14.1 方向导数

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 *求函数 $u = xyz$ 在点 $P_0(1,1,1)$ 沿该点到点 $P_1(2,2,-2)$ 方向的方向导数.*

解: 函数 $u = xyz$ 显然有连续的偏导数于是可微, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{P_0} = yz\Big|_{(1,1,1)} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{P_0} = xz\Big|_{(1,1,1)} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{P_0} = xy\Big|_{(1,1,1)} = 1.$$

方向 $\overrightarrow{P_0P_1}$ 的模为 $\|P_1 - P_0\| = \sqrt{11}$, 方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{11}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{11}}, \quad \cos\gamma = -\frac{3}{\sqrt{11}}.$$

因此得到

$$f_{\boldsymbol{l}}(P_0) = 1imes\tfrac{1}{\sqrt{11}} + 1imes\tfrac{1}{\sqrt{11}} + 1imes\tfrac{-3}{\sqrt{11}} = -\tfrac{1}{\sqrt{11}}.$$

□

思考题

1. 一元函数的方向导数与单侧导数有什么联系?

解: 如果函数 f 在点 $P_0(x_0,y_0)$ 处可微，则一元函数的方向导数 $f_{\boldsymbol{l}}(x_0,y_0)$ 与单侧导数 $f_x(x_0,y_0), f_y(x_0,y_0)$ 满足

$$f_{\boldsymbol{l}}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中 $\cos\alpha, \cos\beta$ 是方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦. □

2. 方向导数是向量吗?

解: 不是. □

3. (**??**) 式是怎样推导出来的?

解: 因为 $\boldsymbol{l}^+$ 是指向 x 轴正半轴的向量，则 $\boldsymbol{l}^+$ 的方向余弦

$$(\cos\alpha, \cos\beta) = (\cos 0^o, \cos 90^o) = (1, 0),$$

所以

$$f_{\boldsymbol{l}^+}(x_0,y_0) = f_x(x_0,y_0)\cos\alpha + f_y(x_0,y_0)\cos\beta = f_x(x_0,y_0);$$

同理可得因为 $\boldsymbol{l}^-$ 是指向 x 轴正半轴的向量，则 $\boldsymbol{l}^+$ 的方向余弦

$$(\cos\alpha, \cos\beta) = (-\cos 0^o, \cos 90^o) = (-1, 0),$$

所以

$$f_{l^-}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta=-f_x(x_0,y_0);$$

□

4. 若二元函数在某一区域中的任何点处的任何方向的方向导数均为零, 则该函数具有什么性质?

解: 如果函数 f 在区域 D 中的任何点 $P(x,y)$ 处的任何方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数 $f_{\boldsymbol{l}}(x,y)$ 均为零, 则有

$$f_{\boldsymbol{l}}(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\cos\alpha+f_y(x_0,y_0)\cos\beta,$$

其中 $\cos\alpha,\cos\beta$ 是方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向余弦,

由函数 f 在区域 D 中的任何点 $P(x,y)$ 处的任何方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数 $f_{\boldsymbol{l}}(x,y)$ 均为零, 则有 $f_(x,y)=0, f_y(x,y)=0$, 得到 f 在任何点 $P(x,y)$ 处的导函数为 0, 所以

$$f=c(c\text{为任意常数})$$

□

5. 设 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 连续, 且任意方向的方向导数都存在且相等. 问 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 是否一定可微?

解: 不一定反例:

$$\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0)\\ 0,(x,y)=(0,0)\end{cases}$$

容易求得 $f_x(x_0,y_0)=0, f_y(x_0,y_0)=0$, 所以 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 连续, 且任意方向的方向导数都存在且相等, 但是

$$\lim_{\triangle x\to 0}\frac{\triangle x\triangle y}{\triangle x^2+\triangle y^2}=\lim_{\triangle y=k\triangle x}\frac{k}{1+k^2}$$

极限值与 k 有关, 所以极限不存在，所以 $f(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 是不可微. □

习题

1. 求函数 $z=x^2-y^2$ 在点 $(1,1)$ 沿任意方向的方向导数. 给出方向导数取最大值最小值时的方向.

解: 设 l 是过点 $(1,1)$ 的任意方向的直线，不妨设其方向向量为 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\cos\beta)$, 其中 α,β 分别是 $\boldsymbol{l}$ 与 x 轴和 y 轴正方向的夹角，注意到 $\cos\beta=\sin\alpha$, 即 $\boldsymbol{l}=(\cos\alpha,\sin\alpha)$,

函数 $z=x^2-y^2$ 显然有连续的偏导数于是可微, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{x=1}=2x\Big|_{x=1}=2,\quad \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{y=1}=-2y\Big|_{y=1}=-2.$$

所以得到方向导数为:

$$f(\alpha)=2\cos\alpha-2\sin\alpha=2\sqrt{2}\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})$$

当 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=1$ ，即 $\alpha=\frac{7\pi}{4}$ 时， $f(\alpha)$ 有最大值，此时 $\boldsymbol{l}=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{2}}{2})$, 当 $\cos(\alpha+\frac{\pi}{4})=-1$ ，即 $\alpha=\frac{3\pi}{4}$ 时， $f(\alpha)$ 有最小值，此时 $\boldsymbol{l}=(-\frac{\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2})$. □

2. 求函数 $z=xy^2+yz^2+zx^2$ 在点 $(2,1,-1)$ 沿方向 $(2,1,-1)$ 的方向导数.

解: 函数 $u = xy^2 + yz^2 + zx^2$ 显然有连续的偏导数于是可微, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(2,1,-1)} = y^2+2zx\Big|_{(2,1,-1)} = -3, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(2,1,-1)} = z^2+2xy\Big|_{(2,1,-1)} = 5, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(2,1,-1)} = x^2+yz\Big|_{(2,1,-1)} = 2.$$

方向 $(2, 1, -1)$ 的模为 $\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$, 方向余弦为

$$\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{6}}, \quad \cos\beta = \frac{1}{\sqrt{6}}, \quad \cos\gamma = -\frac{1}{\sqrt{6}}.$$

因此得到

$$f_l(2, 1, -1) = -3 \times \frac{2}{\sqrt{6}} + 5 \times \frac{1}{\sqrt{6}} + 2 \times \frac{-2}{\sqrt{6}} = -\frac{\sqrt{6}}{2}.$$

□

3. 设 $\boldsymbol{l}$ 的方向角分别为 60^o 在 45^o 和 60^o. 求函数 $u = xyz$ 沿方向 $\boldsymbol{l}$ 的方向导数.

解: 函数 $u = xyz$ 显然有连续的偏导数于是可微, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{(1,1,1)} = yz\Big|_{(1,1,1)} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial y}\Big|_{(1,1,1)} = xz\Big|_{(1,1,1)} = 1, \quad \frac{\partial u}{\partial z}\Big|_{(1,1,1)} = zy\Big|_{(1,1,1)} = 1.$$

方向余弦为

$$\cos\alpha = \cos 60^o = \frac{1}{2}, \quad \cos\beta = \cos 45^o = \frac{\sqrt{2}}{2}, \quad \cos\gamma = \cos 60^o = \frac{1}{2}.$$

因此得到

$$f_l(1, 1, 1) = 1 \times \frac{1}{2} + 1 \times \frac{\sqrt{2}}{2} + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

□

4. 求下列函数的梯度和梯度的模.

(1) $z = \ln(x^2 + y^2)$;

(2) $u = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$;

(3) $u = 1/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

解: **(1)** 函数 $z = \ln(x^2 + y^2)$ 显然有连续的偏导数于是可微, 且

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2}.$$

所以函数 $z = \ln(x^2 + y^2)$ 梯度为:

$$gradz(x, y) = \left(\frac{2x}{x^2 + y^2}, \frac{2y}{x^2 + y^2}\right)$$

函数 $z = \ln(x^2 + y^2)$ 梯度的模为:

$$\begin{aligned} \|gradz(x, y)\| &= \sqrt{\left(\frac{2x}{x^2 + y^2}\right)^2 + \left(\frac{2y}{x^2 + y^2}\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{4(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)^2}} \\ &= \frac{2}{x^2 + y^2}. \end{aligned}$$

(2) 函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 显然有连续的偏导数于是可微, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\quad \frac{\partial u}{\partial z}=\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}.$$

所以函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 梯度为:

$$gradu(x,y,z)=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}},\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right),$$

函数 $u=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 梯度的模为:

$$\begin{aligned}\|gradu(x,y,z)\| &= \sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2+\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2+\left(\frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)^2}\\ &= 1.\end{aligned}$$

(3) 函数 $u=1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 显然有连续的偏导数于是可微, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2x=-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\cdot 2y=-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}},$$

所以函数 $u=1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 梯度为:

$$gradu(x,y,z)=\left(-x\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}},-y\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}},-z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right),$$

函数 $u=1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ 梯度的模为:

$$\begin{aligned}\|gradu(x,y,z)\| &= \sqrt{\left(-x(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)^2+\left(-y(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)^2+\left(-z(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{3}{2}}\right)^2}\\ &= 1/\sqrt{x^2+y^2+z^2}.\end{aligned}$$

□

5. 设 $u=x^2+y^2+z^2-3xyz$. 求 $gradu$ 并找出 $\mathbb{R}^3$ 中的点使得 $gradu$ 垂直于 x 轴.

解: 函数 $u=u=x^2+y^2+z^2-3xyz$ 显然有连续的偏导数于是可微, 且

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2x-3yz,\quad \frac{\partial u}{\partial y}=2y-3xy,\quad \frac{\partial u}{\partial z}=2z-3xy.$$

所以函数 $u=u=x^2+y^2+z^2-3xyz$ 梯度为:

$$gradu(x,y,z)=(2x-3yz,2y-3xy,-2z-3xy),$$

由 $gradu$ 垂直于 x 轴，而 x 轴的方向向量是 $(1,0,0)$, 于是有

$$(2x-3yz,2y-3xy,-2z-3xy)\cdot(1,0,0)=2x-3yz=0,$$

即有曲面 $2x=3yz$ 上的点都能使 $gradu$ 垂直于 x 轴. □

6. 证明梯度的基本性质.

证明. 梯度的基本性质为:

(1)

$$grad(au+bv)=agradu+bgradv;$$

(2)

$$grad(uv)=ugradv+vgradu;$$

(3)

$$gradf(u)=f'(u)gradu;$$

下面证明梯度的三个基本性质成立:

设 $u=u(x,y),v=v(x,y)$, 则利用梯度的定义，及求偏导函数四则运算可得:

(1)

$$\begin{aligned}grad(au+bv) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}(au+bv),\frac{\partial}{\partial y}(au+bv)\right)\\ &= (au_x+bv_x,au_y+bv_y)\\ &= a(u_x,u_y)+b(v_x,v_y)\\ &= agradu+bgradv;\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}grad(uv) &= \left(\frac{\partial uv}{\partial x},\frac{\partial uv}{\partial y}\right)\\ &= (u_xv+uv_x,vu_y+uv_y)\\ &= v(u_x,u_y)+u(v_x,v_y)\\ &= ugradv+vgradu;\end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned}gradf(u) &= \left(\frac{\partial f(u)}{\partial x},\frac{\partial f(u)}{\partial y}\right)\\ &= (f'(u)u_x,f'(u)u_y)\\ &= f'(u)(u_x,u_y)\\ &= f'(u)gradu.\end{aligned}$$

∎