分数具有许多有用的性质；对这里的研究而言一个重要的性质是：如果对任何n，无理数$0<\beta<1$位于序列F_n的两个相邻的分数p/q，r/s之间，那么三个有理数

$$p/q,\qquad (p+r)/(q+s),\qquad r/s$$

中至少有一个可取为满足不等式

$$\left|\beta-\frac{x}{y}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\,y^2}$$

的$\frac{x}{y}$. 为使这个不等式对无理数 $\alpha>1$ 也成立，设$\beta=\alpha-n$，这里n是不超过α的最大整数. 在上面的不等式中换掉β，我们得到

$$\left|\alpha-\left(n+\frac{x}{y}\right)\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\ y^2}$$

或

$$\left|\alpha-\frac{x'}{y}\right|<\frac{1}{\sqrt{5}\ y^2},$$

这里$x'=ny+x$. 这就是胡尔维茨证明的中心思想. 一个完全的详细的证明见

数学家们对于象在定理5.2中的常数$\sqrt{5}$这样的"最好可能的结果"是从来不会满意的. 这种论断看来总是在鼓励着人们去做进一步的研究. 如果某类无理数不受此规则的约束，那末这一常数可能用更大的数来代替吗? 是的，的确如此. 这类无理数中把所有等价于临界数 $(\sqrt{5}-1)/2$的数排除在外，它们迫使我们把$\sqrt{5}$作为不等式（5.6）的"最好可能的"常数予以接受. 我们将证明，一切与ξ等价的数在其连分数展式的尾部与ξ有相同的循环节，因此对逼近而言有同样的困难.

定义 说数x等价于数y（记为$x\sim y$），若存在满足条件

$$ad-bc=\pm 1 \qquad (5.7)$$

的整数a,b,c,d，并使得x可借助于分式

$$x=\frac{ay+b}{cy+d} \qquad (5.8)$$

通过y表示出来。

例如，如果$y=\sqrt{2}$，$x=(2\sqrt{2}+3)/(\sqrt{2}+1)$，则$x\sim y$，因为$x=(a\sqrt{2}+b)/(c\sqrt{2}+d)$，其中$a=2$，$b=3$，$c=1$，$d=1$，并且$ad-bc=2-3=-1$。易见，刚才所定义的等价性具有等价关系所需要的一切性质，也就是

(i) 返身性，即，每一个x与它自己等价($x\sim x$)；

(ii) 对称性，即，若$x\sim y$，则$y\sim x$；

(iii) 传递性，即，若$x\sim y$和$y\sim z$，则$x\sim z$。

等价关系把全体数的集合分成了等价类，使得每一个数属于且仅属于一个等价类。

现在，如果实数α具有连分数展式

$$\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n,\alpha_{n+1}],$$

那么，由

$$\alpha=\frac{\alpha_{n+1}p_n+p_{n-1}}{\alpha_{n+1}q_n+q_{n-1}}$$

及$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^n$（见定理1.4）可知，$\alpha\sim\alpha_{n+1}$〔见(5.7)和(5.8)〕。因此，如果$\alpha$和$\beta$是任何两个具有连分式展式

$$\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_n,\alpha_{n+1}],$$
$$\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_m,\beta_{m+1}]$$

的实数，并且$\alpha_{n+1}=\beta_{m+1}$，则$\alpha\sim\alpha_{n+1}\sim\beta_{m+1}\sim\beta$，所以$\alpha\sim\beta$。特别地，任何两个有理数$x$和$y$是等价的，因为它们的展式总能写成下述形式

$$x=[a_1,a_2,\cdots,a_n,1],$$
$$y=[b_1,b_2,\cdots,b_m,1];$$

由于$1\sim1$，所以$x\sim y$。

至于一个无理数什么时候与另一个无理数等价的问题，由下面的定理来回答。这里只给出定理的叙述而不加证明。

定理5.3 两个无理数α和β是等价的，当且仅当

$$\alpha=[a_1,a_2,\cdots,a_m,c_0,c_1,c_2,\cdots],$$

$$\beta=[b_1,b_2,\cdots,b_n,c_0,c_1,c_2,\cdots];$$

也就是，当且仅当m项之后的α的商序列与n项之后的β的商序列相同。

现在让我们回到胡尔维茨定理．存在无穷多个无理数与$\xi=(\sqrt{5}-1)/2$等价；我们假定这些数中的每一个都被展为简单连分数．于是，根据定理5.3，从某一位开始，这些展式中的每一个都包含相同的商序列$c_0,c_1,c_2,\cdots$，因此，所有这些等价的无理数在胡尔维茨定理中本质上与数$\xi=(\sqrt{5}-1)/2$起着相同的作用．看来有理由猜测，如果我们不考虑数ξ以及所有与它等价的数，那末胡尔维茨定理中的常数$\sqrt{5}$可用更大的数来代替．事实上，可以证明下面的定理．

定理5.4 任何一个不等价于$\xi=(\sqrt{5}-1)/2$的无理数β，都有无穷多个满足不等式

$$\left|\beta-\frac{p}{q}\right|<\frac{1}{\sqrt{8}q^2} \tag{5.9}$$

的有理逼近值p/q。

存在着与这个定理相类似的一串定理．例如，如果β既不等价于$(\sqrt{5}-1)/2$也不等价于$\sqrt{2}$，则(5.9)中的数$\sqrt{8}$可用任何小于或等于$\sqrt{221}/5$的数来代替。

最近人们的兴趣表现在对无理数作非对称逼近上。例如下面的定理是B.塞各瑞(Segre)在1946年证明的，最近I.尼温①利用法瑞序列给出了一个很简单的证明。

定理5.5 对任何实数$\Upsilon \geqslant 0$，一个无理数α可为无穷多个有理分数p/q所逼近，使得

$$-\frac{1}{\sqrt{1+4\Upsilon}\ q^2}<\frac{p}{q}-\alpha<\frac{\Upsilon}{\sqrt{1+4\Upsilon}\ q^2}.$$

当$\Upsilon=1$时，这就是胡尔维茨定理。当$\Upsilon\neq 1$时，注意下界不是上界取负值，所以表达式是非对称的。

利用连分数R. M. 罗宾逊〔Robinson(1947)〕给出B. 塞各瑞定理的一个证明，他还证明了，给定$\varepsilon>0$，不等式

$$-\frac{1}{(\sqrt{5}-\varepsilon)\ q^2}<\frac{p}{q}-\alpha<\frac{1}{(\sqrt{5}+1)\ q^2}$$

有无穷多个解。这一结果是有趣的，因为它证明了胡尔维茨不等式的一边可以被加强，而本质上沒有减弱另一边。

5.4 结束语

胡尔维茨定理是在丢番图逼近这一总名称下，所研究的整个一类有关的定理和问题中的一个例子。丢番图逼近具有悠久的历史；直到现在还有许多难题沒有解决。近年来在这个领域中发现了几个解决问题的新方法，但是连分数的研究现在是、将来可能仍然是希望探索这一领域的人们的入门阶梯。

探索丢番图逼近这一领域的途径远未穷尽。对于有兴趣的学生来说，它的大门是敞开的；这本小册子只能作为深入去研究各种课题的出发点。读者当然可以更深入地去学习连

---

① On Asymmetric Diophantine Approximations, The Michigan Math. Journal, Vol. 9. No. 2, 1962.pp. 121—123.

分数，例如去读彼龙(Perron)〔11〕的书；可选择解析连分数的推广(见Wall〔14〕)，这一课题是由斯蒂吉斯（Stieltjes）和其他人所首先开始研究的；也可选择连分数的另一漂亮的课题，它与闵可夫斯基所奠基的数的几何密切相关。数的几何的初步知识见Hardy and Wright〔5〕，第三章第24节。

习 题 21

1．算出 $\alpha=(1+\sqrt{10})/3$ 的前六个渐近分数，并证明，除去前三个以外，每三个相邻的渐近分数中至少有一个满足胡尔维茨不等式（5.6）。

2．算出第147页给出的法瑞序列的下面的一排 F_5．

3．确定 $\alpha=(\sqrt{10}-2)/3$ 在第147页上的法瑞序列 F_2 的哪两个相邻的分数在 p/q 和 r/s 之间．验证

$$p/q,\quad (p+r)/(q+s),\quad r/s$$

中至少有一个满足不等式（5.6）。

4．若 $x=(1+\sqrt{5})/2$，证明 $y=(-10x+7)/(7x-5)$ 等价于 x．把 x 和 y 展为简单连分数，并利用它们给出定理5.3的数值验证。

5．证明在第149页上定义的等价关系是(1)返身的；(2)对称的；(3)传递的。

附 录 I

$x^2-3y^2=-1$没有整数解的证明

为了证明方程式$x^2-3y^2=-1$没有关于x,y的整数解，我们首先注意到x和y不能都是偶数或都是奇数。因为，在第一种情况下，设$x=2x_1$，$y=2y_1$都是偶数，那么

$$x^2-3y^2=4(x_1^2-3y_1^2)$$

是偶数，所以它不能等于-1。类似地，在第二种情况下，设$x=2x_1+1$，$y=2y_1+1$都是奇数，那么

$$\begin{aligned}x^2-3y^2&=(2x_1+1)^2-3(2y_1+1)^2\\&=2(2x_1^2-6y_1^2+2x_1-6y_1-1)\end{aligned}$$

也是偶数（一个整数的2倍）。它还是不能等于-1。因此，如果$x^2-3y^2=-1$有整数解，则我们一定有：x是偶数，y是奇数；或者x是奇数，y是偶数。

假定x是偶数，y是奇数，所以$x=2x_1$，$y=2y_1+1$，于是

$$y^2=4y_1^2+4y_1+1=4y_1(y_1+1)+1. \qquad (1)$$

因为y_1和y_1+1是相邻整数，从而其中之一必为偶数。所以$y_1(y_1+1)$可被2整除；因此$4y_1(y_1+1)$可被8整除．由(1)我们断定y^2具有$8n+1$的形式，这里n是一个整数。这时

$$\begin{aligned}x^2-3y^2&=(2x_1)^2-3(8n+1)\\&=4x_1^2-24n-3\\&=4(x_1^2-6n-1)+1\\&=4l+1,\end{aligned}$$

其中$l=x_1^2-6n-1$是一个整数。但是一个形如$4l+1$的整数不取值-1；如果它取-1，则有$4l=-2$，因此$l=-1/2$就不是一个整数。我们留给读者去证明：如果$x^2-3y^2=-1$，则不能有x是奇数，y是偶数。因此，方程式

$$x^2-3y^2=-1$$

的确不存在整数解x,y。实际上，只要N是这样的一个数，使得$N-3$是4的整数倍，那么方程式$x^2-Ny^2=-1$就沒有解。另一方面，如果$N=p$是一个形如$4k+1$的素数，那么方程式$x^2-py^2=-1$总有解。

这后一个问题与费马在1640年提出的下述著名定理密切相关，这个定理1754年由欧拉证明了。

定理 每一个形如$4k+1$的素数p都可表示为两个平方数的和，并且这种表示是唯一的。也就是，存在且仅存在一对整数P,Q，使得$p=P^2+Q^2$。

一旦知道了这一定理，对数学家来说，很自然的是根据已给的素数p去寻找计算数P和Q的方法。拉格朗日(1808)，高斯（1825），塞雷特（Serret）（1848）以及其它数学家都提供了计算法。我们将给出拉格朗日计算法的主要思想，但免去证明的细节。

拉格朗日的方法基于这样的事实：连分数

$$\sqrt{p}=[a_1,\overline{a_2,a_3,\cdots,a_n,2a_1}]$$
$$=[a_1,\overline{a_2,a_3,a_4,\cdots,a_4,a_3,a_2,2a_1}]$$

的循环节有一段$a_2,a_3,a_4,\cdots,a_4,a_3,a_2$是对称的，然后接$2a_1$。但是，我们在4.8节已经证明了，如果对称部分沒有中心项（n是奇数），则方程$x^2-py^2=-1$是可解的。其逆也眞，卽，如果$x^2-py^2=-1$可解，则循环的对称部分沒有中

心项；因此，$\sqrt{p}$的连分数具有形式

$$\sqrt{p}=[a_1,\overline{a_2,a_3,\cdots,a_m,a_m,\cdots,a_3,a_2,2a_1}].$$

我们把它写成等价形式

$$\sqrt{p}=a_1+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_m}+\frac{1}{\alpha_{m+1}},$$

其中

$$\alpha_{m+1}=[\overline{a_m,a_{m-1},\cdots,a_3,a_2,2a_1,a_2,a_3,\cdots,a_m}].$$

现在α_{m+1}是纯循环连分数，因此它有下述形式（见定理4.1）

$$\alpha_{m+1}=\frac{P+\sqrt{p}}{Q}.$$

而且在α_{m+1}的展式中循环是对称的，因此由逆转α_{m+1}的循环而得到的数β等于α_{m+1}。但是根据定理4.1，α_{m+1}的共轭数α'_{m+1}由

$$\alpha'_{m+1}=-\frac{1}{\beta}$$

与β相联系，所以

$$\alpha'_{m+1}\cdot\beta=\alpha'_{m+1}\cdot\alpha_{m+1}=-1.$$

这就意味着

$$\frac{P+\sqrt{p}}{Q}\cdot\frac{P-\sqrt{p}}{Q}=-1,$$

或

$$p=P^2+Q^2.$$

取$p=13=4\cdot 3+1$作一说明．展开$\sqrt{13}$，我们得到

$$\sqrt{13}=[a_1,\overline{a_2,a_3,a_3,a_2,2a_1}]=[3,\overline{1,1,1,1,6}],$$

所以

$$\alpha_{m+1}=\alpha_3=[\overline{1,1,6,1,1}].$$

因此我们要做的就是算α_3。于是

$$\sqrt{13}=3+\frac{1}{\alpha_1},$$

$$\alpha_1=\frac{3+\sqrt{13}}{4}=1+\frac{1}{\alpha_2},$$

$$\alpha_2=\frac{1+\sqrt{13}}{3}=1+\frac{1}{\alpha_3},$$

$$\alpha_3=\frac{2+\sqrt{13}}{3}=\frac{P+\sqrt{p}}{Q},$$

所以$P=2$，$Q=3$，给出

$$p=13=2^2+3^2.$$

习　题　22

1．把$p=29$表示为两个数的平方和。

2．把$p=433$表示为两个数的平方和。

3．有两队数目相等的士兵排成两个方队，每个方队有b排，每排有b个士兵。证明，不可能把两个方队化为一个单独的方队。

再证明，如果从一个方队中取出一个士兵，或者加进一个士兵则有时可以化为一个方队。

附 录 Ⅱ

各种展式

下面收集了一小部分各种各样的连分数展式，主要是出于历史上的兴趣①。表中不限于简单连分数。

1. 蓬贝利（Bombelli）于1572年，用现代的符号来表示，他实质上已经知道

$$\sqrt{13}=3+\cfrac{4}{6+\cfrac{4}{6+\ddots}}.$$

2. 卡塔尔迪（Cataldi），1613。他把$\sqrt{18}$的连分数表示成形式

$$\sqrt{18}=4\cdot\&\frac{2}{8}\cdot\ \&\frac{2}{8}\cdot\ \&\frac{2}{8}\cdot\ \ddots,$$

或写成
$$\sqrt{18}=4\cdot\&\frac{2}{8}.\ \&\frac{2}{8}.\ \&\frac{2}{8}.\ \cdots.$$

3. 布龙克尔（Brouncker），大约在1658年得到

$$\frac{4}{\pi}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{9}{2+\cfrac{25}{2+\cfrac{49}{2+\cfrac{81}{2+\ddots}}}}}.$$

---

① 见D. E. Smith〔13〕。

在历史上，这个表达式与由瓦里斯（Wallis）在1655年给出的无穷乘积

$$\frac{\pi}{2}=\frac{2\cdot2\cdot4\cdot4\cdot6\cdot6\cdot8\cdot8}{1\cdot3\cdot3\cdot5\cdot5\cdot7\cdot7\cdot9}\cdots$$

密切相联系；这两个发现在$\pi=3.14159\cdots$的历史中都是重要的阶段。

4．欧拉（Euler）于1737年发现了含自然对数的底

$$e=2.7182818284590\cdots=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

的如下展式。

$$e-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}}$$

$$=[1,1,2,1,1,4,1,1,6,1,1,8,\cdots].$$

$$\frac{e-1}{e+1}=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ddots}}}}.$$

$$\frac{e-1}{2}=\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+\ddots}}}}.$$

最后一个展式给出了 e 的一个快速逼近。例如，$(e-1)/2$的第 7 个渐近分数是342762/398959，所以，近似地，

$$e=\frac{1084483}{398959}=2.718281828458\cdots.$$

这个数与e的值在第12位小数上差 1 。

5 。兰伯特（Lambert）于1766年得到

$$\frac{e^x-1}{e^x+1}=\cfrac{1}{\cfrac{2}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{6}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{10}{x}+\cfrac{1}{\cfrac{14}{x}+\ddots}}}}.$$

$$\tan x=\cfrac{1}{\cfrac{1}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{3}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{5}{x}-\cfrac{1}{\cfrac{7}{x}-\ddots}}}}.$$

利用这两个展式兰伯特推出

a）如果x是一个有理数，不是 0 ，则e^x不能是有理数；

b）如果 x 是一个有理数，不是 0 ，则 $\tan x$ 不能是有理数。

这样一来，因为$\tan(\pi/4)=1$，所以$\pi/4$和π都不能是有理数。

兰伯特证明中的某些缺点勒让德（Legendre）在他的《初等几何》（Éléments de géometrie）（1794）一书中改正了。

6 。兰伯特，于1770年得到

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{292 + \ddots}}}}$$

$$= [3,7,15,1,292,1,1,1,2,1,3,1,$$
$$14,2,1,1,2,2,2,2,1,84,2,\cdots].$$

与e的展式不同，$\pi = 3.1415926536\cdots$的简单连分数展式似乎没有任何规则．π的渐近分数是

$$\frac{3}{1}, \frac{22}{7}, \frac{333}{106}, \frac{355}{113}, \frac{103993}{33102}, \frac{104348}{33215}, \cdots;$$

分数

$$\frac{355}{113} = 3.14159292035\cdots$$

近似于π，与π最多在第 7 位小数上差 3．

7．

$$\sqrt{a^2+b} = a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \cfrac{b}{2a + \ddots}}}, \qquad a^2 + b > 0.$$

8．

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \ddots}}}.$$

9.

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ddots}}}.$$

渐近分数是$\frac{1}{1},\frac{2}{1},\frac{3}{2},\frac{5}{3},\frac{8}{5},\cdots$，分子与分母都由斐波那奇数1,1,2,3,5,8,13.…构成.

10. 斯特恩（Stern）于1833年得到

$$\frac{\pi}{2}=1-\cfrac{1}{3-\cfrac{2\cdot3}{1-\cfrac{1\cdot2}{3-\cfrac{4\cdot5}{1-\cfrac{3\cdot4}{3-\cfrac{6\cdot7}{1-\cfrac{5\cdot6}{3-\ddots}}}}}}}.$$

11.

$$\sin x=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{(2\cdot3-x^2)+\cfrac{2\cdot3x^2}{(4\cdot5-x^2)+\cfrac{4\cdot5x^2}{(6\cdot7-x^2)+\ddots}}}}.$$

12. 兰伯特于1770年得到

$$\tan x=\cfrac{x}{1-\cfrac{x^2}{3-\cfrac{x^2}{5-\cfrac{x^2}{7-\ddots}}}}.$$

13. 高斯于1812年得到

$$\tanh x=\cfrac{x}{1+\cfrac{x^2}{3+\cfrac{x^2}{5+\ddots}}}.$$

14. 兰伯特与拉格朗日分别于1770年和1776年得到

$$\arctan x=\cfrac{x}{1+\cfrac{1\cdot x^2}{3+\cfrac{4\cdot x^2}{5+\cfrac{9x^2}{7+\cfrac{16x^2}{9+\ddots}}}}},\quad |x|<1.$$

15. 兰伯特与拉格朗日分别于1770年、1776年得到

$$\log(1+x)=\cfrac{x}{1+\cfrac{1^2x}{2+\cfrac{1^2x}{3+\cfrac{2^2x}{4+\cfrac{2^2x}{5+\cfrac{3^2x}{6+\cfrac{3^2x}{7+\ddots}}}}}}},\quad |x|<1.$$

16. 拉格朗日于1813年得到

$$\log\frac{1+x}{1-x}=\cfrac{2x}{1-\cfrac{1\cdot x^2}{3-\cfrac{4x^2}{5-\cfrac{9x^2}{7-\cfrac{16x^2}{9-\ddots}}}}},\quad |x|<1.$$

17. 拉格朗日于1776年得到

$$(1+x)^k=\cfrac{1}{1-\cfrac{kx}{1+\cfrac{\frac{1\cdot(1+k)}{1\cdot 2}x}{1+\cfrac{\frac{1\cdot(1-k)}{2\cdot 3}x}{1+\cfrac{\frac{2(2+k)}{3\cdot 4}x}{1+\cfrac{\frac{2(2-k)}{4\cdot 5}x}{1+\cfrac{\frac{3(3+k)}{5\cdot 6}x}{1+\ddots}}}}}}},\quad |x|<1.$$

18. 拉普拉斯(Laplace)与勒让德分别于 1805年，1846年得到

$$\int_0^x e^{-u^2}du=\frac{\sqrt{\pi}}{2}-\cfrac{\frac{1}{2}e^{-x^2}}{x+\cfrac{1}{2x+\cfrac{2}{x+\cfrac{3}{2x+\cfrac{4}{x+\ddots}}}}},\quad x>0.$$

这是用于概率论和统计学的概率积分。

习 题 答 案

习 题 1

1．(a) $[1,1,1,5]$；　　(b) $[1,1,1,5]$；

(c) $[3,1,1,5,1,3]$；　　(d) $[1,3,6,4,2]$；

(e) $[0,4,2,1,7]$；　　(f) $[3,2,1,6,2,2]$；

(g) $[3,7,15,1,25,1,7,4]$．

2．$\frac{93}{29}$．

3．$\frac{11}{31}$．

4．$\frac{355}{113}=3.1415929204\cdots$；$\pi=3.1415926536\cdots$．

5．(a) $[0,1,1,1,5]$；　　(b) $[0,1,1,1,5]$．

6．如果$p>q>0$，则$p/q>1$，及

$$\frac{p}{q}=[a_1,a_2,\cdots,a_n]=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}},$$

这里$a_1>0$是一个整数．p/q的倒数是

$$\frac{q}{p}=\frac{1}{\frac{p}{q}}=\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

$$=0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}$$

$$=[0,a_1,a_2,\cdots,a_n].$$

反过来，如果$q<p$，则q/p形如

$$\frac{q}{p}=0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}.$$

而它的倒数是

$$\frac{p}{q}=\cfrac{1}{\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}}=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\ddots+\cfrac{1}{a_n}}}.$$

习 题 2

1. (a) $[5,1,3,1]$，$[5,1,4]$；

(b) $[0,5,1,4]$，$[0,5,1,3,1]$；

(c) [−6,5], [−6,4,1];

(d) [3,1,29,1], [3,1,30];

(e) [−4,31], [−4,30,1];

(f) [0,3,1,30], [0,3,1,29,1].

2. (a) 69; (b) 1; (c) 19; (d) 21.

习 题 3

1. (a) [5,1,3,5], 渐近分数5/1, 6/1, 23/4, 121/21.

(b) [3,1,1,2,1,1,1,1,2],

渐近分数3/1, 4/1, 7/2, 18/5, 25/7, 43/12, 68/19, 111/31, 290/81.

(c) [0,1,1,1,1,5,1,8],

渐近分数 0/1, 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 17/28, 20/33, 177/292.

(d) [5,2,11], 渐近分数5/1, 11/2, 126/23.

2. (a) [2,1,1,4,2]; (b) [4,2,1,7,8];

(c) [0,4,2,5,1]; (d) [4,2,7].

3. 偶数个商: (a) $p_6/q_6=51/20$, $p_5/q_5=28/11$, 因此

$$p_6q_5-p_5q_6=51\cdot 11-28\cdot 20=561-560=1,$$

(b) 1, (c) 1, (d) 1.

奇数个商: (a) [2,1,1,4,2], $p_5/q_5=51/20$, $p_4/q_4=23/9$, 因此 $p_5q_4-p_4q_5=51\cdot 9-23\cdot 20=459-460=-1$;

(b) −1; (c) −1; (d) −1.

4. $1393=5\cdot 225+5\cdot 43+4\cdot 10+3\cdot 3+2\cdot 1+2$.

5. $p_5/p_4=134/23=[5,1,4,1,3]$; 与原来的分数相比

较。

类似地，$q_5/q_4 = 35/6 = [5,1,5] = [5,1,4,1]$.

6. (a) $\frac{3}{1}$, $\frac{22}{7}$, $\frac{333}{106}$, $\frac{355}{113}$, $\frac{9208}{2931}$, $\frac{9563}{3044}$, $\frac{76149}{24239}$,

$\frac{314159}{100000}$;

(b) $\frac{2}{1}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{8}{3}$, $\frac{11}{4}$, $\frac{19}{7}$, $\frac{87}{32}$, $\frac{106}{39}$, $\frac{1359}{500} = \frac{2718}{1000}$;

(c) $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{10}{21}$, $\frac{21}{44}$, $\frac{52}{109}$, $\frac{73}{153}$, $\frac{125}{262}$, $\frac{2323}{4869}$,

$\frac{4771}{10000}$;

(d) $\frac{0}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{28}{93}$, $\frac{31}{103}$, $\frac{90}{299}$, $\frac{301}{1000}$.

7. 由$p_n = a_n p_{n-1} + p_{n-2}$我们看出

$$\frac{p_n}{p_{n-1}} = a_n + \frac{1}{\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}}},$$

由$p_{n-1} = a_{n-1} p_{n-2} + p_{n-3}$我们看出

$$\frac{p_{n-1}}{p_{n-2}} = a_{n-1} + \frac{1}{\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}}.$$

类似地

$$\frac{p_{n-2}}{p_{n-3}}=a_{n-2}+\frac{1}{\dfrac{p_{n-3}}{p_{n-4}}},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\frac{p_3}{p_2}=a_3+\frac{1}{\dfrac{p_2}{p_1}}=a_3+\frac{1}{a_2+\dfrac{1}{a_1}}.$$

从而用逐个替换的方法由这些方程可得所需结果．用类似的方法可证明关于q_n/q_{n-1}的结果．

8．在构造渐近分数表的过程中，我们用了$p_n=np_{n-1}+p_{n-2}$这一事实．在这个关系式中，命n依次取$n,n-1,n-2,\cdots,3,2,1$诸值，得出下面的方程式：

$$\begin{aligned}p_n&=np_{n-1}+p_{n-2}\\p_{n-1}&=(n-1)p_{n-2}+p_{n-3}\\p_{n-2}&=(n-2)p_{n-3}+p_{n-4}\\&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\p_3&=3p_2+p_1\\p_2&=2p_1+1\end{aligned}$$

把这些方程式的左边和右边分别加起来，我们得到

$$\begin{aligned}&p_n+p_{n-1}+p_{n-2}+\cdots+p_3+p_2+p_1\\&=np_{n-1}+p_{n-2}\\&\quad+(n-1)p_{n-2}+p_{n-3}\\&\quad+(n-2)p_{n-3}+p_{n-4}\\&\quad\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\&\quad+3p_2+p_1\\&\quad+2p_1+1\\&\quad+p_1.\end{aligned}$$

把p_n留在左边，从方程式两边减去$p_{n-1}, p_{n-2}, \cdots, p_2, p_1$，我们就得到了所求的表达式，即

$$p_n = (n-1)p_{n-1} + (n-1)p_{n-2} + (n-2)p_{n-3} + \cdots + 3p_2 + 2p_1 + (p_1+1).$$

习　题　4

1.
$$p_0q_{-1} - p_{-1}q_0 = 1\cdot 1 - 0\cdot 0 = 1 = (-1)^0,$$
$$p_1q_0 - p_0q_1 = 3\cdot 0 - 1\cdot 1 = (-1)^1,$$
$$p_2q_1 - p_1q_2 = 4\cdot 1 - 3\cdot 1 = (-1)^2,$$

等等。借助简单的计算可完成问题的第二部分。

习　题　5

1. (a) 证明，当$t=(2-2y)/15$时，$x=-3y+t$。从而$y=1-7t-u$，这里$u=t/2$或$t=2u$。

因此

$$y = 1 - 7(2u) - u = 1 - 15u,$$
$$x = -3(1-15u) + 2u = -3 + 47u.$$

所求的解是

$$x = -3 + 47u, \quad y = 1 - 15u,$$
$$u = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \cdots.$$

要使x和y都是正整数，u必须满足$u<1/15$和$u>3/47$的整数。显然，不存在这样的整数；因此，不存在x和y都是正的整数解。注意，解可以有不同的参数表示，但总产生同样的x和y值。

(b)
$$x = -2 + 7u, \quad y = 9 - 31u,$$
$$u = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots.$$

没有正整数解；因为没有既小于9/31又大于2/7的整数u。

(c) $$x=-6+47u,\quad y=2-15u,$$
$$u=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

没有正整数解。

(d) $$x=34-21w,\quad y=13w-7,$$
$$w=0,\pm1,\pm2,\cdots.$$

要解是正的，w必须是比34/21小，比7/13大的整数。因此$w=1$，唯一的正解是$(x,y)=(13,6)$。

2. 所给方程式没有整数解。用欧拉方法你会得出另外的方程式，也没有整数的解。例如，$x=3-3y-u$，这里$u=(1+3y)/6$。但不存在y的整数值使u是整数。为什么？

3. 要是细心画出来的直线应该通过两个点$(x,y)=(2,13)$和$(x,y)=(7,5)$。

4. 设x=马数和y=牛数，那么$37x+22y=2370$。一般解是$x=22t+4$，$y=101-37t$。要得正解t必须是$-2/11$和101/37之间的整数，因此$t=0,1,2$，从而正解是$(x,y)=(4,101),(26,64),(48,27)$。

5. $x=15u-5$，$y=17u-6$。正解要求$u>1/3$和$u>6/17$，因此$u=1,2,3,\cdots$。

6. 方程式$9x+13x=u+v=84$的解是$x=5+13t, y=3-9t$。因此，$u=9(5+13t)$，$v=13(3-9t)$，这里t是任何整数。

7. 方程$2x-3y=1$的解是$x=3u-1$，$y=2u-1$。因此$N=20x+2=60u-18$，这里u是任何整数。例如，当$u=-1$时，
$$N=-78=-4(20)+2=-3(30)-12.$$

习　题　6

（在所有情况下 $t=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$.）

1．(a) $13/17=[0,1,3,4]$，$n=4$，$x_0=q_3=4$，$y_0=p_3=3$，因此 $x=x_0+tb=4+17t$，$y=y_0+ta=3+13t$.

(b) $13/17=[0,1,3,3,1]$，$n=5$，$x_0=q_4=13$，$y_0=p_4=10$，因此

$$x=x_0+tb=13+17t,\quad y=y_0+ta=10+13t.$$

(c) $65/56=[1,6,4,2]$，$n=4$，$x_0=q_3=25$，$y_0=p_3=29$，因此 $x=25+56t$，$y=29+65t$.

(d) $65/56=[1,6,4,1,1]$，$n=5$，$x_0=q_4=31$，$y_0=p_4=36$，因此 $x=31+56t$，$y=36+65t$.

(e) $56/65=[0,1,6,4,1,1]$，$n=6$，$x_0=q_5=36$，$y_0=p_5=31$，因此 $x=36+65t$，$y=31+56t$.

习　题　7

（在所有情况下 $t=0,\pm1,\pm2,\pm3,\cdots$.）

1．(a) $x_0=4$，$y_0=3$，$c=5$，$x=cx_0+bt=20+17t$，$y=cy_0+at=15+13t$．验算：$13(20+17t)-17(15+13t)=5$.

(b) $x_0=25$，$y_0=29$，$c=7$，$x=cx_0+bt=175+56t$，$y=cy_0+at=203+65t$.

(c) $x_0=29$，$y_0=25$，是 $56x-65y=-1$ 的一个特解；因此 $c=3$，$x=cx_0+bt=87+65t$，

$$y=cy_0+at=75+56t.$$

习 题 8

1．(a) 183(=3·61)和174(=2·3·29)的g.c.d.是3，因为3能除尽9，所以方程式是可解的。用3除所给方程式的两边，解所得方程式 $61x+58y=3$. 我们首先解方程式 $61x-58y=1$，对此，展式 $61/58=[1,19,2,1]$ 指出 $x_0=q_{n-1}=39$，$y_0=p_{n-1}=41$. 因此，根据方程式(2.28)，给定方程式的解是

$$x=cq_{n-1}-tb=3\cdot 39-58t=117-58t,$$

$$y=at-cp_{n-1}=61t-3\cdot 41=61t-123.$$

(b) 在这种情况下，我们必须解方程式 $61x-58y=3$，由此出发，根据(2.23)给定方程式的解是

$$x=cx_0+bt=117+58t,\quad y=cy_0+at=123+61t.$$

(c) 这个方程式不可解，因为 $77=7\cdot 11$，$63=3^2\cdot 7$，所以77和63的g.c.d.是7，除不尽 $40(=2^3\cdot 5)$.

(d) 因为 $34(=2\cdot 17)$ 和 $49(=7^2)$ 是互素的，所以我们只有用2.4节的方法去解给定的方程式。所求的解是 $x=65+49t$，$y=45+34t$.

(e) $x=65-49t$，$y=34t-45$.

(f) $56(=2^3\cdot 7)$ 和 $20(2^2\cdot 5)$ 的g.c.d.是4，除不尽11. 因此所给方程式没有整数解。

2．方程式 $11x+7y=68$ 的解是 $x=136-7t$，$y=11t-204$. 要 x 和 y 都是正的解，只有由 $t=19$ 给出的 $x=3$，$y=5$.

3．由提示我们得到 $7x+9y=90$. 这个方程式的一般解是 $x=360-9t$，$y=7t-270$. 要 a 和 b 的值是正值，只要要求 $x\geqslant 0$，$y\geqslant 0$，或者 t 是 $\leqslant 360/9$ 和 $>270/7$ 的整数即可。

所以我们可以取$t=39$和$t=40$。

当$t=39$时，$x=9$，$y=3$和$a=68$，$b=32$。

当$t=40$时，$x=0$，$y=10$和$a=5$，$b=95$。

4．一般解是$x=1200-17t$，$y=13t-900$。$t=70$得出唯一正解$x=10$，$y=10$。

习 题 9

1．在问题中的展式是给定的．前5个渐近分数是：

(a) $\frac{2}{1},\frac{5}{2},\frac{22}{9},\frac{49}{20},\frac{218}{89}$;　　(b) $\frac{2}{1},\frac{3}{1},\frac{5}{2},\frac{8}{3},\frac{37}{14}$,

(c) $\frac{6}{1},\frac{7}{1},\frac{13}{2},\frac{46}{7},\frac{59}{9}$;　　(d) $\frac{1}{1},\frac{6}{5},\frac{13}{11},\frac{45}{38},\frac{103}{87}$;

(e) $\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\frac{3}{11},\frac{4}{15}$.

2．(a) 设$x=[2,\overline{2,4}]=2+\frac{1}{y}$，$y=2+\frac{1}{4}+\frac{1}{y}$．因此

$$y=\frac{2+\sqrt{6}}{2}=\frac{1}{\sqrt{6}-2}.\quad x=2+(\sqrt{6}-2)=\sqrt{6}.$$

(b) 设$x=5+\frac{1}{y}$，$y=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\frac{1}{10}+\frac{1}{y}$．那么

$$7y^2-10y-1=0\quad 或\quad y=\frac{5+\sqrt{32}}{7}=\frac{1}{\sqrt{32}-5}.$$

因此$x=5+(\sqrt{32}-5)=\sqrt{32}$。

3．为了证明$AH=4^2/(7^2+8^2)$，见图3，注意在三角形AOD中，$(AD)^2=(7^2+8^2)/8^2$。由三角形AGF和AOD的相似性，我们知道

$$\frac{AF}{AG}=\frac{AD}{1} \quad 或 \quad \frac{(AF)^2}{(AG)^2}=(AD)^2 \quad 或 \quad (AG)^2=\frac{(AF)^2}{(AD)^2}.$$

因为$AF=1/2$，所以

$$(AG)^2=\frac{4^2}{7^2+8^2}.$$

另一方面，由三角形AHF和AGD的相似性，我们得到$AF/AD=AH/AG$。但是我们已经知道$AF/AD=AG/1$。因此，利用除法，

$$1=\frac{AH}{(AG)^2} \quad 或 \quad AH=\frac{4^2}{7^2+8^2}.$$

6．在第n年，全部分枝数F_n由至少一年的分枝数O_n和不到一年的分枝数Y_n组成，用符号写，$F_n=O_n+Y_n$。在下一年中有

$$F_{n+1}=2O_n+Y_n=O_n+O_n+Y_n=F_n+O_n$$

个分枝。因为至少一年的分枝数是前一年的全部分枝数，所以$O_n=F_{n-1}$。于是

$$F_{n+1}=F_n+F_{n-1}, \qquad n=2,3,\cdots$$

及$F_1=1$（因为在第一年中只有树干出现）产生出斐波那奇数的递推公式。

8．第一种解法：构造边为$x=AB$的正方形；见图13a。

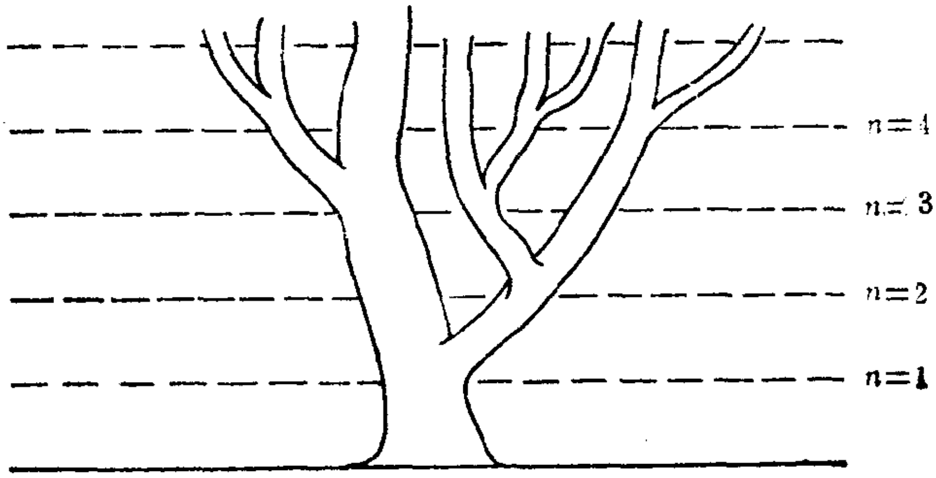

图　12

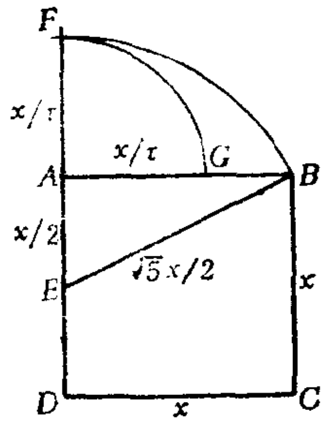

图　13a

求出点E，使$AE=ED$，连$EB=\sqrt{5}\,x/2$。以E为圆心，EB为半径画出弧BF。这时

$$\begin{aligned}AG&=AF=EF-AE\\&=\frac{1}{2}\sqrt{5}\;x-\frac{1}{2}\;x=\frac{1}{2}x\cdot(\sqrt{5}-1)=\frac{x}{\tau},\end{aligned}$$

这里　$\tau=(\sqrt{5}+1))/2$。以A为心，以AF为半径画出弧FG。显然$AG=x/\tau$，所以

$$GB = AB - AG = x - \frac{x}{\tau}$$

$$= x\left(1 - \frac{1}{\tau}\right) = x\left(\frac{\tau - 1}{\tau}\right) = \frac{x}{\tau^2}.$$

因此，

$$\frac{AG}{GB} = \frac{x/\tau}{x/\tau^2} = \tau \quad 或 \quad AG = \tau(GB).$$

第二种解法：作直角三角形BAC，使得$AB = x$，$AC = x/2$；见图13b．以C为中心以$BC = \sqrt{5}\,x/2$为半径求出点D．这时$AC + CD = \tau x$，这里 $\tau = (1+\sqrt{5})/2$．求点E，使得$DE = AB = x$．引BE，再引GD平行于BE．于是

$$\frac{AG}{GB} = \frac{AD}{DE} = \frac{\tau x}{x} = \tau \quad 和 \quad AG = \tau(GB).$$

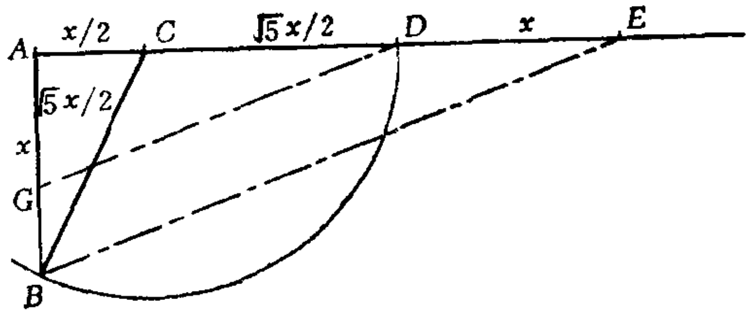

图 13b

9．对边长为1的正五边形$ABCDE$，先证明AD平行于BC，BE平行于CD．因此$BG = CD$．类似地，证明HI平行于BE，BH平行于FI，所以$BF = HI$．利用相似三角形，我们看到$AD/AI = CD/HI$．但是$CD = BG = AI$和

$HI = BF = ID$,因此$AD/AI = AI/ID$,或者$(AD)(ID) = (AI)^2$。现在$BC = 1 = AI$，如果设$AD = x$，则$ID = x - 1$和$x(x-1) = 1$，或$x^2 - x - 1 = 0$，所以$x = \tau = \frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$。一条长为$\tau$的线段可利用问题4的结果来构造。因此为了构造一个正五边形，引$CD = 1$，然后以C和D为中心，以$AC = CD = \tau$为半径求出点A。接着可以求出点B和E，因为$AB = BC = AE = DE = 1$。

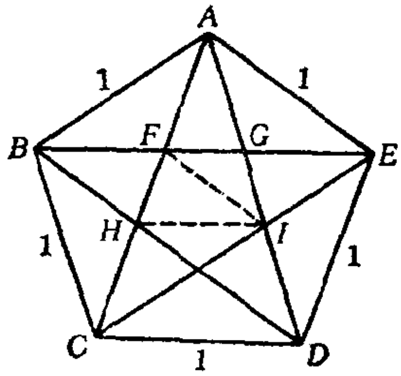

图 14

习 题 10

1．$\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$的奇渐近分数是1/1,7/5,41/29,…,都比$\sqrt{2} = 1.414\cdots$小。偶渐近分数是3/2,17/12,99/90,…，都比$\sqrt{2}$大。此外$1/1 < 7/5 < 3/2$，等等。

习 题 11

1．$2893/1323 = [2,5,2,1,4,5,1,2]$，$c_1 = 2/1$，$c_2 = 11/5$，$c_3 = 24/11$，$c_4 = 35/16$，$c_5 = 164/75$，$c_6 = 855/391$，…计算指出

$$\left|\frac{2893}{1323}-\frac{164}{75}\right|<\frac{1}{q_5q_6}<0.0005,$$

因此所求的近似值是164/75。在这个问题中用 $1/q_5^2$ 代替$1/q_5q_6$就够了，因为$(1/75)^2<0.0005$。

2．$\sqrt{19}=4.358899\cdots=[4,\overline{2,1,3,1,2,8}]$。

渐近分数是$\frac{4}{1},\frac{9}{2},\frac{13}{3},\frac{48}{11},\frac{61}{14},\frac{170}{39},\frac{1421}{326},\cdots$。

渐近分数 $c_7=1421/326$ 给出$1/q_7^2=1/326^2<0.00005$，因此c_7是所求的近似值。

3．π的前5个渐近分数是$\frac{3}{1},\frac{23}{7},\frac{333}{106},\frac{355}{113},\frac{103993}{33102}$。依次计算

$$\frac{1}{1\cdot7},\ \frac{1}{7\cdot106},\ \frac{1}{113\cdot33102}.$$

例如，$1/7\cdot106=0.00134\cdots$；用22/7代替$\pi$的误差最多是$0.00134\cdots$。

习　题　12

1．$\alpha=(\sqrt{5}-1)/2=[0,1,1,1,\cdots]$。标出点$(x,y)=(q_n,p_n)=(1,0),(1,1),(2,1,),(3,2),(5,3),(8,5),(13,8),\cdots$。

细心地画出直线$y=\alpha x$，这里$\alpha=0.62$是$(\sqrt{5}-1)/2$的近似值。

2．$\alpha=\sqrt{3}=[1,\overline{1,2}]$。标出点$(x,y)=(q_n,p_n)=(1,1),(1,2),(3,5),(4,7),(11,19),(15,26),\cdots$。再画出直线$y=\sqrt{3}x$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$。

习 题 13

1．(a) $x=(3+\sqrt{13})/2=3.30277\cdots$。前几个渐近分数是 $3/1=3.0000\cdots$，$10/3=3.3333\cdots$，$33/10=3.3000\cdots$，$109/33=3.0303\cdots$。

(b) $x=(5+\sqrt{29})/2=5.19258\cdots$。前几个渐近分数是 $5/1=5.0000\cdots$，$26/5=5.2000\cdots$，$135/26=5.1923\cdots$，$701/135=5.1926\cdots$。

2．写出

$$x=b+\cfrac{1}{a+\cfrac{1}{x}}=\frac{(ab+1)x+b}{ax+1},$$

于是 $ax^2-abx-ac=0$，因为 $b=ac$，所以 x 也满足等价方程式 $x^2-bx-c=0$。

3．例如，设 $a=1,b=2$，则 $x=[0,1,2,1,2,\cdots]=[0,\overline{1,2}]$。前几个渐近分数是 $0/1,1/1,2/3,3/4,8/11,\cdots$。设

$$\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{p_1}{q_1}=\frac{0}{1},\qquad \frac{p_n}{q_n}=\frac{p_3}{q_3}=\frac{2}{3},$$

$$\frac{p_{n+2}}{q_{n+2}}=\frac{p_5}{q_5}=\frac{8}{11},$$

那么 $p_{n+2}-(ab+2)p_n+p_{n-2}=0$ 给出 $8-4(2)+0=0$。试试另一种情况。

习 题 14

1．(a) $\alpha=(\sqrt{12}+3)/3>1$，$\beta=\sqrt{12}+3>1$。

(b) $3\alpha^2-6\alpha-1=0$。

(c) $\alpha' = (3-\sqrt{12})/3 = -0.154\cdots$,

$-1/\beta = -1/(\sqrt{12}+3) = (3-\sqrt{12})/3$.

2. (a) $2\alpha^2+2\alpha-7=0$, $\alpha=(\sqrt{15}-1)/2>1$;

$\alpha' = (-1-\sqrt{15})/2<-2$.

(b) $3\gamma^2-5\gamma+1=0$, $\gamma=\frac{1}{6}(5+\sqrt{13})>1$;

$\gamma' = (5-\sqrt{13})/6 = 0.232\cdots>0$.

习 题 15

1. $\alpha_1 \pm \alpha_2 = (A_1 \pm A_2) + (B_1 \pm B_2)\sqrt{D}$;

$$\alpha_1 \cdot \alpha_2 = (A_1 + B_1\sqrt{D}) \cdot (A_2 + B_2\sqrt{D}) = A_1A_2 + B_1B_2D + (A_1B_2 + A_2B_1)\sqrt{D};$$

$$\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \left(\frac{A_1A_2 - B_1B_2D}{A_2^2 - B_2^2D}\right) + \left(\frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_2^2 - B_2^2D}\right)\sqrt{D},$$

$A_2^2 - B_2^2D \neq 0$,

因为若$A_2^2 - B_2^2D = 0$，则D就会是一个完全平方数了。

2. $$(\alpha_1 - \alpha_2)' = (A_1 - A_2) - (B_1 - B_2)\sqrt{D} = (A_1 - B_1\sqrt{D}) - (A_2 - B_2\sqrt{D}) = \alpha_1' - \alpha_2';$$

$$(\alpha_1 \cdot \alpha_2)' = (A_1A_2 + B_1B_2D) - (A_1B_2 + B_1A_2)\sqrt{D} = (A_1 - B_1\sqrt{D})(A_2 - B_2\sqrt{D}) = \alpha_1' \cdot \alpha_2';$$

$$\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right)' = \left(\frac{A_1A_2 - B_1B_2D}{A_2^2 - B_2^2D}\right) - \left(\frac{A_2B_1 - A_1B_2}{A_2^2 - B_2^2D}\right)\sqrt{D};$$

另一方面

$$\frac{\alpha_1'}{\alpha_2'}=\frac{A_1-B_1\sqrt{D}}{A_2-B_2\sqrt{D}}\cdot\frac{A_2+B_2\sqrt{D}}{A_2+B_2\sqrt{D}}$$

$$=\left(\frac{A_1A_2-B_1B_2D}{A_2^2-B_2^2D}\right)-\left(\frac{A_2B_1-A_1B_2}{A_2^2-B_2^2D}\right)\sqrt{D}.$$

3． $A+B\sqrt{M}=-C\sqrt{N}$；因此$2AB\sqrt{M}=C^2N-A^2-B^2M$。如果$AB\neq 0$，则这个方程式的左边是无理数，右边是有理数；这是不可能的。如果$AB=0$，则$A=0$或$B=0$。如果$A=0$，$B\neq 0$，则由$A+B\sqrt{M}+C\sqrt{N}=0$。我们看到$\sqrt{M}/\sqrt{N}=-C/B$，与假设相矛盾。因此，若$A=0$，则$B=0$，从而$C=0$。若$B=0$,则

$$A+C\sqrt{N}=0.\text{ 因此}A=0,\ C=0.$$

习　题　16

1．比$(5+\sqrt{37})/3$小的最大整数是3。如果

$$\alpha=\frac{5+\sqrt{37}}{3}=3+\frac{1}{\alpha_1},\qquad \text{则}\quad \frac{1}{\alpha_1}=\frac{-4+\sqrt{37}}{3}$$

和

$$\alpha_1=\frac{3}{-4+\sqrt{37}}=\frac{4+\sqrt{37}}{7}>1.$$

另一方面，$\alpha'=(4-\sqrt{37})/7$近似于$-2/7$，所以$-1<\alpha'<0$。因此α_1是既约的。

2．由$0<P<\sqrt{D}$和$\sqrt{D}-P<Q<\sqrt{D}+P$，见(4.23)，可推出

$$\alpha=\frac{P+\sqrt{D}}{Q}>\frac{Q}{Q}=1.$$

因为$Q>0$，$P-\sqrt{D}<0$，所以

$$\alpha'=\frac{P-\sqrt{D}}{Q}<0.$$

又，$\sqrt{D}-P<Q$蕴含着$(\sqrt{D}-P)/Q<1$，所以

$$\alpha'=\frac{P-\sqrt{D}}{Q}>-1.$$

3．形如$\frac{P+\sqrt{43}}{Q}$所表示的数的全体是用下述方法得到的，这里P和Q是满足条件（4.23）的整数：如果$P=1$，则$\sqrt{43}-1<Q<\sqrt{43}+1$，即$6\leqslant Q\leqslant 7$；这就得出

$$\frac{1+\sqrt{43}}{6},\quad \frac{1+\sqrt{43}}{7}.$$

如果$P=2$，则$5\leqslant Q\leqslant 8$；这就得出

$$\frac{2+\sqrt{43}}{5},\quad \frac{2+\sqrt{43}}{6},\quad \frac{2+\sqrt{43}}{7},\quad \frac{2+\sqrt{43}}{8}.$$

如果$P=3$，则$4\leqslant Q\leqslant 9$；这就得出

$$\frac{3+\sqrt{43}}{n},\quad n=4,5,6,7,8,9.$$

对于$P=4,5,6$，运用同样的步骤，我们求出

$$\frac{4+\sqrt{43}}{k},\quad k=3,4,\cdots,10;$$

$$\frac{5+\sqrt{43}}{l},\quad l=2,3,\cdots,11;$$

$$\frac{6+\sqrt{43}}{m},\quad m=1,2,\cdots,12.$$

习 题 17

1. $\alpha=1+\sqrt{2}>1$, $\alpha'=1-\sqrt{2}=1-1.414\cdots$位于$-1$和0之间.

又, $1+\sqrt{2}=2+\dfrac{1}{\alpha_1}$, $\alpha_1=1+\sqrt{2}=\alpha$,因此$\alpha=[2,2,2,\cdots]=[\overline{2}]$.

2. $\alpha=\sqrt{8}>1$, $\alpha'=-\sqrt{8}$不在-1和0之间. $\sqrt{8}=[2,\overline{1,4}]$

习 题 18

1. $\dfrac{8+\sqrt{37}}{9}=1+\dfrac{1}{\alpha_1}$,

$$\alpha_1=\frac{1+\sqrt{37}}{4}=1+\frac{1}{\alpha_2},\quad \alpha_2=\frac{3+\sqrt{37}}{7}=1+\frac{1}{\alpha_3},$$

$$\alpha_3=\frac{4+\sqrt{37}}{3}=3+\frac{1}{\alpha_4},\quad \alpha_4=\frac{5+\sqrt{37}}{4}=2+\frac{1}{\alpha_5},$$

$\alpha_5=\alpha_2$, 这里α_2是既约二次无理数. 因此

$$\frac{8+\sqrt{37}}{9}=[1,1,\overline{1,3,2}].$$

注意α和α_1不是既约的, 但是

$$\alpha_2=\frac{3+\sqrt{37}}{7}>1,\quad -1<\alpha_2'=\frac{3-\sqrt{37}}{7}<0;$$

因此α_2是既约的, 所以连分数由此开始是循环的.

习　题　19

1． $\sqrt{7}=[2,\overline{1,1,1,4}]$．渐近分数是

$$2/1,\quad 3/1,\quad 5/2,\quad 8/3=p_4/q_4,$$

所以$p_4=x_1=8$，$q_4=y_1=3$ 和

$$x_1^2-7y_1^2=64-7(9)=64-63=1.$$

2． $\sqrt{13}=[3,\overline{1,1,1,1,6}]$．前五个渐近分数是$3/1,4/1,7/2,11/3,18/5=p_5/q_5$。所以$p_5=x_1=18$，$q_5=y_1=5$ 给出了$x^2-13y^2=-1$的一个解。进行到第10个渐近分数，我们求出$p_{10}/q_{10}=649/180$。于是$x_2=649,y_2=180$ 是 $x^2-13y^2=1$的解。

习　题　20

1． 根据定理4.4，下两个解(x_2,y_2)和(x_3,y_3)由

$$x_2+y_2\sqrt{18}=(x_1+y_1\sqrt{18})^2$$

和

$$x_3+y_3\sqrt{18}=(x_1+y_1\sqrt{18})^3$$

得出．第一个关系式产生

$$x_2+y_2\sqrt{18}=x_1^2+18y_1^2+2x_1y_1\sqrt{18}.$$

因为$A+B\sqrt{D}=C+E\sqrt{D}$，当且仅当，$A=C$和$B=E$，因为$x_1=17$，$y_1=4$，所以我们有

$$x_2=x_1^2+18y_1^2=(17)^2+18(4)^2=577,$$

$$y_2=2x_1y_1=2\cdot17\cdot4=136$$

和

$$x_2^2-18y_2^2=(577)^2-18(136)^2=1.$$

由关于x_3的关系式，我们有

$$x_3+y_3\sqrt{18}=x_1^3+3x_1^2y_1\sqrt{18}+3x_1y_1^2 18+y_1^3 18\sqrt{18}$$
$$=x_1^3+54x_1y_1^2+(3x_1^2y_1+18y_1^3)\sqrt{18},$$

所以

$$x_3=x_1^3+54x_1y_1^2,\quad y_3=3x_1^2y_1+18y_1^3.$$

若用17代替x_1，用4代替y_1，则可以验证关系式$x_3^2-18y_3^2=1$成立。

2. 根据定理4.5，$x^2-13y^2=-1$的下一个解由

$$x_3+y_3\sqrt{13}=(x_1+y_1\sqrt{13})^3$$
$$=x_1^3+39x_1y_1^2+(3x_1^2y_1+13y_1^3)\sqrt{13}$$

得到；$x_1=18, y_1=5$是最小解．它确定了下一个解$x_3=x_1^3+39x_1y_1^2, y_3=3x_1^2y_1+13y_1^3$．方程式$x^2-13y^2=1$的解$(x_2, y_2)$和$(x_4, y_4)$从

$$x_2+y_2\sqrt{13}=(x_1+y_1\sqrt{13})^2$$

和

$$x_4+y_4\sqrt{13}=(x_1+y_1\sqrt{13})^4$$

得到．计算留给勤勉的读者吧。

3. 表2指出，$u_1=1$，$v_1=1$是$u^2-2v^2=-1$的最小解。这就得到$u_1=1$，$v_1=n_1=1$，$m_1=2$，$x_1=4$，$y_1=3$，$z_1=5$；

$$x_1^2+y_1^2=3^2+4^2=25=z_1^2.$$

$u^2+zv^2=\pm1$的其它解由

$$u_k+v_k\sqrt{2}=(u_1+v_1\sqrt{2})^k=(1+\sqrt{2})^k,$$
$$k=2,3,\cdots$$

得到。于是，当$k=2$时，$u_2+v_2\sqrt{2}=3+2\sqrt{2}$，所以$u_2=3$，$v_2=n_2=2$，$m_2=5$，$x_2=20$，$y_2=21$，$z_2=29$；

$$x_2^2+y_2^2=841=z_2^2.$$

对于$k=3$，$u_3+v_3\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^3=7+5\sqrt{2}$，所以

$$u_3=7,\quad v_3=n_3=5,\quad m_3=12,$$

$$x_3=120,\quad y_3=119,\quad z_3=169;$$

$$x_3^2+y_3^2=14400+14161=28561=z_3^2.$$

对于$k=4$，$u_4+v_4\sqrt{2}=(1+\sqrt{2})^4=17+12\sqrt{2}$，所以$u_4=17$，$v_4=n_4=12$，$m_4=29$，$x_4=696$，$y_4=697$，$z_4=985$；

$$x_4^2+y_4^2=484416+485809=970225=z_4^2.$$

4．作为对于习题20问题3的命题的解释，边的长度可以写为

$$x=m^2-n^2,\quad y=2mn,\quad z=m^2+n^2,$$

这里m和n是正整数，$m>n$。因此

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{y/z}{1+(x/z)}$$

$$=\frac{2mn/(m^2+n^2)}{1+(m^2-n^2)/(m^2+n^2)}=\frac{n}{m}.$$

如果我们能找到整数序列$n_1,n_2,\cdots$和$m_1,m_2,\cdots$，使得比n_1/m_1，$n_2/m_2,\cdots$趋近于$1/\sqrt{3}$，则$\theta/2$就趋近于30°，θ就趋近于60°．为了找出这样的序列，我们把$\sqrt{3}$化为连分数

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\cdots.$$

设m_i和n_i分别是渐近分数c_i的分子和分母．我们得出

$$m_i:\ 2,\ 5,\ 7,\ 19,\ 26,\ 71,\ \cdots,$$

$$n_i:\ 1,\ 3,\ 4,\ 11,\ 15,\ 41,\ \cdots,$$

以及相应的以(3,4,5)，(16,30,34)，…为边的三角形．

第 6 个三角形以(3360,5822,6722)为边，它的角 θ 介于 60°和61°之间，更接近60°.

习 题 21

1．$\alpha=(1+\sqrt{10})/3=1\cdot3874\cdots$ 的前 6 个渐近分数是 1/1，3/2，4/3，7/5，18/13，25/18，渐近分数 7/5 满足不等式(5.6)；注意，1/2也满足(5.6)。

2．F_5: $\frac{0}{1},\frac{1}{5},\frac{1}{4},\frac{1}{3},\frac{2}{5},\frac{1}{2},\frac{3}{5},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{4}{5},\frac{1}{1}$.

3．在F_2中，$\alpha=0.387\cdots$位于0/1和1/2之间．数

$$\frac{0}{1},\quad \frac{0+1}{1+2}=\frac{1}{3}\quad 和\quad \frac{1}{2}$$

中第一个满足(5.6).其它两个接近但不满足(5.6).

4．$x\sim y$，因为$(-10)(-5)-(7)(7)=1$.

$$x=[\overline{1}],\quad y=[-2,1,1,4,\overline{1}]=\frac{-169-\sqrt{5}}{118}.$$

5．(i) 因为$x=(ax+b)/(cx+d)$，其中$a=1$，$b=0$，$c=0$，$d=1$，所以我们有$ad-bc=1-0=1$,因此$x\sim x$.

(ii) 如果$x=(ay+b)/(cy+d)$，$ad-bc=\pm1$，则

$$y=\frac{-dx+b}{cx-a}=\frac{Ax+B}{Cx+D},$$

这里$AD-BC=ad-bc=\pm1$．因此$y\sim x$.

(iii) 因为$x\sim y$和$y\sim z$，所以我们可以写出

$$x=\frac{ay+b}{cy+d}\quad 和\quad y=\frac{a'z+b'}{c'z+d'},$$

这里分别有$ad-bc=\pm1$和$a'd'-b'c'=\pm1$．这时

$$x=\frac{a\left(\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+b}{c\left(\dfrac{a'z+b'}{c'z+d'}\right)+d}$$

$$=\frac{(aa'+bc')z+(ab'+bd')}{(ca'+dc')z+cb'+dd'}=\frac{Az+B}{Cz+D}$$

和

$AD-BC$

$=(aa'+bc')(cb'+dd')-(ab'+bd')(ca'+\ +dc')$

$=aa'dd'+bb'cc'-a'bcd'-ab'c'd$

$=a'd'(ad-bc)-b'c'(ad-bc)$

$=(ad-bc)(a'd'-b'c')$

$=\pm1$．

习　题　22

1．$\sqrt{29}=[5,\overline{2,1,1,2,10}]$，所以我们必须$\alpha_3$：$\alpha_3=\dfrac{2+\sqrt{29}}{5}$，

因此$P=2$，$Q=5$，及$29=2^2+5^2$．

2．$\sqrt{433}=[20,\overline{1,4,4,2,2,1,3,13,1,1,}$
$\overline{1,1,13,3,1,2,2,4,4,1,40}]$

所以我们必须计算α_{11}：

$$\alpha_{11}=\frac{12+\sqrt{433}}{17},$$

因此$P=12$，$Q=17$和$433=12^2+17^2$．

3．因为$\sqrt{2}$是无理数，所以不可能找到两个整数a和b，

使得

$$\sqrt{2}=\frac{a}{b},\quad 或使得\quad a^2=2b^2=b^2+b^2.$$

另一方面

$$\sqrt{2}=1+\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\frac{1}{2+}\cdots,$$

这个连分数的渐近分数是

$$\frac{1}{1},\ \frac{3}{2},\ \frac{7}{5},\ \frac{17}{12},\ \frac{41}{29},\ \frac{99}{70},\ \cdots,\ \frac{p}{q},\ \cdots;$$

我们总有

$$p^2-2q^2=\pm 1\quad 或\quad p^2\pm 1=2q^2=q^2+q^2.$$

因此问题的第二部分可用满足$p^2+1=2q^2$或$p^2-1=2q^2$的p和q的值来解.

参考文献

下面列出的书或者包含连分数的章节，或者本书要参考其中的有关内容。不拟编辑一个完全的书目。关于连分数的标准论著是潘朗的“连分数”(Perron:《Kettenbrüche》)，但这本书是为专家而写的。在英文书中，对连分数这一课题展开来叙述的只有柯瑞斯托尔（Chrystal）的《代数》(Algebra）第二卷，此书虽老但仍是一本有价值的书。戴万普特（Davenport）的书是一本很好的读物，因为他很快就抓住了问题的本质，却很少啰嗦。

〔1〕 Edwin Beckenbach and Richard Bellman, An Introduction to Inequalities, New Mathematical Library 3, New York: Random House, Inc., 1961.

〔2〕 G. Chrystal, Algebra, vol. Ⅱ, Edinburgh: Adam and Black, 1889; reprinted, New York: Chelsea, 1959.

〔3〕 H. Davenport, The Higher Arithmetic, London: Hutchinson's University Library, 1952.

〔4〕 L. E. Dickson, History of the Theory of Numbers, Vols. Ⅰ, Ⅱ, Ⅲ, Washington: Carnegie Institute of Washington, 1919; reprinted, New York: Chelsea, 1950.

〔5〕 G. H. Hardy and E. M. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, 4 th ed., Oxford: Clarendon Press, 1960.

〔6〕 Sir Thomas L. Heath, Diophantus of Alexandria A Study in the History of Greek Algebra, 2nd ed., Cambridge: Cambridge University Press, 1910.

〔7〕 W. J. LeVeque, Topies in Number Theory, vols. Ⅰ and Ⅱ, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1956.

〔8〕 Ivan Niven, Irrational Numbers, Carus Monograph 11, New York: John Wiley and Sons, 1956.

〔9〕 Ivan Niven, Numbers: Rational and Irrational. New Mathematical Library 1, New York: Random House Inc., 1961.

〔10〕 O. Ore, Number Theory and Its History, New York: McGrawHill, 1949.

〔11〕 Oskar Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen, Leipzig and Berlin: Teubner, 1929.

〔12〕 Raphael M. Robinson Unsgmmetrical Approximations of Irrational Numbers, *Bulletin American Math.* Soc., Vol. 53 (1947) pp. 351—361.

〔13〕 D. E. Smith, History of Mathematics, vols. Ⅰ and Ⅱ, New York: Dover Publications, Inc., Reprint, 1958.

〔14〕 H. S. Wall, Analytic Theory of Continued Fractions, New York: D. Van Nostrand Company, Inc., 1948.

〔15〕 L. 兹平著，应隆安译，无限的用处，北京大学出版社。