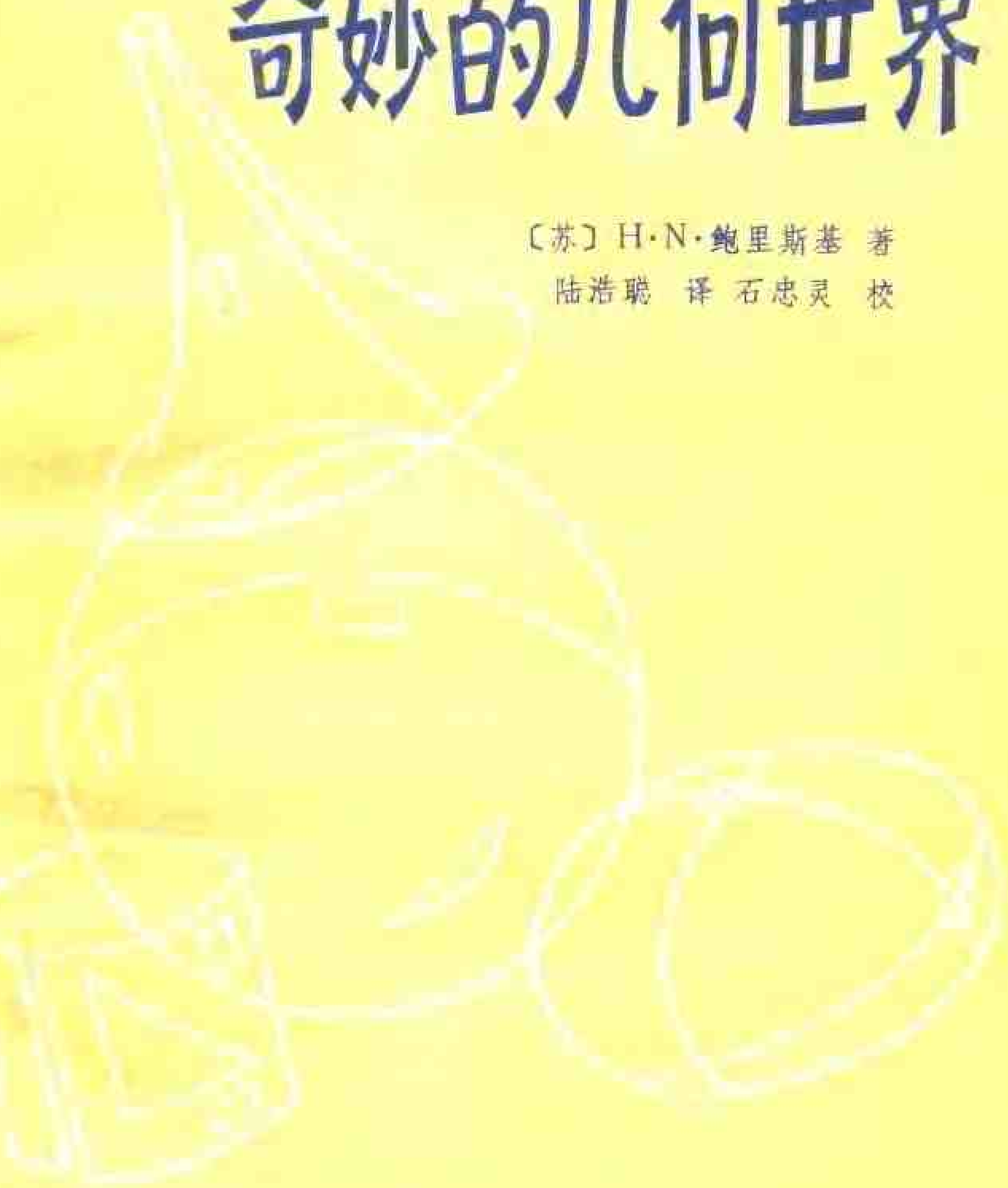
奇妙的几何世界



〔苏〕H·N·鲍里斯基 著
陆浩聪 译 石忠灵 校

陕西科学技术出版社

奇妙的几何世界

〔苏〕H·N·鲍里斯基　著

陆浩聪　译　　石忠灵　校

陕西科学技术出版社

Польский Нафтул Иосифович

О различных геометриях

ИЗДАТЕЛЬСТВО АКАДЕМИИ НАУК УКРАИНСКОЙ ССР

КИЕВ—1962

根据1962年俄文版翻译

奇妙的几何世界

〔苏〕H·N·鲍里斯基 著

陆浩聪 译 石忠灵 校

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行 西安新华印刷厂印刷

开本 787×1092 1/32 印张4.375 字数60,000

1980年12月第1版 1980年12月第1次印刷

印数 1—20,000

统一书号：13202·17 定价：0.38元

内容提要

本书从点、线、面的定义出发，通俗叙述了欧氏几何的基本原理；指出人们熟悉的欧几里得几何并不是唯一可能的几何学，除此而外，还有罗氏几何、黎曼几何等多种非欧几何；书中以优美的文笔，创造出一系列如“平面人”“球面人”等有趣的生物形象，通过它们在各自世界的活动，揭开了各种奇妙的几何世界之谜；书中有关几何学演绎法的讨论，对于读者融会贯通已学的几何知识，将会有所帮助。

本书供中学师生以及初中以上文化程度的数学爱好者阅读。

第一版序言

这本小册子的目的，是给读者指明，在教科书中一般所习惯和熟悉的几何不是唯一的。随着科学的发展，使我们建立了很多种几何，它们在物理学和数学方面获得了广泛的应用。

这本小册子供广大读者，主要是高年级中学生阅读。对具备平面几何学基本知识的人亦可阅读。

读者如对书里所阐述的概念感兴趣，想深入了解这方面的知识，可以进一步阅读一本不大的，但是内容丰富的小册子：《什么是非欧几何学》（П.С亚历山大罗夫著）。

这些材料的系统的阐述，读者可以在А.П诺尔金著《罗巴切夫斯基几何学引论》及Н.В叶菲莫夫著《高等几何学》中找到相应的章节。

作者衷心感谢В.Г波尔恰斯基，他曾积极帮助修改手稿。

第二版序言

这一版有所改变和补充，其内容比第一版有显著的增添。

增添的地方对二维表面和三维空间的曲率概念进行了比较详细的阐述。这样一来，就能更加深入地阐明几何空间和爱因斯坦广义相对论所确定的引力之间的联系。

目　　次

一　几何学从什么地方谈起?

打开几何课本，随便翻到什么地方，认真读来，我们总想弄清第一眼看到的每一个定理。然而，要是不细心地研究课本中至此以前的全部阐述，我们就会碰到许多困难。因为每个定理的论证都是根据先前已经证明过的另一个定理，而先前的那个定理，又是根据它先前的定理，如此类推。这样一来，我们就需要按着相反顺序来翻阅书本，以便彻底弄清头一次碰到的那个定理。直到最后，翻阅的结果把我们引回到课本的第一页。但是，这里研阐述的一些事实，无论如何也得不到论证。这些不能被论证的事实，人们称之为公理。

很多人认为，公理——这是如此明显的真理，它似乎无需证明。实际上，公理并非如此明显和简单。很多世纪以来，研究公理的证明方法以及有关一些问题，曾使不少数学家耗尽心血，结果发现了非欧几何，这就是罗巴切夫斯基几何学，黎曼几何学以及其他几何学。

现在，我们回过头来看看曾经碰到的那些定理吧。其中所研究的某些几何学对象都有明确的规定，即所谓定义。而每一个定义又总是根据前面的定义来规定。例如，为了说明梯形的定义，就应该预先知道什么是平行线，什么是四边形。为此，就要知道什么是线段，就要知道什么是直线，什么是点。

同前面的叙述一样，任何一个定义都把我们引到书本的第一页，希望找到点、线、面的基本概念。但遗憾的是，虽然对一些问题也作了说明，使我们知道了什么是点、线、面，但是，对这些概念却没有一个准确的规定，没有准确的数学定义。在几何学领域内任何地方都不能利用这些说明，同时也不需要利用这些说明来论证定理。

乍看起来，点、线、面这些概念如此简单明瞭，似乎不值一提。对刚开始学习几何学的学生也许应该给他们详细讲解这些基本概念，而对高年级学生来说，似乎他们都已经懂得了这些概念。事实并非如此简单。

实际上，在自然界什么地方也不会碰到点、线、面。我们想象一个直径很小，比方说，小到只有一毫米的小球，我们把它的直径缩小到两倍、三倍以至千倍，小到不能再小之后，能不能把它叫作点呢？不

能！

教师在黑板上画一个很小的“点”，学生在练习本上画一个更小的“点”，这些是不是点呢？如果小球小到没有一种现代显微镜能看见它，这是不是点呢？还不是。问题在于，点不是一个具体对象，而是一个概念，一个抽象的概念。由于人们经常接触具体的小东西，比如小球之类的东西，所以，在我们的意识里就形成了一种概念。在纸上或木板上画一个点时，我们只想构成一个具体的对象——图画，并力求使它在所需要的程度上和现实客体相似，这些现实客体抽象化的结果就产生了点的概念。

直线的概念也是这样。在纸上画一条线，能说它是直线吗？要断定它是直线，就得把尺子的边缘紧紧接在这条直线上进行比较。这就产生一个问题：用的尺子是不是很直呢？我们见过细木工人操作的情形，为了检验刨过的木板条是不是直，他就得象图1那样进行观察。如果尺子不直不平，有点缺陷，就可以通

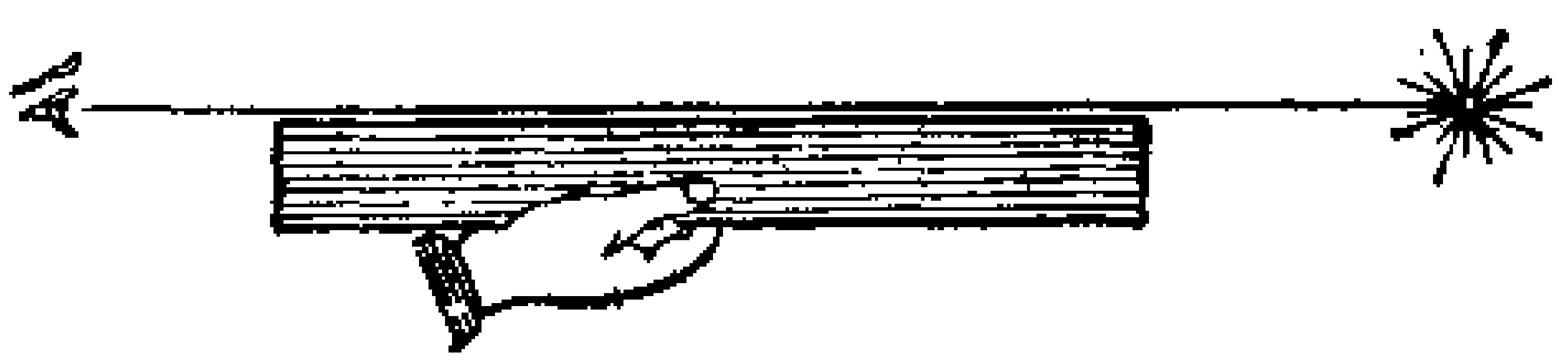


图 1

过光线观察到。因此，检查尺子的平直，就得将它与光线进行比较。把线拉紧，中间不打弯，一般说可算是直线，但还要沿着这条线去瞧一瞧，将它与光线进行比较（就象木板条那样）。

这样说来，光线可以作为直线的标准。也可以说，光线正是直线。骤然看来，这一切似乎都很好。但实际上，在自然界任何地方都看不到我们所想象的“一条光线”。

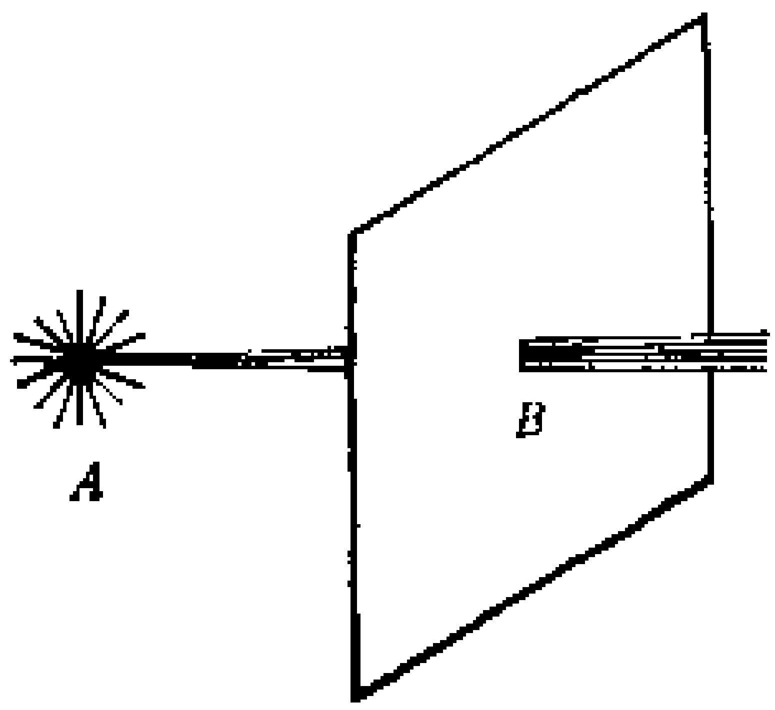


图 2

假如说，有一个不大的光源（图2），它的光穿过一个小孔，就可看到一束狭小的光。假如小孔不断缩小，光源也就变小。这时光通过小孔就变得越来越狭窄，窄得再也不能窄了，但它任何时候也不能成为一条光线*。如果光源A是一个点，小孔B也是一个点，那么，光束自然而然地成为一条光线。但是，我们讲过，在现实世界里，点是不存在的。这就是说，光线也是不存在的。因此，尽管光线具有非常现实的

* 在这个理想的实验中，将小孔缩小时，我们并没有考虑到衍射等物理现象。

性质，但它（也就是直线）同样是一个抽象的概念。

正象点一样，在纸上画一条直线，我们只是构成一个现实形象——图画，力求使它在所需要的程度上和一定的物理客体相象，于是从物理客体中产生和形成了直线的抽象概念。

关于平面的定义也是一样。假定光源A发出的光穿过“直线”狭缝（图3）。狭缝的“平直度”，在

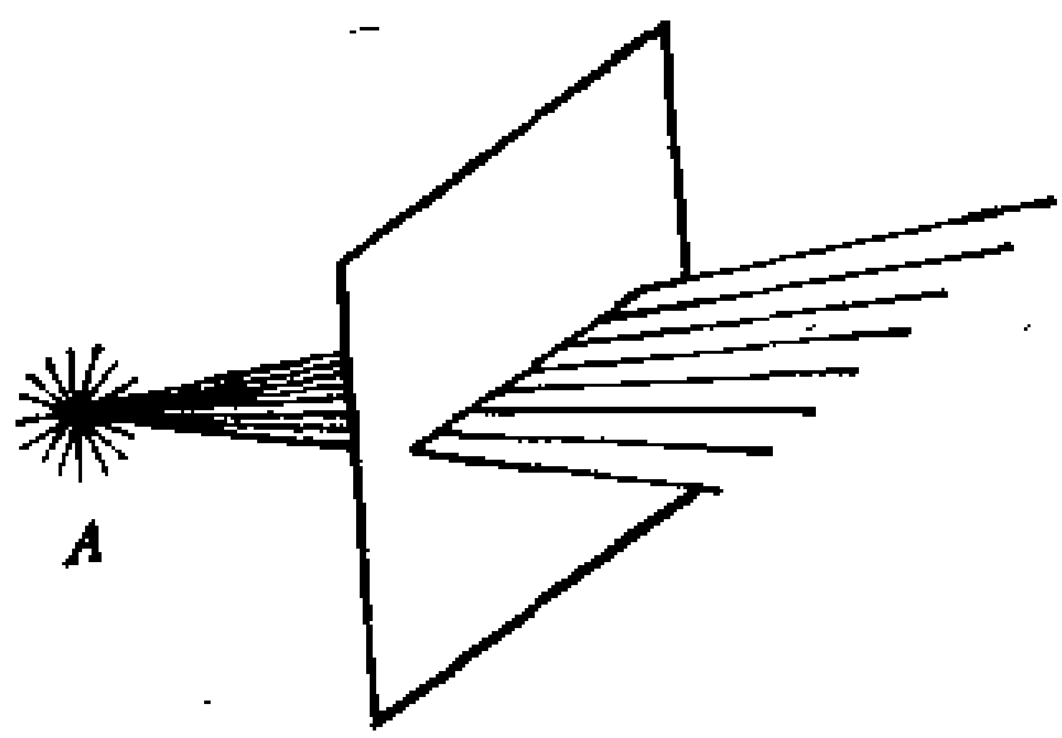


图 3

我们所需要的程度上可藉助于“标准”——光射线——来进行检验，正象上面所进行的那样，就能得到图中所描绘的一束光线。如果减小光源，使它变成一个“理想的”点，再把狭缝缩小成一条“理想的”直线，那么，光线束就能变成一个“理想的”平面。

二　如何选择公理？

为建立一种几何学，需要一些原来未被证明的论断，即公理。再根据这些公理和一定的逻辑规律来证明定理。几何学是研究点、线、面性质的。所以，每一个公理，每一个定理都是表示这些客体的属性。由于点、线、面概念的产生是通过自然界一定的实物如小球、小孔，一束很窄的光束这些东西抽象化的结果，因而，所有的公理和定理又正好表示这些实物的性质。那么，我们把它们的哪些性质当作公理呢？当然，这些性质是经过大量的实验检验所证实的，而这些实验又是人们经过几千年积累起来的。例如，实验证明点和光线有这样一些性质和公理：

1.经过任何两点能引一条直线。

2.经过给定两点不能引两条不同的直线。

3.在一条直线上至少有两点。

4.等于第三条线段的两线段彼此相等，以及其他等等。

这些论断在现代几何学中可称为公理，我们常常

应用这些公理来证明各种定理。除此而外，在证明定理时绝对禁用那些不包括在公理中的显而易见的论断。

自然，上面所列举的公理远不是被实验所验证过的全部论断的罗列。还有一些论断，例如：

1.直线上的每一点，可作一条垂线，

2.每条直线上有无数的点，

以及其他许多论断是正确的、毫无疑义的。它们依据前面提到的公理可以成为定理，但不是所有论断都可以成为公理，作为公理应当尽可能少。如果在这些公理中，碰到了前面提到的公理从逻辑上能证明的论断，那么，这些论断就不再是公理，而是定理了。因此，公理不应当太多。

然而，公理也不应太少。问题在于，几何学是由人类实践的要求而产生的，它远在公理建立以前就有了。几何学一词的意义就是“测地学”。人类的实践对我们提出许多应当解决的问题。人们从研究各种图形的形式中找到了三角形、梯形、多边形各种不同的性质，如梯形的中线定理。此外，还应该解决长度、面积、体积的测量等有关问题，于是有毕达哥拉斯定理。

为了解决这些问题，几何公理体系的内容应当丰

富。如果只限于上面所列举的三四条公理，要想解决所有的问题是不可能的。一般说来，几何公理是够用的，它证实的定理能够回答提出的所有问题（在第十三节我们列出了全部公理）。

几何数学家选择了一些在实验中发现的光的传播特性并确定它们为公理，即点、直线、平面所面有的一些抽象概念。接着就建立起一门数学学科——几何学。这样的几何学就是真实世界的理想的合乎逻辑的模式。研究这种模式就能找到现实世界的规律性，当然，不是用实验的方法，而是用推理的、几何学的方法。

可能有人会问：为什么恰恰是这些论断用来作为公理，而不是别的呢？例如，可不可以把直线上每一点仅可作一条垂线来作为公理呢？事情也正是这样，如在第十三节所引证的公现体系就并不是唯一可能的。然面，对我们来说，这个问题不是原则性的。这是历史方面的传统问题。关于这个问题，我们暂且不提。这里只指出，这种几何学的公理结构起源于古代著名的几何学家欧几里得（公元前三世纪）*。

* 欧氏公理是正确的，但还不完善。符合现代要求的公理体系直到十九世纪末才建立起来。

三　如何检验平行公理？

选定公理体系之后，就可以开始来证明一些愈益复杂的定理。例如，在初等教科书中有这样一个简单的定理——三角形外角定理：

三角形的外角大于任何一个非邻内对角。

现在我们就来证明这个定理。

可以证明，在△ABC中，∠α的邻角大于∠β（图4）。为此，我们只要将边CA延长至D，并证明，∠BAD>∠β。AB的中点是E，在CE的延线上截取线段EF=CE，连接F与A，则△CEB与△FEA相等，因为BE=EA，CE=EF；并且∠CEB=∠FEA，所以，∠EAF=β，又因为∠EAF是∠BAD的一部分，所以，∠BAD>β。

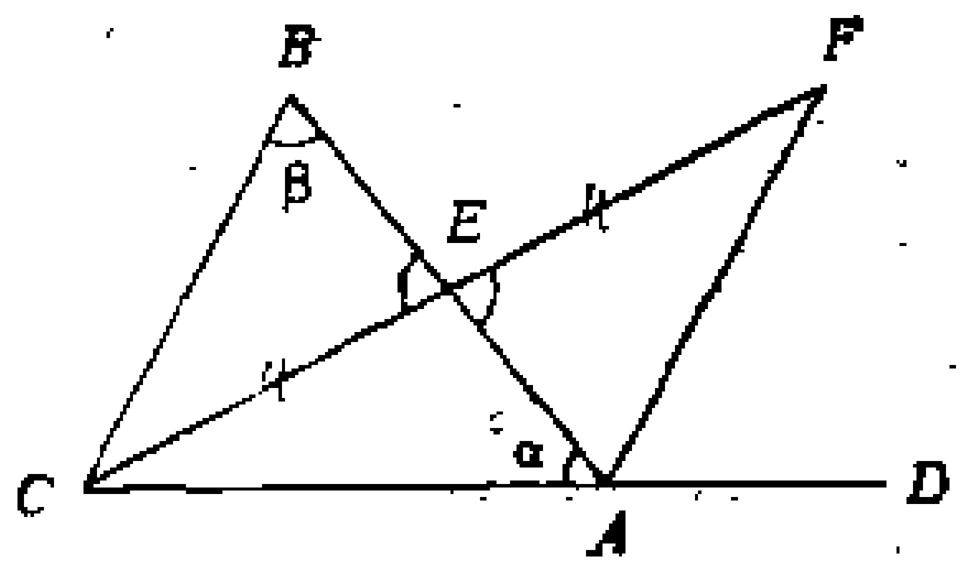


图　4

现在我们来证明下列定理：

两条直线都垂直于第三条直线，则此二直线不相交。

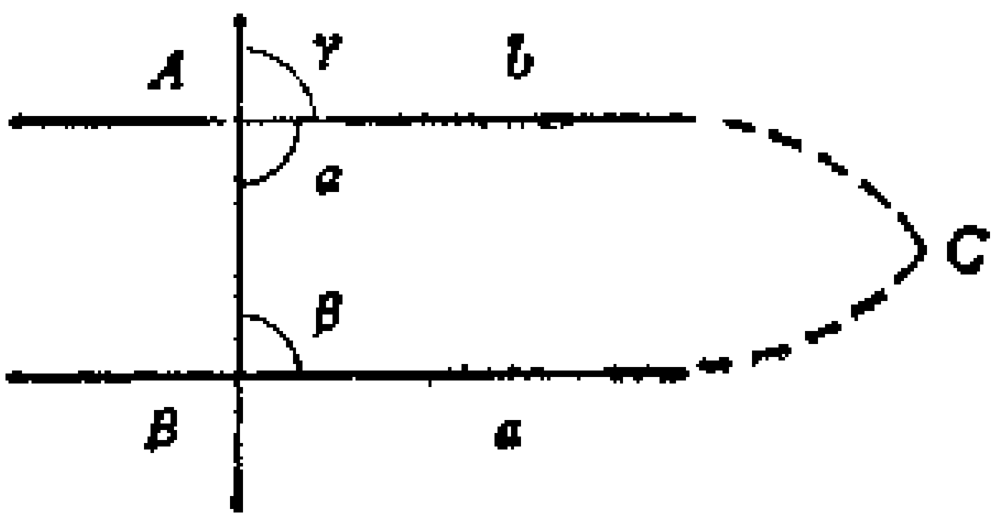


图 5

实际上，如果直线a，b垂直于第三条直线AB（$\alpha=\beta=90^{\circ}$），并在C点相交(图5)，那$\gamma=90^{\circ}$将是△ABC的外角，这就是说，三角形的一个外角等于不相邻的一个内对角，这就与上述定理矛盾。

现在我们作出下列定义：

同一平面上二直线不相交，则称此二直线为平行。

由刚才证明的定理得知，平行线是存在的！

现在我们来看看平面上的直线a和点A吧(图6)。显然，经过A可引一条直线b平行于a，为此，由点A引直线AB，使其垂直于直线a，再由A引直线b垂直于AB，这就是所求的平行线。

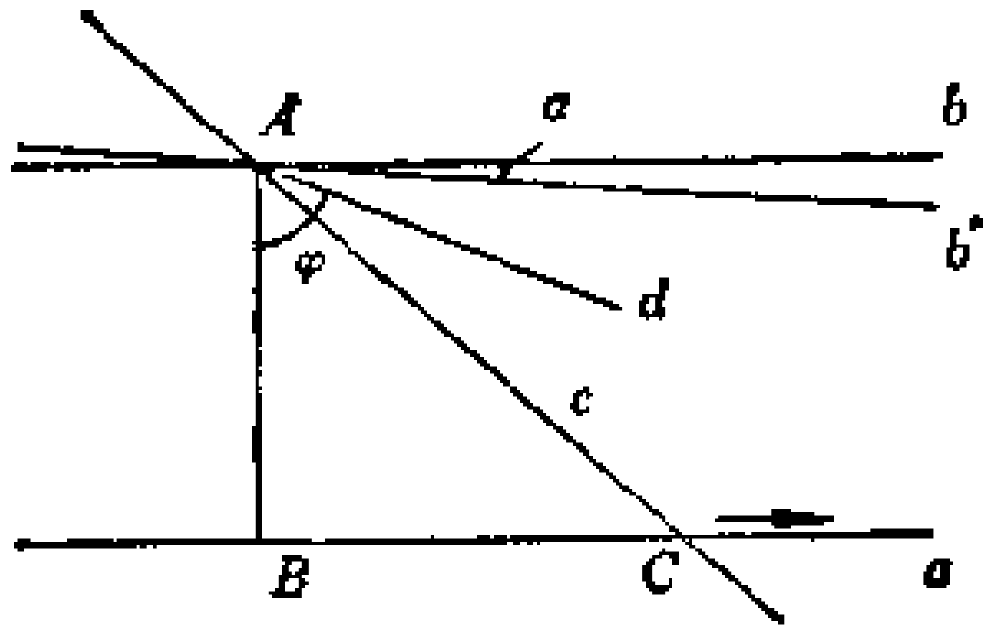


图 6

这里有一个问题，经过点A能不能再引一条直线b′平行于直线a（应当记住，这一切都是在同一平面上进行的，我们只是研究平面几何问题）？在没有仔细考虑这一问题之前，谁都会毫不犹豫地回答：不可能！直线b′和a将会在很远的地方相交。

我们暂时不作肯定的答复，面力求深入地考虑上面所提出的问题。

将直线a上的C点与直线c上的A点连接起来。将C点沿直线a向右移动。这时，直线c将在A点附近转动。显然，直线c无论如何也不能与直线b连起来，面为c不能绕过b。但是当点C无限地向右方离去，直线c在同一方向转动，这时，它就能无限地接近于某一极限位置。现在要问，直线b是否就是直线c无限接近的那个极限位置？或者，直线c无限地接近于不同于直线b的直线b′，将仍然不能进入角α？

再由点A引一条直线d，使它与直线AB的交角$\varphi<90^\circ$。如果角φ很小，直线d与a可以在图面上相交，但必须把直线d延长。如果增大角φ（图6），直线d与a在图面上不能相交，但可以在图面的扩展处相交。如果再加大角φ（$<90^\circ$），直线d与a将在几百米的距离内相交。显然，实际上相信这一点是非常困难的，几乎是不可能的，但在原则上，这是完全可能

的。现在，我们继续增加φ，但不让它等于$90°$，而与$90°$只差百万分之一度。能不能说直线d与a相交呢？我们希望继续这样设想下去。这样的设想有什么意义呢？这样继续将直线延长下去，假使藉助于最好的望远镜都难以看到时，总不能说b与a不相交吧？

我们知道，几何学的建立是为了研究现实客体的。上面已经谈到，对所研究的这些客体来说，光线就是直的标准。可见，公现就应当反映光线的性质，对光线就应当进行不断的检验。上面提到，讨论一条光线是没有意义的。我们经常看到的，只是一束很细薄的光。我们认为，射线d与a相交是以大量实验为依据的。根据大量的天文观察可以肯定地说，光线d和a将在很远的地方相交（例如在一亿公里的距离内）。至于在最大的望远镜所观察的有限范围内，设想光线d与a相交，这纯粹是幻想。况且，我们根本不知道光线在那里的行为是怎样的。这里没有任何可供参考的实验根据。

我们已经说过，直线的标准就是光线。为了研究直线d和a，我们还要了解光线的一些物理性质。

经过一点能不能引两条直线b和b′平行于直线a，这个问题依赖于光线的性质。显然，即使角φ非常接近于$90°$，射线d与a是否相交也无从验证。看来，要

解决经过点A 能否只引一条直线不与 a 相交的问题不是一件简单的事。

任何一个论断，尽管它极不明显，但绝对不能因此而说它不正确。比如毕达哥拉斯定理，最初也并不是很明显的，就是说，不能马上使人相信，构成直角三角形斜边的平方是否等于而直角边的平方之和。为了确信毕达哥拉断定理的正确性，还要对它给予论证。论证的方法仍需极据公理。

也许，在我们所所究的问题中，情况是类似的。换句话说，根据前而所列举的公理，能否证明达样的命题：

*经直线外一点所引与该直线相平行的直线不能多于一条。

欧几里得考虑过这个问题，但没有回答它。要证明其他定理时，必须应用这个命题（或等价命题），所以必须把它作为公理。在普通教科书里，命题 * 称为平行公理。这样一来，当人们应用新的公理时，如上所述，完全有理由对它在光线世界的正确性提出怀疑。

四　三角形内角和等于180°吗？

我们暂且不去研究平行公理是否正确的问题。

前面我们曾提到一个简单的定理，这个定理不用平行公理而仅应用三角形外角定理就可以证明。

定理Ⅰ. 如果两直线a，b与第三直线c相交，其同位角或内错角相等，则直线a，b平行。

可以用反证法来证（见图5），这里不应用平行公理。

我们将看到，某些命题不应用平行公理（或其等价命题）便无法证明。

定理Ⅱ. 如果两条直线a，b相平行，并与第三直线c相交，则对应的同位角和内错角必相等。

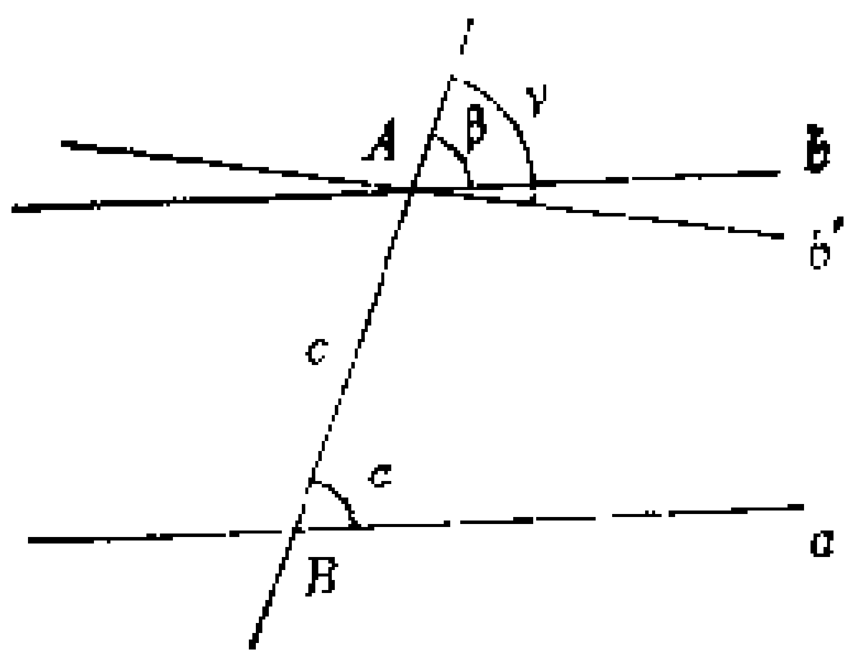


图 7

我们来证明同位角α与β相等（图7）。我们用反证法来证，即假定同位角α和β不相等（若β<α）。经点A引一条

直线b'，使$\gamma=\alpha$。我们对直线a，b'和c应用定理Ⅰ，于是得出，直线b'与a不相交（因为$\gamma=\alpha$），但按照给定的条件，b与a不相交。因此，经过点A可以引两条直线b和b'与a不相交。这就与平行公理相矛盾。因而，如果我们接受了平行公理，就应得出$\beta=\alpha$，定理得证。

实际上我们在这里已经应用了平行公理。

下面我们再给出一些用平行公理证明的定理。

1. 任意三角形内角和等于180°（π弧度）。

为了证明这个定理，我们由点C引直线CD平行于AB(图8)。根据定理Ⅱ（用平行公理证明），$\beta=\beta'$，$\alpha=\alpha'$。由此得出$\pi=\alpha'+\beta'+\gamma=\alpha+\beta+\gamma$。

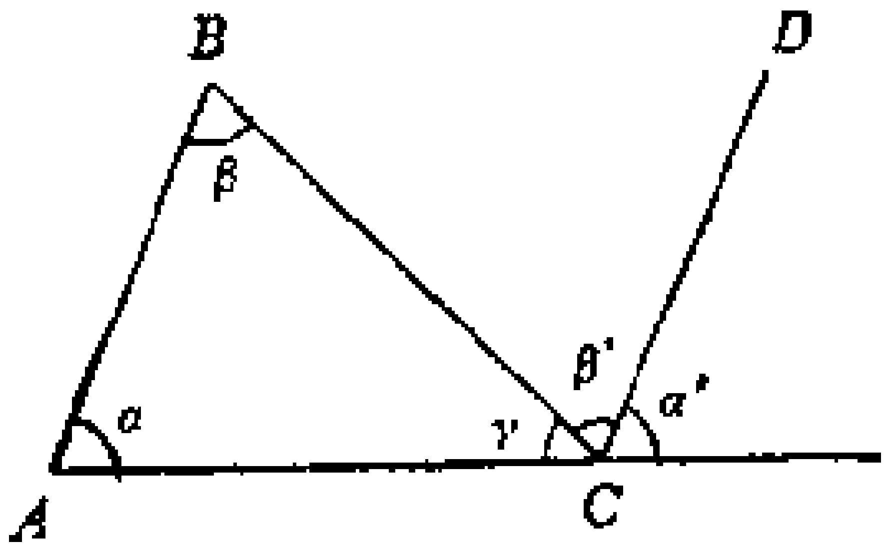


图 8

显然，在证明中应用了平行公理。同时，可以证明它的反命题：

如果一个平面三角形的内角和等于180°，那就证明平行公理是正确的，即经过点A不能引两条与给定直线不相交的直线*。

* 它的证明可以在H·B叶菲莫夫著《高等几何》一书中找到。

因此，由平行公理可以得出，三角形内角和等于180°；反之，由三角形内角和等于180°也可以得出平行公理。

这就是说，在欧氏几何公理中可以删去平行公理，而将定理1载入欧氏公理。同时，所有欧氏几何的其他公理仍旧不变。

下列三个定理也具有完全相同的意义。

2. 两条直线a，b经线段AB的端点并垂直该线段，则此两直线不相交且等距，即此二直线中的每一条（例如a），它上面的所有点都在与另一条直线（b）距离相等的位置上（它的距离等于线段AB的长度）。

证明定理的第一部分不用平行公理。为了证明直线的等距，我们从直线a上任一点C向直线b作一垂线（图9）。我们把垂点D与点A连起来。根据定理Ⅱ（这里已经用了平行公理），得出$\alpha=\alpha'$。作为直角的补角，又得出$\beta=\beta'$。则三角形ABD与三角形DCA全等。所以$\angle C=90°$，$AB=CD$。这就是所要证明的。请注意，$AC=BD$。因此，如果证明四角形ABCD

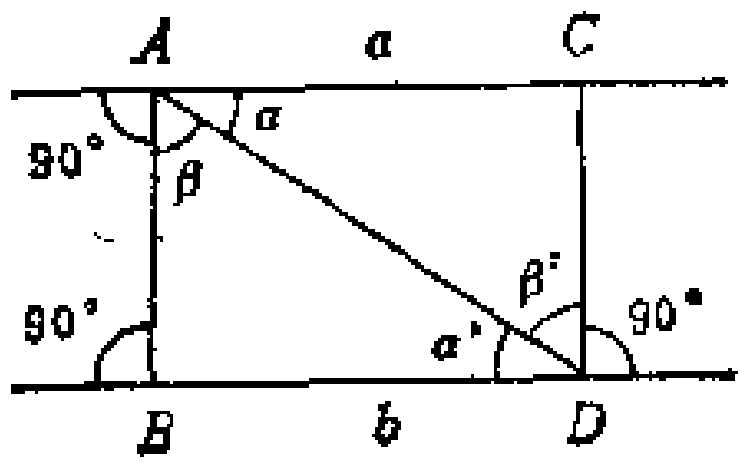


图 9

的三个角都是直角，那末，第四角也应是直角，且各对边相等。

根据这个定理有可能建设一条理想的直线铁路。枕木应当这样铺设，让它垂直于铁轨a，b，而其余枕木的铺设应等于AB。

建设铁路也可以用另外的方法，这就是先铺一条直轨 a，垂直于这条直轨铺设等长枕木 AB = CD = EF = GH = …（图10）。但是，能否在枕木的另一端铺设一条直轨呢？这一端能否连成直线呢？下面的定理回答这个问题。

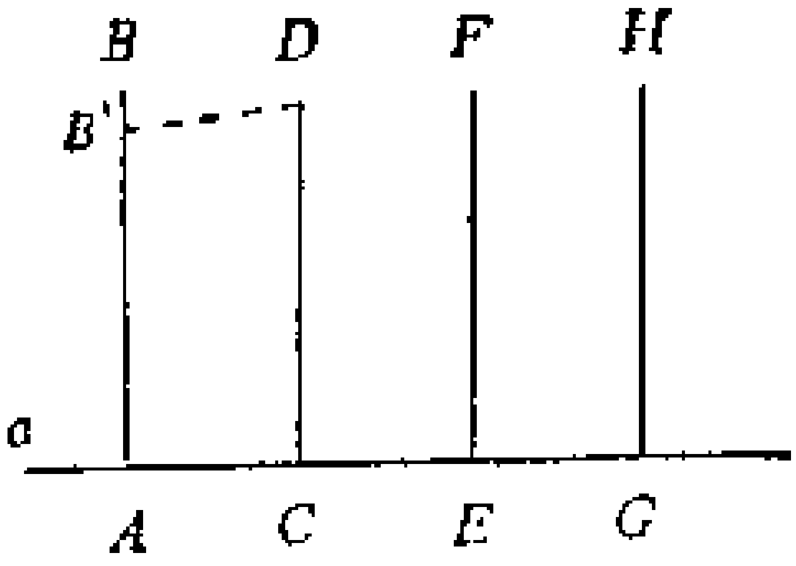


图 10

3.与某直线在一侧等距的点的轨迹是一条直线（图10）。

定理 3 实际上包含两个命题。一方面应当证明，垂直于直线a的各相等线段AB，CD，EF，GH…的端点B，D，F，H…位于一条直线上。另一方面，应当证明，在这条直线上所有的点都是那条垂直于 a 并等于AB的线段的端点，在这条直线上没有任何其他的点。

首先，我们证明第一个命题。因为直线AB和CD垂

直于线段AC，所以，对此命题可以应用定理2。为此，从点D向直线AB作一垂线DB′，可以证明，垂点将落在点B上，即B′＝B。实际上，根据证明定理2所铺铁路的末尾一段说明，在四角形ACDB′中，角D是直角，AB′＝CD，但根据条件，AB＝CD。因为在直线一侧从一点A所作的相等线段CD只能有一种方式，于是得出的结论是，点B与点B′相合。

同样，由点D到直线EF的垂线，它的垂点将落在点F。同时，在四角形DCEF中角D是直角。因为∠BDC和∠FDC是直角，所以点F在点B和D所连成的直线上。同样可以证明，点H在直线BD上。

定理3的第二个命题实质上与定理2完全相同。实际上，也就是要证明，经过直线a的等垂线端点的直线BD，垂直于线段BA，即BA⊥a。因而，根据定理2，直线BD上的所有点都在距直线a为BA的直线上。

在证明定理3的两个命题时，应用了定理2，即是应用了定理Ⅱ和平行公理。

还有一个较为复杂的定理，实质上是依据平行公理得出的。

4.任何一个圆的周长C与半径R之比，是一个不

依赖于半径的常数。这个常数等于2π，即$\frac{C}{R}=2\pi$。

遗憾的是，在普通教科书中关于定理4以及有关圆周长的定义都讲得不够精确。在这里我们不打算详细说明这些思想产生的过程。请注意，定理4的精确的证明，主要是利用两条平行直线在相交角边所构成的线段的比例定理。而这些定理的证明主要是依据平行公理。

关于定理2——定理4的讨论，可以说，与定理1一样。它们的证明都要根据平行公理。反之，如果采用定理2—4之一作为不能证明的公理，那末平行公理也可以作为定理予以证明。

定理2和定理3看来都比较明显。但是，在证明它们时利用了平行公理。然而，关于平行公理，正如我们在上面所看到，它的明显性是值得怀疑的。

定理1和定理4的论断与定理2和定理3比较已经不是那样明显了。

不信，我们来看定理1。任何三角形的内角和等于180°，对每一个人都是明显的吗？一个学生在值知道定理1的证明之前，未必会有把握地说，我随便在纸上画一个三角形，它的内角和都等于180°。一个忘记了这个定理的证明的人也未必会相信，这个事实是

明显的，他很快会说，当然，这需要证明，只是他简直忘记了那个证明。

关于定理 4，我们也可以用同样的道理来说明。半径 1 厘米的圆周长精确地等于2π厘米，而半径为 1 千米的圆周长比它大十万倍[译注]，这是否如此明显呢？对这些事实进行验证，是否容易呢？为此，应当非常精确地绘制一个半径为一千米大小的圆来测量它的周长。要作到这一点是很不容易的。我们判断定理 4 的正确性，完全不是因为它的足够的精确性经过实验证实了，也不是因为它看起来十分明显，而是因为它能得到精确的证明。

同时，我们曾指出，定理 1 — 4 的每一个论断完全与平行公理等价。因而，看起来非常明显的平行公理并没有说明事倩的本质。

上面我们曾谈到，在光线世界里，验证平行公理是有困难的（甚至可以说，实际上这是不可能的）。因为，如果能够分离出一束极细的光束，并且这束光没有任何吸收现象，那末，在现代望远镜能看到的范围内，我们对于这样细的光线束的性质是不了解的。如果角φ接近90°时（见图 6），射线d与a是否相交的

译注：原文误为1000倍。

问题，始终是模糊不清的。说射线将继续沿直线前进，这就等于什么也没有说。因为直线的性质是研究现实世界的光线性质时得出的，并不是相反。而正是直线的这些性质构成现在我们所研究的几何基础。

承认平行公理，我们就能得到一种几何学，其中任何三角形的内角和等于180°。如果我们承认一个与平行公理相反的命题，我们就会得到另一种几何，其中任意三角形的内角和不等于180°。在这里我们应该怎么办呢？承认还是不承认平行公理？

我们说过，用光线实验检验平行公现困难很大。那末，用光线实验检验定理1（与平行公理等价）是否简单一些呢？我们来详细地说明一下。

前面曾经说过，在自然界看不到真正的点、线、面。因而，也就没有线段、角和三角形。我们常常见到的只是小球、“一束射线”等实物，在一定的近似程度上，我们就把这些实物当作点、线、面等等。在几何中，点、直线、线段，角都是抽象的概念。它的产生是对实物，例如小球、“光束”、绷紧的线这些东西而进行长期观察的结果。因此，所有的几何定理和一切结论应用于研究理实客体，是依照它们在每个具体情况下被看作点、线、面的程度，即某种近似的程度。

假定，我们用望远镜来观察星体。望远镜和星体的关系是这样安排的，即我们在望远镜中看到的星体就象一个点。自然，这样的假定要视观察时的精确度，望远镜质量的好坏，星体的大小，以及星体到观察者的距离而定。实际上这些星体非常巨大，距离我们非常遥远。它在目镜中所形成的象，可认为是一个“点”。如果星体不断向观察者移近，它的象逐渐变大，这时观察者就不能把它看成是一个“点”。如果星体距观察者很远，简直看不到它时，就需要用更强的望远镜才行。

在这种情况下观察者可以认为，星体发出的光是沿着“直线”进行的。实际上，这条“直线”乃是“一束”，它在观察者附近很窄，但在星体附近却很宽，它的宽度等于星体的直径。然而，观察者认为，他通过两“点”看到的是一条“直线”，一点是星体，另一点是星体在望远镜目镜中的象。

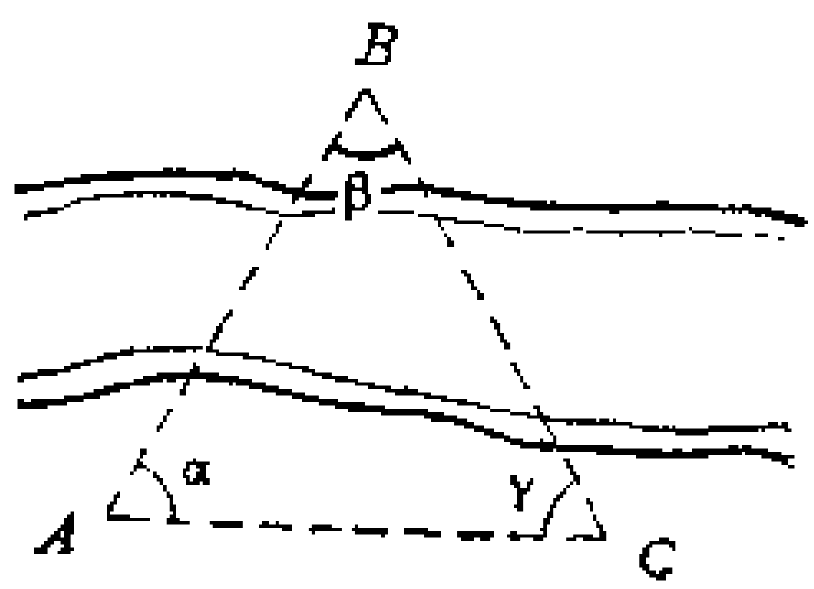


图 11

这种情况，不仅在天文观察中，而且在地面上的观察测量中也会碰到。假定，在一个地区（图11）进行测地工

作。在B点固定一个小球，测地工作者用A点放置的普通经纬仪对小球进行观察。

对这种观察，放在B点上的小球应当取多大呢？小球应当这样来选择，使它的象尽可能清晰地呈现在经纬仪目镜的中心。如果小球的象是一个很大的圆，那么小球应当缩小，以便进行更准确的瞄准，也就是说，小球不应太大。但是，缩小小球，到对经纬仪的瞄准精度产生影响时就不能再缩小了。如果缩续缩小小球，但仪器的灵敏度却不能因此而得到改善，那末，这种缩小就毫无益处。选择了大小合适的小球之后，测地工作者认为，他只与连接线段AB的两“点”A与B发生关系。实际上，小球B可能相当大（这取决于AB间的距离）。

假定，在点C支架上放置大小合适的小球，测地工作者用经纬仪对准小球B和C轮流进行观察，结果就会得出一个数α，α等于经纬仪刻度盘上的读数差。

在测地工作中，所有的测量不可能都是直接进行的。某些数值是间接测量得出来的，是根据直接测量中所得到的其他数据计算出来的。例如，在图11中可以看到，河流妨碍AB之间距离的测量。为了建立来知量与实验数据之间的关系，必须利用几何公式和几何定理。然而，如上所述，几何学是根据点、线、面、

三角形等等抽象的概念建立起来的。因此，测地工作者在完成了对小球和“光线束”所作的具体物理测量以后，就可以着手研究这个抽象的几何三角形△ABC，并认为顶点A的几何角等于α一即经纬仪刻度盘上的读数。很明显，α的数值决定于所使用的经纬仪的精密度。因此，测地工作者在使用不同的测量仪器时，每一次都需重新研究另外一些不同的抽象的三角形ABC。

为了更明确起见，我们假定，由于经纬仪的构造特点，读数盘上的读数不可能小于$10'$。在这种情况下，对小球B进行测量以后，在刻度盘上得出一个读数。我们就可以说，读数的精确度达到$10'$。同样可以将经纬仪对准小球C进行测量。

找到读数差值α以后，测地工作者认为如果采用另外一架更精密的经纬仪，就可能得到另外一种读数差，这个读数差与α比较不超过$20'$。因此，在考察这个抽象的三角形时，($\angle A=\alpha$)，测地工作者有权认为，如果应用更精密的仪器，对于角A他就可能测得到另外一些数值，这些数值的范围在$\alpha-20'$到$\alpha+20'$之间。

类似地，对于角B和角C可以得出相应的数值β和γ，也就得出三角之和$\sigma=\alpha+\beta+\gamma$。

这样就会产生一个问题：这个数值等于180°吗？显然，符合的可能性是很小的。首先，我们记得，经纬仪的准星每一次只能精确到10′。为了确定σ，经纬仪必须进行六次瞄准。因此，应用更精密的仪器，就会在σ－1°到σ＋1°之间测到另外一种结果。

因此，在所考察的抽象三角形中，三角和的选择决定于进行测量时的精确度（在上述情况下，决定于所使用的经纬仪的精度）。在研究过程中测地工作者有权考察一个抽象的三角形，这个三角形的三角之和不同于在测量中所得到的数值σ，但其差不会大于1°。

这里又产生另外一个问题。测量的角的和σ与180°相差多少？这个差数是否超过1°？在使用仪器的精确范围内，σ与180°之间是否存在着差别？换句话说，在这种情况下，测地工作者是否能够考察一个抽象的三角形（这个三角形的内角和正好等于180°）？

我们来分析一下几种可能出现的测量结果。这里有两种可能性。

1. 测量结果角和$\sigma=\alpha+\beta+\gamma$与180°之差超过进行测量的精确度（在这种情形下测量精确度是1°）。这时，测地工作者应当这样去讨论问题：河流阻碍AB间距离的测量（图11），为确定三角形ABC的面积，直接测量有很大困难，为了求得这些数值，必须

应用某些几何定理，即把实验所确定的量与三角形的未知量联系起来的几何定理。就是说，必须建立几何学理论，这种几何理论能以所需的精确性来解决许多实际问题，如上面所遇到的问题。

根据某些公理我们已经开始建立这样一种几何。困难的是，公理中是否包括平行公理，这是一个问题。如果我们承认这条公理，那末，在我们的几何中，任何三角形内角和都等于180°。上述实验表明，我们所来取的测量精确度与这个结论不一致。这意味着，这种几何对我们测地工作者来说是不够好的。我们的测地工作者不能把这样的几何结论应用到自己的实际工作中去。知道AC的长度和角β，γ的大小，他仍然不能根据已知的正弦定理以所需的精确度来确定AB的长度，因为正弦定理的正确性在于三角形内角和等于180°。同样，他也不能以所希望的精确度，根据课本中已知的公式来求三角形面积。

为了实际的需要，必须建立一种几何学，在这种几何中平行公理不再是正确的，因而，三角形的内角和不等于180°。同时，命题2—4也都不再正确。

2.测量结果所得到的$\sigma=\alpha+\beta+\gamma$与180°之差不超过测量的精确度（在这种情形下测量的精确度是1°）。

这表示，为了实际的需要，这种几何（三角形内角和等于180°）对测地工作者是十分方便的。他没有任何根据否认平行公理，以及与之等价的定理1—4。在这里，普通欧氏几何教科书是十分有用的，它所得出的结论在测地工作者所采用的测量精确度范围里获得了广泛的实际应用。

必须指出，在这种情况下，测地工作者也不应该忽视那种平行公理不正确，三角形内角和不等于180°的几何学，不应该排除这种“奇异”的几何学，可能将来会有它的用处。如果测地工作者所进行的全部测量，都能与三角形内角和等于180°的几何相一致，那么，也许在将来，提高了仪器的精确度，或者去测量一个巨大的宇宙三角形时，他将会碰到，在这种新的测量工作中，通常的欧氏几何将不再能以足够的精确度描述世界。这时，完全需要另外一种几何学。

综上所述，如果在某些实验中，我们得到第一种结果，也就是说，藉助平行公理建立起来的几何学不能满足我们的要求，说明这样的几何不够好，必须建立另外的几何，那么在这种几何学里，平行公理就不再是正确的了。

假如在实验中经常得到第二种结果，这就表明，以平行公理为基础的欧氏几何暂对能够满足我们的要

求。当增加观察的精确度时，就需要其他的几何。

因此可以说，以现实世界为背景建立起来的现有几何模型是不够好的。这时，需要考虑建立更好的模型。为此，就应当仔细分析那些为选择公理所用过的实验，去选择新的公理，以便它能够准确地反映客观世界，并利用它来建立更精确的模型——新的几何学。

由于这个缘故，我们高兴地看到，著名的数学家H•N•罗巴切夫斯基已经在十九世纪上半叶用当时仅有的天文观察工具测量了一个巨大的“宇宙”三角形。他取地球椭圆轨道上两个最远点和一个遥远的恒星，作为三角形的三个顶点。测量的结果，正如所料，所得到的数值不等于180°，但是，这个差值并没有超过所使用仪器的精确度范围。因此，关于什么样的几何学能够比较精确地描述光线的世界，仍是一个悬而未决的问题。不明瞭的是，一般说，将来是否总有一天需要一种没有平行公理的几何学？而这种几何会不会是一种无益的幻想？

五　平面“世界”

我们来考察可以向两个方向无限延长的直线。在此直线上有无数个相同的点。为了表示出直线上每一个点的位置，即它的“住址”，我们用某种方法把直线变成一个数轴。这样一来，只要在直线上规定一个起始读数（起始坐标），选择一个单位作为度量直线的尺度，并规定好轴的那一端是正方向，那么只要知道了每一点的坐标，也就确定了它的位置。

这就是说，每一点的位置完全由一个坐标决定。

要表示出平面上每一个点的位置，事情稍微复杂一些。为此要在一个平面上选择两根互相垂直的但有一个共同起始点的微轴，其中一个叫横轴，另一个叫纵轴，它们的交点就是起始坐标。向横轴作垂线，就可把平面上的任意一点投射到横轴上，于是得到该点的横坐标。同样，把该点投射到纵轴上，就得到它的纵坐标。根坐标和纵坐标合起来叫点的坐标。

这样一来，平面上的任何一点都有两个坐标（其中每个坐标可以是正数，负数或零），那末平面上任

何一点的位置也就完全由两个坐标来确定。

确定空间点的位置比较复杂，需要选择三个数轴，其中每两个互相垂直，并有共同的起始读数，然后规定量度单位和数轴的正方向。为找到空间任何一点的位置，就需要在互相垂直的每一个数轴上轮流投影。用这种方法就可以找到点的三个坐标来确定点的“住址”。

这样，空间点的位置完全由三个坐标来决定。总而言之，直线上的点有一个坐标；平面上的点有两个坐标；空间点有三个坐标。因此我们通常说，直线是一度，平面是二度，空间是三度。有时平面称二度空间，直线称一度空间。

现在我们来考察一个无限扩展的平面，也就是二度空间。我们已经忘记这个平面是安插在三度空间中的。现在来考察这个二度空间及其中发生的一切。首先，为了更直观地考察一切，想象有一个“寄宿”在二度空间中的小动物。假定他就是一个想象中的平面人——他只有长度、宽度，却投有厚度。他是平的，他只能在平面上运动，既不能跳出平面，也不能从平面外来观察“本身世界”。当他移动时，他在平面上常常占据某个位置，就象我们在空间占有某个位置一样。于是这个平面人不管怎样移动，他只能在平面上进

行“观察”，而没有任何可能从平面外进行观察。比如，他只能研究平面上发出的光线。光源也是平的，只能在平面上发亮。因此平面人只有在自己的世界里观察这一切，并且永远在这里观察所发生的一切。

我们在这里所描绘的，尽管只是一种幻想的生物，但是我们还需假定进个生物能够思想。希望读者习惯这种奇怪的想象，你们在很多幻想小说里不是也常常碰到许多难以想象的东西吗？

现在，让我们进一步来考察一下平面上的这个生物。当然，对他来说，立体几何是不可想象的（对他来说，这是一个幻想的空间，就象我们生活在三度空间对平面世界的生活不可想象那样）。但是他可以充分研究平面几何。就象我们在本书开头作过的那样，他可以组织公理体系（例如，经过两点可引一直线，以及其他公理），可以证明定理，即上面所列举的包括在平面几何教程中的全部定理以及上面关于平行公理及定理1—4（图12）的叙述和对它们所进行的讨论。

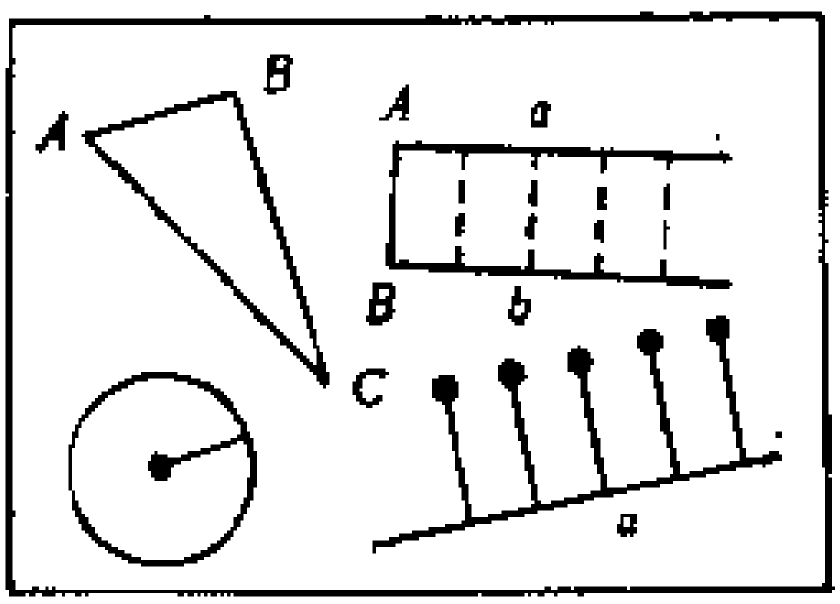


图 12

六　球面“世界”

现在，让我们大胆地去幻想不同于平面的那样一个“世界”吧。

以后我们用“世界”这个词时将不加引号。

我们来考察球的表面。也就是球体的边缘，我们感兴趣的只是表面，人们习惯于把它叫作球面。

我们立刻就会注意到，球面世界也是二度的。因为球面上点的位置完全由两个坐标——经度和纬度来决定*。

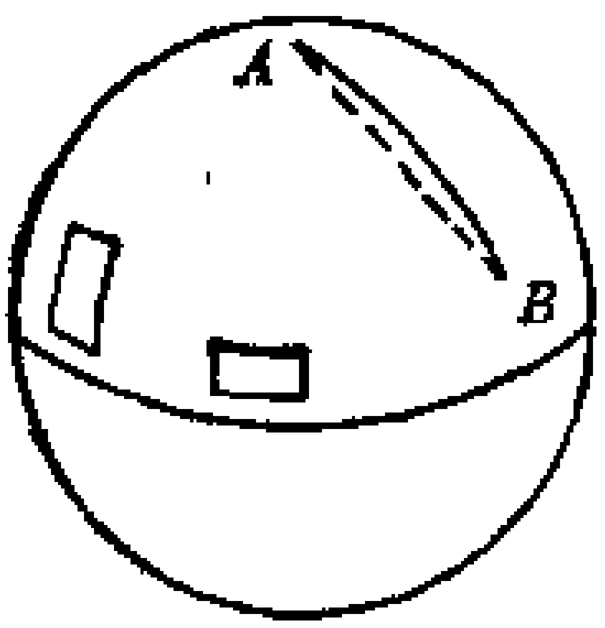


图　13

就象在第五节所进行的讨论那样，我们想象一个寄居在球面上的生物。我们称他为球面人。这个球面人对于三度空间和三度空间中的球体是完全不能想象的。他只能在球面上移动、滑动，但是不可能朝里

* 所有类似于这样的表面都是二度的，因为点的位置由两个坐标决定。

钻进或者向外脱离这个世界。也不可能从外面某个地方观看这个世界。当他在球面上移动时，他将占据球面的一系列位置，就象平面人在平面上移动时发生的情形一样。同样地，他没有厚度，他在球面上的表现就象一小块不能伸展的薄膜（图13）。

不过，球面人究竟不同于平面人。他们居住的是根本不同的世界。平面人无论如何不能进人球面世界。这是很明显的事实。你不妨试试，把一张纸贴到球面上，这是不管怎样都办不到的。因为你不能把纸片弯曲并他它发生皱折*。一块薄的橡皮可以贴到球面上，但必须使它伸缩变形。同样，也不可能把皮球上割下来的一块橡皮毫无伸缩地贴到平面上。

这就是说，如果不使自己的“身体”遭受生现上的伤害，平面人就不能来到球面世界，球面人也不能潜入平面世界。但是他们在各自的世界里都可以畅行无阻。

现在我们进一步来研究球面世界。假设球面人由A移动到B（见图13）。自然，他可以走不同的路线，但这些路线必定都在球面上。因此他不可能穿越球面沿如图所示的那条虚线运动。

---

* 这不同于把纸片卷起来贴到圆筒上那样容易。

这里产生一个问题：在球面上由A到B的最短路线是怎样一条线？这样的路线称为球面的测地线。球面人最感兴趣的就是这样的线。

为了求得A，B点的测地线，我们可以用下列方法。经过这两点和球心。作一个平面，显然，这个平面与球的某一大圆相截（图14）。点A和B位于这个大圆上，并把这个大圆分成两段。其中较短的一段（图上用粗线表示）就是未知的测地线，这是球面人由A到B的最短路线。

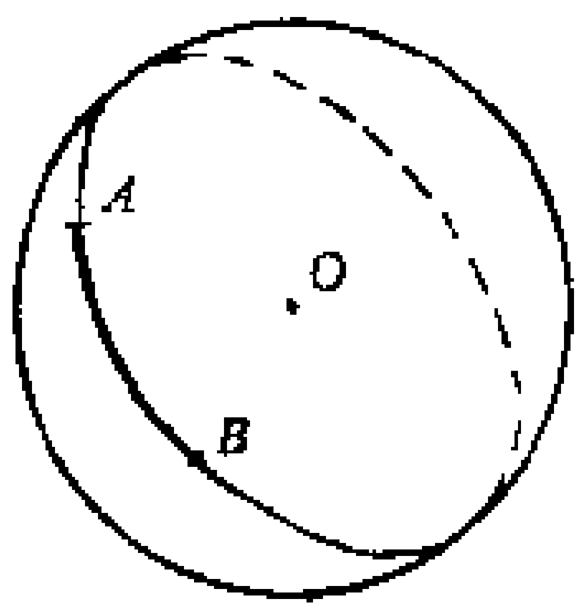


图 14

如果点A和点B不是大圆直径的两端点（即A，B，O三点不在一条直线上），那么，连接A与B的测地线只有一条*）。因此球面上的测地线就是大圆的弧。我们知道，轮船的领航员如果希望用最短的路线由A到达B，他所选择的航线正是这条测地线。

必须说明，测地线正好就是我们所说的短程线。不过，证明这个问题超出了本书的范围。关于它的证明，读者可以在球面几何有关参考书中找到。

---

* 在相反的情况下有无数条测地线连接点A与B。例如，在地球仪上，这样的线就是连接南北极的经线。

现在我们设想在球面世界里有一个光源，光线只能在球面上传播。球面人只能在球面上观察，而不能从球面向外看。

那末，在球面世界光是怎样进行传播的呢？假定有两个同心球面，半径相差很小（图15），外球面内面镀银，内球面外面镀银，两个表面都是理想的镜面，把光源S放在这两个球面中间，经镜面依次反射的光线就是大圆平面上的折线（图15）。球的半径相差愈小，这种折线的曲折就愈小，愈播近大圆弧能。如果两球半径非常接近，那么光线将任意地接近大圆的弧线。

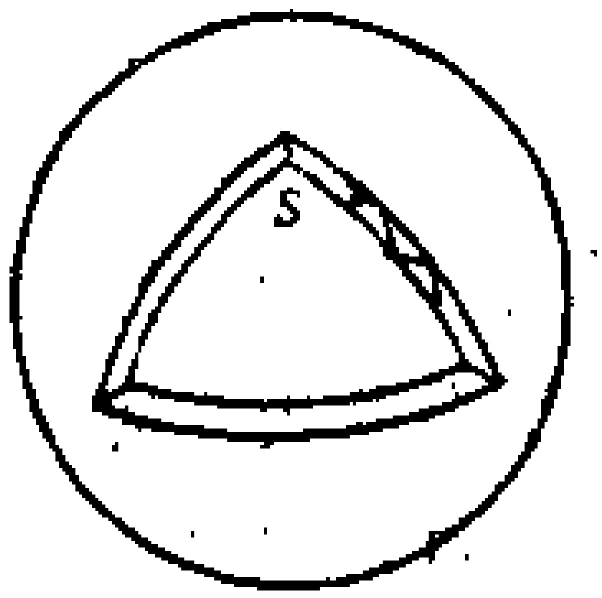


图 15

考虑到这种情况，我们认为，光线可以按最短路线，即沿测地线进行传播，因此在球面世界，光由A点到B点沿如图14的路线行进。

如果认为光的传播遵守球面上的物理定律，那么我们就是以球面人的观点看问题了。上面关于测地线的讨论，对球面人末说是非常播象的，他播本不认为自己是住在三维空间的球面上。对能末说，整个世界就是这个球面。关于光的性质以及它的传播方向，并

不是从上面的讨论中得知的，而是从他在这个世界里所进行的各种实验得知的。球面人在建立几何时，把光线作为直线，对他来说，光线就是直线的标准。换句话说，在这里直线就是测地线，即由球面和通过球心的平面相截面成的那条曲线。考查过光线的性质以后，球面人就开始组织公理，发展他的几何学理论。

如果所考察的世界非常大，球面人和它比较起来微乎其微，或由于交通工具受到的限制，致使他不能远行，这时，球面人将会觉得就如在平面上一样。他将认为，他的世界就是一个平面，这里的几何学与上面的平面欧氏几何没有什么区别。从实验中也将会验证，平行公理以及第四节中定理 1 — 4 都是正确的（我们知道，很久以来人们就把地球当作平面）。

假如从一个很大的皮球上切下一小块，只要将它稍加变形就可以贴到平面上。这种微小的形变不很显著，既不能觉察，也不可能测量出来。完全类似，把一块不大的平面纸片贴到非常大的球面上，纸片的变形也几乎看不出来。因此可以说，大球面上很小的一块与平面几乎没有什么区别。要想发现其中的差别，需要非常精确的测量仪器。在所考察的这块球面上，各点之间的距离与球的直径相比越小，测量仪器就越需要较高的灵敏度。

不难了解，球面人是怎样测量直线之间的角度的。两条直线之间的夹角，即球面上由点A出发的面个大圆之间的夹角，将等于由A点引出的两个大圆切线之间的夹角。因此，赤道和任何一条经线间的夹角准确地等于90°（图16）。

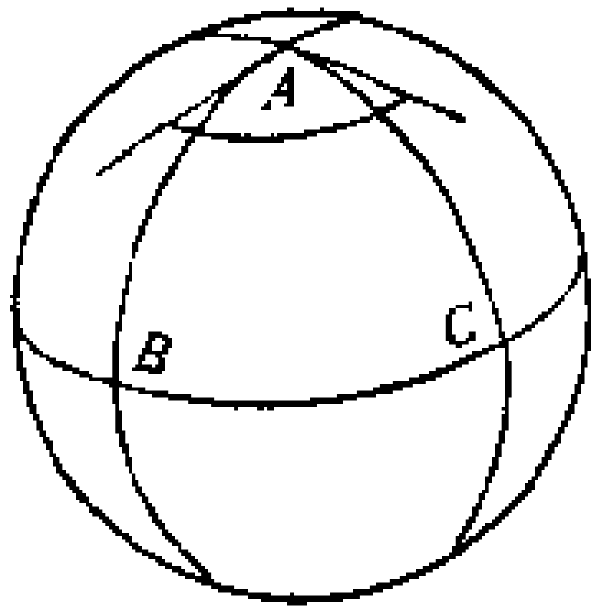


图 16

球面世界的一条线段就是大圆的一个弧段。相等图形（特别是相等线段），就是沿球面运动的永远重合的图形。

我们再来看看在第面节中所描述的测地工作。如果球面人在一段不长的线段上进行类似的测量，他得到的结果与在平面上得到的结果是一样的。如果采用的测量仪器比较粗糙，他就很难发现球面世界与平面世界的差异。所考察的区域愈小，要发现这种差异就愈需要精确的仪器。因此，要测定这种差异，要么采用精确的仪器；要么果用同一种仪器，但必需考察更大范围的区域。

现在我们假定，球面人改进了他们的联络工具，并且可以在很远的距离内运动。在这种情况下，他马上就会发现一些奇异的现象。下面我们详细地谈谈其

中的几个问题。

1. 在球面世界可以建立三个角都是直角的三角形（见图16）。比如，在地球仪上互相垂直的两条经线和一条纬线构成的三角形，它的内角之和等于270°。

因此，在球面世界，定理 1 不对，即三角形内角和不等于180°。但是，假如球面人在球面上的一段不大的区域内移动，并在那里测量三角形的内角和时，也是不能用自己的测量工具发现这种情况的。

2. 我们来考察球面上的一段直线 AB（图17），在A，B两点引垂直于AB 的直线（如果把AB看作赤道，a和b就是经线）。显然，在直线a和b 之间并不等距，离开 AB 愈远，它们之间的距离愈小，最后 a 与 b 将相交。这说明在球面世界定理 2 不能成立（见第四节图 9）。

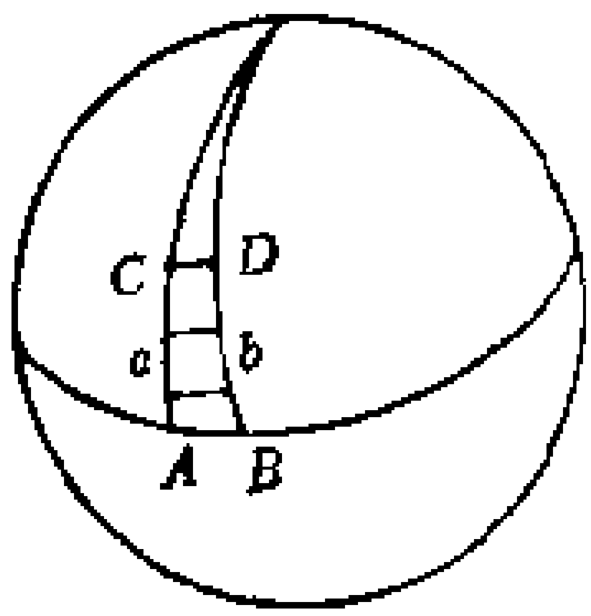


图 17

所以，大海中位于经线a和b上的 C点和D 点的两艘轮船，如果它们要想以最近的路线到达赤道，它们就必须沿经线前进，并且它们之间的距离将不断变化。

3. 定理 3（参阅第四节图10）在球面世界是否成立

呢？我们在直线a上经过点A作一垂线，并截取其中一段AA′（图18）。如果在直线a上的所有各点都作这样一条线段，即如果点A沿直线a滑动，并使AA′永远垂直于直线a，那么点A′在球面上将画出一线段b。不难设想，线段b不是球面世界中的直线。实际上如果把直线a取作赤道线，那末b就是它的平行线，它位于与赤道平面相平行的一个平面上。这就是说，这个平面不经过球心。即b不是球面的测地线（不是球面世界的直线）。要想经过最短路线从A′点到达B点，就应当沿直线c，而不应沿线段b（见图18）。

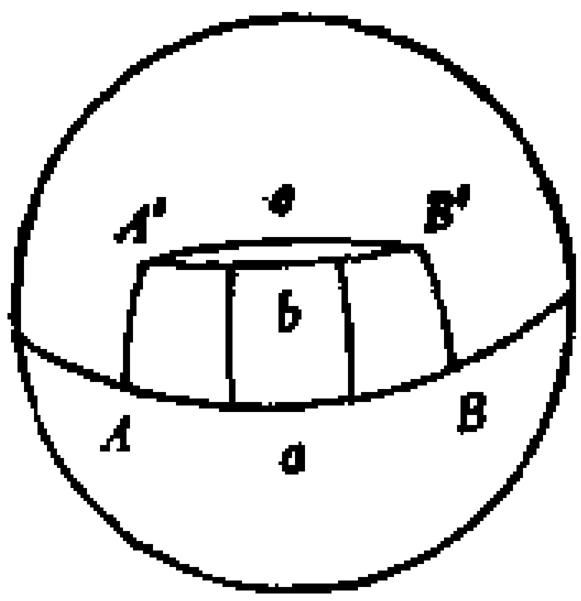


图 18

如果在海上有一艘轮船沿直线从A处向B处行驶，同时另一艘轮船从A′处向B′处行驶并与第一艘轮船始终保持相等的距离，那末第二艘轮船就走了一些不必要的路程。因为从A′处到B′处可以沿最短路线，即沿直线c航行。

因此，在球面世界与某直线等距的各点（在该直线一侧）其轨迹不是一条直线。

4.现在我们末看定理4。先考察球面世界以S为

中心的一个圆（图19）。正象在平面世界那样，与S等距的点的轨迹叫作圆。中心S到圆周各点的距离要沿测地线来测定，即沿大圆来测定。如果把S看作球的极点，那末在球面世界以S为中心的圆都是平行的，它至中心S的距离需沿经线进行量度。有这样一条经线与图19中的圆相交于A点。这个圆的半径等于经线的弧长，即$R=\overset{\frown}{SA}$。令$OS=\rho$，即球半径。不难看出，我们所考察的球面圆上的各点都位于垂直球半径OS的一个平面上。球面上的圆正好就是这个平面与球相截的交线。这个圆的平面半径等于BA，而不是等于球面世界的圆半径R。

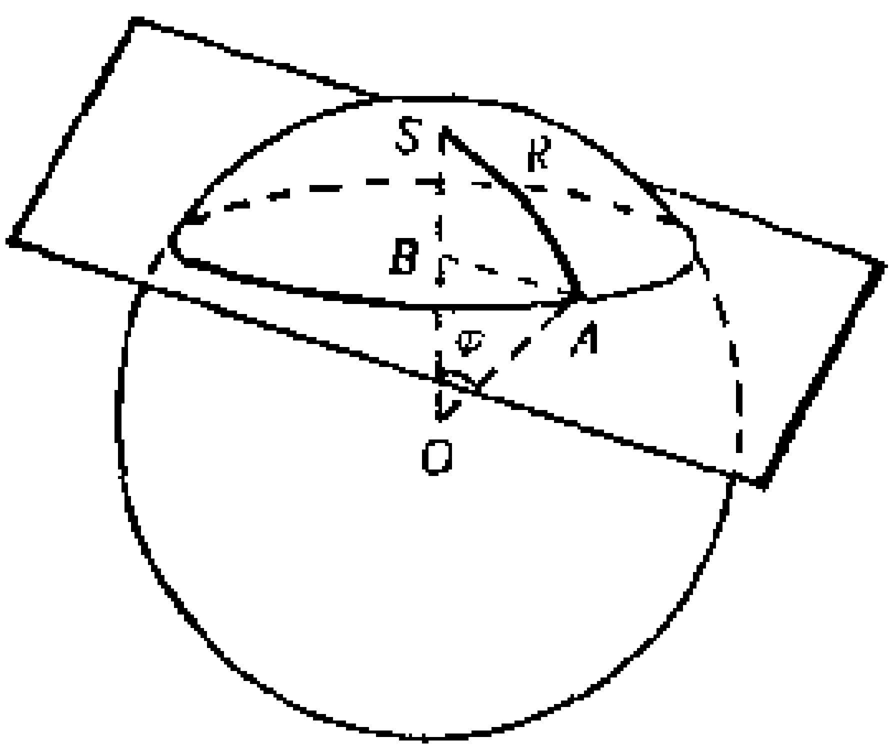


图 19

当然，对球面人来说，他不可能划定任何一个这样的平面，长度$\overline{BA}$对他不起任何作用，因为BA与球面上的圆没有任何联系。

对球面人和平面人来说（图19中的平面），每一个圆具有相同的周长C，但其半径不同。对球面人来说圆半径R等于$\overset{\frown}{SA}$，对平面人来说，圆半径等于BA。面为$\overset{\frown}{SA}\neq BA$，所以球面人测量了半径R和圆周长C并

确定了$\frac{C}{R}$之后，得到的数不是2π，而是另外一个数。在平面世界，对任何一个圆来说，周长与半径之比永远是同一个数2π。在球面世界能不能说$\frac{C}{R}$决定于圆的半径，或者永远等于一个常数（尽管不一定等于2π）？

可以看出，在球面上，$\frac{C}{R}$决定于R，它不等于2π，同时，弧$\overset{\frown}{SA}$与线段BA相差愈大，$\frac{C}{R}$就愈小。实际上，

$$\frac{C}{R}=\frac{2\pi AB}{R}=2\pi\frac{AB}{R}=2\pi\frac{AB}{\overset{\frown}{SA}}。$$

因为$AB<\overset{\frown}{SA}$，所以在球面世界$\frac{C}{R}<2\pi$，即$C<2\pi R$，而在平面世界$C=2\pi R$。

必须指出，根据欧氏几何和欧氏三角，$\frac{C}{R}$可以写成另外一种形式。即用φ表示$\angle SOA$的弧度（参阅图19）时，我们得到$R=\varphi\rho$；$AB=\rho\sin\varphi=\rho\sin\frac{R}{\rho}$。由此

得到

$$\frac{C}{R}=2\pi\frac{\rho}{R}\sin\frac{R}{\rho}。$$

不难设想，当圆半径R小于球半径ρ时，AB与R $=\widehat{SA}$彼此相差很小。因而$\frac{C}{R}$与2π之差也很小。所以在球面世界的一个小范围区域内进行精确的测量时，球面人常常发现：$\frac{C}{R}=2\pi$。只有当明显地提高测量仪器的精确度，或者所考察的区域范围足够大，这时才能发现球面与平面的差别。

当球面人进一步观察这个世界，研究它的性质时，他还能够发现更多的看来难以相信的奇怪事实。

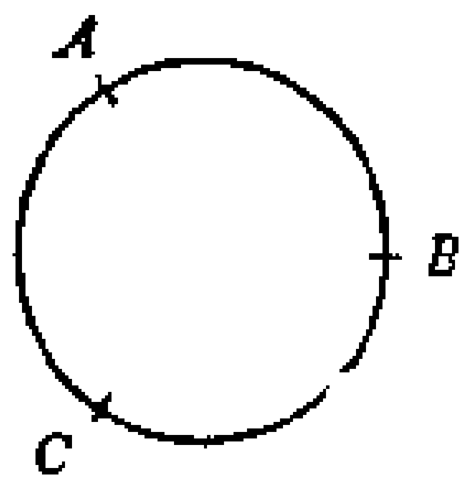


图 20

不难理解，在球面世界一般不存在平行直线，因为所有直线都是成双成对地相交，所以，在这里平行公理无所用处。在球面世界每条直线都是封闭的，直线上任意三点A，B，C，其中每一点都位于其他两点之间（图20）。

从欧氏体系的观点来看：

直线上的三个点中位于其他两点之间的点不多于

二个。

但是在欧几里得所写的公理中并没有这样一条公理。因为这个事实十分明显，已经习以为常，所以没有把它包括在公理之中。当球面人在局部小范围里进行活动时，他也是这样去处理问题的。可是一旦扩大了实验的范围，他就产生了怀疑：以前被认为明显的论断，现在是不是错了？例如，他可能发现，三角形的内角和不等于180°，这时他就会在计算上找原因，是不是算错了，或者仪器出了什么毛病？这就是说，要抛弃几世纪以来根深蒂固习以为常的几何观念，要确信不存在平行公理，要确信三角形内角和不等于180°，要确信直线的封闭性等等，简直不可能办到。但是当他不断地重复上述实验，便越来越倾向于这样的想法：必须抛弃旧有的习惯，必须接受物现实验所确定的另外一些公理，必须相信他所应用的空间几何完全不是欧氏几何。这时，球面人开始对新的几何学进行仔细研究，并将它应用于自己的实际生活之中。当他进一步深入地发展了这种几何以后，他就会在许多事实中发现这样一个事实：

任何三角形的面积S△不等于底乘高之半，它决定于三角形的内角和：

$$S_{\triangle}=\rho^2(\alpha+\beta+\gamma-\pi)$$ 〔译注〕

这里ρ为球半径，α，β，α是用弧度表示的三角形的三个内角。从这个公式应当得出，$\alpha+\beta+\gamma-\pi>0$，也即$\alpha+\beta+\gamma>\pi$，这就是说，任何球面三角形的内角和大于180°。

译注：这个定理的证明，读者可以在有关初等数学定理与习题的专著中找到。例如：朱德祥编《初等数学复习及研究》（人民教育出版社）第五章第8节。

七 其他二维“世界”

上面所描写的球面世界，完全适合于球面人居住和活动。球面世界的弯曲性，它的非欧性质，一点也不妨碍球面人在它上面迁移。我们曾经谈到，一块不能伸缩的，同时每一点都能与球面接触的薄膜可以自由地在球面上移动。但是对于椭球面（扁球），象鸡蛋、李子一类形状的东面（图21），情况就完全不同了。若有一块薄膜，它的每一点在椭球面A点附近可以与椭球面接触，但是在B点附近就不能与椭球面完全接触了。要想使它在B点附近也能与椭球面完全接触，就必须把它拉伸，使它变形。这种情况表明：A点和B点的曲率不同。面球面上各点的曲率是相同的。

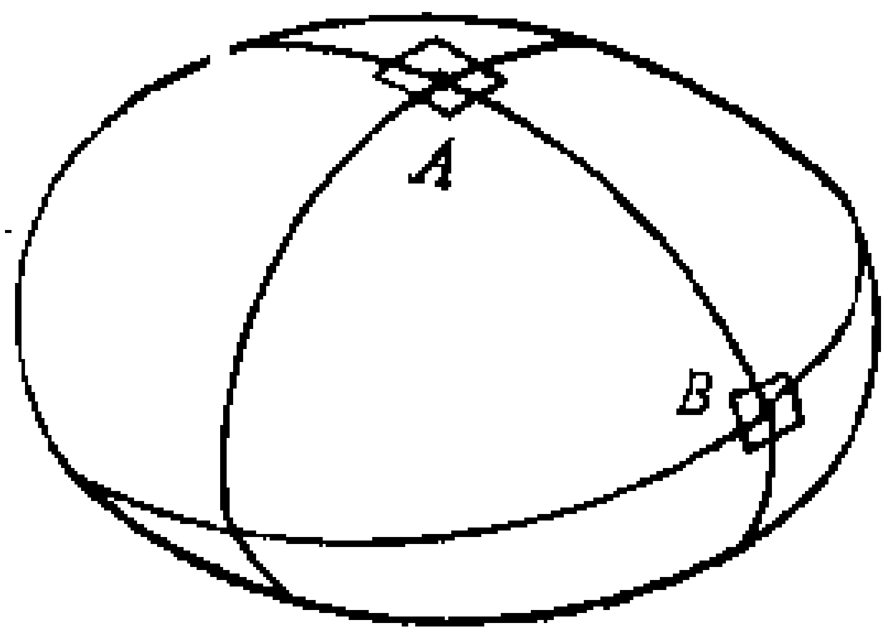


图 21

这样，薄膜就不能从A点向B点滑动。这说明，

在这样的表面上（见图21），如果它的寄居者对于拉伸和压缩的变化有明显的感觉，那么他就不可能在上面自由活动。但是球面人可以在球面上自由移动，因为它在球面上移动时没有变形。因此，如果我们打算描写这种幻想的世界的几何特性，就必须假定，它的寄居者对于这种变形感觉不灵，而这种变形却是保证他的移动所必需的。

当我们从旁边看这个世界（就如我们在观察图21所表示的实体），考察椭球人的行径，就会看到，椭球人在迁移过程中既发生弯曲又经受延展。但对于在椭球面上居住而又不可能从外面来看它的椭球人来说，他只觉得他的世界非常舒适，就象平面人对于欧氏平面的感觉一样。在整个运动过程中，他的身体感觉不到任何的变化，这就是椭球人的“生理”特点。

椭球人确定两个图形的相等（例如角和线段的相等）与球面人相似。需注意的是，在椭球世界，一个形体在运动时并不改变自身的大小，而从外部的一个观察者看来它却时而伸展，时而收缩。

现在我们研究圆柱面（图22）。把一块平面弯曲后就变成这一形状。显然，一块平面薄膜可以整个贴到圆柱表面上。这块薄膜可以沿着圆柱面滑动而不发生伸展或收缩，但是它始终处于弯曲状态。如果我们

要描述柱面世界，只需假定柱面人感觉不到弯曲即可，因为在这里不存在伸缩。这比在椭球面上受的限制少一些（图22）。

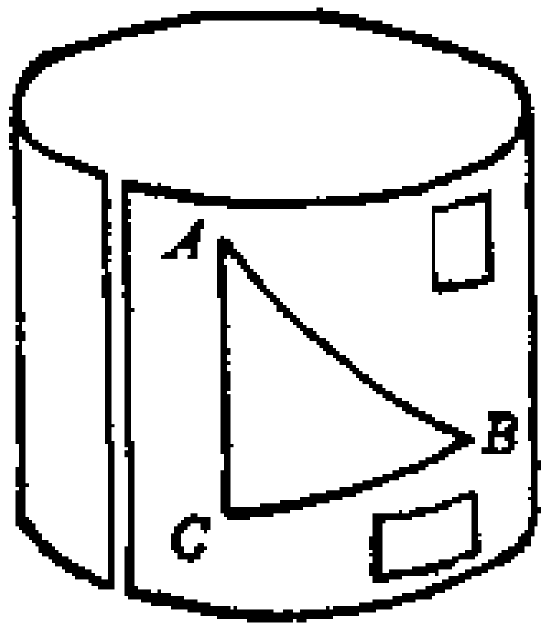


图 22

这样用柱面人的眼光来看，他在运动中完全不是弯曲的，他在自己的天地里畅行无阻。只有从三维空间来看它时才会觉得柱面人是弯曲的。*

这样我们就使柱面人在柱面上不受阻碍地运动，并开始对柱面世界进行考察。象在球面世界一样，我们认为，在柱面世界光沿测地线传播，因此柱面人也把测地线作为直线。为了寻找柱面的测地线，我们将柱面展为平面。面为在柱面上被测量的点之间的距离不变，所以柱面上的所有测地线(短程线)与平面测地线是一致的，也就是和普通直线是一致的。这表示，由欧氏直线构成的线就是柱面的测地线，所以柱面人就把它作为直线。当柱面人研究他的几何学时，根据光线的有关实验建立起一套几何公理。显然，这种公

* 可以证明，除了平面世界和球面世界以外从任何二维世界来看，一定会发现其中的寄居者运动时不断被压缩、弯曲和伸展，

理系统与平面人的几何公理系统完全一样。这两个世界有相同的几何学：在柱面世界三角和等于180°，其他一些几何特性也与平面世界相同。

然而，这里与欧氏平面有一个区别。欧氏世界是无限的，而柱面世界，如图22所示，是有限的。而为柱面世界是一块弯曲的平面。柱面人在实验中发现了一些与平面人所发现的事实相同的事实。但是居住在无限平面上的平面人，并不是在整个平面上进行实验，他只是在有限的一定的平面上进行实验。一般说来，用直接实验的方法他不能相信自身世界的无限性。平面人无论怎样增加实验的准确性，实验的结果总是与三角形内角和等于180°这个事实相符。因此他总是在实践中利用欧氏几何结论。确切些说，他并不需要欧氏几何的所有结论，而只需要在有限一块欧氏平面上有意义的那些几何结论，因为平面人的全部实际活动总是在一块或大或小的平面上进行的。平面人将认为他的世界是无限的，因为他的经验与这一事实任何时候也不相矛盾。所以无限平面上的欧氏几何对他是完全适合的。

我们曾经注意到，在球面人不能移动很远的距离，或没有更精确的测量仪器时，他也会确信，在球面上所施行的是欧氏几何，因而他的世界是无限的。

但是，球面人的世界实际上是有限的。自然，这并不意味着，球面人在他的世界里运动会“受到边缘的障碍”。不会的！他沿着直线运动，最后仍回到原来的出发点。这就是球面世界的特征，同时，球面人根据实验征实了这种特征。

习惯于欧氏几何的人，时于世界的有限性是难以想象的。这就产生一个问题：“在世界的边缘”会发生什么事情？明瞭球面世界的结构以后，我们立刻就会明白，这类问题是毫无意义的。球面世界并没有“边缘”。球面人无论何时都不会碰到任何边界。虽然球面世界是无界的，但却是有限的。光线在这里沿测地线——短程线运动，即沿直线（！）运动，“走遍世界以后”又回到出发点。

为了证实球面世界的有限性，球面人并不需要走遍“整个世界”。他只需在一段区域移动一下就可以“考虑到”这个问题。首先，提高测量仪器的精确度，通过实验他就会证实，三角形的内角和大于180°，三角形的面积按照 43 页所指出的公式去计算比较正确，以及其他骤然看来奇怪的一些事实。这样就建立起一种新几何学，正如我们当初想到建立欧几里得公理一样，球面人在最后也选择了一种公理系统，从它所得出的结论与实验的结果完全一致。

球面人根据自己制定的公理系就可以证明他的世界是有限的。假如屡次进行实验，其结果总是与理论的结论一致，球面人就可以认为他的世界是有限的，尽管由于交通工具的限制，不允许他走遍整个世界。

总之，要在有限的，任意大的一部分地区内验证这些几何事实是非常重要的事情。

柱面人在自己的那部分区域内活动，结果认为，在这里实用的就是欧氏几何。我们认为，这部分柱面须这么大，以致他柱面人用自己的交通工具不能到达它的边缘。

现在我们再来考虑一种世界，它在发展上述思想的过程中曾经起了非常重要的作用。

一艘轮船沿直线 MN 运动（图23），在M处用长

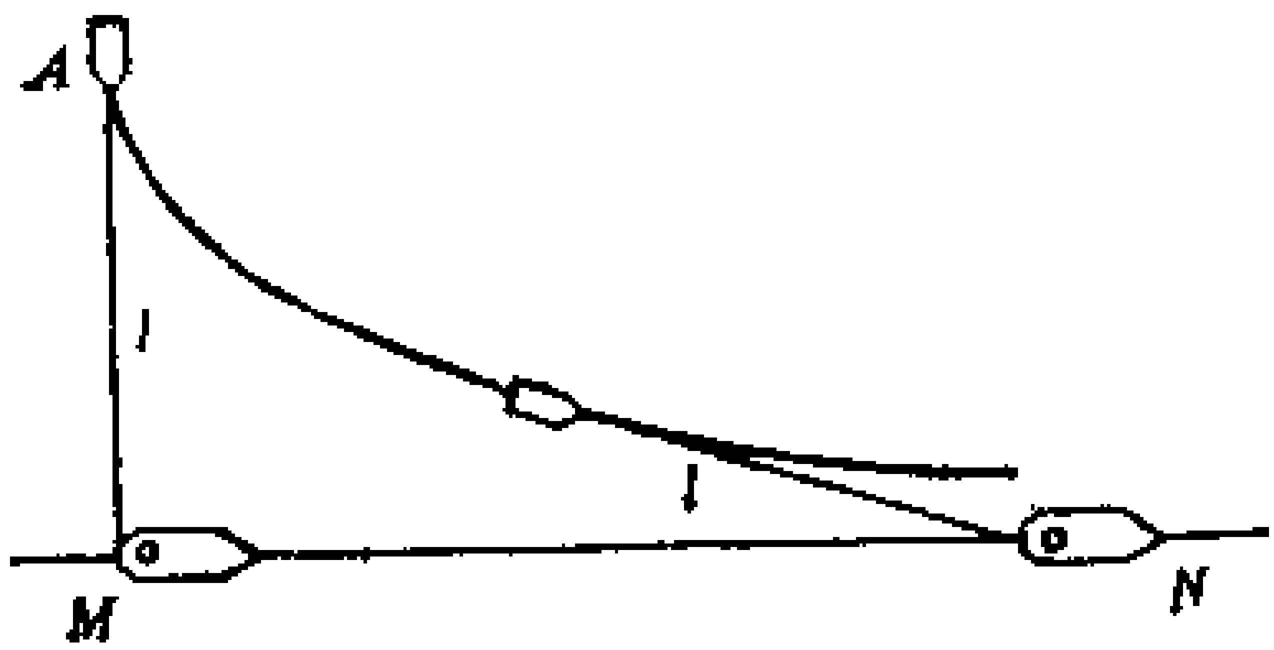


图 23

为 l 的绳索系着一条驳船，驳船随后沿某路线运行。这条路线叫作曳物线（或称趋向线、等切面曲线等）。

这种曲线的特点是，曲线上某一点沿切线到轮船航线的距离等于定长 l。曳物线随着轮船离开M点越远，就越和直线MN 无限接近。现在，以直线 MN 为轴，将曳物线旋转一周，就可得出一个旋转曲面（图24）。这个曲面叫做伪球面。它的绝妙的地方在于：如果把一块只能弯曲而不能伸缩的薄膜使它的每一点与伪球面毗连，它就能没有间断，没有皱褶，没有伸缩地沿着表面滑动。伪球面的这个特点与柱面相似。经过 MN 的平面与伪球相截而成的曲线，称为经线。沿一条经线 KL 可以把伪球面切开。所得到的表面与图22所表示的一块柱面相似。但是，在这里已经不能那样简单地把测地线的特点表现出来。现在我们把探索测地线的问题暂且放在一边。我们只需注意，在伪球面上的任何两点 A与B 可以被唯一的一条测地线连接起来。经线可作为测地线的一个范例。象在球面上一样，这里的平行线不是测地线。图24表示出连接

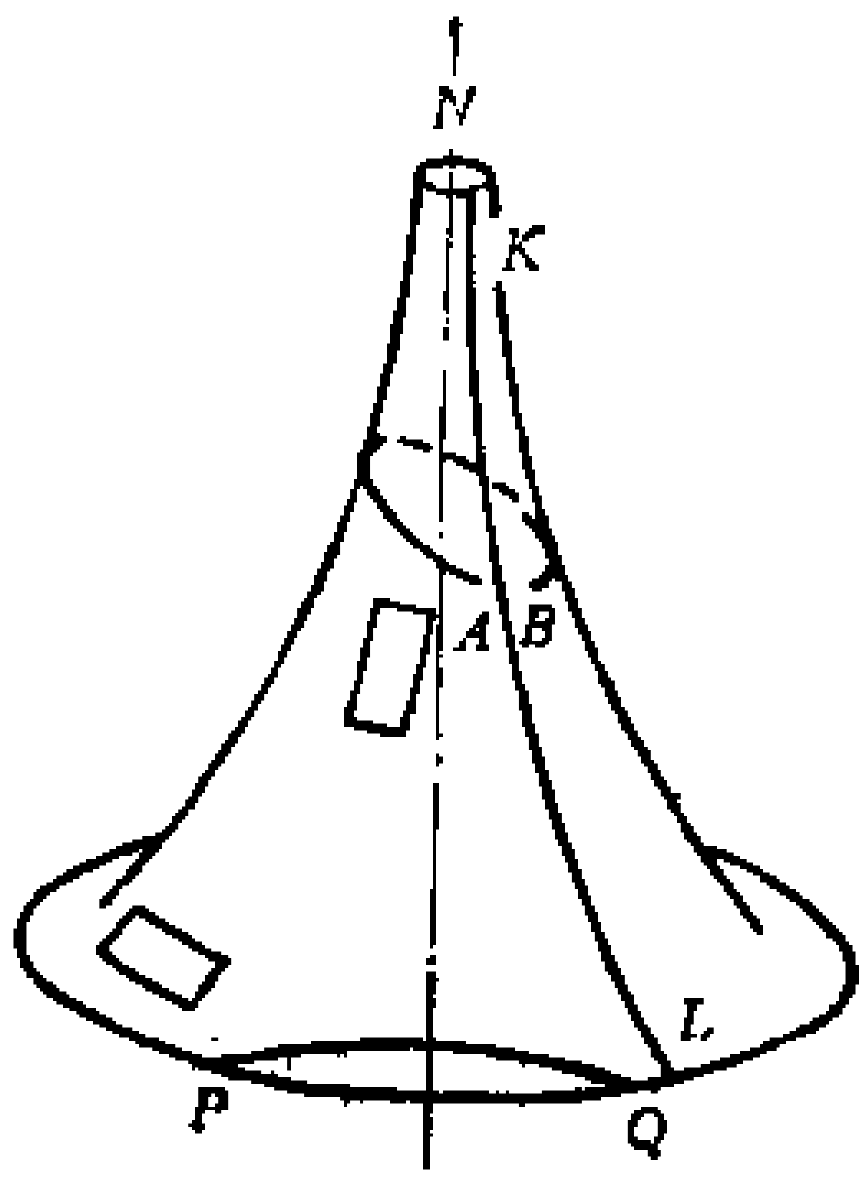


图 24

点A与B，点P和Q的两条测地线。

同前面的讨论相似，在这里也设想有生物居住在伪球面上，它们感觉不到伪球面的弯曲。还要注意到，伪球面人在运动中完全没有弯曲——对他们来说这个世界完全是均匀的。只有在外部的观察者看来，它们才是被弯曲的。

我们再假定，在伪球面世界里，光沿测地线传播。把测地线作为直线，伪球面人根据光的实验获得伪球面世界直线的概念，进面组成公理并开始研究伪球面世界的几何。

如果伪球面上的寄居者很小，不能作远距离的旅行，那么在他看来，这个世界就是欧氏平面，实验的结果完全证实这个看法。但是，只要伪球面人能够作远距离的运动，或者相应地改进测量工具，他就会发现很多奇异的事情，与他对世界的看法相矛盾，因为他曾确信，他的世界是欧氏世界。正如在球面上一样，精确的实验表明，三角形内角和永远不等于180°。不过，不同于球面世界的地方是，在这里三角形内角和总是小于180°。三角形的维度愈小，三角形内角和愈接近于180°。

在这里，三角形面积不等于底乘高之半，面应当等于：

$$S_{\triangle}=l^2[\pi-(\alpha+\beta+\gamma)],$$

这里 α, β, γ 是用弧度表示的三角形的三个内角，l 是一个常数（试比较球面三角形的面积公式）。

正象球面世界一样，圆周长与半径之比有赖于半径。这里，$\frac{C}{R}>2\pi$，即 $C>2\pi R$；在球面上 $C<2\pi R$；在平面上 $C=2\pi R$。另外，在伪球面上，与某直线等距的各点其几何位置不是一条直线。在这里，通过线段AB的端点并垂直于线段AB的两直线不等距（图25）。同时，与球面不同的是，这两条直线间的距离离AB愈远不仅不会逐渐减小，而且会逐渐增加。如图25所示，假定我们把伪球面沿子午线剖开，可以看出，由于直线a与直线b之间的距离不断增加，所以此二直线不能相遇。直线a和b（或其中之一）延长到切口处受到障碍，所以不能再延长。不过，我们可以认为，正如在柱面世界所表明的那样，伪球面人只是在“一小块”区域上进行

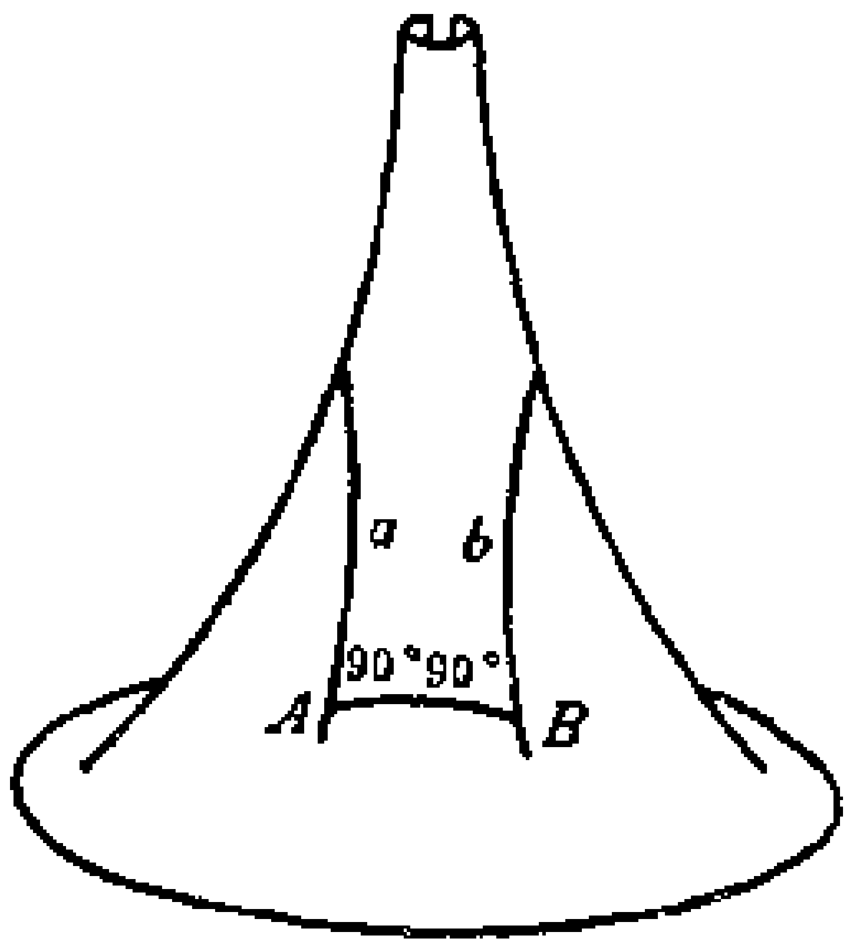


图 25

考察，因此，他的兴趣只在于这“一小块”区域上得以验证的那些几何定理。

假如由于交通工具的限制，不允许伪球面人到达这“一小块”区域的边缘。但是他可以无限地增加测量仪器的精确度和灵敏度。因此，在足够精确的测量工作之后，尽管只在伪球世界的“一小块”面积上运动时，伪球人迟早会相信，欧氏几何的结论不适用，他的世界是非欧性的。

所以，伪球面人研究的只是他能够进行观察并可以无阻碍地自由移动的那一小块伪球表面。

这意味着，所有在欧氏平面上不应用平行公理能够证明的那些定理，也即在有限的一部分欧氏平面上有意义的那些定理，在伪球面上也都是正确的。特别是，在这里表示三角形相等的那些已知特徵：关于外角定理，关于从一点到一直线可作一垂线等定理都是正确的。

在欧氏几何中用平行公理证明的那些定理在伪球面上就不正确了，因为，正如上面指出的那样，在伪球面上，任何三角形内角和小于180°。

与球面世界一样，关于用平行公理证明的定理 1～4 都不正确，在这里经过与某线等距的三点不能连成一条直线，也就是说，不可能建筑一条两根道轨都

是直线的铁路。

总之，所有在欧氏几何藉用平行公理证明的各定理对伪球面寄居者来说显然是不正确的了。

伪球面世界的几何，既不是欧氏几何，也不是球面几何。在这里起作用的是罗巴切夫斯基几何学。在第九节我们将讨论罗氏几何产生的历史和它的意义。现在我只需知道，除了欧氏平行公理必须代之以罗氏公理而外，根据所有其他欧氏公理建立起来的几何即称为罗巴切夫斯基几何。罗巴切夫斯基公理是：

经过直线外一点至少可以引两条直线不与该直线相交。

八 曲 率

上面我们讲述了各种二维世界，它们的寄居者以值得赞许的努力力图为自己选择一种最好的几何。他们的目的是选择一些公理，以便根据它来建立一种几何，从而使所得到的几何结论与在现实体（拉紧的线，“光束”等）方面所进行的测量结果相吻合。

每一种世界的寄居者都选定了各自不同的几何。这种选择取决于各个世界内在的自然特性。

在我们所研究的各种世界中有一个非常重要的共同点。这就是，不论哪种世界（球面、柱面、伪球面等）的居住者，开头对普通欧几里得几何都很满意。换句话说，也就是在测量工具还不十分完善时，他们都发现，所有的实验与欧几里得几何的预言结果完全符合。对每一个世界的居民来说，他们所“发明”的第一种几何，一定是欧几里得几何。

等到测量技术不断完善以后，就会发现许多与欧几里得几何不相符合的事实，这是上面已经详细谈过的。可是，这些居民们由于习惯了欧氏几何，就不愿

意轻易与它分离。不过，当人们发现，三角形内角和不等于180°，圆周和直径之比不等于常数(2π)之后，就不再相信自己的眼睛了。一旦积累了足够的实验材料，他们终究会相信，用其他非欧几何来描述他的世界比用欧几里得几何要好得多。同时，他们不得不承认，各种世界都是非欧性的。

但是，怎样来测量自身世界的非欧性质呢？怎样去发现它与欧氏世界的差别呢？这种差别对于各种世界是不同的，有的差别较大，有的差别很小，它的特征是什么呢？

要回答这些问题，首先应考虑到球面世界。众所周知，开始建立欧氏几何，并对它进行详细研究的是球面人。他们了解到，在欧氏几何中$\frac{C}{R}=2\pi$，它不依赖于R，三角形内角和等于π。同时还懂得什么是正弦、余弦，并获得了三角函数表等等。

在改进测量工具之后，球面人终于发现：$\frac{C}{R}\neq 2\pi$。对于$\frac{C}{R}$所进行的测量愈精确，他们就能够愈正确地选择$\frac{C}{R}$的关系，从而领悟到应该如何改正欧几里得几

何公式，以便使新的关系更好地与实验相符合。当然，领便到如何进行这样的修正并不那么容易。这需要特殊的勤奋和努力，甚至天才的颖悟能力。假如，有一个球面人具备这样的才能，那时他将发现，在他的世界里有某个特殊常数ρ，可以用它来表示$\frac{C}{R}$的新关系：

$$\frac{C}{R}=2\pi\frac{\rho}{R}\sin\frac{R}{\rho}.$$

这个公式我们已经在42页见过。也许球面人不会提出这样一个公式。他并不认为自己住在三维空间的球面上。在他看来，“整个世界”只是一个表面。在不超出他的界限的情况下，他会“从自身世界”领悟到这个公式。我们看到，这种领悟非常困难，但在原则上是可能的。

常数ρ在球面世界中具有普遍意义。球面人根本不认为ρ这个数就是他所居住的世界的球半径。当他为了计算$\frac{C}{R}$而领悟到这个公式以后，他就有可能通过实验来确定ρ的大小。以相当的精确度测定C和R并把它代入公式中，球面人就得到含有一个未知数的方程式。解这个方程，他就可以求得ρ的值。不断地改进并完善实验的测量，就会愈精确地确定ρ的值。

完全类似，在平面世界也可以用实验方法确定2π。这就需要精确地测定C和R，然后寻找$\frac{C}{R}$的关系。

对于球面人来说，2π这个数是从理论上，即从欧几里得几何中得到的，他们曾经详细地研究欧氏几何，深信他的世界就是欧氏世界。

我们假定，球面人对半径为R的圆周长进行测量。根据第42页的公式，$\frac{C}{R}$不同于2π的地方在于因子$\frac{\rho}{R}$

$\sin\frac{R}{\rho}=\frac{BA}{\overset{\frown}{SA}}$（图19）。显然，当$\rho$与R相比甚大时，

$\frac{\rho}{R}\sin\frac{R}{\rho}$接近于1，所以$\frac{C}{R}$近似等于$2\pi$。这时球面世界与欧氏世界几乎没有差别。

但是，如果ρ与R相比并不很大，$\frac{BA}{\overset{\frown}{SA}}$实际上不等于1，$\frac{C}{R}$就不等于$2\pi$。在这种情况下，在半径为R的圆上球面世界与平面世界的差别将是非常显著的。因此，ρ这个量的特点就表示球面世界与欧氏世界的偏离程度。

当我们考察不同数值的ρ的各种球面时，将会得

出一个结论：在以相同的距离R运动时，在ρ为较小的球面世界中最早发现世界的非欧特性（这是非常明显的事情：比如相同的一些球形面包头，沿着球半径小的地方切开时所得到的面包片，和真正的平面面包片的差别很大）。

所以，数ρ是表示非欧世界的尺度。一般说，非欧世界的弯曲是由于它的曲率不等于零，而欧氏世界是曲率等于零。所以柱面世界，象平面一样，曲率也等于零，不过柱面世界骤然看来好象是弯曲的。然而不论平面或是柱面，在这里起作用的都是欧氏几何。

我们把$K=\frac{1}{\rho^2}$称作球面世界的曲率。ρ愈小，曲率就愈大，它的非欧性就愈容易被发现。如上所述，数值K可以通过实验发现。球面人发展了自己的几何以后就会看到，曲率K这个数包含于几何学的各个公式之中。特别是在球面三角形面积公式中就含有曲率（参阅第六节）：

$$S_{\triangle}=\frac{1}{K}(\alpha+\beta+\gamma-\pi).$$

我们把$\delta=\alpha+\beta+\gamma-\pi$称为角超*，它可以是正值，也可以是负值（在伪球世界）。现在我们把上面的公式写为：

* 在伪球世界，$\alpha+\beta+\gamma<\pi$，因此角超为负。

$$K=\frac{\delta}{S_{\triangle}}.$$

这就是说，球面曲率等于任何三角形的角超与其面积之比。在球面世界有一个显著的特点，即$\frac{\delta}{S_{\triangle}}$不依赖于三角形的形式、大小和位置。因此通常说，球面世界的曲率等于常数。或者，换句话说，在球面世界每一点的曲率都相同。这说明，在球面上每一点是没有区别的，它们都是等价的。

可是在比较复杂的空间，譬如在椭球面上情况就不同了（见图21）。这里，在各个不同点上，表面的情况不一样。这里的曲率逐点变化。$\frac{\delta}{S_{\triangle}}$有赖于所研究的三角形的分布和它的尺度大小。

如何确定任意一个二维世界的每一个位置和每一点的曲率呢？为了回答这个问题，我们来考察任意一块表面（二维世界）。M是△ABC中的一点（图26），

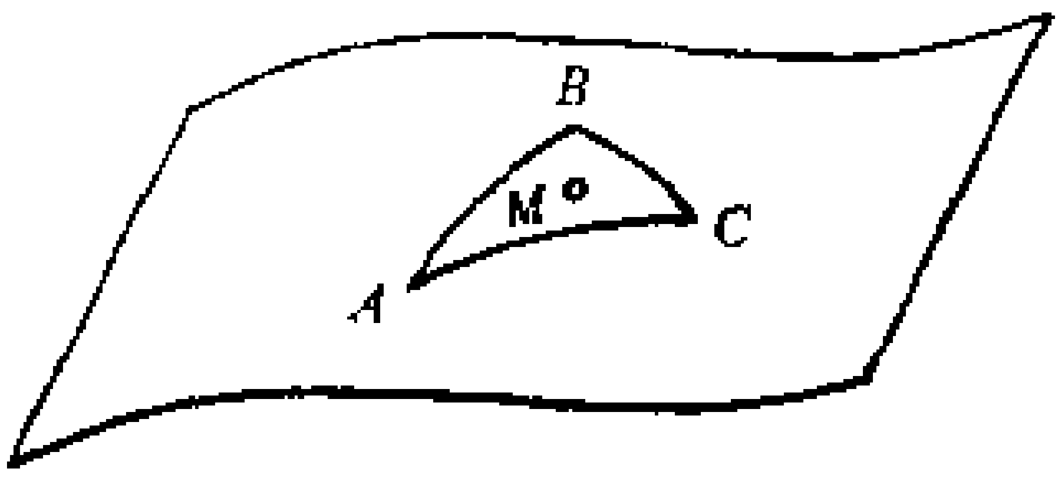


图 26

三角形的一个边是这个世界中的一条直线，即该表面上的测地线（最短距离）。设 $S_\triangle$ 代表三角形面积，$\delta=\alpha+\beta+\gamma-\pi$ 是它的角超。δ 可能是正的（在球面和椭球面），也可能是负的（在伪球面上），也可能是零（在平面或圆柱面上）。现在我们来观察 $\frac{\delta}{S_\triangle}$ 的比值及其变化。当三角形各边无限地缩小时，三角形就缩为一点M，此时三角形的面积将趋于零。另一方面，如前所述，当这块面积足够小时，就趋于欧氏世界。三角形足够小，角超δ就很小。因而三角形集中为一点M时，δ和$S_\triangle$趋向于零。这时 $\frac{\delta}{S_\triangle}$ 将怎样变化呢？

在球面上这个比值是常数：$K=\frac{1}{\rho^2}$，三角形趋于一点时，它是不变的，在平面上这个比值永远等于零（因为$\delta=0$）。因此，三角形收缩为一点时，K趋于有限的极限。在一般情况下，对于光滑的表面有如下定理：

当$\triangle ABC$缩小为一点M时，$\frac{\delta}{S_\triangle}$将趋于某一常数，这个数不依赖三角形ABC的形式，也不依赖三角形缩小为一点M时采取什么方式。

这个常数叫做该点的表面曲率，可表示如下：

$$K_M = \lim_{\triangle ABC \to M} \frac{\delta}{S_\triangle}.$$

因此可以说，点M的曲率就是△ABC缩小为一点M时，$\frac{\delta}{S_\triangle}$的极限。

在球面世界 $K=\frac{1}{\rho^2}$，在平面世界 $K=0$。这两种世界每一点的曲率都是常数。伪球面世界也类似（图24），这里 $\delta=\alpha+\beta+\gamma-\pi<0$，因为三角形内角和小于$\pi$，所以$\frac{\delta}{S_\triangle}$总是负数。可见作为$\frac{\delta}{S_\triangle}$的极限值，伪球面曲率也不可能是正数。可以证明，这个比值总是等于同一常数

$$K=-\frac{1}{l^2},$$

这里l是图23中线段AM的长度。

这样，我们就得到，伪球面世界的曲率是一个负常数。

椭球面曲率不是常数，它是逐点改变的，但到处都是正的。可能也有这样的表面世界，它的曲率在不同点上不仅大小数值不同，而且符号也不同，有些地

方为正，有些地方为负，有些为零。

无论哪一个世界的居民，在改进自己的测量仪器之后，需要寻求新的几何，即寻求比欧氏几何更能精确地描述他的世界的几何。只要他们仍旧在有限的一部分区域活动，他就可能选择这样一种几何（比如他选择了球面几何）。然而，在运载联络工具有可能发展，或者能够“用望远镜”观察较远的区域的情况下，他们就会发现，新的几何还是不够好的，因为空间曲率是逐点变化的，所以需要寻求更加完美的几何。

为了研究现实世界进行实验和建立起更加完善的几何体系，二维世界的居民会联想到：为什么在他的世界里几何学是非欧的？为什么这个世界有“曲率”？这样一来，就有可能去建立几何学与物理定律之间的联系。关于研究我们这个现实世界的几何问题，将在第十二节进行详细的讨论。

最后，我们还得注意到一个重要的情况：在各种各样的世界中，那种曲率为常数的世界占有特殊的地位。这就是：平面世界——它的曲率等于零，伪球面世界——它的曲率等于一个负的常数，和球面世界——它的曲率等于一个正的常数。曲率等于零和曲率等于负数的表面是无限的。曲率等于正数的球面世界

（如前所述，参阅第43页）是有限的，虽然是无界的，但却是闭合的。

球面人无需环球旅行一周，就可以证明球面世界是有限的。这就必需知道球面世界的曲率是正数（即三角形内角和大于180°），必需知道这个曲率在世界各个地方都等于一个常数（即$\frac{\delta}{S_{\triangle}}$不依赖于三角形的选择）。球面人在各个地方经过测量、旅行、或者"天文观察"，就能够对曲率的恒常性进行某种程度的验证。

然而，如果球面人的望远镜不够完善，不能观察整个世界，那么，他对于本身世界曲率的恒常性只能是一种猜测。也许，这样的设想能够使球面人去选择一种几何，这种几何同实验任何时候也不会发生矛盾。但是从另一方面来说，也许将来会有一天球面人将发现，球面几何并不完善。那时，他就会明白，最初关于这个世界的曲率等于常数的假设是没有根据的，因此需要提出新的，更加充分更加完善的假设。

九　一点历史

几何学是最古老的科学之一。几何学积累了人类很多世纪以来所进行的大量实验和实际活动的知识。在古代巴比伦和埃及，几何学的发展达到了相当高的水平。大约在四千年以前所写的那些古代几何著作，一直流传至今。当然，几何学并不是一开始就成为一门独立的科学。当积累起足够多的实验事实，并迫切需要对它们加以系统的整理，以及进一步研究得出什么是正确的，什么是错误的的时候，几何学才成为一门独立的科学。古代科学家们曾多次试图使几何学发展成为一个完整统一的体系。

古希腊亚历山大几何学家欧几里得在公元前三世纪写了一部名著，称作《原理》。这部著作完全压倒了至此以前的几何学的全部著作，由此可以看出它的深远意义。而且，直至十九世纪罗巴切夫斯基几何建立以前，《原理》一直是最完整，最重要的几何著作之一。

欧几里得首先根据为数不多的、未被证明的论断

——公理或假设来建立几何学。这种思想方法直到今天仍保持着自身的意义，而且在现代数学和其他一些科学领域也获得了重要的发展。

几何学的进一步发展在于改进欧几里得公理以及使一些定理和证明更加明确，而欧几里得《原理》一书的精神实质依旧没有改变。

欧几里得公理体系实际上并不是没有缺点。欧几里得本人经常违背作为建立几何基础的基本原则，虽然有些基本原则没有一个地方不被采用，但却未包括在公理之中。例如，前面谈过，关于“直线上任意三点对处于其他两点之间的点不多于一”的假定在欧几里得公理中是没有的，可是这个事实欧几里得不止一次地用到它。我们看到，违背了这条公理就会得到完全不同的另一种几何。所以，还需要补充一些必不可少的公理。

最引起兴趣的是平行公理，关于这条公理欧几里得是这样表述的：如果两直线a，b与第三直线相交时，所构成的内侧角之和不等于180°，那么直线a与b相交，同时该侧的内侧角之和小于180°（图27）。

欧几里得把这条假定称为第五公设。可以证明，这个说法与我们在第13页关于平行公理的定义是完全等价的。

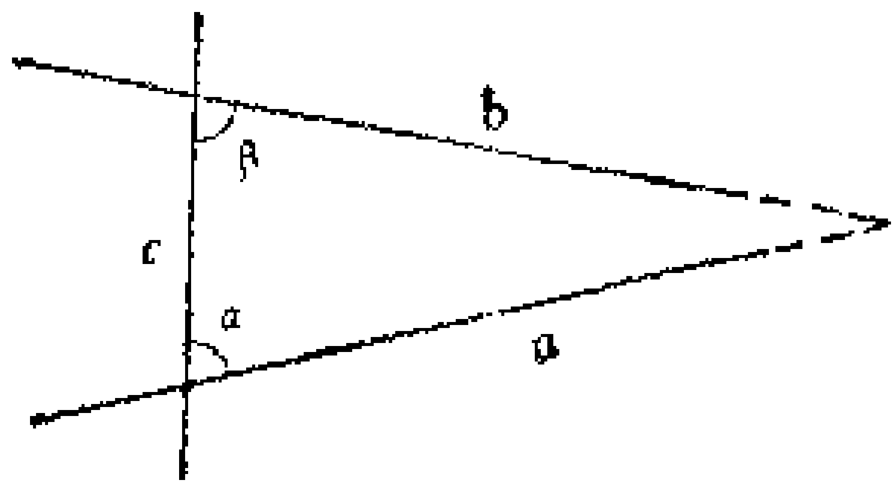


图 27

实际上在这里需要证明两个定理：（1）如果认为欧几里得第五公设是正确的，就需证明平行公理也是正确的，（2）如果认为平行公理是正确的，就需证明第五公设也是正确的。在证明这两个定理时可以利用除了平行公理及其等价的各命题以外的所有欧氏公理及其推论。

证明

1.假定第五公设是正确的。我们来看直线 a 与直线外一点A（图28）。经点A引任一直线 c 与a相交。十分明显，经过点 A 只能引一条直线 d，使同侧内角β与γ之和等于180°。如果经过点A引一条不同于 d 的直线b，则直线b与a对于割线c任一侧构成的内侧角之和小于180°（图28，α+β<180°）。这时根据第五公设，直线a与 b相交。这就是说，经过点A所引出的与直线a 不相交的直线，不能多于一条，即平行公理得到证明。

2.假定平行公理正确。我们来观察与第三直线 c 相交的两直线a与b，并且α+β<180°（图28），经过

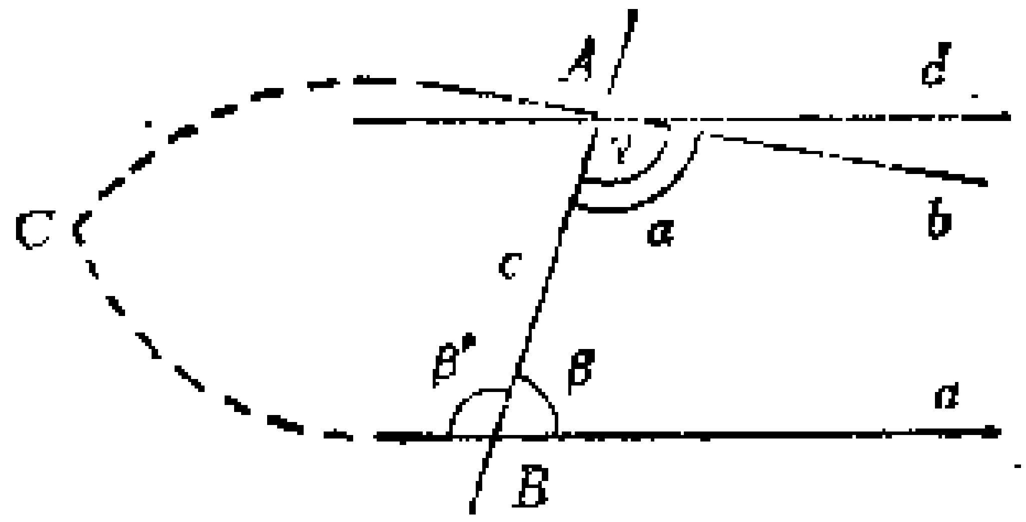


图 28

点A引一直线d，使$\beta+\gamma=180°$。根据定理Ⅰ，直线a与d不相交。但是根据平行公理，经过点A所引与直线a不相交的直线不能多于一条。因此直线b必与直线a相交。

为了全面论证第五公设，还应当证明，直线a与b相交是在直线c的一侧发生的，即该侧的内侧角之和小于180°（图28右侧）。实际上，如果假定直线a与b在直线c的左侧相交于某点c，我们就得到一个三角形ABC，β'是三角形的一个内角，α是与β'不相邻的一个外角。根据假设的条件：$\alpha+\beta<180°$，由此得出，$\alpha<180°-\beta$，因为$\beta+\beta'=180°$，所以$180°-\beta=\beta'$。因而$\alpha<\beta'$，这就和三角形外角定理矛盾。也就是说，直线a与b在直线c的左侧不可能相交。

从上面的论述明显地看到，平行公理对于证明许多欧氏定理是必需的。同时也要注意到，这条公理的

措词较之上面提到的其他欧几里得公理的措词更为复杂。这就产生一种希望：能不能从其他欧氏公理出发把平行公理作为定理给予证明。我们知道，欧几里得本人就曾经这样试过，有许多伟大的数学家，从欧几里得到罗巴切夫斯基都曾经试图证明第五公设。然而，他们无数次的试验都失败了。这些证明都导致矛盾的结果。我们大略地来讨论一下。

假定平行公理不正确。这表明，经过直线 a 外一点A，至少可以引两条直线 b 和b′与直线 a 不相交（图6）。

我们试用归谬法将这个命题导至矛盾结果。如果能够发现这样的矛盾，那就说明，我们的命题是不正确的，而平行公理是正确的，即它是由其他公理引出的一条定理。

总之，应当找到这样的一系列逻辑推理，最后导致命题——二直线 b，b′与直线 a 不相交——为荒谬的结果。

然而，事与愿违，无论多么巧妙的推论，都不能发现这样的矛盾。有许多推论看起来似乎找到了这样的矛盾，但经过仔细的分析，又把它推翻了。在讨论上述命题时，学者们得出了很多奇怪的结论。例如，（1）三角形内角和不等于180°，（2）与某直线等

距的各点其轨迹不是一条直线，（3）垂直于第三直线的二直线不等距，（4）圆周长与直径之比不是常数，（5）三角形的面积不等于底乘高之半，以及诸如此类的许多奇怪事实。许多推论看起来似乎是矛盾的，即欧几里得第五公假可以被证明为定理了。然而，所有这些非常奇妙的事实，完全没有证明逻辑上的矛盾。它们只是与现成的思想习惯相矛盾。这些事实，虽然新奇，却不荒谬。从上面表明的事实来看，相信习惯是多么危险！球面世界与伪球面世界的居民们也常常认为，在他们那里应遵循欧氏平行公理。但是，在改进了测量仪器，或者学会远距离旅行之后，他们就会抛弃自己固有的习惯，并且会相信，在他们的世界里出现那些奇怪的见解和主张都是正确的，关于这些见解和主张我们前面已经谈过了。

由于这个未知的矛盾始终没有找到，所以到十九世纪初期一些数学家方才开始明白，在这样的道路上继续走下去恐怕是白费心机。

1826年2月11日是几何学发展史上有历史意义的一天。这一天，尼·伊·罗巴切夫斯基在喀山大学宣读了他的著名论文："关于几何原理的讨论"。这一天可以称为新几何学的诞生日。

罗巴切夫斯基首先宣布证明第五公设是不可能

的，这一结论表明，如果用罗巴切夫斯基公理来代替欧几里得平行公理，那就不会发生任何矛盾。罗巴切夫斯基公理是：在平面上经过直线外一点至少可以引两条直线与该直线不相交。由此得出的全部结论就构成所谓罗巴切夫斯基几何学。在这种几何里，三角形内角和小于两直角，以三角形的三个内角α，β，γ所表示的三角形面积等于$l^2[\pi-(\alpha+\beta+\gamma)]$，以及其他等等。

罗巴切夫斯基深入地研究了这种几何，并根据它建立起新的三角学。所得出的结论与习惯不符合，但是这种新的理论绝对没有逻辑上的矛盾。

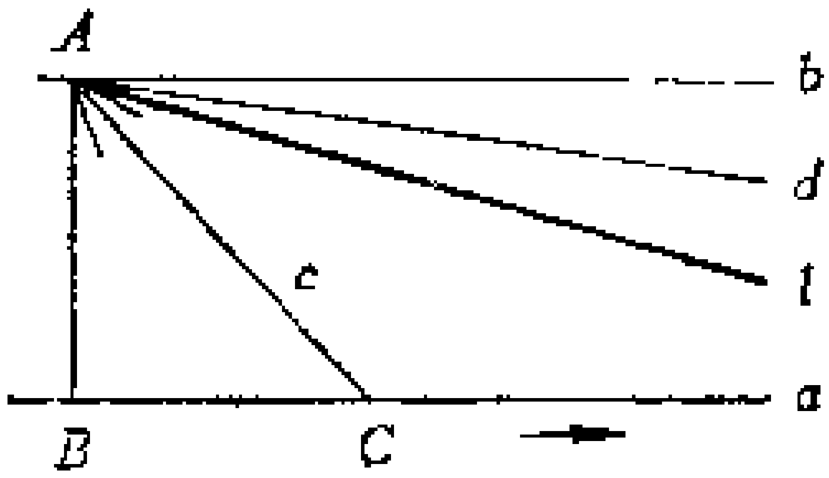


图 29

现在我们详细研究一下罗巴切夫斯基平面几何中的平行问题。我们利用图29来进行讨论时，就象罗氏世界的居民所进行的讨论一样（比如，象伪球面居民所进行的讨论那样）。

我们来看一条直线a和直线外的一点A。让直线AB垂直于直线a。如果另一直线b垂直于AB，象我们已经知道的那样，直线b与a将不会相交。根据罗氏公理，这样的直线（即b）不止一条：在此平面上，经

过点A还有一条直线与a不相交。我们只限于讨论直线AB右侧的情况（左侧的情况与右侧的情况完全对称）。

从点A发出的射线，有的与a相交，有的与a不相交。显然，它们彼此不能相交。如果射线c与a相交，那么所有通过射线c下面的射线也都能与直线a相交；如果射线d与a不相交，那么所有通过d上面的射线也都与a不相交。因此，在∠BAb内存在着一条射线 l，它把与a相交的射线和与a不相交的射线区分开来。这就是当点C无限向右远离对，射线c趋向的那个极限位置。

直线 l 与a不相交。实际上，如果 l 与a在L点相交（图30），那么在L右边取一点 L′，将它与点A连接起来，就得到射线l′，它也和a相交。这就与 l 是区分与直线a相交和不相交的规定相矛盾。AB左侧发生的情形也完全一样。因此，

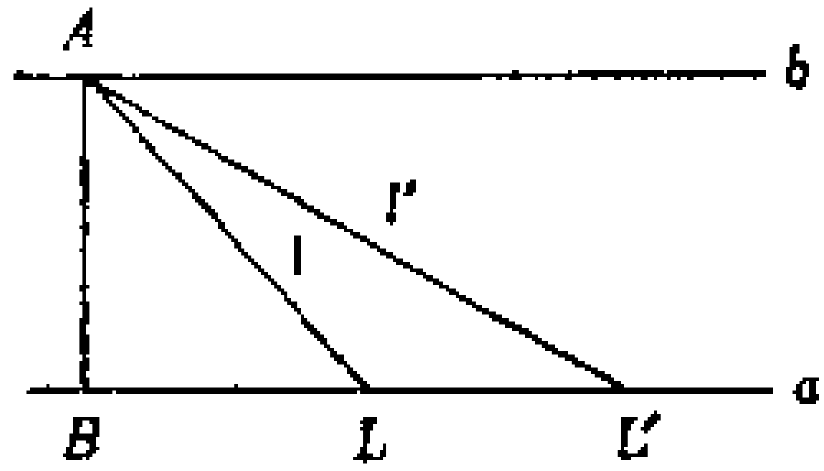


图 30

经过点A有两条射线l和k（图31），它们都与a不相交，同时具有这样的性盾：在相等的两角α内通过的每一射线c都与直线a相交，而在角β内通過的每一射

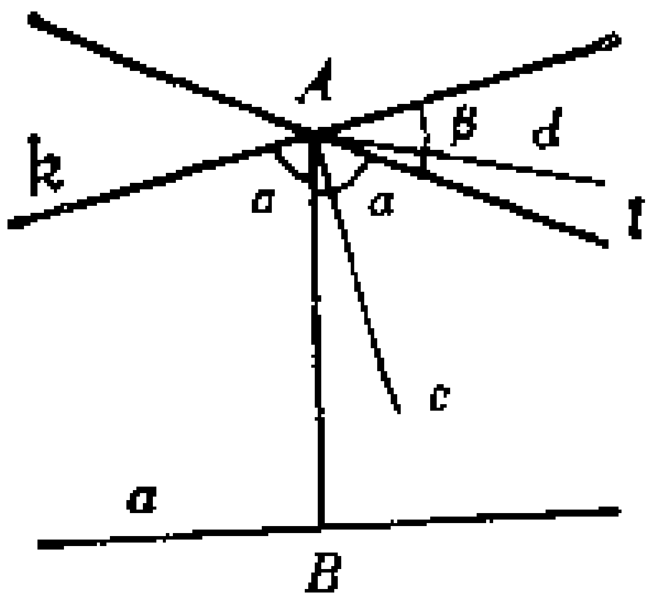


图 31

线d都与直线a不相交。

罗巴切夫斯基称k，l为直线a的平行线，即在角β内通过的一切直线都是a的发散线。直线k与l在不同的方向上（向右和向左）平行于直线a。

罗巴切夫斯基曾证明，平行线（比如l和a）在平行的一侧无限接近，在相反的一侧无限远离。我们记得，在伪球面上的两条子午线正好具有这样的性质，它们相互平行。

罗巴切夫斯基还证明了，任意两条发散线具有唯一的共同垂线，离这条公垂线越远，两条发散线越无限分离（我们在介绍伪球面世界时，曾经看到这种情况，请参阅图25）。

对于习惯欧几里得几何的人来说，罗巴切夫斯基几何所引出的事实是新奇的，同时，这种几何在逻辑推理上毫无缺点。对于伪球面的居民来说，这些新奇的事实，不但是有用的，而且是必需的，因为正是罗氏几何在伪球面上起着作用。

1868年意大利几何学家贝尔特拉发现了伪球面，那时罗巴切夫斯基已经逝世。遗憾的是当时罗巴切夫

斯基不知道伪球面。贝尔特拉不了解这个想象的世界，不了解其中起作用的是一种新的几何学。相反，罗巴切夫斯基本人找到了在现实的光线世界实现自己的新几何学的途径。我们曾经谈到罗巴切夫斯基的天文研究工作，它的目的在于发现三角形的内角和是否等于180°。当时实验物理学的发展水平使罗巴切夫斯基未能解决这个问题。这个问题直到不久以前由于物理学的巨大进步才获得一些重要结果，这也应当归功于罗巴切夫斯基的杰出思想。

应当指出，罗巴切夫斯基的天才思想并未受到他的同代人的理解和重视。在这方面，只有德国数学家高斯和匈牙利数学家波扬例外。

高斯不依赖于罗巴切夫斯基掌握了非欧几何的思想，但是他没有象罗巴切夫斯基那样深刻全面地去研究这种新几何。高斯唯恐人们不能理解他的思想，担心受到世人的嘲笑，因此不仅没有发表自己的成果，而且阻止他的朋友们散播他对罗巴切夫斯基几何的肯定态度，他对罗氏几何曾有过高度评价。

1829年罗巴切夫斯基已经发表了自己的著作，而匈牙利数学家亚诺什·波扬并不知道这件事，在1833年他发表了自己的著作：在他的著作中以大略相同的论点建立了同一种新几何。他的著作曾寄给高斯征求

意见，高斯回信说，他自己也掌握这些思想，但他不打算发表什么意见，同时也不愿公开赞同波扬的著作。高斯的意见给波扬带来不良后果，于是他立刻停止了数学研究，直到他逝世前不久才知道罗巴切夫斯基的著作，罗巴切夫斯基发展的新几何学比波扬所进行的研究要深刻得多。

罗巴切夫斯基的同代人没有重视他的著作，但是他的科学功绩对我们来说是非常重要的。他不仅不怕无识者们的议论和讥嘲，而且为使人们认识这一天才发现奋斗终生。

罗巴切夫斯基逝世后不久，他的思想有力地推动了数学和物理学的发展，他的思想已完全为数学家们所掌握。

十 我们世界的几何是欧几里得几何吗?

罗巴切夫斯基第一个提出了建立非欧几何的设想。进一步的研究工作完全证明了新的非欧几何在逻辑上毫无缺点。贝尔特拉证明,这种新几何在伪球面上起着作用。不过,伪球面的边缘妨碍它的寄居者自由移动,但是这个缺点很快就被德国数学家克莱因消除了。克莱因建立了一种无边界世界,罗氏几何在这里完全有效。

德国数学家黎曼在发展罗巴切夫斯基几何的同时,建立了一门新的几何,叫做椭圆几何。这种几何既不同于欧氏几何,也不同于罗氏几何。它类似于球面几何,所不同的是,在这里任意两条相交的直线只有一个交点,而不象球面几何有两个交点。黎曼从根本上推广几何空间的概念,从理论上证明,可以建立无数多种几何学,后来这种几何称为黎曼几何(关于黎曼几何详见第十一节中的讨论)。

罗巴切夫斯基的伟大功绩不仅在于建立了一种合

乎逻辑的毫无缺点的非欧几何，而且还提出了一个十分重要的问题。为了描述我们的现实物理世界，究竟哪一种几何比较合适。为了确定这样一种几何，能够较好地描述现实世界中的光线行为，罗巴切夫斯基所提供的一些实验没有得到预期的结果。这个问题依旧是一个悬案。

然而非常清楚的是，我们决不能相信习惯，我们必须进行精确的实验。为了研究现实世界的光线性质，必须确定什么样的公理作为几何学的基础。于是，为了研究我们的现实空间选择几何学的问题就需要考虑其中起作用的物理定律。

按照罗巴切夫斯基的思想，数学家们建立了很多在逻辑上正确无误的几何。对于研究现实世界光线性质，选择什么样的几何最为合适，这就成为一个物理问题，研究物现定律有助于这种选择。

二十世纪初，最伟大的物理学家阿·爱因斯坦建立了相对论。它完全证实了罗巴切夫期基的论断：即用欧氏几何来描述现实世界是不够精确的。为了概略地谈一谈这个理论，我们不妨来叙述一个实验，这个实验已被天文学家重复过多次，它与相对论事先预言的结论完全符合。

假定地球上有一个观察者，在一定时间里观察星

体A和B。太阳(S)离星A较近（图32），它“沿着天空”的一定方向*运动(这个实验在日全食时进行)。观察是在不太长的一段时间内进行的，因此可以认为星A和星B相对静止(它们的移动在这段时间内不很显著，以至用最精确的仪器也不能发现）。

图 32

不难测量太阳在空中的移动速度，在很短的一段时间内这个速度可视为常数。知道了太阳的速度以及太阳与星体A之间的距离，就不难算出经过多少时间太阳就能遮盖这颗星体。精确的实验表明：星体被太阳覆盖的实际时间比理论计算的时间要稍迟一些。这就是说，根据计算，当太阳必须掩盖星体A时，实际上仍能看到这颗星体。这个现象是相对论曾经预言到的，后来在实验上得到证实。

怎样应用相对论来解释这种现象呢？原来，太阳具有很强的引力场，这个引力场影响光量子（光子）的运动，即影响通过引力场的光的路径。

让我们来详细说明一下。在最初时刻（图33 I），太阳并不影响星A发出的光线，因为它离太阳较远。由星A发出的一条光线a进入观察者的眼帘，于是他

* 对于地球上的观察者来说，“太阳沿着天空运动”。

看到了星体。同时另一条光线a′却没有进入观察者的眼帘。当具有很强引力场的太阳离光线 a 和 a′ 很 近时，这些光线被太阳所吸引，因而发生了弯曲。当太阳遮住光线a的时候，观察者 就看不到星体了，因 为"被弯曲的"光线a′将进入观察者的眼帘(图33Ⅱ)。如果再观察星体B，并测量角AOB，那末在第二种情况下，也就是太阳行近星体时（图33Ⅱ），实验所测量的角AOB，比在第一种情况下、也即太阳远离星体时（图33Ⅰ）所测量的角要小。因为在第一种情况下，这个角是光线a，b之间所形成的角；在第二种情况下，这个角则是光线 a′与b 之间所形成的角。

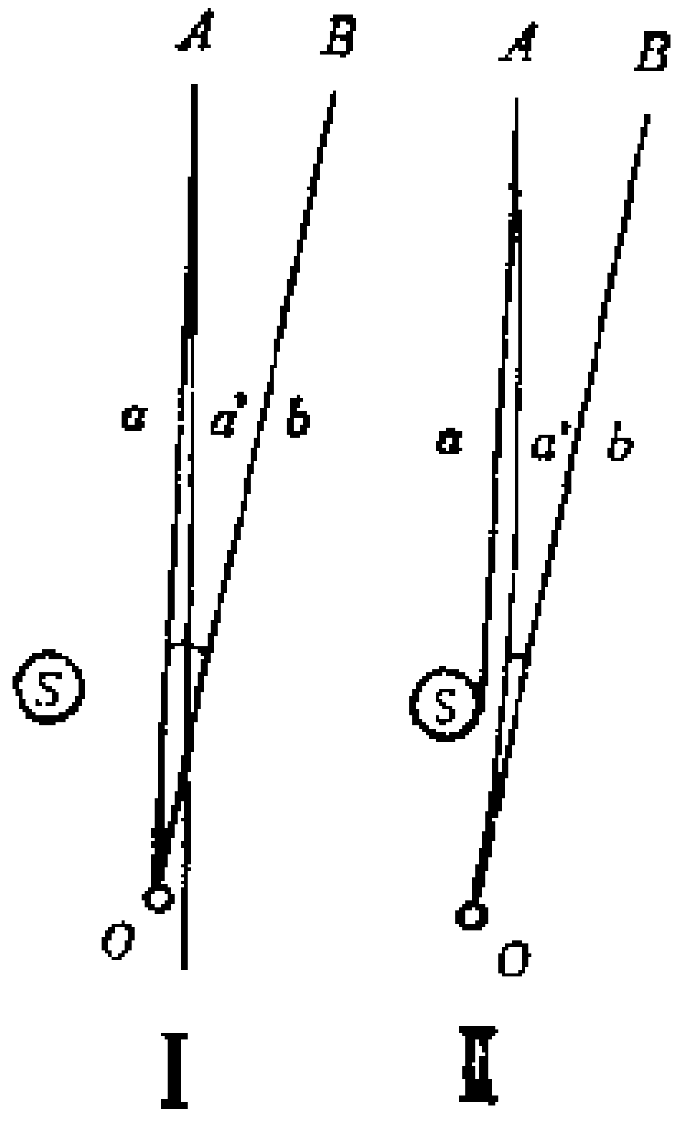


图 33

是否可以说，光线a′起初是直线，而后（由于受太阳的引力）就偏离直线，发生了弯曲呢？不对，不能这样说。况且我们现在所从事的几何研究都是以光线为直线标准，除光线外，再没有其他的东西可以作为直线标准。在我们的几何中直线的性质应当根据光

的传播定律来确定。光线a′无论在第一个瞬间，还是在第二个瞬间都永远是标准的直线。

在这种情况下必须认定直线（光线）的性质在不同的时刻是不一样的。但是，为了建立几何学要选择一些公理，这些公理也是根据直线的性质来确定。因为在不同时刻光线的行为各不相同，所以描述光线在那时刻的几何也不相同。这样看来，以一定的精确度描述现实空间的几何（光线的几何）并不是一成不变的，而是随着时间变化的。这就是说，在确定公理时应当考虑到时间。时间和空间的概念是分不开的。在建立这样的几何时，它能够以足够的精确度来描述光线的行为。我们应该预先看到直线行为具有非欧性质的可能性，空间应当具有弯曲的可能性。但是，应当怎样去想象具有曲率的空间、被弯曲了的空间呢？在第八节我们曾详细地阐明了二维表面的曲率概念，下面我们再来讨论一下较为复杂的空间曲率问题。

十一　三维空间的曲率

为了选择一种能以必要的精确度描写现实物理空间的几何，就需要有足够丰富的、各种各样的几何“活字版”——抽象的几何空间。这就是说，应当储备大量的活字模型，然后根据实验材料决定，在每一种情况下，这些模型中哪一种模型对描述现实世界较为适合。

现在我们来谈谈被称为黎曼几何的抽象三维几何空间“活字版”建立的程序。

前面我们所讨论的几何表面叫做二维空间。这是因为在平面、球面和其他表面上点的位置，即它的地址完全由两个数（坐标）来决定。从数学观点来看，在我们面前，二维世界的每一点只不过是以一定顺序写下的一对数（x，y）。

在平面上，这些数可以是任何正数或负数。在球面上，X在$-\pi$到$+\pi$之间的范围内变化；y在$-\frac{\pi}{2}$到$+\frac{\pi}{2}$之间的范围内变化，这里x和y分别以弧度表示点的位

置的经度和纬度。总之，x和y的变化范围取决于表面的性质和坐标系的选择。在二维世界如果知道两点的坐标：(x_1, y_1)，(x_2, y_2)，就可以求得两点之间的距离，即连接两点之间的最短路线（测地线）的长度。

现在我们来看三维几何空间，即每一点不是由两个数，而是由三个数，三个坐标x，y，z表征的点的总合。我们将认为在三维空间两点(x_1, y_1, z_1)和(x_2, y_2, z_2)之间距离的计算方法已定。还认为两点间的最短距离线—测地线，就是这个空间的直线。这种几何线将是表征现实空间光线传播的最好方式。

现在我们来定义三维空间中的平面概念。根据第一节所说明的情况，我们来看某一点M和某一直线a（测地线）。直线a不经过M点(图34)。在图34中，

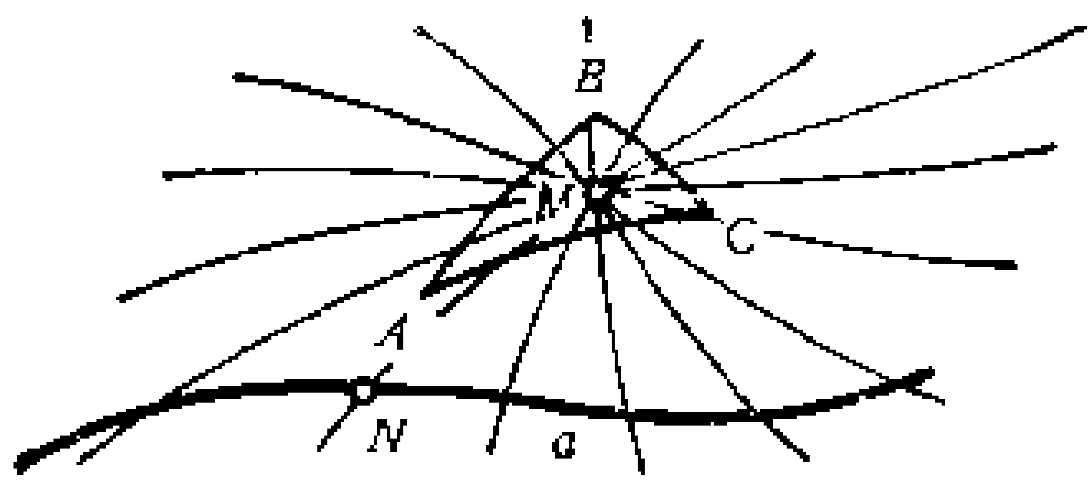


图 34

我们有意把测地线a描绘成一条“曲线”，也许它是一条理想的直线。我们记得，我们所建立的测地几何学是“复制”现实世界光线传播的最好图案。然而，

象前面的实验所表明的那样，光线所表现的方式可能是非常奇特和难以想象的。

现在我们来考察点M和短程线a上各点N相连接的全部短程线。这些短程线的总和构成一个短程面，或者称平面π，这个面通过点M和直线a。把M点固定，同时改变直线a，我们将得到经过点M的各种平面。显然，这样的平面有无限多。

这样，只要有办法确定空间各个点之间的距离，我们就能确定三维几何空间中的直线和平面。

现在来者平面π上的两点A和B（图34）。我们把它们连接成一条直线（短程线）。可以证明，整条直线（即它的所有点）都在平面π上。

现在再来看平面π上的三个点A，B，C。我们将它连接为一个三角形。让点M位于三角形ABC内。可能，这个三角形的内角和不等于180°。正如在二维空间中那样，我们用三角形ABC的面积$S_\triangle$去除剩余量δ。可以证明，当三角形ABC缩为一点M时（在平面π上），$\frac{\delta}{S_\triangle}$将趋于某一极限常数，这个数不依赖于三角形以怎样的方式缩为一点，只要求三角形始终留在平面π上。$\frac{\delta}{S_\triangle}$称为M点在平面$\pi$方向上的空间曲率。我们

把这个数标为$K_{M,\pi}$，它依赖平面π的选择。将点M固定，改变平面π，我们就得到M点的无限多个空间曲率。

我们记得，二维空间每一点(M)的曲率用一个数K_M表示。为了表示M点所处的空间不同于欧氏空间，这里用一个数就足够了。在三维空间情况比较复杂。在这里，数$K_{M,\pi}$也表明该点所处的空间不同于欧氏空间，但是$K_{m,\pi}$不仅有赖于M，而且有赖于平面π的选择。正如二维空间一样，各个点的曲率可能为正数，负数或零。特别是，根据平面π方向的不同选择，M点的曲率可以有不同的符号。

这就产生一个问题，一个固定点的各个不同曲率之间有没有任何相互依赖关系？当改变平面π的方向时，$K_{M,\pi}$是否可以任意变化？当它变化时，是不是服从某种规律？看来，也许有某些特征能够表示这种变化。例如，一个给定点在任何方向上的三维曲率完全可以用六个数表示出来。

这就是说，二维世界每一点的曲率完全由一个数来确定，而在三维空间就需用六个数来确定。知道了这些数，就可以计算该点在任何平面方向上的空间曲率。这六个数是逐点变化的。

我们要讨论的问题是，现实世界的居民怎样来选择和建立自身的几何，以便用最好的方法来描述光的

传播，以及其他许多重要的现象。为了选择这样的几何就应当确定几何空间中每一点的曲率。骤然看去，这一切似乎都很简单。但是正象第四节中所描述的那样，需要精确地去测量现实世界中三角形余量δ，并用三角形面积去除它。同时要把三角形缩小为一点，来考察 $\frac{\delta}{S_\triangle}$ 将趋于怎样的极限。在考察这个过程的同时，可以发现其中有一个原则上不可克服的矛盾。这个矛盾是由于下列情况造成的。为了精确地确定该点M的空间曲率，就要不断减小三角形的维度，并把它缩为一点。另一方面，三角形的维度愈小，它的剩余量也就愈小，发现三角形内角和与180°之差也就愈困难，发现这种差别所用仪器的精确度也要求愈高。因此，要精确地去确定该点的空间曲率，那就应当无限地增大仪器的精确度，当然，这在原则上是达不到的。所以，用同样的实验方法去确定所要求的空间曲率是不可能的。我们居住的现实空间具有很小的曲率，用现代实验仪器很难发现它，而且，我们所进行测量的不是很小的三角形，而是非常巨大的宇宙三角形。

但是，即使能够无限地增大仪器的精确性，要测量现实空间的曲率也是异常困难的。要知道对于该点的曲率我们要在不同的平面方向上去进行测量。这些

平面必须这样改变，以便最后选择六个确定曲率的数。这个程序应当在空间各个点上去完成。当然，不一定在每一点，因为点的数目是无限的，但要在所需研究的那部分空间区域上足够密集的网点上去完成。

如果有某种理由能使我们确信这个未知的几何空间具有常数曲率，那情况就比较简单了。这表示：第一，在每一固定点上的曲率对每一平面方向取得一个相同的数值；第二，空间所有点的曲率是相同的。* 这说明，整个空间的各个点的曲率完全由一个唯一的常数来确定。这样的二维空间（平面、球面和伪球面）我们已经详细研究过了。现在我们最感兴趣的是常数曲率的三维空间。在这种空间，正象在二维空间一样，对于任意三角形的 $\frac{\delta}{S_{\triangle}}$ 具有相同的数值，而不论三角形在空间的位置怎样安置。因此，为了确定这种空间的曲率，就不需要考察很小的三角形。在这种情况下，不必依靠无限增大测量仪器精确度的办法，而只需增大所考察的三角形的尺度，就能在现实世界用实验方法确定所研究的空间曲率。更确切地说，只要在越来越大的宇宙范围内去进行测量，就可以确定空间的曲率。

* 可以证明，第二种情况应由第一种情况而定。

在第十节中，我们曾谈到藉助光线所进行的“宇宙”实验。从那个实验里可以断定，研究我们所居住的世界，用欧氏几何是不够好的。因此必须注意到具有弯曲的空间的几何。现实空间是以光的路线作为直线标准，那么，什么样的几何是描述现实空间的最好的几何呢？上面提到的实验表明，几何空间的曲率应当依赖于物质在空间的分布。我们所处的现实空间，它的性质的变化正是由于处在质量很大的太阳附近。现实空间的光线传播受引力场的影响。一般说来，在不同地点引力是不一样的。所以空间应有曲率的变化。此外，由于物体之间的相互作用随时间变化，不断改变自己的状态和大小，所以曲率也应当随时间、地点发生变化。这就使得几何空间的曲率概念更加复杂。三维几何空间应当与时间因素联系起来。这样，每一事件的表征就不仅是用三维空间的一个点（即事件发生的地点），而且要考虑时间的因素，即事件发生的时间。在这种称为“四维”的“时——空”复杂结构中，每一点的曲率不仅依平面的方向面各不相同，而且随时间的变化面迥异。这样，在每一瞬时，每一点的曲率就不是用六个数，面要用十个数来表征。

十二　我们世界的几何是一种什么样的几何？

为了建立描述我们所居住的现实空间，决定“时——空”曲率的十个数应当与每一点，每一瞬时的引力场特性联系起来。

现在我们详细地谈一下产生这些思想的渊源。直至1916年爱因斯坦广义相对论建立以前，人们一直固执地认为，空间乃是某种类似于无限空荡的欧几里得式房子，现实物体，彼此相互作用着的客体就象家具一样摆在这所房子里。似乎用不着怀疑，“欧几里得房子”的性质是永远不会改变的，这种不变的特性与这些“家具”的互相移动以及它们之间的相互作用也没有什么必然联系。空虚的欧几里得空间看来是不能动摇的，它是唯一可能存在的空间。关于这种空间中物质的相互转化和相互作用是不久以前才发现的。物质之间的相互作用—引力，最初出现在牛顿定律之中，而电荷之间的相互作用最初是由库仑定律表示出来的，麦克斯韦在他的电磁场理论中也曾给这个定律作过极好

的总结。

所有这些物理理论都是一种理想的、抽象的模型，这些模型具有现实实际的特征。然而人们曾认为，这些理论模型可以变成独立的理想模型，欧几里得几何就被认为是这种理想的几何模型。

罗巴切夫斯基第一个动摇了这一信念。他建立另外一种几何，这种几何尽管人们觉得不习惯，但是象欧氏几何一样，它是如此完善，毫无瑕疵。现在可以说，我们所居住的这所“无限空虚的房子”（“物理世界”就被置于其中）并不一定是欧几里得性质的。

1854年，德国数学家黎曼建立了曲率空间几何理论，在非欧几何研究方面又迈出了卓有成效的一步。

然而现实空间的几何学与物理现象之间的互不相关仍然固执地被看作是已经确立了的事实，牛顿引力定律也被看作是绝对正确的。

相对论为建立实际世界的统一物理—几何模型提供了一个普遍原则。按照相对论，选择物理空间所适合的几何完全取决于我们所了解的现实空间中物质的分布状态。

爱因斯坦的天才革命思想在于，他第一个以意料不到的方式建立现实世界的几何模型与物理模型之间

的联系。他将几何空间与引力联系起来，并证明，牛顿引力理论只不过是实际物理过程的近似反映，就象欧氏几何是引力弯曲空间非欧几何的近似一样。同时，引力不仅依赖物质的质量，而且还依赖物质的能量和动量。在这里没有可能详细地阐述广义相对论，阐明这个理论需要引用非常复杂的数学工具。必须指出，在这个引力理论中，引力随时间空间的变化完全决定于所谓引力势。这个引力势决定于每一点和每一瞬时的十个分量数。

引力势的十个分量与表示时空曲率的十个爱因斯坦方程相联系。

如果我们知道了引力场在时空中的分布，即每一点每一时刻引力势所有十个分量的值，那末我们从爱因斯坦方程中就能够找到相应几何空间在每一点每一瞬时的曲率。

当然，要想精确地确定整个空间和时间的引力势，这是一个根本不能实现的任务。企图通过实验以便绝对精确地来确定它，也是毫无希望和毫无意义的。首先应当指出的是，我们所进行的实验和天文观察只是在某一“局部”空间区域，同时所使用的仪器只具有有限的精确度。此外，物质的任何状态变化，任何能量和动量变化对整个空间的几何选择都会有影

响。这就好象一只苍蝇在天花板上移动也会影响整个空间发生变化一样。当然这个影响不仅在远离苍蝇的地方，就是直接邻近苍蝇的地方也是微不足道的。我们记得，为了测定在象太阳这样大质量附近的空间弯曲，需要多么精湛的测量技术。

关于我们所在空间的几何选择问题是一个非常复杂的课题。实际上最重要的是应该是，为了描述现实世界，应以怎样的精确度来选择适合于它的几何。

在这个意义上自然就提出适应"局部"现实空间的几何选择问题。按照广义相对论，这种"区域性"的几何当然就是非欧几何。

我们暂且把宇宙问题放在一边，现在来讨论地球范围内的问题。当然，在这种情况下，时间空间保持着独立性，空间用非欧几何来描述较为精确，但是这种非欧性在这里极不重要，以致完全可以（或者完全应该）把它放弃，这种非欧性甚至用最现代化的测量仪器也不能发现*。

然而，欧几里得几何在许多实际问题和工程技术等方面仍然保留着自身的全部意义。比如要是有这么

---

* 不久前（1958年）所发现的穆斯保尔效应，说明物理学家已经掌握了如此精湛的实验技术，以致可以在实验室条件下来验证广义相对论的（同时也就是非欧空间的）某些效应。

一位工程师，当他考虑两条悬垂线时说它们并不平行而是在地球的中心相交，这一定会叫人发笑；一个工程技术人员更没有必要假定，构造一个三角形需考虑它的内角和是否等于180°。

同样，牛顿引力定律也满足很多实际需要。虽然这个定律只是接近正确，但是我们不应放弃它。爱因斯坦方程描述引力是较为精确的。必须指出，相对论建立以后不久，依据它的原理就能解释太阳系行星运动的某些现象，而这些现象在牛顿理论范围里是解释不了的。

欧氏几何与牛顿引力定律在许多问题上能以很大的精确度来描述现实光线世界，人们正是从欧几里得几何开始研究我们世界的空间性质的，这并不是一件偶然的事情。当然，这些情况并没有降低非欧几何的重要作用。在现代物理学和现代数学方面许多重要的理论问题和实际问题上，非欧几何发挥了它应有的作用。

最后谈一些看法，以使我们能够大略而全面地了解空间几何的一般特性。

我们看到，甚至在太阳附近产生引力场的畸变也只能改变直接邻近太阳附近的那部分几何空间，它几乎不影响远离太阳的那部分宇宙空间。其他星体也在不同程度上使它周围的空间畸变。如果拿空间的任意

一点来看，那么在这一点附近的几何空间产生影响的应是距它周围远近分布的全部宇宙物体的总作用。当然，这种总作用一般说来也不是非常显著的。但是，当大量的宇宙物质集中分布在空间某处时，这种作用就可能很大；在该处物质分布稀少时，这种作用就比较小。然而，根据大量的天文观察，我们有理由认为，在整个银河系，宇宙物质分布非常均匀。当然，除了许多具有大质量高密度的星体外，银河系有很大一部分区域物质分布非常稀疏。此外，有时在某处发现大量星体在集聚，而在另一处所看到的星体却非常少。实验观察表明，这些集聚的星体在整个银河系分布非常均匀。当然，这个结论在目前还只是一个假设，它只是与天文观察多少有些一致。对这样的结论可以提出怀疑，因为现代望远镜，甚至无线电望远镜都有非常局银的能见范围。如果我们提出的假设与观察暂时一致，那也绝不能由此断定，在扩大能见的范围的情况下，它是否还是一致的。这样，自然就应该去估价那些银据这种假设所得到的结论是否正确。

假设聚星的分布比较均匀，就可以计算银河系物质的平均密度。为此就需要估计银河系在足够大的那部分空间的总质量，然后以它的体积去除总质量。根据我们的假定平均密度应当是常数。

现在我们进一步来设想，银河系的物质分布十分均匀，就象云雾尘埃一样。我们把这种云雾的密度当作前面刚刚用过的方法计算出来的银河平均密度，这就好象我们把物质均匀地涂抹在整个银河系上。

我们还记得二维世界的居民吧，假设球面人并不是生活在理想的球面上（象上面所描述的那样），而是生活在有一点损坏的球面（我们正是生活在这样的球面上）上，这上面有些崎岖坎坷，有些高低不平，有些不大的丘陵和洼地。球面人在说明他的世界的几何时总是试图避开这些不均匀性。与此类似，尽管在地球上有高山和低谷，但人们还是发现地球是球形的。在这里，人们正是象上面所描写的那样，略去了这些细小的不均匀性，把物质均匀地“涂抹”在宇宙之中了。把“涂抹”宇宙的假设作为物理理论基础的同时，我们试图说明，在此基础上如何选择最合适的几何学。为了回答这个问题，就必须找到假设密度为常数的爱因斯坦方程的解。1922年列宁格勒学者A.A弗里得曼首先得到这样的解。显然，密度为常数就是几何空间在每一瞬时的曲率为常数。然而，这个曲率并不是永远相同的，它是时间的函数：K(t)。因此，空间各个点上的曲率在各个方向上是相同的，但它随着时间而变化。换句话说，宇宙必须随着时间膨胀或收缩。

为了直观地想象这种解的含义，我们再返回来看球面世界的居民。假定这个世界的曲率开始为 $K=\frac{1}{\rho^2}$，即"世界半径"等于ρ（参阅第62—63页）。假设球面人从A点观察B点，球上的测地线就是半径为ρ的大圆。λ表示AB之间的距离（图35）。α表示角∠AOB，这时λ＝αρ。假设在很短一段时间△t内，球半径增加△ρ（球膨胀）。

在△t时间内球膨胀的平均速度等于△ρ/△t。在这一段时间A与B之间的距离λ怎样变化呢？λ增加了△λ，即等于λ＋△λ。由于角α在膨胀时不变，所以λ＋△λ＝α（ρ＋△ρ）。在方程左端减去λ，在右端减去αρ，得出：

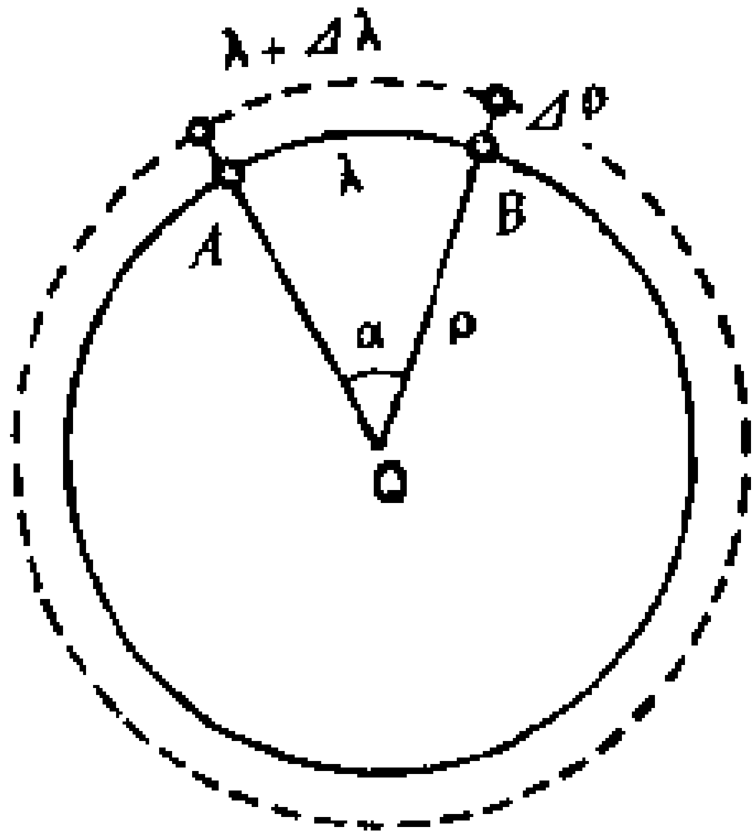


图 35

$$\triangle\lambda=\alpha(\rho+\triangle\rho)-\alpha\rho=\alpha\triangle\rho=\frac{\lambda}{\rho}\triangle\rho,$$

用△t去除这个数，就得到在△t时间内λ变化的平均速度：

$$\frac{\triangle\lambda}{\triangle t}=\frac{\lambda}{\rho}\frac{\triangle\rho}{\triangle t},$$

因为ρ和$\frac{\triangle\rho}{\triangle t}$不依赖于A，B的选择，所以最后的等式表明，当球面世界发生膨胀时，其中一点对另一点的远离速度与两点间的距离λ成正比。

这表示，当球面发生膨胀时，在A点的观察者看来，B点离它愈远，离开它的速度也就愈大。也就是说，近的点分离较慢，远的点分离较快。

在球面的任何地方，观察者所感觉到的正是这样一幅图景。换句话说，每一个观察者都觉得世界似乎离他而去，就象离开一个中心而远去一样。

假如平面欧氏空间在各个方向上伸展均匀，那么任何一个平面人也将会感到，似乎每一件客体都远远离他而去，同时离去的速度与他到物体的距离成正比。

类似的现象在伪球面上也能看到，假如伪球面膨胀，距离l也将增大（见图23，24）。

根据弗里得曼—爱因斯坦理论，被“涂抹”过的同类三维空间也能发生膨胀或收缩。因为我们根想知道，空间均匀性的假设在多大程度上与实际一致，自然就提出这样的问题：通过实验是否能观察到空间的膨胀（或收缩）。

通过大量的可靠的天文观察发现，银河宇宙是在膨胀。多卜勒效应是物理学家早已知道的事实。这个效应表明：在物体远离观察者的情况下，物体的发射光谱向红色方向移动，同时，物体离去的速度愈大，这种红移现象就愈显著。在A.A弗里得曼提出理论上的预言之后，美国天文学家哈伯研究了某些遥远星系的光谱红移现象，他发现，所观察的星系离我们越远，这种红移就越大。于是得出与理论结论完全一致的结果。即星系远离的速度与星系到观察者的距离成正比，这个比例系数叫做哈伯常数。

哈伯位移不止一次得到证实，在现代，藉助射电天文望远镜可以观察离我们60亿光年的星系。根据红移大小判断，这种星系离开我们的速度等于光速的一半。

特别需要说明的是，在我们三维世界所发生的情况如同二维世界发生的情况一样，我们觉得整个银河正在远离我们。这种情况对住在世界其他地方的观察者来说，也获得了相同的结果。

根据获得的实验材料可以认为，以物质密度为常数的宇宙理论接近于物体的实际情况。

按照这一理论，如上所述，整个空间在每一瞬时的曲率等于常数。在这个理论中怎样得到曲率为正

数，负数或零，阐明这个问题是非常有意思的。从理论上得出一个公式：

$$K = \frac{1}{3}x\rho - h^2,$$

这里K是该时刻的空间曲率，x是爱因斯坦引力常数，h是哈伯常数，ρ是物质在银河系中的平均密度。在现代，关于x和h的数值可以从实验中准确地找到，因此为确定曲率K的数值，就需要知道物质的平均密度。

计算结果表明，如果ρ的数值超过每立方米10个质子的质量，这时$K>0$；如果ρ小于这个数，这时$K<0$；如果ρ大致等于这个数，那么空间就接近欧几里得空间（即$K\approx 0$）。遗憾的是，在实验中不可能足够精确地测得ρ的数值。我们要特别注意，目前天文观察所达到的那部分宇宙还不能足够精确地证实：物质的平均密度究竟是大于还是小于每立方米10个质子。虽然这方面的材料很多，但确实可靠的材料很少，因此学者们就得出各种不同的结论。关于曲率K的符号仍是一个悬而未决的问题。

K等于零表示，被均匀“涂抹”的空间就是欧氏空间；$K<0$表示它正好就是无限的罗巴切夫斯基空间。$K>0$的情况是很有意思的，这时三维空间是闭合的，类似于二维球面世界。在这种情况下，在均匀

的三维空间严格地沿直线运动时，我们就会象当初新大陆的发现者麦哲伦那样，从起点开始，最后又回到起点。每一条直线都具有有限的长度。空间也是有限的。必须指出，这种有限性无论如何也不能表示世界有某种界限。虽然它是闭合的，有限的，但却是无界的。我们看到，这样的结论首先对二维球面的居民来说是异乎寻常的，难以置信的，但是这个结论与健康的思维并不矛盾。曲率等于正的常数的三维闭合空间在原则上同样是可以想象的。

关于均匀空间中什么样的几何能够较好地描述现实物理世界的问题离彻底解决还很远。此外，还做过多次尝试来考虑在我们所设计的被均匀“涂抹”的宇宙图象中没有注意到的种种因素。描述宇宙几何学的课题称为宇宙论问题。对于这个问题的探讨已经花费了大量的劳动，至于叙述这些问题已经超出本书的范围。

十三　欧氏公理与罗氏公理

随着罗巴切夫斯基非欧性思想进一步发展，有必要更加明确公理方法。特别是应该建立欧氏几何，罗氏几何以及其他几何的精确的公理体系，以便只需利用包含在公理中的少数论断就能够建立这些几何。

1898年德国数学家D·希尔伯特(1903年他荣获罗巴切夫斯基国际奖金）首先建立了这样的公理体系。

欧氏几何与罗氏几何的全部公理大致可分为五组：

第一组——结合公理或联系公理。这组公理制定点、线、面之间的关系。

1.经过两点，只能引一条直线。

2.一条直线上至少有两点。

3.有三点，可以不在一条直线上。

但愿读者不会觉得奇怪，因为他们总是习惯说，在直线上有无数点。我们约定在公理中总是包括最低限度的要求。直线上有无数个点无需包含在公理中，因为它可以作为定理予以证明，从这些最低限度的要求

和下面所列的公理中可得到这一定理。

建立平面几何只限于上面列举的三条联系公理，而建立立体几何，还得把下列公理合并于其中：

4.经过不在一条直线上的三点可作一个平面。

5.如果一条直线上有两点属于某一平面，则这条直线上所有的点全部属于这一平面。

6.如果面个平面有一个公共点，则至少还有一公共点。

7.至少有四点不能在一个平而上。

第二组——顺序公理：这组公理表明，对于一条直线上的三个点，利用"在……之间"这个词可以制定顺序的概念。

1.如果点B在点A,C之间,那么点B必然也在点C,A之间。

2.对于直线上的任意而点A，B，直线AB上至少有一点C存在，使B介于A，C之间。

3.在共线的三点中，一点介于其他两点之间的情况不多于一次。

4.设A，B，C是不共线的三点，a是平面ABC上不通过A，B，C中任何一点的一直线，则若a有一点介于A，B之间，那么必还有一点介于A，C之间或介于B，C之间。

我们再次指出，这种极端简明的原始命题完全不妨碍把它们称为公理。相反，这正是它们的长处。请读者注意，上列第三条公理在球面世界是行不通的。

从这里很容易证明，在一条直线上有无数点，每一个点（例如A）将直线分成两组，两个方向，两条射线（位于A右方的点和位于A左方的点）。

第三组——合同公理（或称全等公理）：它们确定线段、角度的相等或全同。

1. 在给定的一条直线上沿给定的一侧，于其中每一点上可以放置等于某线段的一条线段，并且只能有一种方式。

这条公理是非常明显的，我们在第17页证明定理3时，就采用了这一公理。

2. 二线段分别等于第三线段，则它们彼此相等。

3. 在某一直线上，点B置于A与C之间，在另一直线上（或同一直线上），点B'置于A'与C'之间。如果$AB=A'B'$，$BC=B'C'$，那么$AC=A'C'$。

4. 在平面上，在给定射线的给定一侧，可以放置任一角，并且只有唯一的一种作法。

5. 两角分别等于第三角，则彼此相等。

6. A，B，C三点不在同一直线上；A'，B'，C'也不在一条直线上。这时，如果有$AB=A'B'$；AC

$=A'C'$；$\angle BAC=\angle B'A'C'$，那么也就有$\angle ABC=\angle A'B'C'$。

根据这三组公理，可以证明许多定理，其中包括三角形相等定理以及其他定理。

第四组——只包含一个公理，叫做连续公理：

如果用任意一种方法可将直线上所有的点分成两组，使得第一组的每一点位于第二组每一点的左面，那么一定是：或者第一组有一个最右端的点（即第二组没有左端点），或者第二组有一个最左端的点（即第一组没有右端点）。

这个公理表明，在直线上没有损坏的地方，直线是连续的。实际上，如果在数轴上将零这一点抠掉，那么其余的点可分为两组：负数和正数。然而在这里，第一组（负数中）没有右端点（最大数），而在第二组（正数中）没有左端点。

应用连续公理可以证明下列命题：

连接A点（在给定圆中）与B点（在圆外）的直线段，必定与该圆相交（图36）。

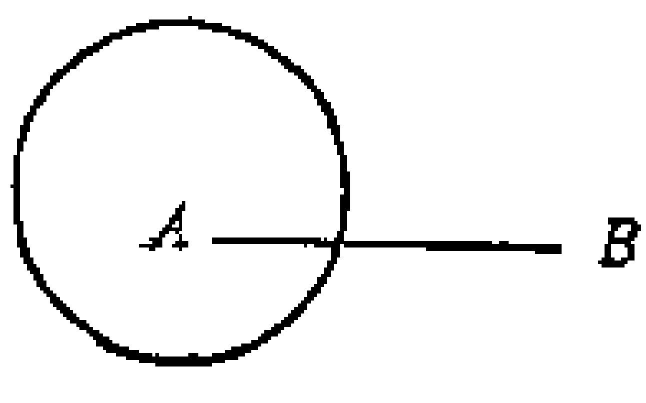


图 36

当然这个看起来似乎非常明显的事实，并不能排除我们对它进行必要的证明。

根据这四组公理得出的全部几何结论，波扬称之为绝对几何学。绝对几何的全部定理在欧氏空间或非欧罗氏空间都是正确的，因为这些定理都是独立的，不依赖于平行公理。

第五组——欧几里得公理：

平面上经过直线外一点与该直线不相交的直线不能多于一条。

根据这五组公理得出的全部定理总和称为欧几里得几何学。

罗巴切夫斯基几何学也包含欧氏几何的前四组公理。第五组公理只包含一个罗巴切夫斯基公理：

在平面上经过直线外一点，至少可以引两条直线不与原直线相交。

十四　为什么需要研究二维“世界”？

一般说来，欧几里得几何在很多问题上能够很好地为人们服务。但是，当人们的活动范围逐渐扩大，就不可避免地要去研究非欧几何。罗巴切夫斯基首先发现了一种非欧几何。但是很多世纪以来，人们习惯于欧氏几何，使得许多伟大的数学家，甚至罗巴切夫斯基的同时代人，不能接受他的思想。这种非欧几何思想直到后来才获得公认。现在，罗巴切夫斯基所发现的几何理论已经深入到自然科学领域，并为每一个物理学家和数学家所熟知。

鉴于读者原先不熟悉非欧几何那些生疏的概念，所以我们在第五节至第七节里描述了几种幻想的世界，并且假设了一些想象的生物，让读者和他们一起去探索其中的空间结构，以便相信这些世界的非欧特性。等到读者对这些奇妙的世界稍微习惯一点之后，再把他引回到我们的世界。这样，我们就明显地看到，为了描述我们的现实空间，同样需要非欧几何。

当然，象上面所描述的那些幻想世界，实际上并不存在。为了探索这些世界，我们花费了不少篇幅。这种探讨会不会失去意义呢？看来，它并没有失去应有的意义，即使没有这些奇怪的生物，这种几何讨论也是有意义的。请读者回忆一下，在讨论球面几何时，我们对海上轮船和飞机的领航员提供了一系列有益的意见。正因为地球是球形的，所以球面几何的知识对我们来说是非常有用的。这些知识在天文学方面也是非常必要的。对于几何学家来说，最大的意义在于这样一些事实，比如，在伪球面上由测地线的弧线构成的三角形，其内角和小于两个直角，以及其他一些事实。

让我们忘掉这些奇怪的生物吧。下面阐明在第五节至第七节中所讨论的问题的几何本质。我们曾考察过某些表面，研究过它的某些线段（我们拿测地线来进行研究，也可以拿其他的线来进行研究）。我们把这种线称为直线，把这种表面上的点作为通常所说的点，并假定，这种直线之间的夹角就是它们切线之间的夹角（当然也可以采取其他的假定）。我们还可以假定，什么样的线段叫做相等线段，这就是那些在移动时能够重合的线段。还记得吗？当那些人在他们的世界运动时，我们看到的是他们只能弯曲，而

不能延展（从外面观察者的观点来看）。如果我们考察的是椭球面，那里的人在运动时还可以延展。因此从外面的观察者来看，线段相等是以另外的一种方式确定的。

接看我们又着手研究这种直线的几何。在球面上我们得到有意思的球面几何。在伪球面上，情况就更为奇特！我们得到罗氏几何。可以说，伪球面及其测地线就是罗巴切夫斯基几何的平面（确切地说是伪球面的一小块）模型。

按照这种方法，就可以建立任意多种几何模型。事情正是应当这样进行。选择某些客体，其中之一叫做直线，另一个叫做点，第三个叫做平面。对这些客体建立“在……之上”，“在……之间”以及线段和角相等的各种概念。进一步就应当研究，所选择的这些平面，直线和点应当服从什么样的公理。关于这些模型的“材料”可能是各种各样的：比如它们可以是光线，或者测地线，圆等等。甚至可以用数字和方程式来建立各种不同的几何模型，如欧几里得模型，罗巴切夫斯基模型以及其他模型。这是一些非常重要而又富有趣味的几何模型。下面，我们就来建立这样两种模型。

十五　欧几里得的数字“世界”

作为第一个例证，我们用实数建立一个欧氏平面几何模型，这个模型在数学及其实际应用方面都具有非常重要的意义。

我们把按一定顺序排列的一对数（x，y）叫做一个点，例如，（2，－5）；（0，3）；（0，0）等等。并认为（2，－5）和（－5，2）是不同的两个点。

我们把按一定顺序排列的三个数（u，v，w）叫做一条直线，并使头两个数不同时为零。此外，我们认为，（u，v，w）乘上一个不等于零的数所构成的三数组（λu，λv，λw）乃是同一条直线（u，v，w）。例如，三数组（－2，0，6）；（1，0，－3）；（$\frac{1}{3}$，0，－1）乃是同一条直线；同样可以说，三数组（4，－2，7）；（－2，1，－$\frac{7}{2}$）是同一条直线。但（0，0，3）不是一条直线，因为头两个数等于

零。

其次，假如下列等式

$$ux + vy = w \tag{1}$$

成立，我们就说点（x，y）位于直线（u，v，w）上。

例如，点（5，－2）在直线（2，3，4）上，因为$2\cdot5+3\cdot(-2)=4$；点（1，2）不在这条直线上，因为$2\cdot1+3\cdot2\neq4$。

显然，只要给定一条直线（u，v，w），就可找到该直线上的无数个点。为此，假如$v\neq0$就可给定任意一个x，并从等式（1）——这里有四个数u，v，w，x是已知的——中找到第五个数y。与x成对的两个数给定一个点（x，y），它位于直线（u，v，w）上。每当给定一个不同的数，我们就得到一个不同的点。由此可以证明，对于这样的点和直线来说能够满足结合公理中的第二个公理的要求（参阅十三节第一组公理）。

如果给定任意一点（x，y），就可找到经过该点的无数条直线。u和v应取任意数，而w的选择，由$w = xu + uy$决定。因此，直线（u，v，ux＋vy）一定经过点（x，y）。

可以证明，对于我们所选择的点和直线，结合公理的第一个公理同样也能满足要求（参阅十三节第一

组公理）。

给定两个不同的点 (x_1, y_1) 和 (x_2, y_2)，证明经过两点只能有唯一的一条直线 (u, v, w)。换句话说，应当找到这样的一个三数组 (u, v, w)，使它满足等式：

$$ux_1 + vy_1 = w,$$
$$ux_2 + vy_2 = w。 \qquad (2)$$

从此等式中用一定方法依次消掉 u 和 v就得出：

$$u(x_1y_2 - x_2y_1) = w(y_2 - y_1),$$
$$v(x_1y_2 - x_2y_1) = w(x_1 - x_2)。 \qquad (3)$$

对于所给定的点如果 $x_1y_2 - x_2y_1 \neq 0$，从下列等式我们得到：

$$u = \frac{w(y_2 - y_1)}{x_1y_2 - x_2y_1};$$

$$v = \frac{w(x_1 - x_2)}{x_1y_2 - x_2y_1}。$$

因而，未知的直线就是下列三数组：

$$\left(\frac{w(y_2 - y_1)}{x_1y_2 - x_2y_1}, \quad \frac{w(x_1 - x_2)}{x_1y_2 - x_2y_1}, \quad w\right)。$$

在这里如果以 $\frac{x_1y_2 - x_2y_1}{w}$（由所用初始条件来决定）乘所有各数，就得到未知的直线：

$$(y_2-y_1,\ x_1-x_2,\ x_1y_2-x_2y_1)。$$

这个三数组的确定是单值的，当然，应有一个精确的乘数。

不难证明，所给定的点实际上都在这条直线上。为此可以验证这些相应的等式。例如，对于第一个点 (x_1, y_1)，得出：

$$(y_2-y_1)x_1+(x_1-x_2)y_1=x_1y_2-x_2y_1。$$

现在假定$x_1y_2-x_2y_1=0$。由于所给的点不同（尽管y_2-y_1，x_1-x_2中有一个不等于零），因此$w=0$。在这种情况下，由等式（2），如果$x_1\neq0$，就得出 $u=-\frac{vy_1}{x_1}$。这样，未知的直线就是三数组 $\left(-\frac{vy_1}{x_1},\ v,\ 0\right)$。将各个数乘以$\frac{x_1}{v}$，最后我们就找到这样一个三数组 $(-y_1,\ x_1,\ 0)$。

这就证明，在我们的数字模型中欧氏几何第一个结合公理能满足要求。

作为一个例子，我们来找一条通过点（1，0）和（0，1）的直线。在这种情况下 $x_1y_2-x_2y_1=1\cdot1-0\cdot0=1\neq0$。因此，未知的直线就是（1，1，1）。

显然，点（0，0）不在这条直线上。因而，点

（1，0），（0，1）和（0，0）也就不能同时在一条直线上。即第三结合公理得到证实。

因此，在这个数字模型中欧氏几何第一组公理都是正确的。

我们不打算叫读者去烦琐地验证欧氏几何其余公理。请读者注意：在我们的模型中，点（x_1，y_1）与（x_2，y_2）之间的距离是由

$$\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$$

来量度的。同时，如果两条线段的长度相等，就认为那两条线段相等。

现在我们仅只验证一下平行公理在这个模型中是否正确。为此我们来研究两条直线的相交问题。

给定两直线（u_1，v_1，w_1）和（u_2，v_2，w_2），要使两条直线相交，就必须找到一点（x，y），使它同时在两条直线上，即同时满足等式

$$\begin{aligned}u_1x+v_1y&=w_1,\\u_2x+v_2y&=w_2。\end{aligned}\qquad(4)$$

换句话说，这一对数（x，y）应当满足两个方程（4），也就是说它们是这组方程的解。为了找到所给定直线的共同点，就需要解方程组（4）。从这组方程中依次消掉y和x，我们就得到方程组

$$\begin{cases} (u_1v_2-u_2v_1)x=w_1v_2-w_2v_1, \\ (u_1v_2-u_2v_1)y=w_2u_1-w_1u_2. \end{cases} \quad (5)$$

显然，方程组（4）和（5）是等价的，即方程组（4）的每一个解也就是方程组（5）的解，或者相反。

如果 $u_1v_2-u_2v_1 \neq 0$， （6）

那么由方程组（5）就很容易得出方程组

$$\begin{cases} x=\dfrac{w_1v_2-w_2v_1}{u_1v_2-u_2v_1}, \\ y=\dfrac{w_2u_1-w_1u_2}{u_1v_2-u_2v_1}, \end{cases} \quad (7)$$

它与方程（5）是等价的，因而与方程组（4）也是等价的。

假如在条件（6）的情况下存在一个点（x, y），它属于所给定的两条直线，那么它必定可以由公式（7）找到，即此点是唯一存在的。

经过直接验证很容易使人相信，根据公式（7）所找到的点实际上位于两条直线（u_1, v_1, w_1）和（u_2, v_2, w_2）上。因此，在条件（6）的情况下两条直线存在唯一交点。

如果

$$u_1v_2-u_2v_1=0,$$

那末（假定$u_1 \neq 0$）立刻就得到$v_2 = \frac{u_2 v_1}{u_1}$。用λ表示因子$\frac{u_2}{u_1}$，我们就得到$u_2 = \lambda u_1$；$v_2 = \lambda v_1$*。因而，三数组$(u_2, v_2, w_2)$的头两个数与相应的三数组$(u_1, v_1, w_1)$头两个数成比例，即直线$(u_2, v_2, w_2)$可以写为$(\lambda u_1, \lambda v_1, w_2)$。

此外，如果$w_2 = \lambda w_1$，那么第二条直线的所有三个数都可以从第一条线的三个数乘以λ得到。因而根据直线的定义，两条给定的直线重合。在这种情况下方程组（4）的两个方程是等价的，它们的区别只是一个缩减因子λ。其中每一个方程的解同时也是第二个方程的解。方程（4）有无数个解，这是因为重合的直线有无数个公共点(x, y)。

如果$u_2 = \lambda u_1$，$v_2 = \lambda v_1$，但是$w_2 \neq \lambda w_1$，那么这两条直线不重合。这时方程组（5）具有下列形式：

$$\begin{cases} 0 \cdot x = v_1(\lambda w_1 - w_2), \\ 0 \cdot y = u_1(w_2 - \lambda w_1). \end{cases}$$

* 如果$u_1 = 0$，那么按照直线的定义必定有$v_1 \neq 0$。这时$u_2 = \frac{v_2}{v_1} u_1$。令$\frac{v_2}{v_1} = \lambda$，我们又重新得到$u_2 = \lambda u_1$；$v_2 = \lambda v_1$。

这里等式右端部分没有一个等于零。然而不可能找到这样的数x和y，当它乘以零后却不等于零。因此最后的方程组，即方程组（4）没有解。所以，在这种情况下直线（u_1，v_1，w_1）和（u_2，v_2，w_2）没有公共点。

由以上所述可以得出：两条直线不相交的条件是

$$u_2=\lambda u_1;\quad v_2=\lambda v_1;\ w_2\neq\lambda w_1 \qquad (8)$$

不难验证，在这一算术模型中欧几里得平行公理的正确性。

我们来研究直线（u_1，v_1，w_1）（为了确定它我们假定$u_1\neq 0$）和点（x_0，y_0）（它不在这条直线上）。这就是说，

$$w_1\neq u_1x_0+v_1y_0。 \qquad (9)$$

经过点（x_0，y_0）的任一条直线应是（u_2，v_2，$u_2x_0+v_2y_0$）。如果这样的直线与直线（u_1，v_1，w_1）不相交，那么根据（8）式，它应是（λu_1，λv_1，$\lambda u_1x_0+\lambda v_1y_0$）。用$\frac{1}{\lambda}$乘这个三数组，我们就得到，经过点（$x_0$，$y_0$）与直线（$u_1$，$v_1$，$w_1$）不相交的直线是（$u_1$，$v_1$，$u_1x_0+v_1y_0$），因此可以说它是唯一*确定的。

* 由于关系式（9），它与直线（u_1，v_1，w_1）不重合。

这样，我们就可以证明：经过直线 (u_1, v_1, w_1) 外一点 (x_0, y_0)，与该直线不相交的直线不能多于一条。满足条件（8）的直线叫做平行线。

我们不打算再讨论这个重要的欧氏几何模型了。要知道，研究这个模型实际上要花费整整的一个数学章节——解析几何——这是在高等学校要研究的课题。

十六　罗巴切夫斯基几何模型

我们再研究一个模型，这就是罗巴切夫斯基平面几何模型。在第七节中曾指出：在伪球面上起作用的是罗氏几何，但对我们来说，伪球面所描绘的仅仅是局部的罗氏平面模型。与此不同，我们现在所建立的模型是要描绘整个罗氏平面。我们是根据欧氏平面上的点来建立这种模型的。换句话说，我们是要把整个的罗氏平面画在一块欧氏平面上。由于意大利数学家别里特尔，英国数学家凯尔，德国数学家克莱因孜孜不倦的努力工作，使我们所研究的模型获得了巨大的意义。可以说，这个模型是第一个完整的罗氏几何模型。

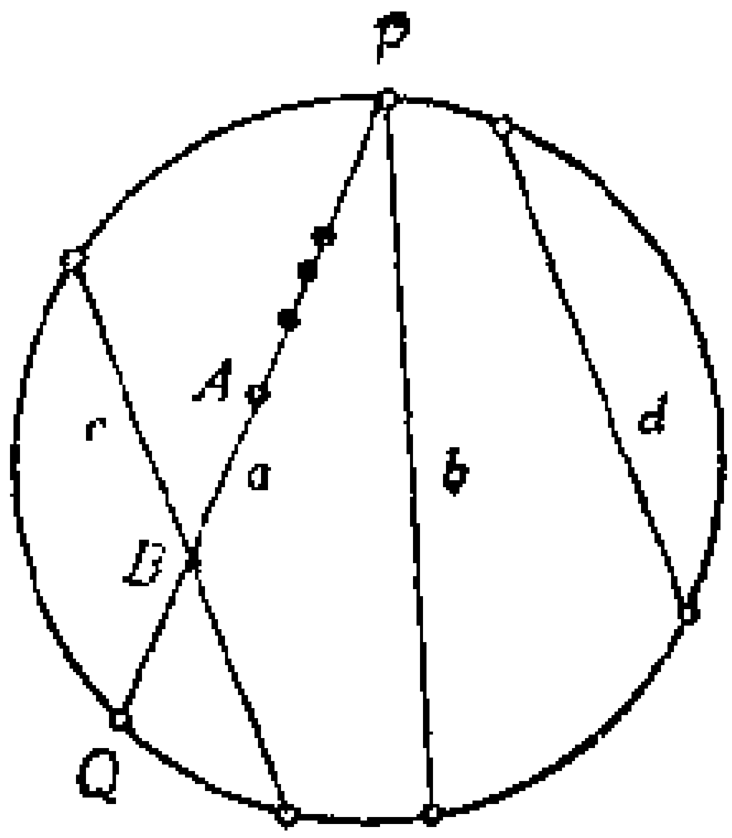


图　37

我们在欧氏平面上研究某一个固定的圆（图37），就在这个圆的内部来描绘整个罗氏平面。需要特别强调一下，在这里我们所研究的只

是圆的内部，圆上和圆外的所有点都不在研究之列。

我们假定，有一个人沿着无限的欧氏平面运动，在这个平面上有通向无穷远的直线道路，他决定拍摄呈现在他眼前的图景。图38表示所拍摄的底片。在底片上A，B，C，D各点就是分布在拍摄平面上某些点的图象。某些实点反映在底片上的A，B，C，D各点。但是被摄平面上的任何实点不能反映在P，Q，T这些点上。一般说来，在拍摄时，平面上的任何点都不会落到直线m上，直线m叫做地平线。如果点A沿直线a向拍摄平面的无限远处运动，那么它在照片上的映象将无限地接近P点，但是点A永远不会落到点P上。直线a和b实际上也不相交。

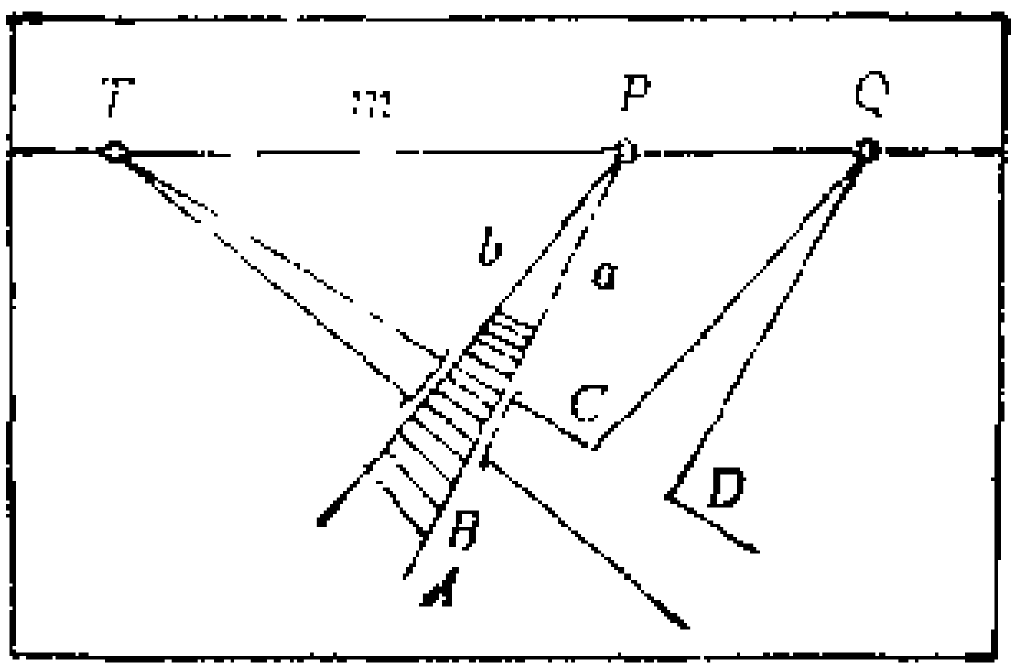


图 38

所摄平面的无限部分在底片上位于直线m之下。拍照时在直线m和它的上方没有任何映象。在图37上我们也碰到类似的情况。在这里圆的内部就是罗氏平面的“底片”，即罗氏平面的图象。圆本身好象是地平线。在圆上和圆外都不能反映罗氏平面上的任何一

点，罗氏平面仅仅充实于圆的内部。我们正是在圆的内部构成一个罗氏几何模型。

我们把分布在该圆内部的，但不在边界上的普通欧氏点称为罗氏模型“点”*。假如位于圆周上的两个有限点可以反映到该圆上，那么该圆的所有弦线就称为“直线”。因此，这种“直线”没有端点。

如果直线 a 上的点A无限地向点P运动（参阅图37）那么，与图38类似，点A 将无限接近 P，但永远不能到达 P 点。

如果这种情况是在一般的欧儿里得意义上发生的，我们就说，“点” A 在“直线” a 上。

十分明显，在这个模型上满足结合公理中的前面三个公理（参阅第十三节，第一组）。

同样很明显，图 37 中“直线” a 和 c 在点B 相交，《直线》a和 d 不相交**。“直线” a 和 b 在这里也不相交！因为我们这个模型整个地建立在圆的内部，而点P（我们对它未加引号，因为它不是罗氏“点”）在圆的周界上，这就是说在水平线上，所以它不是模型上的点。

---

* 在欧氏平面上建立罗氏几何模型得到的“点”和“直线”，我们把它加上引号，以区别于欧氏点和欧氏直线。

** 注意，直线a和d（不带引号）在欧氏意义上当然相交。

如果在这里给"在……之间"这个概念以普通欧氏意义，不难明白，这一模型满足全部顺序公理（第十三节第二组）。这种情况是由于我们的模型建立在欧氏平面上，而在欧氏平面上所有上述公理皆能满足。同样，在这个模型上也满足连续公理（第十三节第四组）。

相等公理（第十三节第三组公理）的验证比较复杂，对它们的验证涉及到一系列有趣的事实，这里我们不打算详细讨论这些问题了。我们只就所考察的模型方面有关"长度"和角度测量的问题加以说明。

如果在"直线" a 上（参阅图37）给定"点" A 和B 。那么线段AB的"长度"称为数"AB"：

$$\text{“}AB\text{”} = K \log \left(\frac{AQ}{BQ} : \frac{AP}{BP} \right)^{*} \qquad (10)$$

这里K是某个正的常系数，它由二维罗氏空间的曲率决定，即由欧氏平面圆内所表示出来的那个罗氏平面曲率所决定。在同一圆内作一个"图"来表示任意曲率的罗氏平面，完全取决于系数K 。

不难看出，在这种情况下所定义的"长度"永远是正的。

* 用"AB"表示罗氏平面模型上的线段长度，普通欧氏长度以AB表示。

实际上，AQ>BQ；AP<BP。这就是说，$\frac{AQ}{BQ}>1$；$\frac{AP}{BP}<1$。因而，公式（10）中括号内的比值大于1，而大于1的对数就是正的。因此，《AB》>0。

下面我们验证第三组公理中第2和第3条公理。

公理2被满足是由于，在我们的模型中线段的长度是根据公式（10）中的某些数来给定的，因此，分别等于第三个数的任何两个数，彼此相等。

为了验证公理3，我们假定在"直线"PQ上"点"B位于A与C之间。下列恒等式与"点"A，B，C在PQ上的分布无关：

$$\frac{AQ}{CQ}:\frac{AP}{CP}=\left(\frac{AQ}{BQ}:\frac{AP}{BP}\right)\left(\frac{BQ}{CQ}:\frac{BP}{CP}\right)。$$

对这个恒等式取对数并乘以K我们就得到：

$$k\ \log\left(\frac{AQ}{CQ}:\frac{AP}{CP}\right)=k\log\left(\frac{AQ}{BQ}:\frac{AP}{BP}\right)$$

$$+k\ \log\left(\frac{BQ}{CQ}:\frac{BP}{CP}\right)。$$

为了从公式（10）得出

$$《AC》=《AB》+《BC》,$$

就应当证实，在对数号下面的数处处大于1（在相反情况下长度可能是负值）。象上面所进行的那样，在估计所有各比值时不难发现，只有在“点”B位于A与C之间的条件下所有的二重比才大于1。请读者去自行验证吧。

现在我们来研究一个问题，如果“点”B留在原处，而“点”A无限接近P，这时长度“AB”将怎样变化呢？这时公式（10）中第二个分数的分子AP将无限缩小。因而，公式（10）括号中所表示的数值将无限地增大。即“AB”的长度将无限增大*。

这表示，由任意一“点”B到P将是无限远，因为P的位置在“水平线”上。如果由“点”A到P的方向上置一线段，它的“长度”等于公式（10）所表示的长度，那么它在“直线”a上的标记在趋向P时将逐渐加密，就好象沿着铁路的枕木逐渐加密一样（图38），虽然在实际上这些枕木之间的距离都是相等的。

这种情况是自然的，不足为怪。如果我们希望将整个无限平面绘制在一“块”有限的纸上，那么越到平面的无限边缘就必须绘制越小的尺度。

* 如果“点”A固定，“点”B趋向Q，或者同时有A趋向P，B趋向Q，结果将是一致的。

我们看到，在我们这个模型中所表示的罗氏平面与拍照欧氏平面有某些类似之处。实际上，这里所表示的情况具有非常深刻的意义（它不仅是纯粹的一种外部近似），在所谓射影几何中，将详细地研究这些问题。射影几何对二重比的研究具有重要意义。〔译注〕

公式（10）能使我们确定在这个模型中的“线段相等”。根据公式（10）计算，两线段的“长度”相等，就可以认为这两线段相等。

现在我们对这一模型的“直线”间的角度给一定义。首先，我们商定，在欧氏平面上两个相交的圆之间的角度，应当理解为通过圆的交点对两圆切线之间的夹角。

现在我们来考察模型上的“直线”PQ。我们知道，点P和Q本身不属于这条“直线”，它们在地平线上，我们离它无限远。但是我们谈论P和Q时，如同谈论欧氏平面点一样，因为罗氏无限平面模型就是建立在欧氏平面的有限一部分之上的。

经点P与Q引面条水平切线（图39），我们得到一点O。显然，OP = OQ。以O为中心，以OP为半径作

译注：这些内容读者可在有关“几何变换”一类书中找到。

一圆弧$\widehat{PQ}$。由地平圆的中心S连接半径SP和SQ。它们与地平圆的切线OP和OQ垂直；但是因为OP和OQ同时是圆弧$\widehat{PQ}$的半径，而SP和SQ又垂直于OP和OQ，所以它们是圆弧$\widehat{PQ}$的切线。

这就是说，圆弧$\widehat{PQ}$与水平圆垂直(或者说正交)。弧线$\widehat{PQ}$绝对不是罗氏平面上的圆弧。它只不过是对应于“直线”PQ的某一曲线。这条曲线我们称之为“直线”PQ的测角线*。这一名称从下列定义会更加明瞭。

“直线”P_1Q_1与P_2Q_2之间的夹角称为该“直线”测角线之间的欧氏角（图39）。因此，在这里我们就把测角线切线之间所作的角作为$\angle Q_1AQ_2$的尺度。

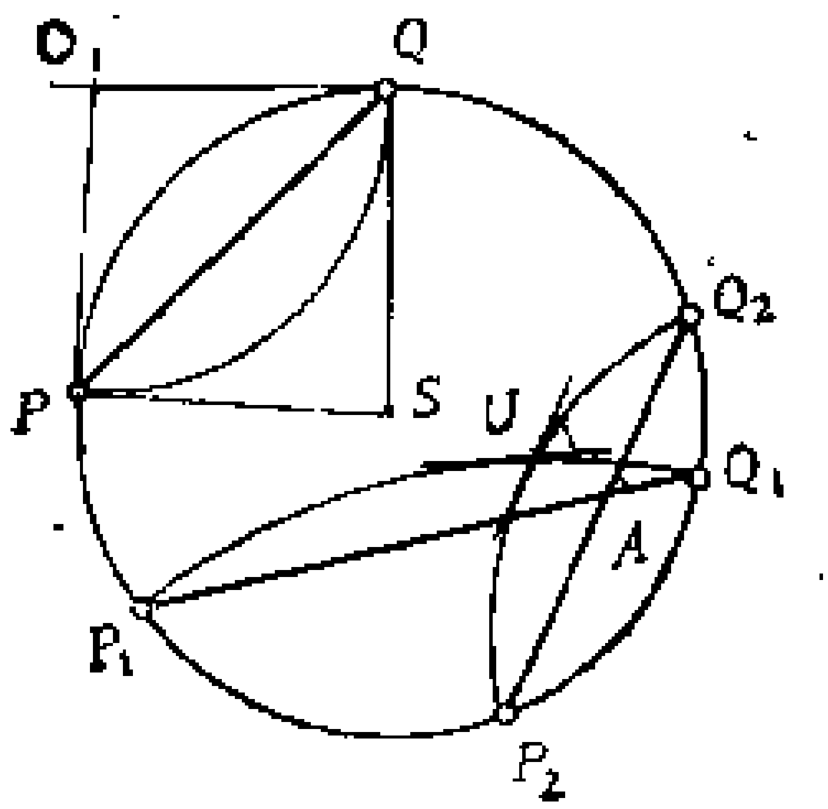


图 39

自然，罗氏平面上的居民（譬如伪球面居民）为了测量直线之间的角度根本不会作什么测角线去寻找它们之间的欧氏（?）角。他将象在普

---

* 如果PQ是水平圆的直径（即通过中心S），那么“直线”PQ与本身的测角线重合。

通几何教程中所说的那样，把一个圆分成比如360份，把每一份称为一度。如果必要的话他还可以取更小的单位：分度。此后他就可以用普通方法去测量角度了。

同样的，罗氏世界的居民也不是利用欧氏(？)长度二重比之对数去决定线段的长度，因为除了其他点外要想到达点P和点Q，一般来说他无能为力。自然，他将会象在一般教科书中所进行的那样去测量线段的长度。他将把某一线段作为长度单位，将所测量的线段分成十份，一百份等等。要想继续测量，就得用我们所熟悉的方法去进行。

罗氏空间的居民在自己的天地中就是这样作的，即“从这个世界的内部”来考虑这些问题。我们是在欧氏平面上建立罗氏世界模型的。因此必须想出一种测量长度和角度的方法来，一方面把整个罗氏平面“安置”绘画在一个欧氏圆的内部，另一方面在这个模型上还需保持罗氏几何公理，即罗氏世界的内在性质。这两个要求就使得我们必须找到一种“人为的”长度和角度的定义。找到这样的定义是很重要的。它表明，所有的罗氏公理在逻辑上是相容的，不矛盾的（当然，因为欧氏几何在逻辑上是不矛盾的，所以由欧氏几何的“原料”所构成的罗氏几何模型也是不矛

盾的）。

可以证明，我们所研究的这个模型是罗氏几何模型，就是说，这个模型上满足罗氏平行公理。为此我们来研究“直线”a和“直线”外的一“点”A（图40）。通过“点”A的“直线”c与“直线”a相交，而“直线”b与a不相交。如上所述，“直线”k和l也与“直线”a不相交。所有经过∠PAQ内的“直线”都与“直线”a相交，所有通过该角邻角内的“直线”都不能与“直线”a相交。因此在这个模型上满足罗氏公理。

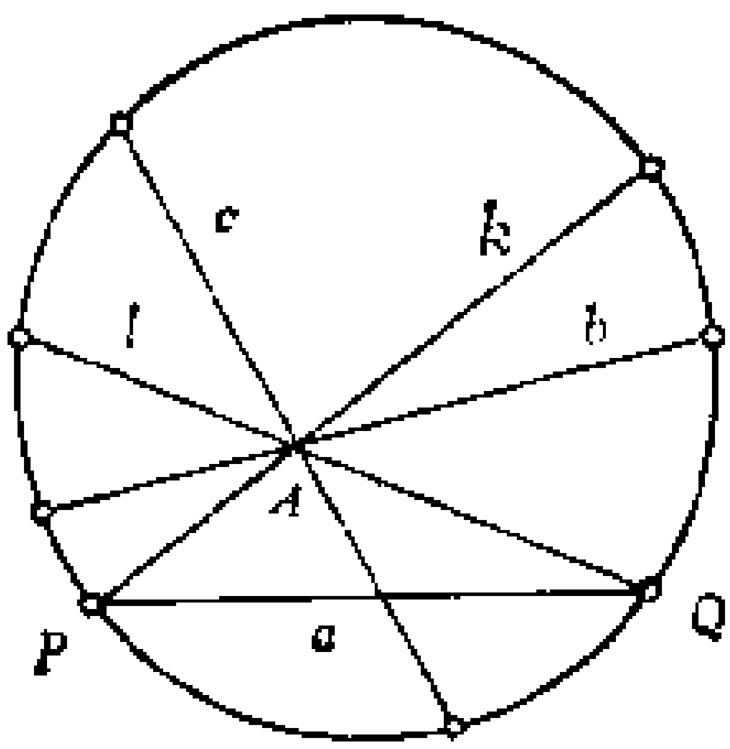


图 40

图40中，“直线”k和l将“直线”分成两组：一组是与a相交的“直线”，另一组是与a不相交的“直线”。因而，“直线”k和l平行于“直线”a，而“直线”b和a是彼此发散的。请比较图40与图31。

十七　再论公理方法的意义

上面所讨论的欧氏和罗氏两个几何模型在某些数学领域的发展和应用方面发挥了极其重要的作用。

一般说来，如果能够建立某种几何模型，那末，在这种模型上所表现出来的某些规律性，即运用于研究模型本身时所获得的规律性就是全部几何定理。因此各种几何所具有的价值并不能决定它们是否用于研究光线的性质。

现在我们回忆一下，在第十三节中阐述欧氏公理和罗氏公理时，我们只字未提什么叫做点、线、面，也就是说，只字未提这些几何到底是研究什么的。现在可以说，这是用不着预先说明的。象上面所证明的那样，每一种几何（其中包括欧氏几何与罗氏几何）都是用来研究各种各样模型的。因此，关于点、线、面的问题可以理解为各种各样的自然界的物体。

然而，每一种几何在研究任何一种自然的客体，即所谓点、线、面的问题时，只有在这些客体之间建立这样一些关系，如“在……之上”，“在……之

间”，“相等的”才能满足那种几何公理。几何学对于所研究的客体性质及其含义并不感兴趣，它研究的只是这些客体之间的关系。

现在我们来研究一个问题，它与建立各种几何模型有密切关系。常常使我们感兴趣的并不是这些模型本身；而是建立这种模型的可能性，这是具有重大的理论意义的问题。现在我们来说明一下。

在第十三节，我们列举了十九个欧氏几何公理和数目相同的罗氏公理。这就使我们能够确切地表达出多次试图证明欧氏第五公设的实质。所有这些企图都归结为，如果用罗氏公理代替欧氏公现，就会导致矛盾的结果。换句话说，企图在罗氏几何中发现矛盾是不可能的。

但是能不能担保，永远也不能发现罗氏几何中的矛质呢？是不是总有一天能够证明，根据我们所确定的罗氏公理会不会出现两个彼此矛质的命题呢？或者，罗氏几何就没有矛盾？

这些问题只有藉助于模型的构造来阐明。上面我们曾建造了一种罗氏几何模型。构成这一模型的材料是欧氏平面上的点和弧弦。换句话说，构成这种模型的材料都取自欧氏世界。

如果在罗氏几何中有矛盾存在，那末这个矛质一

定会在这个模型上被发现，也就是说，欧氏几何中某些客体之间的关系也一定存在矛盾。这就意味着，矛盾似乎存在于欧氏几何中。

这样一来，在欧氏空间能够建造罗氏几何模型就证明了：

只要欧氏几何没有矛盾，罗氏几何也就没有矛盾。

这意味着，罗氏几何在逻辑意义上比欧氏几何一点也不差。

完全类似，藉助于几何模型还可以证明相反的命题：

如果罗氏几何没有矛盾，那么欧氏几何也就没有矛盾。

这就是说，欧氏几何与罗氏几何两者要么都有矛盾，要么都没有矛盾。

在第十五节，我们用数字建造了一种欧氏几何模型，即这个模型的材料取自算术，这证明：

只要算术没有矛盾，那么欧氏几何（即罗氏几何）也就没有矛盾。

实际上，如果在欧氏几何中存在某种矛盾，那么这个矛盾立刻就能够在构成这一模型（第十五节）的一对数组和一个三数组中发现，也就是说，实数的算术原来是矛盾的。

请注意，不只是对于二维世界（平面），象上面所作的那样，对于三维世界也可以建造类似的模型。

由上面的论述得出这样的结论：关于解决各种公理系不矛盾的问题是有条件的，即如果在构成一个几何模型时所选择材料的那个领域不存在矛盾，那么这个模型本身也就不存在矛盾。

在现代数学中关于各种公理系不矛盾问题正是用这种方法来解决的。在这里，人类的科学实验起了很大的作用。

很多世纪的实践使我们确信算术定理是没有矛盾的。由此可以得出结论，欧氏几何与罗氏几何并没有矛盾。

各种几何在物理和数学中获得了特别重要的应用，几何思想的进一步发展（特别是罗巴切夫斯基和黎曼理论的发展）对现代物理学，特别是对爱因斯坦相对论的发展是一个有力的推动。

还要注意到，在几何学中首先发展成熟的公理方法，现在在其他的数学领域，在物理学和力学中已成为重要的研究方法。

公理方法在各个知识领域的广泛运用要求深入地对这一方法本身加以研究，以阐明它的特殊性盾和每一公理系所应当满足的那些共同的要求。

对于任何一个公理系所提出的第一个要求是公理不矛盾问题。换句话说，每一个公理系应当保证不要得到（用正确的逻辑推理）两个彼此矛盾的命题。上面的讨论表明，利用模型就能够解决各种公理系不矛盾的问题。

对于公理系所提出的另一个条件是公理独立性的问题。这就是说，公理应当这样来选择，即每一个后面的公理并不是前一个公理的直接推论的结果。满足这样的要求也是十分自然的，因为要是有某一公理能从前面的公理得到证明，那么就可以认为它是一条定理，就应当从公理条文中把它删掉。

上述公理独立性也可以藉助几何模型来发现。即如果可以建造一种模型，在这个模型上除了公理系中的某一公理外，其他所有公理都能满足，那么这就意味着，后面这个公理不是其余公理的逻辑推论结果。实际上，在相反的情况下，对每一个满足其余公理的模型来说，这一公理对这些模型也是正确的。

因此，现在有必要重新提出关于证明欧氏第五公设的问题。这个问题的实质是，欧氏平行公理是不是依赖其他公理。罗氏几何模型的建立表明，欧氏平行公理并不是其他公理推论的结果。

建立欧氏几何模型的可能性恰好表明，罗氏公理

不依赖于第十三节所罗列的前四组公理。

对于公理系常常提出的第三个要求（特别在几何学）是体系的完备性问题。为了说明这一概念，我们回忆一下，当扩充更多的欧氏几何公理条文时（参阅第十三节），我们就能够证明更多的几何定理。十三节所列举的最后一个公理是平行公理。将这条公理补充到绝对几何公理中，我们就能够证明很多定理。这些定理如果不利用平行公理是不能被证明的。

这里产生一个问题，是否还有某些不依赖第十三节所列举的公理，可以将它充实到欧氏几何或罗氏几何中去，从而为证明新的定理开辟道路。用补充新的独立公理的办法是否可以无限地扩充公理体系？如果这样的补充有可能的话，那么这种新的、公理系被扩展了的几何模型比起先前的公理系没有扩展的几何模型来将是怎样地丰富和卓有成效呢？

对于各种公理系都可以提出这样的问题。对于这类问题的回答，涉及到公理方法的论证，这已超出本书的范围。在这里我们只指出一点，这类问题的进一步研究给予数学一个重要而有意义的部门——数理逻辑的发展以巨大的推动。数理逻辑是研究建立正确的逻辑推理的一门科学。在现代，这门科学获得了极为迅速的发展，在控制论中得到广泛的应用。

[G e n e r a l I n f o r m a t i o n]
书名＝奇妙和几何世界
作者＝
页数＝１３３
ＳＳ号＝１００６８５２１
出版日期＝