序　言

在当代数学教育的宗旨里，除了传统的教学内容与训练方法以外，重要的一个培养侧面是提高人的思维能力。例如要求数学的基础训练能达到如下状态：先把来自实际的具体问题予以提炼，得出正确的数学模型，再将该数学问题给出求解的公式或方法，最后又回到实际予以有效地应用。这就需要有以下两种能力。一、要具有善于把数学问题作形式逻辑程序化的形式化能力；二、要有从具体到抽象且作抽象演算的抽象化能力。形式化的训练需要有正反两方面反复推敲的准确分析，抽象化的训练需要对概念和命题的条件的作用有清晰的了解。

作为高等代数的课程，在高等学校中特别是对于师范院校与教育学院系统来说，对学生的课程教育，一方面是作为基础课并可密切联系中学教学实际，起某些指导作用；另一方面也是训练思维能力的极好教材。其中汇集在基本概念以及推理技巧中的若干反例，将是极其重要的环节。李玉文编著的这本265个反例一书，正是有益于当代数学教育思维能力训练提高目的的读物。是当代大学生代数业务训练的一本很好的补充读本。也是从事于高等代数教学的教师们的一本

参考用书。

反例对巩固和加深概念的理解有着正面例子所无法取代的作用，本书可以看成是在这一方向探索的一个尝试。但是也许在本书中的某些反例，有的可能过于简单，有的疑难问题反而例不得力，尚欠优美。这些都需我们再进一步作修改完善。我们诚希在该书作者与读者共同关注下，不久之后将有一个更好的修订本问世！

邵品琮　李师正

1991年5月23日写于济南

编者的话

数学中的例子有两种类型：说明性的例子和反例，即显示某件事为什么有意义和指出某件事为什么讲不通的例子。本书的主要内容是举出高等代数中的反例，这些反例是作者在长期教学实践中予以搜集和自行构造的。在举反例的过程中，所涉及到的定理、命题的论证，均可在高等代数中找到依据，为了有助于对问题的理解，我们还加入了部分说明性的例题，书中所用的符号，主要采用北京大学编《高等代数》及张禾瑞、郝钢新编《高等代数》中便于书写的符号体系。

在编排上，为了使某类问题相对集中，也与一般教材的顺序有所不同，例如，我们把在线性变换、欧氏空间、二次型中有关矩阵的问题尽量放在矩阵一章。

本书作为学习"高等代数"（或线性代数）的补充读物，可作为教学参考书，也可供广大数学爱好者阅读。

本书初稿于1989年12月完成，并油印成册，征求过同行的意见。其中（以姓氏笔划为序）尹丽君、李桂荣、周立先、孟详玉、季世栋、苑文章、周洪连、罗春彦、赵婷瑛、郑高峰、奚传志、高玉玲、魏立平等诸位老师认真审阅了书

稿，提出了许多宝贵意见，并补充了若干精彩的反例，作者在此深表感谢。

曲阜师大王长钰教授、山东师大李师正教授、曲阜师大王品超副教授和安阳师专杨秋锁副教授作为审校者，付出了辛勤的劳动；李师正教授还在原稿的基础上，独立增加了第七章：λ—矩阵。青岛大学邵品琮教授也审阅了书稿，并与李师正教授一起撰写序言；山东新华印刷厂德州厂厂长、高级经济师王庆华同志亲自作了印刷和出版的安排，作者在此一并致以最诚挚的谢意。

有位数学家曾经指出："一个数学问题用一个反例予以解决，给人的刺激犹如一出好的戏剧，为数学作出的许多最优雅的和艺术性很强的贡献属于这个流派。"最后，期望本书的读者也会和我们曾经经历过的那样，从这一汇集能予以得益。

限于编者的水平和经验，书中可能有不少缺点和错误，诚恳地希望读者批评指正。

李玉文

于德州教育学院数学系

1991年5月

目　录

第一章　基本概念

本章主要围绕集合、映射、数学归纳法、数环和数域等基本概念和基本知识，举出相关的反例。

§1　集合

1　若$B=C$，则$A\cup B=A\cup C$，反之不真。

例　设$A=\{a, b\}$，$B=\{a\}$　$C=\{b\}$则有

$A\cup B=A\cup C=A$，但$B\neq C$。

2　若$B=C$，则$A\cap B=A\cap C$，反之不真。

例　设$A=\{a\}$　$B=\{a, b\}$　$C=\{a, c\}$则有

$A\cap B=A\cap C=A$，但$B\neq C$。

3　若$B=C$，则$A-B=A-C$，反之不真。

例　设$A=\{a\}$　$B=\{b\}$　$C=\{c\}$则有

$A-B=A-C=\{a\}=A$，但$B\neq C$。

4　若对于任意集合M，都有$A\cup M\subset B\cup M$　则$A\subset B$，此命题为真。但若变动条件：对某个M有$A\cup M\subset B\cup M$，是否能推出$A\subset B$？答案是否定的。

例　设$A=\{a\}$　$B=\{b\}$　$M=\{a, b\}$

则有$A\cup M=B\cup M$，当然$A\cup M\subset B\cup M$成立。

但$A\subset B$不成立。

5　若$A-B=M-N$是否必有$A\cup N=B\cup M$，回答是不一定。

例　$A=\{a, b, c\}$，$B=\{b, c, d\}$，$M=\{a,b\}$，$N=\{b\}$　$A-B=\{a\}$　$M-N=\{a\}$。

$A\cup N=\{a, b, c\}$　$B\cup M=\{a, b, c, d\}$

故$A\cup N\neq B\cup M$

6　若$\chi\in A$或$\chi\in B$。则$\chi\in A\cap B$，此结论不真。

例　$A=\{a, b\}$，$B=\{b\}$　$a\in A$　但$a\notin A\cap B$，正确的结论应为$\chi\in A\cup B$。

7　若$X\notin A\cap B$，则$X\notin A$且$X\notin B$，此结论不真。

例　$A=\{a, b\}$，$B=\{b\}$，$a\notin A\cap B$，但$a\in A$。正确结论应为X不同时属于A、B。

8　"在等价关系中，自反律可以不要。"理由是："从$a\sim b$，由对称性得$b\sim a$，再由传递性得$a\sim a$。"此理由不正确。

例　令$M=\{0, 1, 3\}$规定

$a\sim b$当且仅当$ab>a+b$，

这显然不是M的一个等价关系，因为$0\sim 0$，及$1\sim 1$都不成立。但此关系显然满足对称律，也满足传递律。

§2　映射

定义1　设给定两个集合A、B，如果通过一个确定的法则，使得A中的每一个元素X，在B中都有一个唯一确定的

元素Y与它对应。那么这个法则就叫做A到B的一个映射。

如果映射f使元素$b\in B$与元素$a\in A$对应，那么就记为$f(a)=b$，或f：$a\longmapsto b$。

9 若法则f不能使集A中每个元素在集B中有像，则f不是A到B的映射。

例 $A=B=N$，f：$n\longmapsto n-1$

则f不是A到B的映射。因为$f(1)=1-1=0\overline{\in}B$。

10 若法则f是集A到集B的映射，则f必使A中每个元素在B中的像是唯一的，否则f就不是A到B的映射。

例 $A=\{$全体非负实数$\}$，$B=R=\{$全体实数$\}$。令f：$x\longmapsto y$（其中$y^2=x$），则f不是A到B的映射。因为$x>0$时，x的平方根都有两个不同值。

11 若法则f使A中的相同元素对应着B中的不同元素，则f不是A到B的映射。

例 $A=Q$，$B=N$，

$$f\text{：分数 }\frac{b}{a}\longmapsto a+b$$

则f不是A到B的映射，因为相等的有理数$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$却对应着不同的像3和6。

12 非满射、非单射的例。

例 设$A=B=\{1,2,3,4\}$

则 f：$1\longmapsto 1$

$2\longmapsto 1$

$3\longmapsto 2$

$4\longmapsto 2$

f不是满射，因为B中的3、4不是A中任何元素的像。f不是单射，因为$1 \neq 2$，但$f(1)=f(2)=1$。

13 对于有限集A，单射变换与满射变换互相等价。但对于无限集则不然。

例 设$A=Z$

$$f: n \longmapsto 2n$$

f是一个单射变换而不是满射变换。而

$$g: n \longmapsto \frac{n}{2} \quad (\text{当}n\text{是偶数时})$$

$$n \longmapsto \frac{n+1}{2} \quad (\text{当}n\text{是奇数时})$$

g是一个满射而不是单射变换。

14 映射的合成不满足交换律。

（i）当$g \circ f$有意义时，$f \circ g$未必有意义。

例 设$A=\{1, 2, 3\}$、$B=\{a, b\}$、$C=\{1, -1\}$，

$$f: 1 \longmapsto a \qquad g: a \longmapsto 1$$
$$2 \longmapsto a \qquad b \longmapsto -1$$
$$3 \longmapsto a$$

f是A到B的映射，g是B到C的映射。$g \circ f$是A到C的映射，但$f \circ g$没有意义。

（ii）当$f \circ g$、$g \circ f$都有意义时，它们未必相等。

例 设f：$R \to R \quad x \to x+b$

$$g: R \to R \quad x \to x^2+c$$

$$g \circ f: R \to R \quad x \longmapsto x^2+2bx+b^2+c$$

$$f \circ g: R \to R \quad x \longmapsto x^2+c+b$$

所以$g \circ f \neq f \circ g$。

定义2 $A\times A$到A的一个映射叫做集合A的一个代数运算。

15 非代数运算的例

例 $A=\{$全体整数$\}$，则法则$a\cdot b=a^b$不是A的代数运算。因为$0\cdot(-1)=0^{-1}$无意义，又

$2\cdot(-1)=2^{-1}\overline{\in}A$

16 交换律满足，但结合律不满足的例。

例 令$A=\{$全体整数$\}$ 法则$a\circ b=a^2+b^2$

因为$a\circ b=a^2+b^2=b^2+a^2=b\circ a$，故交换律满足。

而$(1\circ 1)\circ 0=(1^2+1^2)\circ 0=2\circ 0=2^2+0^2=4$

$1\circ(1\circ 0)=1\circ(1^2+0^2)=1\circ 1=1^2+1^2=2$

所以结合律不满足。

17 结合律和交换律都不满足的例。

例 令$A=\{$全体非零实数$\}$，法则为

$a\circ b=\dfrac{a}{b}$ 因$1\circ 2=\dfrac{1}{2}$ $2\circ 1=2$ 故$1\circ 2\neq 2\circ 1$，即交换律不满足。又$(1\circ 2)\circ 3=\dfrac{1}{6}\neq\dfrac{3}{2}=1\circ(2\circ 3)$，故结合律也不满足。

§3 数学归纳法

第一数学归纳法

设有一个与自然数n有关的命题$S(n)$，如果

（1）当$n=1$时，命题成立。〔即$S(1)$成立〕；

（2）如果$n=k$时命题成立，则$n=k+1$时，命题也成

立。〔即$S(k)$成立，则就有$S(k+1)$也成立〕；那么这个命题对于一切自然数n都成立〔即$S(n)$成立〕。

第二数学归纳法

设$P(n)$是与自然数n有关的命题，如果

（1）$P(1)$成立。

（2）当$1\leqslant m\leqslant k$时$P(m)$成立，就有$P(k+1)$成立。

那么$P(n)$对于任意自然数都成立。

数学归纳法的步骤是缺一不可的。

18 只有第一步骤而无第二步骤的归纳证明可能导出错误的结论。

例 在函数$f(n)=n^2+n+17$中，由$f(1)=19$，$f(2)=23$，$f(3)=29$，……，$f(15)=257$等都是质数，便说"n为任何自然数时$f(n)=n^2+n+17$的值都是质数"便是错误的，因为$f(16)=16^2+16+17=16(16+1)+17=17(16+1)$

$$=17^2=289$$就不是质数。

19 只有第二步骤而无第一步骤的归纳证明同样可能导致错误结论。

例 假定$n=k$时，等式$2+4+\cdots+2n=n^2+n+1$成立

即：$2+4+\cdots+2k=k^2+k+1$　　　①

两边同时加上$2(k+1)$，则有

$$2+4+\cdots+2(k+1)=(k+1)^2+(k+1)+1$$ 成立

这就是说，如果$n=k$时等式①成立，则$n=k+1$时，等式也成立。

由此得出结论：对于一切自然数n，等式①都成立。这是错误的。因为$n=1$时有$2=3$的谬误。

20 我们知道，第二数学归纳法与第一数学归纳法的主

要区别在于第二数学归纳法较第一数学归纳法的归纳假设要来的强些，它不是只假定命题对某一个自然数成立，而是假定对一串自然数命题都成立。因此又得名串值归纳法。基于这些差别，凡是可用第一归纳法证明的命题，当然可用第二数学归纳法证明，反之却不然。

例　设有数列a_1，a_2，a_3，…，a_n，…

其中$a_1=3$，$a_2=7$，而

$$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}\ (n=3,\ 4,\ \cdots)$$

试证通项公式为

$$a_n=2^{n+1}-1 \qquad ②$$

对于第一归纳法：

1）当$n=1$时，$a_1=2^{1+1}-1=3$，②式成立。

2）假设当$n=k$时，②式成立，即有$a_k=2^{k+1}-1$，再看$n=k+1$时的情形：因为在$a_{k+1}=3a_k-2a_{k-1}$中不知a_{k-1}，故不能推得a_{k+1}对②式的正确性。但是换成第二数学归纳法就迎刃而解了。

§4　数环和数域

定义1　设S是复数域C的一个非空子集，如果对于S中的任意两个数a，b来说，$a+b$、$a-b$、$a\cdot b$都在S内，那么S就称为一个数环。

定义2　设P是一个数环，如果

（1）P中至少有一个不等于零的数。

（2）如果任意a，$b\in P$，且$b\neq0$，有$\frac{a}{b}\in P$，则P称为

一个数域。

21 不作成数环的数集

例 $S=\{a+bi \mid a$为任意有理数，b为任意实数$\}$因为 $0+1\cdot i$，$1+\sqrt{2}i\in S$，但是，由于$\sqrt{2}$是无理数，故 $i(1+\sqrt{2}i)=-\sqrt{2}+i\overline{\in} S$。即$S$对乘法不封闭。

22 不作成数域的数集。

当然凡是作不成数环的数集都不是数域。下面举一个是数环但非数域的例。

例 $S=\{a+b\sqrt{2} \mid a, b$是任意整数$\}$

显然S是一个数环 但因$\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}=1-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$

因为a，b均为整数，所以$1-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}$不能写成$a+b\sqrt{2}$的形式，否则利用$\sqrt{2}$为无理数，有$1-\dfrac{1}{2}\sqrt{2}=a+b\sqrt{2}\Rightarrow$

$(a-1)+(b+\dfrac{1}{2})\sqrt{2}=0\Rightarrow a-1=0 \quad b+\dfrac{1}{2}=0\Rightarrow a=$

1，$b=-\dfrac{1}{2}$矛盾，故$\dfrac{1}{2+\sqrt{2}}\overline{\in} S$，$S$不是数域。

23 两个数环的并不一定是数环。

例 $S_1=\{2n \mid n\in Z\}$ $S_2=\{5n \mid n\in Z\}$

S_1、S_2都是数环，取$2\in S_1$，$5\in S_2$则

$2+5=7\overline{\in} S_1\cup S_2$，$S_1\cup S_2$不作成数环。

24 两个数域的并不一定是数域。

例 $F_1=\{a+b\sqrt{2} \mid a, b\in Q\}$

$F_2=\{a+b\sqrt{3} \mid a, b\in Q\}$

F_1、F_2都是数域，取$\sqrt{2}$，$\sqrt{3} \in F_1 \cup F_2$

$\sqrt{2}+\sqrt{3} \overline{\in} F_1 \cup F_2$，所以$F_1 \cup F_2$不是数域。

25 任何复数都是 1 与i的线性组合，但 1 与i的线性组合的数集不一定就是复数域C。

例 令$A=\{a+bi \mid a, b \in Q\}$，则$A \neq C$，因

$3+\sqrt{2}i \overline{\in} A$，但$3+\sqrt{2}i \in C$。

26 任何数域都包含有理数域Q，但包含有理数域Q的数集不一定是数域。

例 $P=Q \cup \{\sqrt{2}\}$，则$1+\sqrt{2} \overline{\in} P$，即$P$对加法不封闭。因此不构成数域。

第二章　一元多项式

多项式是高等代数的一个基本概念，在数学本身和实际应用中常要遇到它，下面围绕以下四个方面的问题：

（1）一元多项式的基本概念。

（2）一元多项式的整除理论。

（3）多项式的值与多项式函数。

（4）三个常用数域（Q、R、C）上一元多项式的基本性质。

举出一些相关的反例。

1　在$R[x]$中，$f(x)\neq 0$，$g(x)\neq 0$，而$f^2(x)+g^2(x)=0$不成立，但在$c[x]$中，可以找到非零多项式$f(x)$，$g(x)$使$f^2(x)+g^2(x)=0$成立。

例　$f(x)=x$，$g(x)=ix$，有

$$f^2(x)+g^2(x)=x^2-x^2=0\quad 成立。$$

2　若$f(x)$，$g(x)$　$k(x)\in R[x]$，$f^2(x)=xg^2(x)+xk^2(x)$，则必有

$$f(x)=g(x)=k(x)=0$$

但若$f(x)$，$g(x)$，$k(x)\in c[x]$，上述结论不成立。

例　$f(x)=2ix$，$g(x)=ix+i$　$k(x)=x-1$。

则有$f^2(x) = -4x^2$，$g^2(x) = -x^2-2x-1$，$k^2(x) = x^2-2x+1$

故有　$f^2(x) = x\cdot g^2(x) + x\cdot k^2(x)$

3　如果$h(x) \mid f_i(x)$，$i = 1,2,\cdots$，t，那么对$p[x]$中任意$g_i(x)$，$i = 1,2,\cdots$，t。

$$h(x) \mid (f_1(x)\cdot g_1(x) + \cdots\cdots + f_t(x)\cdot g_t(x)) \qquad (1)$$

反之不真，即（1）式成立时，未必$h(x) \mid$每一个$f_i(x)$。

例　$h(x) = 3x-2$

而$f_1(x) = x^2+1$　　　　$f_2(x) = 2x+3$

$g_1(x) = -2$　　　　$g_2(x) = x$

显然，$h(x) \mid (f_1(x)\cdot g_1(x) + f_2(x)\cdot g_2(x))$

但$h(x) \nmid f_i(x)$　$i = 1$，2。

4　如果$h(x) \mid f(x)$，$h(x) \nmid g(x)$，

那么$h(x) \nmid (f(x) + g(x))$

但若$h(x) \nmid f(x)$，$h(x) \nmid g(x)$，那么$h(x)$未必不能整除$f(x) + g(x)$。

例　设$h(x) = x$，$f(x) = x-1$，$g(x) = x+1$时，$h(x) \nmid f(x)$，$h(x) \nmid g(x)$，但$h(x) \mid (f(x) + g(x))$。

5　若$f(x) = g(x)\cdot q(x) + r(x)$，则有

$(f(x), g(x)) = (g(x), r(x))$，但不一定有

$(f(x), g(x)) = (f(x), r(x))$。

例　$f(x) = x^4-1$，$g(x) = x+1$，$r(x) = -x^3+x$，即$x^4-1 = (x+1)(x^3-1) + (-x^3+x)$。此时，$(f(x), g(x)) = x+1$，$(f(x), r(x)) = x^2-1$，显然，$(f(x), g(x)) \neq (f(x), r(x))$

6　$p[x]$中的多项式$f(x)$与$g(x)$的最大公因式是$d(x)$，那么有$p[x]$中多项式$u(x)$，$v(x)$，使

$$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x) \tag{2}$$

但i)　反之不真，即（2）成立．$d(x)$未必是$f(x)$与$g(x)$的最大公因式。

ii)　满足（2）式的$u(x)$与$v(x)$不是唯一的。

例(i)　设$f(x)=x+2$，$g(x)=x+1$，$u(x)=x^2$，$v(x)=-x$，则$f(x)u(x)+g(x)v(x)=(x+2)\cdot x^2+(x+1)(-x)=x^3+x^2-x$

显然x^3+x^2-x不是$f(x)$与$g(x)$的公因式，更不是$f(x)$，$g(x)$的最大公因式。

我们说，当$f(x)u(x)+g(x)v(x)=d(x)$，而$d(x)$是$f(x)$，$g(x)$的一个公因式时，$d(x)$一定是$f(x)$与$g(x)$的一个最大公因式。

例(ii)　设$f(x)=x^2-1$，$g(x)=1$，$d(x)=1$

有

$$\begin{cases} u(x)=-1 \\ v(x)=x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x)=0 \\ v(x)=1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} u(x)=-2 \\ v(x)=2x^2-1 \end{cases}$$

满足（2）式。

事实上，对任意的多项式$h(x)$，都有

$$d(x)=f(x)[u(x)+g(x)\cdot h(x)]+g(x)[v(x)-f(x)\cdot h(x)]$$

而一般来说，$u(x)\neq u(x)+g(x)\cdot h(x)$

$$v(x) \neq v(x) - f(x) \cdot h(x)$$

7　若$\overline{P}$是数域P的扩域，$f(x)$，$g(x)$ 在 $p[x]$ 中与在$\overline{P}[x]$中的最大公因式至多相差一个$\overline{P}$中的非零数。但$f(x)$与$g(x)$在$\overline{P}[x]$中的公因式与它们在$p[x]$中的公因式可能有不仅是零次因式的差别。

例　$f(x) = x^3 + x^2 - 3x - 3$，$g(x) = x^3 + 2x^2 - 3x - 6$。在$Q[x]$中的公因式只有$k$，$k(x^2 - 3)$，$k \neq 0 \in Q$，没有一次公因式。但在$R[x]$中，$f(x)$，$g(x)$的公因式除$l$，$l(x^2 - 3)$外，还有一次因式$l(x + \sqrt{3})$，$l(x - \sqrt{3})$，$l \neq 0 \in R$。

8　当$n > 2$时，$f_1(x)$，$f_2(x)$，…，$f_n(x)$互素（也称作整体互素），不一定是两两互素。

例　取$f_1(x) = x - 1$，$f_2(x) = x + 1$，$f_3(x) = x^2 + 1$，则$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$不仅是整体互素，而且是两两互素。再取$f_4(x) = x^2 - 1$，则$f_1(x)$　$f_2(x)$　$f_4(x)$是互素，而不是两两互素，可见是两两互素的一定互素，反之则不然。

9　若$g_i(x) | f(x)$，$i = 1, 2, 3$，且它们是两两互素，则必有$g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x) | f(x)$

但是若有$g_i(x) | f(x)$，$i = 1, 2, 3$，且

$$(g_1(x), g_2(x), g_3(x)) = 1,$$

则不一定有

$$g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x) | f(x)$$

例　设　$g_1(x) = x - 1$，$g_2(x) = x + 1$

$$g_3(x) = x^2 - 1, \quad f(x) = x^2 - 1$$

则 $(g_1(x), g_2(x), g_3(x)) = 1$，但不是两两互素的。

$g_1(x) | f(x)$，$g_2(x) | f(x)$，$g_3(x) | f(x)$却有

$$g_1(x) \cdot g_2(x) \cdot g_3(x) \nmid f(x).$$

10 如果$h(x)|f(x)\cdot g(x)$，且$(h(x),f(x))=1$，那么 $h(x)|g(x)$

但是，当一个多项式整除两个多项式之积时，如果没有互素的条件，这个多项式一般不能整除积的因式之一。

例 设$h(x)=x^2-1$，$f(x)=(x+1)^2$，$g(x)=(x-1)^2$，显然$h(x)$与$f(x)$或$g(x)$都不互素.$h(x)|g(x)f(x)$，但$h(x)\nmid f(x)$且$h(x)\nmid g(x)$。

11 若$g(x)|f(x)$，$g(x)|h(x)$，则$g(x)|f(x)\cdot h(x)$，反之不一定成立。

例 $x^2-1|(x+1)(x-1)$，但$x^2-1\nmid x-1$，

$$x^2-1\nmid x+1.$$

12 如果$g(x)\nmid f(x)$，$f(x)$与$g(x)$不一定互素。

例 $f(x)=x^4+3x^3-x^2-4x-3$，

$g(x)=3x^3+10x^2+2x-3$

$g(x)\nmid f(x)$，但$(g(x),f(x))=x+3$。

13 若$g(x)|f(x)$，不一定有$f(x)$与$g(x)$不互素。

例 $f(x)=x^2+1$，$g(x)=2$，有$g(x)|f(x)$，但

$$(f(x),g(x))=1$$

14 如果$g(x)|f(x)$，$h(x)|f(x)$，且$(g(x),h(x))=1$，

那么$g(x)\cdot h(x)|f(x)$ (3)

若没有互素的条件，（3）式则不成立。

例 $g(x)=x^2-1$，$h(x)=x+1$，$f(x)=(x+1)(x-1)^2$有$g(x)|f(x)$，$h(x)|f(x)$，但$g(x)\cdot h(x)\nmid f(x)$。

15 设$p(x)$是一个不可约多项式，而$f(x)$是一个任意多项式，那么，或者$(p(x),f(x))=1$，或者$p(x)|f(x)$。

若$p(x)$是可约多项式，则上述性质不成立。

例 设$p(x)=x^2-1$，$f(x)=x+1$，

则 $(p(x), f(x))\neq 1$ 且 $p(x)\nmid f(x)$

16 若$p(x)$是一个不可约多项式，且$p(x)\mid f(x)g(x)$，那么，或者$p(x)\mid f(x)$，或者$p(x)\mid g(x)$。

但是，当$p(x)$是可约多项式时，则上述性质不成立。

例 $p(x)=x^2-1$，$f(x)=x+1$，$g(x)=x-1$

显然 $p(x)\mid f(x)\cdot g(x)$，但$p(x)\nmid f(x)$ 且 $p(x)\nmid g(x)$。

17 设$f(x)\neq 0$，$h(x)$为任意多项式，若$(f(x),g(x))=1$，则$(f(x), g(x)h(x))=(f(x), h(x))$，但反之不真。

例 $f(x)=x^2-1$，$g(x)=x+1$，$h(x)=(x-1)^2(x+1)$，

则有 $(f(x), g(x)\cdot h(x))=(f(x), h(x))=x^2-1$

但是 $(f(x), g(x))=x+1\neq 1$。

18 在带余除法定理中，用$g(x)$除$f(x)$所得的商式为$q(x)$，余式为$r(x)$，即

$$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$$

其中$r(x)=0$，或$r(x)$的次数$<g(x)$的次数，且满足上式的$q(x)$与$r(x)$只有一对。

我们说，定理中的条件$r(x)$的次数$<g(x)$的次数不可少，否则，满足上述等式的商式与余式就不会唯一了。

例 取$f(x)=3x^4+1$ $g(x)=x$，则

$$f(x)=x\cdot 1+(3x^4-x+1)=x\cdot x+3x^4-x^2+1=\cdots.$$

19 设$f(x)$，$g(x)$，$h(x)\in P[x]$，且$(f(x),g(x))=1$，$(g(x), h(x))=1$，则$(f(x), h(x))=1$，此命题不真。

例 令$f(x)=x+1$，$g(x)=x$，$h(x)=(x+1)^2$，显然有

$(f(x), g(x))=1$，$(g(x), h(x))=1$，

但 $(f(x), h(x)) = x+1 \neq 1$。

20 若不可约多项式$p(x)$是多项式$f(x)$的一个$k(k \geq 1)$重因式。那么，$p(x)$是$f(x)$的导数$f'(x)$的一个$k-1$重因式，反之不真。

例 令$f(x)=3x^5+1$，则$f'(x)=15x^4$，显然不可约多项式x是$f'(x)$的四重因式，但不是$f(x)$的因式。

21 若α是$f(x)$的$k(k>1)$重根，则α也是 $g(x)=f(x)+(\alpha-x)f'(x)$的$k$重根，但$k=1$时，此命题不成立。

例 $f(x)=x(x-\alpha)$，则

$g(x)=x(x-\alpha)-(x-\alpha)(2x-\alpha)=-(x-\alpha)^2$，$\alpha$是 $g(x)$的二重根。

22 本原多项式不一定是不可约的。

例 x^2+3x+2是本原多项式，但是

$$x^2+3x+2=(x+1)(x+2)$$

23 设$f(x)$，$g(x)$是整系数多项式，且$g(x)$是本原的，若$f(x)=g(x) \cdot h(x)$，其中$h(x)$是有理系数多项式，则 $h(x)$一定是整系数多项式。

我们说，$g(x)$限制为本原的条件不可缺少，否则，结论不成立。

例 $f(x)=x^2+2x+1$，$g(x)=2x+2$

而$f(x)=g(x) \cdot h(x)$，那么$h(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$，即$h(x)$不是整系数多项式。

24 艾森施坦因（*Eisenstein*）判别法告诉我们：

当$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

是一个整系数多项式，存在一个素数p使得：

(i) $p \nmid a_n$；

(ii) $p \mid a_i \qquad i=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1$；

(iii) $p^2 \nmid a_0$

那么$f(x)$在有理数域上是不可约的。

可是当我们找不到这样的素数p，我们不能判定其是否是可约的。

例 $f(x)=x^2+3x+2$

$g(x)=x^2+1$

对$f(x)$及$g(x)$来说，都找不到满足判定法条件的素数p，但$f(x)$在有理数域上可约，$g(x)$不可约。

25 设$f(x)=a_nx^n+\cdots+a_1x+a_0$，$a_n\neq 0$，若$\frac{r}{s}$是$f(x)$的有理根，（$r$与$s$互质），则$r\mid a_0$，$s\mid a_n$是必要条件，但不充分。

例 $f(x)=2x^2+5x+4$，而既约分数$\frac{1}{2}$满足$1\mid 4$、$2\mid 2$，

但$\frac{1}{2}$不是$f(x)=2x^2+5x+4$的根。

26 如果次数$\geqslant 2$的有理系数多项式有有理根，那么在有理数域上它一定是可约的，反之则不然。

例 $f(x)=x^4-4$

在有理数域上，有$f(x)=(x^2-2)(x^2+2)$，所以是可约的，但它无有理根。

27 两个多项式相等必然导出两个多项式函数相等，反

之，两个多项式函数相等，是否必然导出两个多项式相等呢？

我们说，当p是数域时，回答是肯定的，其原因是数域中有无穷多个数。

当p是有穷多个元素时，这时p不是数域，回答是未必。

例 Z_2是以2为模的剩余类环．考察Z_2上的多项式：

$$f(x)=x+1$$

与

$$g(x)=x^2+1$$

$$f(0)=g(0)=1$$

$$f(1)=g(1)=0$$

这里的两个多项式函数$f(x)$与$g(x)$相等，但是这里的两个多项式$f(x)$与$g(x)$不等。

第三章 矩　　阵

矩阵是高等代数中的一个重要概念，它在其中占有突出的重要的位置，矩阵理论也是高等数学许多分支的不可缺少的工具．矩阵论的方法在处理许多实际问题上也是很有力的．下面举出一些相关的反例．

定义1　设$A=(a_{ij})_{mn}$　　$B=(b_{ij})_{ns}$，

令$C_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{in}b_{nj}=\sum\limits_{K=1}^{n}a_{ik}b_{kj}$

$$(i=1,2,\cdots,m;\quad j=1,2,\cdots,s)$$

则$C=(C_{ij})_{ms}$称为矩阵A与B的积．记作$C=AB$．

注意：两个矩阵只有当第一个矩阵的列数等于第二个矩阵的行数时才能相乘．

1　矩阵的乘法不满足交换律．

(i)　当$m\neq s$时，$A_{mn}B_{ns}$有意义，但$B_{ns}A_{mn}$没有意义．

例　$A_{23}B_{34}$有意义，而$B_{34}A_{23}$无意义．

(ii)　$A_{mn}B_{nm}$和$B_{nm}A_{mn}$都有意义，当$m\neq n$时，第一个乘积是m阶矩阵，而第二乘积是n阶矩阵，它们不相等．

例　$A_{23}B_{32}$是2阶的，$B_{32}A_{23}$是3阶的。

（iii）　$A_{nn}B_{nn}$和$B_{nn}A_{nn}$虽然都是n阶矩阵，但它们也未必相等。

例
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 3 & 1\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}8 & -1\\ 7 & -5\end{pmatrix},\quad BA=\begin{pmatrix}-4 & 1\\ 5 & 7\end{pmatrix}$$

2　存在零因子，即$A\neq 0$，$B\neq 0$，但$AB=0$。

例
$$A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

3　矩阵乘法的消去律不成立，即$A\neq 0$，$AB=AC$，未必有$B=C$。

例
$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix},$$

$$C=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$$

那么　$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$AC=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

于是$AB=AC$，且$A\neq 0$，但$B\neq C$。

4 由于矩阵乘法不满足交换律，所以等式：

$$(AB)^m=A^mB^m$$

一般不成立。

例 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -1\end{pmatrix}\qquad (AB)^2=\begin{pmatrix}4 & -2\\ 10 & -4\end{pmatrix}$$

$$A^2=\begin{pmatrix}7 & 4\\ 12 & 7\end{pmatrix}\qquad B^2=\begin{pmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{pmatrix}$$

$$A^2B^2=\begin{pmatrix}8 & -14\\ 14 & -24\end{pmatrix}$$

所以此时$(AB)^2\neq A^2B^2$。

但是当$AB=BA$时，就有$(AB)^m=A^mB^m$。

5 式子$(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$

$$A^2-B^2=(A+B)(A-B)$$

一般不成立。

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ $\quad B=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

$$(A+B)^2=\begin{pmatrix}11 & 10\\ 5 & 6\end{pmatrix},\quad A^2+2AB+B^2=\begin{pmatrix}12 & 9\\ 5 & 5\end{pmatrix}$$

所以， $(A+B)^2\neq A^2+2AB+B^2$

$$A^2-B^2=\begin{pmatrix}-4 & -1\\ -3 & -1\end{pmatrix},\quad (A+B)(A-B)=\begin{pmatrix}-5 & 0\\ -3 & 0\end{pmatrix}$$

所以$A^2-B^2\neq(A+B)(A-B)$

但当$AB=BA$时，上述等式成立。

6 设A是一个n阶实矩阵，若$A^2=0$，则$A=0$，若A是复矩阵，有$A^2=0$，不一定有$A=0$。

例 $A=\begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}$ 有 $A^2=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ 但 $A\neq 0$

7 我们知道，若A、B、C都是n阶矩阵，且$ABC=E$，则$BCA=E$，$CAB=E$总成立。

但$BAC=E$，$ACB=E$，$CBA=E$却不一定成立。

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

有$ABC=E$，但$BAC=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & -1\end{pmatrix}\neq E$，$ACB=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\neq E$，$CBA=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\neq E$，当$AB=BA$时，上述等式成立。

8　我们知道，单位矩阵E与任意n阶矩阵A，左乘或右乘的乘积仍然是A自身，即

$$EA = AE = A$$

但是，对某个别矩阵左乘或右乘不变的不一定就是单位矩阵

例 $$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

但$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$不是二阶单位矩阵。

9　矩阵乘积的行列式等于矩阵的行列式的乘积，即

$$|AB| = |A| \cdot |B|.$$

但对于矩阵和的行列式一般不等于矩阵的行列式之和；kA的行列式一般也不等于$k\cdot|A|$，即$|A+B| \neq |A| + |B|$ $|kA| \neq k\cdot|A|$。

例（i）　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$，$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，

$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，而　$|A+B| = 1$，

又 $|A| + |B| = 0 + 0 = 0$。

例（ii）　$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$，$K = 2$，

$|KA| = 4$，$K|A| = 2$。

10 我们知道：$(AB)' = B'A'$，可是未必有 $(AB)' = A'B'$。

例 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

则 $A' =\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ $B' =\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -1\end{pmatrix} \quad A'B' =\begin{pmatrix}-1 & 5\\ -1 & 3\end{pmatrix}$$

故有 $(AB)' \neq A'B'$。

11 $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$，但未必有 $(AB)^{-1}=A^{-1}B^{-1}$。

例 $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

则 $A^{-1}=\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3 & 2\end{pmatrix}$ $B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 5 & -1\end{pmatrix} \qquad (AB)^{-1}=\begin{pmatrix}-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}B^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ -\frac{5}{2} & -\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

故有$(AB)^{-1}\neq A^{-1}B^{-1}$。

12 n阶矩阵A、B，且$A^2=E$，$B^2=E$，未必有$(AB)^2=E$。

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$。

有$A^2=E$，$B^2=E$

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\qquad (AB)^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

所以$(AB)^2\neq E$。

13 设A是有理数域Q上的三阶矩阵，且$|A|=0$，则满足$AB=BA=0$的矩阵B不是唯一的。

例 取 $A=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ -3 & 1 & \frac{3}{2}\\ 2 & \frac{2}{3} & 1\end{pmatrix}$，则 $|A|=0$，且

对于任一数$k\neq 0\in Q$，都有

$$B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ -\frac{9}{2}k & -\frac{3}{2}k & \frac{9}{4}k\\ 3k & k & -\frac{3}{2}k\end{pmatrix}\quad (k\neq 0\quad k\in Q)$$

满足$AB=BA=0$。

14 不是每一个方阵都是可逆方阵。

例

$$A=\begin{pmatrix}2&3&1\\2&1&2\\0&0&0\end{pmatrix}\text{或 }B=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$$

15 我们知道，若A，B均为n阶可逆矩阵，则AB仍为可逆的，但$A+B$是否一定可逆，答案是否定的。

例

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}-1&0\\0&-1\end{pmatrix}$$

$A+B=0$，所以$A+B$不可逆。

16 若$A+B$可逆，A、B不一定都可逆。

例

$$A=\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$$

$A+B=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$可逆，但$A$、$B$均不可逆。

17 A为复方阵，$A=C+iE$，其中C和E分别称为A的实部和虚部矩阵，当C、E可逆时，A不一定可逆。

例 取 $C=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ $A=\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}+i\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}i&1\\-1&i\end{pmatrix}$$

可以验证$|A|=i^2+1=0$，所以A是不可逆的。

18 实矩阵C、D均不可逆，但复矩阵

$B=C+iD$却不一定不可逆。

例 取 $C=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 0\end{pmatrix}$ $D=\begin{pmatrix}0 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ 显然，C、D均不可逆，但$B=C+iD=\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & i\end{pmatrix}$可逆。

19 若A、B是同阶的上三角形，则$A+B$仍为上三角形矩阵，反之不一定成立，即若$A+B$是上三角形矩阵，但A与B不一定是上三角形

例 $A=\begin{pmatrix}0 & 2 & 3\\-1 & 2 & 1\\-2 & 0 & 1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\1 & -2 & -2\\2 & 0 & 1\end{pmatrix}$

有$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\0 & 0 & -1\\0 & 0 & 2\end{pmatrix}$是上三角形，但$A$与$B$都不是上三角形。

定义2 由单位矩阵经过一次初等变换得到的矩阵称为初等矩阵。

20 我们知道，初等方阵的逆方阵仍是初等方阵，但初等方阵之积不一定是初等方阵。

例 $D_1(k)=\begin{pmatrix}k & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$ $T_{12}(k)=\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}$

$$D_1(k)\cdot T_{12}(k)=\begin{pmatrix}k & 0\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & k\\0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}k & k^2\\0 & 1\end{pmatrix}$$

当$k\neq 1$时$\begin{pmatrix} k & k^2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$不是初等矩阵。

21 可逆方阵表示成初等矩阵之积的方法不是唯一的。

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

利用初等变换有

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow{T_{21}(1)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{D_2\left(\frac{1}{3}\right)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\xrightarrow[T_{13}(-3)]{T_{23}(-1)}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{T_{12}(-2)}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

因此 $T_{12}(-2)T_{13}(-3)T_{23}(-1)D_2\left(\frac{1}{3}\right)T_{21}(1)A=E$

于是 $A=T_{21}(+1)^{-1}D_2\left(\frac{1}{3}\right)^{-1}T_{23}(-1)^{-1}T_{13}(-3)^{-1}$

$\qquad T_{12}(-2)^{-1}$

即 $A=T_{21}(-1)D_2(3)T_{23}(1)T_{13}(3)T_{12}(2)$

但A也可以进行如下初等变换化为E;

$$A=\begin{pmatrix}1&2&3\\-1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{21}(1)}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&3&3\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{D_2\left(\frac{1}{3}\right)}\begin{pmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{T_{12}(-2)}\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow[T_{23}(-1)]{T_{13}(-1)}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

于是$A=T_{21}(-1)\,D_2(3)\,T_{12}(2)\,T_{13}(1)\,T_{23}(1)$

定义3 一个矩阵A如果满足$A'=A$，则称A是对称矩阵。

22 对称矩阵之和仍为对称阵；但其积未必是对称阵。当然，1阶对称矩阵之积仍为对称阵。

例 $A=\begin{pmatrix}1&3\\3&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$ 是对称矩阵，

而 $AB=\begin{pmatrix}5&4\\7&4\end{pmatrix}$

不是对称矩阵。

23 A对称时，A^*对称；A非奇异时，逆命题成立．A奇异时，逆命题不一定成立。

例 $A=\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$ 此时 $A^*=0$ 当然对称，但是

A却显然不是对称的

24 设A是实对称矩阵，如果$A^2=0$，就有$A=0$，我们说，A是对称阵的条件不容忽视．

例
$$A=\begin{pmatrix} a & a \\ -a & -a \end{pmatrix} \quad a\in R$$

显然 $A^2=0$

当$a\neq0$时$A\neq0$，此时，A不是对称矩阵。

n阶的情况，可令

$$A=\begin{pmatrix} a & a & & & \\ -a & -a & & & \\ & & 0 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

同样有$A^2=0$，而$A\neq0$。

定义4 设A是数域P上的n阶矩阵，如果对于数域P中的一个数λ_0，存在非零列向量α，使得

$$A\alpha=\lambda_0\alpha$$

则λ_0称为A的特征值，α称为A的属于特征值λ_0的特征向量．

25 实对称矩阵的特征值都是实数，但特征值都是实数的实矩阵未必对称．

例
$$A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$$

的特征值为7和-2，但A不对称。

26 n阶实对称矩阵有n个线性无关的特征向量，反之，有n个线性无关的特征向量不一定是实对称矩阵。

例

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

A的特征根为 2，$1+\sqrt{3}$，$1-\sqrt{3}$。

属于 2 的特征向量为 $(-2,1,0)$。

属于 $(1+\sqrt{3})$ 的特征向量为 $(3,-1,2-\sqrt{3})$。

属于 $(1-\sqrt{3})$ 的特征向量为 $(3,-1,2+\sqrt{3})$

这三个特征向量线性无关，但A不是对称阵。

定义5 设A与B都是n阶矩阵，如果存在一个可逆矩阵Q，使得

$$B=Q^{-1}AQ$$

则称A与B是相似的，记作$A\sim B$。

27 实对称阵和对角阵相似，但是和对角阵相似的矩阵未必对称。

例

$$A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & & \\ & 1+\sqrt{3} & \\ & & 1-\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$Q=\begin{pmatrix} -2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2-\sqrt{3} & 2+\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$Q^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & -3 & 0 \\ \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{3} & 1+\frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{6} \\ \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3} & 1-\frac{2\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{6} \end{pmatrix}$$

有$Q^{-1}AQ=B$，即A与B相似，B是对角阵，但 A 不是对称阵。

28 若$A\sim B$，则$|A|=|B|$，反之不一定成立。

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 有 $|A|=|B|$

但A与B不相似。

29 若 $A\sim B$，则 秩$(A)=$秩(B)，反之不一定成立。

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 有秩 $(A)=$秩(B)

但A与B不相似。

定义6 一个矩阵A如果满足

$$A'=-A$$

则称A为反对称矩阵。

30 两个反对称矩阵的积不一定是反对称矩阵。

例 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 4 & 0 & -6 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$

$$AB=\begin{pmatrix}-14 & -12 & 6\\ -15 & -22 & -5\\ 12 & -8 & -28\end{pmatrix}$$

显然A、B是反对称矩阵，而AB即不是反对称矩阵，也不是对称矩阵。

31 奇数阶反对称矩阵的行列式等于0，而偶数阶反对称矩阵的行列式不一定为0。

例

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & -1\\ 0 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

显然 $|A|\neq 0$。

当然偶数阶反对称矩阵行列式亦可为0。

例

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

显然$|A|=0$。

但是也有一个必然结论的情况，那就是二阶非零的反对称矩阵的行列式一定不为0。

例

$$A=\begin{pmatrix}0 & a\\ -a & 0\end{pmatrix}，而a\neq 0$$

$|A|=a^2\neq 0$。

32 若$A^2=E$，则称A为n阶对合矩阵.

当A、B均为n阶对合阵时，$A+B$，AB不一定仍为对合阵.

例 $$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ \frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$

则A、B都是二阶对合矩阵.

但 $$A+B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ \frac{1}{2} & -1\end{pmatrix}\qquad AB=\begin{pmatrix}0 & 2\\ -\frac{1}{2} & 0\end{pmatrix}$$ 都不是对合阵.

可以证明，当A、B都是对合阵时，积AB是对合阵的充分且必要条件为A与B可交换.

33 若$A^2=A$，则称A为n阶幂等矩阵.

当A、B均为幂等矩阵时，$A+B$，AB不一定仍为幂等矩阵.

例 $$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 1\\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

显然A，B均为幂等矩阵，但

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & \frac{3}{2}\\ \frac{3}{4} & 1\end{pmatrix}\qquad (A+B)^2=\begin{pmatrix}\frac{17}{8} & 3\\ \frac{3}{2} & \frac{17}{8}\end{pmatrix}$$

$$AB=\begin{pmatrix}\frac{3}{8} & \frac{3}{4}\\ \frac{3}{8} & \frac{3}{4}\end{pmatrix} \qquad (AB)^2=\begin{pmatrix}\frac{27}{64} & \frac{27}{32}\\ \frac{27}{64} & \frac{27}{32}\end{pmatrix}$$

所以AB，$A+B$都不是幂等矩阵。

可以证明，当A与B都是幂等矩阵时$A+B$为幂等矩阵的充分且必要条件是$AB=BA=0$。

34 若存在正整数m，使$A^m=0$，则称A为n阶幂零矩阵。

当A、B均为幂零阵时，$A+B$，AB不一定为幂零阵。

例 $$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -1\end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix}2 & 4\\ -1 & -2\end{pmatrix}$$

A、B均为二阶幂零阵

$$A+B=\begin{pmatrix}3 & 5\\ -2 & -3\end{pmatrix}$$

因为$|A+B|=1$，所以不存在一个正整数m，使得$(A+B)^m=0$，即$A+B$不是幂零阵。

$$AB=\begin{pmatrix}1 & 2\\ -1 & -2\end{pmatrix} \quad (AB)^2=\begin{pmatrix}-1 & -2\\ 1 & 2\end{pmatrix}\neq 0$$

（注：对于二阶方阵A，若$A^m=0$，$m\geqslant 2$，则$A^2=0$）

所以AB亦不是幂零阵。

可以证明，若A、B均为n阶幂零阵，且$AB=BA$，则AB、$A+B$、BA均为n阶幂零阵。

定义7 复数域上的方阵A如果满足

$$AA'=E$$

则称A是正交矩阵。

35 我们知道，正交矩阵之积仍然为正交矩阵，那么正交矩阵之和是不是正交矩阵呢？

例
$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}0 & -1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

都是正交矩阵，但

$$A+B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & -1\end{pmatrix},\ 而(A+B)(A+B)'=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\neq E$$

所以$A+B$不是正交矩阵。

36 若A是正交矩阵，则$|A|=\pm 1$，但反之不真。

例
$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}\quad |A|=1$$

$$AA'=\begin{pmatrix}5 & 12\\ 12 & 29\end{pmatrix}\neq E$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & -2\end{pmatrix}\quad |B|=-1$$

$$BB'=\begin{pmatrix}2 & -3\\ -3 & 5\end{pmatrix}\neq E$$

即A、B都不是正交矩阵。

37 我们知道，当A、P是正交矩阵时，$P^{-1}AP$也是正交矩阵；当A是正交矩阵时，虽P不是正交矩阵，但$P^{-1}AP$也可能还是正交矩阵。

例 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ A是正交矩阵

$P=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$ P不是正交矩阵

但$P^{-1}AP=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$是正交矩阵

定义8 给定矩阵A、B，若存在m阶可逆矩阵P及n阶可逆矩阵Q，使得

$$B=PAQ$$

则称A与B是等阶的。

38 我们说，两个$m\times n$矩阵A与B等价的充分与必要条件是它们的秩相等。此命题的条件，A与B必须行数相等，其列数也相等。

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

显然A与B的秩相等，但它们不是等价的。

39 两个同型入——矩阵只初等因子相同不一定等价。

例 $\begin{pmatrix} \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \lambda-1 \end{pmatrix}$

的初等因子都是$\lambda-1$，它们显然不等价。

定义9 对于n阶矩阵A、B，若存在n阶可逆矩阵P，使得

$$B=P'AP$$

则称A与B是合同的。

40 合同矩阵一定是等价矩阵，反之不真。

例 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

$$P=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad Q=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

显然有$B=PAQ$，即A与B等价，但A与B不合同，否则

$$B=C'AC=C'C$$

令 $C=\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}\quad C'=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$

$$CC'=\begin{pmatrix}a^2+b^2&ac+bd\\ac+bd&c^2+d^2\end{pmatrix}=B$$

就有 $\begin{cases}ac+bd=1\\ac+bd=0\end{cases}$

矛盾。

41 相似矩阵一定是等价矩阵，反之不真。

例 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$

知A与B等价，但A与B不相似，否则

$$B=T^{-1}AT=T^{-1}T=E$$

矛盾。

42 相似矩阵未必合同。

例 设

$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&-\frac{1}{2}\\0&2\end{pmatrix}$$

则有 $T=\begin{pmatrix}2&1\\0&3\end{pmatrix}$ $T^{-1}=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}&-\frac{1}{6}\\0&\frac{1}{3}\end{pmatrix}$

且$B=T^{-1}AT$，即A与B相似，但A与B不合同，否则

$$B=C'AC=\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&c\\b&d\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a^2+2b^2&ac+2bd\\ac+2bd&c^2+2d^2\end{pmatrix}$$

有 $\begin{cases}ac+2bd=-\frac{1}{2}\\ac+2bd=0\end{cases}$ 矛盾

43 合同矩阵未必相似。

例 设 $A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}1&0\\0&4\end{pmatrix}$

有
$$C=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}\quad C'=\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix}$$

且

$B=C'AC$，即A与B合同，但A与B不相似，否则，存在可逆矩阵T，使得

$$B=T^{-1}AT=T^{-1}T=E$$

矛盾。

44 若A与B合同，则秩(A)=秩(B)，反之不真。

例
$$A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$$

显然秩(A)=秩(B) = 2，但A与B不合同，因A是对称的，B不是对称的，而不对称方阵不能与对称方阵合同。

45 若A与B合同，即存在可逆矩阵C，使得$B=C'AC$，我们说，这样的C不是唯一的。

例
$$B=\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

A与B是合同的，且有

$$\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&i\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}-1&0\\0&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-1&0\\0&i\end{pmatrix}$$

这里$C_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$, $C_2=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$, $C_1\neq C_2$.

46 两对称矩阵在复数域上合同，但在实数域上未必合同.

例 取
$$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\qquad A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

由上题知，A与B在复数域上合同，但在实数域上不合同.因若存在实可逆矩阵R。使

$$B=R'AR=R'R$$

其中 $R=\begin{pmatrix}r_{11} & r_{12}\\ r_{21} & r_{22}\end{pmatrix}$, 由$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$

$$=\begin{pmatrix}r^2{}_{11}+r^2{}_{21} & r_{11}r_{12}+r_{21}r_{22}\\ r_{11}r_{12}+r_{21}r_{22} & r_{12}{}^2+r^2{}_{22}\end{pmatrix}$$

比较第二行第二列元素有

$$-1=r_{12}{}^2+r^2{}_{22}$$

矛盾.

47 实数域上n阶可逆矩阵A如果与$-A$合同，则n必是偶数，反之，当n是偶数时，A与$-A$未必合同.（即使A是对称矩阵也未必）.

例 E与$-E$不合同，这里E是对称矩阵，可见，对称矩阵也未必.

48 若实方阵A与单位方称在实数域上合同,则 $|A|>0$,反之不一定.

例

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

有$|A|>0$，但A与E在实数域上不合同。

49 相似矩阵的特征多项式一定相同，但特征多项式相同的两个矩阵不一定相似。

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

的特征多项式都是$(x-1)^2$，但它们不相似。

50 A可逆，则有AB与BA相似，但反之不真。

例 取

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

则有$AB=BA=B$，显然AB与BA相似，但A的逆不存在

51 $B=T^{-1}AT$，$B=Q^{-1}AQ$，而未必就有$T=Q$

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$T=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\quad Q=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$$

则有$B=T^{-1}AT$，$B=Q^{-1}AQ$，但$T\neq Q$。

52 我们知道，在实数域上的n阶矩阵A，若$T_r(AA')=0$（$T_r(A)$表示A的迹，即A的主对角线上元素之和。）充分必要条件是$A=0$。

但在复数域上，上述事实未必成立。

例 取 $A=\begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}$ $AA'=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

显然$T_r(AA')=0$，但$A\neq 0$

53 若A与B相似，则$T_r(A)=T_r(B)$，反之不一定成立。

例 $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $T_r(A)=T_r(B)$

但A与B不相似。

54 正定矩阵的和还是正定矩阵，但正定矩阵的差未必是正定矩阵（注：有关正定矩阵的定义见第五章§3.）.

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

都是正定矩阵，但

$$A-B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

不是正定矩阵。

55 正定矩阵的积未必正定。

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

都是正定矩阵，而

$$AB=\begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 10 \end{pmatrix}$$

不是正定矩阵。

56 A是正定矩阵，则A的行列式 $|A|>0$，但 $|A|>0$，A未必正定。

例

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 3\\ 3 & -10\end{pmatrix}$$

虽有 $|A|=1>0$，但是A不是正定的。

57 A是正定矩阵，则A的主对角线上的元素都大于零，反之不真。

例

$$A=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 3\end{pmatrix}\quad B=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 4\end{pmatrix}$$

A与B主对角线上的元素都大于零，但都不是正定矩阵。

58 实对称矩阵A，虽然它的顺序主子式均非负，但 A 不是半正定。

例

$$A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

则 $|A_1|=|A_2|=0$（其中$A_1=(0)$，$A_2=A$），显然A 是半负定的。

59 方阵的顺序主子式都是其主子式，但反之不真。

例 在三阶方阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}\text{ 中}$$

顺序主子式有

$$|a_{11}| \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \qquad |A|$$

而主子式有 $|a_{11}|$， $|a_{22}|$， $|a_{33}|$，

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$|A|$ 。

60 若$AB=0$，那么秩（A）+秩（B）$\leqslant n$，反之不成立。

例 取

$$A=B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

则

$$AB=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

秩（A）$=1$，秩（B）$=1$，秩（A）+秩（B）<3，但$AB\neq 0$。

第四章 行列式与线性方程组

1 设排列$x_1x_2\cdots x_n$的反序数为k,则可经过k次对换,把$x_1x_2\cdots x_n$变成$1\ 2\ 3\cdots n$。但这不一定是最少次数的对换。

例 $\tau(4\ 1\ 3\ 2)=4$

但 $4\ 1\ 3\ 2\xrightarrow{(2,4)}2\ 1\ 3\ 4\xrightarrow{(1,2)}1\ 2\ 3\ 4$

即两次对换,就把排列$4\ 1\ 3\ 2$化为排列$1\ 2\ 3\ 4$。

2 设n元排列$\cdots i\cdots j\cdots$的反序数为k,那么,n元排列$\cdots j\cdots i\cdots$的反序数不一定为$k+1$或$k-1$。

例 取排列$1\ 2\ 3$,$\tau(1\ 2\ 3)=0$,对换$(1,\ 3)$得$3\ 2\ 1$,$\tau(3\ 2\ 1)=3$

3 若n阶行列式D不等于0,那么D的$n-1$阶子式不全为0,反之不真.

例 $D=\begin{vmatrix}1&2\\3&6\end{vmatrix}$的一阶子式全不为0,但$D=0$

4 n阶行列式有一行(列)元素均为0,则行列式为0,反之,行列式为0,那么行列式不一定有一行(列)为0.

例 $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 0$

5 设$A=(a_{ij})$是n阶矩阵，令

$$B=\begin{pmatrix} A & \begin{matrix} b_1 \\ \vdots \\ bn \end{matrix} \\ b_1\cdots b_n & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} & b_1 \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} & b_n \\ b_1 \quad \cdots b_n & 0 \end{pmatrix}$$

若秩B=秩A，可以证明方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{1}$$

有解，但反之不真。

例 $\begin{cases} x_1+2x_2=3 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}$

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \overline{A}=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

因为秩$\overline{A}$=秩$A=2$，方程组有解，但是

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0$$

因此

$$B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

的秩是3，所以，

秩$B\neq$秩A。

6　若方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1,n-1}x_{n-1}=a_{1n} \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2,n-1}x_{n-1}=a_{2n} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{n,n-1}x_{n-1}=a_{nn} \end{cases}$$

有解，则

$$D=\begin{vmatrix} a_{11}\cdots a_{1n} \\ \cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}\cdots a_{nn} \end{vmatrix}=0$$

但反之不真。

例

$$\begin{cases} x_1+2x_2=1 \\ 2x_1+4x_2=1 \\ 3x_1+6x_2=2 \end{cases}$$

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \end{vmatrix}=0$$

但方程组无解，因为秩$A=1$，秩$\overline{A}=2$。

7 设D为方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases} \tag{2}$$

的系数行列式，D_j是把D中第j列换成常数项b_1，b_2，…，b_n所得到的行列式。

当$D=D_1=D_2=\cdots=D_n=0$时，（2）不一定有无穷多

解。

例 $\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=1 \\ 3x_1+3x_2+3x_3=0 \end{cases}$，

显然有$D=D_1=D_2=D_3=0$，但无解，因为 秩$A=1$，秩$\overline{A}=2$，秩$A\neq$秩$\overline{A}$。

8 我们知道，当方程个数等于未知量个数且系数行列式不等于0，则由克莱姆法则知线性方程组必有唯一解，但反之不真。

例 线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ 2x_1+3x_2=4 \\ 3x_1+4x_2=5 \end{cases}$$

的方程个数多于未知量个数，但却有唯一解。

9 如果一个方程组方程的个数比未知量的个数多，不一定有解。

例 $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ x_1+x_2=2 \\ x_1+x_2=3 \end{cases}$ 无解

10 当未知量个数多于方程个数时，齐次线性方程组必有无穷多解。但对非齐次线性方程组来说，此结论不成立。

例 线性方程组

$\begin{cases} x_1+x_2+x_3=1 \\ 2x_1+2x_2+2x_3=3 \end{cases}$

的方程个数小于未知量个数，但它却无解。

11 齐次线性方程组方程的个数m小于未知量的个数n，那么有非零解。反之，有非零解，不一定有$m<n$。

例 $\begin{cases} x_1+x_2+3x_3=0 \\ x_1+4x_2+5x_3=0 \\ x_1-2x_2+x_3=0 \\ 2x_1-x_2-4x_3=0 \end{cases}$ 有非零解

12 设非齐次线性方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的导出组分别为（Ⅰ′）与（Ⅱ′），若（Ⅰ）有解，而（Ⅰ）与（Ⅱ）同解，则（Ⅰ′）与（Ⅱ′）同解。

但条件（Ⅰ）有解去掉，（Ⅰ）与（Ⅱ）同解，不一定有（Ⅰ′）与（Ⅱ′）同解。

例 $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ 2x_1+2x_2=3 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} \frac{1}{2}x_1+x_2=1 \\ x_1+2x_2=1 \end{cases}$ 同解。

但导出组不同解。

13 设非齐次线性方程组（Ⅰ）与（Ⅱ）的导出组分别为（Ⅰ′）与（Ⅱ′）；若（Ⅰ′）与（Ⅱ′）同解，（Ⅰ）与（Ⅱ）不一定同解。

例 $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ 2x_1+x_2=1 \end{cases}$ 与 $\begin{cases} x_1+x_2=1 \\ 2x_1+x_2=3 \end{cases}$

的导出组同解，但两个原方程组不同解。

14 空间四个平面

$a_ix+b_iy+c_iz+d_i=0$，（$i=1，2，3，4$）相交于一点时，有

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix} = 0$$

但反之不真。

例 $$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x+2y+2z+2=0 \\ x-y+z+3=0 \\ 2x-2y+2z+6=0 \end{cases}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 2 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

但不相交于一点。

第五章　线性空间、欧氏空间与二次型

线性空间是最基本的数学概念之一，它的理论和方法已经渗透到自然科学、工程技术的各个领域．因而，它是高等代数课程中最重要的组成部分；在实线性空间引入内积以后就成为欧氏空间；二次型也是高等代数的一个重要组成部分．而且有着广泛的应用．我们将围绕以下几个问题举出相关的反例．

§1　线性空间

一　线性空间的定义，子空间

二　线性相关性

三　基底、维数和坐标

四　线性空间的同构

§2　欧氏空间

§3　二次型

§1　线性空间

一　线性空间的定义、子空间．

定义1　设V是一个非空集合，它的元素用α，β，γ，…

表示，P是一个数域，它的元素用k，l，…表示。在V的元素间定义了一种运算，叫做加法，即给定了一个法则，通过它对于V中任意两个元素α、β，在V中有唯一确定的元素γ与它们对应，称γ为α与β的和，记作$\gamma=\alpha+\beta$，而且加法满足规则：

1）$\alpha+\beta=\beta+\alpha$

2）$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma)$

3）在V中存在一个元素0，称为零元素，对于V中每一个元素α都有

$$\alpha+0=\alpha$$

4）对于V中每个元素α，在V中都有一个元素β，使得

$$\alpha+\beta=0$$

β称为α的负元素。

在数域P与集合V的元素间定义了一种运算，叫做数量乘法，即对于P中任一数k和V中任一元素α，在V中都有唯一确定的元素δ与它们对应，称δ为k与α的数量乘积，记作$\delta=k\alpha$，而且数量乘法满足规则：

5）$1\cdot\alpha=\alpha$

6）$k(l\alpha)=(kl)\alpha$

加法与数量乘法满足规则：

7）$k(\alpha+\beta)=k\alpha+k\beta$

8）$(k+l)\alpha=k\alpha+l\alpha$

在以上规则中，α，β，γ是V中的任意元素，k，l是P中的任意数，则称V是数域P上的一个线性空间。

1　在线性空间定义中，加法满足交换律不是独立的，它可由其他7条推出。

例 计算$(1+1)(\alpha+\beta)=(1+1)\alpha+(1+1)\beta$

$$=\alpha+(\alpha+\beta)+\beta$$

以及 $(1+1)(\alpha+\beta)=1\cdot(\alpha+\beta)+1\cdot(\alpha+\beta)$

$$=\alpha+(\beta+\alpha)+\beta$$

从而 $\alpha+(\alpha+\beta)+\beta=\alpha+(\beta+\alpha)+\beta$

上式两边从左边加$-\alpha$，从右边加$-\beta$，即得

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha$$

下面我们举出一些非线性空间的实例（2—8）

2 说明不能取消2）的例子

例 设$V=\{e, a, b, c\}$ $P=R$

定义V中加法如下：

+	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	a	e	a
b	b	e	b	e
c	c	a	e	c

定义数乘为：$k\cdot a=a$ （$\forall k\in P$，$a\in V$） 此时零元为e。

由$(a+b)+c=c\neq a=a+(b+c)$知：2）不在V中成立，但其余7条均在V中成立。

3 说明不能取消3）的例子

例 设$V=\{e, a, b\}$，$P=R$

V中加法定义为：

+	e	a	b
e	e	a	a
a	a	o	a
b	a	a	b

数乘定义为：$k\cdot\alpha=\alpha\quad(\forall k\in P,\ \alpha\in V)$　这时，α作为4）中的固定元0。即$\forall\alpha\in V$，有$\beta\in V$，使$\alpha+\beta=\alpha$。

但符合3）的零元在V中显然是不存在的。

4　说明不能取消4）的例子

例　设$V=\{e,\ a\}$，$P=R$。

V中加法定义为：

+	e	a
e	e	a
a	a	a

数乘定义为：$k\cdot\alpha=\alpha,\quad(\forall k\in P,\ \alpha\in V)$

在上面定义之下，除4）以外的各条均满足，但4）不满足，因a没有负元素。

5　说明不能取消5）的例子

例　取定一个数域P，令$V=\{(a,\ b)|\ a,\ b\in P\}$

定义V中加法为：

$$(a_1,\ b_1)+(a_2,\ b_2)=(a_1+a_2,\ b_1+b_2)$$

数量乘法定义为：

$$k\cdot(a,\ b)=(ka,\ 0)\qquad(\forall k\in P)$$

显然其它7条都满足，但不满足5），即“$\forall\alpha\in V$，$1\cdot\alpha=\alpha$”不成立。

6　说明不能取消6）的例子

例　令$V=R$，$P=\{a+b\sqrt{2}\ |\ a,\ b\in Q\}$　V中加法即通常加法。数乘定义为：

$$\forall a+b\sqrt{2}\in P,\ (a+b\sqrt{2})*\alpha=(a+b)\alpha,\ (\forall\alpha\in V)$$

（右边表示通常的乘法）

由　$(\sqrt{2}\sqrt{2})*1=2*1=2$

而　$\sqrt{2}*(\sqrt{2}*1)=\sqrt{2}*1=1$

知确不满足6），但其余7条均满足。

7 说明不能取消7）的例子。

例 令$V=R^{*}=R-\{0\}$,（即全体非零实数），$P=R$，加法定义为通常意义的乘法。

数量乘法定义为通常意义的乘法。以$\oplus$表V中加法符号，则：

$$2\cdot(1\oplus1)=2\cdot1\cdot1=2\neq4=2\cdot1\oplus2\cdot1$$

即不满足7）。

8 说明不能取消8）的例子。

例 令$V=\{e,\ a\}$，$P=R$，

V的加法定义为：

+	e	a
e	e	a
a	a	e

数量乘法定义为：$k\cdot a=a\quad(\forall k\in P,\ a\in V)$

则 $(1+1)\cdot a=2\cdot a=a\neq e=a+a=1\cdot a+1\cdot a$

即8）不满足，但其余7条均满足。

9 已知数域$P\subseteq$数域$\overline{P}$,按通常数的运算，P不一定作成$\overline{P}$上的线性空间。

例 P为有理数域，$\overline{P}$为实数域。

则$1\in p$，$\sqrt{2}\in\overline{p}$，但$1\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\overline{\in}p$

（一般地，当$P\subset\overline{P}$，即存在数$k\in\overline{P}$，但$k\overline{\in}P$时，$k\cdot1=k\overline{\in}P$）．即有理数域不能作成实数域上的线性空间。

10 令$V=\{(a,\ b)|\ a,\ b\in R\}$，$R$为实数域，定义加法：$(a_1,\ b_1)\oplus(a_2,\ b_2)=(a_1a_2,\ \frac{b_1}{b_2})$

数乘：$k\cdot(a,\ b)=(0,\ 0)$
则V不是R上的线性空间。
因为：$(3,\ 2)$，$(1,\ 0)\in V$，但

$$(3,\ 2)\oplus(1,\ 0)=(3,\ \frac{2}{0})\ \text{无意义.}$$

即加法不是V的加法运算。

11 在任一个线性空间里，$k\alpha=l\alpha$，必有$k=l$。此命题不对。

例 取$\alpha=0$，$1\cdot\alpha=2\cdot\alpha$，但$1\neq2$。

12 在任一个线性空间里，$k\alpha=k\beta$，必有$\alpha=\beta$，此命题不对。

例 在V_2里，取$k=0$，$\alpha=(1,\ 0)$，$\beta=(0,\ 1)$ 虽然有$k\alpha=k\beta$，但$\alpha\neq\beta$。

定义 2 设V是数域P上的线性空间，W是V的一个非空子集，如果W对V的两种运算也构成线性空间，则称W是V的一个线性子空间，简称子空间。

13 令$V=R^n$，W是V的子集。

$$W=\{(a_1,\ \cdots,\ a_n)\mid a_i\geqslant0\}$$

则W不是V的子空间。

例 $(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)\in W$，$-1\in R$，但

$$(-1)(1,\ 1,\ \cdots,\ 1)=(-1,\ -1,\ \cdots,\ -1)\notin W.$$

即W对于R^n的数量乘法不封闭，因而W不是V的子空间。

14 令$V=M_n(P)$，W是V的子集。

$$W=\{A\mid A\in M_n(P),\ |A|=0\}$$

则W不是V的子空间。

例 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \ddots & \\ & & 1 & \\ 0 & & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}0 & & 0\\ & \ddots & \\ & & 0 & \\ 0 & & 1\end{pmatrix}$$

显然，A，$B\in W$，但$A+B=E\neq W$．

即W对$M_n(P)$的加法不封闭，因而W不是V的子空间．

15 一般说来，数域P上线性空间V的子空间W_1与W_2的并，$W_1\cup W_2$不一定是V的子空间．

例 设V是平面上全体向量所构成的线性空间，用l_1，l_2分别表示平面上过原点且互相垂直的直线，W_1，W_2分别是l_1，l_2上从原点引出的一切向量的集合，那么W_1与W_2都是V的子空间，但$W_1\cup W_2$不是V的子空间，因为若$\alpha_1\in W_1$，$\alpha_2\in W_2$，且$\alpha_1\neq 0$，$\alpha_2\neq 0$．显然$\alpha_1+\alpha_2$即不属于W_1，也不属于W_2，即$\alpha_1+\alpha_2\notin W_1\cup W_2$．

16 设V_1是$P^{n\times n}$中由全体上三角矩阵构成的子空间，V_2是$P^{n\times n}$中由全体对称矩阵构成的子空间，则和V_1+V_2不是直和．

例
$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\cdots a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}\cdots a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2}\cdots a_{nn}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}-a_{21} & \cdots & a_{1n}-a_{n1}\\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n}-a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{21} & 0 & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & a_{12}-a_{21} & \cdots & a_{1n}-a_{n1}\\ 0 & 0 & \cdots & a_{2n}-a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{n2}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

即一个n阶矩阵写成一个上三角矩阵与一个对称矩阵之和不是唯一的。

17 若U、V、X、Y是子空间，满足$U\oplus V=X, X\supset Y$，但$Y=Y\cap U\oplus Y\cap V$不成立。

例 在几何空间R^3中，令过原点两条不同的直线l_1，l_2分别构成一维子空间U和V，$X=U\oplus V$是二维子空间，在l_1，l_2决定的平面上，过原点另一条不与l_1，l_2相同的直线l_3构成一维子空间Y。显然，$Y\subset X$，但$Y\cap U=\{0\}$，$Y\cap V=\{0\}$，因此，$Y\cap U\oplus Y\cap V=\{0\}$，所以，$Y=Y\cap U\oplus Y\cap V$不成立。

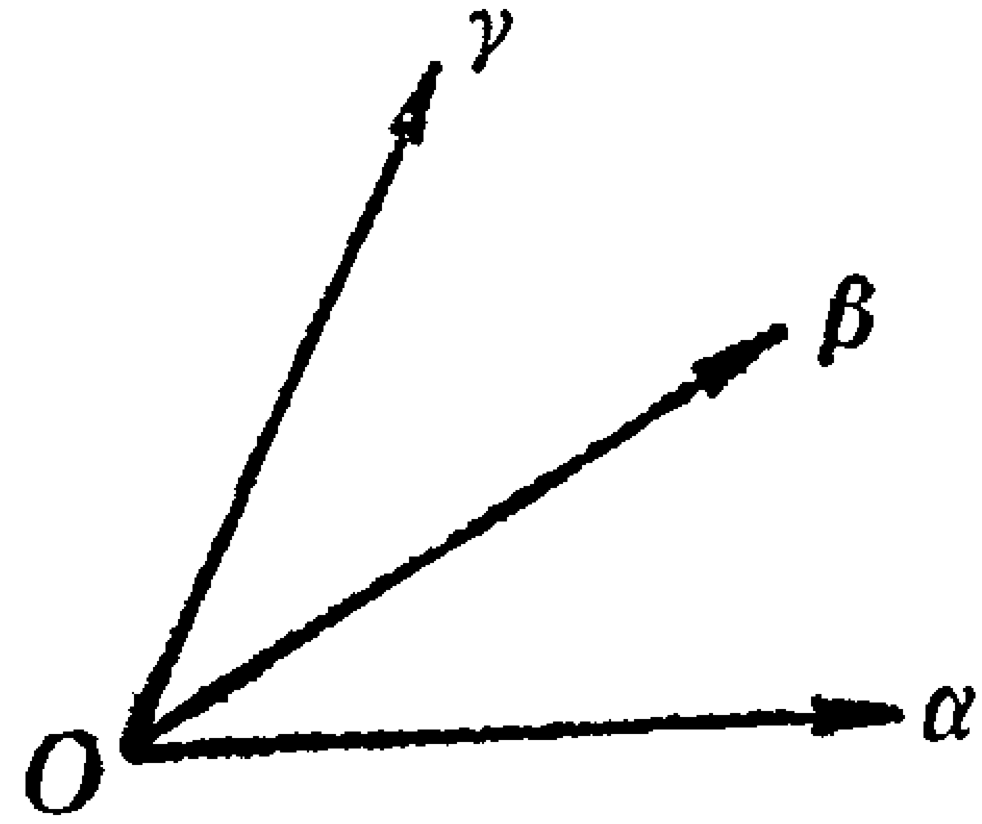
（此例说明，子空间的和与集合的并是不同的。）

18 若V_1，V_2，V_3均为V的子空间，且$V_1\supseteq V_2$，则有

$$V_1\cap(V_2+V_3)=(V_1\cap V_2)+(V_1\cap V_3)$$

这里条件$V_1\supseteq V_2$是必要的，否则结论不成立。

例 任取平面上三个两两不共线的向量α，β，γ。



令$V_1=L(\alpha)$，$V_2=L(\beta)$，$V_3=L(\gamma)$，可见$V_1\supseteq V_2$不成立。

V_2+V_3为β，γ所张的平面，$V_1\cap(V_2+V_3)=V_1$，$V_1\cap V_2=\{0\}$，$V_1\cap V_3=\{0\}$，故

$$V_1\cap(V_2+V_3)\neq(V_1\cap V_2)+(V_1\cap V_3).$$

（此例又一次说明子空间的和与集合的并不同。）

19 设V_1，V_2，V_3都是V的子空间，且$V_1\subset V_2+V_3$，但$V_1=(V_1\cap V_2)+(V_1\cap V_3)$不成立。

例 $V_1=L((1,0,1))$

$V_2=L((1,0,0))$

$V_3=L((0,0,1))$

易知$V_1\subset V_2+V_3$，且$V_1\cap V_2=\{0\}$，$V_1\cap V_3=\{0\}$，但$V_1\neq(V_1\cap V_2)+(V_1\cap V_3)$。

20 子空间的直和都是和，而子空间的和未必都是直和。

例 $V=\{(a_1,a_2,a_3)|a_i\in R\}$

$S_1=\{(a_1,a_2,0)|a_i\in R\}$；

$S_2=\{(0,b_2,b_3)|b_i\in R\}$。

显然，$V=S_1+S_2$。

任意$(x,y,z)\in V$。

$$\begin{aligned}(x,y,z)&=(x,y,0)+(0,0,z)\\&=(x,0,0)+(0,y,z).\end{aligned}$$

只要$y\neq 0$，(x,y,z)就是两种不同的表示法，所以，S_1+S_2不是直和。

21 若$V_i\cap V_k=\{0\}$，$(i\neq k,\ i,\ k=1,2,\cdots,S)$则和$\sum\limits_{i=1}^{5}V_i$ 为直和。此命题不真。

例 任取平面上两两不共线的三个向量α，β，γ。显然$L(\alpha)$，$L(\beta)$，$L(\gamma)$ 两两之交为$\{0\}$，但它们的和不是直和。（否则，和的维数为3。）

22 设V是数域P上的线性空间，S_1，S_2，$\cdots$，$S_n(n\geqslant 4)$是V的子空间，适合

$$S_i\cap(S_j+S_k)=\{0\}.\quad(i\neq j,\ k)$$

那么，S_1，S_2，$\cdots$，S_n的和$S_1+S_2+\cdots+S_n$不一定是直和.

例 令$V=\{(x_1,\ x_2,\ x_3)\,|x_i\in R\}$，$R$为实数域.

$$S_1=L[(1,\ 0,\ 0)]$$

$$S_2=L[(0,\ 1,\ 0)]$$

$$S_3=L[(0,\ 0,\ 1)]$$

$$S_4=L[(-1,\ -1,\ -1)]$$

易知 $S_i\cap(S_j+S_k)=\{0\}.\quad(i\neq j,\ k)$

显然，$S_1+S_2+S_3+S_4$不是直和，因为

$$(1,\ 0,\ 0)+(0,\ 1,0)+(0,0,1)+(\ -,\ -,\ -)$$
$$=(0,\ 0,\ 0)\ .$$

23 设W是V的子空间，$W\neq\{0\}$，$W\neq V$，则W的余子空间不唯一.

例 设$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r\}$为$W$的一个基，可将$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha_r$扩充成$V$的基，设为

$$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_r,\ \alpha_{r+1},\ \cdots,\ \alpha_n\}$$

令 $W_1=L(\alpha_{r+1},\ \cdots,\ \alpha_n)$

则W_1是V的子空间，且$V=W\oplus W_1$，若取

$$W_2=L(\alpha_1+\alpha_{r+1},\ \alpha_{r+2},\ \cdots,\ \alpha_n)$$

$W\oplus W_2=V$，$W_2\neq W_1$：因为$\alpha_1+\alpha_{r+1}\notin W_1$，而$\alpha_1+\alpha_{r+1}\in W_2$.

24 设$f(\xi_1,\ \xi_2,\ \cdots,\ \xi_n)=x'Ax$是一秩为$n$的实二次型.存在$R^n$的一个$\frac{1}{2}(n-|s|)$维子空间$V_1$（$S$为符号差，

$\frac{1}{2}(n-|s|)$ 即为正负惯性指标中较小者）．使对任何 $x=(\xi_1, \cdots, \xi_n)' \in V_1$，均有 $x'Ax=0$，但满足 $x'Ax=0$ 的的全体向量 x 并不构成 R^n 的子空间。

例 设 f 的正负惯性指标为 p，q。

f 经非奇异线性替换 $x=py$ 后，化成标准形：

$$P'AP=B=\begin{pmatrix} E_p & 0 \\ 0 & -E_q \end{pmatrix}$$

取 $y_1=\varepsilon_1+\varepsilon_{p+1}$，$y_2=\varepsilon_p+\varepsilon_{p+1}$，

则 $y_1'By_1=y_2'By_2=0$，但

$$(y_1+y_2)'B(y_1+y_2)=-2\neq 0.$$

二 线性相关性

定义3 设 α_1，α_2，…，α_s 是数域 P 上的 n 维向量组，如果有数域 P 中不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s 使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_s\alpha_s=0 \quad ①$$

就称向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性相关。如果不存在数域 P 中不全为零的数 k_1，k_2，…，k_s 使得等式①成立，换句话说，等式①仅当 $k_1=k_2=\cdots=k_s=0$ 时才成立，那么就称向量组 α_1，α_2，…，α_s 线性无关。

25 如果当 $a_1=a_2=\cdots=a_r=0$ 时，

$a_1\alpha_1+a_2\alpha_2+\cdots+a_r\alpha_r=0$，那么 α_1，α_2…，α_r 线性无关，此结论不真。

例 $\alpha_1=(1, 0)$，$\alpha_2=(2, 0)$。α_1，α_2 线性相关，但 $0\alpha_1+0\alpha_2=0$。

26 β 不能由 α_1，α_2，…，α_s 线性表示，β，α_1，α_2，…，α_s 是否一定线性无关？

例 $\beta=(1, 1, 1)$，$\alpha_1=(1, 0, 0)$，$\alpha_2=(2, 0, 0)$ 显然，β不能由α_1，α_2线性表示，然而β，α_1，α_2线性相关.

此例同时说明，如果α_1，α_2，…，α_r线性相关，未必其中每一个向量都是其余向量的线性组合.

27 若α_1，α_2，…，α_r线性无关，则其中任意两个不同的向量必定线性无关，反之不真. 即两两线性无关的向量组不一定全组线性无关.

例 $\alpha_1=(1, 1, 1)$，$\alpha_2=(0, 1, 0)$，$\alpha_3=(1, 0, 1)$ 这里任意两个向量都线性无关，可是$\alpha_1=\alpha_2+\alpha_3$，即$\alpha_1$，$\alpha_2$ α_3线性相关.

28 如果有一组不全为零的数k_1，k_2，…，k_r，使得

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_r\alpha_r\neq 0.$$

那么α_1，α_2，…，α_r线性无关. 此命题不真

例 $\alpha_1=(1, 0)$，$\alpha_2=(2, 0)$.

令$k_1=1$，$k_2=1$，有

$$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2=(3, 0)\neq 0$$

但α_1，α_2线性相关. 因为$\alpha_2=2\alpha_1$.

29 假定α_1，α_2，…，α_m，β_1，β_2，…，β_m是同维的向量. 如果$k_1\alpha_1+k_2\alpha_2+\cdots+k_m\alpha_m+k_1\beta_1+\cdots+k_m\beta_m=0$成立时只有$k_1=k_2=\cdots=k_m=0$

那么，α_1，α_2，…，α_m，β_1，β_2，…，β_m不一定线性无关.

例 $\alpha_1=(1, 0)$，　$\alpha_2=(0, 1)$

$\beta_1=(0, 0)$，　$\beta_2=(0, 0)$

满足条件，但α_1，α_2，β_1，β_2线性相关.

而 $\alpha_1=(1, 0, 0, 0)$，$\alpha_2=(0, 1, 0, 0)$

$\beta_1=(0,\ 0,\ 1,\ 0)$，$\beta_2=(0,\ 0,\ 0,\ 1)$

也满足题设条件，且α_1，α_2，β_1，β_2线性无关。

30 由α_1，α_2，…，α_r及β_1，β_2，…，β_s均线性无关，得不出α_1，α_2，…，α_r，β_1，β_2，…，β_s一定线性无关。

例 $\alpha_1=(1,\ 1)$，$\alpha_2=(1,\ 2)$，$\beta_1=(2,3)$，$\beta_2=(1,0)$。α_1，α_2及β_1，β_2均线性无关。

易知：$\alpha_1+\alpha_2-\beta_1=0$，

这表示α_1，α_2，β_1线性相关。因而α_1，α_2，β_1，β_2 线性相关。

但也可能线性无关。

例 $\alpha_1=(1,\ 0,\ 0,\ 0)$，$\alpha_2=(0,\ 1,\ 0,\ 0)$；

$\beta_1=(0,\ 0,\ 1,\ 0)$，$\beta_2=(0,\ 0,\ 0,\ 1)$。

显然，α_1，α_2，β_1，β_2线性无关。

31 由α_1，α_2，…，α_m与β_1，β_2，…，β_m均线性相关，得不出$\alpha_1+\beta_1$，$\alpha_2+\beta_2$，…，$\alpha_m+\beta_m$一定线性相关。

例 $\alpha_1=(0,\ 0)$，$\alpha_2=(1,\ 2)$；$\beta_1=(1,\ 3)$，$\beta_2=(2,\ 6)$，显然，α_1，α_2与β_1，β_2均是线性相关的向量组，但

$\alpha_1+\beta_1=(1,\ 3)$，$\alpha_2+\beta_2=(3,\ 8)$。

线性无关。

32 由α_1，α_2，…，α_m与β_1，β_2，…，β_m均线性无关，得不出$\alpha_1+\beta_1$，$\alpha_2+\beta_2$，$\alpha_3+\beta_3$，…，$\alpha_m+\beta_m$，也线性无关。

例 $\alpha_1=(1,\ 0)$，$\alpha_2=(0,\ 1)$，$\beta_1=-\alpha_1=(-1,\ 0)$，$\beta_2=-\alpha_2=(0,\ -1)$。

α_1，α_2与β_1，β_2均线性无关，但$\alpha_1+\beta_1$，$\alpha_2+\beta_2$显然线性相关。

33 设α_1，α_2，α_3线性无关，则$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_1$，也线性无关，但若α_1，α_2，α_3，α_4线性无关，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$是否也线性无关呢？

答案是一定线性相关。即不管α_1，α_2，α_3，α_4是不是线性无关，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\alpha_3+\alpha_4$，$\alpha_4+\alpha_1$必定线性相关。

还可以将这些结论推广到m个的情形。

当α_1，α_2，…，α_m（m是奇数）线性无关时，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，…，$\alpha_{m-1}+\alpha_m$，$\alpha_m+\alpha_1$也线性无关。

事实上，若

$$k_1(\alpha_1+\alpha_2)+k_2(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+k_{m-1}(\alpha_{m-1}+\alpha_m)+k_m(\alpha_m+\alpha_1)=0$$

有 $(k_1+k_m)\alpha_1+(k_2+k_1)\alpha_2+(k_3+k_2)\alpha_3+\cdots+(k_m+k_{m-1})\alpha_m=0$

于是由α_1，α_2，…，α_m线性无关得线性方程组：

$$\begin{cases} k_1 \qquad\qquad\qquad\qquad + k_m = 0 \\ k_1 + k_2 \qquad\qquad\qquad\quad = 0 \\ \qquad k_2 + k_3 \qquad\qquad\quad = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \qquad\qquad\qquad k_{m-1} + k_m = 0 \end{cases}$$

将其系数行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

按第一行展开

$$D=\begin{vmatrix}1&0&0&\cdots&0&0\\1&1&0&\cdots&0&0\\0&1&1&\cdots&0&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1&1\end{vmatrix}+(-1)^{1+m}\begin{vmatrix}1&1&0&0&\cdots&0\\0&1&1&0&\cdots&0\\0&0&1&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&0&\cdots&1\end{vmatrix}$$

$=1+(-1)^{1+m}=2\neq0$（因m为奇数），故此方程组只有零解：$k_i=0$，$i=1, 2, \cdots, m$。从而知$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\cdots$，$\alpha_m+\alpha_1$线性无关。

另一个结论是：α_1，α_2，$\cdots$，α_m是m个向量，当m是偶数时，$\alpha_1+\alpha_2$，$\alpha_2+\alpha_3$，$\cdots$，$\alpha_m+\alpha_1$，线性相关。因为

$$(\alpha_1+\alpha_2)-(\alpha_2+\alpha_3)+\cdots+(-1)^{m+1}(\alpha_m+\alpha_1)=0$$

34 设$r<n$，且$\alpha_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir})$，$i=1, 2, \cdots, k$。而$\beta_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{ir}, a_{i\,r+1}, \cdots, a_{in})$，$i=1, 2, \cdots, k$。若$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha_k$线性无关，则有$\beta_1$，$\beta_2$，$\beta_3$，$\cdots$，$\beta_k$线性无关。但反之不真。

例 令$\beta_1=(0, 0, 0, 1)$，$\beta_2=(0, 0, 1, 0)$

$\alpha_1=(0, 0, 0)$，$\alpha_2=(0, 0, 1)$

显然β_1，β_2线性无关。但α_1，α_2线性相关。

35 线性相关向量组必有真的线性相关的部分组。此命题不真。

例 $\alpha_1=(1, 1)$，$\alpha_2=(1, 0)$，$\alpha_3=(0, 1)$ 线性相关，但任何真部分组线性无关。

36 设P，$\overline{P}$是两个数域，且$P\subseteq\overline{P}$，若$\overline{P}$上的向量α_1，α_2，$\cdots$，α_s在$\overline{P}$上线性相关，则在P上也线性相关。此命题不真。

设 $\alpha_i=(a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})$，$i=1, 2, \cdots, s$，因为

$a_{ij} \in \overline{P}$，但可能不属于P。

例 设P为有理数域，$\overline{P}$为实数域，则向量组

$$\alpha_1 = (1, \sqrt{2}), \quad \alpha_2 = (\sqrt{2}, 2)$$

在$\overline{P}$上线性相关（因为$\sqrt{2}\alpha_1 = \alpha_2$），但由于方程组

$$\begin{cases} k_1 + \sqrt{2}k_2 = 0 \\ \sqrt{2}k_1 + 2k_2 = 0 \end{cases}$$

在有理数域上显然无非零解，故不存在不全为零的有理数k_1，k_2，使

$$k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 = 0$$

亦即α_1，α_2在$\overline{P}$上线性相关，而在P上线性无关。

37 等价的向量组必含相同个数向量，此命题不真。

例 向量组$\alpha_1 = (1, 2, 3)$，$\alpha_2 = (1, 0, 2)$与向量组$\beta_1 = (3, 4, 8)$，$\beta_2 = (2, 2, 5)$，$\beta_3 = (0, 2, 1)$等价，事实上

$$\alpha_1 = \beta_1 - \beta_2, \quad \alpha_2 = 2\beta_2 - \beta_1;$$

$$\beta_1 = 2\alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_2 = \alpha_1 + \alpha_2, \quad \beta_3 = \alpha_1 - \alpha_2.$$

但两向量组的向量个数显然不等。

38 任一向量组必含极大无关组，此命题不真。

例 $\alpha_1 = (0, 0)$，$\alpha_2 = (0, 0)$，则向量组α_1，α_2没有极大无关组，即只含零向量的向量组没有极大无关组。

39 给定向量组的极大无关组必定不唯一，此命题不真。

例 $\alpha_1 = (1, 0)$，$\alpha_2 = (0, 1)$

则向量组α_1，α_2的极大无关组就是它本身，所以是唯一的。即线性无关向量组的极大无关组就是本身。

40 因为任一矩阵的行向量组与列向量组是等秩的，因而是等价的。此命题不真。

例 $$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

A的行向量组$\alpha_1=(1, 2, 3)$，$\alpha_2=(2, 1, 5)$，与列向量组$\beta_1=(1, 2)$，$\beta_2=(2, 1)$，$\beta_3=(3, 5)$是不同线性空间的向量组，不能谈等价。

41 等价的向量组有相同的秩，其逆命题不真。

例 向量组$\alpha_1=(1, 1, 1)$，$\alpha_2=(1, 2, 1)$，与向量组$\beta_1=(1, 0, 1)$，$\beta_2=(0, 1, 1)$的秩都是2，但这两个向量组显然不等价。

注：　若两个向量组有相同的秩，并且其中一个向量组可由另一个向量组线性表出，则两向量组等价。

三　基底、维数和坐标

42 由有限个向量生成的线性空间均有基，此命题不真。

例 由零向量生成的线性空间没有基。

43 一线性空间不可能有多于一个基，此命题不真。

例 设α_1，α_2，…，α_n是V的一个基，则$2\alpha_1$，$2\alpha_2$，…，$2\alpha_n$也是V的一个基。

44 设$\dim V=n$，而α_1，α_2，…，α_m线性无关，β_1，β_2，…，β_l是它的生成元组，则$m<l$，此命题不真。

例 取$V=R^3$，$\alpha_1=(2, 0, 0)$，$\alpha_2=(0, 3, 0)$，$\beta_1=(1, 0, 0)$，$\beta_2=(0, 1, 0)$。显然，α_1，α_2线性无关，β_1，β_2是α_1，α_2的生成元组，但它们的向量个数相等。故正

确的结论应为$m\leqslant l$。

45 若α_1，α_2，…，α_l生成V，则V的每个元素均可由α_1，α_2，…，α_l唯一地线性表示，此命题不真。

例 $\alpha_1=(1,0)$，$\alpha_2=(0,1)$，$\alpha_3=(1,1)$

则 $L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=V_2$，取$\beta=(2,2)$

$$\beta=\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2\alpha_1+2\alpha_2+0\alpha_3$$

注： 若生成元是V的基，则V的每个元素均可由它的生成元唯一的线性表示。

46 在$P[x]_3$中，如果$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$两两线性无关，那么$f_1(x)$，，$f_2(x)$，$f_3(x)$不一定是$P[x]_3$的一组基。

例 取$f_1(x)=x$，$f_2(x)=x^2$，$f_3(x)=x^2+x$，则$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$两两线性无关，但$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$不是$P[x]_3$的基。

四 线性空间的同构

47 线性空间不能与它的一个真子空间同构，此命题对无限维线性空间不成立。

例 令 $P[x^2]=\{a_0(x^2)^n+a_1(x^2)^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x^2+a_n \mid a_i\in P,\ i=0,1,2,\cdots,n.\ n$为非负整数$\}$

显然，$P[x^2]$是$P[x]$的真子空间。

任意$f(x)\in P[x]$，规定

$$\phi:\ f(x)\longrightarrow f(x^2)$$

ϕ是$P[x]$到$P[x^2]$的一个同构映射，所以

$$P[x]\cong P[x^2]$$

§2 欧氏空间

定义4 设V是一个实线性空间，如果对于V中任意一对向量α、β，都有一个确定的记作（α，β）的实数与它们对

应。并且满足

1） $(\alpha, \beta) = (\beta, \alpha)$；

2） $(\alpha+\beta, \gamma)=(\alpha, \gamma)+(\beta, \gamma)$；

3） $(k\alpha, \beta)=k(\alpha, \beta)$；

4） $(\alpha, \alpha)\geqslant 0$，当且仅当 $\alpha=0$ 时，$(\alpha, \alpha)=0$.

这里α，β，γ是V中的任意向量，k是任意实数，那么(α, β)叫做向量α与β的内积．而V叫做对这个内积来说的一个欧几里得空间（简称欧氏空间）。

48 设$\alpha=(a_1, a_2)$，$\beta=(b_1, b_2)$为二维实空间R^2中的任意两个向量．问：R^2对以下所规定的内积是否作成欧氏空间。

（1）$(\alpha, \beta) = a_1b_2+a_2b_1$

（2）$(\alpha, \beta) = a_1b_1+a_2b_2+1$

（3）$(\alpha, \beta) = a_1b_1-a_2b_2$

答：（1）不作成欧氏空间。

例 取$\alpha=(1, -1)$

则 $(\alpha, \alpha) = 1\cdot(-1)+(-1)\cdot 1=-2<0$

（2）不作成欧氏空间．

例 取$\alpha=\beta=0$，$k\neq 1$，

则 $(k\alpha, \beta) = 1$，$k(\alpha, \beta)=k$

即 $(k\alpha, \beta)\neq k(\alpha, \beta)$。

（3）不作成欧氏空间。

例 取$\alpha=(1, 2)$时

$(\alpha, \alpha) = 1-4=-3<0$.

49 下面我们分别给出不满足内积公理第1、4、2条的实例。

（1）满足内积公理2），3），4）但不满足1）的例子。

例 令R^2为由实数域上全体二维向量所成的空间，$\alpha=(a_1, a_2)$，$\beta=(b_1, b_2)$。规定

$$(\alpha, \beta)=(a_1+a_2)b_1+a_2b_2.$$

可以验算，它满足内积公理2），3），4），但不满足1）。例如，取$\alpha=(1, 0)$，$\beta=(1, 1)$，则

$$(\alpha, \beta) = (1+0)\cdot 1+0=1$$

$$(\beta, \alpha) = (1+1)\cdot 1+0=2$$

即 $(\alpha, \beta) \neq (\beta, \alpha)$

（2）满足内积公理1），2），3）但不满足4）的例子。

例 设$\alpha=(a_1, a_2)$，$\beta=(b_1, b_2)\in R^2$，规定

$$(\alpha, \beta) = (a_1+a_2)(b_1+b_2).$$

可以验证，它满足内积公理1），2），3）但不满足4）。例如取$\alpha=(1, -1)$，则$(\alpha, \alpha)=0$。

（3）满足内积公理1），3），4）但不满足2）的例子。

例 设V为普通平面上从原点出发引出的全体向量所构成的二维空间，内积规定为

$$(\alpha,\beta)=\begin{cases}0, & \text{当}\alpha, \beta\text{中有零向量或夹角为}\dfrac{\pi}{2}\text{时}\\ |\alpha|\cdot|\beta|, & \text{当}0\leqslant\langle\alpha, \beta\rangle<\dfrac{\pi}{2}.\\ -|\alpha|\cdot|\beta|, & \text{当}\dfrac{\pi}{2}<\langle\alpha, \beta\rangle\leqslant\pi.\end{cases}$$

可以验算，内积公理1），3），4）都满足，但不满足公理2），即

$$(\alpha+\beta, \gamma)= (\alpha, \gamma)+(\beta, \gamma)$$

不成立。

例如，取α，β，γ都不是零向量，而且$|\alpha|\neq|\beta|$，$\alpha+\beta$与γ的夹角为$\frac{\pi}{2}$，α与γ夹角小于$\frac{\pi}{2}$，则有$(\alpha+\beta,\ \gamma)=0$，

$$(\alpha,\ \gamma)\ =|\alpha|\cdot|\gamma|.$$

β与γ的夹角必大于$\frac{\pi}{2}$，从而

$$(\beta,\ \gamma)\ =-|\beta|\cdot|\gamma|$$

$$(\alpha,\ \gamma)+(\beta,\ \gamma)=(|\alpha|-|\beta|)|\gamma|\neq 0$$

即有 $(\alpha+\beta,\ \gamma)\neq(\alpha,\ \gamma)+(\beta,\ \gamma)$。

50 设$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\}$是欧氏空间$V$的一个正交组，那么$\alpha_1$，$\alpha_2$，$\cdots$，$\alpha_n$线性无关，其逆命题不成立。

例 设$V=R^3$，$\alpha_1=(2,\ 0,\ 1)$，$\alpha_2=(1,\ 1,\ 3)$，$\alpha_3=(0,\ -5,\ 0)$是线性无关的，但是

$$(\alpha_1,\ \alpha_2)\ =5\neq 0.$$

故α_1，α_2，α_3不是正交组。

51 设V为n维欧氏空间，对任意n阶正定矩阵A，我们知道，一定在V中有基α_1，α_2，$\cdots$，α_n存在，使其格拉姆矩阵是A，但这样的基不是唯一的。

例 V的一组标准正交基ε_1，ε_2，$\cdots$，ε_n的选取不同，得到的$(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n)=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \cdots,\ \varepsilon_n)C$不同，而它们的格拉姆矩阵都是$C'C=A$。

52 设M为欧氏空间V的唯一非零子集合，$M^{\perp}$为由V中所有与M正交的向量作成的集合，若$N\subseteq M$，则$M^{\perp}\subseteq N^{\perp}$，但反之不一定成立。

例 对任一非零空间V，令

$$N=\{\theta\},\qquad M=\{\alpha\},\qquad \alpha\neq\theta$$

则 $\qquad N^{\perp}=V$

显然，$M^{\perp}\subseteq V=N^{\perp}$，但$N\nsubseteq M$。

§3 二次型

定义1 一个系数在数域P中的x_1，x_2，…，x_n的二次齐次多项式。

$$\begin{aligned}f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=a_{11}x_1^2+2a_{12}x_1x_2+\cdots+2a_{1n}x_1x_n\\ +a_{22}x_2^2+\cdots+2a_{2n}x_2x_n\\ +\cdots\cdots\cdots\cdots+a_{nn}x_n^2\end{aligned}$$

称为数域P上的一个n元二次型，简称二次型。

53 二次型的标准形中的系数，不是唯一确定的。

例 二次型$f(x_1, x_2, x_3)=2x_1x_2-6x_2x_3+2x_1x_3$，经过线性替换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -\frac{1}{2} & 1\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3}\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix}$$

得到标准形 $\quad 2y_1^2-\frac{1}{2}y_2^2+\frac{2}{3}y_3^2$。

而经过线性替换

$$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 3\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}$$

得到标准形 $2z_1^2-2z_2^2+6z_3^2$。

此例说明，在一般的数域内，二次型的标准形不是唯一的，而与所作的非退化线性替换有关。

54 若数域P上的二次型f与g等价，则f与g等秩，反之则不真。

因为等价二次型的矩阵必合同，而合同的矩阵必等秩，但等秩的矩阵未必合同，因而对应的二次型也不一定等价。

例 设P为有理数域。

$$f(x_1, x_2)=x_1^2+2x_1x_2-2x_2^2$$

$$g(y_1, y_2)=y_1^2+y_2^2$$

f的矩阵为$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

g的矩阵为$B=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

显然，A与B的秩相等，都等于2，但A与B不合同，所以f与g不等价。

55 非对称的双线性函数不能由与它关联的二次函数唯一确定。

例 对于数域P上二元列空间P^2的任意两个向量

$$\xi=\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix} \qquad \eta=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}$$

定义

$$f_1(\xi, \eta)=x_1y_1+2x_1y_2+x_2y_2$$

$$f_2(\xi, \eta)=x_1y_1+x_1y_2+x_2y_1+x_2y_2$$

容易验证，f_1，f_2都是P^2上双线性函数，我们有

$$f_1(\xi, \xi)=f_2(\xi, \xi)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

所以与它们关联的二次函数都是

$$q(\xi)=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2$$

然而$f_1 \neq f_2$，事实上，只要取

$$\xi=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \qquad \eta=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$$

那么$f_1(\xi, \eta)=3$，$f_2(\xi, \eta)=2$.

定义 2 实二次型$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x'Ax$。如果对于任意一组不全为零的实数$C_1, C_2, \cdots, C_n$，都有

$f(C_1, C_2, \cdots, C_n)>0$.

则称$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=x'Ax$为正定二次型。实对称矩阵$A$称为正定矩阵。

56 若$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\sum\limits_{i,j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j$是正定的

则$a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$全是正数，但此条件不充分。

例 $f(x, y)=x^2-3xy+y^2$不是正定的。

因为$f(1, 1)=-1<0$。但是它的x^2与y^2的系数却都是正数。

57 主对角线上全是正数的实n级对称矩阵也未必是正定矩阵。

例 $$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\2 & 1\end{pmatrix}$$

因为$|A|=-3<0$，所以A不是正定矩阵。

58 实对称方阵A正定，则$|A|>0$，反之不真。

例

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

则$|A|=1>0$，显然A不是正定矩阵

第六章　线性变换

线性变换是高等代数中的一个重要研究对象、线性变换的理论，在代数学自身，数学的其它分支以及其它科学技术领域均有重要广泛的应用，本章将围绕以下几个方面举出有关的反例.

（1）线性变换及其运算；

（2）特征根与特征向量；

（3）线性变换的化简；

（4）正交变换与对称变换.

一　线性变换及其运算

定义 1　设V是数域P上的线性空间，σ是V的变换，如果对于任意α，$\beta\in V$，$K\in P$，都有

1）　$\sigma(\alpha+\beta)=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta)$

2）　$\sigma(K\alpha)=K\sigma(\alpha)$

那么，σ叫做V的一个线性变换.

1　线性变换定义中的两个条件是互相独立的，下面分别给出不满足其中一条的非线性变换的例.

例 1　P为实数域.

$V=\{(a,b)\,|a,b\in P\}$

令　$\sigma(a、b)=(a、b)$，当a,b同号或至少有一个为零。

$\sigma(a,b)=(-a,\ -b)$，当a,b异号。显然，σ是V的一个变换。

σ不适合1）。

$$\sigma(-2,\ -3)=(-2,\ -3).$$

$$\sigma(-1,\ 4)=(1,\ -4).$$

$$\sigma[(-2,\ -3)+(-1,\ 4)]=\sigma(-3,\ 1)=(3,\ -1).$$

$$\sigma(-2,\ -3)+\sigma(-1,\ 4)=(-1,\ -7)$$

所以，$\sigma[(-2,\ -3)+(-1,\ 4)]\neq\sigma(-2,\ -3)+\sigma(-1,\ 4)$，但$\sigma$适合2）

当a,b同号，$\sigma[K(a,b)]=\sigma(Ka.Kb)$.

$=(Ka,\ Kb)=K(a,b)=K\sigma(a,b)$

当a,b异号，而$K\neq 0$.

$$\sigma[K(a,b)]=\sigma(Ka.,\ Kb)=(-Ka,\ -Kb).$$

$$=K(-a,\ -b)=K\sigma(a,b)$$

而$K=0$时，

$$\sigma[K(a,b)=(0,\ 0)=K\sigma(a,b)$$

当a,b至少有一个为零。

$$\sigma[K(a,b)]=\sigma(Ka,\ Kb)=(Ka,\ Kb)$$

$$=K(a,b)=K\sigma(a,b)$$

这样的σ不是线性变换，此例说明1）是独立的。

例2　把复数域C看作C上的线性空间，

令　$\sigma(\alpha)=\overline{\alpha}$

σ适合1）：因为$\sigma(\alpha+\beta)=\overline{\alpha+\beta}=\overline{\alpha}+\overline{\beta}$.

$$=\sigma(\alpha)+\sigma(\beta).$$

但σ不适合 2）：取$\alpha=1$，$K=i$，$\sigma(K\alpha)=-i$，
$K\sigma(\alpha)=i$，所以$\sigma(K\alpha)\neq K\sigma(\alpha)$。

这就是说，σ不是线性变换，由于适合1）而不适合2)，说明 2）是独立的。

2　令$V=R^2$，规定

$$\sigma(x,y)=(x,y)+(1,2)$$

显然，σ是R^2的一个变换。

取$\alpha_1=(0,0)$，$\alpha_2=(0,0)$

$$\sigma[(0,0)+(0,0)]=\sigma(0,0)=(0,0)+(1,2)=(1,2)$$

$$\sigma[(0,0)]+\sigma[(0,0)]=(1,2)+(1,2)=(2,4)$$

所以定义中的 1）不满足。

取$K=2$，$\alpha=(0,0)$

$$\sigma[2(0,0)]=\sigma(0,0)=(1,2)$$

$$2\sigma[(0,0)]=2(1,2)=(2,4)$$

定义中 2）不满足。

因此，σ不是R^2的线性变换.

注：确定一个变换不是线性变换，只须举出反例说明不适合定义中的哪一条即可，而不必再验证另一条适合与否。

3　线性变换把线性相关的向量组变为线性相关的向量组。但反之不真。

例　零变换将一切线性无关的向量组变为线性相关的向量组。

4　线性变换都是1—1变换，此命题不真.

例 1　零变换是线性变换，在非零线性空间里它不是一一变换.

例 2 把复数域C看作C上的线性空间．

$$\sigma(\alpha)=\overline{\alpha}$$

σ是一一变换，但不是线性变换。

例 3 恒等变换ε

$$\varepsilon(\alpha)=\alpha$$

ε既是线性变换，又是一一变换．

5 在矩阵中，不存在n阶矩阵A，B适合关系

$$AB-BA=E$$

而在无限维线性空间中 可存在线性变换σ，τ适合关系

$$\sigma\tau-\tau\sigma=\varepsilon$$

其中ε是恒等变换

例 在$P[x]$中，$\sigma(f(x))=f'(x)$，$\tau(f(x))=xf(x)$

$$(\sigma\tau-\tau\sigma)(f(x))=\sigma\tau(f(x))-\tau\sigma(f(x))$$

$$=\sigma(xf(x))-\tau(f'(x))$$

$$=f(x)+xf'(x)-xf'(x)=f(x)$$

所以，$\sigma\tau-\tau\sigma=\varepsilon$。

6 线性变换的乘法不满足交换律，即一般地有$\sigma\tau\neq\tau\sigma$。

例 在$P[x]$中

$$\sigma f(x)=xf(x),\quad \tau f(x)=f(x)+f'(x)$$

容易验证，σ、τ是线性变换，而且

$$\sigma\tau(f(x))=\sigma(f(x)+f'(x))=xf(x)+xf'(x)$$

$$\tau\sigma(f(x))=\tau(xf(x))=xf(x)+f(x)+xf'(x)$$

$$(x+1)f(x)+xf'(x).$$

所以 $\sigma\tau\neq\tau\sigma$

7 在$L(V)$内，由$\sigma\tau=0$不能得出$\sigma=0$，或$\tau=0$．

例 令$V=P^2$ $\forall\xi=(a,b)\in V$,

$\sigma(\xi)=(a,0)$ $\tau(\xi)=(0,b)$

$\sigma\tau(\xi)=\sigma(0,b)=(0,0)$

但$\sigma\neq 0$，$\tau\neq 0$。

8 线性变换的乘法不满足消去律，即由$\sigma\tau=\sigma\rho$，($\sigma\neq 0$)得不出$\tau=\rho$。

例 仍取$V=P^2$

$\xi=(a,b)\in V$，$\sigma(\xi)=(a,0)$，$\tau(\xi)=(0,b)$。

$\rho(\xi)=(0,0)$。

显然，$\sigma\tau=\sigma\rho$。但$\tau\neq\rho$。

9 我们说可以用线性变换σ关于基$\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_n\}$的矩阵$A$来代替这个线性变换，但并不能说$\sigma=A$。

例 在$P[x]_4$中，$\{x^3,x^2,x,1\}$是一个基。如果

$$\sigma(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)$$
$$=3a_0x^2+2a_1x+a_2$$

那么σ关于基$\{x^3,x^2,x,1\}$的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\3&0&0&0\\0&2&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

显然在此例中，将σ写成A，即

$$A(a_0x^3+a_1x^2+a_2x+a_3)=3a_0x^2+2a_1x+a_2$$

这是无意义的。

10 在有限维线性空间中，我们知道，如果线性变换σ，τ满足$\sigma\tau=\varepsilon$，则$\tau\sigma=\varepsilon$必成立。但在无限维线性空间中，上

述结论不成立。

例 在$P[x]$中，$\sigma f(x)=xf(x)$

$\tau f(x)=\frac{1}{x}[f(x)-a_0]$其中$a_0$是$f(x)$的零次项。则$\tau\sigma=\varepsilon$。 而$\sigma\tau\neq\varepsilon$。

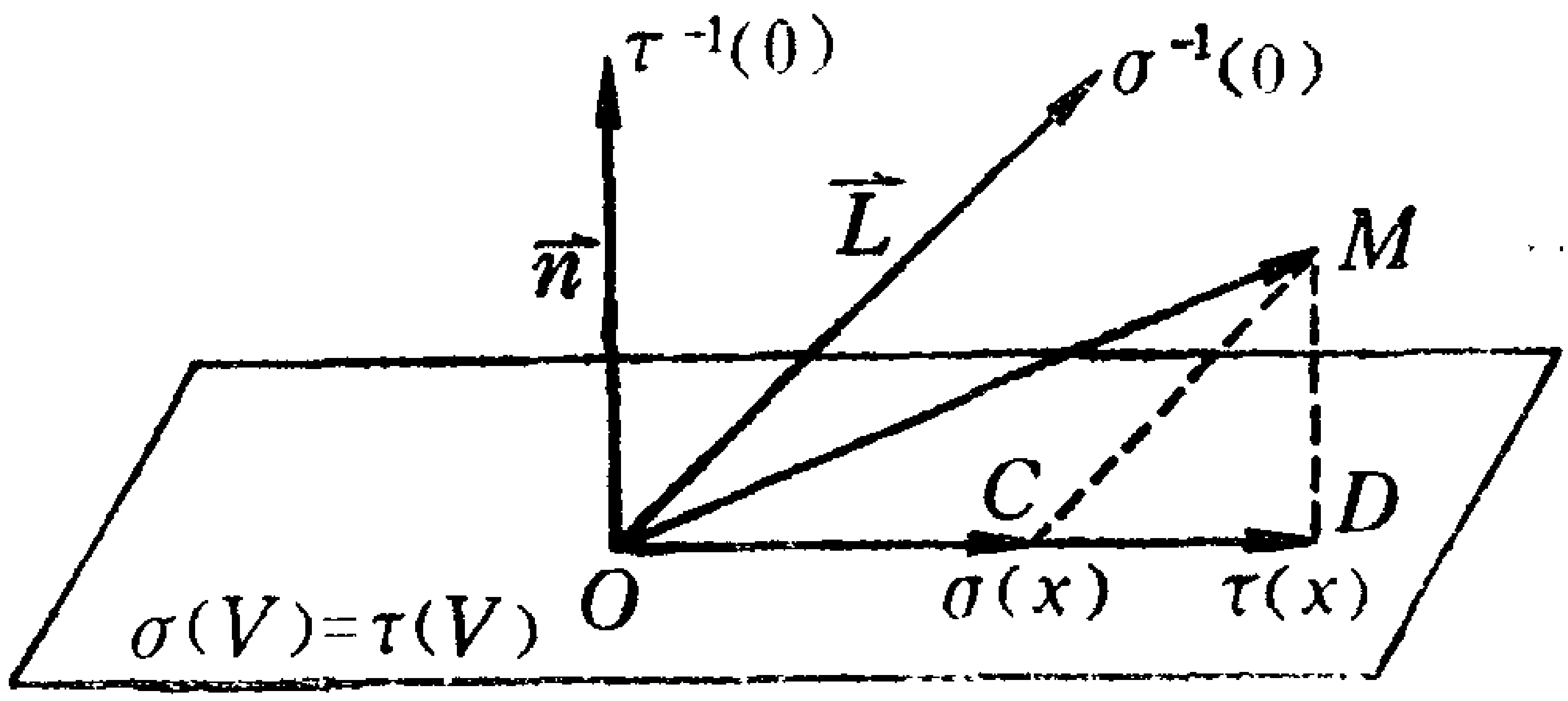
11 维$\sigma(V_n)$+维σ^{-1}（0）$=n$，但V_n不一定是$\sigma(V_n)$与σ^{-1}（0）的直和。

例 在$P[x]_n$中，令$Df(x)=f'(x)$。则D的值域为$P[x]_{n-1}$，而D的核为子空间P。两者的交为P不是{0}，所以，V_n不是$D(V_n)$与$D^{-1}(0)$的直和。

此例还表明，线性变换的值域与核的和不一定是V。

12 σ与τ为线性空间V中两个线性变换，$V=\sigma(V)\oplus\sigma^{-1}(0)$，$V=\tau(V)\oplus\tau^{-1}(0)$。
$\sigma(V)=\tau(V)$、但$\sigma^{-1}(0)=\tau^{-1}(0)$不成立。

例 起点为原点的矢量全体构成三维空间R^3，取$0xy$平面的法向量$\vec{n}$与另一个和它斜交的向量$\vec{L}$，取线性变换σ、τ分别为：对任一矢量$\overrightarrow{OM}=x$，$\sigma(x)$与$\tau(x)$各为$\overrightarrow{OM}$对平面oxy的斜投影与正投影$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$，则对oxy平面上任一过原点的矢量$\overrightarrow{ON}=y$，均可分别找到矢量$\overrightarrow{OM_1}=x_1$，$\overrightarrow{OM_2}=x_2$，使$\sigma(x_1)=y$，$\tau(x_2)=y$，所以$\sigma(V)=\tau(V)=oxy$平面上全体过原点的矢量。且$V=\sigma(V)\oplus\sigma^{-1}$（0）$=\tau(V)\oplus\tau^{-1}(0)$显然成立。但是$\tau^{-1}(0)\neq\sigma^{-1}(0)$。（见下图）



二　特征根与特征向量

定义 2　设V是数域P上的一个线性空间，σ是V的一个线性变换，λ是P中一个数，如果存在V中非零向量ξ，使得

$$\sigma(\xi)=\lambda\xi$$

那么λ就叫做σ的一个特征根，而ξ叫做σ的属于特征根λ的特征向量.

13　因特征向量不等于零，所以它们对应的特征根不为零. 此命题不真.

例　设H是V_3的一个过原点的平面，σ是把V_3的每一向量变成这个向量在H上的正射影的线性变换. L是过原点且与平面H垂直的直线. L上的任意向量η. 在σ之下的象都是零向量，即

$$\sigma(\eta)=0=o\eta$$

因而数0是σ的一个特征根，直线L上的每一非零向量η都是σ的属于特征根O的特征向量.

14　一个特征向量只能对应一个特征根，但反之不真.

例　线性变换取为零变换θ，V中任一非零向量都是θ的属于特征根0的特征向量.

15 n阶方阵$A\in Mn(P)$，在P中有n个特征根，此命题不真。

例 $P=Q$，为有理数域，σ是V_2的线性变换，σ关于标准基$\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}$的方阵为

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}.$$

$$f_\delta(x)=|xE-A|=\begin{vmatrix}x & 1\\ -1 & x\end{vmatrix}=x^2+1$$

我们知道，$f_\delta(x)$在Q中没有根，即σ作为V_2的线性变换在P中没有特征根。

16 任一线性变换都有特征根和特征向量，此命题不真。

例 令$V=P[x]$

$\sigma f(x)=xf(x)$，则σ是$P[x]$的一个线性变换。

对任意$\lambda\in P$，$f(x)\in P[x]$，$f(x)\neq 0$

$\sigma f(x)=\lambda f(x)$，不成立。

所以，σ无特征根，当然也就无特征向量。

17 实数域R上$2n$维线性空间的线性变换未必有特征根和特征向量。

例 $\sigma\in L(V_2)$，σ关于标准基$\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2\}$的方阵为

$$A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$f_A(x)=\begin{vmatrix}x & 1\\ -1 & x\end{vmatrix}=x^2+1$$

x^2+1在R中没有根，所以σ没有特征根和特征向量。

三 线性变换的化简

18 设$A\in M_n(p)$，K重根按K个计算，则A可对角化$\Longrightarrow A$有n个特征根。反之不成立。

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\in M_2(p)$$

则 $f_A(x)=(x-1)^2$，于是A有2个特征根1。

$$E-A=\begin{pmatrix}0 & -1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

于是n一秩$(E-A)=2-1=1\neq 2$，所以A不能对角化，故A有n个特征根，只是A可对角化的必要条件。

19 线性变换σ有n个不同特征根是σ可对角化的充分条件，而不是必要条件。

例 n阶单位矩阵E以及KE本身都是对角形式，但它们的特征根都是n重根。

定义3 设W是线性空间V的子空间，若$\sigma(W)\subseteq W$，则称W是σ的不变子空间，线性变换σ的不变子空间，也称σ——子空间。

20 一个线性空间的子空间对一个线性变换来说是不变子空间，但对于另一个线性变换来说，就末必是不变子空间。

例 取$V=P^3$

$\sigma(x_1, x_2, x_3)=(2x_1-x_2, x_2+x_3, x_1)$

$\tau(x_1, x_2, x_3)=(0, x_2, x_3)$

易知，σ、τ都是线性变换.

而 $\tau V=\{(0, x_2, x_3)\}$，$\tau^{-1}(0)=\{(x_1, 0, 0)\}$

容易验证，τV、$\tau^{-1}(0)$都是τ——子空间，但都不是σ—子间.

事实上，取 $(0, 1, 1)\in\tau V$

$\sigma(0, 1, 1)=(-1, 2, 0)\overline{\in}\tau V$

取 $(1, 0, 0)\in\tau^{-1}(0)$

$\sigma(1, 0, 0)=(2, 0, 1)\overline{\in}\tau^{-1}(0)$

这个例题是说，τV，$\tau^{-1}(0)$ 都不是σ—子空间. 是否σV，$\sigma^{-1}(0)$ 也都不是τ—子空间. 其实不然，因为

$\sigma(x_1, x_2, x_3)=(2x_1-x_2, x_2+x_3, x_1)$

不但是变换，而且是满射变换：

$\forall(y_1, y_2, y_3)\in V$，通过

$$\begin{cases}2x_1-x_2=y_1\\ x_2+x_3=y_2\\ x_1=y_3\end{cases}$$

找到 $(y_3, -y_1+2y_3, y_2+y_1-2y_3)\in V$

而 $\sigma(y_3, -y_1+2y_3, y_2+y_1-2y_3)=(y_1, y_2, y_3)$

不但是满射，还可得出是单射，所以，

$\sigma(V)=V$，$\sigma^{-1}(0)=\{0\}$

这就是说，$V=\sigma V$，$\{0\}=\sigma^{-1}(0)$，都是τ—子空间.

21 σ、τ是线性空间V的线性变换. 若$\sigma\tau=\tau\sigma$，则τV，$\tau^{-1}(0)$ 都是σ—子空间. 同样，σV，$\sigma^{-1}(0)$也都是τ—子空间，反之不真.

例 取$V=P^3$

$$\sigma(x_1, x_2, x_3) = (x_1 - x_2, x_2, x_3)$$
$$\tau(x_1, x_2, x_3) = (-x_1, x_2, x_3)$$

σ，τ都是线性变换。

易知，$\sigma V = V$，$\sigma^{-1}(0) = \{0\}$，都是τ－子空间。

$\tau V = V$，$\tau^{-1}(0) = \{0\}$，都是σ－子空间。

可是$\sigma\tau(x_1, x_2, x_3) = \sigma(-x_1, x_2, x_3)$
$$= (-x_1 - x_2, x_2, x_3)$$
$$\tau\sigma(x_1, x_2, x_3) = \tau(x_1 - x_2, x_2, x_3)$$
$$= (-x_1 + x_2, x_2, x_3)$$

因而　$\sigma\tau \neq \tau\sigma$

22　σ是数域P上线性空间V的一个线性变换。W是σ—子空间，如果σ有逆变换σ^{-1}，那么，W也是σ^{-1}—子空间，但当V是无限维线性空间时，W不一定是σ^{-1}—子空间。

例　令

$$V = L(1, x, x^2, x^3, \cdots) = P[x]$$
$$W = L(x^2, x^4, x^6, \cdots)$$

考察V的线性变换σ：

$$x^i \longmapsto x^{i+2} \quad i = 2n$$
$$x^j \longmapsto x^{j-2} \quad j = 2n+1$$
$$1 \longmapsto 1$$
$$x \longmapsto x^2$$

其中n是自然数，虽然有$\sigma(W) \subseteq W$，但是$\sigma^{-1}(W) \nsubseteq W$，比如，$\sigma^{-1}(x^2) = x \notin W$。

四　正交变换与对称变换

定义 4　设σ是欧氏空间V的一个线性变换，如果对于任意$\alpha \in V$，都有

$$|\sigma(\alpha)|=|\alpha|$$

那么称σ是正交变换．

定义 5 设σ是欧氏空间V的一个线性变换，如果对于V中任意向量α，β都有

$$(\sigma(\alpha),\ \beta)=(\alpha,\ \sigma(\beta))$$

那么称σ是一个对称变换．

23 设σ为n维欧氏空间V的一个正交变换，σ关于V的标准正交基的矩阵是正交矩阵．那么σ关于其他基的矩阵不一定是正交矩阵．

例 在欧氏空间R^3中，$\varepsilon_1=(1,\ 0,\ 0)$，$\varepsilon_2=(0,\ 1,\ 0)$，$\varepsilon_3=(0,\ 0,\ 1)$为$R^3$的一个标准正交基，$R^3$的正交变换$\sigma$为

$$\sigma(\varepsilon_1)=-\varepsilon_1,\ \sigma(\varepsilon_2)=\varepsilon_2,\ \sigma(\varepsilon_3)=\varepsilon_3.$$

而σ关于R_3的基$\{\varepsilon_1,\ \varepsilon_2,\ \varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3\}$的矩阵是

$$A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

显然，A不是正交矩阵．

24 线性变换σ为正交变换的必要条件是保持两个向量的夹角不变，但条件不充分．

例 数乘变换也保持任两个向量的夹角不变．

25 欧氏空间中保持长度不变的变换不一定是正交变换．

例 设α_1是V_2中单位向量，规定V_2的变换

$$\sigma(\xi)=|\xi|\alpha_1\quad \xi\in V_2$$

σ是V_2的保长变换，但σ不是线性变换，因而也不是正交变换。

26 设σ为n维欧氏空间V的一个线性变换，若σ对一组基α_1，α_2，…，α_n中的向量，有

$$(\sigma\alpha_i,\ \sigma\alpha_i)=(\alpha_i,\ \alpha_i),\ i=1,\ 2,\ \cdots,\ n.$$

则σ不一定是正交变换。

例 对欧氏空间V_2

$$\varepsilon_1=(1,\ 0),\ \varepsilon_2=(0,\ 1)$$

是一组标准正交基，σ是V_2的一个线性变换。

$$\sigma\varepsilon_1=\frac{1}{2}\varepsilon_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_2$$

$$\sigma\varepsilon_2=\varepsilon_2$$

显然，有

$$(\sigma\varepsilon_1,\ \sigma\varepsilon_1)=\left(\frac{1}{2}\varepsilon_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_2,\ \frac{1}{2}\varepsilon_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_2\right)$$

$$=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}=1=(\varepsilon_1,\ \varepsilon_1)$$

$$(\sigma\varepsilon_2,\ \sigma\varepsilon_2)=(\varepsilon_2,\ \varepsilon_2)$$

σ在标准正交基ε_1，ε_2下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}\frac{1}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1\end{pmatrix}$$

显然不是正交矩阵，故σ不是正交变换。

27 正交变换与对称变换都是线性变换，反之不真。

例 1 对于二维欧氏空间R^2，$\varepsilon_1=(1,0)$，$\varepsilon_2=(0,1)$，是它的一组标准正交基。令

$$\sigma: \begin{cases} \sigma\varepsilon_1=\frac{1}{2}\varepsilon_1+\frac{\sqrt{3}}{2}\varepsilon_2 \\ \sigma\varepsilon_2=\varepsilon_2 \end{cases}$$

则σ是R^2的线性变换，但不是正交变换，因为σ在标准正交基下的矩阵

$$A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$$

不是正交矩阵。

例 2 当σ，τ为对称变换时，$\sigma\cdot\tau$为线性变换，但不定有$\sigma\tau=\tau\sigma$，因而$\sigma\tau$不一定是对称变换。

28 欧氏空间中保持距离不变的变换不一定是正交变换。

例 设α_0为欧氏空间V的一个固定非零向量，令

$\sigma(\alpha)=\alpha+\alpha_0$

显然，σ是V的一个变换，它保持任两个向量的距离不变.

$|\sigma\alpha-\sigma\beta|=|(\alpha+\alpha_0)-(\beta+\alpha_0)|=|\alpha-\beta|$

但是，σ显然不是线性交换。因而也不是正交变换。

29 无限维欧氏空间中的正交变换不一定有逆变换。

例 取$V=R[x]$，（内积为对应系数乘积的和）.

$\sigma f(x)=xf(x)$

是$R[x]$的一个线性变换，又因为

$(\sigma f(x),\ \sigma g(x))=(xf(x),\ xg(x))=(f(x),\ g(x))$ 故 σ 为 $R[x]$ 的正交变换.

但 σ 不是到上的变换，因为任何零次多项式都没有逆象，σ 既不是到上的变换，从而没有逆变换.

30 设 T 为 n 维欧氏空间 V 的一个线性变换. A 为 T 在基 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n$ 下的矩阵，G 为此基的格拉姆矩阵. 若 T 为对称变换，则 AG 为对称方阵. 此命题不真.

例 在欧氏空间 R^2 中，

$$T(a_1,\ a_2)=(a_2,\ a_1)$$

显然是 R^2 的对称变换，且在基 $\alpha_1=(1,\ 1)$，$\alpha_2=(1,\ 2)$ 下的方阵为

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

而基 α_1，α_2 的格拉姆矩阵为

$$G=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 5\end{pmatrix}$$

有

$$AG=\begin{pmatrix}11 & 18\\ -3 & -5\end{pmatrix}$$

即 AG 不是对称方阵.

31 在内积空间里，假定存在非零向量 ξ，使得 $(\xi,\ \xi)=0$，这种向量我们称为迷向量. 全由迷向量组成的内积空间称为全迷空间，设 W 是数域 P 上内积空间 V 的子空间，令

$W^{\perp}=\{\xi\in W \mid (\xi,\ W)=0\}=\{\xi\in V \mid (\xi,\ \omega)=0,$

$\forall \omega \in W\}$，则$W \oplus W^{\perp} = V$不一定成立。

例 选取含有迷向量的内积空间R^4。

$$(\alpha, \ \beta) = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 - x_4 y_4$$

取$\xi = (0, \ 0, \ 1, \ 1)'$，$W = L(\xi)$，则$W$仍是$R^4$的1维子空间，但$W^{\perp} = \{\beta | \beta = (y_1, \ y_2, y_3, y_4)'\}$是一个3维子空间，并且$W \subsetneqq W^{\perp}$，又知$\forall \eta \in W$，$\eta = a\xi$，于是

$(\eta, \ \eta) = (a\xi, \ a\xi) = 0$，即$W$是全迷子空间，而$W^{\perp}$不是全迷子空间，此时，

$$W + W^{\perp} = W^{\perp} \subsetneqq R^4$$

$W \oplus W^{\perp}$失去符号原有意义。更谈不上

$$W + W^{\perp} = R^4.$$

第七章　λ—矩阵

定义 1　设P为数域，$P[\lambda]$为P上的一元多项式环，$P[\lambda]$上的矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} f_{11}(\lambda)\cdots\cdots f_{1n}(\lambda) \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_{m1}(\lambda)\cdots\cdots f_{mn}(\lambda) \end{pmatrix}$$

称为P上的λ—矩阵。

定义 2　对角形的λ—矩阵$D(\lambda)$，如果对角多项式$d_1(\lambda)$，…，$d_k(\lambda)$，适合

$$d_1(\lambda)|\,d_2(\lambda)|\cdots|d_k(\lambda),$$

且非零的$d_i(\lambda)$首项系数为1，则称$D(\lambda)$为标准形。每个λ—矩阵$A(\lambda)$经初等变换可化为标准形。$A(\lambda)$的所有K阶不全为零子式的最大公因式，称为$A(\lambda)$的K阶行列式因子$D_k(\lambda)$。

定义 3　$A(\lambda)$的标准形中非零的对角多项式称为$A(\lambda)$的不变因子。当A为数字矩阵时，其特征矩阵$\lambda E—A$的不变因子称为A的不变因子。

定义 4　A的次数大于零的不变因子分解为互不相同的

一次因式的方幂的积，所有这些一次因式的方幂（相同的要按出现的次数重复计算），称为A的初等因子.

定义 5 形如

$$\begin{pmatrix} \lambda_0 & 0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ 1 & \lambda_0 & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots\cdots & 1 & \lambda_0 \end{pmatrix}$$

的矩阵（λ_0为数），称为一个$Jordan$块. 由$Jordan$块组成的准对角形称为$Jordan$标准形. 每个复方阵相似于一个对应的$Jordan$标准形.

1 对于数字矩阵而言，满秩与可逆等价，但对于n阶λ—矩阵，满秩不一定可逆.

例

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda+1 & \lambda+2 \\ \lambda+2 & 1 \end{pmatrix}$$

它是一个满秩方阵，$|A(\lambda)|=-\lambda^2-3\lambda-3\neq0$. 但$A(\lambda)$不可逆，因$|A(\lambda)|$不是非零数，而是一个次数大于零的多项式.

2 对于数字矩阵而言，等秩与等价一致，但两个n阶λ—矩阵，等秩不一定等价.

例

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix},\quad B(\lambda)=\begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}$$

秩均为 2，但不可能经一系列初等变换将$A(\lambda)$化为$B(\lambda)$，因为若等价必然行列式是系数成比例的同次多项式，但$|A(\lambda)|=\lambda^2$，$|B(\lambda)|=2\lambda$，显然不成比例.

3 矩阵成对角形不一定是标准形。

例 矩阵

$$A(\lambda)=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&0\\0&0&\lambda&0\\0&0&0&\lambda^2\end{pmatrix}$$

不是标准形，因$0 \nmid \lambda$。

4 非零数字矩阵A的行列式因子是 1，…，1（r 个，$r=A$的秩），但行列式因子皆为 1 的λ—矩阵，不一定是数字矩阵。

例 $A(\lambda)=\begin{pmatrix}1&\lambda-1\\1&\lambda\end{pmatrix}$ 行列式因子为$D_1(\lambda)=1$，

$D_2(\lambda)=1$

但$A(\lambda)$不是数字矩阵。

5 非零数字矩阵A的不变因子为 1，…，1（r个，r为A的秩），但不变因子皆为 1 的λ—矩阵，不一定是数字矩阵。

例 上例中$A(\lambda)$的不变因子为 1，1，但$A(\lambda)$不是数字矩阵。

6 当λ—矩阵满秩时，$A(\lambda)$的不变因子之积为与多项式$|A(\lambda)|$系数成比例的那个首项系数为 1 的多项式，但当$A(\lambda)$不满秩时，不成立。

例 $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda&0\\0&0\end{pmatrix}$的不变因子为λ，其积为λ，不等

于$|A(\lambda)|=0$。

7 不满秩的数字矩阵的特征矩阵却总是满秩的。

例 $A=$零方阵，则$\lambda E-A=\lambda E$，$|\lambda E|=\lambda^n\neq 0$

8 不变因子对应相等的两个λ—矩阵不一定等价。

例 $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda^2\end{pmatrix}$，$B(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda^2 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

，不变因子都是：λ，λ^2，但它们不等价，因为阶不相同.如果$A(\lambda)$，$B(\lambda)$阶相同，且不变因子对应相等，则$A(\lambda)$与$B(\lambda)$等价。

9 等价于单位矩阵的λ—矩阵必满秩，反之不然。

例 $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & -1\\ \lambda & \lambda\end{pmatrix}$为满秩λ—矩阵,但不等价于单位矩阵$E$。因为如果$A(\lambda)$等价于$E$，则存在一系列初等方阵两侧乘$A(\lambda)$后等于$E$。两边取行列式，由于初等矩阵行列式为非零常数，因而$|A(\lambda)|=\lambda^2+\lambda$与$|E|=1$相差一个比例因子，且此因子为非零常数，这显然不可能。

10 数字矩阵如果满秩，则可表为一系列初等矩阵之积，但满秩λ—矩阵不一定能这样做。

例 $A(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda & 1\\ 1 & \lambda\end{pmatrix}$

不能表为一系列初等矩阵之积。因为如果能这样，则$|A(\lambda)|$应为若干初等矩阵行列式之积，即为非零常数，但$|A(\lambda)|=$

λ^2-1。

11 数字矩阵A的不变因子之积等于特征多项式$|\lambda E-A|$，但$|\lambda E-A|$的因子不一定是不变因子。

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}$，则$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0\\ 1 & \lambda-1\end{vmatrix}$

$=(\lambda-1)^2$，$\lambda-1$是其因子，但不是A的不变因子，因A的不变因子只有1，$(\lambda-1)^2$。

12 数字矩阵A的初等因子之积等于特征多项式$|\lambda E-A|$，但$|\lambda E-A|$的因子不一定是初等因子。

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$，则

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ 0 & \lambda+1 & 0\\ 0 & 0 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2(\lambda+1).$$

其中有因子λ^2-1，但它不是A的初等因子，因它不是一次式的方幂。

13 数字矩阵A的初等因子是$|\lambda E-A|$的因子，且是一次式的方幂，但有这一性质的不一定是A的初等因子。

例 上例中，A的行列式因子为

$D_1(\lambda)=1$，$D_2(\lambda)=\lambda-1$，$D_3(\lambda)=(\lambda-1)^2(\lambda+1)$。

不变因子为

$d_1(\lambda)=1$，$d_2(\lambda)=\lambda-1$，$d_3(\lambda)=\lambda^2-1$。

初等因子为

$\lambda-1$，$\lambda-1$，$\lambda+1$。

$(\lambda-1)^2$虽是$|\lambda E-A|=(\lambda-1)^2\cdot(\lambda+1)$的因子，也是一次式的方幂，但不是$A$的初等因子。

14 特征多项式无重根的数域P上的矩阵A，不一定可以在P上对角化。

例

$$A=\begin{pmatrix}2 & -5\\ 1 & -2\end{pmatrix},$$

$$|\lambda E-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2 & 5\\ -1 & \lambda+2\end{vmatrix}=\lambda^2+1,$$

其根为i，$-i$。取$P=Q$（有理数域），则在P上A不相似于对角形。

15 设A为数域P上的n阵方阵，如果A在复数域上的初等因子皆为一次，A在P上不一定对角化。

例 上例中

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-2 & 5\\ -1 & \lambda+2\end{pmatrix}$$

$$D_2(\lambda)=\lambda^2+1,\qquad D_1(\lambda)=1,$$

$$d_2(\lambda)=\lambda^2+1,\qquad d_1(\lambda)=1.$$

初等因子为：$\lambda-i$，$\lambda+i$，在复数域上皆为一次。取$P=Q$，则A在P上不能对角化。

注 以上二例中取$P=C$（复数域），但答案是肯定的。

16 设A为n阶方阵，$f(\lambda)$为A的特征多项式，则$f(A)=$

0．反之，设$g(\lambda)$为首项系数为1的n次多项式，以A为根，$g(\lambda)$不一定是A的特征多项式。

例 $A=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$

$f(\lambda)=|\lambda E-A|=\lambda^2$

取$g(\lambda)=\lambda(\lambda+1)$，则$g(A)=0$，但$g(\lambda)$不是$A$的特征多项式。

17 设A为n阶方阵，$P(\lambda)$为A的最小多项式，则$P(\lambda)$是特征多项式$f(\lambda)=|\lambda E-A|$的因子，以A为根且次数最低，但$f(\lambda)/P(\lambda)$也可以A为根。

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & & & & \\ & -1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & -1 & \\ & & & & -1\end{pmatrix}$$

则最小多项式为$P(\lambda)=\lambda^2-1$、特征多项式

$f(\lambda)=(\lambda+1)^3(\lambda-1)^2$

$P(\lambda)$除$f(\lambda)$的商式为 $(\lambda+1)^2(\lambda-1)$，也以A为根。

18 设$A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_2\end{pmatrix}$为准对角阵，$A_1$的最小多项式为$P_1(\lambda)$，$A_2$的最小多项式为$P_2(\lambda)$，当$(P_1(\lambda),P_2(\lambda))=1$时，$A$的最小多项式为$P_1(\lambda)P_2(\lambda)$，但当$P_1(\lambda)$与$P_2(\lambda)$不互素时，$A$的最小多项式不一定等于$P_1(\lambda)P_2(\lambda)$。

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad A_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$A_2=(-1)$，则 $A=\begin{pmatrix} A_1 & \\ & A_2 \end{pmatrix}$

$P_1(\lambda)=\lambda^2-1$，$P_2(\lambda)=\lambda+1$，但 $P(\lambda)=\lambda^2-1\neq P_1(\lambda)P_2(\lambda)$。

19 设A，B分别是n阶可对角化方阵，但AB不一定可对角化。

例 $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\sim\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

$B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,

但 $AB=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$

不可对角化。

20 设A，B分别是n阶可对角化方阵，但$A+B$不一定可对角化。

例 上例中，$A+B=\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$不能对角化。

21 *Jordan*块的初等因子为一次式的方幂，但初等因子为一次式方幂的方阵不一定是一个*Jordan*块。

例

$$A=\begin{pmatrix}4 & 5 & -2\\ -2 & -2 & 1\\ -1 & -1 & 1\end{pmatrix},$$

A的初等因子为 $(\lambda-1)^3$，因

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-4 & -5 & 2\\ 2 & \lambda+2 & -1\\ 1 & 1 & \lambda-1\end{pmatrix}\longrightarrow\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & (\lambda-1)^3\end{pmatrix},$$

即A的不变因子为1，1，$(\lambda-1)^3$，A的初等因子为$(\lambda-1)^3$，但A不是$Jordan$块，只是A相似于一个$Jordan$块．

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

22　每个复n阶方阵相似于一个下三角矩阵，但一般不唯一．

例

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$

本身是一个下三角阵．

$$\lambda E-A=\begin{pmatrix}\lambda-1 & 0 & 0\\ -1 & \lambda-1 & 0\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{pmatrix}$$

显然行列式因子为

$D_3(\lambda)=(\lambda-1)^3$，$D_2(\lambda)=1$，$D_1(\lambda)=1$，

不变因子为

$$d_1(\lambda)=1,\ d_2(\lambda)=1,\ d_3(\lambda)=(\lambda-1)^3$$

初等因子为 $(\lambda-1)^3$，因而A相似于一个Jordan块：

$$\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix},$$

即A相似于两个不同的下三角矩阵。

23 特征值互不相等的n阶复方阵可以对角化，但可以对角化的复方阵不一定特征值互不相等。

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，特征值皆为1，但$A$本身就是对角形。

24 幂等复方阵（适合$A^2=A$）A的特征值只有0和1，但反之不然。

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 0\end{pmatrix}$的特征根为1和0，但$A$不是幂等矩阵。

25 矩阵的Jordan标准形一般不是唯一的

例 $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$,

两者都是A的Jordan标准形。

注 复方阵的Jordan形之间最多有Jordan块之间排列次序的区别，如果不计这种区别，可以认为是唯一的。

第八章　群、环和域简介

群、环和域是三种最基本的代数体系，本章将围绕它们的基本概念举一些相关的反例。

§1　群

定义1　设G是一个非空集合，而且在G中定义了一个叫做乘法的代数运算，如果

1）G的乘法满足结合律：对于G中的任意元素a、b、c有

$(ab)c=a(bc)$

2）在G中存在一个元素e，叫做G的单位元，适合

$$ea=ae=a$$

a是G中的任意元素。

3）对于G中的每一个元素a，存在G的一个元素a^{-1}，使得

$$a^{-1}a=aa^{-1}=e$$

这个a^{-1}叫做a的逆元。

则称G为一个群。

如果一个群G的乘法还满足交换律：对于G的任意元素a、b都有$ab=ba$，那么就称G是一个交换群或阿贝尔（$Abel$）群。

下面举出一些，不能做成群的集合（1—4）

1　$G=\{x\in R \mid 0<x\leqslant 1\}$，$a\cdot b=ab$

因为$0<x<1$时$\frac{1}{x}>1$，$\frac{1}{x}\notin G$，即数的普通乘法不是G的代数运算。

2　$G=\{$全体整数$\}$，$a\cdot b=a-b$，即普通减法。

因为$(5-3)-2\neq 5-(3-2)$，所以不满足结合律，故G不做成群。

3　$G=P[x]$，$f(x)og(x)=f'(x)+g'(x)$

因为没有单位元，否则，设$f(x)$为其单位元，则有

$$f(x)\cdot x=f'(x)+1=x$$

$$f(x)\cdot 1=f'(x)=1$$

结果出现$f'(x)=x-1=1$，这是不可能的，故G不作成群.

4　$G=\{$全体实数$\}$，$a\cdot b=a+b-ab$，

虽然可以验算结合律成立，也有单位元，就是0，但是1没有逆元素。（因为$1\cdot x=1+x-x=1\neq 0$）故G不作成群.

5　一个有限群的每一个元的阶都有限。反之，一个群的元的阶都有限，这个群不一定是有限群。

例　1的任何次（复数）根的全体构成的集合G，对数的乘法来说作成群，这个群的元无限多，而其每一个元的阶都有限。

事实上，两个n次单位根的乘积仍是一个n次单位根.

n次单位根，m次单位根的乘积，是一个单位根.

$\varepsilon^n = 1 \quad \eta^m = 1$

即$\varepsilon^{mn} = 1 \quad \eta^{mn} = 1$

所以$(\varepsilon\eta)^{mn} = 1$，当$(m, n) = 1$时$\varepsilon\eta$是$mn$次单位根，当$(m, n) = d$时，$\varepsilon\eta$是$\frac{mn}{d}$次单位根。

n次单位根的逆元仍是一个n次单位根。

$(\varepsilon^{-1})^n = (\varepsilon^n)^{-1} = 1$

此例说明，元素都是有限阶的无限群是存在的。

6 若群G与集$\overline{G}$对它们的乘法来说同态，则$\overline{G}$也是群，但是，若集$\overline{G}$与群G对它们的乘法来说同态，$\overline{G}$未必成群。

例 $\overline{G} = \{$全体奇数$\}$，普通乘法

$G = \{e\}$，乘法是$e \cdot e = e$

在ϕ：$\overline{a} \longrightarrow e$

之下，$\overline{G}$与G同态。

但$\overline{G}$对普通乘法不做成群

7 假定在两个群G和$\overline{G}$的一个同态映射之下

$a \longrightarrow \overline{a}$

a与$\overline{a}$的阶不一定相同。

例 $G = \{1, \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}, \frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\}$，

$\overline{G} = \{1\}$

对普通乘法，G、$\overline{G}$都作成群，且$\phi(x) = 1$，（这里x是G的任意元，1是$\overline{G}$的元）。

由ϕ可知，$G \sim \overline{G}$，但$\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}$的阶都是3。

而1的阶是1.

8 群的自同态满射不一定是自同构的.

例 $R[x]$是实数域上的多项式环，因而是加群.

令 ϕ: $f(x) \longmapsto f'(x)$

ϕ是$R[x]$关于加法的一个自同态满射，但不是一一映射，因而可以在R里取a、b，而$a \neq b$，但是在ϕ之下有

$$a \rightarrow a' = 0$$

$$b \rightarrow b' = 0$$

所以不是自同构.

9 $G \sim \overline{G}$，若G是循环群，则$\overline{G}$也是循环群，反之不真.

例 $\overline{G} = \{1, -1\} = (-1)$

$G = S_3$（3次对称群）

ϕ: $\pi \longmapsto 1$，当π是偶置换

$\pi \longmapsto -1$，当π是奇置换

容易验证$G \sim \overline{G}$

$\overline{G}$是循环群，G是非交换群，因而不是循环群，因为循环群一定是交换群.

定义2 如果群G的非空子集H对于G的代表运算也作成一个群，则称H是G的一个子群.

10 循环群的真子群是循环群，反之不真.

例 G是四元循环群.

即 $G = \{e, a, b, c\}$

	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

G的子群除了平凡子群（e）及（G）之外，还有$\{e,a\}=(a)$，$\{e,b\}=(b)$，$\{e,c\}=(c)$，且仅有这些，这些真子群都是循环群．

将这个群具体化，可令

$e=(1)$

$a=(1\ 2)(3\ 4)$

$b=(1\ 3)(2\ 4)$

$c=(1\ 4)(2\ 3)$

11 有限群不能和它的真子群同构，但无限群能和它的真子群同构．

例 整数加群和其真子群偶数加群同构．

12 非交换群的真子群可能是交换群．

例 S_3是非交换群．

$H=\{(1),(12)\}$是S_3的一个非平凡子群．

但H是交换群．

13 一个群的两个不同的子集会不会生成相同的子群？

我们说，群的两个不同的子集可能生成相同的子群．

例 S_3是三次对称群，取

$H_1=\{(1\ 2\ 3)\}$，$H_2=\{(1\ 3\ 2)\}$

由H_1生成的和H_2生成的子群都是：

$$H=\{(1),(123),(132)\}$$

§2 环和域

定义3 设R是一个非空集合，在R中定义了两种代数运算，分别叫做加法和乘法．若下列条件被满足

1）R对加法作成一个加群；

2）乘法满足结合律；

3）加法和乘法由分配律联系着；对于R中任意元素a、b和c，等式

$$a(b+c)=ab+ac$$

$$(b+c)a=ba+ca$$

成立。

则称R关于它的加法和乘法作成一个环．简称R是一个环．

如果环R的乘法满足交换律，那么环R叫做交换环．

14 非交换环的例

例

$$R_{n\times n}=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots\cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots\cdots & a_{nn}\end{pmatrix} \middle| \ a_{ij}\in R\right\}$$

对矩阵加法和矩阵乘法，容易验证作成一个环，是非交换环

15 无单位元的环。

例 偶然环无单位元。

16 我们知道，“对于有单位元的环来说，加法适合交换律是环定义里其它条件的结果。”但反之不真。

例 偶然环

加法适合交换律而没有单位元．

17　设R和$\overline{R}$是两个环，且R与$\overline{R}$同态，$\overline{R}$适合交换律，但R不一定适合．

例　R为数域P上的二阶方阵环，$\overline{R}$为零环．在

$$\phi:\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \longrightarrow 0$$

之下，R与$\overline{R}$同态，但$\overline{R}$适合交换律，R显然不适合交换律．

18　设R和$\overline{R}$是两个环，且R与$\overline{R}$同态，$\overline{R}$有单位元，但R未必有单位元。

例　R为偶数环，$\overline{R}$为零环，在两者之间，容易建立R到$\overline{R}$的满射，且R与$\overline{R}$同态．$\overline{R}$有单位元，但R没有单位元．

19　关于零因子

例 1　模 6 的剩余类环Z_6有零因子．

$[2]\neq[0]$，$[3]\neq 0$　而$[2][3]=[6]=[0]$

例 2　n阶矩阵环$R_{n\times n}$有零因子

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 1 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & & & \\ & 0 & & \\ & & 0 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 \end{pmatrix}$$

20　一个有零因子的环里，消去律不成立。

例

$$Z_{2\times 2}=\left\{\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \middle| a_{ij}\in Z\right\}$$

取 $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b & 0 \\ h & R \end{pmatrix}$$

其中$c \neq h$，而

$$\begin{pmatrix} b & 0 \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} b & 0 \\ h & R \end{pmatrix}$$

21 设R和$\overline{R}$是两个环，且R与$\overline{R}$同态，R有零因子，但$\overline{R}$可以没有零因子。

例 $R=\{(a, b) \mid a, b$是整数$\}$

加法$(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2)$

乘法$(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2)=(a_1a_2, b_1b_2)$

R显然作成环

$\overline{R}$是整数环Z。

ϕ： $(a, b) \longrightarrow a$

是R到$\overline{R}$的同态满射，因而，R与$\overline{R}$同态。

R有零因子

$$(a, 0)(0, b)=(0, 0)$$

但$\overline{R}$没有零因子。

22 设R和$\overline{R}$是两个环，且R与$\overline{R}$同态。R无零因子，但$\overline{R}$可以有零因子。

例 R是整数环Z，$\overline{R}$是以6为模的剩余类环Z_6。

ϕ：$Z \to Z_6$，$n \longmapsto [n]$

是Z到Z_6的一个同态满射，因而Z与Z_6同态。Z没有零因子，Z_6有零因子。

定义 4 设P是一个至少含有两个元素的环，若P中乘法还满足下列条件：

1）有单位元素e，对任意元素$a \in p$，有

$ae = ea = a$

2）对p中每一个非零元素a，都有逆元素$a^{-1} \in p$，使得

$aa^{-1} = a^{-1}a = e$

3）交换律成立，即若a、$b \in p$，有$ab = ba$，则p就 称为一个域。

23 域一定是除环，除环未必是域。

例 $R = \{$所有复数对$(\alpha, \beta)\}$

加法：$(\alpha_1, \beta_1) + (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1 + \alpha_2, \beta_1 + \beta_2)$

乘法：$(\alpha_1, \beta_1) \cdot (\alpha_2, \beta_2) = (\alpha_1\alpha_2 - \beta_1\overline{\beta_2}, \alpha_1\beta_2 + \beta_1\overline{\alpha_2})$

容易验证R是一个除环。

但R不是交换环

$(i, 0)(0, 1) = (0, i)$

$(0, 1)(i, 0) = (0, -i)$

因而R不是域。

24 令 为由数域P上一切形如

$$\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix}$$

的二阶方阵作成的一个有单位元的可换环。

但F对方阵的加法与乘法一般不一定作成域。

例 当P为实数域时，方阵

$$A = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 2 \\ 1 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \neq 0$$

属于F，但$|A|=0$，故A在F中没有逆元素，因此F不能作成域。

但是，当P为有理数域时，F能做成域。

设

$$A=\begin{pmatrix} a & 2b \\ b & a \end{pmatrix} \neq 0$$

为F中任意一非零方阵，（a，b不全为零），则

$$|A| = a^2 - 2b^2 \neq 0$$

因若不然，则

$$a^2 = 2b^2，\text{必} b \neq 0 \quad \text{且} \left(\frac{a}{b}\right)^2 = 2$$

由于a、b是有理数，这是不可能的。

于是

$$A^{-1} = \frac{1}{a^2 - 2b^2}\begin{pmatrix} a & -2b \\ -b & a \end{pmatrix}$$

仍属于F，即A在F中的逆元素。故此时F作成域。

参考书目

1．张禾瑞与郝钢新编，高等代数（第三版），高等教育出版社，1983。
2．北京大学数学力学系几何与代数教研室代数小组编，高等代数，人民教育出版社，1978。
3．李师正编，抽象代数，山东人民出版社，1981．
4．李师正编，多项式代数，山东人民出版社，1981．
5．杨子胥编，高等代数习题解，山东科学技术出版社，1982。
6．曹锡皞等编，高等代数，北京师范大学出版社，1987．
7．刘云英等编，高等代数习作课讲义，北京师范大学出版社，1987。
8．周伯壎编，高等代数，人民教育出版社，1966。
9．张枚著，高等代数习题选编，浙江科学技术出版社，1985。
10．汪经武等编，高等代数，安徽教育出版社，1883．
11．熊尚哲与李兴慧编，高等代数，黑龙江科学技术出版社，1984。
12．孔繁栋与鲁俊编，高等代数（上册），中南矿冶学院出版社，1985；（下册），中南工业大学出版社，1986。

13. 王萼芳编，高等代数，上海科学技术出版社，1981.
14. 王萼芳编，高等代数题解，北京大学出版社，1983.
15. 王萼芳与丘维声编，高等代数讲义，北京大学出版社，上册1983，下册1984.
16. 王楣卿编，线性代数，山东教育出版社，1983.
17. 蔡剑芳等编，高等代数综合题解，湖北科学技术出版社，1986.
18. 史明仁著，线性代数六百证明题详解，北京科学技术出版社，1985.
19. 周士藩等编，高等代数解题分析，江苏科学技术出版社，1985.
20. 中央电大经济系基础理论教研室编，线性代数与线性规划，中央广播电视大学出版社，1987.
21. 张禾瑞著，近世代数基础，人民教育出版社，1978.
22. 兰以中编，线性代数引论，北京大学出版社，1981.
23. 〔苏〕*U.B.*普罗斯库烈柯夫著，线性代数习题集，人民教育出版社，1981.
24. 〔匈〕*I.FARKAS*等著，线性代数引论，人民教育出版社，1981.

参 考 文 献

1. 李玉文，反例在线性代数教学中的运用，殷都学刊，1988年第2期，24页.
2. 王凯宁，关于线性空间的定义，数学通报，1980年第11期，20页.

[General Information]
书名=高等代数的265个反例
作者=李玉文编著
页数=114
SS号=11534600
出版日期=1991年07月第1版