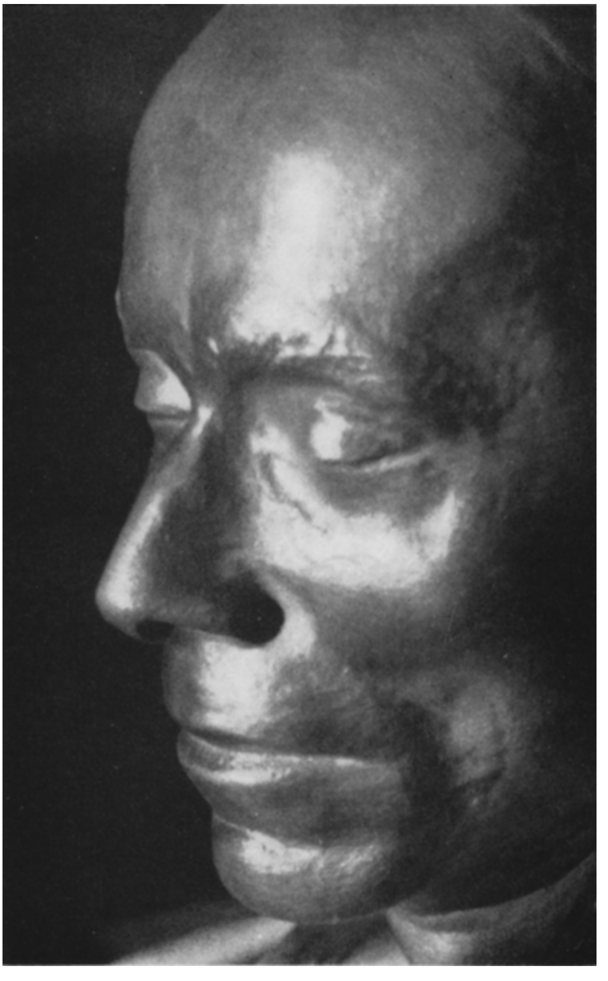

Photogr. Wiedergabe der von Schneller, Hamburg, geschaffenen Totenmaske

Emil Artin*)

Par HENRI CARTAN, Paris

EMIL ARTIN fut un mathématicien génial. C'était aussi un artiste et, pour tout dire, un homme complet.

L'oeuvre du mathématicien, d'autres que moi, qui la connaissent mieux, pourraient en parler avec autorité et la situer dans l'ensemble des mathématiques contemporaines[1]). Quant à l'homme, je n'ai rencontré Artin qu'en de trop rares et trop courtes occasions, et je puis tout au plus espérer avoir deviné sa personnalité profonde, si attirante. Je serais heureux cependant si je pouvais penser que mon modeste hommage, si maladroit soit-il, lui serait allé au coeur.

En face de son intelligence si vive et lucide, de son esprit aiguisé, j'aurais pu me trouver intimidé. En réalité, j'étais mis en confiance parce que je sentais chez Artin cet enthousiasme profond, ce besoin de faire partager son admiration pour tout ce qui est beau, qu'il s'agisse de mathématiques, de musique ou de toute autre forme d'art. Et même lorsqu'Artin restait silencieux, son vif regard bleu le rendait étonnamment présent.

Né à Vienne le 3 mars 1898, Artin est docteur en philosophie à l'âge de 23 ans après deux années d'étude à Leipzig; puis il passe un an à Göttingen, qui était alors le centre de la vie mathématique mondiale. C'est ensuite, pendant les sept ou huit premières années de son séjour à Hambourg, qu'il fait les découvertes mathématiques qui le rendent célèbre. Il enseigne pendant 15 ans à l'Université de Hambourg, successivement comme assistant, Privatdozent, professeur extraordinaire et enfin professeur ordinaire. En 1937 il doit quitter cette Université qui lui est chère, et il part s'installer aux Etats-Unis. Pendant dix ans, de 1932 à 1942, il n'a pratiquement plus publié. Puis sa fécondité renaît, et il approfondit alors les sujets qu'il avait explorés dans sa jeunesse.

On s'accorde en général à considérer Artin comme un algébriste. Et il est vrai qu'il est de ceux qui, à la suite d'EMMY NOETHER, ont contribué à l'algébrisation des mathématiques contemporaines. C'est VAN DER WAERDEN qui nous apprend, dans la préface de son Traité fameux, que

*) Als Vortrag gehalten in der Universität Hamburg auf einer Gedenkfeier anläßlich des Todestages von Emil Artin am 19. Dezember 1963.

[1]) Je suis reconnaissant à CLAUDE CHEVALLEY et JEAN-PIERRE SERRE pour l'aide qu'ils m'ont apportée en me communiquant leurs idées sur l'oeuvre d'Artin.

la redaction de la "Moderne Algebra" est issue de leçons professées en 1926 par Artin à Hambourg (encore que le noyau initial d'Artin se soit considérablement transformé et amplifié avant de devenir le Traité classique que nous connaissons).

Mais est-il juste de considérer Artin exclusivement comme un algébriste? Il s'est intéressé à des problèmes délicats de Topologie (la théorie des nattes); et il possédait ce qu'on appelle le „sens de la géométrie", comme l'atteste son livre „Geometric Algebra" (livre que devraient lire tous ceux qui, à des titres divers, ont à enseigner la géométrie élémentaire).

Ce qui fait d'Emil Artin un "algébriste", c'est donc plutôt un certain tempérament intellectuel. Son esprit rigoureux déteste l'à-peu-près; il possède le don d'algébriser les problèmes sans jamais perdre de vue l'intuition des phénomènes; on peut même dire que l'algébrisation est pour lui une façon d'extérioriser la vision des choses. Chez Artin, la découverte est inséparable d'une compréhension lucide des structures mises en jeu. Sa conception des mathématiques a certainement influencé de jeunes chercheurs vers les années 1930—1935, tels CHEVALLEY et ANDRÉ WEIL. Et je crois pouvoir affirmer qu'à cette époque, sans le savoir, Artin a contribué à l'éclosion de BOURBAKI. Certes les réalisations de BOURBAKI manquent souvent de l'élégance que l'on admire chez Artin; mais la tendance initiale et d'ailleurs constante de BOURBAKI à repenser les choses au moyen d'une analyse toujours renouvelée des phénomènes n'est pas étrangère, je crois, au mode de pensée d'Artin. En tout cas, BOURBAKI se sentit fier lorsque, en 1953, Artin consacra une étude critique détaillée aux premiers chapitres de son Livre d'Algèbre.

Il n'est pas question de donner ici une analyse, même sommaire, de l'oeuvre mathématique d'Artin. Je voudrais simplement tenter d'en évoquer maintenant quelques sommets.

Les travaux qui dominent l'oeuvre d'Artin se rapportent à la théorie des nombres algébriques. Ils sont basés sur l'étude de la fonction ζ et des séries L d'un corps de nombres algébriques. Le plus beau théorème d'Artin est la fameuse *loi de réciprocité*: soient k et K des corps de nombres algébriques, K étant une extension abélienne de k. Supposons, pour simplifier l'exposition, que K/k soit une extension *non ramifiée*, c'est-à-dire que tout idéal premier de l'anneau des entiers de k engendre, dans l'anneau des entiers de K, un produit d'idéaux premiers *distincts*, et en outre que toute place réelle de k reste réelle dans K. Soit I_k (resp. I_K) le groupe des idéaux fractionnaires de k (resp. de K), et soit N l'application "norme": $I_K \to I_k$. Soit P_k le groupe des idéaux principaux; le groupe quotient $I_k/P_k = C_k$ est donc le groupe des classes d'idéaux de k. Le groupe

$$I_k/(N I_K) \cdot P_k,$$

quotient de I_k par le sous-groupe engendré par les normes et les idéaux principaux, s'identifie à un quotient de C_k, et est donc fini. En 1922 Takagi, achevant de prouver les conjectures de HILBERT sur le "corps de classes", a démontré que le groupe $I_k/(NI_K) \cdot P_k$ est isomorphe au groupe de Galois G de K sur k. Mais aucun isomorphisme explicite n'a alors été défini. En 1923, Artin qui vient d'étudier la décomposition de la fonction ζ_K en produit de fonctions L, est conduit par cette étude à définir un homomorphisme $I_k/NI_K \to G$. Pour cela, il associe à tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de k la "substitution de Frobenius" $F_\mathfrak{p}$ définie comme suit: si $\mathfrak{P}$ est un idéal premier de K au-dessus de $\mathfrak{p}$, l'extension résiduelle correspondant à $\mathfrak{P}$ a un groupe de Galois cyclique (car c'est une extension de corps finis), avec un générateur privilégié

$$\lambda \to \lambda^{N(\mathfrak{p})};$$

or le groupe de Galois de l'extension résiduelle s'identifie à un sous-groupe du groupe de Galois G, parce que K/k est non-ramifiée. On associe ainsi à chaque $\mathfrak{P}$ au-dessus de $\mathfrak{p}$ un élément de G; les éléments associés aux différents $\mathfrak{P}$ situés au-dessus d'un même $\mathfrak{p}$ sont conjugués dans G, et puisque G est abélien par hypothèse, ils sont égaux. On a défini ainsi, pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$ de k, un élément $F_\mathfrak{p} \in G$. L'application $\mathfrak{p} \to F_\mathfrak{p}$ se prolonge en un homomorphisme $I_k \to G$, qui s'annule sur NI_K et est surjectif. Artin conjecture alors que l'homomorphisme $I_k \to G$ s'annule sur les idéaux principaux; s'il en est bien ainsi, il induit un homomorphisme surjectif $I_k/(NI_K) \cdot P_k \to G$, et puisque d'après Takagi ces deux groupes ont le même ordre, on a, en fait, obtenu un *isomorphisme*.

Il y a un énoncé analogue (plus compliqué) dans le cas où l'extension K/k est ramifiée. Ce résultat, qui n'est encore qu'une conjecture lorsqu'Artin l'énonce en 1923, est appelé par Artin la *loi générale de réciprocité*, car il redonne les diverses lois de réciprocité connues, à commencer par la loi de réciprocité quadratique de GAUSS. Sans plus attendre, Artin indique une série de conséquences importantes de la loi générale de réciprocité.

Dans ce travail de 1923, Artin parvenait à démontrer sa loi dans un certain nombre de cas particuliers: corps cyclotomiques, corps kummériens. Ce n'est que trois ou quatre ans plus tard qu'il trouve la démonstration du cas général; il la publie en 1927 aux Abhandlungen du Séminaire Mathématique de Hambourg (où il avait déjà publié ses recherches antérieures). Il a trouvé cette démonstration en lisant un travail de ČEBOTAREV; la méthode lui permet de ramener le cas général à celui, déjà traité, des extensions cyclotomiques.

Diverses applications de la loi de réciprocité feront l'objet de publications ultérieures, dont deux écrites en collaboration avec HASSE.

Artin utilise aussi la loi de réciprocité en vue de trouver une démonstration du "Hauptidealsatz" de HILBERT: tout idéal de k devient principal dans le corps de classes de k. A cette occasion, il introduit pour la première fois l'opération de *transfert* (homomorphisme $G \to H$ défini lorsque H est un sous-groupe abélien distingué d'un groupe fini G, le quotient G/H étant abélien). Artin, grâce à ces notions, ramène la démonstration du Hauptidealsatz à un problème de théorie des groupes, problème qui est alors résolu par FURTWAENGLER.

Considérons maintenant une extension K/k non nécessairement abélienne, et soit G son groupe de Galois. Artin avait, en 1923, défini des fonctions L_χ attachées aux caractères χ de G, et c'est pour montrer que ces fonctions L_χ coïncident, dans le cas où G est abélien, avec les séries L_χ classiques, qu'il avait été amené à formuler la loi générale de réciprocité. Inversement, cette loi lui permet d'approfondir l'étude de ces questions; il montre qu'il existe une puissance entière de L_χ qui est méromorphe. En fait, un résultat de RICHARD BRAUER, postérieur de vingt ans, entraîne que L_χ elle-même est méromorphe. Artin a d'ailleurs conjecturé que L_χ est holomorphe lorsque χ ne contient pas le caractère-unité (c'est le cas des L_χ classiques à la DIRICHLET-WEBER), ce qui entraînerait que le quotient ζ_K/ζ_k des fonctions zêta des corps k et K est holomorphe.

Dans sa Thèse, parue en 1924, Artin avait introduit une fonction ζ non plus dans le cas d'un corps de nombres algébriques, mais dans celui d'une extension quadratique d'un corps de fonctions rationnelles à une variable sur un corps fini. C'était la première fois qu'on étudiait la fonction ζ attachée à une variété algébrique sur un corps de base fini. Il établissait l'équation fonctionnelle de ζ, et énonçait "l'hypothèse de Riemann" dans le cadre où il s'était placé. Artin a fait là oeuvre de pionnier, laissant à d'autres le soin de poursuivre: F. K. SCHMIDT établira l'équation fonctionnelle de ζ pour toutes les courbes algébriques sur un corps fini, HASSE prouvera l'hypothèse de RIEMANN pour les courbes de genre un, et ANDRÉ WEIL pour le cas général. En fait, on s'est aperçu aujourd'hui que le formalisme d'Artin peut s'étendre à tous les *schémas* (au sens de GROTHENDIECK) de type fini sur l'anneau Z des entiers.

Les travaux d'Artin sur les *corps réels* ont été faits en partie en collaboration avec OTTO SCHREIER. Artin introduit d'abord la notion de *corps ordonné*. Il se demande à quelle condition un corps peut être ordonné, et il obtient une condition de nature purement algébrique: il faut et il suffit que -1 ne soit pas égal à une somme de carrés. Il montre de plus qu'un tel corps k possède une extension algébrique maximale K ayant cette propriété; alors K peut être ordonné d'une manière et d'une seule, et en adjoignant $\sqrt{-1}$ à K on obtient un corps algébriquement clos.

Mais Artin n'a pas été seulement un découvreur en mathématiques. Il avait le goût de l'enseignement, des mises au point bien faites; il éprouvait le besoin de communiquer sa science, d'exposer un sujet en ne laissant dans l'ombre aucun de ses aspects essentiels. Les séminaires d'Artin ont eu une influence profonde; c'est là qu'il a formé des élèves tels que SERGE LANG et JOHN TATE. Ce dernier a renouvelé la théorie du corps de classes grâce aux méthodes cohomologiques dont Artin était devenu un adepte enthousiaste. Artin a aussi pris la peine de publier la matière de plusieurs de ses cours, sous forme de livres ou de ,,Notes de cours''; et nous constatons que, même sur des sujets très classiques, il avait une pensée originale à exprimer; il possédait le don merveilleux de simplifier sans rien sacrifier à la rigueur, et d'éclairer les choses connues d'un jour nouveau. Par exemple, dans ses leçons sur la théorie de Galois (1942), il met en évidence le rôle joué par l'Algèbre linéaire, le surcorps L du corps K devant être considéré avec sa structure d'espace vectoriel sur K. La formulation que donne Artin des théorèmes de la théorie de Galois a permis ultérieurement sa généralisation au cas des corps non commutatifs. Signalons aussi le petit livre d'Artin sur la fonction Γ, où pour la première fois $\log \Gamma(x)$ (pour $x > 0$) est caractérisé comme l'unique fonction *convexe* de x satisfaisant à l'équation fonctionnelle habituelle.

Artin ne s'est pas seulement intéressé à l'enseignement des mathématiques au niveau des Universités. Il s'est aussi préoccupé du problème du renouvellement de l'enseignement des mathématiques au niveau le plus élémentaire. Il a participé d'une manière active aux travaux d'un Comité créé dans ce but à l'instigation de l'O. E. C. E., et j'ai été le témoin de l'intérêt passionné qu'il portait à ces questions. L'âge n'avait nullement affaibli l'ardeur de ses convictions, et il savait les exprimer avec un enthousiasme communicatif.

Emil Artin avait eu la joie, en 1958, de revenir à Hambourg après 21 ans d'absence, d'y retrouver l'Université qu'il avait illustrée autrefois, d'y former à nouveau des élèves. Quelle tristesse de voir cette nouvelle période de sa vie si brutalement interrompue! Il venait d'écrire une conférence sur HILBERT, sous le titre: ,,Die Bedeutung Hilberts für die moderne Mathematik.`` Qu'il me soit permis d'en citer la conclusion, qui s'applique si bien à Artin lui-même: ,,Seine Ideen leben weiter unter uns, seine Arbeitsmethoden sind uns leuchtendes Vorbild, und es ist uns allen klar, daß sein Name nie vergessen wird.``

Eingegangen am 7. 1. 1964