目　录

第一章 拓 扑 群

§1. 群和拓扑空间

为了阅读方便，我们先简述一下群和拓扑空间的内容。

一个群是一个集合与一个在其中定义的二元运算 $(G,\cdot)$，它满足下面三条公理：

(1) $(ab)c = a(bc)$, $\forall a,b,c \in G$;

(2) 存在单位元 e，使得 $ea = ae = a$, $\forall a \in G$;

(3) 对任意 $a \in G$，存在 $a^{-1} \in G$，使得 $a^{-1}a = aa^{-1} = e$.

若二元运算是对称的，即 $ab = ba$，则 G 称为交换群或 Abel 群.

设 N 是 G 的一个子集。若 N 对 G 中的运算构成群，则称 N 为 G 的子群. 若一个子群 N 满足

$$a^{-1}Na = \{a^{-1}na \mid \forall n \in N\} = N, \quad \forall a \in G,$$

则称 N 为 G 的正规子群，记为 $N \lhd G$. 这时我们可以作 G 模 N 的商群，这是由 G 模下述等价关系 ρ 而得的等价类构成的群：

$$a \overset{\rho}{\sim} b \Leftrightarrow ab^{-1} \in N.$$

事实上，它就是 G 关于 N 的所有陪集所组成的群，记为 G/N.

设 G_1, G_2 皆为群，e_1, e_2 分别为 G_1, G_2 的单位元，若一个映射

$$\varphi\colon G_1 \to G_2,$$
$$a \longmapsto \varphi(a),$$

满足

$$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b), \quad \forall a,b \in G_1,$$

则我们称 φ 是 G_1 到 G_2 的同态，同态的核是

$$\mathrm{Ker}\varphi = \{a \in G_1 \mid \varphi(a) = e_2\},$$

如果 $\mathrm{Ker}\varphi=\{e_1\}$，则我们称 φ 是单的. φ 的象集是

$$\mathrm{Im}\varphi=\{b\in G_2 \mid \text{存在 } a\in G_1,\ \text{使 } b=\varphi(a)\}.$$

若 $\mathrm{Im}\varphi=G_2$，则 φ 称为满的. 当同态 φ 既单又满时，则我们称 φ 是同构. 这时我们说 G_1 和 G_2 同构，记为 $G_1\cong G_2$. 一般我们总有

$$G_1/\mathrm{Ker}\varphi\cong\mathrm{Im}\varphi.$$

设 N 为 G 的正规子群，则我们有同态映射 $\rho: G\to G/N$. 设另有一同态: $G\to H$，且 $N\subseteq\mathrm{Ker}\varphi$，则必存在同态 $\varphi^*: G/N\to H$，使得 $\varphi=\varphi^*\circ\rho$，也就是说，使得下图

$$\begin{tikzcd}
G \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "\varphi"'] & & G/N \arrow[dl, "\varphi^*"] \\
& H &
\end{tikzcd}$$

是交换图，这称为商群的万有性质.

设 I 为一指标集合，$G_i, i\in I$ 全是群，则我们可以作这些群的乘积

$$G=\prod_{i\in I}G_i,$$

其元素形式为 $a=(a_i)_{i\in I}$，其中 $a_i\in G_i$，G 中积运算和求逆运算都按分量进行. 以 π 记射影同态

$$\begin{aligned}\pi:\ & G\to G_i,\\ & a\longmapsto a_i.\end{aligned}$$

下面讨论拓扑空间. 我们在一个集合 X 中引入开集的概念，它满足公理: X, $\varnothing$ 是开集；任意个开集的并是开集；有限个开集的交是开集；这样就赋予 X 一个拓扑，它使 X 成为拓扑空间，我们定义闭集为开集的补集，设 $S\subset X$，则包含 S 的最小闭集称为 S 的闭包，记为 $\bar{S}$. 在同一集合中可以有不同的拓扑，它们分别成为不同的拓扑空间. 设 X 有不同的拓扑 T_1 和 T_2. 我们说 T_1 比 T_2 强，是指 X 中一个集合如在 T_2 下是开集，则在 T_1 下也是开集. 对任一集合 X，最强的拓扑是离散拓扑，这种拓扑规定 X 的

任一子集合都是开集.最弱的拓扑是平凡拓扑,它规定只有 X 和 $\varnothing$ 是开集。

设 X_1,X_2 是两个拓扑空间,一个映射 $f: X_1\to X_2$ 称为连续的,是指若 U 是 X_2 的开(闭)集,则 U 在 f 下的原象 $f^{-1}(U)$ 是 X_1 的开(闭)集. 如果 f 将 X_1 的任一开(闭)集都映为 X_2 中开(闭)集,则称 f 为开(闭)映射. 若 f 是一个一一对应的连续映射,则我们可以定义 $f^{-1}:X_2\to X_1$; 如果 f^{-1} 也是连续的,则 X_1 与 X_2 有完全相同的拓扑结构,我们称 X_1 与 X_2 同胚,称 f 为同胚映射。

对 X 的任一子集合 Y,我们有诱导拓扑,使 Y 成为拓扑空间: U 是 Y 的开集 $\Leftrightarrow U=V\cap Y$,这里 V 是 X 的开集. 这时 Y 称为 X 的子空间,显然,此时嵌入映射 $i:Y\to X$ 是连续的。

设～是拓扑空间一个等价关系,则我们可以作商集合 $X/\sim$,即 X 对于～的等价类集合,进一步可在 $X/\sim$ 中得到诱导拓扑,这是使映射 $\rho:X\to X/\sim$ 为连续的最强的拓扑,即 A 是 $X/\sim$ 中开集,当且仅当 $\rho^{-1}(A)$ 是 X 中开集. 商集合被赋予这种诱导拓扑后就称为商空间,它具有万有性质: 设 $f:X\to Z$ 连续,且当 $a\sim b$ 时,有 $f(a)=f(b)$,则存在唯一连续映射 $f^*:X/\sim\to Z$,使得 $f=f^*\circ\rho$,换句话说,即使下图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, dashed, "\rho"] \arrow[dr, "f"'] & & X/\sim \arrow[dl, "f^*"] \\ & Z & \end{tikzcd}$$

为交换图。

设 I 是任意指标集,$\{X_i\}_{i\in I}$ 是一组拓扑空间. 我们可作这些 X_i 的乘积

$$X=\prod_{i\in I}X_i,$$

并赋予拓扑: X 的开集为下列集合中元素的并集

$$\mathscr{F}=\Big\{A=\prod_{i\in I}A_i\ \Big|\ A_i\ \text{是}\ X_i\text{的开集,且除了有限个}\ i\ \text{外,}$$

$$A_i = X_i,\ \forall i \in I\Big\},$$

则此拓扑称为乘积拓扑，X 为 $\{X_i\}_{i\in I}$ 的拓扑积. 投影映射 π_i: $X \to X_i$ 是连续映射，也是开映射. X 也具有万有性质：设 f_i: $Z \to X_i$ 是连续映射，$\forall i \in I$，则存在唯一连续映射 $f: Z \to X$，使得对每个 $i \in I$，下图

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\pi_i"] & & X_i \\ & Z \arrow[ul, "f"] \arrow[ur, "f_i"'] & \end{tikzcd}$$

都是交换图.

设 X 是一个拓扑空间. 如果有一个开集集合 $\{B_i\}_{i\in I}$，X 的任何开集都可写为 $\bigcup\limits_{i\in J} B_i$，$J\subseteq I$，则称 $\{B_i\}_{i\in I}$ 为 X 的开拓扑基，任一个开集集合 $\{B_i\}_{i\in I}$ 是开拓扑基当且仅当：(1) $\bigcup\limits_{i\in I} B_i = X$；(2) $\forall i, j \in I$，必存在 $K\subseteq I$，使得 $B_i \cap B_j = \bigcup\limits_{k\in K} B_k$. 因此从拓扑基出发也可定义拓扑空间，只须定义形如 $\bigcup\limits_{i\in J} B_i$，$J\subseteq I$ 的集合为开集就可以了.

仍设 X 是一个拓扑空间，$A\subseteq X$. 一个点 $a\in A$ 称为 A 的内点，如果存在 X 的一个开集 N，使得 $a\in N\subset A$. A 的所有内点组成的集合称为 A 的内集. 说 A 是点 $x\in X$ 的邻域，是指 x 为 A 的内点. 因此，任一个包含 x 的开集都是 x 的邻域，它称为 x 的开邻域. x 的一个邻域集合 $\mathscr{F}(x)$ 如果有以下性质：任一 x 的邻域皆包含 $\mathscr{F}(x)$ 中一个元素，则我们称 $\mathscr{F}(x)$ 为 x 的基本邻域组. 特别地，当 $\mathscr{F}(x)$ 是由 x 的开邻域组成时，我们称它为 x 的基本开邻域组. 如果每个 $x\in X$ 都有基本开邻域组 $\mathscr{F}(x)$，则

$$\{\mathscr{F}(x) \mid x\in X\}$$

构成 X 的开拓扑基，因此从给定每个点的开邻域组出发也可以定义拓扑空间.

众所周知，距离空间中每点都存在球形基本邻域组，因此距离空间是拓扑空间。

下面讨论分离性公理，仍设 X 为拓扑空间。

称 X 为 T_0 空间，如果对 X 中任意不同的两点 a 和 b，存在一个开集包含两点之中的一点；

称 X 为 T_1 空间，如果对 X 中任意不同的两点 a 和 b，存在 a 的一个邻域与 b 无交。

称 X 为 T_2 空间，或 Hausdorff 空间，若对 X 中任意不同两点 a 和 b，存在 a 的邻域 U 和 b 的邻域 V，使得 $U\cap V=\varnothing$。

称 X 是 T_3 空间或正则空间，若 X 是 T_0 空间，且对 X 中一闭集 A 及一点 $b\notin A$，存在两个开集 U 和 V，使得 $b\in U$，$A\subseteq V$，$U\cap V=\varnothing$。

命题 1.1. 正则空间必是 Hausdorff 空间。

证. 设 a,b 是正则空间 X 中不同的两点。因 X 是 T_0 空间，故存在一开集 U 包含其中一点，不妨设 $a\in U$，而 $b\notin U$，则 $b\in X\backslash U$。由 X 的正则性，对点 A 及不包含 a 的闭集 $X\backslash U$，存在两个不交开集 V 和 W，使得 $a\in V$，$X\backslash U\subseteq W$。 V 和 W 即为分别包有 a 和 b 的两个不相交开集，即 X 是 Hausdorff 空间。 □

一个拓扑空间 X 称为紧的，如果从 X 的每个开覆盖中可选出有限子集成为 X 的覆盖。当然紧性也可以用上述的对偶，即闭集的有限交性质来描述。

在研究实数理论时，有列紧性的概念。推广到拓扑空间，一个空间称为是列紧的，如果它的每个无穷点集 A 都有极限点(即在该点的每个邻域中都包有 A 中无穷个点)。可以证明，紧集合必是列紧的(习题)。反之则不然。

下述命题请读者自己证明。

命题 1.2. (1) 紧空间的任一闭子空间是紧的；

(2) Hausdorff 空间的紧子空间是闭的；

(3) 紧空间在连续同态下的象是紧的；

(4) 紧空间到 Hausdorff 空间的连续映射是闭的；

(5) 一个拓扑空间中有限多个紧子空间的并是紧的. □

例. (1) 设 f 是 $\mathbf{R}^n$ 到 $\mathbf{R}^1$ 的连续映射，由连续定义可知对于 $\alpha\in\mathbf{R}^1$，由等式 $f(x_1,\cdots,x_n)=\alpha$ 或不等式 $f(x_1,\cdots,x_n)\geqslant\alpha$ 或 $\leqslant\alpha$ 所定义的 $\mathbf{R}^n$ 的子集是闭集. 如果它也是有界集，则就是紧的.

特别地，n 维球面 $(n\geqslant 1)$

$$S^n=\left\{(x_0,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^{n+1}\ \middle|\ \sum_{i=0}^{n}x_i^2=1\right\}$$

是紧的.

(2) n 维实射影空间 $\mathbf{P}^n$ 是 S^n 的同态象，故是紧的.

(3) n 维环面 $\mathbf{T}^n=\mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中有界闭集，故为紧集.

(4) 正交群 O_n 是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中有界闭集. 设 $A=(\alpha_{ij})\in O_n$，则

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_{ij}\alpha_{ik}=\delta_{j,k},\quad \forall 1\leqslant j,k\leqslant n,$$

故它是紧的.

关于紧空间的一个重要定理是:

命题 1.3. (Тихонов) X, X_i, $i\in I$ 都是拓扑空间，且 $X=\prod_{i\in I}X_i$，则 X 是紧空间，当且仅当对一切 $i\in I$，X_i 是紧空间.

我们不给出此定理的证明.有兴趣的读者可在很多书中找到，例如 Siegel, Понтрягин 和 Higgins 等人的著作.

设 C 是拓扑空间 X 的紧子集，我们称包含 C 的开集为 C 的开邻域.

命题 1.4. X 是 Hausdorff 空间，则任意两个不相交紧子集必有不相交的开邻域.

证. 设 A,B 是 X 的两个无交紧子集. 对任意 $a\in A$，$b\in B$，存在两开集 $V_{a,b}$ 和 U_b，$a\in V_{a,b}$，$b\in U_b$，$V_{a,b}\cap U_b=\varnothing$. $B\subseteq\bigcup_{b\in B}U_b$，由紧性，存在有限个 $U_{b_1},U_{b_2},\cdots,U_{b_n}$，使得 $B\subseteq$

$\bigcup_{i=1}^{n} U_{b_i} = U_a$. 记 $V_a = \bigcap_{i=1}^{n} V_{a,b_i}$，则 $U_a \cap V_a = \varnothing$. 令 a 在 A 中变动，有 $A \subseteq \bigcup_{a \in A} V_a$. 由 A 的紧性，存在有限个 $V_{a_1}, \cdots, V_{a_m}$ 覆盖 A，取 $V = \bigcup_{i=1}^{m} V_{a_i}$，$U = \bigcap_{i=1}^{m} U_{a_i}$，则 $A \subseteq V, B \subseteq U$，且 $U \cap V = \varnothing$. □

拓扑空间 X 称为局部紧的，是指 X 中每个点都有一个紧邻域.

命题 1.5. (1) 局部紧空间的闭子空间是局部紧的;

(2) 设 X 是局部紧空间，$f: X \to Y$ 是连续的，开且满的映射，则 Y 是局部紧的;

(3) $X = \prod_{i \in I} X_i$ 是拓扑空间的乘积，$X_i \neq \varnothing$，$\forall i \in I$. 则 X 是局部紧当且仅当每个 $i \in I$ 都有 X_i 是局部紧的，且除有限个 i 外，X_i 是紧的.

证. (1) 设 X 为局部紧空间，Y 是 X 中闭子空间，$y \in Y \subset X$. 则在 X 中存在 y 的紧邻域 N，由定义，$Y \cap N$ 是 N 的闭集，显然它非空. 由命题 1.2(1) 可知 $Y \cap N$ 是紧的，它就是 y 在 Y 中的紧邻域，

(2) 对任一 $y \in Y$，因 f 是满射，故有 $x \in X$，使 $f(x) = y$. 设 N 是 x 在 X 中紧邻域，则 $f(N)$ 是 Y 中紧集(命题 1.2.(3)). 又 f 是开的，且 $y \in f(N)$，因此 $f(N)$ 是 y 的紧邻域.

(3) 设 X_i 是局部紧的 ($\forall i \in I$)，且除了有限个 X_i 外都是紧的. 则对任意 $x = (x_i) \in X$，对每个 i，存在 $N_i \subseteq X_i$，它是 x_i 的紧邻域，且对几乎所有 i，有 $N_i = X_i$，由命题 1.3. 可知，$\prod_{i \in I} N_i$ 是 x 的紧邻域.

反之，设 $X = \prod_{i \in I} X_i$ 是局部紧的，$\pi_i: X \to X_i$ 是连续的，开

且映上的，由(2)可知每个 X_i 是局部紧的．设 $x\in X$ 有紧邻域 N，则依乘积拓扑定义可知除有限个 i 以外，都有 $\pi_i(N)=X_i$，因此除有限个外，X_i 都是紧的． □

命题 1.6. 设 X 是局部紧的 Hausdorff 空间，Y 是 X 的紧子集，U 是 Y 的开邻域．则存在开集 V，其闭包为紧集，且 $Y\subseteq V\subseteq \bar{V}\subseteq U$．

证. 先假定 X 是紧空间，设 Y 是 X 的紧子集．$Y\subseteq U$，U 是开集，$X\backslash U$ 为闭集，故为紧集，由命题 1.4，可知存在两个不交开集 W_1 和 W_2，使得 $Y\subseteq W_1$，$X\backslash U\subseteq W_2$，于是有 $W_1\subseteq X\backslash W_2\subseteq U$．注意到 $X\backslash W_2$ 是闭集，因此 $\bar{W}_1\subseteq X\backslash W_2\subseteq U$．令 $V=W_1$，则 $\bar{V}=\bar{W}_1$ 是紧集，且有 $Y\subseteq V\subseteq\bar{V}\subseteq U$．

现在设 X 是局部紧的．Y 是 X 的紧子集，U 是 Y 的开邻域，对每个 $x\in Y$，存在 x 在 X 中的紧邻域 U_x，$\bigcup\limits_{x\in Y}U_x\supseteq Y$，由于 Y 是紧的，故存在 $x_1,\cdots,x_n\in Y$，$W=\bigcup\limits_{i=1}^{n}U_{x_i}\supseteq Y$．由命题 1.2，$W$ 紧．于是 $U\cap W$ 是 Y 在紧空间 W 中的开邻域，以上论述即说明存在 Y 的开邻域 V，$\bar{V}$ 紧，且有 $Y\subseteq V\subseteq\bar{V}\subseteq U\cap W\subseteq U$． □

命题 1.7. 设 X 是局部紧的 Hausdorff 拓扑空间，则 X 的任一开子集都是局部紧的．

证. 设 Y 是 X 的开子集，对任一 $x\in Y$，$\{x\}$ 是闭集，因而是局部紧的．$\{x\}$ 中 x 的紧邻域只能是 $\{x\}$，因而 $\{x\}$ 是紧集．Y 是 $\{x\}$ 的开邻域，由命题 1.6 可知存在 x 的紧邻域 $V\subseteq Y$． □

我们还会用到以下概念．

定义. 称拓扑空间 X 是 *σ-紧的*，如果存在可数个紧子空间 K_n，使得 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n$．

称拓扑空间 X 是*可数紧的*，如果从 X 的每个可数开覆盖中可以选出有限个元素组成 X 的覆盖．

称拓扑空间 X 为*局部可数紧*，如果 X 中每个点有开邻域，其闭

包为可数紧子空间。

例. (1) 任何紧空间是局部紧的。

(2) 任何离散空间都是局部紧的，对离散空间中任一点而言，该点本身就是它的紧邻域。

(3) R, C 是局部紧的，然而有理数 Q 却不是局部紧的，现在我们来证明这点。

对任意 $r \in Q$，r 的任一邻域(对适当的 $\varepsilon_1 > 0$，$\varepsilon_2 > 0$)包含 $(r - \varepsilon_1, r + \varepsilon_2)$。在此区间中必有一个无理数 α，它可以用有理数无限逼近，即 Q 中存在无穷点列 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 它们满足 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \alpha$，$\alpha \notin Q$。这说明 r 的任何邻域都不是列紧的，从而非紧的。

§2. 拓 扑 群

定义 2.1. 集合 G 称为拓扑群，如果 G 是个群，又是拓扑空间，并且这两种结构是相容的。也就是说，群的乘法运算

$$\mu: G \times G \to G,$$

和求逆运算

$$\nu: G \to G$$

是连续映射。

例. (1) R, C 相对于加法和通常的距离拓扑是拓扑群，它们分别记为 (R, +) 和 (C, +)。

(2) 类似地，$(R^*, \cdot)$, $(R_+^*, \cdot)$ 和 $(C^*, \cdot)$ 都是拓扑群。

(3) R^n 相对于通常加法和距离拓扑是拓扑群。

(4) 任一抽象群，取离散拓扑就成为拓扑群。

(5) G 是一拓扑群，则 G 的任意一个子群相对于子空间的诱导拓扑是拓扑群。这样 Z, Q 都是拓扑群，特别 Z 的子空间拓扑是离散拓扑。

(6) 1 维球面 $S^1 \subseteq C^*$，$S = \{x \mid |x| = 1\}$，相对于乘法及 C^* 的子空间拓扑是拓扑群。

(7) 在 Q 中可引入 p-adic 拓扑，这是由 p-adic 赋值引入的距离拓扑. 设 p 为一素数，对 Q 中任一非零元 $x = p^r m/n$, $(mn, p) = 1$，定义 x 的 p-adic 赋值为 $|x|_p = p^{-r}$，定义 $|0|_p = 0$. 不难看出定义 $d(x, y) = |x - y|_p$，则得到距离拓扑，我们称它为 p-adic 拓扑. Q 对加法（或乘法）和 p-adic 拓扑是拓扑群.

(8) 一般线性群 $GL_n(\mathbb{R})$ 由一切元素在 $\mathbb{R}$ 中的 $n \times n$ 非异矩阵组成，它们在矩阵乘法下构成群. 将每个矩阵视为 $\mathbb{R}^{n^2}$ 中的元素，则得到子空间拓扑，不难证明矩阵乘法对此拓扑是连续的，因此 $GL_n(\mathbb{R})$ 是拓扑群.

类似地，$GL_n(\mathbb{C})$ 等也是拓扑群.

(9) 由(5)可知 $GL_n(\mathbb{R})$ 的子群都是拓扑群，其中有

特殊线性群: $SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | \det A = 1\}$.

正交群: 设 H 为 $GL_n(\mathbb{R})$ 中正定对称矩阵，

$$O_n(\mathbb{R}, H) = \{A \in GL_n(\mathbb{R}) | AHA' = H\}$$

是正交群，通常取 H 为单位矩阵 I，这时正交群简记为 $O_n(\mathbb{R})$ 或 O_n.

辛群: H 为 $GL_{2n}(\mathbb{R})$ 中反对称矩阵，

$$Sp_{2n}(\mathbb{R}, H) = \{A \in GL_{2n}(\mathbb{R}) | AHA' = H\}$$

是辛群. 通常取 H 为

$$\begin{pmatrix} 0 & I \\ -I & 0 \end{pmatrix},$$

其中 I 为 n 阶单位矩阵.

注. 以上各例绝大多数是局部紧拓扑群，例如我们可以说明 $GL_n(\mathbb{R})$ 是局部紧群，从下文中我们很快知道，只要找到单位元的紧邻域即可. 我们作

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} 1+\varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1+\varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & \cdots & & 1+\varepsilon_n \end{pmatrix} \middle| \varepsilon_i \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \right\},$$

E 是 $\mathbf{R}^{n^2}$ 中有限闭集，因而是紧集且是 I 的紧邻域。

定义 2.2. 设 G,H 都是拓扑群。若映射 $\varphi: G\to H$ 是群同态又是连续映射，则 φ 称为连续同态。若 φ 的逆映射存在，而且也是连续同态，则 φ 称为一个同构。这时，我们称两个拓扑群是互相同构的。

例. (1) $(\mathbf{R},+)\cong(\mathbf{R}_+^\times,\cdot)$，同构为

$$\varphi:\ \mathbf{R}\to\mathbf{R}_+^\times,$$
$$x\longmapsto \exp x.$$

(2) 二阶正交群 $O_2(\mathbf{R})=\left\{\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\middle|\ \theta\in\mathbf{R}\right\}$ 同构于 $S^1\subseteq\mathbf{C}^*$，同构为

$$\varphi:\ \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\longmapsto \cos\theta+i\sin\theta.$$

(3) 设 $(\mathbf{R},d)$ 表示 $\mathbf{R}$ 以离散拓扑所成的拓扑群，则虽然

$$\varphi:\ (\mathbf{R},d)\to(\mathbf{R},+),$$
$$x\longmapsto x,$$

是连续映射，但其逆不连续。因此 $(\mathbf{R},d)$ 与 $(\mathbf{R},+)$ 不同构。

定义 2.3. 一个拓扑空间 X，若对任意 $a,b\in X$，都存在 X 的同胚将 a 映为 b，则称 X 是齐性空间。

命题 2.1. 拓扑群必是齐性空间。

证. 设 G 是拓扑群，考虑 G 到自身的映射：右乘映射。对任一 $s\in G$，定义

$$r_s:\ G\to G,$$
$$x\longmapsto xs.$$

记

$$\varphi_1:\ G\to G\times G,$$
$$x\longmapsto(x,s),$$
$$\varphi_2:\ G\times G\to G,$$
$$(x,s)\longmapsto xs,$$

则 $r_s = \varphi_2 \circ \varphi_1$，显然 φ_1 和 φ_2 都是连续映射，因此 r_s 是连续的。又有 $r_{s^{-1}} = (r_s)^{-1}$ 也连续，于是 r_s 是同胚，对任给 $a, b \in G$，$r_{a^{-1}b}(a) = b$。 □

注。同理，左乘映射 $l_S: x \longmapsto Sx$ 也是同胚。

设 A, B 为 G 的子集，记

$$AB = \{ab \mid a \in A, b \in B\},$$
$$A^{-1} = \{a^{-1} \mid a \in A\}.$$

命题 2.2 设 G 是拓扑群，A, B 是 G 的子集，$x \in G$，则

(1) A 是开(闭)集 $\Rightarrow Ax$ 和 xA 是开(闭)集；

(2) A 是开集 $\Rightarrow AB$ 和 BA 都是开集；

(3) A 是闭集、B 是有限集 $\Rightarrow AB$ 和 BA 都是闭集；

(4) A, B 都是紧集 $\Rightarrow AB$ 是紧集。

证. (1) 因 r_x 和 l_x 都是同胚，故它们既是开映射又是闭映射。

(2) $AB = \bigcup\limits_{x \in B} Ax$ 是开集之并，故为开集。同理，BA 也是开集。

(3) $AB = \bigcup\limits_{x \in B} Ax$ 是有限个闭集之并，故为闭集，同理，BA 也是闭集。

(4) 由命题 1.3，$A \times B$ 是 $G \times G$ 的紧子集，乘法 μ: $G \times G \to G$ 是连续的。由命题 1.2(3)，可知 $AB = \mu(A \times B)$ 是紧子集。 □

§ 3. 拓扑群的邻域组

给定一个空间的拓扑的最方便作法是确定出基本邻域组，即拓扑基。我们知道，任一拓扑群都是齐性空间，设 G 为拓扑群，e 为其单位元，右乘同胚 r_x 将 e 映为 x。如果 U 是包含 e 的开邻域，则 Ux 是含有 x 的开邻域。故我们只要定出单位元 e 的基本开邻域组 $\mathscr{F}$，就定出了 G 的基本开邻域组。我们又称 $\mathscr{F}$ 为 e

的开基.

命题 3.1. 设$\mathscr{F}$为拓扑群G单位元的任一组开基，则有

(1) 对 $U,V\in\mathscr{F}$，存在 $W\in\mathscr{F}$，使得 $W\subseteq U\cap V$;

(2) 设 $a\in U\in\mathscr{F}$，则存在 $V\in\mathscr{F}$，使得 $Va\subseteq U$;

(3) 设 $U\in\mathscr{F}$，则存在 $V\in\mathscr{F}$，使得 $V^{-1}V\subseteq U$;

(4) 设 $U\in\mathscr{F}$，$x\in G$，则存在 $V\in\mathscr{F}$，使得 $x^{-1}Vx\subseteq U$;

(5) 设 $U\in\mathscr{F}$，则存在 $V\in\mathscr{F}$，使得 $V^{-1}\subseteq U$;

(6) 设 $U\in\mathscr{F}$,则存在 $W\in\mathscr{F}$,使得 $W^2=W\cdot W\subseteq U$.

证.(1) $U\cap V$ 是含有e的开集,是e的开邻域,故必包有$\mathscr{F}$中一个元素 W.

(2) Ua^{-1} 是含有e的开集,因此包含一个$\mathscr{F}$中元素 V，故 $Va\subseteq U$.

(3) 考虑 φ: $G\times G\to G$, $(a,\ b)\longmapsto a^{-1}b$. 它是连续映射. U 为开集,故 $\varphi^{-1}U$ 为 $G\times G$ 中开集,且$(e,e)\in\varphi^{-1}U$.因此存在 $A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，使得 $A\times B\subseteq\varphi^{-1}U$. 由(1)，存在 $V\in\mathscr{F}$，$V\subseteq A\cap B$. 所以 $V\times V\subseteq\varphi^{-1}U$，即 $V^{-1}V\subseteq U$.

(4) 考虑 φ: $G\to G$, $g\longmapsto x^{-1}gx$. 它是连续映射，U 为开集,故 $\varphi^{-1}U$ 为开集,且 $e\in\varphi^{-1}U$. 因此存在 $V\in\mathscr{F}$,$V\subseteq\varphi^{-1}U$，即 $x^{-1}Vx\subseteq U$.

(5) 由 (3) 有 $V\in\mathscr{F}$，使 $V^{-1}V\subseteq U$，注意到 $e\in V$，故 $V^{-1}\subseteq V^{-1}V\subseteq U$.

(6) 考虑 φ: $G\times G\to G$, $(a,\ b)\longmapsto ab$，它是连续映射，$\varphi^{-1}U$ 是包有 (e,e) 的开集. 故有 $A\in\mathscr{F}$，$B\in\mathscr{F}$，$A\times B\subseteq\varphi^{-1}U$，取 $W\in\mathscr{F}$，$W\subseteq A\cap B$. 则有 $W\times W\subseteq\varphi^{-1}U$,即 $W^2\subseteq U$. □

事实上,上述性质完全决定了拓扑群的基. 确切地说,有

命题 3.2. 设G是一抽象群，$\mathscr{F}$是G的一组非空子集，每个子集都含有 e. 又设$\mathscr{F}$满足命题 3.1 中性质 (1)—(4)，则G中存在唯一拓扑,它以$\mathscr{F}$为e的基本开邻域组,使G成拓扑群.

证.令

$$\mathscr{B}=\{Ug \mid U\in\mathscr{F},\ g\in G\}.$$

只要能够证明$\mathscr{B}$是G的拓扑基，且使G成为拓扑群就行了，唯一性是显然的。

首先，显然有 $\bigcup\limits_{\substack{g\in G\\ U\in\mathscr{F}}} Ug=G.$

其次，对$\mathscr{B}$中任意两元素 Ua 和 Vb，其中 $U,V\in\mathscr{F}$，$a,b\in G$，我们来证明 $Ua\cap Vb$ 是 $\mathscr{B}$ 中一些元素之并。为此只须证明，对任意 $c\in Ua\cap Vb$，存在$\mathscr{F}$中一个元素 W，使得 $Wc\subseteq Ua\cap Vb$。设 $c=ua=vb$，$u\in U$，$v\in V$。由命题 3.1 中性质(2)，存在 U_1，$V_1\in\mathscr{F}$，使得 $U_1u\subseteq U$，$V_1v\subseteq V$。于是，$U_1c=U_1ua\subseteq Ua$，$V_1c=V_1vb\subseteq vb$。由性质(1)，存在 $W\in\mathscr{F}$，$W\subseteq U_1\cap V_1$。故有 $Wc\subseteq Ua\cap Vb$。当 $a=b=e$ 时，就说明$\mathscr{F}$是 e 的开基。

下面我们证明G在此拓扑下是一拓扑群。只须说明 $\varphi:(b,c)\longmapsto b^{-1}c$ 是连续映射，即对每个 $Ua\in\mathscr{B}$，证明 $\varphi^{-1}(Ua)$ 是 $G\times G$中开集。设 $b^{-1}c=ua$，$u\in U$。由性质(2)，存在$V\in\mathscr{F}$，使 $Vu\subseteq U$。由性质(4)，存在 $W\in\mathscr{F}$，使 $b^{-1}Wb\subseteq V$。又由性质 (3)，存在 $Z\in\mathscr{F}$，使 $Z^{-1}Z\subseteq W$，则 $b^{-1}Z^{-1}Zbua\subseteq Ua$，即 $(Zb)^{-1}(Zc)\subseteq Ua$。 □

当$\mathscr{F}$全部由子群组成时，条件还可简化。

命题 3.3. 设G是一抽象群，$\mathscr{F}$是G的一组子群，满足

(1) 若 $U,V\in\mathscr{F}$，则存在 $W\in\mathscr{F}$，使得 $W\subseteq U\cap V$;

(2) 若 $U\in\mathscr{F}$，$x\in G$，则存在 $V\in\mathscr{F}$，使得 $x^{-1}Vx\subseteq U$，

则G是以$\mathscr{F}$为 e 的开基的拓扑群。

证. 注意到$\mathscr{F}$中元素皆为群，故 $U\in\mathscr{F}$，有 $U=U^{-1}$，且如 $a\in U$，有 $aU=U$。为满足命题 3.1 中的 (2)、(3)，只要取 $V=U$。由命题 3.2，G是拓扑群，$\mathscr{F}$为 e 的开基。 □

例. (1) 考虑 $\mathbf{Q}$ 对加法及 p-adic 拓扑所构成的拓扑群，对 $\forall t\in\mathbf{Z}$，定义

$$U_t = \{mp^t/n \mid p \nmid n\}.$$

则有正规子群列

$$\cdots \supseteq U_{-1} \supseteq U_0 \supseteq U_1 \cdots,$$

其中元素构成了加法群单位元 0 的开基.

(2) 对 $\mathbf{Q}^*$在 p-adic 拓扑下构成的乘法群令,$V_t = 1 + U_t$, 其中 U_t 同(1),则

$$\{V_t \mid t \in \mathbf{Z}\},$$

构成单位元 1 的基本开邻域组.

(3) 对任一群 G, 可取其一切有限指数子群为 e 的基本开邻域组.

(4) 对任一群 G, 定义 G 的换位子群为

$G' = G^{(1)} =$ 由 $\{aba^{-1}b^{-1} \mid a, b \in G\}$ 所生成的群; 并归纳定义

$$G^{(t)} = G^{(t-1)'} \quad \forall t \in \mathbf{Z}^+,$$

则得到正规子群降列

$$G \supseteq G^{(1)} \supseteq G^{(2)} \supseteq \cdots.$$

它给出 G 中单位元的开基.

(5) R 是任意包有 1 的交换环, $R[[x]]$ 为 R 上形式幂级数环. 定义

$$U_n = x^n R[[x]],$$

则 Abel 群降列

$$U_0 \supseteq U_1 \supseteq U_2 \supseteq \cdots,$$

是零元素的开基. $(R[[x]], +)$在此拓扑下是拓扑群.

为了证明一个映射是同胚,需要证明这个映射是连续开映射. 下面给出判定映射为开映射的条件. 先证明一个重要命题.

命题 3.4. (Baire) 设 X 是局部可数紧正则空间,则 X 内不存在可数个闭子集 $\{F_n\}$, 使得每个 F_n 没有内点且

$$X = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

证. 设有 $\{F_n\}$ 满足命题中条件. 以 D_n 记 F_n 的补集. X 是局部可数紧的，则可选一非空开子集 U_0，使得 $\overline{U}_0$ 是可数紧集. 现在我们证明：一定存在非空开集 U_1，使得 $\overline{U}_1\subseteq\overline{U}_0\cap D_1$. 因 F_1 无内点，故有 $U_0\subsetneq F_1$. 由 X 的正则性，对 U_0 中不属于 F_1 的点 x，必存在不相交开集 V 和 W，使得 $x\in V$，$F_1\subseteq W$，$V\subseteq X\backslash W$，后者是闭集，故 $\overline{V}\subseteq X\backslash W\subseteq D_1$. 又因 U_0 开，存在开集 V'，使得 $x\in V'\subseteq U_0$. 则 $\overline{V'}\subseteq\overline{U}_0$，取 $U_1=V\cap V'$，则 U_1 非空且 $\overline{U}_1\subseteq\overline{U}_0\cap D_1$. 同样推理可得非空开集 $U_2\cdots$，$U_n,\cdots$满足 $\overline{U}_2\subseteq\overline{U}_1\cap D_2,\cdots$，$\overline{U}_n\subseteq\overline{U}_{n-1}\cap D_n,\cdots$. 由于 U_0 是可数紧的，且$\overline{U}_0\supseteq\overline{U}_1\supseteq\overline{U}_2\cdots$，因此 $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\overline{U}_n\neq\phi$. 但 $\bigcap\limits_{n=0}^{\infty}\overline{U}_n\subseteq\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D_n$，于是 $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}D_n\neq\phi$，这与 $X=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ 矛盾. □

注. 上面命题对 X 是局部紧 Hausdorff 空间的情形也对.

命题 3.5. 设 G 是正则局部紧 σ-紧群，H 是正则局部可数紧群. φ: $G\to H$ 是连续满同态，则 φ 是开映射.

证. 设

$\mathscr{U}=\{U\mid U$ 是 G 的单位元开邻域，且 $U=U^{-1}\}$，

$\mathscr{V}=\{V\mid V$ 是 H 的单位元开邻域$\}$.

由命题 3.1(3)，可知只需证明：对一切 $U\in\mathscr{U}$，$\varphi(U)$ 是 H 的开集，如果 $\varphi(U)$ 包有一个 $V\in\mathscr{V}$，则 $\varphi(U)=V\cdot\varphi(U)$，那么由命题 2.2(2) 可知 $\varphi(U)$ 是开集. 故我们只需证明对一切 $U\in\mathscr{U}$，必存在 $V\in\mathscr{V}$ 使得 $V\subseteq\varphi(U)$.

由命题 3.1 可知存在单位元开邻域 W_1，使得 $W_1^{-1}W_1\subseteq U$. 由于 G 是局部紧的，再由命题 1.7 可知 W_1 也是局部紧. 因此存在单位元的闭紧邻域 $W\subseteq W_1$，因此 $W^{-1}W\subseteq U$. G 又是 σ-紧的，可设 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}K_n$，$K_n=\bigcup\limits_{x\in K_n}xW$，$K_n$ 紧，于是 K_n 是

有限个 xW 的并。因此存在可数集 $\{x_n\}$，使 $G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} x_nW$. φ 是满射，故 $H=\varphi(G)=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\varphi(x_n)\varphi(W)$. W紧，所以 $\varphi(W)$ 也紧，H正则，故 $\varphi(W)$ 为闭集。如果 $\varphi(W)$ 无内点，则每个 $\varphi(x_n)\varphi(W)$ 亦然，这与 Baire 引理矛盾。因此 $\varphi(W)$ 含有非空开集V. 取 $y\in V$，则存在 $x\in W$，使得 $\varphi(x)=y$. 于是由 $x^{-1}W\subseteq U$ 可得

$$\varphi(U)\supseteq\varphi(x^{-1}W)=\varphi(x)^{-1}\varphi(W)\supseteq y^{-1}V.$$

显然 $y^{-1}V\in\mathscr{V}$. □

§4. 子群和商群

在§2中我们已给出了拓扑群子群的定义并看到了一些例子. 现在我们来研究有关实数加法群子群的一些实例.

例.(1) 设H是实数 $\mathbb{R}$ 的非零子群，则H必为下列二者之一.

(i) H 离散，且 $H=a\mathbb{Z}$, $a\in\mathbb{R}^*$;

(ii) H 在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

证. 如果H离散且非零，则必存在一个 $b\in H$, $b>0$, 离散紧集 $H\cap[0,b]$ 必是有限集，故它有最小元 $a>0$. 对任一 $x\in H$，考虑 $x-\left[\frac{x}{a}\right]a$，其中 $\left[\frac{x}{a}\right]$ 为 $\frac{x}{a}$ 的整数部分. 因 $0\leqslant x-\left[\frac{x}{a}\right]a<a$，且 $x-\left[\frac{x}{a}\right]a\in H$，故它为 0，即 $x=\left[\frac{x}{a}\right]a$, $H=a\mathbb{Z}$.

如H不是离散的，则对任意 $\varepsilon>0$，有 x，使 $0<x\leqslant\frac{\varepsilon}{2}$ 及 $x\in H$. 取 $nx(n\in\mathbb{Z})$ 作分点将 $\mathbb{R}$ 分成无穷多个长小于ε的区间 $\{[nx,(n+1)x]\mid n\in\mathbb{Z}\}$，任一 $r\in\mathbb{R}$ 必落入某个区间中. 注意，这些分点都是H中元素. 这说明H在 $\mathbb{R}$ 中稠密.

注. 此例说明 $\mathbf{R}$ 的任一非零加法子群都是无界的。

(2) 设 G 为正则局部紧群，H 为 $\mathbf{R}$ 或 $\mathbf{R}$ 的一个离散子群 $r\mathbf{Z}$，f: $H\to G$ 的连续同态. 则

(i) 如果存在 $a\in\mathbf{R}$ 及 G 的单位元邻域 U，使得 $\{h\in H|f(h)\in U\}\subseteq[-a,a]$，则 $H\to f(H)$. 是拓扑同构。

(ii) 设 $f:H\to f(H)$ 不是拓扑同构，则 $\overline{f(H)}$ 是 G 的紧子群，且对 G 的单位元的任一个开邻域 U，存在 $\delta>0$，$\delta\in H$，使得 $\forall h\in H$，$f([h,,h+\delta]\cap H)\cap U\neq\varnothing$。

证. (i) 从已知条件可知 U 的原象是有界的，特别单位元 e 的原象即 $\mathrm{Ker}\, f$ 是有界的. 由上例的注可知 H 的子群 $\mathrm{Ker} f=\{0\}$. 下面我们用命题 3.5 证明 f 是开映射。显然 $\mathbf{R}$ 或 $r\mathbf{Z}$ 都是正则局部紧的 σ-紧群，我们只要说明 $f(H)$ 是正则局部可数紧群即可。因为 G 是局部紧的，故存在单位元开邻域 V，使得 $\bar{V}$ 紧且 $\bar{V}\subseteq U$(由命题 1.6,1.7 可得). $\bar{V}\cap f(H)=\bar{V}\cap f([-a,a]\cap H)$是紧集，这说明 $f(H)$ 是正则局部紧。我们的结论得证.

(ii) 设 f: $H\to f(H)$ 不是拓扑同构. 因为 $\overline{f(H)}$ 在 G 中闭，故必是局部紧，不妨设 $G=\overline{f(H)}$. 则 G 是交换群. 取 $a>0$，对 G 中任一开集 $A\neq\varnothing$，必存在 $t\in H$ 和 G 的单位元开邻域 U，使得 $U=U^{-1}$，$f(t)U\subseteq A$. 由 (i) 知，U 的原象必无界，于是有 $h\in H$ 且 $h>a+|t|$，使 $f(h)\in U$，故 $f(t+h)=f(t)f(h)\subseteq f(t)U\subseteq A$. 这就是说，在 G 的任一开集中都有点，其原象属于 (a,∞)。换句话说 $\overline{f((a,\infty)\cap H)}=G$. 则在 G 的任一开集中都有象点. 现取 V 为 G 的单位元开邻域，使得 $V=V^{-1}$ 及 $\bar{V}$ 是紧集. 则对任意 $x\in G$，存在 $y\in xV\cap f((a,\infty)\cap H)$. $x\in yV^{-1}=yV\subseteq f((a,\infty)\cap H)V$. 因此 $G=f((a,\infty)\cap H)V$. 由此出发并注意到 $\bar{V}$ 是紧集，可知存在有限个元素 $t_1,t_2,\cdots t_n\in(a,\infty)\cap H$，使得 $\bar{V}\subset\bigcup_{j=1}^{n}f(t_j)V$. 记 $m=\max_{1\leqslant j\leqslant n}t_j$. 对任意 $x\in G$，令 $t_x=\inf(f^{-1}(x\bar{V})\cap[0,\infty))$，则 $f(t_x)\in x\bar{V}$. 故存在 t_j,

使得 $f(t_x)\in xf(t_j)V$，即 $f(t_x-t_j)\in xV$。因 $t_x-t_j<t_x$，由上面对 t_x 假设可知 $t_x-t_j<0$.即 $t_x<m$.注意到 $x\in f(t_x)\overline{V}$，因此 $G=f([0,m]\cap H)\overline{V}$。由于当 $H=\mathbf{R}$ 或 $r\mathbf{Z}$ 时，$[0m]\cap H$ 是紧集，故 G 是紧群。对 G 的单位元的任意开邻域 U，取一开邻域 V，使得 $\overline{V}\subset U$，$V=V^{-1}$ 且 $\overline{V}$ 是紧集(由命题1.6，1.7 可得 V 的存在性)。由上述可知，存在 $m>0$，$G=f([0,m]\cap H)\overline{V}$.对任意 $h\in H$，有 $f(-h)=f(t)\overline{V}$，其中 $t\in[0,m]$，即 $f(t+h)\in\overline{V}^{-1}=\overline{V}\subset U$。因此只要取 $\delta=m$ 即可。

下面我们讨论一下 G 的子群的开和闭的性质。

命题 4.1. 设 G 是拓扑群，则

(1) G 的每个开子群一定是闭的，每个有有限指数的闭子群一定是开的。

(2) G 的含有单位元 e 的任意一个邻域的子群一定是开的。

证. (1) 设 H 是 G 的开子群，$G\backslash H=\bigcup\limits_{b\notin H} bH$。由命题 2.2，每个 bH 为开集，因此 $G\backslash H$ 是开的，即 H 为闭的。再设 H 是闭子群，由命题 2.2，每个 bH 为闭集，若 $[G:H]<\infty$，则 $G\backslash H$ 是闭集，即 H 是开的。

(2) 设 H 是 G 的子群且包有单位元 e 的一个邻域。则它必包有一个含单位元的开集 U，显然有 $H=UH$。则由命题 2.2 可知 H 是开的。 □

设 G 为拓扑群，H 是 G 的子群。则由等价关系：$a\sim b\Longleftrightarrow ab^{-1}\in H$，可得商空间 $G/H=\{aH\mid a\in G\}$，以 ρ 记商映射 $G\to G/H$，$x\longmapsto xH$。由商拓扑定义可知 G/H 中集合 V 为开集当且仅当 $\rho^{-1}V$ 为开集。G/H 称为 G 相对于 H 的左陪集空间。我们有

命题 4.2. G 是拓扑群，H 是 G 的子群，G/H 是 G 相对于 H 的左陪集空间。则

(1) 商映射 $\rho: G\to G/H$ 是开的。

(2) H 是开子群 $\Longleftrightarrow G/H$ 具有离散拓扑，

证. (1) 设 S 是 G 的开集，我们只须证 ρS 是 G/H 中开集. 由商拓扑定义，只要证明 $\rho^{-1}\rho S$ 是 G 中开集即可. 注意到

$\rho^{-1}\rho S=\{$与 S 相交的 H 的陪集元素之并$\}=SH$，由命题 2.2，可知 SH 为 G 中开集. 故 ρ 是开的.

(2) H 是开子群 $\Longleftrightarrow H$ 的所有陪集都是开集 $\Longleftrightarrow G/H$ 的每个点都是开集 $\Longleftrightarrow G/H$ 具有离散拓扑. □

当 $H\lhd G$ 时，G/H 有群结构，同时上述有商拓扑. 这两个结构是否相容呢? 下面命题回答了这个问题.

命题 4.3. G 是拓扑群，$H\lhd G$，则 G/H 也是拓扑群.

证. 由于 ρ 是同态，我们有下面两个可交换图表

$$\begin{array}{ccc} G\times G & \xrightarrow{\mu} & G \\ {\scriptstyle\rho\times\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ G/H\times G/H & \xrightarrow[\mu']{} & G/H \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\nu} & G \\ {\scriptstyle\rho}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\rho} \\ G/H & \xrightarrow[\nu']{} & G/H \end{array}$$

其中 μ,ν 分别表示 G 中的乘法和求逆运算，μ',ν' 分别表示 G/H 中的乘法和求逆运算. 只须证明 μ',ν' 是连续映射. 看左图，由 μ,ρ 连续可得 $\mu_0'(\rho\times\rho)$ 连续. 设 G/H 中有一开集 U，使得 $\mu'^{-1}U$ 不是开集. 但是 $(\rho\times\rho)^{-1}\mu'^{-1}U$ 是开集，由乘积拓扑的定义不难证明 $\rho\times\rho$ 也是开映射. 这样就有 $\mu'^{-1}U=(\rho\times\rho)(\rho\times\rho)^{-1}\mu'^{-1}U$ 为开集，矛盾. 因此 μ' 连续. 同理，ν' 也连续. □

在命题 4.3 的条件下得到的拓扑群 G/H 称为 G 的商群.

设有 φ 是从拓扑群 G_1 到拓扑群 G_2 上的连续满同态，$\ker\varphi=N$. 则作为抽象群来说，商群 G_1/N 与 G_2 同构. 设

$$\varphi^*:\ G_1/N\to G_2,$$
$$aN\longmapsto\varphi(a),$$

表示这个同构. 自然 $\varphi=\varphi^*\rho$. ρ 是商映射，是开且连续的同态. 故若有开集 $U\subseteq G_2$，则 $\varphi^{-1}U=\rho^{-1}\varphi^{*-1}U$ 是 G_1 中开集. 即 $\varphi^{*-1}U$ 是 G_1/N 中开集. 因此 φ^* 是连续同态. 由群同构可知 φ^* 是 1-1 的映射. 若再假定 φ 是开映射，设 V 是 G_1/N 中开集，则 $\rho^{-1}V$ 是 G_1 中开集，因此 $\varphi^*V=\varphi\rho^{-1}V$ 是 G_2 中开集. 即

φ^* 为开映射。于是有

命题 4.4. 设 φ: $G_1 \to G_2$ 是拓扑群的开连续映射，$N = \ker\varphi$，则存在唯一拓扑群同构 φ^*: $G_1/N \to \operatorname{Im}\varphi$，且$\varphi = \varphi^* \cdot \rho$，其中 ρ 为商映射：$G \to G/N$。 □

在群论中，除了类似上述命题的基本定理外，还有一些同构定理，在拓扑群中有一个是成立的。即

命题 4.5. G 是拓扑群，L，H 是G的子群，$H \subseteq L$。则将 L/H 视为 G/H 的子空间或是L的商空间，这两种拓扑是等价的。特别地，当 $H \lhd G$，则 G/H 的每个子群都拓扑同构于一个商群 L/H，$H \subseteq L \subseteq G$。进一步，如果 $L \lhd G$，则有拓扑群同构：

$$(G/H)/(L/H) \cong G/L.$$

证. 我们先证明 L/H 作为L的商空间与作为 G/H 的子空间有同样拓扑。按商空间定义，U是 L/H 中开集指 $\rho^{-1}U$ 是L中开集，即 $\rho^{-1}U = A \cap L$，其中A是G的开集。因此 ρA 是G/H的开集。由于H是L的子群，故有 $U = \rho(A \cap L) = \rho A \cap \rho L$（注意：一般，$\rho(A \cap B) = \rho A \cap \rho B$ 不成立），即 $U = \rho A \cap L/H$.这正说明U按照 G/H 子空间中拓扑也是开集。上述推理过程可以逆转，因此两个拓扑是等价的。

当 $H \lhd G$ 时，由群论知道，G/H 的子群同构于一个商群 L/H。由于上面所述，两个拓扑是相同的，因此这是一个拓扑同构。进一步，如果 $L \lhd G$，考虑满连续同态：

$$G \xrightarrow{\rho} G/H \xrightarrow{\rho'} (G/H)/(L/H),$$

其中 ρ,ρ' 都是开映射，$\ker(\rho'\rho) = L$。因此由命题 4.4 可得所需结论。 □

例. (1)
$$\varphi:\ \mathbf{R} \to \mathbf{C}^*,$$
$$t \longmapsto \exp(2\pi i t) = \cos(2\pi t) + i\sin(2\pi t).$$

这是一个连续映射，$\operatorname{Ker}\varphi = \mathbf{Z}$，$\operatorname{Im}\varphi = S^1$。不难证明$\varphi$是开映射。故有拓扑群同构

$$\mathbf{R}/\mathbf{Z} \cong S^1.$$

(2) $\varphi: C^* \to \mathbf{R}_+^\times$,

$z \longmapsto |z|$.

φ 是开的满连续同态，$\ker\varphi = S^1$，因此有

$$\mathbf{C}^*/S^1 \cong \mathbf{R}_+^\times$$

(3) φ: $C^* \to S^1$,

$z \longmapsto z/|z|$.

它的核为 $\mathbf{R}_+^\times$。于是有

$$C^*/\mathbf{R}_+^\times \cong S^1.$$

(4) 行列式映射 δ: $GL_n(R) \to \mathbf{R}^*$,

$$A \longmapsto \det A.$$

δ 是开的，满连续同态，核为 $SL_n(\mathbf{R})$. 故有拓扑群同构

$$GL_n(\mathbf{R})/SL_n(\mathbf{R}) \cong R^*.$$

(5) 记 $H = \{A = \lambda I_n | \lambda \in \mathbf{R}^*\}$，它是 $GL_n(\mathbf{R})$ 的正规子群，同构于 $\mathbf{R}^*$。作商群

$$GL_n(\mathbf{R})/H,$$

它叫做射影一般线性群，是一个拓扑群。

由命题 1.2 立刻可以得到

命题 4.6. 设 G 是拓扑群，H 是 G 的子群，则

(1) G 是紧群，H 是闭子群$\Rightarrow H$ 是紧群；

(2) G 是紧群$\Rightarrow G/H$ 是紧空间. □

为了进一步讨论拓扑群 G 的紧性与其子群及商空间紧性的关系，我们介绍下列拓扑空间紧性的等价条件. 这对下一章也是有用的.

命题 4.7. X 是拓扑空间，则下列陈述等价：

(1) X 是紧空间；

(2) 设 $\{X_i\}$ 是 X 中一个非空子集族，若它满足：对任意两个 X_i，X_j，必存在 X_k，使得 $X_k \subseteq X_i \cap X_j$，则必有 $x \in X$，使得 $x \in \bigcap_i \overline{X}_i$；

(3) 设 $\mathscr{T}=\{Y_i\}$ 是X中非空开集族，且满足：(i) 对 Y_i，$Y_j\in\mathscr{T}$，有 $Y_i\cup Y_j\in\mathscr{T}$；(ii) 若 $Y_i\in\mathscr{T}$，$Y\supseteq Y_i$ 且 Y 是开集，则 $Y\in\mathscr{T}$。假定 $X\notin\mathscr{T}$，则 $\bigcup_i Y_i\neq X$。

证. 我们循环论证。

(1)⇒(2)：设X紧，$\{X_i\}$ 是满足(2)中条件的子集族，以 V_i 记 $\overline{X}_i$ 之补集。我们只须证明 $\{V_i\}$ 不可覆盖 X。如若不然，必存在 $V_{i_1},\cdots,V_{i_n}$，它们是X的有限开覆盖。对应 $\{X_i\}$ 中子集为 $X_{i_1},\cdots,X_{i_n}$，由假设必有一个 $X_j\subseteq\bigcap_{k=1}^{n}X_{i_k}$。这就是说 $V_j\supseteq\bigcup_{k=1}^{n}V_{i_k}=X$。但这与 X_j 非空矛盾。

(2)⇒(3)：设 $\{Y_i\}$ 是满足(3)的开集族，令 X_i 为 Y_i 之补集，则 $\{X_i\}$ 为满足条件(2)的非空闭集族。由(2)有 $x\in\bigcap_i\overline{X}_i=\bigcap_i X_i$，故 $x\notin\bigcup_i Y_i$，即 $\bigcup_i Y_i\neq X$。

(3)⇒(1)：设X有一开覆盖 $\{U_i\}$，我们构造一个开集族

$$\mathscr{T}=\{U|U\text{ 开，且 }U\subseteq\text{有限个 }U_i\text{ 的并}\}.$$

显然$\mathscr{T}$满足(3)中所列条件。因为每个 $U_i\in\mathscr{T}$，因此 $\bigcup_{U\in\mathscr{T}}U=X$，由(3)可得，必有 $X\in\mathscr{T}$，即有限个 U_i 之并可覆盖 X。 □

命题 4.8. G 是一个拓扑群，C 是 G 的紧子集，A 是包有 C 的开集，则存在 e 的一个开邻域 V，使得 $VC\subseteq A$。

证. 对任意 $x\in C$，存在 e 的开邻域 W_x，使得 $W_xx\subseteq A$。由命题 3.1，存在 e 的开邻域 V_x，使得 $V_x^2\subseteq W_x$，$\bigcup_{x\in C}V_xx\supseteq C$。由 C 的紧性，存在 $x_1,\cdots,x_n$ 及相应的 $V_1,\cdots,V_n$，使得 $\bigcup_{i=1}^{n}V_ix_i\supseteq C$。取 $V=\bigcap_{i=1}^{n}V_i$，则 $VC\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}VV_ix_i\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}W_ix_i\subseteq A$，此处

$W_i = Wx_i$. □

命题 4.9. G 是一个拓扑群，H 是 G 的子群. 若 H 与商空间 G/H 都是紧的，则 G 也是紧的.

证. 我们用命题 4.7 来证明，设 $\mathscr{T}$ 是 G 中满足 4.7(3) 中条件的开集族，且设 $\bigcup_{Y \in \mathscr{T}} Y = G$. 我们只要证明 $G \in \mathscr{T}$ 即可.

设 ρ 为商映射 $G \to G/H$. 定义

$$\mathscr{T}' = \{V \mid V \text{ 是 } G/H \text{ 中开集，且 } \rho^{-1}V \in \mathscr{T}\}.$$

不难看出 $\mathscr{T}'$ 满足 4.7(3) 中条件. 我们希望证明 $\mathscr{T}'$ 中元素覆盖 G/H.

因 H 是紧的，故对任意 $x \in G$, xH 是紧集. $\mathscr{T}$ 可看作是 xH 的覆盖，因此存在有限个元素覆盖 xH. 取它们的并，记为 A，则有 $xH \subseteq A$, $A \in \mathscr{T}$. 由命题 4.8 可知，存在 e 的开邻域 W，使得 $WxH \subseteq A$. WxH 是开集，由 $\mathscr{T}$ 满足条件知道 $WxH \in \mathscr{T}$. WxH 是 H 若干个陪集元素的并. 因此有

$$\rho^{-1}\rho WxH = WxH \in \mathscr{T}.$$

于是 $\rho WxH \in \mathscr{T}'$. 注意到 $x \in WxH$，因此 $x \in \mathscr{T}'$, $\forall x \in G$，即 $\bigcup_{V \in \mathscr{T}'} V = G/H$. 由 G/H 的紧性，根据命题 4.7(3) 可知 $G/H \in \mathscr{T}'$. 于是 $G = \rho^{-1}(G/H) \in \mathscr{T}$. 仍由 4.7 可知，$G$ 是紧群. □

命题 4.10. 设 G 是拓扑群，H 是 G 的子群，则

(1) G 是局部紧的 $\Longleftrightarrow e$ 存在紧邻域；

(2) G 是局部紧的，H 是闭的 $\Rightarrow H$ 是局部紧的；

(3) G 是局部紧的 $\Rightarrow G/H$ 是局部紧的；

(4) G/H 与 H 都是局部紧的 $\Rightarrow G$ 是局部紧的.

证. 由命题 1.2 得到(1)，命题 1.5 得到(2)和(3). 下面证明(4).

首先，我们注意一个事实，即拓扑群(或它的商空间)的任意一点的邻域都包含该点的一个闭邻域(读者可参见命题 6.1). 因此我们有 e 的闭邻域 U_0，由命题 1.2 可知 $U_0 \cap H$ 是紧集. 由命题

3.1可知存在 e 的闭邻域 U，使得 $U^{-1}U\subseteq U_0$，于是 $U\cap H$ 仍是 e 的紧闭邻域。设 $x\in U$，则 $H\cap x^{-1}U$ 闭且包含在 $H\cap U_0$ 中，故它是紧集。因此，$xH\cap U=x(H\cap x^{-1}U)$ 也是紧集。

下面我们证明存在 e 的闭邻域 $V\subseteq U$，使得 $\rho V=C$，且 C 是 G/H 中紧集，这里 ρ 是商映射 $G\to G/H$。首先取 e 的闭邻域 V_0，使得 $V_0^{-1}V_0\subset U$。由于 G/H 是局部紧的，故存在 H 的闭、紧邻域 C_0。ρV_0 是 H 的邻域。由 G/H 的正则性，存在 H 的闭域 $C_1\subseteq\rho V_0$。取 $C=C_1\cap C_0$，它也是闭、紧的。令 $V=V_0\cap\rho^{-1}C$，则有 V 闭且 $\rho V=C$。下面我们证明这个 V 即是 e 在 G 中的紧邻域。

设 $\mathscr{T}$ 是 V 的一个开集族，它满足命题 4.7(3) 的两个条件，且 $\mathscr{T}$ 覆盖 V。令

$\mathscr{T}'=\{A\mid A$ 是 C 中开集，使得 $\rho^{-1}A\cap V\in\mathscr{T}\}$。不难看出，$\mathscr{T}'$ 也满足 4.7(3) 中两条件，只要证明 $\mathscr{T}'$ 覆盖 C，由 4.7 知 $C\in\mathscr{T}'$，于是 $V=\rho^{-1}C\cap V\in\mathscr{T}$，从而 V 是紧集。

对任意 $x\in V$，由前述 $xH\cap V$ 为紧的，它被 $\mathscr{T}$ 所覆盖，故存在 $\mathscr{T}$ 中有限个元素覆盖它，设这些元素的并为 J，则有 $xH\cap V\subseteq J\in\mathscr{T}$。于是 $xH\cap U\subseteq J\cup(G\backslash V)$，后者为开集。由命题 4.8，它有开邻域 W，使得 $W(xH\cap U)\subseteq J\cup(G\backslash V)$。不妨设 $W\subseteq V$。则 $WxH\cap V\subseteq J$，由 $\mathscr{T}$ 的性质得到 $WxH\cap V\in\mathscr{T}$。注意到 $WxH=\rho^{-1}\rho Wx$，由 $\mathscr{T}'$ 的定义可知 $\rho Wx\in\mathscr{T}'$。特别地，$\rho(x)\in\mathscr{T}'$，对任一 $x\in V$，因 $\rho(V)=C$，故 $\mathscr{T}'$ 覆盖 C。 □

§5. 拓扑群的积

设 $\{G_i\}_{i\in I}$ 是一组拓扑群。作乘积

$$G=\prod_{i\in I}G_i,$$

它既是群，又是拓扑空间。事实上，它是个拓扑群。

命题 5.1. 设 $\{G_i\}$ 是一组拓扑群，则 $G=\prod\limits_{i\in I}G_i$ 是一个拓

扑群。

证．只要证明 G 中的乘法运算 μ 和求逆运算 ν 是连续的．由 G 中运算的定义可知下面两图是交换图。

$$
\begin{tikzcd}
G\times G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\pi_i\times\pi_i"'] & G \arrow[d, "\pi_i"] \\
G_i\times G_i \arrow[r, "\mu_i"] & G_i
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
G \arrow[r, "\nu"] \arrow[d, "\pi_i"'] & G \arrow[d, "\pi_i"] \\
G_i \arrow[r, "\nu_i"'] & G_i
\end{tikzcd}
$$

现在我们证明 μ 连续．设 G 中有一个开集合，不妨设它是开基中元，$V=\prod_i N_i$ 除了 $i=i_1,\cdots,i_s$ 外其余 $N_i=G_i$。对一切 π_i，$\pi_i(V)=N_i$ 是开集．但 $\pi_i^{-1}(N_i)=\left(\prod_{j\neq i}G_j\right)\times N_i$，这样

$$\bigcap_{k=1}^{s}\pi_{i_k}^{-1}\pi_{i_k}(V)=V.$$

于是

$$\mu^{-1}(V)=\mu^{-1}\left(\bigcap_{k=1}^{s}\pi_{i_k}^{-1}\pi_{i_k}(V)\right)=\bigcap_{k=1}^{s}(\mu^{-1}\pi_{i_k}^{-1})\pi_{i_k}(V).$$

由上图可知 $\pi_{i_k}\mu$ 连续，因 $\pi_{i_k}(V)$ 开，$\forall k=1,2,\cdots,s$，故 $\mu^{-1}(V)$ 为开，ν 的连续性证明类似，不再赘述． □

例．$(\mathbf{R}^n,+)$ 是按距离拓扑和加法构成的拓扑群，同时也是 n 个拓扑群的积：

$$\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}_{n},$$

因为 $\mathbf{R}^n$ 中有球形开基，而 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}$ 有开立方体形开基。显然这两种拓扑是一致的。

由命题 1.3 和 1.5 立即得到

命题 5.2. 设 $\{G_i\}$ 是一组拓扑群，则

(1) ΠG_i 是紧群 $\Longleftrightarrow\forall_i$，$G_i$ 是紧群；

(2) ΠG_i 是局部紧的 $\Longleftrightarrow\forall_i$，$G_i$ 是局部紧的，且除有限个以

外，G_i 是紧的。 □

§6. 分离性

本节将要证明 T_0 拓扑群一定是正则空间，我们将对这种空间作些详细讨论。

命题 6.1. (1) T_0 拓扑群 G 必是正则空间，

(2) 若 G 的任意左陪集空间 G/H 是 T_0 空间，则必是正则空间。

证. (1) 对单位元 e 和一个闭集 A，$e\notin A$，考虑 A 的补集 $G\setminus A$. 它是含有 e 的开集，一定包有 e 的开基中元素 W. 由命题 3.1，存在 e 的开邻域 V，使得 $V^{-1}V\subseteq W\subseteq G\setminus A$，即 $V^{-1}V\cap A=\varnothing$。这样 $V\cap VA=\phi$，$A\subseteq VA=U$ 是开集。

(2) 设 A 是 G/H 中闭集，$xH\in G/H$，$xH\notin A$，ρ 为商映射，$\tilde{A}=\rho^{-1}A$ 是 G 中闭集. $x\notin\tilde{A}$，故 $e\notin\tilde{A}x^{-1}$. 由(1)可知存在 e 的开邻域 V，使得 $V\cap V\tilde{A}x^{-1}=\varnothing$，即 $Vx\cap V\tilde{A}=\varnothing$. $\tilde{A}$ 是 H 的若干陪集的并，故 $V\tilde{A}$ 亦是. $V\tilde{x}$ 与 Vx 无交，自然与 Vx 所在陪集也不相交，所以 $VxH\cap V\tilde{A}=\varnothing$. 因此 $\rho(VxH)\cap\rho(V\tilde{A})=\varnothing$. $\rho(VxH)$ 和 $\rho(V\tilde{A})$ 都是开集，且 $xH\in\rho(VxH)$，$A\subseteq\rho(V\tilde{A})$.

□

由命题 1.1 和 6.1，我们可得

系理. G 是一个拓扑群，则

G 是 T_0 空间 $\Leftrightarrow G$ 是 T_1 空间 $\Leftrightarrow G$ 是 T_2 空间 $\Leftrightarrow G$ 是 T_3 (即正则)空间. □

命题 6.2. 设 G 为一拓扑群，$\mathscr{F}$ 是单位元 e 的基本邻域组，则下列陈述等价：

(1) G 是 Hausdorff 空间；

(2) 对角线映射 δ: $G\to G\times G$，$x\longmapsto(x, x)$ 是闭映射；

(3) $\{e\}$ 是闭集；

(4) 设 f: $H\to G$ 是连续同态，则 $\operatorname{Ker}f$ 是 H 的闭集；

(5) $\cap\mathscr{F}=\{e\}$（此处$\cap\mathscr{F}$表示$\mathscr{F}$中一切元素的交）；

(6) e 的一切开邻域之交为 $\{e\}$.

证. 我们用循环法证明.

(1)⇒(2)：设 Y 是 G 中闭集. 只要证 δY 是 $G\times G$ 的闭集. 设 $(a,b)\notin\delta Y$，则或 $a\neq b$ 或 $a=b\notin Y$. 若 $a\neq b$，由 T_2 性质，存在无交开集 A,B，$a\in A$，$b\in B$. $A\times B$ 是 $G\times G$ 的开集. 因 A,B 不相交，必有 $(A\times B)\cap\delta Y=\phi$. 若 $a=b\notin Y$，Y 闭，则存在 a 的邻域 A，使 $A\cap Y=\phi$. 则 $(a,b)\in A\times A$，后者是 $G\times G$ 的开集，$A\times A\cap\delta Y=\phi$. 因此 δY 是闭集.

(2)⇒(3)：δ 为闭映射，则对角线 $\wedge=\delta G=\{(a,a)|a\in G\}$ 是个闭集. 其补集 $(G\times G)\backslash\wedge$ 为 $G\times G$ 中开集. 我们只须证明 $A=G\backslash\{e\}$ 是开集. 设 $x\neq e$. 则 $(x,e)\in(G\times G)\backslash\wedge$，即存在开集 $U\times V$，使 $(x,e)\in U\times V\subseteq G\times G\backslash\wedge$. 由此可知 $U\cap V=\phi$. 因此 $x\in U\subseteq A$，即 A 为开集.

(3)⇒(4)：$\mathrm{Ker} f$ 是闭集 $\{e\}$ 的原象，故为 H 中闭集.

(4)⇒(5)：取 f 为恒同映射，则 $\mathrm{Ker} f=\{e\}$ 是闭集，G 中任意一点都是闭的. 如 $a\neq e$，$G\backslash\{a\}$ 为包含 e 的开集. 必有 $\mathscr{F}$ 中一个元素与 $\{a\}$ 不相交，即 $a\notin\cap\mathscr{F}$.

(5)⇒(6)：显然.

(6)⇒(1)：设 $a\neq b$，则 $ab^{-1}\neq e\Rightarrow$ 存在 e 的开邻域 U，$ab^{-1}\notin U\Rightarrow$ 有 $\mathscr{F}$ 中元 V，使 $V^{-1}V\subseteq U$，$V^{-1}V\cap\{ab^{-1}\}=\phi\Rightarrow Vb\cap Va=\phi$，$Vb$ 与 Va 分别是 b 和 a 的开邻域 ⇒ G 是 Hausdorff 群. □

注. (1)与(2)等价对一般拓扑空间都对.

命题 6.3. (1) X 是 Hausdorff 拓扑空间，$f:Y\to X$ 是单的连续同态，则 Y 是 Hausdorff 的. 特别地，X 的子空间是 Hausdorff 的.

(2) $\{X_i\}_{i\in I}$ 是非空拓扑空间组，$X=\prod\limits_{i\in I}X_i$. 则 X 是 Hausdorff 空间 ⇔ 每个 X_i 是 Hausdorff 空间.

证. (1) 设 $a \neq b$ 是Y中两点，由单性可知 $f(a) \neq f(b)$，则有 A,B 分别是 $f(a)$ 与 $f(b)$ 的开邻域，且 $A \cap B = \phi$. 同样由单性：$f^{-1}A \cap f^{-1}B = \phi$，$a \in f^{-1}A, b \in f^{-1}B$.

(2) 设X是 Hausdorff 空间. 对每个 i，构造一个单映射 $f_i: X_i \to X$. 造法如下：对每个 $j \neq i$，将 X_i 中每个元映为 X^j 中一个确定的元素 x_j，对于 X_i，则把它的每个元映为自身. 这样 f_i 是单连续同态. 由(1)，X_i 是 Hausdorff 空间.

反之，设每个 X_i 是 Hausdorff 空间. 如果X中有不同两点 $\{a_i\}$，$\{b_i\}$，则至少对于一个 i，$a_i \neq b_i$. 于是有 X_i 中两个不相交开集 A,B，$a_i \in A$，$b_i \in B$. 则 A,B 在投影映射下的原象必为X中不相交开集，且分别包有 $\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$. □

命题 6.4. $G,\{G_i\}$ 都是拓扑群，H是G的子群，则

(1) G 是 Hausdorff 群 $\Rightarrow H$ 是 Hausdorff 群；

(2) G/H 是 Hausdorff 空间 $\Leftrightarrow H$是 G 的闭子群；

(3) H和 G/H 都是 Hausdorff 的 $\Rightarrow G$ 是 Hausdorff 的；

(4) ΠG_i 是 Hausdorff 的 $\Leftrightarrow$ 每个 G_i 是 Hausdorff 的.

证. (1),(4) 可由命题 6.3 得到.

(2) 商映射 $G \to G/H$ 是连续且开的. 不难看出它也是一个闭映射. 于是"H在G中是闭的"等价于"H在 G/H 中是闭的". 由命题 6.2 又知"H在 G/H中是闭的"等价于"G/H是 Hausdorff 空间".

(3) 设 G/H 和 H 都是 Hausdorff 的. 由 6.2 知 $\{e\}$是H中闭集，由(2)知H是G中闭集. 根据子空间拓扑定义 $\{e\} = V \cap H$，其中V是G中闭集，因此 $\{e\}$ 是G中闭集，故G是 Hausdorff 群. □

例. (1) $(\mathbf{R}, +)$ 与$(\mathbf{R}^*, \cdot)$及其子群都是 Hausdorff 群.

(2) $S^1((C^*, \cdot)$ 的子群)是 Hausdorff 群.

(3) $T^n = S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1$ 是 Hausdorff 群.

(4) $\mathbf{Q}$ 在 $\mathbf{R}$ 中稠密，因此不是闭集，故 $\mathbf{R}/\mathbf{Q}$ 不是 Hausdorff 群.

§7. 连 通 性

定义 7.1. 一个拓扑空间称为连通的，如果它不能表为两个非空，无交的开集之并. 反之，则称它是不连通的.

称拓扑空间 X 是局部连通的，如果对 $\forall x\in X$ 及 x 的每个邻域 U，都存在 x 的连通邻域 V，使 $V\subseteq U$.

显然，一个拓扑空间是连通的，当且仅当它没有非平凡的既开又闭的子集. 由命题 4.1 可得.

命题 7.1. G 是连通拓扑群，则它没有真开子群，也没有具有有限指数的真闭子群. □

我们先证明一个关于拓扑空间连通性的基本定理.

命题 7.2. (1) X 是连通的，$\varphi:X\to Y$ 连续，则 φX 连通;

(2) $\prod X_i$ 是连通的当且仅当每个 X_i 连通.

证. (1) 显然.

(2) 设 $X=\prod X_i$ 连通，则 $X_i=\pi_i X$，由(1)可知 X_i 连通(对任意的 i)

反之，若对一切 i，X_i 皆为连通的，设 A 为 X 中既开且闭的子集，则 $A\supseteq\prod\limits_{i\in I}U_i$，其中 U_i 为 X_i 中开集，且除有限个以外 $U_i=X_i$. 于是对任意 $x\in X$，必有一个 $a\in A$，使得 x 与 a 只有有限个分量相异. 因此我们只需要证明，若 X 中任意一个元素 x 与 A 中一个元素只有一个分量不同，则 $x\in A$. 设 $a=\{a_i\}$，$x=\{x_i\}$，$a_j\neq x_j$. 构作一个连续映射 $Q_j:X_j\to X$，对于任意 $y_j\in X_j$，$Q_j(y_j)$ 在 X_i 上分量为 a_i，若 $i\neq j$. 而 $Q_j(y_j)$ 在 X_j 上分量为 y_j. Q_j 是常映射与恒同映射之积，它是连续的. 由(1)，Q_jX_j 是连通的. 考虑 $A\cap Q_jX_j$，它是 Q_jX_j 中既开又闭的集合. 显然 $a\in A\cap Q_jX_j$，即 $A\cap Q_jX_j\neq\phi$. 因此 $A\cap Q_jX_j=Q_jx_j$，即 $A\supseteq Q_jX_j$. 所以 $x\in Q_jX_j\subseteq A$. □

命题 7.3. 设 G，G_i 是拓扑群，H 是 G 的子群，则

(1) G 连通 $\Rightarrow G/H$ 连通;

(2) H 与 G/H 都连通 $\Rightarrow G$ 连通;

(3) $\prod G_i$ 为连通 $\Leftrightarrow$ 每个 G_i 都连通。

证. 由命题 7.2,可立刻得到(1),(3). 剩下的只须证 (2).

设H与 G/H 都是连通的. 设 $G = A \cup B$, A, B 都是既开又闭集合. 且 $A \cap B = \phi$. 由命题 7.2(1), H的每个左陪集都连通. 因此H的任一左陪集或是与A(或 B)无交, 或是包含在 A(或 B)之中. 于是A和B都是若干个H的陪集之并. 且 $\rho A \cup \rho B = G/H$, $\rho A \cap \rho B = \varnothing$, 这里$\rho$仍记开映射. 因$\rho$是开映射, $\rho A, \rho B$ 是开集. 由 G/H 的连通性, 必有其中之一, 不妨设 ρA 为空集,于是 $A = \phi$. 这说明G是连通的. □

定义 7.2. X 是一个拓扑空间, $x \in X$. 所有包有x的连通子空间之并, 称为X的在x点的连通分支, 或简称分支, 记为 $\mathrm{Comp}_X x$ 或 $\mathrm{Comp}\, x$.

命题 7.4. $\mathrm{Comp}\, x$ 是X中非空连通闭集, 且所有分支构成X的分割(即 $X = \bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{Comp}\, x$, 且任何两个分支或者重合或者不相交).

证. 显然 $\{x\} \in \mathrm{Comp}\, x$, 因此 $\mathrm{Comp}\, x$ 非空. 设它表示为两个无交开集之并 $A \cup B$. 设 $x \in A$, 则每个包有x的连通子空间与A的交不空. 因此,它们都包含在A中,即 $B = \phi$.因此 $\mathrm{Comp}\, x$ 是连通的.

下面证明 $C = \mathrm{Comp}\, x$ 为闭集. 用 $\bar{C}$ 记C的闭包, 可以证明 $\bar{C}$ 是连通的. 设 $\bar{C} = A \cup B, A, B$ 为无交开集. 设 $x \in A$, 由前同理可知 $A \supseteq C$. 又A是闭集,因此 $A \supseteq \bar{C}$, 即 $A = \bar{C}$, 于是 $\bar{C}$ 是连通的,按分支定义 $\bar{C} \subseteq C$, 这正说明 $C = \bar{C}$, 即C为闭的.

显然, $X = \bigcup\limits_{x \in X} \mathrm{Comp}\, x$. 设 $z \in \mathrm{Comp}\, x \cap \mathrm{Comp}\, y$, 则$\mathrm{Comp}\, x \subseteq \mathrm{Comp}\, z$.由连通性及交不空可得 $\mathrm{Comp}\, x = \mathrm{Comp}\, z$.同理 $\mathrm{Comp}\, y = \mathrm{Comp}\, z$. 因此任意两个分支或者不相交,或者重合. 我们可以

从每个分支取出一个代表元，以 R 表所有代表元集合，则

$$X = \bigcup_{x \in R} \mathrm{Comp}\, x. \qquad \square$$

定义 7.3. X 叫做完全不连通的，如果它的每个分支由一个点组成。

在完全不连通空间中，多于一个点的集合必是不连通的。显然，离散空间是完全不连通的。反过来，却不一定对（见例 6，7，8）。

命题 7.5. 设 $G,\{G_i\}$ 为拓扑群，H 为 G 的子群。则

(1) G 是完全不连通的 $\Rightarrow H$ 是完全不连通的；

(2) G/H 与 H 均为完全不连通的 $\Rightarrow G$ 是完全不连通的；

(3) $\prod G_i$ 是完全不连通的 $\Leftrightarrow$ 每个 G_i 都是完全不连通的。

证. (1) 和(3)显然。现在证明(2)。

设 A 是 G 的连通子空间，则在商映射下的象 ρA 是 G/H 中的连通子空间（命题 7.2）。G/H 是完全不连通的，因此 ρA 是 G/H 中一个点。所以 A 包含在 H 的一个陪集中，H 的每个陪集与 H 同胚，故都是完全不连通的。A 为其中的连通子集，必为一个点。因此 G 是完全不连通的。 $\square$

注. 容易看出，(1)和(3)对一般拓扑空间也成立。

下面是本节的一个主要结果。

命题 7.6. G 是一个拓扑群，H 是 G 在 e 处的分支，则

(1) H 是 G 的闭的连通的正规子群；

(2) G/H 是完全不连通的 Hausdorff 拓扑群；

(3) H 的全体陪集构成 G 的所有分支；

(4) G 的每个开子群包有 H。

证. (1) 只须证明 H 是 G 的正规子群。设 $h\in H$，$g\in G$，则 $hH, g^{-1}Hg$ 与 H 同胚且是连通的，与 H 的交非空。由分支定义可知 $hH\subset H$，$g^{-1}Hg\subseteq H$。这说明 H 是 G 的正规子群。

(2) H 是闭的，由命题 6.4(2) 可知，G/H 是 Hausdorff 的。又因 $H\triangleleft G$，所以 G/H 是拓扑群。拓扑群是齐性空间，只须证明

单位元的连通分支是一个点即可。由(1)这个分支为 G/H 的连通子群，由命题 4.5，它必形如 L/H，L 是 G 中包含 H 的子群。H 连通，由命题7.3(2)可知 L 连通，且 $e\in L$。因此 $L\subseteq H$，即 $L=H$，这说明 L/H 是 G/H 的单位元。因此 G/H 是完全不连通的。

(3) 因拓扑群是齐性空间，H 是 e 处分支，则 xH 为 x 处分支。又由命题 7.4，任意两个分支或者不相交或者重合。因此 H 的全部陪集即是 G 的所有分支。

(4) 设 U 是 G 的开子群，则由命题 4.1 可知 U 也是闭子群，$U\cap H$ 是 H 的非空开，闭子集。由 H 的连通性可知 $U\cap H=H$，即 $H\subseteq U$。 □

注．我们常以 G^0 记 G 的单位元的连通分支。

定义 7.4. X 为拓扑空间，$a,b\in X$。如果存在连续函数 $f:[0,1]\to X$，使得 $f(0)=a$，$f(1)=b$，则我们称 a,b 是路连通的。如果 X 中任意两点都可路连通，我们称 X 是道路连通的。

命题 7.7. X 是道路连通的 $\Rightarrow X$ 是连通的。

证. 读者可作为习题，或参看江泽涵[30]。 □

例. (1) $(\mathbf{R}^n,+)$ 是道路连通的。对任意两点 a，b，取 f 为 $t\longmapsto(1-t)a+tb$

(2) $(\mathbf{R}^*,\cdot)$ 分为两个连通分支：$\mathbf{R}^+$ 和 $\mathbf{R}^-$。

(3) 我们注意道路连通可以传递．即若 a,b 是路连通，b,c 也是路连通的，则 a,c 是路连通的．设 f,g 分别是连接 a,b 和 b,c 的连续函数，我们可取 $(1-t)f+tg$ 作为连接 a,c 的连续函数。

用这个结果我们可以证明 $(\mathbf{R}^n,+)$ 的子集 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 是连通的 $(n\geqslant 2)$．显然，对 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 的任意两点必存在第三点，使得它与已知两点的连线都不通过 0。由上述可知 $\mathbf{R}^n\backslash\{0\}$ 是连通的。

(4) $S^n(n\geqslant 1)$ 是 $\mathbf{R}^{n+1}\backslash\{0\}$ 在连续映射 $x\longmapsto x/|x|$ 之下的象，因此是连通的。

(5) $T^n = \underbrace{S^1 \times S^1 \times \cdots \times S^1}_{n}$（见习题 13），由上例及命题 7.2 可知 T^n 是连通的。

(6) 作为 $\mathbf{R}$ 的加法子群 $\mathbf{Q}$ 是完全不连通的。我们来证明：$\mathbf{Q}$ 的任意子集合 U 只要包含两点 a，b，它就是不连通集合，设 $a<b$，则在 $[a,b]$ 中必含有一个无理数 γ. 取 $A=\{x\in U | x<\gamma\}$，$B=\{x\in U | x>\gamma\}$，则 $a\in A$ $b\in B$，即 A,B 非空，且 $A\cap B=\phi$，A,B 都是开集，$U=A\cup B$，因此 U 是连通集。这说明在 $\mathbf{Q}$ 中只有一个点的集合才是连通的，因此是完全不连通的。

(7) $\mathbf{Q}$ 按 p-adic 拓扑也是完全不连通的。它有以下群列构成的 0 的基本开邻域组

$$U_0 \supsetneq U_1 \supsetneq U_2 \supsetneq \cdots$$

(§3. 例(1))。由命题7.6(4)可知 0 的连通分支包含在一切 U_i 之中，但显然 $\bigcap_{i=0}^{\infty} U_i=\{0\}$，因此 0 的连通分支就是$\{0\}$。

(8) F 是一个自由群，我们有降中心群列

$$F=F_1 \supset F_2 \supset \cdots,$$

其中，F_2 是 F_1 的换位子群，…，F_{n+1} 是 F_n 与 F_1 的换位子生成的群. 可以证明 $\cap F_n=\{e\}$. 以降中心群列中的元素作为 e 的基本开邻域组，在此拓扑下，F 是完全不连通群.

命题 7.8. 设 X 是紧 Hausdorff 空间，则任意一点 x 的分支是包含 x 的所有开，闭集之交.

证. 设 $\{C_i\}_{i\in I}$ 是所有包含 x 的开，闭集. 由 7.6，有 $C_i \supseteq \mathrm{Comp}x$，故 $C=\bigcap_{i\in I} C_i \supseteq \mathrm{Comp}x$. 只要证明 C 是连通集，便可得 $C\subseteq \mathrm{Comp}x$，命题便得证.

设 $C=A\cup B$，A,B 是 C 中无交开，闭集. 由于 C 是闭的，A,B 是 X 中闭集，故是紧集，从而存在 A',B' 是 X 中开集，使得 $A'\cap B'=\phi$，$A\subseteq A'$，$B\subseteq B'$，于是 X 有开覆盖：

$$X=\Big(\bigcup_{i\in I}(X\backslash C_i)\Big)\cup A'\cup B'.$$

因此有有限个 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，使得

$$X=\Big(\bigcup_{i\in I}(X\backslash C_i)\Big)\cup A'\cup B'=\Big(X\backslash\bigcap_{i=1}^{n}C_i\Big)\cup A'\cup B'.$$

记 $D=\bigcap\limits_{i=1}^{n}C_i$，则有 $C\subseteq D\subseteq A'\cup B'$。于是

$$X=(X\backslash D)\cup(A'\cap D)\cup(B'\cap D).$$

这三个开集彼此不相交。显然每个都是开，闭集，设 $A'\cap D$ 非空，则 $C\subseteq A'\cap D$，且

$$C=(A'\cap D)\cap C=A'\cap C=A.$$

因此 C 是连通的。 □

§8. 拓扑变换群

定义 8.1. 设 G 为拓扑群，M 为拓扑空间。称 G（左）作用于 M 上，或称 G 是 M 的拓扑变换群是指存在连续映射

$$G\times M\to M,$$
$$(g,x)\longmapsto gx,$$

使得

(i) $\forall g_1,g_2\in G,x\in M$，有 $g_1(g_2x)=(g_1g_2)x$，

(ii) G 的单位元 e 对应 M 的恒等映射，即 $ex=x$，$\forall x\in M$.

不难看出 $\forall g\in G$，$x\longmapsto gx$ 是 M 上的同胚映射。

定义 8.2. 设拓扑群 G 作用于拓扑空间 M 上。如果对每个 $x\in M$，$\pi_x:G\to M$，$\pi_x(s)=sx$ 是满的，则 M 称为相对于 G 的拓扑齐性空间。

显然，如果对一切 $x\in M$，π_x 是满的，则 G 在 M 上的作用是可迁的。

但 π_x 不一定是一一映射，即可能有 $s_1x=s_2x$，也就是

$s_1^{-1}s_2x = x$。记

$$G_x = \{s \in G, sx = x\}.$$

它称为x的固定子群，两个G中元在π_x下象相同说明它们属于G_x的同一陪集。再者，若$y = tx$，$t \in G$，则有$G_y = tG_xt^{-1}$。

如果M是Hausdorff空间，则G_x是闭集$\{x\}$在π_x之下的原象，故是闭子群。

例. (1) $G = M$. G作用于自身是齐性空间(命题2.1)。

(2) 设H是G的子群，则G可作用于商空间G/H上：$s(xH) = (sx)H$，$s, x \in G$。这是可迁的，因此G/H是G的齐性空间。固定子群为$G_H = H$，对$a \in G$有$G_{aH} = aHa^{-1}$。

设M是G上任一个Hausdorff拓扑齐性空间，$x \in M$，则我们可以定义

$$\varphi: G/G_x \to M,$$
$$gG_x \longmapsto gx,$$

它是满映射。若$g_1x = g_2x$，则$g_1^{-1}g_2 \in G_x$，即$g_1G_x = g_2G_x$，因此φ又是单映射。下面命题要说明φ是连续的。

命题 8.1. Hausdorff空间M是拓扑群G上的齐性空间，$x \in M$，则单、满映射$\varphi: G/G_x \longmapsto M$，$gG_x \longmapsto gx$是连续映射。

证. 以ρ记商同态$G \to G/G_x$，则$\varphi \cdot \rho: G \to M$，$g \longmapsto gx$(即为$\pi_x$)，它是连续的。设$U$为$M$的开子集，则$(\varphi \cdot \rho)^{-1}U$是$G$的开子集。$\rho$是开映射，故$\rho(\varphi \cdot \rho)^{-1}U = \varphi^{-1}U$是$G/G_x$的开子集。 □

命题 8.2. G为局部紧群，G^0为G的单位元连通分支。如果存在G的开子群G'，使得G/G'是可数的，G'/G^0是紧集，局部紧的，Hausdorff空间M是G上的齐性空间，则对任意$x \in M$，G/G_x与M同胚。

证. 延用命题8.1的记号，只须证明φ是开映射。设$W \subset G$是单位元的对称紧邻域。取可数集$\{g_n\} \subseteq G$，使得$G \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} g_nW$，

于是 $M\subseteq\bigcup_{n=1}^{\infty}g_nWx$. 由于$W$紧，因此 Wx 是M中紧集合. M是 Hausdorff 的，所以 Wx 是M中闭集合. 于是由 Baire 定理可知，存在 n，使得 g_nWx 有内点. 但 g_nWx 与 Wx 同胚. 所以有 $h\in W$，使得 hx 是 Wx 的内点，即 $(Wx)^2\supseteq h^{-1}Wx\ni x$. 设 V为G的开子集，$g\in V$，取如上的 W. 使得 $gW^2\subset V$. 则 $gx\subseteq g(Wx)^2\subseteq V^x$，因此 π_x 为开映射，即φ是开映射. □

系理. G,M如上，当G为紧群，或G只有可数个连通分支时，都有M与 G/G_x 同胚. □

例. $$G=SL(2,\mathbf{R})=\left\{g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\middle|\, ad-bc=1,\right.$$
$$\left. a,b,c,d\in\mathbf{R}\right\},$$

$$H=\{z\in\mathbf{C}\,|\,z=x+iy,y>0\}.$$

对 $g=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\in G$, $z\in H$. 定义

$$g(z)=\frac{az+b}{cz+d},$$

它是 $G\times H\to H$ 的连续映射，不难证明这个映射在H上可迁. $SL_2(\mathbf{R})$ 是连通的. 以 $z=i$ 计算固定子群，可知它为$O_2(\mathbf{R})$. 于是由系理知，H 同胚于 $SL_2(\mathbf{R})/O_2(\mathbf{R})$.

定义 8.3. 设离散群Γ作用在拓扑空间M上. 如果Γ中任何不同元素组成的序列 $\{\gamma_n\}$，对任何 $x\in M$，$\{\gamma_nx\}$ 没有极限，我们称Γ在M上的作用是**完全不连续的**.

定义 8.4. 设离散群Γ作用在拓扑空间M上，Γ在M上的作用的**基本区**是指M的子集 F，它满足:

(i) $\Gamma(F)=M$;

(ii) $\forall\gamma\in\Gamma,\gamma\neq e,\gamma(F)\cap F=\phi$.

例. 取上例中G的离散子群

$$\Gamma = SL_2(\mathbf{Z}) = \left\{\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbf{R}) \,\middle|\, a,b,c,d, \in \mathbf{Z}\right\},$$

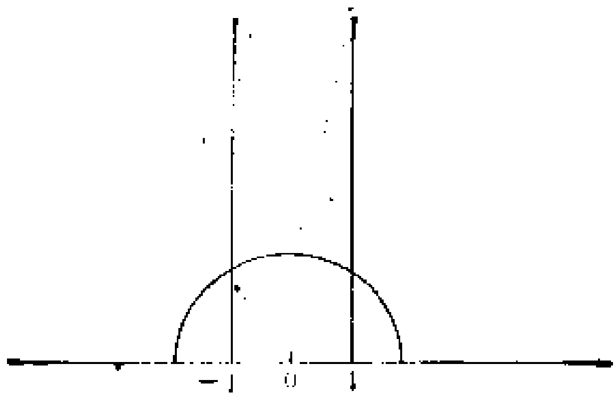
Γ 在上半平面 H 上的作用是完全不连续的。它的基本区是

$$F = \left\{z \mid z \in H,\ |\mathrm{Re}\,z| < \frac{1}{2},\ |z| > 1\right\}$$

$$\bigcup \left\{z \mid \mathrm{Re}\,z = -\frac{1}{2},\ |z| \geqslant 1\right\}$$

$$\bigcup \left\{z \mid |z| = 1,\ -\frac{1}{2} \leqslant \mathrm{Re}\,z \leqslant 0\right\}.$$

如下图所示。



§9. 反向极限和拓扑群

定义 9.1. 设$\mathscr{C}$是一个范畴，I 是一个偏序集。对每一个 $i \in I$，$\mathscr{C}$中有一个 A_i 与它对应。同时对每一对指标 $i \leqslant j$，$\mathscr{C}$中有一个映射 $f_{ij}: A_j \to A_i$，使得

(1) 对每个 i，$f_{ii}: A_i \to A_i$ 是恒同映射；

(2) 若 $i \leqslant j \leqslant k$，则 $f_{ij}f_{jk} = f_{ik}$.

则我们称 $\{A_i, f_{ij}\}$ 是$\mathscr{C}$中一个**反向系统**.

设 $\{A_i, f_{ij}\}$ 是$\mathscr{C}$中一个反向系统，$A \in \mathscr{C}$。如果对每个 i 都有$\mathscr{C}$中映射 $\alpha_i: A \to A_i$，且对每对指标 $i \leqslant j$，图

$$\begin{tikzcd} & A \arrow[dl, "\sigma_j"'] \arrow[dr, "\sigma_i"] & \\ A_j \arrow[rr, "f_{ji}"'] & & A_i \end{tikzcd}$$

是交换的，则我们称 $\{A,\sigma_i\}$ 是 $\{A_i, f_{ji}\}$ 上的一个锥。设 $\{B, \tau_i\}$ 是 $\{A_i, f_{ji}\}$ 上的另一个锥。如果存在一个$\mathscr{C}$中的映射 $\theta: B\to A$，且使对每个指标 i，图

$$\begin{tikzcd} B \arrow[rr, "\theta"] \arrow[dr, "\tau_i"'] & & A \arrow[dl, "\sigma_i"] \\ & A_i & \end{tikzcd}$$

是交换的，则称 $\theta:\{B,\tau_i\}\to\{A,\sigma_i\}$ 是锥间的映射。

定义 9.2. 设 $\{A,\sigma_i\}$ 是 $\{A_i,f_{ji}\}$ 上的一个锥。如果它有性质：对任意 $\{A_i,f_{ji}\}$ 的锥，都存在唯一上述映射θ，则称$\{A,\sigma_i\}$为$\{A_i,f_{ji}\}$的万有锥或反向极限（或投影极限），简记为

$$A=\varprojlim A_i.$$

例如取 I 为平凡序，即 $i\leqslant j$，当且仅当 $i=j$，则 $A=\prod\limits_{i\in I}A_i=\varprojlim A_i$，$\sigma_i: A\to A_i$ 就是投影。

命题 9.1. 在拓扑群范畴中，反向极限总是存在的。

证. 设 $\{A_i,f_{ji}\}$ 是一个反向系统。令

$$P=\prod_{i\in I}A_i,\quad \pi_i: P\to A_i,$$

是直积和投影，记

$$G^{(j)}=\{a\in P\mid \forall k, j\leqslant k,\ 有\ \pi_j a=f_{kj}\pi_k a\}.$$

不难看出，$G^{(j)}$ 是拓扑群。取

$$A=\bigcap_{j\in I}G^{(j)}=\{a=(a_i)\in P\mid \forall j,k,\ 只要\ j\leqslant k,$$

$$则有\ a_j=f_{kj}a_k\}$$

它是拓扑群. 令 σ_i 为 π_i 在 A 上的诱导,则 $\{A,\sigma_i\}$ 是 $\{A_i,f_{li}\}$ 的一个锥。

设 $\{B,\tau_i\}$ 为另一锥,因对 $j\leqslant k$, 有 $f_{kj}\tau_k=\tau_j$, 故我们可以定义 $\tau:B\to P$, $\tau b=(\tau_i b)$. 且因 $f_{kj}\tau_k b=\tau_j b$, 故 $f_{kj}\pi_k(\tau b)=\pi_j(\tau b)$, 即 $\tau b\in A$. 因此 τ 是 B 到 A 的映射,有 $\sigma_j\tau=\tau_j$. 因此 τ 是锥间映射, B 是任意锥. 这说明 $\{A,\sigma_i\}$ 为 $\{A_i,f_{li}\}$ 的万有锥,即

$$A=\varprojlim A_i. \qquad \square$$

命题 9.2. 设在拓扑群范畴内,有 $G=\varprojlim G_i$, 则

(1) 如果所有 G_i 皆为 Hausdorff 群,则 G 亦然;

(2) 如果所有的 G_i 皆为紧 Hausdorff 群,则 G 亦然.

(3) 如果所有的 G_i 都是完全不连通群,则 G 亦然.

证. 由命题 6.4 和命题 7.5 可知,如 G_i 是 Hausdorff 的(或完全不连通),则 $P=\prod G_i$ 及其子群 G 也是 Hausdorff (或完全不连通)的. 这就证明了(1)和(3).

如果所有 G_i 是紧的 Hausdorff 群, 自命题 5.2 和命题 6.4 可知, $\prod G_i$ 是紧 Hausdorff 群. 故只要证明 G 是 $\prod G_i$ 的闭子集即可. 对每一个 j, $G^{(j)}$ 是 Hausdorff 的, $G^{(j)}=\ker(\pi_j-f_{kj}\pi_k)$ 是闭集, G 是这些闭集之交,因而是闭集,这就证明了 (2).

$\square$

定义 9.3. 设 $G,G_i(i\in I)$ 都是拓扑群, 若 G_i, $\forall i\in I$, 都是有限离散群,且

$$G=\varprojlim G_i,$$

则称 G 为**准有限群**.

命题 9.3. 设 G 是拓扑群. 它是准有限的, 当且仅当它是紧的和完全不连通的.

证. 由定义和命题 9.2 立得必要性.

下面证明充分性. 设 G 是紧的,完全不连通群,它的每个点都是一个连通分支. 由命题 7.6 知每点是闭集. 因此它是 Hausdorff

群。由命题 7.8，$e=\mathrm{Comp}(e)$，是 e 的一切开且闭邻域之交.对于每个开，闭邻域，我们可作一个 G 的开正规子群如下。

设 U 是 e 的开，闭邻域，则 U 是紧集。由命题 4.8，存在 e 的开邻域 V，使得 $VU\subseteq U$. 取 W 为 $V\cap V^{-1}$，则 $W^{-1}U=WU\subseteq U$. 由归纳法可得对一切整数 n，有 $W^nU\subseteq U$。因 $e\in U$，故 $W^n\subseteq U$，对一切整数 n。令 $H=\bigcup_{n\in Z}W^n$，W^n 皆是开集，因此 H 为开集。显然 H 在乘法下封闭，因此 H 是 G 的开子群。由命题 4.2 和 4.6 可得 G/H 是离散的紧空间，必有 $(G:H)<\infty$。H 的共轭子群的个数等于 H 的中心化子的指数，它必小于 H 的指数.于是 $N=\bigcap_{x\in G}x^{-1}Hx$ 是有限交. N 是 G 的开子群，同理可知 G/N 是离散紧的。因此 $(G:N)<\infty$。于是 N 是 G 的开的，有有限指数的正规子群。

设 $N_i(i\in I)$ 是所有开的，有有限指数的正规子群。定义偏序：$i\leqslant j\Leftrightarrow N_i\supseteq H_j$。令 $A_i=G/N_i$，f_{ij}: $A_j\to A_i$ 为 $xN_j\longmapsto xN_i$（当 $i\leqslant j$）。则 $\{A_i, f_{ij}\}$ 是一个反向系统，N_i 是开的，有有限指数的。因此，对一切 i，A_i 是有限离散群，反向极限 $A=\varprojlim A_i$ 是准有限群。

下面我们来证明 G 与 A 是拓扑同构的。记 $\sigma_i:A\to A_i$，商映射 $\tau_i:G\to A_i$，不难看出 $\tau_i=f_{ij}\tau_j$。因此必有 $\tau:G\to A$，使得 $\sigma_i\tau=\tau_i$。由于开子群 N_i 必是闭的，因此 A_i 是 Hausdorff 的，$\forall i\in I$，于是 A 也是 Hausdorff 的。又因 G 紧，因此 τ 一定是闭映射(命题 1.2)。我们只要证明 τ 是单的满映射就可证出 G 与 A 是拓扑同构的。

单性：设 $x\in G$，$\tau(x)=e$，则 $\tau_i(x)=e_i$，$\forall i\in I$，即 $x\in\bigcap_{i\in I}N_i$。由前述 $\bigcap_{i\in I}N_i=\{e\}$，所以 $x=e$。

满性：设 $a=(x_iN_i)_{i\in I}$ 是 A 中任一元素。由于任意两 i，$j\in I$，$N_k=N_i\cap N_j$ 是正规子群，故存在 $x_k\in G$，x_kN_k 是 a 的

一个分量．由反向极限定义，有 $a_i = f_{ik}a_k$，作用到 a 上得到 $x_iN_i = x_kN_i \supseteq x_kN_k$．同理 $x_jN_j \supseteq x_kN_k$．则 $x_kN_k \subseteq x_iN_i \cap x_jN_j$，$G$ 是紧群，由命题 4.7，并注意 N_i 是开，闭群，可知存在 $x \in G$，使得

$$x \in \bigcap_{i \in I} x_iN_i.$$

于是对一切 i，$xN_i = x_iN_i$，即 $\tau(x) = a$． □

命题 9.4. G 是任一个紧群，G^0 表示 G 在 e 处的连通分支．则

(1) G^0 是连通紧群；

(2) G/G^0 是准有限群；

(3) G^0 是所有 G 的正规开子群之交．

证． 由命题 7.6，9.3 立刻得到(1)，(2)．

(3) 由命题 7.6 可知，G 的所有正规开子群之交包含 G^0．又因每个开，闭子集都包有一个正规开子群，所以一切开，闭子集之交，即 G^0 包含一切正规开子群之交．因此二者相等． □

例． 考虑 $\mathbf{Z}$，p-adic 拓扑．$p^n\mathbf{Z}$ 构成 0 的基本开邻域组，$\bigcap p^r\mathbf{Z} = \{0\}$．$\mathbf{Z}$ 是完全不连通的，但不是紧群（习题，分 $p \neq 2$ 和 $p = 2$ 两种情形）．然而从命题 9.3 可以知道 $\varprojlim(\mathbf{Z}/p^n\mathbf{Z})$ 是紧群，它就是 p-adic 整数集 $\mathbf{Z}_p$．

习　题

1. 证明：离散紧空间必是有限的．

2. 设 θ 为无理数，证明 $\mathbf{Z}$ 和 $\theta\mathbf{Z}$ 均是 $(\mathbf{R}, +)$ 的闭子群，但 $\mathbf{Z} + \theta\mathbf{Z}$ 不是 $(\mathbf{R}^n, +)$ 的闭子群．

3. 设拓扑群有闭子集 A，紧子集 B，证明 AB 是闭子集．

4. 设 U 为拓扑群 G 的单位元 e 的邻域，取 $V = U \cap U^{-1}$，证明 $V = V^{-1}$．试证：存在 e 的一个基本邻域组 $\mathscr{F}$，使得：若 $U \in \mathscr{F}$，则 U 是开集，且 $U = U^{-1}$．

5. 设 U 为拓扑群单位元 e 的开邻域．证明存在 e 的开邻域

V，使得 $V=V^{-1}$，$V^2\subseteq U$。 取 $x\in\bar{V}$，证明：$xV\cap V\neq\phi$ 且 $x\in VV^{-1}$，由此可得 $\bar{V}\subseteq U$。

6. 固定拓扑群G的单位元e的开邻域U及$y\in G$。证明：存在e的开邻域 V_1，使得 $V_1^2\subseteq U$，$V_1=V_1^{-1}$；存在 V_2，使得$yV_2y^{-1}\subseteq V_1$，$V_2=V_2^{-1}$；$V_y=V_1\cap V_2$，使得$x\in V_y\cdot y\Rightarrow xV_yx^{-1}\subseteq U$。现设$C$为$G$的紧子集，证明：存在 y_1，…，$y_n\in C$，使得 $C\subset\bigcup_{k=1}^{n}V_{y_k}\cdot y_k$。取 $V=\bigcap_{k=1}^{n}V_{y_k}$ 则必有 $x\in C\Rightarrow xVx^{-1}\subseteq U$。

7. G为局部紧拓扑群，C为G的紧子集，U为包有C的开集。对 $x\in C$，取e的开邻域 W_x，使得 $xW_x\subset U$。 取e的开邻域 V_x，使得 $V_x^2\subset W_x$，$\bar{V}_x$ 为紧集。取 x_1，…，$x_n\in C$，使得 $C\subset\bigcup_{k=1}^{n}x_kV_{x_k}$。 令 $V_1=\bigcap_{k=1}^{n}V_{x_k}$。证明：

(1) $CV_1\subset U$；

(2) 存在e的开邻域 V_2，使得 $\bar{V}_2$ 是紧集且 $V_2C\subset U$；

(3) 取 $V=V_1\cap V_2$，证明 $C\bar{V}\cup\bar{V}F$ 是紧集。

8. 设U是单位元的开邻域，且 $U=U^{-1}$，试证 $\bigcup_{n=1}^{\infty}U^n$ 是开且闭的子群。

9 G是一个拓扑群，E是所有包含e的闭子集之交。证明：E是G的正规子群，因而 G/E 是 Hausdorff 群。

10. A、B 是拓扑群G的子集，$x,y\in G$。证明：

(1) $\bar{A}\bar{B}\subseteq(\overline{AB})$；

(2) $(\bar{A})^{-1}=(\overline{A^{-1}})$；

(3) $x\bar{A}y=\overline{xAy}$；

(4) 若A是G的子群，则 $\bar{A}$ 是G的子群。

11. 设G为 Hausdorff 拓扑群。 考虑映射 $\alpha:G\times G\to G$，$(a,b)\to aba^{-1}b^{-1}$。设 $H=\alpha^{-1}(e)$，A，B 是G的子集，满足 AB

$\subset H$。试证：(1) H 是闭集，(2) $\bar{A}\times\bar{B}\subset H$。

12. G 是一个拓扑群，H 是它的紧子群，则商映射 $G\to G/H$ 是闭映射。

13. 设 $G=\prod_i G_i$ 是拓扑群乘积，$H_i\triangleleft G_i$。证明 $H=\prod_i H_i\triangleleft G$，且 $G/H\cong\prod_i G_i/H_i$。由此可得

$$T^n=\underbrace{S^1\times\cdots\times S^1}_{n}\cong \mathbf{R}^n/\mathbf{Z}^n.$$

14. $G=A\times B$ 是拓扑群 A,B 之积。记

$$A_0=\{(a,e_B)\in G\mid a\in A\},$$

其中 e_B 是 B 中单位元。则 $A_0\triangleleft G$，$A_0\cong A$ 且 $G/A_0\cong B$。

15. 证明：$\mathbf{C}^*=\mathbf{R}^*_+\times S^1$。

16. 证明：$GL_n(\mathbf{C})$ 是连通的。

17. 证明：$GL_n(\mathbf{R})$ 有两个连通分支。

18. 举例说明完全不连通空间的商空间未必是完全不连通的。

19. 举例说明完全不连通群的商群未必是完全不连通的。

20. 证明：一个有限拓扑群若是连通的则必具有平凡拓扑。

21. (无限 Galois 群)设 K 是域，L 是 K 的 Galois 扩张，它不一定是有限维。$G=\mathrm{Gal}(L/K)$ 是 L 的保持 K 元素不动的自同构形成之群。设 $L_i\subset L$，L_i 是 K 的有限维 Galois 扩张。子群 $N_i=\mathrm{Gal}(L/L_i)$ 与 L_i 相对应。$N_i\triangleleft G$，$G/N_i\cong\mathrm{Gal}(L_i/K)$ 是有限群，取 N_i 为 e 的基本邻域组。证明：G 是拓扑群。在拓扑群集合 $\{G/N_i\}$ 中以包含关系定义偏序：$i\leqslant j\Longleftrightarrow N_i\supseteq N_j$，定义 $f_{ij}:G/N_j\to G/N_i$，$gN_j\longmapsto gN_i$，则 $\{G/N_i,f_{ij}\}$ 构成反向系统，G 是它的一个锥：τ_i：$G\to G/N_i$，$\tau_i(g)=gN_i$。如果 $i\leqslant j$，则 $f_{ij}\tau_j(g)=gN_i=\tau_i(g)$，即 $f_{ij}\tau_j=\tau_i$。证明

$$G = \varprojlim G/N,$$

22. 设G为拓扑群，H,K 为G的子群．$K \lhd G$，ρ 是 $G \to G/K$ 的商同态．对 $h \in H$，设 $\tau(hK) = h(H \cap K)$，$\tau^{-1}(h(H \cap K)) = hK$．试证：

(1) 如果在 HK/K 上取商拓扑，在 $\rho(H)$ 上取由 G/K 诱导的拓扑，则 HK/K 与 $\rho(H)$ 拓扑同构．

(2) 若在 HK/K 和 $H/H \cap K$ 上都取商拓扑，U 为 HK/K 的开子集，则 $\tau(U)$ 为 $H/H \cap K$ 的开子集．

(3) 若再设H是局部紧与 σ-紧，K闭以及 HK 是局部紧，则有

(i) $\rho|_H: H \to HK/K$ 是开同态；

(ii) V 为 $H/H \cap K$ 的开子集 $\Longrightarrow \tau^{-1}(V)$ 为 HK/K 的开子集；

(iii) HK/K 与 $H/H \cap K$ 拓扑同构．

(注意：HK/K 的开子集是

$\{hK \mid h \in X\ X \subset H,\ XK$ 是 HK 的开子集$\}$，HK 具有从 G 所诱导的拓扑．$H/H \cap K$ 的开子集是

$\{h(H \cap K) \mid h \in Y, Y \subset H,\ Y(H \cap K)$ 是H的开子集$\}$)．

23. 设G为拓扑群，$N_1, \cdots, N_k$ 为G的正规子群，满足 (1) $G = N_1 \cdots N_k$；(2) $(N_1 \cdots N_j) \cap N_{j+1} = \{e\}$，$j = 1, 2, \cdots, k-1$；(3) N_j 具有诱导拓扑，若 S_j 为 N_j 单位元开邻域，则$S_1S_2 \cdots S_k$ 为G的单位元开邻域．试证 $G \cong N_1 \times N_2 \times \cdots \times N_k$．

24. 设G是正则局部可数紧群，$N_1 \cdots N_k$ 为G的局部紧，σ-紧正规子群，满足(1) $G = N_1 \cdots N_k$；(2) $(N_1 \cdots N_j) \cap N_{j+1} = \{e\}$，$j = 1, 2, \cdots, k-1$．则 $N_1 \times \cdots \times N_k$ 与G拓扑同构．

25. 设G为拓扑群，H为G的正规闭子群，$\varphi: G \to H$ 是连续同态，而且 $h \in H \Rightarrow \varphi(h) = h$，$L = \varphi^{-1}(e)$．证明：(1) 由 $x \in G$ 可得 $x = \varphi(x)(\varphi(x^{-1})x) \in HL$，于是 $G = HL$；(2) $H \cap L = \{e\}$；(3) 若 U_1, U_2 是G的单位元开邻域，则存在G的单位元开邻域W使得 $W \subset (U_1 \cap H)(U_2 \cap L)$；(4) $G \cong H \times L$．

第二章　拓扑群上的积分

§1. 测　　度

设X是一个局部紧的 Hausdorff 拓扑空间，设f是X上一个连续函数，定义f的支集，$\mathrm{supp}(f)$，为$\{x\in X|f(x)\neq 0\}$的闭包．记

$C_c(X)=\{f:X\to\mathbf{C}|f$ 连续，$\mathrm{supp}(f)$ 是X的紧子集$\}$．因为 $\mathrm{supp}(f)$ 是闭集，显然

$C_c(X)=\{f:X\to\mathbf{C}|f$ 连续，$\mathrm{supp}(f)\subseteq C$，$C$ 是X的紧子集$\}$．

不难看出，$C_c(X)$ 中元素在加法和数乘下封闭，因此它是一个向量空间．我们先证明下面的引理以说明 $C_c(X)$ 不是零空间．

命题 1.1. （Урысон 引理）设X是非空局部紧 Hausdorff 空间，$C\subseteq U\subseteq X$，C 为紧集，U为开集，则必存在一个连续函数 $f:X\to\mathbf{R}$，使得

(1) $f(x)=1$，对一切 $x\in C$；

(2) $f(x)=0$，对一切 $x\notin U$；

(3) $0\leqslant f(x)\leqslant 1$，对一切 $x\in X$；

(4) $\mathrm{supp}(f)$ 紧且包在U中．

证． 由第一章命题 1.6，存在C的一个开邻域 Y，$\bar{Y}$ 是紧集，且包含在U中．记 $C=C(1)$，$\bar{Y}=C(0)$．又依同一命题，在 $C(0)$ 和 $C(1)$ 之间存在C的紧邻域，记为 $C\left(\frac{1}{2}\right)$．在$C(0)$和 $C\left(\frac{1}{2}\right)$之间存在$C$的紧邻域，记为$C\left(\frac{1}{4}\right)$．在$C\left(\frac{1}{2}\right)$和$C(1)$之

间存在 C 的紧邻域，记为 $C\left(\frac{3}{4}\right)$，等等。继续此过程，我们可得到一系列 $C(\theta)$，$\theta=\frac{i}{2^n}$，$0\leqslant i\leqslant 2^n$。由第一章命题 1.2，这些 $C(\theta)$ 皆为闭集。定义

$$C(\alpha)=\bigcap_{\theta\leqslant\alpha}C(\theta),$$

其中 θ 形如 $i/2^n$，$C(\alpha)$ 仍是闭集。$C(\alpha)\subseteq C(1)$，$C(1)$ 紧，故 $C(\alpha)$ 为紧。定义

$$C(\alpha)=\begin{cases}X, & 当\ \alpha<0;\\ \phi, & 当\ \alpha>1.\end{cases}$$

显然，若 $0\leqslant\alpha<\beta$，则 $C(\beta)$ 是 $C(\alpha)$ 的紧邻域，现在定义一个函数 $f:X\to\mathbb{R}$，

$$f(x)=\sup\{\alpha|x\in C(\alpha)\}.$$

不难看出，如 $x\notin C(0)$，则 $f(x)=0$；若 $x\in C(1)$，则 $f(x)=1$。对一切 $x\in X$ 都有 $0\leqslant f(x)\leqslant 1$。于是可知 $\mathrm{supp}(f)\subseteq C(0)$。

下面要证明 f 连续，即要证明开集的原象为开集。这只须证明：对任二实数 $\gamma<\beta$，集合

$$V=\{x\in X|\gamma<f(x)<\beta\}$$

为开集，V 可写为

$$V=\{x|f(x)>\gamma\}\cap(X\setminus\{x|f(x)\geqslant\beta\}).$$

现分别证明右方两集合为开集。由于

$$f(x)\geqslant\beta\Leftrightarrow\sup\{\alpha|x\in C(\alpha)\}\geqslant\beta\Leftrightarrow x\in\bigcap_{\gamma<\beta}C(\alpha),$$

故 $\{x:\ f(x)\geqslant\beta\}$ 是闭集。于是，其补集为开集，

$f(x)>\gamma\Leftrightarrow\sup\{\alpha|x\in C(\alpha)\}>\gamma\Leftrightarrow\exists\alpha>\gamma$，使得 $x\in C(\alpha)$ $\Leftrightarrow\exists\alpha'>\gamma$，$x\in C(\alpha')$ 内部 $\Leftrightarrow\{x|f(x)>\gamma\}$ 为开集。因此 f 为连续函数。 □

由此引理可知，对于局部紧、非空的 Hausdorff 空间中任一紧集合 K，只要 K 的内集非空，则有非零函数 f，使得 $\mathrm{supp}(f)\subseteq$

K。我们记

$$C_c(X,K)=\{f\in C_c(X)|\operatorname{supp}(f)\subseteq K\},$$

它是 $C_c(X)$ 的子空间. 我们可以在 $C_c(X,K)$ 上 义范数，设 $f\in C_c(X,K)$，定义

$$\|f\|_k=\sup_{x\in K}|f(x)|.$$

如果它是复值函数，我们取复数的绝对值为模. 对于此范数，$C_c(X,K)$ 成为拓扑向量空间.

我们记

$$C_c^+(X)=\{f\in C_c(X)|f\geqslant 0 \text{ 且 } f\neq 0\}^{1)},$$

$$C_c^+(X,K)=\{f\in C_c^+(X)|\operatorname{supp}(f)\subseteq K\}.$$

定义 1.1. 局部紧 Hausdorff 空间 X 上的一个正测度是指一个线性函数 $\mu:C_c(X)\to \mathbb{C}$，且对于 $f\geqslant 0$，有 $\mu(f)\geqslant 0$.

例. $X=\mathbb{R}$，设 $a(x)\in C_c^+(\mathbf{R})$，则定义

$$\mu(f)=\int_{-\infty}^{\infty}a(x)f(x)dx$$

是一个正测度.

注. 这样定义的测度和一般常见的测度理论（例如朱成熹[90]）是一样的. 设 $(X,\mathscr{A},m)$ 是测度空间，其中 $\mathscr{A}$ 是 X 的 σ 代数，m 是定义在 $\mathscr{A}$ 上的正测度，则可定义积分 $\int_X fdm$. 当 X 是局部紧 Hausdorff 空间时，下面的定理说明了 $C_c(X)$ 上的正线性泛函和 X 上的抽象测度的关系（证明可参阅 Rudin[57] 或中山大学编[88]）.

Riesz 表示定理. 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间，μ 是 $C_c(X)$ 上的正线性泛函，则存在 X 的 σ 代数 $\mathscr{A}$，及 $\mathscr{A}$ 的正测度 m，使得对 $f\in C_c(X)$，有

$$\mu(f)=\int_X fdm.$$

---

1) 我们约定："$Z\in\mathbb{C},Z\geqslant 0$" 意思是 "$Z\in\mathbb{R},Z\geqslant 0$"。

并且，如果K是X的紧子集，则

$$m(K)=\int_K dm<\infty.$$

定义 1.2. 设 X，Y 均为局部紧拓扑空间，μ为X 上正测度。称映射 $\varphi:X\to Y$ 为μ的一个固有映射，如果对任意 $f\in C_c(Y)$，有

$$\int_X |f(\varphi(x))|d\mu(x)<\infty.$$

这时 $f\longmapsto \mu(f\cdot\varphi)$ 是Y上的正测度，记为 $\varphi_*(\mu)$。

例. 如果 $\varphi:X\to Y$ 满足：对任意Y中紧集K，$\varphi^{-1}(K)$ 是X中紧子集，这时我们称φ为连续固有映射。此时对任意 μ，φ 都是它的一个固有映射。事实上，若 $f\in C_c(Y,K)$，则 $f\cdot\varphi\in C_c(X,\varphi^{-1}(K))$。

命题 1.2. 设μ为局部紧 Hausdorff 空间X中的正测度，K为X中的紧集。则相对于范数"$\|\cdot\|$"$_K$，μ对 $C_c(X,K)$ 中实值函数的作用是连续的。

证. 从第一章命题 1.6 可知存在紧集N，使 $K\subseteq N$。再从命题 1.1 可知存在实值连续函数f，满足

$$f(x)=\begin{cases}1, & \text{当 } x\in K,\\ 0, & \text{若 } x\notin N,\end{cases}$$

且
$$0\leqslant f(x)\leqslant 1,$$
$$\operatorname{supp}(f)\subseteq N.$$

对任意实函数 $g\in C_c(X,K)$，显然有

$$-\|g\|_K f\leqslant g\leqslant \|g\|_K f.$$

μ是正测度，故保持次序：

$$-\|g\|_K\mu(f)\leqslant\mu(g)\leqslant\|g\|_K\mu(f).$$

即

$$|\mu(g)|\leqslant\mu(f)\|g\|_K$$

因此当 $\|g\|_K\to 0$ 时，$\mu(g)\to 0$。 □

显然 $C_c(X)=\bigcup C_c(X,K)$，其中的并是对X的所有紧子集

K 取的。在 $C_c(X)$ 上，我们取由 $C_c(X, K)$ 所决定的正限拓扑（见夏道行等[83]，第二章第 6 节）。这就是说，对于这个拓扑，线性泛函 $\mu: C_c(X) \to \mathbf{C}$ 是连续的充要条件是：对所有紧子集 K，限制 μ 所得的线性泛函 $\mu|_K: C_c(X, K) \to \mathbf{C}$ 是连续的。

定义 1.3. 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间，μ: $C_c(X) \to \mathbf{C}$ 是线性泛函。如果对任意紧集 $K \subseteq X$，存在非负实数 a_K，使得 $f \in C_c(X, K) \Rightarrow |\mu(f)| \leqslant a_K \|f\|_K$，则称 μ 为 X 上的（复）测度。

我们有时称 $\mu(f)$ 为 f 在 X 上相对于 μ 的积分，并记为

$$\int_X f(x) d\mu(x),$$

或

$$\int_X f d\mu, \qquad \int_X f(x) dx.$$

当积分空间不易引起混淆时，可以将其略去。

例. 取定 $x \in X$，映射 $\varepsilon_x: f \longmapsto f(x)$ 是 X 上的测度。我们称 ε_x 为 x 点的 Dirac 测度。

命题 1.3. 设 μ 是定义在 $C_c^+(X)$ 上的正值函数，保持加法和数乘。则 μ 可以唯一地扩充为 X 的测度。

证. 首先，不难看出 μ 可以唯一地扩充到实值函数上去，因为任意实值函数可表为两个 $C_c^+(X)$ 中元素之差。而且从命题 1.2 的证明中可以看出对于任意一个紧集合 K，存在实数 $a_K > 0$，使得只要实值函数 f 满足 $\mathrm{supp}(f) \subseteq K$，便有 $|\mu(f)| \leqslant a_K \|f\|$。

现在考虑任意 $f \in C_c(X)$。我们可以写成

$$f = f_1 + i f_2,$$

其中 f_1, f_2 是实值函数。易见 $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq \mathrm{supp}(f)$，$i = 1, 2$。我们将 μ 扩充到 f 上：

$$\mu(f) = \mu(f_1) + i\mu(f_2).$$

对于任意一个包含 $\mathrm{supp}(f)$ 的紧集合 K，它自然也包含 $\mathrm{supp}(f_i)$，$i = 1, 2$。于是，存在实数 $a_K > 0$，使

$$|\mu(f_i)| \leqslant a_K \|f_i\|_K, \quad i = 1, 2.$$

这样

$$|\mu(f)| = (|\mu(f_1)|^2 + |\mu(f_2)|^2)^{1/2} \leqslant a_K(\|f_1\|_K^2 + \|f_2\|_K^2)^{1/2}$$
$$= a_K\|f\|_K.$$

于是，μ 便是 $C_c(X)$ 上的测度。唯一性是显然的。 □

设 λ, μ 是 X 上的测度。则 $\lambda+\mu$ 和 $a\lambda$ $(a \in \mathbf{C})$ 也是 X 上的测度。故全体 X 上测度是 $\mathbf{C}$ 上的向量空间，我们记它为 $M(X)$。

设 $\mu \in M(X)$，$f \in C_c^+(X)$。取

$$|\mu|(f) = \sup_{\substack{0 \leqslant |g| \leqslant f \\ g \in C_c(X)}} |\mu(g)|.$$

把 $|\mu|$ 线性扩张到 $C_c(X)$，则 $|\mu|$ 是 X 上满足性质：$f \in C_c(X) \Rightarrow |\mu(f)| \leqslant |\mu|(|f|)$ 的最小正测度。

称 $\mu \in M(X)$ 是**有界的**，如果存在实数 a，使得对于一切 $f \in C_c(X)$，都有 $|\mu(f)| \leqslant a\|f\|$。此处 $\|f\| = \sup\limits_{x \in X}|f(x)|$。显然 μ 有界 $\Leftrightarrow |\mu|$ 有界。如果 μ 有界，f 有界连续，则 $\int |f| d\mu < \infty$。

X 的全体有界测度组成 $M(X)$ 的子空间，记为 $M^1(X)$。在这个空间中可以引入范数：

$$\|\mu\| = \sup_{f \in C_c(X)} \frac{|\mu(f)|}{\|f\|}.$$

显然，$M^1(X)$ 是 $C_c(X)$ 的对偶空间。所以它对于范数 $\|\mu\|$ 是完备的（见 Dieudonné, Elements d'Analyse, Vol.1 (5.7.3)）。

如果 $\mu \in M(X)$，$\varphi: X \to Y$ 是 $|\mu|$-固有映射，并有分解

$$\mu = \mu_1 - \mu_2 + i(\mu_3 - \mu_4),$$

其中 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \mu_4$ 均为正测度，则可以定义

$$\varphi_*(\mu) = \varphi_*(\mu_1) - \varphi_*(\mu_2) + i(\varphi_*(\mu_3) - \varphi_*(\mu_4)).$$

如果 $\varphi: X \to Y$ 连续，$\mu \in M^1(X)$，则 φ 是 μ-固有映射。因为 $f \cdot \varphi$ 是有界连续的，进一步，我们有

$$\|\varphi_*(\mu)\| = \sup_{g\in C_c(Y)} \frac{|\varphi_*(\mu)(g)|}{\|g\|} \leqslant \sup_{g\in C_c(Y)} \frac{|\mu(g\cdot\varphi)|}{\|g\cdot\varphi\|}$$

$$\leqslant \|\mu\|.$$

因此，$\varphi_*(\mu)\in M^1(Y)$.

设X是Y的闭子集，μ是X的测度. 对于 $f\in C_c(Y,K)$,限制$f|_X\in C_c(X,K\cap X)$. 这样存在常数 C_K,使得对于 $f\in C_c(Y,K)$,有

$$|\mu(f|_X)|\leqslant C_K\sup_{x\in X}|f(x)|\leqslant C_K\|f\|.$$

因此 $f\longmapsto\mu(f|_X)$ 是Y上的测度. 这个测度便是 $i_*(\mu)$, 其中 $i:X\to Y$ 是嵌入映射,我们称 $i_*(\mu)$ 为μ在Y上的扩张.

设 $\mu\in M(X)$, 测度μ的支集 $\mathrm{supp}(\mu)$ 是指满足下列条件的最小闭集 S:

$$f\in C_c(X) \text{ 且 } \mathrm{supp}(f)\subseteq(X\backslash S)\Rightarrow\mu(f)=0.$$

显然,如果 μ,ν 是正测度,则

$$\mathrm{supp}(\mu+\nu)=\mathrm{supp}(\mu)\cup\mathrm{supp}(\nu).$$

X的全体有紧支集的测度记为 $M_c(X)$. 全体X上的连续函数记为 $C(X)$. 在 $C(X)$ 上取紧收敛拓扑. 可以证明, $M_c(X)$ 是 $C(X)$ 的对偶空间(参阅 Dieudonnè, Elements d'Analyse, Vol.II (13,19,3)).

设μ是空间X上的正测度,取正实数 $p(0<p<\infty)$. 设f是X上的复值可测函数. 定义

$$\|f\|_p=\left(\int_X|f|^p d\mu\right)^{1/p}$$

如果 $\|f\|_p<\infty$, 则称f是一个p次可积函数, $\|f\|_p$ 为f的 L^p 范数. 全体p次可积函数记为 $L^p(X,\mu)$, 或 $L^p(X)$. 可以证明,对 L^p 范数, $L^p(X,\mu)$ 是完备距离空间 (见 Rudin[57] 定理 3.11, 或中山大学[88],第五章 § 2). 当 $p=2$ 时, $L^2(X)$ 对内积

$$(f,g)=\int_X f\bar{g}d\mu,\quad f,g\in L^2(X),$$

构成 Hilbert 空间。所以 Schwarz 不等式

$$|(f,g)| \leqslant \|f\|_2\|g\|_2,$$

及三角形不等式

$$\|f+g\|_2 \leqslant \|f\|_2 + \|g\|_2,$$

均成立。

可以推广 Schwarz 不等式。设 $1<p<\infty$, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, f, g 均为正值可测函数。则有

Hölder 不等式：

$$\int_X fg d\mu \leqslant \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p}\left(\int_X g^q d\mu\right)^{1/q}.$$

Minkowski 不等式

$$\left(\int_X (f+g)^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_X f^p d\mu\right)^{1/p} + \left(\int_X g^p d\mu\right)^{1/p}.$$

其证明参看 Rudin[57] 定理 3.5. 所以如果 $f,g\in L^p(X)$, $h\in L^q(X)$，则有

$$\|fh\|_1 \leqslant \|f\|_p\|h\|_q,$$

及

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

当 X 是局部紧 Hausdorff 空间及 $1\leqslant p<\infty$ 时，$C_c(X)$ 是 $L^p(X)$ 的稠密子集（Rudin [57]，定理 3.14）．若 $\mu\in \mathrm{M}(X)$, $g\in L^1(X,\mu)$，则 $f\longmapsto\int_X fg d\mu$ 定义了一个测度 $g\cdot\mu$，而且

$$\|g\cdot\mu\| = \int_X |g|d|\mu|.$$

因此，可以把 $L^1(X,\mu)$ 看作 $\mathrm{M}^1(X)$ 的子空间。

关于乘积测度，我们有下面十分重要的基本定理。

Fubini 定理 设 (X,μ) 和 (Y,ν) 是 σ-紧测度空间，则有

(i) 如果 $f\in L^1(\mu\times\nu)$，则对几乎所有的 y, $x\longmapsto f(x,y)\in L^1(\mu)$, $y\longmapsto\int_X f(x,y)d\mu(x)\in L^1(\nu)$；对几乎一切 x, $y\longmapsto$

$f(x,y)\in L^1(\nu)$，$x\longmapsto\int_Y f(x,y)d\nu(y)\in L^1(\mu)$，而且

$$\int_X\left(\int_Y f(x,y)d\nu(y)\right)d\mu(x)=\int_Y\left(\int_X f(x,y)d\mu(x)\right)d\nu(y)$$
$$=\int_{X\times Y} f(x,y)d(\mu\times\nu).$$

(ii) 设 $f(x,y)$ 是 $\mu\times\nu$ 可测函数. 如果对几乎所有 x，$y\longmapsto f(x,y)\in L^1(\nu)$，$x\longmapsto\int_Y|f(x,y)|d\nu(y)\in L^1(\mu)$，则 $f\in L^1(\mu\times\nu)$.

此定理证明可在很多书中查到，如 Rudin[57] 的 7.8 或朱成熹[90] § 5.2 等等。

§ 2. 不变测度

本节假设 G 是一个局部紧拓扑群，则我们可以将 G 看作是 $C_c(G)$ 上的变换群. 设 $s\in G$，对 $f\in C_c(G)$，定义

$$(sf)(x)=f(s^{-1}x),$$

我们称它为 f 的左平移. 仍设 e 是 G 的单位元. 对 $t\in G$，显然有

$$ef=f,$$
$$(st)f=s(tf).$$

命题 2.1. 设 G 为任意拓扑群，$f\in C_c(G)$，则 f 在 G 中一致连续，即对任给 $\varepsilon>0$，存在 G 的单位元的对称开邻域 V，使得对于 $x,y\in G$，只要 $xy^{-1}\in V$ 或 $x^{-1}y\in V$，便有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

证. 设 C 为 f 的紧支集. 由 f 的连续性，对任意 $x\in C$，开集 $\{f(y)\,|\,|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2\}$ 的原象是一个包有 x 的开集. 因此，它包有一个 x 的基本邻域 $xN(x)$，$N(x)$ 是 e 的一个基本开邻域，它使得当 $y\in xN(x)$ 时，有

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon/2.$$

由第一章命题 3.1，得：存在 e 的对称开邻域 $M(x)\subseteq N(x)$，且满足 $M(x)^2\subseteq N(x)$. 由 C 的紧性，存在有限多个 $x_1,\cdots,x_n\in C$，使

$$\bigcup_{i=1}^{n} x_i M(x_i)\supseteq C.$$

令

$$V_1=\bigcap_{i=1}^{r} M(x_i).$$

V_1 仍为 e 的对称开邻域。设有 $xy^{-1}\in V_1$。如果 x，y 皆不属于 C，则 $f(x)=f(y)=0$，这时，不等式当然成立。设 x,y 两者之一属于 C，无妨设 x 属于 C. 由 V_1的对称性，则存在 i，使得 $x\in x_iM(x_i)$。于是

$$y\in xV_1\subseteq x_iM(x_i)V_1\subseteq x_iM(x_i).$$

因此，有

$$|f(x)-f(x_i)|<\varepsilon/2,$$
$$|f(y)-f(x_i)|<\varepsilon/2.$$

即

$$|f(x)-f(y)|<\varepsilon.$$

同理，对于 xy^{-1} 的情形，可取 x 的邻域组形如 $N(x)x$，则可如上证明得到 V_2，使得 $xy^{-1}\in V_2$ 时，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，取 $V=V_1\cap V_2$ 即可。 □

命题 2.2. 设 G 是局部紧群，H 是 G 的闭子群，α 是 H 上的测度，$f:G\to\mathbb{C}$ 是连续函数。设 $\mathrm{supp}(f)$ 或 $\mathrm{supp}(\alpha)$ 是紧集，则

$$s\longmapsto\int_H f(st)d\alpha(t),$$

及

$$s\longmapsto\int_H f(ts)d\alpha(t),$$

均为 G 上的连续函数.

证. 只须对第一个积分给出证明，另一情况是类似的。 即只

须要证明：对 $s_0\in G$，s_0 的紧邻域 V_0 及任给 $\varepsilon>0$，存在 s_0 的邻域 $V\subset V_0$，使得对所有 $s\in V$，有

$$\left|\int_H (f(st)-f(s_0t))d\alpha(t)\right|\leqslant\varepsilon.$$

若 $K=\operatorname{supp}(f)$ 是紧集，取 $L=V_0^{-1}K\cap H$，则

$$\int_H (f(st)-f(s_0t))d\alpha(t)=\int_L (f(st)-f(s_0t))d\alpha(t).$$

由于 f 是一致连续的，所以存在单位元 e 的邻域 W，使得对所有 $t\in H$，$(st)(s_0t)^{-1}=ss_0^{-1}\in W$，有

$$|f(st)-f(s_0t)|\leqslant\varepsilon/|\alpha|(L)^{1)}.$$

则 $V=V_0\cap W$ 便是所求的邻域。

另一方面，如果 $C=\operatorname{supp}(\alpha)$ 是紧集，则

$$\int_H (f(st)-f(s_0t))d\alpha(t)=\int_C (f(st)-f(s_0t))d\alpha(t).$$

如果 $t\in C$，$s\in V_0$，则 st 在紧集 V_0C 内，函数 f 在 V_0C 上是一致连续函数，所以可取单位元邻域 W_1，使得对 $t\in C$，$ss_0^{-1}\in W_1$，便有

$$|f(st)-f(s_0t)|\leqslant\varepsilon/|\alpha|(C).$$

则 $V=V_0\cap W_1$ 便是所求邻域。□

定义 2.1. G 是一个局部紧 Hausdorff 拓扑群，一个（左）Haar 测度是指一个正测度 μ，它在左平移之下不变，即 $\mu(f)=\mu(sf)$，对一切 $s\in G$。

此时，我们也称 μ 是 G 上的一个（左）不变测度，或 Haar 积分，不变积分。

左不变性可简记为 $d(sx)=dx$。

本章最重要的结论是

定理.（Haar）在一个局部紧的 Hausdorff 拓扑群上存在一个左不变 Haar 测度 μ，$\mu\neq0$，而且除了相差一个正实数因子外，μ 是唯一的。

---

1) $|\alpha|(L)$ 表示 $\int_L d|\alpha|(t)$，当 L 紧时，由 Riesz 表示定理，这是有意义的。

我们将在下一节证明这个定理。

下面我们先介绍一些常见的群上的积分作为 Haar 积分的例子。

例 1. $(\mathbf{R}^n,+)$，它的 Haar 积分就是 Lebesgue 积分

$$\mu(f)=\int_{\mathbf{R}^n} f(x)dx.$$

设 V 是 $\mathbf{R}$ 上 n 维向量空间，$e_1,\cdots,e_n$ 为 V 的基底。则有同构 $I:V\to\mathbf{R}^n$，$x=\sum_{i=1}^{n}x_ie_i\longmapsto(x_1,\cdots,x_n)$。每个 V 上函数 f 定义 $\mathbf{R}^n$ 上的函数 fI^{-1}。定义

$$\mu(f)=\int_{\mathbf{R}^n} f(I^{-1}(x_1,\cdots,x_n))dx_1\cdots dx_n.$$

这就是 V 上的 Haar 积分。它可简写为

$$\mu(f)=\int f(x)dx.$$

设 T 为线性变换 $V\to V$，$\det T\neq 0$，我们有

$$\int f(T^{-1}x)dx=|\det T|\int f(x)dx.$$

例 2. 设 T 是绝对值为 1 的复数所成的乘法群，它是紧群。我们有映射 $r:\mathbf{R}\to T$，$r(x)=e^{2\pi ix}$。它是映上的，且是一个覆盖映射。一般地，有 $\mathbf{R}^n$ 到 T^n 的覆盖映射：

$$r(x_1,\cdots,x_n)=(e^{2\pi ix_1},\cdots,e^{2\pi ix_n}).$$

因此每个定义在 T^n 上的函数 f，决定了 $\mathbf{R}^n$ 上一个（对每个 x_i）周期为 1 的函数 fr，定义

$$\mu(f)=\int_P f(r(x_1,\cdots,x_n))dx_1dx_2\cdots dx_n,$$

其中

$$P=\{(x_1,\cdots,x_n)\mid 0\leqslant x_i\leqslant 1,\ i=1,2,\cdots,n\}.$$

右方是一般的 Lebesgue 积分。这就是 T^n 的 Haar 积分。现在我们来证它的左不变性。

设

$$y=(e^{2\pi i s_1},\cdots,e^{2\pi i s_n})\in T^n,$$

$$yf(x)=f(y^{-1}x),$$

$$\begin{aligned}\mu(yf)&=\int_P f(y^{-1}r(x_1,\cdots,x_n))dx_1\cdots dx_n\\&=\int_P f(r(x_1-s_1,\cdots,x_n-s_n))dx_1\cdots dx_n\\&=\int_{P-y} f(r(x_1,\cdots,x_n))dx_1\cdots dx_n,\end{aligned}$$

其中

$$P-y=\{(x_1\cdots x_n)|-s_i\leqslant x_i\leqslant 1-s_i,i=1,\cdots,n\}.$$

由 f 的周期性，它在 P 上积分与在 $P-y$ 上积分相等。因此

$$\mu(yf)=\mu(f).$$

例 3. G 是一个任意离散群。

$C_c(G)=\{f|f:G\to\mathbb{C}$ 连续，f 除了有限点外皆为 $0\}$

定义

$$\mu(f)=\sum_{x\in G}f(x).$$

它显然是 G 上不变测度。

$L^1(G)=\{f|f$ 具有可数支集 $S,\sum\limits_{x\in S}|f(x)|<+\infty\}$。特别地，当 $G=\mathbb{Z}$ 时，有

$$L^1(\mathbb{Z})\left\{a=\{a_n\}_{n\in\mathbb{Z}}\,\middle|\,\sum_{n=-\infty}^{\infty}|a_n|<+\infty\right\},$$

$$\mu(a)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_n.$$

例 4. 一般线性群 $G=GL_n(\mathbb{R})$。当 $GL_n(R)$ 被看作加法群时，它是 $\mathbb{R}^{n^2}$ 的开子集。由例 1，$\mathbb{R}^{n^2}$ 的 Haar 积分可诱导为 $GL_n(\mathbb{R})$ 的 Haar 积分(见后面 4.11)。我们将这个积分记为 dT.

现在我们要表出 G 作为乘法群的 Haar 积分。设 $A,T\in GL_n(\mathbb{R})$。作映射

$$L_A: T \to AT.$$

不难验证，作为 $\mathbf{R}^{n^2}$ 上的线性变换 L_A，其矩阵表示为

$$\begin{bmatrix} A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & A \end{bmatrix}$$

因此 $\det L_A = (\det A)^n$.

设 $f \in C_c(G)$. 考虑

$$\int_G u(T) f(T) dT,$$

其中 $u(T)$ 待定。希望这个积分左不变，即对 $S \in G$，有

$$\int_G u(T) f(S^{-1}T) dT = \int_G u(T) f(T) dT.$$

由例 1，可知

$$\int_G u(T) f(S^{-1}T) dT = \int_G u(SS^{-1}T) f(S^{-1}T) dT$$

$$(\text{令 } T_1 = S^{-1}T)$$

$$= |\det S|^n \int_G u(ST_1) f(T_1) dT_1.$$

我们希望，对任意 $S \in G$，有

$$u(T) = |\det S|^n u(ST).$$

令 $S = T^{-1}$，得

$$u(T) = |\det T|^{-n} u(I),$$

$u(I)$ 为常数。故设

$$u(T) = |\det T|^{-n}$$

即可。因此

$$\mu(f) = \int_G \frac{f(T)}{|\det T|^n} dT,$$

是 G 的 Haar 积分。

例 5. V 是 n 维实向量空间.

$$G = GA_n(V) = \{V \text{ 上的可逆仿射变换}\}$$

$$= \{(t,T): x \longmapsto t + Tx \mid t \in V,\quad T \in GL_n(V)\}$$
$$\cong V \times GL_n(V),$$

它是局部紧的，又是 $V \times L(V)$ 中的开集(记 $L(V)$ 为V上 n 维线性变换全体所成的加法群，它同构于 $\mathbf{R}^{n^2}$)。因此，$V \times L(V)$ 的测度可诱导到G上。分别以 dt, dT 记V和 $L(V)$ 的 Haar 测度，我们求G作为乘法群的 Haar 测度。仍用待定法，设$f \in C_c(G)$。令

$$\mu(f) = \int_G u(t,T) f(t,T)\, dt\, dT,$$

其中 $u(t,T)$ 待定。设 $S = (a,A) \in G$，

$$\mu(sf) = \int u(t,T) f((a,A)^{-1}(t,T))\, dt\, dT.$$

令 $(a,A)^{-1}(t,T) = (x,M)$，则

$$t = a + Ax,\quad T = AM.$$

这个变换的行列式为 $(\det A)^{n+1}$。于是

$$\mu(sf) = |\det A|^{n+1} \int_G u((a,A)(t,T)) f(t,T)\, dt\, dT.$$

要求对一切的 $a, t \in V$，$A, T \in GL(V)$，有

$$|\det A|^{n+1} u((a,A)(t,T)) = u(t,T).$$

令

$$(a,A) = (t,T)^{-1}.$$

则有

$$u(t,T) = u(0,T)/|\det T|^{n+1}.$$

因此，

$$\mu(f) = \int_G \frac{f(t,T)}{|\det T|^{n+1}}\, dt\, dT.$$

直接验证，可知 $\mu(f)$ 确定G的 Haar 积分。

§ 3. Haar 测度的存在性和唯一性

本节的主要目的是证明 § 2 中所陈述的定理。由命题 1.3 知，

只要对 $C_c^+(G)$ 证明正测度的存在性和唯一性即可。

我们先作一些预备性工作.

命题 3.1. 设 G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群，$f, F \in C_c^+(G)$，则存在正实数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 $x_1, \cdots, x_n \in G$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i F) \geqslant f.$$

证. 存在 $t \in G$，使得 $F(t) > 0$。令 $\beta = \frac{1}{2} F(t)$。由 F 的连续性可知，存在单位 e 的开邻域 V，使得当 $x \in tV$ 时，有 $F(x) > \beta$。

设 $\operatorname{supp}(f) = C$。由于 $\{cV \mid c \in C\}$ 是 C 的覆盖，因此存在 $c_1, c_2, \cdots, c_n \in C$，使得 $C \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} c_i V$。当 $x \notin C$ 时，自然有命题中所列的不等式。设 $x \in C$，则存在 i，$x \in c_i V$。因此 $tc_i^{-1} x \in tV$。故有

$$F(tc_i^{-1} x) > \beta.$$

令 $x_i = c_i t^{-1}$，则有 $(x_i F)(x) > \beta$。又因 $\{f(x) \mid x \in C\}$ 是 R 中紧集，故是有限集。设 M 为其上界，则

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{M}{\beta} (x_i F)(x) \geqslant \frac{M}{\beta} (x_i F)(x) \geqslant f(x). \qquad \square$$

系理. 设 $F \in C_c^+(G)$，则对一切左 Haar 测度 μ，有 $\mu(F) > 0$。

证. 取 $f \in C_c^+(G)$，使 $\mu(f) \neq 0$，则可设 $\mu(f) > 0$。依命题 3.1，存在正实数 $\alpha_1, \cdots, \alpha_n$ 和 G 中元 $x_1, \cdots, x_n$，使得

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i (x_i F) \geqslant f.$$

于是，有

$$\mu(F) \geqslant \frac{\mu(f)}{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i} > 0. \qquad \square$$

定义 3.1. 设 $f, F \in C_c^+(G)$。定义

$$(f:F) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i \middle| \alpha_i \geqslant 0,\ \exists x_i \in G,\ 1 \leqslant i \leqslant n,\ 使得\right.$$

$$\left.\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i F) \geqslant f\right\}.$$

从命题 3.1 可知 $(f:F)$ 是存在的，并且它是正数。对任意左 Haar 测度 μ，有

$$\mu(f) \leqslant (f:F)\mu(F).$$

命题 3.2. 设 $f, f_i, F, g \in C_c^+(G)$，则有

1) $(f:F) > 0$;

2) 对任一 $x \in G$，$(xf:F) = (f:F)$;

3) $(f_1 + f_2:F) \leqslant (f_1:F) + (f_2:F)$;

4) 若 $\alpha > 0$，则 $(\alpha f:F) = \alpha(f:F)$;

5) $(f:F) \leqslant (f:g)(g:F)$。

证. 1) $f \leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i F) \Rightarrow \sup(f) \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\sup(F)$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{n}\alpha_i \geqslant \frac{\sup(f)}{\sup(F)} > 0 \Rightarrow (f:F) > 0.$$

2) $f \leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i F) \Longleftrightarrow xf \leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(xx_i F)$.

3) 若 $f_1 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i F)$，$f_2 \leqslant \sum_{j=1}^{m}\beta_j(y_j F)$，则

$$f_1 + f_2 \leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_i F) + \sum_{j=1}^{m}\beta_j(y_j F).$$

故

$$(f_1 + f_2:F) \leqslant \sum_{i=1}^{n}\alpha_i + \sum_{j=1}^{m}\beta_j.$$

取下端，得

$$(f_1+f_2:F)\leqslant(f_1:F)+(f_2:F).$$

4) $f\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_iF)\Leftrightarrow\alpha f\leqslant\sum_{i=1}^{n}(\alpha\alpha_i)(x_iF)$.

5) 设 $f\leqslant\sum_{i=1}^{n}\alpha_i(x_ig)$，$g\leqslant\sum_{j=1}^{m}\beta_j(y_jF)$，则

$$f\leqslant\sum_{i,j}(\alpha_i\beta_j)(x_iy_jF).$$

故

$$(f:F)\leqslant\sum_{i,j}\alpha_i\beta_j=\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\right)\left(\sum_{j=1}^{m}\beta_j\right).$$

取下端，得

$$(f:F)\leqslant(f:g)(g:F).$$ □

我们定义一个近似测度。取定 $C_c^+(G)$ 中两个非零元 f^* 和 F，对于任意一个 $f\in C_c^+(G)$，定义

$$\mu_F(f)=(f:F)/(f^*:F).$$

由于 $(f^*:F)>0$，因此上式是有意义的。

命题 3.3. 定义 μ_F 如上。$f,f_1,f_2\in C_c^+(F)$。则

1) $\mu_F(f)>0$，只要 $f\neq 0$；

2) $\mu_F(f)=\mu_F(sf)$，$\forall s\in G$；

3) $\mu_F(f_1+f_2)\leqslant\mu_F(f_1)+\mu_F(f_2)$；

4) $\mu_F(\lambda f)=\lambda\mu_F(f)$，$\forall\lambda\in\mathbb{R}_+$；

5) $\mu_F(f_1)\leqslant\mu_F(f_2)$，如果 $f_1\leqslant f_2$；

6) $1/(f^*:f)\leqslant\mu_F(f)\leqslant(f:f^*)$.

证. 从命题 3.2 即可得到 1)—5)。现在证明 6)。

考虑

$$(f:F)\leqslant(f:f^*)(f^*:F).$$

我们有

$$\mu_F(f)\leqslant(f:f^*).$$

又由
$$(f^*:F)\leqslant(f^*:f)(f:F),$$
得
$$\mu_F(f)\geqslant 1/(f^*:f).$$ □

下面我们证明当 F 的支集趋向单位元时，μ_F 是接近于保持加法的.

命题 3.4. G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群，设 $f^*, f_1, f_2\in C_c^+(G)$. 对任给 $\varepsilon>0$, 存在一个单位元邻域 V, 使得当 $\mathrm{supp}(F)\subseteq V$ 时，有
$$\mu_F(f_1+f_2)\geqslant\mu_F(f_1)+\mu_F(f_2)-\varepsilon.$$

证. 令 $C=\mathrm{supp}(f_1)\cup\mathrm{supp}(f_2)$, C 为紧. 由命题 1.1 可知，存在一个连续函数 $q\in C_c^+(G)$, 对 $x\in C$, 有 $q(x)=1$. 取 $\alpha>0$, 记
$$p(x)=f_1(x)+f_2(x)+\alpha q(x),$$
并定义
$$h_i(x)=\begin{cases}f_i(x)/p(x), & 当\ p(x)\neq 0;\\ 0, & 当\ p(x)=0,\end{cases}$$
其中 $i=1, 2$. 当 $p(x)=0$, 必有 $f_1(x)=f_2(x)=0$. 因此 $h_1(x), h_2(x)$ 是连续函数，且 $\mathrm{supp}(h_i(x))\subseteq\mathrm{supp}(p(x))$, $i=1,2$. 从而 $h_1(x)$, $h_2(x)$ 皆属于 $C_c^+(G)$, 且 $0\leqslant h_1+h_2\leqslant 1$. 由命题 2.1 可得，存在单位元邻域 V, 使得只要 xy^{-1} 或 $x^{-1}y\in V$, 就有
$$|h_i(x)-h_i(y)|<\alpha/2,\ i=1,2.$$
对于任意支集在 V 中的连续函数 F, 设
$$p\leqslant\sum_{j=1}^{n}\beta_j(x_jF),$$
若当 $t\notin x_jV$ 时，则有 $(x_jF)(t)=0$. 如 $t\in x_jV$, 则有
$$|h_i(x_j)-h_i(t)|<\alpha/2,\ i=1,2,\quad j=1,\cdots,n.$$
于是
$$f_i=h_ip\leqslant\sum_{j=1}^{n}\beta_jh_i(x_jF)\leqslant\sum_{j=1}^{n}\beta_j\left[h_i(x_j)+\frac{\alpha}{2}\right](x_jF),$$
$$i=1,2.$$

这样

$$(f_i:F)\leqslant \sum_{j=1}^{n}\beta_j\left[h_i(x_j)+\frac{\alpha}{2}\right],\quad i=1,2.$$

所以

$$(f_1:F)+(f_2:F)\leqslant (1+\alpha)\left(\sum_{j=1}^{n}\beta_j\right).$$

右方取下端，得

$$(f_1:F)+(f_2:F)\leqslant (1+\alpha)(p:F).$$

即

$$\begin{aligned}\mu_F(f_1)+\mu_F(f_2)&\leqslant (1+\alpha)\mu_F(p)\leqslant (1+\alpha)\mu_F(f_1+f_2\\&\quad+\alpha q)\leqslant (1+\alpha)[\mu_F(f_1+f_2)+\alpha\mu_F(q)]\\&=\mu_F(f_1+f_2)+\alpha[\mu_F(f_1+f_2)+(1+\alpha)\mu_F(q)]\\&\leqslant \mu_F(f_1+f_2)+\alpha[(f_1+f_2:f^*)+(1+\alpha)(q:f^*)].\end{aligned}$$

对于固定的 f_1, f_2，取定 q，对任给 $\varepsilon>0$，取 α 小于 1，且充分小：

$$\alpha<\varepsilon/(f_1+f_2:f^*)+2(q:f^*).$$

则有

$$\mu_F(f_1)+\mu_F(f_2)\leqslant \mu_F(f_1+f_2)+\varepsilon. \qquad \square$$

现在我们来证明下述命题.

命题 3.5. G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群，则 G 上存在左 Haar 测度.

证. 记 D 为 $C_c^+(G)$ 中不为 0 的所有函数. 给定 $C_c^+(G)$ 中非零函数 f^*. 记 $J(f)$ 为 $\mathbf{R}$ 中闭区间 $[1/(f^*:f),(f:f^*)]$. 作乘积空间

$$J=\prod_{f\in D}J(f).$$

由第一章命题 1.3，可知 J 是紧空间. 对任意 $F\in D$，$\mu_F(f)$ 恰取值在 $J(f)$ 中. 因此 $a_F=\{\mu_F(f)\}_{f\in D}$ 是 J 中元素. 对每个单位元邻域 V，作 J 中子集

$$A_V = \{\{\mu_F(f)\}_{f\in D} \mid \operatorname{supp} F \subseteq V\}.$$

对于任意两个单位元邻域 V_1, V_2，必有 $V \subseteq V_1 \cap V_2$。即

$$A_V \subset A_{V_1} \cap A_{V_2}.$$

注意到 $A_V \neq \phi$，J 是紧空间，由第一章命题 4.7 可知，J 中存在一个元素属于所有 A_V 的闭包，记它为 $\{\mu(f)\}_{f\in D}$。这就是说，对任给有限个函数 $f_1, \cdots, f_n$ 及 $\varepsilon > 0$ 以及单位元邻域 V，必存在 $F \in D$，$\operatorname{supp} F \subseteq V$，使得

$$|\mu(f_i) - \mu_F(f_i)| < \varepsilon, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

对 $f, f_1, f_2 \in D$，$\lambda \in \mathbb{R}_+$，$s \in G$，有

$$|\mu(sf) - \mu(f)| \leqslant |\mu(sf) - \mu_F(sf)| + |\mu_F(f) - \mu(f)|,$$

$$|\mu(\lambda f) - \lambda\mu(f)| \leqslant |\mu(\lambda f) - \mu_F(\lambda f)| + |\lambda\mu_F(f) - \lambda\mu(f)|,$$

$$|\mu(f_1 + f_2) - [\mu(f_1) + \mu(f_2)]| \leqslant |\mu(f_1 + f_2) - \mu_F(f_1 + f_2)| + |\mu_F(f_1) - \mu(f_1)| + |\mu_F(f_2) - \mu(f_2)| + \varepsilon_1.$$

ε_1 可取任意小的正数，只要 F 的支集 V 充分小。因此，借助于支集充分小的函数 F，我们可证明

$$\mu(sf) = \mu(f),$$

$$\mu(\lambda f) = \lambda\mu(f),$$

$$\mu(f_1 + f_2) = \mu(f_1) + \mu(f_2).$$

由证明过程可知

$$\mu(f) \geqslant 1/(f^* : f) > 0.$$

则 μ 是 $C_c^+(G)$ 中的正线性函数，它对 G 不变。令 $\mu(0) = 0$，并利用命题 1.3，可知 μ 可以扩充为 $C_c(G)$ 上的测度。扩充后，它仍对 G 不变。即 μ 为 G 的 Haar 测度。 □

设 $f, g \in C_c(G)$，我们考虑

$$f(y)g(y^{-1}x).$$

此函数，对 y 显然是连续的。又注意到

$$\operatorname{supp}(f(y)g(y^{-1}x)) \subseteq \operatorname{supp}(f),$$

因此 $f(y)g(y^{-1}x) \in C_c(G)$。于是我们可引入

定义 3.2. 设 μ 是 G 的左不变 Haar 测度，$f, g \in C_c(G)$，则 f 与 g 的**卷积**是指

$$(f * g)(x) = \int_G f(y) g(y^{-1}x) d\mu(y), \quad x \in G.$$

注意到

$$\operatorname{supp}(f * g) \subseteq \operatorname{supp}(g(y^{-1}x)) \subseteq \operatorname{supp}(yg) \subseteq y\operatorname{supp}(g),$$

由命题 2.2 可知，$f * g$ 是 x 的连续函数。因此 $f * g \in C_c(G)$，即卷积是 $C_c(G) \times C_c(G) \to C_c(G)$ 的映射。

为了证明 Haar 测度的唯一性，尚须两个予备命题。

命题 3.6. 设 X 是局部紧 Hausdorff 空间，μ 是 X 的正测度，$f: X \to \mathbb{R}$ 连续，$a \in X$。对任给 $\varepsilon > 0$，必存在 a 的邻域 V，使得：对于 $g \in C_c^+(X, V)$ 及 $\int g d\mu = 1$，有

$$\left| \int f g d\mu - f(a) \right| \leqslant \varepsilon.$$

证. f 连续，故对任给 $\varepsilon > 0$，存在 a 的邻域 V，使得

$$|f(y) - f(a)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall y \in V.$$

则

$$\left| \int f g d\mu - f(a) \right| = \left| \int f g d\mu - \int f(a) g d\mu \right|$$

$$\leqslant \int |f(y) - f(a)| g d\mu \leqslant \varepsilon. \qquad \square$$

我们对 $g \in C_c(G)$ 定义一个函数 $\check{g} \in C_c(G)$ 如下

$$\check{g}(x) = g(x^{-1}).$$

命题 3.7. G 为局部紧 Hausdorff 群，μ 是 G 的左不变 Haar 测度，$f \in C_c(G)$。对任给 $\varepsilon > 0$，必存在单位元 e 的邻域 V，使得，若 $g \in C_c^+(G, V)$，且 $\int g d\mu = 1$，则

$$|(f * \check{g})(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon, \quad \forall x \in G.$$

证.

$$(f * \check{g})(x) = \int_G f(y) \check{g}(y^{-1}x) d\mu(y) = \int_G f(y) g(x^{-1}y) d\mu(y)$$

$$= \int_G f(xy)g(y)d\mu(y),$$

这里用了μ的左不变性。对任给 $\varepsilon > 0$，由命题2.1，存在单位元开邻域U，使得

$$|(f * \check{g})(x) - (f * \check{g})(x')| \leqslant \varepsilon/3,$$
$$|f(x) - f(x')| \leqslant \varepsilon/3,$$

只要 $x \in x'U$，$\forall x, x' \in G$。设 $\operatorname{supp}(f) = C$，则由$C$的紧性可知，存在 $x_1, \cdots, x_n \in C$，使得 $\bigcup_{i=1}^{n} (x_i U) \supseteq C$。对每个 x_i，利用命题3.6，存在单位元开邻域 V_i，使得

$$\left|\int_G f(x_i y)g(y)d\mu(y) - f(x_i)\right| \leqslant \varepsilon/3,$$

只要 $g \in C_c(G, V_i)$，$\int g d\mu = 1$ 即可。取

$$V = U \cap V_1 \cap \cdots \cap V_n.$$

注意，对任意 $x \in C$，必有 i，使得 $x \in x_i U$。设 $g \in C_c(G, V)$，且 $\int g d\mu = 1$。由前面各式可得

$$\begin{aligned}|(f * \check{g})(x) - f(x)| = & |(f * \check{g})(x) - (f * \check{g})(x_i)| \\ & + |(f * \check{g})(x_i) - f(x_i)| + |f(x_i) - f(x)| \leqslant \varepsilon.\end{aligned}$$

当 $x \notin C$ 时，不等式左方为0，这是显然的。 □

现在我们可以证明

命题 3.8. G是局部紧的 Hausdorff 拓扑群，设 μ, ν 为G上两个左 Haar 测度。则必有 $\lambda > 0$，使得 $\mu = \lambda\nu$。

证. 无妨设存在 $f_0 \in C_c^+(G)$，使得

$$\mu(f_0) = \nu(f_0) = 1$$

（否则的话，以 $\mu/\mu(f_0)$ 和 $\nu/\nu(f_0)$ 代替μ和ν即可）。我们证明 $\mu = \nu$。

对任意 $f, g \in C_c(G)$，考虑 $h = f * \check{g} \in C_c(G)$。利用 Fubini 定理，可得

$$\int h(x)d\nu(x) = \int f(y)\left(\int \check{g}(y^{-1}x)d\nu(x)\right)d\mu(y)$$
$$= \int f d\mu \cdot \int \check{g} d\nu.$$

由命题 3.7 可知,对任给 $\varepsilon_1 > 0$, 存在单位元开邻域 V, 使得:只要 $g \in C_c(G, V)$, $\int g d\mu = 1$, 则

$$\|h - f\| = \sup\{|h(x) - f(x)| \mid x \in G\} \leqslant \varepsilon_1.$$

由命题 1.2,对任给 $\varepsilon_2 > 0$, 只要取 ε_1 充分小,就有

$$\left|\int h d\nu - \int f d\nu\right| < \varepsilon_2.$$

注意到 $\int f_0 d\mu = \int f_0 d\nu = 1$. 令 $f = f_0$, 我们得到

$$\int h d\nu = \int \check{g} d\nu,$$
$$\left|\int \check{g} d\nu - 1\right| = \left|\int h d\nu - \int f_0 d\nu\right| < \varepsilon_3,$$

只要对适当的单位元邻域 V_1, $g \in C_c(G, V_1)$, 且$\int g d\mu = 1$ 即可。

对任意 f, 设 $\left|\int f d\mu\right| \leqslant M$. 则在上述条件下有

$$\left|\int f d\nu - \int f d\mu\right| \leqslant \left|\int f d\nu - \int h d\nu\right| + \left|\int h d\nu - \int f d\mu\right|$$
$$\leqslant \varepsilon_2 + \left|\int f d\mu\right| \left|\int \check{g} d\nu - 1\right| \leqslant \varepsilon_2 + M\varepsilon_3.$$

因此, $|\mu(f) - \nu(f)|$ 可任意小,即

$$\mu(f) = \nu(f), \quad \forall f \in C_c(G).$$

即

$$\mu = \nu. \qquad \square$$

这样我们便完成了 § 2 中定理的全部证明, 所叙述的证明基本上是 A. Weil 的。

上述证明对右 Haar 测度是完全适用的,这是不言而喻的。

§ 4. Haar 测度的性质

设G是局部紧 Hausdorff 群，μ是G的左不变 Haar 测度. 对 $t\in G$, $f\in C_c(G)$, 设

$$\nu(f)=\int_G f(xt^{-1})d\mu(x).$$

则对 $s\in G$, 有 $\nu(sf)=\nu(f)$, 所以 ν 是G的左不变测度. 由唯一性定理可知，μ与ν只差一个正常数因子，记为 $\Delta_G^r(t)$ 或$\Delta^r(t)$. 我们称函数 Δ^r 为G的右模函数. 按定义我们有公式

$$\int_G f(xt^{-1})d\mu(x)=\Delta^r(t)\int_G f(x)d\mu(x).$$

以上关系又简记为

$$d(xt)=\Delta^r(t)dx.$$

命题 4.1. 右模函数 $\Delta^r: G\to \mathbf{R}_+^*$ 是拓扑群同态.

证.
$$\Delta^r(st)\int f(x)dx=\int f(xt^{-1}s^{-1})dx=\Delta^r(s)\int f(xt^{-1})dx$$
$$=\Delta^r(s)\Delta^r(t)\int f(x)dx.$$

取 $f\in C_c^+(G)$, 使 $\int fdx=1$, 则得

$$\Delta^r(st)=\Delta^r(s)\Delta^r(t).$$

故而 Δ^r 是群同态. 又由命题 2.2 可知

$$S\longmapsto\int f(xs^{-1})dx$$

是连续函数，所以 Δ^r 是连续群同态. □

定义 4.1. 如局部紧的 Hausdorff 群G的右模函数恒等于1，则它称为幺模群.

显然，G是一个幺模群当且仅当G的左不变 Haar 测度等于右不变 Haar 测度. 当G是 Abel 群时，它自然是幺模群.

如果我们从右不变 Haar 测度出发也可以得到类似上述 Δ^r 的函数，这时，我们称它为左模函数，并记之为 Δ_G^l 或 Δ^l.

命题 4.2. 设 G 满足上述条件，μ 为 G 的左不变 Haar 测度，我们仍记 $\check{f}(x)=f(x^{-1})$. 定义

$$\check{\mu}(f)=\mu(\check{f}).$$

则 $\check{\mu}$ 是右不变 Haar 测度.

证. $\check{\mu}$ 显然是线性函数. 对任意 $f\in C_c(G)$，有

$$(fs)^{\vee}(x)=(fs)(x^{-1})=f(x^{-1}s^{-1})=\check{f}(sx)=s^{-1}\check{f}(x).$$

于是，$(fs)^{\vee}=s^{-1}\check{f}$. 因此

$$\check{\mu}(fs)=\mu(fs)^{\vee}=\mu(s^{-1}\check{f})=\mu(\check{f})=\check{\mu}(f). \qquad \square$$

系理. G 是幺模群，当且仅当对任意 $f\in C_c(G)$，有 $\mu(f)=\check{\mu}(f)$.

命题 4.3. G 如上述定义. 则对一切 $s\in G$，有

$$\Delta^r(s)\Delta^l(s)=1.$$

证. 设 μ 是左不变 Haar 测度. 则对 $\forall s\in G$，有

$$\begin{aligned}\mu(fs)&=\Delta^r(s)\mu(f)=\Delta^r(s)\check{\mu}(\check{f})=\Delta^r(s)\Delta^l(s)\check{\mu}(s^{-1}\check{f})\\&=\Delta^r(s)\Delta^l(s)\check{\mu}(fs)^{\vee}=\Delta^r(s)\Delta^l(s)\mu(fs).\end{aligned}$$

适当选取 f，使 $\mu(f)\neq 0$，则得 $\Delta^r(s)\Delta^l(s)=1$. $\square$

命题 4.4. G 如上，对于一个左不变测度 μ，我们有

$$\int_G f(x^{-1})d\mu(x)=\int_G\frac{f(x)}{\Delta^r(x)}d\mu(x),$$

且这个积分是一个右不变 Haar 测度 $\nu(f)$.

证. 设 μ 是左不变 Haar 测度. 等式左方为 $\mu(\check{f})$，依命题 4.2，它是一个右不变 Haar 测度，$\nu(f)=\mu(\check{f})$. 记

$$f^*=f/\Delta^r.$$

等式右方为 $\mu(f^*)$，记为 $\rho(f)$. 注意到

$$\begin{aligned}(f^*s)(x)&=\frac{f(xs^{-1})}{\Delta^r(xs^{-1})}=\frac{f(xs^{-1})}{\Delta^r(x)\Delta^r(s^{-1})}\\&=\Delta^r(s)(fs)^*(x),\end{aligned}$$

于是，有

$$\mu(f^*s)=\Delta^r(s)\mu((fs)^*).$$

我们已有

$$\mu(f^*s) = \Delta'(s)\mu(f^*).$$

比较上两式，因 $\Delta'(s) \neq 0$，故得到

$$\mu((fs)^*) = \mu(f^*).$$

即

$$\rho(fs) = \rho(f).$$

因此，ρ 是右不变 Haar 测度．于是，存在 $\lambda > 0$，使得

$$\rho(f) = \lambda\nu(f),\ \forall f \in C_c(G).$$

我们下面证明 $\lambda = 1$．

因 $\Delta'(s)$ 连续，故对任意 $\varepsilon > 0$，存在 e 的对称邻域 V，使得对一切 $s \in V$，有

$$\left|1 - \frac{1}{\Delta'(s)}\right| < \varepsilon.$$

我们可以找到一个函数 $f \in C_c^+(G)$，$\operatorname{supp}(f) \subseteq V$，且 $\mu(f) = 1$．进一步可设 $f = \check{f}$，不然只要用 $f\check{f}$ 代替 f 即可．于是有

$$|\check{f} - f^*| = \left|f - \frac{f}{\Delta}\right| = \left|1 - \frac{1}{\Delta}\right| f < \varepsilon f.$$

因为 μ 是正测度，可知

$$|\mu(\check{f}) - \mu(f^*)| < \varepsilon\mu(f) = \varepsilon.$$

注意到 $\mu(\check{f}) = \mu(f) = 1$，$\mu(f^*) = \rho(f) = \lambda$，因此有

$$|1 - \lambda| < \varepsilon.$$

ε 可任意小，故必有 $\lambda = 1$． □

以上关系简记为 $d(x^{-1}) = \Delta'(x^{-1})dx$．

系理． μ 为 G 的左不变测度，则对 $f \in C_c(G)$，有

$$\int_G f(x^{-1})\Delta'(x^{-1})d\mu(x) = \int_G f(x)d\mu(x).$$ □

下面讨论一下么模群．

命题 4.5． Hausdorff 紧群是么模群．

证 设 G 是 Hausdorff 紧群．因此，函数 $f \equiv 1$ 是属于 $C_c^+(G)$ 的．把它代入

$$\mu(fs) = \Delta'(s)\mu(f),$$

则得 $\Delta'(s) = 1$，对任意 $s \in G$． □

命题 4.6. 设G为局部紧 Hausdorff 群，若G存在一个单位元的紧邻域 V，在G的内自同构下不变，则它是么模群.

证. 设μ为G的左不变 Haar 测度. 记 φ_V 是V的特征函数. 因为V是紧的，故

$$0 \neq \int \varphi_V(x) d\mu(x) < \infty.$$

即V为可测集(见习题 3). 由假设，对任意 $s \in G$，有 $sVs^{-1} = V$. 于是，$\varphi_V(x) = \varphi_V(sxs^{-1})$ 且

$$\int \varphi_V(sxs^{-1}) d\mu(x) = \int \varphi_V(x) d\mu(x).$$

左方为

$$\Delta^r(s) \int \varphi_V(x) d\mu(x).$$

因此
$$\Delta^r(s) = 1.$$ □

命题 4.7. 设G是局部紧的 Hausdorff 群，σ是G的拓扑自同构. μ和ν分别是G的左、右 Haar 测度. 则必存在唯一的正实数 $\delta(\sigma)$，使得对一切 $f \in L^1(G)$，有

$$\int f(\sigma^{-1}(x)) d\mu(x) = \delta(\sigma) \int f(x) d\mu(x),$$

$$\int f(\sigma^{-1}(x)) d\nu(x) = \delta(\sigma) \int f(x) d\nu(x).$$

证. 只须对 $f \in C_c(G)$ 证明即可. 令

$$\mu'(f) = \int f(\sigma^{-1}(x)) d\mu(x).$$

对 $s \in G$，设 $s^{-1} = \sigma^{-1}(t)$. 则

$$\begin{aligned}\mu'(sf) &= \int (sf)(\sigma^{-1}(x)) d\mu(x) = \int f(s^{-1}\sigma^{-1}(x)) d\mu(x) \\ &= \int f(\sigma^{-1}(tx)) d\mu(x) = \int f(\sigma^{-1}(x)) d\mu(x) \\ &= \mu'(f).\end{aligned}$$

因此，μ' 是G的左 Haar 测度. 故存在唯一的 $\delta(\sigma) > 0$，使第一式成立. 同理，存在唯一的 $\delta(\sigma')$，使第二式成立. 令 $\nu(f) =$

$\nu(f)$，则

$$\int \check{f}(\sigma^{-1}(x))d\mu(x) = \delta(\sigma)\int \check{f}(x)d\mu(x) = \delta(\sigma)\int f(x)d\nu(x).$$

另一方面，

$$\int \check{f}(\sigma^{-1}(x))d\mu(x) = \int f(\sigma^{-1}(x))d\nu(x)$$

$$= \delta(\sigma')\int f(x)d\nu(x).$$

比较两式可得

$$\delta(\sigma) = \delta(\sigma'). \qquad \square$$

定义 4.2. G的拓扑自同构σ，若使 4.6 中 $\delta(\sigma)=1$，则σ称为么模自同构。

命题 4.8. $\delta:\sigma\to\delta(\sigma)$ 是从G的拓扑自同构群到 $\mathbf{R}_+^*$ 的同态。

证 设μ为G的左 Haar 测度。σ,τ是G的两个拓扑自同构。

$$\delta(\sigma\tau)\int f(x)d\mu(x) = \int f((\sigma\tau)^{-1}(x))d\mu(x)$$

$$= \int f(\tau^{-1}\sigma^{-1}(x))d\mu(x) = \delta(\tau)\int f(\sigma^{-1}(x))d\mu(x)$$

$$= \delta(\tau)\delta(\sigma)\int f(x)d\mu(x).$$

选取 f，使得 $\mu(f)\neq 0$，则得到 $\delta(\sigma\tau)=\delta(\sigma)\delta(\tau)$。 $\square$

命题 4.9. 设G如上定义。对G的每个拓扑自同构σ，有$\Delta^r(\sigma(s))=\Delta^r(s)$，对任意 $s\in G$.

证 设μ为G的左 Haar 测度。考虑

$$\int f(\sigma^{-1}(xs^{-1}))d\mu(x) = \Delta^r(s)\int f(\sigma^{-1}(x))d\mu(x)$$

$$= \Delta^r(s)\delta(\sigma)\int f(x)d\mu(x).$$

我们有

$$\int f(\sigma^{-1}(xs^{-1}))d\mu(x) = \int f(\sigma^{-1}(x)\sigma^{-1}(s^{-1}))d\mu(x)$$

$$= \Delta^r(\sigma(s^{-1})) \int f(\sigma^{-1}(x))d\mu(x)$$

$$= \Delta^r(\sigma(s^{-1}))\delta(\sigma) \int f(x)d\mu(x),$$

对任意 σ，比较两式得

$$\Delta^r(\sigma(s)) = \Delta^r(s). \qquad \square$$

命题 4.10. 设 H, K 都是局部紧 Hausdorff 群，μ, ν 分别是它们的左 Haar 测度．则 $\mu\times\nu$ 是 $G=H\times K$ 的左不变 Haar 测度，且 $\Delta_G^r(s,t)=\Delta_H^r(s)\Delta_K^r(t)$, $\forall s\in H$, $t\in K$.

证. 由第一章命题 1.5 和命题 6.3 可知，G 是局部紧的 Hausdorff 群．设 $f\in C_c(G)$, $s\in H$, $t\in K$．则由 Fubini 定理，下式成立

$$\int_K\int_H f(s^{-1}x,t^{-1}y)d\mu(x)d\nu(y) = \int_K\int_H f(x,y)d\mu(x)d\nu(y).$$

因此，$\mu\times\nu$ 确是 G 的左不变 Haar 测度．另外，

$$\begin{aligned}
&\int_K\int_H f(xs^{-1},yt^{-1})d\mu(x)d\nu(y)\\
&\quad= \int_K\left(\int_H f(xs^{-1},yt^{-1})d\mu(x)\right)d\nu(y)\\
&\quad= \Delta_H^r(s)\int_H\left(\int_K f(x,yt^{-1})d\nu(y)\right)d\mu(x)\\
&\quad= \Delta_H^r(s)\Delta_K^r(t)\int_K\int_H f(x,y)d\mu(x)d\nu(y).
\end{aligned}$$

由定义，

$$\begin{aligned}
&\int_K\int_H f(xs^{-1},yt^{-1})d\mu(x)d\nu(y)\\
&\quad= \Delta_G^r(s,t)\int_K\int_H f(x,y)d\mu(x)d\nu(y).
\end{aligned}$$

比较两式，得到

$$\Delta_H^r(s)\Delta_K^r(t) = \Delta_G^r(s,t). \qquad \square$$

系理. $G=H\times K$ 如上定义．则 G 是么模群当且仅当 H, K 是么模群．

证. 充分性显然．现设 G 是么模群，则

$$\Delta_G'(s,t)=1.$$

取 s 为 H 的单位元，得 $\Delta_K'(t)=1$. 同理，取 t 为 K 的单位元，可得 $\Delta_H'(s)=1$. □

显然，命题 4.10 可推广到有限个局部紧 Hausdorff 群乘积的情形.

命题 4.11. G 是局部紧 Hausdorff 群. H 是它的开子群. 则 $\Delta_H'(t)=\Delta_G'(t)$, 对任意 $t\in H$.

证. 设 μ 是 G 的 Haar 测度. 由第一章命题 1.7 可知，H 是局部紧 Hausdorff 群. 对任意 $f\in C_c(H)$, $\operatorname{supp}(f)=U$ 是紧集. 因为 H 是开集，故可设 $f(x)=0$, 对 $x\in G\backslash H$. 使得 f 成为 G 上的连续函数，$f\in C_c(G)$. 于是，$\int_G f(x)d\mu(x)$ 就是 H 上的 Haar 测度. 自然地有 $\Delta_H'(t)=\Delta_G'(t)$, $\forall t\in H$. □

系理. 如果局部紧的 Hausdorff 群 G 为幺模群，则 G 的开子群是幺模群.

类似的结论对于 G 的正规闭子群也是成立的，但证明过程要麻烦一点. 我们先观察另一结果.

命题 4.12. 设 G, K 都是局部紧 Hausdorff 群. $\pi: G\to K$ 是连续满同态，$H=\ker\pi$. dy, dz 分别表示 H, K 的左 Haar 测度. 则下式定义 G 的一个左 Haar 测度 dx,

$$\int_G f(x)dx=\int_K f^0(z)dz,\quad \forall z\in C_c(G),$$

其中

$$f^0(\pi(x))=\int_H f(xy)dy.$$

证. 首先要说明积分是有意义的. 因为 H 是 $\{e\}$ 在 π 下的原象，所以，它是闭子群. 因而，它是局部紧 Hausdorff 群. 故存在左 Haar 测度 dy. 对任意 $x\in G$, $f(xy)$ 看成是 y 的函数，当 $y\in H$ 时，它是 H 上的连续函数. 其支集包含在 $x^{-1}\operatorname{supp}(f)\cap H$ 中. 故

$$\tilde{f}(x) = \int_H f(xy)dy$$
有意义. 而且,由于它对H是左不变,所以有$\tilde{f}(hx) = \tilde{f}(x)$, $\forall h \in H$. 即 $\tilde{f}$ 在H的同一陪集上取相同值. 故可以定义
$$f^\circ(\pi(x)) = \tilde{f}(x).$$
注意到 $\pi(\mathrm{supp}(f)) \supseteq \mathrm{supp}(f^\circ)$, 加之 $x \longmapsto \tilde{f}(x)$ 及π都是连续的,因此 $f^\circ \in C_c(K)$. 可定义
$$\mu(f) = \int_K f^\circ(z)dz.$$
现在,我们证明μ是G上左不变 Haar 测度. 注意到
$$\begin{aligned}(sf)^\circ(\pi(x)) &= \int_H (sf)(xy)dy = \int_H f(s^{-1}xy)dy \\ &= f^\circ(\pi(s^{-1}x)) = f^\circ(\pi(s)^{-1}\pi(x)) \\ &= \pi(s)f^\circ(\pi(x)),\end{aligned}$$
有
$$(sf)^\circ = \pi(s)f^\circ.$$
于是
$$\begin{aligned}\mu(sf) &= \int_K (sf)^\circ(z)dz = \int_K (\pi(s)f^\circ)(z)dz \\ &= \int_K f^\circ(\pi(s)^{-1}z)dz = \int_K f^\circ(z)dz = \mu(f).\end{aligned}$$
记
$$\mu(f) = \int_G f(x)dx,$$
即完成定理的证明. □

命题 4.13. G是局部紧 Hausdorff 群, H是G的闭正规子群. 则 $\Delta_H^l(t) = \Delta_G^l(t)$, $\forall t \in H$.

证. 由第一章命题 4.10 和 6.4, 可知H与 G/H 都是局部紧 Hausdorff 群. 记 $\pi: G \to G/H = K$. 以 dy, dz 表示H和K的左 Haar 测度. 命题 4.12 所对应的G的 Haar 测度记为 dx. 对 $f \in C_c(G)$, $t \in H$, 有(按命题4.12的符号)
$$(ft)^\circ(\pi(x)) = \int_H (ft)(xy)dy = \int f(xyt^{-1})dy$$

$$= \Delta'_H(t)\int_H f(xy)dy = \Delta'_H(t)f^\circ(\pi(x)),$$

即

$$(ft)^\circ = \Delta'_H(t)f^\circ.$$

于是

$$\int_G (ft)(x)dx = \int_K (ft)^\circ(z)dz = \int_K \Delta'_H(t)f^\circ(z)dz$$

$$= \Delta'_H(t)\int_K f^\circ(z)dz = \Delta'_H(t)\int_G f(x)dx,$$

即

$$\Delta'_H(t) = \Delta'_G(t), \quad \forall t \in H. \qquad \square$$

系理．设G是局部紧么模群，则G的每个闭正规子群也是么模群。 $\square$

§5. 相对不变测度

设G是局部紧 Hausdorff 群．E是局部紧 Hausdorff 空间，它是G的(左)齐性空间．通过G在E上的作用，便得G在 $C_c(E)$ 上的作用：$s\in G$，$x\in E$，$f\in C_c(E)$．定义

$$(sf)(x) = f(s^{-1}x).$$

注意 $s^{-1}x$ 表示 s^{-1} 作用在 x 上的结果．

对任意 $s\in G$，$x\longmapsto sx$ 是E到E上的同胚．设 $\mu\in \mathbf{M}(E)$，则从本章定义 1.2，可知有测度 $s_*(\mu)$，$s_*(\mu)(f) = \mu(s^{-1}f)$．设$\mu$为$E$上的正测度，称$\mu$对$G$是拟不变的，是指存在$G\times E$上的正函数 $\delta(s,x)$，使δ在紧集上有界；对每个s，$x\longmapsto \delta(s,x)$ 是可测函数，并且

$$d\mu(sx) = \delta(s,x)d\mu(x).$$

如果上述 $\delta(s,x)$ 与x无关，则我们称μ是G的相对不变测度．这时，显然有

$$\mu(sf) = \delta(s)\mu(f).$$

如果 $\delta = 1$，我们说μ是E的G不变测度．

命题 5.1. 设H是局部紧 Hausdorff 群G的闭子群，G以左平移作用在齐性空间 G/H 上。则在 G/H 上必存在对G的拟不变测度。

为了证明5.1，我们先看几个引理。设 G,H 同命题5.1中定义。映射 π: $G\to G/H$, $x\longmapsto xH$. 记 xH 为 x°，dx,dy 分别为 G,H 的左 Haar 测度。若 $f\in C_c(G)$，设

$$f^\circ(x^\circ)=\int_H f(xy)dy,$$

则有

命题 5.2. 记号如上，有

(1) 对任意 $s\in G$，$f\in C_c(G)$，有 $(sf)^\circ=sf^\circ$;

(2) 对任意 $t\in H$，$f\in C_c(G)$，有 $(ft)^\circ=\Delta_H^r(t)f^\circ$.

证. (1) $$(sf)^\circ(x^\circ)=\int_H (sf)(xy)dy=\int_H f(s^{-1}xy)dy$$
$$=f^\circ((s^{-1}x)^\circ)=f^\circ(s^{-1}x^\circ)=sf^\circ(x^\circ).$$

(2) $$(ft)^\circ(x^\circ)=\int_H (ft)(xy)dy=\Delta_H^r(t)\int_H f(xy)dy$$
$$=\Delta_H^r(t)f^\circ(x^\circ).$$ □

命题 5.3. G,H 和π如上定义。若K是 G/H 的紧集，则存在G中紧集 K，使得 $\pi(J)=K$.

证. 设V是G中e的紧邻域。则对 $s\in G$，Vs 是 s 的紧邻域，$\pi(s)\in\pi(Vs)$，后者是紧集。由于π是映上的，$\{\pi(Vs)\}_{s\in G}$ 是 G/H 的覆盖，K是紧集，所以存在 $s_1,\cdots,s_n\in G$，使得 $K\subseteq\bigcup_{i=1}^{n}\pi(Vs_i)=\pi\left(\bigcup_{i=1}^{n}Vs_i\right)$. 令

$$J=\bigcup_{i=1}^{n}Vs_i\cap\pi^{-1}(K),$$

则 $\pi(J)=K$，J 是紧集合 $\bigcup_{i=1}^{n}Vs_i$ 中的闭集，故是G中紧集合。

□

命题 5.4. 以上符号意义不变．则在 G 上存在正连续函数 f，使得：对任意紧集 $J\subset G$，有 $JH\cap \operatorname{supp}(f)$ 是紧集，且对任意 $x\in G$，有

$$\int_H f(xy)dy=1.$$

证. 因为 H 是闭群，故对任何紧集 $J\subseteq G$，JH 是闭集（见第一章习题 3)．取 g 为有紧支集的正函数，由命题 1.1，可知 g 的存在性．于是，$JH\cap \operatorname{supp}(g)$ 是紧集中的闭集，当然也是紧集．设

$$g^\circ(x)=\int_H g(xy)dy.$$

因为 dy 是 H 的左不变测度，所以 $g^\circ(x)$ 对于 H 的同一陪集取同样的值．令 $f=g/g^\circ$，则

$$\int_H f(xy)dy=1.$$

不难看出 $\operatorname{supp}(f)=\operatorname{supp}(g)$．$f$ 即为所求的函数． □

命题 5.5. 映射 $C_c(G)\to C_c(G/H)$：$f\longmapsto f^\circ$ 是满的．在这个映射下，$C_c^+(G)$ 的象是 $C_c^+(G/H)$．

证. 设 $g\in C_c(G/H)$．取 f 为命题 5.4 中所作的函数．令 $h(x)=g(\pi(x))f(x)$．由命题 5.3，存在 G 的紧子集 K，使得 $\pi(K)=\operatorname{supp}(g)$．则 $\operatorname{supp}(h)=HK\cap\operatorname{supp}(f)$ 是 G 的紧集．而且

$$\begin{aligned}h^\circ(x)&=\int_H g(\pi(xy))f(xy)\,dy=g(\pi(x))\int_H f(xy)dy\\&=g(\pi(x)).\end{aligned}$$

□

命题 5.6. G 有连续函数 $\delta>0$，并且对任意 $x\in G,y\in H$，有

$$\delta(xy)=\delta(x)\frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)},$$

其中 Δ_H,Δ_G 分别是 H,G 的(右)模函数．

证. 取 f 为命题 5.4 所给的函数．定义

$$\delta(x)=\int_H\frac{\Delta_G(y)}{\Delta_H(y)}f(xy)dy,$$

则

$$\delta(xy_1)=\int_H \frac{\Delta_G(y)}{\Delta_H(y)} f(xy_1y)dy$$

$$=\frac{\Delta_H(y_1)}{\Delta_G(y_1)}\int \frac{\Delta_G(y_1y)}{\Delta_H(y_1y)} f(xy_1y)dy$$

$$=\frac{\Delta_H(y_1)}{\Delta_G(y_1)}\delta(x). \qquad \square$$

命题 5.1 的证明：取 δ 为引理 5.6 中的函数. 在 G 上取测度 $d\mu=\delta(x)dx$. 则对 $y\in H$, 有

$$d\mu(xy)=\delta(xy)d(xy)=\frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)}\delta(x)\cdot\Delta_G(y)dx$$

$$=\Delta_H(y)d\mu(x).$$

设 $f,g\in C_c(G)$. 则

$$\mu(g^\circ f)=\int_G f(x)\left(\int g(xy)dy\right)d\mu(x)$$

$$=\int_G\int_H f(xy^{-1})g(x)dyd\mu(xy^{-1})$$

$$=\int_G\int_H f(xy^{-1})g(x)\Delta_H(y^{-1})dyd\mu(x)$$

$$=\int_G\int_H f(xy)g(x)dyd\mu(x)$$

$$=\mu(f^\circ g).$$

若 $f^\circ=0$, 我们取 g° 在 $\mathrm{supp}(f)$ 上的值为 1, 可见 $\mu(f)=0$.

由命题 5.5, 对任意 $\nu\in M(G/H)$, 可以定义 $\nu^\circ\in M(G)$ 如下: $f\in C_c(G)$, 定义 $\nu^\circ(f)=\nu(f^\circ)$.

以上的讨论告诉我们, 存在 $\nu\in M(G/H)$, 使得 $\mu=\nu^\circ$. 这时, 对 $s\in G$, 有

$$d\mu(sx)=\delta(sx)d(sx)=\delta(sx)dx=\frac{\delta(sx)}{\delta(x)}d\mu(x).$$

从命题 5.6 中 δ 的定义可知, $\delta(sx)$ 与 $\delta(x)$ 只与 sx 与 x 所属的 H 的陪集有关. 于是

$$d\nu(\pi(sx)) = \frac{\delta(sx)}{\delta(x)}\, d\nu(\pi(x)).$$

因此，这个 ν 是 G/H 上对于 G 的拟不变测度. □

由上面 $\mu(f) = \nu^{\circ}(f) = \nu(f^{\circ})$，有公式

$$\int_G f(x)\delta(x)dx = \int_{G/H}\left(\int_H f(xy)dy\right)dx^{\circ}.$$

下面把 G 视为其自身的齐性空间，我们讨论 G 的相对不变测度.

定义 5.1 一个局部紧的 Hausdorff 群 G 上的正测度 μ 称为**相对(左)不变的**，如果对每个 $s\in G$ 存在一个 $\Delta(s)>0$，使得 $\mu(sf) = \Delta(s)\mu(f)$，$\forall f\in C_c(G)$.

显然，Δ: $s\longmapsto \Delta(s)$ 是 G 到正实数乘法群 $\mathbf{R}_+^\times$ 中的连续同态(命题 2.2)，它称为 μ 的**左模**. 为了区分模函数，把它记为 $\Delta_\mu^l(s)$. 类似地可以定义相对(右)不变测度 ν 及**右模** Δ_ν^r.

命题 5.7 G 如上定义. μ 是 G 上左(右)不变Haar测度. Δ: $G\to\mathbf{R}_+^\times$ 是连续同态. 则

$$\nu(f) = \int_G \Delta(x)f(x)d\mu(x),\quad f\in C_c(G),$$

是相对左(右)不变测度，ν 的左(右)模为 Δ. G 的每个相对左(右)不变测度都可被这样唯一表出.

证. 设 μ 为左不变 Haar 测度. 则

$$\nu(sf) = \mu(\Delta sf) = \Delta(s)\mu(s(\Delta f)) = \Delta(s)\mu(\Delta f) = \Delta(s)\nu(f).$$

故 ν 是左模为Δ的相对左不变测度.

反之，设有 ν 为相对左不变测度，其左模为Δ. 令 $\mu(f) = \nu(f/\Delta)$. 则

$$\mu(sf) = \nu(sf/\Delta) = \nu\left(\frac{sf}{s\Delta}\right)\Big/\Delta(s) = \Delta(s)\nu(f/\Delta)/\Delta(s)$$
$$= \mu(f).$$

因此，μ 为左不变测度. 显然，还有

$$\nu(f) = \mu(\Delta f).$$

由 Haar 测度的唯一性，可知表法唯一。右不变情形可同样证明。 □

系理. 具有相同右左模的两个相对左(右)不变测度彼此只差一个正实数因子。 □

命题 5.8. G 是局部紧的 Hausdorff 群。每个 G 的相对左不变测度同时也是相对右不变测度。反之亦然。记此相对左不变测度为 ν。则对每个 $s\in G$，有

$$\Delta_\nu^r(s)=\Delta_\nu^l(s)\Delta_G^r(s).$$

证. 由命题 5.7 可知，存在 G 的左 Haar 测度 μ，使得

$$\nu(f)=\mu(\Delta_\nu^l f).$$

由命题 4.4，可知

$$\nu(f)=\check{\mu}(\Delta_\nu^l\Delta_G^r f),$$

其中 $\check{\mu}$ 定义为 $\check{\mu}(f)=\mu(\check{f})$，它是 G 的右不变 Haar 测度。由命题 5.7，可知 $\nu(f)$ 是相对右不变测度，其右模恰为 $\Delta_\nu^l(s)\Delta_G^r(s)$。 □

例. V 是实 n 维向量空间，我们设 μ 为 V 的左 Haar 测度。由命题 5.7，为了构造相对左不变测度只要找 $V\to\mathbb{R}_+^\times$ 的连续同态。这种同态必形如

$$\Delta(x)=e^{t(x)},$$

其中 t 为 V 到 $\mathbb{R}$ 的加法群的同态(习题)。于是 V 中任何相对不变测度必形为

$$\nu(f)=\int_V f(x)e^{t(x)}d\mu(x).$$

设 H 为 G 的闭子群，下面我们要证明 Weil 关于 G/H 上相对不变测度存在的充分必要条件的定理。

定理. (A. Weil) 设 G 是局部紧的 Hausdorff 拓扑群，H 是 G 的闭子群。G 以左平移作用于 G/H 上。则在 G/H 上存在一个以 Δ 为左模的相对不变测度 μ 的充分必要条件是

$$\Delta_H^r(t)=\Delta(t)\Delta_G^r(t),\quad \forall t\in H,$$

其中 Δ 是 G 到 $\mathbb{R}_+^\times$ 的连续同态，除差一个常数因子外，μ 是唯一的。

证. 设 G/H 上存在以 Δ 为左模的相对不变测度 μ. 在 G 中可定义正测度 $\nu(f)=\mu(f^\circ)$，对一切 $f\in C_c(G)$. 由命题 5.2，对 $s\in G$，有

$$\nu(sf)=\mu(sf^\circ)=\Delta(s)\mu(f^\circ)=\Delta(s)\nu(f).$$

因此，ν 是 G 上相对不变测度. 又由命题 5.2，对 $t\in H$，有

$$\nu(ft)=\mu((ft)^\circ)=\Delta_H^r(t)\mu(f^\circ)=\Delta_H^r(t)\nu(f).$$

由命题 5.8，对 $s\in G$，有

$$\nu(fs)=\Delta_\nu^l(s)\Delta_G^r(s)\nu(f).$$

比较两式，可得

$$\Delta_H^r(t)=\Delta_\nu^l(t)\Delta_G^r(t).$$

反之，设等式成立，由命题 5.7，G 必存在以 Δ 为左模的相对不变测度，假设它为 ν. 则 $\Delta=\Delta_\nu^l$. 下面我们证明：若 $f^\circ=0$，则 $\nu(f)=0$.

若 $f^\circ=0$，即

$$\int_H f(xy)dy=0.$$

由命题 4.4，可有

$$\int_H f(xy^{-1})\Delta_H^r(y^{-1})dy=0.$$

对任一 $F\in C_c(G)$，有

$$\int_G F(x)\left(\int_H f(xy^{-1})\Delta_H^r(y^{-1})dy\right)d\nu(x)$$

$$=\int_H \Delta_H^r(y^{-1})\Delta_\nu^r(y)\left(\int_G f(x)F(xy)d\nu(x)\right)dy.$$

比较所给等式

$$\Delta_H^r(y)=\Delta_\nu^l(y)\Delta_G^r(y),$$

和命题 5.8 中的等式

$$\Delta_\nu^r(y)=\Delta_\nu^l(y)\Delta_G^r(y),$$

可得

$$\Delta_H^r(y)=\Delta_\nu^r(y).$$

于是，有

$$\int_G f(x)\left(\int_H F(xy)dy\right)d\nu(x)$$
$$=\int F^\circ(\pi(x))f(x)d\nu(x)=0.$$
特别地取 F，使得 F° 在 $\pi(\mathrm{supp}(f))$ 上为 1. 当 $f^\circ=0$ 时，必有 $\nu(f)=0$. 这样我们可定义
$$\mu(f^\circ)=\nu(f).$$
由命题 5.5，可知 μ 为在 $C_c(G/H)$ 上有定义的非零正测度. 注意到
$$\mu(sf^\circ)=\mu((sf)^\circ)=\nu(sf)=\Delta(s)\nu(f)=\Delta(s)\mu(f^\circ).$$
因此，μ 是 G/H 上左模为 Δ 的相对不变测度.

Δ 是确定的，由命题 5.7 的系理可知，μ 除一常数因子外唯一确定. □

系理. 当 G 和 H 都是幺模群时，G/H 存在非零不变测度. 分别记 μ 和 ν 为 G/H 和 G 的不变测度. 则有
$$\nu(f)=\mu(f^\circ),\quad \forall f\in C_c(G).$$

证. G 和 H 都是幺模群，$\Delta_H^*(t)=\Delta_G^*(t)=1$. 取 $\Delta=1$，用 Weil 定理，可得结论. □

由以上讨论可以得出

命题 5.9. 当 G,H 为幺模群时，有
$$\int_G f(x)dx=\int_{G/H}\left(\int_H f(xy)dy\right)dx^\circ.$$

命题 5.10. 设 G 为局部紧的 Hausdorff 拓扑群. $H\supset S$ 是 G 的两个闭子群. π: $G/S\to G/H$. 对 $p\in G/H$，固定 $q\in\pi^{-1}(p)$，φ_p: $H/S\to\pi^{-1}(p)$，$yS\longmapsto qyS$. 若 G/S 存在有限 G 不变测度 μ，则 G/H 及 H/S 分别存在有限 G 不变测度 μ_1,μ_2，而且
$$\int_{G/S}fd\mu=\int_{G/H}\left(\int_{H/S}f\circ\varphi_p d\mu_2\right)d\mu_1.$$

证. 在 G/H 上定义测度 μ_1 如下:
$$\mu_1(v)=\mu(\pi^{-1}(v)).$$
显然，μ_1 是 G/H 上的 G 不变测度，而且

$$\mu_1(G/H) < \infty.$$

μ_1 是 G 不变的，等价于(由 Weil 定理)

$$\Delta_H(t) = \Delta_G(t), \quad \forall t \in H.$$

同理，从 μ 在 G/S 上不变可得

$$\Delta_S(x) = \Delta_G(x), \quad \forall x \in S.$$

所以对 $x \in S$，有

$$\Delta_H(x) = \Delta_S(x),$$

并且 H/S 有不变测度 μ_2 (仍由 Weil 定理)。取 $f \in C_c(G/S)$，对 $p \in G/H$，设

$$f^\circ(p) = \int_{H/S} f \cdot \varphi_p d\mu_2.$$

因为 μ_2 是 H/S 上的不变测度，$f^\circ(p)$ 与 q 的选取无关，且 $f^\circ \in C_c(G/H)$。令

$$I(f) = \int_{G/H} f^\circ d\mu_1.$$

显然，I 是对 G 在 G/S 上的作用不变的线性泛函。因此，它决定 G/S 上的一个不变测度 μ_0。因为 G/S 上的不变测度只相差常数因子，故可设 $\mu_0 = \mu$。对 G/S 上的常函数 1 积分，可得

$$\mu(G/S) = \mu_1(G/H)\mu_2(H/S).$$

因此，
$$\mu_2(H/S) < \infty. \qquad \square$$

§6. 卷　　积

在 §3 中我们曾简单提到过卷积。现在，我们将卷积的定义引入 $L^1(G)$ 和 $L^p(G)$ 中。

仍设 G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群，dx 是 G 上左 Haar 测度，μ 是 G 的有界复值测度，即 $\mu(G) < \infty$。

设 T_μ 是作用在 G 的函数空间上的线性算子：

$$T_\mu f(x) = \int f(y^{-1}x) d\mu(x).$$

我们有

命题 6.1. 假设 G, μ, T_μ 如上定义，$\mu(G)<\infty$. 则 T_μ: $f\mapsto T_\mu f$ 是 $C_c(G)$ 到 $L^p(G)$ 的连续线性算子，且对正整数 p，有

$$\|T_\mu f\|_p\leqslant\|f\|_p\mu(G).$$

证. 显然，只要证明这个不等式就能说明：当 $f\in C_c(G)$ 时，$T_\mu f\in L^p(G)$. 这也就证明了连续性.

$p=1$ 时，不等式显然成立. 当 $p>1$ 时，我们有

$$\begin{aligned}\|T_\mu f\|_p^p&=\int\left|\int f(y^{-1}x)d\mu(x)\right|^p d\mu(y)\\&\leqslant\int\left(\int|f(y^{-1}x)|d\mu(x)\right)^p d\mu(y)\\&\leqslant\int(\|f\|_p\mu(G)^{\frac{1}{q}})^p\,d\mu(y)\leqslant\|f\|_p^p\mu(G)^{\frac{p}{q}+1}\\&=\|f\|_p^p\mu(G)^p,\end{aligned}$$

其中 q 满足 $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 对两式开 p 次方就得到了不等式. □

由于 $C_c(G)$ 是 $L^p(G)$ 的稠密子集，因此可以将 T_μ 的定义域扩展到 $L^p(G)$ 上. 我们有

命题 6.2. T_μ 是 $L^p(G)$ 到其自身的连续线性映射，进一步，有 $\|T_\mu f\|_p\leqslant\|f\|_p\mu(G)$.

命题 6.3. 若 G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群，则 $G\times G$ 亦然. 取 $d(x,y)$ 为 $G\times G$ 上的 Haar 测度，则 $d(x,y)=d(y^{-1}x,\ y)$，即 Haar 测度在变换 $(x,y)\mapsto(y^{-1}x,y)$ 之下不变.

证. 由 $G\times G$ 的 Haar 测度，我们可定义积分

$$F\to\int_{G\times G}F(x,y)d(x,y).$$

另一方面，

$$F\to\int_G\left(\int_G F(x,\ y)dx\right)dy$$

也是不变测度. 由 Haar 测度的唯一性（必要时，将 $d(x,y)$ 乘以正因子），可得

$$\int_{G\times G}F(x,y)d(x,y)=\int_G\left(\int_G F(x,y)dx\right)dy.$$

因为

$$\int_G F(x,y)dx=\int_G F(y^{-1}x,y)dx,$$

故得

$$\int_{G\times G}F(x,y)d(x,y)=\int_{G\times G}F(y^{-1}x,y)d(x,y). \qquad \square$$

设 $f,g\in L^1(G)$. 则 $g(x)f(y)\in L^1(G\times G)$.因为$(x,y)\longmapsto(y^{-1}x,\ y)$ 是$G\times G$到自身的同胚,所以,对几乎所有 x, $y\longmapsto g(y^{-1}x)f(y)\in L^1(G)$. 即

$$\int g(y^{-1}x)f(y)dy<\infty.$$

设 $f\in L^1(G)$, 设 $d\mu=|f|dx$. 则

$$\mu(G)=\int|f|dx=\|f\|_1<+\infty.$$

对 $g\in L^p(G)$, 有

$$T_\mu g(x)=\int g(y^{-1}x)d\mu(x)=\int g(y^{-1}x)f(y)dy<\infty.$$

由 6.2, T_μ 是 $L^p(G)$ 到 $L^p(G)$ 的线性算子. 于是, 我们可以定义

定义 6.1. 设 $f\in L^1(G)$, $g\in L^p(G)$. 函数

$$(f*g)(x)=\int f(y)g(y^{-1}x)dx\in L^p(G)$$

几乎处处有定义.我们称它为 f 与 g 的卷积.

习 题

1. 设G为局部紧的 Hausdorff 群. 考虑所有从G到 $\mathbf{R}\cup\{-\infty\}\cup\{+\infty\}$ 的函数. 称它为下半连续的, 是指对任意 $x_0\in G$, 或者有 $f(x_0)=-\infty$, 或者是 $f(x_0)>-\infty$, 且存在 h, 使得若 $f(x_0)>h$, 则存在 x_0 的邻域 V, 对任意 $x\in V$, 有$f(x)>h$. 连续函数自然是下半连续的. 求证

(1) 对 $\{f_i\}_{i\in I}$, 每个 f_i 都下半连续 $\Rightarrow \sup\limits_{i\in I} f_i = f$ 是下半连续.

(2) f,g 是下半连续,则 $f+g$ 是下半连续(除了在使 $f(x)=\infty$, $g(x)=-\infty$ 的点外).

(3) f 是下半连续的$\Rightarrow$对任意 $\lambda>0$, λf 是下半连续.

(4) 记

$D(G)=\{f|f:\ G\to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}\cup\{-\infty\},\ f$ 下半连续$\}$,

$D^+(G)=\{f|f\in D(G),\ f\geqslant 0\}$.

f 是一个正函数, 则 $f=\sup\{g|g\leqslant f,\ g\in C_c^+(G)\}$ 当且仅当 $f\in D^+(G)$.

2. 设 G 是局部紧 Hausdorff 群,则在 G 上有左 Haar 测度 μ. 我们在 $C_c(G)$ 上定义范数

$$\|f\|_1=\mu(|f|).$$

沿用习题1的符号,对于 $f\in D^+(G)$, 定义

$$\mu^*(f)=\sup\{\mu(g)|g\in C_c^+(G),\ g\leqslant f\}.$$

对于 $f\in C_c^+(G)$, 自然有 $\mu^*(f)=\mu(f)$. 因此 μ^* 是 μ 到 $D(G)$ 上的扩张,我们仍记它为 μ. 记

$$\|f\|_1=\mu(|f|),$$

$$D(G,\mu)=\{f|\|f\|_1<+\infty\}.$$

显然有 $D(G,\mu)\supseteq C_c(G)$. 取 $C_c(G)$ 在 $D(G,\mu)$ 中的闭包,记之为 $L^1(G)$. $L^1(G)$ 中的函数称为可积函数. $\mu(f)$ 称为 f 的积分,也可写为 $\int f d\mu$. $L^1(G)$ 即是 $C_c(G)$ 在 $\|\cdot\|_1$ 下的完备化,它是 $D(G,\mu)$ 的线性子空间. 求证:

(1) $f\in L^1(G)$ 则 $|f|\in L^1(G)$,

(2) $f,g\in L^1(G)$,则 $\sup(f,g)$ 与 $\inf(f,g)$ 都属于 $L^1(G)$.

3. 当常函数是可积函数时,即 $\int_G d\mu<+\infty$, 我们称 G 存在有限测度. 记为 $\mu(G)=\int_G d\mu$.

设 V 是 G 的子集合，定义 V 的特征函数 φ_V 如下

$$\varphi_V(x)=\begin{cases}1, & x\in V,\\ 0, & x\notin V.\end{cases}$$

如果 $\varphi_V(x)\in L^1(G)$，V 称为有有限测度的，或称可测集。此时，$\int_G \varphi_V\, d\mu$ 称为 V 的测度，记为 $\mu(V)$。显然，集合的测度是非负实数，我们约定空集测度为 0。求证：

(1) 设 V_1 和 V_2 都是 G 的子集，则有

$$\varphi_{V_1\cup V_2}=\sup\{\varphi_{V_1},\varphi_{V_2}\},$$
$$\varphi_{V_1\cap V_2}=\inf\{\varphi_{V_1},\varphi_{V_2}\}.$$

(2) 设 V_1,V_2 都是 G 中可测集，则 $V_1\cap V_2$，$V_1\cup V_2$，$V_1\cup(G\backslash V_2)$ 都是可测集。

(3) G 的子集 U 称为相对紧的，如果 $\bar{U}$ 是紧集。证明 G 中相对紧开子集是可测集。

(4) G 中紧子集是可测集。

4. 设 G 是局部紧 Hausdorff 拓扑群，e 是 G 的单位元，μ 是 G 的左或右 Haar 测度。证明：

(1) G 的拓扑是离散拓扑 $\Leftrightarrow \mu(\{e\})>0$，

(2) G 是紧群 $\Leftrightarrow \mu$ 是有界测度。

5. 设 G 是局部紧的 Hausdorff 拓扑群，取 $\mu_1,\mu_2\in M(G)$。我们说 μ_1,μ_2 是可卷积的，如果对一切 $f\in C_c(G)$，函数 $f(x_1,x_2)\in L^1(G\times G,\ \mu_1\otimes\mu_2)$，其中 $\mu_1\otimes\mu_2$ 是乘积测度(朱成熹[90]，第五章)。求证：

(1) $f\longmapsto \int_G\int_G f(x_1,x_2)d|\mu_1|(x_1)d|\mu_2|(x_2)$，

是 G 上的测度，它称为 μ_1,μ_2 的卷积，记为 $\mu_1 * \mu_2$。

(2) $(M^1(G),\ \|\cdot\|)$ 对卷积乘法是 Banach 代数。

(3) 固定 G 的一个左测度，则 $L^1(G)$ 是 $M^1(G)$ 的闭 (双边)理想。

(4) $M^1(G)$ 是交换代数 $\Leftrightarrow G$ 是交换群。

第三章　局部紧交换群

本章所考虑的拓扑群都是局部紧的 Hausdorff 交换群。

§1. 对　偶　群

定义 1.1. 设 $S=\{z\in\mathbf{C}\mid |z|=1\}$，则它是紧交换群。$G$ 为拓扑群。我们称拓扑群的连续同态 $\chi: G\to S$ 为 G 的特征标(也可称为酉特征标)。以 $\hat{G}$ 记 G 的全部特征标。若 $\chi_1,\chi_2\in\hat{G}$，定义

$$(\chi_1\chi_2)(x)=\chi_1(x)\chi_2(x),\ \forall x\in G.$$

对于这个乘法，$\hat{G}$ 构成交换群。在 $\hat{G}$ 上取紧开拓扑如下：对 G 的任意紧子集 K 和 $\varepsilon>0$，设

$$U(K,\varepsilon)=\{\chi\in\hat{G}\mid |\chi(x)-1|<\varepsilon,\forall x\in K\}.$$

从下面命题 1.1 可知，对 G 的一切紧集 K 和 $\varepsilon>0$，$\{U(K,\varepsilon)\}$ 构成单位特征标的开基，$\hat{G}$ 称为 G 的对偶群。

命题 1.1. $\hat{G}$ 对紧开拓扑是局部紧交换拓扑群。

证. 不难验证，$\{U(K,\varepsilon)\}$ 满足第一章命题 3.1 中 1)—4)。现在我们以 2) 为例证明。

设 $\chi\in U(K,\varepsilon)$，因为 χ 是连续的，K 是紧的，所以

$$\max\{|\chi(x)-1|\mid x\in K\}=\alpha<\varepsilon$$

于是，对于 $\chi\in U(K,\varepsilon)$，存在 $V=U(K,\varepsilon-\alpha)$，使得 $V\chi\subseteq U(K,\varepsilon)$。

下面证明 $\hat{G}$ 是局部紧的。设

$$W_n=\left\{e^{2\pi i\alpha}\mid |\alpha|<\frac{1}{3n}\right\}.$$

K 为 G 的单位元的紧闭邻域，W 为 $1\in S$ 的闭邻域，且 $W\subseteq W_1$。可以证明

$$U(K, W) = \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(K) \subseteq W\}$$
是 $\hat{G}$ 的紧闭子集

在 G 上取离散拓扑，所得的拓扑群记为 G_*. 则 $\hat{G}_*$ 为紧群，这是因为：对于 $x \in G$，取 S_x 与 S 同构，则 $\prod_{x \in G} S_x$ 为紧群，而

$$\hat{G}_* = \left\{\theta \in \prod_{x \in G} S_x \mid \theta(xy) = \theta(x)\theta(y)\right\}$$

是闭子群。 $\chi \in \hat{G}$ 可看成 $\hat{G}_*$ 的元素 χ_*，于是有单映射 $\hat{G} \to \hat{G}_*$; $\chi \longmapsto \chi_*$. 只需证明对诱导拓扑 $\varphi: U(K, W) \to U(K, W)_*$ 是双连续的，且 $U(K, W)_*$ 是闭集即可。

$U(K, W)$ 中的任意邻域形如
$$U(K, W) \cap U(K_1, W_{2n}),$$
其中 K_1 为 G 的紧子集，取 G 的单位元邻域 V，使得 $V^n \subset K$. 则存在有限集 $F \subset G$，使得 $K_1 \subset FV$. 记
$$U_*(F, W_n) = \{\theta \in \hat{G}_* \mid \theta(F) \subseteq W_n\}.$$
则
$$U(K, W)_* \cap U_*(F, W_n)$$
是 $U(K, W)_*$ 的邻域. 显然，
$$U(K, W)_* \cap U_*(F, W_n) \subseteq U(K, W) \cap U(K, W_{2n}).$$
因此，φ 是双连续的。

现在设 θ 属于 $U(K, W)_*$ 在 $\hat{G}_*$ 中的闭包。显然 $\theta(K) \subseteq W$. 对任意正整数 n，取 G 的单位元邻域 V，使得 $V^n \subseteq K$. 则 $x \in V \Rightarrow \theta(x) \in W_n$. 因此对任意邻域 W_n，存在单位元邻域 V，使得 $\theta(V) \subseteq W_n$. 即 θ 连续. 于是 $\theta \in U(K, W)_*$. □

系理 1.2. (1) G 为离散拓扑群 $\Rightarrow \hat{G}$ 为紧拓扑群.

(2) G 为紧拓扑群 $\Rightarrow \hat{G}$ 为离散拓扑群.

证. 在命题 1.1 的证明中，取 $K = \{e\}$，便得到(1). 从 $U(G, W_1) = \{1\}$，可得(2). □

例 1. $\hat{\mathbb{Z}} = S$.

我们有单映射 $\hat{\mathbb{Z}} \to S$; $\chi \longmapsto \chi(1)$，其逆为 $S \to \hat{\mathbb{Z}}$; $z \longmapsto$

χ_z。其中 χ_z 是 Z的元，它满足 $\chi_z(1)=z$。不难验证，这便是所需的拓扑群同构。

例 2. $\hat{\mathrm{R}}=\mathrm{R}$.

对于 $y\in\mathrm{R}$，设 $\chi_y(x)=e^{ixy}$. 只要证明 $R\to\hat{\mathrm{R}}$，$y\to\chi_y$ 为满映射. 对任意 $\chi\in\hat{\mathrm{R}}$，考虑闭子群

$$K=\{x\in\mathrm{R}\,|\,\chi(x)=1\}.$$

有三个可能性，

(1) $K=\mathrm{R}$，这时 $\chi=\chi_0$.

(2) $K=\{0\}$. 但因 χ 的象集连通，必有 $a\in(0,1]$，$m\in\mathrm{Z}$，使得 $\chi(a)=e^{2\pi i/m}$. 因此这种情况不会出现.

(3) $K=\{kb\,|\,b\in\mathrm{Z}\}$，$b$ 是最小的正实数 x，使得 $\chi(x)=1$ 此时，可设

$$\chi(b/4)=e^{\pi i/2}$$

(否则以 $\bar{\chi}$ 代替 χ). 若 $k>1$，且

$$\chi(b/2^k)=e^{2\pi i/2^k}, \qquad (*)$$

则

$$\chi(b/2^{k+1})=e^{2\pi i/2^{k+1}} \text{ 或 } e^{2\pi i/2^{k+1}+\pi i}.$$

后一情况不会发生，否则，$\chi([b/2^{k+1}, b/2^k])$ 为 S 紧连通子集，它必包含 1 或 -1，这样有 $a\in(b/2^{k+1}, b/2^k)$，使得 $\chi(a)=1$ 或 -1. 于是，$\chi(2a)=1$，而 $2a<\dfrac{b}{2^{k-1}}\leqslant b$. 这与 b 的选取矛盾. 因此，对任意 k 有($*$)成立. 由于 χ 连续，且任意实数 x 可用形如 $\pm\sum\limits_{K=N}^{M}2^{-K}b$ 的数来逼近. 故总有 $\chi(xb)=e^{2\pi ix}$. 即 $\chi=\chi_{2\pi/b}$.

下面讨论对偶群的若干性质.

命题 1.3. 设 G_1, G_2 为局部紧交换群. 对于 $\chi_i\in\hat{G}_i$, $x_i\in G_i$, $i=1,2$，令 $\theta(\chi_1,\chi_2)(x_1,x_2)=\chi_1(x_1)\chi_2(x_2)$. 则 $\theta:\hat{G}_1\times\hat{G}_2\to\widehat{G_1\times G_2}$ 为拓扑同构.

证. 设 $\phi\in\widehat{G_1\times G_2}$. 取 $\chi_1(x_1)=\phi(x_1,e_2)$，$\chi_2(x_2)=\phi(e_1,x_2)$，则 $\phi=\theta(\chi_1,\chi_2)$，故 θ 为满映射，不难证明 θ 为群同构.

若 $U(K,\varepsilon)$ 为 $\widehat{G_1\times G_2}$ 单位元的邻域，取 K_i 为 K 在 G_i 的投

影，则

$$\theta\left(U\left(K_1, \frac{\varepsilon}{2}\right) \times U\left(K_2, \frac{\varepsilon}{2}\right)\right) \subset U(K, \varepsilon).$$

反之，若 $U(K_i, \varepsilon_i)$ 为 $\hat{G}_i$ 的单位元邻域，$i = 1, 2$. 取 $\varepsilon = \min(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$，$K = (K_1 \cup e_1) \times (K_2 \cup e_2)$，则

$$U(K, \varepsilon) \subset \theta(U(K_1, \varepsilon_1) \times U(K_2, \varepsilon_2)).$$

这就证明了 θ 是同胚.

定义 1.2. 设 A 为局部紧交换群 G 的子集，令

$$A^{\perp} = \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(A) = 1\}.$$

称 $A^{\perp}$ 为 A 在 $\hat{G}$ 中的零化子.

命题 1.4. 设 H 是局部紧交换群 G 的子群，则有如下的拓扑同构：

(1) $G/H \cong H^{\perp}$，当 H 是闭子群，

(2) $\hat{G}/H^{\perp} \cong \hat{H}$，当 H 是开子群.

证. (1) $\pi: G \to G/H$ 为商同态. 显然，映射 $\sigma: \widehat{G/H} \to H^{\perp}$，$\phi \longmapsto \phi \circ \pi$ 为群同态. 设 $\chi \in H^{\perp}$，取 $\phi: G/H \to S$，$xH \longmapsto \chi(x)$. 则 ϕ 是连续的，并且 $\sigma(\phi) = \chi$. 另一方面，容易证明 $\sigma(\phi) = 1 \Rightarrow \phi = 1$. 设 K 是 G 的紧子集，则 $\{xH \mid x \in K\}$ 是 G/H 的紧子集. 反之，G/H 的任一紧子集均有此种形式（见第二章，命题 5.3）. 对 $\varepsilon > 0$，有

$$\sigma(\{\phi \in \widehat{G/H} \mid |\phi(xH) - 1| < \varepsilon, \text{其中 } x \in K\})$$
$$= \{\chi \in H^{\perp} \mid |\chi(x) - 1| < \varepsilon, \text{其中 } x \in K\}.$$

所以，σ 把 $\widehat{G/H}$ 的单位元开基映为 $H^{\perp}$ 的单位元的开基. 故 σ 为同胚.

(2) 对 $\chi \in \hat{G}$，以 $\rho(\chi)$ 记 $\chi|_H$. 现设 $\phi \in \hat{H}$，$x \notin H$，$H_1 = \{x^n h \mid h \in H, n \in \mathbb{Z}\}$. 若对一切 $n \geqslant 2$，$x^n \notin H$，设 $\phi_1(x^n h) = \phi(h)$. 若存在最小 k，使得 $x^k \in H$，设 $z \in S$，使得 $z^k = \phi(x^k)$. 这时，取 $\phi_1(x^n h) = z^n \phi(h)$，便将 ϕ 扩张到 H_1 上. 用 Zorn 引理，可将 ϕ 扩张为同态 $\chi: G \to S$. 因为 H 是开子群，ϕ 为连续，所以扩张所得的 χ 亦为连续. 显然，$\rho(\chi) = \phi$. 于是我们有群正合序

列

$$1 \to H^{\perp} \to \hat{G} \xrightarrow{\rho} \hat{H} \to 1.$$

若 C 为 H 的紧子集，则

$$\rho^{-1}\{\phi \in \hat{H} \mid |\phi(x) - 1| < \varepsilon, x \in C\} = U(C, \varepsilon).$$

因为 C 也是 G 的紧子集，故 ρ 是连续. 反过来，设

$$W_0 = \left\{z \in S \,\middle|\, |z| < \frac{1}{2}\right\}, \quad W = \left\{z \in S \,\middle|\, |z| \leqslant \frac{1}{2}\right\},$$

$$U_G(C, W_0) = \{\chi \in \hat{G} \mid \chi(C) \subset W_0\},$$

$$U_H(C, W_0) = \{\phi \in \hat{H} \mid \phi(C) \subset W_0\}, \cdots$$

等等. 则开集 $U_G(C, W_0)$ 的闭包 $U_G(C, W)$ 是紧子集. $U_G(C, W_0)$ 生成的 $\hat{G}$ 的子群记为 X，$U_H(C, W_0)$ 生成的子群记为 Y. X, Y 分别是 $\hat{G}$, $\hat{H}$ 的开子群，它们都是局部紧的. X 又是 σ-紧的. $\rho(U_G(C, W_0)) = U_H(C, W_0) \Rightarrow \rho(X) = Y$. 由第一章命题 3.5，可得 ρ 为开映射，因此 ρ 即为所需的拓扑同构. □

当 G 是局部紧交换群时，G 有充分多的特征标，确切地说，有以下命题.

命题 1.5. 如果 G 是局部紧交换群，则对任意 $x \in G$, $x \neq e$, 存在 $\chi \in \hat{G}$, 使得 $\chi(x) \neq 1$.

证. 因为 G 的所有酉表示都是 1 维的，利用 Gelfand Raikov 定理，便得命题[1]. □

定义 1.3. 固定 $x \in G$. 定义

$$\delta(x): \hat{G} \to S, \; \chi \longmapsto \chi(x).$$

δ 是 $G \to \hat{\hat{G}}$ 的映射.

命题 1.6. $\delta: G \to \hat{\hat{G}}$ 是连续单同态.

证. 对 $\chi, \phi \in \hat{G}$, $\chi\phi^{-1} \in U(\{x\}, \varepsilon) \Rightarrow |\delta(x)(\chi) - \delta(x)(\phi)| < \varepsilon$, 所以 $\delta(x)$ 连续，即 $\delta(x) \in \hat{\hat{G}}$.

现在证明 δ 在 e 处连续. 设 Y 是 $\hat{G}$ 的紧集，$\varepsilon > 0$. 取 W 是 G 的单位元开邻域，使得 $\bar{W}$ 是紧集. $U(\bar{W}, \varepsilon/2)$ 为 $1 \in \hat{G}$ 的邻

1) 我们在下一章将证明 Gelfand Raikov 定理. 它与本章的理论是彼此独立的.

域。设 Y 被 $\chi_1 U(\overline{W},\varepsilon/2),\cdots,\chi_m U(\overline{W},\varepsilon/2)$ 所覆盖。取 G 的单位元开邻域 V，使得 $V\subset W$，并且对 $x\in V$，$1\leqslant j\leqslant m$，有 $|\chi_j(x)-1|<\varepsilon/2$。这时，对任意 $x\in V$，$\chi\in Y$，必存在 j，使得

$$|\chi(x)-1|\leqslant|\chi_j(x)-1|+|\chi_j(x)-\chi(x)|<\varepsilon.$$

这样我们便证明了：对 $\hat{G}$ 中 1 的任意开邻域 $U(Y,\varepsilon)\subseteq\hat{\hat{G}}$，必存在 e 的开邻域 V，使得 $\delta(V)\subseteq U(Y,\varepsilon)$。

容易证明，δ 为群同态。又因为 G 有充分多特征标，故 δ 为单同态。 □

例. 考虑 $\delta:\mathbb{R}\to\hat{\hat{\mathbb{R}}}$。对 $x\in\mathbb{R}$，$\delta(x):\hat{\mathbb{R}}\to S$，$\chi_y\longmapsto e^{ixy}$。由于 $\hat{\mathbb{R}}$ 与 $\mathbb{R}$ 同构，故 $\hat{\mathbb{R}}$ 的每一个特征必然形如 $\chi_y\to e^{iay}$，其中 $a\in\mathbb{R}$。因此 δ 是满的。

本章的一个重要结论是：δ 是一个同构，即 §3 中的对偶定理。下面我们为此作一系列准备工作。

引理 1.7. 设 G 是紧交换群，Y 是 $\hat{G}$ 的子群。如果对 G 中任意元素 $x\neq e$，存在 $\chi\in Y$，使得 $\chi(x)\neq1$，则 $Y=\hat{G}$。

证. 设

$$A=\left\{\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\chi_j\ \ \alpha_j\in\mathbb{C},\ \chi_j\in Y\right\}.$$

以 $C(\hat{G})$ 表示 $\hat{G}$ 在 $\mathbb{C}$ 上群代数。则 A 是 $C(\hat{G})$ 的子代数，且满足 Stone-Weierstrass 定理的条件，故知 A 是 $C(\hat{G})$ 的一致稠密子集。如果存在 $\phi\in\hat{G}\backslash Y$，则必定有 $\sum\limits_{j=1}^{m}\alpha_j\chi_j\in A$，使得

$$\|\phi-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\chi_j\|<1.$$

范数是在 $L^2(G)$ 上取的，其中 χ_j 各不相同，也与 ϕ 不相同。注意对 $\chi\in\hat{G}$，有

$$\int_G\chi(x)dx=\begin{cases}0, & 若\ \chi\neq1,\\ 1, & 若\ \chi=1.\end{cases}$$

所以，有

$$1 > \int_G |\phi - \sum_{j=1}^m \alpha_j \chi_j|^2 dx = \int_G \phi\bar{\phi} dx - \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_G \chi_j \bar{\phi} dx$$

$$- \sum_{j=1}^m \bar{\alpha}_j \int_G \bar{\chi}_j \phi dx + \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \alpha_j \bar{\alpha}_k \int_G \chi_j \bar{\chi}_k dx$$

$$= 1 + \sum_{j=1}^m |\alpha_j|^2 \geqslant 1.$$

因此 $Y = \hat{G}$. □

命题 1.8. 若 G 为离散交换群，则 $\delta: G \to \hat{\hat{G}}$ 为拓扑同构.

证. G 离散 $\Rightarrow \hat{G}$ 紧. $\delta(G) \subseteq \hat{\hat{G}}$. 由于 δ 是单映射，故 $\delta(G)$ 满足引理 1.7 的条件，所以 $\delta(G) = \hat{\hat{G}}$，且 $\hat{\hat{G}}$ 也是离散群. δ 当然是拓扑同构. □

引理 1.9. 如果 G 是局部紧交换群，H 是 G 的闭子群，$x \in G$，$x \notin H$，则存在 $\chi \in H^{\perp}$，使得 $\chi(x) \neq 1$.

证. 取 $\sigma: \widehat{G/H} \to H^{\perp}$，$\phi \longmapsto \phi \circ \pi$. 由命题 1.5，存在 $\phi \in \widehat{G/H}$，使得 $\phi(xH) \neq 1$，$\sigma(\phi) \in H^{\perp}$，$\sigma(\phi)(x) = \phi(xH) \neq 1$. □

命题 1.10. 若 G 是紧交换群，则 $\delta: G \to \hat{\hat{G}}$ 是拓扑同构.

证. 由于 G 是紧的，所以 $\hat{G}$ 是离散的，即 $\hat{\hat{G}}$ 是紧的. δ 连续，因此 $\delta(G)$ 是 $\hat{\hat{G}}$ 的紧子集，故为闭子群. 若 $\delta(G) \neq \hat{\hat{G}}$，由引理 1.9，可知有 $\hat{\hat{G}}$ 的特征标 ϕ，使 $\phi \neq 1$，但 $\phi(\delta(G)) = 1$. 对 $\hat{G}$，利用命题 1.8，得到 $\chi \in \hat{G}$，$\chi \neq 1$，使得对一切 $\omega \in \hat{\hat{G}}$，$\phi(\omega) = \omega(\chi)$. 这样对一切 $x \in G$，有 $\phi(\delta(x)) = \delta(x)(\chi) = \chi(x) = 1$. 这与 $\chi \neq 1$ 矛盾. 因此 δ 是紧空间上的单、满映射，故 δ 是同胚. □

§2. 紧生成交换群的结构和对偶

定义 2.1. 我们称拓扑群 G 是**紧生成的**，如果 G 有紧子集 K，使得 K 生成的子群是 G. 即

$$G = \{e\} \bigcup_{n=1}^{\infty} (K \cup K^{-1})^n.$$

命题 2.1. 设 K 是局部紧群 G 的紧子集，则 G 有一个紧生成

子群 $H\supset G$，它既是开的又是闭的。

证. 对 $x\in K\cup\{e\}$，取开邻域 U_x，使得 $\overline{U}_x$ 是紧集. $K\cup\{e\}$ 是紧集 $\Rightarrow$ 存在 $x_1,\cdots,x_n$，使得 $K\cup\{e\}\subseteq\bigcup\limits_{k=1}^{n}U_{x_k}$. 取 $U=\bigcup\limits_{k=1}^{n}U_{x_k}$，则 U 是包有 $K\cup\{e\}$ 的开集，且 $\overline{U}$ 为紧集. 令 $H=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(U\cap U^{-1})^n=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}(\overline{U}\cup\overline{U}^{-1})^n$（开子群也是闭子群). 显然 H 满足命题所求. □

命题 2.2. 设 G 是紧生成局部紧交换群，则 G 有离散子群 N，使得 N 由有限个线性无关元生成. 并且 G/N 是紧群.

证. 设 G 由紧子集 K 生成. 如同命题 2.1 一样，存在开集 $V\supset K\cup\{e\}\cup K^{-1}$，使得 $\overline{V}$ 是紧集，且 $V=V^{-1}$. 于是，$G=\bigcup\limits_{n=1}^{\infty}\times V^n$. 由于 $(\overline{V})^2$ 是紧集，且 $GV=G$，则存在 $a_1,\cdots,a_m\in G$，使得 $V^2\subset\bigcup\limits_{i=1}^{m}a_iV$. 以 A 记 $a_1,\cdots,a_m$ 所生成的 G 的子群，则 $V^2\subset AV$，于是有 $AV^2\subset A^2V\subset AV$，$V^3=V^2\cdot V\subset AV^2\subset AV$，$V^4=V^3\cdot V\subset AV^2\subset AV,\cdots$，所以有 $G=AV$. 以 C_i 记 a_i 生成的子群. 则 $G=\overline{C}_1\overline{C}_2\cdots\overline{C}_m\overline{V}$. 如果 $\overline{C}_1,\cdots,\overline{C}_m$ 是紧集，则 G 是紧集. 取 $N=\{e\}$，即可得证. 若 $\overline{C}_i$ 不是紧集，C_i 是 G 的无限循环子群. 设 b_1 是第一个使 $\overline{C}_i$ 不是紧集的 a_i，归纳定义其余的 b_i. 假设已从 $a_1,\cdots,a_m$ 中选出 $b_1,b_2,\cdots,b_k$，使得 $b_1,b_2,\cdots,b_k$ 生成 G 的离散子群 N_k，而且 $b_1,\cdots,b_k$ 线性无关（即如 $b_1^{\alpha_1}\cdots b_k^{\alpha_k}=e$，$\alpha_i\in\mathbf{Z}$，则 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$). 若 G/N_k 是紧群，则取 $N=N_k$. 若 G/N_k 不是紧群，考虑商同态 $\varphi:G\to G/N_k$. $G/N_k=\overline{\varphi(A)}\varphi(\overline{U})\Rightarrow\overline{\varphi(A)}$ 不是紧集. 因为 $\overline{\varphi(A)}\subset\overline{\varphi(C_1)}\cdots\overline{\varphi(C_m)}$，所以存在 $\overline{\varphi(C_i)}$，它不是紧集. 因此，$\varphi(C_i)$ 是 G/N_k 的无限循环子群. 于是 $b_1,\cdots,b_k,a_i$ 线性无关. 取 $b_{k+1}=a_i$，N_{k+1} 为由 $b_1,\cdots,b_{k+1}$ 所生成的 G 的子群. 根据归纳假设，有 G 的单位元开邻域 W，使 $W\cap N_k=\{e\}$，并且对 $v\in W$，$n\in\mathbf{Z}$，

$n \neq 0$ 有 $vN_k \cap b_{k+1}^n N_k = \phi$，故 $W \cap N_{k+1} = \{e\}$。即 N_{k+1} 亦为 G的离散子群。因为 a_i 个数有限，所以必存在满足命题要求的 N_l，使 G/N_l 为紧群。 □

命题 2.3. 如果连通局部紧交换群G有离散子群 N，使得 $G/N \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$，$m$ 为非负整数，则存在拓扑同构 $G \cong (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^a \times \mathbb{R}^b$，其中 a，b 为非负整数。

证. 以φ记同态 $G \to G/N \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$，$\phi$ 为商同态 $\mathbb{R}^m \to (\mathbb{R}/\mathbb{Z})^m$。在 $\mathbb{R}^m$ 内取原点O的开邻域 U_0，使得 $U_0 = -U_0$。$(U_0 + U_0) \cap \mathbb{Z}^m = \{0\}$。取$G$的单位元邻域 V_0，使得 $V_0 = V_0^{-1}$，$V_0^2 \cap N = \{e\}$ 且 $\varphi(V_0) \subset \phi(U_0)$。取 $\alpha > 0$，使得 $U = \{x \in \mathbb{R}^m \mid \|x\| < \alpha\} \subset U_0 \cap \phi^{-1}(\varphi(V_0))$。设 $V = V_0 \cap \varphi^{-1}(\phi(U))$。这样，$\phi|_U$，$\varphi|_V$ 是单映射，且 $\varphi(V) = \phi(U)$。于是，对 $x \in U$，存在唯一的 $\Psi(x) \in V$，使得 $\varphi(\Psi(x)) = \phi(x)$。显然，若 x，y，$x+y \in U$，则 $\Psi(x+y) = \Psi(x)\Psi(y)$，$\Psi(-x) = \Psi(x)^{-1}$。

若有非零整数 n_1，n_2 和 y_1，$y_2 \in U$，使得 $n_1 y_1 = n_2 y_2$，则对 $k = 0$，± 1，$\cdots \pm n_2$，有$\left\|\dfrac{k y_2}{n_2}\right\| \leqslant \|y_2\|$，$y_2 \in U \Rightarrow \dfrac{k y_2}{n_2} \in U \Rightarrow \Psi(y_1) = \left(\Psi\left(\dfrac{y_1}{n_2}\right)\right)^{n_2}$。同理，$\Psi(y_2) = \left(\Psi\left(\dfrac{y_2}{n_1}\right)\right)^{n_1}$。于是 $n_1 y_1 = n_2 y_2 \Rightarrow \Psi(y_1)^{n_1} = \Psi(y_2)^{n_2}$。这样，对任意 $x \in \mathbb{R}^m$，总存在 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $y \in U$，使得 $x = ny$。我们定义 $\Psi(x) = (\Psi(y))^n$。因此，有群同态 $\Psi: \mathbb{R}^m \to G$。在 $\Psi(\mathbb{R}^m)$ 内可以找到G的单位元开邻域 W，使 $W = W^{-1}$。这时，$\Psi(\mathbb{R}^m)$ 包含G的开闭子群 $\bigcup_{n=1}^{\infty} W^n$，而$G$是连通的，因此 $\Psi(\mathbb{R}^m) = G$。

不难证明Ψ是连续开同态。以K记Ψ的核，U生成$\mathbb{R}^m$，故有 $\varphi \circ \Psi = \phi$，于是 $K \subseteq \mathbb{Z}^m$。若K为 0，则G与 $\mathbb{R}^m$ 拓扑同构。若K不为 0，必有 $\mathbb{Z}^m$ 的基 $e_1, \cdots, e_m$ 和正整数 $d_1, \cdots d_k$，$1 \leqslant k \leqslant m$。使得 $d_1 e_1, \cdots, d_k e_k$ 是K的基，以 $e_1, \cdots, e_m$ 为 $\mathbb{R}^m$ 的基，则

$$\mathbb{R}^m/K = \left\{\sum_{j=1}^{m} x_j e_j \,\middle|\, 0 \leqslant x_j < d_j \quad (1 \leqslant j \leqslant k),\ x_j \in \mathbb{R}\right\}.$$

所以 G 拓扑同构于 $(\mathbf{R}/\mathbf{Z})^k \times \mathbf{R}^{m-k}$. □

命题 2.4. 设局部紧交换拓扑群 G 有一个有限生成离散子群 N，使得 G/N 拓扑同构于 $S^n \times F_0$，其中 n 为非负整数，$S=\{z\in\mathbf{C} \mid |z|=1\}$，$F_0$ 为有限群. 则存在非负整数 a, b, c 和有限交换群 F，使得

$$G \cong S^a \times \mathbf{R}^b \times \mathbf{Z}^c \times F.$$

证. 记商同态 $G\to G/N$ 为 φ，投射 $\rho: S^n\times F_0 \to S^n$. 可设 $G/N=S^n\times F_0$. 则 $\rho\circ\varphi: G\to \mathbf{R}^m$ 是连续的，开且满同态. 以 M 记 $\rho\circ\varphi$ 的核，它是有限个各不相交的陪集的并集: $M=N\cup x_1N\cup\cdots\cup x_kN$. 所以 M 是 G 的有限生成离散子群. 这样，$G/M \cong S^n$.

如果 $n=0$ $G=M$ 是有限交换群，那么，它必形如 $\mathbf{Z}^c\times F$.

如果 $n>0$，由于 M 离散，所以 G 有单位元邻域 U，使得 $\rho\circ\varphi|_U$ 是单映射 $\Rightarrow \rho\circ\varphi|_U: U\to\rho\circ\varphi(U)$ 是同胚. 因为 S^n 是(局部)连通，所以可假设 U 连通，且 $U=U^{-1}$. 于是，$\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} U^j$ 是 G 的连通开子群，也是闭子群，因而也必是 G 的单位元的连通分支 G^0. 由于 S^n 连通，所以 $\rho\circ\varphi(U)$ 生成 S^n，即 $S^n=\rho\circ\varphi(G^0)$，这样，$S^n=G^0/G^0\cap M$. 由命题 2.3，可得 $G^0\cong S^k\times\mathbf{R}^{n-k}$. 又因 $G=G^0M$，所以 $G/G^0\cong G^0M/G^0\cong M/M\cap G^0$ (注意 G^0M/G^0 与 $M/M\cap G^0$ 都是离散拓扑群. 因此，上述群同构自然是拓扑同构). 于是，G/G^0 是有限生成交换群. 存在非负整数 c 及有限交换群 F，使得 $G/G^0\cong \mathbf{Z}^c\times F$. 因为 $\rho\circ\varphi(G^0)=S^n$，所以对任意 $x\in G^0$ 和非负整数 n，存在 $y\in G^0$，使得 $x=y^n$. 故 $G\cong G^0\times(G/G^0)$，于是

$$G\cong S^k\times\mathbf{R}^{n-k}\times\mathbf{Z}^c\times F. \qquad \square$$

命题 2.5. 设 G 为紧交换群，U 为 G 的单位元开邻域. 则存在闭子群 H，使得 $H\subset U$，并且 $G/H\cong S^a\times F$，其中 a 为非负整数，F 为有限群.

证. 考虑对偶同构 $\delta: G \to \hat{\hat{G}}$. $\hat{G}$ 是离散群，$\hat{\hat{G}}$ 的单位元邻域 $\delta(U)$ 必包含邻域 $U(\Sigma,\varepsilon)$，其中 Σ 为 $\hat{G}$ 的有限子集，$\varepsilon > 0$. Σ 生成 $\hat{G}$ 的子群 Y，$Y^{\perp} \subset U(\Sigma, \varepsilon)$. 由有限生成交换群结构可知 $Y \cong \mathbb{Z}^a \times F$，其中 a 为非负整数，F 为有限群. 设 $H = \delta^{-1}(Y^{\perp})$，则 $H \subset U$，而且

$$G/H \cong \hat{\hat{G}}/Y^{\perp} \cong \hat{Y} \cong S^a \times F. \qquad \square$$

命题 2.6. 设 G 是紧生成局部紧交换群，U 是 G 的单位元开邻域. 则 U 包含紧子群 K，使得 $G/K \cong S^a \times \mathbb{R}^b \times \mathbb{Z}^c \times F$，其中 a, b, c 为非负整数，F 为有限交换群.

证. G 有有限生成离散子群 N，使得 G/N 为紧群(命题 2.2). $\rho: G \to G/N$ 为商同态. 取 W 为 G 的单位元开邻域，$\rho(W)$ 为紧群 G/N 的单位元开邻域. 由命题 2.5，G/N 有闭子群 $K_1 \subset \rho(W)$，使得 $(G/N)/K_1 \cong S^a \times F$. a 为非负整数，F 为有限群. 设 $K_0 = \rho^{-1}(K_1)$，$K = K_0 \cap W$. 我们可以假设 W 满足以下条件：$W = W^{-1}$，$\overline{W}$ 是紧集，$W \subset U$，$W^3 \cap N = \{e\}$. 不难证明 (i) $\rho(K) = K_1$；(ii) $\rho|_K: K \to K_1$ 是同胚；(iii) K 紧；(iv) K 是 G 的子群；(v) $K_0 = KN$ (例如 (iv)：$x, y \in K \Rightarrow xy^{-1} \in K_0$，$\Rightarrow$ 存在 $k \in K$，使 $\rho(xy^{-1}) = \rho(k) \Rightarrow xy^{-1}k^{-1} \in N \cap W^3 = \{e\} \Rightarrow xy^{-1} \in K$).

$N \cap K \subset N \cap W^3 = \{e\} \Rightarrow$ 开集 $(G\backslash N) \cup \{e\}$ 包含紧集 $K \Rightarrow$ G 有单位元开邻域 V，使得 $KV \subset (G\backslash N) \cup \{e\} \Rightarrow KV \cap N = \{e\}$. 设 $\phi: G \to G/K$ 为商同态，则 $\phi(V) \cap \phi(N) = \{K\}$. 所以 $\phi(N)$ 为 G/K 的离散子群. 另一方面，因为 $\phi^{-1}(\phi(N)) = KN = K_0$，所以 $(G/K)/\phi(N) \cong G/\phi^{-1}\phi(N) \cong G/K_0 \cong G/\rho^{-1}(K_1) \cong (G/N)/K_1 \cong S^a \times F$. 对局部紧交换群 G/K 及其离散子群 $\phi(N)$，用命题 2.4 即可得证. $\square$

以下是紧生成局部紧交换群的结构定理.

定理 2.7. 紧生成局部紧交换拓扑群必拓扑同构于 $\mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times K$，其中 a、b 为非负整数，K 为紧交换群.

证. 由命题 2.6，G 有紧子群 H，使得 $G/H = \mathbb{R}^a \times \mathbb{Z}^b \times S^c \times F$，其中 a, b, c 为非负整数，$S^c \times F$ 为紧交换群. $\rho: G \to G/H$

为商同态。取 $K=\rho^{-1}(S^c\times F)$。对G的任一紧子群 E，有 $E\subset\rho^{-1}(\rho(E))\subset\rho^{-1}(S^c\times F)=K$。所以，$K$是$G$的极大紧子群。又有 $G/K\cong\mathbf{R}^a\times\mathbf{Z}^b$。

设 $\mathscr{L}=\{L\mid L$ 是G的闭子群,使得 $G=LK\}$。在$\mathscr{L}$内引入偏序如下：当 $L_1\supset L_2$ 时，定义 $L_1<L_2$。取 $\{L_\alpha\}_{\alpha\in A}$ 是$\mathscr{L}$的线性有序子集，设 $L=\bigcap_{\alpha\in A}L_\alpha$。对 $x\in G$，$\alpha\in A$，存在 $y_\alpha\in L_\alpha$，和 $k_\alpha\in K$，使 $x=y_\alpha k_\alpha$。因为K是紧集，故网 $\{k_\alpha\mid\alpha\in A\}$ 有收敛子网 $\{q_\beta\mid\beta\in B\}$，即有函数 $\mu:B\to A$，使 $q_\beta=k_{\mu(\beta)}$。设 $k_0=\lim\limits_B q_\beta$。由 $\alpha\in A$，可知存在 $\beta\in B$，使得以下结论成立：如果 $\beta<r$，则 $\alpha<\mu(r)$。这样 $xq_r^{-1}=xk_{\mu(r)}^{-1}=y_{\mu(r)}\in L_{\mu(r)}\subset L_\alpha$，即 $\lim\limits_\beta xq_r^{-1}=xk_0^{-1}$.最后，闭集 L_α 包含 xk_0^{-1}。所以 $xk_0^{-1}\in L$，即 $x\in LK$，也即是 $G=LK$，故得 $L\in\mathscr{L}$。现在对$\mathscr{L}$用 Zorn 引理,可知它有极大元 L_0

设 $z\in L_0\cap K$，$z\neq e$。取不包含z的e的开邻域U。G是紧生成的 $\Rightarrow L_0$是σ-紧的 $\Rightarrow L_0/L_0\cap K\cong L_0K/K=G/K=\mathbf{R}^a\times\mathbf{Z}^b\Rightarrow L_0/L_0\cap K$ 是紧生成的 $\Rightarrow L_0$ 是紧生成的 $\Rightarrow L_0$ 有紧子群 H_0，使得 $H_0\subset L_0\cap U$ 及 $L_0/H_0\cong\mathbf{R}^{a_0}\times\mathbf{Z}^{b_0}\times T_0$，其中 T_0为紧群.以 ρ_0记商同态 $L_0\to L_0/H_0$。设 $K_0=\rho_0^{-1}(T_0)$，$L_1=\rho_0^{-1}(\mathbf{R}^{a_0}\times\mathbf{Z}^{b_0})$。则 $L_1\subset L_0$，$L_1\cap K_0=H_0$，$L_0=L_1K_0$。同样，K_0为L_0的极大紧子群。于是 $L_1\cap K=L_1\cap(L_0\cap K)\subset L_1\cap K_0=H_0\subset U\Rightarrow z\notin L_1\cap K\Rightarrow z\notin L_1\Rightarrow L_1\neq L_0$。$K_0$ 为紧群 $\Rightarrow K_0K$ 是G的紧子群 $\Rightarrow K_0K=K$。于是 $G=L_0K=L_1K_0K=L_1K\Rightarrow L_1\in\mathscr{L}$。但是,这便有 $L_1>L_0$，与 L_0是$\mathscr{L}$的极大元矛盾。所以 $L_0\cap K=\{e\}$。最后得 $G\simeq L_0\times K\simeq\mathbf{R}^c\times\mathbf{Z}^b\times K$。 □

以下是紧生成群的对偶定理。

命题 2.8. 如果G是紧生成局部紧交换群，则G与$\hat{\hat{G}}$拓扑同构。

证. 由结构定理知 $G=\mathbf{R}^a\times\mathbf{Z}^b\times K$，其中$K$是紧交换群.已知 $\hat{\hat{\mathbf{R}}}=\mathbf{R}$，$\hat{\hat{\mathbf{Z}}}=\mathbf{Z}$，由命题 1.10，可得 $\hat{\hat{K}}=K$。于是 $\hat{\hat{G}}\cong$

G. □

§3. 对偶定理

定理 3.1. 设 G 是局部紧交换群. 对偶同态 $\delta: G \to \hat{\hat{G}}$ 是拓扑同构.

证. (1) 设 H 是 G 的紧生成开子群.

首先,证明 $\delta(H) = H^{\perp\perp}$. 对 $x \in H$, 显然 $\delta(x) \in (H^{\perp})^{\perp} \subseteq \hat{\hat{G}}$. 若 $\chi, \chi_0 \in \hat{G}$, $\chi|_H = \chi_0|_H$, $f \in (H^{\perp})^{\perp}$, 则 $f(\chi) = f(\chi_0)$. 由 $\phi \in \hat{H} = \hat{G}/H^{\perp}$, 可知,存在 $\chi \in \hat{G}$, 使得 $\phi = \chi|_H$. 但 $f(\chi)$ 由 ϕ 决定, $\chi \longmapsto \chi|_H$ 是开映射,故 $\phi \longmapsto f(\chi)$ 是连续. 所以 $\phi \longmapsto f(\chi)$ 是 $\hat{H}$ 的元素. 据命题 2.8, 有对偶同构 $H \to \hat{\hat{H}}$, 所以存在 $x \in H$, 使得 $\delta(x)(\phi) = f(\chi)$. 即对任意 $\chi \in \hat{G}$, $f(\chi) = \chi(x)$.

其次, 我们证明 $H^{\perp\perp}$ 是 $\hat{\hat{G}}$ 的开子集. 因为 H 是 G 的开子群, 所以 G/H 是离散群. 于是 $\widehat{G/H} = H^{\perp}$ 是紧群,即存在 $\varepsilon > 0$, 使得 $H^{\perp\perp} = U(H^{\perp}, \varepsilon)$ 是 $\hat{\hat{G}}$ 的单位元开邻域.

最后,证明 $\delta: G \to \delta(G)$ 是拓扑同构. H 是 σ-紧,则 $\delta: H \to H^{\perp\perp}$ 是开映射. 因此, G 有一个单位元的基本开邻域组 $\mathscr{F}$, $U \in \mathscr{F}$. $\delta(U)$ 是 $\delta(G)$ 的开子集.

(2) 证明 $\delta(G) = \hat{\hat{G}}$.

先证明: 对 $\hat{G}$ 的任意单位元开邻域 U, 存在 G 的一个紧生成开子群 H, 使得 $H^{\perp} \subset U$.

取 G 的单位元开邻域 V, 使得 $V = V^{-1}$ 且 $\bar{V}$ 为紧集. 以 H_1 记 V 所生成的开子群, 则 H_1 也是闭子群而且可由 $\bar{V}$ 生成. 以 φ 记同构 $\widehat{G/H_1} \to H_1^{\perp}$. 因为 φ 连续且 G/H_1 是离散群,所以 $\varphi^{-1} \times (U \cap H_1^{\perp})$ 包含 $\widehat{G/H_1}$ 的开邻域 $U(F, \varepsilon)$, 其中 $F = \{x_1H_1, \cdots, x_mH\}$. 以 C 记 F 所生成的 G/H_1 的子群. 则 $C^{\perp} \subset \varphi^{-1}(U \cap H_1^{\perp})$. 取 G 的开子集 W, 使得 $W \supset \bar{V} \cup \{x_1, \cdots, x_m\}$, $\bar{W}$ 是紧集. 以 H 记由 W 所生成 G 的子群, 则 H 为 G 的紧生成开子群. 如果 $\chi \in H^{\perp}$, 则 $\chi \in H_1^{\perp}$, 且 $\chi(x_i) = 1$, 即 $\chi \in U$.

最后证明：如果 $f\in\hat{\hat{G}}$，则 $f\in\delta(G)$。f 连续，所以存在 $\hat{G}$ 的单位元开邻域 U，使得 $\chi\in U$。这样，$|f(\chi)-1|<1$。取 G 的紧生成开子群 H，使得 $H^{\perp}\subset U$。于是，对群 $H^{\perp}$ 的所有元 χ，都有 $|f(\chi)-1|<1$。这只可能是 $\chi\in H^{\perp}$，即 $f(\chi)=1$，$f\in H^{\perp\perp}$。由前面(1)可知 $H^{\perp\perp}=\delta(H)\subset\delta(G)$。 □

§4. Fourier 变 换

本节，我们将证明 Plancherel 定理及 Fourier 反演公式。

设 G 是局部紧拓扑群，$\hat{G}$ 是 G 的对偶群。对 $x\in G$，$\hat{x}\in\hat{G}$，以 $(x,\hat{x})$ 记 $\hat{x}(x)$。对 $1\leqslant p<\infty$，$L^p(G)$ 是指由定义在 G 上关于 G 的 Haar 测度 p 次可积函数所生成的 Banach 空间。这时，对 $f\in L^p(G)$，

$$\|f\|_p=\left(\int_G|f|^p dx\right)^{1/p}$$

对 $\hat{G}$ 有同样的记号。

定义 4.1. 设 $f\in L^1(G)$，$F\in L^1(\hat{G})$。取

$$B(f,F)=\int_G\int_{\hat{G}}f(x)\overline{F(\hat{x})}(x,\hat{x})dxd\hat{x},$$

$$\hat{f}(\hat{x})=\int_G f(x)(x,\hat{x})dx,$$

$$\hat{F}(x)=\int_{\hat{G}}F(\hat{x})\overline{(x,\hat{x})}d\hat{x}.$$

我们称 $\hat{f}$ 为 f 的 Fourier 变换，$\hat{F}$ 为 F 的 Fourier 变换。

例 1. 实数 $\mathbf{R}$ 对加法是局部紧拓扑群。因为 $\hat{\mathbf{R}}=\mathbf{R}$，所以 (x,t) 是 e^{-ixt}。这时，对 $f\in L^1(\mathbf{R})$，有 Fourier 变换

$$\hat{f}(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-ixt}dx.$$

例 2. 设 f 是以 2π 为周期的实变函数。通过以下公式：

$$f(t)=\tilde{f}(e^{it}),$$

使得定义在

$$S = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| = 1\}$$

上的函数 $\hat{f}$. 因为 $\hat{S}$ 是 $\mathbf{Z}$，这样便可把 (x, n) 看作 $e^{-inx}(n \in \mathbf{Z})$. 这时，Fourier 变换

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-inx}dx$$

是 f 的第 n 个 Fourier 系数，f 的 Fourier 级数是

$$\sum_{n \in \mathbf{Z}} \hat{f}(n)e^{inx}.$$

命题 4.1. (1) B 是双线性型.

(2) $B(f, F) = \int_G f(x)\hat{F}dx = \int_{\hat{G}} \hat{f}\,\overline{F(\hat{x})}d\hat{x}$.

(3) $|\hat{f}| \leqslant \|f\|_1$.

(4) $|\hat{F}| \leqslant \|F\|_1$.

(5) $|B(f, F)| \leqslant \|f\|_1\|F\|_1$.

(6) $\widehat{f * h} = \hat{f} \cdot \hat{h}$.

证. (1)至(5)是显然的. 现证明(6). 对

$$\widehat{f * h}(\hat{x}) = \iint f(y)h(y^{-1}x)(x, \hat{x})dxdy,$$

作变量代换 $x \longmapsto yx$，便可得证. □

命题 4.2. 如果 $f \in L^1(G)$，则 $\hat{f}$ 是 $\hat{G}$ 上连续函数.

证. 设 C 为 G 的紧子集，$f \in L^1(G)$ 满足条件：若 $x \notin C$，则 $f(x) = 0$. 对 $\varepsilon > 0$，设

$$\hat{V} = \{\vartheta \in \hat{G} \mid x \in C \Rightarrow |(x, \vartheta) - 1| \leqslant \varepsilon\}.$$

则 $\hat{V}$ 是 $\hat{G}$ 的单位元邻域，而且对 $\vartheta \in \hat{V}$，有

$$|\hat{f}(\hat{x}\vartheta) - \hat{f}(\hat{x})| \leqslant \varepsilon\|f\|_1.$$

所以，$\hat{f}$ 是 $\hat{G}$ 上的连续函数. 因为 $C_c(G)$ 是 $L^1(G)$ 的稠密子集 (Rudin [57] Chap 3). 所有 $f \in L^1(G)$ 都是 $C_c(G)$ 中元素序列的极限. 于是，$\hat{f}$ 是连续函数的一致极限，所以，$\hat{f}$ 是连续. □

定理 4.3. (Plancherel) 设 G 是局部紧交换群，$\hat{G}$ 是 G 的对偶群. 则可以在 G, $\hat{G}$ 上取适当的 Haar 测度，使得对 $f \in C_c(G)$，有

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_{\hat{G}} |\hat{f}(\hat{x})|^2 d\hat{x}.$$

我们先来证明以下"归纳"引理。以 $T(G)$ 记"定理 4.3 对群 G 正确."

引理. 如果 H 是 G 的开子群,则由 $T(H)$ 及 $T(G/H)$,可得 $T(G)$.

证. 设 $\varphi: G \to G/H$ 为商同态. 取 $u = \varphi(x)$, $x \in G$. 因为 $\widehat{G/H} = H^{\perp}$, 所以可取 $\hat{u}$ 为 $H^{\perp}$ 的变元. 设 $\psi: \hat{G} \to \hat{G}/H^{\perp}$ 为商同态,取 $\hat{y} = \psi(\hat{x})$, $\hat{x} \in \hat{G}$. 因为 $\hat{H} = \hat{G}/H^{\perp}$, 所以可取 y 为 H 的变元. 这样就有 $(y, \hat{u}) = 1$, $(y, \hat{x}) = (y, \hat{y})$ 及 $(x, \hat{u}) = (u, \hat{u})$.

取 $k \in C_c(G)$, 则

$$\tilde{k}(u) = \int_H k(xy)dy \quad (\varphi(x) = u)$$

是 G/H 上的函数. 设

$$\Lambda(k) = \int_{G/H} du \int_H k(xy)dy,$$

则 $\Lambda(k_s) = \Lambda(k)$, 其中 $k_s(x) = k(s^{-1}x)$, $s \in G$. 所以存在常数 C, 使得

$$\Lambda(k) = c\int_G k(x)dx.$$

我们可以在 G 上取 Haar 测度,使得 $c = 1$. 即有

$$\int_G k(x)dx = \int_{G/H} du \int_H k(xy)dx.$$

同样,在 $\hat{G}$ 选取适当的 Haar 测度,即对 $K \in C_c(\hat{G})$, 有

$$\int_{\hat{G}} K(\hat{x})d\hat{x} = \int_{\hat{G}/H^{\perp}} d\hat{y} \int_{H^{\perp}} K(\hat{x}\hat{u})d\hat{u} \quad (\psi(\hat{x}) = \hat{y}).$$

以上等式显然对任意的非负连续函数也成立. 于是有

$$\int |\hat{f}(\hat{x})|^2 d\hat{x} = \int d\hat{y} \int |\hat{f}(\hat{x}\hat{u})|^2 d\hat{u}.$$

直接计算,

$$\hat{f}(\hat{x}\hat{u}) = \int_G f(x)(x, \hat{x}\hat{u})dx = \int_{G/H} du \int_H f(xy)(xy, \hat{x}\hat{u})dy$$
$$= \int_{G/H} \Psi(u, \hat{x})(u, \hat{u})du.$$
其中
$$\Psi(u, \hat{x}) = \int_H f(xy)(xy, \hat{x})dy = (x, \hat{x})\Phi(x, \hat{y}),$$
$$\Phi(x, \hat{y}) = \int_H f(xy)(y\hat{y})dy.$$
显然，Φ，Ψ 均为连续函数，而且
$$\Psi(u, \hat{x}\hat{u}) = (u, \hat{u})\Psi(u, \hat{x}),$$
$$\Phi(xy, \hat{y}) = (y, \hat{y})\Phi(x, \hat{y}).$$
因为 $|\Psi|^2 = |\Phi|^2$，所以可引入函数
$$\Theta(u, \hat{y}) = |\Psi(u, \hat{x})|^2 = |\Phi(x, \hat{y})|^2.$$
由 $T(H)$，得知
$$\int |f(xy)|^2 dy = \int |\Phi(x\hat{y})|^2 d\hat{y} = \int \Theta(u, \hat{y})d\hat{y}.$$
另一方面，对任意的 $\hat{x}$，函数 $u \longmapsto \Psi(u, \hat{x})$ 属于 $C_c(G/H)$。由 $T(G/H)$，得
$$\int \Theta(u, \hat{y})du = \int |\Psi(u, \hat{x})|^2 du = \int |\hat{f}(\hat{x}\hat{u})|^2 d\hat{u}$$
于是
$$\int |f(x)|^2 dx = \int du \int |f(xy)|^2 dy = \int du \int \Theta(u, \hat{y})d\hat{y}.$$
另一方面，有
$$\int |\hat{f}(\hat{x})|^2 d\hat{x} = \int d\hat{y} \int |f(\hat{x}\hat{u})|^2 d\hat{u} = \int d\hat{y} \int \Theta(u, \hat{y})du.$$
这便证明了 $T(G)$。 □

现在再来证明定理 4.3。我们分四种情形考虑。

1. G 是离散拓扑群。在 G 上取 Haar 测度使每点的测度是 1。这时，由于 $f \in C_c(G)$，所以 $f = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\chi_i$。其中 $\chi_i \in \hat{G}$。若 $x \neq x_i$，有 $f(x) = 0$，$1 \leqslant i \leqslant n$。于是，定理 4.3 可由紧群 $\hat{G}$

的 Schur 正交性定理导出[1]（在 $\hat{G}$ 上取 Haar 测度，满足条件 $\int_{\hat{G}} dx = 1$）。

2. G 是紧群，取 Haar 测度，使得 $\int_G dx = 1$。在 $\hat{G}$ 上取 Haar 测度使每点测度为 1。这时，积分 $\int |\hat{f}(\hat{x})|^2 d\hat{x} = \sum_{\hat{x}\in\hat{G}} |\hat{f}(\hat{x})|^2$。设 $\tilde{f}(x) = f(x^{-1})$，则 $\tilde{f} = \sum_{\hat{x}\in\hat{G}} \hat{f}(\hat{x})\hat{x}$。所以，定理 4.3 可由紧群 G 的 Peter Weyl 定理得到。

3. G 由单位元的一个紧邻域生成。这时，有离散子群 N，使得 G/N 是紧群。于是，利用引理便知定理 4.3 对 G 也成立。

4. G 是任意的局部紧交换群。以 H 记 G 的一个单位元紧邻域所生成的子群。则 G/H 是离散群，所以定理 4.3 对 G 也成立。 □

系理 4.4. 如果 $f, g \in C_c(G)$，则

$$\int_G f(x)\overline{g(x)}dx = \int_{\hat{G}} \hat{f}(x)\overline{\hat{g}(\hat{x})}d\hat{x}.$$

证. 只需注意等式

$$4f\bar{g} = |f+g|^2 - |f-g|^2 + i|f+ig|^2 - i|f-ig|^2$$

即可。 □

系理 4.5. 如果 $f, g \in C_c(G)$，则

$$\widehat{fg} = \hat{f} * \hat{g}.$$

证. 在系理 4.4 中，把 $g(x)$ 换为 $\overline{g(x)}\overline{(x, \hat{y})}$，$\overline{\hat{g}(\hat{x})}$ 换为

$$\int g(x)(x, \hat{x}^{-1}\hat{y})dx,$$

就得到本系理。 □

下面系理给出 Fourier 反演公式。

系理 4.6. 设 $f \in C_c(G)$。如果 $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$，则 $\hat{\hat{f}} = f$。

证. 取 $g \in C_c(G)$，则

---

1) 我们将在第四章证明 Schur 正交性及 Peter Weyl 定理。这两个定理的证明均与本章独立，故亦可放在本章前。现在的倒序安排是为了便于学习。

$$\int fg\,dx = \int \hat{f}\hat{g}\,d\hat{x} = \int \hat{\hat{f}} g\,dx. \qquad \square$$

§ 5. Poisson 求和公式

设 Γ 是拓扑群 G 的离散子群，$\varphi: G \to G/\Gamma$ 是商映射. 如果 U 是 G 的单位元邻域，使得

$$U^{-1}U \cap \Gamma = \{e\},$$

则对任意 $x \in G$，$\varphi|_{xU}: xU \to \varphi(xU)$ 是同胚映射.

在局部紧群 G 上取右不变 Haar 测度 dx，则在 G/Γ 上存在唯一的测度 dx^0，如果 X 是 G 的可测子集，$X^0 = \varphi(X)$，$\varphi|_X: X \to X^0$ 是单、满映射，便有

$$\int_X dx = \int_{X^0} dx^0.$$

这时，对 $f \in C_c(G)$，以下公式成立:

$$\int_G f(x)\,dx = \int_{G/\Gamma} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} f(x\gamma)\right) dx^0,$$

其中 $x^0 = \varphi(x)$. 事实上，假如有如上选取的 x 和 U，则由 $y \notin xU$ 可导出 $f(y) = 0$，于是所求公式是显然的. 由此便可推出一般情形. 不难证明 dx 是右不变测度的充要条件是 dx^0 对于 G 在 G/Γ 上的作用不变. 例如，当 G/Γ 是紧集时，有

$$\int_{G/\Gamma} dx^0 < \infty.$$

所以，dx^0 对于 G 在 G/Γ 的作用不变. 于是，便知 dx 是右不变.

定理 5.1. 设 Γ 是局部紧交换群的离散子群使得 G/Γ 是紧群. 在 G 上取 Haar 测度，使得

$$\int_{G/\Gamma} dx^0 = 1.$$

设 $f \in C(G) \cap L^1(G)$ ($C(G)$ 表示 G 上连续函数的集合). 它满足 $\hat{f} \in L^1(\hat{G})$. 当参数 x，$\hat{x}$ 分别属于 G，$\hat{G}$ 的紧子集时，级数

$$\sum_{r\in\Gamma} f(x+r) \quad 和 \quad \sum_{\hat{r}\in\Gamma^{\perp}} \hat{f}(\hat{x}+\hat{r}),$$

是一致绝对收敛。则 Poisson 求和公式成立：

$$\sum_{r\in\Gamma} f(r) = \sum_{\hat{r}\in\Gamma^{\perp}} \hat{f}(\hat{r}).$$

证. 设 $\Phi(x) = \sum_{r\in\Gamma} f(x+r)$. 可把 Φ 看成 G/Γ 上的函数。因为 $\widehat{G/\Gamma} = \Gamma^{\perp}$，所以，$\Phi$ 的 Fourier 变换是

$$\hat{\gamma} \longmapsto \int_{G/\Gamma}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma} f(x+\gamma)\right)(x,\hat{\gamma})dx^0 = \hat{f}(\hat{\gamma}).$$

因为 $\hat{f}\in L^1(\Gamma^{\perp})$，所以用 Fourier 反演公式，便得

$$\Phi(x) = \sum_{\gamma\in\Gamma} f(x+\gamma) = \sum_{\hat{\gamma}\in\Gamma^{\perp}} \hat{\Phi}(\hat{\gamma})(-x,\hat{\gamma}).$$

令 $x=0$，就得所求公式。 □

习　　题

以下各题中，我们总假定 G 是局部紧交换的 Hausdorff 拓扑群。

1. 证明：$L^1(G)$ 对卷积乘法是交换 Banach 代数 (Rudin [57] §18.1)。

2. 从 $L^1(G)$ 到 $\mathbb{C}$ 的所有非零连续代数同态的全体记为 Δ. $f\in L^1(G)$. 定义 Δ 的函数如下

$$\hat{f}(\delta) = \delta(f), \quad \delta\in\Delta.$$

设 $\hat{L}^1(G) = \{\hat{f}|f\in L^1(G)\}$. 在 Δ 上取最弱的拓扑，使得所有 $\hat{f}\in\hat{L}^1(G)$ 是连续函数. 证明：Δ 是局部紧空间 (Rudin [58], §11.9).

3. 在 Δ 上定义的、在无穷远点为零的函数全体记为 $C_0(\Delta)$ (Rudin [57] §3.16). 证明：若 $f\in L^1(G)$，则 $\hat{f}\in C_0(\Delta)$. 我们称 $L^1(G)\to C_0(\Delta): f\longmapsto\hat{f}$ 为 Gelfand 变换.

4. $L^1(G)$ 的连续线性函数组成对偶空间 $L^{\infty}(G)$. 证明：$\Delta\subseteq L^{\infty}(G)$，且对 $\delta\in\Delta$，存在函数 a_δ，使得 $\delta(f) = \int_G f\bar{a}_\delta dx$ (Rudin

[57] §6.15)。

5. 设 $\delta\in\Delta$。选取 $f\in L^1(G)$，使得 $\hat{f}(\delta)\neq 0$。定义 $a_\delta(x)=\hat{f}_{x^{-1}}(\delta)/\hat{f}(\delta)$，其中 $x\in G$，$f_x(s)=f(x^{-1}s)$。证明 a_δ 是 G 的特征标。

6. 证明：$\Delta\to\hat{G}$，$\delta\longmapsto a_\delta$ 是同构，并且

$$\hat{f}(\delta)=\int_G f(x)\bar{a}_\delta(x)dx.$$

7. 对 $f\in L^1(G)$，$\chi\in\hat{G}$，定义

$$\hat{f}(\chi)=\int_G f(x)\chi(x)dx.$$

证明：

(1) $L^1(G)\to C_0(\hat{G})$，$f\longmapsto\hat{f}$ 是连续线性映射；

(2) $\hat{L}^1(G)=\{\hat{f}|f\in L^1(G)\}$ 是 $C_0(\hat{G})$ 的稠密子集。

8. 证明：$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\cos nx}{\log n}$ 不是 L^1 收敛，所以 $\hat{L}^1(\mathbf{R}/\mathbf{Z})\neq C_0(Z)$。

9. 已给 G 的函数 ϕ，如果对任意 $x_1,\cdots,x_N\in G$，$c_1,\cdots,c_N\in\mathbf{C}$，不等式

$$\sum_{n,m=1}^{N}C_n\bar{C}_m\phi(x_nx_m^{-1})\geqslant 0$$

成立，则 ϕ 称为正定函数。证明 G 上的连续函数 ϕ 是正定的充要条件是 $\hat{G}$ 上存在非负有界测度 μ_ϕ，使得

$$\phi(x)=\int_{\hat{G}}(x,\chi)d\mu_\phi(\chi)$$

(Rudin [58] §1.4.3)。

10. 以 P 记由 G 上的连续正定函数所生成的线性空间。

(1) 证明：如果 f，$g\in P\cap L^1(G)$，则

$$\hat{g}d\mu_f=\hat{f}d\mu_g.$$

(2) 设 $\psi\in C_c(\hat{G})$，它的支集是 K。取 $g\in P\cap L^1(G)$，使得 $\hat{g}$ 在 K 上是正的。证明

(i) $T\psi=\int_{\hat{G}}\frac{\psi}{\hat{g}}d\mu_g$ 与 g 的选取无关；

(ii) $T:\phi \to T\phi$ 是线性的;

(iii) 若 $\phi \geqslant 0$, 则 $T\phi \geqslant 0$;

(iv) 若 $\phi_{\gamma_0}(\gamma) = \phi(\gamma_0^{-1}\gamma)$, 则 $T\phi_{\gamma_0} = T\phi$;

(v) $\hat{G}$ 上存在 Haar 测度 $d\chi$, 使得

$$T\phi = \int_{\hat{G}} \phi(\chi) d\chi.$$

(3) 证明: 如果 $f \in P \cap L^1(G)$, 则 $\hat{f} d\chi = d\mu_f$, 即

$$f(x) = \int_{\hat{G}} \hat{f}(\chi)(x, \chi) d\chi.$$

(4) 取 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$. 设 $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}$, $g = f * f^*$. 则 $g \in P \cap L^1(G)$. 证明: $\|f\|_2^2 = g(0) = \|\hat{f}\|_2^2$.

(5) 设 V 是 G 的单位元邻域, W 是单位元的紧邻域, 使得 $WW^{-1} \subset V$. $|W|$ 是 W 的测度. 令 $f(x) = |W|^{-1/2}$, 如果 $x \in W$; $f(x) = 0$, 若 $x \notin W$. $g = f * f^*$. 则 $g \in P \cap L^1(G)$. 由(3),得

$$\int_{\hat{G}} \hat{g}(\chi) d\chi = g(0) = 1.$$

取 $\hat{G}$ 的紧子集 K, 使得 $\int_K \hat{g}(\chi) d\chi > \frac{2}{3}$, 证明

(i) $\operatorname{supp} g \subseteq WW^{-1}$.

(ii) 如果 x 满足条件: 由 $\chi \in K$, 可得 $|1-(x, \chi)| < \frac{1}{3}$, 则 $g(x) > 0$.

现设 $x_0 \neq e$, 取单位元邻域 V, 使得 $x_0 \notin V$. 则存在 $K \subset \hat{G}$, 使得只要 $\chi \in K$, 就有 $|1-(x_0, \chi)| \geqslant \frac{1}{3}$. 所以,存在 $\chi_0 \in \hat{G}$, 使得 $\chi_0(x_0) \neq 1$.

11. 对 $x \in G$, $\chi \in \hat{G}$, 设 $\delta(x)(\chi) = \chi(x)$. 在 $\hat{G}$ 中取紧子集 K. 对 $\varepsilon > 0$, 设

$$V = \{x \in G \mid |1-(x, \chi)| < \varepsilon, \ \forall \chi \in K\},$$

$$W = \{\hat{\chi} \in \hat{\hat{G}} \mid |1-(\chi, \hat{\chi})| < \varepsilon, \forall \chi \in K\}.$$

(1) 证明 $\delta(V) = W \cap \delta(G)$. 于是, $\delta: G \to \delta(G)$ 是同胚映

射，而且$\hat{\hat{G}}$在$\delta(G)$上诱导的拓扑使$\delta(G)$是紧空间；

(2) 证明$\delta(G)$是$\hat{\hat{G}}$的闭子集；

(3) 证明$\delta(G)$是$\hat{\hat{G}}$的稠密子集。（否则，存在$F\in L^1(G)$，$F\neq 0$，使得$F|_{\delta(G)}=0$。取$\phi\in L^1(\hat{G})$，使得

$$F(\hat{\chi})=\int_{\hat{G}}\phi(\chi)(-\chi,\hat{\chi})dx.$$

由于$\phi=0$，所以$F=0$，矛盾）；

(4) 证明G与$\hat{\hat{G}}$同构。

第四章　局部紧群的表示

§1 群表示的初等性质

设E是局部凸线性拓扑空间，以$\mathscr{L}(E)$记从E到E的连续线性算子的全体. G是局部紧 Hausdorff 群.

§1.1. 表示的定义和例子

定义 1.1. G在E的表示是一个映射$\pi: G \to \mathscr{L}(E)$，它满足以下条件:

(1) $\pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$;

(2) $\pi(e)$是E的恒等算子;

(3) $G \times E \to E: (x, v) \longmapsto \pi(x)v$ 是连续映射.

设H是一个 Hilbert 空间，$T: H \to H$是H上的有界算子，并且它满足：存在有界算子$S: H \to H$，使得$ST = TS =$恒等算子. 记所有上述算子T的全体为$\mathrm{Aut}(H)$. 按算子通常的乘法，$\mathrm{Aut}(H)$是一个群.

命题 1.1. 设H为复 Hilbert 空间. 如果(抽象)群同态$\pi: G \to \mathrm{Aut}(H)$满足条件：(1) π是强连续(即，对任意$v \in H$，映射$G \to H$，$x \longmapsto \pi(x)v$在$x = e$点连续)；(2) 存在e的邻域U及常数C，使得$x \in U \Rightarrow \|\pi(x)\| \leqslant C$，则$\pi$是$G$在$H$上的表示.

证. 只需要对$x, x_0 \in G$; $v, v_0 \in H$考虑以下不等式

$$\begin{aligned}
&|\pi(x)v - \pi(x_0)v_0| \leqslant \|\pi(x_0)\|\,|\pi(x_0^{-1}x)v - v_0| \\
&\leqslant \|\pi(x_0)\|\{|\pi(x_0^{-1}x)(v - v_0)| + |\pi(x_0^{-1}x)v_0 - v_0|\} \\
&\leqslant \|\pi(x_0)\|\|\pi(x_0^{-1}x)\|\,|v - v_0| + \|\pi(x_0)\|\,|\pi(x_0^{-1}x)v_0 \\
&\quad - v_0|.
\end{aligned}$$

□

定义 1.2. G的酉表示是指G在 Hilbert 空间的表示π，使

得对任意 $x\in G$，$\pi(x)$ 是H的酉算子。

例 1. 取 $\chi\in\hat{\mathbf{R}}$，则 $\mathbf{R}\times\mathbf{C}\to\mathbf{C}:(x,z)\longmapsto\chi(x)z$ 是实数 $\mathbf{R}$ 的加法群的一维酉表示。

例 2. 以 $M_n(\mathbf{C})$ 表示所有 $n\times n$ 复系数矩阵集合。对内积 $(X,Y)=T_r(X\bar{Y}')$，$M_n(\mathbf{C})$ 是有限维 Hilbert 空间。若 $U(n)$ 是酉群，则

$$U(n)\times M_n(\mathbf{C})\to M_n(\mathbf{C}):(x,X)\longmapsto xXx^{-1}$$

是酉表示。事实上有，$x\in U(n)\Rightarrow x^{-1}=\bar{x}'$，于是

$$(\pi(x)X,Y)=T_r(xXx^{-1}\bar{Y}')=T_r(x(X(\overline{x^{-1}Yx})')x^{-1})$$
$$=T_r(X(\overline{\pi(x^{-1})Y})')=(X,\pi(x^{-1})Y).$$

所以 $\pi(x^{-1})=\pi(x)^*$。

例 3. n 个实变量的N次单项式在复数 $\mathbf{C}$ 上所生成的向量空间H对内积

$$(P,Q)=\int_{S^{n-1}}P(x)\overline{Q(x)}dx$$

（其中，$S^{n-1}=\{x\in\mathbf{R}^n\,|\,|x|=1\}$）是有限维 Hilbert 空间。$SO(n)$ 为正交群，则

$$\pi(x)P\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}=P\left(x^{-1}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right)$$

定义一个 $SO(n)$ 在H的酉表示。

例 4. 我们记对 G 的（左不变）Haar 测度 2 次可积的复值可测函数组成的 Hilbert 空间为 $L^2(G)$。它的内积为

$$(f,g)=\int_G f(x)\bar{g}(x)dx.$$

取 $\lambda(x)f(y)=f(x^{-1}y)$，计算

$$(\lambda(x)f,g)=\int_G f(x^{-1}y)g(y)dy=\int_G f(y)g(xy)dy$$
$$=(f,\lambda(x^{-1})g).$$

因此 $\|\lambda(x)f\|_2=\|f\|_2$，并且 $\lambda(x)^{-1}=\lambda(x)^*$。我们来证映射 $G\to L^2(G)$，$x\longmapsto\lambda(x)f$ $(f\in L^2(G))$在单位元 e 处连续。设$\varepsilon>0$，由

于 $C_c(G)$ 在 $L^2(G)$中稠密，所以存在 $g\in C_c(G)$，使得 $\|f-g\|_2<\varepsilon/3$。$\lambda(x)$ 是 $L^2(G)$ 上的酉算子，所以 $\|\lambda(x)f-\lambda(x)g\|_2<\varepsilon/3$。固定一个 e 的紧邻域 U。设 g 的支集为 K，因为 g 是一致连续，所以 G 有单位元邻域 N，使得 $N=N^{-1}$，$N\subset U$ 及 $x\in N\Rightarrow$ $\sup|\lambda(x)g-g|<\varepsilon/3\sqrt{m}$，其中 $m=\int_{UK}dx$.这时，对 $x\in N$,有

$$\|\lambda(x)-g\|_2<\varepsilon/3.$$

于是，对 $\varepsilon>0$，存在单位元邻域 N，使得对 $x\in N$，有

$$\|\lambda(x)f-f\|_2\leqslant\|\lambda(x)f-\lambda(x)g\|_2$$
$$+\|\lambda(x)g-g\|_2+\|f-g\|_2<\varepsilon.$$

这就证明了强连续性。又显然有 $\lambda(xy)=\lambda(x)\lambda(y)$，$\lambda(e)$ 是恒等算子．故得结论：

$G\times L^2(G)\to L^2(G)$，$(x,f)\longmapsto\lambda(x)f$ 是G在 $L^2(G)$ 的酉表示，我们称 λ 为G的**左正则表示**.

例 5. Hilbert 空间 $L^2(\mathrm{R})$ 的内积是

$$(f,g)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\overline{g(x)}dx.$$

对 $f\in L^2(\mathrm{R})$，取 $\rho(x)f(y)=f(x+y)$，则

$$\mathrm{R}\times L^2(\mathrm{R})\to L^2(\mathrm{R}),$$
$$(x,f)\longmapsto\rho(x)f,$$

是 R 在 $L^2(\mathrm{R})$ 的酉表示.

例 6. 对 $x\in SL(2,\mathrm{R})$，$f\in L^2(\mathrm{R}^2)$，取

$$\pi(x)f\left(\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right)=f\left(x^{-1}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}\right).$$

则 $SL(2,\mathrm{R})\times L^2(\mathrm{R}^2)\to L^2(\mathrm{R}^2)$，$(x,f)\longmapsto\pi(x)f$ 是酉表示。

§1.2. 诱导表示

在局部紧群G上取左不变 Haar 测度 dx．对 $s\in G$，有

$$\int_G f(sx)dx=\int_G f(x)dx,\ 即\ d(sx)=dx,$$

以 Δ_G 记G的模函数，则对 $s\in G$，有

$$\int_G f(xs^{-1})dx = \Delta_G(s)\int_G f(x)dx,\ 即\ d(xs) = \Delta_G(s)dx.$$

设H是G的闭子群，Δ_H为H对左不变 Haar 测度的模函数。x在商同态 $G\to G/H$ 之下的象记为x^0。模函数在 G/H 上决定一个对左平移的拟不变测度dx^0，即存在G上的正连续函数δ，使得

$$\int_{G/H} dx^0\int_H f(xy)dy = \int_G f(x)\delta(x)dx,$$

$$d(sx)^0 = \frac{\delta(sx)}{\delta(x)}dx^0,\quad \forall s\in G.$$

$$\delta(xy) = \delta(x)\frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)},\quad \forall x\in G,\quad y\in H.$$

现在给定一个局部凸空间V，f是$G\to V$的函数。如果$\overline{\operatorname{supp}(f)}^0$ 是G/H的紧集，我们说f有紧支集，mod$H$。以$C_c(G, H, V)$记有紧支集，mod$H$ 的V值连续函数全体。

设τ是H在局部凸空间V的表示。定义

$$\mathscr{C}^\tau = \left\{f\in C_c(G, H; V)\,|\,f(xy) = \left(\frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)}\right)^{1/2}\tau(y^{-1})f(x),\ \forall y\in H\right\}$$

设K是G的紧子集。定义

$$\mathscr{C}^\tau_K = \{f\in\mathscr{C}^\tau\,|\,\operatorname{supp}\subseteq KH\}.$$

在$\mathscr{C}^\tau_K$上取范数

$$\|f\| = \sup_{x\in K}|f(x)|.$$

则$\mathscr{C}^\tau$是$\mathscr{C}^\tau_K$的正向极限。在$\mathscr{C}^\tau$上取正向极限拓扑。以λ记G在$\mathscr{C}^\tau$上的左平移，即

$$\lambda(s)f(x) = f(s^{-1}x).$$

则$G\times\mathscr{C}^\tau\to\mathscr{C}^\tau$: $(s, f)\longmapsto\lambda(s)f$ 是G在局部凸空间的表示。

定义 1.3. 我们说G的表示(π, E)是从H的表示(τ, V)到G的**诱导表示**，如果存在连续线性映射 $T:\mathscr{C}^\tau\to E$，使得

(1) T是单映射，$T(\mathscr{C}^\tau)$ 是E的稠密子集；

(2) 对任意 $x\in G$，有 $\pi(x)T=T\lambda(x)$；

例 1. 设 (τ, V) 是 H 在 Hilbert 空间 V 的酉表示。 在 G/H 上取拟不变测度 $dx^{\dot{}}$ 及函数 δ 如上。对 $f\in\mathscr{C}^\tau$，$x\in G$，$y\in H$，有

$$\|f(xy)\|^2\delta(xy)^{-1}=\|f(x)\|^2\delta(x).$$

因此，$\|f\|^2\delta^{-1}\in C_c(G/H)$。定义

$$\|f\|_\tau^2=\int_{G/H}\|f(x)\|^2\delta(x)^{-1}dx^{\dot{}}.$$

以 $\mathscr{H}^\tau$ 记 $(\mathscr{C}^\tau, \|\ \|_\tau)$ 的完备化，则 $\mathscr{H}^\tau$ 是 Hilbert 空间，并有内积

$$\langle f, g\rangle=\int_{G/H}\langle f(x), g(x)\rangle\delta(x)^{-1}dx^{\dot{}}.$$

事实上，

$$\mathscr{H}^\tau=\Big\{G\xrightarrow{f}V\mid \text{(i) } f \text{ 是可测.}$$

(ii) 对所有的 $y\in H$ 和几乎所有的 $x\in G$，f 满足：

$$f(xy)=\left(\frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(x)}\right)^{1/2}\tau(y)^{-1}f(x),$$

$$\text{(iii) } \int_{G/H}\|f(x)\|^2\delta(x)^{-1}dx^{\dot{}}<\infty\Big\}.$$

G 在 $\mathscr{H}^\tau$ 上的左正则表示是酉表示：对 $f\in\mathscr{H}^\tau$，有

$$\begin{aligned}\|\lambda(s)f\|_\tau^2&=\int_{G/H}\|f(s^{-1}x)\|^2\delta(x)^{-1}dx^{\dot{}}\\&=\int_{G/H}\|f(x)\|^2\delta(sx)^{-1}d(sx)^{\dot{}}=\|f\|_\tau^2.\end{aligned}$$

常以 $\operatorname{ind}_H^G\tau$ 记 $(\lambda, \mathscr{H}^\tau)$。

例 2. 设 $G=SL(2,\mathbb{R})$，$K=SO(2)$，及

$$B=\left\{\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\in G\right\}.$$

则 $G=KB$。对 $z\in\mathbb{C}$，定义 $\mu_z: B\to\mathbb{C}$ 如下

$$\mu_z\left(\begin{pmatrix}a & b\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}\right)=a^z.$$

则 μ_z 可看为 B 的一维表示。考虑 G 在空间

$$\mathscr{C}^z = \left\{ G \xrightarrow{f} \mathbb{C} \mid \text{(i)}\ f \text{ 连续,} \right.$$

$$\text{(ii) 对 } x \in G,\ f \text{ 满足等式}$$

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix} x\right) = a^{-(z+1)} f(x),$$

$$\left.\text{(iii) } \|f\|_K^2 = \int_K |f(k)|^2 dk < \infty. \right\}$$

对范数 $\|*\|_K$ 的完备化 $\mathscr{H}(z)$ 上的左平移作用 λ，不难证明 $(\lambda, \mathscr{H}(z))$ 是 G 的诱导表示。

§1.3. 直积

定义 1.4. 我们说 G 的表示 (π, E) 是表示 (π_i, E_i) 的直和，记为 $\pi = \oplus\pi_i$，$E = \oplus E_i$，如果

(1) E_i 是 E 的闭不变子空间，使得代数和 $\sum_i E_i$ 是直和而且 $\sum E_i$ 是 E 的稠密子集；

(2) π 在 E_i 上的限制为 π_i。

设 π 是 Hilbert 空间的酉表示。它称为 π_i 的 Hilbert 直和，如果

(1) $\pi = \oplus\pi_i$，

(2) $i \neq j$，则 E_i 与 E_j 正交。

这时，任意 $x \in E$ 可表为

$$x = \sum_i x_i,\quad x_i \in E_i,$$

且有

$$\|x\|^2 = \sum_i \|x_i\|^2.$$

故最多可数个 x_i 不等于 0。

例. 周期为 2π 的二次可积实变函数 f 对范数 $\|*\|$ 收敛于它的 Fourier 级数。令

$$\hat{f}(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx.$$

$$\chi_n(x) = e^{inx}.$$

则

$$\lim_{m\to+\infty}\left\|f-\sum_{n=-m}^{m}\hat{f}(n)\chi_n\right\|_2=0.$$

我们可以把 f 看成 $S=\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ 上的函数，ρ 为 S 在 $L^2(S)$ 上的右正则表示，则 $\rho=\bigoplus\limits_{n\in Z}\chi_n$.

定义 1.5. 已给 G 的酉表示 (π,H)，如果 $v\in H$，使得由 $\{\pi(x)v\,|\,x\in G\}$ 所生成的子空间是 H 的稠密子集，则 v 称为 π 的循环向量，π 为循环表示.

命题 1.2. 酉表示是循环表示的直和.

证. 设 (π,H) 是 G 的一个酉表示. 令

$\Gamma=\{\gamma\,|=\gamma\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$，$H_\alpha$ 是互相正交的闭不变子空间，

且 $\pi|_H$ 是循环表示$\}$.

Γ 以包含关系作序. 若 $\Phi\subset\Gamma$，则 $\tilde{\gamma}=\bigcup\limits_{\gamma\in\Phi}\gamma$ 是 Φ 的上界. 由 Zorn 引理，Γ 有极大元 $\gamma=\{H_\alpha\}_{\alpha\in A}$. 若 $H\neq\bigoplus H_\alpha$，则存在 $0\neq v\in(\bigoplus H_\alpha)^\perp$. 记由 $\{\pi(x)v\,|\,x\subset G\}$ 所生成的闭子空间为 H_0，则 $\gamma\cup H_0>\gamma$ 这与 γ 的极大性矛盾，故 $H=\bigoplus H_\alpha$. □

§ 1.4. 不可约表示

定义 1.6. 给定 G 的表示 (π,V). 如果 V 的子空间 U 满足条件：$x\in G\Rightarrow\pi(x)U\subseteq U$，则我们称 U 为 V 的不变子空间，(π,U) 为 (π,V) 的子表示. 设 V 有不变子空间 U,W，并且 $W\supset U$，则可定义表示 $\tilde{\pi}$ 如下：

$$\tilde{\pi}(x)(w+U)=\pi(x)w+U.$$

我们称 $(\tilde{\pi},W/U)$ 为 (π,V) 的子商表示.

如果表示 (π,V) 除了 0 和 V 之外没有其他闭不变子空间，则 π 称为不可约表示.

如果表示 $\pi=\bigoplus\pi_i$，π_i 是不可约表示，则我们说 π 是完全可约.

命题 1.3. (Schur 引理)拓扑群 G 的酉表示 (π,V) 是不可

约的充要条件是

$$\{L\in\mathscr{L}(V)\mid\forall x\in G,\ \pi(x)L=L\pi(x)\}=\mathbf{C}.$$

证. "$\Leftarrow$": π 可约 $\Rightarrow V$ 有闭不变子空间 U, $U\neq 0$, $U\neq V$. $p:V\to U$ 是正交投影,则 $p\notin\mathbf{C}$ 且 $p\pi(x)=\pi(x)p$.

"$\Rightarrow$": 设有界算子 L 不是复数而与所有的 $\pi(x)$ 可交换. 则伴随算子 L^* 亦与任意 $\pi(x)$ 可换. 取自伴算子 $A=\frac{1}{2}(L+L^*)$, $B=\frac{1}{2i}(L-L^*)$, 它们也与任意 $\pi(x)$ 交换. $L=A+iB$, A, B 不会同为复数. 设 A 不是复数,

$$A=\int_{-\infty}^{\infty}\lambda dE_\lambda$$

是 A 的谱分解. 则 E_λ 与任意 $\pi(x)$ 交换 (Rudin [57], Thm. 12.23). A 不是复数 $\Rightarrow$ 存在 λ_0, 使 E_{λ_0} 也不是复数. □

命题 1.4. 有限维酉表示是完全可约的.

证. 设 (π, H) 是 G 的酉表示, $\dim H=n<\infty$. 如果 $n=1$, 则 π 是不可约. 作归纳假设: 设命题对所有维数小于 n 的酉表示都正确. 在 H 中取最小维数的非零不变子空间 H_1, 作正交分解 $H=H_1+H_2$. 从公式 $(\pi(x)H_2,H_1)=(H_2,\pi(x^{-1})H_1)=(H_2,H_1)=0$, 可知 H_2 亦为不变子空间. 对 H_1, H_2 用归纳假设即可.

作为例子,我们将证明 $SL(2,\mathbb{R})$ 的离散序列表示是不可约的. 设

$$G=SU(1,1)$$
$$=\left\{A\in SL(2,\mathbf{C})\mid\bar{A}^t\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}.$$

容易得到, $A\in G$, 则

$$A=\begin{pmatrix}a&b\\\bar{b}&\bar{a}\end{pmatrix},\quad |a|^2-|b|^2=1.$$

令

$$\mathscr{D}=\{z\in\mathbf{C}\mid|z|<1\}.$$

则 $SL_2(\mathrm{C})$ 中元素可以线性分式变换作用于C上。不难得到

$$G = \{A \in SL(2, \mathrm{C}) \mid \mathscr{D}A = \mathscr{D}\}.$$

设

$$T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{i}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

则

$$\mathscr{D}T = \{z \in \mathrm{C} \mid I_m z > 0\}.$$

所以 $T^{-1}GT = SL(2, R)$. 设

$$\mu\left(z, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = (bz + d)^{-1}.$$

则有

$$\mu(z, A')\mu(zA', A) = \mu(z, A'A),$$

$$\frac{d(zA)}{dz} = \mu(z, A)^2.$$

以 $\mathscr{H}$ 记定义在 $\mathscr{D}$ 上的解析函数的全体。设

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in G,$$

则 $|d^2| = |b|^2 + 1 > |b|^2 \geqslant |bz|^2$, 故有 $\mu(z, A) \in \mathscr{H}$.

在 $\mathscr{D}$ 上引进测度

$$dz = \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} dxdy, \quad z = x + iy.$$

则 dz 是 G 不变测度，即若 E 是 $\mathscr{D}$ 的 Borel 子集，则对 $A \in G$, 有

$$\int_{EA} dz = \int_E dz.$$

这是因为

$$\int_{EA} dz = \int_{EA} \frac{1}{(1 - |z|^2)^2} dxdy$$

$$= \int_E \frac{1}{(1 - |zA|^2)^2} \left|\frac{dzA}{dz}\right|^2 dxdy.$$

设 $z = O \cdot A'$。则 $1 - |z|^2 = |\mu(O, A')|^2$。于是

$$(1 - |zA|^2)^2 \left|\frac{dzA}{dz}\right|^2 = |\mu(O, A'A)|^{-4} |\mu(OA', A)|^4$$

$$= |\mu(O, A')|^{-4} = (1 - |z|^2)^{-2}$$

所以

$$\int_{EA} dz = \int_E dz.$$

对整数 n 引进空间

$$\mathscr{H}_n = \left\{ f \in \mathscr{H} \,\middle|\, \int_{\mathscr{D}} |f(z)|^2 \frac{dz}{(1 - |z|^2)^n} < \infty \right\}.$$

对 $f, g \in \mathscr{H}_n$，定义

$$(f, g) = \int_{\mathscr{D}} f(z) \bar{g}(z) \frac{dz}{(1 - |z|^2)^n}.$$

$\mathscr{H}_n$ 对这个内积的完备化记为 $\mathscr{L}$。 设 $\mathscr{H}_n$ 有序列 $\{f_n\}$ 在 $\mathscr{L}$ 内收敛于 f。 设 $0 < r_1 < r < r_2 < 1$，$|z| < r_1$，则由 Cauchy 公式，有

$$f_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f_n(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - z} i r e^{i\theta} d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi(r_2 - r_1)} \int_{r_1}^{r_2} \int_0^{2\pi} \frac{f_n(re^{i\theta})}{re^{i\theta} - z} e^{i\theta} r \, dr \, d\theta$$

$$= \frac{1}{2\pi(r_2 - r_1)} \int_{r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2} \frac{f_n(x + iy)}{x + iy - z}$$

$$\times \frac{x + iy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} dx dy.$$

所以

$$f(z) = \frac{1}{2\pi(r_2 - r_1)} \int_{r_1^2 < x^2 + y^2 < r_2^2} \frac{f(x + iy)}{x + iy - z}$$

$$\times \frac{x + iy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} dx dy.$$

故 $f(z) \in \mathscr{H}_n$，因此 $\mathscr{H}_n$ 是 Hilbert 空间。

对 $f \in \mathscr{H}_n$，$A \in G = SU(1, 1)$。定义

$$(\pi_n(A)f)(z) = \mu(z, A)^{-n}f(zA).$$

则 $\pi_n(A')(\pi_n(A)f) = \pi_n(A'A)f$. 另一方面

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathscr{D}} |(\pi_n(A)f)(z)|^2 \frac{dz}{(1-|z|^2)^n} \\
&= \int_{\mathscr{D}} |\mu(z, A)|^{-2n}|f(zA)|^2 \frac{dz}{(1-|z|^2)^n} \\
&= \int_{\mathscr{D}} |\mu(zA^{-1}, A)|^{-2n}|f(z)|^2 \frac{d(zA^{-1})}{(1-|zA^{-1}|^2)^n} \\
&= \int_{\mathscr{D}} |f(z)|^2 \frac{dz}{(1-|z|^2)^n}.
\end{aligned}$$

最后一步可这样看：设 $z = O\cdot A'$，则

$$\begin{aligned}
&|\mu(zA^{-1}, A)|^{-2n} \frac{d(zA^{-1})}{(1-|zA^{-1}|^2)^n} \\
&= |\mu(OA'A^{-1}, A)|^{-2n}|\mu(O, A'A^{-1})|^{-2n}dz \\
&= |\mu(O, A')|^{-2n}dz = (1-|z|^2)^{-n}dz.
\end{aligned}$$

因此，$\pi_n(A)$ 是 $\mathscr{H}_n$ 的酉算子，我们称 $(\pi_n, \mathscr{H}_n)$ 为 G 的离散序列表示。

引理. (π_n, f_n) 是 $G = SU(1, 1)$ 的不可约表示。

证. 对 $f \in \mathscr{H}_n$, $z \in \mathscr{D}$, $0 < r_1 < r_2 < 1$, $r_1 < r < r_2$, $|z| < r_1$, 有

$$f(z) = \frac{1}{2\pi(r_2 - r_1)}\int_{r_1^2<x^2+y^2<r_2^2} \frac{f(x+iy)}{x+iy-z} \times \frac{x+iy}{(x^2+y^2)^{1/2}}\,dxdy.$$

所以 $\mathscr{H}_n \to \mathbf{C}$, $f \longmapsto f(z)$ 是连续线性函数. 由 Riesz 表示定理可知，存在 $k_z \in \mathscr{H}_n$，使得

$$f(z) = (f, k_z).$$

设 $k(z, w) = \overline{k_z(w)}$，则

$$\begin{aligned}
k(z, w) &= \overline{(k_z, k_w)} = (k_w, k_z) = \overline{k(w, z)}, \\
k(z, z) &= (k_z, k_z) \geq 0.
\end{aligned}$$

由定义可知 $w \to k_z(w) = \overline{k(z, w)}$ 是解析函数。所以 $z \to k(z, w)$ 也是解析函数。从 $\pi_n(\mathscr{H}_n) \subseteq \mathscr{H}_n$，得

$$\begin{aligned}
&\mu(\omega, A)^{-n} k_z(wA) = (\pi_n(A)k_z)(w) = (\pi_n(A)k_z, k_w) \\
&= (k_z, \pi_n(A^{-1})k_w) = \overline{(\pi_n(A^{-1})k_w, k_z)} \\
&= \overline{\mu(z, A^{-1})^{-n} k_w(zA^{-1})}
\end{aligned}$$

即

$$\mu(\omega, A)^{-n} k(z, \omega A) = \overline{\mu(z, A^{-1})^{-n}} k(w, zA^{-1}).$$

以 zA 代替 z，则

$$\begin{aligned}
k(wA, zA) &= \mu(\omega, A)^n \overline{\mu(zA, A^{-1})^{-n}} k(w, z) \\
&= \mu(w, A)^n \overline{\mu(z, A)}^{-n} k(w, z).
\end{aligned}$$

由此可知函数 $z \longmapsto k(z, z)$ 完全由一点的值决定，而且 $\mathscr{H}_n = 0 \Longleftrightarrow k(z, z) = 0$.

以上关于 k 的讨论我们只用到 $\mathscr{H}_n$ 的两个性质：(1) $\mathscr{H}_n$ 在 G 的作用下不变。(2) $\mathscr{H}_n \to \mathbf{C}$，$f \longmapsto f(z)$ 是连续线性函数。所以，如果 $\mathscr{H}'_n$ 是 $\mathscr{H}_n$ 的 G 不变子空间，我们同样可获得函数 k'. 显然 $k'(z, z) \leqslant k(z, z)$，因为 k, k' 都由一点的值决定，所以存在常数 c，使得 $k'(z, z) = ck(z, z)$，$\forall z \in \mathscr{D}$. 设

$$h(z, w) = k'(z, \bar{w}) - ck(z, \bar{w}),$$

则 $h(z, \bar{z}) = 0$，并且 $z \longmapsto h(z, w)$，$w \longmapsto h(z, w)$ 是解析函数。设 $(z_0, w_0) \in \mathscr{D} \times \mathscr{D}$，取 $\varepsilon > 0$，使得 $\{(z, w) \mid |z - z_0| \leqslant \varepsilon, |w - w_0| \leqslant \varepsilon\}$ 是 $\mathscr{D} \times \mathscr{D}$ 的子集。对这个集合内的 (z, w)，有

$$\begin{aligned}
h(z, w) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} \frac{h(\zeta, w)}{\zeta - z} d\zeta \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} d\zeta \left\{ \int_{|\eta - w_0| = \varepsilon} \frac{h(\zeta, \eta)}{(\zeta - z)(\eta - w)} d\eta \right\} \\
&= \frac{-1}{4\pi^2} \int_{|\zeta - z_0| = \varepsilon} d\zeta \int_{|\eta - \omega_0| = \varepsilon} d\eta \left\{ \frac{h(\zeta, \eta)}{(\zeta - z_0)(\eta - \omega_0)} \right. \\
&\quad \left. \times \left(\sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0} \right)^m \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\omega - \omega_0}{\eta - \omega_0} \right)^n \right) \right\}
\end{aligned}$$

$$= \sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn} z^m w^n.$$

所以 h 在每一点 (z, ω) 都有幂级数展开，h 是解析函数。在 $(z_0, \bar{z}_0)$，有

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} a_{mn}(z - z_0)^m(\bar{z} - \bar{z}_0)^n \equiv 0.$$

设 $z = z_0 + re^{i\theta}$，以 $e^{-il\theta}$ 乘以上式，然后对 θ 从 0 到 2π 积分，得到

$$0 = \sum_{m-n=l} a_{mn} r^{m+n} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} a_{l+n,n} r^{l+2n} & l \geqslant 0, \\ \sum_{m=0}^{\infty} a_{m,m-l} r^{2m-l}, & l \leqslant 0. \end{cases}$$

所以对一切 m，n，有 $a_{mn} = 0$，于是 $h(z, \omega) \equiv 0$。故

$$k'(z, \omega) = ck(z, \omega).$$

另外，$\mathscr{H}'_n \neq 0 \Longleftrightarrow c \neq 0$. 设 $\{0\} \neq \mathscr{H}'_n \subsetneq \mathscr{H}_n$. 取 $0 \neq f \in \mathscr{H}_n$，$f$ 与 $\mathscr{H}'_n$ 正交，于是，f 与 k'_z 正交。这样

$$0 = (f, k'_z) = c(f, k_z) = cf(z).$$

这与 $f \neq 0$，$c \neq 0$ 矛盾. □

我们还可以问：$\mathscr{H}_n$ 能否为 0? 当 K 是 G 的闭子群时，$(\pi_n|_K, \mathscr{H}_n)$ 是否不可约?

设

$$K = \left\{k_\theta = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \in G\right\}.$$

取 $f \in \mathscr{H}_n$，则对 $h \in \mathscr{H}_n$，令

$$\alpha(h) = \frac{1}{2\pi}\int_K e^{-im\theta}(\pi_n(k_\theta)f, h)d\theta.$$

它是 $\mathscr{H}_n$ 上的连续线性函数。据 Riesz 表示定理可得，有 $\tilde{f} \in \mathscr{H}_n$，使得

$$\alpha(h) = (\tilde{f}, h)$$

于是

$$\tilde{f}(z)=(\tilde{f},k_z)=\alpha(k_z)$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_K e^{-im\theta}(\pi_n(k_\theta)f)(z)d\theta$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_K e^{-i(m+n)\theta}f(zk_\theta)d\theta$$

因 f 是 $\mathscr{D}$ 的解析函数，可设 $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nz^n$，故

$$\tilde{f}(z)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\theta}e^{-i(m+n)\theta}\left(\sum_{l=0}^{\infty}a_lz^le^{2il\theta}\right)d\theta$$
$$=\begin{cases}0, & \text{若 } m+n \text{ 为奇或 } m+n<0,\\ a_{\frac{m+n}{2}}z^{\frac{m+n}{2}}, & \text{若 } m+n \text{ 为偶且 } m+n\geqslant 0.\end{cases}$$

所以，只要 $\mathscr{H}_n\neq\{0\}$，我们就可取 f，使得 $f(0)\neq 0$，即 $a_0\neq 0$，取 $m=-n$，立刻可知 $\mathscr{H}_n$ 有非零常数。因此，$\mathscr{H}_n\neq\{0\}\Longleftrightarrow\mathscr{H}_n$ 有非零常数。但 $\mathscr{H}_n$ 有非零常数的充要条件是

$$\infty>\int_{|z|<1}\frac{dxdy}{(1-|z|^2)^{n+2}}=2\pi\int_0^1\frac{r}{(1-r^2)^{n+2}}dr$$
$$=\pi\int_0^1\frac{dx}{x^{n+2}}.$$

因此 $\mathscr{H}_n\neq\{0\}\Longleftrightarrow n<-1$。从上面讨论可见若选取 $m=2l-n(l\geqslant 0)$，则 $\mathscr{H}_n\neq\{0\}\Longleftrightarrow\mathscr{H}_n$ 包含所有多项式。计算内积

$$(z^l,z^m)=\int_{|z|<1}z^l\bar{z}^m(1-|z|^2)^{-n-2}dxdy$$
$$=\left(\int_0^{2\pi}e^{i(l-m)\theta}d\theta\right)\left(\int_0^1\frac{r^{l+m+1}}{(1-r^2)^{n+2}}dr\right).$$
$$=\begin{cases}0, & \text{若 } l\neq m,\\ \alpha_{l,n} & \text{若 } l=m.\end{cases}$$

其中

$$\alpha_{l_n}=\pi\int_0^1 r^l(1-r)^{-(n+2)}dr=\frac{l!(-2-n)!}{(l-1-n)!}\pi.$$

引理. $n<-1\Rightarrow\left\{\frac{z^l}{\alpha_{l,n}}\middle| l\geqslant 0\right\}$ 是 $\mathscr{H}_n$ 的正交基.

证. 设 $f\in\mathscr{H}_n$ 在零点的 Taylor 展开是

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n.$$

如果 f 与所有的 z^m 正交,则

$$0=\int_{|z|<1}f(z)\bar{z}^m\frac{dxdy}{(1-|z|^2)^{n+2}}$$

$$=\int_0^1\frac{r^{m+1}}{(1-r^2)^{n+2}}\left(\int_0^{2\pi}f(re^{i\theta})e^{-im\theta}d\theta\right)dr$$

$$=\int_0^1\frac{r^{m+1}}{(1-r^2)^{n+2}}\left(\int_0^{2\pi}\sum_{n=0}^{\infty}a_nr^ne^{in\theta}\cdot e^{-im\theta}d\theta\right)dr$$

$$=2\pi a_m\int_0^1 r^{2m+1}(1-r^2)^{n+2}dr.$$

因此 $\forall m,\ a_m=0$, 即 $f\equiv 0$. □

从定义直接计算,可得

$$(\pi_n(k_\theta))(z^l)=e^{i(2l-n)\theta}z^l.$$

所以,当把 π_n 限制到子群 K 上时,我们就有直和分解:

$$(\pi_n|_K,\mathscr{H}_n)=\bigoplus_{\substack{m\geq -n\\ m+n\equiv 0(\bmod 2)}}(\pi_n(m),\mathscr{H}_n(m)),$$

其中 $\mathscr{H}_n(m)=\mathbb{C}z^{\frac{m+n}{2}}$, $\pi_n(m)(k_\theta)=e^{im\theta}\cdot 1$. 投射算子 $\mathscr{H}_n\to\mathscr{H}_n(m)$ 由积分

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}e^{-im\theta}\pi_n(k_\theta)d\theta$$

得出.

§1.5. 逆步表示

设 E, F 为局部凸线性拓扑空间(见 Schaefer [61]II, §4). 以 $\mathscr{L}(E,F)$ 记从 E 到 F 的连续线性映射的全体. 设 $\mathfrak{S}$ 是 E 的一组子集, $\mathfrak{B}$ 是 F 零点的一个邻域基. 对 $S\in\mathfrak{S}$, $V\in\mathfrak{B}$, 设

$$M(S, V)=\{f \in \mathscr{L}(E, F) \mid f(S) \subseteq V\}.$$

$\mathscr{L}(E, F)$ 上有唯一的平移不变拓扑，以

$$\{M(S, V) \mid S \in \mathfrak{S}, V \in \mathfrak{B}\}$$

为零点的拓扑基。我们称这个拓扑为 $\mathfrak{S}$-拓扑（Schaefer [61] III, §3）。

例 1. 当 $\mathfrak{S}$ 是 E 全体有限子集时，$\mathfrak{S}$-拓扑便是点态收敛拓扑。

例 2. 当 $\mathfrak{S}$ 是 E 的全部紧子集时，$\mathfrak{S}$-拓扑称为紧收敛拓扑。

例 3. 当 $\mathfrak{S}$ 是 E 的全部凸紧子集时，称 $\mathscr{L}(E, \mathbf{C})=E^*$ 的 $\mathfrak{S}$-拓扑为凸紧拓扑。在 E^* 中 0 点的任一邻域包含这样的子集：

$$M(S, \varepsilon)=\{v^* \in E^* \mid |\langle v, v^*\rangle| \leqslant \varepsilon, \forall v \in S\}.$$

对 E 的子集 A，定义 A 的极为

$$A^0=\{v^* \in E^* \mid |\langle v, v^*\rangle| \leqslant 1, \forall v \in A\}$$

（见 Schaefer [61], IV, §1.3）。如果 E 是拟完备局部凸空间，则 (i) E 的准紧子集是相对紧子集（Schaefer [61], I, §5.3）。(ii) E 的准紧子集的闭凸包是紧子集（Schaefer [61], II, §4.3）。

给定 G 在局部凸空间 E 的表示 π。对 $x \in G$，$\pi(x)$ 的共轭算子 $\pi(x)'$ 由以下等式决定：

$$\langle\pi(x) v, v^*\rangle=\langle v, \pi(x)' v^*\rangle,$$

其中 $v \in E$，$v^* \in E^*$，定义

$$\check{\pi}(x)=\pi(x^{-1})'.$$

命题1.5. 设 E 是拟完备局部凸空间，(π, E) 是 G 的表示，在 E^* 上取凸紧拓扑，则 $(\check{\pi}, E^*)$ 是 G 的表示。

证. 只需证明 $G \times E^* \rightarrow E^*$，$(x, v) \longmapsto \check{\pi}(x) v$ 是连续映射。证明分作三步。

(1) 设 K 是 G 的紧子集，则 $\{\check{\pi}(x) \mid x \in K\}$ 是 $\mathscr{L}(E^*)$ 的同等连续子集。

同等连续性质即等价于：对任意的 E^* 的 0 点邻域 V，存在 E^* 的 0 点邻域 U，使得 $\check{\pi}(K)(U) \subseteq V$。由 E^* 的凸紧拓扑的定义，我们只需要证明：对 E 的任意凸紧子集 C，存在 E 的凸紧子

集 S，使得对 $x\in K$，$v^*\in S^0$，有 $\check{\pi}(x)v^*\subseteq C^0$，其中 S^0，C^0 分别为 S，C 的极。事实上，若取 S 为紧集

$$\{\pi(x^{-1})v \mid x\in K, v\in C\}$$

的凸闭包，则 E 为拟完备 $\Rightarrow S$ 为紧集。而且 $v^*\in S^0\Rightarrow \forall u\in S$，$|\langle u,v^*\rangle|\leqslant 1\Rightarrow \forall x\in K, v\in S, |\langle \pi(x^{-1})v, v^*\rangle|=|\langle v, \check{\pi}(x)v^*\rangle|\leqslant 1\Rightarrow \forall x\in K$，$\check{\pi}(x)v^*\in C^0$。

(2) 对 $v^*\in E^*$，映射 $G\to E^*$，$x\longmapsto \check{\pi}(x)v^*$ 在单位元处连续。

设 K 是 G 的紧子集。则 $\mathscr{L}(E)$ 的子集 $\{\pi(x^{-1})|x\in K\}$ 是同等连续。由 Ascoli 定理（Schaefer [61]III, §4.5)，在该子集上点态收敛拓扑等于紧收敛拓扑。即，当 v 属于 E 的紧子集 C 时，$x\to e\Rightarrow \pi(x^{-1})v\to v$ 是一致收敛.所以，当 $v\in C$ 时，$\langle \pi(x^{-1})v, v^*\rangle=\langle v, \check{\pi}(x^{-1})v^*\rangle\to\langle v, v^*\rangle$ 是一致收敛。这就是说，对 E^* 的凸紧拓扑，$x\longmapsto\check{\pi}(x)v^*$ 在单位元 e 连续。

(3) 映射 $G\times E^*\to E^*$，$(x, v^*)\longmapsto\check{\pi}(x)v^*$ 连续。

设 V 是 E 的零点的凸邻域，K 是 G 的单位元的紧邻域。则由(1)，存在 0 的邻域 V_1，使得 $y\in K$，$u^*\in V$，$\Rightarrow\check{\pi}(y)u^*\in V/4$。取 $x\in G$，$v^*\in E^*$。设 $w^*\in v^*+V_1$。由(2)，存在 x 的邻域 $U\subset xK$，使得：对 $y\in U$，有 $\check{\pi}(y)w^*-\check{\pi}(x)w^*\in V/4$，现取 $u^*\in v^*+V_1$，$y\in U$，则

$$\begin{aligned}\check{\pi}(y)u^*-\check{\pi}(x)v^*&=\check{\pi}(y)(u^*-v^*)+(\check{\pi}(y)-\check{\pi}(x))w^*\\&\quad+(\check{\pi}(y)-\check{\pi}(x))(u^*-w^*)\in V.\end{aligned}$$

这就是说，对已给 $\check{\pi}(x)v^*$ 的邻域 $\check{\pi}(x)v^*+V$，存在 x 的邻域 U 及 v^* 的邻域 v^*+V_1，使得

$$\check{\pi}(U)(v^*+V_1)\subseteq\check{\pi}(x)v^*+V.$$

即 $G\times E^*\to E^*$ 在 (x, v^*) 是连续的。 □

定义 1.7. 称 $\check{\pi}$ 为 π 的**逆步表示**

§1.6. 二次可积表示

命题 1.6. 如果 (π, H) 是局部紧群 G 的不可约酉表示，z 属于 G 的中心，则 $\pi(z)=\chi(z)I$，$\chi(z)\in\mathbf{C}$，$|\chi(z)|=1$。

证. 据酉算子 $\pi(z)$ 的谱分解定理，对单位圆的每一个 Borel 子集 X 有 H 的正交投射 $E(X)$，使得

$$\pi(z)=\int\lambda dE(\lambda).$$

因为 $\forall x\in G$，$\pi(x)\pi(z)=\pi(z)\pi(x)$，所以对所有的 $E(X)$，$\pi(x)E(X)=E(X)\pi(x)$。设 $\mathfrak{N}(X)=\{v\in H\mid E(X)v=0\}$。则 $\pi(x)(E(X)H)\subseteq E(X)H$，$\pi(x)\mathfrak{N}(X)\subseteq\mathfrak{N}(X)$。所以 $E(X)=0$ 或 I。于是 $\pi(z)=\lambda I$，其中 λ 属于单位圆。 □

定义 1.8. 已给幺模局部紧群 G 的不可约酉表示 (π,H) 及 G 的中心的闭子群 Z，如果 H 内存在 $u_0\neq 0$，$v_0\neq 0$，使得

$$\int_{G/Z}|(\pi(x)u_0,v_0)|^2dx<\infty,$$

则称 π 为相对于 Z 的二次可积表示.

命题 1.7. 如果幺模局部紧群 G 的不可约酉表示 (π,H) 相对于 G 的中心的闭子群 Z 是二次可积，则对任意 u，$v\in H$，有

$$\int_{G/Z}|(\pi(x)u,v)|^2dx<\infty.$$

证. 首先，固定 $v\neq 0$，我们来证明，如果存在 $u_0\neq 0$，使得

$$\int_{G/Z}|(\pi(x)u_0,v)|^2dx<\infty,$$

则 $\forall u\in H$，有

$$\int_{G/Z}|(\pi(x)u,v)|^2dx<\infty.$$

Z 有(酉)特征称 χ，使得对 $z\in Z$，$\pi(z)=\chi(z)I$. 设

$$\mathscr{L}=\Big\{G\xrightarrow{h}\mathbb{C}\,\Big|\ \text{(i)}\ h\ \text{可测};\quad \text{(ii)}\ z\in Z,\ x\in G\Rightarrow h(zx)=\chi(z)h(x);\quad \text{(iii)}\ \int_{G/Z}|h(x)|^2dx<\infty\Big\}.$$

则 Hilbert 空间 $\mathscr{L}$ 的内积是

$$(h_1,h_2)=\int_{G/Z}h_1(x)\overline{h_2(x)}dx.$$

显然 $x\longmapsto(\pi(x)u_0,v_0)$ 属于 $\mathscr{L}$. 设

$$H' = \left\{ u \in H \middle| \int_{G/Z} |(\pi(x)u, v)|^2 dx < \infty \right\}.$$

则 H' 是 H 的不变子空间；π 不可约 $\Rightarrow H'$ 的闭包等于 H。即 H' 是 H 的稠密子空间。用以下公式定义无界算子 $A: H' \to \mathscr{L}$：

$$Au(x) = (\pi(x)u, v).$$

引理. A 是闭算子.

证. 根据定义，我们需要证明 $\{u' \oplus Au' | u' \in H'\}$ 是 $H \oplus \mathscr{L}$ 的闭子空间。取 H' 的序列 u_n，使得在 H 中有 $u_n \to u$ 及在 $\mathscr{L}$ 中有 $Au_n \to h$。设 $h_n = Au_n$，则 $u_n \to u \Rightarrow h_n(x) = (\pi(x)u_n, v) \to (\pi(x)u, v)$。由此 $h_n \to h \Rightarrow$ 几乎处处有 $h(x) = (\pi(x)u, v)$。于是

$$\int_{G/Z} |(\pi(x)u, v)|^2 dx = \int_{G/Z} |h(x)|^2 dx < \infty$$

这说明 $u \in H'$，$h = Au$。 □

在 $\mathscr{L}$ 上引入 G 的右平移作用 ρ:

$$(\rho(x)h)(y) = h(yx).$$

则

$$\begin{aligned}(\rho(x)Au)(y) &= Au(yx) = (\pi(y)\pi(x)u, v) \\ &= (A(\pi(x)u))(y),\end{aligned}$$

即

$$\rho(x)A = A\pi(x).$$

以 $\mathscr{D}(A)$ 记算子 A 的定义域，A^* 为 A 的共轭算子。如果 $h \in \mathscr{D}(A^*)$，则 $\forall u \in \mathscr{D}(A)$，有 $(Au, h) = (u, A^*h) \Rightarrow (A\pi(x)u, h) = (\pi(x)u, A^*h) \Rightarrow (Au, \rho(x^{-1})h) = (u, \pi(x^{-1})A^*h) \Rightarrow h \in \mathscr{D}(A^*)$，则 $\rho(x^{-1})h \in \mathscr{D}(A^*)$，且 $A^*\rho(x^{-1}) = \pi(x^{-1})A^* \Rightarrow \pi(x)\mathscr{D}(A^*A) \subset \mathscr{D}(A^*A)$ 及 $\pi(x)A^*A = A^*A\pi(x)$。因为 π 是不可约，用 Schur 引理便知 $A^*A = \lambda I$，$\lambda \in \mathbb{C}$。现在考虑 H 中的极限：$u_n \to u$，其中 $u_n \in \mathscr{D}(A) = H'$。因为

$$\begin{aligned}|(Au_m - Au_n, Au_m - Au_n)| &= |(A^*A(u_m - u_n), u_m - u_n)| \\ &= \lambda \|u_m - u_n\|^2 \to 0,\end{aligned}$$

所以 $\{Au_n\}$ 收敛。设 $Au_n \to h$。因 A 是闭算子，所以 $u \in H'$ 且

$Au=h$. 因此，稠密子集 H' 等于 H.

现在再来证明命题 1.7，由已知存在 u_0, v_0，使得

$$\int_{G/Z}|(\pi(x)u_0,\ v_0)|^2dx<\infty.$$

由上面论证，可知对任意 u 有

$$\int_{G/Z}|(\pi(x)u,\ v_0)|^2dx<\infty.$$

注意到

$$\int_{G/Z}|(\pi(x)u,v_0)|^2dx=\int_{G/Z}|(\pi(x^{-1})v_0,\ u)|^2dx$$

$$=\int_{G/Z}|(\pi(x)v_0,\ u)|^2dx<\infty.$$

再利用前面结果可知对 $\forall v$，有

$$\int_{G/Z}|(\pi(x)v,\ u)|^2dx<\infty. \qquad \square$$

系理 1.8. 如果么模局部紧群 G 的不可约酉表示 (π, H) 相对于 G 的中心的闭子群 Z 是二次可积的，则存在正实数 d_π（称为 π 的形式次数），使得对 $u, v\in H$ 有

$$\int_{G/Z}|(\pi(x)u,\ v)|^2dx=\frac{1}{d_\pi}\|u\|^2\|v\|^2$$

证. 前面命题的证明中的闭算子 A 的定义域是整个 H，所以根据闭图定理，A 是有界算子. 考虑映射 $u\longmapsto Au$，便知有正常数 c_v，使得

$$\int_{G/Z}|(\pi(x)u,v)|^2dx=c_v\|u\|^2.$$

同理，有 c_u，使得

$$\int|(\pi(x)u,\ v)|^2dx=c_u\|v\|^2.$$

于是 $c_v\|u\|^2=c_u\|v\|^2$. 取 $d\pi=\dfrac{1}{c_v}\|v\|^2$，即可. $\square$

§1.7. 缠结算子

定义 1.9. 设 $(\pi,\ E)$，$(\pi',\ E')$ 是拓扑群 G 在局部凸空间上的两个表示. 如果存在同构 $T:E\to E'$，使得对 $x\in G$，有

$T\pi(x)=\pi'(x)T$，则说表示 π 与 π' **等价**．如果 E 和 E' 都是 Hilbert 空间，则这就是要求 T 和 T 的逆算子均为有界算子．

设 (π, E) 和 (π', E') 是 G 的酉表示，且上面的同构 T 是酉算子，则我们说 π 与 π' 是**酉等价**．

我们称 T 为 π 与 π' 间的**缠结算子**．

命题 1.9. 两个等价的酉表示是酉等价的．

证． 因为 $TT^*\pi'(x)=T\pi(x)T^*=\pi'(x)TT^*$，且 TT^* 是正 Hermite 算子，所以，取 $S=\sqrt{TT^*}$，$S^{-1}\pi'(x)=\pi'(x)S^{-1}$，酉算子 $S^{-1}T$ 便是所需的 π 与 π' 间的缠结算子． □

命题 1.10. (Schur 正交关系)设么模局部紧群 G 有相对于中心的闭子群 Z 二次可积的不可约表示 (π, H) 和 (π', H')，使得对 $z\in Z$，$\pi(z)=\pi'(z)$．则有

(1) 如果 π 与 π' 不等价，则对 $u, v\in H$，$u', v'\in H'$，有

$$\int_{G/Z}(\pi(x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx=0.$$

(2) 如果酉同构 T 是 π 与 π' 间的缠结算子使 π 与 π' 等价．则对 $u, v\in H$，$u', v'\in H'$，有

$$\int_{G/Z}(\pi(x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx$$
$$=\frac{1}{d_\pi}(Tu, u')(V', Tv),$$

其中 d_π 是 π 的形式次数．

证． 固定 u, u'，对任意 v，H' 上的线性函数

$$v'\to\int_{G/Z}(\pi(x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx$$

是连续的，故可表为 (v', Bv)，其中 $Bv\in H'$．显然 $H\to H'$：$v\longmapsto Bv$ 是有界线性算子．注意

$$\int_{G/Z}(\pi(x)u, \pi(y)v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx$$
$$=\int_{G/Z}(\pi(y^{-1}x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx$$

$$= \int_{G/Z} (\pi(x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', \pi'(y^{-1})v')}dx.$$

即有

$$(v', B\pi(y)v) = (\pi'(y^{-1})v', Bv) = (v', \pi'(y)Bv).$$

于是，得 $B\pi(y) = \pi'(y)B$. 我们需要下列

引理 1.11. π, π' 是不可约酉表示，B 为有界算子. $B\pi = \pi'B \Rightarrow B = 0$ 或 $B = \lambda R$, $\lambda \in CR$ 为等距算子.

证. 连续算子 B^* 也满足 $\pi B^* = B^*\pi'$. Hermite 算子 $B^*B = A$ 满足 $A\pi = \pi A$. 从 Schur 引理(命题 1.3) 可得 $A = \lambda I$. 故得 $B = 0$ 或 λR. R 为等距算子. □

现在回来看命题 1.10. 如果 π 与 π' 不等价，必然有 $B = 0$, 就得到(1).

考虑(2)，由已知，得到 $(T^{-1}B)\pi = \pi(T^{-1}B)$, 同样由 Schur 引理，得到常数 $c_{u,u'}$, 使得

$$B = \bar{c}_{u,u'}T.$$

这样

$$\int_{G/Z} (\pi(x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx = c_{u,u'}(v'Tv).$$

注意到 $(\pi(x)u, v) = \overline{(\pi(x^{-1})v, u)}$ 及 G 为幺模群，上式左方等于

$$\begin{aligned}&\int_{G/Z} \overline{(\pi'(x)u', v')\overline{(\pi(x)u, v)}}\, dx\\ &= \int_{G/Z} (\pi(x)v, u)\overline{(\pi'(x)v', u')}\, dx\\ &= \bar{c}_{v,v'}(Tu, u').\end{aligned}$$

于是

$$c_{u,u'}\overline{(Tv, v')} = \bar{c}_{v,v'}(Tu, u').$$

取 $u = v$, $u' = v'$, 可知有实常数 c, 使得

$$c_{u,u'} = c(Tu, u').$$

于是

$$\int_{G/Z} (\pi(x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx = c(Tu, u')(v', Tv).$$

取 $u'=Tu$, $v'=Tv$, 及 $u=v$, 则有

$$c(u,u)^2=\int_{G/Z}|(\pi(x)u,u)|^2dx=\frac{1}{d_\pi}(u,u)^2.$$

因此
$$c=\frac{1}{d_\pi}.$$
□

§2. 紧群的表示

本节分为两小节。第一小节是讨论紧群的表示，主要是证明 Peter-Weyl 定理。第二小节是把第一小节的部分结果推广到紧齐性空间。

§2.1. Peter-Weyl 定理

在这节中，我们假设 G 是紧拓扑群。在 G 上取 Haar 测度 dx，使得 $\int_G dx=1$。

命题 2.1. 紧群的酉表示是有限维不可约表示的直和。

证. 设 (π,H) 是紧群的酉表示。可假设 π 是循环表示，$u\in H$ 是循环向量，$\|u\|=1$。在 H 上引入新的内积：

$$\langle v,w\rangle=\int_G(\pi(x)v,u)(u,\pi(x)w)dx.$$

应用 Schwarz 不等式，得

$$|\langle v,w\rangle|\leqslant\|v\|\cdot\|w\|.$$

因此，存在有界 Hermite 算子 A，使得 $\langle v,w\rangle=(Av,w)$，

$$(Av,v)=\int_G|(\pi(x)v,u)|^2dx\geqslant 0.$$

所以 $A\geqslant 0$。如果 $(Av,v)=0$，则对 $x\in G$，有

$$(\pi(x)v,u)=(v,\pi(x^{-1})u)=0$$

(留意：$x\to(\pi(x)v,u)$ 是连续的)。u 是循环向量，故此 $v=0$，设有 $v\neq 0$ $Av=\lambda v$，则 $\lambda>0$。作计算：

$$(A\pi(x)v,w)=\int_G(\pi(s)\pi(x)v,u)(u,\pi(s)w)ds$$

$$= \int_G (\pi(s)v, u)(u, \pi(sx^{-1})w)ds$$
$$= (Av, \pi(x^{-1})w) = (\pi(x)Av, w).$$

则有 $\forall x \in G$, $A\pi(x) = \pi(x)A$ 设

$$H(\lambda) = \{v \in H \mid Av = \lambda v\}.$$

则对 $x \in G$, 有 $\pi(x)H(\lambda) \subset H(\lambda)$.

现证 A 是紧算子. 设 H 的序列 $\{v_n\}$ 弱收敛于 v. 根据 Banach-Steinhaus 定理, $\{v_n\}$ 有界,即存在 M,使得 $\|v_n\| \leqslant M$. 用 Schwarz 不等式,得

$$|(\pi(x)v_n, u)(u, \pi(s)v_n)(\pi(sx^{-1})u, u)| \leqslant M^2.$$

故可应用 Lebesgue 有界收敛定理作下列计算:

$$\lim_{n\to\infty} \|Av_n\|^2 = \lim_{n\to\infty} (Av_n, Av_n)$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_G (\pi(x)v_n, u)(u, \pi(x)Av_n)dx$$
$$= \lim_{n\to\infty} \int_G \int_G (\pi(x)v_n, u)(u, \pi(s)v_n)(\pi(s)\pi(x^{-1})u, u)dxds$$
$$= \int_G \int_G (\pi(x)v, u)(u, \pi(s)v)(\pi(sx^{-1})u, u)dxds$$
$$= \|Av\|^2.$$

另一方面,由弱收敛定义,有 $(Av, A(v - v_n)) \to 0$, 即 $\lim_{n\to\infty}(Av, Av_n) = \|Av\|^2$. 又因

$$\|Av - Av_n\|^2 = \|Av\|^2 - (Av, Av_n)$$
$$- (Av_n, Av) + \|Av_n\|^2,$$

所以 $\lim_{n\to\infty}\|Av - Av_n\| = 0$. 这就证明了 A 是紧算子.

设 R 是正定紧 Hermite 算子 A 的特征根集合, 按紧算子的谱分解定理,

$$H = \bigoplus_{\lambda \in R} H(\lambda), \quad \dim H(\lambda) < \infty.$$

每个 $H(\lambda)$ 是不变子空间. □

注. 以上证明过程说明: 若表示 π 与紧算子交换, 则 π 是有

限维不可约表示的直和.

系理 2.2. 紧群的不可约酉表示是有限维的. □

命题 2.3. 如果 π 是紧群 G 在有限维空间 V 的表示,则可在 V 上引入内积,使得 π 是酉表示.

证. 在 V 上任取一个 Hermite 内积 $(\cdot,\cdot)$, 则以下内积满足命题的要求:

$$\langle u, v\rangle = \int_G (\pi(x)u, \pi(x)v)dx. \qquad \square$$

系理 2.4. 紧群的有限维表示是完全可约的.

证. 在表示空间上引入内积,使得表示成酉表示 □

命题 2.5. (Schur 引理)已给紧群 G 的不可约有限维表示 (π, V), (π', V'). 如果线性映射 $T: V\to V'$, 使得: 对 $x\in G$, 有 $T\pi(x) = \pi'(x)T$, 则 $T=0$ 或 T 是单满映射.

证. 显然 T 的核和象集分别是 V 和 V' 的不变子空间. □

系理 2.6. 与紧群 G 的有限维不可约酉表示 (π, V) 交换的线性映射 $T: V\to V$ 是数乘映射.

证. 设 λ 是 T 的特征根, 则 $T-\lambda I$ 不是单满映射. 由系理 2.5, 一定有 $T-\lambda I=0$, 即 $T=\lambda I$. □

系理 2.7. (Schur 正交关系)

(1) 设 (π, V) 和 (π', V') 是紧群 G 的互不等价的有限维不可约酉表示,则对 $u, v\in V$; $u', v'\in V'$, 有

$$\int_G (\pi(x)u, v)\overline{(\pi'(x)u', v')}dx = 0$$

(2) 设 (π, V) 是紧群 G 的有限维不可约酉表示,则对 $u_1, v_1, u_2, v_2\in V$, 有

$$\int_G (\pi(x)u_1, v_1)\overline{(\pi(x)u_2, v_2)}dx = \frac{(u_1, u_2)\overline{(v_1, v_2)}}{\dim V}$$

证. (1) 设 $L: V'\to V$ 为线性映射,定义

$$T_L = \int_G \pi(x)L\pi'(x^{-1})dx: V'\to V.$$

则 $\pi(y)T_L\pi'(y^{-1}) = T_L$, 即 $\pi(y)T_L = T_L\pi'(y)$, $\forall y\in G$. 于是

$T_L=0$. 设 $L(\omega')=(\omega',\omega')u$，并利用 $(T_Lv',v)=0$，便可得到所需等式.

(2) 取线性映射 $L:V\to V$. 定义

$$T_L=\int_G \pi(x)L\pi(x^{-1})dx$$

则类似(1)可得结论：$\exists\lambda\in\mathbf{C}$，使得 $T_L=\lambda I$. 取迹，得

$$\operatorname{tr}T_L=\operatorname{tr}L=\lambda\cdot\dim V,$$

故 $\lambda=\operatorname{tr}L/\dim V$. 于是

$$(T_Lv_2,v_1)=\frac{\operatorname{tr}L}{\dim V}\overline{(v_1,v_2)}.$$

取 $L(\omega)=(\omega,u_2)u_1$，即可. □

定义 2.1. 已给 G 的有限维酉表示 (π,V). 称 $\dim V$ 为 π 的次数，并记为 d_π. 对任意 $u,v\in V$. 称函数 $x\longmapsto(\pi(x)u,v)$ 为 π 的矩阵系数. 若 $\{u_i\}$ 为 V 的法正交基，则称

$$\chi_\pi(x)=\operatorname{tr}\pi(x)=\sum_{i=1}^{d_\pi}(\pi(x)u_i,u_i)$$

为 π 的特征标.

命题 2.8. π，π' 是 G 的有限维不可约酉表示. 则

(1) $\chi_\pi(x)=\overline{\chi_\pi(x^{-1})}$;

(2) $d_\pi\chi_\pi*\chi_\pi=\chi_\pi$;

(3) 如果 π 与 π' 不等价，则 $\chi_\pi*\chi_{\pi'}=0$.

证. 从 $(\pi(x)u_i,u_j)=\overline{(\pi(x^{-1})u_j,u_i)}$，得(1). 计算卷积

$$\chi_\pi*\chi_{\pi'}(y)=\int_G\chi_\pi(x)\chi_{\pi'}(x^{-1}y)dx$$

$$=\sum_{i,j}\int_G(\pi(x)u_i,u_i)\overline{(\pi'(x)u_j,\pi'(y)u_j)}dx.$$

利用 Schur 正交关系，便得(2)和(3). □

定理 2.9. (Peter-Weyl 定理) G 是紧群，则有

(1) 在 $L^2(G)$ 中，G 的所有有限维不可约酉表示的矩阵系数生成稠密子空间.

(2) 设 $\hat{G}$ 是 G 的最大一组互不等价的有限维不可约酉表示. 在 $\pi\in\hat{G}$ 的表示空间中选定一个法正交基，相对于这个基 $\pi(x)$ 的矩阵记为$(\pi_{ij}(x))(1\leqslant i, j\leqslant d_\pi)$. 则 $\{(d_\pi)^{1/2}\pi_{ij}(x)\}$ 是 $L^2(G)$ 的法正交基.

(3) 取 $f\in L^2(G)$，则 f 的 Fourier 级数展开是

$$f=\sum_{\pi\in\hat{G}}d_\pi\chi_\pi * f,$$

而且 Plancherel 公式

$$\int_G|f(x)|^2dx=\sum_{\hat{G}}d_\pi\sum_{ij}\int_G|f(x)\overline{\pi_{ij}(x)}|^2dx$$

成立。

(4) (π, V) 是 G 的酉表示，τ 是 G 的有限维不可约酉表示。设

$[\tau, \pi]=\{U\,|\,U$ 是 V 的不变子空间，$\pi|_U$ 与 τ 等价$\}$以 $V(\tau)$ 记 $\sum_{U\in[\tau,\pi]}U$ 的闭包. 以 $E_\tau: V\to V(\tau)$ 记正交投影. 则

(i) $E_\tau=d_\tau\int_G\pi(x)\chi_\tau(x)dx$;

(ii) 如果 τ 与 τ' 不等价，则 $E_\tau E_{\tau'}=E_{\tau'}, E_\tau=0$;

(iii) 如果 $v\in V$，则 $v=\sum_{\tau\in\hat{G}}E_\tau v$.

证. (1) 如果 $h(x)=(\pi(x)u, v)$ 是 π 的矩阵系数，则以下函数亦是:

$$\overline{h(x^{-1})}=(\pi(x)v, u),$$
$$h(sx)=(\pi(x)u, \pi(s^{-1})v),$$
$$h(xs)=(\pi(x)\pi(s)u, v).$$

所以由有限维不可约酉表示的矩阵系数所生成的 $L^2(G)$ 的子空间的闭包 U 在左平移、右平移及变换 $h(x)\to\overline{h(x^{-1})}$ 之下不变. 于是 $U\neq L^2(G)\Rightarrow U^\perp\neq 0$.

设 N 是 G 的单位元开邻域. 以 $|N|$ 记 N 的测度，φ_N 记 N 的特征函数. 取 $0\neq k\in U^\perp$. 用左正则表示定义函数

$$F_N(x) = \frac{1}{|N|}\int_G \varphi_N(y)k(y^{-1}x)dy.$$

F_N 是两个 L^2 函数的卷积，所以它是连续的．当 N 缩至 e 时，F_N 在 L^2 中收敛至 $k \neq 0$，所以存在一个 F_N 不等于 0． 显然 $F_N \in U^{\perp}$，所以 $U^{\perp}$ 有连续非零函数．在平移并乘以适当的复数后，可假设 $U^{\perp}$ 有非零函数 F_1，使得 $F_1(e)$ 是不等于 0 的实数．设

$$F_2(x) = \int_G F_1(yxy^{-1})dy,$$

$$F(x) = F_2(x) + \overline{F_2(x^{-1})}.$$

则 F 是连续函数，$F \in U^{\perp}$，$F(e) = 2F_1(e)$ 是非零实数，$\forall s \in G$，有 $F_2(sxs^{-1}) = F_2(x)$．

设 $k(x, y) = F(x^{-1}y)$．定义积分算子

$$Tf(x) = \int_G k(xy)f(y)dy,\ f \in L^2(G).$$

则从 $F \neq 0$ 及

$$k(x, y) = \overline{k(y, x)},$$

$$\int_{G\times G} |k(x, y)|^2 dxdy = \int_G |F(x)|^2 dx < \infty,$$

可得 $T: L^2(G) \to L^2(G)$，是非零 Hilbert-Schmidt 算子．所以 T 有非零实特征根 a，这个 a 的特征空间 $V_a \subseteq L^2(G)$ 是有限维的，而且 V_a 是左正则表示 λ 的不变子空间：

$$(T\lambda(s)f)(x) = \int_G F(x^{-1}y)f(s^{-1}y)dy$$

$$= \int_G F(x^{-1}sy)f(y)dy = (Tf)(s^{-1}x) = af(s^{-1}x)$$

$$= a\lambda(s)f(x).$$

因为 $\dim V_a < \infty$，所以 V_a 有不可约不变子空间 $W_a \neq 0$．

在 W_a 中，取基 $f_1, \cdots, f_n$．则 λ 在 W_a 中的矩阵系数是

$$h_{ij}(x) = (\lambda(x)f_j, f_i) = \int_G f_j(x^{-1}y)\overline{f_i(y)}dy.$$

据 U 的定义 $h_{ij} \in U$．另一方面，因为 $F \in U^{\perp}$，所以

$$0=\int_G F(x)\overline{h_{ii}(x)}\,dx=\int_G\int_G F(x)\overline{f_i(x^{-1}y)}f_i(y)\,dy\,dx$$
$$=\int_G\int_G F(yx^{-1})\overline{f_i(x)}f_i(y)\,dx\,dy$$
$$=\int_G\left[\int_G F(x^{-1}y)f_i(y)\,dy\right]\overline{f_i(x)}\,dx$$
$$=\int_G Tf_i(x)\overline{f_i(x)}\,dx=a\int_G|f_i(x)|^2dx,$$

这与 $W_a\neq 0$ 矛盾。所以我们得到 $U^{\perp}=0$，即 $L^2(G)=U$。

(2) 从(1)容易得到.

(3) 根据(2)，任意 $f\in L^2(G)$ 可表达为 L^2 收敛的级数：

$$f(x)=\sum_{\pi\in\hat{G}}d_\pi\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d_\pi}\pi_{ij}(x)\int_G\overline{\pi_{ij}(y)}f(y)\,dy.$$

作变换 $y^{-1}\longmapsto y$，得

$$d_\pi\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d_\pi}\pi_{ij}(x)\int_G\overline{\pi_{ij}(y)}f(y)\,dy$$
$$=d_\pi\sum_{1\leqslant i,j\leqslant d_\pi}\pi_{ij}(x)\int_G\pi_{ji}(y)f(y^{-1})\,dy$$
$$=d_\pi\sum_{i=1}^{d_\pi}\int_G\pi_{ii}(xy)f(y^{-1})\,dy=d_\pi\chi_\pi*f(x).$$

另一方面，从法正交基定义便可得 Plancherel 公式 (Rudin [57] Thm. 4.18)。

(4) 设

$$\widetilde{E}_\tau v=d_\tau\int_G\chi_\tau(x)\pi(x)v\,dx.$$

则

$$\widetilde{E}_\tau^*=d_\tau\int_G\chi_\tau(x^{-1})\pi(x)\,dx=\widetilde{E}_\tau,$$

$$\widetilde{E}_\tau\widetilde{E}_{\tau'}=d_\tau d_{\tau'}\int_G(\chi_\tau*\chi_{\tau'})(x)\pi(x)\,dx=0,$$

其中 τ 与 τ' 不等价。

$$\widetilde{E}_\tau^2 = d_\tau^2 \int_G (\chi_\tau * \bar{\chi}_\tau)(x)\pi(x)dx.$$

$$= d_\tau \int_G \bar{\chi}_\tau(x)\pi(x)dx = \widetilde{E}_\tau.$$

因此，$\{\widetilde{E}_\tau\}$ 是一组互相垂直的正交投影。

取 $U \in [\tau, \pi]$. 设 $u_1, \cdots, u_n$ 是U的法正交基，$\pi_{ij}(x) = (\pi(x)u_i, u_j)$. 则

$$\chi_\tau(x) = \sum_{i=1}^n \pi_{ii}(x),$$

$$\pi(x)u_j = \sum_{i=1} \pi_{ij}(x)u_i.$$

用 Schur 正交关系，得

$$\widetilde{E}_\tau u_j = d_\tau \int_G \bar{\chi}_\tau(x)\pi(x)u_j dx$$

$$= d_\tau \int_G \sum_{i,k} \overline{\pi_{kk}(x)}\pi_{ij}(x)u_i dx = u_j.$$

即是说 $\widetilde{E}_\tau|_U$ 是恒等映射。

另一方面，取 $U \in [\tau', \pi]$, $u \in U$, τ' 与 τ 不等价，则 $\widetilde{E}_\tau u = \widetilde{E}_\tau \widetilde{E}_{\tau'} u = 0$.

把V写为有限维不可约不变子空间的正交和：$V = \oplus U$. 则显然上面的讨论告诉我们：如果 $U \in [\tau, \pi]$, 则 $E_\tau|_U = \widetilde{E}_\tau|_U$, 如果 τ 与 τ' 不等价，$U \in [\tau', \pi]$, 则$E_\tau|_U = \widetilde{E}_\tau|_U = 0$. □

从 Peter-Weyl 定理可见集合 $[\tau, \pi]$ 的个数是 $\dim(\operatorname{Im} E_\tau)/d_\tau$. 这个数记为$(\pi:\tau)$. 可以说$\tau$在$\pi$中出现$(\pi:\tau)$次. 利用 Schur 正交关系立刻可见 $\dim(E_\tau(L^2(G))) = d_\tau^2$. 所以，如果$\lambda$是$G$在$L^2(G)$上的左正则表示。则$(\lambda:\tau) = d_\tau$.

命题 2.10. 设紧群G有酉表示(π, V^π), (τ, V^τ), 其中τ是不可约. 则

$$(\pi:\tau) = \dim \operatorname{Hom}_G(V^\pi, V^\tau) = \dim \operatorname{Hom}_G(V^\tau, V^\pi).$$

证. 据 Schur 引理和 Peter-Weyl 定理，若 $T \in \operatorname{Hom}_G(V^\pi, V^\tau)$, 则 $T(E_\tau V^\pi)^\perp = 0$. 把 $E_\tau V^\pi$ 写为不可约子空间 V_α 的正交

和，则每个 V_α 与 V^τ 等价。所以

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V_\alpha, V^\tau) \geqslant 1.$$

引用 Schur 引理，便知 $\dim \mathrm{Hom}_G(V_\alpha, V^\tau) = 1$。所以

$$(\pi:\tau) = \dim \mathrm{Hom}_G(V^\pi, V^\tau).$$

取共轭，得

$$\dim \mathrm{Hom}_G(V^\pi, V^\tau) = \dim \mathrm{Hom}_G(V^\tau, V^\pi). \qquad \square$$

设 H 是紧群 G 的闭子群，(τ, V^τ) 是 H 的酉表示。定义

$$V^\pi = \left\{ G \xrightarrow{f} V^\tau \;\middle|\; \begin{array}{l} \text{(i)} \ \int_G |f(x)|^2 dx < \infty, \\ \text{(ii)} \ \forall y \in H,\ f(xy) = \tau(y)^{-1} f(x) \text{ 几乎处} \\ \quad \text{处对 } x \in G \text{ 成立}. \end{array} \right\}.$$

G 在 V^π 上作用如下：

$$\pi(s) f(x) = f(s^{-1}x).$$

π 是从 τ 到 G 的诱导表示，记为 $\mathrm{ind}_H^G \tau$。

定理 2.11. (Frobenius 互反公式) 设 H 为紧群 G 的闭子群，(τ, V^τ) 是 H 的不可约酉表示，σ 是 G 在 V^σ 上的不可约酉表示，$\pi = \mathrm{ind}_H^G \tau$ 作用在 V^π 上。则

$$(\mathrm{ind}_H^G \tau : \sigma) = (\sigma|_H : \tau).$$

证. 因为 $V^\pi \subset L^2(G, V^\tau)$，$L^2(G, V^\tau)$ 是 d_τ 个 $L^2(G)$ 的直和，即

$$L^2(G, V^\tau) = L^2\underbrace{(G) \oplus \cdots \oplus L^2(G)}_{d_\tau \text{ 个}},$$

所以，σ 在 $L^2(G, V^\tau)$ 中出现 $d_\tau d_\sigma$ 次。于是 $(\pi:\sigma) \leqslant d_\tau d_\sigma$。

对 G 上的函数 f，以 $\delta(f)$ 记 $f(e)$，e 为 G 的单位元。考虑线性映射所组成的线性空间 $\mathrm{Hom}_G(V^\sigma, V^\pi)$ 中的元 A。对 $v \in V^\sigma$，下式成立

$$\begin{aligned} \tau(y)(\delta A v) &= \tau(y)[Av(e)] = Av(y^{-1}) \\ &= (\pi(y)(Av))(e) = (A\sigma(y)v)(e) = \delta A \sigma(y) v, \end{aligned}$$

所以，$\delta A \in \mathrm{Hom}(V^\sigma, V^\tau)$。

δ: $\mathrm{Hom}_G(V^\sigma, V^\pi) \to \mathrm{Hom}_H(V^\sigma, V^\tau)$ 是单映射。理由如下：

设 $\delta Av=0, \forall v\in V^\sigma$，则 $(Av)(e)=0, \forall v\in V^\sigma$. 取 $v=\sigma(x)^{-1}v'$，则

$$0=(Av)(e)=(A\sigma(x)^{-1}v')(e)=(\pi(x)^{-1}Av')(e)$$
$$=(Av')(x).$$

也就是说 $Av'=0, \forall v'$，所以 $A=0$.

下面证明 δ 是满映射. 取 $B\in \mathrm{Hom}_H(V^\sigma, V^\tau)$，定义

$$Av(x)=B(\sigma(x)^{-1}v),\quad v\in V^\sigma, x\in G.$$

则

$$Av(xy)=B(\sigma(y)^{-1}\sigma(x)^{-1}v)=\tau(y)^{-1}B\sigma(x)^{-1}v$$
$$=\tau(y)^{-1}Av(x).$$

所以 $Av\in V^\pi$. 作计算

$$(\pi(x_0)Av)(x)=Av(x_0^{-1}x)=B(\sigma(x)^{-1}(\sigma(x_0)v))$$
$$=A(\sigma(x_0)v)(x),$$

所以 $\pi(x_0)A=A\sigma(x_0)$，即 $A\in \mathrm{Hom}_G(V^\sigma, V^\pi)$. 最后有

$$\delta Av=Av(e)=B(\sigma(e)v)=Bv,$$

即 $\delta A=B$.

综上所述，有

$$\dim\ \mathrm{Hom}_G(V^\sigma, V^\pi)=\dim\ \mathrm{Hom}_H(V^\sigma, V^\tau).$$

于是

$$(\sigma|_H:\tau)=\dim\ \mathrm{Hom}_H(V^\sigma, V^\tau)=d_\sigma d_\tau \geqslant (\pi:\sigma)$$
$$=\dim \mathrm{Hom}_G(V^\pi, V^\sigma)=\dim\ \mathrm{Hom}_G(V^\sigma, V^\pi).$$

定理得证. □

§ 2.2. 紧齐性空间

设 G 是么模局部紧拓扑群，Γ 是 G 的闭离散子群，使得商空间 $\Gamma\backslash G$ 是紧空间(自本节开始，商空间记号采用表示论中所用的，意义不变)，而且 $\Gamma\backslash G$ 有唯一的左 G 不变正则 Borel 测度. 关于这个测度的二次可积函数全体记为 $L^2(\Gamma\backslash G)$.

对 $x\in G$, $\varphi\in L^2(\Gamma\backslash G)$，设

$$\rho(x)\varphi(s)=\varphi(sx),\quad s\in \Gamma\backslash G.$$

容易证明，$\rho: G\times L^2(\Gamma\backslash G)\to L^2(\Gamma\backslash G)$ 是酉表示.

当 $\Gamma=\{1\}$ 时，以上的假设等价于 G 是紧群，ρ 是 G 的右正则表示。

引理 2.12. 设 $f\in C_c(G)$，用公式

$$(\rho(f)\varphi,\ \phi)=\int_G f(x)(\rho(x)\varphi,\ \phi)dx$$

定义的 $\rho(f)$ 是 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的紧算子。

证. (1) 设 $f\in L^1(G)$，$\varphi\in L^2(\Gamma\backslash G)$，则

$$\int_{\Gamma\backslash G}\left(\int_G|\varphi(sx)f(x)|dx\right)^2ds$$

$$\leqslant\int_{\Gamma\backslash G}\left(\int_G|\varphi(sx)|^2|f(x)|dx\right)\left(\int_G|f(x)|dx\right)ds$$

$$=\left(\int_G|f(x)|dx\right)\int_G|f(x)|\left\{\int_{\Gamma\backslash G}|\varphi(sx)|^2ds\right\}dx$$

$$=\left(\int_G|f(x)|dx\right)^2\int_{\Gamma\backslash G}|\varphi(s)|^2ds<\infty.$$

所以，对几乎所有 s，积分

$$\int_G\varphi(sx)f(x)dx$$

是有意义的，而且它定义了一个在 $\Gamma\backslash G$ 上的二次可积函数。另一方面，

$$\int_{\Gamma\backslash G}\left[\int_G\varphi(sx)f(x)dx\right]\phi(s)ds$$

$$=\int_G f(x)\left\{\int_{\Gamma\backslash G}\varphi(sx)\bar{\phi}(s)ds\right\}dx$$

$$=\int_G f(x)(\rho(x)\varphi,\ \phi)dx=(\rho(f)\varphi,\ \phi).$$

可见

$$\rho(f)\varphi(s)=\int_G f(x)\varphi(sx)dx.$$

(2) 设 $f\in C_c(G)$，则存在常数 M，使得：$\forall x,\ y\in G$，有不等式

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|f(x^{-1}\gamma y)|\leqslant M.$$

事实上，只要取紧子集 C 使得 $G=\Gamma C$，然后对 x、$y\in C$，证明所

求的不等式即可。设 $C'=\mathrm{supp}(f)$，$B=CC'C^{-1}$，则 $\gamma\notin B\cap\Gamma\Rightarrow f(x^{-1}\gamma y)=0$。但 $B\cap\Gamma$ 是离散紧集，所以它只有有限个元。设 $N=\#(B\cap\Gamma)$，则

$$\sum_{\Gamma}|f(x^{-1}\gamma y)|\leqslant N\sup_{s\in G}|f(s)|=M.$$

(3) 设 $f\in C_c(G)$，$x_0\in G$ 和 $\delta>0$，则存在单位元邻域 U，使得对 $x\in U$，$y\in G$ 有

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|f(x^{-1}x_0^{-1}\gamma y)-f(x_0^{-1}\gamma y)|<\delta.$$

此不等式可证明如下。取紧子集 C，使得 $G=\Gamma\cdot C$，设 $C'=\mathrm{supp}\ f$。取 G 的单位元的紧邻域 V，可以假设 $y\in C$，则由 $\gamma\notin x_0VC'C^{-1}\cap\Gamma$，可得

$$|f(x^{-1}x_0^{-1}\gamma y)-f(x_0^{-1}\gamma y)|=0.$$

设 N 表示集合 $x_0VC'C^{-1}\cap\Gamma$ 中元素个数，取单位元邻域 $U\subseteq V$，则

$$\sum_{\gamma\in\Gamma}|f(x^{-1}x_0^{-1}\gamma y)-f(x_0^{-1}\gamma y)|$$
$$\leqslant N\sup_{\substack{x\in U\\ y\in G}}|f(x^{-1}y)-f(y)|.$$

可取 U 充分小，使得

$$\sup_{\substack{x\in U\\ y\in G}}|f(x^{-1}y)-f(y)|<\frac{\delta}{N}.$$

就得到所求的不等式。

(4) 要证明当 $f\in C_c(G)$ 时，$\rho(f)$ 是紧算子，只需证明：若有 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 中序列 $\{\varphi_n\}$，$\|\varphi_n\|\leqslant 1(\forall n)$，则序列 $\|\rho(f)\varphi_n\|$ 有收敛子列。如果我们能证明下面两点，则可以用 Ascoli 定理得到上面结论：

(i) $\|\varphi\|\leqslant 1\Rightarrow\left|\int_G f(y)\varphi(xy)dy\right|<\infty$，$\forall x\in G$。

(ii) $\rho(f)\varphi$ 是连续函数且 $\{\rho(f)\varphi\,|\,\|\varphi\|\leqslant 1\}$ 是同等连续。

现在我们来证明这两点。由于

$$\int_G f(y)\varphi(xy)dy = \int_G f(x^{-1}y)\varphi(y)dy$$
$$= \int_{\Gamma\backslash G}\left[\sum_{\Gamma} f(x^{-1}\gamma y)\right]\varphi(y)dy,$$

所以

$$\left|\int_G f(y)\varphi(xy)dy\right|$$
$$\leqslant \left(\int_{\Gamma\backslash G}|\varphi(y)|^2dy\right)^{1/2}\left(\int_{\Gamma\backslash G}\left(\sum_{\Gamma}|f(x^{-1}\gamma y)|^2dy\right)^{1/2}\right.$$

由此不等式及 (2) 可得(1). 下面证 (ii).

对 $x_0\in G$, $\varepsilon>0$, 设 $|\Gamma\backslash G|$ 是 $\Gamma\backslash G$ 的测度, $\delta<\varepsilon/\sqrt{|\Gamma\backslash G|}$, 对此 δ 取 U 如(3), 则对 $\|\varphi\|\leqslant 1$, $x\in U$, 有

$$\left|\int_G f(y)\varphi(x_0xy)dy - \int_G f(y)\varphi(x_0y)dy\right|$$
$$= \left|\int_{\Gamma\backslash G}\varphi(y)\sum_{\gamma\in\Gamma}[f(x^{-1}x_0^{-1}\gamma y) - f(x_0^{-1}\gamma y)]dy\right|$$
$$\leqslant \left(\int_{\Gamma\backslash G}|\varphi(y)|^2\right)^{1/2}\left(\int_{\Gamma\backslash G}\left(\sum_{\gamma\in\Gamma}|f(x^{-1}x_0^{-1}\gamma y) - f(x_0^{-1}\gamma y)|\right)^2 d\gamma\right)^{1/2}$$
$$<\varepsilon.$$

这就证明了 (ii). □

引理 2.13. 设局部紧群 G 有酉表示 (π, H), 使得对任意单位元邻域 U, 存在正可积函数 f 满足以下条件: (1) $\mathrm{supp}(f)\subset U$, (2) $\int_G f dx = 1$, (3) $\pi(f)$ 是紧算子. 则

(1) H 有闭不变子空间 H_0, 使得 (π, H_0) 是不可约.

(2) H 有一组闭不变子空间 $\{H_\alpha\}$ 满足以下条件:

(i) (π, H_α) 是不可约的;

(ii) $\alpha\neq\beta\Rightarrow H_\alpha$ 与 H_β 正交;

(iii) $H = \oplus H_\alpha$;

(iv) G 的任何不可约表示只在 π 中出现有限多次.

证. (1) 取 $u\in H$, $\|u\|=1$, 单位元邻域 U, 使得: $x\in U\Rightarrow$

$\|\pi(x)u-u\|<1/2$. 对 U 选取 f 满足假设(1),(2),(3)，这样，如果 $\|v\|=1$，则

$$|(\pi(f)u-u,v)|=\left|\int_G f(x)(\pi(x)u,v)dx-(u,v)\right|$$

$$=\left|\int_G f(x)[(\pi(x)u,v)-(u,v)]dx\right|$$

$$=\left|\int_U f(x)(\pi(x)u-u,v)dx\right|$$

$$\leqslant\|\pi(x)u-u\|\|v\|\int_U f(x)dx\leqslant\frac{1}{2}.$$

因此 $\|\pi(f)u-u\|\leqslant\frac{1}{2}$. 又因为 $\pi(f)u\neq 0$，所以 $\pi(f)\neq 0$. $\pi(f)$ 的共轭算子 $\pi(f)^*$ 也是紧算子. 所以，$\pi(f)+\pi(f)^*$ 和 $-i(\pi(f)-\pi(f)^*)$ 都是自共轭紧算子. 设 $f^*(x)=\overline{f(x^{-1})}$，则 $\pi(f)^*=\pi(f^*)$. 两个算子 $\pi(f+f^*)$，$\pi(if^*-f)$ 之中必有一个非零. 以 A 记这个非零算子，设 λ 为 A 的非零特征根. $H_\lambda=\{u\in H\mid Au=\lambda u\}$. 则 $\dim H_\lambda<\infty$. 在 H 内考虑一组非零子空间

$\{H_\lambda\cap H'\mid H'$ 是 H 的闭子空间，且 $\pi(G)H'\subset H'\}$. 在其中取最小元 H_1. 设

$H_0=\cap\{H'\mid H'\supset H_1$，$H'$ 是闭的 $\pi(G)$ 不变子空间$\}$. 如果 (π,H_0) 可约，设 $H_0=L_1\oplus L_2$，其中 L_1，L_2 是互相垂直的非零的 $\pi(G)$ 不变子空间. 所以，L_1，L_2 亦在 A 的作用下不变，考虑

$$H_1=(H_1\cap L_1)\ominus(H_1\cap L_2).$$

由 H_1 的选取可知 $H_1\cap L_i=0$ 或 H_1，$i=1,2$. 必有 i，使 $H_1\cap L_i=H_1$，即 $L_i\supset H_1$，所以 $L_i\supset H_0$，这与 $H_0=L_1\oplus L_2$，$L_i\neq\{0\}$ 矛盾.

(2) 设 $\{H_\alpha\}$ 是一组最大的互相正交的闭不变子空间，于是 (π,H_α) 是不可约酉表示. 设 $H'=\oplus H_\alpha$. 如果 $H\neq H'$，取 H'' 为 H' 在 H 的正交补，则 $H''\neq 0$，而且 (π,H'') 同样满足引理的假设. 可以用(1)得到不可约不变子空间 H_0，而且 H_0 与 H' 正交，这与 H' 的定义矛盾. 最后证 (iv). 给出不可约酉表示 (σ,V).

设有无限个 α，使得 (π, H_α) 与 (σ, V) 等价。可选取 f 使 $\sigma(f+f^*)$，$\sigma(i(f^*-f))$ 之一有非零特征根 μ。V 中以 μ 为特征根的特征向量生成 V_μ。以 $T_\alpha: V \to H_\alpha$ 记 π, α 的缠结算子，选取 A 如(1)，并设

$$H_\mu = \{v \in H \mid Av = \mu v\}.$$

则 $\oplus T_\alpha V_\mu \subset H_\mu$。这与 $\dim H_\mu < \infty$ 相矛盾。 □

下面定理可立刻从引理 2.12 和 2.13 推出。

定理 2.14. 设 Γ, G 满足如上假设.则有正交分解 $L^2(\Gamma\backslash G) = \bigoplus\limits_{\pi \in \hat{G}} m_\pi L_\pi$，其中 $0 \leqslant m_\pi < \infty$，$m_\pi L_\pi$ 是 m_π 个 L_π 的直和，(ρ, L_π) 与不可约酉表示 π 等价。

下面我们研究怎样计算 m_π。

命题 2.15. 设 (π, H) 是 G 的二次可积表示，并有长度为 1 的向量 $u \in H$ 和 $h \in C_c(G)$，使得

(1) $\int_G |(\pi(x)u, u)| dx < \infty$，

(2) $\pi(h)u = u$。

设 $\xi(x) = d_\pi(\pi(x)u, u)$，$K(x, y) = \sum\limits_{\gamma \in \Gamma} \xi(x^{-1}\gamma y)$，$L^2(\Gamma\backslash G) = L_0 \oplus \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{m_\pi} L_i\right)$，其中 $L_0 = \sum\limits_{\pi' \neq \pi} m_{\pi'} L_{\pi'}$，$(\rho, L_i)$ 与 (π, H) 等价。则

(1) 设 C 为 G 的紧子集，对 $x, y \in C$，级数 $\sum\limits_{\gamma \in \Gamma} |\xi(x^{-1}\gamma y)|$ 一致收敛。

(2) $K(x, y)$ 是连续函数。

(3) 若 ρ 是右正则表示，$\varphi \in L^2(\Gamma\backslash G)$，则

$$\rho(\xi)\varphi(x) = \int_{\Gamma\backslash G} K(x, y)\varphi(y) dy,$$

$\rho(\xi)$ 的迹是

$$\operatorname{tr}\rho(\xi) = \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma \in \Gamma} \xi(x^{-1}\gamma x) dx,$$

(4) $\rho(\xi)|_{L_0} = 0$，

(5) $\rho(\xi)|_{L_i}$ 是 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 到 CT_iu 的投射，这里 $T_i: H \to L_i$ 是 (ρ, L_i) 与 (π, H) 的缠结算子.

(6) 设 $\{\varphi_i | 1 \leqslant i \leqslant m_\pi\}$ 是 $\rho(\xi)(L^2(\Gamma\backslash G))$ 的法正交基. 则 $K(x, y) = \sum_{i=1}^{m_\pi} \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)}$.

(7) $G_\gamma = \{x \in G | x\gamma x^{-1} = \gamma\}$ 是 γ 在 G 的中心化子，Γ_γ 是 γ 在 Γ 中的中心化子. 以 $|\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma|$ 记 $\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma$ 的测度，$\sum_{\{\gamma\}}$ 表示对 Γ 的共轭类求和. 则

$$m_\pi = \operatorname{tr}\rho(\xi) = \sum_{\{\gamma\}} |\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma| \int_{G_\gamma\backslash G} \xi(x^{-1}\gamma x)dx.$$

证. (1) 只需证明对任意 $\varepsilon > 0$，存在 Γ 的子集 S，使得

$$\sum_{\Gamma - S} |\xi(x^{-1}\gamma y)| < \varepsilon$$

对一切 $x, y \in C$ 都成立. 对假设给出的 $h \in C_c(G)$，我们选取 M，使得 $\forall x, y \in G$，有

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} |h(x^{-1}\gamma y)| < M.$$

设 $C_2 = \operatorname{supp}(h)$. 取 C 的紧子集 C_1，使得

$$\int_{G-C_1} |\xi(x)| dx < \varepsilon/M.$$

这时，从 $\pi(h)u = u$，得

$$\begin{aligned}\xi(x) &= d_\pi(\overline{\pi(x)u, u}) = d_\pi\int_G \overline{h(s)}\,(\overline{\pi(xs)u, u})ds \\ &= \int_G \overline{h(s)}\xi(xs)ds = \int_G \overline{h(x^{-1}s)}\xi(s)ds.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}|\xi(x^{-1}\gamma y)| &\leqslant \int_G |h(y^{-1}\gamma^{-1}xs)||\xi(s)|ds \\ &= \left(\int_{C_1} + \int_{G-C_1}\right)|h(y^{-1}\gamma^{-1}xs)||\xi(s)|ds.\end{aligned}$$

如果存在 $x_0, y_0 \in C$，使在 C_1 上积分不为 0，则存在 $s_0 \in C_1$，使

$y_0^{-1}\gamma^{-1}x_0s_0 \in C_2$，于是

$$\gamma^{-1} \in y_0C_2s_0^{-1}x_0^{-1} \subseteq CC_2C_1^{-1}C^{-1} \cap \Gamma,$$

后者是有限集，因此存在有限集 S，使得

$$\sum_{\Gamma - S} |\xi(x^{-1}\gamma y)|$$

$$\leqslant \int_{G-C_1} \sum_{\gamma \in \Gamma} |h(y^{-1}\gamma^{-1}xs)||\xi(s)| ds \leqslant M \cdot \varepsilon / M = \varepsilon.$$

(2) 是(1)的直接推论。

(3) 作计算如下

$$\begin{aligned} \rho(\xi)\varphi(x) &= \int_G \xi(y)\varphi(xy)dy = \int_G \xi(x^{-1}y)\varphi(y)dy \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} \left(\sum_{\gamma \in \Gamma} \xi(x^{-1}\gamma y)\right) \varphi(y)dy \\ &= \int_{\Gamma\backslash G} K(x, y)\varphi(y)dy. \end{aligned}$$

为了进一步证明，我们需要几个引理。

引理. 如果 $f \in L^1(G)$，则 $\rho(f)$ 是 Hilbert-Schmidt 算子(Sakai [60] p.35)。

证. 设 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots$，是 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的法正交基。我们有

$$\sum_{i,j=1}^{N} |(\rho(f)\varphi_i, \varphi_j)|$$

$$= \sum_{i,j=1}^{N} \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} |K(xy)| \varphi_i(y)\varphi_j(x) dy dx,$$

并且 $\{\varphi_i(y)\varphi_j(x)\}$ 是 $L^2(\Gamma\backslash G \times \Gamma\backslash G)$ 的法正交集。据 Bessel 不等式可得结论：

$$\sum_{i,j=1}^{N} |\rho(f)\varphi_i, \varphi_j)|^2 \leqslant \int_{\Gamma\backslash G} \int_{\Gamma\backslash G} |K(x, y)|^2 dx dy.$$

因此

$$\sum_{i,j=1}^{\infty} |(\rho(f)\varphi_i, \varphi_j)|^2 < \infty. \qquad \square$$

系理. 如果 $f_1, f_2 \in L^1(G)$，$f = f_1 * f_2$，则 $\rho(f) = \rho(f_1)\rho(f_2)$

是迹类算子 (Sakai [60],p.36). □

引理. 如果 X 是 σ-有限测度空间，$K_1(x, y)$，$K_2(x, y)$ 是 $X\times X$ 上的可测函数,使得

$$\int_{X\times X}|K_i(x, y)|^2dxdy<\infty,\ i=1, 2.$$

对 $\varphi\in L^2(X)$，设

$$T_i\varphi(x)=\int_X K_i(x, y)\varphi(y)dy,\ i=1, 2.$$

则 $T_i: L^2(X)\to L^2(X)$ 是 Hilbert-Schmidt 算子,并且

$$\mathrm{tr}(T_1T_2)=\int_X\int_X K_1(y, x)K_2(x, y)dxdy.$$

证. 对几乎所有 x 可以定义积分

$$\int_X K_i(x, y)\varphi(y)dy,$$

而且用 Hölder 不等式,有

$$\begin{aligned}&\int_X\left|\int_X K_i(x, y)\varphi(y)dy\right|^2dx\\&\quad\leqslant\int_X\left\{\int_X|K_i(x, y)|^2dy\right\}\left\{\int_X|\varphi(y)|^2dy\right\}dx\\&\quad\leqslant\left\{\int_X\int_X|K_i(x, y)|^2dxdy\right\}\left\{\int_X|\varphi(y)|^2dy\right\}.\end{aligned}$$

所以 T_i 是 $L^2(X)$ 上的有界算子. 同前面引理一样，可以证明 T_i 是 Hilbert-Schmidt 算子. 显然，

$$T_i^*\varphi(x)=\int_X\overline{K_i(y, x)}\varphi(y)dy.$$

在 $L^2(X)$ 中取法正交基 $\{\varphi_i\}$，则

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}(T_1T_2)&=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N(T_2\varphi_i, T_1^*\varphi_i)\\&=\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^N\int_X\left[\int_X K_2(x,y)\varphi_i(y)dy\right]\\&\qquad\times\left[\overline{\int_X\overline{K_1(y, x)}\varphi_i(y)dy}\right]dx.\end{aligned}$$

对几乎所有 x，有

$$\lim_{N\to\infty}\sum_{i=1}^{N}\int_X K_2(x,y)\varphi_i(y)dy\Big\}\Big\{\int_X K_1(\bar{y},x)\varphi_i(y)dy\Big\}$$

$$=\int_X K_2(x,y)K_1(y,x)dy.$$

另一方面，

$$\left|\sum_{i=1}^{N}\left\{\int_X K_2(x,y)\varphi_i(y)dy\right\}\left\{\int_X \overline{K_1(y,x)}\varphi_i(y)dy\right\}\right|$$

$$\leqslant\left\{\sum_{i=1}^{N}\left|\int_X K_2(x,y)\varphi_i(y)dy\right|^2\right\}^{1/2}$$

$$\times\left\{\sum_{i=1}^{N}\left|\int_X K_1(y,x)\ \varphi_i(y)dy\right|^2\right\}^{1/2}$$

$$\leqslant\left\{\int_X|K_2(x,y)|^2dy\right\}^{1/2}\left\{\int_X|K_1(y,x)|^2dy\right\}^{1/2}.$$

用 Schwarz 不等式，有

$$\int_X\left\{\int_X|K_2(x,y)|^2dy\right\}^{1/2}\left\{\int_X|K_1(y,x)|^2dy\right\}^{1/2}dx$$

$$\leqslant\left\{\int_{X\times X}|K_2(x,y)|^2dxdy\right\}^{1/2}\left\{\int_{X\times X}|K_1(y,x)|^2dxdy\right\}^{1/2}<\infty.$$

所以，应用控制收敛定理得到

$$\mathrm{tr}(T_1T_2)=\int_X\int_X K_2(x,y)K_1(y,x)dydx.\qquad\square$$

系理. 设 $f=f_1*f_2$，则

$$\mathrm{tr}\ \rho(f)=\int_{\Gamma\backslash G}\sum_{\gamma\in\Gamma}f(x^{-1}\gamma x)dx.$$

证. 设 $$\rho(f_1)\varphi(x)=\int_{\Gamma\backslash G}K_1(x,y)\varphi(y)dy,$$

$$\rho(f_2)\varphi(x)=\int_{\Gamma\backslash G}K_2(x,y)\varphi(y)dy.$$

则

$$\rho(f)\varphi(x)=\int_{\Gamma\backslash G}K(x,y)\varphi(y)dy,$$

其中

$$K(x, y) = \sum_{\gamma} f(x^{-1}\gamma y) = \int_{\Gamma\backslash G} K_1(x, s)K_2(s, y)ds.$$

系理立刻从引理得出。 □

现在我们证明 $\xi * \xi = \xi$，用 Schur 正交关系计算

$$\begin{aligned} d_\pi^2 \int_G (\pi(y)u, u)(\pi(y^{-1}x)u, u)dy \\ = d_\pi^2 \int_G (\pi(y)u, u)(\overline{\pi(y)u, \pi(x)u})dy \\ = d_\pi(u, u)(\pi(x)u, u) = d_\pi(\pi(x)u, u). \end{aligned}$$

这样结合上面系理，我们就得到命题 2.15 的(3)。下面继续证明 2.15。

(4) 设 $\varphi, \psi \in L_0$，$\rho_0 = \rho|_{L_0}$，则用 Schur 正交关系知

$$\begin{aligned} (\rho(\xi)\varphi, \psi) = \int_G \xi(y)(\rho(y)\varphi, \psi)dy \\ = d_\pi \int_G (\rho_0(y)\varphi, \psi)\overline{(\pi(y)u, u)}dy = 0. \end{aligned}$$

所以 $\rho(\xi)$ 与 L_0 的元正交，即 $\rho(\xi)|_{L_0} = 0$。

(5) 只需证明 $\pi(\xi)$ 是 H 到 H 的子空间 $\mathbb{C}u$ 的投射，取 $v, w \in H$，则

$$\begin{aligned} (\pi(\xi)w, v) = d_\pi \int_G \overline{(\pi(x)u, u)}(\pi(x)w, v)dx \\ = (w, u)(u, v). \end{aligned}$$

所以 $\pi(\xi)w = (w, u)u$。

(6) 因为 $K(x, y)$ 连续，所以可以设 φ_i 是连续的。但是，如果两个有连续核的积分算子相等，则这两个算子的核相等。故

$$\sum_{i=1}^{m_\pi} \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(y)} = K(x, y).$$

(7) 作计算

$$m_\pi = \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{i=1}^{m_\pi} \varphi_i(x)\overline{\varphi_i(x)}dx,$$

$$= \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\gamma} \xi(x^{-1}\gamma x)dx$$

$$= \int_{\Gamma\backslash G} \sum_{\{\gamma\}} \sum_{\Gamma_\gamma\backslash\Gamma} \xi(x^{-1}\delta^{-1}\gamma\delta x)dx\left(\Gamma = \sum_{\{\gamma\}} \Gamma_\gamma\backslash\Gamma\right)$$

$$= \sum_{\{\gamma\}} |\Gamma_\gamma\backslash G_\gamma| \int_{G_\gamma\backslash G} \xi(x^{-1}\gamma x)dx. \qquad \square$$

例. Γ 是 $G = SU(1, 1)$ 的离散子群，它使得 $\Gamma\backslash G$ 是紧空间。π_n 是 G 的离散序列表示（§1.4 例）.

$$\mathscr{D} = \{z \in \mathbf{C} \mid |z| < 1\}.$$

称 $\mathscr{D}$ 上的解析函数为权 n 的模形式，如果 $\forall \gamma \in \Gamma$，有 $\pi_n(\gamma)\phi = \phi$，即对 $\begin{pmatrix} a, & b \\ c, & d \end{pmatrix} \in \Gamma$，有

$$(bz + d)^n \phi\left(\frac{az + c}{bz + d}\right) = \phi(z), \ \forall z \in \mathscr{D}.$$

§3. 群 代 数

用算子代数理论来研究拓扑群的函数和测度所生成的拓扑代数的表示，便得到拓扑群的表示的性质。

§3.1. Banach 代数的表示

如果代数 $\mathscr{A}$ 同时亦是 Banach 空间，而且范数满足不等式 $\|xy\| \leqslant \|x\|\|y\|$，$(x, y \in \mathscr{A})$，则称 $\mathscr{A}$ 为 Banach 代数。如果复数域上的 Banach 代数 $\mathscr{A}$ 有对合映射 $x \longmapsto x^*$ 满足以下条件：

(i) $(ax + by)^* = \bar{a}x^* + \bar{b}y^*$，$(a, b \in \mathbf{C})$，

(ii) $(xy)^* = y^*x^*$，

(iii) $(x^*)^* = x$，

(iv) $\|x^*\| = \|x\|$.

则称 $\mathscr{A}$ 为 $*$-Banach 代数。如果 $\exists e \in \mathscr{A}$ 满足条件：$x \in \mathscr{A} \Rightarrow ex = xe = x$，则称 $\mathscr{A}$ 是有单位元的。本节中，如不加声明，$\mathscr{A}$

都是指有单位元的 $*$-Banach 代数。

如果 H 是 Hilbert 空间，则以 $\mathscr{L}(H)$ 记 H 的所有有限算子的全体。算子 A 的范数

$$\|A\| = \sup\left\{\frac{\|Av\|}{\|v\|},\ v\in H,\ v\neq 0\right\}.$$

$\mathscr{L}(H)$ 是 $*$-Banach 代数。如果存在代数同态 $\Pi:\mathscr{A}\to\mathscr{L}(H)$，使得：对 $x\in\mathscr{A}$，有 $(\Pi(x))^*=\Pi(x^*)$，则称 Π 为 $\mathscr{A}$ 的$*$表示；如果 $\Pi(x)=0\Rightarrow x=0$，则称 Π 为忠实表示。

设 H 有子空间 H_1，使得 $x\in\mathscr{A}\Rightarrow\Pi(x)(H_1)\subseteq H_1$，则称 H_1 为 Π 的不变子空间。如果除 H 和 0 外 Π 没有其他的闭不变子空间，则称 Π 为不可约的。

本节的主要结果是：如果 $*$-Banach 代数有忠实的 $*$ 表示，则 $\mathscr{A}$ 有充分多不可约 $*$ 表示。确切地说，就是对 $\mathscr{A}$ 中任意非零元 x，存在不可约表示 Π，使得 $\Pi(x)\neq 0$。

命题 3.1. 已给有单位元的 $*$-Banach 代数 $\mathscr{A}$ 的 $*$ 表示 (Π, H)，设

$$C(\Pi)=\{A\in\mathscr{L}(H)\mid A\Pi(x)=\Pi(x)A,\ \forall x\in\mathscr{A}\}.$$

则 Π 不可约 $\Longleftrightarrow C(\Pi)=\mathbf{C}$.

证. 设 H_1 是 H 的闭子空间，$P:H\to H_1$ 是正交投射，则 H_1 是 Π 的不变子空间 $\Longleftrightarrow P\in C(\Pi)$.

"$\Longleftarrow$"：设 $H_1\neq 0$，是闭不变子空间，则 $C(\Pi)=\mathbf{C}\Rightarrow P=I\Rightarrow H=H_1$.

"$\Longrightarrow$"设 Π 不可约，取 $B\in C(\Pi)$，将 B 写为 $B=B_1+iB_2$，其中 B_1，B_2 是 Hermite 算子。则 B_1，$B_2\in C(\Pi)$。故可假设 B 是 Hermite 算子。用谱定理

$$B=\int\lambda dE(\lambda),$$

其中 $E(\lambda)\in C(\Pi)$，并且 $\lambda\longmapsto(E(\lambda)v,v)$ 是单调非减函数。Π 不可约 $\Longrightarrow E(\lambda)=0$ 或 $I\Rightarrow\exists\lambda_0$，使得 $\lambda<\lambda_0\Rightarrow E(\lambda)=0$，而 $\lambda>\lambda_0$，所以 $E(\lambda)=I$。这样

$$B = \int \lambda dE(\lambda) = \lambda_0 I. \qquad \square$$

设 $\mathscr{A}$ 有 * 表示 (Π_α, H_α). 定义

$$H = \left\{(v_\alpha) \mid v_\alpha \in H_\alpha, \ \sum_\alpha \|v_\alpha\|^2 < \infty\right\}.$$

对 $x \in \mathscr{A}$, $(v_\alpha) \in H$, 定义

$$\Pi(x)(v_\alpha) = (\Pi_\alpha(x)v_\alpha).$$

称 Π 为 Π_α 的直和,并记为 $\Pi = \bigoplus_\alpha \Pi_\alpha$, $H = \oplus H_\alpha$.

已给 $\mathscr{A}$ 的 * 表示 (Π, H). 设

$$\mathfrak{N}(\Pi) = \{v \in H \mid \Pi(x)v = 0, \forall x \in \mathscr{A}\}.$$

如果 $\mathfrak{N}(\Pi) = 0$, 则说 Π 是非退化表示. 任何表示都是非退化表示与平凡表示的直和: $\Pi = \Pi_1 \oplus \Pi_2$, 其中 $\Pi_1 = \Pi|_{\mathfrak{N}(\pi)^\perp}$, $\Pi_2 = \Pi|_{\mathfrak{N}(\pi)}$.

我们说两个非退化 * 表示 (Π, H), (Π', H') 等价, 如果存在酉算子 $T: H \to H'$, 使得 $\Pi'T = T\Pi$. 称两个任意的 * 表示是等价的, 如果它们的非退化部分是等价的.

如果对 $\mathscr{A}$ 的 * 表示 (Π, H) 存在 $v \in H$, 使得 $\{\Pi(x)v \mid x \in \mathscr{A}\}$ 是 H 的稠密子集, 则称 Π 为循环表示, v 为 Π 的循环向量.

如命题 1.4, 不难证明

命题 3.2. * 表示必等价于循环表示的直和. $\square$

设 f 是 * 代数 $\mathscr{A}$ 的连续线性函数. 如果 $\forall x \in \mathscr{A}$, 有 $f(x^*x) \geqslant 0$, 则称 f 为正泛函. 设 g 是 $\mathscr{A}$ 的连续线性函数,若存在正泛函 h_i 和常数 a_i, b_i, 使得 $g = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$ 及 $b_i f - h_i$ 是正泛函,我们说 $f \succ g$. 设

$$C(f) = \left\{ g \,\middle|\, \begin{array}{l} \text{(i)} \ g \text{ 是 } A \text{ 的连续线性函数} \\ \text{(ii)} \ f \succ g. \end{array} \right\}.$$

若 $C(f) = \{af \mid a \in \mathbf{C}\}$, 则称 f 是不可分解正泛函.

定理 3.3. (Gelfond-Naimark-Segel) 已给有单位元的 * Banach 代数 $\mathscr{A}$. 那末有

(1) 如果 (Π, H) 是 $\mathscr{A}$ 的 $*$ 表示，则对任意 $v \in H$, $x \longmapsto (\Pi(x)v, v)$ 是正泛函.

(2) 如果 f 是 $\mathscr{A}$ 的正泛函，则 $\mathscr{A}$ 有循环 $*$ 表示 Π 和循环向量 v，使得 $f(x) = (\Pi(x)v, v)$. 若另有 $\mathscr{A}$ 的循环表示 Π' 和循环向量 v'，使得 $f(x) = (\Pi'(x)v', v')$，则 Π 与 Π' 等价.

(3) 如果 (Π, H) 是 $\mathscr{A}$ 的非零循环 $*$ 表示，v 是 Π 的循环向量，$f(x) = (\Pi(x)v, v)$，对 $B \in \mathscr{L}(H)$，取 $f_B(x) = (B\Pi(x)v, v)$，则

$$C(\Pi) \to C(f)$$
$$B \longmapsto f_B$$

是同构.

(4) $*$ 表示 Π 是不可约的充要条件是 Π 是循环表示及循环向量 v 所决定的正泛函 $f(x) = (\Pi(x)v, v)$ 是不可分解的.

(5) 如果 f 是 $\mathscr{A}$ 的不可分解正泛函，则 $\mathscr{A}$ 有不可约 $*$ 表示 (Π, H)，使得 $f(x) = (\Pi(x)v, v)$, $v \in H$.

证. (1)显然有

$$f(x^*x) = (\Pi(x^*x)v, v) = (\Pi(x)v, \Pi(x)v) \geqslant 0.$$

(2) 令

$$I = \{z \in \mathscr{A} \mid f(z^*z) = 0\}$$

利用下述不难证明的等式及不等式:

$$\overline{f(y^*x)} = f(x^*y),$$
$$|f(y^*x)|^2 \leqslant f(x^*x)f(y^*y),$$
$$f[(x+z)^*(x'+z')] = f(x^*x'), \ (z, z' \in I).$$

容易验证 I 是 $\mathscr{A}$ 的左理想，而且可以在 $\mathscr{A}/I \times \mathscr{A}/I$ 上定义函数: $(x+I, y+I) = f(y^*x)$. 不难证明它是 $\mathscr{A}/I$ 的内积. 设 H 为 $\mathscr{A}/I$ 对此内积完备化所得的 Hilbert 空间.

对 $x \in \mathscr{A}$，引进 $\mathscr{A}/I$ 上的算子: $\Pi(x)(y+I) = xy + I$. 对 $y \in \mathscr{A}$，设 $f_y(x) = f(y^*xy)$，则

$$f_y(x^*x) = f(y^*x^*xy) = f((xy)^*xy) \geqslant 0.$$

所以 $\|f_y\| = f_y(e)$. 于是

$$(\Pi(x)(y+I), \Pi(x)(y+I)) = (xy+I, xy+I)$$
$$= f((xy)^*(xy)) = f_y(x^*x) \leqslant \|x^*x\| f_y(e) \leqslant \|x\|^2 f(y^*y)$$
$$= \|x\|^2 (y+I, y+I).$$

故 $\|\Pi(x)\| \leqslant \|x\|$, 即 Π 是有界算子. 于是可将 Π 扩张为 H 上的有界算子,仍记为 $\Pi(x)$. 令 $v = e + I$, 则

$$\mathscr{A}/I = \{\Pi(x)v \mid x \in \mathscr{A}\},$$
$$f(x) = f(e^*x) = (x+I, e+I) = (\Pi(x)v, v).$$

显然 (Π, H) 是所求的表示.

如果有 $\mathscr{A}$ 的表示 (Π', H') 及 $v' \in H'$, 使得

$$(\Pi(x)v, v) = (\Pi'(x)v', v').$$

以 x^*x 代替 x, 得到

$$(\Pi(x)v, \Pi(x)v) = (\Pi'(x)v', \Pi'(x)v').$$

在 $\mathscr{A}/I$ 上定义的算子

$$T: \Pi(x)v \longmapsto \Pi'(x)v',$$

可扩张为 $T: H \to H'$, 它是酉算子. 显然

$$T\Pi(x)T^{-1}(\Pi'(y)v') = \Pi'(x)\Pi'(y)v'.$$

(3) 证明分为三个步骤:

(i) $B \in C(\Pi) \Rightarrow f_B \in C(f)$. 因为 $B = B_1 + iB_2$, $B_1 = \frac{1}{2}(B+B^*)$, $B_2 = \frac{1}{2i}(B - B^*)$, B_1, B_2 都是 Hermite 算子,另外 $B_1 B_2$ 可表示为 $B_1 = B_1^+ - B_1^-$, $B_2 = B_2^+ - B_2^-$, $B_i^\pm \geqslant 0$ $(i = 1, 2)$, 所以可假设 $B \geqslant 0$, 即 $(Bu, u) \geqslant 0$, $\forall u$. 因此

$$f_B(x^*x) = (B\Pi(x^*x)v, v) = (B\Pi(x)v, \Pi(x)v) \geqslant 0,$$
$$0 \leqslant (B\Pi(x)v, \Pi(x)v) \leqslant \|B\|(\Pi(x)v, \Pi(x)v) = \|B\| f(x^*x).$$

可见 f_B 与 $\|B\|f - f_B$ 都是正泛函,所以 $f_B \in C(f)$.

(ii) $B \longmapsto f_B$ 是满映射. 设 $g \in C(f)$, 则 $g = \sum_{i=1}^{n} a_i h_i$, h_i 是正泛函, $f \succ h_i$, $1 \leqslant i \leqslant n$. 所以可假设 g 和 $bf - g$ 是正泛函. 因为 $\Pi(x) = 0 \Rightarrow f(x^*x) = 0 \Rightarrow g(x^*x) = 0 \Rightarrow g(x^*y) = 0$,

所以可在 $\{\Pi(x)v\}$ 上引入 $(*,*)_g$ 如下：$(\Pi(x)v, \Pi(y)v)_g = g(y^*x)$. 因为

$$|(\Pi(x)v, \Pi(y)v)_g| \leqslant g(x^*x)g(y^*y) \leqslant b^2 f(x^*x)f(y^*y)$$
$$= b^2\|\Pi(x)v\|^2\|\Pi(y)v\|^2,$$
$$(\Pi(x)v, \Pi(y)v)_g = \overline{(\Pi(y)v, \Pi(x)v)_g},$$
$$(\Pi(x)v + \Pi(y)v, \Pi(z)v)_g = (\Pi(x)v, \Pi(z)v)_g + (\Pi(y)v, \Pi(z)v)_g.$$

v 是循环向量，所以可把 $(*,*)_g$ 扩张为 H 的内积。按 Riesz 定理，存在 $B \in \mathscr{L}(H)$，使得

$$(Bu, w) = (u, w)_g,$$
$$(B\Pi(x)v, \Pi(x)v) = g(x^*x) \geqslant 0.$$

因此 $B \geqslant 0$. 计算

$$(B\Pi(x)\Pi(y)v, \Pi(z)v) = (B\Pi(xy)v, \Pi(z)v)$$
$$= g(z^*xy) = g((x^*z)^*y) = (B\Pi(y)v, \Pi(x^*z)v)$$
$$= (\Pi(x)B\Pi(y)v, \Pi(z)v).$$

这说明 $B\Pi = \Pi B$. 即 $B \in C(\Pi)$. 最后 $\Pi(e)\Pi(x)v = \Pi(x)v \Rightarrow \Pi(e) = I \Rightarrow g(x) = g(e^*x) = (B\Pi(x)v, \Pi(e)v) = (B\Pi(x)v, v) = f_B(x)$. 这就证明了，对任给 $g \in C(f)$，存在 $B \in C(\Pi)$，使得 $f_B = g$.

(iii) $B \longmapsto f(B)$ 是单映射. 若有 $B, C \in C(\Pi)$，使得 $f_B = f_C$. 则

$$(B\Pi(x)v, \Pi(y)v) = (\Pi(y)^*B\Pi(x)v, v) = (B\Pi(y^*x)v, v)$$
$$= f_B(y^*x) = f_C(y^*x) = (C\Pi(x)v, \Pi(y)v).$$

所以 $B = C$. □

定理 3.3 有时被简称为 GNS 定理.

命题 3.4. $\mathscr{A}$ 为有单位元的*Banach 代数. 设 $0 \neq x \in \mathscr{A}$. 如果有正泛函 f，使得 $f(x^*x) > 0$，则存在 $\mathscr{A}$ 的不可约 * 表示 Π，使得 $\Pi(x) \neq 0$

证. 设 $H(\mathscr{A}) = \{x \in \mathscr{A} \mid x^* = x\}$. 则 $H(\mathscr{A})$ 是实数 $\mathbf{R}$ 上的 Banach 空间. f 是 $\mathscr{A}$ 的正泛函 $\Rightarrow f(H(\mathscr{A})) \subseteq \mathbf{R} \Rightarrow f \in$

$H(\mathscr{A})^*$（实 Banach 空间 $H(\mathscr{A})$ 的对偶空间）. 设 $K=\{f\mid f$ 正泛函，$f(e)=1\}$，$\Sigma=\{h\in H(\mathscr{A})^*\mid\|h\|=1\}$. 则$K$是$\Sigma$的闭凸集，而$\Sigma$对 $H(\mathscr{A})^*$ 的弱*拓扑是紧集.

可以假设已给的正泛函 f 满足条件：$f\in K$ 且 $f(x^*x)>0$. 设 $K_0=\{h_0\in K\mid h_0(x^*x)=\sup\limits_{h\in K}h(x^*x)\}$. 则对弱*拓扑，$K_0$是 $H(\mathscr{A})^*$ 的凸紧子集. 所以 K_0 有端点 f_0(Крейн-Мильман 定理). 我们来证明 f_0 是不可分解的：取正泛函 $h\neq 0$，$h\in K_0$ 及 $b>0$，使得 $g=bf_0-h$ 是正泛函. 如果 $g=0$，则 $h=bf_0$. 如果 $g\neq 0$，则 $f_0=\frac{1}{b}h+\frac{\|g\|}{b}\cdot\frac{g}{\|g\|}$. 但是 $g>0$，$\|g\|=g(e)=bf_0(e)-h(e)=b-1$，所以 $0<\frac{1}{b}<1$，$h\in K_0$，$\frac{g}{\|g\|}\in K_0$，$f_0=\frac{1}{b}h+\left(1-\frac{1}{b}\right)\frac{g}{\|g\|}$ 是端点，这是不可能的，故得到矛盾. 因此 $C(f_0)=\{af_0\mid a\in\mathbb{C}\}$.

由 GNS 定理，可知有不可约*表示Π及循环向量v，使得 $f_0(y)=(\Pi(y)v,v)$. 则

$$\|\Pi(x)v\|^2=(\Pi(x)v,\Pi(x)v)=f_0(x^*x)=\sup_{f_1\in K}f_1(x^*x)$$
$$\geq f(x^*x)>0.$$

故有 $\Pi(x)\neq 0$. □

命题 3.5. 如果有单位元的*Banach 代数$\mathscr{A}$有忠实表示，则对任意 $0\neq x\in\mathscr{A}$ 存在不可约表示Π，使得 $\Pi(x)\neq 0$.

证. 把$\mathscr{A}$的忠实表示写为循环表示的直和，所以，对 $x\neq 0$，有循环表示Π'，使得 $\Pi'(x)\neq 0$. 设 v' 是 Π' 的循环向量，取 $f(x)=(\Pi'(x)v',v')$，则 $f(x^*x)>0$，f 是正泛函. 故从命题 3.4 可知所求的表示存在. □

§3.2. 群代数

设G是局部紧拓扑群. 在G上固定左不变 Haar 测度. 定义在G上的复值可测函数所生成的线性空间记为 $L^1(G)$. 对 $f\in L^1(G)$，取范数

$$\|f\| = \int_G |f(x)|dx.$$

对此范数 $L^1(G)$ 是 Banach 空间. 取 $f, g \in L^1(G)$, 可定义卷积

$$f * g(x) = \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy = \int_G f(xy)g(y^{-1})dy.$$

不难证明以下性质:

(1) $\|f\| \geqslant 0$, $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f = 0$,

(2) $\|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|$,

(3) $\|\alpha f\| = |\alpha|\,\|f\|$, $\alpha \in \mathbf{C}$,

(4) $\|f * g\| \leqslant \|f\|\|g\|$.

所以对加法和卷积乘法, $L^1(G)$ 是 $\mathbf{C}$ 上的线性结合代数. 而且对范数$\|\cdot\|$是完备的. $L^1(G)$ 是 Banach 代数. 我们将证明这个由 G 所决定的群代数的表示与 G 的表示有 1-1 对应关系.

对 $f \in L^1(G)$, 定义 f^* 如下: $f^*(x) = \overline{f(x^{-1})}\Delta(x^{-1})$, 其中 Δ 是 G 的模函数. 则 $f^* \in L^1(G)$, 并且有以下性质: $(f^*)^* = f$; $(f + g)^* = f^* + g^*$; $(\alpha f)^* = \bar{\alpha} f^*(\alpha \in \mathbf{C})$; $(f * g)^* = g^* * f^*$. 现我们只证明最后一项:

$$(f * g)^*(x) = \overline{f * g(x^{-1})}\Delta(x^{-1}) = \int_G \bar{f}(y)\bar{g}(y^{-1}x^{-1})\Delta(x^{-1})dy$$

$$= \int_G \bar{g}((xy)^{-1})\Delta((xy)^{-1})\bar{f}(y)\Delta(y)dy$$

$$= \int_G g^*(xy)f^*(y^{-1})dy = (g^* * f^*)(x).$$

所以 $L^1(G)$ 是 $*$-Banach 代数.

设 A 是有向集(即有偏序$\leqslant$,而且对 $\alpha_1, \alpha_2 \in A$, 存在 $\alpha_3 \in A$ 使得 $\alpha_1 \leqslant \alpha_3$, $\alpha_2 \leqslant \alpha_3$), $f: A \to \mathbf{C}$, 我们说 $\lim\limits_{\alpha} f(\alpha) = a$, 若$\forall \varepsilon > 0$, $\exists \alpha_0 \in A$, 使得 $\alpha \geqslant \alpha_0 \Rightarrow |f(\alpha) - a| < \varepsilon$. 称集 $\{u_\alpha\} \subseteq L^1(G)$ 为近似单位,如果 $\forall f \in L^1(G)$,有 $\lim\limits_{\alpha} \|f * u_\alpha - f\| = 0$,

则

$$\lim_{\alpha} \|u_\alpha * f - f\| = 0.$$

命题 3.6. $L^1(G)$ 有近似单位.

证. 设 $\{N_\alpha | \alpha \in A\}$ 是 G 的单位元 e 的一个紧邻域基. 设

$\alpha_2 \leqslant \alpha_1$，若 $N\alpha_1 \subseteq N\alpha_2$。取非负连续函数 u_α，使得 $\operatorname{supp}(u_\alpha) \subseteq N_\alpha$，$\int_G u_\alpha(x)dx = 1$。则对 $f \in L^1(G)$，成立

$$f(x) = \int_G f(x)u_\alpha(y)dy.$$

所以，

$$\begin{aligned}\|u_\alpha * f - f\| &= \int_G \left|\int_G u_\alpha(y)f(y^{-1}x)dy - f(x)\right| dx \\ &= \int_G \left|\int_G u_\alpha(y)[f(y^{-1}x) - f(x)]dy\right| dx \\ &\leqslant \int_G\int_G |u_\alpha(y)||f(y^{-1}x) - f(x)|dydx \\ &= \int_G \|f_y - f\|u_\alpha(y)dy = \int_{N_\alpha} \|f_y - f\|u_\alpha(y)dy,\end{aligned}$$

其中

$$f_y(x) = f(y^{-1}x).$$

现来证明 $G \to L^1(G)$，$y \longmapsto f_y$ 是连续映射。已给 $\varepsilon > 0$，存在 $g \in C_c(G)$，使得 $\|f - g\| < \varepsilon$。因为 g 一致连续，所以存在单位元的邻域N，使得 $y'y^{-1} \in N$。这样 $\|g_{y'} - g_y\| < \varepsilon$。于是对 $y'y^{-1} \in N$，有

$$\begin{aligned}\|f_{y'} - f_y\| \leqslant \|f_{y'} - g_{y'}\| + \|g_{y'} - g_y\| \\ + \|g_y - f_y\| < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

所以 $\lim\limits_{y \to e}\|f_y - f\| = 0$。可取 α_0，使得 $\alpha \geqslant \alpha_0$，$y \in N_\alpha \Rightarrow \|f_y - f\| < \varepsilon$。于是

$$\|u_\alpha * f - f\| < \varepsilon \int u_\alpha(y)dy = \varepsilon.$$

因为 $\{N_\alpha^{-1}\}$ 亦是单位元 e 的一个紧邻域基，而且 $\operatorname{supp} u_\alpha^* \subseteq N_\alpha^{-1}$，$u_\alpha^* \geqslant 0$，$\|u_\alpha^*\| = \|u_\alpha\| = -1$。这样

$$\|u_\alpha^* * f - f\| \to 0.$$

于是

$$\begin{aligned}\|f * u_\alpha - f\| = \|(f * u_\alpha - f)^*\| = \|(f * u_\alpha)^* - f^*\| \\ = \|u_\alpha^* * f^* - f^*\| \to 0.\end{aligned}$$

□

设H为 Hilbert 空间，$\mathscr{L}(H)$ 为H的有界算子代数，称*-代数同态 $\Pi: L^1(G) \to \mathscr{L}(H)$ 为 $L^1(G)$ 在H中的*表示，如果：

$$\Pi(f+g) = \Pi(f) + \Pi(g),\ \Pi(\alpha f) = \alpha\Pi(f),$$

$$\Pi(f * g) = \Pi(f)\cdot\Pi(g),\ \Pi(f^*) = \Pi(f)^*,$$

其中 $\alpha \in \mathbf{C}$，$\Pi(f)^*$ 是算子 $\Pi(f)$ 的共轭算子。 设 $\mathfrak{N}(\Pi) = \{v \in H \mid \Pi(f)v = 0,\ \forall f \in L^1(G)\}$。若 $\mathfrak{N}(\Pi) = 0$，则称表示Π为非退化表示。

引理 3.7. 设 $\Pi: L^1(G) \to \mathscr{L}(H)$ 为非退化*表示，以 H_1 记由 $\{\Pi(f)v \mid f \in L^1(G),\ v \in H\}$ 所生成的闭子空间。则 $H_1 = H$.

证. 记 $H_1^\perp = H_2$. 因为 $\Pi(g)(\Pi(f)v) = \Pi(g * f)v$，所以 $\Pi(L^1(G))H_1 \subseteq H_1$. 因此 $\Pi(L^1(G))H_2 \subseteq H_2$. 取 $v \in H_2$，则 $\Pi(f)v \in H_1 \cap H_2 = \{0\}$，$\forall f \in L^1(G)$. 所以 $v \in \mathfrak{N}(\Pi)$，可见 $H_2 = 0$，即 $H_1 = H$. □

引理 3.8. $f, g \in L^1(G)$，$x \in G$，则 $(g_x)^* * f_x = g^* * f$.

证.

$$(g_x)^* * f_x(y) = \int g_x^*(z) f_x(z^{-1}y)dz = \int \bar{g}_x(z^{-1})\Delta(z^{-1}) f_x(z^{-1}y)dz$$

$$= \int \bar{g}_x(z) f_x(zy)dz = \int \bar{g}(z) f(zy)dz$$

$$= \int g^*(z) f(z^{-1}y)dz = (g^* * f)(y). \qquad \square$$

引理 3.9. $\Pi: L^1(G) \to \mathscr{L}(H)$ 是*表示，$\sum_{i=1}^n \Pi(f_i)v_i = 0$ 则对一切 $x \in G$，有 $\sum_{i=1}^n \Pi((f_i)_x)v_i = 0$.

证.

$$0 = \left\langle \sum_{i=1}^n \Pi(f_i)v_i,\ \sum_{i=1}^n \Pi(f_i)v_i \right\rangle = \sum_{i,j} \langle \Pi(f_i)v_i,\ \Pi(f_j)v_j\rangle$$

$$= \sum_{i,j} \langle \Pi(f_j^* * f_i)v_i,\ v_j\rangle = \sum_{i,j} \langle \Pi((f_j)_x{}^* * (f_i)_x)v_i,\ v_j\rangle$$

$$= \left\langle \sum_i \Pi((f_i)_x)v_i,\ \sum_j \Pi((f_j)_x)v_j \right\rangle. \qquad \square$$

定理 3.10. G 是局部紧群. 以 $\hat{G}$ 记 G 的连续不可约酉表示所组成的集合. 以 $\widehat{L_1(G)}$ 记 $L^1(G)$ 的非退化不可约 $*$ 表示所组成的集合. 则存在单、满映射 $\hat{G}\longleftrightarrow\widehat{L^1(G)}: \pi\longleftrightarrow\Pi$, 使得: 若 $f\in L^1(G)$, 则 $\Pi(f)=\int_G f(x)\pi(x)dx$; 若 $x\in G$, $f\in L^1(G)$, 则 $\pi(x)\Pi(f)=\Pi(f_x)$.

注. 对 $v\in H$, 可以把 $\int_G f(x)\pi(x)vdx$ 看成向量值函数的 Bochner 积分,见 Hille-Phillips, [27], (3.7.3).

证. (1) 已给 $(\pi, H)\in\hat{G}$, 固定 $u, v\in H$, 则 $x\longmapsto\langle\pi(x)u, v\rangle$ 是连续. 而且 $\pi(x)$ 是酉算子 $\Rightarrow|\langle\pi(x)u, v\rangle|\leqslant\|u\|\|v\|$. 故对 $f\in L^1(G)$, 有

$$\int f(x)<\pi(x)u, v>dx<\infty.$$

对固定的 f, $(u, v)\longmapsto\int f(x)\langle\pi(x)u, v\rangle dx$ 是 H 上的有界双线性泛函. 这是因为

$$\left|\int f(x)<\pi(x)u, v>dx\right|\leqslant\|f\|\|u\|\|v\|.$$

由 Riesz 表示定理, 存在算子 $\Pi(f)$, 使得 $\|\Pi(f)\|\leqslant\|f\|$, 且 $\forall u, v\in H$,

$$\langle\Pi(f)u, v\rangle=\int f(x)\langle\pi(x)u, v\rangle dx.$$

显然 $f\longmapsto\Pi(f)$ 是线性映射, Π 是连续的.

$$\Pi(f*g)=\int f*g(x)\pi(x)dx=\iint f(y)g(y^{-1}x)\pi(x)dydx$$

$$=\int f(y)\pi(y)\left\{\int g(y^{-1}x)\pi(y^{-1}x)dx\right\}dy=\Pi(f)\Pi(g).$$

$$\begin{aligned}\langle\Pi(f^*)u, v\rangle&=\int f^*(x)\langle\pi(x)u, v\rangle dx\\&=\int\bar{f}(x^{-1})\Delta(x^{-1})\langle\pi(x)u, v\rangle dx\\&=\int\bar{f}(x^{-1})\langle u,\pi(x^{-1})v\rangle\Delta(x^{-1})dx\end{aligned}$$

$$= \int \bar{f}(x^{-1})\, \overline{\langle \pi(x^{-1})v, u\rangle} \Delta(x^{-1})dx = \int \bar{f}(x)\, \overline{\langle \pi(x)v, u\rangle} dx$$

$$= \overline{\langle \Pi(f)v, u\rangle} = \langle \Pi(f)^* u, v\rangle.$$

即 $\Pi(f^*) = \Pi(f)^*$，所以 $f \longmapsto \Pi(f)$ 是 $L^1(G)$ 的 $*$ 表示。设 $\forall f \in L^1(G)$，$\Pi(f)v = 0$，则

$$0 = \langle \Pi(f)v, u\rangle = \int f(x)\langle \pi(x)v, u\rangle dx.$$

故 $x \longmapsto \langle \pi(x)v, u\rangle$ 几乎处处为 0。所以 $\pi(x)v = 0$，即 $v = 0$。这便证明了 Π 是非退化。由此可见从 $\pi \in \hat{G}$ 可得 $\Pi \in \widehat{L^1(G)}$，Π 由公式

$$\Pi(f) = \int f(x)\pi(x)dx$$

决定。

(2) 已给 $\Pi \in L^1(G)$，以 H_0 记 $\{\Pi(f)v \mid f \in L^1(G), v \in H\}$ 生成的子空间。由引理 3.9，对 $x \in G$，可以定义 $\pi(x): H_0 \to H_0$ 如下：

$$\pi(x)\left(\sum_{i=1}^{n} \Pi(f_i)v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \Pi((f_i)_x)v_i.$$

同时从引理 3.9 的证明可见 $\pi(x)^* = \pi(x)^{-1}$。所以 $\pi(x)$ 可以扩张至 $\bar{H}_0 = H$，$f_{xy} = (f_y)_x \Rightarrow \pi(xy) = \pi(x)\pi(y)$。从 $*$Banach 代数的 $*$ 表示理论知 $\|\Pi(f)\| \leqslant \|f\|$，加上 $G \to L^1(G)$，$x \longmapsto f_x$ 是连续，所以 π 是连续表示。

(3) 设 $\pi \in \hat{G}$，由(1)，(2)可知有映射 $\pi \to \Pi$，$\Pi \to \rho \in \hat{G}$。则

$$\pi(x)\Pi(f) = \pi(x)\int f(y)\pi(y)dy = \int f(y)\pi(xy)dy$$

$$= \int f(x^{-1}y)\pi(y)dy = \int f_x(y)\pi(y)dy$$

$$= \Pi(f_x) = \rho(x)\Pi(f).$$

因为 $\{\Pi(f)v \mid f \in L^1(G), v \in H\}$ 生成 H 的稠密子空间，所以 $\pi(x) = \rho(x)$。

(4) 设 $\Pi \in \widehat{L^1(G)}$，则有映射 $\Pi \to \pi$，$\pi \to B \in \widehat{L^1(G)}$。固定 $u, v \in H$，则 $f \to \langle \Pi(f)u, v\rangle$ 是 $L^1(G)$ 上的有界线性泛函。所

以$\exists$函数 $Q_{u,v}\in L^\infty(G)$，使得

$$\langle \Pi(f)u, v\rangle = \int_G f(y)Q_{u,v}(y)dy.$$

于是 $\forall f, g\in L^1(G)$，有

$$\begin{aligned} B(f)\Pi(g) &= \int f(x)\pi(x)\Pi(g)dx = \int f(x)\Pi(g_x)dx \\ &= \iint f(x)g_x(y)Q(y)dydx = \int (f*g)(y)Q(y)dy \\ &= \Pi(f*g) = \Pi(f)\Pi(g). \end{aligned}$$

因为 $\{\Pi(g)v\}$ 生成H的稠密子空间，故 $B(f)=\Pi(f)$。

(5) 显而易见，π 与 Π 的不变子空间是一样的，所以 π 不可约 $\Longleftrightarrow$ Π 不可约。 $\square$

注．有时不区分定理中的 π, Π，所以 $\Pi(f)$ 也常记为 $\pi(f)$。

例．设 $(\lambda, L^2(G))$ 是局部紧群G的左正则表示．即对 $x\in G$，$f\in L^2(G)$，$\lambda(x)f(y)=f(x^{-1}y)$，如果 $x\neq e$，取 $f\in C_c(G)$，使得 $f(x)\neq f(e)$，则对 $f\in L^2(G)$，便有 $\lambda(x)f=f_x\neq f=\lambda(e)f$．因此，对 $x\neq e$，$\lambda(x)\neq\lambda(e)$。

与 λ 对应的 $L^1(G)$ 的表示 Λ 是卷积．作计算

$$\begin{aligned} \Lambda(f)g(x) &= \int_G f(y)\lambda(y)g(x)dy \\ &= \int_G f(y)g(y^{-1}x)dy = f*g(x). \end{aligned}$$

我们进一步证明：Λ 是 $L^1(G)$ 的忠实表示．设有 $f\in L^1(G)$，使得 $\Lambda(f)=0$．则对任意的 $g, h\in L^2(G)$，

$$0=(\Lambda(f)g,h)=\int_G f(x)(\lambda(x)g, h)dx.$$

因为 $x\neq e$，所以 $\lambda(x)\neq I_d$（恒等映射）．故连续函数组$\{x\mapsto(f(x)g, h)\mid g, h\in L^2(G)\}$ 把G的点分开．这就是说，对 $x\neq y$，便有 g, h，使得 $(\lambda(x)g, h)\neq(\lambda(y)g, h)$．因为 f 可以用有紧支集K的连续函数 L^1-逼近，而在K上连续函数可用 $x\longmapsto\Sigma a_i\times(\lambda(x)g_i, h_i)$ 一致逼近（Stone-Weierstrass 定理），所以 $\|f\|_1=0$．于是得证：$\Lambda(f)=0\Rightarrow f=0$。

定理 3.11. (Gelfand-Raikov) 如果 G 是局部紧拓扑群，$x \neq e$，则存在不可约酉表示 π，使得 $\pi(x) \neq I$.

证. 把 $L^1(G)$ 扩张为有单位的 $*$ Banach 代数，然后用上段的结果. 在 $\mathscr{R} = \mathbf{C}\delta \oplus L^1(G)$ 中引入乘法:

$$(a\delta + f)(b\delta + g) = (ab)\delta + (ag + bf + f * g).$$

引入范数: $\|a\delta + f\| = |a|\,|\delta| + \|f\|$. 则 $\mathscr{R}$ 是有单位元的 $*$ Banach 代数. $L^1(G)$ 是 $\mathscr{R}$ 的极大 $*$ 理想. 把 $L^1(G)$ 的表示 Π 扩张为 $\mathscr{R}$ 的表示 $\tilde{\Pi}$ 如下:

$$\tilde{\Pi}(a\delta + f) = aI + \Pi(f).$$

I 是恒等映射. 反过来从 $\mathscr{R}$ 的表示 $\tilde{\Pi}$ 可得 $L^1(G)$ 的表示 $\Pi = \tilde{\Pi}|_{L^1(G)}$. 在这个对应 $\Pi \longleftrightarrow \tilde{\Pi}$ 下，不可约表示、循环表示及忠实表示都相对应.

G 的左正则表示 λ 所决定的 $L^1(G)$的表示 Λ 是忠实表示，所以 $\mathscr{R}$ 有忠实表示 $\tilde{\Lambda}$. 如上所述，$\mathscr{R}$ 的不可约 $*$ 表示与 G 的不可约酉表示相对应. 由命题 3.5 可知，对 $0 \neq f \in L^1(G)$，存在 G 的不可约酉表示 π，使得 $\Pi(f) \neq 0$.

对给定的 $x \neq e$，取 $g \in C_c(G)$，使得 $g(x^{-1}) \neq g(e)$. 则 $\lambda(x)g \neq g$，即 $f = \lambda(x)g - g \neq 0$. 取 (Π, H)，使得 $\Pi(f) \neq 0$，即存在 $v \in H$，使得 $\Pi(f)v \neq 0$. 因此 $\Pi(g)v \neq \Pi(\lambda(x)g)v = \pi(x)\Pi(g)v$，所以 $\pi(x) \neq I$. □

§4. Plancherel 定 理

$\mathscr{A}$ 是$*$ Banach 代数. 在 $\tilde{\mathscr{A}} = \mathbf{C}e \oplus \mathscr{A}$ 中引入加法: $(ae + x) + (be + y) = (a + b)e + (x + y)$; 乘法: $(ae + x) \times (be + y) = (ab)e + (bx + ay + xy)$; 对合: $(ae + x)^* = \bar{a}e + x^*$; 范数: $\|ae + x\| = |a| + \|x\|$. 则 $\tilde{\mathscr{A}}$ 是$*$ Banach 代数，$\mathscr{A}$ 是 $\tilde{\mathscr{A}}$ 的极大$*$理想. $\mathscr{A}$ 的元 x 的谱是

$$Sp_{\mathscr{A}}(x) = \{a \in \mathbf{C} \mid x - ae \text{ 在 } \tilde{\mathscr{A}} \text{ 中不可逆}\}.$$

x 的谱半径是

$$\rho(x) = \sup\{|a| \mid a \in Sp_{\mathscr{A}} x\}.$$

可以证明（Rudin [58], Thm,10.13），$\rho(x) \leqslant \|x\|$ 和

$$\rho(x) = \lim_{n \to \infty} \|x^n\|^{\frac{1}{n}}.$$

命题 4.1. 设 (Π, H) 是* Banach 代数 $\mathscr{A}$ 的表示，则对 $x \in \mathscr{A}$，有 $\|\Pi(x)\| \leqslant \|x\|$。

证. 如果 $A \in \mathscr{L}(H)$，满足 $A = A^*$，则 $\|A^2\| = \|A^*A\| = \|A\|^2$，所以 $\|A^{2^n}\|^{2^{-n}} = \|A\|$。于是谱半径是 $\rho(A) = \|A\|$。

因为 Π 是代数同态，所以显然有：对 $x \in \mathscr{A}$，有 $Sp_{\mathscr{L}(H)}(x) \subseteq Sp_{\mathscr{A}}(x)$，故 $\rho(\Pi(x)) \leqslant \rho(x)$。于是可作计算.

$$\begin{aligned}\|\Pi(x)\|^2 &= \|\Pi(x^*x)\| = \rho(\Pi(x^*x)) \leqslant \|x^*x\| \\ &\leqslant \|x^*\|\|x\| = \|x\|^2.\end{aligned}$$ □

称* Banach 代数为 C^* 代数。 如果对 $x \in \mathscr{A}$，有 $\|x\|^2 = \|x^*x\|$。

*Banach 代数 $\mathscr{A}$ 的*表示全体记作 $\mathrm{Rep}(\mathscr{A})$。对 $x \in \mathscr{A}$，$\Pi \in \mathrm{Rep}(\mathscr{A})$，已知 $\|\Pi(x)\| \leqslant \|x\|$。故可以定义

$$\|x\|' = \sup_{\Pi \in \mathrm{Rep}(\mathscr{A})} \|\Pi(x)\|.$$

在 $\mathscr{L}(H)$ 中有等式 $\|\Pi(x^*x)\| = \|\Pi(x)\|^2$，故 $\|x^*x\|' = \|x\|'^2$，如果 $\mathscr{A}$ 有忠实表示 Π，则 $x \neq 0 \Rightarrow \Pi(x) \neq 0 \Rightarrow \|x\|' \neq 0$。所以 $\|\cdot\|'$ 是 $\mathscr{A}$ 的范数，称 $\mathscr{A}$ 对此范数的完备化 $\mathscr{C}$ 为 $\mathscr{A}$ 的包络 C^* 代数，因为 $\mathscr{A}$ 是 $\mathscr{C}$ 的稠密子集，所以 $\mathscr{A}$ 和 $\mathscr{C}$ 的非退化不可约表示成 1-1 对应。

设 G 是局部紧拓扑群. 则 * Banach 代数 $L^1(G)$ 有忠实表示：$g \longmapsto f * g$。称 $L^1(G)$ 的包络 C^* 代数为 G 的 C^* 代数。并记之为 $C^*(G)$。G 的不可约酉表示与 $C^*(G)$ 的非退化不可约表示成 1-1 对应。

设 (π, H) 是局部紧群 G 的酉表示，包含 $\pi(G)$ 的最小弱闭自伴子代数称为 $\pi(G)$ 所生成的 W^* 代数，记它为 $W^*(\pi(G))$。

设 H 为 Hilbert 空间，以 $\mathscr{L}(H)$ 记 H 上有界算子的全体. $\mathscr{L}(H)$ 的弱拓扑是这样定义的：网 $A_\alpha \to 0$ 指 $\langle A_\alpha u, v\rangle \to 0$，

$\forall u, v \in H$，设 S 为 $\mathscr{L}(H)$ 的子集，以 $W^*(S)$ 记包含 S 的最小弱闭自伴子代数(见 Sakai [60]，1.16.7，李炳仁 [41]，1.3.10 及 4.2.5)。令 $S' = \{B \in \mathscr{L}(H) | BA = AB, \forall A \in S\}$。设 $A \in S$。若 A 满足条件：(i) $A = A^*$ (自伴)，(ii) 存在自伴 $B \in \mathscr{L}(H)$，使得 $A = B^2$，则我们称 $A > 0$。记 $S^+ = \{A \in S | A > 0\}$。

如果对局部紧拓扑群 G 的任意一个连续酉表示 (π, H) 都存在 Hilbert 空间 $\mathscr{V}$ 及 $\mathscr{L}(\mathscr{V})$ 的弱闭自伴子代数 $\mathfrak{P}$，使得 $\mathfrak{P}'(\subset \mathscr{L}(\mathscr{V}))$ 是交换代数及 $W^*(\pi(G))$ $(\subset \mathscr{L}(H))$ 与 $\mathfrak{P}$ 同构，我们称 G 为 I 型(见 Diximier [14]，13.9.4)。

G 为局部紧拓扑群，它的不可约连续酉表示等价类的全体记为 $\hat{G}$(见 Diximier [14]，13.1.4，18.1.1)。如果 G 是 I 型，则 $\pi \in \hat{G}$ 是可迹的(见 Diximier [14]，6.7.5)。这时我们也记 π 的等价类为 π。若 π 作用在 Hilbert 空间 H 上，$\{v_\alpha\}$ 是 H 的正交规范基，$x \in G$，则 $\pi(x)$ 的迹是

$$\operatorname{tr}(\pi(x)) = \sum_{\alpha} (\pi(x) v_\alpha, v_\alpha)$$

(见 Sakai [60]. §1.15，Diximier [14]，A30)。可以证明

定理 4.2. 设 G 为 I 型么模可分局部紧拓扑群，则 $\hat{G}$ 有唯一测度 μ，使得：$\forall f, g \in L^1(G) \cap L^2(G)$，有

$$\int_G |f(x)|^2 dx = \int_{\hat{G}} T_r(\pi(f)^* \pi(f)) d\mu(\pi). \qquad \square$$

我们称以上定理中的 μ 为 G 的 Plancherel 测度。这定理的证明见 Diximier [14]，18.8.1，18.8.2。这个证明所引用的资料分布在 Diximier [13,14] 两本书中。遗憾的是这两本书共有八百多页，因此我们不可能给出全部证明。下面我们只简略地介绍 Diximier 的证明。他的证明并不构造出 μ (当 G 是简约李群时，μ 由 Harish-Chandra 明确构造出来)。

从 $C_c(G)$ 的内积

$$(f, g) \longmapsto \int_G f(x) \overline{g(x)} dx,$$

构造 $C^*(G)$ 的迹 t，我们用 Murray 与 Von Neumann 所创立

的约化理论把 t 写成直积分解便得所求的定理。

设 $\mathscr{A}$ 为 $\mathbf{C}$ 上的结合代数，在 $\mathscr{A}$ 上有对合反自同构 $x \longmapsto x^*$ 及内积$(\cdot|\cdot)$，使 $\mathscr{A}$ 为 Hausdorff 准 Hilbert 空间。设以下条件成立：

(i) $(x|y) = (y^*|x^*)$，$\forall x, y \in \mathscr{A}$；

(ii) $(xy|z) = (y|x^*z)$，$\forall x, y, z \in \mathscr{A}$；

(iii) $\forall x \in \mathscr{A}$。映射 $\mathscr{A} \to \mathscr{A}$，$y \longmapsto xy$ 连续；

(iv) 集合 $\{xy | x \in \mathscr{A}, y \in \mathscr{A}\}$ 所生成的线性空间是 $\mathscr{A}$ 的稠密子集。

这时，我们称 $\mathscr{A}$ 为 Hilbert 代数 (Diximier [13]，I.5.1)。$\mathscr{A}$ 对内积$(\cdot|\cdot)$的完备化所得空间记为 $\mathscr{H}$。对 $x \in \mathscr{A}$，以 v_x 记映射

$$\mathscr{A} \to \mathscr{A}, \quad y \longmapsto yx.$$

设 $a \in \mathscr{H}$，如果映射

$$\mathscr{A} \to \mathscr{H}: \quad x \longmapsto v_x a = ax$$

是连续，则 a 称为有界元。我们以 $U_a: \mathscr{H} \to \mathscr{H}$ 记这个映射的连续扩张，即对 $x \in \mathscr{A}$，$U_a(x) = ax$。设

$$\mathscr{A}^b = \{a \in \mathscr{H} \mid a \text{ 是有界元}\}.$$

则 $\mathscr{A}$ 是 Hilbert 代数 $\mathscr{A}^b$ 的稠密子代数。以 $\mathscr{U} = \mathscr{U}(\mathscr{A}^b)$ 记 $\mathscr{L}(\mathscr{H})$ 的子代数 $W^*(\{U_a | a \in \mathscr{A}^b\})$，即包含 $\{U_a | a \in \mathscr{A}^b\}$的最小弱闭自伴子代数，则

$$\mathscr{A}^b \to \mathscr{U}: a \longmapsto U_a$$

是单射 (Diximier [13]，I.5.2)。对 $S \in \mathscr{U}^+$，设

$$t_{\mathscr{A}}(S) = \begin{cases} (a|a), & \text{若有 } a \in \mathscr{A}^b, \text{ 使得 } S^{\frac{1}{2}} = U_a \\ +\infty, & \text{否则.} \end{cases}$$

则 $t_{\mathscr{A}}: \mathscr{U}^+ \longmapsto [0, +\infty]$ 有下列性质：

(i) $S, T \in \mathscr{U}^+ \Rightarrow t_{\mathscr{A}}(S + T) = t_{\mathscr{A}}(S) + t_{\mathscr{A}}(T)$;

(ii) $S \in \mathscr{U}^+$，$\lambda \in [0, +\infty] \Rightarrow t_{\mathscr{A}}(\lambda S) = \lambda t_{\mathscr{A}}(S)$ (约定：$0 \cdot +\infty = 0$)；

(iii) $S \in \mathscr{U}^+$，$U \in \mathscr{U}$，$UU^* = U^*U = 1 \Rightarrow t_{\mathscr{A}}(USU^{-1}) =$

$t_{\mathscr{A}}(S)$.

这就是说 $t_{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{U}^+$ 的迹 (Dixmier [13], 1.6.1, 1.6.2)。利用配极变换便得

$$t_{\mathscr{A}}(U_b^* U_a) = (a|b), \quad a, b \in \mathscr{A}^b.$$

现设 G 是 I 型么模可分局部紧拓扑群，ε_e 是在 G 的单位元 e 的 Dirac 测度，即对 $f \in C_c(G)$，$\varepsilon_e(f) = f(e)$。对 $f, g \in C_c(G)$，有内积

$$(f|g) = \varepsilon_e(g^* * f) = \int_G f(x)\overline{g(x)}dx,$$

其中 $g^*(x) = \overline{g(x^{-1})}$. 不难证明 $\{C_c(G), (\cdot|\cdot)\}$是 Hilbert 代数 (Dixmier [14], 13.10.1, 17.2.1, 17.2.2, 17.2.5)。$C_c(G)$ 对$(\cdot|\cdot)$的完备化是 $L^2(G)$。以 $H(G)$ 记 $(C_c(G))^b$，称它为 G 的 Hilbert 代数。可以证明，对 $a \in H(G)$，及 $x \in L^2(G)$ 有 $U_a x = a * x$(Dixmier [14], 13.10.3)。$H(G)$ 是 $C^*(G)$ 的双边理想。对 $z \in C^*(G)$，左平移 $U_z: H(G) \to H(G)$，$a \longmapsto z * a$ 可以扩张为 $\mathscr{L}(L^2(G))$ 的元，并且 $U_z \in \mathscr{U} = \mathscr{U}(H(G))$ (Dixmier [14], 6.2.3)。这样对 $z \in C^*(G)^+$，设

$$t(z) = t_{C_c(G)}(U_z)$$

(Dixmier [14]6.4.2)。由集合 $\{z \in C^*(G)^+ | t(z) < +\infty\}$ 所生成的线性空间记为 $\mathfrak{M}_t$，则可以证明

$$t: C^*(G)^+ \to [0, +\infty]$$

是 $C^*(G)$ 的下半连续迹，并且 $\mathfrak{M}_t$ 是 $C^*(G)$ 的稠密子集。这时对 $f \in L^1(G) \cap L^2(G)$，有

$$t(f^* * f) = t(U_f^* U_f) = (f|f) = \int_G |f(x)|^2 dx.$$

定理 4.3. 设 $\mathscr{A}$ 是 I 型可分 C^* 代数，$\hat{\mathscr{A}}$ 是 $\mathscr{A}$ 的非退化不可约表示的等价类的全体。若

$$t: \mathscr{A}^+ \to [0, +\infty]$$

是 $\mathscr{A}$ 的下半连续迹，并且 $\mathfrak{M}_t$ 是 $\mathscr{A}$ 的稠密子集。则 $\hat{\mathscr{A}}$ 有唯一正测度 μ，使得对 $x \in \mathscr{A}^+$，有

$$t(x)=\int_{\mathscr{S}}\operatorname{tr}\pi(x)d\mu(x)$$

(Dixmier [14], 8.8.5, 8.8.6). □

因为 $\hat{G}$ 与 $\widehat{C^*(G)}$ 有 1-1 对应的关系. 所以对上面所构造的 $t: C^*(G)^+\to[0,+\infty]$ 应用定理 4.3，我们便立刻得到所求的关于 Plancherel 测度的存在定理.

习　　题

1. 设紧群有酉表示 (π, V). 在 V 中找这样的子空间组 $\{V_\alpha\}$，其中，若 $\alpha\neq\beta$，则 V_α 与 V_β 正交且 V_α 是 V 的有限维不变子空间. 用 Zorn 引理，可知存在一个极大组. 设 U 为这一组子空间的和的闭包. 若存在 $0\neq v\in U^\perp$，取单位元开邻域 N，记 N 的特征函数为 I_N，证明 $\pi(I_N)v\in U^\perp$，且存在 N 使得 $\pi(I_N)v\neq0$. 用 Peter-Weyl 定理选取函数 h 是有限维不可约酉表示的矩阵系数的线性组合，使得 $\|I_N-h\|_1\leqslant\|I_N-h\|_2\leqslant\frac{1}{2}|\pi(I_N)v|/|v|$. 证明 $|\pi(h)v|\geqslant\frac{1}{2}|\pi(I_N)v|>0$. 在 $L^2(G)$ 中取有限维左平移不变子空间 S，使得 $h\in S$. 设 $h_1,\cdots,h_n$ 是 S 的基. 利用等式 $\pi(s)\pi(h)v=\int h(s^{-1}x)\pi(x)vdx$，证明 $\Sigma\mathbf{C}\pi(h_i)v$ 是 π 的有限维不变子空间，这与 U 的定义相矛盾. 由此说明：紧群的酉表示是有限维不可约不变子空间的正交和.

2. 设有复数 a, b，使得对任意复数 λ，$\lambda a+\bar{\lambda}b$ 都是实数. 证明 $\bar{a}=b$. 设 f 是 $*$ 代数的正泛函，证明 $\overline{f(y^*x)}=f(x^*y)$ 和 $|f(y^*x)|^2\leqslant f(x^*x)f(y^*y)$. 又设 f 是有单位元 e 的 $*$ Banach 代数的正泛函，证明 f 是连续和 $\|f\|=f(e)$.

3. 设 $\mathscr{D}=\{z\in\mathbf{C}\,|\,|z|<1\}$，$G=SU(1,1)$ 的元是

$$g=\begin{pmatrix}a&b\\ \bar{b}&\bar{a}\end{pmatrix},\quad |a|^2-|b|^2=1\quad g(z)=\frac{az+b}{\bar{b}z+\bar{a}},\quad z\in\mathscr{D}$$

设

$$K = \{g \in G \mid g(0) = 0\} = \left\{\begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ 0 & e^{-i\theta} \end{pmatrix} \middle| \ 0 \leqslant \theta < 2\pi\right\}.$$

(i) 证明 G/K 与 $\mathscr{D}$ 同胚；

(ii) 若 $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$，设 $\delta(g) = d$，证明：如果 $g(0) = z$，则 $|\delta(g)|^2 = \dfrac{1}{1 - |z|^2}$；

(iii) 证明

$$\int_G |\delta(g)|^{2n} dg = \iint_{0 \leqslant x^2 + y^2 < 1} \frac{dxdy}{(1 - x^2 - y^2)^{n/2}}$$

(iv) 设 $(\pi_n, \mathscr{H}_n)$ 是 G 的离散序列表示，$n < -1$。在 $\mathscr{H}_n$ 中取元 φ_0，$\varphi_0(z) = 1$，$\forall z$。证明

$$(\varphi, \varphi_0) = -\frac{\pi}{n+1}\varphi(0), \ \varphi \in \mathscr{H}_n,$$

$$(\pi_n(g)\varphi_0, \varphi_0) = -\frac{\pi}{n+1} d(g)^n,$$

$$\int_G |(\pi_n(g)\varphi_0, \varphi_0)|^2 dg = \left(-\frac{\pi}{n+1}\right)^3;$$

(v) 证明：π_n 是二次可积，π_n 的形式次数是 $-\dfrac{n+1}{\pi}$

4. 称局部紧么模拓扑群 G 的酉表示 (π, H) 为 CCR，如果 $\forall f \in C_c(G)$，$\pi(f)$ 是紧算子。证明：如果 (π, H) 是 CCR，则 $(\pi, H) = \oplus(\pi_i, H_i)$，其中 π_i 是 G 的不可约酉表示，且对任意固定的 H_i 只有有限个 j 使得 (π_i, H_i) 与 (π_j, H_j) 等价（Wallach [78] 2.7.4，Auslander & Moore[2]）。

5. 设 H 是局部紧群 G 的闭子群，Δ_G 是 G 对右不变 Haar 测度 dx 的模函数，即

$$\int f(s^{-1}x)dx = \Delta_G(s)\int f(x)dx.$$

δ 是 $H\backslash G$ 的右平移拟不变测度所决定的模函数，即

$$\delta(yx) = \frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)}\delta(x), \ x \in G, \ y \in H.$$

设 τ 是 H 在局部凸拓扑空间 V 的表示，f 是取值在 V 的有紧支集 $\bmod H$ 的连续函数，且满足以下条件：

$$f(yx)=\left(\frac{\Delta_H(y)}{\Delta_G(y)}\right)^{1/2}\tau(y)f(x)\quad x\in G,\ y\in H.$$

对这种 f 引进右平移表示：

$$\rho(s)f(x)=f(xs).$$

证明 ρ 是 G 的表示.

6. 设 H 是局部紧群 G 的闭子群，δ 决定 G/H 上的拟不变测度 $d\dot{x}$，(τ, V) 是 H 的酉表示. 在直积空间 $G\times V$ 上引进等价关系～如下：

$$(x, v)\sim(xy,\ \delta(y)^{1/2}\tau(y^{-1})v),\ y\in H.$$

以 $G\underset{H}{\times}V$ 记这个等价关系决定的商空间. $p: G\underset{H}{\times}V\to G/H$ 是对第一个坐标的投射. 称映射 s: $G/H\to G\underset{H}{\times}V$ 为截面，如果 $ps=I_d$. 以 Γ_c 记有紧支集的截面的全体，在 Γ_c 上引入内积：

$$(s_1, s_2)=\int_{G/H}\langle s_1(\dot{x}), s_2(\dot{x})\rangle_{\dot{x}}d\dot{x},$$

其中 $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\dot{x}}$ 是纤维 $p^{-1}(\dot{x})$ 中的内积：

$$\langle(x, v_1), (x, v_2)\rangle_{\dot{x}}=\delta(x)^{-1}(v_1, v_2)_V.$$

Γ_c 的完备化记为 $L^2(G\underset{H}{\times}V)$. 在这空间上引入 G 的作用 π：

$$\pi(x_0)s(xH)=x_0\cdot s(x_0^{-1}xH).$$

(i) 证明：$(\pi, L^2(G\underset{H}{\times}V))$ 是 G 的酉表示 (Wallach [76] 2.4.6)；

(ii) 把截面 s 按坐标写成 $s(xH)=(x, f(x))$，证明 T: $s\longmapsto f$ 是 π 与诱导表示 $\mathrm{ind}_H^G\tau$ 的缠结算子

7. 设 $G=SO(3)$，$K=SO(2)$，S^2 是 $\mathbb{R}^3$ 中的单位圆

(i) 证明 G/K 与 S^2 同胚. 设 P_n 是 n 次 Legendre 多项式，即

$$P_n(\cos r)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos r+i\sin r\cos u)^n du;$$

(ii) 以 o 记 $(0, 0, 1)$，$p\in S^2$，$d(0, p)$ 表距离. 设

$$\varphi(p)=P_n(\cos(d(\dot{o},p))).$$

证明：球面调和函数 φ 满足函数方程：

$$\int_k \varphi(gkh)dk=\varphi(g)\varphi(h),\ \forall g,h\in G.$$

8. 设 U_n 为 n 阶酉群，A_f 是标签为 $f=(f_1,\cdots,f_n)$ 的酉表示，其中 f_i 是整数，且 $f_1\geqslant f_2\geqslant\cdots\geqslant f_n$。以 $N(f)$ 表 A_f 的阶。若对 $U=U_n$，有

$$A_f(U)=(a_{ij}^f(U)),\ 1\leqslant i,j\leqslant N(f),$$

则设

$$\varphi_{ij}^f(U)=\sqrt{\frac{N(f)}{C}}\,a_{ij}^f(U),$$

其中 $C=\int_{U_n}\dot{U}$ 是 U_n 的总体积。

(i) 证明 $\{\varphi_{ij}^f\}$ 是法正交系，并且 U_n 上任一连续函数可用 $\{\varphi_{ij}^f\}$ 的线性组合逼近。

设

$$\Phi_f(U)=(\varphi_{ij}^f(U)),\ 1\leqslant i,j\leqslant N(f),\ U\in U_n.$$

对 U_n 上的可积函数 u，设

$$C_f(u)=\int_{U_n}u(V)\Phi_f(V)\dot{V}.$$

则 u 的 Fourier 级数是

$$\sum_f \mathrm{tr}(C_f(u)\Phi_f(U)^t),$$

其中 tr 是迹，t 表转置，这个级数的 Abel 平均是

$$\sum_f \rho^f(r)\mathrm{tr}(C_f(u)\Phi_f(U)^t),$$

其中

$$\rho^f(r)=\frac{1}{C}\int_{U_n}\frac{(1-r^2)^{n^2}}{|\det(1-rV)|^{2n}}\frac{\mathrm{tr}A_f(V)}{N(f)}\dot{V};$$

(ii) 证明酉群上的连续函数的 Fourier 级数必 Abel 收敛于它自身(华罗庚[29]，5.12，龚昇[38]，1.3)。

9. 设 $V_0=\mathbf{C}$ 是 $SU(2)$ 的平凡表示，V_n 由以 z_1, z_2 为变元的次数为 n 的齐次多项式组成，它以 $\{P_k(z_1,z_2)=z_1^k z_2^{n-k}|0\leqslant k\leqslant n\}$ 为基，$\dim V_n=n+1$。设 $P\in V_n$, $g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in SU(2)$, $z=(z_1,z_2)$, $zg=(az_1+cz_2, bz_1+dz_2)$。则

(i) 证明以下公式定义 $SU(2)$ 在 V_n 上的表示：

$$(gP)(z)=P(zg).$$

对 $a\in U(1)$，取 $g_a=\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$。对 $\theta\in\mathbf{R}$，设

$$k_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix};$$

(ii) 如果 V_n 的自同态 A 与 $SU(2)$ 的作用交换，则 $g_aAP_k=a^{2k-n}AP_k$，所以存在 $c_k\in\mathbf{C}$，令 $AP_k=c_kP_k$ 及 $k_\theta AP_n=\sum\limits_k\binom{n}{k}\cos^k\theta\sin^{n-k}\theta c_kP_k$。所以 $A=C_n\cdot i_d$。于是可作结论：V_n 是 $SU(2)$ 的不可约表示。设

$$e(t)=\begin{pmatrix}e^{it} & 0\\ 0 & e^{-it}\end{pmatrix},$$

$\mathscr{F}=\{$连续 $f:SU(2)\to\mathbf{C}|\forall g\in GL(2,\mathbf{C})$, $f(gxg^{-1})=f(x)$ 对所有 $x\in SU(2)$ 均成立$\}$,

(iii) 证明 V_n 的特征标 χ_n 在 $e(t)$ 取值为 $\sum\limits_{k=0}^{n}e^{i(n-2k)t}$，所以 $\{\chi_n\}$ 在 $\mathscr{F}$ 内一致稠密；

(iv) 利用特征标的正交关系证明：$SU(2)$ 的任意一个不可约酉表示必同构于一个 V_n；

(v) 证明 Clebsch-Gordan 公式：

$$V_k\otimes V_l=\bigoplus_{i=0}^{q}V_{k+l-2i},\quad q=\min(k,l).$$

10. G 是紧拓扑群。在 $L=L^2(G)$ 上，取 G 的右正则表示 ρ。

(i) 设 V 是 L 的有限维不变子空间。取 $f\in V$，证明存在 $A\in\mathrm{End}V$，使得对 $x\in G$ 有 $f(x)=\mathrm{tr}(A\rho(x))$；

(ii) 设 (π, V_π) 是 G 的有限维不可约表示。对 $A \in \mathrm{End}V_\pi$，设 $T_A(x) = \mathrm{tr}(A\pi(x))$。证明 T 的象集是 L 内与 π 等价的表示的直和，并且 $T: \mathrm{End}V_\pi \to \mathrm{Im}T$ 是 G-同构；

(iii) 证明：L 是代数直和 $\bigoplus_\pi V_\pi^* \otimes V_\pi$（其中 $\bigoplus_\pi$ 是对所有不可约表示求和）的闭包（在 V 内取基 $\{e_i\}$，则以下互逆映射：

$$\mathrm{End}V \to V^* \otimes V, \ A \longmapsto \sum_i e_i^* \otimes Ae_i,$$

$$V^* \otimes V \to \mathrm{End}V, \ u \otimes v \longmapsto (w \longmapsto u(w)v),$$

定义同构 $\tau: V^* \otimes V \cong \mathrm{End}V$）；

(iv) 对 $u \in V^*$，$v \in V = V_\pi$，$x \in G$，取 $\mathscr{T}_{u\otimes v}(x) = u(\pi \times (x)v)$，证明下图交换：

$$\begin{tikzcd} & V^* \otimes V \arrow[dl, "\tau"'] \arrow[dr, "\mathscr{T}"] & \\ \mathrm{End}V \arrow[rr, "T"'] & & \mathrm{Im}T \end{tikzcd}$$

(v) 在 $V^* \otimes V$ 上定义 $G \times G$ 的表示 $\pi^* \times \pi$ 如下：
$\pi^* \times \pi(x, y)(u \otimes v) = \pi^*(x)u \otimes \pi(y)v$. 在 $\mathrm{Im}T$ 上取 $G \times G$ 的表示：
$(\lambda \times \rho)(x, y)(f)(z) = f(x^{-1}zy)$。利用关系

$$\mathscr{T}_{\pi^*(x)u\otimes v}(y) = \lambda(x)\mathscr{T}_{u\otimes v}(y),$$

$$\mathscr{T}_{u\otimes\pi(x)v}(y) = \rho(x)\mathscr{T}_{u\otimes v}(y),$$

证明 $\pi^* \times \pi$ 与 $\lambda \times \rho$ 等价。

第五章　$L^2(\Gamma\backslash G)$

本章讨论 $L^2(SL(2,\mathbb{Z})\backslash SL(2,\mathbb{R}))$ 的右正则表示的谱分解. 读者可以把本章看作一个长的例子. 以 ${}^0L^2$ 表尖形式所生成的子空间(见下面 § 1), 以 $({}^0L^2)^\perp$ 表 ${}^0L^2$ 的正交补, 则在 ${}^0L^2$ 上有如 Peter-Weyl 定理的结果,即 ${}^0L^2$ 可以分解为不可约子空间的直和, 而 $({}^0L^2)^\perp$ 则可以表达为 Eisenstein 级数的连续和.

本章中, $G=SL(2,\mathbb{R})$, $\Gamma=SL(2,\mathbb{Z})$, $K=SO(2)$, $N=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\}$, $A=\left\{\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}\,\middle|\, y\in\mathbb{R}^*\right\}$. 在 G 上固定 Haar 测度 dg, 在 Γ 上取 Haar 测度,使得每点测度是 1, 在 $\Gamma\backslash G$ 上取 G 不变测度.

§ 1.　尖　形　式

称以下的群为尖性子群

$$\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, x\in\mathbb{R}\right\},\ \left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}N\begin{pmatrix}1 & 0\\ -x & 1\end{pmatrix}\,\middle|\, x\in\mathbb{Q}\right\}.$$

定义 1.1. 考虑由 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 上满足下列条件的有界连续函数 f 生成的子空间:

$$\int_{\Gamma\cap N_1\backslash N_1} f(ng)dn=0,$$

其中 Γ_1 为任一尖性子群, g 为 G 中任意一个元素. 记这子空间的闭包为 ${}^0L^2(\Gamma\backslash G)$, 其中的元素称为**尖形式**.

G 可看作 $\mathbb{R}^4$ 的闭子流形 $\{(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4,\ ad-bc=1\}$, 所以, G 上有无穷可微函数. 记 G 上有紧支集的无穷可微函数的全体为 $C_c^\infty(G)$. 取

$$g=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\in G,$$

$$z\in \mathfrak{h}=\{z=x+yi\in \mathbf{C}\,|\,y>0\}.$$

定义

$$g(z)=\frac{az+b}{cz+d},$$

则有同胚

$$G/K\to \mathfrak{h}: gK\longmapsto g(i).$$

另一方面，有同胚

$$NA\to \mathfrak{h}:\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}\longmapsto x+y^2 i.$$

于是有 Iwasawa 分解：$G=NAK$。对任意$g\in G$,有$g=n(g)\times a(g)k(g)$，其中 $n(g)\in N$，$a(g)\in A$，$k(g)\in K$。 如果 $a(g)=\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}$，则设 $\rho(a(g))=y$。

设

$$\mathscr{D}=\left\{z\in\mathfrak{h}\,\middle|\,-\frac{1}{2}<\mathrm{Re}z\leqslant\frac{1}{2},\ |z|\geqslant 1\right\}$$

$$\bigcup\left\{z\in\mathfrak{h}\,\middle|\,|z|=1,\ 0\leqslant \mathrm{Re}z\leqslant\frac{1}{2}\right\},$$

$$N\left(\frac{1}{2}\right)=\left\{\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\,\middle|\,-\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant\frac{1}{2}\right\},$$

$$A(t)=\left\{\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}\,\middle|\,y^2\geqslant t\right\},$$

$$\mathfrak{S}=N\left(\frac{1}{2}\right)A\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)K.$$

因为有双射 $\Gamma/\mathfrak{h}\to\mathscr{D}$，所以 $G=\Gamma\mathfrak{S}$。若Ω是N的紧子集，则设$\mathfrak{S}(\Omega,t)=\Omega A(t)K$（称为 Siegel 集）。从公式

$$\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y^{-1} & 0\\ 0 & y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & y^2x\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

可知，$a\in A\to a\Omega a^{-1}$ 是N的紧子集，故 $g\in\mathfrak{S}(\Omega,t)$，即 $g^{-1}a(g)$ 属于紧集 $(a(g)^{-1}\Omega a(g)K)^{-1}$。同理，如果已给 $g'\in\mathfrak{S}(\Omega,t)$ 及A的紧子集 Ω_A，则 $g'\in\Omega a(g)\Omega_A K$。于是，$a(g)^{-1}g'$ 属于紧集。

函数 $\varphi\in L^1(\mathbf{R})$ 的 Fourier 变换是

$$\hat{\varphi}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x)e^{-2\pi ixy}dx.$$

引理 1.1. 用 $f\in C_c^\infty(G)$ 定义

$$f_{g,g'}(x)=f\left(g^{-1}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g'\right),\ \text{其中 } x\in\mathbf{R},\ g,g'\in G.$$

给定N的紧子集Ω，A的紧子集Ω_A，则对任何正整数 m，存在常数 C，使得：若 $g\in\mathfrak{S}(\Omega,t)$，$g'\in\Omega a(g)\Omega_A K$，就有

$$|\hat{f}_{g,g'}(y)|\leqslant C\rho(a(g))^{2(1-m)}|y|^{-m}.$$

证. 作计算

$$\hat{f}_{g,g'}(y)=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(g^{-1}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g'\right)e^{-2\pi ixy}dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}f\left(g^{-1}a(g)\begin{pmatrix}1 & \rho(a(g))^{-2}x\\ 0 & 1\end{pmatrix}a(g)^{-1}g'\right)e^{-2\pi ixy}dx$$

$$=\rho(a(g))^2\int_{-\infty}^{\infty}f\left(g^{-1}a(g)\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}a(g)^{-1}g'\right)$$
$$\times e^{-2\pi ix\rho(a(g))^2y}dx.$$

因为 $g^{-1}a(g)$ 及 $a(g)^{-1}g'$ 分别属于紧集，而 f 有紧支集，所以用分部积分 m 次便有

$$\int_{-\infty}^{\infty}f\left(g^{-1}a(g)\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}a(g)^{-1}g'\right)e^{-2\pi ix\rho(a(g))^2y}dx$$
$$=(2\pi i\rho(a(g))^2y)^{-m}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{d^m}{dx^m}f\Big(g^{-1}a(g)$$
$$\times\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}a(g)^{-1}g'\Big)e^{-2\pi ix\rho(a(g))^2y}dx.\qquad\square$$

定理 1.2. 已给 $\varphi\in C_c^\infty(G)$。存在常数 C_φ，使得：如果$f\in$

${}^0L^2(\Gamma\backslash G)$，则

$$\sup_{g\in G}\left|\int_G f(gg')\varphi(g')dg'\right| \leqslant C_\varphi \|f\|_2.$$

证。 首先，

$$\int_G f(gg')\varphi(g')dg' = \int_G f(g')\varphi(g^{-1}g')dg'$$

$$= \int_{\Gamma_N\backslash G}\sum_{n\in\Gamma_N}\varphi(g^{-1}ng')f(ng')dg',$$

其中 $\Gamma_N = N\cap\Gamma = \left\{\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix}\middle| m\in\mathbf{Z}\right\}$。对 $x\in\mathbf{R}$，设

$$\varphi_{g,g'}(x) = \varphi\left(g^{-1}\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}g'\right).$$

用 Poisson 求和公式

$$\sum_{m\in\mathbf{Z}}\varphi_{g,g'}(m) = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\hat{\varphi}_{g,g'}(m),$$

其中有 Fourier 变换

$$\hat{\varphi}_{g,g'}(m) = \int_{\mathbf{R}}\varphi_{g,g'}(x)e^{-2\pi ixm}dx.$$

设

$$K_\varphi(g,g') = \sum_{n\in\Gamma_N}\varphi(g^{-1}ng').$$

则

$$K_\varphi(g,g') = \sum_{m\in\mathbf{Z}}\hat{\varphi}_{g,g'}(m),$$

而且

$$\int_G f(gg')\varphi(g')dg' = \int_{\Gamma_N\backslash G}K_\varphi(gg')f(g')dg'.$$

计算

$$\int_{\Gamma_N\backslash G}\hat{\varphi}_{g,g'}(0)f(g')dg' = \int_{\Gamma_N\backslash G}\int_N\varphi(g^{-1}ng')f(g')dndg'$$

$$= \int_{N\backslash G}\int_{\Gamma_N\backslash N}\int_N\varphi(g^{-1}nn'g')f(n'g')dndn'dg'$$

$$= \int_{N\backslash G}\left\{\int_N \varphi(g^{-1}ng')dn \cdot \int_{\Gamma_N\backslash N} f(n'g)dn'\right\} dg = 0,$$

这是因为 $f\in {}^0L^2(\Gamma\backslash G)$。

因为 $G=\Gamma\mathfrak{S}$, f 在 $\Gamma\backslash G$ 上定义，故只须对 $g\in\mathfrak{S}=N\left(\frac{1}{2}\right)A\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 作估值.因为 $G=\Gamma_N N\left(\frac{1}{2}\right)AK$，所以可设 $g'\in N\left(\frac{1}{2}\right)AK$. 设 Ω 是 φ 的支集，从 K_φ 的定义知只需考虑 g'，使得有 $n\in\Gamma_N$，$g^{-1}ng'\in\Omega$. 因为 $g^{-1}a(g)$ 属于紧集，所以从公式

$$g^{-1}ng'=(g^{-1}a(g))(a(g)^{-1}nn(g')a(g))(a(g)^{-1}a(g')k(g')),$$

知存在 A 的紧子集 Ω_A，使得 $g'\in N\left(\frac{1}{2}\right)a(g)\Omega_A K$.

由引理 1.1，可知存在 G 的紧子集 Ω_G，使以下不等式成立

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\Gamma_N\backslash G}\sum_{m\neq 0}\hat{\varphi}_{g,g'}(m)f(g')dg'\right| \\
&\qquad \leqslant \int_{\substack{\Gamma_N\backslash G\\ g'\in a(g)\Omega_G}}\left(\sum_{m\neq 0}\frac{1}{|m|^d}\right)\varphi(a(g))^{2(1-l)}|f(g')|dg' \\
&\qquad \leqslant \varphi(a(g))^{2(1-l)}\int_{\substack{\Gamma_N\backslash G\\ g'\in a(g)\Omega_G}}|f(g')|dg' \\
&\qquad \leqslant \rho(a(g))^{2(1-l)}|a(g)\Omega_G|^{1/2}\|f\|_2,
\end{aligned}$$

其中 $|a(g)\Omega_G|$ 是 $a(g)\Omega_G$ 的测度。 □

引理 1.3. 设局部紧拓扑空间 X 有有限正测度. $B(X)$ 是 X 的有限连续函数的全体. H 是 $L^2(X)$ 的闭子空间. $T:H\to B(X)$ 是线性映射，而且存在常数 $C>0$，使得：若 $f\in H$，就有 $\sup_{x\in X}|Tf(x)|\leqslant C\|f\|_2$. 则 $T:H\to L^2(X)$ 是紧算子.

证. 由假设中的不等式知有 $k_x\in H$，使得对 $f\in H$，有

$$Tf(x)=\langle f, k_x\rangle.$$

因为 $x\longmapsto k_x$ 是弱连续，所以它是弱可测，于是 $x\longmapsto\langle k_x, k_x\rangle$ 是可测. 用 Schwarz 不等式，可知

$$h \longmapsto \int_X \int_X h(x,y)\overline{k_x(y)}\,dy\,dx$$

是 L^2 连续. 所以存在 $k \in L^2(X \times X)$, 使得: 对几乎所有 x, 存在测度为 0 的 S_x. 当 $y \notin S_x$ 时,有

$$k_x(y) = k(x, y).$$

设 $\{\varphi_i\}$ 是 $L^2(X)$ 的法正交基. 则由 Fubini 定理可知 $\{\varphi_i\varphi_j\}$是 $L^2(X \times X)$ 的法正交基. 设

$$k = \Sigma a_{ij}\varphi_i\varphi_j, \quad k_n = \sum_{i,j\leqslant n} a_{ij}\varphi_i\varphi_j.$$

则算子 K_n:

$$f \longmapsto \int_X f(y)k_n(x,y)\,dy$$

的象是有限维. 因为 $\|K_n - K\| \leqslant \|k_n - k\|_2 \to 0$, 所以 T 是紧算子. □

设 π 是 G 的正则表示,则由定理 1.2 和引理 1.3 可知, $\pi(\varphi)$ 是 ${}^0L^2(\Gamma\backslash G)$ 的紧算子. 所以有 Peter-Weyl 定理.

引理 1.4. 设非零代数 $\mathfrak{A}$ 的元是 Hilbert 空间 H 的紧算子,而且 $\mathfrak{A}^* \subset \mathfrak{A}$. 则 H 有互相正交的不可约子空间 H_i, 使得 H 是 $\{H_i\}$ 的代数直和的闭包,而且固定 H_i, 只存在有限个 H_j 与 H_i 等价.

证. (1) 先证明 H 有 $\mathfrak{A}$ 不可约子空间. 如果 $A \in \mathfrak{A}$, 则

$$A = \frac{A + A^*}{2} + i\,\frac{A - A^*}{2i}.$$

所以存在 $0 \neq A^* = A \in \mathfrak{A}$. 设 $0 \neq \lambda$ 是 A 的特征根, H_λ 是对应的特征空间. 取 H 的 $\mathfrak{A}$ 不变子空间 H', 使得 $\dim(H_\lambda \cap H')$ 最小. 取 $0 \neq v \in H_\lambda \cap H'$, $\mathfrak{A}v$ 的闭包记为 H_0. 若 $L \neq \{0\}$ 是 H_0 的 $\mathfrak{A}$ 不变子空间,设 $v = v_1 + v_2$, $v_1 \in L$, v_2 与 L 正交,则 $v_1, v_2 \in H_\lambda$. 如果 v_1, v_2 皆不为 0, 则 $\dim(H_\lambda \cap L) < \dim(H_\lambda \cap H')$, 矛盾. 如 $v_2 = 0$, 则 $H_0 = L$. 因此, H_0 是不可约子空间.

(2) 设 $\{H_i\}$ 是最大的一组互相正交的 $\mathfrak{A}$ 不可约不变子空间. H'' 是 H_i 所生成的闭子空间的正交补. 则 H'' 同样满足引理的假设. 由(1)可知 H'' 有不可约 $\mathfrak{A}$ 不变子空间 H_0, 矛盾. □

设 π 是作用在 ${}^0L^2(\Gamma\backslash G)$ 上的右平移. 对 $\mathfrak{A}=\{\pi(\varphi)|\varphi\in C_c^\infty(G)\}$ 应用定理 1.2，引理 1.3 及 1.4，则得到以下定理.

定理 1.5. ${}^0L^2(\Gamma\backslash G)$ 有对右正则表示不可约子空间${}^0L^2(n)$，使得：若固定 n，只有有限个 m 使 ${}^0L^2(m)$ 与 ${}^0L^2(n)$ 等价，而且有正交分解.

$${}^0L^2(\Gamma\backslash G)=\bigoplus_n {}^0L^2(n).$$

§2. Eisenstein 级 数

从公式

$$(0,1)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=(c,d),$$

得双射 $N\backslash G\to \mathbf{R}^2-\{0,0\}; N_g\longmapsto(0,1)g$.

以 $\mathscr{S}_2$ 记 $\mathbf{R}^2$ 的 Schwartz 空间[1]. 记由函数

$$N_g\longmapsto f((0,1)g),\ f\in\mathscr{S}_2$$

所组成的空间为 $\mathscr{S}(N\backslash G)$.

记正实数为 $\mathbf{R}^+$，利用同构

$$A\to\mathbf{R}^+:\ a_y=\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}\longmapsto y$$

得到A的 Haar 测度

$$\int_A f(a_y)da_y=\int_0^\infty f(y)\frac{dy}{y}.$$

引理 2.1. 设 $\varphi\in\mathscr{S}(N\backslash G)$, $\mathrm{Re}\,s>0$, 则积分

$$Z(\varphi,s,g)=\int_0^\infty \varphi(a_yg)y^{-s-1}\frac{dy}{y},\ g\in G$$

绝对收敛. 如果同时 φ 有紧支集，则积分所定义 s 的函数是整函

1) 这即是说 $\mathscr{S}_2$ 中的元是 $\mathbf{R}^2$ 的速降函数. 参看 Rudin [58],7.3; 或张恭庆的《泛函分析讲义》，第三章，3.2.7 (179 页); 或岩村联的《广义函数》，28 (134 页).

数。

证. 因为

$$Z(\varphi, s, ng) = Z(\varphi, s, g), \quad n \in N,$$
$$Z(\varphi, s, ag) = \rho(a)^{s+1} Z(\varphi, s, g), \quad a \in A,$$

所以只需考虑 $Z(\varphi, s, k)$, $k = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$. 由 φ 的定义可知

$$\varphi(a, k) = \varphi((0, 1)a, k) = \varphi(-y^{-1}\sin\theta, y^{-1}\cos\theta).$$

由 Shawartz 空间的定义，知存在充分大的

$$\sqrt{(-y\sin\theta)^2 + (y^{-1}\cos\theta)^2} = y,$$

函数 $|\varphi(-y\sin\theta, y\cos\theta)|y^r$ 有界. 所以，对 $s = r + it$,

$$|Z(\varphi, s, k)| \leqslant \int_0^\infty |\varphi(-y^{-1}\sin\theta, y^{-1}\cos\theta)y^{-s-1}| \frac{dy}{y}$$

$$= \int_0^\infty |\varphi(-y\sin\theta, y\cos\theta)| y^{r+1} \frac{dy}{y} < \infty.$$

如果 φ 有紧支集，则

$$\frac{d^m}{ds^m} Z(\varphi, s, g) = (-1)^m \int_0^\infty \varphi(a, g) y^{-s-1} (\log y)^m \frac{dy}{y}. \qquad \square$$

定义 2.1. 称 $Z(\varphi, s, g)$ 为 φ 的 ζ-变换

引理 2.2. 设 $\varphi \in \mathscr{S}(N \backslash G)$, $\mathrm{Re}s > 0$. 令

$$\Phi(s, g) = \rho(a(g))^{-s-1} Z(\varphi, s, g).$$

则

$$\varphi(g) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathrm{Re}s = r} \rho(a(g))^{s+1} \Phi(s, g) |ds|$$

证. 首先 $\int_{\mathrm{Re}s=r} |ds|$ 是指 $\int_{\mathrm{Re}s=r} \frac{ds}{i}$. 证明的其余部分是 Paley-Wiener 空间上的 Mellin 变换的反演. 设 $f(y) = \varphi((0, y)g)$, $g \in G$. 又设

$$Mf(s) = \int_0^\infty f(y) y^s \cdot \frac{dy}{y},$$

$s = r + it$, $y = e^x$, $F_r(x) = f(e^{-x})e^{-rx}$, $\hat{F}_r$ 是 F_r 的 Fourier 变换。则 $Mf(s) = \hat{F}_r\left(\frac{t}{2\pi}\right)$. 作计算

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}s=r} Mf(s)y^{-s}\frac{ds}{i} = e^{-rx}\hat{\hat{F}}_r(x) = f(y).$$

然后用 $Mf(s+1) = Z(f, s, g)$ 和 $\varphi(g) = f(1)$，即可。 □

定理 2.3. 如果 $\varphi \in \mathscr{S}(N\backslash G)$, $\varphi(g) = \varphi(-g)$, $\mathrm{Re}s > 1$，则级数

$$\sum_{\gamma \in \pm\Gamma_N\backslash\Gamma} Z(\varphi, s, \gamma g)$$

绝对收敛。

证. 只需考虑 $g = 1$ 的情形。因为

$$\pm\Gamma_N = \left\{\pm\begin{pmatrix}1 & m\\ 0 & 1\end{pmatrix} \mid m \in \mathbf{Z}\right\},$$

所以

$$\pm\Gamma_N\begin{pmatrix}* & *\\ c & d\end{pmatrix} = \pm\Gamma_N\begin{pmatrix}* & *\\ c' & d'\end{pmatrix}$$

的充要条件是 $(c,d) = \pm(c',d')$，设 $\gamma = \begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix} \in \Gamma$，则 c，d 互素。又因 $\varphi((0, 1)a_y\gamma) = \varphi\left(\frac{c}{y}, \frac{d}{y}\right)$，所以，

$$\sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma} Z(\varphi, s, \gamma) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\substack{c,d\text{ 互素}\\ c>0\\ m\leq c^2+d^2<m+1}}\int_0^\infty \varphi(cy, dy)y^{s+1}\frac{dy}{y}$$

因为 φ 属于 Schwartz 空间，所以存在常数 C，使得，若 $|(x_1, x_2)| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} > C$，则

$$|\varphi(x_1, x_2)| \ll |(x_1, x_2)|^{-r-1-\varepsilon},$$

其中 $r = \mathrm{Re}s$. 因此有

$$\int_0^{\frac{c}{m}}|\varphi(cy, dy)|y^{r+1}\frac{dy}{y} \ll \int_0^{\frac{c}{m}} y^r dy \ll m^{-r-1},$$

及

$$\int_{\frac{\varepsilon}{m}}^{\infty}|\varphi(cy,dy)|\, y^{\sigma+1}\frac{dy}{y} \ll \int_{\frac{\varepsilon}{m}}^{\infty}\frac{y^{\sigma}dy}{|(cy,dy)|^{\sigma+1+\varepsilon}}$$

$$\ll m^{-\sigma-1-\varepsilon}\int_{\frac{\varepsilon}{m}}^{\infty} y^{-1-\varepsilon}dy \ll m^{-\sigma-1}.$$

注意到 Gauss 的结论：半径为m的圆内有 $O(m^2)$ 个整点，所以

$$\sum_{\substack{c,d\text{互素}\\ c>0\\ m\leqslant c^2+d^2<m+1}} 1 \ll m$$

于是立刻可得

$$\sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma}|Z(\varphi,s,\gamma)| \ll \Sigma m^{-\sigma}. \qquad \square$$

定义 2.2. 设 $\varphi\in\mathscr{S}(N\backslash G)$，$s\in\mathbb{C}$，$\operatorname{Re}s>1$，$g\in G$，$\Phi(s,g)=\rho(a(g))^{-s-1}Z(\varphi,s,g)$。称

$$E(\Phi,s,g)=\sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma}\rho(a(\gamma g))^{s+1}\Phi(s,\gamma g)$$

为 Eisenstein 级数。

例. 设

$$k_\theta=\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix},$$

在同构

$$G/K\to\mathfrak{h},\quad gK\longmapsto g(i)=z$$

下，如果

$$g=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{y} & \\ & (\sqrt{y})^{-1}\end{pmatrix}k_\theta,$$

则 $z=x+iy$，设

$$\gamma=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},\quad \gamma g=\begin{pmatrix}1 & x'\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\sqrt{y'} & \\ & (\sqrt{y'})^{-1}\end{pmatrix}k_{\theta'}.$$

则

$$\gamma(z)=\frac{az+b}{cz+d}=x+iy'.$$

又设 $j(\gamma,z)=cz+d$，取 $f\in C_c^\infty((0,\infty))$ 及 $s\in\mathbf{C}$，使得

$$0\neq D=\int_0^\infty f(y)y^{-s-1}\frac{dy}{y}<\infty.$$

如果

$$g=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}k_\theta,$$

则设 $\varphi(g)=f(y)e^{ik\theta}$，其中 k 为正偶整数．这样

$$\Phi(g,s)=\rho(a(g))^{-s-1}\int_A\varphi(ag)\rho(a)^{-s-1}da.$$

设

$$E_k(z,s)=(\sqrt{y}\,e^{i\theta})^{-k}D^{-1}E(g,\Phi,s),$$

其中

$$g=\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}k_\theta,\quad z=x+iy.$$

则容易算出

$$E_k(z,s)=(I_m z)^{(s+1-k)/2}\sum_{\pm\Gamma\cap N\backslash\Gamma}|j(\gamma z)|^{-(s+1-k)}j(\gamma,z)^{-k}$$

于是

$$E_k(z,k-1)=\sum_{\substack{m>0\\(m,n)=1}}(mz+n)^{-k},$$

$$E_0(z,2s-1)=\sum_{\pm\Gamma\cap N\backslash\Gamma}\mathrm{Im}(\gamma(z))^s.$$

上述例子说明定义 2.2 中的 Eisenstein 级数，同时处理了各个不同权的 Eisenstein 级数及实解析 Eisenstein 级数．

定理 2.4. 设 $\varphi\in\mathscr{S}(N\backslash G)$，$\varphi(g)=\varphi(-g)$，$\phi$ 是 φ 的 Fourier 变换．$\varphi(0)=\phi(0)=0$，$\hat{\Phi}(s,g)=\rho(a(g))^{-s-1}Z(\phi,s,g)$，$\zeta(s)$ 是 Riemann ζ-函数，则 $\zeta(s+1)E(\Phi,s,g)$ 是 s 的

整函数，并且有函数方程

$$E(\Phi, s, g)=\frac{\zeta(1-s)}{\zeta(1+s)}E(\hat{\Phi}, -s, {}^t g^{-1}).$$

证. 从定义得

$$E(\Phi, s, g)=\frac{1}{2}\sum_{(m_1,m_2)=1}\int_0^\infty \varphi((m_1, m_2)yg)y^{s+1}\frac{dy}{y}.$$

于是

$$\begin{aligned}\zeta(1+s)E(\Phi, s, g)&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{(m_1,m_2)=1}\int_0^\infty \varphi((m_1, m_2)yg)\left(\frac{y}{n}\right)^{s+1}\frac{dy}{y}\\&=\frac{1}{2}\int_0^\infty\sum_{(m_1,m_2)\in Z^2}\varphi((m_1 m_2)yg)y^{s+1}\frac{dy}{y}.\end{aligned}$$

因为函数 $(x_1, x_2)\longmapsto\varphi((x_1, x_2)yg)$ 的 Fourier 变换是函数 $(x_1, x_2)\longmapsto\hat{\varphi}((t_1, x_2)y^{-1}({}^t g^{-1}))y^{-2}$，用 Poisson 求和公式便得

$$\begin{aligned}&\int_0^1\sum_{(m_1,m_2)\in Z^2}\varphi((m_1, m_2)yg)y^{s+1}\frac{dy}{y}\\&\qquad=\int_0^1\sum_{(m_1,m_2)\in Z^2}\hat{\varphi}((m_1, m_2)y^{-1}({}^t g^{-1}))y^{s-1}\frac{dy}{y}\\&\qquad=\int_1^\infty\sum_{(m_1,m_2)\in Z^2}\hat{\varphi}((m_1, m_2)y({}^t g^{-1}))y^{1-s}\frac{dy}{y}.\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}\zeta(1+s)E(\Phi, s, g)=\frac{1}{2}\int_0^\infty\sum_{(m_1,m_2)\in Z^2}\Big\{&\{\varphi((m_1, m_2)yg)y^{s+1}\\&+\hat{\varphi}((m_1, m_2)y({}^t g^{-1}))y^{1-s}\Big\}\frac{dy}{y}\end{aligned}$$

是 s 的整函数。因为 φ 是偶函数，故 $\hat{\hat{\varphi}}=\varphi$。这样上面的积分在变换 $(\varphi, s, g)\to(\hat{\varphi}, -s, {}^t g^{-1})$ 之下不变。因此，有

$$\zeta(1+s)E(\Phi, s, g)=\zeta(1-s)E(\hat{\Phi}, -s, {}^t g^{-1}).\qquad\Box$$

§3. 连 续 谱

如果对 $\Gamma\backslash G$ 上的函数 f，下列积分

$$f_N(g) = \int_{\Gamma_N\backslash N} f(ng)dn$$

有意义，则 f_N 称为 f 的常数项. 如果对 $\pm N\backslash G$ 上的函数 φ，级数

$$\Theta_\varphi(g) = \sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma} \varphi(\gamma_g)$$

收敛，则 Θ_φ 称为 φ 的 θ 级数.

引理 3.1. 设 $f\in L^2(\Gamma\backslash G)$，$\varphi\in C_c(\pm N\backslash G)$. 则

$$\langle\Theta_\varphi, f\rangle_{\Gamma\backslash G} = \langle\varphi, f_N\rangle_{\pm N\backslash G}$$

(其中$\langle\cdot,\cdot\rangle_*$是表 $L^2(*)$ 上内积).

证.

$$\begin{aligned}\langle\Theta_\varphi, f\rangle &= \int_{\Gamma\backslash G}\sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma}\varphi(\gamma_g)\overline{f(g)}dg\\ &= \int_{\pm\Gamma_N\backslash G}\varphi(g)\overline{f(g)}dg = \int_{\pm N\backslash G}\int_{\Gamma_N\backslash N}\varphi(ng)\overline{f(ng)}dndg\\ &= \int_{\pm N\backslash G}\varphi(g)f_N(g)dg = \langle\varphi, f_N\rangle_{\pm N\backslash G}.\end{aligned}$$ □

设 $f\in L^2(\Gamma\backslash G)$. 如果对所有的 $\varphi\in C_c(\pm N\backslash G)$，$f$ 与 Θ_φ 正交，则 $f\in {}^0L^2(\Gamma\backslash G)$. 设 L 是 ${}^0L^2(\Gamma\backslash G)$ 在 $L^2(\Gamma\backslash G)$ 的正交补. 则 θ 级数所生成的子空间的闭包是 L. 对偶函数 $\varphi\in\mathscr{S}(N\backslash G)$，有

$$\Theta_\varphi(g) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}\,s=r} E(\Phi, s, g)|ds|$$

这样，L 便可看作 Eisenstein 级数的"连续和"(直积分). 进一步研究 L 便要知道 $\langle\Theta_\varphi, \Theta_\varphi\rangle_{\Gamma\backslash G}$. 从引理 3.1 可知需要进一步计算常数项.

定理 3.2. 设 $\varphi\in\mathscr{S}(N\backslash G)$，$\varphi(g)=\varphi(-g)$，$m$ 整数，

$$\varphi\left(\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & 0\\ 0 & y^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\right) = \varphi(y)e^{im\theta},$$

ζ 是 Riemann ζ 函数，$\xi(s) = \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)$，

$$M_m(s)=(-1)^{m/2}\frac{(s-1)(s-3)\cdots(s-(m-1))}{(s+m-1)(s+m-3)\cdots(s+1)}$$
$$\times\frac{\xi(s)}{\xi(1+s)}.$$

则 Eisenstein 级数的常数项是

$$E_N(\Phi, s, g)=\rho(a(g))^{s+1}\Phi(s, g)$$
$$+\rho(a(g))^{-s-1}M_m(s)\Phi(s, g)$$

且 $M_m(s)M_m(-s)=1$。

证。简记 $Z(\varphi, s, g)$ 为 $Z(g)$ 则

$$E(\Phi, s, g)=\sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma}Z(\gamma g).$$

于是，

$$E_N(\Phi, s, g)=\int_{\Gamma_N\backslash N}\sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma}Z(\gamma ng)dn$$

易证 Γ 有双陪集分解

$$\Gamma=\bigcup_{\gamma\in\pm\Gamma_N\backslash\Gamma/\Gamma_N}(\pm\Gamma_N)\gamma\Gamma_N$$
$$=\pm\Gamma_N\cup\left(\bigcup_{\substack{c>0\\ d\bmod c\\ (c,d)=1\\ m\in\mathbb{Z}}}(\pm\Gamma_N)\begin{pmatrix}* & *\\ c & d\end{pmatrix}\tau^m\right),\quad \tau=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

由此可得

$$E_N(\Phi, s, g)$$
$$=\int_{\Gamma_N\backslash N}\sum_{\gamma\in\pm\Gamma_N\backslash\Gamma/\Gamma_N}\sum_{m\in\mathbb{Z}}Z(\gamma\tau^m ng)dn$$
$$=\left(\sum_{1\neq\gamma\in\pm\Gamma_N\backslash\Gamma/\Gamma_N}\int_{\Gamma_N\backslash N}\sum_{m\in\mathbb{Z}}Z(\gamma\tau^m ng)dn\right)+\int_{\Gamma_N\backslash N}Z(ng)dn$$
$$=\sum_{1\neq\gamma\in\pm\Gamma_N\backslash\Gamma/\Gamma_N}\int_N Z(\gamma ng)dn+Z(g)\int_{\Gamma_N\backslash N}dn.$$

设 $w=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$，$G$ 有 Bruhat 分解

$$G = \pm NA \cup \pm NAwN.$$

从公式

$$\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & x' \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & * \\ -y^{-1} & * \end{pmatrix}$$

可得：如果 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in MNAwN$，则

$$MN\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}N = MNa_{c^{-1}}wN.$$

于是，若 $1 \neq \gamma = \begin{pmatrix} * & * \\ c & d \end{pmatrix}$，$c > 0$，则

$$\pm N\gamma N = \pm Na_{c^{-1}}wN.$$

所以

$$E_N(\Phi, s, g) = Z(g) + \sum_{\substack{c>0 \\ d \bmod c \\ (c,d)=1}} \int_N Z(a_{c^{-1}}wng)dn.$$

现在来算积分

$$\int_N Z(a_{c^{-1}}wng)dn = \int_N \int_0^\infty \varphi(a_y a_{c^{-1}}wng)y^{-s-1}\frac{dy}{y}dn$$

$$= c^{-s-1}\int_N \int_0^\infty \varphi(a_y wng)y^{-s-1}\frac{dy}{y}dn$$

$$= c^{-s-1}\int_N \rho(a(wng))^{s+1}\Phi(wng)dn.$$

公式

$$\begin{aligned} wng &= wnn(g)a(g)k(g) \\ &= (wa(g)w^{-1})(wa(g)^{-1}n \cdot n(g)a(g)k(g)), \end{aligned}$$

设 $n' = a(g)^{-1}n \cdot n(g)a(g)$，则

$$\int_N \rho(a(wng))^{s+1}\Phi(wng)dn$$

$$= \rho(a(g))^{-s-1}\int_N \rho(a(wn'k(g))^{s+1}\Phi(wn'k(g))dn$$

$$= \rho(a(g))^{-s+1}\int_N \rho(a(wnk(g))^{s+1}\Phi(wnk(g))dn$$

$$= \rho(a(g))^{-s+1}\int_N Z(wnk(g))dn.$$

按照 Iwasawa 分解，有

$$\begin{pmatrix} p & q \\ t & r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

所以

$$\frac{q+ip}{r+it} = x + iy^2,\quad r + it = (ye^{i\theta})^{-1}.$$

从

$$-wn_x = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & x \end{pmatrix},$$

得

$$-wn_x = a_{|x+i|^{-1}}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},\quad \theta = \arg(x+i).$$

设 $k(g) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ -\sin\phi & \cos\phi \end{pmatrix}$，从 Z 的定义，得

$$\begin{aligned} Z(wn_xk(g)) &= |x+i|^{-(s+1)}e^{im(\phi-\theta)}Z(1) \\ &= (1+x^2)^{-\frac{s+1}{2}}e^{-im\theta}\rho(a(g))^{-s-1}Z(g). \end{aligned}$$

于是

$$\int_N Z(wnk(g))dn = \left(\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-im\theta}}{(1+x^2)^{\frac{s+1}{2}}}dx\right)\rho(a(g))^{-s-1}Z(g)$$

设 $x = \operatorname{ctg}\theta$，则

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty}e^{-im\theta}(1+x^2)^{-\frac{s+1}{2}}dx &= \int_0^{\pi}(\sin\theta)^{s-1}e^{-im\theta}d\theta \\ &= \frac{(-1)^{\frac{m}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(s/2)\Gamma((s+1)/2)}{\Gamma((s+1-m)/2)\Gamma((s+1+m)/2)}. \end{aligned}$$

综上所述，有

$$\begin{aligned} &\int_N Z(a_{c^{-1}}wng)dn \\ &= c^{-s-1}\frac{(-1)^{\frac{m}{2}}\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(s/2)\Gamma((s+1)/2)}{\Gamma((s+1-m)/2)\Gamma((s+1+m)/2)} \end{aligned}$$

$$\times \rho(a(g))^{-s+1}\Phi(s, g).$$

利用公式

$$\sum_{\substack{c>0 \\ d \bmod c \\ (c,d)=1}} \frac{1}{c^{s+1}} = \frac{\zeta(s)}{\zeta(s+1)},$$

我们立刻得到所求公式．从函数方程 $\xi(s) = \xi(1-s)$ 可得

$$\mathrm{M}_m(s)\mathrm{M}_m(-s) = 1. \qquad \square$$

用直接计算可证明 $\rho(a)^{-2}dnda$ 是 NA 上的 Haar 测度，按 Iwasawa 分解 $G = NAK$，对应的 Haar 测度分解为

$$\int_G f(g)dn = \int_K \int_A \int_N f(nak)\rho(a)^{-2}dndadk.$$

现在可以证明 θ 级数的内积公式

定理 3.3. 设有偶函数 $\varphi, \phi \in \mathscr{S}(N\backslash G)$．令

$$\varphi(g) = \varphi(y)e^{im\theta}, \quad \phi(g) = \phi(y)e^{im\theta},$$

$$g = \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix},$$

其中 m 为偶整数．则对充分大的 r，有

$$\langle \Theta_\varphi, \Theta_\phi \rangle_{\Gamma\backslash G} = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}\, s = r} \{\langle \Phi(s,\cdot), \Psi(-\bar{s},\cdot)\rangle_K$$

$$+ \langle \mathrm{M}_m(s)\Phi(s, \cdot), \Psi(\bar{s}, \cdot)\rangle_K\} \, |ds|$$

证． 若 $\gamma \in \pm\Gamma_N$，则 $\Theta_\varphi(\gamma g) = \Theta_\varphi(g)$．这样

$$\langle \Theta_\varphi, \Theta_\phi \rangle_{\Gamma\backslash G} = \int_{\Gamma\backslash G} \Theta_\varphi(g)\overline{\Theta_\phi(g)}dg$$

$$= \int_{\Gamma\backslash G} \Theta_\varphi(g) \sum_{\pm\Gamma_N\backslash\Gamma} \phi(\gamma g)dg = \int_{\pm\Gamma_N\backslash G} \Theta_\varphi(g)\phi(g)dg$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}\, s = r} \left\{\int_{\pm\Gamma_N\backslash G} E(\Phi, s, g)\phi(g)dg\right\} |ds|$$

继续计算，令 $g = nak$，则

$$\int_{\pm\Gamma_N\backslash G} E(\Phi, s, g)\phi(g)dg$$

$$= \int_{\pm\Gamma_N\backslash\pm ANK} E(\Phi, s, g)\phi(g)\rho(a(g))^{-2}dndadk$$

$$= \int_K \int_A \int_{\Gamma_N \backslash N} E(\Phi, s, nak)\phi(nak)\rho(a)^{-2} dn\,da\,dk$$

$$= \int_K \int_A E_N(\Phi, s, ak)\phi(ak)\rho(a)^{-2} da\,dk$$

$$= \int_K \int_A \{\rho(a)^{s+1}\Phi(s, k) + \rho(a)^{-s+1}M_m(s)\Phi(s, k)\}$$

$$\times \phi(ak)\rho(a)^{-2} da\,dk$$

因为

$$\int_A \rho(a)^{s-1}\phi(ak)da = \bar{Z}(\phi, -\bar{s}, k) = \bar{\Psi}(-\bar{s}, k),$$

$$\int_A \rho(a)^{-s-1}\phi(ak)da = \Psi(\bar{s}, k),$$

并注意到

$$\langle \Phi(s), \Psi(-\bar{s}) \rangle_K = \int_K \Phi(s, k)\bar{\Psi}(-\bar{s}, k)dk,$$

我们就得到所求公式。 □

设 m 为偶整数，设

$$\mathscr{S}(N\backslash G)_m = \Big\{\varphi \in \mathscr{S}(N\backslash G) \mid \varphi(g) = \varphi(-g),$$

$$\varphi\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = \varphi(y)e^{im\theta}\Big\}$$

以 $L(m)$ 记 $\{\Theta_\varphi \mid \varphi \in \mathscr{S}(N\backslash G)_m\}$ 所生成的闭子空间。 设有 $f \in L^2(\Gamma\backslash G)$，$f$ 与 ${}^0L^2(\Gamma\backslash G) \oplus \left(\bigoplus_m L(m)\right)$ 正交。 以 H 记包含 f 的最小不变子空间。称 $h \in H$ 为 K 有限，如果 $h = \sum_{i=1}^{l} a_i h_i$， $a_i \in \mathbb{C}$，而且有 $m_i \in \mathbb{Z}$，使得

$$h_i\left(\begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y & 0 \\ 0 & y^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\right) = h_i(y)e^{im_i\theta}.$$

因为 $-1 \in \Gamma$，所以 m_i 是偶数。因为 K 与单位圆同构，圆上的二次可积偶函数的 Fourier 展开是 $\Sigma a_i e^{im_i\theta}$，$m_i$ 是偶整数，所以 H 的 K 有限元组成 H 的稠密子集。但从内积公式可见与 $L(m)$ 正交的 K 有限函数必为零。因此 $H = \{0\}$，$f = 0$。所以

$$L^2(\Gamma\backslash G) = {}^0L^2(\Gamma\backslash G)\oplus L,$$

$${}^0L^2(\Gamma\backslash G) = \bigoplus_n {}^0L^2(n),$$

$$L = \bigoplus_m L(m).$$

若 $\varphi, \psi\in \mathscr{S}(N\backslash G)_m$, 则

$$\Phi(s, k) = \int_0^\infty \varphi(a, k)y^{-s-1}\frac{dy}{y} = e^{im\theta}\Phi(s, 1),$$

$$k = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

所以

$$\begin{aligned}
&\langle \Phi(s, \cdot), \Psi(-\bar{s}, \cdot)\rangle_K \\
&= \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{im\theta}\overline{e^{im\theta}}\,d\theta\right)(\Phi(s, 1))(\Psi(-\bar{s}, 1)) \\
&= \Phi(s, 1)\Psi(-\bar{s}, 1).
\end{aligned}$$

于是,我们把 θ 级数的内积公式写成

$$\begin{aligned}
&\langle \Theta_\varphi, \Theta_\psi\rangle_{\Gamma\backslash G} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{\mathrm{Re}s=r}\{\Phi(s, 1)\Psi(-\bar{s}, 1) \\
&\quad + \mathrm{M}_m(s)\Phi(s, 1)\Psi(\bar{s}, 1)\}|ds|
\end{aligned}$$

从 M_m 的公式可见在右复平面 $\mathrm{Re}s>0$ 中 M_m 的唯一奇点是 $\zeta(s)$ 在 $s=1$ 的单极. 以 γ_m 记 M_m 在 $s=1$ 的残数,则

$$\gamma_m = (-1)^{\frac{m}{2}}\left(\Gamma\left(1-\frac{m}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{m}{2}\right)\xi(2)\right)^{-1}.$$

当我们把 θ 级数的内积公式中积分路线 $\mathrm{Re}s=r$ 移至 $\mathrm{Re}s=0$ 时,会增加残数一项. 即

$$\begin{aligned}
&\langle \Theta_\varphi, \Theta_\psi\rangle_{\Gamma\backslash G} = \gamma_m\Phi(1, 1)\Psi(1, 1) \\
&+ \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathrm{Re}s=0}\{\Phi(s, 1)\Psi(-\zeta, 1) + \mathrm{M}_m(s)\Phi(s, 1)\Psi(\bar{s}, 1)\}ds
\end{aligned}$$

因此可作直和分解: $L(m) = L_0(m)\oplus L_1(m)$, 其中 $L_0(m)$ 是常数(函数). Θ_φ 与 Θ_ψ 在 $L_0(m)$ 的投影的内积是 $\gamma_m\Phi(1, 1)\Psi(1,$

1)。利用 $\mathrm{M}_m(s)\mathrm{M}_m(-s)=1$，可得 Θ_φ 与 Θ_ψ 在 $L_1(m)$ 的投影的内积是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{2}\{\Phi(iy,1)+\mathrm{M}_m(-iy)\Phi(-iy,1)\}$$
$$\cdot\overline{\frac{1}{2}\{\Psi(iy,1)+\mathrm{M}_m(-iy)\Psi(-iy,1)\}}\,dy$$

设 $Y(m)=\left\{f\,\middle|\int_{-\infty}^{\infty}|f(iy)|^2dy<\infty,\ f(-iy)=\mathrm{M}_m(iy)f(iy)\right\}$。则 $L_1(m)$ 与 $Y(m)$ 同构。关于连续谱的讨论就此结束。

为了方便读者，我们把在定理 3.2 的证明中所用的两个公式的证明写在下面。

引理.
$$\sum_{\substack{c>0\\ d\bmod c\\ (c,d)=1}} c^{-s}=\zeta(1-s)\zeta(s)^{-1}.$$

证. 引入 Ramanujan 和

$$\gamma_c(n)=\sum_{\substack{d\bmod c\\ (c,d)=1}} e^{2\pi i n d/c}.$$

利用 Möbius 函数 μ，它可表达为

$$\gamma_c(n)=\sum_{l\mid(c,n)}\mu\left(\frac{c}{l}\right)l$$

(Hardy 和 Wright [23] §16.6)。设

$$\varphi_n(s)=\sum_{c>0}c^{-s}\Bigg(\sum_{\substack{d\bmod c\\ (c,d)=1}} e^{2\pi i n d/c}\Bigg).$$

则所求的为 $\varphi_0(s)$。用 Riemann ζ-函数的 Euler 积展开，有

$$\zeta(s)^{-1}=\prod_p(1-p^{-s})=\Pi(1+\mu(p)p^{-s}+\mu(p^2)p^{-2s}+\cdots)$$
$$=\sum_{n\geq 1}\mu(n)n^{-s}.$$

所以

$$\frac{\zeta(s-1)}{\zeta(s)}=\sum_{l\geq 1}\frac{l}{l^s}\sum_{m\geq 1}\frac{\mu(m)}{m^s}=\sum_{l,m}l\mu(m)(lm)^{-s}$$
$$=\sum_n n^{-s}\sum_{lm=n}l\mu(m)=\sum_n n^{-s}\sum_{d\mid n}d\mu\left(\frac{n}{d}\right)=\varphi_0(s). \quad \square$$

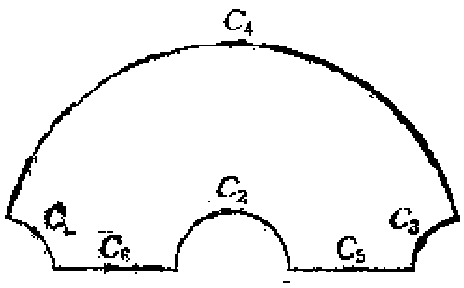
引理. 如果 $\mathrm{Re}\,\alpha > -1$，则

$$\int_0^\pi (\sin\theta)^\alpha (e^{i\theta})^\beta d\theta = \frac{\pi e^{\frac{i\pi\beta}{2}}\Gamma(1+\alpha)}{2^\alpha \Gamma\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)}.$$

证. 我们把所求积分化为常见的 β 函数. 设 C 是复平面上的逐段光滑曲线. 考虑积分

$$I(C) = \int_C (z^{-1}-z)^\alpha z^{\beta-1} dz.$$

下图中的大圆为单位圆，小圆的半径为 ε:



当 $\varepsilon \to 0$ 时，$I(C_i) \to 0$，$i = 1, 2, 3$. 在 C_4 上可设 $z = e^{i\theta}$，$0 \leqslant \theta \leqslant \pi$. 则当 $\varepsilon \to 0$ 时，有

$$I(C_4) \to 2^\alpha (i)^{1-\alpha} \int_0^\pi (\sin\theta)^\alpha (e^{i\theta})^\beta d\theta,$$

$$\begin{aligned}
I(C_5) &\to \int_0^1 (x^{-1}-x)^\alpha x^{\beta-1} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 t^{\frac{\beta-\alpha}{2}-1}(1-t)^{(1+\alpha)-1} dt, \\
&= \frac{1}{2} B\left(\frac{\beta-\alpha}{2},\ 1+\alpha\right) \\
&= \frac{\pi}{2\sin\left(\frac{\pi(\beta-\alpha)}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma(1+\alpha)}{\Gamma\left(1+\frac{\alpha-\beta}{2}\right)\Gamma\left(1+\frac{\alpha+\beta}{2}\right)},
\end{aligned}$$

其中 $t = x^2$. 同样可以算出 $I(C_6)$ 的极限. 最后只需注意

$$2\sin\frac{\pi(\beta-\alpha)}{2} = e^{-\frac{i\pi\beta}{2}} i^{1+\alpha} - e^{\frac{i\pi\beta}{2}} i^{1-\alpha}. \qquad \square$$

这里还应指出，本章的理论是 A. Selberg 在五十年代发展起来的. R. P. Langlands 已把这理论推广至任意李群.

参 考 文 献

[1] J. F. Adams, Lectures on Lie groups, Benjamin, New York, 1969.

[2] L. Auslander and C. C. Moore, Unitary Representations of Solvable Lie Groups, *Memoirs AMS*, **62**(1966). AMS, USA.

[3] L. Auslander and R. Tolimieri, Abelian harmonic analysis, theta functions and functional algebras on Nilmanifold, *Springer LN* **436** (1975).

[4] G. Bachman, Elements of abstract harmonic analysis, Academic Press, New York, 1964.(中译本:郭琉驹等译,抽象调和分析基础,人民教育出版社,1979).

[5] J. Benedetto, Harmonic analysis on totally disconnected sets, *SLN* **202** Springer, 1971.

[6] R. J. Blattner, On induced representations I, II, *AJM*, **83**(1961), pp. 79—98, 499—512.

[7] A. Borel, Representations de groupes localement compacts, *Springer LN* **276** (1972).

[8] T. Brocker and T. T. Dieck, Representations of compact Lie groups, Springer GTM, 1985.

[9] N. Bourbaki, Topologie generale (English translation: Addison Wesley, 1967).

[10] F. Bruhat, Les Representations induites, *Bull. Soc. Math. France*, **84**(1956), pp. 97—205.

[11] H. Cartan and R. Godement, Theorie de la dualite et analyse harmonique dans les groupes abeliens localement compacts, *Ann Sci. Ecole Norm Sup* (3), **64**(1947), pp. 79—99.

[12] 定光桂,巴拿赫空间引论,科学出版社,1984.

[13] J. Diximier, Von Neuman Algebras, North Holland, 1981.

[14] J. Diximier, Les C*-algebres et leur representations, Gauthier Villars, Paris, 1969. (English translation: C* algebras, North Holland, 1977.)

[15] M. Duflo, Inversion formula, invariant operators on solvable Lie groups, Proc. Inte. Congr. Math. Vancourer, 1974, pp. 93—97

[16] N. Dunford & J. T. Schwartz, Linear operators, I, II, III, Interscience-Wiley, New York, 1958.

[17] T. J. Enright, Representations of complex semisimple Lie groups, Springer Verlag, 1982.

[18] J. M. G. Fell, Dual spaces of C*-algebras, *TAMS*, **94** (1960), pp. 365—403.

[19] И. М. Гельфанд, Обобщенные функции, вып 5. Москва, 1962 (Academic Press, New York, 1966); Вып 6,москва, 1966 (Saunders Co, Poiladelphia, 1969)

[20] R. Godement, Sur la theorie des representations unitaires, *Ann. Math.*, **53** (1951), pp. 68—124.
[21] R. Godement, Theorie des caracteres I, II, *Ann. Math.*, **59** (1954), pp. 47—62, 63—85; *J. Math. Pures Appl.*, **30**(1951), pp. 1—110.
[22] R. Godement, The decomposition of $L^2(G/\Gamma)$, AMS Proc. Sym. Pure Math., 9 (1966), pp. 225—234.
[23] G. Hardy & F. Wright, An Introduction to the Theory of Numbers, OUP, 1954.
[24] Harish-Chandra, Harmonic analysis on semisimple Lie groups, *Bull. Amer. M. S.*, **78**(1970), pp. 529—551.
[25] E. Hewitt & K. A. Ross, Abstract Harmonic Analysis, Volumes I, II, Springer Verlag, 1963.
[26] P. J. Higgins, Introduction to topological groups, Cambridge University Press, 1974.
[27] E. Hille & R. S. Phillips, Functional analysis and semigroups, AMS, 1957. (中译本：吴智泉译，泛函分析与半群，上海科技出版社，1964。)
[28] R. Howe, Frobenius reciprocity for unipotent groups, *AJM*, (1971), pp. 163—172.
[29] 华罗庚，多复变函数论中的典型域的调和分析，科学出版社，1958.
[30] 江泽涵，拓扑学引论，上海科技出版社，1978.
[31] I. Kaplansky, Lie algebras and locally compact groups, Chicago University Press, 1971.
[32] Kazdan, Connection of the dual space of a group, with the structure of its close subgroups, *Functional Analysis & Application*, I (1967), pp. 71—74.
[33] J. L. Kelley, General Topology, Van Nostrand, 1955. (中译本：吴从炘译一般拓扑学，科学出版社，1985。)
[34] A. A. Kirilov, Elements of the theory of representations, Springer 1976.
[35] 关肇直，拓扑空间概论，科学出版社，1958.
[36] A. W. Knapp, Representation theory of semisimple groups, Princeton University Press, 1986.
[37] A. Knapp and E. Stein, Intertwining operators for semisimple groups I, II, *Ann. of Math.*, 93(1971) pp. 489—578; *Inven. Math.* **60**(1980) pp. 9—84.
[38] 龚昇，典型群上的调和分析，科学出版社，1983.
[39] S. Lang, SL (2, R), Addison Wesley, 1975.
[40] R. P. Langlands, On the funcrional equationssatisfied by Eisenstein series, *Springer LN*, **544**(1976).
[41] 李炳仁，算子代数，科学出版社，1986.
[42] R. L. Lipsman, Dual topology for principal and discrete series, *TAMS*, **152** (1970), pp 399—417.
[43] 陆启铿，典型流形与典型域，上海科技出版社，1963.
[44] G. W. Mackey, Unitary representations of locally compact groups, University of Chicago Press.
[45] D. Montgomery and L. Zippin, Topological transformation groups, Interscience Publishers, New York, 1955.

[46] C. C. Moore, Frobenius reciprocity, *Pacific J. Math.*, 12(1962), pp. 359—365.
[47] S. A. Morris, Pontryagin duality and the structure of locally compact abelian groups, Cambridge University Press, 1977.
[48] G. D. Mostow, Homogeneous spaces with finite invariant measure, *Ann. of Math.*, 75(1962), 17—37.
[49] Nachbin, Haar Integral, Van Nostrand, 1965.
[50] M. A. Naimark and A. I. Stern, Theory of group representations, Springer Verlag, 1980.
[51] M. A. Naimark, Linear representations of the Lorentz group, Pergamon Press, London, 1964.
[52] M. A. Naimark, Normed rings (English Translation: Noord-hoff, Groningen, 1964).
[53] Л. С. Понтрягин, Непрерывные Группы, Москва, 1954. (中译本：曹锡华译，连续群；上、下，科学出版社，1957.)
[54] L. Pukanszky, Lecons sur les representations des groupes, Dunod, Paris, 1967.
[55] H. Reiter, Classical harmonic analysis and locally compact groups, Oxford University Press, 1968.
[56] C. E. Rickart, General theory of Banach algebras, Van Nostrand, New York, 1960.
[57] W. Rudin, Real and complex analysis, McGraw Hill, 1974.
[58] W. Rudin, Functional Analysis, McGraw-Hill, 1973.
[59] W. Rudin, Fourier Analysis on Groups, Interscience, 1967.
[60] S. Sakai, C*-Algebras and W* Algebras, Springer Verlag, 1971.
[61] H. H. Schaefer, Topological vector spaces, Springer Verlag, Berlin, 1980.
[62] W. Schempp, Harmonic analysis on Heisenberg group, Pitman-Longman, London, 1986.
[63] W. Schmid, Representations of simisimple Lie groups, Proc. International Congr. Math., Helsinki, 1978, 195—205.
[64] L. Schwartz, Theorie des distribution, Hermann, Paris, 1966.
[65] A. Selberg, Harmonic analysis and discrete groups in weakly symmetric Riemann spaces, *J. Indian Math. Soc.*, 20(1956), pp. 47—87.
[66] C. L. Siegel, Volume of the fundamental domain for some infinite groups, *Transactions AMS* 39(1936), pp. 209—218.
[67] C. L. Siegel, Discontinuous groups, *Ann. Math.*, 44(1943), pp. 674—689
[67] C. L. Siegel, Discontinuous groups, *Ann. Math.*, 44(1943), pp. 674—689.
Springer, 1967. (中译本：干丹岩译，拓扑学与几何学基础讲义，上海科技出版社，1985.)
[69] M. H. Stone, Linear transformations on Hilbert space, AMS Coll. Pub., 15, New York, 1950.
[70] M. Sugiura, Unitary Representations and harmonic analysis, Halsted-John Wiley & Sons, New York, 1975.
[71] M. H. Taibleson, Fourier analysis on local fields, Princeton University Press.
[72] J. D. Talman, Special functions (group theoretic approach), Benjamin, New York, 1968.

[73] F. Treves, Topological vector spaces, distributions and kernels, Academic Press, New York, 1967.
[74] V. S. Varadarajan, Lie groups Lie algebras and their representations, Prentice-Hall, Inc., 1974.
[75] V. S. Varadarajan, Harmonic analysis on real reductive groups, Springer Lecture Notes in Math., 576, 1977.
[76] V. S. Varadarajan, Harmonic analysis on real semisimple groups, Proc. Intl. Congr. Math., Vancouver, 1974, 121—128.
[77] N. I. Vilenkin, Special functions and the theory of group representations, AMS (Translations), 1965.
[78] N. R. Wallach, Harmonic analysis on homogeneous spaces, Marcel Dekker, New York. 1973.
[79] G. Warner, Harmonic analysis on semisimple Lie groups, I, II, Springer Verlag, 1972.
[80] H. Weyl, Fundamental domains for the lattice groups in division algebras, Collected Works, Springer Verlag.
[81] A. Weil, L'integration dans les groups topologiques et ses applications, Hermann, Paris, 1940.
[82] H. Widom, Lectures on measure and integration, *Van Nostrand Math. Studies*, 20(1969).
[83] 夏道行、杨亚立，线性拓扑空间引论，上海科技出版社，1986.
[84] 徐振环，群论导引，黑龙江科技出版社，1985.
[85] 严志达、许以超，Lie 群及其 Lie 代数，高等教育出版社，1985.
[86] 俞鑫泰，Banach 空间几何理论，华东师大出版社，1986.
[87] D. P. Zelobenko, Compact Lie groups and their representations, AMS (Translations), 1973.
[88] 中山大学编，测度与概率基础，广东科技出版社，1984.
[89] 周民强，实变函数，北京大学出版社，1985.
[90] 朱成熹，测度论基础，科学出版社，1986.

索　引