

序

本书拟作为一本内容广泛并用图、例说明的，应用有限差分法计算传热问题的入门书。有限差分方法基本上是简单的，但是它对那些面临繁难的甚至经常不能分析求解的传热问题的工程设计人员或研究人员，却提供很有效的工具。本书面向那些实际工作者，他们需要一本能使他们学会并能应用有限差分法以解决问题的完整著作。

此课题的起点，理所当然的是导热的偏微分方程(PDE)，正是由导热的偏微分方程导出了简单得多的有限差分方程(FDE)。具有内热源且温度依赖于时间的导热一般方程式为：

$$\text{div}(k \text{ grad } T) + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

我们对导热的研究主要是涉及此方程式的求解，以获得固体结构内部的温度分布或温度演变。因为在各种情况下恰恰是温度分布决定着传热的速率和热应力的水准，所以我们总是把注意力集中在温度上。

对于简单形状的物体和边界条件，已经得出了这类偏微分方程的解析解，并可用来求整个物体内部的局部温度。但是在大多数情况下，即使存在解，这种解也是很复杂的，并且均是无穷级数的形式，致使计算值难以得到。在大多数有实际意义的情况下，这样的解析解并不存在。

在这样一些情况下，特别是对于复杂的几何形状和边界条件，只能采用近似的数值方法求解。这种方法乃用各特定点上的数值间的有限差分近似地代替上述方程中的导数，故将这种方法称为有限差分法。

当然，两种不同的解法——解析解法和数值解法，也会得出不同类型的答案。用解析解法得出的公式(通常是相当复杂)，能够计算系统内任意点上的温度及其梯度。另一方面，在数值解法

中是计算我们感兴趣的区域内网格上预先选定的离散点的温度。某一点的温度就代表包括此点在内的一定区域的温度，边界上的热流被看作是来自适当区域的热流总合。这里所说的“点”或“节点”，对于稳定态问题系指空间中的一点，而对于不稳定态问题系指空间和时间中的一点。

本书试图给读者提供包括计算机程序方面在内的、关于分析和求解导热问题的全面资料。书的前两章包括基本概念和基本方程式，并且还复习了传热原理。接着在第三、四章中详尽阐述了对于各式各样的形状如何来推导有限差分方程，论述了泰勒(Taylor)级数和单元控制体积的热平衡法这两种方法，还详细讨论了不同坐标系下的有限差分方程的建立、不规则网格和三角形网格、以及不同类型边界条件的处理等问题。第五、六章说明如何将这些概念应用到若干典型问题中，这里采用了粗网格，目的是通过例子说明运用表格计算和简单的Fortran计算程序的方法。我们要经常注意，通过采用细网格特别可以改善精确度，细网格会得出更大的一组有限差分方程，它更好地模拟所讨论的问题。第七章研究有限差分方程组的各种解法：用于各种复杂情况下的稳定态和不稳定态问题的直接法和迭代法。我们讨论了这些方法的优缺点，并介绍了它们的效率（亦即为了获得一定的精确度所必需的最小计算量）。还包括应用比较复杂的通用计算机程序的计算问题。第八章讨论了各类实用问题，在研究实例的基础上综合运用了前面讲过的概念，并且采用始终如一的方式充分地论证了这些问题。

至于本书有什么独创性呢？任何教科书作者的主要贡献，在于选择、提炼和重新组织他们所发现的最适于说明该领域的原理和方法的有关材料。在这种理解下，本书作者已概括了几位著名作者的论著。无论如何，本书的特点是突出了实用重点，包括了数值解法方面的最新概念，并且将通过Fortran计算机程序实现计算都完全结合到讨论中。我们试图在数学推导和物理概念两者的份量上取得最好的均衡，并试图写成一本为那些渴望解决实际

问题的人们所欢迎的教科书。

作者对参与此书准备工作的人员表示感谢。我们特别感谢：在谢菲尔德(Sheffield)、克兰菲尔德(Cranfield)、塔克森(Tucson)和蒙特利尔(Montreal)的同事们给予我们的帮助、鼓励和同情；书评作者们特别是在克兰菲尔德的G.哈蒙德(Hammond)和J.沃德(Ward)以及在塔克森的M.J.阿诺德(Arnold)和J.T.莫科姆布(Morcomb)给予我们有益的建议和评论；在塔克森的罗达(Rhoda)G.米勒(Miller)为我们的末稿精心打字；在米尔顿凯恩斯(Milton Keynes)的A.E.普拉特(Pratt)协助我们准备了很多用图；我们的妻子们对我们的关心鼓励；以及应用科学出版公司(Applied Science Publisher Ltd)的良好合作和精心作好出版的准备工作。

D.R.克罗夫特(Croft)

D.G.利利(Lilley)

目 录

序

第一章 引言	1
1.1 基本概念.....	1
1.2 物理问题.....	3
1.3 数学问题.....	6
1.4 求解的方法.....	9
1.5 离散化.....	10
参考文献	12
第二章 基本原理	14
2.1 传热的基本方程式.....	14
2.2 热流的一般方程式.....	21
2.3 其它坐标系的一般方程式.....	27
2.4 一般方程式的特殊形式.....	32
2.5 问题分类.....	34
参考文献	38
第三章 直角坐标系有限差分方程的基础	39
3.1 均匀网格中函数的导数.....	39
3.2 非均匀网格中函数的导数.....	47
3.3 通过偏微分方程的替代法建立稳定态问题的 有限差分方程.....	51
3.4 通过能量平衡法建立稳定态问题的有限差分 方程.....	57
3.5 不稳定态问题的有限差分方程.....	62
参考文献	68
第四章 有限差分方程的应用	70
4.1 非直角坐标系的有限差分方程.....	70
4.2 三角形网格.....	79
4.3 边界、界面、复合传热体和非均匀物性.....	86

4.4	精确度和外插法	100
4.5	稳定性和收敛性	106
	参考文献	112
第五章	有限差分方程在简单的稳定态问题上的应用	113
5.1	一维稳定态问题: 直接的三对角矩阵算法解	113
5.2	二维稳定态问题: 迭代解	115
5.3	松弛法	127
5.4	某些复杂情况	136
	参考文献	140
第六章	有限差分方程在简单的不稳定态问题上的应用	142
6.1	一维不稳定态问题: 显式格式	142
6.2	改变网格尺寸和不稳定性	149
6.3	二维不稳定态问题: 显式格式	151
6.4	对流边界条件	155
6.5	解不稳定态问题的隐式方法	159
	参考文献	160
第七章	传热问题的计算机解法	161
7.1	大型有限差分方程组	161
7.2	直接解法	165
7.3	迭代解法	168
7.4	稳定态椭圆型问题的计算机解法	175
7.5	不稳定态抛物型问题的计算机解法	184
	参考文献	193
第八章	各类实用问题	194
8.1	通过炉墙的稳定态热流	194
8.2	汇流排问题: 具有内热源的二维稳定态问题	201
8.3	汇流排问题: 冲击电流条件下, 具有内热源的 二维不稳定态热流	206
8.4	通过圆形加热元件的不稳定态热流	211
8.5	通过三角形散热片的热流: 不稳定态和稳定态	

情况.....	218
8·6 包含相变的热流.....	226
8·7 解一维不稳定态问题的方法比较: 显式法和 隐式的克兰科-尼科尔森近似法.....	229
8·8 二维不稳定态情况: 交替方向隐式(ADI)解法 实例.....	232
8·9 热流通过由物性依赖于温度的不同材料所组成的 耐火墙.....	238
8·10 通过复合耐火结构的三维稳定态热流.....	247
参考文献	253
计算机程序列表.....	254

第一章 引言

1.1 基本概念

有限差分法为解传热问题提供一种有效的方法。解区域以有限的点的集合所代替，并设法求出这些点上的温度近似值。这些点上的值必须满足有限差分方程 (FDEs)，而有限差分方程可通过用偏差商代替偏微分方程 (PDE) 而获得，或者通过直接考察热流而获得。采用多少点来达到一定的精确度通常乃以直观和经验为基础，因为在实际情况作误差估计是办不到的。往往采用两套不同的网格点以得出近似解，其中一套网格是另一套的加细，通常将其格距减半，以比较相应空间位置的温度。假若两种网格所引起的温度改变与温度本身的价值相比是很小的话，那么计算即可停止，否则要用更细的网格，或用这两组数值进行外推以得到更好的近似解。

为了阐明有限差分法这个基本课题，让我们考察在 x 和 y 二维空间内的导热问题（二维问题）。在稳定态情况下，温度 T 满足椭圆型偏微分方程：

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + H = 0 \quad (1.1.1)$$

式中 k 为导热系数（假设在整个区域上为常数），而 H 为单位体积内热量产生的速率。此方程可以用最简单的关于二阶导数的差分公式来表示；对于 x 方向上的导数，

$$(\Delta x)^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) \bigg|_{(x,y)} = T(x + \Delta x, y) - 2T(x, y) + T(x - \Delta x, y) \quad (1.1.2)$$

对于 y 方向上的导数同样地处理，就可得到代表在点 (x, y) 处的公式 1.1.1 的有限差分方程：

$$k[T(x + \Delta, y) + T(x - \Delta, y) + T(x, y + \Delta) + T(x, y - \Delta)$$

$$-4T(x, y)] + \Delta^2 H(x, y) = 0 \quad (1.1.3)$$

这里取两个方向上的间距 Δx 和 Δy 均等于 Δ 。当然此方程也可直接地从中心为 (x, y) 、边长为 Δ 的正方形的能量平衡而导出。能量平衡表明, 对于二维稳定态问题:

$$\text{净吸热的速率} + \text{内部热量产生的速率} = 0 \quad (1.1.4)$$

对于复杂问题来说, 人们往往宁愿通过考察方程 1.1.4, 而不通过基本微分方程 1.1.1 来建立形如方程 1.1.3 的方程式, 作为物理系统的直接近似。

通常与椭圆型方程相联系的边界条件有两类:

(1) 给定边界上 T 的值;

(2) 给定边界上法线梯度的条件, 通常为线性的, 其形式为

$$k \frac{\partial T}{\partial n} = -h(T - T_A) \quad (1.1.5)$$

这代表通过对流向温度为 T_A 的周围介质的线性传热。

对于椭圆型方程, 为了在它所包围的区域内定义一个适定的问题, 必须在封闭曲线(在三维区域情况下为封闭曲面)的所有点上, 给定某种类型的边界条件, 从这些边界值开始向内逐步用数值迭代法进行求解。

在不稳定态热流的情况下, 产生的热量与消散的热量之差不等于零, 且导致在任意点上的温度均随时间而改变。与其相关的抛物型方程为

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + H \quad (1.1.6)$$

式中 ρ 为材料的密度, C_p 为材料的恒压比热。适定的抛物型问题要求给定 $t=0$ 时空间区域内所有点上的温度 T , 以及 $t>0$ 时区域的所有边界点上类如(1)或(2)的条件。为此它们通常被称为初值问题。

已经导出了有限差分方程以后, 主要的问题便是实际计算差分方程的解。对于椭圆型方程, 问题在于求解这种类型的线性代数方程组

$$AT + d = 0 \quad (1.1.7)$$

然而对于抛物型方程，人们必须解常微分方程组（那时某些项已用有限差分近似代替），其形式为：

$$\frac{dT}{dt} = AT + d \quad (1.1.8)$$

式中 A 是一方形矩阵， d 是一列向量， T 是待求未知量的列向量。适定的椭圆型问题得到方程1.1.7的非奇异矩阵 A ，因此它存在唯一解。然而，因为对于（典型地）几千个格子点的每一点都要列一个方程，于是选择解法格式就需要特别小心。因为矩阵 A 中具有许多零元素，所以一般地都采用迭代法；人们先估计一个初始近似解，再根据一定规则逐步校正，以得到较佳近似值，直至收敛于指定的误差容许范围内。相反地对于抛物型问题（用类如公式1.1.8描述的），根据求解时所采用的方法，它也许需要也许不需要去解一组线性代数方程。用显式方法时只通过简单的替换便可进行求解，但是在此情况下时间步长的大小要受到稳定性条件的限制。若采用隐式方法便可部分地或全部地去掉这些约束，而其代价是必须解一系列的方程组。同预料的一样，在求解不稳定态问题的某些方法同求解相应的稳定态椭圆型问题的某些迭代法之间常常存在紧密关系。

1.2 物理问题

分析热传导的目的，在于预告处于不同温度环境下的某导热物体的瞬时温度分布的演变和（或）固定的温度分布图形，一旦知道了这个，其它的数据例如内部热流，热增长(Thermal growth)以及热应力等均能导出。在实际系统中具有很多复杂情况，包括：如实地确定周围环境的边界条件，需要处理复杂的物体几何形状，以及处理与恒定物性的各向同性导热体差别很大的各种材料系等问题。

1.2.1 周围环境的边界条件

边界条件的给定构成研究物体特性变化问题的基本输入，人

们感兴趣的是：

(1) 相互作用。固体导热问题通常总不能和表征对流及辐射的表面加热条件的相关问题分割开来。表面相互作用（物质喷射和燃烧等）将这两个问题结合在一起，但是我们时常将周围环境和物体内部温度变化问题分割开来，分别地加以处理。这样就物体而言，就可以规定其表面热边界条件（或者按照某些规则简单地加以修正），于是问题就简化为预测物体在这些限制条件下的温度场。

(2) 不稳定态过程。一般的导热问题是依赖于时间的，但是假若边界条件是不依赖于时间的，如果某物体长期处于这种稳定的边界条件下，其温度分布就变成稳定的了。若物体的导热系数很大，那末达到稳定态所需的时间就短，反之，所需的时间就长。这代表稳定态导热的一种特殊情况。它的求解可以通过按时间逐步解相应的不稳定态问题来完成，或者通过解相应的稳定态问题的公式来完成。在到达稳定态的温度和热传导状况之前，总存在一段时间的初始不稳定态过程。在某些实际场合下，随着传热过程的进行，此段不稳定态过程很快就衰减了，并且物体的温度场迅速呈现一固定的稳定态图形，然而在另外的情况下，初期的延续的不稳定态过程具有头等重要性。

(3) 初始状态和终止状态。当 $t=0$ 时物体突然置于另一不同温度的介质中时则发生“暴露”问题。这时在表面上的传热引起物体温度的改变，于是物体便获得或失掉热量，并且其表面温度趋向等同于周围介质的温度，而变化的速度决定于物体表面上的传热系数 h 。对于导热系数为 k 的一定物体，其内部的瞬时温度分布决定于 h/k 的相对值。假若此比值较大（或小），则物体表面温度就较快（或慢）地变为等同于周围介质的温度。一个无热量通过的绝热边界（指加以绝热的）相当于 $h=0$ ，并且在此表面的法向温度梯度 $\partial T/\partial n$ 等于零。

1.2.2 物体的几何形状

一些常见的基本的物体形状示于图1-1中，这些乃是与实际

机器构件适当相似的典型几何形状。事实上，这些几何形状易于接受求温度分布的精确解法，但数值解法适用于任何比较复杂的布置。常见而基本的形状有：

(1) 无限大固体，具有一个代表热接触面的内部平面 $x=0$ ；

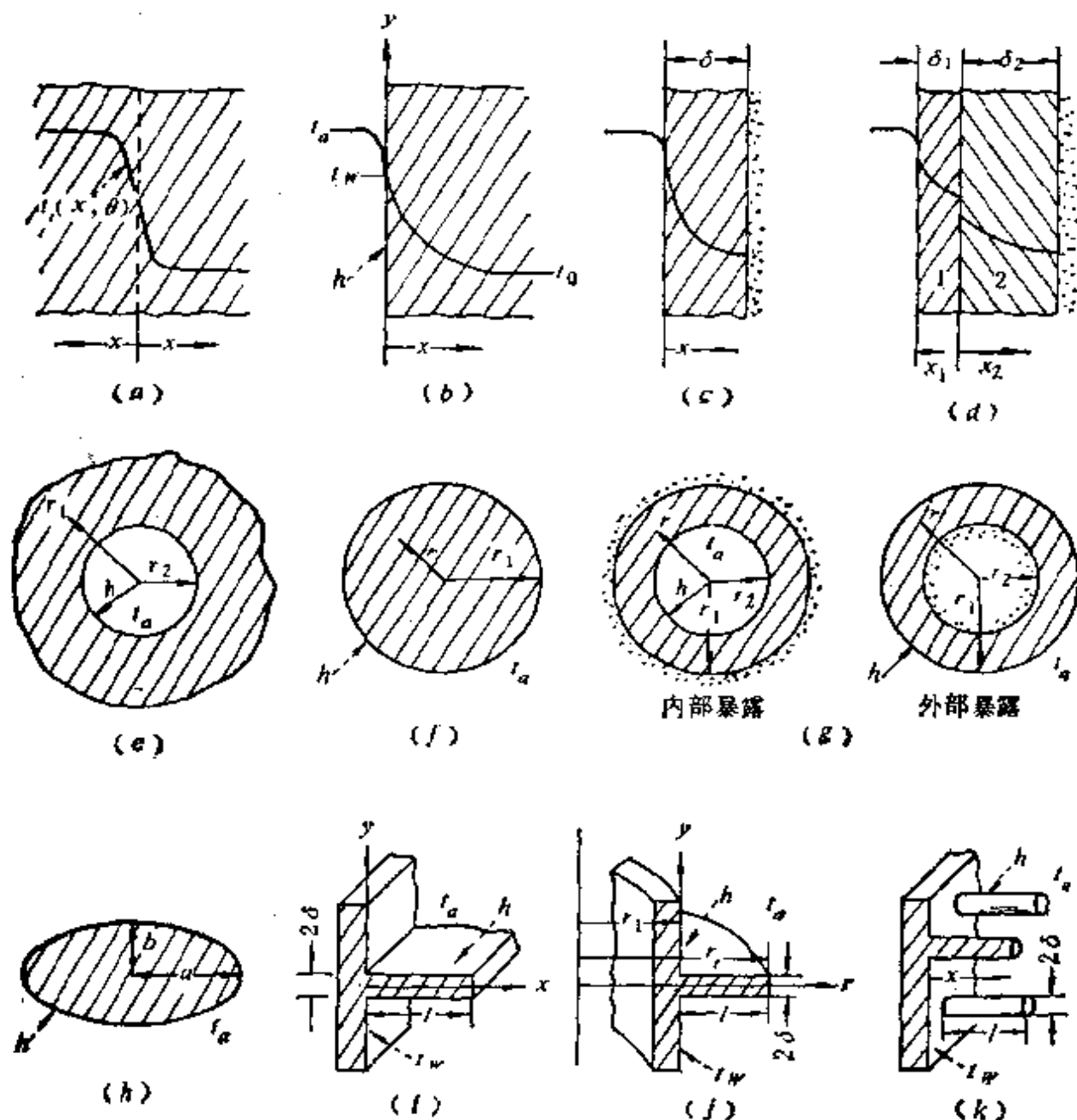


图 1-1 基本的物体形状

(a)一无限大固体；(b)一半无限大固体；(c)一平板；(d)一双层平板；(e)一中空圆柱和圆球；(f)一圆柱和圆球；(g)一柱形和球形壳体；(h)一椭圆体和椭面；(i)一直的翅片；(j)一环形翅片；(k)一针体

(2) 半无限大固体, 具有在 $x=0$ 处暴露于周围介质的表面;

(3) 绝热的有限厚平板, 一边暴露, 另一边绝热;

(4) 双层平板 (若 δ_2 很大则为半无限大固体), 在层 1 和层 2 之间具有一定的接触热阻, 因而有突变的温度降;

(5) 中空圆柱或中空圆球, 其内部为周围介质;

(6) 圆柱或圆球, 其外部为周围介质;

(7) 柱形或球形壳体, 内表面或外表面绝热;

(8) 椭圆柱, 外部为周围介质;

(9)~(11) 带翅片或针体的突出表面, 其目的在于增大热交换面积。

在例 (1)~(4) 中都附加温度曲线。

1.2.3 材料系

实际的材料和结构比起理想化了的数学模型要复杂得多, 这就使得在热结构的分析上出现最困难的情况。实际中使用的材料是千变万化的, 关于详尽的资料推荐读者参阅麦克亚当斯 (McAdams) (1954) 的著作。

1.3 数学问题

在一些数学物理问题中具有代表性的传热问题可用二阶偏微分方程表示:

$$\operatorname{div}(k \operatorname{grad} T) + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.3.1)$$

该式必须在一个边界 B 内的某区域 R 内, 且在规定的边界条件下求解, 边界条件的类型有下列三种:

(1) 已知边界 B 上的温度;

(2) 已知边界 B 上的 $\beta \frac{\partial T}{\partial n} + \gamma \frac{\partial T}{\partial S}$; (1.3.2)

(3) 已知边界 B 上的 $\alpha T + \beta \frac{\partial T}{\partial n} + \gamma \frac{\partial T}{\partial S}$ 。

这三种类型的边界条件分别称为狄立克莱 (Dirichlet) 边界

条件、纽曼 (Neumann) 边界条件和第三类边界条件。当边界上不同部分具有不同的条件时称为混合边界条件。当边界 B 保持在已知温度时应用第一类条件, 而为大家所熟悉的形式

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{h}{k}(T - T_A) \quad (1.3.3)$$

乃是第二类条件的一例。上式表示以对流方式传给温度为 T_A 的介质的热量。上面引用的例式是导热的一般方程式, 其中 k 为导热系数, T 为温度, H 为单位体积单位时间内产生的热量, ρ 为密度, C_p 为恒压下的比热, t 为时间, 而方程 1.3.2 中的 α, β, γ 为标量, n 为表面的法线方向, S 为表面的切线方向, h 为传热系数。

热传导的最一般的偏微分方程是方程 1.3.1, 其中 k, H, ρ 和 C_p 均随空间、时间和温度而改变, 记为:

$$k = k(x, t, T); H = H(x, t, T); \rho = \rho(x, t, T); \\ C_p = C_p(x, t, T) \quad (1.3.4)$$

式中 x 表示三维空间中的某点, k 也可依赖于方向 (各向异性介质)。方程 1.3.1 包括大多数有实际意义的特殊情况。例如, 假若系统的导热系数 k 为常数并且是各向同性的 (亦即在所有方向上具有同一数值), 则温度 $T = T(x, t)$ 必须满足下列方程式

$$\nabla^2 T + \frac{H}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.3.5)$$

式中 $\nabla^2 \equiv \text{div grad}$ (拉普拉斯算子), $\alpha = k/\rho C_p$ 为热扩散系数——导热物质的一种性质。进一步, 如果系统既无热源又无汇 ($H = 0$), 则温度 $T = T(x, t)$ 必须满足扩散方程

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (1.3.6)$$

假若具有源或汇, 但温度是稳定的 ($\frac{\partial T}{\partial t} = 0$), 则温度 $T = T(x,$

t) 必须满足泊松 (Poisson) 方程

$$\nabla^2 T + \frac{H}{k} = 0 \quad (1.3.7)$$

最后, 对于稳定态 $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$, 并且没有源或汇, 则温度 $T = T(x, t)$ 必须满足拉普拉斯 (Laplace) 方程

$$\nabla^2 T = 0 \quad (1.3.8)$$

像方程1.3.1这样的一些方程出现在许多有实际意义的工程现象研究中。类似的PDEs呈现在类如下列领域中:

- (1) 介电质中的电场。
- (2) 导电介质中的电场。
- (3) 磁场。
- (4) 非粘性和粘性流体的运动。
- (5) 扩散。
- (6) 平衡状态下的结构。

实际上, 人们经常应用这些场之间类似, 从另一个不同的场来模拟并求解一个问题。例如, 可以利用热流与人们所熟悉的电势场之间的数学类似, 来进行模拟传热问题的电模拟试验。进一步的细节可见阿帕赛 (Arpaci) (1966), 格布哈特 (Gebhart) (1971) 以及施奈德 (Schneider) (1955, 1973) 的著作。

所有 $H=0$ 的上述偏微分方程都具有平凡解

$$T = 0 \quad (1.3.9)$$

这个全零解极少构成物理问题的一个解, 因为通常在边界上 $T \neq 0$ 。解必须满足称为边界条件的附加条件, 而边界条件甚至是问题的通解的固有部分。

用方程1.3.1及其简化形式所表示的问题一般地分类为:

- (1) 椭圆型边值问题, 在这类问题中考虑的是方程的平衡

下稳定态形式 $\left(\frac{\partial T}{\partial t} = 0\right)$; 或者

- (2) 抛物型初始边值问题, 在这类问题中考虑的是方程的

不稳定态形式 $\left(\frac{\partial T}{\partial t} \neq 0\right)$ 。

这两种类型的区分关系到它们的解的解析特性和求解时所需的边界条件类型的不同。重大的差别可概括如下：

(1) 常见的椭圆型稳定态问题的边界条件有两类，往往在封闭边界 B 的所有点上给出形如方程1.3.2中的第一类或第二类条件（或者在边界的一部分是属于两类条件的组合），但至少边界 B 的一部分给出第一类条件。这些条件一般地足以在边界 B 所封闭的区域 R 内定义一个适定问题。

(2) 在抛物型不稳定态问题的情况下，在区域 R 内各点的温度可随时间 t 和位置 x 而改变。使这类问题成为充分适定的问题所需的边界条件是，给出 $t=0$ 时区域 R 内一切点上的温度，以及 $t>0$ 时区域 R 的边界上一切点上的第一类或第二类条件。

1.4 求解的方法

为了计算出导热物体内部的温度场，基本上有四种可用的方法。

1.4.1 解析法

这种方法专门用于导出关于温度与空间或温度与空间一时间的函数关系的数学解。导出的解必须满足基本偏微分方程，以及适合于特殊问题的一定的初始条件和边界条件。通常对实际问题必须加以简化，才能顺利地求解。这样一来就该物理问题而论，如此得到的解就根本不精确了。但是这种解往往是可取的，因为它们易于说明轻微变化的影响。基本的教科书有卡斯劳、耶格 (Carslaw & Jaeger) (1959) 和克兰克 (Crank) (1956) 的著作。

1.4.2 图解法

图解法是以特征场方程的性质和数值法则为基础的，并且具有能迅速给出解的第一次近似值这样一种独特的优点。

1.4.3 数值解法

数值解法通常都以有限差分近似为基础，并从而导出近似计算解，而解的精确度一般地能够增加到任意需要的程度。所用的方法是相当简单易行的，而且可用于一些复杂的问题并可得出答案；而对于这些复杂问题如采用正规的解析方法，往往是很不方便的，有时是根本难以处理的。当然，数值解法缺少正规解所具有的参数化，这是它的不足之处。

1.4.4 实验法

这种方法通常专门应用于用上述三法都不能处理的，或处理起来很麻烦的一些问题。可以采用实物的模型并在其中进行试验；或者换个办法，基于热流与另一熟悉的势场现象之间的数学类似，而采用模拟试验。

熟悉这一切方法的效能和局限性是很有用的，以便使我们能够对于每个新问题，从时间、人力、费用的节省，个人的才能和精确度等方面出发，考虑选用最现实的方法。尽管如此，本书只讨论有限差分数值解法。这种方法的理论基础是简单的，但它对那些工程设计人员和研究人员却提供有效的工具，他们经常面临繁难的甚至往往不能分析求解的传热问题。绝不能把这些任务从工程师手中转交给计算机程序编制人员——最简单的问题除外，通常物理问题和基本方程需要工程师的经验和直观知识——因此对于工程师来说确实有必要了解这些方法。

1.5 离散化

当应用有限差分法求解偏微分方程（加上相应的边界条件和可能的初始条件）时，首先应在感兴趣的整个区域 R 内建立网格，而覆盖在区域 R 上的网格线的交点通常称为格点。人们往往用网眼点、枢轴点、节点和格子点等词代替格点，而用网眼、格子等词代替网格。图12表示在二维区域的情况下，如何用一些离散点 P_{ij} 的集合代替连续区域 R 。对于不稳定态问题，取第三个坐标 t ，令其方向从书页朝外，并将二维网格在 Δt 间隔内向外重复而形成一个三维的网格系。为了详细说明起见，假设有两个距

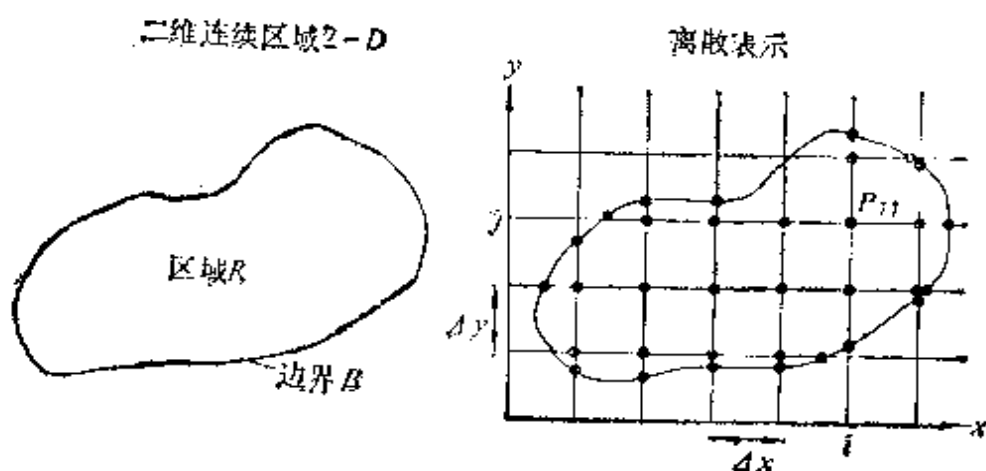


图 1-2 连续的二维区域的离散近似

离坐标 x 和 y ，且时间 t 为自变量，并设各自的格距为 Δx 、 Δy 和 Δt ，下标 i 、 j 、 m 用以表示空间坐标为 $i\Delta x$ ， $j\Delta y$ ， $m\Delta t$ 的那个节点 $P_{i,j,m}$ 。我们仅仅要得到孤立点 $P_{i,j,m}$ 的近似值，而不是要建立一个对区域 R 内到处都有效的解（例如形如解析解）。我们将 PDE 的精确解记为 $T = T(x, y, t)$ ，而将用有限差分法求出的每个节点的近似值记为 $U = U_{i,j,m}$ ，那么在某特定点 (i, j, m) 上的精确解 $T = T(i\Delta x, j\Delta y, m\Delta t)$ 一般地来说与 $U_{i,j,m}$ 会有差别的。

为了得出某节点 (i, j, m) 的近似值，必须用适当的、包括 Δx ， Δy ， Δt 和几个相邻节点的近似值 $U_{i,j,m}$ 的有限差分表示式，去逼近原来的 PDE 和相关联的边界条件。此程序导致一组包含未知量 $(U_{i,j,m})$ 的，称为有限差分方程的线性代数方程。对于网格系的每一点都要列这样一个方程，它代表单个的 PDE。该有限差分方程组可以求解到一定的精确度。然后再应用数值内插法从各点 $P_{i,j,m}$ 的离散解得出中间数值，积分、导数和热流等等。如将格距取得足够小，可望得到足够精确的近似解。这种看起来很简单的方法，其中隐藏着不少易犯的错误——存在不少关于适用性，精确性。收敛性和稳定性诸方面的严重而困难的数学问题，关于这些问题将在后面加以论述。进一步的资料可在有关偏

微分方程的数值解法的参考书中找到，例如艾姆斯 (Ames) (1969) 的著作。

在上段中论及某点 $P_{i,j,m}$ 问题的有限差分表示式时，曾出现过“适当的”一词，“适当的”意味着什么，这是一个重要的离散化问题，而关于离散化的数学方法和物理方法的材料在文献中是很丰富的。在数学近似中，通过用有限差分近似替代导数以及出现的其它函数的方法，便将问题的连续公式——公式 1·3·1 和 1·3·2 变换为离散的公式。这种方法是简单易行并且是很灵活的——例如人们可以对每一替代指定精确度的阶数——并且有限差分法（通过泰勒级数和有限差分算子）、变分法和直线法都可用来建立有限差分方程。对于复杂的问题，专家宁愿通过直接逼近支配物理系统的定律，而不通过 PDE 本身，来建立节点的方程。这种单元控制体积近似在求解困难的情况下具有重要意义。在此情况下，特别是在具有对流放热的不规则边界上或靠近它的一些点上，通过考察控制体积内的热流，问题可立即被简化。然而在某些方面，这种多少有点物理的和直观的近似法所得出的近似值，有时其精确度较低并且相容性较差。纵然精确度的阶数不容易判断，但由这种方法得到的结果往往和用有限差分法所得结果是一致的。在以后内容里有时两种方法同时采用，有时只用其中之一。

参 考 文 献

Ames, W. F. (1969). *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Nelson, London.

Arpaci, V.S. (1966). *Conduction Heat Transfer*. Addison-Wesley, Reading, Mass.

Bayley, F.J., Owen, J. M. & Turner, A.B. (1972). *Heat Transfer*. Nelson, London.

Carslaw, H.S. & Jaeger, J.C. (1959). *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford.

Crank, J. (1956). *Mathematics of Diffusion*. Clarendon Press, Oxford.

Gebhart, B. (1971). *Heat Transfer*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York.

Holland, F.A., Moores, R.M., Watson, F.A. & Wilkinson, J.K. (1970). *Heat Transfer*. Heinemann, London.

Meadams, W.H. (1954). *Heat Transmission*, 3rd ed. McGraw-Hill, New York.

Razelos, P. (1973). Methods of obtaining approximate solutions. Section 4, pp. 4-1 to 4-78, in *Handbook of Heat Transfer*, ed. W.M. Rohsenow and J.P. Hartnett. McGraw-Hill, New York.

Rohsenow, W.M. & Hartnett, J.P. (eds.) (1973). *Handbook of Heat Transfer* McGraw-Hill, New York.

Schneider, P.J. (1955). *Conduction Heat Transfer*. Addison-Wesley, Reading, Mass.

Schneider, P.J. (1973). Conduction. Section 3, pp. 3-1 to 3-134, in *Handbook of Heat Transfer*, ed. W.M. Rohsenow and J.P. Hartnett. McGraw-Hill, New York.

Schuh, H. (1965). *Heat Transfer in Structures*. Pergamon Press, Oxford.

Stephenson, G. (1970). *An Introduction to Partial Differential Equations for Science Students*, 2nd ed. Longman, London.

Succi, J. (1975). *Heat Transfer* Simon & Schuster, New York.

Walsh, J. (1966). Elliptic and parabolic equations. Chapter 5, pp. 99-116, in *Numerical Analysis: An Introduction*, ed. J. Walsh. Academic Press, London.

第二章 基本原理

2.1 传热的基本方程式

在大多数工业过程中，热量从一部分传播到另一部分，通常都是通过传导、对流及辐射三种方式综合进行的。至于何种传热方式起主要作用，则取决于温度水准和涉及到的物质的类型。为了便于说明起见，通常总是分别地来研究各种传热方式。

2.1.1 传导

传导传热是通过固体或静止流体传播热量的。在固体情况下，能量的传播依靠固定的分子格子内电子的运动而进行的，而对于流体来说，能量的传播是通过分子自由运动而引起的直接碰撞。

牛顿和以后的傅立叶，从实验观察稳定态系统推论出基本的傅立叶导热定律。他们发现

热流 \propto (温度差)

\propto (垂直于热流方向的表面积)

从而得出下式

$$Q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.1.1)$$

式中 Q_x 是 x -方向上的热流速率 (瓦 = 焦/秒)， A 是垂直于 x -方向的面积 (米²)， $\partial T / \partial x$ 是 x -方向上的温度梯度， k 是比例常数，称作所研究的特定材料的导热系数 (瓦/米·K)。式中加一负号是为了使方程式成为相容的，也就是说，热量总是流向温度低的区域，热流 Q_x 是正值的，而 $\partial T / \partial x$ 为负值的。

对于一厚度 Δx ，导热系数为 k 的平壁，如图 2-1 所示，若两侧温度为 T_1 和 T_2 ，并假定只在 x -方向上有热流通过，则方程式变为：

$$Q_x = k A \frac{(T_1 - T_2)}{\Delta x} \quad (2.1.2)$$

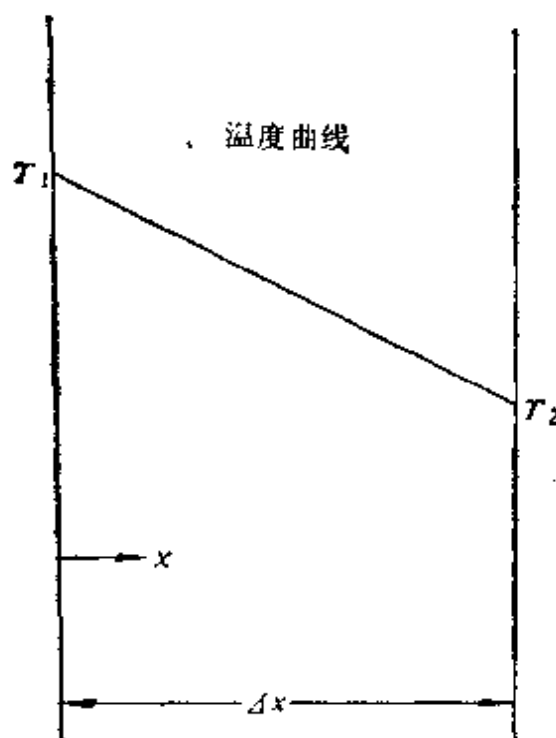


图 2-1 通过平壁的一维导热

方程2.1.2往往表示为另一种方式

$$Q_x'' = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad (2.1.3)$$

式中 $Q_x'' = Q_x / A$ 为热通量(瓦/米²)。

一般说来, 傅立叶定律即公式2.1.1有一定的限制, 对下列情况是不适用的。

(1) 导热系数不为常数: 在这种情况下, 只是在很小的间隔 Δx 内才能大致适用。

(2) 导热系数依赖于方向: 在这种情况下采用所考察的方向上的 k 。

(3) x -方向以外的方向上的热流, 就不能用上述那种形式的公式。

(4) 非稳定态, 亦即特定点上的温度随时间而改变。

关于导热系数 k 的数值应注意以下诸点：

- (1) 金属具有高的 k 值，它们为良导热体；
 - (2) 液体和气体具有低的 k 值，它们为弱导热体；
 - (3) 一种合金的 k 值不能简单地从其组成的导热系数值的加权平均求出；
 - (4) 纯金属的 k 值随温度的升高而减小；
 - (5) 许多绝热的混合物依赖它们的孔隙度以达到绝热效果，并且存在一对应于最大绝热性（最小总导热系数）的最佳紧密度。假若空隙太大，则产生对流传热，但若空隙太小，则通过固态连接体的导热占统治地位；
 - (6) 对于石墨这样的物质， k 对于方向是极端敏感的。
- 各种材料的典型 k 值由表2-1列出。

表 2-1 各种材料在288K下的典型导热系数

材	料	k (瓦/米·K)
	银	415.0
	铜	380.0
低	碳 钢	45.0
不	锈 钢	19.0
木	材	0.17
石	棉	0.17
	水	0.60
空	气	0.026

在一般分析中考虑某点 $X = (x, y, z)$ 的导热系数 k ，要根据列出的傅立叶定律即公式 2.1.1 的那个方向。最简单的情况是所考虑的每点处一切方向上的 k 值都是一样的，纵然它可随位置 X 和温度 T 而改变。大多数液体和固体属于这种情况。这样下式

$$Q_{x_j}^* = -k \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.1.4)$$

像公式2.1.1一样成立，式中 x_j —— x, y 或 z 。在此情况下热通量

向量 Q^* 可用温度场的梯度 ∇T 表示

$$Q^* = -k \nabla T \quad (2.1.5)$$

然而，更为一般的非各向同性的导热公式假定：热流向量的任何分量都取决于三个坐标方向上的温度梯度，以 x -方向为例

$$Q_x^* = -k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} - k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} - k_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.1.6)$$

在每一坐标方向上出现三个导热系数分量，于是导热系数变成下列张量：

$$k_{ij} = \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} & k_{13} \\ k_{21} & k_{22} & k_{23} \\ k_{31} & k_{32} & k_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1.7)$$

这样一来，公式2.1.6可写成：

$$Q_x^* = -k_{11} \frac{\partial T}{\partial x} - k_{12} \frac{\partial T}{\partial y} - k_{13} \frac{\partial T}{\partial z} \quad (2.1.8)$$

或简写为：

$$Q_x^* = -k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \quad (2.1.9)$$

式中采用了求和常规（在此情况下对重复的下标 j 求和）。

一般的非各向同性的情况也包括了各向同性的情况，这时 $k_{ij} = 0$ ($i \neq j$) 以及 $k_{ii} = k$ ；亦即在张量式中非对角线项均为零，且其余的非为零的对角线项均相等。另一个下属情况常常出现在条状组织的材料中——如木柴、纤维材料和结晶物质（例如石墨），这时导热系数是与方向有关的。假若使坐标轴同材料导热性的主轴平行，则 $k_{ij} = 0$ ($i \neq j$) 以及 $k_{ii} = k_i$ ；亦即一切非对角线项均为零，而对角线项是不同的，它们代表不同方向上不同的导热系数。于是热通量的分量分别为

$$Q_x^* = -k_x \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Q_y^* = -k_y \frac{\partial T}{\partial y}; \quad Q_z^* = -k_z \frac{\partial T}{\partial z}; \quad (2.1.10)$$

并非所有问题均可化为这种形式。例如，若边界条件必须取在一个同坐标轴并不垂直的表面上，则在应用边界条件中就有困难。当不稳定态占统治地位时，给定点上的物质温度随时间而变化；而温度变化的大小又是材料比热 C_p 的函数，按数学表示：

$$\text{净热流 } Q = m C_p \frac{\partial T}{\partial t} (\text{瓦}) \quad (2.1.11)$$

式中 m 为材料的质量（公斤）， C_p 为材料的比热（焦/公斤·K）， $\partial T / \partial t$ 为温度变化率（K/秒）。反过来，流到某点的净热流率本身又等于传导到此点的热量同从此点传导走的热量之差。概括起来，比热是蓄热能力的量度，而导热系数表示材料的传热能力。在不稳定态系统中，系统对温度变化的反应速率乃是材料的这些性质和质量的函数。人们引伸出热扩散系数或称导温系数 (*Thermal diffusivity*) 这个名词来部分地表示反应速率的大小

$$\text{热扩散系数 } \alpha = \frac{k}{\rho \cdot C_p} (\text{米}^2/\text{秒}) \quad (2.1.12)$$

式中 ρ 为材料的密度（公斤/米³）。

人们规定了称为傅立叶数 (Fo) 的无因次数群作为一参数呈现于不稳定态热流计算的表达式中

$$Fo = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{k \Delta t}{\rho C_p (\Delta x)^2} = \frac{\text{导热速率}}{\text{蓄热速率}} \quad (2.1.13)$$

式中 Δt 为时间增量（秒）， Δx 为所论材料的厚度（或材料的一段）（米）。傅立叶数表示物体对于温度变化的反应速率。 Fo 的数值小意味着加热或冷却此物体所需要的时间要长些，反之，所需时间就短些。

2.1.2 对流

对流换热发生在整个分子团从一个地方运动到另一个温度不同的地方的时候。因此对流只局限于液体和气体，并且往往涉及到流体与固体边界之间的热交换。

若流体的运动系由浮力而引起的（例如一个置放于空气中

的热平板，空气的密度由于温度升高而改变），则这种传热方式称为自然对流。这种方式的传热率决定于流体的特性。若流体的运动是由于外部作用力而引起的（例如依靠鼓风机），则这种传热方式称为强制对流，纵然会有少量的自然对流存在。

还是牛顿发现对流换热是固体温度 T_s 与流体温度 T_f 之差，以及接触表面 A 的函数：

$$\begin{aligned} \text{热流 } Q &\propto (T_s - T_f) \\ &\propto A \end{aligned}$$

实际上

$$Q = hA(T_s - T_f) \quad (\text{瓦}) \quad (2.1.14)$$

式中比例常数 h 称为换热系数（或放热系数）（瓦/米²·K）。测定各种流体和各种条件下的 h 值，成为多年来实验研究的目的，已导出了关于 h 同流体参数（流速、接触表面的状况和尺寸、流体性质等）之间各式各样的关系式。在许多情况下，都运用因次分析法以综合实验结果，从而得出下列类型的表达式：

$$Nu = \text{const}(Re)^n (Pr)^m \quad (2.1.15)$$

式中 $Nu = \frac{h \times A(\text{特征尺寸})}{\text{流体的导热系数}}$

$$Re = \frac{\text{速度} \times \text{特征尺寸}}{\text{运动粘性系数}}$$

$$Pr = \frac{\text{比热} \times \text{动力粘性系数}}{\text{导热系数}}$$

对流出现在低沸点的流体中，便可发生沸腾或凝结。具有相变的换热通常由于潜热很大而导致很大的换热系数。对于复杂的运动，特别是在沸腾下的运动，至今尚不能分析，至于有关包含相变的换热率的计算，在一定程度上靠经验公式。然而为了提供关于各种形式对流换热相对速率的一些概念，表 2-2 中列举了典型的换热系数。在表的末尾，珠状凝结下的换热系数表明热阻实质上为零，这由于凝结液膜破裂并脱离开凝结表面。

与表面传热能力同内部导热能力相对大小有关的毕欧数，是

一无因次数群，它定义为

$$Bi = \frac{h\Delta x}{k} = \frac{\text{表面传热能力}}{\text{固体的导热能力}} \quad (2.1.16)$$

表 2-2 各种场合下典型的换热系数

		h (瓦/米 ² ·K)
自然对流	气体	1~100
	空气	10~15
	液体	50~1000
	水	500~700
强制对流	气体	10~500
	空气	20~300
	液体	100~10000
	水	直到1000
沸腾 凝结		500~20000
		500~30000 (膜状filmwise)
		20000~500000 (珠状dropwise)

2.1.3 辐射

辐射不同于导热和对流，辐射能的传播不需要通过一固体或流体，它是依靠电磁波传递的。那些传播热能的波，只是在频率和波长上与无线电波、X-射线或 γ -射线有所不同。热辐射同可见的电磁辐射（光）的方式完全一样，它能够被辐射、反射和折射等等，并且不必借助于其它介质而在空间内传播〔见格雷（Gray）和马勒（Müller）（1974）的著作〕。通过这种方式所传递的热量随着发射物体的温度、辐射波长、辐射体的表面积及其性质而改变。

已经确定，在一定理想情况下，某物体的能量辐射率与其绝对温度的四次方成正比，即

$$Q \propto T^4$$

$$Q = \sigma T^4 \quad (\text{瓦/米}^2) \quad (2.1.17)$$

式中 σ 叫做斯蒂芬—玻尔兹曼常数， $\sigma = 5.67 \times 10^{-8}$ 瓦/米²·K⁴。假若一物体确能辐射此数量的热（实际中的物体并非如此），它

就称为“黑体”。事实上一切物质所能辐射的热量只等于黑体辐射的一定成数，即

$$Q = E\sigma T^4 \quad (\text{瓦/米}^2) \quad (2.1.18)$$

式中成数 $E (< 1)$ 称为辐射系数。辐射系数主要地是表面光洁度的函数：对于磨光的铜 $E = 0.02$ ，对于已被氧化的铜 $E = 0.7$ ，对于用不光泽的黑色颜料处理过的铜 $E = 0.95$ 。

在实际中往往涉及到两个系统之间的辐射热交换。如两个系统的温度各为 T_1 和 T_2 ，而 $T_1 > T_2$ ，则温度为 T_2 的物体会辐射出一些热量，但它将从温度为 T_1 的物体接受较多的辐射热，因此它将要升高温度。物体 2 所吸收的净热

$$\begin{aligned} &= \text{吸收来自物体 1 的热量} - \text{物体 2 辐射出的热量} \\ &= F_{12}EA\sigma(T_1^4 - T_2^4) \quad (\text{瓦}) \end{aligned} \quad (2.1.19)$$

式中 A 是物体 2 的接受面积， F_{12} 是物体 1 与物体 2 之间的角度系数。

这里初步涉及的一些内容，是为了使读者复习一下传热的基本表达式。导热公式显然适用于固体工件内部的非流动状况，而对流和辐射的热流发生在边界上。

2.2 热流的一般方程式

导热偏微分方程的推导，是通过考察处于导热过程中的物质的微元体积 ($dx dy dz$) 的能量平衡来进行的 (参阅图 2-2)。将通过六个面的导热在时间 δt 内所获得的热量，与在 δt 时间内产生的热量加在一起，并令其和等于微元体积内物质在 δt 时间内积蓄热量的改变，而后者用温度的升高来表示。为此，要应用 2.1 节中相应形式的傅立叶定律以及 2.1.11 方程。

假定不存在通过单元的各表面的物质运动，则在能量平衡中起作用的只有上述诸项。讨论根据格布哈特 (Gebhart, 1971) 的著作。

微元的中心点表示为 x, y, z ，在时间 t 时此点的温度和比热各为 T 和 C_p ，并且认为密度 ρ 与时间无关。假定由于遍布整个物

质的热源而产生能量，且此热源的强度 H 为 x, y, z 点上在时间 t 时单位体积内能量产生的速度，并且此速率也可随当地温度而改变。所以一般地记为 $H = H(x, y, z, T, t)$ 。

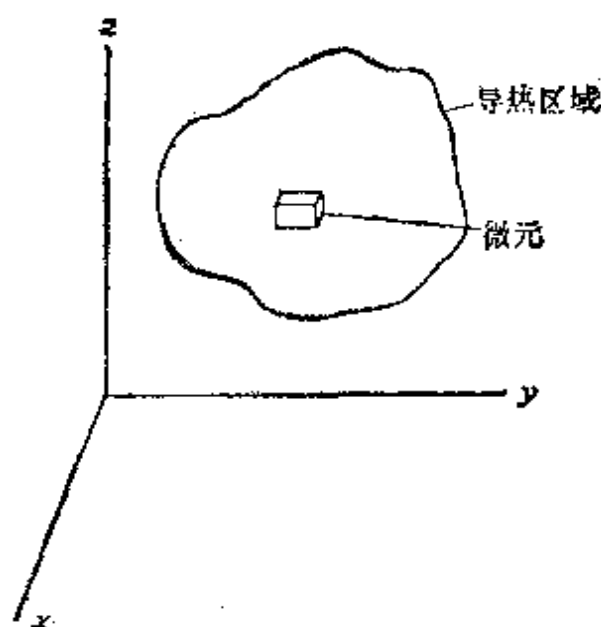


图 2-2 导热分析用的微元

我们根据导热系数 k 的变化性程度，按四种繁易情况推导一般方程式。在每种情况下，密度 ρ 和比热 C_p 可以是位置、温度或时间的函数，关系式记为

$$\rho = \rho(x, y, z, T, t); \quad C_p = C_p(x, y, z, T, t)$$

是适当的。我们考察下列形式的 k （见2.1节）。

（1）固定不变且各向同性的。 $k = \text{常数}$ ，在此情况下导热的傅立叶定律可写成

$$Q_x = -kA \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Q_y = -kA \frac{\partial T}{\partial y}; \quad Q_z = -kA \frac{\partial T}{\partial z}$$

（2）变量的。 k 依赖于温度或时间，为了简化表达式，这里记为 $k = k(T)$ ，那么

$$Q_x = -k(T)A \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Q_y = -k(T)A \frac{\partial T}{\partial y};$$

$$Q_z = -k(T)A \frac{\partial T}{\partial z}$$

(3) 正交各向异性的。 $k = k_x, k_y$ 或 k_z 决定于热量是在那个方向上传导的, 这时

$$Q_x = -k_x A \frac{\partial T}{\partial x}; \quad Q_y = -k_y A \frac{\partial T}{\partial y}; \quad Q_z = -k_z A \frac{\partial T}{\partial z}$$

要考虑到 k_x, k_y 和 k_z 也像 (2) 那样改变。

(4) 各向异性的。 k 有九个分量 $k_{ij} (1 \leq i, j \leq 3)$, 通过下列表达式把它们将热流 Q 和 $x_1, x_2, x_3 (\equiv x, y, z)$ 联系起来

$$Q_x = -k_{11}A \frac{\partial T}{\partial x} - k_{12}A \frac{\partial T}{\partial y} - k_{13}A \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$Q_y = -k_{21}A \frac{\partial T}{\partial x} - k_{22}A \frac{\partial T}{\partial y} - k_{23}A \frac{\partial T}{\partial z}$$

$$Q_z = -k_{31}A \frac{\partial T}{\partial x} - k_{32}A \frac{\partial T}{\partial y} - k_{33}A \frac{\partial T}{\partial z}$$

或简写为

$$Q_{x_i} = -k_{i1}A \frac{\partial T}{\partial x} - k_{i2}A \frac{\partial T}{\partial y} - k_{i3}A \frac{\partial T}{\partial z}$$

或

$$Q_{x_i} = -k_{ij}A \frac{\partial T}{\partial x_j}$$

式中用了求和常规 (即将带有重复下标的各项相加, 在上式这种情况下 $j=1, 2$ 和 3)

在上述情况下 [(1), (2), (3), 或 (4)], 一般方程式的推导是很相似的。这里我们对四种情况同时进行推导。读者可根据需要, 只看公式 2·2·1 至 2·2·4 中相应的行 [(1), (2), (3), 或 (4)]。

三维导热的一般方程式可这样推导: 首先考察 x -方向上的热流, 如图 2-3 所示, 在 δt 时间间隔内, 流入微元和从微元流出的热量, 可应用相应形式的傅立叶定律表示为

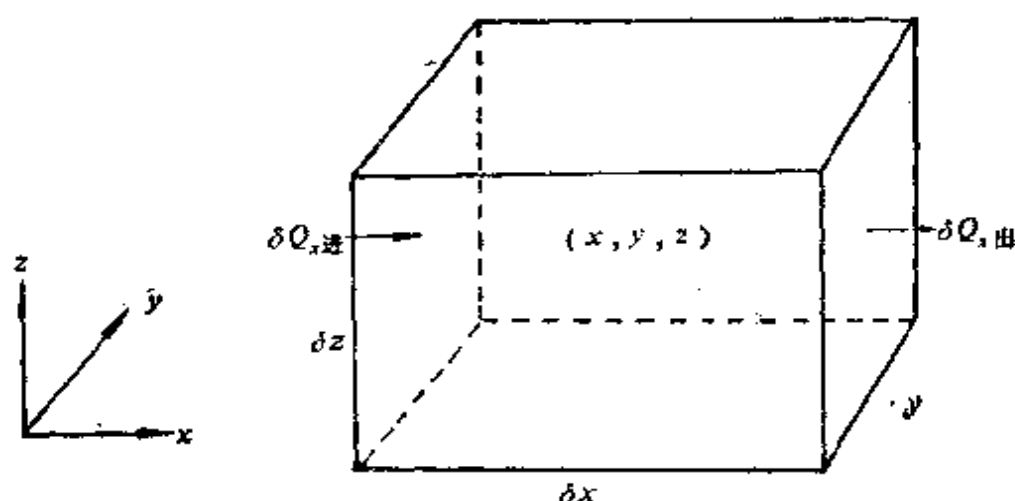


图 2-3 通过微元的导热

$$(1) \quad \delta Q_{x, 进} = -k(\delta y \delta z) \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x-\delta x/2} \cdot \delta t \quad (2.2.1)$$

$$(2) \quad = -(\delta y \delta z) \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x-\delta x/2} \cdot \delta t$$

$$(3) \quad = -(\delta y \delta z) \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x-\delta x/2} \cdot \delta t$$

$$(4) \quad = -(\delta y \delta z) \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right)_{x-\delta x/2} \cdot \delta t$$

用 $x + \delta x/2$ 代替上式中的 $x - \delta x/2$ ，既可得出计算 $\delta Q_{x, 出}$ 的类似表达式。

简单地应用泰勒 (Taylor) 级数表明

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\delta x/2} \approx \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x-\delta x/2} + \delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

为了这里讨论的目的，式中右端项可按中心点 x 计算，例如

$$\left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x+\delta x/2} \approx \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)_{x-\delta x/2} + \delta x \cdot \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

并且可将它同 (1) 式连接起来。因此，由于 x -方向上的热流，微元在 δt 时间内所吸收的净热量为

$$\delta Q_{x, 净} = \delta Q_{x, 进} - \delta Q_{x, 出}$$

于是

$$(1) \quad \delta Q_{x_{\text{面}}} = k(\delta x \delta y \delta z) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \cdot \delta t \quad (2.2.2)$$

$$(2) \quad = (\delta x \delta y \delta z) \frac{\partial}{\partial x} \left[k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right] \cdot \delta t$$

$$(3) \quad = (\delta x \delta y \delta z) \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) \cdot \delta t$$

$$(4) \quad = (\delta x \delta y \delta z) \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{x_i} \cdot \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) \cdot \delta t$$

在其它两个方向上进行同样的分析，可得出相应的表达式，如此由于各方向上的热流，微元在 δt 时间内所吸收的总热量为：

$$(1) \quad \delta Q_{\text{体}} = k(\delta x \delta y \delta z) \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) \cdot \delta t \quad (2.2.3)$$

$$(2) \quad = (\delta x \delta y \delta z) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k(T) \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \cdot \delta t$$

$$(3) \quad = (\delta x \delta y \delta z) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] \cdot \delta t$$

$$(4) \quad = (\delta x \delta y \delta z) \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(k_{x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{y_j} \frac{\partial T}{\partial y_j} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{z_l} \frac{\partial T}{\partial z_l} \right) \right] \cdot \delta t$$

这些方程中的最后一个也可写成

$$\delta Q_{\text{体}} = (\delta x \delta y \delta z) \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{i,j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \right] \cdot \delta t$$

式中具有二重求和，致使大括弧内成为九项。

因为 H 是单位体积，单位时间内所产生的热量，所以在 δt 时间内微元体积产生的热量为

$$\delta Q_{\text{总}} = H(\delta x \delta y \delta z) \cdot \delta t$$

由于 $\delta Q_{\text{流}}$ 和 $\delta Q_{\text{总}}$, 单位体积单位时间内能的净增长, 根据公式 2.1.11 为

$$\delta Q_{\text{增}} = \rho(\delta x \delta y \delta z) C_p \frac{\partial T}{\partial t} \cdot \delta t$$

将能量守恒原理应用到微元, 则

$$\delta Q_{\text{流}} + \delta Q_{\text{总}} = \delta Q_{\text{增}}$$

将有关项目代入上式, 并除以 $(\delta x \delta y \delta z) \cdot \delta t$, 将变为

$$(1) \quad k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.4)$$

$$(2) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + H \\ = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

式中

$$k = k(x, y, z, T, t)$$

$$(3) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + H \\ = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

$$(4) \quad \frac{\partial}{\partial x} \left(k_{1j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_{2j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_{3j} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + H \\ = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

再者, 这些式子中的最后一式也可写成

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(k_{ij} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

这就是导热的一般方程式, 在(1)和(2)的情况下也可写成

$$(1) \quad k \nabla^2 T + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.2.5)$$

$$(2) \quad \nabla \cdot (k \nabla T) + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

2.3 其它坐标系的一般方程式

在节 2.2 中是根据直角坐标系建立方程式的。实际问题往往涉及柱面对称或球面对称问题，且边界条件给定在一个表面上，而此表面具有一个坐标保持不变的性质。在这些情况下，柱面极坐标 (r, θ, z) 和球面极坐标 (r, θ, ϕ) 是适合的(见图 2-4 和图 2-5)。有些时候其它的坐标系是适用的，因而对此将作简要提述。为了求解面柱对称或面球对称区域内的问题作好准备，我们对这两种坐标系以及相应形式的一般方程式加以简述。应当注意，关于这个问题改变的只是拉普拉斯 (Laplace) 项，为了简便起见，在这里将处理把导热系数当作常数看待的方程式〔节 2.2 中标以 (1) 的〕，从最后的形式不难列出其它的变形。

首先，让我们观察图 2-4 所示的圆柱系统，令 P 为空间内典型的一点，它在 xy -平面上的投影为点 Q 。假若 $r = OQ$ 、 $z = QP$ ，以及 θ 为 OQ 与 x -轴的夹角，则 P 点就被这三个坐标 (r, θ, z) 唯一地确定了。这就是点 P 的面柱极坐标，并且用下式将它与 P 的直角坐标联系起来

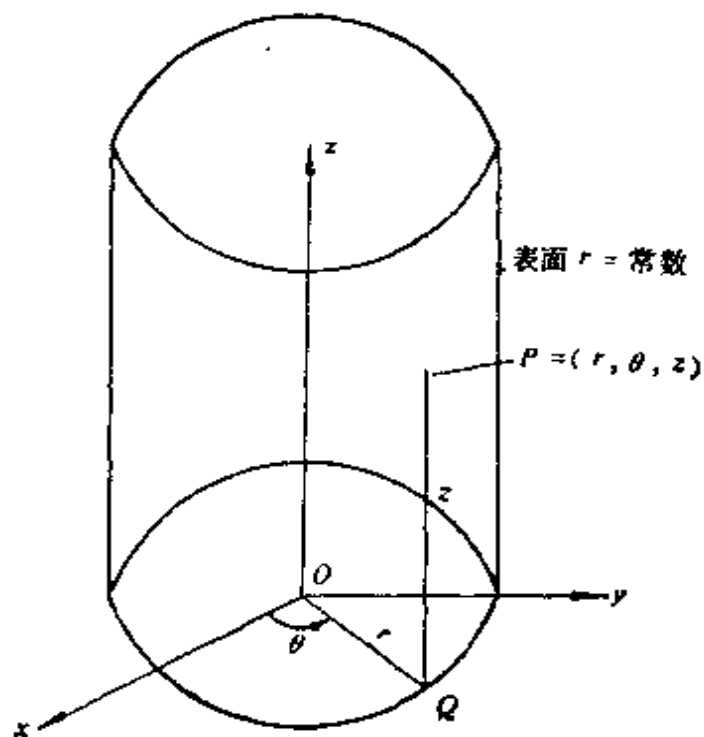


图 2-4 圆柱极坐标系

$$x = r \cos \theta; \quad y = r \sin \theta; \quad z = z \quad (2.3.1)$$

根据这些公式直接得出

$$r = (x^2 + y^2)^{1/2}; \quad \theta = \operatorname{tg}^{-1}(y/x) \quad (2.3.2)$$

那么, 若 T 为 x , y , 和 z 的函数 (且从而也是 r , θ , z 的函数), 则从偏微分方程得出

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial x} &= \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} \\ &= \frac{x}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{y}{x^2 + y^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ &= \cos \theta \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{aligned}$$

因而算子

$$\frac{\partial}{\partial x} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}$$

于是

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial T}{\partial x} \right) = \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad \times \left(\cos \theta \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \\ &= \cos^2 \theta \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} \\ &\quad + \frac{\sin^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \\ &\quad + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

同样, 应用方程 2.3.1 和 2.3.2:

$$\begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial y} &= \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\partial T}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} \\ &= \sin \theta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial T}{\partial y} \right) = \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\
 &\quad \times \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \\
 &= \sin^2 \theta \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r} \frac{\partial^2 T}{\partial r \partial \theta} \\
 &\quad + \frac{\cos^2 \theta}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \\
 &\quad - \frac{2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta}
 \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

从而，应用方程2.3.3和2.3.4：

$$\begin{aligned}
 \nabla^2 T &= \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \\
 &= \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}
 \end{aligned}$$

这就是面柱极坐标下 T 的拉普拉斯算子 (Laplacian)，等价形式是

$$\nabla^2 T = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}$$

因而导热系数为常数的一般导热方程为

$$k \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.3.5}$$

因此，不难推出导热系数为变量的一般导热方程，它为

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial T}{\partial z} \right) + H \\
 &= \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}
 \end{aligned} \tag{2.3.6}$$

类似形式适用于其它关于 k 的假定情况。

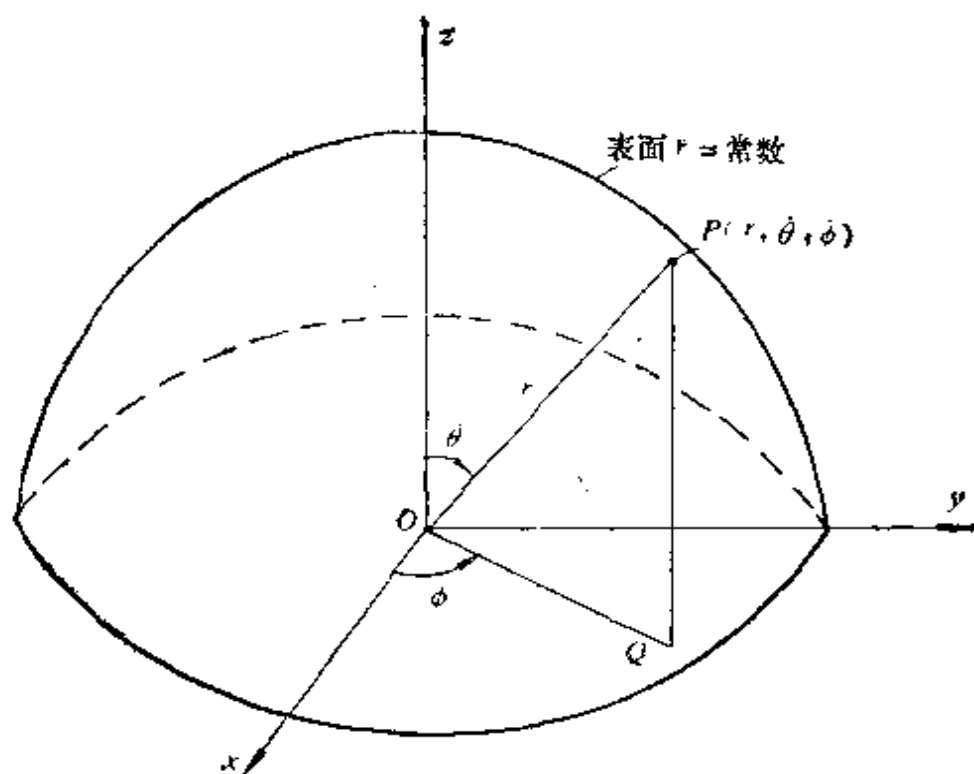


图 2-5 球面极坐标系

现在考察图 2-5 所示的球面极坐标系，再次令 P 为空间内典型的一点，它在 xy -平面上的投影为点 Q ，那么若 $r = OP$ ， ϕ 为 OQ 与正 x -轴之间的夹角，以及 θ 为 OP 与正 z -轴之间的夹角，则点 P 被三个坐标 (r, ϕ, θ) 唯一地确定。这就是 P 的球面极坐标，并且可用下列关系式将它同 P 的直角坐标 (x, y, z) 联系起来

$$x = r \sin \theta \cos \phi; \quad y = r \sin \theta \sin \phi; \quad z = r \cos \theta$$

仿照上面对于柱面极坐标的分析，在球面极坐标下可表示为

$$\begin{aligned} \nabla^2 T &= \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \\ &\quad + \frac{\cos \theta}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \\ &= \frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. \times \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] \end{aligned}$$

这样，对于导数系数为常数的一般方程式可写成

$$\frac{k}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] + H = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3.7)$$

对于导热系数为变量的形式为

$$\frac{1}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 k \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(k \frac{\partial T}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(k \sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] + H = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.3.8)$$

如果晓得了每种情况下 $\nabla^2 T$ 项所取的形式，我们就能处理其它正交坐标系。这一项是标量的拉普拉斯算子，而在正交坐标系中可从下式算出

$$\nabla^2 T = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{h_2 h_3}{h_1} \frac{\partial T}{\partial x_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\frac{h_1 h_3}{h_2} \frac{\partial T}{\partial x_2} \right) + \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\frac{h_1 h_2}{h_3} \frac{\partial T}{\partial x_3} \right) \right] \quad (2.3.9)$$

式中 h_1, h_2, h_3 为坐标系的度量系数。这样，如果知道了 h_1, h_2, h_3 以及此坐标与直角坐标 x, y, z 的关系，便能列出所需要的表达式。表2-3列出直角、柱面、和球面等坐标系所需的细节；关于一些其它坐标系所需细节可参阅哈佩尔（Happel）和布伦

表 2-3 用于直角、柱面和球面等坐标系的坐标关系和度量系数

	直 角 坐 标	柱 面 坐 标 $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $z = z$	球 面 坐 标 $x = r \sin \theta \cos \phi$ $y = r \sin \theta \sin \phi$ $z = r \cos \theta$
x_1	x	r	r
h_1^2	1	1	1
x_2	y	θ	ϕ
h_2^2	1	r^2	$r^2 \sin^2 \theta$
x_3	z	z	θ
h_3^2	1	1	r^2

纳 (Brenner)(1965) 的著作。

2.4 一般方程的特殊形式

节2.1~2.3中的一般方程式代表获得传热问题的解的第一步。在相应坐标系中以及在相应导热系数的假定下的一般方程式，可以简化为同问题所建立的条件相一致的最简单形式。这里没有必要进一步详细说明一般方程的变形—扩散方程 ($H=0$)，泊松 (Poisson) 方程和拉普拉斯 (Laplace) 方程 (见第一章中的节1.3)。人们往往能够消除非线性或有方向性的导热系数，并且有时问题并非足足三维的和不稳定态的，在此情况下一般方程式中的几项可以消去。

2.4.1 非线性消除

方程式 (2.2.5)

$$\nabla \cdot (k \nabla T) + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2.4.1)$$

支配着导热系数随温度变化，即 $k = k(T)$ ，各向同性体中的传热现象，而此式中的第一项就是非线性的。在某些问题中，可通过克希霍夫 (Kirchhoff) 变换将其消除，这里可将自变量 T 变换为一个新的变量 V ，它定义为

$$dV = \frac{k(T)}{k_0} \cdot dT = \frac{k}{k_0} dT$$

式中 $k_0 = k(T_0)$ 。通过下面的方程，方程 2.4.1 中的典型导数便可按 V 写出

$$\frac{\partial V}{\partial t} = \frac{\partial V}{\partial T} \cdot \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{k_0} \frac{\partial T}{\partial t}; \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = \frac{1}{k_0} \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right)$$

于是方程 2.4.1 便化为

$$\nabla^2 V + \frac{H}{k_0} = \frac{\rho C_p}{k} \frac{\partial V}{\partial t} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial V}{\partial t}$$

对于消掉右端项的稳定态问题，现在这个方程关于 V 就是线性的

了。然而对于不稳态，只有当 C_p 和 k 总是保持一定比例时，才是线性的。即使 C_p 和 k 不能保持一定的比例，以这种形式来处理方程式也比用原始的非线性形式更为简单和准确。

2.4.2 消除有方向性的导热系数

另一种感兴趣的变换，可消除在正交各向异性材料情况下，有方向性的导热系数 k_x , k_y , k_z 的问题（见节 2.2 中标以 3 的方程），坐标 x , y , z 用一个新的空间坐标 X , Y , Z 代替。通过

$$X = \left(\frac{k_0}{k_x} \right)^{1/2} x; \quad Y = \left(\frac{k_0}{k_y} \right)^{1/2} y; \quad Z = \left(\frac{k_0}{k_z} \right)^{1/2} z$$

式中 k_0 为任意固定值，于是下式

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left(k_x \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k_z \frac{\partial T}{\partial z} \right) + H \\ &= \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \end{aligned}$$

便化为简单形式

$$\frac{\partial^2 T}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial Z^2} + \frac{H}{k_0} = \frac{\rho C_0}{k_0} \frac{\partial T}{\partial t} \quad \text{①}$$

以后将看出这个过程相当于在三个方向上采用不同的格距，这时对于典型点得到相同的有限差分方程。

2.4.3 一般方程式的简化形式

在不具有三个空间坐标以及时间不作为独立变量的情况下，基本方程式中的几项可以消掉。为了简便起见，只考察直角，柱面及球面坐标系下导热系数为常数的形式。表 2-4~2-6 列出一些简化形式；以后章节中将给出每种情况下的有限差分方程（见第

① 原书误写为 $\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{H}{k_0} = \frac{\rho C_0}{k_0} \frac{\partial T}{\partial t}$ 。——译注

四章的表4-1~表4-3)。

表 2-4 直角坐标系下导热系数为常数的一般方程式的简化形式

问 题	热 流 方 程 式	注 释
二维稳定态	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$	$H = 0, \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \frac{\partial T}{\partial z} = 0$
三维稳定态有内热源	$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + H/K = 0$	$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$
一维不稳定态	$\alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$	$H = 0, \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$
二维不稳定态有内热源	$\frac{H}{\rho C_p} + \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$	$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$

2.5 问题分类

对于 $T = T(x_1, x_2, \dots, x_n)$ 的偏微分方程的通式为:

$$\sum_{i=1}^n A_i \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2} + \sum_{i=1}^n B_i \frac{\partial T}{\partial x_i} + CT + D = 0 \quad (2.5.1)$$

式中 x_i 可以是三个空间方向中的任一个 (例如在直角坐标系中的 x, y, z) 或时间 t 。求和是对所有自变量 n 的数目而言; 对于一维空间和时间问题, 基本方程式为

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

在这里 $n=2$, $x_1 = x$; $x_2 = t$ 。我们将通式方程 2.5.1 分类为:

(1) 双曲型。假若所有的 A_i 均非为零, 并且除一个外都具有同一符号, 则为双曲型方程, 例如

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} = 0 \quad (\text{波动方程})$$

(2) 椭圆型。假若所有的 A_i 均非为零, 并且都具有同一符号, 则为椭圆型方程, 例如

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0 \quad (\text{二维拉普拉斯方程})$$

在求解区域的整个外边界上, 需要给定边界条件或者给定温

度本身的条件（狄立克莱条件），或者给定外法向导数 $\partial T / \partial n$ 条件（纽曼条件），但至少有部分边界上的温度 T 必须给出。这些在图2-6中说明。其它的椭圆型方程为

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0 \quad (\text{一维稳定态})$$

以及
$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0 \quad (\text{三维稳定态})$$

表 2-5 柱面坐标下导热系数为常数的一般方程式的简化形式

问 题	热 流 方 程 式	注 释
二维稳定态 圆盘 圆柱	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$ $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0$	$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} H &= 0 \\ \frac{\partial T}{\partial t} &= 0 \end{aligned}$
三维稳定态有内热源	$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{H}{k} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$
一维不稳定态	$\alpha \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$	$H = 0, \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$
二维不稳定态有内热源 圆盘 圆柱	$\frac{H}{\rho C_p} + \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} \right] = \frac{\partial T}{\partial t}$ $\frac{H}{\rho C_p} + \alpha \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right] = \frac{\partial T}{\partial t}$	$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0$

（3）抛物型。假若一个 A_i 为零（例如 A_k ），而其余的 A_i 不为零且符号相同，并且系数 B_k 不为零，则为抛物型方程，例如

$$\frac{\partial T}{\partial t} - \alpha \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) = 0 \quad (\text{二维不稳定态})$$

对于传热问题通常 $x_k = t$ 。必需的边界条件是： $t=0$ 时起始线或区域上的温度，以及 $t>0$ 时在区域的各边上的温度 T （狄利

表 2-6 球面坐标下导热系数为常数的一般方程式的简化形式

问 题	热 流 方 程 式	注 释
二维稳定态	$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) = 0$ $\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0 \quad \left. \begin{array}{l} H = 0 \\ \text{经向对称} \\ \frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \\ \text{纬向对称} \end{array} \right\} \frac{\partial T}{\partial t} = 0$
三维稳定态有内热源	$\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{H r^2}{k} = 0$	$\frac{\partial T}{\partial t} = 0$
一维不稳定态	$\frac{a}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$	$H = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial \theta} = \frac{\partial T}{\partial \phi} = 0$
二维不稳定态有内热源	$\frac{H}{\rho C_P} + \frac{a}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \right] = \frac{\partial T}{\partial t}$ $\frac{H}{\rho C_P} + \frac{a}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] = \frac{\partial T}{\partial t}$	$\frac{\partial T}{\partial \phi} = 0 \quad \text{经向对称}$ $\frac{\partial T}{\partial \theta} = 0 \quad \text{纬向对称}$

克莱条件) 或 $\partial T / \partial n$ (纽曼条件)。这些在图2-7中示出。由于要求这些边界条件, 所以这类问题有时称为初值问题。

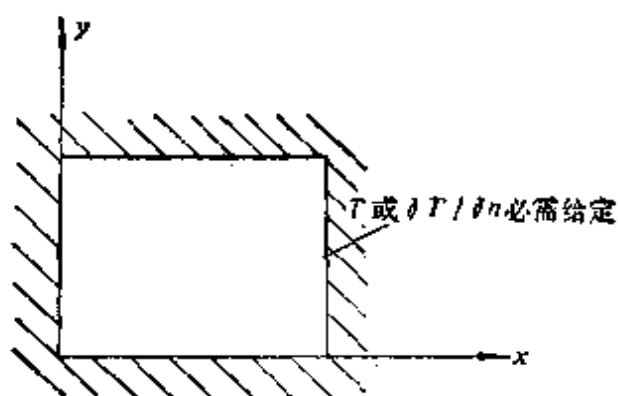


图 2-6 二维椭圆型PDE必需的边界条件

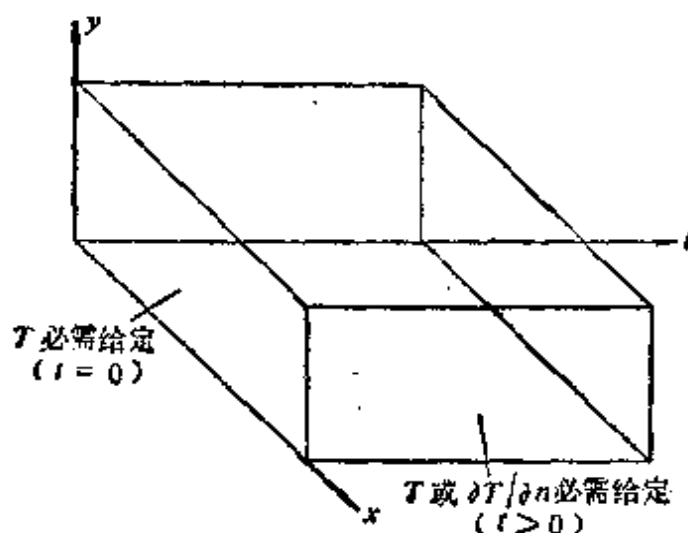


图 2-7 二维不稳定态抛物型PDE必需的边界条件

其它的抛物型方程显然是表示一维或三维不稳定态热流的方程; 再者这些方程还可包括内热源项。

参 考 文 献

Abramowitz, M. & Stegun, I.A. (eds) (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Applied Mathematics Series No.55. National Bureau of Standards, US Dept of Commerce, Washington, D.C.

Bayley, F.J, Owen, J.M. & Turner, A.B. (1972). *Heat Transfer*. Nelson, London.

Gebhart, B. (1971). *Heat Transfer* 2nd ed. McGraw-Hill, New York.

Gray, W.A. & Müller, R. (1974). *Engineering Calculations in Radiative Heat Transfer*. Pergamon Press, Oxford.

Happel, J. & Brenner, H. (1965). *Low Reynolds Number Hydrodynamics with Special Applications to Particulate Media*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J.

Moon, P. & Spencer, D.E. (1965). *Vectors*. Van Nostrand, Princeton, N.J.

Open University (1973). *Partial Differential Equations of Applied Mathematics: A Third Level Mathematics Course*. The Open University Press, Malton Hall, Milton Keynes, Bucks., UK.

Razelos, P. (1973). Methods of obtaining approximate solutions. Section 4, pp.4-1 to 4-78, in *Handbook of Heat Transfer*, ed. W.M. Rohsenow and J.P. Hartnett. McGraw-Hill, New York.

Rogers, G. & Mayhew, Y. (1967). *Engineering Thermodynamics, Work and Heat Transfer*. Longmans, London.

Schneider, P.J. (1973). Conduction Section 3, pp.3-1 to 3-134, in *Handbook of Heat Transfer*, ed. W.M. Rohsenow and J.P. Hartnett. McGraw-Hill New York.

Simonson, R.J. (1962). *An introduction to Engineering Heat Transfer*. McGraw-Hill, New York.

Stephenson, G. (1970). *An Introduction to Partial Differential Equations for Science Students*, 2nd ed. Longman, London.

第三章 直角坐标系有限差分方程的基础

3.1 均匀网格中函数的导数

偏微分方程数值解法的基本原理是根据在几个相邻点的函数值来表示函数 $f(x)$ 在某点的导数，这个点可以在邻点的一侧，也可以位于邻点之间。这些邻点之间的距离可以相等，都等于 Δx ，也可以各不相等。人们可能对截断误差（所采用的公式可能达到的精确度）特别感兴趣，并希望明确地知道所应用的公式的精确度的阶。可以用直观和经验来判断，而更欣赏由某些方法所提供的简单性。为了完整起见，本节讨论了几种广泛应用的方法，更详细的资料可参考卡纳汉（Carnahan）等人（1969）和杰拉尔德（Gerald）（1970）等人的著作。在这里，人们经常关心的是，从公式的精确度以及应用是否方便等方面来看，什么是用局部点表示的逼近 $f'(x)$ （比如说）的最好公式，典型例子如图3-1所示。在本节中基点距离是均匀的，并等于 Δx ，在下节中才会有不均匀间距出现。

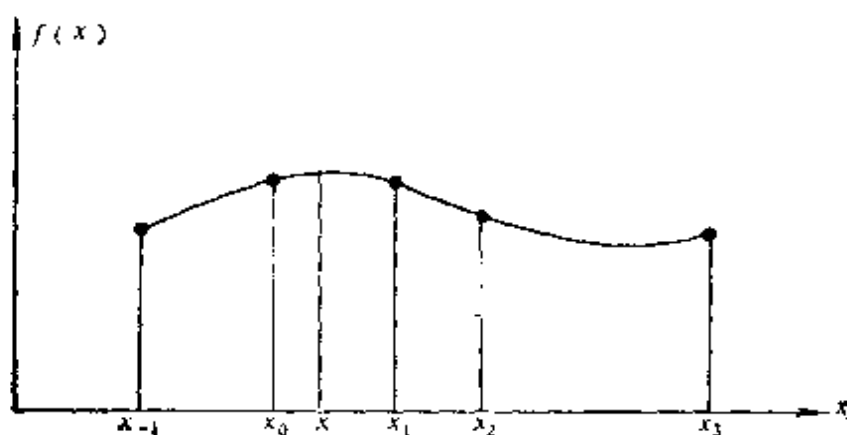


图 3-1 典型的数值微分问题：根据在 x_{-1} ， x_1 ， x_2 ， x_3 点的函数值，什么是 $f'(x)$ 和 $f''(x)$ 的最好的近似值？

3.1.1 热平衡

值得注意的是,在用热平衡法建立问题的数学模型时,不需要涉及偏微分方程,可将支配物理系统的定律的直接近似局部地应用于围绕每个节点的每个单元控制体积。对于只希望应用这个方法的工程师几乎不需要其他方法,而那些方法的基础现在正要阐述,这样,就只需稍稍看一下这一节就可以了。由于他只需要一阶导数近似,因而下面就来叙述一下直观方法,更详细的情况将在3.4节和3.5.2节中讨论。

3.1.2 直观

考察图 3-2 所示的函数 $f(x)$, 其记号的意义为: x_{-1} , x_0 和 x_1 是等距的基点, $x_1 - x_0 = x_0 - x_{-1} = \Delta x$, 亦即 $x_1 = x_0 + \Delta x$, $f(x)$ 和 $f_i = f(x)|_{x=x_i}$ 表示函数值, 中间值由赋予 x 的相应的非整数来表示, 例如:

$$f_{-1/2} = f(x)|_{x=x_{-1/2}} = f(x_{-1/2}) = f\left[x_0 + \left(-\frac{1}{2}\right)\Delta x\right]$$

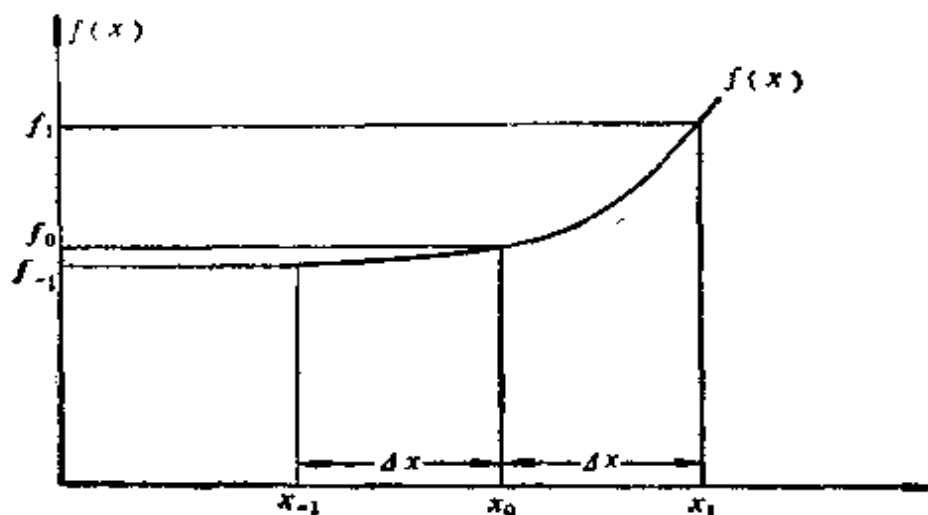


图 3-2 表示函数值 f_{-1} , f_0 和 f_1 的典型函数 $f(x)$, 这些函数值取在连续的间距为 Δx 的等间距基点 x_{-1} , x_0 , x_1 上

f' 在 $x = x_{-1/2}$ 处的直观估计值为:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_{-1/2}} = \frac{f_0 - f_{-1}}{\Delta x} \quad (3.1.1)$$

此值只根据 f_{-1} 和 f_0 。 f' 在 $x = x_{1/2}$ 处时为:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_{1/2}} = \frac{f_1 - f_0}{\Delta x} \quad (3.1.2)$$

此值亦只根据 f_0 和 f_1 。如果我们推断这两个式子都是 df/dx 在 $x = x_0$ 处的近似值, 则称它们为单侧差分, 第一式为后向差分, 第二式为前向差分。显然, 只要利用 x_0 两侧的两点就可得到在 $x = x_0$ 处较好的估计值:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2\Delta x} \quad (3.1.3)$$

此式称为基于 f_1 和 f_{-1} 两值的中心差分, 实际上它等于单侧差分的平均值。我们采用以下算子符号:

$$\Delta f_0 = f_1 - f_0 \quad (\text{前向差分})$$

$$\nabla f_0 = f_0 - f_{-1} \quad (\text{后向差分})$$

$$\delta f_0 = f_{1/2} - f_{-1/2} \quad (\text{中心差分})$$

$$\mu\phi = \frac{1}{2}(\phi_{1/2} + \phi_{-1/2}) \quad (\text{平均差分})$$

这样, 方程 3.1.1 至 3.1.3 中的分子可以分别用 ∇f_0 , Δf_0 和 $\mu\delta f_0$ 来表示。中心一阶导数公式为:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f_{1/2} - f_{-1/2}}{\Delta x}$$

此式的分子为 δf_0 , 显然, 除了它包含未列表的点外, 此式或许比其他三个式子更好一些, 正如所预期的那样, 我们后来发现, 中心差分公式 $\mu\delta f_0/(2\Delta x)$ 比两个单侧差分公式 $\Delta f_0/\Delta x$ 与 $\nabla f_0/\Delta x$ 更为精确。以上三个对 $f'(x_0)$ 的估计值显然均是近似值, 而且精确度随 Δx 的减小而提高。

用 Δx 除在 (x_{-1}, x_0) 与 (x_0, x_1) 两个区间的一阶导数的

差,就可得到函数在 $x=x_0$ 处的二阶导数 $f''(x)$, Δx 是两个点之间的距离,因此:

$$\begin{aligned}\left.\frac{d^2f}{dx^2}\right|_{x=x_0} &= \left.\frac{d}{dx}\left(\frac{df}{dx}\right)\right|_{x=x_0} \\ &= \frac{\left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_{1/2}} - \left.\frac{df}{dx}\right|_{x=x_{-1/2}}}{\Delta x} \\ &= \frac{\frac{(f_1 - f_0)}{\Delta x} - \frac{(f_0 - f_{-1})}{\Delta x}}{\Delta x} \\ &= \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{(\Delta x)^2}\end{aligned}$$

其精确度亦随 Δx 变小而提高。

上面这个公式以及其他的二阶导数的公式本来就能够很容易地由下面的方法得出:

$$\begin{aligned}\Delta^2 f_0 &= \Delta(\Delta f_0) = \Delta f_1 - \Delta f_0 = f_2 - 2f_1 + f_0 \\ \nabla^2 f_0 &= \nabla(\nabla f_0) = \nabla f_0 - \nabla f_{-1} = f_0 - 2f_{-1} + f_{-2} \\ \delta^2 f_0 &= \delta(\delta f_0) = \delta f_{1/2} - \delta f_{-1/2} = f_1 - 2f_0 + f_{-1}\end{aligned}$$

用 Δx^2 除各式可得在 x_0 处二阶导数的前向差、后向差和中心差估计值。正如所料,以 x_0 为中心的中心差的确比两个单侧差更精确,实际上,单侧差是以 x_1 和 x_{-1} 点为中心的。

3.1.3 泰勒级数

尽管上述直观方法揭示的在 $x=x_0$ 处的一阶和二阶导数的公式是合理的,是以其相邻点的函数值为基础的,在 x_0 左边的是 x_{-1} ,右边的是 x_1 ,但不能作误差估计,用这种方法也不可能建立更精确的公式,而运用泰勒级数却能做到。

首先考察如图3-2所示的等距基点的情况,并将函数 $f(x_1) = f(x_0 + \Delta x)$, $\Delta x = x_1 - x_0$ 按泰勒级数展开:

$$f_1 = f_0 + \Delta x f'_0 + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''_0 + \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''_0 + \frac{(\Delta x)^4}{4!} f^{(IV)}_{0,1}$$

当截去 $(\Delta x)^3$ 后面的项时就得到截断误差项，式中 $f^{(IV)}_{0,1}$ 代表在区间 (x_0, x_1) 的四阶导数 $f^{(IV)}$ 。同样，将函数 $f(x_{-1}) = f(x_0 - \Delta x)$ ， $\Delta x = x_0 - x_{-1}$ 进行展开得：

$$f_{-1} = f_0 - \Delta x f'_0 + \frac{(\Delta x)^2}{2!} f''_0 - \frac{(\Delta x)^3}{3!} f'''_0 + \frac{(\Delta x)^4}{4!} f^{(IV)}_{-1,0}$$

式中 $f^{(IV)}_{-1,0}$ 在区间 (x_{-1}, x_0) 某处取值。当截去 Δx 后面诸项时，从这些展开式可得出 $f'(x_0)$ 的前向差分和后向差分公式：

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f_1 - f_0}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{2} f''_{0,1}$$

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f_0 - f_{-1}}{\Delta x} + \frac{\Delta x}{2} f''_{-1,0}$$

式中具有 Δx 阶的误差项，它们包括分别在区间 (x_0, x_1) 和区间 (x_{-1}, x_0) 的某处取值的 $f(x)$ 的二阶导数。另一方面，将这两个展开式相减可得：

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f_1 - f_{-1}}{2\Delta x} - \frac{(\Delta x)^2}{3!} (f'''_{-1,0} + f'''_{0,1})$$

此式具有 $(\Delta x)^2$ 阶的截断误差项，它包括在 (x_{-1}, x_1) 区间内某处取值的 $f(x)$ 的三阶导数。这样可以看出，此中心差分公式比单侧差分公式更为精确。虽然此中心差分公式确实具有二阶截断误差，但这并不意味着应用它一定能得出比具有一阶截断误差的单侧差分公式更为精确的结果。实际上，大家知道，简单地将它应用于不稳定态传热方程的时间导数，总是产生不稳定的过程，这样的结果是无用的，而前向差分公式的应用却可以得到满意的求解方法。为了得到在 $x = x_0$ 处的二阶导数，将上述两个展开式相加：

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{(\Delta x)^2} - \frac{(\Delta x)^2}{4!} [f^{(IV)}_{0,1} + f^{(IV)}_{-1,0}]$$

式中误差是 $(\Delta x)^2$ 阶的, 它包含在 (x_0, x_1) 和 (x_{-1}, x_0) 区间某处取值的 $f(x)$ 的四阶导数。

为了得到更精确的导数表达式, 必须采用能使用三个以上函数值的方法, 现在推荐以下两种方法。

3.1.4 内插多项式和算子

为了进一步得到更精确的公式, 需要使用通过已知函数值的高阶内插多项式。由于那些公式是建立在多项式近似的基础之上的, 因此, 当处理适当次数的多项式时, 可以得到精确的结果, 可以注意到, 例如通过 n 个点 $(x_i, f(x)) (1 \leq i \leq n)$ 只有一个 $(n-1)$ 次多项式。当处理未知函数时, 存在一个误差, 通常用所应用的级数形式公式中最大的舍去项表示。

当函数 $f(x)$ 对应于一组等距基点 x_i , $h = \Delta x = x_{i+1} - x_i$ 时, 使用表3-1中所定义的有限差分算子, 可以很方便地得到那些更高阶的公式。

表 3-1 有限差分算子

前向差分	$\Delta f_i = f_{i+1} - f_i$
后向差分	$\nabla f_i = f_i - f_{i-1}$
中心差分	$\delta f_i = f_{i+1/2} - f_{i-1/2}$
求 平 均	$\mu f_i = \frac{1}{2} (f_{i+1/2} + f_{i-1/2})$
位 移	$E f_i = f_{i+1}$
微 分	$D f = \frac{df}{dx}$

通常我们能够根据初等代数的基本定理来处理这些算子, 这样, 根据定义可得到算子之间的相互关系:

$$\begin{aligned} \Delta &= E - 1; & \delta &= E^{1/2} - E^{-1/2} \\ \nabla &= 1 - E^{-1}; & \mu &= \frac{1}{2} (E^{1/2} + E^{-1/2}) \end{aligned}$$

由此可以导出:

$$\Delta = \nabla E = \delta E^{1/2}; \quad \mu^2 = 1 + \frac{1}{4}\delta^2$$

下面形式的泰勒定理

$$f(x+h) = f(x) + hf'(x) + \frac{h^2}{2!}f''(x) + \dots$$

可以变为这样的形式:

$$Ef(x) = \left(1 + hD + \frac{h^2 D^2}{2!} + \dots\right)f(x)$$

因此, $E = \exp hD$

所有这些算子之间的相互关系概括于表3-2。

表 3-2 算子符号间的相互关系

	E	Δ	δ	∇	hD
E	E	$1 + \Delta$	$1 + \frac{1}{2}\delta^2 + \delta\left(1 + \frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}$	$(1 - \nabla)^{-1}$	$\exp hD$
Δ	$E - 1$	Δ	$\delta\left(1 + \frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2} + \frac{1}{2}\delta^2$	$\nabla(1 - \nabla)^{-1}$	$\exp(hD) - 1$
δ	$E^{1/2} - E^{-1/2}$	$\Delta(1 + \Delta)^{-1/2}$	δ	$\nabla(1 - \nabla)^{-1/2}$	$2 \sinh \frac{1}{2} hD$
∇	$1 - E^{-1}$	$\Delta(1 + \Delta)^{-1}$	$\delta\left(1 + \frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2} - \frac{1}{2}\delta^2$	∇	$1 - \exp(-hD)$
hD	$\log E$	$\log(1 + \Delta)$	$2 \sinh^{-1} \frac{1}{2} \delta$	$-\log(1 - \nabla)$	hD
μ	$\frac{1}{2}\left(E^{1/2} + E^{-1/2}\right)$	$\left(1 + \frac{1}{2}\Delta\right) \times (1 + \Delta)^{-1/2}$	$\left(1 + \frac{1}{4}\delta^2\right)^{1/2}$	$\left(1 - \frac{1}{2}\nabla\right) \times (1 - \nabla)^{-1/2}$	$\cosh \frac{1}{2} hD$

内插多项式通过某些点 $(x_i, f(x_i))$ (i 是整数),但它们也取决于 x 的中间值,其微分可得出有用的结果。公式依所使用的点的多少以及使用哪些点而异,展开 $(1 + \Delta)^i$ 和 $(1 - \nabla)^{-i}$ 可以写出对于 $f_i = E^i f_0 = (1 + \Delta)^i f_0 = (1 - \nabla)^{-i} f_0$ 的牛顿-格里戈里

(Newton-Gregory) 前差和后差内插公式,这些公式可以提供分别用 f_0, f_1, f_2, \dots 和 $f_0, f_{-1}, f_{-2}, \dots$ 等表示的 f_i ($i \geq 0$)的估计值。对这些公式进行微分时,根据这些函数值,可以得到

f'_i, f''_i, \dots 等的近似值。为了更详细和深入地讨论这些问题，向读者推荐国家物理实验室的刊物（1961年）。

3.1.5 待定系数法

待定系数法虽然不能很好地判断误差的大小，但仍不失为得到所需的导数公式的有效方法，〔见加内黑恩（Garnahan）等人1969；杰拉德（Gerard）1970的著作〕。基本上，将一定条件施加在所希望运用的公式上，并且这些条件将满足确定该式中未知系数的需要。例如，假定按照在 $n+1$ 个等距基点的函数值来表示在 x_0 处的一阶导数公式：

$$f'(x_0) = c_0 f_0 + c_1 f_1 + \dots + c_n f_n$$

这里对于所有 i ， $h = x_{i+1} - x_i$

取的点越多，得到的精确度越高，因为关于该函数的数据应用得更多了。要确定系数 c_0, c_1, \dots, c_n ，要求只要函数是不高于 n 次的多项式，这个公式都是正确的。例如，假定人们在寻求一阶导数的公式

$$f'_0 = c_0 f_0 + c_1 f_1$$

式中 f_0 和 f_1 是已知数， c_0 和 c_1 是待求的未知数，只要 $f(x)$ 是一次或小于一次的多项式，则此公式都是正确的，因此，如果 $f(x) = x$ 或 $f(x) = 1$ 则上式一定成立。将每个条件代入可得到两个方程：

$$f(x) = x \text{ 与 } f'(x) = 1 \quad \text{则 } 1 = c_0(x_0) + c_1(x_0 + h)$$

$$f(x) = 1 \text{ 与 } f'(x) = 0 \quad \text{则 } 0 = c_0(1) + c_1(1)$$

联立求解可得 $c_0 = -\frac{1}{h}$ ， $c_1 = \frac{1}{h}$ ，因此，

$$f'_0 \approx \frac{f_1 - f_0}{h}$$

同样，如果寻求一个三项式：

$$f'_0 = c_0 f_0 + c_1 f_1 + c_2 f_2$$

要求该式分别满足 $f(x) = x^2$ ， x 和 1 ，于是可得到对于 c_0 ，

c_1 和 c_2 的三个联立方程

$$2x_0 = c_0(x_0)^2 + c_1(x_0 + h)^2 + c_2(x_0 + 2h)^2$$

$$1 = c_0(x_0) + c_1(x_0 + h) + c_2(x_0 + 2h)$$

$$0 = c_0(1) + c_1(1) + c_2(1)$$

不失一般性，在求解这些系数时，首先令 $x_0=0$ 加以简化，然后代回去可得到：

$$f'_0 \approx \frac{-3f_0 + 4f_1 - f_2}{2h}$$

此结果与用3.1.4节的方法所推导出来的公式相一致。

至此，在此方法中只应用了在 x_0 右边的函数值。人们预料，这种方法不如应用 x_0 两边的函数值精确，由于利用了更靠近 x_0 处的函数，因而数据也就更可靠了。实际上，从下式开始

$$f'_0 = c_{-1}f_{-1} + c_0f_0 + c_1f_1$$

可以推导出中心差分公式

$$f'_0 \approx \frac{f_1 - f_{-1}}{2h}$$

此方法亦可容易地应用于高阶导数，例如，假定

$$f''_0 = c_{-1}f_{-1} + c_0f_0 + c_1f_1$$

则可得到公式：

$$f''_0 \approx \frac{f_1 - 2f_0 + f_{-1}}{h^2}$$

3.2 非均匀网格中函数的导数

3.2.1 直观

在不等距基点 x_{-1} ， x_0 和 x_1 的情况下，即 $x_1 - x_0 = S_E \Delta x$ ， $x_0 - x_{-1} = S_W \Delta x$ ，($1 \leq S_E$ ①， $S_W \leq 1$)，我们来考察图3-3所示的典型函数。我们仍然可以做 $f'(x)$ 在 $x = x_0$ 处的前向差分与后向差分估计。在 $x_0 + \frac{1}{2}S_E \Delta x$ 处（是在 x_0 与 x_1 之间的点）的前向差

① 原书误为 $0 \leq S_E$ ，——译注

分估计可用 f_1 和 f_0 表示为:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0+1/2 S_E \Delta x} = \frac{f_1 - f_0}{S_E \Delta x}$$

在 $x_0 - \frac{1}{2} S_W \Delta x$ 处 (是 x_{-1} 与 x_0 间的中点) 的后向差分 用 f_{-1} 和 f_0 表示为:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0-1/2 S_W \Delta x} = \frac{f_0 - f_{-1}}{S_W \Delta x}$$

中心差分为:

$$\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} = \frac{f_1 - f_{-1}}{(S_E + S_W) \Delta x}$$

由于 $S_E > S_W$, 点 $x = x_{-1} + \frac{1}{2} (S_E + S_W) \Delta x = x_0 + \frac{1}{2} (S_E - S_W) \Delta x$ 是在图中 x_0 的右侧, 这时, 此中心差分公式是最好的估计值。

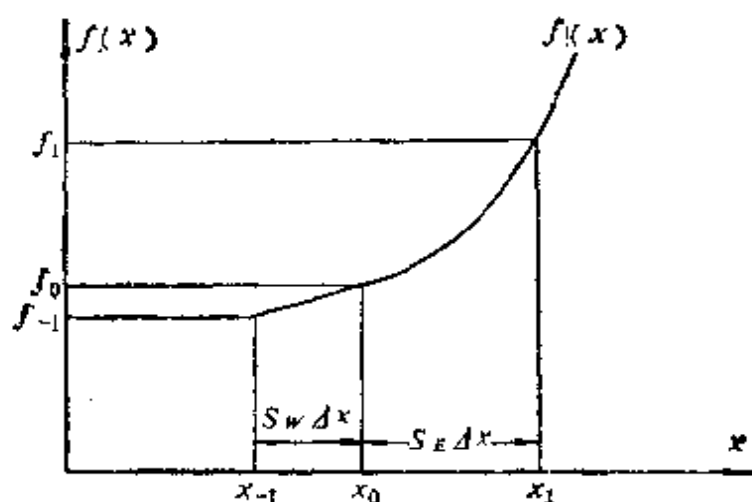


图 3-3 表示函数值 f_{-1} , f_0 和 f_1 的典型函数 $f(x)$, 基点 x_{-1} , x_0 与 x_1 之间的距离不等, $x_1 - x_0 = S_E \Delta x$, $x_0 - x_{-1} = S_W \Delta x$ ($1 \leq S_E$, $S_W \leq 1$)

取两个单侧导数的加权平均更好一些，因为加权有利于得到更接近的估计值。如：

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} &= \frac{S_E}{S_E + S_W} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0 - 1/2 S_W \Delta x} \\
 &\quad + \frac{S_W}{S_E + S_W} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0 + 1/2 S_E \Delta x} \\
 &= \frac{S_E}{S_E + S_W} \frac{f_0 - f_{-1}}{S_W \Delta x} + \frac{S_W}{S_E + S_W} \frac{f_1 - f_0}{S_E \Delta x} \\
 &= \frac{1}{\Delta x} \left[-\frac{S_W}{S_E(S_E + S_W)} f_1 - \frac{S_W - S_E}{S_E S_W} f_0 \right. \\
 &\quad \left. - \frac{S_E}{S_W(S_E + S_W)} f_{-1} \right]
 \end{aligned}$$

同样，为了估计在 $x = x_0$ 处的 $f''(x)$ ，将分别在 x_{-1} 至 x_0 与 x_0 至 x_1 之中点的两个单侧导数之差除以它们之间的距离 $\frac{1}{2} (S_E + S_W) \Delta x$ ，实际上，这是估计了 $f''(x)$ 在 $x = x_0 + \frac{1}{2} (S_E - S_W)$ 处的值，该点在图中略偏于 x_0 的右侧，但是这个值被保留下来了，因为这是在 x_0 处建立在三个函数值基础上的最好的估计值。这样：

$$\begin{aligned}
 \left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} &= \frac{\left(\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0 + 1/2 S_E \Delta x} - \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0 - 1/2 S_W \Delta x} \right)}{\left(\frac{(S_E + S_W) \Delta x}{2} \right)} \\
 &= \frac{\left(\frac{f_1 - f_0}{S_E \Delta x} - \frac{f_0 - f_{-1}}{S_W \Delta x} \right)}{\left(\frac{(S_E + S_W) \Delta x}{2} \right)} \\
 &= \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[\frac{1}{S_E(S_E + S_W)} f_1 - \frac{1}{S_E S_W} f_0 \right.
 \end{aligned}$$

$$+\frac{1}{S_W(S_E+S_W)}f_{-1}\Bigg\}$$

关于这方面的更详细的情况读者可参阅艾姆斯 (Ames) (1969) 和杨 (Young) (1962) 的著作以及后面的章节。

3.2.2 泰勒级数

对于如图3-3所示的不等距基点的情况, 用同样的方法可写出 $f(x_1) = f(x_0 + S_E \Delta x)$ 和 $f(x_{-1}) = f(x_0 - S_W \Delta x)$ 的泰勒级数展开, 这样可得:

$$\begin{aligned} f_1 &= f_0 + S_E \Delta x f'_0 + \frac{(S_E \Delta x)^2}{2!} f''_0 + \frac{(S_E \Delta x)^3}{3!} f'''_0 \\ &\quad + \frac{(S_E \Delta x)^4}{4!} f^{(IV)}_{0,1} \\ f_{-1} &= f_0 - S_W \Delta x f'_0 + \frac{(S_W \Delta x)^2}{2!} f''_0 - \frac{(S_W \Delta x)^3}{3!} f'''_0 \\ &\quad + \frac{(S_W \Delta x)^4}{4!} f^{(IV)}_{-1,0} \end{aligned}$$

有几种处理方法可得到用 f_{-1} , f_0 与 f_1 表示的求 f'_0 的公式, 最精确的方法是这样: 舍去 $(\Delta x)^2$ 后的各项, 将第一式乘以 S_W^2 , 第二式乘以 S_E^2 , 进行相减, 然后消去 $(\Delta x)^2$ 项, 从而可得到 $(\Delta x)^2$ 阶的高精度公式, 如:

$$\begin{aligned} \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=x_0} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\frac{S_W}{S_E(S_E+S_W)} f_1 - \frac{S_W - S_E}{S_E S_W} f_0 \right. \\ &\quad \left. - \frac{S_E}{S_W(S_E+S_W)} f_{-1} \right] - \frac{S_E S_W (\Delta x)^2}{3! (S_E + S_W)} \\ &\quad [S_E f'''_{0,1} + S_W f'''_{-1,0}] \end{aligned}$$

也许会感到意外, 此式竟然与加上误差项的直观公式相同。为了得到求 $f''(x_0)$ 的公式, 必须消去 f'_0 项, 用 S_W 乘以第一式, S_E 乘以第二式, 然后相减即可消去 f'_0 , 整理后得到:

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_{x=x_0} = \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[\frac{1}{S_E(S_E+S_W)} f_1 - \frac{1}{S_E S_W} f_0 + \right.$$

$$\frac{1}{S_W(S_E + S_W)} f_{-1} \Big] + \frac{2\Delta x}{31(S_E + S_W)} \\ \times [S_E^2 f_{0,1}^m - S_W^2 f_{-1,0}^m]$$

此式与加上 Δx 阶误差项的直观公式相同，而比相应的等距基点的公式低一级。当然，令 $S_E = S_W = 1$ ，可推导出等距基点的公式，此时消去误差项，便得到 $(\Delta x)^2$ 阶的公式。

3.2.3 待定系数法

所有不等距基点的公式均可用待定系数法推导出来，此方法也适于使用更多点，然而计算比较繁重，除非应用切比雪夫 (Chebyshev) 多项式这种更高级的方法 (见卡纳汉 (Carnahan) 等人 1969, 杰拉尔德 (Gerald) 1970 的著作)。

3.3 通过偏微分方程的替代法建立稳定态问题的有限差分方程

变量多于1个的函数具有关于每个独立变量的偏导数。我们将主要涉及一阶和二阶偏导数，而不需要交叉求导。艾姆斯 (Ames) (1969)、里克特姆耶 (Richtmyer)、莫顿 (Morton) (1967) 和史密斯 (Smith) (1965) 等人的著作提供了解释性的读物。这样，如果 $T = T(x, y)$ 是两个变量 x 和 y 的函数，我们将涉及到求两个一阶偏导数的近似值

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \quad \text{与} \quad \left. \frac{\partial T}{\partial y} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$

以及两个二阶偏导数

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)} \quad \text{与} \quad \left. \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right|_{(x,y)=(x_0,y_0)}$$

把 y 看作常数时，函数 T 对于 x 的偏导数就是 T 对 x 的普通导数，反之亦然，因而3.1节和3.2节中所有导数的概念和公式便可以直接应用了。当然，在应用由3.1节和3.2节所得到的公式对 x 求偏导时，必须保持 $y = y_0$ ，反之亦然。

3.3.1 直角坐标：均匀网格

讨论暂时仅限于直角坐标系，在求解区域上布置均匀网格系统，并具有均匀导热系数 k 的三维导热区域。首先只考察内部节点，如果所有边界位于其一个坐标为一常数，例如 $x = a$ 的表面上，而且网格系统直接联着边界，那么，只要已知边界温度，就可以求解内部温度场问题〔狄立克莱(Dirichlet) 条件〕。图3-4表示了一个典型网格点 P 及其六个相邻点，它们分别记为 N (北)、 S (南)、 E (东)、 W (西)、 I (内)、 O (外)，令 $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ 为均匀网格间距。显然，稳定态基本方程（见第二章公式2.2.4之(1)，而 $\partial T / \partial t = 0$ ）为：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{H}{k} = 0$$

利用3.1节的结果，可以得到近似式：

$$\frac{T_O - 2T_P + T_I}{\Delta^2} + \frac{T_E - 2T_P + T_W}{\Delta^2} + \frac{T_N - 2T_P + T_S}{\Delta^2} + \frac{H}{k} = 0$$

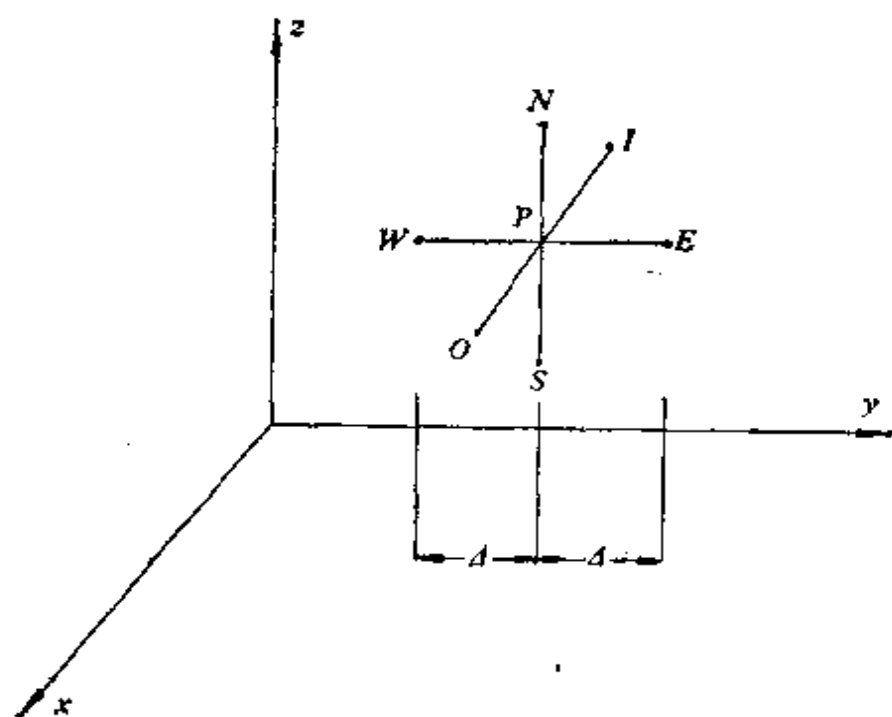


图 3-4 在均匀网格的三维直角坐标中典型点 P 及其六个相邻点

式中如果 H 随位置或温度而变化, 则在 P 点取值。

此式可化简为:

$$T_o + T_I + T_E + T_W + T_N + T_S - 6T_P + \frac{H}{k}\Delta^2 = 0 \quad (3.3.1)$$

显然, 对于二维 (x, y) 导热区域的类似公式为:

$$T_o + T_I + T_E + T_W - 4T_P + \frac{H}{k}\Delta^2 = 0 \quad (3.3.2)$$

对于一维热流的公式为:

$$T_o + T_I - 2T_P + \frac{H}{k}\Delta^2 = 0 \quad (3.3.3)$$

很明显, 在没有内热源时, 所有这三个公式的等式左端的最后一项均为0, 当 $H=0$, 一般将公式3.3.2称为五点公式, 并用示意图表示为:

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -4 & \\ & & 1 \end{bmatrix} T_P = 0$$

这里误差为 $O(\Delta^4)$ 。如何处理不稳定态问题, 将在3.5节中讨论。

3.3.2 直角坐标非均匀网格

现在, 如果不限于均匀网格, 并且从 P 点到 N 、 S 、 E 、 W 、 I 和 O 各点的距离改为 $S_N\Delta$ 、 $S_S\Delta\cdots\cdots S_O\Delta$, 那么3.2节的公式仍可应用。这样, 对于非均匀网格的三维问题, 可以认为类似于均匀网格的问题, 其稳定态方程式可以表示为:

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\Delta^2} \left[\frac{1}{S_N(S_N + S_S)} T_N - \frac{1}{S_N S_S} T_P + \frac{1}{S_S(S_N + S_S)} T_S \right] \\ & + \frac{2}{\Delta^2} \left[\frac{1}{S_E(S_E + S_W)} T_E - \frac{1}{S_E S_W} T_P + \frac{1}{S_W(S_E + S_W)} T_W \right] \\ & + \frac{2}{\Delta^2} \left[\frac{1}{S_O(S_I + S_O)} T_O - \frac{1}{S_I S_O} T_P + \frac{1}{S_I(S_I + S_O)} \right] \end{aligned}$$

$$\times T_j \} + \frac{H}{k} = 0 \quad (3.3.4)$$

式中 H 如果随位置和温度而变化, 则 H 在 P 点取值。注意, 当假设所有 S 都等于 1 时, 便回到均匀网格公式。从此方程很容易推导出对于二维和一维问题的简化公式。当没有内热源时, 最后一项显然可以忽略掉。遗憾的是此式不能进一步化简, 但是在 3.4 节中将可看到, 用能量平衡法可推导出同一个公式, 而且系数可以容易地贮存于计算机程序中的位置 $a_N, a_S, a_E, a_W, a_I, a_O, a_P$ 和 a_C , 它们是由下式定义的:

$$a_N T_N + a_S T_S + a_E T_E + a_W T_W + a_I T_I + a_O T_O + a_P T_P + a_C = 0 \quad (3.3.5)$$

而此式等价于公式 3.3.4, 或等价于均匀网格的公式 3.3.1。例如, 对于均匀网格:

$$a_N = a_S = a_E = a_W = a_I = a_O = 1$$

$$a_P = -6$$

$$a_C = \frac{H}{k} \Delta^2$$

对于非均匀网格:

$$a_N = \frac{2}{\Delta^2} \frac{1}{S_N(S_N + S_S)}, \quad a_S, a_E, a_W, a_I \text{ 和 } a_O \text{ 等与此类似,}$$

$$a_P = -\frac{2}{\Delta^2} \left[\frac{1}{S_N S_S} + \frac{1}{S_E S_W} + \frac{1}{S_I S_O} \right]$$

$$a_C = \frac{H}{k}$$

以后, 在第五章等章节中, 这种类型的方程将在解 P 点的导热问题的迭代过程中用来适时校正 T_P 。

当某些边界具有对流(纽曼)条件时, 不是将网格线画在边界上, 而是使边界位于两网格线之间, 这样有时倒是挺方便的。图 3-5 表明了已知西边界温度 T_B 时的二维稳定态问题, 点 W 位于求解区域之外, 因此实际上是无用的。当 T_B 是未知的, 但隐函于

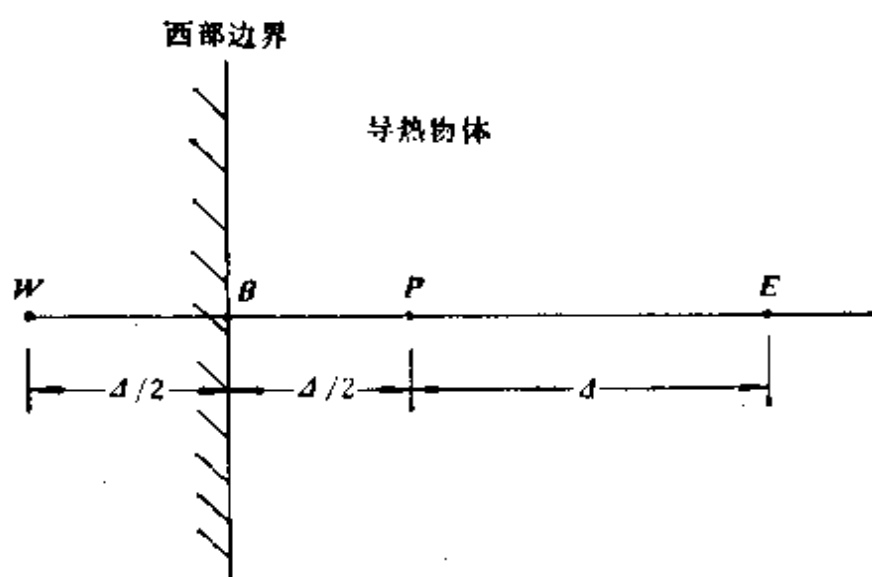


图 3-5 具有位于格子中间的西部边界的二维稳定态问题

对流(纽曼,导数)边界条件时,这种更为复杂的情况将在第四章4.3节中讨论。应用3.2节中 $S_E=1$ 、 $S_W=\frac{1}{2}$ 的这种不均匀网格的导数公式,可写出以 E 点和 B 点的值表示的 P 点的有限差分方程。这样, $\partial^2 T/\partial x^2$ 项近似值为:

$$\frac{2}{\Delta^2} \left[\frac{1}{(1)\left(1+\frac{1}{2}\right)} T_E - \frac{1}{(1)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)} T_P + \frac{1}{\left(\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)} T_B \right]$$

此式可化简为下列形式来代替以前给出的公式,

$$\frac{2}{\Delta^2} \left[\frac{2}{3} T_E - 2 T_P + \frac{4}{3} T_B \right]$$

对于一维问题,若 $H=0$,且假定为稳定态时,则相应的有限差分方程为

$$T_E - 3T_P + 2T_B = 0 \quad (3.3.6)$$

但是,另一方面,在类似于具有对流边界条件所采用的方法

中，在 P 点可以应用一般公式

$$\frac{1}{\Delta^2}[T_E - 2T_P + T_W] = 0$$

上式与线性外推的补充方程联立以估计 W 点的温度值：

$$T_W = T_B + (T_B - T_P)$$

从这两个方程消去 T_W ，可得到求 T_P 的类似的公式，然而这个公式只有一阶精确度。当然， E 、 P 和 B 三点能够用于外推 W 点的值，然而，这些方法在每次迭代内部场的值以后，都需要校正一次，因此，一般不推荐此法。在一个简单的公式能应用于许多内部节点的情况下，这些公式是有用的，而且其优越性在于不必为了每个 P 点贮存耦合系数于位置 a_N 、 a_S ……。对于边界附近的点应用同一公式同样也是方便的，但必须增补外部假想点的计算，如上面讨论过的 W 点，在计算西部边界点时就是这样处理的。

如果情况更复杂，例如，不均匀网格，且边界处于相邻网格线之间，则以 E 、 P 和 B 点的函数值为基础的在 P 点的 $\partial^2 T / \partial x^2$ 公式，应用 3.2 节的方法可以很容易得到。在这些以至更复杂的情况下，待定系数法也是很有用的。此外，应用能量平衡法也可以推导出恰恰同一公式，例如应用于上述 E 、 P 和 B 点。

3.3.3 更精确的公式

现在的讨论仅限于二维稳定态导热问题，且无内热源的情况，并采用间距为 Δ 的均匀方形网格系统，在这种情况下，通常的有限差分方程用图示法表示为：

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & -4 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} T_P = 0$$

下列图示法公式是同一个偏微分方程的近似式，参见托姆 (Thom) 和阿佩尔特 (Apelt)，1961 的著作。

$$\begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & -4 & \\ 1 & & 1 \end{bmatrix} T_P = 0 \quad (3.3.7)$$

合并以上两个式子可得到更精确的有限差分方程，最好的组

合是九点公式，可用图示法表示：

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 4 & -20 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{bmatrix} T_P = 0 \quad (3.3.8)$$

此式的误差为 $O(\Delta^6)$ 。

虽然此式及更精确的公式似乎是使人感兴趣的，但是在迭代求解的过程中，校正 T_P 更为复杂，而且还将影响求解过程的收敛（或发散）速率。

3.4 通过能量平衡法建立稳定态问题的有限差分方程

求某一节点温度的相应的有限差分方程也能用能量平衡法和第二章2.1节的公式推导出来。每个节点用来表示该系统内的一个称为单元控制体积的区域，考察从相邻区域通过这一区域的表面的热流，并推导出一个用相邻节点温度表示的求这一节点温度的公式。这个方法导出了与3.3节中所得到的同样结果，并完全一致，而且十分方便和容易应用，特别对于不均匀网格、对流边界条件和异形区域等。

3.4.1 直角坐标：均匀网格

为了清楚起见，现在让我们考察三维直角坐标中具有均匀网格间距 $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ 情况下的，围绕 P 点的单元控制体积， P 点及其六个邻近点如图3-6所示。所有这些单元面（图中为节点 E 所画的阴影部分）的面积为 Δ^2 ，这六个点的任何一点到 P 点的距离都为 Δ 。如 P 点不是边界点，而且假定 W 位于西部边界，并且 T_W 是已知的，则所有内部节点都可作如下考虑：计算出节点 i 与其相邻节点间的传导系数 K_{ij} （Thermal conductance），然后可写出从 j 到 i 的热流：

$$Q_{ij} = K_{ij}(T_j - T_i) \quad (3.4.1)$$

在稳定态条件下，对节点 i 的能量平衡方程为：

$$\sum_i Q_{ij} + H \cdot V_i = \sum_j K_{ij}(T_j - T_i) + H \cdot V_i = 0 \quad (3.4.2)$$

(式中 Σ 是对所有单元面求和)。此方程是利用了通过六个面进入单元控制体积 V_i 的热流加上内热源 H (瓦/米³) 而得到的。因为所有格距都是均匀的且等于 Δ , 因此对节点 i 的单元控制体积为:

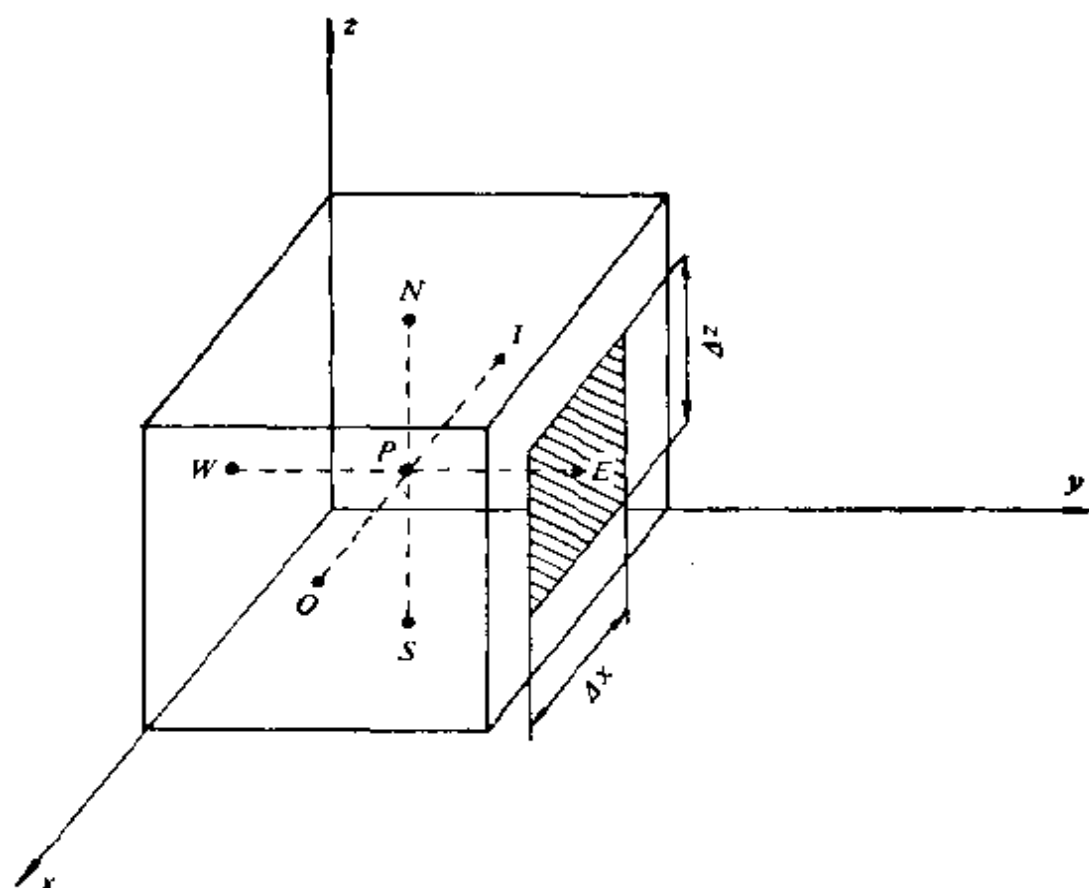


图 3-6 在具有均匀网格的三维直角坐标系中, 围绕 P 点的单元控制体积以及六个相邻点

$$V_i = \Delta x \Delta y \Delta z = \Delta^3$$

由于内部点的传导系数是用下式计算的,

$$K_{ij} = \frac{k A_{ij}}{L_{ij}} \quad (3.4.3)$$

则方程3.4.1与第二章中的方程2.1.2相类似, 式中 k 为导热系数, A_{ij} 为垂直于 j 和 i 之间热流方向的平均表面积, L_{ij} 为两个节点 i 和 j 之间的距离。在边界点 i

$$K_{ij} = h_i A_{ij} \quad (3.4.4)$$

式中 h_i 乃是在周围温度为 T_i 时表面 A_{ij} 上的表面传热系数。假如 P 是靠近边界的点, 其单元控制体积的西侧面积 A_w 位于边界上, 周围温度为 T_A , 通过该表面的传热系数为 h , 那么, 从周围流向 P 点的热流为:

$$Q_{ij} = K_{ij}(T_i - T_P) \\ \text{或} \quad Q_{PA} = h A_w (T_A - T_P)_w \quad (3.4.5)$$

在第四章4.3节中将可看到, 此式与类似的边界热流公式结合在一起, 可以得出与偏微分方程替代法相同的公式, 在那公式里消去了外部假想点的温度。

现在回到三维直角坐标问题, 并研究图3-6所示的具有六个相邻点的 P 点的能量平衡, 应用公式3.4.1和3.4.3可得到:

$$k \frac{\Delta^2}{\Delta} (T_N - T_P) + k \frac{\Delta^2}{\Delta} (T_S - T_P) + k \frac{\Delta^2}{\Delta} (T_E - T_P) + k \frac{\Delta^2}{\Delta} (T_W - T_P) + k \frac{\Delta^2}{\Delta} (T_I - T_P) + k \frac{\Delta^2}{\Delta} (T_O - T_P) + H \cdot \Delta^3 = 0$$

$$\text{或} \quad \frac{k}{\Delta^2} (T_N - 2T_P + T_S) + \frac{k}{\Delta^2} (T_E - 2T_P + T_W) + \frac{k}{\Delta^2} (T_I - 2T_P + T_O) + H = 0$$

可见, 这与直接的偏微分方程替代是相等的, 进而这方程与以前方程3.3.1的形式是类同的:

$$T_N + T_S + T_E + T_W + T_I + T_O - 6T_P + \frac{H \cdot \Delta^2}{k} = 0$$

像在3.3节中一样, 当我们把单元控制体积在不相干的方向上尺寸取为1的时候, 那么用同样的方法很容易得到二维和一维的公式。例如, 考察一下图3-7所示的在二维区域中的 P 点, 它有四个邻点。通过四个面的热流为:

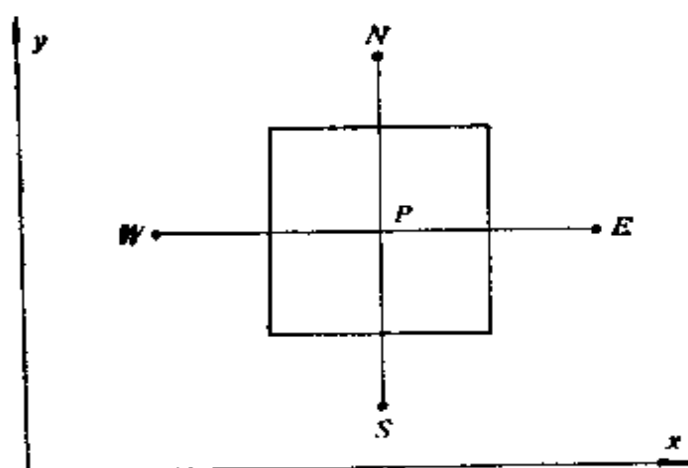


图 3-7 在具有均匀格距的二维直角坐标系中围绕 P 点的单元控制体积及其四个邻点

$$k \frac{\Delta \cdot (1)}{\Delta} (T_N - T_P) + k \frac{\Delta \cdot (1)}{\Delta} (T_S - T_P) + k \frac{\Delta \cdot (1)}{\Delta} (T_E - T_P) + k \frac{\Delta \cdot (1)}{\Delta} (T_W - T_P) + H \cdot \Delta^2 \cdot (1) = 0$$

由此得到熟悉的结果（与公式3.3.2相同）。

$$T_N + T_S + T_E + T_W - 4T_P + \frac{H}{k} \Delta^2 = 0$$

当然，在无内热源时，以上方程中最后一项 H 为 0。

3.4.2 直角坐标：非均匀网格

能量平衡法对于不均匀问题恰是很容易的。作为一个例子，讨论一下与图3-6相似，但格距变化的三维问题。从 P 点至 N 、 S 、 E 、 W 、 I 和 O 点的距离用 $S_N \Delta$ 、 $S_S \Delta \cdots S_O \Delta$ 等表示，其单元控制体积为：

$$\begin{aligned} \text{体积 } V &= \frac{1}{2} (S_N + S_S) \Delta \cdot \frac{1}{2} (S_E + S_W) \Delta \cdot \frac{1}{2} (S_I + S_O) \Delta \\ &= \frac{\Delta^3}{8} (S_N + S_S) (S_E + S_W) (S_I + S_O) \end{aligned}$$

北侧和南侧的面积(A_n 与 A_s)为:

$$\begin{aligned} A_n = A_s &= \frac{1}{2} (S_E + S_W) \Delta \cdot \frac{1}{2} (S_I + S_O) \Delta \\ &= \frac{\Delta^2}{4} (S_E + S_W) (S_I + S_O) \\ &= \frac{V}{\left[\frac{\Delta}{2} (S_N + S_S) \right]} \end{aligned}$$

对于其余各节点也可推导出类似的表达式。

在此单元控制体积上的热平衡为:

$$\begin{aligned} &k \frac{V}{\frac{\Delta}{2} (S_N + S_S)} \cdot \frac{1}{S_N \Delta} (T_N - T_P) + k \\ &\times \frac{V}{\frac{\Delta}{2} (S_N + S_S)} \cdot \frac{1}{S_S \Delta} (T_S - T_P) \end{aligned}$$

+ 四个对 E 、 W 、 I 和 O 点的类似项 + $H \cdot V = 0$

式中的 V 已在上面给出。此式等于:

$$\begin{aligned} &\frac{2}{\Delta^2} \left[\frac{1}{S_N (S_N + S_S)} T_N - \frac{1}{S_N S_S} T_P \right. \\ &\left. + \frac{1}{S_S (S_N + S_S)} T_S \right] + \text{两个类似项} + \frac{H}{k} = 0 \end{aligned}$$

此式与偏微分方程的直接替代所得到的公式3.3.3完全相同。
第一个括号内的中间项是这样化简得到的:

$$\begin{aligned} &\frac{1}{S_N (S_N + S_S)} + \frac{1}{S_S (S_N + S_S)} \\ &= \frac{S_S + S_N}{S_N S_S (S_N + S_S)} = \frac{1}{S_N S_S} \end{aligned}$$

类似的讨论表明, 对于非均匀网格的二维和一维问题, 能量平衡法与偏微分方程替代法是一样的, 因此建议, 这两个方法

中，哪一个对解决眼前问题方便就采用哪一个。

在图3-5中，当 T_E 和 T_B 已知时，用能量平衡法可以很容易地推导出求 T_P 的方程。现在来研究一个微元控制体积，其边界平分 BP 和 PE 。假定是一维问题，微元在 y 和 z 方向上的尺寸取为1，则能量平衡方程为：

$$k \frac{1^2}{\Delta} (T_E - T_P) + k \frac{1^2}{\Delta/2} (T_B - T_P) = 0$$

化简为

$$\frac{k}{\Delta} (T_E - T_P + 2T_B - 2T_P) = 0$$

因此 $T_E - 3T_P + 2T_B = 0$

此式就是用偏微分方程替代法得到的公式3·3·6。

3·4·3 总结

至此，已阐述了推导稳定态有限差分方程的两个重要方法，即能量平衡法和偏微分方程直接替代法，这些方法将在第五章用具体例子进一步加以讨论，并将在第八章中讨论其应用问题。

3·5 不稳定态问题的有限差分方程

瞬变或不稳定态传热问题的特征是热流和温度场随时间而变。有限差分方程可以用偏微分方程替代法或能量平衡法而得到，如对均匀网格所阐述的那样。应用3·3节和3·4节中的方法，可以进行必要的修正以适用于不规则网格。

3·5·1 偏微分方程替代法

首先考察在直角坐标中，在整个求解区域布置均匀网格系统的并具有均匀导热系数的三维导热区域。取 $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ ，并把注意力集中于如图3-4所示的内部节点 P ，在该图上还表示了它的六个邻点。为了简化起见，我们还假定无内热源，则基本偏微分方程为：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (3·5·1)$$

式中 α 为热扩散系数 $\alpha = \frac{k}{\rho C_p}$

此方程用显式公式表示时, 方程的左端取时间 t 时的值, 方程右端用前向差分表示, 它只包含在 P 点的 $T(t + \Delta t)$ 与 $T(t)$ 。应用3.1节的结果, 则对 P 点的有限差分方程为:

$$\begin{aligned} & \frac{T_O - 2T_P + T_I}{\Delta^2} + \frac{T_E - 2T_P + T_W}{\Delta^2} + \frac{T_N - 2T_P + T_S}{\Delta^2} \\ &= -\frac{1}{\alpha} \cdot \left(\frac{T'_P - T_P}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

式中 $T'_P = T_P(t + \Delta t)$;

$T_P = T_P(t)$ 。

所有其余不带 (') 的值都在时间 t 取值。此式可化简为:

$$T_O + T_I + T_E + T_W + T_N + T_S - 6T_P = \frac{1}{F_O} (T'_P - T_P)$$

$$\text{或} \quad T_O + T_I + T_E + T_W + T_N + T_S - \left(6 - \frac{1}{F_O} \right) T_P = \frac{1}{F_O} T'_P \quad (3.5.3)$$

式中 F_O 为傅立叶数 $= \alpha \Delta t / \Delta^2 = k \Delta t / \rho C_p \Delta^2$

公式3.5.3中 $T'_P = T_P(t + \Delta t)$ 可以根据它本身及其相邻六个点在时刻 t 时的温度来计算, 而它们在时刻 t 的温度是已知的。对二维 (x, y) 导热区域, 同样可推导出相似的公式:

$$T_O + T_I + T_E + T_W - \left(4 - \frac{1}{F_O} \right) T_P = \frac{1}{F_O} T'_P \quad (3.5.4)$$

对一维 (x) 热流的公式为:

$$T_O + T_I - \left(2 - \frac{1}{F_O} \right) T_P = \frac{1}{F_O} T'_P \quad (3.5.5)$$

关于这些公式的稳定性、精确度和收敛性有一些需要考虑的事项, 由于这些考虑, 对于给定的空间步长 Δ 限制了 Δt 的极大值, 这些将在第四章4.5节中讨论。如果有内热源的话, 则以上三个公式可以把 P 点在时刻 t 取值的 $(H/k) \Delta^2$ 项补充进去。

关于 T'_P 的隐式公式也可以由一个类似的列公式法导出, 不过该式包含邻近点在新的时间层 $t + \Delta t$ 的其他温度, 因此, 从前面一个已知的时间层 t 的值不能简单地计算出 T'_P , 而且不得不为每个时间步长解一组联立方程以求出新的温度, 这组方程的数目等于待求温度的节点的总数。各项都在时间层 $t + \Delta t$ 取值时, 对 P 点的有限差分方程为:

$$\begin{aligned} & \frac{T'_O - 2T'_P + T'_I}{\Delta^2} + \frac{T'_E - 2T'_P + T'_W}{\Delta^2} + \frac{T'_N - 2T'_P + T'_S}{\Delta^2} \\ &= \frac{1}{\alpha} \left(\frac{T'_P - T_P}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.5.6)$$

式中的记号同前。此式可化简为:

$$T'_O + T'_I + T'_E + T'_W + T'_N + T'_S - \left(6 + \frac{1}{F_O} \right) T'_P = - \frac{1}{F_O} T_P \quad (3.5.7)$$

对二维 (x, y) 问题的方程为:

$$T'_O + T'_I + T'_E + T'_W - \left(4 + \frac{1}{F_O} \right) T'_P = - \frac{1}{F_O} T_P \quad (3.5.8)$$

对一维 (x) 热流方程为:

$$T'_O + T'_I - \left(2 + \frac{1}{F_O} \right) T'_P = - \frac{1}{F_O} T_P \quad (3.5.9)$$

不论采用什么时间步长 Δt , 这三个公式对于舍入误差的传播是稳定的, 但是不够精确, 而且推进一个步长所需要的工作量比更为简单的显式公式要大, 除非对于一维的不稳定态问题可以用简单的三对角矩阵算法(TDMA)求解, 这将在第七章7.5节中可以看到。以上三个公式称为完全隐式, 它们是计算在 t 与 $t + \Delta t$ 之间某时刻的空间导数值的一般化公式的一种特殊情形, 该空间导数值是用取显式和完全隐式公式的加权平均值而得到的。如果通过下式来应用加权参数 λ ($0 \leq \lambda \leq 1$):

$$\text{所取之值} = \lambda(\text{在 } t + \Delta t \text{ 的值}) + (1 - \lambda)(\text{在 } t \text{ 的值}) \quad (3.5.10)$$

则三维问题可表示为：

$$\lambda(T'_O + T'_I + T'_E + T'_W + T'_N + T'_S - 6T'_P) + (1-\lambda)(T_O + T_I + T_E + T_W + T_N + T_S - 6T_P) = \frac{1}{Fo}(T'_P - T_P) \quad (3.5.11)$$

由此式可得

$$\begin{aligned} & \lambda(T'_O + T'_I + T'_E + T'_W + T'_N + T'_S) - \left(6\lambda + \frac{1}{Fo}\right)T'_P \\ &= -(1-\lambda)(T_O + T_I + T_E + T_W + T_N + T_S) + \left[6(1-\lambda) - \frac{1}{Fo}\right]T_P \end{aligned} \quad (3.5.12)$$

令 $\lambda=0, 1, 0.5$ 分别恢复显式格式、完全隐式格式与克兰科-尼科尔森 (Crank-Nicolson) 中间差分格式, 这样就可看出, 为什么这些公式的最后一个比其余的更为可取是有道理的 (见第四章4.5节)。对于二维 (x, y) 和一维 (x) 类似的公式为:

$$\begin{aligned} & \lambda(T'_O + T'_I + T'_E + T'_W) - \left(4\lambda + \frac{1}{Fo}\right)T'_P \\ &= -(1-\lambda)(T_O + T_I + T_E + T_W) + \left[4(1-\lambda) - \frac{1}{Fo}\right]T_P \end{aligned} \quad (3.5.13)$$

$$\begin{aligned} \text{和 } & \lambda(T'_O + T'_I) - \left(2\lambda + \frac{1}{Fo}\right)T'_P = -(1-\lambda)(T_O + T_I) \\ & + \left[2(1-\lambda) - \frac{1}{Fo}\right]T_P \end{aligned} \quad (3.5.14)$$

最后一个公式特别有用, 因为一旦结合了边界条件, 用直接三对角矩阵算法 (TDMA) 求解是很快的。

3.5.2 能量平衡法

应用能量平衡法可以得到完全相同的求 T'_P 的有限差分方程。考察与偏微分方程替代法相同的图形 (图3-4), 取围绕 P 点的单元控制体积, 如图3-6所示, 并把能量平衡原则应用于该体积, 与

P 点相关的单元控制体的体积等于 $(\Delta x \Delta y \Delta z)$ ，根据 k 、 A_{ij} 和 L_{ij} 计算六个点 I 、 O 、 N 、 S 、 E 、 W 中每个点至 P 点的传导系数，像以前对稳定态问题用能量平衡法时的作法一样（见公式3·4·3），仍用这公式：

$$K_{ij} = \frac{k A_{ij}}{L_{ij}} \quad (3.5.15)$$

式中 k 为导热系数； A_{ij} 为垂直于 i 与 j 点之间热流方向的平均表面积（该立方体的表面积之一见图3-6）； L_{ij} 为 i 和 j 两节点之间的距离。

对于被六个相邻点 I 、 O 、 N 、 S 、 E 和 W 包围的节点 P ，我们来研究它在一个很小的时间间隔 Δt 内的热量平衡。在此时间间隔内，假定每个相邻节点的温度为常数，并假定在 t 与 $t + \Delta t$ 之间一固定的时间层所计算的热流在整个小的时间间隔 Δt 内都是有效的。应用在第二章2·2节所阐明过的方法，流入 P 点（即它的控制体积）的热流将使其温度变化 $\Delta T_P = T'_P - T_P$ ，热流由方程3·4·1和3·4·3给出：

$$Q_{ij} = \frac{k A_{ij}}{L_{ij}} (T_j - T_P) \quad (3.5.16)$$

上式为一般形式，对图3-6的典型为：

$$Q_{PN} = k \frac{\Delta^2}{\Delta} (T_N - T_P) \quad (3.5.17)$$

$$\text{这样, } \sum_{j=I, O, N, S, E, W} k \frac{\Delta^2}{\Delta} (T_j - T_P) = \rho C_P V_P \frac{\Delta T_P}{\Delta t} \quad (3.5.18)$$

式中 ρ ——密度，公斤/米³；

C_P ——物体比热，焦/公斤·K；

$V_P = \Delta x \Delta y \Delta z$ ，为对 P 点的单元控制体体积，米³。

如果在系统中存在内热源，则必须把 $H \cdot V_P$ 项加在公式3·5·18的左边。这个表达式通常能用作任何内部节点 P 的节点方程。用计算表面传导系数的公式3·4·4，可以对边界点作类似的

处理。传导系数公式为：

$$K_{ij} = h_j A_{ij} \quad (3.5.19)$$

式中 h_j 为当周围温度为 T_j 时，在表面积 A_{ij} 上的平均表面传热系数，这些将在第四章4.3节中详细讨论。在公式3.5.18中，取 $\Delta T_p / \Delta t$ 的方法不同会得到不同形式的有限差分方程，但是经常把它取作从 t 至 $t + \Delta t$ 的前向差分：

$$\frac{\Delta T_p}{\Delta t} = \frac{T_p(t + \Delta t) - T_p(t)}{\Delta t} = \frac{T'_p - T_p}{\Delta t} \quad (3.5.20)$$

同样，方程式左端项在不同的时间层取值（ t ， $t + \Delta t$ 或两者之间的某时间层，后者由下式给定

$$\lambda(\text{在 } t + \Delta t \text{ 的值}) + (1 - \lambda)(\text{在 } t \text{ 的值})$$

式中 $0 \leq \lambda \leq 1$ ），这样便得出空间导数项的显式、完全隐式和加权平均中间值。取 $\lambda = 0.5$ 时得到克兰科—尼科尔森格式。为了表明能量平衡法和偏微分方程替代法是等效的，对公式3.5.18左端项采用加权平均能量平衡公式，对公式右端采用前向差分公式，即公式3.5.20，其结果为：

$$\begin{aligned} & [\lambda k \Delta (T'_O - T'_p) + (1 - \lambda) k \Delta (T_O - T_p)] \\ & + \text{用 } I, N, S, E \text{ 和 } W \text{ 代替 } O \text{ 的五个类似项} \\ & = \rho C_p \Delta^3 \left(\frac{T'_p - T_p}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (3.5.21)$$

此式可整理为：

$$\begin{aligned} & \lambda(T'_O + T'_I + T'_N + T'_S + T'_E + T'_W - 6T'_p) + (1 - \lambda) \\ & \times (T_O + T_I + T_N + T_S + T_E + T_W - 6T_p) \\ & = \frac{\rho C_p \Delta^2}{k \Delta t} (T'_p - T_p) \end{aligned} \quad (3.5.22)$$

这恰恰就是公式3.5.11，只要用傅立叶数 $Fo = k \Delta t / \rho C_p \Delta^2$ 代入，上式也恰恰就是公式3.5.12。由二维和一维简化公式的导数得来的有限差分方程与公式3.5.13、3.5.14完全一样。显然，取 $\lambda = 0$ 或 $\lambda = 1$ 可分别得出与公式3.5.3至3.5.5以及公式3.5.7至3.5.9相等的公式。如果引入内热源项，无论应用偏微分方程替

代法或应用能量平衡法，都可得出相同的有限差分方程。

3.5.3 总结

已经阐述了推导不稳定态热流的有限差分方程的两个重要方法：能量平衡法和偏微分方程替代法。空间导数怎样用温度增量和距离增量来代替，时间导数也要采用与空间导数同样的方法，用温度增量和时间增量来代替。由于考虑到稳定性，对于显式有限差分方程不能任意选择时间步长，而隐式有限差分方程却有较大的选择自由。

这些方法将在第六章中以具体例子再详细讨论，并在第八章中讨论其应用问题。

参 考 文 献

Abramowitz, M. & Stegun, I.A. (eds.) (1964). *Handbook of Mathematical Functions*. Applied Mathematics Series No.55, National Bureau of Standards. US Dept. of Commerce, Washington, DC.

Ames, W.F. (1969). *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Nelson, London.

Carnahan, B., Luther, H.A. & Wilkes, J. O. (1969). *Applied Numerical Methods*. Wiley, New York.

Dusinberre, G. M. (1949). *Numerical Analysis of Heat Flow*. McGraw-Hill, New York.

Dusinberre, G. M. (1961). *Heat Transfer Calculations by Finite Differences*. International Textbook Co., Scranton, Pa.

Gerald, C. F. (1970). *Applied Numerical Analysis*. Addison-Wesley, Reading, Mass.

National Physical Laboratory (1961). *Modern Computing Methods*, 2nd ed. Notes on Applied Science Series No. 16, HMSO, London.

Nautical Almanac Office (1956). *Interpolation and Allied Tables*. HMSO, London.

Razelos, P. (1973). Methods of obtaining approximate solutions. Section 4, pp. 4-1 to 4-78, in *Handbook of Heat Transfer*, ed. W.M. Rohsenow and J. P. Hartnett. McGraw-Hill, New York.

Richtmyer, R.D. & Morton, K.W. (1967). *Difference Methods*

for Initial Value Problems. Interscience, New York.

Schuh, H.(1965). *Heat Transfer in Structures*. Pergamon Press, Oxford.

Smith,G.D. (1965). *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Oxford University Press, London.

Thom,A.&Apelt, C.J.(1961).*Field Computations in Engineering and Physics*. Van Nostrand, London.

Young, D. (1962). The numerical solution of elliptic and parabolic partial differential equations. In: *A Survey of Numerical Analysis*, ed. J. Todd, McGraw-Hill, New York.

第四章 有限差分方程的应用

4.1 非直角坐标系的有限差分方程

非直角坐标系更容易表示某些物体的形状。第二章2.3节已经叙述了柱面极坐标和球面极坐标的一般导热方程，下面我们会看到，这些微分方程也可以用有限差分方程的形式来表示，所采用的方法与直角坐标系相同。

4.1.1 柱面极坐标

柱面极坐标的一般导热方程式如下（取导热系数为常数）：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + \frac{H}{k} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1.1)$$

（第二章2.3节已经详细推导。）代替上述偏微分方程的有限差分方程，可采用前面阐明过的两种基本的方法导出：即直接代替法和能量平衡法。

4.1.2 直接代替法

图4-1和4-2绘出了柱面极坐标的几何图形。 z 、 r 和 θ 分别具有相等的增量。直接替代偏微分方程式4.1.1之后，便得到节点0的有限差分方程如下：

$$\left[\frac{T_2 - 2T_0 + T_4}{(\Delta r)^2} + \frac{T_2 - T_4}{2r_0 \Delta r} + \frac{T_1 - 2T_0 + T_3}{r_0^2 (\Delta \theta)^2} + \frac{T_5 - 2T_0 + T_6}{(\Delta z)^2} + \frac{H}{k} \right] = \frac{(T'_0 - T_0)}{\alpha \Delta t} \quad (4.1.2)$$

当然，这是完全的显式表示。导出能量平衡法之后，我们就接着讨论完全的和局部的隐式差分形式。

4.1.3 能量平衡法

参考图4-1和4-2，根据由节点0相邻各点传到0点的导热热流速率和0点所表示的控制体积内的热源放热速率，以及控制体积内的温度上升速率，建立节点0的能量平衡：

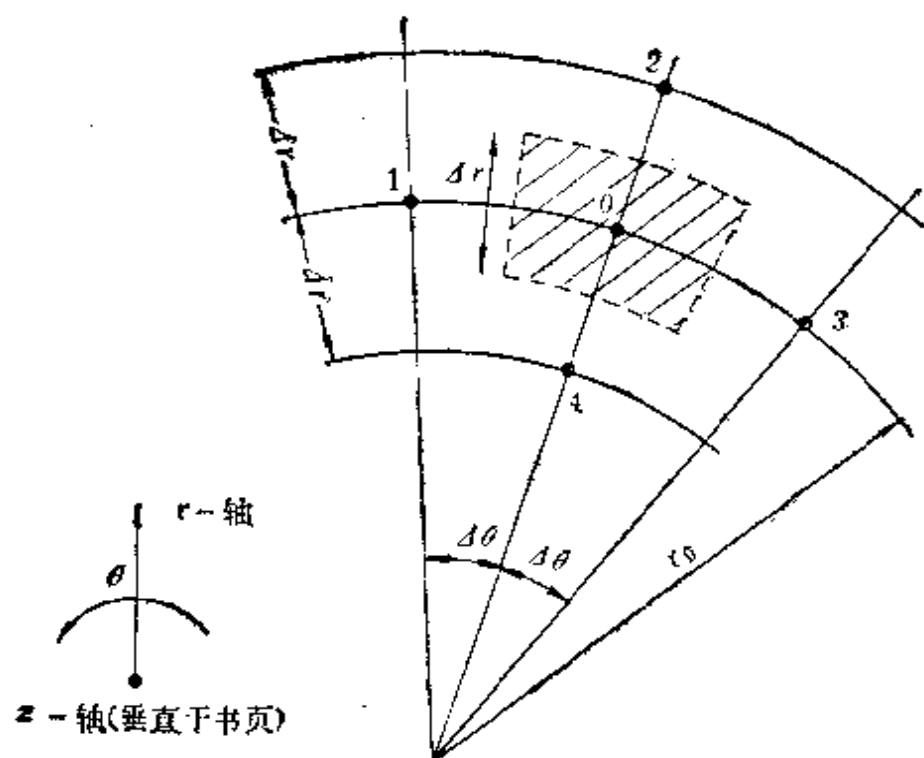


图 4-1 柱面坐标

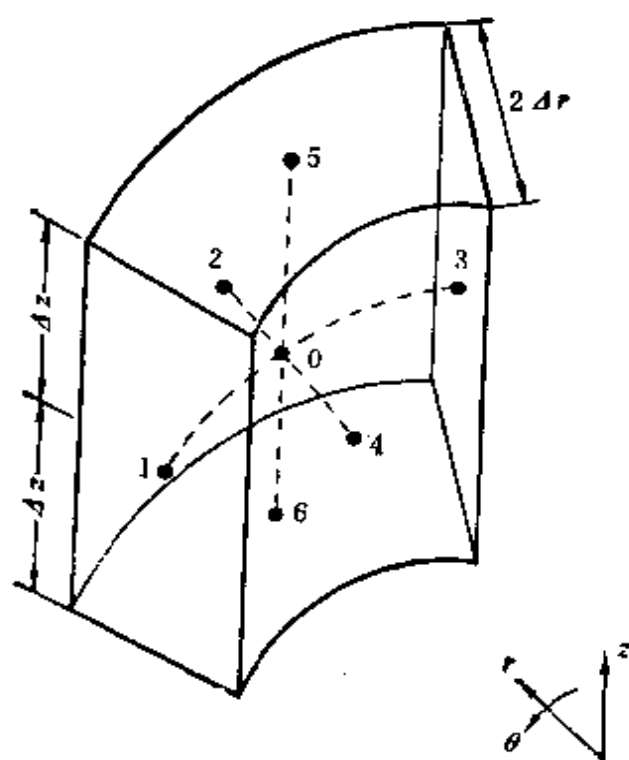


图 4-2 以相等的 r 和 θ 增量细分圆柱体

$$\text{从1点到0点的导热热流速率} = k(\Delta z \cdot \Delta r) \left(-\frac{T_1 - T_0}{r_0 \Delta \theta} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{从2点到0点的导热热流速率} &= k(\Delta \theta \cdot \Delta z) \\ &\cdot \left(r_0 + \frac{\Delta r}{2} \right) \left(\frac{T_2 - T_0}{\Delta r} \right) \end{aligned}$$

$$\text{从3点到0点的导热热流速率} = k(\Delta z \cdot \Delta r) \left(\frac{T_3 - T_0}{r_0 \Delta \theta} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{从4点到0点的导热热流速率} &= k(\Delta \theta \cdot \Delta z) \\ &\cdot \left(r_0 - \frac{\Delta r}{2} \right) \left(\frac{T_4 - T_0}{\Delta r} \right) \end{aligned}$$

$$\text{从5点到0点的导热热流速率} = k(r_0 \Delta \theta \Delta r) \left(\frac{T_5 - T_0}{\Delta z} \right)$$

$$\begin{aligned} \text{从6点到0点的导热热流速率} &= k(r_0 \Delta \theta \Delta r) \left(\frac{T_6 - T_0}{\Delta z} \right) \\ &\quad (4.1.3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{控制体积内热源放热速率} &= H \times \text{控制体积} \\ &= H(r_0 \Delta \theta \Delta r \Delta z) \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

传到控制体积的热量也可以用下式表示：

$$\begin{aligned} Q_v &= (\text{控制体积的质量} \times \text{比热} \times \text{节点温度的改变速率}) \\ &= \rho(r_0 \Delta \theta \Delta r \Delta z) C_P \left(\frac{T'_0 - T_0}{\Delta t} \right) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

将公式4.1.3和4.1.4各项相加，并使其和等于公式4.1.5，经整理后，得出0点的完全能量平衡如下：

$$\begin{aligned} \left[\frac{T_2 - 2T_0 + T_4}{(\Delta r)^2} + \frac{T_2 - T_4}{2r_0 \Delta r} + \frac{T_1 - 2T_0 + T_3}{r_0^2 (\Delta \theta)^2} + \frac{T_5 - 2T_0 + T_6}{(\Delta z)^2} \right. \\ \left. + \frac{H}{k} \right] = \left(\frac{T'_0 - T_0}{\alpha \Delta t} \right) \end{aligned} \quad (4.1.6)$$

公式4.1.6与4.1.2是完全一样的。除了对称轴上的一点外，该式对其它任一节点都是适用的。因为在轴上 $\frac{\partial T}{\partial r} = 0$ ，因此，

$\frac{1}{r} \left(\frac{\partial T}{\partial r} \right)$ 为不定值 $\left(= \frac{0}{0} \right)$ 。但是，利用罗比塔 (L'Hôpital) 法则可以证明：当 $r \rightarrow 0$ 时

$$\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \rightarrow \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \quad (4.1.7)$$

这个公式是有定值的 [见史密斯 (Smith) 1965 的著作]。以二维圆柱形轴对称且 $H=0$ (无内热源) 的稳定热流为例，其基本方程式为：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} = 0 \quad (4.1.8)$$

将公式 4.1.7 代入公式 4.1.8 中，则公式 4.1.8 变成：

$$2 \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0 \quad (\text{在 } r=0 \text{ 处}) \quad (4.1.9)$$

对于圆柱形轴对称且 $H=0$ 的有限差分方程，可以取最近邻点的温度作为 $r=0$ 处的温度。而对于非轴对称 $\left(\frac{\partial T}{\partial \theta} \neq 0 \right)$ 的稳定态问题，则把其周围各网格点温度的平均值作为 $r=0$ 处的温度。

如果公式 4.1.6 或公式 4.1.2 左边各项都按上一个时间层进行计算 (计算不带撇的 T)，那么，经过适当整理，允许直接用前一个时间层的 0 点及其六个相邻点的温度来计算 T'_0 ，这就是显式表示法。如果左边各项都以新的时间层进行计算 (计算带撇的 T)，则得到完全的隐式表达式：

$$\left[\frac{T'_2 - 2T'_0 + T'_4}{(\Delta r)^2} + \frac{T'_2 - T'_4}{2r_0 \Delta r} + \frac{T'_1 - 2T'_0 + T'_3}{r_0^2 (\Delta \theta)^2} + \frac{T'_5 - 2T'_0 + T'_6 \text{ ①}}{(\Delta z)^2} + \frac{H}{k} \right] = \frac{(T'_0 - T_0)}{\alpha \Delta t} \quad (4.1.10)$$

一般说来，人们可以选择哪个时间层来计算左端项，从而分别得出空间导数项的显式的、完全隐式的以及加权平均中间表达

① 公式 4.1.10 中的 T'_6 误写为 T_6 。——译注

式。在前面的第三章3.5节中，每个非显式差分表达式都给出一个求 T' 的方程式，该式包括邻近点另一新的时间层的带撇的温度。因此， T' 不可能简单地计算出来。为了同时计算各点在新的时间层的 T' ，必须解一组代数方程。这个问题在前面已经讨论过，在后面的第七章7.5节的数学讨论中还会出现。

4.1.4 对数分格

对于没有内热源的二维稳定态热流，公式4.1.1变成下面的形式：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4.1.11)$$

用一个新的变量 ξ 对公式4.1.11进行变换就方便多了。这个新变量 ξ 定义为：

$$\xi = \ln r \quad (4.1.12)$$

引入新变量后，公式4.1.11简化为：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (4.1.13)$$

因为当 $r \rightarrow 0$ 时， $\xi \rightarrow -\infty$ ，因此，如果上式的解区域不包括 $r=0$ 这一点，就有可能对公式4.1.11进行这样的简化。公式4.1.13与由直角坐标系导出的方程式是一样的，二者可以同样对待。但是，在解释这个结论时必须慎重。因为 ξ 相等的增量并不相应于 r 相等的增量。下面的例子有助于弄明白这个概念。

4.1.5 例

图4-3是圆柱体横断面的一部分。该圆柱体内半径为10毫米，外半径为70毫米，其边界温度如图所示。现在的问题是要确定整个圆柱体的温度分布。但是，现在我们只研究由对数分格所得到的格子和典型的有限差分方程。

$$r_i = 10 \text{ 毫米}$$

$$r_o = 70 \text{ 毫米}$$

$$\theta = 120^\circ = 2.094 \text{ 弧度}$$

根据公式4.1.12：

$$\xi_0 - \xi_i = \ln \frac{r_0}{r_i} = 1.946$$

把 θ 格子分成五等份，得出每一等份的弧度为 $(2.094/5)$ ，
即：

$$\Delta\theta = 0.419 \text{ 弧度}$$

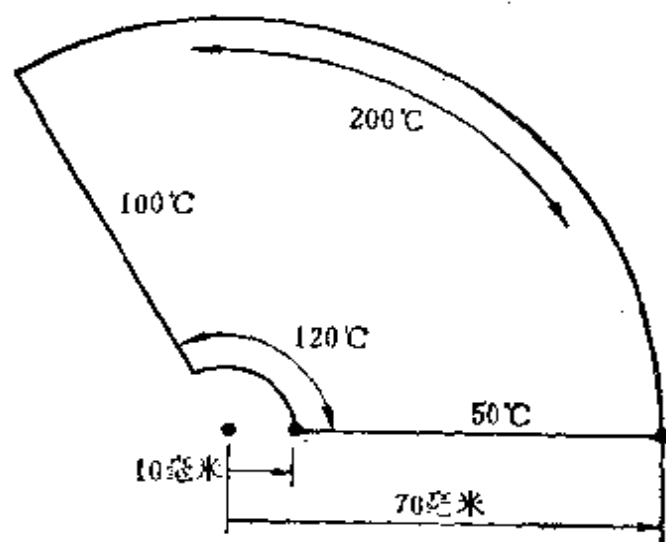


图 4-3 圆柱断面的一部分

在理想情况下， $(\xi - \theta)$ 格子应当包含有助于导出有限差分方程的全部正方形网格。假如我们所选择的格子尺寸足够小，那么，就有可能形成正方形网格。但是实际上由于 $\Delta\theta$ 为 0.419 弧度，因此我们可以算出在 ξ 的总改变量内有多少个 0.419。

$$\xi \text{ 的总改变量: } \xi = (\xi_0 - \xi_i) = 1.946$$

如果正方形格子的 $\Delta\xi = 0.419$ ，则 ξ 将分成 $(4 \times \Delta\xi + 0.27)$ ，
即：

$$(4 \times \Delta\xi + 0.27) = 1.946$$

由此而得到的格子示于图4-4

设导热系数为常数，则正方形网格区域内任一节点的有限差分方程（例如节点5）是：

$$\text{节点 5: } T_2 + T_4 + T_6 + T_8 - 4T_5 = 0$$

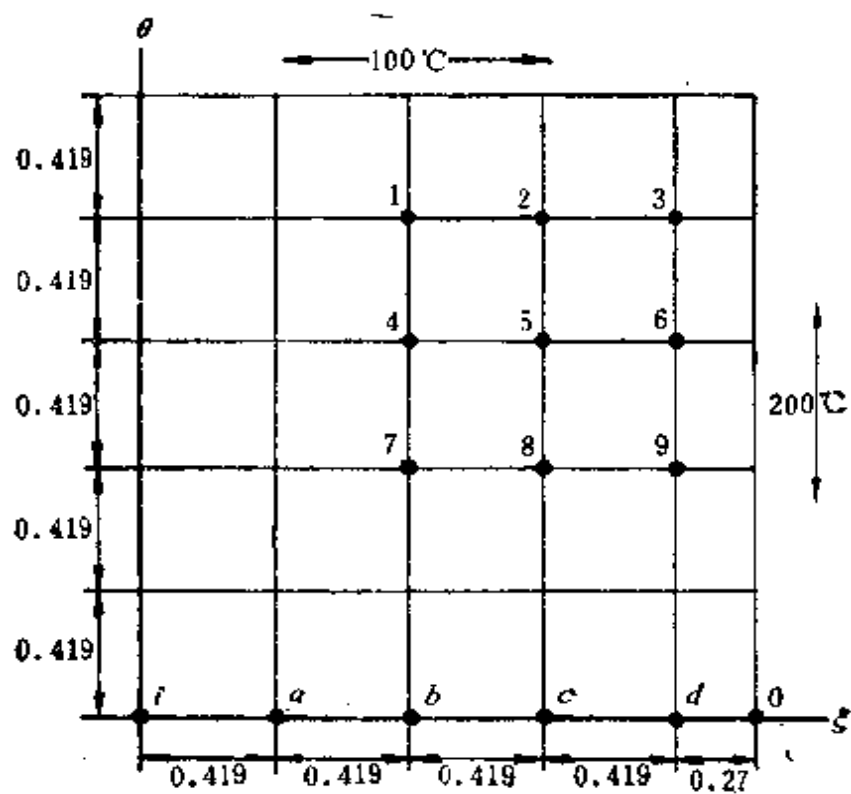


图 4-4 用对数分格改变了的圆柱体

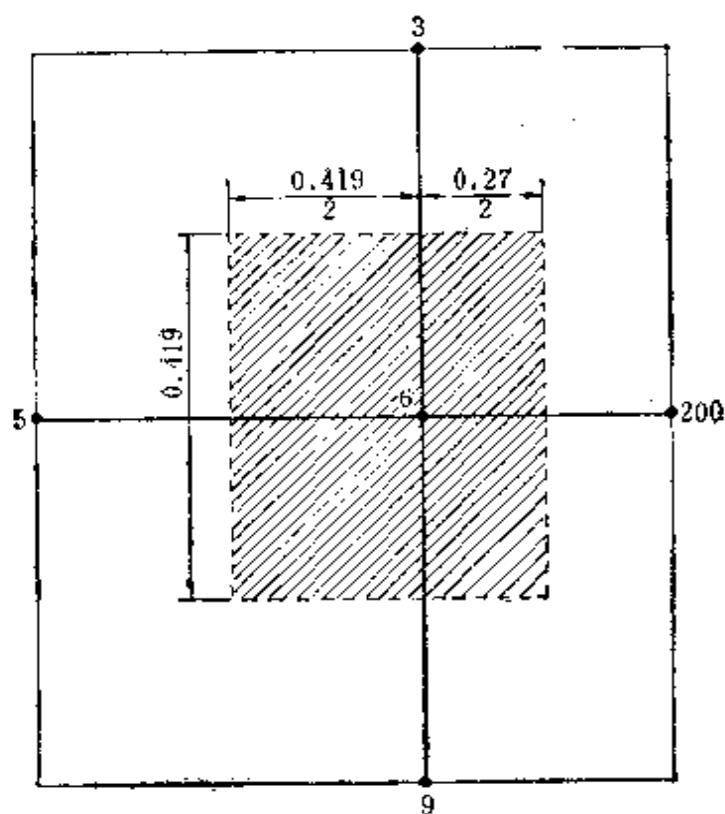


图 4-5 节点6周围的非均匀网格

对于不规则形状区域内的节点, 例如节点 6 (见图 4-5), 则用能量平衡法很容易导出其有限差分方程。仍设导热系数全为常数, 并参考图 4-4, 节点 6 的能量平衡是:

$$\left[k \left(\frac{0.419}{2} + \frac{0.27}{2} \right) \left(\frac{T_3 - T_6}{0.419} \right) + k \left(\frac{0.419}{2} + \frac{0.27}{2} \right) \right. \\ \times \left(\frac{T_9 - T_6}{0.419} \right) + k(0.419) \left(\frac{T_5 - T_6}{0.419} \right) \\ \left. + k(0.419) \left(\frac{200 - T_6}{0.27} \right) \right] = 0$$

上式整理为:

节点 6: $T_3 + 1.216T_5 + T_9 - 5.103T_6 = -377.5$ (4.1.14)
由 ξ_a 、 ξ_b 、 ξ_c 和 ξ_d 的值算出半径 r_a 、 r_b 、 r_c 和 r_d , 从而确定相应各点在原系统内所处的位置。

$\xi = \ln r_i = 2.303$ (图 4-4 中 $\theta = 0$ 处的 ξ 值)。

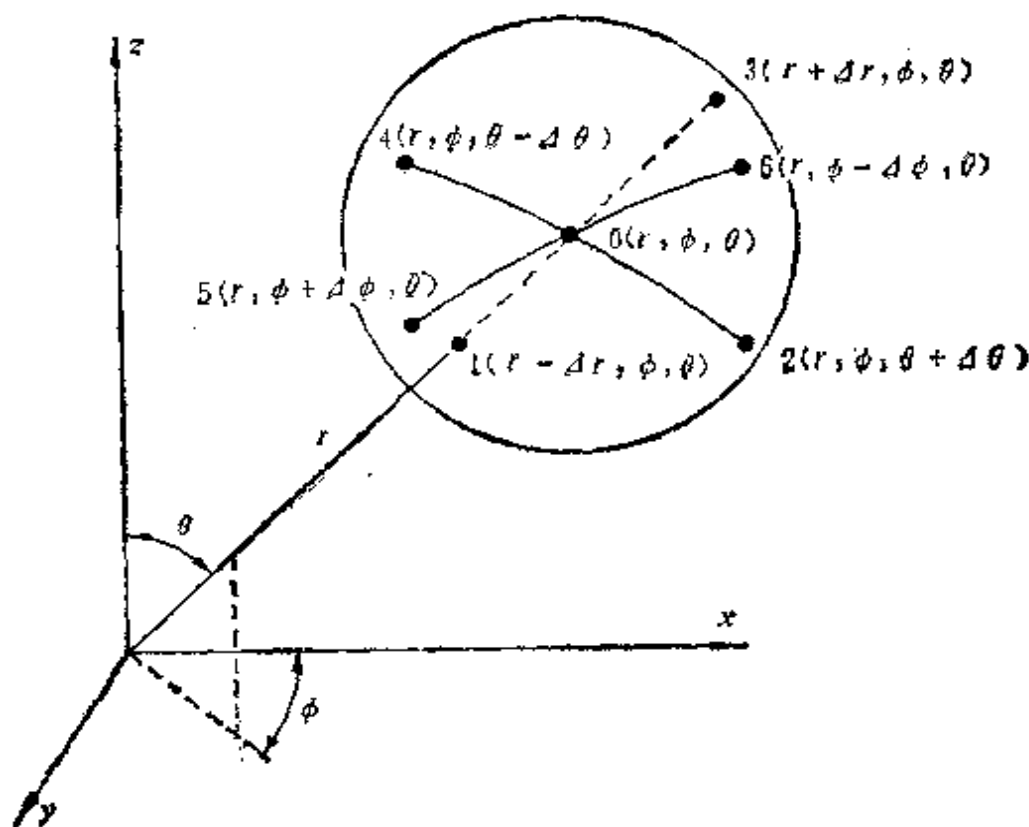


图 4-6 球面极坐标系

$(\xi_a - \xi_i) = 0.419 \quad \therefore \xi_a = 2.722$, 于是得到 $r_a \approx 15.2$ 毫米
 $(\xi_b - \xi_i) = 0.839 \quad \therefore \xi_b = 3.141$ 于是得到 $r_b \approx 23.1$ 毫米
 同理可得 $r_c = 35.15$ 毫米, $r_d = 53.44$ 毫米。

4.1.6 球面极坐标

以球面极坐标表示的一般导热方程如下 (取导热系数为常数):

$$\begin{aligned}
 \frac{k}{r^2} \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 T}{\partial \phi^2} \right] \\
 + H = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t} \quad (4.1.15)
 \end{aligned}$$

(第二章2.3节已讨论了该方程的导出)。

图4-6所示为六个节点的球面极坐标。这六个点以0点为中心,并分别具有相等的 r 、 θ 和 ϕ 的增量。用来代替偏微分方程4.1.15的有限差分方程,可利用能量平衡法导出。

为了用这种方法推导出适合于温度 T_0 的方程,需要知道0点与六个邻点间的六个传导系数。第三章公式3.4.3可理解为:

$$\begin{aligned}
 K_{10} &= k \frac{\left(r - \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta \phi \Delta \theta \sin \theta}{\Delta r} \\
 K_{20} &= k \frac{r \Delta r \Delta \phi \sin\left(\theta + \frac{\Delta \theta}{2}\right)}{r \Delta \theta} \\
 K_{30} &= k \frac{\left(r + \frac{\Delta r}{2}\right)^2 \Delta \phi \Delta \theta \sin \theta}{\Delta r} \\
 K_{40} &= k \frac{r \Delta r \Delta \phi \sin\left(\theta - \frac{\Delta \theta}{2}\right)}{r \Delta \theta} \\
 K_{50} &= K_{60} = k \frac{r \Delta r \Delta \theta}{r \Delta \phi \sin \theta} \quad (4.1.16)
 \end{aligned}$$

节点0的控制体积 $= \Delta V_0 = r^2 \Delta \theta \Delta \phi \Delta r \sin \theta$

因此节点0的能量平衡为:

$$\begin{aligned} & [K_{10}(T_1 - T_0) + K_{20}(T_2 - T_0) + K_{30}(T_3 - T_0) + K_{40}(T_4 - T_0) \\ & + K_{50}(T_5 - T_0) + K_{60}(T_6 - T_0)] + H\Delta V_0 = \rho\Delta V_0 C_p \frac{(T'_0 - T_0)}{\Delta t} \end{aligned}$$

(4.1.17)

公式4.1.17是一显式有限差分方程。关于隐式差分方程的导出，完全与本节讨论的圆柱极坐标的情况一样。如果 $r=0$ 这一点包括在解区域内，那么对于球面极坐标来说，也会出现类似圆柱极坐标的情形。还是利用罗比塔法则，于是在 $r=0$ 处可用 $2\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}\right)$ 代替 $(2/r)\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)$ 。对于 $r=0$ 这点，式中凡含 ϕ 和 θ 的各项都消去，从而方程式变为：

$$3\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} = 0$$

对于这种情形下的有限差分方程，也可以取 $r=0$ 处的温度等于其最近邻点的平均温度。如果式中包含 $\frac{\partial T}{\partial t}$ 的不稳定态项，则一定要写出完全的有限差分方程。

4.1.7 一般有限差分方程的特殊形式

在没有三维空间坐标以及时间作为独立变量的情况下，一般偏微分方程的简化形式是适用的。第二章表2-4~2-6介绍了偏微分方程的几种简化形式。现在设在各种情况下坐标方向上的格距是相等的，那么要给出相应的有限差分方程不仅是可能的，而且是方便的。表4-1至表4-3列出了这些等价的有限差分方程的模型。当然，必须记住，在各种情况下，一组（许多个）代数有限差分方程将代替用以表征这个问题的单个的连续的偏微分方程。这组有限差分方程就是预先确定的网格系内各节点未知温度的方程，而这个网格系正是覆盖在我们所感兴趣的区域上。

4.2 三角形网格

前面讨论过的直角坐标，圆柱坐标和球坐标等类型的网格

系，对于许多物体形状来说，都是不能令人满意的。况且在许多实际问题中，虽然通常的正方形和矩形网格对于物体的内部和某种边界是适合的，但是，对于边界的任一不规则的部分（例如角上和弯曲部分）就需要进行特殊的处理。这时全部或局部地利用三角形网格就比较方便了。为了导出适合于网格各点的有限差分方程，最好是利用能量平衡法。各节点间的传导系数可以简单地采用统一的方法进行计算〔见杜辛贝雷 (Dusinberre)，1961；拉泽洛斯 (Razelos)，1973的著作〕。

表 4-1 以直角坐标表示的一般有限差分方程的简化形式相应于第二章表2-4

问 题	有 限 差 分 方 程	要求的变量	说 明
二维稳定态	$(T_o - 2T_P + T_I) / \Delta^2 + (T_E - 2T_P + T_W) / \Delta^2 = 0$	T_P	具有 $\Delta = \Delta x = \Delta y$ 的均匀格子
有内热源的 三维稳定态	$T_o + T_I + T_E + T_W + T_N + T_S - 6T_P + H\Delta^2 / k = 0$	T_P	具有 $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ 的均匀格子
一维不稳定态	$\alpha(T_o - 2T_P + T_I) / (\Delta x)^2 = (T_P' - T_P) / \Delta t$	T_P'	显式表达式
有内热源的 二维不稳定态	$H\Delta^2 / (\rho C_p) + \alpha(T_o + T_I + T_E + T_W - 4T_P) = \Delta^2 (T_P' - T_P) / \Delta t$	T_P'	具有 $\Delta = \Delta x = \Delta y$ 的均匀空间格子显式表达式

图4-7所示为一般不规则三角网格系的一部分。图中所有三角形内角均为锐角 ($\leq 90^\circ$)。为了使标记为0点的控制体积 (图4-7中虚线所表示的面积) 有着垂直二等分线 (垂直于0点至各邻点的连线) 作为它的边，就需要限制其内角为锐角，然后可以按下面的方法计算0点和各邻点之间的传导系数：

例如第三章公式 3·4·3 对于0点和1点间的传导系数可理解为：

$$K_{01} = \frac{k L_{ab}}{L_{01}}$$

根据简单的几何关系，该式变为：

表 4-2 以柱面极坐标表示的一般有限差分方程的简化形式相应于第二章表2-5

问 题	有 限 差 分 方 程	要求的变量	说 明
二维稳态 圆 盘 圆 柱	$\frac{T_2 - 2T_0 + T_4}{(\Delta r)^2} + \frac{T_1 - T_4}{2r_0 \Delta r} + \frac{T_1 - 2T_0 + T_3}{r_0^2 (\Delta \theta)^2} = 0$ $\frac{T_2 - 2T_0 + T_4}{(\Delta r)^2} + \frac{T_2 - T_4}{2r_0 \Delta r} + \frac{T_5 - 2T_0 + T_6}{(\Delta z)^2} = 0$	T_0	$\frac{\partial T}{\partial z} = 0$ 均匀格子
有内热源的 三维稳态	$\frac{T_2 - 2T_0 + T_4}{(\Delta r)^2} + \frac{T_2 - T_4}{2r_0 \Delta r} + \frac{T_1 - 2T_0 + T_3}{r_0^2 (\Delta \theta)^2} + \frac{T_5 - 2T_0 + T_6}{(\Delta z)^2} + \frac{H}{k} = 0$	T_0	均匀格子
一维不稳定态	$a \left(\frac{T_2 - 2T_0 + T_4}{(\Delta r)^2} + \frac{T_2 - T_4}{2r_0 \Delta r} + \frac{T_1 - 2T_0 + T_3}{r_0^2 (\Delta \theta)^2} \right) = \frac{T'_0 - T_0}{\Delta t}$	T'_0	均匀格子 显式表达式
有内热源的二维不稳定态 定态圆盘	$\frac{H}{\rho C_P} + a \left(\frac{T_2 - 2T_0 + T_4}{(\Delta r)^2} + \frac{T_2 - T_4}{2r_0 \Delta r} + \frac{T_1 - 2T_0 + T_3}{r_0^2 (\Delta \theta)^2} \right) = \frac{T'_0 - T_0}{\Delta t}$	T'_0	均匀格子 显式表达式
圆 柱	$\frac{H}{\rho C_P} + a \left(\frac{T_2 - 2T_0 + T_4}{(\Delta r)^2} + \frac{T_2 - T_4}{2r_0 \Delta r} + \frac{T_5 - 2T_0 + T_6}{(\Delta z)^2} \right) = \frac{T'_0 - T_0}{\Delta t}$	T'_0	均匀格子 显式表达式

$$K_{01} = \frac{k(\operatorname{ctg} \beta_1 + \operatorname{ctg} \beta_2)}{2} \quad (4.2.1)$$

公式4.2.1有时也写成:

$$K_{01} = k F_{01}$$

式中 F_{01} 称作0点和1点间的几何因子。

表 4-3 以球面极坐标表示的一般有限差分方程
的简化形式(相应于第二章表2.6)

问 题	有 限 差 分 方 程	要求的 变量	说 明
二维稳定态	公式4.1.17消去左端第五、第六和第七项 并消去右端项 公式4.1.17消去左端第二、第四和第七项 并消去右端项	T_0	均匀格子
有内热源的三 维稳定态	公式4.1.17消去右端项	T_0	均匀格子
一维不稳定态	公式4.1.17消去左端第二、第四、第五、 第六和第七项	T'_0	均匀格子 显式表达式
有内热源的 二维不稳定态	公式4.1.17消去左端第五和第六项 公式4.1.17消去左端第二和第四项	T'_0	均匀格子 显式表达式

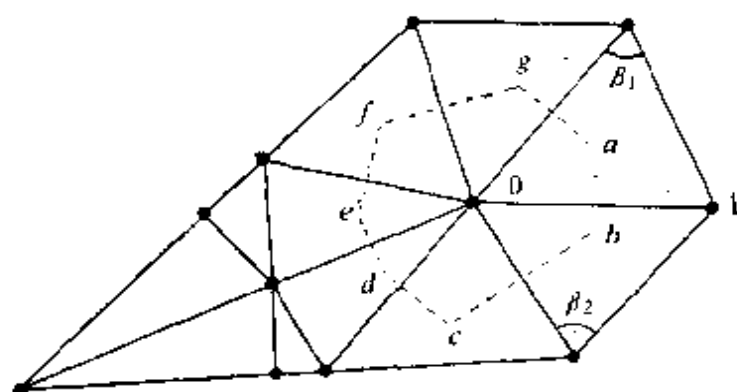


图 4-7 一般不规则三角网格系的一部分。控制面积(虚
线所示) = $abcdefg$

图中节点0和另外六个邻点之间的传导系数,均按同样方法计算。于是利用第三章公式3.4.2可以建立节点0的有限差分方程。

这里再重复一下，为方便起见，仍采用通用的符号并假设为稳定态：

$$\sum_j K_{0j} (T_j - T_0) + H \cdot V_0 = 0 \quad (4.2.2)$$

图中用虚线表示的多边形面积，就是节点 0 的控制体积 V_0 ，其值为：

$$V_0 = \frac{1}{2} L_{ab} \frac{L_{01}}{2} + \text{其余六个相似项} \quad (4.2.3)$$

如果是不稳定态传热，也需要知道体积 V_0 ，不过这时式 4.2.2 的右端要用 $\rho C_p V_0 \frac{\Delta T}{\Delta t}$ 来代替。

4.2.1 例

三角形的物体很容易细分成许多相似三角形断面。图 4-8 为一等腰三角形断面，所有的角不是 70° 就是 40°

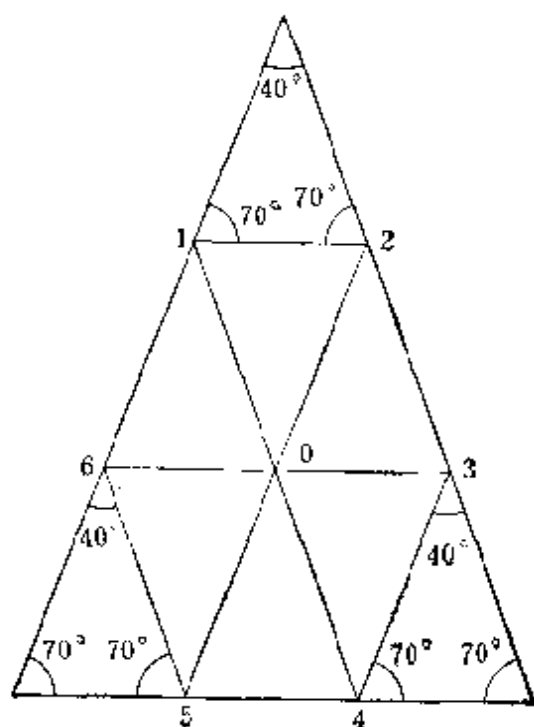


图 4-8 等腰三角形的三角形网

根据公式 4.2.1 求出节点 0 和周围的 1、2、3、4、5、6 各节点间的传导系数：

$$K_{01} = \frac{2\text{ctg}70^\circ}{2} k \bullet = 0.364k \text{ (来自 } \Delta 120 \text{ 的作用加上来自}$$

$\Delta 160$ 的作用)

$$K_{02} = K_{04} = K_{05} = K_{01} \text{ (由于对称性)}$$

$$K_{03} = K_{06} = 2\text{ctg}40^\circ/2k = 1.192k$$

因此, 对于无内热源的二维稳定态问题, 由能量平衡得到节点 0 的方程式如下:

$$\begin{aligned} & 0.364(T_1 - T_0) + 0.364(T_2 - T_0) + 0.364(T_4 - T_0) \\ & + 0.364(T_5 - T_0) + 1.192(T_3 - T_0) + 1.192(T_6 - T_0) = 0 \\ \text{即 } & T_1 + T_2 + T_4 + T_5 + 3.274(T_3 + T_6) - 10.549T_0 = 0 \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

4.2.2 边界节点

某些边界节点其温度是未知数, 并隐含于对流边界条件中, 这些边界点也可以用局部三角形网格按刚才讨论的方法进行处理, 即使该物体的其它部分没有这样的三角形网格, 这样作也是可行的。例如图4-9所示为边界的一部分, 其垂直等分线如图中虚线所示。

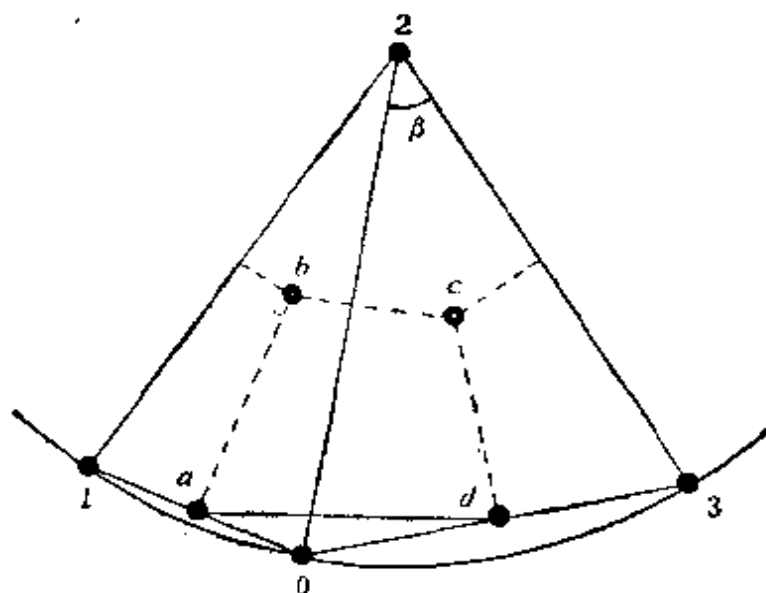


图 4-9 不规则三角形网格的边界节点

●原书漏掉 k 。——译注

为了建立节点0的方程式，取其控制体积（面积）为 $abcd$ 。
节点0和节点3之间典型的传导系数为：

$$K_{03} = k \frac{\text{ctg} \beta}{2}$$

节点1、2、3和代表周围介质的假想点作用于节点0上。为满足最后一个条件（边界条件包括规定的热流，即包括导数边界条件的牛顿冷却），取 L_{ad} 为所需的表面单元。

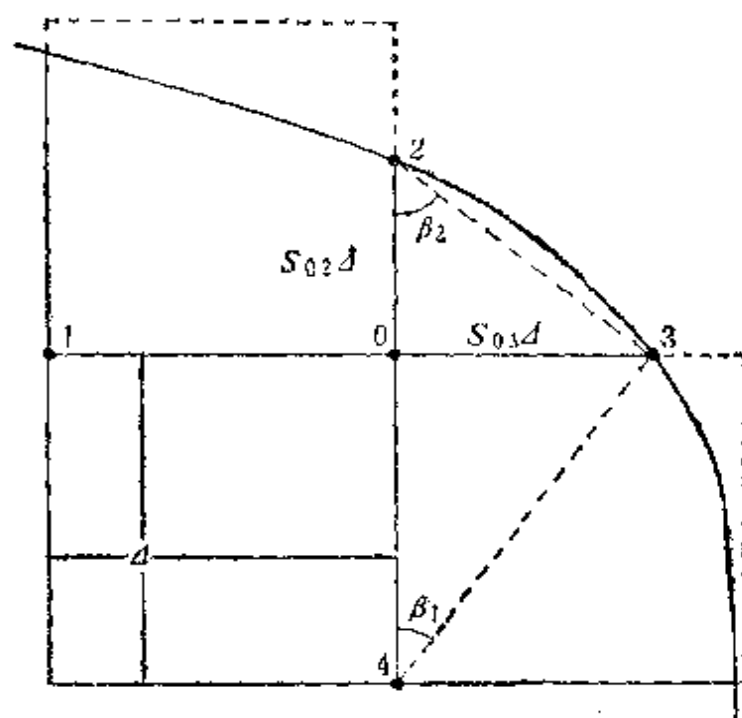


图 4-10 以不规则边界终止的正方形网格

如图4-10所示为不规则边界终止的方形网格，用刚才所讨论的方法，就很容易对它进行处理。因此，为了建立节点0的有限差分方程，并设定已知的边界条件，必须首先求出传导系数：

$$K_{03} = k \left(\frac{\text{ctg} \beta_1 + \text{ctg} \beta_2}{2} \right) = \frac{k}{2} \left(\frac{1}{S_{03}} + \frac{S_{02}}{S_{03}} \right) = \frac{k}{2S_{03}} [1 + S_{02}]$$

$$\text{同理： } K_{02} = \frac{k}{2S_{02}} (1 + S_{03})$$

$$K_{01} = \frac{k}{2} (1 + S_{02})$$

$$K_{04} = \frac{k}{2} (1 + S_{03})$$

以不规则边界终止的矩形网格，也可以这样来处理，其结果与第三章公式3·3·3相符。

对于不同的区域采用不同的网格形状往往较为有利。例如，如果在某些区域要求精确度更高一些，或者如果在某些区域内预料其温度变化更强烈一些，那么这些区域应有更细的网格。现在考察一个具有均匀正方形格子或矩形格子的二维直角坐标稳定态问题。如果它需要突然改变成另一种网格形式，就可以利用三角形网格的原理。图4-11说明了正方形格子怎样才能与表示圆柱极坐标的格子合并到一起。有关三角形网格全部过程的说明见第八章8·5节。

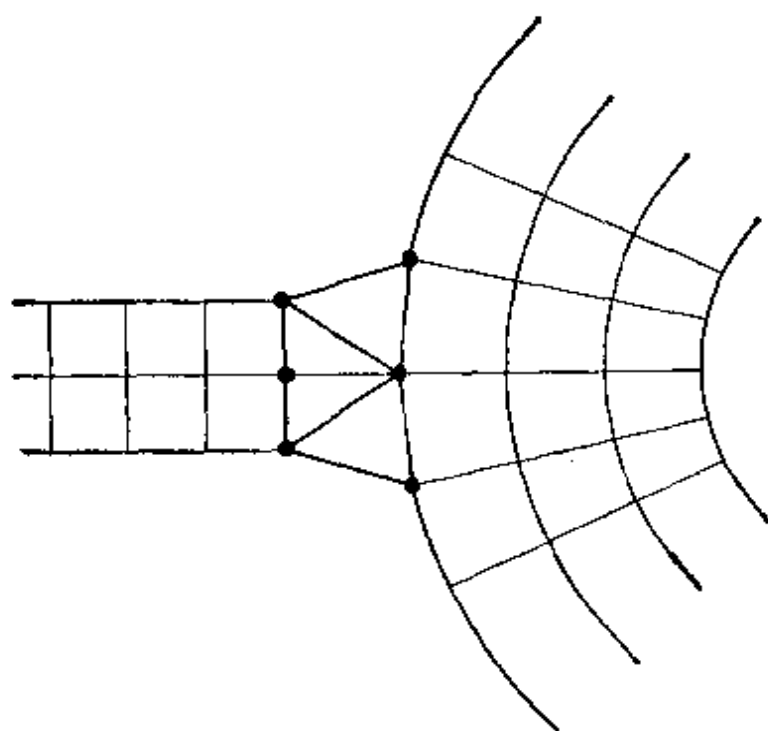


图 4-11 两种不同网格的连接

4·3 边界、界面、复合传热体和非均匀物性

4·3·1 边界点

到目前为止，只是在第三章3·4节和这一章的4·1节及4·2节

稍许提到了边界节点以及适合于所论问题的边界条件的处理。现在考察这样一个问题：它有一个覆盖求解区域的格子系统，区域的边界与网格线相重合。为了使得这个问题能够求解，必须对整个这组节点的各个节点列出有限差分方程。这组节点一般来说由全部内部节点和全部边界节点所组成。各个内部节点的有限差分方程可以由目前为止介绍过的材料推导出来，现在的任务是要对各个边界节点提供一个方程式。就传热而言，各边界点常出现两种情况，以图4-12的 B 点为例：

(1) 边界表面温度已知（已知狄立克莱边界条件），在这种情况下：

$$T_B = T_G \quad (4.3.1)$$

式中 T_G 是在规定的问题中所给定的已知温度。因此公式4.3.1为 B 点提供了一个简单的有限差分方程。如果没有这个方程式，那么 T_B 就是未知数，于是问题得不到解决。

(2) 边界表面温度是未知的（诺曼导数边界条件）。在这种情况下，需要补充规定关于外法线方向温度梯度 $\frac{\partial T}{\partial n}$ 所取的形式。

$\frac{\partial T}{\partial n}$ 可以有下面几种形式：

$$\frac{\partial T}{\partial n} = K \text{ (已知的)} \quad (4.3.2)$$

式中 K 是一已知量。

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{h}{k}(T_E - T_A) \text{ (对流)} \quad (4.3.3)$$

式中 h 为表面传热系数（一般总是认为 h 是事先已知的，但是实际上它与所讨论的周围环境有关——见第二章2.1节）。 k 是导热系数， T_E 和 T_A 分别是边界温度和环境温度。公式4.3.2也可以写成下面的形式：

$$\frac{\partial T}{\partial n} = -\frac{FE\sigma}{k}(T_B^4 - T_A^4) \quad (\text{辐射}) \quad (4.3.4)$$

式中 F 是几何因子, E 是辐射率, σ 是斯蒂芬—玻尔兹曼常数 (常常用字母 \mathcal{F} 来代替 FE 的乘积。 \mathcal{F} 是综合的形状——辐射率因子)。

给出这两种一般情况之后, 现在的问题就是讨论怎样把公式 4.3.1 至公式 4.3.4 与边界点的有限差分方程结合起来。事实上, 公式 4.3.1 并不存在什么新问题, 因为如果边界温度是已知的话, 那么它们就可以直接写进有关的有限差分方程中去。而其它的边界条件——对流和辐射——对于稳定态和不稳定态将分别予以考虑。

4.3.2 对流边界条件 (稳定态)

现在参考图 4-12 来研究由公式 4.3.3 给出的对流边界条件。该图表示规则的二维直角坐标物体的一部分, 其环境温度为 T_A 。

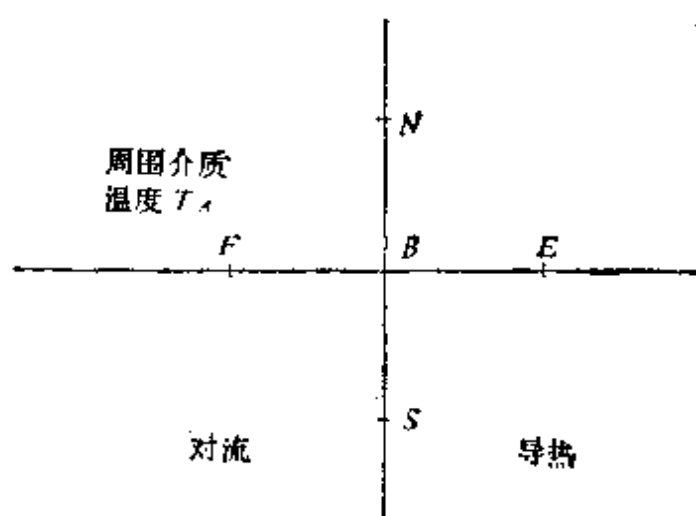


图 4-12 具有正方形网格的二维直角坐标物体的西部对流边界表面

为简化起见, 取格子点位于边长为 Δ 的均匀正方形网格上, 且内热源忽略不计。可以采用两种方法导出有限差分方程: 即偏微分方程的直接代替法和能量平衡法。

(1) 偏微分方程的直接代替法。这种方法需要引入一个假想的节点 F , F 点离 B 点的距离为 Δ (见图 4-12)。但是我们不能

设 $T_F = T_A$ ，因为 T_F 还受邻近物体的影响，而 T_A 是远离物体的环境温度。因此引入假想点 F 的温度之后，一般的有限差分方程就可用于 B 点了。然后在 B 点经过近似于 $\frac{\partial T}{\partial n}$ 的中心差分公式 4.3.3 消去 T_F ，因此：

$$T_N + T_S + T_E + T_F - 4T_B = 0$$

$$\frac{T_F - T_E}{2\Delta} = -\frac{h}{k}(T_B - T_A) \quad (4.3.5)$$

这两个公式足以确定 T_B 。一般总是消去其中的 T_F ，因而得到所需要的 T_B 的表达式。

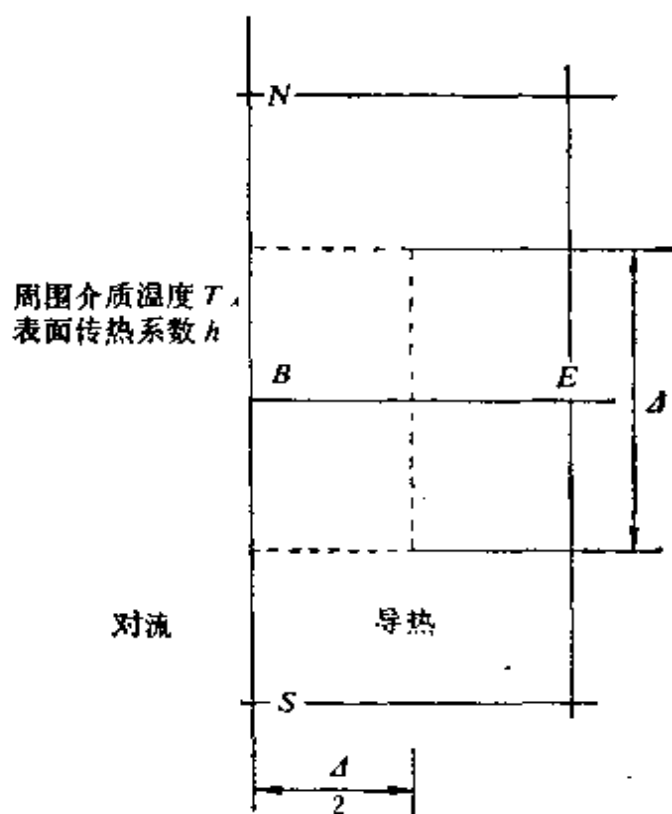


图 4-13 在具有正方形网格的二维直角坐标物体西部对流边界表面上 B 点的控制体积

(2) 能量平衡法。图4-13说明边界节点 B 的单元控制体积(面积)是如何建立起来的，该图还表明环境温度 T_A 是怎样通过传热系数 h 而影响 T_B 的。第三章3.4节讨论过这个问题，为方

便起见, 现在再重复一下。首先算出节点 i 和相邻节点 j 之间的传导系数 K_{ij} , 于是由邻点 j 传到 i 点的热流速率 Q_{ij} ($W = \text{焦/秒}$) 为:

$$Q_{ij} = K_{ij}(T_j - T_i) \quad (4.3.6)$$

对 i 点作热平衡得出下式:

$$\sum_j Q_{ij} = \sum_j K_{ij}(T_j - T_i) = 0 \quad (4.3.7)$$

假设在没有内热源并且是稳定态的条件下该式才成立。

对于内部节点 i :

$$K_{ij} = \frac{k A_{ij}}{L_{ij}} \quad (4.3.8)$$

式中 k 是导热系数, A_{ij} 是与 i 点和 j 点之间的热流方向相垂直的平均表面积, L_{ij} 是 i 点和 j 点之间的距离。周围环境中的节点 j 和节点 i 之间的传导系数是:

$$K_{ij} = h_i A_{ij} \quad (4.3.9)$$

式中 h_i 是对表面积为 A_{ij} (节点 i 的单元控制体积的表面) 的平均表面传热系数。 A_{ij} 所在的环境温度为 T_j 。就现在我们这里所讨论的情况而言, 图中的 B 点就当作 i 点, 而四个 j 点就是 N 、 S 、 E 和 A (周围环境)。 L_{ij} 和 A_{ij} 都可以由图 4-13 虚线所示的 B 点的单元控制体积计算出来。对于现在讨论的这种情况, 运用公式 4.3.7, 且将公式 4.3.8 和 4.3.9 代入公式 4.3.7 得到:

$$k \frac{\Delta}{2} \frac{T_N - T_B}{\Delta} + k \frac{\Delta}{2} \frac{T_S - T_B}{\Delta} + k \Delta \frac{T_E - T_B}{\Delta} + h \Delta (T_A - T_B) = 0 \quad (4.3.10)$$

对公式 4.3.10 进行整理后得出:

$$T_B = \frac{\frac{1}{2} (T_N + T_S) + T_E + Bi T_A}{2 + Bi} \quad (4.3.11)$$

式中 $Bi = (h/k)\Delta$ 是毕欧数。消去公式 4.3.5 中的 T_F 也可以得到对于 T_E 的同样的方程式。这就表明在这种情况下两种方法是等价

的。

但是，如果边界节点 B 不是在边上，而是在角上，如图4-14所示边界点在西南角上那样，那么公式4.3.11就不适用了。运用热平衡近似式4.3.7，并借助于公式4.3.8和4.3.9，则对于边界点 B 得到：

$$k \frac{\Delta}{2} \frac{T_N - T_B}{\Delta} + k \frac{\Delta}{2} \frac{T_E - T_B}{\Delta} + h \left(\frac{\Delta}{2} + \frac{\Delta}{2} \right) (T_A - T_B) = 0 \quad (4.3.12)$$

得出上式的过程中，还利用了这样一个事实： $\left(\frac{1}{2} \Delta + \frac{1}{2} \Delta \right)$ 的面积所处的环境温度为 T_A 。

经整理，并用毕欧数 $Bi = (h/k)\Delta$ 代替得到：

$$T_B = \frac{\frac{1}{2} (T_N + T_E) + Bi T_A}{1 + Bi} \quad (4.3.13)$$

这个表达式本来也可以用 B 点的偏微分方程的直接有限差分近似推演出来，不过要先引入两个假想点，然后再消去它们。

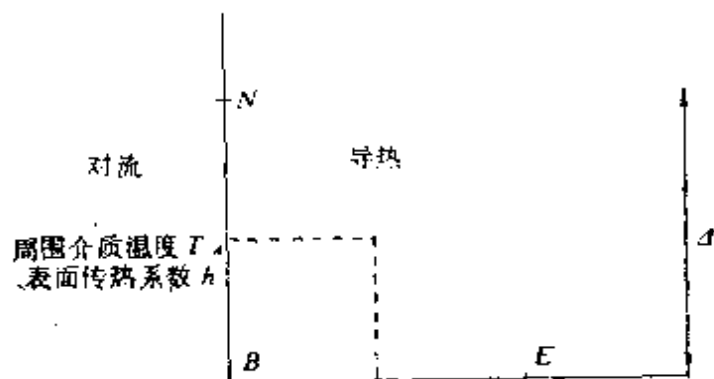


图 4-14 具有正方形网格二维直角坐标物体的对流边界
在西南角上 B 点的控制体积

4.3.3 对流边界条件（不稳定态）

一般说来，即使存在内热源项或不稳定态条件，这两种方法的等价性同样得到遵守。关于这个问题，只要对公式4.3.5和4.3.

10进行简单的修正，就可以引伸出这个结论。例如如图4-15所示，考察一个一维的不稳定态问题，其物理性质 ρ 、 C_p 和 k 均为常数，其左边服从对流边界条件。在很小的时间间隔 Δt 内的能量平衡给出边界节点0的方程如下：

$$\rho C_p V_0 \frac{\Delta T_0}{\Delta t} = -\frac{k}{\Delta x} (T_1 - T_0) + h(T_A - T_0) \quad (4.3.14)$$

式中 $V_0 = \frac{\Delta x}{2}$

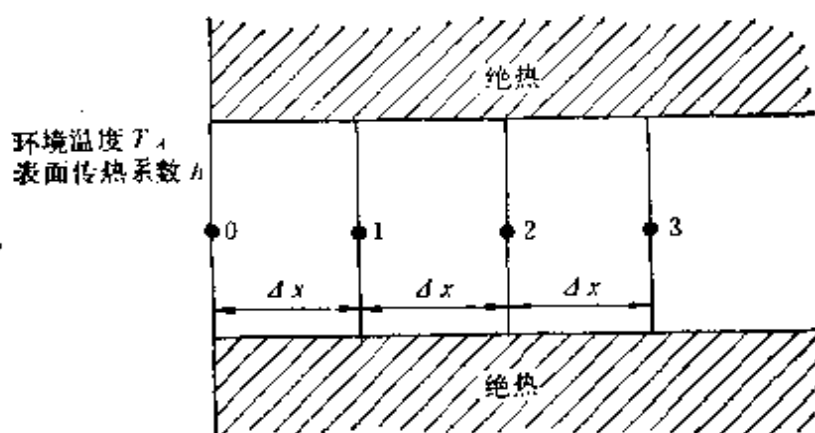


图 4-15 一维对流边界表面

公式4.3.14写成显式形式，等式右端的温度都是已知的（在时间为 t 时的温度）。该式也同样可以用隐式形式来表示，用时间为 $t + \Delta t$ 时的温度作为等式右端的温度。根据前面第三章3.5节的讨论，可以认为显式情况常用后向时间差分，而隐式情况则常用前向时间差分。当然，也可以用后向时间差分和前向时间差分的加权平均。因此公式4.3.14可以移项并表示为显式形式：

$$T'_0 = 2Fo \left[T_1 + Bi \cdot T_A + T_0 \left(\frac{1}{2Fo} - 1 - Bi \right) \right] \quad (4.3.15)$$

隐式形式是：

$$T_0 = 2Fo \left[-T'_1 - Bi T'_A + T'_0 \left(\frac{1}{2Fo} + 1 + Bi \right) \right] \quad (4.3.16)$$

式中 $Fo = \frac{k\Delta t}{\rho C_p (\Delta x)^2}$;

$$Bi = \frac{h\Delta x}{k}。$$

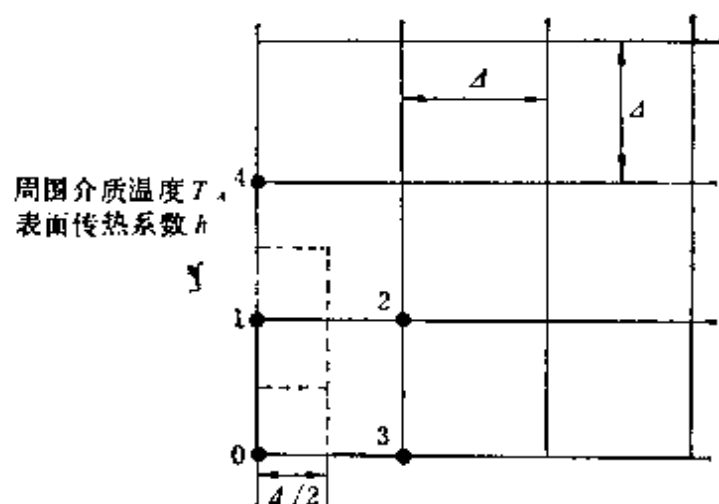


图 4-16 二维对流边界表面

如图4-16所描绘的那样，在具有边长为 Δ 的正方形网格的二维矩形区域里出现两类边界节点。一类是在边上（例如节点1），另一类是在角上（例如节点0）。节点0和节点1的隐式差分方程和显式差分方程表示如下：

对节点0：

显式形式

$$4T_0' = 2Fo \left[T_1 + T_3 + 2BiT_A + T_0 \left(\frac{1}{2Fo} - 2 - 2Bi \right) \right] \quad (4.3.17)$$

隐式形式

$$T_0 = 2Fo \left[-T_1' - T_3' - 2BiT_A' + T_0' \left(\frac{1}{2Fo} + 2 + 2Bi \right) \right] \quad (4.3.18)$$

对节点1：

显式形式

$$T'_1 = F\sigma \left[T_0 + 2T_2 + T_4 + 2BiT_A + T_1 \left(\frac{1}{F\sigma} - 4 - 2Bi \right) \right] \quad (4.3.19)$$

隐式形式

$$T_1 = F\sigma \left[-T'_0 - 2T'_2 - T_4 - 2BiT'_A + T_1 \left(\frac{1}{F\sigma} + 4 + 2Bi \right) \right] \quad (4.3.20)$$

注意，隐式公式包含几个新的时间层的未知数，因而增加了求解的复杂性。而显式公式则可直接得出新的温度值。

4.3.4 辐射边界条件（稳定态）

处理表示辐射边界条件的公式 4.3.4 不完全象处理表示对流的公式 4.3.3 那样简单。例如设刚才讨论的二维稳定态问题（如图 4-13 所示）中的 B 点服从辐射边界条件，而不是服从对流边界条件，于是 B 点的能量平衡是：

$$k \frac{\Delta}{2} \frac{T_N - T_B}{\Delta} + k \frac{\Delta}{2} \frac{T_S - T_B}{\Delta} + k \Delta \frac{T_E - T_B}{\Delta} + \mathcal{F}\sigma(T_B^4 - T_A^4) = 0 \quad (4.3.21)$$

很遗憾，该式的主要未知数 T_B 是非线性的。考虑到 松弛 求解过程的需要，用近似法对上面的方程进行线性化处理会方便一些。

令

$$T_B^4 \approx T_{B,0}^3 \cdot T_B \quad (4.3.22)$$

式中 $T_{B,0}$ 是上一次计算出的节点 B 的温度，因此是已知数。所以可将 T_B^4 的一部分当作一个系数来对待，而另一部分则当作一个未知数 T_B 来对待。另外一个方法，令 $\phi = T^4$ ，将得出下面的近似式：

$$\phi \approx \phi_0 + \left. \frac{\partial \phi}{\partial T} \right|_0 \Delta T$$

$$\text{因此} \quad T_B^4 \approx T_{B,0}^4 + 4T_{B,0}^3(T_B - T_{B,0}) = 4T_{B,0}^3 \cdot T_B - 3T_{B,0}^4 \quad (4.3.23)$$

该式 T_B 还是线性的，并将 B 点在上一次计算出的温度与常数项一起当作一个系数来使用。

4.3.5 辐射边界条件（不稳定态）

刚才讨论的这些基本概念也可以引伸到不稳定态问题。再参考图4-15所示的一维物体，但是现在该物体的边界受辐射热流的作用。经很短的时间间隔 Δt 的能量平衡得到下式：

$$\rho C_P \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta T_0}{\Delta t} = \frac{k}{\Delta x} (T_1 - T_0) + \mathcal{F} \sigma (T_A^4 - T_0^4) \quad (4.3.24)$$

因此其显式和隐式公式如下：

$$\text{显式} \quad T'_0 = 2Fo \left[T_1 + \left(\frac{1}{2Fo} - RT_0^3 - 1 \right) T_0 + RT_A^4 \right] \quad (4.3.25)$$

$$\begin{aligned} \text{隐式} \quad \frac{1}{2Fo} T_0 + 3R(T_0^3 - T_A^4) = & \left(\frac{1}{2Fo} + 1 + 4RT_0^3 \right) \\ & \times T'_0 - T_A^4 - 4RT_A^3 T'_0 \end{aligned} \quad (4.3.26)$$

式中 $R = \mathcal{F} \sigma \Delta x / k$ ，它类似于毕欧数。已用公式4.3.23消去了隐式方程中的非线性项。第八章8.9节对这些节点作了说明。

4.3.6 不规则边界

许多物理问题具有不规则的边界。例如图4-17所示的以直角坐标表示的弯曲边界就属于不规则边界。现在考察没有内热源并且由规则的矩形网格所覆盖的二维稳定态问题。格距为 Δx 和 Δy ，给定任意的 $\Delta > 0$ ，这样来取 S_N 和 S_S 的值，以使得：

$$S_N \Delta = \Delta x \text{ 和 } S_S \Delta = \Delta y$$

如果边界条件是一已知的温度（狄立克莱条件——表示温度已知），则 T_A 和 T_B 为已知数。此处 A 和 B 是弯曲边界与平常格子线的交点。由不规则网格将导出 P 点的有限差分方程（关于不规则网格的细节已于第三章3.3节介绍过）。

在图4-17中， S_N 和 S_E 的中心为 P 点的拉普拉斯方程的适当形式是：

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{(\Delta x)^2} \left[\frac{1}{S_E(S_E+1)} T_A - \frac{1}{S_E} T_P + \frac{1}{1(S_E+1)} T_W \right] \\
& + \frac{1}{(\Delta y)^2} \left[\frac{1}{S_N(S_N+1)} T_E - \frac{1}{S_N} T_P \right. \\
& \left. + \frac{1}{1(S_N+1)} T_S \right] = 0 \quad (4.3.27)
\end{aligned}$$

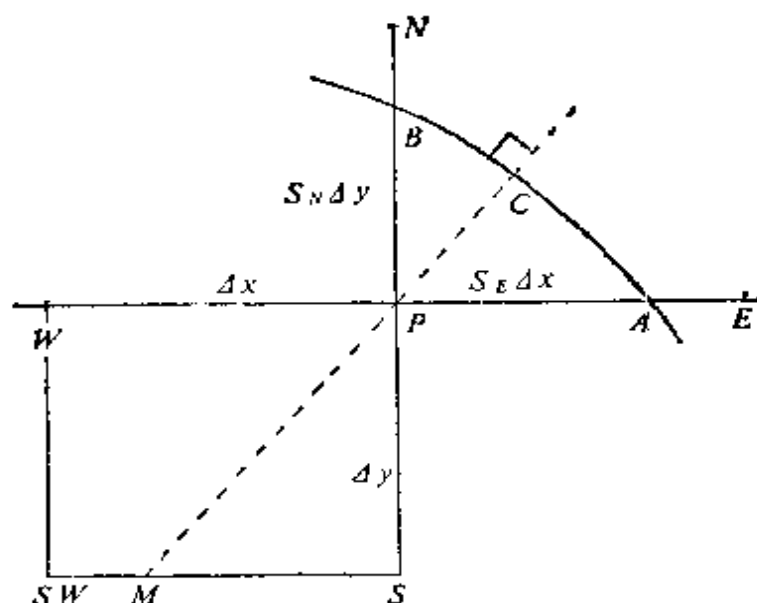


图 4-17 靠近弯曲边界的有限差分

现在需要对该式移项以提出 T_P 。经过整理后的公式仅具有 $\Delta x + \Delta y$ 的阶数，而不是 $(\Delta x)^2 - (\Delta y)^2$ ，后者适用于平常的规则矩形格子形式，因此已知温度的弯曲边界的模型，使得精确度降低一个数量级，而且其误差在一定程度上还要向内传播。我们可以利用更高阶精确度的公式（例如这种公式可用待定系数法推导出来）并包含更多的内部节点。但是靠近边界的不同点，其 S_N 和 S_E 是不同的，而且所有这些点要求用不同的公式。因此，人们对于上面给出的精确度较差的公式也就满足了。

对于温度法向导数 $\frac{\partial T}{\partial n}$ 已知的弯曲边界（纽曼条件），可以选用简单的但不甚精确的公式（阶数为 $\Delta x + \Delta y$ ），也可选用比较复杂但比较精确的公式（阶数为 $\Delta x^2 + \Delta y^2$ ）。一个简单的方法〔贝利

(Bayley) 等人, 1972; 拉泽洛斯 (Razelos), 1973 的著作]是构造一条边界法线, 该法线通过 P 点交于 M 点, 在该点边界法线与直线 $S-SW$ 或 $W-SW$ 相割。给出 S 、 SW 和 W 点的一般形式的 (包括 P) 的有限差分方程, 但是 T_M 是从 S 到 SW 的线性插值法推导出来的, 因此 T_P 由下式导出:

$$\frac{T_P - T_M}{L_{PM}} = \left. \frac{\partial T}{\partial n} \right|_c$$

式中 L_{PM} 是从 P 到 M 的长度。给定的法向温度梯度是一个已知数, 或者可由象公式 4·3·3 那样的公式导出。另一个简单的方法是用局部三角形网格系的热平衡方法。这个方法在 3.2 节讨论过, 并示于图 4-9 中。对于不规则边界的导数边界条件, 其阶数为 $(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2$ 的较精确表达式, 可参阅专门的文献 [见史密斯 (Smes), 1969 的著作]。

4·3·7 界面

正如第一章 1·2 节所讨论的那样, 传热现象经常发生在复合结构上。这种复合结构由若干不同的材料组成, 各种材料之间由一个薄的界面连接。图 4-18 描绘了通过这样的界面进行的稳定态

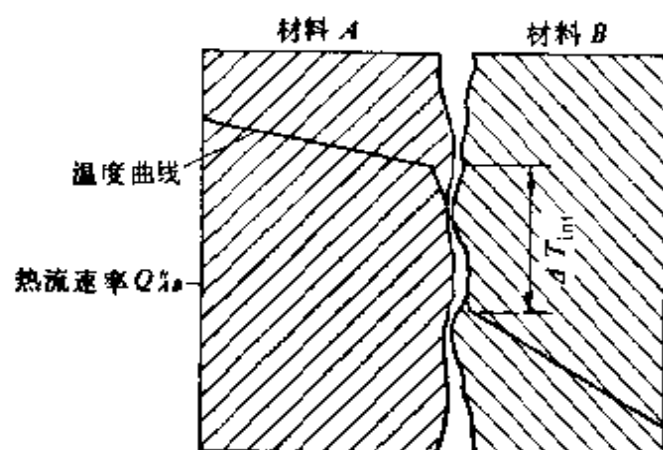


图 4-18 通过一典型界面的温度分布

导热情况, 在界面处有一个明显的温度间断, 假想界面的温度降 ΔT_{int} 可由间断处每种材料的局部线性温度分布图的外插法求

出，其稳定热流为：

$$Q_{AB}'' = -k_A \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_A = -k_B \frac{\partial T}{\partial x} \Big|_B \quad (4.3.28)$$

单位界面传导系数为：

$$h_i = \frac{Q_{AB}''}{\Delta T_{int}} \quad (4.3.29)$$

当两种材料接触很理想时（例如熔化的或焊接的材料），就不存在温度降 ΔT_{int} ，于是 $h_i \rightarrow \infty$ ，这时界面温度是连续的，即 $T_A = T_B$ 。但是一般来说，由于 $k_A \neq k_B$ ，所以温度梯度往往是不连续的。

用能量平衡法也可以精确地导出有限差分方程，这种方法曾用于具有对流边界条件的边界节点（例如公式4.3.13和4.3.16）。

4.3.8 复合传热体

通过如前所述的能量平衡法，可以导出热流流过不同材料的有限差分方程。通过逐步修正的方法，我们首先考虑通过两个尺寸一样但热物理性质不同的材料所组成的结构（见图4-19）的热流。

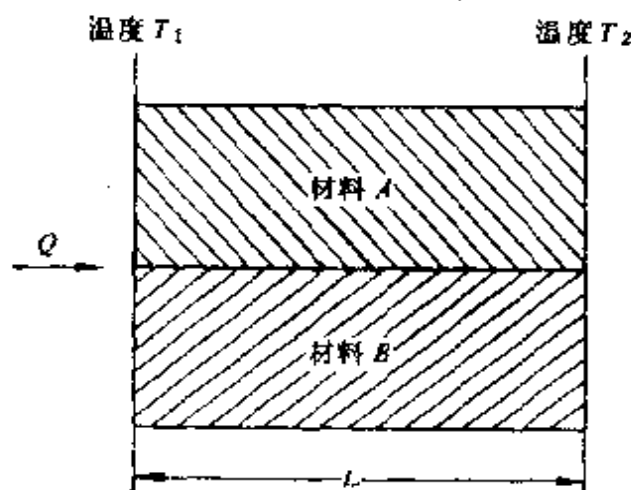


图 4-19 一维复合系统

这两种材料的两侧具有同样的温度 T_1 和 T_2 ，并设其热流是一维的。问题很简单，总的导热系数 k_{ov} 由下式给出：

$$k_{ov} = \frac{1}{2}(k_A + k_B) \quad (4.3.30)$$

现在将公式4·3·30直接用于如图4·20所示的二维问题。节点E和节点0之间的热流由下式给出：

$$Q_{E0} = -\frac{1}{2} (k_A + k_B) \Delta \left(\frac{T_E - T_0}{\Delta} \right) \quad (4.3.31)$$

节点N和节点0之间的热流也可用类似的公式来求。

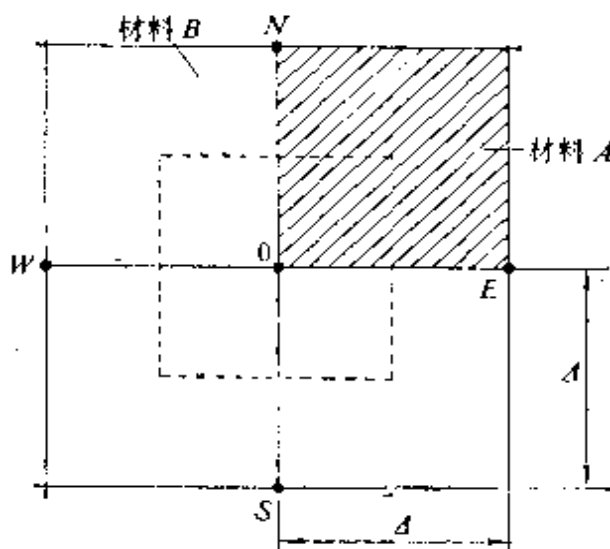


图 4-20 关于0点的二维复合系统

现在控制体积内所包含的材料其密度和比热都是不同的，因此对于不稳定态问题，必须求出总的 (ρC_p) 项。由于控制体积的 $\frac{1}{4}$ 是材料A，而其余部分是材料B，于是当量的 (ρC_p) 项由下式给出：

$$(\rho C_p)_{\text{节点0}} = 0.75(\rho_B C_{p_B}) + 0.25(\rho_A C_{p_A}) \quad (4.3.32)$$

将公式4·3·31和4·3·32应用于图4-20的二维问题(忽略内热源)，于是不稳定态条件下节点0的有限差分方程是：

$$\left[\frac{k_A + k_B}{2} (T_N - T_0) + \frac{k_A + k_B}{2} (T_E - T_0) + k_B (T_S - T_0) + k_B (T_W - T_0) \right] = [0.75(\rho_B C_{p_B}) + 0.25(\rho_A C_{p_A})]$$

$$\times \Delta^2 \frac{(T'_0 - T_0)}{\Delta t} \quad (4.3.33)$$

关于该课题更详细的情况见第八章8·9节和8·10节。

4·3·9 非均匀物性

当温度变化不大时，可认为导热系数是一常数。但是如果预先估计到温度会有很大变化，则必须考虑导热系数 k 和温度之间的依赖关系。例如可写成：

$$k = k(T)$$

因此节点 i 和节点 j 之间的传导系数是：

$$K_{ij} = \frac{k(T_i) + k(T_j)}{2} \cdot \frac{A_{ij}}{L_{ij}} \quad (4.3.34)$$

式中 A_{ij} 是垂直于流动方向的面积， L_{ij} 是 ij 两点的距离。如果 k 与 T 是线性关系，则可采用下式：

$$k\left(\frac{T_i + T_j}{2}\right) = \frac{k(T_i) + k(T_j)}{2}$$

在解题的时候，为了计算温度场，可以用 k 的平均值。根据该新的温度场可以求出新的 k 值。从而又可以重新计算温度场。连续对 k 和 T 进行迭代，直到获得满意的收敛为止。第八章8·9节和8·10节对该课题作了进一步的讨论。

4·4 精确度和外插法^①

4·4·1 唯一解〔见扬(Young)1962的著作〕

许多问题都与二维稳定态情况有关。为了巩固这个概念，现在考察直角坐标系的二维稳定态问题。一般有限差分方程可写成下面的形式：

$$a_p T_p = \sum_{j=N,S,E,W} a_j T_j + S_p \quad (4.4.1)$$

式中 a_p 和 a_j 都是正值，且

$$a_p \geq a_N + a_S + a_E + a_W \quad (4.4.2)$$

① 本章只涉及稳定态问题。

当 P 与狄立克莱边界接近时, 则不等式成立, 于是总和项中至少有一项转移到热源项 S_P 中去。例如在边长为 Δ 的正方形网格中, 第三章公式 3.3.2 是:

$$T_O + T_N + T_E + T_W - 4T_P + \frac{H}{k} \Delta^2 = 0 \quad (4.4.3)$$

公式 4.4.3 与 4.4.1 的形式是一致的, 只要对节点的标记符号稍微改动一下就行, 即 $a_P = 4, a_j = 1$ (对所有的 j), $S_P = \frac{H}{k} \Delta^2$

我们所遇到的大多数问题同样有一个连通的解区域。这里指的是任意两点可以用该区域内相邻点的直线连接起来。

可以证明适用于该区域所有各点的公式 4.4.1 具有唯一解。为此其充分和必要条件是线性方程组的系数行列式不等于零。这就是说, 如果按边界条件和 S_P 为零所得到的齐次方程组只有平凡解, 其所得的解处处为零。用反证法可以证明这点。

假设齐次方程组具有非零解, 则对于某点 P 来说, $T_P \neq 0$, 且不失一般性我们可取 $T_P > 0$ 。设 M 是 T 的这样一些正值中的最大值, 且设它出现在 P 点, 则由公式 4.4.1 和 4.4.2 可以得出结论: 在其相邻各点 T 必须取 M 值。继续进行这个过程, 并利用区域的连通性, 由此得出: 在区域内的所有各点, 包括边界点在内, $T = M$ 。这就与边界点上 $T = 0$ 的假设相矛盾。因此证明在区域内处处 $T = 0$ 。由此得出结论: 公式 4.4.1 具有唯一解。

4.4.2 近似解和外插法

边界值问题可以有唯一解, 但是大多数问题在于寻求唯一解。而我们的任务是使得象公式 4.4.1 那样的有限差分方程的近似解如何接近于偏微分方程的真实解。在一般情况下, 可以证明当 Δ 趋近于零时, 有限差分方程的解趋近于偏微分方程的解。还有一个问题就是在计算上如何得到接近于有限差分方程的精确解。此外还要弄明白, 对于一给定的格子尺寸 Δ , 有限差分方程的精确解精确到什么程度的问题。

关于前者, 松弛法给出了代数差分方程组的近似解, 用五点

或九点有限差分公式（见第三章3.3节）对边长为 Δ 的正方形网格作误差估计是可行的。其误差分别不超过 $RL^2\Delta^2/4$ 和 $R^2L^2\Delta^2/24$ 。式中 R 是最大绝对剩余， L 是包围整个区域的圆半径〔见沃尔什(Walsh), 1966的著作〕。

根据局部误差可以找到最大误差的界限〔见扬(Young) 1962的著作〕。例如在许多情况下，仅包含规则内点的 R 区域周围的独立克莱边界条件，可以证明最大误差的模以 $M_4L^2\Delta^2/24$ 为界。式中 L 是包围全部区域的圆半径， M_4 是对所有点的解在各个方向上所取的四阶偏导数的模的上限。由于要直到解的本身已知时 M_4 才能知道，所以不可能事先对误差做出估计。但是借助于差商有时能够对 $\frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial y^2}$ 作出估计。

$$\frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{1}{\Delta^2} [(T_{NE} - 2T_N + T_{NW}) - 2(T_E - 2T_P + T_W) - (T_{SE} - 2T_S + T_{SW})] \quad (4.4.4)$$

利用计算得到的数值，并取它作为 M_4 的估计值。注意：

$$\frac{\partial^4 T}{\partial x^2 \partial y^2} = -\frac{\partial^4 T}{\partial x^4} = -\frac{\partial^4 T}{\partial y^4}$$

此式是由基本的二维拉普拉斯方程得出的，在公式4.4.4中采用显而易见的方位符号。

后面这种类型的误差是由于用有限差分方程的解代替偏微分方程的解而造成的，因而在格子的每一点引起离散化（即截断）误差。一般来说，当格子很细时，预料这个误差将会减小，因而下面我们可以利用这个性质。对于边长为 Δ 的正方形网格，第三章公式3.3.7和3.3.8五点和九点公式的误差界限分别与 Δ^2 和 Δ^6 成正比。从粗网格开始到细网格的进程中，假设 T_1 和 T_2 是某一固定空间位置的温度计算值，该值是分别通过二个不同的网格尺寸 Δ_1 和 Δ_2 而得到的，且 $\Delta_1 > \Delta_2$ ，那么与该点的 T_1 或 T_2 相比更为近似的值是〔见贝利(Bayley)等人，1972，拉泽洛斯(Razelos), 1973的著作〕：

$$\text{五点公式: } T = \frac{T_2 - \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^2 T_1}{1 - \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^2} \quad (4.4.5)$$

$$\text{九点公式: } T = \frac{T_2 - \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^6 T_1}{1 - \left(\frac{\Delta_2}{\Delta_1}\right)^6}$$

通常在细分网格时，特别重要的是将格距减半，以使得 $\Delta_1 = 2\Delta_2$ 。在这种情况下公式4.4.5变成：

$$\text{五点公式: } T = \frac{(4T_2 - T_1)}{3} \quad (4.4.6)$$

$$\text{九点公式: } T = \frac{(64T_2 - T_1)}{63}$$

4.4.3 例

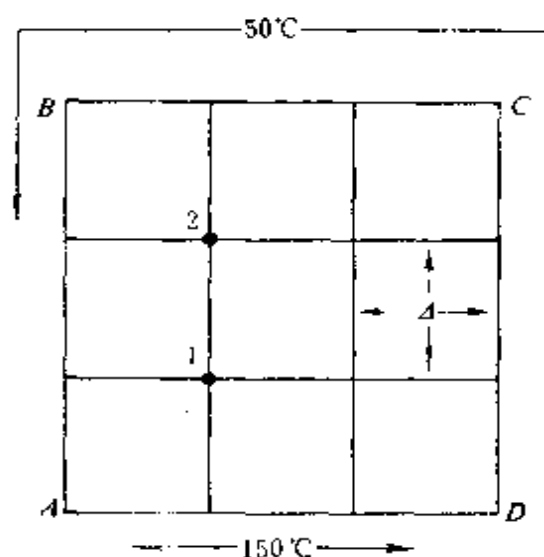


图 4-21 底面为150°C其它三面为50°C的正方形平板①

图4-21所示为一正方形平板，其一面为150°C，另外三面的温度为50°C，对两种格子应用五点公式计算温度。其中一种网格

① 原文为矩形平板。——译注

尺寸精细到 $\Delta/2$ ，先求出图中 1 点和 2 点两个固定空间位置的计算温度，然后利用公式4·4·6进行插值计算，并与由粗格子的九点公式所得到的解以及用分离变量和傅氏级数所得到的精确解进行比较[见卡斯劳 (Carslaw) 和耶格 (Jaeger), 1959 的著作]，其结果列于表4-4。利用九点公式时，需要知道 A 角和 D 角上的温度，而这些温度在我们讨论的问题中是超给定的，因此取其平均值 100°C 。

表 4-4 用不同方法所确定温度的比较

方 法	T_1	T_2
五点，网格尺寸 Δ	87.50	62.50
五点，网格尺寸 $\Delta/2$	87.88	62.12
外插，应用公式4·4·6	88.01	61.99
九点，网格尺寸 Δ	88.10	61.90
精确分析解	88.18	61.93

我们注意到由于对五点公式的网格尺寸减半所得到的改善，或由于用九点公式所得到的改善。插值温度使精确度大约提高一倍。

插值到网格尺寸为零的极限时，公式4·4·5和4·4·6要求知道差分表示式的精确度的阶数。如果不知道这一点，虽然仍可得到插值公式，但是那就要复杂得多。仍设 T_1 和 T_2 是网格尺寸分别为 Δ_1 和 Δ_2 的同一点上所得到的有限差分解，取主要误差项与 Δ^n 成正比，则

$$T - T_1 = A\Delta_1^n$$

$$T - T_2 = A\Delta_2^n$$

式中 A 和 n 均为未知常数。消去 A 得到：

$$T = \frac{\Delta_2^n T_1 - \Delta_1^n T_2}{\Delta_2^n - \Delta_1^n} \quad (4.4.7)$$

代入 $n=2$ 或 6 及 $\Delta_1=2\Delta_2$ 之后，得出公式4·4·5和4·4·6，但是当 n 是未知数时，则可求网格尺寸为 Δ_3 的同一点的另一有限差分解 T_3 来估算 n 值。此处 $\Delta_1=2\Delta_2=4\Delta_3$ 。 n 由下式估算：

$$2^n = \frac{T_2 - T_1}{T_3 - T_2} \quad (4.4.8)$$

4.4.4 延迟修正法

在这个方法中，必须计算一个初始的近似解，对它进行差分以得到修正项。把这些修正项附加到有限差分方程中去并保持为常数，然后解这个修正了的有限差分方程，于是得到一个更精确的解。

现在我们来考察具有均匀矩形格子的二维直角坐标系的拉普拉斯方程。第三章3.1节概述了各种有限差分方程逼近导数的方法，尤其是它可表示为：

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_p = \frac{1}{(\Delta x)^2} \left[\delta^2 - \frac{1}{12} \delta^4 + \frac{1}{90} \delta^6 - \dots \right] f_p$$

通常总是截去第一项以后的各项以得到大家所熟悉的公式如下：

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_p = \frac{f_E - 2f_p + f_W}{(\Delta x)^2}$$

式中采用常用的方位符号。该式与 y 的二阶导数联立，得出通常的五点公式，其精确度的阶数为 $(\Delta x)^2$ 。包括第二项在内则得出：

$$\left. \frac{d^2 f}{dx^2} \right|_p = \frac{f_E - 2f_p + f_W}{(\Delta x)^2} - \frac{1}{12(\Delta x)^2} [f_{EE} - 4f_E + 6f_p - 4f_W + f_{WW}] \quad \textcircled{1}$$

对于 y 的导数也可得出类似的结果。人们不愿把所有这些表达式代入下式中：

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

利用九点将得出一个大星座公式，其精确度的阶数为 $(\Delta x)^4 + (\Delta y)^4$ ，而它用来处理邻近边界是靠不住的，所以不采用它。而

① 原书误为 $+\frac{1}{(\Delta x)^2}$ 。——译注

是以初始近似解为基础，一次计算出修正部分，并且以后总是把这修正部分保持为常数。现在去迭代具有修正项的通常的五点公式，仍然可以导出一个得到改善的解。

4.5 稳定性和收敛性^①

4.5.1 误差

如上节所述，所谓误差指的是有限差分方程的近似解和偏微分方程精确解之间的差值。尽管我们可能不知道这种精确解，甚至也可能根本不存在这种精确解的表达式。误差有两类，第一类叫截断误差，它是由于用有限差分代替导数的计算所造成的。这类误差取决于初始给定的温度分布、边界条件、有限差分格式的选择以及在计算中傅立叶数 Fo 的选择。收敛性指的是将时间空间格子逐步分细以使得近似计算解接近于精确解的意思。并不是所有的偏微分方程的有限差分法模拟都具有这种收敛性。第二类误差是数值误差，即舍入误差。这类误差是在任何一种计算中对有效数字的限制所引起的。而且对于与傅立叶数相关的时间空间

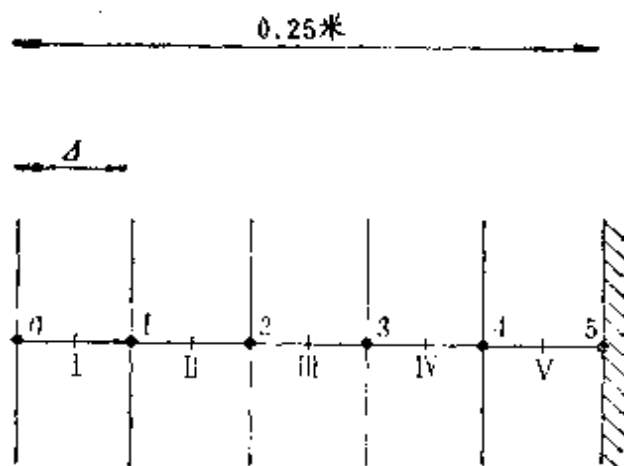


图 4-22 不稳定态数值计算的一维平板的网格

格子来说，这类误差在某些有限差分格式里是固有的。这里指的

^① 本节涉及不稳定态问题，并遵循拉泽洛斯(Razelos)，1973年的著作的观点。

是那些随着计算解的进行其摆动值的传播和增长方面不稳定的有限差分格式。下面的图解可作为这种误差的例子。

4.5.2 例

图4-22所示为一无限大平板，其厚度为0.25米，热扩散系数 $\alpha = 3.472 \times 10^{-6}$ 米²/秒，最初温度为0°C。当时间 $t = 0$ 时，平板的一面突然升至100°C，并保持为100°C的温度（与具有对流边界条件的 $T = 100$ 和 $h = \infty$ 的平板相当）。而另一面是绝热的，因而发生一维的不稳定态传导传热。如图所示分为五等份，并在1至4的各点上应用显式有限差分方程（第三章公式3.5.5），于是我们可以计算各点的时间—温度演变情况。表4-5和4-6列出了计算结果，其傅立叶数分别为 $Fo = 1$ 和 $Fo = 0.25$ ，为此，由 $\Delta t = Fo(\Delta x)^2/\alpha$ 得到的相应时间增量分别为12分钟和3分钟。

4.5.3 稳定性

查阅表4-5可以看出，计算值摆动的幅度随着计算次数的增加而增大。这种明显地产生不满意的计算解的不稳定现象，它只是与有限差分方程、初始条件和边界条件的一个性质，而与舍入误差完全无关（然而在不稳定格式里，舍入误差随时间而趋于增长。但是在稳定格式里，随着时间向前进展，舍入误差逐渐降低。注意表4-6的精确性，尽管这里有舍入误差。而这种误差在表4-5中是没有出现的）。

表 4-5 平板的温度反应, $Fo = 1$

t (分)	节 点 温 度 (°C)					
	0	1	2	3	4	5
0	100	0	0	0	0	0
12	100	100	0	0	0	0
24	100	0	100	0	0	0
36	100	200	-100	100	0	0
48	100	-200	400	-200	100	0
60	100	700	-800	700	-300	
72	100	-1400	2200	-1800	1200	

很明显，空间和时间增量 Δx 和 Δt 是不能随意选取的，而它们必须满足于一定的稳定性判据，这种稳定性判据可用分析的方法建立起来。然而根据基本的道理也可以定出简单的稳定性判据，这个判据对于显式格式的应用是满足要求的。现在考察一般的显式不稳定态有限差分方程（第三章公式3·5·3）：

$$T_O + T_I + T_E + T_W + T_N + T_S - \left(6 - \frac{1}{Fo}\right)T_P = \frac{1}{Fo}T'_P \quad (4.5.1)$$

式中傅立叶数 $Fo = \alpha \Delta t / \Delta^2 = k \Delta t / \rho C_P \Delta^2$ 。事实上对于 $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ 的均匀规则网格， $T_j / S (j = 0, 1, N, S, E \text{ 和 } W)$ 的系数全是正的并等于1。这里所说的 T_j 指的是围绕节点 P 的所有六个节点的温度。假如 T_P 的系数均为负值的话（这里所说的 T_P 是指时间层为 t 时 P 点的温度），那么该式表明计算时间为 t 时的 T_P 越

表 4-6 平板的温度反应, $Fo = 0.25$

t (分)	节 点 温 度 (°C)					
	0	1	2	3	4	5
0	100	0	0	0	0	0
3	100	25.0000	0	0	0	0
6	100	37.5000	6.2500	0	0	0
9	100	45.3125	12.5000	1.5625	0	0
12	100	50.7812	17.9687	3.9063	0.3906	0
15	100	54.8828	22.6562	6.5430	1.1719	0.1953
18	100	58.1051	26.6845	9.2285	2.2705	0.6836
21	100	60.7233	30.1737	11.8530	3.6133	1.4771
24	100	62.9058	33.2321	14.3737	5.1392	2.5452
27	100	64.7609	35.9359	16.7797	6.7993	3.8422
30	100	66.3644	38.3531	19.0736	8.5551	5.3207
精确解[卡斯劳(Carlsaw)和耶格(Jaeger) 1959年的著作]						
30分	100	65.1787	37.1830	18.0124	8.2897	5.4963

低，则 P 点在新的时间层 $(t + \Delta t)$ 时的温度就越高。但是这样就违背了热力学原理。由此得出结论：为了不违背热力学原理所

必须的条件是对于给定的空间分格应当这样来选择 Δt ，以使得 T_P 的系数不为负值。事实证明这就是显式有限差分方程稳定性的充分条件。将这一简单的原则用于各种显式差分方程，我们可以推演出下列对于傅立叶数 $Fo = k\Delta t / \rho C_F \Delta^2$ 和毕欧数 $Bi = h\Delta / k$ 的限制：

内部节点：

一维直角坐标	$Fo \leq \frac{1}{2}$
二维直角坐标	$Fo \leq \frac{1}{4}$
三维直角坐标	$Fo \leq \frac{1}{6}$
六边形的	$Fo \leq \frac{3}{4} (4.5.2)$

边界节点（对流）：

一维直角坐标	$Fo \leq 1/[2(1 + Bi)]$
一维直角坐标(位移格子)	$Fo \leq (2 + Bi)/(2 + 3Bi)$
二维直角坐标	$Fo \leq 1/[2(2 + Bi)]$
二维直角坐标(角上节点)	$Fo \leq 1/[4(1 + Bi)]$
三维直角坐标	$Fo \leq 1/[2(3 + Bi)] \quad (4.5.3)$

根据这一简单的原则，即使加上定常的内热源项也不应影响其稳定性。

很明显，如果没有位移格子系统，公式4.5.3的条件对于具有较大的毕欧数系统是不利的，即对于表面传热系数与内部传热系数之比具有较大比值的系统是不利的。例如在给定 h 、 k 和 Δ 之后，在以显式方法求解一维不稳定态问题时，则时间步长受下式限制：

$$\Delta t = \frac{\Delta^2}{\alpha} Fo \leq \frac{\Delta^2}{2\alpha(1 + Bi)} \quad (4.5.4)$$

因此当毕欧数 Bi 较大时：为了稳定性的原因， Δt 就只得取小一些。这样就引起工作量的大量增加而精确度并无显著的提高。一个简单的但精确度稍差的解决这个问题的方法是不用隐式方法，而是重新安排节点。如图4-22节点1至4所示，将节点横向移动半个格距。如公式4.53的第二式与第一式相比那样，对于对流边界条件最后得到的稳定性判据就更加放宽了。

我们也可以对加权平均隐式公式（即第三章公式3.5.12至3.5.14）建立稳定性判据，虽然它不完全象刚才讨论的显式形式那样简单。特别应当指出的是，如果

$$Fo \leq \frac{1}{2(1-2\lambda)} \quad (4.5.5)$$

则六点公式即第三章公式3.5.14^①在内部点上 是稳定的。公式4.5.5中 λ 是隐式加权因子，也就是 $\lambda=0$ 时得出显式格式， $\lambda=1$ 时为完全隐式格式。注意：如果 $\lambda \geq 0.5$ （即 $0.5 \leq \lambda \leq 1$ ），则有限差分模拟总是稳定的，这是转入完全隐式格式（ $\lambda=1$ ）的一般结论，而完全隐式格式总是稳定的。如果 T_p 包括在内热源表达式内，则一定得出与公式4.5.1相似的表达式。

4.5.4 收敛性

例如有时由于进一步细分时间步长 Δt 和距离步长 Δx ，在不稳定态问题的求解中产生稳定的有限差分表达式，而其解所得出的值趋近于不同的偏微分方程的解。如果不是这样，则可认为有限差分表达式与偏微分方程是相容的。可以证明，许多既稳定又相容的系统都是自动收敛的（这种性质是我们所希望的）。于是把格子分细就改善了解的精确度。对于一维的不稳定态问题用显式差分法，由于 $\Delta t/(\Delta x)^2$ 的限制，为了产生稳定的答案，要进行过量的计算。虽然所计算的解值是极其精确的，但是这些解值远远超出了所要求的精确度，并且在计算机上非常花费时间。通过粗的空间格子和时间格子的隐式方法，可以得到一个精确度稍

① 原书误为公式3.5.13。——译注

差但足够精确的解。

4.5.5 精确度

关于精确度

1) 如果系统是稳定的, 则舍入误差很少或根本不会影响精确度。

2) 截断误差对精确度影响最为显著。在内部节点上一般化六点公式的误差是:

$$|E_t| \leq \frac{\alpha^2 \Delta t}{2} \frac{\partial^4 T}{\partial x^4} \left(1 - 2\lambda - \frac{1}{6Fo} \right) + A(\Delta t)^2 + B(\Delta x)^4 \quad (4.5.6)$$

式中 E_t 是截断误差, T 表示精确解, A 和 B 是常数。其简化形式是:

$$\text{显式} \quad |E_t| \leq A_1 \Delta t + B_1 (\Delta x)^2$$

$$\text{隐式} \quad |E_t| \leq A_2 \Delta t + B_2 (\Delta x)^2$$

克兰科——尼科尔森差分方程

$$(\text{Mid-difference}) \quad |E_t| \leq A_3 \Delta t^2 + B_3 (\Delta x)^2 \quad (4.5.7)$$

$$\text{如果} \quad 0 \leq \lambda < \frac{1}{2}, \text{ 使 } Fo = \frac{1}{6(1-2\lambda)}, \quad (4.5.8)$$

则可得到一般化六点公式的更高精确度。在这种情形下, 公式 4.5.6 中右端第一项等于零。例如, 假如 $\lambda=0$ (显式表达式),

为了减少截断误差, 取 $Fo = \frac{1}{6}$ 是最好的。正如边界条件的复杂

化对于稳定性判据有着不利的影响一样, 随着误差的引入, 也对稳定性判据起不利影响。因此, 如果边界出现突然的变化, 开始

计算可以用较小的时间步长 (比方说取 $Fo = \frac{1}{6}$)。一段时间

后, 当附近边界的温度场的突然变化已经减弱下来时, 可以把时

间步长加长, 例如加长到相应于 $Fo = \frac{1}{4}$ 或 $\frac{1}{2}$ 。

参 考 文 献

Ames, W.F. (1939). *Numerical Methods for Partial Differential Equations*. Nelson, London.

Bayley, F.J., Owen, J.M. & Turner, A.B. (1972). *Heat Transfer*. Nelson, London.

Carslaw, H.S. & Jaeger, J. (1959). *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford.

Dusinberre, G.M. (1961). *Heat Transfer Calculations by Finite Differences*. International Textbook Co., Scranton, Pa.

Gebhart, B. (1971). *Heat Transfer*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York.

Razelos, P. (1973). Methods of obtaining approximate solutions. Section 4, pp.

4-1 to 4-78, in *Handbook of Heat Transfer*, ed. W. M. Rohsenow and J.P.

Hartnett. McGraw-Hill, New York.

Schneider, P.J. (1973). Conduction. Section 3, pp. 3-1 to 3-134 in *Handbook of Heat Transfer*, ed. W.M. Rohsenow and J.P.Hartnett. McGraw-Hill, New York.

Smith, G.D. (1965). *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Oxford University Press, London.

Walsh, J. (1966). Elliptic and Parabolic equations. Chapter 5, pp. 99-116, in *Numerical Analysis: An Introduction*, ed. J. Walsh. Academic Press, London.

Young, D. (1962). The numerical solution of elliptic and parabolic partial differential equations. In. *A Survey of Numerical Analysis*, ed. J. Todd. McGraw-Hill, New York.

第五章 有限差分方程在简单的稳定态问题上的应用^①

5.1 一维稳定态问题：直接的三对角矩阵算法解

5.1.1 简单问题

现在研究一维问题，图5-1表示一外部加绝热保护套的，通电的即内部发热的金属棒，其横断面为 10×10 厘米²，长为50厘米。为了简便起见，假定通过棒的任何断面的条件是不变的，其两端保持在 10°C 。取图上标号为1至4的四个内节点，其间距为：

$$\Delta x = \frac{50}{(4+1)} = 10 \text{厘米}$$

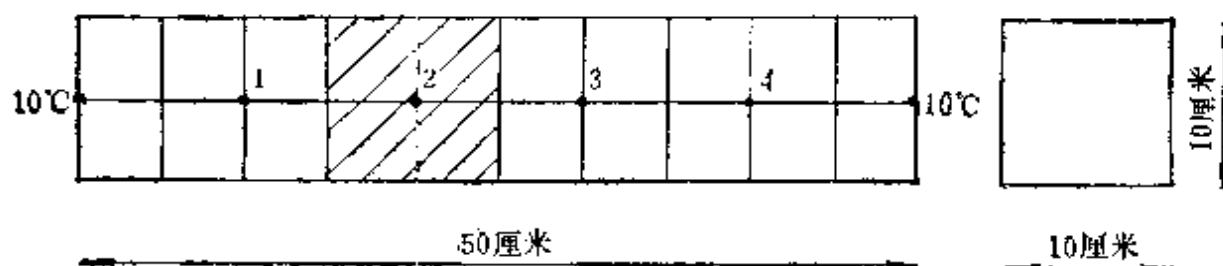


图 5-1 方断面金属棒

图上还画出3对节点2的典型的单元控制体积，由于此金属棒是被绝热的，因此温度 T_2 只取决于 T_1 和 T_3 ，即取决于其传导系数 K_{12} 和 K_{32} 。由于断面积 A 为 $0.1 \times 0.1 = 0.01$ 米²，则传导系数为

$$\begin{aligned} K_{12} &= \frac{kA}{\Delta x} \\ &= 50 \times 0.01 / 0.1 \\ &= 5 \end{aligned}$$

^① 本章从前几章中引出，后面列出的书目供进一步阅读时参考。

K_{32} 与此完全相同，其余传导系数同样也等于5。这里，我们取金属棒的导热系数 k 为50瓦/米·K，我们还假定内热源 $H = 4 \times 10^4$ 瓦/米³，包含节点2的单元控制体积 $V = 0.1^3 \text{米}^3 = 10^{-3} \text{米}^3$ 。

利用图中阴影部分的单元控制体积，为了推导节点2的有限差分方程，可借助第三章的公式3·4·2：

$$\sum_j K_{2j}(T_j - T_2) + HV_2 = 0 \quad (5.1.1)$$

式中 Σ 是对相邻点求和，这里 j 只等于1和3，因此：

$$k \frac{A}{\Delta x} (T_1 - T_2) + k \frac{A}{\Delta x} (T_3 - T_2) + H \Delta x \cdot A = 0$$

由此式可得：

$$T_1 - 2T_2 + T_3 + 8 = 0 \quad (5.1.2)$$

此方程本来可以用一维直角坐标稳定态基本偏微分方程的直接有限差分近似来得到：

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + H = 0 \quad (5.1.3)$$

相应的有限差分方程为：

$$k \frac{T_1 - 2T_2 + T_3}{(\Delta x)^2} + H = 0 \quad (5.1.4)$$

由此式立即可得到公式5·1·2，而公式5·1·4恰好就是第三章的公式3·3·3，该式本来可以作为基本方程而写出的。

对每个其他内部节点都写出相应的方程，并结合端点温度 $T_0 = T_5 = 10^\circ\text{C}$ ，则对 T_1 、 T_2 、 T_3 和 T_4 (沿棒的四个点的温度) 可得出以下方程组：

$$-2T_1 + T_2 = -8 - 10 = -18$$

$$T_1 - 2T_2 + T_3 = -8$$

$$T_2 - 2T_3 + T_4 = -8$$

$$T_3 - 2T_4 = -8 - 10 = -18 \quad (5.1.5)$$

这是众所周知的三对角方程组——每个方程都有按一定次序排列的三个未知数，但第一个和最后一个方程除外，它们只有两

个未知数。可采用直接消去法求解。应用于这样一个方程组的高斯消去法采取特别简单的形式，这种方法被称为三对角矩阵算法 (TDMA)。不论内节点数目取多少，方程组的形式仍然是三对角的，并且TDMA可以容易地用来求解，此方法将在第七章7.2节中进一步讨论和阐明。除非在每个方程中有更多的未知数，一般不值得应用迭代过程，这样，将于本章的5.2节和5.3节中阐述的方法是必需的。

5.2 二维稳定态问题：迭代解

5.2.1 简单问题

二维稳定态热流问题的基本偏微分方程为：

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + H = 0 \quad (5.2.1)$$

早就研究过如何用一组有限差分方程来代替这个公式。为了简便起见，我们采用直角坐标系中的正方形网格来考察图5-2的问题，图中表示一个边长比为1:2的矩形区域，上面覆盖方形网格系，其中三个内部节点记为1、2、3，这些节点的温度为未知数。进一步假定，在A、B……H等所有边界点的温度是已知的（狄立克莱边界条件），而且无内热源。通过直接替代公式5.2.1或用能量平衡法都表明，相应的有限差分方程为（见第三章公式3.3.2）：

$$T_N + T_S + T_E + T_W - 4T_P = 0 \quad (5.2.2)$$

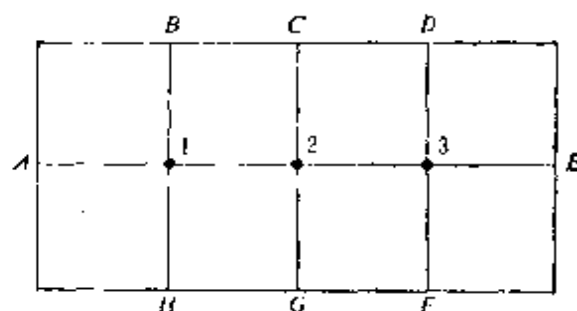


图 5-2 具有粗网格的二维稳定态问题

式中采用方位记号。因此，为了计算这三个温度 T_1 、 T_2 和 T_3 ，必须依次对1、2、3三个节点应用公式5·2·2，同时结合边界温度解所得联立线性方程组。依次对每个节点应用公式5·2·2得到：

$$\text{节点1: } T_B + T_H + T_2 + T_A - 4T_1 = 0$$

$$\text{节点2: } T_C + T_G + T_3 + T_1 - 4T_2 = 0$$

$$\text{节点3: } T_D + T_F + T_E + T_2 - 4T_3 = 0 \quad (5\cdot2\cdot3)$$

当边界条件为图5-3所示的温度时，结合边界条件可得出以下三个方程，其中包括三个未知数 T_1 、 T_2 和 T_3 ：

$$4T_1 - T_2 = 400$$

$$-T_1 + 4T_2 - T_3 = 400$$

$$-T_2 + 4T_3 = 1360 \quad (5\cdot2\cdot4)$$

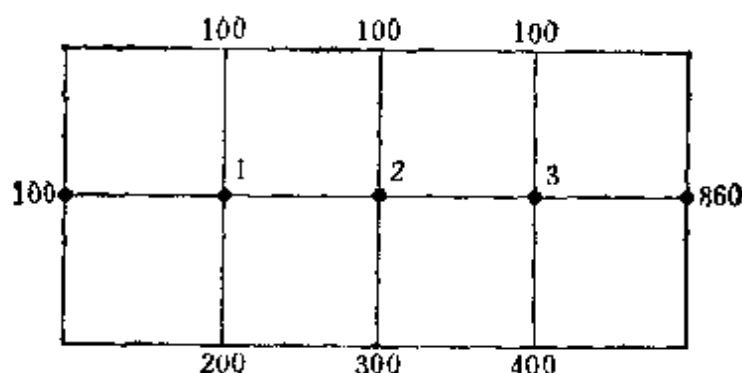


图 5-3 二维稳定态的边界条件 (温度 $^{\circ}\text{C}$)

这些方程式用任何直接消去法都可很快解出(因为三个方程只有三个未知数)，结果为：

$$T_1 = 160^{\circ}\text{C}$$

$$T_2 = 240^{\circ}\text{C}$$

$$T_3 = 400^{\circ}\text{C} \quad (5\cdot2\cdot5)$$

然而很明显，在细网格系中要有许多内部节点，所得方程组将会很大，因此需要用其他求解方法(见5·3节和第七章)。

式5·2·5是式5·2·4的精确解，该式表示了一个实际问题的粗网格的有限差分模型，此实际问题是由基本偏微分方程5·2·1及图5-3所示的边界条件决定的。如同在第四章4·4节所讨论过的情

况一样，几乎没有什么希望这三点的温度完全符合相应边界条件的公式5·2·1的精确分析解——我们正在解的有限差分方程具有离散化误差。在本节中我们将说明迭代法的应用，虽然人们经常能够用迭代法求解以达到预期的精确度，但是这种方法只能得到形如公式5·2·4的有限差分方程组的近似解。现在我们故意选择粗大的网格以便举例说明一些迭代解法；在第七章中再讨论这个问题的细网格的数学模型和求解。现在略述一下为求节点1、2、3三个温度的三个有限差分方程的三种解法，也借此机会介绍用Fortran4型计算机程序求解的思路。显然，对这种简单问题是不必要的，但是这种思路的建立是非常有用的，用这种方法将可以求解以后章节中的更复杂的问题。

所有迭代法的基本思想是对需要求解的每个点估计一个近似解(经常取 $T_1 = T_2 = T_3 = 0$)，然后往往要不断反复地进行 T 值的校正计算，要进行很多次直到反复计算的 T 值很接近时为止。这样我们就认为已经收敛到方程组的解，此解被看作最后有用的 T 值。注意到当 T_1 、 T_2 和 T_3 是方程5·2·4的解时，那么这些剩余，

$$\begin{aligned} R_1 &= 400 - 4T_1 + T_2 \\ R_2 &= 400 + T_1 - 4T_2 + T_3 \\ R_3 &= 1360 + T_2 - 4T_3 \end{aligned} \quad (5 \cdot 2 \cdot 6)$$

每一个都等于0，因为剩余可度量所讨论点的有限差分方程的精确解的偏离程度。在开始估计 T 值时，一般剩余 R 不等于0，而所有迭代法的目的是用某些方法反复地校正 T ，以便减小剩余使之尽可能地接近0。各种校正方法在求解过程中的复杂性和效率是不同的，现在联系这个简单问题阐述以下三种方法，在5·3节中将以更一般的角度来阐述松弛法。

5·2·2 雅可比 (Jacobi) 迭代法

给出 T_1 、 T_2 和 T_3 的初始近似值是为了得到所需解的估计

值。在第一个以及以后任何迭代阶段都要计算剩余 R_1 、 R_2 和 R_3 ，在每一阶段，为了进一步迭代，通过下式来校正 T_i ($1 \leq i \leq 3$)：

$$T'_i = T_i + \frac{R_i}{4} \quad (1 \leq i \leq 3) \quad (5.2.7)$$

式中 T'_i 表示基于前一次迭代值 T_i 的校正值，即

在 i 节点 T 的校正值 = 在 i 节点 T 的原先值 + 在 i 节点的剩余/4

这样做法可以暂时地使 i 节点的剩余减小至0，所以说是暂时地，是因为当校正相邻节点时将破坏这个结果。为了一步迭代，需要顺序地校正 T_1 、 T_2 和 T_3 。所得到的新的温度不能立即使用，而只能在每步迭代以后才能使用，因为一步迭代需要校正方程组中的所有温度。经过若干步迭代以后可得到收敛结果。此方法应用起来是简单的，但是在提高精度方面不是很有效的。可以看到（例如）在节点1的校正温度为：

$$\begin{aligned} T' &= T_1 + \frac{400 - 4T_1 + T_2}{4} \\ &= \frac{400 + T_2}{4} \\ &= \frac{T_A + T_B + T_H + T_2}{4} \end{aligned} \quad (5.2.8)$$

此式本来可以从公式5.2.3得到：即将方程整理一下，把节点1的温度 T_1 移到方程左边，将其他项移到方程右边。然后根据方程右边上次的迭代值将 T_1 校正至 T'_1 。还应该很好地注意到公式5.2.3中 T_1 的系数在方程左边各项中是最大的，即 T_1 项在该方程中是占优的。这将在第七章7.2节中确切地定义，但是目前我们只要知道这样一点就可以了，即 T_1 系数的绝对值至少等于其他各项未知数的系数之和。同样的解释也适用于其他两个节点的方程。实际上，当对一个特定点列出有限差分方程时，一般而言，该点的未知数在其方程中是占优的，此占优条件是迭代法收敛性的必要条件，这将在第七章7.2节中更详细地讨论。

再回到目前的问题，校正公式为：

$$T'_1 = T_1 + \frac{R_1}{4}$$

$$T'_2 = T_2 + \frac{R_2}{4}$$

$$T'_3 = T_3 + \frac{R_3}{4} \quad (5.2.9)$$

或

$$T'_1 = T_1 + \frac{T_A + T_B + T_2 + T_H}{4}$$

$$T'_2 = T_2 + \frac{T_1 + T_C + T_3 + T_G}{4}$$

$$T'_3 = T_3 + \frac{T_2 + T_D + T_E + T_F}{4} \quad (5.2.10)$$

式中的 R 用公式 5.2.6 代入，此式可化简为：

$$T'_1 = (400 + T_2) / 4$$

$$T'_2 = (400 + T_1 + T_3) / 4$$

$$T'_3 = (1360 + T_2) / 4 \quad (5.2.11)$$

或明确一些：

$$T'_1 = (100 + 200 + 100 + T_2) / 4$$

$$T'_2 = (100 + 300 + T_1 + T_3) / 4$$

$$T'_3 = (100 + 400 + 800 + T_2) / 4 \quad (5.2.12)$$

或根据图 5-2 的初始记号：

$$T'_1 = (T_B + T_H + T_A + T_2) / 4$$

$$T'_2 = (T_C + T_G + T_1 + T_3) / 4$$

$$T'_3 = (T_D + T_F + T_E + T_2) / 4 \quad (5.2.13)$$

最后一组方程本来可直接从重新整理公式 5.2.3 得到。

有时，将方程中占优项的系数化准为 1，用这种剩余计算是很方便的，在这种情况下， r_i 与 R_i 的关系为（在任何节点 i ）：

$$r_i = \frac{R_i}{4} \quad (1 \leq i \leq 3) \quad (5.2.14)$$

校正公式，即公式5·2·7变为：

$$T'_i = T_i + r_i \quad (5.2.15)$$

表5-1列出了用 R_i 计算的算法，计算从估计值为0开始，为了寻求公式5·2·4的解，用公式5·2·7进行了七步迭代计算。必须注意，每当对节点 i 应用公式5·2·7时，其剩余总是暂时减小至0（未记录），而改变相邻节点的剩余。实际上，如果 T_i 改变 ΔT_i ，则 R_i 变化 $-4\Delta T_i$ ，以及相邻点的 R_j 变化 $+\Delta T_i$ ，在表5-1中计算了整排新的 T_1 、 T_2 和 T_3 ，然后计算三个剩余 R_1 、 R_2 和 R_3 ，七步迭代以后，近似解为：

$$T_1 = 159.7 \quad (160)$$

$$T_2 = 239.7 \quad (240)$$

$$T_3 = 399.9 \quad (400) \quad (5.2.16)$$

我们将精确值写在括号内以便比较，迭代次数越多，越接近精确解。

表 5-1 图5·2问题的雅可比迭代法

迭代次数	T_1	R_1	T_2	R_2	T_3	R_3
0	0	400	0	400	0	1360
1	100	100	100	440	340	100
2	125	110	210	50	365	110
3	152.5	12.5	222.5	55	392.5	12.5
4	155.6	13.9	236.3	6	395.6	13.9
5	159.1	1.4	237.8	7	399.1	1.4
6	159.45	1.0	239.6	0.5	399.45	1.8
7	159.7		239.7		399.9	

有时人们在每次迭代时不是先校正 T'_i 然后计算 R_i ，而可以只校正 T 序列而不涉及 R 。在这种情况下，可直接用公式5·2·11代替公式5·2·9，这样需要的计算比较少。很明显，可以得到相同的 T 序列，然而人们关于多么接近解的了解是受到限制的。这也不一定，因为在每种情况下（从式5·2·7或5·2·9）式

$$R_i = 4(T'_i - T_i) \quad (5.2.17)$$

还成立，这样，通过所讨论节点的现在温度和前一个温度能容易地求出前一个剩余。

程序2·1 (见第254页)

一个专用的计算机程序列于程序2·1，该程序用来对公式5·2·12进行20步迭代，并且通过它来介绍用Fortran4计算机程序解问题的基本思想。在程序的完成方法上需要理解的不多了，因为注解卡片充分地描述了程序的各个步骤。

程序2·2 (见第255页)

程序2·2以更一般的方式执行着同样的任务：边界温度要分配存贮单元，并经由DATA语句而存入，并且程序的核心，迭代循环的校正计算采用了更一般的方程式，即公式5·2·13。仍然安排整整20步迭代。程序表还包括了表头输出、初始输出和中间输出。

程序2·3 (见第256, 257页)

在另一方面，程序2·3引入了一个如图5-4所示的二维数组，它包括了已知温度的那些点（边界点）以及待求温度的那些点（三个内部点）。虽然只需要对三个点2,2、3,2、4,2进行校正计算，但是包括了两个嵌套DO循环，以提示假若具有一个较细网格和要校正点的矩形数组，只需对这些循环的范围作适当改变就行了。对这些点中任意一点的温度的校正语句，如在DO100循环中所示的那样，为：

$$TP(I,J)=[T(I-1,J)+T(I+1,J) \\ +T(I,J-1)+T(I,J+1)]/4.0$$

这个程序也准许将网格线*i*与*j*的数目规定为IMAX和JMAX，主要的DO循环是在*i*=2, IMM1和*j*=2, JMM1的范围内，此处，IMM1=IMAX-1, JMM1=JMAX-1。迭代循环L=1, LMAX继续进行，直至任意*T*, FMAX的最大相对变化或最大剩余RES的绝对值变得小于一个规定值（此规定值取为0.005），即可中途停止。

5·2·3 高斯-塞德尔迭代法

高斯-塞德尔迭代法类似于雅可比迭代法，唯一区别在于：在用校正方程连续迭代时，一旦校正值计算出来，就立即被采用。公式5.2.3及5.2.4与以前相同，将主对角项移项，则公式5.2.11与5.2.13相应地变为以下形式：

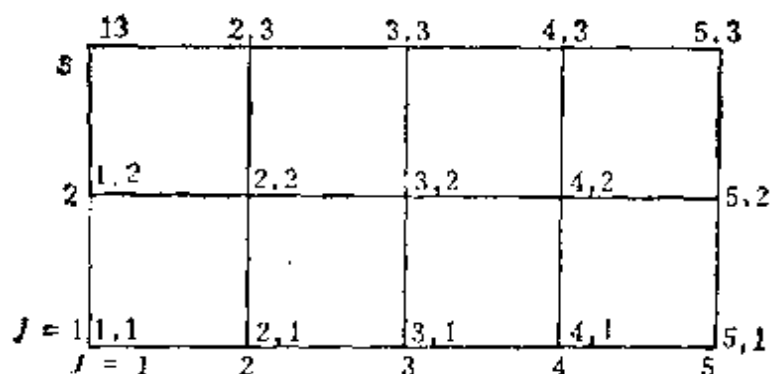


图 5-4 对图5-2问题的二维数组及其表示法

$$\begin{aligned} T'_1 &= (400 + T_2) / 4 \\ T'_2 &= (400 + T'_1 + T_3) / 4 \\ T'_3 &= (1360 + T'_2) / 4 \end{aligned} \quad (5.2.18)$$

或

$$\begin{aligned} T'_1 &= (T_B + T_H + T_A + T_2) / 4 \\ T'_2 &= (T_C + T_G + T'_1 + T_3) / 4 \\ T'_3 &= (T_D + T_F + T_E + T'_2) / 4 \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

这些公式与公式5.2.11以及5.2.13的区别只在一个方面：某些带撇的变量出现于校正公式的右端。这表明，假定校正计算序列为 T_1 、 T_2 和 T_3 时，一旦新值是有用的，便立即被采用。这三个运算便完成一步对求解区域 T 场的迭代，当每步迭代完成时，新的变量将作为被改进了的但不带撇的解的近似值来处理，以进行另一步迭代。由于计算得的新值可以直接存放于他们的不带撇的位置，所以现在不必贮存那些带撇的数值，而且在编制计算机程序方面比雅可比法较为简单。

首先研究一下这个过程如何用简单的列表来进行计算。像以前那样，从估计 $T_1 = T_2 = T_3 = 0$ 开始，公式5.2.18的轮流运用

列于表5-2加以说明。可以看到，经过四步迭代以后，近似解为：

$$T_1 = 159.6 \quad (160)$$

$$T_2 = 239.8 \quad (240)$$

$$T_3 = 399.9 \quad (400) \quad (5 \cdot 2 \cdot 20)$$

括号内的数字是精确解，供比较用。

程序2·4 (见第258页)

程序2·4列出了进行高斯—塞德尔迭代的简单的计算机程序，它与程序2·1很相似：它是入门性质的，并不复杂，它专门用于眼前的任务。正如预期的那样，它甚至比程序2·1更简单，因为它不用带撇 T 值的单元，而由校正值直接代替不带撇单元内的值。

表 5-2 图5-2中稳定态问题的高斯—塞德尔迭代法

迭 代 次 数	T_1	T_2	T_3
0	0	0	0
1	100	125	371.3
2	131.3	225.6	396.4
3	156.4	238.2	399.6
4	159.6	239.8	399.9

程序2·5 (见第258、259)

在编制一个改进的计算机程序时，如同在程序2·3中所进行过的那样，对15个点的 T 值引入一个二维数组。现在还引入一个偶合系数（或连接系数）的概念，即 a_N 、 a_S 、 a_E 和 a_W ，或更明确地，即 $AN(I,J)$ 、 $AS(I,J)$ 、 $AE(I,J)$ 、 $AW(I,J)$ ，这些系数耦联着东、南、西、北诸邻点对中心节点 $P = (I,J)$ 的影响。如果因为有内热源存在而具有热源项，它被安排在 S 或 $S(I,J)$ 单元。一般二维泊松方程为

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + H = 0$$

可以从边长为 Δ 的方形网格中取有限差分为:

$$T(I-1, J) + T(I+1, J) + T(I, J-1) + T(I, J+1) - 4T(I, J) + \frac{H}{k} \Delta^2 = 0 \quad (5.2.21)$$

或用能量平衡法:

$$k \frac{A}{\Delta} [T(I-1, J) - T(I, J)] + \text{其余三个类似项} + H \Delta^2 = 0 \quad (5.2.22)$$

式中所有符号的意义与第三章 3.3 节中解释的完全相同。偶合系数也就是那些 a 的值, 应用他们使得这两个方程 (它们是等价的) 中的任一个均具有这种形式:

$$a_N(T_N - T_P) + a_S(T_S - T_P) + a_E(T_E - T_P) + a_W(T_W - T_P) + S_P = 0 \quad (5.2.23)$$

式中 S_P 是内热源常数项。在正常情况下, 在正方形网格的内部节点, 那些 a 都可以取为 1。但是, 在不规则边界上或在非方形网格系中的内部节点, 情况就不同了。通常可以将有限差分方程整理成校正 T_P 的表达式:

$$T_P = \frac{(a_N T_N + a_S T_S + a_E T_E + a_W T_W)}{a_P} + \frac{S_P}{a_P}$$

式中 $a_P = a_N + a_S + a_E + a_W$ 。

这也可以在程序中写成像程序 2.5 中那样形式的记号, 该程序为这些量安排了位置。然而, 由于这个正在解决的具体问题是简单的, 应用它们不如像可能做到的那样有效。

5.2.4 松弛法

松弛过程与高斯—塞德尔迭代过程相似, 有时两者还会混淆, 因为把迭代过程称为松弛过程是很经常的: 在所有情况下, 人们按照某些最后将使有限差分方程保持一定精确度的格式来松弛所估计的值 (对于这些值, 在这些节点上的有限差分方程是不成立的)。与高斯—塞德尔过程相似之处在于, 一旦校正值被计算出来, 便被立即采用。其区别在于, 不是顺序地进行校正, 而是在

每一点校正后就要计算所有点的剩余（假若采用五点公式，由于单个点的校正计算，只是所讨论的点及其相邻点的那些剩余将会改变），依据观察所有点的剩余的绝对值来决定下一步要校正那一个点，将校正那剩余绝对值最大的点，对单个点的校正过程继续进行下去，其次序取决于在过程中计算出的剩余的大小。当所有剩余都小到可以接受的程度时，计算过程就可以终止（我们记得剩余可量度对所讨论点的精确解的偏离程度）。此法对于我们具体的简单的问题的应用列成表5-3加以说明。可以看到，只经过11步单一点的松弛以后（相当于在计算量上比高斯—塞德尔或雅可比过程少四步迭代），所有剩余都小于1，过程结束时的近似解为：

$$T_1 = 159.75 \quad (160)$$

$$T_2 = 239.9 \quad (240)$$

$$T_3 = 399.75 \quad (400)$$

表 5-3 求解图5-2问题的松弛法

操 作	T_1	R_1	T_2	R_2	T_3	R_3
初始估计值	0	400	0	400	0	1360
在节点3为 + 340				740	340	0
在节点2为 + 185		585	185	0		185
在节点1为 + 146	146	1		146		
在节点3为 + 46				192	386	1
在节点2为 + 48		49	233	0		49
在节点1为 + 12	158	1		12		
在节点3为 + 12				24	398	1
在节点2为 + 6		7	239	0		
在节点1为 + 1.75	159.75	0		1.75		
在节点3为 + 1.75		0.9	239.9	0		0.9
最终值	159.75	0.9	239.9	0	399.75	0.9

为便于比较，将精确解写在括号内。在这种情况下，松弛过程几乎与高斯—塞德尔过程同样快地收敛至有限差分方程的精确解，然而一般说来，松弛过程要更快一些。

因为电子计算机检查最大剩余的能力是较低的，为此所花费的时间比提高收敛速度所节约的时间要多，所以不推荐此方法用于电子计算机计算。应注意，在每次校正后要进行再核算，以便保证给下次找到最大剩余。在更普遍的具有许多节点的情况下，这是另一种浪费，因为仅仅被校正点的四个邻点将由于所采取的步骤而改变了自己的数值和剩余。不过，可以修正程序以使情况得以减轻些。既然不推荐此方法用于电子计算机，在这里就不详细介绍了。然而，注意到在简单的笔算时，简单地用肉眼检查足以确定哪一个下一步需要校正的节点，于是采用这种高效率的过程是有利的。但是目前电子计算机的应用对这种方法缺少兴趣，而对逐次迭代法更感兴趣。

5.2.5 计算热流的导热棒类比 [见杜辛伯里(Dusinberre), 1961的著作]

对于边长为 Δ 的方形网格系，相邻两个节点之间传导的实际热流可以借助于图5-5来考察。 P 点接受从相邻点 N 、 S 、 E 、 W 传来的热流，而且如果这些点上的五个温度处于平衡状态，亦即它们是有限差分方程的解，则没有净热流进入 P 点的单元控制体。取二维物体的单位厚度，并利用图中的阴影面积，则从点 W 流向点 P 的热流为：

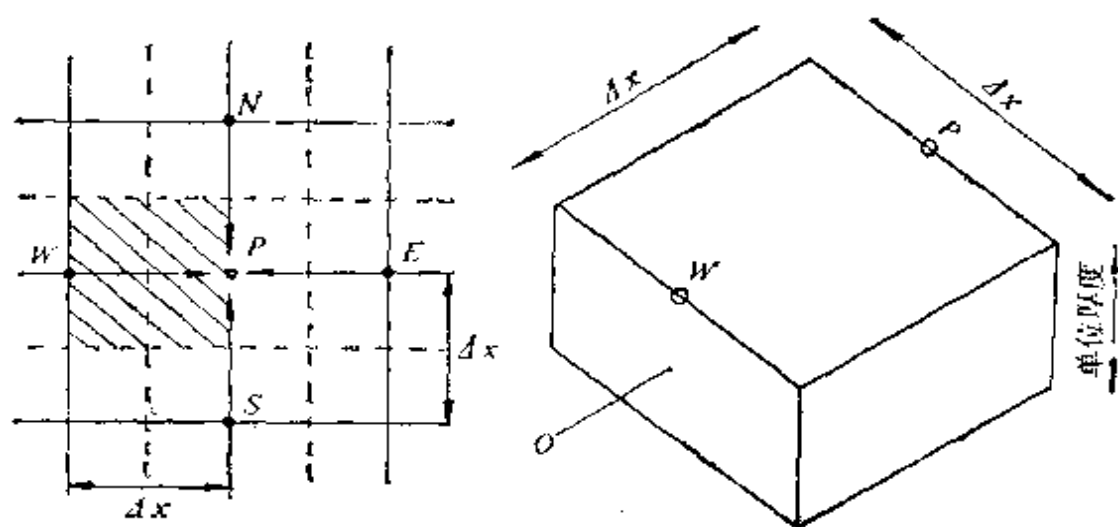


图 5-5 计算二维物体热流的导热棒类似

$$Q_{PW} = k \frac{(\Delta \cdot 1)}{\Delta} (T_W - T_P)$$

$$= k (T_W - T_P)$$

式中 k 为导热系数。用同样的方法可表示其他热流，好像每对相邻点被导热棒联结起来一样。

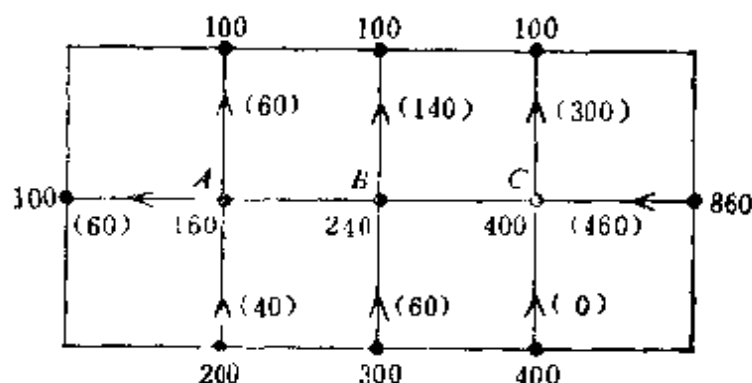


图 5-6 对图5-2所示简单二维问题的热流

于是，通过求出从边界至内部点的热流的总和，能够计算出进入或流出物体的热流。对于图5-6所示的二维物体，曾求出其内部节点 A 、 B 、 C 的化成整数的温度分别为 160 、 240 、 400°C ，因此

$$\text{流入热量} = k(460 + 0 + 60 + 40) = (560k) \text{ 瓦/米(长度)}$$

$$\text{流出热量} = k(60 + 60 + 140 + 300) = (560k) \text{ 瓦/米(长度)}$$

流入与流出热量的完全平衡表明，用以解有限差分方程的松弛过程是完备的，通常不会有如此严格的平衡，而且其差额的大小是一个关系到是否需要进一步计算的启示。在需要进一步计算的情况下，可以取流入和流出热量的平均值。

对于图示的物体，由于其导热系数 $k = 50 \text{ 瓦/米} \cdot \text{K}$ ，则该物体单位长度的传热量为 $560 \times 50 = 2.8 \times 10^4 \text{ 瓦/米}$ 。

5.3 松弛法

5.3.1 一般概念

由于解简单问题的迭代法和松弛法的概念已在 5.2 节中阐述

过了,因此,现在从一般角度来说明一下松弛法概念就很方便了。松弛过程是一种求解像导热有限差分方程组(见第三章公式3·4·2)那样的代数方程组的数值方法。

$$\sum_j K_{ij}(T_j - T_i) + H_i V_i = 0 \quad (5.3.1)$$

式中 Σ 是对与第 i 点相邻的所有 j 点求和;而且,对每个 i 节点都有一个这样的方程(与公式5·2·2比较),可以考虑将求和扩展到在未知温度节点系统的所有节点 j ,在这种情况下,若 i 点与 j 点不相邻时,则传导系数 K_{ij} 均取为0。

对该系统的每个节点都列出像5·3·1那样的公式,为了解这样的一组方程,首先基于物理概念假设一个值即公式5·3·1近似解的估计值(可以简单到 $T_i = 0$),将这些值代入公式5·3·1的左边,这时可发现方程右端不等于0,而且具有一个值 R_i ,我们称它为在 i 节点的剩余(与公式5·2·6比较):

$$R_i = \sum_j K_{ij}(T_j - T_i) + H_i V_i \quad (5.3.2)$$

对任何特定节点 i ,当 T_i 改变 ΔT_i 时,将使 R_i 变为

$$R'_i = R_i - \left(\sum_j K_{ij} \right) \Delta T_i \quad (5.3.3)$$

以及任何 R_j 变为

$$R'_j = R_j + K_{ij} \Delta T_i \quad (5.3.4)$$

式中 j 是 i 的相邻点,或任何 j 点,不过这时不相邻节点间的传导系数 K_{ij} 取为0。这样,当 i 节点的温度 T_i 改变 ΔT_i 时,将引起剩余 R_k 的再分布,这些剩余是由公式5·3·3和5·3·4确定的。松弛过程的目的就是逐步地使 T_i 改变 ΔT_i 以便尽可能地使剩余 R_k 接近于0,达到这种情况就完成了求公式5·3·1方程组的联立解。笔算时,松弛法遵循以下规则:

(1) 计算和记录从温度的假定值得出的所有剩余;

(2) 选择 $R_i / \sum_j K_{ij}$ 为最大的节点 i ，并松弛之（即通过使 T_i 改变 $R_i / \sum_j K_{ij}$ 的办法使 R_i 减小至 0）；

(3) 计算相邻节点的所有剩余 R_j （由于 T_i 的改变）；

(4) 再选择最大的 $R_i / \sum_j K_{ij}$ ，并重复步骤 (2) 和 (3)，

按此方式继续进行下去，直至所有剩余尽量趋近于 0 以达到所需要的精确度。

建议系统记录温度和剩余，如以前 (5.2 节) 和随后的列表所示，这样的列表既有条理又清晰，对每个节点提供两列数字，一列是温度 T_i ，另一列是剩余 R_i ，第一行数字是假定的 (估计的) 温度 T_i 和相应计算得到的 R_i ，其后各行都只包括改变了的 (新的) 温度 T_i 、改变了的 (新的) R_i 和相邻节点 j 的 R_j 。

5.3.2 加速收敛的超松弛法

如果在松弛过程的某些阶段剩余分布不均匀 (即某些是正值，某些为负值)，并继续用基本的松弛方法，则当最大剩余的绝对值减小至零时，任何符号相反的相邻剩余的绝对值将随之增加，那么消去这些余数，将导致增大在前一步已减小至零的那个剩余的值，这样，一个典型节点上的剩余值便来回摆动，而且收敛得很慢。这种情况是能够避免的，如果那些节点的温度是超松弛的话。这样不仅仅使相应的剩余减小为零，而且使它们取相反符号，以期在下一步校正邻近节点时将对超松弛过的剩余产生有利的影响。人们可以超松弛 50%，但是将在第七章 7.3 节中回过头来再阐述这个问题，这里就不作详细论述了。

5.3.3 块松弛法

块松弛法对加速收敛是很有效的。将基本松弛法进行修正，即不是在一个特定的步骤仅仅将一个剩余减小至零，而是将一特定的分块内的剩余之和一下子减小至零，这样可得到剩余的均匀分布。在二维方形网格系中，对某单点进行松弛时，当该节点温

度改变+1，其剩余改变-4，同时其四个相邻节点的每一个剩余也改变+1。在块松弛法中，当块中每一个节点的温度改变一个单位，则在块内节点的剩余也随之引起变化，其变化量根据情况可以是-1、-2或-3单位，同时周围节点的剩余也变化一个单位。图5-7是典型情况的示意图。

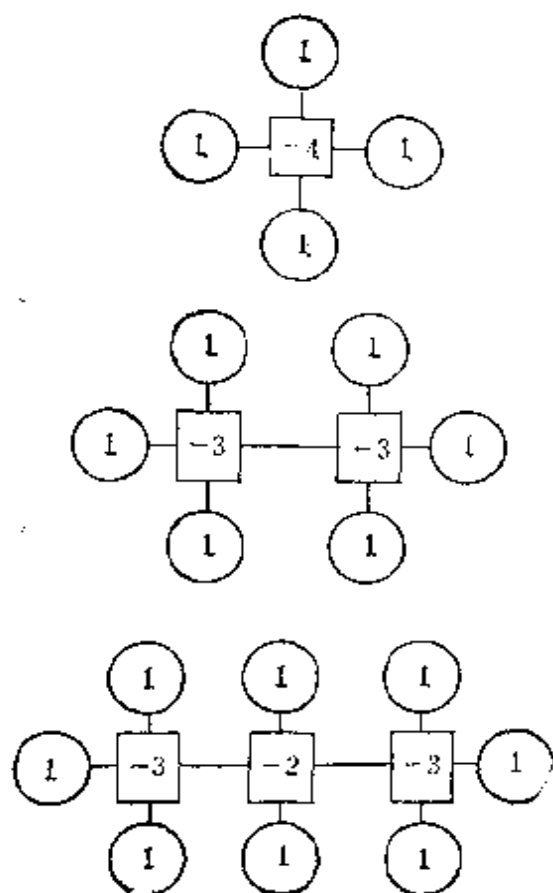


图 5-7 块松弛法中的典型块，
由于块中每个节点的单位温
度变化引起剩余的变化

通过逻辑分析，同时应用两个或更多的单节点算子的作用，可以推导出块算子来，而块算子起着在两个或更多个相邻点上的温度变化为1单位的作用。此外，注意到块内节点的负数之和等于周围节点的正数之和，而这些正数都是+1。为了使块内节点的平均剩余趋近于零，需计算这些剩余之和，然后根据所取的块的情况将它除以4、6或8，块内每个节点的温度就按此数量变化，然后，用图5-7给出的相应倍数来调整块内每个节点和周围节点的剩余。

5.3.4 群松弛

群松弛法与块松弛法相似，只是块内各节点的温度改变不需要像图5-7所示的块算子那样完

全相同。例如，可以按所讨论的那些节点各个剩余的比例来调整块的温度。在此情况下可以列出相应的块算子。例如，如果两个点在东西方向上是相邻的，并且希望对左边和右边节点的温度变化分别为+1和+2(此比例与其剩余相同)，则图5-8所示的算子是完全合适的。此种方法的成功与否很大程度上取决于操作人员在确定多大的块以及何种算子适合于所分析的情况这方面的经验。

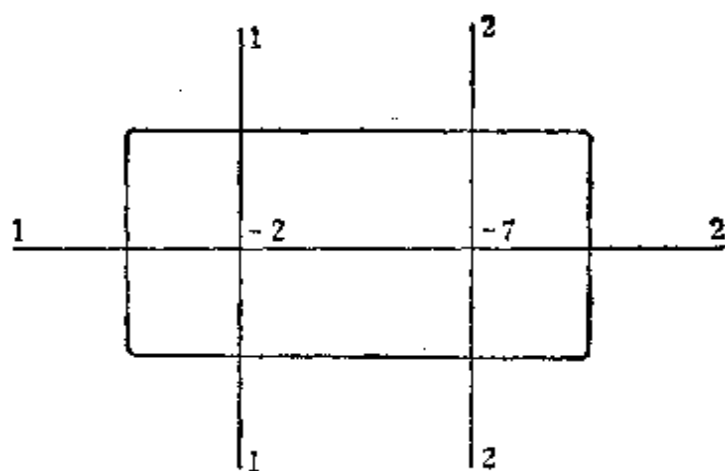


图 5-8 两个相邻节点的群松弛：由于左侧和右侧节点温度改变+1与+2而引起的剩余变化

5.3.5 例子

用一个直角坐标的二维矩形问题(采用方网格)作为例子来说明松弛法求解过程。在实际中最常遇到的边界条件为：

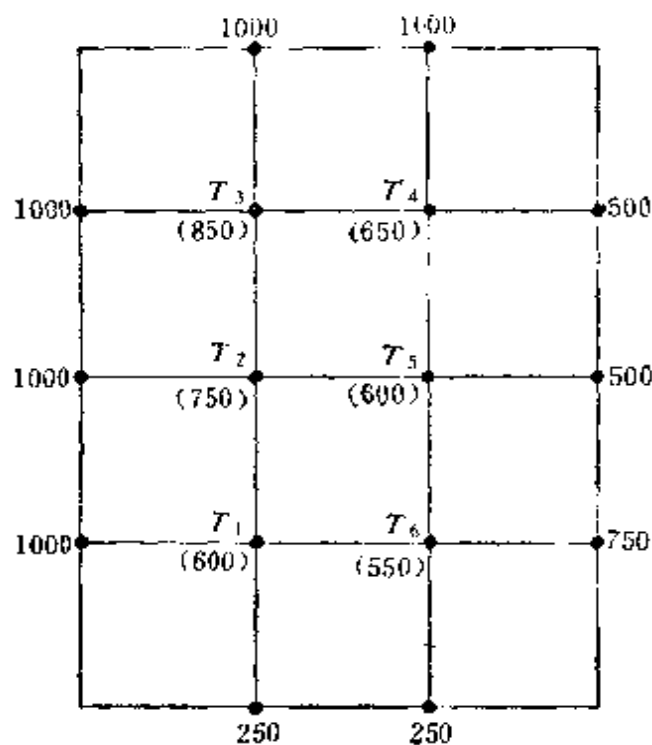


图 5-9 表面温度已定的(钢)板坯的二维稳定态问题
(狄立克莱条件)

- (1) 表面温度已定(狄立克莱条件);
 (2) 牛顿冷却(纽曼条件);
 (3) 热流已定(例如给出 Q' 或绝热边界条件)。

表 5-4 图5-9所示二维稳定态问题用松弛法计算出的温度分布

行	T_1	R_1	T_2	R_2	T_3	R_3	T_4	R_4	T_5	R_5	T_6	R_6
1	600	150	750	50	850	0	650	350	600	50	550	0
2		150		50		88	738	-2		138		0
3	638	-2		88		88		-2		138		38
4		-2		123		88		33	635	-2		73
5		29	781	-1		119		33		29		73
6		29		29	880	-1		63		29		73
7		47		29		-1		63		47	568	1
8		47		29		15	754	-1		63		1
9		47		45		16		16	651	-1		17
10	650	-1		57		16		15		-1		29
11		13	795	1		29		15		13		29
12		13		8	887	1		22		13		29
13		20		8		1		22		20	575	1
14		20		8		6	759	2		25		1
15		20		14		6		8	657	1		7
16	653	0		19		6		8		1		12
17		5	800	-1		11		8		6		12
18		8		-1		11		8		9	578	0
19		8		2	890	-1		11		9		0
20		8		2		2	762	-1		12		0
21		8		5		2		2	660	0		3
22	657	0		7		2		2		0		5
23		2	802	-1		4		2		2		5
24		3		-1		4		2		3	579	1
25		3		0	891	0		3		3		1
26		3		1		0		4	661	-1		2
27		3		1		1	763	0		0		2
28	656	-1		2		1		0		0		3
29		0		2		1		0		1	580	-1
	658		802		891		763		661		580	

图5-9表示一板坯，其所有边界的表面温度都是已定的，这种情况的数学问题比上述(2)、(3)两种边界条件更为简单。在下一节(5.4节)将对这个例子进行修正，以表明为了模拟特别复杂的问题需要作些什么改变。

该板坯的两个表面完全绝热，沿其他面的温度变化如图5-9所示，所以，这是一个二维问题，我们将计算稳态温度分布。

无内热源时，用方形网格系可得到以下方程组：

$$2000 + T_4 + T_2 - 4T_3 = 0$$

$$1500 + T_3 + T_5 - 4T_4 = 0$$

$$1000 + T_3 + T_5 + T_1 - 4T_2 = 0$$

$$500 + T_2 + T_4 + T_6 - 4T_5 = 0$$

$$1250 + T_2 + T_6 - 4T_1 = 0$$

$$1000 + T_1 + T_5 - 4T_6 = 0$$

此方程组可用简单松弛法求解，如表5-4所示。在每个温度校正过程中，没有必要列出一个运算表而只要注视一下图5-9就行了，以便立即观察出哪些相邻的剩余受影响。

初始估计值见图5-9(相应节点上括号内的数字)，一次考察一个节点可能得到较好的估计值，首先假定只有一个内部节点，并用热平衡逼近法计算其温度。然后，其他的内部节点一次被插入一个，当它们被插入以后，在假定前一步计算值是固定的情况下，就可以建立一个热平衡以求出其温度。用这种方法得出的这组初始估计值的确是很好。

表5-4所示的计算并未采用其他可以应用的改进的松弛法，如超松弛法、块松弛法或群松弛法。当每个剩余的绝对值小于3时，计算就可以结束，因为这样在下次计算时，任何进一步的节点温度改变将小于 0.5°C 。计算结果为：

$$T_1 = 658^{\circ}\text{C} \quad T_2 = 802^{\circ}\text{C} \quad T_3 = 891^{\circ}\text{C}$$

$$T_4 = 763^{\circ}\text{C} \quad T_5 = 661^{\circ}\text{C} \quad T_6 = 580^{\circ}\text{C}$$

如同在5.2节导热棒类比的题目中曾讨论过的那样，现在可以计算热流了。图5-10表示有六个接近边界的内部节点，有十根

棒与它相联，数字是计算出的温度，箭头方向为导热棒的热流方向。

$$\begin{aligned}\text{流入热量} &= [(1000 - 658) + (1000 - 802) + (1000 - 891) \\ &\quad + (1000 - 891) + (1000 - 763) + (750 - 580)]k \\ &= 1165 k \text{瓦/米(高度)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{流出热量} &= [(763 - 500) + (661 - 500) + (580 - 250) \\ &\quad + (658 - 250)]k \\ &= 1162 k \text{瓦/米(高度)}\end{aligned}$$

可见，流入和流出该材料的热流很一致，因而表明已接近有限差分方程组的解。

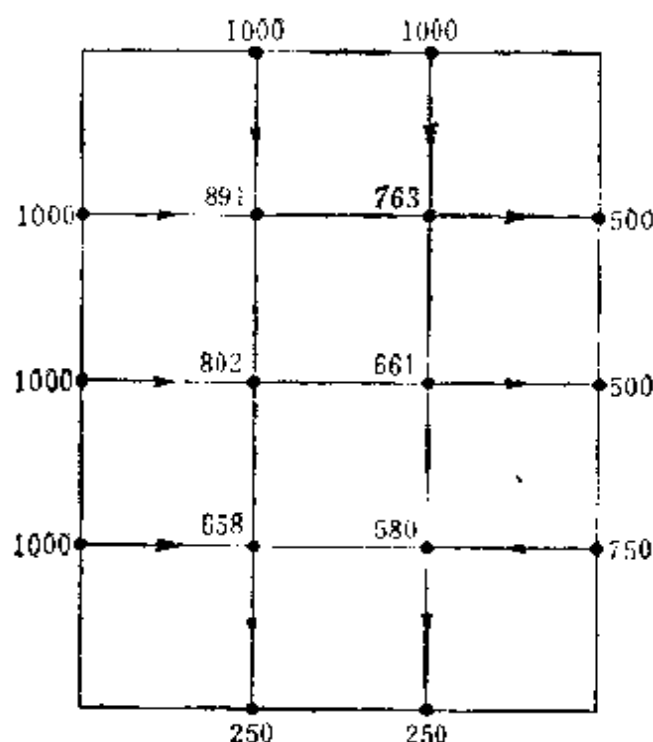


图 5-10 对图5-9所示二维板坯问题的解和热流

表5-5说明如何用块松弛法来计算同一个问题。很明显，只需用一半的行数就可得到和前面相同的答案。但是，此过程需要不断练习以确定什么时候在特定行使用块松弛法，以及由哪些点组成块。

表 5-5 用块松弛法计算图 5-9 所示的二维稳定态问题的温度($^{\circ}\text{C}$)分布

行	T_1	R_1	T_2	R_2	T_3	R_3	T_4	R_4	T_5	R_5	T_6	R_6	块
1	600	150	750	50	850	0	650	350	600	50	550	0	初始估计
2		150		50		88	738	-2		138		0	4
3	636	42	786	-22	886	-20		34		174		36	1、2、3
4		42		22		-20		78	644	-2		80	5
5	656	-19		42		-20		78		18	570	19	1和6
6		-19		42		0	758	-2		38		19	4
7		-6	799	2		13		11	657	-2		32	2和5
8		-6		6	890	1	762	-1		-2		32	3和4
9		+2		6		1		-1		10	578	0	6
10		5	802	-2		4		2	660	2		3	2和5
11	657	1		-1		5		3		3	579	-1	1和6
12		2		0		6	763	0	661	0		0	4和5
13		2		1	891	2		1		0		0	3
	657		802		891		763		661		579		最终温度

5.4 某些复杂情况

5.4.1 对流边界条件

在边界点 B (比如说) 处需要模拟对流边界条件的情况下, 对于未知温度的 B 点列出有限差分方程的最简便的方法是对 B 点的单元控制体积建立热平衡, 在第四章 4.3 节中曾叙述过两种最有意义的情况:

(1) B 是西边界上的一个普通点 (见图 4-13, 并回忆一下为 B 点推导出来的有限差分方程, 如第四章公式 4.3.11):

$$T_B = \frac{\frac{1}{2}(T_N + T_S) + T_E + BiT_A}{2 + Bi} \quad (5.4.1)$$

式中毕欧数 $Bi = h\Delta/k$, 当已知 h 、 k 和方形网格间距 Δ 时, 可用它们来代替 Bi , 因此, 对边界点可应用简单的有限差分方程。

例如, 如果 $Bi = 2$, 则相应的方程为:

$$\frac{1}{2}T_N + \frac{1}{2}T_S + T_E + 2T_A - 4T_B = 0 \quad (5.4.2)$$

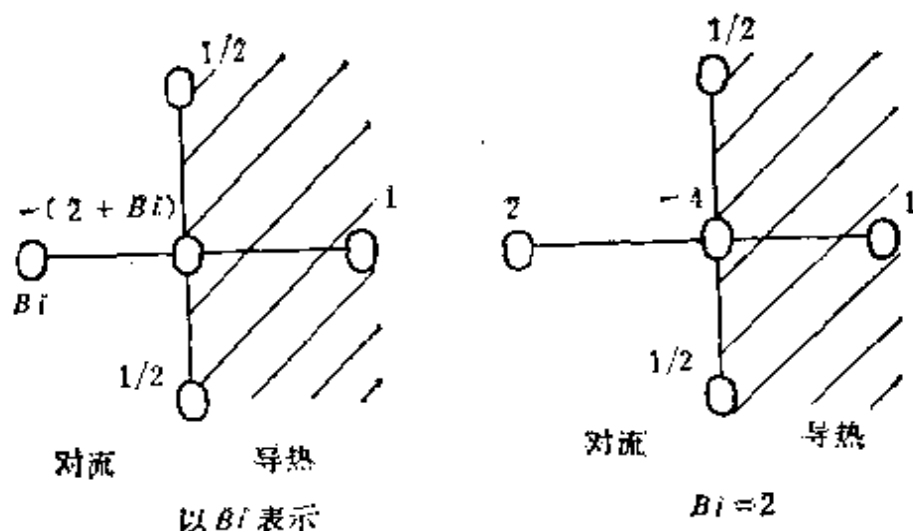


图 5-11 西表面对流边界条件的有限差分点算子

在西边界上的那些边界节点的有限差分方程点算子可用示意

图5-11表示。显然，在东、南、北诸边界上边界点的情况是与此类似的。

(2) B 点不在边界线上，而是在角上的一个边界点，例如， B 位于西南角(见图4-14并回忆一下为 B 点推导出的有限差分方程，如第四章公式4·3·13)：

$$T_B = \frac{\frac{1}{2}(T_N + T_E) + BiT_A}{1 + Bi} \quad (5.4.3)$$

式中毕欧数 $Bi = h\Delta/k$ ，给定一个毕欧数，可得到对该点的简单的有限差分方程。例如， $Bi = 2$ ，则相应的方程为：

$$\frac{1}{2}T_N + \frac{1}{2}T_E + 2T_A - 3T_B = 0 \quad (5.4.4)$$

对这样一个西南边界节点的这些有限差分方程点算子可以用图5-12表示之。显然，对其他方位上位于角上的边界点的情况也是类似的。

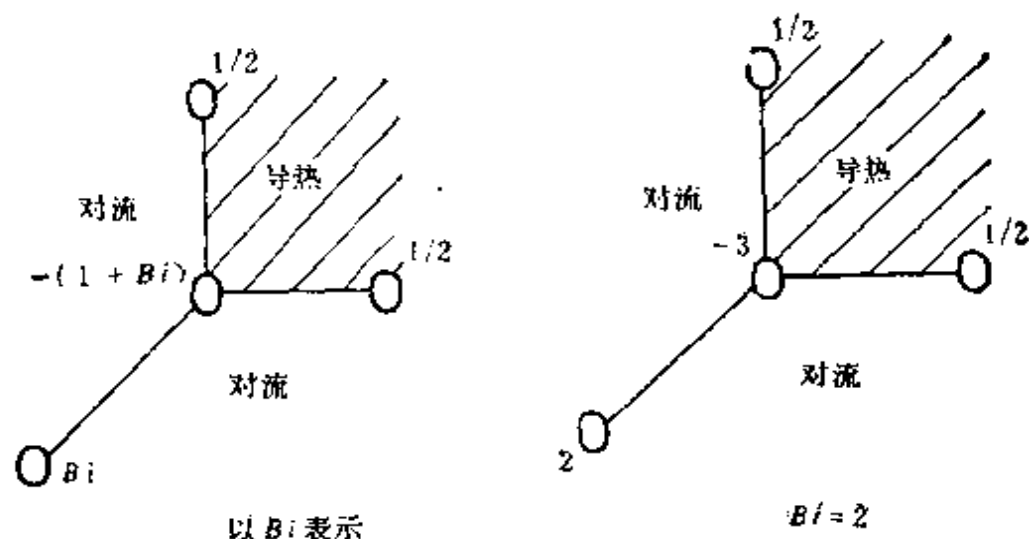


图 5-12 西南角对流边界的有限差分方程点算子

用公式5·4·1至5·4·4的这些思路可以推导出在炉墙横断面上若干点的有限差分方程。图5-13表示一个覆盖方形网格的炉墙，它具有对流边界条件，其内部和外部毕欧数分别为4和2。列出

Figure 1 shows a diamond-shaped control volume T_A on a grid. The grid has horizontal spacing Δx and vertical spacing Δx . The diamond is centered at node 5. Nodes 1, 2, 3, 4, 6, 7, 8, and 9 are marked. The diamond's vertices are at nodes 2, 5, 8, and 11 (labeled as 4 in the diagram). The edges are labeled a , b , c , d , e , and f . A table in the bottom right corner lists the nodes and the control volume.

节点	单元控制体积
2	a, b, c, d 是一定的
8	(的)

138

8.4.2 三角形网格

图5-14表示一个炉墙的横断面，炉墙内表面暴露于温度为 T_A 的炉气中，表面传热系数为 h 。由图可见，在此炉墙上覆盖了边长为 Δ 的方形网格，当把问题看作二维稳定态时，我们的任务是对节点1至9建立有限差分方程。除了节点2和8以外，都可以用已经叙述过的常规方法处理，这里只着重研究节点2和8，在该处的网格呈现出三角形部分是由于连接内部对流边界的。

节点2：分析三角形238时发现，几何因子 F_{ij} 是传导系数除以导热系数，即 K_{ij}/k （见第四章4.2节）， F_{ij} 由下式得出：

$$F_{82} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 90^\circ$$

$$F_{32} = \frac{1}{2} \operatorname{ctg} 45^\circ$$

即：

$$F_{82} = 0$$

$$F_{32} = \frac{1}{2}$$

类似地：

$$F_{12} = 0$$

$$F_{12} = \frac{1}{2}$$

用通常的方法以方形网格完全能把炉子横断面的其余部分绘制出来。这样，对于节点2的热平衡还有来自节点1、3、5的作用，来自正方形1245和2563的附加的几何因子：

$$F_{12} = \frac{1}{2}$$

$$F_{52} = 1$$

$$F_{32} = \frac{1}{2}$$

这样，影响节点2的最终几何因子为：

$$F_{12} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

$$F_{52} = 1$$

$$F_{32} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

现在, 假定导热系数 k 为常数, 对节点 2 可列出有限差分方程如下:

$$kF_{12}(T_1 - T_2) + kF_{52}(T_5 - T_2) + kF_{32}(T_3 - T_2) + h(2)^{1/2}\Delta(T_A - T_2) = 0$$

此式可化简为:

$$T_1 + T_5 + T_3 + (2)^{1/2}BiT_A - [3 + (2)^{1/2}Bi]T_2 = 0 \quad (5.4.5)$$

式中 毕欧数 $Bi = h\Delta/k$

节点 8: 用类似的方法可推导出对节点 8 的有限差分方程:

$$T_3 + T_9 + (2)^{1/2}BiT_A - [2 + (2)^{1/2}Bi]T_8 = 0 \quad (5.4.6)$$

参 考 文 献

Ames, W.F. (1969). *Numerical Methods for partial Differential Equations*. Nelson, London.

Carnahan, B., Luther, H.A. & Wilkes, J.O. (1969). *Applied Numerical Methods*. Wiley, New York.

Carslaw, H.S. & Jaeger, J.C. (1959). *Conduction of Heat in Solids*. Clarendon Press, Oxford.

Dorn, W.S. & McCracken, D.D. (1972). *Numerical Methods with Fortran IV: Case Studies*. Wiley, New York.

Dusinberre, G.M. (1961). *Heat Transfer Calculations by Finite Differences*. International Textbook Company, Scranton, Pa.

Forsey, G.E. & Wasow, W.R. (1960). *Finite Difference Methods for Partial Differential Equations*. Wiley, New York.

Fox, L. (1962). *Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations*. Pergamon Press, Oxford; Addison-Wesley, Reading, Mass.

Gardner, K. (1945). Efficiency of extended surface. *Trans. ASME*, **67**(8), pp. 621-31.

Gerald, C.F. (1970). *Applied Numerical Analysis*. Addison-

Wesley, Reading, Mass.

McCracken, D.D. (1965). *A Guide to Fortran IV Programming*. Wiley, New York.

Mitchell, A.R. (1969). *Computational Methods in Partial Differential Equations*. Wiley, New York.

Razelos, P. (1973). Methods of obtaining approximate solutions. Section 4, pp. 4-1 to 4-78, in *Handbook of Heat Transfer*, ed. W.M. Rohsenow and J.P. Hartnett. McGraw-Hill, New York.

Reid, I.K. (1966). A method for finding the optimum successive over-relaxation parameter. *Comput. J.*, 9, p. 200.

Richtmyer, R.D. & Morton, K.W. (1967). *Difference Methods for Initial Value Problems*, 2nd ed. Interscience, New York.

Smith, G.D. (1965). *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Oxford University Press, London.

Varga, R.S. (1962). *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.

第六章 有限差分方程在简单的 不稳定态问题上的应用

6.1 一维不稳定态问题:显式格式

6.1.1 简单问题

考察图6-1所示一维钢板坯问题。开始时,整个板坯温度为 20°C 。突然板坯两侧升高到 1000°C ,并保持在这个温度。板坯厚210毫米,垂直于厚度方向的尺寸很大。钢的导热系数、比热和密度给定如下:

$$k = 41 \text{瓦/米}\cdot\text{K}$$

$$C_p = 504 \text{焦/公斤}\cdot\text{K}$$

$$\rho = 8000 \text{公斤/米}^3$$

问题是要确定初始温度发生变化以后五分钟,整个板坯的温度分布。第一步是将板坯分成若干份;如图6-1所示分成六份,每份厚35毫米。第二步导出全部节点的有限差分方程,然后确定对各节点的差分方程作多少次计算才能得到五分钟后的温度分布。



图 6-1 一维钢板坯在不稳定态数值计算时的分层 (图中分成六层)

例如节点 2 的有限差分方程,可根据第三章公式3.5.18直接

得到, 变成一维热流时, 公式3·5·18为

$$\sum_j K_{j2}(T_j - T_2) + HV_2 = \rho C_p V_2 \frac{\Delta T_2}{\Delta t} \quad (6.1.1)$$

式中求和是对所有相邻节点而言, K_{j2} 是由节点 j 到节点2的传导系数(见第三章公式3·5·15), H 是放热速率(瓦/米³), V_2 是与节点2有关的单元控制体积, $\Delta T_2 = T'_2 - T_2$, 它表示时间由 t 进行到 $t + \Delta t$ 时节点2的温度变化。

在本节开始讨论的问题中, H 等于零, V_2 为 $(1 \cdot 1 \cdot \Delta x)$, 且只对相邻节点 $j=1$ 和3求和, 因此

$$k \frac{1^2}{\Delta x} (T_1 - T_2) + k \frac{1^2}{\Delta x} (T_3 - T_2) = \rho C_p \Delta x \frac{(T'_2 - T_2)}{\Delta t}$$

由该式可得

$$T_1 + T_3 - \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_2 = \frac{1}{Fo} T'_2 \quad (6.1.2)$$

式中傅立叶数

$$Fo = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{k}{\rho C_p} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \quad (6.1.3)$$

公式6·1·2恰好就是第三章中的公式3·5·5, 而公式3·5·5是通过一维直角坐标的不稳定态偏微分方程

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.1.4)$$

直接作有限差分逼近得到的。即

$$\frac{T_1 - 2T_2 + T_3}{(\Delta x)^2} = \frac{1}{\alpha} \left(\frac{T'_2 - T_2}{\Delta t} \right)$$

由这个公式立即可得到公式6·1·2。

由于边界条件是狄立克莱型, 即温度值是已知的。因此显式表达式的稳定性判据是公式6·1·2中不能出现负的系数(见第四章公式4·5·2)。

对于所考察的一维情况

$$Fo \leq 0.5 \quad (6.1.5)$$

若取

$$Fo = 0.5 \quad (6.1.6)$$

则根据公式6.1.3, 时间步长必须取

$$\Delta t = 60.2 \text{秒}$$

这时, 有限差分方程6.1.2可简化为

$$T'_2 = \frac{1}{2}(T_1 + T_3)$$

类似的方程

$$T'_i = \frac{1}{2}(T_{i-1} + T_{i+1}) \quad (2 \leq i \leq 6) \quad (6.1.7)$$

对于每一个温度未知的其它内部节点都适用。并且将公式6.1.7用于五个内部节点中的每一点, 便求得下一个时间层(即过60.2秒)的各点温度。用这个方法重复应用公式6.1.7就使得解按步向前进行直到满足需要为止。表6-1中示出了五步时间的计算结果, 五步时间相当于301秒或近似为5分钟。如果特殊需要某个特定时间的温度值, 则可在两个时间层的值之间作线性内插(见后面的例子); 或者减小 Δt , 从而减小 Fo 以同样保持稳定性判据, 使得 Δt 的某一整数倍恰好就是所需的时间。

表 6-1 傅立叶数 $Fo = 0.5$ 时板坯温度的相应变化
(每一个时间步长大约为 1 分钟)

时 间 步 数	t (分) (近似值)	左侧表面 T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	右侧表面 T_7
0	0	1000	20	20	20	20	20	1000
1	1	1000	510	20	20	20	510	1000
2	2	1000	510	265	20	265	510	1000
3	3	1000	632.5	65	265	265	632.5	1000
4	4	1000	632.5	448.8	265	448.8	632.5	1000
5	5	1000	724.4	448.8	448.8	448.8	724.4	1000

程序1.1(见260页)

表6-1所示各计算值同样可用计算机算出, 程序1.1给出了一

个简单的计算机程序，用于计算图6-1问题的时间—温度变化，注解卡充分描述了计算的方案。

在该表中，初始表面温度取 $t > 0$ 时的表面温度 1000°C ，而不是取 $t = 0$ ①时表面的起始温度 20°C 。这是克服 $t = 0$ 时温度突变的一种方法，这种方法可通过假定在第一个60.2秒的时间步长中，上述温度就是正在影响板坯温度变化的表面温度来证明。更值得推荐的是假定初始表面点的温度等于它们突变时的平均值。在本节计算例子中取为

$$T_1 = T_7 = 510^{\circ}\text{C}$$

虽然这与对后继时间步长取初始值的显式表示法直接相矛盾，但是，实际上却得到了更加精确的解。用这种初始表面温度计算的结果示于表6-2，此表还利用了对称条件，因为在板坯的中心

$$\frac{\partial T}{\partial x} = 0$$

所以

$$T_5 = T_3; T_6 = T_2; T_7 = T_1$$

于是中心节点4的有限差分方程就是 $T_5 = T_3$ 时的公式6.1.7，

表 6-2 傅立叶数 $F_0 = 0.5$ ，初始表面突变温度给定为平均值时板坯温度的相应变化
(每一时间步长大约为1分钟)

时 间 步 数	左侧或右 侧表面 $T_1 (= T_7)$	$T_2 (= T_6)$	$T_3 (= T_5)$	T_4	$T_5 (= T_3)$
0	510	20	20	20	20
1	1000	265	20	20	20
2	1000	510	142.5	20	142.5
3	1000	571.3	265	142.5	265
4	1000	632.5	356.9	265	356.9
5	1000	678.5	448.8	356.9	448.8

① 原文误写为 $T = 0$ 。——译注

即在节点 4 的有限差分方程中, 节点 3 的值使用了两次。换句话说, 我们可把 T_3 正好算作 T_5 处的值, 且在节点 4 以通常的方式应用公式 6·1·7。表中所示方案就使用了这种方法。

程序 1·2 (见第 261 页)

程序 1·2 给出了进行上述计算的简单计算机程序, 所得计算结果示于表 6-2 中。同样地, 由注解卡提供关于程序安排的充分信息。此外在程序中还注意到了如何利用节点 4 的对称条件 $\partial T / \partial x = 0$ 来减少计算工作量。

6·1·2 柱面极坐标的例子

考察一个一维柱面极坐标问题 (示于图 6-2), 其中 Z 和 θ 的变化甚微。假设外部边界被绝热, 而内热源 H 在起作用。根据第二章表 2-5, 适合有内热源项的偏微分方程是

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6·1·8)$$

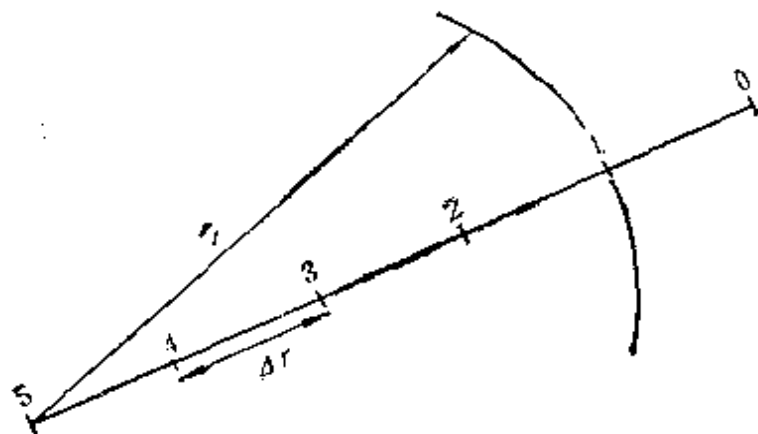


图 6-2 一维柱面极坐标问题

第四章 4·1 节集中讨论了类似于公式 6·1·8 的相应的差分方程。尤其是第四章公式 4·1·6, 当忽略掉 Z 和 θ 的变化, 并有内热源项 HV 。 (V_0 是由第四章公式 4·1·4 给定的节点 0 的单元控制体积) 时的相应形式, 对于公式 6·1·8 的左端都是正确的, 其右

端要求有像第四章中公式4·1·5那样的项。它们的一些细节包含在第四章表4-2的相应部分。图中节点的划分是假设分成五个小区段，每段间距等于 Δr 。

相应的有限差分方程同样可以通过对偏微分方程，公式6·1·8作直接替代得到。对于节点1，其结果是

$$k \left[\frac{T_0 - 2T_1 + T_2}{(\Delta r)^2} + \frac{1}{r_1} \frac{(T_0 - T_2)}{2\Delta r} \right] + H = \rho C_p \frac{(T'_1 - T_1)}{\Delta t}$$

除中心节点外，其余的每一个节点都具有类似的方程形式。若公式用傅立叶数表示，并写成一般内部节点*i*的形式，则此方程为

$$T'_i = \frac{Fo}{2} \left[\left(2 + \frac{\Delta r}{r_i} \right) T_{i-1} + \left(\frac{2}{Fo} - 4 \right) T_i + \left(2 - \frac{\Delta r}{r_i} \right) T_{i+1} + \frac{2H}{k} (\Delta r)^2 \right] \quad (6.1.9)$$

式中
$$Fo = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2} = \frac{k}{\rho C_p} \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2}$$

对于中心节点5，第四章第4·1节已经指出

$$\left. \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0}$$

能代之为

$$\left. \frac{\partial^2 T}{\partial r^2} \right|_{r=0}$$

因此，中心节点5的相应的有限差分方程为

$$2k \left\{ \frac{2T_4 - 2T_5}{(\Delta r)^2} \right\} + H = \rho C_p \frac{(T'_5 - T_5)}{\Delta t}$$

并可简化为

$$T'_5 = Fo \left[4T_4 + \left(\frac{1}{Fo} - 4 \right) T_5 + \frac{H}{k} (\Delta r)^2 \right] \quad (6.1.10)$$

该式已经利用了对称条件

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=0} = 0$$

另一种比较简单的是以通常的方法应用公式6·1·9计算 T'_4 ，然后令

$$T'_5 = T'_4 \quad (6·1·11)$$

但是，由于这种方法不只是假设对称条件，也就是说，它还假设

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=\Delta r/2} = 0$$

因此，它的精确度要比使用公式6·1·10时的精确度低。故建议：对于中心节点5用公式6·1·10，其余内部节点（节点1到4）用类似于公式6·1·9的方程。

为了处理在外部边界节点0处法向梯度为零的条件，在偏微分方程替代中，最简单的方法是在节点0外距离 Δr 处引进一个假想节点 F ，其半径为 $(r_0 + \Delta r)$ ，然后把一般方程式6·1·9与法向梯度为零的条件一并用于节点0。在节点0处

$$\left. \frac{\partial T}{\partial r} \right|_{r=r_0} = 0$$

即

$$\frac{T_F - T_1}{2\Delta r} = 0$$

该式可简化为

$$T_F = T_1$$

因此，外部边界节点0的方程为

$$T'_0 = Fo \left[2T_1 + \left(\frac{1}{Fo} - 2 \right) T_0 + \frac{H}{k} (\Delta r)^2 \right] \quad (6·1·12)$$

上述不稳定态问题的解可以这样求得，它以 Δt 为时间步长，在中心节点5用公式6·1·10，内部节点4、3、2和1用公式6·1·9，外部边界节点0用公式6·1·12逐步往前计算温度。检查这些方程式的右端表明只要 $Fo \leq 0.25$ ，就能保持避免负系数的稳定性判据。该限制从0.5下降是因为中心节点的处理所引起的。

假如读者考虑在 r -方向用对数分格是否会简化节点方程，那末，在使用这种分格的区域内节点方程应会简化。但是本节没有

使用这样的变换，因为如同第四章4·1节中已经提到的，在任何情况下，其适用范围不能推广到包括 $r=0$ 的中心节点，并且像这样的变换，在与中心节点相邻的第一个内部节点将有一个选得是否合适的问题。另外，作为自变量总要把 ξ 变换为 r （见第四章公式4·1·12），这也将很不方便。

6·2 改变网格尺寸和不稳定性

根据第四章4·5节的讨论，只要有限差分方程是收敛的，减小 Δx 和（或） Δt 都将提高精确度。当然，我们必须注意保证在 Δx 分得更细，而没有相应地减小 Δt 时，使得稳定性判据（对于6·1节的简单问题，即是公式6·1·5）仍然得到遵守。实际上，若 $Fo=0.5$ ，而 Δx 减小一半，则为了使得 $Fo=0.5$ 和保持稳定性， Δt 就需要减小到它原来值的四分之一。如果 Δt 没有减小到这一最低限度，则 $Fo>0.5$ ，过程就将会不稳定，如同后面表6-5中所列举的那样。由此可见，若把 Δx 减半，至少必须同时将 Δt 减到四分之一。其结果使计算到某一特定时间所需要的计算工作量增加七倍。

对于第6·1节的简单问题，表6-3列举了把分格数从6增加到8时的效果。为了使傅立叶数 Fo 保持在0.5， Δt 就必须取33.95秒；为了得到5分钟后的解，就需要在第8步和第9步之间内插，实际上，由于

$$\frac{300}{33.95} = 8.86$$

因此，我们可用下列形式的线性内插公式

$$T_s|_{t=300} = 0.14T_{i|_{\text{时间层8}}} + 0.86T_{i|_{\text{时间层9}}} \quad (6\cdot2\cdot1)$$

既然 Δx 和 Δt 稍分细些就会改进精确度，那么可以预料5分钟后中心线处的值（表6-3中的 T_s ）要比较粗网格时相应的值（表6-2中的 T_4 ）更加精确。所以我们认为 364.7°C 要比 356.9°C 更符合实际。

另一种改进精确度的方法不是同时分细 Δx 和 Δt ，而是单独

表 6-3 傅立叶数 $F_0 = 0.5$ 和细分 Δx 间距时板坯温度的相应变化
(每一时间步长为33.95秒)

时 间 步 数	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	$T_6 (= T_7)$
0	510	20	20	20	20	20
1	1000	265	20	20	20	20
2	1000	510	142.5	20	20	20
3	1000	571.3	265	81.25	20	81.25
4	1000	632.5	326.3	142.5	81.25	142.5
5	1000	663.2	387.5	203.8	142.5	203.8
6	1000	693.8	433.5	265	203.8	265
7	1000	716.8	479.4	318.6	265	318.6
8	1000	739.7	517.7	372.2	318.6	372.2
9	1000	758.9	556	418.1	372.2	418.1

在第8.86步内插得到

8.86	1000	756.2	550.6	411.7	364.7	411.7
------	------	-------	-------	-------	-------	-------

分细 Δt , 结果减小傅立叶数 F_0 , 因此也能保持稳定。例如若将时间步数从 5 增加到 8, 而板坯仍保持分成 6 分, 则 Δt 减小到 $60.2 \times 0.625 = 37.5$ 秒, F_0 减小到 $0.5 \times 0.625 = 0.312$ 。这样, 要解的有限差分方程是稍复杂些, 它可通过把上述 F_0 的值代入公式 6.1.2 来得到; 对于每个一般内部节点, 其有限差分方程为

$$T'_i = 0.312 (T_{i-1} + T_{i+1}) + 0.376 T_i \quad (2 \leq i \leq 6) \quad (6.2.2)$$

通过观察, 当公式 6.2.2 左端 T'_i 的系数为 1 时, 其右端各项系数相加也总是为 1, 这就给我们提供了一种算术校核方法。根据公式 6.1.2, 这一要求很容易被推断出来。用公式 6.2.2 计算出的结果如表 6-4 所示, 最后一行是 $t = 5$ 分钟时的温度。

表 6-3 和表 6-4 的计算, 用第二个计算机程序 (程序 1.2) 能很容易地完成 [通过改变维数语句 (DIMENSION statement) 和改变对于板坯厚度方向节点数与所需时间步数的 DO 循环范围 (DO loop ranges)]。对于后一个表的值, 唯一不同的重要修改是 DO 101 循环; 它应该用下列语句来代替

DO 101 I=2, 4

TP(I)=0.312★(T(I-1) + T(I+1))+0.376★T(I)

101 CONTINUE

当然，为了改进精确度而分细 Δx 和 Δt 网格时，一定要注意保持 $Fo \leq 0.5$ ，以确保稳定性。表6-5所示情况是没有这样做的结果，由于在 $\Delta x = 3.5$ 厘米（板坯分成6份）的情况下，任意地选取 $\Delta t = 120$ 秒，因而所用 $Fo = 1$ 。在这种情况下，有限差分方程为

$$T'_i = T_{i-1} + T_{i+1} - T_i \quad (2 \leq i \leq 6) \quad (6.2.3)$$

用此方程进行计算得到了完全不能允许的结果，这和有限差分方程的不稳定性——计算值的振荡幅度随着计算次数的增加而加大有关。在时间步数2和3之间线性内插所得到的， $t = 5$ 分钟（等于2.5步）时的解，很明显是不能令人满意的。

表 6-4 傅立叶数 $Fo = 0.312$ 时板坯温度的相应变化
(每一时间步长为37.5秒)

时 间 步 数	T_1	T_2	T_3	T_4	$T_5 (= T_6)$
0	510	20	20	20	20
1	1000	172.9	20	20	20
2	1000	383.2	67.7	20	67.7
3	1000	477.2	151.3	49.8	151.3
4	1000	538.6	221.3	113.1	221.3
5	1000	583.6	286.6	180.6	286.6
6	1000	620.8	346.2	246.7	346.2
7	1000	653.4	400.8	308.8	400.8
8	1000	682.8	450.9	366.2	450.9

6.3 二维不稳定态问题：显式格式

二维不稳定态问题决定于偏微分方程

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} \quad (6.3.1)$$

表 6-5 傅立叶数 $Fo = 1$, 计算过程不稳定时板坯温度的相应变化
(每一时间步长为 2 分钟)

时 间 步 数	T_1	T_2	T_3	T_4	$T_5 (= T_3)$
0	510	20	20	20	20
1	1000	510	20	20	20
2	1000	510	510	20	510
3	1000	1000	20	1000	20
4	1000	20	1980	-960	1980
5	1000	2960	-2920	4920	-2920

而如何用一组有限差分方程来代替这个偏微分方程已在第三章 3.5 节中研究过了。为了简单起见, 现考察第五章图 5-2 中的问题 (在第五章中该图是当作稳定态问题处理的), 这是一个边长比为 1:2 的矩形区域。如图所示, 用正方形网格划分直角坐标中的二维空间区域, 结果只有三个要计算温度的内部节点, 这些节点分别标注为 1、2 和 3。正如第五章图 5-3 所示, 假定在任何时候边界点 A 、 B ……, H 的温度均为已知的常数 (狄立克莱边界条件), 但是在时间 $t = 0$ 时, 该区域的所有内部点温度都是 $T = 20^\circ\text{C}$ 。如果假定没有内热源 ($H = 0$), 通过公式 6.3.1 的直接替代或用能量平衡法都可以得到如下的显式有限差分方程 (见第三章公式 3.5.4 和第四章表 4-1)

$$\frac{1}{Fo} T'_P = T_N + T_S + T_E + T_W - \left(4 - \frac{1}{Fo}\right) T_P \quad (6.3.2)$$

式中傅立叶数

$$Fo = \alpha \frac{\Delta t}{\Delta^2} = \frac{k \Delta t}{\rho C_p \Delta^2}$$

并且使用了明显的方位记号。公式中不带撇号的各参数是在前一个时间层 t 时求出的值; 标有撇号的参数是在新的时间层 $t + \Delta t$ 时, 在 P 点要新计算的温度。根据第四章公式 4.5.2, 给定的 ρ , C_p , k 和 Δ , 我们必须选择一个时间步长 Δt , 使得傅立叶数

$Fo \leq 0.25$, 这等于保证在公式 6·3·2 的右端不出现负系数。因此, 为了前进到一个新的时间层, 就必须运用所需要的边界条件计算这三个温度 T'_1 , T'_2 和 T'_3 (每个温度的这种计算都得用到前一个时间层的 T 值):

$$\begin{aligned}\frac{1}{Fo} T'_1 &= T_B + T_H + T_2 + T_A - \left(4 - \frac{1}{Fo}\right) T_1 \\ \frac{1}{Fo} T'_2 &= T_C + T_G + T_3 + T_1 - \left(4 - \frac{1}{Fo}\right) T_2 \\ \frac{1}{Fo} T'_3 &= T_D + T_F + T_E + T_2 - \left(4 - \frac{1}{Fo}\right) T_3 \quad (6.3.3)\end{aligned}$$

如果引入如第五章图5-3所给定的已知边界条件, 则得到

$$\begin{aligned}\frac{1}{Fo} T'_1 &= 400 + T_2 - \left(4 - \frac{1}{Fo}\right) T_1 \\ \frac{1}{Fo} T'_2 &= 400 + T_3 + T_1 - \left(4 - \frac{1}{Fo}\right) T_2 \\ \frac{1}{Fo} T'_3 &= 1360 + T_2 - \left(4 - \frac{1}{Fo}\right) T_3 \quad (6.3.4)\end{aligned}$$

若取该矩形的大小为0.1米×0.2米便得到间距 $\Delta = 0.05$ 米的正方形网格; 并假定它是钢做成的, 钢的导热系数, 比热和密度与6·1节所给的值相同

$$k = 41 \text{ 瓦/米} \cdot \text{K}$$

$$C_p = 504 \text{ 焦/公斤} \cdot \text{K}$$

$$\rho = 8000 \text{ 公斤/米}^3$$

则时间步长 Δt 和傅立叶数 Fo 的关系可表示为

$$Fo = \frac{41 \Delta t}{8000 \times 504 (0.05)^2} \approx 0.004 \Delta t$$

为了简化计算, 在公式6·3·3或6·3·4中取 Fo 等于它的上限值0.25。相应的 Δt 就等于

$$\Delta t = \frac{0.25}{0.004} = 62.5 \text{ 秒}$$

同时上述各步进方程 (marching equations) 变为

$$\begin{aligned} T'_1 &= (T_B + T_H + T_2 + T_A)/4 \\ T'_2 &= (T_C + T_G + T_3 + T_1)/4 \\ T'_3 &= (T_E + T_F + T_E + T_2)/4 \end{aligned} \quad (6.3.5)$$

或

$$\begin{aligned} T'_1 &= (400 + T_2)/4 \\ T'_2 &= (400 + T_1 + T_3)/4 \\ T'_3 &= (1360 + T_2)/4 \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

用公式6.3.6计算的结果示于表6-6。7步时间相当于437.5秒或7分钟17.5秒。检查表6-6中算出的温度,可以发现这些温度正好和第五章表5-1中所看到的,用雅可比迭代法解相应的稳定态问题所得计算结果相同。在表5-1中每一新行表示接近稳定态解的又一次迭代,而在表6-6中,每一新行都和时间步长以及到最终稳定态条件所规定的时间有关。表6-6和第五章表5-1的相似并不只是偶然的:这两个过程有着很大的相似性,实际上,沿时

表 6-6 用显式公式和 $Fo = 0.25$ 的二维不稳定态计算结果

时 间 步 数	时 间 t (秒)	T_1	T_2	T_3
0	0	0	0	0
1	62.5	100	100	340
2	125	125	210	365
3	187.5	152.5	222.5	392.5
4	250	155.6	236.3	395.6
5	312.5	159.1	237.8	399.1
6	375	159.45	239.6	399.45
7	437.5	159.7	239.7	399.9

间的步进方程6.3.5, 6.3.6和第五章中雅可比迭代公式5.2.11, 5.2.13完全相同。总的结论是:已知狄立克莱边界条件和傅立叶数 Fo 用极限值 (分别等于1/2, 1/4和1/6) 的一维、二维和三维问题的显式不稳定态计算与根据雅可比迭代法解相应的稳定态问

题所走的道路正好相同。因此，如果把相应的稳定态程序——第四章的程序 1·2 作一些适当的修改，使每一次新的迭代与此刻新的时间层相连系，就可以作为显式不稳定态问题的计算程序。因为这很简单，此处就不作详述了。

6·4 对流边界条件

6·4·1 一维简单问题

在 6·1 节中考察了一个板坯的一维简单不稳定态问题，其中给出了狄立克来边界条件，因此板坯两侧表面温度始终是已知的。图 6-1 说明了该问题，一开始板坯温度为 20°C ，突然两侧表面温度升高到 1000°C ，接着保持在这一温度。表 6-1 和 6-2 列出了该问题的计算结果。它同样可用程序 1·1 和程序 1·2 求解。

在许多热传导问题中，比较常见的情况是边界点（在上述例子中是板坯的表面）并非处于已知固定不变的温度下，而是通过对流或辐射的方式失去或得到热量，其速率正比于物体表面温度的某一方次和周围介质温度同一方次之间的差。第四章 4·3 节讨论了该问题的一般细节，同时导出了如同第四章公式 4·3·3 和 4·3·4 那样，涉及表面外法向温度梯度的关系式。本节的任务是要在比较实际的假设条件下（即板坯被浸入 1000°C 的介质中，板坯每一表面的传热都是按照给定的传热系数 h 进行），重新计算 6·1 节中的简单问题。对于本节所研究的问题来说，第四章图 4-15 说明靠近左部边界的问题，而图 6-3 表示同一区域附近，过一定时间后的某一瞬间典型的温度分布，图中符号稍有变化。此外，整个 210 毫米厚的板坯被分成六份。对于左侧边界节点用能量平衡法可得到如下显式有限差分方程（见第四章公式 4·3·14 和 4·3·15）

$$T_1' = 2Fo \left[T_2 + BiT_\infty + \left(\frac{1}{2Fo} - 1 - Bi \right) T_1 \right] \quad (6\cdot4\cdot1)$$

式中已用毕欧数和傅立叶数作了相应的替代，即毕欧数 $Bi = h\Delta x/k$ ，傅立叶数

$$Fo = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} = \frac{k}{\rho C_p} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

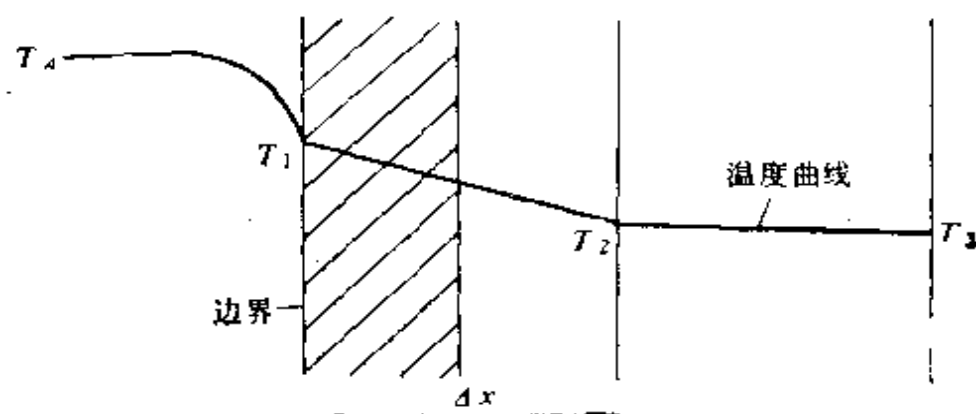


图 6-3 靠近板坯左侧表面对流边界的温度分布

左侧表面温度 T_1' 的上述方程必须在沿着时间逐步计算过程中, 和下列通常的内部节点的显式方程同时求解

$$T_i' = Fo \left[T_{i-1} + T_{i+1} + \left(\frac{1}{Fo} - 2 \right) T_i \right] \quad (i=2, 3, \dots) \quad (6.4.2)$$

此式是本章较早导出的公式6.1.2的一般形式。当然, 由于稳定性缘故, 对 Fo 的值要有一个限制, 这就是第四章公式4.5.2和4.5.3指出的必须遵守

$$Fo \leq 0.5 \quad (\text{内部节点}) \quad (6.4.3)$$

和

$$Fo \leq \frac{1}{2(1 + Bi)} \quad (\text{边界节点}) \quad (6.4.4)$$

在这两个关系式中限制性较大的是后一个公式。

利用6.1节中的数据, 我们便能计算出

$$\alpha = 1.017 \times 10^{-6} \text{ 米}^2/\text{秒}$$

同时, 若取

$$h = 200 \text{ 瓦/米}^2 \cdot \text{K}$$

则毕欧数为

$$Bi = \frac{200 \times 0.21/6}{41} = 0.171$$

因此, 根据公式6·4·4, 稳定性判据为

$$Fo \leq 0.427$$

如果取极限值, 以便简化公式6·4·1和6·4·2中的一个, 则时间步长为

$$\Delta t = Fo \frac{(\Delta x)^2}{\alpha} = \frac{0.427 \times (0.21/6)^2}{1.017 \times 10^{-5}} = 51.4 \text{秒}$$

为了得到5分钟后的温度分布, 可在时间步数5和6之间进行线性内插, 因为所需步数 N_s 是

$$N_s = \frac{300}{51.4} = 5.83$$

取 Fo 为极限值和 $T_A = 1000^\circ\text{C}$ 时, 要解的方程6·4·1和6·4·2成为

$$T'_1 = 0.854T_2 + 145.8$$

$$T'_i = 0.427[T_{i-1} + T_{i+1} + 0.342T_i] \quad (i=2, 3, \dots)$$

(6·4·5)

计算结果示于表6-7, 表中 $t=0$ 时, T_1 的平均值被取在它的初始值 20°C 和由公式6·4·5计算的值之间。这个修正在某种程度上是任意

表 6-7 对流边界时板坯温度 ($^\circ\text{C}$) 的相应变化
(每一时间步长为51.4秒)

时 步	间 数	T_A	$T_1 (= T_7)$	$T_2 (= T_6)$	$T_3 (= T_5)$	T_4	$T_5 (= T_3)$
0		1000	81.5	20	20	20	20
1		1000	162.9	46.3	20	20	20
2		1000	185.4	84.9	31.2	20	31.2
3		1000	218.3	104.9	49.3	29.6	49.3
4		1000	235.4	129.6	54.6	46.4	64.6
5		1000	256.5	147.0	84.6	61.9	84.6
6		1000	271.4	167.1	101.5	81.3	101.5
在5.83步线性内插所得的值							
5.83		1000	268.9	163.7	99.1	78.0	99.1

的，并在6·1节中讨论过。对于正好在5分钟后各个温度的线性内插值也示于表中，此时，对板坯每一侧表面的热流是

$$hA\Delta T = 200 \times 1^2 \times (1000 - 268.9) = 146.2 \text{ 千瓦/米}^2$$

前面讲的计算机程序（程序1·2）同样也能计算这一问题。主要的修改是DO101和DO102循环，它们应改成

$$TP(1) = 0.854 \star T(2) + 145.8$$

$$DO101 I = 2, 4$$

$$TP(I) = 0.427 \star (T(I-1) + T(I+1)) + 0.342 \star T(I)$$

101 CONTINUE

$$DO102 I = 1, 4$$

$$T(I) = TP(I)$$

102 CONTINUE

6·4·2 三角形网格的二维问题

在第五章5·4节中，曾导出部分炉墙传热问题的稳定态方程式，特别是在内部对流边界上点2和8，在它们附近需要用三角形网格。本节的任务是把这些概念推广到不稳定态条件，从而得出一个显式表达式，并保持对流边界条件。参阅第五章图5-14，现在要注意的是与节点2和8相关联的单元控制体积（面积），它们以 $abcd_2$ 和 def_8 为界，其体积分别为 $\frac{3}{4}\Delta^2$ 和 $\frac{1}{2}\Delta^2$ 。

节点2。将通常的热平衡近似式与已经标出的几何因子值相结合，便得到方程式

$$kF_{12}(T_1 - T_2) + kF_{52}(T_5 - T_2) + kF_{32}(T_3 - T_2) + h(2)^{1/2}\Delta(T_A - T_2) = \rho C_p \frac{3}{4}\Delta^2 \frac{2(T'_2 - T_2)}{\Delta t}$$

如果代入 $F_{12} = F_{52} = F_{32} = 1$ ， $Bi = h\Delta/k$ 和 $Fo = (k/\rho C_p)(\Delta t/\Delta^2)$ ，则得到显式公式

$$T'_2 = \frac{4Fo}{3} \left[T_1 + T_3 + T_5 + (2)^{1/2}BiT_A + \left(\frac{3}{4Fo} - 3 - (2)^{1/2}Bi \right) T_2 \right] \quad (6\cdot4\cdot6)$$

节点 8。同理可得显式公式

$$T'_8 = 2Fo \left[T_3 + T_9 + (2)^{1/2} Bi T_A + \left(\frac{1}{2Fo} - 2 - (2)^{1/2} Bi \right) T_8 \right] \quad (6.4.7)$$

这两个方程必须和其它内部节点方程以及其它边界点方程同时求解。对于对流边界点的稳定性要求总是要比各内部点有更大的限制性。以上研究的这两个节点，其时间步长 Δt 必须按照下面两个条件中较为严格的一个来限定：

$$Fo \leq \frac{3}{[4(3 + (2)^{1/2} Bi)]}$$

$$Fo \leq \frac{1}{[2(2 + (2)^{1/2} Bi)]}$$

请读者注意，在公式 6.4.6 和 6.4.7 中，若令 $Fo = \infty$ ，即取 $\Delta t = \infty$ ，那么就得到同一位置的相应稳定态方程，即第五章中的公式 5.4.5 和 5.4.6。

6.5 解不稳定态问题的隐式方法

正如第四章 4.5 节所讨论的，对于解不稳定态问题，隐式方法可以部分地或者完全地克服由于稳定性对时间步长的限制。然而，这个优点是以后在进行每一步计算时，都要解一组联立方程为代价而得到的。第三章公式 3.5.7 到 3.5.9 是适用于直角坐标系的三维、二维和一维不稳定态问题的完全隐式方程；公式 3.5.12 到 3.5.14 是适用于加权平均的计算公式。在一维问题情况下，采用三对角矩阵算法 (TDMA) 在进行每一步计算时都可立即得到快速解。但是，对于二维和三维问题，计算每一点的新值都涉及到四个或者更多相邻点的值，并且没有那种快速解法格式可供应用，所以使用直接法或者迭代法，第七章准备比较详细地讨论这些方法。在这种情况下的另一种方法是交替方向隐式法 (ADI)，根据这种方法，每一步仅仅是一个空间方向上的导数用完全隐式方法表示，而其余空间方向的导数用显式方法表示。因此只需求

解一组行方向或者列方向的方程组，而对于解每一个这样的行或列的方程组 TDMA 法都是适用的。理论证明（见卡纳汉（Carnahan）等人著作，1969），只要隐式表达式的方向在逐次向前计算的步子中按照顺序改变，上述ADI法就是稳定的。这些方法总要涉及到解许多方程式，并且总是使用计算机计算；所以进一步的讨论推迟到第七章 7.5 节比较方便，该节将介绍和学习合适的计算机程序。

参 考 文 献

Carnahan, B., Luther, H.A. & Wilkes, J.O.(1969). *Applied Numerical Methods*. Wiley, New York.

Dusinberre, G.M.(1961). *Heat Transfer Calculations by Finite Differences*, International Textbook Company, Scranton, Pa.

Gerald, C.F. (1970). *Applied Numerical Analysis*. Addison-Wesley, Reading, Mass.

Razelos, P.(1973).Methods of obtaining approximate solutions. Section 4, pp.4-1 to 4-78, in *Handbook of Heat Transfer*, ed. W.M. Rohsenow and J.P. Hartnett. McGraw-Hill, New York.

Smith, G.D.(1965). *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Oxford University Press, London.

第七章 传热问题的计算机解法

7.1 大型有限差分方程组

稳定态和不稳定态导热问题的有限差分模拟（按照隐式格式），使得我们必须同时求解有许多代数方程的方程组。虽然可以证明它们有唯一解，但是在优先考虑充分性、精确性、适应性和收敛性时，如何精确计算这个解常常是一个困难的问题。求解的方法可以分为直接法和迭代法。

直接法除了在方程数很多时舍入误差有严重的积累外，它可用有限次运算直接得到解。对于线性问题，在得到解后问题就可以结束了；但是在拟线性问题中，例如导热系数是随温度而变化的，计算过程就必须根据新算出的温度场求出修正后的导热系数重新进行。高斯消去法及其派生方法广泛地用来有效地进行直接求解。用伴随余因子法求逆矩阵或者用克拉姆行列式法则效率都很低，实际上，可能除了少于五个方程的情况外，绝不应该使用这些方法。在任何情况下都很少需要求逆矩阵，即使所给方程组是稀疏方程组时，其逆矩阵通常都是非零元素，因此需要有多余的磁芯存储器。稀疏方程组是一定要用直接法的一种特殊情况，在这种方程组里非零元素按照非常简单的形式出现，如三对角方程组形式。在该方程组中，高斯消去法的正向过程采用非常简单的，通称为三对角矩阵算法（TDMA）的形式（见程序2.2）。按照交替方向隐式法（ADI）的概念，该方法也能用于二维和三维的稳定态和不稳定态问题。在这类问题中，除了第一个和最后一个方程含有二个未知数外，其余的每一个方程都正好含有三个未知数，结果形成所谓的三对角方程组，它的矩阵形式总是由三对角系数带组成，于是这些方程用直接法求解更好些。这样的方程组出现在：

（1）一维稳定态问题（见第五章5.1节）；

(2) 粗网格二维稳定态问题, 如由公式7.1.2决定的问题;

(3) 用隐式方法求解不稳定态问题 (见第六章6.5节)。

迭代法一般比直接解法好, 并且当系数矩阵是稀疏矩阵时 (传热问题的模拟通常就是这样), 迭代解法要更快些。对于修正像导热系数那样的可变系数, 在计算过程中很容易就能实现。在磁芯存储器的需求方面, 迭代法比较经济, 并且没有舍入误差的积累。甚至手工计算时, 迭代法也有着明显的优点: 即如果有误差形成, 它们会自动修正。

这一节首先讨论含有 n 个未知数, n 个方程的方程组的解法:

$$\begin{aligned} a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + \cdots + a_{1n}T_n &= b_1 \\ a_{21}T_1 + a_{22}T_2 + \cdots + a_{2n}T_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}T_1 + a_{n2}T_2 + \cdots + a_{nn}T_n &= b_n \end{aligned} \quad (7.1.1)$$

对于几种不同的传热情况, 已经导出了这类有限差分方程。现将第五章5.2节的稳定态问题重新作为例子来说明, 这次用比较细的网格, 它有21个内部节点。可以看到它们的许多系数为零, 因此在某些解法中可以利用这一情况, 对于这一问题, 图7-1表示将网格尺寸减半所产生的影响, 结果使得有三个未知节点值的粗网格被分成有21个未知节点值的较细网格。在前一种情况下, 这三个值的三个有限差分方程已经给出过 (见第五章公式5.2.4); 这里把它们重新写出:

$$\begin{aligned} -4T_1 + T_2 &= -400 \\ T_1 - 4T_2 + T_3 &= -400 \\ T_2 - 4T_3 &= -1360 \end{aligned} \quad (7.1.2)$$

因为每一个未知节点值都有一个方程, 所以对于较细的网格得到21个有限差分方程。这些方程如前所述, 但以双下标记号表示。例如节点1,1的方程是

$$T_{12} + T_{21} - 4T_{11} + 150 + 100 = 0$$

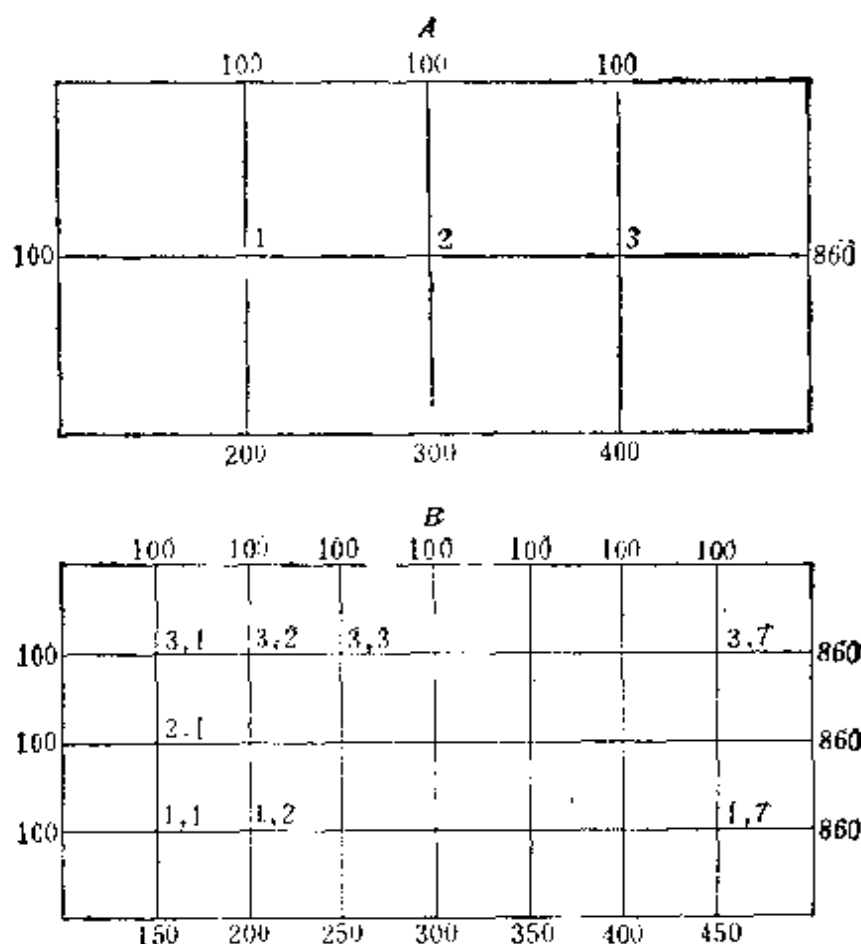


图 7-1 二维稳定态矩形区域热流问题的粗网格和细网格 (见第五章5.2节)

$A = 3$ 个未知节点值, 3 个有限差分方程 (见公式7.1.2)

$B = 21$ 个未知节点值, 21 个有限差分方程 (见公式7.1.3)

如果按照顺序列出所有21个节点的有限差分方程, 就得到以矩阵形式 (公式7.1.3) 表示的有限差分方程组。其中排列次序为通常的阅读顺序 (3,1, 3,2, ..., 3,7, 2,1, 2,2, ..., 2,7, 1,1, 1,2, ..., 1,7)。

一般说来, 像这类二维稳定态问题, 当采用细网格时可得到每个方程最多含有五个未知数的方程组, 而且迭代法是最合适的解法。请注意, 此处的带宽是 $15 = 2n + 1$, 其中 $n = 7$, 这是行排列的缘故。如果用列排列, 则带宽减少到 $7 = 2n + 1$, 其中 $n = 3$ 。在直

节 点		温 度 $T_{31} T_{32} T_{33} T_{34} T_{35} T_{36} T_{37} T_{21} T_{22} T_{23} T_{24} T_{25} T_{26} T_{27} T_{11} T_{12} T_{13} T_{14} T_{15} T_{16} T_{17}$																		
3,1	-4 +1	+1																		= -200
3,2	+1 -4 +1		+1																	= -100
3,3	+1 -4 +1			+1																= -100
3,4	+1 -4 +1				+1															= -100
3,5	+1 -4 +1					+1														= -100
3,6	+1 -4				+1 -4															= -100
3,7	+1 -4				+1 -4															= -960
2,1	+1						-4													= -100
2,2	+1						+1 -4 +1													= 0
2,3	+1						+1 -4 +1													= 0
2,4	+1						+1 -4 +1													= 0
2,5	+1						+1 -4 +1													= 0
2,6	+1						+1 -4 +1													= 0
2,7	+1						+1 -4 +1													= 0
1,1							+1													+1 = -860
1,2							+1													= -250
1,3							+1													= -200
1,4							+1													= -250
1,5							+1													= -300
1,6							+1													= -350
1,7							+1													+1 -4 +1 = -400
																				+1 -4 = -1310

(7.1.3)

接解法中，形成较窄带宽的列式排列在计算所需的时间上可能是有益的。

7.2 直接解法

采用直接解法，虽然作有限次运算就可得到解，但是有舍入误差的积累，这种误差积累可能淹没计算的解。因此，当方程个数不太多时（一般不多于40个），或者方程组是三对角方程组时（在此情况下，方程数一般可多至500个），直接解法才是有效的。

基本的消去法可用来解形如公式7.1.1的方程组。其过程通常按一定规律进行，首先把第一个方程乘以一合适倍数依次加到其余的每一个方程上，从而消去方程2到 n 中的 T_1 。这就得到了一个简化的等价方程组，在此方程组中，除了第一个方程外，所有其余方程中 T_1 的系数都为零。然后用同样的方法，把方程2乘以一合适倍数依次加到其余的每一个方程上，消去方程3到 n 中的 T_2 。以同样的方法继续进行完其余的方程，结果得到一组上三角形的等价方程组：

$$\begin{array}{rcl} a_{11}T_1 + a_{12}T_2 + \cdots + a_{1n}T_n & = & b_1 \\ a'_{22}T_2 + \cdots + a'_{2n}T_n & = & b'_2 \\ & \vdots & \\ & & a'_{nn}T_n = b'_n \end{array}$$

式中标以撇号的表示变换后的系数。如果第 r 步变换时，在第 r 个方程中 T_r 的系数是零，则不能从方程 $r+1$ 到 n 中通过把方程 r 的某一合适倍数依次加到其余每一个方程上消去 T_r ，因为不存在这样的倍数。在这种情况下，将方程 $r, r+1, \dots, n$ 作某种重新排列就能在第 r 个方程中得到 T_r 的非零系数，于是变换过程就能继续进行。

只要给出的形如公式7.1.1的方程组有解，且各方程式是线性无关并存在唯一解，这种变换总是可能的。这相当于系数矩阵 A ：

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

有非零行列式:

$$\det A \neq 0$$

这时 A 称为有逆或者非奇异的。当 A 不是这样时, 我们用消元程序试图求得唯一解将会失败, 当方程组是超定或欠定(over-or underspecified) 时, 这种情况就会出现, 结果导致无解或者有无穷多个解。但是一般说来, 方程组具有 n 个未知数 T_1, T_2, \dots, T_n 和 n 个线性无关的方程式, 因而这种复杂情况不会发生。

现在可以求出方程组中最后一个未知数:

$$T_n = \frac{b'_n}{a'_{nn}}$$

其余的未知数通过下式用回代方法求出

$$T_r = \frac{b'_r - \sum_{i=r+1}^n a'_{ri} T_i}{a'_{rr}}$$

式中按照顺序 $r = n-1, n-2, \dots, 1$ 。

为了进一步明确这些想法, 现考察第五章5.2节中的那个简单问题的方程组7.1.2, 它有三个未知值 T_1, T_2 和 T_3 以及三个方程式。用适当的乘法和加法把方程组7.1.2化为上三角形

$$\begin{aligned} -4T_1 + T_2 &= -400 \\ -15T_2 + 4T_3 &= -2000 \\ -56T_3 &= -22400 \end{aligned}$$

(把第二个方程乘以 4, 并把第一个方程加到第二个方程上。然后把第三个方程乘以 15, 再把第二个方程加到第三个方程上), 根据这个上三角方程组用回代法便可得到精确解:

$$T_1 = 160; T_2 = 240; T_3 = 400$$

要注意在计算中使用精确的算法 (不允许用除法), 并要注意大数的出现。一个较大的方程组出现很大的数时, 则不论是人工还是

机器用这个很大的数作精确计算都是不可能的。

高斯消去法可以完成上述计算，但是为了防止这种大数的出现，在作乘法和加法以前可先将对角线各元素取准为1。虽然由于只能保留有限的小数位而有舍入误差，但为了防止出现大数这是值得的。在任何情况下，计算机只能把这些数保留到一定位数的有效值，因此用这种方法求得的解是不精确的，它的精确度要比每步单独计算的精确度低，因而所得最终解具有舍入误差严重积累的缺点。实际上，只有少于大约40个方程的方程组才用该方法求解。高斯消去法的派生方法包括高斯-乔丹 (Gauss-Jordan) 法和克劳特 (Crout) 简化或者乔列斯基 (Cholesky) 方法。

程序2·1(见第262、263页)

该程序说明高斯消去法。正如所述，程序首先计算上三角形等价方程组，然后用回代方法求出等式左边完全是对角线上元素的值。所示程序是解有三个联立方程的方程组，但实际上它也能用来解常微分方程和椭圆形偏微分方程边值问题中一般的，有几个未知数几个方程的任意方程组。在后面这些情况下，要注意尽管实际上有许多系数为零，但所有的系数都要被存储。因此该程序在存储器方面是浪费的；而下面一些程序（特别是程序2·2和4·1）则是节省的。

程序2·2(见第264、265页)

该程序说明用于三对角方程组的高斯消去法。其系数矩阵是三对角的，且解法就是通常所说的三对角矩阵算法 (TDMA)。所示程序压缩矩阵是为了只存储那些非零系数和右边的常数，而其余的系数无疑都是零。由于该程序自动利用这种稀疏特性，故用高斯消去法计算是很快的。

如果用符号表示 b = 下对角线系数， d = 主对角线系数， a = 上对角线系数和 C = 常数项，则用符号表示的方程组为

$$\begin{aligned}d_1 T_1 + a_1 T_2 &= C_1 \\b_2 T_1 + d_2 T_2 + a_2 T_3 &= C_2\end{aligned}$$

$$b_3 T_2 + d_3 T_3 + a_3 T_4 = C_3$$

$$\begin{array}{c} \diagdown \quad \diagdown \quad \diagdown \\ b_n T_{n-1} + d_n T_n = C_n \end{array}$$

这个方程组的三角形化过程（撇号表示变换后的值）是

$$\text{新的 } d_i = d_i - \frac{b_i}{d'_{i-1}} \cdot a'_{i-1} \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

$$\text{新的 } C_i = C_i - \frac{b_i}{d'_{i-1}} \cdot C'_{i-1} \quad (i=2, 3, \dots, n)$$

回代过程是

$$T_j = \frac{C'_j - a'_j T_{j+1}}{d'_j} \quad (j=n-1, n-2, \dots, 1)$$

所示程序解的是由五个方程组成的三对角方程组：

$$\begin{array}{rcl} 4T_1 - T_2 & & = 0.5 \\ -T_1 + 4T_2 - T_3 & & = 1.5 \\ -T_2 + 4T_3 - T_4 & & = 2.5 \\ -T_3 + 4T_4 - T_5 & & = 3.5 \\ -T_4 + 4T_5 & & = 4.5 \end{array}$$

式中左端是典型的形式，右端的常数可以是任意数，方程中的这些数字仅是为了举例。该程序特别适用于以隐式方法解抛物型偏微分方程问题（这类问题可得到类似于所示的三对角方程组），以及适用于以很粗网格解椭圆形偏微分方程问题（这时可得到形如公式7·1·2的方程组），或者用于以直线法解一般的椭圆形问题。在直线法中，校正计算是沿着在某一特定迭代步子上认为是未知值的一条直线进行的（与该直线相邻的其余各点的值认为是已知的，并由前一次迭代值给定）。

7·3 迭代解法

对于一般由100个到1000个方程（在某些情况下甚至有更多的方程）组成的大型方程组，最好选用迭代法。用这种方法得到

●原文误为 d_j 。——译注

的解没有舍入误差的积累。但是为了保证能得到解，需要有主对角线占优。也就是说，在上述方程组（公式7·1·1）中，就第 i 个方程而言（对于每一个方程 i 依次为 $1 \leq i \leq n$ ①），其主对角线系数 a_{ii} 的绝对值至少必须和该方程左端所有其余各系数绝对值的总和一样大；并且至少有一个方程，其主对角线系数必须绝对大于其余各系数之总和，即

对于每一个方程 i ($1 \leq i \leq n$)

$$|a_{ii}| \geq |a_{i,1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{i,n}|$$

至少有一个方程 i ($1 \leq i \leq n$)

$$|a_{ii}| > |a_{i,1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{i,n}| \text{ ② (7·3·1)}$$

实际上这些要求是没有问题的，对于稳定态椭圆形问题来说，本身就会使得方程组以主对角线占优形式排列。这种方法一般包括从一个近似解开始（该初始近似解经常假定为 $T_1 = T_2 = \dots = T_n = 0$ ），然后重复校正（通常按顺序进行） T 值多次直至重新校正的结果对各 T 值只有很小的变化。一般收敛判据为：所有 T 中最大的相对变化小于 10^{-3}

即

$$\max_i \left[\frac{(T'_i - T_i)}{T_i} \right] < 10^{-3} \quad (7·3·2)$$

其中 10^{-3} 称为容差。但是，最好是保证所有各点的剩余都变得很小（因为这些剩余可用来度量偏离所讨论点精确解的程度），到那时我们说已经收敛于方程的解，并取这组解作为最终得到的一组 T 值。稳定态问题的典型方程组为公式7·1·2和7·1·3。要注意这些方程组都已具有如公式7·3·1所规定的主对角线占优条件，因此迭代解法应当收敛于解。 T 值的校正按下述方法进行：在每一个方程中，主对角线项留在方程左端，其余各项移至方程右端，例如把公式7·1·2重新排列成

$$T_1 = (400 + T_2)/4$$

① 原文误为 $1 < i < n$ 。——译注

② 原文误为 $|a_{ii}| > |a_{i,1}| + \dots + |a_{i,i-1}| + |a_{i,i+1}| + \dots + |a_{i,n}|$ 。——译注

$$\begin{aligned}T_2 &= (400 + T_1 + T_3)/4 \\T_3 &= (1360 + T_2)/4\end{aligned}\quad (7.3.3)$$

而在以图7.1中的节点记号表示情况下, 方程组7.1.1的典型方程是

$$T_{ij} = \frac{(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1})}{4} \quad (7.3.4)$$

式中外边界各点的值给定为相应的已知边界温度。

现在把前一次的迭代值或最新的值代到方程右端, 每一个方程便可用来校正左端占优项, 从而计算左端新的温度。如同第五章5.2节和5.3节所讨论过的, 在求解过程中各种校正方法在复杂程度和有效性方面是有差别的。现在回顾一下这些基本思想, 同时着重于上述大型方程组的处理和它们的算法。按照图7-1的细网格和典型的节点方程——公式7.3.4, 前面介绍过的各种迭代解法如下所述。

7.3.1 雅可比迭代

雅可比迭代〔也称李普曼(Liebmann)迭代和同时位移法〕是按照顺序校正网格所有各点的值, 并在下一次迭代时新的 T_{ij} (比如记为 T'_{ij})完全根据前一次迭代时的旧值 (不带撇号的 T 值) 来计算。公式7.3.4的相应形式为

$$T'_{ij} = \frac{(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1})}{4} \quad (7.3.5)$$

7.3.2 高斯—塞德尔迭代

高斯—塞德尔迭代 (也称逐个位移法) 与雅可比迭代相类似, 所不同的是在高斯—塞德尔迭代法中, 新算出的温度刚得到就立即用于计算。公式7.3.4的相应形式为

$$T'_{ij} = \frac{(T_{i+1,j} + T'_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T'_{i,j-1})}{4} \quad (7.3.6)$$

7.3.3 松弛法

松弛法类似于高斯—塞德尔迭代法, 也是一旦得到最新算出的 (即带有撇号的) T 值, 就立即把它们用于计算, 但是这种方法的不同之处在于它不是按照顺序进行校正, 而是通过仔细检查

所有各点的剩余来决定哪一点温度要校正。其剩余为

$$R_{ij} = T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{ij} \quad (7.3.7)$$

它可用来衡量在网格点 (i, j) 处偏离公式7.3.4的精确解的程度。一般我们使用标准剩余，在我们所讨论的问题中，它们是

$$r_{ij} = \frac{R_{ij}}{4}$$

同时通过寻找最大绝对剩余 r_{ij} 的那个点来决定要校正的温度点。程序随着单个点的校正不断进行，作为每次校正的顺序根据计算过程中剩余的大小确定。每次单点的校正用下式来完成

$$T'_{ij} = \frac{(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1})}{4} \quad (7.3.8)$$

或者相当于

$$T'_{ij} = T_{ij} + \frac{R_{ij}}{4} = T_{ij} + r_{ij} \quad (7.3.9)$$

这两者都是暂时把 (ij) 点的剩余 R_{ij} 减小到零；此外它们还改变（通常对于较差的情况）相邻各点 $[(i+1, j), (i-1, j), (i, j+1) \text{ 和 } (i, j-1)]$ 的剩余，在我们所讨论的问题中，其改变量为 $R_{ij}/16$ ，或者相当于 $r_{ij}/4$ 。例如在 $(i+1, j)$ 点新的剩余变成

$$R_{i+1,j} = R_{i+1,j} + \frac{R_{ij}}{16}$$

这是由于在 (i, j) 点为了减少 R_{ij} 外加了温度变化 $\Delta T_{ij} = R_{ij}/4$ 的缘故。

7.3.4 超松弛法

超松弛法可与上述三种方法的任何一种一起使用。所有这些方法，每一点计算都可用公式7.3.8或7.3.9表示。在高斯—塞德尔方法（公式7.3.6）情况下，这两个公式的右端被认为是新算出的标以撇号的 T 值。正如第五章5.3节中曾简要地讨论过的，用这些方法把所考察的点的剩余减为零通常是以增加先前已降为零的相邻节点剩余的值作为代价的。因此典型节点剩余的值会产生

振荡，并且收敛得相当慢。如果在校正某一点温度时使用超松弛法，使得不仅将相应的剩余降为零，而且使它取相反的符号，以期望在下一步校正附近各节点时，对曾作过超松弛的剩余将有好的效果，于是上述振荡和收敛慢的现象就能避免。根据公式7·3·9的形式，超松弛法可用下列点校正公式来代替

$$T'_{ij} = T_{ij} + \frac{\omega R_{ij}}{4} = T_{ij} + \omega r_{ij} \quad (7.3.10)$$

有时它可按另一种方法写成

$$T'_{ij} = T_{ij} + \alpha R_{ij} = T_{ij} + 4\alpha r_{ij} \quad (7.3.11)$$

式中 $\alpha = \omega/4$ ， ω 称为松弛（或加速）参数， α 称为松弛因子。为了收敛起见， ω 和 α 的上限分别为 2 和 0.5（可把校正公式 7·3·10 或 7·3·11 右端避免负系数的思想和相应的二维显式表达式以及它的稳定性要求相比较）。 ω 和 α 值分别等于 1 和 0.25 表示没有超松弛的一般过程。 ω 和 α 值分别处于 0 和 1，以及 0 和 0.25 之间时为低松弛，物性系数随温度变化时往往使用低松弛法，以便抑制温度和系数两者都振荡。在大多数情况下，超松弛法可采用

$$\begin{aligned} 1 \leq \omega \leq 2 \\ 0.25 \leq \alpha \leq 0.5 \end{aligned} \quad (7.3.12)$$

7·3·5 最优超松弛参数的估计

对于某一指定的问题， ω 和 α 的最优值（假定为 ω_0 和 α_0 ）是难以确定的。然而当要解的方程组来自模拟一个二维稳定态问题时，某些详细的研究可供应用。让我们把讨论局限于高斯—塞德尔迭代法。这时最优的 ω_0 和 α_0 取决于没有超松弛时，随高斯—塞德尔迭代过程产生的迭代矩阵的最大特征值。实际上，可以非常一般地和肯定地证明（有某些例外）：

$$\omega_0 = \frac{2}{[1 + (1 - \lambda^2)^{1/2}]} \quad (7.3.13)$$

式中 $\lambda = \max |\lambda_i|$

● 原书误为 $[1 + (1 - \lambda)^{1/2}]$ 。——译注

是高斯-塞德尔迭代矩阵的最大特征值或谱半径。在高斯-塞德尔迭代过程情况下，估计 λ 并由 λ 估计 ω_0 的一种实际方法是计算未用超松弛时温度场 T 的逐次迭代值。因此可有

$$\text{第一次迭代: } \mathbf{T}^1 = [T_{11}^1, T_{12}^1, \dots]$$

$$\text{第二次迭代: } \mathbf{T}^2 = [T_{11}^2, T_{12}^2, \dots]$$

$$\vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

因为 \mathbf{T} 的各个误差 $\mathbf{e} = [e_{11}, e_{12}, \dots]$ 大致以几何级数变化，也就是说

$$|e_{ij}^{n+1}| \approx \lambda |e_{ij}^n| \quad (7.3.14)$$

式中各上标表示迭代层次，因此 λ 可根据下式估算

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{\|\mathbf{E}_n^{n+1}\|}{\|\mathbf{E}_n^n\|} \right) \quad (7.3.15)$$

式中迭代误差的范数是

$$\|\mathbf{E}_n^n\| = \sum_{i,j} |e_{ij}^n|$$

实际上，我们是在某一特定的网格点上，通过公式7.3.15或简单地用公式7.3.14寻求 $\omega = 1$ 时作若干次迭代后的 λ 值，而后计算 ω_0 ，并在相继的迭代中使用这个超松弛量。

同样可以证明，当方程来于模拟稳定态热传导问题时，对 ω_0 影响最大的是网格间距 Δx , Δy , Δz 。在一矩形区域上，其各边分别有 p 个和 q 个间距为 Δ 的正方形格子，对于这一情况下的二维问题，可以证明 $\alpha_0 = \omega_0/4$ 是下列二次方程较小的根

$$\left(\cos \frac{\pi}{p} + \cos \frac{\pi}{q} \right)^2 \alpha^2 - 4\alpha + 1 = 0 \quad (7.3.16)$$

对于有 p 和 q 个格子的上述矩形区域，还可以证明公式7.3.13适用于

$$\lambda = \cos \frac{\pi}{p} + \cos \frac{\pi}{q}$$

并且当 p 和 q 的值很大时（实际上大于10是合适的）

$$\omega_0 = 4\alpha_0 = 4 \left[-\frac{1}{2} - \frac{\pi}{2(2)^{1/2}} \left(-\frac{1}{p^2} + \frac{1}{q^2} \right)^{1/2} \right] \quad (7.3.17)$$

程序3·1 (见第266~269页)

程序3·1说明用高斯—塞德尔迭代法解公式7·1·1那样的一般方程组。程序所以写成这样是为了(如果必要的话)允许所有的系数全不为零,其实,支配一些实际问题的方程式都含有许多零。因此,对于支配实际问题的大型方程组来说,在存储器方面这是很浪费的,因为在要求解的方程数 N ,最大迭代次数ITMAX和用作收敛判据的微量值TOL被读入后,所有的系数都要读入 $N \times N$ 维数组 A 。所给方程必须已经是对角占优形式,并且初始近似解取为零值〔这可通过读空白(blanks)得到〕。在使用标准的高斯—塞德尔迭代法时,方程组7·1·1中第 i 个方程的占优项——未知的 T_i 可用下列公式校正

$$T_i = \frac{[b_i - (a_{i,1}T_1 + a_{i,2}T_2 + \cdots + a_{i,i-1}T_{i-1} + a_{i,i+1}T_{i+1} + \cdots + a_{i,n}T_n)]}{d_{i,i}}$$

或者等价地根据剩余来校正

$$T_i = T_i + \frac{R_i}{d_{i,i}}$$

式中

$$R_i = b_i - (a_{i,1}T_1 + a_{i,2}T_2 + \cdots + a_{i,n}T_n)$$

而在这两个公式中,右端都是使用最新的值,左端得出的是被校正的值。在被校正的 T 上通常所标的撇号在公式和程序中都被省略了,因为替换是立即进行的,故不需要存储整组的 T' 值,而是使用一个单独的存储单元SAVE。在不超过迭代次数上限ITMAX的条件下,迭代延续到任何一个 T 值变化的最大绝对值小于容差TOL为止。为了确定 T 值的最大变化,每一个旧的 T 值被保存到算出它的新值为止,然后把 T 值的变化与以前算出的 T 值的最大变化DIFF相比较,如果新算出的 T 值变化大于DIFF,那么,它就取代在DIFF中存储的值。后一个程序,即程序4·1与本程序相类似,但它有一些改进的地方,包括考虑到超松弛法和在存储器方面的节省。

7.4 稳定态椭圆型问题的计算机解法

7.4.1 拉普拉斯方程

稳定态拉普拉斯热流方程

$$\nabla^2 T = 0$$

得用一组有限差分方程表示,并要求这组差分方程对覆盖在求解区域上的网格(正方形,矩形,不均匀三角形和其它形状网格)的每一格子点都适用;此外,在包围这一区域的所有点上还需要关于 T 或 $\partial T/\partial n$ 的相应边界条件。为了进一步明确这些想法,现考察上述方程的二维形式:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

在一个均匀的正方形网格的点 (i, j) 处,该方程用有限差分方程表示为

$$\frac{1}{\Delta^2} [(T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}) + (T_{i,j+1} - 2T_{i,j} + T_{i,j-1})] = 0$$

式中 $\Delta = \Delta x = \Delta y$ 是正方形网格的间距,故此方程可简化为

$$T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{i,j} = 0$$

这是在该区域的每一点 (i, j) 上都应该适用的有限差分方程。当所有这些方程式都保持一定的精确度时(也就是说,这些方程式对于这区域的每一点 (i, j) 都成立),那么我们断言,如果这些离散点的相应点的真解能够找到并被求出,则这些离散点上的 $T_{i,j}$ 可以看作非常逼近真解。

点 (i, j) 可能是:

(1) 在边界上——在这种情况下,如果梯度条件适合边界上的这一点,则外部假想点的温度可用中心差分逼近 $\partial T/\partial n$ 来消去,否则该方程用 $T_{i,j} = K$ 代替,这里 K 是已知的边界条件。

(2) 在它的一边或更多边与边界相邻接——在这种情况下,如果相应的边界值已知,那么该方程的前四项中就有一项或更多项是已知值。

(3) 远离边界点——在这种情况下, 该方程的所有前四项和 T_{ij} 本身一样都是未知的。

因而, 这类问题可归结为一个方程组, 每个方程最多含有五个未知数, 并且方程个数和未知数的个数一样多。在第五章5.2节中已经介绍过这一典型问题, 该节讨论了在矩形区域内, T 的边界值已知时的二维稳定态热流。本章开始时曾叙述过粗的和细的正方形网格, 从而得出了有3个或21个有限差分方程的方程组。每一个网格点有一个未知温度, 因此也就有一个方程。结果得到了方程组7.1.2和7.1.3; 这些方程组都是稳定态问题的典型方程组, 并且要注意它们的稀疏特性。如果方程数少于大约40个, 则上述方程组可用直接法求解。程序2.1对这类问题是有用的。通过分细网格可进一步得到较高的精确度, 但结果必须求解的联立方程组也更大(如若再次等分所述例子中的网格尺寸就得到一组 $7 \times 15 = 105$ 个方程的方程组)。那时直接解法就变得不适用了, 而适宜用迭代法, 这可使用前面叙述过的应用高斯—塞德尔松弛法的程序3.1。可惜, 该程序是按有 n 个未知数 n 个方程的一般方程组编写的, 结果使得所有的系数都要分配存储单元(对于上述例子需要1000个以上的单元)。我们可看到每一个方程最多只有五个未知数, 因此这个程序在存储器和计算时间方面都是非常浪费的。下面给出一个利用这种稀疏特性的程序, 即程序4.1。程序中网格点 (i, j) 的未知温度 T_{ij} 可通过使用公式7.3.6或者以剩余表示的公式7.3.9作校正计算。在这两个方程中, 公式右端都用最新的值以计算左端的校正值。对于比较一般的问题, 虽然可以运用7.3节中介绍的各种方法, 但在超松弛情况下应用带有相应 ω 或 α 值的公式7.3.10, 而 ω 或 α 值由公式7.3.17给出。

7.4.2 泊松方程

如果稳定态问题伴随有内热源, 则需要求解泊松方程

$$k\nabla^2 T + H = 0$$

其方法与刚介绍的拉普拉斯方程一样, 就二维问题而论, (i, j)

点的有限差分方程（如果 H 随着位置而变化的话）是

$$\frac{1}{\Delta^2}[(T_{i+1,j} - 2T_{ij} + T_{i-1,j}) + (T_{i,j+1} - 2T_{ij} + T_{i,j-1})] - \left(\frac{H}{k}\right)_{ij} = 0$$

式中 Δ 是正方形网格的间距。将上述方程重新整理得

$$(T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1}) - 4T_{ij} + \Delta^2\left(\frac{H}{k}\right)_{ij} = 0$$

方程中 T_{ij} 是占优项的温度，于是这一方程可按照下列形式来校正 T_{ij}

$$T'_{ij} = \frac{T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} + \Delta^2\left(\frac{H}{k}\right)_{ij}}{4} \quad (7.4.1)$$

（或者根据所用迭代格式使用在方程右端有带撇号 T' 的类似方程——见第7.3节^①）。这个方程也能写成以剩余表示的等价形式

$$T'_{ij} = T_{ij} + \frac{R_{ij}}{4} \quad (7.4.2)$$

式中 (i, j) 点的剩余由下式确定

$$R_{ij} = T_{i+1,j} + T_{i-1,j} + T_{i,j+1} + T_{i,j-1} - 4T_{ij} + \Delta^2\left(\frac{H}{k}\right)_{ij} \quad (7.4.3)$$

在超松弛情况下，则使用带有相应的 ω 或 α 值的推广公式，即公式7.3.10，而 ω 或 α 的值可由公式7.3.16给定或象7.3节中叙述过的那样推导。请注意，如果 $H=0$ ，该方程就简化为拉普拉斯方程，因此下面的程序4.1根据需要同样能用于这两种方程中的任何一种。

程序4.1（见第270~274页）

① 原文误为见第7.1节。——译注

该程序说明二维稳定态椭圆型问题的计算机解法，它用超松弛〔逐次超松弛（SOR）法〕的，且只用有限个存储器的高斯—塞德尔迭代法求解拉普拉斯方程或泊松方程。该程序是在已知边界（狄立克莱）条件情况下，按照覆盖在矩形区域（各边长为NWIDE和NHIGH）上的，间距为DELX的正方形网格来求解问题。所附程序表是在已知边界温度 $T=0$ 的条件下求解泊松方程

$$k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}\right) + H = 0$$

把这个程序稍加修改便能用来求解不同边界条件下的普通拉普拉斯方程。关于几何条件（NWIDE和NHIGH），导热系数COND和放热速率 H 的原始数据都作为已知数读入，而在DO循环中初始近似解给定为零。松弛因子ALPHA可作为已知数给定，但在程序中它的最优值是由公式7·3·17计算的。程序的核心是校正计算，为提高计算效率将校正计算所用的公式7·4·2稍作重新排列，校正计算包含在嵌套的DO循环中以保证顺序地逐点计算全部网格点。在不超过迭代50次的上限条件下，迭代继续进行直至收敛到任一 T 值的最大变化小于容差TOL（本程序中读入的是 10^{-3} ）为止。最后，通过导热棒类比（第五章5·2节）计算热流，并和内部放热量相比较；其偏差是因为使用有限差分逼近和使用限定的收敛判据TOL所致。当网格分得更细和（或）TOL减小时，该偏差也将减小。

7·4·3 其它细节问题

（1）导数边界条件。这类条件也称为纽曼条件或对流边界，在边界上法向梯度是已知的，或可由一个简单的定律来隐式地表示。如果边界上某点温度是未知的，就必须对所讨论的边界网格点解一个附加的代数有限差分方程。这个方程含有一个假想的外部点，该假想点的温度也是未知的——它不等于周围介质温度——而这点温度可通过以中心差分表示该边界点的已知的或隐含的法向梯度来消去。这样，当使用通常的五点公式时，与均匀

网格的内部点一样能保持 $O(\Delta)^2$ 的精度。图7-2表示用正方形网格覆盖二维矩形物体时东部边界的网格点情形。刚才介绍的这些概念以前曾遇到过（见第四章4.3节），在这一节我们把讨论局限于偏微分方程的替代方法，但是必须指出，如果用能量平衡法可得到相同的结果。我们需要根据方程组中其它的未知温度来得到未知边界温度 T_B 的有限差分方程。假定通常的有限差分方程适用于边界点 B ，则 B 点的方程除含有 B 点温度外，还含有 N 、 S 、 F 和 W 点的温度。对于正方形网格的拉普拉斯方程，该点的有限差分方程可简单地表示为

$$T_N + T_S + T_F + T_W - 4T_B = 0 \quad (7.4.4)$$

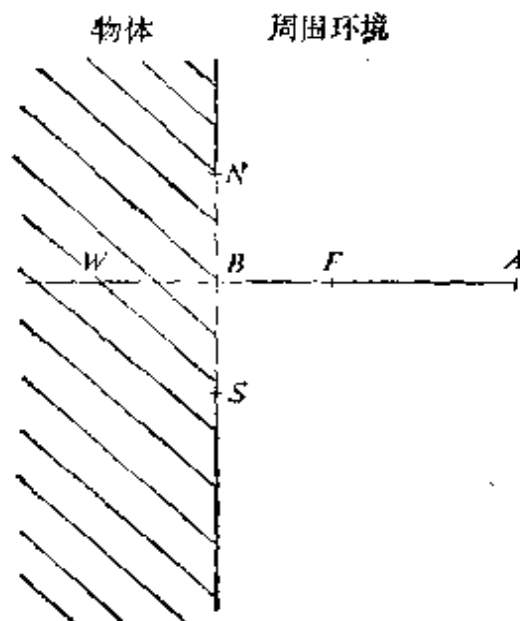


图 7-2 在二维物体的东部边界处，在导数边界条件下使用的网格点

W = 第一个内部节点， B = 表面节点， F = 假想点，

A = 周围介质条件

由于除了假想点 F 外，这些温度都原已在方程中，所以现在需要另外一个方程，从这个方程能够消去 T_F 。这可能出现下列两种情况，而第二种情况是比较现实的：

① 如果

$$\left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_B = C \text{ (已知值)}$$

则用中心差分表示 B 点的导数为

$$\frac{T_F - T_W}{2\Delta} = C \quad (7.4.5)$$

式中 Δ 是均匀正方形网格的间距, 因此

$$T_F = T_W + 2\Delta C$$

根据此方程就能从公式 7.4.4 中消去 T_F , 得到一个把 B 和它的三个相邻点连系起来的方程:

$$T_N + T_S + 2T_W - 4T_B = -2\Delta C$$

②如果 $\partial T / \partial x|_B$ 是通过对流放热速率的公式隐式地表示的, 则相应的公式为

$$k \left. \frac{\partial T}{\partial x} \right|_B = -h(T_B - T_A)$$

由该式, 同样运用中心差分表示导数, 则得到

$$\frac{T_F - T_W}{2\Delta} = -\frac{h}{k}(T_B - T_A)$$

因此

$$T_F = T_W - 2\Delta \frac{h}{k}(T_B - T_A)$$

在这个公式中, $\Delta h/k$ 常用毕欧数 Bi 代替, 因为 T_A 是已知的周围介质温度 ($\neq T_F$), 因此, 现在用这一方程可消去公式 7.4.4 中的 T_F 。最终的方程为

$$T_N + T_S + 2T_W - (4 + 2Bi)T_B = -2BiT_A$$

根据第四章 4.3 节中的热平衡方法, 也能直接得到这一公式。

(2) 网格系。用一矩形网格覆盖一个矩形区域是简单的, 通常 Δx 可根据物体包括的范围, 即从 $x=0$ 到 $x=XL$ 的尺寸和所需格子区间的数目 N 来推算。其 Fortran 源程序。

$$XL = 5.0$$

$$N = 10$$

```

      NP1=N+1
      DX=XL/N
      X(1)=0.0
      DO100I=2, NP1
      X(I)=X(I-1)+DX
100  CONTINUE

```

可确定所有 $N+1$ 条格子线的 x 值，这包括第一条和最后一条格子线。如果在 $x=0$ 和 $x=XL$ 处符合狄立克莱边界条件，那么，这种网格完全是合适的；但是，如果纽曼条件是合适的（例如在 $x=0$ 处），则有时使 $X(1)$ 成为假想点，而使 $X(2)=0$ 较为方便。此时适合用下列源程序：

```

      XL=5.0
      N=10
      NP1=N+1
      NP2=N+2
      DX=XL/N
      X(1)=-DX
      DO 100I=2, NP2
      X(I)=X(I-1)+DX
100  CONTINUE

```

同样，在 $x=XL+DX$ 处（正好在右侧边界的右方），可以安排一排附加的网格点。在 y 方向也可用类似的方法安置这种格子线。

当已知或预料问题有解，并该解在一定范围内表现出很大的活动性时，从精确度和效率的观点来看，在 x 方向或 y 方向安排一种逐渐扩张或收缩的网格是方便的，也是有效的，这可用不同的方式来实现，但是下述方法在概念上可能最容易理解。注意这时需要存储 DX 数组，因为每一点 (I, J) 的有限差分方程中都要用到这些 DX 值，并且根据 I 值的不同它们是不同的。假定需要 x 方向的格子线以扩张率 $EPSX=0.9$ 收缩，结果使得靠右侧边界较近的地方网格更细。首先，我们在相邻的格子之间用

需要收缩的扩张率EPSX来计算格子。这是按一个近似的DX-APP进行计算的，因此最后的点X(NP1)将和 $x = XL$ 不符合。于是用适当的倍数 $XL/X(NP1)$ 乘每一个X(I)值，使得正好符合物体尺寸并保持规定的扩张率。顺便说一下，这个比率在整个 x 范围内不需要是常数，可按我们的需要而变化。现在推荐下列Fortran源程序：

```

      XL=5.0
      EPSX=0.9
      N=10
      NP1=N+1
      DXAPP=XL/N
      X(1)=0.0
      DO 100I=2, NP1
        X(I)=X(I-1)+DXAPP
        DXAPP=DXAPP★EPSX
      100 CONTINUE
      FACTOR=XL/X(NP1)
      DO 101I=2, NP1
        X(I)=X(I)★FACTOR
        DX(I)=X(I)-X(I-1)
      101 CONTINUE

```

请注意，DX数组现在已存入数——它可用于在所有点上都必须应用的不均匀网格公式中。此时，如同第五章程序2.5那样，照理应为耦合系数安排存储单元。尽管可以预料在离散化误差方面是降低了一个数量级的精确度（不均匀格子与均匀格子相比较），但在要求精确度的地方所损失的精确度可由扩张效果来充分补偿。因此，总的说来，对于给定的计算机时间而言是得到了较高的精确度。然而不应当让EPSX离1太远：我们建议用 $0.8 \leq EPSX \leq 1.25$ 。

(3) 交错边界的网格系, 处理狄立克莱和纽曼两种边界条件的统一方法同样是简单而又引人注意的, 这可通过使网格系错开边界来实现, 结果正好使最后的格子区间被边界平分。显然, 这只有在物体的几何形状处于和网格线相平行时才有可能, 也就是说, 在柱面极坐标系中的圆柱体, 或者直角坐标系中的矩形体才有可能。本节讨论局限于二维直角坐标的矩形区域, 如图7-3所示, 它具有交错的均匀矩形格子, 该网格系也可包括扩张格子, 不过稍为复杂一些罢了。所示网格系有着显著的特性: 即物体温度的校正局限于 $2 \leq I \leq 5$ 和 $2 \leq J \leq 4$ 的那些点, 而与边界条件的类型无关。在内部各点作迭代以前或者时间层进展以前, 在 I 等于 1 或 6, 或者 J 等于 1 或 5 中至少有一排点上的外部温度是校正过的。上述外部点温度的确定根据边界条件的类型区别如下:

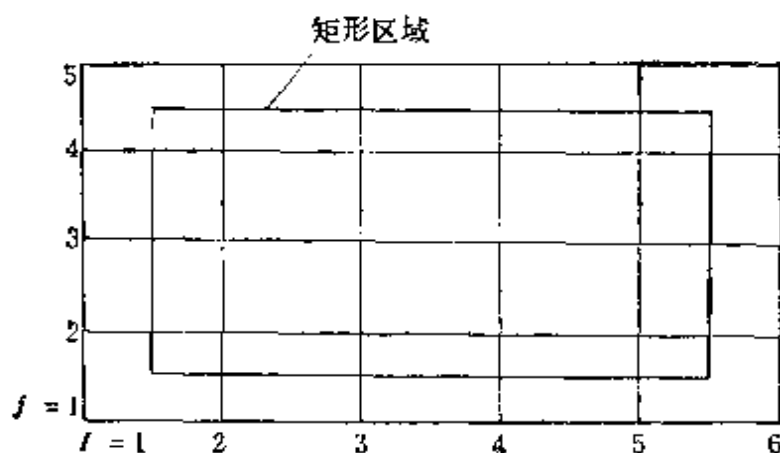


图 7-3 用于二维矩形区域的交错网格

如果某一特定边界是绝热的, 因此在边界上 $\partial T / \partial n = 0$, 则应用交错网格使得边界处于两格子线之间的正中间, 这样较为精确。这时要计算温度的第一条内部格子线上的点是沿着 $X(2)$ 的那些点。为此, 我们假定通常的方程式是适用的, 但来自左侧相邻点 $X(1)$ 的影响为零。这可通过令相应的系数为零[在这种情况下, 对于每一个 J 点, $A E(2, J) = 0$]来达到, 或者用另一种方法来

达到，即在每一次校正整个内部温度场以前令 $X(1)$ 的外部点温度等于 $X(2)$ 当时的温度。作些局部的修改就可同样地处理对流边界，那时用中心差分逼近法向梯度是合适的。

为了在已知温度的各个边界上保持上述交错的网格系，从而在整个边界上保持一致的方法，在每次对所有内部节点作校正以前就需要确定当时的外部点温度。这可根据当时的内部点温度和已知边界温度作简单的线性外插来进行。例如，如果边界温度是 T_B ，当时第一个内部点温度是 T_2 ，则外插的温度 T_1 为

$$\begin{aligned} T_1 &= T_B + (T_B - T_2) \\ &= 2T_B - T_2 \end{aligned}$$

特别是若 $T_B = 0$ ，则外部点温度定为

$$T_1 = -T_2$$

因此，根据 T_1 和 T_2 之间的线性关系，可以直观地得出 $T_B = 0$ 。

(4) 解的精确度。第四章4.4节中已经介绍过的任何一种方法都能用来改善精确度，这些方法包括采用较细的网格，根据用两个网格尺寸（其中一个为另一个尺寸的一半）算出的某一点上的不同值外插网格尺寸为零时的值，运用延迟校正法以及使用更精确的有限差分表达式（在每一个有限差分方程中不是用通常的五点而是用九点或更多的点）。由于这些方法已经详细讨论过，这里就没有必要再作进一步的详细的阐述。

7.5 不稳定态抛物型问题的计算机解法

7.5.1 一般概念

不稳定态热流问题的偏微分方程为

$$\rho C_p \frac{\partial T}{\partial t} = k \nabla^2 T + II$$

式中左端项不等于零，它可以根据初始条件和边界条件来求解。例如在一维空间情况下，关于 $T = T(x, t)$ 的方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = a \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad (7.5.1)$$

(式中 α =热扩散系数)可以根据初始条件($t=0, 0 \leq x \leq L$):

$$T(x, t)|_t=0 = T(x, 0) = f(x) \text{ (已知)}$$

和边界条件($t > 0, x=0$ 和 $x=L$):

$$T(0, t) = C_1 \text{ 和 } T(L, t) = C_2$$

(式中 C_1 和 C_2 是已知的常数或是时间的函数) 求出 $0 \leq x \leq L$ 和 $t > 0$ 时的解。按照这个例子, 现将讨论几种不同的解法。把所介绍的解法作简单的推广就能计算各种导数边界条件下的解, 例如计算对流边界时的解。这些导数边界条件的处理已经在7.4节中讨论过了, 本节不作详细叙述, 但程序5.2 包括有这类附加的复杂情况。

7.5.2 显式解法

显式方法是一种特别简单的方法, 这种方法的缺点是时间步长 Δt 受到稳定性的限制。它用一个大小为 Δx 和 Δt 的矩形网格覆盖需要求解的区域。该方法根据已知的初始 T 值开始计算并沿 t 方向逐步前进, 每一步都是根据 t_j (第 j 步) 时已知值计算 t_{j+1} (第 $j+1$ 步) 时的值。从第 j 步到 $(i, j+1)$ 步, 即对于点 (x_i, t_{j+1}) 可用下列前向差分算子表示时间导数

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{T_{i,j+1} - T_{i,j}}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

而用在 t_j 步时间处的后向值 (在显式方法中) 表示二阶空间导数

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j} - 2T_{i,j} + T_{i-1,j}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

因此, 公式7.5.1可用下式代替

$$T_{i,j+1} = \alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} (T_{i+1,j} + T_{i-1,j}) + \left(1 - 2\alpha \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \right) T_{i,j} \quad (7.5.2)$$

并且这一方程可用于由 $x=0$ 到 $x=L$ 的整个区域内所有点的每一步计算。图7-4说明这种显式解法。对于给定的 Δx , 如果这样选择 Δt , 使得

增长沿棒的传热。

程序5.1 (见第275~278页)

程序5.1说明已知(狄立克莱)边界条件下的一维不稳定态(抛物型)问题的显式解法。一个长度 $L=10$ 厘米的棒,在 $t>0$ 时,棒的两端都保持在不变的温度下:左端为 0°C ,右端为 100°C 。开始($t=0$)时,沿棒所有各点温度 $T=20^{\circ}\text{C}$,但是为了准确起见,将 $t=0$ 时棒端温度取为初始温度和 $t>0$ 时的端头温度之平均值,即左端取为 10°C ,右端取 60°C 。在上述边界条件下,一维不稳定态方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}$$

可用基本方程,公式7.5.2求解,并且公式7.5.2可依次用于每一个时间步长时整个棒的每一个内部点。在每一排温度以一定的时间步长算出以后,这排温度就被打印出来。要注意随着时间的推移,所计算的温度逐渐趋近稳定态的解,这个稳定态的解可通过对下列一维拉普拉斯方程直接求解得到(对于上述简单例子)

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

适合上述边界条件的稳定态解是 $T=100x/L$ 。因此,在计算例子中所用的四个内部点温度 T 逐渐趋近20、40、60和 80°C 。

7.5.3 隐式解法

(1) 完全隐式方法。这种方法用起来比显式方法较为复杂,它的优点是对于任何 Δt (亦即选用任何的 Fo)都是稳定的,但其代价是在每一步上都有较大的截断误差,因此精确度稍受损害,其精确度决定于 Δt : Δt 愈小,计算就愈精确。所以为了得到较好的精确度, Δt 必须适当小些。此种方法根据在 t_{j+1} 步时间处的前向未知值表示二阶空间导数,即

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \frac{T_{i+1,j+1} - 2T_{i,j+1} + T_{i-1,j+1}}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x)^2$$

因此,计算 $T_{i,j+1}$ 的有限差分方程是

$$-FoT_{i-1,j+1} + (1+2Fo)T_{i,j+1} - FoT_{i+1,j+1} = T_{ij}$$

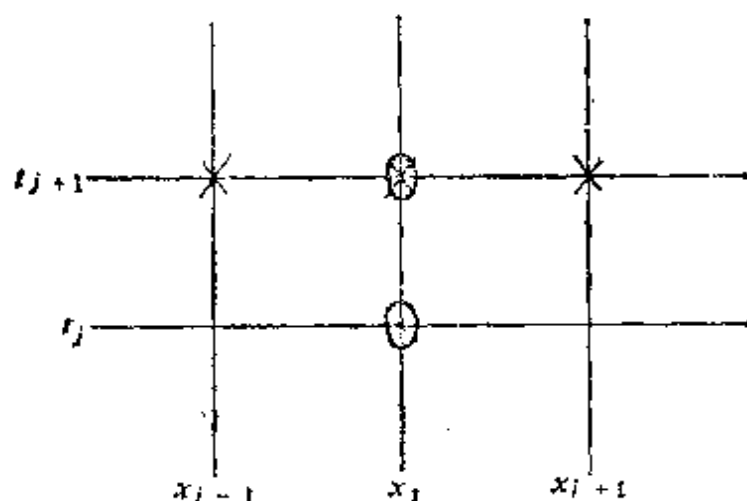


图 7-5 一维不稳定态问题的完全隐式有限差分模拟
(\times = 用于空间导数的点, \circ = 用于时间导数的点)

在隐式方法中, 该方程是在 t_j 步时间处进行计算的, 也就是说, 它含有三个未知数。每前进一步, 从 $x=0$ 到 $x=L$ 整个区域的每一点, 上述方程都要列出一次 (见图7-5)。因此, 向一个新的时间层每移动一步就必须解一个方程组。当按顺序列出这些方程时, 除了要解的第一点和最后一点的方程只有两个未知数外, 其余每一个方程都含有三个未知数, 于是该方程组是三对角的。对于这种情况, 很容易应用前面的程序2.2。

(2) 一般隐式方法。完全隐式方法虽然对任何 Δt 都是稳定的, 但是对于指定的计算工作量来说, 它不如更一般的隐式方法那样精确。一般隐式方法是在 t_j 和 t_{j+1} 之间的某一点上求二阶空间导数的值; 该方法利用了 t_j 和 t_{j+1} 处的二阶空间导数的加权平均值:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = \lambda \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_{j+1} + (1-\lambda) \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \Big|_j$$

式中 $0 < \lambda \leq 1$ 。对于给定的 Δt 和 Δx 来说, 当 λ 增加到 1 时, 精确度便逐步下降。

计算 $T_{i,j+1}$ 的有限差分方程为

$$\begin{aligned}
 & -Fo\lambda T_{i-1,j+1} + (1+2Fo\lambda)T_{i,j+1} - Fo\lambda T_{i+1,j+1} \\
 & = Fo(1-\lambda)T_{i-1,j} + [1-2Fo(1-\lambda)]T_{i,j} \\
 & \quad + Fo(1-\lambda)T_{i+1,j}
 \end{aligned} \tag{7.5.4}$$

若令 $\lambda=0$ ，则得到显式格式； $\lambda=1$ 则得到完全隐式格式。我们可以选择 Fo （通过给定的 Δx 决定 Δt ），也可选择权值 λ 。当然存在一个什么样的值是最好的问题，下面给出一个略表以概括说明：

隐式 $\lambda=1$	} 对于所有的 Fo 或 Δt 都稳定	截断误差大
$C-N\lambda=0.5$		Fo (或 Δt)受到精确度的限制
?	} 只有当 Fo (或 Δt)限制在 $Fo \leq 0.5/(1-2\lambda)$ 时才稳定	截断误差小
$0 < \lambda < 0.5$ ①		
显式 $\lambda=0$		

(3) 克兰科—尼科尔森方法。上述每一种隐式方法都包含解一个方程组，方程组中除了第一个和最后一个正好有两个未知数外，其余每一个方程都有三个未知数。因此，为了使计算前进一个时间步长可用程序2.2。 λ 的选择一般由使用者确定。如果待解的方程中存在其它复杂情况，例如热源项中有可变的导热系数，我们将选择比较完全的隐式表达式，这可通过取 λ 接近1来得到。这样选择 λ ，虽然局部截断误差和精确度会受到影响，但可得到最稳定的有限差分方程。所有 $0.5 \leq \lambda \leq 1$ 的简单方程组对于任何 Fo 或 Δt 都是稳定的。如果问题是比较简单明了的，并且对 Fo (或 Δt)的稳定性限制不太严格，则选择 λ 比较靠近0是合适的。如果 $0 \leq \lambda < 0.5$ ，则有限差分方程只有在

$$Fo \leq \frac{0.5}{(1-2\lambda)}$$

①原文是 $0 \leq \lambda \leq 0.5$ 。——译注

时才稳定，并且用这类表达式计算到某一给定的时间，它所具有的累积截断误差较小，因此就具有良好的精确度。特别是时间步长的选择使得

$$Fo = \frac{1}{[6(1-2\lambda)]}$$

时，其截断误差就非常小。

但是，选择 $\lambda=0.5$ 就得到永远稳定的方程组，其累积截断误差也最小。此时有限差分方程（公式7·5·4）就变为

$$\begin{aligned} & -\frac{Fo}{2}T_{i-1,j+1} + (1+Fo)T_{i,j+1} - \frac{Fo}{2}T_{i+1,j+1} \\ & = \frac{Fo}{2}T_{i-1,j} + (1-Fo)T_{i,j} + \frac{Fo}{2}T_{i+1,j} \quad (7\cdot5\cdot5) \end{aligned}$$

而此方程的应用就是通常所说的克兰科—尼科尔森方法。该公式的形式取决于 Fo （或 Δt ）的选择。虽然对于所有的 Fo ，它都是稳定的，但是选择 $Fo=1$ 就得到特别简单的，也是常被推荐的克兰科—尼科尔森公式：

$$-T_{i-1,j+1} + 4T_{i,j+1} - T_{i+1,j+1} = T_{i-1,j} + T_{i+1,j} \quad (7\cdot5\cdot6)$$

程序5·2（见第279～282页）

程序5·2说明一维不稳定态（抛物型）问题，应用隐式克兰科—尼科尔森方法（公式7·5·6）的计算机解法。同时可充分地说明导数（纽曼）边界条件所附加的复杂性。表示对流冷却的这些导数边界条件可取如下形式

$$\frac{\partial T}{\partial x} = A(T - T_A)$$

式中 A 是一个常数（在左端等于 h/k ，在右端等于 $-h/k$ ）， T 是棒的端头温度， T_A 是周围介质温度。沿棒长的初始温度从 $50\sim 100^\circ\text{C}$ 按线性关系选取，计算一直进行到中点温度下降到 60°C 为止。为此，程序根据读入的 Δx 值和 $Fo=1$ 计算 Δt ，同时为了使计算前进一个时间步长，程序都要计算那组待解的联立方程式（公式7·5·6）中各项的系数。如果采用在两个端头外边取假想点

的方法，这些方程就是：

在左端：

$$\begin{aligned} & -(4+2A\Delta x)T_{1,j+1} + 2T_{2,j+1} \\ & = -2T_{2,j} + 2A\Delta x(T_{1,j} - 2T_A) \end{aligned}$$

内部点：

$$\begin{aligned} & T_{i-1,j+1} - 4T_{i,j+1} + T_{i+1,j+1} \\ & = -T_{i-1,j} - T_{i+1,j} \end{aligned}$$

在右端：

$$\begin{aligned} & 2T_{n-1,j+1} - (4+2A\Delta x)T_{n,j+1} \\ & = -2T_{n-1,j} + 2A\Delta x(T_{n,j} - 2T_A) \end{aligned}$$

上述方程形成一个三对角方程组，该方程组可通过一个体现程序 2.2 那种方法（用高斯消去法解三对角方程组）的子程序来求解。每调用一次这个子程序都得到一组在新的时间层处算出的温度。大约每 100 秒时间间隔安排一次打印。这个方法和完全隐式方法的比较在第八章 8.7 节中给出。

7.5.4 二维或更多维空间的不稳定态问题

考察一个二维不稳定态问题。如果取间距为 Δx 的正方形 x - y 格子，则与二维偏微分方程

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{k}{\rho C_p} \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right)$$

相关的显式有限差分方程是

$$\begin{aligned} T_{i,j,k+1} = Fo & (T_{i+1,j,k} + T_{i-1,j,k} + T_{i,j+1,k} + T_{i,j-1,k}) \\ & + (1-4Fo)T_{i,j,k} \end{aligned}$$

式中

$$T = T(x, y, t)$$

$$Fo = \frac{k}{\rho C_p} \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

在已知边界条件下，如果 $Fo \leq 0.25$ ，则上述显式方程是稳定的。推广到三维空间，其稳定性判据 $Fo \leq 1/6$ 。为了消除稳定性对时间步长的限制，我们可以寻找某种隐式方法。 $T_{i,j,k+1}$ 的任何一种

加权隐式公式都包含有在 t_{j+1} 这一时间层的四个其它未知温度。为了移动一个时间步长，我们就必须解整个方程组；每一个方程都有五个未知数和一个对角占优元素，并且每一步都得进行一次高斯—塞德尔迭代解法（在存储器方面程序3·1效率不高，而程序4·1效率较高）。因此，每前进一个时间步长，我们都必须用松弛法解一个椭圆型问题。

另外一种较好的方法是交替方向隐式（ADI）法，它对于所有的 Δt 都是稳定的，但是每前进一步都需要解几组三对角方程组。这种方法包括二阶空间导数中的一个用完全隐式方法表示（比如对于各行^①），而另一个则用显式方法表示（比如对于各列^②），然后求得新的时间层 t_{j+1} 时的值。

为使计算时间有进展，这种方法需要逐行求解一个每行都作了变换的三对角方程组。当所有的行都相继作了这样的处理后，我们就能去掉 t_j 层，并根据 t_{j+1} 层的值准备计算 t_{j+2} 层时间的值。计算方法都是相同的，但隐式—显式表达式要从前一步的形式颠倒过来。按照刚才所说的情况，新的一步将用隐式方法表示各列，用显式方法表示各行，然后逐列解三对角方程组从而得到时间层 t_{j+2} 的值。为了保证计算的稳定性，用显式或隐式表示的这种方向交替是必要的，可以证明，没有这种方向的交替就会导致过程的不稳定。对于上述类型的问题，基于效率，精确度和稳定性的原因，这种ADI法是一种值得推荐的方法。如果我们关心的仅是最终的稳定态解，或者换句话说，我们是用迭代法求解与上述不稳定态问题相关联的稳定态方程组，则上述计算方法也能使用。在后一种情况下，运用一次ADI过程并非使计算进展到一个新的时间层，而是进展到一个新的迭代层。这种方法的收敛速度常常比通常使用的，如程序4·1所列举的高斯—塞德尔方法更快。对上述各种ADI方法的机理有兴趣的读者可参考有关文献。

① 即 x 方向。——译注

② 即 y 方向。——译注

参 考 文 献

- Carnahan B., Luther, H. A. & Wilkes, J.O. (1969). *Applied Numerical Methods*. Wiley, New York.
- Forsythe, G.E. & Wasow, W.R. (1960). *Finite-Difference Methods for Partial Differential Equations*. Wiley, New York.
- Fox, L. (1964). *Introduction to Numerical Linear Algebra*. Oxford University Press, London.
- Gerald, C. F. (1970). *Applied Numerical Analysis*. Addison-Wesley, Reading, Mass.
- Gault, R. J., Hoskins, R.F., Milner, J. A. & Pratt, M. J. (1974). *Computational Methods in Linear Algebra*. Stanley Thornes Ltd, London.
- Hornbeck, R. W. (1974). *Numerical Marching Techniques for Fluid Flow with Heat Transfer*. NASA SP-297, NASA, Washington, DC.
- National Physical Laboratory (1961). *Modern Computing Methods*, 2nd ed, Notes on Applied Science Series No. 16, HMSO. London.
- Polachek, H. (1965). Numerical analysis. In: *Research Frontiers in Fluid Dynamics*, ed. R.J. Seeger and G. Temple. Wiley, New York.
- Scheid, F. (1968). *Numerical Analysis*, Schaum Outline Series, McGraw-Hill, New York.
- Smith, G.D. (1965). *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Oxford University Press, London.
- Todd, J. (ed.) (1962). *Survey of Numerical Analysis*. McGraw-Hill, New York.
- Varga, R.S. (1962). *Matrix Iterative Analysis*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ.
- Von Rosenberg, D.U. (1969). *Methods for the Numerical Solution of Partial Differential Equations*. Elsevier, Amsterdam.
- Walsh, J. (1966). Elliptic and parabolic equations. Chapter 5, pp. 99-116, in *Numerical Analysis: An Introduction*, ed. J. Walsh. Academic Press, London.
- Young, D. (1966). The numerical solution of elliptic and parabolic partial differential equations. In: *A Survey of Numerical Analysis*, ed. J. Todd, McGraw-Hill, New York.

第八章 各类实用问题

本章的目的是叙述如何应用本书前面所讲述的方法和程序去解决实际问题。对每个问题的探讨方法是相同的，包括以下几个方面：

- (1) 解释和说明问题的实质。例如，解释和说明二维不稳定态问题或具有可变热物性的二维稳定态问题等等；
- (2) 讨论应使用的网格型式和尺寸；
- (3) 对每一个典型节点建立有限差分方程并将这些方程用矩阵或其它方式表示出来；
- (4) 选择求解的程序；
- (5) 计算结果和根据开始叙述的问题分析计算结果。

表8-1是本章所包括的问题概要。

8.1 通过炉墙的稳定态热流

8.1.1 问题的说明

图8-1为小型炉的截面俯视图。炉墙内壁温度为 1200°C 。炉墙外壁以对流传热方式冷却。如果沿炉子深度的温度变化略而不计，则该问题的实质是具有对流边界条件的二维稳定态问题。其他条件如下：

周围介质温度	20°C
表面传热系数	$10\text{瓦}/\text{米}^2\cdot\text{K}$
炉墙耐火材料的导热系数	$0.7\text{瓦}/\text{米}\cdot\text{K}$

8.1.2 网格型式和尺寸

由于炉子是对称的，因此只需要分析一小部分（如图中所示阴影部分）。然后将这部分的热损失乘8就可以得到全部结构的热损失。这一小部分建议这样选取：使正方形网格占据最大的面积，而接近炉子内壁的面积是三角网格。网格尺寸为70平方毫米，并示于图8-2。

表 8-1 第八章内的问题汇总

问题	问 题 类	坐标系	边界条件	有限差分方程的推导	求解程序	其他特征
8.1	二维稳定态	直角坐标	狄立克莱和对流	能量平衡, 显式	高斯消去法	
8.2	二维稳定态 + 内热源	直角坐标	狄立克莱	能量平衡, 显式	直接解三对角阵法	网格尺寸的影响
8.3	二维不稳定态 + 内热源	直角坐标	对流	能量平衡, 显式	迭代法	
8.4	一维不稳定态 + 内热源	柱面坐标	对流	直接置换, 显式	迭代法	孤立的内部热源
8.5	二维不稳定态 + 稳定态	三角坐标	对流	能量平衡, 显式	高斯消去法	
8.6	一维不稳定态	直角坐标	狄立克莱	能量平衡, 显式	迭代法	相变
8.7	一维不稳定态	直角坐标	狄立克莱	能量平衡, 显式和隐式	迭代法	显式和隐式比较
8.8	二维不稳定态	直角坐标	对流	直接替代, 隐式和显式	直接解三对角阵法	交替方向隐式法
8.9	一维不稳定态 + 稳定态	直角坐标	狄立克莱	能量平衡, 显示	松弛法	复合结构变热物理性质
8.10	三维稳定态	直角坐标	对流	能量平衡, 显式	松弛法	复合结构变热物理性质

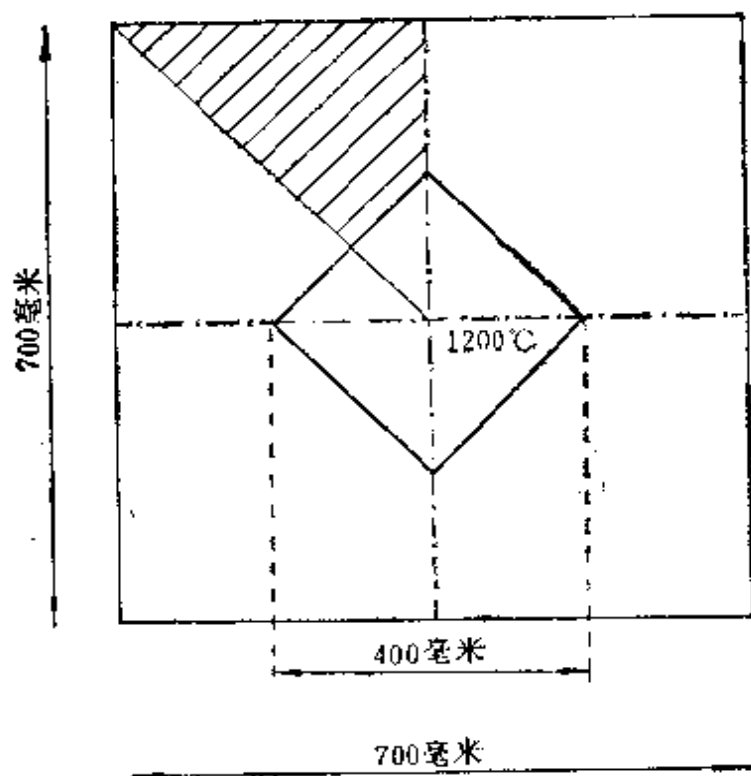


图 8-1 炉墙俯视图

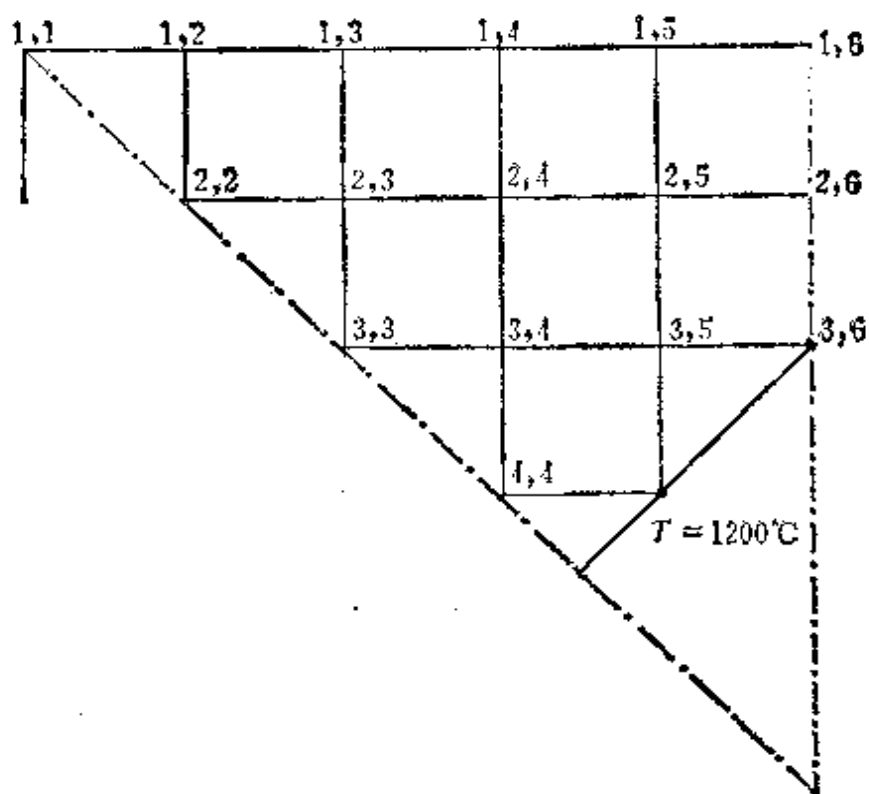


图 8-2 网格系统

8.1.3 有限差分方程的建立

没有必要对每一个节点建立有限差分方程。因为所有的内部节点用同样的方程描述。除一点外，所有的边界节点也同样用一种形式的方程描述。这个特殊点就是壁角 (T_{11})。它需要有特殊的有限差分方程。现在应用能量平衡的概念推导这三个基本方程式。

(1) 内部节点。以节点2,4为例应用能量平衡原理示于图8-3。应当指出，这个问题是二维稳定态无内热源的问题，同时导热系数为一常数。因此从相邻节点流向节点2,4的净热量将等于零。因此

$$\sum kA \frac{\Delta T}{\Delta x} = 0$$

$$\begin{aligned} \text{即} \quad \frac{kA}{\Delta x} [(T_{14} - T_{24}) + (T_{25} - T_{24}) + (T_{34} - T_{24}) \\ + (T_{23} - T_{24})] = 0 \end{aligned} \quad (8.1.1)$$

或

$$(T_{14} + T_{25} + T_{34} + T_{23} - 4T_{24}) = 0$$

(2) 壁角节点。通过导热和对流能量流向壁角节点1，1的净总和等于零（见图8-4）。因此

$$hA\Delta T + \sum kA \frac{\Delta T}{\Delta x} = 0$$

或

$$h\Delta x(T_A - T_{11}) + \frac{k\Delta x}{2\Delta x} [(T_{21} - T_{11}) + (T_{12} - T_{11})] = 0$$

将 $h = 10 \text{ 瓦/米}^2 \cdot \text{K}$, $\Delta x = 0.07 \text{ 米}$, $k = 0.7 \text{ 瓦/米} \cdot \text{K}$, $T_A = 20^\circ\text{C}$, 同时由于对称 $T_{12} = T_{21}$, 代入上式得出壁角节点的有限差分方程

$$(T_{12} - 2T_{11}) = -20 \quad (8.1.2)$$

(3) 其他边界节点。离开壁角节点的所有其他边界节点用同样型式的差分方程表示。同理，通过对流和导热流向节点的热量总和等于零。以图8-5中节点1,3为例

$$h\Delta x(T_{\infty} - T_{13}) + \frac{k\Delta x}{\Delta x}(T_{23} - T_{13})$$

$$+ \frac{k\Delta x}{2\Delta x}[(T_{12} - T_{13}) + (T_{14} - T_{13})] = 0$$

代入与壁角节点同样的各种数值得到差分方程

$$1/2(T_{12} + T_{14}) + T_{23} - 3T_{13} = -20 \quad (8.1.3)$$

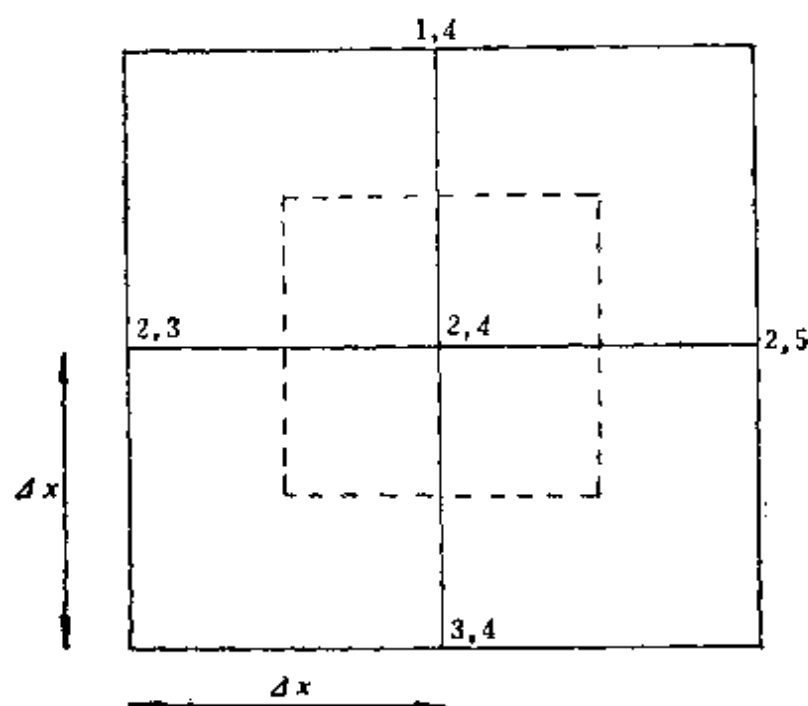


图 8-3 典型的内部节点

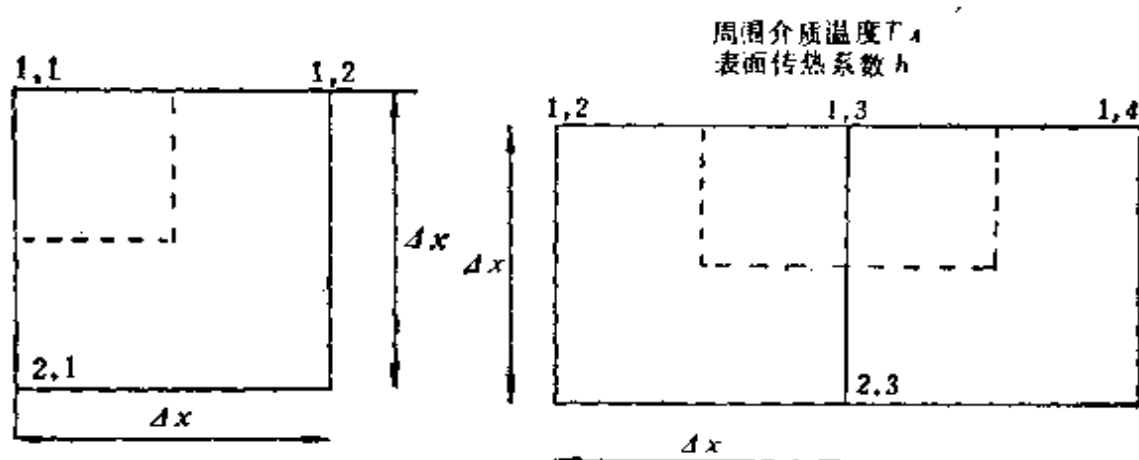


图 8-4 壁角节点

图 8-5 其他边界节点

用矩阵的形式最容易表示出所有各节点的有限差分方程：

节点	T_{11}	T_{12}	T_{13}	T_{14}	T_{15}	T_{16}	T_{22}	T_{23}	T_{24}	T_{25}	T_{26}	T_{33}	T_{34}	T_{35}	T_{44}	方程式类型
1,1	-2	+1														$= -20 \quad (8 \cdot 1 \cdot 2)$
1,2	$+\frac{1}{2}$	-3	$+\frac{1}{2}$				+1									$= -20 \quad (8 \cdot 1 \cdot 3)$
1,3		$+\frac{1}{2}$	-3	$+\frac{1}{2}$				+1								$= -20 \quad (8 \cdot 1 \cdot 3)$
1,4			$+\frac{1}{2}$	-3	$+\frac{1}{2}$				+1							$= -20 \quad (8 \cdot 1 \cdot 3)$
1,5				$+\frac{1}{2}$	-3	$+\frac{1}{2}$				+1						$= -20 \quad (8 \cdot 1 \cdot 3)$
1,6					$+\frac{1}{2}$	-3			+1							$= -20 \quad (8 \cdot 1 \cdot 3)$
2,2		+2				+1	-3				+1					$= -20 \quad (8 \cdot 1 \cdot 3)$
2,3			+1					-4	+2							$= 0 \quad (8 \cdot 1 \cdot 1)$
2,4								+1	-4	+1		+1				$= 0 \quad (8 \cdot 1 \cdot 1)$
2,5								+1	-4	+1			+1			$= 0 \quad (8 \cdot 1 \cdot 1)$
2,6									+1	-4	+1			+1		$= 0 \quad (8 \cdot 1 \cdot 1)$
3,3						+1				+2	-4					$= -1200 \quad (8 \cdot 1 \cdot 1)$
3,4								+2				-4	+2			$= 0 \quad (8 \cdot 1 \cdot 1)$
3,5									+1			+1	-4	+1	+1	$= 0 \quad (8 \cdot 1 \cdot 1)$
4,4										+1			+1	-4	-4	$= -2400 \quad (8 \cdot 1 \cdot 1)$
													+2		-4	$= -2400 \quad (8 \cdot 1 \cdot 1)$

8·1·4 选择求解的程序

公式8·1·4是具有占优对角线，大小合适，排列稀疏的矩阵方程组。该方程组可以采用直接法或迭代法求解。我们这里应用高斯消去法。此方法在节7·2中已经讨论过了。在第七章中还附有Fortran语言的程序2·1。

8·1·5 计算结果和讨论

在计算机上计算的结果示于图8-6。

炉子的实际热损失或通过计算平均表面温度和应用简单的对流公式求出，或在内部和外部边界条件下应用导热模拟法求出。

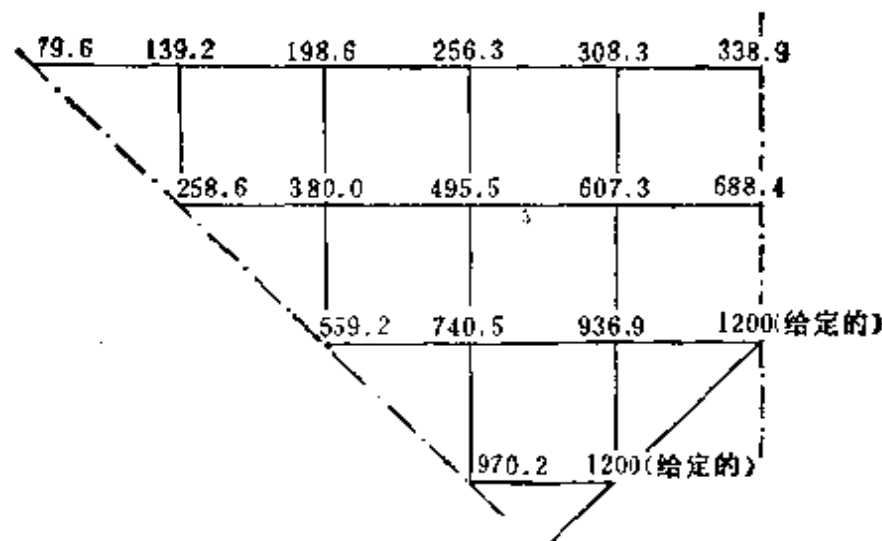


图 8-6 计算结果

(1) 平均表面温度

$$\begin{aligned}
 &= \left[\left(\frac{1}{2}(79.6 + 139.2) + \frac{1}{2}(139.2 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 198.6) + \frac{1}{2}(198.6 + 256.3) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + \frac{1}{2}(256.3 + 308.3) + \frac{1}{2}(308.3 \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 338.9) \right) / 5 \right] = 222.3^{\circ}\text{C}
 \end{aligned}$$

因此，以对流方式通过外表面的热流 $= hA\Delta T = 10 \times 2.8 \times (222.3 - 20) = 5.67$ 千瓦/米（炉高）

（2）应用导热棒类比法。应当指出，由于所研究部分被分为网格，某些棒只表示方形面的一半。进入炉子阴影部分的热流 $= \frac{k}{2}(1200 - 688.4) + k(1200 - 936.9) + k(1200 - 936.9) + k \times (1200 - 970.2) = 1011.8$ 千瓦/部分截面/每米炉高 $= 1011.8 \times 0.7 \times 8$ （对全部截面） $= 5.67$ 千瓦/米（炉高）

8.2 汇流排问题：具有内热源的二维稳定态问题

8.2.1 问题的说明

汇流排的截面示于图8-7。其长度为2米。在过载的情况下，通过汇流排的电流为54000安培。问题是要导出外部温度为50°C时，在稳定状态下棒内的温度分布。由于长度比其他两个方向的

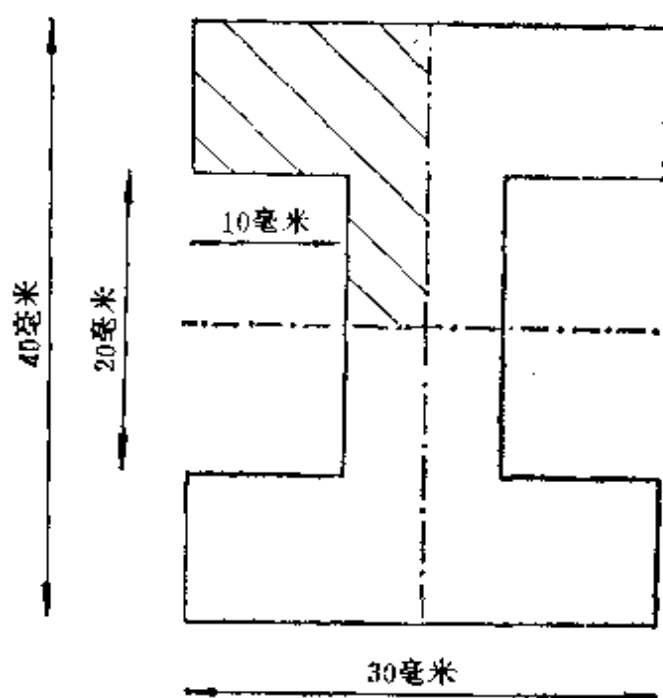


图 8-7 汇流排形状图

尺寸大的很多，所以该问题可认为是具有均匀内部热源并已知边界温度的二维稳定态问题。汇流排材料（铜）的特性常数如下：

电阻 2×10^{-8} 欧/米

导热系数 381 瓦/米·K

8.2.2 网格的型式和尺寸

由于截面是对称的，因此只需要分析汇流排的一部分（如图8.7中所示阴影部分）。然后将该部分的热损失乘4就可以得到整个结构的热损失。所分部分的形状最好是使该部分完全成为方形网格。选择可能最粗的网格尺寸为5平方毫米，见图8-8。

8.2.3 有限差分方程的建立

由于边界温度是确定的，因此只需要内部节点的差分方程。实际上这些方程都具有同样的形式。现在应用能量平衡原理来推导基本方程。

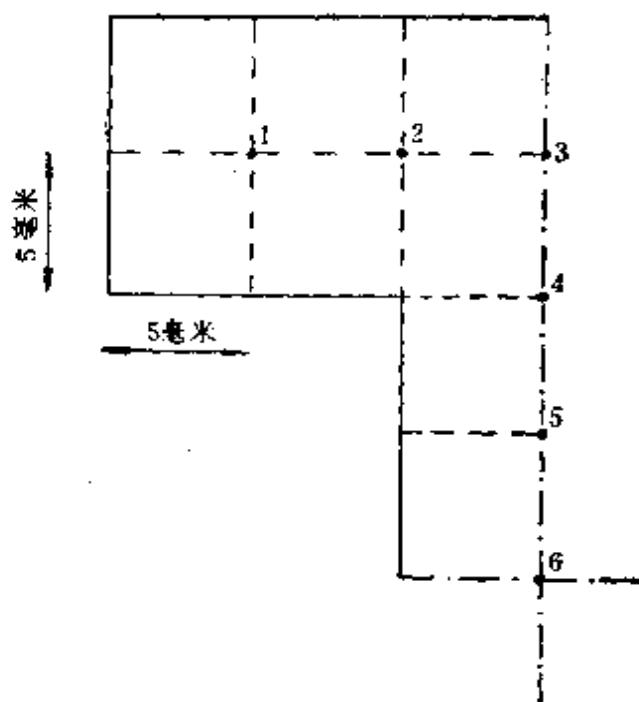


图 8-8 网格系统

以图8-9所示的节点2为例制定能量平衡。同时应指出，该问题是具有内热源，导热系数为常数的二维稳定态问题。我们知道

从相邻节点流向节点2的热流加上由节点2所代表的控制体积内产生的热应当等于零。因此

$$\sum k A \frac{\Delta T}{\Delta x} + H(\Delta x)^2 = 0$$

即

$$\frac{k A}{\Delta x} [(50 - T_2) + (T_1 - T_2) + (T_3 - T_2) + (50 - T_2)] + H(\Delta x)^2 = 0$$

由于

$$\frac{\text{产生的热}}{\text{单位体积}} = \text{电阻} \times (\text{电流密度})^2$$

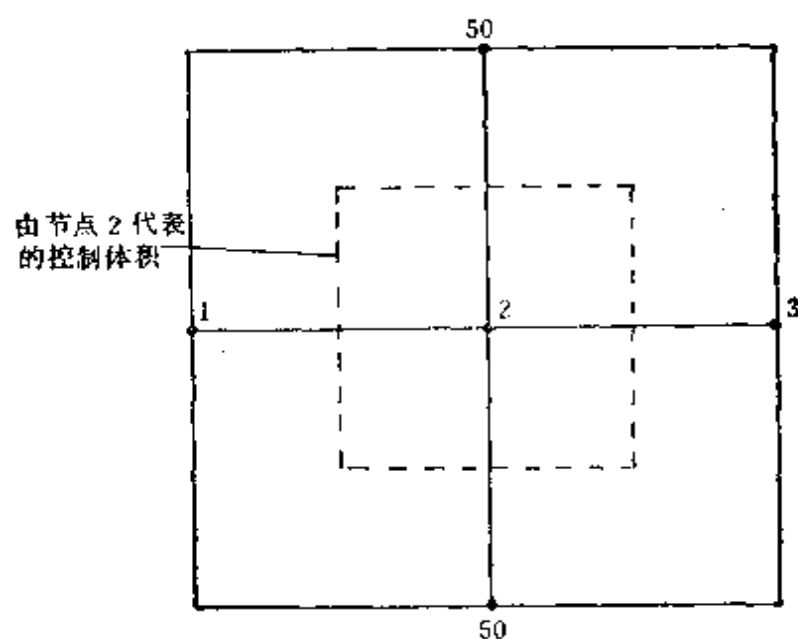


图 8-9 典型内部节点

$$H = 2 \times 10^{-8} \times (54000 / (8 \times 10^{-4}))^2 \\ = 9.112 \times 10^7 \text{ W/米}^3$$

将 $k = 381 \text{ W/米} \cdot \text{K}$, $A = \Delta x \cdot 1$, $\Delta x = 0.05 \text{ 米}$ 代入差分方程得:

$$T_1 + T_3 - 4T_2 + 106 = 0$$

该差分方程组的矩阵形式如下:

节点	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	
1	-4	1					$= -156$
2	1	-4	1				$= -106$
3		2	-4	1			$= -56$
4			1	-4	1		$= -106$
5				1	-4	1	$= -106$
6					2	-4	$= -106$

8.2.4 选择求解的程序

上述矩阵表示方程组的三对角性质。该方程组的数目虽小,但它是选择最合适解法的良好实践。直接方法,例如高斯消去法,是解三对角方程组的最好的方法。应用 TDMA 的合适的计算机程序在节7.2中已详细讨论过了。并在第七章中附有该程序2.2。

8.2.5 计算结果和讨论

程序计算的结果如下:

$$T_1 = 52.25^\circ\text{C}$$

$$T_2 = 53.02^\circ\text{C}$$

$$T_3 = 53.81^\circ\text{C}$$

$$T_4 = 53.22^\circ\text{C}$$

$$T_5 = 53.06^\circ\text{C}$$

$$T_6 = 53.03^\circ\text{C}$$

在这种情况下,汇流排的实际热损失就得到了。因为在稳定状态下,热损失必须与其内部热源平衡。如果汇流排长1米,其金属体积为:

$$1 \times (0.03 \times 0.04 - 0.02 \times 0.02) = 0.0008 \text{米}^3$$

假设在汇流排内部生热是均匀的,则实际产生的热量为 $0.0008H$ (瓦/米)。

式中 $H = 9.112 \times 10^7$ 瓦/米³,将其代入上式得72.9千瓦/米。

对整个断面应用导热棒类比法得出以 k 表示的热流为89.96 k 瓦/米,即热流=34.3千瓦/米。这样大的误差说明两个重要论点:

(1) 开始选择网格时常常是基于这样的思路：先采用一个可能不导致发散的粗网格，试探着求出一个解。随后减小网格尺寸使其更加合理。同时比较二组解，并可采用第四章4.4节所叙的外插法。

(2) 在具有内热源的问题中，与物体内部其他部分相比，在接近边界处的温度梯度是非常大的。特别当热扩散率很高时，这种差别就越大。这就需要采用较细的网格以使靠近边界处有足够的节点。由于采用靠近边界一边的导数就产生了附加误差。

鉴于上述两点分析，现在采用比原先小一半（即 $\Delta x = 2.5$ 毫米）的网格尺寸重新计算。采用高斯消去法解法的程序在第七章7.2节和程序2.1已叙述过了。对右边四分之一部分的计算结果列于图8-10。

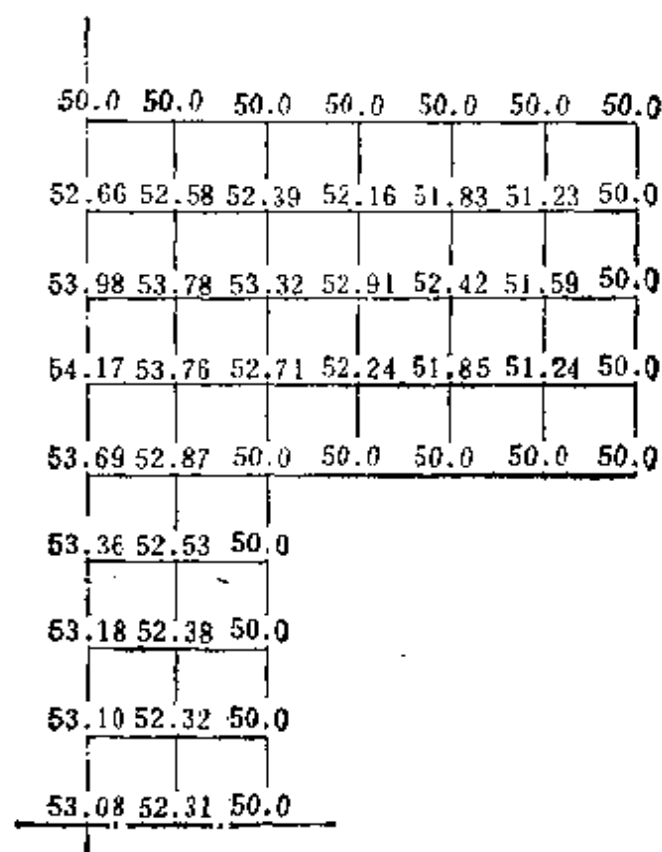


图 8-10 较小网格的计算结果

应用导热棒类比法，部分热流为 $(32.585k)$ 瓦/米。式中 k 是导热系数。因此整个截面的热流为：

$$(32.585k) \times 4\text{瓦/米} = 49.65\text{千瓦/米}$$

显然，较细的网格得到较精确的结果。在上述问题中，边界温度实际上是确定的。通常边界值和断面上的其他温度一样是推导出来的。确定边界温度的效果是减小了节点所表示的断面的实际面积，同时在差分方程求导中没有表示整个外部边界周围的哪“一层”（其厚度为网格的一半）。其结果导致在这些差分方程中所表示的内部热源量的减小，因此预测温度偏低。

8.3 汇流排问题：冲击电流条件下，具有内热源的二维不稳定态热流

8.3.1 问题的说明

汇流排会偶然在短的周期内经受很大的冲击电流，例如每秒20000安。全英标准159（1957）规定，汇流排相互联接时要求汇流排的表面温度不能比周围温度高150°C。本问题分析的目的是确定表面温度的实际升高以及在边界上应用强有力的冷却能否减少其升高的程度。

这里汇流排是矩形的。面积为25.4毫米×6.35毫米，长为2米。问题基本上是二维的。在稳定状态下电流为250安。汇流排的材料是铜，其物理特性如下：

导热系数	381瓦/米·K
电阻	2×10^{-8} 欧/米
比热	383焦/公斤·K
密度	8954公斤/米 ³

8.3.2 网格的型式和尺寸

按汇流排横断面积的形状宜于采用正方形网格。由于断面对两个轴都是对称的，因此只需要分析断面的四分之一即可。如图8-11所示。在8.2节中类似的问题采用了过于粗的网格。这次直截了当地采用适当细的网格。网格尺寸为0.794毫米。构成的节点示于图8-11中，其中只有少数节点有标号。

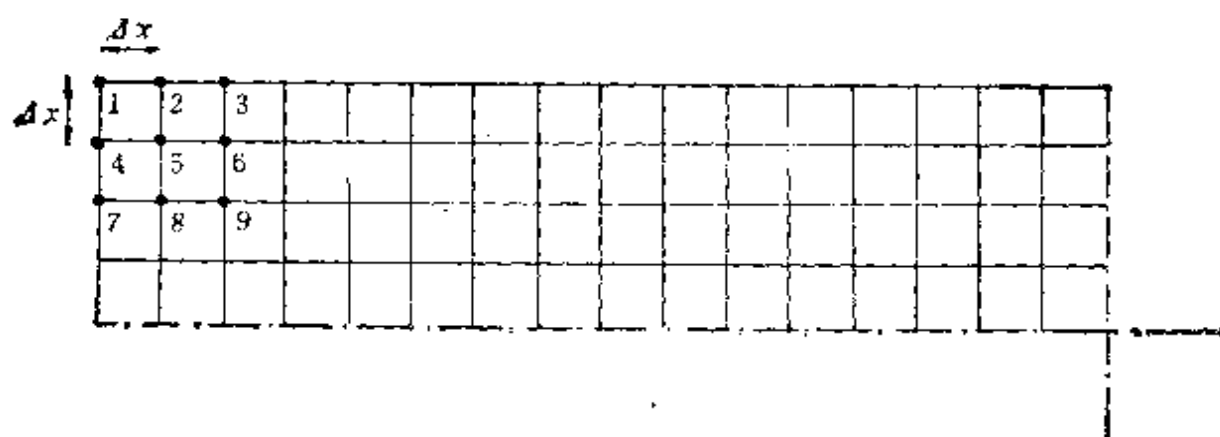


图 8-11 矩形汇流排四分之一截面的方形网格

8.3.3 有限差分方程的建立

在节8.2中我们已经见到，在稳定状态下沿断面的温度变化是很小的。因此可以认为整个断面都处于与周围温度相差 ΔT 的温度下。

如果汇流排向外传热是通过紊流自然对流实现的，则对流换热系数为(见埃克特(Eckert)和德雷克(Drake)，1959的著作)：

$$h = 1.31(\Delta T)^{1/3}$$

在稳定状态下，内部生热率与对流换热率是平衡的。

$$\begin{aligned} \text{内部生热率} &= \text{电阻} \times \\ &(\text{电流密度})^2 \times \text{汇流排体积} \\ &= 15.50 \text{ 瓦} \end{aligned}$$

$$\text{对流换热率} = hA\Delta T$$

式中： A 为棒的面积=0.127米²。在上述公式中代入 h 得到 ΔT 等于 29.99°C。对于强制对流冷却重复上述计算得到 ΔT 等于 0.72°C。

有三组典型的节点需要导出不同类型的有限差分方程：角部节点（图8-12中的点1）。边界节点（图8-13中的点2）

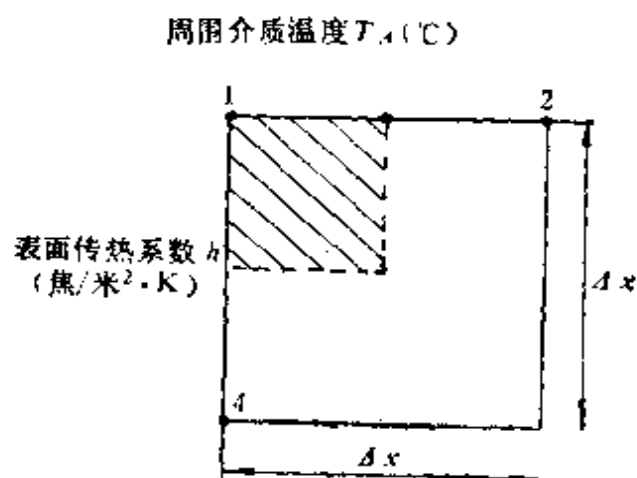


图 8-12 角部节点

和内部节点（图8-14中的点5）。

（1）角部节点（节点1）的有限差分方程。对节点1的控制体积（图8-12所示）应用能量平衡原理：

以导热和对流传给节点1的净热流 = 节点“质量” × 比热 × 温度变化率

因此

$$k \left(-\frac{\Delta x}{2} \right) \left(\frac{T_2 - T_1}{\Delta x} \right) + k \left(-\frac{\Delta x}{2} \right) \left(\frac{T_4 - T_1}{\Delta x} \right) + \frac{H(\Delta x)^2}{4} + h\Delta x \times (T_\infty - T_1) = \rho C_p \frac{(\Delta x)^2}{4} \frac{T'_1 - T_1}{\Delta x}$$

整理上式得出在节点1上新的温度 T'_1 ：

$$T'_1 = Fo \left[2T_2 + 2T_4 + 4BiT_\infty + \frac{H(\Delta x)^2}{k} + T_1 \left(\frac{1}{Fo} - 4Bi - 4 \right) \right]$$

式中 傅立叶数 $Fo = \frac{k}{\rho C_p} \cdot \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$

（2）边界节点（节点2）的有限差分方程。如图8-13所示，在节点2处应用能量平衡概念得出：

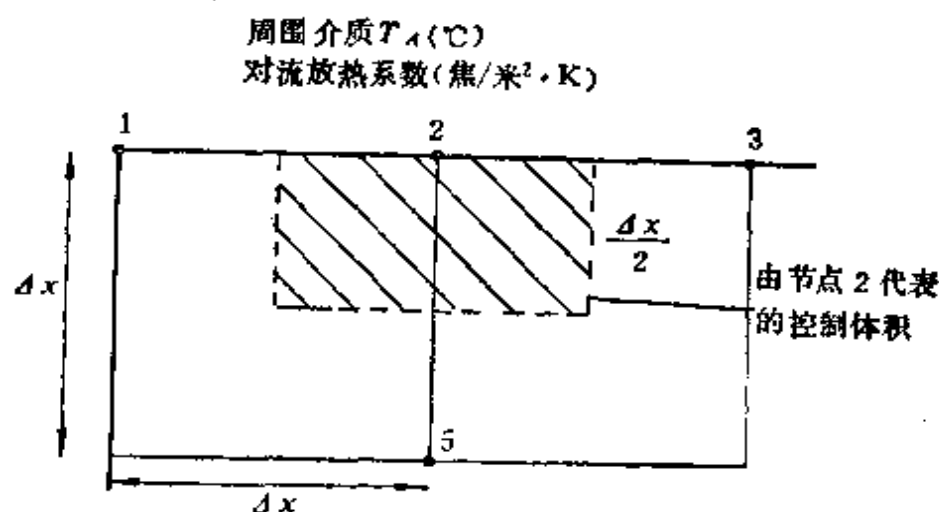


图 8-13 典型的边界节点

$$\left[k \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \frac{T_1 - T_2}{\Delta x} + k \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \frac{T_3 - T_2}{\Delta x} + H \frac{(\Delta x)^2}{2} \right. \\ \left. + k (\Delta x) \frac{(T_5 - T_2)}{\Delta x} + h(\Delta x) (T_A - T_2) \right] \\ = \rho C_p \frac{(\Delta x)^2}{2} \frac{T'_2 - T_2}{\Delta t}$$

在节点 2 得出新温度 T'_2 。

$$T'_2 = Fo \left[2T_5 + T_1 + T_3 + T_2 \left(\frac{1}{Fo} - 4 - 2Bi \right) \right. \\ \left. + 2T_A Bi + H \frac{(\Delta x)^2}{k} \right]$$

(3) 内部节点 (节点 5) 的有限差分方程。如图 8-14 所示, 在节点 5 处应用能量平衡得出下列在时间间隔 Δt 后, 计算节点 5 处新温度的有限差分方程:

$$T'_5 = Fo \left[T_2 + T_4 + T_6 + T_8 + T_5 \left(\frac{1}{Fo} - 4 \right) + H \frac{(\Delta x)^2}{k} \right]$$

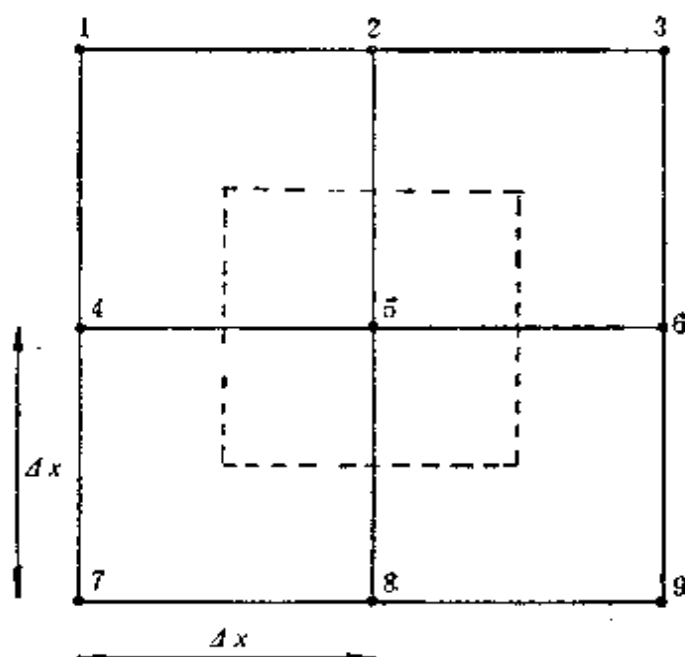


图 8-14 典型的内部节点

式中 Fo 为前面已定义过的傅立叶数。为使方程式具有稳定性，傅立叶数应该这样确定，以使有限差分方程中避免出现负的系数。最严格的判据（即最低的 Fo 值）是由角部节点（节点1）的有限差分方程中得出。

从这个公式中得出：

$$Fo \leq \frac{1}{4 + 4Bi}$$

式中毕欧数 Bi 是

$$Bi = \frac{h\Delta x}{k} = \frac{6.97(0.794 \times 10^{-3})}{381} = 1.45 \times 10^{-5}$$

式中传热系数 h 是在最大的温差 150°C 时，由紊流自然对流关系式中求出。计算结果临界傅立叶数是0.25。允许的临界时间间隔（步长） Δt 为：

$$\Delta t \leq \frac{Fo(\Delta x)^2}{(k/\rho C_p)}$$

即 Δt 不能超过 1.419×10^{-3} 秒。由于冲击的周期是1秒，因此所需计算的循环数为：

$$\frac{1}{\Delta t} = 704$$

8.3.4 选择求解的程序

由于所得到的方程是显式的，即在式中一个未知的温度与几个前一时间层的已知温度联系在一起。求解的程序基本上是显式的。该形式的求解程序在第六章和第七章的7.5节中详细解释了。在第七章中并附有程序5.1。

8.3.5 计算结果和讨论

计算结果示于图8-15。汇流排表面最高温度点是在断面的最长边的中部。从图中可以看出，强制对流冷却的优点是，即使在冲击期间，汇流排将允许经受冲击电流约1.5秒，在稳定态下形成的温度差仍保持不变。在不稳定状态下，冷却方法是没有影响的。因为内部生热率比其冷却率大好几倍。

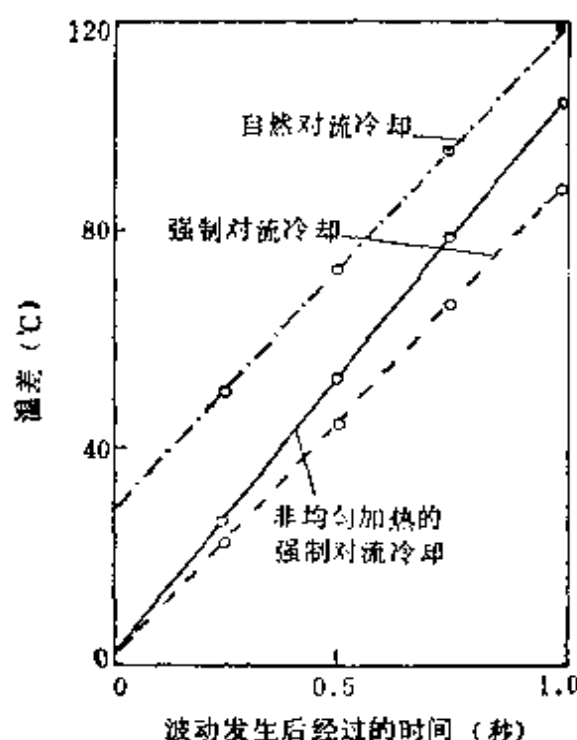


图 8-15 在不同的边界条件下表面“热点”的温度演变

在高电流密度的情况下在整个断面上电流分布是不均匀的。在低频率情况下电流通过距其外部边界较远的汇流排断面的中心部分。应用计算机模型很容易描述这个现象。做为例子说明，应使用在边界点上无热源项的程序。因为同样的电流流过较小的横断面积，其电流密度和生热率将升高。预测的温度变化示于图8-15。生热率的增加明显地反应在较快的温度变化率上。

8.4 通过圆形加热元件的不稳定态热流

8.4.1 问题的说明

图8-16表示一断面为圆形的加热元件。在螺旋电热体的周围填满电绝缘材料，整个元件包在薄的金属壳内。这个特殊的加热元件是用于加热水的。绝缘材料的热物理性质如下：

比热	1300焦/公斤·K
密度	3050~3150公斤/米 ³
导热系数	1.8~7.0瓦/米·K

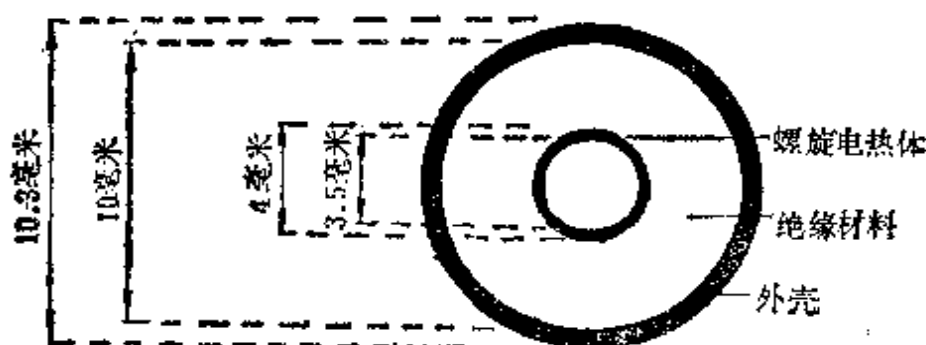


图 8-16 圆形加热元件的截面

由于绝缘材料是压实的粉末，因此这里就出现了一个问题，即导热系数在很大程度上受粉末压实程度的影响。其数值变化从1.8至7.0瓦/米·K。由于家庭使用，元件升温时间太长是不受欢迎的，因此对于元件的瞬时性状就特别受到重视。要解决的是具有内热源的轴对称热流问题。从图中所示的尺寸可以清楚地看出，加热元件的长度比其直径大得多，因此沿加热元件长度上的温度变化可以忽略不计。

对于对流传热的情况，将假设服从沸腾特性曲线。应用埃克特 (Eckert) 和德雷克 (Drake) (1959) 的数据，在边界上的传热系数取下列数值：

(1) 对于温差 $(T_B - T_A) \leq 10^\circ\text{C}$ 时， $h = 5000 \text{ 瓦/米}^2 \cdot \text{K}$

(2) 对于温差 $(T_B - T_A) > 10^\circ\text{C}$ 时，

$$h = 1/3[500(T_B - T_A) + 10^4] \text{ 瓦/米}^2 \cdot \text{K}$$

8.4.2 网格的型式和尺寸

很显然，需要一个包含圆形元件的网格。由于问题是轴对称的，因此网格只需由一组同心圆组成。最简单的网格是其相邻两圆直径的差为一常数。建议根据螺旋电热体的尺寸和位置取对初始计算最合适的网格尺寸。以使两相邻节点恰恰环绕螺旋电热体。见图8-17。

由于两方面的原因外壳材料没有包括在图8-17中：

- (1) 外壳材料的热扩散系数大约是绝缘材料的15倍；
- (2) 与加热元件的其他尺寸相比，外壳是很薄的。因此外壳的总热惰性对元件的瞬时性状来说是不重要的。

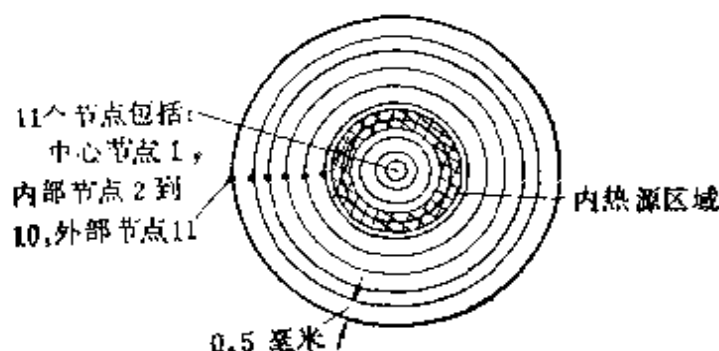


图 8-17 网格系统

8.4.3 有限差分方程的建立

需要导出三个不同型式的差分方程：一个是对边界节点的，一个是对中心线节点的，其余是对剩下的内部节点的。此外必须算出内部热源项。

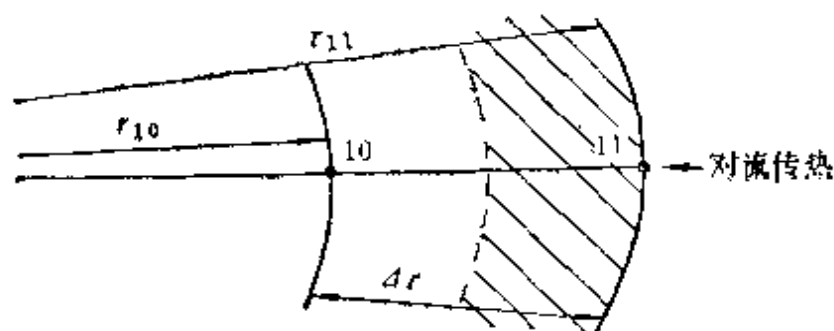


图 8-18 边界节点

(1) 边界节点的有限差分方程 (节点11)。如图8-18所示对节点11应用能量平衡概念。

(通过导热和对流传给节点11的净热流) + (内部生热) = 元件“质量” × 比热 × 温度变化率

即

$$\left[k \left(\frac{T_{10} - T_{11}}{\Delta r} \right) \times 2\pi \left(\frac{r_{10} + r_{11}}{2} \right) + h(2\pi r_{11}) \right]$$

$$\times (T_A - T_{11}) \Big] = \rho \pi (r_{11}^2 - r_{10}^2) C_P \left(\frac{T'_{11} - T_{11}}{\Delta t} \right)$$

由于 $r_{11}^2 - r_{10}^2 \approx 2r_{11}\Delta r$, 该方程式可化为下列形式:

$$T'_{11} = \frac{Fo}{2} \left\{ \left(2 - \frac{\Delta r}{r_{11}} \right) T_{10} + \frac{2h\Delta r}{k} T_A + T_{11} \right. \\ \left. \times \left[\frac{2}{Fo} - \left(2 - \frac{\Delta r}{r_{11}} + \frac{2h\Delta r}{k} \right) \right] \right\}$$

式中 傅立叶数 $Fo = \frac{k \Delta t}{\rho C_P (\Delta r)^2}$

(2) 中心线节点的有限差分方程 (图8-17中的节点1)。
节点1所代表的面积只是加热元件整个截面积的0.25%。在中心线上温度梯度 $\partial T / \partial r$ 等于零。实现这个限制条件的最简单但不是最精确的方法是使节点1和相邻节点之间的温度梯度等于零。在有限差分项中, 这意味着在节点2上的任何新温度都是由节点1, 2和3的温度显式地计算出来的。然后取该温度等于节点1的新温度。

(3) 其余内部节点的有限差分方程 (如图8-17所示从节点2至节点10)。做为一个例子, 我们直接从导热系数为常数的微分方程来推导有限差分方程:

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) + H = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t}$$

对于轴对称热流以及长度比其直径大得多的均匀加热系统, 上式可化为:

$$k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + H = \rho C_P \frac{\partial T}{\partial t}$$

用相应的有限差分代替上述方程, 以节点5为例得出:

$$k \left[\frac{T_4 - 2T_5 + T_6}{\Delta r^2} + \frac{1}{r_5} \left(\frac{T_4 - T_6}{2\Delta r} \right) \right] \\ + H_5 = \rho C_P \left(\frac{T'_5 - T_5}{\Delta t} \right)$$

在时间间隔 Δt 以后, 新温度 T'_5 为:

$$T'_5 = Fo \left[T_4 \left(1 + \frac{\Delta r}{2r} \right) + T_6 \left(1 - \frac{\Delta r}{2r} \right) + T_s \right. \\ \left. \times \left(\frac{1}{Fo} - 2 \right) + H_5 \frac{(\Delta r)^2}{k} \right]$$

式中 傅立叶数 $Fo = \frac{k}{\rho C_p} \frac{\Delta t}{(\Delta r)^2}$ 。

应用于节点5的方程与那些其余的内部点的方程相比有一个很重要的差别, 这就是由螺旋电热体所造成的内部热源只出现在由节点5所表示的面积上。因此方程式中的 $H(\Delta r)^2/k$ ①项对于其他节点都等于零。

(4) 内部热源项的计算。加热元件通常是以单位表面积上的功率来表示的(即瓦/米²)。对此问题表面功率为 3.27×10^5 瓦/米²(表面积)。直径为10毫米, 长度为1米的加热元件

$$\begin{aligned} \text{实际放出的热能} &= 3.27 \times 10^5 \times (1 \times \pi \times 10/1000) \\ &= 10.28 \times 10^3 \text{瓦} \end{aligned}$$

这个能量是从与电热体相关的体积中放出的。即从属于节点5的控制体积中放出的。其体积等于 $\pi(2.5^2 - 2.0^2) \times 10^{-6} \times 1$

$$\text{即 } V = 7.069 \times 10^{-6} \text{米}^3$$

$$\therefore H = \frac{\text{功率}}{\text{单位体积}} = \frac{10.28 \times 10^3}{7.069 \times 10^{-6}} = 1.454 \times 10^9 \text{瓦/米}^3$$

此 H 值就是节点5的有限差分方程中的 H_5 。

这些方程都是显式地推导出来的。因此, 为避免出现负的系数该方程需要做稳定性的检验(见第四章4.5节)。最关键的稳定性判据出现在边界点的有限差分方程中, 其中要求傅立叶数被限制在

$$Fo \leq 1 / \left(2 - \frac{\Delta r}{r_{11}} + \frac{2h\Delta r}{k} \right)$$

假设最大的传热系数为20000瓦/米²·K, 则毕欧数

① 原书误为 $H(\Delta r)^2$ 。——译注

$$Bi = \frac{h\Delta r}{k} = \frac{20000 \times 0.0005}{1.8} = 5.55$$

$$\frac{\Delta r}{r_{11}} = \frac{0.0005}{0.005} = 0.10$$

$$\therefore Fo \leq \frac{1}{13.20}$$

于是时间步长为

$$\Delta t = Fo \frac{(\Delta r)^2}{k} \rho C_p$$

应用在绝缘粉末“未压紧”情况下的 ρ 和 k 值, 得出 Δt 为 0.0417 秒。

8.4.4 选择求解的程序

由于这些方程是由显式方法导出的, 即在式中每一个未知的温度是与几个前一时间层的已知温度有关, 因此它的求解过程在本质上是属于显式的。这种型式求解过程在第六章及第七章 7.5 节中已详细叙述了, 在第七章中并附有程序 5.1。

8.4.5 计算结果和讨论

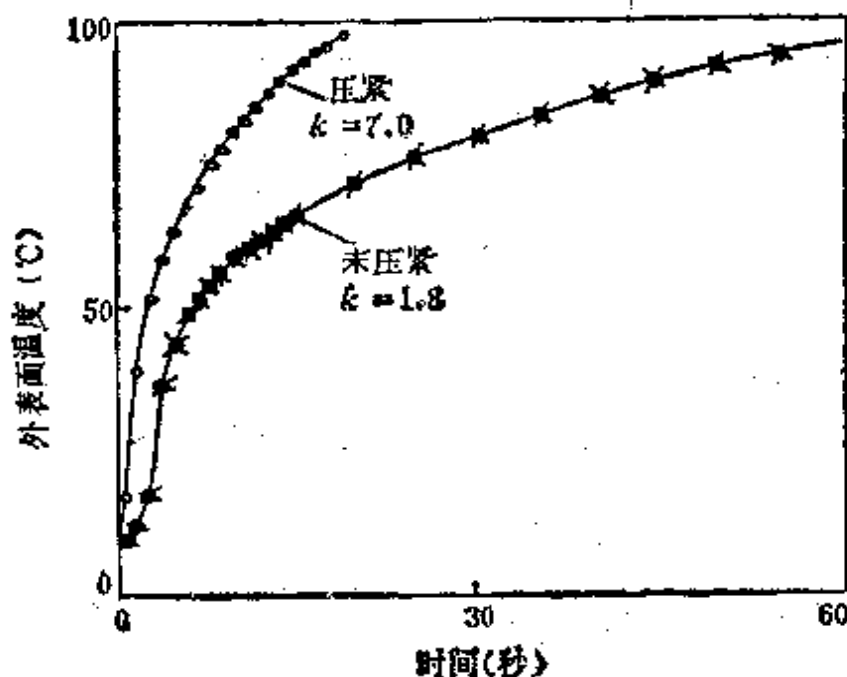


图 8-19 在不同程度压紧状态下起动时的外部表面温度

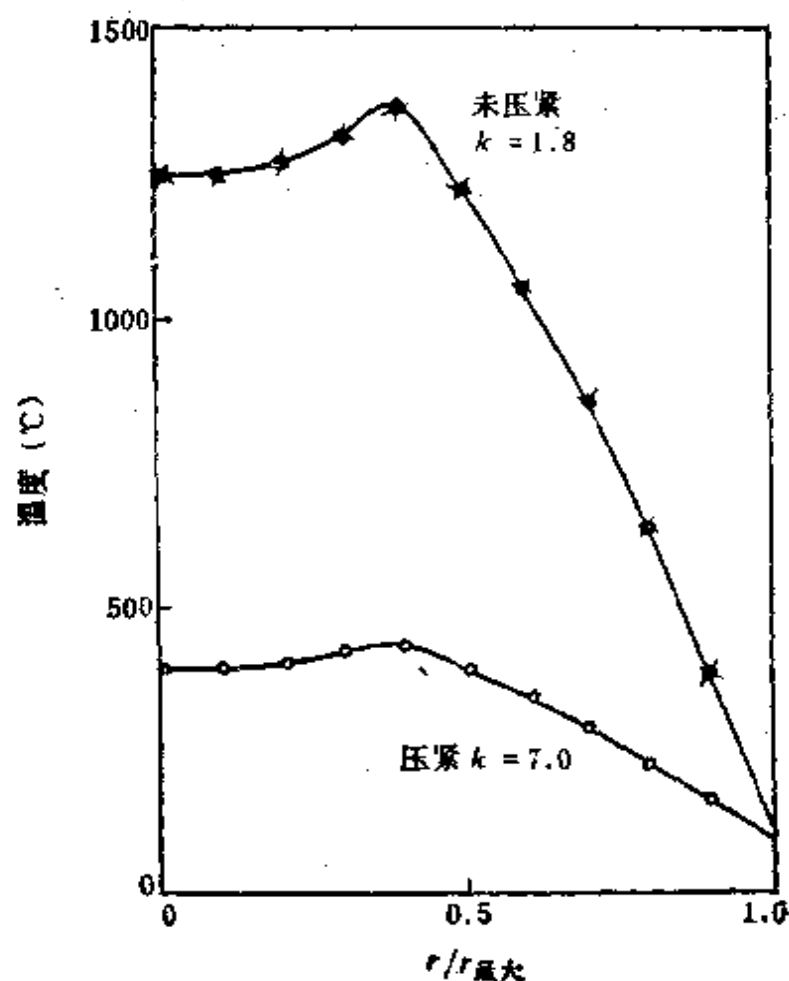


图 8-20 当外表面温度达到90°C时加热元件的温度分布

图8-19示出当绝热材料“压紧”和“未压紧”情况下，加热元件的升温曲线。在“压紧”情况下的优点可以很清楚地看到。在“未压紧”情况下，曲线中略有转折的部分指出了，在减少内部热源向表面扩散的速率方面，低导热性材料的影响。

另一个“未压紧”的明显效果是大大地提高了加热元件内部的温度。图8-20表示在外部表面温度达到90°C时，加热元件（对于两种不同程度的压紧状态）的温度分布。一般外表面温度选择为90°C是没有特别意义的。除非，如表面温度提高了，则水的整体温度也将提高。在这个计算中假设周围温度不变并等于10°C。如果周围温度为10°C，加热元件的温度实际达到了100°C时，将会出现膜态沸腾，同时对流换热系数会很快的下降。这将得到突然

提高元件的表面温度的效果。这一偶然性对计算机模型来讲是不允许的。因此外表面的选择是任意地确定为 90°C 。这个数值的选择指出下列各点：对“未压紧”的情况达到 90°C 的时间是50秒，而对“压紧”的情况则是15秒，温度分布差别很大，并且显然有很多热量实际上积蓄在“未压紧”的元件内部。

总之，可以清楚地看到，“未压紧”的结果是增加了反应时间。同时从能量有效利用的观点来看，可能是更坏的。因为较多的能量积蓄在元件的内部，而当关闭加热元件时，这些能量将完全损失掉。估价这个浪费程度是很容易的。计算整个元件的每一部分所积蓄热量的总和并与不同“压紧”系统的总热量相比，其热含量的差接近0.15百万焦耳。

8.5 通过三角形散热片的热流： 不稳定态和稳定态情况

8.5.1 问题的说明

图8-21为三角形散热片的截面图。散热片的初始温度均匀，并等于 10°C 。内表面（图中的 $x-x$ 面）的温度突然升高到 1000°C 。问题是要求出经过30秒后散热片的温度分布以及最终在稳定状态下温度的分布。

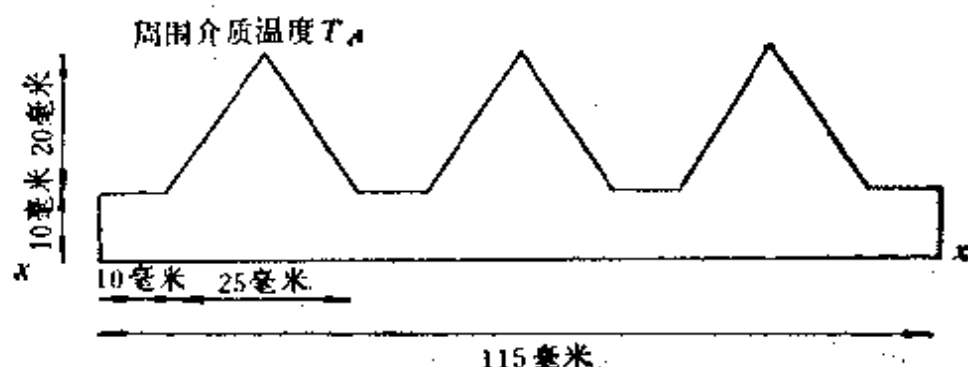


图 8-21 三角形散热片截面图

散热片材料具有下列性质：

密 度	4000千克/米 ³
导热系数	200瓦/米·K
比 热	2.0千焦/公斤·K

散热片上表面通过对流冷却，其对流换热系数为100瓦/米²·K。由于该问题的目的是说明与三角形网格相联系的问题。因此，第三方向的坐标可以忽略，可以把该问题看作是二维的。

8·5·2 网格的型式和尺寸

我们选择这种散热片的形状作为例子，以说明三角形网格的应用。在前面第四章4·2节讨论这种网格时曾指出，只有当三角形内部没有大于90°的角时，这种方法才适用。按照这个思想最初选择较粗的网格。如果需要的话，以后再将网格细分。在图8-22所示的网格经首次尝试是合理的。

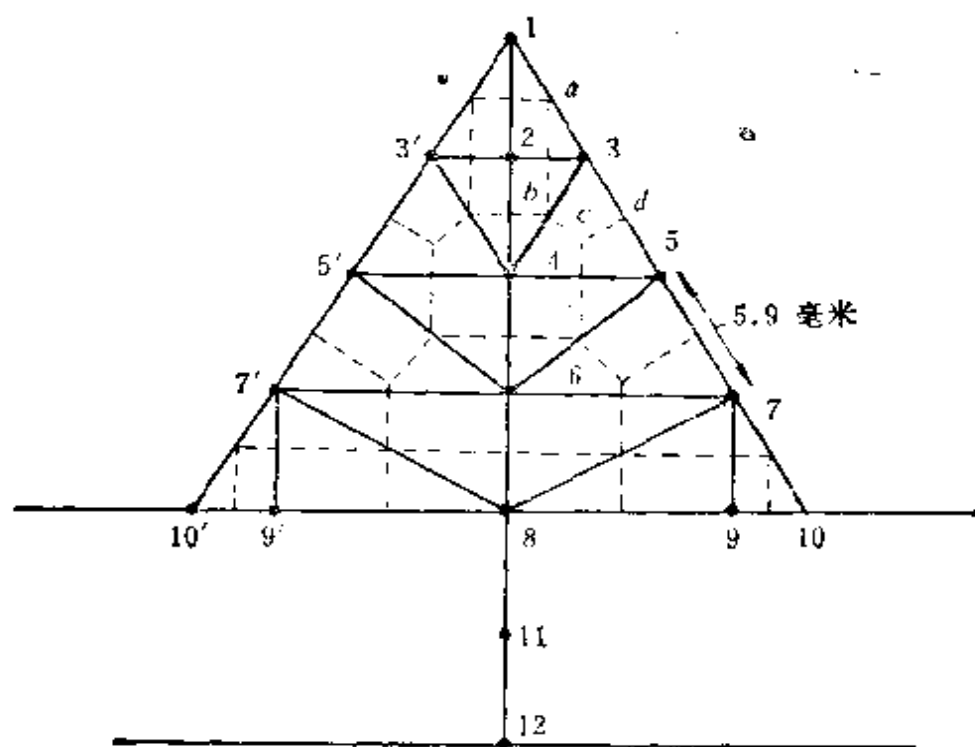


图 8-22 网格系统

8·5·3 有限差分方程的建立

此问题可以这样解决，即通过分析在不稳定态下的情况，然后使计算机程序继续进行直至达到稳定状态。尽管这种逼近法消耗了计算机时间，但是最终将节省总的计算时间。特别是并非主

要地对稳定态解感兴趣时更是这样。这里我们将分别地解不稳定态和稳定态问题。具有几何因子的能量平衡方程（见第四章 4.2 节）可以采用与方形网格系一样的一般方法导出。但是应该提出的是，在三角形网格中的节点所表示的控制面积是不规则的多边形，如对节点 3，其面积为 $abcd$ 。

表 8-2 示出几何因子的计算数值以及与各个节点有关的控制面积。

(1) 稳定态时的有限差分方程。以节点 1 为例，应用能量平衡方法，通过导热和对流传给节点的净热流应等于零。即

表 8-2 几何因子和各节点有关的控制面积

	1	2	3 3'	4	5 5'	6	7	8
1		0.625	0					
2	0.625		1.6	0.625				
3 或 3'	0	1.6		0.3125	0.3125			
4		0.625	0.3125		0.65	1.25		
5 或 5'			0.3125	0.65		0.3125	0.625	
6				1.25	0.3125		0.325	1.875
7 或 7'					0.625	0.325		0

另外， $F_{10} = 0$ ， $F_{97} = 1.25$

节 点	1	2	3	4	5	6	7	
控制面积 (毫米 ²)	3.91	15.76	9.20	29.6	19.15	44.60	20.50	

$$kF_{21}(T_2 - T_1) + kF_{31}(T_3 - T_1) + kF_{3'1}(T_{3'} - T_1) + hA(T_A - T_1) = 0$$

几何因子列于表 8-2，现在详细计算节点 1。

从三角形 123 和 123' 的几何关系中找出这些角为：

$$\angle 123 = 90^\circ; \quad \angle 132 = 58^\circ; \quad \angle 13'2 = 58^\circ$$

$$\therefore F_{31} = \frac{1}{2 \tan 90^\circ} = 0 \text{ (由于对称 } F_{3'1} = 0 \text{)}$$

在三角形123中几何因子 F_{21} 为:

$$F_{21} = \frac{1}{2 \tan 58^\circ} = 0.3125$$

从三角形123', 显然将计算出同样的 F_{21} 数值。因此 F_{21} 的总数值为 $(0.3125 + 0.3125) = 0.625$ 。

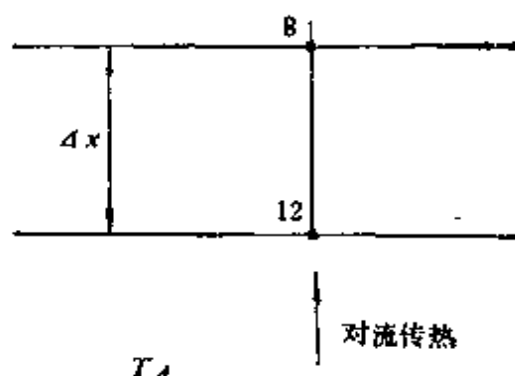


图 8-23 从散热片底面到翅的底部的一维热流

将 k 及各 F 的数值以及周围温度 10°C 代入节点 1 的有限差分方程得出:

$$0.995T_2 - T_1 = -0.047$$

假设翅片底部温度变化很小, 同时认为, 从散热片底面到翅的底部的热流基本上是一维的。这个假设允许通过翅片的下表面建立导热和对流的简单的一维热平衡 (见图8-23)。

$$\frac{kA}{\Delta x} (T_8 - T_{12}) = hA (T_{12} - T_A)$$

得出 $T_8 = 995^\circ\text{C}$ 。在节点8,9和10上的温度皆取 995°C 。

方程组以矩阵形式表示如下:

节点	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	T_7	
1	-1	0.9953						≈ 0.047
2	0.1405	-1	0.719	0.1405				$= 0$
3		0.719	-1	0.1402	0.1402			$= 0.013$
4		0.1645	0.1645	-1	0.342	0.329		$= 0$
5			0.1645	0.3147	-1	0.1643	0.329	$= 0.013$
6				0.284	0.142	-1	0.1477	$= 423.87$
7					0.284	0.1475	-1	$= 564.18$

(2) 不稳定态热流的有限差分方程。用到几何因子的能量平衡方程, 可以采用与方形网格系统一样的一般方法导出。毫无疑问, 对正方形网格来说每个节点的有关面积是方形的。而从三角形网格导出的面积经常是不规则的多边形。例如对节点 3, 与其相关的面积是 $abcd$; 其数值可以用第四章 4.2 节所述方法计算。

在不稳定态问题中, 虽然在给定的时间内, 假设沿翅片底部的温度是常数, 其数值可以由翅下面平板的简单的一维方法导出。因此

$$T'_{11} = Fo \left[T_8 + T_{12} + T_{11} \left(\frac{1}{Fo} - 2 \right) \right]$$

$$T'_8 = Fo \left[T_6 + T_{11} + T_8 \left(\frac{1}{Fo} - 2 \right) \right]$$

应用这个问题前部分提供的数据, 傅立叶数 Fo 等于 $1.0\Delta t$ 。底面的温度 T_{12} 在时间 $t=0$ 时取 505°C , 以后时间取 1000°C 。

其余节点的有限差分方程可以通过能量平衡导出。以图 8.24 中的节点 3 为例:

$$F_{13} = 0$$

$$F_{23} = 1.6$$

$$F_{43} = 0.3125$$

$$F_{53} = 0.3125$$

在时间 t 内通过导热和对流传给节点 3 的总净热流使其温度从

T_3 变化至 T'_3 , 即

$$k[F_{13}(T_1 - T_3) + F_{23}(T_2 - T_3) + F_{43}(T_4 - T_3) + F_{53}(T_5 - T_3)] + kA(T_4 - T_3) = (\text{截面}abcd\text{的质量}) \times C_p(T'_3 - T_3)/\Delta t$$

代入有关数值, 得出 T'_3 的有限差分方程

$$T'_3 = \Delta t \left[1.698T_1 + 4.348T_2 + 0.849(T_4 + T_5) + T_3 \left(\frac{1}{\Delta t} - 7.75 \right) + 0.1475 \right]$$

由能量平衡方法导出的这种有限差分方程为显式方程, 应用该式可从现在时间已知的温度预算出 Δt 时间以后的温度。如果 Δt 的数值这样选择, 以避免在有限差分方程中出现负的系数, 那么这些方程总是稳定的。以计算 T'_3 的方程式为例, Δt 不应大于 $(1/7.75)$ 秒。对不同节点的有限差分方程需要不同的 Δt , 以保证其稳定性。因此, 必须找出最小的 Δt , 以使整个方程组都稳定。然后将其应用于每个方程。

整个方程组如下:

节点

有限差分方程

$$1. \quad T'_1 = \Delta t \left[4.0T_2 + 0.188 + T_1 \left(\frac{1}{\Delta t} - 4.0188 \right) \right]$$

$$2. \quad T'_2 = \Delta t \left[5.12T_3 + T_1 + T_4 + T_5 \left(\frac{1}{\Delta t} - 7.12 \right) \right]$$

$$3. \quad T'_3 = \Delta t \left[1.698T_1 + 4.348T_2 + 0.849(T_4 + T_5) + T_3 \left(\frac{1}{\Delta t} - 7.75 \right) + 0.1475 \right]$$

$$4. \quad T'_4 = \Delta t \left[0.528(T_2 - T_3) + 1.056T_6 + 1.098T_5 + T_4 \left(\frac{1}{\Delta t} - 3.21 \right) \right]$$

$$5. \quad T'_6 = \Delta t \left[0.408(T_1 - T_6) + 0.816T_7 + 0.849T_4 + T_6 \left(\frac{1}{\Delta t} - 2.496 \right) + 0.1475 \right]$$

$$6. \quad T'_6 = \Delta t \left[0.701T_4 + 0.350T_5 + 0.365T_7 + 1.051T_8 + T_6 \left(\frac{1}{\Delta t} - 2.466 \right) \right]$$

$$7. \quad T'_7 = \Delta t \left[0.762T_5 + 0.396T_8 + 1.524T_8 + T_7 \left(\frac{1}{\Delta t} - 2.697 \right) + 0.1495 \right]$$

$$8. \quad T'_8 = \Delta t \left[T_6 + T_{11} + T_8 \left(\frac{1}{\Delta t} - 2.0 \right) \right]$$

$$11. \quad T'_{11} = \Delta t \left[T_8 + T_{12} + T_{11} \left(\frac{1}{\Delta t} - 2.0 \right) \right]$$

由计算节点 3 的有限差分方程得出全方程组的最关键的稳定性条件即 Δt 不能大于 0.129 秒。

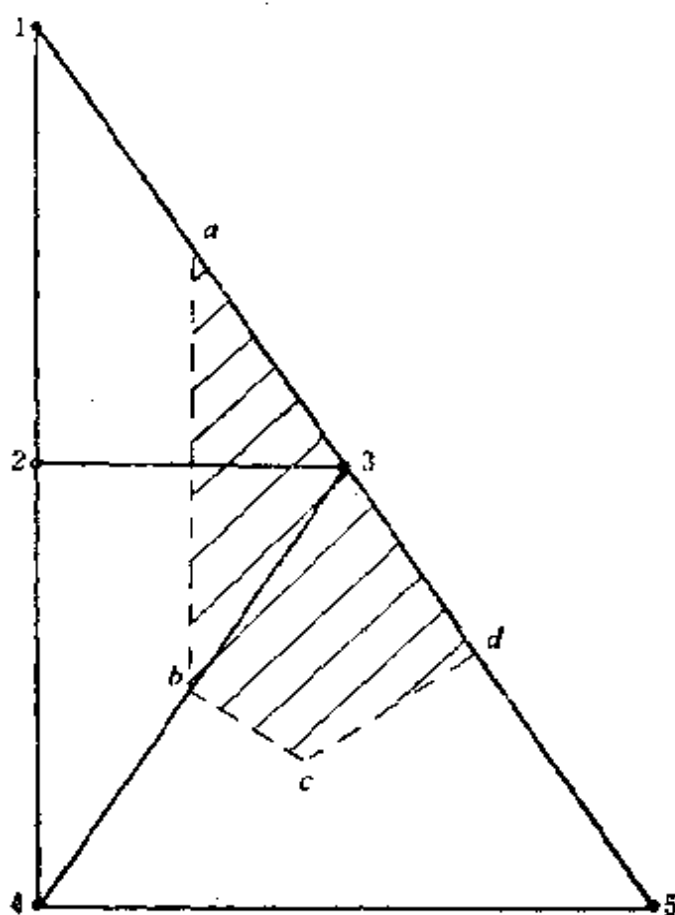


图 8-2-4 典型表面节点

8.5.4 选择求解的程序

稳定态问题的方程组最好用，例如高斯消去法这样的直接方法求解（见第七章 7·2 节）。第七章程序 2·1 就是用这种方法求解方程组的。

不稳定态问题归结的方程组需要显式法求解（见第七章 7·5 节和程序 5·1）。该方法是根据翅片已知的各点温度开始计算，依次应用所感兴趣的差分方程，一直到时间步长数达到所要求的数值为止。对于上述具体问题，总的时间是 30 秒，如果应用临界值 $\Delta t = 0.129$ 秒，则需要运算 232 个循环。

8·5·5 计算结果和讨论

在稳定态和不稳定态条件下对于包含节点 1 至 8 的计算结果示于表 8-3。稳定态下的计算结果显然是粗网格计算得出的，但用来粗略计算翅片的效率还是允许的。

表 8-3

节 点	稳 定 态 温 度 (°C)	30 秒 后 的 温 度 (°C)
1	932.6	915.9
2	937.0	921.2
3 和 3'	936.4	920.8
4	944.3	932.2
5 和 5'	929.4	929.0
6	967.5	944.4
7 和 7'	970.9	943.2
10', 9', 8, 9 和 10	995.0	961.0
11	997.5	979.9
12	1000.0	1000.0

在稳定态下翅片的平均温度是 950.1°C。通过翅片的热流为

$$Q = hA(T_{\text{翅片的底部}} - T_A) \times \text{翅片效率}$$

同时， $Q = hA(T_{\text{翅片的平均温度}} - T_A)$

因此，翅片的效率为

$$\frac{(950.1 - 10)}{(995.0 - 10)} = 95.4\%$$

8.6 包含相变的热流

8.6.1 问题的说明

当板坯加热和冷却经过奥氏体—铁素体转变温度区域时，在温度变化率中出现高峰或高台。这是由于当冷却时，由奥氏体转变为铁素体时自由能被释放出来，或当加热时，铁素体转变为奥氏体时吸收能量。这个特殊的问题涉及普通钢板坯的不稳定态加热和相变对整个材料的温度分布的影响。如戴维斯(Davis, 1972的著作)所叙，一般地边界条件应确定辐射和对流系数，而这里给定边界温度本身是为了把注意力集中在问题的要害上。

平均温度为500°C时的热物理性质为：

导热系数	50瓦/米·K
比热	650焦/公斤·K
密度	7700公斤/米 ³
在相变时所吸收的 自由能（这个转变 约发生在730°C）	56千焦/公斤

板坯厚度为100毫米，其他尺寸与厚度相比是很大的，因此可以认为是一维的问题。

8.6.2 网格的型式和尺寸

网格是由平行线连成的。起初用较粗的网格，而比较合适的网格尺寸是12.5毫米，即将板坯分为8份。

8.6.3 有限差分方程的建立

若热物理性质与温度无关，具有内热源的一维不稳定态热流的微分方程是

$$k \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + H = \rho C_p \frac{\partial T}{\partial t}$$

在这个特定的问题中，内热源项不是在所有的时间都为常数。实际上它是当温度达到730°C时被吸收的热量（而不是热流率）。在计算中计入这个热量的最简单的方法如下：

(1) 如果从材料的单位质量 (比热等于700焦/公斤) 中抽出潜热 (56千焦/公斤), 计算由此而引起的温度降为

$$\text{温度降} = \frac{\text{潜热}}{\text{比热}} = 80^{\circ}\text{C}$$

(2) 在应用有限差分方程的过程中, 每当节点温度超过转变温度 (730°C) 时, 温度就应改变到 730°C 。同时, 需及时记下预算温度与 730°C 之间的差。在随后的迭代过程中重复这个调节过程一直到逐渐增长的调节总量等于 80°C 为止。这时才允许节点温度按正常的方式提高。

所有内部节点的有限差分方程将不包括内热源项, 它具有如下形式:

$$k \left(\frac{T_{i-1} - 2T_i + T_{i+1}}{(\Delta x)^2} \right) = \rho C_p \left(\frac{T'_i - T_i}{\Delta t} \right)$$

式中 T_{i-1} , T_i 和 T_{i+1} 为相邻节点的温度。方程式可整理为

$$T' = Fo \left[T_{i-1} + T_{i+1} + T_i \left(\frac{1}{Fo} - 2 \right) \right]$$

式中
$$Fo = \frac{k \Delta t}{\rho C_p (\Delta x)^2}$$

上述方程式是显式方法导出的, 因此为使方程式稳定需要避免在式中出现负的系数。当傅立叶数为0.5时, 时间步长的临界值为7.82秒。在这里时间步长的实际数值并无特殊意义, 因为进行足够的迭代将说明潜热的影响。

8.6.4 选择求解程序

有限差分方程的导出方法要求显式类型的求解程序。其中应确定加热过程的初始温度, 然后逐渐将有限差分方程应用到整个网格。程序所具有的形式在第七章7.5节中已讨论过了 (见程序5.1)。

8.6.5 计算结果和讨论

由于钢板坯具有对称的边界条件, 因此仅需要分析材料的一半。图8-25示出在材料内部两个截面的预算温度变化。很明显地

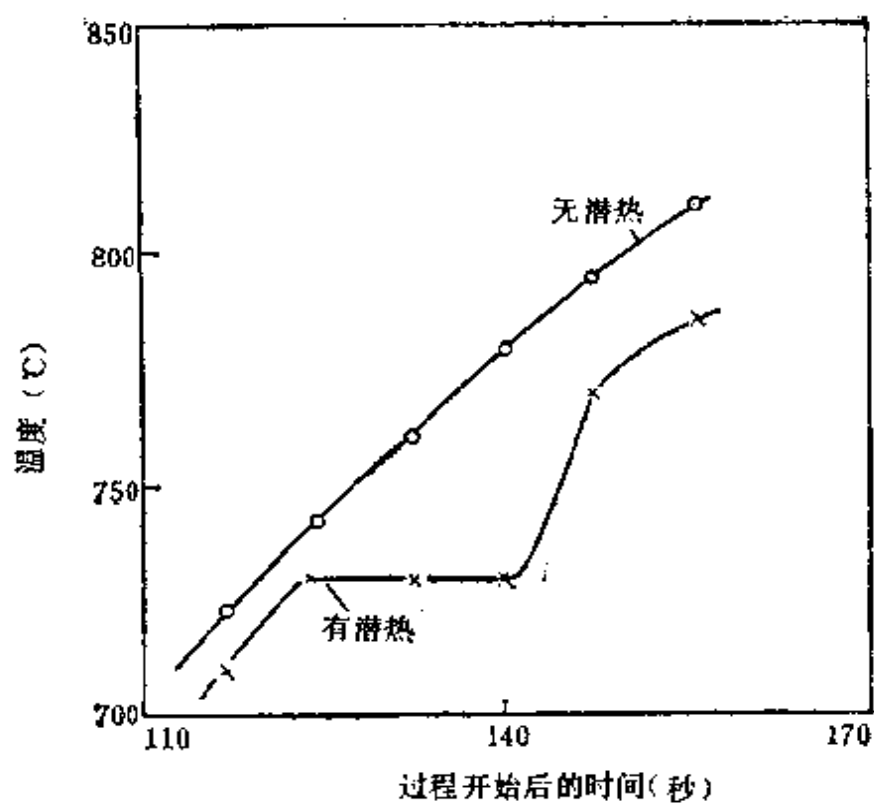


图 8-25 距表面25毫米处的截面温度变化

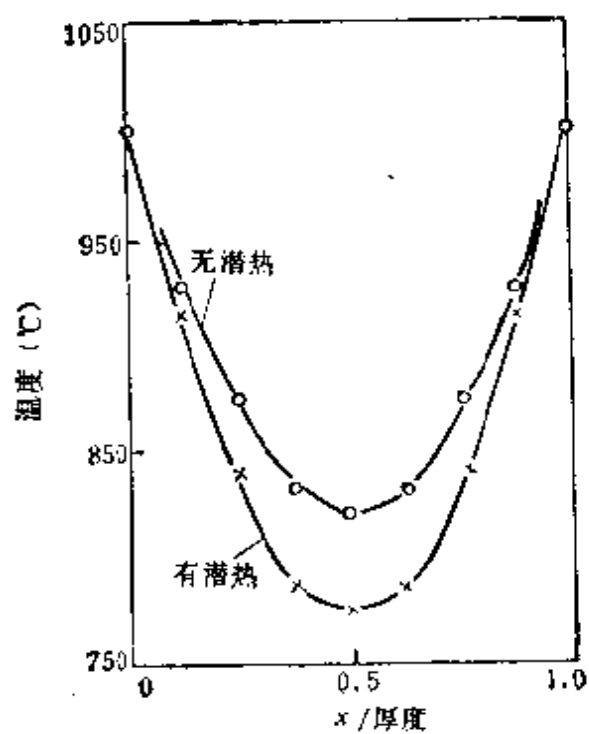


图 8-26 3.25分钟后的钢板坯断面的温度分布

看出，在730°C时吸收热量，特别是将其结果与忽略潜热效应情况下的温度变化相比就更加明显。图8-26示出在3.25分钟后在横断面上预算温度的分布。同时，也示出了潜热效应的影响。两条曲线表示不同的能量积蓄。当然这个差别将确切的等于与金属一定质量有关的潜热量。

8.7 解一维不稳定态问题的方法 比较：显式法和隐式的克兰科—尼科尔森近似法

此问题在第七章7.5节中已经叙述了。这是一个一米长的棒从两端冷却的问题。应用下列数据，并且在907.8秒时比较这些解。

棒的初始温度：从左端的50°C线性变化到右端的100°C。

棒材的热物理性质：导热系数400瓦/米·K，比热495焦/公斤·K，

密度：8892公斤/米³

两端表面的传热系数：1600瓦/米²·K

冷却介质温度：20°C

8.7.1 显式解法

我们用能量平衡近似来建立有限差分方程(见第三章3.5节)并采用通常的记法：

$$\text{内部节点: } T_{n,j+1} = Fo \left[T_{n-1,j} + T_{n+1,j} + T_{n,j} \left(\frac{1}{Fo} - 1 \right) \right]$$

$$\text{边界节点: } T_{0,j+1} = 2Fo \left[Bi \cdot T_A + T_{1,j} + T_{0,j} \left(\frac{1}{Fo} - 1 - Bi \right) \right]$$

稳定性的判据要求这些显式方程中不包含任何负的系数(见第四章4.5节)。从边界点的有限差分方程中决定允许的傅立叶数的最低数值，即

$$\frac{1}{2Fo} \geq 1 + Bi$$

同时,
$$Fo = \frac{\alpha \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} = 9.08 \times 10^{-5} \frac{\Delta t}{(\Delta x)^2}$$

$$Bi = \frac{h\Delta x}{k} = 4 \cdot \Delta x$$

求解的总时间是907.8秒。对于 Δx 和 Fo 存在一个满足所有约束条件的一个数值范围。如果棒被分为七等份以及 Fo 取0.25, 则问题可以在台式计算机上处理约一小时。由于 $\Delta x = \left(\frac{1}{7}\right)$ 米,

毕殴数 $Bi = \frac{4}{7}$ 以及为使方程稳定 $Fo \leq 1/[2(1 + 4/7)]$ 。因此我们要求 $Fo \leq 0.318$ 。这样 $Fo = 0.25$ 将满足稳定性的判据 (为了台式计算机对内部点数值的计算方便起见, 选择 $Fo = 0.5$ 或 0.333)。

有限差分方程为:

内部节点:
$$T_{n,j+1} = 0.25[T_{n-1,j} + T_{n+1,j} + 2T_{n,j}]$$

两个边界节点:
$$T_{0,j+1} = 5.714 + 0.5T_{1,j} + 0.214T_{0,j}$$

以及时间步长

$$\Delta t = \frac{Fo(\Delta x)^2}{\alpha} = \frac{0.25 \times 1/49}{9.08 \times 10^{-5}} = 56.19 \text{秒}$$

∴ 对于908.7秒需要的时间步长数 = 16。

计算结果示于表8-4

8.7.2 克兰科—尼科尔森隐式解法

这个例子在第七章7.5节中已经讨论过了, 并给出了有限差分方程 (见程序5.2)。

左端: 采用 $\Delta x = \frac{1}{20}$ (即分为20份), $Fo = 1$ 和 $h/k = 4$:

$$-4.4T_{0,j+1} = -2T_{1,j+1} - 2T_{1,j} + 0.4T_{0,j} - 16$$

右端:

表 8-4 一维不稳定态问题的显式解法

T	T_A	左端 T_0	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	T_6	右端 T_7
0	20	50	57.14	64.29	71.43	78.57	85.714	92.86	100
1	20	45.12	57.14	64.29	71.43	78.57	85.714	92.86	73.54
2	20	43.49	55.92	64.29	71.43	78.57	85.714	86.24	67.88
3	20	43.07	55.02	64.23	71.43	78.57	84.06	81.52	63.36
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
16	20	38.74	48.90	57.23	62.83	64.73	62.22	54.85	43.12
沿棒的 距离		0	0.143	0.286	0.429	0.571	0.714	0.857	1.00

$$-4.4T_{n,j+1} = -2T_{n-1,j+1} - 2T_{n-1,j} + 0.4T_{n,j} - 16$$

内部节点:

$$T_{i,j+1} = \frac{1}{4} [T_{i-1,j+1} + T_{i-1,j} + T_{i+1,j+1} + T_{i+1,j}]$$

由于 $\Delta t = \frac{Fo(\Delta x)^2}{\alpha}$, $\Delta t = \frac{1 \times 1/400}{9.08 \times 10^{-5}} = 27.53$

因此时间步长数为33。

这些有限差分方程组成一个三对角型方程组,并且可以用程序2·2通过简单的高斯消去法解出(见第七章7·2节),该方法也一并编入第七章程序5·2中。

为了便于比较,图8-27示出两种预算的情况。最终的预算结果看来实际上是一致的。这个一致性是我们所期望的。应当说明下列二点:

(1) 隐式解法用了33个时间步长,并且分为20份。如果显式方法也分为20份的话,则需要 $Fo \leq 0.416$ 。这意味着至少需要79个时间步长才能满足稳定性的需要。

(2) 如果所需要的时间步长数过多的话,则隐式方法允许改变 Fo 以达到在 Δx 不变时增大 Δt 的数值的目的。由于显式方法

受稳定性要求条件的限制，因此为了增大 Δt 就必须相应地增大 Δx ($\Delta x \propto (\Delta t)^{1/2}$) 以保持 Fo 为一定值。当然，增大 Δt 将会降低解的精确度。

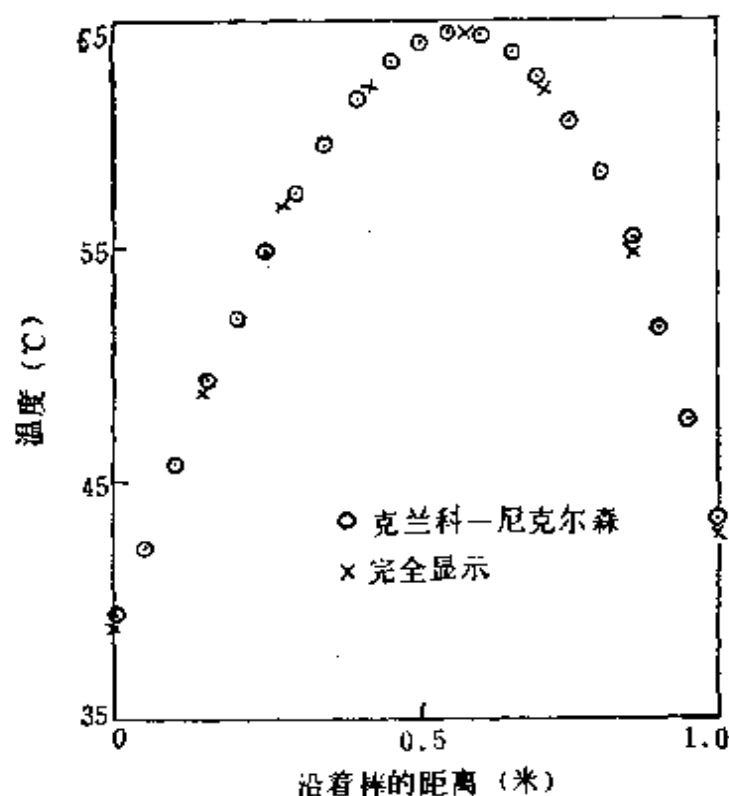


图 8-27 用不同方法的解得出的温度分布图

8.8 二维不稳定态情况：交替方向隐式 (ADI) 解法实例

8.8.1 问题的说明

选择这个问题的目的主要是通过它来说明特殊解法的过程，所以为了侧重于求解过程而不是问题本身，因而将问题稍加简化。

矩形金属棒的断面为 40 毫米 × 80 毫米，整体的初始温度为 600°C，将其投入水槽中，要求确定经过一段时间（例如 15 秒）后，金属棒内部的温度分布。由于棒的第三方向尺寸与其它二个方向的尺寸相比是很长的。因此可以认为该问题基本上是属于二维的。

由于接近金属的水将立刻沸腾，初始的传热系数如此之大，

以致金属表面与水的温差很小，可以认为金属表面温度为 $100^{\circ}\text{C}^{\circ}$

8·8·2 网格的形式和尺寸

由于这个例题的首要目的是求解的过程，因此采用边长10毫米较粗的方形网格。由于断面是对称的，因此只需要计算如图8-28所示的阴影部分。热物理性质取如下数值：

比 热	750焦/公斤·K
导热系数	60瓦/米·K
密 度	8950公斤/米 ³

8·8·3 有限差分方程的建立

和前面一样，有限差分方程是由能量平衡方程导出的。但其形式应适合交替方向的隐式（ADI）求解方法。这个方法在前面第七章7·5节中已经讨论过了。现简略重复如下：

ADI方法的意义在于为使方程稳定不必限定时间步长 Δt 的数值。这对显式有限差分方程来说是不行的。在显式有限差分方程中为避免得到负的系数需要限制所允许的时间步长 Δt 的数值。因此常常需要进行大量的计算。

ADI方法需要对给定时间步长推导出二组有限差分方程。这些方程是显式和隐式项的混合：对于前半时间步长， x -方向各项是隐式形式 y -方向是显式形式，而在下半时间步长时则相反。由于边界上的温度是已知的，仅需推导内部节点的有限差分方程。

应用能量平衡方法（用一般记号表示），对前半时间步长的方程式是：

节点 (I, J) 的净热流=节点的“质量”×比热×温度变化率即

$$\left[\frac{kA}{\Delta} (T'_{I,J-1} - T'_{I,J}) + \frac{kA}{\Delta} (T'_{I,J+1} - T'_{I,J}) + \frac{kA}{\Delta} (T_{I-1,J} - T_{I,J}) + \frac{kA}{\Delta} (T_{I+1,J} - T_{I,J}) \right] \\ = \rho(A\Delta)C_p \frac{(T'_{I,J} - T_{I,J})}{(\Delta t/2)}$$

式中 $\Delta = \Delta x = \Delta y$

前半时间步长 (x-方向隐式, y-方向显式)

节点	T'_1	T'_2	T'_3	T'_4	T'_5
1	$\left(-\frac{1}{Fo} - 2\right)$	1			
2	1	$\left(-\frac{1}{Fo} - 2\right)$	1		
3		1	$\left(-\frac{1}{Fo} - 2\right)$	1	
4			2	$\left(-\frac{1}{Fo} - 2\right)$	0
5					$\left(-\frac{1}{Fo} - 2\right)$
6					1
7					
8					

后半时间步长 (x-方向显式, y-方向隐式)

节点	T'_1	T'_2	T'_3	T'_4	T'_5
1	$\left(-\frac{1}{Fo} - 2\right)$				1
2		$\left(-\frac{1}{Fo} - 2\right)$			
3			$\left(-\frac{1}{Fo} - 2\right)$		
4				$\left(-\frac{1}{Fo} - 2\right)$	
5	2				$\left(-\frac{1}{Fo} - 2\right)$
6		2			
7			2		
8				2	

$$T'_6 \quad T'_7 \quad T'_8$$

$$\begin{aligned}
 &= -200 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_1 - T_3 \\
 &= -100 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_2 - T_6 \\
 &= -100 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_3 - T_7 \\
 &= -100 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_4 - T_8 \\
 &= -100 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_5 - 2T_1 \\
 &= \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_6 - 2T_2 \\
 &= \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_7 - 2T_3 \\
 &= \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_8 - 2T_4
 \end{aligned}$$

$$T'_6 \quad T'_7 \quad T'_8$$

$$\begin{aligned}
 &= -200 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_1 - T_2 \\
 &= -100 - T_1 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_2 - T_3 \\
 &= -100 - T_2 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_3 - T_4 \\
 &= -100 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_4 - 2T_3 \\
 &= -100 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_5 - T_6 \\
 &= -T_5 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_6 - T_7 \\
 &= -T_6 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_7 - T_8 \\
 &= -2T_7 + \left(2 - \frac{1}{Fo}\right) T_8
 \end{aligned}$$

同样，下半时间步长的方程式为

$$\left(\frac{kA}{\Delta}\right)[(T_{l,j-1}-T_{l,j})+(T_{l,j+1}-T_{l,j})+(T'_{l-1,j}-T'_{l,j})+(T'_{l+1,j}-T'_{l,j})]=2\rho A\Delta C_p(T'_{l,j}-T_{l,j})/\Delta t$$

将这些方程式写成下列形式，即在方程的左边包含未知数值，而在方程的右边是已知的数值。以矩阵形式表示出的方程组看来与一维椭圆型（稳定态）方程具有相同的形式。该方程已经在第五章5·1节和第七章7·2节，7·5节中讨论过了。同时，方程适用直接方法求解例如用高斯消去法求解（程序2·1或更好的程序2·2，见第七章7·2节）。因此我们有：

式中 Fo ——傅立叶数。

$$Fo = \frac{k\Delta t}{2\rho C_p \Delta^2}$$

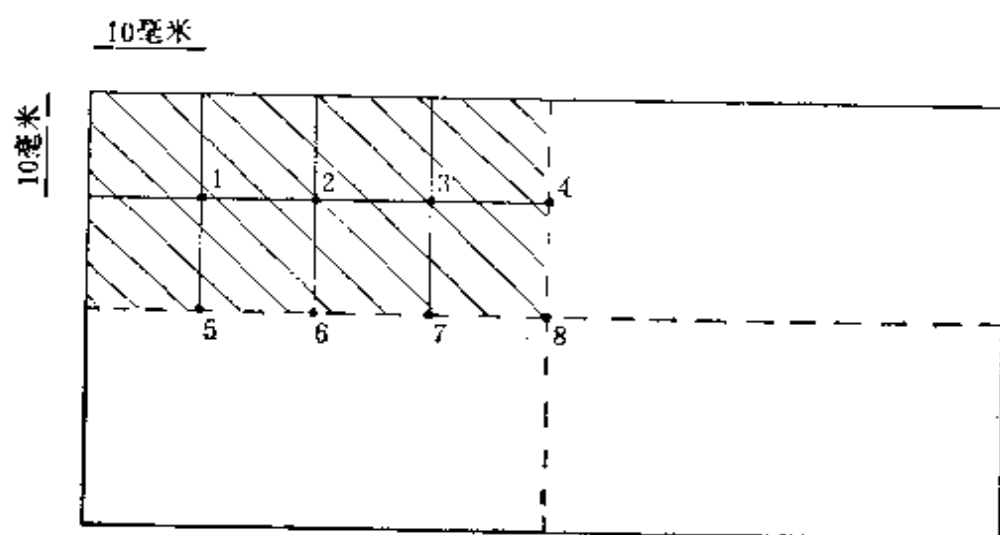


图 8-28 矩形棒的1/4截面（阴影部）

8.8.4 选择求解的程序

以矩阵形式表示的这些方程,显示出方程组的三对角特性(先将第二组按次序 1, 5, 2, 6, ... 重新排列), 并且推荐程序 2.2 (见第七章第7.2节) 是最合适的求解过程。首先解第一个方程组, 然后将其解应用于第二个方程组, 导出在整个时间步长 Δt 的终点时的最后数值。傅立叶数开始选取 1。此数值四倍于用显式方法解此问题所允许的数值。上述方法需要五个时间步长, 而显式方法为达到稳定性至少需要20个时间步长。

8.8.5 计算结果和讨论

计算结果列于图 8-29, 图中括号内列出显式方法计算的结果。应当指出的是, 所取的时间步长数比采用显式方程时减少了 3/4。显然, 对比这两种方法所得结果很令人满意。

如果选择较小的网格 (如 5 毫米见方), 则应用显式方法时间步长数需要80次 (取临界傅立叶数为 0.25)。应用 ADI 方法可以允许傅立叶数取 2, 因此所需的时间步长数减少到10次。当然, 由于时间步长数的减少, 解的精确度将降低。因此读者在采用过大的 Fo 时, 必须慎重。

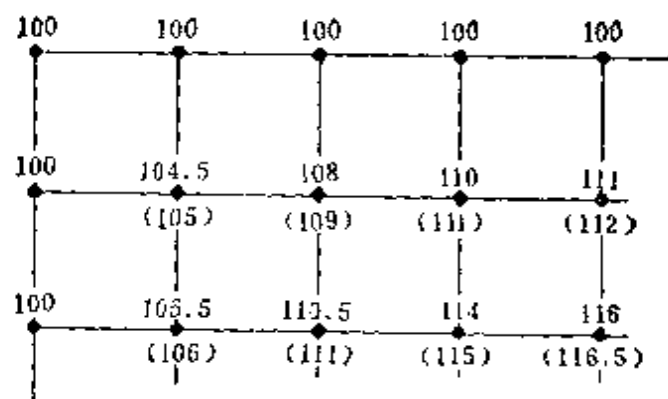


图 8-29 用ADI方法15秒后的计算结果 (括弧内是显式方法的计算结果)

8.9 热流通过由物性依赖于温度的不同材料所组成的耐火墙

8.9.1 问题的说明

过去,曾有过关于耐火衬构件的实践,耐火墙是由二或三层耐火砖砌成。各层都具有不同的热性质。这样作是为了使结构在工作状态下具有最小的热损失以及在耐火墙内保留尽可能多的热量。

现在,通过应用单一的耐火材料(称作整体耐火材料)可以达到同样的目的。这种材料一般是就地浇铸成所需要的厚度(和制混凝土的方法一样),因而具有特殊的优点:即内炉墙的修理可以用喷涂方法将材料喷到损坏的面积上,而不需要过去曾采用的缓慢的砌砖作业。

当内衬发生损坏时,内衬的局部有效厚度明显地减小。同时,包围耐火材料的金属外壳的温度比正常状态下要高。在实践中,金属外壳上的局部“热点”的作用被水冷所抵消。即便如此,耐火材料总有一个临界有效厚度,低于这个厚度时就需要停产和修理。因此,这些问题是:

(1) 对于稳定态,首先是确定用水冷却效果的大小(即应用怎样的传热系数),其次是说明测量外壳的温度与耐火材料的厚度的关系^①。

(2) 对于不稳定态,在水冷停止改变为空冷,然后再转为水冷时复合结构的热反应的预算。

8.9.2 热物理性质

对于耐火材料:

比热	780焦/公斤·K
密度	1811公斤/米 ³

① D.R.克罗夫特(Croft)私人通信(1973)热象组部分,英国钢铁协会, Sketty Hall, Swansea.

导热系数必须以温度的多项式来表示

$$k_R = (1.11 - 2.1 \times 10^{-4}T + 4.64 \times 10^{-8}T^2) \text{ 瓦/米} \cdot \text{K}$$

式中 T 是温度 $^{\circ}\text{C}$ 。对于金属：

比热	500焦/公斤 \cdot K
密度	8000公斤/米 ³
导热系数	45瓦/米 \cdot K

现取一大高炉做其耐火衬结构的分析。此耐火构件是圆形断面，其直径和长度是以米计的，而内衬加上铁壳总的最大厚度只有320毫米。因此可按一维问题来处理。虽然这是一个简单的模型，但他可用来说明变化的热物性的和通过复合结构的热流的有限差分变换。

8.9.3 网格的形式和尺寸

作为一个简化了的一维问题没有什么需要确定的。由距离为40毫米的平行线组成的网格覆盖在耐火材料和外壳上面。

8.9.4 有限差分方程的建立（稳定态）

由于耐火材料内部的表面温度确定为1300 $^{\circ}\text{C}$ ，因此只有四个典型的有限差分方程需要推导。即两个方程是分别对于耐火材料和金属外壳的内部节点的，一个方程是对于两种材料界面上的节点的和有一个方程对于铁壳边界上的外部节点的。

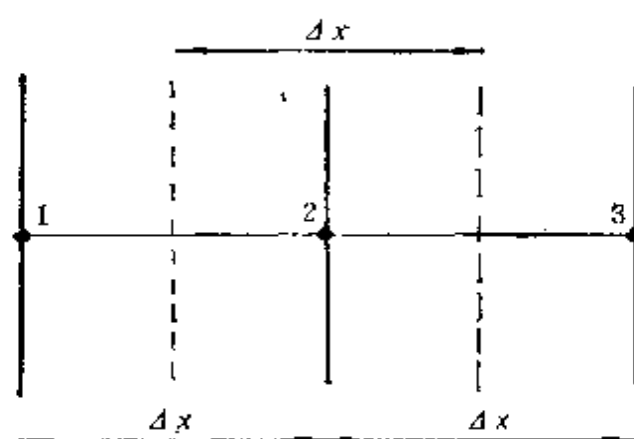


图 8-30 典型的内部节点2

(1) 耐火材料内部节点的有限差分方程。应用能量平衡的概念，流向图8-30中节点2的净热流应等于零，即

$$\frac{k_{12}A(T_1 - T_2)}{\Delta x} + \frac{k_{32}A(T_3 - T_2)}{\Delta x} = 0$$

式中 k_{12} 是在温度 $(T_1 + T_2)/2$ 下求值, k_{32} 是在温度 $(T_3 + T_2)/2$ 下求值。由于 $A = \Delta x \cdot 1$, 所以

$$T_2 = \frac{(k_{12}T_1 + k_{32}T_3)}{(k_{12} + k_{32})}$$

由于耐火材料的导热系数是温度的多项式函数, 故上面的方程式是非线性的。

(2) 金属外壳内部节点的有限差分方程。由于金属的导热系数取常数, 故热流将符合下列简单的方程

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

对于给定的节点 i

$$T_i = \frac{(T_{i-1} + T_{i+1})}{2}$$

(3) 界面节点的有限差分方程。这里的困难是节点代表两个具有不同热性质的材料。图8-31为界面周围面积的示意图。应用能量平衡的概念, 在稳定状态下, I 节点的净热流等于零。所以

$$\frac{k_{RI}A(T_R - T_I)}{\Delta x} + \frac{k_{MI}A(T_M - T_I)}{\Delta x} = 0$$

得出

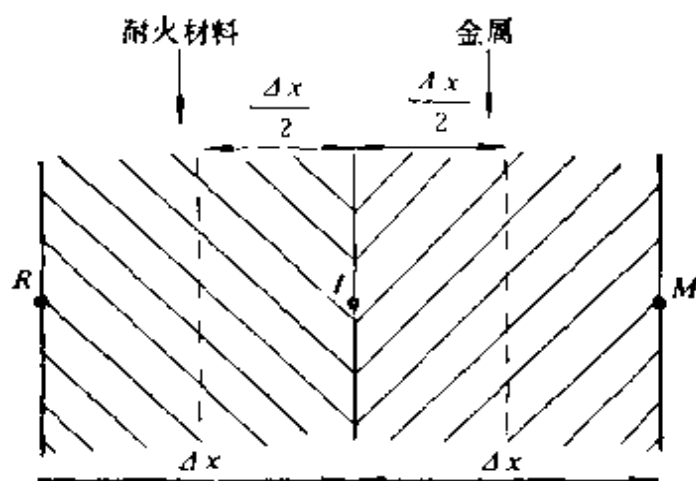


图 8-31 典型界面上的节点 I

$$T_i = \frac{(k_{RI}T_R + k_M T_M)}{(k_{RI} + k_M)}$$

式中 k_{RI} 是在温度 $(T_R + T_i)/2$ 下，由多项式求出， k_M 是常数。

(4) 边界节点的有限差分方程。图8-32是围绕典型的边界节点 B 的区域示意图。在差分方程中将为从边界来的对流和辐射热流两种情况做好准备。对边界节点 B 应用能量平衡得，

$$\frac{k_M A (T_1 - T_B)}{\Delta x} + Q = 0$$

式中 对于纯对流边界情况， $Q = hA(T_A - T_B)$ 。对于对流和辐射的边界边情况， $Q = hA(T_A - T_B) + \varepsilon\sigma A(T_A^4 - T_B^4)$ 。在这里黑度取0.9。

8·9·5 选择求解的程序

(稳定态)

除了金属外壳内部节点的方程外，所有的方程都是非线性的。因此用直接方法求解是不合适的。另一个可供选择的是迭代方法如高斯—塞德尔法（见第七章7·3和7·4节及程序3·1和3·4）。

此方法由三个主要步骤组成：

(1) 必须对每一个节点上的温度作初始估计作为迭代过程的起点。耐火材料内侧的温度固定为1300°C。这个数值作为耐火材料其他节点的初始值是很容易记入的。严格地讲，温度的任何数值都可以用于初始过程，但是如果不是合理谨慎地选择初值的话，则需要较多的迭代循环。

(2) 过程的下一步是在整个结构中从耐火材料内部表面的下一个节点开始按惯常的次序应用差分方程。

(3) 每一个迭代循环执行完毕后，必须进行判断，是否还需要继续下去。判断的基础是由上一个迭代循环至下一个迭代循环节点温度最大的变化率。对于上述问题只需观察外部边界温度

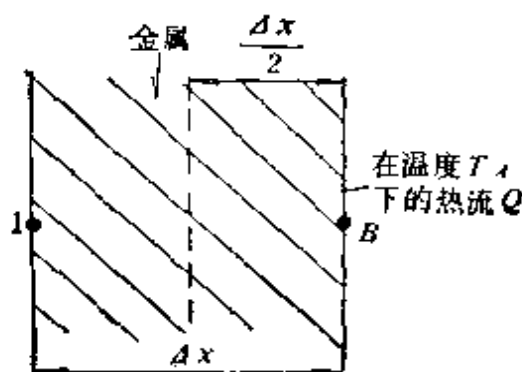


图 8-32 典型的边界节点 B

的相继变化。当相继温度之差达到或小于0.1%时迭代过程便可停止。

当应用于铁壳外边具有对流和辐射的情况下的程序运行时，在实际计算过程中发生了问题。结果是迭代过程的不收敛，这是由于在外部边界点预报温度的波动变化引起的。由于应用在这种边界条件下的是高阶非线性方程，将边界温度规定仅仅为其它变量的函数是不可能的；有限差分方程是这样形式的方程，即在方程式的两端都有边界温度 T_B 。实际上，通过应用低松弛法改变 T_B 可以达到收敛。详细地说，就是将相继迭代出的 T_B 数值存储起来，求相继二个数值的平均值，当然如果需要继续迭代的话，就应用平均值作为下一次迭代的节点温度。

8·9·6 有限差分方程的建立（不稳定态）

和前面所叙稳定态问题一样，只需要推导四个有限差分方程。仅仅在界面节点上出现一些困难，这在前面的问题中没有充分讨论过。因此，对于其他节点的差分方程简述如下：

（1）对于耐火材料内部典型节点（节点2，见图8-30）：

$$T'_2 = Fo \left[\frac{(k_{12}T_1 + k_{32}T_3)}{k_{12} + k_{32}} + T_2 \left(\frac{1}{Fo} - 1 \right) \right]$$

式中
$$Fo = \frac{(k_{12} + k_{32})\Delta t}{\rho_R C_{PR}(\Delta x)^2}$$

（2）对于金属外壳内部典型节点（节点1）：

$$T'_i = \frac{1}{Fo} \left[T_{i-1} + T_{i+1} + T_i \left(\frac{1}{Fo} - 2 \right) \right]$$

式中
$$Fo = \frac{k_M \Delta t}{\rho_M C_{PM}(\Delta x)^2}$$

（3）对于外部边界节点（节点B，见图8-32）

$$T'_B = C \left\{ k_M T_1 + h T_A + \epsilon \sigma T_A^4 + T_B \left[\frac{1}{C} - (k_M + h + \epsilon \sigma T_B^3) \right] \right\}$$

式中
$$C = \frac{2\Delta t}{\rho_M \Delta x C_{PM}}$$

(4) 对于界面节点 I (见图8-31)。对节点 I 应用能量平衡:

通过导热传给节点 I 的净热流 = 该部分的“质量” × 比热 × 温度变化率

该方程式右端求值的最简单方法是认为整个部分的乘积 (质量 × 比热) 是由每种材料分量的乘积之和组成。即

$$(\text{质量} \times \text{比热})_{\text{部分}} = [(\text{质量} \times \text{比热})_{\text{耐火材料}} + (\text{质量} \times \text{比热})_{\text{金属}}]$$

$$= \left[\left(\rho_R A \frac{\Delta x}{2} C_{PR} \right) + \left(\rho_M A \frac{\Delta x}{2} C_{PM} \right) \right]$$

因此应用能量平衡的概念得到:

$$k_{RI} A \frac{(T_R - T_I)}{\Delta x} + k_M A \frac{(T_M - T_I)}{\Delta x} = A \left(\frac{\Delta x}{2} \right) \left(\rho_R C_{PR} + \rho_M C_{PM} \right) \frac{(T_I' - T_I)}{\Delta t}$$

所以

$$T_I' = F.O. \left[\left(\frac{k_{RI} T_R + k_M T_M}{k_{RI} + k_M} \right) + T_I \left(-\frac{1}{F.O.} - 1 \right) \right]$$

式中

$$F.O. = \frac{2\Delta t (k_{RI} + k_M)}{(\Delta x)^2 (\rho_R C_{PR} + \rho_M C_{PM})}$$

所有的不稳定态方程式都是显式方法导出的, 因此要使方程式稳定需要避免负的系数。在这四个典型方程式中可以由一个方程式得到最小的允许时间步长 Δt 。这个方程式就是金属外壳的内部节点的方程式。该方程式要求时间步长 Δt 不超过71秒。

8.9.7 选择求解的程序 (不稳定态)

方程组的求解需用显式方法 (见第七章7.5节)。这个方法: 首先确定每一节点上的温度 (通过稳定态分析得到的), 然后依次应用这些有限差分方程计算一直到时间步长数达到确定的数值为止。由于在结构内部不同点上热物理性质是变化的。因此, 傅立叶数同样是变化的, 而有限差分方程中的系数也相应改变。事实上, 对分析的真实性是没有影响的。因为, 无论 $F.O.$ 的数值如何, 每个差分方程的系数总和为零。

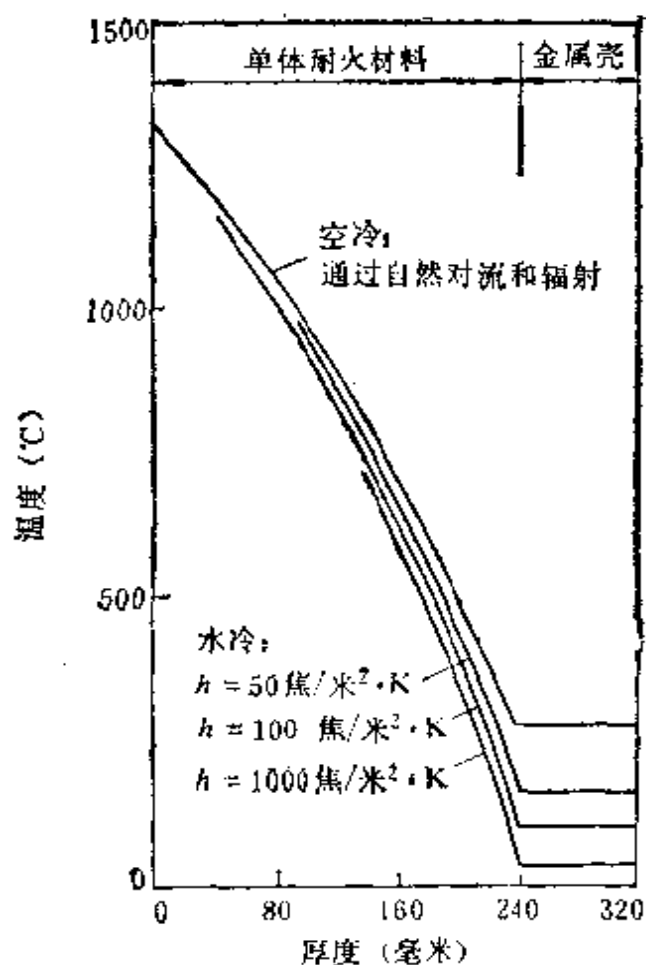


图 8-33 整个结构的稳定态温度分布

8.9.8 计算结果和讨论

(1) 稳定态。稳定态分析的第一个目的是找出外部对流传热系数的数值。稳定态的程序是在变化着的对流边界条件下运行的。整个结构的最终温度分布示于图8-33。

从热象测量仪测出的这样一个结构的外部温度是80°C左右^①，因此曾假设传热系数为100瓦/米²·K。这个数值曾用于其余的计算。

第二个目的是确定在不同厚度下耐火材料的外表面的温度变化。图8-34，示出这样的变化（在外部传热系数为100瓦/米²·K

^①见238页注。

条件下)。

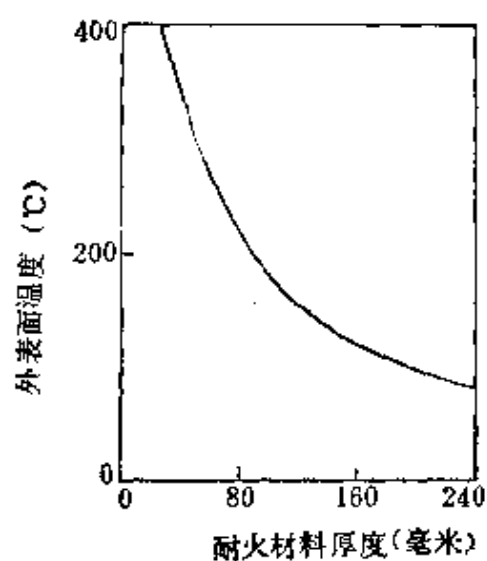


图 8-34 耐火材料的厚度对稳定态下外部表面温度的影响

这些结果虽然是从简单的一维模型导出的，但对通过测出外

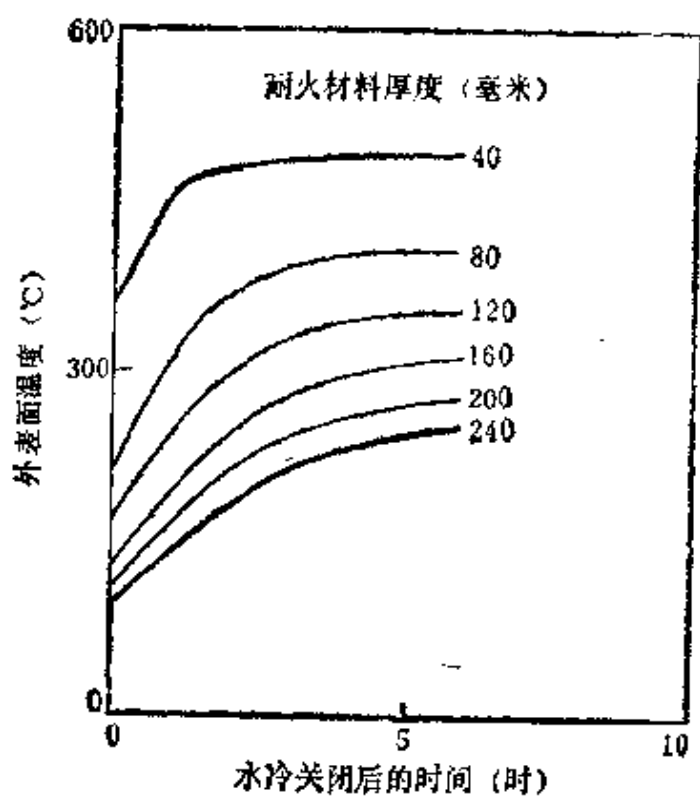


图 8-35 在不稳定态下耐火材料的厚度对外表面温度的影响

部温度以估算高轻质耐火材料的损坏是非常有用的^①。

(2) 不稳定态。不稳定态分析的目的是预报由于某种原因水冷停止以及外壳只通过自然对流和辐射冷却时整个结构的状况。

图8-35示出不稳定态下复合结构的外壳温度与耐火材料不同厚度的关系。

罗杰斯 (Rogers) 于1971年在这种结构上的“热点”所做的试验与对120毫米厚的温度曲线预报的数据是一致的。随后检查炉子的内侧,发现损坏的区域在厚度上减少了约130毫米。

最后,当由稳定态冷却变为不稳定态冷却,然后再转为稳定态时,外部表面的整个温度演变示于图8-36中。该图表示一旦重新安排水冷时便较快地转回到稳定态。实际上,这种程度的热波动是不会允许发生的,无论如何其结果可提供某些有关作决策的数据。

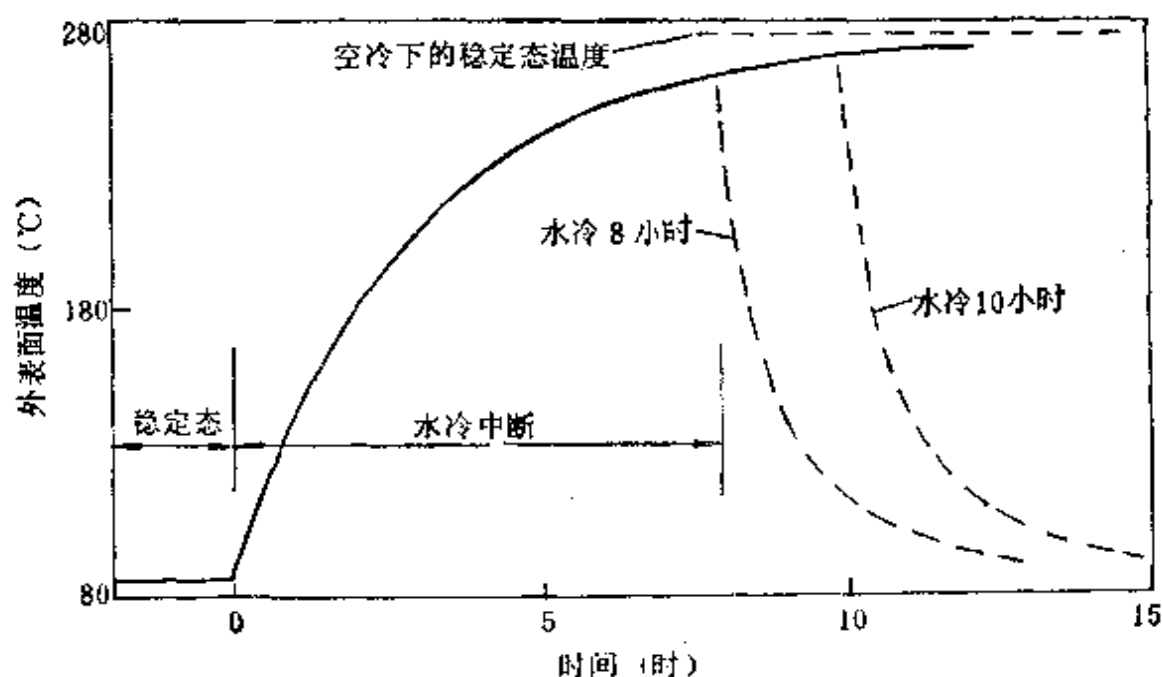


图 8-36 当水冷关闭过后打开时不稳定态外部表面温度
(耐火材料厚度为240毫米)

① 见238页注。

8·10 通过复合耐火结构的三维稳定态热流

8·10·1 问题的说明

在前面8·9节的问题中,解释了支持采用单一的(单体的)耐火材料的理由,然而在应用中却提出了某些特殊的问题。为了支撑耐火材料就必需采用某些方法使耐火材料固定在外壳上。采用金属销钉从外壳伸入单体耐火材料的方法可以达到这一目的。销钉的间隔是等距的,并且可以取方形截面,其尺寸见图8-37。

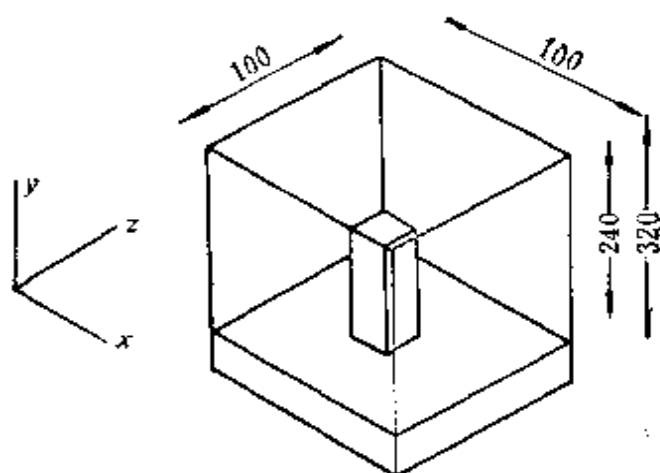


图 8-37 几何外形,销钉尺寸为 $10 \times 40 \times 150$ 毫米

因为金属销钉提高了复合墙的有效热传导,销钉明显地要影响通过耐火材料的热流形式。这里应该解决的问题是,确定稳定态热流增大了多少,以及该因素与销钉的间距和尺寸的关系。显然,外形是三维的,不能简单地认为所有三个方向都是同样大小而加以简化。虽然将会有大量的方程式但是主要的困难是数据处理。这些方程式本身并不复杂。事实上可以看出,前面例题中详细解释过的方程式的推导和求解的方法能够很快地推广到解这个问题上。

8·10·2 网格的形式和尺寸

对于普通的外形建议最好采用简单的方形网格。所有的节点将代表一个立方体的控制体积。这种形式的网格可使有限差分方

程的推导较为明了并易于做到。网格尺寸的最初选择是根据能够完成计算的最粗网格。在上述情况下,立方体网格各边取20毫米。

8.10.3 有限差分方程的建立

为了简化起见,可以认为有三个本质不同的有限差分方程需要推导:一个是对处于金属或耐火材料内部的节点的,一个是对处于两种材料交界处的节点的,一个是对边界节点的。

(1) 耐火材料内部节点的有限差分方程。由于问题是属于三维的,因此从三个方向应用能量平衡概念。图8-38示出标号为1的典型内部节点的情况。

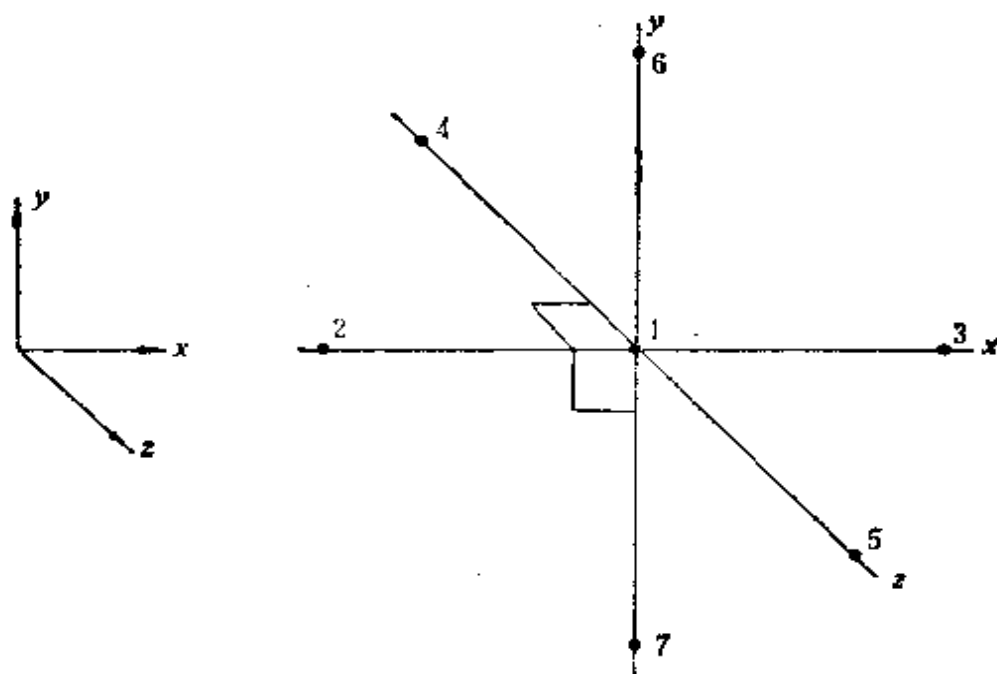


图 8-38 典型的内部节点 1

该点的能量平衡是

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{\Delta x} [k_{21}A(T_2 - T_1) + k_{31}A(T_3 - T_1) + k_{41}A(T_4 - T_1) \\ & + k_{51}A(T_5 - T_1) + k_{61}A(T_6 - T_1) + k_{71}A(T_7 - T_1)] = 0 \end{aligned}$$

得出

$$T_1 = \frac{(k_{21}T_2 + k_{31}T_3 + k_{41}T_4 + k_{51}T_5 + k_{61}T_6 + k_{71}T_7)}{(k_{21} + k_{31} + k_{41} + k_{51} + k_{61} + k_{71})}$$

这里应该提起注意的是耐火材料的导热系数是温度的多项式函数。因此最好求出在平均温度下的典型导热系数 k_{12} ，而不是它们的两个极值的平均值，即

$$k_{12} = k(T_{12})$$

式中

$$T_{12} = \frac{(T_1 + T_2)}{2}$$

而不是

$$k_{12} = \frac{[k(T_1) + k(T_2)]}{2}$$

金属内部所有的节点将应用同样的方程式，此外，不同的是导热系数假设为常数。因此，对于典型的节点有限差分方程将为

$$T_1 = \frac{(T_2 + T_3 + T_4 + T_5 + T_6 + T_7)}{6}$$

其节点的几何构形与图8-38所示是一样的。

(2) 界面节点的有限差分方程。我们推导一个角部节点的有限差分方程（图3-39中节点1）作为例子说明。在推导差分方程前，应该弄清楚热流流向何处。比如说，热流从节点3流向节点1。从图中可以看出，热流的横断面积的一半被耐火材料所占据，而另一半被金属所占据。很快地可以说明在这种场合下完全允许应用两个导热系数的平均值；考察具有同样断面和长度的两个棒A和B，并处于同样的温差 ΔT 之下，但具有不同的导热系数 k_A 和 k_B 。

$$\text{通过棒A的传导热流} = \frac{k_A A (\Delta T)}{L}$$

$$\text{通过棒B的传导热流} = \frac{k_B A (\Delta T)}{L}$$

断面为 $2A$ ，长度为 L 的复合棒处于同样的温度界限则传递的热流 $= k_{\text{复合}} A (\Delta T) / L$ 。可以看出，如果通过两个棒的总热流和通过复合棒的热流相同，则复合棒的有效导热系数为：

$$k_{\text{复合}} = \frac{(k_A + k_B)}{2}$$

应用这个概念对图8-39中的节点将得出下列能量平衡方程：

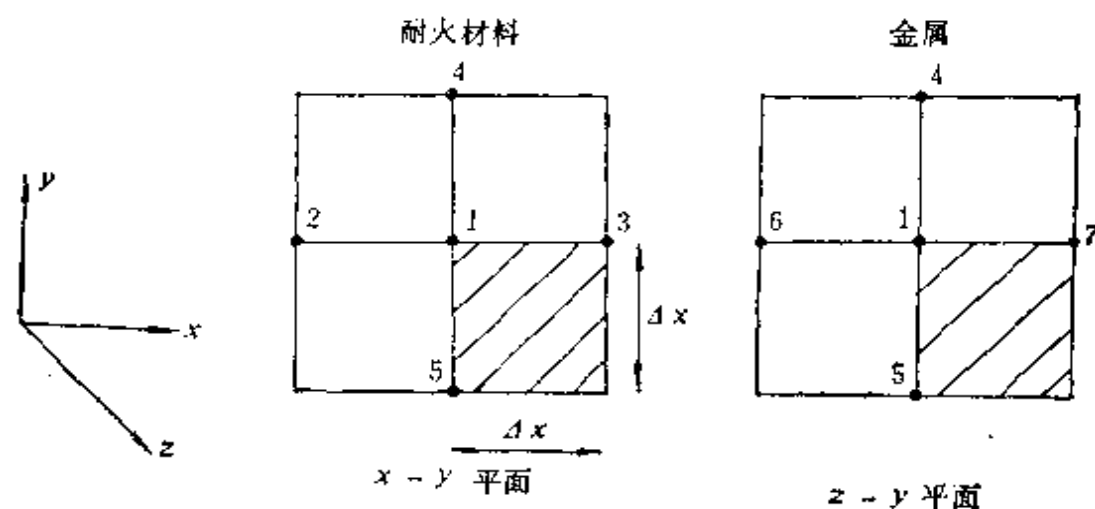


图 8-39 在销钉和耐火材料典型界面上的节点 1

$$\frac{1}{\Delta x} [(k_{21} A (T_2 - T_1) + k_{31} A (T_3 - T_1) + k_{41} A (T_4 - T_1) + k_{51} A (T_5 - T_1) + k_{61} A (T_6 - T_1) + k_{71} A (T_7 - T_1))] = 0$$

式中 $k_{31} = (k_{\text{金属}} + k_{\text{耐火}})/2$ ，并且耐火材料的导热系数是在平均温度下求值的，等于 $(T_3 + T_1)/2$ 。同样的方法可用于计算 k_{51} 和 k_{71} 。导热系数 k_{21} ， k_{41} ， k_{61} 是从耐火材料的导热系数多项式中算出的。

(3) 边界节点的有限差分方程。对图8-40中节点 1 应用能量平衡概念，并应指出，从节点 2、3、5 和 6 流向节点 1 的传导热流所通过的横断面仅是从节点 4 流向节点 1 的热流的一半。我们有：

$$\frac{1}{\Delta x} \left[k_{21} \left(\frac{A}{2} \right) (T_2 - T_1) + k_{31} \left(\frac{A}{2} \right) (T_3 - T_1) + k_{51} \left(\frac{A}{2} \right) (T_5 - T_1) + k_{61} \left(\frac{A}{2} \right) (T_6 - T_1) + k_{41} A (T_4 - T_1) \right] + h A (T_A - T_1) = 0$$

式中 $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$ ， $A = \Delta^2$ ，

因此

$$T_1 = \frac{k_{21}T_2 + k_{31}T_3 + k_{51}T_5 + k_{61}T_6 + 2k_{41}T_4 + 2h\Delta T_A}{(k_{21} + k_{31} + k_{51} + k_{61} + 2k_{41} + 2h)}$$

式中耐火材料的导热系数和前面一样是在平均温度下求出的。

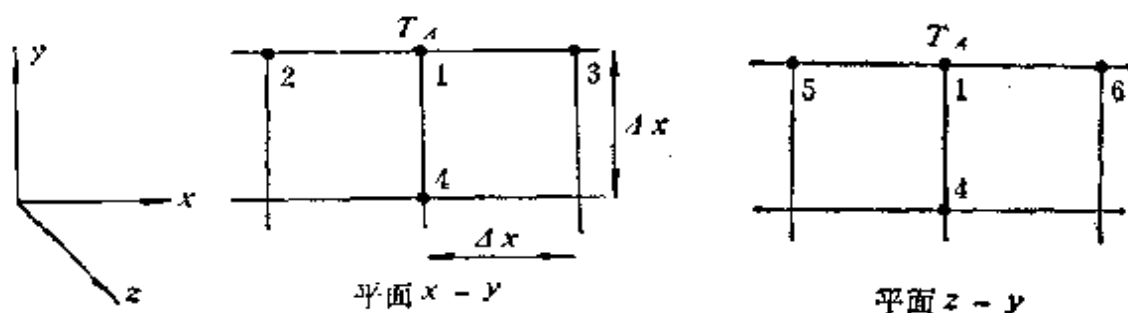


图 8-40 呈露在周围温度 T_A 中的耐火材料表面上的典型边界节点

8.10.4 选择求解的程序

即使外形是对称的（因此只需分析物体的1/4）仍旧有600多个有限差分方程需要求解。这些非线性方程——导热系数是未知温度的函数——不能使用直接方法求解。可取的方法是迭代法，例如高斯—塞德尔法（见第七章7.3节）。由于大多数节点都在同一材料内，因此对这些节点的一般方程式是很容易确定的，并且在计算机程序中反复应用。由于每一个差分方程都具有同样的形式，实际编写程序是比较容易的，只是对不同节点需要不同的系数组而已。在第五章第5.2节的程序2.5中介绍了一个方法。这个程序在导热系数依变于温度的情况下，基于前次迭代循环结束时的温度对整个网格的系数求值。这个特殊的程序将同样减少计算工作量。因为一个给定的系数经常出现在二个有限差分方程中。

在这个节点数目的情况下应当使用任何加快收敛的要点。初始节点温度的细心选择和超松弛法（见第七章7.3节）就是这样的二个要点。这些初值就是在节8.9中讨论的稳定态二维问题中已推导过的。

8.10.5 计算结果和讨论

计算结果是很庞大的，以致这里不能提出。作为例子说明，

图8-41示出穿过结构中心线断面的等温线。很清楚地看到，由于存在金属销钉而引起热流图形的歪扭。销钉对传热率的影响通过检查沿金属壳的外部边界温度分布很容易计算出来。图8-42示出在中心线断面上沿金属壳外部边界上的温度变化。通过计算表面温度并和没有销钉（见8·9节）时所得到的数值进行比较，传热率提高了约4%。如果耐火材料损坏了，其结果减少了内表面与销钉顶部之间的厚度，传热率将增大一倍以上。因为那时销钉顶部的温度可达1300°C。研究销钉间距的影响等问题留给读者去研究。改变网格尺寸是模拟不同几何形状的最容易的方法。

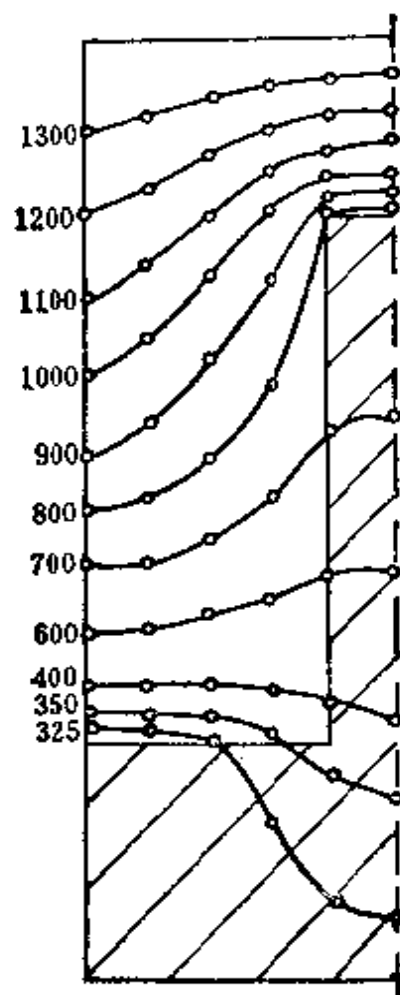


图 8-41 穿过结构中心线断面，金属销钉周围的等温线

通过对当前工作稍加修正便可研究销钉的尺寸，间隙和长度等等的的影响。用同样程序做这些研究的简单方法是布置变化的网

格尺寸使之相适应。然后，仅仅确定网格位置直接模拟不同的几何外形。

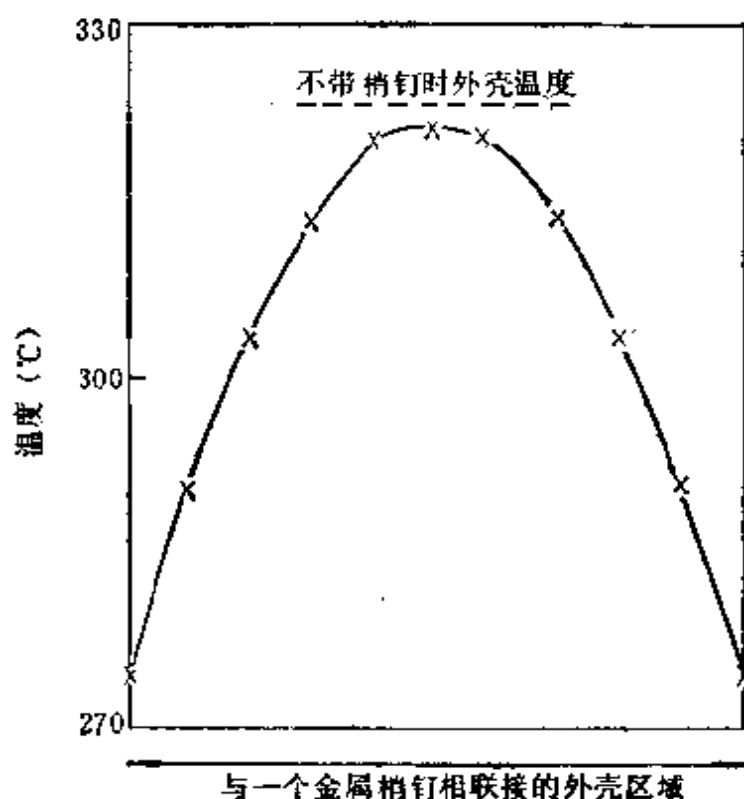


图 8-42 在中心线断面上沿金属壳外边界的温度变化，表示金属销钉的影响

参 考 文 献

Anon. (1965). *Copper for Busbars*. Copper Development Association, Potters Bar, Herts, UK.

Davis, W. B. (1972). Determination of the temperature distribution in a steel slab during quenching. *J. Iron & Steel Inst.*, June.

Eckert, E. R. G. & Drake, R. M. (1959). *Heat and Mass Transfer*, 2nd ed. McGraw-Hill, New York.

Rogers, L. M. (1971). The application of thermography to plant monitoring and energy conservation. British Steel Corporation (Tubes Division), Report TB/TH/71.

计算机程序列表

第五章, 程序2.1

```

C      MAIN
C      ---- PROGRAM 2-1 OF CHAPTER 5
C      SIMPLE STEADY STATE PROBLEM
C      SET INITIAL GUESSES
      T1=0.0
      T2=0.0
      T3=0.0
C      ITERATION LOOP FOR 20 ITERATIONS
      DO 100 L=1,20
      TP1=(100.+100.+T2+200.)/4.
      TP2=(T1+100.+T3+300.)/4.
      TP3=(T2+100.+860.+400.)/4.
C      UPDATE AFTER EACH ITERATION LOOP
      T1=TP1
      T2=TP2
      T3=TP3
C      INTERMEDIATE OUTPUT
      WRITE(5,200)L,T1,T2,T3
200  FORMAT(4H I =,I3,4HT1 =,F10.3,8H      T2 =,F10.3,8H      T3 =,F10.3)
100  CONTINUE
      STOP
      END

```

第五章，程序2.2

```

C      MAIN
C      --- PROGRAM 2-2 OF CHAPTER 5
C      SIMPLE STEADY STATE PROBLEM
C      BOUNDARY VALUES VIA A DATA, READ OR EXECUTION STATEMENT
C      DATA, TA,TB,TC,TD,TE,TF,TG,TH/
1      4★100.,860.,400.,300.,200./
C      INITIAL GUESSES
      T1=0.0
      T2=0.0
      T3=0.0
C      WRITE HEADINGS
      WRITE(5,200)
200    FORMAT(1H1///6X,5HT1,8X,2HT2,8X,2HT3//)
C      INITIAL OUTPUT
      WRITE(5,201)L,T1,T2,T3
C      ITERATION LOOP
      DO 100 L=1,20
      TP1=(TA+TB+T2+TH)/4.
      TP2=(T1+TC+T3+TG)/4.
      TP3=(T2+TD+TE+TF)/4.
C      UPDATE AFTER EACH ITERATION CYCLE
      T1=TP1
      T2=TP2
      T3=TP3
C      INTERMEDIATE OUTPUT
      WRITE(5,201)L,T1,T2,T3
201    FORMAT(10,3F10.3)
      100 CONTINUE
      STOP
      END

```

```

C      MAIN
C----- PROGRAM 2-3 OF CHAPTER 5
C      SIMPLE STEADY STATE PROBLEM
C      MORE SOPHISTICATIONS
C      DIMENSION T(5,3),TP(5,3),R(5,3),F(5,3)
C      BOUNDARY AND INITIAL VALUES
C      DATA T/0.,200.,300.,400.,0.,100.,3*0.,860.,0.,3*100.,0./
C      DATA TP/15*0./
C      INITIAL VALUES-- SOME ALREADY SET TO ZERO IN DATA
C      L=0
C      LMAX=100
C      IMAX=5
C      JMAX=3
C      IMM1=IMAX-1
C      JMM1=JMAX-1
C      WRITE HEADINGS
C      WRITE(5,200)
200  FORMAT(1H1///6X,5HT NO,5X,2HT1,8X,2HT2,8X,2HT3//)
C      INITIAL OUTPUT
C      WRITE(5,201)L,T(2,2),T(2,3),T(2,4)
C      ITERATION LOOP
C      DO 107 L=1,LMAX
C      CALCULATE TP AT UNKNOWN TEMPERATURE POINTS
C      DO 101 I=2,IMM1
C      DO 100 J=2,JMM1
C      TP(I,J)=(T(I-1,J)+T(I+1,J)+T(J-1)+T(J+1))/4.
100  CONTINUE

```

```

101 CONTINUE
C CALCULATE FRACTIONAL CHANGES AND UPDATE AFTER EACH ITERATION CYCLE
DO 103 I=2,IMMI
DO 102 J=2,JMMI
R(I,J)=4.*ABS(TP(I,J)-T(I,J))
F(I,J)=ABS((TP(I,J)-T(I,J))/T(I,J))
T(I,J)=TP(I,J)
102 CONTINUE
103 CONTINUE
C INTERMEDIATE OUTPUT
WRITE(5,201)L,T(2,2),T(2,3),T(2,4)
201 FORMAT(10,3F10.3)
C TERMINATION TESTS
FMAX=0.0
RES=0.0
DO 105 I=2,IMMI
DO 104 J=2,JMMI
IF(F(I,J).GT.FMAX)FMAX=F(I,J)
RES=RES+R(I,J)
104 CONTINUE
105 CONTINUE
IF(FMAX.LT.0.005)GO TO 106
GO TO 107
106 IF(RES.LT.0.005)GO TO 108
107 CONTINUE
C TERMINATION
108 CONTINUE
STOP
END

```

第五章，程序2.4

```

C      MAIN
C-----PROGRAM 2-4 OF CHAPTER 5
C      SIMPLE STEADY STATE PROBLEM
C      SET INITIAL GUESSES
      T1=0.0
      T2=0.0
      T3=0.0
C      ITERATION LOOP FOR 20 ITERATIONS
      DO 100 L=1,20
        T1=(100.+100.+T2+200.)/4.
        T2=(T1+100.+T3+300.)/4.
        T3=(T2+100.+860.+400.)/4.
C      INTERMEDIATE OUTPUT
        WRITE(5,200)L,T1,T2,T3
200    FORMAT(4H I =,I3,4HT1 =,F10.3,8H      T2 =,F10.3,8H      T3 =,F10.3)
100    CONTINUE
      STOP
      END

```

第五章，程序2.5

```

C      MAIN
C-----PROGRAM 2-5 OF CHAPTER 5
C      SIMPLE STEADY STATE PROBLEM
C      MORE SOPHISTICATIONS
C      DIMENSION T(5,3),AN(5,3),AS(5,3),AE(5,3),AW(5,3),AP(5,3)
C      BOUNDARY AND INITIAL VALUES
      DATA T/0.,200.,300.,400.,0.,100.,3★0.,860.,0.,3★100.,0./
      DATA AN,AS,AE,AW/60★10/

```



```

C      INITIAL VALUES— SOME ALREADY SET TO ZERO IN DATA
      L=0
      LMAX=100
      IMAX=5
      JMAX=3
      IMM1=IMAX-1
      JMM1=JMAX-1
C      WRITE HEADINGS
      WRITE(5,200)
200    FORMAT(1H1///6X,5HT NO,5X,2HT1,8X,2HT2,8X,2HT3//)
C      INITIAL OUTPUT
      WRITE(5,201)L,T(2,2),T(2,3),T(2,4)
C      ITERATION LOOP WITH RESIDUAL CALCULATION
      DO 102 L=1,LMAX
      RES=0.0
      DO 101 I=2,IMM1
      DO 100 J=2,JMM1
      TNEW=AN(I,J)*T(I,J+1)+AS(I,J)*T(I,J-1)
1      +AE(I,J)*T(I+1,J)+AW(I,J)*T(I-1,J)
      AP(I,J)=AN(I,J)+AS(I,J)+AE(I,J)+AW(I,J)
      TNEW=TNEW/AP(I,J)
      RES=RES+ABS(TNEW-T(I,J))
      T(I,J)=TNEW
100    CONTINUE
101    CONTINUE
C      INTERMEDIATE OUTPUT
      WRITE(5,201)L,T(2,2),T(2,3),T(2,4)
201    FORMAT(110,3F10.3)
C      TERMINATION TEST
      IF(RES.LT.0.005)GO TO 103
102    CONTINUE
      TERMINATION
103    STOP
      END

```

```

C      MAIN
C-----PROGRAM 1-1 OF CHAPTER 6
C      SIMPLE TRANSIENT PROBLEM
C      DIMENSION T(7),TP(7)
C      DATA T/1000.,5★20.,1000./
C      WRITE HEADINGS
C      WRITE(5,200)
C      200  FORMAT(1H1,5H STEP,12H TEMPERATURES//)
C      ADVANCE IN TIME DELTA T
C      DO 100 NDT=1,5
C      DO 101 I=2,6
C      TP(I)=0.5★(T(I-1)+T(I+1))
C      101  CONTINUE
C      DO 102 I=2,6
C      T(I)=TP(I)
C      102  CONTINUE
C      INTERMEDIATE OUTPUT
C      WRITE(5,201)NDT,T
C      201  FORMAT(15,7F12.3)
C      100  CONTINUE
C      STOP
C      END

```

第六章，程序1.2

```

C      MAIN
C-----PROGRAM 1-2 OF CHAPTER 6,
C      SIMPLE TRANSIENT PROBLEM
C      DIMENSION T(5),TP(5)
C      DATA T/510.,4★20./
C      WRITE HEADINGS
C      WRITE(5,200)
200    FORMAT(1H1,5H STEP,12HTEMPERATURES//)
C      ADVANCE IN TIME DELTA T
C      DO 100 NDT=1,5
C      RIGHT HAND SYMMETRY CONDITION--
C      DT/DX = 0 AT T(4)
C      T(5)=T(3)
C      DO 101 I=2,4
C      TP(I)=0.5★(T(I-1)+T(I+1))
101    CONTINUE
C      DO 102 I=2,4
C      T(I)=TP(I)
102    CONTINUE
C      INTERMEDIATE OUTPUT
C      WRITE(5,201)
201    FORMAT(15,4F12.3)
100    CONTINUE
C      STOP
C      END

```

```

C MAIN
C ---- PROGRAM 2-1 OF CHAPTER 7
C LINEAR EQUATIONS GAUSS ELIMINATION
C PROGRAM TO SOLVE A SET OF LINEAR EQUATIONS BY GAUSSIAN ELIMINATION.
C THIS PROGRAM DESIGNED FOR UP TO 40 EQUATIONS.
      DIMENSION A(40,41)
C READ IN NUMBER OF EQUATIONS, N, AND COEFFICIENTS.
C COEFFICIENTS ARE PUNCHED 8 PER CARD. EXCEPT EACH EQUATION BEGINS ON A NEW CARD.
      READ(2,100)N
      NP1=N + 1
      DO 10 I = 1,N
10 READ(2,101)A(I,J,J=1,NP1)
C PRINT HEADING
      WRITE(5,200)N
C ELIMINATE COEFFICIENTS BELOW DIAGONAL.
      DO 20 I = 2,N
      DO 20 J = 1,N
C TEST IF PIVOT ELEMENT IS ZERO. IF SO, SWITCH ROWS.
        IF (A(I-1,I-1)) 1,2,J
2 IM1 = I - 1
        DO 21 M = 1,N
          IF (A(M,IM1)) 3,21,3
3 DO 22 MM = IM1,NP1
          SAVE = A(M,MM)
          A(M,MM) = A(IM1,MM)
22 A(IM1,MM) = SAVE
21 CONTINUE
        WRITE(5,199)
1 R = A(J,I-1) / A(I-1,I-1)
      DO 20 K = 1,NP1
20 A(J,K) = A(J,K) - R * A(I-1,K)

```

```

C BACK SUBSTITUTE BY ELIMINATION OF COEFFICIENTS ABOVE DIAGONAL
DO 30 I = 2,N
  K = N - I + 2
  R = A(K,NP1) / A(K,K)
  DO 30 J = I,N
    L = N - J + 1
    30 A(L,NP1) = A(L,NP1) - R * A(L,K)
C SOLUTION IS COLUMN OF CONSTANTS DIVIDED BY CORR DIAG COEFF
DO 40 I = 1,N
  T = A(I,NP1) / A(I,I)
  40 WRITE(5,20)I,T
  STOP
100 FORMAT (I2)
101 FORMAT (8F10.0)
199 FORMAT (72H COEFFICIENT MATRIX IS SINGULAR. NO UNIQUE SOLUTION TO SET OF
1 EQUATIONS.)
200 FORMAT (/, 20H SOLUTION TO SET OF ,13,
1 34H EQUATIONS BY GAUSSIAN ELIMINATION //)
201 FORMAT (3H T( ,12, 4H) = ,E14.8)
END

```

```

C -- DATA
03
-4.0      1.0      0.0      -400.0
1.0      -4.0      1.0      -400
0.0      1.0      -4.0      -1360.0

```

```

C -- END OF DATA

```

```

C -- OUTPUT

```

```

SOLUTION TO SET OF 3 EQUATIONS BY GAUSSIAN ELIMINATION

```

```

T( 1) = 0.16000000E 03
T( 2) = 0.24000000E 03
T( 3) = 0.40000000E 03

```

```

C MAIN
C-----PROGRAM 2-2 OF CHAPTER 7
C TRIDIAGONAL SYSTEM GAUSS ELIMINATION
C PROGRAM TO SOLVE TRIDIAGONAL SYSTEM BY ELIMINATION.
C COEFFICIENTS COMPRESSED INTO AN N BY 4 ARRAY.
C PROGRAM WILL HANDLE UP TO 500 EQUATIONS. D = DIAGONAL ELEMENTS.
C A = ABOVE DIAGONAL, B = BELOW DIAGONAL, C = CONSTANT VECTOR.
C SOLUTION APPEARS IN THE VECTOR C.
      DIMENSION A(500), D(500), B(500), C(500)
C READ IN NUMBER OF EQUATIONS, N, AND COEFFICIENTS.
C THE THREE COEFFICIENTS PLUS THE CONSTANT TERM OF EACH EQUATION ARE ON ONE CARD.
      READ(2,100)N,(B(I),D(I),A(I),C(I),I=1,N)
C PRINT HEADING
      WRITE(5,200)N
C COMPUTE THE NEW MATRIX. SOLUTION WILL BE STORED IN C ARRAY.
      DO 10 I = 2,N
        R = B(I)/D(I-1)
        D(I) = D(I) - R*A(I-1)
        10 C(I) = C(I) - R*C(I-1)
C BACK SUBSTITUTION
        C(N) = C(N)/D(N)
        DO 20 I = 2,N
          J = N - I + 1
          20 C(J) = (C(J) - A(J)*C(J+1))/D(J)

```

```

C PRINT OUT VALUES OF VARIABLES
  WRITE(5,201)X(C(I),I=1,N)
  STOP
100 FORMAT (13 / (4F10.0))
200 FORMAT (/ 34H SOLUTION TO TRIDIAGONAL SYSTEM OF ,14, 26H EQUATIONS BY
1 ELIMINATION //)
201 FORMAT (3H T( ,13, 4H) = , E14.7)
END

```

C-- DATA

0.0	4.0	-1.0	0.5
-1.0	4.0	-1.0	1.5
-1.0	4.0	-1.0	2.5
-1.0	4.0	-1.0	3.5
-2.0	4.0	0.0	4.5

C-- END OF DATA

C-- OUTPUT

SOLUTION TO TRIDIAGONAL SYSTEM OF 5 EQUATIONS BY ELIMINATION

```

T(1) = 0.3156077E 00
T(2) = 0.7624309E 00
T(3) = 0.1234116E 01
T(4) = 0.1674033E 01
T(5) = 0.1962017E 01

```

第七章, 程序3.1

```

C MAIN
C --- PROGRAM 3-1 OF CHAPTER 7
C LINEAR EQUATIONS GAUSS-SEIDEL ITERATION
C PROGRAM TO SOLVE A SET OF LINEAR EQUATIONS BY GAUSS-SEIDEL ITERATION.
C PROGRAM HANDLES UP TO 30 EQUATIONS GIVEN IN DOM DIAG FORM TO ENSURE
C CONVERGENCE.
C DIMENSION A(20,21), T(30)
C READ IN NO OF EQ, N, LIMIT TO ITERATIONS, ITMAX, TOLERANCE, TOL.
C READ(2,100)N,ITMAX,TOL
C READ COEFFICIENTS. PUNCH 8 PER CARD, BEGIN EACH EQ ON A NEW CARD
C   NP1 = N + 1
C   DO 10 I = 1,N
C     READ(2,101)(A(I,J),J=1,NP1)
C   READ IN APPROX SOLUTION FOR T, PUNCHED 8 PER CARD.
C   READ(2,101) (T(I),I=1,N)
C   PRINT HEADING.
C   WRITE(5,200)
C   PERFORM ITERATIONS. STORE MAXIMUM CHANGE IN T VALUES FOR TESTING.
C   DO 30 I = 1,ITMAX
C     DIFF = 0.0
C     DO 20 J = 1,N
C       SAVE = T(J)
C       T(J) = A(J,NP1)
C     DO 21 K = 1,N
C       IF (J - K) 22,21,22
C     22 T(J) = T(J) - A(J,K)*T(K)
C     21 CONTINUE
C     T(J) = T(J) / A(J,J)
C     IF (DIFF - ABS (T(J) - SAVE)) 23,20,20
C     23 DIFF = ABS (T(J) - SAVE)
C     20 CONTINUE

```



```

C -- INTERMEDIATE WRITES
      WRITE(5,202)I
      WRITE(5,203) (J,T(J),J=1,N)
      IF (TOL - DIFF) 30,40,40
30 CONTINUE
      TOLERANCE WAS NOT MET. PRINT NOTE AND LAST VALUES.
      WRITE(5,201)TOL,ITMAX
      GO TO 50
40 WRITE(5,202)I
50 WRITE(5,203) (J,T(J),J=1,N)
      STOP
100 FORMAT (2I3, E14.0)
101 FORMAT (8F10.0)
200 FORMAT (/50H SOLUTION TO SET OF LINEAR EQUATIONS BY ITERATION //)
201 FORMAT(14H TOLERANCE OF , E8.0, 15H NOT MET AFTER ,14, 12H ITERATIONS. / 29H LAST
      1 VALUES CALCULATED WERE //)
202 FORMAT (16H0T VALUES, AFTER, 14, 17H ITERATIONS, ARE //)
203 FORMAT (3H T( , I3, 4H) = , E14.7)
      END

```

```

C -- DATA
003050      1.E-7
8.0      1.0      -1.0      8.0
1.0      -7.0      2.0      -4.0
2.0      1.0      9.0      12.0

```

C -- END OF DATA

C -- OUTPUT

SOLUTION TO SET OF LINEAR EQUATIONS BY ITERATION

T VALUES, AFTER 1 ITERATIONS, ARE

$T(1) = 0.100000E 01$
 $T(2) = 0.714285E 00$
 $T(3) = 0.103174E 01$

T VALUES, AFTER 2 ITERATIONS, ARE

$T(1) = 0.103968E 01$
 $T(2) = 0.101473E 01$
 $T(3) = 0.989544E 00$

T VALUES, AFTER 3 ITERATIONS, ARE

$T(1) = 0.996850E 00$
 $T(2) = 0.996562E 00$
 $T(3) = 0.100108E 01$

T VALUES, AFTER 4 ITERATIONS, ARE

$T(1) = 0.100056E 01$
 $T(2) = 0.100390E 01$
 $T(3) = 0.999831E 00$

T VALUES, AFTER 5 ITERATIONS, ARE

$T(1) = 0.999930E 00$
 $T(2) = 0.999941E 00$
 $T(3) = 0.100002E 01$

T VALUES, AFTER 6 ITERATIONS, ARE

$T(1) = 0.100010E\ 01$
 $T(2) = 0.100008E\ 01$
 $T(3) = 0.999996E\ 00$

T VALUES, AFTER 7 ITERATIONS, ARE

$T(1) = 0.9999987E\ 00$
 $T(2) = 0.9999989E\ 00$
 $T(3) = 0.100000E\ 01$

T VALUES, AFTER 8 ITERATIONS, ARE

$T(1) = 0.1000000E\ 01$
 $T(2) = 0.1000000E\ 01$
 $T(3) = 0.999999E\ 00$

T VALUES, AFTER 9 ITERATIONS, ARE

$T(1) = 0.1000000E\ 01$
 $T(2) = 0.1000000E\ 01$
 $T(3) = 0.1000000E\ 01$

T VALUES, AFTER 10 ITERATIONS, ARE

$T(1) = 0.1000000E\ 01$
 $T(2) = 0.1000000E\ 01$
 $T(3) = 0.1000000E\ 01$

```

C MAIN
C-----PROGRAM 4-1 OF CHAPTER 7
C POISSON EQUATION LIMITED STORAGE GAUSS-SEIDEL
C OVER-RELAXATION
C PROGRAM FOR SOLVING POISSON EQUATION, COND★DEL SQ T + H = 0 BY G-S SOR METHOD
C DIMENSION T(20,20)
C READ IN PARAMETERS, PUNCH HEADING.
  READ(2,99) NWIDE, NHIGH, COND, TOL, H, DELX
  XK = H/COND
  ALPHA = 0.5 - 3.14159/2.8284★SQRT(1./NWIDE★★2 + 1./NHIGH★★2)
  WRITE(5,100) XK, ALPHA
  NWPI = NWIDE + 1
  NHPI = NHIGH + 1
C BOUNDARY VALUES
  DO 10 I = 1, NHPI, NHIGH
    10 READ(2,101) (T(I,J), J = 1, NWPI)
    DO 11 J = 1, NWPI, NWIDE
      11 READ(2,101) (T(I,J), I = 2, NHIGH)
C INITIALIZE INTERIOR POINTS
  DO 12 I = 2, NHIGH
    DO 12 J = 2, NWIDE
      12 T(I,J) = 0.0

```

```

C COMPUTE VALUES BY G-S SOR METHOD. END WHEN MAX CHANGE IS LESS THAN THE
TOLERANCE.
DO 14 K = 1,50
DEVMS = 0.0
DO 13 I = 2,NHIGH
DO 13 J = 2,NWIDE
SAVE = T(I,J)
T(I,J) = ALPHA*(T(I+1,J) + T(I-1,J) + T(I,J+1) + T(I,J-1)) + XK*DELX**2 - (4. -
1./ALPHA)*T(I,J)
DEV = ABS(T(I,J) - SAVE)
IF (DEV - DEVMS) 13,13,15
15 DEVMS = DEV
13 CONTINUE
IF (TOL - DEVMS) 14,16,16
14 CONTINUE
WRITE(5,102)
GO TO 17
16 WRITE(5,104) K
17 DO 30 I = 1,NHPI
30 WRITE(5,103) I, (T(I,J), J=1,NWPD)
C HEAT FLOW BY CONDUCTING ROD ANALOGY.
TOTAL = 0.
DO 40 I = 2,NHIGH
40 TOTAL = T(I,2) - T(I,1) + TOTAL
DO 50 I = 2,NHIGH
50 TOTAL = TOTAL + T(I,NWIDE) - T(I,NWPI)
DO 60 J = 2,NWIDE
60 TOTAL = TOTAL + T(2,J) - T(1,J)
DO 70 J = 2,NWIDE
70 TOTAL = TOTAL + T(NHIGH,J) - T(NHPI,J)
TOTAL = TOTAL*COND
WRITE(5,105) TOTAL

```

C INTERNAL HEAT GENERATION.
 VOL = NWRITE★NHIGH★DELX★2★1.
 Q = VOL★H
 WRITE(5,106) Q
 STOP
 99 FORMAT(2I2/5F10.3)
 100 FORMAT(7H SOLUTION TO POISSON EQTN - COND★ DEL SQ T + H =0 - BY G-S SOR
 1 METHOD./ 13H FOR H/COND =,F8.1,29H, USING RELAXATION FACTOR OF, F5.3)
 101 FORMAT (8F10.0)
 102 FORMAT (/51H TOLERANCE TO END COMPUTATION NOT MET IN 50 CYCLES./32H LAST
 1 ROUND OF CALCULATIONS IS -)
 103 FORMAT (4H0ROW, 12/(1H, 16F7.3))
 104 FORMAT (/ 13, 21H ITERATIONS WERE USED)
 105 FORMAT(/39H HEAT FLOW BY CONDUCTING ROD ANALOGY = ,F10.3,7H WATTS.)
 106 FORMAT(28H INTERNAL HEAT GENERATION = ,F10.3,7H WATTS.)
 END

C -- DATA

0816
 40,000 0.001 800000.000 0.005
 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0.
 0. 0. 0. 0. 0.

C -- END OF DATA

C -- OUTPUT

SOLUTION TO POISSON EQTN— COND★ DEL SQ T + H = 0— BY G-S SOR METHOD.
 FOR H/COND = 20000.0, USING RELAXATION FACTOR OF 0.345

31 ITERATIONS WERE USED

ROW 1	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
ROW 2	0.000	0.620	0.982	1.176	1.238	1.177	0.982	0.620	0.000
ROW 3	0.000	0.998	1.632	1.986	2.100	1.986	1.633	0.998	0.000
ROW 4	0.000	1.240	2.064	2.536	2.689	2.536	2.065	1.240	0.000
ROW 5	0.000	1.397	2.350	2.904	3.086	2.905	2.351	1.398	0.000
ROW 6	0.000	1.498	2.536	3.146	3.347	3.146	2.538	1.499	0.000
ROW 7	0.000	1.561	2.652	3.296	3.509	3.297	2.653	1.562	0.000
ROW 8	0.000	1.596	2.715	3.379	3.598	3.379	2.716	1.597	0.000

ROW 9	0.000	1.607	2.735	3.405	3.627	3.405	2.736	1.607	0.000
ROW 10	0.000	1.596	2.716	3.379	3.599	3.380	2.717	1.597	0.000
ROW 11	0.000	1.562	2.653	3.298	3.511	3.298	2.654	1.563	0.000
ROW 12	0.000	1.499	2.538	3.148	3.349	3.148	2.539	1.500	0.000
ROW 13	0.000	1.398	2.352	2.906	3.088	2.907	2.352	1.398	0.000
ROW 14	0.000	1.241	2.066	2.538	2.691	2.538	2.066	1.241	0.000
ROW 15	0.000	0.999	1.634	1.988	2.101	1.988	1.634	0.999	0.000
ROW 16	0.000	0.620	0.983	1.177	1.239	1.177	0.983	0.620	0.000
ROW 17	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000

HEAT FLOW BY CONDUCTING ROD ANALOGY = 2098.668 WATTS.

INTERNAL HEAT GENERATION = 2560.000 WATTS.

第七章，程序5.1

```

C MAIN
C-----PROGRAM 5-1 OF CHAPTER 7
C PARABOLIC EXPLICIT DIRICHLET
C PROGRAM TO COMPUTE THE TEMPERATURE DISTRIBUTION AS A FUNCTION OF TIME IN A ONE
C DIMENSIONAL HEAT FLOW SYSTEM WITH CONSTANT END CONDITIONS, USING THE EXPLICIT
C METHOD.
C DIMENSION T(2,50)
C READ IN SYSTEM PARAMETERS. EL = TOTAL LENGTH, COND = THERMAL CONDUCTIVITY, SPHT
C = SPECIFIC HEAT, DENS = DENSITY, DELX = DISTANCE INTERVAL.
C ALL MUST BE IN CONSISTENT UNITS.
C ALSO READ FOURIER NUMBER = (COND*DTIME)/(SPHT*DENS*DELX**2), AND FINAL TIME
C TO WHICH COMPUTATIONS WILL CONTINUE.
C READ(2,100) EL, COND, SPHT, DENS, DELX, FO, FINAL
C READ IN INITIAL TEMPERATURES AFTER FIRST COMPUTING NUMBER OF T VALUES IN THE
C ARRAY.
C NUMB = EL/DELX + 1.
C READ(2,100)(T(1,I), I = 1, NUMB)
C READ IN BOUNDARY TEMPERATURES.
C READ(2,100) TLHE, TRHE
C T(1,1) = (TLHE + T(1,1))/2.
C T(1,NUMB) = (TRHE + T(1,NUMB))/2.
C PRINT HEADING AND INITIAL TEMPERATURES.
C TIME = 0.
C WRITE(5,200) DELX
C WRITE(5,201) TIME, (T(1,I), I = 1, NUMB)

```

```

C COMPUTE SET OF TEMPERATURES AFTER ONE DTIME INTERVAL
  DTIME = FO*SPHT*DENST*(DELX**2)/COND
  NMI = NUMB - 1
  TIME = TIME + DTIME
  DO 10 I = 2,NMI
    10 T(2,I) = (1.-2.*FO)*T(1,I) + FO*(T(1,I+1) + T(1,I-1))
    T(1,I) = TLHE
    T(1,NUMB) = TRHE
    GO TO 15
  5 TIME = TIME + DTIME
  DO 11 I = 2,NMI
    11 T(2,I) = (1.-2.*FO)*T(1,I) + FO*(T(1,I+1) + T(1,I-1))
  15 CONTINUE
C SET NEW TEMPERATURES INTO OLD ARRAY AND PRINT.
  DO 20 I = 2,NMI
    20 T(1,I) = T(2,I)
  WRITE(5,20) TIME, (T(1,I), I=1, NUMB)
  IF (TIME - FINAL) 5,30,30
  30 CONTINUE
  STOP
100 FORMAT(8F10.3)
200 FORMAT (1H1, 30X, 60H UNSTEADY STATE TEMPERATURE DISTRIBUTION BY EXPLICIT
  1 METHOD /31X, 40H TEMPERATURES ARE GIVEN AT SPACING OF F6.3, 10H M. APART )
201 FORMAT (1H0, 11H AT TIME = F10.3, 8H SECONDS / (1H , 10F10.3))
  END

C -- DATA
      0.100      0.210      0.920      2700.000      0.02      0.25      100.0
    20.000      20.000      20.000      20.000      20.000      20.000
      0.000      100.000

C -- END OF DATA

C -- OUTPUT

```

UNSTEADY STATE TEMPERATURE DISTRIBUTION BY EXPLICIT METHOD
TEMPERATURES ARE GIVEN AT SPACING OF 0.020 M. APART

AT TIME = 0.000 SECONDS				
10.000	20.000	20.000	20.000	60.000
AT TIME = 1.183 SECONDS				
0.000	17.500	20.000	20.000	100.000
AT TIME = 2.366 SECONDS				
0.000	13.750	19.375	22.500	100.000
AT TIME = 3.549 SECONDS				
0.000	11.719	18.750	27.344	100.000
AT TIME = 4.731 SECONDS				
0.000	10.547	19.141	31.641	100.000
AT TIME = 5.914 SECONDS				
0.000	10.059	20.117	35.205	100.000
AT TIME = 7.097 SECONDS				
0.000	10.059	21.375	38.159	100.000
AT TIME = 8.280 SECONDS				
0.000	10.373	22.742	40.637	100.000
AT TIME = 30.754 SECONDS				
0.000	18.319	37.280	57.279	100.000

AT TIME = 31.937 SECONDS				
0.000	18.479	37.539	78.479	100.000
AT TIME = 33.120 SECONDS				
0.000	18.625	37.774	78.624	100.000
AT TIME = 34.303 SECONDS				
0.000	18.756	37.987	78.756	100.000
AT TIME = 36.994 SECONDS				
0.000	19.994	39.990	79.994	100.000
AT TIME = 38.177 SECONDS				
0.000	19.994	39.991	79.994	100.000
AT TIME = 39.360 SECONDS				
0.000	19.995	39.992	79.995	100.000
AT TIME = 100.543 SECONDS				
0.000	19.995	39.993	79.995	100.000

第七章, 程序5.2

```

C MAIN
C-----PROGRAM 5-2 OF CHAPTER 7
C PARABOLIC CRANK-NICOLSON NEUMANN
C THIS PROGRAM DETERMINES TEMPERATURES AS A FUNCTION OF TIME IN A ONE-DIMENSIONAL
C SYSTEM LOSING HEAT FROM BOTH ENDS ACCORDING TO
C  $D^2T/DX^2 = COEFF \star (T - TAMB)$ 
C WHERE  $COEFF = (HEAT\ TRANSFER\ COEFFICIENT / SOLID\ CONDUCTIVITY)$  AND TAMB IS THE
C CONSTANT AMBIENT TEMPERATURE.
C A SUBROUTINE IS EMPLOYED TO SOLVE THE SET OF EQUATIONS WHICH RESULT FROM
C APPLYING THE CRANK-NICOLSON METHOD.
C THE TEMPERATURES ARE OUTPUT ABOUT EVERY 100 SECONDS UNTIL THE MIDPOINT
C TEMPERATURE DROPS TO APPROXIMATELY 60 DEGREES CENTIGRADE.
C DIMENSION T(50,4), TINIT(50)
C READ(2,100) SPHT, DENS, COND, HCoeff, TAMB, EL, FO, NOINT
C READ INITIAL VALUES OF TEMPERATURES IN MATERIAL
C N = NOINT + 1
C READ(2,101) (TINIT(I), I = 1, N)
C COMPUTE INITIAL VALUES OF DELTA X, AND DELTA TIME
C TIME = 0.
C TIMEP = 100.
C XINT = NOINT
C DELX = EL/XINT
C DTIME = FO * DENS * SPHT * DELX * *2 / COND
C WRITE(5,199)
C WRITE(5,200) TIME, (TINIT(I), I = 1, N)

```

```

C GET COEFFICIENTS OF SYSTEM
  COEFF = HCOEFF/COND
21 T(1,1) = 0.
  T(1,2) = -4. - 2. * COEFF * DELX
  T(1,3) = 2.
  T(N,1) = 2.
  T(N,2) = T(1,2)
  T(N,3) = 0.
  DO 20 I = 2, NOINT
    T(I,1) = 1.
    T(I,2) = -4.
    T(I,3) = 1.
20 T(I,4) = -2. * TINIT(2) + 2. * COEFF * DELX * TINIT(I) - 4. * COEFF * DELX * TAMB
  T(N,4) = -2. * TINIT(N-1) + 2. * COEFF * DELX * TINIT(N) - 4. * COEFF * DELX * TAMB
  DO 30 I = 2, NOINT
30 T(I,4) = -TINIT(I-1) - TINIT(I+1)
C COMPUTES VALUES. PRINT OUT ABOUT EVERY 100 SECONDS.
  TIME = TIME + DTIME
  CALL TRDG (T,N)
C PUT NEW VALUES INTO TINIT AND SEE IF TIME TO PRINT OUT.
  DO 40 I = 1, N
40 TINIT(I) = T(I,4)
  IF (TIME - TIMEP) 21, 22, 22
22 WRITE(5,200) TIME, (T(I,4), I=1, N)
  TIMEP = TIMEP + 100.
  IF (TINIT(1) - 60.) 23, 21, 21
23 CONTINUE
  STOP
100 FORMAT(7F9.2,15)
101 FORMAT(8F10.2)
199 FORMAT(/57H SOLUTION TO HEAT FLOW PROBLEM BY CRANK-NICOLSON METHOD//)
200 FORMAT (/5H T = F6.1, 8H SECONDS / (1H 10F8.2))
  END

```

SUBROUTINE TRDG (X,N)
 C THIS SUBROUTINE SOLVES A TRIDIAGONAL SYSTEM OF EQ BY DIRECT GAUSS ELIMINATION.
 C LIKE PROGRAM 2.2 OF CHAPTER 7

DIMENSION X(50,4),A(50),B(50),C(50),D(50)

DO 30 I = 1,N

B(I) = X(I,1)

D(I) = X(I,2)

A(I) = X(I,3)

30 C(I) = X(I,4)

DO 10 I = 2,N

R = B(I)/D(I-1)

B(I) = D(I) - R*A(I-1)

10 C(I) = C(I) - R*C(I-1)

C BACK SUBSTITUTION,

C(N) = C(N)/D(N)

DO 20 I = 2,N

J = N - I + 1

20 C(I) = (C(I) - A(I)*C(J+1))/D(I)

DO 40 I = 1,N

40 X(I,4) = C(I)

RETURN

END

C -- DATA

495.00	8892.00	400.00	1600.00	20.00	1.00	1.00	20
50.00	52.50	55.00	57.50	60.00	62.50	65.00	
70.00	72.50	75.00	77.50	80.00	82.50	85.00	
90.00	92.50	95.00	97.50	100.00			

C -- END OF DATA

C -- OUTPUT

