考试点 kaoshidian.com 考试就来点一点

全国硕士研究生入学考试

华东师范大学数学系《数学分析》考点精讲及复习思路

主讲老师：王延庚

目　录

绪　论

一、数学分析在数学系本科中的地位

1. 数学分析、解析几何、高等代数俗称为数学系本科生的三高. 拓扑学、泛函分析、抽象代数俗称为数学系研究生的三高. 数学分析学习得好与不好,不但决定了其它数学课学得好与不好,也确定了你考上研究生后起跑线的前后. 因此,同学们复习好数学分析,不仅仅是要考上研究生,更重要的是考上研究生后,能够胜任研究生阶段的学习.

2. 数学分析 300 课时左右(三学期),解析几何 100 课时左右(一学期),高等代数 200 课时左右(二学期),其它课程也就是一学期 60 - 80 个课时. 这是权威的课时安排. 不是一个院系或某个人的教学安排. 是长期教学实践的结果. 从这个课时的分布也可以看出数学分析在整个数学系本科教育中的地位和影响.

3. 正因为以上所述,数学分析成为考研的两门基础课之一. 换句话说,数学分析决定了你是否有机会进一步深造的可能性.

二、数学分析的主要内容

$$\text{数学分析}=\begin{cases}\text{一元数学分析}\\ \text{多元数学分析}\end{cases}$$

$$\text{一元数学分析}\begin{cases}\text{极限论}\\ \text{微分论}\\ \text{积分论}\\ \text{级数论}\end{cases}$$

$$\text{多元数学分析}\begin{cases}\text{多元极限论}\\ \text{多元微分论}\\ \text{多元积分论}\end{cases}$$

多元数学分析以一元数学分析为基础,一元数学分析以极限论为基础. 七大块之间相互有关系,形成一个有机的统一体.

三、数学分析考研辅导的指导思想

1. 基础分占到 60% 左右,技能分 40% 左右.

2. 在保证基础分的情况下,提高技能分.

3. 辅导的指导思想:

对定义有感性的认识(即几何直观);

深刻理解不同定义间的主要联系(即定理);

掌握分析问题的方法(即解题思路).

四、教材和课程设计

1. 关于教材

教材:《数学分析》第四版

编者:华东师范大学数学系

出版:高等教育出版社

2. 课程设计

整个课程由三个阶段组成:

第一阶段:《考点精讲及复习思路》(50 课时左右)

目标:力保百分之 60 到 70 的基本分.

方法:按考点之间的联系展开,以高频考点为精讲对象,通过典型例题深入提.

第二阶段:《名校真题解析及典型题精讲精练》(40 课时左右)

目标:百分之 30 到 40 的技能分.

方法:通过近几年名校经典试题的分析,加深对重要定理的理解,熟练地掌握典型问题中的一些常规的技能和技巧.

第三阶段:《冲刺大串讲及模拟四套卷精讲》(20 课时左右)

目标:稳固第一阶段和第二阶段的成果,从整体上把握数学分析的基本思想和解题技能,力争在考研中取得高分.

方法:以极限为主线,提炼数学分析七大部分的精华;通过四套模拟卷的精讲,再现典型问题中解决问题的典型方法.

五、授课对象

1. 准备报考数学专业研究生的同学

2. 准备报考数学一类且想取得高分的同学

寄语

数学分析,对老师和学生来说,都是数学系中最具挑战性的一门基础专业课. 我将尽我最大的努力,把近三十年对数学分析的理解贯穿在整个的教学之中. 希望通过本课程三个阶段这个阶段学习,让同学们从害怕数学分析到喜欢数学分析,从支离破碎的概念到从整体上把握数学分析的基本思想和基本内容,从做题无处下手到遇题不慌,沉着迎战的良好心理状态.

我相信,在我们共同努力下,同学们一定会在数学分析方面取得长足的进步,在考研中取得理想的成绩.

第一部分　一元数学分析

第一篇　极限论

第 1 章　数列的极限

第 2 章　函数的极限

第 3 章　函数的连续性

第 4 章　实数的完备性

极限论的总结

第 1 章　数列的极限

一、本章考情分析

极限分为数列极限和函数极限. 数列极限从形式来看要比函数极限简单,便于掌握. 它是学习函数极限的基础. 这章是历年考研的热点之一. 从形式上看有选择题、填空题、计算题和证明题. 分值从几分(选择题和填空题)到 10 多分(计算题和证明题)不等,题的难度从低到高都有. 对极限思想的理解和几何直观是本章的难点.

要求:

1. 会应用本章的四种方法求极限或证明极限等式.

2. 会应用数列极限的基本性质做证明题.

二、本章基本内容

1. 数列的极限

2. 上(下)确界

3. 相关定理

三、本章要点精讲

(一)基本定义和概念:

要点 1:数列及子列的概念;

要点 2:数列极限的分析定义及几何定义;

要点3:数集的上(下)确界;

(1)上确界的定义

设S为一个非空数集.若数η满足条件:

(ⅰ)对一切$x\in S$,有$x\leqslant\eta$,即η是S的一个上界;

(ⅱ)对任何$\alpha<\eta$,存在$x_0\in S$,使得$x_0>\alpha$,即η又是S的最小上界,则称η为数集的S上确界,记作$\eta=\sup S$

(2)下确界的定义

设S为一个非空数集.若数ξ满足条件:

(ⅰ)对一切$x\in S$,有$x\geqslant\xi$,即ξ是S的一个下界;

(ⅱ)对任何$\beta>\xi$,存在$x_0\in S$,使得$x_0<\beta$,即ξ又是S的最大下界,则称ξ为数集的S下确界,记作$\xi=\inf S$

上确界和下确界统称为确界.

(3)确界的基本性质

①$\inf S\leqslant\sup S$;

②确界是唯一的;

③最大(小)值是上(下)确界,反之不成立;

④$\eta=\sup S\in S\Leftrightarrow\eta=\max S,\xi=\inf S\in S\Leftrightarrow\xi=\min S$

(4)确界原理

设S是非空的数集,若S有上界,则S有上确界;若S有下界,则S有下确界.

确界原理是实数完备性七个等价定理之一.其他六个都可以由它直接或间接推出.因为确界原理来源于分析学的基础,即实数理论.本教材是讲数学分析的,所以没有要求同学们知道它的证明过程.故给它起名确界原理而没有用定理二字.定理是需要证明的,而原理是可以不给予证明的,只需要承认它就可以了.

确界原理告诉我们:有上(下)界的非空数集不一定有最大(小)值,但一定有上(下)确界.确界实质上是最(大,小)值的推广.

规定:若S没有上界,则$\sup S=+\infty$;若S没有下界,则$\inf S=-\infty$.在这样的规定下,我们可以将确界原理推广为:

(5)广义确界原理

若S是非空的数集,则S有上、下确界.

要点4:唯一性定理

若数列$\{a_n\}$收敛,则它只有一个极限.

要点5:有界性定理

若数列$\{a_n\}$收敛,则它为有界数列.

要点6:保号性定理

若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$(或$<0$),则对任意的$a'\in(0,a)$(或$a'\in(a,0)$),存在正整数$N$,使得当$n>N$时,

有 $a_n > a'$ (或 $a_n < a'$).

要点 7:保号性定理的推论

若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$,且 $a<b$,则存在正整数 N,使得当 $n>N$ 时,有 $a_n<b_n$.

要点 8:保不等式性

设 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 为收敛的数列. 若存在正整数 N_0,使得当 $n > N_0$ 时,有 $a_n \leqslant b_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} b_n$.

要点 9:迫敛性,又名夹击法

设数列 $\{a_n\}$ 和数列 $\{b_n\}$ 均收敛于 a,数列 $\{c_n\}$ 满足条件:存在正整数 N_0,当 $n>N_0$时,有 $a_n \leqslant c_n \leqslant b_n$,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$. 则数列 $\{c_n\}$ 收敛,且 $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = a$.

注:这是求极限的重要方法之一,是求极限的第三种方法(前两个分别是按极限的定义,按运算公式). 重点是考生要对常见的数列极限(对应定理中的 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$)熟悉.

要点 10:数列和子列收敛的关系

数列 $\{a_n\}$ 收敛于 a 的充分必要条件是:它的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛于 a.

注:此定理经常用来证明数列的极限不存在.

上述定理的变形

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充分必要条件是:它的任意子列 $\{a_{n_k}\}$ 也收敛.

分析:这只需要证明所有的子列均收敛于同一个值即可.

$\{a_{n_k}\}$ 和 $\{a_{n_l}\}$ 是两个子列. 我们可以将他们拼成一个新子列 $\{a_{n_m}\}$. $\{a_{n_k}\}$ 和 $\{a_{n_l}\}$ 是 $\{a_{n_m}\}$ 的子列,故 $\{a_{n_k}\}$ 和 $\{a_{n_l}\}$ 的极限相同.

要点 11:单调有界定理

单调有界的数列必有极限.

(1)作为应用,我们知道 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$ 存在,将此极限记为 e,以其为底的对数称作自然对数,记作 $\ln x$.

(2)反例

要点 12:致密性定理

有界的数列必有收敛的子列.

致密性定理是单调有界定理的弱化,即条件减弱,结论也减弱.

要点 13:柯西条件的定义

设 $\{a_n\}$ 是一个数列. 如果对任意的 $\varepsilon > 0$,存在正整数 N,使得当 $m,n>N$ 时,有 $|a_m - a_n| < \varepsilon$,则称数列 $\{a_n\}$ 满足柯西条件.

要点 14:柯西收敛准则

数列 $\{a_n\}$ 收敛的充要条件是满足柯西条件.

注:单调有界定理和柯西收敛准则均是用来证明极限存在的定理,并没有告诉极限是什么. 尽管

如此,它也蕴含着第四种求极限的方法:先证明极限的存在,再求极限.

(二)总结求极限的方法:

方法1:按定义证明极限等式

[1-1] 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$

下面的5道题是书上 $P24\sim P26$, $P31$ 的例题. 它们是这一类题的标准模式. 希望同学们能认真研读它们,并将结果当定理记下来.

a)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^\alpha}=0$,这里 α 是正数.

b)证明 $\lim\limits_{n\to\infty} q^n=0$,这里 $|q|<1$.

c)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1$,其中 $a>0$.

d)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a^n}{n!}=0$.

e)证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

[1-2] 利用[1-1]证明下列等式:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}}{n}=0$;

b. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}+\cdots+\sqrt[n]{n}}{n}=1$;

c. 若 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-a_{n-1})=d$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{n}=d$

利用[1-1]的思想,我们也可以证明:

[1-3] 已知极限 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 且 $a_n>0\ (n=1,2,\cdots)$.

证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}=a$

此题留给同学们做课后练习. 我们会在后继课程中给予答案.

方法2:根据极限运算公式求极限

[1-4] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^n}}{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3^2}+\cdots+\dfrac{1}{3^n}}$

[1-5] 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{2}\sqrt[4]{2}\sqrt[8]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2})$

方法3:利用夹击法求极限

[1-6] 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\dfrac{1}{(2n)^2}\right)=0$

[1-7] 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n^2+n}}\right)=1$

[1-8] 设 $a_1, a_2,\cdots,a_m$ 为 m 个正数,证明:

$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1{}^2+a_2{}^2+\cdots+a_m{}^2}=\max\{a_1,a_2,\cdots,a_m\}$

留给同学做练习,将在后继课程中给予答案

方法4:先证明极限存在,再求极限

[1-9] 设 $a_1=\sqrt{2}$, $a_{n+1}=\sqrt{2a_n}$, $n=1,2,\cdots$,求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$

[1-10] 给定两正数 a_1 和 $b_1(a_1<b_1)$,做出等差中项 $a_2=\dfrac{a_1+b_1}{2}$

与等比中项 $b_2=\sqrt{a_1b_1}$. 一般地令 $a_{n+1}=\dfrac{a_n+b_n}{2}$, $b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}$, $n=1,2,\cdots$,证明:$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 和 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n$ 皆存在且相等.

与上道题类似的是下边的[1-11],留给同学们思考. 我们将在以后的后继课程中给出答案.

[1-11] 设 $a_1>b_1>0$,记 $a_n=\dfrac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2}$, $b_n=\dfrac{2a_{n-1}b_{n-1}}{a_{n-1}+b_{n-1}}$, $n=2,3,\cdots$,证明 $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 的极限都存在且等于 $\sqrt{a_1b_1}$.

最后,我们讲一讲怎样证明数列极限不存在. 这类题一般用(1)柯西收敛准则;或(2)数列收敛的充分必要条件:每个子列都收敛(且收敛于同一个值).

[1-12] 证明数列 $\left\{(-1)^n\dfrac{n}{n+1}\right\}$ 发散.

[1-13] 证明数列 $\{a_n\}$ 发散,这里 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$, $n=1,2,\cdots$

四、本章名校经典试题回顾

[1-14](华东师范大学,2003 年,二,(1),5 分)

判别题(正确的说明理由,错误的举出反例)

若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{x_n}=0$.

[1-15](华中师范大学,2011 年,一,(1),8 分)

设 $x_1\in(0,\dfrac{\pi}{2})$, $x_{n+1}=\sin x_n$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=0$.

[1-16](首都师范大学,2009 年,一,(1),8 分)

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n})$.

[1-17](书本上的习题,首都师范大学,2005 年,四,10 分)

若 $a_n>0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=l>1$. 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

[1-18](复旦大学,1999 年,三,10 分)

求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdots(2n)}$

五、本章小结

1. 截至目前,我们介绍了求极限的四种方法. 随着课程的进行,还会有别的求极限的方法;

2. 要记住一些常见的求和公式. 这些公式在求极限时起着非常重要的作用. 例如:

$$(a+b)^n = \sum_{i=0}^{n} C_n^i a^i b^{n-i} \qquad 1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1^2+2^2+\cdots+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \qquad 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1} = \frac{1-q^n}{1-q}$$

3. 要记住一些常见的数列极限. 这些极限在求别的极限时会用到的;

4. 对极限的基本性质要几何直观,不能死记硬背.

5. 在下一章中,我们会看到数列极限的性质在函数极限中都有对应的定理. 因此对数列极限的理解和掌握直接影响对函数极限的学习.

第2章　函数的极限

一、本章考情分析

我们可以把一个数列看成是一个定义域为全体正整数集合上的函数. 因此数列极限可以看成是特殊的函数极限. 反之,通过海涅定理,函数的极限问题可以转换为数列的极限问题. 从形式上看,函数极限要比数列极限复杂. 但本质是一样的:它们都是用来描述当自变量趋于某值(包含∞,$+\infty$和$-\infty$)时,函数随自变量的趋近状态.

求函数极限或证明函数极限存在是考研的热点之一. 题型从填空题、选择题、计算题到证明题. 考分从几分到十几分都可能出现.

要求:

1. 会用定义或公式求函数极限或证明函数极限存在;

2. 根据极限(或左、右侧极限)存在求参数;

3. 利用两个重要极限求函数极限(即求极限的第五种方法);

4. 利用等价无穷小量求极限(即求极限的第六种方法);

5. 掌握相关的基本定理,注意函数极限定理和和数列极限定理之间的对应关系.

二、本章基本内容

1. 函数极限的六种形式;

2. 函数极限的基本性质;

3. 两个重要极限;

4. 无穷小量和无穷大量;

三、本章要点精讲

要点1　函数极限的六种形式

a)自变量趋于某实数时

$\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$;$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$,$\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$

b)自变量趋于无穷大时

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$;$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$,$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$

注:能用 $\varepsilon-\delta$ 数学分析语言熟练地刻画上边六种极限是数学分析的基本功. 同学们应该把它们作为课后练习做一做.

六种极限间的关系:

$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$ 存在且相等

$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)$ 存在的充要条件是 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 存在且相等

[2-1] 讨论函数 $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$ 在 $x\to 0$ 时,极限或左、右侧极限.

要点 2　函数极限的基本性质

我们知道函数的极限有六种形式. 因此每一个函数极限的性质或者定理都有六种形式. 只要大家掌握函数极限的几何直观,这些形式上的问题不会成为学习中的拦路虎. 下边,我们将以 $x\to x_0$ 为例,阐述函数极限的基本性质和定理.

1)海涅定理

设 f 在 $U^0(x_0,a)$ 内有定义. $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在的充分必要条件是:对任何含于 $U^0(x_0,a)$ 且以 x_0 为极限的数列 $\{x_n\}$,极限 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)$ 都存在(且相等).

注 1:海涅定理是数列极限和函数极限之间的桥梁. 此定理蕴含着函数极限的问题均可转换为数列极限的问题. 这也是我们一再强调数列极限重要性的原因之一.

注 2:海涅定理对应数列极限定理中的“数列和子列收敛的关系”定理.

注 3:利用海涅定理可以证明函数极限不存在, 见下边的例题.

[2-2]证明 $\lim\limits_{x\to+\infty}\cos x$ 不存在.

[2-3]证明:若 f 为周期函数,且 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=a$,则对任意的 $x\in R$,$f(x)=a$,即 f 为常值函数且取值为 a.

2)唯一性定理

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则此极限是唯一的.

3)局部有界性

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在,则 f 在 x_0 的某空心领域 $U^0(x_0)$ 内有界.

4)局部保号性

若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A>0(<0)$,则对任意的 $r\in(0,A)$(或 $r\in(A,0)$),存在 x_0 的某空心领域 $U^0(x_0)$,使得对一切 $x\in U^0(x_0)$,有 $f(x)>r>0$(或 $f(x)<r<0$).

注:类似与数列极限,这里也有一个推论,书中没有提到。

5)保不等式性

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$ 都存在,且在 x_0 的某空心领域 $U^0(x_0)$ 内有

$f(x)\le g(x)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$.

6)迫敛法,又名夹击法

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$,且在 x_0 的某空心领域 $U^0(x_0)$ 内有 $f(x)\le h(x)\le g(x)$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$.

7)单调有界定理

若 f 在 $U_{+}^{0}(x_0)$ 上单调有界,则 $\lim\limits_{x\to x_0^{+}} f(x)$ 存在.

8)柯西收敛准则

设 f 在 $U^0(x_0,a)$ 上有界,则 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在的充分必要条件是:任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta<a$,使得对任意的 x',$x''\in U^0(x_0,\delta)$,有 $|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$.

注:上述这些定理除过书上给出的证明外,还可以海涅定理给予证明.

数列极限性质和函数极限性质的对比图

数列极限	函数极限
数列和子列的收敛关系	海涅定理
唯一性	唯一性
有界性	局部有界性
保号性	局部保号性
保不等式性	保不等式性
夹击性	夹击法
四则运算	四则运算
数列的单调有界定理	单侧极限的单调有界定理
柯西收敛准则	柯西收敛准则

需要强调的是关于数列求极限的四种方法,即根据定义,根据公式,夹击法,已知极限存在求极限同样也适用于求函数极限.

[2-4]求出满足下述条件的常数 a 与 b,$\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2+1}{x+1}-ax-b\right)=0$.

要点3. 两个重要的极限

a). $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 变形:$\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

b). $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=e$. 变形:$\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

利用两个重要极限求极限是考研的热点之一. 通常以选择题和填空题形式出现. 只要大家掌握规律,会转换形式,这种分是容易拿到手的. 这也是我们求极限的第五种方式.

[2-5]求极限 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\arctan x}{x}$.

分析:只要是分式,有 $\sin x$ 和 x 出现,待定型,一般都可以使用重要极限方法.

[2-6]求极限 $\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)^{\frac{1}{x}}$.

分析:只要是形如的 $\left(1+\dfrac{1}{\infty}\right)^{\infty}$ 极限式,大部分情况下都可以使用两个重要极限中的第二个.

要点4. 无穷大量和无穷小量

为说话方便,我们约定 $\lim f(x)$ 代表六种极限中的任意一种.

当 $\lim f(x)=0$ 时,我们就说 f 是在自变量趋近某值时的无穷小量.

例如:如果 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$,我们就说 f 是 $x\to-\infty$ 时的无穷小量.注意无穷小量是一个变量,而非一个非常小的值.

当 $\lim f(x)=\infty,(+\infty,-\infty)$ 时,我们就说 f 是在自变量趋近某值时的(正,负)无穷大量.

例如:如果 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=+\infty$,我们就说 f 是 $x\to\infty$ 时的正无穷大量.注意无穷大量是一个变量,而非一个非常大的值.

为了比较同一状态下(即自变量趋近同一个值)两个无穷小量收敛于零的速度大小,我们引进下列概念.为方便起见,我们以 $x\to x_0$ 为例.

设 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=0$

a)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0$,则称当 $x\to 0$ 时,f 为 g 的高阶无穷小量,或 g 为 f 的低阶无穷小量,记作 $f(x)=o(g(x))(x\to x_0)$;

b)如果存在正数 K 和 L,使得在 $U^0(x_0)$ 上有 $K\le\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|\le L$,则称 f 和 g 为当 $x\to 0$ 时的同阶无穷小量.特别当 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=c\neq 0$ 时,f 和 g 为当 $x\to 0$ 时的同阶无穷小量;

c)如果 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=1$,则称当 $x\to 0$ 时,f 为 g 的等价无穷小量,记作 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$.

对等价无穷小量,我们可以用来替换求极限,即第六个求极限的方法.

乘除替换定理

设函数 f,g,h 在 $U^0(x_0)$ 上有定义,且 $f(x)\sim g(x)(x\to x_0)$,则

a)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)h(x)=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)h(x)=A$;

b)若 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{f(x)}=A$,则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{h(x)}{g(x)}=A$;

注:此方法只对乘、除运算起作用,对加、减失效,希望同学们慎重使用.

[2-7]求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x\arctan\dfrac{1}{x}}{x-\cos x}$.

分析: $\arctan\dfrac{1}{x}\sim\dfrac{1}{x}(x\to\infty)$

四、名校经典试题回顾

[2-8](课本上的习题,华东师大,2009,一,(1))

判断下列说法是否正确: $\lim\limits_{x\to a}g(x)=A$, $\lim\limits_{y\to A}f(y)=B$,此处 a, A, B 均为实数,则 $\lim\limits_{x\to a}f(g(x))=B$.

分析:这道题是用来考察函数极限定义的.

[2-9](课本上的习题,湖北大学 2001 年,天津大学 1998 年)

设函数 f 在 $(0,+\infty)$ 上满足条件 $f(x)=f(2x)$,且 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$,证明 $f(x)=A$, $x\in(0,+\infty)$.

分析:考研的证明题不会简单到直接使用定理就可以得出证明.你一定要分析:目标,条件,目标

和条件之间的联系(即定理)

[2-10](华东师大,2004 年,一,1,10 分)

求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\cos)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$

五、本章小结

1. 函数极限有六种形式,因此每一个定理也有六种变形;同理无穷大量有十八种形式,每一个定理都有十八种变形. 应用数学分析语言(即 $\varepsilon-\delta$ 语言)描述上述定义和定理是学好数学分析的基本功.

2. 海涅定理是连接数列极限和函数极限的桥梁. 它可以使数列极限的基本性质和定理很容易地转换为函数极限的定理. 正因为如此,数列极限性质和函数极限的性质有着天然的对应关系.

3. 截止目前,我们已总结了六种求极限的方法:定义,公式,夹击法,极限方程,两个重要的极限,等价无穷小量替换. 随着课程的进行,还会有新的方法出现.

4. 第一章和第二章重要概念和定义的联络图.

随着课程的进行,我们的联络图将会逐渐丰富起来. 我们将同一章,同一篇,同一部分及整个数学分析的重要概念最终要在同一个联络图中体现出来. 一本书只有学到一页纸时,才是自家的学问!

第 3 章　函数的连续性

一、本章考情分析

连续函数是数学分析的主要研究对象. 初等函数均为连续函数. 本章的考点是判断连续点、间断点及间断点的分类,证明函数的一致连续性. 题型以证明题见多.

二、本章基本内容

1. 连续点及连续函数;

2. 间断点及其分类;

3. 闭区间上连续函数的性质.

三、本章要点精讲

要点 1. 连续点

a)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$(即极限号和函数符号可以交换顺序),则称 f 在 x_0 处连续.

b)若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$,则称 f 在 x_0 处右连续.

c)若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$,则称 f 在 x_0 处左连续.

f 在 x_0 处连续当且仅当 f 在 x_0 处左、右连续.

若 f 在定义域中的每一点处连续,则称 f 为连续函数.

初等函数为连续函数,所以让你证明一个函数是连续函数,这个函数绝对不会是初等函数,而是一些很特殊的函数,例如分段函数(像狄利克莱函数,黎曼函数)等等.

[3-1](教材 $P85$,4)

设 f 为 R 上的连续函数,常数 $c>0$. 记

$$F(x)=\begin{cases}-c, & 若 f(x)<-c\\ f(x), & 若 |f(x)|\le c\\ c, & 若 f(x)>c\end{cases}$$

证明 F 在 R 上连续.

要点 2 间断点及其分类

a)非连续点称作间断点;

b)若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 存在,但 $f(x_0)$ 没有定义,或有定义,但与极限值不相等,则称 x_0 为 f 的可去间断点.

c)若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)\neq\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,则称 x_0 为 f 的跳跃间断点.

d)可去间断点和跳跃间断点统称为第一类间断点,其他的间断点(即左、右侧极限至少有一个不存在)统称为第二类间断点.

[3-2](教材 $P75$,4)

指出下列函数的间断点并说明类型:

(1) $f(x)=x+\dfrac{1}{x}$;

(2) $f(x)=\operatorname{sgn}|x|$;

(3) $f(x)=\dfrac{\sin x}{|x|}$.

要点 3. 闭区间上连续函数的基本性质

1)有界性定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在闭区间上有界.

2)最大值和最小值定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 在闭区间上有最大值和最小值.

3)介值定理

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,μ 是 $f(a)$ 和 $f(b)$ 之间的一个值(不包含 $f(a)$ 和 $f(b)$),则存在 $c\in(a,b)$,使得 $f(c)=\mu$.

4)反函数的连续性

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上严格单调且连续,则反函数在 $[f(a),f(b)]$ 或 $[f(b),f(a)]$ 上连续.

5)一致连续性

若函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,则 $f(x)$ 是一致连续函数.

关于闭区间上连续函数的基本性质的考点往往是去掉闭性,加上一些条件,证明上述定理仍然成立. 例如下边的例子:

[3-3](教材 $P85$,6)

若 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上连续,且 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x)$ 存在,证明 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有界. 能否取到最大值和

最小值？是否是一致连续函数？

四、名校经典试题回顾

[3-4](华中师大)

设$f(x)$ 在(a,b) 上有定义：

(1)用$\varepsilon-\delta$的方法叙述$f(x)$ 在(a,b) 上一致连续的概念；

(2)设$0<a<1$，证明$y=\sin\dfrac{1}{x}$在$(a,1)$ 上一致连续；

(3)证明$y=\sin\dfrac{1}{x}$在$(0,1)$ 上非一致连续.

[3-5](南开大学,山东大学)

设$f(x)$ 在有限开区间(a,b) 上连续,证明$f(x)$ 在(a,b) 上一致连续的充分必要条件是$\lim\limits_{x\to a^+}f(x)$和$\lim\limits_{x\to b^-}f(x)$ 存在.

[3-6](北师大)

设$f(x)$ 在$(a,+\infty)$ 上连续,且$\lim\limits_{x\to+\infty}(f(x)-cx-d)=0$. 证明$f(x)$ 在$(a,+\infty)$ 上一致连续.

五、本章小结

1. 连续是局部性质,而一致连续是整体性质.

2. 证明定义域为非有界闭区间上的连续函数是一致连续函数或有界函数是考研的重点.

3. 基本概念联络图(极限,确界,连续,一致连续性).

第4章　实数的完备性

一、本章考情分析

实数完备性的七个等价定理是数学分析的理论基础,也是整个数学分析的难点之一. 因为这七个等价定理与实数的完备性等价,故称作完备性的七个等价定理. 证明七个定理之间的等价性及七个等价定理的应用是历年考研的重点. 题型以证明题的形式出现.

二、本章基本内容

1. 完备性的七个等价定理及应用；

2. 数列的上极限和下极限.

三、本章要点精讲

要点1　完备性的七个等价定理

1)确界原理

任意非空有上(下)界数集必有上(下)确界.

2)单调有界定理

单调有界数列必有极限.

3)致密性定理

任意有界的数列必有收敛的子列.

4)柯西收敛准则

数列收敛当且仅当它满足柯西条件.

5)区间套定理

若 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一个区间套,则其交 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}[a_n,b_n]$ 为单点集.

6)有限覆盖定理

若 H 是闭区间 $[a,b]$ 的一个开覆盖,则可以由 H 中选出有限个开区间覆盖 $[a,b]$.

7)聚点定理

实轴上任意有界的无限点集必有聚点.

[4-1]($P171$,书上的例题)

试用有限覆盖定理证明聚点定理.

[4-2]($P171$,书上的例题)

试用聚点定理证明柯西收敛准则.

要点 2. 数列的上、下极限

称 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{k\geq n}\{a_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的上极限. 上极限永远存在.

称 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\inf\limits_{k\geq n}\{a_n\}$ 为数列 $\{a_n\}$ 的下极限. 下极限永远存在.

a)上下极限永远存在,正如上下确界永远存在. 这是数学内部发展的动力之一.

b)数列的极限存在当且仅当它的上下极限相等(求极限的第七个方法).

c)数列的上极限是所有收敛子列极限的最大者;数列的下极限是所有收敛子列极限的最小者.

d)收敛子列的极限 = 数列的聚点.

[4-3]($P175$,书上的例题)

证明:若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,且 $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n>0$,则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n}$.

[4-4]($P175$,书上的例题)

证明:若 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$,且 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}a_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{1}{a_n}=1$,则数列 $\{a_n\}$ 收敛.

四、名校经典试题回顾

[4-5](首都师大,2004 年,六,12 分)

利用实数完备性定理证明:闭区间上的连续函数有界.

[4-6](华中师大,2000)

利用闭区间套定理证明:闭区间上的连续函数有界.

[4-7](北京科技大学)

证明:若一组开区间 $\{I_n\}$ 覆盖闭区间 $[0,1]$,则存在一个正数 δ,使得对 $[0,1]$ 中任意两点 x',x'',满足 $|x'-x''|<\delta$ 时,必属于某区间 I_n.

五、本章小结

1. 完备性的七个等价定理之间的相互证明及其应用是考研的热点.

2. 对书本中定理的证明要研读. 这些定理完全可能以考研题的形式出现.

3. 基本概念联络图(极限,确界,连续,一致连续性,上下极限,数列的聚点).

极限论的总结

一元数学分析由四大部分构成:极限论,微分论,积分论和级数论. 极限论是其它三部分的基础;其它三部分可以看成特殊的极限论. 因此掌握好一元函数的极限论,就等于打开了数学分析考研的大门.

极限论由以下四节构成:

1. 数列的极限;
2. 函数的极限;
3. 函数的连续性;
4. 实数的完备性.

其基本定义有

1. 数列的极限;
2. 函数的极限;
3. 上(下)确界;
4. 数列(集合)的聚点;
5. 函数的连续点和间断点;
6. 一致连续性.

其高频考点为:

1. 求极限,证明极限存在;
2. 闭区间上连续函数基本性质及应用;
3. 实数完备性七个等价定理的相互推导及应用.

第二篇　微分论

第 1 章　微分和导数

一、本章考情分析

对一元函数而言,导数和微分是相互存在的. 它们之间的关系为: $\mathrm{d}f = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} \cdot \mathrm{d}x$. 导数是特殊的极限. 它反映了函数关于自变量平均变化率的极限. 导数在几何上就是切线的斜率. 在物理上就是速度.

求导数,证明导数存在或不存在,是历年考研的热点之一. 题型多为选择题,填空题和计算题.

二、本章基本内容

1. 导数及求导法则;
2. 高阶导数及求导法则;
3. 微分,一阶微分形式不变性;
4. 高阶微分,高阶微分不具有形式不变性.

三、本章要点精讲

要点 1:导数及求导法则

1. 导数 $f'(x_0)$ 及几何意义;
2. 单侧导数 $f_+'(x_0)$ 和 $f_-'(x_0)$;
3. 单侧可导与可导的关系;
4. 可导和连续的关系.

[1 - 1]设

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \geq 3 \\ ax + b, & x < 3 \end{cases}$$

试确定 a 和 b 的值,使 f 在 $x = 3$ 处可导.

5. 导函数;
6. 求导法则;

a. 四则运算;

b. 链式法则;

c. 参变量函数的导数;

d. 导数和反函数导数的关系;

e. 基本初等函数导数表;

f. 对数求导法:例如 $y=\frac{(x+5)^2(x-4)^{\frac{1}{4}}}{(x+2)^5(x+4)^{\frac{1}{2}}}$;

g. 隐函数求导法:例如 $y=-ye^x+2e^y\sin x-7x$.

[1-2]已知 g 为可导函数,求 $f(x)=g(xg(x))$ 的导数.

要点2:高阶导数及求导法则

1)高阶导数;

2)莱布尼兹公式:$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}C_n^k u^{(n-k)}v^{(k)}$;

3)参数函数的高阶导数.

[1-3]设

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\y=\psi(t)\end{cases}$$

则

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{[\varphi'(t)]^3}.$$

要点3:微分

1)微分及几何意义;

2)利用微分进行近似计算.

原理:因为 $\Delta y=\mathrm{d}y+0(\Delta)$,故 $\Delta y\approx\mathrm{d}y$.

[1-4]计算 $\sqrt[3]{1.02}$.

3)高阶微分;

4)一阶微分形式不变性;

5)高阶微分不具有形式不变性.

四、名校经典试题回顾

[1-5](湖北大学)

设 f 在为可导函数.证明:若 $x=1$ 时,有 $\frac{\mathrm{d}f(x^2)}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}f^2(x)}{\mathrm{d}x}$,则必有 $f'(1)=0$ 或 $f(1)=1$.

[1-6](复旦大学)

已知 $f(x)=(x-a)^2\varphi(x)$,其中 $\varphi'(x)$ 在点 $x=a$ 的某邻域内连续,求 $f''(a)$.

[1-7](厦门大学)

已知 $f'(x)=ke^x$,k 为常数.求 $f(x)$ 的反函数的二阶导数.

[1－8]（西北大学）

设 $y = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\arcsin x$，求 $y^{(n)}(0)$.

五、本章小结

1. 会通过各种方法求导数：按定义，按公式，链式法则，参变量函数求导法，对数求导法.

2. 会利用微分进行近似计算.

3. 几何直观上理解导数，微分的定义.

第 2 章　微分中值定理

一、本章考情分析

微分中值定理是微分部分的精华，是下一章利用导数和微分研究函数几何性质的基础，是历年考研的热点. 题型为证明题.

抓住几何本质，是学好和用好微分中值定理的关键.

二、本章基本内容

1. 费马定理；

2. 中值定理的三种形式；

3. 应用：

a. 洛必达法则（求极限的第八种方法，本论的第一种）；

b. 导数的极限定理（用于分段函数求导数）；

c. 导数的介值定理（达布定理）；

d. 利用中值定理证明不等式；

e. 泰勒公式（求极限的第九种方法，本论的第二种）.

三、本章要点精讲

要点 1：费马定理

设函数 f 在 x_0 的某邻域上有定义，且在 x_0 可导. 若点 x_0 为 f 的极值点，则必有 $f'(x_0)=0$.

要点 2：中值定理

罗尔中值定理

若函数 f 满足如下条件：

（ⅰ）f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续；

（ⅱ）f 在 (a,b) 上可导；

（ⅲ）$f(a)=f(b)$；

则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ，使得 $f'(\xi)=0$.

拉格朗日中值定理

若函数 f 满足如下条件：

(ⅰ)f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续;

(ⅱ)f 在 (a,b) 上可导;

则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ,使得 $f'(\xi)=\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

[2-1](教材 P128,9)

设 f 为 $[a,b]$ 上的二阶可导函数,$f(a)=f(b)=0$,并存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$.证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)<0$.

[2-2](教材 P163,14)

设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可导,且 $0\leqslant f'(x)\leqslant f(x)$,$f(0)=0$.证明:在 $[0,+\infty)$ 上 $f(x)=0$.

柯西中值定理

若函数 f 和 g 满足如下条件:

(ⅰ)在闭区间 $[a,b]$ 上都连续;

(ⅱ)在 (a,b) 上都可导;

(ⅲ)$f'(x)$ 和 $g'(x)$ 不同时为零;

(iiii) $g(a)\neq g(b)$;

则在 (a,b) 上至少存在一点 ξ,使得 $\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\dfrac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

[2-3](教材 P136,2)

设函数 f 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 上可导.证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $2\xi[f(b)-f(a)]=(b^2-a^2)f'(\xi)$.

[2-4](教材 P136,3)

设函数在点 a 处具有连续的二阶导数,证明:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}=f''(a).$$

要点3:中值定理的应用

a. 洛必达法则:$\dfrac{0}{0}$ 型

若函数 f 和 g 满足

(ⅰ)$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}g(x)$;

(ⅱ)在 x_0 的某空心邻域内可导且 $g'(x)\neq 0$;

(ⅲ)$\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$($A$ 可以是实数,$+\infty$, $-\infty$, ∞);.

则 $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}=A$.

注:

a. 还有 $\dfrac{\infty}{\infty}$ 型, $0\cdot\infty$型, 1^∞ 型, 0^0 型, ∞^0 型, $\infty-\infty$型.

b. 上式中的 x_0 可以换成 x_0^+, x_0^-, $+\infty$, $-\infty$, ∞.

[2－5]（书上的习题 $P137$,7.1）

求极限 $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{\tan 2x}$.（答案：$e^{-1}$）

[2－6]（教材 $P137$,10）

证明：$f(x)=x^3e^{-x^2}$ 为有界的函数.

b. 导数的极限定理（用于分段函数求导数）

设函数 f 在点 x_0 的某邻域 $U(x_0)$ 上连续，在相应的空心邻域 $U^0(x_0)$ 内可导，且极限 $\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$ 存在，则 f 在 x_0 可导，且 $f'(x_0)=\lim\limits_{x\to x_0}f'(x)$.

[2－7]设

$$f(x)=\begin{cases}3x-\dfrac{x^2}{2}-2, & 0\le x\le 4\\ 6-x, & x>4\end{cases}$$

试问 f 在 $x=4$ 处可导吗？若可导，求其导数.

c. 导数的介值定理（达布定理）

若函数 f 在 $[a,b]$ 上可导，且 $f'_+(a)\ne f'_-(b)$，k 为介于 $f'_+(a)$ 和

$f'_-(b)$ 之间任意实数，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f'(\xi)=k$.

[2－8]（教材 $P128$,10）

设 f 在 (a,b) 上可导，且 f' 单调，证明 f' 在 (a,b) 上连续.

d. 利用中值定理证明不等式

[2－9]（教材 $P128$,15）

证明：若函数 f，g 在区间 $[a,b]$ 上可导，且 $f'(x)>g'(x)$，$f(a)=g(a)$，则在 $(a,b]$ 内有 $f(x)>g(x)$.

[2－10]（教材 $P163$,5）

证明：对 $x>0$ 有

$$0<\frac{1}{\ln(1+x)}-\frac{1}{x}<1.$$

e. 泰勒公式

称 $T_n(x)=f(x_0)+\frac{1}{1!}f'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}f''(x_0)(x-x_0)^2+\cdots$

$+\frac{1}{n!}f^{n}(x_0)(x-x_0)^n$ 为 f 在 x_0 处的泰勒多项式.

带有佩亚诺型余项的泰勒公式

若 f 在 x_0 处有直至 n 阶导数，则在 x_0 的附近有 $f(x)=T_n(x)+o((x-x_0)^n)$.

特别当 $x_0=0$ 时，上述泰勒公式就是带有佩亚诺型余项的麦克劳林公式，即

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\frac{1}{2!}f''(0)x^2+\cdots+\frac{1}{n!}f^{n}(0)x^n+o(x^n)$$

常用的麦克劳林公式，这对后边级数的学习是很有好处的.

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+o(x^n)$$

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5+\cdots+(-1)^{m-1}\frac{1}{(2m-1)!}x^{2m-1}+o(x^{2m})$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+(-1)^m\frac{1}{(2m)!}x^{2m}+o(x^{2m+1})$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{3}x^3+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^n+o(x^n)$$

$$(1+x)^\alpha=1+\frac{\alpha}{1!}x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)\ \frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+o(x^n)$$

带有拉格朗日型余项的泰勒公式

若 f 在 $[a,b]$ 上有直至 n 阶的连续导函数,在 (a,b) 上存在 $n+1$ 阶导函数,则对任意的 x, $x_0\in[a,b]$,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(x)=T_n(x)+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi)(x-x_0)^{n+1}$$

特别当 $x_0=0$ 时,上述泰勒公式就是带有拉格朗日型余项的麦克劳林公式,即

$$f(x)=f(0)+\frac{1}{1!}f'(0)x+\cdots+\frac{1}{n!}f^n(0)x^n+\frac{1}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\theta x)x^{n+1}$$

其中 $0<\theta<1$.

第九种求极限的方法:利用泰勒公式. 例如

[2-11]

$$\lim_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=\lim_{x\to0}\frac{-\frac{1}{12}x^4+o(x^4)}{x^4}=-\frac{1}{12}$$

其原因　　　$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+o(x^5)$

$$e^{-\frac{x^2}{2}}=1+\frac{1}{1!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)+\frac{1}{2!}\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2+o\left(\left(-\frac{x^2}{2}\right)^2\right)$$

$$=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{8}+o(x^4)$$

四、名校经典试题回顾

[2-12](华中师大)

设 f 在 $[a,b]$ 上三阶可导,$f'(a)=f'(b)=0$,并且存在点 $c\in(a,b)$,有 $f(c)=\max\limits_{a\le x\le b}f(x)$. 证明 $f'''(x)=0$ 在 (a,b) 内至少有一个根.

[2-13](四川大学)

设 f 为 $[a,b]$ 上的二阶可导函数,$f(a)=f(b)=0$,并且存在一点 $c\in(a,b)$ 使得 $f(c)>0$. 证明至少存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)<0$.

[2-14](厦门大学)

设$f(x)$在$[0,+\infty)$上具有连续二阶导数,又$f(0)>0$,$f'(0)<0$,$f''(x)<0$,则在区间$\left(0,-\dfrac{f(0)}{f'(0)}\right)$内至少有一个点$\xi$,使得$f(\xi)=0$.

[2-15](华中师大)

设f在$[a,b]$上三阶可导,$f'(a)=f'(b)=0$,并在$c\in(a,b)$点有$f(c)=\max\limits_{a\le x\le b}f(x)$.证明$f'''(x)=0$在$(a,b)$内至少有一个根.

[2-16](南京航空学院)

设函数f在区间$[0,1]$上有二阶导数,且当$0\le x\le1$时恒有$|f(x)|\le1$,$f''(x)\le2$.证明当$0\le x\le1$时,有$f'(x)\le3$.

五、本章小结

1. 费马定理和中值定理是微分学最主要的理论,也是整个数学分析最精华之一.这部分是考研的热点,多以证明题的形式出现.抓住几何直观是做题的关键.

2. 洛必达法则(第八种求极限方法)和泰勒公式(第九种求极限的方法)是求极限的主要方法.极限论中我们总结了七种方法:根据定义,根据公式,夹击法,极限方程(先证明极限存在,再求极限),两个重要极限,等价无穷小量的替换,上下极限.

第3章　函数的几何性质

一、本章考情分析

利用微分研究函数的几何性质,是微分学的一个主要应用.这部分考题多以选择,填空形式出现,但不排除证明题和作图题.

二、本章基本内容

1. 单调性;

2. 极值和最值;

3. 凸性和拐点;

4. 渐近线;

5. 函数图象的讨论.

三、本章要点精讲

要点1:单调性

f单调增$\Leftrightarrow f'(x)\ge0$;

f单调减$\Leftrightarrow f'(x)\le0$;

f严格单调增$\Leftrightarrow f'(x)>0$;

f严格单调减$\Leftrightarrow f'(x)<0$;

f严格单调$\Leftrightarrow f'(x)\ne0$(来自于导数的介值定理).

[3-1](书上的例题,$P128$,13)

证明$f(x)=x^3+ax+b$存在唯一的零点.

要点2:极值和最值

极值是局部概念,最值是整体概念.

x_0 为极值点的必要条件: $f'(x_0)=0$ 或 $f'(x_0)$ 不存在.

为了寻求极值点,先找出满足 $f'(x)=0$ 或 $f'(x)$ 不存在的点,再根据下边的充分条件找出极值点.

x_0 为极值点的第一充分条件:

若 f 在点 x_0 连续,在某 $U^0(x_0,\delta)$ 内可导,

(ⅰ)若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f'(x)\le 0$,若当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f'(x)\ge 0$,则 x_0 是极小值点.

(ⅱ)若当 $x\in(x_0-\delta,x_0)$ 时, $f'(x)\ge 0$,若当 $x\in(x_0,x_0+\delta)$ 时, $f'(x)\le 0$,则 x_0 是极大值点.

x_0 为极值点的第二充分条件:

若 f 在点 x_0 的某 $U(x_0,\delta)$ 内一阶可导,在 x_0 处二阶可导,且 $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$,

(ⅰ)若 $f''(x_0)<0$,则 x_0 是极大值点.

(ⅱ)若 $f''(x_0)>0$,则 x_0 是极小值点.

x_0 为极值点的第三充分条件:

若 f 在点 x_0 的某 $U(x_0,\delta)$ 内有直到 $n-1$ 阶导函数,在 x_0 处 n 阶可导,且 $f^{(k)}(x_0)=0\ (k=1,2,\cdots,n-1)$, $f^{n}(x_0)\neq 0$,

当 n 为偶数时,

(ⅰ)若 $f^{n}(x_0)<0$,则 x_0 是极大值点.

(ⅱ)若 $f^{n}(x_0)>0$,则 x_0 是极小值点.

当 n 为奇数时, x_0 为非极值点.

寻求最值点的方法:

求出极值点,不可导点,端点,比较其值.

[3-2](书上的习题,P150,1)

求函数 $f(x)=2x^3-x^4$ 的极值.

要点3:凸性与拐点

凹凸性的定义

设 f 为定义在区间 I 上的函数. 若对 I 上任意两点 x_1 和 x_2 及任意的 $\lambda\in(0,1)$,有

$$f(\lambda x_1+(\lambda-1)x_2)\le\lambda f(x_1)+(\lambda-1)f(x_2)$$

则称 f 为区间 I 上的凸函数;

若对 I 上任意两点 x_1 和 x_2 及任意的 $\lambda\in(0,1)$,有

$$f(\lambda x_1+(\lambda-1)x_2)\ge\lambda f(x_1)+(\lambda-1)f(x_2)$$

则称 f 为区间 I 上的凹函数.

如果上述的不等号改为严格的不等号,则称为严格的凸函数和严格的凹函数.

拐点的定义

如果在 x_0 的附近,一边是凸函数,另一边是凹函数,则称 $(x_0,f(x_0))$ 为函数图象的拐点.

注意：

1. f 是凸函数当且仅当 $-f$ 为凹函数. 因此在讨论中我们只讨论凸函数.

2. 上述定义中并未使用数学分析中的概念，例如连续，可导等. 正如单调性，这些是中学数学都可以研究的对象. 在这里我们将使用微分学的知识去研究它们，即老问题，新方法.

凸性的等价定义

设 f 为定义在区间 I 上的函数. 若对 I 上任意三点 $x_1 < x_2 < x_3$ 有

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\leq\frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_2}$$

则称 f 为区间 I 上的凸函数；

如果上述的不等号改为严格的不等号，则称为严格的凸函数.

用一阶导数刻画凸函数

设 f 为 I 上的可导函数，则下列条件等价：

(ⅰ) f 为 I 上的凸函数；

(ⅱ) f' 为 I 上的增函数；

(ⅲ) 对 I 上任意两点 x_1 和 x_2，有

$$f(x_2)\geq f(x_1)+f'(x_1)(x_2-x_1)$$

用二阶导数刻画凸函数

设 f 为 I 上的二阶可导函数，则 f 为 I 上的凸函数当且仅当 $f''(x)>0$.

[3-3]（书上的习题，P157，1）

求函数 $y=x^2+\frac{1}{x}$ 的凸性区间及拐点.

要点 4：渐近线

水平渐近线，垂直渐近线，斜渐近线的概念.

要点 5：函数图象

做函数图象的一般步骤：

1. 求函数的定义域；
2. 考察函数的奇偶性、周期性；
3. 求函数的某些特殊点，如和坐标轴的交点，不连续点；不可导点；
4. 确定函数的单调区间，极值点，凸性区间及拐点；
5. 考察渐近线；
6. 综合以上讨论结果画出函数图象.

四、名校经典试题回顾

[3-4]（南京邮电学院）

证明：若 $p>1$，则对于 $[0,1]$ 内任意的 x，有 $x^p+(1-x)^p\geq\frac{1}{2^{(p-1)}}$.

[3-5]（中国科学院）

设 f 在 $[0,+\infty)$ 上可导,且 $f(0)=0$, $f'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上单调递减,试证 $\frac{f(x)}{x}$ 也在 $(0,+\infty)$ 上单调递减.

[3-6](长沙铁道学院)

证明:当 $e<x_1<x_2$ 时,

$\frac{x_1}{x_2}<\frac{\ln x_1}{\ln x_2}<\frac{x_2}{x_1}$.

五、本章小结

这一章我们给出了利用微分学定理讨论函数单调性,极值,凸性的方法. 老问题,新方法. 最后给出了函数图象作图的一般步骤. 希望大家在书上找一道函数图象作图题,仿照书上的格式做一下.

微分论的总结

导数是特殊的极限,是函数增量平均值的极限. 导数的几何意义是切线的斜率,物理意义是速度(严格来说是速率). 费马定理和中值定理(三种形式)是微分学的精华,有着广泛的应用,是每年考研的要点.

微分论由以下三章构成:

1. 导数和微分;
2. 中值定理及应用;
3. 函数的几何性质.

其基本定义:

(高阶,左右)导数,(高阶)微分,泰勒多项式及两种余项,不定式(待定性),极值,凸性.

其高频考点为:

1. 求导数;
2. 中值定理的应用;
3. 用导数研究函数的性质及函数图象作图.

第三篇　积分论

第1章　不定积分

一、本章考情分析

从运算的角度来看，不定积分是求导数的逆运算. 从作用来看，它是下章定积分计算的基础. 这部分以计算题和填空题的形式出现，是考研的热点.

求不定积分要比求导数难，但还是有方法可寻的. 同学们应掌握常见的几种求不定积分方法.

二、本章基本内容

1. 不定积分的概念；

2. 几种必须会的求不定积分的方法.

三、本章要点精讲

要点1：不定积分的概念

若 $F'(x)=f(x)$，则称 f 是 F 的导函数，F 是 f 的一个原函数.

f 的原函数的全体，称作 f 的不定积分，记作 $\int f(x)\mathrm{d}x$.

若 F 是 f 的一个原函数，则 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$，其中 C 为任意常数.

导数、微分和不定积分的关系：

$[\int f(x)\mathrm{d}x]' = f(x$　　$\mathrm{d}\int f(x)\mathrm{d}x = f(x)\mathrm{d}x$

[1-1] 据理说明每一个含有第一类间断点的函数都没有原函数，即不可积.

[1-2] 举例说明每一个含有第二类间断点的函数可能有原函数，也可能没有原函数，即可积+性不定.

要点2:求不定积分的方法

1. 积分表

注:积分表必须记住,因为其它求不定积分的方法最后都归结到积分表上.

2. 运算公式

在 f 和 g 可积, a 和 b 不同时为零的情况下

$$\int(af(x)+bg(x))\mathrm{d}x = a\int f(x)dx + b\int g(x)dx$$

[1-3] $\int(2^x+3^x)^2\mathrm{d}x$.

3. 换元积分法

设函数 f 在区间 I 上有定义, φ 在区间 J 上可导,且 $\varphi(J)\subseteq I$.

(ⅰ)第一换元积分法:如果 $\int f(x)\mathrm{d}x = F(x)+C$,则

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = F(\varphi(t))+C$$

(ⅱ)第二换元积分法:如果 $x=\varphi(t)$ 在 J 上存在反函数 $t=\varphi^{-1}(x)$ 且 $\int f(x)\mathrm{d}x$ 存在,则当 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t = G(t)+C$ 时,

$$\int f(x)\mathrm{d}x = G(\varphi^{-1}(x))+C$$

注:上式中的条件可以用更强的条件替换: $\varphi'(t)\neq 0$, $t\in J$, $\varphi(J)=I$.

[1-4]第一换元积分法

$\int\cos(3x+4)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\int\cos(3x+4)\mathrm{d}(3x+4)$

注:关键在于变不定积分为 $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\mathrm{d}x$,做代换 $u=\varphi(x)$,而 $\int f(u)\mathrm{d}u$ 可以积出来.

[1-5]第二换元积分法

$$\int\frac{\sqrt{x}}{1-\sqrt[3]{x}}\mathrm{d}x$$

分析:令 $x=t^6$,原式变形为 $6\int\frac{t^8}{1-t^2}\mathrm{d}t$

注:做代换 $x=\varphi(t)$,关键在于 $\int f(\varphi(t))\varphi'(t)\mathrm{d}t$ 可以积出来.

4. 分部积分法

若 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都可导且 $\int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$ 存在,则

$$\int u(x)v'(x)\mathrm{d}x = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)\mathrm{d}x$$

或

$$\int u(x)\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x) - \int v(x)\mathrm{d}u(x)$$

[1-6] $\int x^2\cos x\mathrm{d}x$.

5. 建立递推式或方程

[1-7]计算 $I_n = \int x^n e^{kx}\mathrm{d}x$.

分析：

$$I_n = \int x^n e^{kx}\mathrm{d}x = \frac{1}{k}\int x^n de^{kx} = \frac{1}{k}x^n e^{kx} - \frac{n}{k}\int x^{n-1}e^{kx}\mathrm{d}x$$

$I_n = \frac{1}{k}x^n e^{kx} - \frac{n}{k}I_{n-1}$

[1-8]求不定积分 $\int e^x \sin x\mathrm{d}x$.

6. 有理函数的不定积分

$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ 称作有理式，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为多项式.

第一步：分解有理式为 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}$ 和 $\int \frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x(p^2-4q<0)$.

第二步：分别计算 $\int \frac{\mathrm{d}x}{(x-a)^k}$ 和 $\int \frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x(p^2-4q<0)$

$$\int \frac{dx}{(x-a)^k} = \begin{cases} \ln|x-a|+C, & k=1 \\ \frac{1}{(1-k)(x-a)^{k-1}}, & k>1 \end{cases}$$

$$\int \frac{Lx+M}{(x^2+px+q)^k}\mathrm{d}x = \int \frac{Lt+N}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t$$

$$= L\int \frac{t}{(t^2+r^2)^k}dt + N\int \frac{1}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t$$

对 $\int \frac{t}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t$ 而言：

当 $k=1$ 时，$\int \frac{t}{t^2+r^2}\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\ln(t^2+r^2)+C$

当 $k>1$ 时，$\int \frac{t}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t = \frac{1}{2(1-k)(t^2+r^2)^{k-1}}+C$

对 $\int \frac{1}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t$ 而言：

当 $k=1$ 时，$\int \frac{1}{t^2+r^2}[d]t = \frac{1}{r}\arctan\frac{t}{r}+C$

当 $k>1$ 时，$I_k = \int \frac{1}{(t^2+r^2)^k}dt = \frac{1}{r^2}\int \frac{(t^2+r^2)-t^2}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t$

$$= \frac{1}{r^2}I_{k-1} - \frac{1}{r^2}\int \frac{t^2}{(t^2+r^2)^k}\mathrm{d}t$$

$$= \frac{1}{r^2}I_{k-1} - \frac{1}{2r^2(k-1)}\int t\mathrm{d}\left(\frac{1}{(t^2+r^2)^{k-1}}\right)$$

7. 三角函数有理式的不定积分 $\int R(\sin x,\cos x)dx$

由 $u(x)$ 和 $v(x)$ 及常数经过有限次四则运算所得到的函数称为关于 $u(x)$ 和 $v(x)$ 的有理式,记作 $R(u(x),v(x))$.

$R(\sin x,\cos x)$ 称作三角函数的有理式.

令 $t = \tan\frac{x}{2}$,则

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2} \qquad \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2} \qquad \mathrm{d}x = \frac{2}{1+t^2}\mathrm{d}t$$

经过如此变换,三角函数的有理式就变为关于 t 的有理式.这只是一般的方法,有时要灵活应用.

[1-9]求不定积分 $\int\frac{\mathrm{d}x}{2+\sin^2 x}$.

8. 某些无理式的不定积分

a) $\int R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+\mathrm{d}}})\mathrm{d}x$ 型不定积分($a\mathrm{d}-bc\neq 0$)

做代换 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+\mathrm{d}}}$,则 $x = \frac{\mathrm{d}t^n - b}{ct^n - a}$, $\mathrm{d}x = \frac{(bc-a\mathrm{d})t^{n-1}}{(ct^n-a)^2}\mathrm{d}t$.这样关于 x 的无理式积分就变为关于 t 的有理式积分.

b) $\int R(x,\sqrt{ax^2+bx+c})\mathrm{d}x$ 型不定积分

($a>0$ 时, $b^2-4ac\neq 0$; $a<0$ 时, $b^2-4ac>0$)

分析:

$ax^2+bx+c = a\left[(x+\frac{b}{2a})^2+\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right]$

若记 $u = x+\frac{b}{2a}$, $k^2 = \left|\frac{4ac-b^2}{4a^2}\right|$

则此二次三项式必属于以下三种情形之一:

$|a|(u^2+k^2)$, $|a|(u^2-k^2)$, $|a|(k^2-u^2)$

因此上述无理式的不定积分也就转换为以下三种类型之一:

$\int R(u,\sqrt{u^2+k^2})du$, $\int R(u,\sqrt{u^2-k^2})du$, $\int R(u,\sqrt{k^2-u^2})du$

分别做以下代换,则可以将它们化成三角函数的有理式的不定积分

(ⅰ) $u = k\tan t$,则 $\sqrt{u^2+k^2} = k\sec t$, $du = \sec^2 t dt$;

(ⅱ) $u = k\sec t$,则 $\sqrt{u^2-k^2} = k\tan t$, $du = k\tan t\sec t$;

(ⅲ) $u = k\sin t$,则 $\sqrt{k^2-u^2} = k\cos t$, $du = k\cos t$.

注:欧拉公式

若 $a>0$,则可令

$\sqrt{ax^2+bx+c} = \sqrt{a}x+t$

或 $$\sqrt{ax^2+bx+c}=\sqrt{a}x-t$$

若 $a>0$，$c>0$，则还可以令

$$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt+\sqrt{c}$$

或 $$\sqrt{ax^2+bx+c}=xt-\sqrt{c}$$

此时 x 是 t 的有理式，dx 也是 t 的有理式. 这样不定积分就转换为关于 t 的有理式不定积分.

[1-10] 求不定积分 $\int \frac{dx}{x+\sqrt{x^2-x+1}}$

四、名校经典试题回顾

[1-11]（北京大学）

试求不定积分 $\int(\cos^4 x-\sin^4 x)dx$ 与 $\int(\cos^4 x+\sin^4 x)dx$，进而求不定积分 $\int\cos^4 x dx$ 与 $\int\sin^4 x dx$.

[1-12]（华东师大）

试求不定积分 $\int\frac{\cos x\sin^3 x}{1+\cos^2 x}dx$.

[1-13]（上海交通大学）

试求不定积分 $\int\frac{x+\sin x}{1+\cos x}dx$.

五、本章小结

本章我们给出了不定积分的概念，介绍了八种求不定积分的方法.

1. 根据积分表；

2. 根据公式；

3. 换元积分法（第一换元积分法，第二换元积分法）；

4. 分部积分法；

5. 建立递推式或方程；

6. 有理函数的不定积分；

7. 三角函数有理式的不定积分；

8. 某些无理式的不定积分.

求不定积分尽管是求可导的逆运算，但是难度却大得多，同学们在掌握好基本方法的同时，还应具体问题具体分析，采取灵活的方法.

第2章　定积分

一、本章考情分析

本章是考研的热点. 题型有选择，填空，计算和证明. 内容除过积分论的自身问题外，还牵扯到与极限论，微分论的联系. 考试的内容可以归结为证明积分等式或不等式，求极限等.

二、本章基本内容

1. 定积分的定义和几何意义；

2. 定积分的基本性质;

3. 变限积分;

4. 牛顿—莱布尼兹公式;

5. 积分第一中值定理和第二中值定理.

三、本章要点精讲

要点1:定积分的定义和几何意义

a. 闭区间的分割

在闭区间 $[a,b]$ 中插入 $n-1$ 个点, $a=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=b$,这些点将 $[a,b]$ 分成 n 个闭区间 $\Delta_i=[x_{i-1},x_i]$, $i=1,2,\cdots,n$. 这些点或闭区间构成对 $[a,b]$ 的一个分割,记作 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$.

记 $\Delta_i=x_i-x_{i-1}$,并记 $\|T\|=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta_i\}$, $\|T\|$ 称作分割 T 的模.

b. 黎曼和

设 f 是闭区间 $[a,b]$ 上的一个函数. 对 $[a,b]$ 进行一个分割 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$,任意取点 $\xi_i\in\Delta_i$,和式 $\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta_i$ 称作 f

在闭区间 $[a,b]$ 上的一个黎曼和.

c. 定积分的定义

设 f 是定义在闭区间 $[a,b]$ 上的一个函数, J 是一个确定的实数. 若对任意的 $\varepsilon>0$,总存在一个正数 $\delta>0$,使得对任意的分割 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$,任意的取点 $\xi_i\in\Delta_i$,只要 $\|T\|<\delta$,总有 $\left|\sum\limits_{i=1}^{n}f(\xi_i)\Delta_i-J\right|<\varepsilon$,则称 f 在闭区间 $[a,b]$ 上(黎曼)可积,数 J 称作 f 在闭区间 $[a,b]$ 上的定积分或黎曼积分,记作 $J=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

$[a,b]$ 称作积分区间, a 和 b 分别称作定积分的下限和上限.

d. 定积分的几何意义:面积的概念

要点2:定积分的基本性质

a. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积, k 为常数,则 kf 在 $[a,b]$ 上也可积,且 $\int_a^b kf(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

b. 若 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积,则 $f+g$ 和 $f-g$ 在 $[a,b]$ 上也可积,且

$$\int_a^b (f(x)+g(x))\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int_a^b (f(x)-g(x))\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x-\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

c. 若 f 和 g 在 $[a,b]$ 上可积,则 $f\cdot g$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

d. f 在 $[a,b]$ 上可积当且仅当对任意的 $c\in(a,b)$, f 在 $[a,c]$ 和 $[c,b]$ 上可积,且下列等式成立

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x+\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

e. 若 f 在 $[a,b]$ 上可积且 $f(x)\ge 0, x\in[a,b]$,则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geq 0$$

推论：

若f和g在$[a,b]$上可积且$f(x) \leq g(x)$，$x \in [a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leq \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$$

f. 若f在$[a,b]$上可积，则$|f|$在$[a,b]$上也可积，且

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$$

g. 定积分的换元积分法和分部积分法

定积分的换元积分法：若函数f在$[a,b]$上连续，φ'在$[\alpha,\beta]$上可积，且满足$\varphi(\alpha) = a$，$\varphi(\beta) = b$，$\varphi(\alpha,\beta) \subseteq [a,b]$，则

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

注：可以用牛顿—莱布尼兹公式，但需要做变量还原.

定积分的分部积分法：若u和v为$[a,b]$上的可微函数，且u'和v'在$[a,b]$上可积，则

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,\mathrm{d}x = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,\mathrm{d}x$$

或方便起见，记为

$$\int_a^b u(x)\,\mathrm{d}v(x) = u(x)v(x)\big|_a^b - \int_a^b v(x)\,\mathrm{d}u(x)$$

[2－1]（书上的习题）设f为$[0,2\pi]$上的单调下降函数，证明：对任意的正整数n恒有$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,\mathrm{d}x \geq 0$.

要点3：变限积分

若f在$[a,b]$上可积，称

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)\,dt,\ x \in [a,b]$$

和

$$\Psi(x) = \int_x^b f(t)\,dt,\ x \in [a,b]$$

分别为变上限的定积分和变下限的定积分.

由于$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_x^a f(t)\,\mathrm{d}t$，因此我们只需要研究变上限的定积分.

变上限定积分的连续性：变上限定积分

$$\Phi = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in [a,b]$$

在$[a,b]$上连续.

原函数存在定理：若f在$[a,b]$上连续，则变上限定积分

$$\Phi = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t,\ x \in [a,b]$$

在 $[a,b]$ 上可导,且 $\Phi'(x) = f(x)$, $x \in [a,b]$.

注:此定理是微分学和积分学的桥梁,因此被誉为微积分学的基本定理.

[2-2](书上的习题)设 f 为连续函数, u 和 v 均为可导函数,且可实行复合 $f\circ u$ 和 $f\circ v$. 证明:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(v(x))v'(x) - f(u(x))u'(x)$$

分析:首先证明

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{a}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t = f(v(x))v'(x)$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_{u(x)}^{b} f(t)\,\mathrm{d}t = -f(u(x))u'(x)$$

要点 4. 牛顿—莱布尼兹定理

牛顿—莱布尼兹定理:若 f 在 $[a,b]$ 上连续, F 是 f 的一个原函数,则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$.

[2-3]利用定积分求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2^3+3^3+\cdots+n^3)$(求极限的第十种方法,本论中第一种).

分析:因为 $\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$ 存在,故可以任意分割,任意取点.

$$\int_0^1 x^3 dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^4}(1+2^3+3^3+\cdots+n^3)$$

5. 积分中值定理

积分第一中值定理:若 f 在 $[a,b]$ 上连续,则至少存在一个点 $\xi \in (a,b)$,使得 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)(b-a)$.

推广的积分第一中值定理:若 f 和 g 在 $[a,b]$ 上连续,且 $g(x)$

在 $[a,b]$ 上不变号,则至少存在一个点 $\xi \in (a,b)$,使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

[2-4](湖北大学,书上的习题)证明:若 f 在 $[a,b]$ 上连续,且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b xf(x)\,\mathrm{d}x = 0$,则在 (a,b) 上至少存在两个点 x_1 , x_2 ,使得 $f(x_1) = f(x_2) = 0$.

积分第二中值定理:设函数 f 在 $[a,b]$ 上可积.

(ⅰ)若函数 g 在 $[a,b]$ 上单调下降,且 $g(x) \geq 0$,则存在 $\xi \in [a,b]$,使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\xi} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(ⅱ)若函数 g 在 $[a,b]$ 上单调上升,且 $g(x) \geq 0$,则存在 $\eta \in [a,b]$,使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(b)\int_{\eta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

(ⅲ)若函数 g 在 $[a,b]$ 上单调,则存在 $\theta \in [a,b]$,使得 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^{\theta} f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_{\theta}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x$

[2－5]（清华大学）设 $f(x)$ 的一阶导数在 $[0,1]$ 上连续，且 $f(0)=f(1)=0$. 求证：$\left|\int_0^1 f(x)dx\right| \le \frac{1}{4}\max_{0\le x\le 1}|f'(x)|$.

四、名校经典试题回顾

[2－6]（书上的习题，大连理工学院）

证明：若 f 在 $[a,b]$ 上连续且恒大于零，则

$$\ln\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right) \ge \frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)\mathrm{d}x.$$

[2－7]（西北大学）

求证 $f(x)=\int_0^1 (t-t^2)(\sin t)^{2n}\mathrm{d}t$（$n$ 为正整数）在 $x\ge 0$ 上的最大值不超过 $\frac{1}{(2n+2)(2n+3)}$.

[2－8]（上海交通大学）

若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则

$$2\int_a^b f(x)\left[\int_x^b f(t)\mathrm{d}t\right]\mathrm{d}x = \left[\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right]^2.$$

五、本章小结

本章我们给出了定积分的定义，复习了一些最基本，也是在考研中经常要用到的定理，特别是牛顿—莱布尼兹公式，定积分的中值定理. 总结了求极限的第十种方法：利用定积分求极限.

关系图：极限，不定积分，定积分.

第 3 章　可积性理论

一、本章考情分析

可积性理论是定积分的重要部分. 这部分的考题以证明题见多. 尽管这部分不是高频考点，但是要想考入国内知名大学，这部分无论如何是不能忽略的.

二、本章基本内容

1. 可积的必要条件；
2. 达布上和和达布下和；
3. 可积的第一充要条件；
4. 可积的第二充要条件；
5. 可积的第三充要条件；
6. 可积函数类.

三、本章要点精讲

要点 1：可积的必要条件

可积的必要条件：

若函数 f 在 $[a,b]$ 上可积，则 f 在 $[a,b]$ 上有界.

要点 2:达布上和和达布下和

设 f 在 $[a,b]$ 上有定义且有界.

给 $[a,b]$ 一个分割 $T=\{\Delta_i : i=1,2,\cdots,n\}$.

记 $M_i=\sup\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$,　　　　$m_i=\inf\limits_{x\in\Delta_i} f(x)$.

$S(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$, $s(T)=\sum\limits_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i$ 分别被称为(达布)上和和(达布)下和.

$\omega_i=M_i-m_i$ 被称为 Δ_i 上的振幅.

达布上和和达布下和的基本性质

a. 对任意的分割 $T=\{\Delta_i : i=1,2,\cdots,n\}$,任意的取点 $\xi_i\in\Delta_i$,有

$$s(T)\le\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\le S(T)$$

b. 对同一分割 $T=\{\Delta_i : i=1,2,\cdots,n\}$,任意的取点 $\xi_i\in\Delta_i$,有

$$S(T)=\sup_{\xi_i\in\Delta_i}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\ ;\ s(T)=\inf_{\xi_i\in\Delta_i}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i$$

c. 对任意的两个分割 T' 和 T'',有

$$s(T')\le S(T'')$$

如此,我们可以分别定义上积分和下积分如下,

$$S=\inf_T S(T)\ ;\ s=\sup_T s(T)$$

达布定理:

$$S=\lim_{\|T\|\to 0} S(T)\ ;\ s=\lim_{\|T\|\to 0} s(T)$$

要点 3:可积的第一充要条件:

函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是上下积分相等,即 $S=s$

[3-1] (书上的习题)设 f 和 g 是 $[a,b]$ 上的有界函数,仅在有限个点处 $f(x)\neq g(x)$. 证明:若 f 在 $[a,b]$ 上可积,则 g 也在 $[a,b]$ 上可积.

分析:不妨设 $p\in[a,b]$ 是唯一的使 $f(x)\neq g(x)$ 的点,

只需证明 $S_f=S_g$, $s_f=s_g$ 即可.

要点 4:可积的第二充要条件:

函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是:对任意的 $\varepsilon>0$,都存在一个分割 T,使得

$$S(T)-s(T)<\varepsilon,\text{即}\ \sum_{i=1}^{n}\omega_i\Delta x_i<\varepsilon$$

[3-2] (书上的习题)设函数 f 在 $[a,b]$ 上有定义,且对任意的 $\varepsilon>0$,存在 $[a,b]$ 上的可积函数 g,使得

$$|f(x)-g(x)|<\varepsilon,\ x\in[a,b]$$

证明: f 在 $[a,b]$ 上可积.

要点 5. 可积的第三充要条件:

函数 f 在 $[a,b]$ 上可积的充要条件是:对任意的 $\varepsilon>0$, $\eta>0$,都存在一个分割 T,使得

$$\sum_{\omega_i' \geq \varepsilon} \Delta x_i' < \eta$$

要点 6. 可积函数类:

a. 连续函数;

b. 只有有限个间断点的有界函数;

c. 单调函数.

四、名校经典试题回顾

[3-3](华东师大,2009)

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上不恒为零的连续函数, $D(x)$ 为 *Dirichlet* 函数,则 $f(x)D(x)$ 在 $[a,b]$ 上不可积.

[3-4](华中师大,2004)

设 $f(x)$ 是闭区间 $[a,b]$ 上的可积函数. 证明: $e^{f(x)}$ 在 $[a,b]$ 上也可积.

[3-5](复旦大学,2003)

1. 设 f 在 $[0,1]$ 上有界,则绝对可积一定可积.

2. 设 f 在 $[0,1]$ 上有界且有无穷个不连续点,则 f 在 $[0,1]$ 上不可积.

五、本章小结

我们以达布上和和达布下和为工具,给出了三个可积的充分必要条件. 通过这三个充分必要条件,我们知道以下的函数类是可积的:连续函数,单调函数,间断点有有限个的有界函数.

第 4 章　定积分的应用

一、本章考情分析

这部分内容比较简单,不是高频考点,国内水平中下等的学校经常出这方面的考题. 考题以填空或计算题的形式出现.

二、本章基本内容

1. 平面图形的面积;

2. 由平行截面面积求体积;

3. 平面曲线的弧长;

4. 旋转曲面的面积.

充分体会在定积分应用中,“分割,近似求和,求极限”的思想.

三、本章要点精讲

要点 1:平面图形的面积

a. 直角坐标系:

曲线 $y = f(x)$, x 轴,直线 $x = a$ 和 $x = b$ 所围成的图形面积

$$A = \int_a^b |f(x)| \mathrm{d}x$$

曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$，直线 $x=a$ 和 $x=b$ 所围成的图形面积 $A=\int_a^b|f(x)-g(x)|\mathrm{d}x$

b. 曲线 C 由参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$ 给出

当 $y=y(t)$ 连续，$x=x(t)$ 连续可微且 $x'(t)\neq 0$，

则曲线 C 和 $x=a=x(\alpha)$，$x=b=x(\beta)$ 及 x 轴所围成的图形面积

$$A=\int_\alpha^\beta|y(t)x'(t)|\mathrm{d}t$$

当 C 为封闭曲线且在 (α,β) 上不相交时，C 所围成的图形面积为

$$A=\left|\int_\alpha^\beta y(t)x'(t)\mathrm{d}t\right|$$

c. 当曲线 C 由极坐标方程 $r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]$ 给出，其中 $r(\theta)$ 连续且 $\beta-\alpha\leq 2\pi$. 则 C 和两条射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 所围成的曲边扇形的面积为

$$A=\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta r^2(\theta)\mathrm{d}\theta$$

要点 2:由平行截面面积求体积

a. 设 Ω 是闭区间 $[a,b]$ 上的立体，它的截面面积函数为 $A=A(x)$，$x\in[a,b]$. 如果 $V=\int_a^b A(x)\mathrm{d}x$ 存在，则称 V 为 Ω 的体积.

b. 旋转体的体积.

设 $y=f(x)$，$x\in[a,b]$ 是连续函数，Ω 是由平面图形

$$0\leq y\leq|f(x)|,\ x\in[a,b]$$

绕 x 轴旋转的体积. 则 Ω 的体积为

$$V=\pi\int_a^b[f(x)]^2\mathrm{d}x$$

要点 3:平面曲线的弧长

a. 设曲线 C 是一条没有自交点的非闭的平面曲线，由参数方程 $x=x(t)$，$y=y(t)$，$t\in[\alpha,\beta]$ 给出.

若 $x(t)$ 和 $y(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上连续可微，则 C 是可求长的，且弧长为

$$s=\int_\alpha^\beta\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

b. 直角坐标下的弧长公式:设 C 的方程由光滑函数 $y=f(x)$ 给出. 则弧长公式为

$$s=\int_a^b\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

c. 设曲线 C 的极坐标方程为 $r=r(\theta)$，$\theta\in[\alpha,\beta]$

则弧长公式为

$$S=\int_\alpha^\beta\sqrt{[r(\theta)]^2+[r'(\theta)]^2}\mathrm{d}\theta$$

要点 4:旋转曲面的面积

a. 设平面光滑曲线 C 的方程为 $y=f(x)\geq 0$，$x\in[a,b]$.

则 C 绕 x 轴旋转一周得到的旋转曲面的面积为

$$S = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1+[f'(x)]^2}\mathrm{d}x$$

b. 如果光滑曲线 C 的参数方程为 $x = x(t)$ ，$y = y(t)$ ，$t \in [\alpha,\beta]$

则旋转曲面的面积为

$$S = 2\pi\int_\alpha^\beta y(t)\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\mathrm{d}t$$

四、名校经典试题回顾

[4 -1]（湖南农业大学,2009 年,20 分）

过坐标原点作曲线 $y = \ln x$ 的切线,该切线与曲线 $y = \ln x$ 及 x 轴所围成的平面图形为 D.

(1)求 D 的面积 A ;

(2)求 D 绕直线 $x = e$ 旋转一圈所得到的旋转体的体积.

[4 -2]（燕山大学,2010 年,12 分）

求摆线

$$\begin{cases}x = t - \sin t\\ y = 1 - \cos t\end{cases}$$

$t \in [0,2\pi]$ 与 x 轴所围图形的面积.

五、本章小结

这章本着“分割,近似求和,取极限”的思想,阐述了面积,体积,长度的概念,给出了相应的公式.

第 5 章　反常积分

要点 2:瑕积分

（注意:瑕积分的性质在形式上和无穷积分的几乎一模一样. 瑕点类似于无穷远点. 大家在复习的时候可以做一个比较）

a. 设函数 f 在 $(a,b]$ 上有定义,在点的右侧 a 无界,但在任意内闭区间 $[u,b]\subseteq(a,b]$ 上有界且可积,如果存在极限 $\lim\limits_{u\to a^+}\int_u^b f(x)\mathrm{d}x = J$,则称此极限为无界函数 f 在 $(a,b]$ 上的反常积分或瑕积分,记作 $J = \int_a^b f(x)dx$.

并称瑕积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 是收敛的,否则称为发散.

同理,可以定义瑕点为 b 的瑕积分,瑕点为 $c\in(a,b)$ 的瑕积分.

【5 -5】（书上的习题）讨论瑕积分 $\int_a^b \frac{1}{(x-a)^p}\mathrm{d}x$ 的收敛性.

这道题非常重要,正如无穷积分中的 $\int_a^{+\infty}\frac{1}{x^p}\mathrm{d}x$.

b. 瑕积分的基本性质

(1)柯西收敛判断准则;

(2)线性性质;

(3)区间和公式;

(4)绝对收敛和条件收敛.

c. 非负函数瑕积分收敛的判断法

(1)比较判别法;

(2)比较判别法的极限形式;

(3)和 $\dfrac{1}{(x-a)^p}$ 的比较;

(4)和 $\dfrac{1}{(x-a)^p}$ 的比较的极限形式.

d. 一般瑕积分收敛的判别法

(1)狄利克雷判别法;

(2)阿贝尔判别法.

四、名校经典试题回顾

[5-6](北京大学)讨论瑕积分 $\int_0^1 \dfrac{\ln x}{1-x}dx$ 的收敛性.

[5-7](北京航空学院)证明 $\int_0^{+\infty} \dfrac{dx}{1+x^4} = \int_0^{+\infty} \dfrac{x^2 dx}{1+x^4} = \dfrac{\pi}{2\sqrt{2}}$.

[5-8](上海师范学院)设 $F(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \int_x^{+\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$, $x \in [0, +\infty)$

试证:

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} F(x) = 0$;
2. $F(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 内单调递减.

五、本章小结

这章我们定义了反常积分:无穷积分和瑕积分,给出了它们的基本性质,讨论了收敛的判别法. 这节的本质是极限. 只要记住反常积分的定义,充分利用极限的性质,就能掌握好这节的内容.

积分论的总结

积分论是数学分析的主要内容之一. 不定积分和定积分从定义上来看没有任何关联:一个是求导的逆运算(即不定积分),一个是分割,取点,作和,求极限(即定积分). 两者被牛顿—莱布尼兹定理有机的结合起来. 反常积分将定积分从被积函数有界(对应瑕积分),积分区间为有界的闭区间(对应无穷积分)中解放出来. 其本质是定积分形式下的极限.

本论证明题的特点是极限论,微分论和积分论的有机结合,计算题在掌握一般方法后还需要一定的技巧.

重要概念之间的联络图.

第四篇　级数论

第 1 章　数项级数

一、本章考情分析

数项级数是实数加法的推广. 其本质是数列极限问题. 本章是考研的热点. 题型为选择,填空,计算和证明. 考试主要内容是计算数项级数和及证明数项级数的敛散性.

二、本章基本内容

1. 数项级数的定义及基本性质;

2. 正项级数收敛判别法;

3. 一般项级数收敛判别法;

4. 绝对收敛级数的性质.

三、本章要点精讲

要点 1:数项级数的定义及基本性质

1)数项级数的定义,部分和,敛散性.

【1 - 1】(书上的习题)证明级数

$$\frac{1}{1\cdot 6}+\frac{1}{6\cdot 11}+\frac{1}{11\cdot 16}+\cdots+\frac{1}{(5n-4)\cdot(5n+1)}+\cdots$$

收敛,并求其值.

2)运算性质

(ⅱ)加法和数乘运算;

(ⅱ)加减有限项不改变敛散性;

(ⅲ)加括号不影响级数的收敛性及级数和.

3)柯西收敛准则及收敛的必要条件;

4)绝对收敛和条件收敛.

要点2:正项级数收敛判别法

(注意和非负函数的反常积分的收敛判别法在形式上作比较)

1)正项级数收敛的充分必要条件是部分和数列有界.

2)比较原理:设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数.如果存在某正整数 N,对一切 $n > N$ 都有 $u_n \le v_n$,则

A.若正项级数 $\sum v_n$ 收敛,则正项级数 $\sum u_n$ 收敛;

B.若正项级数 $\sum u_n$ 发散,则正项级数 $\sum v_n$ 发散.

比较原理的极限形式:设 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 是两个正项级数.

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n} = l$,则

A.当 $0 < l < +\infty$ 时,则 $\sum u_n$ 和 $\sum v_n$ 有相同的敛散性;

B.当 $l = 0$ 时,则 $\sum v_n$ 收敛蕴含 $\sum u_n$ 收敛;

C.当 $l = +\infty$ 时,则 $\sum u_n$ 发散蕴含 $\sum v_n$ 发散.

【1-2】(书上的习题)设 $a_n \ge 0$,$n = 1,2,\cdots$,且数列 $\{na_n\}$ 有界,证明 $\sum a_n{}^2$ 收敛.

3)比式判别法:设 $\sum u_n$ 为正项级数,且存在某正整数 N 及常数 q($0 < q < 1$).

A.若对一切 $n > N$,成立不等式 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \le q$,则级数 $\sum u_n$ 收敛;

B.若对一切 $n > N$,成立不等式 $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \ge 1$,则级数 $\sum u_n$ 发散.

比式判别法的极限形式:

设 $\sum u_n$ 为正项级数,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = q$.则

A.$q < 1$ 时,级数 $\sum u_n$ 收敛;

B.$q > 1$ 时,级数 $\sum u_n$ 发散;

C.$q = 1$ 时,方法失败.

4)根式判别法:设 $\sum u_n$ 为正项级数,且存在某正整数 N 及常数 q($0 < q < 1$)

A.若对一切 $n > N$,成立不等式 $\sqrt[n]{u_n} \le q$,则级数 $\sum u_n$ 收敛;

B.若对一切 $n > N$,成立不等式 $\sqrt[n]{u_n} \ge 1$,则级数 $\sum u_n$ 发散.

根式判别法的极限形式:

设 $\sum u_n$ 为正项级数,若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n} = q$.则

A.$q < 1$ 时,级数 $\sum u_n$ 收敛;

B. $q > 1$ 时,级数 $\sum u_n$ 发散;

C. $q = 1$ 时,方法失败.

4)积分判别法:设 f 是 $[1, +\infty)$ 上的非负递减函数,那么正项级数 $\sum f(n)$ 和无穷积分 $\int_1^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 具有相同的敛散性.

【1-3】(书上的习题)证明 $\sum \dfrac{1}{1+n^2}$ 收敛, $\sum \dfrac{n}{1+n^2}$ 发散.

要点3:一般项级数收敛判别法

(1)柯西收敛判别法;

(2)莱布尼兹判别法:若正项级数 $\sum u_n$ 单调递减且收敛于零,则交错级数 $\sum (-1)^{n+1}u_n$ 收敛.

为了给出阿贝尔判别法和狄利克雷判别法;我们需要下边的一个公式和一个引理.

阿贝尔变换(分部求和公式):设 ε_i , v_i ($i = 1,2,\cdots,n$)为两组实数, $\sigma_k = v_1 + \cdots + v_k$ ($k = 1, 2,\cdots,n$),则

$$\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i v_i = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)\sigma_1 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)\sigma_2 + \cdots + (\varepsilon_{k-1} - \varepsilon_k)\sigma_{k-1} + \varepsilon_k\sigma_k$$

阿贝尔引理:若

(ⅰ) $\varepsilon_1,\cdots,\varepsilon_n$ 是单调数组;

(ⅱ) $|\sigma_k| \le A$ ($k = 1,2,\cdots,n$)则

$$\left|\sum_{i=1}^{k} \varepsilon_i v_i\right| < 3\varepsilon A$$

其中 $\varepsilon = \max\limits_k\{|\varepsilon_k|\}$.

【1-4】(书上的习题)证明:若级数 $\sum a_n$ 收敛, $\sum (b_{n+1} - b_n)$ 绝对收敛,则级数 $\sum a_n b_n$ 也收敛.

(3)狄利克雷判别法:若数列 $\{a_n\}$ 单调递减,且 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,又级数 $\sum b_n$ 的部分和数列有界,则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛.

(4)阿贝尔判别法:若数列 $\{a_n\}$ 单调递减且有界,级数 $\sum b_n$ 收敛,则级数 $\sum a_n b_n$ 收敛.

【1-5】注意到 $\{\sum\limits_{k=1}^{n} \sin kx\}$ 和 $\{\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kx\}$ 为有界数列. 故对任意单调递减收敛于零的数列 $\{a_n\}$,级数 $\sum a_n \sin nx$ 和 $\sum a_n \cos nx$ 收敛.

要点4:绝对收敛级数的性质

(1)绝对收敛和条件收敛的本质;

(2)级数重排定理;

(3)级数的乘积.

四、名校经典试题回顾

[1-6](华中师大)设 $\sum a_n$ 收敛, $\lim\limits_{n\to\infty} na_n = 0$.

证明：$\sum n(a_n - a_{n+1}) = \sum a_n$.

[1-7](武汉大学)设 $\sum a_n{}^2$ 收敛,证明：$\sum \dfrac{a_n}{\sqrt{n}\ln n}(a_n > 0)$ 也收敛.

[1-8](北京大学)证明级数 $\sum (-1)^n \dfrac{\arctan n}{\sqrt{n}}$ 收敛.

五、本章小结

本章我们给出了数项级数的一些基本概念,讨论了一些最基本的收敛判别法.数项级数的收敛问题,实质上是特殊形式的数列收敛问题.反之,一个数列的收敛问题也可以看成级数的收敛问题.

抓住级数的定义,利用已学到的极限理论,是学好这的关键.

第2章　函数项级数

一、本章考情分析

这章是考研的高频考点.题型以证明题为主.考题内容为判断函数列或函数项级数是否一致收敛,及一致收敛性在极限论,微分论,积分论和级数论中的应用.

可以这样讲,这章的一道考题就可以涉及到一元数学分析的四论.这章的学习是对整个一元数学分析的融会贯通.同学们可以用这章的内容来检查对前边所学内容的掌握程度.

二、本章基本内容

1. 函数列的一致收敛;
2. 函数项级数的一致收敛;
3. 一致收敛函数列的性质;
4. 一致收敛函数项级数的性质.

注意:正如数项级数的收敛等价于一个数列的收敛,同样一个函数列的(一致)收敛对应一个函数项级数的(一致)收敛.同学们在复习的时候应特别注意这种对应关系.

三、本章要点精讲

要点1:函数列的一致收敛

(1)函数列收敛及一致收敛的概念

【2-1】设 $f_n(x) = x^n$, $n = 1,2,\cdots$ 为定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的函数列.

a)证明它的收敛域是 $(-1,1]$,且有极限函数 $f(x) = \begin{cases} 0, & |x| < 1 \\ 1, & x = 1 \end{cases}$

b) $\{f_n\}$ 在 $(-1,1)$ 非一致连续;

c) $\{f_n\}$ 在 $(-1,1)$ 内闭一致收敛.

(2)函数列一致收敛的判别法

a)柯西一致收敛判断准则

b)函数列 $\{f_n\}$ 在区间 D 上一致收敛于 f 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|f_n(x)-f(x)|=0$$

c)函数列 $\{f_n\}$ 在区间 D 上非一致收敛于 f 的充分必要条件是:存在 D 中的数列 $\{x_n\}$,使得数列 $\{|f_n(x_n)-f(x_n)|\}$ 不收敛于零.

要点 2:函数项级数的一致收敛

(1)函数项级数的收敛及一致收敛的概念

【2-2】对定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上的函数项级数(几何级数)

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

证明:

a)几何级数在 $(-1,1)$ 内收敛于和函数 $S(x)=\dfrac{1}{1-x}$;

当 $|x|\geq 1$ 时,几何级数是发散的.

b)几何级数在收敛域 $D=(-1,1)$ 上不一致收敛.

c)几何级数在收敛域 $D=(-1,1)$ 上内闭一致收敛.

(2)函数项级数一致收敛判别法

a)柯西一致收敛判断准则

推论:函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛的必要条件是函数列 $\{u_n(x)\}$ 在 D 上一致收敛于零.

b)函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 D 上一致收敛于 $S(x)$ 的充分必要条件是

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in D}|S_n(x)-S(x)|=0$$

c)魏尔斯特拉斯判别法

d)阿贝尔判别法:设

(1) $\sum u_n(x)$ 在区间 I 上一致收敛;

(2)对于每个 $x\in I$,$\{v_n(x)\}$ 是单调的;

(3) $\{v_n(x)\}$ 在 I 上一致有界.

则级数 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

e)狄利克雷判别法:设

(1) $\sum u_n(x)$ 的部分和函数列在区间 I 上一致有界;

(2)对于每个 $x\in I$,$\{v_n(x)\}$ 是单调的;

(3)在 I 上 $v_n(x)\rightrightarrows 0\ (n\to\infty)$.

则级数 $\sum u_n(x)v_n(x)$ 在 I 上一致收敛.

阿贝尔判别法和狄利克雷判别法成立的原因:

在两个判别法的条件中,都有条件:对于每个 $x\in I$,$\{v_n(x)\}$ 是单调的. 故阿贝尔引理成立,即

$$\left|\sum_{i=N+1}^{N+p}u_i(x)v_i(x)\right|\leq 3AB$$

其中

$$|v_i(x)|\le A\ (i=N+1,\cdots,N+p;x\in I)$$

$$\left|\sum_{j=N+1}^{N+i}u_j(x)\right|\le B\ (i=1,\cdots,p;x\in I)$$

要点3:一致收敛函数列的性质

(1)关于极限的定理:设函数列 $\{f_n\}$ 在 $(a,x_0)\cup(x_0,b)$ 上一致收敛于 f,且对每个 n, $\lim\limits_{x\to x_0}f_n(x)=a_n$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 和 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 均存在且相等.从运算的角度来看,就是两种运算可以交换顺序,即

$$\lim_{x\to x_0}\lim_{n\to\infty}f_n(x)=\lim_{n\to\infty}\lim_{x\to x_0}f_n(x)$$

(2)关于连续性的定理:若连续函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上一致收敛于 f,则 f 是 I 上的连续函数.

推论:若连续函数列 $\{f_n\}$ 在区间 I 上内闭一致收敛于 f,则 f 是 I 上的连续函数.

(3)关于积分的定理:若连续函数列 $\{f_n\}$ 在区间 $[a,b]$ 上一致收敛,则

$$\int_a^b\lim_{n\to\infty}f_n(x)\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty}\int_a^bf_n(x)\mathrm{d}x$$

(4)关于可微性的定理:设 $\{f_n\}$ 是 $[a,b]$ 上的具有连续导函数的函数列.若 $\{f_n'\}$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,且存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $\{f_n(x_0)\}$ 收敛,则

$$\frac{d}{dx}(\lim_{n\to\infty}f_n(x))=\lim_{n\to\infty}\frac{d}{dx}f_n(x)$$

推论:上述定理中,“$[a,b]$ 上一致收敛”可以减弱为“在区间 I 上内闭一致收敛”.

【2-3】(书上的习题)在上述定理中 $f_n\Rightarrow f\ (n\to\infty)$.

要点4:一致收敛函数项级数的性质

(1)关于连续性的定理:若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,且每一项都连续,则其和函数也在 $[a,b]$ 上连续,即 $\lim\limits_{x\to x_0}\sum u_n(x)=\sum\lim\limits_{x\to x_0}u_n(x)$.

(2)逐项求积定理:若函数项级数 $\sum u_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,且每一项都连续,则

$$\sum\int_a^bu_n(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\sum u_n(x)\mathrm{d}x$$

【2-4】(书上的习题)设 $S(x)=\sum\frac{x^n-1}{n^2}$, $x\in[-1,1]$,计算积分 $\int_0^xS(t)\mathrm{d}t$.

(3)逐项求导定理:若函数项级数 $\sum u_n'(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛,且每一项都连续,同时存在 $x_0\in[a,b]$ 使得 $\sum u_n(x_0)$ 收敛,则

$$\sum\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}u_n(x)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sum u_n(x)$$

【2-5】(书上的习题,北京大学考研题)设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶的导数,且在任意有限区间上 $f^{(n)}\Rightarrow\varphi\ (n\to\infty)$.试证 $\varphi(x)=ce^x$ (c 为常数).

四、名校经典试题回顾

[2-6](书上的习题,陕西师范大学的考研题)若级数 $\sum a_n$ 收敛,则 Dirichlet 级数 $\sum\frac{a_n}{n^x}$ 在 [0,

$+\infty$)上一致收敛.

[2-7](华中科技大学)证明 $\sum(-1)^n\frac{x^2+n}{n^2}$ 在任意有穷区间上一致收敛,但在任意一点非绝对收敛.

五、本章小结

本章我们引入了函数列(一致)收敛和函数项级数(一致)收敛的概念. 这两种收敛类似与数列收敛和数项级数的收敛.

引入一致收敛概念的目的是为了求极限,求积分,求导数,求级数,这四种运算可以交换顺序.

第3章 幂级数

一、本章考情分析

幂级数是特殊的函数项级数,具有一般函数项级数不具有的特性. 这是这章要学的重点.

这章也是高频考点. 考题的内容为求幂级数的收敛域、收敛半径,幂级数的和及幂级数的展开式.

二、本章基本内容

1. 幂级数;

2. 幂级数的性质;

3. 函数的幂级数的展开式.

三、本章要点精讲

要点1:幂级数

(1)形如 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+\cdots$ 的级数称为幂级数.

我们主要研究 $x_0=0$ 的情形,即

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$$

(2)阿贝尔定理:

ⅰ)若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $\bar{x}$ 处收敛,则对满足 $|x|<\bar{x}$ 的任意 x,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 x 处绝对收敛.

ⅱ)若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 $\bar{x}$ 处发散,则对满足 $|x|>\bar{x}$ 的任意 x,幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 在 x 处发散.

由阿贝尔定理,引出幂级数的收敛半径,收敛区间的概念.

(3)求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径的方法

方法1:

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{|a_n|}=\rho$,则 $R=\frac{1}{\rho}$

方法2:

若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}=\rho$,则 $R=\frac{1}{\rho}$

方法3(柯西-阿达马定理):

若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}=\rho$,则 $R=\frac{1}{\rho}$

【3-1】(书上的习题)求幂级数 $\frac{3^n+(-2)^n}{n}(x+1)^n$ 的收敛半径和收敛区间.

$$(\rho=3,R=\frac{1}{3},\text{收敛区间为}(-\frac{1}{3}-1,\frac{1}{3}-1))$$

要点2:幂级数的性质

(1)幂级数在收敛区间上内闭一致收敛.

(2)幂级数若在收敛区间的端点 R(或 $-R$)处收敛(注意不一定是一致收敛),则幂级数在 $[0,R]$(或 $[-R,0]$)上一致收敛.

(3)幂级数的和函数是收敛区间上的连续函数.幂级数若在收敛区间的端点 R(或 $-R$)处收敛(注意不一定是一致收敛),则幂级数的和函数在 $[0,R]$(或 $[-R,0]$)上连续.

(4)下边三个幂级数有相同的收敛区间:

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n,\ \sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}\ \text{和}\ \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$$

(5)设幂级数的和函数为 f,则对任意的 $x\in(-R,R)$,

ⅰ)f 在 x 处可导,且 $f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_nnx^{n-1}$;

ⅱ)f 在 $[0,x]$ 或 $[x,0]$ 上可积,且 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$.

(6)和函数 f 和幂级数的系数的关系:$a_n=\frac{f^{(n)}(0)}{n!}$,$n=0,1,2,\cdots$

【3-2】(书上的习题)证明:设 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 当 $|x|<R$ 时收敛,若 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}$ 也收敛,则 $\int_0^R f(x)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}R^{n+1}$

应用这个结果证明

$$\int_0^1\frac{1}{1+x}\mathrm{d}x=\ln2=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{(n-1)}\frac{1}{n}$$

要点3:函数的幂级数的展开式

这节的问题刚好和上节的内容相反,即:在什么情况下,一个函数 f 在 x_0 的附近是一个幂级数的和函数?

如果函数 f 在 x_0 的附近有任意阶的导数,则称级数

$$f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

为 f 在 x_0 处的泰勒级数.

泰勒定理:

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+R_n(x)$$

其中 $R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}$ (ξ 在 x_0 和 x 之间)是拉格朗日余项.

故在 (x_0-r,x_0+r) 上

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

当且仅当 $\lim\limits_{n\to\infty}R_n(x)=0$

如果在 x_0 附近的,

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

则称 f 可以在 x_0 的附近可以展开成泰勒级数,并将

$$=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\cdots$$
$$+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\cdots$$

称作 f 在 x_0 附近的泰勒展开式(注意和泰勒级数的区别).

可以看出,泰勒公式中的余项 $R_n(x)$ 是 f 可以在 x_0 附近展成泰勒展开式的关键. 下边给出在 $x_0=0$ 时的余项的三种形式

$R_n(x)=\frac{1}{n!}\int_0^1 f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\mathrm{d}t$,积分型余项

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}x^{n+1}$, ξ 在 0 和 x 之间,拉格朗日型余项

$R_n(x)=\frac{f^{(n+1)}(\theta x)}{n!}(1-\theta)^n x^{n+1}$, $0\le\theta\le1$,柯西型余项

一些常见初等函数,例如 e^x , $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $\frac{1}{1+x}$, $\frac{1}{\sqrt{1+x}}$ 的泰勒展开式要记住. 这对求幂级数和及求函数的泰勒展开式极其有用.

【3-3】(书上的习题)利用已知函数的幂级数展开式,求函数 $\frac{e^x}{1-x}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式,并确定它收敛于该函数的区间.

四、名校经典试题回顾

[3-4](北京大学)解答下列问题:

(1)求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n!}\left(\dfrac{n}{e}\right)^n x^n$ 的收敛半径;

(2)求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{2^n(n+1)}{n!}$ 的和函数.

(答案:(1) $R=1$;(2) $3e^2$.)

[3-5](华中师范大学)求级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n2^{\frac{\pi}{2}}x^{3n-1}$ 的收敛区间与和函数.

五、本章小结

这章我们给出了幂级数的概念,给出了求收敛半径的三种方法,讨论了幂级数的性质,最后给出了函数幂级数展开式的概念. 归结起来就是怎样求幂级数的和,怎样把函数表示成幂级数的和,怎样把函数表示成幂级数.

幂级数是特殊的函数项级数. 注意这些特殊性,例如,收敛半径,求导和求积分的收敛半径不变,在收敛区间内是内闭一致收敛的,是学好这章的关键.

需要同学们记住常见的初等函数的泰勒展开式,以便由此求别的展开式.

第4章　傅里叶级数

一、本章考情分析

本章不是高频考点,但也是经常考的内容.

常见的题型为计算题和证明题.

考题内容基本上是求某函数的傅里叶级数.

二、本章基本内容

1. 以 2π 为周期的函数的傅里叶级数;

2. 以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数.

三、本章要点精讲

要点1:以 2π 为周期的函数的傅里叶级数

(1)三角函数系

$1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots, \cos nx, \sin nx, \cdots$

为 $[-\pi,\pi]$ 上的正交函数系.

(2)定理:若在整个数轴上

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

且等式的右边一致收敛,则

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\ n = 1,2,\cdots$$

(3)如果f是以2π为周期且在$[-\pi,\pi]$上可积的函数,则

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x,\ n = 0,1,2,\cdots$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x,\ n = 1,2,\cdots$$

有定义,由此构成的三角函数级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum (a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

称为f的傅里叶级数,a_n,b_n称为f的傅里叶系数.

在什么情况下,

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

是傅里叶级数理论的主要内容.

(4)收敛定理:若以2π为周期的函数f在$[-\pi,\pi]$上分段光滑,则

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum (a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

可以看出当f为偶函数时,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0,\ n = 1,2,\cdots$$

故

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \frac{a_0}{2} + \sum a_n\cos nx$$

当f为奇函数时,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx dx = 0,\ n = 0,1,2,\cdots$$

故

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} = \sum a_n\sin nx$$

(5)贝塞尔(*Bessel*不等式):如果f在$[-\pi,\pi]$上可积,则

$$\frac{{a_0}^2}{2} + \sum ({a_n}^2 + {b_n}^2) \le \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x)\mathrm{d}x$$

由贝塞尔不等式,我们有

黎曼-勒贝格定理:

如果f在$[-\pi,\pi]$上可积,则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\mathrm{d}x = 0$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\mathrm{d}x = 0$$

要点 2:以 $2l$ 为周期的函数的傅里叶级数

设 f 是以 $2l$ 为周期的函数. 通过变量替换 $t=\frac{\pi x}{l}$ 或 $x=\frac{lt}{\pi}$,则 $F(t)=f\left(\frac{lt}{\pi}\right)$ 成为一个以 2π 为周期的函数.

若 f 在 $[-l,l]$ 上还是可积的,则 F 是 $[-\pi,\pi]$ 上的可积函数. 故

$$F(t)\sim\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\cos nt\mathrm{d}t=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=0,1,2,\cdots$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}F(t)\sin nt dt=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}\mathrm{d}x,\ n=1,2,\cdots$$

如果更有 f 是分段光滑的,则

$$\frac{F(t+0)+F(t-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum(a_n\cos nt+b_n\sin nt)$$

做代换,有

$$\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}=\frac{a_0}{2}+\sum\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

四、名校经典试题回顾

[4-1](长沙铁道学院)试求:$f(x)=x+x^2$ 在 $-\pi<x<\pi$ 上的傅里叶级数,并求级数 $\sum\frac{1}{n^2}$ 的和.

分析:

ⅰ)将 $f(x)=x+x^2$ 延拓成以 2π 为周期的函数.

ⅱ)求傅里叶系数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\mathrm{d}x=\frac{2}{3}\pi^2$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\cos nx\mathrm{d}x=(-1)^n\frac{4}{n^2}$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x+x^2)\sin nx\mathrm{d}x=(-1)^{n+1}\frac{2}{n}$$

ⅲ)给出 f 的傅里叶级数

$$\frac{\pi^2}{3}+\sum\left((-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx+(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin nx\right)$$

iiii)给出 f 的傅里叶级数的和函数

据收敛定理,当 $x\in(-\pi,\pi)$ 时,傅里叶级数收敛于 $\frac{f(x+0)+f(x_0)}{2}=\pi^2$

iiiii)将 $x=\pi$ 代入 $\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+\sum\frac{4}{n^2}$,故 $\sum\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}$.

[4-2](北京大学,湖南大学)在 $(0,2\pi)$ 内展开 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$.

分析：

1)将 f 延拓成以 2π 为周期的函数.

2)求傅里叶系数

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\mathrm{d}x = 0$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\cos nx\mathrm{d}x = 0$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin nx\mathrm{d}x = \frac{1}{n}$$

3)写出傅里叶级数

$$\sum \frac{\sin nx}{n}$$

4)写出傅里叶级数的和函数

当 $x \in (0,2\pi)$ 时

$$\frac{\pi - x}{2} = \sum \frac{\sin nx}{n}$$

当 $x = 0$ 或 $x = 2\pi$ 时

$$0 = \sum \frac{\sin nx}{n}$$

五、本章小结

本章我们复习了傅里叶级数的基本概念,回顾了收敛定理. 通过具体的题,给出了求傅里叶级数及求函数的步骤. 内容上比较单一,需要同学们记住求傅里叶系数的公式.

级数论的总结

数项级数是加法的推广,本质上是数列的极限收敛问题. 函数列收敛和函数项级数的收敛问题等价. 一致收敛保证了取极限,求导,积分,及级数运算的可交换性. 这是数学分析中最有用的理论成果.

本论证明题的特点是极限论,微分论,积分论和级数论的有机结合,证明题及计算题有难度和技巧. 这部分是考察学生数学分析能力高低的部分.

重要概念之间的联络图.

第二部分　多元数学分析

第五篇　多元函数极限论

第 1 章　平面点集知识

一、本章考情分析

尽管这章不是考研热点. 但却是整个多元函数数学分析的基础. 这正如实直线上的完备性定理是一元函数数学分析的基础一样.

因此只有学好这章,同学们才能学好多元函数的数学分析. 望同学们不要急功近利,而忽视这章的重要性.

另外,需要大家注意的是尽管我们讨论的是平面上的点集,但这些都可以推广到任意有限维的欧氏空间上.

二、本章基本内容

1. 平面点集的一些基本概念;

2. 平面上的完备性定理.

三、本章要点精讲

要点 1:平面点集的一些基本概念

(1)坐标平面、点的坐标、点与有序对的对应、点与点之间的距离及三角不等式、点的两种(空心)邻域及等价性;

(2)点和集合的关系:内点、外点、边界点;

(3)聚点、孤立点;

(4)平面中重要的点集:开集、闭集、开域、闭域、区域、有界点集、无界点集.

要点 2:平面上的完备性定理

(1)点列收敛的定义,用坐标刻画点列的收敛;

(2)柯西准则;

(3)闭集套定理(书上的习题);

(4)聚点定理;

(5)有界无限点列必存在收敛的子列(书上的习题);

(6)有限覆盖定理(书上的习题).

[1-1](书上的习题)设 E 是 R^2 中的有界闭集, $\mathrm{d}(E)$ 为 E 的直径. 证明:存在 $P_1,P_2\in E$,使得 $\rho(P_1,P_2)=\mathrm{d}(E)$.

四、名校经典试题回顾

[1-2](华东师大)设 $S\subset R^2$, $P(x_0,y_0)$ 为 S 的内点, $P_1(x_1,y_1)$ 为 S 的外点. 证明直线段 P_0P_1 必与 S 的边界 ∂S 至少有一个交点.

五、本章小结

本章我们复习了平面上的一些点集的概念,推广了实直线上的完备性定理. 这些虽然不是考研的热点,却是后边学习的基础,望同学们不可轻视大意.

第2章　多元函数的极限

一、本章考情分析

本章是考研的热点,题型为计算题和证明题. 考题内容为求二元函数的极限,累次极限和二重极限的关系.

二、本章基本内容

1. R^n 及 n 元函数;

2. $\lim\limits_{p\to p_0,P\in D}f(P)=A$ 的 $\varepsilon-\delta$ 定义;

3. 极限的刻画定理;

4. 累次极限;

5. 累次极限和二重极限的关系.

三、本章要点精讲

要点1: R^n 及 n 元函数

要点2: $\lim\limits_{p\to p_0,P\in D}f(P)=A$ 的 $\varepsilon-\delta$ 定义

[2-1](书上的习题)试应用 $\varepsilon-\delta$ 定义证明

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2y}{x^2+y^2}=0$$

要点3:极限的刻画定理

极限的刻画定理: $\lim\limits_{p\to p_0,P\in D}f(P)=A$ 的充分必要条件是:对于 D 的任意子集 E,只要 P_0 是 E 的聚点,则 $\lim\limits_{p\to p_0,P\in E}f(P)=A$.

(注:该定理类似于一元函数的海涅定理,这也是书上的习题)

推论1:设 E_1 是 D 的子集, P_0 是 E_1 的聚点. 若 $\lim\limits_{p\to p_0, P\in E_1} f(P)$ 不存在,则 $\lim\limits_{p\to p_0, P\in D} f(P)$ 也不存在.

推论2:设 E_1 和 E_2 是 D 的子集, P_0 是 E_1 和 E_2 的聚点. 若存在极限 $\lim\limits_{p\to p_0, P\in E_1} f(P) = A_1$, $\lim\limits_{p\to p_0, P\in E_2} f(P) = A_2$,但 $A_1 \neq A_2$,则 $\lim\limits_{p\to p_0, P\in D} f(P)$ 不存在.

推论3:极限 $\lim\limits_{p\to p_0, P\in D} f(P)$ 存在的充分必要条件是:对于 E 中任意满足条件 $P_n \neq P_0$ 且 $\lim\limits_{n\to\infty} P_n = P_0$,它所对应的数列 $\{f(P_n)\}$ 都收敛(注:这是书上的习题).

要点4:累次极限

要点5:累次极限和二重极限的关系

ⅰ)两者的存在性没有必然的蕴含关系,这可以由下边的三个例子看出:

[2-2] $f(x,y) = \dfrac{xy}{x^2+y^2}$ 在原点处的两个累次极限存在且相等,但二重极限不存在.

[2-3] $f(x,y) = \dfrac{x-y+x^2+y^2}{x+y}$,它关于原点的累次极限存在且不相等,且二重极限不存在.

[2-4] $f(x,y) = x\sin\dfrac{1}{y} + y\sin\dfrac{1}{x}$ 它关于原点的两个累次极限都不存在,但二重极限却存在.

ⅱ)在一定条件下,有关系,表现在下述定理中:

定理:若二重极限和累次极限都存在,则它们必然相等.

推论:两个累次极限存在且不相等,则二重极限不存在.

四、名校经典试题回顾

[2-5](北京航空航天大学)求 $\lim\limits_{\substack{x\to+\infty\\ y\to+\infty}} (x^2+y^2)e^{-(x+y)}$.

(答案:0)

[2-6](南京大学)设 $f(x,y)$ 是区域 D: $|x|\le 1$, $|y|\le 1$ 上的有界 k 次齐次函数($k\ge 1$),问极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}} |f(x,y)+(x-1)e^y|$ 是否存在? 若存在,试求其值.

(答案: -1)

五、本章小结

这章我们复习了二元函数的极限定义,回顾了二元函数极限的性质,论证了累次极限和二重极限没有必然的蕴含关系.

可以看出多元函数的极限要比一元函数的极限复杂. 同学们应该记住几个有特点的例子,以便作反例用.

第3章　多元函数的连续性

一、本章考情分析

本章是考研的热点,题型为证明题. 考题内容为证明连续性及连续性的应用.

二、本章基本内容

1. 多元函数连续性的概念;

2. 多元函数连续性的应用.

三、本章要点精讲

要点1:多元函数连续性的概念

[3-1](书上的习题)设

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x}{(x^2+y^2)^P}, x^2+y^2\neq 0, P>0\\ 0, x^2+y^2=0\end{cases}$$

讨论它在 $(0,0)$ 处的连续性.

[3-2](书上的习题)设 $f(x,y)$ 定义在闭矩形 $S=[a,b]\times[c,d]$ 上,若 f 对 y 在 $[c,d]$ 上处处连续,对 x 在 $[a,b]$ 上(且关于 y)为一致连续,证明 f 在 S 上处处连续.

要点2:多元函数连续性的应用

(1)有界性及最大、最小值定理;

(2)一致连续性定理;

(3)介值定理.

[3-3](书上的习题)设 f 在有界开集 E 上一致连续. 证明:

(ⅰ)可将 f 连续延拓到 E 的边界上;

(ⅱ)f 在 E 上有界.

四、名校经典试题回顾

[3-4](武汉大学)设 $f(x,y)$ 为连续函数,且当 $(x,y)\neq(0,0)$ 时,$f(x,y)>0$,及满足 $f(cx,cy)=cf(x,y)$,$\forall c>0$.

证明存在 $\alpha,\beta>0$,使得

$$\alpha\sqrt{x^2+y^2}\leq f(x,y)\leq\beta\sqrt{x^2+y^2}.$$

[3-5](陕西师范大学)若 $f(x,y)$ 分别对 x 和 y 连续,又对其中一个变量是单调的,则 $f(x,y)$ 是二元连续函数.

五、本章小结

本章我们复习了多元函数的连续性,将一元连续函数的基本性质推广到多元连续函数. 多元连续函数是多元数学分析的主要研究对象.

多元函数极限论

本论将一元函数的极限从形式上和本质上推广到多元函数. 抓住极限的本质,注意一元函数和多元函数在哪些地方相同(比如多元函数有累次极限的概念),在哪些地方不相同,是学好多元函数极限论的关键.

多元函数的极限论要比一元函数的极限论复杂,其主要原因是定义域丢失了自然的序关系.
本论将是整个多元数学分析的基础.

第六篇　多元函数微分论

第 1 章　多元函数可微性

一、本章考情分析

本章为考研的高频考点. 题型为计算题或证明题. 考题内容为求偏导数,求全微分,方向导数,讨论全微分和偏导数的关系.

二、本章基本内容

1. 偏导数;

2. 全微分;

3. 偏导数和全微分的关系;

4. 高阶偏导数;

5. 复合函数的微分法;

6. 隐函数的微分法;

7. 方向导数与梯度.

三、本章要点精讲

要点 1:偏导数

(1)偏导数的定义;

[1 -1](书上的习题)求函数 $f(x,y) = x^2y$ 的偏导数.

(2)偏导数存在不蕴含连续性. 这和一元数学分析不同.

[1 -2](书上的习题)函数 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ 在点 (0,0) 处连续但偏导数不存在.

要点 2:全微分的定义

(1)全微分的定义;

(2)全微分蕴含连续性.

[1－3](书上的习题)考察函数 $f(x,y)=xy$ 在点 (x_0,y_0) 处的全微分.

要点3:偏导数和全微分的关系

(1)可微的必要性:全微分蕴含偏导数存在;

(2)偏导数存在并不蕴含连续性,当然更不蕴含全微分存在.这点和一元数学分析中的导数和微分的关系不一样.

(3)可微的充分条件;

(4)连续性,全微分,偏导数的关系.

要点4:高阶偏导数

(1)高阶偏导数的定义;

(2)混合偏导和顺序有关,例如下边的例子.

[1－4](书上的习题) $f(x,y)=\begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, x^2+y^2\neq 0 \\ 0, x^2+y^2=0 \end{cases}$,通过计算,可知 $f_{xy}(0,0)=-1$; $f_{yx}(0,0)=1$.

但在一定条件下,混合偏导和求导顺序无关.

定理:若 $f_{xy}(x,y)$, $f_{yx}(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 的某邻域上连续,则 $f_{xy}(x_0,y_0)=f_{yx}(x_0,y_0)$.

要点5:复合函数的微分法

(1)复合函数求导法

定理:若函数 $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$ 在点 (s,t) 可微, $z=f(x,y)$ 在点 $(x,y)=(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 可微,则 $z=f(\varphi(s,t),\psi(s,t))$ 在 (s,t) 可微,且关于 s 与 t 的

偏导数为

$$\left.\frac{\partial z}{\partial s}\right|_{(s,t)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial x}{\partial s}\right|_{(s,t)}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial y}{\partial s}\right|_{(s,t)}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{(s,t)}=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial x}{\partial t}\right|_{(s,t)}+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x,y)}\left.\frac{\partial y}{\partial t}\right|_{(s,t)}$$

其它情况类似

注:如果只求偏导数,则不要求函数 $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$ 在点 (s,t) 可微,只要求求导即可.

[1－5](书上的习题)设 $u=f(x+y,xy)$,求 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 和 $\dfrac{\partial u}{\partial y}$.

(2)复合函数的高阶偏导数

若函数 $x=\varphi(s,t)$, $y=\psi(s,t)$, $z=f(x,y)$ 都具有连续的二阶偏导数,则作为复合函数的 z 对 s , t 同样存在二阶连续偏导数.计算方法如下:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial s}\right)=\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial x}{\partial s}\right)+\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial y}{\partial s}\right)$$

(3)多元函数一阶全微分形式不变形

[1-6](书上的习题)设 $z=(x+y)^{xy}$,求 dz.

要点6:隐函数(组)的微分法

(1)隐函数 $F(x,y)=0$ 和隐函数组的概念;

(2)隐函数 $F(x,y)=0$ 求导法;

(3)隐含数组求导法.

要点7:方向导数与梯度

(1)方向导数 $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}$ (或 $f_l(P_0)$,或 $f_l(x_0,y_0,z_0)$)的概念;

(2)求方向导数的方法;

定理:若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 可微,则 f 在点 P_0 处沿任意方向 $l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 的方向导数存在,且

$$f_l(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma$$

(3)方向导数和偏导数的关系:

当偏导数存在时

当 l 为 x 轴的正方向时, $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$;

当 l 为 x 轴的负方向时, $\left.\frac{\partial f}{\partial l}\right|_{P_0}=-\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{P_0}$.

(4)方向导数和连续的关系:没有关系;

[1-7]设 $f(x,y)=\begin{cases}1,0<y<x^2,-\infty<x<+\infty\\0,\text{其他}\end{cases}$,每个方向的方向导数为零,但不连续,当然更不可微.

[1-8]连续,但每个方向的方向导数不存在

$$f(x,y)=\begin{cases}\sqrt{x^2+y^2}\sin\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},x^2+y^2\neq 0\\0,x^2+y^2=0\end{cases}$$

(5)梯度 grad(f) 及模的概念;

(6)梯度的意义:设 $l=(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$. 在可微的情况下,

$$f_l(P_0)=f_x(P_0)\cos\alpha+f_y(P_0)\cos\beta+f_z(P_0)\cos\gamma=grad(f)\cdot l$$
$$=|\mathrm{grad}(f)|\cos\theta$$

其中 θ 为 grad(f) 和单位方向 l 之间的夹角.

当 $\theta=0$ 时, grad(f) 取得最大值 $|\mathrm{grad}(f)|$;

当 $\theta=\pi$ 时, grad(f) 取得最小值 $-|\mathrm{grad}(f)|$.

[1-9](书上的习题)设 $f(x,y)$ 可微, l_1 和 l_2 是 R^2 上的一组线性无关向量. 试证明:若 $f_{l_i}(x,y)=0\ (i=1,2)$,则 $f(x,y)$ 为常值函数.

四、名校经典试题回顾

[1-10](北京师范大学)已知 $z=f(x,y)$ 由 $x^2+y^2+h^2(z)=1$ 确定,且 $h(z)$ 具有所需性质. 求

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$.

[1-11](南开大学)设

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{(x+y)\sin xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

证明$f(x,y)$在点$(0,0)$处连续但不可微.

[1-12](同济大学)确定a的值,使得

$$f(x,y)=\begin{cases}(x^2+y^2)^a\sin\frac{1}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}$$

在点$(0,0)$处可微.

$\left(\text{答案:}a>\frac{1}{2}\right)$

五、本章小结

本章我们复习了

(1)多元函数微分学的最基本概念:全微分,(高阶)偏导数,方向导数,梯度.

(2)讨论了它们之间的关系;

(3)给出了复合函数微分法和隐函数(组)微分法,及在可微的情况下求方向导数的公式.

第2章　泰勒公式和极值问题

一、本章考情分析

求多元函数的极值及条件,是历年来考研的热点.中值定理及泰勒公式也是在证明题中常用到的公式,特别是对掌握极值问题很有帮助.

二、本章基本内容

1. 中值定理;
2. 泰勒公式;
3. 极值问题;
4. 条件极值.

三、本章要点精讲

要点1:中值定理

中值定理:设二元函数f在凸开域D的每一个点处可微,则对D内任意两点$P(a,b)$和$Q(a+h,b+k)$,存在某$\theta\in(0,1)$,使得

$$\begin{aligned}&f(a+h,b+k)-f(a,b)\\&=f_x(a+\theta h,b+\theta k)h+f_y(a+\theta h,b+\theta k)k\end{aligned}$$

推论:若函数f在区域D上存在偏导数,且$f_x=f_y=0$,则f在区域D上为常量函数(注:此为书上

的习题).

[2-1]通过对 $F(x,y) = \sin x\cos y$ 使用中值定理,证明存在常数 $\theta \in (0,1)$,有

$$\frac{3}{4} = \frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi\theta}{3}\cos\frac{\pi\theta}{6} - \frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi\theta}{3}\sin\frac{\pi\theta}{6}.$$

要点 2:泰勒公式

泰勒定理:若函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上有直到 $n+1$ 阶的连续偏导数,则对 $U(P_0)$ 内任意一点 (x_0+h,y_0+k),存在相应的 $\theta \in (0,1)$,使得

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0) + \frac{1}{(n+1)!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^{(n+1)} f(x_0+\theta h,y_0+\theta k)$$

如果有直到 n 阶的连续偏导数,则上式可以写成

$$f(x_0+h,y_0+k) = f(x_0,y_0) + \sum_{p=1}^{n}\frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x}+k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0,y_0) + o(\rho^n)$$

[2-2](书上的习题)求函数 $f(x,y) = \ln(1+x+y)$ 在点 $(0,0)$ 处的泰勒公式.

要点 3:极值问题

(1)基本概念:极大值和极大值点,极小值和极小值点,极值,极值点,稳定点.

(2)在偏导数存在的情况下,极值点的必要条件;

注:

a. 稳定点不一定是极值点,例如 $f(x,y) = xy$;

b. 极值点处偏导数不一定存在,例如 $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

(3)极值点的充分条件:设 $f(x,y)$ 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 的某邻域 $U(P_0)$ 上具有二阶连续偏导数,且 P_0 是稳定点,则当黑塞(*hesse*)矩阵

$$H_f(P_0) = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

为正定时,f 在 P_0 取得极小值;当 $H_f(P_0)$ 为负定时,f 在 P_0 取得极大值;当 $H_f(P_0)$ 为不定时,f 在 P_0 不取得极值.

上述定理又可以写成:

(a)当

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{P_0} > 0$$

时,f 在 P_0 取得极值. 当 $f_{xx} > 0$ 时,P_0 为极小值点;当 $f_{xx} < 0$ 时,P_0 为极大值点.

(b)当

$$\begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{vmatrix}_{P_0} < 0$$

时,P_0 不是极值点.

(c)当 $f_{xx}f_{yy}-f^2_{xy}=0$ 时,不能断定 P_0 是否为极值点.

[2-3](书上的习题)求函数 $z=3axy-x^3-y^3(a>0)$ 的极值点.

(答案:(a,a) 为极大值点)

要点4:条件极值

(1)问题的提出:欲求函数 $z=f(x,y)$ 的极值,其中 (x,y) 受到条件 $C:\varphi(x,y)=0$ 的限制.

求解条件极值问题可以将条件极值转换为无条件极值问题,也可以使用拉格朗日乘数法.

(2)求解条件极值的方法:拉格朗日乘数法.

a)构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=f(x,y)+\lambda\varphi(x,y)$;

b)解方程组 $L_x=L_y=L_\lambda$,求出稳定点 (x_0,y_0);

c)判断该点是否为条件极值点.如果是实际问题,可由问题的本身性质来判定.如果不是实际问题,可以用二阶微分来判断.

将条件极值问题转换为无条件极值问题.

[2-4](书上的习题)应用拉格朗日乘数法,求函数 $f(x,y)=x^2+y^2$ 在条件 $x+y-1=0$ 下的极值.

四、名校经典试题回顾

[2-5](北京大学)写出 $f(x,y)=e^x\cos y$ 在 $(0,0)$ 点处的带有佩亚诺余项的泰勒公式.

[2-6](武汉大学)求函数 $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ 在 $ax+by+cz=1$ 点下的最小值.

$\left(\text{答案}:f_{\min}=\dfrac{1}{a^2+b^2+c^2}\right)$

五、本章小结

本章我们复习了多元函数的中值定理及泰勒定理,求极值和条件极值的方法.

多元函数的中值定理及泰勒定理在证明题中要经常使用,而求极值和条件极值是历年的考研热点.

第3章　可微性在几何方面的应用

一、本章考情分析

这章是考研的高频考点.经常以填空题和计算题的形式出现.考题内容为求平面曲线的切线和法线,求空间曲线的切线和法平面,曲面的切平面和法线.有时可能与极值问题有关.

二、本章基本内容

1.平面曲线的切线和法线;

2.空间曲线的切线和法平面;

3.曲面的切平面和法线.

三、本章要点精讲

要点1:平面曲线的切线和法线

设方程 $F(x,y)=0$ 在 $P_0(x_0,y_0)$ 满足隐函数可微性定理.于是 $F(x,y)=0$ 在 P_0 的附近确定一

个连续可微的隐函数 $y=f(x)$，满足条件 $y_0=f(x_0)$.

问题：求 $y=f(x)$ 在 P_0 处的切线和法线方程.

切线方程

$$F_x(x_0,y_0)(x-x_0)+F_y(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

法线方程

$$F_y(x_0,y_0)(x-x_0)+F_x(x_0,y_0)(y-y_0)=0$$

要点2：空间曲线的切线和法平面

(1)给定空间的曲线

$L: x=x(t), y=y(t), z=z(t), \alpha\le t\le\beta$

怎样求曲线 L 上的某一点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$ 处的切线和法线？

切线方程

$$\frac{x-x_0}{x'(t)}=\frac{y-y_0}{y'(t)}=\frac{z-z_0}{z'(t)}$$

法平面方程

$$x'(t)(x-x_0)+y'(t)(y-y_0)+z'(t)(z-z_0)=0$$

(2)当 L 以隐函数

$$\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$$

形式给出时，则

$$\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0},\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0},\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}$$

为切线的方向数

要点3：曲面的切平面和法线

设曲面方程

$$F(x,y,z)=0$$

给出. 怎样求它的切平面？

法向量为

$$F_x(P_0),F_y(P_0),F_z(P_0)$$

注：

(a)梯度 $grad(f)|_{P_0}$ 为等值曲面 $F(x,y,z)=F(x_0,y_0,z_0)$ 在 P_0 处的法方向；

(b)曲线 $L:\begin{cases}F(x,y,z)=0\\G(x,y,z)=0\end{cases}$ 在 P_0 处的切向量可以看成两个曲面在 P_0 处法向量的外积，即

$$\begin{vmatrix} i & j & k\\ F_x(P_0) & F_y(P_0) & F_z(P_0)\\ G_x(P_0) & G_y(P_0) & G_z(P_0)\end{vmatrix}=\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,z)}\right|_{P_0}i+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(z,x)}\right|_{P_0}j+\left.\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,y)}\right|_{P_0}k$$

四、名校经典试题回顾

[3-1](中国科学院，北京航空航天大学)在曲面 $x^2+y^2+z^2=1$ 上求一个点 $P_0(x_0,y_0,z_0)$，且

$x_0,y_0,z_0 \geq 0$,使得该点处的切平面与三个坐标平面围成的四面体的体积最小.

[3-2](大连理工学院)求曲线 $x=t$, $y=-t^2$, $z=t^3$ 与平面 $x+2y+z=4$ 平行的切线方程.

[3-3](东北师范大学)证明:若函数 $F(u,v)$ 有连续的偏导数,则曲面

$$S:F(nx-lz,ny-mz)=0$$

上任一个点的切平面都平行于直线

$$L:\frac{x}{l}=\frac{y}{m}=\frac{z}{n}$$

五、本章小结

本章我们复习了常见的一些曲线和曲面的几何概念:曲面曲线的切线和法线,空间曲线的切线和法平面,曲面的切平面和法线,特别是给出了相应的公式.这些公式要在理解的基础上背过.这章的内容是考研的热点.

第4章　含参变量的积分

一、本章考情分析

本章是高频考点.计算量较大,要求有一定的计算能力.技巧在于应用有关定理,改变计算的顺序;通常表现为改变极限和积分,积分和求导,积分和积分的顺序.

这种计算顺序的改变,需要含参变量反常积分的一致收敛作保障.因此判断含参变量反常积分的一致收敛也是常考的内容之一.

二、本章基本内容

1. 含参变量的正常积分;
2. 含参变量的反常积分;
3. 欧拉积分.

三、本章要点精讲

要点1:含参变量的正常积分

设

$f:[a,b]\times[c,d]\to R$

为二元函数.且对每一个 $x\in[a,b]$,积分

$$\varphi(x)=\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

存在.则称 $\varphi(x)$ 为含参变量 x 的正常积分.

问题:φ 在什么情况下是连续的,可微的,可积的?

连续性定理:

若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续,则 $\varphi:[a,b]\to R$ 连续.

推广的连续性定理:

若 $f(x,y)$ 在 $G=\{(x,y):c(x)\leq y\leq d(x)\}$ 上连续,其中 $c(x)$ 和 $d(x)$ 是连续函数,则 $\varphi(x)=$

$\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$ 是连续函数.

分析：

做变元替换 $y = c(x) + t(d(x) - c(x))$，则 $dy = (d(x) - c(x))dt$，

$\varphi(x) = \int_0^1 f(x, c(x) + t(d(x) - c(x)))(d(x) - c(x))dt$

[4－1]（书上的习题）求极限 $\lim\limits_{a\to 0}\int_0^2 x^2\cos ax\,dx$.

可微性定理：

若函数 $f(x,y)$ 和 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$\frac{d}{dx}\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d \frac{\partial}{\partial x}f(x,y)\,dy$

推广的可微性定理：

若函数 $f(x,y)$ 和 $\frac{\partial}{\partial x}f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[p,q]$ 上连续，$c(x)$，$d(x)$：$[a,b]\to[p,q]$ 为可微函数，则

$\frac{d}{dx}\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)\,dy$

$= f(x,d(x))d'(x) - f(x,c(x))c'(x) + \int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x,y)\,dy$

[4－2]（书上的习题）设 $F(x) = \int_x^{x^2} e^{-xy^2}dy$. 求 $F'(x)$.

可积性定理：

若 $f(x,y)$ 在 $[a,b]\times[c,d]$ 上连续，则

$$\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)\,dy = \int_c^d dy\int_a^b f(x,y)\,dx$$

要点 2：含参变量的反常积分

设 $f:[a,b]\times[c,+\infty)\to R$ 为二元函数，且对每一个 $x\in[a,b]$，反常积分

$$\varphi(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y$$

存在. 则称 $\varphi(x)$ 为含参变量 x 的正常积分.

问题：φ 在什么情况下是连续的，可微的，可积的？

上述问题的研究都和一个概念，即含参数反常积分的一致收敛性有关. 这点类似于函数项级数的一致收敛，或函数列的一致收敛.

（1）含参变量积分的一致收敛性概念；

（2）一致收敛性的判别法：

a）柯西一致收敛判别法；

b）判别一致收敛的积分法；

c）魏尔斯特拉斯 M 判别法；

d)狄利克雷判别法:设

(ⅰ)对任意的 $N > c$,含参变量积分 $\int_c^N f(x,y)\mathrm{d}y$ 对参数 x 在 I 上一致有界;

(ⅱ)对任意的 $x \in I$, $g(x,y)$ 为 y 的单调函数,且当 $y \to +\infty$ 时,对参数 x, $g(x,y)$ 一致收敛于0.

则含参变量反常积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 在 I 上一致收敛.

e)阿贝尔判别法:设

(ⅰ) $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛.

(ⅱ)对每一个 $x \in I$, $g(x,y)$ 为 y 的单调函数且一致有界.

则含参变量积分 $\int_c^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\mathrm{d}y$ 在 I 上一致收敛.

(3)含参变量反常积分的性质

a)连续性:

设 $f(x,y)$ 在 $I \times [c,+\infty)$ 上连续. 若含参量反常积分

$$\Phi(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y$$

在 I 上一致收敛,则 $\Phi(x)$ 在 I 上连续.

b)可微性:

设 $f(x,y)$ 和 $f_x(x,y)$ 在 $I \times [c,+\infty)$ 上连续. 若含参变量反常积分 $\Phi(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 I 上收敛, $\int_c^{+\infty} f_x(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛,则 $\Phi(x)$ 在 I 上可微,且

$$\Phi'(x) = \int_c^{+\infty} f_x(x,y)\mathrm{d}y$$

c)可积性:

设 $f(x,y)$ 在 $I\times[c,+\infty)$ 上连续. 若含参变量反常积分 $\Phi(x) = \int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 在 I 上一致收敛,则 $\Phi(x)$ 在 I 上可积,且

$$\int_a^b dx \int_c^{+\infty} f(x,y)dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^b f(x,y)dx$$

d)推广的可积性定理:

设 $f(x,y)$ 在 $[a,+\infty) \times [c,+\infty)$ 上连续. 若

ⅰ) $\int_c^{+\infty} f(x,y)dy$ 关于 x 在 $[a,+\infty)$ 上内闭一致收敛, $\int_a^{+\infty} f(x,y)dx$ 关于 y 在 $[c,+\infty)$ 上内闭一致收敛;

ⅱ)积分 $\int_a^{+\infty} dx \int_c^{+\infty} |f(x,y)|dy$ 和 $\int_c^{+\infty} dy \int_a^{+\infty} |f(x,y)|dx$ 中至少有一个收敛.

则

$$\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x \int_c^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}y = \int_c^{+\infty}\mathrm{d}y \int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$$

要点3:欧拉积分

(1)欧拉积分的概念

伽马函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}dx,\ s>0$$

贝塔函数

$$B(p,q)=\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx,\ p>0,\ q>0$$

伽马函数和贝塔函数统称为欧拉积分.

(2)伽马函数的性质

a)伽马函数

$$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}\mathrm{d}x$$

在其定义域 $s>0$ 内连续且可导

$$\Gamma^{(n)}(s)=\int_0^{+\infty}x^{s-1}e^{-x}(\ln x)^n\mathrm{d}x$$

b)递推公式

$$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$$

特别

$$\Gamma(n+1)=n!$$

(3)贝塔函数的性质

a)贝塔函数 $B(p,q)$ 在其定义域 $p>0,\ q>0$ 内连续.

b)对称性

$$B(p,q)=B(q,p)$$

c)递推公式

$$B(p,q)=\frac{q-1}{p+q-1}B(p,q-1),(p>0,\ q>1)$$

$$B(p,q)=\frac{p-1}{p+q-1}B(p-1,q),(p>1,\ q>0)$$

$$B(p,q)=\frac{(p-1)(q-1)}{(p+q-1)(p+q-2)}B(p-1,q-1),(p>1,\ q>1)$$

(4)伽马函数和贝塔函数的关系

$$B(m,n)=\frac{(n-1)!(m-1)!}{(n+m-1)}$$

$$B(m,n)=\frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{\Gamma(n+m)}$$

四、名校经典试题回顾

[4-3](天津大学)设 $f(x)=\int_0^1\frac{e^{-x^2(y^2+1)}}{y^2+1}\mathrm{d}y,\ g(x)=\left(\int_0^x e^{-y^2}\mathrm{d}y\right)^2,\ x\geq 0$. 试证明 $f(x)+g(x)=$

$\frac{\pi}{4}$.

[4-4](北京科技大学)求积分 $\int_0^a \arctan\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}dx$.($a>0$)

(答案:$\frac{1}{2}a+C$)

[4-5](北京大学)证明:积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-xy}dy$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

[4-6](厦门大学)证明函数 $F(x)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin xt}{1+t^2}dt$ 在区间 $[0,+\infty)$ 上连续,在 $[0,+\infty)$ 上有连续的导函数.

[4-7](山东大学)求积分 $I(a)=\int_0^{+\infty}\frac{e^{-x^2}-e^{-ax^2}}{x}dx$,其中 $a>0$.

(答案:$\frac{1}{4}a^2-\frac{1}{4}$)

五、本章小结

这章我们复习了含参变量的正常积分和反常积分,给出了积分和极限,积分和求导,积分和积分交换顺序的条件.

对含参数的反常积分而言,运算能否交换顺序,一致收敛是一个关键的条件.这正如函数项级数的一致收敛.希望同学们对照着函数项级数来复习含参变量的反常积分.

多元函数微分论的总结

本论将一元函数的微分论从形式上和本质上推广到多元函数:从导数到偏导数,从微分到全微分,从一元函数的泰勒公式到多元函数的泰勒公式.注意这些概念之间的联系和差异,是掌握多元函数微分学的关键.此外,将函数项级数的定理和含参变量的反常积分作对比,又是学好含参变量反常积分的关键.

多元函数的微分论要比一元函数的微分论复杂得多,特别是计算题.因此加强计算能力的训练是相当重要的.

第七篇　多元函数积分论

第1章　二重积分

一、本章考情分析

二重积分的计算是历年的考研热点. 求二重积分的主要思想是将二重积分化为累次积分或进行坐标变换.

二、本章基本内容

1. 平面图形的面积;
2. 二重积分的定义;
3. 二重积分的存在性;
4. 二重积分的性质;
5. 二重积分的计算.

三、本章要点精讲

要点1:平面图形的面积

内面积,外面积,面积,不可求面积的例子;

定理:平面图形 P 可求面积的充要条件是:对任意的 $\varepsilon > 0$,

总存在直线网 T,使得 $S(t) - s(T) \le \varepsilon$.

推论:平面图形 P 的的面积为零的充要条件是它的外面积为零 .

定理:平面有界图形 P 可求面积的充要条件是:P 的边界 K 的面积为零.

由此知:分段光滑曲线围成的有界区域是可求面积的.

要点2:二重积分的定义

(1)可求面积的有界区域 D 上函数 $f(x,y)$ 的二重积分的概念;

(2)二重积分的几何意义:曲顶柱体的体积.

要点3:二重积分的存在性

(1)可积的必要条件是被积函数有界;

(2)可积的充分必要性:其研究思想和方法和一元函数的可积性相同;

(3)有界闭区域的连续函数必可积;

(4)如果有界闭区域上的函数的不连续点构成的集合的面积为零,则该函数可积.

要点4:二重积分的性质

(1)关于数乘运算;

(2)关于加减运算;

(3)积分区域的加法运算;

(4)单调性质;

(5)绝对值性质;

(6)中值定理.

要点5:二重积分的计算

(1)直角坐标系下二重积分的计算

定理:设$f(x,y)$在矩形区域$D=[a,b]\times[c,d]$上可积,且对每一个$x\in[a,b]$,积分$\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$存在,则累次积分

$$\int_a^b dx\int_c^{\mathrm{d}} f(x,y)\mathrm{d}y$$

也存在,且

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\mathrm{d}y$$

推论:如果上述定理中的D为上下边为连续曲线的x型区域,则累次积分

$$\int_a^b dx\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy$$

也存在,且

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_{c(x)}^{d(x)} f(x,y)dy$$

推论:如果上述定理中的$f(x,y)$为D上的连续函数,则两个累次积分及二重积分存在,且

$$\iint_D f(x,y)d\sigma=\int_a^b dx\int_c^d f(x,y)dy=\int_c^d dy\int_a^b f(x,y)dx$$

(2)二重积分的变量变换

引理:设变换$T:x=x(u,v)$,$y=y(u,v)$将uv平面上由按段光滑封闭曲线所围成的闭区域Δ一对一的映成xy平面上的闭区域D,函数$x(u,v)$和$y(u,v)$在Δ内分别具有一阶的连续偏导数,且它们的函数行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0,\ (u,v)\in\Delta$$

则区域的面积

$$\mu(D)=\iint_{\Delta}|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

定理:设变换 $T:x=x(u,v)$, $y=y(u,v)$ 将 uv 平面上由按段光滑封闭曲线所围成的闭区域 Δ 一对一的映成 xy 平面上的闭区域 D,函数 $x(u,v)$ 和 $y(u,v)$ 在 Δ 内分别具有一阶的连续偏导数,且它们的函数行列式

$$J(u,v)=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}\neq 0,\ (u,v)\in\Delta$$

则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\triangle} f(x(u,v),y(u,v))\,|J(u,v)|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

(3)用极坐标计算二重积分

极坐标变换

$$T:x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta.\ 0\leq r<+\infty,0\leq\theta\leq 2\pi$$
$$J(r,\theta)=r$$

尽管 T 不是一对一映射,且 $J(r,\theta)\,|_{(0,\theta)}=0$,也就是不满足上边的积分变换定理中的条件,但我们仍旧有下述的定理

定理:

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_{\Delta} f(r\cos\theta,r\sin\theta)r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta$$

适用于积分域是圆或圆域的一部分,或被积函数形如 $f(x^2+y^2)$.

极坐标下化为累次积分的种类:

四、名校经典试题回顾

[1-1](北京大学)计算积分 $I=\iint_{\Omega}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,其中 Ω 是由 $y=1$, $y=e^x$ 及 $x=0$, $x=1$ 围成的区域.

[1-2](大连工学院)计算

$$I=\iint_{\pi^2\leq x^2+y^2\leq 4\pi^2}\sin\sqrt{x^2+y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

[1-3](华中科技大学)设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,证明

$$\int_a^b\mathrm{d}x\int_a^x f(y)\mathrm{d}y=\int_a^b(b-x)f(x)\mathrm{d}x$$

五、本章小结

本章我们复习了二重积分的概念和性质. 特别总结了计算二重积分的方法:

a)在直角坐标系下化为累次积分;

b)坐标变换法,特别是极坐标变换法.

第2章　三重积分

一、本章考情分析

利用累次积分计算三重积分及利用坐标变换计算三重积分,是考研的热点. 对三重积分的研究步

骤和方法类似于二重积分.这章的难度在于对三维空间积分域的几何性质的掌握,也就是说需要一点空间几何的知识.

二、本章基本内容

1. 三维空间可求体积的区域;

2. 三重积分 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的概念;

3. 三重积分的性质;

4. 三重积分的可积性;

5. 计算三重积分.

三、本章要点精讲

要点1:三维空间可求体积的区域

内体积,外体积,体积,不可求体积的例子

定理:三维空间有界图形 V 可求体积的充要条件是:V 的边界 S 的体积为零.

由此知:分段光滑曲面围成的有界区域是可求体积的.

要点2:三重积分 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的概念

(1)三维空间可求体积的有界区域 V 上函数 $f(x,y,z)$ 的三重积分 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,dx\mathrm{d}y\mathrm{d}z$ 的概念;

(2)三重积分的物理意义:质量.

要点3:三重积分的性质

(1)关于数乘运算;

(2)关于加减运算;

(3)积分区域的加法运算;

(4)单调性质;

(5)绝对值性质;

(6)中值定理.

要点4:三重积分的性质

(1)可积的必要条件是被积函数有界;

(2)可积的充分必要性:其研究思想和方法和一元函数的可积性相同;

(3)有界闭区域的连续函数必可积;

(4)如果有界闭区域上的函数的不连续点构成的集合的体积为零,则该函数可积.

要点5:计算三重积分

(1)化三重积分为累次积分

定理(先线积分,再面积分):设函数 $f(x,y,z)$ 在长方体 $V=[a,b]\times[c,d]\times[e,h]$ 上的三重积分存在,且对任意 $(x,y)\in[a,b]\times[c,d]$,$g(x,y)=\int_e^h f(x,y,z)\,dz$ 存在,

则积分 $\iint\limits_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 也存在，且

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_e^h f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

推论：若

$V = \{(x,y,z):(x,y) \in [a,b]\times[c,d], z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y)\}$

$\subset [a,b]\times[c,d]\times[e,h]$

其中 D 为 V 在 oxy 平面上的投影，$z_1(x,y)$ 和 $z_2(x,y)$ 是 D 上的连续函数，$f(x,y,z)$ 在 V 上的三重积分存在，且对任意的 $(x,y) \in D$，$g(x,y) = \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz$ 存在，则积分 $\iint\limits_D g(x,y)\,dxdy$ 存在，且

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\,\mathrm{d}z$$

定理（先面积分，再线积分）：设函数 $f(x,y,z)$ 在长方体 $V = [a,b]\times[c,d]\times[e,h]$ 上的三重积分存在，且对任意 $z \in [e,h]$，$g(z) = \iint\limits_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在，则积分 $\int_e^h g(z)\,\mathrm{d}z$ 也存在，且

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_e^h dz\iint\limits_D f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

推论：若 $V \subset [a,b]\times[c,d]\times[e,h]$，$f(x,y,z)$ 在 V 上的三重积分存在，且对任意的 $z \in [e,h]$，$g(z) = \iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在，其中 D_z 是截面 $\{(x,y):(x,y,z) \in V\}$，则积分 $\int_e^h dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在，且

$$\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \int_e^h dz\iint\limits_{D_z} f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

(2)三重积分换元法

设可微变换

$$T: x = x(u,v,w),\ y = y(u,v,w),\ z = z(u,v,w)$$

将 uvw 空间中的区域 Ω 一对一的映成 xyz 空间中的 V，且函数行列式

$$J(u,v,\omega) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix} \neq 0,\ (u,v,w) \in \Omega$$

则 $\iiint\limits_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z =$

$\iiint\limits_\Omega f(x(u,v,w),y(u,v,w),z(u,v,w))\,|J(u,v,w)|\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v\mathrm{d}w$

(3)几个常用的变换公式

a. 柱面坐标变换

$$T:\begin{cases} x = r\cos\theta, & 0 \le r < +\infty \\ y = r\sin\theta, & 0 \le \theta \le 2\pi \\ z = z, & -\infty < z < +\infty \end{cases}$$

$$J(r,\theta,z) = r$$

尽管 T 不是一对一的,且当 $r = 0$ 时, $J(u,v,w) = 0$,但变换公式仍旧成立,即

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)\,r\mathrm{d}r\mathrm{d}\theta\mathrm{d}z$$

b. 球面坐标

$$T:\begin{cases} x = r\sin\varphi\cos\theta, & 0 \le r < +\infty \\ y = r\sin\varphi\sin\theta, & 0 \le \varphi \le \pi \\ z = \cos\varphi, & 0 \le \theta \le 2\pi \end{cases}$$

$$J(r,\varphi,\theta) = r^2\sin\varphi$$

尽管 T 不是一对一的,且当 $r = 0$ 或 $\varphi = 0$, π 时, $J(r,\varphi,\theta) = 0$,但是换元积分法仍旧成立,即

$$\iiint_V f(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iiint_\Omega f(r\sin\varphi\cos\theta, r\sin\varphi\sin\theta, r\cos\varphi)\,r^2\sin\varphi\,\mathrm{d}r\mathrm{d}\varphi\mathrm{d}\theta$$

四、名校经典试题回顾

[2-1](北京大学)计算三重积分 $\iiint_\Omega x^2\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,其中 Ω 是曲面 $z = \sqrt{x^2+y^2}$ 与 $z = x^2 + y^2$ 围成的有界区域.

[2-2](中国人民大学)求极限

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{1}{t^6}\iiint_{\Omega_t}\sin(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

其中 $\Omega_t = \{(x,y,z): x^2+y^2+z^2 \le t^2\}$

[2-3](厦门大学)求 yz 平面上的圆周 $(x-a)^2+z^2 = b^2$ ($0 < b < a$)绕 z 轴一圈所画的闭曲面所围成的体积.

五、本章小结

本章我们复习了三重积分的概念,给出了三重积分化为累次积分的两种方式,讨论了积分换元法,特别需要大家注意柱面坐标变换和球面坐标变换,这是两个最常用的换元积分法.

第3章　曲线积分

一、本章考情分析

曲线积分是历年考研的高频考点. 考试内容为计算曲线积分. 或许要用到格林公式及积分路径无关性的四个等价条件.

辨认各种形式的曲线积分符号,是学好这章的关键.

二、本章基本内容

1. 第一型曲线积分；

2. 第二型曲线积分；

3. 两类曲线积分的关系；

4. 格林公式；

5. 曲线积分和积分路径的无关性.

三、本章要点精讲

要点 1：第一型曲线积分

1）第一型曲线积分 $\int_L f(x,y)\mathrm{d}s$（平面曲线）及 $\int_L f(x,y,z)ds$（空间曲线）的定义，物理意义，几何意义；

2）第一型曲线积分的基本性质；

a. 线性性质；

b. 积分域的可加性；

c. 单调性；

d. 绝对性质；

e. 均值性.

3）第一类曲线积分的计算

定理：设有光滑曲线

$$L:\begin{cases}x=\varphi(t),\\ y=\psi(t),\end{cases} t\in[\alpha,\beta]$$

$f(x,y)$ 为定义在 L 上的连续函数，则

$$\int_L f(x,y)\mathrm{d}s=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t),\psi(t))\sqrt{\varphi'^2(t)+\psi'^2(t)}\mathrm{d}t$$

【3－1】计算第一型曲线积分 $\int_L(x^2+y^2+z^2)\mathrm{d}s$，其中 L 为螺旋线 $x=r\cos t$，$y=r\sin t$，$z=bt$（$0\le t\le 2\pi$）.

要点 2：第二型曲线积分

1）基本概念

a. 第二型曲线积分 $\int_L P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y$（平面有向曲线）

b. $\int_L P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$

（空间有向曲线）

c. 有时也记为

$$\int_{AB}P(x,y)\mathrm{d}x+Q(x,y)\mathrm{d}y \text{ 及 } \int_{AB}P(x,y,z)\mathrm{d}x+Q(x,y,z)\mathrm{d}y+R(x,y,z)\mathrm{d}z$$

简记为 $\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 及 $\int_{AB} P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$

或 $\int_L \bar{F} \cdot \mathrm{d}\bar{s}$,其中 $\bar{F} = (P,Q)$, $\mathrm{d}\bar{s} = (\mathrm{d}x,\mathrm{d}y)$

或 $\bar{F} = (P,Q,R)$, $\mathrm{d}\bar{s} = (\mathrm{d}x,\mathrm{d}y,\mathrm{d}z)$

当 L 为封闭曲线时,记为 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 及 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$

d. 物理意义

2)第二型曲线积分的基本性质;

a. 线性性质;

b. 积分域的可加性.

3)第二型曲线积分的计算

定理:设有光滑曲线

$$L:\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} t \in [\alpha,\beta]$$

点 A 与 B 的坐标分别为 $(\varphi(\alpha),\psi(\alpha))$ 与 $(\varphi(\beta),\psi(\beta))$.

又设 $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 为 L 上的连续函数,则

$$\int_{AB} P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y = \int_\alpha^\beta [P(\varphi(t),\psi(t))\varphi'(t) + Q(\varphi(t),\psi(t))\psi'(t)]\mathrm{d}t$$

【3-2】计算第二型曲线积分

$$\oint_L \frac{-x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}$$

其中 L 为圆周 $x^2 + y^2 = 1$,依逆时针方向.

要点3:两类曲线积分的关系

$$\int_L P(x,y)\mathrm{d}x + Q(x,y)\mathrm{d}y$$

$$\int_0^l [P(x(s),y(s))\cos(\hat{t,x}) + Q(x(s),y(s))\cos(\hat{t,y})]\mathrm{d}s =$$

$$\int_L [P(x,y)\cos(\hat{t,x}) + Q(x,y)\cos(\hat{t,y})]\mathrm{d}s$$

要点4:格林公式

格林公式:若函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在闭区间 D 上连续,且有连续的一阶偏导数,则有

$$\oint_L Pdx + Qdy = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}\sigma$$

其中 L 是 D 的边界曲线,分段光滑,并取正向.

推论:D 的面积

$$S = \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x$$

【3－3】应用格林公式计算曲线积分

$$\oint_L (x+y)^2 \mathrm{d}x - (x^2+y^2)\mathrm{d}y$$

其中 L 是以 $A(1,1)$，$B(3,2)$，$C(2,5)$ 为顶点的三角形，方向取正向.

要点 5：曲线积分和积分路径的无关性

定理：设 D 是单连通的闭区域，若函数 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 在 D 上连续，且有连续的一阶偏导数，则以下四个条件等价

1）对 D 内任意的分段光滑闭曲线 L，有 $\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = 0$.

2）对 D 内任意的分段光滑闭曲线 L，$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 与积分的路径无关，只与起点和终点有关.

3）$P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$ 是 D 内某一个函数 $u(x,y)$ 的全微分，即

$$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y$$

4）在 D 内处处成立 $\dfrac{\partial Q}{\partial x} = \dfrac{\partial P}{\partial y}$

【3－4】求下列全微分的原函数

$$(x^2+2xy-y^2)\mathrm{d}x + (x^2-2xy-y^2)\mathrm{d}y$$

四、名校经典试题回顾

[3－5]（西安交通大学）计算 $\int_L y ds$，其中 L 是摆线 $\begin{cases} x = a(t-\sin t) \\ y = a(1-\cos t) \end{cases}$ 的一摆.

[3－6]（山东大学）计算

$$I = \oint_L (yx^3 + e^y)dx + (xy^3 + xe^y - y^2)\mathrm{d}y$$

其中 L 是对称于坐标轴的任一封闭曲线，其方向为正向.

[3－7]（湖南大学）设 $f(u)$ 连续，C 为平面上分段光滑的闭曲线，证明 $\oint_C f(x^2+y^2)(x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y) = 0$.

五、本章小结

本章我们复习了两类曲线积分，给出了两类曲线积分的关系，通过格林公式给出了二重积分和边界上第二类曲线积分的关系，最后讨论了第二类曲线积分与路径没有关系的四个等价条件.

第 4 章　曲面积分

一、本章考情分析

本章是历届考研的热点. 考题以计算题形式出现. 考题内容为计算第一型曲面积分和第二型曲面积分. 在有些情况下或许可以通过高斯公式或斯托克斯公式进行计算.

二、本章基本内容

1. 第一型曲面积分；

2. 第二型曲面积分;

3. 两类曲面积分的关系;

4. 高斯公式;

5. 斯托克斯公式;

6. 空间曲线积分与路径无关的条件.

三、本章要点精讲

要点 1:第一型曲面积分

1)第一型曲面积分 $\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S$ 的定义及物理意义;

2)第一型曲面积分的性质:

a. 线性性;

b. 积分域的可加性;

c. 单调性;

d. 绝对值性;

e. 均值性.

3)第一型曲面积分的计算

a. 光滑曲面面积的计算

当曲面以显函数的形式出现:

$S:z=f(x,y),(x,y)\in D$

则 S 的面积

$$\Delta S=\iint\limits_D\sqrt{1+f_x^2(x,y)+f_y^2(x,y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当光滑曲面以参数的形式出现

$$x=x(u,v)\ ,\ y=y(u,v)\ ,\ z=z(u,v)\ ,\ (u,v)\in D$$

则 S 的面积

$$\Delta S=\iint\limits_D\sqrt{EG-F^2}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中

$$E=x_u^2+y_u^2+z_u^2$$

$$F=x_ux_v+y_uy_v+z_uz_v$$

$$G=x_v^2+y_v^2+z_v^2$$

b. 第一类曲面积分的计算

当光滑曲面 S 为

$$S:z=z(x,y)\ ,\ (x,y)\in D$$

$f(x,y,z)$ 为 S 上的连续函数时

$$\iint\limits_S f(x,y,z)\mathrm{d}S=\iint\limits_D f(x,y,z(x,y))\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

当光滑曲面 S 为

$$x = x(u,v)\ ,\ y = y(u,v)\ ,\ z = z(u,v)\ ,\ (u,v) \in D$$

$f(x,y,z)$ 为 S 上的连续函数时

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\ \sqrt{EG-F^2}\,\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

其中

$$E = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2$$

$$F = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v$$

$$G = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2$$

【4-1】计算第一型曲面积分 $\iint_S (x+y+z)\,\mathrm{d}S$，其中 S 为上半球而 $x^2+y^2+z^2=a^2$，$z \geq 0$.

（答案：πa^3）

要点 2：第二型曲线积分

1）第二型曲面积分的定义及物理意义

设 P，Q，R 是定义在双侧曲面 S 上的函数，在 S 所指定的一侧做分割

$$T: S_1\ ,\ S_2\ ,\cdots,\ S_n$$

以 $\Delta S_{i_{yz}}$，$\Delta S_{i_{zx}}$，$\Delta S_{i_{xy}}$ 分别表示 S_i 在三个坐标面上的投影区域的面积，它们的符号由 S_i 的方向来确定.

在每一个 S_i 上任取一个点 (ξ_i,η_i,ζ_i)，若

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{i=1}^{n} P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{yz}} + Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{zx}} + R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_{i_{xy}}$$

存在，则称此极限 P，Q，R 在曲面 S 所指定的一侧上的第二型曲面积分.

记作

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

或

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint_S Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint_S R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

物理意义：某流体以速度 $\vec{v} = (P,Q,R)$ 在单位时间内从曲面 S 的负侧流向正侧的总流量为

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

2）第二型曲面积分的性质：

a. 线性性质；

b. 积分区域的可加性.

3）第二型曲面积分的计算

当曲面以显函数形式给出时，我们有定理

定理：设 R 是定义在光滑曲面

$$S: z = z(x,y),\ (x,y) \in D_{xy}$$

上的连续函数,以 S 的上侧为正向,则

$$\iint_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

类似的有

$$\iint_S P(x,y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = \iint_{D_{yz}} R(x(y,z),y,z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$$

$$\iint_S Q(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z = \iint_{D_{zx}} R(x,y(x,z),z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z$$

【4-2】计算第二型曲面积分

$$\iint_S (x+y)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + (y+z)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + (z+x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是以原点为中心,边长为 2 的立方体.

(答案:24)

当曲面以参数形式给出时,我们有定理

定理:设光滑曲面 S 为

$$\begin{cases} x = x(u,v) \\ y = y(u,v),(u,v) \in D \\ z = z(u,v) \end{cases}$$

且

$$\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)},\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$$

不同时为零,则

$$\iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z = +(-)\iint_D P(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

$$\iint_S Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x = +(-)\iint_D Q(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v \iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$= +(-)\iint_D R(x(u,v),y(u,v),z(u,v))\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\mathrm{d}u\mathrm{d}v$$

【4-3】计算第二型曲面积分(书上的习题,武汉大学,南开大学的考研题)

$$\iint_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = R^2$ 且取外侧为正向.

(答案:$\frac{8}{3}\pi R^3(a+b+c)$)

要点 3:两类曲面积分的关系

定理:

设 S 为光滑的曲面,正侧的法方向为 $(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\theta)$,

P, Q, R 为其上的连续函数,则

$$\iint_S P(x,y,z)\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q(x,y,z)\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R(x,y,z)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y =$$

$$\iint_S (P(x,y,z)\cos\alpha + Q(x,y,z)\cos\beta + R(x,y,z)\cos\theta)\,\mathrm{d}S$$

要点 4:高斯公式

定理:设空间区域 V 由分片光滑的双侧曲面 S 围成,若函数 P , Q , R 在 V 上连续,且有一阶连续偏导数,则

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) = \iint_S P\mathrm{d}y\mathrm{d}z + Q\mathrm{d}z\mathrm{d}x + R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 取外侧. 上式称作高斯公式.

证明:只需证明

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} = \iint_S R\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

推论:在上述条件下, V 的体积

$$\Delta V = \frac{1}{3}\iint_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

【4-4】利用高斯公式计算曲面积分

$$\iint_S yz\mathrm{d}y\mathrm{d}z + zx\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xy\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

其中 S 是单位球 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧.

(答案:0)

要点 5:斯托克斯公式

定理:设光滑曲面 S 的边界 L 是按段光滑的连续曲线. 若函数 P , Q , R 在 S 上连续,且有一阶连续偏导数,则

$$\oint_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = \iint_S \begin{vmatrix} \mathrm{d}y\mathrm{d}z & \mathrm{d}z\mathrm{d}x & \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}$$

证明:只需证明

$$\oint_L P\mathrm{d}x = \iint_S \frac{\partial P}{\partial z}\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \frac{\partial P}{\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

【4-5】应用斯托克斯公式计算

$$\oint_L (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}x + (x^2 + z^2)\,\mathrm{d}y + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}z$$

其中 L 为 $x + y + z = 1$ 与三个坐标面的交线,它的走向使所围成的平面图形上侧在曲线的左侧.

(答案:0)

要点 6:空间曲线积分与路径无关的条件

类似于平面曲线积分与路径无关的等价条件,我们有下边的定理

定理:设 $\Omega \subset R^3$ 为空间单连通区域. 若函数 P , Q , R 在 Ω 上连续且有连续的偏导数,则以下条件等价

ⅰ)对于 Ω 内任意按段光滑的封闭曲线 L ,有

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z = 0$$

ⅱ)对于 Ω 内任意按段光滑曲线 L ,曲线积分

$$\int_L P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

与路径无关.

ⅲ) $P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$ 是 Ω 内某函数 u 的全微分,即

$$\mathrm{d}u = P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y + R\mathrm{d}z$$

ⅳ)在 Ω 上处处有

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x};\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y};\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$$

四、名校经典试题回顾

[4-6](华中科技大学)设 Σ 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ 的内侧, f , g , h 是连续的可微函数,求

$I = \iint\limits_{\Sigma}\left[f(yz) - \frac{xy^2}{2500\pi}\right]dydz + \left[g(zx) - \frac{yz^2}{2500\pi}\right]dzdx + \left[h(xy) - \frac{zx^2}{2500\pi}\right]dxdy$(答案:1)

[4-7](南京航空学院)设有力场

$$\vec{F} = (x + 2y + 4, 4x - 2y, 3x + z)$$

试求单位质量 M 沿椭圆

$$C:\begin{cases}(3x + 2y - 5)^2 + (x - y + 1)^2 = a^2 \\ z = 4\end{cases}$$

移动一圈(从 z 轴正向看去为逆时针方向)力 $\vec{F}$ 所做的功.

(答案: $\frac{2}{5}\pi a^2$)

五、本章小结

本章我们复习了第一型曲面积分和第二型曲面积分. 侧重点在于计算. 同时我们也复习了高斯公式(面积分和三重积分的关系)和斯托克斯公式(空间封闭曲线和面积分的关系). 最后利用斯托克斯公式给出了空间曲线积分与路径无关的条件.

多元函数积分论的总结

1. 积分的本质:划分,取点,作和,取极限.

2. 从形式上可以分为:正常积分和反常积分.

反常积分:积分区域无限,被积函数无界;

正常积分又可以分为:定积分,二重积分,三重积分,第一型曲线积分和第二型曲线积分,第一型

曲面积分和第二型曲面积分. 认识各种积分符号对同学们来说是重要的.

3. 从计算的角度来看,最后都要归结到定积分进行计算.

4. 从相互关系来看

第一型曲线积分和第二型曲线积分可以互换

第一型曲面积分和第二型曲面积分可以互换

格林公式:平面封闭曲线和二重积分的关系

高斯公式:封闭曲面和三重积分的关系

斯托克斯公式:空间封闭曲线和面积分的关系

5. 掌握各种积分的几何意义或物理意义对理解各种积分的含义是至关重要的.