前　言

“数学物理方法”是物理类专业的重要基础课程，它不仅为后继课程研究有关的数学物理问题作准备，也为实际工作中遇到的数学物理问题的求解提供基础。为了掌握这门课程中解决问题的方法，在学习过程中解算一定数量的习题是至关紧要的。

斯颂乐、徐世良、高永椿、张宫南、张立志等同志将我编写的《数学物理方法》（第二版）的习题一一解答出来，有的习题还有几种解法，以资比较，并对整个题解进行了反复的修订。我认为这样一份题解可以起如下几方面的作用：

担任这门课程的老师，在给学生布置习题作业之前，需要先解算大量的习题，然后从中挑选适当的习题布置给学生，而《数学物理方法》习题的解算往往是很费时间的。《题解》可以节约任课老师挑选习题的时间，让他们把精力用于更好地提高教学质量。

学习这门课程的大学生或自修这门课程的读者，在独立思考和独立解算基础上，可以与《题解》进行比较，以总结自己解法的优缺点。如果某些习题虽经反复思考犹有困难，那么，从《题解》可以找出困难的症结所在，这就前进了一步。但是，这里需要强调的是独立思考，切切不可依赖《题解》，依赖《题解》对于学习是有害无益的。

实际工作者遇到有关数学物理问题时也可能从《题解》中取得某些借鉴。

原书由于编写时间十分仓促，习题答案有某些不妥之处，

解题时已作了订正。

在《数学物理方法习题解答》行将出版之际，天津科学技术出版社的编辑同志要我写个简短的前言，我就把上面的想法写了出来，以就教于各方人士。

梁昆淼

一九八一年元月

内 容 提 要

本书对梁昆淼教授所编《数学物理方法》(第二版)中的全部习题作出了解答。内容分复变函数论、傅里叶级数和积分、数学物理方程三个部份，共十七章包括习题约四百条，有些习题列出了多种解法。

本书是配合综合大学、高等师范院校物理类各专业数学物理方法课程的教学用书，也可为工科院校有关专业的工程数学课程所选用，对于有关科学技术工作者也有一定的参考价值。

目　　录

第一篇　复变函数论

第二篇　傅里叶级数和积分

第三篇　数学物理方程

第一篇　复变函数论

第一章　复变函数

§1．复数与复数运算

1．下列式子在复数平面上各具有怎样的意义？

（1）$|z|\leqslant 2$．

解一：$|z|=|x+iy|=\sqrt{x^2+y^2}\leqslant 2$，

或　$x^2+y^2\leqslant 4$．

这是以原点为圆心而半径为2的圆及其内部．

解二：按照模的几何意义，$|z|$是复数$z=x+iy$与原点间的距离．若此距离总是$\leqslant 2$，则即表示以原点为圆心而半径为2的圆及其内部．

（2）$|z-a|=|z-b|$（a、b为复常数）．

解一：设$z=x+iy$，$a=a_1+ia_2$，$b=b_1+ib_2$；

$$|z-a|=\sqrt{(x-a_1)^2+(y-a_2)^2}，$$

$$|z-b|=\sqrt{(x-b_1)^2+(y-b_2)^2}，$$

于是

$$(x-a_1)^2+(y-a_2)^2=(x-b_1)^2+(y-b_2)^2，$$

即　$(2y-a_2-b_2)(b_2-a_2)=(2x-a_1-b_1)(a_1-b_1)$

亦即

$$\frac{y-\frac{a_2+b_2}{2}}{x-\frac{a_1+b_1}{2}}=\frac{a_1-b_1}{b_2-a_2}.$$

这是一条直线.是一条过点 a 和点 b 连线的中点$\left(\frac{a_1+b_1}{2},\frac{a_2+b_2}{2}\right)$且与该连线垂直的直线.

解二：等式的几何意义是，点 z 到定点 a 和点 b 的距离相等的各点的轨迹，即表示点 a 和点 b 的连线的垂直平分线.

（3）$\mathrm{Re}z>\frac{1}{2}$.

解：设 $z=x+iy$，则$\mathrm{Re}z=x$，故原式为$x>\frac{1}{2}$，它表示 $x>\frac{1}{2}$的半平面，即直线$x=\frac{1}{2}$右边的区域（不包括该直线）.

（4）$|z|+\mathrm{Re}z\leqslant 1$.

解：设 $z=x+iy$，则原式即$x^2+y^2\leqslant(1-x)^2$，亦即 $y^2\leqslant 1-2x$，它表示抛物线$y^2=1-2x$及其内部.

（5）$\alpha<\arg z<\beta, a<\mathrm{Re}z<b$（$\alpha$、$\beta$、$a$ 和 b 为实常数）.

解：注意到$\arg z=\varphi$，$\mathrm{Re}z=x$，则原二式

即
$$\begin{cases}\alpha<\varphi<\beta,\\ a<x<b.\end{cases}$$

为两直线$x=a$、$x=b$和两射线$\varphi=\alpha$、$\varphi=\beta$所围成的区域（不包括边界）.

（6）$0<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{\pi}{4}$.

解：因为$\frac{z-i}{z+i}=\frac{x+i(y-1)}{x+i(y+1)}$

$$=\frac{[x+i(y-1)][x-i(y+1)]}{[x+i(y+1)][x-i(y+1)]}$$

$$=\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}+i\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}$$

$$\equiv X+iY=Z.$$

所以，原式即 $0<\arg z<\frac{\pi}{4}$.如以X轴为实轴，Y轴为虚轴，上式在复平面Z上表示由射线 $\Phi=0$ 和$\Phi=\frac{\pi}{4}$所围成的区域（不包括射线本身），这就意味着要求$X>0$和$Y>0$，

即要求 $\frac{x^2+y^2-1}{x^2+(y+1)^2}>0$ 和 $\frac{-2x}{x^2+(y+1)^2}>0$,

亦即

$$\begin{cases} x<0, \\ x^2+y^2-1>0. \end{cases} \tag{1}$$

又由$0<\arg Z<\frac{\pi}{4}$得 $0<\operatorname{arctg}(Y/X)<\frac{\pi}{4}$，即

$$0<\operatorname{arctg}\left(\frac{-2x}{x^2+y^2-1}\right)<\frac{\pi}{4},$$

亦即 $0<\frac{-2x}{x^2+y^2-1}<1$，注意到（1）式，

则

$$\begin{cases} -2x>0, \\ -2x<x^2+y^2-1. \end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases} x<0, \\ x^2+y^2+2x-1>0. \end{cases} \tag{2}$$

在$x<0$的条件下，凡满足$x^2+y^2+2x-1>0$的点必定也满足$x^2+y^2-1>0$.所以，（1）式无需单独提出，而（2）式表示复平面上的左半平面$x<0$,但除去圆周$(x+1)^2+y^2=2$及其内部（图1-1）.

注意：应排除

$$\begin{cases} x>0, \\ x^2+y^2-1<0; \end{cases}$$

及$(x+1)^2+y^2<2$

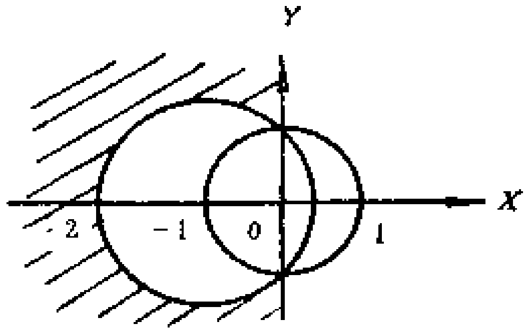


图 1-1

（这相当于$X<0$，$Y<0$；即$\pi<\Phi<\frac{5}{4}\pi$，$\pi<\arg\frac{z-i}{z+i}<\frac{5}{4}\pi$）这个解。

（7）$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|\leqslant 1$.

解：$\left|\frac{z-1}{z+1}\right|=\left|\frac{(x-1)+iy}{(x+1)+iy}\right|$

$$=\frac{\sqrt{(x-1)^2+y^2}}{\sqrt{(x+1)^2+y^2}}\leqslant 1,$$

即 $\qquad (x-1)^2+y^2\leqslant(x+1)^2+y^2$.

亦即$0\leqslant x$，这表示连同Y轴在内的右半平面。

（8）$\mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=2$.

解：$\frac{1}{z}=\frac{1}{x+iy}=\frac{x-iy}{x^2+y^2}$,

故 $\qquad \mathrm{Re}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{x}{x^2+y^2}=2$, $2x^2+2y^2=x$,

即 $\qquad \left(x-\frac{1}{4}\right)^2+y^2=\frac{1}{16}$.

这是中心在$\left(\frac{1}{4},\ 0\right)$而半径为$\frac{1}{4}$的圆周。

（9）$\mathrm{Re}z^2=a^2$（a是实常数）.

解：$z^2=(x+iy)^2=(x^2-y^2)+i\cdot 2xy$,

故$\mathrm{Re}z^2=x^2-y^2$，则原式即为

$$x^2-y^2=a^2.$$

此轨迹为双曲线$x^2-y^2=a^2$。

(10) $|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2=2|z_1|^2+2|z_2|^2$.

解：这是一个恒等式，对于复平面上任意的z_1和z_2都成立，因为

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2+|z_1-z_2|^2&=(x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\\&\quad+(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2\\&=2x_1^2+2x_2^2+2y_1^2+2y_2^2\\&=2|z_1|^2+2|z_2|^2.\end{aligned}$$

它表示平行四边形对角线的平方和等于两邻边平方和的两倍.

此外，如把z_1和z_2表示成复平面上的矢量，那么z_1和z_2的加减运算与相应的矢量的加减运算（平行四边形法则）是相同的，这可由图1-2清楚地看出.

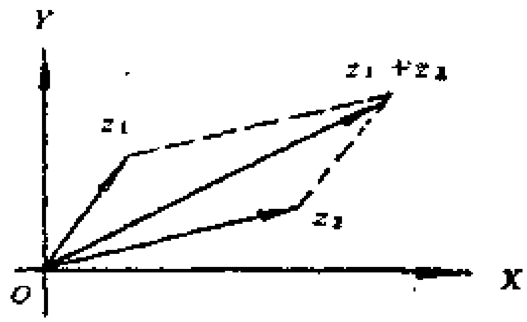


图 1-2

2.把下列复数用代数式、三角式和指数式几种形式表示出来.

(1) i.

解：i本身即为代数式，此时在$z=x+iy$中，$x=0$、$y=1$；

三角式：$\rho=\sqrt{x^2+y^2}=1$，

$$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)=\operatorname{argtg}\left(\frac{1}{0}\right)=\frac{\pi}{2},$$

所以 $z=i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$；

指数式：$z=i=e^{i\frac{\pi}{2}}$.

（2） -1.

解：-1 本身即为代数式；

三角式：$z=\cos\pi+i\sin\pi$；

指数式：$z=e^{i\pi}$.

（3） $1+i\sqrt{3}$.

解：$z=1+i\sqrt{3}$ 本身即为代数式；

三角式：$\rho=\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=2$，$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{3}}{1}=\frac{\pi}{3}$，

所以
$$z=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right);$$

指数式：$z=2e^{i\frac{\pi}{3}}$.

（4） $1-\cos\alpha+i\sin\alpha$ （α是实常数）.

解：$z=(1-\cos\alpha)+i\sin\alpha$ 本身即为代数式；

三角式：$\rho=\sqrt{(1-\cos\alpha)^2+\sin^2\alpha}=\sqrt{2(1-\cos\alpha)}$

$$=2\sin\frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi=\operatorname{arctg}\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\quad \operatorname{tg}\varphi=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha}=\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2},$$

$$\varphi=\left(n+\frac{1}{2}\right)\pi-\frac{\alpha}{2},$$

在主值范围内 $\varphi=\frac{1}{2}(\pi-\alpha)$ $(0\leqslant\alpha\leqslant\pi)$，所以

$$z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\cos\left(\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right.$$

$$\left.+i\sin\left(\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}\right)\right],$$

或 $$z=2\sin\frac{\alpha}{2}\left(\cos\frac{\pi-\alpha}{2}+i\sin\frac{\pi-\alpha}{2}\right)$$

$$(0\leqslant\alpha\leqslant\pi);$$

指数式：$z=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\operatorname{arctg}\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}}$，

或 $$z=2\sin\frac{\alpha}{2}e^{i\left(\frac{\pi-\alpha}{2}\right)}.$$

（5）z^3。

解：代数式：$z^3=(x+iy)^3=(x^3-3xy^2)+i(3x^2y-y^3)$

三角式：$z^3=\rho^3(\cos3\varphi+i\sin3\varphi)$，

其中 $\rho=\sqrt{x^2+y^2}$，$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$；

指数式：$z^3=\rho^3e^{i3\varphi}$。

（6）e^{1+i}。

解：指数式即为 $z=e^{1+i}=e\cdot e^i$，显然，其中 $\rho=e$，$\varphi=1$；

三角式：$z=e(\cos1+i\sin1)$；

代数式：$z=e\cos1+ie\sin1$。

（7）$\frac{1-i}{1+i}$。

解：代数式：$z=\frac{1-i}{1+i}=\frac{1}{2}(1-i)^2=-i$。

三角式：因 $\rho=1$，$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\frac{-1}{0}\right)=\frac{3}{2}\pi$，所以

$$z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2};$$

指数式：$z=e^{i\frac{3\pi}{2}}$。

3.计算下列数值（a、b和φ为实常数）。

（1） $\sqrt{a+ib}$.

解：先化$a+ib$为三角式

$$a+ib=\sqrt{a^2+b^2}\ (\cos\varphi+i\sin\varphi)\ ,$$

其中 $\cos\varphi=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\varphi=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$，于是

$$\begin{aligned}\sqrt{a+ib}&=\sqrt[4]{a^2+b^2}\left(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}\right)\\&=\sqrt[4]{a^2+b^2}\left[\sqrt{\frac{1}{2}(1+\cos\varphi)}\right.\\&\qquad\left.+\ i\sqrt{\frac{1}{2}(1-\cos\varphi)}\ \right]\\&=\sqrt[4]{a^2+b^2}\left[\sqrt{\frac{1}{2}\left(1+\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}\right.\\&\qquad\left.+\ i\sqrt{\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)}\right]\\&=\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}+a}\right.\\&\qquad\left.+\ i\sqrt{\sqrt{a^2+b^2}-a}\right).\end{aligned}$$

（2） $\sqrt[3]{i}$.

解：因 $i=1\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]$,

所以

$$\sqrt[3]{i}=\sqrt[3]{1}\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}n\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}n\pi\right)\right],$$

或 $$\sqrt[3]{i}=e^{i\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2}{3}n\pi\right)}\quad(n=0,1,2).$$

（3）i^i.

解：因 $i=e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}$，所以

$$i^i=\left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right]^i=e^{-\frac{\pi}{2}-2n\pi}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

（4）$\sqrt[i]{i}$.

解：仿上题，

$$\sqrt[i]{i}=\left[e^{i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)}\right]^{\frac{1}{i}}=e^{\frac{\pi}{2}+2n\pi}\quad(n=0,\pm1,\pm2,\cdots).$$

（5）$\cos5\varphi$.

（6）$\sin5\varphi$.

解：由乘幂的公式

$$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$$

及二项式定理

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b^2+\cdots,$$

$$+\frac{n!}{(n-k)!k!}a^{n-k}b^k+\cdots.$$

可知
$$\begin{aligned}\cos5\varphi+i\sin5\varphi&=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^5\\&=\cos^5\varphi+i5\cos^4\varphi\sin\varphi\\&\quad-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi\\&\quad-i10\cos^2\varphi\sin^3\varphi\\&\quad+5\cos\varphi\sin^4\varphi+i\sin^5\varphi.\end{aligned}$$

比较等式两边的实部和虚部得

$$\cos5\varphi=\cos^5\varphi-10\cos^3\varphi\sin^2\varphi+5\cos\varphi\sin^4\varphi,$$

$$\sin5\varphi=5\cos^4\varphi\sin\varphi-10\cos^2\varphi\sin^3\varphi+\sin^5\varphi.$$

（7）$\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$.

（8）$\sin\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$.

解一：从初等代数知道，n 项的等比级数 $x+x^2+\cdots+x^n$ 的和为 $x\dfrac{1-x^n}{1-x}$.

现在所求为

$$
\begin{aligned}
&\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi\\
&\quad+i(\sin\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi+\cdots+\sin n\varphi)\\
&=(\cos\varphi+i\sin\varphi)+(\cos2\varphi+i\sin2\varphi)+\cdots\\
&\quad+(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)\\
&=e^{i\varphi}+e^{2i\varphi}+\cdots+e^{ni\varphi}\\
&=e^{i\varphi}\frac{1-e^{in\varphi}}{1-e^{i\varphi}}\\
&=\frac{e^{i\varphi}(1-e^{-i\varphi})(1-e^{in\varphi})}{(1-e^{-i\varphi})(1-e^{i\varphi})}\\
&=\frac{(e^{i\varphi}-1)(1-e^{in\varphi})}{2-2\cos\varphi}\\
&=\frac{e^{i\varphi/2}(e^{i\varphi/2}-e^{-i\varphi/2})e^{in\varphi/2}(e^{-in\varphi/2}-e^{in\varphi/2})}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\\
&=\frac{e^{i\varphi/2}\left(2i\sin\frac{\varphi}{2}\right)e^{in\varphi/2}\left(-2i\sin\frac{n\varphi}{2}\right)}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\\
&=\frac{e^{i(n+1)\varphi/2}\sin\frac{n\varphi}{2}}{\sin\frac{\varphi}{2}}\\
&=\frac{\sin\frac{n\varphi}{2}\left(\cos\frac{n+1}{2}\varphi+i\sin\frac{n+1}{2}\varphi\right)}{\sin\frac{\varphi}{2}},
\end{aligned}
$$

比较等式两边的实部和虚部得

$$\cos\varphi+\cos2\varphi+\cos3\varphi+\cdots+\cos n\varphi$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\frac{(n+1)\varphi}{2}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi-\sin\frac{\varphi}{2}\right],$$

$$\sin\varphi+\sin2\varphi+\sin3\varphi+\cdots+\sin n\varphi$$

$$=\frac{1}{\sin\frac{\varphi}{2}}\sin\frac{n\varphi}{2}\sin\frac{(n+1)\varphi}{2}$$

$$=\frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\left[\cos\frac{\varphi}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\right].$$

解二： $$\cos\varphi+\cos2\varphi+\cdots+\cos n\varphi+i\sin\varphi+i\sin2\varphi+\cdots+i\sin n\varphi$$

$$=(\cos\varphi+i\sin\varphi)+(\cos2\varphi+i\sin2\varphi)+\cdots+(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)$$

$$=(\cos\varphi+i\sin\varphi)+(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2+\cdots+(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n$$

$$=\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)[1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n]}{1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)}$$

$$=\frac{(\cos\varphi+i\sin\varphi)[(1-\cos n\varphi)-i\sin n\varphi]\cdot[(1-\cos\varphi)+i\sin\varphi]}{[(1-\cos\varphi)-i\sin\varphi]\cdot[(1-\cos\varphi)+i\sin\varphi]}$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\left\{\left[4\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin\frac{n\varphi}{2}\cos\varphi\right.\right.$$

$$-2\sin^2\frac{n\varphi}{2}\sin^2\varphi$$

$$+ 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin\varphi\sin n\varphi + \sin\varphi\cos\varphi\sin n\varphi \Big]$$

$$+ i\Big[4\sin^2\frac{\varphi}{2}\sin^2\frac{n\varphi}{2}\sin\varphi$$

$$+ 2\sin^2\frac{n\varphi}{2}\sin\varphi\cos\varphi$$

$$- 2\sin^2\frac{\varphi}{2}\cos\varphi\sin n\varphi + \sin^2\varphi\sin n\varphi \Big]\Big\}$$

$$= \frac{1}{4\sin^2\frac{\varphi}{2}}\Big\{\Big[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \sin\frac{\varphi}{2}\Big]2\sin\frac{\varphi}{2}$$

$$+ i\Big[\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\Big]2\sin\frac{\varphi}{2}\Big\}$$

$$= \frac{1}{2\sin\frac{\varphi}{2}}\Big\{\Big[\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi - \sin\frac{\varphi}{2}\Big]$$

$$+ i\Big[\cos\frac{\varphi}{2} - \cos\left(n+\frac{1}{2}\right)\varphi\Big]\Big\},$$

比较等式两边的实部和虚部也得到解①中的答案.

§2. 复 变 函 数

1.试验证(2.11)—(2.14)几个式子.

(1) (2.11)式: $\sin(z+2\pi)=\sin z$, $\cos(z+2\pi)$

$= \cos z$.

验证: $$\sin(z+2\pi) = \frac{1}{2i}\Big[e^{i(z+2\pi)} - e^{-i(z+2\pi)}\Big]$$

$$= \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right) = \sin z,$$

$$\cos(z+2\pi)=\frac{1}{2}\left[e^{i(z+2\pi)}+e^{-i(z+2\pi)}\right]$$

$$=\frac{1}{2}(e^{iz}+e^{-iz})=\cos z.$$

由此可见，三角函数有实周期2π。

（2）(2.12)式：

$$|\sin z|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+(2\sin^2x-\cos^2x)}\ .$$

验证：因$\sin z=\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=-\frac{i}{2}[e^{i(x+iy)}$

$$-e^{-i(x+iy)}]$$

$$=-\frac{i}{2}(e^{-y}e^{ix}-e^{y}e^{-ix})$$

$$=-\frac{i}{2}[e^{-y}(\cos x+i\sin x)$$

$$-e^{-y}(\cos x-i\sin x)]$$

$$=\frac{1}{2}[(e^{y}+e^{-y})\sin x+i(e^{y}-e^{-y})\cos x],$$

所以 $|\sin z|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{y}+e^{-y})^2\sin^2x+(e^{y}-e^{-y})^2\cos^2x}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\sin^2x-\cos^2x)}\ .$$

（3）(2.13)式：

$$|\cos z|=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\cos^2x-\sin^2x)}\ .$$

验证一：其步骤全同于（2）.

验证二：由 $\cos z=\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)$再利用（2）的答案，

则 $|\cos z|=\left|\sin\left(\frac{\pi}{2}-z\right)\right|$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2\left[\sin^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)-\cos^2\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{(e^{2y}+e^{-2y})+2(\cos^2 x-\sin^2 x)}\text{.}$$

（4）(2.14)式：$e^{z+2\pi i}=e^z$，$\operatorname{sh}(z+2\pi i)=\operatorname{sh}z$，

$$\operatorname{ch}(z+2\pi i)=\operatorname{ch}z\text{.}$$

验证：$e^{z+2\pi i}=e^z\cdot e^{i2\pi}=e^z$，

$$\operatorname{sh}(z+2\pi i)=\frac{1}{2}[e^{z+2\pi i}-e^{-z-2\pi i}]$$

$$=\frac{1}{2}(e^z-e^{-z})=\operatorname{sh}z\text{，}$$

$$\operatorname{ch}(z+2\pi i)=\frac{1}{2}[e^{z+2\pi i}+e^{-z-2\pi i}]$$

$$=\frac{1}{2}(e^z+e^{-z})=\operatorname{ch}z\text{.}$$

显然，双曲函数有纯虚周期$2\pi i$.

2.计算下列数值（a和b为实常数，x为实变数）.

（1）$\sin(a+ib)$.

解：$$\sin(a+ib)=\frac{1}{2i}[e^{i(a+ib)}-e^{-(a+ib)i}]$$

$$=\frac{1}{2i}[e^{-b}(\cos a+i\sin a)$$

$$-e^{+b}(\cos a-i\sin a)]$$

$$=\frac{1}{2}[e^{-b}\sin a+e^b\sin a+i(e^b\cos a$$

$$-e^{-b}\cos a)]$$

$$=\frac{1}{2}[(e^b+e^{-b})\sin a+i(e^b-e^{-b})\cos a]\text{.}$$

（2）$\cos(a+ib)$.

解：$\cos(a+ib)=\frac{1}{2}(e^{i(a+ib)}+e^{-i(a+ib)})$

$=\frac{1}{2}[e^{-b}(\cos a+i\sin a)+e^{b}(\cos a-i\sin a)]$

$=\frac{1}{2}[(e^{-b}+e^{b})\cos a+i(e^{-b}-e^{b})\sin a]$。

（3）$\ln(-1)$。

解一：$\ln(-1)=\ln|-1|+i\arg(-1)=i(2n+1)\pi$；

解二：$\ln(-1)=\ln e^{i(\pi+2n\pi)}=\ln e^{i(2n+1)\pi}$

$=i(2n+1)\pi\ (n=0,\pm1,\cdots)$。

（4）$\mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z$。

解：$\mathrm{ch}^2z-\mathrm{sh}^2z=\frac{e^{2z}+2+e^{-2z}}{4}-\frac{e^{2z}-2+e^{-2z}}{4}=1$。

（5）$\cos ix$。

解：$\cos ix=\frac{e^{i(ix)}+e^{-i(ix)}}{2}=\frac{e^{x}+e^{-x}}{2}=\mathrm{ch}x$。

（6）$\sin ix$。

解：$\sin ix=\frac{e^{i(ix)}-e^{-i(ix)}}{2i}=\frac{e^{x}-e^{-x}}{2}i$

$=i\,\mathrm{sh}x$。

（7）$\mathrm{ch}ix$。

解：$\mathrm{ch}ix=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\cos x$。

（8）$\mathrm{sh}ix$。

解：$\mathrm{sh}ix=\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=i\sin x$。

（9）$|e^{iax-ibx\ln x}|$。

解：因$\sin z=\sin(x+iy)$

$$=\frac{1}{2}\left[(e^{y}+e^{-y})\sin x+i(e^{y}-e^{-y})\cos x\right],$$

所以

$$\text{原式}=\left|e^{ia(x+iy)}-ib\cdot\frac{1}{2}[(e^{y}+e^{-y})\sin x+i(e^{y}-e^{-y})\cos x]\right|$$

$$=\left|e^{-ay}\cdot e^{i[ax-\frac{b}{2}(e^{y}+e^{-y})\sin x-i\frac{b}{2}(e^{y}-e^{-y})\cos x]}\right|$$

$$=\left|e^{-ay+\frac{b}{2}(e^{y}-e^{-y})\cos x}\cdot e^{i[ax-\frac{b}{2}(e^{y}+e^{-y})\sin x]}\right|$$

$$=e^{-ay+\frac{b}{2}(e^{y}-e^{-y})\cos x}=e^{-ay+b\operatorname{sh}y\cos x}.$$

3. 求解方程 $\sin z=2$.

解一：原方程即 $\frac{1}{2i}(e^{iz}-e^{-iz})=2$，即 $e^{iz}-e^{-iz}=4i$，

亦即

$$(e^{iz})^2-4i(e^{iz})-1=0.$$

由一元二次代数方程的根的公式得

$$e^{iz}=2i\pm\sqrt{(2i)^2+1}=(2\pm\sqrt{3})i,$$

于是

$$iz=\ln\left[(2\pm\sqrt{3})i\right]=\ln(2\pm\sqrt{3})+\ln i$$

$$=\ln(2\pm\sqrt{3})+\ln\left(e^{i(\frac{\pi}{2}+2n\pi)}\right)$$

$$=\ln(2\pm\sqrt{3})+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right),$$

所以

$$z=\frac{1}{i}\left[\ln(2\pm\sqrt{3})+i\left(\frac{\pi}{2}+2n\pi\right)\right]$$

$$=\frac{\pi}{2}+2n\pi-i\ln(2\pm\sqrt{3}).$$

因 $-\ln(2\pm\sqrt{3})=\ln(2\mp\sqrt{3})$，故上式又可表为

$$z=\frac{\pi}{2}+2n\pi+i\ln(2\mp\sqrt{3}).$$

解二：$\sin z=\frac{1}{2}\left[(e^{y}+e^{-y})\sin x+i(e^{y}+e^{-y})\cos x\right]=2,$

比较等式两边的实部和虚部得

$$\begin{cases}(e^{y}+e^{-y})\sin x=4, & (1)\\ (e^{y}+e^{-y})\cos x=0. & (2)\end{cases}$$

在(2)式中，如果$e^{y}-e^{-y}=0$，则$y=0$，以$y=0$代入(1)式中则得出$\sin x=2$的错误结果；所以y不能为零，即$e^{y}-e^{-y}\neq 0$。只有$\cos x=0$，即

$$x=\frac{\pi}{2}+n\pi\ (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots).$$

但以$x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$代入(1)式，则得$-(e^{y}+e^{-y})=4$，

显然是不合理的，必须在$x=\frac{\pi}{2}+n\pi$的解中舍去$x=(2k+1)\pi+\frac{\pi}{2}$的部分解；只保留$x=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$的部分解，以$x=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$代入(1)式得

$$e^{y}+e^{-y}=4,$$

即
$$(e^{y})^{2}-4e^{y}+1=0,$$

由此解出
$$e^{y}=2\pm\sqrt{3}.$$

即
$$y=\ln(2\pm\sqrt{3}),$$

所以

$$z=\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi+i\ln(2\pm\sqrt{3}).$$

§3. 多值函数

指出下列多值函数的支点及其阶，并作出里曼面。

（1）$\sqrt{z-a}$。

解：（i）根式$w=\sqrt{z-a}$的定义是$w^2=z-a$，今用指数式表示出$w=\rho e^{i\varphi}$，$z-a=re^{i\theta}$(r、$\rho\geqslant 0$)。以此代入$w^2=z-a$中得$\rho^2e^{i2\varphi}=re^{i\theta}$，所以$\rho^2=r$，$e^{i2\varphi}=e^{\theta i}$，$w=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$，即

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{r}\,,\\ 2\varphi=\theta+2n\pi,\ (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\cdots),\end{cases}$$

由此可见，w的模与$z-a$的模r的对应关系是唯一确定的，但辐角不是如此，而是对应于每一个θ值，有两个不同的φ值，如：$\varphi_1=\dfrac{\theta}{2}(n=0)$，$\varphi_2=\dfrac{\theta}{2}+\pi$ $(n=1)$。相应的w值是：$w_1=\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$，$w_2=\sqrt{r}\,e^{i(\frac{\theta}{2}+\pi)}=-\sqrt{r}\,e^{i\frac{\theta}{2}}$，其它$n$值给出的只是这两个$w$值的重复。

（ii）对于$w=\sqrt{z-a}$来说，a点具有这样的特性，而z绕a点转一圈回到原处时，相应的函数值w不还原，改变了正负号；而当z不绕a点转一圈回到原处时，函数值还原，所以a点是该多值函数的支点。当z绕a点转两圈回到原处时，对应的函数值还原，所以a点是该多值函数的一阶支点。

（iii）如令$z=\dfrac{1}{t}$，则$w=\dfrac{\sqrt{1-at}}{\sqrt{t}}$；当$t$绕$t=0$转一圈回到原处时，$w$值不能还原；绕两圈回到原处时，$w$值还原，所以$z=\infty$也是一阶支点。

作出里曼面如图1-3。

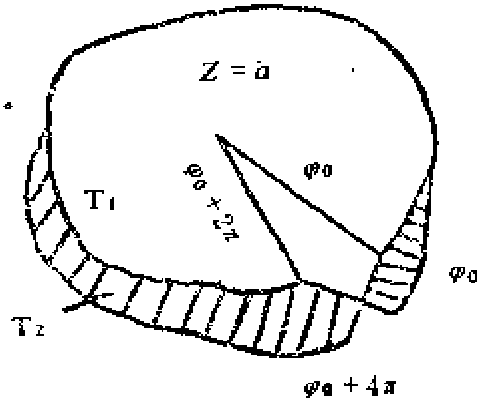


图 1-3

（2） $\sqrt{(z-a)(z-b)}$。

解：(i) 如令$z-a=r_1e^{i\theta_1}$，$z-b=r_2e^{i\theta_2}$，$w=\rho e^{i\varphi}$，则

$$w=\sqrt{(z-a)(z-b)}$$

$$=\rho e^{i\varphi}=\sqrt{r_1r_2}\ e^{i\frac{\theta_1+\theta_2}{2}},$$

即

$$\begin{cases}\rho=\sqrt{r_1r_2}\,,\\ 2\varphi=\theta_1+\theta_2+2n\pi\,(n=0,\pm1,\pm2\cdots\cdots)。\end{cases}$$

(ii) 同上题分析，$z=a$和$z=b$是多值函数w的一阶支点。

(iii) 里曼面有两叶，在T_1上从$z=a$到$z=b$作切割，T_1的切割下岸连结于T_2的上岸，T_2的下岸连结于T_1的上岸。事实上，沿着不包围点a和b的闭路 1 环行一周，辐角θ_1和θ_2又返回原来的值。沿着包围两个点a和b的闭路 2 环行一周，此二辐角各增加 2π。所以$\frac{1}{2}(\theta_1+\theta_2)$也增加$2\pi$，而函数值$w$还原。如果在同一叶上沿着只包围$a$点（或$b$点）的闭路 3 环行一周，函数值 w并不还原，所作切割就是为了截断此种闭路。

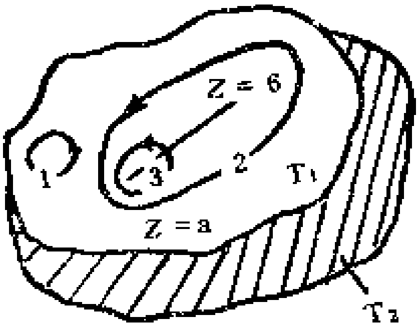


图 1-4

（3） $\ln z$

解：(i) 对数函数$w=\ln z$的定义是：$e^w=z$，令 $w=u+iv$ 和$z=re^{i\theta}$代入上式得$e^u\cdot e^{iv}=re^{i\theta}$，比较两边的模和辐角得

$$e^u=r，\ 即u=\ln r=\ln|z|,$$

$$v=\arg z=\theta+2n\pi\,(n=0,\pm1,\ \pm2,\ \cdots\cdots)。$$

(ii) 由上可见，对数函数的多值性表现在函数值w的虚部v与自变量z的辐角的对应关系上。对于每一个z值，有无穷多个w值，这些不同的w值只是虚部不同而已，相差为2π的整数倍，即$w_n(z)=\ln|z|+i(\theta+2n\pi)$，其支点是$z=0$，而且是无限阶支点。

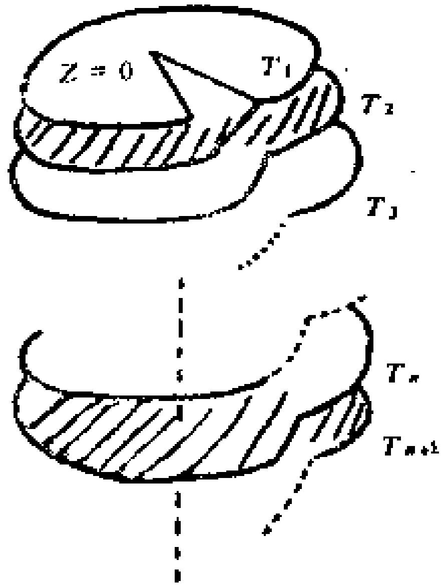


图 1-5

(iii) 黎曼面如图1-5所示，它有无穷多叶，在第一叶上从$z=0$到$z=\infty$作切割，每一叶的切割下岸连接于下一叶的上岸（$z=\infty$亦为无限阶支点）。

(4) $\ln(z-a)$。

解：除了以$z=a$代替上题中的$z=0$以外，其它的分析完全和上题相同。

§4. 导数（微商）

试推导极坐标系中的科希-黎曼方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial \rho}. \end{cases}$$

解一：从直角坐标系中的科希-黎曼方程

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial x}=-\dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

出发，按照变换公式：$\rho=\sqrt{x^2+y^2}$和$\varphi=\operatorname{arctg}\left(\dfrac{y}{x}\right)$，即

$x=\rho\cos\varphi$ 和 $y=\rho\sin\varphi$ 变换到极坐标。计算如下：

从变换公式可得

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial\rho}{\partial x}&=\frac{1}{2}\frac{2x}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{x}{\rho}=\cos\varphi,\\
\frac{\partial\rho}{\partial y}&=\frac{1}{2}\frac{2y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\frac{y}{\rho}=\sin\varphi,\\
\frac{\partial\varphi}{\partial x}&=\frac{y\left(-\frac{1}{x^2}\right)}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{-y}{x^2+y^2}=-\frac{\sin\varphi}{\rho},\\
\frac{\partial\varphi}{\partial y}&=\frac{\frac{1}{x}}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}=\frac{\cos\varphi}{\rho},
\end{aligned}
\right.
$$

又

$$
\left\{
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x}&=\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi},\\
\frac{\partial u}{\partial y}&=\frac{\partial u}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial u}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi},\\
\frac{\partial v}{\partial x}&=\frac{\partial v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial x}=\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial\varphi},\\
\frac{\partial v}{\partial y}&=\frac{\partial v}{\partial\rho}\frac{\partial\rho}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial\varphi}\frac{\partial\varphi}{\partial y}=\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial\varphi}.
\end{aligned}
\right.
$$

把以上四式代入直角坐标系中的科希–黎曼方程得

$$
\left\{
\begin{aligned}
&\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial\rho}-\frac{1}{\rho}\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial\varphi}, &(1)\\
&\sin\varphi\frac{\partial u}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\cos\varphi\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\cos\varphi\frac{\partial v}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho}\sin\varphi\frac{\partial v}{\partial\varphi}. &(2)
\end{aligned}
\right.
$$

(1)式 $\times\sin\varphi-$ (2)式 $\times\cos\varphi$ 给出

$$-\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}=\frac{\partial v}{\partial\rho},\tag{3}$$

(1)式 $\times\cos\varphi+$ (2)式 $\times\sin\varphi$ 给出

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi},\tag{4}$$

(3)与(4)即为极坐标系中的科希-里曼方程。

解二：从定义出发进行推导。

$$w=u(z)+iv(z)=u(\rho,\varphi)+iv(\rho,\varphi).$$

在极坐标系中，先令 Δz 沿径向逼近零，即 $\Delta z=e^{i\varphi}\Delta\rho\to0$，则

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta\rho\to0}\frac{\Delta w}{\Delta\rho}\frac{\Delta\rho}{\Delta z}=\lim_{\Delta\rho\to0}\frac{\Delta w}{\Delta\rho}e^{i\varphi}$$

$$=\lim_{\Delta\rho\to0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta\rho}e^{-i\varphi}$$

$$=\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+i\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)e^{-i\varphi};$$

再令 Δz 沿横向逼近零，即 $\Delta z=\rho\Delta(e^{i\varphi})=i\rho e^{i\varphi}\Delta\varphi\to0$，则

$$\lim_{\Delta z\to0}\frac{\Delta w}{\Delta z}=\lim_{\Delta\varphi\to0}\frac{\Delta w}{\Delta\varphi}\frac{\Delta\varphi}{\Delta z}=\lim_{\Delta\varphi\to0}\frac{\Delta w}{\Delta\varphi}\frac{1}{i\rho}e^{-i\varphi}$$

$$=-\frac{i}{\rho}e^{-i\varphi}\lim_{\Delta\varphi\to0}\frac{\Delta u+i\Delta v}{\Delta\varphi}$$

$$=-\frac{i}{\rho}e^{-i\varphi}\left(\frac{\partial n}{\partial\varphi}+i\frac{\partial v}{\partial\varphi}\right)$$

$$=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-i\frac{1}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)e^{-i\varphi}.$$

如果函数 $w(z)$ 在点 z 可导，则上述二极限必须都存在而且彼此相等，即

$$\left(\frac{\partial u}{\partial\rho}+i\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)e^{-i\varphi}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}-\frac{i}{\rho}\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right)e^{-i\varphi},$$

比较上式中的实部和虚部即得

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho} = \dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial v}{\partial \varphi}, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \rho} = -\dfrac{1}{\rho} \dfrac{\partial u}{\partial \varphi}. \end{cases}$$

§5. 解 析 函 数

1.某个区域上的解析函数如为实函数，试证它必为常数。

解：设这个解析函数为$w(z)=u(x,y)+iv(x,y)$，因为它是实数，所以$v(x,y)\equiv 0$；因为它是解析函数，所以它满足科希-里曼方程

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-\frac{\partial u}{\partial y}.$$

注意到$v(x,y)\equiv 0$，则

$$\frac{\partial u}{\partial x}=0, \tag{1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=0. \tag{2}$$

由(1)知$u=f_1(y)$，由(2)知$u=f_2(x)$；因为x、y在该区域中皆为独立变数，要$f_1(y)=f_2(x)=u$，则只有$f_1(y)=f_2(x)=$常数，即u必为常数，亦即该解析函数必为常数。

2.已知解析函数$f(z)$的实部$u(x,y)$或虚部$v(x,y)$，求该解析函数。

(1) $u=e^x\sin y$。

解一：$\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x\sin y$，$-\dfrac{\partial u}{\partial y}=-e^x\cos y$。根据科希-里曼方程，则

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\sin y,\quad \frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\cos y.$$ 于是

$$dv=\frac{\partial v}{\partial x}dx+\frac{\partial v}{\partial y}dy=-e^x\cos y\,dx+e^x\sin y\,dy$$
$$=d(-e^x\cos y).$$

所以
$$v(x,y)=-e^x\cos y+C.$$
$$f(z)=e^x\sin y+i(-e^x\cos y+C)$$
$$=-ie^x(\cos y+i\sin y)+iC=-ie^x\cdot e^{iy}+iC$$
$$=-ie^{x+iy}+iC=-ie^z+iC.$$

解二：因为

$$\frac{\partial v}{\partial x}=-e^x\cos y, \tag{1}$$

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\sin y. \tag{2}$$

所以，由（1）式，暂且把y当作参数，对x积分，

$$v(x,y)=\int^{(x)}-e^x\cos y\,dx=-e^x\cos y+\varphi(y). \tag{3}$$

把（3）式对y求偏导数，

$$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x\sin y+\varphi'(y) \tag{4}$$

比较（2）式和（4）式得$\varphi'(y)=0$，即$\varphi(y)=C$。所以

$$v(x,y)=-e^x\cos y+C,$$
$$f(z)=e^x\sin y+i(-e^x\cos y+C)=-ie^xicC.$$

必须指出：下面各题都可用这两种方法求解，限于篇幅，我们将只给出一种。

（2）$u=e^x(x\cos y-y\sin y)$，$f(0)=0$，

解：
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=e^x(x\cos y+\cos y-y\sin y)=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\[2mm] -\dfrac{\partial u}{\partial y}=e^x(x\sin y+\sin y+y\cos y)=\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

$$dv = e^x(x\cos y + \cos y - y\sin y)dy + e^x(x\sin y + \sin y + y\cos y)dx$$

$$= e^x d(x\sin y + \sin y + y\cos y - \sin y) + e^x d(x\sin y - \sin y + \sin y + \cos y)$$

$$= d(e^x x\sin y + e^x y\cos y),$$

所以 $v = e^x x\sin y + e^x y\cos y + C$.

$$f(z) = e^x(x\cos y - y\sin y) + ie^x(x\sin y + y\cos y) + iC$$

$$= xe^x(\cos y + i\sin y) - e^x y(\sin y - i\cos y) + iC$$

$$= xe^x e^{iy} + iye^x e^{iy} + iC = e^{x+iy}(x+iy) + iC$$

$$= ze^z + iC.$$

因为$f(0) = 0 \cdot e^{i0} + iC = 0$，故$C = 0$，于是

$$f(z) = ze^z.$$

（3）$u = \dfrac{2\sin x}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x}$，　$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 0$，

解：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x} = -\dfrac{\partial u}{\partial y} = \dfrac{4\sin 2x(e^{2y} - e^{-2y})}{(e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x)^2} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{\partial v}{\partial x} = \dfrac{4\cos 2x(e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x) - 8\sin^2 2x}{(e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x)^2} \end{cases}$$

$$dv = \frac{4\sin 2x(e^{2y} + e^{-2y})dx + 4[\cos x(e^{2y} + e^{-2y}) - 2]dy}{[e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x]^2}$$

同（1）题，把$\dfrac{\partial v}{\partial x}$对$x$积分，把$v$暂且当作参数，

$$v = -\frac{e^{2y} - e^{-2y}}{e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x} + \varphi(y).$$

于是，

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2(e^{2y} - e^{-2y})^2 - 2(e^{2y} + e^{-2y})(e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x)}{(e^{2y} + e^{-2y} - 2\cos 2x)^2} + \varphi'(y)$$

$$=\frac{4[\cos 2x(e^{2y}+e^{-2y})-2]}{(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)^2}+\varphi'(y).$$

把上式与前式比较知$\varphi(y)=C$；又由于 $f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$，

$\therefore\quad C=0$

则
$$v=-\frac{e^{2y}-e^{-2y}}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}.$$

所以 $f(z)=u+iv=\dfrac{2\sin 2x-i(e^{2y}e^{-2y})}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}=\operatorname{ctg}z$、

读者可以自己验证

$$\operatorname{ctg}z=i\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{e^{iz}-e^{-iz}}=\frac{(e^{y}-e^{-y})\sin x+i(e^{y}+e^{-y})\cos x}{(e^{-y}-e^{y})\cos x-i(e^{-y}+e^{y})\sin x}$$
$$=\frac{2\sin 2x-i(e^{2y}-e^{-2y})}{e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x}.$$

（4） $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$，$f(2)=0$。

解. 因为在 $v=\dfrac{y}{x^2+y^2}$中的分母是x^2+y^2，这种情况下改用极坐标处理比较方便，这时

$$v=\frac{1}{\rho}\sin\varphi.$$

注意到极坐标系中的科希-里曼方程，则

$$\begin{cases}\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=\dfrac{1}{\rho^2}\cos\varphi=\dfrac{\partial u}{\partial\rho},\\[2ex] -\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho^2}\sin\varphi=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}.\end{cases}$$

即
$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho^2}\cos\varphi,\\[2ex] \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\dfrac{1}{\rho}\sin\varphi.\end{cases}$$

$$du=\left(\frac{1}{\rho^2}\cos\varphi\right)d\rho+\left(\frac{1}{\rho}\sin\varphi\right)d\varphi$$

$$=\cos\varphi d\left(-\frac{1}{\rho}\right)+\frac{1}{\rho}d(-\cos\varphi)$$

$$=d\left(-\frac{1}{\rho}\cos\varphi\right),$$

所以 $$u=-\frac{1}{\rho}\cos\varphi+C,$$

$$f(z)=\frac{1}{\rho}(-\cos\varphi+i\sin\varphi)+C$$

$$=\frac{1}{\rho}e^{-i\varphi}+C=-\frac{1}{z}+C.$$

又因$f(2)=-\frac{1}{2}+C=0$，则$C=\frac{1}{2}$，从而

$$f(z)=\frac{1}{2}-\frac{1}{z}.$$

（5） $u=\dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$，$f(\infty)=0$。

解：u的表达式的分母与上题相似，也含有因子x^2+y^2，改用极坐标后$u=\frac{1}{\rho^2}\cos2\varphi$．则

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=-\dfrac{2}{\rho^2}\cos2\varphi=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi},\\[2mm]\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=-\dfrac{2}{\rho^3}\sin2\varphi=-\dfrac{\partial v}{\partial\rho}.\end{cases}$$

即 $$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=-\dfrac{2}{\rho^2}\cos2\varphi,\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=\dfrac{2}{\rho^3}\sin2\varphi.\end{cases}$$

$$dv=\left(-\frac{2}{\rho^2}\cos2\varphi\right)d\varphi+\left(\frac{2}{\rho^3}\sin2\varphi\right)d\rho$$

$$=\frac{1}{\rho^2}d(-\sin2\varphi)+\sin2\varphi d\left(-\frac{1}{\rho^2}\right)$$

$$=d\left(-\frac{1}{\rho^2}\sin2\varphi\right),$$

所以 $$v=-\frac{1}{\rho^2}\sin2\varphi+C。$$

$$f(z)=\frac{1}{\rho^2}\cos2\varphi-i\frac{1}{\rho^2}\sin2\varphi+iC$$

$$=\frac{1}{\rho^2}e^{-i2\varphi}+iC=\frac{1}{z^2}+iC。$$

又因 $f(\infty)=0+iC=0$，则$C=0$，从而

$$f(z)=\frac{1}{z^2}。$$

（6）$u=x^2-y^2+xy$， $f(0)=0$。

解：

因 $$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial x}=2x+y=\dfrac{\partial v}{\partial y},\\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}=2y-x=\dfrac{\partial v}{\partial x}.\end{cases}$$

则 $$dv=(2x+y)dy+(2y-x)dx$$

$$=d\left(2xy+\frac{1}{2}y^2\right)+d\left(2xy-\frac{1}{2}x^2\right)$$

$$=d\left(2xy+\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2}x^2\right),$$

$$v=2xy+\frac{1}{2}(y^2-x^2)+C。$$

所以 $$f(z)=x^2-y^2+xy+i\left[2xy+\frac{1}{2}(y^2-x^2)\right]+iC$$

$$=x^2-y^2+i2xy-\left[\frac{1}{2}i(x^2-y^2)-xy\right]+iC$$

$$= (x+iy)^2 - i\frac{1}{2}\left[(x^2-y^2)+i2xy\right]+iC$$

$$= z^2 - i\frac{1}{2}z^2 + iC.$$

又因　$f(0)=0+iC=0$，则$C=0$，从而

$$f(z)=z^2\left(1-\frac{i}{2}\right).$$

（7）$u=x^3-3xy^2, f(0)=0$.

解：

因 $\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2-3y^2=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}=6xy=\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$

则
$$\begin{aligned} dv &= (3x^2-3y^2)dy+6xydx \\ &= d(3x^2y-y^3)+d(3x^2y) \\ &= d(3x^2y-y^3), \end{aligned}$$

$$v = 3x^2y-y^3+C.$$

所以
$$\begin{aligned} f(z) &= x^3-3xy^2+i(3x^2y-y^3+c) \\ &= (x+iy)^3+iC=z^3+iC. \end{aligned}$$

又因　$f(0)=0+iC=0$，则$C=0$，从而

$$f(z)=z^3.$$

（8）$u=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3, f(0)=0$.

解：$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x}=3x^2+12xy-3y^2=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}=-6x^2+6xy+6y^2=\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$

则
$$\begin{aligned} dv &= (3x^2+12xy-3y^2)dy+(-6x^2+6xy+6y^2)dx \\ &= d(3x^2y+6xy^2-y^3)+d(-2x^3+3x^2y+6xy^2). \end{aligned}$$

$$v = -2x^3+3x^2y+6xy^2-y^3+C.$$

所以　$f(z)=x^3+6x^2y-3xy^2-2y^3+i$

$$(-2x^3+3x^2y+6xy^2-y^3)+iC$$
$$=(x+iy)^3-2i(x+iy)^3+iC=z^3(1-2i)+iC.$$

又因 $f(0)=0+iC=0$，则 $C=0$，从而

$$f(z)=z^3(1-2i).$$

（9） $u=x^4-6x^2y^2+y^4, f(0)=0$.

解：
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial x}=4x^3-12xy^2=\dfrac{\partial v}{\partial y}, \\ -\dfrac{\partial u}{\partial y}=12x^2y-4y^3=\dfrac{\partial v}{\partial x}. \end{cases}$$

$$dv=(4x^3-12xy^2)dy+(12x^2y-4y^3)dx$$
$$=d(4x^3y-4xy^3)+d(4x^3y-4xy^3).$$
$$v=4x^3y-4xy^3+C.$$

于是 $f(z)=x^4-6x^2y^2+y^4+i(4x^3y-4xy^3+C)$
$$=(x+iy)^4+iC=Z^4+iC.$$

因 $f(0)=0+iC=0$，则 $C=0$，所以

$$f(z)=z^4,$$

（10） $u=\ln\rho, f(1)=0$.

解：

因
$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial \rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial \varphi}=\dfrac{1}{\rho}, \\ \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial \varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial \rho}=0. \end{cases}$$

即
$$\begin{cases} \dfrac{\partial v}{\partial \varphi}=1, \\ \dfrac{\partial v}{\partial \rho}=0. \end{cases}$$

则
$$dv=d\varphi,$$
$$v=\varphi+C.$$

所以 $f(z)=\ln\rho+i\varphi+iC=\ln|z|+i\arg z+iC$
$$=\ln z+iC.$$

又因$f(1)=0+iC=0$，则$C=0$，从而

$$f(z)=\ln z,$$

(11) $u=\varphi$, $f(1)=0$.

解：因

$$\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=0,\\[2mm]\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho},\end{cases}$$

即

$$\begin{cases}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=0.\\[2mm]\dfrac{\partial v}{\partial\rho}=\dfrac{-1}{\rho}.\end{cases}$$

则

$$dv=-\frac{1}{\rho}d\rho=d(-\ln\rho),$$

$$v=-\ln\rho+C.$$

所以

$$f(z)=\varphi-i\ln\rho+iC$$
$$=-i(\ln\rho+i\varphi)+iC=-i\ln z+iC.$$

又因 $f(1)=0+iC=0$，则$C=0$，从而

$$f(z)=-i\ln z+iC.$$

3. 试从极坐标系中的科希-里曼方程 $\begin{cases}\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\\[2mm]\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}=-\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\end{cases}$

中消去u或v。

解：该方程可改写为

$$\begin{cases}\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}, & (1)\\[2mm]-\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=\dfrac{\partial v}{\partial\rho}. & (2)\end{cases}$$

(1) 式对ρ微分一次，(2) 式对φ微分一次，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\dfrac{\partial u}{\partial\rho}\right)=\dfrac{\partial^2 v}{\partial\rho\partial\varphi}, & (3)\\ -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=\dfrac{\partial^2 v}{\partial\rho\partial\varphi}. & (4)\end{cases}$$

（3）－（4）得

$$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial u}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0. \qquad (5)$$

科希-里曼方程还可改写为

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial\rho}=\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}, & (6)\\ \dfrac{\partial u}{\partial\varphi}=-\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}. & (7)\end{cases}$$

（6）式对φ微分一次，（7）式对ρ微分一次，

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial\rho\partial\varphi}=\dfrac{\partial}{\partial\varphi}\left(\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial v}{\partial\varphi}\right). & (8)\\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial\rho\partial\varphi}=\dfrac{\partial}{\partial\rho}\left(-\rho\dfrac{\partial v}{\partial\rho}\right). & (9)\end{cases}$$

（8）—（9）得 $$\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial^2 v}{\partial\varphi^2}=0 \qquad (10)$$

显然，消去v（或u）后的方程（9）（或（10））即极坐标系中的拉普拉斯方程（5.2）或（5.3）.

§6. 平面标量场

1. 已知复势 $f(z)=\dfrac{1}{z-2+i}$，试描画等温网。

解：由 $f(z)=\dfrac{1}{z-2+i}=\dfrac{1}{(x-2)+i(y+1)}$

$$=\frac{x-2}{(x-2)^2+(y+1)^2}+i\frac{-(y+1)}{(x-2)^2+(y+1)^2}$$

得到等温网的两族曲线方程

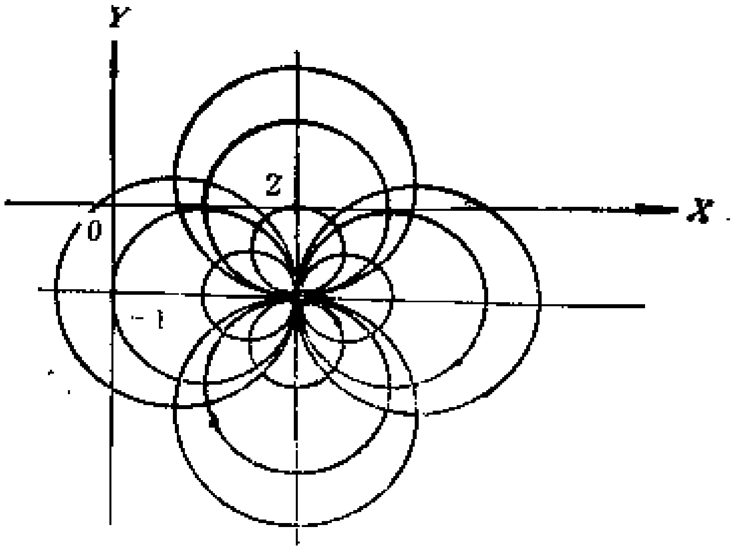


图 1-6

$$\begin{cases} \dfrac{x-2}{(x-2)^2+(y+1)^2}=C_1', \\ \dfrac{y+1}{(x-2)^2+(y+1)^2}=C_2', \end{cases}$$

或
$$\begin{cases} (x-2-C_1)^2+(y+1)^2=C_1^2, \\ (x-2)^2+(y+1-C_2)^2=C_2^2. \end{cases}$$

故等温网为：在点(2，-1)跟直线 $x=2$，$y=-1$ 相切的圆族.

2. 已知流线族的方程为"$\dfrac{y}{x}$=常数"，求复势.

解：(i) 如令 $v=\dfrac{y}{x}$，则 $v_{xx}=\dfrac{2y}{x^3}$，$v_{yy}=0$，

从而 $v_{xx}+v_{yy}\neq 0$，$v=\dfrac{y}{x}$ 不是调和函数.

(ii) 改令 $v=F(t)$，$\left(t=\dfrac{y}{x}\right)$，

则 $$v_x = F'\left(-\frac{y}{x^2}\right),\quad v_{xx} = F''\left(\frac{y^2}{x^4}\right) + F'\left(\frac{2y}{x^3}\right);$$

$$v_y = F'\left(\frac{1}{x}\right),\quad v_{yy} = F''\left(\frac{1}{x^2}\right);$$

应指出：这里必须有$v_{xx} + v_{yy} = 0$，

即 $$F''\left(\frac{x^2+y^2}{x^4}\right) + F'\left(\frac{2y}{x^3}\right) = 0.$$

$$\frac{F''}{F'} = -\frac{2y}{x^3}\cdot\frac{x^4}{x^2+y^2} = \frac{2xy}{x^2+y^2} = \frac{-2}{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}}$$

$$= \frac{-2}{t+\frac{1}{t}} = -\frac{2t}{1+t^2},$$

$$\ln F'(t) = -\int\frac{2t}{1+t^2}\,dt = -\ln(1+t^2) + \ln C_1,$$

$$F'(t) = \frac{C_1}{1+t^2};$$

$$F(t) = C_1\int\frac{dt}{1+t^2} = C_1\operatorname{arctg} + C_2 = C_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C_2.$$

所以 $$v = C_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x} + C_2.$$

这里的记号v_x和v_y分别代表$\frac{\partial v}{\partial x}$和$\frac{\partial v}{\partial y}$，　v_{xx}和v_{yy}分别代表$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$和$\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$（下同）．

(iii)根据科希-里曼方程 $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$知

$$u_y = -v_x = C_1\frac{y}{x^2+y^2},$$

因而

$$u=C_1\int^{(y)}\frac{y}{x^2+y^2}dy=C_1\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C_4(x).$$

现在要确定$C_4(x)$，注意到

$$u_x=\frac{C_1x}{x^2+y^2}+C_4'(x)$$

根据科希-里曼方程 $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$，这应等于$v_y$，即 $\frac{C_1x}{x^2+y^2}$，

所以　$C_4'(x)=0, C_4(x)=C_3$，于是

$$u=C_1\cdot\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C_3;$$

$$f(z)=C_1\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C_3+iC_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+iC_2$$

$$=C_1\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+C_3$$

$$+C_1i\left[-\frac{1}{2}i\ln\frac{1+i(y/x)}{1-i(y/x)}\right]+iC_2$$

$$=C_1\left\{\frac{1}{2}\ln(x^2+y^2)+\frac{1}{2}\ln\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}\right\}+C_3+iC_2$$

$$=C_1\ln(x+iy)+C_3+iC_2$$

$$=C_1\ln z+C_3+iC_2.$$

这就是所要求的复势.

3. 已知等势线族的方程为“$x^2+y^2=$常数”，求复势.

解：(i) 令 $u=F(t)$，（$t=x^2+y^2$）

则

$$\begin{cases}u_x=2xF', & u_{xx}=2F'+4x^2F'',\\ u_y=2yF', & u_{yy}=2F'+4y^2F''.\end{cases}$$

$$(4x^2+4y^2)F''+4F'=0,$$

$$\frac{F''}{F'}=-\frac{1}{x^2+y^2}=-\frac{1}{t}, F'=\frac{C_1}{t},$$

求出 $$F=C_1\ln t+C_2=C_1\ln(x^2+y^2)+C_2.$$

即 $$u=C_1\ln(x^2+y^2)+C_2.$$

(ii) $u_x=C_1\dfrac{2x}{x^2+y^2}$, $u_y=C_1\dfrac{2y}{x^2+y^2}$，根据科希—里曼方程

$$v_y=u_x=C_1\frac{2x}{x^2+y^2},$$

因而 $$v=C_1\int^{(y)}\frac{2x}{x^2+y^2}dy=2C_1\operatorname{arctg}\frac{y}{x}+C_4(x).$$

又， $$v_x=2C_1\cdot\frac{-y}{x^2+y^2}+C_4'(x)=-u_y=-2C_1\frac{y}{x^2+y^2}.$$

则 $$C_4'(x)=0,\quad C_4(x)=C_3.$$

所以 $$v=2C_1\operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)+C_3=-iC_1\ln\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}+C_3.$$

$$\begin{aligned}(\text{iii})f(z)&=C_1\ln(x^2+y^2)+C_2+i\left[-iC_1\ln\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}\right.\\&\quad\left.+C_3\right]\\&=C_1\ln(x^2+y^2)+C_2+C_1\ln\frac{(x+iy)^2}{x^2+y^2}+iC_3\\&=C\ln z^2+C_2+iC_3=2C_1\ln z+C_2+iC_3.\end{aligned}$$

这就是所要求的复势.

4.已知电力线为跟实轴相切于原点的圆族，求复势.

解：如图1-7所示，该圆族的方程是

$$x^2+(y-C_4)^2=C_4^2,$$

或 $$\frac{-y}{x^2+y^2}=C_4^*,\ (C_4^*\text{亦为常数}),$$

如令 $v=\dfrac{-y}{x^2+y^2}$,

则
$$v_x=\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$
$$v_{xx}=\frac{2y}{(x^2+y^2)^2}-\frac{8x^2y}{(x^2+y^2)^3},$$
$$v_y=\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{1}{x^2+y^2},$$
$$v_{yy}=\frac{6y}{(x^2+y^2)^2}-\frac{8y^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

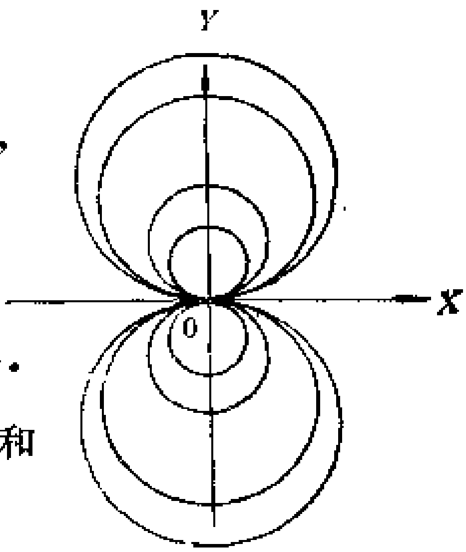


图 1-7

由此得$v_{xx}+v_{yy}=0$，故这里的 v 是调和函数。

应指出：既然 $v=-\dfrac{y}{x^2+y^2}$是调和函数，所以我们可令复势的虚部$v(x,y)$就等于这个 v，下面再求 u。因v_x，v_y已在上面写出，由科希-里曼方程，

$$u_y=-v_x=-\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2},$$

$$u=-2x\int\frac{ydy}{(x^2+x^2)^2}=\frac{x}{x^2+y^2}+C_3(x).$$

则
$$u_x=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{(x^2+y^2)^2}+C_3'(x)$$
$$=v_y=\frac{2y^2}{(x^2+y^2)^2}-\frac{1}{x^2+y^2},$$

给出$C_3'(x)=0$，$C_3(x)=C_2$，故 $u=\dfrac{x}{(x^2+y^2)}+C_2$。

于是求出复势$f(z)=\dfrac{x}{x^2+y^2}+C_2+i\dfrac{-y}{x^2+y^2}=\dfrac{x-iy}{x^2+y^2}+C_2$
$$=\frac{1}{x+iy}+C_2=\frac{1}{z}+C_2.$$

5．在圆柱$|z|=R$的外部的平面静电场的复势为$f(z)=$

$i2\sigma\ln\left(\frac{R}{z}\right)$求柱面上的电荷面密度。

解：$f(z)=i2\sigma\ln\frac{R}{z}=i2\sigma\ln\frac{R}{\rho e^{i\varphi}}$

$$=2i\sigma\left[\ln\frac{R}{\rho}-i\varphi\right]=2\sigma\varphi+2i\sigma\ln\frac{R}{\rho}$$

这里，取电势$u=2\sigma\ln\frac{R}{\rho}$，则圆柱表面外的法向场强

$$E\Big|_R=-\frac{\partial u}{\partial\rho}\Big|_R=-\frac{\partial}{\partial\rho}(2\sigma\ln R-2\sigma\ln\rho)$$

$$=\frac{2\sigma}{\rho}\Big|_R=\frac{2\sigma}{R}.$$

设电势以高斯单位表示，以高斯单位表示的高斯定理为

$$\oiint\vec{E}\cdot d\vec{S}=4\pi q.$$

设面密度为σ_e.面积为S.则

$$\frac{2\sigma}{R}S=4\pi\sigma_e S,\ \sigma_e=\frac{\sigma}{2\pi R}.$$

其实，电势$u=2\sigma\ln\frac{R}{\rho}$的共轭调和函数$2\sigma\varphi$就是通量函数，而按照高斯定理

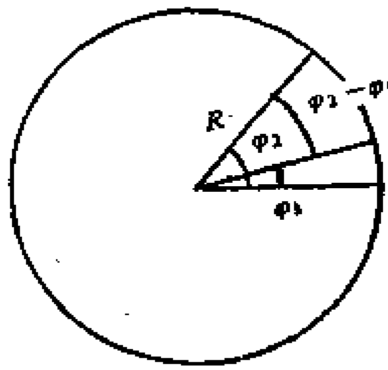


图 1-8

$$2\sigma\varphi_2-2\sigma\varphi_1=4\pi\sigma_e R(\varphi_2-\varphi_1).$$

$$2\sigma(\varphi_2-\varphi_1)=4\pi\sigma_e R.\text{所以}\sigma_e=\frac{\sigma}{2\pi R}.$$

6.有二个平行面均匀带电的线电荷，每单位长度所带电量分别是$+q$和$-q$,两线相距为$2a$,求这个平面静电场的复势、电力线和等势线。

解：考虑一线电荷在原点、单位长度所带电量为Q，显然可取通量函数为$v=2Q\varphi$（高斯单位制），u为电势，则

$$\frac{\partial u}{\partial\rho}=\frac{1}{\rho}\frac{\partial v}{\partial\varphi}=\frac{2Q}{\rho},\quad\frac{\partial u}{\partial\varphi}=-\rho\frac{\partial v}{\partial\rho}=0.$$

于是 $$u=2Q\ln\rho+C.$$

所以复势$f(z)=C+2Q(\ln\rho+i\varphi)=C+2Q\ln z$，由此可知令$Q=+q$，并将线电荷移至$(a,0)$，复势为$f_1(z)=C_1+2q\ln(z-a)$，令$Q=-q$，并将线电荷移至$(-a,0)$，复势$f_2(z)=C_2-2q\ln(z+a)$，所要求的复势即为$f_1(z)+f_2(z)$（依电势迭加原理以及和的通量等于通量的和）。

$$f(z)=2q\ln\frac{z-a}{z+a}+C,\qquad (C=C_1+C_2),$$

或者置$+q$于$(-a,0)$，置$-q$于$(a,0)$，则

$$f(z)=-2q\ln\frac{z-a}{z+a}=2q\ln\frac{z+a}{z-a},$$

电力线族为$I_m\ln\dfrac{z-a}{z+a}=$常数，

等势线族为$R_e\ln\dfrac{z-a}{z+a}=$常数，

$$\ln\frac{z-a}{z+a}=\ln\frac{x+iy-a}{x+iy+a}=\ln\frac{x^2+y^2-a^2+2iay}{(x+a)^2+y^2}$$

$$=\ln\left[\frac{\sqrt{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2}}{(x+a)^2+y^2}\right.$$

$$\left.e^{i\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2}}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x^2+y^2-a^2)^2+4a^2y^2}{[(x+a)^2+y^2]^2}$$

$$+\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2+a^2}$$

$$=\frac{1}{2}\ln\frac{(x-a)^2+y^2}{(x+a)^2+y^2}+\operatorname{arctg}\frac{2ay}{x^2+y^2-a^2},$$

电力线族为$x^2+y^2-a^2=2ac_1y$，

即$x^2+y^2-2ac_1y+a^2c_1^2=a^2+a^2c_1^2$，

$$x^2+(y-ac_1)^2=a^2(1+c_1^2),$$

等势线族为$c_2[(x-a)^2+y^2]=(x+a)^2+y^2$,

$$(c_2-1)x^2-2(c_2+1)ax+(c_2-1)y^2=(1-c_2)a^2,$$

$$x^2-2\frac{c_2+1}{c_2-1}ax+\left(\frac{c_2+1}{c_2-1}\right)^2a^2+y^2$$

$$=-a^2+\left(\frac{c_2+1}{c_2-1}\right)^2a^2.$$

$$\left(x-\frac{c_2+1}{c_2-1}a\right)^2+y^2=\frac{(c_2+1)^2-(c_2-1)^2}{(c_2-1)^2}a^2,$$

$$\left(x-\frac{c_2+1}{c_2-1}a\right)^2+y^2=\frac{4c_2}{(c_2-1^2)}a^2.$$

第二章 复变函数的积分

§9. 科 希 公 式

1. 已知函数$\psi(t,x)=e^{2tx-t^2}$，把x当作参数，把t认作是复变数，试应用科希公式把$\left.\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}$表为回路积分.

对回路积分进行积分变数的代换$t=x-z$，并借以证明$\left.\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}$.

解：(i) 把$\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}$表为回路积分如下：

$$\left.\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{2\zeta x-\zeta^2}}{(\zeta-t)^{n+1}}d\zeta$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{2\zeta x-\zeta^2}}{\zeta^{n+1}}d\zeta.$$

(ii) 证明：以$\zeta=x-z$代入上式

$$\left.\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{x^2-z^2}}{(x-z)^{n+1}}d(-z)$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{x^2}\cdot e^{-z^2}}{(-1)^n(z-x)^{n+1}}dz$$

$$=e^{x^2}\frac{n!}{2\pi i}\oint\frac{(-1)^n e^{-z^2}dz}{(z-x)^{n+1}}$$

$$=(-1)^n e^{x^2}\frac{d^n}{dx^n}e^{-x^2}，\text{得证.}$$

2. 已知函数$\psi(x,t)=\dfrac{e^{-xt/(1-t)}}{1-t}$，试把$x$当作参数，把$t$认为是复变数，试应用科希公式把$\left.\dfrac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}$表为回路积分。

对回路积分进行积分变数的代换，$t=(z-x)/z$，并借以证明$\left.\dfrac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=e^x\dfrac{d^n}{dx^n}(x^ne^{-x})$。

解：(i) 把$\dfrac{\partial^n\psi}{\partial t^n}$表为回路积分如下：

$$\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{-\frac{x\zeta}{1-\zeta}}\Big/(1-\zeta)}{(\zeta-t)^{n+1}}d\zeta.$$

$$\left.\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{-\frac{x\zeta}{1-\zeta}}\Big/(1-\zeta)}{\zeta^{n+1}(1-\zeta)}d\zeta.$$

(ii) 证明：以$\zeta=(z-x)/z$代入上式，

$$\left.\frac{\partial^n\psi}{\partial t^n}\right|_{t=0}=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{e^{-x\left(\frac{z-x}{z}\right)}\Big/\left(1-\frac{z-x}{z}\right)}{\left(\frac{z-x}{z}\right)^{n+1}\left(1-\frac{z-x}{z}\right)}\left(\frac{x}{z^2}\right)dz$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{z^{n+1}\cdot e^{-(z-x)}\cdot\frac{z}{x}}{(z-x)^{n+1}}\left(\frac{x}{z^2}\right)dz$$

$$=e^x\frac{n!}{2\pi i}\oint_l\frac{z^ne^{-z}}{(z-x)^{n+1}}dz$$

$$=e^x\frac{d^n}{dx^n}\left(x^ne^{-x}\right)，\text{得证。}$$

第三章　幂级数展开

§11. 幂　级　数

1. 把幂级数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + \cdots + a_k(z-z_0)^k + \cdots$ 逐项求导，求所得级数的收敛半径，以此验证逐项求导，并不改变收敛半径。

解：该幂级数的收敛半径是 $R = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{a_{k+1}}\right|$。

对该级数逐项求导后得：

$$\frac{d}{dz_1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k = a_1 + 2a_2(z_1-z_0) + \cdots + Ka_k(z-z_0)^{k-1} + (K+1)a_{k+1}(z-z_0)^k, + \cdots\cdots$$

其收敛半径为 $R = \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{Ka_k}{(K+1)a_{k+1}}\right| \lim\limits_{k\to\infty}\left|\dfrac{a_k}{\left(1+\dfrac{1}{K}\right)a_{k+1}}\right|$

$$= \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|,$$

所以逐项求导后，并不改变其收敛半径。

2. 把上题的幂级数逐项积分，求所得级数的收敛半径，以此验证逐项积分并不改变收敛半径。

解：对该级数逐项积分后得：

$$\int \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k d(z-z_0) = a_0(z-z_0) + \frac{1}{2}a_1(z-z_0)^2$$

$$+\frac{1}{3}a_2(z-z_0)^3+\cdots+\frac{1}{K+1}a_k(z-z_0)^{k+1}+\frac{1}{K+2}a_{k+1}(z-z_0)^{k+2}+\cdots,$$

其收敛半径为：

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\frac{1}{K+1}a_k}{\frac{1}{K+2}a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(K+2)a_k}{(K+1)a_{k+1}}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{\left(1+\frac{2}{K}\right)a_k}{\left(1+\frac{1}{K}\right)a_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|,$$

故逐项积分后并不改变收敛半径。

3.求下列幂级数的收敛圆。

(1) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K}(z-i)^k$

解：其收敛半径 $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{1/K}{1/K+1}\right|=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{K+1}{K}\right|$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|1+\frac{1}{K}\right|=1$$

∴ 收敛圆为 $|z-i|=1$。

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}K^{\ln K}(z_1-2)^K$。

解：收敛半径 $R=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{K^{\ln K}}{(K+1)^{\ln(K+1)}}\right|$,

令 $(K+1)^{\ln(K+1)}=(K+1)^{\ln\left[K\left(1+\frac{1}{K}\right)\right]}$

$$=(K+1)^{\ln K}\cdot(K+1)^{\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)},$$

故

$$R=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{K^{\ln K}}{(K+1)^{\ln K}}\cdot\frac{1}{(K+1)^{\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)}}\right]$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{K}\right)^{\ln K}}\cdot\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}(K+1)^{\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)}},$$

记$l_1=\lim\limits_{k\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{K}\right)^{\ln K}$，

$$l_2=\lim_{k\to\infty}(K+1)^{\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)},$$

则

$$R=\frac{1}{l_1l_2}.$$

现计算l_1。

$$\ln l_1=\lim_{k\to\infty}\left[\ln K\cdot\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)\right]$$

$$=\lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)}{\frac{1}{\ln K}},$$

这是%型的不定式，可用罗毕达法则确定极限，

$$\ln l_1=\lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{1+yK}\left(-\frac{1}{K^2}\right)}{-\frac{1}{(\ln K)^2}\cdot\frac{1}{K}}=\lim_{k\to\infty}\frac{(\ln K)^2}{K+1},$$

这是∞/∞型的不定式，再用罗毕达法则，

$$\ln l_1=\lim_{k\to\infty}\frac{(2\ln K)\cdot\frac{1}{K}}{1}=\lim_{k\to\infty}\frac{2\ln K}{K},$$

再用罗毕达法则，

$$\ln l_1 = \lim_{k\to\infty} \frac{2\cdot\frac{1}{K}}{1} = 0,$$

因而

$$l_1 = 1,$$

同理，

$$\ln l_2 = \lim_{k\to\infty}\left[\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)\cdot\ln(K+1)\right]$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{K}\right)}{\frac{1}{\ln(K+1)}},$$

用罗毕达法则，

$$\ln l_2 = \lim_{k\to\infty}\frac{\frac{1}{1+1/K}\left(-\frac{1}{K^2}\right)}{-\frac{1}{[\ln(K+1)]^2}\cdot\frac{1}{K+1}}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{[\ln(K+1)]^2}{K}\cdot\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{K}\right)$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{[\ln(K+1)]^2}{K},$$

用罗毕达法则，

$$\ln l_2 = \lim_{k\to\infty}\frac{\left[2\ln(K+1)\right]\frac{1}{K+1}}{1}$$

$$= \lim_{k\to\infty}\frac{2\ln(K+1)}{K+1},$$

再用罗毕达法则，

$$\ln l_2 = \lim_{k\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{K+1}}{1} = 0,$$

因而 $$l_2 = 1,$$

结果，收敛半径

$$R=\frac{1}{l_1 l_2}=1,$$

所以收敛圆为$|z_1-2|=1$.

（3）$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\frac{z}{K}\right)^k$.

解一：收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\frac{1}{K^k}}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\sqrt[k]{K^k}$$

$$=\lim_{k\to\infty}K=\infty.$$

解二：收敛半径为

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{K^{-k}}{(K+1)^{-(K+1)}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{(K+1)^{k+1}}{K^k}\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{1}{K^k}\left[K^{k+1}+(K+1)K^k+\cdots\cdots\right]\right|$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left|K+(K+1)+\cdots\cdots\right|=\infty,$$

或

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{\left(\frac{1}{K}\right)^k}}=\lim_{k\to\infty}K=\infty,$$

所以只要z是有限的，此幂级数就收敛，收敛圆$|z|=R<\infty$。

（4）$\sum\limits_{k=1}^{\infty}K!\left(\frac{Z}{K}\right)^k$.

解：收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\left[\frac{K!}{(K+1)!}\cdot\frac{(K+1)^{k+1}}{K^k}\right]=\lim_{k\to\infty}\left(\frac{1}{K+1}\cdot\right.$$

$$=\frac{(K+1)^{k+1}}{K^{k}}\Bigg]=\lim_{k\to\infty}\frac{(K+1)^{k}}{K^{k}}$$

$$=\lim_{k\to\infty}\left(1+\frac{1}{K}\right)^{k}=e,$$

所以收敛圆是$|z|=e$。

(5) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}K^{k}(z-3)^{k}$.

解一：收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{K^{k}}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{K}=0.$$

解二：收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{K^{k}}{(K+1)^{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\left[K+(K+1)+\cdots\cdots\right]^{-1}\right|$$

$$=0,$$

所以收敛圆为$|z-3|=0$，只要$z\neq 3$，此幂级数就发散。

4.已知幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$和$\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kz^k$的收敛半径分别为$R_1=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\right|$$\left(\text{或}R_1=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k|}}\right)$和$R_2=\lim\limits_{k\to\infty}\left|\frac{b_k}{b_{k+1}}\right|$$\left(\text{或}R_2=\lim\limits_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|b_k|}}\right)$，求下列幂级数的收敛半径。

(1) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)z^k$.

解一：如果$R_1\leqslant R_2$，则在圆$|z|=R_1$的内部，幂级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty}a_kz^k$和$\sum\limits_{k=0}^{\infty}b_kz^k$都绝对收敛，从而$\sum\limits_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)z^k$必是绝对收敛的。所以该幂级数的收敛半径不小于$R_1$和$R_2$中的较小者。

解二：记 $|a_k|$ 和 $|b_k|$ 中的较大者为 A_k，则 $\sum_{k=0}^{\infty}(a_k+b_k)z^k$ 的收敛半径

$$R=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{|a_k+b_k|}}=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k+b_k|}}$$

$$\geqslant\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{|a_k|+|b_k|}}\geqslant\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{A_k+A_k}}$$

$$=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{2}\sqrt[k]{A_k}}=\frac{1}{\lim\limits_{k\to\infty}\sqrt[k]{A_k}}=\lim_{k\to\infty}\frac{1}{\sqrt[k]{A_k}}$$

$$=\min(R_1,\ R_2).$$

（2）$\sum_{k=0}^{\infty}(a_k-b_k)z^k$.

解：方法及结论同于上题.

（3）$\sum_{k=0}^{\infty}a_kb_kz^k$.

解：$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_kb_k}{a_{k+1}b_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k}{a_{k+1}}\cdot\frac{b_k}{b_{k+1}}\right|$$

$$=R_1R_2.$$

（4）$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a_k}{b_k}z^k$ $(b^k\neq 0)$.

解：

$$R=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k/b_k}{a_{k+1}/b_{k+1}}\right|=\lim_{k\to\infty}\left|\frac{a_k/a_{k+1}}{b_k/b_{k+1}}\right|=\frac{R_1}{R_2}.$$

§12. 泰 勒 级 数

在指定的点 z_0 的邻域上把下列函数展开为泰勒级数.

（1） $\operatorname{arctg}z$在$z_0=0$。

解一：按照公式$f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(z_0)}{K!}(z-z_0)^k$求解，令$f(z)=\operatorname{arctg}z$，则

$$f(z)=\operatorname{arctg}z,\quad f(0)\text{的主值}=0;$$

$$f'(z)=\frac{1}{1+z^2},\qquad f'(0)=1;$$

$$f''(z)=\frac{-2z}{(1+z^2)^2},\qquad f''(0)=0;$$

$$f'''(z)=\frac{6z^2-2}{(1+z^2)^3},\qquad f'''(0)=-2;$$

$$f^{(4)}(z)=\frac{24(z-z^3)}{(1+z^2)^4},\qquad f^{(4)}(0)=0;$$

$$\cdots\cdots,\qquad\qquad \cdots\cdots.$$

所以 $f(z)=z-\frac{1}{3}z^3+\frac{1}{5}z^5-\frac{1}{7}z^7+\cdots\cdots,(|z|<1)$.

解二：已知函数$\frac{1}{1+z^2}$的泰勒级数是

$$\frac{1}{1+z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k z^{2k},\quad(|z|<1),$$

对该级数逐项积分并不改变收敛半径，所以

$$\operatorname{arctg}z=\int\frac{1}{1+z^2}dz=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\int z^{2k}dz$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2K+1}z^{2k+1}=z-\frac{1}{3}z^3$$

$$+\frac{1}{5}z^5-\frac{1}{7}z^7+\cdots\cdots(|z|<1).$$

（2）$\sqrt[3]{z}$在$z_0=i$。

解一：因为

$$f(z)=z^{1/3}, \qquad f(i)=i^{1/3},$$

$$f'(z)=\frac{1}{3z}z^{1/3}, \quad f'(i)=\frac{1}{3i}i^{1/3},$$

$$f''(z)=-\frac{2}{3^2z^2}z^{1/3}, f''(i)=-\frac{1\cdot 2}{3^2i^2}i^{1/3},$$

$$f'''(z)=\frac{2\cdot 5}{3^3z^3}z^{1/3}, \quad f'''(i)=\frac{2\cdot 5}{3^3i^3}i^{1/3},$$

$$\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots.$$

故其泰勒级数为

$$f(z)=\sqrt[3]{i}\left\{1+\frac{1}{1!\,i}\cdot\frac{1}{3}(z-i)\right.$$

$$-\frac{1}{2!\,i^2}\cdot\frac{1\cdot 2}{3^2}(z-i)^2$$

$$\left.+\frac{1}{3!\,i^3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3^3}(z-i)^3-\cdots\cdots\right\}$$

$$(|z|<1).$$

解二：根据二项式定理，对于非整数K，有

$$(a+z)^K=a^K\left\{1+\frac{K}{1!\,a}z+\frac{K(K-1)}{2!\,a^2}+\cdots\cdots\right.$$

$$\left.+\frac{K(K-1)\cdots\cdots(K-m+1)}{m!\,a^m}z^m+\cdots\cdots\right\}.$$

所以$\sqrt[3]{z}=[i+(z-i)]^{1/3}$可展开为泰勒级数

$$f(z)=[i+(z-i)]^{1/3}$$

$$=\sqrt[3]{i}\left\{1+\frac{1}{1!\,i}\cdot\frac{1}{3}(z-i)\right.$$

$$-\frac{1}{2!\,i^2}\cdot\frac{1\cdot 2}{3^2}(z-i)^2$$

$$+\frac{1}{3!i^3}\ \frac{2\cdot5}{3^3}(z-i)^3-\cdots\cdots\ \Big\}\quad (|z|<1).$$

（3）$\ln z$在$z_0=i$.

解：因为

$$f(z)=\ln z,\qquad f(i)=\ln i;$$

$$f'(z)=\frac{1}{z},\qquad f'(i)=\frac{1}{i};$$

$$f''(z)=-\frac{1}{z^2},\qquad f''(i)=-\frac{1}{i^2};$$

$$f'''(z)=\frac{2!}{z^3},\qquad f'''(i)=\frac{2!}{i^3};$$

$$\cdots\cdots,\qquad\qquad \cdots\cdots.$$

故其泰勒级数为

$$f(z)=\ln i+\frac{1}{i}(z-i)-\frac{1}{2i^2}(z-i)^2$$

$$+\frac{1}{3i^3}(z-i)^3+\cdots\cdots.$$

（4）$\sqrt[m]{z}$在$z_0=1$.

解一：因为

$$f(z)=z^{1/m},\qquad f(1)\text{的主值}=1;$$

$$f'(z)=\frac{1}{m}z^{\frac{1}{m}-1},\quad f'(1)=\frac{1}{m};$$

$$f''(z)=\frac{1-m}{m^2}z^{\frac{1}{m}-2},\quad f''(1)=\frac{1-m}{m^2};$$

$$f'''(z)=\frac{(1-m)(1-2m)}{m^3}z^{\frac{1}{m}-3},$$

$$f'''(1)=\frac{(1-m)(1-2m)}{m^3};$$

$$\cdots\cdots,\qquad\qquad \cdots\cdots.$$

故其泰勒级数为

$$f(z)=1+\frac{1}{m}(z-1)+\frac{1-m}{2!m^2}(z-1)^2+\frac{(1-m)(1-2m)}{3!m^3}(z-1)^3+\cdots\cdots$$

解二：注意到$\sqrt[m]{z}=[1+(z-1)]^{1/m}$，则根据二项式定理也可求出上述的答案。

(5) $e^{1/(1-z)}$ 在$z_0=0$。

解一：因为

$$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}, \qquad f(0)=e;$$

$$f'(z)=e^{\frac{1}{1-z}}(1-z)^{-2}, \qquad f'(0)=e;$$

$$f''(z)=e^{\frac{1}{1-z}}[(1-z)^{-2}\cdot(1-z)^{-2}+2(1-z)^{-3}],$$

$$f''(0)=3e;$$

$$f'''(z)=e^{\frac{1}{1-z}}[(1-z)^{-6}+2(1-z)^{-5}+4(1-z)^{-5}+6(1-z)^{-4}], \quad f'''(0)=13e;$$

$$\cdots\cdots, \qquad \cdots\cdots.$$

故其泰勒级数为

$$f(z)=e\left(1+z+\frac{3}{2!}z^2+\frac{13}{3!}z^3+\cdots\cdots\right).$$

解二：注意到几何级数$\frac{1}{1-z}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k$ $(|z|<1)$，则

$$e^{\frac{1}{1-z}}=e^{1+\frac{z}{1-z}}=e\cdot e^{\frac{z}{1-z}}$$

$$=e\left[1+\frac{z}{1-z}+\frac{1}{2!}\left(\frac{z}{1-z}\right)^2+\cdots\cdots\right]$$

$$=e\left[1+(z+z^2+z^3+\cdots\cdots)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{2!}(z+z^2+z^3+\cdots\cdots)^2+\cdots\cdots\right]$$

$$=e\left[1+z+\left(1+\frac{1}{2}\right)z^2+\left(1+\frac{2}{2!}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{3!}\right)z^3+\cdots\cdots\right]$$

$$=e\left(1+z+\frac{3}{2}z^2+\frac{13}{6}z^3+\cdots\cdots\right),$$

$$(|z|<1).$$

(6) $\ln(1+e^z)$在$z_0=0$.

解： 因为

$f(z)=\ln(1+e^z)$, $\qquad f(0)=\ln z$

$f'(z)=e^z/(1+e^z)$, $\qquad f'(0)=\frac{1}{2}$;

$f''(z)=e^z/(1+e^z)^2$, $\qquad f''(0)=\frac{1}{4}$;

$f'''(z)=\frac{-2e^{2z}}{(1+e^z)^3}+\frac{e^z}{(1+e^z)^2}$, $\qquad f'''(0)=0$;

$\cdots\cdots$, $\qquad \cdots\cdots$.

故其泰勒级数为

$$f(z)=\ln 2+\frac{1}{1!2}z+\frac{1}{2!4}z^3-\frac{1}{4!8}z^4+\cdots\cdots.$$

(7) $(1+z)^{1/2}$在$z_0=0$.

解一： 因为

$f(z)=(1+z)^{1/2}$, $\qquad f(0)=e$,

$$f'(z)=\frac{z/(1+z)-\ln(1+z)}{z^2}e^{\frac{1}{z}\ln(1+z)},$$

$$f'(0)=-\frac{e}{2}\text{（用罗毕达法则），}$$

$$f''(z)=\left\{\left[\frac{z/(1+z)-\ln(1+z)}{z^2}\right]^2+\frac{z^2/(1+z^2)-2z/(1+z)+2\ln(1+z)}{z^3}\right\}$$

$$e^{\frac{1}{z}\ln(1+z)}.$$

也用罗毕达法则求出$f''(0)=\frac{11}{12}e$，

……，　　　　　　　　……。

所以其泰勒级数为

$$f(z)=e\left(1-\frac{z}{2}+\frac{11}{24}z^2+\cdots\cdots\right).$$

解二：注意到$\ln(1+z)$的泰勒展式是

$$\ln(1+z)=z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots\cdots$$

$$(|z|<1),$$

以及e^z的泰勒级数是

$$e^z=1+z+\frac{1}{2!}z^2+\frac{1}{3!}z^3+\cdots\cdots\qquad(|z|<\infty).$$

则　$$f(z)=(1+z)^{1/z}=e^{\frac{1}{z}\ln(1+z)}$$

$$=e^{\frac{1}{z}\left(z-\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{3}z^3-\frac{1}{4}z^4+\cdots\cdots\right)}$$

$$=e^{1-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{4}z^3+\cdots\cdots}$$

$$=e\cdot e^{-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{4}z^3+\cdots\cdots}$$

$$=e\left\{1+\left(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{4}z^3+\cdots\cdots\right)\right.$$

$$+\frac{1}{2!}\left(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{4}z^3+\cdots\cdots\right)$$

$$\left.+\frac{1}{3!}\left(-\frac{1}{2}z+\frac{1}{3}z^2+\frac{1}{4}z^3+\cdots\cdots\right)^3+\cdots\cdots\right\}$$

$$=e\left(1-\frac{z}{2}+\frac{11}{24}z^2+\cdots\cdots\right).$$

显然，其收敛半径$R=1$.值得注意的是这个级数在函数$(1+z)^{1/z}$的奇点$z=0$处也收敛；在这种情况下，我们不妨重新定义一个函数

$$f(z)=\begin{cases}(1+z)^{1/z}, & (z\neq 0),\\ \lim\limits_{z\to 0}(1+z)^{1/z}=e, & (z=0).\end{cases}$$

它在整个开平面上是解析的，所以函数$f(z)$可在$z=0$处展开为泰勒级数。显然，$z=0$作为奇点是可去奇点。

（8）$\sin^2 z$和$\cos^2 z$在$z_0=0$.

解一：因为

$$\begin{aligned}
&f(z)=\sin^2 z, && f(0)=0;\\
&f'(z)=2\sin z\cos z=\sin 2z, && f'(0)=0;\\
&f''(z)=2\cos 2z, && f''(0)=2^1;\\
&f'''(z)=-4\sin 2z, && f'''(0)=0;\\
&f^{(4)}(z)=-8\cos 2z, && f^{(4)}(0)=-2^3;\\
&\cdots\cdots, && \cdots\cdots.
\end{aligned}$$

故其泰勒级数为

$$f(z)=\frac{2}{2!}z^2-\frac{2^3}{4!}z^4+\frac{2^5}{6!}z^6-\cdots\cdots$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2z)^{2k}}{(2K)!}.$$

解二：若已知$\sin z = z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 - \cdots\cdots$且在收敛域内绝对收敛，则可逐项相乘，即

$$\sin^2 z = z^2 - \frac{2}{3!}z^4 + \frac{1}{(3!)^2}z^6 + \frac{2}{5!}z^6 - \cdots\cdots$$

$$= z^2 - \frac{1}{3}z^4 + \frac{2}{45}z^6 - \cdots\cdots$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{(2z)^{2k}}{(2K)!}.$$

可用类似于上述的两种解法 把$\cos^2 z$展开，此外，还可把$\cos^2 z$用下法展开为泰勒级数

$$f(z) = \cos^2 z = 1 - \sin^2 z$$

$$= 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(2z)^{2k}}{(2K)!}.$$

§14. 罗 朗 级 数

在挖去奇点z_0的环域上或指定的环域上把下列函数展开为罗朗级数.

（1）$z^5 e^{1/z}$在$z_0 = 0$.

解：由$e^t = 1 + t + \frac{1}{2!}t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}t^n + \cdots (|t| < \infty)$知

$$e^{1/z} = 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{2!}\frac{1}{z^2} + \cdots + \frac{1}{n!}\left(\frac{1}{z}\right)^n + \cdots (0 < |z|),\text{所以}$$

$$f(z) = z^5 e^{1/z} = z^5 + z^4 + \frac{1}{2!}z^3 + \frac{1}{3!}z^2 + \cdots + \frac{1}{n!}z^{5-n} + \cdots (0 < |z|).$$

（2）$\frac{1}{z^2(z-1)}$在$z_0 = 1$.

解一：因为 $\dfrac{1}{z^2(z-1)}=\dfrac{1}{z-1}\dfrac{1}{[1-(1-z)]^2}$,

并注意到当$|t|<1$时，

$$\frac{1}{(1-t)^2}=\frac{d}{dt}\frac{1}{1-t}=\frac{d}{dt}\sum_{k=0}^{\infty}t^K=\sum_{k=1}^{\infty}Kt^{K-1},$$

所以，当$0<|z-1|<1$时，有

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}\sum_{K=1}^{\infty}K(1-z)^{K-1}$$

$$=\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^{K-1}K(z-1)^{K-2}$$

亦即

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^{K+1}(K+2)(z-1)^K,$$

$(0<|z-1|<1)$。

解二：还可把原式表为

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{z+1}{z^2}=\frac{1}{z-1}-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}\right),$$

注意到 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{1+(z-1)}=\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^K(z-1)^K,(|z-1|<1)$,

及 $-\dfrac{1}{z^2}=\left(\dfrac{1}{z}\right)=\displaystyle\sum_{K=1}^{\infty}(-1)^Kn(z-1)^{K-1}$

$$=\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^{K+1}(K+1)(z-1)^K,$$

则 $-\dfrac{1}{z}-\dfrac{1}{z^2}=\displaystyle\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^{K+1}(K+2)(z-1)^K$,

所以，$\dfrac{1}{z^2(z-1)}=(z-1)^{-1}+\displaystyle\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^{K+1}(K+2)(z-1)^K$

$$=\sum_{K=-1}^{\infty}(-1)^{K+1}(K+2)(z-1)^K \quad (0<|z-1|<1).$$

解三：注意到函数$\frac{1}{z^2}$在$z_0=1$处解析，故可把$\frac{1}{z^2}$在$z_0=1$处作泰勒展开，

$$\frac{1}{z^2}=\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^K(K+1)(z-1)^K,\quad (|z-1|<1),$$

所以

$$\frac{1}{z^2(z-1)}=\sum_{K=0}^{\infty}(-1)^K(K+1)(z-1)^{K-1}$$

$$=\sum_{K=-1}^{\infty}(-1)^{K+1}(K+2)(z-1)^K,$$

$$(0<|z-1|<1).$$

还有其它的解法，不再一一列举．以下各题我们也将只写出一种解法．

（3）$\frac{1}{z(z-1)}$在$z_0=0$，在$z_0=1$．

解：因为$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}$．

(i) 注意到在$z_0=0$处$\frac{1}{z-1}$解析，可展开为泰勒级数，$\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{1-z}=-\sum_{k=0}^{\infty}z^k$，所以

在$z_0=0$：$\frac{1}{z(z-1)}=-\frac{1}{z}+\frac{1}{z-1}=-\frac{1}{z}-\sum_{k=0}^{\infty}z^k=-\sum_{k=-1}^{\infty}z^k$，$(0<|z|<1)$．

(ii) 注意到在$z_0=1$处$\frac{1}{z}$解析，可展开为泰勒级数，

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{(z-1)+1}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k,\text{所以}$$

在$z_0=1$：$\frac{1}{z(z-1)}=\frac{1}{z-1}-\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(z-1)^k$

$$=\sum_{k=-1}^{\infty}(-1)^{k+1}(z-1)^k,(0<|z-1|<1).$$

（4）$e^{1/(1-z)}$在$|z|>1$。

解：因为$|z|>1$，所以$\left|\frac{1}{z}\right|<1$，则

$$\frac{1}{1-z}=\frac{-1}{z\left(1-\frac{1}{z}\right)}=-\frac{1}{z}\left(1+\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\cdots\right)$$

$$=-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right).$$

从而可得

$$e^{\frac{1}{1-z}}=1-\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)+\frac{1}{2!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^2$$

$$-\frac{1}{3!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^3$$

$$+\frac{1}{4!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^4-\frac{1}{5!}\left(\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\cdots\right)^5$$

$$+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{z}-\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}-\frac{19}{120z^5}+\cdots,$$

$(|z|>1)$.

（5）$\frac{1}{(z-2)(z-3)}$在$|z|>3$。

解：因为$\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\frac{z-2-(z-3)}{(z-2)(z-3)}=\frac{1}{z-3}-\frac{1}{z-2}$

$$=\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{3}{z}}-\frac{1}{z}\frac{1}{1-\frac{2}{z}},$$

并注意到当$|z|>3$时，有

$$\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{3^k}{z^{k+1}}=\sum_{k=-\infty}^{-1}3^{-(k+1)}z^k,$$

以及$\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right)=\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{-(k+1)}z^k$，

所以

$$\frac{1}{(z-2)(z-3)}=\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[3^{-(k+1)}-2^{-(k+1)}\right]z^k\ (|z|>3).$$

（6）$\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}$在$R<|z|<\infty$（$R$很大）.

解：原式$=\frac{\left(1-\frac{1}{z}\right)\left(1-2\frac{1}{z}\right)}{\left(1-3\frac{1}{z}\right)\left(1-4\frac{1}{z}\right)}=1+\frac{6\frac{1}{z}}{1-4\frac{1}{z}}-\frac{2\frac{1}{z}}{1-3\frac{1}{z}},$

注意到 $\frac{6\frac{1}{z}}{1-4\frac{1}{z}}=6\cdot\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{4}{z}\right)^k=6\sum_{k=-\infty}^{-1}4^{-(k+1)}z^k$

及 $2\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{3}{z}}=2\sum_{k=-\infty}^{-1}3^{-(k+1)}z^k=2\sum_{k=-\infty}^{-1}3^{-(k+1)}z^k,$

所以 $\frac{(z-1)(z-2)}{(z-3)(z-4)}=1+\sum_{k=-\infty}^{-1}\left[6\cdot4^{-(k+1)}-2\cdot3^{-(k+1)}\right]z^k,$

$(|z|>4)$.

（7）$\frac{1}{z^2-3z+2}$在$1<|z|<2$.

解：原式又 $=\dfrac{1}{(z-1)(z-2)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}$，

而 $\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{z}{2}}=-\dfrac{1}{2}\left[1+\dfrac{z}{2}+\left(\dfrac{z}{2}\right)^2+\left(\dfrac{z}{2}\right)^3+\cdots\right]$，

$$\left(\left|\frac{z}{2}\right|<1,|z|<2\right),$$

$$\frac{-1}{z-1}=-\frac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}=-\frac{1}{z}\left[1+\frac{1}{z}+\left(\frac{1}{z}\right)^2+\left(\frac{1}{z}\right)^3+\cdots\right]$$

$$=-\left[\frac{1}{z}+\frac{1}{z^2}+\frac{1}{z^3}+\frac{1}{z^4}+\cdots\right],\ \left(\left|\frac{1}{z}\right|<1,|z|>1\right)$$

所以 $\dfrac{1}{z^2-3z+2}=-\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^k-\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}z^k$，$(1<|z|<2)$，

即 $\dfrac{1}{z^2-3z+2}=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{z^k}{2^{k+1}}-\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}z^k$，　$(1<|z|<2)$。

（8）$\dfrac{1}{z^2-3z+2}$ 在 $2<|z|<\infty$。

解：原式 $=\dfrac{1}{(z-2)(z-1)}=\dfrac{1}{z-2}-\dfrac{1}{z-1}=\dfrac{\frac{1}{z}}{1-\frac{2}{z}}-\dfrac{\frac{1}{z}}{1-\frac{1}{z}}$

而 $\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}}=\dfrac{1}{z}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^k=\sum\limits_{k=0}^{\infty}2^k z^{-(k+1)}$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{-(k+1)}z^k,\ (|z|>2),$$

$$-\frac{1}{z}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=-\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^{k+1}=-\sum_{k=-\infty}^{-1}z^k,$$

所以 $\dfrac{1}{z^2-3z+2} = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1}(2^{-(k+1)}-1)z^k, (2<|z|<\infty)$.

（9）e^z/z在奇点。

解：奇点为$z=0$，而e^z在$z=0$解析，故可作泰勒展开，所以

$$\frac{1}{z}e^z = \frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{K!}z^K = \sum_{k=-1}^{\infty}\frac{1}{(K+1)!}z^k$$

$$=\frac{1}{z}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{K!}z^{k-1}, (0<|z|<\infty).$$

（10）$(1-\cos z)/z$在奇点。

解：奇点为$z=0$，因为$\lim\limits_{z\to 0}\dfrac{1-\cos z}{z}=0$，故该奇点为可去奇点。所以

$$\frac{1-\cos z}{z}=\frac{1}{z}-\frac{\cos z}{z}=\frac{1}{z}-\frac{1}{z}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2K)!}z^{2k}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{1}{(2K)!}z^{2k-1} (|z|<\infty).$$

（11）$\sin\dfrac{1}{z}$在奇点。

解：$z=0$为函数的奇点，所以

$$\sin\frac{1}{z}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2K+1)!}\left(\frac{1}{z}\right)^{2k+1}, (0<|z|<\infty).$$

（12）$\operatorname{ctg} z$在奇点。

解：在半径可以任意小的内圆中只有一个奇点$z=0$。离$z=0$最近的另一个奇点是$z=\pi$，故可在$0<|z|<\pi$上展开。

解一：$f(z)=\operatorname{ctg} z=\dfrac{1}{\operatorname{tg} z}$。先求$\operatorname{tg} z$，用待定系数法求

$\text{tg}z_\Delta$在$z_\Delta=0$的邻域里的泰勒级数。

$$\text{设tg}z_\Delta=\sum_{l=0}^{\infty}be z_\Delta^{2l+1}$$

$$\sin z_\Delta=z_\Delta-\frac{z_\Delta^3}{3!}+\frac{z_\Delta^5}{5!}-\frac{z_\Delta^7}{7!}+\cdots+(-1)^n\frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{z_\Delta^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos z_\Delta=1-\frac{z_\Delta^2}{2!}+\frac{z_\Delta^4}{4!}+\frac{z_\Delta^6}{6!}+\cdots+(-1)^k\frac{z_\Delta{}^{2k}}{(2K)!}+\cdots$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{z_\Delta^{2k}}{(2K)!},$$

$$\text{则}\quad\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n z_\Delta^{2n+1}}{(2n+1)!}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k z^{2k}}{(2K)!}\cdot\sum_{l=0}^{\infty}b_l\,z_\Delta^{2l+1}$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}z_\Delta^{2n+1}\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^{n-l}b_l}{(2n-2l)!}.$$

根据展开的唯一性（这里是$\sin z_\Delta$），两边级数中z_Δ^{2n+1}（$n=0$，1,2,…）的系数应相等，

$$\therefore\quad\sum_{l=0}^{n}\frac{(-1)^l b_l}{(2n-2l)!}=\frac{1}{(2n+1)!}$$

这是系数b_l之间的递推关系，可以据此推出这些系数，前几个是：

$n=0$， $b_0=1$；

$n=1$， $\frac{1}{2!}b_0-b_1=\frac{1}{3!}$， $b_1=\frac{1}{3}$；

$n=2$， $\frac{1}{4!}b_0-\frac{1}{2!}b_1+b_2=\frac{1}{5!}$，$b_2=\frac{2}{15}$；

$n=3$， $\frac{1}{6!}b_0-\frac{1}{4!}b_1+\frac{1}{2!}b_2-b_3=\frac{1}{7!}$， $b_3=\frac{17}{315}$；

……， ……。

$$\therefore \quad \operatorname{tg} z_\Delta = z_\Delta + \frac{1}{3} z_\Delta^3 + \frac{2}{15} z_\Delta^5 + \frac{17}{315} z_\Delta^7 + \cdots, \quad \left(|z_\Delta| < \frac{\pi}{2}\right).$$

下面再回到求$\operatorname{ctg} z_\Delta$：

$$\operatorname{ctg} z_\Delta = \frac{1}{\operatorname{tg} z_\Delta} = \left(z_\Delta + \frac{1}{3} z_\Delta^3 + \frac{2}{15} z_\Delta^5 + \frac{17}{315} z_\Delta^7 + \cdots\right)^{-1}$$

$$= \frac{1}{z_\Delta}\left(1 + \frac{1}{3} z_\Delta^2 + \frac{2}{15} z_\Delta^4 + \frac{17}{315} z_\Delta^6 + \cdots\right)^{-1},$$

注意到$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \cdots$，$|x| < 1$，

$$\operatorname{ctg} z_\Delta = \frac{1}{z_\Delta}\left\{1 - \left(\frac{1}{3} z_\Delta^2 + \frac{2}{15} z_\Delta^4 + \frac{17}{315} z_\Delta^6 + \cdots\right)\right.$$

$$+ \left(\frac{1}{3} z_\Delta^2 + \frac{2}{15} z_\Delta^4 + \frac{17}{315} z_\Delta^6 + \cdots\right)^2$$

$$\left. - \left(\frac{1}{3} z_\Delta^2 + \frac{2}{15} z_\Delta^4 + \frac{17}{315} z_\Delta^6 + \cdots\right)^3 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{1}{z_\Delta} - \frac{1}{3} z_\Delta - \frac{1}{45} z_\Delta^3 - \frac{2}{945} z_\Delta^5 - \frac{1}{4725} z_\Delta^7 - \cdots,$$

$(0 < |\dot{z}| < \pi)$。

解法二：直接用待定系数法求 $\operatorname{tg} z_\Delta$在 $z_\Delta = 0$ 的邻域内的罗朗级数。

设$\operatorname{ctg} z = \frac{1}{z_\Delta} \sum_{l=0}^{\infty} b_l z_\Delta^{2l}$再结合$\sin z$和$\cos z$的展开式得：

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z_\Delta^{2n}}{(2n)!} = \frac{1}{z_\Delta} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k z_\Delta^{2k+1}}{(2K+1)!} \cdot \sum_{l=0}^{\infty} b l z^{2l}$$

$$= \frac{1}{z} \sum_{n=0}^{\infty} z_\Delta^{2n} \sum_{l=0}^{n} \frac{(-1)^{n-l} b l}{(2n-2l+1)!},$$

根据展开的唯一性，得系数b_l之间的递推关系式：

$\sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l b l}{(2n-2l+1)!} = \frac{1}{(2n)!}$前几个系数是：

$n = 0$，$b_0 = 1$；

$n=1$, $\frac{b_0}{3!}-b_1=\frac{1}{2!}$, $b_1=-\frac{1}{3}$;

$n=2$, $\frac{b_0}{5!}-\frac{b_1}{3!}+b_2=\frac{1}{4!}$, $b_2=-\frac{1}{45}$;

$n=3$, $\frac{b_0}{7!}-\frac{b_1}{5!}+\frac{b_2}{3!}-b_3=\frac{1}{6!}$, $b_3=-\frac{2}{945}$;

……, ……。

$$\therefore \quad \operatorname{ctg} z=\frac{1}{z}\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{2n}$$

$$=\frac{1}{z}\left(1-\frac{1}{3}z^2-\frac{1}{45}z^4-\frac{2}{945}z^6-\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{z}-\frac{1}{3}z-\frac{1}{45}z^3-\frac{2}{945}z^5-\cdots,\ (0<|z|<\pi)。$$

(13) $\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}$ 在$|z|<1$，在$1<|z|<2$，

在$2<|z|$。

解：把原式分解为三项，并在不同的区域作泰勒展开，

即
$$\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{2(-1)-(z-2)}{(z-1)(z-2)^2}$$

$$=\frac{2}{(z-2)^2}-\frac{1}{(z-1)(z-2)}$$

$$=\frac{2}{(z-2)^2}+\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z-2},$$

各自展开为：

$$\begin{cases}\dfrac{2}{(z-2)^2}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\left(1-\frac{z}{2}\right)^2}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^k(K+1), & (1)\\ \left(\left|\dfrac{z}{2}\right|<1\text{ 即}|z|<2\right), \\ \dfrac{2}{(z-2)^2}=\dfrac{2\frac{1}{z^2}}{\left(1-\frac{2}{z}\right)^2}=2\sum\limits_{k=0}^{\infty}(K+1)\left(\dfrac{2}{z}\right)^k\dfrac{1}{z^2}\end{cases}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-2}-(K+1)2^{-(k+1)}z^k,$$

$$\left(\left|\frac{2}{z}\right|<1\text{ 即}|z|>2\right); \qquad (2)$$

$$\begin{cases}\dfrac{1}{z-1}=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}z^k(|z|<1), & (3)\\ \dfrac{1}{z-1}=\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\frac{1}{z}}=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{k+1}}=\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}z^k,\ (|z|>1), \end{cases}$$

$$(4)$$

$$\begin{cases}-\dfrac{1}{z-2}=\dfrac{1}{2}\dfrac{1}{1-\frac{z}{2}}=\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^k,\ (|z|<2), & (5)\\ -\dfrac{1}{z-2}=-\dfrac{1}{z}\dfrac{1}{1-\frac{2}{z}}=-\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{2^k}{z^{k+1}} \\ \qquad=-\sum\limits_{k=-\infty}^{-1}2^{-(1+k)}z^k,\ (|z|>2). & (6)\end{cases}$$

所以，(i)在$|z|<1$时，由(1)(3)(5)可得罗朗级数

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)^2}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k(K+1)-\sum_{k=0}^{\infty}z^k$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{K}{2}+1\right)-1\right]z^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{K+2}{2^{k+1}}-1\right)z^{k}.$$

其实这是泰勒级数.

(ii)在$1<|z|<2$时，由(1)(4)(5)可得罗朗级数

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)^{2}}=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{k}(K+1)+\sum_{k=-\infty}^{-1}z^{k}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^{k}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}z^{k}+\sum_{k=0}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k}\left(\frac{K}{2}+1\right)\right]z^{k}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-1}z^{k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{K+2}{2^{k+1}}z^{k}.$$

(iii)在$2<|z|$时，由(2)(4)(6)可得罗朗级数

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)^{2}}=\sum_{k=-\infty}^{-2}-(K+1)2^{-(k+1)}z^{k}$$

$$+\sum_{k=-\infty}^{-1}z^{k}-\sum_{k=-\infty}^{-1}2^{-(k+1)}z^{k}$$

$$=\sum_{k=-\infty}^{-2}\left(1-\frac{K+2}{2^{k+1}}\right)z^{k}.$$

(14) $z/(z-1)(z-2)$在$|z|<1$，在$1<|z|<2$，在$2<|z|$.

解：与上题类似，把原式分解为

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)}=\frac{2(z-1)-(z-2)}{(z-1)(z-2)}=\frac{2}{z-2}-\frac{1}{z-1}.$$

再把上式右边各项在不同的区域内泰勒展开为

$$\begin{cases} \dfrac{2}{z-2} = -\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{2}} = -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{z}{2}\right)^k \quad (|z|<2), & (1) \\ \dfrac{2}{z-2} = \dfrac{2}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{z}} = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\left(\dfrac{2}{z}\right)^{k+1} \\ \qquad = \sum\limits_{k=-\infty}^{-1}\left(\dfrac{z}{2}\right)^k \quad (|z|>2); & (2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{z-1} = \dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{k=0}^{\infty} z^k \quad (|z|<1), & (3) \\ -\dfrac{1}{z-1} = -\dfrac{1}{z}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{z}} = -\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{1}{z^{k+1}} \\ \qquad = -\sum\limits_{k=-\infty}^{-1} z^k \quad (|z|>1); & (4) \end{cases}$$

$\therefore$ (i) 在 $|z|<1$ 时，由(1)(3)式可得罗朗级数

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k + \sum_{k=0}^{\infty} z^k$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\left(1-\frac{1}{2^k}\right)z^k.$$

其实这是泰勒级数.

(ii) 在 $1<|z|<2$ 时，由(1)(4)可得罗朗级数

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = -\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{z}{2}\right)^k - \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k.$$

(iii) 在 $2<|z|$ 时，由(2)(4)可得罗朗级数

$$\frac{z}{(z-1)(z-2)} = \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{z}{2}\right)^k - \sum_{k=-\infty}^{-1} z^k$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{-1}\left(\frac{1}{2^k}-1\right)z^k.$$

(15) $\frac{1}{z^2(z^2-1)^2}$ 在 $0<|z|<1$．在 $1<|z|<\infty$.

解：可仿前两题的解法求解．这里我们用另法求解如下：

(i)在 $0<|z|<1$ 时，

$$\frac{1}{z^2(z^2-1)^2}=\frac{1}{z^2}\cdot\frac{1}{2z}\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)=\frac{1}{2z^3}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}z^{2k}$$

$$=\frac{1}{2z^3}\sum_{k=0}^{\infty}2Kz^{2k-1}=\sum_{k=-1}^{\infty}(K+2)z^{2k}.$$

(ii)在 $1<|z|<\infty$ 时，

$$\frac{1}{z^2(z^2-1)^2}=\frac{1}{z^6\left(1-\frac{1}{z^2}\right)^2}=\frac{1}{z^6}\left(\frac{-z^3}{2}\right)\frac{d}{dz}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z^2}}\right)$$

$$=-\frac{1}{2z^3}\frac{d}{dz}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z^2}\right)^k$$

$$=-\frac{1}{2z^3}\sum_{k=0}^{\infty}(-2K)\frac{1}{z^{2k+1}}$$

$$=-\sum_{k=-\infty}^{-2}(K+2)z^{2k}.$$

§15. 奇 点 分 类

设函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 分别以点 z_0 为 m 阶和 n 阶极点，问对于下列函数而言，z_0 是何种性质的点．

(1) $f(z)g(z)$.

解：$f(z)$ 和 $g(z)$ 可分别表为

$$f(z)=\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m},\quad g(z)=\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^n}.$$

其中$\phi(z)$和$\psi(z)$在$z=z_0$的邻域上是解析的，且$\phi(z_0)\neq 0$，$\psi(z_0)\neq 0$。于是

$$f(z)g(z)=\frac{\phi(z)\psi(z)}{(z-z_0)^m(z-z_0)^n}=\frac{\phi(z)\psi(z)}{(z-z_0)^{m+n}},$$

∴ z_0是$f(z)g(z)$的$(m+n)$阶极点。

（2）$f(z)/g(z)$。

解：分析同上题，这时有

$$\frac{f(z)}{g(z)}=\frac{\phi(z)/\psi(z)}{(z-z_0)^{m-n}}.$$

如$m>n$，则z_0是$f(z)/g(z)$的$(m-n)$阶极点；

如$m<n$，则z_0不是$f(z)/g(z)$的奇点。

（3）$f(z)+g(z)$。

解：分析同(1)题，这时有

$$f(z)+g(z)=\frac{\phi(z)}{(z-z_0)^m}+\frac{\psi(z)}{(z-z_0)^n}.$$

z_0是$f(z)+g(z)$的极点，其阶数为m和n中较大的一个，如$m=n$，则极点的阶数可能$<m$。

第四章　留 数 定 理

§16. 留 数 定 理

1. 确定下列函数的奇点，求出函数在各奇点的留数.

（1）$\dfrac{e^z}{1+z}$.

解：（i）因为$\lim\limits_{z\to-1}\left(\dfrac{e^z}{1+z}\right)=\infty$，所以$z_0=-1$是函数的极点. 又因$\lim\limits_{z\to-1}\left[(1+z)\left(\dfrac{e^z}{1+z}\right)\right]=\lim\limits_{z\to-1}e^z=\dfrac{1}{e}$，这是非零有限值，所以$z_0=-1$是函数的一阶极点（或称单极点）；其留数就是$\dfrac{1}{e}$，即

$$\mathrm{Res}f(-1)=\frac{1}{e},$$

（ii）因为$\lim\limits_{z\to\infty}\left(\dfrac{e^z}{1+z}\right)$不存在，所以$z_0=\infty$是函数的本性奇点. 函数在全平面上只有这两个奇点，根据(16.7){全平面各留数之和}＝0，可求出函数在本性奇点$z_0=\infty$的留数.

$\mathrm{Res}f(\infty)=-\{f(z)$在所有（有限个）有限远奇点的留数之和$\}=-\mathrm{Res}f(-1)=-\dfrac{1}{e}$.

以下各题皆应如此分析，但限于篇幅，我们只给出简捷的步骤.

（2）$\dfrac{z}{(z-1)(z-2)^2}$.

解：（i）单极点$z_0=1$，

$$\operatorname{Res}f(1)=\lim_{z\to 1}\frac{z}{(z-2)^2}=1.$$

（ii）又二阶极点$z_0=2$，

$$\operatorname{Res}f(2)=\lim_{z\to 2}\frac{d}{dz}\left(\frac{z}{z-1}\right)$$

$$=\lim_{z\to 2}\left[\frac{1}{z-1}-\frac{z}{(z-2)^2}\right]=-1.$$

（3）e^z/z^2+a^2.

解：（i）单极点$z_0=ia$，

$$\operatorname{Res}f(ia)=\lim_{z\to ia}\left(\frac{e^z}{z+ia}\right)=\frac{e^{ia}}{2ia}.$$

（ii）单极点$z_0=-ia$，

$$\operatorname{Res}f(-ia)=\lim_{z\to -ia}\left(\frac{e^z}{z-ia}\right)=\frac{e^{-ia}}{-2ia}$$

$$=-\frac{e^{-ia}}{2ia}.$$

（iii）本性奇点$z_0=\infty$，

$$\operatorname{Res}f(\infty)=-[\operatorname{Res}f(ia)+\operatorname{Res}f(-ia)]$$

$$=\frac{e^{-ia}-e^{ia}}{2ia}=-\frac{\sin a}{a}.$$

（4）$e^{iz}/(z^2+a^2)$.

解：（i）单极点$z_0=ia$，

$$\operatorname{Res}f(ia)=\lim_{z\to ia}\left(\frac{e^{iz}}{z+ia}\right)=\frac{e^{-a}}{2ia}.$$

（ii）单极点$z_0=-ia$，

$$\operatorname{Res}f(-ia)=\lim_{z\to -ia}\left(\frac{e^{iz}}{z-ia}\right)=-\frac{e^{a}}{2ia}.$$

（iii）本性奇点$z_0=\infty$，

$$\mathrm{Res}f(\infty) = -[\mathrm{Res}f(ia) + \mathrm{Res}f(-ia)]$$
$$= \frac{e^a - e^{-a}}{2ia} = \frac{\mathrm{sh}\,a}{ia}.$$

（5） $ze^z/(z-a)^3$.

解：（i）三阶极点$z_0 = a$，

$$\mathrm{Res}f(a) = \lim_{z\to a}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}(ze^z) = \left(1+\frac{a}{2}\right)e^a.$$

（ii）本性奇点$z_0 = \infty$，

$$\mathrm{Res}f(\infty) = -\mathrm{Res}f(a) = -\left(1+\frac{a}{2}\right)e^a.$$

（6） $\dfrac{1}{z^3-z^5}$.

解： $$f(z) = \frac{1}{z^3-z^5} = \frac{1}{z^3(1-z^2)}.$$

（i）单极点$z_0 = 1$，

$$\mathrm{Res}f(1) = \lim_{z\to 1}\left[-\frac{1}{z^3(z+1)}\right] = -\frac{1}{2}.$$

（ii）单极点$z_0 = -1$，

$$\mathrm{Res}f(-1) = \lim_{z\to -1}\left[\frac{1}{z^3(1-z)}\right] = -\frac{1}{2}.$$

（iii）三阶极点$z_0 = 0$．

$$\mathrm{Res}f(0) = \lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\frac{d^2}{dz^2}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)$$
$$= \lim_{z\to 0}\frac{1}{2!}\left[\frac{2}{(1-z^2)^2} + \frac{8z^2}{(1-z^2)^3}\right] = 1$$

或由(16.7)得

$$\mathrm{Res}f(0) = -[\mathrm{Res}f(1) + \mathrm{Res}f(-1)] = 1.$$

（7） $\dfrac{z^2}{(z^2+1)^2}$.

解：（i）二阶极点$z_0 = i$，

$$\mathrm{Res}f(i)=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+i)^2}\right]=-\frac{i}{4}.$$

(ii) 二阶极点$z_0=-i$，

$$\mathrm{Res}f(-i)=-\mathrm{Res}f(i)=\frac{i}{4}.$$

(8) $z^{2n}/(z+1)^n$。

解：(i) n阶极点$z_0=-1$。

$$\mathrm{Res}f(-1)=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}(z+1)^nf(z)$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}\frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}z^{2n}$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}\lim_{z\to-1}[2n(2n-1)\cdots(2n-n+2)\times z^{2n-n+1}]$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2n(2n-1)\cdots(n+2)}{(n-1)!}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}.$$

(ii) n阶极点$z_0=\infty$，

$$\mathrm{Res}f(\infty)=-\mathrm{Res}f(-1)=(-1)^n\frac{(2n)!}{(n-1)!(n+1)!}.$$

(9) $e^{\frac{1}{1-z}}$.

解：本性奇点$z_0=1$。要求$f(z)=e^{\frac{1}{1-z}}$的留数，必须把$f(z)$进行罗朗展开（见§14习题(4)），

$$f(z)=1-\frac{1}{z}+\frac{1}{2z^2}-\frac{1}{6z^3}+\frac{1}{24z^4}+\cdots,$$

所以

$$\mathrm{Res}f(1)=-1.$$

(10) $\dfrac{1}{1+z^{2n}}$.

解：令原式分母 $1+z^{2n}=0$，$z^{2n}=-1$，

$$z^n=\pm i=e^{i(2k+1)\pi/2},$$

所以 $z_0=e^{i(2k+1)\pi/2n}$ $(k=0,1,2,\cdots 2n-1)$
为函数$f(z)$的单极点。

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\lim_{z\to z_0}[(z-e^{i(2k+1)\pi/2n})/(1+z^{2n})],$$

应用罗毕达法则，则

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\lim_{z\to z_0}[1/2nz^{2n-1}]=\frac{1}{2n}e^{-i\frac{(2n-1)(2k+1)}{2n}\pi}$$

$$=\frac{1}{2n}\cdot\frac{e^{i(2k+1)\pi/2n}}{e^{i(2k+1)\pi}}=-\frac{1}{2n}e^{i(2k+1)\pi/2n}.$$

2.计算下列回路积分。

(1) $\oint_l\dfrac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2}$ (l的方程是$x^2+y^2-2x-2y=0$)。

解：l的方程可化为：$(x-1)^2+(y-1)^2=(\sqrt{2})^2$如图4-1，在复平面上，它是一个以$(1,i)$为圆心、$\sqrt{2}$为半径的圆。

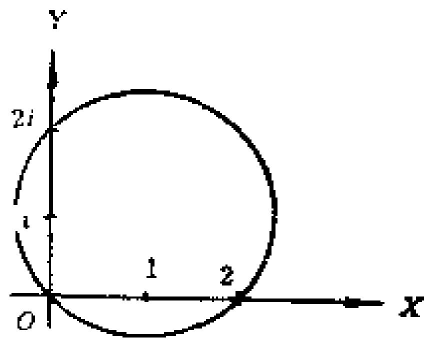


图 4-1

被积函数$f(z)=1/(z^2+1)(z-1)^2$，它有两个单极点$z_0=\pm i$，和一个二阶极点$z_0=1$，在这三个极点中，$z_0=-i$不在积分回路之内，只有极点$z_0=i$和$z_0=1$在积分回路之内，它们的留数分别为：

$$\operatorname{Res}f(i)=\lim_{z\to i}[1/(z+i)(1-z)^2]=\frac{1}{4},$$

$$\mathrm{Res}f(1) = \lim_{z\to 1}\frac{d}{dz}(1/1+z^2) = \lim_{z\to 1}[-2z/(1+z^2)^2]$$
$$= -1/2.$$

应用留数定理：

$$\oint_{l}\frac{dz}{(z^2+1)(z-1)^2} = 2\pi i[\mathrm{Res}f(i)+\mathrm{Res}f(1)]$$
$$= 2\pi i\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi i}{2}.$$

（2）$\oint_{|z|=1}\cos z dz/z^3$.

解：被积$f(z)=\cos z/z^3$的三阶极点$z_0=0$在单位圆内，其留数.

$$\mathrm{Res}f(0) = \frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}(\cos z) = -\frac{1}{2},$$

$$\therefore \oint_{|z|=1}\cos z dz/z^3 = 2\pi i\mathrm{Res}f(0) = -\pi i.$$

（3）$\oint_{|z|=2}e^{1/z^2}dz$.

解：被积函数的本性奇点$z_0=0$在积分回路之内，$\mathrm{Res}f(0)=0$，所以

$$\oint_{|z|=2}e^{1/z^2}dz = 0.$$

（4）$\oint_{|z|=2}\dfrac{zdz}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}$.

解：被积函数 $f(z)=\dfrac{z}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}=\dfrac{2z}{\cos 2z}$，

令$\cos 2z=0$，即$e^{i2z}+e^{-i2z}=0$，由此解出

$$z=\frac{(2k+1)\pi}{4}\quad(k=0,\pm 1,\pm 2,\cdots).$$

这些都是$f(z)$的单极点，但其中只有$z_0=\pm\frac{\pi}{4}$这个单极点在积分回路之内，而

$$\mathrm{Res}f\left(-\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to-\frac{\pi}{4}}\frac{2z\left(z+\frac{\pi}{4}\right)}{\cos 2z}=\lim_{z\to-\frac{\pi}{4}}\frac{4z+\frac{\pi}{2}}{-2\sin 2z}$$

$$=-\frac{\pi}{4},$$

$$\mathrm{Res}f\left(\frac{\pi}{4}\right)=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{2z(z-\pi/4)}{\cos 2z}=\lim_{z\to\frac{\pi}{4}}\frac{4z-\frac{\pi}{2}}{-2\sin 2z}$$

$$=-\frac{\pi}{4}.$$

$$\therefore\quad\oint_{|z|=2}\frac{zdz}{\frac{1}{2}-\sin^2 z}=2\pi i\left[\mathrm{Res}f\left(\frac{\pi}{4}\right)+\mathrm{Res}f\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$=-\pi^2 i.$$

3.应用留数定理计算回路积分$\frac{1}{2\pi i}\oint_l\frac{f(z)}{z-\alpha}dz$，函数$f(z)$在$l$所围区域上是解析的，$\alpha$是区域的一个内点。

解：设被积函数$g(z)=\frac{f(z)}{z-\alpha}$，因为$f(z)$在$l$所围区域上是解析的，所以$g(z)$在积分回路（即$l$所围区域）内只有一个单极点$z_0=\alpha$，而

$$\mathrm{Res}f(\alpha)=\lim_{z\to\alpha}\left[\frac{f(z)}{z-\alpha}\cdot(z-\alpha)\right]=f(\alpha),$$

$$\therefore\quad\oint_l\frac{f(z)}{z-\alpha}dz=2\pi i\mathrm{Res}f(\alpha)=2\pi i f(\alpha),$$于是

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_l \frac{f(z)}{z-a}dz = f(a).$$

这正是科希公式。

§17. 应用留数定理计算实变函数定积分

1.计算下列实变函数定积分

（1）$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{2+\cos x}$.

解：这是属于类型一的积分．为此，作变换$z=e^{ix}$使原积分化为单位圆内的回路积分

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{2+\frac{z+z^{-1}}{2}}=\oint_{|z|=1}\frac{2}{i}\frac{dz}{z^2+4z+1}$$

$$=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{(z+2-\sqrt{3})(z+2+\sqrt{3})}$$

$$=\frac{2}{i}\oint_{|z|=1}f(z)dz.$$

$f(z)$有两个单极点$z_0=-2\pm\sqrt{3}$，其中$z_0=-2+\sqrt{3}$在单位圆内，且

$$\mathrm{Res}f(\sqrt{3}-2)=\lim_{z\to\sqrt{3}-2}\left[\frac{1}{z+2+\sqrt{3}}\right]=\frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{2}{i}\ \mathrm{Res}f\ (\sqrt{3}-2)=\frac{2\pi}{\sqrt{3}}.$$

和本题一样，下面的几小题都是属于类型一的积分，处理方法和本题类似，因此，我们将只给出简捷步骤。

（2）$\int_0^{2\pi}\frac{dx}{(1+\varepsilon\cos x)^2}$ （$0<\varepsilon<1$）.

解：作变换$z=e^{ix}$，则

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{dz/iz}{\left[1+\frac{\varepsilon}{2}(z+z^{-1})\right]^2}$$

$$=\frac{4}{i\varepsilon^2}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{\left(z^2+\frac{2}{\varepsilon}z+1\right)^2}$$

$$=\frac{4}{i\varepsilon^2}\oint_{|z|=1}f(z)dz.$$

$f(z)$有两个二阶极点$z_0=\frac{1}{\varepsilon}(-1\pm\sqrt{1-\varepsilon^2})$，其中$z_0=\frac{1}{\varepsilon}(-1+\sqrt{1-\varepsilon^2})$在单位圆内，且

$$\operatorname{Res}f\left[\frac{1}{\varepsilon}(-1+\sqrt{1-\varepsilon^2})\right]=\frac{\varepsilon^2}{4(1-\varepsilon^2)^{3/2}}.$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{4}{i\varepsilon^2}\operatorname{Res}f\left[\frac{1}{\varepsilon}(-1+\sqrt{1-\varepsilon^2})\right]$$

$$=\frac{2\pi}{(1-\varepsilon^2)^{3/2}}.$$

（3）$\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{\cos^2 2x\,dx}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}\ (|\varepsilon|<1).$

解：令$z=e^{ix}$，则$dx=\frac{dz}{iz}$，$\cos x=\frac{1+z^2}{2z}$，$\cos 2x=\frac{1+z^4}{2z^2}$，以此代入原式得：

$$I=\oint_{|z|=1}\frac{\left(\frac{1+z^4}{2z^2}\right)^2\frac{dz}{iz}}{1-2\varepsilon\frac{1+z^2}{2z}+\varepsilon^2}$$

$$=\oint_{|z|=1}\frac{(1+z^4)^2dz}{4iz^4[-\varepsilon z^2+(1+\varepsilon^2)z-\varepsilon]}$$

$$=\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1}\frac{(1+z^4)^2dz}{z^4(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}$$

$$=\frac{1}{4i}\oint_{|z|=1}f(z)dz.$$

被积函数的极点是：四阶极点$z_0=0$，单极点 $z_0=\varepsilon,\frac{1}{\varepsilon}$，因$|\varepsilon|<1$，则$|1/\varepsilon|>0$，故只有$z_0=0$和$z_0=\varepsilon$两个极点在单位圆内，其留数分别为：

$$\mathrm{Res}f(0)=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\frac{d^3}{dz^3}\left[\frac{(1+z^4)^2}{(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}\right]$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\left[\frac{(1+z^4)^2[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^2}+\frac{8z^3(1+z^4)}{(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}\right]$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left\{\frac{2(1+z^4)^2[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]^2}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^3}+\frac{2(1+z^4)^2\varepsilon+8z^3(1+z^4)[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^2}+\frac{24z^2(1+z^4)+32z^6}{(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}\right.$$

$$=\frac{1}{3!}\lim_{z\to 0}\left\{\frac{6(1+z^4)^2[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]^3}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^4}+\frac{2\{(1+z^4)^2\cdot 2[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]2\varepsilon+2z^3\cdot(1+z^4)[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]\}}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^3}\right.$$

$$+\frac{2\{(1+z^4)^2\cdot 2\varepsilon[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]+16z^3\cdot(1+z^4)[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]^2\}}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^3}$$

$$+\frac{16\varepsilon z^3(1+z^4)}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^2}$$

$$-\frac{\frac{d}{dz}\{16z^8(1+z^4)[2\varepsilon z-(1+\varepsilon^2)]\}}{[(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)]^2}$$

$$+\frac{d}{dz}\left[\frac{24z^2(1+z^4)+32z^6}{(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}\right]\Big\}$$

$$=\frac{1}{3!}\left[-\frac{6}{\varepsilon^4}(1+\varepsilon^2)^3+\frac{8\varepsilon}{\varepsilon^2}(1+\varepsilon^2)\right.$$

$$\left.+\frac{4\varepsilon}{\varepsilon^3}(1+\varepsilon^2)\right]$$

$$=-\frac{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^4)}{\varepsilon^4},$$

$$\mathrm{Res}f(\varepsilon)=\lim_{z\to\varepsilon}\left[\frac{(1+z^4)^2}{z^4(1-\varepsilon z)}\right]=\frac{(1+\varepsilon^4)^2}{\varepsilon^4(1-\varepsilon^2)}.$$

$$\therefore\ I=2\pi i\cdot\frac{1}{4i}\left[\frac{(1+\varepsilon^4)^2}{\varepsilon^4(1-\varepsilon^2)}-\frac{(1+\varepsilon^2)(1+\varepsilon^4)}{\varepsilon^4}\right]$$

$$=\frac{(1+\varepsilon^4)\pi}{1-\varepsilon^2}.$$

（4） $\int_0^{2\pi}\frac{\sin^2x}{a+b\cos x}dx\quad(a>b>0)$.

解： 作变换后原式 $=\oint_{|z|=1}\frac{[(z^2-1)/2iz]^2\cdot dz/iz}{a+b[z^2+1]/2z}$

$$=-\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2dz}{4iz^3\left[a+\frac{b}{2z}(z^2+1)\right]}$$

$$=-\frac{1}{2bi}\oint_{|z|=1}\frac{(z^2-1)^2dz}{z^2\left[z^2+\frac{2a}{b}z+1\right]}$$

$$=-\frac{1}{2bi}\oint_{|z|=1}$$

$$\frac{(z^2-1)^2dz}{z^2\left[z+\frac{1}{b}(a+\sqrt{a^2-b^2})\right]\left[z+\frac{1}{b}(a-\sqrt{a^2-b^2})\right]}$$

$$= -\frac{1}{2bi}\oint_{|z|=1} f(z)dz.$$

上式的被积函数的极点是：二阶极点$z_0=0$，单极点 $z_0=-\frac{1}{b}(a+\sqrt{a^2-b^2})$和单极点 $z_0=-\frac{1}{b}(a-\sqrt{a^2-b^2})$。其中单极点 $z_0=-\frac{1}{b}(a+\sqrt{a^2-b^2})$在单位圆外（即$|z_0|>1$，亦即 $a+\sqrt{a^2-b^2}>b$），其余的极点在单位圆内，其留数分别是：

$$\mathrm{Res}f(0)=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left[\frac{(z^2-1)^2}{z^2+\frac{2a}{b}z+1}\right]=-\frac{2a}{b},$$

$$\mathrm{Res}f\left(-\frac{a-\sqrt{a^2-b^2}}{b}\right)$$

$$=\lim_{z\to\frac{-a+\sqrt{a^2-b^2}}{b}}\left\{\frac{(z^2-1)^2}{z^2\left[z+\frac{1}{b}(a+\sqrt{a^2-b^2})\right]}\right\}$$

$$=\frac{\left[\frac{(\sqrt{a^2-b^2}-a)^2}{b^2}-1\right]^2}{\left(\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}\right)^2\left[\frac{\sqrt{a^2-b^2}-a}{b}+\frac{\sqrt{a^2-b^2}+a}{b}\right]}$$

$$=\frac{(2a^2-2b^2-2a\sqrt{a^2-b^2})^2}{2b(2a^2-b^2-2a\sqrt{a^2-b^2})\sqrt{a^2-b^2}}=\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}.$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\left(-\frac{1}{2bi}\right)\left[\frac{2\sqrt{a^2-b^2}}{b}-\frac{2a}{b}\right]$$

$$=\frac{(a-\sqrt{a^2-b^2})2\pi}{b^2}.$$

（5）$\int_0^{\pi}\frac{a\,dx}{a^2+\sin^2 x}(a>0)$。

解：把原式化为 $I=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{adx}{a^2+\sin^2x}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{ady}{a^2+\sin^2y}$.

在后一个积分中令 $y=x-\pi$，则上式又

$$=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\frac{adx}{a^2+\sin^2x}+\frac{1}{2}\int_{\pi}^{2\pi}\frac{adx}{a^2+\sin^2x}=\frac{a}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{a^2+\sin^2x}$$

$$=\frac{a}{2}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz[a^2+(z+z^{-1})^2/(2i)^2]}$$

$$=\frac{a}{2}\oint_{|z|=1}\frac{dz}{iz\left(a+\frac{z+z^{-1}}{2}\right)\left(a-\frac{z-z^{-1}}{2}\right)}$$

$$=-\frac{2a}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{(z^2+2az-1)(z^2-2az-1)}=-\frac{2a}{i}\oint_{|z|=1}$$

$$\frac{zdz}{(z+a+\sqrt{a^2-1})(z+a-\sqrt{a^2+1})(z-a+\sqrt{a^2+1})(z-a-\sqrt{a^2-1})}$$

$$=-\frac{2a}{i}\oint_{|z|=1}f(z)dz.$$

$f(z)$ 在单位圆内有单极点 $z_0=-a+\sqrt{a^2-1}$ 及 $z_0=a-\sqrt{a^2+1}$，且

$$\operatorname{Res}f(-a+\sqrt{a^2+1})=\frac{-a+\sqrt{a^2+1}}{2\sqrt{a^2+1}\cdot2\cdot(-a+\sqrt{a^2+1})(-2a)}$$

$$=\frac{-1}{8a\sqrt{a^2-1}},$$

$$\operatorname{Res}f(a-\sqrt{a^2+1})=-\frac{a-\sqrt{a^2+1}}{2a\cdot2(a-\sqrt{a^2-1})\cdot2(-\sqrt{a^2+1})}$$

$$=\frac{-1}{8a\sqrt{a^2+1}}.$$

$$\therefore\quad\int_0^{\pi}\frac{adx}{a^2+\sin^2x}=\frac{2a}{i}\,2\pi i\frac{1}{-4a\sqrt{a^2+1}}=\frac{\pi}{\sqrt{a^2+1}}.$$

(6) $\int_0^{2\pi}\frac{\cos xdx}{1-2\varepsilon\cos x+\varepsilon^2}\ (|\varepsilon|<1)$.

解：作变换后原式 $= \oint_{|z|=1} \dfrac{\dfrac{z^2+1}{2z}\cdot\dfrac{dz}{iz}}{1-2\varepsilon\dfrac{z^2+1}{2z}+\varepsilon^2}$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1)dz}{2iz^2\left(1-\varepsilon\frac{z^2+1}{z}+\varepsilon^2\right)}$$

$$= \oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1)dz}{[(1+\varepsilon^2)z-\varepsilon z^2-\varepsilon]}$$

$$= \frac{1}{2i}\oint_{|z|=1} \frac{(z^2+1)dz}{z(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}.$$

被积函数有三个单极点 $z_0=0, \varepsilon, 1/\varepsilon$；因 $|\varepsilon|<1$，则 $\left|\dfrac{1}{\varepsilon}\right|>1$，故只有单极点 $z_0=0$、ε 在积分回路之内，其留数分别是：

$$\mathrm{Res}f(0) = \lim_{z\to 0}\left[\frac{z^2+1}{(1-\varepsilon z)(z-\varepsilon)}\right] = -\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\mathrm{Res}f(\varepsilon) = \lim_{z\to\varepsilon}\left[\frac{z^2+1}{z(1-\varepsilon z)}\right] = \frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)},$$

$$\therefore\ I = 2\pi i\cdot\frac{1}{2i}\left[\frac{1+\varepsilon^2}{\varepsilon(1-\varepsilon^2)}-\frac{1}{\varepsilon}\right] = \frac{2\pi\varepsilon}{1-\varepsilon^2}.$$

（7）$\displaystyle\int_0^{\pi/2}\frac{dx}{1+\cos^2 x}$.

解：因被积函数是偶函数，故可作下列的延拓

$$I = \frac{1}{4}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{1+\cos^2 x} = \frac{1}{4}\oint_{|z|=1}\frac{\frac{dz}{iz}}{1+\left[\frac{z^2+1}{2z}\right]^2}$$

$$= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{z^4+6z^2+1}$$

$$= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{zdz}{[z^2+3+2\sqrt{2}][z^2+3-2\sqrt{2}]}$$

$$=\frac{1}{i}\oint_{|z|=1}\frac{z\,dz}{[z^2+(3+2\sqrt{2})][z+\sqrt{3-2\sqrt{2}}i][z-\sqrt{3-2\sqrt{2}}i]},$$

被积函数的四个单极点中，只是 $z_0=\pm\sqrt{3-2\sqrt{2}}\,i$，即 $z_0=(\sqrt{2}-1)i$ 和 $z_0=(1-\sqrt{2})i$ 在积分回路之内，其留数分别是

$$\operatorname{Res}f(\sqrt{3-2\sqrt{2}}i)=\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{z}{[z^2+3+2\sqrt{2}][z+\sqrt{3-2\sqrt{2}}i]}\right\}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}},$$

$$\operatorname{Res}f(-\sqrt{3-2\sqrt{2}}i)=\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{z}{[z^2+3+2\sqrt{2}][z-\sqrt{3-2\sqrt{2}}i]}\right\}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{2}},$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2}}=\frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

（8）$\int_0^{2\pi}\cos^{2n}x\,dx$。

解：作变换后，原式 $=\oint_{|z|=1}\left(\frac{z^2+1}{2z}\right)^{2n}\frac{dz}{iz}$

$$=\frac{1}{2^{2n}i}\oint_{|z|=1}\frac{(1+z^2)^{2n}dz}{z^{2n+1}},$$

被积函数有一个 $(2n+1)$ 阶极点 $z=0$，且

$$\operatorname{Res}f(0)=\frac{1}{(2n)!}\lim_{z\to0}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}(1+z^2)^{2n};$$

根据二项式公式：$(a+b)^n=\cdots+\frac{n!a^{n-K}b^K}{(n-k)!k!}+\cdots$ 知

$$(1+z^2)^{2n}=\cdots+\frac{(2n)!z^{2K}}{(2n-K)!K!}+\cdots$$

还要对 z 微分 $2n$ 次，故凡是 $2k<2n$ 的 z^{2K} 项，在微分 $2n$ 次后都为零；而 $2K>2n$ 项中，在微分 $2n$ 次后仍含有变数 z，当 $z\to z_0=0$

时，这些项全部为零；只有当$2K=2n$的项在微分$2n$次并以$z_0=0$代入后的结果才不为零，即

$$\operatorname{Res}f(0)=\frac{1}{(2n)!}\lim_{z\to 0}\frac{d^{2n}}{dz^{2n}}\left[\frac{(2n)!\,z^{2n}}{(2n-n)!\,n!}\right]=\frac{(2n)!}{(n!)^2},$$

$$\therefore\ I=\frac{1}{2^{2n}i}\cdot 2\pi i\cdot\frac{(2n)!}{(n!)^2}=\frac{2\pi\cdot 2^n(n!)[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]}{2^n(n!)2^n(n!)}$$

$$=\frac{2\pi[1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-1)]}{2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n}.$$

2. 计算下列实变函数定积分。

（1）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+1}{x^4+1}dx$。

解：$f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^4+1}=\dfrac{z^2+1}{(z^2-i)(z^2+i)}$

$$=\frac{z^2+1}{\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}$$

它具有四个单极点，其中只有$z_0=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$，$\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$在上半平面，其留数分别为：

$$\operatorname{Res}f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{z^2+1}{(z^2+i)\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]}\right]=\frac{1}{2\sqrt{2}i},$$

$$\operatorname{Res}f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{z^2+1}{(z^2+i)\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]}\right]=\frac{1}{2\sqrt{2}i},$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\left(\frac{1}{2\sqrt{2}\,i}+\frac{1}{2\sqrt{2}\,i}\right)=\sqrt{2}\,\pi.$$

本题和下面几小题都属于类型二。

（2）$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2}$。

解：由于被积函数是偶函数，所以

$$原式=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2dx}{(x^2+9)(x^2+4)^2},$$

被积函数 $$f(z)=\frac{z^2}{(z^2+9)(z^2+4)^2}$$

$$=\frac{z^2}{(z+3i)(z-3i)(z+2i)^2(z-2i)^2},$$

它在上半平面的奇点是两个，一个极点 $z_0=3i$，一个二阶极点 $z_0=2i$，其留数分别是：

$$\mathrm{Res}f(3i)=\lim_{z\to3i}\left[\frac{z^2}{(z+3i)(z^2+4)^2}\right]=\frac{3}{50}i,$$

$$\mathrm{Res}f(2i)=\lim_{z\to2i}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z^2+9)(z+2i)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to2i}\left\{\frac{2z}{(z^2+9)(z+2i)^2}-\frac{2z^3(z+2i)^2+2z^2(z^2+9)(z+2i)}{[(z^2+9)(z+2i)^2]^2}\right\}$$

$$=-\frac{13}{200}i.$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\left[\frac{3i}{50}-\frac{13i}{200}\right]=\frac{\pi}{200}.$$

（3） $$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+a^2)^2(x^2+b^2)}.$$

解：被积函数 $$f(z)=\frac{1}{(z^2+a^2)^2(z^2+b^2)}$$

$$=\frac{1}{(z+ai)^2(z-ai)^2(z+bi)(z-bi)}.$$

(i) 若 $a>b$, $b>0$，则其在上半平面的奇点是：单极点 $z_0=bi$，二阶极点 $z_0=ai$，其留数分别为：

$$\mathrm{Res}f(bi)=\lim_{z\to bi}\left[\frac{1}{(z^2-a^2)^2(z+bi)}\right]=\frac{-i}{2b(b^2-a^2)^2},$$

$$\operatorname{Res}f(ai)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{1}{(z^2+b^2)(z+ai)^2}\right]$$

$$=\lim_{z\to ai}\left[\frac{-2z(z+ai)^2-2(z^2-b^2)(z+ai)}{[(z^2-b^2)(z+ai)^2]^2}\right]$$

$$=\frac{(3a^2-b^2)i}{4a^3(b^2-a^2)^2};$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\left[\frac{(3a^2-b^2)i}{4a^3(b^2-a^2)^2}-\frac{i}{2b(b^2-a^2)^2}\right]=\frac{(2a+b)\pi}{2a^3b(a+b)^2}.$$

(ii) 对于$a<0$，$b<0$或$a>0$，$b<0$或$a<0$，$b>0$ 等三种情况均可作类似的计算。

(4) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}$.

解一：因被积函数是偶函数，故原式$=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{x^4+a^4}$，其中被积函数 $f(z)=\dfrac{1}{z^4+a^4}=\dfrac{1}{[z^2+a^2i][z^2-a^2i]}=$

$$\frac{1}{\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}a(1-i)\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}a(1-i)\right]\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}a(1+i)\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}a(1+i)\right]}$$

设$a>0$，它在上半平面有两个单极点$z_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(i-1)$，$z_0=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a(i+1)$，其留数分别是：

$$\operatorname{Res}f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}a(i-1)\right)=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{[z-\frac{\sqrt{2}}{2}a(1-i)][z^2-a^2i]}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}a^3(1+i)},$$

$$\operatorname{Res}f\left[\frac{\sqrt{2}}{2}a(1+i)\right]=\lim_{z\to z_0}\left[\frac{1}{[z^2+a^2i][z+\frac{\sqrt{2}}{2}a(1+i)]}\right]$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{2}\,a^3(i-1)},$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\,\frac{1}{2\sqrt{2}\,a^3}\left(\frac{1}{i+1}+\frac{1}{i-1}\right)=\frac{\pi}{2\sqrt{2}\,a^3}.$$

解二：被积函数 $f(z)$ 有四个单极点 $z_0=ae^{i\frac{\pi}{4}}$、$z_0=ae^{i\frac{3\pi}{4}}$、$z_0=ae^{i\frac{5\pi}{4}}$、$z_0=ae^{i\frac{7\pi}{4}}$，其中只有单极点 $z_0=ae^{i\frac{\pi}{4}}$ 和 $z_0=ae^{i\frac{3\pi}{4}}$ 在上半平面，其留数分别是（应用罗毕达法则）：

$$\operatorname{Res}f(ae^{i\frac{\pi}{4}})=\lim_{z\to z_0}\left[(z-ae^{i\frac{\pi}{4}})\,\frac{1}{z^4+a^4}\right]=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z^3}$$

$$=\frac{1}{4a^3}e^{-i\frac{3\pi}{4}},$$

$$\operatorname{Res}f(ae^{i\frac{3\pi}{4}})=\lim_{z\to z_0}\left[(z-ae^{i\frac{3\pi}{4}})\,\frac{1}{z^4+a^4}\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{4z^3}=\frac{1}{4a^3}e^{-i\frac{9\pi}{4}}.$$

$$\therefore\quad I=\pi i\left[\operatorname{Res}f(ae^{i\frac{\pi}{4}})+\operatorname{Res}f(ae^{i\frac{3\pi}{4}})\right]$$

$$=\frac{\pi i}{4a^3}\left[e^{-i\frac{3\pi}{4}}+e^{-i\frac{9\pi}{4}}\right]=\frac{\pi}{2\sqrt{2}\,a^3}.$$

显然，解二比解一的计算要简单些。

（5）$\int_0^{\infty}\frac{(x^2+1)dx}{x^6-1}$.

解：因被积函数是偶函数，故原式 $=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{(x^2+1)dx}{x^6+1}$,

被积函数 $f(z)=\dfrac{z^2+1}{z^6-1}=\dfrac{1}{z^4-z^2+1}$

$$=\frac{1}{\left[z^2-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\right]\left[z^2-\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)\right]}=$$

$$\frac{1}{\left[z+\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)}\right]\left[z-\sqrt{\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)}\right]\left[z+\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)}\right]\left[z-\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)}\right]}$$

注意到：$\sqrt{\dfrac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)}=\sqrt{\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}}=\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}$

$$=\frac{1}{2}(i+\sqrt{3}),$$

$$\sqrt{\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)}=\sqrt{\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}}=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}$$

$$=\frac{1}{2}(i-\sqrt{3}),$$

故 $f(z)=$

$$\frac{1}{\left[z+\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})\right]\left[z-\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})\right]\left[z+\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right]\left[z-\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right]}.$$

被积函数在上半平面有两个单极点 $z_0=\dfrac{1}{2}(i+\sqrt{3})$,

$z_0=\dfrac{1}{2}(i-\sqrt{3})$，其留数为：

$$\operatorname{Res}f\left[\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})\right]$$

$$=\lim_{z\to z_0}\frac{1}{\left[z^2-\frac{1}{2}(1-\sqrt{3}i)\right]\left[z+\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})\right]}$$

$$=\frac{1}{\left\{\left[\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right]^2-\frac{1}{2}(i-\sqrt{3}i)\right\}\left\{\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})+\frac{1}{2}(i+\sqrt{3})\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}i-1)},$$

$$\operatorname{Res}f\left[\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right]=\lim_{z\to z_0}\left\{\frac{1}{\left[z^2-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\right]\left[z+\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right]}\right\}$$

$$=\frac{1}{\left\{\left[\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right]^2-\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\right\}\left\{\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(i-\sqrt{3})\right\}}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}i+1)}.$$

$$\therefore I=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}i+1)}-\frac{1}{\sqrt{3}(\sqrt{3}i-1)}\right\}=\frac{\pi}{2}.$$

必须指出：本题也可用上题解二的方法求解。

（6）$\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx$。

解：因被积函数是偶函数，所以

$$\text{原式}=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2}{(x^2+a^2)^2}dx.$$

被积函数 $f(z)=\dfrac{z^2}{(z^2+a^2)^2}=\dfrac{z^2}{(z+ai)^2(z-ai)^2}$ 在上半平面有一个二阶极点 $z_0=ai$，且

$$\operatorname{Res}f(ai)=\lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{z^2}{(z+ai)^2}\right]=\lim_{z\to ai}\left[\frac{2z}{(z+ai)^2}-\frac{2z^2}{(z+ai)^3}\right]$$

$$=\frac{2ai}{(2ai)^2}-\frac{2(ai)^2}{(2ai)^3}=-\frac{i}{4a}.$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\cdot\frac{1}{2}\left(-\frac{i}{4a}\right)=\frac{\pi}{4a}.$$

（7）$\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^{2m}}{1+x^{2n}}dx\ (m<n)$。

解：被积函数 $f(z)=\dfrac{z^{2m}}{1+z^{2n}}$ 在上半平面有 n 个单极点

$(z^{2n}+1=0,\ z^{2n}=-1)$ $z_0=e^{(2K+1)\pi i/2n}$ $(K=0,\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots n-1)$．现在计算留数

$$\operatorname{Res} f(e^{(2K+1)\pi i/2n})=\lim_{z\to z_0}\left[(z-e^{(2K+1)\pi i/2n})\frac{z^{2m}}{1+z^{2n}}\right],$$

用罗毕达法则，

$$\text{上式}=\lim_{z\to z_0}\frac{2mz^{2m-1}(z-e^{(2K+1)\pi i/2n})+z^{2m}}{2nz^{2n-1}}$$

$$=\frac{1}{2ne^{(2K+1)(2n-2m-1)\pi i/2n}};$$

故上半平面各留数之和为

$$\frac{1}{2ne^{(2n-2m-1)\pi i/2n}}\sum_{K=0}^{n-1}\frac{1}{e^{K(2n-2m-1)\pi i/n}}$$

$$=\frac{-e^{(2m+1)\pi i/2n}}{2n}\cdot\frac{1-e^{-(2n-2m-1)\pi i}}{1-e^{-(2n-2m-1)\pi i/n}}$$

$$=\frac{1}{2n}\cdot\frac{2}{e^{(2m+1)\pi i/2n}-e^{-(2m+1)\pi i/2n}}$$

$$=\frac{1}{2ni\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

$$\therefore\quad I=2\pi i\frac{1}{2ni\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}=\frac{\pi}{n\sin\frac{2m+1}{2n}\pi}.$$

3.计算下列实变函数定积分。

（1）$\int_0^{\infty}\frac{\cos mx}{1+x^4}dx\quad(m>0)$。

解：本题和下面几小题都属于类型三。

$$\because\quad F(z)\,e^{imz}=\frac{e^{imz}}{1+z^4}$$

$$=\frac{e^{miz}}{\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}.$$

在上半平面有两个单极点$z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)$，$z_0=\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)$，其留数分别为：

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(i-1)}\left\{\frac{e^{imz}}{\left[z-\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right](z^2-i)}\right\}$$

$$=\frac{e^{-im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]}}{(-2i)(i-1)\sqrt{2}}=\frac{e^{-im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]}}{2\sqrt{2}(i+1)},$$

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\lim_{z\to\frac{\sqrt{2}}{2}(i+1)}\left\{\frac{e^{imz}}{\left[z^2+i\right]\left[z+\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}\right\}$$

$$=\frac{e^{im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}}{2i\cdot\sqrt{2}(1+i)}=\frac{e^{im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}}{2\sqrt{2}(i-1)}.$$

$$\therefore\quad I=\pi i\left[\frac{e^{-im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]}}{2\sqrt{2}(i-1)}+\frac{e^{im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}}{2\sqrt{2}(i+1)}\right]$$

$$=\frac{(i-1)e^{-im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)\right]}-(i+1)e^{im\left[\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)\right]}}{4\sqrt{2}}\pi i$$

$$=\frac{2e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}\left[-i\cos\frac{m}{\sqrt{2}}-i\sin\frac{m}{\sqrt{2}}\right]}{4\sqrt{2}}\pi i$$

$$=\frac{\sqrt{2}\pi e^{-\frac{m}{\sqrt{2}}}\left(\cos\frac{m}{\sqrt{2}}-\sin\frac{m}{\sqrt{2}}\right)}{4}.$$

本题也可用指数来表示被积函数在上半平面的极点，即 $z_0=e^{i\frac{\pi}{4}}$ 和 $z_0=e^{i\frac{3\pi}{4}}$.注意应用罗毕达法则计算被积函数在这两个极点的留数，也可同样求出上述答案。

（2） $\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}dx \quad (m>0,\ a>0)$。

解一： $\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}\,dx=\frac{1}{2i}\int_0^\infty \frac{e^{imx}}{x(x^2+a^2)}dx=I$

考虑积分

$$\oint_l \frac{e^{imz}}{z(z^2+a^2)}\,dz=\int_{C_R}\frac{e^{imz}}{z(z^2+a^2)}\,dz+\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{imz}}{z(z^2+a^2)}\,dz+\left(\int_{-R}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{R}\right)\frac{e^{imx}dx}{x(x^2+a^2)}. \tag{1}$$

如图4-2， l 内有一单极点 ia，留数是 $\frac{-e^{-ma}}{2a^2}$. 所以，（1）式

左端 $=2\pi i\,\frac{-e^{-ma}}{2a^2}=\frac{-\pi e^{-ma}}{a^2}i$，

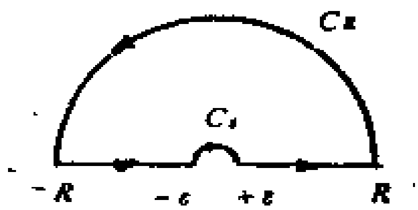


图 4-2

又在（1）式两端令 $\varepsilon\to0$，$R\to\infty$，则右端第一项依约当引理为零，右端最后两项 $=2iI$；于是，

$$-\frac{\pi e^{-ma}}{a^2}\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{imz}}{z(z^2+a^2)}dz+2iI\ .$$

而

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{imz}}{z(z^2+a^2)}dz=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{C_\varepsilon}\left[\frac{1}{a^2z}+\text{解析部分 }P(z)\right]dz$$

$$=\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\pi}^{0}\frac{i\varepsilon e^{i\varphi}}{a^2\varepsilon e^{i\varphi}}d\varphi=-\frac{i}{a^2}\pi.$$

$$\therefore \quad 2iI = \frac{i}{a^2}\pi - \frac{i\pi}{a^2}e^{-ma}, \text{即 } I = (1-e^{-ma})\frac{\pi}{2a^2}.$$

解二：注意到 $\dfrac{1}{x(x^2+a^2)} = \dfrac{1}{a^2x} - \dfrac{x}{a^2(x^2+a^2)}$ 以及 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\,dx = \frac{\pi}{2}$，则

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\,dx - \frac{1}{a^2}\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi}{2} - \int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,dx\right),$$

而 $\displaystyle\int_0^\infty \frac{x\sin mx}{x^2+a^2}\,dx = \pi\left\{\frac{ze^{imz}}{z^2+a^2}\text{在上半平面所有奇点留数之和}\right\} = \pi\left\{\operatorname{Res}f(ia)\right\} = \pi\left\{\lim_{z\to ia}\left[(z-ia)\frac{ze^{imz}}{z^2+a^2}\right]\right\} = \frac{\pi e^{-ma}}{2}$，所以

$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x(x^2+a^2)}\,dx = \frac{1}{a^2}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2}e^{-ma}\right)$$

$$= (1-e^{-ma})\frac{\pi}{2a^2}.$$

（3）$\displaystyle\int_{-\infty}^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx.$

解：因被积函数是偶函数，

$$\therefore \quad \text{原式} = 2\int_0^\infty \frac{x\sin x}{1+x^2}\,dx.$$

上式中的被积函数 $G(z)e^{iz} = \dfrac{z}{1+z^2}e^{iz} = \dfrac{ze^{iz}}{(z+i)(z-i)}$ 在上半平面有一个单极点 $z_0 = i$，且

$$\operatorname{Res}f(i) = \lim_{z\to i}\left(\frac{z}{z+i}\right)e^{iz} = \frac{1}{2e}.$$

$\therefore \quad I = \pi \cdot 2\left(\frac{1}{2e}\right) = \frac{\pi}{e}$.

（4） $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x\sin mx}{2x^2+a^2}dx$，$(m>0,\ a>0)$。

解：因为被积函数是偶函数，

$\therefore \quad$ 原式 $= 2\int_{0}^{\infty} \frac{x\sin mx}{2x^2+a^2}dx$，

上式中的被积函数 $G(z)e^{imz} = \frac{z}{2z^2+a^2}e^{imz}$

$$= \frac{ze^{imz}}{2\left[z+\frac{a}{\sqrt{2}}i\right]\left[z-\frac{a}{\sqrt{2}}i\right]}$$

在上半平面有一个单极点 $z_0 = \frac{a}{\sqrt{2}}i$，且

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \lim_{z\to ai/\sqrt{2}}\left[\frac{ze^{imz}}{2\left(z+\frac{a}{\sqrt{2}}i\right)}\right] = \frac{1}{4}e^{-ma/\sqrt{2}}.$$

$$\therefore \quad I = \pi\cdot 2\cdot\frac{1}{4}e^{-ma/\sqrt{2}} = \frac{\pi}{2}e^{-ma/\sqrt{2}}.$$

（5） $\int_{0}^{\infty}\frac{\cos mx}{(x^2+a^2)^2}dx$；

解：$F(z)\ e^{imz} = \frac{e^{imz}}{(z^2+a^2)^2} = \frac{e^{imz}}{(z+ai)^2(z-ai)^2}$ 在上半平面只有一个二阶极点 $z_0 = ai$，其留数

$$\mathrm{Res}f(z_0) = \lim_{z\to ai}\frac{d}{dz}\left[\frac{e^{imz}}{(z+ai)^2}\right]$$

$$= \lim_{z\to ai}\left[\frac{ime^{imz}}{(z+ai)^2} - \frac{2e^{imz}}{(z+ai)^3}\right]$$

$$= -\frac{(am+1)e^{-ma}}{4a^3}.$$

$$\therefore \quad I=\pi i\left[-\frac{(am+1)e^{-ma}}{4a^3}i\right]=\frac{\pi(am+1)e^{-ma}}{4a^3}.$$

(6) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\cos x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}dx$.

解：$$F(z)\,e^{imz}=\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z^2+b^2)}$$

$$=\frac{e^{iz}}{(z+ia)(z-ia)(z+ib)(z-ib)}$$

在上半平面有两个单极点$z_0=ai$，$z_0=bi$，其留数分别是：

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\lim_{z\to a}\left[\frac{e^{iz}}{(z+ia)(z^2+b^2)}\right]=\frac{ie^{-a}}{2a(a^2-b^2)},$$

$$\operatorname{Res}f(z_0)=\lim_{z\to b_i}\left[\frac{e^{iz}}{(z^2+a^2)(z+ib)}\right]=\frac{-ie^{-b}}{2b(a^2-b^2)}.$$

$$\therefore \quad I=\pi i\left[\frac{ie^{-a}}{2a(a^2-b^2)}-\frac{ie^{-b}}{2b(a^2-b^2)}\right]=\frac{\pi(ae^{-b}-be^{-a})}{2ab(a^2-b^2)}$$

$$=\frac{\pi\left(\frac{e^{-b}}{b}-\frac{e^{-a}}{a}\right)}{2(a^2-b^2)}.$$

(7) $\displaystyle\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$；

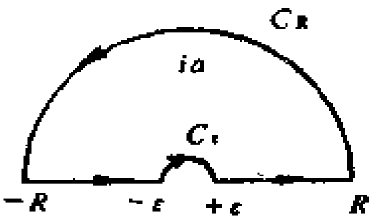


图 4-3

解：$$\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{1}{2i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ix}\sin x}{x^2}dx=I$$

我们考虑积分$\displaystyle\oint_l\frac{e^{iz}\sin z\,dz}{z^2}$

$$=\left[\int_{C_R}+\int_{C_\varepsilon}\right]\frac{e^{iz}\sin z}{z^2}dz\quad+\left(\int_{-R}^{-\varepsilon}+\int_{\varepsilon}^{R}\right)\frac{e^{ix}\sin x}{x^2}dx.$$

如图4-3，l中无奇点，所以上式左端为零，令$\varepsilon\to 0$、$R\to\infty$，右端第一项为

$$\int_{C_R}\frac{e^{iz}(e^{iz}-e^{-iz})dz}{2iz^2}=\frac{1}{2i}\int_{C_R}\left[\frac{e^{i2z}}{z^2}-\frac{1}{z^2}\right]dz.$$

在上式中，第一项依约当引理$\to 0$，第二项$\frac{1}{z^2}$因z一致趋于0也$\to 0$，所以$\lim\limits_{R\to\infty}\int_{C_R}=0$，

$$\therefore\quad 2iI=\lim_{\varepsilon\to 0}-\int_{C_\varepsilon}\frac{e^{iz}\sin z}{z^2}dz$$

$$=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{C_\varepsilon}-\left[\frac{1}{z}+\text{解析部分 } P(z)\right]dz$$

$$=\int_\pi^0-\frac{i\varepsilon e^{iz}}{\varepsilon e^{i\varphi}}d\varphi=i\pi,\qquad I=\frac{\pi}{2}.$$

$$\text{即}\int_0^\infty\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\frac{\pi}{2}.$$

解本题的方法不仅这一种，其它的方法留给读者自己练习。

（8）$\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{imx}}{x-ia}dx$，$\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{imx}}{x+ia}dx$ （$m>0$，$R_e a>0$）。

解：在上半平面$\frac{e^{imz}}{z-ia}$有单极点ia，$\frac{e^{imz}}{z+ia}$在上半平面无奇点

$$\therefore\quad\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{imx}}{x-ia}dx=2\pi i\left[\lim_{z\to ia}e^{imz}\right]=2\pi ie^{-ma},$$

而 $$\int_{-\infty}^\infty\frac{e^{imx}}{x+ia}dx=0.$$

第五章　拉普拉斯变换

§21. 拉普拉斯变换

1. 求下列函数的拉普拉斯变换函数。

（1） $\mathrm{sh}\omega t$，$\mathrm{ch}\omega t$。

解一： $\varphi(t)=\mathrm{sh}\omega t=\dfrac{1}{2}(e^{\omega t}-e^{-\omega t})$

$$\doteqdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}-\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{\omega}{p^2-\omega^2}.$$

解二： $\varphi(t)=\mathrm{ch}\omega t=\dfrac{1}{2}(e^{\omega t}+e^{-\omega t})$

$$\doteqdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{p-\omega}+\frac{1}{p+\omega}\right)=\frac{p}{p^2-\omega^2}.$$

（2） $e^{-\lambda t}\sin\omega t$，$e^{-\lambda t}\cos\omega t$；

解一： $\varphi(t)=e^{-\lambda t}\sin\omega t=\dfrac{1}{2i}e^{-\lambda t}(e^{i\omega t}-e^{-i\omega t})$

$$\doteqdot\frac{1}{2i}\left\{\frac{1}{(p+\lambda)-i\omega}-\frac{1}{(p+\lambda)+i\omega}\right\}$$

$$=\frac{\omega}{(p+\lambda)^2+\omega^2};$$

解二： $\varphi_{(t)}=e^{-\lambda t}\cos\omega t=\dfrac{1}{2}e^{-\lambda t}(e^{i\omega t}+e^{-i\omega t})$，

$$\doteqdot\frac{1}{2}\left(\frac{1}{(p+\lambda)-i\omega}+\frac{1}{(p+\lambda)+i\omega}\right)$$

$$=\frac{p+\lambda}{(p+\lambda)^2+\omega^2}.$$

(3) $\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$.

解：$\varphi(t)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi t}}$,

$$\bar{\varphi}(p)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi t}}e^{-pt}dt,$$

若令 $t=x^2$，$dt=2xdx$，

则
$$\bar{\varphi}(p)=\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{\pi}}\,\frac{1}{x}e^{-px^2}\cdot 2xdx$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}e^{-px^2}\,dx$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{\infty}\frac{1}{\sqrt{p}}e^{-px^2}d(\sqrt{P}x)$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi p}}\int_0^{\infty}e^{-y^2}dy$$
$$=\frac{2}{\sqrt{\pi p}}\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2}=\frac{1}{\sqrt{p}}.$$

2.对下列常微分方程施行拉普拉斯变换

(1) $\dfrac{d^3y}{dt^3}+3\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+y=6e^{-t}$,

$$y(0)=\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0}=0.$$

解：$p^3\bar{y}(p)+3p^2\bar{y}(p)+3p\bar{y}(p)+\bar{y}(p)=6\cdot\dfrac{1}{p+1}$,

$$(p+1)^3\bar{y}(p)=\frac{6}{p+1},\quad (p+1)^4\bar{y}(p)=6.$$

亦即 $\bar{y}(p)=\dfrac{6}{(p+1)^4}$.

(2) $\dfrac{d^2y}{dt^2}+9y=30\mathrm{ch}t$，$y(0)=3$，

$$\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0.$$

解：$p^2\overline{y}(p)-3p+9\overline{y}(p)=30\cdot\dfrac{p}{p^2-1}$，

$$(p^2+9)\overline{y}(p)=\frac{30p}{p^2-1}+3p$$

$$=\frac{3p(p^2+9)}{p^2-1},$$

$$\overline{y}(p)=\frac{3p}{p^2-1}.$$

（3）$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}+2y+2z=10e^{2t},\\ \dfrac{dz}{dt}-2y+z=7e^{2t};\end{cases}$ $\begin{cases}y(0)=1,\\ z(0)=3.\end{cases}$

解：$\begin{cases}p\overline{y}(p)-1+2\overline{y}(p)+2\overline{z}(p)=10\cdot\dfrac{1}{p-2},\\ p\overline{z}(p)-3-2\overline{y}(p)+\overline{z}(p)=7\cdot\dfrac{1}{p-2},\end{cases}$

$$\begin{cases}(p+2)\overline{y}(p)+2\overline{z}(p)=\dfrac{1}{p-2}+1,\\ (p+1)\overline{z}(p)-2\overline{y}(p)=\dfrac{7}{p-2}+3.\end{cases}$$

（4）$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=t^2e^t$，$y(0)=\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0$.

解：$t^2e^t \doteq \dfrac{d^2}{dp^2}\dfrac{1}{p-1}=\dfrac{2}{(p-1)^3}$，对原方程进行拉普拉斯变换，

得 $p^2\overline{y}(p)-2p\overline{y}(p)+\overline{y}(p)=\dfrac{2}{(p-1)^3}$，

$(p-1)^2\overline{y}(p)=\dfrac{2}{(p-1)^3}$，$(p-1)^5\overline{y}(p)=2$.

$$\overline{y}(p)=\frac{2}{(p-1)^5}.$$

(5) $\dfrac{dy_1}{dt}=-c_1y_1$, $\dfrac{dy_2}{dt}=c_1y_1-c_2y_2$,

$\dfrac{dy_3}{dt}=c_2y_2-c_3y_3$, $\dfrac{dy_4}{dt}=c_3y_3$.

$y_1(0)=N_0$, $y_2(0)=y_3(0)=y_4(0)=0$.

解：

$$\begin{cases} p\bar{y}_1(p)-N_0=-c_1\bar{y}_1(p), \\ p\bar{y}_2(p)=c_1\bar{y}_1(p)-c_2\bar{y}_2(p), \\ p\bar{y}_3(p)=c_2\bar{y}_2(p)-c_3\bar{y}_3(p), \\ p\bar{y}_4(p)=c_3\bar{y}_3(p); \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} (p+c_1)\bar{y}_1(p)=N_0, \\ (p+c_2)\bar{y}_2(p)=c_1\bar{y}_1(p), \\ (p+c_3)\bar{y}_3(p)=c_2\bar{y}_2(p), \\ p\bar{y}_4(p)=c_3\bar{y}_3(p). \end{cases}$$

(6) 厄米方程$\dfrac{d^2y}{dt^2}-2t\dfrac{dy}{dt}+\lambda y=0$.

解：$p^2\bar{y}(p)-py(0)-y'(0)+2\dfrac{d}{dp}$

$\times[p\bar{y}(p)-y(0)]+\lambda a\bar{y}=0$.

$p^2\bar{y}(p)-py(0)-y'(0)+2\bar{y}(p)+2p\dfrac{d\bar{y}(p)}{dp}$

$+\lambda\bar{y}(p)=0$,

$$2p\frac{d\bar{y}(p)}{dp}+(p^2+\lambda+2)\bar{y}(p)=py(0)+y'(0).$$

(7) 拉盖尔方程 $t\dfrac{d^2y}{dt^2}+(1-t)\dfrac{dy}{dt}+\lambda y=0$.

解：$-\dfrac{d}{dp}[p^2\bar{y}(p)-py(0)-y'(0)]+p\bar{y}(p)-y(0)$

$+\dfrac{d}{dp}[p\bar{y}(p)-y(0)]+\lambda\bar{y}(p)=0$,

$$-p^2\frac{d\bar{y}(p)}{dp}-2p\bar{y}(p)+y(0)+p\bar{y}(p)-y(0)$$

$$+p\frac{d\bar{y}(p)}{dp}+\bar{y}(p)+\lambda\bar{y}(p)=0,$$

$$(p^2-p)\frac{d\bar{y}(p)}{dp}+(p-\lambda-1)\bar{y}(p)=0,$$

$$p(p-1)\frac{d\bar{y}(p)}{dp}+(p-\lambda-1)\bar{y}(p)=0.$$

§22. 拉普拉斯变换的反演

1.把下列像函数反演：

(1) $\bar{y}(p)=\dfrac{6}{(p+1)^4}$.

解：由位移定律 $\dfrac{3!}{(p+1)^{3+1}}\doteq t^3e^{-t}$.

(2) $\bar{y}(p)=\dfrac{3p}{p^2-1}$.

解：$\dfrac{3p}{p^2-1}=\dfrac{3}{2}\left(\dfrac{1}{p+1}+\dfrac{1}{p-1}\right)\doteq\dfrac{3}{2}(e^{-t}+e^t)=3\mathrm{ch}t$.

(3) $\bar{y}(p)=\dfrac{1}{p-2}$, $\bar{Z}(p)=\dfrac{3}{p-2}$.

解：$\dfrac{1}{p-2}\doteq e^{2t}=y(t)$,

$\dfrac{3}{p-2}\doteq 3e^{2t}=z(t)$.

(4) $\bar{y}(p)=\dfrac{2}{(p-1)^5}$.

解：$\dfrac{2}{(p-1)^{4+1}}\doteq\dfrac{2}{4!}t^4e^{-t}$.

2. 求$\bar{j}(P)=\dfrac{E}{LP^2+RP+\dfrac{1}{C}}$的原函数。

解：$\bar{j}(P)=$

$$\frac{E}{L\left(P+\frac{R}{2L}+\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)\left(P+\frac{R}{2L}-\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}\right)}.$$

（1）如果 $R^2-\dfrac{4L}{C}=0$，则

$$\bar{j}(P)=\frac{E}{L}\frac{1}{\left(P+\frac{R}{2L}\right)^2}\doteq\frac{E}{L}te^{-\frac{R}{2L}t}=j(t).$$

（2）如果$R^2-\dfrac{4L}{C}>0$，则

$$\bar{j}(P)=\frac{E}{L}\frac{1}{\left(P+\frac{R}{2L}\right)^2-\left(\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}\right)}$$

$$\doteq\frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}e^{-\frac{R}{2L}t}\ \mathrm{sh}\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}t.$$

（3）如 $R^2-\dfrac{4L}{C}<0$，则

$$\bar{j}(P)=\frac{E}{L}\frac{1}{\left(P+\frac{R}{2L}\right)^2+\left(\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}\right)}$$

$$\doteq\frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}e^{-\frac{R}{2L}t}\ \sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t.$$

3. 求$N_4(P)=\dfrac{N_0C_1C_2C_3}{P(P+C_1)(P+C_2)(P+C_3)}$的原函数。

解：令$\overline{N}_4(P)=\dfrac{N_0C_1C_2C_3}{P(P+C_1)(P+C_2)(P+C_3)}$

$$=\frac{A}{P}+\frac{B}{P+C_1}+\frac{C}{P+C_2}+\frac{D}{P+C_3},$$

求出：$A=N_0$，

$$D=\frac{C_1C_2N_0}{(C_3-C_1)(C_2-C_3)},$$

$$C=\frac{C_3-C_1}{C_1-C_2}\cdot\frac{C_1N_0}{C_1-C_2}=\frac{C_1C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_2-C_3)},$$

$$B=-(C+D+N_0)=\frac{C_2C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_3-C_1)}.$$

$$\therefore \overline{N}_4(P)=\frac{N_0}{P}+\frac{C_2C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_3-C_1)}\cdot\frac{1}{(P+C_1)}$$

$$+\frac{C_1C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_2-C_3)}\cdot\frac{1}{(P+C_2)}$$

$$+\frac{C_1C_2N_0}{(C_2-C_3)(C_3-C_1)(P+C_3)}.$$

进而求得：

$$N_4(t)=N_0+\frac{C_2C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_3-C_1)}e^{-C_1t}$$

$$+\frac{C_1C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_2-C_3)}e^{-C_2t}$$

$$+\frac{C_1C_2N_0}{(C_2-C_3)(C_3-C_1)}e^{-C_3t}.$$

4.求$\overline{y}(P)=\lambda\mu\dfrac{P}{(P+C)^4}$的原函数。

解：$\overline{y}(P)=\lambda\mu\left[\dfrac{P+C}{(P+C)^4}-\dfrac{C}{(P+C)^4}\right]$

$$=\lambda\mu\left[\frac{1}{(P+C)^3}-\frac{C}{(P+C)^4}\right],$$

$$y(t)=\lambda\mu\left[\frac{1}{2!}t^2e^{-ct}-\frac{C}{3!}t^3e^{-ct}\right]$$

$$=\frac{1}{2}\lambda\mu e^{-ct}\left[t^2-\frac{C}{3}\cdot t^3\right].$$

5.求 $\bar{j}(P)=\dfrac{E_0\omega}{\left(P+\frac{1}{RC}\right)\left(P^2+\omega^2\right)}$的原函数。

解：令 $j(P)=\dfrac{E_0\omega P}{R\left(P+\frac{1}{RC}\right)\left(P^2+\omega^2\right)}$

$$=\frac{AP}{P^2+\omega^2}+\frac{B}{P^2+\omega^2}+\frac{D}{P+\frac{1}{RC}},$$

求出：

$$A=\frac{E_0}{R^2\omega C+\frac{1}{C\omega}},$$

$$B=\frac{E_0}{R}\left(\frac{\omega}{1+\frac{1}{R^2C^2\omega^2}}\right),$$

$$D=-\frac{E_0}{R^2C\omega+\frac{1}{C\omega}}.$$

$$\therefore\quad \bar{j}(P)=\frac{E_0}{R^2C\omega+\frac{1}{C\omega}}\cdot\frac{P}{P^2+\omega^2}$$

$$+\frac{E_0}{R}\left(\frac{1}{1+\frac{1}{R^2C^2\omega^2}}\right)\frac{\omega}{P^2+\omega^2}$$

$$-\frac{E_0}{R^2C\omega+\frac{1}{C\omega}}\cdot\frac{1}{P+\frac{1}{CR}}$$

$$=\frac{E_0}{R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}\left[\left(R\frac{\omega}{P^2+\omega^2}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{1}{C\omega}\left(\frac{P}{P^2+\omega^2}\right)\right]-\frac{E_0}{R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}$$

$$\times\frac{1}{C\omega}\cdot\frac{1}{P+\frac{1}{RC}},$$

$$j(t)=\frac{E_0}{R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}\left[R\sin\omega t+\frac{1}{C\omega}\cos\omega t\right]$$

$$-\frac{E_0/C\omega}{R^2+\frac{1}{C^2\omega^2}}e^{-\frac{t}{RC}}.$$

6. 求 $\overline{T}(P)=A\frac{\omega}{P^2+\omega^2}\frac{1}{P^2+\pi^2a^2/l^2}$ 的原函数。

解： 令 $\overline{T}(P)=A\frac{\omega}{P^2+\omega^2}\frac{1}{P^2+\pi^2a^2/l^2}$

$$=\frac{E}{P^2+\omega^2}+\frac{F}{P^2+\pi^2a^2/l^2},$$

求出 $E=\frac{A\omega}{\pi^2a^2/l^2-\omega^2}$，$F=-\frac{\omega A}{\pi^2a^2/l^2-\omega^2}$。

$$\therefore\quad \overline{T}(P)=\frac{A}{\pi^2a^2/l^2-\omega^2}\cdot\frac{\omega}{P^2+\omega^2}$$

$$-\frac{\omega A}{\pi^2a^2/l^2-\omega^2}\frac{1}{P^2+\pi^2a^2/l^2},$$

$$T(t)=\frac{A}{\pi^2a^2/l^2-\omega^2}\left[\sin\omega t-\omega\frac{l}{\pi a}\sin\frac{\pi a}{l}t\right]$$

$$=\frac{lA}{\pi a}\cdot\frac{1}{\omega^2-\frac{\pi^2a^2}{l^2}}\left(\omega\sin\frac{\pi at}{l}\right.$$

$$-\frac{\pi a}{l}\sin\omega t\Big).$$

7．求 $\overline{T}(P)=\dfrac{1}{P^2+\omega^2a^2}\overline{g}(P)$ 的原函数，$\overline{g}(P)$ 是某个已知的 $g(t)$ 的像函数。

解：设 $\overline{f}(P)=\dfrac{1}{P^2+\omega^2a^2}$，

$$\text{则} f(t)=\frac{1}{\omega a}\sin\omega at$$

$$=\frac{1}{\omega a}\cdot\frac{1}{2i}(e^{i\omega at}-e^{-i\omega at}).$$

根据卷积定理：因为 $\overline{f}(P)\doteqdot f(t)$，$\overline{g}(P)\doteqdot g(t)$。

$$\therefore T(t)\doteqdot\overline{f}(P)\overline{g}(P)\doteqdot\int_0^t g(\tau)f(t-\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{\omega a}\cdot\frac{1}{2i}\int_0^t g(\tau)[e^{i\omega a(t-\tau)}-e^{-i\omega a(t-\tau)}]d\tau.$$

8．求 $\overline{T}(P)=\dfrac{1}{P+\omega^2a^2}\overline{g}(P)$ 的原函数，$\overline{g}(P)$ 是某个已知的 $g(t)$ 的像函数。

解：设 $\overline{f}(P)=\dfrac{1}{P+\omega^2a^2}$，则 $f(t)=e^{-\omega^2a^2t}$。

根据卷积定理，因为 $\overline{f}(P)\doteqdot f(t)$，$\overline{g}(P)\doteqdot g(t)$。

$$\therefore\ T(t)\doteqdot\overline{f}(P)\overline{g}(P)\doteqdot\int_0^t g(t)e^{-\omega^2a^2(t-\tau)}d\tau.$$

9．已知像函数 $\overline{y}(P)=e^{-P^2/4}P^{-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}$

$$\times\int e^{P^2/4}P^{-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}\left(C_1+\frac{C_2}{P}\right)dP,$$

其中 C_1 和 C_2 是两个任意常数，问 λ 应取怎样的数值才有可能选

定C_1和C_2使原函数$y(t)$为多项式?

解：$\overline{y}(P)=e^{-P^2/4}P^{-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}$

$$\times\int e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}\left(C_1+\frac{C_2}{P}\right)dP$$

$$=e^{-P^2/4}P^{-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}$$

$$\times\left[C_1\int e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}dP+C_2\right.$$

$$\left.\times\int e^{P^2/4}P^{\frac{\lambda}{2}}dP\right]$$

$$=e^{-P^2/4}P^{-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}$$

$$\times\left[2C_1P^{\frac{\lambda}{2}}e^{P^2/4}-2C_1\left(\frac{\lambda}{2}\right)\int e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)}dP\right.$$

$$+2C_2P^{\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)}e^{P^2/4}-2C_2\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)$$

$$\left.\times\int e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}-2\right)}dP\right]$$

$$=e^{-P^2/4}P^{-\left(\frac{\lambda}{2}+1\right)}\left\{2C_1P^{\frac{\lambda}{2}}e^{P^2/4}\right.$$

$$-2C_1\left(\frac{\lambda}{2}\right)\left[2e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}-2\right)}\right.$$

$$\left.-2\left(\frac{\lambda}{2}-2\right)\int e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}-2\right)}dP\right]$$

$$+2C_2P^{\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)}e^{P^2/4}$$

$$-2C_2\left(\frac{\lambda}{2}-1\right)\left[2e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}-3\right)}\right.$$

$$-2\left(\frac{\lambda}{2}-3\right)\int e^{P^2/4}P^{\left(\frac{\lambda}{2}-3\right)}dP\ \Big]\Big\}$$

$$=\cdots\cdots.$$

(i) 如$\frac{\lambda}{2}$为偶数，可选$C_1\neq 0$，$C_2=0$，一次又一次的分部积分，可得$\bar{y}(P)$为$\frac{1}{P}$的多项式，相应的原函数必亦为多项式。

(ii) 如$\frac{\lambda}{2}$为奇数，可选$C_2\neq 0$，$C_1=0$，亦可得多项式。

(iii) 如$\frac{\lambda}{2}$不是整数，则不可能得到多项式。

10. 已知$\bar{y}(P)=\frac{(P-1)^\lambda}{P^{\lambda+1}}$，问$\lambda$应取怎样的数值，原函数才是多项式？

解：当λ为正整数时，

$$\bar{y}(P)=\frac{(P-1)^\lambda}{P^{\lambda+1}}=\frac{1}{P^{\lambda+1}}\Big[P^\lambda-\lambda P^{(\lambda-1)}$$

$$+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}P^{(\lambda-2)}-\cdots\cdots$$

$$+(-1)^k\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots\cdots(\lambda-K+1)}{K!}P^{(\lambda-k)}$$

$$+\cdots\cdots+(-1)^\lambda\Big]$$

$$=\frac{1}{P}-\frac{\lambda}{P^2}+\frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}\cdot\frac{1}{P^3}-\cdots\cdots$$

$$+\frac{\lambda(\lambda-1)\cdots\cdots(\lambda-K+1)}{K!}\frac{(-1)^k}{P^{k+1}}$$

$$+\cdots\cdots+\frac{(-1)^\lambda}{P^{\lambda+1}}.$$

$\overline{y}(P)$为 $\frac{1}{P}$的多项式，相应的原函数亦必为多项式。

11.已知$\overline{X}(P)=F_0\ \frac{\omega}{P^2+\omega^2}\ \frac{mP^2+R}{D(P)}$，其中 $D(P)=(MP^2+RP+K+k)\cdot(mP^2+k)-k^2$，而$F_0$，$\omega$，$m$，$k$，$K$，$M$，$R$都是正的常数.试论证$D(P)$没有正的根，也没有纯虚数根，在什么条件下，原函数 $X(t)$ 不含有稳定振荡的部分而只含指数式衰减的部分，或衰减振荡部分.

解：（1） $D(P)=(MP^2+RP+K+k)(mp^2+k)-k^2$

$$=0,$$

即$MmP^4+RmP^3+(kM+km+Km)P^2+kRP+kK=0$.

(i) 若P_1为正数，则

$(MP_1^2+RP_1+K+k)(mP_1^2+k)>k^2$即$D(P_1)>0$，

所以$D(P)$没有正根，从而$X(t)$没有指数式增长项，即 $X(t)$ 不包含$e^{st}(S>0)$.

(ii) 设方程$D(P)=0$有某个纯虚数根iy，则

$$\begin{cases} R_eD(iy)=0, \\ I_mD(iy)=0; \end{cases}$$

$$即\begin{cases} (-My^2+K)(-my^2+k)-kmy^2=0, & (1) \\ R(-my^2+k)=0. & (2) \end{cases}$$

但(1)、(2)两式有矛盾，所以方程 $D(P)=0$ 没有纯虚数根，所以$X(t)$不包含$e^{\pm i\omega t}$(ω为实数)，即不包含有$\cos\omega t$ 和 $\sin\omega t$，没有稳定振荡部份.

(iii) 设方程$D(P)=0$有$x+iy(x>0)$的根，

则

$$D(x+iy)=(Mx^2-My^2+2iMxy+Rx+iRy+K+k)(mx^2-my^2+i2mxy+k)-k^2$$

$$=[(Mx^2-My^2+Rx+K+k)$$

$$\times(mx^2-my^2+k)-2mxy^2$$
$$\times(2Mx+R)-k^2]+i[(Mx^2-My^2$$
$$+Rx+K+k)2mxy$$
$$+(mx^2-my^2+k)(2Mx+R)y]$$
$$=0.$$

即
$$\begin{cases}(Mx^2-My^2+Rx+K+k)(mx^2-my^2+k) \\ \quad -2mxy^2(2Mx+R)-k^2=0, & (3)\\ (Mx^2-My^2+Rx+K+k)2mx+(mx^2-my^2 \\ \quad +k)(2Mx+R)=0, & (4)\end{cases}$$

由(4)式

$$Mx^2-My^2+Rx+K+k=-\frac{2Mx+R}{2mx}(mx^2-my^2+k),$$

以此代入(3)式,

$$-\frac{2Mx+R}{2mx}(mx^2-my^2+k)-2mxy^2(2Mx+R)-k^2=0.$$

上式左边三项都是负的，其和不可能为零，所以原假设不成立，方程$D(P)=0$没有$x+iy(x>0)$的根。

由上述可见，$X(t)$只可能有指数式衰减e^{-rt}部分和衰减振荡$e^{-xt}\cos yt$、$e^{-xt}\sin yt$。

(2) 但$(P^2+\omega^2)D(P)$有纯虚数根$\pm i\omega$，所以$\overline{X}(P)$的分项分式有$(AP+B)/(P^2+\omega^2)$项，反演后给出$X(t)$的稳定振荡项。要消除$X(t)$的稳定振荡项，必须$\overline{X}(P)$的分母里$P^2+\omega^2$与分子里P^2+k/m互相约去，即

$$P^2+\omega^2=P^2+\frac{k}{m},$$

亦即在条件

$$\omega^2=\frac{k}{m}$$

之下，原函数$X(t)$不包含有稳定振荡部分而只含指数式衰减

的部分或衰减振荡部分。

12. 求下列像函数的原函数。

（1）$\bar{I}(P)=\dfrac{\pi}{2a}\cdot\dfrac{1}{P+a}$。

解：$I(t)=\dfrac{\pi}{2a}e^{-at}$。

（2）$\bar{I}(P)=\dfrac{\pi}{2P}$。

解：$I(t)=\dfrac{\pi}{2}$。

（3）$\bar{I}(P)=\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{1}{P(P+1)}$。

解：$\bar{I}(P)=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{1}{P}-\dfrac{1}{P+1}\right)$，

所以$I(t)=\dfrac{\pi}{2}(1-e^{-t})$。

（4）$\bar{I}(P)=\dfrac{\pi}{2P^2}$。

解：$I(t)=\dfrac{\pi}{2}t$。

§23. 运算微积应用例

1. 求解下列常微分方程

（1）$\dfrac{d^3y}{dt^3}+3\dfrac{d^2y}{dt^2}+3\dfrac{dy}{dt}+y=6e^{-t}$，

$$y(0)=\left.\frac{dy}{dt}\right|_{t=0}=\left.\frac{d^2y}{dt^2}\right|_{t=0}=0.$$

解：对该方程施行拉普拉斯变换（见§21习题2（1）后），

得：
$$\overline{y}(P)=\frac{6}{(P+1)^4},$$
然后再求出$\overline{y}(P)$的原函数（见§22习题1(1)）为

$y(t)=t^3e^{-t}$，此即该常微分方程的解。

（2）$\dfrac{d^2y}{dt^2}+9y=30\operatorname{ch}t$，$y(0)=3$，$y'(0)=0$。

解：对该方程施行拉普拉斯变换后（见§21习题2(2)）得
$$\overline{y}(P)=\frac{3P}{P^2-1},$$
然后再求出$\overline{y}(P)$的原函数（见§22习题1(2)）为

$y(t)=3\operatorname{ch}t$，此即该常微分方程的解。

（3）$\begin{cases}\dfrac{dy}{dt}+2y+2z=10e^{2t},\\ \dfrac{dz}{dt}-2y+z=7e^{2t};\end{cases}$ $\quad\begin{cases}y(0)=1,\\ z(0)=3.\end{cases}$

解：对该方程施行拉普拉斯变换后（见§21习题2(3)）得
$$\begin{cases}(P+2)\overline{y}(P)+2\overline{z}(P)=\dfrac{10}{P-2}+1=\dfrac{P+8}{P-2},\\ (P+1)\overline{z}(P)-2\overline{y}(P)=\dfrac{7}{P-2}+3=\dfrac{3P+1}{P-2}.\end{cases}$$
$$\overline{y}(P)=\frac{\begin{vmatrix}(P+8)/(P-2) & 2\\ (3P+1)/(P-2) & P+1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P+2 & 2\\ -2 & P+1\end{vmatrix}}=\frac{1}{P-2},$$
$$\overline{z}(P)=\frac{\begin{vmatrix}P+2 & (P+8)/(P-2)\\ -2 & (3P+1)/(P-2)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}P+2 & 2\\ -2 & P+1\end{vmatrix}}=\frac{3}{P-2}.$$

然后再求出$\overline{y}(P)$和$\overline{Z}(P)$的原函数（见§22习题1(3)）为

$$y(t)=e^{2t},\quad z(t)=3e^{2t}$$此即该常微分方程的解。

(4) $\dfrac{d^2y}{dt^2}-2\dfrac{dy}{dt}+y=t^2e^t,\quad y(0)=\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0$。

解：对该方程施行拉普拉斯变换后（见§21习题2(4)）得

$$\overline{y}(p)=\frac{2}{(p-1)^5},$$

然后再求出$\overline{y}(p)$的原函数（见§22习题1(4)）为$y(t)=\dfrac{1}{12}t^4e^t$，此即该常微分方程的解。

2. 电压为E_0的直流电源通过电感L和电阻R对电容C充电。

求解充电电流j的变化情况。

解：设电键K关闭前电路中没有电流，即$j(0)=0$。

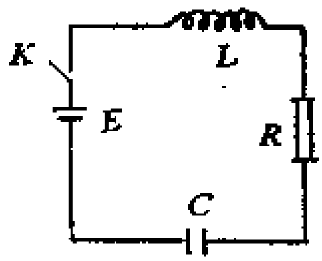


图 5-1

电键K关闭后电流j所满足的微分方程是

$$L\frac{dj}{dt}+Rj+\frac{1}{C}\int_0^t jdt=E.$$

结合初始条件$j(0)=0$对上述方程施行拉普拉斯变换后得

$$LP\overline{j}(P)+R\overline{j}(P)+\frac{1}{C}\cdot\frac{1}{P}\overline{j}(P)=\frac{E}{P},$$

$$LP^2\overline{j}(P)+RP\overline{j}(P)+\frac{1}{C}\overline{j}(P)=E,$$

$$\overline{j}(P)=\frac{E}{LP^2+RP+\dfrac{1}{C}}.$$

然后再求出$\overline{j}(P)$的原函数（见§22习题2）为

(i) 如$R^2-\frac{4L}{C}=0$，

则$j(t)=\frac{E}{L}te^{-\frac{R}{2L}t}$.

(ii) 如$R^2-\frac{4L}{C}>0$，

则$j(t)=\frac{E}{L\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}}e^{\frac{-R}{2L}t}\operatorname{sh}\sqrt{\frac{R^2}{4L^2}-\frac{1}{LC}}t$.

(iii) 如 $R^2-\frac{4L}{C}<0$，

则$j(t)=\frac{E}{L\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}}e^{\frac{-R}{2L}t}\sin\sqrt{\frac{1}{LC}-\frac{R^2}{4L^2}}t$.

3. 放射性元素E_1蜕变为E_2，元素E_1的原子数N_1变化规律为$\frac{dN_1}{dt}=-C_1N_1$. 元素E_2又蜕变为E_3，元素E_2的原子数N_2变化规律为$\frac{dN_2}{dt}=C_1N_1-C_2N_2$，元素$E_3$又蜕变为$E_4$，元素$E_3$的原子数 N_3 变化规律$\frac{dN_3}{dt}=C_2N_2-C_3N_3$，元素$E_4$是稳定的，不再蜕变，它的原子数$N_4$的变化规律为$\frac{dN_4}{dt}=C_3N_3$，以上$C_1$，$C_2$，$C_3$和$C_4$都是常数，设开始时只有元素$E_1$的$N_0$个原子，求解$N_4$的变化情况$N_4(t)$.

解：$\frac{dN_1}{dt}=-C_1N_1$，$\frac{dN_2}{dt}=C_1N_1-C_2N_2$，

$\frac{dN_3}{dt}=C_2N_2-C_3N_3$，$\frac{dN_4}{dt}=C_3N_3$，

$$N_1(0)=N_0,\quad N_2(0)=N_3(0)=N_4(0)=0,$$

对上述方程施行拉普拉斯变换后（见§21习题2(5)）得：

$(P+C_1)\bar{N}_1(P)=N_0$，$(P+C_2)\bar{N}_2(P)=C_1\bar{N}_1(P)$，

$(P+C_3)\bar{N}_3(P)=C_2\bar{N}_2(P)$，$P\bar{N}_4(P)=C_3\bar{N}_3(P)$，进一步求出：

$$\bar{N}_1(P)=\frac{N_0}{P+C_1},\quad \bar{N}_2(P)=\frac{C_1N_0}{(P+C_1)(P+C_2)},$$

$$\bar{N}_3(P)=\frac{C_1C_2N_0}{(P+C_1)(P+C_2)(P+C_3)},$$

$$\bar{N}_4(P)=\frac{C_1C_2C_3N_0}{P(P+C_1)(P+C_2)(P+C_3)},$$

然后再求出$\bar{N}_4(P)$的原函数（见§22习题3）为：

$$N_4(t)=N_0+\frac{C_2C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_3-C_1)}e^{-c_1t}$$

$$+\frac{C_1C_3N_0}{(C_1-C_2)(C_2-C_3)}e^{-c_2t}$$

$$+\frac{C_1C_2N_0}{(C_2-C_3)(C_3-C_1)}e^{-c_3t},$$

4．设地面有一震动，其速度$v=H(t)$，地震仪中的感生电流j遵守规律$\frac{dj}{dt}+2cj+c^2\int_0^t jdt=\lambda\frac{dv}{dt}$，这电流通过检流计，使检流计发生偏转。偏转$y$遵守规律$\frac{d^2y}{dt^2}+2c\frac{dy}{dt}+c^2y=\mu j$，求解偏转$y$的变化情况$y(t)$。

解：

$$\begin{cases}\dfrac{dj}{dt}+2Cj+C^2\displaystyle\int_0^t jdt=\lambda\dfrac{dH(t)}{dt},\\[2mm] \dfrac{d^2y}{dt^2}+2c\dfrac{dy}{dt}+c^2y=\mu j,\end{cases}$$

$$\begin{cases} j(0)=0, \\ y(0)=\left.\dfrac{dy}{dt}\right|_{t=0}=0. \end{cases}$$

由于 $H(t) \doteq \dfrac{1}{P}$　　所以$\dfrac{dH}{dt} \doteq P\dfrac{1}{P}=1$.

再对方程组施行拉普拉斯变换后得：

$$\begin{cases} \left(P+2C+\dfrac{C^2}{P}\right)\bar{j}=\lambda, & \bar{j}(P)=\dfrac{\lambda P}{P^2+2CP+C^2}, \\ (P^2+2CP+C^2)\bar{y}(P)=\mu\bar{j}(P), \end{cases}$$

$$\bar{y}(P)=\frac{\mu\bar{j}(P)}{P^2+2CP+C^2}=\frac{\mu\lambda P}{(P^2+2CP+C^2)^2}=\frac{\lambda\mu P}{(P+C)^4}.$$

然后再求出$\bar{y}(P)$的原函数（见§22习题4）为：

$$y(t)=\frac{1}{2}\lambda\mu e^{-ct}\left(t^2-\frac{C}{3}t^3\right).$$

5.求解交流RC电路的方程

$$\begin{cases} Rj+\dfrac{1}{C}\displaystyle\int_0^t jdt=E_0\sin\omega t, \\ j(0)=0. \end{cases}$$

解：对上述方程施行拉普拉斯变换后得：

$$R\bar{j}(P)+\frac{1}{CP}\bar{j}(P)=E_0\frac{\omega}{P^2+\omega^2},$$

$$\bar{j}(P)=\frac{E_0\omega P}{(P^2+\omega^2)\left(RP+\dfrac{1}{C}\right)},$$

然后再求出$\bar{j}(P)$的原函数（见§22习题5）为：

$$j(t)=\frac{E_0}{R^2+\dfrac{1}{C^2\omega^2}}\left[R\sin\omega t+\frac{1}{C\omega}\cos\omega t\right]$$

$$\times\frac{E_0/C\omega}{R^2+\dfrac{1}{C^2\omega^2}}e^{\frac{-t}{RC}}.$$

6.求解 $T'' + \frac{\pi^2 a^2}{l^2} T = A\sin\omega t$，$T(0)=0$，$T'(0)=0$。

解：对该方程施行拉普拉斯变换后得：

$$P^2\overline{T}(P) + \frac{\pi^2 a^2}{l^2}\overline{T}(P) = A\frac{\omega}{P^2+\omega^2},$$

$$\overline{T}(P) = A\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\cdot\frac{1}{p^2+\frac{\pi^2 a^2}{l^2}},$$

然后再求出$\overline{T}(P)$的原函数（见§22习题6）为

$$T(t) = \frac{lA}{\pi a}\cdot\frac{1}{\omega^2-\frac{\pi^2 a^2}{l^2}}\left(\omega\sin\frac{\pi a t}{l} - \frac{\pi a}{l}\sin\omega t\right).$$

7.求解$T'' + \omega^2 a^2 T = g(t)$，$T(0)=0$，$T'(0)=0$，$g(t)$是某个已知函数。

解：对该方程施行拉普拉斯变换后得：

$$P^2\overline{T}(P) + \omega^2 a^2\overline{T}(P) = \overline{g}(p),$$

$$\overline{T}(P) = \frac{1}{p^2+\omega^2 a^2}\overline{g}(p),$$

然后再求出$\overline{T}(P)$的原函数（见§22习题7）为：

$$T(t) = \frac{1}{\omega a}\cdot\frac{1}{2i}\int_0^t g(t)\left[e^{i\omega a(t-\tau)} - e^{-i\omega a(t-\tau)}\right]d\tau.$$

8.求解 $T' + \omega^2 a^2 T = g(t)$，$T(0)=0$，$g(t)$ 是某个已知函数。

解：对该方程施行拉普拉斯变换后得：

$$P\overline{T}(P) + \omega^2 a^2\overline{T}(P) = \overline{g}(P),$$

$$\overline{T}(P) = \frac{1}{p+\omega^2 a^2}\overline{g}(P),$$

然后再求出$\overline{T}(P)$的原函数（见§22习题8）为：

$$T(t) = \int_0^t g(\tau)e^{-\omega^2 a^2(t-\tau)}d\tau.$$

9. 厄米方程$\frac{d^2y}{dt^2}-2t\frac{dy}{dt}+\lambda y=0$里的$\lambda$值应取怎样的数值才有可能使方程的解为多项式？

解：对厄米方程施行拉普拉斯变换后（见§21习题2(6)）得：

$$2P\frac{d\bar{y}(P)}{dP}+(P^2+2+\lambda)\bar{y}(P)=Py(0)+y'(0),$$

$$\frac{d\bar{y}}{dP}+\frac{P^2+2+\lambda}{2P}\bar{y}(P)=\frac{1}{2}y(0)+\frac{1}{2P}y'(0),$$

$$\bar{y}(P)=e^{-\int\frac{P^2+2+\lambda}{2P}dP'}\left\{\int\left[\frac{1}{2}y(0)+\frac{1}{2P}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\ y'(0)\right]e^{\int\frac{P^2+2+\lambda}{2P}dP}dP\right\}$$

$$=e^{-P^2/4}\cdot e^{-(\frac{\lambda}{2}+1)\ln P}\left\{\int\left[\frac{1}{2}y(0)\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{1}{2P}y'(0)\right]e^{-P^2/4}\cdot e^{-(\frac{\lambda}{2}+1)\ln P}dP\right\}$$

$$=e^{-P^2/4}P^{-(\frac{\lambda}{2}+1)}\int e^{-P^2/4}P^{-(\frac{\lambda}{2}-1)}$$

$$\times\left[\frac{1}{2}y(0)+\frac{1}{2P}y'(0)\right]dP,$$

记$\frac{y(0)}{2}=C_1$，$\frac{y'(0)}{2}=C_2$，

则$\bar{y}(P)=e^{-P^2/4}P^{-(\frac{\lambda}{2}+1)}\int e^{-P^2/4}P^{-(\frac{\lambda}{2}+1)}$

$$\times\left(C_1+\frac{C_2}{P}\right)dP.$$

以下的讨论见§22习题9。

10．拉盖尔方程$t\frac{d^2y}{dt^2}+(1-t)\frac{dy}{dt}+\lambda y=0$的$\lambda$应取怎样的数值才有可能使方程的解为多项式？

解：对拉盖尔方程进行拉普拉斯变换后（见§21习题2(7)得

$$P(P-1)\frac{d\overline{y}(P)}{dP}+(P-\lambda-1)\overline{y}(P)=0,$$

$$\frac{d\overline{y}(P)}{dP}+\frac{P-\lambda-1}{P(P-1)}\overline{y}(P)=0,$$

$$\frac{d\overline{y}(P)}{\overline{y}(P)}=-\frac{P-\lambda-1}{P(P-1)}dP,$$

$$\ln\overline{y}(P)=\int\frac{(P-\lambda-1)dP}{P(P-1)}$$

$$=\ln(P-1)^{\lambda}-\ln P^{(\lambda+1)}+\ln C,$$

$$\overline{y}(P)=C\frac{(P-1)^{\lambda}}{P^{\lambda+1}}.$$

以下的讨论见§22习题10。

11．有一种船舶减震器利用的是耦合振动原理。在水面上颠簸的船体不妨看作是一个阻尼振子，其质量为M，倔强系数为K，阻尼系数为R。减震器则是附着在船体上的振子，其质量为m，倔强系数为k，因此，船体的位移$X(t)$和减震器的位移$X(t)$的运动方程是：

$$\begin{cases}M\ddot{X}=F_0\sin\omega t-KX-R\dot{X}-k(X-x),\\ m\ddot{X}=-k(x-X).\end{cases}$$

其中$F_0\sin\omega t$是使船体颠簸的外力。在什么条件下，船体的运动不含有稳定振荡而只含有指数式衰减或衰减振荡？

解：先对方程$m\ddot{X}=-k(x-X)$施行拉普拉斯变换后得：

$$m[P^2\overline{x}(P)-Px(0)-\dot{x}(0)]=-k[\overline{x}(P)-\overline{X}(P)],$$

$$\overline{X}(P)=\frac{mpx(0)+m\dot{x}(0)+k\overline{X}(P)}{mp^2+k} \qquad (1)$$

再对另一个运动方程施行拉普拉斯变换后得：

$$M[P^2\overline{X}(P)-PX(0)-\dot{X}(0)]$$
$$=F_0\frac{\omega}{P^2+\omega}$$
$$-K\overline{X}(P)-R[P\overline{X}(P)-X(0)]$$
$$-k[\overline{X}(P)-\overline{x}(P)],$$
$$(MP^2+RP+K+k)\overline{X}(P)$$
$$=F_0\frac{\omega}{P^2+\omega^2}$$
$$+MPX(0)+M\dot{X}(0)-RX(0)+k\overline{x}(P);$$

将（1）式代入上式并整理即得：

若$t=0$时，$X(0)=\dot{X}(0)=x(0)=\dot{x}(0)=0$，就有

$$\overline{X}(P)=F_0\frac{\omega}{P^2+\omega^2}\frac{mP^2+k}{(MP^2+RP+K+k)(mP^2+k)-k^2}$$
$$=F_0\frac{\omega}{P^2+\omega^2}\cdot\frac{mP^2+k}{D(P)}.$$

以下的讨论见§22习题11.

12.用运算微积方法求出下列积分

（1）$I(t)=\int_0^\infty\frac{\cos tx}{x^2+a^2}dx.$

解：先进行拉普拉斯变换，再调换积分秩序，

$$\overline{I}(P)=\int_0^\infty\frac{Pdx}{(x^2+a^2)(x^2+p^2)}$$
$$=P\int_0^\infty\frac{[(x^2+a^2)-(x^2+P^2)]dx}{(a^2-P^2)(x^2+a^2)(x^2+P^2)}$$
$$=\frac{P}{a^2-P^2}\int_0^\infty\frac{1/P^2}{x^2/P^2+1}-\frac{1/a^2}{x^2/a^2+1}dx$$
$$=\frac{P}{a^2-P^2}\left(\frac{1}{P}\operatorname{arctg}\frac{x}{P}-\frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a}\right)\Big|_0^\infty$$

$$=\frac{\pi}{2}\frac{P}{a^2-P^2}\frac{a-P}{aP}=\frac{\pi}{2a}\frac{1}{a+P},$$

然后求出$\bar{I}(P)$的原函数，见§22习题12(1)，

$$\therefore \quad I(t)=\frac{\pi}{2a}e^{-at}.$$

（2） $I(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}dx.$

解：$\bar{I}(P)=\int_0^\infty \frac{\frac{x}{x^2+P^2}}{x}dx=\int_0^\infty \frac{dx}{x^2+P^2}=\frac{\pi}{2P},$

然后求出$\bar{I}(P)$的原函数，见§22习题12(2)，所以，

$$I(t)=\frac{\pi}{2}.$$

在施以拉普拉斯变换时，要求$\sin tx$中的$t>0$，从而得$I=\frac{\pi}{2}$.如果$t<0$，则

$$I(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}dx$$

$$=-\int_0^\infty \frac{\sin t'x}{x}dx \quad (t'=-t).$$

再对上式施行拉普拉斯变换得

$$\bar{I}(P)=-\frac{\pi}{2P}.$$

故
$$I(t)=-\frac{\pi}{2}.$$

于是，

$$I(t)=\int_0^\infty \frac{\sin tx}{x}dx=\begin{cases}\pi/2, & (t>0),\\ 0, & (t=0),\\ -\pi/2, & (t<0).\end{cases}$$

（3） $I(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin tx}{x(x^2+1)}dx$.

解：$\bar{I}(P)=\int_0^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+P^2)}=\frac{\pi}{2P(P+1)}$,

然后求出$\bar{I}(P)$的原函数（见§22习题12(3)）

$$I(t)=\frac{\pi}{2}(1-e^{-t}).$$

当$t<0$时，$I(t)=\frac{\pi}{2}(e^{-t}-1)$。

（4） $I(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 tx}{2x^2}dx$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1-\cos 2xt}{2x^2}dx.$$

$$解：\bar{I}(P)=\int_0^{\infty}\frac{\frac{1}{P}-\frac{P}{P^2+(2x)^2}}{2x^2}dx$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{2^2x^2dx}{2x^2P[P^2+(2x)^2]}$$

$$=\frac{1}{P^2}\int_0^{\infty}\frac{d(2x/P)}{\left[1+\left(\frac{2x}{P}\right)^2\right]}=\frac{\pi}{2P^2},$$

然后求出$\bar{I}(P)$的原函数（见§22习题12(4)）

$$I(t)=\frac{\pi}{2}t,$$

当$t<0$时，$I(t)=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2 tx}{x}dx=\int_0^{\infty}\frac{\sin^2|t|x}{x}dx=\frac{\pi}{2}|t|$.

由上述可知$I(t)=\frac{\pi}{2}|t|$（t为任意实数）。

第二篇　傅里叶级数和积分

第六章　傅里叶级数

§24. 周期函数的傅里叶级数

1. 图6-1是硅可控整流电压$E(t)$的图象，试把它展开为傅里叶级数，在$[-\pi/\omega,\pi/\omega]$这个周期上，$E(t)$可表为

$$E(t)=\begin{cases}0 & \text{在}[-\pi/\omega,\alpha\pi/\omega]\text{上}, \\ E_0\sin\omega t & \text{在}[\alpha\pi/\omega,\pi/\omega]\text{上},\end{cases}$$

其中α是触发电路控制的某个参数，注意直流成分的大小跟α有关，这就是硅可控整流的调压原理。

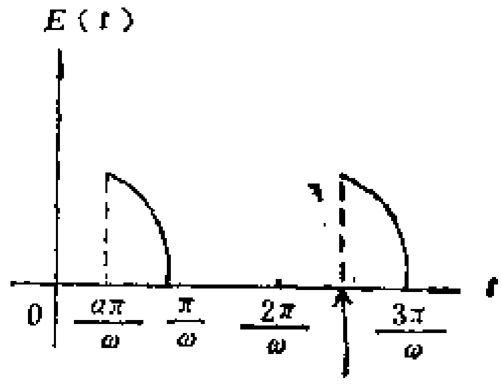


图 6-1

解：对任意周期 $2l$ 的傅里叶级数和傅里叶系数表达式为：

$$f(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}t+b_n\sin\frac{n\pi}{l}t\right),$$

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(t)\,dt,$$

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(t)\cos\frac{n\pi}{l}t\,dt,$$

$$b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n\pi}{l}tdt,$$

本题整流电压 $E(t)$ 之周期为$\frac{2\pi}{\omega}$，

令 $2l=\frac{2\pi}{\omega}$，得$\frac{\pi}{l}=\omega$，

将 l 代入上列公式即可得适合本题傅里叶级数及其系数表达式

$$E(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos n\omega t+b_n\sin n\omega t),$$

先计算傅里叶系数a_0

$$a_0=\frac{\omega}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E(t)dt$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\left[\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\alpha\pi}{\omega}}0dt+\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega tdt\right]$$

$$=\frac{\omega}{2\pi}\cdot\frac{1}{\omega}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega td\omega t$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}(-\cos\omega t)\Big|_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}(1+\cos\alpha\pi),$$

再计算系数a_n

$$a_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E(t)\cos n\omega tdt$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\cos n\omega tdt$$

$$=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(1+n)\omega t+\sin(1-n)\omega t]dt.$$

这里要区分两种情况：

（1） $n=1$ 时

$$a_1=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}\sin 2\omega t dt$$

$$=\frac{E_0}{4\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}\sin 2\omega t d(2\omega t)$$

$$=\frac{E_0}{4\pi}(-\cos 2\omega t)\Big|_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}=\frac{E_0}{4\pi}(\cos 2\alpha\pi-1),$$

（2） $n\neq 1$ 时

$$a_n=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[\sin(1+n)\omega t+\sin(1-n)\omega t]dt$$

$$=-\frac{\omega E_0}{2\pi}\left[\frac{\cos(1+n)\omega t}{(1+n)\omega}+\frac{\cos(1-n)\omega t}{(1-n)\omega}\right]_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=-\frac{E_0}{2\pi}\left[\frac{\cos(1+n)\omega t-n\cos(1+n)\omega t+\cos(1-n)\omega t+n\cos(1-n)\omega t}{(1+n)(1-n)}\right]_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=-\frac{E_0}{2\pi}\left[\frac{2\cos\omega t\cos n\omega t+2n\sin\omega t\sin n\omega t}{1-n^2}\right]_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{E_0}{\pi}\left(\frac{\cos\alpha\pi\cos n\alpha\pi+n\sin\alpha\pi\sin n\alpha\pi}{1-n^2}\right.$$

$$\left.-\frac{\cos\pi\cos n\pi+n\sin\pi\sin n\pi}{1-n^2}\right)$$

$$=\frac{E_0}{\pi}\left[\frac{\cos\alpha\pi\cos n\alpha\pi+n\sin\alpha\pi\sin n\alpha\pi}{1-n^2}+\frac{\cos n\pi}{1-n^2}\right]$$

$$=\frac{E_0}{\pi}\left[\frac{\cos\alpha\pi\cos n\alpha\pi+n\sin\alpha\pi\sin n\alpha\pi}{1-n^2}+\frac{(-1)^n}{1-n^2}\right],$$

用类似的方法可得系数b_n

$$b_n=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E(t)\sin n\omega t dt$$

$$=\frac{\omega}{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\omega}}^{\frac{\alpha\pi}{\omega}}0dt+\frac{\omega}{\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}E_0\sin\omega t\sin n\omega t dt$$

$$=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[\cos(n-1)\omega t-\cos(n+1)\omega t]dt,$$

这里也要区分两种情况：

（1） $n=1$ 时，

$$b_1=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[\cos(n-1)\omega t-\cos(n+1)\omega t]dt$$

$$=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[1-\cos2\omega t]dt$$

$$=\frac{E_0}{4\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[1-\cos2\omega t]d\,2\omega t$$

$$=\frac{E_0}{4\pi}\left[2\omega t-\sin2\omega t\right]_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{E_0}{4}\left[2(1-\alpha)+\frac{1}{\pi}\sin2\alpha\pi\right],$$

（2） $n\neq1$ 时，

$$b_n=\frac{\omega E_0}{2\pi}\int_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}[\cos(n-1)\omega t-\cos(n+1)\omega t]dt$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}\left[\frac{\sin(n-1)\omega t}{n-1}-\frac{\sin(n+1)\omega t}{n+1}\right]_{\frac{\alpha\pi}{\omega}}^{\frac{\pi}{\omega}}$$

$$=\frac{E_0}{2\pi}\left[\frac{\sin(n+1)\alpha\pi}{n+1}-\frac{\sin(n-1)\alpha\pi}{n-1}\right]$$

$$=\frac{E_0}{\pi(1-n^2)}[\cos\alpha\pi\sin n\alpha\pi-n\sin\alpha\pi\cos n\alpha\pi],$$

$$\therefore\quad E(t)=\frac{1}{2\pi}E_0(1+\cos\alpha\pi)$$

$$+\frac{1}{4\pi}E_0(\cos2\alpha\pi-1)\cos\omega t,$$

$$+\frac{E_0}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}[\cos\alpha\pi\cos n\alpha\pi$$

$$+n\sin\alpha\pi\sin n\alpha\pi+(-1)^n]\cos n\omega t$$

$$+\frac{1}{4}E_0\left[2(1-\alpha)+\frac{1}{\pi}\sin2\alpha\pi\right]\sin\omega t$$

$$+\frac{E_0}{\pi}\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{1-n^2}[\cos2\pi\sin n\alpha\pi$$

$$-n\sin\alpha\pi\cos n\alpha\pi]\sin n\omega t.$$

计算时，经常用到下列公式，

$$\cos K\pi=(-1)^K,\qquad \sin\left(K+\frac{1}{2}\right)\pi=(-1)^K$$

$$\sin\left(K-\frac{1}{2}\right)\pi=(-1)^{K+1},\quad \cos(K+a)\pi=(-1)^K\cos a\pi$$

$\sin(K+a)\pi=(-1)^K\sin a\pi$.（$K$为整数，$a$为实数）.

2.试把图6-2的锯齿波展开为傅里叶级数，在（0，T）上，这个锯齿波可表为$f(x)=x/3$。

解：锯齿波之周期为T。

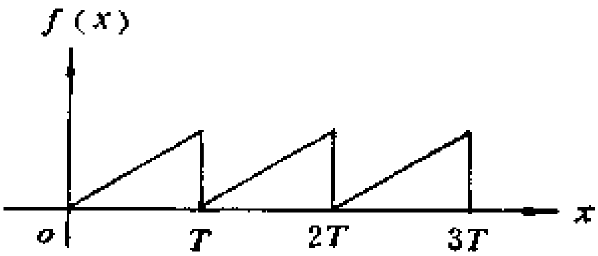


图 6-2

令 $$2l=T,$$

得 $$l=\frac{T}{2},$$

将l代入以$2l$为周期之傅里叶级数和傅里叶系数表达式即可得适合本题傅里叶级数和傅里叶系数表达式：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{T}t+b_n\sin\frac{2n\pi}{T}t\right).$$

傅里叶系数的计算如下：

$$a_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)dt=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{3}x\cdot dx$$

$$=\frac{1}{3T}\cdot\frac{1}{2}x^2\Big|_0^T=\frac{T}{6},$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos\frac{2n\pi}{T}tdt$$

$$=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{1}{3}\ x\cos\frac{2n\pi}{T}xdx,$$

应用积分公式：

$$\int x\cos Pxdx=\frac{1}{P^2}\cos Px+\frac{x}{P}\sin Px$$

$$\therefore\quad a_n=\frac{2}{T}\cdot\frac{1}{3}\left(\frac{1}{\left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2}\cos\frac{2n\pi}{T}x\right.$$

$$\left.+\frac{x}{\frac{2n\pi}{T}}\sin\frac{2n\pi}{T}x\ \right|_0^T$$

$$=\frac{2}{3T}\left(\frac{T}{2n\pi}\right)^2\left[\cos\frac{2n\pi}{T}x+\frac{2n\pi}{T}x\sin\frac{2n\pi}{T}x\right]_0^T$$

$$=0,$$

$$b_n=\frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin\frac{2n\pi}{T}tdt=\frac{2}{T}\int_0^T\frac{1}{3}x\sin\frac{2n\pi}{T}xdx$$

$$=\frac{2}{T}\cdot\frac{1}{3}\Bigg[\frac{1}{\left(\frac{2n\pi}{T}\right)^2}\sin\frac{2n\pi}{T}x$$

$$-\frac{x}{\frac{2n\pi}{T}}\cos\frac{2n\pi}{T}x\Bigg|_0^T$$

$$=\frac{2}{3T}\left(\frac{T}{2n\pi}\right)^2\left[\sin\frac{2n\pi}{T}x-\frac{2n\pi}{T}x\cos\frac{2n\pi}{T}x\right]_0^T$$

$$=-\frac{T}{3n\pi},$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{T}{6}-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{T}{3n\pi}\sin\frac{2n\pi}{T}x.$$

3. 交流电压$E_0\sin\omega t$，经过全波整流，成为$E(t)=E_0|\sin\omega t|$.试把它展开为傅里叶级数，并跟半波整流电压（课本例）比较.

解：交流电压$E_0\sin\omega t$在区间$-\pi\leqslant\omega t\leqslant\pi$上是一周期，令$\omega t=x$，则经过整流后成为：

$$E(x)=E(\omega t)=E_0|\sin x|,$$

在周期$(-\pi,\pi)$内均为正值.其傅里叶级数表为：

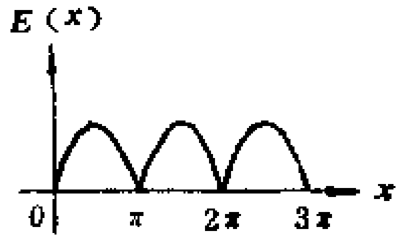


图 6-3

$$E(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

其中系数

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx=\frac{E_0}{\pi}\int_0^{\pi}\sin xdx$$

$$=\frac{E_0}{\pi}(-\cos x)\Big|_0^{\pi}=\frac{2E_0}{\pi}$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos kx\,dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0}E(-\sin x)\cos kx\,dx+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_0\sin x\cos kx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}E_0\sin x\cos kx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\frac{E_0}{2}[\sin(kx+x)-\sin(kx-x)]dx$$

$$=-\frac{E_0}{\pi}\left[\frac{\cos(k+1)x}{k+1}-\frac{\cos(k-1)x}{k-1}\right]_0^{\pi}$$

$$=\begin{cases}0, & \text{（当 } k \text{ 为奇数时，但 } k\neq 1\text{）。}\\ \dfrac{4E_0}{\pi(1-k^2)}, & \text{（当 } k \text{ 为偶数时）。}\end{cases}$$

当 $k=1$ 时，

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E_0\sin x\cos x\,dx=\frac{E_0}{\pi}\int_0^{\pi}\sin 2x\,dx=0,$$

又令$k=2n$时则，

$$a_k=a_{2n}=\frac{4E_0}{\pi(1-4n^2)}, \quad n=1,2,3,\cdots$$

同理，可以计算得b_k

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin kx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}E_0\sin x\sin kx\,dx=0,$$

$$\therefore\quad E(t)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2nx=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos 2n\omega t$$

$$=\frac{2E_0}{\pi}+\frac{4E_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega t}{1-4n^2},$$

将半波整流和全波整流相比较：

$$E_{半}=\frac{E_0}{\pi}+\frac{1}{2}E_0\sin\omega t+\frac{2E_0}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2n\omega t}{1-4n^2}.$$

直流成分：全波整流是$\frac{2E_0}{\pi}$，半波整流是$\frac{E_0}{\pi}$。

基波成分：全波整流中没有和原来频率相同的交流成分，但半波整流中有基波成分，它的数值为$\frac{E_0}{2}\sin\omega t$。

高次谐波：全波整流中，高次谐波部分是半波整流的一倍而高次谐波均为偶次的。

4.把下列周期函数$f(x)$展开为傅里叶级数。

（1）在$(-l,+l)$这个周期上，$f(x)=e^{\lambda x}$。

解：这是一个周期为$2l$的函数，故可展开为傅里叶级数

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right)$$

傅里叶系数计算如下：

$$a_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l}e^{\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda l}\text{sh}\lambda l$$

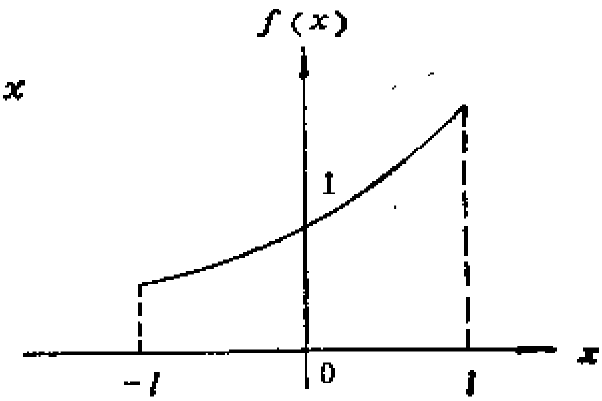


图 6-4

应用已知积分公式

$$\int e^{\lambda x}\cos Px dx=\frac{e^{\lambda x}(\lambda\cos Px+P\sin Px)}{\lambda^2+P^2}$$

可求得

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}e^{\lambda x}\cos\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\left.\frac{e^{\lambda x}\left(\lambda\cos\frac{n\pi x}{l}+\frac{n\pi}{l}\sin\frac{n\pi x}{l}\right)}{\lambda^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right|_{-l}^{l}$$

$$=\frac{l}{\lambda^2 l^2+n^2\pi^2}\left[e^{\lambda l}\left(\lambda\cos n\pi+\frac{n\pi}{l}\sin n\pi\right)\right.$$

$$\left.-e^{\lambda l}\left(\lambda\cos(-n\pi)+\frac{n\pi}{l}\sin(-n\pi)\right)\right]$$

$$=\frac{\lambda l}{\lambda^2 l^2+n^2\pi^2}\cos n\pi\left(e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}\right)$$

$$=(-1)^n\frac{2\lambda l}{\lambda^2 l^2+n^2\pi^2}\operatorname{sh}\lambda l,$$

再应用积分关系式

$$\int e^{\lambda x}\sin Px\,dx=\frac{e^{\lambda x}(\lambda\sin Px-P\cos Px)}{\lambda^2+P^2}$$

可求得：

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}e^{\lambda x}\sin\frac{n\pi x}{l}dx$$

$$=\frac{1}{l}\left.\frac{e^{\lambda x}\left(\lambda\sin\frac{n\pi x}{l}-\frac{n\pi}{l}\cos\frac{n\pi x}{l}\right)}{\lambda^2+\frac{n^2\pi^2}{l^2}}\right|_{-l}^{l}$$

$$=\frac{l}{\lambda^2 l^2+n^2\pi^2}\left[e^{\lambda l}\left(\lambda\sin n\pi-\frac{n\pi}{l}\cos n\pi\right)\right.$$

$$\left.-e^{-\lambda l}\left(\lambda\sin(-n\pi)-\frac{n\pi}{l}\cos(-n\pi)\right)\right]$$

$$=\frac{-2n\pi}{\lambda^2 l^2+n^2\pi^2}\cos n\pi\left(e^{\lambda l}-e^{-\lambda l}\right)$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2n\pi}{\lambda^2 l^2+n^2\pi^2}\operatorname{sh}\lambda l.$$

将傅里叶系数代入傅里叶级数表达式，则得

$$f(x)=\frac{1}{\lambda l}\operatorname{sh}\lambda l+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{2\lambda l}{\lambda^2 l^2+n^2\pi^2}\operatorname{sh}\lambda l\cos\frac{n\pi}{l}x\right.$$

$$+(-1)^{n+1}\frac{2n\pi}{\lambda^2l^2+n^2\pi^2}\mathrm{sh}\lambda l\sin\frac{n\pi}{l}x\Big].$$

（2）在$(-\pi,\pi)$这个周期上，$f(x)=H(x)$，阶跃函数。

解：根据单位阶跃函数的定义

$$H(x)=\begin{cases}0, & (x<0),\\ 1, & (x>0),\end{cases}$$

可以知道此周期函数之表达式应为

$$f(x)=\begin{cases}0, & (-\pi<x<0)\\ 1, & (0<x<\pi)\end{cases}$$

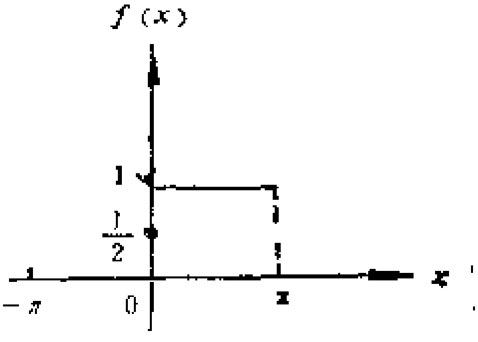


图 6-5

因为此函数之周期为2π，则有

$$2l=2\pi \qquad 即 l=\pi$$

将l代入以$2l$为周期之傅里叶级数表达式和傅里叶系数公式，则得

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx),$$

计算傅里叶系数如下：

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}f(x)dx=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}dx=\frac{1}{2\pi}x\Big|_0^{\pi}=\frac{1}{2},$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)d\,x=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos xdx=\frac{1}{n\pi}\sin nx\Big|_0^{\pi}=0,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\sin nx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin nxdx=-\frac{1}{n\pi}\cos nx\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{n\pi}[1-(-1)^n]=\begin{cases}0, & (n=2k),\\ \dfrac{2}{n\pi}, & (n=2k+1).\end{cases}$$

$$H(x)=f(x)=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)x.$$

如果给定函数在第一类间断点处的值为左、右极限的算术

平均值，则 $H(0)=\frac{1}{2}$，则上式即为周期是 $(-\pi,\pi)$ 的阶跃函数 $H(x)$ 的傅里叶级数。

(3) 在 $(0,\pi)$ 这个周期上，

$$f(x)=1-\sin\frac{x}{2}.$$

解：$f(x)=1-\sin\frac{x}{2}$ 的图形如右图

$\because\ 2l=\pi,\quad \therefore\ l=\frac{\pi}{2}$，

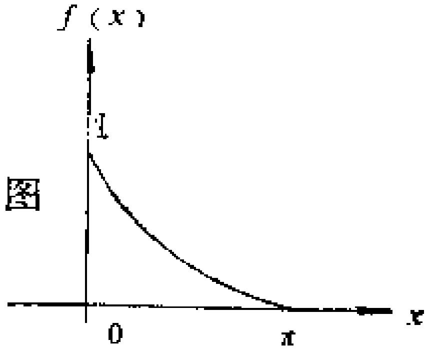


图 6-6

所以 $f(x)$ 的傅里叶级数展开式可写成

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos 2nx+b_n\sin 2nx),$$

其中傅里叶系数，

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\,dx=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[x+2\cos\frac{x}{2}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}[\pi-2]=1-\frac{2}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(x)\cos 2nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)\cos 2nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos 2nx\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin\frac{x}{2}\cos 2nx\,dx$$

$$=\frac{1}{n\pi}\sin 2nx\Big|_0^{\pi}-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{1}{2}+2n\right)x\right.$$

$$+\sin\left(\frac{1}{2}-2n\right)x\ \Big]dx$$

$$=\frac{1}{\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)}\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)x\ \Big|_0^\pi$$

$$-\frac{1}{\pi\left(2n-\frac{1}{2}\right)}\cos\left(2n-\frac{1}{2}\right)x\ \Big|_0^\pi$$

$$=\frac{-1}{\pi\left(2n+\frac{1}{2}\right)}+\frac{1}{\pi\left(2n-\frac{1}{2}\right)}=\frac{4}{(16n^2-1)\pi},$$

$$b_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(x)\sin 2nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\left(1-\sin\frac{x}{2}\right)\sin 2nx\,dx$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin 2nx\,dx-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\sin\frac{x}{2}\sin 2nx\,dx$$

$$=-\frac{1}{n\pi}\cos 2nx\ \Big|_0^\pi-\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{1}{2}\Big[\cos\left(2n-\frac{1}{2}\right)$$

$$\times x-\cos\left(2n+\frac{1}{2}\right)x\ \Big]dx$$

$$=\frac{-1}{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi}\sin\left(2n-\frac{1}{2}\right)x\ \Big|_0^\pi+\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}$$

$$\times\sin\left(2n+\frac{1}{2}\right)x\ \Big|_0^\pi$$

$$=\frac{1}{\left(2n-\frac{1}{2}\right)\pi}+\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi}=\frac{16n}{(16n^2-1)\pi},$$

将傅里叶系数代入傅里叶级数表达式则得

$$f(x)=1-\frac{2}{\pi}+\frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4}{16n^2-1}\ \cos 2nx\right.$$

$$+\frac{16n}{16n^2-1}\sin 2nx\Big)。$$

（4）在（-1，1）这个周期上，

$$f(x)=\begin{cases} x, & 在(-1,\ 0)上, \\ 1, & 在\left(0,\ \frac{1}{2}\right)上, \\ -1, & 在\left(\frac{1}{2},\ 1\right)上. \end{cases}$$

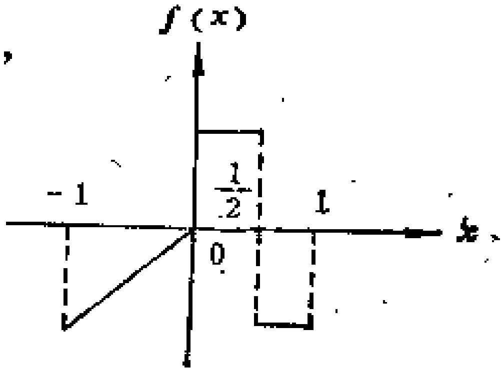


图 6-7

解：$\because 2l=2$，$\therefore l=1$，

所以$f(x)$展开为傅里叶级数的形式是

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos k\pi x+b_k\sin k\pi x)$$

傅里叶系数的计算如下：

$$a_0=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}f(x)\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\int_{-1}^{0}x\,dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}1\cdot dx+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\,dx\right]=-\frac{1}{4}。$$

$$a_k=\int_{-1}^{1}f(x)\cos k\pi x\,dx$$

$$=\int_{-1}^{0}x\cos k\pi x\,dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}1\cdot\cos k\pi x\,dx$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\cos k\pi x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{k^2\pi^2}\cos k\pi x+\frac{x}{k\pi}\sin k\pi x\right]_{-1}^{0}+\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$-\frac{1}{k\pi}\sin k\pi x\Big|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{1}{k^2\pi^2}\left[1-(-1)^k\right]+\frac{1}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{k^2\pi^2}\left[1-(-1)^k\right]+\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2},$$

$$b_k=\int_{-1}^{1}f(x)\sin k\pi x dx$$

$$=\int_{-1}^{0}x\sin k\pi x dx+\int_{0}^{\frac{1}{2}}1\cdot\sin k\pi x dx$$

$$+\int_{\frac{1}{2}}^{1}(-1)\sin k\pi x dx$$

$$=\left[\frac{1}{k^2\pi^2}\sin k\pi x-\frac{x}{k\pi}\cos k\pi x\right]\Bigg|_{-1}^{0}-\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\Bigg|_{0}^{\frac{1}{2}}$$

$$+\frac{1}{k\pi}\cos k\pi x\Bigg|_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=\frac{-1}{k\pi}\cos k\pi-\frac{1}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{1}{k\pi}+\frac{1}{k\pi}\cos k\pi$$

$$-\frac{1}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}$$

$$=\frac{1}{k\pi}-\frac{2}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2},$$

$$\therefore f(x)=-\frac{1}{4}+\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1-(-1)^k}{k^2\pi^2}+\frac{2}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{2}\right]\right.$$

$$\left.\times\cos k\pi x+\frac{1}{k\pi}\left(1-2\cos\frac{k\pi}{2}\right)\sin k\pi x\right\}.$$

（5） 在$(0, l)$这个周期上，

$$f(x)=\left(\cos\frac{\pi x}{l}\right)\left[1-H\left(x-\frac{l}{2}\right)\right].$$

解：首先分析一下函数$f(x)$.函数$f(x)$表达式方括号内之函数$1-H\left(x-\frac{l}{2}\right)$可以看成是两个单位阶跃函数之叠加，即

$$1-H\left(x-\frac{l}{2}\right)=H(x)-H\left(x-\frac{l}{2}\right),$$

单位阶跃函数$H(x)$的定义是

$$H(x)=\begin{cases}0, & (x<0),\\ 1, & (x>0).\end{cases}$$

单位阶跃函数$H\left(x-\frac{l}{2}\right)$的定义则为

$$H\left(x-\frac{l}{2}\right)=\begin{cases}0, & \left(x<\frac{l}{2}\right),\\ 1, & \left(x>\frac{l}{2}\right),\end{cases}$$

这样，上面二单位阶跃函数之差便表示了一个矩形脉冲，因此有

$$1-H\left(X-\frac{l}{2}\right)\begin{cases}0, & (x<0),\\ 1, & \left(0<x<\frac{l}{2}\right),\\ 0, & \left(\frac{l}{2}<x\right),\end{cases}$$

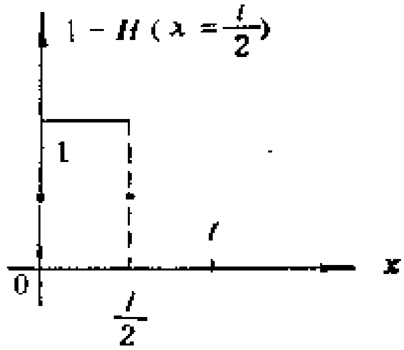


图 6-8

从而可以得出

$$f(x)=\cos\frac{\pi x}{l}\left[1-H\left(x-\frac{l}{2}\right)\right]$$

$$=\begin{cases}\cos\frac{\pi x}{l}, & \left(0<x<\frac{l}{2}\right),\\ 0, & \left(\frac{l}{2}<x<l\right),\end{cases}$$

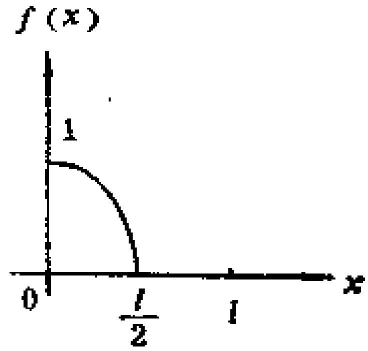


图 6-9

现将此函数展开成傅里叶级数，因周期为l，定义区间为$(0, l)$。故傅里叶级数及其系数表达式为：

$$f(x)=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{2n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{2n\pi}{l}x\right),$$

计算傅里叶系数

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^l f(x)\,dx=\frac{1}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\,dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}0\cdot dx\right]$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\,dx=\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{\pi}\sin\frac{\pi x}{l}\Big|_0^{\frac{l}{2}}=\frac{1}{\pi},$$

$$a_n=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{2n\pi}{l}x\,dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}0\cdot\cos\frac{2n\pi}{l}x\,dx\right]$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi x}{l}\cos\frac{2n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{1}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi x}{l}+\frac{2n\pi}{l}x\right)\right.$$

$$\left.+\cos\left(\frac{\pi x}{l}-\frac{2n\pi}{l}x\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{2n\pi+\pi}{l}x\,dx+\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{2n\pi-\pi}{l}x\,dx\right]$$

$$=\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{2n\pi+\pi}\sin\frac{2n\pi+\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$+\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{2n\pi-\pi}\sin\frac{2n\pi-\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{\cos n\pi}{(2n+1)\pi}-\frac{\cos n\pi}{(2n-1)\pi}=\cos n\pi\,\frac{-2}{(4n^2-1)\pi}$$

$$=(-1)^{n+1}\frac{2}{(4n^2-1)\pi},$$

$$b_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{2n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi}{l}x\sin\frac{2n\pi}{l}x\,dx+\int_{\frac{l}{2}}^{l}0\cdot\sin\frac{2n\pi}{l}x\,dx\right.$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi}{l}x\sin\frac{2n\pi}{l}x\,dx$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{1}{2}\left[\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x+\frac{\pi}{l}x\right)\right.$$

$$\left.+\sin\left(\frac{2n\pi}{l}x-\frac{\pi}{l}x\right)\right]dx$$

$$=\frac{1}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{2n\pi+\pi}{l}x\,dx+\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{2n\pi-\pi}{l}x\,dx\right]$$

$$=-\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{2n\pi+\pi}\cos\frac{2n\pi+\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$-\frac{1}{l}\cdot\frac{l}{2n\pi-\pi}\cos\frac{2n\pi-\pi}{l}x\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{1}{(2n+1)\pi}+\frac{1}{(2n-1)\pi}=\frac{4n}{(4n^2-1)\pi},$$

将上列傅里叶系数代入傅里叶级数表达式则得

$$f(x)=\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^{n+1}\frac{2}{(4n^2-1)\pi}\cos\frac{2n\pi}{l}x\right.$$

$$\left.+\frac{4n}{(4n^2-1)\pi}\sin\frac{2n\pi}{l}x\right].$$

（6）在$(-\pi,\pi)$这个周期上，$f(x)=x+x^2$，又在本题答案中，置$x=\pi$，由此验证$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$。

解：$\because\ 2l=2\pi$，$\therefore\ l=\pi$，

所以$f(x)=x^2+x$可以展开为傅里叶级数

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)dx$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)dx$$

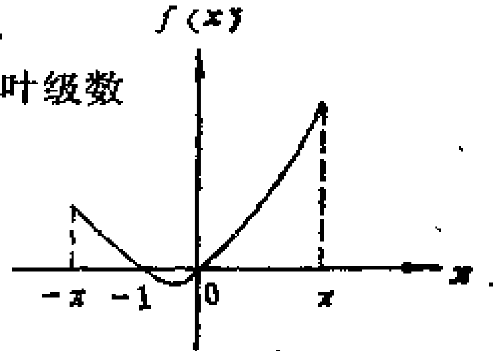


图 6-10

$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x^3}{3}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{x^2}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left(\frac{\pi^3}{3}-\frac{(\pi)^3}{3}\right)=\frac{1}{3}\pi^2,$$

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\cos nxdx.$$

应用已知积分公式

$$\int x^2\cos pxdx=\frac{2x}{p^2}\cos px+\frac{p^2x^2-2}{p^3}\sin px,$$

$$\int x\cos pxdx=\frac{1}{p^2}\cos px+\frac{x}{p}\sin px,$$

得

$$a_n=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\cos nx+\frac{n^2x^2-2}{n^3}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\cos nx+\frac{x}{n}\sin nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{4\pi}{n^2}\cos n\pi=\frac{4}{n^2}(-1)^n.$$

应用已知积分公式:

$$\int x^2\sin nxdx=\frac{2x}{n^2}\sin nx-\frac{n^2x^2-2}{n^3}\cos nx,$$

$$\int x\sin nxdx=\frac{1}{n^2}\sin nx-\frac{x}{n}\cos nx,$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nxdx=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(x^2+x)\sin nxdx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{2x}{n^2}\sin nx-\frac{n^2x^2-2}{n^2}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$+\frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n^2}\sin x-\frac{x}{n}\cos nx\right]_{-\pi}^{\pi}$$

$$=-\frac{2}{n}\cos n\pi=\frac{2}{n}(-1)^{n+1}.$$

将傅里叶系数代入傅里叶级数表达式则得

$$f(x)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos nx+(-1)^{n+1}\times\frac{2}{n}\sin nx\right],$$

在此答案中，若置$x=\pi$则有，

$$f(\pi)=\frac{\pi^2}{3}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{4}{n^2}\cos n\pi$$

$$=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}.$$

在$x=\pi$时，是函数$f(x)$有第一类间断点，据狄里希里定理知，此时函数值为

$$f(\pi)=\frac{1}{2}[\pi^2+\pi+(-\pi)^2+(-\pi)]=\pi^2,$$

将此结果代入上式则得

$$\frac{\pi^2}{6}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots.$$

§ 25. 奇的和偶的周期函数

把下列函数$f(x)$展开为傅里叶级数

(1) $f(x)=\cos^3x$

〔提示：可按(25·4)和(25·5)展开。此外，还可令$t=e^{ix}$把$f(x)$化为t的有理分式，展开为幂级数，然后再回到x〕。

解：$f(x)=\cos^3x=\left[\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right]^3$

$$=\frac{1}{8}[e^{i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}+e^{-i3x}]$$

$$=\frac{3}{4}\cdot\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{e^{i3x}+e^{-i3x}}{2}$$

$$=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x.$$

注：本题其实就是三倍角公式：

$$\cos 3x=4\cos^3 x-3\cos x,$$

则$f(x)=\cos 3x=\frac{3}{4}\cos x+\frac{1}{4}\cos 3x,$

(2) $f(x)=\dfrac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2},(|a|<1).$

解： 令$e^{ix}=t$。则$\cos x=\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}=\dfrac{t+\frac{1}{t}}{2}$，

$$f(x)=\frac{1-a^2}{1-2a\cos x+a^2}=\frac{1-a^2}{1-at-a\cdot\frac{1}{t}+a^2}$$

$$=\frac{1-a^2}{(a-t)(a-\frac{1}{t})}=\frac{t-a^2t}{(t-a)(1-at)}$$

$$=\frac{t-a+a(1-at)}{(t-a)(1-at)}=\frac{1}{1-at}+\frac{\frac{a}{t}}{1-\frac{a}{t}}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a^kt^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{t}\right)^{k+1}$$

$$=1+\sum_{k=0}^{\infty}a^kt^k+\sum_{k=1}^{\infty}a^k\frac{1}{t^k},$$

$$\therefore\quad f(x)=1+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\frac{t^k+t^{-k}}{2}$$

$$=1+2\sum_{k=1}^{\infty}a^k\cos Kx,$$

(3) $f(x)=\dfrac{1-a\cos x}{1-2a\cos x+a^2}$，$(|a|<1)$.

解：令$t=e^{ix}$，则$\cos x=\dfrac{t+\dfrac{1}{t}}{2}$，

$$f(x)=\frac{1-a\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{a}{2t}\right)}{(1-at-a)\cdot\left(\dfrac{1}{t}+a^2\right)}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1-at+1-\dfrac{a}{t}}{(a-t)\left(a-\dfrac{1}{t}\right)}$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{-t}{a-t}+\frac{-\dfrac{1}{t}}{a-\dfrac{1}{t}}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{1-\dfrac{a}{t}}\right.$$

$$\left.+\frac{1}{1-at}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\,\frac{t^k+t^{-k}}{2}=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\cos kx.$$

(4) $f(x)=\dfrac{a\sin x}{1-2a\cos x+a^2}$ $(|a|<1)$.

解：令$e^{ix}=t$，则$\sin x=\dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2}=\dfrac{1}{2i}\left(t-\dfrac{1}{t}\right)$，

$$f(x)=\frac{a}{2i}\cdot\frac{t-t^{-1}}{1-\dfrac{a}{t}-at+a^2}$$

$$=\frac{a}{2i}\cdot\frac{t-\dfrac{1}{t}}{(a-t)\left(a-\dfrac{1}{t}\right)}$$

$$=\frac{1}{2i}\cdot\frac{1-a\cdot\dfrac{1}{t}-(1-at)}{\left(1-\dfrac{a}{t}\right)(1-at)}$$

$$=\frac{1}{2i}\left[\frac{1}{1-at}-\frac{1}{1-\frac{a}{t}}\right]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{2i}[t^k-t^{-k}]$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}a^k\sin Kx$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}a^k\sin Kx.$$

(5) 在$[-\pi,\ \pi]$这个周期上，$f(x)=x^2$，又在本题答案中，令$x=0$，由此验证：$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{12}$.

解：由于$f(x)=x^2$是偶函数，因而$b_k=0$，展开式为如下形式：

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx$$

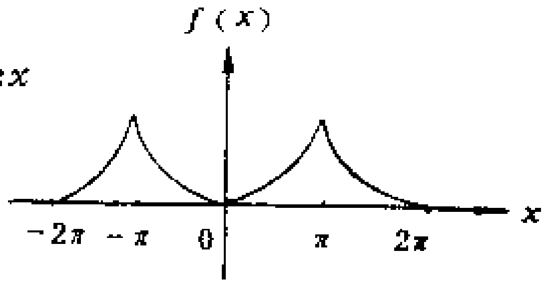


图 6-11

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}f(\zeta)\,d\zeta=\frac{1}{\pi}\times\int_0^{\pi}\zeta^2d\zeta=\frac{1}{3\pi}\zeta^3\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}.$$

由：$\int x^2\cos x\,dx=2x\cos x+(x^2-2)\sin x$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(\zeta)\cos k\zeta d\zeta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\zeta^2\cos k\zeta d\zeta$$

$$=\frac{2}{\pi k^3}\int_0^{\pi}(k\zeta)^2\cos k\zeta d(k\zeta)$$

$$=\frac{2}{\pi k^3}\{2(k\zeta)\cos k\zeta+(k^2\zeta^2-2)\sin k\zeta\}\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi k^3}\{2(k\pi)\cos k\pi+(k^2\pi^2-2)\sin k\pi\}=\frac{4}{k^2}(-1)^k,$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}\cos kx,$$

令$x=0$，得

$$0=\frac{\pi^2}{3}+4\left(-1+\frac{1}{2^2}-\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}-\cdots\cdots\right),$$

即 $$1-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+\cdots\cdots=\frac{\pi^2}{12}.$$

（6）在半个周期$(-\pi,0)$上，$f(x)=-(\pi+x)/2$；在另外半个周期$(0,\pi)$上，$f(x)=\dfrac{\pi-x}{2}$。

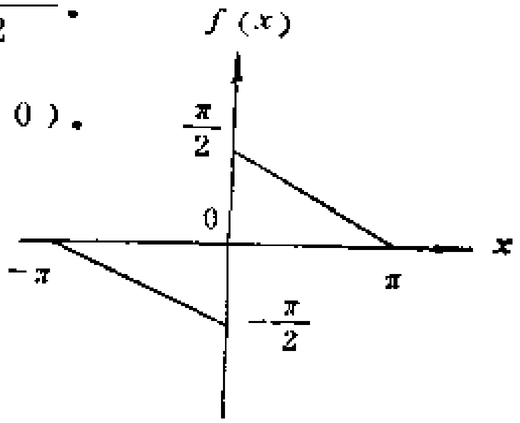


图 6-12

解：

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{-(\pi+x)}{2} & (-\pi,0),\\[2mm] \dfrac{\pi-x}{2} & (0,\pi).\end{cases}$$

因为$f(x)$是奇函数，可以展开为傅里叶正弦级数，

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

其中：$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{\pi-\zeta}{2}\right)\sin k\zeta d\zeta$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}\sin k\zeta d\zeta-\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\zeta}{2}\sin k\zeta d\zeta$$

$$=-\frac{1}{k}\cos k\zeta\Big|_0^{\pi}-\frac{1}{\pi k^2}[\sin k\zeta-k\zeta\cos k\zeta]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{k},$$

$$\therefore \quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin kx.$$

（7）在半个周期$(-\pi,0)$上，$f(x)=-\cos x$；在另外半

个周期$(0,\pi)$上，$f(x)=\cos x$.

解：$f(x)=\begin{cases}-\cos x, & -\pi<x<0,\\ \cos x, & 0<x<\pi.\end{cases}$

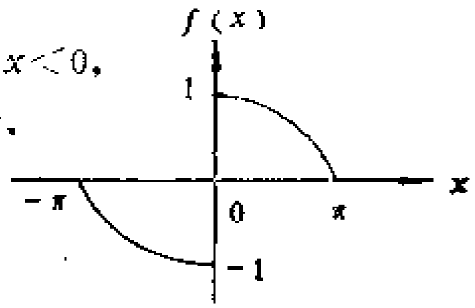


图 6-13

又 $2l=2\pi$， ∴ $l=\pi$，

∵ $f(x)$是奇函数，所以$f(x)$可以展开为傅里叶正弦级数。

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx,$$

其中

$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\xi\ \sin k\xi d\xi$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\left[\sin(k+1)\xi+\sin(k-1)\xi\right]d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)\xi}{k+1}-\frac{\cos(k-1)\xi}{k-1}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[-\frac{\cos(k+1)\pi-1}{k+1}-\frac{\cos(k-1)\pi-1}{k-1}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)^{k+2}+1}{k+1}+\frac{(-1)^{k}+1}{k-1}\right]$$

$$=\begin{cases}0, & (k\text{为奇数但}\neq 1),\\ \dfrac{4k}{\pi(k^2-1)}, & (k\text{ 为偶数}),\end{cases}$$

$$b_1=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}\sin 2\xi d\xi=\frac{1}{2\pi}\ (-\cos 2\xi)\Big|_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{2\pi}[1-1]=0.$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{8}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-1}\sin 2nx.$$

(8) 在$(-\pi,\pi)$这个周期上，$f(x)=\cos ax$，(a 非整数)。

解：因为$f(x)$是偶函数 $\therefore\quad b_k=0$，

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos kx,$$

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos a\xi d\xi=\frac{1}{2a\pi}\sin a\xi\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$=\frac{\sin a\pi}{a\pi}.$$

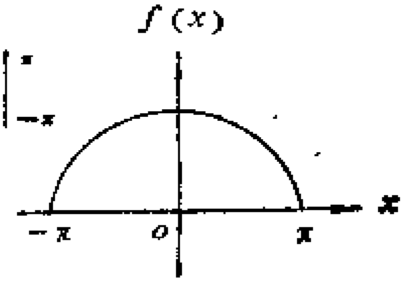


图 6-14

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos a\xi\ \cos k\xi\ d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos\ (k+a)\ \xi d\xi+\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(k-a)\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+a)\xi}{k+a}+\frac{\sin(k-a)\xi}{k-a}\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{\sin(k+a)\pi}{k+a}+\frac{\sin(k-a)\pi}{k-a}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k+a}\left[\sin k\pi\cos a\pi+\cos k\pi\sin a\pi\right]$$

$$+\frac{1}{\pi}\cdot\frac{1}{k-a}\left[\sin k\pi\cos a\pi-\cos k\pi\sin a\pi\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\ \cos k\pi\ \sin a\pi\ \left[\frac{1}{k+a}-\frac{1}{k-a}\right]$$

$$=\frac{1}{\pi}\ (-1)^k\ \sin a\pi\cdot\frac{-2a}{k^2-a^2}$$

$$=\frac{(-1)^{k+1}}{\pi}\ \sin a\pi\cdot\frac{2a}{k^2-a^2},$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\left[\frac{1}{2a}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a(-1)^{k+1}}{k^2-a^2}\cos kx\right].$$

（9）在（$-\pi$，π）这个周期上，$f(x)=\sin ax$（a 非整数）．

解：$\because\quad f(x)$是奇函数，$\therefore\quad a_0=0$，$a_k=0$，

又 $2l=2\pi$，∴ $l=\pi$，

∴ $b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi \sin a\xi\sin k\xi d\xi$

$=-\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(k+a)\xi d\xi$

$+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(k-a)\xi d\xi$

$=\frac{(-1)^{k+1}\sin a\pi}{\pi}\cdot\frac{2k}{k^2-a^2}$，

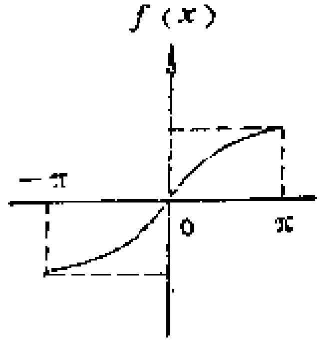


图 6-15

∴ $f(x)=\frac{2\sin a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2-a^2}(-1)^{k+1}\sin kx$。

(10) 在 $(-\pi,\pi)$ 这个周期上，$f(x)=\mathrm{ch}ax$。

解：$f(x)=\mathrm{ch}ax=\frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}$，是偶函数

∴ $b_k=0$，

$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi f(\xi)d\xi=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \frac{e^{ax}+e^{-ax}}{2}dx$

$=\frac{1}{2\pi a}e^{ax}\Big|_0^\pi-\frac{1}{2\pi a}e^{-ax}\Big|_0^\pi$

$=\frac{1}{2\pi a}e^{a\pi}-\frac{1}{2\pi a}e^{-a\pi}$

$=\frac{1}{\pi a}\mathrm{sh}a\pi$。

$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi\frac{1}{2}(e^{a\xi}+e^{-a\xi})\cos k\xi d\xi$

$=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{a\xi}\cos k\xi d\xi+\frac{1}{\pi}\int_0^\pi e^{-a\xi}\cos k\xi d\xi$

$=\left[\frac{e^{a\xi}}{\pi}\cdot\frac{(a\cos k\xi+k\sin k\xi)}{a^2+k^2}+\frac{e^{-a\xi}(-a\cos k\xi+k\sin k\xi)}{\pi(a^2+k^2)}\right]_0^\pi$。

$$= \frac{1}{\pi(a^2+k^2)}\Big\{e^{a\pi}(a\cos k\pi + k\sin k\pi)$$

$$+ e^{-a\pi}(-a\cos k\pi + k\sin k\pi)\Big\}$$

$$-\frac{1}{\pi(a^2+k^2)}\Big[(a+0)+(-a+0)\Big]$$

$$= \frac{a}{\pi(a^2+k^2)}\Big[(e^{a\pi}-e^{-a\pi})\cos k\pi\Big]$$

$$= \frac{2a\,\mathrm{sh}\,a\pi}{\pi(a^2+k^2)}(-1)^k,$$

$$\therefore\quad f(x) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,a\pi}{\pi}\Big[\frac{1}{2a} + a\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k\cos kx}{a^2+k^2}\Big].$$

注：$\int e^{ax}\cos kx\,dx = \frac{e^{ax}(a\cos kx + k\sin kx)}{a^2+k^2}$.

(11) 在 $(-\pi,\ \pi)$ 这个周期上，$f(x)=\mathrm{sh}\,ax$，

解：$f(x) = \mathrm{sh}\,ax = \frac{e^{ax}-e^{-ax}}{2}$是奇函数，

$$b_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{1}{2}(e^{a\xi}-e^{-a\xi})\sin k\xi\,d\xi$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{a\xi}\sin k\xi\,d\xi - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}e^{-a\xi}\sin k\xi\,d\xi$$

$$= \Big\{\frac{1}{\pi}\ \frac{e^{a\xi}(a\sin k\xi - k\cos k\xi)}{a^2+k^2}$$

$$-\frac{1}{\pi}\ \frac{e^{-a\xi}(-a\sin k\xi - k\cos k\xi)}{a^2+k^2}$$

$$= \frac{1}{\pi(a^2+k^2)}\Big\{-ke^{a\pi}\cos k\pi + ke^{-a\pi}\cos k\pi\Big\}$$

$$= \frac{2k\,\mathrm{sh}\,a\pi}{\pi(a^2+k^2)}(-1)^{k+1}$$

$$\therefore\quad f(x) = \frac{2\,\mathrm{sh}\,a\pi}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k(-1)^{k+1}}{a^2+k^2}\sin kx.$$

注：$\int e^{ax}\sin kx\,dx=\dfrac{e^{ax}(a\sin kx-k\cos kx)}{a^2+k^2}$。

(12) 在半个周期$\left(0,\dfrac{l}{2}\right)$上，$f(x)=\sin\dfrac{\pi x}{l}$；在另外半个周期$\left(\dfrac{l}{2},\ l\right)$上，$f(x)=-\sin\dfrac{\pi x}{l}$。

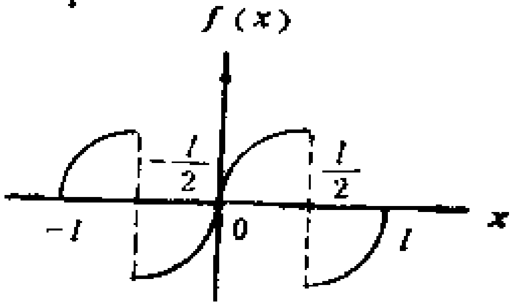


图 6-16

解：在边界上，$f(0)=0$，$f(l)=0$，因此用正弦级数展开

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{2k\pi}{l}x,$$

$$b_k=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\frac{2\pi k\xi}{2}d\xi-\int_{\frac{l}{2}}^{l}\sin\frac{\pi\xi}{l}\sin\frac{2\pi k}{l}\xi d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{2k-1}{l}\pi\xi d\xi-\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{2k+1}{l}\pi\xi d\xi\right]$$

$$-\frac{1}{l}\left[\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\frac{(2k-1)}{2}\pi\xi d\xi-\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\frac{2k+1}{l}\pi\xi d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{l}\quad\frac{l}{(2k-1)\pi}\quad\sin\frac{(2k-1)\pi}{l}\xi\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$-\frac{1}{l}\quad\frac{l}{(2k+1)\pi}\quad\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}\xi\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$-\frac{1}{l}\quad\frac{l}{(2k-1)\pi}\quad\sin\frac{(2k+1)}{l}\pi\xi\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}$$

$$+\frac{1}{l}\quad\frac{l}{(2k+1)\pi}\quad\sin\frac{(2k+1)\pi}{l}\xi\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}$$

$$=\frac{1}{(2k-1)\pi}\sin\frac{(2k-1)}{2}\pi-\frac{1}{(2k+1)\pi}\sin\frac{2k+1}{2}\pi$$

$$-\frac{1}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)\pi+\frac{1}{(2k-1)\pi}\sin\frac{(2k-1)}{2}\pi$$

$$+\frac{1}{(2k+1)\pi}\sin(2k+1)\pi-\frac{1}{(2k+1)\pi}\sin\frac{(2k+1)}{2}\pi$$

$$=\frac{2}{(2k-1)\pi}\sin\frac{2k-1}{2}\pi-\frac{2}{(2k+1)\pi}\sin\frac{2k+1}{2}\pi,$$

$$b_k=\frac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k+1}+\frac{2}{(2k-1)\pi}(-1)^{k+1}$$

$$=\frac{2}{\pi}\,\frac{4k}{4k^2-1}(-1)^{k+1},$$

$$\therefore\quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{8}{\pi}\,\frac{k(-1)^{k+1}}{4k^2-1}\sin\frac{2k\pi x}{l}.$$

(13) 在 $(-\pi,\ \pi)$ 这个区间上，

$$f(x)=\begin{cases}\cos x, & \left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}\right),\\ 0, & \left(-\pi<x<-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}<x<\pi\right).\end{cases}$$

解：$f(x)$在 $(-\pi,\ \pi)$ 这个区间是偶函数，因此可展开为傅里叶余弦级数.

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\xi d\xi=\frac{1}{\pi}\sin\xi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{\pi}.$$

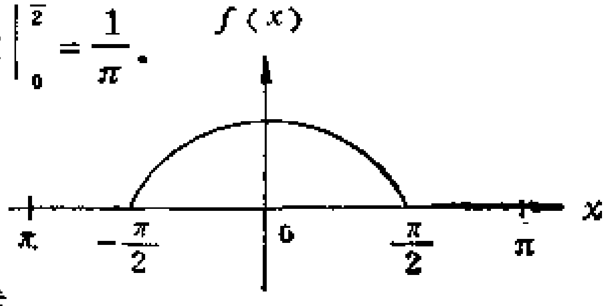


图 6-17

$$a_1=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\xi)d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\xi+\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos2\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\xi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\pi}\ \frac{1}{2}\ \sin 2\xi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}.$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\xi\cos k\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\ (k+1)\ \xi d\xi+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\ (k-1)\ \xi d\xi\right]$$

$$=\frac{1}{\pi(k+1)}\sin(k+1)\xi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{\pi(k-1)}\sin(k-1)\xi\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\ \frac{1}{(k+1)}\ \sin\frac{(k+1)\pi}{2}$$

$$+\frac{1}{\pi(k-1)}\ \sin\ \frac{(k-1)\pi}{2},$$

当 k 为奇数时$a_k=0$，当 k 为偶数时，则有

$$a_k=a_{2n}=\frac{1}{\pi(2n+1)}\ \sin\ \frac{2n+1}{2}\ \pi$$

$$+\frac{1}{\pi(2n-1)}\ \sin\ \frac{2n-1}{2}\ \pi$$

$$=\frac{(-1)^n}{\pi(2n+1)}+\frac{(-1)^{n+1}}{\pi(2n-1)}$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{-1}{2n+1}+\frac{1}{2n-1}\right](-1)^{n+1}$$

$$=\frac{1}{\pi}\ \frac{2}{(2n)^2-1}\ (-1)^{n+1},$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\ \cos x\ +\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos 2nx\ .$$

§26. 有限区间上的函数的傅里叶级数

1. 要求下列函数$f(x)$在它的定义区间的边界上为零。试根

据这个要求把$f(x)$展开为傅里叶级数。

（1）$f(x)=\cos ax$，定义在（0，π）上。

解：因为按题意，在边界（0，π）上，$f(a)=0$和$f(\pi)=0$由此可知，展开式中只有正弦项，而无余弦项，即$a_n=0$，因而展开式可表为

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

其中 $$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\cos ax\sin kx dx.$$

应用三角公式 $2\sin\alpha\cos\beta=\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)$

可得 $2\cos ax\sin kx=\sin(k+a)x+\sin(k-a)x$

则
$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}[\sin(k+a)x+\sin(k-a)x]dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)}{k+a}\cos(k+a)x\right]_0^{\pi}+\frac{1}{\pi}\left[\frac{(-1)}{k-a}\cos(k-a)x\right]_0^{\pi}$$

$$=\frac{1}{\pi}[1-\cos(k+a)\pi]\frac{1}{k+a}+\frac{1}{\pi}\frac{1}{k-a}[1-\cos(k-a)\pi]$$

$$=\frac{2k}{\pi(k^2-a^2)}[1+(-1)^{k+1}\cos a\pi],$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k}{k^2-a^2}[1+(-1)^{k+1}\cos a\pi]\sin kx.$$

（2）$f(x)=x^3$，定义在（0，π）上。

解：

因为按题意，在边界上$f(0)=0$和$f(\pi)=0$，可见展开式中没有余弦项，即$a_0=0$，$a_k=0$，仅有正弦项，因而展开式可表示

为：

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx.$$

其中 $b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}f(\xi)\sin k\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\xi^3\sin k\xi d\xi$

$$=\frac{2}{\pi k^4}\int_0^{\pi}(k\xi)^3\sin k\xi d(k\xi).$$

利用公式$\int x^3\sin xdx=(3x^2-6)\sin-(x^3-6x)\cos x$ 代入上式，则有

$$b_k=\frac{2}{\pi k^4}\left\{\left[3(k\xi)^2-6\right]\sin k\xi-\left[(k\xi)^3-6(k\xi)\right]\cos k\xi\right\}_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{\pi k^4}\left\{-\left[(k\pi)^3-6(k\pi)\right]\cos k\pi-0\right\}$$

$$=(-1)^k\left[\frac{12}{k^3}-\frac{2\pi^2}{k}\right]$$

即 $$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\left[\frac{12}{k^3}-\frac{2\pi^2}{k}\right]\sin kx.$$

请读者将本题和习题 2（2）比较。

（3） $f(x)=a\left(1-\frac{x}{l}\right)$，定义在（0，$l$）上。

解：因为按题意要求，$f(0)=0$，$f(l)=0$，因此应将$f(x)$作奇延拓，然后展开为傅里叶正弦级数。

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l},$$

其中：$b_k=\frac{2}{l}\int_0^{l}f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$

$$=\frac{2}{l}\int_0^{l}a\left(1-\frac{\xi}{l}\right)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^l a\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi-\frac{2}{l}\int_0^l\frac{a}{l}\xi\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi$$

$$=\frac{2}{l}\cdot\frac{la}{k\pi}\int_0^l\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)$$

$$-\frac{2a}{k^2\pi^2}\int_0^l\left(\frac{k\pi}{l}\xi\right)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)$$

$$=\frac{-2a}{k\pi}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\Bigg|_0^l-\frac{2a}{k^2\pi^2}\left[\sin\frac{k\pi\xi}{l}-\frac{k\pi\xi}{l}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\right]_0^l$$

$$=\frac{-2a}{k\pi}(\cos k\pi-1)-\frac{2a}{k^2\pi^2}[0-k\pi\cos k\pi-0+0]$$

$$=\frac{2a}{k\pi}(1-\cos k\pi)+\frac{2a}{k\pi}\cos k\pi=\frac{2a}{k\pi}.$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{2a}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\sin\frac{k\pi}{l}x.$$

请将本题与习题2、(3)比较。

（4）在$\left(0,\frac{l}{2}\right)$上，$f(x)=x$；在$\left(\frac{l}{2},l\right)$上，$f(x)=l-x$。

解：按题意要求，在边界上，$f(0)=0$和$f(l)=0$，因而展开式有下列形式：

$$(fx)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin\frac{k\pi x}{l}$$

其中 $$b_k=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}f(\xi)\sin\frac{k\pi}{l}\xi d\xi+\int_{\frac{l}{2}}^{l}f(\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right]$$

$$=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\xi\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-\xi)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\xi\right]$$

$$=\frac{2l}{k^2\pi^2}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)$$

$$+\int_{\frac{l}{2}}^{l} 2\sin\frac{k\pi\xi}{l}\,d\xi-\frac{2l}{k^2\pi^2}$$

$$\times\int_{\frac{l}{2}}^{l}\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\sin\frac{k\pi\xi}{l}d\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)$$

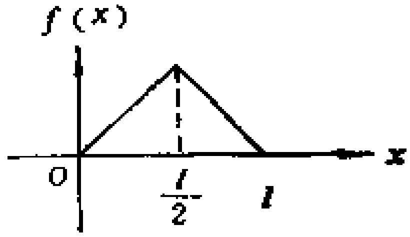


图 6-18

$$=\frac{2l}{k^2\pi^2}\left[\sin\frac{k\pi\xi}{l}-\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$-\frac{2l}{k\pi}\cos\frac{k\pi\xi}{l}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}-\frac{2l}{k^2\pi^2}\left[\sin\frac{k\pi\xi}{l}\right.$$

$$\left.-\left(\frac{k\pi\xi}{l}\right)\cos\frac{k\pi\xi}{l}\right]_{\frac{l}{2}}^{l}$$

$$=\frac{2l}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}-\frac{2l}{k\pi}\cos k\pi$$

$$+\frac{2l}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}+\frac{2l}{k\pi}\cos k\pi$$

$$+\frac{2l}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}-\frac{l}{k\pi}\cos\frac{k\pi}{2}$$

$$=2\times\frac{2l}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{4l}{k^2\pi^2}\sin\frac{k\pi}{2}$$

$$=\begin{cases}0, & (k=2n),\\ (-1)^n\dfrac{4l}{(2n+1)^2\pi}, & (k=2n+1),\end{cases}$$

$$\therefore\quad f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4l}{(2n+1)^2\pi^2}(-1)^n\sin\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

请将本题和习题 2（4）比较

（5）$f(x)=1$，定义在$(0,\ \pi)$上。

解： 因为要满足 $f(0)=0$ 和 $f(\pi)=0$，则展开式中仅有正弦项。

$$\therefore \quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin kx,$$

其中：
$$b_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\sin k\zeta d\zeta=\frac{2}{k\pi}\Big[-\cos k\zeta\Big]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2}{k\pi}[-\cos k\pi+1]=\frac{2}{k\pi}[1-\cos k\pi]$$

$$=\begin{cases}0, & (k=2n),\\ \dfrac{4}{\pi(2n+1)}, & (k=2n+1).\end{cases}$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{4}{\pi}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\sin(2n+1)x.$$

请读者把本题与习题2（5）比较.

2.要求下列函数$f(x)$的导数$f'(x)$在函数定义区间的边界为零.试根据这个要求把$f(x)$展开为傅里叶级数.

（1）在$\left(0,\ \dfrac{l}{2}\right)$上，$f(x)=\cos\left(\dfrac{\pi x}{l}\right)$；在$\left(\dfrac{l}{2},l\right)$上，$f(x)=0$.

解： 因为$f'(0)$和$f'(l)=0$，所以应将$f(x)$展开成为傅里叶余弦级数，其傅里叶系数.

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi\zeta}{l}d\zeta=\frac{1}{\pi}\sin\frac{k\pi}{l}\zeta\Big|_0^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{1}{\pi}\sin\frac{k\pi}{2}=\frac{1}{\pi},$$

$$a_1=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos^2\frac{\pi}{l}\zeta d\zeta=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\frac{1}{2}\left(1+\cos\frac{2\pi}{l}\zeta\right)d\zeta$$

$$=\frac{1}{l}\Big[\zeta+\frac{1}{\pi}\sin\frac{2\pi}{l}\zeta\Big]_0^{\frac{l}{2}}=\frac{1}{l}\Big[\frac{l}{2}+\frac{1}{\pi}\sin\pi\Big]$$

$$=\frac{1}{2},$$

$$a_k=\frac{2}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{\pi}{l}\zeta\cos\frac{k\pi}{l}\zeta d\zeta$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{k+1}{l}\pi\zeta d\zeta+\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\cos\frac{k-1}{l}\pi\zeta d\zeta$$

$$=\left[\frac{1}{(k+1)\pi}\sin\frac{k+1}{l}\pi\zeta\right.$$

$$\left.+\frac{1}{(k-1)\pi}\sin\frac{k-1}{l}\pi\zeta\right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$=\frac{1}{(k+1)\pi}\sin\frac{k+1}{2}\pi$$

$$+\frac{1}{(k-1)\pi}\sin\frac{k-1}{2}\pi$$

$$=\begin{cases}0, & (k=2n+1),\\ (-1)^{n+1}\dfrac{2}{(4n^2-1)\pi} & (k=2n).\end{cases}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{1}{\pi}+\frac{1}{2}\cos\frac{\pi x}{l}$$

$$+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{4n^2-1}\cos\frac{2n\pi x}{l}.$$

（2）$f(x)=x^3$，定义在（0，π）上.

解：∵ 题意要求$f'(0)=0$和$f'(\pi)=0$，因而应将$f(x)$展开为傅里叶余弦级数，其傅里叶系数为

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\zeta^3 d\zeta=\frac{1}{\pi}\left.\frac{\zeta^4}{4}\right|_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{4},$$

$$a_k=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\zeta^3\cos k\zeta d\zeta=\frac{2}{\pi k^4}\int_0^{\pi}(k\zeta)^3\cos k\zeta d(k\zeta)$$

$$= \frac{2}{\pi k^4}\Big[(3k^2\zeta^2 - 6)\cos k\zeta + (k^2\zeta^2 - 2)\sin k\zeta\Big]_0^\pi$$

$$= \frac{2}{\pi k^4}[(3k^2\pi^2 - 6)\cos k\pi + (k^2\pi^2 - 2)\sin k\pi$$

$$- (-6)\cos 0 + (-2)\sin 0]$$

$$= \frac{2}{\pi k^4}[(3k^2\pi^2 - 6)\cos k\pi + 6],$$

$$= \begin{cases} \frac{6\pi}{k^2}(-1)^k, & (k\text{为偶数}), \\ \frac{6\pi}{k^2}(-1)^k + \frac{24}{\pi k^4}, & (k\text{为奇数}), \end{cases}$$

如令 $k = 2n$，则 $a_k = a_{2n} = \frac{3\pi}{2n^2}$，

$$k = 2n + 1 \text{则} a_k = a_{2n+1} = \frac{24}{\pi(2n+1)^4} - \frac{6\pi}{(2n+1)^4},$$

$$\therefore\quad f(x) = \frac{\pi^3}{4} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos kx,$$

请读者将本题和习题 1（2）比较．

（3） $f(x) = a\left(1 - \frac{x}{l}\right)$，定义在（0，$l$）上．

解：因在 $f'(0) = 0$ 和 $f'(l) = 0$，所以应将 $f(x)$ 展开成余弦级数．

其系数：

$$a_0 = \frac{1}{l}\int_0^l a\left(1 - \frac{\zeta}{l}\right)d\zeta = \frac{a}{l}\int_0^l d\zeta - \frac{a}{l^2}\int_0^l \zeta d\zeta$$

$$= \frac{a}{2},$$

$$a_k = \frac{2}{l}\int_0^l a\left(1 - \frac{\zeta}{l}\right)\cos\frac{k\pi}{l}\zeta d\zeta$$

$$=\frac{2}{l}\int_0^l a\cos\frac{k\pi}{l}\zeta d\zeta-\frac{2a}{l^2}\int_0^l\zeta\cos\frac{k\pi}{l}\zeta d\zeta$$

$$=\frac{2a}{l}\frac{l}{k\pi}\sin\frac{k\pi}{l}\zeta\Big|_0^l-\frac{2a}{k^2\pi^2}\Big[\cos\frac{k\pi}{l}\zeta$$

$$-\frac{k\pi}{l}\zeta\sin\frac{k\pi}{l}\zeta\Big]_0^l$$

$$=-\frac{2a}{k^2\pi^2}[\cos k\pi-k\pi\sin k\pi-\cos 0]$$

$$=\frac{2a}{k^2\pi^2}[1-\cos k\pi]$$

$$=\begin{cases}0 & (k=2n),\\ \dfrac{4a}{\pi^2(2n+1)^2} & (k=2n+1).\end{cases}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{a}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4a}{\pi^2(2n+1)^2}\cos\frac{(2n+1)\pi}{l}x.$$

请读者将本题和习题1（3）比较.

（4）在$\left(0,\ \frac{l}{2}\right)$上，$f(x)=x$；在$\left(\frac{l}{2},\ l\right)$上，$f(x)=l-x$.

解：按题意$f(x)$的展开式为余弦级数：

其系数：

$$a_0=\frac{1}{l}\int_0^{\frac{l}{2}}\zeta d\zeta+\frac{1}{l}\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-\zeta)d\zeta$$

$$=\frac{1}{2l}\zeta^2\Big|_0^{\frac{l}{2}}+\zeta\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}-\frac{1}{2l}\zeta^2\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}=\frac{l}{4},$$

$$a_k=\frac{2}{l}\left[\int_0^{\frac{l}{2}}\zeta\cos\frac{k\pi\zeta}{l}d\zeta+\int_{\frac{l}{2}}^{l}(l-\zeta)\cos\frac{k\pi\zeta}{l}d\zeta\right]$$

$$=\frac{2}{l}\left[\frac{l^2}{k^2\pi^2}\int_0^{\frac{l}{2}}\left(\frac{k\pi}{l}\zeta\right)\cos\frac{k\pi\zeta}{l}d\left(\frac{k\pi\zeta}{l}\right)\right.$$

$$+\ l\int_{\frac{l}{2}}^{l}\cos\frac{k\pi\zeta}{l}d\zeta$$

$$\left.-\int_{\frac{l}{2}}^{l}\zeta\cos\frac{k\pi\zeta}{l}d\zeta\right]$$

$$=\frac{2l}{k^2\pi^2}\left[\cos\frac{k\pi\zeta}{l}+\left(\frac{k\pi\zeta}{l}\right)\sin\frac{k\pi\zeta}{l}\right]_0^{\frac{l}{2}}$$

$$+\frac{2l^2}{lk\pi}\sin\frac{k\pi\zeta}{l}\Big|_{\frac{l}{2}}^{l}-\frac{2}{l}\cdot\frac{l^2}{k^2\pi^2}\left[\cos\frac{k\pi\zeta}{l}\right.$$

$$\left.+\left(\frac{k\pi\zeta}{l}\right)\sin\frac{k\pi\zeta}{l}\right]_{\frac{l}{2}}^{l}$$

$$=\frac{2l}{k^2\pi^2}\left[2\cos\frac{k\pi}{2}-(1+(-1)^k)\right]$$

$$=\begin{cases}\dfrac{2l}{k^2\pi^2}\left(2\cos\dfrac{k\pi}{2}-2\right) & (k\text{为偶数}),\\ 0 & (k\text{为奇数}).\end{cases}$$

$$=\frac{4l}{\pi^2(2n)^2}[(-1)^n-1]$$

$$=\begin{cases}0 & (n\text{为偶数}),\\ \dfrac{-8l}{\pi^2(2n)^2} & (n\text{为奇数}),\end{cases}$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{l}{4}-\frac{8l}{\pi^2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(4n+2)^2}\sin\frac{(2n+2)\pi}{l}x.$$

请读者将本题和习题1(4)比较。

(5) $f(x)=1$，定义在$(0,\pi)$上。

解：因$f'(0)=0$，$f'(\pi)=0$，所以应将$f(x)$展开为余弦

级数。

其系数

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi d\zeta=\frac{1}{\pi}\zeta\Big|_0^\pi=1,$$

$$a_n=\frac{2}{\pi}\int_0^\pi f(\zeta)\cos\frac{n\pi}{\pi}\zeta d\zeta=\frac{2}{\pi}\frac{(-1)}{n}\sin n\zeta\Big|_0^\pi=0,$$

$\therefore$ $f(x)=1$，这是只有单项的傅里叶级数。

3.在区间$(0,l)$上定义了函数$f(x)=x$.试根据条件$f'(0)=0$，$f(l)=0$，把$f(x)$展开为傅里叶级数.

解：根据边界条件$f'(0)=0$应将函数$f(x)$对区间$(0,l)$的端点$x=0$作偶延拓，又根据边界条件$f(l)=0$，应将函数$f(x)$对区间$(0,l)$的端点$x=l$作奇延拓，延拓以后的函数是以$4l$为周期的偶函数．故展开式为

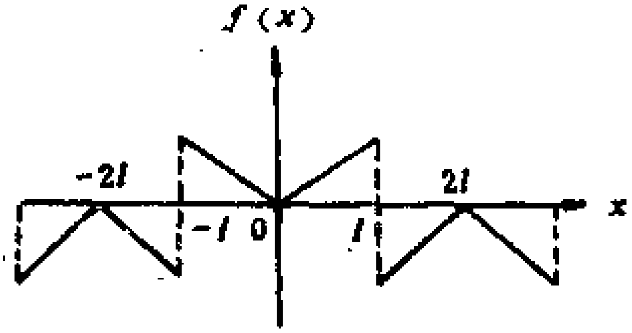


图 6-19

$$f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}a_k\cos\frac{k\pi x}{2l},$$

现在计算系数

$$a_0=\frac{1}{2l}\left[\int_0^l xdx+\int_l^{2l}(x-2l)dx\right.$$

$$=\frac{1}{2l}\left[\frac{l^2}{2}+\frac{4l^2}{2}-\frac{l^2}{2}-4l^2+2l^2\right]=0.$$

$$a_k=\frac{1}{l}\left[\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{2l}dx+\int_l^{2l}(x-2l)\cos\frac{k\pi x}{2l}dx\right]$$

$$=\frac{1}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{2l}dx+\frac{1}{l}\int_l^{2l}(y-2l)\cos\frac{k\pi y}{2l}dy.$$

在第二个积分中作代换$x=2l-y$　即$y=2l-x$　则

$$a_k=\frac{1}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi}{2l}x\,dx+\frac{1}{l}\int_l^0 x\cos\left(k\pi-\frac{k\pi x}{2l}\right)dx$$

$$=\frac{1}{l}[1-(-1)^k]\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{2l}dx,$$

而 $1-(-1)^k=\begin{cases}0, & (\text{如}k=\text{偶数}).\\ 2, & (\text{如}k=\text{奇数}).\end{cases}$

又 $\frac{1}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{2l}dx=\frac{4l}{k^2\pi^2}\left[\cos\frac{k\pi x}{2l}+\frac{k\pi x}{2l}\sin\frac{k\pi x}{2l}\right]_0^l$

$$=\frac{4l}{k^2\pi^2}\left[\cos\frac{k\pi}{2}-1+\frac{k\pi}{2}\sin\frac{k\pi}{2}\right],$$

而在$k=2n+1$为奇数时，则有

$$a_k=2\cdot\frac{1}{l}\int_0^l x\cos\frac{k\pi x}{2l}dx=\frac{-8l}{(2n+1)^2\pi^2}+\frac{4l}{(2n+1)\pi}(-1)^n,$$

结果 $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\left[\frac{(-1)^n 4l}{(2n+1)\pi}-\frac{8l}{(2n+1)^2\pi^2}\right]\cos\frac{(2n+1)\pi}{2l}x.$

4.二元函数$f(x,y)=xy$，定义在区域$-\pi<x<\pi$，$-\pi<y<\pi$上.试根据边界条件$f\Big|_{x=-\pi}=\xi\Big|_{x=+\pi}=0$把$f$对自变数$x$展为傅里叶级数.这个级数的“系数”仍然是$y$的函数，再根据边界条件$f\Big|_{y=-\pi}=f\Big|_{y=\pi}=0$把这个级数中的“系数”对自变数$y$展为傅里叶级数，这叫做双重傅里叶级数.

解：先把$f(x,y)$就自变数x展开为傅里叶级数，根据边界条件，这傅里叶级数应是正弦级数.

$$f(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}b_k\sin kx=\sum_{k=1}^{\infty}b_k(y)\sin kx,$$

"系数" $b_k(y)$的计算如下：

$$b_k(y)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} yx\sin kx\,dx=\frac{2y}{\pi}\ \frac{1}{k^2}\Big[\sin kx-kx\cos kx\Big]_0^{\pi}$$

$$=\frac{2y}{k\pi}[-\pi\cos k\pi]\ \ =\frac{2y}{k}(-1)^{k+1}.$$

再将$b_k(y)$就自变数 y 展开傅里叶级数，根据边界条件，这里傅里叶级数应为正弦级数.

$$b_k(y)=\sum_{n=1}^{\infty} b_{kn}\sin ny,$$

系数b_{kn}的计算如下：

$$b_{kn}=\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\ \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} y\sin ny\,dy.$$

$$=\frac{2(-1)^{k+1}}{k}\ \frac{2(-1)^{n+1}}{n}=\frac{4(-1)^{k+n}}{kn},$$

结果 $$f(xy)=\sum_{k=1}^{\infty}\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4(-1)^{k+n}}{kn}\sin kx\sin ny.$$

§27. 复数形式的傅里叶级数

1.矩形波 $f(x)$，在$\left(-\frac{T}{2},\ \frac{T}{2}\right)$这个周期上可表为

$$f(x)=\begin{cases}0, & 在\left(-\frac{T}{2},\ -\frac{\tau}{2}\right)上,\\ H, & 在\left(-\frac{\tau}{2},\ \frac{\tau}{2}\right)上,\\ 0, & 在\left(\frac{\tau}{2},\ \frac{T}{2}\right)上,\end{cases}$$

试将它展开为复数形式的傅里叶级数.

解：$\because \quad l=\frac{T}{2}$，故

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{i\frac{2k\pi}{T}x}.$$

其中$C_0=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(x)dx=\frac{1}{2\cdot\frac{T}{2}}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f(x)dx$

$$=\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} Hdx=\frac{1}{T}H\tau.$$

$$C_k=\frac{1}{2l}\int_{-l}^{l} f(\zeta)\left[e^{i\frac{k\pi\zeta}{l}}\right]^* d\zeta$$

$$=\frac{1}{2\cdot\frac{T}{2}}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} He^{-i\frac{2k\pi}{T}x}dx$$

$$=\frac{iH}{2\pi k}\left(-2i\sin\frac{k\pi\tau}{T}\right)=\frac{H}{\pi k}\sin\frac{k\pi\tau}{T}\ (k\neq 0).$$

$$\therefore \quad f(x)=\frac{H\tau}{T}+\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{H}{\pi k}\sin\frac{k\pi\tau}{T}$$

$$\times e^{i\frac{2k\pi}{T}x}.$$

2. 锯齿波$f(x)$在$(0, T)$这个周期上可表为

$$f(x)=\frac{H}{T}x,$$

试把它展开为复数形式的傅里叶级数。

解：$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k e^{i\frac{2k\pi}{l}x}$，　　$\left(\because \ l=\frac{T}{2}\right)$，

$$C_0=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)dx=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{1}{T}Hxdx$$

$$=\frac{1}{T}\frac{H}{T}\frac{x^2}{2}\Big|_0^T=\frac{H}{2},$$

$$C_k=\frac{1}{T}\int_0^T f(x)\left(e^{i\frac{2k\pi}{T}x}\right)^* dx$$

$$=\frac{1}{T}\int_0^T\frac{H}{T}xe^{-i\frac{2k\pi}{T}x}dx$$

$$=\frac{H}{T^2}\left(\frac{T}{-i2\pi k}\right)^2 e^{-i\frac{2\pi k}{T}x}$$

$$\times\left(-i\frac{2\pi k}{T}x-1\right)\Big|_0^T$$

$$=\frac{H}{(-i2\pi k)^2}\left[e^{-i2\pi k}(-i2\pi k-1)-(-1)\right]$$

$$=\frac{H}{(-i2\pi k)^2}[(-i2\pi k-1)+1]=\frac{H}{-i2\pi k}$$

$$=\frac{iH}{2\pi k},\qquad (k\neq 0),$$

$$\therefore\quad f(x)=\frac{H}{2}+\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}+\sum_{k=1}^{\infty}\right)\frac{iH}{2\pi k}e^{i\frac{2\pi k}{T}x}.$$

3.在实数形式的傅里叶级数24·7式中

$$\left[f(x)=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)\right],$$

把$\cos\frac{k\pi x}{l}$和$\sin\frac{k\pi x}{l}$按欧勒公式用虚指数的指数函数

$e^{i\frac{k\pi x}{l}}$和$e^{-i\frac{k\pi x}{l}}$表出，验证实数形式的傅里叶级数(24·7)

就化为复数形式的傅里叶级数(27·2)$\left[\text{即 } f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k e^{i\frac{k\pi x}{l}}\right]$而且$C_k=\frac{a_k-ib_k}{2}$，$C_{-k}=\frac{1}{2}(a_k+ib_k)$. 其中$k>0$.

解：$f(x)=a_0+\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}\right)$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\frac{a_k}{2}\left(e^{i\frac{k\pi x}{l}}+e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\right)+\frac{b_k}{2i}\left(e^{i\frac{k\pi x}{l}}-e^{-i\frac{k\pi}{l}x}\right)\right]$$

$$=a_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{a_k-ib_k}{2}\right)e^{i\frac{k\pi x}{l}}+\left(\frac{a_k+ib_k}{2}\right)e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\right],$$

令　$a_0=C_0$，$\frac{a_k-ib_k}{2}=C_k$，$\frac{a_k+ib_k}{2}=C_{-k}$，

则实数形式的傅里叶级数便化成复数形式：

$$f(x)=C_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(C_ke^{i\frac{k\pi x}{l}}+C_{-k}e^{-i\frac{k\pi x}{l}}\right).$$

令$k=0\pm1，\pm2，\pm3，\cdots$则上式可化为统一的复数形式（即27·2式）：

$$f(x)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}C_k\,e^{i\frac{k\pi x}{l}}$$，其中$k=|k|$=正整数．

从上述讨论可以看出C_k和C_{-k}的模正好是傅里叶级数展开式中k次谐波振幅的一半，这是因为k次谐波

$$a_k\cos\frac{k\pi x}{l}+b_k\sin\frac{k\pi x}{l}=\sqrt{a_k^2+b_k^2}\sin\left(\frac{k\pi x}{l}+\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k}\right)$$

$$=A_k\sin\left(\frac{k\pi x}{l}+\operatorname{arctg}\frac{b_k}{a_k}\right),$$

其中k次谐波的振幅$A_k=\sqrt{a_k^2+b_k^2}$，

而$|C_k|=|C_{-k}|=\frac{1}{2}\sqrt{a_k^2+b_k^2}=\frac{1}{2}A_k$．

第七章　傅里叶积分

§28. 非周期函数的傅里叶积分

1. 把单个锯齿脉冲$f(t)$展开为傅里叶积分.

$$f(t)=\begin{cases}0,\ (t<0),\\ kt,\ (0<t<T),\\ 0,\ (T<t).\end{cases}$$

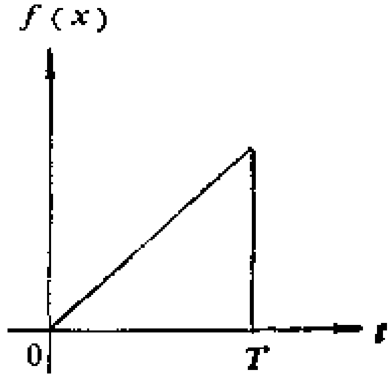


图 7-1

解：因为$f(t)$是无界空间中的非周期函数，它的周期为∞，故可展开为傅里叶积分：

$$f(t)=\int_0^{\infty}A(\omega)\cos\omega t d\omega+\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega t d\omega$$

其中傅里叶变换$A(\omega)$和$B(\omega)$为：

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\cos\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^T kt\cos\omega t dt$$

$$=\frac{k}{\pi\omega^2}\int_0^T(\omega t)\cos\omega t d(\omega t)$$

$$=\frac{k}{\pi\omega^2}\Big[\cos\omega t+\omega t\sin\omega t\Big]_0^T$$

$$=\frac{k}{\pi\omega^2}[\cos\omega T+\omega T\sin\omega T-1],$$

$$B(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\sin\omega x dx=\frac{1}{\pi}\int_0^t kt\sin\omega t dt$$

$$=\frac{k}{\pi\omega^2}\left[\sin\omega t-\omega t\cos\omega t\right]_0^T$$

$$=\frac{k}{\pi\omega^2}[\sin\omega T-\omega T\cos\omega T],$$

$$\therefore\quad f(t)=\frac{k}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\omega^2}(\cos\omega T+\omega T\sin\omega T-1)\cos\omega t d\omega$$

$$+\frac{k}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\omega^2}(\sin\omega T-\omega T\cos\omega T)\sin\omega t d\omega.$$

2.把振幅按双曲线衰减的振动函数$f(t)$展开为傅里叶积分

$$f(t)=\frac{\sin\Omega t}{t},\quad (\Omega\text{为常数}).$$

试拿本题的频谱跟图(38)比较，又拿本题的$f(t)$跟图(39)比较.比较的结果说明什么问题?

解：因$\sin\Omega t$是奇函数，t也是奇函数，所以$f(t)$是偶函数，应展开为傅里叶余弦积分

$$f(t)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t d\omega,$$

其中$A(\omega)$是$f(t)$的傅里叶变换式，按(28·6)式有

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty f(\xi)\cos\omega\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty f(\xi)\cos\omega\xi d\xi$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\xi}\sin\Omega\xi\cos\omega\xi d\xi$$

$$=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^\infty\frac{1}{\xi}\sin(\omega+\Omega)\xi d\xi\right.$$

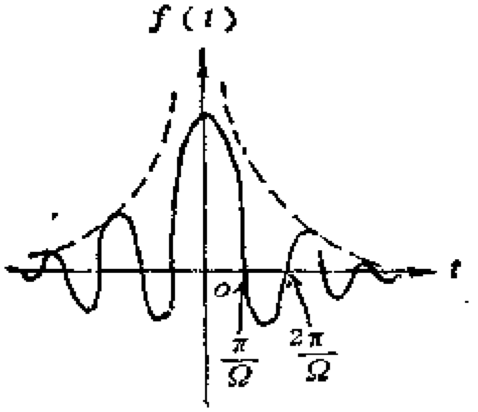
$$\left.-\int_0^\infty\frac{1}{\xi}\sin(\omega-\Omega)\xi d\xi\right].$$

应用积分公式

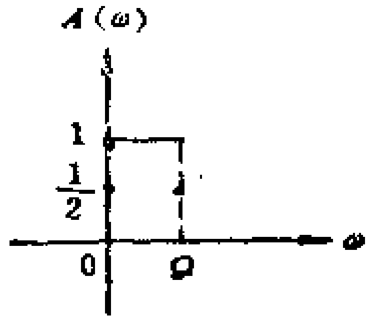
$$\int_0^\infty \frac{\sin mx}{x}\,dx = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & (m>0), \\ 0, & (m=0), \\ -\dfrac{\pi}{2}, & (m<0), \end{cases}$$

$$得\quad A(\omega) = \left\{\begin{array}{ll} 0, & (\omega>\Omega), \\ \dfrac{1}{2}, & (\omega=\Omega), \\ 1, & (\omega<\Omega), \end{array}\right\} = 1 - H(\omega-\Omega),$$

而$f(t)$和$A(\omega)$的图形如图7-2。



(a)



(b)

图 7-2

比较知，本题的$f(t)$的图象同于图(39)的$A(\omega)$，而本题的频谱$A(\omega)$的图象则同于图(39)的$f(t)$，这是由于公式(28·10)和(28·11)对变数x和ω对称的缘故，亦即如果不计及常数因子，其$f(x)$和$A(\omega)$互为傅里叶变换式，可以说$A(\omega)$是$f(x)$的傅里叶变换式，也可以说$f(x)$是$A(\omega)$的傅里叶变换式。

3.把下列脉冲$f(t)$展开为傅里叶积分，

$$f(t)=\begin{cases}0, & (t<-T),\\ -h, & (-T<t<0),\\ h, & (0<t<T),\\ 0, & (T<t).\end{cases}$$

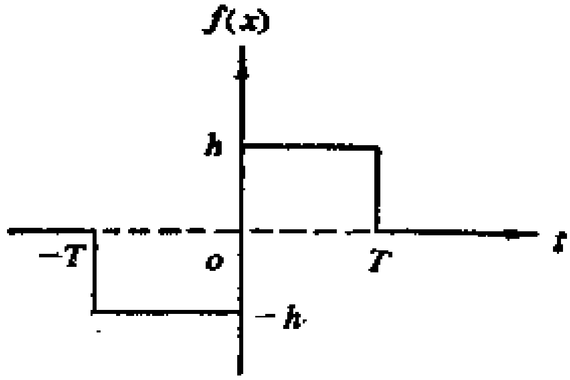


图 7-3

注意在半无界区间$(0,\infty)$上，本例题的$f(t)$跟例1的$f(t)$相同.

解：因为$f(t)$是奇函数，所以展开为傅里叶正弦积分：

$$f(t)=\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega t d\omega$$

其傅里叶变换为：

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^T h\sin\omega\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\frac{h}{\omega}\int_0^T\sin\omega\xi d(\omega\xi)$$

$$=\frac{2h}{\pi\omega}(-\cos\omega\xi)\Big|_0^T=\frac{2h}{\pi\omega}(1-\cos\omega T).$$

本题的图7-3和课本中的图38（第134页例1）的$f(t)$在区间$(0,\infty)$上，是相同的，只是本题属于奇函数，而第134页的例1为偶函数.

4. $f(t)$是定义在半无界区间$(0,\infty)$上的函数，

$$f(t)=\begin{cases}h, & (0<t<T),\\ 0, & (T<t).\end{cases}$$

（1）在边界条件$f'(0)=0$下把$f(t)$展为傅里叶积分；

（2）在边界条件$f(0)=0$下把$f(t)$展为傅里叶积分.

解：（1）要满足边界条件$f'(0)=0$，必须将$f(t)$展开为傅里叶余弦积分.

$$f(t)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega t d\omega,$$

其中

$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(\xi)\cos\omega\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{T}h\cos\omega\xi d\xi$$

$$=\frac{2h}{\pi\omega}\sin\omega\xi\Big|_0^T=\frac{2h}{\pi\omega}\sin\omega T,$$

$$\therefore\quad f(t)=\int_0^{\infty}\frac{2h}{\pi\omega}\sin\omega T\cos\omega t d\omega$$

$$=\frac{2h}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\sin\omega T\cos\omega t d\omega}{\omega}.$$

（2）要满足边界条件$f(0)=0$，必须将$f(t)$展开为傅里叶正弦积分：

$$f(t)=\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega t d\omega,$$

其中

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(\xi)\sin\omega\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{T}h\sin\omega\xi d\xi$$

$$=\frac{2}{\pi}\ \frac{h}{\omega}(-\cos\omega\xi)\Big|_0^T=\frac{2h}{\omega\pi}(1-\cos\omega T),$$

$$\therefore\quad f(t)=\frac{2h}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{(1-\cos\omega T)\sin\omega t}{\omega}d\omega.$$

5.在边界条件$f(0)=0$下，把定义在$(0,\infty)$上的函数$f(x)=e^{-\lambda x}$展开为傅里叶积分。

解：要满足边界条件$f(0)=0$，必须将$f(x)$展开为傅里叶正弦积分：

$$f(x)=\int_0^{\infty}B(\omega)\sin\omega x d\omega.$$

其中

$$B(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}f(x)\sin\omega\xi d\xi=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi d\xi$$

$$=-\frac{2}{\pi\omega}\int_0^{\infty}e^{-\lambda\xi}d(\cos\omega\xi)$$

$$= -\frac{2}{\pi\omega}e^{-\lambda\xi}\cos\omega\xi\Big|_0^\infty + \frac{2}{\pi\omega}\int_0^\infty \cos\omega\xi d e^{-\lambda\xi}$$

$$= \frac{2}{\pi\omega} + \frac{2}{\pi\omega}\int_0^\infty \cos\omega\xi e^{-\lambda\xi}(-\lambda)d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi\omega} - \frac{2\lambda}{\pi\omega^2}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}d(\sin\omega\xi)$$

$$= \frac{2}{\pi\omega} - \frac{2\lambda}{\pi\omega^2}e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi\Big|_0^\infty$$

$$+ \frac{2\lambda}{\pi\omega^2}\int_0^\infty (-\lambda)e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi d\xi$$

$$= \frac{2}{\pi\omega} - \frac{2\lambda^2}{\pi\omega^2}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi d\xi.$$

把上式移项整理后得

$$\left(\frac{2}{\pi} + \frac{2\lambda^2}{\pi\omega^2}\right)\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi d\xi = \frac{2}{\pi\omega},$$

即
$$\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi d\xi = \frac{\frac{2}{\pi\omega}}{\frac{2}{\pi} + \frac{2\lambda^2}{\pi\omega^2}} = \frac{\omega}{\omega^2+\lambda^2},$$

$$\therefore\quad B(\omega) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty e^{-\lambda\xi}\sin\omega\xi d\xi = \frac{2}{\pi}\cdot\frac{\omega}{\omega^2+\lambda^2},$$

故$f(x)$的展开式为：

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\omega}{\omega^2+\lambda^2}\cos\omega x d\omega.$$

6.在边界条件$f'(0)=0$下．把定义在$(0,\infty)$上的函数$f(x)=1-H(x-a)$展为傅里叶积分．

解：在边界条件$f'(0)=0$的要求下，$f(x)$必须展开为傅里叶余弦积分：

$$f(x) = \int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega,$$

其中
$$A(\omega)=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty[1-H(x-a)]\cos\omega x dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\cos\omega x dx-\frac{2}{\pi}\int_0^\infty H(x-a)\cos\omega x dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^a\cos\omega x dx+\frac{2}{\pi}\int_a^\infty\cos\omega x dx$$
$$-\frac{2}{\pi}\int_a^\infty 1\cdot\cos\omega x dx$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^a\cos\omega x dx$$
$$=\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega x\Big|_0^a=\frac{2}{\pi\omega}\sin\omega a,$$
$$\therefore\quad f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega$$
$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\sin\omega a}{\omega}\cos\omega x d\omega.$$

7.在实数形式的傅里叶积分(28·5)里，把$\cos\omega x$和$\sin\omega x$按照欧勒公式用虚指数的指数函数$e^{i\omega x}$和$e^{-i\omega x}$表出，验证实数形式的傅里叶积分(28·5)就化为复数形式的傅里叶积分(28·13)而且
$$C(\omega)=\frac{1}{2}[A(\omega)-iB(\omega)],\ C(-\omega)=\frac{1}{2}[A(\omega)+iB(\omega)],$$
其中$\omega>0$。

证：
$$f(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega+\int_0^\infty B(\omega)\sin\omega x d\omega$$
$$=\int_0^\infty\Big[\frac{A(\omega)}{2}(e^{i\omega x}+e^{-i\omega x})$$
$$-\frac{i}{2}B(\omega)(e^{i\omega x}-e^{-i\omega x})\Big]d\omega$$

$$=\int_0^{\infty}\frac{1}{2}[A(\omega)-iB(\omega)]e^{i\omega x}d\omega$$

$$+\int_0^{\infty}\frac{1}{2}[A(\omega)+iB(\omega)]e^{-i\omega x}d\omega$$

$$=\int_0^{\infty}[C(\omega)e^{i\omega x}+C(-\omega)e^{-i\omega x}]d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}C(\omega)e^{i\omega x}d\omega,$$ 此即(28·13)式。

8.验证延迟定理、位移定理和卷积定理。

（1）延迟定理：如果$f(x)$的傅里叶变换式是$C(\omega)$则$f(x-x_0)$的傅里叶变换式是$C(\omega)e^{-i\omega x_0}$。

证：$f(x-x_0)$的傅里叶变换式是$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x-x_0)e^{-i\omega x}dx$，

在上述积分中作代换$x-x_0=\xi$ 即$x=\xi+x_0$，

则$f(x-x_0)$的傅里叶变换式$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega\xi-i\omega x_0}d\xi$

$$=e^{-i\omega x_0}\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi$$

$$=C(\omega)e^{-i\omega x_0}.$$

（2）位移定理：如果$f(x)$的傅里叶变换式是$C(\omega)$则$e^{i\omega_0 x}f(x)$的变换式是$C(\omega-\omega_0)$，

证：$e^{i\omega_0 x}f(x)$的傅里叶变换式是

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{i\omega_0 x}e^{-i\omega x}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f(x)e^{-i(\omega-\omega_0)x}dx$$

$$=C(\omega-\omega_0).$$

（3）卷积定理：如果$f_1(x)$和$f_2(x)$的傅里叶变换式是$C_1(\omega)$和$C_2(\omega)$则

$\int_{-\infty}^{\infty}f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$的傅里叶变换式是$2\pi C_1(\omega)C_2(\omega)$

证：$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x}dx \int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)f_2(x-\xi)d\xi$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f_2(x-\xi)e^{-i\omega x}dx.$$

令$x-\xi=t$，$dx=dt$，则上式成为

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)d\xi \int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i(\xi+t)\omega}dt$$

$$=2\pi\left[\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_1(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi\ \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f_2(t)e^{-i\omega t}dt\right]$$

$$=2\pi C_1(\omega)\cdot C_2(\omega).$$

§29. δ函数和它的傅里叶积分

1. 验证$H'(t-\tau)=\delta(t-\tau)$，求$\delta(t-\tau)$的拉普拉斯变换像函数。

解：（1）验证$H'(t-\tau)=\delta(t-\tau)$

(i) 按照单位函数的定义

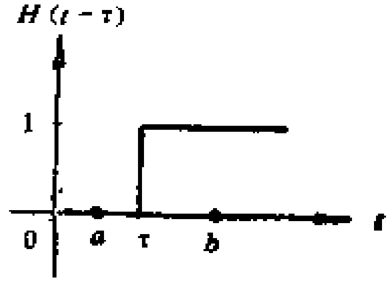
$$H(t-\tau)=\begin{cases}0, & (t<\tau),\\ 1, & (t>\tau).\end{cases}$$

知当$t>\tau$和$t<\tau$，$H(t-\tau)$为常数，

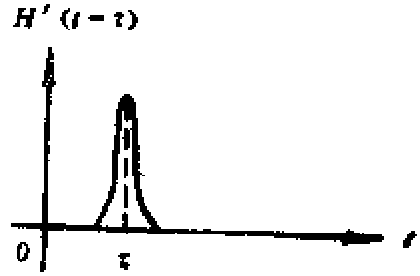
∴ $H'(t-\tau)=0$.

当$t=\tau$时，$t=\tau$是$H(t-\tau)$的第一类间断点。

一般取$H(0)=\frac{1}{2}$，则



(a)



(b)

图 7-4

$$\lim_{\Delta t\to+0}\frac{H(\Delta t)-H(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to+0}\frac{1-\frac{1}{2}}{\Delta t}=+\infty,$$

$$\lim_{\Delta t\to -0}\frac{H(\Delta t)-H(0)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to -0}\frac{0-\frac{1}{2}}{\Delta t}=+\infty,$$

$$\therefore\quad H'(t-\tau)\Big|_{t=\tau}=\infty,$$

即
$$H'(t-\tau)=\begin{cases}0, & (t\neq\tau),\\ \infty, & (t=\tau).\end{cases}$$

$$\text{(ii)}\quad \int_a^b H'(t-\tau)dt=H(t-\tau)\Big|_a^b=H(b-\tau)-H(a-\tau)$$

$$=\begin{cases}0, & (a,b\text{都}<\tau\text{或都}>\tau),\\ 1, & (a<\tau<b),\end{cases}$$

由（i）和（ii）知 $H'(t-\tau)=\delta(t-\tau)$.

（2）求$\delta(t-\tau)$的拉普拉斯变换象函数.

解：方法1：按照拉普拉斯变换的定义

$$\bar{\varphi}(p)=\int_0^\infty e^{-pt}\delta(t-\tau)dt=\begin{cases}0, & (\tau<0),\\ e^{-p\tau}, & (\tau\geqslant 0),\end{cases}$$

这是因为 $0\leqslant t<\infty$，当$\tau<0$时，$t-\tau>0$，
此时$\delta(t-\tau)=0$，因此$\bar{\varphi}(p)=0$.
而当$\tau>0$时，$0\leqslant\tau<\infty$，则根据δ函数的性质

$$\delta(t-\tau)\risingdotseq\int_0^\infty e^{-pt}\delta(t-\tau)dt=e^{-pt}\Big|_{t=\tau}=e^{-p\tau}.$$

而当$\tau=0$时，则有

$$\delta(t-\tau)=\delta(t)\risingdotseq\int_0^\infty e^{-pt}\delta(t)dt=e^{-pt}\Big|_{t=0}=1.$$

结果
$$\delta(t-\tau)\risingdotseq\begin{cases}0, & (\tau<0),\\ e^{-p\tau}, & (\tau\geqslant 0),\end{cases}$$

$$\delta(t)\risingdotseq 1.$$

方法2：$\int_0^\infty e^{-pt}\delta(t-\tau)dt=\int_0^\infty e^{-pt}H'(t-\tau)dt$

$$= e^{-pt}H(t-\tau)\Big|_{t=0}^{\infty}$$

$$-\int_{\tau}^{\infty} -pe^{-pt}H(t-\tau)dt,$$

当$\tau>0$时，上式可以写成

$$-\int_{\tau}^{\infty} -pe^{-pt}H(t-\tau)dt = -\int_{\tau}^{\infty} -pe^{-pt}dt$$

$$= -e^{-pt}\Big|_{\tau}^{\infty} = e^{-p\tau}.$$

而当$\tau<0$时则$\because H(t-\tau)=1, H(-\tau)=1$,

这时上式可写为

$$-1-\int_{0}^{\infty} -pe^{-pt}dt = -1-e^{-pt}\Big|_{0}^{\infty}=0,$$

$\therefore\quad \delta(t-\tau) \doteq e^{-p\tau}H(\tau).$

2. 验证§28例2的频谱$B(\omega)$（图41）于$N\to\infty$就成为$A\delta(\omega-\omega_0)-A\delta(\omega+\omega_0)$，阐明这结果的物理意义.

解：$\because$ $\quad B(\omega)=\dfrac{2A\omega_0}{\pi(\omega^2-\omega_0^2)}\sin\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}N2\pi\right)$

$$=\frac{A}{\pi}\,\frac{\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}N2\pi\right)}{\omega-\omega_0}$$

$$-\frac{A}{\pi}\,\frac{\sin\left(\frac{\omega}{\omega_0}N2\pi\right)}{\omega+\omega_0}$$

$$=\frac{A}{\pi}\,\frac{\sin\left[\frac{2\pi N}{\omega_0}(\omega-\omega_0)\right]}{\omega-\omega_0}$$

$$-\frac{A}{\pi}\,\frac{\sin\left[\frac{2\pi N}{\omega_0}(\omega+\omega_0)\right]}{\omega+\omega_0}$$

当$N\to\infty$时，即 $\dfrac{2\pi N}{\omega_0}\to\infty$

这时有限的正弦波列，便成为无限的正弦波列，而

$$B(\omega)=A\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{N2\pi}{\omega_0}(\omega-\omega_0)}{\omega-\omega_0}$$

$$-A\lim_{N\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin\frac{N2\pi}{\omega_0}(\omega_0+\omega)}{\omega+\omega_0}$$

$$=A\delta(\omega-\omega_0)-A\delta(\omega+\omega_0).$$

$$\because\quad \lim_{k\to\infty}\frac{1}{\pi}\frac{\sin kx}{x}=\delta(x),$$

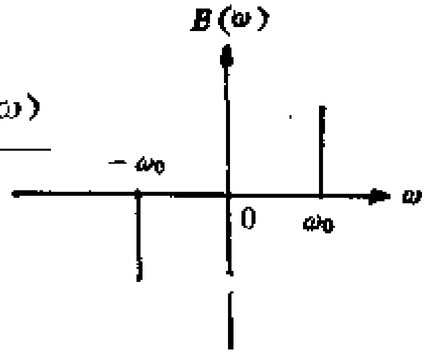


图 7-5

所以对于无限正弦波列，它的频谱成为两条线，一条位于$\omega=\omega_0$处，另一条位于$\omega=-\omega_0$处，振动成为单一圆频率ω_0的振动。

3.把$\delta(x)$展为实数形式的傅里叶积分。

解：

$\because$ $\delta(x)$是偶函数，它的傅里叶积分可表示为：

$$\delta(x)=\int_0^\infty A(\omega)\cos\omega x d\omega,$$

而

$$A(\omega)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\cos\omega x dx$$

$$=\frac{1}{\pi}\cos(\omega\cdot 0)=\frac{1}{\pi},$$

$$\therefore\quad \delta(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\omega x d\omega,$$

或

$$\delta(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{i\omega x}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega x d\omega+i\int_{-\infty}^{\infty}\sin\omega x d\omega\right]$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\cos\omega x d\omega=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\omega x d\omega.$$