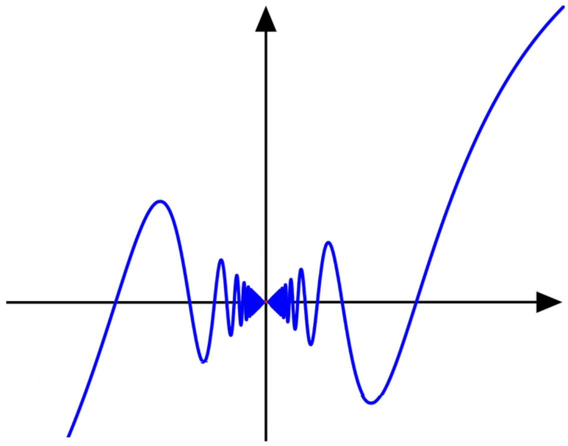
Mathematical analysis exercises class lectures Answer

数学分析习题课讲义 解答



Don't give up, never give up.

作者：此号归我啦
制作时间：2016.07.10
Email: 845096273@qq.com

Version: 1.00

内 容 简 介

本书由《数学分析习题课讲义》读者根据自己收集的答案所编写。不公开。

第一版前言

读者自身水平非常有限，此解答大部分来自于网友和其他资料，若来自于其他资料则给出来源，若来自于网友则不给出来源(保护网友隐私)。

此号归我啦
845096273@qq.com
2016 年 07 月

目　录

第 1 章 引论

1.1 几个常用的不等式

题目 **1.1.1**:

(1) 证明：当 $-2 \leqslant h \leqslant -1$ 时 Bernoulli 不等式 $(1+h)^n \geqslant 1+nh$ 仍然成立;

(2) 证明：当 $h \leqslant 0$ 时成立不等式 $(1+h)^n \geqslant \dfrac{n(n-1)h^2}{2}$，并推广之;

(3) 证明：若 $a_i > -1 (i=1,2,\ldots,n)$ 且同号，则成立不等式

$$\prod_{i=1}^{n}(1+a_i) \geqslant 1+\sum_{i=1}^{n} a_i$$

证明:

(1) $(1+h)^n \geq -|1+h|^n \geq -|1+h| = 1+h \geq 1+nh$

(2) $(1+h)^n = 1+nh+\frac{1}{2}n(n-1)h^2+\cdots+h^n \geq \frac{1}{2}n(n-1)h^2$, 推广 $(1+h)^n \geq 1+nh+\frac{1}{2}n(n-1)h^2$

(3) $n=1$ 时显然成立, 设 $n=k$ 时不等式成立, 则 $n=k+1$ 时, $\prod_{i=1}^{k+1}(1+a_i) \geq (1+\sum_{i=1}^{k} a_i)(1+a_{k+1}) = 1+\sum_{i=1}^{k+1} a_i + \sum_{i+1}^{k} a_i a_{k+1} \geq 1+\sum_{i=1}^{k+1} a_i$.

□

题目 **1.1.2**: 阶乘 $n!$ 在数学分析以及其他课程中经常出现，以下是几个有关的不等式，他们都可以从平均值不等式得到:

(1) 证明：当 $n>1$ 时成立 $n! < \left(\dfrac{n+1}{2}\right)$;

(2) 利用 $(n!)^2 = (n \cdot 1)((n-1)\cdot 2)\ldots(1 \cdot n)$ 证明：当 $n>1$ 时成立

$$n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right);$$

(3) 比较（1）和（2）中两个不等式的优劣，并说明原因;

(4) 证明：对任意实数 r 成立 $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} k^r\right)^n \geqslant n^n(n!)^r$. (在第二章的参考题中还有关于 $n!$ 的不等式。这方面的深入讨论见本书 11.4.2 小节的 Wallis 公式和 Stirling 公式.)

证明:

(1) $n! \le \left(\frac{1+2+3+\cdots+n}{n}\right)^n = \left(\frac{1+n}{2}\right)^n$, 显然取不到等号.

(2) 由 $(n!)^2 = (n\cdot 1)((n-1)\cdot 2)\cdots(1\cdot n) \le \left(\frac{n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+\cdots+1\cdot n}{n}\right)^n$, 而

$$\begin{aligned}
& n\cdot 1+(n-1)\cdot 2+\cdots+1\cdot n \\
=\ & n\cdot 1+n\cdot 2+\cdots+n\cdot n-(1\times 2+\cdots(n-1)\times n) \\
=\ & n(1+2+\cdots n)-(1^2+2^2+\cdots n^2)+(1+2+\cdots+n) \\
=\ & \frac{n(n+1)^2}{2}-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) \\
=\ & \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)
\end{aligned}$$

所以 $(n!)^2 \le \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{6n}\right)^n$, 故 $n! < \left(\frac{n+2}{\sqrt{6}}\right)^n$.

(3) 答: (2) 较优, 当 n 越大时,(2) 的右边比 (1) 的右边更小.

(4) $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} k^r}{n} \ge \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} k^r} = \sqrt[n]{(n!)^r}$

□

题目 1.1.3: 证明几何平均值-调和平均值不等式: 若 $a_k > 0, k = 1,2,\ldots,n$, 则有

$$\left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{n}{\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k}}.$$

证明: 令 $b_k = \frac{1}{a_k}$, 再由 $\frac{\sum\limits_{k=1}^{n} b_k}{n} \ge \sqrt[n]{\prod\limits_{k=1}^{n} b_k}$ 即得. □

题目 1.1.4: 证明: 当 a,b,c 为负整数时成立 $\sqrt[3]{abc} \leqslant \sqrt{\frac{ab+bc+ca}{3}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$.

(这个结果还可以推广到 n 个非负数的情况.)

证明: 证明: $\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}} \ge \sqrt{\sqrt[3]{ab\cdot bc\cdot ac}} = \sqrt[3]{abc}$, 故不等式左边成立;

$\sqrt{\frac{ab+bc+ac}{3}} \le \frac{a+b+c}{3} \iff 3(ab+bc+ac) \le (a+b+c)^2 \iff a^2+b^2+c^2-ab-ac-bc \ge 0$, 此式显然成立, 即不等式右边得证. 综上, 证毕. □

题目 1.1.5: 证明以下几个不等式:

(1) $|a-b| \geqslant |a|-|b|$ 和 $|a-b| \geqslant \big||a|-|b|\big|$

(2) $|a_1| - \sum\limits_{k=2}^{n} |a_k| \leqslant \left|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant \sum\limits_{k=1}^{n} |a_k|$; 又问: 左边可否为 $\left||a_k| - \sum\limits_{k=2}^{n} |a_k|\right|$?

(3) $\frac{a+b}{1+|a+b|} \leqslant \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}$;

(4) $|(a+b)^n - a^n| \leqslant (|a|+|b|)^n - |a|^n$.

(特别要注意其中的 (1) 是应用三点不等式时常见的形式.)

☞ 证明:

(1) 由 $|a+b| \leq |a|+|b|$ 得 $|a| = |a-b+b| \leq |a-b|+|b|$, 故有 $|a-b| \geq |a|-|b|$ 和 $|a-b| \geq |b|-|a|$. 所以 $|a-b| \geq ||a|-|b||$.

(2) 右边的不等式可由三点不等式直接推得, 左边: $|a_1-(-\sum\limits_{k=2}^{n} a_k)| \geq |a_1|-|\sum\limits_{k=2}^{n} a_k| \geq |a_1|-\sum\limits_{k=2}^{n}|a_k|$. 不成立. 例如 $a_1=0, a_2=1, a_3=-2$, 则 $|a_1-(a_2+a_3)| = |0-1-2| = 3, |a_1+a_2+a_3| = 1$, 得到 $3>1$, 显然错误.

(3) 当 $|a+b|=0$ 时, 显然成立, 当 $|a+b| \neq 0$ 时,

$$\begin{aligned}
\frac{|a+b|}{1+|a+b|} &= \frac{1}{1+\dfrac{1}{|a+b|}} \leq \frac{1}{1+\dfrac{1}{|a|+|b|}} \\
&= \frac{|a|+|b|}{1+|a|+|b|} \\
&= \frac{|a|}{1+|a|+|b|} + \frac{|b|}{1+|a|+|b|} \\
&\leq \frac{|a|}{1+|a|} + \frac{|b|}{1+|b|}
\end{aligned}$$

证毕.

(4) $|C_n^1 a^{n-1}b+\cdots+C_n^{n-1}ab^{b-1}+b^n| \leq |C_n^1 a^{n-1}b|+\cdots+|C_n^{n-1}ab^{b-1}|+|b^n| = (|a|+|b|)^n-|a|$.

□

➻ 题目 **1.1.6:** 试按下列提示，给出 Cauchy 不等式的几个不同的证明:

(1) 用数学归纳法.

(2) 用 Lagrange 恒等式

$$\sum_{k=1}^{n} a_k^2 \sum_{k=1}^{n} b_k^2 - \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k|\right)^2 = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}(|a_k||b_i|-|a_i||b_k|)^2;$$

(3) 用不等式 $|AB| \leqslant \dfrac{A^2+B^2}{2}$

(4) 构造复的辅助数列 $c_k = a_k^2-b_k^2+2i|a_k b_k|, k=1,2,\ldots,n$ 再利用

$$\left|\sum_{k=1}^{n} c_k\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n}|c_k|$$

☞ 证明:

(1) 用数学归纳法

当 $n=2$ 时,$(a_1b_1+a_2b_2)^2=a_1^2b_1^2+2a_1b_1a_2b_2+a_2^2b_2^2\le a_1^2b_1^2+a_1^2b_2^2+a_2^2b_1^2+a_2^2b_2^2=(a_1^2+a_2^2)(b_1^2+b_2^2)$. 当且仅当 $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$ 时取等号. 不等式成立.

假设 $n=k$ 时不等式成立, 则 $n=k+1$ 时, 有

$$\begin{aligned}
\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k+1}b_i^2} &= \sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2+a_{k+1}^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k}b_i^2+b_{k+1}^2}\\
&\ge \sqrt{\sum_{i=1}^{k}a_i^2}\cdot\sqrt{\sum_{i=1}^{k}b_i^2}+|a_{k+1}b_{k+1}|\\
&\ge \sum_{i=1}^{k}|a_ib_i|+|a_{k+1}b_{k+1}|\\
&= \sum_{i=1}^{k+1}|a_ib_i|
\end{aligned}$$

综上, 证毕.

(2) 用 Lagrange 恒等式

由 $(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)-(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2=\dfrac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(|a_i||b_k|-|a_k||b_i|)^2$, 可得 $(\sum_{i=1}^{n}a_ib_i)^2\le(\sum_{i=1}^{n}a_i^2)(\sum_{i=1}^{n}b_i^2)$.

故 $|\sum_{i=1}^{n}a_ib_i|\le\sqrt{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}$. 故原不等式成立.

(3) 用不等式 $|AB|\le\dfrac{A^2+B^2}{2}$

对于 $\forall m\in\mathbb{R}^+$, 有 $a_ib_i\le\dfrac{1}{2}\left(m^2a_i^2+\dfrac{b_i^2}{m^2}\right)$. 令 $m^2=\sqrt{\dfrac{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}$, 则有

$$|a_ib_i|\le\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}a_i^2+\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}}b_i^2\right)$$

故

$$\sum_{i=1}^{n}|a_ib_i|\le\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}}\sum_{i=1}^{n}a_i^2+\sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}a_i^2}{\sum_{i=1}^{n}b_i^2}}\sum_{i=1}^{n}b_i^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2}\right)$$
$$= \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i^2}$$

故原不等式成立.

(4) 构造复的辅助数列 $c_k = a_k^2 - b_k^2 + 2i|a_k b_k|, k = 1,2,\cdots,n$. 再利用 $|\sum_{k=1}^{n} a_k| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$

设 t 为任意复数,a_k, b_k 均为复数, 则

$$0 \leq |a_k - t\overline{b_k}|^2 = (a_k - t\overline{b_k})(\bar{a_k} - \bar{t}b_k) = |a_k|^2 - 2\mathrm{Re}\bar{t}a_k b_k + |t|^2|b_k|^2.$$

所以

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{t}\sum_{k=1}^{n} a_k b_k) + |t|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2,$$

取

$$t = \frac{\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k}{\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2},$$

代入上式有

$$0 \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 - \frac{2\mathrm{Re}|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k|^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2} + \frac{|\sum\limits_{k=1}^{n} a_k b_k|^2}{\sum\limits_{k=1}^{n} |b_k|^2},$$

化简即得

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} a_k^2}\sqrt{\sum_{k=1}^{n} b_k^2}.$$

□

题目 1.1.7: 用向前——向后数学归纳法证明：设 $0 < x_i \leqslant \frac{1}{2}, i = 1,2,\ldots,n$, 则

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}{\left(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i\right)^n} \leqslant \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} (1-x_i)}{\left[\sum\limits_{i=1}^{n} (1-x_i)\right]^n}$$

(这个不等式是由在美国数学界有重大影响的华裔数学家 Fan Ky 得到的.)

☞ 证明: 原不等式等价于

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n} x_i}{\prod\limits_{i=1}^{n} (1-x_i)} \leq \frac{(\sum\limits_{i=1}^{n} x_i)^n}{(\sum\limits_{i=1}^{n} (1-x_i))^n} \tag{1}$$

$n=2$ 时,

$$\begin{aligned}&\frac{x_1x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}-\left(\frac{x_1+x_2}{(1-x_1)(1-x_2)}\right)^2\\=&\frac{(1+x_1x_2-x_1-x_2)[x_1^2(x_2-1)+x_2^2(x_1-1)+x_1x_2(x_1x_2-1)]}{(1-x_1)(1-x_2)[(1-x_1)(1-x_2)]^2}\\\le&0.\end{aligned}$$

因而有

$$\begin{aligned}&\frac{x_1x_2x_3x_4}{(1-x_1)(1-x_2)(1-x_3)(1-x_4)}\\\le&\left(\frac{x_1+x_2}{(1-x_1)+(1-x_2)}\right)^2\left(\frac{x_3+x_4}{(1-x_3)+(1-x_4)}\right)^2\\=&\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}}{1-\frac{x_1+x_2}{2}}\right)^2\left(\frac{\frac{x_3+x_4}{2}}{1-\frac{x_3+x_4}{2}}\right)^2\\\le&\left(\frac{\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}{1-\frac{x_1+x_2}{2}+\frac{x_3+x_4}{2}}\right)^4\\=&\left(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{(1-x_1)+(1-x_2)+(1-x_3)+(1-x_4)}\right)^4\end{aligned}$$

重复这样 m 次,则可得

$$\frac{\prod_{i=1}^{2^m}x_i}{\prod_{i=1}^{2^m}(1-x_i)}\le\frac{(\sum_{i=1}^{2^m}x_i)^{2^m}}{(\sum_{i=1}^{2^m}(1-x_i))^{2^m}}$$

即 $n=2^m$ 时 (1) 式成立.

现在设 (1) 式对 n 成立,记 $A=\dfrac{\sum_{i=1}^{n-1}x_i}{n}$. 将 (1) 式运用于 $x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},A$ 这 n 个数,即得

$$\begin{aligned}&\left(\frac{x_1+\cdots+x_{n-1}+A}{(1-x_1)+\cdots+(1-x_{n-1})+(1-A)}\right)^n\\=&\left(\frac{A}{1-A}\right)^n\\\ge&\frac{x_1\cdots x_{n-1}A}{(1-x_1)\cdots(1-x_{n-1})(1-A)}\\\ge&\frac{x_1\cdots x_{n-1}}{(1-x_1)\cdots(1-x_{n-1})}\end{aligned}$$

即对 $n-1$ 也 (1) 式也成立. 由反向归纳法原理知 (1) 式对任意 n 成立. 证毕. □

题目 1.1.8: 设 a,c,g,t 均为非负数，$a+c+g+t=1$, 证明 $a^2+c^2+g^2+t^2\geqslant\frac{1}{4}$, 且其中等号成立的充分必要条件是 $a=c=g=t=\frac{1}{4}$.

(本题来自 DNA 序列分析.)

证明: (方法 1) 由 $1=a+c+g+t\geq 4(acgt)^{\frac{1}{4}}$ 得 $acgt\leq\frac{1}{256}$. 当且仅当 $a=c=g=t$ 时取等号.

又因为

$$\begin{aligned}1&=(a+c+g+t)^2\\&=a^2+c^2+g^2+t^2+2(ac+ag+at+cg+ct+gt)\\&\geq a^2+c^2+g^2+t^2+12\sqrt[6]{ac\cdot ag\cdot at\cdot cg\cdot ct\cdot gt}\\&=a^2+c^2+g^2+t^2+12\sqrt{acgt}\end{aligned}$$

当 $acgt$ 取到最大值 $\frac{1}{256}$ 时,$a^2+c^2+g^2+t^2$ 取到最小值 $1-\frac{12}{\sqrt{256}}=\frac{1}{4}$. 此时 $a=c=g=t=\frac{1}{4}$. 故命题得证.

(方法 2) 由 Cauchy 不等式有

$$(a^2+c^2+g^2+t^2)(1^2+1^2+1^2+1^2)\geq(a+c+g+t)^2=1$$

所以 $a^2+c^2+g^2+t^2\geq\frac{1}{4}$. 当且仅当 $a=g=c=t$ 时取等号.

□

第 2 章 数列极限

2.1 数列极限的基本概念

5、证明：(方法 1)$a^\varepsilon > 1$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$，所以当 n 充分大时 $\sqrt[n]{n}<a^\varepsilon$，取对数得 $\dfrac{\log_a n}{n}<\varepsilon$.
(方法 2) 由 O'Stolz 公式

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_a(n+1)-\log_a n}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\log_a\frac{n+1}{n}=0.$$

2.2 收敛数列的基本性质

1. 证明：(必要性) 若 $\{a_n\}$ 收敛，则对于 $\forall\varepsilon>0,\exists N\in\mathrm{N}^+$. 当 $n>N$ 时，有 $|a_n-a|<\varepsilon$. 设 n_k 是一个自然数递增序列，则 $\{a_{n_k}\}$ 是 $\{a_n\}$ 的一个子列. 当 $n_k>N$ 时，有 $|a_{n_k}-a|<\varepsilon$. 所以 $\{a_n\}$ 的所有子序列都收敛于同一极限.
(充分性) 设 $\{a_{2k}\}$ 与 $\{a_{2k-1}\}$ 收敛于同一极限 a. 则对 $\forall\varepsilon>0,\exists N'$，当 $k>N'$ 时，有 $|a_{2k}-a|<\varepsilon$. 也 $\exists N''$，当 $k>N''$ 时，有 $|a_{2k-1}-a|<\varepsilon$. 取 $N=\max\{N',N''\}$，当 $k>N$ 时，$|a_{2k}-a|<\varepsilon$，$|a_{2k-1}-a|<\varepsilon$ 同时成立，即 $|a_n-a|<\varepsilon$.

2. 解：(1) 设 $M=\max\{a_1,\cdots,a_p\}$，则 $\sqrt[n]{M^n}\le\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_p^n}\le\sqrt[n]{p\cdot M^n}$，对此时两边取极限，都等于 M，故 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_1^n+\cdots+a_p^n}=M$.
(2)$\dfrac{2n}{\sqrt{(n+1)^2}}\le x_n\le\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+1}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\sqrt{2}$.
(3)$1^{\frac{1}{n}}\le\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1}{n}}$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.
(4)$0<a_n<a$，而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，所以对 $\forall\varepsilon>0(\varepsilon<a),\exists N$，当 $n>N$ 时，$a-\varepsilon\le a_n\le a+\varepsilon$，则 $\sqrt[n]{a-\varepsilon}\le\sqrt[n]{a_n}\le\sqrt[n]{a+\varepsilon}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

2.3 单调数列

2.4 Cauchy 命题与 Stolz 定理

2.5 自然对数的底 e 和欧拉常数 γ

2.6 由迭代生成的数列

2.7 第一组参考题

题目 2.7.1: 设 $\{a_{2k-1}\},\{a_{2k}\},\{a_{3k}\}$ 都收敛, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明: 由于 $\{a_{6k}\}$ 既是 $\{a_{2k}\}$ 和 $\{a_{3k}\}$ 的子列, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{6k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{3k}$; 而 $\{a_{6k-3}\}$ 既是 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{3k}\}$ 的子列, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k-1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{6k-3} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{3k}$. 故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2k} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2k-1}$, 则 $\{a_n\}$ 收敛. □

题目 2.7.2: 设 $\{a_n\}$ 有界, 且满足条件 $a_n \le a_{n+2}, a_n \le a_{n+3}, n \in \mathrm{N}^+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明: 由 $a_n \le a_{n+2}$, 可知 $\{a_{2k-1}\}$ 和 $\{a_{2k}\}$ 单调增加; 再由 $a_n \le a_{n+3}$ 单调增加. 又因为 $\{a_n\}$ 有界, 所以 $\{a_{2k-1}\},\{a_{2k}\},\{a_{3k}\}$ 都收敛, 故由 1 可得 $\{a_n\}$ 收敛. □

题目 2.7.3: 设 $\{a_n + a_{n+1}\}$ 和 $\{a_n + a_{n+2}\}$ 都收敛, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明: 设

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} + a_{n+2}) = a$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+2}) = b.$$

则

$$b = \lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+1}) - \lim_{n\to\infty}(a_{n+1} + a_{n+2}) + \lim_{n\to\infty}(a_n + a_{n+2}) = \lim_{n\to\infty} 2a_n$$

故 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \frac{b}{2}$, 所以 $\{a_n\}$ 收敛. □

题目 2.7.4: 设数列 $\{a_n\}$ 收敛于 0, 又存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = a$, 证明: $a \le 1$.

证明: 假设 $a > 1$. 由极限的保号性, $\exists N \in \mathrm{N}^+$, 当 $n > N$ 时, 有 $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1$, 故 $|a_{n+1}| > |a_n| > 0$ 成立. 则 $\{|a_n|\}$ 收敛于 $c(>0)$ 或者发散.

(a) $\lim\limits_{n\to\infty}|a_n| = c$. 取 $\varepsilon = \frac{c}{2}$, $\exists N_1$ 当 $n > N_1$ 时, 有

$$\frac{c}{2} = c - \varepsilon < |a_n| < c + \varepsilon = \frac{3c}{2}$$

即有

$$\frac{c}{2} < a_n \text{或} a_n < -\frac{c}{2} \tag{1}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. 取 $\varepsilon = \frac{c}{2}$, $\exists N_2$ 当 $n > N_2$ 时, 有

$$-\frac{c}{2} < a_n < \frac{c}{2} \tag{2}$$

当 $N = \max\{N_1, N_2\}$ 时,(1) 与 (2) 矛盾.

(b)$\{|a_n|\}$ 发散. 即 $\lim\limits_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$. 显然与 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ 矛盾.

综上, 假设错误. 故 $a \le 1$.

□

题目 2.7.5: 设 $a_n = \sum\limits_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)$, $n \in \mathrm{N}^+$, 计算 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

证明: (徐森林上册 P8) 注意到等式

$$\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1 = \frac{\frac{k}{n^2}}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1} = \frac{k}{n^2(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1)} \qquad 1 \le k \le n$$

而

$$\frac{k}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1} \le \frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1} \le \frac{k}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}$$

故

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2} &= \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1} \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1} \\
&\le \sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1} \\
&= \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1}\cdot\frac{n(n+1)}{2}
\end{aligned}$$

代入 a_n 表达式得

$$\begin{aligned}
\frac{1+\frac{1}{n}}{2(\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1)} &\le \sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right) \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}+1} \\
&\le \frac{1+\frac{1}{n}}{2(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1)}
\end{aligned}$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2(\sqrt{1+\frac{n}{n^2}}+1)}=\dfrac{1}{4}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+\frac{1}{n}}{2(\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}+1)}$ 及夹挤定理就得

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{1+\frac{k}{n^2}}-1\right)=\frac{1}{4}$$

□

题目 2.7.6: 用 $p(n)$ 表示能整除 n 的素数的个数, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0$.

证明: (徐森林上册 P8) 首先

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2 n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log_2(n+1)-\log_2 n}{(n+1)-n}=\lim_{n\to\infty}\log_2\frac{n+1}{n}=0$$

由整数的标准分解式得 $n=\sum\limits_{i=1}^{k}p_i^{\alpha_i},\alpha_i\geq 0$ 其中 p_i 为大于等于 2 的素数. 故

$$2^k\leq\sum_{i=1}^{k}p_i\leq n,k=p(n).$$

于是

$$1\leq k\leq\log_2 n\frac{1}{n}\leq\frac{k}{n}=\frac{p(n)}{n}\leq\frac{\log_2 n}{n}$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\log_2 n}{n}$ 及夹挤定理就得 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p(n)}{n}=0$. □

题目 2.7.7: 设 $a_0,a_1,\cdots,a_p$ 是 $p+1$ 个给定的数, 且满足条件 $a_0+a_1+\cdots+a_p=0$. 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p})$.

解: $a_0=-a_1-a_2-\cdots-a_p$, 则

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}(a_0\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p})\\
=&\lim_{n\to\infty}[(-a_1-a_2-\cdots-a_p)\sqrt{n}+a_1\sqrt{n+1}+\cdots+a_p\sqrt{n+p}]\\
=&\lim_{n\to\infty}[a_1(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})+a_2(\sqrt{n+2}-\sqrt{n})+\cdots+a_p(\sqrt{n+p}-\sqrt{n})]\\
=&\lim_{n\to\infty}\left[\frac{a_1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}+\frac{2a_2}{\sqrt{n+2}+\sqrt{n}}+\cdots\frac{pa_n}{\sqrt{n+p}+\sqrt{n}}\right]\\
=&\ 0
\end{aligned}$$

□

题目 2.7.8: 证明: 当 $0<k<1$ 时 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+n)^k-n^k]=0$.

解: $0<(1+n)^k-n^k=n^k[(\frac{1+n}{n})k-1]=n^k[(1+\frac{1}{n})k-1]<n^k[(1+\frac{1}{n})-1]=n^k\cdot\frac{1}{n}=\dfrac{1}{n^{1-k}}\to 0,(n\to\infty)$ 则 $\lim\limits_{n\to\infty}[(1+n)^k-n^k]=0$. □

题目 2.7.9:

(1) 设 $\{x_n\}$ 收敛, 令 $y_n=n(x_n-x_{n-1}),n\in\mathrm{N}^+$, 问 $\{y_n\}$ 是否收敛.

(2) 在上一题中, 若 $\{y_n\}$ 也收敛, 证明: $\{y_n\}$ 收敛于 0.

✎ 解:

(1) 令 $x_n=\dfrac{\sin n}{n}\to 0,(n\to\infty), y_n=n\Big[\dfrac{\sin n}{n}-\dfrac{n-1}{n}\Big]$ 则有

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} n[\frac{\sin n}{n}-\frac{n-1}{n}]\\
=&\lim_{n\to\infty} n[n-(n-1)]\cdot\frac{(n+\theta)\cos(n+\theta)-\sin(\theta+n)}{(n\theta)^2}\\
=&\lim_{n\to\infty}\frac{(n+\theta)\cos(n+\theta)-\sin(n+\theta)}{n}
\end{aligned}$$

上式极限不存在. 即 y_n 极限不存在.

(2) 令 $x_0=0$, 则 $y_1=x_1-x_1$. 而 $\{y_n\}$ 收敛, 记 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n=l, \lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.
由 Cauchy 命题, 有

$$\begin{aligned}
l&=\lim_{n\to\infty}\frac{y_1+y_2\cdots+y_n}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{(x_1-x_0)+2(x_2-x_1)+\cdots+n(x_n-x_{n-1})}{n}\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{-(x_0+x_1+\cdots+x_{n-1})+nx_n}{n}\\
&=-a+a\\
&=0
\end{aligned}$$

□

题目 2.7.10:

(1) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=0$. 证明: $\{a_n\}$ 是无穷大量.

(2) 设正数列 $\{a_n\}$ 满足条件 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}=0$, 证明: $\{a_n\}$ 无界.

☞ 证明:

(1) 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=0$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}=+\infty$. 则对 $\forall G>0,\exists N\in\mathrm{N}^+$, 当 $n>N$ 时有 $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}>G$. 取 $G_0>1$, 则

$$a_{n+1}>a_n\cdot G>a_{n-1}\cdot G^2>\cdots>a_N\cdot G^{n+1-N}$$

令 $n\to\infty$, 则 $a_N\cdot G^{n+1-N}\to\infty$. 所以 $\{a_n\}$ 为无穷大量.

(2) 假设 $\{a_n\}$ 有界, 设整个数列的上确界为 m_1, 则在 a_{N_1} 之后的项中存在大于 $\dfrac{m_1}{2}$ 的项, 记大于 $\dfrac{m_1}{2}$ 且下标最小的项为 a_{N_1}. 那么有

$$\frac{\frac{m_1}{2}}{m_1+m_1}<\frac{a_{N_1}}{a_{N_1+1}+a_{N_1+2}}$$

再设 a_{N_1} 之后的项的上确界为 m_2,则则在 a_{N_2} 之后的项中存在大于 $\frac{m_2}{2}$ 的项,记大于 $\frac{m_2}{2}$ 且下标最小的项为 a_{N_2}. 那么有

$$\frac{\frac{m_2}{2}}{m_2+m_2} < \frac{a_{N_2}}{a_{N_2+1}+a_{N_2+2}}$$

如此进行下去,得到子列 $\left\{\frac{a_{N_k}}{a_{N_k+1}+a_{N_k+2}}\right\}$,该子列要么发散,要么收敛,但极限大于等于 $\frac{1}{4}$,都与 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}+a_{n+2}}$ 矛盾,故假设错误.

□

题目 2.7.11: 证明: $\left(\frac{n}{3}\right)^n < n! < \left(\frac{n}{2}\right)^n$,其中右边的不等式当 $n \geq 6$ 时成立.

证明: 先证左边,令 $x_n = (\frac{n}{3})^n, x_0 = 1$. 则

$$\frac{x_n}{x_{n-1}} = \frac{(\frac{n}{3})^n}{(\frac{n-1}{3})^{n-1}} = \frac{n}{3}\cdot(\frac{n}{n-1})^{n-1} = \frac{n}{3}\cdot(1+\frac{1}{n-1})^{n-1} < \frac{ne}{3} < n, (n \geq 2)$$

且 $\frac{x_1}{x_0} = \frac{1}{3} < 1$. 则

$$\frac{x_1}{x_0}\cdot\frac{x_2}{x_1}\cdots\frac{x_n}{x_{n-1}} < n!.$$

再证右边,$n=6$ 时,$6! = 720 < 729 = (\frac{6}{2})^6$, 成立.

假设 $n=k, (k \geq 6)$ 时成立, 即 $(k-1)! < (\frac{k-1}{2})^{k-1}$ 成立. 于是有

$$(k-1)!\cdot k = k! < (\frac{k-1}{2})^{k-1}\cdot k = \frac{(k-1)^{k-1}}{2^{k-1}}\cdot k = \frac{2(k-1)^{k-1}\cdot k}{2^k}$$

要证 $\frac{2(k-1)^{k-1}\cdot k}{2^k} < \frac{k^k}{2^k}$, 即证 $2k\cdot(k-1)^{k-1} < k^k$, 即证 $2\cdot(k-1)^{k-1} < k^{k-1}$, 即证 $2 < \left(\frac{k}{k-1}\right)^{k-1} = \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}$. 而 $2 < \left(1+\frac{1}{k-1}\right)^{k-1}$ 显然成立. 故 $n=k+1$ 时成立.
综上, 证毕.

□

题目 2.7.12: 证明: $\left(\frac{n}{e}\right)^n < n! < e\left(\frac{n}{2}\right)^n$.

证明:

□

题目 2.7.13: (对于命题 2.5.4 的改进) 证明:

(1) $n \geq 2$ 时成立

$$1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\frac{1}{n!n} = 3-\frac{1}{2!1\cdot 2}-\cdots-\frac{1}{n!(n-1)n};$$

(2) $e = 3-\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{(k-2)!(k+1)(k+2)};$

证明:

(1) $n=2$ 时, 左边 $=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{2!2}=\frac{11}{4}$; 右边 $=3-\frac{1}{2!\cdot 1\cdot 2}=\frac{11}{4}$. 左边 = 右边, 等式成立.
假设 $n=k$ 时等式成立. 即

$$1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{k!}+\frac{1}{k!k}=3-\frac{1}{2!1\cdot 2}-\cdots\frac{1}{k!(k-1)k} \tag{$*$}$$

在 $(*)$ 式左边 $+\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+1)!(k+1)}-\frac{1}{k!k}=1+1+\frac{1}{2!}+\cdots\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+1)!(k+1)}$,
而 $\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+1)!(k+1)}-\frac{1}{k!k}=\frac{1}{(k+1)!}(1+\frac{1}{k+1})-\frac{k+1}{(k+1)!k}=-\frac{1}{(k+1)!}\frac{1}{k(k+1)}$.
所以在 $(*)$ 式右边 $+\frac{1}{(k+1)!}+\frac{1}{(k+1)!(k+1)}-\frac{1}{k!k}=3-\frac{1}{2!1\cdot 2}-\cdots\frac{1}{(k+1)!k(k+1)}$,
即推出了 $n=k+1$ 时成立. 综上证毕.

(2) 对 (1) 中等式两边取极限即得.

□

题目 2.7.14: 设 $a_n=1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}, n\in\mathrm{N}^+$, 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明: $a_{n+1}-a_n=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=\frac{1}{\sqrt{n+1}}-\frac{1}{\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{2}}<0$, 所以 $\{a_n\}$ 单调递减.
下证: $2(\sqrt{n+1}-1)<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$,
当 $n=1$ 时,$2(\sqrt{2}-1)<1<2$, 此时成立.
假设当 $n=k$ 时不等式成立. 即 $2(\sqrt{k+1}-1)<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}<2\sqrt{k}$. 故

$$2(\sqrt{k+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{k}}++\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k}++\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

而 $4k+8+\frac{1}{k+1}>4k+8 \iff \left(2\sqrt{k+1}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}\right)^2>(2\sqrt{k+2})^2 \iff 2(\sqrt{k+1}-1)+\frac{1}{\sqrt{k+1}}>2(\sqrt{k+2}-2)$
并且 $4k<4(k+1)-4+\frac{1}{k+1} \iff 2\sqrt{k}<2\sqrt{k+1}-\frac{1}{\sqrt{k+1}} \iff 2\sqrt{k}+\frac{1}{\sqrt{k+1}}<2\sqrt{k+1}$. 即推出了 $n=k+1$ 时成立.
所以 $2(\sqrt{n+1}-1)<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}$. 即有

$$-2<2(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}-1)<\frac{1}{\sqrt{1}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n}}-2\sqrt{n}<0$$

所以 $\{a_n\}$ 有下界-2. 则 $\{a_n\}$ 收敛.

□

题目 2.7.15: 设已知存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots a_n}{n}$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$.

证明: 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$ 存在, 记为 l, 则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n(n-1)}=0$$

$$0=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_{n-1}}{n-1}+\lim_{n\to\infty}\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n(n-1)}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$$

□

题目 2.7.16: 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}(n!)^{1/n^2}=1$.

证明: $\frac{n\sqrt[n]{1}}{n}\leq\frac{\sqrt[n]{1}+\sqrt[n]{2}+\cdots\sqrt[n]{n}}{n}\leq\frac{n\sqrt[n]{n}}{n}$, $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1}=1=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}$.
所以

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n-1}+\cdots+\sqrt[n]{1}}{n}=1.$$

$$\sqrt[n^2]{1}\leq\sqrt[n^2]{n!}=\sqrt[n^2]{(\sqrt[n]{n})^n\cdot(\sqrt[n]{n-1})^n\cdots(\sqrt[n]{1})^n}\leq\frac{n(\sqrt[n]{n}+\sqrt[n]{n-1}+\cdots+\sqrt[n]{1})}{n^2}$$

而 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{1}=1$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n^2]{n!}=1$. □

题目 2.7.17: 设对每个 n 有 $x_n<1$ 和 $(1-x_n)x_{n+1}\geq\frac{1}{4}$, 证明 $\{x_n\}$ 收敛, 并求极限.

证明: 若 $x_1\leq 0, 1>x_2\frac{1}{4}(1-x_1)>0$, 则 $0<x_3<1$.

假设 $0<x_k<1\quad(k\geq 2)$, 则由 $(1-x_k)x_{k+1}\geq\frac{1}{4}$ 与 $x_n<1$, 有 $0<\frac{1-x_k}{4}<x_{k+1}<1$. 即 $n=k+1$ 时也有 $0<x_{k+1}<1$, 即 $0<x_n<1,(n\geq 2)$.

当 $n=2$ 时,$(1-x_{n+1})x_{n+1}\leq\frac{1}{4}\leq(1-x_n)x_{n+1}$. 所以 $x_n\leq x_{n+1}$, 显然 $n=1$ 时,$x_n\leq x_{n+1}$ 也成立. 故 $\{x_n\}$ 单调递增有上界. 而 $\lim\limits_{n\to\infty}(1-x_n)x_{n+1}\geq\frac{1}{4}$. 令 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$, 则有 $(1-a)a=\frac{1}{4}$, 解得 $a=\frac{1}{2}$.

若有 $0<x_1<1$, 则由以上讨论有 $x_n\leq x_{n+1},(n\geq 1)$ 成立. 同样有 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a=\frac{1}{2}$. □

题目 2.7.18: 设 $a_1=b,a_2=c$, 在 $n\geq 3$ 时 a_n 由 $a_n=\frac{a_{n-1}+a_{n-2}}{2}$ 定义, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

解: 不妨设 $a_1=b<c=a_2$, 则 $a_3=\frac{a_1+a_2}{2}>a_1,a_3<a_2,a_3<a_4=\frac{a_2+a_3}{2}<a_2,a_3<a_5=\frac{a_3+a_4}{2}<a_4$. 则归纳可得 $a_1<a_3<a_5<\cdots,a_2>a_4>a_6>\cdots$, 由此可得 $a_{2n}\to a(n\to\infty)$. 又根据 $2a_{2n+2}=a_{2n-1}+a_{2n}$, 可得 $a_{2n-1}\to a(n\to\infty)$. 这说明 $a_n\to a(n\to\infty)$.

由 $a_n\frac{a_{n-1}+a_{n+2}}{2}$, 可得 $a_n+\frac{a_{n-1}}{2}=a_{n-1}+\frac{a_{n-2}}{2}=\cdots=a_2+\frac{a_1}{2}$. 对此式取极限得 $a=\frac{a_1+2a_2}{3}=\frac{b+2c}{3}$.

若 $b>c$, 也可按照上述方法讨论. 也得 $a=\frac{a_1+2a_2}{3}=\frac{b+2c}{3}$.

若 $b=c$, 得 $a_n=b=c$, 也得 $a=\frac{a_1+2a_2}{3}=\frac{b+2c}{3}$.

综上 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\frac{b+2c}{3}$. □

题目 2.7.19: 设 a,b,c 是三个给定的实数, 令 $a_1=a,b_1=b,c_1=c$, 并以递推公式定义

$$a_{n+1}=\frac{b_n+c_n}{2},b_{n+1}=\frac{c_n+a_n}{2},c_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},n\in\mathrm{N}^+$$

求这三个数列的极限.

☞ 证明: (徐森林上册 P6) 由题设得

$$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}=\cdots=a_0+b_0+c_0=a+b+c$$

令 $L=a+b+c$. 再由

$$\begin{aligned}a_n-b_n&=\frac{b_{n-1}+c_{n-1}}{2}-\frac{c_{n-1}+a_{n-1}}{2}=-\frac{a_{n-1}-b_{n-1}}{2}\\&=(-1)^2\frac{a_{n-2}-b_{n-2}}{2^2}=\cdots=(-1)^n\frac{a_0-b_0}{2^n}\end{aligned}$$

得 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-b_n)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-1)^n(a_0-b_0)}{2^n}=0$. 同理 $\lim\limits_{n\to\infty}(c_n-a_n)=0$. 于是

$$a_n=\frac{1}{3}[(a_n+b_n+c_n)-(c_n-a_n)+(a_n-b_n)]=\frac{1}{3}[L-(c_n-a_n)+(a_n-b_n)].$$

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\frac{1}{3}[L-0+0]=\frac{a+b+c}{3},\\ \lim_{n\to\infty}c_n&=\lim_{n\to\infty}[a_n+(c_n-a_n)]=\frac{L}{3}+0=\frac{L}{3},\\ \lim_{n\to\infty}b_n&=\lim_{n\to\infty}[a_n-(a_n-b_n)]=\frac{L}{3}-0=\frac{L}{3}.\end{aligned}$$

这就证得 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n\lim\limits_{n\to\infty}c_n=\dfrac{a+b+c}{3}$. □

题目 2.7.20:

(1) 设 $a_1>b_1>0, a_{n+1}=\dfrac{2a_nb_n}{a_n+b_n}, b_{n+1}=\sqrt{a_{n+1}b_n}, n\in\mathrm{N}^+$, 证明: $\{a_n\}$ 和 $\{b_n\}$ 收敛于同一极限.

(2) 在 $a_1=2\sqrt{3}, b_1=3$ 时, 证明上述极限等于单位圆的半周长 π.(这里可以利用极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin\frac{\pi}{n}=\pi$)

☞ 证明:

(1) $a_2=\dfrac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}}<\sqrt{a_1b_1}<a_1, a_1>b_1>0, a_2-b_1=\dfrac{2}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{b_1}}-b_1=\dfrac{a_1b_1-b_1^2}{a_1+b_1}>0, b_1<b_2=\sqrt{a_2b_1}<a_2$.

假设

$$b_k<b_{k+1}<a_{k+1}<a_2$$

则

$$a_{k+2}-b_{k+1}=\frac{2a_{k+1}b_{k+1}}{a_{k+1}b_{k+1}}-b_{k+1}=\frac{a_{k+1}b_{k+1}-b_{k+1}^2}{a_{k+1}b_{k+1}}>0.$$

则有

$$b_{k+1}<\sqrt{a_{k+1}b_{k+1}}=b_{k+1}<a_{k+2}=\frac{2a_{k+1}b_{k+1}}{a_{k+1}bk+1}<\sqrt{a_{k+1}b_{k+1}}<a_{k+1}.$$

所以由归纳法原理得

$$b_1 < b_2 < \cdots < b_{k+1} < \cdots < a_{k+1} < a_k < \cdots < a_2 < a_1$$

而且 $a_n - b_n \to 0(n \to \infty)$, 所以两数列收敛于同一极限.

(2) 首先证明 $a_n = 3\cdot 2^n\cdot \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^n}, b_n = 3\cdot 2^n\cdot \sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$.
首先我们有

$$\tan\frac{a}{2} = \frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = 2\cdot\frac{\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\sin a}{2\cos^2\frac{a}{2}}$$

又因为

$$\cos a = 2\cos^2\frac{a}{2} - 1$$

所以

$$\tan\frac{a}{2} = \frac{\sin a}{2\cos^2\frac{a}{2}} = \frac{\sin a}{1+\cos a} = \frac{\sin a\cdot \tan a}{\sin a + \tan a}$$

当 $n = 1$ 时,$a_1 = 3\cdot 2^1\cdot \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^1} = 2\sqrt{3}, b_1 = 3\cdot 2^1\cdot \sin\frac{\pi}{3\cdot 2^1} = 3$.
假设 $n = k$ 时成立. 即

$$a_k = 3\cdot 2^k\cdot \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^k}, b_k = 3\cdot 2^k\cdot \sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}.$$

$n = k+1$ 时,

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= \frac{2a_kb_k}{a_k+b_k} \\ &= \frac{2\cdot 3\cdot 2^k\cdot 3\cdot 2^k\cdot \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^k}\cdot \sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}}{3\cdot 2^k(\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^k} + \sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k})} \\ &= 3\cdot 2^{k+1}\cdot \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{k+1}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{k+1} &= \sqrt{3\cdot 2^{k+1}\cdot\cdot \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{k+1}} 3\cdot 2^k\cdot \sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}} \\ &= 3\cdot 2^{k+1}\sqrt{\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^k}\cdot \tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{k+1}}} \end{aligned}$$

由于 $2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2} = \sin a$, 得

$$\sin^2\frac{a}{2} = \frac{1}{2}\sin a\cdot\frac{\sin\frac{a}{2}}{\cos\frac{a}{2}} = \frac{1}{2}\sin a\tan\frac{a}{2}$$

即 $\sin\frac{a}{2}=\sqrt{\frac{1}{2}\sin a\cdot\tan\frac{a}{2}}$, 所以 $b_{k+1}=3\cdot 2^{k+1}\cdot\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^{k+1}}$. 即 $n=k+1$ 时成立.
所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}3\cdot 2^n\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\\&=\pi\\&=\lim_{n\to\infty}3\cdot 2^n\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}\\&=\lim_{n\to\infty}b_n\end{aligned}$$

□

2.8 第二组参考题

题目 2.8.1: 设 $a_n=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}, n\in\mathrm{N}^+$. 证明: $\{a_n\}$ 收敛.

证明: $a_{n+1}=\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n+\sqrt{n+1}}}}>\sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}=a_n$.
而 $2^{2^n}>n$ 成立 $(n\geq 1)$.
则

$$a_n<\sqrt{2^2+\sqrt{2^4+\cdots+\sqrt{2^{2^n}}}}=2\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}=2b_n$$

显然 $\{b_n\}$ 收敛. 记 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=b$. 则 $a_n<2b$. 故 $\{a_n\}$ 单调有界. 所以 $\{a_n\}$ 收敛. □

题目 2.8.2: 证明: 对每个自然数 n 成立不等式 $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n>\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{e}{2n}$.

证明: (方法 1):$(1+\frac{1}{n})^n=\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})}>\mathrm{e}^{n(\frac{1}{n}-\frac{1}{2n})}=\mathrm{e}\cdot\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n}}>\mathrm{e}\cdot(1-\frac{1}{2n})$

(方法 2) 令 $f(x)=\ln(1+x)+\frac{4}{2+x}$, 则 $f'(x)=\frac{x^2}{(1+x)(2+x)^2}>0,(x>0)$. 所以 $f(x)>f(0)=2$, 即有 $\ln(1+\frac{1}{n})+\frac{4}{1+\frac{1}{n}}>2$.

故

$$\mathrm{e}^{n\ln(1+\frac{1}{n})-1}>\mathrm{e}^{n(2-\frac{4}{1+\frac{1}{n}})-1}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2n+1}}>1-\frac{1}{2n+1}>\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}}{\mathrm{e}}-\frac{1}{2n}$$

即 $(1+\frac{1}{n})^n>\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}-\frac{\mathrm{e}}{2n}$. □

题目 2.8.3: 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}n\sin(2\pi n!e)$.

解: (徐森林上册 P55) 因为

$$\begin{aligned}2\pi\mathrm{e}n!&=2\pi n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdot+\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{(n+2)!}\right)\\&=2\pi n!\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdot+\frac{1}{n!}\right)+\frac{2\pi}{n+1}+o(\frac{1}{n})\end{aligned}$$

$$= 2\pi N + \frac{2\pi}{n+1} + o(\frac{1}{n}) \qquad N\text{为某正整数}, 0 < \theta < 1$$

所以 $n\sin(2\pi en!) = n\sin\left(\frac{2\pi}{n+1} + o(\frac{1}{n})\right) \to 2\pi, (n\to\infty).$ □

题目 2.8.4: 记 $S_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}, n \in \mathrm{N}^+$. 用 K_n 表示使 $S_k \geq n$ 的最小下标, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n}$.

解: (徐森林上册 P43) 由题意知 $\lim\limits_{n\to\infty} K_n = +\infty$ 及

$$H_{K_n} - \frac{1}{K_n} = H_{k_n-1} < n \leq H_{K_n}$$

由此得出

$$n \leq H_{K_n} < n + \frac{1}{K_n}$$

$$n+1 \leq H_{K_{n+1}} < n+1 + \frac{1}{K_{n+1}}$$

于是

$$1 - \frac{1}{K_n} < H_{K_{n+1}} - H_{K_n} < 1 + \frac{1}{K_{n+1}}.$$

由 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{K_n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{K_{n+1}}$ 知 $\lim\limits_{n\to\infty} (H_{K_{n+1}} - H_{K_n}) = 1$. 而我们知道

$$H_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdot + \frac{1}{n} = x_n + \ln n$$

而 $X_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdot + \frac{1}{n} - \ln n = c + \varepsilon_n \to c(n\to\infty)$, 所以

$$H_{K_{n+1}} = \ln K_{n+1} + c + \varepsilon_{K_{n+1}}$$

$$H_{K_n} = \ln K_n + c + \varepsilon_{K_n}$$

$$H_{K_{n+1}} - H_{K_n} = \ln\frac{K_{n+1}}{K_n} + \varepsilon_{K_{n+1}} - \varepsilon_{K_n}.$$

令 $n\to\infty$ 得

$$1 = \lim_{n\to\infty}(H_{K_{n+1}} - H_{K_n}) = \lim_{n\to\infty} \ln\frac{K_{n+1}}{K_n} + 0,$$

于是 $\lim\limits_{n\to\infty} \ln\frac{K_{n+1}}{K_n} = 1$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{K_{n+1}}{K_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{e}^{\frac{K_{n+1}}{K_n}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$ □

题目 2.8.5: 设 $x_n = \frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k, n \in \mathrm{N}^+$, 求极限 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解: 由 O'Stolz 定理

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=0}^{n} \ln C_n^k = \lim_{n\to\infty} \frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1} \ln C_{n+1}^k - \sum\limits_{k=0}^{n} \ln C_n^k}{(n+1)^2 - n^2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln C_{n+1}^{n+1}+\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\dfrac{C_{n+1}^{k}}{C_n^k}}{2n+1} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\dfrac{n+1}{n+1-k}}{2n+1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=0}^{n+1}\ln\dfrac{n+1}{n+2-k}-\sum\limits_{k=0}^{n}\ln\dfrac{n+1}{n+1-k}}{2(n+1)+1-2n-1}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln\dfrac{n+2}{n+2}+(n+1)\ln\dfrac{n+2}{n+1}}{2}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{\ln(1+\dfrac{1}{n+1})^{n+1}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}$$

□

题目 2.8.6: 将二项式系数 $C_n^0, C_n^1, \cdots, C_n^n$ 的算术平均值和几何平均值分别记为 A_n 和 G_n. 证明: (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{A_n}=2$; (2) $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}=\sqrt{e}$.

证明: (1) $A_n=\dfrac{\sum\limits_{k=0}^{n}C_n^k}{n}=\dfrac{2^n}{n}$, 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\dfrac{2^n}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2}{\sqrt[n]{n}}$

(2) $G_n=\sqrt[n]{C_n^0\cdot C_n^1\cdots C_n^n}$, 所以 $\sqrt[n]{G_n}=(\prod\limits_{k=0}^{n}C_n^k)^{\frac{1}{n^2}}=e^{\ln(\prod\limits_{k=0}^{n}C_n^k)^{\frac{1}{n^2}}}$, 则

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{G_n}=\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n^2}\sum\limits_{k=0}^{n}\ln C_n^k}=e^{\frac{1}{2}}$$

□

题目 2.8.7: 设 $A_n=\sum\limits_{k=1}^{n}a_k, n\in\mathrm{N}^+$. 数列 $\{A_n\}$ 收敛. 又有一个单调递增的正整数列 $\{p_n\}$, 且为无穷大量, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{p_1a_1+p_2a_2+\cdots+p_na_n}{p_n}=0$.

证明: $\sum\limits_{k=1}^{n}P_ka_k=\sum\limits_{k=2}^{n}P_k(A_k-A_{k-1})+P_1A_1=\sum\limits_{k=1}^{n}A_k(P_k-P_{k+1})+P_nA_n$,

又

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}A_k(P_k-P_{k+1})}{P_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}A_k(P_k-P_{k+1})-\sum\limits_{k=1}^{n-1}A_k(P_k-P_{k+1})}{P_{n+1}-P_n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}(-A_n)$$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{P_1a_1+P_2a_2+\cdots+P_na_n}{P_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sum\limits_{k=1}^{n-1}A_k(P_k-P_{k-1})+P_nA_n}{P_n}$. □

题目 2.8.8: 设 $\{a_n\}$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2)=1$, 证明: $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[3]{3n}a_n=1$.

证明: (徐森林上册 P24) 设 $S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2$, 显然 $\{S_n\}$ 单调递增. 下证 $S_n\to+\infty(n\to\infty)$. 事实上, 若 $S_n\to S$(有限), 则 $a_n^2=S_n-S_{n-1}\to S-S=0(n\to\infty)$. 从而 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$,

$$\lim_{n\to\infty}a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^2=\lim_{n\to\infty}a_nS_n=0\cdot S=0$$

这与题设 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=1$ 相矛盾. 于是

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}a_i^2=+\infty$$

再由 $\lim\limits_{n\to\infty}a_nS_n=\lim\limits_{n\to\infty}a_n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2=1$ 知, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\left(a_n\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2\right)\cdot\dfrac{1}{\sum\limits_{i=1}^{n}a_i^2}=1\cdot 0=0.$

考虑到

$$\begin{aligned}S_n^3-S_{n-1}^3&=(S_n-S_{n-1})(S_n^2+S_nS_{n-1}+S_{n-1}^2)\\&=a_n^2[S_n^2+S_n(S_n-a_n^2)+(S_n-a_n^2)^2]\\&=3(a_nS_n)^2-3a_n^4S_n+a_n^6\\&=3\left(a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)^2-3a_n^3\left(a_n\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)+a_n^6\\&\to 3\times1-3\times0\times1+0=3\qquad(n\to\infty)\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3na_n^3}&=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(a_nS_n)^3}\cdot\frac{S_n^3}{3n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(a_nS_n)^3}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^3}{3n}\\&\overset{\text{O'Stolz}}{=\!=\!=}1\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{S_n^3-S_{n-1}^3}{3}=\frac{3}{3}=1\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty}3na_n^3=1.$$

□

题目 2.8.9: 设数列 $\{u_n\}_{n\geq0}$ 对每个非负整数 n 满足条件

$$u_n=\lim_{m\to\infty}(u_{n+1}^2+u_{n+2}^2+\cdots u_{n+m}^2),$$

证明: 若存在有限极限 $\lim\limits_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots u_n)$, 则只能是每个 $u_n=0$.

证明: 不妨设 $u_1>0$, 易知 $u_n=u_{n+1}+u_{n+1}^2$, 故 $u_{n+1}=\dfrac{u_n}{1+u_{n+1}}$, $u_n=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}u_k^2\geq0$. 而 $u_n=u_{n+1}+u_{n+1}^2\geq u_{n+1}, \forall n\in\mathrm{N}^+$.

从而有

$$u_{n+1}=\frac{u_n}{1+u_{n+1}}\geq\frac{u_n}{1+u_n}$$

归纳可得

$$u_{n+1} \geq \frac{u_1}{1+nu_n} > \frac{1}{n+[\frac{1}{u_1}]+1}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n+[\frac{1}{u_1}]+1} = +\infty$ (调和级数去掉有限项). 所以与 $\lim_{n\to\infty}(u_1+u_2+\cdots+u_n)$ 为有限矛盾. 故每个 $u_n = 0$. □

题目 2.8.10: (Toeplitz 定理) 设对每个 $n,k \in \mathrm{N}^+$ 有 $t_{nk} \geq 0$. 又有 $\sum_{k=1}^{n} t_{nk} = 1$, $\lim_{n\to\infty} t_{nk} = 0$. 若已知 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 定义 $x_n = \sum_{k=1}^{n} t_{nk}a_k$. 证明: $\lim_{n\to\infty} x_n = a$.

证明: 由 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, 知 $\exists M > 0$, 使得 $|a_n - a| < M, \forall n \in \mathrm{N}^+$. 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists N_1 \in \mathrm{N}$, 当 $n > N_1$ 时,$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2}$. 固定 N_1, 因为 $\lim_{n\to\infty} t_{n_k} = 0$, 所以 $\exists N_2 \in \mathrm{N}$, 当 $n > N_2$ 时,$0 \leq t_{n_k} < \frac{\varepsilon}{2N_1M}, k = 1,2,\cdots,N_1$, 令 $N = \max\{N_1,N_2\}$. 当 $n > N$ 时, 利用等式 $\sum_{k=1}^{n} t_{n_k} = 1$ 有

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} t_{n_k}a_k - a\right| &= \left|\sum_{k=1}^{n} t_{n_k}a_k - \sum_{k=1}^{n} t_{n_k}a\right| = \left|\sum_{k=1}^{n} t_{n_k}(a_k - a)\right| \\
&\leq t_{n1}|a_1 - a| + \cdots + t_{nN_1}|a_{N_1} - a| + \cdots + t_{nn}|a_n - a| \\
&< M(t_{n1} + \cdots + t_{nN_1}) + \frac{\varepsilon}{2}(t_{nN_1+1} + t_{nn}) \\
&\leq M\cdot N_1\cdot \frac{\varepsilon}{2N_1M} + \frac{\varepsilon}{2}\cdot 1 = \varepsilon
\end{aligned}$$

所以 $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} t_{n_k}a_k = a$. □

第 3 章 实数系的基本定理

第 4 章 函数极限

第 5 章 连续函数

第 6 章 导数与微分

6.1 导数及其计算

6.2 高阶导数及其他求导法则

6.3 一阶微分及其形式不变性

6.4 第一组参考题

题目 6.4.1: 利用导数的定义计算极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\tan x)^{10}-(1-\sin x)^{10}}{\sin x}$.

解:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)^{10}-(1-\sin x)^{10}}{\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{(1+\tan x)^{10}-(1-\sin x)^{10}-0}{x-0}\\ &= \left((1+\tan x)^{10}-(1-\sin x)^{10}\right)'_x\Big|_{x=0}\\ &= 10(1+\tan x)9\cdot\frac{1}{\cos^2 x}+10(1-\sin x)^9\cdot\cos x\\ &= 20\end{aligned}$$

□

题目 6.4.2: 设 $f(x)=\dfrac{1}{x^2+3x+2}$, 计算 $f^{(100)}(0)$, 要求相对误差不超过 1%

解: $f(x)=\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{1}{x+2}$, $f'(x)=-\dfrac{1}{(x+1)^2}+\dfrac{1}{(x+2)^2}$, $f''(x)=\dfrac{2}{(x+1)^3}-\dfrac{2}{(x+2)^3},\cdots\cdots,$
$f^{(100)}(x)=\dfrac{100!}{(x+1)^{100}}-\dfrac{100!}{(x+2)^{101}}$, 接下来可以利用微分近似计算 $f^{(100)}(0)$ □

题目 6.4.3: 设 f 在点 a 可导, $f(a)\neq 0$. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n$.

解: 由 Heine 归结原理,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{n})}{f(a)}\right]^n &= \lim_{x\to+\infty}\left[\frac{f(a+\frac{1}{x})}{f(a)}\right]^x\\ &= exp\left(\lim_{x\to+\infty}x\left(\ln f(a+\frac{1}{n})-\ln f(a)\right)\right)\\ &= exp\left(\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\ln f(a+\Delta x)-\ln f(a)}{\Delta x}\right)\end{aligned}$$

$$= exp\left((\ln f(x))'\Big|_{x=a}\right)$$
$$= exp\left(\frac{f'(a)}{f(a)}\right)$$

□

题目 6.4.4: 设 $a \neq 0$, 计算 $f(x)=\dfrac{\sin x+\sin(x+a)}{\cos x-\cos(x+a)}$ 的导数并对结果作出解释.

解: $f(x)=\dfrac{2\sin\dfrac{2x+a}{2}\cos\dfrac{a}{2}}{-2\sin\dfrac{2x+a}{2}\sin\dfrac{a}{2}}=-\cot\dfrac{a}{2}\quad(a\neq 0)$ 为常数函数, 故导数恒为 0. □

题目 6.4.5: 设 $f(0)=0, f'(0)$ 存在. 定义数列

$$x_n=f\left(\frac{1}{n^2}\right)+f\left(\frac{2}{n^2}\right)+\cdots+f\left(\frac{n}{n^2}\right), n\in \mathrm{N}^+,$$

试求 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

解: $f\left(\dfrac{1}{n^2}\right)=f'(0)\left(\dfrac{1}{n^2}-0\right)+o\left(\dfrac{1}{n^2}-0\right),\cdots,f\left(\dfrac{n}{n^2}\right)=f'(0)\left(\dfrac{n}{n^2}-0\right)+o\left(\dfrac{n}{n^2}-0\right)$.
故

$$x_n=f'(0)\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots\frac{n}{n^2}\right)+o\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$
$$=\frac{n(n+1)}{2n^2}f'(0)+o\left(\frac{n(n+1)}{2n^2}\right)$$

则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\frac{1}{2}f'(0)$. □

题目 6.4.6: 求下列数列极限:

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n}{n^2}\right)$,

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]$.

解:

(1) $\sin\frac{1}{n^2}\sim\frac{1}{n^2},\cdots,\sin\frac{n}{n^2}\sim\frac{n}{n^2},(n\to\infty)$. 故

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sin\frac{1}{n^2}+\sin\frac{2}{n^2}+\cdots+\sin\frac{n}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2n^2}=\frac{1}{2}$$

(2) $\ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\sim\frac{1}{n^2},\cdots,\ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\sim\frac{n}{n^2},(n\to\infty)$.
故

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2}{n^2}\right)\cdots\left(1+\frac{n}{n^2}\right)\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(\ln(1+\frac{1}{n^2})+\ln(1+\frac{2}{n^2})+\cdots+\ln(1+\frac{n}{n^2})\right)\right)\\
&= exp\left(\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^2}+\cdots+\frac{n}{n^2}\right)\right)\\
&= exp\left(\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

□

题目 6.4.7: 设 $y=\dfrac{1+x}{\sqrt{1-x}}$, 计算 $y^n(x), n\in \mathrm{N}^+$.

解:

$$y' = (1-x)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}(1-x)^{-\frac{1}{2}}$$

$$y'' = \frac{3}{2}(1-x)^{-\frac{5}{2}}+\frac{1}{4}(1-x)^{-\frac{3}{2}}$$

$$
\begin{aligned}
y^{(n)} &= 2\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{5}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdots\frac{2n-1}{2}\right)(1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}\\
&= \frac{(2n-1)!!}{2^{n-1}}(1-x)^{-\frac{2n+1}{2}}+\frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}}(1-x)^{-\frac{2n-1}{2}}
\end{aligned}
$$

□

题目 6.4.8: 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上有任意阶导数, 证明：对每个自然数 n 成立

$$\frac{1}{x^{n+1}}f^{(n)}\left(\frac{1}{x}\right)=(-1)^n\left[x^{n-1}f\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{(n)}.$$

证明: $n=1$ 时, 左边 $=\frac{1}{x^2}f'(\frac{1}{x})=(-1)f'(\frac{1}{x})(\frac{1}{x})'=(-1)[f(\frac{1}{x})]'=$ 右边.

假设 $n=k$ 时成立, 即

$$\frac{1}{x^{k+1}}f^{(k)}(\frac{1}{x})=(-1)^k[x^{k-1}f(\frac{1}{x})]^{(k)}$$

$n=k+1$ 时, 等式左边 $=\frac{1}{x^{k+2}}f^{(k+1)}(\frac{1}{x})$.

$$
\begin{aligned}
\text{等式右边} &= (-1)^{k+1}\left[x^kf(\frac{1}{x})\right]^{(k+1)}\\
&= (-1)^{k+1}\left[C_{k+1}^0x\left(x^{k-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(k+1)}+C_{k+1}^1\left(x^{k-1}f(\frac{1}{x})\right)^{(k)}\right]\\
&= (-1)^{k+1}\left[(-1)^{k+1}\left(\frac{k+1}{x^{k+1}}f^{(k)}(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^{k+2}}f^{(k+1)}(\frac{1}{x}\right)+(k+1)(-1)^k\frac{1}{x^{k+1}}f^{(k)}(\frac{1}{x})\right]\\
&= (-1)^{k+1}\left[((-1)^{k+1}+(-1)^k)\frac{k+1}{x^{k+1}}f^k(\frac{1}{x})\right]+\frac{1}{x^{k+2}}f^{(k+1)}(\frac{1}{x})
\end{aligned}
$$

$$= \frac{1}{x^{k+2}} f^{(k+1)}(\frac{1}{x})$$

所以 $n = k+1$ 时也成立. □

题目 6.4.9: 利用 $1 + x + x^2 + \cdots x^n$ 的和, 求下列各式的和:

(1) $1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1}$,

(2) $1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1}$.

又问: 不用微分学方法能否求出 (1) 与 (2) 中的和?

解:

(1) $1 + x + x^2 + \cdots x^n = \dfrac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$, 所以

$$\begin{aligned} 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} &= (1 + x + x^2 + \cdots x^n)' \\ &= \left(\frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \right)' \\ &= \frac{-(n+1)x^n(1-x) + (1 - x^{n+1})}{(1-x)^2} \end{aligned}$$

(2) $A = x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n, B = x^2 + 2x^3 + 3x^4 + \cdots nx^{n+1}$.
则 $B - A = nx^{n+1} - (x + x^2 + x^3 + \cdots x^n) = nx^{n+1} - \dfrac{x(1-x^n)}{1-}$.
故 $B - A = A(x-1) = nx^{n+1} - \dfrac{x(1-x^n)}{1-x}$, 那么 $A = \dfrac{nx^{n+1}}{x-1} + \dfrac{x(1-x^n)}{(x-1)^2}$.
因此

$$\begin{aligned} A' &= 1^2 + 2^2x + 3^2x^2 + \cdots + n^2x^{n-1} \\ &= \frac{(n+1)nx^n(x-1) - nx^{n+1}}{(x-1)^2} + \frac{[1-(n+1)x^n](x-1)^2 - 2(x-1)x(1-x^n)}{(x-1)^4} \end{aligned}$$

□

题目 6.4.10: 证明组合恒等式:

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = n2^{n-1}, n \in \mathrm{N}^+$,

(2) $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2C_n^k = n(n+1)2^{n-2}, n \in \mathrm{N}^+$.

证明:

(1) $\sum\limits_{k=1}^{n} kC_n^k = \sum\limits_{k=1}^{n-1} nC_{n-1}^k = n2^{n-1}$

(2)

$$\sum_{k=1}^{n}(k^2C_n^k) = \sum_{k=1}^{n}(k(k-1))C_n^k + \sum_{k=1}^{n} kC_n^k$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=1}^{n-2} n(n-1)C_{n-1}^{k} + \sum_{k=1}^{n-1} nC_{n-1}^{k} \\
&= n(n-1)2^{n-2} + n2^{n-1} \\
&= n2^{n-2}(n-1+2) \\
&= n(n+1)2^{n-2}
\end{aligned}
$$

□

题目 6.4.11: 证明：由抛物线的焦点出发的射线经抛物线反射后一定平行于抛物线的对称轴.

证明: (徐森林 P166) 设抛物线的方程为

$$y^2 = 2px$$

则焦点为 $F(\frac{p}{2},0)$. 在抛物线上任取一点 $A(x_0,y_0)$, 过 A 点做切线 $L4$, 记 l 与线段 AF 的夹角为 α,L 与 x 轴的夹角为 β. 根据光学原理：光线的入射角等于反射角. 因此, 如果能证明 $\alpha=\beta$, 则就证明了反射光线平行于 x 轴 (对称轴). 记 L 与 x 轴的交点为 B. 于是,

$$\alpha = \beta \Longleftrightarrow AF = BF$$

将 $y^2 = 2px$ 两边关于 x 求导得

$$2yy' = 2p$$

所以,

$$y' = \frac{p}{y}$$

因此, 抛物线 $y^2 = 2px$ 在点 $A(x_0,y_0)$ 的切线 L 的斜率为

$$y'|_{x=x_0} = \frac{p}{y_0}$$

故 L 的方程为

$$y - y_0 = \frac{p}{y_0}(x - x_0)$$

在上式中, 令 $y=0$, 即得 B 点的坐标为 $(-x_0,0)$. 因此,

$$BF = \left|\frac{p}{2} + x_0\right|$$

且

$$AF = \sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + y_0^2} = \sqrt{\left(x_0 - \frac{p}{2}\right)^2 + 2px_0} = \left|\frac{p}{2} + x_0\right| = BF$$

□

题目 6.4.12: 证明：由椭圆的焦点出发的射线经椭圆反射后一定经过椭圆的另一个交点.

证明: □

题目 **6.4.13:** 证明：在曳物线 $x=a\left(\ln\tan\frac{t}{2}+\cos t\right), y=a\sin t$ 的每一条切线上从切点到与 x 轴的交点的长度为常数.

证明： □

题目 **6.4.14:** 证明：函数 f 在点 x_0 可微的充分必要条件是 x_0 的某个邻域内可以写成 $f(x)=f(x_0)+\phi(x)(x-x_0)$, 其中 $\phi(x)$ 在 x_0 连续.

证明： □

题目 **6.4.15:** 设 $n\geq 2$, 函数 $f(x)=f(x_0)+\phi(x)(x-x_0)$,$\phi(x)$ 在某邻域 $O(x_0)$ 中 $n-1$ 阶可导, 且 $\phi^{n-1}(x)$ 在 x_0 连续. 证明：存在 $f^{(n)}(x_0)$.

证明： □

题目 **6.4.16:** 设 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上有 n 阶导数, 且存在不全为 0 的 $n+1$ 个常数 $a_0,a_1,\cdots,a_n$, 使得

$$a_0f(x)+a_1f'(x)+\cdots+a_nf^{(n)}(x)\equiv 0$$

证明：$f(x)$ 在 (a,b) 上存在任意阶导数.

证明： □

题目 **6.4.17:** 设多项式 $p(x)$ 只有实零点. 证明：$[p'(x)]^2-p(x)p''(x)\geq 0,\forall x\in\mathbb{R}$.

证明： □

题目 **6.4.18:** 设 f 在 $[0,1]$ 上可微, 且使得 $\{x\in[0,1]|f(x)=0=f'(x)\}=\varnothing$. 证明：$f$ 在 $[0,1]$ 中只有有限个零点.

证明： □

题目 **6.4.19:** 对于 $y=\arctan x$, 证明：

(1) $y^{(n)}(x)=(n-1)!\cos^n y\sin n(y+\frac{\pi}{2})$;

(2) $y^{(n)}=\dfrac{P_{n-1}(x)}{(1+x^2)^n}$, 其中 $P_{n-1}(x)$ 为最高次项系数是 $(-1)^{n-1}n!$ 的 $n-1$ 次多项式.

证明： □

题目 **6.4.20:** 定义 $f_0(x)\equiv 1, f_{n+1}(x)=xf_n(x)-f_n'(x), n=0,1,\cdots$. 证明：

(1) $f_n(x)$ 是 n 次多项式;

(2) $f_n(x)$ 有 n 个不同的实根, 且关于原点对称.

证明： □

6.5 第二组参考题

题目 **6.5.1:**

(1) 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kx$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{n}\cos kx$;

(2) 求 $\sum\limits_{k=1}^{n}k\sin kx$ 和 $\sum\limits_{k=1}^{n}k\cos kx$.

☞ 证明: □

➾ **题目 6.5.2:** 证明: Riemann 函数处处不可导.

☞ 证明: □

➾ **题目 6.5.3:** 若从点 (x_0, y_0) 向抛物线 $y = ax^2 + bx + c$ 能够作出两条切线, 或只能作出一条切线, 或不能作出切线. 问: 在这三种情形下的 (x_0, y_0) 的位置与抛物线有什么关系?

☞ 证明: □

➾ **题目 6.5.4:** 证明: Legendre 多项式 $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 满足方程

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)P_n(x)$$

☞ 证明: □

➾ **题目 6.5.5:** 证明: Legendre 多项式满足方程

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) + n(n+1)P_n(x) = 0$$

☞ 证明: □

➾ **题目 6.5.6:** 分析三项式 $(u+v+w)^n$ 展开的系数定律, 猜测并证明 $(uvw)^{(n)}$ 的一般计算公式.

☞ 证明: □

➾ **题目 6.5.7:** 设 $f(x) = ax^2 + bx + c$, 当 $|x| \le 1$ 时 $|f(x)| \le 1$. 证明: 当 $|x| \le 1$ 时 $|f(x)| \le 4$.

☞ 证明: □

➾ **题目 6.5.8:** 证明: 对每个自然数 n 成立

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k k^m = \begin{cases} 0, & 0 \le m \le n-1, \\ (-1)^n n!, & m = n. \end{cases}$$

☞ 证明: □

➾ **题目 6.5.9:** 设 $f(x) = x^n \ln x, n \in \mathrm{N}^+$, 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{f^{(n)}(1/n)}{n!}$.

☞ 证明: □

➾ **题目 6.5.10:** 设 f 在 $x=0$ 处连续, 且存在极限 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(2x)-f(x)}{x} = A$. 证明: $f'(0) = A$.

☞ 证明: □

➾ **题目 6.5.11:** 设 $y = (1+\sqrt{x})^{2n+2}, n \in \mathrm{N}^+$, 求 $y^{(n)}(1)$.

☞ 证明: □

➾ **题目 6.5.12:** 设 $f(x)$ 在区间 I 上三阶可导, $f'(x) \ne 0$, 则可以定义 $f(x)$ 的 Schwarz 导数如下:

$$S(f,x) = \frac{f'''(x)}{f'(x)} - \frac{3}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2 = \left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(x)}{f'(x)}\right)^2$$

证明:

(1) 若 $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$, 即分式线性函数, 则 $S(f,x) = 0$;

(2) 若 $p(x)$ 是 x 的多项式, 且 $p'(x) = 0$ 的根都是互不相同的实数, 则 $S(p,x) < 0$;

(3) 若 f, g 具有所需的各阶导数, 则 $S(f\circ g, x) = S(f, g(x))(g'(x))^2 + S(g,x)$;

(4) 若 $S(f,x) < 0, S(g,x) < 0$, 则 $S(f\circ g, x) < 0$;

(5) 若 $S(f,x) < 0$, 又记 $f^n = f\circ f\circ f\cdots\circ f$, 则 $S(f^n, x) < 0$.

☞ 证明: □

第 7 章 微分学的基本定理

7.1 微分学中值定理

7.2 Taylor 定理

7.3 第一组参考题

题目 7.3.1: 设有 n 个实数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 满足

$$a_1 - \frac{1}{3}a_2 + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{a_n}{2n-1} = 0$$

证明: 方程 $a_1\cos x + a_2\cos 3x + \cdots a_n\cos(2n-1)x = 0$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中至少有一个根.

证明: 令 $f(x) = a_1\sin x = \frac{a}{3}a_2\sin 3x + \cdots + \frac{1}{2n-1}a_n\sin(2n-1)x$, 则有 $f(0) = f(\frac{\pi}{2}) = 0$. 所以由 Rolle 中值定理,$\exists \xi \in (0, \frac{\pi}{2})$ 使得

$$f'(\xi) = a_1\cos\xi + a_2\cos 3\xi + \cdots + a_n\cos(2n-1)\xi = 0.$$

此即方程 $a_1\cos x + a_2\cos 3x + \cdots a_n\cos(2n-1)x = 0$ 在区间 $(0, \frac{\pi}{2})$ 中至少有一个根 ξ. □

题目 7.3.2: 设 $c \neq 0$, 证明: 方程 $x^5 + ax^4 + bx^3 + c = 0$ 至少有两个根不是实根.

证明: 令 $f(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + c$, 则

$$f'(x) = 5x^4 + 4ax^3 + 3bx^2 = x^2(5x^2 + 4ax + b)$$

而 $x^2 \geq 0$, 所以 $f'(x)$ 的正负性由 $5x^2 + 4ax + b$ 决定. 若 $5x^2 + 4ax + b = 0$ 只有两个相同的实根, 那么 $f'(x)$ 恒大于等于 0 或恒小于等于 0. 则 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调, 此时原方程只有一个实根. 若 $5x^2 + 4ax + b = 0$ 无实根,$f(x)$ 也在 $(-\infty, +\infty)$ 上单调, 此时原方程也只有一个实根. 若 $5x^2 + 4ax + b = 0$ 有不同实根, 设其为 $x_1 < x_2$, 则 $x \in (-\infty, x_1)$ 时 $g(x) = 5x^2 + 4ax + b > 0$,$x \in (x_1, x_2)$ 时 $g(x) < 0$,$x \in (x_2, +\infty)$ 时 $g(x) > 0$. 故 $f(x)$ 在 $(-\infty, x_1)$ 上单增, 在 $x \in (x_1, x_2)$ 上单减, 在 $x \in (x_2, +\infty)$ 单增, 故 $f(x) = 0$ 至多 3 个实根. □

题目 7.3.3: 设 $a \neq 0$, 证明: 方程 $x^{2n} + a^{2n} = (x+a)^{2n}$ 只有一个实根 $x = 0$.

证明: 假设方程至少有两个实根, 设其中两个实根为 x_1, x_2 且 $x_1 < x_2$, 记 $f(x) = x^{2n} + a^{2n} - (x+a)^{2n}$, 则有

$$f(x_1) = f(x_2) = 0$$

由 Rolle 定理,$\exists \xi \in (x_1, x_2)$ 使

$$f'(\xi) = 2n\xi^{2n-1} - 2n(\xi + a)^{2n-1} = 0$$

由二项展开式, 对比上式 ξ 的系数可得 $a=0$, 矛盾. 故原方程只有一个实根.

再将 $x=0$ 代入原方程, 显然成立. □

题目 7.3.4: 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 且满足条件

$$f(a)f(b)>0,\ f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$$

证明: 对每个实数 k, 在 (a,b) 内存在点 ξ, 使得 $f'(\xi)-kf(\xi)=0$.

证明: 由 $f(a)f(b)>0, f(a)f\left(\frac{a+b}{2}\right)<0$ 以及 f 的连续性可知 $\exists x_1\in(a,\frac{a+b}{2}), \exists x_2\in(\frac{a+b}{2},b)$ 使得

$$f(x_1)=f(x_2)=0.$$

令 $g(x)=\dfrac{f(x)}{e^{kx}}$, 则 $g'(x)=\dfrac{f'(x)-kf(x)}{e^{kx}}$, $g(x_1)=g(x_2)$. 由 Rolle 定理,$\exists\xi\in(x_1,x_2)\subset(a,b)$ 使得 $g'(\xi)=0$, 故有 $f'(\xi)-kf(\xi)=0$. □

题目 7.3.5: 设 $f(x)=\sum\limits_{k=1}^{n}c_k\mathrm{e}^{\lambda_k x}$, 其中 $\lambda_1,\cdots,\lambda_n$ 为互异实数,$c_1,c_2,\cdots,c_n$ 不同时为 0. 证明: f 的零点个数小于 n.

证明: (徐森林上册 P128) 当 $n=1$ 时,$f(x)=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$, 因 $c_1\neq 0$. 故 f 没有零点.
假设 $n=m$ 时,$f(x)=\sum\limits_{k=1}^{m}c_k\mathrm{e}^{\lambda_k x}$ 至多有 $m-1$ 个实零点成立. 则当 $n=m+1$ 时,$x_{m+1}\neq 0$, $f(x)=c_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x}+c_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}+\cdots+c_m\mathrm{e}^{\lambda_m x}+{}_{\rightarrow}m+1\mathrm{e}^{\lambda_{m+1}x}$. 将它改写成

$$f(x)=\mathrm{e}^{\lambda_1 x}(c_1+c_2\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)x}+\cdots+c_m\mathrm{e}^{(\lambda_m-\lambda_1)x}-c_{m+1}\mathrm{e}^{(\lambda_{m+1}-\lambda_1)x})$$

$f(x)=0$ 的实根就是 $c_1+c_2\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)x}+\cdots+c_m\mathrm{e}^{(\lambda_m-\lambda_1)x}-c_{m+1}\mathrm{e}^{(\lambda_{m+1}-\lambda_1)x}=0$ 的实根. 但是 $g(x)=c_1+c_2\mathrm{e}^{(\lambda_2-\lambda_1)x}+\cdots+c_m\mathrm{e}^{(\lambda_m-\lambda_1)x}-c_{m+1}\mathrm{e}^{(\lambda_{m+1}-\lambda_1)x}$ 至多只有 m 个零点.(反证) 否则. 若 $g(x)=0$ 有 $m+1$ 个零点, 由 Rolle 定理,$g'(x)=0$ 有 m 个零点. 但

$$g'(x)=\sum_{k=2}^{m+1}c_k(\lambda_k-\lambda_1)\mathrm{e}^{(\lambda_k-\lambda_1)x}=\sum_{i=1}^{m}b_i\mathrm{e}^{u_i x},$$

其中 $b_i=c_{i+1}(\lambda_{i+1}-\lambda_1), u_i=\lambda_{i+1}-\lambda_1$. 由 λ_i 互不相同,$c_{m+1}\neq 0$, 满足假设条件, 故 g' 至多只有 $m-1$ 个零点, 矛盾.

这就证明了 $f(x)$ 至多只有 $n-1$ 个零点. □

题目 7.3.6:

(1) 设 f 在 $[0,1]$ 上可微,$f(0)=0$, $f(x)\neq 0, \forall x\in(0,1)$, 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使成立

$$2\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

(2) 设 f 在 $[a,b]$ 上可微,$f(a)=0$, $f(x)\neq 0, \forall x\in(a,b)$, 证明: 对每个 $\alpha\neq 0$, 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$|\alpha|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)}=\frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}$$

证明:

(1) 令 $g(x)=f^2(x)f(1-x)$. 则 $g(0)=g(1)=0$. 对 g 在 $[0,1]$ 上使用 Rolle 中值定理, 则 $\exists\xi\in(0,1)$, 使得

$$g'(\xi)=(2f'(\xi)f(1-\xi)-f'(1-\xi)f(\xi))f(\xi)=0 \tag{7.1}$$

而 $\forall x \in (0,1)$ 有 $f(x) \neq 0$. 则 $f(\xi) \neq 0$. 所以对 (7.1) 式化简得

$$2\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

(2) 令 $g(x) = f^{|\alpha|}(x)f(1-x)$. 则 $g(0) = g(1) = 0$. 对 g 在 $[0,1]$ 上使用 Rolle 中值定理, 则 $\exists \xi \in (0,1)$, 使得

$$g'(\xi) = (|\alpha| f'(\xi)f(1-\xi) - f'(1-\xi)f(\xi))f^{|\alpha|-1}(\xi) = 0 \tag{7.2}$$

而 $\forall x \in (0,1)$ 有 $f(x) \neq 0$. 则 $f(\xi) \neq 0$. 所以对 (7.2) 式化简得

$$|\alpha|\frac{f'(\xi)}{f(\xi)} = \frac{f'(1-\xi)}{f(1-\xi)}.$$

□

题目 7.3.7: 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 但不是线性函数, 证明: 存在 $\xi,\eta \in (a,b)$, 使成立

$$f'(\xi) > \frac{f(b)-f(a)}{b-a} > f'(\eta).$$

证明: 做辅助函数

$$g(x) = f(x) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}x, x \in [a,b]$$

则 $g(x) \in C[a,b]$, 且在 (a,b) 内可导,$g(a) = g(b)$. 因为 $f(x)$ 不是线性函数, 所以 $\exists x_0 \in (a,b)$, 使得 $g(x_0) \neq g(a0) = g(b)$.

若 $g(a) < g(x_0)$, 则在 $[x_0,b]$ 使用 Lagrange 中值定理,$\exists \xi \in (x_0,b)$ 使

$$g'(\xi) = \frac{g(b)-g(x_0)}{b-x_0} > 0$$

即 $f'(\xi) > \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

若 $g(a) < g(x_0)$, 则在 $[a,x_0]$ 上使用 Lagrange 中值定理,$\exists \xi \in (a,x_0)$, 使

$$g'(\xi) = \frac{g(x_0)-g(a)}{x_0-a} > 0$$

即 $f'(\xi) > \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

同理, 可在另一个区间上面使用 Lagrange 中值定理证得不等式的另外一边. □

题目 7.3.8: 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微,$f(a) = f(b) = 0$, 且在某点 $c \in (a,b)$ 处有 $f(c) > 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使 $f''(\xi) < 0$.

证明: 对 f 在 $[a,c]$ 上使用 Lagrange 中值定理,$\exists \eta_1 \in (a,c)$, 使

$$f'(\eta_1) = \frac{f(c)-f(a)}{c-a} > 0$$

对 f 在 $[c,b]$ 上使用 Lagrange 中值定理,$\exists \eta_2 \in (c,b)$, 使

$$f'(\eta_2) = \frac{f(c)-f(b)}{c-b} < 0$$

再对 f' 在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上使用 Lagrange 中值定理,$\exists\xi\in(\eta_1,\eta_2)\subset(a,b)$, 使

$$f''(\xi)=\frac{f'(\eta_1)-f'(\eta_2)}{\eta_1-\eta_2}<0$$

□

题目 7.3.9: 利用例题 7.1.3 的方法 (或其他方法) 于以下问题:

(1) 设 f 在 $[a,b]$ 上三阶可微, 且有 $f(a)=f(b)=f'(a)=0$, 证明: 对每个 $x\in(a,b),\exists\xi\in(a,b)$, 使成立

$$f(x)=\frac{f'''(\xi)}{3!}(x-a)^2(x-b).$$

(2) 设 f 在 $[0,1]$ 上五阶可微, 且有 $f(1/3)=f(2/3)=f(1)=f'(1)=f''(1)=0$, 证明: 对每个 $x\in[0,1],\exists\xi\in(0,1)$, 使成立

$$f(x)=\frac{f^{(5)}}{5!}\left(x-\frac{1}{3}\right)\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-1)^3.$$

(3) 设 f 在 $[a,b]$ 上三阶可微, 证明: 存在 $\xi(a,b)$, 使成立

$$f(b)=f(a)+\frac{1}{2}(b-a)[f'(a)+f'(b)]-\frac{1}{12}(b-a)^3f'''(\xi).$$

(4) 设 f 在 $[a,b]$ 上二阶可微, 证明: 对每个 $x\in(a,b)$, 有 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$\frac{1}{2}f''(\xi)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-x)}+\frac{f(b)}{(b-x)(b-a)}+\frac{f(x)}{(x-a)(x-b)}.$$

证明:

(1) 固定 $x\in(a,b)$, 令 $\lambda=\dfrac{6f(x)}{(x-a)^2(x-b)}$. 于是只要证明 $\exists\xi\in(a,b)$, 使得 $f''(\xi)=\lambda$. 构造在 $[a,b]$ 上的辅助函数

$$g(t)=f(t)-\frac{\lambda}{6}(t-a)^2(t-b)$$

由条件 $f(a)=f(b)=0$, 得到 $g(a)=g(b)=0$. 从 λ 的定义可以得到 $g(x)=0$. 在区间 $[a,x],[x,b]$ 上分别使用 Rolle 中值定理, 得到两个点 η_1 和 η_2 满足条件

$$a<\eta_1<x<\eta_2<b \text{ 和} g'(\eta_1)=g'(\eta_2)=0$$

而由 $f'(a)=0$, 得到

$$g'(a)=f'(a)-\frac{\lambda}{6}[2(a-a)(a-b)^2+(a-a)^2]=0$$

然后再 $[a,\eta_1]$ 和 $[\eta_1,\eta_2]$ 上分别对 g' 使用 Rolle 定理, 得到两个点 η_3 和 η_4 满足条件

$$a<\eta_3<\eta_1<\eta_4<\eta_1 \text{ 和} g''(\eta_3)=g''(\eta_4)=0$$

最后在区间 $[\eta_3,\eta_4]$ 上使用 Rolle 定理, 知道有 $\xi\in(\eta_3,\eta_4)\subset(a,b)$ 满足要求 $g''(\xi)=0$. 这就是 $f''(\xi)=\lambda$.

(2)

(3)

(4)

□

题目 7.3.10: 设 $0<a<b$, f 在 $[a,b]$ 上可微, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi)-\xi f'(\xi).$$

证明:

□

题目 7.3.11: 设 f 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上 n 次可微, 设 $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$, 证明: 存在 $\xi\in(a,b)$, 使成立

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_0 & x_1 & \cdots & x_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_0^{n-1} & x_1^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} \\ f(x_0) & f(x_1) & \cdots & f(x_n) \end{vmatrix} = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\prod_{i>j}(x_i-x_j)$$

证明:

□

题目 7.3.12: 设 f 在区间 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\infty$, 证明: f 在 $[a,+\infty)$ 上非一致连续.

证明:

□

题目 7.3.13: 设 f 在 $(0,a]$ 上可微, 又存在有限极限 $\lim\limits_{x\to0+}\sqrt{x}f'(x)$, 证明: f 在 $(0,a]$ 上一致连续.

证明:

□

题目 7.3.14: 设 f 在 $[a,+\infty)$ 上可微, 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f'(x)=\infty$, 证明: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{f(x)}{x}=0$.

证明:

□

题目 7.3.15: 对分别满足以下条件的 f, 设已知 $f(x)=1$, 求 $f(2)$:

(1) $xf'(x)+f(x)=0, \forall x>0$;

(2) $xf'(x)-f(x)=0, \forall x>0$.

证明:

□

题目 7.3.16: 设 f 在 $[0,2]$ 上二阶可微, 且 $|f(x)|<A, |f''(x)|<B$, 证明: $|f'(x)<A+\frac{B}{4}$.

证明:

□

题目 7.3.17: 证明: 若在例题 7.2.5 中的区间从 $(0,+\infty)$ 改为 $(-\infty,+\infty)$, 则可以得到更好的估计 $M_1\le\sqrt{2M_0M_2}$.

证明:

□

题目 7.3.18: 设当 $x \in (0,a]$ 时有 $|f''(x)| \le M$. 又已知 f 在 $(0,a)$ 中取到最大值. 证明: $|f'(0)| + |f'(a)| \le Ma$.

证明:

□

7.4 第二组参考题

题目 7.4.1: 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, 在 (a,b) 上二阶可微, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立

$$f'(b) - f'(a) = f''(\xi)(b-a)$$

(注意: 这里没有假定 $f' \in C(a,b)$).

证明:

□

题目 7.4.2: 设 f 在 $\mathbb{R}$ 上无限次可微, $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{n^2}{n^2+1}$, 计算 $f^{(k)}(0), \forall k \in \mathrm{N}^+$.

证明:

□

题目 7.4.3: 证明: 方程 $x^{2n} - 2x^{2n-1} + 3x^{2n-2} - \cdots - 2nx + 2n + 1 = 0$ 无实根.

证明:

□

题目 7.4.4: 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶可微, 证明: 存在 ξ 使成立 $f''(\xi) = 0$.

证明:

□

题目 7.4.5: 设 f 在 $[a,b]$ 上可微, $f'(a) = f'(b)$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使成立

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{\xi - a}.$$

证明:

□

题目 7.4.6: 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, 又有 $c \in (a,b)$, $f'(c) = 0$, 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 满足

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b-a}.$$

证明: 令 $h(x) = (f(x) - f(a))e^{\frac{x}{a-b}}$, 则 $h'(x) = e^{\frac{x}{b-a}}(f'(x) - \frac{f(x)-f(a)}{b-a})$.

假设 $h'(x) = 0$ 在 (a,b) 上没有零点, 由 Darboux 定理 $h'(x) > 0$ 或者 $h'x(x) < 0$ 在 (a,b) 上恒成立.

不妨设 $h'(x) > 0$ 在 (a,b) 上恒成立.

因为 $c \in (a,b)$. 所以

$$h'(c) = e^{\frac{c}{b-a}}(f'(c) - \frac{f(c)-f(a)}{b-a}) > 0$$

即

$$f'(c) - \frac{f(c)-f(a)}{b-a} > 0$$

因为 $f'(c) = 0$, 所以

$$-\frac{f(c)-f(a)}{b-a} > 0$$

所以

$$f(c) < f(a) \tag{1}$$

另一方面 $h(a) = 0$, 而 $h'(x) > 0$ 在 (a,b) 上恒成立，所以

$$h(c) = (f(c) - f(a))e^{\frac{c}{a-b}} > h(c) = 0$$

所以有 $f(c) > f(a)$, 这与 (1) 式矛盾. 所以假设不成立，即 $\exists\xi \in (a,b)$，使 $h'(x) = 0$, 即

$$f'(\xi) = \frac{f(\xi) - f(a)}{b-a}$$

注释：把结果写成关于 $f(x)$ 的方程:

$$f'(x) = \frac{f(x) - f(a)}{b-a}.$$

先考虑齐次的方程:

$$f'(x) + \frac{f(x)}{a-b} = 0.$$

其实, 解方程就知道 (或者方程直接乘以 $e^{\frac{x}{a-b}}$):

$$\left(f(x) \cdot e^{\frac{x}{a-b}}\right)' = 0.$$

现在, 回到一开始的方程, 我们就发现

$$\left(f(x) \cdot e^{\frac{x}{a-b}}\right)' = \frac{f(a)}{a-b} \cdot e^{\frac{x}{a-b}} = \left(f(a) \cdot e^{\frac{x}{a-b}}\right)'.$$

于是,

$$\left((f(x) - f(a)) \cdot e^{\frac{x}{a-b}}\right)' = 0.$$

所以, 问题的结论是要我们证明存在一个 ξ 满足以上方程 (把导数展开之后). □

题目 7.4.7: 设 f 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可微, $f(a) = 0$, $f(x) > 0$, 证明: 对每个 $\alpha > 0$, $\exists x_1, x_2 \in (a,b)$, 使成立

$$\frac{f'(x_1)}{f(x_1)} = \alpha \frac{f'(x_2)}{f(x_2)}.$$

证明:

□

题目 7.4.8: 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶连续可微, $|f(x) \le 1$, 且有 $[f(0)]^2 + [f'(0)]^2 = 4$, 证明：存在 ξ, 使成立 $f(\xi) + f''(\xi) = 0$.

证明:

□

题目 7.4.9: 设 f 在 $(-\infty, +\infty)$ 上二阶连续可微, 且对所有 $x, h \in \mathbb{R}$ 成立

$$f(x+h) - f(x) = hf'(x + \frac{h}{2}).$$

证明：$f(x) = ax^2 + bx + c$.

证明:

□

题目 7.4.10: (Schwarz 定理) 定义广义二阶导数

$$f^{[2]}(x)=\lim_{h\to 0+}\frac{f(x+2h)-2f(x)+f(x-2h)}{4h^2}.$$

若 $f\in C[a,b]$, 同时 $f^{[2]}(x)$ 在 (a,b) 上处处等于 0, 证明: f 为线性函数.

证明:

□

题目 7.4.11: 设 f 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有任意阶导数, 且存在常数 $C\geq 0$, 使对所有 $n\in\mathrm{N}^+$ 和 $x\in(-\infty,+\infty)$ 成立不等式 $|f^{(n)}(x)|\leq C$, 又有 $f(1/n)=0,\forall n\in\mathrm{N}^+$ 成立, 证明: $f(x)\equiv 0$.

证明:

□

题目 7.4.12: 设 f 在点 x_0 有 n 阶导数, 证明:

$$f^{(n)}(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}C_n^k f(x_0+kh).$$

证明:

□

题目 7.4.13: 设 f 在 $[0,+\infty)$ 上 n 阶可微, 且存在有限极限

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)\text{和}\lim_{x\to+\infty}f^{(n)},$$

证明: 对每个 $k=1,2,\cdots,n$ 成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}f^{(k)}=0$.

证明:

□

题目 7.4.14:

(1) 设 f 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可微, $f''(x)$ 有界, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$, 证明: $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

(2) 设 f 在 $[a,+\infty)$ 可微, 且存在有限极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$,

(a) 举例说明 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$ 不一定成立,

(b) 证明: 若 f' 在 $[a,+\infty)$ 上一致连续, 则一定成立 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$.

证明:

(1)

(2)

□

题目 7.4.15: 设 f 在 (a,b) 上任意阶可导, 且对每个自然数 n 有 $f^{(n)}(x)\geq 0$ 和 $|f(x)|\leq M$, 证明: 对每个 $x\in(a,b),r>0,x+r\in(a,b)$, 成立关于导数的估计式

$$f^{(n)}\leq\frac{2Mn!}{r^n},\forall n\in\mathrm{N}^+.$$

证明:

□

题目 7.4.16: (Bernstein 定理) 设 f 在 (a,b) 上任意阶可微, 且对每个 n 成立 $f^{(n)}\geq 0$, 证明: 对每个 $x_0\in(a,b)$ 存在 $r>0$, 使得当 $x\in[x_0-r,x_0+r]\subset(a,b)$ 时, 成立

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k.$$

证明:

□

第 8 章 微分学的应用

题目 8.0.1:

证明：

□

题目 8.0.2:

解：

□

题目 8.0.3:

证明：

□

题目 8.0.4:

证明：

□

第 9 章 不定积分

第 10 章 定积分

第 11 章 积分学的应用

第 12 章 广义积分

12.1 第二组参考题

1. 设 $p>0$，定义

$$g(x)=\begin{cases} p[\frac{x}{p}]+\frac{p}{2}, x\geq 0\\ -g(-x), x<0\end{cases}$$

证明：对所有 x 成立

$$\frac{p}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\sum_{n=-[x/p]}^{[x/p]}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})pt}{\sin\frac{1}{2}pt}\cdot\frac{\sin xt}{t}dt=\frac{1}{2}[g(x^+)+g(x^-)]$$

首先, $x=0$ 时, 结论是成立; 又因为结论中的等式, 左右两边都是 x 的奇函数, 所以我们只需考虑 $x>0$ 的情形.

其次, 我们有

$$\sum_{n=-\left[\frac{x}{p}\right]}^{\left[\frac{x}{p}\right]}\frac{\sin(n+\frac{1}{2})pt}{2\sin\frac{1}{2}pt}=\frac{\sin\left(\left[\frac{x}{p}\right]+\frac{1}{2}\right)pt}{2\sin\frac{1}{2}pt}=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}\cos kpt.$$

因此, 结论中等式的左边当 $x\neq mp\ (m\in\mathbb{Z}^+)$ 时, 等于

$$\begin{aligned}&\frac{p}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}\cos kpt\right)\cdot\frac{\sin xt}{t}dt\\ =&\frac{p}{\pi}\left(\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin xt}{t}dt+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\left[\frac{x}{p}\right]}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin(x+kp)t+\sin(x-kp)t}{t}dt\right)\qquad(12.1)\\ =&g(x).\end{aligned}$$

上面的推导中, 我们用到了积分等式:

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin t}{t}dt=\frac{\pi}{2}.$$

如果 $x=mp\ (m\in\mathbb{Z}^+)$, 则只需在(12.1)式中, 将对应于 $\left[\frac{x}{p}\right]$ 的求和项中的被积函数, 替换为 $\frac{\sin 2xt}{t}$ 即可. 此时, 计算结果为:

$$x+\frac{p}{4}=\frac{1}{2}(g(x+0)+g(x-0)).$$

第 13 章 数项级数

第 14 章　函数项级数与幂级数

第 15 章 Fourier 级数

第 16 章 无穷级数的应用

16.1 积分计算

16.2 级数求和计算

题目 16.2.1: 设已知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=A, \sum\limits_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}=B$, 证明: $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛并求其和.

解: 显然有

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n=2\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}-\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n=2B-A.$$

□

题目 16.2.2: 设 $P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_mx^m$ 为 m 次多项式, 求级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}$ 的和.

解: 事实上,

$$\begin{aligned}b_k&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^{k-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)^{k-1}}{n!}\\&=b_{k-1}+C_{k-1}^{1}b_{k-2}+\cdots+C_{k-1}^{k-2}b_1+b_0,\end{aligned}$$

其中 $b_0=e$. 由此得到的数叫 Bell 数, 记为 B_n, 并且

$$B(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B(n)}{n!}x^n=e^{e^x-1}.$$

回到原题, 我们有

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{P(n)}{n!}=e\sum_{k=0}^{m}a_kB_k.$$

□

题目 16.2.3: 求 $1-\frac{2^3}{1!}+\frac{3^3}{2!}-\frac{4^3}{3!}+\cdots$ 的和.

解: 事实上,

$$\begin{aligned}b_k&=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{n^k}{n!}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n^{k-1}}{(n-1)!}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{(n+1)^{k-1}}{n!}\\&=-b_{k-1}-C_{k-1}^{1}b_{k-2}-\cdots-C_{k-1}^{k-2}b_1-b_0,\end{aligned}$$

其中 $b_0=1/e$. 因此 $b_1=-1/e, b_2=0, b_3=1/e$.

因此

$$1-\frac{2^3}{1!}+\frac{3^3}{2!}-\frac{4^3}{3!}+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{(n+1)^3}{n!}$$

$$=b_3+3b_2+3b_1+b_0=-\frac{1}{e}.$$

□

题目 16.2.4: 求下列级数的和:(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}$.

解: 事实上

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{1}{2n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{1}{2n-1}-\arctan\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{\pi}{4}.$$

而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\arctan\frac{2}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\arctan\frac{1}{n-1}-\arctan\frac{1}{n+1}\right)=\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}=\frac{3\pi}{4}.$$

□

题目 16.2.5: 设 $a>1$, 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}$ 的和.

解: 事实上

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}&=\frac{1}{a+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}=\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}+\frac{1}{a+1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}\\&=\frac{1}{a+1}-\frac{2}{a^2-1}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}=\frac{1}{a+1}-\frac{2^2}{a^{2^2}-1}+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{2^n}{a^{2^n}+1}\\&=\frac{1}{a+1}-\lim_{n\to\infty}\frac{2^{n+1}}{a^{2^{n+1}}-1}=\frac{1}{a+1}.\end{aligned}$$

□

题目 16.2.6: 求 $1+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\cdots$ 的和.

解:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8n-7}+\frac{1}{8n-5}-\frac{1}{8n-3}-\frac{1}{8n-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{8n-8}+x^{8n-6}-x^{8n-4}-x^{8n-2}\right)$$

$$=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(x^{8n-8}+x^{8n-6}-x^{8n-4}-x^{8n-2})dx=\int_0^1\frac{1+x^2-x^4-x^6}{1-x^8}dx$$

$$=\left.\frac{\arctan\left(1+\sqrt{2}x\right)-\arctan\left(1-\sqrt{2}x\right)}{\sqrt{2}}\right|_0^1=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

□

题目 16.2.7: 求 $1-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{15}+\cdots$ 的和.

解:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8n-7}-\frac{1}{8n-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\left(x^{8n-8}-x^{8n-2}\right)$$

$$=\int_0^1\sum_{n=1}^{\infty}(x^{8n-8}-x^{8n-2})dx=\int_0^1\frac{1-x^6}{1-x^8}dx$$

$$=\left.\frac{2\arctan x+\sqrt{2}\arctan\left(1+\sqrt{2}x\right)-\arctan\left(1-\sqrt{2}x\right)}{4}\right|_0^1=\frac{\sqrt{2}+1}{8}\pi.$$

□

题目 16.2.8: 求 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{7}-\frac{1}{10}+\cdots$ 的和.

解:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{6n-5}-\frac{1}{6n-2}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\left(x^{6n-6}-x^{6n-3}\right)$$
$$=\int_{0}^{1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{6n-6}-x^{6n-3}\right)dx=\int_{0}^{1}\frac{1-x^{3}}{1-x^{6}}dx=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x^{3}}dx$$
$$=\left(-\frac{1}{6}\ln\left(x^{2}-x+1\right)+\frac{1}{3}\ln\left(x+1\right)+\frac{\arctan\frac{2x-1}{\sqrt{3}}}{\sqrt{3}}\right)\Bigg|_{0}^{1}=\frac{\sqrt{3}\pi+3\ln 2}{9}.$$

□

题目 16.2.9: 设 $a_n=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}, n=1,2,\cdots$, 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n\left(n+1\right)}$ 的和.

解:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n\left(n+1\right)}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n\left(n+1\right)}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}}{n}-\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{n+1}\right)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(n+1\right)^{2}}$$
$$=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n+1}}{n+1}+\left(\frac{\pi^{2}}{6}-1\right)=\frac{\pi^{2}}{6}-\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n+2}}{1}=\frac{\pi^{2}}{6}.$$

□

题目 16.2.10: 求 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}\right)$ 的和.

解:

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{4n+1}+\frac{1}{4n+3}-\frac{1}{2n+2}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\int_{0}^{1}\left(x^{4n}+x^{4n+2}-x^{2n+1}\right)$$
$$=\int_{0}^{1}\sum_{n=0}^{\infty}\left(x^{4n}+x^{4n+2}-x^{2n+1}\right)dx=\int_{0}^{1}\left(\frac{1+x^{2}}{1-x^{4}}-\frac{x}{1-x^{2}}\right)dx$$
$$=\int_{0}^{1}\frac{1}{1+x}dx=\ln 2.$$

□

题目 16.2.11: 求 $1-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{14}+\cdots$ 的和.

解:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{5n-4}-\frac{1}{5n-1}\right)=\sum_{n=1}^{\infty}\int_{0}^{1}\left(x^{5n-5}-x^{5n-2}\right)dx=\int_{0}^{1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(x^{5n-5}-x^{5n-2}\right)dx$$
$$=\int_{0}^{1}\frac{1-x^{3}}{1-x^{5}}dx=\int_{0}^{1}\left(\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)/10}{x^{2}+\frac{\sqrt{5}+1}{2}x+1}+\frac{\left(5+\sqrt{5}\right)/10}{x^{2}+\frac{-\sqrt{5}+1}{2}x+1}\right)dx$$

$$=\left[\frac{5-\sqrt{5}}{10}\sqrt{\frac{10+2\sqrt{5}}{5}}\arctan\frac{4x+\sqrt{5}+1}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}+\frac{5+\sqrt{5}}{5}\sqrt{\frac{2}{5+\sqrt{5}}}\arctan\frac{4x-\sqrt{5}+1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\right]\Bigg|_0^1$$
$$=\frac{\sqrt{25+10\sqrt{5}}}{25}\pi.$$

□

题目 16.2.12: 求 $\frac{x^3}{3!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{15}}{15!}+\cdots$ 的和函数.

解: 事实上, 方程 $\omega^3=1$ 有三个根 $1,-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2},-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}$. 利用 sinh 便可得到所需函数

$$\frac{\sinh x+\sinh\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)x+\sinh\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)x}{3}$$
$$=-\frac{2}{3}\sinh\frac{x}{2}\cos\frac{\sqrt{3}x}{2}+\frac{\sinh x}{3}=\frac{x^3}{3!}+\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{15}}{15!}+\cdots.$$

我们还有

$$\frac{\sin x+\sin\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)x+\sin\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}i}{2}\right)x}{-3}$$
$$=\frac{2}{3}\sin\frac{x}{2}\cosh\frac{\sqrt{3}x}{2}-\frac{\sin x}{3}=\frac{x^3}{3!}-\frac{x^9}{9!}+\frac{x^{15}}{15!}-\frac{x^{21}}{21!}+\cdots.$$

□

题目 16.2.13: 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n)!}(2x)^{2n}$ 的和函数.

解: 在 $|x|<1$ 上对 $S(x)$ 逐项求导, 知 $S'(x)=2\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-1)!}(2x)^{2n-1}$, 且 $S''(x)=4\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{[(n-1)!]^2}{(2n-2)!}(2x)^{2n-2}$. 由此可得 $(1-x^2)S''(x)-xS'(x)=4$. 在两端乘以 $(1-x^2)^{-1/2}$, 我们有

$$\left(\sqrt{1-x^2}S'(x)\right)'=\frac{4}{\sqrt{1-x^2}},$$

故

$$S(x)=\frac{4\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}+\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad |x|<1.$$

□

题目 16.2.14: 求 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$ 的和函数.

解: 注意到

$$\left(1-\frac{1}{x}\right)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}$$
$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}-x^n}{(1-x^n)(1-x^{n+1})}=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{1-x^{n+1}}-\frac{1}{1-x^n}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1-x^{n+1}}-\frac{1}{1-x}=\begin{cases}\dfrac{1}{x-1}, & |x|>1\\ \dfrac{x}{x-1}, & |x|<1\end{cases}.$$

因此

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(1-x^n)\left(1-x^{n+1}\right)}=\begin{cases}\dfrac{x}{(x-1)^2}, & |x|>1\\ \dfrac{x^2}{(x-1)^2}, & |x|<1\end{cases}.$$

□

题目 16.2.15: 设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 为发散的正项级数, $x>0$, 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}$ 的和函数.

✎ 解: 首先,

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\\ =&\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{1}{x}\sum_{n=2}^{\infty}\left[\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_n+x)}-\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right]\\ =&\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{1}{x}\left[\frac{a_1a_2}{a_2+x}-\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}\right].\end{aligned}$$

当 n 足够大时,

$$1+\frac{x}{a_{n+1}}\sim e^{x/a_{n+1}}.$$

因此 $\left(1+\frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{a_{n+1}}\right)$ 与 $\exp\left\{x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}\right\}$ 具有相同的收敛性, 均发散, 故

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_{n+1}}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1}{\left(1+\frac{x}{a_2}\right)\cdots\left(1+\frac{x}{a_{n+1}}\right)}=0.$$

从而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_1a_2\cdots a_n}{(a_2+x)\cdots(a_{n+1}+x)}=\frac{a_1}{a_2+x}+\frac{a_1a_2}{x\,(a_2+x)}=\frac{a_1}{x}.$$

□

题目 16.2.16: 设 $x>1$, 求 $\frac{x}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)\,(x^2+1)}+\frac{x^4}{(x+1)\,(x^2+1)\,(x^4+1)}+\cdots$ 的和函数.

✎ 解:

$$\begin{aligned}I&=\left(1-\frac{1}{x+1}\right)+\frac{x^2}{(x+1)\left(x^2+1\right)}+\frac{x^4}{(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}+\cdots\\ &=1+\left(-\frac{1}{x+1}+\frac{x^2}{(x+1)\left(x^2+1\right)}\right)+\frac{x^4}{(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}+\cdots\\ &=1-\frac{1}{(x+1)\left(x^2+1\right)}+\frac{x^4}{(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}+\cdots\\ &=1-\frac{1}{(x+1)\left(x^2+1\right)\left(x^4+1\right)}+\cdots\\ &=\cdots=1-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{(x+1)\left(x^2+1\right)\cdots\left(x^{2^{n-1}}+1\right)}=1.\end{aligned}$$

□

第 17 章 高维空间的点集与基本定理

第 18 章　多元函数的极限与连续

第 19 章 偏导数与全微分

第 20 章　隐函数存在定理与隐函数求导

第 21 章 偏导数的应用

第 22 章　重积分

第 23 章 含参量积分

23.1 含参量常义积分

23.2 含参量广义积分

题目 23.2.1:

(1) 讨论下列广义积分的一致收敛性:

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(1+a^2)t}\sin t\,dt,\quad a\in(-\infty,+\infty);$

(3) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos xy}{\sqrt{x+y}}dx,\quad y\in[y_0,+\infty)$, 其中 $y_0>0$;

(4) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx,\quad t\in(0,+\infty);$

(5) $\displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\frac{\cos x}{\sqrt{x}}dx,\quad \alpha\in[0,+\infty);$

(6) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-(x-y)^2}dx,\quad y\in(-\infty,+\infty);$

(7) $\displaystyle\int_0^{+\infty} x\ln x e^{-t\sqrt{x}}dx$, (1) $t\in[t_0,+\infty)$, 其中 $t_0>0$, (2) $t\in(0,+\infty)$;

(8) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1-e^{-ut}}{t}\cos t\,dt,\quad u\in[0,1];$

(9) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\alpha t}{1+\alpha^2+t^2}\cdot e^{-\alpha^2t^2}\cos\alpha^2t^2\,dt,\quad \alpha\in(0,+\infty);$

(10) $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}\sin y\,dy,\quad x\in(0,+\infty);$

(11) $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\alpha\,dx}{1+\alpha^2x^2},\quad \alpha\in(0,1);$

(12) $\displaystyle\int_0^{2} \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}dx,\quad |t|<\frac{1}{2};$

(13) $\displaystyle\int_0^{1} (1-x)^{u-1}dx$, (1) $u\in[a,+\infty)$, 其中 $a>0$, (2) $u\in(0,+\infty)$.

✎ 解:

(1) 一致收敛. 由于

$$\left|e^{-(1+a^2)t}\sin t\right| \le e^{-t},\quad 0\le t<+\infty, -\infty<a<+\infty,$$

而 $\int_0^{+\infty} e^{-t}dt = 1$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法知, $\int_0^{+\infty} e^{-(1+a^2)t}\sin t dt$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

(2) 一致收敛. 由于

$$\left|\int_0^A \cos xy dx\right| = \left|\frac{\sin Ay}{y}\right| \le \frac{1}{y} \le \frac{1}{y_0},\quad A\ge 0, y\ge y_0,$$

因此它在 $[y_0,+\infty)$ 一致有界. 而 $1/\sqrt{x+y}$ 是 x 的单调减少函数且 $0<1/\sqrt{x+y}\le 1/\sqrt{x+y_0}$, 而 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x+y_0}}=0$, 故这个极限关于 y 在 $[y_0,+\infty)$ 上是一致的. 于是由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty}\dfrac{\cos xy}{\sqrt{x+y}}dx$ 在 $[y_0,+\infty)$ 上一致收敛.

(3) 非一致收敛. 对于正整数 n, 取 $t_n=\dfrac{1}{n^2}$, 这时

$$\begin{aligned}\left|\int_n^{2n} e^{-t_n x^2}dx\right| &= \int_n^{2n} e^{-\frac{1}{n^2}x^2}dx > \int_n^{2n} e^{-\frac{1}{n^2}(2n)^2}dx\\ &= \int_n^{2n} e^{-4}dx = e^{-4}n \ge e^{-4}.\end{aligned}$$

因此, 只要取 $\varepsilon_0=e^{-4}$, 则对于任意大的正数 A_0, 总存在正整数 n 满足 $n>A_0$, 及 $t_n=1/n^2\in(0,+\infty)$, 使得 $\left|\int_n^{2n} e^{-t_n x^2}dx\right| > e^{-4}=\varepsilon_0$. 由 Cauchy 收敛原理的推论可知 $\int_0^{+\infty} e^{-tx^2}dx$ 关于 t 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

(4) $\int_1^A \cos x dx$ 显然有界, $1/\sqrt{x}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调且 $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1}{\sqrt{x}}=0$, 由 Dirichlet 判别法, $\int_1^{+\infty}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}$ 收敛, 它当然关于 α 一致收敛. 显然 $e^{-\alpha x}$ 关于 x 单调, 且

$$0\le e^{-\alpha x}\le 1,\quad 0\le\alpha<+\infty, 1\le x<+\infty,$$

即 $e^{-\alpha x}$ 一致有界. 由 Abel 判别法, $\int_1^{+\infty} e^{-\alpha x}\dfrac{\cos x}{\sqrt{x}}dx$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

(5) 不一致收敛. 注意到 $J(A)=\int_A^{2A} e^{-(x-y)^2}dx=\int_{A-y}^{2A-y} e^{-u^2}du$, 并让 y 取 A 值, 则得 $J(A)=\int_0^A e^{-u^2}du\to\int_0^{+\infty} e^{-u^2}du\ (A\to+\infty)$, 即 $J(A)$ 在 $A\to+\infty$ 时不趋于 0.

(6) 先证明 $\int_0^{+\infty} x\ln x e^{-t\sqrt{x}}dx$ 在 $[t_0,+\infty)(t_0>0)$ 上一致收敛. 由于

$$\left|x\ln x e^{-t\sqrt{x}}\right| \le |x\ln x|\, e^{-t_0\sqrt{x}},\quad 0\le x<+\infty, t_0\le t<+\infty,$$

而 $\int_0^1 x\ln\frac{1}{x}e^{-t_0\sqrt{x}}dx$ 与 $\int_1^{+\infty} x\ln x e^{-t_0\sqrt{x}}dx$ 均收敛, 由 Weierstrass 判别法知, $\int_0^{+\infty} x\ln x e^{-t\sqrt{x}}dx$ 在 $[t_0,+\infty)$ 上一致收敛.

再证明 $\int_0^{+\infty} x\ln x e^{-t\sqrt{x}}dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛. 对于正整数 n, 取 $t_n=\frac{1}{\sqrt{n}}$, 这时

$$\begin{aligned}\left|\int_n^{2n} x\ln x e^{-t_n\sqrt{x}}dx\right| &= \left|\int_n^{2n} x\ln x e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{x}}dx\right| \\ &> n\ln n\int_n^{2n} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{x}}dx > n\ln n\int_n^{2n} e^{-\frac{1}{\sqrt{n}}\sqrt{2n}}dx \\ &= n^2\ln n\cdot e^{-\sqrt{2}} \geq 4\ln 2\cdot e^{-\sqrt{2}}.\end{aligned}$$

因此, 只要取 $\varepsilon_0=4\ln 2\cdot e^{-\sqrt{2}}$, 则对于任意大的正数 A_0, 总存在正整数 n 满足 $n>A_0$, 及 $y_n=\frac{1}{\sqrt{n}}\in(0,+\infty)$, 使得 $\left|\int_n^{2n} x\ln x e^{-t_n\sqrt{x}}dx\right|>4\ln 2\cdot e^{-\sqrt{2}}=\varepsilon_0$. 由 Cauchy 收敛原理的推论知 $\int_0^{+\infty} x\ln x e^{-t\sqrt{x}}dx$ 关于 t 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

(7) 一致收敛. 由于 $\int_1^{+\infty}\frac{\cos t}{t}dt$ 收敛, 它当然关于 u 一致收敛. 显然 $1-e^{-ut}$ 关于 t 单调, 且

$$0\leq 1-e^{-ut}\leq 1,\quad 0\leq u\leq 1, 1\leq t<+\infty,$$

即 $1-e^{-ut}$ 一致有界. 由 Abel 判别法, $\int_1^{+\infty}\frac{1-e^{-ut}}{t}\cos t dt$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

(8) 一致收敛. 由于

$$\left|\int_0^A \alpha t\cdot e^{-\alpha^2t^2}\cos\alpha^2t^2dt\right|\leq\int_0^A \alpha t\cdot e^{-\alpha^2t^2}dt=\frac{1-e^{-\alpha^2A^2}}{2\alpha},$$

且

$$\lim_{\alpha\to 0}\frac{1-e^{-\alpha^2A^2}}{2\alpha}=0,\ \lim_{\alpha\to+\infty}\frac{1-e^{-\alpha^2A^2}}{2\alpha}=0,$$

因此它在 $(0,+\infty)$ 一致有界, 而 $\frac{1}{1+\alpha^2+t^2}$ 是 x 的单调减少函数且 $\frac{1}{1+\alpha^2+t^2}\leq\frac{1}{1+t^2}$, $\lim\limits_{t\to\infty}\frac{1}{1+t^2}=0$, 因此 $\lim_{t\to+\infty}\frac{1}{1+\alpha^2+t^2}=0$ 关于 α 在 $(0,+\infty)$ 上是一致的, 于是由 Dirichlet 判别法知 $\int_0^{+\infty}\frac{\alpha t}{1+\alpha^2+t^2}\cdot e^{-\alpha^2t^2}\cos\alpha^2t^2dt$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛.

(9) 非一致收敛. 对于正整数 n, 取 $x_n=\frac{1}{\sqrt{1+(2n+1)^2\pi^2}}$, 这时

$$\begin{aligned}\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x_n^2(1+y^2)}\sin y dy\right| &= \left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-\frac{1}{1+(2n+1)^2\pi^2}(1+y^2)}\sin y dy\right| \\ &> \frac{1}{e}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin y dy=\frac{2}{e}.\end{aligned}$$

因此, 只要取 $\varepsilon_0=2/e$, 则对于任意大的正数 A_0, 总存在正整数 n 满足 $2n\pi>A_0$, 及 $y_n=\frac{1}{\sqrt{1+(2n+1)^2\pi^2}}\in(0,+\infty)$, 使得 $\left|\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi} e^{-x_n^2(1+y^2)}\sin y dy\right|>\frac{2}{e}=\varepsilon_0$. 由 Cauchy 收敛原理的推论知 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2(1+y^2)}\sin y dy$ 关于 x 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛.

(10) 非一致收敛. 对于任意取定的正数 A, 由于

$$\int_A^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1+\alpha^2x^2} = \frac{\pi}{2} - \arctan(\alpha A),$$

取 $\alpha = \frac{1}{A}$, 则有

$$\int_A^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1+\alpha^2x^2} = \int_A^{+\infty} \frac{\frac{1}{A}}{1+\frac{x^2}{A^2}} dx = \frac{\pi}{4}.$$

因此 $\int_0^{+\infty} \frac{\alpha dx}{1+\alpha^2x^2}$ 在 $(0,1)$ 上不一致收敛.

(11) 一致收敛. 见周民强 207 页. 利用当 $0<x<1$ 时, 我们有

$$0 \le \left| \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}} \right| < \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}}.$$

当 $1<x<2$ 时, 有

$$0 \le \left| \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}} \right| < \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}}.$$

因此有

$$\int_0^2 \frac{x^t}{\sqrt[3]{(x-1)(x-2)}} dx < \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)(2-x)}} dx + \int_1^2 \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} dx.$$

注意到下列渐近估计

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)(2-x)}} &= O\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right), x \to 0^+, \\
\frac{1}{\sqrt{x}\sqrt[3]{(1-x)(2-x)}} &= O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right), x \to 1, \\
\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} &= O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x-1}}\right), x \to 1, \\
\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{(x-1)(2-x)}} &= O\left(\frac{1}{\sqrt[3]{2-x}}\right), x \to 2,
\end{aligned}$$

可知右端积分均收敛. 由 Weierstrass 判别法可知, 原积分关于 $|t|<1/2$ 一致收敛.

(12) 先证明 $\int_0^1 (1-x)^{u-1} dx$ 在 $[a,+\infty)(a>0)$ 上一致收敛. 由于

$$(1-x)^{u-1} \le (1-x)^{a-1}, \quad 0 \le x \le 1, a \le u < +\infty,$$

而 $\int_0^1 (1-x)^{a-1} dx = \frac{1}{a}$ 收敛, 由 Weierstrass 判别法知, $\int_0^1 (1-x)^{u-1} dx$ 在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛.

再证明 $\int_0^1 (1-x)^{u-1} dx$ 在 $(0,+\infty)$ 上非一致收敛. 对于任意取定的正数 A 且 $A \to 0$, 由于

$$\int_A^1 (1-x)^{u-1} dx = \frac{1}{A},$$

取 $u = A \in (0, +\infty)$, 当 A 足够小时, 我们有

$$\int_A^1 (1-x)^{u-1} dx = \frac{(1-A)^u}{u} = \frac{(1-A)^A}{A} > 1.$$

因此 $\int_0^1 (1-x)^{u-1} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 上非一致收敛.

□

题目 23.2.2: 设 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)\, dx$ 当 $\lambda = a, \lambda = b$ 时收敛 $(a < b)$. 证明 $\int_0^{+\infty} x^\lambda f(x)\, dx$ 当 $\lambda = a, \lambda = b$ 关于 $\lambda \in [a, b]$ 一致收敛.

解: 这题来自菲哥第二册 P577. 积分 $\int_0^1 x^a f(x)\, dx$ 是收敛的, 而 $x^{\lambda - a}$ 对于 $\lambda \geq a$ 的值是 x 的单调函数, 并以 1 为界. 因此积分

$$\int_0^1 x^\lambda f(x)\, dx = \int_0^1 x^{\lambda-a} \cdot x^a f(x)\, dx$$

关于 λ 一致收敛. 类似地可以看出以下积分

$$\int_1^{+\infty} x^\lambda f(x)\, dx = \int_1^{+\infty} x^{\lambda-b} \cdot x^b f(x)\, dx,$$

关于 $\lambda \leq b$ 一致收敛. 因此原积分一致收敛. □

题目 23.2.3: 证明积分 $\int_0^{+\infty} xe^{-xy} dy$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

解: 对于任意取定的正数 A, 由于

$$\int_A^{+\infty} xe^{-xy} dy = e^{-Ax},$$

取 $x = \frac{1}{A} \in (0, +\infty)$, 则有

$$\int_A^{+\infty} xe^{-xy} dy = \frac{1}{e}.$$

因此 $\int_0^{+\infty} xe^{-xy} dy$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛. □

第 24 章　曲线积分

第 25 章　曲面积分

第 26 章 场论初步

参考文献