13.3 二元函数的极限和连续性

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

习题

1. 用重极限的定义证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)}(x^2-4xy-3y^2)=9$.

证明. 对于任一给定的 $\epsilon>0$, 取 $\delta=\min\{1,\epsilon/34\}$, 则当 $(x,y)\in U^\circ((2,-1);\delta)$ 时, 有 $|x|<3, |y|<2, |y-1|<3, |x-2|<\epsilon/34, |y+1|<\epsilon/34$ 成立, 且

$$\begin{aligned}|x^2-4xy-3y^2-9| &= |x^2-4-3(y^2-1)-4(x-2)y-8(y+1)|\\ &= |(x-2)(x+2)-3(y-1)(y+1)-4y(x-2)-8(y+1)|\\ &\leqslant |x-2|(|x|+2)+3|y+1||y-1|+4|y||x-2|+8|y+1|\\ &\leqslant 5|x-2|+9|y+1|+8|x-2|+8|y+1|\\ &\leqslant 17(|x-2|+|y+1|)<\epsilon.\end{aligned}$$

根据重极限定义即可得到 $\lim\limits_{(x,y)\to(2,-1)}(x^2-4xy-3y^2)=9$. ∎

2. 求下列重极限

(1) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}$;　　(2) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}$;

(3) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;　　(4) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2+y^2}{1-\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}}$.

解: (1) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 有 $r\to0$, 则

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{1+x^2+y^2}=\lim_{r\to0}\frac{r^2}{1+r^2}=0.$$

(2) 因为当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,

$$0\leqslant\frac{x^2y^2}{x^2+y^2}\leqslant\frac{x^2y^2}{2|x|2|y|}=\frac{|xy|}{2}\to0,\quad((x,y)\to(0,0)),$$

故由破敛性, 得 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2}=0$.

(3) 令 $x^2+y^2=t$, 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 有 $t\to0$, 则由第一类极限有,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}=\lim_{t\to0}\frac{\sin t}{t}=1.$$

(4) 令 $x=r\cos\theta, y=r\sin\theta$, 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时, 有 $r\to 0$, 则

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2+y^2}{1-\sqrt{(1+x^2)(1+y^2)}} &= \lim_{r\to 0}\frac{r^2}{1-\sqrt{1+r^2+r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}}\\ &= \lim_{r\to 0}\frac{r^2(1+\sqrt{1+r^2+r^4\sin^2\theta\cos^2\theta})}{-r^2-r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}\\ &= \lim_{r\to 0}\frac{1+\sqrt{1+r^2+r^4\sin^2\theta\cos^2\theta}}{-1-r^2\sin^2\theta\cos^2\theta}\\ &= -2\end{aligned}$$

□

3. 讨论当 $(x,y)\to(0,0)$ 时函数 $f(x,y)$ 的重极限和累次极限:

(1) $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$; (2) $f(x,y)=(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$;

(3) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}$; (4) $f(x,y)=\dfrac{x^2y^2}{x^3+y^3}$.

解: (1) 函数 $f(x,y)$ 的定义域是 $\mathbb{R}^2$ 中 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$ 的点. 任意取定一个数 k. 取 $A=\{(x,y)|y=kx\}$. 则

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y)=\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=kx}}\frac{xy}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{k}{1+k^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

其极限值依赖于 k, 根据推论**??** 即知重极限不存在.

易见原点是这个函数定义域的聚点, 且容易算出该函数在原点处的两个累次极限:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{xy}{x^2+y^2}=0.$$

(2) 因为

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)=0,$$

而

$$|\sin\frac{1}{x}+\sin\frac{1}{y}|\leqslant 1,$$

所以重极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}=0.$$

而累次极限

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

与

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}(x+y)\sin\frac{1}{x}\sin\frac{1}{y}$$

均不存在, 这是因为当 $x\neq 0$ 时, $\lim\limits_{y\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在; 当 $y\neq 0$ 时, $\lim\limits_{x\to 0}(x+y)\sin\dfrac{1}{x}\sin\dfrac{1}{y}$ 不存在, 当然累次极限也都不存在.

(3) 函数 $f(x,y)$ 的定义域是 $\mathbb{R}^2$ 中 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$ 的点. 取 $A=\{(x,y)|y=x\}$, $B=\{(x,y)|y=0\}$. 则

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}\\ &= \lim_{x\to 0} 1 = 1;\\ \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=0}} \frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2} = 0.\end{aligned}$$

根据推论**??** 即知重极限不存在.

易见原点是这个函数定义域的聚点, 且容易算出该函数在原点处的两个累次极限:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^2y^2+(x-y)^2}=0.$$

(4) 函数 $f(x,y)$ 的定义域是 $\mathbb{R}^2$ 中 $x\neq 0$ 且 $y\neq 0$ 的点. 取 $A=\{(x,y)|y=x\}$, $B=\{(x,y)|y=-x+x^2\}$. 则

$$\begin{aligned}\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in A}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=x}} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^3} = 0;\\ \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in B}} f(x,y) &= \lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\y=-x+x^2}} \frac{x^2y^2}{x^3+y^3}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2-2x+1}{x^2-3x+3} = 1/3.\end{aligned}$$

根据推论**??** 即知重极限不存在.

易见原点是这个函数定义域的聚点, 且容易算出该函数在原点处的两个累次极限:

$$\lim_{x\to 0}\lim_{y\to 0}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=0,$$

$$\lim_{y\to 0}\lim_{x\to 0}\frac{x^2y^2}{x^3+y^3}=0.$$

□

4. 叙述下列极限的定义

(1) $\lim\limits_{x\to x_0,y\to y_0} f(x,y)=\infty$; (2) $\lim\limits_{x\to\infty,y\to\infty} f(x,y)=A$.

解: (1) 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个点集, $f(x,y)$ 是定义在 D 上的二元函数, $P_0(x_0,y_0)$ 是 D 的一个聚点. 如果对于任给的正数 M, 总存在正数 δ, 使得当 $P(x,y)\in U^\circ(P_0;\delta)\cap D$ 时, 都成立

$$|f(x,y)|>M,$$

则称 $f(x,y)$ **在 D 上当 $P(x,y)$ 趋向于 $P_0(x_0,y_0)$ 时, 以 ∞ 为极限**, 记为

$$\lim_{\substack{P\to P_0\\ P\in D}} f(x,y)=\infty \quad 或 \lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ (x,y)\in D}} f(x,y)=A.$$

在不会引起混淆的情况下, 也可以分别记为

$$\lim_{P\to P_0} f(P)=\infty \quad 或 \quad \lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\infty, \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}} f(x,y)=\infty.$$

(2) 设 D 是 $\mathbb{R}^2$ 的一个点集, f 是定义在 D 上的二元函数, 设 A 是一个确定的实数, 如果对于任给的正数 ϵ, 总存在正数 M, 使得当 $(x,y)\in\{(x,y)\in D\big||x|>M,|y|>M\}$ 时, 都成立

$$|f(P)-A|<\epsilon,$$

则称 f **在 D 上当 x 趋向于 ∞ 且 y 趋向于 ∞ 时, 以 A 为极限**, 记为

$$\lim_{\substack{x\to\infty,y\to\infty\\ (x,y)\in D}} f(x,y)=A.$$

□

5. 指出下列二元函数的不连续点, 并说明理由

(1) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{x+y}, & x+y\neq 0,\\ 0, & x+y=0;\end{cases}$ (2) $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0),\\ 0, & (x,y)=(0,0).\end{cases}$

解: (1) 先考虑 f 关于点集 $\{(x,y)\big|x+y\neq 0\}$ 的连续性:

任取点 $(x_0,y_0)\in\{(x,y)\big|x+y\neq 0\}$, 则由

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{x}{x+y}=\frac{x_0}{x_0+y_0}=f(x_0,y_0),$$

知 $f(x,y)$ 在 $x+y\neq 0$ 上每一点都连续.

再考虑 f 关于点集 $\{(x,y)\big|x+y=0\}$ 的连续性:

(i) 原点 $(0,0)$ 处:

当点 (x,y) 沿直线 $y=x$ 趋于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x}}\frac{x}{x+y}=\frac{1}{2},$$

当点 (x,y) 沿曲线 $y=x^2$ 趋于 $(0,0)$ 时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=x^2}}\frac{x}{x+y}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{x+x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}=1,$$

故 $f(x,y)$ 在原点 $(0,0)$ 处不连续.

(ii) 非原点处:

任取点 $P_0(x_0,y_0)\in E=\{(x,y)\big|x+y=0,x\neq 0且y\neq 0\}$,

当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 (x_0,y_0) 时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y=kx}}\frac{x}{x+y}=\lim_{x\to x_0}\frac{x}{x+kx}=\frac{1}{1+k},$$

其极限值依赖于 k, 故 $f(x,y)$ 在 $E=\{(x,y)\big|x+y=0\ x\neq 0,y\neq 0\}$ 上不连续.

综上所述， $f(x,y)$ 的不连续点直线 $x+y=0$ 上.

(2) 先考虑原点处的连续性：

当点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 (x_0,y_0) 时,

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(x_0,y_0)\\ y=kx}}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2-k^2x^2}{x^2+k^2x^2}=\frac{1-k^2}{1+k^2},$$

其极限值依赖于 k, 故 $f(x,y)$ 在原点处不连续.

再考虑非原点处的连续性：

对任意点 $(x_0,y_0)\in E=(x,y)\mathbb{R}^2\big|x\neq 0且y\neq 0$, 由

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}=\frac{x_0^2-y_0^2}{x_0^2+y_0^2}=f(x_0,y_0).$$

知, $f(x,y)$ 在非原点处都连续.

综上所述， $f(x,y)$ 的不连续点在原点处.

□

6. 证明: 若二元函数 f 在点集 D 上连续, 则其在 D 的任何子集上也是连续的.

证明. 不妨设 $I\subset D$ 且 I 非空, 对任意点 $P_0\in I$, 下证 f 在点 P_0 处连续.

事实上, 因为 $P_0\in I\subset D$, 故 $P_0\in D$, 而 f 在 D 上连续，故 f 在 P_0 处连续, 又由 P_0 的任意性可知, f 在 I 上连续. ∎

---

7. 设 $f(x,y)$ 在区域 D 内对 x 连续, 对 y (关于 x) 一致连续, 证明 f 在 D 内连续.

证明. 即证明对 $P_0(x_0,y_0)\in D, f$ 在点 P_0 处连续.

事实上, 由于 $f(x,y)$ 在区域 D 内对 x 连续, 故对上述的 x_0, 对任给的 $\epsilon>0,\exists\delta_1>0$, 使得当 $|x-x_0|<\delta_1$ 时, 总有

$$|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|<\frac{\epsilon}{2} \tag{1}$$

由于 $f(x,y)$ 在区域 D 内对 y (关于 x) 一致连续, 则对上述的 $\epsilon,\exists\delta_2>0$, 使得只要 $|y-y_0|<\delta_2$, 总有

$$|f(x,y)-f(x,y_0)|<\frac{\epsilon}{2} \tag{2}$$

取 $\delta=\min\{\delta_1,\delta_2\}$, 则对上述的 ϵ, 当 $|x-x_0|<\delta$ 且 $|y-y_0|<\delta$ 时, 由公式 (1), (2), 总有

$$\begin{aligned}|f(x,y)-f(x_0,y_0)| &= |f(x,y)-f(x,y_0)+f(x,y_0)-f(x_0)|\\ &\leqslant |f(x,y)-f(x,y_0)|+|f(x,y_0)-f(x_0,y_0)|\\ &< \frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon\end{aligned}$$

由二元函数的连续性可知, f 在点 P_0 处连续, 又有 P_0 的任意性, f 在 D 内连续. ∎

8. 证明: 若 f 在 $\mathbb{R}^2$ 中每一点都连续且 $\lim\limits_{\|P\|\to\infty}f(P)$ 存在且有限, 则 f 在 $\mathbb{R}^2$ 中一致连续.

证明. 由 $\lim\limits_{\|P\|\to\infty} f(P)$ 存在且有限, 不妨设 $\lim\limits_{\|P\|\to\infty} f(P) = A < \infty$, 由极限的定义, 对任给的 $\epsilon > 0$, $\exists M > 0$, 使得当 $P \in D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \sqrt{x^2+y^2} > M\}$, 总有

$$|f(P) - A| < \frac{\epsilon}{2} \tag{1}$$

于是, 对于任给的点 $P_1(x_1,y_1), P_2(x_2,y_2) \in D_1$, 由公式 (1), 总有

$$\begin{aligned} |f(P_1) - f(P_2)| &= |f(P_1) - A + A - f(P_2)| \\ &\leqslant |f(P_1) - A| + |f(P_2) - A| \\ &< \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon; \end{aligned}$$

又 f 在有界区域 $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \big| \sqrt{x^2+y^2} \leqslant M+1\}$ 上连续, 从而一致连续, 即对上述的 ϵ, $\exists \delta \in (0,1)$, 对 $\forall P_1, P_2 \in D_2$, 只要 $||P_1P_2|| < \delta$, 就有

$$|f(P_1) - f(P_2)| < \epsilon \tag{2}$$

对 $\forall P_1, P_2 \in \mathbb{R}^2$, 只要 $||P_1 - P_2|| < \delta$, 则 P_1, P_2 同属于 D_1 或同属于 D_2, 进而由公式 (1), (2), 总有

$$|f(P_1) - f(P_2)| < \epsilon$$

由一致连续的定义, f 在 $\mathbb{R}^2$ 中一致连续.

∎

9. 设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 有界, $f(x,y)$ 在 D 上连续且对于任意的 $P \in D'$, $\lim\limits_{Q\to P,\, Q\in D} f(Q)$ 存在, 证明 f 在 D 上一致连续.

证明. (反证法) 假设 f 在 D 上不一致连续, 则 $\exists_0 > 0$, 对 $\forall \delta > 0$, $\exists P_1', P_2' \in D$, 使得当 $\|P_1' - P_2'\| < \delta$ 时, 有

$$|f(P_1') - f(P_2')| > \epsilon_0 \tag{1}$$

令 $\delta = 1/k$, 得到两个点列 $\{P_k\}, \{P_k'\} \subset D$, 因为 D 有界, 由致密性定理, $\exists \{P_k\}, \{P_k'\}$ 的两个收敛子列 $\{\tilde{P}_k\}, \{\tilde{P_k'}\}$, 不妨设

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{P}_k = A, \qquad \lim_{k\to\infty} \tilde{P_k'} = B,$$

下证 $A = B$,

显然, $A \in D'$, 且 $\{\tilde{P}_k\}, \{\tilde{P_k'}\}$ 是 D 中子列, 且满足 (1) 式.

对 $\forall \delta > 0$, 当 k 充分大时, $\{\tilde{P}_k\}, \{\tilde{P_k'}\} \in U(A,\delta) \cap D$, 且满足 $|\{\tilde{P}_k\} - \{\tilde{P_k'}\}| < \delta$, 有

$$|f(\tilde{P}_k\}) - f(\{\tilde{P_k'}\})| \geqslant \epsilon_0$$

利用极限存在的 Cauchy 准则的否定形式可知, $\lim\limits_{P_k\to A} fP_k$ 不存在, 这与已知矛盾, 故假设不成立. ∎

10. 设 $f(x,y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 中连续, 如果 $\lim\limits_{\|P\|\to\infty} f(P) = +\infty$, 则 $f(x,y)$ 有最小值; 如果 $\lim\limits_{\|P\|\to\infty} f(P) = -\infty$, 则 $f(x,y)$ 有最大值.

证明. 由 $\lim\limits_{\|P\|\to+\infty} f(P) = +\infty$ 得, 对 $\forall M > 0, \exists G_M$, 使得对 $\forall P \in D_M = \{\|D\| > G_M\}$, 有

$$f(P) > M$$

故不妨设存在点 $P_0(x_0, y_0)$, 使得 $M_0 = f(P_0) > 0$, 对上述 M_0 存在 $G_0 \triangleq \max\{\|P_0\| + 1, G_{M_0}\} > \|P_0\|$, 使得 $\forall P \in A = \{p \in \mathbb{R}^2 | \|P_0\| > G_0\}$

$$f(P) > M_0 \tag{1}$$

由 $f(x, y)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上连续, 则 $f(x, y)$ 在 $\bar{B} = \bar{O}(o, \|P_0\| + \frac{1}{2})$ 上连续，故在 $\bar{B}$ 上存在上的最小值 $f(P_0')$, 又由 $P_0 \in \bar{B}$ 得:

$$f(P_0') < f(P_0) \tag{2}$$

最后, 注意到 $A \cup B = \mathbb{R}^2$, 由 (1), (2) 可知 $\forall P \in \mathbb{R}^2$, 有 $f(P_0') < f(P_0)$ 结论得证. ∎