MÉMOIRE SUR LES FONCTIONS ZÉTAFUCHSIENNES

PAR

H. POINCARÉ

À PARIS.

§ 1. *Introduction.*

Considérons une équation linéaire quelconque d'ordre p:

$$(1) \qquad \frac{d^p v}{dx^p} + \sum_{k=0}^{k=p-1} \varphi_k(x, y) \frac{d^k v}{dx^k} = 0, \qquad (2) \qquad \psi(x, y) = 0$$

où les φ sont des fonctions rationnelles et où la relation (2) est algébrique. Soit maintenant une équation auxiliaire:

$$(3) \qquad \frac{d^2 w}{dx^2} = \theta(x, y) w$$

où $\theta(x, y)$ est une fonction rationnelle telle que *tous les points singuliers de l'équation* (1) *appartiennent à l'équation* (3). Soit a un point singulier appartenant à la fois aux deux équations; ce point singulier regardé comme appartenant à (1) nous conduira à une équation déterminante E de degré p; regardé comme appartenant à (3), il nous conduira à une équation déterminante E' du second degré. Soit δ la différence des deux racines de E'. Je suppose que θ ait été choisi de telle sorte que *δ soit nul* ou bien que *δ étant une partie aliquote de l'unité toutes les racines de l'équation E' soient des multiples de δ.* Dans le cas où *dans le voisinage du point a les intégrales de l'équation* (1) *seraient irrégulières, δ devrait être supposé nul.* Il faut enfin que même pour les points singuliers de (3) qui n'appartiennent pas à l'équation (1), δ soit nul ou soit une partie aliquote de l'unité et que les intégrales de l'équation (1) soient partout régulières.

Ces conditions ne suffisent pas pour déterminer θ. Supposons même que l'on choisisse arbitrairement les points singuliers de (3) qui n'appartiennent pas à (1) et les équations déterminantes relatives à tous les points singuliers de (3) en satisfaisant toutefois aux diverses conditions que nous venons d'énoncer. Quand ce choix sera fait, θ ne sera pas encore entièrement déterminé, et il y restera un certain nombre de paramètres arbitraires. Dans divers mémoires, antérieurement insérés aux Acta mathematica, j'ai démontré qu'on pouvait disposer de ces paramètres:

1° d'une manière et d'une seule, de telle façon que x et y soient fonctions fuchsiennes de z n'existant qu'à l'intérieur d'un cercle;

2° d'une infinité de manières, de telle façon que x et y soient fonctions kleinéennes de z n'existant pas dans tout le plan.

3° d'une manière et d'une seule de telle façon que x et y soient fonctions fuchsiennes et kleinéennes de z existant dans tout le plan.

Dans tous ces cas les intégrales de l'équation (1) sont des fonctions uniformes de z.

Nous supposerons pour fixer les idées que l'équation (3) ait été choisie de telle sorte que x et y soient fonctions fuchsiennes de z n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental dont le centre est 0 et le rayon 1 ($1^{\text{ère}}$, 2^{me} et 6^{me} familles). Alors les intégrales de l'équation (1) pourront se mettre sous la forme du quotient de deux séries ordonnées suivant les puissances de z et convergentes tant que z reste intérieur au cercle fondamental; elle sont dont *toujours* convergentes puisque la variable z ne peut jamais sortir de ce cercle.

Envisageons un cas particulier remarquable, celui où δ est nul pour tous les points singuliers de l'équation (3) et où par conséquent x et y sont des fonctions fuchsiennes de la 2^{e} famille. Dans ce cas, les intégrales de l'équation (1) de même que x et y, sont des fonctions holomorphes de z à l'intérieur du cercle fondamental. Toutes ces fonctions peuvent se développer en séries ordonnées suivant les puissances croissantes de z et *toujours* convergentes puisque le cercle de convergence est le cercle fondamental et que la variable ne sort jamais de ce cercle. Quant aux coëfficients de ces séries, on les calcule aisément par récurrence et par la méthode des coëfficients indéterminés, dès que l'on connaît les coëfficients des équations (1), (2) et (3).

Ainsi on peut trouver des développements des intégrales qui sont toujours valables et à ce point de vue, il est, dès à présent, permis de dire que nous savons intégrer toutes les équations linéaires à coëfficients algébriques.

Mais les développements ainsi obtenus ne sont pas satisfaisants pour l'esprit, parce que les différents termes ne se déduisent pas les uns des autres par une loi simple. Il faut donc chercher à exprimer les intégrales par des séries dont tous les termes soient donnés par une formule générale simple, comme l'étaient par exemple les termes des séries thétafuchsiennes. Tel est l'objet du présent mémoire. Les séries que je vais chercher à obtenir seront moins propres peut-être au calcul numérique que les développements suivant les puissances de z, mais elles seront plus instructives et nous permettront de pénétrer plus profondément dans l'étude intime des fonctions qu'elles représentent.

Toutefois dans ce qui va suivre, je serai obligé de supposer que l'équation (1) a toutes ses intégrales *régulières* pour employer l'expression de MM. FUCHS, THOMAE et FROBENIUS. Dans le cas où il y aurait des intégrales irrégulières, rien de ce que je vais dire ne serait plus applicable et je ne sais, au sujet de ces équations irrégulières, rien de plus que ce que j'ai démontré dans les quatre mémoires antérieurs. J'avais, il est vrai, dans les Mathematische Annalen, énoncé un résultat particulier sur ces équations irrégulières, mais ce résultat est inexact; j'avais été trompé par une fausse interprétation d'un théorème de M. KLEIN dont je ne connaissais pas la démonstration.

§ 2. *Classification des équations linéaires.*

Soient

$$(1) \qquad \frac{d^p v}{dx^p} + \sum \varphi_k(x, y)\frac{d^k v}{dx^k} = 0, \qquad (2) \qquad \psi(x, y) = 0$$

$$(1') \qquad \frac{d^p u}{dx^p} + \sum \varphi'_k(x, y)\frac{d^k u}{dx^k} = 0$$

deux équations linéaires d'ordre p à coëfficients rationnels en x et y. Je dirai que ces deux équations appartiennent à la même *famille* si l'intégrale générale de la seconde peut se mettre sous la forme:

$$u = \Lambda\left[F_0 v + F_1\frac{dv}{dx} + F_2\frac{d^2v}{dx^2} + \ldots + F_{p-1}\frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}\right]$$

v étant l'intégrale générale de l'équation (1), les F étant des fonctions rationnelles de x et de y, et Λ une fonction quelconque de x et de y. Elles appartiendront à la même *espèce* si la fonction Λ est égale à 1.

Si les deux équations (1) et (1′) sont de la même espèce, elles auront *même groupe,* c'est à dire que lorsque le point (x, y) décrira un contour quelconque sur la surface de Riemann (2), les intégrales de l'équation (1′) subiront précisément la même substitution linéaire que les intégrales de l'équation (1). Si les deux équations sont seulement de la même famille, elles n'ont plus même groupe, mais quand le point (x, y) décrit un contour quelconque, on obtient les valeurs finales des intégrales de (1′) en appliquant aux valeurs initiales la substitution qu'ont subie les intégrales de (1) et en multipliant ensuite tous les résultats ainsi obtenus *par un même facteur.* Ainsi les *rapports* des intégrales de (1′) ont subi précisément la même transformation que les rapports des intégrales de (1).

Soit:

$$u' = \frac{u}{\Lambda} = F_0 v + F_1\frac{dv}{dx} + \ldots + F_{p-1}\frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}},$$

u' satisfera à une équation à coëfficients rationnels en x et y:

$$(1'') \qquad \frac{d^p u'}{dx^p} + \sum \varphi_k'' \frac{d^k u'}{dx^k} = 0.$$

On aura alors, en faisant $u = \Lambda u'$ dans (1′) et divisant par Λ:

$$(1''') \qquad \frac{d^p u'}{dx^p} + p\frac{\Lambda'}{\Lambda}\frac{d^{p-1}u'}{dx^{p-1}} + \varphi'_{k-1}\frac{d^{p-1}u'}{dx^{p-1}} + \ldots = 0.$$

Les deux équations (1″) et (1‴) étant irréductibles, doivent être identiques d'où:

$$\frac{\Lambda'}{\Lambda} = \frac{\varphi''_{k-1} - \varphi'_{k-1}}{p}.$$

Il suit de là que la dérivée logarithmique de Λ est rationnelle en x et y. Donc Λ est une de ces fonctions étudiées par M. APPELL et analogues aux fonctions doublement périodiques de 2[de] espèce. De plus, quand sur la surface de RIEMANN (2), le point analytique (x, y) décrit un cycle ou bien un contour fermé autour d'un point singulier, la fonction Λ est simplement multipliée par un facteur constant.

Etudions maintenant ce qui se passe dans le voisinage d'un point quelconque, et pour cela rappelons les différents cas qui peuvent se présenter, d'après les travaux de M. FUCHS:

1°. Il peut arriver que le point singulier $x = a$ que l'on étudie soit *irrégulier,* c'est à dire que parmi les intégrales il y en ait au moins une qui soit irrégulière et par conséquent développable en série de la forme suivante:

$$(x - a)^a \Sigma A_n (x - a)^n$$

où dans la série l'exposant n peut prendre toutes les valeurs entières positives et négatives.

Il est aisé de voir que si le point $x = a$ est un point irrégulier pour l'équation (1), il sera aussi un point irrégulier pour toutes les équations de la même espèce. Quant aux équations de la même famille elles auront toutes aussi un point irrégulier au point a (sauf le cas particulier où on pourrait rendre les intégrales de l'équation (1) régulières en les multipliant par une même fonction μ).

Nous supposerons d'ailleurs dans tout ce qui va suivre qu'aucune des équations que nous considérerons ne présente de point irrégulier. Ainsi tous les points singuliers de (1) et de (1') seront supposés *réguliers.*

2°. Il peut arriver ensuite que le point singulier $x = a$ soit *logarithmique,* c'est à dire que parmi les intégrales de l'équation (1) il y en ait au moins une de la forme:

$$(x - a)^a [\varphi + \psi \log (x - a)]$$

φ et ψ étant holomorphes. Si le point $x = a$ est un point logarithmique pour l'équation (1), il sera aussi un point logarithmique pour toutes les équations de la même famille.

3°. Il peut arriver enfin que le point $x = a$ soit un point singulier *ordinaire* ou un point *non singulier.* Dans ce cas, il y a p intégrales de la forme suivante:

$$(x-a)^{\lambda_1}\varphi_1, \quad (x-a)^{\lambda_2}\varphi_2, \quad \ldots, \quad (x-a)^{\lambda_p}\varphi_p$$

les φ étant holomorphes. Les quantités $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ sont les racines d'une équation facile à former et qu'on appelle équation déterminante. *En général,* lorsque cette équation a une racine double ou deux racines ne différant que d'un nombre entier, on a affaire à un point singulier logarithmique; il peut arriver cependant, si certaines conditions sont remplies, que le point singulier soit ordinaire, quoique la différence de deux racines de l'équation déterminante soit un entier.

Il peut se faire alors:

1° ou bien que l'équation aux différences des racines de l'équation déterminante n'ait pas toutes ses racines entières, auquel cas le point $x = a$ est un point singulier *proprement dit.*

2° ou bien que les p racines de l'équation déterminante soient de la forme:

$$k + h_1, \quad k + h_2, \quad \ldots, \quad k + h_p$$

k étant une quantité non entière et $h_1, h_2, \ldots, h_p$ étant des entiers. Alors $x = a$ (s'il n'est pas logarithmique, ce que je suppose) est un point *à apparence singulière* (cf. *Sur les groupes des équations linéaires,* Acta mathematica, T. 4, page 217).

3° ou bien que les p racines soient entières. Alors pour $x = a$ toutes les intégrales sont holomorphes ou méromorphes; ce point est un point singulier *polaire* (s'il n'est pas logarithmique, ce que je suppose toujours).

4° enfin si les p racines en question sont précisément

$$0, \quad 1, \quad 2, \quad \ldots, \quad (p-1)$$

on a affaire à un point *non singulier.*

Que se passera-t-il dans le voisinage d'un point non logarithmique si l'on passe de l'équation (1) à une équation de la même famille ou de la même espèce?

Soit $x = a$ un point non logarithmique; considérons trois équations linéaires (1), (1′) et (1″), la seconde de la même espèce que (1), la troisième de la même famille que (1). Soient (3), (3′) et (3″) les équations déterminantes relatives à ces trois équations différentielles et au point $x = a$. Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$$

les racines de (3). Celles de (3′) seront:

$$\alpha_1 + h_1, \alpha_2 + h_2, \ldots, \alpha_p + h_p$$

et celles de (3″) seront:

$$\beta + \alpha_1 + h_1, \beta + \alpha_2 + h_2, \ldots, \beta + \alpha_p + h_p$$

β étant quelconque et les h étant des entiers positifs ou négatifs.

D'où les conséquences suivantes: Si le point $x = a$ est un point singulier *proprement dit* pour l'équation (1), il en sera un aussi pour les équations (1′) et (1″). Si ce point est un point *non-singulier* pour l'équation (1), il sera non singulier ou polaire pour (1′) et il sera non singulier, polaire ou à apparence singulière pour (1″).

Donc deux équations de la même famille ont les mêmes points singuliers proprement dits (logarithmiques ou non logarithmiques). Mais les points à apparence singulière (et en particulier les points polaires) peuvent être différents.

Supposons maintenant que les deux équations (1) et (1′) soient dépourvues de second terme, c'est à dire que:

$$\varphi_{p-1} = \varphi'_{p-1} = 0.$$

Dans ce cas la somme des racines de l'équation déterminante est égale à:

$$\frac{p(p-1)}{2}.$$

Supposons que ces racines soient toutes entières sans être précisément égales à

$$0, 1, 2, \ldots, (p-1)$$

c'est à dire que nous ayons affaire à un point singulier polaire. La somme des racines doit être égale à la somme des $p - 1$ premiers nombres. D'ailleurs deux racines ne peuvent être égales, car il est aisé de constater que l'équation déterminante relative à un point singulier non logarithmique ne peut avoir deux racines égales. Donc une au moins des racines devra être négative; donc le point $x = a$ est un pôle pour une des intégrales de l'équation (1), ce qui justifie le nom de *point polaire* donné à cette sorte de point singulier.

Envisageons d'abord des équations du 2[d] ordre. La somme des racines de l'équation déterminante est égale à 1; leur différence est égale à 1 pour les points non-singuliers, à un nombre entier plus grand que 1 pour les points à apparence singulière, à un nombre non entier pour les points singuliers non logarithmiques, à 0, à 1 ou à un entier pour les points logarithmiques.

Nous ferons les conventions suivantes: Si pour un point à apparence singulière, cette même différence est égale à $n + 1$, nous dirons que nous avons affaire à un point à apparence singulière du n^e ordre, ou encore à n points à apparence singulière confondus. Si pour un point singulier logarithmique ou non cette même différence, dont nous pouvons toujours supposer la partie réelle positive, est égale à $n + \lambda$, λ étant un nombre dont la partie réelle λ_1 satisfait aux inégalités

$$0 \leqq \lambda_1 < 1$$

nous dirons que nous avons affaire à un point singulier et à n points à apparence singulière confondus.

Grâce à ces conventions, l'énoncé du théorème qui va suivre est un peu simplifié. Je dis que si l'équation (1) a un nombre pair de points à apparence singulière, il en sera de même de l'équation (1') et inversement. En effet, soit:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varphi v = 0 \tag{1}$$

l'équation (1), posons:

$$u = A\left(F_0 v + F_1 \frac{dv}{dx}\right).$$

Soient Λ_0, Λ_1 et M des fonctions telles que:

$$\Lambda_0 F_0 = \frac{dM}{dx}, \qquad \Lambda_0 F_1 = M, \qquad \Lambda = \Lambda_0 \Lambda_1$$

d'où

$$u = \Lambda_1 \frac{d}{dx}(Mv).$$

Il résulte de là que le passage d'une équation du 2[d] ordre à une autre de même famille peut toujours être obtenu par la série d'opérations suivantes:

1°. Multiplier la fonction inconnue par un facteur convenable.

2°. La différentier.

3°. La multiplier de nouveau par un facteur convenable.

La première et la dernière de ces trois opérations ne modifient pas la différence des racines de l'équation déterminante. La seconde opération seule peut altérer cette différence. Voici comment: je suppose d'abord que l'on ait pour la fonction inconnue v le développement suivant:

$$v = \lambda(A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \ldots) + \mu(B'x + C'x^2 + D'x^3 + \ldots)$$

λ et μ étant des constantes d'intégration; ce développement montre de plus que les racines de l'équation déterminante sont 0 et 1. Si l'on a:

$$\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = h$$

il viendra pour le développement de $\frac{dv}{dx}$:

$$\frac{dv}{dx} = \lambda(3Dx^2 + \ldots) + (\mu + \lambda h)(B' + 2C'x + 3D'x^2 + \ldots)$$

ce qui montre que les racines de l'équation déterminante sont devenues 0 et 2. Ainsi la différentiation peut faire apparaître de nouveaux points à apparence singulière, mais elle en peut aussi faire disparaître. Soit en effet

$$v = \lambda(A + Bx + Cx^2 + \ldots) + \mu(C'x^2 + D'x^3 + \ldots)$$

le développement de v. On voit que l'équation déterminante a pour racines 0 et 2. Si l'on différentie, il vient:

$$\frac{dv}{dx} = \lambda(B + 2Cx + \ldots) + \mu(2C'x + 3D'x^2 + \ldots)$$

où l'on voit que les racines sont devenues 0 et 1. En général, toutes les fois que l'une des racines de l'équation déterminante sera nulle, sans que l'autre soit égale à 1, la différentiation fera augmenter ou diminuer d'une unité la différence de ces racines, et elle ne pourra la faire varier si l'une des racines n'est pas nulle.

Soit:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varphi_1 \frac{dv}{dx} + \varphi_0 v = 0 \tag{4}$$

l'équation à laquelle satisfait v; sa dérivée

$$w = \frac{dv}{dx}$$

satisfera à

$$\frac{d^2w}{dx^2} + \left(\varphi_1 - \frac{\varphi'_0}{\varphi_0}\right)\frac{dw}{dx} + \left(\varphi_0 - \frac{\varphi_1\varphi'_0}{\varphi_0} + \varphi'_1\right) w = 0. \tag{5}$$

Il s'est introduit par la différentiation de nouveaux points à apparence singulière, définis par l'équation:

$$\varphi_0 = 0.$$

Supposons, ce qui est toujours possible, que l'infini soit un point singulier ordinaire, d'où il résulte que φ_0 doit être une fonction rationnelle de degré -2. La fonction φ_0 aura $2d + s$ infinis, parmi lesquels d infinis doubles et s infinis simples. Elle aura k zéros de sorte que:

$$k = 2d + s - 2$$

ou

$$k \equiv s \pmod 2.$$

A chaque infini simple de φ_0 correspond une équation déterminante dont une des racines est nulle; par conséquent, par la différentiation la différence de ces racines diminuera ou augmentera d'une unité. D'après les conventions faites plus haut, il disparaîtra ou il s'introduira un point à apparence singulière. Ainsi par le fait des s infinis simples de φ_0, il s'introduira σ pareils points où:

$$\sigma \equiv s \pmod 2.$$

Par le fait des k zéros de φ_0, il s'introduira k points à apparence singulière, de sorte qu'il s'en est introduit en tout:

$$k + \sigma \equiv 0 \pmod 2.$$

Donc la parité du nombre des points à apparence singulière n'a pas varié.

§ 3. *Réduction des équations linéaires.*

Parmi les équations d'une même famille, il en est une que l'on peut regarder comme plus simple que toutes les autres. On peut se proposer, étant donnée une équation linéaire, de trouver la transformation qui la *réduira* à l'équation la plus simple de sa famille.

Afin d'éviter des complications inutiles et qui ne touchent pas au fond des choses, je traiterai un cas particulier.

Je supposerai que l'équation à réduire est du 2^d^ ordre et que ses coëfficients sont rationnels en x, et j'écrirai cette opération sous la forme:

$$\frac{d^2v}{dx^2} + \varphi_0 v = 0. \tag{1}$$

Soient $a_1, a_2, \ldots, a_k$ les points singuliers, $b_1, b_2, \ldots, b_h$ les points à apparence singulière; je supposerai que les racines des équations déterminantes relatives à ceux-ci soient $-\frac{1}{2}$ et $\frac{3}{2}$. Réunissons dans une même classe toutes les équations de la forme (1) où les points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_k, \infty$ sont les mêmes avec les mêmes équations déterminantes, et où la parité du nombre h de points apparents est la même. Chaque classe contiendra une infinité de familles. Il y aura un certain nombre de fonctions des coëfficients des équations d'une même classe qui auront la même valeur pour celles de ces équations qui appartiennent à une même famille. Ce sont des invariants qui définissent la famille et différents de ceux qui définissent la classe. Combien y a-t-il de pareils invariants? En d'autres termes, combien faut-il de conditions pour que deux équations, qui sont déjà supposées appartenir à une même classe, appartiennent aussi à une même famille?

Soit θ une fonction rationnelle quelconque de x. Posons:

$$-\varphi_0 + \psi = \theta^2 - \frac{d\theta}{dx}.$$

La fonction

$$u = \frac{1}{\sqrt{\psi}}\left(\theta v + \frac{dv}{dx}\right)$$

satisfera à l'équation

$$(2) \qquad \frac{d^2u}{dx^2} - u\left[-\frac{1}{2}\frac{\psi''}{\psi} + \frac{3}{4}\frac{\psi'^2}{\psi^2} - \frac{\psi'\theta}{\psi} + 2\theta' - \varphi_0\right] = 0.$$

Le coëfficient de u, que nous appellerons Φ pour abréger, admet comme infinis doubles:

1°. Les infinis de φ_0 qui sont en général des infinis de ψ.

2°. Les zéros de ψ.

Le rapport des intégrales de (1) subit certaines substitutions linéaires formant un groupe G lorsque la variable x décrit certains contours dans son plan. Si les équations (1) et (2) appartiennent à la même famille, le rapport des intégrales de (2) subira *les mêmes* substitutions linéaires formant le même groupe G, et réciproquement, si ces deux rapports subissent les mêmes substitutions, les deux équations appartiennent à la même famille.

Il résulte de là que le nombre cherché des invariants est au plus égal au nombre des paramètres arbitraires du groupe G. Or ce groupe est dérivé de k substitutions, ce qui fait $3k$ paramètres, puisque chaque substitution dépend de 3 paramètres. Mais les équations (1) et (2) sont assujetties à appartenir à une classe déterminée; on connaît les multiplicateurs de ces k substitutions correspondant à des contours infiniment petits décrits autour de chaque point singulier et celui de la substitution qui correspond à un contour infiniment grand. Il reste $2k - 1$ paramètres.

Mais si l'on remarque que deux groupes G et $\sigma^{-1}G\sigma$, où σ est une substitution linéaire quelconque, ne doivent pas être regardés comme distincts, on verra qu'il n'y a en réalité que $2k - 4$ paramètres arbitraires.

Ainsi le nombre des invariants ne peut dépasser $2k - 4$. Il sera précisément égal à ce nombre, si l'on peut trouver dans chaque classe une équation admettant un groupe donné, sans que les coëfficients de ce groupe soient assujettis à aucune relation d'égalité. Comme nous démontrerons plus loin ce théorème, nous admettrons que le nombre des invariants est $2k - 4$ en nous dispensant de faire le calcul direct qui ne présente d'ailleurs pas de difficulté.

L'équation *réduite*, c'est à dire la plus simple des équations d'une famille donnée, dépendra donc encore de $2k - 4$ paramètres. Quel est donc le minimum des points à apparence singulière que l'on peut lui attribuer? Supposons que l'équation (2) soit réduite. Elle admettra k points singuliers et h' points apparents; la fonction Φ qui est de degré -2 a donc $k + h'$ infinis doubles et dépend par conséquent de $3k + 3h' - 1$ coëfficients. Mais il y a entre eux $2k + 2h' + 1$ relations qui expriment que l'équation appartient à la classe considérée et que les h' points en question sont bien des points à apparence singulière. Il reste donc $k + h' - 2$ paramètres. Or ce nombre doit être au moins égal à $2k - 4$. On doit donc avoir:

$$h' \geqq k - 2.$$

Mais on a de plus $h \equiv h' \pmod 2$; le nombre minimum des points apparents est donc $k - 2$ si k et h sont de même parité et $k - 1$ si k et h sont de parité différente. Dans le premier cas, il n'y a dans la famille qu'un nombre fini d'équations n'ayant que $k - 2$ points apparents et on peut prendre l'une d'elles comme équation réduite. Dans le second au contraire il y a une infinité d'équations de la même famille n'ayant que $k - 1$ points apparents.

On peut encore prendre l'une d'elles pour équation réduite, mais cela ne suffit pas pour la déterminer. Nous achèverons de la définir en lui imposant cette condition que l'un des points apparents devra avoir une valeur déterminée par exemple 0.

Voici maintenant comment on peut arriver à réduire l'équation linéaire (1). Nous supposerons d'abord que k et h sont de même parité. Soient alors

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_k$$

les points singuliers,

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_h$$

les points à apparence singulière.

La fonction φ_0 pourra s'écrire:

$$\sum \frac{A_i}{(x-a_i)^2} + \sum \frac{B_i}{x-a_i} + \sum \frac{C_i}{(x-b_i)^2} + \sum \frac{D_i}{x-b_i}.$$

On aura d'ailleurs:

$$(3) \qquad C_i = +\frac{3}{4}, \qquad D_i^2 + E_i = 0$$

en supposant pour fixer les idées que tous les points apparents soient distincts entre eux et distincts des points singuliers. Dans ces équations E_i représente le résultat de la substitution de b_i à la place de x dans la fonction

$$\varphi_0 - \frac{C_i}{(x-b_i)^2} - \frac{D_i}{x-b_i}.$$

Posons maintenant:

$$\psi = \frac{\alpha(x-b_1)(x-b_2)\ \ldots\ (x-b_h)(x-d_1)(x-d_2)\ \ldots\ (x-d_{k-2})}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ \ldots\ (x-a_k)^2(x-c_1)^2(x-c_2)^2\ \ldots\ (x-c_m)^2}$$

où α, les d et les c sont jusqu'à nouvel ordre indéterminés et où $2m = h - k$; il est clair que m ne peut être négatif, car si h était plus petit que k la réduction serait terminée.

Nous allons disposer des indéterminées de telle façon que la fonction

$$R = -\varphi_0 + \psi$$

qui est rationnelle de degré -2 puisse se mettre sous la forme:

$$\theta^2 - \frac{d\theta}{dx}$$

θ étant rationnel et de degré -1.

Soient en général $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ les infinis de θ, $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_p$ les résidus:

$$\theta = \sum \frac{\mu_i}{x - \lambda_i}.$$

Soit θ_i et θ'_i le résultat de la substitution de λ_i dans les fonctions

$$\theta - \frac{\mu_i}{x - \lambda_i} \quad \text{et} \quad \frac{d\theta}{dx} + \frac{\mu_i}{(x - \lambda_i)^2}$$

il viendra:

$$R = \theta^2 - \frac{d\theta}{dx} = \sum \frac{\mu_i^2 + \mu_i}{(x - \lambda_i)^2} + 2\sum \frac{\theta_i \mu_i}{x - \lambda_i}.$$

Si l'on a

$$R = \sum \frac{M_i}{(x - \lambda_i)^2} + \sum \frac{N_i}{x - \lambda_i}$$

on devra donc avoir

$$M_i = \mu_i^2 + \mu_i$$

ce qui détermine les μ_i et par conséquent la fonction θ. On peut donc choisir arbitrairement les M_i et les λ_i mais non les N_i, d'où il résulte que pour qu'une fonction rationnelle de degré -2 ayant p infinis doubles puisse se mettre sous la forme $\theta^2 - \frac{d\theta}{dx}$, il faut $p - 1$ conditions; la p^e condition qui acheverait de définir les p quantités N_i, c'est que leur somme doit être nulle.

Dans le cas particulier qui nous occupe, il y a $m + h + k$ infinis doubles; il nous faut donc satisfaire à

$$m + h + k - 1 = 3m + 2k - 1$$

conditions et pour cela nous ne disposons que de $m + k - 1$ arbitraires. Il faut donc voir si h de nos conditions sont remplies d'elles-mêmes. Pour cela supposons qu'on retranche de R les deux termes qui deviennent infinis pour $x = \lambda_i$ et que l'on appelle R_i le résultat de la substitution de λ_i dans les termes restants, il est aisé de vérifier que l'on a:

$$R_i = \theta_i^2 + (2\mu_i - 1)\theta'_i. \tag{4}$$

Parmi les infinis de R, considérons les points $b_1, b_2, \ldots, b_h$ par exemple le point b_i. Soit donc $b_i = \lambda_i$; il viendra:

$$M_i = -C_i = +\frac{3}{4}, \qquad \mu_i^2 + \mu_i = \frac{3}{4}.$$

Parmi les valeurs qui satisfont à cette condition nous choisirons

$$\mu_i = \frac{1}{2}$$

de sorte que l'équation (4) devient

$$(4') \qquad R_i = \theta_i^2.$$

On a d'autre part:

$$N_i = 2\mu_i\theta_i = \theta_i, \qquad N_i = -D_i$$

de sorte que la condition (4′) se réduit à

$$(4'') \qquad R_i = D_i^2.$$

Mais pour $x = b_i = \lambda_i$, la fonction ψ s'annule de sorte qu'il reste simplement

$$R_i = -E_i$$

et

$$E_i + D_i^2 = 0$$

de sorte que la condition (4″) se réduit à l'une des équations (3) et est satisfaite d'elle-même.

On pourra donc disposer des $m + k - 1$ paramètres arbitraires pour satisfaire aux $m + k - 1$ conditions restantes. On envisagera ensuite la fonction:

$$u = \frac{1}{\sqrt{\psi}}\left(\theta v + \frac{dv}{dx}\right)$$

qui satisfera à l'équation (2). Cette équation n'admettra plus les points à apparence singulière $b_1, b_2, \ldots, b_h$; car pour le point b_i, par exemple, supposons que l'on envisage le développement de u suivant les puissances croissantes de $x - b_i$. Le développement de v commencera (pour l'intégrale générale) par un terme de degré $-\frac{1}{2}$; celui de $\frac{dv}{dx}$ par un terme de degré $-\frac{3}{2}$; celui de θ par un terme de degré -1 et de coëfficient $\mu_i = \frac{1}{2}$. Le développement de $\theta v + \frac{dv}{dx}$ devrait donc commencer par un terme de degré $-\frac{3}{2}$; mais les deux premiers termes se détruisent et il reste un terme de degré $+\frac{1}{2}$. D'un autre côté le développement de $\frac{1}{\sqrt{\psi}}$ commence par un terme de degré $-\frac{1}{2}$ et par conséquent celui de u par un terme de degré 0. Le point apparent b_i a donc disparu. En revanche les points $d_1, d_2, \ldots, d_{k-2}$ sont devenus des points à apparence singulière. L'équation (2) n'a donc que $k-2$ points à apparence singulière; elle est donc réduite.

Voici maintenant une méthode plus simple pour déterminer la fonction θ. On pose:

$$\theta = \sum \frac{P_i}{x - a_i} + \sum \frac{1}{2(x - b_i)} + \sum \frac{Q_i}{x - c_i}.$$

Dans cette expression entrent $2m + k = h$ indéterminées, à savoir: les k résidus P_i, les m résidus Q_i et les m infinis c_i. On les déterminera par les h conditions:

$$\theta_i = -D_i. \tag{5}$$

On peut ramener ces équations à être linéaires de la façon suivante: Soit Π le produit des $k+h$ facteurs $x - a_i$ et $x - b_i$. Posons

$$\Pi_i = \frac{\Pi}{x - b_i}, \qquad \Pi_i' = \frac{d\Pi_i}{dx}.$$

Soient π_i et π_i' ce que deviennent Π_i et Π_i' quand on y fait $x = b_i$. Posons:

$$\theta = \frac{H}{\Pi K}$$

H et K étant des polynômes de degré $m + h + k - 1$ et m en x.

Soient H_i, K_i, H'_i et K'_i ce que deviennent ces deux polynômes et leurs dérivées quand on y fait $x = b_i$. Nous aurons les relations:

$$2H_i = \pi_i K_i$$

exprimant que le résidu relatif à l'infini $x = b_i$, est égal à $\frac{1}{2}$. D'autre part les relations (5) deviennent:

$$2H'_i - K'_i\pi_i - K_i\pi'_i + 2D_i\pi_i K_i = 0.$$

Toutes ces relations sont linéaires par rapport aux coëfficients des polynômes H et K et suffisent pour les déterminer. D'où cette conclusion importante qu'il n'y a en général qu'une seule équation réduite dans une famille.

Supposons maintenant que h et k ne soient pas de même parité.

Nous poserons:

$$\psi = \frac{\alpha(x-b_1)(x-b_2)\ldots(x-b_h)x(x-d_1)(x-d_2)\ldots(x-d_{k-2})}{(x-a_1)^2(x-a_2)^2\ldots(x-a_k)^2(x-c_1)^2(x-c_2)^2\ldots(x-c_m)^2}$$

où $2m = h - k$. Nous disposerons des $m + k - 1$ indéterminées α, d et c de façon que la fonction

$$R = -\varphi_0 + \psi$$

puisse se mettre sous la forme:

$$\theta^2 - \frac{d\theta}{dx}.$$

On verrait, comme dans le cas précédent, que cela est toujours possible et, en faisant à l'aide des fonctions ψ et θ la même transformation que plus haut, on arriverait à une équation (2) qui n'aurait plus d'autres points à apparence singulière que

$$0,\ d_1,\ d_2,\ \ldots,\ d_{k-2}$$

et qui serait par conséquent réduite.

On peut employer la même analyse pour arriver à la réduction d'une équation linéaire:

1°. Lorsque celle-ci est d'ordre supérieur au second.

2°. Lorsque ses coëfficients sont algébriques au lieu d'être rationnels.

Puisqu'il n'y a dans une même famille qu'un nombre fini de réduites, les coëfficients numériques de l'équation réduite définissent la famille. Ce sont là les invariants dont il a été question plus haut.

§ 4. *Fonctions zétafuchsiennes.*

Soit g un groupe fuchsien quelconque que nous supposerons de la 1ère, de la 2e ou de la 6e familles. Soient:

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$$

p fonctions de z, n'existant qu'à l'intérieur du cercle fondamental. Supposons que lorsque la variable z subit une substitution du groupe g, la fonction Z_i se change en

$$\Sigma a_{ik} Z_k$$

c'est à dire en une combinaison linéaire des p fonctions Z.

Les substitutions

$$(Z_i, \ \Sigma a_{ik} Z_k)$$

formeront évidemment un groupe G isomorphe à g et que nous appellerons zétafuchsien. Supposons maintenant que ces fonctions Z soient uniformes et n'aient à l'intérieur du cercle fondamental d'autre singularité que des pôles.

Lorsque le groupe g est de la 2e ou de la 6e familles son polygone générateur R_0 aura un ou plusieurs sommets sur la circonférence du cercle fondamental. Soit α l'un de ces sommets. Je supposerai que les fonctions Z n'ont dans le voisinage du point $z = \alpha$ que des singularités logarithmiques analogues à celles que présentent dans le voisinage de ce même point les fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe g. Entrons dans quelques détails à ce sujet: les fonctions fuchsiennes engendrées par le groupe g sont holomorphes en e^t où $t = \frac{\beta}{z - \alpha}$ et où β est un coëfficient convenablement choisi. (Cf. *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes,* Acta mathematica, T. 1, p. 215.) Dans le voisinage de ce même point singulier, les fonctions Z seront de la forme:

$$P_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_1 + P_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_2 + \ldots + P_q e^{\lambda_q t} \Phi_q$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_q$ sont holomorphes en e^t, où les λ sont des constantes et où $P_1, P_2, \ldots, P_q$ sont des polynômes entiers en t de degrés $n_1, n_2, \ldots, n_q$.

On a d'ailleurs

$$n_1 + n_2 + \ldots + n_q = p - q.$$

Lorsque toutes ces conditions sont remplies, on dit que les fonctions Z sont zétafuchsiennes.

Reprenons les équations (1) et (2) du paragraphe 1 et l'équation auxiliaire (3) de ce même paragraphe. Supposons que l'on ait choisi cette dernière équation de façon que x et y soient des fonctions fuchsiennes $f(z)$ et $f_1(z)$ du rapport z des intégrales. Supposons de plus que les intégrales de l'équation (1) soient partout régulières. Si nous substituons à la place de x et de y, $f(z)$ et $f_1(z)$, les intégrales de cette équation deviendront des fonctions zétafuchsiennes de z.

Cela justifie la dénomination que j'ai adoptée. On sait en effet qu'on ne peut pas obtenir toutes les intégrales elliptiques par le procédé de l'inversion, qui ne donne que les intégrales de 1ère espèce. Pour calculer les intégrales de 2de espèce, on y substitue à la place de x une fonction elliptique de z et l'intégrale cherchée devient une fonction zéta de z qui augmente d'une constante lorsque la variable s'accroît d'une période. De même ici le procédé de l'inversion ne permet d'intégrer que les équations fuchsiennes. Pour les autres équations linéaires, il faut, comme nous venons de le voir, substituer à la place de x une fonction fuchsienne de z. Les intégrales deviennent alors des fonctions zétafuchsiennes de z qui subissent une substitution linéaire lorsque la variable subit une transformation du groupe g. Les fonctions zétafuchsiennes jouent donc ici le même rôle que les fonctions zéta dans la théorie des transcendantes elliptiques.

Cela posé soient:

$$x = f(z), \quad y = f_1(z) \quad \text{et} \quad z_1, z_2, \ldots, z_p$$

deux fonctions fuchsiennes et un système de fonctions zétafuchsiennes admettant le groupe fuchsien g et le groupe zétafuchsien G (les fonctions x et y sont liées par une relation algébrique). Il est aisé d'en déduire une infinité de systèmes de fonctions zétafuchsiennes admettant les mêmes groupes. Soient en effet $F_0, F_1, F_2, \ldots, F_q$, $q + 1$ fonctions fuchsiennes admettant le groupe g. Les fonctions:

$$
\begin{gathered}
F_0 Z_1 + F_1 \frac{dZ_1}{dx} + F_2 \frac{d^2 Z_1}{dx^2} + \ldots + F_q \frac{d^q Z_1}{dx^q}, \\
F_0 Z_2 + F_1 \frac{dZ_2}{dx} + F_2 \frac{d^2 Z_2}{dx^2} + \ldots + F_q \frac{d^q Z_2}{dx^q}, \\
\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
F_0 Z_p + F_1 \frac{dZ_p}{dx} + F_2 \frac{d^2 Z_p}{dx^2} + \ldots + F_q \frac{d^q Z_q}{dx^q},
\end{gathered}
$$

formeront un système zétafuchsien.

Cherchons maintenant quelle est l'expression la plus générale d'un système zétafuchsien admettant les groupes g et G. Soit:

$$T_1, T_2, \ldots, T_p$$

un pareil système. Posons pour abréger:

$$Z_i^q = \frac{d^q Z_i}{dx^q}.$$

Considérons la matrice:

$$\| Z, Z', Z'', \ldots, Z^{p-1}, T \|.$$

Pour abréger nous n'avons écrit qu'une ligne de cette matrice; mais il faut supposer qu'elle a p lignes et que dans la i^e ligne, chacune des lettres que j'ai écrites sans indice est affectée de l'indice i. Soit maintenant $(-1)^k \Delta_{k-1}$ le déterminant que l'on obtient en supprimant dans cette matrice la k^e colonne; on aura les relations:

$$T_i = -\frac{1}{\Delta_p}(\Delta_0 Z_i + \Delta_1 Z_i' + \Delta_2 Z_i'' + \ldots + \Delta_{p-1} Z_i^{p-1}).$$

Lorsque la variable z subit une substitution du groupe g, les fonctions Z_i, Z'_i, ..., T_i subissent une même substitution S appartenant au groupe G, à savoir:

$$(Z_i, \ \Sigma a_{ik} Z_k), \ (Z'_i, \ \Sigma a_{ik} Z_k), \ \ldots, \ (T_i, \ \Sigma a_{ik} T_k).$$

Tous les déterminants $\Delta_0, \Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_p$ sont alors multipliés par un même facteur, c'est à dire par le déterminant:

$$\Sigma \pm a_{ii}.$$

Les rapports $\frac{\Delta_k}{\Delta_p}$ ne sont donc pas altérés; ce sont donc des fonctions fuchsiennes de z, c'est à dire des fonctions rationnelles de x et de y. Voici donc l'expression générale cherchée:

$$T_i = F_0 Z_i + F_1 Z'_i + F_2 Z''_i + \ldots + F_{p-1} Z_i^{p-1} \tag{4}$$

les F étant rationnels en x et y.

Les fonctions Z_i^p formant un système zétafuchsien, on aura:

$$Z_i^p + F_{p-1} Z_i^{p-1} + \ldots + F_1 Z'_i + F_0 Z_i = 0 \tag{5}$$

les F étant rationnels en x et y. Ainsi envisageons des fonctions zétafuchsiennes quelconques:

$$Z_1, \ Z_2, \ \ldots, \ Z_p$$

ayant pour groupes G et g. Considérons-les comme fonctions de $x = f(z)$, où $f(z)$ est une fonction fuchsienne admettant le groupe g.

Elles satisferont toujours à une équation linéaire à coëfficients algébriques.

Il résulte de là que les fonctions T_i satisferont comme les fonctions Z_i elles-mêmes à une pareille équation. Mais en vertu de la relation (4), l'équation à laquelle satisfait T_i et celle à laquelle satisfait Z_i appartiennent à la même espèce.

Ainsi toutes les fonctions zétafuchsiennes qui ont même groupe satisfont à des équations linéaires à coëfficients rationnels en x et en y et qui sont toutes de la même espèce.

Nous supposerons dans ce qui va suivre que le déterminant

$$\Sigma \pm a_{ii}$$

de toutes les substitutions du groupe G est égal à 1. Cette hypothèse est permise. En effet on peut toujours dans une équation linéaire d'ordre p, faire disparaître le coëfficient du terme en

$$\frac{d^{p-1}v}{dx^{p-1}}$$

et si ce terme est nul, toutes les substitutions du groupe de l'équation ont leur déterminant égal à 1.

§ 5. *Développements en séries.*

Supposons d'abord que le groupe fuchsien g soit de la 1^ère^ famille. Soit s_i une substitution de ce groupe

$$s_i = \left(z, \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right).$$

Soit S_i la substitution correspondante du groupe G. Ce sera une substitution linéaire de déterminant 1 que l'on pourra représenter par le tableau de ses coëfficients:

$$\begin{vmatrix} a_{11}^i & a_{12}^i & \dots & a_{1p}^i \\ a_{21}^i & a_{22}^i & \dots & a_{2p}^i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{p1}^i & a_{p2}^i & \dots & a_{pp}^i \end{vmatrix}$$

La substitution S_i^{-1} sera alors représentée par le tableau:

$$\begin{vmatrix} A_{11}^i & A_{12}^i & \dots & A_{1p}^i \\ A_{21}^i & A_{22}^i & \dots & A_{2p}^i \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{p1}^i & A_{p2}^i & \dots & A_{pp}^i \end{vmatrix}$$

où les A sont les mineurs du déterminant des a.

Nous allons considérer p fonctions rationnelles

$$H_1, H_2, \ldots, H_p$$

et p séries:

$$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$$

et nous adopterons les notations suivantes:

$$zs_i = \frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}$$

$$H_\mu S_i = \sum a^i_{\mu\nu} H_\nu$$

$$\xi_\mu S_i = \sum a^i_{\mu\nu} \xi_\nu .$$

Les séries ξ s'écriront alors

$$\xi_\mu(z) = \sum\nolimits_i [H_\mu(zs_i)] S_i^{-1} \left[\frac{d(zs_i)}{dz}\right]^m . \tag{1}$$

Supposons que l'on ait démontre que ces séries sont absolument convergentes; voyons quelles seront leurs propriétés. On aura:

$$\xi_\mu(z) = \sum\nolimits_i [H_\mu(zs_k s_i)] S_i^{-1} S_k^{-1} \left[\frac{d(zs_k s_i)}{dz}\right]^m$$

et de plus:

$$\xi_\mu(zs_k) = \sum\nolimits_i [H_\mu(zs_k s_i)] S_i^{-1} \left[\frac{d(zs_k s_i)}{d(zs_k)}\right]^m$$

d'où:

$$[\xi_\mu(z)] S_k = \sum [H_\mu(zs_k s_i)] S_i^{-1} \left[\frac{d(zs_k s_i)}{dz}\right]^m$$

et enfin:

$$\xi_\mu(zs_k) = [\xi_\mu(z)] S_k \left[\frac{dz}{d(zs_k)}\right]^m . \tag{2}$$

Ecrivons la série (1) et la relation (2) avec les notations ordinaires, il vient:

$$\xi_\mu = \sum\nolimits_i \sum\nolimits_\nu A^i_{\mu\nu} H_\nu \left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) (\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}$$

et

$$\xi_\mu\left(\frac{\alpha_k z + \beta_k}{\gamma_k z + \delta_k}\right) = \sum\nolimits_\nu a^k_{\mu\nu}\xi_\nu(z)(\gamma_k z + \delta_k)^{2m}.$$

Il reste à rechercher si les séries (1) sont absolument convergentes. Pour cela envisageons la série

$$\lambda_{\mu\nu} = \sum\nolimits_i \operatorname{mod}\left[A^i_{\mu\nu}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}\right]$$

et cherchons pour quelles valeurs de m cette série est convergente.

Nous allons donc chercher avec quelle rapidité croissent les coëfficients $A^i_{\mu\nu}$. A cet effet envisageons les substitutions fondamentales du groupe G et leurs inverses. Si k est le nombre des substitutions fondamentales, nous aurons en tout $2kp^2$ coëfficients. Soit M le plus grand module de ces $2kp^2$ coëfficients.

Soit maintenant S_i une substitution quelconque du groupe G dont tous les coëfficients aient leurs modules plus petits que N; soit d'ailleurs Σ une des substitutions fondamentales ou une de leurs inverses. Les modules de tous les coëfficients de $S_i\Sigma$ seront plus petits que pMN; car chacun de ces coefficients est une somme de p monomes et chacun de ces monomes est le produit d'un coëfficient de S_i par un coëfficient de Σ.

Cela posé, une substitution S_i quelconque pourra toujours se mettre sous la forme suivante:

$$S_i = \Sigma_1^{\alpha_1}\Sigma_2^{\alpha_2}\ldots\Sigma_p^{\alpha_p}. \tag{3}$$

Chacune des lettres $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_p$ désigne une des substitutions fondamentales ou une de leurs inverses, la même substitution pouvant d'ailleurs se retrouver plusieurs fois dans la suite. Les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ sont entiers positifs. La somme $\sigma = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$ s'appelle *l'exposant* de la substitution. Dans le cas ou la substitution S_i peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme (3), son exposant est la plus petite valeur que puisse prendre la somme $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p$.

Il résulte de cette définition que les modules des coëfficients d'une substitution dont l'exposant est σ sont plus petits que

$$(Mp)^\sigma.$$

Le groupe G est isomorphe au groupe g. Il en résulte que l'exposant de S_i est le même que celui de la substitution correspondante s_i

du groupe g si l'isomorphisme est holoèdrique. Il est plus petit, en général, si l'isomorphisme est mériédrique. Dans tous les cas il ne peut pas être plus grand.

Soit d'un autre côté R la distance à l'origine d'un transformé zs_i du point z, distance évaluée au point de vue de la géométrie non-euclidienne; je veux dire que R est la L de la droite 0-zs_i. On peut trouver une relation entre R et l'exposant σ de la substitution s_i que nous appellerons aussi pour abréger l'exposant du point zs_i. En effet supposons pour fixer les idées que les points z et 0 soient tous deux intérieurs au polygone R_0. La droite zs_i-0 dont la L est égale à R traversera un certain nombre de polygones $R_0, R_1, \ldots, R_i$ et σ sera au plus égal au nombre n de ces polygones. Quelle relation y aura-t-il maintenant entre R et n.

Considérons d'abord le polygone R_0; la L de tout arc de courbe joignant deux points du périmètre de ce polygone appartenant à deux côtés non adjacents sera plus grande qu'une certaine limite inférieure que j'appellerai λ. Considérons maintenant un polygone R_1 adjacent à R_0 le long d'un côte C_1 et envisageons un arc de courbe joignant un point d'un côté C_0 de R_0 à un point du côté C_2 de R_1 et traversant le côté C_1. Je supposerai de plus que ces trois côtés C_0, C_1, C_2 n'ont aucun point commun. (Cf. *Théorie des groupes fuchsiens,* Acta mathematica, T. I, page 31.) La L d'un pareil arc restera toujours plus grande qu'une certaine limite inférieure que j'appellerai μ.

Considérons enfin un arc de courbe qui vient couper successivement divers côtés de divers polygônes R_i et de façon que tous ces côtés viennent converger en un même point. Ce point sera un sommet de l'un des polygones et comme le groupe g est supposé de la 1ère famille, ce sera un sommet de la 1ère catégorie auquel ne viendra aboutir qu'un nombre *fini* de côtés. J'appellerai h la limite supérieure que ce nombre fini ne pourra dépasser. On aura alors:

$$n < R\left(\frac{1}{\lambda} + \frac{h}{\mu}\right)$$

inégalité que nous pourrons écrire:

$$n < \alpha R \quad \text{ou} \quad \sigma < \alpha R$$

α étant une constante.

Mais si l'on se reporte au paragraphe I du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (Acta mathematica, T. I), on verra que l'on a (K étant une constante)

$$\operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2} < \frac{K}{e^{2R} + e^{-2R} + 2} < Ke^{-2R}$$

et de plus que la série $\sum \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$ est convergente.

On a d'ailleurs, d'après ce que nous venons de voir:

$$\operatorname{mod} A^i_{\mu\nu} < (Mp)^\sigma < e^{R\alpha \log(Mp)}.$$

On peut donc prendre m assez grand pour que:

$$2m - 4 > \alpha \log(Mp)$$

d'où:

$$\operatorname{mod} A^i_{\mu\nu}(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m} < \operatorname{mod}(\gamma_i z + \delta_i)^{-4}$$

et par conséquent pour que la série $\lambda_{\mu\nu}$ définie plus haut soit convergente. La limite que l'on est ainsi conduit à attribuer au nombre m n'est pas précise. Reprenons maintenant les séries (1); on peut trouver une limite supérieure du module des p fonctions:

$$H_\mu(zs_i)$$

pourvu qu'aucune d'elles ne devienne infinie sur le cercle fondamental. (Cf. *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* § I, Acta mathematica T. I.) Les séries (1) sont donc absolument convergentes.

C. Q. F. D.

La relation (2) montre ensuite que si l'on divise les p fonctions $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ par une même fonction thétafuchsienne θ, les quotients

$$Z_1 = \frac{\xi_1}{\theta}, \quad Z_2 = \frac{\xi_2}{\theta}, \quad \ldots, \quad Z_p = \frac{\xi_p}{\theta}$$

forment un système zétafuchsien.

D'où la conclusion suivante: Avec un groupe fuchsien g de la 1ère famille et un groupe zétafuchsien G isomorphe au premier, on peut toujours construire une infinité de systèmes zétafuchsiens.

Donc on peut toujours construire une infinité d'équations linéaires admettant un groupe donné, pourvu que ce groupe soit isomorphe à un groupe fuchsien de la 1^{ère} famille.

Cette remarque est importante au point de vue de l'intégration algébrique de ces équations. Les savants qui ont abordé jusqu'ici la question de cette intégration algébrique ont cherché à former les groupes d'ordre fini contenus dans le groupe linéaire. Il restait à savoir s'il existait des équations admettant ces groupes. Cette question est maintenant résolue, puisque tout groupe d'ordre fini peut toujours être regardé comme isomorphe à un groupe fuchsien de la 1ère famille.

Qu'arrive-t-il lorsque le groupe G est d'ordre fini? Il est mériédriquement isomorphe au groupe g; si dans ce groupe g on distingue les substitutions auxquelles correspond dans le groupe G la substitution identique, ces substitutions formeront un sous-groupe g' contenu dans g. Les fonctions $x = f(z)$ et $y = f_1(z)$ et, en général, les fonctions fuchsiennes de groupe g, pourront être regardées comme des cas particuliers des fonctions fuchsiennes de groupe g'. D'un autre côté, les séries $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_p$ se réduisent à des séries thétafuchsiennes de groupe g', et les fonctions $Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$ à des fonctions fuchsiennes de groupe g'. Il y a donc une relation algébrique entre Z_i et x. L'intégrabilité algébrique des équations linéaires auxquelles satisfont les fonctions Z_i est donc mise en évidence.

Nous pouvons dès à présent indiquer l'expression analytique générale des fonctions zétafuchsiennes. Nous avons vu en effet que si

$$Z_1^h, \; Z_2^h, \; \ldots, \; Z_p^h \qquad (h=1, 2, \ldots, p)$$

sont p systèmes zétafuchsiens et si

$$T_1, \; T_2, \; \ldots, \; T_p$$

représentent un système zétafuchsien quelconque, on a

$$T_\mu = F_1 Z_\mu^1 + F_2 Z_\mu^2 + \ldots + F_p Z_\mu^p$$

$F_1, F_2, \ldots, F_p$ étant des fonctions fuchsiennes que l'on peut toujours considérer comme le quotient de deux séries thétafuchsiennes. Voici par conséquent quelle est la forme générale de la fonction T_μ.

Soient

$$\xi_\mu^1,\ \xi_\mu^2,\ \dots,\ \xi_\mu^p$$

$$\theta,\ \theta_1,\ \theta_2,\ \dots,\ \theta_p$$

p séries de la forme (1) et $p+1$ séries thétafuchsiennes, on aura

$$T_\mu = \frac{\theta_1\xi_\mu^1 + \theta_2\xi_\mu^2 + \dots + \theta_p\xi_\mu^p}{\theta}.$$

Parmi les séries ξ on peut en envisager qui sont plus simples que les autres. En effet dans les p séries:

$$\xi_1,\ \xi_2,\ \dots,\ \xi_p$$

entrent p fonctions rationnelles arbitraires:

$$H_1,\ H_2,\ \dots,\ H_p.$$

Supposons que toutes les fonctions H soient nulles, excepté H_ν, la série ξ_μ se réduira à

$$\xi_{\mu\nu} = \sum_i H_\nu\left(\frac{\alpha_i z + \beta_i}{\gamma_i z + \delta_i}\right) A_{\mu\nu}^i(\gamma_i z + \delta_i)^{-2m}.$$

Les séries de cette forme où $p-1$ des fonctions arbitraires H sont nulles peuvent s'appeler séries ξ simples.

Choisissons maintenant p fonctions H quelconques et formons un système de séries ξ_μ à l'aide de ces p fonctions. Formons ensuite avec chacune de ces p fonctions, avec H_ν par exemple, un système de séries simples $\xi_{\mu\nu}$, les $p-1$ autres fonctions étant supposées nulles, on aura:

$$\xi_\mu = \xi_{\mu 1} + \xi_{\mu 2} + \dots + \xi_{\mu p}$$

ce qui montre qu'une série ξ quelconque peut être regardée comme une somme de séries simples.

Voyons maintenant quelle est l'expression analytique des séries ξ au moyen des intégrales d'une équation différentielle linéaire, donnant naissance à un système de fonctions zétafuchsiennes. D'abord, afin d'éviter des complications inutiles et qui ne tiennent pas au fond des choses, je supposerai que le groupe g est non-seulement de la 1[ère] famille, mais encore du genre o. Le système zétafuchsien considéré:

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$$

regardé comme fonction de la transcendante fuchsienne $x = f(z)$ satisfera à l'équation:

$$\frac{d^p Z}{dx^p} + \sum \varphi_k \frac{d^k Z}{dx_k} = 0 \tag{4}$$

où les coëfficients φ_k sont rationnels en x seulement. Je supposerai pour simplifier que cette équation (4) soit du 2[d] ordre et qu'elle soit *réduite* au sens donné à ce mot au paragraphe 3 de ce mémoire. Je l'écrirai:

$$\frac{d^2 Z}{dx^2} + \varphi_2 Z = 0. \tag{4}$$

Les infinis de φ_2, c'est à dire les points singuliers, seront $a_1, a_2, \ldots, a_n$ et ∞. Je supposerai qu'il n'y a pas de points à apparence singulière ou plutôt s'il y en a, je les regarderai comme des points singuliers ordinaires et je les ferai correspondre à un sommet de R_0. J'appellerai $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}$ les sommets de R_0 qui correspondront aux $n+1$ points singuliers $a_1, a_2, \ldots, a_n, \infty$. J'appellerai $\frac{2\pi}{\beta_i}$, comme dans le paragraphe 5 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes,* la somme des angles du cycle dont fait partie le sommet α_i. Les racines γ_i et $1-\gamma_i$ de l'équation déterminante relative à $x = a_i$ et à l'équation différentielle (4) devront être des multiples de $\frac{1}{\beta_i}$. Les intégrales Z_1 et Z_2 de l'équation (4), regardées comme fonctions de z, seront infinies d'ordre $(\gamma_i - 1)\beta_i$ pour $z = \alpha_i$. Leurs dérivées $Z_1' = \frac{dZ_1}{dx}$ et $Z_2' = \frac{dZ_2}{dx}$ seront infinies d'ordre $\gamma_i\beta_i$. Voici maintenant quelle est l'expression générale d'une série ξ quelconque:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m [F(x) Z_1 + F_1(x) Z_1'] = \xi_1 \tag{5}$$

$F(x)$ et $F_1(x)$ étant des fonctions rationnelles de x.

Nous allons chercher si l'on peut déterminer ces deux fonctions rationnelles de telle façon que l'expression (5) et l'expression conjuguée

$$(5') \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m (FZ_2 + F_1 Z_2') = \xi_2$$

ne deviennent pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental.

Si l'on a, comme nous pouvons le supposer puisque le coëfficient de $\frac{dZ}{dx}$ est nul dans l'équation (4):

$$Z_1 Z_2' - Z_2 Z_1' = 1,$$

il vient

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F = \xi_1 Z_2' - \xi_2 Z_1'$$

et

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^m F_1 = \xi_1 Z_2 - \xi_2 Z_1.$$

Il suit de là que les deux fonctions F et F_1 ne peuvent devenir infinies que pour les points singuliers $z = \alpha_i$, la première d'ordre $(\gamma_i + m)\beta_i - m$ au plus (en z) et la seconde d'ordre $(\gamma_i + m - 1)\beta_i - m$ au plus.

On aura donc

$$F = \frac{\theta(x)}{(x - a_1)^{\lambda_1}(x - a_2)^{\lambda_2} \dots (x - a_n)^{\lambda_n}}$$

et

$$F_1 = \frac{\theta(x)}{(x - a_1)^{\lambda_1 - 1}(x - a_2)^{\lambda_2 - 1} \dots (x - a_n)^{\lambda_n - 1}}$$

où $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ sont les plus grands nombres entiers satisfaisant aux inégalités:

$$(6) \qquad \lambda_i \leqq \gamma_i + m - \frac{m}{\beta_i}$$

et où θ et θ_1 sont des polynômes entiers en x qu'il s'agit maintenant de déterminer plus complètement.

Nous venons de voir que F ne pouvait devenir pour $x = a_i$ infini d'un ordre plus grand que λ_i et que F_1 ne pouvait devenir infini d'un ordre plus grand que $\lambda_i - 1$.

Cherchons maintenant un nombre μ_i tel que si F est infini d'ordre μ_i et F_1 infini d'ordre $\mu_i - 1$ pour $x = a$, ξ_1 et ξ_2 soient certainement finis.

Il arrive alors que $FZ_1 \left(\frac{dx}{dz}\right)^m$ et $F_1 Z_1' \left(\frac{dx}{dz}\right)^m$ deviennent infinis d'ordre:

$$\mu_i + \gamma_i - 1 - m\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right)$$

d'où il résulte que μ_i est le plus grand nombre entier satisfaisant à l'inégalité:

$$\mu_i \leqq 1 - \gamma_i + m - \frac{m}{\beta_i}.$$

Pour $x = \infty$, $\frac{dx}{dz}$ devient infini d'ordre $1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}$, Z_1 d'ordre γ_{n+1} et Z_1' d'ordre $\gamma_{n+1} - 1$. Il en résulte que F ne peut pas être infini d'ordre plus élevé que:

$$\lambda_{n+1} \leqq -m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + \gamma_{n+1} - 1$$

et F_1 d'ordre plus élevé que $\lambda_{n+1} + 1$.

D'autre part si F est infini d'ordre μ_{n+1} et F_1 d'ordre $\mu_{n+1} + 1$, ξ_1 et ξ_2 seront au plus d'ordre:

$$\mu_{n+1} + \gamma_{n+1} + m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)$$

de sorte que si μ_{n+1} satisfait à l'inégalité:

$$\mu_{n+1} \leqq -m\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) - \gamma_{n+1}$$

on sera certain que ξ_1 et ξ_2 sont finis.

Posons maintenant

$$F = f\varphi, \qquad F_1 = f_1\varphi_1$$

f, φ, f_1, φ_1 étant des fonctions rationnelles devenant infinies respectivement d'ordre μ_i, $\lambda_i - \mu_i$, $\mu_i - 1$, $\lambda_i - \mu_i$ pour $x = a_i$ et d'ordre μ_{n+1},

$\lambda_{n+1} - \mu_{n+1}$, $\mu_{n+1} + 1$, $\lambda_{n+1} - \mu_{n+1}$ pour $x = \infty$. Pour que cette décomposition ne puisse pas se faire d'une infinité de manières, nous supposerons qu'un coëfficient quelconque de f et un de f_1 sont assujettis à avoir une valeur donnée.

Voici alors le nombre des coëfficients restés arbitraires:

$$\text{dans } f, \qquad \Sigma\mu_i$$

$$\text{dans } f_1, \qquad \Sigma\mu_i + 1 - n$$

$$\text{dans } \varphi \text{ et dans } \varphi_1, \qquad \Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i + 1$$

en tout

$$2\Sigma\lambda_i + 3 - n.$$

Mais entre ces coëfficients, il y a certaines relations dont il faut chercher le nombre. Considérons un quelconque des infinis a_i, posons pour abréger $a_i = 0$ et supprimons partout l'indice i. Soit:

$$(7) \quad \begin{cases} \varphi = Ax^{\mu-\lambda} + A^1x^{\mu-\lambda+1} + A^2x^{\mu-\lambda+2} + \ldots + A^{\lambda-\mu-1}x^{-1} + \varphi' \\ \varphi_1 = A_1x^{\mu-\lambda} + A_1^1x^{\mu-\lambda+1} + \ldots\ldots\ldots\ldots + A_1^{\lambda-\mu-1}x^{-1} + \varphi_1' \end{cases}$$

φ' et φ_1' étant finis pour $x = 0$. On peut maintenant toujours supposer que Z_1 et Z_2 aient été choisis de manière à être respectivement infinis d'ordre $(\gamma - 1)$ et $-\gamma$ pour $x = 0$, car si cela n'était pas il suffirait de remplacer Z_1 et Z_2 par $\alpha Z_1 + \beta Z_2$ et $\gamma Z_1 + \delta Z_2$, α, β, γ et δ étant des coëfficients convenablement choisis. Cela posé, imaginons qu'il n'y ait aucune relation entre les coëfficients A des expressions (7), l'expression (5) sera infinie d'ordre:

$$(8) \qquad \lambda - m\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) + \gamma - 1$$

et l'expression (5') d'ordre:

$$\lambda - m\left(1 - \frac{1}{\beta}\right) - \gamma.$$

L'expression (5') est donc finie en vertu de l'inégalité (6). Mais pour que l'expression (5) soit finie, il faut qu'il y ait entre les coëfficients

A des expressions (7), des relations dont le nombre est précisément le plus petit entier qui est égal ou supérieur à l'expression (8), c'est à dire $\lambda - \mu$.

Le même raisonnement s'appliquerait pour $x = \infty$ et on trouverait qu'on doit avoir entre les coëfficients de φ et φ_1 $\lambda_{n+1} - \mu_{n+1}$ relations pour que (5) et (5') restent finis pour $x = \infty$. Il y a donc en tout

$$\Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i$$

relations et il reste:

$$\Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n$$

coëfficients arbitraires. Dans cette expression $\Sigma\lambda_i$ signifie

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n + \lambda_{n+1}.$$

Ainsi toutes les séries qui ne deviennent pas infinies, s'expriment linéairement à l'aide de:

$$\Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n$$

d'entre elles. On trouverait un résultat analogue pour le cas de $p > 2$.

Nous devons adjoindre au groupe zétafuchsien G, le groupe zétafuchsien corrélatif G_1 défini de la façon suivante; soit:

$$(Z_i, \ \Sigma a_{ik} Z_k)$$

une substitution correspondante de G, la substitution correspondante de G_1 sera:

$$(\Sigma a_{ki} T_k, \ T_i)$$

en appelant

$$T_1, \ T_2, \ \ldots, \ T_p$$

l'un des systèmes zétafuchsiens engendrés par le groupe G_1. On sait que dans la théorie des formes algebriques et en particulier dans celle des formes appelées *contravariants* et *mixed-concomitants,* la considération de la substitution corrélative d'une substitution linéaire donnée joue un rôle fort important.

Considérons maintenant l'expression suivante

$$(9) \qquad Z_1 T_1 + Z_2 T_2 + \ldots + Z_p T_p.$$

Quand la variable z subit une substitution du groupe fuchsien g, les Z_i subissent la substitution correspondante de G et les T_i subissent la substitution correspondante de G_1. Il en résulte que l'expression (9) elle-même demeure invariable. C'est donc une fonction fuchsienne de z.

On verra plus loin le rôle des fonctions zétafuchsiennes et surtout des séries ξ engendrées par le groupe corrélatif G_1.

Remarquons maintenant que dans le cas particulier de $p = 2$, à la substitution:

$$S_i = \begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}$$

du groupe G, correspond la substitution

$$\begin{vmatrix} d_i & -c_i \\ -b_i & a_i \end{vmatrix}$$

du groupe G_1. Ces deux substitutions ont évidemment mêmes multiplicateurs, d'où il suit que les quantités que nous avons appelées plus haut

$$\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n, \gamma_{n+1}$$

sont les mêmes pour les deux groupes G et G_1.

Supposons maintenant $p > 2$; si $x = a$ est un point singulier pour lequel l'équation déterminante relative à une équation (4) engendrée par le groupe G, ait pour racines:

$$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$$

l'équation déterminante relative à l'une des équations (4) engendrées par le groupe G_1 aura pour racines:

$$\sum\varepsilon - \varepsilon_1 - \frac{p(p-1)}{2}, \quad \sum\varepsilon - \varepsilon_2 - \frac{p(p-1)}{2}, \quad \ldots, \quad \sum\varepsilon - \varepsilon_p - \frac{p(p-1)}{2}.$$

§ 6. *Décomposition en éléments simples.*

Soit

(1) $$Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$$

un système zétafuchsien que je supposerai de la 1ère famille, comme dans le paragraphe précédent. Soit $f(z)$ une fonction fuchsienne de la 1ère famille ayant même groupe fuchsien que ce système. Je supposerai, pour fixer les idées, que cette fonction est de genre 0 et que toutes les autres transcendantes fuchsiennes de même groupe en sont des fonctions rationnelles.

Je vais reprendre les notations du § 5 du *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes* (Acta mathematica, T. 1, p. 240).

Considérons l'intégrale:

(2) $$\int \frac{Z_i(z)}{z-x}\left(\frac{df(z)}{dz}\right)^{-h} dz$$

prise le long du contour S défini à la dite page 240. Je dis que cette intégrale tend vers 0 quand r tend vers 1, pourvu que h soit suffisamment grand.

En effet nous pourrons aisément trouver une limite supérieure M_1 du module de $\frac{1}{z-x}$. Supposons maintenant que le module de $\frac{df}{dz}$ reste inférieur à M_2 le long du périmètre de R_0; il restera inférieur à:

$$M_2 H^{2h}$$

le long du périmètre de S. Supposons enfin que le long du périmètre de R_0, les modules des p fonctions:

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$$

restent inférieurs à M_3. Cherchons la limite supérieure du module de ces mêmes fonctions le long du périmètre du polygone R_i en supposant que la substitution s_i qui change R_0 en R_i soit d'exposant σ. Soit S_i la substitution de G qui correspond à s_i. Nous avons vu au paragraphe précédent que les coëfficients de S_i sont plus petits que

$$e^{a\sigma}$$

a étant une constante convenablement choisie. Donc le long de R_i le module des p fonctions Z est plus petit que:

$$pM_3 e^{a\sigma}.$$

Considérons en particulier les polygones R_i qui forment la bordure de S. Leur exposant est, d'après le paragraphe précédent, plus petit que $\frac{b}{a}(R + \lambda)$ où b est une constante convenablement choisie. D'où ce résultat:

$$\operatorname{mod} Z_i < pM_3 e^{b(R+\lambda)}$$

le long de S. La quantité sous le signe $\int$ a donc son module plus petit que

$$pM_1 M_2 M_3 e^{b(R+\lambda)} H^{2h}. \tag{3}$$

Si l'on se reporte à la valeur de H (*Fonctions fuchsiennes,* Acta mathematica, T. 1, p. 241) on verra que cette expression (3) tend vers 0 pourvu que

$$b < 4h.$$

L'intégrale (2) tend donc aussi vers 0, d'où l'on peut conclure que les p fonctions

$$Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h} \tag{4}$$

peuvent se développer en séries de la façon suivante:

$$\sum \frac{A}{z - a} + \sum \frac{A_2}{(z - a)^2} + \ldots + \sum \frac{A_m}{(z - a)^m} \tag{5}$$

où les a sont les infinis et les A les résidus. Si la fonction n'admet que des infinis simples, cette série se réduit à

$$\sum \frac{A}{z - a}.$$

Quand on connaîtra les infinis et les résidus de ces p fonctions à l'intérieur de R_0, on connaîtra tous les infinis et tous les résidus de ces mêmes fonctions et par conséquent la série (5). Supposons que a soit un infini des fonctions (4) situé à l'intérieur de R_0 et que nous supposerons simple pour fixer les idées. Soient:

$$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_p$$

les résidus des p fonctions (4) correspondant à cet infini.

Les points:

$$as_i = \frac{\alpha_i a + \beta_i}{\gamma_i a + \delta_i}$$

seront aussi des infinis simples de ces mêmes fonctions (4).

Nous écrirons comme plus haut:

$$A_\mu S_i = \Sigma a_{\mu\rho} A_\rho$$

si la substitution S_i s'écrit:

$$(Z_\mu,\ \Sigma a_{\mu\rho} Z_\rho).$$

Or nous avons

$$Z_\mu(zs_i) = [Z_\mu(z)]\, S_i = \Sigma a_{\mu\rho} Z_\rho(z)$$

et

$$Z_\mu(zs_i)\left[\frac{df(zs_i)}{d(zs_i)}\right]^{-h} = \left[\sum a_{\mu\rho} Z_\rho(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}\right]\left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^h.$$

Multiplions l'identité précédente par $z - a$ et faisons $z = a$, il viendra, en appelant

$$A'_1,\ A'_2,\ \ldots,\ A'_p$$

les résidus des p fonctions (4) pour $z = as_i$

$$(\gamma_i a + \delta_i)^2 A'_\mu = \Sigma a'_{\mu\rho} A_\rho (\gamma_i a + \delta_i)^{-2h}$$

d'où

$$A'_\mu = (A_\mu S_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{-2h-2}.$$

Telle est la valeur des résidus cherchés. Réunissons ensemble les termes de la série (5) qui correspondent aux infinis de la forme as_i; nous trouverons la série suivante:

$$\Phi_\mu(z,\ a) = \sum \frac{(A_\mu S_i)}{(z - as_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}}, \tag{6}$$

de sorte que chaque fonction (4) se trouve décomposée en une somme d'un nombre fini d'éléments simples de la forme $\Phi_\mu(z,\ a)$.

Mais on peut pousser plus loin encore cette décomposition en éléments simples.

L'identité (6) pourra en effet s'écrire:

$$\Phi_\mu = \sum_\nu \sum_i \frac{a^i_{\mu\nu} A_\nu}{(z - as_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}}$$

ou encore:

$$\Phi_\mu = A_1 \Phi_{\mu 1} + A_2 \Phi_{\mu 2} + \ldots + A_p \Phi_{\mu p}$$

en posant

$$\Phi_{\mu\nu} = \sum_i \frac{a^i_{\mu\nu}}{(z - as_i)(\gamma_i a + \delta_i)^{2h+2}}$$

de sorte que si les fonctions (4) admettent les infinis simples

$$z_1,\ z_2,\ \ldots,\ z_q$$

à l'intérieur de R_0, et si elles admettent l'infini z_k respectivement avec les résidus:

$$B_{k1},\ B_{k2},\ \ldots,\ B_{kp}$$

il viendra pour la μ^e des fonctions (4) l'identité:

$$Z_\mu(z) \left(\frac{df}{dz}\right)^{-h} = \Sigma_k \Sigma_\nu B_{k\nu} \Phi_{\mu\nu}(z,\ z_k)$$

qui nous montre cette fonction décomposée en éléments simples. On arriverait à un résultat analogue pour les cas où cette fonction admettrait des infinis multiples.

Voyons ce que sont ces éléments simples et pour cela regardons dans l'expression $\Phi_{\mu\nu}(z, a)$ z comme une constante et a comme la variable.

Cherchons maintenant à former les séries ξ simples du paragraphe précédent avec le groupe G_1 corrélatif de G de ce même paragraphe, a étant toujours la variable; nous trouverons:

$$\xi_{\mu\nu} = \sum_i H_\nu(as_i) a^i_{\nu\mu}(\gamma_i a + \delta)^{-2m}$$

ou en faisant:

$$H_\nu(a) = \frac{1}{z - a}, \qquad m = h + 1$$

il viendra

$$\xi_{\mu\nu} = \Phi_{\nu\mu}(z, a).$$

Ainsi la transcendante $\Phi_{\nu\mu}$ regardée comme fonction de a est une fonction ξ admettant le groupe G_1 corrélatif de G.

Nous allons supposer maintenant $p = 2$ pour fixer les idées et nous allons étudier de plus près la décomposition en éléments simples des fonctions:

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}(FZ_1 + F_1 Z_1') = \Lambda_1$$

$$\left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}(FZ_2 + F_1 Z_2') = \Lambda_2$$

Z_1, Z_2, Z_1', Z_2' ayant la même signification qu'à la fin du paragraphe précédent et F et F_1 désignant des fonctions rationnelles en x. Il est clair que Λ_1 et Λ_2 sont des fonctions de la forme (4) auxquelles, par conséquent, on peut appliquer tout ce que nous venons de dire.

Dans ce qui va suivre, les lettres β_i, γ_i, λ_i, μ_i auront la même signification qu'à la fin du paragraphe précédent, et nous poserons:

$$m = h + 1.$$

Cherchons la condition pour que les fonctions Λ_1 et Λ_2 ne deviennent pas infinies pour $x = a_i$. Il faut que F et F_1 deviennent nuls d'un ordre suffisamment grand et c'est cet ordre qu'il s'agit d'abord de déterminer. Supposons pour le faire plus aisément que Z_1 et Z_2 soient respectivement infinies d'ordre $\gamma_i - 1$ et $-\gamma_i$; cela est toujours possible, car si cela n'était pas, on remplacerait Z_1 et Z_2 par $\alpha Z_1 + \beta Z_2$ et $\gamma Z_1 + \delta Z_2$, α, β, γ, δ étant des coëfficients convenablement choisis. Si alors F devient nul d'ordre δ_i et F_1 d'ordre $\delta_i + 1$, Λ_1 et Λ_2 seront respectivement infinies d'ordre:

$$h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i$$

et

$$h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) - \gamma_i - \delta_i.$$

On doit donc avoir d'abord:

$$\delta_i \geqq h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) - \gamma_i$$

ou ce qui revient au même

$$\delta_i \geqq \mu_i - 1.$$

Cette condition est suffisante pour que Λ_2 ne devienne pas infini. Pour que Λ_1 reste également fini, il faut encore qu'il y ait certaines relations entre les coëfficients de F et de F_1.

Supposons maintenant que F et F_1 deviennent nuls d'ordre δ_{n+1} et $\delta_{n+1} - 1$ pour $x = \infty$ et Z_1 et Z_2 infinis d'ordre γ_{n+1} et $1 - \gamma_{n+1}$. Il en résultera que Λ_1 et Λ_2 deviendront infinis d'ordre:

$$-h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + \gamma_{n+1} - \delta_{n+1}$$

et

$$-h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + 1 - \gamma_{n+1} - \delta_{n+1}.$$

Par conséquent Λ_2 reste fini pourvu que

$$\delta_{n+1} \geqq 1 - \gamma_{n+1} - h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)$$

ou ce qui revient au même:

$$\delta_{n+1} \geqq \mu_{n+1} + 3.$$

Si en outre il y a certaines relations entre les coëfficients de F et de F_1, Λ restera fini. Nous ne restreignons pas la généralité en supposant que δ_i et δ_{n+1} sont égaux à leurs limites, c'est à dire que l'on a

$$\delta_i = \mu_i - 1$$

$$\delta_{n+1} = \mu_{n+1} + 3.$$

Considérons maintenant les relations dont il vient d'être question et qui doivent exister entre les coëfficients de F et de F_1 pourvu que les deux fonctions Λ restent finies pour $z = \alpha_i$ et pour $z = \alpha_{n+1}$ et avant tout, cherchons quel en est le nombre.

Si F et F_1 étaient des fonctions rationnelles quelconques assujetties seulement à être nulles d'ordre

$$\delta_i \text{ et } \delta_i + 1 \quad (\text{ou } \delta_{n+1} \text{ et } \delta_{n+1} - 1 \quad \text{pour} \quad z = \alpha_{n+1})$$

Λ_1 serait infini d'ordre

$$h\left(1 - \frac{1}{\beta_i} + \gamma_i - 1 - \delta_i\right) \qquad \left(\text{ou } -h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right) + \gamma_{n+1} - \delta_{n+1}\right).$$

Dans le développement de Λ_1 suivant les puissances croissantes de $x - a_i$, il y aurait donc

$$E'\left[h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i\right]$$

$$\left(\text{ou } E'\left[\gamma_{n+1} - \delta_{n+1} - h\left(1 + \frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right] \quad \text{pour} \quad z = \alpha_{n+1}\right)$$

termes infinis. Nous désignons par $E'(x)$ le plus petit entier satisfaisant à la condition

$$E'(x) \geqq x$$

et par $E(x)$ le plus grand entier tel que

$$E(x) \leqq x.$$

Le nombre des relations nécessaires pour que les deux Λ restent finis pour $z = \alpha_i$ est donc égal à:

$$E'\left[h\left(1 - \frac{1}{\beta_i}\right) + \gamma_i - 1 - \delta_i\right]$$

ou bien

$$E'\left[h\left(1-\frac{1}{\beta_i}\right)+\gamma_i-1\right]-\delta_i$$

ou, ainsi qu'il est aisé de le voir:

$$\lambda_i - 1 - \delta_i = \lambda_i - \mu_i.$$

En ce qui concerne le point $z = \alpha_{n+1}$, le nombre des relations est égal à:

$$E'\left[\gamma_{n+1}-\delta_{n+1}-h\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right]$$

ou

$$E'\left[\gamma_{n+1}-h\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right]-\delta_{n+1}$$

ou enfin

$$\lambda_{n+1}+3-\delta_{n+1}=\lambda_{n+1}-\mu_{n+1}.$$

On a en effet

$$\lambda_i = E\left[\gamma_i+(h+1)\left(1-\frac{1}{\beta_i}\right)\right]$$

$$\lambda_{n+1} = E\left[\gamma_{n+1}-1-(h+1)\left(1+\frac{1}{\beta_{n+1}}\right)\right]$$

$$E'(x) = -E(-x), \qquad E(x+1) = E(x)+1$$

$$E\left(\frac{a-1}{b}\right)+E\left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

a et b étant des entiers.

Le nombre total des relations est donc ainsi de:

$$\Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i.$$

Considérons maintenant les diverses fonctions Λ qui admettent q infinis simples donnés sans en admettre d'autres. Toutes ces fonctions s'exprimeront linéairement à l'aide d'un certain nombre d'entre elles. Quel est ce nombre? Les fonctions F et F_1 admettent les q infinis donnés; mais comme elles doivent être nulles respectivement d'ordre δ_{n+1}

et d'ordre $\delta_{n+1} - 1$ pour $x = \infty$, elles admettront $q - \delta_{n+1}$ et $q - \delta_{n+1} + 1$ zéros. Mais la fonction F admet δ_i fois le zéro α_i et la fonction F_1 l'admet $\delta_i + 1$ fois; il reste donc

$$q - \Sigma\delta \quad \text{zéros arbitraires dans } F$$

et

$$q - \Sigma\delta + 1 - n \quad \text{dans } F_1.$$

Il y a donc en tout dans F et F_1

$$2q - 2\Sigma\delta + 3 - n = 2q - 2\Sigma\mu_i + n - 3$$

coëfficients arbitraires.

Mais nous n'avons pas tenu compte des relations qui doivent exister entre les coëfficients de F et de F_1 et dont nous venons de déterminer le nombre. Il faut donc retrancher de l'expression qui précède le nombre de ces relations, c'est à dire

$$\Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i.$$

Il restera ainsi:

$$Q = 2q - \Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i + n - 3$$

coëfficients réellement arbitraires.

Ainsi toutes les fonctions Λ qui admettent les q infinis donnés s'expriment linéairement à l'aide de Q d'entre elles.

Dans toute décomposition en éléments simples, il y a un nombre que l'on peut appeler fondamental et qui joue un rôle très important. Supposons qu'il s'agisse de décomposer en éléments simples les fonctions qui appartiennent à une certaine catégorie C. On doit supposer que la somme de deux fonctions appartenant à cette catégorie C, appartient également à C; ce n'est que dans ces conditions qu'on peut être conduit à chercher une décomposition en éléments simples. Il peut arriver que les éléments simples fassent eux-mêmes partie de C; c'èst ainsi que dans la décomposition des fractions rationnelles, on est conduit à des éléments de la forme $\frac{A}{x-a}$ qui sont eux-mêmes des fractions rationnelles. Dans ce cas, nous dirons que le nombre fondamental est égal à 0. Mais le contraire peut arriver également. Ainsi dans la décomposition des fonctions doublement périodiques, les éléments simples sont de la forme

$A\frac{d}{dx}\log\theta(x - a)$ et ne sont pas des fonctions doublement périodiques. Mais il existe des fonctions doublement périodiques qui sont des sommes de deux éléments simples seulement, et à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment linéairement. Dans ce cas, le nombre fondamental sera égal à 1. En général s'il existe des fonctions de la catégorie C, décomposables en $m + 1$ éléments simples seulement et à l'aide desquelles toutes les autres fonctions de la catégorie C peuvent s'exprimer linéairement, le nombre fondamental sera égal à m, pourvu que m soit le plus petit nombre jouissant de cette propriété. Ainsi dans la décomposition des fonctions rationnelles de x et de y, (y étant lié à x par une relation algébrique $\varphi(x, y) = 0$) décomposition découverte par M. Roch, le nombre fondamental est égal au genre de la relation $\varphi = 0$.

Envisageons de même la décomposition de la fonction $\Lambda(z)$ que nous avons considérée aux pages 238, 266, 275 et 284 du *mémoire sur les fonctions fuchsiennes* en éléments simples de la forme:

$$A_k\Phi(z, z_k). \text{ [1]}$$

Dans le mémoire cité, nous avons déterminé le nombre fondamental relatif à cette décomposition. C'est ainsi que dans le cas du genre 0 et de la 2^e^ famille (loco citato p. 276) nous avons trouvé pour ce nombre:

$$n(m - 1) - m.$$

Quel est maintenant le nombre fondamental relatif à la décomposition qui nous occupe ici, c'est à dire à la décomposition de la fonction Λ_1 en éléments simples de la forme:

$$A_k\Phi_{1.1}(z, z_k) \quad \text{ou} \quad A_k\Phi_{1.2}(z, z_k).$$

Pour cela, il nous suffit d'énoncer le résultat suivant: si m est le nombre fondamental d'une décomposition quelconque en éléments simples, toutes les fonctions qui s'expriment linéairement à l'aide de q éléments donnés, peuvent être exprimées linéairement à l'aide de $q - m$ d'entre elles.

Nous avons vu que les fonctions Λ qui admettent q infinis donnés

$$z_1, z_2, \ldots, z_q$$

[1] Acta mathematica, T. 1, p. 242.

peuvent s'exprimer linéairement à l'aide de

$$2q - \Sigma\lambda_i - \Sigma\mu_i + n - 3$$

d'entre elles. Or ces fonctions peuvent s'exprimer linéairement à l'aide des $2q$ éléments simples:

$$\Phi_{1.1}(z, z_1), \ \Phi_{1.1}(z, z_2), \ \ldots, \ \Phi_{1.1}(z, z_q)$$
$$\Phi_{1.2}(z, z_1), \ \Phi_{1.2}(z, z_2), \ \ldots, \ \Phi_{1.2}(z, z_q).$$

Donc le nombre fondamental est égal à:

$$\Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n.$$

Dans la théorie des fonctions fuchsiennes et des fonctions $\Lambda(z)$ engendrées par ces transcendantes, le nombre fondamental jouissait d'une propriété remarquable que je vais rappeler.

Soit $\psi(h)$ le nombre fondamental relatif à la décomposition en éléments simples des fonctions de la forme

$$\Lambda(z) = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h} F(x, y)$$

où F désigne une fonction rationnelle des deux fonctions fuchsiennes x et y.

Soit $\varphi(m)$ un nombre tel que les fonctions de la forme

$$(\alpha) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^{m} F(x, y)$$

(où F a la même signification que plus haut) qui ne deviennent pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental, s'expriment linéairement à l'aide de $\varphi(m)$ d'entre elles.

On avait l'identité:

$$\psi(h) = \varphi(h + 1).$$

C'est de cette identité que nous avons tiré une conclusion importante, à savoir que toute fonction de la forme (α) pouvait être représentée par une série thétafuchsienne (de la forme (4), § 1, *Mémoire sur les fonctions fuchsiennes*).

De même ici, soit:

$$\psi(h) = \Sigma\lambda_i + \Sigma\mu_i + 3 - n$$

le nombre fondamental relatif à la décomposition de Λ_1.

Soit $\varphi(m)$ un nombre tel que toutes les fonctions de la forme:

$$(\beta) \qquad \left(\frac{dx}{dz}\right)^m (FZ_1 + F_1 Z_1')$$

(forme (5) du § précédent) puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $\varphi(m)$ d'entre elles. On aura encore:

$$(\gamma) \qquad \psi(h) = \varphi(h + 1).$$

Voyons si on pourra tirer de cette indentité la même conclusion que dans le paragraphe cité, c'est à dire si on pourra démontrer que toutes les fonctions de la forme (β) peuvent s'exprimer par l'une des séries ξ du paragraphe précédent.

Supposons que toutes les séries ξ qui ne deviennent pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental et qui correspondent à un exposant m égal à $h + 1$ puissent s'exprimer linéairement à l'aide de $\theta(h + 1)$ d'entre elles. On aura évidemment

$$(\delta) \qquad \theta(h + 1) \leqq \varphi(h + 1)$$

puisque toute série ξ est égale à une fonction de la forme (β). Si l'on a:

$$\theta = \varphi$$

toute fonction de la forme (β) pourra réciproquement s'exprimer par une série ξ. Il n'en serait plus de même si l'on avait:

$$\theta < \varphi.$$

Soient maintenant

$$z_1, z_2, \ldots, z_q$$

q quantités quelconques, intérieures au cercle fondamental. Soient

$$A_1, A_2, \ldots, A_q$$

$$B_1, B_2, \ldots, B_q$$

$2q$ quantités que nous assujettirons plus loin à diverses conditions.

Soit maintenant $\xi_1(z)$ une série ξ ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental et $\xi_2(z)$ sa conjuguée. Ces séries ξ sont engendrées par le groupe fuchsien g et par le groupe zétafuchsien G_1 corrélatif de G. Assujettissons les quantités A et B à la condition suivante:

$$(\varepsilon) \qquad \begin{aligned} &A_1\xi_1(z_1) + A_2\xi_1(z_2) + \ldots + A_q\xi_1(z_q) \\ &\quad + B_1\xi_2(z_1) + B_2\xi_2(z_2) + \ldots + B_q\xi_2(z_q) = 0. \end{aligned}$$

Ecrivons cette même relation pour toutes les séries ξ qui, restant finies à l'intérieur du cercle fondamental, correspondent à un exposant m égal à $h + 1$. Nous aurons de la sorte assujetti les A et les B à $\theta(h + 1)$ conditions distinctes.

Posons alors

$$(\zeta) \qquad \begin{aligned} A_1(z) &= \Sigma A_k \Phi_{1.1}(z, z_k) + \Sigma B_k \Phi_{1.2}(z, z_k) \\ A_2(z) &= \Sigma A_k \Phi_{2.1}(z, z_k) + \Sigma B_k \Phi_{2.2}(z, z_k). \end{aligned}$$

Posons maintenant:

$$\Phi_{1.1}(zs_i, z_k) - \left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^{+h}[a_i\Phi_{1.1}(z, z_k) + b_i\Phi_{2.1}(z, z_k)] = \eta_1(z_k)$$

$$\Phi_{1.2}(zs_i, z_k) - \left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^{+h}[a_i\Phi_{1.2}(z, z_k) + b_i\Phi_{2.2}(z, z_k)] = \eta_2(z_k)$$

en supposant que

$$\begin{vmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{vmatrix}$$

soit le tableau à double entrée des coëfficients de la substitution S_i correspondant à s_i. Il est clair que $\eta_1(z)$ et $\eta_2(z)$ sont deux séries ξ conjuguées ne devenant pas infinies à l'intérieur du cercle fondamental. Donc en vertu des relations (ε) on a:

$$A_1(zs_i) = \left(\frac{dzs_i}{dz}\right)^{+h}[a_iA_1(z) + b_iA_2(z)].$$

On en conclut que Λ_1 et Λ_2 sont deux fonctions de la forme:

$$\Lambda_1 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}(FZ_1 + F_1Z_1')$$

$$\Lambda_2 = \left(\frac{dx}{dz}\right)^{-h}(FZ_2 + F_1Z_2')$$

dont les identités (ζ) nous donnent la décomposition en éléments simples. Or les coëfficients A et B de cette décomposition ne sont assujettis qu'à $\theta(h+1)$ conditions. Ce nombre $\theta(h+1)$ est donc au moins égal au nombre fondamental, d'où l'inégalité

$$\theta(h+1) \geqq \psi(h).$$

De la comparaison de cette inégalité avec (γ) et (δ) on déduit:

$$\theta(h+1) = \varphi(h+1).$$

Donc toute expression de la forme (β) qui ne devient pas infinie peut s'exprimer par une série ξ.

On en déduit aisément qu'il en est de même d'une expression de la forme (β) qui devient infinie.

Donc toute fonction zétafuchsienne est le quotient d'une série ξ par une série thétafuchsienne.

Nous avons, il est vrai, pour fixer les idées, supposé que $p = 2$, mais la démonstration et le résultat subsistent quand p est plus grand que 2.

§ 7. *Extension à la deuxième famille.*

Tout ce qui précède ne s'applique encore qu'aux groupes fuchsiens de la 1ère famille et aux groupes zétafuchsiens qui leur sont isomorphes. Il nous reste à étudier les fonctions zétafuchsiennes dont le groupe fuchsien g est de la 2de ou de la 6e familles.

Parmi ces fonctions nous distinguerons deux espèces.

La $1^{\text{ère}}$ espèce, dont nous nous occuperons d'abord, comprendra les fonctions dérivées d'un groupe zétafuchsien G jouissant des propriétés suivantes: Le groupe fuchsien g étant de la 2^{de} ou de la 6^{e} familles, son polygone générateur R_0 aura des sommets sur le cercle fondamental. A chacun de ces sommets correspond une substitution parabolique du groupe g qui admet ce sommet comme point double. Les substitutions ainsi définies sont les substitutions paraboliques du groupe g; les substitutions du groupe G qui leur correspondent en vertu de l'isomorphisme s'appelleront *substitutions critiques*. Il ne faut pas confondre les substitutions critiques du groupe G et les substitutions fondamentales de ce même groupe. Les substitutions fondamentales de G seront, dans ce qui va suivre, celles qui correspondent aux substitutions de g qui changent un côté de R_0 en son conjugué ou à leurs inverses. Les substitutions critiques de G seront celles qui correspondent aux substitutions paraboliques de g qui n'altèrent pas l'un des sommets de la 2^{de} sorte de R_0 ou à leurs inverses. Formons pour chacune de ces substitutions critiques *l'équation aux multiplicateurs* que l'on obtient, comme on sait, en écrivant le tableau à double entrée des coëfficients, ajoutant $-S$ à chacun des termes de la diagonale principale et égalant à 0 le déterminant ainsi obtenu. Si toutes les racines de ces équations relatives à toutes les substitutions critiques ont pour module l'unité, le groupe G et les fonctions zétafuchsiennes qui en dérivent seront de la $1^{\text{ère}}$ espèce. Soit:

$$(1) \qquad Z_1,\ Z_2,\ \ldots,\ Z_p$$

un système zétafuchsien et $x = f(z)$ une fonction fuchsienne ayant même groupe. Nous avons vu que Z_i considéré comme fonction de x satisfait à une équation linéaire à coëfficients algébriques. Quelles sont les conditions que doit remplir cette équation pour que le système (1) soit de la $1^{\text{ère}}$ espèce? *Il faut et il suffit que si l'on envisage les différents points singuliers de cette équation, toutes les équations déterminantes correspondantes aient toutes leurs racines réelles.*

La seconde espèce, dont il sera question au paragraphe suivant, comprend toutes les autres fonctions zétafuchsiennes.

Je dis que si le groupe G est de la $1^{\text{ère}}$ espèce, les séries ξ du paragraphe (5) seront absolument convergentes.

Considérons en effet une substitution quelconque S du groupe G. Nous pourrons la mettre sous la forme suivante:

$$S = \Sigma_1^{\alpha_1}\Sigma_2^{\alpha_2} \dots \Sigma_n^{\alpha_n} \tag{2}$$

où les substitutions $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$ sont choisies parmi les substitutions fondamentales ou les substitutions critiques et dont les exposants $\alpha_1, \alpha_2, \dots$ sont des entiers positifs. Parmi les substitutions $\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n$, il y en aura en général un certain nombre que j'appellerai $T_1, T_2, \dots, T_q$ qui seront des substitutions critiques et j'appellerai $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_q$ leurs exposants. J'appellerai $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{n-q}$ les $n-q$ exposants qui affectent des substitutions fondamentales. Nous allons chercher, comme dans le paragraphe 5, une limite supérieure des coëfficients de S, et pour cela nous envisagerons la somme des logarithmes des exposants β, $\sum \log \beta$ et celle des exposants γ, $\sum \gamma$. Soit d'abord M un nombre plus grand que les modules des coefficients des substitutions fondamentales et de leurs inverses. Soit ensuite T une quelconque des substitutions critiques, nous pourrons toujours la mettre sous la forme suivante:

$$T = UVU^{-1}$$

où V est une substitution canonique. J'appelle ainsi, à l'exemple de plusieurs géomètres, toute substitution de la forme suivante:

$$(Z_1, Z_2, \dots, Z_p; m_1Z_1, m_2Z_2, \dots, m_pZ_p) \tag{3}$$

ou bien, plus généralement:

$$(Z_1, Z_2, \dots, Z_p; m_1Z_1, m_2Z_2 + n_2Z_1, m_3Z_3 + n_3Z_2, \dots, m_pZ_p + n_pZ_{p-1}) \tag{4}$$

où n_q est nul, si m_q est différent de m_{q-1}.

J'aurai donc à considérer à part les substitutions U et les substitutions V. Je supposerai que le nombre M, défini plus haut, est plus grand que les modules de tous les coëfficients de U et de U^{-1}.

Maintenant nous avons

$$T^\beta = UV^\beta U^{-1}$$

et il s'agit de trouver une limite supérieure des coëfficients de V^β. Si V est de la forme (3), tous les coëfficients de V^β ont pour modules o ou 1. Si V est de la forme (4), on pourra trouver un polynôme entier en β de degré p au plus, à coëfficients positifs et qui sera plus grand que les modules de tous les coëfficients de V^β. Plus simplement on pourra toujours trouver un nombre M' assez grand pour que l'expression $M'\beta^p$ soit plus grande que tous ces modules. Pour simplifier encore, nous supposerons $M' = M$, en prenant pour la valeur commune de ces deux nombres, un nombre assez grand pour satisfaire à toutes les conditions que nous leur avons imposées.

En appelant M_1 et M_2 la limite supérieure des modules des coëfficients de deux substitutions S_1 et S_2, les modules des coëfficients de $S_1 S_2$ seront plus petits que

$$pM_1 M_2.$$

Si donc on se reporte à l'expression (2) de la substitution S, on verra que ses coëfficients sont tous plus petits que:

$$(5) \qquad (pM)^{\Sigma\gamma+3q} e^{p\Sigma\log\beta}.$$

Cherchons maintenant une limite supérieure des deux exposants qui entrent dans cette formule, à savoir $\Sigma\gamma + 3q$ et $\Sigma\log\beta$. Soit zs le transformé du point z par la substitution s du groupe g qui correspond à S. Joignons z et zs par un arc de cercle orthogonal au cercle fondamental, et soit R la L de cet arc de cercle. C'est en fonction de R que je veux exprimer les limites supérieures cherchées.

Considérons l'un quelconque des sommets du polygone R_0 ou de l'un de ses transformés, et décrivons autour de ce sommet un petit cercle défini de la manière suivante. Si ce sommet est de la 1ère sorte et situé à l'intérieur du cercle fondamental, il devra être le centre de ce petit cercle *au point de vue non-euclidien*. Si le sommet est de la 2de sorte et situé sur le cercle fondamental, le petit cercle devra toucher le cercle fondamental en ce sommet même. Je puis toujours supposer que ces cercles ont été pris assez petits pour n'avoir aucun point commun. Il arrivera alors que la L d'un arc de courbe qui ira d'un point de l'un de ces cercles à un point d'un autre de ces petits cercles, restera toujours supérieure à une certaine limite λ. L'arc de cercle z-zs, défini plus haut, traversera un certain nombre de ces petits cercles et ce nombre ne pourra pas être supérieur à $\frac{R}{\lambda}$. Maintenant, si nous considérons un arc de courbe ne traversant aucun de nos petits cercles et joignant deux points appartenant à deux côtés différents du polygone R_0 ou d'un de ses transformés, la L de cet arc restera toujours supérieure à une certaine limite μ.

Voyons maintenant quelle est la signification géométrique des exposants β et γ qui entrent dans l'expression (5). L'arc z-zs, en allant du point z au point zs, traverse divers côtés appartenant au polygone R_0 ou à ses transformés. La substitution S peut se mettre d'une infinité de manières sous la forme (2). Nous avons d'ailleurs le droit de choisir parmi ces différentes manières, celle qui nous convient le mieux; car chacune d'elles nous conduira à une limite supérieure des coëfficients. Voici celle que nous adopterons: Soient $C_1, C_2, \ldots, C_{2n}$ les $2n$ côtés du polygone R_0; soit R_i le polygone contigu à R_0 le long de C_i; soit s_i la substitution du groupe g qui change R_0 en R_i, et S_i la substitution correspondante du groupe G. Les substitutions $S_1, S_2, \ldots, S_{2n}$ seront les substitutions fondamentales du groupe G. Cela posé, supposons que l'arc z-zs dont nous nous occupons, sorte du polygone R_0 par exemple par le côté C_{α_1}, puis du polygone suivant par le côté homologue à C_{α_2} et ainsi de suite jusqu'à l'avant-dernier polygone d'où il sortira par le côté C_{α_n}. Nous poserons alors:

$$S = S_{\alpha_n} S_{\alpha_{n-1}} \ldots S_{\alpha_2} S_{\alpha_1}. \tag{6}$$

Mais ce ne sera pas encore là la forme définitive que nous adopterons pour S. Supposons en effet que l'arc z-zs pénètre dans l'un des petits cercles relatifs à l'un des sommets de la 2[de] sorte et y franchisse un certain nombre de côtés appartenant à R_0 et à ses transformés. Tous ces côtés iront alors forcément aboutir au sommet de la 2[de] sorte où le petit cercle en question touche le cercle fondamental et où ils se succèderont périodiquement de la façon suivante: On rencontrera d'abord un côté homologue à C_{λ_1}, puis un côté homologue à C_{λ_2}, etc. jusqu'à ce qu'on retombe sur un côté homologue à C_{λ_1}; on retrouvera ensuite un côté homologue à C_{λ_2} et ainsi de suite dans le même ordre. Si nous réunissons ensemble les facteurs de l'expression (6) qui correspondent aux côtés rencontrés à l'intérieur de ce petit cercle, ces facteurs pourront s'écrire de la manière suivante:

$$S_{\lambda_m} S_{\lambda_{m-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1} (S_{\lambda_k} S_{\lambda_{k-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1})^{\beta}. \tag{7}$$

k est le nombre de côtés compris dans une période et c'est précisément le nombre des sommets de R_0 qui forment un même cycle parabolique; β est le nombre des périodes; enfin

$$S_{\lambda_m} S_{\lambda_{m-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1}$$

est l'ensemble des facteurs de l'expression (6) qui forment un résidu n'entrant dans aucune période; leur nombre est plus petit que k. Mais:

$$(S_{\lambda_k} S_{\lambda_{k-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1}) = T$$

est une substitution critique, de sorte qu'on peut remplacer dans l'expression (6) l'ensemble des facteurs (7) par:

$$S_{\lambda_m} S_{\lambda_{m-1}} \ldots S_{\lambda_2} S_{\lambda_1} T^{\beta}.$$

Quand on aura fait cette opération, l'expression (6) sera devenue l'expression (2) définitive et il n'y entrera, comme on le voit, que des substitutions fondamentales et des substitutions critiques.

Maintenant $\sum \gamma$ est le nombre des substitutions fondamentales entrant dans cette expression (2). Chacune d'elles correspond à une intersection de l'arc z-zs avec un côté des transformés de R_0. Quelques-unes de ces intersections auront lieu en dehors des petits cercles et leur nombre ne pourra pas être plus grand que $\frac{R}{\mu}$; les autres auront lieu à l'intérieur des petits cercles. Si l'on considère d'abord les petits cercles relatifs à un sommet de la 1ère sorte, on reconnaîtra sans peine que le nombre des intersections possibles dans chacun d'eux est limité. A l'intérieur des petits cercles relatifs aux sommets de la 2de sorte, le nombre des intersections pourrait au contraire être illimité; mais un nombre limité d'entre elles seulement se rapportent à des substitutions fondamentales entrant dans l'expression (2) définitive. On a vu en effet que dans cette expression, nous avons remplacé l'ensemble des facteurs (7) par le produit d'un nombre *limité* de substitutions fondamentales et d'une certaine puissance d'une substitution critique. Ainsi on peut trouver une limite supérieure h du nombre des substitutions fondamentales entrant dans l'expression (2) et relatives à des intersections ayant lieu à l'intérieur d'un petit cercle. Il en resulte que:

$$\Sigma\gamma < R\left(\frac{1}{\mu} + \frac{h}{\lambda}\right).$$

Quant au nombre q, il est au plus égal au nombre des petits cercles traversés; on a donc:

$$\Sigma\gamma + 3q < R\left(\frac{1}{\mu} + \frac{h+3}{\lambda}\right).$$

Il faut maintenant trouver une limite supérieure de $\Sigma \log \beta$. Considérons un petit cercle quelconque relatif à un sommet A de la 2[de] sorte, et la substitution critique T correspondante; elle entrera à la puissance β dans l'expression (2) définitive, et ce nombre β est au plus égal au nombre des intersections qui ont lieu à l'intérieur du petit cercle entre l'arc z-zs et certains côtés qui vont tous converger au sommet A et *qui sont tous homologues entre eux.* Il est aisé de trouver une limite supérieure du nombre de ces intersections. Faisons passer par le sommet A deux cercles AB et AC orthogonaux au cercle fondamental, B et C étant par exemple sur le petit cercle considéré. La L de l'arc BC de ce petit cercle pourra s'appeler *l'écart* des deux cercles AB et AC. Soit AB_1 un côté appartenant à l'un des transformés de R_0 et aboutissant au point A; soit AB_2 le transformé de AB_1 par la substitution parabolique du groupe g qui a pour point double le point A; AB_3 le transformé de AB_2 par cette même substitution, etc.; l'écart de deux de ces transformés consécutifs AB_n, AB_{n+1} sera une constante ν. Soient maintenant B et D les deux extrémités de la portion de l'arc z-zs qui est à l'intérieur du petit cercle. Le point B se trouvera sur la circonférence de ce petit cercle et il en sera de même de D, à moins que D ne soit le point zs lui-même. Soit L_1 la L de l'arc BD et N l'écart des cercles AB et AD, on aura:

$$\beta < \frac{N}{\nu}$$

et d'autre part:

$$N \leqq \frac{e^{L_1} - e^{-L_1}}{2}$$

le cas de l'égalité se présentant lorsque les cercles z-zs et AD se coupent orthogonalement en D. On déduit de là:

$$\beta < \frac{e^{L_1}}{2\nu}$$

d'où

$$\log\beta < L_1 - \log 2\nu.$$

On peut trouver une quantité k_1 telle que pour tous les petits cercles relatifs à un sommet de la 2^de^ sorte:

$$-\log 2\nu < k_1;$$

on aura alors

$$\Sigma \log\beta < R + k_1 q < R\left(1 + \frac{k_1}{\lambda}\right).$$

Telles sont les deux limites supérieures cherchées. On en déduit que les coëfficients de la substitution S sont plus petits que

$$e^{aR}$$

a étant une constante. C'est le résultat auquel nous étions parvenus dans le paragraphe 5 et d'où nous avions conclu la convergence des séries ξ. Ces séries sont donc encore convergentes dans le cas qui nous occupe.

Ainsi les conclusions du paragraphe 5 subsistent ici. En est-il de même de celles du paragraphe 6 et en particulier de l'identité suivante:

$$(8) \qquad \Lambda_i = Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h} = \sum \frac{A_1}{z-a} + \sum \frac{A_2}{(z-a)^2} + \ldots + \sum \frac{A_m}{(z-a)^m}$$

où Z_i est une fonction zétafuchsienne et f une fonction fuchsienne de z, où les a sont les infinis du premier membre et les A les résidus correspondants?

En d'autres termes l'intégrale:

$$\int \frac{Z_i(z)}{z-x}\left[\frac{df(z)}{dz}\right]^{-h} dz \tag{9}$$

prise le long d'un contour convenablement choisi tend elle encore vers o, lorsque ce contour se rapproche indéfiniment du cercle fondamental? Cela ne serait évidemment pas vrai si nous choisissions l'expression sous le signe $\int$ d'une façon tout à fait quelconque. Nous lui imposerons la condition de s'annuler en tous les sommets de R_0 situés sur le cercle fondamental; je veux dire qu'en tous ces sommets les p fonctions

$$Z_1, Z_2, \ldots, Z_p$$

du système considéré multipliées par $\frac{1}{z-x}\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}$ s'annuleront en même temps. Il existe évidemment une infinité de systèmes zétafuchsiens, engendrés par deux groupes g et G donnés et satisfaisant à cette condition.

Je puis supposer également, mais cette fois pour simplifier seulement, que l'expression

$$Z_i(z)\left[\frac{df(z)}{dz}\right]^{-h} = A_i \tag{10}$$

ne devient pas infinie le long du périmètre de R_0, non plus bien entendu qu'aucune des expressions qu'on obtient en donnant à l'indice i l'une des valeurs $1, 2, 3, \ldots, p$.

Cela posé, nous avons dit que l'expression (10) devait s'annuler pour $z=\alpha_i$, (si α_i est un sommet de la 2de sorte) c'est à dire que son module devait tendre vers o quand z tend vers α_i en suivant l'un des côtés de R_0. Voyons comment cette expression tend vers o. Supprimons l'indice i du sommet α_i et appelons-le simplement α pour abréger. Le module de α sera égal à 1 puisque ce sommet est sur le cercle fondamental.

Posons

$$t=\frac{\beta}{z-\alpha}$$

β étant un coëfficient convenablement choisi.

Nous avons vu que les fonctions fuchsiennes de z sont dans le voisinage de $z = \alpha$, holomorphes en e^t, et les fonctions zétafuchsiennes sont de la forme

$$P_1 e^{\lambda_1 t} \Phi_1 + P_2 e^{\lambda_2 t} \Phi_2 + \ldots + P_q e^{\lambda_q t} \Phi_q \tag{11}$$

où les Φ sont holomorphes en e^t et où les P sont des polynômes entiers en t. D'ailleurs il est aisé de voir que β est une quantité telle, que quand l'argument de z est le même que celui de α et son module plus petit, la valeur de t est réelle et négative; si donc z tend vers α en suivant un des côtés de R_0, e^t tend vers 0.

On a d'ailleurs:

$$\frac{df}{dz} = t^2 \Phi'$$

Φ' étant holomorphe en e^t.

Donc l'expression (10) peut se mettre sous la forme d'une somme de termes de la forme suivante:

$$\sum B t^\mu e^{\nu t}$$

où B, μ et ν sont des constantes. Pour que l'expression (10) tende vers 0, il faut et il suffit que toutes les constantes ν aient leur partie réelle positive.

Soit maintenant R la distance de l'origine au point z, comptée au point de vue non-euclidien. Nous aurons

$$|z| = \frac{e^{2R} - 1}{e^{2R} + 1}.$$

Supposons que l'argument de z soit le même que celui de α, on aura:

$$|t| = \frac{|\beta|}{1 - |z|} = \frac{|\beta|}{2}(e^{2R} + 1).$$

Lorsque z tend vers α, l'expression

$$|t| e^{-2R}$$

tend vers une limite finie $\frac{|\beta|}{2}$. Il est aisé de voir qu'il en est encore de même quand z tend vers a en suivant l'un des côtés de R_0. Il en résulte que l'expression

$$Ae^{mR}$$

tendra vers o quel que soit m quand z tendra vers α en suivant les côtés de R_0. D'où, cette conclusion, c'est qu'on peut trouver un nombre M tel que l'inégalité

$$|A| < M(e^{2R} + e^{-2R} + 2)^{-h}$$

subsiste tout le long du périmètre de R_0.

Considérons maintenant deux points transformés l'un de l'autre z et zs_i et appelons A et R leurs distances à l'origine évaluées au point de vue non-euclidien. Soit λ_0 le plus grand module des p quantités:

$$A_1, A_2, \ldots, A_p$$

au point z, et soit λ_1 le module de l'un des A au point zs_i. Cherchons une limite supérieure du rapport $\frac{\lambda_1}{\lambda_0}$.

Nous avons vu que les coëfficients de la substitution S_i du groupe G qui correspond à s_i étaient plus petits que:

$$e^{aL}$$

a étant une constante et L la distance non-euclidienne de z à zs_i. Mais on n'a qu'à se reporter au mode de démonstration adopté, pour voir que dans cette expression, L peut tout aussi bien représenter la distance du point zs_i à un point quelconque situé dans le même polygone que z. Si donc les points θ et z sont tous deux dans le polygone R_0, les coëfficients de S_i seront tous plus petits que:

$$e^{aR}.$$

D'autre part on a:

$$\frac{df(zs_i)}{dzs_i} = \frac{df(z)}{dz}\frac{e^{2R} + e^{-2R} + 2}{e^{2A} + e^{-2A} + 2}.$$

On déduit de là:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_0} < pe^{aR}\left(\frac{e^{2R} + e^{-2R} + 2}{e^{2A} + e^{-2A} + 2}\right)^{-h}.$$

Si le point z est sur le périmètre de R_0, on a:

$$\lambda_0 < M(e^{2A} + e^{-2A} + 2)^{-h}.$$

On en déduit:

$$\lambda_1 < pMe^{aR}(e^{2R} + e^{-2R} + 2)^{-h}.$$

Nous pourrons écrire plus simplement:

$$\lambda_1 < pMe^{(a-2h)R}.$$

Il reste à montrer maintenant que la longueur du contour d'intégration est finie. Nous supposerons que la portion du plan limitée par ce contour est formée d'un certain nombre de polygones transformés de R_0. Le contour sera donc formé d'un certain nombre de côtés de ces polygones, et il s'agit de faire voir que l'on peut choisir ces polygones de manière que le contour se rapproche indéfiniment du cercle fondamental et reste cependant de longueur finie.

Pour simplifier la démonstration, nous nous restreindrons aux groupes g de la 2^de^ famille, laissant de côté la 6^e^ famille qui est beaucoup moins importante et pour laquelle d'ailleurs le résultat reste vrai.

Pour la 2^e^ famille, le polygone R_0 et ses transformés ont tous leurs sommets sur le cercle fondamental, et le contour d'intégration, quels que soient les polygones qui le forment, se compose toujours d'un certain nombre d'arcs de cercles tangents deux à deux et orthogonaux au cercle fondamental. Il est aisé de voir alors que sa longueur reste toujours plus petite que π^2. Supposons maintenant que l'on prenne pour contour d'intégration le périmètre de la portion du plan formée de tous les polygones transformés de R_0 qui sont, en totalité ou en partie, intérieurs au cercle K qui a pour centre l'origine et pour rayon R (au point de vue non-euclidien). L'intégrale (9) est alors plus petite que:

$$\pi^2 pMe^{(a-2h)R}.$$

Si $2h$ est plus grand que a, elle tendra vers 0 quand R croîtra indéfiniment. C'est ce qu'il s'agissait de démontrer. On peut en conclure que l'identité (8), analogue à l'identité (5) du paragraphe précédent, subsiste encore dans le cas qui nous occupe. Il en est de même des résultats que nous en avons déduits et en particulier de la décomposition en éléments simples des expressions telles que A et des fonctions zétafuchsiennes.

Le résumé du présent paragraphe, c'est qu'il n'y a aucune différence essentielle entre les fonctions zétafuchsiennes que nous venons d'appeler de la 1ère espèce et les fonctions engendrées par les groupes fuchsiens de la 1ère famille.

§ 8. *Fonctions de la deuxième espèce.*

Dans ce qui précède, nous avons supposé que les fonctions zétafuchsiennes étudiées étaient de la première espèce, c'est à dire que les substitutions critiques avaient des multiplicateurs de module 1. Les mêmes résultats subsisteront-ils pour les fonctions de la deuxième espèce? Il est aisé de voir que non.

Reprenons en effet dans ce cas la série ξ du paragraphe 5. Je dis qu'elle sera divergente ou tout au moins qu'elle ne sera pas absolument convergente. En effet ne conservons dans cette série qu'une partie des termes. Soit:

$$\left(\frac{1}{z-a}, \frac{1}{z-a}+\beta\right)$$

une substitution parabolique s_i du groupe g et soit S_i la substitution critique correspondante du groupe G. Elle pourra toujours se mettre sous la forme canonique

$$(Z_1, Z_2, \ldots, Z_p; M_1Z_1, M_2Z_2, \ldots, M_pZ_p).$$

Ne conservons dans la série ξ que les termes qui correspondent à la substitution s_i et à ses puissances positives et négatives. Ces termes s'écriront:

$$\sum H\left(\frac{1}{z-a}+q\beta\right)M_\mu^{-q}[q\beta(z-a)+1]^{-2m}$$

où H est le signe d'une fonction rationnelle et où q prend toutes les valeurs entières positives et négatives.

J'écrirai plus simplement:

$$\Sigma M_\mu{}^q \varphi(q)$$

$\varphi(q)$ étant une fonction rationnelle de q. Cette série est évidemment divergente.

Les résultats du paragraphe 5 ne sont donc plus vrais ici, et il en est de même de ceux du paragraphe 6 qui y sont d'ailleurs intimement liés.

Mais de ce que ces résultats ne peuvent être étendus *sans modification* à la deuxième espèce, il ne suit pas qu'il ne peuvent être généralisés et c'est ce que nous allons chercher à faire.

Enonçons d'abord les résultats partiels qui subsistent sans changement.

1°. Les coëfficients d'une substitution S_i quelconque du groupe G sont plus petits que A^σ, A étant une constante et σ l'exposant de la substitution S_i.

2°. Si l'on a:

$$A_i(z) = Z_i(z)\left(\frac{df}{dz}\right)^{-h}$$

et que A_i s'annule ainsi que ses $p - 1$ conjuguées en tous les sommets de la 2^e^ sorte de R_0, l'expression

$$Ae^{mR}$$

où R désigne la distance non-euclidienne de z à l'origine, tend vers 0 quand z tend vers l'un de ces sommets en suivant le périmètre de R_0.

3°. Si de plus les A ne deviennent pas infinis le long du périmètre de R_0, on pourra trouver un nombre M tel que le long de ce périmètre, on ait:

$$|A| < M(e^{2R} + e^{-2R} + 2)^{-h}.$$

4°. Le périmètre d'une figure simplement connexe formée par un certain nombre de transformés de R_0 est toujours plus petit que π^2 (si nous nous restreignons à la 2^e^ famille, comme nous l'avons fait précédemment).

Il résulte de ce qui précède, et l'on peut s'en assurer en se reportant au paragraphe précédent, que si z est un point du périmètre du transformé de R_0 par une substitution S_i d'exposant σ, on a en ce point z:

$$|A| < A^\sigma M e^{-2hR}.$$

Maintenant voici le problème qu'il faudrait chercher à résoudre:

Trouver une fonction $F(z)$ telle que l'intégrale

$$\int \frac{A dz}{(z-x)F}$$

tende vers o quand on la prend le long d'un contour convenablement choisi et se rapprochant indéfiniment du cercle fondamental.

Voici le contour que nous choisirons: Considérons un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon ρ au point de vue non-euclidien. Considérons l'ensemble des polygones transformés de R_0 et qui sont partiellement intérieurs à ce cercle. Cet ensemble formera une figure simplement connexe dont le périmètre sera plus petit que π^2 et dont tous les points seront à une distance non-euclidienne de l'origine plus grande que ρ. Nous ferons ensuite croître ρ indéfiniment.

Voyons quelles sont les conditions qu'il nous faut pour cela imposer à la fonction F:

1°. Lorsque z tend vers un sommet de la 2$^{\text{de}}$ sorte, en suivant le périmètre de R_0, F ne doit pas tendre vers o assez rapidement pour que

$$\left|\frac{A}{F}\right|(e^{2R} + e^{-2R} + 2)^{-h}$$

ne tende pas vers o.

2°. Lorsque z se trouve sur le périmètre du transformé de R_0 par une substitution d'exposant σ, son module doit être plus grand que:

$$BC^{\sigma}$$

B et C étant des constantes suffisamment grandes.

Il est sans doute possible de trouver une pareille fonction F, mais ce n'est pas ainsi que nous procéderons ici. L'analogie avec la théorie des facteurs primaires de M. Weierstrass et avec le théorème de M. Mittag-Leffler va nous conduire à la généralisation cherchée.

Soit en effet $f(x)$ une fonction entière à décomposer en facteurs primaires. Supposons par exemple qu'elle n'a que des zéros simples $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$. Pour résoudre ce problème, on cherche à décomposer en fractions simples le quotient:

$$\frac{f'(x)}{f(x)}$$

et on obtient ce résultat par la considération de l'intégrale:

$$\int \frac{dz}{z^m(z-x)}\frac{f'(z)}{f(z)}$$

prise le long d'un cercle dont le centre est l'origine et dont le rayon croît indéfiniment.

Supposons d'abord que l'on puisse trouver un nombre m assez grand pour que cette intégrale tende vers o. On trouve alors:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \sum \frac{x^m}{a_i^m(x-a_i)} + P(x)$$

$P(x)$ étant un polynôme entier d'ordre $m - 1$.

Dans ce cas la fonction $f(x)$ est dite, comme on sait, de première espèce et de genre m.

Si au contraire on ne peut pas trouver de nombre m assez grand pour que l'intégrale tende vers o, on fera croître le nombre m avec le rayon du cercle qui sert de contour d'intégration et on pourra toujours le faire croître assez vite pour que l'intégrale tende vers o. On trouve alors:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \lim\left[\sum \frac{x^m}{a^m(x-a)} + P(x)\right].$$

Dans cette expression le signe $\sum$ se rapporte à l'ensemble des points a situés à l'intérieur du cercle de rayon R et $P(x)$ représente le polynôme formé des m premiers termes du développement de $\frac{f'(x)}{f(x)}$ suivant les puissances de x. Quand m et R croissent indéfiniment selon une certaine loi, le second membre tend vers une limite qui n'est autre chose que $\frac{f'(x)}{f(x)}$. C'est de cette expression qu'on peut déduire le développement de $\frac{f'}{f}$ sous forme de série:

$$\frac{f'}{f} = \sum \frac{x^\mu}{a^\mu(x-a)} + G(x)$$

μ étant un entier qui croît indéfiniment avec le module de a et $G(x)$ étant une transcendante entière.

La fonction entière $f(x)$ est alors de 2^{de} espèce.

L'analogie avec le problème qui nous occupe est évidente. Les fonctions zétafuchsiennes de $1^{ère}$ espèce, dont nous avons parlé dans les paragraphes précédents, sont analogues aux transcendantes entières de $1^{ère}$ espèce et on en obtient le développement et la décomposition en éléments simples en remarquant que l'intégrale:

$$\int \left(\frac{df}{dz}\right)^{-m} \frac{Z(z)}{z-x} dz$$

tend vers 0 quand le nombre m est suffisamment grand et que le contour d'intégration, d'ailleurs convenablement choisi, se rapproche indéfiniment du cercle fondamental.

Si au contraire $Z(z)$ est une fonction de 2^{de} espèce, on ne peut plus trouver un nombre m assez grand pour qu'il en soit ainsi. On est donc conduit, au lieu de conserver à l'exposant m une valeur constante, à le faire croître indéfiniment en même temps que le contour d'intégration se rapproche du cercle fondamental, et cela assez vite pour que l'intégrale tende vers 0.

Cela est toujours possible. Il faut toutefois faire une hypothèse sur la fonction fuchsienne $f(z)$ dont la dérivée $\frac{df}{dz}$ entre sous le signe $\int$ dans l'intégrale précédente. Il faut supposer que $\frac{df}{dz}$ croisse indéfiniment quand z tend vers un des sommets de R_0 situé sur le cercle fondamental, en suivant l'un des côtés de ce polygone. Il existe en effet une infinité de fonctions fuchsiennes admettant le groupe g et jouissant de cette propriété.

Mais nous pouvons généraliser un peu la forme de l'intégrale considérée en procédant de la manière suivante. Soient f et f_1 les deux fonctions fuchsiennes à l'aide desquelles toutes les autres s'expriment rationnellement et soit $F(x, y)$ une fonction rationnelle de x et de y, choisie de telle sorte que:

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} F(f, f_1)$$

tende vers 0 quand z se rapproche indéfiniment d'un sommet de R_0 situé sur le cercle fondamental.

Considérons alors l'intégrale:

$$\int \left(\frac{df}{dz}\right)^{-\mu} F^{\mu} Z_i \frac{dz}{z - x}$$

prise le long du contour envisagé dans le paragraphe précédent et qui limite la portion du plan formée de tous les polygones transformés de R_0 qui sont en tout ou en partie intérieurs au cercle dont le centre est o et le rayon non-euclidien R. Nous ferons croître μ indéfiniment en même temps que ce contour se rapproche indéfiniment du cercle fondamental, c'est à dire en même temps que la quantité R croît elle-même au delà de toute limite.

On peut d'abord trouver deux nombres M et λ tels que le long du périmètre de R_0, le module de Z_i soit plus petit que:

$$Me^{\lambda t}$$

où

$$t = \frac{1}{1 - |z|}.$$

De plus nous pouvons trouver deux nombres positifs N et α tels que le long du périmètre de R_0, le module de

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} F$$

soit plus petit que

$$Ne^{-\alpha t}(e^{2\rho} + e^{-2\rho} + 2)^{-1}$$

ρ étant la distance non-euclidienne des deux points o et z. Le module de la quantité sous le signe $\int$ en laissant de côté le facteur:

$$\frac{1}{z - x}$$

dont le module est essentiellement fini, est plus petit que:

$$MN^{\mu} e^{(\lambda - \alpha\mu)t}(e^{2\rho} + e^{-2\rho} + 2)^{-\mu}$$

le long du périmètre de R_0.

Mais l'intégrale doit être prise le long d'un contour que nous avons défini plus haut, qui est formé de côtés appartenant à divers transformés de R_0 et qui est d'ailleurs tout entier extérieur au cercle de centre o et de rayon non-euclidien R. Considérons un des côtés de ce contour appartenant à un polygone R_i transformé de R_0 par une substitution s_i. Soit zs_i ce point; le point correspondant du périmètre de R_0 sera z. Nous conserverons la notation:

$$t = \frac{1}{1 - |z|}$$

et nous appellerons ρ et ρ' les distances non-euclidiennes des points z et zs_i au point o. Il vient alors:

$$\rho' > R.$$

Le module de Z au point zs_i est plus petit que le module de cette même fonction au point z multiplié par A^σ, A étant une constante convenablement choisie et σ étant l'exposant de la substitution s_i. Quant à

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-1} F$$

son module se trouve multiplié par

$$\left(\frac{e^{2\rho'} + e^{-2\rho'} + 2}{e^{2\rho} + e^{-2\rho} + 2}\right)^{-1}$$

quand on passe du point z au point zs_i. Il résulte de là qu'au point zs_i le module de la fonction sous le signe $\int$ est plus petit que:

$$A^\sigma M N^\mu e^{(\lambda - \alpha\mu)t} (e^{2\rho'} + e^{-2\rho'} + 2)^{-\mu}$$

ou que

$$A^\sigma M N^\mu e^{(\lambda - \alpha\mu)t} e^{-2\mu R}.$$

Je puis d'abord toujours supposer que N est plus petit que 1. En effet s'il n'en était pas ainsi, je remplacerais la fonction F que j'ai choisie arbitrairement parmi les fonctions fuchsiennes de groupe g par la fonction $\frac{F}{N}$.

Si μ est suffisamment grand, le facteur $e^{(\lambda-\alpha\mu)t}$ est également plus petit que 1, de sorte qu'il reste à considérer les deux facteurs:

$$A^\sigma e^{-2\mu R}.$$

On voit aisément que

$$\sigma < e^{\beta R}$$

β étant un nombre convenablement choisi, mais on peut faire croître μ assez rapidement avec R, pour que

$$e^{\beta R} \log A - 2\mu R$$

tende vers $-\infty$. Dans ces conditions, la quantité sous le signe $\int$ tend vers 0 et, comme le périmètre d'intégration est fini, l'intégrale elle-même tend vers 0.

C. Q. F. D.

Quelle conclusion devons-nous tirer de là en ce qui concerne le développement de la fonction Z?

La fonction:

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^{-\mu} F^\mu Z$$

a à l'intérieur du contour d'intégration le caractère d'une fonction rationnelle. Nous pourrons donc trouver une fonction rationnelle $Q(z)$ telle que la différence

$$\Delta = \left(\frac{df}{dz}\right)^{-\mu} F^\mu Z - Q$$

soit holomorphe à l'intérieur de ce contour. Pour achever de déterminer la fonction rationnelle Q, nous supposerons que son numérateur est de degré inférieur à son dénominateur.

Dans ces conditions, la différence Δ tend vers 0 lorsque μ et R croissent indéfiniment. C'est là, la conséquence immédiate de ce que nous avons vu au sujet de l'intégrale.

On voit par là que la fonction Z peut avec une approximation aussi grande que l'on veut être mise sous la forme d'une fonction rationnelle multipliée par une expression de la forme:

$$\frac{1}{F^\alpha}\left(\frac{df}{dz}\right)^\alpha$$

F et f étant deux fonctions fuchsiennes.

C'est tout ce que j'ai pu trouver jusqu'ici comme extension aux fonctions de 2ᵉ espèce des propriétés que nous avons démontrées plus haut. Je ne doute pas qu'on ne puisse arriver un jour à une théorie plus complète.

En attendant, nous pouvons toujours exprimer une fonction zétafuchsienne quelconque, soit sous la forme d'une série ordonnée suivant les puissances de z, soit sous la forme du quotient de deux pareilles séries.

Soit d'abord en effet une équation linéaire:

$$\frac{d^p v}{dx^p} + \sum_k \varphi_k(x, y)\frac{d^k v}{dx^k} = 0$$

les φ_k étant rationnels et x et y étant liés par la relation

$$\psi(x, y) = 0.$$

On pourra toujours remplacer x et y par deux fonctions fuchsiennes $f(z)$ et $f_1(z)$, *de la 2ème famille,* choisies de telle sorte qu'elles satisfassent à la relation:

$$\psi(f, f_1) = 0$$

et qu'elles ne puissent prendre aucune des valeurs qui correspondent aux points singuliers ni aux points à apparence singulière de l'équation précédente. Dans ces conditions, v sera une fonction zétafuchsienne de z ne devenant pas infinie à l'intérieur du cercle fondamental et développable par conséquent en série suivant les puissances de z. Les coëfficients se calculent par récurrence.

Supposons maintenant que $Z(z)$ soit une fonction zétafuchsienne admettant des infinis à l'intérieur du cercle fondamental; elle ne pourra plus être développée en série ordonnée suivant les puissances de z et toujours convergente. Mais on pourra toujours trouver deux fonctions fuchsiennes f et F admettant le groupe g et un nombre entier m, tels que les deux fonctions

$$\left(\frac{df}{dz}\right)^m F \quad \text{et} \quad \left(\frac{df}{dz}\right)^m FZ$$

dont le quotient est Z, restent finies à l'intérieur du cercle fondamental. Elles pourront alors être développées en séries suivant les puissances croissantes de z. Quant aux coëfficients, on pourra les calculer par récurrence, ainsi que nous l'avons dit plus haut.

§ 9. *Fonctions diverses.*

Les fonctions zétafuchsiennes, dont il a été question dans les paragraphes précédents, ne sont pas les seules que l'on peut imaginer. On peut construire en effet des fonctions zétafuchsiennes qui existent dans toute l'étendue du plan; ce sont des fonctions qui subissent les substitutions linéaires d'un groupe G quand la variable subit les substitutions d'un groupe fuchsien g de la 3^e^, de la 4^e^, de la 5^e^ ou de la 7^e^ familles. On peut aussi remplacer le groupe g par un groupe kleinéen, et on obtiendra de la sorte des fonctions zéta-kleinéennes, existant, soit dans toute l'étendue du plan, soit dans un certain domaine.

Cela suffit pour faire comprendre que dans les cinq mémoires des Acta mathematica que j'ai consacrés à l'étude des transcendantes fuchsiennes et kleinéennes, je n'ai fait qu'effleurer un sujet très vaste, qui fournira sans doute aux géomètres l'occasion de nombreuses et importantes découvertes.

Paris, 30 Mai 1884.