《整体微分几何初步》习题答案

1 §0.1 E^3 中的曲线

1. 求下列曲线的弧长, 并写出弧长为参数的方程:
   (1) 双曲螺线 $\mathbf{x}=(a\cosh t, a\sinh t, bt)$;
   (2) 悬链面 $\mathbf{x}=(t, a\cosh\frac{t}{a}, 0)$;
   (3) 曳物线 $\mathbf{x}=(a\cos t, a\ln(\sec t+\tan t)-a\sin t, 0)$.

解: (1) $s(t)=\int_0^t\sqrt{a^2\cosh 2t+b^2}dt$;
   (2) $s(t)=a\sinh\frac{t}{a}$;
   (3) $s(t)=a\ln\sec t$.

2. 证明一般参数下曲线 $\mathbf{x}(t)$ 的曲率和挠率的计算公式是:

$$k(t)=\frac{|\mathbf{x}'\times\mathbf{x}''|}{|\mathbf{x}'|^3};\quad \tau(t)=\frac{(\mathbf{x}',\mathbf{x}'',\mathbf{x}''')}{|\mathbf{x}'\times\mathbf{x}''|^2}.$$

证明: 直接计算得 $\mathbf{x}'=\mathbf{T}\cdot\frac{ds}{dt}$, $\mathbf{x}''=k\mathbf{N}\cdot(\frac{ds}{dt})^2+\mathbf{T}\cdot\frac{d^2s}{dt^2}$. 所以 $\mathbf{x}'\times\mathbf{x}''=k\mathbf{B}\cdot(\frac{ds}{dt})^3$, $k(t)$ 即得. 而 $\mathbf{x}'''\cdot\mathbf{B}=k\cdot\tau\cdot(\frac{ds}{dt})^3$, 所以 $(\mathbf{x}',\mathbf{x}'',\mathbf{x}''')=\tau\cdot|\mathbf{x}'\times\mathbf{x}''|^2$.

3. 证明: 圆柱螺线的主法线与它的中心轴正交, 它的从法线与它的中心轴作成定角, 它的曲率中心轨迹仍然是圆柱螺线.

证明: 设圆柱螺线为 $\mathbf{x}(s)=(r\cos\sigma s, r\sin\sigma s, a\sigma s)$, 其中 $r, a, \sigma=\frac{1}{\sqrt{r^2+a^2}}$ 为常数. 直接计算 $\mathbf{N}(s)=(-\cos\sigma s,-\sin\sigma s,0)$, $\mathbf{B}(s)=\sigma(a\sin\sigma s,-a\cos\sigma s,r)$, 中心轴为 $(0,0,1)$. 所以 $\mathbf{N}(s)\cdot(0,0,1)=0$, $\mathbf{B}(s)\cdot(0,0,1)=\sigma r$. 曲率中心为 $\mathbf{x}(s)+\frac{1}{k(s)}\mathbf{N}(s)=((r-\frac{1}{\sigma^2 r})\cos\sigma s,(r-\frac{1}{\sigma^2 r})\sin\sigma s, a\sigma s)$, 也是一个圆柱螺线.

4. 设 $\mathbf{x}(s)$是单位球面上以弧长为参数的曲线, 证明: 存在向量 $\mathbf{e}(s), \mathbf{f}(s), \mathbf{g}(s)$ 和函数 $\lambda(s)$, 使得

$$\begin{cases}\dot{\mathbf{e}}= & & \mathbf{f} & \\ \dot{\mathbf{f}}= & -\mathbf{e} & & +\lambda(s)\mathbf{g}\\ \dot{\mathbf{g}}= & & -\lambda(s)\mathbf{f} & \end{cases}$$

证明：令 $\mathbf{e} = \mathbf{x}, \mathbf{f} = \dot{\mathbf{x}}, \mathbf{g} = \mathbf{x} \times \dot{\mathbf{x}}$.

5. 设 $\mathbf{x}(s) = (x^1(s), x^2(s))$ 是平面上以弧长为参数的曲线, $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s)\}$ 是它的 Frenet 标架, 证明:

$$\mathbf{N}(s) = (-\dot{x}^2(s), \dot{x}^1(s)), \quad \ddot{\mathbf{x}}(s) = k_r(s)(-\dot{x}^2(s), \dot{x}^1(s)).$$

证明： $\mathbf{T}(s) = \dot{\mathbf{x}}(s) = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$, 其中 $\cos\alpha(s) = \dot{\mathbf{x}}^1(s)$, $\sin\alpha(s) = \dot{\mathbf{x}}^2(s)$. 所以 $\mathbf{N}(s) = (\cos(\alpha(s)+\frac{\pi}{2}), \sin(\alpha(s)+\frac{\pi}{2})) = (-\sin\alpha(s), \cos\alpha(s)) = (-\dot{x}^2(s), \dot{x}^1(s))$. $\ddot{\mathbf{x}}(s) = \dot{\mathbf{T}} = k_r\mathbf{N}(s) = k_r(-\dot{x}^2(s), \dot{x}^1(s))$.

6. 证明:

(1) 除直线外, 一条曲线的所有切线不可能同时是另一条曲线的切线.

(2) 曲率和挠率都是(非零)常数的正则曲线必是圆柱螺线.

证明：(1) 设曲线 $C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$的切线同时为曲线 $C^* : \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(s^*)$ 的切线, 其中 s 和 s^* 分别为它们的弧长参数. 则

$$\mathbf{x}^*(s^*) - \mathbf{x}(s) = \lambda(s)\mathbf{T}(s), \tag{1.1}$$

其中 $\mathbf{T}(s)$ 为切线方向. 两边对 s 求导, 得到

$$(\frac{ds^*}{ds} - 1 - \frac{d\lambda}{ds})\mathbf{T}(s) - \lambda(s)k(s)\mathbf{N}(s) = 0, \tag{1.2}$$

所以 $\lambda(s)k(s) = 0$. 如果 $\lambda = 0$, 则 C 和 C^* 为同一条曲线. 如果 $k = 0$, 则 C 为直线.

(2) 已知圆柱螺线的曲率和挠率为常数. 则根据曲线论基本定理可知, 除一运动外, k 与τ 唯一地决定了曲线.

7. 设两曲线可建立 1-1 对应, 使它们在对应点有相同的主法线, 则称它们为 **Bertrand 曲线**, 其中一条称为另一条的**侣线**. 证明: 它们在对应点的距离为常数, 切线作成定角.

证明：设曲线 $C : \mathbf{x} = \mathbf{x}(s)$ 和 $C^* : \mathbf{x}^* = \mathbf{x}^*(s^*)$ 的弧长参数分别为 s 和 s^*. 由题意可设

$$\mathbf{x}^*(s^*) - \mathbf{x}(s) = \lambda(s)\mathbf{N}(s), \tag{1.3}$$

且 $\mathbf{N} = \mathbf{N}^*$. 两边对 s 求导可得

$$\mathbf{T}^*\frac{ds^*}{ds} = (1 - k\lambda)\mathbf{T} + \frac{d\lambda}{ds}\mathbf{N} + \lambda\tau\mathbf{B}. \tag{1.4}$$

因为 $\mathbf{T}^*\perp\mathbf{N}$, 所以 $\frac{d\lambda}{ds}=0$, $\lambda=const.$. 此时 (1.4) 化为

$$\mathbf{T}^*\frac{ds^*}{ds}=(1-k\lambda)\mathbf{T}+\lambda\tau\mathbf{B}. \tag{1.5}$$

记 $\mathbf{T}^*=\cos\theta\mathbf{T}+\sin\theta\mathbf{B}$, 两边对 s 求导, 再分别与 $\mathbf{T}$ 和 $\mathbf{B}$ 作内积, 得到 $\sin\theta\cdot\theta'=\cos\theta\cdot\theta'=0$, 所以 $\theta=const.$.

8. 证明:

(1) 任何平面曲线都是 Bertrand 曲线.

(2) 若 $k\tau\neq 0$, 则空间曲线为 Bertrand 曲线的充要条件是存在常数 $\lambda(\neq 0)$ 和 μ, 使得 $\lambda k+\mu\tau=1$.

证明: (1) 设 $C:\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$ 是平面曲线, 只要证明 $\mathbf{x}^*(s)=\mathbf{x}(s)+\lambda\mathbf{N}(s)$ 的主法向量也是 $\mathbf{N}$ 即可, 其中 $\lambda=const.$.
(2) 如果曲线 $C:\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$ 和 $C^*:\mathbf{x}^*=\mathbf{x}^*(s^*)$ 是 Bertrand 曲线, 它们的弧长参数分别为 s 和 s^*. 则由第 7 题可知, $\cos\theta=(1-\lambda k)\frac{ds}{ds^*}$, $\sin\theta=\lambda\tau\frac{ds}{ds^*}$, 其中 $\theta=const.$, λ 为非零常数. 令 $\mu=\lambda\cot\theta$, 则 $\lambda k+\mu\tau=1$.

反之, 由曲线 $C:\mathbf{x}=\mathbf{x}(s)$ 作曲线 $C^*:\mathbf{x}^*=\mathbf{x}+\lambda\mathbf{N}$, 弧长参数为 s^*. 两边对 s 求导, 并运用 $\lambda k+\mu\tau=1$, 得到

$$\mathbf{T}^*\frac{ds^*}{ds}=(1-k\lambda)\mathbf{T}+\lambda\tau\mathbf{B}=\mu\tau\mathbf{T}+\lambda\tau\mathbf{B}. \tag{1.6}$$

上式两边取模长, 得到 $(\frac{ds^*}{ds})^2=(\mu^2+\lambda^2)\tau^2$, 所以

$$\mathbf{T}^*=\pm\frac{1}{\sqrt{\mu^2+\lambda^2}}(\mu\mathbf{T}+\tau\mathbf{B}). \tag{1.7}$$

两边再对 s 求导, 即得 $\mathbf{N}^*\parallel\mathbf{N}$.

9. 求满足条件 $\tau=ck$ (c 为非零常数, $k>0$) 的曲线 $\mathbf{x}(s)$.

解: 当 $c=0$ 时, $\tau=0$, 此时曲线为平面曲线.

$c\neq 0$ 时, 由 Frenet 公式可知

$$\begin{cases}\mathbf{T}'= & & k\mathbf{N} & \\ \mathbf{N}'= & -k\mathbf{T} & & +ck\mathbf{B}\\ \mathbf{B}'= & & -ck\mathbf{N} & \end{cases}$$

引入参数 $t(s)=\int_0^s k(\sigma)d\sigma$ 后, 上述方程组化为

$$\begin{cases}\frac{d\mathbf{T}}{dt}= & & \mathbf{N} & \\ \frac{d\mathbf{N}}{dt}= & -\mathbf{T} & & +c\mathbf{B}\\ \frac{d\mathbf{B}}{dt}= & & -c\mathbf{N} & \end{cases} \tag{1.8}$$

于是有 $\frac{d^2\mathbf{N}}{dt^2} = -\mathbf{N} - c^2\mathbf{N} = -\omega^2\mathbf{N}$, 其中 $\omega = \sqrt{1+c^2}$. 于是有

$$\mathbf{N} = \cos\omega t\mathbf{a} + \sin\omega t\mathbf{b}, \tag{1.9}$$

其中 $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ 为常向量. 把 (1.9) 代入 (1.8) 第 1 式, 得到

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\omega}(\sin\omega t\mathbf{a} - \cos\omega t\mathbf{b} + c\mathbf{f}), \tag{1.10}$$

其中 $\mathbf{f}$ 为常向量, c 为常数. 把 (1.9), (1.10) 代入 (1.8) 第 2 式, 得到

$$\mathbf{B} = -\frac{c}{\omega}(\sin\omega t\mathbf{a} - \cos\omega t\mathbf{b}) + \frac{1}{\omega}\mathbf{f}. \tag{1.11}$$

则 (1.9), (1.10), (1.11) 为方程组 (1.8) 的通解. 为了保证在初始点 $s = 0$ 时 $\{\mathbf{T}(0), \mathbf{N}(0), \mathbf{B}(0)\}$ 为单位正交右旋标架, 要对常向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{f}$ 加以一定的限制. 因为

$$\begin{cases} \mathbf{T}(0) = & & -\frac{1}{\omega}\mathbf{b} & +\frac{c}{\omega}\mathbf{f} \\ \mathbf{N}(0) = & \mathbf{a} & & \\ \mathbf{B}(0) = & & \frac{c}{\omega}\mathbf{b} & +\frac{1}{\omega}\mathbf{f} \end{cases}$$

因为标架 $\{\mathbf{T}(0), \mathbf{N}(0), \mathbf{B}(0)\}$ 与标架 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$ 之间的变换矩阵是行列式等于 1 的正交阵, 因此只须选取常向量标架 $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{f}\}$ 为单位正交右旋标架即可.

最后, 对 $\frac{d\mathbf{x}}{ds} = \mathbf{T}$ 积分即得曲线方程为

$$\mathbf{x}(s) = \frac{1}{\omega}\left(\int_0^s \sin\omega t(\sigma)d\sigma\cdot\mathbf{a} - \int_0^s \cos\omega t(\sigma)d\sigma\cdot\mathbf{b} + cs\mathbf{f}\right) + \mathbf{g},$$

其中 $\mathbf{g}$ 是常向量.

10. 设曲线 $\mathbf{x}_2(t)$ 在曲线 $\mathbf{x}_1(t)$ 的切线上, 并且在对应点它们的切向量相互正交, 则 $\mathbf{x}_2(t)$ 称为 $\mathbf{x}_1(t)$ 的**渐伸线**, 而 $\mathbf{x}_1(t)$ 称为 $\mathbf{x}_2(t)$ 的**渐缩线**. 现设 $\mathbf{x}(s)$是弧长参数曲线, $\mathbf{x}_1(s)$ 和 $\mathbf{x}_2(s)$ 是 $\mathbf{x}(s)$ 的两条不同的渐伸线. 证明 $\mathbf{x}_1(s)$ 和 $\mathbf{x}_2(s)$ 为 Bertrand 曲线对的充要条件是 $\mathbf{x}(s)$ 为平面曲线.

证明：由题意可设

$$\mathbf{x}_i(s) = \mathbf{x}(s) + \lambda_i(s)\mathbf{T}(s), \tag{1.12}$$

$$\mathbf{T}\cdot\mathbf{T}_i = 0, \quad i = 1, 2, \tag{1.13}$$

其中 s_i 为 $\mathbf{x}_i$ 的弧长参数. (1.8) 两边对 s 求导可得

$$\mathbf{T}_i\cdot\frac{ds_i}{ds} = \mathbf{T} + \lambda_i'\mathbf{T} + \lambda_i k\mathbf{N}, \tag{1.14}$$

结合 (1.9) 可得 $\mathbf{T}_i \parallel \mathbf{N}$, $\lambda_i = -s + C_i$, 其中 C_i 为常数. 所以

$$\mathbf{x}_i(s) = \mathbf{x}(s) + (-s + C_i)\mathbf{T}(s), \tag{1.15}$$

如果 $\mathbf{x}_1(s)$ 和 $\mathbf{x}_2(s)$ 为 Bertrand 曲线对, 则 $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = C\mathbf{N}_1$, $\mathbf{N}_1 \parallel \mathbf{N}_2$. 结合 (1.11) 得到 $(C_2 - C_1)\mathbf{T} = C\mathbf{N}_1$, i.e. $\mathbf{T} \parallel \mathbf{N}_1$. $\mathbf{T}_2 = \pm\mathbf{N}$ 两边对 s 求导, 得到

$$k_2\mathbf{N}_2\frac{ds_2}{ds} = \pm(-k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}). \tag{1.16}$$

因此 $\tau = 0$.

反之, 如果 $\tau = 0$, 由 (1.12) 可知 $\mathbf{T} \parallel \mathbf{N}_2$. 所以 $\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1 = (C_2 - C_1)\mathbf{N}_2$.

11. 设 $C : \mathbf{x}(s)$ 是弧长参数曲线, 它的 Frenet 标架为 $\{\mathbf{T}(s), \mathbf{N}(s), \mathbf{B}(s)\}$. 以下曲线

$$C_1 : \mathbf{x} = \mathbf{T}(s), \quad C_2 : \mathbf{x} = \mathbf{N}(s), \quad C_3 : \mathbf{x} = \mathbf{B}(s)$$

分别称为 C 的切线, 主法线和从法线的**球面标线**. 若 s_i 为 $C_i(i = 1, 2, 3)$ 的弧长, 证明:

$$\left|\frac{ds_1}{ds}\right| = k(s), \quad \left|\frac{ds_2}{ds}\right| = \sqrt{k^2 + \tau^2}, \quad \left|\frac{ds_3}{ds}\right| = |\tau(s)|.$$

证明：

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}_1\frac{ds_1}{ds} &= k(s)\mathbf{N}, \\
\mathbf{T}_2\frac{ds_2}{ds} &= -k(s)\mathbf{T} + \tau(s)\mathbf{B}, \\
\mathbf{T}_3\frac{ds_3}{ds} &= -\tau(s)\mathbf{N}.
\end{aligned}$$

两边分别求模长即可得证.

12. 证明: 曲线 C 的切线的球面标线为(部分)大圆的充要条件是 C 为平面曲线; 曲线的主法线的球面标线永远不为常值曲线.

证明：设 $C : \mathbf{x}(s)$ 是弧长参数曲线, $\mathbf{T}$ 是其切线. 如果 C 是平面曲线, 则 $(\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}(0)) \cdot \mathbf{n}_0 = 0$. 两边对 s 求导得到 $\mathbf{T} \cdot \mathbf{n}_0 = 0$, 也就是说 $\mathbf{T}$ 是平面曲线.

反之, 如果 $C^* : \mathbf{T}(s)$ 为大圆, 则对应的曲率和挠率分别为 $k^* = 1$, $\tau^* = 0$. 运用第 2 题结论计算 k^*, 得到 $\tau(s) = 0$.

如果 $\frac{d\mathbf{N}}{ds} = 0$, 则 $-k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} = 0$, $k = \tau = 0$, 矛盾.

2 §0.2 E^3 中的曲面

1. 设在 E^3 中已给出曲面 $f(x^1, x^2, x^3) = 0$, 其中 f 是光滑函数, 求该曲面的单位法向量和第一基本形式. 证明: 曲面 $x^1x^2x^3 = c^3$ (c 为常数) 在任何点的切平面与三个坐标平面所围成的四面体的体积是常数.

解：设存在隐函数使得 $x^1 = g(x^2, x^3)$, 则该曲面可表示为

$$\mathbf{x}(x^2, x^3) = (g(x^2, x^3), x^2, x^3).$$

由 $f(x^1, x^2, x^3) = 0$ 可知 $\frac{\partial g}{\partial x^2} = -\frac{f_2}{f_1}$, $\frac{\partial g}{\partial x^3} = -\frac{f_3}{f_1}$, 其中 $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $i = 1, 2, 3$. 直接计算即得得

$$\begin{aligned}
\mathbf{n} &= \frac{(f_1, f_2, f_3)}{(f_1^2 + f_2^2 + f_3^2)^{\frac{1}{2}}}, \\
I &= (1 + \frac{f_2^2}{f_1^2})(dx^2)^2 + 2\frac{f_2 f_3}{f_1^2}dx^2dx^3 + (1 + \frac{f_3^2}{f_1^2})(dx^3)^2.
\end{aligned}$$

证明：过任意曲面上一点 (a_1, a_2, a_3) 的切平面方程为

$$(x^1 - a_1)a_2a_3 + (x^2 - a_2)a_1a_3 + (x^3 - a_3)a_1a_2 = 0,$$

与坐标轴分别交于点 $(3a_1, 0, 0)$, $(0, 3a_2, 0)$, $(0, 0, 3a_3)$. 所以体积为 $\frac{9}{2}|c|^3$.

2. 计算下列 Möbius 曲面的单位法向量:

$$\mathbf{x}(u, v) = (\cos u, \sin u, 0) + v(\sin\frac{u}{2}\cos u, \sin\frac{u}{2}\sin u, \cos\frac{u}{2}) \quad (-\pi < u < \pi, \quad -\phi < v < \phi).$$

解：直接计算得

$$\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 = (\cos\frac{u}{2}\cos u, \cos\frac{u}{2}\sin u, -\sin\frac{u}{2}) + \frac{v}{2}(\sin u(1+\cos u), \sin^2 u - \cos u, -2\sin^2\frac{u}{2}),$$

$$|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|^2 = 1 + \frac{3}{4}v^2 + 2v\sin\frac{u}{2}.$$

3. 下列方程中, 设 $a > b > c$ 为常数:

$$\frac{(x^1)^2}{a - \lambda} + \frac{(x^2)^2}{b - \lambda} + \frac{(x^3)^2}{c - \lambda} = 1.$$

当 λ 分别在以下三个区间: $(-\infty, c)$、(c, b)、(b, a) 取值时, 我们分别可得一族椭球面、一族单叶双曲面和一族双叶双曲面. 证明: 过空间不在坐标平面上

的每一点, 都有这三族曲面的一张通过, 并且它们在该点相互正交 (三重正交系).

证明： 设空间中任意一点 (x^1, x^2, x^3) $(x^i \neq 0)$ 经过曲面 $\frac{(x^1)^2}{a-\lambda} + \frac{(x^2)^2}{b-\lambda} + \frac{(x^3)^2}{c-\lambda} = 1$, 即

$$f(\lambda) = (b-\lambda)(c-\lambda)(x^1)^2+(a-\lambda)(c-\lambda)(x^2)^2+(a-\lambda)(b-\lambda)(x^3)^2-(a-\lambda)(b-\lambda)(c-\lambda) = 0.$$

由于 $f(-\infty) < 0, f(c) > 0, f(b) < 0, f(a) > 0$, 所以 $f(\lambda) = 0$ 在 $(-\infty, c)$、(c, b)、(b, a) 上各有一根 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

由习题 1 可知, 三张曲面的法向量分别平行于 $\mathbf{n}_i = \left(\frac{x^1}{a-\lambda_i}, \frac{x^2}{b-\lambda_i}, \frac{x^3}{c-\lambda_i}\right)$. 所以对于 $i \neq j$,

$$\begin{aligned}
& \mathbf{n}_i \cdot \mathbf{n}_j \\
= & \frac{(x^1)^2}{(a-\lambda_i)(a-\lambda_j)} + \frac{(x^2)^2}{(b-\lambda_i)(b-\lambda_j)} + \frac{(x^3)^2}{(c-\lambda_i)(c-\lambda_j)} \\
= & \frac{1}{\lambda_j - \lambda_i}\left\{\left(\frac{(x^1)^2}{(a-\lambda_i)} - \frac{(x^1)^2}{(a-\lambda_j)}\right) + \left(\frac{(x^2)^2}{(b-\lambda_i)} - \frac{(x^2)^2}{(b-\lambda_j)}\right) + \left(\frac{(x^3)^2}{(c-\lambda_i)} - \frac{(x^3)^2}{(c-\lambda_j)}\right)\right\} \\
= & 0.
\end{aligned}$$

4. 证明: 圆柱螺线 $\mathbf{x}(t) = (\cos t, \sin t, t)$ 的切线曲面是可展曲面, 但它的主法线曲面 (正螺面) 和从法线曲面都不是可展曲面.

证明： 切线曲面, 主法线曲面和从法线曲面分别为

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}(t, s) &= (\cos t, \sin t, t) + \frac{s}{\sqrt{2}}(-\sin t, \cos t, 1), \\
\mathbf{x}(t, s) &= (\cos t, \sin t, t) + s(-\cos t, -\sin t, 0), \\
\mathbf{x}(t, s) &= (\cos t, \sin t, t) + \frac{s}{\sqrt{2}}(\sin t, -\cos t, 1).
\end{aligned}$$

运用命题 2.1直接验证即得.

5. 若曲面上的参数曲线所构成的四边形对边长相等, 则称为 **Chebyshev 网**. 证明: 在 Chebyshev 网下, 曲面的第一基本形式可化为

$$I = (du^1)^2 + 2\cos\theta du^1 du^2 + (du^2)^2,$$

其中 θ 是参数曲线之间的交角. 例如, 平移曲面 $\mathbf{x}(u, v) = \mathbf{a}(u) + \mathbf{b}(v)$ 的参数网就构成 Chebyshev 网.

证明：在 (u,v) 参数曲线网下, 沿 $u-$参数曲线从点 (u,v_1) 到点 (u,v_2) 的距离为 $\int_b^a \sqrt{g_{22}(u,v)\frac{dv}{dt}\frac{dv}{dt}}dt$. 因为参数曲线所构成的四边形对边长相等, 所以这个距离与 u 的选取无关, 也就是说 $g_{22}=g_{22}(v)$. 同理 $g_{11}=g_{11}(u)$. 此时第一基本形式表示为

$$I = g_{11}(u)du^2 + 2g_{12}(u,v)dudv + g_{22}(v)dv^2.$$

作坐标变换 $u^*=\int\sqrt{g_{11}(u)}du$, $v^*=\int\sqrt{g_{22}(v)}dv$, 则

$$I=(du^*)^2+2\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}du^*dv^*+(dv^*)^2,$$

而 $\cos\theta=\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}$.

对于平移曲线, $g_{11}=|\mathbf{a}'|^2(u)$, $g_{22}=|\mathbf{b}'|^2(v)$.

6. 证明: 单位球面 $\mathbf{x}=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta)$ 的第一基本形式是 $I=\cos^2\theta(d\varphi)^2+(d\theta)^2$. 令 $x^1=\varphi$, $x^2=\ln|\tan(\frac{\theta}{2}+\frac{\pi}{4})|$. 证明: 球面 I 可与平面 $\bar{I}=(dx^1)^2+(dx^2)^2$ 共形对应 (Mercator 地图法).

证明：直接验证即可.

7. 证明: 可展曲面局部地仅是柱面、锥面或某一曲线的切线曲面.

证明：直纹面方程为 $\mathbf{x}(t,v)=\mathbf{a}(t)+v\mathbf{l}(t)$.

当 $\mathbf{l}\times\mathbf{l}'=0$ 时, $\mathbf{l}\parallel\mathbf{l}'$. 取 $\mathbf{l}$ 为单位向量, 则 $\mathbf{l}\cdot\mathbf{l}'=0$. 所以 $\mathbf{l}'=0$, $\mathbf{l}$ 为常向量, 所以这时直纹面为柱面.

当 $\mathbf{l}\times\mathbf{l}'\neq 0$ 时, $\mathbf{l}'\neq 0$. 这时, 能把直纹面的方程改写为 $\mathbf{x}(t,s)=\mathbf{b}(t)+s\mathbf{l}(t)$, 此时 $\mathbf{b}'\times\mathbf{l}'=0$. 事实上, 令 $\mathbf{b}(t)=\mathbf{a}(t)+v(t)\mathbf{l}(t)$, 其中 $v(t)$ 为待定函数. 因为 $0=\mathbf{b}'\times\mathbf{l}'=\mathbf{a}'\times\mathbf{l}'+v\mathbf{l}'\times\mathbf{l}'$, 所以只要让 $v(t)=-\frac{\mathbf{a}'\times\mathbf{l}'}{\mathbf{l}'\times\mathbf{l}'}$ 即可. 再令 $s=v-v(t)$ 即可.

在新参数下, 曲面为可展曲面等价与 $(\mathbf{b}',\mathbf{l},\mathbf{l}')=0$, 即向量 $\mathbf{b}',\mathbf{l},\mathbf{l}'$ 共面.

当 $\mathbf{b}'\neq 0$ 时, 因为 $\mathbf{b}'$ 与 $\mathbf{l}'$ 相互垂直, 所以 $\mathbf{l}\parallel\mathbf{b}'$, 因此直纹面是由 $\mathbf{b}$ 的切线所组成, 即为切线面.

当 $\mathbf{b}'=0$ 时, $\mathbf{b}=$常向量, 这时直纹面是一个锥面.

8. 球面上与子午线交成定角的曲线称为**斜驶线**. 求斜驶线的方程.

解：设单位球面为 $\mathbf{x}(\theta,\varphi)=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta)$, $\theta\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$, $\varphi\in[0,2\pi]$. 子午线为

$$\mathbf{x}_1(\theta)=(\cos\theta\cos\varphi,\cos\theta\sin\varphi,\sin\theta),$$

其单位切向量为

$$\mathbf{T}_1 = (-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta).$$

设斜驶线为

$$\mathbf{x}_2(s) = (\cos\theta(s)\cos\varphi(s), \cos\theta(s)\sin\varphi(s), \sin\theta(s)),$$

则其单位切向量为

$$\mathbf{T}_2 = \frac{1}{\sqrt{\theta'^2 + \cos^2\theta\varphi'^2}}((-\sin\theta\cos\varphi, -\sin\theta\sin\varphi, \cos\theta)\theta' + (-\cos\theta\sin\varphi, \cos\theta\cos\varphi, 0)\varphi').$$

子午线与斜驶线交于定角 α, 也就是说

$$\cos\alpha = \mathbf{T}_1 \cdot \mathbf{T}_2,$$

解得 $\varphi' = \pm\tan\alpha\frac{\theta'}{\cos\theta}$. 所以 $\varphi = \pm\tan\alpha \cdot \int\frac{d\theta}{\cos\theta} + C$, 其中 C 为常数.

3 §0.3 曲面上的曲率

1. 求双曲抛物面 $\mathbf{x} = (a(u^1+u^2), b(u^1-u^2), 2u^1u^2)$ 的主曲率 (a, b 为正常数).

解： 直接计算得

$$g_{11} = a^2 + b^2 + 4(u^2)^2, \quad g_{12} = a^2 - b^2 + 4u^1u^2, \quad g_{22} = a^2 + b^2 + 4(u^1)^2,$$

$$h_{11} = h_{22} = 0, \quad h_{12} = \frac{-2ab}{\sqrt{a^2(u^1-u^2)^2 + b^2(u^1+u^2)^2 + a^2b^2}} \quad (h_{12} < 0).$$

主曲率 λ 是方程

$$\lambda^2 + \frac{2h_{12}g_{12}}{\det(g_{\alpha\beta})}\lambda - \frac{h_{12}^2}{\det(g_{\alpha\beta})} = 0,$$

则

$$\lambda = \frac{h_{12}}{\det(g_{\alpha\beta})}(-g_{12} \mp \sqrt{g_{11}g_{22}}).$$

2. 证明: 正则曲面上曲率线的微分方程可写为

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

由此证明: 在无脐点的曲面上, 参数网为曲率线网的充要条件是 $g_{12} = h_{12} = 0$.

证明：设 C 为曲率线, λ 为它的主曲率, 曲率线的切向 $d\mathbf{x} = du^i\mathbf{x}_i$ 为主方向. 由定义得到

$$\begin{cases} (h_{11} - \lambda g_{11})du^1 + (h_{12} - \lambda g_{12})du^2 = 0 \\ (h_{12} - \lambda g_{12})du^1 + (h_{22} - \lambda g_{22})du^2 = 0 \end{cases}$$

等价与

$$\begin{cases} (h_{11}du^1 + h_{12}du^2) - \lambda(g_{11}du^1 + g_{12}du^2) = 0 \\ (h_{12}du^1 + h_{22}du^2) - \lambda(g_{12}du^1 + g_{22}du^2) = 0 \end{cases}$$

因为 $(1, -\lambda)$ 是上述方程组的非零解, 所以有

$$\begin{vmatrix} h_{11}du^1 + h_{12}du^2 & g_{11}du^1 + g_{12}du^2 \\ h_{12}du^1 + h_{22}du^2 & g_{12}du^1 + g_{22}du^2 \end{vmatrix} = 0.$$

也就是说

$$\begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0.$$

如果参数曲线网为曲率线网, 这时两个主方向 $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ 正交, 即 $g_{12} = 0$. 又因为 $W(\mathbf{x}_i) = k_i\mathbf{x}_i$, 其中 k_i 为对应的主曲率, 于是 $h_{12} = \mathbf{x}_1 \cdot W(\mathbf{x}_2) = 0$.

反之, 如果 $g_{12} = h_{12} = 0$, 由曲率线的微分方程可知

$$(g_{12}h_{22} - h_{11}g_{22})du^1du^2 = 0.$$

如果 $g_{12}h_{22} - h_{11}g_{22} = 0$, 即有 $k_1 = k_2$, 与该曲面不含脐点矛盾. 所以 $g_{12}h_{22} - h_{11}g_{22} \neq 0$. 因此 $du^1du^2 = 0$, 即 $u^1 =$ 常数, 或 $u^2 =$ 常数都是曲率线, 也就是说两族坐标曲线均为曲率线.

3. 计算曲面 $x^3 = f(x^1, x^2)$ 的第一和第二基本形式. 写出使平均曲率恒为零时 f 所满足的微分方程 (**极小微分方程**). 证明: $x^3 = a\arctan\frac{x^2}{x^1}$ (a 为常数) 是极小曲面.

解：记 $f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$, $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}$, $i, j = 1, 2$. 直接计算得

$$g_{11} = 1 + f_1^2, \quad g_{12} = f_1f_2, \quad g_{22} = 1 + f_2^2,$$

$$h_{11} = \frac{f_{11}}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}, \quad h_{12} = \frac{f_{12}}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}, \quad h_{22} = \frac{f_{22}}{\sqrt{1 + f_1^2 + f_2^2}}.$$

则 $H=0$ 时 f 满足微分方程

$$(1+f_2^2)f_{11}-2f_1f_2f_{12}+(1+f_1^2)f_{22}=0.$$

4. 求旋转曲面 $x=(f(t)\cos\theta, f(t)\sin\theta, t)$ 上的渐近线.

解： 直接计算得

$$II=-\frac{f}{\sqrt{f'^2+1}}d\theta^2+\frac{f''}{\sqrt{f'^2+1}}dt^2=0.$$

则该曲线的渐近线所满足的微分方程为

$$d\theta=\pm\sqrt{\frac{f''}{f}}dt.$$

5. 证明: 曲面为极小曲面的充要条件是, 曲面上存在两族正交的渐近线.

证明 1： 设渐近线方程 $h_{11}(du^1)^2+2h_{12}du^1du^2+h_{22}(du^2)=0$ 有两个解 (du^1,du^2) 和 $(d\bar{u}^1,d\bar{u}^2)$. 则

$$\frac{du^1}{du^2}+\frac{d\bar{u}^1}{d\bar{u}^2}=-2\frac{h_{12}}{h_{11}},\quad \frac{du^1}{du^2}\frac{d\bar{u}^1}{d\bar{u}^2}=\frac{h_{22}}{h_{11}}.$$

曲面上存在两族正交的渐近线

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow\quad (\mathbf{x}_1du^1+\mathbf{x}_2du^2)\cdot(\mathbf{x}_1d\bar{u}^1+\mathbf{x}_2d\bar{u}^2)=0\\
&\Leftrightarrow\quad g_{11}\frac{du^1}{du^2}\frac{d\bar{u}^1}{d\bar{u}^2}+g_{12}(\frac{du^1}{du^2}+\frac{d\bar{u}^1}{d\bar{u}^2})+g_{22}=0\\
&\Leftrightarrow\quad g_{22}h_{11}-2g_{12}h_{12}+g_{11}h_{22}=0\\
&\Leftrightarrow\quad H=0.
\end{aligned}$$

证明 2： 曲面为极小曲面 $\Leftrightarrow k_1+k_2=0$, 对应的主方向分别为 $\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2$. 则

$$<W(\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2),\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2>=<W(\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2),\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2>=0,$$

所以 $\mathbf{e}_1+\mathbf{e}_2$ 和$\mathbf{e}_1-\mathbf{e}_2$ 是两族正交的渐进方向.

反之, 如果有两族正交的渐进方向 ξ,η, 主方向为 $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, 记 $\xi=\xi^i\mathbf{e}_i$, $\eta=\eta^i\mathbf{e}_i$. 则

$$\begin{aligned}
0&=<\xi,\eta>=\xi^1\eta^1+\xi^2\eta^2,\\
0&=<W\xi,\xi>=k_1(\xi^1)^2+k_2(\xi^2)^2,\\
0&=<W\eta,\eta>=k_1(\eta^1)^2+k_2(\eta^2)^2.
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{k_1}{k_2} = -(\frac{\xi^2}{\xi^1})^2 = -(\frac{\eta^1}{\eta^2})^2 = \frac{k_2}{k_1}.$$

则 $k_1 + k_2 = 0$, 或 $k_1 = k_2$ (舍去).

6. 证明: 若曲面与其 Gauss 映射的像成共形对应, 则曲面必是球面或极小曲面.

证明：在非脐点处曲取率线网, 则 $f_{\alpha\beta} = \mathbf{n}_\alpha \mathbf{n}_\beta = k_\alpha k_\beta g_{\alpha\beta}$. 曲面与其 Gauss 映射的像成共形对应, $III = \varphi^2 I$, 则 $k_\alpha k_\beta = \varphi^2$. 所以 $k_1 = k_2$ 或 $k_1 + k_2 = 0$.

7. 证明: 上节习题 3 中的三重正交系的曲面交线都是所在曲面的曲率线 (**Dupin 定理**).

证明：设三族曲面分别为

$$S_1 : F_1(x, y, z, u) = 0, \quad S_2 : F_1(x, y, z, v) = 0, \quad S_3 : F_1(x, y, z, w) = 0,$$

法向量分别为 (F_{ix}, F_{iy}, F_{iz}), $i = 1, 2, 3$. 三族曲面正交 $\Leftrightarrow \frac{\partial(F_1,F_2,F_3)}{\partial(x,y,z)} = 1$. 因此可以作坐标变换 $(x, y, z) \mapsto (u, v, w)$, $\mathbf{x} = \mathbf{x}(x, y, z) = \mathbf{x}(u, v, w)$. 固定 u 表示 S_1 曲面, 固定 u, v 表示 S_1 与 S_2 的交线, 即 $w-$曲线. 依此类推.

固定 w, 在 S_3上, $g_{12} = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = 0$. 因为 $\mathbf{x}_w \perp \mathbf{x}_u$, $\mathbf{x}_w \perp \mathbf{x}_v$, 所以 $\mathbf{x}_w \perp (\mathbf{x}_u \times \mathbf{x}_v)$, 即 $\mathbf{n} \parallel \mathbf{x}_w$.

$$\begin{aligned}
& \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_v = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_w = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_w = 0 \\
\Rightarrow\ & \mathbf{x}_{uw} \cdot \mathbf{x}_v + \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vw} = \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{wv} + \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_w = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uw} + \mathbf{x}_{uv} \cdot \mathbf{x}_w = 0 \\
\Rightarrow\ & \mathbf{x}_u \cdot \mathbf{x}_{vw} = \mathbf{x}_v \cdot \mathbf{x}_{uw} = \mathbf{x}_w \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0 \\
\Rightarrow\ & h_{12} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_{uv} = \frac{\mathbf{x}_w}{|\mathbf{x}_w|} \cdot \mathbf{x}_{uv} = 0.
\end{aligned}$$

8. 证明:

(1) 除平面外, 直纹面为极小曲面的充要条件是它为正螺面.

(2) 旋转极小曲面必是悬链面.

证明：(1)正螺面 $\mathbf{x}(u, v) = (u \cos v, u \sin v, bv)$ 的第一、第二基本形式为

$$I = du^2 + (u^2 + b^2)dv^2, \quad II = -\frac{2b}{\sqrt{b^2 + u^2}}dudv.$$

直接计算得 $H = 0$.

反之, 设直纹面方程为 $\mathbf{x}(u,v) = \mathbf{a}(u)+v\mathbf{l}(u)$, 其中 $\mathbf{l}(u) = 1$, $\mathbf{a}'\cdot\mathbf{l} = 0$, u 为 $\mathbf{a}$ 的弧长参数. 由极小性直接计算得

$$\begin{cases} (\mathbf{l}'', \mathbf{l}', \mathbf{l}) = 0 \\ (\mathbf{l}'', \mathbf{a}', \mathbf{l}) + (\mathbf{a}'', \mathbf{l}', \mathbf{l}) = 0 \\ (\mathbf{a}'', \mathbf{a}', \mathbf{l}) = 0 \end{cases} \tag{3.1}$$

由 (3.1) 可知, $\mathbf{l}''$ 可由 $\mathbf{l}$, $\mathbf{l}'$ 线性表示. 则 $(\mathbf{l}''', \mathbf{l}'', \mathbf{l}') = 0$, 即 $\mathbf{l}$ 为平面曲线.

由 (3.1) 可知, $k(\mathbf{N}, \mathbf{T}, \mathbf{l}) = 0$. $k = 0$ 时, $\mathbf{a}$ 为直线. 因为 $\mathbf{l}\perp\mathbf{T}$, 所以取 $\mathbf{l} = \mathbf{N}$, 则该直纹面为正螺面. 如果 $k \neq 0$, 则 $\mathbf{B}\cdot\mathbf{l} = 0$, 则可设 $\mathbf{l} = \mathbf{N}$. 代入 (3.2), 得到 $\tau' = 0$.

如果 $\tau = 0$, 则 $\mathbf{a}$ 为平面曲线, 则它的主法线曲面为平面. 如果 $\tau \neq 0$, 则由 (3.1) 得到 $k'\tau = 0$. 所以 k、τ 为常数. 由第 1 节第 6 题可知 $\mathbf{a}$ 为圆柱螺线, 它的主法线曲面是正螺面.

(2)设旋转曲面方程为 $\mathbf{x}(u,v) = (f(v)\cos u, f(v)\sin u, v)$. 直接计算得到

$$H = 0 \Rightarrow (f')^2 + 1 = ff'',$$

即

$$\frac{f'}{f} = \frac{f'f''}{1+(f')^2},$$

两边积分得 $f = c\sqrt{1+(f')^2}$, 其中 c 为正的积分常数. 于是

$$f' = \pm\sqrt{(\frac{f}{c})^2 - 1},$$

即

$$dv = \pm\frac{df}{\sqrt{(\frac{f}{c})^2 - 1}},$$

两边积分后得到

$$\frac{v}{c} + b = \pm\cosh^{-1}\frac{f}{c},$$

其中 b 是另一积分常数. 于是

$$f = c\cosh(\frac{v}{c} + b),$$

这个旋转面即为悬链面.

9. 设 $x^3 = f(x^1) + g(x^2)$ 为极小曲面. 证明: 除相差一常数外, 它可写成 $ax^3 = \ln\frac{\cos ax^2}{\cos ax^1}$ (a 为常数), 称为 **Scherk 曲面**.

证明：直接计算得

$$g_{11} = 1 + f'^2, \quad g_{12} = f'g', \quad g_{22} = 1 + f'^2,$$

$$h_{11} = \frac{f''}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}}, \quad h_{12} = 0, \quad h_{22} = \frac{g''}{\sqrt{f'^2 + g'^2 + 1}}.$$

则

$$\begin{aligned}
& H = 0 \\
\Rightarrow\ & (1 + g'^2)f'' + (1 + f'^2)g'' = 0 \\
\Rightarrow\ & \frac{f''}{1 + f'^2}(x^1) = -\frac{g''}{1 + g'^2}(x^2) = a = const. \\
\Rightarrow\ & (\arctan f')' = \frac{f''}{1 + f'^2} = a, \quad (\arctan g')' = \frac{g''}{1 + g'^2} = -a \\
\Rightarrow\ & f' = \tan(ax^1 + C_1), \quad g' = \tan(-ax^2 + C_2) \\
\Rightarrow\ & f = -\frac{1}{a}\ln(\cos ax^1 + C_1) + C_3, \quad g = \frac{1}{a}\ln(\cos ax^2 + C_2) + C_4 \\
\Rightarrow\ & f + g = \frac{1}{a}\ln\frac{\cos(ax^2 + C_2)}{\cos(ax^1 + C_1)} + C_3 + C_4.
\end{aligned}$$

10. 证明: 曲面 $\mathbf{x}(u, v) = (3u(1 + v^2) - u^3, 3v(1 + u^2) - v^3, 3(u^2 - v^2))$ 是极小曲面, 称为 **Enneper 曲面**.

证明：直接计算得

$$g_{11} = g_{22} = 9(1 + u^2 + v^2)^2, \quad g_{12} = 0,$$

$$h_{11} = -h_{22} = \frac{(12u^2, 12v^2, 6(1 - u^2 - v^2))}{1 + u^2 + v^2}, \quad h_{12} = 0.$$

代入验证即可.

4 §0.4 曲面的局部理论

1. 设 $C : \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$ 是曲面上以弧长为参数的可微曲线. 从 C 的一点 P 出发, 沿它的单位切向量 $\mathbf{T}$ 存在一条测地线. 该测地线在点 P 的挠率称为 C 在

点 P 的**测地挠率**, 用 τ_g 表示. 利用 (4.6) 式证明:

$$\tau_g = \left(\frac{d\mathbf{n}}{ds}, \mathbf{T}, \mathbf{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{det(g_{\alpha\beta})}} \begin{vmatrix} (\frac{du^2}{ds})^2 & -\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} & (\frac{du^1}{ds})^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix}.$$

与上节的习题 2 相比较, 可得命题: 曲面上一条曲线为曲率线的充要条件是沿该曲线的测地挠率为零.

证明：测地线的主法向量 $\mathbf{N} \parallel \mathbf{n}$. 所以

$$\tau_g = \frac{d\mathbf{N}}{ds} \cdot \mathbf{B} = \left(\frac{d\mathbf{N}}{ds}, \mathbf{T}, \mathbf{N}\right) = \left(\frac{d\mathbf{n}}{ds}, \mathbf{T}, \mathbf{n}\right).$$

又因为

$$(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) = g_{11}g_{22} - g_{12}^2,$$

$$(\mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{x}_\beta) \cdot (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2) = \begin{vmatrix} \mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{x}_1 & \mathbf{n}_\alpha \times \mathbf{x}_2 \\ \mathbf{x}_\beta \times \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_\beta \times \mathbf{x}_2 \end{vmatrix}.$$

代入上式即有

$$\begin{aligned} \tau_g &= \frac{1}{ds^2}\left(\mathbf{n}_\alpha du^\alpha, \mathbf{x}_\beta du^\beta, \frac{\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2}{|\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2|}\right) \\ &= \frac{1}{ds^2}\frac{1}{\sqrt{det(g_{\alpha\beta})}} \begin{vmatrix} -h_{\alpha 1} & -h_{\alpha 2} \\ g_{\beta 1} & g_{\beta 2} \end{vmatrix} du^\alpha du^\beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{det(g_{\alpha\beta})}} \begin{vmatrix} (\frac{du^2}{ds})^2 & -\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds} & (\frac{du^1}{ds})^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

利用第 3 节习题 2 可知, 曲面上一条曲线为曲率线 $\Leftrightarrow \begin{vmatrix} (du^2)^2 & -du^1du^2 & (du^1)^2 \\ g_{11} & g_{12} & g_{22} \\ h_{11} & h_{12} & h_{22} \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \tau_g = 0$.

2. 利用测地极坐标系 (ρ, θ) 证明: K 为常数的曲面的第一基本形式局部地可化为

(1) $K = 0, I = (d\rho)^2 + \rho^2(d\theta)^2$;
(2) $K = a^2 > 0, I = (d\rho)^2 + \frac{1}{a^2}\sin^2(a\rho)(d\theta)^2$;
(3) $K = -a^2 < 0, I = (d\rho)^2 + \frac{1}{a^2}\sinh^2(a\rho)(d\theta)^2$.

证明：运用 §1.4 习题 6 , 正交网下 Gauss 曲率为

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\left(\frac{(\sqrt{g_{11}})_2}{\sqrt{g_{22}}}\right)_2 + \left(\frac{(\sqrt{g_{22}})_1}{\sqrt{g_{11}}}\right)_1\right].$$

则测地极坐标系下

$$K = -\frac{(\sqrt{g_{22}})_{\rho\rho}}{\sqrt{g_{22}}}.$$

$K = 0$ 时, $(\sqrt{g_{22}})_{\rho\rho} = 0$. 对 ρ 积分后得到 $(\sqrt{g_{22}})_\rho = g(\theta)$, 其中 $g(\theta)$ 为 θ 的函数. 因为 $\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{g_{22}})_\rho = 1$, 所以 $(\sqrt{g_{22}})_\rho = 1$. 再积分后得到 $\sqrt{g_{22}} = \rho + f(\theta)$. 运用 $\lim_{\rho\to 0}\sqrt{g_{22}} = 0$ 得到 $f(\theta) = 0$. 所以 $\sqrt{g_{22}} = \rho$, 即 $g_{22} = \rho^2$.

$K = a^2 > 0$ 时,

$$(\sqrt{g_{22}})_{\rho\rho} + a^2(\sqrt{g_{22}}) = 0,$$

所以

$$(\sqrt{g_{22}}) = A(\theta)\cos(a\rho) + B(\theta)\sin(a\rho).$$

运用 $\lim_{\rho\to 0}\sqrt{g_{22}} = 0$ 和 $\lim_{\rho\to 0}(\sqrt{g_{22}})_\rho = 1$ 得到

$$A(\theta) = 0, \quad B(\theta) = \frac{1}{a}.$$

$K = -a^2 < 0$ 时, 证明类似.

3. 在测地极坐标系 (ρ, θ) 中, $\rho =$ 常数的曲线称为**测地圆**. 证明: K 为常数的曲面上测地圆有常测地曲率.

证明：由习题 2 可知, 测地极坐标系 (ρ, θ) 下, K 为常数的曲面的第一基本形式局部地可表示为 $I = (d\rho)^2 + g_{22}(\rho)(d\theta)^2$. 代入 Liouville 公式, 其中 $\theta = \frac{\pi}{2}$, 即有

$$k_g = \frac{\partial \ln\sqrt{g_{22}(\rho)}}{\partial\rho}.$$

因为测地圆上 $\rho = const.$, 所以 $k_g = const.$.

4. 设旋转曲面 $\mathbf{x} = (v\cos u, v\sin u, f(v))$ 具有常 Gauss 曲率 $K = -\frac{1}{a^2}$. 证明: 函数 $f(v) = \pm\int\frac{\sqrt{a^2-v^2}}{v}dv$. 在上式中取负号, 再令 $v = a\cos\varphi$, 则有 $f = +a[\ln(\sec\varphi + \tan\varphi) - \sin\varphi] + c$. 这样的旋转曲面称为**伪球面**, 它是由曳物线生成的旋转曲面.

证明：直接计算得

$$g_{11} = v^2, \quad g_{12} = 0, \quad g_{22} = 1 + f'^2,$$

$$h_{11} = -\frac{vf'}{\sqrt{1+f'^2}}, \quad h_{12} = 0, \quad h_{22} = -\frac{f''}{\sqrt{1+f'^2}}.$$

则

$$K = \frac{f'f''}{v(1+f'^2)^2} = -\frac{1}{a^2}$$
$$\Rightarrow \quad \frac{1}{1+f'^2} = \frac{v^2}{a^2} + C.$$

此时 $g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = \frac{a^2v^2}{v^2+C}$. $C \neq 0$ 时, $\lim_{v\to 0} g_{11}g_{22} - g_{12}^2 = 0$, 矛盾. 所以必有 $C = 0$, 即有 $f(v) = \pm\int \frac{\sqrt{a^2-v^2}}{v}dv$.

5. 设 $C : \mathbf{x}(u^1(s), u^2(s))$ 是曲面上以弧长为参数的可微曲线, $\mathbf{T}$ 为 C 的单位切向量, $\mathbf{n}$ 是曲面的单位法向量, $\mathbf{Q} = \mathbf{n} \times \mathbf{T}$. 试证明:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{T}} = & & k_g\mathbf{Q} & +k_n\mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{Q}} = & -k_g\mathbf{T} & & +\tau_g\mathbf{n}, \\ \dot{\mathbf{n}} = & -k_n\mathbf{T} & -\tau_g\mathbf{Q}. & \end{cases}$$

证明: 由定义即有 $\dot{\mathbf{T}} = k_g\mathbf{Q} + k_n\mathbf{n}$. 因为 $\mathbf{Q} = \mathbf{n} \times \mathbf{T}$, 两边对 s 求导, 得到 $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{T} = -k_g$, $\dot{\mathbf{Q}} \cdot \mathbf{n} = \tau_g$. 所以 $\dot{\mathbf{Q}} = -k_g\mathbf{T} + \tau_g\mathbf{n}$. 对 $\mathbf{n} = \mathbf{T} \times \mathbf{Q}$ 两边求导, 同理可以得到第三式.

6. 证明: 沿曲面上的任一曲线成立以下公式: $k_n^2 + \tau_g^2 - 2Hk_n + K = 0$.

证明: 在曲面上取曲率线网. 由 Euler 公式得到, $k_n = k_1\cos^2\theta + k_2\sin^2\theta$. 由习题 1 可知, $\tau_g = (k_2 - k_1)\sqrt{g_{11}g_{22}}\frac{du^1}{ds}\frac{du^2}{ds}$. 又因为 $\cos\theta = \frac{du^1}{ds}\sqrt{g_{11}}$, $\sin\theta = \frac{du^2}{ds}\sqrt{g_{22}}$, 所以 $\tau_g = (k_2 - k_1)\sin\theta\cos\theta$. 代入验证即得.

5 §1.4 曲线和曲面的基本定理

1. 利用 Liouville 公式证明:
   (1) 平面上的测地线为直线.
   (2) 圆柱面上的测地线为直母线和圆柱螺线.

证明: (1) 已知平面的第一基本形式为 $ds^2 = (du^1)^2 + (du^2)^2$, 则 $k_g = \frac{d\theta}{ds} = 0$, $\theta = const.$. 因此 $\frac{du^1}{du^2} = \tan\theta = C$, $u^2 = Cu^1 + C_1$, 即测地线为直线.

(2) 设圆柱面为 $(a\cos u^1, a\sin u^1, u^2)$, 其第一基本形式为 $ds^2 = a^2(du^1)^2 + (du^2)^2$, 其中 a 为常数, 则 $k_g = \frac{d\theta}{ds} = 0$, $\theta = const.$. 因此 $\frac{du^1}{du^2} = a\tan\theta$.

当 $\theta \neq \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ 时, 测地线为圆柱螺线. 当 $\theta = \frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi$ 时, 测地线为直母线.

2. 求旋转曲面 $\mathbf{x}(u^1, u^2) = (f(u^1)\cos u^2, f(u^1)\sin u^2, u^1)$ 的测地线, 设 θ 为测地线与经线的交角, f 为交点到旋转轴的距离. 证明: (1) $f\sin\theta =$ 常数. (2) 若 θ 为定角, 则该旋转曲面是圆柱面.

证明：(1) 直接计算得 $g_{11} = f'^2 + 1, g_{12} = 0, g_{22} = f^2$. 根据 Liouville 公式可知

$$
\begin{aligned}
k_g &= \frac{d\theta}{ds} + \frac{f'}{f\sqrt{f'^2+1}}\sin\theta = 0, \\
\frac{du^1}{ds} &= \frac{1}{\sqrt{f'^2+1}}\cos\theta.
\end{aligned}
$$

由此得到

$$
\frac{d}{ds}(f\sin\theta) = 0.
$$

(2) 若 $\theta = const.$, 则根据 (1) 可得 $f(u^1) = const.$, 则该旋转曲面为圆柱面.

根据 (1) 可得 测地线的微分方程为 $\frac{du^2}{du^1} = \frac{\sqrt{f'^2+1}}{f}\tan\theta$.

3. 证明: 存在两族交成定角的测地线的曲面必是可展曲面.

证明：将其中一组测地线取为正交参数曲线网中的 u^1 曲线, 定角为 α. 则 $\theta = 0$ 和 $\theta = \alpha$ 分别为两族测地线. 根据 Liouville 公式, $\theta = 0$ 时得到 $g_{11} = g_{11}(u^1)$; $\theta = \alpha$ 时得到 $g_{22} = g_{22}(u^2)$. 则 $K = 0$, 即有该曲面为可展曲面.

4. 证明: 在球面 $\mathbf{x}(u, v) = (r\cos u\cos v, r\cos u\sin v, r\sin u)$ $(-\frac{\pi}{2} \leq u \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq v < 2\pi)$ 上, 任何曲线的测地曲率可写成

$$
k_g = \frac{d\theta}{ds} - \sin u\frac{dv}{ds},
$$

其中 θ 表示曲线与经线的交角. 由此证明: 一切经线和大圆纬线是测地线.

证明：第一基本形式为 $I = r^2du^2 + r^2\cos^2 u dv^2$, 代入 Liouville 公式即得.

对于经线, $\theta = 0$, $v = const.$; 对于大圆纬线, $\theta = \frac{\pi}{2}$, $u = 0$. 代入即得 $k_g = 0$.

5. 用活动幺正标架法计算下列第一基本形式的 Gauss 曲率:

(1) $I = \frac{4((du^1)^2+(du^2)^2)}{[1-(u^1)^2-(u^2)^2]^2}$;

(2) $I = \frac{(du^1)^2+(du^2)^2}{(u^2)^2}$;

(3) $I = \frac{1}{4(u^1-(u^2)^2)}[(du^1)^2 - 4u^2du^1du^2 + 4u^1(du^2)^2]$.

解：(1) $K = -1$.

(2) $K = -1$.

(3) $I = \frac{1}{4(u^1-(u^2)^2)}\left\{(du^1 - 2u^2du^2)^2 + 4(u^1 - (u^2)^2)d(u^2)^2\right\}$. 记 $\omega_1 = \frac{du^1-2u^2du^2}{2\sqrt{u^1-(u^2)^2}}$, $\omega_2 = du^2$. 计算得 $K = 0$.

6. 利用 (4.22) 证明: 正交网下 Gauss 曲率为

$$K = -\frac{1}{\sqrt{g_{11}g_{22}}}\left[\left(\frac{(\sqrt{g_{11}})_2}{\sqrt{g_{22}}}\right)_2 + \left(\frac{(\sqrt{g_{22}})_1}{\sqrt{g_{11}}}\right)_1\right],$$

其中下标 α 表示关于 u^α 的偏导数.

证明：运用 Codazzi 方程可得,

$$Kg_{11} = (\Gamma^2_{11})_2 - (\Gamma^2_{12})_1 + \Gamma^1_{11}\Gamma^2_{12} + \Gamma^2_{11}\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}\Gamma^2_{11} - (\Gamma^2_{12})^2.$$

又有

$$\Gamma^2_{11} = -\frac{1}{2g_{22}}(g_{11})_2, \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}(\sqrt{g_{22}})_1, \quad \Gamma^1_{11} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}(\sqrt{g_{11}})_1,$$
$$\Gamma^2_{22} = \frac{1}{\sqrt{g_{22}}}(\sqrt{g_{22}})_2, \quad \Gamma^1_{12} = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}}(\sqrt{g_{11}})_2,$$

代入上式即得.

7. 证明: 在曲率线网下, Codazzi 方程化为

$$(h_{11})_2 = H(g_{11})_2, \quad (h_{22})_1 = H(g_{22})_1,$$

其中 H 为曲面的平均曲率. 由此证明: 除平面和球面外, 平均曲率为常数的曲面的第一和第二基本形式可化为:

$$I = \rho^2[(du^1)^2 + (du^2)^2], \quad II = (1 + H\rho^2)(du^1)^2 - (1 - H\rho^2)(du^2)^2.$$

证明：曲率线网下, 由 Codazzi 方程可得

$$(h_{11})_2 + \Gamma^2_{11} h_{22} - \Gamma^1_{12} h_{11} = 0, \tag{5.1}$$
$$(h_{22})_1 + \Gamma^1_{22} h_{11} - \Gamma^2_{12} h_{22} = 0. \tag{5.2}$$

而

$$\Gamma^2_{11} h_{22} = -\frac{1}{2} k_2 (g_{11})_2, \quad -\Gamma^1_{12} h_{11} = -\frac{1}{2} k_1 (g_{11})_2,$$

代入 (5.1) 可得

$$(h_{11})_2 = H(g_{11})_2.$$

同理可得

$$(h_{22})_1 = H(g_{22})_1.$$

如果 H 为常数, 则有

$$h_{11} = H g_{11} + \phi(u^1), \quad h_{22} = H g_{22} + \psi(u^2).$$

所以

$$2H = k_1 + k_2 = \frac{h_{11}}{g_{11}} + \frac{h_{22}}{g_{22}} = 2H + \frac{\phi}{g_{11}} + \frac{\psi}{g_{22}},$$

即有

$$\frac{\phi}{g_{11}} = -\frac{\psi}{g_{22}}.$$

如果上式为零, 得到 $k_1 = k_2 = H = const.$, 题给已排除全脐的情况. 所以可设 $\frac{\phi}{g_{11}} = -\frac{\psi}{g_{22}} = \rho^2 > 0$, 从而有

$$h_{11} = (1 + \frac{1}{\rho^2} H)\phi, \quad h_{22} = (1 - \frac{1}{\rho^2} H)\psi.$$

做坐标变换

$$\bar{u}^1 = \int \sqrt{\phi} du^1, \quad \bar{u}^2 = \int \sqrt{-\psi} du^2$$

即可得证.

8. 已给曲面 $M : \mathbf{x} = (au^1, bu^2, \frac{a(u^1)^2 + b(u^2)^2}{2})$ 和曲面 $\bar{M} : \bar{\mathbf{x}} = (\bar{a}\bar{u}^1, \bar{b}\bar{u}^2, \frac{\bar{a}(\bar{u}^1)^2 + \bar{b}(\bar{u}^2)^2}{2})$ ($a, b, \bar{a}, \bar{b}$ 都为常数). 证明: 当 $ab = \bar{a}\bar{b}$ 时, 在点 (u^1, u^2) 与 $(\bar{u}^1, \bar{u}^2)$ 处有相等的 Gauss 曲率, 但它们不能等距对应.

证明：曲面的第一基本形式为 $I = a^2(1 + (u^1)^2)(du^1)^2 + 2abu^1u^2du^1du^2 + b^2(1 + (u^2)^2)(du^2)^2$, Gauss 曲率为 $K = \frac{1}{ab[1+(u^1)^2+(u^2)^2]^2}$. $ab = \bar{a}\bar{b}$ 时, 对应点处

的 Gauss 曲率相同. 若对应点处的第一基本形式相同, 则 $a^2 = \bar{a}^2$, $ab = \bar{a}\bar{b}$, $b^2 = \bar{b}^2$, 此时两曲面相同.

9. 用活动幺正标架法计算下列圆环面 T^2 的平均曲率和 Gauss 曲率:

$$\mathbf{x}(u, v) = ((a + b\cos u)\cos v, (a + b\cos u)\sin v, b\sin u),$$

其中 $b < a$, $0 \le u < 2\pi$, $0 \le v < 2\pi$, a, b 为常数.

解: 直接计算得

$$\begin{aligned}
\mathbf{x}_u &= (-b\sin u\cos v, -b\sin u\sin v, b\cos u), \\
\mathbf{x}_v &= (-(a + b\cos u)\sin v, (a + b\cos u)\cos v, 0), \\
I &= b^2du^2 + (a + b\cos u)^2dv^2.
\end{aligned}$$

所以记

$$\omega^1 = bdu, \quad \omega^2 = (a + b\cos u)dv, \quad \omega^3 = 0,$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_1 &= (-\sin u\cos v, -\sin u\sin v, \cos u), \quad \mathbf{e}_2 = (-\sin v, \cos v, 0), \\
\mathbf{e}_3 &= (-\cos u\cos v, -\cos u\sin v, -\sin u).
\end{aligned}$$

根据 $d\mathbf{e}_i = \omega_i^j\mathbf{e}_j$ 得到

$$\omega_1^3 = -\omega_3^1 = -d\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 = \frac{1}{b}\omega^1, \quad \omega_2^3 = -d\mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 = \frac{\cos u}{a + b\cos u}\omega^2,$$

因此

$$b_{11} = \frac{1}{b}, \quad b_{12} = b_{21} = 0, \quad b_{22} = \frac{\cos u}{a + b\cos u},$$

即得

$$H = \frac{a + 2b\cos u}{2b(a + b\cos u)}, \quad K = \frac{\cos u}{b(a + b\cos u)}.$$

10. 已给两个微分二次型:

$$I = [1 + (u^1)^2](du^1)^2 + (u^1)^2(du^2)^2, \quad II = \frac{(du^1)^2 + (u^1)^2(du^2)^2}{\sqrt{1 + (u^1)^2}},$$

求曲面 M, 使得它的第一和第二基本形式就是上述的 I和 II.

解: $\mathbf{x}(u^1, u^2) = (u^1\cos u^2, u^1\sin u^2, \frac{1}{2}(u^1)^2)$.