高等学校教学用書

向量分析講义

Г. Е. 希洛夫著

高等教育出版社

統一書号 13010·381
定价 ¥0.48

高等学校教学用書

向量分析講义

Г. Е. 希洛夫著
方德植　林堅冰譯

高等教育出版社

本書系根据苏联国家技术理論書籍出版社（Государственное издательство технико-теоретической литературы）1954年出版的希洛夫（Г. Е. Шилов）著"向量分析講义"（Лекции по Векторному Анализу）譯出。原書經苏联文化部高等教育司审定为綜合大学物理—数学系教学参考書。

向 量 分 析 講 义

Г. Е. 希洛夫著

方德植　林坚冰譯

高等教育出版社出版 北京琉璃廠170号

（北京市書刊出版業營業許可証出字第051号）

京华印書局印刷　新华書店总經售

統一書号 13010·381　開本 850×1168 1/32　印張 [illegible]　字數 [illegible]　印數 0001—4,500

1957年12月第1版　1957年12月北京第1次印刷　定價（[illegible]）¥0.48

序　言

在数学的物理应用上——在流体力学，电动力学，彈性理論上——向量分析的作用是大家都知道的。本書和許多通行的关于向量分析的著作（例如，H. E. 柯欽的，Я. С. 杜布諾夫的，以及B. И. 斯米尔諾夫的"高等数学教程"第二卷）不同的地方在于：它是建立在向量分析这一科目本身的完整的邏輯結構上面。古典的向量分析算子——梯度，散度以及旋度——在这里予以直接的定义。这种定义并沒有牽涉到坐标系以及按坐标求微分。因此，对于可能的向量場的范圍作某些扩大之下（超出一般所考慮的帶有可微分分量的向量場的范圍），我們就有可能达到一定的思維的完整性以及理論上的完美性。这种完美性，例如，可以表現在第十一章关于逆問題可解性的条件的陈述上。这条件对于所求的向量場的散度及旋度并沒有附加任何光滑性的要求。为着建立这問題最明显的解答，还要用到兩个互为配極型的向量場，那就是連續分布質量的引力場和連續分布电流的磁力場。通过全書各章节我們对此二向量場作了系統的探討；其中一个具零旋度，而另一个具零散度。最后，利用区域的可加函数——取其初等形式——像得到"关于按照区域的密度来建立各种区域的可加函数"的定理一样。也可以使得用同一观点来得到基本定理（奥斯特罗格拉得斯基-司托克斯型）。因此，細心的讀者会看出在某些情况下，特别是，在我們考慮多少帶有任意給定的散度和旋度的向量場的时候，以司梯則积分代替黎曼积分就可以得到更普遍的結果。但是，我們还是局限在散度和旋度只是連續（或分段連續）的場合。首先，是由于在这样实际上最普遍的場类中，結構上的完整性才得到保証，其次，也达到最大的显易性。

本書的基本內容是作者最近几年在以 M. B. 罗蒙諾索夫命名的国立莫斯科大学以及以 T. Γ. 舍甫欽柯命名的国立基輔大学所担任的課程——必修的以及專業的——的某些講稿所組成的。

Γ. E. 希洛夫

目　录

緒　論

要了解这本書的基本內容，一方面必須掌握向量代数，另一方面还要掌握多元函数的微积分学的一般知識。我們將自由地运用一些基本概念，像空間曲綫的弧長，曲面的面积，以及給定一个函数沿着曲綫，沿着曲面的积分等等。在这里所考慮的一切曲綫及曲面按其微分結構来說是相当簡單的。例如，要求光滑或由有限个光滑弧所組成(分段光滑)。讓我們来回忆一下：所謂光滑曲綫是指在它的每一个点的鄰近，只要适当地选擇坐标軸就可以表示为方程：

$$y=y(x),\ z=z(x),$$

其中函数 $y(x)$ 和 $z(x)$ 都是連續的，而且有連續的一級微商；同样的，所謂光滑的曲面是指在他的每一个点的鄰近，只要适当地选擇坐标軸就可以表示为方程：

$$z=z(x,y),$$

其中函数 $z(x,y)$ 是連續的而且有連續的一級微商。至于分段光滑的条件是保証曲綫的切綫(除了有限个角点)以及曲面的切面(除了有限条角綫)的存在和連續的变化。

关于符号方面还要交代几句話。此后向量是以粗号的拉丁字母表示。向量 $\mathbf{p}, \mathbf{q}$ 的数量积以 $(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 表示，向量积以 $[\mathbf{p}, \mathbf{q}]$ 表示。

空間的点通常用大写字母 A, B, M, P 等等来表示，曲綫用 L，Γ(必要时再加上附标)，曲面用 S, Σ，而空間区域用 G, V 来表示。我們也用这些同样的字母来表示曲綫的長度，曲面的面积以及区域的体积。这样記法是不会引起混乱的，因为从上下文立刻就可以明白所指的是什么，例如，所指的是曲綫本身或是他的長度。

在空間中(或曲面上)的区域称为閉的或开的，看他是否包含

它的所有边界点而定。

包含在积分表达式下的弧長單元，面积單元以及体积單元分别以 $dl, d\sigma, dv$ 表示；如果还要指出积分的变点（像在具参数的积分中），那末我們就写成 $dl(M), d\sigma(M), dv(M)$。积分符号的数目表示积分区域的維数；沿着閉曲綫(即圍着某一个有限的曲面)或閉曲面(即圍着某一个有限的体积)的积分也需要对应的积分符号；例如，函数 $f(M)$ 沿着閉曲面 Σ 的积分可表示为

$$\oiint\limits_{\Sigma} f(M)d\sigma \quad 或 \quad \oiint\limits_{\Sigma} f(M)d\sigma(M).$$

我們不但可以积分点的数量函数，而且也可以积分点的向量函数。如果 $\mathbf{R}(M)$ 是向量函数，那末，积分

$$\iiint\limits_{V} \mathbf{R}(M)dv(M) \tag{1}$$

就認为是通常的积分和

$$\sum_{i} \mathbf{R}(M_i)\Delta v_i$$

的極限。当函数 $\mathbf{R}(M)$ 到处連續时，这个極限总是存在的(显然，它还是一个向量)。另一方面，如果把向量 $\mathbf{R}(M)$ 按坐标軸分解为分量的和

$$\mathbf{R}(M)=X(M)\mathbf{i}+Y(M)\mathbf{j}+Z(M)\mathbf{k},$$

那末积分(1)就化为三个通常的积分：

$$\iiint\limits_{V} \mathbf{R}(M)dv(M)=\mathbf{i}\iiint\limits_{V} X(M)dv(M)+$$

$$+\mathbf{j}\iiint\limits_{V} Y(M)dv(M)+\mathbf{k}\iiint\limits_{V} Z(M)dv(M).$$

从点 A 到点 B 的距离以 $r(A, B)$ 表示。如果 F 是某一点集，則 $r(A, F)$ 表示点 A 到 F 的距离，按定义說，就是从 A 到点 $B\in F$

的距离的下确界。

附录中，在"广义重积分"这个标题下，我們介紹多元函数的微积分学的一些概念和定理。这些概念和定理并不是經常在教科書或必修課程中都找得到的，但是对于本書的正文有某种独立的意义而且也常要用到的。

第一章　数量場及向量場·实例

場这个概念是向量分析的基础，它是借用于物理学和力学而且也是現实世界的一定数量关系和空間形式的一种表示方式。

如果对于空間（或空間的区域）的每一点 M 对应某一数量 $f(M)$，那末我們說給定了一个数量場。

因此，从邏輯方面来說，数量場的概念和函数的概念相比較并沒有包含任何新的内容，可是我們仍保留这沿用的术語——“場”——，以便照顧到而且强調这概念自身的起源和物理意义。

举出具有直接物理意义的数量場的实例是很容易的。例如观察并研究伏特計电極四周的溫度場。在气象学上要研究大气的压力場。

比較复杂的例子是在連續介質力学中所考虑的質量的密度場。如果在体积 V 中充滿着質量，那末对于包含 Δm 克質量的区域 ΔV，我們定义这介質的平均密度为 Δm 与 ΔV 的比：$\mu(\Delta V) = \Delta m : \Delta V$。固定一点 $M \in V$ 再考虑一串区域 ΔV_n，当 $n \to \infty$ 时，它們收縮于点 M。对于每一个区域 ΔV_n，我們分別得其平均密度 μ_n。和在連續介質力学中通常所做的一样，我們假定对于任意选擇的一串区域，当 $n \to \infty$ 时，μ_n 都有一个确定的極限 $\mu = \lim \mu_n = \mu(M)$，这 $\mu(M)$ 与序列 ΔV_n 的选擇無关。在这种狀况下所得到的量 $\mu(M)$ 称为在点 M 質量的（真正）密度。假若密度 $\mu(M)$ 在区域 V 中每一点 M 都有定义，那末函数 $\mu(M)$ 在这个区域中就構成了一个数量場。我們称之为質量的密度場。

同样地，在电动力学中，对于充滿着电荷 q 的一个区域 V 也可以引入电荷密度的数量場。这个場在每一点 M 的数量是由比 $\Delta q : \Delta V$ 的極限来定义的，其中 Δq 为 ΔV 体积中的电荷量，体积

ΔV 收縮于一点 M 的过程和上面所述的一样。

現在我們来考虑向量場。

如果对于空間（或空間的区域）的每一点 P 对应有某一向量 $\mathbf{R}(P)$，那么我們說給定了个一向量場。

与数量場的情况一样，向量場的概念和向量函数的概念在实質上是一样的；保留这沿用的术語——向量場——是为着保留这个概念的几何和物理的意义。

引力場是向量場的重要的物理学实例之一。假定在空間中分布有質量，那么按牛頓定律位于点 P 的單位質量有一引力 $\mathbf{F}(P)$，这个引力就称为在点 P 的引力場的强度，其明确的表示式以后再加以叙述。对应于空間中一切的点的向量 $\mathbf{F}(P)$ 全体構成一个向量場，这个場称为給定質量系的引力場。

現在我們要建立关于力 $\mathbf{F}(P)$ 的公式。

若引力場只由一个位于点 M_0 的質量 m_0 所产生的，那么按牛頓定律这个向量場 $\mathbf{F}(P)$ 的强度在适当的單位制下可以写成公式

$$\mathbf{F}(P)=\frac{m_0}{r^2(P,M_0)}\mathbf{e}(P,M_0), \tag{1}$$

其中 $r(P,M_0)$ 表示連結 P 和 M_0 綫段的長度，而 $\mathbf{e}(P,M_0)$ 表示由点 P 到点 M_0 的方向的單位向量。自然，这里还要假定 P 和 M_0 不是同一点。

假定引力場不是由一个而是由几个（例如 n 个）分别位于点 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的質量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 所产生的，那么他們每一个作用于点 P 的單位質量的力可得自与(1)相类似的公式。这些質量作用的总和，按照力的加法定律可表示为向量的和

$$\mathbf{F}=\frac{m_1}{r^2(P,M_1)}\mathbf{e}(P,M_1)+\cdots+\frac{m_n}{r^2(P,M_n)}\mathbf{e}(P,M_n)=$$

$$=\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{r^2(P,M_j)}\mathbf{e}(P,M_j), \tag{2}$$

这里要加一个条件，那就是点 P 与任何一点 M_j 不重合。

現在我們再看質量連續分布在有限体积 V 上的情形，其分布密度 $\mu(M)$ 是分段連續的。首先，我們还假定 P 点是在体积 V 的外面。

將体积 V 分为 n 个小体积 $dV_j(j=1, 2, \cdots, n)$，并且以 dm_j 表示体积 dV_j 内所含的質量。

很自然地我們可以認为質量單元 dm_j 对于在点 P 的單位質量的作用力 $d\mathbf{F}_j$ 就像是把这 dm_j 集中在 dV_j 中任意一点（例如在点 M_j）一样。这就使得我們能够用剛才所得到的公式来表示力

$$d\mathbf{F}_j=\frac{dm_j}{r^2(P, M_j)}\mathbf{e}(P, M_j)=\frac{\mu(M_j)dv_j}{r^2(P, M_j)}\mathbf{e}(P, M_j).$$

沿整个体积 V 积分，我們就得到总引力的表达式：

$$\mathbf{F}(P)=\iiint\limits_V \mu(M)\frac{\mathbf{e}(P, M)}{r^2(P, M)}dv(M). \tag{3}$$

注意，积分(3)不但对于 V 的外点，而且对于 V 的内点都有定义。在后一种情况，积分是广义的，但还是存在的，因为分母中的量 $r(P, M)$ 是以二次冪出現（見附录引理 1）。

当研究物質运动时，我們还会碰到一个新的向量場的物理学实例。假定某一連續介質，例如連續分布的質量，在运动。那么在所考虑的空間区域中每一点 M，可对应一向量 $\mathbf{u}(M)$，它等于那一瞬間在点 M 的質粒的速度。在每瞬間对全部点 M 的向量 $\mathbf{u}(M)$ 的全体構成一向量場，即运动質粒的速度場。

物質密度 $\mu(M)$ 和速度 $\mathbf{u}(M)$ 的乘积形成一个新的向量，称之为冲量密度。于是又得到一个新的向量場——冲量密度場。

將冲量密度再乘以体积單元 ΔV 所得到的乘积 $(\mu\Delta V)\mathbf{u}(M)=\Delta m\cdot\mathbf{u}(M)$，恰好是体积單元 ΔV 内質粒的冲量。

假定电荷在运动，那么，这种运动在物理学上称之为电流。速度 $\mathbf{u}(M)$ 与电荷密度 $q(M)$ 的乘积称为（体积的）电流密度。电流

密度向量記做 $\mathbf{j}(M)$，所对应的向量場称为电流場。乘电流密度以体积單元 ΔV 所得到的乘积 $\Delta \mathbf{J}(M)=\mathbf{j}(M)\Delta V$ 称为电流單元。

和質量运动不同，电流产生一个新的物理現象——磁力現象，这可以利用磁針作实驗而加以証实。根据比屋-薩发尔定律由电流單元 $\Delta \mathbf{J}(M)$ 在点 P 所产生的磁力 $\Delta \mathbf{H}(P)$ 在适当的單位制下可按如下的公式計算：

$$\Delta \mathbf{H}(P)=\frac{[\Delta \mathbf{J}(M), \mathbf{e}(M, P)]}{r^2(M, P)}=\frac{[\mathbf{j}(M), \mathbf{e}(M, P)]}{r^2(M, P)}\Delta V.$$

沿充满着电流的体积积分。我們就得到在 P 点的总磁力：

$$\mathbf{H}(P)=\iiint\limits_V \frac{[\mathbf{j}(M), \mathbf{e}(M, P)]}{r^2(M, P)}dv(M). \qquad (4)$$

类似于积分(4)的积分在其他数学物理的領域中也碰到过(例如在流体力学中流質运动的渦流現象)。所对应的向量場在那里有着完全不同的物理意义。

为着有可能用同一的数学观点来探討这些物理上不同的現象，对于每一个定义在体积 V 內的(連續的或分段連續的)向量場 $\mathbf{j}(M)$，我們都按以下的公式对应一个新的向量場 $\mathbf{H}(P)$。

$$\mathbf{H}(P)=\iiint\limits_V \frac{[\mathbf{j}(M), \mathbf{e}(M, P)]}{r^2(M, P)}dv(M), \qquad (5)$$

其中 V 是向量場 $\mathbf{j}(M)$ 所在的区域。(假若这个区域不是有界的，那么，为了使积分(5)存在需要附加条件，那就是場 $\mathbf{j}(M)$ 在無穷远处要减少得相当快，例如，当場 $\mathbf{j}(M)$ 在有界区域 V 以外等于零，则积分(5)显然存在)。場 $\mathbf{H}(P)$ 称为向量 $\mathbf{j}(M)$ 的力場。

注意：場 $\mathbf{H}(P)$ 在 $\mathbf{j}(M)$ 所在体积 V 的內外都存在。在体积內点这积分是广义的，但还是收斂的，因为分母中的量 $r(M, P)$ 以二次冪出現(附录引理 1)。

物理学中有时所考虑的电流是沿着無厚度的曲面流动，更多情况是沿着曲綫(导体)流动。在这种情况下要引入电流的綫密度或面密度的概念。

考虑沿着一个無粗細的导綫流动的电流，在点 M 电荷流速 $\mathbf{u}(M)$ 与电荷綫密度的乘积，称之为在点 M 的綫电流密度。在这种情况下，电流單元是指电流密度 $\mathbf{u}(M)q(M)$ 与导綫在点 M 处所取弧長單元 Δl 的乘积。

这时，对应的磁力場是按以下的公式來得

$$\mathbf{H}(P)=\int_L \frac{[\mathbf{j}(M), \mathbf{e}(M, P)]}{r^2(M, P)} dl(M). \tag{6}$$

这个积分对于在曲綫 L 外面的点 P 是存在的。

在一般的情况下，假定 $\mathbf{j}(M)$ 是任意綫性向量場（即沿着曲綫 L 定义的向量函数 $\mathbf{j}(M)$ 在每一点 M 的方向都切于 L)，那么对积分(6)我們也称为向量 $\mathbf{j}(M)$ 的力場。

我們再考虑积分(6)的一个重要的特殊情形，就是当 L 是一条直綫而向量 $\mathbf{j}(M)$ 在每一点 $M\in L$ 有定長 j。

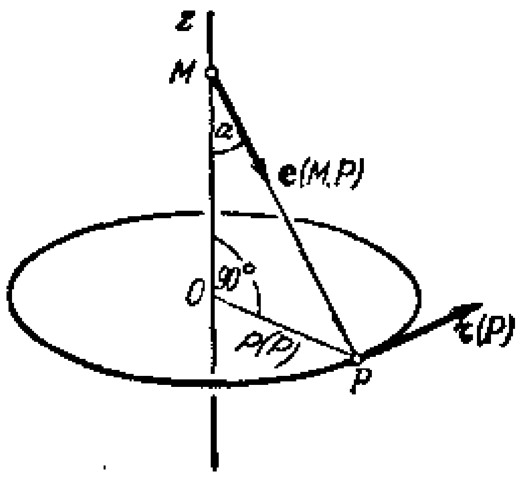

圖 1.

从物理学上來說，这种情况就对应于沿着無限長直导綫均匀流动的电流的磁場。

取导綫为 Oz 軸，其正向为电流流动的方向。由 P 作 Oz 軸的垂綫，其垂足取作坐标原点 O；这垂綫長度記做 $\rho(P)$。

若 α 为角度 OMP，由圖 1，立刻得到

$$[\mathbf{j}(M), \mathbf{e}(M, P)]=j \sin \alpha \cdot \boldsymbol{\tau}(P),$$

其中 $\boldsymbol{\tau}(P)$ 是單位向量它在 P 点切于以 O 为中心 OP 为半徑的圓

Γ, 圓所在的平面垂直于直綫 L。

其次 $$r(M,P)=\frac{\rho(P)}{\sin\alpha},\quad z=\rho(P)\operatorname{ctg}\alpha,$$

因之 $$dz=\frac{-\rho(P)d\alpha}{\sin^2\alpha}.$$

于是我們得到 $d\mathbf{H}$ 的公式

$$d\mathbf{H}=\frac{[\mathbf{j}(M),\mathbf{e}(M,P)]}{r^2(M,P)}dz=-\frac{j\sin\alpha\,d\alpha}{\rho(P)}\boldsymbol{\tau}(P). \qquad (7)$$

沿全直綫积分这表达式，实际上就是对等式(7)右方的 α 积分，其积分限从 π 到 0:

$$\mathbf{H}(P)=-\frac{j\boldsymbol{\tau}(P)}{\rho(P)}\int_{\pi}^{0}\sin\alpha\,d\alpha=\frac{2j}{\rho(P)}\boldsymbol{\tau}(P). \qquad (8)$$

因此，沿着直綫 L 定义的常向量 $\mathbf{j}(M)$ 的力場 $\mathbf{H}(P)$ 在每一点 P 的向量値可按公式(8)計算之。

注意，当点 P 离开 L 愈远，向量 $\mathbf{H}(P)$ 的長度愈減少，因为他是与 P 离开这直綫的距离的一次冪成反比的。

第二章　奥斯特罗格拉得斯基公式及其推广

在这一章里，我們要考虑多元函数积分学的基本公式——奥斯特罗格拉得斯基公式。这一公式連同其推广在此后研究数量場以及以坐标的可微函数为分量的向量場中是一个重要的工具。

奥氏公式　有名的單元函数的牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_a^b \frac{dX(x)}{dx}dx = X(b) - X(a) \tag{1}$$

是在函数 $X(x)$ 的微商存在而且連續的假定下，把这个微商的积分表示为 $X(x)$ 自身的边界值。轉到多元——例如三元——函数以及沿三維区域的积分，我們必須期望在右方出現函数在区域边界上的数值；自然，当計算这些函数值的时候它將写成沿着区域边界某种曲面积分的形式。因此，我們考虑沿着以 Σ 为边界的区域 V 的积分

$$I = \iiint_V \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x}dv = \iiint_V \frac{\partial X(x, y, z)}{\partial x}dx\,dy\,dz, \tag{2}$$

其中被积函数 $\frac{\partial X}{\partial x}(x, y, z)$ 是連續的；关于这个边界，暫时假定它与平行于 Ox 軸的每一条直綫至多交于二点。固定 y 及 z 对 x 求积分，再利用牛顿-莱布尼兹公式(1)，我們得到：

$$I = \iint_{S_{yz}} [X(B) - X(A)]dy\,dz.$$

其中 AB 是积分段(其端点与 y, z 的值有关)．而 S_{yz} 是体积 V 在平面 Oyz 上的投影(見圖 2)。考虑曲面 Σ 在点 A 及 B 的單元

$d\sigma(A)$ 及 $d\sigma(B)$，并且以 $\mathbf{n}(A)$ 及 $\mathbf{n}(B)$ 表示对应的外法綫的單位量，这时显然，

$$dydz(B)=d\sigma(B)\cos(\widehat{\mathbf{n}(B),\mathbf{i}}),$$

$$dydz(A)=d\sigma(A)\cos(\widehat{\mathbf{n}(A),-\mathbf{i}})=-d\sigma(A)\cos(\widehat{\mathbf{n}(A),\mathbf{i}}).$$

所以，积分 I 可表示为曲面积分的形式：

$$I=\iint\limits_{\Sigma}X(M)\cos(\widehat{\mathbf{n}(M),\mathbf{i}})d\sigma(M),$$

因此，所求的公式有如下的形式：

$$\iiint\limits_{V}\frac{\partial X(x,y,z)}{\partial x}dv=$$
$$=\iint\limits_{\Sigma}X(M)\cos(\widehat{\mathbf{n}(M),\mathbf{i}})d\sigma(M). \tag{3}$$

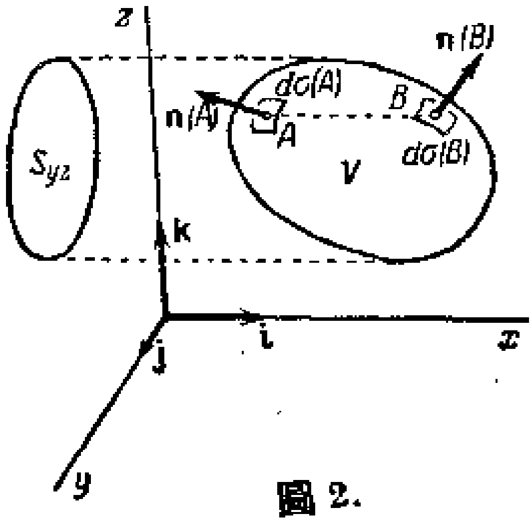

圖 2.

平行于 Ox 軸与区域 V 的边界至多相交二点的假定是容易除掉的。实际上，每一个区域都可以分解为有限个区域的和，使这些区域都满足我們的条件。对于一个区域写出公式(3)，然后相加，那么在左边我們得到沿整个区域 V 的积分；而在右边，凡是沿任何二分域的公共边界的积分恰好兩兩相消，因为对于这兩分域，在公共边界部分的法向量方向恰好相反；在它的和中剩下的只有沿这个区域自身的边界的积分。

写出与公式(3)类似的公式，其左方被积函数为 $Y(x,y,z)$ 关于 y 的偏微商以及 $Z(x,y,z)$ 关于 z 的偏微商。再將这些結果相加，我們就得到一个对称的公式，这个公式是由奥氏首先建立的(1834)：

$$\iiint\limits_V \left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\}dv=\oiint\limits_{\Sigma}[X\cos\alpha+Y\cos\beta+Z\cos\gamma]\,d\sigma, \tag{4}$$

其中 $\alpha=(\widehat{\mathbf{n},\mathbf{i}})$, $\beta=(\widehat{\mathbf{n},\mathbf{j}})$, $\gamma=(\widehat{\mathbf{n},\mathbf{k}})$ 是外法綫与对应坐标軸的正向的交角。

还要着重指出，在偏微商 $\frac{\partial X}{\partial x}$, $\frac{\partial Y}{\partial y}$, $\frac{\partial Z}{\partial z}$ 在区域 V 上存在而且連續的条件下这个公式才成立。

把公式(4)写成向量形式更为方便。引入向量場

$$\mathbf{R}(M)=X(M)\mathbf{i}+Y(M)\mathbf{j}+Z(M)\mathbf{k}.$$

由于單位法向量 $\mathbf{n}(M)$ 可分解为

$$\mathbf{n}(M)=\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\cos\beta+\mathbf{k}\cos\gamma, \tag{5}$$

所以等式(4)右边的被积函数是数量积 $(\mathbf{R}(M),\mathbf{n}(M))$。

因此，公式(4)可以写成如下的形式:

$$\iiint\limits_V \left\{\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right\}dv=\oiint\limits_{\Sigma}(\mathbf{n}(M),\mathbf{R}(M))\,d\sigma(M). \tag{6}$$

公式(4)左边也有向量的表达式；但是我們把这个問題擱到第五章再講。

奥氏公式的推广 令

$$\varphi(M),\ \mathbf{R}(M),\ \cdots$$

为某些数量場或向量場，而且对于每一个坐标具有連續的微商；再令 $\mathbf{p}$ 为任意一个向量，而 $T(\mathbf{p})=T(\mathbf{p};\varphi(M),\mathbf{R}(M)\cdots)$ 为某一表达式，对任意选擇的向量 $\mathbf{p}$ 有意义——数量的或向量的——并且关于点 M 的坐标具有連續的微商。我們还假設 $T(\mathbf{p})$ 是向量 $\mathbf{p}$ 的綫性函数，换句話說，对于任意的实数 α_1 及 α_2 有等式

$$T(\alpha_1\mathbf{p}_1+\alpha_2\mathbf{p}_2)=\alpha_1T(\mathbf{p}_1)+\alpha_2T(\mathbf{p}_2).$$

除了 $\mathbf{p}$ 还包括一个变元 $\varphi(M)$ 或 $\mathbf{R}(M)$ 的这种类型的重要表达式有下列几个:

а) $\mathbf{p}\cdot\varphi(M)$ （数积），

б) $(\mathbf{p}, \mathbf{R}(M))$ （数量积），

в) $[\mathbf{p}, \mathbf{R}(M)]$ （向量积）。

比較复杂的表达式可以包含形如 $\varphi(M)$ 及 $\mathbf{R}(M)$ 的某些变元，例如

$$(\mathbf{p}, \varphi(\mathbf{R})), [\mathbf{p}, [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]] \text{ 等等。}$$

我們还要把满足上述条件的每一个表达式 $T(\mathbf{p})$ 和某些微分表达式相比較。

令 $\mathbf{p}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$；那么根据綫性的性質

$$T(\mathbf{p})=aT(\mathbf{i})+bT(\mathbf{j})+cT(\mathbf{k}). \qquad (7)$$

按定义假定

$$T(\nabla)=\frac{\partial}{\partial x}T(\mathbf{i})+\frac{\partial}{\partial y}T(\mathbf{j})+\frac{\partial}{\partial z}T(\mathbf{k}), \qquad (8)$$

这只要在分解式 (7) 中將向量 $\mathbf{p}$ 的坐标以对应变元的微分符号代替。

符号 ∇（納布拉）[1] 称为汉弥尔登微分算子。

于是对算子 а)—в) 我們有：

а) $\mathbf{p}\varphi(M)=a\mathbf{i}\cdot\varphi+b\mathbf{j}\cdot\varphi+c\mathbf{k}\cdot\varphi$，因之

$$\nabla\varphi=\frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}, \varphi)+\frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}, \varphi)+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}, \varphi)=$$

$$=\mathbf{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial \varphi}{\partial z}. \qquad (9)$$

б) 如果 $\mathbf{R}=\{X, Y, Z\}$，那么 $(\mathbf{p}, \mathbf{R})=aX+bY+cZ$，因之

$$(\nabla, \mathbf{R})=\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}. \qquad (10)$$

в) 如果 $\mathbf{R}=\{X, Y, Z\}$，那么

$$[\mathbf{P}, \mathbf{R}]=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a & b & c \\ X & Y & Z \end{vmatrix}=\mathbf{i}(bZ-cY)+\mathbf{j}(cX-aZ)+\mathbf{k}(aY-bX),$$

---

[1] 納布拉系一种古代乐器形如倒翻三角形。

而

$$[\mathbf{V},\mathbf{R}]=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=\mathbf{i}\left(\frac{\partial Z}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial z}\right)+\mathbf{j}\left(\frac{\partial X}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial x}\right)+\mathbf{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right). \tag{11}$$

在今后各章中我們將研究所得到的表达式的几何及物理意义。这里我們只限于闡明一个(当然是很主要的)情况。在表达式 $T(\nabla)$ 中显然出現关于变元 x,y,z 的微商，因此初看起来好像 $T(\nabla)$ 本質上和坐标軸的选擇有关系。但是实际上量 $T(\nabla)$ 是和坐标軸的选擇無关；我們的証明是这样的：予 $T(\nabla)$ 以新定义，在这里軸 Ox, Oy, Oz 根本就不出現。

首先，假定值 $T(\mathbf{p})$ 是数量。作向量函数：

$$\mathbf{R}(M)=\{T(\mathbf{i}),\ T(\mathbf{j}), T(\mathbf{k})\}.$$

对这个函数应用奥氏公式(4)，其中

$$X=T(\mathbf{i}),\ \ Y=T(\mathbf{j}),\ \ Z=T(\mathbf{k}),$$

我們得到等式

$$\iiint\limits_V\left\{\frac{\partial T(\mathbf{i})}{\partial x}+\frac{\partial T(\mathbf{j})}{\partial y}+\frac{\partial T(\mathbf{k})}{\partial z}\right\}dv=$$

$$=\oiint\limits_\Sigma\{T(\mathbf{i})\cos\alpha+T(\mathbf{j})\cos\beta+T(\mathbf{k})\cos\gamma\}d\sigma.$$

这个等式对边界为 Σ 的任意区域 V 都成立，利用 $T(\mathbf{p})$ 的綫性性質和公式(5)，我們得到：

$$T(\mathbf{i})\cos\alpha+T(\mathbf{j})\cos\beta+T(\mathbf{k})\cos\gamma=$$

$$=T(\mathbf{i}\cos\alpha+\mathbf{j}\cos\beta+\mathbf{k}\cos\gamma)=T(\mathbf{n}),$$

再由于 $T(\nabla)$ 的定义(8)，得到

$$\iiint\limits_V T(\nabla)\,dv=\oiint\limits_\Sigma T(\mathbf{n})\,d\sigma. \tag{12}$$

公式(12)称为奥氏公式的推广。如果取 $T(\mathbf{p})=(\mathbf{p},\mathbf{R})$，其中

$\mathbf{R}=\{X,Y,Z\}$，它就变为普通的奥氏公式(6)。

若等式（12）的两边除以区域的体积 V，则当体积 V 收缩于一任意的定点 P 时，左边有極限等于 $T(\nabla)$ 在点 P 的数值。等于左边的右边也有这个極限；因之在点 P

$$T(\nabla)=\lim_{V\to P}\frac{1}{V}\oiint\limits_{\Sigma}T(\mathbf{n})d\sigma. \tag{13}$$

等式(13)的右边，显然，与坐标系統的选择無关。結果，表示 $T(\nabla)$ 也与坐标系統的选择無关。这就是所要証明的。

現在假定 $T(\mathbf{p})$ 是向量值；在这种情况我們特写作 $\mathbf{T}(\mathbf{p})$。按軸分解 $\mathbf{T}(\mathbf{p})$，我們就得到，例如，以下的表达式：

$$\mathbf{T}(\mathbf{p})=T_1(\mathbf{p})\mathbf{i}+T_2(\mathbf{p})\mathbf{j}+T_3(\mathbf{p})\mathbf{k}.$$

每一个数量函数 $T_1(\mathbf{p})$, $T_2(\mathbf{p})$, $T_3(\mathbf{p})$，显然满足所述的条件。因之，对于它們的每一个推广的奥氏公式(12)都成立

$$\left.\begin{aligned}\iiint\limits_{V}T_1(\nabla)dv&=\oiint\limits_{\Sigma}T_1(\mathbf{n})d\sigma,\\ \iiint\limits_{V}T_2(\nabla)dv&=\oiint\limits_{\Sigma}T_2(\mathbf{n})d\sigma,\\ \iiint\limits_{V}T_3(\nabla)dv&=\oiint\limits_{\Sigma}T_3(\mathbf{n})d\sigma.\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

將公式（14）每一个分别乘以 $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ 再相加；我們就得到对于向量表达式 $\mathbf{T}(\mathbf{p})$ 的推广的奥氏公式

$$\iiint\limits_{V}\mathbf{T}(\nabla)dv=\oiint\limits_{\Sigma}\mathbf{T}(\mathbf{n})d\sigma. \tag{15}$$

从此，和上面一样，除以 V 再取極限，我們就得到

$$\mathbf{T}(\nabla)=\lim_{V\to P}\frac{1}{V}\oiint\limits_{\Sigma}\mathbf{T}(\mathbf{n})d\sigma. \tag{16}$$

因此，就是在向量表达式 $\mathbf{T}(\mathbf{p})$ 的情况，所对应的微分表达式 $\mathbf{T}(\nabla)$ 也与坐标系統的选择無关。

第三章　区域的可加函数及其密度

这一章的基本公式 (1) 在某些意义上与第二章推广的奥氏公式是类似的。但是，奥氏公式只在出現其中的数量場或向量場是可微分的假定下才有意义的，而公式 (1) 却不需要这种假定。这就使得我們此后研究数量場和向量場并不限制在可微場的范圍内。

我們再回過来定义第一章的質量密度。在那里，我們定义在点 P 的質量密度为

$$\lim_{\Delta V\to P}\frac{\Delta m}{\Delta V},$$

其中 Δm 表示体积 ΔV 内所含的質量，而極限过程就是把体积 ΔV 收縮于点 P。

同样可作出全面分布电荷密度的定义：我們只要先作比 $\dfrac{\Delta q}{\Delta V}$ (Δq 是在体积 ΔV 内所含的电荷量)，再求它在体积 ΔV 收縮于点 P 时的極限。

因此，在第一和第二情况下的密度定义都是以同样方式建立的。

这就表示有可能在上述兩种領域内——在力学(質量)及电学(电荷)内，甚至于像水力学，一般的連續介質力学内——应用同一的数学公式，而不依賴于这个或那个物理理論的具体内容。

我們要对“給定了質量的全面分布”(或“电荷的全面分布”)这話所表示的意思，作准确而簡潔的陈述。我們要問：像这样的“全面分布”究竟是怎样从量的方面来描述的？显然，“質量的全面分布”只有在以下情况下才算是給定了；那就是有了这个分布的数据后我們可以定义空間任意区域中所包含的質量。而且反过来，如果我們知道了空間每一区域中所含的質量，“給定了質量的全面分布”的条件也就都具备了。于是，給定質量的全面分布与給定函数

$m(V)$是等价的，这 $m(V)$代表任意区域 V 内所含的質量。如果在古典分析中我們处理的是点函数（例如对于三元函数即三維空間的点的函数），那么我們現在要处理的函数就有本質上的不同，它是以区域为变元的函数。要注意在給定質量的全面分布时，不必考虑所說的区域是开区域或者是附上一部分边界的区域（因为区域的边界沒有厚度而在它这部分上的質量是零。因此，今后在定义区域函数的时候，將不考虑給定的区域是开的还是附有一部分边界的(或甚至附有全部边界)。

質量分布函数 $m(V)$显然必須具有以下的性質。如果V_1及V_2是兩个無公共内点的区域(例如具公共边界的兩个立方体)，并且 V_1+V_2 是它們的和(由这兩个立方体組成的直角平行六面体)，那么

$$m(V_1+V_2)=m(V_1)+m(V_2),$$

这表示質量不变的現象。同样地，在区域 V 中給定电荷量的电荷分布函数 $q(V)$也必須具有类似的性質:

$$q(V_1+V_2)=q(V_1)+q(V_2).$$

一切的区域函数 $\Phi(V)$，如果对于任意兩个無公共内点的区域 V_1, V_2 恒滿足条件:

$$\Phi(V_1+V_2)=\Phi(V_1)+\Phi(V_2),$$

就称之为区域的可加函数。于是，質量和电荷分布函数就是区域的可加函数的实例。

現在要仿照質量密度来定义区域函数 $\Phi(V)$ 在給定点M的密度。考虑，当 $n\to\infty$ 时，收縮于点M的一串区域 ΔV_n。这里要适当地确定“收縮于点M”这一詞句的意义。

我們將用以下的意义来理解它：区域 ΔV_n 在其内部或其边界包含点 M，且它們自身全都包含在以 M 为中心 ρ_n 为半徑的球 $U_n(M)$内部，这里当 $n\to\infty$ 时，ρ_n 趋于零。

对于每一个区域 ΔV_n，我們可以定义函数 $\Phi(V)$的平均密度作

为比:

$$\varphi(\Delta V_n)=\frac{\Phi(\Delta V_n)}{\Delta V_n}.$$

其次，我們还假定数列$\varphi(\Delta V_n)$，当$n\to\infty$时有極限$\varphi(M)=\lim\limits_{n\to\infty}\varphi(\Delta V_n)$。这个極限与收縮于点$M$的序列$\Delta V_n$的选擇無关。这个值$\varphi(M)$，我們就称为函数$\Phi(V)$在点$M$的(真正)密度。

变动点M，我們就得到函数$\varphi(M)$的数量場。我們假定，除了有限个曲面以外到处都有定义且是連續的。而通过这些曲面时$\varphi(M)$可能發生不連續的变化(例如对質量的全面分布来説，由充滿質量的区域过渡到真空时，就产生了不連續的密度)。

当然，我們沒有理由希望一切区域可加函数都有确定的密度函数$\varphi(M)$，我們立刻就要指出具有这个性質的可加函数类。

假設給定的一个分段連續函数$f(M)$，而区域函数$\Phi(V)$作如下定义:

$$\Phi(V)=\iiint\limits_V f(M)dv(M).$$

那么，按中值定理，

$$\frac{\Phi(\Delta V)}{\Delta V}=\frac{1}{\Delta V}\iiint\limits_{\Delta V}f(M)dv(M)$$

当体积ΔV收縮于$f(M)$的連續点M_0时，它就有極限值$f(M_0)$。因此，在这种情况可加函数$\Phi(V)$显然具有密度函数$\varphi(M)$。这函数在$f(M)$的連續点与$f(M)$相等。

往后我們还要表明上述的例子帶有一般的性質。原来，区域的可加函数$\Phi(V)$在一般情况可以由它的密度$\varphi(M)$来建立，只要像我們所已經假定的一样，这个函数$\varphi(M)$是連續的或至少是分段連續的。我們今証明定理:

定理 3.1: 如果区域可加函数$\Phi(V)$的密度$\varphi(M)$是連續的(或分段連續)，那么，对于任意一个区域V

$$\Phi(V)=\iiint\limits_V \varphi(M)dv(M). \qquad (1)$$

就質量分布而說，这定理肯定了包含在某一区域 V 內的質量可以从質量密度沿着这个区域 V 的积分而得到的。

定理 3.1 的証明是基于以下的兩个引理。

引理 1：假定区域 V 分为部分区域 $V_1, V_2, \cdots, V_k$，而可加函数 $\Phi(V)$ 在每一区域 $V_j(j=1,2,\cdots k)$ 的平均密度的絕对值小于某一数値 μ，則在区域 V 函数 $\Phi(V)$ 的平均密度也小于 μ。

［証明］ 从不等式

$$\frac{|\Phi(V_1)|}{V_1}<\mu,\quad \frac{|\Phi(V_2)|}{V_2}<\mu,\ \cdots,\ \frac{|\Phi(V_k)|}{V_k}<\mu,$$

得到

$$|\Phi(V_1)|<\mu V_1,\ |\Phi(V_2)|<\mu V_2,\ \cdots,\ |(V_k)|<\mu V_k;$$

因之，

$$\left|\Phi(V)\right|=\left|\sum_{j=1}^{k}\Phi(V_j)\right|\leqslant\sum_{j=1}^{k}\left|\Phi(V_j)\right|<\mu\sum_{j=1}^{k}V_j=\mu V,$$

从此，

$$\frac{|\Phi(V)|}{V}<\mu,$$

这就是所要証明的。

引理 2. 如果可加函数 $\Phi(V)$ 的密度 $\varphi(M)$ 恒等于零，那么函数 $\Phi(V)$ 自身对于每一区域 V 也等于零。

［証明］ 假定对于某一个区域 V_0，$\Phi(V_0)\neq 0$。那么函数 $\Phi(V)$ 在区域 V_0 中的平均密度不等于零；以 μ 表示这个平均密度的絕对值。我們將区域 V_0 分为直徑小于 1 的部分区域。为此，可以用一系平行于坐标面的平面来分割 V_0，根据引理 1，在这些部分区域中，至少有一个区域——記做 V_1——使得在其中函数 $\Phi(V)$ 的平均密度的絕对值不小于 μ。仿照这样，再將区域 V_1 分为直徑小于 1/2 的部分区域，在这些区域中，我們可找到一个区域，設为 V_2，在其中函数 $\Phi(V)$ 的平均密度的絕对值还是不小于 μ。这种方法可

以無限制地繼續进行下去。

結果，我們得到一串区域 $V_0\supset V_1\supset V_2\cdots$ 其大小趋于零，而且在其中每一个区域函数 $\Phi(V)$ 的平均密度的絕对值不小于 μ。由于所有这些区域都是閉的，按分析中所熟悉的定理，它們收縮于某一点 M_0。依照条件函数 $\Phi(V)$ 在点 M_0 的密度等于零。

因为函数 $\Phi(V)$ 的密度是从平均密度的極限求得，而在这串区域 $V_0\supset V_1\supset\cdots$ 平均密度不趋于零。所以与上述条件矛盾。从此推出不等式 $\Phi(V)_0\neq 0$ 是不可能的。

現在来証明定理 3.1。

首先，假定給定的函数 $\varphi(M)$ 是連續的。由函数 $\varphi(M)$ 我們造一个区域可加函数

$$\Psi(V)=\iiint\limits_V \varphi(M)dv(M).$$

我們已經講过，函数 $\Psi(V)$ 的密度与函数 $\varphi(M)$ 相等。現在再考慮区域可加函数 $\Psi(V)-\Phi(V)$。由于減項与被減項的密度都是 $\varphi(M)$，所以其差的密度到处等于零。由引理 2。这个差自身恒等于零；于是对于任意区域 V

$$\Phi(V)=\Psi(V)=\iiint\limits_V \varphi(M)dv(M), \qquad (2)$$

这就是所要証明的。

如果函数 $\varphi(M)$ 不是連續的而是分段連續的，那么我們把区域 V 可以分为有限个区域使得在每一个区域中函数 $\varphi(M)$ 是連續的。在每个区域中，定理已經証明了是正确的。把这些对于每一个部分区域成立的結果結合起来我們就得到等式 (2) 在一切区域 V 中都成立。

这样子定理 3.1 就完全証明了。

注意：当說明給定区域函数 $\Phi(V)$ 的密度存在性的时候，会产生一个問題，是否不要考慮对于任意收縮于点 M_0 的区域序列函数 $\Phi(V)$ 的值，而是仅仅对于某一定形

式的区域序列，例如立方形或球形。以下的例子指出，要限制区域为某一定形式，一般地說，是不可能的

令 U_0 为一固定的球。按以下法則構造区域函数 $\Phi(V)$：首先假定区域 V 完全包含在球 U_0 中；如果区域 V 与球 U_0 的边界無公共部分，則取 $\Phi(V)=0$，如果区域 V 与球的边界有面积为 σ 的公共部分，那么取 $\Phi(V)=\sigma$。現在再假定区域 V 在球 U_0 的外面；如果其边界与球 U_0 的边界無公共部分，那末和前面一样取 $\Phi(V)=0$，如果他們有面积为 σ 的公共部分那么取 $\Phi(V)=-\sigma$。

最后，假定 V 有球 U_0 的外点和内点，那么把 V 表示为和 V_1+V_2，其中 V_1 是在球 U_0 的内部而 V_2 是在球 U_0 的外部；在这种情况取 $\Phi(V)=\Phi(V_1)+\Phi(V_2)$。很容易驗証所造的区域函数是可加的。現在再来計算 $\Phi(V)$ 的密度，所用的 ΔV 不是一切可能的区域而是那些与球 U_0 有正值面积的公共边界的区域——例如，只用多面体。由于对这些区域 $\Phi(V)=0$，所以我們得到这函数的密度到处等于零。实际上，在球 U_0 边界上的点函数 $\Phi(V)$ 的密度是不存在的。因为如果利用那些与球 U_0 有正值面积的公共部分的区域，那么平均密度的序列就沒有極限。

在某些物理問題中，除了考慮体积内質量或电荷的全面分布外，常常还要考慮另一情况，那就是質量(电荷)是在某一曲面或曲綫上的連續分布。例如，大家都知道的球容电器的电荷是完全分布在其表面上。在关于挂摆振动的力学問題是把摆当作無厚度的直綫的簡單情况来解决。

在这些場合，要引入对应于質量或电荷的“面密度”及“綫密度”的概念，这些概念的引进和电荷(質量)的体积密度是完全类似的。

例如，我們考慮分布在曲面 Σ 上的質量，对于这曲面上給定的單元 $\Delta\Sigma$ 若在其上附有 Δm 克質量，則定义質量的曲面平均密度为比 $\Delta m:\Delta\Sigma$。

当單元 $\Delta\Sigma$ 减小而趋于一定点 $M\in\Sigma$，取其極限我們得到在点 M 的質量的真正曲面密度

$$\mu(M)=\lim\frac{\Delta m}{\Delta\Sigma}.$$

同样地，对于分布在曲綫 L 的質量在一点 $M\in L$ 的真正曲綫密度 $\mu(M)$ 是定义为比 $\Delta m:\Delta l$ 的極限，其中 Δm 为附在曲綫 L 的

單元 Δl 上的質量，而極限是当單元 Δl 收縮于点 M 时求得的。

为了进行这种对象的数学研究，引入在給定的曲面或給定的曲綫上的区域可加函数，所謂在給定的曲面上（或在給定的曲綫上）区域函数 $\Phi(\Sigma)$（在曲綫上区域是这个曲綫的弧或是这样有限个弧的和）是可加的，是指对于任意兩个沒公共內点的区域 Σ_1 和 Σ_2，下面的等式成立：

$$\Phi(\Sigma_1+\Sigma_2)=\Phi(\Sigma_1)+\Phi(\Sigma_2).$$

当然，在曲面或曲綫的情况，內点是对于这个曲面或曲綫而說，而絕非关于包含这曲面（曲綫）的空間。

在曲面上区域函数 $\Phi(\Sigma)$ 的密度 $\varphi(M)$ 是定义为比

$$\varphi(\Delta\Sigma)=\frac{\Phi(\Delta\Sigma)}{\Delta\Sigma}$$

的極限，和空間的情况一样，这極限是在区域 $\Delta\Sigma$ 收縮于点 M 的情况求得。下面与定理 3.1 类似的定理成立，其証明也完全一样：

定理 3.2. 如果在曲面上区域可加函数 $\Phi(\Sigma)$ 的密度 $\varphi(M)$ 是連續的（或分段連續的），那么对于任一区域 Σ

$$\Phi(\Sigma)=\iint\limits_{\Sigma}\varphi(M)d\sigma(M).$$

对于曲綫的类似定理和古典的牛頓-萊布尼茲定理相同。这古典定理联系着單变数函数的积分和微商。

第四章　数量場的梯度

考虑定义在区域 V 中的数量場 $\varphi(M)$；令 M_0 为这个区域的某一定点。

如果沿着任意一条曲綫 l 点 M 由点 M_0 移动，那么数量 $\varphi(M)$ 的値，一般地說，將要改变，要描述沿着曲綫 l 函数 $\varphi(M)$ 变化的情况，我們現在引入关于“場 $\varphi(M)$ 沿曲綫 l 的微商”的概念。

在曲綫 l 上引入“自然参数”即从点 M_0 計算的弧長 Δl。令 $M_1 \neq M_0$ 为曲綫 l 上由弧長 $\Delta l \neq 0$ 所定义的某一点。作比

$$\frac{\Delta \varphi}{\Delta l} = \frac{\varphi(M_1) - \varphi(M_0)}{\Delta l}$$

并且观察当点 M_1 趋近于点 M_0 时它的变化。假定当 $M_1 \to M_0$ 时，这个比存在一个極限。知道这个極限，我們就可以对于函数 $\varphi(M)$ 沿着曲綫 l 的性質做出确定的結論。例如，当極限是正的，那么在这条曲綫上点 M_0 的近旁不等式 $\varphi(M) > \varphi(M_0)$ 成立；如果，它是負的，不等式 $\varphi(M) < \varphi(M_0)$ 就成立。以符号 $\frac{\partial \varphi}{\partial l}$ 記上述的極限并称之为場 $\varphi(M)$ 在点 M_0 沿着曲綫 l 的微商。

当然，并不是对一切函数 $\varphi(M)$ 沿着曲綫 l 場 $\varphi(M)$ 的微商都存在。我們現在就要指出一类重要的場。这种場在給定的一点 M_0 沿着通过 M_0 的每一曲綫的微商都存在。

假定在直角坐标 x, y, z 中当由点 M_0 移动到任意一点 M_1 的时候，函数 $\varphi(M)$ 的改变量可以表示为公式

$$\Delta \varphi \equiv \varphi(M_1) - \varphi(M_0) = A\Delta x + B\Delta y + \\ + C\Delta z + \varepsilon(M_0, M_1) r(M_0, M_1), \qquad (1)$$

其中 A, B, C 是某些常数（与点 M_1 的选擇無关），Δx，Δy，Δz 是向

量$\overrightarrow{M_0M_1}$在坐标軸上的投影。而函数$\varepsilon(M_0, M_1)$当点M_1趋近于点M_0时趋于零。

第一項$A\Delta x+B\Delta y+C\Delta z$确定函数改变量的主値部分；我們也看到这个主値部分关于坐标的改变量是綫性的。

分解式(1)的出現和函数$\varphi(M)$的偏微商的存在有着一定的联系。事实上，如果考虑由点M_0按Ox軸方向移动，使得$\Delta y=$ $=\Delta z=0$，那么得到：

$$\Delta\varphi=A\Delta x+\varepsilon(M_0, M_1)|\Delta x|,$$

結果

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}=A\pm\varepsilon(M_0, M_1);$$

当$\Delta x\to 0$时，在等式右边趋于一極限，由此推出偏微商$\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x}$的存在和等式

$$A=\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x}.$$

同样地

$$B=\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial y},\quad C=\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial z}.$$

因此，在分解式(1)中的数A, B, C是由函数$\varphi(M)$本身唯一的决定。

特别是，我們看到，分解式(1)的成立可以推出函数$\varphi(M)$在点M_0的偏微商的存在。大家知道，这个定理之逆在对函数$\varphi(M)$作更强的限制下才成立：假定函数$\varphi(M)$在点$M=M_0$的偏微商$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial y}$, $\frac{\partial\varphi}{\partial z}$都存在而且連續，那么分解式(1)成立。[1]

在点M_0的近旁可分解为(1)的一切函数$\varphi(M)$称为在点M_0可微分的。我們要証明在点M_0可微分的函数$\varphi(M)$在該点沿着任意曲綫l都有微商。

令$x=x(\Delta l)$, $y=y(\Delta l)$, $z=z(\Delta l)$是以Δl为"自然参数"的曲綫l的参数方程。考虑向量$\tau=\{x'(0), y'(0), z'(0)\}$。它表示曲

[1] 可参考Г.М.菲赫金哥利次"微积分学教程"1948，第一卷428頁。

綫 l 在点 M_0 的單位切綫向量；因此 $\tau=\{\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma\}$，其中 α, β, γ 是向量 τ 与坐标軸的夾角。

在公式(1)中所載明的改变量 $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ 可表示为形式

$$\Delta x=x'(0)\Delta l+\varepsilon_1(\Delta l)\Delta l=\Delta l\cos\alpha+\varepsilon_1(\Delta l)\Delta l,$$

$$\Delta y=y'(0)\Delta l+\varepsilon_2(\Delta l)\Delta l=\Delta l\cos\beta+\varepsilon_2(\Delta l)\Delta l,$$

$$\Delta z=z'(0)\Delta l+\varepsilon_3(\Delta l)\Delta l=\Delta l\cos\gamma+\varepsilon_3(\Delta l)\Delta l,$$

其中 $\varepsilon_1(\Delta l), \varepsilon_2(\Delta l), \varepsilon_3(\Delta l)$ 与 Δl 同时趋于零。

把这些式子代入(1)，再除以 Δl 我們就得到：

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}=A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma+A\varepsilon_1+B\varepsilon_2+C\varepsilon_3+$$

$$+\varepsilon(M_0, M_1)\frac{r(M_0, M_1)}{\Delta l}. \tag{2}$$

当 $\Delta l\to 0$ 时，$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon(M_0, M_1)$ 都趋于零，而弦 $r(M_0, M_1)$ 与弧 Δl 的比趋于 1。所以表达式(2)当 $\Delta l\to 0$ 时有極限

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=A\cos\alpha+B\cos\beta+C\cos\gamma; \tag{3}$$

于是，可微分的函数 $\varphi(M)$ 在点 M_0 对于任意曲綫 l 的微商 $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ 确实是存在的，而且可按公式(3)以角度 α, β 及 γ 表达出来。

特別是，我們看到，对于从点 M_0 出發而具有同一切綫的所有曲綫 l，仍有同一微商 $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ 的值，因为微商 $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ 只是和角度 α, β, γ 有关。因此，代替“沿給定曲綫的微商”这个句子，人們常常說“沿着給定方向的微商”。它就是指沿着任意由点 M_0 按給定的方向出發的曲綫的微商。

表达式(3)的右边可以表荣为二个向量的数量积：一个的坐标是 A, B, C，而另一个的坐标是 $\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma$。第一个向量仅仅由函数 $\varphi(M)$ 和点 M_0 决定，而与方向 l 的选擇無关。以 $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ 为坐标的第二个向量是單位向量 τ 而由方向 l 决定而与函数 $\varphi(M)$ 無关。

現再引入以下的定义。

向量 $\mathbf{P}$ 称为函数 $\varphi(M)$ 在点 M_0 的梯度，如果在点 M_0 函数 $\varphi(M)$ 沿任何曲綫 l 的微商存在，而且这个微商可表示为公式

$$\frac{\partial\varphi}{\partial l}=(\mathbf{P},\boldsymbol{\tau}), \tag{4}$$

其中 $\boldsymbol{\tau}$ 是由方向 l 所确定的單位向量。

向量 $\mathbf{P}$ 記作 grad $\varphi(M_0)$[①]。

特别是，我們还知道，在点 M_0 可微分的函数 $\varphi(M)$ 具有梯度

$$\operatorname{grad}\varphi(M_0)=\left\{\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial x},\ \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial y},\ \frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial z}\right\}.$$

公式(3)現在可以写成如下形式

$$\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial l}=(\operatorname{grad}\varphi(M_0),\boldsymbol{\tau}).$$

只要假定 grad $\varphi(M_0)\neq 0$，那么这个公式就能够引出关于函数 $\varphi(M)$ 在点 M_0 的某一鄰域內沿着每一方向的性質具有确定的結論。

如果以 ω 表示上述二向量 $\boldsymbol{\tau}$ 及 grad $\varphi(M_0)$ 的交角，那么，由数量积定义，我們得到

$$\frac{\partial\varphi(M_0)}{\partial l}=|\operatorname{grad}\varphi(M_0)|\cos\omega. \tag{5}$$

由公式(5)可引出以下的結論。

1. 在向量 grad $\varphi(M_0)$ 的方向，微商 $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ 取最大値，那就是等于 $|\operatorname{grad}\varphi(M_0)|$ (因为对于这个方向 $\omega=0$, $\cos\omega=1$)；在相反的方向，微商 $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ 取値 $-|\operatorname{grad}\varphi(M_0)|$ (因为 $\cos\omega=-1$)，按絕对値来説还是最大。

---

① 只可能有一个向量 $\mathbf{P}$ 滿足(4)，假定有兩个向量 $\mathbf{P}_1$、$\mathbf{P}_2$，那么对每一个 $\boldsymbol{\tau}$，$(\mathbf{P}_1,\boldsymbol{\tau})=(\mathbf{P}_2,\boldsymbol{\tau})$ 即 $(\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2,\boldsymbol{\tau})=0$. 取 $\boldsymbol{\tau}$ 与 $\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2$ 共綫，得 $\mathbf{P}_1-\mathbf{P}_2=0$. 因之 $\mathbf{P}_1=\mathbf{P}_2$.

2. 沿着与梯度方向正交的一切方向，$\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ 的值等于零。

3. 沿着其余方向微商 $\frac{\partial\varphi}{\partial l}$ 取不等于零的值，而且其絕对值小于$|\mathrm{grad}\ \varphi(M_0)|$。

性質 1-3 又可以引出梯度的新定义，它可以陈述于后。

定理 4.1 場 $\varphi(M)$的梯度是由点 M_0 出發的一个向量，沿着它的方向函数 $\varphi(M)$ 增加得最快，而且它的模等于場 $\varphi(M)$ 在这个方向的微商。

在許多場合这个新的定义，使得利用簡單的几何結構就能計算出梯度。为此，我們引入数量場的等量面或者更确切的說，等量集合。

滿足条件 $\varphi(M)=a$ (a 为給定的常数) 的点 M 的全体称为函数 $\varphi(M)$的等量集合(或 a-等量)。在許多主要的場合，等量集合就是某些曲面。我們假定在点 M_0 的鄰域內等量集合 $\varphi(M)=$ $=\varphi(M_0)$ 是光滑的曲面。以 Σ 表示它。在这个曲面上，就点 M_0 的每一方向可以引出曲綫 l，例如，对应的平面截綫。因为对于任意的这种曲綫 $\Delta\varphi=0$，所以 $\frac{\partial\varphi}{\partial l}=\lim\frac{\Delta\varphi}{\Delta l}=0$，由此得出，在点 M_0 与这些曲綫任意一个相切的向量正交于梯度向量。再假定 $\mathrm{grad}\ \varphi(M_0)\neq0$；那末切于上述切綫的几何軌迹構成一个正交于梯度向量的平面。因为这个平面是由切于曲面上的曲綫的切綫構成，它一定是曲面的切面；于是，等量面的切面与梯度向量正交。如果知道了等量面，那末就可以知道梯度的方向恰好是垂直于等量面的切面的方向；此外，在垂直綫的兩个可能方向上我們来取定函数 $\varphi(M)$增加的方向。

例 1：令 $r=r(M,O)$表示点 M 与定点 O 的距离。要求形如 $\varphi(M)=f(r)$的数量場，其中 $f(r)$是一个可微函数。

解：函数 $f(r)$ 的等量面是以点 O 为中心的球面。因此，梯度向量的方向是球面的法綫方向，也就是半徑 OM 的方向。

函数 $f(r)$在 r 增加方向的微商等于 $f'(r)$。如果 $f'(r)>0$, 那么当 r 增大时，函数 $f(r)$增加; 如果$f'(r)<0$,$f(r)$就减少，因此，場 $f(r)$的梯度方向，当 $f'(r)>0$, 是指 r 增大的一側; 而当 $f'(r)<0$, 是指 r 减少的一側，梯度的絕对値等于 $|f'(r)|$。这些結果可以統一于公式

$$\operatorname{grad} f(r)=f'(r)\mathbf{e}(O, M),$$

其中 $\mathbf{e}(O, M)$是由点 O 到点 M 的單位向量。

特別当 $f(r)=r$ 时，我們得到:

$$\operatorname{grad} r=\mathbf{e}(O, M). \tag{6}$$

同理，对于$f(r)=\dfrac{1}{r}$, 就得到:

$$\operatorname{grad} \frac{1}{r}=-\frac{1}{r^2}\mathbf{e}(O, M). \tag{7}$$

这个梯度的向量場与分布在点 O 的單位質量所引起的引力場是相同的(第二章)。

在轉到下一个例子以前，我們要注意以下的情况。

我們知道很多数量場，例如一切可微的数量場可以对应一个向量場——梯度場。特別重要的是这个运算(得出梯度)是綫性运算: 換句話說，如果 $\varphi_1(M)$和 $\varphi_2(M)$是兩个具有梯度的数量場，而 α_1 及 α_2 是兩个常数，那么場 $\alpha_1\varphi_1+\alpha_2\varphi_2$ 也具有梯度，而且

$$\begin{aligned}&\operatorname{grad}(\alpha_1\varphi_1(M)+\alpha_2\varphi_2(M))=\\&\qquad=\alpha_1\operatorname{grad} \varphi_1(M)+\alpha_2 \operatorname{grad} \varphi_2(M).\end{aligned} \tag{8}$$

事实上，如果函数 $\varphi_1(M)$和 $\varphi_2(M)$沿着方向 l 有微商，那么函数 $\varphi(M)=\alpha_1\varphi_1(M)+\alpha_2\varphi_2(M)$ 沿着这方向也有微商; 而且当 $\varphi_1(M)$和 $\varphi_2(M)$具有梯度的时候，那么，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\varphi(M)}{\partial l}&=\alpha_1\frac{\partial\varphi_1(M)}{\partial l}+\alpha_2\frac{\partial\varphi_2(M)}{\partial l}=\alpha_1(\operatorname{grad} \varphi_1(M),\boldsymbol{\tau})+\\&+\alpha_2(\operatorname{grad} \varphi_2(M),\boldsymbol{\tau})=(\alpha_1 \operatorname{grad} \varphi_1(M)+\alpha_2 \operatorname{grad} \varphi_2(M),\boldsymbol{\tau}),\end{aligned}$$

从这里看出对于向量 $\mathbf{P}=\alpha_1 \operatorname{grad} \varphi_1(M)+\alpha_2 \operatorname{grad} \varphi_2(M)$, 場

$\varphi(M)$的梯度的定义是滿足的。所以，P 就是場 $\varphi(M)$的梯度。

例 2：任意分布質量的力場是某一数量場的梯度。首先，考慮分布在点 $M_1, M_2, \cdots, M_n$ 的有限个点質量 $m_1, m_2, \cdots, m_n$ 的引力場，

$$\mathbf{F}(P)=\frac{m_1}{r^2(P, M_1)}\mathbf{e}(P, M_1)+\cdots+\frac{m_n}{r^2(P, M_n)}\mathbf{e}(P, M_n).$$

由例 1 的結果

$$\frac{m_j}{r^2(P, M_j)}\mathbf{e}(P, M_j)=-\operatorname{grad}\frac{m_j}{r(P, M_j)},$$

再利用梯度的綫性性質，我們得到：

$$\mathbf{F}(P)=\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{r^2(P, M_j)}\mathbf{e}(P, M_j)=\operatorname{grad}\left(-\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{r(P, M_j)}\right).$$

結果，力場 $\mathbf{F}(P)$ 就是数量場

$$\varphi(P)=-\sum_{j=1}^{n}\frac{m_j}{r(P, M_j)} \tag{9}$$

的梯度。

表达式 (9) 就暗示我們如何構造函数 $\varphi(P)$ 使得它的梯度是密度为 $\mu(M)$的全面分布的質量的力場；我們会很自然地取函数

$$\varphi(P)=-\iiint\limits_{V}\frac{\mu(M)}{r(P, M)}dv(M) \tag{10}$$

当作这个函数。

至于，数量場(10)的梯度实际上就給出密度为 $\mu(M)$ 的質量的引力場这个事实还需要証明。

在以下的一般的結構中，这个証明將以特殊情况而包含在內。

在研究中，要引入一向量場，它与任意区域可加函数的关系正像引力場与質量的关系一样。

首先，讓我們把区域可加函数 $\Phi(U)$ 称为集中在区域 V 的函数，如果在区域 V 以外函数 $\Phi(U)$到处都只有零密度。

設可加函数 $\Phi(U)$ 具有分段連續的密度 $\mu(M)$ 而且集中在有界区域 V 內。作向量場

$$\mathbf{F}(P)=\iiint\limits_V \frac{\mu(M)\mathbf{e}(P,M)}{r^2(P,M)}dv(M). \qquad (11)$$

我們称这个向量場为可加函数 $\Phi(U)$ 的力場。由于积分(11)在任何点 P 都收斂，所以力場 $\mathbf{F}(P)$ 到处有定义，不管是体积 V 的外部或是内部。

下面是一个重要的定理：

定理 4.2 集中在有限区域 V 并且有分段連續的密度 $\mu(M)$ 的区域可加函数 $\Phi(U)$ 的力場(11)是数量場

$$\varphi(P)=-\iiint\limits_V \frac{\mu(M)}{r(P,M)}dv(M) \qquad (12)$$

的梯度。

[証明] 函数(12)允許在积分号下对参数——即点 P 的坐标——求微分(見附录定理 6)。此外，微分以后所得到的积分还是 P 的連續函数。于是函数 $\varphi(P)$ 的偏微商存在而且連續的；由此推出，函数 $\varphi(P)$ 有梯度 $\operatorname{grad}\varphi(P)=\mathbf{i}\frac{\partial\varphi(P)}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial\varphi(P)}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial\varphi(P)}{\partial z}$. 像求偏微商一样，函数 $\varphi(P)$ 的梯度也可以在(12)积分号下来求。結果，由(7)

$$\operatorname{grad}\varphi(P)=-\iiint\limits_V \mu(M)\operatorname{grad}\frac{1}{r(P,M)}dv(M)=$$

$$=\iiint\limits_V \mu(M)\frac{1}{r^2(P,M)}\mathbf{e}(P,M)dv(M)=\mathbf{F}(P),$$

这就是所要驗証的。

特别是，当函数 $\mu(M)$ 的物理意义是質量密度的时候，我們就得到关于"質量全面分布的力場是場(10)的梯度"这一命題的証明。

一切向量場 R(M), 如果和某一数量場 $\varphi(M)$ 的梯度場相重合，我們將它称为势位場，而这个函数 $\varphi(M)$ 是場 R(M) 的势位函数或势位。(例如單位質量的引力場 $\mathbf{R}(M)=-\frac{1}{r^2}\mathbf{e}(P, M)$ 是势位場，因为它与数量場 $\varphi(M)=\frac{1}{r(P, M)}$ 的梯度相重合。)

如果向量場 F(P) 的物理意义是力(例如引力)，那么势位函数 $\varphi(M)$ 就具有功的物理意义。

要計算在某一軌道 L 上从点 A 到点 P 力 R(M) 的功 (圖 3)。如果 $dl=dl(M)$ 是曲綫 L 在点 M 的單元，$\boldsymbol{\tau}(M)$ 是單位切向量，那么力 R(M) 在軌道 dl 上的功 dW 等于数量积

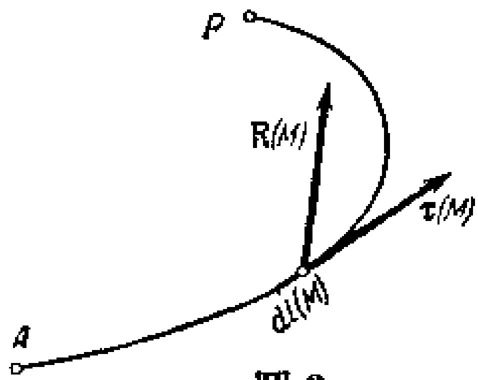

圖 3.

$$(\mathbf{R}(M), \boldsymbol{\tau}(M))dl,$$

而力 R(M) 在軌道 AP 上全部的功 W 可由下面积分来計算:

$$W=\int_A^P(\mathbf{R}(M), \boldsymbol{\tau}(M))dl. \tag{13}$$

由于条件 $\mathbf{R}(M)=\operatorname{grad}\varphi(M)$ 及公式 (4)，数量积 $(\mathbf{R}(M), \boldsymbol{\tau}(M))$ 等于函数 $\varphi(M)$ 沿向量 $\boldsymbol{\tau}(M)$ 所定的方向的微商，这方向可以認为是曲綫 L 的方向。这微商与弧單元 dl 的乘积等于函数 $\varphi(M)$ 的微分。因之，$dW=d\varphi$; 从此加以积分，我們得到在軌綫 AP 上的全功为

$$W=\varphi(P)-\varphi(A). \tag{14}$$

結果，力 R(M) 在軌綫 AP 上的功等于在点 P 和 A 的势位函数值的差("势位差")。

要注意，如果周綫 L 是閉的，終点 P 与起点 A 相重合，那么由 (14) 积分 (13) 等于零。一般地說，如果 R(M) 是任意連續的向量場，那么沿閉周綫 L 的积分

$$\oint_L (\tau(M), \mathbf{R}(M))dl$$

称为場 $\mathbf{R}(M)$ 沿周綫 L 的环流。我們知道，势位場沿一切閉周綫的环流等于零。

要指出，逆定理还是正确的。

如果連續向量場 $\mathbf{R}$ 沿着任意閉周綫的环流恒等于零，那么場 $\mathbf{R}$ 是势位場；在区域 V 中存在这样一个函数 $\varphi(M)$ 使得 $\mathbf{R}=\operatorname{grad}\varphi$。

但是，場 $\mathbf{R}$ 沿着任意的閉周綫的环流等于零的条件是很强的条件：在区域 V 中，閉周綫有很多条，并且有極复杂的形狀。最好是在逆定理的叙述中把閉周綫的数目加以减少，以求易于驗算沿着这些周綫的环流。

为了这个目的，我們从这一切可能的閉周綫中分出一部分比較簡單的"初等的"閉周綫，使得場 $\mathbf{R}$ 只要沿着这些初等周綫的环流等于零，就足够肯定关于这个場的势位性的結論。

假定我們选擇并固定某一軌綫，这軌綫是在区域 V 中从一定点 A 通到另一給定点 P，这样予对区域 V 中每一点 P 加以选擇与固定了的軌綫就形成初等的軌綫集合。特别当 $P=A$ 我們將認为初等軌綫 $AP=AA$ 就是由一点 A 構成的（除掉那种閉的初等軌綫 $A\cdots A$ 的可能性，这种軌綫不蜕化到一点）。

其次，再选擇并固定点 P 的鄰域 $U(P)$，使它全在区域 V 中。这时我們把下面三种軌綫所造成的一切周綫称为初等的閉周綫：一种由点 A 到点 P 的軌綫，一种由点 A 到点 $P_1\in U(P)$ 的軌綫，而第三是綫段 PP_1。

初等閉周綫这一批曲綫，由于它的形式在相当大的程度上可为我們所掌握，因之想像起来比一切閉周綫显易得多。例如，如果区域 V 是凸的（就是，連結其中任意二点的綫段全部包含在这区域中），那么从 A 到 P 的初等軌綫就可以取綫段 AP，而每一个閉的周綫就是簡單的三角形 APP_1A。

现在我們可叙述以下的定理:

定理 4.3. 如果在区域 V 中連續的向量場 R 沿着一切初等閉周綫(就其全体作某些选择的情况下)的环流等于零，那么場 R 是势位的: 存在这样一个函数 $\varphi(M)$ 使得在区域 V 中任意点 M, $\mathbf{R}(M)=\operatorname{grad}\varphi(M)$。这个函数 $\varphi(M)$ 除掉常数項外是唯一的决定的。

[証明] 取

$$\varphi(P)=\int_A^P(\boldsymbol{\tau}(M),\mathbf{R}(M))dl(M), \tag{15}$$

其中是沿着从点 A 到点 P 的初等軌綫求积分。因为在初等軌綫集合作一定的选擇下初等軌綫 AP 是唯一的。所以表达式(15)所定义的函数 $\varphi(P)$ 是單値的。特别由于初等軌綫 AA 的限制，我們有 $\varphi(A)=0$。

我們需要証明函数 $\varphi(P)$ 的梯度与向量 $\mathbf{R}(P)$ 重合。为此，我們必須証明，在每一点函数 $\varphi(P)$ 沿着任意方向 $\boldsymbol{\tau}$ 的微商可由下面的公式来計算:

$$\frac{\partial\varphi(P)}{\partial l}=(\mathbf{R}(P),\boldsymbol{\tau}).$$

設 P_1 在由点 P 出發按向量 $\boldsymbol{\tau}$ 方向的射綫上又在前所給定的鄰域 $U(P)$ 内，以 Δl 表示距离 $r(P,P_1)$，作比

$$\frac{\varphi(P_1)-\varphi(P)}{\Delta l}.$$

这里 $\varphi(P)$ 按其構成是函数 $(\boldsymbol{\tau},\mathbf{R})$ 沿初等軌綫 AP 的积分，而 $\varphi(P_1)$ 是同样函数沿初等軌綫 AP_1 的积分

由于沿初等閉周綫 APP_1A 的环流等于零的条件，我們有

$$\int_A^P(\boldsymbol{\tau},\mathbf{R})dl+\int_P^{P_1}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{R})dl+\int_{P_1}^A(\boldsymbol{\tau},\mathbf{R})dl=0,$$

由此

$$\varphi(P_1)=\int_A^{P_1}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{R})dl=\int_A^{P}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{R})dl+\int_P^{P_1}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{R})dl=$$

$$=\varphi(P)+\int_P^{P_1}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{R})dl.$$

因之，我們感到兴趣的比

$$\frac{\varphi(P_1)-\varphi(P)}{\Delta l}=\frac{1}{\Delta l}\int_P^{P_1}(\boldsymbol{\tau},\mathbf{R})dl$$

是函数 $(\boldsymbol{\tau},\mathbf{R})$ 在綫段 PP_1 上的平均值。因为 $\mathbf{R}(M)$ 是連續的，所以当 $\Delta l\to 0$ 时，这个比有極限值

$$(\boldsymbol{\tau},\mathbf{R}(P)).$$

因此，我們証明了，微商 $\dfrac{\partial\varphi(P)}{\partial l}$ 存在而且滿足关系式

$$\frac{\partial\varphi(P)}{\partial l}=(\mathbf{R}(P),\boldsymbol{\tau}),$$

这就是所要証明的。

剩下来要証明势位函数 φ 的唯一性。

設 $\psi(P)$ 是場 $\mathbf{R}$ 的其他任意一个势位函数。按公式(13)—(14)对于任意点 P，关系式

$$\varphi(P)=\int_A^P(\boldsymbol{\tau},\mathbf{R})dl=\psi(P)-\psi(A)$$

成立，因之

$$\psi(P)=\varphi(P)+\psi(A)=\varphi(P)+\text{const}.$$

这就是所要証明的。于是，定理 4.3 就完全証明了。

注意：定理 4.3 結合前面所論証的势位場的性質可以推出以下的結論：如果場 $\mathbf{R}$ 在区域 V 中对于任意初等閉周綫的环流等于零，那么一般对任何閉周綫它也等于零。

这也就是允許我們將公式(15)中定义勢位函数的初等軌綫AP以連結A和P二点的任意軌綫来代替。

实际上,按照上述証明場$\mathbf{R}$沿着閉軌綫$ACPBA$(圖4)的环流等于零。但是軌綫第一部分ACP是沿着任意軌綫从A到P,而第二部分是沿着初等軌綫ABP轉回去,所以函数$(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{R})$沿着軌綫$ACP$积分与沿着初等軌綫$ABP$积分是相等的。在实际的勢位計算中,我們选擇最方便于求积分的那个軌綫。

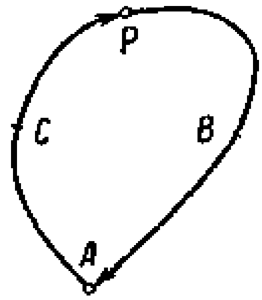

圖 4.

当然,要直接計算环流来驗証場的勢位性,就是初等閉周綫也是"太多"。因此,定理4.3主要的是具有理論上的意义。基于定理4.3,我們將在第七章給出勢位場的其他性質,这个性質对于应用有很大用处。

在結束以前,我們引入一个实例把梯度的性質用到几何問題上去。

設給定一个以P_1和P_2为焦点的橢球面。这个曲面是数量場的一个等量面:

$$\varphi(M)=r(P_1, M)+r(P_2, M).$$

按公式(8)

$$\operatorname{grad}\varphi(M)=\operatorname{grad} r(P_1, M)+\operatorname{grad} r(P_2, M).$$

可是我們已經能够按公式(6)来計算在右边的兩項:

$$\operatorname{grad} r(P_1, M)=\mathbf{e}(P_1, M), \quad \operatorname{grad} r(P_2, M)=\mathbf{e}(P_2, M);$$

因此,

$$\operatorname{grad}\varphi(M)=\mathbf{e}(P_1, M)+\mathbf{e}(P_2, M).$$

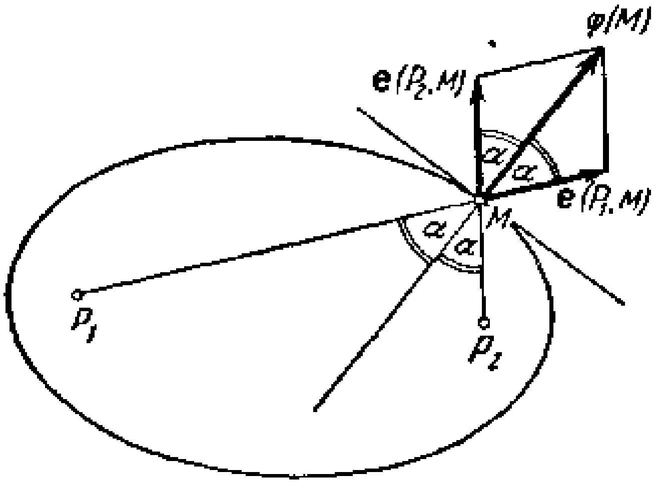

圖 5.

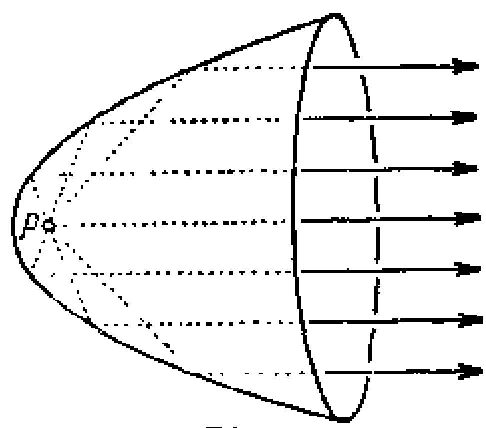

圖 6.

为求和 $e(P_1, M)+e(P_2, M)$ 而作的平行四边形，在这个情况下有相等(单位長)的边，因此其对角綫等分二边的交角(圖 5)。由于 grad $\varphi(M)$ 与函数 $\varphi(M)$ 的等量面正交，所以我們可得出結論：橢球面在点 M 的法綫平分射綫 P_1M 和 P_2M 的交角。

这个橢球面的几何性質在光学上有一个有趣而且重要的应用：假如在橢球面的焦点 P_1 处放一光源，而橢球面是反光的，那么由焦点 P_1 放射出来的光綫經橢球面反射后又集中在第二焦点 P_2。

如果以拋物旋轉面代替橢球面，同样地研究可使我們得出結論：由拋物面焦点所發生的光綫經过反射后变成平行光綫而放射出去(圖 6)。拋物面的这种性質是被利用来構造探照灯。

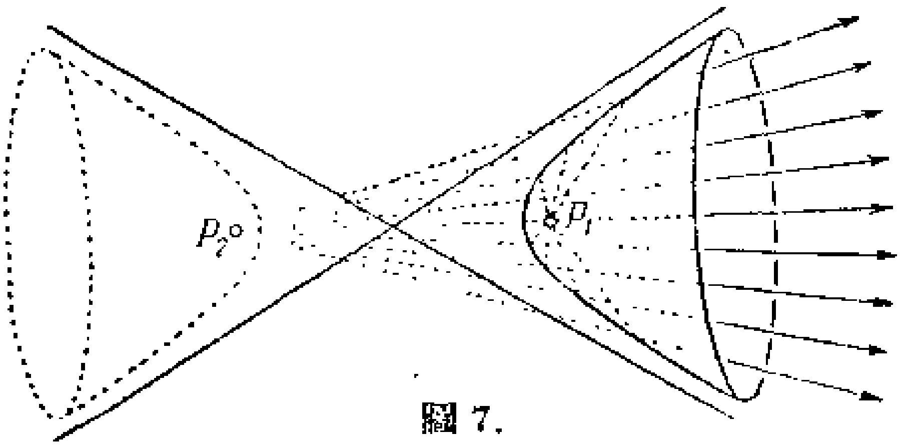

圖 7.

最后，如果以旋轉双曲面代替橢球面，那么由焦点 P 發生的光綫經反射后所放射出去的光綫就好像它們是由双曲面的第二焦点的光源所發出的一样(圖 7)。

这些有趣的現象的証明我們讓給讀者去做。

第五章　向量場的流量和散度

我們提出以下的問題。

假定在空間中給定物質——例如流体——的运动，这个运动是由速度 $\mathbf{u}(M)$ 的向量場来决定的，而不依賴于流动的时間。流体的密度假定是常数而且等于 1（在物理問題中考虑更一般情况即变密度和变速度的流体；但是，我們的目的并不是立刻要解决这个具体的物理問題，而只是打算給出自然的途徑来引出某些主要的新概念。）

在空間中我們划定某一曲面塊 Σ（圖 8），而且要計算在單位时間内流体流过这一塊的流量。

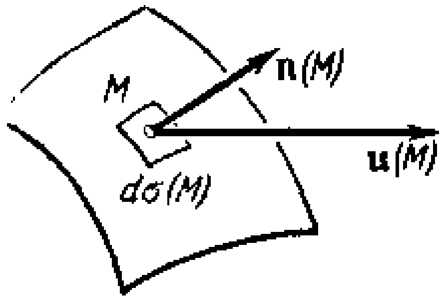

圖 8

在曲面上固定一点 M 和曲面單元 $d\sigma(M)$ 显然，在單位时間内流过这單元的流量跟以 $d\sigma$ 为底 $\mathbf{u}(M)$ 为母綫的柱体体积而变化的。这个柱体的高是其母綫在曲面的單位法向量 $\mathbf{n}(M)$ 上的投影。因此，柱体的体积等于

$$d=w(\mathbf{u}(M),\mathbf{n}(M))d\sigma(M). \qquad (1)$$

流过整个曲面 Σ 的流体的总体积 $w(\Sigma)$ 是由上述結果沿着曲面 Σ 求积分而得到的。因此，

$$w(\Sigma)=\iint\limits_{\Sigma}(\mathbf{u}(M),\mathbf{n}(M))d\sigma. \qquad (2)$$

要注意，每一积分單元 dw 的符号是决定于向量 $\mathbf{n}$ 的方向，这时它的选擇还是自由的。在一切情况下我們总規定法向量 $\mathbf{n}$ 在曲面的每一点是这样子选擇而使得函数 $\mathbf{n}(M)$ 在 Σ 上是連續的函数；这个条件保証了在积分(2)中被积函数的連續性，因之也保証

了这个积分的存在。

当向量 n 与 u 組成銳角时，量 dw 是正的，而 n 和 u 組成鈍角时，它是負的。因此，积分(2)給我們不是通过 Σ 流体量的絕对值，而是流体量的代数和。这流体在“法綫的一側”和“相反的一側”流过——前者帶正号后者帶負号。

一般的說，对于任何向量場 R，表达式

$$w(\mathbf{R};\Sigma)=\iint\limits_{\Sigma}(\mathbf{n},\mathbf{R})d\sigma \tag{3}$$

称为“場 R 流过曲面 Σ 的流量”。像我們已經講过的，这个名称是根据运动介質的速度場的这个积分的力学意义。

还要注意求向量場通过給定的曲面的流量的运算是一个綫性运算：如果有兩个向量場 $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{R}_2$ 以及兩个常数 α_1、α_2，那么

$$w(\alpha_1\mathbf{R}_1+\alpha_2\mathbf{R}_2;\ \Sigma)=\alpha_1 w(\mathbf{R}_1;\ \Sigma)+\alpha_2 w(\mathbf{R}_2;\ \Sigma), \tag{4}$$

这可以由曲面积分的綫性的性質直接推出。

現在对于閉曲面 Σ(圖 9)的情况来考慮形式(3)的积分，并且我們規定法向量 n 的方向总是朝曲面的外側。这里沿“法綫一側”的运动就是流体由曲面 Σ 所圍成的区域 V“流出”，而沿“相反一側”的运动对应的就是流体“流入”这个区域。积分(3)的数值就給出“流出”区域 V 的流量和“流入”这个区域的流量的差。

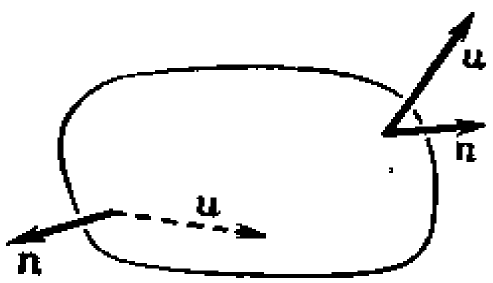

圖 9.

如果积分(3)等于零，那么流体流入区域 V 的量和流出的量相等。如果这个积分不等于零，例如是正的，那么流出量大于流入量。这表示在体积 V 內部有“源”存在——那就是以任何方式产生流体的地方(例如融雪生水)。积分(3)的数值在这个場合可以解釋为在区域 V 中流体的源的强度。

如果积分(3)取負值，那么整个地說流体是流入体积 V；結果

在这个体积 V 内部就一定有"溝"——那就是流体自身消失的地方(例如,蒸發)。

此后,我們是从数量的观点来研究这一切問題。

如果場 $\mathbf{R}$ 有力場的物理意义,那么积分(3)如何求积?

首先考虑比較簡單的力場 $\mathbf{R}(P)=\frac{m_0}{r^2(P,M)}\mathbf{e}(P,M)$(位于点 M 的質量 m_0 的引力場)。并且計算它通过下面兩种曲面形式的流量:

1) 以点 M 为中心,r_0 为半徑的球面塊,其面积为 ωr_0^2(ω 为立体角,見圖 10)。

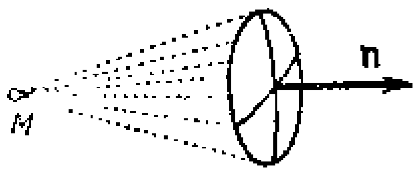

圖 10.

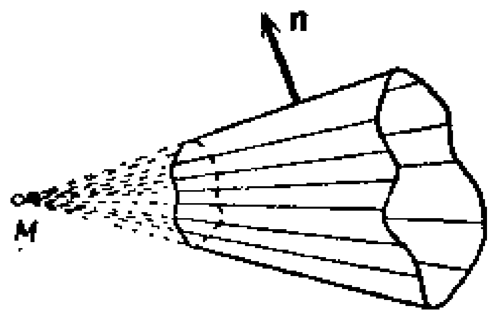

圖 11.

2) 由点 M 出發的射綫所構成的錐面塊(圖 11)。

在 1) 的情况,法綫的方向取和 M 相反的一側。这时,向量場 $\mathbf{R}$ 与法向量恰相反;因之,$(\mathbf{n},\mathbf{R})=-|\mathbf{R}|=-\frac{m_0}{r^2(P,M)}=-\frac{m_0}{r_0^2}$。沿球面积分的时候可以將这个常量提到积分号外面;我們就得到积分(3)的值等于 $-\frac{m_0}{r_0^2}\omega r_0^2=-\omega m_0$。特別是,这个数値与球半徑無关,而仅仅和立体角 ω 有关。

显然,把法綫方向反过来——向中心——我們会得到絕对値相同而符号相反的結果。

在 2) 的情况,不管我們如何指定法綫方向,它总是和向量場正交。因此,在这种情况 $(\mathbf{n},\mathbf{R})=0$,而积分(3)也等于零。

从 1) 型和 2) 型的曲面,我們可以造出兩种类型的閉曲面。

第一类型是以同一立体角 ω，以 r_0 和 r_1 为半徑的兩个球面以及通过中心 M 的射綫段所形成的側面曲面所圍成的(圖 12)；这样的曲面的內部不包含点 M。

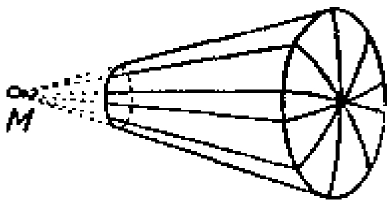

圖 12.

第二类型是以点 M 为中心，以任意長为半徑的整个球面。

沿着第一类型曲面的积分(3)，可以分为三項分别对应于兩个球面部分以及側面曲面。由于規定法綫永远是向外的，因之，在那兩球面部分它的方向是相反的，而兩个对应的积分之和等于零；因为我們已經知道它的数值与半徑無关而仅仅和立体角有关。沿着側面曲面的积分也等于零。因此，沿着第一类型的曲面积分(3)等于零。

对于第二类型——整个球面——立体角为 4π，按已經証明的結果，我們得到这个积分值等于 $-4\pi m_0$。

結果，对于不包含点 M 的曲面，流量等于零；在它們的內部沒有我們的力場的"源"。对于包含点 M 的任意球面，我們得到同一的流量等于 $-4\pi m_0$。因此，我們的力場的源就集中在一个点 M；于是，力場的"源"就是产生这个場的質量，而"源"的"强度"与質量成正比。

往后我們还要把这个結果推广到質量任意分布的情况。

現在讓我們再回到一般向量場的場合。

如果，沿着閉曲面 Σ 求积的积分(3)如上面所指出的可以看做分布在曲面 Σ 內部的場的源的总强度，那么以体积 V 除积分(3)的結果，我們就得到在这个体积內源的强度的平均值，那就是單位体积內源的强度(或平均"源密度")。

在体积 V 的范圍內固定一点 P 再来考虑收縮于 P 的閉曲面序列 $\Sigma_n(n\to\infty)$。場 $\mathbf{R}$ 沿曲面 Σ_n 的流量除以由这个曲面所圍成的体积 V_n 就給出分布在 V_n 范圍內源的平均密度。假定当 $n\to\infty$ 的时候，这个平均密度有确定的而和区域 V_n 的选擇無关的極限值

$d(P)$，那么数 $d(P)$ 就很自然地認为是場 $\mathbf{R}$ 在点 P 的源的眞正密度。这个極限称为場 $\mathbf{R}$ 在点 P 的散度。而且記作 $\operatorname{div}\mathbf{R}(P)$（拉丁文 divergentio——發散量。）

于是，場 $\mathbf{R}(P)$ 的散度按定义是極限

$$\operatorname{div}\mathbf{R}(P)=\lim\frac{1}{V}\oiint_{\Sigma}(\mathbf{n},\mathbf{R})d\sigma. \tag{5}$$

这个極限是在体积 V 收縮于点 P 的条件下而計算的。

很容易檢証，由向量場求散度的运算是綫性的：

$$\operatorname{div}(\alpha_1\mathbf{R}_1+\alpha_2\mathbf{R}_2)=\alpha_1\operatorname{div}\mathbf{R}_1+\alpha_2\operatorname{div}\mathbf{R}_2. \tag{6}$$

要証明这个式子，只要在表达式(5)中以綫性組合 $\alpha_1\mathbf{R}_1+\alpha_2\mathbf{R}_2$ 代替場 $\mathbf{R}$，然后再利用曲面积分的綫性性質，并且取極限。$\operatorname{div}\mathbf{R}_1$ 和 $\operatorname{div}\mathbf{R}_2$ 的存在保証了 $\operatorname{div}(\alpha_1\mathbf{R}_1+\alpha_2\mathbf{R}_2)$ 的存在。

一般地說，对于一个給定的向量場 $\mathbf{R}$ 的散度的存在决不是很明显的。

往后我們要証明如果場 $\mathbf{R}$ 的分量关于每一个坐标具有連續的微商，那么場的散度永远存在。

向量場 $\mathbf{R}(M)$ 的散度也可以解释为某一区域可加函数的密度。那就是，我們把通过圍成区域 V 的曲面 Σ 的流量 $w(\mathbf{R};\Sigma)$ 当做区域 V 的函数：

$$w(\mathbf{R};\Sigma)=\Phi(V).$$

如果边界为 Σ_1 和 Σ_2 的区域 V_1 和 V_2 没有共同的内点和边界点，那末显然有

$$\Phi(V_1+V_2)=\Phi(V_1)+\Phi(V_2). \tag{7}$$

如果区域 V_1 和 V_2 有公共的边界点，例如有公共的边界部分 Σ'，那么沿 Σ' 的积分是以不同的符号出現在 $w(\mathbf{R};\Sigma_1)$ 和 $w(\mathbf{R};\Sigma_2)$ 中，因为在計算 $w(\mathbf{R};\Sigma_1)$ 的时候法綫是在区域 V_1 的外部，而計算 $w(\mathbf{R};\Sigma_2)$ 时，是在区域 V_2 的外部。因之在 Σ' 这个部分兩个法綫方向恰好相反。所以在和 $w(\mathbf{R};\Sigma_1)+w(\mathbf{R};\Sigma_2)$ 中沿 Σ' 的积

分互相抵消而剩下的只是沿边界 Σ_1 和 Σ_2 的其余部分的积分，也就是以对应的法綫方向沿着区域 V_1+V_2 的边界的积分．从此可知等式(7)对于区域 V_1 和 V_2 無公共內点的任何場合总是正确的。于是流量 $w(\mathbf{R};\Sigma)=\Phi(V)$ 是区域 V 的可加函数。按定义，場 $\mathbf{R}$ 的散度是函数 $\Phi(V)$ 的密度；散度存在的假定就与函数 $\Phi(V)$ 密度存在的假定一致了。应用定理 3.1 到这个場合来就可以得到以下的結論：

定理 5.1. 如果場 $\mathbf{R}(M)$ 有連續（或分段連續）的散度 $\operatorname{div}\mathbf{R}(M)$，那么对于一切以 Σ 为边界的区域 V

$$w(\mathbf{R};\Sigma)=\underset{\Sigma}{\oiint}(\mathbf{n},\mathbf{R})d\sigma=\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{R}\,dv. \tag{8}$$

此后，公式(8)將起着很主要的作用。

首先我們利用公式(8)来求場 $\mathbf{R}(P)$ 的散度，假定它的分量 $X(P), Y(P), Z(P)$ 关于坐标 x, y, z 有連續的偏微商。在偏微商的存在性和連續性的假定下，奥氏公式（参考第二章公式(6)）成立：

$$\frac{1}{V}\underset{\Sigma}{\oiint}(\mathbf{n}(M),\mathbf{R}(M))d\sigma=\frac{1}{V}\iiint_V\left(\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}\right)dv, \tag{9}$$

这里是在等式兩边乘上因子 $\frac{1}{V}$。

如果，区域 V 收縮于点 P，那么等式(9)的右边有極限，它等于和 $\frac{\partial X}{\partial x}+\frac{\partial Y}{\partial y}+\frac{\partial Z}{\partial z}$ 在 P 点的值。結果等式(9)的左边的極限也存在，而这个極限按定义就是場 $\mathbf{R}$ 在点 P 的散度。

我們得到了以下的定理：

定理 5.2. 如果向量場 $\mathbf{R}(P)$ 的分量 $X(P), Y(P), Z(P)$ 关于坐标有連續的偏微商，那么場 $\mathbf{R}(P)$ 的散度存在而且可以按公式

$$\operatorname{div}\mathbf{R}(P)=\frac{\partial Y(P)}{\partial x}+\frac{\partial X(P)}{\partial y}+\frac{\partial Z(P)}{\partial z} \tag{10}$$

求出。

举个例説，我們来計算場 $\mathbf{R}(P)=f(r)\mathbf{e}(P,M)$ 的散度，其中 $f(r)$ 是 $r=r(P,M)$ 的任意可微分的函数。我們認定 $P\neq M$，因之 $r\neq 0$。

場 $\mathbf{R}(P)$ 写成如下形式

$$\mathbf{R}(P)=f(r)\frac{\boldsymbol{r}(P,M)}{r(P,M)}=\varphi(r)\cdot\boldsymbol{r}(P,M) \qquad (11)$$

較为方便，其中 $\varphi(r)=\dfrac{f(r)}{r}$，$\mathbf{r}(P,M)$ 是由点 P 到点 M 的向量。

如果坐标原点放在点 M，并且以 x,y,z 表示点 P 的坐标，那么場 $\mathbf{R}(P)$ 的分量就有形式

$$X(P)=\varphi(r)x,\ Y(P)=\varphi(r)y,\ Z(P)=\varphi(r)z.$$

就函数 $X(P)$ 关于 x 求微商，得到：

$$\frac{\partial X(P)}{\partial x}=\varphi'(r)\frac{\partial r}{\partial x}x+\varphi(r),$$

而由于 $r^2=x^2+y^2+z^2$，故

$$2r\frac{\partial r}{\partial x}=2x,\quad \frac{\partial r}{\partial x}=\frac{x}{r}$$

結果，
$$\frac{\partial X(P)}{\partial x}=\varphi'(r)\frac{x^2}{r}+\varphi(r).$$

同理

$$\frac{\partial Y(P)}{\partial y}=\varphi'(r)\frac{y^2}{r}+\varphi(r),\quad \frac{\partial Z(P)}{\partial z}=\varphi'(r)\frac{z^2}{r}+\varphi(r).$$

將所得到的結果相加，我們得到，

$$\operatorname{div}\mathbf{R}(P)=\frac{\partial X(P)}{\partial x}+\frac{\partial Y(P)}{\partial y}+\frac{\partial Z(P)}{\partial z}=$$

$$=\varphi'(r)\frac{x^2+y^2+z^2}{r}+3\varphi(r)=r\varphi'(r)+3\varphi(r).$$

特别是，假定場 $\mathbf{R}(P)$ 是集中在点 M 的質量 m_0 的引力場。在这个場合

$$\mathbf{R}(P)=\frac{m_0}{r^2}\mathbf{e}(P,M),\text{ 因之 } f(r)=\frac{m_0}{r^2},\quad \varphi(r)=\frac{m_0}{r^3},$$

而
$$\operatorname{div} \mathbf{R}(P)=-3\frac{m_0}{r^4}r+3\frac{m_0}{r^3}=0.$$

这个結果对我們說来并不在意料之外的。因为已經看到了引力場除了質量 m_0 自身之外再沒有"源"了，因此很自然地得到一个結論：这个場的源的强度，也就是場 $\mathbf{R}(P)$ 的散度，当 $P\neq M$ 时到处等于零。

現在再考虑分布在点 $M_1,\ M_2,\cdots,\ M_n$ 的有限个点質量 $m_1,m_2,\cdots,m_n$ 系統的引力場 $\mathbf{R}(P)$。我們已經知道，这个場是 n 个場 $\mathbf{R}_1(P),\cdots\mathbf{R}_n(P)$ 的(向量)和，其中場 $\mathbf{R}_j(P)$ 是位于点 M_j 的質量 m_j 的引力場。

由于散度的綫性性質(公式(6))，質量系統的場的散度等于每一个个别質量的場的散度的和，因之，除了点 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 之外，它到处等于零。

这个結果不难推广到質量全面分布的引力場的情况
$$\mathbf{R}(P)=\iiint\limits_V\frac{\mu(M)\mathbf{e}(P,M)}{r^2(P,M)}dv(M).\qquad(12)$$

如果点 P 在包含質量的体积之外，那么在(12)积分号下的 M 的函数是有界的連續的以及可微分的，而且这个积分可以对参数(点 P 的坐标)求微分；这时只要对被积函数加以微分，求各偏微商的和，就得到：
$$\operatorname{div}\mathbf{R}(P)=\iiint\limits_V\mu(M)\operatorname{div}\frac{\mathbf{e}(P,M)}{r^2(P,M)}dv(M).\qquad(13)$$

但是，我們已經知道，对于一切 $M\neq P$，$\operatorname{div}\dfrac{\mathbf{e}(P,M)}{r^2(P,M)}=0$。所以，在(13)中被积函数在区域 V 中到处等于零，也就是 $\operatorname{div}\mathbf{R}(P)=0$。

如果点 P 在体积 V 的內部，結果是完全不同。我們想从分析有限个質点系統的場 $\mathbf{R}(P)$ 开始来預計結果。

我們已經講过，在任何沒有質量的点，場 $\mathbf{R}$ 的散度等于零。

考虑区域 V，在其內部和边界上沒有一个点質量。对这个区

域用公式(8)我們得到場 R 通过 V 的边界的流量等于零。

現在假定区域 V 中包含某些質量，例如 $m_1, m_2, \cdots, m_k$。在区域内部，以点 $M_1, M_2, \cdots, M_k$ 为中心分出球体 $U_1, U_2, \cdots, U_k$，其半徑取得相当小，而使得它們之間各不相交。以 U' 表示从区域 V 除掉球体 $U_1, U_2, \cdots, U_k$ 之后所得到的部分。我們已經講过，場 R 通过区域 V 的边界 Σ 的流量 $\Phi(V)$，是区域的可加函数，因此

$$\Phi(V)=\Phi(U_1)+\Phi(U_2)+\cdots+\Phi(U_k)+\Phi(U').$$

但是，場 R 通过区域 U' 的边界的流量等于零，因为在这个区域中沒有質量。通过包圍球 U_j 的球面的流量是由質量 m_j 所决定的場 R_j 的流量以及其余質量的場的流量的和；后面这部分等于零，而第一項根据前面所述等于 $-4\pi m_j$。

綜合这些結果我們得到結論："場 R 通过任意曲面的流量等于分布在 Σ 内部的質量和的 -4π 倍"。（在静电学中，关于电荷的相应的結果称为"高斯静电定律"）。

現在可以很自然地提出这个命題："对于質量的全面分布，对应的引力場 R(P) 通过任意曲面 Σ 的流量等于分布在曲面 Σ 内部总質量的 -4π 倍"，或者由于定理 3.1 就是数量

$$-4\pi\iiint\limits_{V\Sigma}\mu(M)dv(M). \tag{14}$$

要驗証这个命題，我們来計算密度为 $\varphi(M)$ 的任意区域可加函数 $\Phi(V)$ 的力場（第四章）

$$\mathbf{R}(P)=\iiint\limits_V\frac{\varphi(M)\mathbf{e}(P,M)}{r^2(P,M)}dv(M), \tag{15}$$

通过閉曲面 Σ 的流量。这个流量可表示为双重的重积分

$$w(\mathbf{R};\Sigma)=\oiint\limits_{\Sigma}(\mathbf{n}(P),\mathbf{R}(P))d\sigma(P)=$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}\left(\iiint\limits_V\frac{\varphi(M)\mathbf{e}(P,M)}{r^2(P,M)}dv(M),\mathbf{n}(P)\right)d\sigma(P)=$$

$$=\oiint\limits_{\Sigma}\left\{\iiint\limits_V\frac{\varphi(M)}{r^2(P,M)}(\mathbf{e}(P,M),\mathbf{n}(P))dv(M)\right\}d\sigma(P).$$

由于函数 $\varphi(M)$ 是有界的而数量积 $(\mathbf{e}(P,M),\mathbf{n}(P))$ 的絕对值不超过 1，在这里我們可以应用附录中的定理 5，使得我們可以交換沿着 Σ 和沿着 V 的积分次序：

$$w(\mathbf{R};\Sigma)=\iiint\limits_V\left\{\oiint\limits_\Sigma\frac{(\mathbf{e}(P,M)\mathbf{n}(P))}{r^2(P,M)}d\sigma(P)\right\}\varphi(M)dv(M).\tag{16}$$

考虑与参数点 M 有关的内部积分：

$$\oiint\limits_\Sigma\frac{(\mathbf{e}(P,M),\mathbf{n}(P))}{r^2(P,M)}d\sigma(P).\tag{17}$$

它是場 $\dfrac{\mathbf{e}(P,M)}{r^2(P,M)}$ 通过曲面 Σ 的流量。这个場，帶上負号与在点 M 有單位質量的引力場是一样的。

我們已經知道，如果点 M 在 Σ 所圍的体积的外面这个場的流量等于零，如果它在曲面 Σ 內部等于 -4π。因此，由积分(17)所确定的 M 的函数在曲面 Σ 所圍的体积 V_Σ 外面等于零而在这个体积內部等于 -4π。因此，在等式(16)右边的积分可以認为只是分布在体积 V_Σ 上，而且积分时常数 -4π 可以提出来，我們得到：

$$w(\mathbf{R};\Sigma)=-4\pi\iiint\limits_{V_\Sigma}\varphi(M)dv(M),$$

这就是我們所希望的。

知道場 $\mathbf{R}(P)$ 通过任意閉曲面的流量，我們也容易标出这个場的散度：应用散度的定义和中值定理，立刻得到：

$$\operatorname{div}\mathbf{R}(P)=\lim\frac{1}{V}\left\{-4\pi\iiint\limits_V\varphi(M)dv(M)\right\}=-4\pi\varphi(P).\tag{18}$$

这个結果重新証实那种的想法：引力場的"源"就是产生这个場的質量。

在函数 $\varphi(M)$ 不但是連續的而且还有連續的偏微商的情况下，我們的結果可以更加完善。我們要証明在这种情况下，"場

R(P)(15)的分量 $X(P), Y(P), Z(P)$ 具有連續的偏微商")。

由定理 5.2 还可以推出，場 R(P) 的散度可由公式(10)表示，而由于証过的等式 $\operatorname{div} \mathbf{R}(P) = -4\pi\,\varphi(P)$，我們得到古典的普阿松公式

$$\frac{\partial X(P)}{\partial x}+\frac{\partial Y(P)}{\partial y}+\frac{\partial Z(P)}{\partial z}=-4\pi\varphi(P). \qquad (19)$$

为了証明場 R(P) 的分量的可微分性，我們以梯度形式表示这个場(第四章)

$$\mathbf{R}(P)=\operatorname{grad}\iiint\limits_V \varphi(M)\frac{1}{r(P,M)}dv(M)=$$

$$=\iiint\limits_V \varphi(M)\operatorname{grad}\frac{1}{r(P,M)}dv(M).$$

例如，取場的第一个分量

$$X(P)=\iiint\limits_V \varphi(M)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r(P,M)}dv(M)$$

应用公式

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r(P,M)}=\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}=$$

$$=-\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}}=-\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{r(P,M)},$$

我們把它变成如下形式:

$$X(P)=-\iiint\limits_V \varphi(M)\frac{\partial}{\partial \xi}\frac{1}{r(P,M)}d\xi\,d\eta\,d\zeta;$$

在这里进行分部积分(按坐标 ξ)；这时由于在区域 V 的边界上，函数 $\varphi(M)$ 变成零，积分外的一項也等于零，結果我們得到

$$X(P)=\iiint\limits_V \frac{\partial\varphi(M)}{\partial \xi}\frac{1}{r(P,M)}dv(M).$$

現在我們看到函数$X(P)$又重新具有势位的形式，其連續分布的質量的密度是$\dfrac{\partial\varphi(M)}{\partial\xi}$，但是在这种場合（見第四章）；函数$X(P)$关于一切坐标具有連續的偏微商

于是，我們的結論以及公式(19)就完全証明了。

第六章　向量場的旋度

我們重新开始提出某些理想化的力学問題。

設在空間中給定流体运动的速度向量場为 $\mathbf{u}(M)$，或者由于使我們今后研究帶有完全普遍的性質，更好的說法是：給我們一个任意的向量場 $\mathbf{u}(M)$；而我們將以流体运动的速度場来解釋它。

在場中置一个柱形小輪 K。在它的边緣上分布着很多的小的槳板，它們还可以繞着由單位向量 $\mathbf{l}$ 所决定的軸作自由轉动。流体質点作用于槳板的結果，一般地說，使輪子轉动；我們就要来計算它轉动的角速度。首先，讓我們定出取正負号的規則：从向量 $\mathbf{l}$（其起点在輪子的中心）的終点看輪子的轉动方向，若是反时針方向，那末我們認为輪子的角速度是正的，若是順时針方向，那末是負的。在这种条件下，流体質点的轉动作用是由切于輪子边緣的向量 $\mathbf{u}(M)$的分量来决定的，其中分量正負，自然可由它使輪子轉动的正負方向来决定。換句話說，流体質点的轉动作用决定于数量积$(\mathbf{u}(M), \boldsymbol{\tau}(M))$，其中 $\boldsymbol{\tau}(M)$是切于輪子边緣而指正向的單位向量。全部流体質点在槳板上的总作用就使得輪子产生轉动；最自然地假定是，它的边緣的（每一）点的綫性速度等于数值$(\mathbf{u}(M), \boldsymbol{\tau}(M))$沿全槳板边緣的算术平均值。这个算术平均值可以用沿着輪子 K 的边緣曲面 Σ' 的积分：

$$\frac{1}{2\pi RH}\iint\limits_{\Sigma'}(\mathbf{u}(M), \boldsymbol{\tau}(M))d\sigma(M) \qquad (1)$$

来表示，其中 R 是边緣圓周的半徑，H 是輪子的厚度（柱的高）。現在为了求角速度的值，我們以圓周的半徑 R 除綫性速度值(1)；由于 $\pi R^2 H=V$ 是輪子的体积，我們得到了关于所求的角速度的表达式。

$$\omega_K=\frac{1}{2V}\iint\limits_{\Sigma'}(\mathbf{u}(M),\boldsymbol{\tau}(M))d\sigma(M).$$

这个数值給出輪子K的平面上流体轉动的某些性質。确切地說，它只是和那些分布在輪子K的边緣的流体有关系。如果我們要想得到的并不是关于圓周的性質而是关于点（就是輪子K的中心P）的性質，那么就必須將輪子K的半徑和厚度趋于零而且求上面所作的数值ω_K的極限。这个極限的存在性現在还是不明显的；現在我們要变換ω_K的表达式，而使得它的極限的存在性和某一区域可加函数的存在有关系。

首先我們試以某一个未知量$\mathbf{q}$在方向$\mathbf{l}$上的投影来表示数量积$(\mathbf{u}(M),\boldsymbol{\tau}(M))$：

$$(\mathbf{u}(M),\boldsymbol{\tau}(M))=(\mathbf{q}(M),\mathbf{l}).$$

設$\mathbf{n}(M)$为在輪子边緣点M的單位法向量。由于三个向量$\mathbf{n}(M)$，$\boldsymbol{\tau}(M)$，$\mathbf{l}$和三个坐标軸向量有相同的坐向，所以我們可以写

$$\boldsymbol{\tau}(M)=[\mathbf{l},\mathbf{n}(M)].$$

从此，再应用混合积的性質，我們求得

$$(\mathbf{u}(M),\boldsymbol{\tau}(M))=(\mathbf{u}(M),[\mathbf{l},\mathbf{n}(M)])=(\mathbf{l},[\mathbf{n}(M),\mathbf{u}(M)]).$$

因此我們看出，可以用$\mathbf{n}(M)$和$\mathbf{u}(M)$的向量积当做向量$\mathbf{q}(M)$。于是，我們又得到：

$$\omega_K=\frac{1}{2V}\iint\limits_{\Sigma'}(\mathbf{u}(M),\boldsymbol{\tau}(M))d\sigma(M)=$$

$$=\frac{1}{2V}\iint\limits_{\Sigma'}(\mathbf{l},\mathbf{q}(M))d\sigma=\frac{1}{2}\left(\mathbf{l},\frac{1}{V}\iint\limits_{\Sigma'}\mathbf{q}(M)d\sigma\right).$$

代替沿着輪子边緣曲面的积分

$$Q_{\Sigma'}=\iint\limits_{\Sigma'}\mathbf{q}(M)d\sigma(M)=\iint\limits_{\Sigma'}[\mathbf{n}(M),\mathbf{u}(M)]d\sigma(M),$$

我們来考虑沿着輪子K的整个表面Σ^0的类似的积分

$$Q_{\Sigma^0}=\oiint\limits_{\Sigma^0}[\mathbf{n}(M),\mathbf{u}(M)]d\sigma(M). \tag{2}$$

显然,等式
$$\omega_K=\frac{1}{2}\left(\mathbf{l},\frac{1}{V}\mathbf{Q}_{\Sigma^0}\right) \tag{3}$$
还是成立，因为在两个柱的底面向量 $\mathbf{n}(M)$ 和 $\mathbf{l}$ 共綫，向量积 $[\mathbf{n}(M),\mathbf{u}(M)]$ 正交于向量 $\mathbf{l}$,而差 $\mathbf{Q}_{\Sigma^0}-\mathbf{Q}_{\Sigma'}$,当然也正交于向量 $\mathbf{l}$。

現在要注意,对于任意連續(或分段連續)的場 $\mathbf{u}$, 沿着任意区域 V 的边界 Σ 的积分
$$\mathbf{Q}(V)=\oiint\limits_{\Sigma}[\mathbf{n}(M),\mathbf{u}(M)]d\sigma(M) \tag{4}$$
是区域 V 的可加函数。(这个区域函数,和我們以前所考慮的不同,不是取数値而是取向量。但是这种情况并不产生任何原則上的困难。要想代替一个区域的向量函数我們可以用这向量函数在坐标軸上投影的三个数量函数来說明。)

跟場的流量的可加性理由一样，函数 $\mathbf{Q}(V)$的可加性也成立，因为向量积以及数量积当改变其中一因子的符号的时候，也改变它的符号。

函数 $\mathbf{Q}(V)$,我們称为向量場 $\mathbf{u}(M)$沿区域 V 边界的环流。

我們假定場 $\mathbf{u}(M)$的环流有密度,換句話說,假定極限
$$\mathbf{q}(P)=\lim_{V\to P}\frac{1}{V}\oiint\limits_{\Sigma}[\mathbf{n}(M),\mathbf{u}(M)]d\sigma \tag{5}$$
存在,其中区域 V 以任何方式收縮于点 P。跟函数 $\mathbf{Q}(V)$一样，它的密度 $\mathbf{q}(P)$也是一个向量。往后我們还会看到,函数 $\mathbf{Q}(V)$ 的密度永远存在,只要場 $\mathbf{u}(M)$的分量关于坐标具有連續的一級微商。

等式(3)表示,关于函数 $\mathbf{Q}(V)$ 的密度的存在性的假定可以推出数值 ω_K 的極限的存在;实际上,
$$\lim_{K\to P}\omega_K=\lim_{K\to P}\left(\mathbf{l},\frac{1}{2V}\mathbf{Q}_{\Sigma^0}\right)=\frac{1}{2}(\mathbf{l},\mathbf{q}(P)). \tag{6}$$

以 $\omega(\mathbf{l})$記左边的極限。

要注意極限向量 $\mathbf{q}(P)$与輪子 K 的位置(因之,与向量 $\mathbf{l}$)無关,因为極限(5)与收縮于点 P 的区域 V 的选擇無关。这个向量 $\mathbf{q}(P)$ 称为場 $\mathbf{u}(M)$的旋度，并且以 $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ 表示(拉丁文 rotor—迴旋)。

公式(6)

$$\omega(\mathbf{l})=\frac{1}{2}(\mathbf{l},\mathbf{q}(P))=\frac{1}{2}(\mathbf{l},\mathrm{rot}\,\mathbf{u}(P))$$

(和在第四章中对于梯度的类似公式(4)一样)使得我們能够对数值 $\omega(\mathbf{l})$与向量 $\mathbf{l}$ 的方向間的关系得出明确的結論。事实上，如果我們以 α 表示向量 $\mathbf{l}$ 和 $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}(P)$ 間的角度，那么由于数量积的定义我們得到:

$$\omega(\mathbf{l})=\frac{1}{2}|\mathrm{rot}\,\mathbf{u}|\cos\alpha,$$

于是推出以下的結論:

1. 量 $\omega(\mathbf{l})$,当向量 $\mathbf{l}$ 与向量 $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ 同向时取最大值 $\frac{1}{2}|\mathrm{rot}\,\mathbf{u}|$ (軸在这个位置的輪子得到最大的角速度)。

2. 对于一切正交于向量 $\mathrm{rot}\,\mathbf{u}$ 的方向 $\mathbf{l}$,数值 $\omega(\mathbf{l})$等于零(軸在这个位置而相当小的輪子决不会轉动的)。

3. 对于其余的方向 $\omega(\mathbf{l})$ 取不等于零的数值而其絕对值小于 $\frac{1}{2}|\mathrm{rot}\,\mathbf{u}|$。

由这些性質可引出旋度的新的"力学"定义:"場 $\mathbf{u}$ 的旋度定义为可加函数(4)的密度它是在給定点 P 的一个向量，按它的方向，以 P 为中心的無限小輪子因場而旋轉的角速度最大，并且它的模等于这个輪子旋轉角速度的兩倍"。

由于我們把向量場 $\mathbf{u}$ 的旋度解釋为某一个区域可加函数的密度，利用定理 3.1 我們得旋度的新的性質(显然，定理 3.1 不仅对于数量可加函数,而且对向量可加函数也成立。)

在目前所考慮的場合,这个定理引出以下的結論:

定理 6.1. 若場 $\mathbf{u}(M)$ 有連續（或分段連續的）旋度 rot $\mathbf{u}(M)$，那么对于一切以 Σ 为边界的区域 V 等式

$$\oiint\limits_{\Sigma}[\mathbf{n},\mathbf{u}]d\sigma=\iiint\limits_{V}\operatorname{rot}\mathbf{u}\,dv \qquad (7)$$

成立。

首先我們应用这个定理来証明場 $\mathbf{u}(M)$ 的旋度的存在性，假定它的分量关于坐标具有連續的偏微商；同时，我們还可以得出以場 $\mathbf{u}$ 的分量来表示向量 rot $\mathbf{u}$ 的公式

事实上，如果場 $\mathbf{u}(M)$ 有可微分的分量 $X(M), Y(M), Z(M)$，那么可以利用推广的奥氏公式（見第二章公式 (15)），在其中取 $T(\mathbf{p})=[\mathbf{p},\mathbf{u}]$ 并且参考第二章公式(11)

$$\iint\limits_{\Sigma}[\mathbf{n},\mathbf{u}]d\sigma=\iiint\limits_{V}[\Delta,\mathbf{u}]dv=\iiint\limits_{V}\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}dv. \qquad (8)$$

如果区域 V 收縮于点 P，那末在等式(8)的右边的积分就有極限，等于行列式

$$\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix} \qquad (9)$$

在点 P 的数值。

結果，等式 (8) 的左边的極限也存在，等于行列式(9)，而按定义这个極限就是場 $\mathbf{u}$ 在点 P 的旋度。我們得到以下的定理：

定理 6.2. 如果向量場 $\mathbf{u}(P)$ 的分量 $X(P), Y(P), Z(P)$ 在点 P 的鄰域內关于坐标具有連續的微商，那么場 $\mathbf{u}(P)$ 在点 P 有旋度。它可按公式

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}(P)\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix} \tag{10}$$

来計算。

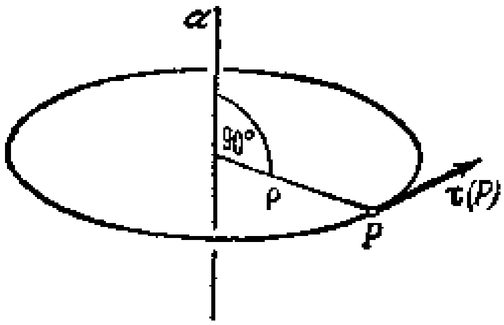

圖 13.

举例說，我們計算場 $\mathbf{u}(P)=f(\rho)\boldsymbol{\tau}(P)$ 的旋度。其中 ρ 表示点 P 到固定直綫 α 的距离，而 $\boldsymbol{\tau}(P)$ 是單位向量，它垂直于直綫 α 和由点 P 到直綫 α 的垂綫(圖 13)；函数 $f(\rho)$ 假定是可微分的。

为了更方便起見把向量 $\mathbf{u}(P)$ 写成形式

$$\mathbf{u}(P)=f(\rho)\frac{\mathbf{t}(P)}{\rho}=\varphi(\rho)\mathbf{t}(P),$$

其中 $\varphi(\rho)=\frac{f(\rho)}{\rho}$, $\mathbf{t}(P)$ 是向量，它和 $\boldsymbol{\tau}(P)$ 共綫而有長度 ρ,

以直綫 α 为 z 軸，x 軸和 y 軸在垂直平面上。如果点 P 的坐标是 x, y, z 那么向量 $\mathbf{t}(P)$ 显然有分量 $-y, x, 0$; 从此可推出場 $\mathbf{u}(P)$ 的分量 $X(P), Y(P), Z(P)$ 是这样的:

$$X(P)=-y\varphi(\rho), Y(P)=x\varphi(\rho), Z(P)=0.$$

微分之，我們得到:

$$\frac{\partial X}{\partial y}=-y\varphi'(\rho)\frac{\partial\rho}{\partial y}-\varphi(\rho),$$

而由于 $\rho^2=x^2+y^2$, 那末

$$2\rho\frac{\partial\rho}{\partial y}=2y,\quad \frac{\partial\rho}{\partial y}=\frac{y}{\rho},$$

結果，

$$\frac{\partial X}{\partial y}=-\frac{y^2}{\rho}\varphi'(\rho)-\varphi(\rho).$$

同理我們得到:

$$\frac{\partial Y}{\partial x}=\frac{x^2}{\rho}\varphi'(\rho)+\varphi(\rho).$$

其次，显然 $$\frac{\partial X}{\partial z}=\frac{\partial Y}{\partial z}=0.$$

因此， $$\operatorname{rot}\mathbf{u}(P)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix}=\mathbf{k}\left(\frac{\partial Y}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial y}\right)=$$

$$=\mathbf{k}\left[\frac{x^2+y^2}{\rho}\varphi'(\rho)+2\varphi(\rho)\right]=\mathbf{k}[\rho\varphi'(\rho)+2\varphi(\rho)].$$

应用这个結果来計算电力 j 通过無限長直导綫所产生的磁場 H 的旋度(第一章)。这时我們有:

$$f(\rho)=\frac{2j}{\rho},\ \varphi(\rho)=\frac{2j}{\rho^2},\ \varphi'(\rho)=-\frac{4j}{\rho^3},$$

因之， $$\operatorname{rot}\mathbf{H}=\mathbf{k}\left[-\frac{4j}{\rho^2}+2\frac{2j}{\rho^2}\right]=0,$$

这里是認为点 P 不在这导綫上 ($\rho\neq0$)。

如果，在这个实例中 $\varphi(\rho)=\omega=$ 常数，那么場 $\mathbf{u}(P)$ 的物理意义就是表示剛体繞着軸 a 以角速 ω 旋轉的質点綫速度場。这时 $X(P)=-\omega y$, $Y(P)=\omega x$, $Z(P)=0$, 因之

$$\operatorname{rot}\mathbf{u}(P)=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ -\omega y & \omega x & 0\end{vmatrix}=2\omega\mathbf{k}.$$

在这个場合，場 $\mathbf{u}(P)$ 的旋度到处存在(不只在軸外面)而且等于物体角速度向量的二倍。

再来考慮以下的实例，它的結果以后要用到。

設 $\mathbf{j}=\mathbf{j}(M)$ 是某一向量場，只在某一有界区域 V 內部不等于零；又假定向量 $\mathbf{j}(M)$ 的分量 $a(M)$, $b(M)$, $c(M)$ 关于坐标有連續的一級微商。作向量場

$$\mathbf{J}(P)=\iiint\limits_V\frac{\mathbf{j}(M)dv(M)}{r(P,M)} \tag{11}$$

并求它的散度和旋度。这个場的分量

$$A(P)=\iiint\limits_V \frac{a(M)dv(M)}{r(P,M)},$$

$$B(P)=\iiint\limits_V \frac{b(M)dv(M)}{r(P,M)},$$

$$C(P)=\iiint\limits_V \frac{c(M)dv(M)}{r(P,M)}$$

具有質量全面分布 $a(M)$, $b(M)$, $c(M)$ 的势位的形式。这些表达式还允許在积分号下关于点 P 的坐标求微商。和第五章末一样，在某些情形作分部积分，我們就得到以下的表达式：

$$\frac{\partial A}{\partial x}=\iiint\limits_V a(M)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r(P,M)}dv(M)=\iiint\limits_V \frac{\partial a(M)}{\partial \xi}\frac{1}{r(P,M)}dv, \tag{12.1}$$

$$\frac{\partial A}{\partial y}=\iiint\limits_V a(M)\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r(P,M)}dv(M), \tag{12.2}$$

$$\frac{\partial A}{\partial z}=\iiint\limits_V a(M)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r(P,M)}dv(M), \tag{12.3}$$

$$\frac{\partial B}{\partial x}=\iiint\limits_V b(M)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r(P,M)}dv(M), \tag{12.4}$$

$$\frac{\partial B}{\partial y}=\iiint\limits_V b(M)\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r(P,M)}dv(M)=\iiint\limits_V \frac{\partial b(M)}{\partial \eta}\frac{1}{r(P,M)}dv, \tag{12.5}$$

$$\frac{\partial B}{\partial z}=\iiint\limits_V b(M)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r(P,M)}dv(M), \tag{12.6}$$

$$\frac{\partial C}{\partial x}=\iiint\limits_V c(M)\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r(P,M)}dv(M), \tag{12.7}$$

$$\frac{\partial C}{\partial y}=\iiint\limits_V c(M)\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r(P,M)}dv(M), \tag{12.8}$$

$$\frac{\partial C}{\partial z}=\iiint\limits_V c(M)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r(P,M)}dv(M)=\iiint\limits_V \frac{\partial c(M)}{\partial \zeta}\frac{1}{r(P,M)}dv. \tag{12.9}$$

將公式(12.1),(12.5)及(12.9)相加,我們就得到:

$$\operatorname{div}\mathbf{J}(P)=\frac{\partial A}{\partial x}+\frac{\partial B}{\partial y}+\frac{\partial C}{\partial z}=\iiint\limits_V\left(\frac{\partial a}{\partial \xi}+\frac{\partial b}{\partial \eta}+\frac{\partial c}{\partial \zeta}\right)\frac{1}{r(P,M)}dv=$$

$$=\iiint\limits_V \operatorname{div}\mathbf{j}(M)\frac{dv(M)}{r(P,M)}.$$

場 $\mathbf{J}(P)$的散度就这样地求出了。

綜合公式(12.6)及(12.8),我們找到場 $\mathbf{J}$ 的旋度在 x 軸上的分量:

$$\left\{\operatorname{rot}\mathbf{J}\right\}_x=\frac{\partial C}{\partial y}-\frac{\partial B}{\partial z}=$$

$$=\iiint\limits_V\left[c(M)\frac{\partial}{\partial y}\frac{1}{r(P,M)}-b(M)\frac{\partial}{\partial z}\frac{1}{r(P,M)}\right]dv(M)=$$

$$=\iiint\limits_V\left[c(M)\frac{y-\eta}{r^3(P,M)}-b(M)\frac{z-\zeta}{r^3(P,M)}\right]dv(M)=$$

$$=\iiint\limits_V\frac{1}{r^3(P,M)}\{[\mathbf{r}(M,P),\mathbf{j}(M)]\}_x dv(M)=$$

$$=\iiint\limits_V\frac{1}{r^2(P,M)}\{[\mathbf{e}(M,P),\mathbf{j}(M)]\}_x dv(M).$$

同理,利用公式(12.2),(12.3),(12.4)及(12.6)就得到:

$$\{\operatorname{rot}\mathbf{J}\}_y=\iiint\limits_V\frac{1}{r^2(P,M)}\{[\mathbf{e}(M,P),\mathbf{j}(M)]\}_y dv(M),$$

$$\{\operatorname{rot}\mathbf{J}\}_z=\iiint\limits_V\frac{1}{r^2(P,M)}\{[\mathbf{e}(M,P),\mathbf{j}(M)]\}_z dv(M).$$

后面三个表达式可以統一为一般公式

$$\operatorname{rot} \mathbf{J}=\iiint\limits_V \frac{1}{r^2(P, M)}[\mathbf{e}(M, P), \mathbf{j}(M)] dv(M).$$

因此，我們也求出了場 J 的旋度。特別是，我們看到，向量 $\mathbf{j}(M)$（第一章）的力場就是由公式(11)定义的向量場 $\mathbf{J}(P)$的旋度。

和我們在第四章把滿足条件

$$\operatorname{grad} \varphi(M)=\mathbf{R}(M)$$

的函数 $\varphi(M)$称为向量場 R 的势位函数（或者数量势位）类似，我們現在也把滿足

$$\operatorname{rot} \mathbf{A}(M)=\mathbf{R}(M)$$

的这种向量場 $\mathbf{A}(M)$称为場 $\mathbf{R}(M)$的向量势位。

特別是，我們已經看到，在假定場 $\mathbf{j}(M)$的分量有連續的微商之下，向量 $\mathbf{j}(M)$的力場具有由公式(11)計算的向量势位 $\mathbf{J}(P)$。往后我們要把这个結果推广到只要場 $\mathbf{j}(M)$是連續的場合（不必假定它的分量的可微性）。

但是，一般地說，不是一切向量場都有向量势位。往后我們会提出关于給定一个向量場要它有向量势位所必須滿足的条件。

第七章　司托克斯公式及其应用

我們再回到引出旋度的定义的力学問題，而且从另一角度对它作一些研究。我們已經看到，繞着由向量 $\mathbf{l}$ 所确定的軸而轉动的輪子 K 的場 $\mathbf{u}(M)$，它的極限的角速度是由下面的公式确定的：

$$\omega(\mathbf{l})=\lim\frac{1}{2V}\iint_{\Sigma'}(\mathbf{u}(M),\boldsymbol{\tau}(M))d\sigma(M)=\frac{1}{2}(\mathbf{l},\operatorname{rot}\mathbf{u}(P)),\tag{1}$$

其中的积分是沿着柱体的側面（輪子 K 的边緣）而計算的。如果場 $\mathbf{u}(M)$ 在 P 点的旋度存在，則上述的極限总是存在的。

令 L_0 表示柱体 K 的一个底（“下底”）的周綫，在柱体的側面上，对于每一点 M 引入坐标 s 和 h，其中 h 是点 M 到下底的高，s 是周綫 L_0 从某一起点到点 M 在下底的投影間的弧長，側面的單元 $d\sigma(M)$ 可以表示为乘积 $dh\cdot ds$ 的形式。积分

$$I(V)=\iint_{\Sigma}(\mathbf{u}(M),\boldsymbol{\tau}(M))d\sigma(M)$$

可以表示为累次积分的形式：

$$\int_{h=0}^{H}dh\oint_{L_h}(\mathbf{u}(M),\boldsymbol{\tau}(M))ds,$$

其中 L_h 是由一个平面截柱体 K 所成的一条閉周綫，这个平面离下底的高等于 h。由于場 $\mathbf{u}(M)$ 的連續性，商

$$\frac{1}{H}\int_{h=0}^{H}\left\{\oint_{L_h}(\boldsymbol{\tau}(M),\mathbf{u}(M))ds\right\}dh,$$

当 $H\to 0$ 时，有極限，而且等于

$$\oint_{L_0}(\boldsymbol{\tau}(M),\mathbf{u}(M))ds.\tag{2}$$

从形式(1)看来，我們自然希望先以周綫 L_0 所圍成的面积的兩倍除积分(2)，然后使周綫 L_0 縮成一点 P，这样得到的極限值作为量$(1, \operatorname{rot} \mathbf{u}(P))$。为了証明这个事实，我們来考慮縮成一点 P，而形狀如周綫 L_0 的一串周綫 $L^{(1)}, L^{(2)}, \cdots, L^{(n)}, \cdots$，以及其所对应的一串比

$$I_n=\frac{1}{2S_n}\oint\limits_{L^{(n)}}(\boldsymbol{\tau}(M), \mathbf{u}(M))ds, \tag{3}$$

其中 S_n 是由周綫 $L^{(n)}$ 所圍成的面积，当固定 n 的时候，沿周綫 $L^{(n)}$ 的每一积分可以用量

$$I_n'=\frac{1}{2H_nS_n}\int\limits_{h=0}^{H_n}\left\{\oint\limits_{L^{(n)}}(\boldsymbol{\tau}(M), \mathbf{u}(M))ds\right\}dh$$

代替，而且选擇这样小的高 H_n 使得量 I_n' 与 I_n 的差，例如，小于 $\frac{1}{n}$。我們已經知道上述的表达式

$$\frac{1}{2H_nS_n}\iint\limits_{\Sigma_n'}(\boldsymbol{\tau}(M), \mathbf{u}(M))d\sigma$$

当 $n\to\infty$ 时，有極限，而且等于$(1, \operatorname{rot} \mathbf{u}(P))$，可是，当 $n\to\infty$ 时比(3)也有相同的極限，而这就是我們所要肯定的。

注意，这里周綫 $L_0, L^{(1)}, L^{(2)}, \cdots, L^{(n)}$ 的形狀不影响到証明。

上述結果可以用区域可加函数的术語給出下面的解釋。

假設給定具有固定法向量 $\mathbf{1}$ 的平面 α，而 $\mathbf{R}(M)$ 是給定的向量場，它具有旋度 $\mathbf{Q}=\operatorname{rot} \mathbf{R}$。

对于以周綫 L 为边界的每一个区域 $G\subset\alpha$，我們作积分

$$\Phi(G)=\oint\limits_{L}(\boldsymbol{\tau}(M), \mathbf{R}(M))ds,$$

其中 $\boldsymbol{\tau}(M)$ 是單位切向量，指向正的一側(那就是按向量 $\boldsymbol{\tau}(M)$ 的方向循 L 运动时从向量 $\mathbf{1}$ 的頂上看来是依反时針方向的旋轉)。

我們在第四章中已經知道，这样的积分叫做場 $\mathbf{R}(M)$ 沿周綫

L 的环流。按照在以前相类似的情形下的理由，环流显然是在平面 α 上的区域 G 的可加函数。

可以肯定地説，函数 $\Phi(G)$ 有密度 $\varphi(P)$，它是由下面的表达式确定的：

$$\varphi(P)=(1,\operatorname{rot}\mathbf{R}(P)).$$

实际上，我們剛剛已經知道如果区域序列 G_n 收縮于一点 P，那末極限的关系：

$$\frac{1}{G_n}\oint_{L_n}(\boldsymbol{\tau}(M),\mathbf{R}(M))\,ds\to(1,\operatorname{rot}\mathbf{R}(P))$$

成立，而这就是我們所要肯定的。

应用定理 3.1，我們得到下面的結論：

定理 7.1. 对于平面 α 上的任意周綫 L 所包圍的一个区域 G，等式

$$\oint_{L}(\boldsymbol{\tau}(M),\mathbf{R}(M))\,ds(M)=\iint_{G}(1,\operatorname{rot}\mathbf{R}(P))\,d\sigma(P)$$

成立。

現在我們推广这定理到任意（分塊光滑）曲面的情形，那就是要証明下面的定理：

定理 7.2. 如果 G 是在（分塊光滑）曲面 γ 上由（分段光滑）周綫 L 所包圍的一个区域，那末

$$\oint_{L}(\boldsymbol{\tau}(M),\mathbf{R}(M))\,ds(M)=\iint_{G}(\mathbf{n}(P),\operatorname{rot}\mathbf{R}(P))\,d\sigma(P),\quad(4)$$

其中 $\mathbf{n}(P)$ 是曲面 γ 的單位法向量，而 $\boldsymbol{\tau}(M)$ 是切于周綫 L 的單位向量，它的方向在（关于向量 $\mathbf{n}$）正的一侧。

［**証明**］ 注意所要証明的等式（4）的右边与左边都是区域可加函数。因此，如果把区域 G 分为有限个部分 $G_1,G_2,\cdots,G_n$，而对于其中每一个区域等式（4）假定成立，那末等式（4）对于整个区域

G 也就成立了。例如，由于任何多面形曲面是由有限个平面区域組成的，如果能証明对于每个平面区域等式(4)成立，那末对于任何的多面形曲面等式(4)也成立。任何分塊光滑曲面可以分为有限塊光滑曲面，因而只要对于光滑曲面 Σ 来証明等式(4)就够了。其次，我們还可以把光滑曲面 Σ 分割成这样小塊，使得在同一塊的范圍内它的切面仅仅轉动不大的角度，那末，选擇适当的坐标軸，可以把曲面的方程在所选擇的一塊近旁写成下面三个方程中的任何一个：$z=z(x, y)$；$x=x(y, z)$；$y=y(z, x)$，其中給定的函数都是連續的，而且有連續的微商，就是場 $\mathbf{R}$ 自身也可以按所选擇的軸分解为三个分量 $\mathbf{R}=X\mathbf{i}+Y\mathbf{j}+Z\mathbf{k}$，我們考慮場 $\mathbf{R}$ 以它的一个分量，例如用 $Z\mathbf{k}$ 来代替，而把問題变为等式

$$\iint\limits_{Q}(Z(M)\mathbf{k}, \mathbf{n}(M))d\sigma(M)=\oint\limits_{L}(Z(P)\mathbf{k}, \boldsymbol{\tau}(P))dl(P) \quad (5)$$

的証明，其中 Q 是曲面 Σ 上所选擇的部分，而 L 是包圍它的周綫。周綫 L 在 (x, y) 平面上的投影 l 包圍某一个区域 q，考慮周綫 L 的内接閉折綫 L'，它的每一綫段的長不超过某数 μ，这折綫 L' 在 (x, y) 平面上的投影是内接于周綫 l 的折綫 l'，而且在 (x, y) 平面上圍成一个多角形 q'。多角形 q' 可以超出区域 q 的界限，但是当 μ 充分小的时候，我們可以認为它包含在函数 $z(x, y)$ 的定义区域的范圍内。我們以 Q' 表示曲面 Σ 上投影为多角形 q' 的区域。

把多角形 q' 分割为直角三角形，它們的直角边平行于坐标軸而斜边的長不超过数 μ，在曲面 Σ 上取三点，它們在 (x, y) 平面上的投影恰是这三角形系的一个的三頂点，而它們自身在空間中也确定一个新的三角形，所有这些三角形的全体組成多面形曲面 Ω'，其頂点在曲面 Σ 上的区域 Q' 的范圍内。

以 $M'(P')$ 表示曲面 Ω'(折綫 L')上的点，它落在过曲面 Q(区域 Q' 的周綫)上的点 $M(P)$ 的一条垂綫上，根据函数 $z(x, y)$ 的連續性距离 $M'M(P'P)$ 和数 μ 同时一致地趋向于零。

对于多面形曲面 Ω' 已知下面的等式成立:

$$\iint_{\Omega'}(Z(M')\mathbf{k},\mathbf{n}(M'))d\sigma(M')=\oint_{L'}(Z(P')\mathbf{k},\boldsymbol{\tau}(P'))dl(P'). \quad (6)$$

由于$(\mathbf{k},\mathbf{n}(M'))d\sigma(M')=d\sigma(M')\cos(\widehat{\mathbf{n}(M'),\mathbf{k}})=dx\,dy$, 在等式(5)和(6)的左边的积分可以写成下面的形式

$$\iint_{q} Z(M)dx\,dy \qquad (7a)$$

和

$$\iint_{q'} Z(M')dx\,dy \qquad (7b)$$

(可以把法綫 $\mathbf{n}(M)$ 和法綫 $\mathbf{n}(M')$ 当作朝向上的，那就是和 z 軸交成銳角)。

其次，由于$(\mathbf{k},\boldsymbol{\tau}(P'))dl(P')=dl(P')\cos(\widehat{\boldsymbol{\tau}(P'),\mathbf{k}})=\pm dz$, 在等式 (5) 和 (6) 的右边的积分可以分别写成关于变量 z 在某积分限(α,β)和(α',β')內的积分:

$$\int_{\alpha}^{\beta}[Z(P_1)-Z(P_2)]dz, \quad (7c) \qquad \int_{\alpha'}^{\beta'}[Z(P_1')-Z(P_2')]dz, \quad (7d)$$

其中 P_1 是周綫 L 上那些使$(\widehat{\boldsymbol{\tau}(P),\mathbf{k}})$成銳角的点，而 P_2 是那些使$(\widehat{\boldsymbol{\tau}(P),\mathbf{k}})$成鈍角的点，对于 P_1' 和 P_2' 有类似的意义。

当数 μ 减少时，区域 q' 趋向于区域 q 而且函数 $Z(M')$(一致)趋向于函数 $Z(M)$。因此，积分(7b)趋向于积分(7a)。类似地，积分(7d)趋向于积分(7c)。由于等式(6)对于每一个 μ 都成立，当 $\mu\to0$ 时，取極限，我們得到等式(5)也是正确的，这就是所需要的。

这样子我們的定理就完全証明了。如果向量 $\mathbf{R}(M)$ 具有可微分的分量 $X(M)$, $Y(M)$, $Z(M)$, 那末等式 (4) 变为古典的司托克斯定理:

$$\iint_{G}\left\{\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)\cos\alpha+\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)\cos\beta+\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)\cos\gamma\right\}d\sigma=$$

$$=\oint_{L} X\,dx+Y\,dy+Z\,dz,$$

公式(4)也叫做司托克斯公式，它有下列重要的推論:

1. 考慮場 $\mathbf{R}(M)$ 的旋度通过任意閉曲面 Σ 的流量:

$$\oiint_{\Sigma}(\mathbf{n}(M), \operatorname{rot} \mathbf{R}(M))d\sigma.$$

作閉周綫 L 把曲面 Σ 分为两个区域 Σ' 和 Σ''。

对于 Σ' 与 Σ'' 分别应用司托克斯公式，我們就得到:

$$\iint_{\Sigma'}(\mathbf{n}(M), \operatorname{rot} \mathbf{R}(M))d\sigma = \oint_{L}(\boldsymbol{\tau}(M), \mathbf{R}(M)dl, \quad (8)$$

$$\iint_{\Sigma''}(\mathbf{n}(M), \operatorname{rot} \mathbf{R}(M))d\sigma = \oint_{L}(\boldsymbol{\tau}(M), \mathbf{R}(M))dl, \quad (9)$$

出現在公式(8)中的向量 $\boldsymbol{\tau}(M)$ 和出現在公式(9)中的向量 $\boldsymbol{\tau}(M)$ 取相反的方向，因为周綫 L 对于区域 Σ' 和区域 Σ'' 的正方向恰好相反。因此，在等式(8)和(9)的右边的絕对値相等而符号相反。

从此

$$\oiint_{\Sigma}(\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{R})d\sigma = \iint_{\Sigma'}(\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{R})d\sigma + \iint_{\Sigma''}(\mathbf{n}, \operatorname{rot} \mathbf{R})d\sigma = 0.$$

总之，向量 $\mathbf{R}(M)$ 的旋度通过任意閉曲面的流量等于零，从此更可推出任意場的旋度和散度等于零（因为我們記得散度是流量的密度）。

如果假定場 $\mathbf{R}(M)$ 的分量有連續的二級微商，那末这个結果由直接計算可以檢驗:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial Y}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial Z}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial z}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial X}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial x}\right) =$$

$$= \frac{\partial^2 Y}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} + \frac{\partial^2 Z}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 X}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 X}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 Y}{\partial z \partial x} = 0.$$

特别是，我們在前章末了所講过可微分的电流 J 的磁場可当作某个場 J 的旋度，而且有零散度，电流所引起的磁力沒有"源"；因而电流的磁場和"源"在磁極的定磁所产生的磁場有本質上的差

别。

在考察电流的磁場时，我們称向量場 $\mathbf{A}$ 是給定向量場 $\mathbf{R}$ 的向量势位，如果它們滿足条件：

$$\operatorname{rot} \mathbf{A} = \mathbf{R}.$$

我們已經指出过并不是每一个向量場都有向量势位，現在我們所得到的結果給出了已知向量場 $\mathbf{R}$ 存在向量势位的必要条件，那就是場 $\mathbf{R}$ 的散度等于零。因此，散度不等于零的場不可能有向量势位。

关于向量势位存在的充分条件的問題我們放到第十一章內研究。

2. 假定場 $\mathbf{R}$ 的旋度到处等于零，那末从等式(4)推出場 $\mathbf{R}$ 的环流沿任何閉周綫 L 等于零，这里的 L 在場的定义区域中圍成某一曲面 Σ。"圍成曲面"这个詞句在这叙述中不是多余的；一般地說，不是每条閉周綫都包圍完全落在場中的某一曲面。例如，假定場 $\mathbf{R}$ 所定义的区域是除去某一个無限圓柱的整个空間，那末圍繞着柱面的閉曲綫 L 在場內不可能圍成任何曲面，因而若場 $\mathbf{R}$ 的旋度在場的定义区域中恒等于零，則場沿周綫 L 的环流也可以不等于零。特别是，我們在前面(第六章末)已經講过，电流通过沿 z 軸方向的無限長导綫所产生的磁場——这个場在 z 軸外面到处有定义的——其旋度在場中每一点都等于零，但是沿着圍繞 z 軸的圓周，这个場的环流就不等于零。实际上，如果計算場 $\mathbf{R}(P) = \frac{2}{\rho}\boldsymbol{\tau}(P)$ 沿着中心在 z 軸上而位于 xy 平面上的圓周的环流，則 $\boldsymbol{\tau}(P)$ 是这个圓周的切綫向量；由于 $(\boldsymbol{\tau}(P), \mathbf{R}(P)) = \frac{2}{\rho}(\boldsymbol{\tau}(P), \boldsymbol{\tau}(P)) = \frac{2}{\rho}$，在环流的表达式中被积函数变为常量，而且我們得到

$$\oint_L (\boldsymbol{\tau}(P), \mathbf{R}(P))\, dl = \frac{2}{\rho}\oint_L dl = \frac{2}{\rho}\cdot 2\pi\rho = 4\pi.$$

因此，場 $\mathbf{R}(P)$ 沿着圓周 L 的环流不等于零。圓周 L 在場中不

圍成任何曲面，所以在这种情况下司托克斯定理是不能应用的。

3. 現在我們把問題倒过来。假定已知場 $\mathbf{R}(P)$ 沿任何閉曲綫 L 的环流等于零，其中 L 是在場的定义区域中某曲面 Σ 的周綫。在这种情况下，我們要証明場 $\mathbf{R}$ 具有旋度，而且到处等于零。如果知道 $\operatorname{rot}\mathbf{R}$ 存在(例如，如果場 $\mathbf{R}$ 的分量有連續的微商)，公式 (4) 可直接用来論証这个肯定；实际上，在这种情况下，对于任何区域 G，区域的可加函数：

$$\iint_G (\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{R})d\sigma$$

等于零；結果，这个可加函数$(\mathbf{n}, \operatorname{rot}\mathbf{R})$的密度也等于零，而且因为可以任意地选擇向量 $\mathbf{n}$ 的方向，所以 $\operatorname{rot}\mathbf{R}=0$。但是，如果預先不知道場 $\mathbf{R}$ 的旋度是否存在的話，那末必須作更詳細的研究。

考虑在沿着在空間中包圍某一区域 V 的閉曲面 Σ' 的向量积分

$$\Phi(V)=\oiint_{\Sigma}[\mathbf{n}(M), \mathbf{R}(M)]d\sigma(M), \qquad (10)$$

再令 $\mathbf{l}$ 为任意方向的單位向量，計算积分

$$(\mathbf{l}, \Phi(V))=\oiint_{\Sigma}(\mathbf{l}, [\mathbf{n}(M), \mathbf{R}(M)]d\sigma(M)=$$

$$=\oiint_{\Sigma}([\mathbf{l}, \mathbf{n}(M)], \mathbf{R}(M))d\sigma(M). \qquad (11)$$

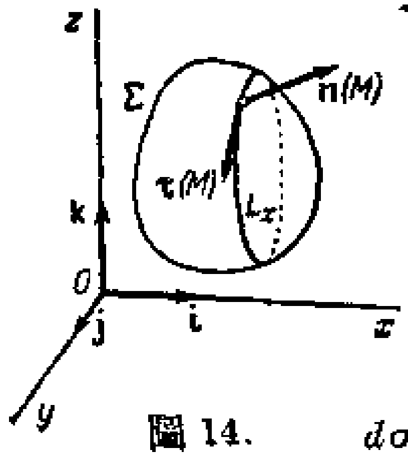

圖 14.

在空間中导入坐标軸 x,y,z，使 x 軸和向量 $\mathbf{l}$ 同向(使向量 $\mathbf{i}=\mathbf{l}$，$\mathbf{j}$ 和 $\mathbf{k}$ 垂直于 $\mathbf{l}$)，而且对坐标 x, y 計算沿曲面 Σ' 的积分(圖14)，这时曲面單元 $d\sigma(M)$ 有表达式

$$d\sigma(M)=\frac{dx\,dy}{\cos(\widehat{\mathbf{n}(M), \mathbf{k}})}.$$

其次，要注意向量 $[\mathbf{i}, \mathbf{n}(M)]=[\mathbf{i}, \mathbf{n}(M)]$ 位于曲面 Σ 的切面上，而且与曲面和正交于 x 軸的平面的截綫相切，以 L_x 表示这截綫的周綫，又以 $\boldsymbol{\tau}(M)$ 为單位切向量，于是向量积 $[\mathbf{i}, \mathbf{n}(M)]$ 可以写为形式

$$[\mathbf{i}, \mathbf{n}(M)]=\boldsymbol{\tau}(M)\cdot\sin(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{n}}).$$

周綫 L_x 在 xy 平面上的投影是与 y 軸平行的直綫，所以，引入这周綫的弧單元 $ds(M)$，我們就有：

$$dy=ds(M)\cdot\cos(\widehat{\boldsymbol{\tau}(M), \mathbf{j}}),$$

現在被积表达式取形式：

$$(\mathbf{R}(M), \boldsymbol{\tau}(M)\sin(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{n}})\frac{dx\,ds}{\cos(\widehat{\mathbf{n},\mathbf{k}})}\cos(\widehat{\boldsymbol{\tau},\mathbf{j}}). \tag{12}$$

由于 $\cos^2(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{i}})+\cos^2(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{j}})+\cos^2(\widehat{\mathbf{n}, \mathbf{k}})=1$ 我們有：

$$\sin(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{n}})=\sqrt{1-\cos^2(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{n}})}=\sqrt{\cos^2(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{n}})+\cos^2(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{n}})},$$

从而：

$$\frac{\sin(\widehat{\mathbf{i},\mathbf{n}})}{\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{n}})}=\sqrt{1+\frac{\cos^2(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{n}})}{\cos^2(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{n}})}}. \tag{13}$$

我們可以把 $\cos(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{n}})$ 和 $\cos(\widehat{\mathbf{k}, \mathbf{n}})$ 当作在 y 軸和 z 軸上的綫段，它們在(yz)平面上定义某向量 $\mathbf{q}$（向量 $\mathbf{n}$ 在这平面上的投影），那末这兩綫段的比：

$$\frac{\cos(\widehat{\mathbf{j}, \mathbf{n}})}{\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{n}})}=\operatorname{tg}(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{q}})$$

于是由于(13)

$$\frac{\sin(\widehat{\mathbf{i}, \mathbf{n}})}{\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{n}})}=\frac{1}{\cos(\widehat{\mathbf{k},\mathbf{q}})}.$$

因为向量 $\mathbf{n}$ 垂直于在(yz)平面上的向量 $\boldsymbol{\tau}$，所以向量 $\mathbf{n}$ 在这平面上的投影 $\mathbf{q}$ 垂直于向量 $\boldsymbol{\tau}$，角度$(\widehat{\boldsymbol{\tau}, \mathbf{j}})$和$(\widehat{\mathbf{q}, \mathbf{k}})$都落在这平面上，而且我們知道，它們的对应边互相垂直，由于初等几何所熟知的定理，这兩个角度相等。因之(12)取形式：

$$(\mathbf{R}(M), \boldsymbol{\tau}(M))dx\ ds.$$

我們現在要計算积分(11)。我們可以先沿周綫 L_x 积分，然后关于 x 积分来計算它:

$$(1, \Phi(V)) = \int_x dx \left\{ \oint_{L_x} (\mathbf{R}(M), \boldsymbol{\tau}(M))\, ds \right\}.$$

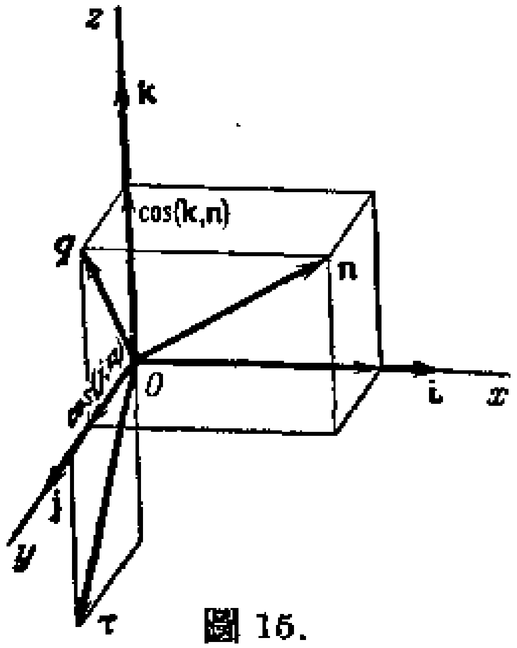

圖 15.

但由假設內部的积分对于每一 x 的值等于零，所以整个积分(11)等于零，由于向量 1 可以任意地选取，我們得到結論: 对于任何区域 V, $\Phi(V)=0$, 于是区域的可加函数 $\Phi(V)$ 显然有等于零的密度。由于場 $\mathbf{R}$ 的旋度就是定义为(10) 函数 $\Phi(V)$ 的密度，所以在我們的假定下場 $\mathbf{R}$ 当然具有等于零的旋度。

4. 特別是，对于任何的势位場 $\mathbf{R} = \operatorname{grad} \varphi$, 我們的定理的假設都滿足，因为在第四章中我們講过，这种場的环流沿任何閉周綫都等于零。

現在我們知道“任何的势位場具有等于零的旋度”。

如果假定势位函数 $\varphi(M)$ 不仅有一級的，而且有二級的連續偏微商——在这个情况下，場 $\mathbf{R}$ 的旋度显然存在，——那末由直接計算也可以得到旋度等于零:

$$\operatorname{grad} \varphi = \left\{ \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z} \right\},$$

$$\operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi = \left\{ \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial z} - \right.$$
$$\left. - \frac{\partial}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\} = \{0, 0, 0, \}.$$

5. 反过来，如果某个場 $\mathbf{R}$ 的旋度到处等于零，可以肯定，至少

在某一定形式的区域內場 R 是某数量場 φ 的梯度，关于区域的形式下面再講。实際上，我們已經知道如果 $\operatorname{rot}\mathbf{R}(M)=0$，那末沿任何閉曲綫 L 場的环流等于零，其中 L 在場的定义区域中圍成某一曲面 γ。

先假定在我們的区域中可以选擇这样一系初等閉曲綫（見第四章），使得其中每一曲綫在場內圍成某曲面 γ，那末沿着在場的定义区域內每一条初等閉周綫，場 R 的环流等于零，因为它对于圍成曲面的任何周綫等于零。但是我們可以应用定理 4.3，它也能給我們所需要的結果：*存在可微分函数 $\varphi(M)$ 使得它具有 $\mathbf{R}(M)=$ $=\operatorname{grad}\varphi(M)$ 的性質*。

在某一区域中可以选擇这样的一系初等閉曲綫而使得其中每一条圍成某一曲面，那末这种区域称为單連通区域。因之，在單連通区域中一切沒有旋度的場都是势位的。

特別是，任何單連通的凸区域，即該区域的任何兩点 M 和 P 的整条綫段 MP 都包含在这区域中。实際上，在第四章中已經指出对于凸区域中可以选擇一切閉周綫为三角形的形式。但是每一个三角形圍成的平面区域和它的边整个屬于凸区域 V。因此，对于凸区域 V 單連通性的条件是滿足的。

例如，球或立方体，显然都是凸的。因此，一切沒有旋度的場在球或立方体內都有势位函数。

6. 如果把有限个曲面沿着它們的边界而联結起来的几何圖形也算是曲面——这样的几何圖形可能有很复杂的結構，特別是，它可以多次自己相交，——那末容易証明，在單連通区域中每一閉周綫圍成某一曲面。

实際上，如果在單連通区域 V 中給定了一条閉周綫 L，那末在周綫 L 上取定有限个点 $P_0, P_1, P_2, \cdots P_{2N}=P_0$，它們彼此之間的距离是这样地小，而使点 P_{2j-1} 和 P_{2j+1} 在鄰域 $U(P_j)$ 的范圍內，这 $U(P_j)$ 就是在定义初等閉周綫时所說的鄰域（見第四章）；于是由

初等閉周綫 $P_{2j-1}AP_{2j}P_{2j-1}$ 及 $P_{2j}AP_{2j+1}P_{2j}$ $(j=1, 2, \cdots, N)$ 所圍成的曲面，沿着初等路綫 $AP_0, AP_1, \cdots$ 一个一个地連接起来，形成一个以整条閉折綫 $P_0P_1P_2\cdots P_{2N}$ 为界的曲面。利用周界 L 的分段光滑性，不难將所得到的曲面扩大而使得它張在整条周界 L 上。

結果，假如在区域 V 中至少存在一条閉周綫 L，使得它不能圍成一个完全落在 V 中的曲面，那么区域 V 不是單連通的。例如，电流通过 z 軸的磁場的定义区域——除 z 軸外的整个空間，——显然不是單連通的，因为繞着 z 軸的閉曲綫 L 在場內不能圍成一个曲面：以曲綫 L 为界的任一曲面与 z 軸有交点，所以不全部落在場的定义区域內。

另一方面，按定义本身，在一切非單連通的区域中一定存在不圍成任一曲面的閉周綫（甚至于其中有初等的）。

我們还要看看定义在非單連通区域 V 中的無旋度的場 $\mathbf{R}$，其勢位存在的情况到底怎样？

令 L_0 为这区域中不能圍成任一曲面的閉周綫，用有限个全部落在区域 V 中的球 $U_0, U_1, U_2, \cdots, U_n=U_0$ 把 L_0 遮蓋住。由于球 U_0 是單連通的，在其中可定义場 $\mathbf{R}$ 的勢位 $\varphi_0(M)$，在球 U_1 中我們可以作場 $\mathbf{R}$ 的勢位 $\varphi_1(M)$；这个勢位是这样取法的，使得 U_0 和 U_1 的公共部分的某一点 M_0，$\varphi_1(M_0)=\varphi_0(M_0)$。如果考虑到 U_0 和 U_1 的整个公共部分，那末在其中函数 $\varphi_0(M)$ 和 $\varphi_1(M)$ 都是場 $\mathbf{R}$ 的勢位，因为兩个勢位相差只是一个常数（第四章），而 $\varphi_1(M_0)=\varphi_0(M_0)$，所以在 U_0 和 U_1 的公共部分上函数 $\varphi_1(M)$ 和 $\varphi_0(M)$ 恒等。

其次，再在球 U_2 中作勢位 $\varphi_2(M)$ 使得在球 U_1 和 U_2 的公共部分的某一点 M_1 有 $\varphi_2(M_1)=\varphi_1(M_1)$；于是和以前一样，在球 U_1 和 U_2 的整个公共部分上，我們有 $\varphi_1(M)\equiv\varphi_2(M)$。这样的作法可以連續到最后一个球 $U_n=U_0$ 为止。

当我們按上述的法則作势位 $\varphi_n(M)$ 的时候，我們可以把它和在球 U_0 中已經有的势位 $\varphi_0(M)$ 加以比較。一般地說，这兩个势位还不是完全一样的——沒有理由要一样。但既是同一个場的势位，那么它們相差只是一个常数。

只要記得，場 R 的势位是当作数量积 $(\boldsymbol{\tau}(M), \mathbf{R}(M))$ 的綫性积分(第四章)而建立起来，那么很容易算出这个常数；它具有値

$$\gamma(L_0)=\oint_{L_0}(\boldsymbol{\tau}(M), \mathbf{R}(M))dl,$$

即等于場 $\mathbf{R}(M)$ 沿周綫 L_0 的环流。

这样，在一切非單連通区域中無旋度的場，一般地說，不可能建立一个單値的势位函数，虽然在每一类的鄰域还可能有这样的函数(局部的势位)。因而有时要談到关于多値势位場。

当作一个例子，設有电流 J 通过和 z 軸同向的無限長的导綫，我們考虑它的磁場 $\mathbf{R}(P)$，这个場的定义区域是除 z 軸外的整个空間，我們已經指出过，它是非單連通的。我們也知道这个場是無旋度的。局部的势位可以按第四章的公式(15)定义之：

$$\varphi(P)=\int_A^P(\boldsymbol{\tau}(M)\mathbf{R}(M))dl. \tag{14}$$

一个从点 A 到点 P 的积分路徑，取为柱面坐标系統的三个坐标曲綫(極角为 α，水平半徑为 ρ，高为 z)，积分(14)分为三項，其中只需要考虑 ρ 和 z 为定値而極角 α 变动的那一項，因为在其余二項 $\boldsymbol{\tau}(M)$ 和 $\mathbf{R}(M)$ 正交。

在極坐标中計算，就得到：

$$\varphi(P)=\int_A^P(\boldsymbol{\tau}(M), \mathbf{R}(M)dl=\int_{\alpha(A)}^{\alpha(P)}\left(\boldsymbol{\tau}(M), \frac{2}{\rho}\boldsymbol{\tau}(M)\right)\rho\, d\alpha=$$
$$=2(\alpha(P)-\alpha(A)).$$

因此，場 $\mathbf{R}(P)$ 的局部势位的增量和極角的增量成比例，自

然，在圍繞着 z 軸的閉路徑来推广这势位的情况下，我們得到的增量是 4π，这表示不可能在場 R(P) 的整个定义区域中建立一个單值势位函数。

作为結束，我們可用簡潔的形式来敍述我們所要求的基本結果。

定理 7.3. 任何向量場的旋度的散度（要假定旋度存在而且連續）等于零。

定理 7.4. 势位場的旋度存在而且恒等于零。

定理 7.5. 假定某一个向量場 R 的旋度存在而且恒等于零，那么場 R 在每一个單連通区域中，特別是，在場的每一点的鄰域中具有势位。

第八章　可微場

在这章里假定其中所談到的数量場以及向量場的分量都有連續的一級微商，在后半章里还要假定連二級微商也存在而且連續。

一級微分运算　在第二章里我們已經定义过，用記号 ∇ 表示的一般微分运算，讓我們回忆一下这个定义。令 $\mathbf{R}, \varphi, \cdots\cdots$ 是某些場，$T(\mathbf{p}, \mathbf{R}, \varphi, \cdots)$ 是某(有意义的)表达式，它和动向量 $\mathbf{p}$ 綫性相关，于是我們按下面的公式定义微分运算 $T(\nabla, \mathbf{R}, \varphi\cdots)$

$$T(\nabla; \mathbf{R}, \varphi, \cdots) = \frac{\partial}{\partial x} T(\mathbf{i}; \mathbf{R}, \varphi, \cdots) + \\ + \frac{\partial}{\partial y} T(\mathbf{j}; \mathbf{R}, \varphi, \cdots) + \frac{\partial}{\partial z} T(\mathbf{K}; \mathbf{R}, \varphi, \cdots), \quad (1)$$

其中向量 $\mathbf{p}$ 的坐标以关于对应的坐标軸的微分符号来代替，在那时我們也应用奥氏的推广公式証明过表达式 (1) 与軸 x, y, z 的选择無关，而且可按下面的公式計算

$$T(\nabla, \mathbf{R}(P), \varphi(P), \cdots) = \\ = \lim_{V \to P} \frac{1}{V} \oiint_{\Sigma} T(\mathbf{n}; \mathbf{R}(M), \varphi(M)\cdots) \, d\sigma(M), \quad (2)$$

其中 V 是由曲面 Σ 所包圍的体积而且收縮于点 P。

我們在前面数章中所建立的微分运算，——数量場的梯变，向量場的散度和旋度——都是上述的一般运算的特殊情形。实际上，如果我們回想一下关于坐标的微分运算的表达式：

$$\operatorname{grad} d\varphi = \mathbf{i}\frac{\partial \varphi}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial \varphi}{\partial y} + \mathbf{K}\frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

$$\operatorname{div} \mathbf{R} = \frac{\partial X}{\partial x} + \frac{\partial Y}{\partial y} + \frac{\partial Z}{\partial z},$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{R}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ X & Y & Z\end{vmatrix},$$

那末在第二章所提出的例子就直接証明

$$\operatorname{grad}\varphi=\nabla\varphi,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{R}=(\nabla,\mathbf{R}),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{R}=(\nabla,\mathbf{R}).$$

其次还要給出含有符号 ∇ 的某些运算法则。

引理 1　如果表达式 $T_1(\mathfrak{p};\mathbf{R},\varphi,\cdots)$ 和表达式 $T_2(\mathfrak{p};\mathbf{R},\varphi,\cdots)$（关于 $\mathfrak{p}$）恒等，那末 $T_1(\nabla;\mathbf{R},\varphi,\cdots)$ 和 $T_2(\nabla;\mathbf{R},\varphi,\cdots)$ 也恒等。

証明　按公式(2)从不变算子 $T(\nabla)$ 直接可以推出。

引理 1 是很重要的；它指出在表达式 $T(\nabla;\mathbf{R},\varphi,\cdots)$ 中可以引出任何的恒等变换，而在向量代数中的形式上的法則可以允許的。好像將記号 ∇ 表示实在的向量，而不是記号。

例如，下面的恒等式都成立：

$$\nabla(\varphi_1+\varphi_2)=\nabla\varphi_1+\nabla\varphi_2,$$

$$(\nabla,\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2)=(\nabla,\mathbf{R}_1)+(\nabla,\mathbf{R}_2),$$

$$[\nabla,\mathbf{R}_1+\mathbf{R}_2]=[\nabla,\mathbf{R}_1]+[\nabla,\mathbf{R}_2];$$

这些等式表达算子梯度，散度和旋度的綫性性質，就是我們以前直接从这些微分算子的定义出發所得到的。

在叙述引理 2 以前，我們先作下面的注釋。

在形如 $T(\nabla;\mathbf{R},\varphi,\cdots)$ 的表达式中，有时需要的不是表达式 T 中的全部函数 $\mathbf{R},\varphi,\cdots$ 施行微分运算，而是仅仅对某一部分，其余当作常量。在这种情况下，我們說符号 ∇“作用”在这些主元而“不作用”在其余的主元。我們規定在表达式 $T(\nabla,\mathbf{R},\varphi,\cdots)$ 具体的写法中某些主元在符号 ∇ 前面，而其他的在符号 ∇ 后面，那末 ∇ 只作用在那些在它后面的主元，而不作用在那些在它前面的主元。例

如，在 $(\mathbf{R}, \nabla)\varphi$ 中，符号 ∇ 作用在 φ 而不作用在 $\mathbf{R}$。有时也使用别的符号；記号 ∇ 不作用的那些主元和所写出的次序是無关的，在这种主元的下面附以下标 c（应該指出这种主元作为常量）。例如，$(\nabla, \mathbf{R}_c)\varphi$ 表示 ∇ 不作用在 $\mathbf{R}$，但作用在 φ。在这种情形下，只要可能就得力求改变表达式 $T(\nabla, \mathbf{R}, \varphi)$ 使得附以下标 c 的主元在記号 ∇ 前面；那末在我們的規定下，下标 c 可以去掉，因为这个对应主元的位置自身就指明它是作为常量，如此，只要在上一个例中，將 ∇ 和 $\mathbf{R}_c$ 簡單地加以对調，我們就得到

$$(\nabla, \mathbf{R}_c)\varphi = (\mathbf{R}_c, \nabla)\varphi = (\mathbf{R}, \nabla\varphi) = (\mathbf{R}, \operatorname{grad} \varphi).$$

下述的引理 2 表明当其中 ∇ 施行到二个变量的乘积时，表达式是怎样改变的。

引理 2 如果記号 ∇ 作用于任意兩个(数値的，数量的，向量的)变量的乘积，那末类似于乘积的通常微分法則，它的結果可以写成兩項的和，在每項中 ∇ 作用于积的一个因子而不作用于另一个。

［**証明**］ 对于任何形式的乘积其証明是完全同样的。

为了明确起見，我們考虑 ∇ 与某向量积 $[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]$ 的数量积的情形。因此，我們必須变换表达式

$$(\nabla, [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]).$$

按定义

$$(\nabla, [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]) = \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{i}; [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]) + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{j}; [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]) +$$

$$+\frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{k}; [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2] = \left(\mathbf{i}; \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]\right) +$$

$$+\left(\mathbf{j}, \frac{\partial}{\partial y}[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]\right) + \left(\mathbf{k}, \frac{\partial}{\partial z}[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]\right).$$

但是对于向量积，关于每个坐标的微分也都遵守同样的通常乘积法則。

$$\left(\mathbf{i}, \frac{\partial}{\partial x}[\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]\right) = \left(\mathbf{i}, \left[\frac{\partial \mathbf{R}_1}{\partial x}, \mathbf{R}_2\right]\right) + \left(\mathbf{i}, \left[\mathbf{R}_1, \frac{\partial \mathbf{R}_2}{\partial x}\right]\right). \quad (3)$$

对于 $\frac{\partial}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial}{\partial z}$ 也有类似于(3)的表达式，我們把它們加起来，就得

到：

$$(\nabla, [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]) = (\nabla, [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2^c]) + (\nabla(\mathbf{R}_1^c, \mathbf{R}_2]),$$

这就是在給定的情形下所要求的結果。所得到的表达式还可以改变，为了把常量主元提到記号 ∇ 的前面来，我們利用混合积的巡迴性質，即所謂，对于任何三个向量 $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ 有等式，

$$(\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]) = (\mathbf{b}, [\mathbf{c}, \mathbf{a}]) = (\mathbf{c}, [\mathbf{a}, \mathbf{b}]).$$

对我們的情形，应用这个性質就求出：

$$(\nabla, [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2^c]) = (\mathbf{R}_2^c, [\nabla, \mathbf{R}_1]) = (\mathbf{R}_2, \text{rot } \mathbf{R}_1),$$

$$(\nabla, [\mathbf{R}_1^c, \mathbf{R}_2]) = (\mathbf{R}_1^c, [\mathbf{R}_2, \nabla]) = -(\mathbf{R}_1^c, [\nabla, \mathbf{R}_2]) = -(\mathbf{R}_1, \text{rot } \mathbf{R}_2),$$

因之，得到公式：

$$\text{div } [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2] = (\nabla, [\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2]) = (\mathbf{R}_2, \text{rot } \mathbf{R}_1) - (\mathbf{R}_1, \text{rot } \mathbf{R}_2).$$

还要考虑一些实例：

1. 求兩个函数 φ_1 和 φ_2 之积的梯变。按引理 2

$$\text{grad } (\varphi_1\varphi_2) = \nabla(\varphi_1\varphi_2) = \nabla(\varphi_1^c\varphi_2) + \nabla(\varphi_1\varphi_2^c);$$

其次，把 φ_1^c 和 φ_2^c 拿到記号 ∇ 的外面来，就得到：

$$\nabla(\varphi_1^c\varphi_2) = \varphi_1^c \cdot \nabla\varphi_2 = \varphi_1 \cdot \text{grad } \varphi_2,$$

$$\nabla(\varphi_1\varphi_2^c) = \varphi_2^c \cdot \nabla\varphi_1 = \varphi_2 \cdot \text{grad } \varphi_1;$$

这样一来，

$$\text{grad } (\varphi_1\varphi_2) = \varphi_1 \text{ grad } \varphi_2 + \varphi_2 \text{ grad } \varphi_1. \tag{4}$$

2. 求乘积 $\varphi\mathbf{R}$ 的散度。

应用引理 2 和引理 1，得：

$$\text{div } (\varphi\mathbf{R}) = (\nabla, \varphi\mathbf{R}) = (\nabla, \varphi_c\mathbf{R}) + (\nabla, \varphi\mathbf{R}_c) =$$
$$= \varphi_c(\nabla, \mathbf{R}) + (\mathbf{R}_c, \nabla\varphi) = \varphi \text{ div } \mathbf{R} + (\mathbf{R}, \text{grad } \varphi). \tag{5}$$

3. 求乘积 $\varphi\mathbf{R}$ 的旋度。

$$\text{rot } (\varphi\mathbf{R}) = [\nabla, \varphi\mathbf{R}] = [\nabla, \varphi_c\mathbf{R}] + [\nabla, \varphi\mathbf{R}_c] =$$
$$= \varphi_c[\nabla, \mathbf{R}] - [\mathbf{R}_c, \nabla\varphi] = \varphi \text{ rot } \mathbf{R} - [\mathbf{R}, \text{grad } \varphi]. \tag{6}$$

4. 求場 $\varphi(r)\mathbf{r}$ 的散度和旋度，其中 $\mathbf{r}$ 是向徑。

a) 应用公式(5)，求得：

$$\operatorname{div}(\varphi(r)\mathbf{r}) = \varphi(r)\operatorname{div} r + (\mathbf{r}, \operatorname{grad}\varphi(r)).$$

但
$$\operatorname{div}\mathbf{r} = \operatorname{div}(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}) = \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z} = 3,$$
$$\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\mathbf{r}_0,$$

其中 $\mathbf{r}_0$ 是單位向量；所以

$$\operatorname{div}(\varphi(r)\mathbf{r}) = 3\varphi(r) + r\varphi'(r).$$

这个結果，我們在第五章里由直接計算已經得到了。

特别是，如果 $\varphi(r) = r^{\alpha}$，我們得到：

$$\operatorname{div}(r^{\alpha}\mathbf{r}) = (3+\alpha)r^{\alpha}. \qquad (7)$$

b) 利用公式(6)求得：

$$\operatorname{rot}(\varphi(r)\mathbf{r}) = \varphi(r)\operatorname{rot}\mathbf{r} - [r, \operatorname{grad}\varphi(r)],$$

但
$$\operatorname{rot}\mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = 0,$$ 而 $\mathbf{r}$ 和 $\operatorname{grad}\varphi(r) = \varphi'(r)\mathbf{r}_0$

共綫，所以 $[\mathbf{r}, \operatorname{grad}\varphi(r)] = 0$，結果

$$\operatorname{rot}(\varphi(r)\mathbf{r}) = 0. \qquad (8)$$

二級微分运算 令 $\mathbf{R}, \varphi$ 是某些数量場和向量場，$T(\mathbf{p}, \mathbf{q}; \mathbf{R}, \varphi, \cdots)$ 是关于任意向量 $\mathbf{p}$ 和 $\mathbf{q}$ 的一个双綫性表达式。

回忆一下，所謂双綫性函数 $T(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ 就是当 $\mathbf{q}$ 固定时，关于 $\mathbf{p}$ 是綫性的，而当 $\mathbf{p}$ 固定时，关于 $\mathbf{q}$ 是綫性的；換言之，如果下面的关系式成立：

$$T(\alpha_1\mathbf{p}_1+\alpha_2\mathbf{p}_2, \mathbf{q}) = \alpha_1 T(\mathbf{p}_1, \mathbf{q}) + \alpha_2 T(\mathbf{p}_2, \mathbf{q}), \qquad (9)$$

$$T(\mathbf{p}, \beta_1\mathbf{q}_1+\beta_2\mathbf{q}_2) = \beta_1 T(\mathbf{p}, \mathbf{q}_1) + \beta_2 T(\mathbf{p}, \mathbf{q}_2). \qquad (10)$$

从(9)和(10)推出更一般的公式

$$T\left(\sum_{i=1}^{k}\alpha_i\mathbf{p}_i, \sum_{j=1}^{m}\beta_j\mathbf{q}_j\right) = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\beta_j T(\mathbf{p}_i, \mathbf{q}_j). \qquad (11)$$

特别是，取

$$\mathbf{p}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k},\quad \mathbf{q}=\xi\mathbf{i}+\eta\mathbf{j}+\zeta\mathbf{k},$$

我們得到:

$$T(\mathbf{p},\mathbf{q})=x\xi T(\mathbf{i},\mathbf{i})+x\eta T(\mathbf{i},\mathbf{j})+x\zeta T(\mathbf{i},\mathbf{k})+y\xi T(\mathbf{j},\mathbf{i})+$$
$$+y\eta T(\mathbf{j},\mathbf{j})+y\zeta T(\mathbf{j},\mathbf{k})+z\xi T(\mathbf{k},\mathbf{i})+z\eta T(\mathbf{k},\mathbf{j})+z\zeta T(\mathbf{k},\mathbf{k}).$$

由于 $T(\mathbf{p},\mathbf{q})$ 关于 $\mathbf{p}$ 是綫性的，在前节中所定义的表达式 $T(\nabla,\mathbf{q})$ 就有意义。其次由于后者有意义的，而且关于 $\mathbf{q}$ 是綫性的，我們还可以造出表达式 $T(\nabla,\nabla)$。容易檢証它的展开式將取下面的形式:

$$T(\nabla,\nabla)=\frac{\partial^2}{\partial x^2}T(\mathbf{i},\mathbf{i})+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}T(\mathbf{i},\mathbf{j})+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial z^2}T(\mathbf{k},\mathbf{k}).\quad(12)$$

我們也可以用另外一种方式来做，那就是起先以 ∇ 代替 $\mathbf{q}$，然后以 ∇ 代替 $\mathbf{p}$。按混合微商与微分次序無关性的定理，其結果完全一样可以用公式(12)表示。

因为从我們的运算得到的每一个結果不依賴于軸的选擇，所以最后的結果(12)也不依賴于軸的选擇。

我們轉到运算 $T(\nabla,\nabla)$ 的性質的討論。

引理 3　如果 $T(\mathbf{p},\mathbf{q})\equiv 0$ 那末 $T(\nabla,\nabla)\equiv 0$。

实际上，如果 $T(\mathbf{p},\mathbf{q})\equiv 0$，那末按引理 1 $T(\nabla,\mathbf{q})\equiv 0$，再按同一引理，$T=(\nabla,\nabla)\equiv 0$，这就是所要証明的。

引理 4　如果(对于任意的向量 $\mathbf{p}$) $T(\mathbf{p},\mathbf{p})\equiv 0$，那末 $T(\nabla,\nabla)\equiv 0$。

[証明]　考慮表达式

$$T(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q}).$$

按公式(11)

$$T(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q})=T(\mathbf{p},\mathbf{p})+T(\mathbf{p},\mathbf{q})+T(\mathbf{q},\mathbf{p})+T(\mathbf{q},\mathbf{q}).$$

但由于条件 $T(\mathbf{p}+\mathbf{q},\mathbf{p}+\mathbf{q})=0$, $T(\mathbf{p},\mathbf{p})=0$, $T(\mathbf{q},\mathbf{q})=0$，所以

$$T(\mathbf{p},\mathbf{q})+T(\mathbf{q},\mathbf{p})\equiv 0.\quad(13)$$

表达式(13)的左边是关于 $\mathbf{p},\mathbf{q}$ 的双綫性函数；所以按引理 3

$$T(\nabla, \nabla) + T(\nabla, \nabla) \equiv 0,$$

从此
$$T(\nabla, \nabla) \equiv 0.$$

这就是我們所要肯定的。

現在要考慮最簡單的二級运算，其中只牽涉到一个場，如果所指的是数量場，那末我們可以作出下列运算：

1a) $(\nabla, \nabla\varphi) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi$,

1b) $[\nabla, \nabla\varphi] = \operatorname{rot} \operatorname{grad} \varphi$;

如果这里所指的是向量場 $\mathbf{R}$，那末可以作出下列运算：

2a) $\nabla(\nabla, \mathbf{R}) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{R}$,

2b) $(\nabla, [\nabla, \mathbf{R}]) = \operatorname{div} \operatorname{rot} \mathbf{R}$,

2c) $[\nabla, [\nabla, \mathbf{R}]] = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{R}$.

如果以普通的向量 $\mathbf{p}$ 代替 ∇，那末按向量代数的法则运算 1b) 和 2b) 的結果变为零。

应用引理 4，我們得到定理的特殊情形，这是我們在第七章中已經知道的。

A) 任何一个数量場的梯度有等于零的旋度。

Б) 任何一个向量場的旋度有等于零的散度。

考慮运算 1a)。

由于对 $\mathbf{p} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

$$(\mathbf{p}, \mathbf{p}\varphi) = x^2\varphi + y^2\varphi + z^2\varphi,$$

右边把向量 $\mathbf{p}$ 的坐标换成对应坐标的微商得：

$$(\nabla, \nabla\varphi) = \operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \Delta\varphi, \qquad (14)$$

其中記号 Δ 表示拉普拉斯微分算子。

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} = \nabla^2.$$

运算 2c) 特别有趣。

这里我們利用双重向量积的变换公式

$$[\mathbf{A}, [\mathbf{B}, \mathbf{C}]] = \mathbf{B}(\mathbf{A}, \mathbf{C}) - \mathbf{C}(\mathbf{A}, \mathbf{B}),$$

它使我們有可能以 2a) 和 1a) 表达 2c):

$$[\nabla, [\nabla, \mathbf{R}]] = \nabla(\nabla, \mathbf{R}) - (\nabla, \nabla)\mathbf{R} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{R} - \nabla^2 \mathbf{R}, \qquad (15)$$

显然，当 $\mathbf{R} = \{X, Y, Z\}$ 时，向量 $\nabla^2 \mathbf{R}$ 有分量

$$\nabla^2 X, \nabla^2 Y, \nabla^2 Z.$$

应用已得的結果，我們来計算向量 $\mathbf{j}(M)$ 的力場的旋度，其中假設場 $\mathbf{j}(M)$ 的坐标 $a(M), b(M), c(M)$ 具有連續的微商。我們在第一章中已經知道向量 $\mathbf{j}(M)$ 的力場 $\mathbf{H}(P)$ 由下面的积分表达:

$$\mathbf{H}(P) = \iiint\limits_V \frac{[\mathbf{j}(M), \mathbf{e}(M, P)]}{r^2(M, P)} dv(M).$$

在第六章的末了我們已經証明过場 $\mathbf{H}(P)$ 是另一个場 $\mathbf{J}(P)$ 的旋度，其中

$$\mathbf{J}(P) = \iiint\limits_V \frac{\mathbf{j}(M) dv(M)}{r(P, M)}.$$

对于場 $\mathbf{J}(P)$ 的散度也有同样的公式

$$\operatorname{div} \mathbf{J}(P) = \iiint\limits_V \operatorname{div} \mathbf{j}(M) \cdot \frac{dv}{r(P, M)}.$$

現在补充一个假設，就是場 $\mathbf{j}(M)$ 的散度等于零（如果 $\mathbf{j}(M)$ 是电流向量，那末这个条件的物理意义就是以下的事实: 电流既無从产生，也無从消失，这个和我們認为电流是电荷流动的看法是完全一致的)。

現在要計算場 $\mathbf{H}$ 的旋度。按公式(15)

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(P) = \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{J}(P) = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{J}(P) - \nabla^2 \mathbf{J}(P).$$

由于 $\operatorname{div} \mathbf{j}(M) = 0$，我們也有 $\operatorname{div} \mathbf{J}(P) = 0$，从而

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(P) = -\nabla^2 \mathbf{J}(P).$$

按定义，如果 $\mathbf{J}(P) = \{A(P), B(P), C(P)\}$，向量 $\nabla^2 \mathbf{J}(P)$ 有分量 $\nabla^2 A(P), \nabla^2 B(P), \nabla^2 C(P)$。

但是，例如量

$$A(P)=\iiint\limits_{V}\frac{a(M)dv(M)}{r(P,M)}$$

可以解釋为其密度 $a(M)$ 的質量分布的势量；所以按第五章的結果

$$\nabla^2 A(P)=\text{div grad } A(P)=-4\pi a(P).$$

同理

$$\text{div grad } B(P)=-4\pi b(P),$$

$$\text{div grad } C(P)=-4\pi c(P).$$

因此，

$$\text{rot } \mathbf{H}(P)=-\nabla^2\mathbf{J}(P)=4\pi\{a(P),b(P),c(P)\}=4\pi\mathbf{j}(P).$$

总之，向量 $\mathbf{j}(P)$ 的力場的旋度等于向量 $\mathbf{j}(P)$ 自身乘上 4π。

至于說到向量 $\mathbf{j}(P)$ 的力場的散度，在第七章中我們已經指出的，它等于零。

第九章　光滑向量場

本章和前数章不同之处在于沒有假定所考虑的向量場的分量的可微性。

引入以下的定义。

如果在所考虑的空間区域 V 中向量場 $\mathbf{R}$ 有連續的散度和連續的旋度，那么它叫做在区域 V 中的光滑向量。

任何具有連續微商的分量的場都是光滑向量場。

具連續密度 μ 的区域可加函数的力場 $\mathbf{R}$，也是光滑向量場；我們已經講过，这种場有散度和旋度，而且

$$\operatorname{div}\mathbf{R}=-4\pi\mu(M),\ \operatorname{rot}\mathbf{R}=0.$$

在本章末了我們要証明具条件 $\operatorname{div}\mathbf{j}=0$ 的連續向量 $\mathbf{j}(M)$ 的力場，也是光滑向量場，而且

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0,\quad \operatorname{rot}\mathbf{H}=4\pi\mathbf{j}.$$

以 D 表示一切具有連續散度的場类，D 类中的場具有重要的性質，叫做完备的性質。这性質如下所述。假設給定具連續散度的一串場 $\mathbf{R}_1,\mathbf{R}_2,\cdots,\mathbf{R}_m,\cdots$ 关于他們显然在区域 V 内部的任何閉区域上一致地(簡言之，在 V 内一致地)滿足極限关系式

$$\lim \mathbf{R}_m(M)=\mathbf{R}(M),\tag{1}$$

$$\lim \operatorname{div}\mathbf{R}_m(M)=\varphi(M),\tag{2}$$

其中 $\mathbf{R}(M)$ 是向量場，$\varphi(M)$ 是数量場；按定义，它們在区域 V 的一切内点都連續。

現在要証明場 $\mathbf{R}$ 也有連續的散度，而且

$$\operatorname{div}\mathbf{R}(M)=\varphi(M).$$

为了証明，对于場 $\mathbf{R}_m$ 应用定理 5.1。

如果 U 是区域 V 内任一区域，Σ 为其边界，那末按此定理：

$$\frac{1}{U}\oiint\limits_{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{R}_m)d\sigma=\frac{1}{U}\iiint\limits_{U}\operatorname{div}\mathbf{R}_m\,dv. \qquad (3)$$

令$m\to\infty$，取極限且利用关系式(1)—(2)，我們得到：

$$\frac{1}{U}\oiint\limits_{\Sigma}(\mathbf{n}, \mathbf{R})d\sigma=\frac{1}{U}\iiint\limits_{U}\varphi\,dv.$$

現在把体积U变形到一点M，按中值定理，这时等式的右边有等于$\varphi(M)$的極限，而等式的左边也就有極限$\varphi(M)$；但是后面的極限的存在性表示場$\mathbf{R}(M)$确实有等于$\varphi(M)$的散度，这就是我們所肯定的。

具連續旋度的場有类似的完备的性質，对于这种場的完备的性質述之如下。

假設給定具連續旋度的一串場$\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \cdots, \mathbf{R}_m, \cdots$，而且在$V$內一致地滿足極限关系式

$$\lim \mathbf{R}_m(M)=\mathbf{R}(M),$$
$$\lim \operatorname{rot}\mathbf{R}_m(M)=\mathbf{Q}(M).$$

其中$\mathbf{R}(M)$和$\mathbf{Q}(M)$是某些向量場。

那末場$\mathbf{R}(M)$也有連續的旋度，而且

$$\operatorname{rot}\mathbf{R}(M)=\mathbf{Q}(M).$$

它的証明和具連續散度的場的証明完全相似，只要公式(3)用在第六章所建立的公式

$$\frac{1}{U}\oiint\limits_{\Sigma}[\mathbf{n}, \mathbf{R}_m]d\sigma=\frac{1}{U}\iiint\limits_{U}\operatorname{rot}R_m\,dv$$

来代替就能推出結論。

当然所建立的性質的推論，我們得到关于光滑向量場的完备的性質。

如果其中对于一串光滑向量場$\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \cdots, \mathbf{R}_m, \cdots$在区域$V$內一致地滿足極限关系式

$$\lim \mathbf{R}_m(M)=\mathbf{R}(M),$$

$$\lim \operatorname{div} \mathbf{R}_m(M)=\varphi(M),$$
$$\lim \operatorname{rot} \mathbf{R}_m(M)=\mathbf{Q}(M),$$

其中 $\mathbf{R}(M)$和 $\mathbf{Q}(M)$是某些向量場,而 $\varphi(M)$是某一数量場，那末 $\mathbf{R}(M)$是光滑向量場,而且

$$\varphi(M)=\operatorname{div} \mathbf{R}(M),\quad \mathbf{Q}(M)=\operatorname{rot} \mathbf{R}(M).$$

我們已經講过,每一可微向量場,那就是分量有一級連續微商的場,具有連續的散度和連續的旋度,于是为光滑向量場。

因此,可微向量場类完全包含在光滑向量場类里面。

我們現在要証明可微場类安置在光滑向量場类中到处稠密:換句話說，对于每一个光滑向量場 $\mathbf{R}$ 可以指出一串可微場 $\mathbf{R}_m(m=1,2,\cdots)$,使在 V 內一致地滿足極限关系式

$$\lim \mathbf{R}_m(M)=\mathbf{R}(M),$$
$$\lim \operatorname{div} \mathbf{R}_m(M)=\operatorname{div} \mathbf{R}(M),$$
$$\lim \operatorname{rot} \mathbf{R}_m(M)=\operatorname{rot} \mathbf{R}(M).$$

为了証明这个命題，我們对于給定的数量場或向量場作出一个新的运算“均値算子”。

假設 $A(x,y,z)$为在区域 V 中的某一連續数量場或向量場,对于給定的 $\varepsilon>0$, 考虑由下面的公式确定的新的場 $S^\varepsilon(A)$:

$$S^\varepsilon(A)(x,y,z)=\frac{1}{\varepsilon^3}\int_x^{x+\varepsilon}\int_y^{y+\varepsilon}\int_z^{z+\varepsilon} A(\xi,\eta,\zeta)d\xi\, d\eta\, d\zeta. \quad (4)$$

这个場对于屬于 V 同时又在立方体区域 $K^\varepsilon=\{x\leqslant\xi\leqslant x+\varepsilon, y\leqslant\eta\leqslant y+\varepsilon, z\leqslant\zeta\leqslant z+\varepsilon\}$ 中的这种点的全体組成区域 $V^\varepsilon\subset V$。場 $S^\varepsilon(A)$称为場 A 的 ε-均値,記号 S^ε 叫做 ε-均値算子。显然，当 ε 固定时,算子 S^ε 具有綫性的性質

$$S^\varepsilon(\alpha A+\beta B)=\alpha S^\varepsilon(A)+\beta S^\varepsilon(B),$$

而在下面的引理所述的意义下也是連續的:

引理 1　如果一串場 $A_m(m=1,2,\cdots)$在区域 V 內一致地收斂

于場 A，那末一串 ε-均值 $S^{\varepsilon}(A_m)(m=1,2,)$ 在 A 内一致地收斂于場 A 的 ε-均值 $S^{\varepsilon}(A)$。

实际上，从公式(4)直接推出

$$[S^{\varepsilon}(A)-S^{\varepsilon}(A_m)](x,y,z)=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\int\limits_{x}^{x+\varepsilon}\int\limits_{y}^{y+\varepsilon}\int\limits_{z}^{z+\varepsilon}[A(\xi,\eta,\zeta)-A_m(\xi,\eta,\zeta)]d\xi,d\eta,d\zeta,$$

由此，对于每一閉区域 $V_1\subset V$ 得着估計

$$\max_{V_1^{\varepsilon}}|[S^{\varepsilon}(A)-S^{2}(A_m)](x,y,z)|\leqslant$$

$$\leqslant\max_{V_1}|A(\xi,\eta,\zeta)-A_m(\xi,\eta,\zeta)|,$$

这表明当 $m\to\infty$时，場 $S^{\varepsilon}(A_m)$ 在区域 V^{ε} 内一致地收斂于場 $S^{\varepsilon}(A)$。

对于均値算子还有某些性質，这些性質往后我們还是需要的。

引理 2　当 $\varepsilon\to0$ 时，場 $S^{\varepsilon}(A)$ 在区域 V 内一致地收斂于場 A。

〔証明〕 命 V_1 是区域 V 的任一閉子域，在区域 V_1 内連續的場 A 是一致連續的：对于任何的 $\varepsilon_0>0$，可以找出这样的 $\delta>0$，使得当 $\rho(M,M')<\delta\sqrt{3}$ 时，就有 $|A(M)-A(M')|<\varepsilon_0$。考虑定义在区域 V^{δ} 中的場 A 的 δ-均値，对于这个区域中的一个点：

$$|A(x,y,z)-S^{\delta}(A)(x,y,z)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\delta^3}\int\limits_{x}^{x+\delta}\int\limits_{y}^{y+\delta}\int\limits_{z}^{z+\delta}|A(x,y,z)-A(\xi,\eta,\zeta)|d\xi,d\eta,d\zeta,$$

因为点 $M(x,y,z)$ 离点 $M'(\xi,\eta,\zeta)$ 不大于 $\delta\sqrt{3}$，我們有 $|A(x,y,z)-A(\xi,\eta,\zeta)|<\varepsilon_0$，于是

$$|A(x,y,z)-S^{\delta}(A)(x,y,z)|\leqslant\varepsilon_0,$$

从此推出所要的肯定。

引理 3　如果 A 是連續的数量場，那末場 $S^{\varepsilon}(A)$ 关于坐标有

連續的一級微商，如果 $A=\mathbf{A}$ 是連續的向量場 $\mathbf{A}=\{x, y, z\}$，那末場 $S^{\varepsilon}(A)$的每一个分量关于坐标有連續的一級微商。

［証明］ 令 A 为数量場．那末按积分学所熟知的定理，从等式

$$S^{\varepsilon}(A)=\frac{1}{\varepsilon^3}\int_x^{x+\varepsilon}\int_y^{y+\varepsilon}\int_z^{z+\varepsilon}A(\xi, \eta, \zeta)d\xi, d\eta, d\zeta,$$

可以直接推出 $S^{\varepsilon}(A)$ 有关于 x 的微商，并且

$$\frac{\partial S^{\varepsilon}(A)}{\partial x}=\frac{1}{\varepsilon^3}\int_y^{y+\varepsilon}\int_z^{z+\varepsilon}[A(x+\varepsilon, \eta, \zeta)-A(x, \eta, \zeta)d\eta, d\zeta, \quad (5)$$

显然，又是 x, y, z 的連續函数。

关于 y 和 z 的微商可得到类似的結果。

如果 $\mathbf{A}$ 是向量場，$\mathbf{A}=X\,\mathbf{i}+Y\,\mathbf{j}+Z\,\mathbf{k}$，那末，显然，

$$S^{\varepsilon}(\mathbf{A})=S^{\varepsilon}(X)\mathbf{i}+S^{\varepsilon}(Y)\mathbf{j}+S^{\varepsilon}(Z)\mathbf{k};$$

場 $S^{\varepsilon}(A)$的分量原来是場 $\mathbf{A}$ 的 ε–均值分量，而且按照已証明的，还具有关于坐标的連續一級微商。

注意，当場 $\mathbf{A}$ 自身有連續的，例如，关于 x 的一級微商时，于是在(5)的积分号下的表达式可以写为形式

$$A(x+\varepsilon, \eta, \zeta)-A(x, \eta, \zeta)=\int_x^{x+\varepsilon}\frac{\partial A}{\partial \xi}d\xi,$$

从而 $$\frac{\partial S^{\varepsilon}(A)}{\partial x}=\frac{1}{\varepsilon^3}\int_x^{x+\varepsilon}\int_y^{y+\varepsilon}\int_z^{z+\varepsilon}\frac{\partial A(\xi, \eta, \zeta)}{\partial \xi}d\xi=S^{\varepsilon}\left(\frac{\partial A}{\partial x}\right);$$

这样一来，如果函数 $A(x, y, z)$ 关于 x 有連續一級微商，那末它的微商的 ε–均值等于 ε–均值的微商。

假定給出某些規則，使得某一个（向量或数量）場 $A(M)$能够变到新的場 $T(A)(M)$；記号 T 叫做算子。算子 T 可以不定义在場 A 的定义区域 V 的全部，而仅仅对于它的某一部分 U 才有意义；例如，算子 $S^{\varepsilon}(A)$仅仅定义在区域 V^{ε} 上。

假設所考慮的算子 T 是綫性的

$$T(\alpha A+\beta B)=\alpha T(A)+\beta T(B)$$

而且滿足下述的連續条件：如果当 $m\to\infty$ 时，一串場 $A_1, A_2, \cdots, A_m, \cdots$ 在区域 $U\subset V$ 内一致地收斂于場 A，那末当 $m\to\infty$ 时，一串場 $T(A_1), T(A_2), \cdots$ 在区域 U 内一致地收斂于場 $T(A)$。

引理 4　对于任何連續的場 A 等式

$$S^\varepsilon[T(A)(M)]=T[S^\varepsilon(A)](M) \tag{6}$$

对于它的左右兩边都有意义的那些点 M 都成立。

引理 4 所显示的事实，我們以这样一句話来表达"算子 T 和 S^ε 是可交換的"。

为了証明，我們进行如下的討論。

按三重积分(4)定义本身場 $S^\varepsilon(A)$ 是場 $A(\xi,\eta,\zeta)$ 和它在立方体 K^ε 范圍内的变动的有限綫性組合的極限：

$$S^\varepsilon(A)=\lim\sum_{0\leqslant\alpha,\beta,\gamma\leqslant\varepsilon}A(x+\alpha,y+\beta,z+\gamma)\Delta\alpha\Delta\beta\Delta\gamma \tag{7}$$

(以后和的下标省掉)。

如所周知，对于任何函数 $f(M)$ 的积分和的值与它的極限——积分——不超过 $f(M)$ 在积分和所定义的积分区域的單元上的最大振幅和这区域的体积之积。因为在任何閉区域上的連續函数 $A(\xi,\eta,\zeta)$ 是一致連續的，对于落在任何閉区域 $U\subset V$ 中的一切点 $P(x,y,z)$，积分和 (7) 一致地趋于它的極限——三重积分 (4)。

由于算子 T 是綫性的，我們有：

$$T\left[\frac{1}{\varepsilon^3}\Sigma A(x+\alpha,y+\beta,z+\gamma)\,\Delta\alpha\,\Delta\beta\,\Delta\gamma\right]=$$

$$=\frac{1}{\varepsilon^3}\Sigma\{T[A(x+\alpha,y+\beta,z+\gamma)]\}\Delta\alpha\,\Delta\beta\,\Delta\gamma,$$

再按算子 T 的連續性

$$T[S^\varepsilon(A)] = T\left\{\lim \frac{1}{\varepsilon^3}\Sigma\ A(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)\,\Delta\alpha\,\Delta\beta\,\Delta\gamma\right\} =$$

$$= \lim T\left\{\frac{1}{\varepsilon^3}\Sigma\ A(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)\Delta\alpha\,\Delta\beta\ \Delta\gamma\right\} =$$

$$= \lim \frac{1}{\varepsilon^3}\Sigma\{T[A(x+\alpha, y+\beta, z+\gamma)]\}\ \Delta\alpha\,\Delta\beta\,\Delta\gamma =$$

$$= S^\varepsilon[T(A)],$$

这就是所要証明的。

把所得到的結果应用到算子

$$D_\delta(\mathbf{A}) = \frac{1}{V_\delta}\oiint\limits_{\Sigma_\delta}(\mathbf{n}, \mathbf{A})\,d\sigma,\ \mathbf{R}_\delta(\mathbf{A}) = \frac{1}{V_\delta}\oiint\limits_{\Sigma_\delta}[\mathbf{n}, \mathbf{A}]d\sigma,$$

而且它們的积分区域 Σ_δ 是包含体积 V_δ 的分段光滑閉曲面，这个 V_δ 落在以点 $M(x, y, z)$ 为心，δ 为半徑的球内；当 M 变到其他的点时，曲面也和其自身平行地变动。

这兩个算子定义在区域 $V^\delta\subset V$ 中而且在給予这个述語的意义下显然是綫性的和連續的，按已知

$$D_\delta[S^\varepsilon(\mathbf{A})] = S^\varepsilon[D_\delta(\mathbf{A})], \tag{8a}$$

$$\mathbf{R}_\delta[S^\varepsilon(\mathbf{A})] = S^\varepsilon[\mathbf{R}_\delta(\mathbf{A})]. \tag{8б}$$

現在証明下列定理：

定理 9.1. 如果向量場 $\mathbf{A}$ 在区域 V 中有連續的散度，那末 $S^\varepsilon(\mathbf{A})$ 的 ε-均値在区域 V^ε 中有連續的散度，而且

$$\operatorname{div} S^\varepsilon(\mathbf{A}) = S^\varepsilon(\operatorname{div}\mathbf{A}).$$

同理，如果場 $\mathbf{A}$ 在区域 V 中有連續的旋度，那末 $S^\varepsilon(\mathbf{A})$ 在区域 V^ε 中有連續的旋度，而且

$$\operatorname{rot} S^\varepsilon(\mathbf{A}) = S^\varepsilon(\operatorname{rot}\mathbf{A}).$$

［証明］ 首先假定場 $\mathbf{A}$ 在区域 V 中有連續的散度。于是当 $\delta\to 0$ 时，表达式 $D_\delta(\mathbf{A})$ 在每一点 $P\in V$ 收斂于 $\operatorname{div}\mathbf{A}(P)$，我們要証明这个收斂性在区域 V 内任何閉区域上是一致的。

实际上，应用定理 5.1，差数 $D_\delta(\mathbf{A}) - \operatorname{div}\mathbf{A}$ 可以表示为形式

$$D_\delta(\mathbf{A})-\operatorname{div} A(P)=$$

$$=\frac{1}{V_\delta}\iiint\limits_{V_\delta}\operatorname{div}\mathbf{A}(M)dv(M)-\frac{1}{V_\delta}\iiint\limits_{V_\delta}\operatorname{div}\mathbf{A}(P)dv(M)=$$

$$=\frac{1}{V_\delta}\iiint\limits_{V_\delta}[\operatorname{div}\mathbf{A}(M)-\operatorname{div}\mathbf{A}(P)]dv(M)\leqslant$$

$$\leqslant\max_{\rho(M,P)\leqslant\delta}|\operatorname{div}\mathbf{A}(M)-\operatorname{div}\mathbf{A}(P)|;$$

而当 $\varepsilon\to 0$ 时，这最后的値在每一閉区域 $U\subset V$ 中也趋于零，因为連續函数 div $\mathbf{A}(M)$在区域U 中是一致連續的。

按 ε–均値的基本性質(引理 1)，当 $\delta\to 0$ 时，場 $D_\delta(\mathbf{A})$的 ε–均値在 V 内一致地收斂于場 $\delta^\varepsilon(\operatorname{div}\mathbf{A})$，从等式(8a)推出，

$$S^\varepsilon(\operatorname{div}\mathbf{A})=\lim_{\delta\to 0}S^\varepsilon(D_\delta(\mathbf{A}))=\lim_{\delta\to 0}D_\delta(S^\varepsilon(\mathbf{A})).\qquad(9)$$

但是，因为对于体积 V_δ 的形式的任意选擇，極限(9)存在，既然不依賴于这个体积的形式故是点的連續函数，場 $S^\varepsilon(\mathbf{A})$有連續的散度

$$\operatorname{div}S^\varepsilon(\mathbf{A})=S^\varepsilon(\operatorname{div}\mathbf{A}),$$

这就是所要証明的。

对于場 $\mathbf{A}$ 有連續旋度的情况，定理 9.1 可按同法証明，只要到处以記号 rot 代替記号 div，以定理 6.1 代替定理 5.1，而且以公式(8б)代替(8a)。

均値的方法有效地被应用了，而把对可微場才証明过的公式推广到那些任何具有連續散度，或連續旋度的場。

建立下面的定理作为这个方法的例証。

定理 9.2. 如果在区域 V 中的場 $\mathbf{R}$ 具有連續的散度，又場 φ 是可微的，那末場 $\varphi\mathbf{R}$ 也具有連續的散度，而且

$$\operatorname{div}(\varphi\mathbf{R})=\varphi\operatorname{div}\mathbf{R}+(\operatorname{grad}\varphi\,\mathbf{R}).$$

[証明] 考虑場 $\mathbf{R}$ 的 $S^\varepsilon(\mathbf{R})$的 ε–均値。按引理 3，場 $S^\varepsilon(\mathbf{R})$的分量有連續的微商；所以第八章的公式成立：

$$\operatorname{div}(\varphi\cdot S^{\varepsilon}(\mathbf{R}))=\varphi\operatorname{div}S^{\varepsilon}(\mathbf{R})+(\operatorname{grad}\varphi,S^{\varepsilon}(\mathbf{R})).\quad(10)$$

但是按引理 2，当 $\varepsilon\to0$ 时，函数 $\operatorname{div}S^{\varepsilon}(\mathbf{R})=S^{\varepsilon}(\operatorname{div}\mathbf{R})$ 在区域 V 内一致地收敛于函数 $\operatorname{div}\mathbf{R}$；場 $S^{\varepsilon}(\mathbf{R})$ 也同样地收斂于場 $\mathbf{R}$。

从此推出等式(10)的右边当 $\varepsilon\to0$ 时趋向于量

$$\psi=\varphi\cdot\operatorname{div}\mathbf{R}+(\operatorname{grad}\varphi,\mathbf{R}).$$

这样一来，我們有極限的关系式

$$\varphi\cdot S^{\varepsilon}(\mathbf{R})\to\varphi\,\mathbf{R},$$

$$\operatorname{div}[\varphi\cdot S^{\varepsilon}(\mathbf{R})]\to\psi.$$

由于具有散度的場的完备性，場 $\varphi\,\mathbf{R}$ 具有散度并等于函数 $\psi=\varphi\operatorname{div}\mathbf{R}+(\operatorname{grad}\varphi\cdot\mathbf{R})$，这就是我們所肯定的。

在第八章例 1—4 中所得的其余的公式也可类似地推广到一般情况；由于这些此后对我們不大需要，我們就不討論它。

作为另一个例子，我們来考虑只在体积 V 的边界上不为零的向量 $\mathbf{j}(M)$ 的力場：

$$\mathbf{H}(P)=\iiint\limits_{V}\frac{[\mathbf{j}(M),\mathbf{e}(M,P)]}{r^{2}(M,P)}dv(M).$$

假定場 $\mathbf{j}(M)$ 的分量具有連續的微商，而且 $\operatorname{div}\mathbf{j}(M)=0$，我們以前(第八章)已經証明过等式

$$\operatorname{div}\mathbf{H}(P)=0,\quad\operatorname{rot}\mathbf{H}(P)=4\pi\mathbf{j}(P)$$

成立。

現在要証明：在場 $\mathbf{j}(M)$ 的分量設有微商而只要我們假定場 $\mathbf{j}(M)$ 連續且有零散度的情况下，上列公式仍旧保持成立。

考虑場 $\mathbf{j}$ 的 ε-均值 $S^{\varepsilon}(\mathbf{j})$。

因为場 $\mathbf{j}$ 有連續的散度，那末按定理 9.1，場 $S^{\varepsilon}(\mathbf{j})$ 也有連續的散度，而且

$$\operatorname{div}S^{\varepsilon}(\mathbf{j})=S^{\varepsilon}(\operatorname{div}\mathbf{j})=0.$$

場 $S^{\varepsilon}(\mathbf{j})$ 所定义的区域可以認为是整个空間，而且在某一有界区域 $V_1(V_1\supset V)$ 外部和場 $\mathbf{j}$ 一样，場 $S^{\varepsilon}(\mathbf{j})$ 等于零。

考慮由公式

$$T(\mathbf{A})(P)=\iiint\limits_V \frac{[\mathbf{A}(M),\mathbf{e}(M,P)]}{r^2(M,P)}dv(M)$$

給定的算子 $\mathbf{T}$。

显然，因为这个算子是綫性的和連續的，那末按引理 4，我們有

$$S^\varepsilon(\mathbf{T}(\mathbf{A}))=\mathbf{T}(S^\varepsilon(\mathbf{A})),$$

特别是，因为 $\mathbf{H}=\mathbf{T}(\mathbf{j})$，

$$S^\varepsilon(\mathbf{H})=S^\varepsilon\mathbf{T}(\mathbf{j})=\mathbf{T}(S^\varepsilon(\mathbf{j})).$$

按引理 3，場 $S^\varepsilon(\mathbf{j})$有可微的分量，应用第七章定理 1，我們得到：

$$\operatorname{rot} S^\varepsilon(\mathbf{H})=\operatorname{rot} S^\varepsilon(\mathbf{T}(\mathbf{j}))=\operatorname{rot}\mathbf{T}(S^\varepsilon(\mathbf{j}))=4\pi\, S^\varepsilon(\mathbf{j}),$$

$$\operatorname{div} S^\varepsilon(\mathbf{H})=\operatorname{div} S^\varepsilon(\mathbf{T}(\mathbf{j}))=\operatorname{div}\mathbf{T}(S^\varepsilon(\mathbf{j}))=0.$$

在任何有界区域内部当 ε 一致地趋于零，有

$$S^\varepsilon(\mathbf{H})\to\mathbf{H},\quad \operatorname{rot} S^\varepsilon(\mathbf{H})=4\pi\, S^\varepsilon(\mathbf{j})\to 4\pi\,\mathbf{j},$$

$\operatorname{div}(S^\varepsilon(\mathbf{H}))=0$；按光滑向量場的完备性，場 $\mathbf{H}$ 是光滑向量場，而且

$$\operatorname{div}\mathbf{H}=0,\qquad \operatorname{rot}\mathbf{H}=4\pi;$$

这就是所要証明的。

第十章　調和場

定义　給定在区域 V 中的光滑向量場 $\mathbf{R}$ 叫做調和場，如果在区域 V 上滿足条件

$$\operatorname{div} \mathbf{R} \equiv 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{R} \equiv 0. \tag{1}$$

調和場的最簡單的例子是放在点 M 的單位質量的引力場:

$$\mathbf{R}(P) = \frac{\mathbf{e}(P, M)}{r^2(P, M)}. \tag{2}$$

我們以前就講过(第八章，例 4)，这个場在空間中每一点是調和的，但点 M 自身除外，在点 M 它是沒有意义的。

具密度 $\rho(M)$ 的区域可加函数的力場(第 30 頁)

$$\mathbf{F}(P) = \iiint_V \rho(M) \frac{\mathbf{e}(P, M)}{r^2(P, M)} dv(M) \tag{3}$$

在函数 $\rho(M)$ 为零的那些区域上，特别是，在体积 V 的外部，它是調和的；同理，向量 $\mathbf{j}(M)$ 的力場

$$\mathbf{H}(P) = \iiint_V \frac{[\mathbf{j}(M), \mathbf{e}(M, P)]}{r^2(M, P)} dv(M)$$

在向量 $\mathbf{j}(M)$ 为零的那些区域上，特别是，在体积 V 的外部，它是調和的。

在这一章里我們要导出定义在某單連通区域 V 上的調和場的基本性質。

首先，由于 $\operatorname{rot} \mathbf{R} = 0$，根据第七章的結果，我們可以肯定 $\mathbf{R}$ 是势位場；存在(可微的)函数 $\varphi(M)$ 使得:

$$\operatorname{grad} \varphi(M) = \mathbf{R}(M).$$

現在条件 $\operatorname{div} \mathbf{R} \equiv 0$ 可以写做附加在函数 $\varphi(M)$ 上的条件:

$$\operatorname{div} \operatorname{grad} \varphi = 0.$$

滿足方程 $\operatorname{div}\operatorname{grad}\varphi\equiv 0$

的任何可微函数叫做調和函数。因此，調和向量場的勢位函数总是調和函数。

特別是，場(2)的勢位函数

$$\varphi(P)=\frac{1}{r(P,M)}$$

当 $M\neq P$ 時是勢位函数；同理，場(3)的勢位函数

$$\varphi(P)=\iiint\limits_V\frac{\rho(M)}{r(P,M)}dv(M)$$

在密度等于零的那些区域中是調和的，例如在体积 V 的外部显然是調和的。

由于对于梯度等式

$$\operatorname{rot}\operatorname{grad}\varphi=0$$

总是成立的。所以我們反过来肯定了任何調和函数的梯度也是一个調和向量場。因此，調和函数与調和向量場之間有着密切的联系。

令 $\mathbf{R}=\operatorname{grad}u$ 是定义在区域 V 上的調和場，再令 U 是以 Σ 为边界而且整个包含在区域 V 中的單連通区域。由于 $\mathbf{R}$ 是調和場，按定理 9.2 給出：

$$\operatorname{div}(u\mathbf{R})=(\operatorname{grad}u,\mathbf{R})+(u,\operatorname{div}\mathbf{R})=(\operatorname{grad}u,\mathbf{R})=(\mathbf{R},\mathbf{R});$$

从此，沿体积 U 把兩边积分起来，而按第五章公式(8)改变左边，我們就求得：

$$\oiint\limits_\Sigma u(\mathbf{R},\mathbf{n})d\sigma=\iiint\limits_U(\mathbf{R},\mathbf{R})dv. \tag{4}$$

从公式(4)能够导出以下的結論：

定理 10.1．如果在区域 U 的边界上調和函数 $u(M)$ 到处等于零，那末在区域內部也到处 $u(M)\equiv 0$。

［証明］ 从公式(4)推出，在定理 10.1 的假定下，在区域 U 的

内部到处使向量 $\mathbf{R}=\operatorname{grad} u\equiv 0$。因此，函数 u 在 U 内部是常量。但是由于它在区域的边界上等于零。所以它到处等于零。

定理 10.2. 如果两个調和函数 $u_1(M)$ 和 $u_2(M)$ 在区域 U 的边界上一致，那末它們在区域 U 的内部也到处一致。

[証明] 函数 $u=u_1-u_2$ 也是調和的，而且在区域 U 的边界上等于零，按定理 10.1，在 U 的内部它也等于零，从而在 U 的内部

$$u_1(M)\equiv u_2(M).$$

定理 10.3. 如果調和場 $\mathbf{R}$ 在区域 U 的边界上沿法綫的分量 $(\mathbf{R},\mathbf{n})=0$，那末在区域 U 的内部 $\mathbf{R}(M)\equiv 0$。

[証明] 从公式(4)直接可以推出。

定理 10.4. 如果两个調和場 $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{R}_2$ 在区域 U 的边界上沿法綫的分量相等，那末在区域 U 的内部这两个場一致。

为了証明，需先作調和場 $\mathbf{R}=\mathbf{R}_1-\mathbf{R}_2$，再对它应用定理 10.3。

定理 10.2. 表明調和函数在区域内部的値由它的边界値唯一的确定。

在本章內我們研究下列問題，其全体組成調和函数論的第一类边値問題。

1. 从調和函数的边界値怎样决定它的全部値？

2. 能否在区域 U 的内部建立調和函数 $u(P)$，使得它在区域的边界上取任意指定的値 $u(M)$？

关于从調和場 $\mathbf{R}(P)$ 在区域 U 的边界上沿法綫的分量 $(\mathbf{R}(M),\mathbf{n})$ 来建立在区域 U 内部的調和場 $\mathbf{R}(P)$（調和函数論的第二类边値問題）。这样类似的問題也可以加以陈述。

这第二类問題等价于这样的問題，即按照在边界上 $u(P)$ 的法綫方向的微商来建立調和函数的問題；这是指，在定理 10.4 所提出的問題中确定向量場 $\mathbf{R}$ 的完全唯一性对应于确定調和函数——場 $\mathbf{R}$ 的势位——的唯一性，至多差一个任意常数項。

在解答这些問題以前，先导出一个重要公式。

如果 φ 和 ψ 是調和函数，那末应用定理 9.2 我們得到

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi)=(\operatorname{grad} \varphi, \operatorname{grad} \psi),$$

$$\operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \varphi)=(\operatorname{grad} \psi, \operatorname{grad} \varphi),$$

从而
$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad} \psi)=\operatorname{div}(\psi \operatorname{grad} \varphi).$$

把等式的兩边沿体积 V 积分起来，而且按定理 5.1 改变体积分为面积分，我們就求出：

$$\oiint_{\Sigma} \varphi \cdot (\operatorname{grad} \psi, \mathbf{n}) d\sigma=\oiint_{\Sigma} \psi(\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{n}) d\sigma, \qquad (5)$$

又因为 $(\operatorname{grad} \psi, \mathbf{n})=\frac{\partial \psi}{\partial n}$, $(\operatorname{grad} \varphi, \mathbf{n})=\frac{\partial \varphi}{\partial n}$，所以公式(5)取形式

$$\oiint_{\Sigma} \varphi \frac{\partial \psi}{\partial n} d\sigma=\oiint_{\Sigma} \psi \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma. \qquad (6)$$

这是对我們有趣的公式。只要假定以 Σ 为边界曲面的区域 V 内部的 φ 和 ψ 都是調和函数，这公式就成立。

特别是，如果在公式(6)中，取 $\psi \equiv 1$，那末就得到：

$$\oiint_{\Sigma} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma=0. \qquad (7)$$

因此，在区域 V 上的調和函数沿法綫的微商沿区域 V 的边界的积分常等于零。

首先考虑第一类問題的一个很特殊的情形。假定在以 R 为半徑的球 U 中，給定調和函数 $\varphi(M)$；要求以所取的函数 $\varphi(M)$ 在球的边界上的値来表达它在球 U 的中心 P 的値。

为了計算应用公式(6)于区域 U_ε，U_ε 是从球 U 去掉一个以 ε 为半徑的同心球 K_ε 而得到的，在这个公式中取 $\psi=\frac{1}{r(M, P)}$[①]。

区域 U_ε 的边界 Γ_ε 是由半徑为 R 的球面 Γ 和半徑为 ε 的球面

---

① 函数 $\frac{1}{r(M, P)}$ 当 $M \neq P$ 时在球 U 内是調和的，但是，在点 $M=P$，它变为無窮大，所以在应用公式(4)时必须从球 U 除去点 P 和它的某一个近旁。

γ_ε 組成的。因为沿第一个球面的法綫和沿半徑的微商是一样的，而对于第二个球面的兩个微商差一个符号(这时内法綫指向点P)，从公式(6)推出

$$\iint\limits_{\Gamma}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\bigcirc\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)d\sigma=\iint\limits_{\gamma_\varepsilon}\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\!\bigcirc\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)d\sigma. \quad (8)$$

函数 ψ 在第一个积分里等于常量 $\frac{1}{R}$，在第二个积分里也等于常量 $\frac{1}{\varepsilon}$，它的微商 $\frac{\partial\psi}{\partial r}=\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r(M,P)}=-\frac{1}{r^2(M,P)}$ 在第一个积分里等于常量$-\frac{1}{R^2}$，而在第二个积分里等于常量 $\frac{-1}{\varepsilon^2}$，所以等式(8)可以重新写为形式

$$-\frac{1}{R^2}\oiint\limits_{\Gamma}\varphi\,d\sigma-\frac{1}{R}\oiint\limits_{\Gamma}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\,d\sigma=\frac{-1}{\varepsilon^2}\oiint\limits_{\gamma_\varepsilon}\varphi\,d\sigma-\frac{1}{\varepsilon}\oiint\limits_{\gamma_\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}d\sigma.$$

按公式(7)函数 φ 沿法綫的微商的积分等于零。最后留下来一个等式

$$\frac{1}{R^2}\oiint\limits_{\Gamma}\varphi\,d\sigma=\frac{1}{\varepsilon^2}\oiint\limits_{\gamma_\varepsilon}\varphi\,d\sigma. \quad (9)$$

量

$$\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\oiint\limits_{\gamma_\varepsilon}\varphi\,d\sigma$$

是函数 φ 在以点 P 为中心 ε 为半徑的球面上的平均值。等式(9)指出这个平均值不依賴于 ε 的值。但是，按函数 $\varphi(M)$的連續性，这个平均值当 $M\to P$ 时的極限等于函数 $\varphi(M)$在点 $M=P$ 的值。因此，在除以 4π 的結果中再取極限，我們就得到等式

$$\varphi(P)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint\limits_{\Gamma}\varphi(M)d\sigma(M), \quad (10)$$

这就解决了我們所提出的問題。它証明：每一調和函数在任何球面中心的值等于这个函数在球面上的算术平均值。

現在我們要計算調和函数 $\varphi(M)$不在球U的中心的值，而在

任何其他的点，例如，在点 Q 的值。看一看，在我們的結構中是怎样在变化着。当然，我們現在所取的区域 U_ε 是从球 U 去掉以点 Q 为中心的球 K_ε 所得到的区域，K_ε 与球 U 不再是同心的；所以在球的边界上沿法綫的微商不再等于沿着由点 Q 出發的半徑的微商。

如果我們仍保持函数 ψ 为量 $\frac{1}{r}=\frac{1}{r(M,Q)}$，那末它在球的边界上不是常量，而且，一般地說，我們不会去掉函数 φ 沿法綫的微商，除非函数 φ 是常量，$\frac{\partial\varphi}{\partial n}=0$ 的情形。例如，取 $\varphi=1$，在这时我們得到有趣的公式

$$\oiint_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,Q)}d\sigma=4\pi, \tag{7a}$$

把它和公式(7)相比較是有好处的。

但在当 $\varphi\neq\text{const}$ 的一般情况下，必須选擇更适当的函数 ψ。

試选取函数 $\psi(M)$ 为形式

$$\psi(M)=\psi(M;Q)=\frac{1}{r(M,Q)}+w(M,Q),$$

其中 $w(M,Q)$ 是 M 的某一調和函数，而且它是这样选擇，使得函数 ψ 在球 U 的境界上是常量，例如等于零。（下面会看到，应如何选擇适当的函数 $w(M,Q)$。）

如果这样选定了 $\psi(M)$，那末在公式(8)中乘积 $\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 沿区域 U 的边界积分变为零，而我們得到等式

$$\oiint_{\Gamma}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma=\oiint_{\gamma_\varepsilon}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial r}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)d\sigma.$$

把 $\psi=\frac{1}{r(M,Q)}+w(M,Q)$ 代入而且以 -4π 除之，得到：

$$-\frac{1}{4\pi}\oiint_{\Gamma}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma=\frac{1}{4\pi\varepsilon^2}\oiint_{\gamma_\varepsilon}\varphi\,d\sigma+\frac{1}{4\pi\varepsilon}\oiint_{\gamma_\varepsilon}\frac{\partial\varphi}{\partial r}d\sigma+$$
$$+\frac{1}{4\pi}\oiint_{\gamma_\varepsilon}\left[\varphi\frac{\partial w}{\partial r}-w\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right]d\sigma.$$

和以前一样，右边第一項等于函数 φ 在球 γ_ε 的中心之値，那就是等于量 $\varphi(Q)$. 按等式(7)第二項等于零。

按公式(6)最后一項也等于零，因为函数 φ 和 w 在球面 γ_ε 內都是調和的。結果，我們得到

$$\varphi(Q)=-\frac{1}{4\pi}\iint\limits_{\Gamma}\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}d\sigma. \tag{11}$$

这个公式在原則上解决了我們所提出的問題。但必須造出函数 $\psi(M;Q)$ 或同样地，作出調和函数 $w(M;Q)$，使得 $\psi(M;Q)=\frac{1}{r(M,Q)}-w(M,Q)$ 在球的边界上等于零。这样的函数借助于下述的几何方法容易造出。

令 $\rho=r(P,Q)$，又在直綫 PQ 上取一点 Q^*，使距离 $r(P,Q^*)=\frac{R^2}{\rho}$（圖 16）。

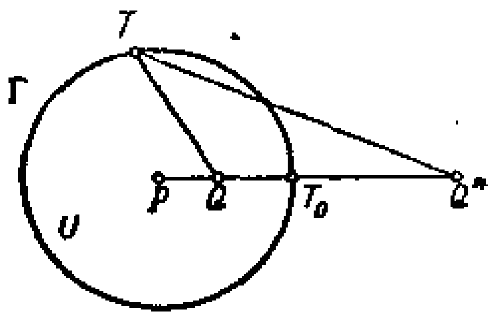

圖 16.

根据初等几何所熟知的定理，当点 T 在球面上变动时，比 $r(Q,T):r(Q^*,T)$ 保持为常量；这个比的値可以在直綫 PQ 上的点 T_0 代替 T 来确定：

$$\frac{r(Q,T)}{r(Q^*,T)}=\frac{r(Q,T_0)}{r(Q^*,T_0)}=\frac{R-\rho}{\frac{R^2}{\rho}-R}=\frac{\rho}{R}.$$

从此，对于球面上任何位置点 T

$$\frac{1}{r(Q,T)}=\frac{R}{\rho}\frac{1}{r(Q^*,T)}. \tag{12}$$

在球 U 內考虑函数

$$w(M;Q)=\frac{R}{\rho}\frac{1}{r(Q^*,M)}.$$

这个函数在球 U 內是調和的而且沒有奇异点（整个質量集中在点 Q^* 的势位）；在球的边界上它取値 $\frac{1}{r(Q,T)}$. 由此可見，函数

$$\psi(M;Q)=\frac{1}{r(M,Q)}-w(M,Q)=\frac{1}{r(M,Q)}-\frac{R}{\rho}\,\frac{1}{r(M,Q^*)}$$

滿足我們的要求。

为了公式(11)获得完善的形式，还需要計算函数 ψ 在球面 Γ 上的点沿法綫的微商进行計算。令 ω 是射綫 PQ 和 PM 間的交角，按熟知的初等公式，記 $r=r(P,M)$，我們得到：

$$r(M,Q)=\sqrt{r^2+\rho^2-2r\rho\cos\omega},$$

$$r(M,Q^*)=\sqrt{r^2+\left(\frac{R}{\rho}\right)^2-2r\frac{R}{\rho}\cos\omega},$$

因此

$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r(M,Q)}=-\frac{1}{r^2(M,Q)}\frac{\partial r(M,Q)}{\partial r}=\frac{1}{r^2(M,Q)}\frac{r-\rho\cos\omega}{r(M,Q)}=$$

$$=-\frac{1}{r^3(M,Q)}(r-\rho\cos\omega);$$

同理，
$$\frac{\partial}{\partial r}\frac{1}{r(M,Q^*)}=-\frac{1}{r^3(M,Q)}\left(r-\frac{R^2}{\rho}\cos\omega\right)$$

于是，

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{1}{r^3(M,Q)}(r-\rho\cos\omega)+\frac{R}{\rho}\frac{1}{r^3(M,Q^*)}\left(r-\frac{R^2}{\rho}\cos\omega\right).$$

在球 U 的边界上，当 $r=R$, $M=T$ 时，按(12)，它等于：

$$\frac{\partial\psi}{\partial r}=-\frac{1}{r^3(T,Q)}(R-\rho\cos\omega)+\frac{R}{\rho}\frac{1}{r^3(T,Q^*)}\left(R-\frac{R^2}{\rho}\cos\omega\right)=$$

$$=\frac{1}{r^3(T,Q)}\left[-(R-\rho\cos\omega)+\frac{R}{\rho}\cdot\frac{\rho^3}{R^3}\left(R-\frac{R^2}{\rho}\cos\omega\right)\right]=$$

$$=-\frac{1}{r^3(T,Q)}\cdot\frac{R^2-\rho^2}{R}.$$

現在公式(11)变为下面的形式：

$$\varphi(Q)=\frac{1}{4\pi}\,\frac{R^2-\rho^2}{R}\iint\limits_{\Gamma}\varphi(T)\frac{d\sigma(T)}{r^3(Q,T)}. \tag{11'}$$

这个公式，显然表示調和函数在球内任何点的值可由它的边

界值表达，它称为柏阿松公式。当 $Q=P(\rho=0)$ 时，它变为公式(10)，它表示函数 $\varphi(M)$ 在球心的值等于它的边界值的算术平均值。如果柏阿松公式写为形式

$$\varphi(Q)=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint_{\Gamma}\frac{(R^2-\rho^2)R}{r^2(T,Q)}\varphi(T)d\sigma(T), \qquad (13)$$

这也可以解释为函数 $\varphi(T)$ 在球的边界上的某一种的平均值，但是这个平均值已經不仅仅是簡單的算术平均，而是帶有权函数 $S(T,Q)=\frac{(R^2-\rho^2)R}{r^3(T,Q)}$ 的平均值，这函数表明在球面 Γ 中靠近于 Q 的点 T 比离 Q 較远的点显得更重要些。这是很自然的要求，因为当点 Q 接近于边界点 T 时，我們必須有極限关系式 $\varphi(Q)\to\varphi(T)$。

特别是，在公式(13)中，取 $\varphi(Q)\equiv 1$，我們得到：

$$1=\frac{1}{4\pi R^2}\oiint_{\Gamma}\frac{(R^2-\rho^2)R}{r^2(T,Q)}d\sigma(T), \qquad (14)$$

換句話說，有权函数 $S(T,Q)$ 自身在球面上的平均值等于一，其次証明，当 T 的位置固定，把权函数 $S(T,Q)$ 当作点 Q 的函数，那末它是調和函数。为了証明这一点，利用公式

$$\nabla r^\alpha=\operatorname{grad} r^\alpha=\alpha r^{\alpha-1}\mathbf{e}(P,M)=\alpha r^{\alpha-2}\mathbf{r},$$

$$(\nabla, r^\alpha\mathbf{r})=(3+\alpha)r^\alpha.$$

应用此等公式，我們陆續得到：

$$\nabla\frac{R^2-\rho^2}{r^3}=(R^2-\rho^2)\nabla\frac{1}{r^3}+\frac{1}{r^3}\nabla(R^2-\rho^2)=$$

$$=-3\frac{\mathbf{r}}{r^5}(R^2-\rho^2)-\frac{2\boldsymbol{\rho}}{r^3};$$

$$\Delta\frac{R^2-\rho^2}{r^3}=\left(\nabla,\nabla\frac{R^2-\rho^2}{r^3}\right)=\left(\nabla,\ -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}(R^2-\rho^2)-\frac{2\boldsymbol{\rho}}{r^3}\right)=$$

$$=-3(R^2-\rho^2)\left(\nabla,\ \frac{\mathbf{r}}{r^5}\right)-\left(\frac{3\mathbf{r}}{r^5},\Delta(R^2-\rho^2)\right)-$$

$$-\frac{2}{r^3}(\nabla,\boldsymbol{\rho})-2\left(\boldsymbol{\rho},\Delta\frac{1}{r^3}\right)=$$

$$=6(R^2-\rho^2)\cdot\frac{1}{r^5}+\frac{6}{r^5}(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\rho})-\frac{6}{r^3}+\frac{6}{r^5}(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\rho})=$$

$$=\frac{6}{r^5}[R^2-\rho^2-r^2+2(\mathbf{r},\boldsymbol{\rho})].$$

但是在方括弧内的表达式，由于 $R^2=\rho^2+r^2-2(\mathbf{r},\ \boldsymbol{\rho})$，等于零，从此推出所需要的等式。

現在假設在球面 U 上給定任意的連續函数 $\varphi(T)$；按公式(13)作出在球内部的函数 $\varphi(Q)$。

首先証明，当点 Q 趋于边界点 T 时，数値 $\varphi(T)$ 是函数 $\varphi(Q)$ 的極限値；換句話說，由我們構成的函数 $\varphi(Q)$ 在包含边界的整个球 U 上是連續函数，而且在边界上恒等于給定函数 $\varphi(T)$。

首先要注意从 $|\varphi(T)|\leqslant M$ 和等式(14)推出

$$|\varphi(Q)|\leqslant\frac{1}{4\pi R^2}\iint_\Gamma|\varphi(T)|\frac{(R^2-\rho^2)R}{r^3(Q,T)}d\sigma(T)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{M}{4\pi R^2}\iint_\Gamma\frac{(R^2-\rho^2)R}{r^3(Q,T)}d\sigma=M;$$

因此，如果函数 $\varphi(T)$ 在球面 Γ 上的値以数 M 为界，那么对应的函数 $\varphi(Q)$ 在球 U 内部也是以同一的数 M 为界。

令 T_0 为固定的边界点，不失去一般性，不妨認定 $\varphi(T_0)=0$ [在相反的情况下以 $\varphi(T)-\varphi(T_0)$ 代替 $\varphi(T)$]，所以对于給定的 $\varepsilon>0$ 可以决定这样的 $\delta>0$，使得当 $\rho(T_1,T_0)<\delta$ 时，不等式 $|\varphi(T)|<\varepsilon$ 成立。

作連續函数 $h_\varepsilon(T)$，在球面 Γ 上，它的絕对値到处不超过 ε，而且当 $\rho(T,\ T_0)<\delta$ 时，恒等于函数 $\varphi(T)$。于是函数 $\varphi_\varepsilon(T)=$ $=\varphi(T)-h_\varepsilon(T)$ 在点 T_0 的近旁等于零。

我們有 $\varphi(T)=\varphi_\varepsilon(T)+h_\varepsilon(T)$，結果，

$$\varphi(Q)=\frac{R(R^2-\rho^2)}{4\pi R^2}\iint_\Gamma\frac{\varphi_\varepsilon(T)d\sigma(T)}{r^3(Q,T)}+$$

$$+\frac{1}{4\pi R^2}\iint_\Gamma\frac{(R^2-\rho^2)R}{r^3(Q,T)}h_\varepsilon(T)d\sigma(T).\qquad(15)$$

由于$|h_\varepsilon(T)|<\varepsilon$，对于任何点 Q，已知第二项的絕对值不超过 ε。

考虑第一项；假定不等式 $r(Q,T_0)<\frac{\delta}{2}$ 成立，因为当 $\rho(T,T_0)<\delta$ 时，函数 $\varphi_\varepsilon(T)$ 等于零。那末可以認定对应的积分不是展布在整个球面 Γ 上，而是在它的一部分，那就是由离点 T_0 的距离小于 δ 的那些点所組成的。在"有洞"的球面上量 $r(Q,T)$ 显然是超过 $\frac{\delta}{2}$，从此推出函数 $\frac{1}{r^3(Q,T)}$ 有界的 $\left(数\left(\frac{2}{\delta}\right)^3\right)$，同时在等式(15)右边的第一个积分也是有界的。

如果现在点 Q 按任何規則接近点 T_0，那末量 $R^2-\rho^2$ 就趋向于零；从而推出在公式(15)中第一项整个趋于零。当 $r(Q,T_0)$ 足够小时，在和(15)中的第一项整个小于 ε。因此，我們有可能找到点 T_0 的近旁，在它的内部满足不等式

$$|\varphi(Q)|<2\varepsilon.$$

这表明函数 $\varphi(Q)$ 当 $Q\to T_0$ 时的極限存在而且等于零，这也指出函数 $\varphi(Q)$ 在点 $Q=T_0$ 是連續的。

总之，由积分(13)所定义的函数 $\varphi(Q)$ 在球 U 内部和它的边界上是連續的。其次注意在积分(13)号下的 Q 的函数关于点 Q 的坐标是無界地可微的；因为积分(13)是正常的，所以函数 $\varphi(Q)$ 自身是無界地可微的。

特别是，任何調和函数 $\varphi(Q)$（因为我們已經証明它总可以用柏阿松公式表达）是無界地可微的函数。

函数 $\varphi(Q)$ 的微商可以由在积分(13)中的被积函数求微商来計算。特别是，对表达式 $\Delta\varphi=(\nabla,\nabla\varphi)$ 可以同样地来計算；我們得到：

$$\Delta\varphi=\frac{R}{4\pi R^2}\oiint\limits_{\Gamma}\Delta\left(\frac{R^2-\rho^2}{r^3(Q,T)}\right)\varphi(T)\,d\sigma(T)=0,$$

因为我們已經知道函数 $\frac{R^2-\rho^2}{r^3(Q,T)}$ 是調和的。

因此，从公式(13)得到的函数 $\varphi(Q)$ 总是調和的。

总之，我們在本章开头所提出的問題得到完全的解决，不过仅仅对球是正确的，不是对于任意区域。这表明了調和函数 $\varphi(Q)$ 在球的边界上可以任意給定（只要在边界上能得到連續函数），而按照柏阿松公式，調和函数自身由这些边界值單值地确定下来。

这里我們对于任意区域 V 不可能导出对应的公式，我們要指出，对于較广泛的区域类，我們的結果仍然是正确的，而且公式(13)应当由一般的公式(11)来代替[1]。

現在我們再轉到借助于区域边界上的沿法綫的分量来确定調和向量場。或者，同样的由它的沿法綫的微商来建立調和函数。

我們知道这些問題的解答至多差一常数之外是唯一地被确定。如果对所求的函数 $\varphi(M)$ 加上任何的附加条件，我們就得到完全的唯一性。为方便計算，我們附加下面的条件；所求的函数 $\varphi(M)$ 在曲面 Σ 上的平均值等于零，或同样的

$$\iint\limits_{\Sigma} \varphi(M)\, d\sigma(M) = 0. \tag{16}$$

我們在建立柏阿松公式时，所采用的方法可以应用到这里来。但是，我們造出函数 $\psi(M, Q)$ 并不要使得它在区域的边界上等于零，——这样子使得在等式(8)右边保留函数 φ 的边界值，失去它沿法綫的微商的值，——而是要使得在等式(8)右边去掉 φ 的值，保留 $\frac{\partial\varphi}{\partial n}$ 的值。和以前一样，令

$$\psi(M, Q) = \frac{1}{r(M, Q)} - w(M; Q),$$

其中 $w(M, Q)$ 是調和函数；从函数 $w(M, Q)$ 我們还需要，$\psi(M, Q)$ 沿法綫的微商在区域 V 的边界上为常量。如果以 C 表示这个沿法綫的微商的常量值，我們得到：

---

[1] 参照 P. 柯朗与希尔伯脫，数学物理方法(俄文版)，2卷，第4章，1951。

$$C=\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,Q)}-\frac{\partial}{\partial n}w(M,Q),$$

又因調和函数 $w(M,Q)$ 沿法綫的微商沿区域 V 的边界的积分等于零，所以

$$\oiint_{\Sigma} C\,d\sigma=\oiint_{\Sigma}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,Q)}\,d\sigma,$$

从此按公式(7a)

$$C=\frac{1}{\Sigma}\oiint_{\Gamma}\frac{\partial}{\partial n}\frac{1}{r(M,Q)}\,d\sigma=\frac{4\pi}{s}.$$

当函数 $\psi(M,Q)$ 建立后，利用条件(16)，我們得到：

$$\oiint_{\Sigma}\left(\varphi\frac{\partial\psi}{\partial n}-\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\right)d\sigma=\frac{4\pi}{\Sigma}\oiint_{\Sigma}\varphi\,d\sigma-\oiint_{\Sigma}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}\,d\sigma=$$

$$=-\oiint_{\Sigma}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma. \tag{17}$$

和以前一样，等式(17)的右边变为数值 $4\pi\varphi(Q)$，而且得到公式

$$\varphi(Q)=-\frac{1}{4\pi}\oiint_{\Sigma}\psi\frac{\partial\varphi}{\partial n}d\sigma. \tag{18}$$

对于那种解决第一类問題的函数 $\psi(M,Q)$ 存在的一类区域，我們也可以証明函数 $w(M,Q)$，因之和函数 $\psi(M,Q)$ 的存在性。对于球，函数 $\psi(M,Q)$ 有形式：

$$\psi(M,Q)=\frac{1}{r(M,Q)}+\frac{R}{\rho}\frac{1}{r(M,Q^*)}-\frac{1}{R}\ln\frac{\rho\cdot r(P,M)\cdot\sin\gamma}{2R^2\operatorname{tg}\frac{\psi}{2}},$$

其中 γ 是綫段 PM 和 PQ 的交角，而 ψ 是 MQ^* 和 PQ^* 的交角。

在这里我們不再驗証函数 $\psi(M;Q)$ 所需要具备的性質①。

---

① 参照 Л. Н. Сретенский 著，牛頓勢位論，Гостехиздат 1946 版，188—189 面。

第十一章 由旋度及散度建立向量場

在本章里我們將从事于解决下面的問題（向量分析的逆問題）

假設給定向量場 $\mathbf{R}(P)$ 和数量場 $d(P)$ 可否建立向量場 $\mathbf{Q}(P)$ 使它具有下列性質

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{Q}(P) &= d(P), \\ \operatorname{rot} \mathbf{Q}(P) &= \mathbf{R}(P). \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

如果这是可能的話，那末怎样把满足方程(1)的一切向量場 $\mathbf{Q}(P)$ 写出来？

这个問題叫做关于由散度及旋度建立向量場的問題。

我們假設給定的場 $d(P)$ 和 $\mathbf{R}(P)$ 在某一有界区域 V 的內部有定义，而且是連續的。

对于場 $\mathbf{R}(P)$ 还假定它具有零散度。如果这个条件不满足，那末这个問題显然是沒有解答，因为每一旋度一定有零散度（第七章）

首先要建立方程(1)的一个特殊解，然后研究解的全体。

先考慮这样的情况，即当所要求的場 $\mathbf{Q}(P)$ 的旋度等于零，使得系(1)归結于更簡單的系

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{Q}(P) &= d(P), \\ \operatorname{rot} \mathbf{Q}(P) &= 0. \end{aligned}\right\} \qquad (2)$$

我們已經知道这个系的一个解，就是建立以 $-\frac{1}{4\pi}d(P)$ 为密度的区域可加函数的力場（第五章）

$$\mathbf{F}(P) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{d(M)\mathbf{e}(P, M)}{r^2(P, M)}dv(M). \qquad (3)$$

按第五章的証明，我們有：

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = -4\pi\left(-\frac{1}{4\pi}d(P)\right) = d(P).$$

在第七章中我們已經証明（利用場 $\mathbf{F}(P)$ 具有勢位这一事实）这样的等式

$$\operatorname{rot} \mathbf{F}(P) \equiv 0$$

成立。

因此，表达式(3)給出系(2)的一个特殊解。

現在考慮另一个特殊情况，假設所求的場的散度等于零，而旋度任意給定。

現在方程(1)可写为形式：

$$\operatorname{div} \mathbf{Q}(P) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{Q}(P) = \mathbf{R}(P). \tag{4}$$

并且对于这个系，我們已經知道一个特殊解。

建立向量 $\frac{1}{4\pi}\mathbf{R}(P)$ 的力場（第五章）：

$$\mathbf{H}(P) = \frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{[\mathbf{R}(M), \mathbf{e}(M,P)]}{r^2(M,P)} dv(M). \tag{5}$$

在第九章我們已經証明等式

$$\operatorname{div} \mathbf{H}(P) = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H}(P) = \frac{1}{4\pi}(4\pi\, \mathbf{R}(P)) = \mathbf{R}(P)$$

成立。因此，場(5)給出系(4)的解。

利用已經建立好的場 $\mathbf{F}(P)$ 和 $\mathbf{H}(P)$ 来建立場

$$\mathbf{Q}_0(P) = \mathbf{F}(P) + \mathbf{H}(P).$$

对于場 $\mathbf{Q}_0(P)$ 我們得到：

$$\operatorname{div} \mathbf{Q}_0(P) = \operatorname{div} \mathbf{F}(P) + \operatorname{div} \mathbf{H}(P) = d(P),$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{Q}_0(P) = \operatorname{rot} \mathbf{F}(P) + \operatorname{rot} \mathbf{H}(P) = \mathbf{R}(P).$$

因此，場 $\mathbf{Q}_0(P)$(6)是系(1)的一个特殊解。

我們現在已經造出了系（1）的一个特殊解。假設 $\mathbf{Q}_1(P)$ 是任何另一个的特殊解，并令

$$\mathbf{Z}(P)=\mathbf{Q}_1(P)-\mathbf{Q}_0(P).$$

对于 $\mathbf{Z}(P)$ 我們求得:

$$\left.\begin{array}{l}\operatorname{div}\mathbf{Z}(P)=\operatorname{div}\mathbf{Q}_1(P)-\operatorname{div}\mathbf{Q}_0(P)=0,\\ \operatorname{rot}\mathbf{Z}(P)=\operatorname{rot}\mathbf{Q}_1(P)-\operatorname{rot}\mathbf{Q}_0(P)=0.\end{array}\right\}\tag{7}$$

因此,$\mathbf{Z}(P)$ 是調和場(第九章)。反过来,如果 $\mathbf{Z}(P)$ 是調和場,并且 $\mathbf{Q}_1(P)=\mathbf{Q}_0(P)+\mathbf{Z}(P)$,那末等式(7)表明

$$\operatorname{div}\mathbf{Q}_1(P)=\operatorname{div}\mathbf{Q}_0(P)=d(P),$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{Q}_1(P)=\operatorname{rot}\mathbf{Q}_0(P)=\mathbf{R}(P),$$

于是場 $\mathbf{Q}_1(P)$ 跟場 $\mathbf{Q}_0(P)$ 一样都是系 (1) 的解。我們証明了下面的定理:

定理 11.1. 当,而且只当 $\operatorname{div}\mathbf{R}(P)=0$ 时,系(1)有解。一个特殊解是由公式(6)所給定的,系 (1) 的一般解是任意的調和場加上解(6)。

現在要弄清楚这样的問題:对所求的解 $\mathbf{Q}(P)$ 应当加以怎样的补充条件,使得它是唯一地被确定的? 我們想先在某一有界区域 U 上建立一个解。假設在区域 U 的边界 Γ 上任何点 T 給定量 $q(T)$ 作为所求的場 $\mathbf{Q}$ 沿法綫的分量。我們要問,在这样的条件下,系(1)的解是否存在,而且它是否唯一的。

我們已經知道系(1)的任何解有形式

$$\mathbf{Q}_1(P)=\mathbf{Q}_0(P)+\mathbf{Z}(P),$$

其中 $\mathbf{Z}(P)$ 是調和場。

利用边界条件并以 $\mathbf{n}(P)$ 表示單位法向量,我們得到:

$$(\mathbf{Q}_1(P),\mathbf{n}(P))=(\mathbf{Q}_0(P),\mathbf{n}(P))+(\mathbf{Z}(P),\mathbf{n}(P))=q(P)$$

从此,对于調和場 $\mathbf{Z}(P)$ 沿法綫的分量得到表达式

$$(\mathbf{Z}(P),\mathbf{n}(P))=q(P)-(\mathbf{Q}_0(P),\mathbf{n}(P)).\tag{8}$$

按这个式子,場 $\mathbf{Z}(P)$ 应当确定的。

因此,我們碰到了第二类問題(第十章),如果方程(8)的右边滿足条件

$$\oiint_{\Gamma}[q(P)-(\mathbf{Q}_0(P),\mathbf{n}(P))]d\sigma(P)=0,$$

这个問題的解存在，而且在这种情况下，按第十章的公式(17)是唯一确定的。

我們也可以構成其他的条件来保証問題的解的唯一性。

假設区域 U 包圍区域 V，使得在区域 U 的边界 Γ 的鄰域內方程(1)的右边等于零。

在这种情况下，所求的解 $\mathbf{Q}(P)$ 在区域 U 的边界的鄰域內有勢位函数 $\psi(P)$，假定在曲面 Γ 上函数 $\psi(P)$ 的值給定了；我們要在这样的边界条件下試解系(1)。

在区域 V 的外部，除了一个常数外，系(1)的任何解 $\mathbf{Q}_1(P)$ 具有确定的勢位函数，以 $\psi_1(P)$ 表示之。我們已知的特殊解 $\mathbf{Q}_0(P)$ 在区域 V 的外部也有勢位函数，記作 $\psi_0(P)$。

場 $\mathbf{Z}(P)=\mathbf{Q}_1(P)-\mathbf{Q}_0(P)=\operatorname{grad}\psi_1(P)-\operatorname{grad}\psi_0(P)=\operatorname{grad}[\psi_1(P)-\psi_0(P)]$ 有勢位函数 $\omega(P)=\psi_1(P)-\psi_0(P)$。因为 $\mathbf{Z}(P)$ 是調和場，$\omega(P)$ 是調和函数。边值条件

$$\psi_1(P)=\psi(P)$$

可以写成形式

$$\omega(P)=\psi(P)-\psi_0(P).$$

因此，調和函数 $\omega(P)$ 在区域 U 的边界上的点应当取确定的已知值。我們得到关于函数 $\omega(P)$ 的第一类問題；这問題的解常是唯一的存在，而且由第十章的公式(11)給定的。

造好了函数 $\omega(P)$，我們要来决定場 $\mathbf{Z}(P)=\operatorname{grad}\omega(P)$，而且有可能找出我們所求的場 $\mathbf{Q}_1(P)=\mathbf{Q}_0(P)+\mathbf{Z}(P)$。在这个时候，我們造函数的过程完全表明了它是唯一确定的。

还有在物理应用上时常会碰到的一种类型的条件，就是当点 P 到無限远处时，考慮在整个空間中的未知場 $\mathbf{Q}(P)$ 必須一致地趋于零。显然，我們造出的場 $\mathbf{Q}_0(P)$ 就具有这个性質。实际上，在分

母中包含着量 $r^2(P, M)$的表达式(3) 和(5)直接指出，当点 P 無限地远离时，对应的积分趋于零。現在要証明系(1)的任何其他的解就沒有这种性質。为此，我們只要証明任何的調和場在無限远处的極限等于零，它自身必恒等于零。

首先証明下面的引理:

引理 如果在整个空間中所定义的調和函数 $\varphi(M)$ 在無限远处的極限等于零，那末 $\varphi(M)\equiv 0$。

〔証明〕 在空間中固定某一点 P。因为 $\lim\limits_{M\to\infty}\varphi(M)=0$, 对于給定的 $\varepsilon>0$, 我們可以找到这样的 $R=R(\varepsilon)$，使得当 $r(M, P)\geqslant R$ 时，滿足不等式

$$|\varphi(M)|<\varepsilon.$$

假設 $U_R(P)$是以 R 为半徑点 P 为中心的球面。

按第十章公式(10)

$$\varphi(P)=\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{V_R(P)}\varphi(M)d\sigma(M),$$

从而

$$|\varphi(P)|\leqslant\frac{1}{4\pi R^2}\iint\limits_{U_R(P)}|\varphi(M)|d\sigma(M)\leqslant\frac{1}{4\pi R^2}4\pi R^2\varepsilon=\varepsilon.$$

由于 ε 是任意的，我們必須有 $\varphi(P)=0$. 而 P 又是空間中的任意点，那末 $\varphi(M)\equiv 0$, 証畢。

現在我們来考慮調和場 $Z(Q)$。假定 $\varphi(Q)$ 是对应的势位函数，使得 $\mathbf{Z}(Q)=\operatorname{grad}\varphi(Q)$。如果 $X(Q)$ 是向量場 $\mathbf{Z}(Q)$ 的第一个坐标，那末 $X(Q)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$。$\varphi(Q)$是調和函数，而按第九章的結果，它有連續的微商。对于 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}$ 应用拉普拉斯算子:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\frac{\partial^3\varphi}{\partial x^3}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial y^2\partial x}+\frac{\partial^3\varphi}{\partial z^2\partial x}=$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)=0.$$

因此，$\frac{\partial\varphi}{\partial x}$ 也是調和函数。对于向量 $\mathbf{Z}(M)$ 的其余分量也是一样。因为按条件，向量 $\mathbf{Z}(M)$ 在無限远处趋于零，所以这个向量場的每一个分量恒等于零。我們証明了唯一的存在調和場在無限远处趋于零，就恒等于零。

我們已經指出过，从以上可以推出在無限远处等于零的方程(1)的解是由公式(6)唯一給定的：

$$\mathbf{Q}_0(P) = -\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{d(M)\,\mathbf{e}(P,M)}{r^2(P,M)}\,d\sigma(M) + \\ +\frac{1}{4\pi}\iiint\limits_V \frac{[\mathbf{R}(M)\,\mathbf{e}(P,M)]}{r^2(P,M)}\,dv(M).$$

附录 广义重积分

在这个附录里，彙集一系列关于多元函数微积分学的定义和定理，这些定义和定理不是經常包含在教科書或必修課程中，但在向量分析問題的范圍內有極重大的意义而在本書中也經常有用到的。

1. 对于重积分的一般存在定理的基础在于假定积分区域 V 有限，而且被积函数 $f(M)$ 連續或分段連續——在后一个情形下，区域 V 可以分为有限个小区域，使函数 $f(M)$ 在每一个区域中連續而且可以延伸到它的边界上仍旧保持連續性。

但是，如果函数 $f(M)$ 不是分段連續的——例如，在区域 V 中某些点变为無限，那末关于积分的存在問題需要加以闡明。称点 $P\in V$ 是正常的，如果有它的鄰域，而且在其中函数 $f(M)$ 是分段連續的；在区域 V 中其他一切点称为特殊点，一切特殊点的集合記作 Z。作一串包含集合 Z 的区域 $V_1, V_2, \cdots, V_n, \cdots$，而且在这样的意义下縮成 Z，使得在区域 V_n 的每点与集合 Z 的距离不超过数 ε_n，而当 $n\to\infty$ 时，数 $\varepsilon_n\to 0$。区域 V_n 可以这样地構成，使得其中的每一区域有分段光滑的边界，例如它是有限个球或立方体的結合。函数 $f(M)$ 在集合 $V-V_n$ 上的积分显然存在，因为函数 $f(M)$ 在其中每一点是分段連續的。考慮一串数

$$I_n=\iiint\limits_{V-V_n} f(M)\,dv.$$

如果对于选择的一串区域 V_n 縮成 Z 时，I_n 有極限，那末我們說函数 $f(M)$ 沿区域 V 的积分存在；取这个極限值作为积分

$$\iiint\limits_{V} f(M)\,dv \tag{1}$$

自身的値，在这个情况下，称它为收斂(广义)积分。

如果 $|f(M)|$ 的积分收斂，那末 $f(M)$ 的积分叫做絕对收斂。应用哥西准則，在这个情况下，不难証明函数 $f(M)$ 自身的积分也收斂。为了檢驗函数 $|f(M)|$ 的收斂性，沒有必要考查对于縮成集合 Z 的一切区域列 $\{V_n\}$ 的积分

$$\iiint\limits_{V-V_n} |f(M)|dv$$

的性質，而只要考慮其中的任何一个序列[1]。

例如，假設 Z 包含一点 P，可以認为 V_n 取作以点 P 为中心，ε_n 为半徑的球，其中当 $n\to\infty$ 时，$\varepsilon_n\to 0$。

利用这个附注，我們来証明下面的命題：

引理 1 如果 Z 包含一点 P，而且函数 $f(M)$ 满足不等式

$$|f(M)|\leqslant C\frac{1}{[r(M,P)]^{3-\rho}}\ (\rho>0), \tag{2}$$

那末积分(1)存在。

[**証明**] 只要証明

$$I_n=\iiint\limits_{V-V_n} |f(M)|dv \tag{3}$$

是基本数列(满足哥西准則)。但是，显然，当 $n>m$ 时，

$$I_m-I_n=\iiint\limits_{V_m-V_n} |f(M)|dv;$$

將把这个积分变为球面坐标 r, φ, θ，而且利用(2)的估价，我們得到：

[1] 例如，参照 Г. М. 費赫金哥尔茨，微积分学教程，第 III 卷 263—264 面，384 (M—Л. 1949)。

$$0 \leqslant I_m - I_n \leqslant C \int\limits_{r=\varepsilon_n}^{\varepsilon_m} \int\limits_{\theta=0}^{\pi} \int\limits_{\tau=0}^{2\pi} \frac{1}{r^{3-\rho}} r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi \, dr =$$

$$= C \int\limits_{\varepsilon_n}^{\varepsilon_m} \frac{dr}{r^{1-\rho}} \int\limits_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int\limits_0^{2\pi} d\varphi = \frac{4\pi C}{\rho} (\varepsilon_m^{\rho} - \varepsilon_n^{\rho}), \quad (4)$$

当 m 和 n 足够大时，它可以任意小。

因此，数列(3)满足哥西准则，从此推出这个数列有極限，証畢。

2．往后我們要用到函数 $f(M)$ 的积分的下面性質。

引理 2　如果函数 $f(M)$ 满足条件(2)，那末对于任何的 $\varepsilon>0$ 可以决定这样的 $\delta>0$ 使得不等式

$$\iiint\limits_U |f(M)| < \varepsilon \quad (5)$$

对于半徑不超过 δ 的任何球 U 都成立。

［証明］以 $U_h(M)$ 表示以点 M 为中心 h 为半徑的球。在不等式(4)中当 $n\to\infty$ 时，取極限，得到:

$$0 \leqslant I_m \leqslant \frac{4\pi C}{\rho} \varepsilon_m^{\rho};$$

因此，对于給定的 $\varepsilon>0$，可以决定这样的 $\varepsilon_m = \rho>0$，使得对于任何的球 $U_\rho(P)$ 当 $\rho<\rho_0$ 时，不等式(5)满足。

我們还要考虑以其他点为中心的球。

如果球 $U_\rho(M)$ 整个位在球 $U_{\rho_0}(M)$ 的內部，那末显然对于 $U=U_\rho(M)$ 不等式(5)成立。

其次，函数 $f(M)$ 在球 $U_{\frac{\rho_0}{3}}(P)$ 的外部有界，例如以数 K 为界。因此，它沿以半徑 $\rho<\frac{\rho_0}{3}$，中心在球 $U_{\frac{2\rho_0}{3}}(P)$ 外部的任何球（这样的球和 $U_{\frac{\rho_0}{3}}(P)$ 没有共同部分）的积分不超过量 $\frac{4}{3}\pi\rho^3\cdot K$，而

当 ρ 足够小时，例如，当 $\rho<\delta<\frac{\rho_0}{3}$ 时，$\frac{4}{3}\pi\rho^2\cdot K<\varepsilon$。但半徑为 $\rho<\frac{\rho_0}{3}$ 的任何球，如果它不是全部落在球 $U_{\rho_0}(\rho)$ 的内部，它的中心在球 $U_{\frac{2\rho_0}{3}}(P)$ 的外部。所以对于半徑 $\rho<\delta$ 的球不管它的中心所在的位置，不等式(5)都成立，証畢。注意，量 δ 的値不依賴于 P 点的位置。

3. 往往要計算函数 $f(M,P)$ 的积分，$f(M,P)$ 不仅与动点 M 有关，而且也依賴于参变点 P，而在积分的过程中点 P 保持不变，但一般地說，P 点可以在同一个空間（例如平面区域或曲綫弧）中某一区域 Q 內变动。在这个情况下，积分

$$\iiint\limits_V f(M,P)dv(M)=F(P)$$

是 P 的函数，弄清楚这个函数的性質是有意思的。

下列定理成立（假定区域 V 是有限的）：

定理 1 如果函数 $f(M,P)$ 关于一切主元 M,P ① 是連續的，那末 $F(P)$ 关于 P 也是連續的。

定理 2 如果当 P 跑遍有界的区域 Q 时，$f(M,P)$ 关于一切变量 M,P 都連續，則

$$\int\limits_Q\left\{\iiint\limits_V f(M,P)dv(M)\right\}dl(P)=$$

$$=\iiint\limits_V\left\{\int\limits_Q f(M,P)dl(P)\right\}dv(M).$$

---

① 回忆一下，函数 $f(M,P)$ 叫做关于一切变元 M,P 是連續的，就是对于任何 $\varepsilon>0$ 可以决定这样的 $\delta>0$，从不等式 $\rho(M',M'')<\delta$，$\rho(P',P'')<\delta$ 推出

$$|f(M',P')-f(M'',P'')|<\varepsilon.$$

自然，只要表达式 $f(M',P')$ 和 $f(M'',P'')$ 都有意义。

特别是，从初等几何的見解很容易得到函数 $r(P,M)$ 关于一切变元 M,P 是連續的，其次从此推出对于任何的 $k>0$，$r^k(M,P)$ 关于一切变元 M,P 是連續的，如果 $k<0$，則在 $r^k(M,P)$ 有界的任何区域中，关于一切变元 M,P 是連續的。

在这个等式中沿区域 Q 的积分是一重的，二重的，或三重的，視区域 Q 的維数而定。

定理 3 如果 P 沿数軸变动(例如 P 由坐标 t 确定，$f(M,P)\equiv f(M,t)$)，而且微商 $\frac{\partial f(M,t)}{\partial t}$ 关于一切变量 M,t 都連續，則

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint\limits_V f(M,t)dv(M)=\iiint\limits_V \frac{\partial f(M,t)}{\partial t}dv(M).$$

我們此地不进行这些定理的証明，因为它在普通的教科書里都有的①。

4. 有时必須考虑到这样的情形，当函数 $f(M,P)$ 不連續时，例如在 $M=P$，可以变为無限大。最簡單的例子是这样的函数

$$\frac{1}{r^k(M,P)},$$

k 为任何正数。

在以后的叙述中，我們会碰到这样形式的函数

$$f(M,P)=\frac{\mu(M,P)}{r^k(M,P)}, \tag{6}$$

其中 $\mu(M,P)$ 关于一切变元 M,P(特别是，模为有界时)是連續函数。

对于这种类型的函数，我們在这里要建立以下的定理：

定理 4. 当 $k<3$ 时，积分

$$F(P)=\iiint\limits_V f(M,P)dv(M) \tag{7}$$

是 P 的連續函数。

定理 5. 当 $k<3$ 时，关于跑遍曲面 Σ 或曲綫 L 的参变点 P 的积分可以在沿 V 积分的符号下求微商；例如，沿曲面 Σ 积分，我們

① 普通的証明只引导一維区域 V(綫段)；但对于二維或三維区域的証明沒有什么本質上的不同。

得到：

$$\iint_{\Sigma}\left\{\iiint_{V} f(M,P)dv(M)\right\}d\sigma(P)=$$

$$=\iiint_{V}\left\{\iint_{\Sigma} f(M,P)d\sigma(P)\right\}dv(M). \qquad (8)$$

定理 6. 如果函数 $\mu(M,P)$ 有界而且关于点 P 的坐标 x, y, z 有（分段連續的）偏微商，那末当 $k<2$ 时，积分（7）关于这些坐标的微分可以在积分号下来进行；例如：

$$\frac{\partial F(P)}{\partial x}=\iiint_{V}\frac{\partial f(M,P)}{\partial x}dv(M).$$

定理 4 的証明　积分（7）的存在已經在第一节中証明了（引理 1）。

令 P_0 是在参变点 P 变动的区域 V 中的定点。

考虑积分

$$F(P_0)-F(P)=\iiint_{V}\{f(M,P_0)-f(M,P)\}dv(M). \quad (9)$$

借助于引理 2 对于給定的 $\varepsilon>0$ 求出这样的 $\delta>0$，使得以 δ 为半徑的任何球 U 滿足不等式

$$\iiint_{U}|f(M,P)|dv(M)<\frac{\varepsilon}{4}.$$

設 $U(P_0)$ 是以点 P_0 为中心 δ 为半徑的球。

把积分(9)分为兩个部分：沿球 $U(P_0)$ 以及沿区域 V 其余部分的积分。

沿球 $U(P_0)$ 的积分有簡單的估价：

$$\left|\iiint_{U(P_0)}\{f(M,P_0)-f(M,P)\}dv(M)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\iiint_{U(P_0)}|f(M,P_0)|dv(M)+\iiint_{U(P_0)}|f(M,P)|dv(M)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}=\frac{\varepsilon}{2}. \qquad (10)$$

假設，点 P 在以点 P_0 为中心 $\frac{\delta}{2}$ 为半徑的球的内部，那末在积分

$$\iiint\limits_{V-U(P_0)} f(M,P)dv(M)$$

中的被积函数关于一切变量 M, P 是連續的，于是按定理 1 这个积分是 P 的連續函数。特别是，我們可以决定这样的 P，当 $r(P, P_0) < P < \frac{\delta}{2}$ 时，不等式

$$\left|\iiint\limits_{V-U(P_0)} \{f(M,P_0)-f(M,P)\}\,dv(M)\right| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (11)$$

成立。

从不等式(10)和(11)推出，当 $r(P, P_0) < P$ 时，

$$|F(P)-F(P_0)| = \left|\iiint\limits_{V} \{f(M,P_0)-f(M,P)\}dv(M)\right| < \varepsilon.$$

因此，函数 $F(P)$ 在点 P_0 是連續的，因为 P_0 是任意的点，所以函数 $F(P)$ 到处連續，証畢。

定理 5 的証明 注意，按定理 4，在等式(8)左边的内部的积分是 P 的連續函数，这就保証左边整个积分的存在。在右边内部的积分，当作 M 的函数来看，它只是对不在曲面 Σ 上的那些点有定义。一般地說，当点接近曲面 Σ 时，内部的积分值無限地上升，因此，在右边的整个积分是广义的。被积函数的特殊点的集合和曲面 Σ 相合。所以这个积分的存在性不是一目了然的；它跟等式(8)可得自以下的研究。

为了証明在右边积分的存在，我們应当考虑正常的积分列

$$I_n = \iiint\limits_{V-V_n}\left\{\iint\limits_{\Sigma} f(M,P)d\sigma(P)\right\}dv(M),$$

其中区域 V_n 在向集合 $Z=\Sigma$ 收縮，像通常那样，在每一个积分 I_n

里，按定理 2 可以变换积分的次序：

$$I_n=\iint\limits_{\Sigma}\left\{\iiint\limits_{V-V_n} f(M,P)dv(M)\right\}d\sigma(P).$$

以 $F_n(P)$ 表示内部的积分，要証明，当 $n\to\infty$ 时，P 的函数一致地趋向于函数

$$F(P)=\iiint\limits_{V} f(M,P)dv(M).$$

函数 $F(P)$ 和 $F_n(P)$ 的差是沿区域 V_n 的积分

$$F(P)-F_n(P)=\iiint\limits_{V_n} f(M,P)dv(M). \qquad (12)$$

对于給定的 $\varepsilon>0$ 求出这样的 $\delta>0$，使得对于半徑不大于 δ 的任何球不等式

$$\iiint\limits_{U}|f(M,P)|dv(M)<\frac{\varepsilon}{2}$$

成立。

令 $U(P)$ 是以点 P 为中心 δ 为半徑的球，把积分(12) 分为两个积分：第一个部分落在球 $U(P)$ 中的区域 V_n 的一部分 V_n'，又第二个部分沿区域 V_n 的其余的部分 V_n''。

根据 δ 的确定与 n 無关

$$\iiint\limits_{V_n'}|f(M,P)|dv(M)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

在区域 V_n'' 中函数 $f(M,P)$ 有界。因为当 $n\to\infty$ 时，区域 V_n'' 和 V_n 的体积当 $n\to\infty$ 时同时趋于零，我們可以决定这样的 N，当 $n>N$ 时，

$$\iiint\limits_{V_n''}|f(M,P)|dv(M)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

因此，对这些值 n

$$\iiint\limits_{V_n} |f(M,P)|dv(M)=\iiint\limits_{V_n'} |f(M,P)|dv(M)+$$

$$+\iiint\limits_{V_n''} |f(M,P)|dv(M)<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

但
$$|F(P)-F_n(P)|=\left|\iiint\limits_{V_n} f(M,P)dv(M)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\iiint\limits_{V_n} |f(M,P)|dv(M)<\varepsilon,$$

而且这个估价的实現与点 P 的位置無关。于是，当 $n\to\infty$ 时，函数 $F_n(P)$ 一致地接近于 $F(P)$。从此推出量 I_n 有極限，等于

$$\iint\limits_{\Sigma}\left\{\iiint\limits_{V} f(M,P)d\sigma(M)\right\}d\sigma(P).$$

因此，我們証明了等式(8)右边的积分的存在而且等于等式(8)左边的积分。

定理 6 的証明　首先导出对于函数 $\frac{1}{r^k(M,P)}$ 的微分公式。如果 x,y,z 是点 P 的坐标，而 ξ,η,ζ 是点 M 的坐标，那末

$$r(M,P)=\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2}.$$

其次

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r^k(M,P)}=-\frac{k}{r^{k+1}(M,P)}\cdot\frac{\partial}{\partial x}r(M,P)=$$

$$=-\frac{k}{r^{k+1}(M,P)}\cdot\frac{x-\xi}{r(M,P)}=-\frac{k}{r^{k+1}(M,P)}\cos\alpha,$$

其中 α 是向量 MP 与 x 軸的交角。

从此

$$\frac{\partial}{\partial x}f(M,P)=\frac{\partial}{\partial x}\frac{\mu(M,P)}{r^k(M,P)}=$$

$$=-\frac{k\cos\alpha}{r^{k+1}(M,P)}\mu(M,P)+\frac{1}{r^k(M,P)}\frac{\partial}{\partial x}\mu(M,P),$$

而因为函数 $\mu(M,P)$ 和 $\frac{\partial}{\partial x}\mu(M,P)$ 按条件是有界的，那末

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}f(M,P)\right|\leqslant\frac{k|\mu(M,P)|}{r^{k+1}(M,P)}+\frac{1}{r^{k}(M,P)}\left|\frac{\partial}{\partial x}\mu(M,P)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{C_1}{r^{k+1}(M,P)},\tag{13}$$

其中 C_1 是某一常量。

这个估价指出$\frac{\partial}{\partial x}f(M,P)$的积分当 $k<2$ 时是絕对收斂的。

考虑函数 $P_\delta(M,P)$，当 $r(M,P)\geqslant\delta$ 时它与 $\frac{1}{r(M,P)}$ 一致而当 $r(M,P)\leqslant\delta$ 时，它是連續又有連續的微商，而且

$$\left.\begin{aligned}&|P_\delta(M,P)|\leqslant\frac{1}{r(M,P)},\\&\left|\frac{\partial}{\partial x}P_\delta(M,P)\right|\leqslant\left|\frac{\partial}{\partial x}\frac{1}{r(M,P)}\right|\leqslant\frac{1}{r^2(M,P)}.\end{aligned}\right\}\tag{14}$$

这样的函数可以由公式給出，例如，

$$P_\delta(M,P)=\begin{cases}\dfrac{1}{r(M,P)} & \text{当 } r(M,P)\geqslant\delta,\\ Ar^2(M,P)+B & \text{当 } r(M,P)\leqslant\delta,\end{cases}$$

其中 A 和 B 这样的选擇，使得当 $r(M,P)$的值通过 δ 时，不破坏的連續性与光滑性。

現在令 $f_\delta(M,P)=P_\delta^k(M,P)\cdot\mu(M,P)$。

那末

$$\frac{\partial}{\partial x}f_\delta(M,P)=kP_\delta^{k-1}(M,P)\frac{\partial}{\partial x}P_\delta(M,P)\mu(M,P)+$$

$$+P_\delta^k(M,P)\frac{\partial}{\partial x}\mu(M,P),$$

而且从不等式(14)推出

$$|f_\delta(M,P)|\leqslant\frac{|\mu(M,P)|}{r^k(M,P)}\leqslant\frac{C_2}{r^k(M,P)},$$

$$\left|\frac{\partial}{\partial x}f_\delta(M,P)\right|\leqslant\frac{k}{r^{k-1}(M,P)}\frac{1}{r^2(M,P)}|\mu(M,P)|+$$

$$+\frac{1}{r^k(M,P)}\left|\frac{\partial}{\partial x}\mu(M,P)\right|\leqslant\frac{C_3}{r^{k+1}(M,P)}+\frac{C_4}{r^k(M,P)}\leqslant\frac{C_5}{r^{k+1}(M,P)}.$$

記 $$\iiint\limits_V f_\delta(M,P)dv(M)=F_\delta(P).$$

当 δ 充分小时，容易看出

$$|F(P)-F_\delta(P)|=\left|\iiint\limits_V \{f(M,P)-f_\delta(M,P)\}dv(M)\right|=$$

$$=\left|\iiint\limits_{U_\delta(P)} \{f(M,P)-f_\delta(M,P)\}dv(M)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\iiint\limits_{U_\delta(P)} |f(M,P)|dv(M)+\iiint\limits_{U_\delta(P)} |f_\delta(M,P)|dv(M)\leqslant$$

$$\leqslant 2\iiint\limits_{U_\delta(P)} |f(M,P)|dv(M)\leqslant\varepsilon.$$

因为积分 $F_\delta(P)$ 是正常的，按定理 3 它关于 x 的微分可以在积分号下进行

$$\frac{\partial}{\partial x}F_\delta(P)=\iiint\limits_V \frac{\partial}{\partial x}f_\delta(M,P)dv(M).$$

像我們剛剛看到的一样，积分

$$\iiint\limits_V \frac{\partial}{\partial x}f(M,P)dv(M)=\tilde{F}(P)$$

絕对收斂。显然，当 δ 充分小的时候，

$$\left|\tilde{F}(P)-\frac{\partial}{\partial x}F_\delta(P)\right|=$$

$$=\left|\iiint\limits_V \left\{\frac{\partial}{\partial x}f(M,P)-\frac{\partial}{\partial x}f_\delta(M,P)\right\}dv(M)\right|=$$

$$=\left|\iiint\limits_{U_\delta(P)} \left\{\frac{\partial}{\partial x}f(M,P)-\frac{\partial}{\partial x}f_\delta(M,P)\right\}dv(M)\right|\leqslant$$

$$\leqslant\iiint\limits_{U_\delta(P)} \left|\frac{\partial}{\partial x}f(M,P)\right|dv(M)+\iiint\limits_{U_\delta(P)} \left|\frac{\partial}{\partial x}f_\delta(M,P)\right|dv(M)\leqslant$$

$$\leqslant C_6\iiint\limits_{U_\delta(P)} \frac{dv(M)}{r^{k+1}(M,P)}\leqslant\varepsilon.$$

因此，我們看到，当 $\delta\to 0$ 时，函数 $F_\delta(P)$ 一致地接近于 $F(P)$，而函数 $\frac{\partial}{\partial x}F_\delta(P)$ 一致地接近于 $\widetilde{F}(P)$。从而应用分析的古典定理，我們直接得到

$$\widetilde{F}(P)=\frac{\partial}{\partial x}F(P).$$

这样一来，定理 6 就完全証明了。

因此，我們看到，当 $\delta\to 0$ 时，函数 $F_\delta(P)$ 一致地接近于 $F(P)$，而函数 $\frac{\partial}{\partial x}F_\delta(P)$ 一致地接近于 $\widetilde{F}(P)$。从而应用分析的古典定理，我們直接得到

$$\widetilde{F}(P)=\frac{\partial}{\partial x}F(P).$$

这样一来，定理 6 就完全証明了。