常　微　分　方　程

蔡燧林　编著

武 汉 大 学 出 版 社

图书在版编目(CIP)数据

常微分方程/蔡燧林编著.—2版.—武汉：武汉大学出版社，2003.8
面向21世纪本科生教材
ISBN 7-307-03965-6

Ⅰ.常…　Ⅱ.蔡…　Ⅲ.常微分方程—高等学校—教材
Ⅳ.O175.1

中国版本图书馆CIP数据核字(2003)第059438号

责任编辑：顾素萍　　责任校对：黄添生　　版式设计：支　笛

出版发行：武汉大学出版社　(430072　武昌　珞珈山)
(电子邮件：wdp4@whu.edu.cn　网址：www.wdp.whu.edu.cn)
印刷：武汉市新华印务有限责任公司
开本：850×1168　1/32　印张：13　字数：323千字
版次：1991年3月第1版　　2003年8月第2版
2005年1月第2版第2次印刷
ISBN 7-307-03965-6/O·284　　定价：18.00元

内 容 简 介

本书分 8 章：基本概念，初等积分法，一阶微分方程的基本理论，线性微分方程，常微分方程组，定性理论与稳定性理论初步，边值问题初步，一阶偏微分方程．每章配有习题和复习题，全部计算题都有答案，个别证明题有提示．

本书可用作师范院校、理工科大学的数学类专业教科书和部分理工科其他专业的参考书．

第二版说明

本书第一版于 1991 年问世，至今已有十一余年．现在的第二版除了校正第一版的一些排版问题外，作了以下一些修改，总的篇幅比第一版有所减少．

1．删去了一阶隐式方程求解．

2．删去了回路振荡一节，改写了应用实例，特别增加了微分方程在生物种群方面的应用题及近年来在考研中出现的应用题．

3．改写了第 4 章中常系数线性非齐次方程的解法这一节，将待定系数法的论证写得更简洁，避免了繁琐的关于 $\sum$ 的运算．

4．增加了"边值问题初步"一章，作为第 7 章，而将原第 7 章一阶偏微分方程改为第 8 章．

5．改写了一阶拟线性偏微分方程的论证，使之更简单明了．

6．删去了总复习题与索引．

在完成本书第二版修改时，承浙江大学宁波理工学院的领导大力支持，得以及时在该院信息与计算科学系使用，深表感谢．

蔡燧林
于浙江大学求是村
浙江大学宁波理工学院
2003 年 6 月

第一版序言摘录

全书共分 7 章．第 1 章是基本概念，介绍有关微分方程的一些名词术语，以及引入微分方程的某些实例．第 2 章是初等积分法，介绍一些基本类型的微分方程的积分方法．第 3 章是基本理论，介绍一阶方程初值问题解的存在惟一性定理、解的延展理论、解对初值的连续依赖性和可微性等定理，它们是学习本门课程的读者必须掌握的内容．第 4 章和第 5 章分别介绍高阶线性方程和常微分方程组的解的理论和常系数线性系统的解法．第 6 章介绍常微分方程定性理论和稳定性理论初步，它是继第 3 章之后进一步对解的某些性态的研究，同时还具有丰富的实际背景．第 7 章介绍常微分方程组的首次积分以及一阶线性偏微分方程和一阶拟线性偏微分方程．这两部分内容之间有密切的联系，所以放在同一章中介绍．

作者在编写时力求深入浅出，眉目清楚，讲清思路，便于阅读．在论证和方法的叙述上，又注意细节的说明．必要时，除了正面论述外，还从反面举例说明，以便读者更好地掌握要阐明的问题．至于某些不宜在常微分方程初等教材中提及的内容或其他枝节问题，则不提及，以免增加难度或分散注意力．

本书配置的例题较多．例题分三类．一类是为了帮助读者理解概念和理论的，这种例题大多较简单，不追求技巧和解题方法．另一类是计算题，讲过一种方法之后，举一些这方面的例子，作为读者演算习题的范例．再一类是证明题，它们既充实了教材本身的内容，又用来说明如何运用理论来分析问题和进行推

理．这些例题在方法上，有时有一定的技巧，可以借鉴．读者应细心领会这类例题的实质，抓住其思路．

本书的习题类型也可分成三类．一类是验证理论的，会用它们去印证理论，就达到这类习题的目的了．第二类是计算题．这类习题数量较多，读者能独立完成其中每一题型的三分之一到二分之一就可以了，当然能多做更好．第三类是证明题．这类习题数量不多，但是其类型一般各不相同，并且有的有一定难度．全书的计算题在书末都给出了答案．

本书第一版由北京大学丁同仁教授主审．参加审查的还有东北师范大学黄启昌教授、山东师范大学庄万教授、湖南大学钱祥征教授、杭州大学俞伯华教授．以上诸位先生对本书的初稿进行了详细的分析与精心的审阅，并提出了许多宝贵的意见．作者根据他们的意见对初稿的某些内容作了较大的修改．赵申琪副教授仔细阅读了本书的初稿和修改稿，无论在内容上还是在文字上，都提出了许多有益的见解．他还为本书编写了各章小结、习题、复习题、习题答案．作者在此对审查的诸位先生的指导，对赵申琪同志的协助，一并表示衷心的感谢．

限于作者水平，书中难免存在缺点和不妥之处，敬请读者批评指正．

蔡燧林

1989 年 3 月

于浙江大学

第 1 章 基 本 概 念

本章首先从一些实例引入常微分方程，然后结合这些例子，介绍常微分方程的一些基本概念和术语，在本章最后，扼要指出常微分方程课程的主要任务．

§1.1 常微分方程的几个实例

在初等数学里，已见到过方程．例如

(1) $x^2 + 2x - 3 = 0$,

(2) $\tan x = x$

等都是方程，其中 x 是未知量．

有时未知而要去求的不是一个或几个特定的值，而是一个或几个函数，它们各自依赖于若干个变量．例如

(3) $x^2 - y^2 = 1$,

(4) $x + y + z = 1$，$x^2 + y^2 + z^2 = 4$,

若 x 为自变量，则 y 和 z 是未知函数．(3)和(4)这种方程称为函数方程．

本书要研究的是另一类方程，即联系着自变量、未知函数以及未知函数的导数的这种方程，称之为微分方程，其方程中必须含有未知函数的导数．例如

(5) $\dfrac{dy}{dx} = y\tan x + 5$,

(6) $\dfrac{dy}{dx} = x^2 + y^2$,

(7) $\frac{d^2 y}{d x^2} + p \frac{d y}{d x} + qy = f(x)$,

(8) $\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$,

(9) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

等都是微分方程，其中(5),(6),(7)中，y 是未知函数，x 是自变量，p 和 q 是常数，$f(x)$是 x 的已知函数；(8)和(9)中，u 是未知函数，t，x 和 y 是自变量，a 是常数．

微分方程又分常微分方程和偏微分方程．如果方程中所出现的未知函数的导数是一元函数的导数，则这种方程称为常微分方程；如果方程中所出现的未知函数的导数是偏导数，则称之为偏微分方程．例如上面的(5),(6)和(7)是常微分方程，(8)和(9)是偏微分方程．

本书主要讨论常微分方程以及与常微分方程有密切联系的一阶偏微分方程．为方便起见，以后将微分方程简称为方程．

方程来源于实际．从微积分诞生的时候起，就产生了微分方程．现在举几个简单的例子．

例 1　求一曲线，设在曲线上任意一点(x, y)处的切线斜率等于该点横坐标 x 的 2 倍，并且该曲线经过点(1,2)．

解　设曲线方程为 $y = y(x)$．由题设条件，可列出方程

$$\frac{d y}{d x} = 2x. \tag{1.1}$$

这是一个常微分方程，所求曲线 $y = y(x)$应满足这个方程．又因为所求曲线经过点(1,2)，所以又应满足条件

$$y|_{x=1} = 2. \tag{1.2}$$

现在来求 $y = y(x)$．将(1.1)改写为 $dy = 2x dx$，然后两边积分，显然可得

$$y = x^2 + C, \tag{1.3}$$

其中 C 是任意常数．满足(1.1)的 y 都可由(1.3)来表示．反之，

不论 C 是什么样的常数，由(1.3)表示的 y 都满足(1.1).

显然，(1.3)所表示的不止是一条曲线，而是无穷多条曲线，是一个曲线族.现在要从这许多曲线中找出满足条件(1.2)的曲线.为此，以(1.2)代入(1.3)得 $2 = 1 + C$，于是求得 $C = 1$.故满足方程(1.1)和条件(1.2)的曲线有且只有一条，是

$$y = x^2 + 1 .$$

例 2　一物体放在温度为 τ 的恒温介质中冷却.设在冷却过程中降温速率随物体与介质的温度差成正比，比例系数 $k > 0$ 可以由实验确定.设物体的初始温度为 T_0，$T_0 > \tau$，求从实验开始算起时间 t 时的物体温度 T.

解　要求的是 T 随 t 的变化规律，即函数 $T = T(t)$.冷却过程中降温速率就是 T 对 t 的变化率，即 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}$.由题中条件可列出方程

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = -k(T - \tau) . \tag{1.4}$$

这里等号右端添负号的原因是，$T > \tau$ 时，物体在介质中冷却，于是 T 随 t 的增长而减少，故 $\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} < 0$.又因 $k > 0$，故右端应添负号.要求的函数 $T = T(t)$ 应满足方程(1.4).显然，冷却规律又与初始温度有关.现在的 $T = T(t)$ 还应满足

$$T|_{t=0} = T_0 . \tag{1.5}$$

求满足方程(1.4)和条件(1.5)的函数 $T = T(t)$ 将在§2.1例 1 中介绍.

例 3　在地表面上方 s_0 处以初速度 v_0 垂直上抛一物体.设将坐标原点 O 取在地表面，Os 轴以向上为正，不计空气阻力.求物体的运动规律.

解　按题中所讲取坐标系如图 1-1，设在时刻 t 物体的坐标为 s.在运动的过程中，物体只受重力 F 的作用，设物体的质量为 m，则由牛顿第二定律，有

$$ma = F = -mg, \tag{1.6}$$

这里 a 是物体运动的加速度，右边的负号是因为重力 F 是向下的，与所建立的坐标轴 Os 的正向相反．再由物理学知识，知

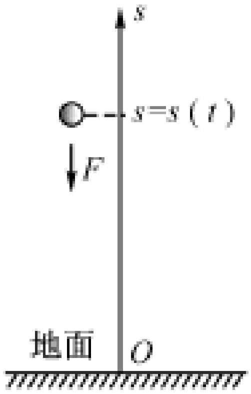

图 1-1

$$a = \frac{d^2 s}{d t^2}. \tag{1.7}$$

将(1.7)代入(1.6)并约去 m，得到物体的位移 $s = s(t)$应满足的方程

$$\frac{d^2 s}{d t^2} = -g. \tag{1.8}$$

又当 $t = 0$ 时，该物体在地表面上方 s_0 处且以初速度 v_0 垂直向上运动，因此 $s = s(t)$还应满足条件

$$s\big|_{t=0} = s_0, \quad \left.\frac{ds}{dt}\right|_{t=0} = v_0. \tag{1.9}$$

现在来求 $s = s(t)$．将(1.8)两边对 t 积分一次，显然得到

$$\frac{ds}{dt} = -gt + C_1, \tag{1.10}$$

其中 C_1 是一个任意常数．再将(1.10)两边对 t 积分一次，得到

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + C_1 t + C_2, \tag{1.11}$$

这里 C_2 又是一个任意常数．(1.11)中包含两个任意常数．不论 C_1 和 C_2 是什么样的常数，(1.11)表示的 $s = s(t)$都满足方程(1.8)．

为了要得到特定的物体运动规律，还必须考虑当运动开始时，物体是在什么地方并且以什么样的速度运动的，即条件(1.9)．将它分别代入(1.10)和(1.11)，得到

$$C_1 = v_0 \quad 和 \quad C_2 = s_0. \tag{1.12}$$

将它们代入(1.11)，就得到垂直上抛物体的运动规律：

$$s = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + s_0 . \qquad (1.13)$$

普通物理学的教科书中曾导出过这个公式.显然,这个特定的运动规律与运动的初始位置和初始速度有关.

例 4 (单摆运动) 一长为 l 不能伸缩的细杆,一端连接一质量为 m 的球,另一端悬挂在 O 点(如图 1-2).若不计细杆的质量,并且在重力作用下细杆在某一铅直平面(如图,纸平面)上摆动,这种结构称为单摆,该球称为摆球.求摆球的运动规律.

解 设从运动开始算起,在时刻 t 时细杆与铅垂线的夹角为 θ,向右为正,求摆球的运动规律就是求函数 $\theta = \theta(t)$.

摆球在运动时受到重力、阻力和杆的支撑力的作用.重力为 mg,它沿杆方向的分力正好与杆的支撑力相抵消;重力沿杆的垂直方向的分力就是沿运动的切线方向的分力,称为切向力 T.由图 1-2 知,T 的大小等于 $mg\sin\theta$.当 $\theta > 0$ 时,T 指向 θ 减少的方向;当 $\theta < 0$ 时,T 指向 θ 增加的方向,所以

$$T = -mg\sin\theta . \qquad (1.14)$$

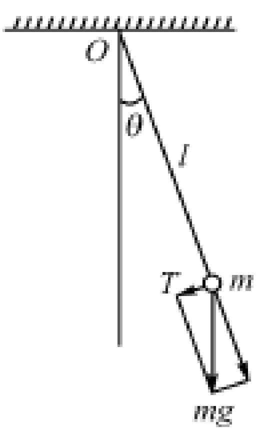

图 1-2

阻力 f 一般说来与运动的速度成正比,比例系数为 $k > 0$,f 的方向与运动的速度方向相反.由物理学的运动学知识,可知摆球的运动速度为 $l\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$,于是

$$f = -kl\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} . \qquad (1.15)$$

T 与 f 的合力是作用于摆球上的外力之和,由牛顿第二定律得到方程:

$$ma = -mg\sin\theta - kl\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}, \qquad (1.16)$$

这里 a 是摆球运动的加速度.由运动学知识,知

$$a = l\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}. \tag{1.17}$$

将它代入(1.16)，得到 $\theta=\theta(t)$应满足的微分方程

$$ml\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+kl\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+mg\sin\theta=0,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2}+\frac{k}{m}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}+\frac{g}{l}\sin\theta=0. \tag{1.18}$$

此称为有阻尼的单摆运动微分方程.

单摆的运动规律显然又与初始 $t=0$ 时摆球的位置和速度有关.例如，设 $t=0$ 时摆球偏离铅垂线位置 $\theta=\theta_0$，然后轻轻放开，即让初始角速度$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=0$.这种描述运动规律 $\theta=\theta(t)$的初始状态的条件可以写成

$$\theta|_{t=0}=\theta_0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=0. \tag{1.19}$$

这样可得到单摆的一种特定的运动规律.

如果设 $t=0$ 时摆球位于铅垂线位置，并且给予一个初始角速度(例如，用某物撞一下，可以获得一定的初始角速度)$\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}=\omega_0$，则 $\theta=\theta(t)$在初始状态满足条件

$$\theta|_{t=0}=0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0}=\omega_0. \tag{1.20}$$

这样所导致的将是单摆的另一种特定的运动规律.

如何求满足方程(1.18)和条件(1.19)(或(1.20))的函数 $\theta=\theta(t)$?将来可以知道，$\theta=\theta(t)$不能用初等函数来表示，第 6 章中将研究方程(1.18).

从以上 4 个例子，读者大致可以知道怎样从一个实际问题导出微分方程.例子虽然简单，但从中可以引导出有关微分方程的一些基本概念和建立微分方程的大致方法.在下一节中将介绍有关微分方程的一些基本概念和术语，在§2.6 中将进一步举例说

明怎样从实际问题列成微分方程 .

习　题　1 .1

1 . 求(x, y)平面上的一曲线, 使其上每点处的切线、该点和原点相连接的直线以及 Oy 轴这三者构成一等腰三角形 . 请列出该曲线所满足的微分方程 .

2 . 设曲线通过点$(-1,1)$, 且曲线上任意一点处的切线斜率等于切点纵坐标的平方 . 写出此曲线所满足的微分方程及其应满足的条件 .

3 . 酵母繁殖的速率与它在该时刻的量成正比, 比例系数 $k > 0$, 试建立酵母在繁殖过程中酵母的量应满足的微分方程 .

4 . 质量为 1 的质点被一力从某中心沿直线推开, 该力与该中心点到质点的距离成正比, 阻力与其运动速度成正比, 求质点运动满足的微分方程 .

5 . 物质 A 和物质 B 化合生成新的物质 X . 设在化合生成新的物质过程中, 物质总量不变, 新物质中所含物质 A 与物质 B 的比为 $\alpha : \beta$, 并且生成速率和 A 与 B 的剩余量的乘积成正比, 例比系数 $k > 0$. 试写出生成物 X 的量 $x(t)$所满足的微分方程 .

§1 .2　常微分方程的一些基本概念

在 §1 .1 中已介绍了什么是常微分方程, 本节将介绍常微分方程的一些其他基本概念 .

1 .2 .1　方程的阶、线性方程和非线性方程

方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数, 称为这个方程的阶 . 例如 §1 .1 中的(5), (6), (1 .1)和(1 .4)都是一阶方程; (7), (1 .8)和(1 .18)是二阶方程 .

一阶方程的一般形式是

$$F\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = 0, \tag{2 .1}$$

这里, F 是 x, y 和$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$的已知函数, 而且其中一定要含有$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

如果从(2.1)中能将$\frac{dy}{dx}$解出，这样就得到已解出导数的一阶方程.已解出导数的一阶方程的一般形式是

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y),\tag{2.2}$$

其中 f 是定义在(x,y)平面中某区域 G 内的已知函数.(2.2)有时也称为一阶显式方程，以区别于写成(2.1)的一阶隐式方程.

n 阶方程的一般形式是

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0,\tag{2.3}$$

这里 $y^{(i)}=\frac{d^iy}{dx^i}$ $(i=1,2,\cdots,n)$，F 是 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$的已知函数,而且其中一定要含有 $y^{(n)}$.

已解出 n 阶导数的 n 阶方程的一般形式是

$$\frac{d^ny}{dx^n}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),\tag{2.4}$$

其中 f 是定义在 $n+1$ 维空间中某区域 G 内的已知函数.

线性微分方程是微分方程中一类极其重要的方程.在(2.3)中，如果函数 F 是关于 $y,y',\cdots,y^{(n-1)},y^{(n)}$ 的一次式，即(2.3)成为

$$a_0(x)\frac{d^ny}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}(x)\frac{dy}{dx}+a_n(x)y=f(x),$$

则称它为 n 阶线性微分方程，其中 $a_i(x)$ $(i=0,1,\cdots,n)$和$f(x)$是 x 的已知函数，$a_0(x)\neq 0$.例如

(1) $x\frac{dy}{dx}+y=x^2$,

(2) $4\frac{d^2y}{dx^2}+4\frac{dy}{dx}+y=e^{2x}$,

(3) $\frac{d^3y}{dx^3}+y=0$

分别是一阶、二阶、三阶线性微分方程.

不是线性的微分方程，称为非线性微分方程.例如

(4) $\frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{k}{m}\frac{d\theta}{dt}+\frac{g}{l}\sin\theta=0$,

(5) $\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{R}\left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}$

都是非线性微分方程.

将来会看到,线性微分方程的理论比较完整、简捷.而另一方面,自然界中大量的又是非线性现象,反映它们的是非线性方程.在本课程以后将会看到,线性方程与非线性方程有很大的不同,但在一定条件下,它们之间又有联系.因此,抓住这两者之间的区别与联系,是十分重要的事.本课程中将展开这方面的讨论.

1.2.2 方程的解、初值条件、特解和通解

从§1.1中可看到,建立微分方程之后,目的是要研究满足方程的那个未知函数,即所谓方程的“解”.以下引入“解”的概念.

定义 1.2.1 设函数 $y=\varphi(x)$在区间 $a<x<b$ 内连续,且有直到 n 阶的导数,能使在该区间上成立

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0,$$

则称函数 $y=\varphi(x)$为方程(2.3)在区间(a,b)内的解.

由上述定义可见,在§1.1例1中,(1.3)是(1.1)的解.(1.3)中含有一个任意常数,所以(1.1)的解有无穷多个,构成一个解族.为了要从解族(1.3)中确定出一个特殊的解,需要附加一定的条件,这个条件就是(1.2).对于例2,虽然尚未具体求出它的解,但是可以看到,为了求得特定的冷却规律,需要事先知道冷却开始时的状态,即条件(1.5).例1和例2都是一阶方程的例子,它们附加的条件都是给出未知函数在某指定点的值,这种条件称为初值条件(或称初始条件).一般地,对于已解出导数的一阶方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),$$

条件

$$y|_{x=x_0}=y_0 \tag{2.5}$$

称为初值条件，其中 x_0 是自变量 x 指定的初值，y_0 是未知函数 y 相应指定的初值.

在§1.1 中又看到，(1.11)是(1.8)的解，解中含有两个任意常数.为了要从解族中确定出一个特殊的解，需要事先知道物体在运动开始时所在的位置和速度，即条件(1.9).对于例 4 也是类似情况.例 3 和例 4 都是二阶方程的例子，这里附加的条件是，给定了未知函数及其一阶导数在某指定点的值.一般地，对于已解出 n 阶导数的 n 阶方程

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}=f(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}),$$

条件

$$y(x_0)=y_0,\ \ y'(x_0)=y_0',\ \ \cdots,\ \ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)} \tag{2.6}$$

称为 n 阶方程的初值条件，这里 x_0 是自变量 x 指定的初值，y_0，y_0'，…，$y_0^{(n-1)}$ 分别是未知函数及其 1 阶导数…… $n-1$ 阶导数相应指定的初值.

求方程(2.4)的满足初值条件(2.6)的解的问题称为 n 阶方程的初值问题.$n=1$ 时就是一阶方程的初值问题.初值问题也常称为柯西(Cauchy)问题.

方程的满足初值条件的解称为特解.在§1.1 中，$y=x+1$ 是(1.1)的满足初值条件(1.2)的特解；$s=-\frac{1}{2}gt^2+v_0t+s_0$ 是(1.8)的满足(1.9)的特解.

注意，对于微分方程，有时得到的不是显函数形式的解 $y=\varphi(x)$，而是一个隐式方程

$$\Phi(x,y)=0, \tag{2.7}$$

并且可以从中确定出函数 $y=\varphi(x)$ 是微分方程的解，则称(2.7)是这个微分方程的一个积分．在一般情况下，求得了积分，就认为求得了解．

微分方程的解或积分在直角坐标系中的图像，称为该方程的积分曲线．

下面介绍通解的概念．

设含有任意常数 C 的函数

$$y=\varphi(x,C) \tag{2.8}$$

是一阶方程(2.2)的解，并且对于 xOy 平面中某个区域 G 内任意一点 (x_0,y_0)，总有 C 的特定的值 C^0 与之对应，使得解 $y=\varphi(x,C^0)$ 满足初值条件(2.5)，即

$$y_0=\varphi(x_0,C^0), \tag{2.9}$$

则称 $y=\varphi(x,C)$ 是一阶方程(2.2)在区域 G 内的通解．

在§1.1 中已经看到，二阶方程的解中可以含有两个任意常数．对于一般 n 阶方程，有下述关于通解的定义．

设含有 n 个任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的函数

$$y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$$

是 n 阶方程(2.4)的解，并且对于 $n+1$ 维空间 $(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)})$ 中某个区域 G 内任意一点 $(x_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{(n-1)})$，总有 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 的特定的值 $C_1^0,C_2^0,\cdots,C_n^0$ 与之对应，使得解 $y=\varphi(x,C_1^0,C_2^0,\cdots,C_n^0)$ 满足初值条件(2.6)，即

$$\begin{cases} y_0=\varphi(x_0,C_1^0,C_2^0,\cdots,C_n^0), \\ y_0'=\varphi_x'(x_0,C_1^0,C_2^0,\cdots,C_n^0), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_0^{(n-1)}=\varphi_x^{(n-1)}(x_0,C_1^0,C_2^0,\cdots,C_n^0), \end{cases} \tag{2.10}$$

则称 $y=\varphi(x,C_1,C_2,\cdots,C_n)$ 是 n 阶方程(2.4)在区域 G 内的通解，(2.10)中的 $\varphi_x^{(i)}\equiv\dfrac{\partial^i\varphi}{\partial x^i}$．

由上述定义可见，§1.1 中例 1 的(1.3)是(1.1)在全平面内的通解；对于§1.1 的例 3，如果仅从数学式子上考虑，初值(t_0，s_0，v_0)可以在三维空间(t，s，v) $\left(v=\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\right)$内任意给定，相应地都能求出对应的 C_1 和 C_2，所以(1.11)是(1.8)在整个空间内的通解.

与通解相对应，有通积分的概念.设

$$\Phi(x, y, C_1, C_2, \cdots, C_n) = 0 \tag{2.11}$$

是含有 n 个任意常数的隐式方程，如果从它能确定出函数

$$y = \varphi(x, C_1, C_2, \cdots, C_n) \tag{2.12}$$

是 n 阶方程(2.4)的通解，则称(2.11)是(2.4)的通积分.

以后，在一般情况下，求得了通积分，也就认为求得了通解.

1.2.3 线素场——方程的几何意义

§1.1 的例 1 是一个几何方面的例子.如果不考虑初值条件，并将问题略为推广，则可将它改述为：

设 $f(x, y)$ 在区域 G 内定义.在区域 G 内求这样的曲线 $y = y(x)$，使得在该曲线上任意一点(x，y)处的切线斜率是 $f(x, y)$.

显然，上述问题等价于求微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \quad (x, y) \in G \tag{2.13}$$

的积分曲线.所以，一阶微分方程(2.13)的积分曲线是这样一种曲线：在它上的每一点(x，y)的切线斜率等于已知的 $f(x, y)$.这就是一阶微分方程(2.2)的解或积分的几何意义.

下面介绍线素场的概念.给了(2.13)，对于 G 内任意一点(x，y)，作一斜率为 $f(x, y)$的小直线段，其中心在点(x，y)处.这个小直线段称为线素.对于 G 内的每一点都这样做，如此所得

到的图称为(2.13)的线素场(如图1-3).给了一个微分方程(2.13)就相当于在区域 G 内给了一个线素场.(2.13)的线素场作为方程(2.13)的几何意义.

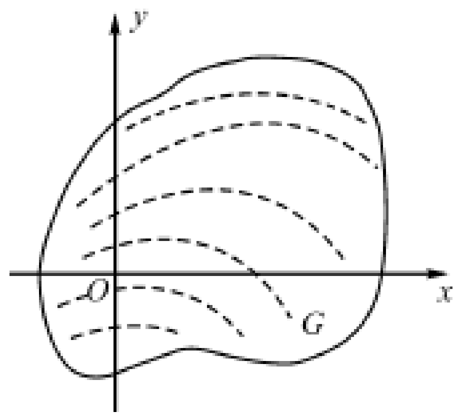

图 1-3

由此易知有下述结论:在方程(2.13)的积分曲线上的每一点处,积分曲线与(2.13)的线素场的线素相切;并且反之,如果一条曲线在它上的每一点与(2.13)的线素场的线素相切,则该曲线就是方程(2.13)的积分曲线.

利用线素场可以近似地画出积分曲线,请看例子.

例1　画出方程$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2$的线素场,并近似地描出积分曲线.

解　线素场中线素斜率等于常数 k 的那些点所构成的曲线称为 k-等倾线.利用 k-等倾线作线素场较为方便且不致于杂乱无章.本例的 k-等倾线是 $x^2+y^2=k$.对于不同的 $k\geq 0$,它是一系列以原点为中心、半径为$\sqrt{k}$的圆周($k=0$ 对应了一点(0,0)).画出此一系列 k-等倾线,再在 k-等倾线 $x^2+y^2=k$ 上每一点画一斜率为 k 的线素,这样就得到线素场.在实际作图时,当然不可能对一切 k 而只能对一些 k 作等倾线,在 k-等倾线上也不可能在一切点而只能在一些点作斜率为 k 的线素.

在本例中,令 $k=0,1,4,9,\cdots,\left(\frac{3}{4}\right)^2,\left(\frac{1}{2}\right)^2,\cdots$,就可作出线素场.然后,以线素场的线素作为切线,就可描出积分曲线的大致图形.图1-4中的曲线分别代表过点$(0,0)$,$\left(\frac{1}{2},0\right)$和$(1,0)$的三条积分曲线.本例的解是不能用初等函数或初等函数的积分来表示的.但正如已看到的,它的积分曲线可近似地描出,这正说

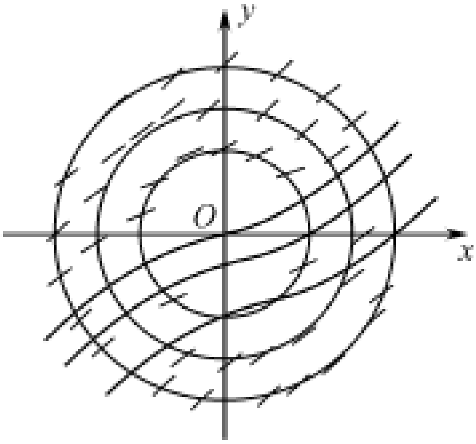

图 1-4

明线素场的一个用处．

在结束本章之前，扼要说明常微分方程课程的主要任务．

从§1.1 的几个例子已可看出，常微分方程的一个重要来源是实际问题．为了求出某些变量间的函数关系，人们根据物理、化学、几何学等的规律，先列出它的导数与变量之间的关系，即描述这样规律的微分方程．为了从中确定出特定的解，还需要列出附加的条件．前面已介绍过什么叫初值条件，但是实际上，还有其他种类的附加条件，例如边值条件(将在第 7 章中介绍)．以上称为建立数学模型，这是很重要的一步．本书只打算就一些简单的实际问题，引导读者如何去建立数学模型．

列出或给出方程(及相应的条件后)，人们自然希望能求出它的解来．通过积分方法，把微分方程的解用初等函数或初等函数的积分表示出来称为初等积分法．微分方程是与微积分同时诞生的，从诞生的时候起，人们就试图用初等积分法求微分方程的解．经过 150 多年的努力，人们一方面掌握了许多可以用初等积分法求解的微分方程的类型；另一方面，人们也遇到极大的困难．1841 年，刘维尔(Liouville)证明，黎卡提(Riccati)方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y^2+b(x)y+c(x)$$

只有当系数 $a(x)$，$b(x)$和 $c(x)$为某些特殊情形时，才能用初等积分法求解，而对于一般情形，黎卡提方程是不能用初等积分法求解的．由此可见，能用初等积分法求解的微分方程，为数是很少的．但是，用初等积分法解微分方程仍是微分方程课程的基本技能训练．学习一些基本类型的方程的初等积分法，是很有必要

的.本书将花一定的篇幅介绍这些内容.

既然能用初等积分法求解的微分方程为数甚少,人们自然把注意力转向两个方面.一是基本理论的研究:给定了微分方程和初值条件,是否存在满足它们的解?如果存在的话,这种解有多少个?在什么条件下能保证解存在并且正好只有一个?初值的变化对解的影响如何?等等;第二是解的性质的研究:即不求出解而利用方程本身来研究解的性质.在本书中也将对这两方面的问题展开一定的讨论.但是由于本书是常微分方程的基础教材,仅是在学过数学分析(或微积分)和高等代数(或线性代数)之后开设本课,所以上述两方面的问题不可能讲得很多很深,而仅是打一个基础.

把常微分方程的成果,结合实际用到实际中去,本书涉及甚少.因为这已超出一本教材、一门课程的范围.

以上讲的大致就是本课程的主要任务.

习 题 1.2

1.指出下列微分方程的阶数,并说明它们各是线性的还是非线性的:

(1) $\dfrac{d^4 s}{dt^4} - 2\cos t\dfrac{d^2 s}{dt^2} + \sin s = 0$;

(2) $y^2\dfrac{dx}{dy} + x + 1 = 0$;

(3) $\sin\left(\dfrac{d^2 y}{dx^2}\right) + e^y = x$;

(4) $x^2\dfrac{d^2 y}{dx^2} - 5x\dfrac{dy}{dx} + 3x^2 y = 0$;

(5) $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + x\dfrac{dy}{dx} - 3y^2 = 0$;

(6) $\dfrac{d^2 u}{dt^2}\dfrac{du}{dt} + \left(\dfrac{du}{dt}\right)^3 + u^3 = 0$.

2.试验证:

(1) 函数 $y = \dfrac{1}{C_1 x + C_2} + 1$ 是方程 $y'' + \dfrac{2}{1 - y}(y')^2 = 0$ 的解(C_1 和 C_2 是常数);

(2) 函数 $y=Cx+\frac{2}{3}C^{3/2}$(C是常数)是方程 $y=xy'+\frac{2}{3}(y')^{3/2}$的解;

(3) 函数 $y=-6\cos 2x+8\sin 2x$ 是方程 $y''+y'+\frac{5}{2}y=25\cos 2x$ 的满足初值条件 $y(0)=-6$, $y'(0)=16$ 的特解;

(4) 参变量方程 $y=t^3-t+2$, $y=\frac{3}{4}t^4-\frac{1}{2}t^2+C$ (C是常数, t是参变量)所决定的函数 $y=y(x)$满足方程 $x=\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3-\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2$;

(5) 方程$(x+\sqrt{2}C)^2+y^2=C^2$ (C 是常数)所确定的函数 y 是方程 $y^2y'^2-2xyy'+2y^2-x^2=0$ 的解;

(6) $x\sin^2 y+y^2=C$ 是方程 $\sin^2 y+(x\sin 2y+2y)y'=0$ 的通积分(其中 C 为任意常数);

(7) $y=A+B\ln x+(\ln x)^3-\frac{1}{x}$是方程 $x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=6\ln x-\frac{1}{x}$的通解, 其中 A 和 B 为任意常数.

3. 给定一阶微分方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\sin x+\cos x$,

(1) 求出它的通解;

(2) 求出过点$\left(\frac{\pi}{2},3\right)$的特解;

(3) 求出满足条件$\int_0^{\pi}y\mathrm{d}x=4$ 的解;

(4) 绘出(2)中解的图形.

4. 一曲线经过点(2,0), 且其上任一点的切线界于切点和纵坐标轴间的部分长度恒为 2, 求此曲线所满足的微分方程.

5. 画出方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=|y|$的线素场, 并近似地描出该方程过点(0, -1)的积分曲线.

6. 利用等倾线作方程$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=\frac{x-t}{x-t}$的过点(1,0)的积分曲线.

本 章 小 结

本章结合常微分方程的实例, 详细讲解了与常微分方程有关的一些基本概念和术语, 诸如方程的阶, 线性方程和非线性方

程，方程的解，初值条件，通解和特解，通积分和积分，线素场和积分曲线，等等．这些都是学习这门课所必须具备的基础知识．有些需要在一开始就弄清楚，有些可以在以后各章的学习中逐步加深理解．其中通解概念的叙述在不同的教科书中会有所不同，但实质都差不多．

微分方程按照它们是否为线性被划分成两大类，这是性质差异极大的两类方程．对线性方程来说，理论上的研究已经比较深入，在物理、力学、工程技术中的应用也非常广泛，关于线性方程的讨论将是本门课程的重点之一．

用线素场的观念来解释微分方程，使人们有可能运用强有力的几何方法来研究微分方程的问题．事实上，微分方程几何理论的研究是微分方程理论的一个重要分支．通过本章的学习，读者应掌握与线素场有关的一些概念及对给定的方程用等倾线法作出其线素场或积分曲线草图的方法．

从本章几个方程实例的引入，读者还可看到变量之间函数关系所满足的微分方程是如何从实际的物理问题、力学问题或几何学问题归结出来的，特定物理现象本身所具有的具体条件(如初值条件)是如何用数学形式表示出来的．这些都是用数学方法解决实际问题的必要步骤，宜细心体察．

复　习　题

1．一质量为 m 的物体，从高处自由落下，若空气阻力与下落速度成正比，比例系数为 $k>0$．求其下落速度 v 与时间 t 之间的函数关系 $v=v(t)$所满足的微分方程．

2．一水池充满了 10000 升清水，设它与 A, B, C 三个管子相连．从 A 管每分钟注入清水 1 升，从 B 管每分钟注入糖水 1 升，其含糖量为每升 50 克．假定流进的水经充分混合后每分钟由 C 管流出 2 升，求 t 时刻池水中含糖量 $x(t)$所满足的微分方程．

3．一曲线，在它上的任一点的切线界于两坐标轴间的部分

被切点分成相等的两段.试写出该曲线所满足的微分方程.

4.设 $p(x)$是区间(a, b)上的连续函数，试按定义证明 $y = Ce^{-\int p(x)\mathrm{d}x}$ 是微分方程 $y' + p(x)y = 0$ 在区域 $a < x < b$，$|y| < \infty$内的通解.

5.验证 $\Phi(x, y, C) = \frac{x^6}{y} - \frac{x^8}{8} - C = 0$ 是方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{6y}{x} - xy^2$ 在 xOy 平面中第一象限内的通积分，并求出该方程满足初值条件 $y(\sqrt{2}) = 2$ 的特解.

第 2 章　初等积分法

本章主要介绍几种基本类型的初等积分法，它包含了初等积分法的基本内容．读者应仔细验算本章的有关例题，认真演算习题．这些是学好初等积分法的关键，也是学好本书的最重要的基本训练之一．

§2.1　变量分离的方程、齐次方程

2.1.1　变量分离的方程

前面已经讲过，已解出$\frac{dy}{dx}$的一阶方程的一般形式是

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)\,. \tag{1.1}$$

如果 $f(x,y)$是一个 x 的函数 $g(x)$和一个 y 的函数 $h(y)$的乘积：

$$f(x,y)=g(x)h(y),$$

则(1.1)可写成

$$\frac{dy}{dx}=g(x)h(y) \tag{1.2}$$

的形式，则称(1.2)为变量分离的方程．

例如

$$\frac{dy}{dx}=ky,\quad \frac{dy}{dx}=ax,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{y^2-1}{2x}$$

等都是变量分离的方程，其中 a 和 k 是常数．

现在来介绍(1.2)的解法.因为以下要用到积分,假设 $g(x)$和$h(y)$分别在区间 $a<x<b$ 和 $\alpha<y<\beta$ 内连续.

(1) 先考虑 $h(y)\neq 0$ 的情形.设 $y=\varphi(x)$是(1.2)的一个解,看看 $\varphi(x)$应满足一个什么样的式子.将 $y=\varphi(x)$代入(1.2),得恒等式

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=g(x)h(\varphi(x)). \tag{1.3}$$

因为 $h(y)\neq 0$,用 $h(\varphi(x))$除上式两边,得

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{h(\varphi(x))}=g(x)\mathrm{d}x.$$

两边从 x_0 到 x 取积分,其中 x_0 是在区间(a,b)内任意取定的一个值,得到

$$\int_{x_0}^{x}\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{h(\varphi(x))}=\int_{x_0}^{x}g(x)\mathrm{d}x. \tag{1.4}$$

设 $H(y)$是$\dfrac{1}{h(y)}$任意一个确定的原函数,$G(x)$是 $g(x)$任意一个确定的原函数,于是(1.4)成为

$$H(\varphi(x))-H(\varphi(x_0))=G(x)-G(x_0).$$

再将它改写成

$$H(\varphi(x))=G(x)+H(\varphi(x_0))-G(x_0).$$

换句话讲,如果 $y=\varphi(x)$是微分方程(1.2)的一个解,则 $y=\varphi(x)$应是隐式方程

$$H(y)=G(x)+C_0$$

确定的函数,其中 $C_0=H(y_0)-G(x_0)$是某一常数,$y_0=\varphi(x_0)$.

现在反过来,下面证明,当 C 是任意常数时,隐式方程

$$H(y)=G(x)+C \tag{1.5}$$

的确是微分方程(1.2)的通积分.也就是要证明:对于任意给定的初值条件

$$y|_{x=x_0}=y_0,\tag{1.6}$$

其中 $x_0\in(a,b)$, $y_0\in(\alpha,\beta)$, 由(1.5)可以确定出 C 的值, 使对应的隐式方程(1.5)确定的函数 $y=\varphi(x)$ 的确是微分方程(1.2)的解, 且满足初值条件(1.6).

为了使得当 $x=x_0$ 时有 $y=y_0$, 将它们代入(1.5), 求得

$$C=H(y_0)-G(x_0).$$

考虑隐式方程

$$H(y)=G(x)+H(y_0)-G(x_0),\tag{1.7}$$

由于 $H'(y)=\dfrac{1}{h(y)}\neq0$, 根据数学分析中隐函数存在定理, 由(1.7)确定了惟一的函数 $y=\varphi(x)$, 它满足 $\varphi(x_0)=y_0$.

将 $y=\varphi(x)$ 代入(1.7)得到恒等式

$$H(\varphi(x))=G(x)+H(y_0)-G(x_0).$$

两边对 x 求导数, 得

$$\frac{1}{h(\varphi(x))}\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=g(x),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=g(x)h(\varphi(x)).$$

此说明 $y=\varphi(x)$ 的确是(1.2)的满足 $\varphi(x_0)=y_0$ 的解, 即有:

定理 2.1.1 在(1.2)中设 $g(x)$ 和 $h(y)$ 分别在区间 $a<x<b$ 和 $\alpha<y<\beta$ 内连续, 且 $h(y)\neq0$, 则(1.2)的满足初值条件(1.6)的解在 $x=x_0$ 的某邻域内存在且惟一, 它由隐式方程(1.7)确定. 并且(1.5)是(1.2)在矩形开区域 $R=\{(x,y)\mid a<x<b,\ \alpha<y<\beta\}$ 内的通积分.

由上所述, 得到当 $h(y)\neq0$ 时求(1.2)的解的方法:

将 x 的函数和 $\mathrm{d}x$ 移到方程的等号一边, 将 y 的函数和 $\mathrm{d}y$ 移到等号的另一边, 得

$$\frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y=g(x)\mathrm{d}x, \tag{1.8}$$

两边分别积分, 并将积分常数 C 写在等号的一边, 得

$$\int\frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y=\int g(x)\mathrm{d}x+C, \tag{1.9}$$

其中 $\int\frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y$ 表示 $\frac{1}{h(y)}$ 的任意一个但是确定的原函数, $\int g(x)\mathrm{d}x$ 的意义亦类似(本书中记号 $\int\cdots\mathrm{d}x$ 都是这个意思) .

(1.9)是(1.2)的通积分, 将(1.8)两边分别求从 y_0 到 y、从 x_0 到 x 的变上限积分, 得

$$\int_{y_0}^{y}\frac{1}{h(y)}\mathrm{d}y=\int_{x_0}^{x}g(x)\mathrm{d}x, \tag{1.10}$$

即(1.7), 由它解出 $y=\varphi(x)$ 是(1.2)的满足初值条件(1.6)的惟一特解 . 在具体解题时, 不一定要求出显式 $y=\varphi(x)$.

(2) 设存在 y^* 使 $h(y^*)=0$. 易知, 此时 $y=y^*$ 也是(1.2)的一个解 . 读者不要把这个解忘记 .

例 1 求第 1 章例 2 中已建立的冷却规律的微分方程

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t}=-k(T-\tau)$$

的解,已知初始时刻 $t=0$ 时物体的温度为 T_0 .

解 按上述方法,分离变量并积分, 有

$$\int\frac{\mathrm{d}T}{T-\tau}=-\int k\mathrm{d}t+C_1 \quad (T\neq\tau),$$

得 $\ln|T-\tau|=-kt+C_1$. 去掉对数, 有

$$|T-\tau|=\mathrm{e}^{C_1}\mathrm{e}^{-kt}.$$

去掉绝对值号, 并记 $C=\pm\mathrm{e}^{C_1}$, 得

$$T-\tau=C\mathrm{e}^{-kt}. \tag{1.11}$$

其中 C 是任意常数, 但 $C\neq0$. 又显然, $T=\tau$ 也是原方程的一个解, 但是这个解可以看做(1.11)中令 $C=0$ 而得到, 因此原方程的通解为

$$T = \tau + C\mathrm{e}^{-kt},$$

其中 C 是任意常数，不必限制 $C \neq 0$.

再由初值条件 $T|_{t=0} = T_0$，可得

$$T_0 = \tau + C,$$

故 $C = T_0 - \tau$. 从而求得对应的特解为

$$T = \tau + (T_0 - \tau)\mathrm{e}^{-kt}. \tag{1.12}$$

现在将解(1.12)作一点物理解释. 当 $t = 0$ 时，$T = T_0$，这是物体在初始时刻的温度. e^{-kt} 随 t 的增大而减少，当 $t \to +\infty$ 时，$\mathrm{e}^{-kt} \to 0$，从而 $T \to \tau$，即最终物体冷却到与介质的温度一致.

例 2　求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{2}(1 - y^2)$ 的解.

解　当 $y \neq \pm 1$ 时，分离变量并积分得

$$\int \frac{1}{1 - y^2}\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\int \mathrm{d}x + C_1,$$

即

$$\frac{1}{2}\ln\left|\frac{1 + y}{1 - y}\right| = \frac{1}{2}x + C_1.$$

去掉对数和绝对值号，并记 $C = \pm \mathrm{e}^{2C_1}$ 表示任意常数，得通积分

$$\frac{1 + y}{1 - y} = C\mathrm{e}^x.$$

求得通解

$$y = \frac{C\mathrm{e}^x - 1}{C\mathrm{e}^x + 1}, \tag{1.13}$$

这里 $C \neq 0$.

又由原方程显然可见 $y = \pm 1$ 也是解. $y = -1$ 这个解可以看做(1.13)中令 $C = 0$ 而得到. 故原方程的解为(1.13) (其中 C 为任意常数)和 $y = 1$.

画一下本例的方程的积分曲线. 因为(1.13)可以写成

$$y = 1 - \frac{2}{C\mathrm{e}^x + 1} \quad 或 \quad y = -1 + \frac{2C\mathrm{e}^x}{C\mathrm{e}^x + 1}, \tag{1.13$'$}$$

所以容易知道，$C>0$ 所对应的曲线(1.13)′位于区域 $-1<y<1$，曲线随着 x 的增加而上升．当 $x\to-\infty$ 时 $y\to-1$；$x\to+\infty$ 时 $y\to1$．

若 $C<0$，则所对应的积分曲线(1.13)′分成两条连续分支，中间被 $x=\ln\left(-\frac{1}{C}\right)$ 所分开．在区间 $\ln\left(-\frac{1}{C}\right)<x<+\infty$ 上积分曲线的 y 大于 1，即曲线位于区域 $y>1$ 内，曲线随着 x 的增加而下降．当 $x\to\ln\left(-\frac{1}{C}\right)$ 时 $y\to+\infty$，当 $x\to+\infty$ 时 $y\to1$．在区间 $-\infty<x<\ln\left(-\frac{1}{C}\right)$ 上，积分曲线上的 y 小于 -1，即曲线位于区域 $y<-1$ 内．曲线随着 x 的增加而下降．当 $x\to\ln\left(-\frac{1}{C}\right)$ 时 $y\to-\infty$，当 $x\to-\infty$ 时 $y\to-1$．

图 2-1 中画的是所给方程的积分曲线族的示意图．

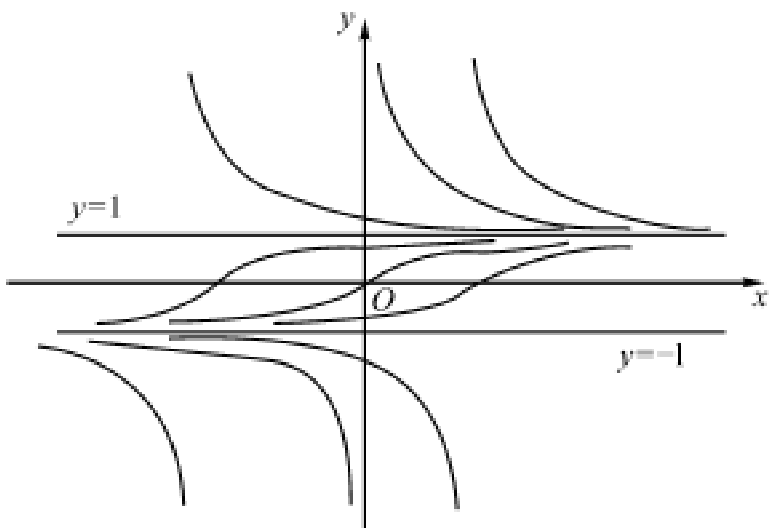

图2-1

2.1.2　齐次方程

考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y),$$

如果当 $x\neq 0$ 时，令 $y=ux$ 代入 $f(x,y)$ 中，能使它成为与 x 无关的函数

$$f(x,ux)=g(u), \tag{1.14}$$

则称微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$为齐次微分方程，简称齐次方程.

例如下列方程(其中 $\alpha,\beta,\gamma,\delta,a,b$ 都是常数)

(1) $\frac{dy}{dx}=\frac{\alpha x+\beta y}{\gamma x+\delta y}$,

(2) $\frac{dy}{dx}=\ln x-\ln y$,

(3) $\frac{dy}{dx}=\frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}$

的右边令 $y=ux\ (x\neq 0)$之后，分别可化为

(1) $\frac{\alpha x+\beta y}{\gamma x+\delta y}=\frac{\alpha+\beta u}{\gamma+\delta u}$,

(2) $\ln x-\ln y=-\ln u$,

(3) $$\frac{ax+by}{\sqrt{x^2+y^2}}=\begin{cases}\frac{a+bu}{\sqrt{1+u^2}}, & \text{当 } x>0,\\ -\frac{a+bu}{\sqrt{1+u^2}}, & \text{当 } x<0.\end{cases}$$

所以方程(1)～(3)都是齐次方程.方程

$$\frac{dy}{dx}=y+x,\quad \frac{dy}{dx}=\frac{\sin y}{x}$$

不是齐次方程.

变量分离的方程是最基本的方程.用初等积分法求解的一条重要路线就是寻找适当的变量变换，将所给的方程化成变量分离的方程(§2.3中还将介绍初等积分法的另一条路线).上章末尾中曾经讲过，18～19世纪的100多年间，人们在这方面做了相当可观的工作，归纳出相当多的标准类型，它们可通过适当的变换化成变量分离的方程.齐次方程就是其中之一，现在来讲齐次方程的解法.

既然(1.14)的右边仅是 u 的函数，那么作变换

$$y = ux \tag{1.15}$$

引入新的未知函数 u，方程(1.1)的右边就化为单变量 u 的函数 $g(u)$. 方程(1.1)的左边经计算有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(ux) = u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}, \tag{1.16}$$

于是方程(1.1)变为 $u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = g(u)$，即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{g(u) - u}{x}. \tag{1.17}$$

这是关于 u 与 x 的变量分离的方程，可按 2.1.1 节的办法求解，然后再以 $u = \frac{y}{x}$ 代回原变量 y 和 x 即可. 这就是齐次方程的解法.

例 3 求方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{x}(1 + \ln|y| - \ln|x|)$ 的通积分.

解 当 $xy = 0$ 时，方程右端函数

$$f(x, y) = \frac{y}{x}(1 + \ln|y| - \ln|x|)$$

无定义，故总认为 $xy \neq 0$. 又易知

$$f(x, ux) = \frac{ux}{x}(1 + \ln|ux| - \ln|x|) = u(1 + \ln|u|)$$

仅与 u 有关，故原方程是齐次方程. 作变换 $y = ux$，原方程化为

$$u + x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u(1 + \ln|u|).$$

整理得

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = u\ln|u|. \tag{1.18}$$

这是变量分离的方程. 当 $|u| \neq 1$ 时，分离变量有

$$\frac{\mathrm{d}u}{u\ln|u|} = \frac{\mathrm{d}x}{x}.$$

积分得 $\ln\left|\ln|u|\right| = \ln|x| + C_1$. 去掉对数和绝对值号，得

$$\ln|u| = Cx.$$

这里 $C = \pm e^{C_1} \neq 0$. 再去掉对数和绝对值号, 并以 $u = \frac{y}{x}$ 代入, 即得原方程的解:

$$y = \pm x e^{Cx}. \tag{1.19}$$

此外, $u = \pm 1$ 也满足方程(1.18), 所以 $y = \pm x$ 也是原方程的两个解. 它们相当于(1.19)中令 $C = 0$ 而得到. 因此, 对于一切 C, (1.19)是原方程的通解.

习　题　2.1

1. 求解下列方程:

(1) $\frac{dy}{dx} = y^2 - y$;　　(2) $\frac{dy}{dx} = \frac{1 + y^2}{xy + x^3 y}$;

(3) $y'\sin x + y\cos x = 0$;　　(4) $2x^2 \frac{dy}{dx} + y = 4y^3$;

(5) $x\frac{dy}{dx} = y + \sqrt{x^2 - y^2}$;　　(6) $\frac{dy}{dx} = \frac{2x^3 y - y^4}{x^4 - 2xy^3}$;

(7) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{x^2 + y^2}$.

2. 求下列初值问题的解:

(1) $(1 + x^2)\frac{dy}{dx} = \arctan x$, $y(0) = 0$;

(2) $\frac{dy}{dx} = ay - by^2$, $y(0) = y_0$;

(3) $\frac{dy}{dx} = \frac{2xy}{3x^2 - y^2}$, $y(0) = 1$.

3. 解第1章复习题1的方程.

4. 解第1章复习题2的方程.

§2.2　一阶线性方程、伯努利方程

2.2.1　一阶线性方程与常数变易法

在1.2.1节中已讲过什么叫做线性方程. 一阶线性方程是指

下述形式的方程:

$$a_0(x)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+a_1(x)y=f(x), \tag{2.1}$$

其中 $a_0(x)$, $a_1(x)$, $f(x)$是 x 的已知函数, $a_0(x)\not\equiv 0$.以 $a_0(x)$除(2.1)的左、右两边, 并改写所得到的方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y+b(x), \tag{2.2}$$

它就是一阶线性方程的一般形式 .若 $b(x)\not\equiv 0$, 则称(2.2)为一阶非齐次线性方程; 若 $b(x)\equiv 0$, 即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y, \tag{2.3}$$

则称它为一阶齐次线性方程 .如果(2.3)与(2.2)中的 $a(x)$一致, 则称(2.3)为非齐次方程(2.2)对应的齐次方程 .

举几个例子: 方程

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\tan x+\cos x$, (2) $x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=x-y$,

(3) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y\tan x$, (4) $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=t(x-1)$

都是一阶线性方程, 其中(1),(2)和(4)是非齐次, (3)是齐次 .特别是, (3)是非齐次方程(1)对应的齐次方程 .

两点说明: (1) 这里的“齐次”与 2.1.2 节中的“齐次”不是同一回事, 请读者不要混淆; (2) 今后总设(2.2)中函数 $a(x)$和 $b(x)$在某区间 $\alpha<x<\beta$内连续 .

现在介绍一阶线性方程的解法, 先讲齐次线性方程(2.3)的情形 .容易看出, (2.3)是一个变量分离的方程 .按照 2.1.1 节的方法, 可以求出它的通解为

$$y=Ce^{\int a(x)\mathrm{d}x}, \tag{2.4}$$

这里 C 是一个任意常数 .

以下用变量变换求解非齐次线性方程(2.2)的解 .

在(2.4)中设想 C 不再是任意常数, 而是 x 的一个未知函数

$C = C(x)$，即令

$$y = C(x)e^{\int a(x)dx} \tag{2.5}$$

作变量变换，将上式对 x 求导数，得

$$\frac{dy}{dx} = C(x)e^{\int a(x)dx}a(x) + e^{\int a(x)dx}\frac{dC(x)}{dx}. \tag{2.6}$$

将(2.5)与(2.6)代入(2.2)，得

$$e^{\int a(x)dx}\frac{dC(x)}{dx} = b(x),$$

即

$$\frac{dC(x)}{dx} = b(x)e^{-\int a(x)dx}.$$

两边积分便得

$$C(x) = \int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx + C, \tag{2.7}$$

这里 C 是任意常数．把(2.7)代入(2.5)就得到非齐次线性方程(2.2)的通解

$$y = e^{\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx + C\right], \tag{2.8}$$

其中 C 是任意常数．

上述将(2.4)中的任意常数 C 换成未知函数 $C(x)$ 用以求(2.2)的解的方法称为常数变易法．这是一种很重要的方法，以后还要遇到．

由于 $\int_{x_0}^{x} f(t)dt$ 是 $f(x)$ 的一个原函数，所以方程(2.2)的满足初值条件 $y|_{x=x_0} = y_0$ 的特解是

$$y = e^{\int_{x_0}^{x} a(\xi)d\xi}\left[\int_{x_0}^{x} b(\xi)e^{-\int_{x_0}^{\xi} a(s)ds}d\xi + y_0\right], \tag{2.9}$$

其中 $x_0 \in (\alpha, \beta)$．

综上所述，可以写成下述定理．

定理 2.2.1 设 $a(x)$和 $b(x)$在区间(α,β)连续，则方程(2.2)的通解是(2.8)；(2.2)的满足初值条件 $y|_{x=x_0}=y_0$ 的特解是惟一的，它由(2.9)给出．以上这些解的存在区间都是(α,β)，与系数 $a(x)$和 $b(x)$的连续区间(α,β)一致．

注意，定理 2.2.1 对方程(2.3)当然也成立，只要在(2.2)中令 $b(x)\equiv 0$ 即可．

例 1 求方程$(x+1)\dfrac{dy}{dx}=2y+(x+1)^4$ 的通解．

解 改写为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x+1}+(x+1)^3, \tag{2.10}$$

它是一个线性方程．先解对应的齐次方程：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2y}{x+1}.$$

它的通解是

$$y=C(x+1)^2.$$

采用常数变易法，将上式中的 C 看成未知函数，有

$$\frac{dy}{dx}=2C(x+1)+(x+1)^2\frac{dC}{dx}.$$

代入(2.10)，得$(x+1)^2\dfrac{dC}{dx}=(x+1)^3$．约去$(x+1)^2$，求得

$C(x)=\dfrac{1}{2}(x+1)^2+C$，

其中 C 是任意常数．于是得到(2.10)的通解：

$$\begin{aligned} y&=(x+1)^2\left[\frac{1}{2}(x+1)^2+C\right] \\ &=\frac{1}{2}(x+1)^4+C(x+1)^2, \end{aligned}$$

它也是原方程的通解．

例 2 求方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y}{2x-y^2}$的通积分．

解 原方程不是关于 y 的线性方程．在 $y\neq 0$ 处，可将方程写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2x-y^2}{y}=\frac{2x}{y}-y,$$

它可以看做关于 x 的线性方程．先求得对应的齐次方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2x}{y}$$

的通解，为

$$x=Cy^2.$$

再用常数变易法，得 $y^2\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y}=-y$，即

$$\frac{\mathrm{d}C}{\mathrm{d}y}=-\frac{1}{y}.$$

解得 $C(y)=-\ln|y|+C$．于是便得原方程的通积分

$$x=y^2(C-\ln|y|),$$

其中 C 是任意常数．

此外易知 $y=0$ 也是原方程的一个解．

利用公式(2.9)，可以对线性方程作理论研究．

例 3 设常数 $a<0$，函数 $f(t)$ 在 $0\leq t<+\infty$ 上连续，且 $\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=b$ (常数)．试证明：方程

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+ax=f(t)\tag{2.11}$$

有且仅有一个解当 $t\to+\infty$ 时趋于 $\frac{b}{a}$，其他的解当 $t\to+\infty$ 时都趋于∞．

证 (2.11)的一切解在区间 $[0,+\infty)$ 上都存在．不妨设 $t=0$ 时解 $x(t)$ 的初值为 x_0．不同的 x_0 对应不同的解，不同的解对应不同的 x_0，这些解由

$$x(t)=\mathrm{e}^{-at}\left(\int_0^t \mathrm{e}^{a\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi+x_0\right)=\frac{\int_0^t \mathrm{e}^{a\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi+x_0}{\mathrm{e}^{at}}\tag{2.12}$$

表示．当 $t\to+\infty$时，(2.12)的分母趋于零，欲使(2.12)的整个分式趋于$\frac{b}{a}$，只有分子趋于零才有可能．为此，先证

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{a\xi}f(\xi)\,d\xi \tag{2.13}$$

收敛．

因为 $f(t)$在$[0,+\infty)$上连续，且$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=b$，故存在常数 $M>0$，使得对于一切 $t\in[0,+\infty)$，有$|f(t)|<M$，于是

$$|e^{at}f(t)|<Me^{at}.$$

已知积分$\int_0^t Me^{at}\,dt$是收敛的，故由比较判别法知，广义积分(2.13)收敛．记为

$$\lim_{t\to+\infty}\int_0^t e^{a\xi}f(\xi)\,d\xi=\int_0^{+\infty}e^{a\xi}f(\xi)\,d\xi.$$

因此，当且仅当取

$$x_0=-\int_0^{+\infty}e^{a\xi}f(\xi)\,d\xi \tag{2.14}$$

时，

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\int_0^t e^{a\xi}f(\xi)\,d\xi+x_0\right)=0.$$

取 x_0为(2.14)时，对(2.12)两边令 $t\to+\infty$取极限，由洛必达(L'Hospital)法则，有

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{\int_0^t e^{a\xi}f(\xi)\,d\xi+x_0}{e^{at}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{at}f(t)}{ae^{at}}=\frac{b}{a}.$$

若 x_0不满足(2.14)时，则显然$\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=\infty$．

2.2.2　伯努利方程

方程

$$\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x)y^n,\quad n\neq0,1 \tag{2.15}$$

称为伯努利(Bernoulli)方程．在这里限制 $n\neq 0$，$n\neq 1$．实际上，$n=0$ 时(2.15)成为非齐次线性方程；当 $n=1$ 时(2.15)成为齐次线性方程，这两种情形都已讨论过．

通过变量变换，可将伯努利方程化成线性方程，方法如下：

当 $y\neq 0$ 时，以 y^n 通除(2.15)式，得

$$y^{-n}\frac{dy}{dx}=a(x)y^{1-n}+b(x). \tag{2.16}$$

易知上式可以写成

$$\frac{1}{1-n}\frac{dy^{1-n}}{dx}=a(x)y^{1-n}+b(x).$$

再以$(1-n)$乘等号两边，从而(2.15)可以化为

$$\frac{dy^{1-n}}{dx}=(1-n)a(x)y^{1-n}+(1-n)b(x).$$

令 $z=y^{1-n}$，就得到一个关于 z 的线性方程：

$$\frac{dz}{dx}=(1-n)a(x)z+(1-n)b(x).$$

由它解出 z，再用 $z=y^{1-n}$代回去，即得(2.15)的通积分．

注意，如果 $n>0$，那么原方程(2.15)还有一个解 $y=0$．

例 4 求方程$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{6y}{x}-xy^2$ 的通积分．

解 这是伯努利方程，相当于(2.15)中的 $n=2$．令 $z=y^{-1}$，得

$$\frac{dz}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx},$$

原方程化为

$$\frac{dz}{dx}=-\frac{6z}{x}+x.$$

按线性方程解得

$$z=\frac{C}{x^6}+\frac{x^2}{8},$$

其中 C 是任意常数．再以 $z=y^{-1}$代回，得通积分

$$\frac{1}{y}=\frac{C}{x^6}+\frac{x^2}{8}.$$

此外还有一个解 $y=0$.

习　题　2.2

1. **解下列方程**:

(1) $x\frac{dy}{dx}+y-e^x=0$, $y(1)=e$;

(2) $(x+1)\frac{dy}{dx}-ny=e^x(x+1)^{n+1}$;

(3) $(1-x^2)y'+xy=1$;

(4) $\frac{dy}{dx}=xy(1+x^2y^2)$;

(5) $\frac{dy}{dx}=\frac{-y}{x+1}-y^2$;

(6) $\frac{dy}{dx}=\frac{1}{x^2\sin y-xy}$;

(7) $\sqrt{1+x^2}\sin 2y\frac{dy}{dx}=2x\sin^2 y+e^{2\sqrt{1+x^2}}$.

2. **证明**:

(1) **若** $y_1(x)$**和** $y_2(x)$**是齐次线性方程**(2.3)**的任意两个解**, α_1 **和** α_2 **是任意实数**, **则** $\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)$**也是**(2.3)**的解**.

(2) **若** $y(x)$**是**(2.3)**的一个解**, $y^*(x)$**是**(2.2)**的一个解**, **则** $y(x)+y^*(x)$**也是**(2.2)**的解**. **反之**, (2.2)**的任意两个解** $y(x)$**与** $y^*(x)$**之差** $y(x)-y^*(x)$**必是**(2.3)**的解**.

(3) **若** $y_1(x)$**和** $y_2(x)$**是非齐次线性方程**(2.2)**的两个互异的解**, **设** $y(x)$**是**(2.2)**的任一解**, **则** $\frac{y(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}$**是某一常数**.

(4) **设** $b(x)=b_1(x)+b_2(x)$, **若** $y_1(x)$**和** $y_2(x)$**分别是方程** $y'=a(x)y+b_1(x)$**和** $y'=a(x)y+b_2(x)$**的解**, **则** $y_1(x)+y_2(x)$**是方程**(2.2)**的解**.

3. **证明**: **在** $x\geq 1$ **上**, **方程** $xy'-(2x^2+1)y=x^2$ **只有一个解当** $x\to+\infty$**时有有限的极限**, **试求出这个极限**, **并用积分表示这个解**.

4. **设** $k\neq 0$ **为常数**, $f(x)$**是以** ω **为周期的连续周期函数**, **试证**: **方程**

$\frac{dy}{dx} = ky + f(x)$有且仅有一个周期为 ω的周期解，并求出这个周期解．

5．证明：若已知黎卡提方程$\frac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$的一个解 $y_1(x)$，则可借变量代换 $y = u + y_1(x)$求出其通解．

6．设函数 $a(x)$和 $b(x)$在区间$[0, +\infty)$上连续，并且 $\lim\limits_{x\to+\infty} a(x) = \alpha < 0$，$|b(x)| \leq \beta$（α和β都是常数）．试证明：方程$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$的一切解在$[0, +\infty)$上有界．

7．设函数 $a(x)$和 $b(x)$在区间$[0, +\infty)$上连续，并且 $a(x) \leq C < 0$，$\lim\limits_{x\to+\infty} b(x) = 0$（$C$是常数）．试证明：方程$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x)$的一切解当 $x\to+\infty$时都趋于零．

§2.3　全微分方程、积分因子

2.3.1　微分方程与线素场概念的扩充

在求通积分时，例如 2.2.1 节的例 2，当 $y\neq 0$ 时，将方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{2x - y^2}$$

改写为

$$\frac{dx}{dy} = \frac{2x}{y} - y,$$

将它看成关于 x 的线性方程来解，这件事说明，改变 x 与 y 作为自变量与因变量的地位，有时会带来方便．

为此，考虑 x 与 y 地位平等的微分形式的方程：

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0, \tag{3.1}$$

这里函数 $M(x, y)$和 $N(x, y)$是平面 xOy 上区域 G 内的已知函数．如果 $N(x, y) \neq 0$，则可将(3.1)改写为

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{M(x, y)}{N(x, y)}, \tag{3.2}$$

它可以看做以 y 为未知函数，x 为自变量的一阶方程．如果 $M(x, y) \neq 0$，则可将(3.1)改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\frac{N(x, y)}{M(x, y)}, \tag{3.2$'$}$$

它可以看做以 x 为未知函数，y 为自变量的一阶方程．

因此，在(3.1)中总设函数 $M(x, y)$ 与 $N(x, y)$ 在区域 G 内不同时为零．于是(3.1)相当于某一阶微分方程，这就把一阶微分方程的概念进行了扩充．与此同时，1.2.2 节中关于方程的积分和通积分的定义，也应加以扩充．例如，在 1.2.2 节中关于微分方程的“积分”是这样说的：一个隐式方程 $\Phi(x, y) = 0$，如果从它可以确定出函数 $y = \varphi(x)$ 是第 1 章(2.2)式的解，则称 $\Phi(x, y) = 0$ 为该方程的一个积分，现在将它扩充为：一个隐式方程 $\Phi(x, y) = 0$，如果从它可以确定出函数 $y = \varphi(x)$ 是(3.2)的解，或从 $\Phi(x, y) = 0$ 可以确定出函数 $x = \varphi(y)$ 是(3.2)$'$的解，则称 $\Phi(x, y) = 0$ 是(3.1)的一个积分．类似地可以扩充通积分的概念．

例 1　求方程

$$(y^2 - 1)\mathrm{d}x - 2x\mathrm{d}y = 0 \tag{3.3}$$

的通积分．

解　这是一个变量分离的方程．如果 $x(y^2 - 1) \neq 0$，则乘以 $\frac{1}{x(y^2 - 1)}$ 经分离变量之后，(3.3)化为

$$\frac{\mathrm{d}x}{x} - \frac{2}{y^2 - 1}\mathrm{d}y = 0 .$$

积分得

$$\ln|x| - \ln\left|\frac{y-1}{y+1}\right| = C_1 .$$

去掉对数和绝对值号，并记 $C = \pm e^{C_1} \neq 0$ 表示任意常数，则得通积分：

$$\frac{x(y+1)}{y-1}=C.$$

此外，容易看出 $x=0\ (y\neq\pm1)$，$y=1\ (x\neq0)$ 和 $y=-1\ (x\neq0)$ 也是(3.3)的积分.事实上，当 $y^2\neq1$ 时，(3.3)可以写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=\frac{2x}{y^2-1}.$$

易知，$x=0$ 是它的一个解，所以 $x=0\ (y\neq\pm1)$ 是(3.3)的一个积分.同理可证 $y=1\ (x\neq0)$ 及 $y=-1\ (x\neq0)$ 都是(3.3)的积分.

图 2-2 中画的是所给方程的积分曲线族的示意图.

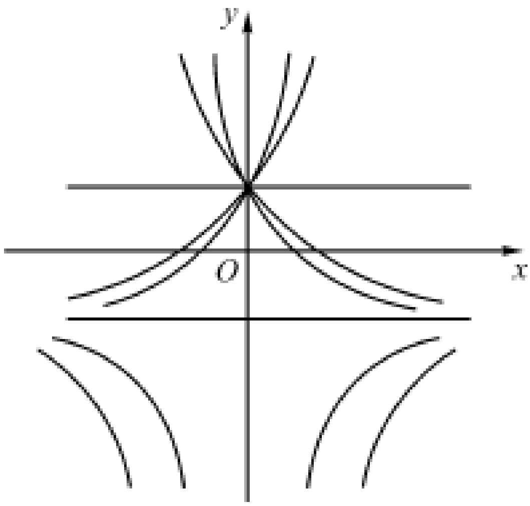

图 2-2

现在说一下关于方程(3.1)的线素场的概念.在(3.1)中使 $N(x,y)\neq0$ 的点处，(3.1)可以写成(3.2).则按 1.2.3 节可以定义这些点处的线素.在(3.1)中使 $N(x,y)=0$ 而 $M(x,y)\neq0$ 的点处，(3.1)可以写成(3.2)′，在这些点处的$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=0$.自然在这些点处分别以这些点为中心作一平行于 y 轴的小直线段，并称它为该点处的线素.于是在 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 的定义区域 G 内，除了使 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 同时为零的点 (x,y) 外，方程(3.1)总定义了一个与它相应的线素场.至于使 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 同

时为零的点处，不能定义线素，例如例 1 中的点 $(0,1)$ 与点 $(0,-1)$，这些点称例外点或称奇点．

例 2　试作方程 $x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y=0$ 的线素场．

解　在 $y\neq0$ 处，原方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=-\frac{x}{y}.$$

按 1.2.3 节例 1 的办法，作 k-等倾线．如今 k-等倾线是 $-\frac{x}{y}=k$，即

$$x+ky=0.$$

0-等倾线(即上式中 $k=0$)是 y 轴($y=0$ 除外)．换句话讲，y 轴上(除 $y=0$ 外)每一点的线素是水平的．其他 k-等倾线($k\neq0$)是直线 $y=-\frac{x}{k}$．该直线的斜率是 $-\frac{1}{k}$，即为线素的斜率的负倒数．于是推知，k-等倾线上每一点的线素正好与 k-等倾线本身相垂直．

再来看 $y=0$ 处．当 $x\neq0$ 时，原方程可改写为

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{y}{x}.$$

在 $y=0$ ($x\neq0$)处线素平行于 y 轴．

于是在全平面上除点 $(0,0)$ 外，都可以作出线素，从而就可作出线素场如图 2-3 所示．

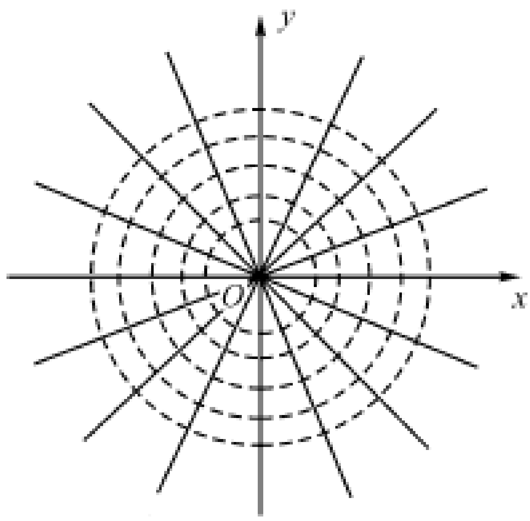

图 2-3

因为线素场中各点的线素正好与该点的和原点的连线相垂直，所以该微分方程的积分曲线是一族以原点为圆心的同心圆周.

2.3.2 全微分方程

现在介绍一阶方程的另外一些解法，并且把微分方程写成(3.1)的形式.

定义 2.3.1 如果(3.1)的左边(当把 x 和 y 看成独立变量时)恰好是某二元函数 $u(x, y)$ 的全微分：

$$\mathrm{d}u(x, y) = M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y, \tag{3.4}$$

即

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y), \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y), \tag{3.5}$$

则称(3.1)为全微分方程，$u(x, y)$称为(3.1)的一个原函数.

例如，下列各方程

(1) $x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$,

(2) $\dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = 0$,

(3) $(3x^2 + 6xy^2)\mathrm{d}x + (6x^2y + 4y^3)\mathrm{d}y = 0$

都是全微分方程，因为它们分别可写成：

(1) $\mathrm{d}\left[\dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)\right] = x\mathrm{d}x + y\mathrm{d}y = 0$,

(2) $\mathrm{d}\left(\arctan\dfrac{y}{x}\right) = \dfrac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = 0$,

(3) $\mathrm{d}(x^3 + y^4 + 3x^2y^2)$

$$= (3x^2 + 6xy^2)\mathrm{d}x + (6x^2y + 4y^3)\mathrm{d}y = 0.$$

下列函数分别是它们的一个原函数：

(1) $u(x, y) = \dfrac{1}{2}(x^2 + y^2)$;

(2) $u(x, y) = \arctan\dfrac{y}{x}$;

(3) $u(x,y)=x^3+y^4+3x^2y^2$.

关于全微分方程, 有下述定理 .

定理 2.3.1 设 $M(x,y)$和 $N(x,y)$在某区域 G 内连续, 并且不同时为零; 又设(3.1)是全微分方程, $u(x,y)$是它的一个原函数, 则对于任意给定的点$(x_0,y_0)\in G$, 方程(3.1)存在惟一的积分曲线经过点(x_0,y_0), 它由

$$u(x,y)=u(x_0,y_0)$$

确定; 并且

$$u(x,y)=C$$

是(3.1)的通积分, 其中 C 是任意常数 .

证 因为 $M(x,y)$和 $N(x,y)$在 G 内不同时为零, 不妨设 $N(x_0,y_0)\neq 0$ (如果 $N(x_0,y_0)=0$, 则 $M(x_0,y_0)\neq 0$, 定理的证明是类似的) . 于是在点(x_0,y_0)的某邻域内, 方程(3.1)可以写成(3.2) .

设 $y=\varphi(x)$是上述方程的满足 $\varphi(x_0)=y_0$ 的一个解, 则

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}=-\frac{M(x,\varphi(x))}{N(x,\varphi(x))},$$

即

$$M(x,\varphi(x))\mathrm{d}x+N(x,\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)\equiv 0 . \tag{3.6}$$

由于 $u(x,y)$是(3.1)的一个原函数, 故(3.4)成立 . 再由(3.6), 有

$$\mathrm{d}u(x,\varphi(x))\equiv 0 . \tag{3.7}$$

从而

$$u(x,\varphi(x))\equiv C_0, \tag{3.8}$$

其中 C_0 是某常数 以 $x=x_0$ 代入(3.8)的左边,注意到 $\varphi(x_0)=y_0$, 于是推得 $C_0=u(x_0,y_0)$, 这就证明了: 如果 $y=\varphi(x)$是(3.2)的满足 $\varphi(x_0)=y_0$ 的一个解, 则此解必满足隐式方程

$$u(x,y)=u(x_0,y_0) . \tag{3.9}$$

以下证明: 由隐式方程(3.9)的确可以确定出惟一的一个函

数 $y=\varphi(x)$，它满足(3.2)，并且 $\varphi(x_0)=y_0$.

事实上，由于

$$\frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{(x_0,y_0)}=N(x_0,y_0)\neq 0,$$

所以根据隐函数存在定理，由上述隐式方程(3.9)可以求出惟一的解 $y=\varphi(x)$，它在 $x=x_0$ 的某邻域内有连续的导数 $\varphi'(x)$，并且满足

$$u(x,\varphi(x))\equiv u(x_0,y_0) \tag{3.10}$$

和 $\varphi(x_0)=y_0$. 将(3.10)两边对 x 微分，注意到 $u(x,y)$ 是(3.1)的一个原函数，于是便得

$$M(x,\varphi(x))\mathrm{d}x+N(x,\varphi(x))\mathrm{d}\varphi(x)\equiv 0,$$

因为 $N(x_0,\varphi(x_0))=N(x_0,y_0)\neq 0$，所以在 $x=x_0$ 的某邻域内，上式可写成

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x}\equiv -\frac{M(x,\varphi(x))}{N(x,\varphi(x))}.$$

这就证得 $y=\varphi(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域内满足(3.2). 由以上的论证还可看出，方程(3.3)的满足

$$y|_{x=x_0}=y_0 \tag{3.11}$$

的解是惟一的. 因为如果还有另外的解 $y=\varphi_1(x)$，则由定理的前半段证明，必有

$$u(x,\varphi_1(x))\equiv u(x_0,y_0).$$

又由定理的后半段证明，隐式方程 $u(x,y)=u(x_0,y_0)$满足(3.11)的解是惟一的，为 $y=\varphi(x)$，从而 $\varphi_1(x)\equiv\varphi(x)$. 由此推得，$u(x,y)=u(x_0,y_0)$是(3.1)的经过点$(x_0,y_0)$的惟一的一条积分曲线.

以上的证明同时也说明了 $u(x,y)=C$ 是(3.1)的通积分.

□

由定理 2.3.1 可知，本节一开始引入的(1),(2)和(3)分别有下述通积分:

(1) $\frac{1}{2}(x^2+y^2)=C$;

(2) $\arctan\frac{y}{x}=C$;

(3) $x^3+y^4+3x^2y^2=C$.

在这些例题中，对于(1)，读者是容易看出它是全微分方程并写出它的原函数的．而对于(2)和(3)，就不那么容易了．读者自然要问，如何判定微分方程(3.1)是否为全微分方程？如果是全微分方程，则如何求出它的原函数？这两个问题是有联系的，有下述定理．

定理 2.3.2 设 $M(x,y)$和 $N(x,y)$在矩形区域

$$R=\{(x,y)\mid a<x<b,\ c<y<d\}$$

内连续，且有连续的一阶偏导数，则方程(3.1)为全微分方程的充分必要条件是

$$\frac{M}{y}\equiv\frac{N}{x},\quad (x,y)\in R. \tag{3.12}$$

当(3.12)成立时，函数

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(\xi,y_0)\mathrm{d}\xi+\int_{y_0}^{y}N(x,\eta)\mathrm{d}\eta \tag{3.13}$$

或

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(\xi,y)\mathrm{d}\xi+\int_{y_0}^{y}N(x_0,\eta)\mathrm{d}\eta \tag{3.14}$$

是(3.1)的原函数，其中(x_0,y_0)是 R 内任意取定的一点，$(x,y)\in R$.

证　先证必要性．设(3.1)是全微分方程，即设存在 $u(x,y)$，满足

$$\frac{u}{x}=M(x,y),\quad \frac{u}{y}=N(x,y).$$

于是

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial N}{\partial x} .$$

根据假设，$\frac{\partial M}{\partial y}$和$\frac{\partial N}{\partial x}$连续，故$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}$和$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$连续，由混合偏导数定理知$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}$，即(3.12)成立．必要性证毕．

以下证充分性．即证：当(3.12)成立时，存在这样的函数$u(x, y)$，它同时满足

$$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y) \quad 和 \quad \frac{\partial u}{\partial y} = N(x, y), \tag{3.15}$$

这种函数就是原函数．

先取函数$u(x, y)$满足$\frac{\partial u}{\partial x} = M(x, y)$，于是

$$u(x, y) = \int_{x_0}^{x} M(\xi, y) \mathrm{d}\xi + \varphi(y) . \tag{3.16}$$

这里$x_0 \in (a, b)$是任意取定的值，$x \in (a, b)$，$\varphi(y)$是y的任意一个函数，连续并存在导数$\varphi'(y)$．是否能选取适当的$\varphi(y)$，使(3.16)确定的$u(x, y)$满足(3.15)的第二式？为此，将(3.16)代入(3.15)第二式，有

$$N(x, y) = \frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} M(\xi, y) \mathrm{d}\xi + \varphi'(y) .$$

由于$M(x, y)$在区域R内连续，并且有连续的一阶偏导数，所以导数与积分可以交换次序，于是得

$$N(x, y) = \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial y} M(\xi, y) \mathrm{d}\xi + \varphi'(y) .$$

再由条件(3.12)，从而有

$$\begin{aligned} N(x, y) &= \int_{x_0}^{x} \frac{\partial}{\partial \xi} N(\xi, y) \mathrm{d}\xi + \varphi'(y) \\ &= N(\xi, y) \Big|_{x_0}^{x} + \varphi'(y) \\ &= N(x, y) - N(x_0, y) + \varphi'(y) . \end{aligned} \tag{3.17}$$

于是 $\varphi'(y)=N(x_0,y)$. 所以当取

$$\varphi(y)=\int_{y_0}^{y}N(x_0,\eta)\,d\eta$$

时, (3.17)成立. 以此 $\varphi(y)$代入(3.16), 得到

$$u(x,y)=\int_{x_0}^{x}M(\xi,y)\,d\xi+\int_{y_0}^{y}N(x_0,\eta)\,d\eta,$$

它满足(3.15). 这样既证明了条件(3.12)的充分性, 同时又证明了(3.14)所表示的函数是一个原函数.

同理可证(3.13)所表示的函数也是一个原函数. 实际上, (3.13)和(3.14)所表示的是同一个函数(为什么). □

几点说明:

(1) 由定理 2.3.1 和定理 2.3.2 可得到判定(3.1)是全微分方程并求它的通积分的方法.

(2) 如果 R 不是矩形区域而只是单连通区域 G, 则定理 2.3.2 中关于充要条件这部分仍成立, 但原函数不能用(3.13)和(3.14)去求, 因为(3.13)和(3.14)中的积分区间可能要跑到 G 的外面去了. 在这种情况下, 原函数 $u(x,y)$可以用与路径无关的曲线积分去求:

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)}M(x,y)\,dx+N(x,y)\,dy.$$

这里路径 Γ 是从点(x_0,y_0)到点(x,y)的一条逐段光滑曲线, 它全在 G 内. 此时定理 2.3.2 中的充分性部分的证明也要依赖于曲线积分的理论.

例 3　求方程 $\dfrac{x\,dy-y\,dx}{x^2+y^2}=0$ 的通积分.

解　这是本节一开始所引入的几个例题中的一个, 现在用刚才所建立的理论来解决它. 有

$$M(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2},\qquad N(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2},$$

$$\frac{M(x,y)}{y}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}=\frac{N}{x},\quad (x,y)\in R.$$

这里 R 可取左半平面或右半平面，也可取上半平面或下半平面．总之要取不含点 $O(0,0)$ 的矩形区域(或单连通区域)．现在取 R 为右半平面．因此，在 R 内所给方程是全微分方程．任取 $(x_0,y_0)\in R$，为方便起见，取 $x_0=1$，$y_0=0$，由公式(3.13)有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_1^x M(\xi,0)\,d\xi+\int_0^y N(x,\eta)\,d\eta\\&=\int_0^y\frac{x}{x^2+\eta^2}d\eta=\arctan\frac{\eta}{x}\Big|_0^y\\&=\arctan\frac{y}{x}.\end{aligned}$$

于是得通积分

$$\arctan\frac{y}{x}=C,$$

即 $y-C^*x=0$，这里 $C^*=\tan C$ 是任意常数．

如果取另外的 (x_0,y_0)，会得到什么样的 $u(x,y)$？与现在的 $u(x,y)$ 差别何在？如果取上半平面为 R，将会得到什么样的通积分？两者差别何在，为什么？这些问题请读者来回答．

例 4 求方程

$$(3x^2+6xy^2)\,dx+(6x^2y+4y^3)\,dy=0$$

满足 $y|_{x=1}=1$ 的积分．

解 $M(x,y)=3x^2+6xy^2$，$N(x,y)=6x^2y+4y^3$，

$$\frac{M}{y}=12xy=\frac{N}{x},$$

R 可取作全平面．由(3.13)，取 $x_0=1$，$y_0=1$，有

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\int_1^x M(\xi,1)\,d\xi+\int_1^y N(x,\eta)\,d\eta\\&=\int_1^x(3\xi^2+6\xi)\,d\xi+\int_1^y(6x^2\eta+4\eta^3)\,d\eta\\&=x^3+3x^2+3x^2y^2+y^4-(1+3+3x^2+1)\end{aligned}$$

$$= x^3 + 3x^2y^2 + y^4 - 5 .$$

由此可知，满足 $y|_{x=1} = 1$ 的积分是 $u(x, y) = u(1,1)$，即

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 - 5 = 0 .$$

顺便指出，求全微分方程的原函数，不必死套公式(3.13)或(3.14)，可采取较为灵活的分项组合的办法，以例2为例来说明之.

将例4的方程按如下的分项组合：

$$\begin{aligned}(3x^2 + 6xy^2)\mathrm{d}x + (6x^2y + 4y^3)\mathrm{d}y &= 3x^2\mathrm{d}x + 4y^3\mathrm{d}y + 6xy(y\mathrm{d}x + x\mathrm{d}y)\\ &= \mathrm{d}x^3 + \mathrm{d}y^4 + 6xy\mathrm{d}(xy)\\ &= \mathrm{d}(x^3 + y^4 + 3(xy)^2) = 0,\end{aligned}$$

所以 $x^3 + y^4 + 3x^2y^2 = C$ 是原方程的通积分 .

2.3.3 积分因子

由前面例1看到，方程

$$\frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{x^2 + y^2} = 0$$

是全微分方程，但去掉因子 $\dfrac{1}{x^2 + y^2}$ 之后，方程

$$x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$$

就不是全微分方程了 .

这使人们想到，有些形式为(3.1)的方程

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0,$$

本身不是全微分方程，但乘上一个适当的因子 $\mu(x, y) \neq 0$ 之后，方程

$$\mu(x, y)M(x, y)\mathrm{d}x + \mu(x, y)N(x, y)\mathrm{d}y = 0 \qquad (3.18)$$

能成为全微分方程 . 这种不取零值的因子 $\mu(x, y)$ 称它为(3.1)的一个积分因子 .

一旦找到(3.1)的一个积分因子，那么就很容易求得(3.18)的原函数 $u(x, y)$，从而得到(3.18)的通积分 $u(x, y) = C$. 又由

于 $\mu(x,y)\neq 0$，故(3.18)与(3.1)等价，从而 $u(x,y)=C$ 也是(3.1)的通积分.

例如，$\mu(x,y)=\dfrac{1}{x^2+y^2}$ 是方程 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$ 的一个积分因子，将它乘 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$ 后，得

$$\frac{1}{x^2+y^2}(x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x)=\mathrm{d}\left(\arctan\frac{y}{x}\right)=0,$$

所以 $\arctan\dfrac{y}{x}=C$ 即 $\dfrac{y}{x}=C^*$ 是 $x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=0$ 的通积分.其中 $C^*=\tan C$ 是任意常数.

给定了方程(3.1)，它是否存在积分因子？如何求积分因子？这是下面要研究的问题.下述定理是显然的.

定理 2.3.3 设 $M(x,y)$，$N(x,y)$ 和 $\mu(x,y)$ 在单连通区域 G 内连续且有连续的一阶偏导数，并且 $\mu(x,y)\neq 0$.则 $\mu(x,y)$ 是(3.1)的一个积分因子的充分必要条件是

$$\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}\equiv\frac{\partial(\mu M)}{\partial y},\tag{3.19}$$

即 $\mu(x,y)$ 是一阶偏微分方程

$$M\frac{\partial\mu}{\partial y}-N\frac{\partial\mu}{\partial x}=\mu\left(\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}\right)\tag{3.20}$$

的一个解.

要具体求解(3.20)是困难的.在第 8 章中将会看到，求解(3.20)与求解(3.1)实际上是等价的.所以对一般情形想从(3.20)求得积分因子 μ 并不方便.但对于某些特殊情形，却可以利用(3.20)求得积分因子.例如，有下述结论:

(1) 方程(3.1)存在只与 x 有关而与 y 无关的积分因子的充分必要条件是

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\equiv\varphi(x),\tag{3.21}$$

其中 $\varphi(x)$ 是只与 x 有关而与 y 无关的一个函数 . 当满足条件(3.21)时，函数

$$\mu(x) = e^{\int \varphi(x)\,\mathrm{d}x} \tag{3.22}$$

是一个积分因子 .

(2) 方程(3.1)存在只与 y 有关而与 x 无关的积分因子的充分必要条件是

$$\frac{1}{M}\left(\frac{N}{x} - \frac{M}{y}\right) \equiv \psi(y), \tag{3.23}$$

其中 $\psi(y)$ 是只与 y 有关而与 x 无关的一个函数，当满足条件(3.23)时，函数

$$\mu(y) = e^{\int \psi(y)\,\mathrm{d}y} \tag{3.24}$$

是一个积分因子 .

证　只证(1)，情形(2)类似 . 先证必要性 . 设 $\mu(x) \neq 0$ 是(3.1)的一个积分因子，将它代入(3.20)得

$$-N\frac{\mathrm{d}\mu}{\mathrm{d}x} = \mu\left(\frac{N}{x} - \frac{M}{y}\right),$$

即

$$\frac{\mathrm{d}\mu}{\mu} = \frac{1}{N}\left(\frac{M}{y} - \frac{N}{x}\right)\mathrm{d}x .$$

左边只与 x 有关，因此右边也只与 x 有关，必要性证毕 .

次证充分性 . 设(3.21)成立，取 $\mu(x)$ 满足(3.22)，它只与 x 有关而与 y 无关 . 将它代入(3.20)，易知左边恒等于右边，即(3.22)的确是一个积分因子，充分性证毕 . □

例 5　求

$$\left(2xy + x^2y + \frac{y^3}{3}\right)\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y = 0$$

的通积分 .

解　因为

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=1$$

与 y 无关，故原方程存在只与 x 有关的积分因子，由(3.22)知，

$$\mu(x)=e^{\int 1\,dx}=e^{x}$$

是原方程的一个积分因子．将它乘原方程的等号两边，得

$$e^{x}\left(2xy+x^{2}y+\frac{y^{3}}{3}\right)dx+e^{x}(x^{2}+y^{2})dy=0.$$

按照公式(3.13)，取 $x_0=0$，$y_0=0$ 得到一个原函数：

$$u(x,y)=\int_0^x e^{\xi}\cdot 0\,d\xi+\int_0^y e^{x}(x^{2}+\eta^{2})\,d\eta$$

$$=e^{x}x^{2}y+\frac{1}{3}e^{x}y^{3}=ye^{x}\left(x^{2}+\frac{1}{3}y^{2}\right).$$

所以 $ye^{x}\left(x^{2}+\frac{1}{3}y^{2}\right)=C$ 是通积分．

例 6 将一阶线性方程 $\frac{dy}{dx}=a(x)y+b(x)$ 写成

$$-[a(x)y+b(x)]dx+dy=0, \qquad (3.25)$$

求(3.25)的积分因子并求它的通解．

解 因为

$$\frac{1}{N}\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)=-a(x)$$

与 y 无关，故(3.25)存在只与 x 有关的积分因子

$$\mu(x)=e^{-\int a(x)dx}.$$

将它乘等式(3.25)两边，得

$$-e^{-\int a(x)dx}a(x)y\,dx+e^{-\int a(x)dx}dy=e^{-\int a(x)dx}b(x)dx,$$

即

$$d\left(ye^{-\int a(x)dx}\right)=e^{-\int a(x)dx}b(x)dx.$$

所以得

$$ye^{-\int a(x)dx}=\int e^{-\int a(x)dx}b(x)dx+C,$$

故得通解

$$y = e^{\int a(x)dx}\left[\int b(x)e^{-\int a(x)dx}dx + C\right].$$

这与 2.2.1 节用常数变易法所得到公式(2.11)一致. 读者看到, 现在的推导有它的方便之处.

有时用“分项组合”的办法找积分因子, 但需要一定的技巧. 举一个例子作为说明.

例 7 求方程

$$(\beta x + \alpha y)dx + (\beta y - \alpha x)dy = 0 \tag{3.26}$$

的通积分, 其中 α, β 为常数, $\beta \neq 0$.

解 此例不符合定理 2.3.3 的条件, 不存在只与 x 有关或只与 y 有关的积分因子. 将(3.26)改写为

$$\beta(xdx + ydy) - \alpha(xdy - ydx) = 0,$$

即

$$\frac{\beta}{2}d(x^2 + y^2) - \alpha(xdy - ydx) = 0. \tag{3.27}$$

从 2.3.2 节一开始的例子见到, $\frac{1}{x^2 + y^2}$是上式第二项的一个积分因子, 显然它也是上式第一项的一个积分因子. 据此, 将$\frac{1}{x^2 + y^2}$乘(3.27)等式两边, 得

$$\begin{aligned}
&\frac{\beta}{2}\frac{d(x^2 + y^2)}{(x^2 + y^2)} - \alpha\frac{xdy - ydx}{x^2 + y^2} \\
&= \frac{\beta}{2}d\ln(x^2 + y^2) - \alpha d\left(\arctan\frac{y}{x}\right) \\
&= d\left[\frac{\beta}{2}\ln(x^2 + y^2) - \alpha\arctan\frac{y}{x}\right] = 0,
\end{aligned}$$

所以得通积分$\frac{\beta}{2}\ln(x^2 + y^2) - \alpha\arctan\frac{y}{x} = C$, 即

$$\sqrt{x^2 + y^2} = C^* e^{\frac{\alpha}{\beta}\arctan\frac{y}{x}},$$

这里 $C^* = e^{C/\beta}$是任意常数.

注1　容易看出，例7也属于2.1.2节所讲的齐次方程，可按齐次方程的解法求解.

注2　例7所使用的方法是，将所给的方程分成两项分别组合，凑出整个微分方程适用的积分因子.这种方法称为“分项组合”法，使用分项组合法需要有相当的技巧.

注3　一个微分方程的积分因子可以不止一个.例如，读者不妨验算一个，$\frac{1}{x^2}$，$\frac{1}{y^2}$，$\frac{1}{x^2+y^2}$都是方程 $x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x = 0$ 的积分因子.并请读者按照这些积分因子，求出这个方程的通积分.

习　题　2.3

求下列方程的通积分：

1. $(3x^2y + 2xy)\mathrm{d}x + (x^3 + x^2 + 2y)\mathrm{d}y = 0$.

2. $2x(ye^{x^2} - 1)\mathrm{d}x + e^{x^2}\mathrm{d}y = 0$，$y(0) = 1$.

3. $\frac{y}{1 - x^2y^2}\mathrm{d}x + \frac{x}{1 - x^2y^2}\mathrm{d}y + x\mathrm{d}x = 0$.

4. $\left(1 + e^{\frac{x}{y}}\right)\mathrm{d}x + e^{\frac{x}{y}}\left(1 - \frac{x}{y}\right)\mathrm{d}y = 0$.

5. $(y - x^5y^4)\mathrm{d}x + (x - x^4y^5)\mathrm{d}y = 0$.

6. $(x - y)\mathrm{d}x + (x + y)\mathrm{d}y = (x^2 + y^2)\mathrm{d}x$.

7. $(2x^2y + 2y + 5)\mathrm{d}x + (2x^3 + 2x)\mathrm{d}y = 0$.

8. $4x^2y^2\mathrm{d}x + (2x^3y - 1)\mathrm{d}y = 0$.

9. $(x^4 + y^4)\mathrm{d}x - xy^3\mathrm{d}y = 0$.

10. $(4xy + 3y^4)\mathrm{d}x + (2x^2 + 5xy^3)\mathrm{d}y = 0$.

§2.4　一阶显式方程的解法综合举例

§2.1～§2.3关于一阶显式方程的初等解法基本上可以分为两类：一类方法的基础是变量分离的方程.方法的特点是，将所考虑的方程通过适当的变量变换化为变量分离的方程.本书介绍了使用这类方法的几种典型方程：齐次方程，一阶线性方程和

伯努利方程.另一类方法的基础是全微分方程.方法的特点是,寻找适当的积分因子,将所给的方程化为全微分方程.并且也介绍了可以容易地求得积分因子的几种典型类型方程.读者通过演算习题,熟悉以上所讲的这些典型类型的各自特点并熟练地掌握它们的解法.本节综合举一些例子.

例1 求方程$\frac{dy}{dx}-e^{x-y}+e^x=0$的通积分.

解 方法1.原方程可以写成

$$\frac{dy}{dx}=e^x(e^{-y}-1).$$

这是一个变量分离的方程.当$y\neq0$时,分离变量并积分,得

$$\int\frac{1}{e^{-y}-1}dy=\int e^x dx+C_1,$$

即$\int\frac{e^y}{1-e^y}dy=e^x+C_1$,因此

$$-\ln|e^y-1|=e^x+C_1.$$

去掉对数和绝对值号,得

$$e^y=1+Ce^{-e^x},$$

这里$C=\pm e^{-C_1}$是任意常数,$C\neq0$.于是得

$$y=\ln(1+Ce^{-e^x}).$$

又因$y=0$也是解,它可以看成上式中令$C=0$而得到.因此得通解$y=\ln(1+Ce^{-e^x})$.

方法2.以e^y乘原方程,得

$$e^y\frac{dy}{dx}-e^x+e^xe^y=0.$$

作变量变换,令$z=e^y$,于是$\frac{dz}{dx}=e^y\frac{dy}{dx}$,原方程化为

$$\frac{dz}{dx}+e^xz=e^x.$$

这是关于z的一阶线性方程.由公式(2.11),得

$$z = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}\left[\int \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{e}^x}\mathrm{d}x + C\right] = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}(\mathrm{e}^{\mathrm{e}^x} + C) = 1 + C\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x}.$$

从而得原方程的通解为 $y = \ln(1 + C\mathrm{e}^{-\mathrm{e}^x})$，**其中** C **为任意常数**.

例 2　求$(x^2 + y)\mathrm{d}y - 2xy\mathrm{d}x = 0$ **的通积分**.

解　方法 1.试找积分因子.按公式(3.23)，**计算得**

$$\frac{1}{M}\left[\frac{N}{x} - \frac{M}{y}\right] = -\frac{1}{2xy}\left[\frac{}{x}(x^2 + y) - \frac{}{y}(-2xy)\right]$$
$$= -\frac{2}{y},$$

这是一个仅与 y **有关的函数.所以原方程有积分因子**

$$\mu(y) = \mathrm{e}^{-\int \frac{2}{y}\mathrm{d}y} = \frac{1}{y^2},\quad y \neq 0.$$

以此 $\mu(y)$**乘原方程两边，得** $\frac{x^2 + y}{y^2}\mathrm{d}y - \frac{2xy}{y^2}\mathrm{d}x = 0$，**即**

$$\frac{1}{y}\mathrm{d}y - \frac{2xy\mathrm{d}x - x^2\mathrm{d}y}{y^2} = 0.$$

容易看出，上述方程可写成

$$\mathrm{d}\left(\ln|y| - \frac{x^2}{y}\right) = 0.$$

于是，在 $y \neq 0$ **时得到通积分** $\ln|y| - \frac{x^2}{y} = C_1$，**或写成**

$$y = C\mathrm{e}^{\frac{x^2}{y}},$$

这里 $C = \pm\mathrm{e}^{C_1}$**是任意常数**.

此外，$y = 0$ **也是原方程的一个积分，它可以认为是上式中令** $C = 0$ **而得到**.

方法 2.原方程可以写成

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x^2 + y}{2xy} = \frac{x}{2y} + \frac{1}{2x},$$

这是以 x **为未知函数的伯努利方程.按伯努利方程的常规解法，上式改写为** $2x\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{x^2}{y} + 1$，**即**

$$\frac{\mathrm{d}x^2}{\mathrm{d}y}=\frac{x^2}{y}+1 .$$

从而求得通积分

$$x^2=e^{\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\left[\int e^{-\int\frac{1}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C\right]=y(\ln|y|+C)\quad(y\neq0),$$

此外，容易看出，$y=0$ 也是原方程的一个积分．

例 3　求方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\cos x\sin y+\tan^2 x}{\sin x\cos y}$$

的通积分．

解　方法 1．这个方程既不是关于 y 的线性方程，也不是伯努利方程．但是按照解伯努利方程的启示，可以通过适当的变量变换，将它化为一个线性方程．令

$$z=\sin y$$

引入新的未知函数 z．于是 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\cos y\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，从而原方程化为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}=\frac{z\cos x+\tan^2 x}{\sin x},$$

即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z\cot x=\frac{\sin x}{\cos^2 x} .$$

这是一个关于 z 的线性方程．按照公式(2.8)，得到

$$\begin{aligned}
z&=e^{\int\cot x\,\mathrm{d}x}\left[\int\frac{\sin x}{\cos^2 x}e^{-\int\cot x\,\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C_1\right]\\
&=|\sin x|\left[\int\frac{\sin x}{\cos^2 x\,|\sin x|}\mathrm{d}x+C_1\right]\\
&=\sin x\left[\int\frac{1}{\cos^2 x}\mathrm{d}x\pm C_1\right]\\
&=\sin x\,(\tan x+C),
\end{aligned}$$

这里 $C=\pm C_1$ 是任意常数．从而得到原方程的通积分

$$\sin y=(\tan x+C)\sin x .$$

方法 2 . **将方程改写为**

$$(\tan^2 x + \cos x \sin y)\,\mathrm{d}x - (\sin x \cos y)\,\mathrm{d}y = 0 . \qquad (4.1)$$

按公式(3.21), **计算得**

$$\frac{1}{N}\left[\frac{\partial M}{\partial y} - \frac{\partial N}{\partial x}\right] = \frac{-1}{\sin x \cos y}(\cos x \cos y + \cos x \cos y)$$

$$= -2\cot x .$$

所以有积分因子

$$\mu(x) = \mathrm{e}^{-2\int \cot x\,\mathrm{d}x} = \frac{1}{\sin^2 x} .$$

以此 $\mu(x)$**乘**(4.1), **得**

$$\left[\frac{1}{\cos^2 x} + \frac{\cos x \sin y}{\sin^2 x}\right]\mathrm{d}x - \frac{\cos y}{\sin x}\mathrm{d}y = 0,$$

即 $\mathrm{d}\left(\tan x - \frac{\sin y}{\sin x}\right) = 0$. **得通积分**

$$\tan x - \frac{\sin y}{\sin x} = C .$$

例 4 **求方程**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y}{2x} + \frac{1}{2y}\tan\frac{y^2}{x} \qquad (4.2)$$

的通积分 .

解 方法 1 . **式中有** $\tan\frac{y^2}{x}$**这么一项** . **试作变换** $u = \frac{y^2}{x}$, **从而**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{2y}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + \frac{y}{2x} .$$

将上式以及 $u = \frac{y^2}{x}$**代入**(4.2), **得到**

$$x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \tan u . \qquad (4.3)$$

当 $\tan u \neq 0$ **时**, **分离变量并积分**, **得**

$$\int \cot u\,\mathrm{d}u = \int \frac{\mathrm{d}x}{x} + C_1 ,$$

即

$$\ln|\sin u| = \ln|x| + C_1 .$$

去掉对数及绝对值号，得

$$\sin u = Ce^x, \tag{4.4}$$

这里 $C = \pm e^{C_1} \neq 0$. 又，使 $\tan u = 0$ 的 $u = u^*$ 也是(4.3)的积分，这种积分可以认为(4.4)中取 $C = 0$ 而得到. 最后，以 $u = \dfrac{y^2}{x}$ 代入(4.4)，即得(4.2)的通积分

$$\sin\frac{y^2}{x} = Ce^x,$$

C 为任意常数(但 $y = 0$ 除外,因为 $y = 0$ 时(4.2)无定义).

方法 2. 以 $2y$ 乘(4.2)式，得

$$2y\frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x} + \tan\frac{y^2}{x} .$$

容易看出，令 $z = y^2$ 之后可得

$$\frac{dz}{dx} = \frac{z}{x} + \tan\frac{z}{x} . \tag{4.5}$$

这是关于 x 与 z 的齐次方程. 按齐次方程解法，令 $u = \dfrac{z}{x}$，即 $z = xu$，从而(4.5)化为

$$x\frac{du}{dx} + u = u + \tan u,$$

即得(4.3). 以下与方法 1 一样去解.

例 5　求方程$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y^3}{xy^2 - 1}$的通积分.

解　方法 1. 当 $y \neq 0$ 时，把方程写成

$$\frac{dx}{dy} = \frac{xy^2 - 1}{y^3} .$$

这是关于 x 的线性方程. 可求得通积分

$$x = \frac{1}{3y^2} + Cy .$$

此外，$y = 0$ 也是原方程的一个积分.

方法 2 . **将方程改写为**

$$y^3 \mathrm{d} x - (xy^2 - 1) \mathrm{d} y = 0 .$$

易知有积分因子 $\dfrac{1}{y^4}$, **以此乘上式**, **得**

$$\frac{y \mathrm{d} x - x \mathrm{d} y}{y^2} + \frac{1}{y^4} \mathrm{d} y = 0,$$

即 $\mathrm{d}\left(\dfrac{x}{y} - \dfrac{1}{3y^3}\right) = 0$. **所以得通积分**

$$\frac{x}{y} - \frac{1}{3y^3} = C .$$

此外 $y = 0$ **也是一个积分** .

例 6　**求方程**

$$\frac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} \tag{4.6}$$

的通积分 .

解　**方法** 1 . **这是一个齐次方程**, **可以令** $y = ux$ **化方程为变量分离的方程**, **读者不妨一试** . **但会发现这样积分比较麻烦** .

当 $y = 0$ **时原方程无定义** . **当** $y \neq 0$ **时** $-x + \sqrt{x^2 + y^2} \neq 0$. **此时**, **可将**(4.6)**写成**

$$\frac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} y} = \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}} \tag{4.7}$$

令 $v = \dfrac{x}{y}$, **即** $x = yv$, **有** $\dfrac{\mathrm{d} x}{\mathrm{d} y} = v + y \dfrac{\mathrm{d} v}{\mathrm{d} y}$, **及**

$$\begin{aligned} \frac{y}{-x + \sqrt{x^2 + y^2}} &= \frac{y}{-yv + |y| \sqrt{1 + v^2}} = \frac{1}{-v \pm \sqrt{1 + v^2}} \\ &= \frac{-v \mp \sqrt{1 + v^2}}{(-v \pm \sqrt{1 + v^2})(-v \mp \sqrt{1 + v^2})} \\ &= v \pm \sqrt{1 + v^2}, \end{aligned}$$

当 $y > 0$ **时这里取正号**, **当** $y < 0$ **时取负号** . **于是**(4.7)**化成**

$$y\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}y}=\pm\sqrt{1+v^2}.$$

分离变量并积分，得

$$\pm\int\frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1+v^2}}=\int\frac{\mathrm{d}y}{y}+C_1,$$

即

$$\pm\ln(v+\sqrt{1+v^2})=\ln\frac{|y|}{C} \tag{4.8}$$

这里 $C=e^{-C_1}>0$ 是任意常数. 当 $y>0$ 时上式成为

$$\ln(v+\sqrt{1+v^2})=\ln\frac{y}{C}.$$

去掉对数记号，并将 $v=\frac{x}{y}$代回，得

$$x+\sqrt{x^2+y^2}=\frac{y^2}{C}.$$

移项、平方，再约去非零因子 y^2，得

$$x=\frac{1}{2C}(y^2-C^2). \tag{4.9}$$

当 $y<0$ 时，(4.8)式成为

$$-\ln(v+\sqrt{1+v^2})=\ln\left(-\frac{y}{C}\right),$$

经化简仍得到(4.9)式，于是(4.6)的通积分是(4.9)，其中任意常数 $C>0$.

方法 2. 将(4.6)改写为

$$x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y-\sqrt{x^2+y^2}\,\mathrm{d}x=0. \tag{4.10}$$

采取分项组合的办法容易知道$\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$是(4.10)的一个积分因子. 以此乘(4.10)，得

$$\frac{x\mathrm{d}x+y\mathrm{d}y}{\sqrt{x^2+y^2}}-\mathrm{d}x=0,$$

即 $d(\sqrt{x^2+y^2}-x)=0$. 于是有通积分 $\sqrt{x^2+y^2}-x=C$, 即

$$\sqrt{x^2+y^2}=C+x, \tag{4.11}$$

这里 C 是任意常数. 由于左边非负, 所以 x 应满足 $x\geq -C$.

为了简化(4.11), 将它的两边平方便得

$$y^2=C^2+2Cx=2C\left(x+\frac{C}{2}\right). \tag{4.12}$$

因为 $y=0$ 不是原方程的积分, 所以(4.12)中 $C\neq 0$. 如果 $C<0$, 则由(4.12)知 $x<-\frac{C}{2}$, 与 $x\geq -C$ 矛盾. 所以 $C>0$. 得到的结论与用方法 1 所得的一致.

习　题　2.4

求下列方程的通积分:

1. $\cos x\,dy-(y\sin x+y^4)dx=0$.
2. $(x^4+y^3)dx-xy^2dy=0$.
3. $(2x-y+1)dx-(x-2y+1)dy=0$.
4. $2xydx+(x^2+y^2)dy=0$.
5. $x\frac{dy}{dx}-y=\frac{x}{\ln x}$.
6. $\frac{dy}{dx}=\frac{-y+2xy+x^2}{x^2}$.
7. $\frac{dy}{dx}=\frac{3(x-1)^2+(y+1)^2}{2(x-1)(y+1)}$.

§2.5　几种可降阶的二阶方程

对于高阶方程, 一般是采用适当的变量变换把方程的阶数降低, 直至成为一阶方程然后求解. 但是, 如何采用适当的变量变换, 却无一般方法可循. 本节介绍三种特殊类型的二阶方程, 通过特定的变量变换, 都可化为一阶方程. 至于一般的高阶方程的降阶, 是十分困难的. 本节所述的方法, 可供读者作为借鉴.

2.5.1 $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x)$型方程

方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x) \tag{5.1}$$

显然是很容易求解的.作两次积分便得到它的通解

$$y=\int\left[\int f(x)dx\right]dx+C_1x+C_2. \tag{5.2}$$

例1 求$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\cos^2 x}$满足初值条件$y|_{x=0}=1$,$y'|_{x=0}=0$的特解.

解
$$\begin{aligned} y&=\int\left[\int\frac{1}{\cos^2 x}dx\right]dx+C_1x+C_2\\ &=\int\tan x\,dx+C_1x+C_2\\ &=-\ln|\cos x|+C_1x+C_2. \end{aligned}$$

以初值条件代入得$C_2=1$,$C_1=0$,故得特解

$$y=-\ln|\cos x|+1.$$

2.5.2 $\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,\frac{dy}{dx})$型方程

方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,\frac{dy}{dx}) \tag{5.3}$$

的特点是方程中不明显含未知函数y.为了降阶,作变量变换:

$$\frac{dy}{dx}=p, \tag{5.4}$$

引入新的未知函数p.于是

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{dp}{dx}. \tag{5.5}$$

方程(5.3)化为p对x的一阶方程

$$\frac{dp}{dx}=f(x,p). \tag{5.6}$$

如果能求得(5.6)的通解

$$p = \varphi(x, C_1),\tag{5.7}$$

其中 C_1 是任意常数，φ 是它的变元的已知函数，则将它代入(5.4)后，得 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \varphi(x, C_1)$．由此解得

$$y = \int \varphi(x, C_1)\mathrm{d}x + C_2 .\tag{5.8}$$

它就是(5.3)的通解．

例 2 求曲线，它的曲率处处等于常数 K ($K > 0$)．

解 设曲线方程是 $y = y(x)$，则由曲率公式，有

$$\frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}} = K,\tag{5.9}$$

这里 $y' = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$，$y'' = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}$．(5.9)是一个二阶微分方程，属本段所讲的类型．作变换(5.4)，并由(5.5)，再设 $y'' > 0$，于是(5.9)化为

$$\frac{\mathrm{d}p}{(1 + p^2)^{3/2}} = K\mathrm{d}x .$$

两边积分得

$$\frac{p}{\sqrt{1 + p^2}} = K(x - C_1),\tag{5.10}$$

这里 C_1 是任意常数．从(5.10)解出

$$p = \frac{x - C_1}{\sqrt{R^2 - (x - C_1)^2}} .$$

其中 $R = \frac{1}{K}$．再由 $y' = p$，有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x - C_1}{\sqrt{R^2 - (x - C_1)^2}} .$$

于是求得

$$y = -\sqrt{R^2 - (x - C_1)^2} + C_2 .\tag{5.11}$$

若设 $y'' < 0$，类似地可求得

$$y = \sqrt{R^2 - (x - C_1)^2} + C_2 . \tag{5.12}$$

合并(5.11)与(5.12)，再移项平方，得

$$(x - C_1)^2 + (y - C_2)^2 = R^2 . \tag{5.13}$$

这是以点(C_1, C_2)为中心、R为半径的圆周.由于C_1和C_2是任意常数，所以(5.13)表示的是圆心在任意点处半径为R的圆周族.

大家知道，半径为R的圆周，具有题目所说的性质.现在用微分方程的办法，证明了具有题目所说的性质的曲线必定是半径为R的圆周，$R = \dfrac{1}{K}$.

2.5.3 $\dfrac{d^2 y}{d x^2} = f(y, \dfrac{d y}{d x})$型方程

方程

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = f(y, \frac{d y}{d x}) \tag{5.14}$$

的特点是方程中不明显含自变量x.为了降阶，作变量变换：

$$\frac{d y}{d x} = p, \tag{5.15}$$

引入新的未知函数p.但是在更换$\dfrac{d^2 y}{d x^2}$时，不能再使用(5.5)式.因为如果使用(5.5)式，将它和(5.15)代入(5.14)之后，(5.14)化成

$$\frac{d p}{d x} = f(y, p) .$$

它虽然不明显含x，但出现了$\dfrac{d p}{d x}$.所以不能认为$\dfrac{d p}{d x} = f(y, p)$是$p$对$y$的一阶方程.当然也不能认为是$p$对$x$的一阶方程.令(5.15)之后的意图是要使$x$在方程中彻底地不出现，而把$y$作为自变量来处理.即从(5.15)按下述方法算得$\dfrac{d^2 y}{d x^2}$：

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}. \tag{5.16}$$

将(5.15)**和**(5.16)**代入**(5.14)，**于是**(5.14)**化为**

$$p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}=f(y,p). \tag{5.17}$$

这是一个 p **关于** y **的一阶方程.如果能求得**(5.17)**的通解**:

$$p=\psi(y,C_1). \tag{5.18}$$

那么将它代入(5.15)，**得**$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\psi(y,C_1)$.**分离变量并积分**，**解得**

$$\int\frac{\mathrm{d}y}{\psi(y,C_1)}=\int\mathrm{d}x+C_2=x+C_2, \tag{5.19}$$

这就是(5.14)**的通积分**.

例 3　**求** $yy''-(y')^2=y^4$，$y(0)=1$，$y'(0)=1$ **的特解**.

解　**令**$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$，**有**$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2}=p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$，**代入原方程**，**得**

$$yp\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}-p^2=y^4,$$

即

$$\frac{\mathrm{d}p^2}{\mathrm{d}y}-\frac{2}{y}p^2=2y^3.$$

代入一阶线性微分方程通解公式，**得**

$$\begin{aligned}p^2&=\mathrm{e}^{\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\left[\int 2y^3\mathrm{e}^{-\int\frac{2}{y}\mathrm{d}y}\mathrm{d}y+C_1\right]\\&=y^2\left[\int 2y\mathrm{d}y+C_1\right]=y^2(y^2+C_1).\end{aligned}$$

由初值条件 $x=0$ **时** $y=1$，$y'=1$，**得** $1=1(1+C_1)$，**即** $C_1=0$.**所以得**

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2=y^4.$$

两边开方，**并注意到** $x=0$ **时** y **与** y'**均为** 1 (**同号**)，**故得**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2.$$

分离变量积分，得

$$-\frac{1}{y}=x+C_2 .$$

再以初值条件 $y(0)=1$ 代入得 $C_2=-1$.最后得特解 $y=\dfrac{1}{1-x}$.

由本例解题过程可见，在求特解时，初值条件应尽早代入定出常数 C，使得下一步积分方便 .

习 题 2.5

1 .解下列方程或初值问题：

(1) $(1+x^2)y''=1$，$y(0)=1$，$y'(0)=-1$；

(2) $y''-y'=e^x$；

(3) $xy''=y'\ln\dfrac{y'}{x}$；

(4) $y''-e^{2y}=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$；

(5) $y''-y'e^y=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=2$；

(6) $(1+x^2)y''+y'^2+1=0$；

(7) $y''+y'+y'^3=0$；

(8) $y''+\sqrt{1-y'^2}=0$；

(9) $a^2y'y''=x$；

(10) $2xy''+y'+y'^3=0$.

2 .求方程 $yy''+(y')^2=1$ 的经过点(0,1)且在这一点与直线 $x+y=1$ 相切的积分曲线 .

3 .求方程$(y')^2+2yy''=0$ 的在点(1,1)与直线 $y=x$ 相切的积分曲线 .

§2.6 应 用 实 例

在§1 .1 中，曾举过几个实例，引入微分方程的基本概念 .那些例子都是比较简单的 .本节再进一步举几个例子，侧重于建立数学模型和求解 .这些模型大致说来有几何问题(包括可以转化为几何问题的运动学问题、光学问题等)；变化率问题；物理问

题；经济学及生物、生态学问题 .

2 .6 .1　几何问题

例 1 (探照灯的反射镜曲面)　建立直角坐标系之后，设曲面是由曲线 $y = y(x)$ $(y \geq 0)$绕 x 轴旋转而成，并设光源可看做一点，位于坐标原点，经反射后，光线成一束与 x 轴平行的光线沿 x 轴正向反射 . 求曲线 $y = y(x)$的方程 .

解　由光学的反射定律，光线的入射角等于反射角 . 于是推出 $\alpha = \beta$(图 2-4) . 再由平面几何定理，推得 $\gamma = \alpha + \beta = 2\beta$. 另一方面，设 P 点的坐标为(x, y) $(y \neq 0)$，则 $\cot \gamma = \dfrac{x}{y}$. 又因曲线 $y = y(x)$在 P 的切线斜率 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \tan \beta$，于是由

$$\cot \gamma = \cot 2\beta = \frac{1 - \tan^2 \beta}{2\tan \beta},$$

推得

$$\frac{x}{y} = \frac{1 - \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}{2\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)} .$$

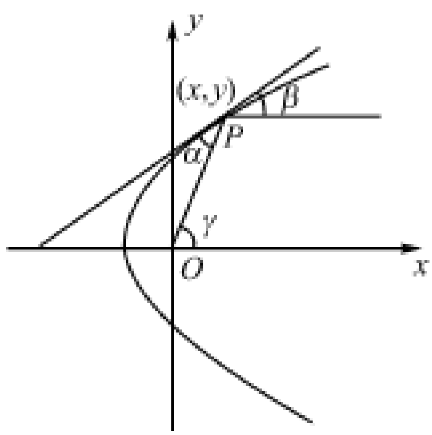

图 2-4

化简成为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x \pm \sqrt{x^2 + y^2}}{y} .$$

由于 $y > 0$，上式“ ± ”中取“ + ”时分子为正；取“ - ”时分子为负 . 因反射后成一束沿 x 轴正向反射光线，所以$\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} > 0$，从而应取“ + ”号，得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-x + \sqrt{x^2 + y^2}}{y} .$$

此即为§2 .4 的例 6 的(4 .4)式 . 在该处已求得通积分为

$$x=\frac{1}{2C}(y^2-C^2), \quad C>0,\ y>0 .$$

易知，不论 $C>0$ 为何值，这些都是抛物线，其焦点都在 O，对称轴为 x 轴 . 由此得出结论：探照灯的反射曲面是由抛物线绕它的对称轴旋转而成，其中 C 由探照灯的大小尺寸而定，光源总位于焦点处 .

例 2 (正交曲线族)　给了一个曲线族

$$L:\ \Phi(x, y, C)=0, \tag{6.1}$$

求另一个曲线族

$$H:\ G(x, y, K)=0, \tag{6.2}$$

使它与 L 正交，这里 C 与 K 都是任意常数 .

所谓曲线 l 与曲线 h 正交，是指它们必相交，并且在交点处的切线互相垂直 . 两曲线族正交是指一族中的每一曲线与另一族中的每一曲线正交 . 例如，圆周族 $x^2+y^2=a^2$ 与射线族 $y\cos\alpha-x\sin\alpha=0$ 正交，这里 a 和 α 分别是任意常数，$a\neq 0$.

解　现在来求 L 的正交曲线族 H . 主要的依据是，两曲线正交的充分必要条件是在交点处它们的斜率互为负倒数 . 对(6.1)使用隐函数求导法则，有

$$\Phi_x'(x, y, C)+\Phi_y'(x, y, C)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=0 .$$

设 $\Phi_y'(x, y, C)\neq 0$，则

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_L=-\frac{\Phi_x'(x, y, C)}{\Phi_y'(x, y, C)}, \tag{6.3}$$

这里，$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_L$ 表示曲线族 L 中任意一条曲线的切线斜率 . 当参数 C 在它所允许的范围内任意给定时，从曲线族 L 中求得对应的曲线 l 的方程，设为

$$\phi(x, y)=C .$$

将它代入(6.3)，得到

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_L = -\frac{\Phi_x'(x, y, \varphi(x, y))}{\Phi_y'(x, y, \varphi(x, y))}, \tag{6.4}$$

它表示 L 中任意一条曲线 l 上 $\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ 所应满足的关系式. 所以, 实际上(6.4)就是曲线族 L 所应满足的微分方程. 注意, 当(6.1)给定时, (6.4)右端是已知表达式.

以 $\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_H$ 表示 L 的正交曲线族 H 中任意一条曲线的切线斜率. 由题设条件, 对于 H 中的每一条曲线上的每一点, 都有 L 中的一条曲线与它相交并且它们的切线在此点互相垂直. 于是由

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_H = -\frac{1}{\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_L},$$

推知

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)_H = \frac{\Phi_y'(x, y, \varphi(x, y))}{\Phi_x'(x, y, \varphi(x, y))}.$$

它表示 H 中任意一条曲线 h 上的 $\left(x, y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ 所应满足的关系式. 去掉下标 H, 即得

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\Phi_y'(x, y, \varphi(x, y))}{\Phi_x'(x, y, \varphi(x, y))}, \tag{6.5}$$

它表示曲线族 H 所应满足的微分方程. 解此微分方程, 即得 H 的方程.

例如, 求曲线族 $x^2 + y^2 = Cx$ 的正交曲线族, 其中 C 是任意常数.

记 $\Phi(x, y, C) = x^2 + y^2 - Cx = 0$, 则

$$\Phi_x'(x, y, C) = 2x - C,$$

$$\Phi_y'(x, y, C) = 2y.$$

由 $\Phi(x, y, C) = 0$, 解得

$$C = \frac{x^2 + y^2}{x} = \varphi(x, y).$$

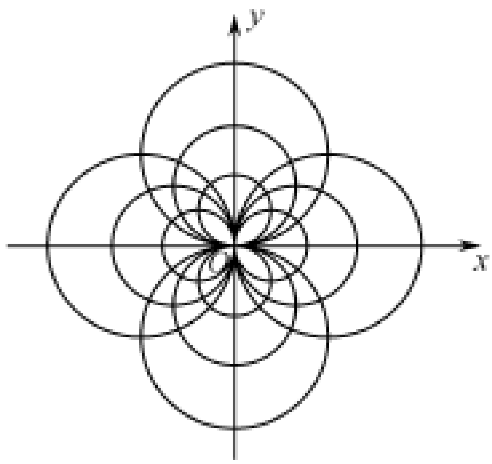

图 2-5

于是由(6.5)得到正交曲线族的微分方程为

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{2y}{2x-\frac{x^2+y^2}{x}}=\frac{2xy}{x^2-y^2}.$$

这是一个齐次方程，解之得通积分(K 是任意常数):

$$x^2+y^2=Ky.$$

此外还有一条曲线(直线) $y=0$，它们构成了 $x^2+y^2=Cx$ 的正交曲线族，见图 2-5.

2.6.2 变化率问题

若某未知函数的变化率的表达式为已知，那么据此列出的方程常常是一阶微分方程.

例 3 在某一人群中推广技术是通过其中已掌握新技术的人进行的,设该人群的总人数为 N，在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$ (将 $x(t)$视为连续可微变量)，其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比，比例系数 $k>0$，求 $x(t)$.

解 由题意立即有

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=kx(N-x),\quad x(0)=x_0.$$

按分离变量法解之，$\dfrac{\mathrm{d}x}{x(N-x)}=k\mathrm{d}t$，即

$$\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{N-x}\right)\mathrm{d}x=kN\mathrm{d}t.$$

积分并化简得通解

$$x=\frac{NCe^{kNt}}{1+Ce^{kNt}}.$$

由初值条件得特解 $x=\dfrac{Nx_0\mathrm{e}^{kNt}}{N-x_0+x_0\mathrm{e}^{kNt}}$.

下面用微元法建模举一例子.

例 4　某湖泊的水量为 V, 每年排入湖泊内含污染物 A 的污水量为$\dfrac{V}{6}$, 流入湖泊内不含 A 的水量为$\dfrac{V}{6}$, 流出湖泊的水量为$\dfrac{V}{3}$. 已知 1999 年底湖中 A 的含量为 $5m_0$, 超过国家规定指标. 为了治理污染, 从 2000 年初起, 限定排入湖泊中含 A 污水的浓度不超过$\dfrac{m_0}{V}$. 问至多需经过多少年, 湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内? (注: 设湖水中 A 的浓度是均匀的.)

解　设从 2000 年初(令此时 $t=0$)开始, 第 t 年湖泊中污染物 A 的总量为 m, 浓度为$\dfrac{m}{V}$, 则在时间间隔$[t, t+\mathrm{d}t]$内, 排入湖泊中 A 的量为$\dfrac{m_0}{V}\cdot\dfrac{V}{6}\mathrm{d}t=\dfrac{m_0}{6}\mathrm{d}t$, 流出湖泊的水中 A 的量为$\dfrac{m}{V}\cdot\dfrac{V}{3}\mathrm{d}t=\dfrac{m}{3}\mathrm{d}t$, 因而在此时间间隔内湖泊中污染物 A 的改变量

$$\mathrm{d}m=\left(\frac{m_0}{6}-\frac{m}{3}\right)\mathrm{d}t.$$

由分离变量法解得

$$m=\frac{m_0}{2}-C\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}.$$

代入初始条件 $m|_{t=0}=5m_0$, 得 $C=-\dfrac{9}{2}m_0$. 于是

$$m=\frac{m_0}{2}(1+9\mathrm{e}^{-\frac{t}{3}}).$$

令 $m=m_0$, 得 $t=6\ln 3$, 即至多需经过 $6\ln 3$ 年, 湖泊中污染物 A 的含量降至 m_0 以内.

2.6.3　物理学问题

例 5　从船上向海中沉放某种探测仪器, 按探测要求, 需确

定仪器的下沉深度 y (从海平面算起) 与下沉速度 v 之间的函数关系 . 设仪器在重力作用下，从海平面由静止开始铅直下沉，在下沉过程中还受到阻力和浮力的作用 . 设仪器的质量为 m，体积为 B，海水比重为 ρ，仪器所受的阻力与下沉速度成正比，比例系数为 k ($k > 0$) . 试建立 y 与 v 所满足的微分方程，并求出函数关系式 $y = y(v)$.

解　取沉放点为原点 O，Oy 轴正向铅直向下，则由牛顿第二定律得

$$m \frac{d^2 y}{d t^2} = mg - B\rho - kv .$$

将 $\frac{d^2 y}{d t^2} = v \frac{d v}{d y}$ 代入以消去 t，得 v 与 y 之间的微分方程

$$mv \frac{d v}{d y} = mg - B\rho - kv .$$

分离变量得 $d y = \frac{mv}{mg - B\rho - kv} d v$. 积分后得

$$y = -\frac{m}{k} v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln(mg - B\rho - kv) + C .$$

由初始条件 $v|_{y=0} = 0$ 得出

$$C = \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln(mg - B\rho),$$

故所求的函数关系式为

$$y = -\frac{m}{k} v - \frac{m(mg - B\rho)}{k^2} \ln \frac{mg - B\rho - kv}{mg - B\rho} .$$

例 6 (追逐线)　这是一个运动学问题 . 设选取坐标系如图 2-6，在 Oy 轴上有一点 P 以常速 a 沿着 y 轴正方向运动 . 在 (x, y) 平面上另一动点 M，它以常速 v 运动，方向恒指向动点 P . 求点 M 的轨迹方程 .

解　设在 $t = 0$ 时，点 M 位于 $M_0(x_0, y_0)$，点 P 位于 $P_0(0, y_0)$，$x_0 \neq 0$. 又设动点 M 的轨迹由 $y = y(x)$ 表达，在时刻

t 时，点 M 的坐标为 $(x, y(x))$，P 的坐标为 $(0, Y)$．因为动点在 M 处的运动指向点 P，从而

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-Y}{x-0}. \qquad (6.6)$$

又因为 P 以常速 a 沿着 y 轴正方向运动，所以

$$Y=y_0+at. \qquad (6.7)$$

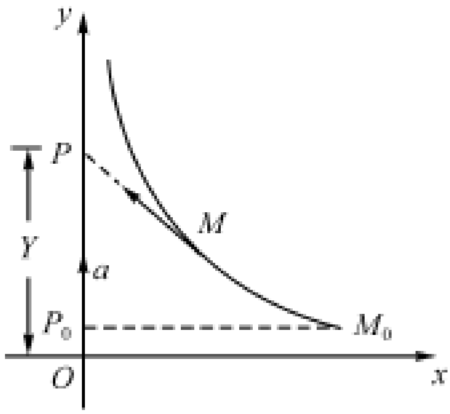

图 2-6

以 M_0 作为弧的起点，弧 M_0M 的长记为 s，则由运动学知，$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}=v$．于是

$$\mathrm{d}t=\frac{1}{v}\mathrm{d}s=-\frac{1}{v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x. \qquad (6.8)$$

这里在第二个等式中取负号，是因为在运动中当 s 增长时，x 在减少．由于 $t=0$ 时对应 $x=x_0$，$t=t$ 时对应 $x=x$，将(6.8)两边积分，对 t 从 0 到 t，对 x 从 x_0 到 x，得到

$$t=-\int_{x_0}^{x}\frac{1}{v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x. \qquad (6.9)$$

将(6.9)代入(6.7)，然后再代入(6.6)，并略加整理得到

$$x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y-y_0+\frac{a}{v}\int_{x_0}^{x}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}\,\mathrm{d}x. \qquad (6.10)$$

为了去掉(6.10)中的积分，对(6.10)两边对 x 求导数，有

$$x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{a}{v}\sqrt{1+\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2}. \qquad (6.11)$$

这是动点 M 的轨迹 $y=y(x)$ 满足的方程，它属于 2.5.2 节所讲的类型．$y=y(x)$ 除了满足(6.11)外，还应满足初值条件：

$$y\big|_{x=x_0}=y_0,\quad \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=0. \qquad (6.12)$$

这里，(6.12)的第二式是这样得来的：当 $x=x_0$ 时，由(6.6)推出

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}=\frac{y_0-y_0}{x_0}=0 .$$

以下就来求方程(6.11)满足(6.12)的解.令$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=p$，有$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}$，于是(6.11)成为

$$x\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}=\frac{a}{v}\sqrt{1+p^2} . \tag{6.13}$$

分离变量解得

$$\ln\left(p+\sqrt{1+p^2}\right)=\frac{a}{v}(\ln x+\ln C_1) .$$

这里，C_1 是任意常数.由上式可以解得

$$p+\sqrt{1+p^2}=(C_1x)^{\frac{a}{v}} . \tag{6.14}$$

将左边乘、除以 $p-\sqrt{1+p^2}$，得$\frac{-1}{p-\sqrt{1+p^2}}=(C_1x)^{\frac{a}{v}}$，即

$$p-\sqrt{1+p^2}=-(C_1x)^{-\frac{a}{v}} . \tag{6.15}$$

由(6.14)和(6.15)，得到 $p=\frac{1}{2}\left[(C_1x)^{\frac{a}{v}}-(C_1x)^{-\frac{a}{v}}\right]$，即

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{2}\left[(C_1x)^{\frac{a}{v}}-(C_1x)^{-\frac{a}{v}}\right] . \tag{6.16}$$

将(6.16)再积分，并设 $v\neq a$，有

$$y=\frac{1}{2C_1}\left[\frac{(C_1x)^{1+\frac{a}{v}}}{1+\frac{a}{v}}-\frac{(C_1x)^{1-\frac{a}{v}}}{1-\frac{a}{v}}\right]+C_2, \tag{6.17}$$

这里，C_2 是另一个任意常数.由初值条件(6.12)，容易求得

$$C_1=\frac{1}{x_0}, \tag{6.18}$$

$$C_2=y_0-\frac{x_0}{2}\left[\frac{1}{1+\frac{a}{v}}-\frac{1}{1-\frac{a}{v}}\right] . \tag{6.19}$$

将(6.18)和(6.19)代入(6.17)，就得到动点 M 的轨迹方程，它称为追逐线方程：

$$y=\frac{v x_0}{2(v+a)}\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{1+\frac{a}{v}}-1\right]-\frac{v x_0}{2(v-a)}\left[\left(\frac{x}{x_0}\right)^{1-\frac{a}{v}}-1\right]+y_0 .$$

为了使点 M 有可能追上点 P，设 $v>a$．在上式中令 $x=0$，便得相遇点的坐标$(0, y_1)$：

$$y_1=y_0+\frac{a v x_0}{v^2-a^2} .$$

由(6.7)可以算得所需的追逐时间为

$$T=\frac{y_1-y_0}{a}=\frac{v x_0}{v^2-a^2} .$$

例 7 一电路(如图 2-7)的电阻为 R，电感为 L，外加电压为 $E_0\sin\omega t$，这里 R，L，E_0 和 ω 都是正常数．当时间 $t=0$ 时电流 $i=0$，求电流 i 与时间 t 的函数关系．

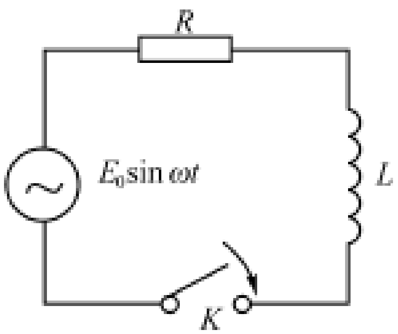

图 2-7

解 由物理学知道，电阻 R 上的电压降落为 Ri，电感 L 上的电压降落为 $L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$，而外加电压等于电路上电压降落的总和．于是有

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+Ri=E_0\sin\omega t .$$

初值条件是 $i|_{t=0}=0$．将方程改写为

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+\frac{R}{L}i=\frac{E_0}{L}\sin\omega t,$$

可见这是一个一阶线性方程．由公式(2.8)得此方程的通解为

$$\begin{aligned} i &= \mathrm{e}^{-\int\frac{R}{L}\mathrm{d}t}\left[\int\frac{E_0}{L}\sin\omega t\cdot\mathrm{e}^{\int\frac{R}{L}\mathrm{d}t}\mathrm{d}t+C\right] \\ &= \frac{E_0}{L}\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t}\int\mathrm{e}^{\frac{R}{L}t}\sin\omega t\,\mathrm{d}t+C\mathrm{e}^{-\frac{R}{L}t} .\end{aligned}$$

利用分部积分法算得

$$i = \frac{E_0}{L}\left[\frac{RL}{\omega^2 L^2 + R^2}\sin \omega t - \frac{\omega L^2}{\omega^2 L^2 + R^2}\cos \omega t\right] + Ce^{-\frac{R}{L}t}.$$

由初值条件 $i|_{t=0} = 0$ 得到 t 时的电流为

$$i = \frac{E_0 \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\omega^2 L^2 + R^2}(R\sin \omega t - \omega L\cos \omega t).$$

现将上式改写.由三角公式,上式第二项可以写成

$$\begin{aligned} &R\sin \omega t - \omega L\cos \omega t \\ &= \sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}\left[\frac{R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}\sin \omega t - \frac{\omega L}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}\cos \omega l\right] \\ &= \sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}\sin(\omega t - \varphi), \end{aligned}$$

其中

$$\cos \varphi = \frac{R}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}, \quad \sin \varphi = \frac{\omega L}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}.$$

于是 i 与 t 的关系又可写成

$$i = \frac{E_0 \omega L}{\omega^2 L^2 + R^2}e^{-\frac{R}{L}t} + \frac{E_0}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}\sin(\omega t - \varphi). \quad (6\ 20)$$

根据(6 20)来作一些物理解释:当 t 增大时,(6 .20)的第一项迅速衰减而趋于零.人们称这一项为电流的暂态分量,说明它经历的时间是短暂的.第二项是周期函数,其周期为 $\frac{2\pi}{\omega}$,与外加电压的周期相同.这一项人们称它为稳态分量.换言之,当合闸 K 过了一定时间之后,回路中的电流是正弦电流,周期与外加电动势周期相同,相角落后 φ,振幅为 $\frac{E_0}{\sqrt{\omega^2 L^2 + R^2}}$.

2 .6 .4 生态学中某生物种群总数增长的微分方程描述

某生物种群的生物总数(例如人口总数)的增长预测,是一个很重要的问题.任何生物的总个数是正整数 $N(t)$,它是时间 t

的阶梯函数. 但当种群的总数非常大, 例如一个国家的人口总数, 某海域中某类鱼的条数, 种群中的个体的变化与总数相对说来是很小的, 因此可以认为 $N(t)$是随时间连续、可微地变化. 马尔萨斯(Malthus)认为人口在 t 时的增长率与当时的人口总数成正比:

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = aN(t), \tag{6.21}$$

其中 $a>0$ 为常数, 与社会条件有关. 这表明人口按指数增长:

$$N(t) = N_0 \mathrm{e}^{at}.$$

由于上述模型考虑的因素少, 实践表明此模型是不正确的.

后来人们又提出了一个新的模型, 认为(6.21)中的比例系数 a 不应是一个常数, 而是 $a_0 - bN(t)$, 其中 $a_0>0$, $b>0$, 后者比前者小. 换言之, 随着 $N(t)$的增大, 由于资源等影响, $N(t)$对 t 的增长率要减慢, 即成为

$$\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} = (a_0 - bN(t))N(t). \tag{6.22}$$

当 $N(t)$很大时, $-bN(t)$这一项不能忽略. 对(6.22)分离变量并用初值条件 $N(t_0) = N_0$ 积分之, 得

$$N(t) = \frac{a_0 N_0}{bN_0 + (a_0 - bN_0)\mathrm{e}^{-a_0(t-t_0)}},$$

当 $t\to+\infty$时 $N(t)\to\frac{a_0}{b}$. 这说明, 经一定时间之后, 该种群总数趋于一饱和值. 从国家的几次人口统计数字可得出 a_0 与 b 的拟合值, 然后可得出某年人口的预测值及饱和值.

从 20 世纪 60 年代开始, 国际上用微分方程研究生态种群已有了相当的发展, 我国也有一支不小的队伍在做这方面的研究工作.

习　题　2.6

1. 一根均匀柔软的输电线两端点分别固定在点 A 和点 B (A 和 B 同在

一水平线上).这段电线在它本身重力作用下下垂成一曲线,求这个曲线方程.

2.一物体只受地球引力作用,自无穷高处落下,求该物体落向地面时的速度(即求到达地面时的速度).

3.一质量为 m 的质点作直线运动,从速度为 v_0 的一瞬间开始受到和时间立方成正比(比例系数为 k)的力的作用;另外,质点还受到和速度与时间的乘积成正比(比例系数为 k_1)的阻力,试求速度的变化规律.

4.若曲线上任意点的切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标,求此曲线族.

5.求下列曲线族的正交曲线族,其中 C 是任意常数:

(1) $xy=C$;　　(2) $Cx^2+y^2=1$;

(3) $y^2=4C(x+C)$.

6.物质 A 和物质 B 化合生成新的物质 X.设在化合生成新的物质过程中,物质总量不变,新物质中所含物质 A 与 B 的比为 $\alpha:\beta$,并且生成速度和 A 与 B 的剩余量乘积成正比,比例系数 $k>0$.求生成物 X 的量 x 随时间的关系 $x(t)$ (见习题 1.1 第 5 题).

7.一容器在开始时盛有盐水 100 升,其中含净盐 10 千克.现以每分钟 2 升的速率注入清水,同时以每分钟 2 升的速率将冲淡的盐水放出.容器中装有搅拌器使容器中的溶液随时随地保持均匀.求过程开始后 50 分钟时溶液中的含盐量.

8.有一圆锥形容器,尖顶在下,底在上,顶角为 2α $\left(0<\alpha<\frac{\pi}{4}\right)$,高为 H.先在顶部截去高为 H_0 的小圆锥,使形成一小孔,将孔用塞子塞住,再往该容器内灌满液体,然后将塞子拔去,让液体流出,设液体流出的速率为 $\mu\sqrt{2gh}$,其中 $0<\mu<1$ 为常数,h 为该时液面与小孔的高差.问经多少时间液体流完.

本 章 小 结

本章介绍了几种典型类型的一阶方程和几种可降阶的二阶方程的初等积分法.其中以一阶方程的解法为主,其他几种可归结为解一阶方程.

在§2.4开头，曾对一阶方程的解法，原则上作了小结，在此不再重复．不论该方程是写成 $y' = f(x, y)$的形式，还是写成

$$M(x, y)\mathrm{d}x + N(x, y)\mathrm{d}y = 0$$

的形式，读者应熟练掌握变量分离的方程、齐次方程、一阶线性方程、伯努利方程、全微分方程、具有形为 $\mu(x)$的积分因子的方程、具有形为 $\mu(y)$的积分因子的方程等各类方程的特点，并会熟练地判断，同时采取相应的方法去求解．有些方程不属于上述类型，如§2.4中的某些例子那样，可通过简单地变换化成某类典型方程求解．读者应细心体会该节的那些例子，并完成相应的习题．

几种可降阶的二阶方程是一些十分简单的二阶方程．关键在于识别所属的类型，然后按类型采用相应的方法求解．对于 $y'' = f(x, y')$和 $y'' = f(y, y')$这两种不同类型，读者应注意(5.5)与(5.16)式不同之处．

总之，掌握初等积分法在于多看多练，总结经验．卡姆克(Kamke)著的《常微分方程手册》中罗列了各种类型方程及各种解法，必要时可查找．但是作为教学，只要达到如上的要求就可以了,而并不要求读者花费太多的精力去演算各种各样的方程．

复　习　题

1．求下列方程的通积分:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{2t}{1+t^2}y = \dfrac{1}{1+t^2}$;

(2) $(1+t^2)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + ty = (1+t^2)^{\frac{5}{2}}$;

(3) $(x - \sqrt{xy})\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y$;

(4) $(t + 2y + 3) + (2t + 4y - 1)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = 0$;

(5) $e^{\frac{x}{y}}(y - x)\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y(1 + e^{\frac{x}{y}}) = 0$;

(6) $\frac{y^2}{2}+2ye^x+(y+e^x)\frac{dy}{dx}=0$;

(7) $1+(1+xy)e^{xy}+(1+x^2e^{xy})\frac{dy}{dx}=0$;

(8) $\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y^2+3}$;

(9) $\frac{dy}{dx}+xy=\frac{x}{y}e^{x^2}$;

(10) $\frac{dy}{dx}=4e^{-y}\sin x-1$.

2．**求下列初值问题的解**:

(1) $3x^2y+8xy^2+(x^3+8x^2y+12y^2)\frac{dy}{dx}=0$，$y(2)=1$;

(2) $3t^2+4ty+(2y+2t^2)\frac{dy}{dt}=0$，$y(0)=1$;

(3) $t\frac{dy}{dt}=y+\sqrt{t^2+y^2}$，$y(1)=0$.

3．**确定常数** a **使下述方程成为全微分方程，并且解这个方程**:

$$\left(\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}\right)dx+\frac{ax+1}{y^3}dy=0.$$

4．**方程**$(e^t\sec y-\tan y)dt+dy=0$ **具有形如** $e^{-at}\cos y$ **的积分因子，其中** a **为某常数，试求出** a **值，并解这个方程**.

5．**试讨论方程**$\frac{dy}{dt}+\frac{1}{\sqrt{t}}y=e^{\frac{\sqrt{t}}{2}}$**的解当** $t\to0$ **时的极限**.

6．**试讨论方程**$\frac{dy}{dx}+y\tan x=\frac{1}{2}\sin 2x$ **的解当** $x\to\frac{\pi}{2}$**时的极限**.

7．**求** $y''(1-y)+2(y')^2=0$ **的通解**.

8．$x\frac{d^2x}{dt^2}-\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=x^2\ln x$ **的通解**.

9．**证明：若** $y(x)$**是初值问题**

$$\frac{dy}{dx}=p(x)\sin y,\quad y(0)=0$$

的解，则 $y(x)\equiv 0$，**其中** $p(x)$ **在**$(-\infty, +\infty)$**上连续**．

10．**方程**$\dfrac{dy}{dx}=y\cos x+\sin x$ **有没有** 2π **周期解**？**若有，求出其解；若无，说明理由**．

11．**设** $y(x)$**在**$[0, +\infty)$**上连续可微，并且**

$$\lim_{x\to+\infty}(y'(x)+y(x))=0.$$

证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}y(x)=0$．

第 3 章　一阶微分方程的基本理论

本章研究一阶微分方程的基本理论, 其中有: 在什么条件下保证一阶方程初值问题有解 ?在什么条件下保证这种解惟一 ?解的存在区间有多大 ?初值问题的解当然是初值的函数, 那么它是否是初值的连续函数 ?它对初值是否可微 ?等等, 这一系列基本问题, 既有重要的理论意义, 又有丰富的实际意义 .本章所用的工具, 不超出数学分析的范围 .要求读者能理解本章所阐述的基本理论, 掌握一些能说明问题的有启发性的例子 .

§3 .1　初值问题解的存在惟一性

3 .1 .1　毕卡(Picard)逐次逼近法与存在惟一性定理

在第一章的末尾已经指出, 能用初等积分法求解的微分方程, 为数是很少的 .人们自然要问, 这究竟是因为那些微分方程根本就不存在解, 还是因为局限于“初等积分法”, 受到方法上的限制的原因 ?这是本节要讲的一个问题, 研究的结果表明, 在一定条件下, 一阶方程初值问题的解是存在的, 尽管它们不能用初等积分法求得 .

本节要讲的另一个问题是,已解出导数的一阶方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y), \\ y|_{x = x_0} = y_0 \end{cases} \tag{1 .1}$$

的解是否惟一?在第 2 章中已经看到，一些特定类型的一阶方程，在一定条件下，它们初值问题的解不但存在，而且惟一. 例如定理 2.1.1、定理 2.2.1 和定理 2.3.1 所表示的那些情形. 但是又可举出一些初值问题的解存在但不惟一的例子. 例如

例 1 考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}}, \\ y|_{x=x_0} = 0, \end{cases} \tag{1.2}$$

易知 $y = 0$ 是(1.2)的一个解. 除此之外，在区域 $y > 0$ 和 $y < 0$ 内，采用分离变量法，容易求得$\dfrac{dy}{dx} = y^{\frac{2}{3}}$的通解为

$$y = \frac{1}{27}(x + C)^3.$$

对于每个固定的 C，解 $y = \frac{1}{27}(x + C)^3$ 可以延伸到 $y = 0$. 以 $y|_{x=x_0} = 0$ 代入求出 C，得到

$$y = \frac{1}{27}(x - x_0)^3$$

(见图 3-1). 容易验证它的确也是(1.2)的解. 由此可见，(1.2)至少有两个解 $y = 0$ 和 $y = \frac{1}{27}(x - x_0)^3$. 实际上，(1.2)还有更多的解. 例如

$$y = \begin{cases} \dfrac{1}{27}(x - x_0)^3, & x \geq x_0, \\ 0, & x < x_0 \end{cases}$$

和

$$y = \begin{cases} 0, & x \geq x_0, \\ \dfrac{1}{27}(x - x_0)^3, & x < x_0 \end{cases}$$

也都是(1.2)的解.

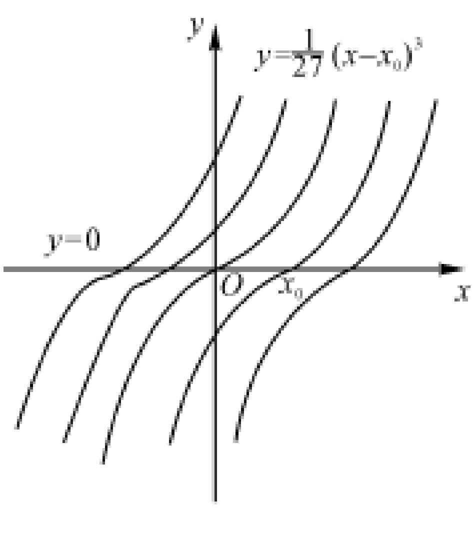

图 3-1

例 2 考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2, \\ y|_{x=x_0} = 0. \end{cases} \tag{1.3}$$

易知 $y=0$ 是(1.3)的一个解.除此之外,在区域 $y>0$ 和 $y<0$ 内,采用分离变量法,容易求得 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = y^2$ 的通解为 $y = -\dfrac{1}{x+C}$.这个解不能延伸到 $y=0$ 上(见图 3-2).所以 $y=0$ 是(1.3)的惟一解.

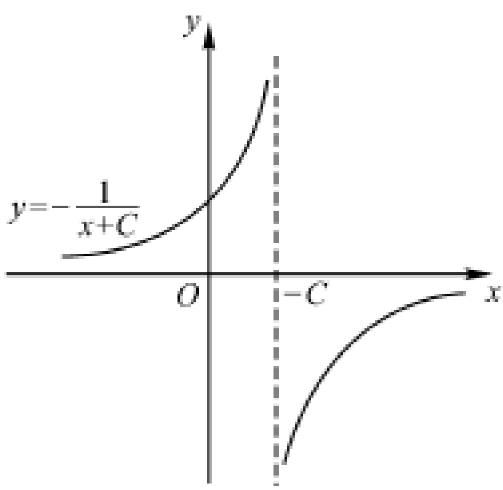

图 3-2

例 1 和例 2 同是变量分离的方程,但关于惟一性的结论却不一样.所以很有必要讨论一般的一阶方程初值问题(1.1)的解的惟一性问题.以及在什么条件下可以保证(1.1)的解存在且惟一.

显而易见,仅保证初值问题(1.1)解的存在性条件较弱,保证初值问题(1.1)的解既存在且惟一的条件较强.使用较强的条件,在一定程度上讲,其证明较易.先从后一问题讲起,即证明下述以毕卡命名的初值问题解的存在惟一性定理.

定理 3.1.1 给定初值问题(1.1),设函数 $f(x,y)$在矩形区域

$$R = \{(x,y) \mid |x - x_0| \le a,\ |y - y_0| \le b\} \tag{1.4}$$

上连续；并且对 y 满足所谓李普希兹(Lipschitz)条件：即对于 R 上任意两点(x, y_1)和(x, y_2)，不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{1.5}$$

恒成立．这里 L 是与(x, y_1)和(x, y_2)无关的正常数(称为李普希兹常数)．则在区间$|x - x_0| \leq h$ 上初值问题(1.1)存在惟一的解．这个解在区间$|x - x_0| \leq h$ 上是连续可微的．这里

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, \tag{1.6}$$

$$M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)|, \tag{1.7}$$

在证明定理之前，先作一点说明．(1.6)的意思是说，初值问题(1.1)解的存在区间$|x - x_0| \leq h$ 的半径 h 为 a 与$\frac{b}{M}$中小的那一个．h 不能大于 a 的原因是显然的，因为解至多只可能在 R 所涉及的 x 的区间$|x - x_0| \leq a$ 上存在．至于 h 为什么不能大于$\frac{b}{M}$，需要作一点说明．不妨设$\frac{b}{M} < a$．考虑一个特殊的初值问题：

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \pm M, \\ y|_{x = x_0} = y_0, \end{cases} \quad (x, y) \in R. \tag{*}$$

显然，$y = y_0 \pm M(x - x_0)$是(*)的解，它当然只能在区域 R 内适用．它与 R 的上、下两边界$|y - y_0| = b$ 的交点为$|x - x_0| = \frac{b}{M}$．由此可见，对于一般的初值问题(1.1)，h 当然不能大于$\frac{b}{M}$．

以上说明 h 既不能大于 a，也不能大于$\frac{b}{M}$．至于为什么(1.1)的解必在区间

$$|x - x_0| \leq h = \min\{a, \frac{b}{M}\}$$

上存在，严格的证明在下面叙述．但是从直观上，可以先作一些说明．对于 R 上的每一点，作出以 $f(x, y)$为斜率的线素，在 R

上作出$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$的线素场，场上各点处的线素斜率的绝对值$|f(x,y)|\leq M$.由此直观上可以看出，经过点$(x_0,y_0)$的积分曲线必进入以该点为顶点的左、右两个三角形域$PAB$和$PCD$，积分曲线进入这两个三角形域之后，沿着线素场所规定的方向，向左、右延伸.由于$|f(x,y)|\leq M$，因此积分曲线不会从直线段PA，PB和PC，PD上走出三角域(图3-3)，而最后一直可以延伸到左边界AB和右边界CD.从而可知解在区间$|x-x_0|\leq h$上存在.以上的说明，当然是不严格的.但是对于理解定理的结论，是有一定的作用的.

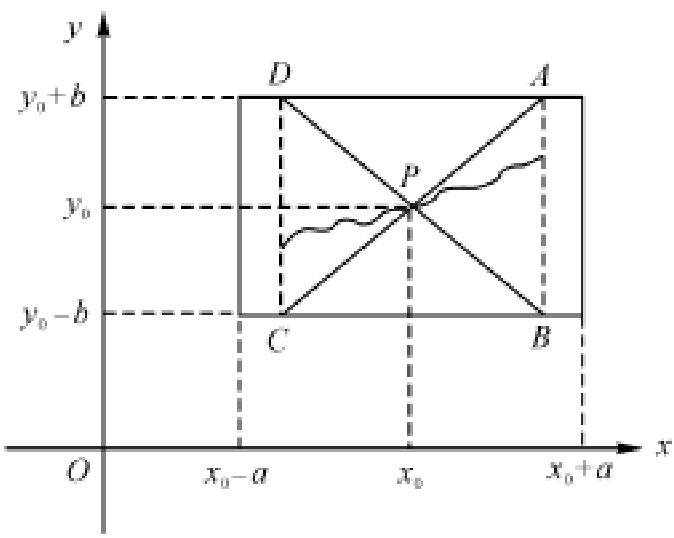

图3-3

至于定理中的惟一性部分，就不那么直观了.下面转入定理的严格证明.

定理3.1.1的证明　这个定理的证明步骤比较长，可以分成4段.

(1)　**构造一个近似解的序列.** 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{1.8}$$

一般说来是不能用初等积分法求解的.但是如果$f(x,y)$中的y

用一已知函数，例如用

$$y=y_0 \tag{1.9}$$

来代替，那么所得到的方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y_0) \tag{1.10}$$

的右边是 x 在区间 $|x-x_0|\leq a$ 上的已知函数，是容易积分的．将(1.10)两边对 x 积分，并令它满足初值条件

$$y|_{x=x_0}=y_0, \tag{1.11}$$

于是得到

$$y=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)\mathrm{d}x.$$

它在区间 $|x-x_0|\leq a$ 上连续．一般说来，它并不正好是(1.1)的解．称它为(1.1)的第 1 次近似解，记为

$$y_1(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)\mathrm{d}x, \tag{1.12}$$

并称(1.9)为(1.1)的第 0 次近似解．

现在来估算一下由(1.12)确定的函数 $y_1(x)$的界限：

$$\begin{aligned}|y_1(x)-y_0| &= \left|\int_{x_0}^{x}f(x,y_0)\mathrm{d}x\right| \leq \left|\int_{x_0}^{x}|f(x,y_0)|\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x}M\mathrm{d}x\right| = M|x-x_0|,\end{aligned} \tag{1.13}$$

所以当 $|x-x_0|\leq h$ 时，有 $M|x-x_0|\leq Mh\leq b$，即能保证

$$|y_1(x)-y_0|\leq b.$$

这就推知，当 $|x-x_0|\leq h$ 时，$(x,y_1(x))\in R$．于是 $f(x,y_1(x))$有定义，并且是 x 在区间 $|x-x_0|\leq h$ 上的连续函数．

考虑方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y_1(x)).$$

两边对 x 积分，并令其满足初值条件(1.11)，于是得到

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\mathrm{d}x .$$

将它记为

$$y_2(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_1(x))\mathrm{d}x,$$

称它为(1.1)的第 2 次近似解.类似地可以证明当 $|x - x_0| \leq h$ 时有

$$|y_2(x) - y_0| \leq b .$$

即当 $|x - x_0| \leq h$ 时，仍有 $(x, y_2(x)) \in R$.

如此继续下去，设已定义出 $y_{n-1}(x)$，当 $|x - x_0| \leq h$ 时满足

$$|y_{n-1}(x) - y_0| \leq b,$$

则 $(x, y_{n-1}(x)) \in R$，于是可以定义(1.1)的第 n 次近似解:

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\mathrm{d}x . \tag{1.14}$$

易知当 $|x - x_0| \leq h$ 时有

$$\begin{aligned} |y_n(x) - y_0| &= \left| \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\mathrm{d}x \right| \\ &\leq \left| \int_{x_0}^{x} M\mathrm{d}x \right| = M|x - x_0| \leq b, \end{aligned} \tag{1.15}$$

从而 $(x, y_n(x)) \in R$.

这样，就由归纳法定义了一个无穷序列

$$y_0,\ y_1(x),\ y_2(x),\ \cdots,\ y_n(x),\ \cdots, \tag{1.16}$$

其中的每一个函数，在区间 $|x - x_0| \leq h$ 上连续，并且满足 $(x, y_n(x)) \in R\ (n = 0, 1, \cdots)$.

(2) 证明无穷序列 $\{y_n(x)\}$ 在区间 $|x - x_0| \leq h$ 上一致收敛.因为

$$\begin{aligned} y_n(x) = y_0 &+ (y_1(x) - y_0) + (y_2(x) - y_1(x)) + \cdots \\ &+ (y_n(x) - y_{n-1}(x)), \end{aligned}$$

所以证明$\{y_n(x)\}$在$|x-x_0|\le h$上一致收敛,相当于证明级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}[y_n(x)-y_{n-1}(x)] \tag{1.17}$$

在$|x-x_0|\le h$上一致收敛.

由定义式(1.14)容易得到

$$\begin{aligned}|y_n(x)-y_{n-1}(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x}[f(x,y_{n-1}(x))-f(x,y_{n-2}(x))]\,\mathrm{d}x\right| \\ &\le \left|\int_{x_0}^{x}|f(x,y_{n-1}(x))-f(x,y_{n-2}(x))|\,\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

利用李普希兹条件(1.5),有

$$\begin{aligned}&|f(x,y_{n-1}(x))-f(x,y_{n-2}(x))| \\ &\le L|y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)|.\end{aligned}$$

将它代入上式,便得一个递推的估算式:

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le\left|\int_{x_0}^{x}L|y_{n-1}(x)-y_{n-2}(x)|\,\mathrm{d}x\right| \quad (n=2,3,\cdots). \tag{1.18}$$

由此,用数学归纳法,立即可以得到估值:

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\le\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|x-x_0|)^n}{n!} \quad (n=1,2,\cdots). \tag{1.19}$$

事实上,当$n=1$时,由(1.13)知(1.19)成立.设(1.19)当$n=k$时成立:

$$|y_k(x)-y_{k-1}(x)|\le\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|x-x_0|)^k}{k!},$$

则由(1.18)有

$$|y_{k+1}(x)-y_k(x)|\le\left|\int_{x_0}^{x}L|y_k(x)-y_{k-1}(x)|\,\mathrm{d}x\right|$$

$$\leq \frac{M}{k!}\left|\int_{x_0}^{x}(L|x-x_0|)^k \mathrm{d}x\right|$$

$$=\frac{M}{(k+1)!}\cdot L^k|x-x_0|^{k+1}$$

$$=\frac{M}{L}\cdot\frac{(L|x-x_0|)^{k+1}}{(k+1)!},$$

即证明了(1.19)**当** $n=k+1$ **时也成立**.

由不等式(1.19)**可知,当**$|x-x_0|\leq h$**时,有**

$$|y_n(x)-y_{n-1}(x)|\leq\frac{M}{L}\cdot\frac{(Lh)^n}{n!}\quad(n=1,2,\cdots).\tag{1.20}$$

易知,正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{M}{L}\cdot\frac{(Lh)^n}{n!}$$

是收敛的.于是由数学分析中的维尔斯特拉斯(Weierstrass)**判别法推知函数项级数**(1.17)**在**$|x-x_0|\leq h$**上一致收敛.从而推知序列**$\{y_n(y)\}$**在**$|x-x_0|\leq h$**上一致收敛.将它的极限函数记为**$\varphi(x)$,**即**

$$\lim_{n\to+\infty}y_n(x)=\varphi(x),\quad|x-x_0|\leq h.\tag{1.21}$$

连续函数的一致收敛极限函数也必定是连续函数,所以$\varphi(x)$**在区间**$|x-x_0|\leq h$**上连续.又由不等式**(1.15)**可以推知**

$$|\varphi(x)-y_0|\leq M|x-x_0|\leq b,$$

所以曲线 $y=\varphi(x)$**位于区域** R **内.更确切地讲,它位于如图**3-3**的三角形域** PAB **和** PCD **内**(**包括边界**).

(3) **证明上述** $\varphi(x)$**的确是**(1.1)**的解.事实上,将**(1.14)**两边对** x **求导数,得**

$$y_n'(x)=f(x,y_{n-1}(x)),\quad|x-x_0|\leq h.\tag{1.22}$$

如果再能证明:当$|x-x_0|\leq h$**时对** x **一致地有**

$$\lim_{n\to\infty}f(x,y_n(x))=f(x,\varphi(x)),\tag{1.23}$$

则由数学分析中所熟知的导数符号与极限符号交换次序定理,就有

$$\varphi'(x) = \left[\lim_{n\to\infty} y_n(x)\right]' \qquad \text{(由(1.21))}$$
$$= \lim_{n\to\infty} y_n'(x) \qquad \text{(交换次序)}$$
$$= \lim_{n\to\infty} f(x, y_{n-1}(x)) \qquad \text{(由(1.22))}$$
$$= f(x, \varphi(x)), \quad |x - x_0| \leq h. \qquad \text{(由(1.23))}$$

这就证明了当 $|x - x_0| \leq h$ 时 $\varphi(x)$ 的确是(1.1)的方程的解.

以下就来证明(1.23).因为 $f(x, y)$ 对 y 满足李普希兹条件,故有

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, \varphi(x))| \leq L|y_n(x) - \varphi(x)|. \tag{1.24}$$

再由于(1.21)在 $|x - x_0| \leq h$ 上一致成立.故对于任意给定的 $\varepsilon > 0$,存在 $N = N(\varepsilon)$,当 $n > N$ 时,在 $|x - x_0| \leq h$ 上成立

$$|y_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{L}.$$

将上述不等式代入(1.24),推得当 $n > N$ 时,在 $|x - x_0| \leq h$ 上成立

$$|f(x, y_n(x)) - f(x, \varphi(x))| < \varepsilon.$$

这就证明了(1.23)成立.于是证明了 $\varphi(x)$ 是(1.1)的方程在区间 $|x - x_0| \leq h$ 上的解.又由于 $y_n(x_0) = y_0$ $(n = 1, 2, \cdots)$.由(1.21)推得

$$\varphi(x_0) = \lim_{n\to\infty} y_n(x_0) = \lim_{n\to\infty} y_0 = y_0,$$

所以 $\varphi(x)$ 的确是初值问题(1.1)在区间 $|x - x_0| \leq h$ 上的解.显然 $\varphi(x)$ 是连续可微的.

(4) 证明(1.1)的解的惟一性.假设(1.1)有两个解: $y = \varphi(x)$ 和 $y = \psi(x)$,它们的公共存在区间是 $|x - x_0| \leq \alpha$, $\alpha \leq a$, $(x, \varphi(x)) \in R$, $(x, \psi(x)) \in R$,则

$$\frac{\mathrm{d}\varphi(x)}{\mathrm{d}x} \equiv f(x, \varphi(x)), \quad \frac{\mathrm{d}\psi(x)}{\mathrm{d}x} \equiv f(x, \psi(x)),$$

于是

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))\mathrm{d}\xi,$$

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\psi(\xi))\mathrm{d}\xi.$$

将上述两式相减，并由李普希兹条件(1.5)，**容易推得**

$$\begin{aligned}|\varphi(x)-\psi(x)|&=\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))]\mathrm{d}\xi\right|\\&\leq\left|\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))|\mathrm{d}\xi\right|\\&\leq L\left|\int_{x_0}^{x}|\varphi(\xi)-\psi(\xi)|\mathrm{d}\xi\right|\quad(|x-x_0|\leq\alpha).\end{aligned}$$

记 $u(x)=\int_{x_0}^{x}|\varphi(\xi)-\psi(\xi)|\mathrm{d}\xi$，**并设** $0\leq x-x_0\leq\alpha$，**于是上式可改写为**

$$\frac{\mathrm{d}u(x)}{\mathrm{d}x}-Lu(x)\leq 0,$$

上式两边同乘以 e^{-Lx} (**犹如积分因子**)，**得到**

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(u(x)\mathrm{e}^{-Lx})\leq 0.$$

两边从 x_0 **到** x **积分，并注意到** $u(x_0)=0$，**从而推得**

$$u(x)\mathrm{e}^{-Lx}\leq 0.$$

但因 $\mathrm{e}^{-Lx}>0$，**由此推知** $u(x)\leq 0$，**再由** $u(x)$**的定义知** $u(x)\geq 0$.**于是知** $u(x)=0$，**即当** $0\leq x-x_0\leq\alpha$ **时**，

$$\int_{x_0}^{x}|\varphi(\xi)-\psi(\xi)|\mathrm{d}\xi=0.$$

两边对 x **求导数推知当** $0\leq x-x_0\leq\alpha$ **时**，

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\equiv 0.$$

由此即得当 $0\leq x-x_0\leq\alpha$ **时**

$$\varphi(x)\equiv\psi(x).$$

同理可证当 $-\alpha\leq x-x_0\leq 0$ **时** $\varphi(x)\equiv\psi(x)$.**于是当** $|x-x_0|\leq$

α时

$$\varphi(x) \equiv \psi(x).$$

这就证明了只有一个解满足(1.1). □

定理已证毕, 现在再作一些说明.

第(1)段所作的序列$\{y_n(x)\}$称为毕卡序列, 构造毕卡序列并证明它的一致收敛性的这种方法, 称为毕卡逐次逼近法. 第(2)段证明毕卡序列的一致收敛性和第(4)段证明解的惟一性中起重要作用的是李普希兹条件(1.5). 在3.1.2节中将进一步讨论李普希兹条件, 毕卡序列的一致收敛性与解的惟一性这三者之间的关系. 在进一步讨论之前, 先讲定理3.1.1的一些推论.

首先指出, 研究初值问题时, 所考虑的区域不一定是边平行于坐标轴的闭矩形区域, 而可以是一般的(开)区域. 为了作此推广, 先介绍局部李普希兹条件概念.

设$f(x, y)$在区域G内定义, 并设对于区域G内的任意一点(x_0, y_0), 存在以点(x_0, y_0)为中心, 其边平行于坐标轴的某闭矩形区域

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b\} \subset G, \tag{1.25}$$

$f(x, y)$在R上满足李普希兹条件. 即存在常数$L > 0$(此常数L可能与(x_0, y_0)和a, b有关), 对于R内任意两点(x, y_1)和(x, y_2), 有

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|. \tag{1.26}$$

则称$f(x, y)$在G内对y满足局部李普希兹条件.

定理3.1.1的推论如下:

推论1 设$f(x, y)$在区域G内连续, 并且在G内对y满足局部李普希兹条件, 则对于G内任意一点(x_0, y_0), 存在包含x_0在内的一个小区间$|x - x_0| \leq \alpha$, 在该区间上初值问题(1.1)的解存在并且惟一.

证　由所设 $f(x,y)$ 在 G 内对 y 满足局部李普希兹条件知，对于点 (x_0, y_0) 可以作一个以它为中心，其边平行于坐标轴的矩形(1 25)，在 R 内满足李普希兹条件(1 .26) . 于是由定理 3 .1 .1 知，存在包含 x_0 在内的某一个小区间 $|x - x_0| \leq \alpha$，在该区间上初值问题(1 .1)的解存在并且惟一 . □

要验证初值问题(1 .1)满足定理 3 .1 .1 或推论 1 的条件，重要的是验证 $f(x,y)$ 对 y 满足(局部)李普希兹条件 . 一般说来直接验证是比较麻烦的 . 现在指出，如果 $f_y'(x,y)$ 在区域 G 内存在并且有界或连续，那么就可以推出 $f(x,y)$ 在 G 内对 y 满足局部李普希兹条件 . 事实上，对于 G 内任意一点 (x_0, y_0)，可以作一个以点 (x_0, y_0) 为中心、边平行于坐标轴的闭矩形区域 $R \quad G$，$f_y'(x,y)$ 在 R 上有界 . 所以存在常数 $L > 0$，当 $(x,y) \in R$ 时，$|f_y'(x,y)| \leq L$. 这样一来对于 R 上任意两点 (x, y_1) 和 (x, y_2)，由中值定理有

$$
\begin{aligned}
|f(x,y_1) - f(x,y_2)| &= |f_y'(x,y)(y_1 - y_2)| \\
&\leq L|y_1 - y_2| \quad (\text{因为}(x,y) \in R) .
\end{aligned}
$$

于是可得较易使用的推论:

推论 2　设 $f(x,y)$ 在区域 G 内连续，并设 $f_y'(x,y)$ 在区域 G 内存在并且有界或连续，则对于 G 内任意一点 (x_0, y_0)，存在包含 x_0 在内的某一小区间 $|x - x_0| \leq \alpha$，在该区间上初值问题(1 .1)的解存在并且惟一 .

现在可以回过头来说明本节例 1 和例 2 在惟一性问题上为什么出现不同的结论 .

先看例 2 的方程 $y' = y^2$. 记 $f(x,y) = y^2$，在全平面上 $f(x,y)$ 和 $f_y'(x,y)$ 连续 . 由推论 2，对于平面上的任意一点有且仅有一条积分曲线经过，特别是，初值问题(1 .3)仅有惟一的一个解 $y = 0$.

但对于例 1 的方程 $y' = y^{\frac{2}{3}}$，记 $f(x, y) = y^{\frac{2}{3}}$．易知在点 $(x_0, 0)$的任意小的矩形邻域 U 内，$f(x, y)$对于 y 不满足李普希兹条件．事实上，由于

$$|f(x, y_1) - f(x, 0)| = |y_1^{2/3}| = |y_1^{-1/3}||y_1 - 0|,$$

当 $y_1 \to 0$ 时$|y_1^{-1/3}| \to \infty$，所以不存在常数 $L > 0$，使

$$|f(x, y_1) - f(x, 0)| \leq L|y_1 - 0|.$$

因此，无法应用推论 2，初值问题(1.2)的解的惟一性无法得到保证．从例 1 的具体论证可知，该初值问题的解存在但不惟一．因为 x_0 是任意给定的，所以在 $y = 0$ 上任意一点，方程 $y' = y^{\frac{2}{3}}$ 至少有两个解对应的积分曲线(一个是 $y = 0$，另一个是 $y = \frac{1}{27}(x - x_0)^3$)经过这一点．在 $y = 0$ 上，该方程的解的惟一性遭到破坏．

最后指出，在定理条件下，毕卡序列中近似解 $y_n(x)$与(精确)解之差，可以估算出来．

推论 3　在定理 3.1.1 的条件下，设 $y_n(x)$是(1.1)的毕卡序列中的第 n 次近似解，$\varphi(x)$是(1.1)的解，则有估计式:

$$|\varphi(x) - y_n(x)| \leq \frac{ML^n}{(n+1)!}|x - x_0|^{n+1},$$

$$n = 0, 1, \cdots, \quad |x - x_0| \leq h. \tag{1.27}$$

证　由假设 $\varphi(x)$是(1.1)的解，故有

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x. \tag{1.28}$$

从而

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - y_0| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(x, \varphi(x))\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(x, \varphi(x))|\mathrm{d}x\right|\end{aligned}$$

$$\leq M\left|\int_{x_0}^{x} \mathrm{d}x\right| = M|x - x_0|.$$

故当 $n=0$ 时,(1.27)成立.又因

$$y_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x, y_{n-1}(x))\mathrm{d}x,$$

于是由(1.28)和上式得到

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - y_n(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} [f(x,\varphi(x)) - f(x, y_{n-1}(x))]\mathrm{d}x\right| \\ &\leq \left|\int_{x_0}^{x} |f(x,\varphi(x)) - f(x, y_{n-1}(x))|\mathrm{d}x\right| \\ &\leq L\left|\int_{x_0}^{x} |\varphi(x) - y_{n-1}(x)|\mathrm{d}x\right|. \end{aligned} \tag{1.29}$$

设当 $n=k-1$ 时(1.27)成立,则当 $n=k$ 时,由(1.29)推得

$$\begin{aligned}|\varphi(x) - y_k(x)| &\leq L\left|\int_{x_0}^{x} \frac{ML^{k-1}}{k!}|x - x_0|^k \mathrm{d}x\right| \\ &= \frac{ML^k|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!}, \quad |x - x_0| \leq h.\end{aligned}$$

即证明了当 $n=k$ 时(1.27)亦成立. □

例 3 构造毕卡序列,求初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x^2 + y^2, \\ y(0) = 0\end{cases} \tag{1.30}$$

的第 3 次近似解并估计误差.

解 函数 $f(x, y) = x^2 + y^2$ 和 $f_y'(x, y) = 2y$ 在全平面上连续,所以对于任意的闭矩形区域

$$R = \{(x, y) \mid |x| \leq a, |y| \leq b\},$$

(1.30)在 R 上满足定理 3.1.1 的条件, R 上的李普希兹常数可以取为

$$L = \max_{(x,y)\in R}|f_y'(x, y)| = \max_{|y|\leq b}|2y| = 2b.$$

以下构造毕卡序列，由初值条件 $y|_{x=0}=0$，有 $x_0=0$，$y_0=0$，及

$$y_1=y_0+\int_{x_0}^{x}(x^2+y_0^2)\,dx=\int_0^x x^2\,dx=\frac{1}{3}x^3,$$

$$y_2=y_0+\int_{x_0}^{x}(x^2+y_1^2(x))\,dx$$

$$=y_0+\int_{x_0}^{x}\left(x^2+\frac{1}{9}x^6\right)dx=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7,$$

$$y_3=y_0+\int_{x_0}^{x}(x^2+y_2^2(x))\,dx$$

$$=y_0+\int_{x_0}^{x}\left(x^2+\frac{1}{9}x^6+\frac{2}{189}x^{10}+\frac{1}{3969}x^{14}\right)dx$$

$$=\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{63}x^7+\frac{2}{2079}x^{11}+\frac{1}{59535}x^{15}.$$

当 $(x,y)\in R$ 时，

$$|f(x,y)|=|x^2+y^2|\le a^2+b^2\overset{\text{记为}}{=}M.$$

于是由(1 27)得到 $y_3(x)$ 与(精确)解 $\varphi(x)$ 的误差估计为

$$|\varphi(x)-y_3(x)|\le\frac{(2b)^3(a^2+b^2)}{4!}|x|^4,$$

这里适用的范围是 $|x|\le h=\min\left\{a,\frac{b}{a^2+b^2}\right\}$.

3.1.2 初值问题解的存在性和惟一性的讨论

下面继续讨论李普希兹条件、初值问题解的惟一性和毕卡序列收敛性这三者之间的关系．由定理3.1.1已知，李普希兹条件是初值问题解的惟一性的充分条件．容易举出例子说明，为了保证初值问题的惟一性，并非一定要求满足李普希兹条件不可，即李普希兹条件不是初值问题解的惟一性的必要条件．例子如下:

例4 设当 $y=0$ 时 $f(x,y)=0$；当 $y\neq0$ 时 $f(x,y)=y\ln|y|$．试讨论初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x, y), \\ y|_{x = x_0} = 0 \end{cases} \tag{1.31}$$

解的惟一性.

解 易知 $f(x, y)$在全平面上连续, 但是在点$(x_0, 0)$的任意小的矩形邻域 U 内不满足李普希兹条件. 事实上, 设(x_0, y_1)是 U 内的任意一点, $y_1 \neq 0$. 考虑 $f(x, y)$在点(x_0, y_1)与点$(x_0, 0)$的差:

$$f(x_0, y_1) - f(x_0, 0) = y_1 \ln |y_1| - 0 = y_1 \ln |y_1|.$$

于是

$$|f(x_0, y_1) - f(x_0, 0)| = \left|\ln |y_1|\right| \, |y_1|.$$

当 $y_1 \to 0$ 时 $\left|\ln |y_1|\right| \to \infty$, 所以不存在常数 $L > 0$, 使

$$|f(x_0, y_1) - f(x_0, 0)| \leq L |y_1|.$$

但是可以通过具体求解, 证明初值问题(1.31)的解仍惟一. 事实上, $y = 0$ 显然是(1.31)的解. 此外, 当 $y \neq 0$ 时, 用分离变量法求得 $y > 0$ 和 $y < 0$ 的区域内的通解为

$$y = \pm e^{Ce^x} \tag{1.32}$$

($y > 0$ 处取"+"号, $y < 0$ 处取"-"号). 不论 x 趋于什么样的有限值, (1.32)的 y 总不会趋于零. 这说明解(1.32)不会经过点$(x_0, 0)$, 即 $y = 0$ 上不会有形如(1.32)的解经过. 所以 $y = 0$ 是(1.31)的惟一解. 图 3-4 中画的是解族(1.32)和解 $y = 0$ 的示意

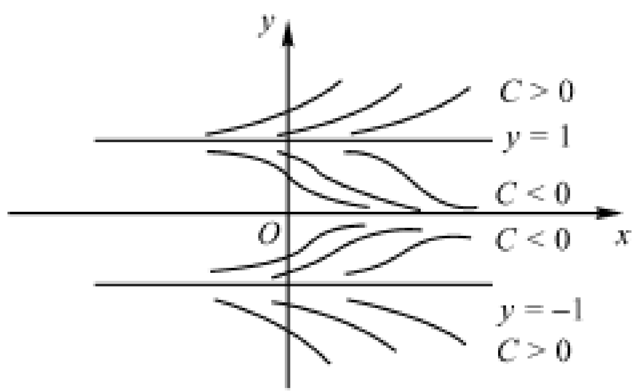

图 3-4

图 .

下面讨论李普希兹条件与毕卡序列收敛性的关系 . 当李普希兹条件不满足时, 可以举例(例 5) 说明, 此时的毕卡序列可以不收敛; 也可以举例(例 6) 说明, 当李普希兹条件不满足时, 即使毕卡序列一致收敛, 初值问题的解也可以不惟一 . 例子如下:

例 5　考虑初值问题

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y), \quad y(0) = 0, \tag{1.33}$$

其中

$$f(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{当 } x = 0, \ -\infty < y < +\infty; \\ 2x, & \text{当 } 0 < x \leq 1, \ -\infty < y < 0; \\ 2x - \dfrac{4y}{x}, & \text{当 } 0 < x \leq 1, \ 0 \leq y < x^2; \\ -2x, & \text{当 } 0 < x \leq 1, \ x^2 \leq y < \infty . \end{cases} \tag{1.34}$$

取(1.33) 的毕卡第 0 次近似解为 $y_0 = 0$, 试研究毕卡序列的收敛性 .

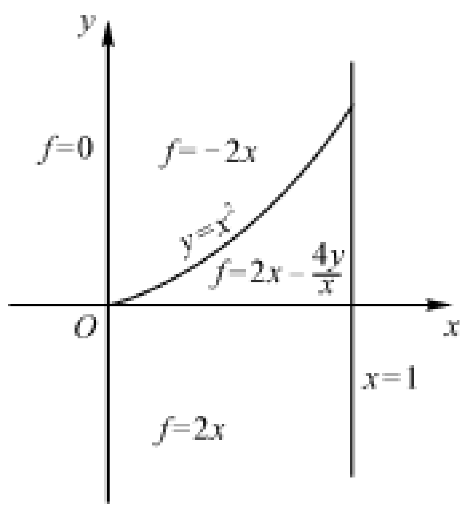

图 3-5

解　图 3-5 中画出了函数 $f(x, y)$ 的定义域 . 容易验证, 函数 $f(x, y)$ 在它的定义域上是连续的 . 例如, 对于点 $O(0, 0)$, $f(0,0) = 0$, 而当点 $(x, y) \neq (0,0)$ 时, 由定义式(1.34) 的第一、第二和第四式知道有

$$|f(x, y)| \leq 2x;$$

(1.34) 式的第三式有

$$f(x, y) = 2x - \frac{4y}{x} \leq 2x$$

及

$$f(x, y) = 2x - \frac{4y}{x} = -2x + \frac{4(x^2 - y)}{x} > -2x,$$

从而也有$|f(x,y)|\leq 2x$.因此推知$f(x,y)$在点$O(0,0)$是连续的.

对于在定义域上其他点处$f(x,y)$的连续性,是很容易验证的,在此从略.由下面定理3.1.2知,初值问题(1.33)的解是存在的.

由初值条件$y(0)=0$知$x_0=0$,$y_0=0$.现在作毕卡序列:

$$y_1(x)=\int_0^x f(x,0)\mathrm{d}x=\int_0^x 2x\mathrm{d}x=x^2,$$

$$y_2(x)=\int_0^x f(x,y_1(x))\mathrm{d}x=\int_0^x(-2x)\mathrm{d}x=-x^2,$$

$$y_3(x)=\int_0^x f(x,y_2(x))\mathrm{d}x=\int_0^x 2x\mathrm{d}x=x^2,$$

$$\cdots,$$

易知$y_{2n-1}(x)=x^2$,$y_{2n}(x)=-x^2$ $(n=1,2,\cdots)$,所以毕卡序列不收敛,从而也知道$f(x,y)$对y不满足局部李普希兹条件.

例6 考虑例1考查过的例子:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^{\frac{2}{3}},\\ y|_{x=x_0}=0.\end{cases}\tag{*}$$

取毕卡第0次近似解$y_0=0$,试研究毕卡序列的收敛性.

解 显然,$y_i=0$ $(i=0,1,\cdots)$.故$\lim\limits_{i\to+\infty}y_i=0$,即毕卡序列一致收敛于函数0.但由例1知,(*)的解不惟一;$f(x,y)$对y不满足局部李普希兹条件,虽然正如刚才看到,毕卡序列却是一致收敛的.

今将上面一系列讨论小结如下.在$f(x,y)$连续条件下,设$f(x,y)$对y满足局部李普希兹条件,则毕卡序列一致收敛,并且初值问题的解存在惟一.如果$f(x,y)$对y不满足局部李普希兹条件,则可发生下述几种情形:

(1) 毕卡序列可以不收敛,例如例5;

(2) 毕卡序列仍可以一致收敛,但初值问题的解不惟一,例如例6;

(3) 毕卡序列一致收敛，初值问题的解也惟一，例如例 4．

由(2)可看出，仅从毕卡序列一致收敛性(在 $f(x, y)$ 对 y 不满足局部李普希兹条件下)，并不能推出初值问题解的惟一性．

如果不考虑惟一性而只考虑初值问题解的存在性，有下述以皮亚诺(Peano)命名的定理 3.1.2，这就回答了本节一开始提出的第一个问题．

定理 3.1.2 给定初值问题(1.1)，设函数 $f(x, y)$ 在矩形区域

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a, \ |y - y_0| \leq b\}$$

上连续，则在区间 $|x - x_0| \leq h$ 上初值问题(1.1)至少存在一个解，这里的 h 由(1.6)给出．

注意，定理中未假设 $f(x, y)$ 对 y 满足李普希兹条件，所以毕卡逐次逼近法不适用，需要用另一种方法去证，在此从略．

对于一般的区域 G，推广定理 3.1.2 得到下述推论．

推论 设 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续，则对于 G 内任意一点 (x_0, y_0)，存在包含 x_0 在内的某一小区间 $|x - x_0| \leq \alpha$，在该区间上初值问题(1.1)至少存在一个解．

证 由定理 3.1.2 显然可得． □

习 题 3.1

1．用逐次逼近法求下列初值问题的第一次和第二次近似解：

(1) $\dfrac{dy}{dt} = 2t(y + 1), \ y(0) = 0$;

(2) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^3, \ y(1) = 1$．

2．设 G 是 (x, y) 平面上的某区域，函数 $f(x, y)$ 在 G 内连续，并设它是 y 的不增函数(即对于 $(x, y_1) \in G$ 和 $(x, y_2) \in G$，若 $y_1 > y_2$，则 $f(x, y_1) \leq f(x, y_2)$)．试证明：初值问题(1.1)自点 (x_0, y_0) 向右行的解存在惟一．这里点 $(x_0, y_0) \in G$．

3．方程 $y' = \frac{3}{2} y^{\frac{1}{3}}$ 在怎样的区域中满足初值问题解的存在惟一性定理 3.1.1 的条件，并求该方程满足 $y(0) = 0$ 的一切解．

4．用逐次逼近法证明隐函数存在定理：设 $F(x, y)$ 和 $F_y'(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内连续，并设 $F(x_0, y_0) = 0$，$F_y'(x_0, y_0) \neq 0$，则在点 (x_0, y_0) 的某邻域内方程 $F(x, y) = 0$ 有惟一的解 $y = \varphi(x)$ 满足 $\varphi(x_0) = y_0$．

§3.2 解的延展

3.2.1 延展的概念

设 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续，由上节讨论知道，初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = f(x, y), \\ y|_{x = x_0} = y_0, \quad (x_0, y_0) \in G \end{cases} \tag{2.1}$$

的解在包含 x_0 在内的某一小区间 $|x - x_0| \leq \alpha$ 上存在．尽管 G 很大，但一般说来 α 仍可很小，所以这种关于解的存在性称为局部存在性．请看下面例 1．

例 1 试按上节解的存在性定理，确定初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d} y}{\mathrm{d} x} = y^2, \\ y|_{x = 0} = 1 \end{cases} \tag{2.2}$$

解的存在区间；并按初等积分法求出(2.2)的解相应的存在区间．

解 记 $f(x, y) = y^2$，它在全平面上连续，取矩形区域

$$R = \{(x, y) \mid |x| \leq a, \ |y - 1| \leq b\},$$

其中 a 和 b 可以是任意正数．但是 b 大 h 不一定大．为了确定 h，要先计算 M．

$$M = \max_{(x, y) \in R} |f(x, y)| = \max_{|y - 1| \leq b} y^2 = (1 + b)^2,$$

选取适当的 b，使 $\frac{b}{M}$ 即 $\frac{b}{(1 + b)^2}$ 达到最大．采用通常研究最大、最

小值的办法，易知当 $b=1$ 时上式取到最大值$\frac{1}{4}$．于是当取 $a\geq\frac{1}{4}$，$b=1$ 时，h 最大．此时

$$h=\min\{a,\frac{b}{M}\}=\frac{1}{4}.$$

即按上节解的存在性定理，只能肯定初值问题(2.2)的解在区间 $|x|\leq\frac{1}{4}$上存在．

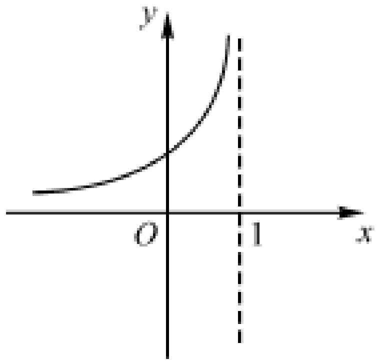

图 3-6

但是按初等积分法容易求得(2.2)的解为

$$y=-\frac{1}{x-1}. \qquad (2.3)$$

易知解(2.3)在区间$(-\infty,1)$和$(1,+\infty)$上存在，包含初值 $x=0$ 在其内的存在区间为$(-\infty,1)$．图 3-6 中画的是解(2.3)在存在区间上的图像．

注意，$f(x,y)=y^2$ 在全平面上连续，x 允许的变化范围为 $-\infty<x<+\infty$．但是初值问题(2.2)的解(2.3)的存在区间仅是 $-\infty<x<1$．而按存在定理 3.1.1 所能肯定的存在区间却只有 $-\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{4}$．

这个例子启示人们去思考三个问题：

(1) 从存在定理所能保证的在小区间上存在的解是否能扩展到较大的区间上？

(2) 尽可能把解的存在区间扩大到直至不能再扩大了，这种尽可能大的区间具有什么特点？当自变量趋于这种区间端点时，解曲线上对应的点走向如何？

(3) 设 $f(x,y)$在带形区域

$$G=\{(x,y)\mid a<x<b,\ |y|<+\infty\}$$

内连续(如例 1，$a=-\infty$，$b=+\infty$)，在什么条件下能保证初值问题(2.1)的解在区间 $a<x<b$ 内也存在？

为此引入解的延展的概念 .

定义 3 .2 .1 设 $y=\varphi(x)$ 在区间 I 上是方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y) \tag{2 .4}$$

的解, 又设 $y=\psi(x)$ 在区间 J 上也是方程(2 .4)的解 .并设 I 是 J 的真子集, 且当 $x\in I$ 时 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$, 则称解 $\psi(x)$ 是解 $\varphi(x)$ 的延展, 即把解 $y=\varphi(x)$ 的存在区间扩展到区间 J 上了 .这里区间 I 和 J 可以是 x 的开区间, 也可以是 x 的闭区间 .

现在回头来看例 1, 如何将存在定理所能肯定的在区间 $-\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{4}$ 上存在的解扩展到较大的区间上去 .

设 $y=\varphi(x)$ 是(2 2)的解, 已知它的存在区间为 $-\frac{1}{4}\leq x\leq\frac{1}{4}$.在区间的右端点 $x=\frac{1}{4}$ 处, 解 $y=\varphi(x)$ 上对应的点 $P(\frac{1}{4},\varphi(\frac{1}{4}))$ 仍属于 G .这里的 G 是使 $f(x,y)=y^2$ 保持连续的区域, 具体说来就是全平面 .再考虑初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=y^2,\\[2ex] y\big|_{x=\frac{1}{4}}=\varphi(\frac{1}{4}) .\end{cases} \tag{2 .5}$$

由于点 $P\in G$, 所以可以作一个以 P 为中心、边平行于坐标轴的闭矩形区域 R_1, 使 R_1 G .对于(2 .5)在 R_1 上使用解的存在定理, 推知在区间 $|x-\frac{1}{4}|\leq h_1$ 上(2 .5)存在解 .这里 h_1 是某正数 .设 $y=\varphi_1(x)$ 是这样的一个解, 即

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}\varphi_1(x)}{\mathrm{d}x}=\varphi_1^2(x),\\[2ex] \varphi_1(\frac{1}{4})=\varphi(\frac{1}{4}) .\end{cases}$$

于是就将解 $\varphi(x)$ 向右扩展到 $x=\frac{1}{4}+h_1$ 了 .

事实上，令

$$\psi(x)=\begin{cases}\varphi(x), & -\dfrac{1}{4}\leq x<\dfrac{1}{4},\\ \varphi_1(x), & \dfrac{1}{4}\leq x\leq\dfrac{1}{4}+h_1,\end{cases}$$

易知 $\psi(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{4}$ 处连续，$\psi(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{4}$ 处的右导数为 $\varphi_1^2\left(\dfrac{1}{4}\right)=\psi^2\left(\dfrac{1}{4}\right)$，$\psi(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{4}$ 处的左导数为 $\varphi(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{4}$ 的左导数，即 $\varphi^2\left(\dfrac{1}{4}\right)=\varphi_1^2\left(\dfrac{1}{4}\right)=\psi^2\left(\dfrac{1}{4}\right)$. 所以 $y=\psi(x)$ 在 $x=\dfrac{1}{4}$ 处存在导数，并满足 $y'=y^2$. 至于在区间 $-\dfrac{1}{4}\leq x<\dfrac{1}{4}$ 和 $\dfrac{1}{4}<x\leq\dfrac{1}{4}+h_1$ 上满足 $y'=y^2$ 是显然的. 于是推知 $y=\psi(x)$ 在区间 $-\dfrac{1}{4}\leq x\leq\dfrac{1}{4}+h_1$ 上满足方程 $y'=y^2$，并且在 $-\dfrac{1}{4}\leq x\leq\dfrac{1}{4}$ 上 $\varphi(x)\equiv\psi(x)$. 按定义知 $\psi(x)$ 是 $\varphi(x)$ 向右的延展. 同理可以将 $\varphi(x)$ 向左扩展，得到 $\varphi(x)$ 向左的延展.

这里讲的是一个例子，对于一般的方程(2.4)的解，可以类似地去扩展而得到解的延展.

引理 3.2.1 设 $f(x,y)$ 在开区域 G 内连续，$y=\varphi(x)$ 在闭区间 $\alpha\leq x\leq\beta$ 上是方程(2.4)的解，则解 $y=\varphi(x)$ 必可向右和向左扩展而得到解 $y=\varphi(x)$ 的延展.

证　与论证(2.5)的延展类似，在此从略，请读者自己完成. □

注意，引理 3.2.1 条件中，区域 G 是开的并且区间 $\alpha\leq x\leq\beta$ 是闭的很是重要. 因为如果 G 是闭的，并且点 $(\beta,\varphi(\beta))$ 又正好落在 G 的边界上，那么就可能不能再扩展了.

引理 3.2.1 用几何的话来说就是，将定义在闭区间 $\alpha\leq x\leq\beta$ 上的积分曲线段 $y=\varphi(x)$ 在左、右两端各接上一个积分曲线段.

因为点$(\alpha,\varphi(\alpha))$和点$(\beta,\varphi(\beta))$都在 G 内，所以可以向左、右接一段积分曲线 .

按照引理 3 .2 .1，一段一段向左、右两边扩展下去，直至不能再向左、右两方向扩展为止，这样所得到的解称为方程的一个饱和解 . 其所对应的(最大)存在区间称为这个饱和解的饱和区间或最大存在区间 .

以上回答了本节提出的第(1)个问题 .

由引理 3 .2 .1 可推出下述引理 .

引理 3 .2 .2 设 $f(x,y)$在开区域 G 内连续，则(2 .4)的任一饱和解的饱和区间必定是开区间 .

证 如果一端是闭的，则由引理 3 .2 .1 知，该解还可以从该端向外扩展，这与饱和解矛盾 . 故知饱和解的饱和区间必是开的 . □

3 .2 .2 延展定理

现在要解决上面提出的第(2)个问题的后半部分，有下述定理，证明从略 .

定理 3 .2 .1 设 $f(x,y)$在有界区域 G 内连续，$y=\varphi(x)$是(2 .4)的一个解，则它必可延展成一个饱和解，并且区间(α,β)是 $y=\varphi(x)$的饱和区间的充分必要条件是下列两式都成立:

$$\lim_{x\to\alpha+0}\rho(\partial G,P)=0,\qquad \lim_{x\to\beta-0}\rho(\partial G,P)=0 . \qquad (2 .6)$$

其中，P 是积分曲线 $y=\varphi(x)$上的点$(x,\varphi(x))$，∂G 是 G 的边界，$\rho(\partial G,P)$表示 P 与 ∂G 的距离 .

定理所表示的意思是很直观的 . 若 $y=\varphi(x)$是饱和解，饱和区间是(α,β)，则(2 .6)成立 . 若(2 .6)中至少有一个不成立，则

(α, β)不是饱和区间，从而还可延展．直至 x 趋于相应的区间端点时 $\rho(\ G, P) \to 0$，则该区间为饱和区间．不过请注意，$\rho(\ G, P) \to 0$ 并不是说点$(x, \varphi(x))$趋于 G 的边界上某一确定的点(参见下面例 2)，而只是说 P 与 G 的距离趋于 0．定理的证明从略．

如果 G 是无界区域，则有下述定理．

定理 3.2.2 设 $f(x, y)$在无界区域 G 内连续，$y = \varphi(x)$是(2.4)的一个解，则它必可延展成一个饱和解，并且区间(α, β)是 $y = \varphi(x)$的饱和区间的充分必要条件是下列(1)，(2)两项同时成立：

(1) ① $\beta = +\infty$；或
② $\beta < +\infty$，当 $x \to \beta - 0$ 时$|\varphi(x)|$无界；或
③ $\beta < +\infty$，当 $x \to \beta - 0$ 时 $\rho(\ G, P) \to 0$．

(2) ① $\alpha = -\infty$；或
② $\alpha > -\infty$，当 $x \to \alpha + 0$ 时$|\varphi(x)|$无界；或
③ $\alpha > -\infty$，当 $x \to \alpha + 0$ 时 $\rho(\ G, P) \to 0$．

证略，这里 P，G，$\rho(\ G, P)$的意义见定理 3.2.1．

注 定理 3.2.1 和定理 3.2.2 都称为延展定理．前者是在有界区域，后者是在无界区域．定理 3.2.2 中的条件(1) ①，②和条件(2) ①，②，显然可合并成："x 趋于饱和区间端点时，$x^2 + \varphi^2(x)$无界．即积分曲线 $y = \varphi(x)$上的点$(x, \varphi(x))$与原点(0,0)的距离无界"．这样一来，定理 3.2.1 和定理 3.2.2 可合并叙述为："设 $f(x, y)$在(有界或无界)区域 G 内连续，$y = \varphi(x)$是(2.4)的一个解，则它必可延展成一个饱和解．区间(α, β)是 $y = \varphi(x)$的饱和区间的充分必要条件是，或者积分曲线 $y = \varphi(x)$上的点$(x, \varphi(x))$与原点(0,0)的距离无界，或者点$(x, \varphi(x))$与 G 的边界 G 的距离趋于零．"采用这种写法，既便于记忆，使用起来又方便．以后常常要提及这个注．

现在举几个例子，先看前面见过的例1，初值问题(2.2)的解是

$$y = -\frac{1}{x-1}.$$

它的饱和区间是 $-\infty < x < 1$. 当 $x \to 1^-$ 时 $y \to +\infty$，属于定理3.2.2中的(1)②. 当 $x \to -\infty$ 时 $y \to 0$，属于定理3.2.2中的(2)①.

例2　考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{x^2}\sin\dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ y(x_0) = 0, & x_0 > 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

的饱和解在其饱和区间两端的性态.

解　易知 $y = \cos\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x_0}$ 是(2.7)的解，饱和区间是 $0 < x < +\infty$. 当 $x \to +\infty$ 时，$y \to 1 - \cos\frac{1}{x_0}$，属定理3.2.2中(1)①. 当 $x \to 0^+$ 时 y 无限振动，积分曲线 $y = \varphi(x)$ 上的点 $(x, \varphi(x))$ 与边界 $x = 0$ 的距离为 x，它趋于零，属于定理3.2.2中(2)③. 图3-7中画的是(2.7)的解的示意图，其中取 $x_0 = \frac{2}{\pi}$.

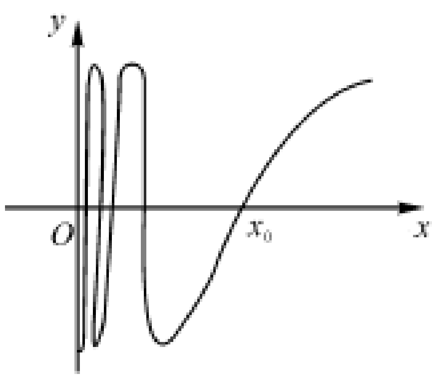

图3-7

由这两个例子可见，定理3.2.2中各种情形都可发生，不难举出例子说明定理3.2.1中各种情形也都可以发生，这件事请读者完成.

再来看一个例子，它说明对于不同的初值，其对应的特解的饱和区间可以不一样.

例3　考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}(1 - y^2), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{2.8}$$

的解的饱和区间及解在饱和区间两端的性态.

解　在 2.1.1 节中的例 2 曾讨论过这个方程，求出了该方程的通解并画出了解族的示意图(图 2-1).由该处容易知道，初值问题(2.8)的解为

$$y=\frac{(y_0+1)e^{x-x_0}+(y_0-1)}{(y_0+1)e^{x-x_0}-(y_0-1)}. \tag{2.9}$$

特别地，当 $y_0=-1$ 时，对应解为 $y=-1$；当 $y_0=1$ 时，对应解为 $y=1$.以下考查解(2.9)的饱和区间.

若 $|y_0|>1$，则当

$$x=\ln\frac{y_0-1}{y_0+1}+x_0\quad(\text{记为 } x_1)$$

时(2.9)的分母为零.若 $y_0>1$，则 $x_1<x_0$.此时易知初值问题(2.8)的解(2.9)的饱和区间为$(x_1,+\infty)$.当 $x\to x+0$ 时，$y\to+\infty$，属于定理 3.2.2 中的(2) ②；当 $x\to+\infty$时，$y\to1$，属于定理3.2.2 中的(1) ①.若 $y_0<-1$，则 $x_1>x_0$.此时易知初值问题(2.8)的解(2.9)的饱和区间是$(-\infty,x_1)$.当 $x\to-\infty$时，$y\to-1$，属于定理3.2.2 中的(2) ①；当 $x\to x_1-0$ 时，$y\to-\infty$，属于定理 3.2.2 中的(1) ②.

若$|y_0|\leq1$，则易知(2.9)的分母恒为正，因此(2.9)在整个区间$(-\infty,+\infty)$上存在，所以解的饱和区间为$(-\infty,+\infty)$.当 $x\to-\infty$时，$y\to-1$；当 $x\to+\infty$时，$y\to1$，分别属于定理3.2.2 中的(2) ②和(1) ②.

由上面讨论可见，$|y_0|>1$ 与$|y_0|\leq1$ 所对应的初值问题解的饱和区间可以很不一样.

把例 3 稍加推广，下面的例 4，可以说是延展定理的一种应用.

例 4　设 $f(x,y)$和 $f'_y(x,y)$在平面(x,y)内连续，x_0 和 y_0 是任意给定的值，$|y_0|<1$.试证明：初值问题

$$\frac{dy}{dx}=(y^2-1)f(x,y),\quad y(x_0)=y_0 \tag{2.10}$$

的解的存在区间是$(-\infty, +\infty)$.

证 因为 $f(x, y)$ 和 $f'_y(x, y)$ 在平面 (x, y) 内连续，则由定理 3.1.1 的推论 2 知，经过 (x, y) 上任意一点，方程

$$y' = (y^2 - 1) f(x, y)$$

有且仅有一条积分曲线经过该点. 现在考查初值问题(2.10)的惟一解 $y = \varphi(x)$ 的饱和区间 (α, β). 由延展定理 3.2.2，这里 G 是全平面，∂G 是空集，所以③不会发生. 又因 $y = \pm 1$ 是原方程的两条积分曲线，其他积分曲线不能与它们相交(相切)，所以积分曲线 $y = \varphi(x)$ 只能限于在区域 $|y| < 1$ 之内，因此②也不会发生. 于是只能发生①，即 $\alpha = -\infty$，$\beta = +\infty$.

下面简单地谈一谈本节一开始提出的第(3)个问题. 为此，先介绍下述引理.

3.2.3 贝尔曼不等式引理

下述引理 3.2.3 人们常称之为贝尔曼(Bellman)不等式引理. 它的用途十分广泛，以后将多次用到.

引理 3.2.3 设常数 $\delta \geq 0$，$k \geq 0$，函数 $y(x)$ 和 $f(x)$ 在闭区间 $[a, b]$ 上连续、非负，并满足

$$y(x) \leq \delta + k\int_{x_0}^{x} y(\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi, \quad a \leq x_0 \leq x \leq b. \tag{2.11}$$

则成立不等式

$$y(x) \leq \delta e^{\int_{x_0}^{x} k f(\xi) \mathrm{d}\xi}, \quad a \leq x_0 \leq x \leq b. \tag{2.12}$$

证 若 $k = 0$，则显然(2.12)就是(2.11). 以下设 $k > 0$. 记

$$u(x) = \int_{x_0}^{x} y(\xi) f(\xi) \mathrm{d}\xi, \tag{2.13}$$

则由(2.11)及(2.13)有

$$u'(x) = y(x) f(x) \leq \delta f(x) + k f(x) u(x),$$

即

$$u'(x) - kf(x)u(x) \le \delta f(x).$$

像找积分因子那样, 两边同乘以 $e^{\int_{x_0}^{x} kf(\xi)d\xi}$, 得

$$e^{-\int_{x_0}^{x} kf(\xi)d\xi}u'(x) - kf(x)u(x)e^{-\int_{x_0}^{x} kf(\xi)d\xi} \le \delta f(x)e^{-\int_{x_0}^{x} kf(\xi)d\xi},$$

$$\left[u(x)e^{-\int_{x_0}^{x} kf(\xi)d\xi}\right]' \le \delta f(x)e^{-\int_{x_0}^{x} kf(\xi)d\xi}.$$

两边从 x_0 到 x 积分, $a \le x_0 \le x \le b$, 得

$$u(x)e^{-\int_{x_0}^{x} kf(\xi)d\xi} \le \delta\int_{x_0}^{x} f(s)e^{-\int_{x_0}^{s} kf(\xi)d\xi}ds$$

$$= -\frac{\delta}{k}\int_{x_0}^{x}\left[e^{-\int_{x_0}^{s} kf(\xi)d\xi}\right]_s'ds$$

$$= -\frac{\delta}{k}\left[e^{-\int_{x_0}^{x} kf(\xi)d\xi} - 1\right].$$

两边同乘以 $e^{\int_{x_0}^{x} kf(\xi)d\xi}$, 推得

$$u(x) \le -\frac{\delta}{k}\left[1 - e^{\int_{x_0}^{x} kf(\xi)d\xi}\right]. \tag{2.14}$$

将(2.13)代入(2.14), 然后再代入(2.11)得

$$y(x) \le \delta + k\left(-\frac{\delta}{k}\left(1 - e^{\int_{x_0}^{x} kf(\xi)d\xi}\right)\right) = \delta e^{\int_{x_0}^{x} kf(\xi)d\xi}. \qquad \square$$

说明: 引理中的区间如果是开区间(a, b), 相应地, (2.11)和(2.12)中的 $a \le x_0 \le x \le b$ 应改成 $a < x_0 \le x < b$, 则结论仍成立.

3.2.4 非局部存在性定理

本节一开始提出的第(3)个问题是: 设 $f(x, y)$在带形区域

$$G = \{(x, y) \mid a < x < b, |y| < \infty\} \tag{2.15}$$

内连续, 在什么条件下能保证初值问题(2.1)的解在区间 $a < x < b$ 也存在?这里可以 $a = -\infty$, $b = +\infty$.

由定理 3.2.2, 容易证明下述定理.

定理 3.2.3 设 $f(x, y)$在带形区域(2.15)内连续，并设 $y = \varphi(x)$是(2.4)的一个饱和解，它在它的饱和区间内有界，则 $y = \varphi(x)$的存在区间(即饱和区间)必是 $a < x < b$.

证 设 $\alpha < x < \beta$是 $y = \varphi(x)$的饱和区间，今证 $\alpha = a$，$\beta = b$.用反证法，设 $\beta < b$.由于 $|\varphi(x)|$有界，故从延展定理 3.2.2 推知只能发生该定理中所说的情形(1) ③.再分两种情形讨论，如果 $b = +\infty$，则 G 的右边是空集，(1) ③不会发生.这就导致矛盾，从而推知 $\beta = b$，如果 $b < +\infty$，则 G 的右边界点集就是 $\{x \mid x = b, |y| < \infty\}$，所以点$(x, \varphi(x))$与 G 的右边界的距离 $\rho = b - x$.从而

$$\lim_{x \to \beta - 0} \rho = b - \beta > 0,$$

又与定理 3.2.2 的(1) ③相矛盾.故又推知 $\beta = b$.总之不论 $b = +\infty$还是 $b < +\infty$，都有 $\beta = b$.同理 $\alpha = a$.即证得 $y = \varphi(x)$的存在区间是(a, b). □

定理 3.2.3 在使用时是不方便的，因为要判别一个饱和解有界并不容易.下面介绍一个使用起来较方便的定理.

定理 3.2.4 设 $f(x, y)$在带形区域 G (见(2.15))内连续，并设它在 G 内对 y 满足李普希兹条件，则对于 G 内任意一点(x_0, y_0)，初值问题(2.1)的解在区间(a, b)上存在并且惟一.

证 易知只要证初值问题(2.1)的解 $y = \varphi(x)$的存在区间是(a, b)就可以了.采用反证法.设 $y = \varphi(x)$的右半饱和区间为$[x_0, \beta)$，$\beta < b$.于是由

$$\begin{cases} \dfrac{d\varphi(x)}{dx} = f(x, \varphi(x)), \\ \varphi(x_0) = y_0, \end{cases}$$

推得

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi(\xi))\,\mathrm{d}\xi, \quad x_0 \leq x < \beta$$

从而

$$|\varphi(x) - y_0| \leq \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi(\xi))|\,\mathrm{d}\xi. \tag{2.16}$$

因为 $f(x, y)$在 G 内对 y 满足李普希兹条件, 设 $L > 0$ 是李普希兹常数, 则对于 G 内任意两点(x, y)和(x, y_0), 有

$$|f(x, y) - f(x, y_0)| \leq L|y - y_0|.$$

于是

$$|f(x, y)| \leq |f(x, y_0)| + L|y - y_0|.$$

记 $M = \max\limits_{x_0 \leq x \leq \beta} |f(x, y_0)|$, 则当 $x_0 \leq x < \beta$时, 有

$$|f(x, y)| \leq M + L|y - y_0|. \tag{2.17}$$

将(2.17)代入(2.16), 当 $x_0 \leq x < \beta$时, 得到

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - y_0| &\leq \int_{x_0}^{x} (M + L|\varphi(\xi) - y_0|)\,\mathrm{d}\xi \\ &= M(x - x_0) + L\int_{x_0}^{x} |\varphi(\xi) - y_0|\,\mathrm{d}\xi \\ &< M(\beta - x_0) + L\int_{x_0}^{x} |\varphi(\xi) - y_0|\,\mathrm{d}\xi. \end{aligned} \tag{2.18}$$

再由贝尔曼不等式立即可得

$$\begin{aligned} |\varphi(x) - y_0| &\leq M(\beta - x_0)\mathrm{e}^{\int_{x_0}^{x} L\mathrm{d}\xi} \\ &= M(\beta - x_0)\mathrm{e}^{L(x - x_0)} \\ &< M(\beta - x_0)\mathrm{e}^{L(\beta - x_0)}, \quad x_0 \leq x < \beta. \end{aligned}$$

因此$|\varphi(x)|$在区间$[x_0, \beta)$上有界. 于是当 $x \to \beta - 0$ 时, 既不可能$|\varphi(x)|$无界, 也不可能使点 $P(x, \varphi(x))$与 G (G 为 $x = a$ 与 $x = b$ 两直线上的点组成的点集)的距离趋于零. 这与定理 3.2.2 矛盾. 这就证得 $\beta = b$. 同理可证左半饱和区间为$(a, x_0]$. 于是证得初值问题(2.1)的解的存在区间为(a, b). □

例 5　试研究方程

$$\frac{dy}{dx}=\sin\frac{y}{x}\quad (x>0)$$

任一饱和解的存在区间．

解　任取 $\varepsilon>0$，并记

$$f(x,y)=\sin\frac{y}{x}.$$

对于半平面 $x>\varepsilon$ 内任意两点 (x,y_1) 和 (x,y_2)，有

$$\begin{aligned}|f(x,y_1)-f(x,y_2)|&=\left|\sin\frac{y_1}{x}-\sin\frac{y_2}{x}\right|\\&=2\left|\sin\frac{y_1-y_2}{2x}\cos\frac{y_1+y_2}{2x}\right|\\&\leq 2\left|\sin\frac{y_1-y_2}{2x}\right|\leq\frac{|y_1-y_2|}{x}\\&\leq\frac{1}{\varepsilon}|y_1-y_2|.\end{aligned}$$

所以 $f(x,y)$ 在半平面 $x>\varepsilon$ 内对 y 满足李普希兹条件，于是由定理 3.2.4 推知，只要初值 (x_0,y_0) 取在半平面 $x>\varepsilon$ 内，初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=\sin\dfrac{y}{x},\\ y(x_0)=y_0\end{cases}\tag{2.19}$$

的解在区间 $(\varepsilon,+\infty)$ 内存在．由于 $\varepsilon>0$ 可以任意取，这就推得：只要初值 (x_0,y_0) 取在半平面 $x>0$ 内，初值问题 (2.19) 的解在区间 $(0,+\infty)$ 内就存在(并且惟一)．

说明：定理 3.2.3 和定理 3.2.4 都是讲方程的解在大区间上的存在性(不是仅在小区间 $|x-x_0|\leq h$ 上存在)，所以这类定理称为非局部存在性定理．减弱或改变加在 $f(x,y)$ 上的条件，可以得到许多形形色色的非局部存在性定理，在此不再深入讨论了．

习　题　3.2

1．对于初值问题：$y'=x^2+y^2$，$y(0)=0$，求§3.1 的定理 3.1.1 中 h 的最大值．

2．举例说明定理 3.2.1 的各种情形都可以发生．

3．设 $f(y)$ 与 $f'(y)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续，$y(x)$ 是方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(y)$ 的解，其饱和区间为 (α,β)，$\beta<+\infty$，则对于任何大的正数 N，必有 $x_1\in(\alpha,\beta)$，使 $y(x_1)<-N$ 或 $y(x_1)>N$．

4．设函数 $f(x,y)$ 满足定理 3.1.1 的诸条件，试用贝尔曼不等式证明初值问题(1.1)至多有一个解．

5．(1)　设 $f(t)$，$g(t)$，$x(t)$ 是 $t\in[a,b]$ 上的非负连续函数，并且

$$x(t)\leq g(t)+\int_a^t f(s)x(s)\mathrm{d}s,\quad t\in[a,b],$$

试证明：

$$x(t)\leq g(t)+\int_a^t f(s)g(s)\mathrm{e}^{\int_a^s f(\tau)\mathrm{d}\tau}\mathrm{d}s,\quad t\in[a,b].$$

(2)　在(1)之假定下，若 $g(t)$ 还是单调不减函数，试证明

$$x(t)\leq g(t)\mathrm{e}^{\int_a^t f(s)\mathrm{d}s},\quad t\in[a,b].$$

6．设 $f(x,y)$ 在(2.15)的带形区域 G 内连续且有界：$|f(x,y)|\leq M$，则初值问题(2.1)的解的存在区间为 $a<x<b$．

7．试用毕卡逐次逼近法证明本节定理 3.2.4．

8．设 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 为多项式，证明：方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=P(x)\cos y+Q(x)\sin y$$

的任一饱和解的饱和区间为 $(-\infty,+\infty)$．

9．考虑线性方程的初值问题：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=a(x)y+b(x),\\ y(x_0)=y_0,\end{cases}$$

其中 $a(x)$ 和 $b(x)$ 在区间 (a,b) 内连续，$x_0\in(a,b)$，$y_0\in(-\infty,+\infty)$．试用定理 3.2.4 证明上述初值问题的解在区间 (a,b) 内存在(并且惟一)(注：

上述结论在定理 2.2.1 中曾得到过).

§3.3 解对初值和解对参数的连续依赖性和可微性

3.3.1 解对初值的连续依赖性定理

设 $f(x, y)$ 在区域 G 内连续, 并设对于 G 内任意的点 (x_0, y_0), 初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y\,|_{x=x_0} = y_0 \end{cases} \tag{3.1}$$

的解惟一. 今后常将这个惟一解写成 $y = \phi(x, x_0, y_0)$ (或 $y = y(x, x_0, y_0)$), 以表示 y 不仅依赖于 x, 而且亦依赖于 x_0 和 y_0. 在实际中, 初值 x_0 和 y_0 常由测量获得, 测理难免有误差. 人们要问, 由于 x_0 和 y_0 的微小变化(例如误差), 引起解 $y = \phi(x, x_0, y_0)$ 的变化如何? 即 $\phi(x, x_0, y_0)$ 关于初值 x_0 和 y_0 有何种的依赖性? 这种提法, 不仅有实际意义, 更有重要的理论意义. 先来看一个例子.

例 1 考查初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y^2, \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.2}$$

的解对初值 x_0 和 y_0 的依赖性.

解 3.2.1 节中例 1 曾讨论过方程(3.2). 易知初值问题(3.2)的解是

$$y(x, x_0, y_0) = \frac{y_0}{1 + x_0 y_0 - y_0 x}. \tag{3.3}$$

为简单起见，取定 x_0 不变，考查解(3.3)对 y_0 的依赖关系．

若取 $y_0 = 0$，则(3.3)成为

$$y(x, x_0, 0) \equiv 0 .$$

此解的存在区间是

$$-\infty < x < +\infty .$$

若取 $y_0 > 0$，则易知初值问题(3.2)的解(3.3)的最大存在区间是

$$-\infty < x < \frac{1}{y_0} + x_0 \qquad (3.4)$$

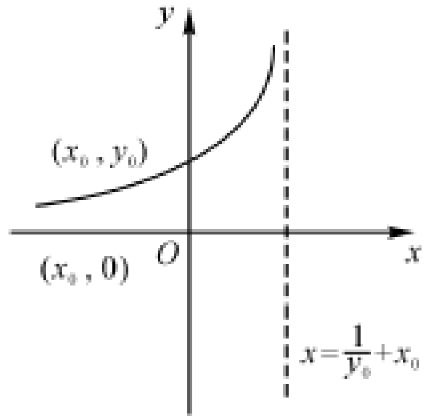

图 3-8

(见图 3-8)．注意，它不在整个区间 $-\infty < x < +\infty$ 上存在．这就是说，当 y_0 从 0 变到大于 0 时，即使 y_0 很小，对应的解可以产生显著的变化：$y(x, x_0, 0)$的存在区间为 $-\infty < x < +\infty$，而(3.3)在 $y_0 > 0$ 时的存在区间却是 $-\infty < x < \frac{1}{y_0} + x_0$，后者当 $x \to \left(\frac{1}{y_0} + x_0\right) - 0$ 时趋于无穷！所以不能说"当 y_0 变化很小时，所对应的解在区间 $-\infty < x < +\infty$ 上也变化很小".

如果限于在某有限闭区间$[a, b]$上来考虑，结论就不是这样了．为了简单起见，仍取定 $x_0 \in [a, b]$不变．则当 $y_0 = 0$ 时，$y(x, x_0, 0) \equiv 0$，它是初值问题(3.2)在区间$[a, b]$上的解．若取 y_0 满足

$$0 < y_0 < \frac{1}{b - x_0}, \qquad (3.5)$$

则$\frac{1}{y_0} + x_0 > b$．从而由(3.4)知，初值问题(3.2)的解 $y(x, x_0, y_0)$也在区间$[a, b]$上存在．差

$$\begin{aligned} &|y(x, x_0, y_0) - y(x, x_0, 0)| \\ &= \frac{y_0}{1 + x_0 y_0 - y_0 x} = \frac{1}{\frac{1}{y_0} + x_0 - x} . \end{aligned} \qquad (3.6)$$

当 $a\leq x\leq b$ 时,

$$\frac{1}{y_0}+x_0-x\geq\frac{1}{y_0}+x_0-b. \tag{3.7}$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 当

$$0<y_0<\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon(b-x_0)} \tag{3.8}$$

时, 由(3.7)推得

$$\frac{1}{y_0}+x_0-x>\frac{1}{\varepsilon}. \tag{3.9}$$

将(3.9)代入(3.6)得

$$|y(x,x_0,y_0)-y(x,x_0,0)|<\varepsilon. \tag{3.10}$$

换句话讲, 对于任意给定的 $\varepsilon>0$, 取

$$\delta=\min\left\{\frac{1}{b-x_0},\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon(b-x_0)}\right\}$$

(参见(3.5)和(3.8)), 当 $0<y_0<\delta$ 时, 则在区间 $a\leq x\leq b$ 上 (3.10)式成立. 即在区间 $a\leq x\leq b$ 上一致地有

$$\lim_{y_0\to 0+0}[y(x,x_0,y_0)-y(x,x_0,0)]=0.$$

类似地可证

$$\lim_{y_0\to 0-0}[y(x,x_0,y_0)-y(x,x_0,0)]=0.$$

这就是说, 当 y_0 从 $y_0=0$ 变化很小时, 所对应的解在有限区间 $a\leq x\leq b$ 上也变化很小. 这就是通常所说的, 在有限区间上解对初值连续依赖性.

下面对一般的初值问题(3.1)来研究解对初值的连续依赖性. 在论证之前, 先要说明为什么一开始要先假定初值问题的解的惟一性. 事实上, 如果解不惟一, 那么由初值 x_0 和 y_0 对应的解不止一个, 此时解就不能写成 $\varphi(x,x_0,y_0)$, 当然也就谈不上研究解对初值有何种的依赖性了.

定理 3.3.1 (解对初值的连续依赖性定理) 设函数 $f(x,y)$ 在区

域 G 内连续，并且在 G 内对 y 满足局部李普希兹条件，又设 $(x_0, y_0) \in G$，初值问题(3.1)的惟一解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 在闭区间 $a \le x \le b$ 上存在．则

(1) 存在 $\delta > 0$，当 $|\xi - x_0| \le \delta$，$|\eta - y_0| \le \delta$ 时，初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y), \\ y|_{x=\xi} = \eta \end{cases} \tag{3.11}$$

的惟一解 $y = \varphi(x, \xi, \eta)$ 在闭区间 $a \le x \le b$ 上也存在；

(2) 对于一切 $x \in [a, b]$，一致地成立

$$\lim_{(\xi, \eta) \to (x_0, y_0)} \varphi(x, \xi, \eta) = \varphi(x, x_0, y_0). \tag{3.12}$$

注意，正如例 1 所见到的，定理 3.3.1 的结论(1)不是无足轻重的．因为如果没有(1)，就谈不到(3.12)在 $a \le x \le b$ 上一致地成立．从下面的证明还可看出，条件“解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 在闭区间 $a \le x \le b$ 上存在”中的“闭”字是重要的．此外，从定理 3.1.1 知，不妨可以认为 $a < x_0 < b$．

定理 3.3.1 的证明 (1)的证明分两步，第一步，构造一个条形闭区域

$$\Omega_1 = \{(x, y) \mid a \le x \le b, \quad |y - \varphi(x, x_0, y_0)| \le \delta_1\}$$

如(图 3-9)，使它含在 G 内，它与 G 的边界 G 的距离大于零，并且证明 $f(x, y)$ 在 Ω_1 内对 y 满足李普希兹条件，即证明存在常数 $L > 0$，使得对于 Ω_1 内任意两点 (x, y_1) 和 (x, y_2)，不等式

$$|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \tag{3.13}$$

成立．第二步，对于初值构造一个闭矩形区域

$$R = \{(x, y) \mid |x - x_0| \le \delta, \ |y - y_0| \le \delta\},$$

当 $(\xi, \eta) \in R$ 时，证明初值问题(3.11)的解不会从 Ω_1 的上、下两条边界越出 Ω_1，从而该解在区间 $[a, b]$ 上存在．

现在证明第一步，因为 $f(x, y)$ 在 G 内对 y 满足局部李普希

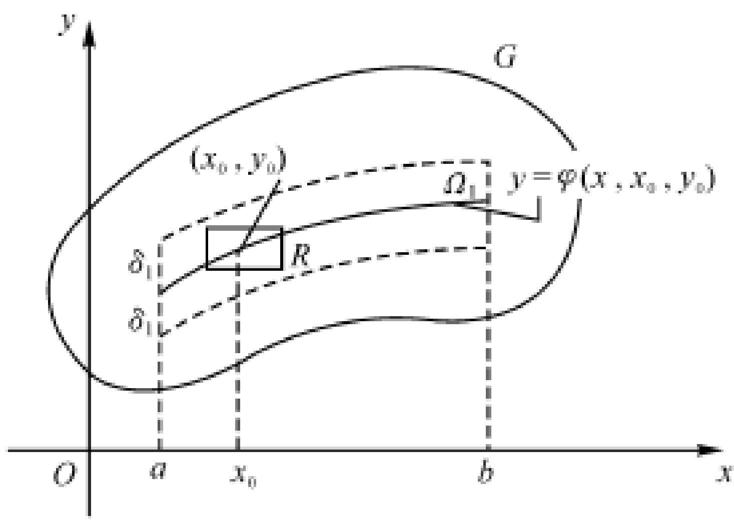

图 3 -9

兹条件，所以对于积分曲线 C: $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ $(a \leq x \leq b)$ 上每一点，存在一个以该点为中心其边平行于坐标轴的小开矩形 Q，使得 Q 连同它的 4 条边构成的闭矩形 $\bar{Q}$ 含于 G 内，并且 $f(x, y)$ 在 $\bar{Q}$ 上对 y 满足李普希兹条件．李普希兹常数记为 L_Q．由于 C 作为点集是一闭集，由有限覆盖定理知，存在有限个这样的 Q，其全体覆盖了 C．此有限个 Q 对应的 $\bar{Q}$ 的并集记为 V，并记 $\max L_Q = L$．由于每一个 $\bar{Q}$ 含于 G 内，故 V 也含于 G 内，并且容易看出，存在 $\delta_1 > 0$，使得条形闭区域

$$\Omega_1 = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, \ |y - \varphi(x, x_0, y_0)| \leq \delta_1\}$$

含于 V 内，从而 Ω_1 与 G 的边界 G 的距离大于零．此外，对于 Ω_1 内任意两点 (x, y_1) 和 (x, y_2)，从点 (x, y_1) 到点 (x, y_2) 的线段上，按顺序插入有限个 (k 个) 点 $(x, \eta_1), (x, \eta_2), \cdots, (x, \eta_k)$，使诸点 $(x, y_1), (x, \eta_1), \cdots, (x, \eta_k), (x, y_2)$ 中相邻两点在同一个 Q 内．从而

$$\begin{aligned}
&|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \\
&\quad \leq |f(x, y_1) - f(x, \eta_1)| + |f(x, \eta_1) - f(x, \eta_2)| + \cdots \\
&\qquad + |f(x, \eta_k) - f(x, y_2)|
\end{aligned}$$

$$\leq L\left[|y_1-\eta_1|+|\eta_1-\eta_2|+\cdots+|\eta_k-y_2|\right]$$
$$=L|y_1-y_2|,$$

即 $f(x,y)$ 在 Ω_1 内对 y 满足李普希兹条件(3.13).

第二步, 记 $M=\max\limits_{(x,y)\in\Omega_1}|f(x,y)|$, 并取 δ 满足

$$0<\delta<\frac{\delta_1}{1+M}e^{-L(b-a)}, \tag{3.14}$$

并使闭矩形区域

$$R=\{(x,y)\big|\,|x-x_0|\leq\delta,\ |y-y_0|\leq\delta\}$$

含于 Ω_1 内(参见图 3-9).

设 $(\xi,\eta)\in R$, 则由定理 3.1.1 的推论 1 知, (3.11)的惟一解 $y=\varphi(x,\xi,\eta)$ 至少在某一小区间 $|x-\xi|\leq\alpha$ 上存在, 并且含于 Ω_1 内. 由解的延展定理 3.2.1 知, 当 x 趋于 $y=\varphi(x,\xi,\eta)$ 的饱和区间左右两端点时, 该积分曲线上的点与 G 的距离趋于零, 或者积分曲线上的点与原点的距离无界. 不论哪种情形, 积分曲线总要从 Ω_1 的边界穿出去. 以下证明 $y=\varphi(x,\xi,\eta)$ 向左右延展时, 不可能从 $y=\varphi(x,x_0,y_0)\pm\delta_1$ 处穿出 Ω_1, 从而只能从 Ω_1 的左右两边界 $x=a$ 与 $x=b$ 处穿出, 这就证明了 $y=\varphi(x,\xi,\eta)$ 至少在闭区间 $a\leq x\leq b$ 上存在, 也就证明了(1). 以下用反证法证明 $y=\varphi(x,\xi,\eta)$ 向左右延展时不可能从 $y=\varphi(x,x_0,y_0)\pm\delta_1$ 穿出 Ω_1.

设存在某 x_1, $\xi<x_1<b$ (或 $a<x_1<\xi$, 其证明同), 使当 $\xi<x<x_1$ 时

$$|\varphi(x,\xi,\eta)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\delta_1,$$

并且

$$|\varphi(x_1,\xi,\eta)-\varphi(x_1,x_0,y_0)|=\delta_1.$$

于是在区间 $\xi\leq x\leq x_1$ 上, 有

$$\frac{d\varphi(x,\xi,\eta)}{dx}=f(x,\varphi(x,\xi,\eta)).$$

两边积分，再由初值条件 $\varphi(\xi,\xi,\eta)=\eta$，有

$$\varphi(x,\xi,\eta)=\eta+\int_\xi^x f(s,\varphi(s,\xi,\eta))\mathrm{d}s. \tag{3.15}$$

此外，在 $a\leq x\leq b$ 上有

$$\varphi(x,x_0,y_0)=y_0+\int_{x_0}^x f(s,\varphi(s,x_0,y_0))\mathrm{d}s. \tag{3.16}$$

因此，在区间 $\xi\leq x\leq x_1$ 上有

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x,\xi,\eta)-\varphi(x,x_0,y_0)|\\
&\quad\leq|\eta-y_0|+\left|\int_\xi^x f(s,\varphi(s,\xi,\eta))\mathrm{d}s-\int_{x_0}^x f(s,\varphi(s,x_0,y_0))\mathrm{d}s\right|\\
&\quad\leq|\eta-y_0|+\left|\int_\xi^x |f(s,\varphi(s,\xi,\eta))-f(s,\varphi(s,x_0,y_0))|\mathrm{d}s\right|\\
&\qquad+\left|\int_{x_0}^\xi f(s,\varphi(s,x_0,y_0))\mathrm{d}s\right|\\
&\quad\leq|\eta-y_0|+M|\xi-x_0|+\int_\xi^x L|\varphi(s,\xi,\eta)-\varphi(s,x_0,y_0)|\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

再注意到 $|\eta-y_0|\leq\delta$，$|\xi-x_0|\leq\delta$，于是

$$\begin{aligned}
&|\varphi(x,\xi,\eta)-\varphi(x,x_0,y_0)|\\
&\qquad\leq(1+M)\delta+L\int_\xi^x|\varphi(s,\xi,\eta)-\varphi(s,x_0,y_0)|\mathrm{d}s.
\end{aligned}$$

由贝尔曼不等式推得

$$\begin{aligned}
|\varphi(x,\xi,\eta)-\varphi(x,x_0,y_0)|&\leq(1+M)\delta\mathrm{e}^{L(x-\xi)}\\
&\leq(1+M)\delta\mathrm{e}^{L(b-a)}<\delta_1. \qquad (\text{由}(3.14))
\end{aligned}$$

以 $x=x_1$ 代入上述不等式左边，应为 δ_1，从而得到 $\delta_1<\delta_1$. 此矛盾证明了 $y=\varphi(x,\xi,\eta)$ 向右延展时不能从上、下两条曲线 $y=\varphi(x,x_0,y_0)\pm\delta_1$ 穿出 Ω_1. 同理可证向左延展时亦是如此. (1) 证毕.

以下证明(2)，由(1)的证明已知，当 $|\xi-x_0|\leq\delta$，$|\eta-y_0|\leq\delta$ 时，在闭区间 $a\leq x\leq b$ 上成立

$$|\varphi(x,\xi,\eta)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\delta_1.$$

对于任意给定的 $\varepsilon>0$，取 δ_1 除了要求它满足(1)的证明中所述者外，还要求 $\delta_1<\varepsilon$．又按(3.14)取 δ．因此当 $(\xi,\eta)\in R$ 时，对于 $a\leq x\leq b$ 一致地有

$$|\varphi(x,\xi,\eta)-\varphi(x,x_0,y_0)|<\varepsilon.$$

这就证明了当 $a\leq x\leq b$ 时，一致地有

$$\lim_{(\xi,\eta)\to(x_0,y_0)}\varphi(x,\xi,\eta)=\varphi(x,x_0,y_0).\qquad\square$$

注意，读者从证明中已经看到，条件中闭区间的闭字很重要．为了加深对引理的理解，举一个无穷区间的例子，说明即使初值问题(3.11)在该无穷区间上存在，但结论(2)仍可不成立．

例 2　初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy}{dx}=y,\\ y|_{x=0}=0\end{cases}$$

的惟一解是 $y=\varphi(x,0,0)\equiv 0$，它的存在区间是 $-\infty<x<+\infty$．若将初值条件改为 $y|_{x=0}=\eta\neq 0$，则相应的惟一解是 $y=\varphi(x,0,\eta)\equiv\eta e^x$，它的存在区间也是 $-\infty<x<+\infty$．但对于 $\varepsilon>0$，不论 $\delta>0$ 取得多么小，当 $|\eta-0|<\delta$，例如取 $\eta=\dfrac{\delta}{2}$ 时，

$$|\varphi(x,0,\eta)-\varphi(x,0,0)|=|\eta e^x|=\frac{\delta}{2}e^x,$$

在区间 $-\infty<x<+\infty$ 上上式不能一致地小于 ε．事实上，当 $x>\ln\dfrac{2\varepsilon}{\delta}$ 时，$\dfrac{\delta}{2}e^x>\varepsilon$．

3.3.2　解对初值的可微性定理

现在讨论在什么条件下，初值问题(3.1)的惟一解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 对初值 x_0 和 y_0 是可微的；如果可微，那么 $\varphi'_{x_0}(x,x_0,y_0)$ 和 $\varphi'_{y_0}(x,x_0,y_0)$ 分别等于什么？

先作一点粗略分析．设 $f(x,y)$ 以及它对 y 的偏导数在区域

G 内连续，并设 $\varphi'_{x_0}(x, x_0, y_0)$和 $\varphi'_{y_0}(x, x_0, y_0)$在点$(x, x_0, y_0)$的邻域内存在并且连续，则由

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\varphi(x, x_0, y_0) = f(x, \varphi(x, x_0, y_0))$$

推得

$$\varphi(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(s, \varphi(s, x_0, y_0))\mathrm{d}s. \quad (3.17)$$

两边对 x_0 求偏导数，由所设条件，有

$$\frac{\varphi}{x_0} = -f(x_0, \varphi(x_0, x_0, y_0)) + \int_{x_0}^{x} \frac{}{y} f(s, \varphi(s, x_0, y_0)) \frac{\varphi}{x_0}\mathrm{d}s$$

$$= -f(x_0, y_0) + \int_{x_0}^{x} \frac{}{y} f(s, \varphi(s, x_0, y_0)) \frac{\varphi}{x_0}\mathrm{d}s. \quad (3.18)$$

两边再对 x 求(偏)导数，得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\varphi}{x_0}\right) = \frac{}{y} f(x, \varphi(x, x_0, y_0)) \frac{\varphi}{x_0}. \quad (3.19)$$

又由(3.18)还可得到

$$\left.\frac{\varphi}{x_0}\right|_{x = x_0} = -f(x_0, y_0). \quad (3.20)$$

这就是说，在所述条件下，$\frac{\varphi}{x_0}$是线性方程初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{}{y} f(x, \varphi(x, x_0, y_0)) \cdot z, & (3.21) \\ z|_{x = x_0} = -f(x_0, y_0) & (3.22) \end{cases}$$

的惟一解.

类似地可以推知，$\frac{\varphi}{y_0}$是线性方程(3.21)的满足初值条件

$$z|_{x = x_0} = 1 \quad (3.23)$$

的惟一解.

以上的推导需要先假设 $\varphi'_{x_0}(x, x_0, y_0)$和 $\varphi'_{y_0}(x, x_0, y_0)$存在并且连续.事实上，这些不必事先假设，有下述定理.

定理 3.3.2 设函数 $f(x, y)$ 和 $f_y'(x, y)$ 在区域 G 内连续，$(x_0, y_0) \in G$，则初值问题(3.1)的解 $y = \varphi(x, x_0, y_0)$ 作为 (x, x_0, y_0) 的函数，在它的存在范围内，有

(1) $\frac{\varphi}{x_0}$ 存在并连续，并且是初值问题(3.21)，(3.22)的惟一解.

(2) $\frac{\varphi}{y_0}$ 存在并连续，并且是初值问题(3.21)，(3.23)的惟一解.

注 1　容易求得初值问题(3.21)，(3.22)和初值问题(3.21)，(3.23)的解，所以可得到 $\frac{\varphi}{x_0}$ 和 $\frac{\varphi}{y_0}$ 的公式如下:

$$\frac{\varphi}{x_0} = -f(x_0, y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{}{y} f(s, \varphi(s, x_0, y_0))\,\mathrm{d}s\right), \tag{3.24}$$

$$\frac{\varphi}{y_0} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{}{y} f(s, \varphi(s, x_0, y_0))\,\mathrm{d}s\right). \tag{3.25}$$

这里 $\exp x = \mathrm{e}^x$.

注 2　$\frac{\varphi}{x_0}$ 和 $\frac{\varphi}{y_0}$ 的公式在理论上是重要的，用处也很大. 但请读者注意，当 $\varphi(x, x_0, y_0)$ 尚未具体求出来时，仍无法用这些公式具体计算 $\frac{\varphi}{x_0}$ 和 $\frac{\varphi}{y_0}$，除非是非常特殊的情形.

例 3　设初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin xy, \\ y|_{x=x_0} = y_0 \end{cases}$$

的解为 $\varphi(x, x_0, y_0)$. 试求 $\frac{}{x_0}\varphi(x, x_0, y_0)$ 和 $\frac{}{y_0}\varphi(x, x_0, y_0)$ 当 $x_0 = y_0 = 0$ 时的表达式.

解　由公式(3.24)，有

$$\left.\frac{\phi}{x_0}\right|_{x_0 = y_0 = 0} = -0 \cdot \exp(\cdots) = 0,$$

$$\left.\frac{\phi}{y_0}\right|_{x_0 = y_0 = 0} = \exp\left[\int_0^x s\cos s\phi(s, 0, 0)\, \mathrm{d}s\right],$$

其中 $\phi(x, 0, 0)$是初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \sin xy, \\ y|_{x=0} = 0 \end{cases}$$

的惟一解 . 由观察易知 $\phi(x, 0, 0) \equiv 0$，于是

$$\left.\frac{\phi}{y_0}\right|_{x_0 = y_0 = 0} = \exp\left[\int_0^x s\cos 0\, \mathrm{d}s\right] = \exp\left[\frac{x^2}{2}\right].$$

3.3.3 解对参数的连续依赖性和可微性定理

微分方程中往往含有参数，这种微分方程称为含参数的微分方程 . 含参数的微分方程的初值问题的解对参数的依赖性如何？显然，研究这种问题不但有理论意义，而且有实际意义 .

对于一般的含参数 μ 的微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y, \mu), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{3.26$_\mu$}$$

的解，如果存在的话，常将它写成 $y = \phi(x, x_0, y_0, \mu)$，以表示它依赖于这些量 .

设 G 是(x, y)平面上的某区域，I_μ 是 μ 轴上的某区间 $\alpha < \mu < \beta$. 并设

$$D_\mu = G \times I_\mu .$$

设函数 $f(x, y, \mu)$在 D_μ 内定义 . 如果对于 D_μ 内任意一点，存在它的一个邻域 U 和常数 $L > 0$，对于 U 内任意两点(x, y_1, μ_1)和(x, y_2, μ_2)，不等式

$$| f(x, y_1, \mu_1) - f(x, y_2, \mu_2) | \leq L(| y_1 - y_2 | + | \mu_1 - \mu_2 |)$$

恒成立，则称 $f(x, y, \mu)$ 在 D_μ 对 (y, μ) 满足局部李普希兹条件.

有下述定理，证明从略.

定理 3.3.3 设函数 $f(x, y, \mu)$ 在上述区域 D_μ 内连续，并且在 D_μ 内对 (y, μ) 满足局部李普希兹条件，又设 $(x_0, y_0, \mu_0) \in D_\mu$，初值问题 $(3.26)_\mu$ 的惟一解 $y = \varphi(x, x_0, y_0, \mu_0)$ 在闭区间 $a \leq x \leq b$ 上存在.则

(1) 存在 $\delta > 0$，当

$$|\xi - x_0| \leq \delta, \ |\eta - y_0| \leq \delta, \ |\mu - \mu_0| \leq \delta$$

时，初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x, y, \mu), \\ y(\xi) = \eta \end{cases} \tag{3.27_μ}$$

的惟一解 $y = \varphi(x, \xi, \eta, \mu)$ 在闭区间 $a \leq x \leq b$ 上也存在;

(2) 对于一切 $x \in [a, b]$，一致地成立

$$\lim_{\substack{(\xi, \eta) \to (x_0, y_0) \\ \mu \to \mu_0}} \varphi(x, \xi, \eta, \mu) = \varphi(x, x_0, y_0, \mu_0). \tag{3.28}$$

定理3.3.3中是将 φ 对初值和参数的连续性一起来考虑，所以定理3.3.3常称为解对初值和参数的连续依赖性定理.如果定理3.3.3中的 $\mu \equiv \mu_0$ 保持不变，则就成为定理3.3.2.如果定理3.3.3中的 $\xi \equiv x_0$，$\eta \equiv y_0$ 保持不变，则定理成为解对参数的连续依赖性定理.

为了使读者较好地理解定理3.3.3的意义，考虑含有参数 μ 的微分方程的初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2}(\mu^2 - y^2), \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{3.29_μ}$$

为简单起见，这里固定 $x_0 = 0$，$y_0 = 1$ 不变.当 $\mu = 0$ 时，$(3.29)_\mu$ 的惟一解为

$$y=\varphi(x,0,1,0)=\frac{2}{x+2}. \qquad (3.30)$$

它的存在区间为$(-2,+\infty)$.取它的一个闭的子区间，例如在$-1\le x\le 1$上来考虑.

易知，当 $\mu\neq 0$ 时初值问题$(3.29)_\mu$ 的解为

$$y=\varphi(x,0,1,\mu)=\frac{\mu[\mu(e^{\mu x}-1)+(e^{\mu x}+1)]}{\mu(e^{\mu x}+1)+(e^{\mu x}-1)}. \qquad (3.31)$$

当$|\mu|$足够小且 $\mu\neq 0$ 时，此解在区间 $-1\le x\le 1$ 上也存在，并且易知在区间 $-1\le x\le 1$ 上一致地有

$$\lim_{\mu\to 0}\varphi(x,0,1,\mu)=\lim_{\mu\to 0}\frac{\mu(e^{\mu x}-1)+(e^{\mu x}+1)}{e^{\mu x}+1+\frac{1}{\mu}(e^{\mu x}-1)}$$

$$=\frac{2}{2+x}=\varphi(x,0,1,0),$$

与定理 3.3.3 的结论吻合.

关于解对参数的可微性，也常把解对初值和参数合在一起考虑，而把解单独对初值或参数的可微性作为它的特例.于是有下述解对初值和参数和可微性定理，证明从略.

定理 3.3.4 设 $f(x,y,\mu)$，$f_y'(x,y,\mu)$和 $f_\mu'(x,y,\mu)$在上述区域 D_μ 内连续，$(x_0,y_0,\mu)\in D_\mu$，则初值问题$(3.27)_\mu$ 的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0,\mu)$作为(x,x_0,y_0,μ)的函数，在它的存在范围内是连续可微的.

习 题 3.3

1.试求方程$\frac{dy}{dx}=x+y$ 在初值条件 $y(x_0)=y_0$ 下的解，并讨论解对初值的连续性和解对初值的导数.

2.设 $y=\varphi_n(x)$是微分方程$\frac{dy}{dx}=1+y^2$ 满足初值条件 $y\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$的解.试证明：对于给定的 $\varepsilon>0$，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时，$\varphi_n(x)$在闭区间

$\left[-\frac{\pi}{2}+\varepsilon, \frac{\pi}{2}-\varepsilon\right]$上存在，并且在此区间上成立不等式

$$|\varphi_n(x)-\tan x|<\varepsilon .$$

3．试求出下列方程在初值条件 $y(0)=0$ 下的解，并由此讨论解对参数 μ 的连续性和解对参数的导数．

(1) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=1-\mu y$;　　　(2) $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=(1+y)\sqrt{1-\mu^2x^2}$．

4．试证明：在定理3.3.2的条件下，该定理中的函数 $\varphi(x, x_0, y_0)$满足

$$\frac{\varphi(x, x_0, y_0)}{x_0}+f(x_0, y_0)\frac{\varphi(x, x_0, y_0)}{y_0}=0 .$$

本 章 小 结

本章讨论的问题属于常微分方程的基本理论部分，它们将在以后各章的学习以及对常微分方程理论的深入研究中起指导作用．

本章首先证明了初值问题解的存在惟一性定理 3.1.1，读者应掌握该定理的条件、结论和证明．该定理证明中采用的逐次逼近法是研究微分方程理论的基本方法之一，它同时给出了近似求解初值问题的一种方法．读者应熟练掌握逐次逼近法．对定理 3.1.2，只作了叙述，在 $f(x, y)$连续的条件下，就可保证初值问题解的存在性．关于李普希兹条件、毕卡序列收敛性及初值问题解的惟一性这三者之间的关系，读者也应有所了解，并掌握一些能说明问题的例子．

定理 3.1.1 和 3.1.2 仅能保证初值问题的解在局部范围内存在．为考查解是否在更大的范围内存在，介绍了解的延展、饱和解和饱和区间等概念．要求读者了解这些概念的实质，并掌握说明这些概念的一些例子．解的延展定理 3.2.1 和定理 3.2.2 是本章的又一重要定理．这两个定理既说明在一定条件下解必可延展至饱和解，又说明判别一个解为饱和解(相应地、区间为饱和区间)的充要条件．要求读者掌握这两定理所说明的问题的含义和

几何直观．§3.2的例1、例2和例3可帮助读者对这些定理的理解．读者还可通过认真演算相应的习题来加深对两定理的理解．

解的非局部存在性，是定理3.1.1和定理3.1.2的引申，也是定理3.2.1和定理3.2.2的应用．本章介绍了在这方面的两个定理(见定理3.2.3和定理3.2.4)，其目的是希望使读者对解的延展理论有更好的掌握，同时引起读者对这方面问题的兴趣．实际上，延展定理3.2.1和定理3.2.2虽可用来判别一个解是否为饱和解，但当解未求出来前，该两定理是无能为力的．而定理3.2.4，却可事先给我们以一定的信息(当然仅是充分的)．这两定理的证明是简单的，相信读者学习它们不会花费很多力气．

本章还介绍了解对初值的连续依赖性定理3.3.1，解对初值的可微性定理3.3.2，解对初值和参数的连续依赖性定理3.3.3以及解对初值和参数的可微性定理3.3.4．除定理3.3.1给出证明外，其他3个定理都仅是叙述．定理3.3.1的证明是较难的．读者可以先把该定理前后的说明、定理的意义以及§3.3的例1和例2搞清楚，再回过头来看它的证明．这几个定理揭示了微分方程的解的重要性质．要求读者弄清它们的含义并正确地理解，便于今后的应用．

贝尔曼不等式引理是一条重要的引理．在本章中读者已看到了它的一些应用，将来在第6章中还要用到它．这个不等式是微分方程理论研究中的一个重要工具，读者应熟悉这一工具的简单应用．

复　习　题

1．试用逐次逼近法求下列初值问题的解：

(1) $\dfrac{dy}{dx}=2y,\ y(0)=1$；

(2) $\dfrac{dy}{dx}=\ln|\sin y|,\ y(1)=\dfrac{\pi}{2}$；

(3) $\dfrac{dy}{dx}=p(x)y$, $y(0)=y_0$，其中函数 $p(x)$在区间(a,b)上连续，$a<0<b$.

2．考虑方程 $y'=f(y)$，其中 $f(y)$在区间 $c<y<d$ 上连续，并且有惟一的 $y^*\in(c,d)$使 $f(y^*)=0$．试证明：

(1) 如果对于任意 $y_0\in(c,d)$，$y_0\neq y^*$，广义积分$\displaystyle\int_{y_0}^{y^*}\frac{d\eta}{f(\eta)}$发散，则经过直线 $y=y^*$ 上任意确定的点存在惟一的解，即为 $y=y^*$．

(2) 如果对于某 $y_0\in(c,d)$，$y_0\neq y^*$，广义积分$\displaystyle\int_{y_0}^{y^*}\frac{d\eta}{f(\eta)}$收敛，则经过直线 $y=y^*$ 上任意确定的点的解存在，但不惟一．

3．试证明：方程$\dfrac{dy}{dx}=y^2(1-y)^3e^y$ 自(x_0,y_0)向右行的解的最大存在区间是$[x_0,+\infty)$．其中 $x_0\geq 0$ 和 y_0 任意给定．

4．求出下列方程满足初值条件 $x(t_0)=x_0$ 的解，并讨论解对初值的连续依赖性和可微性．若解关于初值是可微的，请写出解 $x=x(t,t_0,x_0)$关于初值的导数：

(1) $\dfrac{dx}{dt}=3x+e^t$；　　(2) $\dfrac{dx}{dt}=3t^2e^x$．

5．设 $y=\varphi_n(x)$是初值问题

$$\frac{dy}{dx}=ye^{(x+y)^2},\quad y\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{n^2}$$

的解．由解对初值的连续依赖性定理．试证明：对于给定的 $\varepsilon>0$ 和实数 A 和 B，存在 $N>0$，使得当 $n>N$ 时 $\varphi_n(x)$在闭区间 $A\leq x\leq B$ 上存在，并且在此区间上$|\varphi_n(x)|<\varepsilon$．

6．在区域 $x>-10$ 内讨论方程$\dfrac{dy}{dx}=-2xy^2$ 满足下列初值条件的解的最大存在区间以及相应积分曲线两端的性态：

(1) $y(0)=-1$；　(2) $y(2)=\dfrac{1}{3}$；　(3) $y(-2)=\dfrac{1}{3}$．

7．设方程$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)$满足

(1)　$f(x,y)$在区域 D 内连续并满足李普希兹条件;

(2)　$y=\varphi(x)$是该方程的定义于区间 $a\leq x\leq b$ 上的解，且

$$y_0=\varphi(x_0)\ .$$

试用贝尔曼不等式证明：对于任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\delta(\varepsilon)>0$，使得对任何适合

$$|R(x,y)|<\delta(\varepsilon)\quad((x,y)\in D)$$

的连续函数 $R(x,y)$，方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f(x,y)+R(x,y)$$

的满足条件 $y(x_0)=y_0$ 的解 $y=$珔(x)在 $a\leq x\leq b$ 上也存在，并且

|珔$(x)-\varphi(x)|<\varepsilon$.

8．设 $y(x,x_0,y_0)$为线性方程 $y'+p(x)y=q(x)$的满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的解．试就 $q(x)\equiv0$ 和 $q(x)$á 0 两种情形，不解方程，求出$\frac{y}{x_0}$和$\frac{y}{y_0}$.

第 4 章　线性微分方程

在§1.2 中已说过什么叫做线性微分方程.§2.2 中已介绍过一阶线性微分方程的解法.线性微分方程是一类十分重要的方程.它的重要性在于，许多实际问题可提炼出线性微分方程的模型；线性微分方程的解的理论比较完整，研究得也较透彻；某些特殊的线性方程(例如常系数情形)的解法比较容易.本章就来介绍 n 阶线性微分方程的一般理论，并且重点介绍常系数线性微分方程的解法.

§4.1　线性微分方程的一般理论

4.1.1　初值问题解的存在惟一性定理的叙述

n 阶线性微分方程一般形式是

$$\alpha_0(x)\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+\alpha_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+\alpha_n(x)y=F(x).\tag{1.1}$$

如果 $\alpha_0(x)\neq 0$，用 $\alpha_0(x)$ 除(1.1)式左、右两边，这样 n 阶线性微分方程可以改写为

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+a_1(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y=f(x).\tag{1.2}$$

这里 $a_i(x)=\dfrac{\alpha_i(x)}{\alpha_0(x)}$，$i=1,2,\cdots,n$；$f(x)=\dfrac{F(x)}{\alpha_0(x)}$.

以后总设函数 $a_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$ 和 $f(x)$ 在区间

$a < x < b$ (或闭区间 $a \leq x \leq b$) 上连续. 考虑方程(1.2) 并满足初值条件

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \quad \cdots, \quad y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)} \quad (1.3)$$

的初值问题. 其中 x_0 是区间(a, b) (或相应地$[a, b]$, 下同) 上任意给定的一个数, $y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}$ 是 n 个任意给定的数, 它可以看成 R^n 空间中任意给定的一个点$(y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)})$. 有下述初值问题解的存在惟一性定理.

定理 4.1.1 设函数 $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$和 $f(x)$在区间(a, b)上连续, 初值 $x_0 \in (a, b)$和$(y_0, y_0', \cdots, y_0^{(n-1)}) \in \mathrm{R}^n$, 则初值问题(1.2), (1.3)的解 $y = \varphi(x)$在区间(a, b)上存在并且惟一. 此解在(a, b)上直至 n 阶连续可微.

注 1 当 $n = 1$ 时, 定理 4.1.1 就是定理 2.2.1. 在该处已通过具体求解而建立了该定理. 现在对于 $n > 1$, 定理 4.1.1 的证明就没有那么方便了. 将来到第 5 章讲了线性微分方程组之后, 读者将会看到, 线性微分方程可以看做线性微分方程组的特例, 由定理5.3.1 就可以推知定理 4.1.1 成立. 今后, 除声明者外, 对于线性方程, 总假定它满足定理 4.1.1 的条件.

注 2 解 $y = \varphi(x)$的存在区间(a, b)与方程(1.2)中已知函数 $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$和 $f(x)$的连续区间(a, b)是一致的. 请读者注意: 定理 3.1.1 关于一般非线性方程初值问题的解, 仅能保证在小区间$|x - x_0| \leq h$ 上存在. 这是线性方程与非线性方程关于解的存在区间所表现出来的很大不同.

注 3 如果方程(1.2)中函数 $a_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$和 $f(x)$在闭区间$[a, b]$上连续, 那么解 $y = \varphi(x)$也能保证在闭区间$[a, b]$上存在且连续, 有直到 n 阶的连续导数. 关于区间端点的连续性和可微性, 按通常的规定来理解.

从前已经说过, 如果(1.2) 中的 $f(x) \equiv 0$, 即(1.2)成为

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y = 0, \qquad (1.4)$$

则称它为齐次线性方程；如果(1.2)中的 $f(x) \equiv 0$，则称(1.2)为非齐次线性方程，$f(x)$称为自由项.

考虑齐次线性方程(1.4)和零初值条件

$$y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(n-1)}(x_0) = 0 \quad (a < x_0 < b),$$

有下述注 4.

注 4　由齐次线性方程(1.4)和零初值条件构成的初值问题的惟一解显然是 $y \equiv 0$，这种解称为零解.

4.1.2　齐次线性方程的通解结构的基本理论

为了方便起见，引入记号

$$D^0 = 1, \quad D^k = \frac{d^k}{dx^k}, \quad k = 1, 2, \cdots,$$

和

$$L(D) = \frac{d^n}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x),$$

并称 $L(D)$为 n 阶线性微分算子.设函数 y 具有 n 阶导数，$L(D)y$的定义如下：

$$L(D)y = \frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \cdots + a_n(x)y.$$

由此，(1.2)和(1.4)可以分别写成

$$L(D)y = f(x) \qquad (1.2)'$$

和

$$L(D)y = 0. \qquad (1.4)'$$

算子 $L(D)$显然有下述性质：

引理 4.1.1　设 y_1 和 y_2 分别具有 n 阶导数，则

$$L(D)(y_1 + y_2) = L(D)y_1 + L(D)y_2. \qquad (1.5)$$

证　由 $L(D)y$ **的定义，有**

$$L(D)(y_1+y_2)=\frac{d^n(y_1+y_2)}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}(y_1+y_2)}{dx^{n-1}}+\cdots$$

$$+a_n(x)(y_1+y_2)$$

$$=\frac{d^ny_1}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y_1}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y_1$$

$$+\frac{d^ny_2}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}y_2}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)y_2$$

$$=L(D)y_1+L(D)y_2\ .$$ □

引理 4.1.2　设函数 y **具有** n **阶导数，**C **是常数，则**

$$L(D)(Cy)=CL(D)y\ . \tag{1.6}$$

证　$$L(D)(Cy)=\frac{d^nCy}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}Cy}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x)Cy$$

$$=CL(D)y\ .$$ □

由引理 4.1.1 和 4.1.2 所指出的性质称为算子 $L(D)$**的线性性质.由这两个引理,容易推得下述定理.**

引理 4.1.3　设 $y_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,m)$**是齐次线性方程(1.4)的** m **个解，**C_i $(i=1,2,\cdots,m)$**是** m **个常数，则**

$$y=\sum_{i=1}^{m}C_iy_i(x) \tag{1.7}$$

也是(1.4)的解.

证　由引理 4.1.2 和 4.1.1，容易推知

$$L(D)y=L(D)\left(\sum_{i=1}^{m}C_iy_i(x)\right)=\sum_{i=1}^{m}L(D)(C_iy_i(x))$$

$$=\sum_{i=1}^{m}C_iL(D)y_i(x)\ . \tag{1.8}$$

但因 $y_i(x)$**是(1.4)的解，所以** $L(D)y_i(x)=0$ $(i=1,2,\cdots,m)$.

将它代入(1.8)，便得 $L(D)y=0$. 这就证明了由(1.7)定义的 y 是(1.4)的解. □

由定理 4.1.2 可知，n 阶齐次线性方程(1.4)的解的全体所成的集合 H，对于普通的加法和数的乘法，构成一个线性空间. 人们常称它为(1.4)的解空间. 解空间的零元素就是零解 $y\equiv 0$.

下面，先引入函数线性相关和线性无关的概念，然后证明 H 是有限维的，维数为 n. 于是，只要求得 H 中任意一个确定的基，那么 H 中任意一个元素可以由该基的线性组合来表示，这样就得到(1.4)的通解.

定义 4.1.1 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x)$ 是定义在区间 (a, b) 上的 m 个函数. 如果存在 m 个不全为零的常数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_m$，使得在区间 (a, b) 上成立恒等式

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\cdots+\alpha_m y_m(x)\equiv 0, \qquad (1.9)$$

则称函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x)$ 在区间 (a, b) 上线性相关. 如果函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x)$ 在区间 (a, b) 上不是线性相关，则称它们在区间 (a, b) 上线性无关. 换句话讲，如果仅当 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_m=0$ 时才使(1.9)成立，则称 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_m(x)$ 在 (a, b) 上线性无关.

例 1 设

$$y_1(x)=\begin{cases} x^2, & -\infty< x\leq 0, \\ 0, & 0< x< +\infty, \end{cases}$$

$$y_2(x)=\begin{cases} 0, & -\infty< x\leq 0, \\ x^2, & 0< x< +\infty. \end{cases}$$

试证明：函数 $y_1(x), y_2(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性无关.

证 设函数 $y_1(x), y_2(x)$ 在区间 $(-\infty, +\infty)$ 上线性相关，则存在不全为零的常数 α_1 和 α_2，使得

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)\equiv 0, \quad x\in(-\infty, +\infty).$$

即当 $-\infty< x\leq 0$ 时 $\alpha_1 x^2\equiv 0$；当 $0< x< +\infty$ 时，$\alpha_2 x^2\equiv 0$. 于是

推得 $\alpha_1=\alpha_2=0$，这与 α_1 和 α_2 不全为零相矛盾，所以 $y_1(x)$，$y_2(x)$在$(-\infty,+\infty)$上线性无关．

例 2 设 λ_i $(i=1,2,\cdots,m)$是任意 m 个常数，当 $i\neq j$ 时 $\lambda_i\neq\lambda_j$．试证明：m 个函数 $y_i=e^{\lambda_i x}$ $(i=1,2,\cdots,m)$在区间$(-\infty,+\infty)$上线性无关．

证 设 $m=1$．显然由 $\alpha_1 e^{\lambda_1 x}\equiv 0$ 只能导致 $\alpha_1=0$，即仅当 $\alpha_1=0$ 时才使 $\alpha_1 e^{\lambda_1 x}\equiv 0$ 成立．故 $m=1$ 时命题成立．

设当 $m=k$ 时本命题成立，今证 $m=k+1$ 时命题亦成立．用反证法．设 $e^{\lambda_1 x},\cdots,e^{\lambda_k x},e^{\lambda_{k+1} x}$在$(-\infty,+\infty)$上线性相关，则存在不全为零的 $k+1$ 个常数 $\alpha_1,\cdots,\alpha_k,\alpha_{k+1}$，使在$(-\infty,+\infty)$上恒等式

$$\alpha_1 e^{\lambda_1 x}+\cdots+\alpha_k e^{\lambda_k x}+\alpha_{k+1}e^{\lambda_{k+1}x}\equiv 0 \tag{1.10}$$

成立．不妨可设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 不全为零．因为如果它们全为零，将它们代入(1.10)之后，就可推得 $\alpha_{k+1}=0$，与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$，$\alpha_{k+1}$不全为零矛盾．所以(1.10)中的 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_k$ 可以认为不全为零．

以 $e^{\lambda_{k+1}x}$除(1.10)的左、右两边，得到

$$\alpha_1 e^{\mu_1 x}+\cdots+\alpha_k e^{\mu_k x}+\alpha_{k+1}\equiv 0, \tag{1.11}$$

其中 $\mu_i=\lambda_i-\lambda_{k+1}$ $(i=1,2,\cdots,k)$．因为当 $i\neq j$ 时 $\lambda_i\neq\lambda_j$，所以当 $i\neq j$ 时 $\mu_i\neq\mu_j$，并且 $\mu_i\neq 0$ $(i=1,2,\cdots,k)$．将(1.11)式两边对 x 求导数，得到

$$\alpha_1\mu_1 e^{\mu_1 x}+\cdots+\alpha_k\mu_k e^{\mu_k x}\equiv 0. \tag{1.12}$$

注意，这里的 $\alpha_1\mu_1,\alpha_2\mu_2,\cdots,\alpha_k\mu_k$ 不全为零，但能使(1.12)成立，从而说明 k 个函数 $e^{\mu_1 x},e^{\mu_2 x},\cdots,e^{\mu_k x}$在区间$(-\infty,+\infty)$上线性相关．这与归纳法的假定"当 $m=k$ 时本命题成立"相矛盾．证毕．

为研究函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$线性无关性，引入下述定义．

定义 4.1.2 设函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 分别存在 $n-1$ 阶导数，行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

称为函数 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 的朗斯基(Wronsky)行列式.

下述定理可用来判别 n 阶齐次线性方程的 n 个解是否线性无关.

引理 4.1.4 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 是 n 阶齐次线性方程 (1.4)的 n 个解. 则 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 在区间 (a, b) 上线性无关的充分必要条件是它们的朗斯基行列式

$$W(x)\neq 0, \quad x\in(a, b).$$

证 充分性. 设 $W(x)\neq 0$, $x\in(a, b)$, 去证 $y_1(x)$, $y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 在区间 (a, b) 上线性无关. 用反证法，设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 在区间 (a, b) 上线性相关，即存在 n 个不全为零的常数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 使在 (a, b) 上成立恒等式:

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\cdots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0.$$

将上述恒等式两边对 x 逐次求 1 阶、2 阶…… $n-1$ 阶导数，任取某 $x_0\in(a, b)$ 代入，得到 n 个等式:

$$\alpha_1 y_1(x_0)+\alpha_2 y_2(x_0)+\cdots+\alpha_n y_n(x_0)=0,$$

$$\alpha_1 y_1'(x_0)+\alpha_2 y_2'(x_0)+\cdots+\alpha_n y_n'(x_0)=0,$$

$$\cdots,$$

$$\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+\alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+\alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0)=0.$$

这是含有 n 个未知数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的 n 个方程的方程组，它有非零解 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$，所以它的系数行列式必为零，即 $W(x_0)=0$ 与题设 $W(x)\neq 0$, $x\in(a, b)$ 矛盾，这就证明了 $y_1(x)$,

$y_2(x),\cdots,y_n(x)$在区间(a,b)上线性无关.

以下证必要性.设 n 个解 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$在$(a,b)$上线性无关,今证 $W(x)\neq 0$.用反证法.设存在 $x_0\in(a,b)$使 $W(x_0)=0$.考虑 n 个未知数的齐次线性代数方程组

$$\begin{cases}\alpha_1 y_1(x_0)+\alpha_2 y_2(x_0)+\cdots+\alpha_n y_n(x_0)=0,\\ \alpha_1 y_1'(x_0)+\alpha_2 y_2'(x_0)+\cdots+\alpha_n y_n'(x_0)=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+\alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0)+\cdots+\alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0)=0.\end{cases}\tag{1.13}$$

它的系数行列式是 $W(x_0)$.由反证法的假设知 $W(x_0)=0$.根据线性代数理论,(1.13)存在一组不全为零的解 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$.以这组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,构造

$$y(x)=\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\cdots+\alpha_n y_n(x).$$

今证 $y(x)\equiv 0$.事实上,由引理 4.1.3 知,$y(x)$也是(1.4)的解.由(1.13)知,

$$y(x_0)=0,\quad y'(x_0)=0,\quad\cdots,\quad y^{(n-1)}(x_0)=0.$$

由定理 4.1.1 后的注 4 知,齐次方程满足零初值条件的惟一解显然只有零解 $y(x)\equiv 0$.

这就证明了存在一组不全为零的数 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$,使

$$\alpha_1 y_1(x)+\alpha_2 y_2(x)+\cdots+\alpha_n y_n(x)\equiv 0,\qquad x\in(a,b).$$

于是知 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$在$(a,b)$上线性相关.这与假设矛盾,从而推知 $W(x)\neq 0$,$x\in(a,b)$. □

注 1 请读者仔细审视一下,不难发现,在充分性的证明中,只用到条件"存在 $x_0\in(a,b)$使 $W(x_0)\neq 0$".既用不到条件"$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是(1.2)的解",也不必假定"$W(x)$在区间$(a,b)$上处处不为零".换句话讲,实际上有下述结论:"如果存在 $x_0\in(a,b)$使 $W(x_0)\neq 0$,则函数 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$在$(a,b)$上线性无关."但是读者必须注意,在必要性的证

明中，先决条件“$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是(1.4)的 n 个解”是不容忽视的．例如本节例1的函数 $y_1(x),y_2(x)$是线性无关的，但是它们所构成的朗斯基行列式

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} x^2 & 0 \\ 2x & 0 \end{vmatrix}\equiv 0,\quad \text{当} -\infty<x\leq 0;$$

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 0 & x^2 \\ 0 & 2x \end{vmatrix}\equiv 0,\quad \text{当}\ 0<x<+\infty.$$

即当 $x\in(-\infty,+\infty)$时，$W(x)$却可以恒等于零．

注2　设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是(1.2)的 n 个解，并且如果存在 $x_0\in(a,b)$使 $W(x_0)\neq 0$，则由注1知，$y_1(x)$，$y_2(x),\cdots,y_n(x)$在区间(a,b)上线性无关．再由定理4.1.3的必要条件推知，对一切 $x\in(a,b)$，$W(x)\neq 0$．由此有推论：

推论　设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$是(1.4)的 n 个解，则它的朗斯基行列式，要么在区间(a,b)上处处不等于零，要么恒等于零．

有了引理4.1.4，就可以来证明下述定理．

定理4.1.2　n 阶齐次线性方程有且仅有 n 个线性无关的解．

证　先证必有 n 个线性无关的解．考虑 n 阶齐次线性方程(1.4)与初值条件

$$y(x_0)=0,\ \cdots,\ y^{(i-1)}(x_0)=1,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=0$$

构成的初值问题．这里初值条件仅是 $y^{(i-1)}(x_0)=1$，其余 $y^{(j)}(x_0)=0\ (j=0,1,\cdots,n-1;\ j\neq i-1)$，$x_0\in(a,b)$．由定理4.1.1知，此初值问题的解存在且惟一，将此解记为 $y_i(x)$．令 $i=1,2,\cdots,n$，得到 n 个解．这 n 个解的朗斯基行列式在 $x=x_0$ 的值

$$W(x_0)=\det I=1\neq 0,$$

其中 I 为 n 阶单位矩阵．由定理 4.1.3 知，$y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$线性无关．

再证 n 阶齐次线性方程的任意多于 n 个解必线性相关．为此只需证明任意 $n+1$ 个解 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_{n+1}(x)$ 在区间 (a, b) 上必线性相关．不妨设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$线性无关．因为若这 n 个线性相关，则添了 $y_{n+1}(x)$之后也必线性相关．既然假设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$ 在 (a, b) 上线性无关，由引理 4.1.4 知由 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$构成的朗斯基行列式

$$W(x) \neq 0 .$$

构造含 n 个未知数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 的线性代数方程组

$$\alpha_1 y_1(x_0) + \alpha_2 y_2(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n(x_0) = y_{n+1}(x_0),$$

$$\alpha_1 y_1'(x_0) + \alpha_2 y_2'(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n'(x_0) = y_{n+1}'(x_0),$$

$$\cdots,$$

$$\alpha_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \alpha_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \cdots + \alpha_n y_n^{(n-1)}(x_0) = y_{n+1}^{(n-1)}(x_0),$$

其中 $x_0 \in (a, b)$为任意取定．由于 $W(x_0) \neq 0$，故上述方程组存在惟一解 $\alpha_1^*, \alpha_2^*, \cdots, \alpha_n^*$．构造函数

$$y(x) = \alpha_1^* y_1(x) + \alpha_2^* y_2(x) + \cdots + \alpha_n^* y_n(x) .$$

可见

$$y^{(j)}(x_0) = y_{n+1}^{(j)}(x_0), \quad j = 0, 1, \cdots, n-1 .$$

由初值问题解的惟一性知，$y(x) \equiv y_{n+1}(x)$．从而证明了 $y_{n+1}(x)$可以由 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$线性表出，即证明了 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x), y_{n+1}(x)$线性相关． □

由定理 4.1.2 立即得到下述 n 阶齐次线性方程的通解结构定理．

定理 4.1.3 n 阶齐次线性方程(1.4)的解空间 H 是一个 n 维线性空间．设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$是(1.4)的 n 个线性无关的解，则(1.4)的任意一个确定的解 $y(x)$可以表示成

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x),\qquad(1.14)$$

其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是 n 个确定的常数．如果 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是任意常数，则 $C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x)$ 是(1.4)的通解．

通常，将(1.4)的解空间 H 中的一个基，即(1.4)的 n 个线性无关的解,称为(1.4)的一个基本解组．由定理 4.1.3 可知，为了求(1.4)的通解，只需求得(1.4)的一个基本解组 $y_1(x)$, $y_2(x),\cdots,y_n(x)$，然后分别乘以任意常数 $C_1,C_2,\cdots,C_n$，再相加，便得(1.4)得通解

$$y(x)=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\cdots+C_ny_n(x).$$

定理 4.1.3 是十分漂亮的，但要真正求出(1.4)的通解却非易事．原因在于求(1.4)的一个基本解组一般说来是困难的．对于一些特殊类型的齐次线性方程如何求它的一个基本解组(从而便得通解)的事，留待以后再讲．

4.1.3 非齐次线性方程的通解结构

现在考虑 n 阶非齐次线性方程(1.2)′的通解问题．

引理 4.1.5 (1) 设 $y^*(x)$ 与 $y(x)$ 是(1.2)′的两个解，则 $Y(x)=y(x)-y^*(x)$是(1.2)′对应的齐次线性方程(1.4)′的解．

(2) 设 $y^*(x)$ 与 $Y(x)$ 分别是(1.2)′与它对应的齐次线性方程的解，则 $y(x)=Y(x)+y^*(x)$ 也是(1.2)′的解．

证 (1) 由(1.2)′与(1.4)′的记号及引理 4.1.1 和引理 4.1.2，有

$$\begin{aligned}L(D)Y(x)&=L(D)(y(x)-y^*(x))\\&=L(D)y(x)-L(D)y^*(x)\\&=f(x)-f(x)=0.\end{aligned}$$

所以 $Y(x)$是(1.4)′的解.

(2) 与(1)类似可证. □

由此易证下述非齐次线性方程的通解结构定理.

定理 4.1.4 设 $y^*(x)$是非齐次线性方程(1.2)′的任意一个确定的解,$Y(x)$是(1.2)′对应的齐次线性方程(1.4)′的通解.则

$$y(x) = Y(x) + y^*(x) \tag{1.15}$$

是(1.2)′的通解.

证 由引理 4.1.5 的(2)知,(1.15)定义的 $y(x)$是(1.2)′的解.又由引理 4.1.5 的(1)知,(1.2)′的任意一个确定的解 $y(x)$必可写为 $y^*(x)$与(1.4)′的某一个解之和,即包含在解族(1.15)之中.故知(1.15)是(1.2)′的通解. □

由定理 4.1.4 可见,为求(1.2)′的通解可分两步:先求(1.2)′对应的(1.4)′的通解,再求(1.2)′的一个解(随便怎么样的一个解都可以),两者相加便得(1.2)′的通解.具体求解问题,仍待以后再讲.

在结束本节之前,介绍关于朗斯基行列式的刘维尔公式.

定理 4.1.5 设 $y_1(x), y_2(x), \cdots, y_n(x)$是 n 阶齐次线性方程(1.4)的 n 个解,$W(x)$是它的朗斯基行列式.则对于区间(a, b)上任意一点 x_0,有

$$W(x) = W(x_0)e^{-\int_{x_0}^{x} a_1(\tau)d\tau}. \tag{1.16}$$

证 以 $n = 2$ 的情形为例证明之.对于一般 n,其证明是类似的,只是计算$\dfrac{dW(x)}{dx}$较为麻烦而已.

$n = 2$ 时,方程(1.4)是

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x)\frac{dy}{dx} + a_2(x)y = 0, \tag{1.17}$$

朗斯基行列式(1.13)是

$$W(x)=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}.$$

于是

$$\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}=\begin{vmatrix} y_1'(x) & y_2'(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1''(x) & y_2''(x) \end{vmatrix}.$$

上式右边第一个行列式显然为零.以 $a_2(x)$ 乘第二个行列式的第 1 行的各元素,然后分别加到第 2 行上去,再注意到 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 都是(1.17)的解,于是便推得

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W(x)}{\mathrm{d}x}&=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ -a_1(x)y_1'(x) & -a_1(x)y_2'(x) \end{vmatrix}\\ &=-a_1(x)W(x).\end{aligned}$$

这是关于 $W(x)$ 的一个线性方程,解此方程便求得(1.16)式.□

公式(1.16)称为刘维尔公式.不论 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 是否线性无关,公式(1.16)都成立.由(1.16)可以再一次推出引理 4.1.4 的推论成立.

下面说一下刘维尔公式的一个应用.

设 $y_1(x)$ 是二阶齐次线性方程(1.17)的一个非零解,$y(x)$ 是(1.17)的另一解,它与 $y_1(x)$ 线性无关.则由刘维尔公式,有

$$\begin{vmatrix} y_1(x) & y(x) \\ y_1'(x) & y'(x) \end{vmatrix}=C_2\mathrm{e}^{-\int a_1(x)\mathrm{d}x},\tag{1.18}$$

这里 $\int\cdots\mathrm{d}x$ 表示“…”的某一个确定的原函数(下面的 $\int\cdots\mathrm{d}x$ 都是这个意思),C_2 是某一确定的常数.因为 $y(x)$ 与 $y_1(x)$ 线性无关,所以 $C_2\neq0$.将(1.18)左边的行列式展开,得

$$y_1(x)y'(x)-y(x)y_1'(x)=C_2\mathrm{e}^{-\int a_1(x)\mathrm{d}x}.\tag{1.19}$$

在 $y_1(x)\neq0$ 处,以 $y_1^2(x)$ 除(1.19)的两边,得

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{y(x)}{y_1(x)}\right)=\frac{C_2}{y_1^2(x)}\mathrm{e}^{-\int a_1(x)\mathrm{d}x}.$$

两边积分，便得

$$y(x)=y_1(x)\left[\int\frac{C_2}{y_1^2(x)}e^{-\int a_1(x)dx}dx+C_1\right].\qquad(1.20)$$

这里 C_1 是某一确定的常数．

以上推理说明，(1.17)的任意一个确定的与 $y_1(x)$ 线性无关的解 $y(x)$ 必可写成(1.20)的形式．

容易看出，在 $y_1(x)\neq 0$ 处，函数

$$y_2(x)=y_1(x)\int\frac{1}{y_1^2(x)}e^{-\int a_1(x)dx}dx\qquad(1.21)$$

是(1.17)的解．它与 $y_1(x)$ 组成的(1.18)中，相应的 $C_2=1$．所以 $y_2(x)$ 与 $y_1(x)$ 线性无关．从而当 C_1 和 C_2 是两个任意常数时，(1.20)是(1.17)的通解．

例 3 容易验证 $y_1=x+1$ 是方程

$$(1+x^2)\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}-y+1=0$$

的一个解，试求该方程的通解．

解 原方程是一个非齐次线性方程．令 $\eta=y-1$ 作变换，以消除自由项，原方程化为

$$(1+x^2)\frac{d^2\eta}{dx^2}+x\frac{d\eta}{dx}-\eta=0,$$

或写成

$$\frac{d^2\eta}{dx^2}+\frac{x}{1+x^2}\frac{d\eta}{dx}-\frac{\eta}{1+x^2}=0.\qquad(1.22)$$

于是 $\eta_1(x)=y_1(x)-1=x$ 是(1.22)的一个解．按公式(1.20)，可得(1.22)的通解

$$\begin{aligned}\eta(x)&=x\left[\int\frac{C_2}{x^2}e^{-\int\frac{x}{1+x^2}dx}dx+C_1\right]\\&=x\left[\int\frac{C_2}{x^2\sqrt{1+x^2}}dx+C_1\right]\\&=-C_2\sqrt{1+x^2}+C_1x,\end{aligned}$$

从而得到原方程的通解:

$$y(x) = -C_2\sqrt{1+x^2} + C_1 x + 1 .$$

其中 C_1 和 C_2 是两个任意常数.

说明一点:由刘维尔公式知,只要知道(1.17)的一个非零解,就可求得(1.17)的通解.但是如何求出二阶线性齐次方程的一个非零解,实际上是十分困难的,从而说明上述方法在实际求解时的作用是有限的.

习　题　4.1

1.证明:若 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)$ 是区间 (a, b) 上的连续函数,且 $p_0(x) \neq 0$,则可以用 $\mu(x) = \dfrac{1}{p_0(x)} e^{\int \frac{p_1}{p_0} dx}$ 乘二阶线性方程

$$p_0(x)\frac{d^2 y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x) y = 0$$

的两边而将其化为方程

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] + q(x) y = 0,$$

并求出 $p(x)$ 和 $q(x)$.

2.设 $p(x)$ 是一阶连续可微函数,$q(x)$ 是连续函数.试证:上题中的第2个方程可经自变量的代换 $\xi = \int \dfrac{dx}{p(x)}$,化为方程

$$\frac{d^2 y}{d\xi^2} + Q(\xi) y = 0 .$$

3.证明:可用变换 $y = u(x) z$ 把第1题中的第一个方程化为

$$\frac{d^2 z}{dx^2} + r(x) z = 0,$$

并求出 $u(x)$ 和 $r(x)$.

4.设 $x(t)$ 是方程 $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + p(t)\dfrac{dx}{dt} + q(t) x = 0$ 的非零解.试证明:当 $x(t_0) = 0$ 时必有 $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=t_0} \neq 0$.

5.讨论下列各组函数在 $(-\infty, +\infty)$ 上是否线性相关:

(1) $t, 2t, t^2$;　　(2) e^t, te^t, t^2e^t;

(3) $\operatorname{sh} t, \operatorname{ch} t, 2+e^t$;　　(4) $5, \sin(t+1), \cos(t+2)$.

6．设 $x_1(t), x_2(t)$是方程

$$\frac{d^2x}{dt^2}+p_1(t)\frac{dx}{dt}+p_2(t)x(t)=0$$

的两个非零解，且它们有一个公共零点，试证明：$x_1(t)=kx_2(t)$，k为常数．

7．证明：

(1) 最高阶导数的系数是 1 的线性齐次方程由其基本解组惟一决定，即若两个方程

$$\frac{d^nx}{dt^n}+p_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+p_n(t)x=0,$$

$$\frac{d^nx}{dt^n}+q_1(t)\frac{d^{n-1}x}{dt^{n-1}}+\cdots+q_n(t)x=0$$

有共同的基本解组 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$，那么这两个方程完全相同．也就是说有 $p_i(t)\equiv q_i(t)\ (i=1,2,\cdots,n)$；

(2) 由基本解组 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$所决定的最高阶导数系数为 1 的 n 阶线性齐次方程为

$$(-1)^n\frac{W(x,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)}{W(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)}=0,$$

其中

$$W(x,\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)=\begin{vmatrix} x & \varphi_1 & \cdots & \varphi_n \\ x' & \varphi_1' & \cdots & \varphi_n' \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ x^{(n)} & \varphi_1^{(n)} & \cdots & \varphi_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

$W(\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n)$是 $\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$ 的朗斯基行列式．

8．求出以下列各组函数为基本解组的最高阶导数的系数为 1 的线性齐次方程：

(1) e^{t^2}, e^{-t^2};　　(2) $1, \sin t, \cos t$;　　(3) $\dfrac{\sin t}{t}, \dfrac{\cos t}{t}$.

9．设 $x_1(t), x_2(t)$是方程$\dfrac{d^2x}{dt^2}+x=0$ 的分别满足初值条件

$$x_1(0)=0,\quad x_1'(0)=1;$$

$$x_2(0)=1,\quad x_2'(0)=0$$

的两个解.不具体求出 $x_1(t)$和 $x_2(t)$，请直接证明:

(1) $\dfrac{\mathrm{d}x_1(t)}{\mathrm{d}t}=x_2(t)$，$\dfrac{\mathrm{d}x_2(t)}{\mathrm{d}t}=-x_1(t)$；

(2) $x_1^2(t)+x_2^2(t)=1$；

(3) $x_2(t)$有零点；

(4) 若以 ω 表示 $x_2(t)$在正半轴上的第一个零点，则 $x_1(t)$，$x_2(t)$都是以 4ω 为周期的周期函数.

10.已知下列方程的一个解 $y_1(x)$，求它们的通解:

(1) $y''+\dfrac{2}{x}y'+y=0$，$y_1(x)=\dfrac{\sin x}{x}$；

(2) $x^2y''-4xy'+6y=0$，$y_1(x)=x^2$；

(3) $x^4y''+2x^3y'+a^2y=0$，$y_1(x)=\sin\dfrac{a}{x}$.

11.求方程$(1-2x)y''+2y'+(2x-3)y=0$的通解.

12.试证明一般 n 时的定理 4.1.5.

§4.2 常系数齐次线性方程的解法

若(1.2)中一切系数 $a_i(x)$ $(i=1,2,\cdots,n)$都是常数时，则称该方程为常系数线性方程.n 阶常系数线性方程的一般形式是

$$L(D)y=\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+a_1\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_ny=f(x),\qquad(2.1)$$

这里 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$都是常数，$f(x)$是 x 的已知函数，$x\in(a,b)$.按照§4.1 中所说，仍设 $f(x)$在区间(a,b)上连续.

例如，$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=\mathrm{e}^{-x}$是 2 阶常系数非齐次线性方程；$\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=0$是 2 阶常系数齐次线性方程，并且后者是前者所对应的齐次线性方程.

本节讨论 n 阶常系数齐次线性方程

$$L(D)y=0\qquad(2.2)$$

的解法.由以下的讨论可知，它的解法归结为求一个 n 次代数方

程的一切根(实根和复根)，而并不需要做积分．

4.2.1　特征方程的根都是单根的情形

先回顾一下 $n=1$ 的情形．$y=e^{-a_1x}$是方程

$$\frac{dy}{dx}+a_1y=0$$

的一个解，解的形状成指数 $e^{\lambda x}$形．对于一般的(2.2)，设想 $y=e^{\lambda x}$是它的一个解．以此代入(2.2)，并注意到 $e^{\lambda x}$对 x 的 k 阶导数 $(e^{\lambda x})^{(k)}=\lambda^k e^{\lambda x}$，于是

$$\begin{aligned}L(D)e^{\lambda x}&=(D^n+a_1D^{n-1}+\cdots+a_n)e^{\lambda x}\\&=(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n)e^{\lambda x}\\&=e^{\lambda x}L(\lambda),\end{aligned}\tag{2.3}$$

这里的 $L(\lambda)$是将 $L(D)$中的 D 形式上换为λ而得到，是λ的一个 n 次多项式．因 $e^{\lambda x}\neq 0$，于是推知 $e^{\lambda x}$是(2.2)的解的充分必要条件为：λ是方程

$$L(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0\tag{2.4}$$

的根．

方程(2.4)称为(2.2)的特征方程，(2.4)的根称为(2.2)的特征根．

本段讨论一切特征根都是单根的情形，有下述定理．

定理 4.2.1　设 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$是(2.2)的 n 个互不相等的实特征根，则

$$y(x)=C_1e^{\lambda_1x}+C_2e^{\lambda_2x}+\cdots+C_ne^{\lambda_nx}\tag{2.5}$$

是(2.2)的通解，其中 $C_1,C_2,\cdots,C_n$ 是 n 个任意常数．

证　由本段开始的论证可知，n 个函数

$$e^{\lambda_1x},\ e^{\lambda_2x},\ \cdots,\ e^{\lambda_nx}\tag{2.6}$$

都是(2.2)的解．由§4.1 的例 2 知，它们在区间$(-\infty,+\infty)$上

线性无关，故(2.6)是(2.2)的一个基本解组. 再由定理4.1.3知，(2.5)是(2.2)的通解. □

例1 求 $y^{(4)}-2y^{(3)}-y''+2y'=0$ 的通解.

解 写出特征方程：

$$\lambda^4-2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda=0.$$

因式分解有

$$\begin{aligned}\lambda^4-2\lambda^3-\lambda^2+2\lambda&=\lambda[\lambda^2(\lambda-2)-(\lambda-2)]\\&=\lambda(\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1).\end{aligned}$$

于是得到4个相异的特征根：

$$\lambda_1=0,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=1,\ \lambda_4=-1.$$

由定理4.2.1，便得通解：

$$y(x)=C_1+C_2e^{2x}+C_3e^{x}+C_4e^{-x},$$

其中 C_1,C_2,C_3,C_4 是任意常数.

注 当特征根 λ_i 中有复数根时，可证上述定理也是正确的. 为此，需要先作一些说明. 设 $\lambda=\alpha+i\beta$ 是复数，α 和 β 是实数，x 是实变量. (1) 函数 $e^{\lambda x}$ 是如何定义的？(2) 公式 $\frac{d}{dx}e^{\lambda x}=\lambda e^{\lambda x}$ 是否仍正确？严格的论证要涉及《复变函数》课程，在此只能简单地介绍一下.

在《数学分析》课程中，曾形式地建立了关系：

$$e^{\pm i\beta x}=\cos\beta x\pm i\sin\beta x,\tag{2.7}$$

它称为欧拉(Euler)公式. 据此，定义

$$e^{(\alpha\pm i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x\pm i\sin\beta x).\tag{2.8}$$

设 $y(x)=u(x)+iv(x)$ 是实变量 x 的复值函数，其中 $u(x)$ 和 $v(x)$ 都是实函数. 定义

$$\frac{dy(x)}{dx}=\frac{du(x)}{dx}+i\frac{dv(x)}{dx}.\tag{2.9}$$

由(2.9)易知有

$$\frac{d^ky(x)}{dx^k}=\frac{d^ku(x)}{dx^k}+i\frac{d^kv(x)}{dx^k}.\tag{2.10}$$

由此有

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\lambda x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x)\\
&= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + \mathrm{i}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\\
&= \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\cos\beta x - \beta\sin\beta x) + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha\sin\beta x + \beta\cos\beta x)\\
&= \mathrm{e}^{\alpha x}(\alpha + \mathrm{i}\beta)(\cos\beta x + \mathrm{i}\sin\beta x)\\
&= \lambda\mathrm{e}^{\lambda x},
\end{aligned}
$$

所以公式$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\mathrm{e}^{\lambda x} = \lambda\mathrm{e}^{\lambda x}$仍正确 .

最后说一下复值解的概念, 如果实变量 x 的复值函数 $y(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$满足方程(2 .2), 即

$$L(D)y(x) = L(D)[u(x) + \mathrm{i}v(x)] \equiv 0,$$

则称 $y(x)$是(2 .2)的复值解,“复值”两字有时省去 .

顺便可以得到下述引理 .

引理 4 .2 .1 设线性算子 $L(D)$中的系数 a_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$都是实数(本书都是这么假定的), 则 $y(x) = u(x) + \mathrm{i}v(x)$是(2 .2)的解的充分必要条件是 $u(x)$和 $v(x)$分别是(2 .2)的解 .

证 由(2 .10)有

$$L(D)[u(x) + \mathrm{i}v(x)] = L(D)u(x) + \mathrm{i}L(D)v(x) . \tag{2 .11}$$

如果 $u(x)$和 $v(x)$分别是(2 .2)的解, 则有 $L(D)u(x) \equiv 0$ 和 $L(D)v(x) \equiv 0$. (2 .11)推知 $L(D)y(x) \equiv 0$. 即 $y(x)$是(2 .2)的解 . 反之, 如果 $y(x)$是(2 .2)的解, 则由(2 .11)有

$$L(D)u(x) + \mathrm{i}L(D)v(x) \equiv 0 .$$

因为 $L(D)$中的系数都是实数, $u(x)$和 $v(x)$都是实函数, 故 $L(D)u(x)$和 $L(D)v(x)$都是实函数, 于是推知 $L(D)u(x) \equiv 0$ 和 $L(D)v(x) \equiv 0$. □

有了这些准备，可以回到特征根有复值的情形上来．设(2.2)的特征根 λ_i $(i=1,2,\cdots,n)$各不相等，但其中有复数根，由于(2.2)中的系数 a_i $(i=1,2,\cdots,n)$都是实数，即特征方程(2.4)是一个实系数的 n 次代数方程．如果 $\lambda_1=\alpha+\mathrm{i}\beta$ 是(2.4)的一个复数根，那么它的共轭复数 $\overline{\lambda_1}=\alpha-\mathrm{i}\beta$ 也是特征根．不妨设 $\lambda_2=\overline{\lambda_1}$．于是易知(2.2)对应了两个复值解 $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ 和 $\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$．容易看出，如果§4.1 例 2 中的 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_m$ 有复数时，则该例的结论仍成立．于是推知，即使 $\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\mathrm{e}^{\lambda_2 x},\cdots,\mathrm{e}^{\lambda_n x}$ 中有复值函数，它仍是(2.2)的一个基本解组．从而定理 4.2.1 仍成立，可获得(2.2)的通解(2.5)．但因复值函数使用不便，为此，需要将复值解 $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ 和 $\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 用适当的实值解来替代，注意，由

$$y_1(x)=\mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x+\mathrm{i}\sin\beta x),$$

$$y_2(x)=\mathrm{e}^{(\alpha-\mathrm{i}\beta)x}=\mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x-\mathrm{i}\sin\beta x),$$

有

$$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x=\frac{1}{2}[y_1(x)+y_2(x)]=\mathrm{Re}\,y_1(x),$$

$$\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x=\frac{1}{2\mathrm{i}}[y_1(x)-y_2(x)]=\mathrm{Im}\,y_1(x).$$

这里 Re 和 Im 分别表示实部和虚部．既然 $y_1(x)$ 是(2.2)的解，那么由引理 4.2.1 知，它的实部和虚部，即

$$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\quad 和\quad \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

也分别是(2.2)的解，下面证明，在基本解组

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ \mathrm{e}^{\lambda_2 x},\ \mathrm{e}^{\lambda_3 x},\ \cdots,\ \mathrm{e}^{\lambda_n x}$$

中，用 $\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x$ 和 $\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ 代替 $\mathrm{e}^{\lambda_1 x}$ 和 $\mathrm{e}^{\lambda_2 x}$ 之后，所得到的 n 个解

$$\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x,\ \mathrm{e}^{\lambda_3 x},\ \cdots,\ \mathrm{e}^{\lambda_n x}\tag{2.12}$$

也是一个基本解组．实际上，可以证明更为一般的下述引理．

引理 4.2.2 设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 在某区间 (a,b) 上线性无关，$\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_k(x)$ 是 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_k(x)$

的线性组合:

$$\varphi_j(x)=\sum_{i=1}^{k}C_{ij}y_i(x),\qquad j=1,2,\cdots,k,\ k\leq n,\tag{2.13}$$

其中矩阵(C_{ij})的行列式

$$\begin{vmatrix} C_{11} & C_{12} & \cdots & C_{1k} \\ C_{21} & C_{22} & \cdots & C_{2k} \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ C_{k1} & C_{k2} & \cdots & C_{kk} \end{vmatrix}\neq 0,\tag{2.14}$$

则在 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$中用 $\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\varphi_k(x)$代替 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_k(x)$之后所得到的 n 个函数

$$\varphi_1(x),\ \cdots,\ \varphi_k(x),\ y_{k+1}(x),\ \cdots,\ y_n(x)\tag{2.15}$$

在(a,b)上也线性无关.

证　反证法.设(2.15)在(a,b)上线性相关,则存在 n 个不全为零的常数$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 使

$$\alpha_1\varphi_1(x)+\cdots+\alpha_k\varphi_k(x)+\alpha_{k+1}y_{k+1}(x)+\cdots+\alpha_ny_n(x)\equiv 0.$$

以(2.13)代入上式并整理,得

$$(\alpha_1C_{11}+\cdots+\alpha_kC_{1k})y_1(x)+\cdots+(\alpha_1C_{k1}+\cdots+\alpha_kC_{kk})y_k(x)$$
$$+\alpha_{k+1}y_{k+1}(x)+\cdots+\alpha_ny_n(x)\equiv 0.$$

由假设,$y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$在$(a,b)$上线性无关,故由上式推知

$$\begin{cases}\alpha_1C_{11}+\cdots+\alpha_kC_{1k}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \alpha_1C_{k1}+\cdots+\alpha_kC_{kk}=0,\\ \alpha_{k+1}=0,\\ \cdots\cdots\cdots\\ \alpha_k=0.\end{cases}\tag{2.16}$$

注意,行列式(2.14)正好是(2.16)中前 k 个方程构成的方程组的

系数行列式，它不等于零，从而推知 $\alpha_1=\alpha_2=\cdots=\alpha_k=0$．再由(2.16)后面诸方程可推得 $\alpha_{k+1}=\cdots=\alpha_n=0$．与 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 不全为零相矛盾．此矛盾推知(2.15)在(a,b)上线性无关． □

由以上知，$e^{\alpha x}\cos\beta x$ 和 $e^{\alpha x}\sin\beta x$ 分别都是 $y_1(x)$和 $y_2(x)$的线性组合，其系数行列式

$$\begin{vmatrix}\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2i} & -\frac{1}{2i}\end{vmatrix}=-\frac{1}{2i}\neq 0,$$

故由引理 4.2.2 知，(2.12)也是(2.2)的一个基本解组．

将(2.2)的一切复特征根所对应的一对对复值解都按上述办法处理，用它们相对应的一对对实值解来代替，这样就可获得 n 个线性无关的实值解，从而得到(2.2)的通解．即有下述定理．

定理 4.2.2 设(2.2)的 n 个特征根互异，并设其中有 m 对共轭复特征根 $\lambda_j=\alpha_j+i\beta_j$，和 $\overline{\lambda_j}=\alpha_j-i\beta_j$ $(j=1,2,\cdots,m)$，$2m\leq n$，其他 $n-2m$ 个特征根 $\lambda_{2m+1},\cdots,\lambda_n$ 是实数，则

$$e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\ e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\ \cdots,\ e^{\alpha_m x}\cos\beta_m x,$$
$$e^{\alpha_m x}\sin\beta_m x,\ e^{\lambda_{2m+1}x},\ \cdots,\ e^{\lambda_n x}$$

是(2.2)的一个基本解组，

$$\begin{aligned}y(x)=&e^{\alpha_1 x}(C_1\cos\beta_1 x+C_2\sin\beta_1 x)+\cdots\\&+e^{\alpha_m x}(C_{2m-1}\cos\beta_m x+C_{2m}\sin\beta_m x)\\&+C_{2m+1}e^{\lambda_{2m+1}x}+\cdots+C_n e^{\lambda_n x}\end{aligned}\tag{2.17}$$

是(2.2)的通解．

例 2 求 $\frac{d^3y}{dx^3}-3\frac{d^2y}{dx^2}+9\frac{dy}{dx}+13y=0$ 的通解．

解 写出特征方程：

$$\lambda^3-3\lambda^2+9\lambda+13=0.$$

因式分解得$(\lambda+1)(\lambda^2-4\lambda+13)=0$，特征根为

$$\lambda_1 = -1,\ \lambda_2 = 2+3\mathrm{i},\ \lambda_3 = 2-3\mathrm{i}.$$

于是得通解

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{-x} + \mathrm{e}^{2x}(C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x).$$

4.2.2 一般情形

本段讨论特征方程的根有重根的情形. 设(2.2)的不同特征根有 s 个, 它们分别是 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$, 其重数相应地是 n_1 重、n_2 重……n_s 重, $n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$. 按照 4.2.1 节, 只能得到 s 个线性无关的解

$$\mathrm{e}^{\lambda_1 x},\ \mathrm{e}^{\lambda_2 x},\ \cdots,\ \mathrm{e}^{\lambda_s x}. \tag{2.18}$$

如果 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 中至少有一个 2 重根, 则 $s < n$. 于是(2.18)构不成基本解组, 因此必须另想办法.

引理 4.2.3 设 $u(x)$ 具有 n 阶导数, a 是常数, 则有公式

$$L(D)(u\mathrm{e}^{\alpha x}) = \mathrm{e}^{\alpha x}\left(L(a)u + \frac{L'(a)}{1!}u' + \cdots + \frac{L^{(k)}(a)}{k!}u^{(k)} + \cdots + \frac{L^{(n)}(a)}{n!}u^{(n)} \right). \tag{2.19}$$

证 由乘积的高阶导数莱布尼兹(Leibniz)公式, 对于正整数 m, 有

$$(u\mathrm{e}^{\alpha x})^{(m)} = \sum_{j=0}^{m} C_m^j u^{(m-j)} (\mathrm{e}^{\alpha x})^{(j)} = \sum_{j=0}^{m} C_m^j u^{(m-j)} a^j \mathrm{e}^{\alpha x}$$
$$= \mathrm{e}^{\alpha x}(u + a)^{(m)},$$

这里 $(u+a)^{(m)}$ 表示按二项式定理展开, 展开式中 $u^{(j)}$ 为 u 的 j 阶导数, $u^{(0)}$ 表示 u 本身, $a^{(j)}$ 为 a 的 j 次幂 a^j. 于是

$$L(D)(u\mathrm{e}^{\alpha x}) = \sum_{m=0}^{n} a_{n-m} D^m (u\mathrm{e}^{\alpha x})$$
$$= \mathrm{e}^{\alpha x} \sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(u + a)^{(m)}, \tag{2.20}$$

这里 $a_0 \equiv 1$.

为了将(2.20)改写，由泰勒(Taylor)公式，

$$L(u+a)=L(a)+\frac{L'(a)}{1!}u+\cdots+\frac{L^{(k)}(a)}{k!}u^k+\cdots+\frac{L^{(n)}(a)u^n}{n!},$$

即

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(u+a)^m = L(a)+\frac{L'(a)}{1!}u+\cdots+\frac{L^{(k)}(a)}{k!}u^k+\cdots+\frac{L^{(n)}(a)}{n!}u^n . \tag{2.21}$$

按照关于记号 $(u+a)^{(m)}$ 的约定，推得

$$\sum_{m=0}^{n} a_{n-m}(u+a)^{(m)} = L(a)u^{(0)}+\frac{L'(a)}{1!}u'+\cdots+\frac{L^{(k)}(a)}{k!}u^{(k)}+\cdots+\frac{L^{(n)}(a)}{n!}u^{(n)} .$$

将上式代入(2.20)的右边，并注意到 $u^{(0)}$ 表示 u 本身，即得公式(2.19) . □

引理 4.2.4 设 λ_0 是齐次方程(2.2)的特征方程(2.4)的 k 重根，则 $e^{\lambda_0 x}, xe^{\lambda_0 x}, \cdots, x^{k-1}e^{\lambda_0 x}$ 是(2.2)的 k 个解 .

证 已知 $e^{\lambda_0 x}$ 是(2.2)的一个解，作未知函数的变量变换，令

$$y = ue^{\lambda_0 x} \tag{2.22}$$

引入新的未知函数 u，由公式(2.19)，方程(2.2)化为

$$e^{\lambda_0 x}\left[L(\lambda_0)u+\frac{L'(\lambda_0)}{1!}u'+\cdots+\frac{L^{(k)}(\lambda_0)}{k!}u^{(k)}+\cdots+\frac{L^{(n)}(\lambda_0)}{n!}u^{(n)}\right]=0 . \tag{2.23}$$

又因为 λ_0 是 $L(\lambda)=0$ 的 k 重根，所以

$$L(\lambda_0)=0,\ L'(\lambda_0)=0,\ \cdots,\ L^{(k-1)}(\lambda_0)=0,\ L^{(k)}(\lambda_0)\neq 0 .$$

(2.23)中约去非零因式 $e^{\lambda_0 x}$ 之后，(2.23)成为

$$u^{(n)} + \cdots + \frac{L^{(k)}(\lambda_0)}{k!} u^{(k)} = 0 \qquad (2.24)$$

(因为 $L^{(n)}(\lambda_0) = n!$，故 $\frac{L^{(n)}(\lambda_0)}{n!} = 1$).这就是方程(2.2)经变量变换(2.22)后化得的关于 u 的一个微分方程.以 u 分别等于 1，$x, \cdots, x^{k-1}$ 代入(2.24)，可使该式成为恒等式，故知

$$1, \ x, \ \cdots, \ x^{k-1}$$

是(2.24)的 k 个解.将它们代入(2.22)，得到(2.2)的 k 个解

$$e^{\lambda_0 x}, \ xe^{\lambda_0 x}, \ \cdots, \ x^{k-1} e^{\lambda_0 x}. \qquad \square$$

由引理 4.2.4，易证下述定理.

定理 4.2.3 设 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_s$ 是(2.2)的 s 个不同特征根，其重数分别是 n_1 重、n_2 重……n_s 重，$n_1 + n_2 + \cdots + n_s = n$.则对应于 λ_i，(2.2)有 n_i 个解

$$e^{\lambda_i x}, xe^{\lambda_i x}, \cdots, x^{n_i - 1} e^{\lambda_i x}, \quad i = 1, 2, \cdots, s. \qquad (2.25)$$

(2.2)的通解是

$$y(x) = \sum_{i=1}^{s} \sum_{j=0}^{n_i - 1} C_{ij} x^j e^{\lambda_i x}, \qquad (2.26)$$

其中 $C_{ij}(j = 0, 1, \cdots, n_i - 1; \ i = 1, 2, \cdots, s)$是 n 个任意常数.

证 只要证明(2.25)这 n 个解线性无关即可.用反证法.设(2.25)这 n 个解线性相关，则存在 n 个不全为零的常数 $\alpha_{ij}(j = 0, 1, \cdots, n_i - 1; \ i = 1, 2, \cdots, s)$，使

$$\sum_{j=0}^{n_1 - 1} \alpha_{1j} x^j e^{\lambda_1 x} + \sum_{j=0}^{n_2 - 1} \alpha_{2j} x^j e^{\lambda_2 x} + \cdots + \sum_{j=0}^{n_s - 1} \alpha_{sj} x^j e^{\lambda_s x} \equiv 0.$$

将上式简写成

$$\varphi_1(x) e^{\lambda_1 x} + \varphi_2(x) e^{\lambda_2 x} + \cdots + \varphi_s(x) e^{\lambda_s x} \equiv 0, \qquad (2.27)$$

其中 $\varphi_i(x)$表示相应的 $n_i - 1$ 次多项式.

注意，s 个多项式 $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots, \varphi_s(x)$ 中至少有一个不

恒等于零．因为若都恒等于零，则一切 $\alpha_{ij}=0$ ($j=0,1,\cdots,n_i-1$; $i=1,2,\cdots,s$)．这不可能．于是不妨设 $\varphi_s(x)\not\equiv 0$．以 $e^{\lambda_1 x}$ 除(2.27)两边，并记

$$\mu_i=\lambda_i-\lambda_1\quad(i=2,3,\cdots,s).$$

于是(2.27)可写为

$$\varphi_1(x)+\varphi_2(x)e^{\mu_2 x}+\cdots+\varphi_s(x)e^{\mu_s x}\equiv 0. \tag{2.28}$$

上式两边对 x 求 n_1 阶导数，于是得到

$$\psi_2(x)e^{\mu_2 x}+\cdots+\psi_s(x)e^{\mu_s x}\equiv 0. \tag{2.29}$$

注意，因为当 $i\neq j$ 时 $\lambda_i\neq\lambda_j$，所以 $i\neq j$ 时 $\mu_i\neq\mu_j$，并且一切 $\mu_i\neq 0$．于是(2.29)的形式与(2.27)一样，并且容易看出 $\psi_s\not\equiv 0$．

按上述方法同样处理，最后得到

$$\eta_s(x)e^{\nu_s x}\equiv 0,$$

但 $\eta_s(x)\not\equiv 0$．这是一个矛盾．于是推知(2.25)这 n 个解线性无关．再由定理4.1.4，即知(2.26)是(2.2)的通解． □

显然，本定理也包括了单根的情形．

例3 求 $\dfrac{d^3y}{dx^3}-7\dfrac{d^2y}{dx^2}+16\dfrac{dy}{dx}-12y=0$ 的通解．

解 写出特征方程：

$$\lambda^3-7\lambda^2+16\lambda-12=0.$$

因式分解得 $(\lambda-3)(\lambda-2)^2=0$．求得特征根：

$$\lambda_1=3\ (\text{单根}),\quad \lambda_2=2\ (\text{重根}).$$

按定理4.2.3，求得通解为

$$y=C_1e^{3x}+(C_2+C_3x)e^{2x}.$$

注 在定理4.2.3中，如果 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_s$ 中有复数根，则该定理的结论仍正确．此时(2.26)中含有实变量的复值函数，使用起来不方便．应按下述办法用相应的实值解来代替．设 $\lambda_1=\alpha_1+i\beta_1$ 是(2.2)的 n_1 重复数特征根，因此(2.2)必还存在 n_1 重的共轭复数特征根 $\lambda_2=\overline{\lambda_1}=\alpha_1-i\beta_1$．由定理4.2.1后面的注知，对应

于 λ_1 和 λ_2 的 $2n_1$ 个复值解

$$\begin{array}{l} e^{(\alpha_1+i\beta_1)x},\quad xe^{(\alpha_1+i\beta_1)x},\quad \cdots,\quad x^{n_1-1}e^{(\alpha_1+i\beta_1)x};\\ e^{(\alpha_1-i\beta_1)x},\quad xe^{(\alpha_1-i\beta_1)x},\quad \cdots,\quad x^{n_1-1}e^{(\alpha_1-i\beta_1)x} \end{array} \tag{2.30}$$

可以用相应的 $2n_1$ 个实值解

$$\begin{array}{l} e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\quad xe^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x,\quad \cdots,\quad x^{n_1-1}e^{\alpha_1 x}\cos\beta_1 x;\\ e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\quad xe^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x,\quad \cdots,\quad x^{n_1-1}e^{\alpha_1 x}\sin\beta_1 x \end{array} \tag{2.31}$$

来代替.如果还有其他复数特征根,则可类似处理,可以得到与定理 4.2.2 相类似的定理,不再赘述.

例 4 求 $\dfrac{d^6 y}{dx^6}+2\dfrac{d^4 y}{dx^4}+\dfrac{d^2 y}{dx^2}=0$ 的通解.

解 写出特征方程:

$$\lambda^6+2\lambda^4+\lambda^2=0,$$

因式分解得 $\lambda^2(\lambda^2+1)^2=0$.特征根为

$$\lambda_1=0\ (2\ 重),\quad \lambda_{2,3}=\pm i\ (2\ 重),$$

所以通解为

$$y(x)=C_1+C_2x+(C_3+C_4x)\sin x+(C_5+C_6x)\cos x.$$

总结以上所述,求 n 阶常系数齐次线性方程(2.2)的通解可按下述步骤进行:

(1) 写出(2.2)对应的特征方程 $L(\lambda)=0$.

(2) 求出一切特征根.按定理 4.2.3 写出(2.2)的 n 个线性无关的解(2.25).

(3) 如果特征根中有复数根,则按定理 4.2.3 后的注办理,将复值解用相应的实值解来代替.

(4) 由(2),(3)两条得到的 n 个线性无关实值解,按定理 4.1.3 写出(2.2)的通解.

习 题 4.2

1.求下列方程的通解:

(1) $y^{(3)}+2y''-y'-2y=0$;

(2) $y^{(4)}-4y^{(3)}+8y''-8y'+3y=0$;

(3) $\dfrac{d^4x}{dt^4}+4x=0$;

(4) $2y^{(4)}-9y^{(3)}+9y''+y'-3y=0$;

(5) $y^{(5)}+y^{(4)}+2y^{(3)}+2y''+y'+y=0$;

(6) $\dfrac{d^7x}{dt^7}-8\dfrac{d^5x}{dt^5}+16\dfrac{d^3x}{dt^3}=0$.

2. **求下列初值问题的解**:

(1) $y''+4y'+29y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=15$;

(2) $y''+y'-3y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=1$;

(3) $x''+2x'+x=0$, $x(0)=4$, $x'(0)=2$;

(4) $x^{(4)}+2x''+x=0$, $x(0)=1$, $x'(0)=x''(0)=x^{(3)}(0)=0$.

3. **下列方程可经指出的变量变换化为常系数线性方程, 试求它们的通解**:

(1) $x^4y''+2x^3y'+n^2y=0$ (**可令** $x=\dfrac{1}{t}$);

(2) $2xy''+y'-2y=0$ (**可令** $\sqrt{x}=t$);

(3) $(1+t^2)^2x''+2t(1+t^2)x'+x=0$ (**可令** $t=\tan\xi$).

4. **试就常系数方程** $y''+py'+qy=0$ **讨论, 对于什么样的** p **和** q:

(1) **方程的所有解当** $t\to+\infty$**时趋于零**;

(2) **方程的所有解在区间** $0\leq t<+\infty$**上有界**;

(3) **方程的一切解是** t **的周期函数**.

§4.3 常系数非齐次线性方程的解法

由定理 4.1.4 知, 为求非齐次方程(2.1)的通解, 可分两步走: 先求(2.1)对应的齐次方程(2.2)的通解, 再求出(2.1)的一个解. (2.2)的通解的求法已在§4.2 中解决了, 现在介绍如何求出(2.1)的一个解. 本节只是对自由项 $f(x)$**为一些特殊形式时, 采用待定系数法求(2.1)的解. 至于自由项** $f(x)$**为一般情形时, 将在 4.4.1 节中介绍.**

4.3.1 $f(x)=P_m(x)e^{\mu x}$的情形

讨论常系数非齐次线性方程

$$L(D)y=P_m(x)e^{\mu x} \tag{3.1}$$

如何求出它的一个特解 $y^*(x)$，其中 μ 是常数，$P_m(x)$为 x 的 m 次已知多项式．由(3.1)右端的形式，容易看出，形如

$$y^*(x)=Q(x)e^{\mu x} \tag{3.2}$$

的函数，有可能成为(3.1)的解，其中 $Q(x)$是 x 的多项式．可以用待定系数法求出 $Q(x)$如下述定理：

定理 4.3.1 设(3.1)右边指数上的 μ 是(3.1)对应的齐次方程的特征方程

$$L(\lambda)=0 \tag{3.3}$$

的 k 重根，$0\leq k\leq n$，则(3.1)有形如(3.2)的解

$$y^*(x)=Q(x)e^{\mu x},$$

其中

$$Q(x)=x^k(q_m x^m+q_{m-1}x^{m-1}+\cdots+q_1x+q_0), \tag{3.4}$$

系数 $q_0,q_1,\cdots,q_m$ 可用待定系数法惟一求得．

证 以(3.2)的 $y^*(x)$代入(3.1)的左边，由本章公式(2.19)，再约去两边非零因子 $e^{\mu x}$，有

$$L(\mu)Q(x)+\frac{L'(\mu)}{1!}Q'(x)+\cdots+\frac{L^{(k)}(\mu)}{k!}Q^{(k)}(x)+\cdots$$
$$+\frac{L^{(n)}(\mu)}{n!}Q^{(n)}(x)=P_m(x). \tag{3.5}$$

又由定理条件，μ 是(3.3)的 k 重根，故

$$L(\mu)=0,\ \cdots,\ L^{(k-1)}(\mu)=0,\ L^{(k)}(\mu)\neq 0$$

(若 μ 不是特征方程(3.3)的根，则 $L(\mu)\neq 0$)．于是(3.5)式成为

$$\frac{L^{(k)}(\mu)}{k!}Q^{(k)}(x)+\frac{L^{(k+1)}(\mu)}{(k+1)!}Q^{(k+1)}(x)+\cdots$$

$$+\frac{L^{(n)}(\mu)}{n!}Q^{(n)}(x)=P_m(x).\tag{3.6}$$

令

$$Q^{(k)}(x)=u(x),\tag{3.7}$$

于是(3.6)式成为

$$\frac{L^{(k)}(\mu)}{k!}u(x)+\frac{L^{(k+1)}(\mu)}{(k+1)!}u'(x)+\cdots$$

$$+\frac{L^{(n)}(\mu)}{n!}u^{(n-k)}(x)=P_m(x).\tag{3.8}$$

由上式可见，多项式 $u(x)$只能是 m 次，记为 $u(x)=u_m(x)$. 以下证明，的确能由(3.8)式按待定系数法求得惟一的 $u_m(x)$. 设

$$P_m(x)=p_m x^m+P_{m-1}(x),$$

其中 p_m 为 $P_m(x)$中 x^m 的系数，$P_{m-1}(x)$为 $P_m(x)$中 $m-1$ 次多项式. 由于(3.8)中左边最高次幂在第一项. 令

$$u(x)=u_m(x)=v_m x^m+u_{m-1}(x),$$

代入(3.8)左边，比较(3.8)左、右两边 x^m 的系数，便得

$$\frac{L^{(k)}(\mu)}{k!}v_m=p_m,$$

从而求得 $v_m=\dfrac{k!p_m}{L^{(k)}(\mu)}$. 于是(3.8)式成为

$$\frac{L^{(k)}(\mu)}{k!}u_{m-1}(x)+\frac{L^{(k+1)}(\mu)}{(k+1)!}u'_{m-1}(x)+\cdots$$

$$+\frac{L^{(n)}(\mu)}{n!}u_{m-1}^{(n-k)}(x)=P_{m-1,1}(x),\tag{3.9}$$

其中右边

$$P_{m-1,1}(x)=P_{m-1}(x)-\sum_{j=1}^{n-k}\frac{L^{(k+j)}(\mu)}{(k+j)!}(v_m x^m)^{(j)}$$

是一个已知的 $m-1$ 次多项式.

再仿照从(3.8)到(3.9)的步骤，一次次往下做，可得到

$$u(x)=u_m(x)=v_m x^m+v_{m-1}x^{m-1}+\cdots+v_1x+v_0,\tag{3.10}$$

其中

$$\frac{L^{(k)}(\mu)}{k!}v_0 = p_0,$$

p_0 是一个已知的零次多项式 $P_{m-m,m}(x)$.

以(3.10)代入(3.7), 再积分 k 次. 由积分常数出现的项

$$C_{k-1}x^{k-1} + C_{k-2}x^{k-2} + \cdots + C_0$$

乘以 $e^{\mu x}$ 之后, 是(3.1)所对应的齐次微分方程中通解中的一部分, 故不必再写在 $y^*(x)$ 之中, 所以由(3.7)式便得

$$Q(x) = \underbrace{\int\cdots\int}_{k\text{次}}(v_m x^m + v_{m-1}x^{m-1} + \cdots + v_1 x + v_0)\underbrace{\mathrm{d}x\cdots\mathrm{d}x}_{k\text{次}},$$

写成

$$Q(x) = x^k(q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \cdots + q_0). \qquad \square$$

注 1　在具体求解时, 不是按上面证明那样的方法去做, 因为那样一步步求 $v_m, v_{m-1}, \cdots, v_0$ 太麻烦了, 而是像下面例子那样去做.

注 2　如果特征根是复数, 则定理 4.3.1 仍成立.

例 1　求$(D^3 - 7D^2 + 16D - 12)y = x$ 的通解.

解　对应的齐次方程的通解在§4.2 例 3 中已求出, 它是

$$Y(x) = C_1 e^{3x} + (C_2 + C_3 x)e^{2x}.$$

为求非齐次方程的一个解, 对照定理 4.3.1, 本题中的 $\mu = 0$, 它不是特征根, 故(3.4)中 $k = 0$. 如(3.2)式, 令

$$y^*(x) = q_1 x + q_0$$

为原方程的一个解, 有

$$y^{*\prime}(x) = q_1, \quad y^{*\prime\prime}(x) = y^{*\prime\prime\prime}(x) = 0.$$

代入原方程, 得

$$16q_1 - 12(q_1 x + q_0) = x.$$

比较等号两边的同次幂系数, 得

$$-12q_1 = 1, \quad 16q_1 - 12q_0 = 0.$$

解得 $q_1=-\dfrac{1}{12}$，$q_2=-\dfrac{1}{9}$. 于是求得原方程的一个解

$$y^*(x)=-\frac{1}{12}x-\frac{1}{9}.$$

故原方程的通解为

$$y=Y(x)+y^*(x)=C_1e^{3x}+(C_2+C_3x)e^{2x}-\frac{1}{12}x-\frac{1}{9}.$$

例 2 求$(D^3-7D^2+16D-12)y=-20x^3e^{2x}$的通解.

解 对应的齐次方程的通解与例 1 同，它是

$$Y(x)=C_1e^{3x}+(C_2+C_3x)e^{2x}.$$

为求非齐次方程的一个解，对照定理 4.3.1，本题中的 $\mu=2$，是特征方程的二重根，故 $k=2$. 如(3.2)式，令

$$y^*(x)=x^2(q_3x^3+q_2x^2+q_1x+q_0)e^{2x}$$

为原方程的一个解，计算导数 $y^{*\prime}(x)$，$y^{*\prime\prime}(x)$，$y^{*}\ (x)$，并代入原方程，得到

$$\begin{aligned}&[-20q_3x^3+(-12q_2+60q_3)x^2+(-6q_1+24q_2)x\\&\quad+(-2q_0+6q_1)]e^{2x}=-20x^3e^{2x}.\end{aligned}$$

两边约去非零因子 e^{2x}，比较 x 的同次幂，求得

$$q_3=1,\quad q_2=5,\quad q_1=20,\quad q_0=60.$$

于是得到原方程的一个解

$$y(x)=x^2(x^3+5x^2+20x+60)e^{2x}.$$

所以原方程的通解是

$$\begin{aligned}y&=Y(x)+y^*(x)\\&=C_1e^{3x}+(C_2+C_3x+60x^2+20x^3+5x^4+x^5)e^{2x}.\end{aligned}$$

在求非齐次方程的解时，下述引理很有用. 其证明甚易，请读者自行完成.

引理 4.3.1 设下述 3 个方程中的 $L(D)$相同. 如果 $y_1(x)$和 $y_2(x)$分别是

$$L(D)y_1 = f_1(x) \quad \text{和} \quad L(D)y_2 = f_2(x)$$

的解，则 $y_1(x) + y_2(x)$是

$$L(D)y = f_1(x) + f_2(x)$$

的解．

注　引理 4.3.1 中的 $L(D)$不限定是常系数，而可以是一般的变系数．

例 3　求$(D^3 - 7D^2 + 16D - 12)y = x - 20x^3e^{2x}$的通解．

解　分别考虑方程

$$(D^3 - 7D^2 + 16D - 12)y = x \tag{3.11}$$

和

$$(D^3 - 7D^2 + 16D - 12)y = -20x^3e^{2x}. \tag{3.12}$$

由例 1 和例 2 知，$y_1^*(x) = -\frac{1}{12}x - \frac{1}{9}$和

$$y_2^*(x) = (60x^2 + 20x^3 + 5x^4 + x^5)e^{2x}$$

分别是(3.11)和(3.12)的解，由引理 4.3.1 知，

$$y_1^*(x) + y_2^*(x) = -\frac{1}{12}x - \frac{1}{9} + (60x^2 + 20x^3 + 5x^4 + x^5)e^{2x}$$

是原方程的解，故

$$y = C_1e^{3x} + (C_2 + C_3x)e^{2x} - \frac{1}{12}x - \frac{1}{9} + (60x^2 + 20x^3 + 5x^4 + x^5)e^{2x}$$

是通解．

4.3.2　$f(x) = P_m(x)e^{\mu x}\cos\nu x + Q_m(x)e^{\mu x}\sin\nu x$ 的情形

考虑自由项

$$f(x) = P_m(x)e^{\mu x}\cos\nu x + Q_m(x)e^{\mu x}\sin\nu x$$

的情形，其中 $P_m(x)$与 $Q_m(x)$至少有一个是 m 次多项式，另一个可以是 m 次或小于 m 次多项式，甚至可以是恒等于 0 (即 $f(x)$可以仅是两个和项中的一项)，由欧拉公式

$$\cos \nu x=\frac{1}{2}(e^{i\nu x}+e^{-i\nu x}),\quad \sin \nu x=\frac{1}{2i}(e^{i\nu x}-e^{-i\nu x}),$$

可将 $f(x)$化为

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{(\mu+i\nu)x}[P_m(x)-iQ_m(x)]$$

$$+\frac{1}{2}e^{(\mu-i\nu)x}[P_m(x)+iQ_m(x)].$$

记

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=e^{(\mu+i\nu)x}[P_m(x)-iQ_m(x)],\\ \psi(x)&=e^{(\mu-i\nu)x}[P_m(x)+iQ_m(x)],\end{aligned}\tag{3.13}$$

易见 $\psi(x)=\overline{\varphi(x)}$, 其中$\overline{\varphi(x)}$表示 $\varphi(x)$的共轭. 从而

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2}[\varphi(x)+\psi(x)]=\frac{1}{2}[\varphi(x)+\overline{\varphi(x)}]\\ &=\mathrm{Re}\,\varphi(x).\end{aligned}\tag{3.14}$$

所以只要考虑微分方程

$$L(D)y=\varphi(x).\tag{3.15}$$

按 4.3.1 节的办法, 设它的一个特解为

$$y=\eta^*(x)=x^k[R_m(x)-iS_m(x)]e^{(\mu+i\nu)x},\tag{3.16}$$

其中 k 如下取定:

$$k=\begin{cases}0, & \mu+i\nu\text{不是特征根},\\ 1, & \mu+i\nu\text{是单重特征根},\\ 2, & \mu+i\nu\text{是 2 重特征根},\\ \cdots & \cdots\end{cases}\tag{3.17}$$

$R_m(x)$与 $S_m(x)$分别为 x 的 m 次多项式(实变量的实值函数).

取 $\eta^*(x)$的实部, 得

$$\begin{aligned}y^*(x)&=\mathrm{Re}\,\eta^*(x)\\ &=x^ke^{\mu x}[R_m(x)\cos \nu x+S_m(x)\sin \nu x],\end{aligned}\tag{3.18}$$

便是原微分方程

$$L(D)y=f(x)\tag{3.19}$$

的一个特解 .

按上述过程解题的步骤是:

(1) 计算出(3 .13);

(2) 将(3 .13)代入(3 .15), 解出(3 .15)的一个特解(3 .16);

(3) 取(3 .16)的实部(3 .18)便是微分方程(3 .19)的一个特解 .

例 4 求方程

$$(D^2-4D+13)y=e^{2x}\sin 3x+2e^{2x}\cos 3x$$

的通解 .

解 特征方程为

$$\lambda^2-4\lambda+13=0,$$

特征根 $\lambda_{1,2}=2\pm 3i$, 对应齐次方程的通解为

$$Y(x)=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x) .$$

相应于(3 .13)式的

$$\varphi(x)=e^{(2+3i)x}(2-i) .$$

考虑微分方程

$$(D^2-4D+13)y=(2-i)e^{(2+3i)x}, \tag{3 .20}$$

2 + 3i 是特征方程的单重根, 按(3 .16), 令上述微分方程的一个特解为

$$y=\eta^*(x)=x(A-Bi)e^{(2+3i)x},$$

有

$$y'=\eta^{*\prime}(x)=[A-Bi+x(2A+3B+(3A-2B)i)]e^{(2+3i)x},$$

$$\begin{aligned}y''=\eta^{*\prime\prime}(x)=[&(4A+6B)+(6A-4B)i\\&+x(-5A+12B+(12A+5B)i)]e^{(2+3i)x},\end{aligned}$$

代入(3 .20), 化简之后得

$$6B+6Ai=2-i,$$

所以得 $A=-\dfrac{1}{6}$, $B=\dfrac{1}{3}$,

$$\eta^*=x\left(-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}i\right)e^{(2+3i)x}$$

是(3.20)的一个特解，取其实部，即(3.18)，得

$$y^{*}(x)=\mathrm{Re}\,\eta^{*}=xe^{2x}\left[-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right]$$

为原微分方程的一个特解，所以原微分方程的通解为

$$y=e^{2x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)+xe^{2x}\left[-\frac{1}{6}\cos 3x+\frac{1}{3}\sin 3x\right].$$

读者可以发现，以上计算过程并不简单．不如直接利用结论(3.18)的形式，即令

$$y^{*}(x)=x^{k}e^{\mu x}(R_m(x)\cos\nu x+S_m(x)\sin\nu x),\tag{3.21}$$

其中 k 按(3.17)规定取(此时不论 $P_m(x)$ 或 $Q_m(x)$ 中是否有一个恒为零)，然后代入原方程求出 $R_m(x)$ 与 $S_m(x)$ 即可．

例 5 求方程

$$(D^3-2D^2+9D+13)y=e^{x}\cos 3x\tag{3.22}$$

的通解．

解 由§4.2 例 2 知，(3.22)对应的齐次方程的通解为

$$Y(x)=C_1e^{-x}+(C_2\cos 3x+C_3\sin 3x)e^{2x}.\tag{3.23}$$

由(3.21)，令

$$y^{*}(x)=e^{x}(A\cos 3x+B\sin 3x),$$

有

$$y^{*\prime}(x)=e^{x}[(A+3B)\cos 3x+(-3A+B)\sin 3x],$$

$$y^{*\prime\prime}(x)=e^{x}[(-8A+6B)\cos 3x+(-6A-8B)\sin 3x],$$

$$y^{*\prime\prime\prime}(x)=e^{x}[(-26A-18B)\cos 3x+(18A-26B)\sin 3x].$$

代入(3.22)，便得

$$(20A-9B)e^{x}\cos 3x+(9A+20B)e^{x}\sin 3x=e^{x}\cos 3x.$$

由于 $e^{x}\cos 3x$ 与 $e^{x}\sin 3x$ 线性无关，从而推得

$$20A-9B=1,\quad 9A+20B=0.$$

解得 $A=\frac{20}{481}$，$B=-\frac{9}{481}$．从而

$$y^{*}(x)=\frac{1}{481}e^{x}(20\cos 3x-9\sin 3x)$$

原方程的通解为

$$y = Y(x) + y^*(x) = C_1 e^{-x} + (C_2 \cos 3x + C_3 \sin 3x) e^{2x}$$

$$+ \frac{1}{481} e^{x} (20 \cos 3x - 9 \sin 3x) .$$

例 6　求方程

$$y'' + 4y = \sin 2x$$

满足 $y(0) = 0$，$y'(0) = 1$ 的特解 .

解　特征方程为 $\lambda^2 + 4 = 0$，特征根 $\lambda_1 = 2i$，$\lambda_2 = -2i$. 对应齐次方程的通解为

$$Y(x) = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x .$$

原方程的自由项为 $\sin 2x$，对照(3 .21)及(3 .17)，令

$$y^*(x) = x(A \cos 2x + B \sin 2x),$$

有

$$y^{*\prime}(x) = (A + 2Bx) \cos 2x + (B - 2Ax) \sin 2x,$$

$$y^{*\prime\prime}(x) = (4B - 4Ax) \cos 2x + (-4A - 4Bx) \sin 2x .$$

代入原微分方程，得

$$4B \cos 2x - 4A \sin 2x = \sin 2x .$$

由于 $\cos 2x$ 与 $\sin 2x$ 线性无关，故得 $B = 0$，$A = -\frac{1}{4}$. 于是得通解

$$y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x .$$

再由 $y(0) = 0$，$y'(0) = 1$，有

$$0 = C_1 \quad 及 \quad 1 = 2C_2 - \frac{1}{4},$$

解得 $C_1 = 0$，$C_2 = \frac{5}{8}$，因此特解 $y = \frac{5}{8} \sin 2x - \frac{1}{4} x \cos 2x$.

习　题　4 .3

求下列方程的通解：

1 . $(D^2 - D - 2) y = x e^{x}$；

2 . $(D^3 - 5D^2 + 8D - 4) y = e^{2x}$；

3．$(D^2+9)y=x\sin 3x$;

4．$(D^2+4)y=\cos 2x+\cos 4x$;

5．$(D^2-1)y=2x\sin x$;

6．$(D^3-4D^2+3D)y=x^2(1+18e^{3x})$;

7．$(2D^2+2D+3)y=x^2+2x-1$;

8．$(D^6-D^4)y=x^2$;

9．$(D^2+1)y=\cos 3x+2\sin x$;

10．$(D^2+6D+13)y=e^{-3x}\cos 2x$;

11．$(D^2-D)y=2\cos^2 4x$.

§4.4　变系数线性方程

所谓变系数线性方程就是指一般线性方程(1.1)，当然也包括常系数情形．当其中的系数 $a_0(x)\neq 0$ 时，(1.1)就可写成(1.2)．求变系数线性方程的解没有一般的方法，要想将它的解用初等函数表达出来，常常是不可能的．本节介绍的是在一定情况下求出它的通解的方法．

4.4.1　求非齐次线性方程解的常数变易法

在§2.2中已介绍过一阶非齐次线性方程的常数变易法．对于 n 阶来说，常数变易法的过程要复杂些，但结论却很简捷，现在采用§2.2中所进行的路线，介绍 $n=2$ 时的常数变易法，推导出非齐次线性方程的解的公式．对于一般 n 阶非齐次线性方程的解的常数变易法公式，将在5.3.2节中作为非齐次线性方程组的常数变易法的特例介绍．

考虑 $n=2$ 时的非齐次线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=f(x), \tag{4.1}$$

按照本章一开始所作的假设，函数 $a_1(x)$，$a_2(x)$ 和 $f(x)$ 在区间 (a,b) 上连续．设已知(4.1)对应的齐次线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0 \tag{4.2}$$

的两个线性无关的解 $y_1(x)$**和** $y_2(x)$，**则**

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x) \tag{4.3}$$

是(4.2)**的通解，其中** C_1 **和** C_2 **是两个任意常数**.

现在设想(4.3)**中的** C_1 **和** C_2 **不是常数，而是两个待定函数，即**

$$y=C_1(x)y_1(x)+C_2(x)y_2(x), \tag{4.3}'$$

试试看(4.3)′**有否可能成为**(4.1)**的解.为此，将**(4.3)′**的** y **对** x **求导数**:

$$y'=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x)$$
$$+C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x). \tag{4.4}$$

注意，(4.3)′**式可以看做将未知函数** y **变换成两个未知函数** $C_1(x)$**和** $C_2(x)$**的变换式.一个函数** y **换成两个函数** $C_1(x)$**和** $C_2(x)$**来考虑.因此，还可以另外再添加一个条件于** $C_1(x)$**和** $C_2(x)$.**关键是,添加什么样的条件，可以使得能求出** $C_1(x)$**和** $C_2(x)$，**并且将它们代入**(4.3)′**后，使**(4.3)′**式满足**(4.1)**式**.

为此,令(4.4)**式中包含** $C_1'(x)$**与** $C_2'(x)$**的项之和为零,即令**

$$C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0. \tag{4.5}$$

这样，(4.4)**成为**

$$y'=C_1(x)y_1'(x)+C_2(x)y_2'(x). \tag{4.6}$$

再将(4.6)**对** x **求导数，得**

$$y''=C_1(x)y_1''(x)+C_2(x)y_2''(x)$$
$$+C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x). \tag{4.7}$$

请注意，由于(4.5)**的规定，所以**(4.7)**中不再出现** $C_1''(x)$**和** $C_2''(x)$ (**不然，直接由**(4.4)**求导数，会出现** $C_1''(x)$**和** $C_2''(x)$)，**这也就是规定**(4.5)**式的原因之一.今将**(4.7),(4.6)**和**(4.3)′**代入**(4.1)，**得到**

$$
\begin{aligned}
&C_1(x)(y_1''(x)+a_1(x)y_1'(x)+a_2(x)y_1(x))\\
&\quad +C_2(x)(y_2''(x)+a_1(x)y_2'(x)+a_2(x)y_2(x))\\
&\quad +C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

再注意到 $y_1(x)$和 $y_2(x)$是(4.2)的解，所以(4.8)中 $C_1(x)$和 $C_2(x)$后面括号里诸项之和应为零．于是(4.8)连同(4.5)得到下述联立方程组：

$$
\begin{cases}
C_1'(x)y_1(x)+C_2'(x)y_2(x)=0,\\
C_1'(x)y_1'(x)+C_2'(x)y_2'(x)=f(x).
\end{cases}
\tag{4.9}
$$

从(4.9)可解得

$$
\begin{cases}
C_1'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}0 & y_2(x)\\ f(x) & y_2'(x)\end{vmatrix}}{W(x)}=-\dfrac{y_2(x)f(x)}{W(x)},\\[2ex]
C_2'(x)=\dfrac{\begin{vmatrix}y_1(x) & 0\\ y_1'(x) & f(x)\end{vmatrix}}{W(x)}=\dfrac{y_1(x)f(x)}{W(x)}.
\end{cases}
\tag{4.10}
$$

由(4.10)可以求得

$$
\begin{cases}
C_1(x)=-\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}\mathrm{d}\xi,\\[2ex]
C_2(x)=\displaystyle\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}\mathrm{d}\xi,
\end{cases}
\tag{4.11}
$$

这里 $x_0\in(a,b)$．既然 $C_1(x)$和 $C_2(x)$可以求得，那么上述方法也就有效．将(4.11)的 $C_1(x)$和 $C_2(x)$代入(4.3)′，得到

$$
\begin{aligned}
y^*(x)&=-y_1(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}\mathrm{d}\xi\\
&\qquad +y_2(x)\int_{x_0}^{x}\frac{y_1(\xi)f(\xi)}{W(\xi)}\mathrm{d}\xi\\
&=\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(x)y_1(\xi)-y_1(x)y_2(\xi)}{W(\xi)}f(\xi)\mathrm{d}\xi\\
&\overset{\text{记为}}{=}\int_{x_0}^{x}\frac{W(x,\xi)}{W(\xi)}f(\xi)\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}
\tag{4.12}
$$

这里

$$W(\xi)=\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1'(\xi) & y_2'(\xi) \end{vmatrix}$$

是由 $y_1(\xi)$ 和 $y_2(\xi)$ 组成的朗斯基行列式;将上述行列式中最后一行元素分别换成 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 所得到行列式记为

$$W(x,\xi)=\begin{vmatrix} y_1(\xi) & y_2(\xi) \\ y_1(x) & y_2(x) \end{vmatrix}. \tag{4.13}$$

不难直接验证(4.12)的确是(4.1)的一个解.再由定理 4.1.5 知,当 C_1 和 C_2 是任意常数时,

$$y=C_1y_1(x)+C_2y_2(x)+\int_{x_0}^{x}\frac{W(x,\xi)}{W(\xi)}f(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{4.14}$$

是非齐次线性方程(4.1)的通解.

上述结论归纳为下述定理.

定理 4.4.1 设 2 阶非齐次线性方程(4.1)的系数 $a_1(x)$, $a_2(x)$ 和自由项 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内连续, $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 是(4.1)对应的齐次线性方程(4.2)的一个基本解组,则对于任意给定的 $x_0\in(a,b)$,(4.12)是(4.1)的一个解,(4.14)是(4.1)的通解.

上述方法称为常数变易法,所获得的公式(4.12)称为非齐次线性方程(4.1)的解的常数变易法公式.已知(4.1)对应的齐次线性方程(4.2)的一个基本解组时,就可按常数变易法(或直接代入公式(4.14))求(4.1)的通解.

例 1 求 $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+3\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=\dfrac{1}{\mathrm{e}^x+1}$ 的通解.

解 对应的齐次方程的特征方程是

$$\lambda^2+3\lambda+2=0.$$

易知 $y_1(x)=\mathrm{e}^{-x}$, $y_2(x)=\mathrm{e}^{-2x}$ 是对应齐次方程的一个基本组.

在这个例子中，按照常数变易法的方法做一遍，下一个例子中，直接代公式(4.12).据此，令

$$y=C_1(x)e^{-x}+C_2(x)e^{-2x}\tag{4.15}$$

是所给非齐次线性方程的解.求导数，有

$$y'=-C_1(x)e^{-x}-2C_2(x)e^{-2x}+C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^{-2x}.$$

令

$$C_1'(x)e^{-x}+C_2'(x)e^{-2x}=0.\tag{4.16}$$

于是

$$y'=-C_1(x)e^{-x}-2C_2(x)e^{-2x}.$$

再求导数，有

$$y''=C_1(x)e^{-x}+4C_2(x)e^{-2x}-C_1'(x)e^{-x}-2C_2'(x)e^{-2x}.$$

将上述 y, y', y''一起代入原方程，得到

$$-C_1'(x)e^{-x}-2C_2'(x)e^{-2x}=\frac{1}{e^x+1}.$$

将上式与(4.16)联立，解得

$$C_1'(x)=\frac{e^x}{e^x+1},\quad C_2'(x)=-\frac{e^{2x}}{e^x+1}.$$

这就相当于(4.10)式，现在既可如同(4.11)那样采用从某 x_0 到 x 的变上限定积分求得 $C_1(x)$和 $C_2(x)$，也可采用不定积分以求 $C_1(x)$和 $C_2(x)$.为使读者多领会一些方法，今采用后者，求得

$$C_1(x)=\ln(e^x+1)+C_1,$$

$$C_2(x)=-e^x+\ln(e^x+1)+C_2.$$

不妨取 $C_1=0$，$C_2=0$，把如此所得到的 $C_1(x)$和 $C_2(x)$代入(4.15)，得到原方程的一个解

$$y^*(x)=e^{-x}\ln(e^x+1)+e^{-2x}[-e^x+\ln(e^x+1)].$$

再按照非齐次线性方程的通解结构定理 4.1.4 推知，

$$y=C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}+e^{-x}\ln(e^x+1)$$
$$+e^{-2x}[-e^x+\ln(e^x+1)]$$

是原方程的通解，其中 C_1 和 C_2 是两个任意常数．通解又可改写为

$$y = C_3 e^{-x} + C_2 e^{-2x} + e^{-x}\ln(e^x + 1) + e^{-2x}\ln(e^x + 1),$$

这里 $C_3 = C_1 - 1$ 是代替 C_1 的另一个任意常数．

例 2 求 $\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{x}{1-x}\frac{dy}{dx} - \frac{1}{1-x}y = x - 1$ 的通解．

解 容易看出，$y_1(x) = e^x$ 是对应的齐次方程的一个解，用公式(1.21)，可以求得对应齐次方程与 $y_1(x)$ 线性无关的一个解

$$y_2(x) = e^x \int e^{-2x} e^{-\int \frac{x}{1-x}dx} dx .$$

经过积分知，可取 $y_2(x) = x$．为了使用公式(4.12)，可先求出

$$W(\xi) = \begin{vmatrix} e^{\xi} & \xi \\ e^{\xi} & 1 \end{vmatrix} = e^{\xi}(1 - \xi),$$

$$W(x, \xi) = x e^{\xi} - \xi e^x .$$

代入(4.12)并取 $x_0 = 0$，得到原方程的一个解

$$y^*(x) = \int_0^x \frac{x e^{\xi} - \xi e^x}{e^{\xi}(1-\xi)}(\xi - 1)d\xi$$

$$= -x^2 - x - 1 + e^x .$$

于是得到原方程的通解

$$y(x) = C_1 e^x + C_2 x - x^2 - 1,$$

这里 $y^*(x)$ 中的 $-x$ 和 e^x 两项分别并到 $C_2 x$ 和 $C_1 e^x$ 中去了．

下面举一个利用常数变易法公式(4.14)研究非齐次线性方程的解的性质的例子．

例 3 设函数 $f(t)$ 在区间 $[a, +\infty)$ 上连续，且 $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$．试证明：非齐次线性方程

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = f(t) \tag{4.17}$$

的任意一个解 $x(t)$ 都有 $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$．

证 (4.17)对应的齐次方程的特征根是 $\lambda = -2$ (2 重根)，

于是易知 $x_1(t)=e^{-2t}$，$x_2(t)=te^{-2t}$ 是齐次方程的一个基本解组，于是

$$W(\xi)=\begin{vmatrix} e^{-2\xi} & \xi e^{-2\xi} \\ -2e^{-2\xi} & (1-2\xi)e^{-2\xi}\end{vmatrix}=e^{-4\xi},$$

$$W(t,\xi)=\begin{vmatrix} e^{-2\xi} & \xi e^{-2\xi} \\ e^{-2t} & te^{-2t}\end{vmatrix}=te^{-2t-2\xi}-\xi e^{-2\xi-2t}.$$

代入(4.14)得到(4.17)的通解(取 $t_0=0$)

$$x(t)=C_1e^{-2t}+C_2te^{-2t}+\int_0^t(te^{-2t}e^{2\xi}-\xi e^{2\xi-2t})f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

欲证 $\lim\limits_{t\to+\infty}x(t)=0$，只要证 $\lim\limits_{t\to+\infty}x^*(t)=0$ 就可以了，这里

$$x^*(t)=\int_0^t(te^{-2t}e^{2\xi}-\xi e^{2\xi-2t})f(\xi)\mathrm{d}\xi.$$

由洛必达法则(例如参见菲赫金哥尔茨著《微积分学教程》第一卷第四章 141 目定理 4* 及定理 4 的注 2)，有

$$\lim_{t\to+\infty}x^*(t)=\lim_{t\to+\infty}\frac{t\int_0^t e^{2\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi-\int_0^t\xi e^{2\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi}{e^{2t}}$$

$$=\lim_{t\to+\infty}\frac{\int_0^t e^{2\xi}f(\xi)\mathrm{d}\xi}{2e^{2t}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^{2t}f(t)}{4e^{2t}}=0.$$

从上面一些例子已可看出常数变易法的重大作用，可以用它来处理§4.3 中不能处理的情形，当然也可用它来讨论§4.3 中所讲的情形(但在这种情形，一般说来，§4.3 中的计算方法较简单).通过习题还可进一步了解它的用处并熟练掌握它.

4.4.2 欧拉方程

下述形式的变系数线性方程

$$a_0x^n\frac{\mathrm{d}^ny}{\mathrm{d}x^n}+a_1x^{n-1}\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+a_ny=f(x) \qquad (4.18)$$

称为欧拉方程.它是一种比较特殊的线性方程，采用适当的变量

变换，可以将它化为常系数线性方程，方法如下：

设 $x>0$，令 $t=\ln x$，即 $x=\mathrm{e}^{t}$ 引入新的自变量 t，于是可计算得 y 对 x 的各阶导数．易知

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\cdot\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x}=\frac{1}{x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}. \tag{4.19}$$

引入记号 D 如前，再引入记号 D 为

$$D=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t},\quad D^{k}=\frac{\mathrm{d}^{k}}{\mathrm{d}t^{k}},\quad k=1,2,\cdots.$$

于是(4.19)可写成

$$xDy=Dy.$$

今用数学归纳法证明

$$x^{m}D^{m}y=D(D-1)\cdots(D-m+1)y. \tag{4.20}$$

这里右边按定义

$$(D-a)(D-b)y=(D-a)[(D-b)y]$$

计算．事实上，当 $m=1$ 时已证明上式正确．设 $m=k$ 时上式正确，则当 $m=k+1$ 时，

$$\begin{aligned}D^{k+1}y&=D\left[\frac{1}{x^{k}}D(D-1)\cdots(D-k+1)y\right]\\&=-\frac{k}{x^{k+1}}D(D-1)\cdots(D-k+1)y\\&\quad+\frac{1}{x^{k}}\cdot\frac{1}{x}DD(D-1)\cdots(D-k+1)y\\&=\frac{1}{x^{k+1}}D(D-1)\cdots(D-k+1)(D-k)y.\end{aligned}$$

即证明了当 $m=k+1$ 时(4.20)亦成立．

这样一来，(4.18)就化成 y 对 t 的常系数线性方程：

$$\begin{aligned}a_{0}D(D-1)\cdots(D-n+1)y+a_{1}D(D-1)\cdots(D-n+2)y\\+\cdots+a_{n}y=f(\mathrm{e}^{t}).\end{aligned}$$

对于 $x<0$ 的情形，令 $t=\ln(-x)$，类似地可将(4.18)化成相应的常系数线性方程．

例 4 求方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}+y=6x\ln x \tag{4.21}$$

的通解.

解 由右端函数可知 $x>0$, 令 $t=\ln x$, 即 $x=e^t$, 于是由(4.20)有

$$x\frac{dy}{dx}=Dy,$$

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}=D(D-1)y=(D^2-D)y.$$

(4.21)化为

$$(D^2-2D+1)y=6te^t. \tag{4.22}$$

易知

$$Y(t)=(C_1+C_2t)e^t$$

是(4.22)对应的齐次方程的通解.由常数变易法可以求得

$$y^*(t)=t^3e^t$$

是(4.22)的一个解, 从而(4.22)的通解是

$$y(t)=(C_1+C_2t+t^3)e^t.$$

所以(4.21)的通解是

$$y(x)=(C_1+C_2\ln x+\ln^3 x)x.$$

能化成常系数的变系数线性方程是不多的, 对于其他能化成常系数的类型不再深入讨论了.以下转入幂级数解法.

4.4.3 幂级数解法举例

当变系数线性方程的解不能用初等函数或初等函数的积分表示时, 在一定条件(见下面定理 4.4.2 和定理 4.4.3)下, 可以用幂级数解法.从它往往可以引出一些重要的超越函数, 在实际上和理论上都有重要意义.今以二阶齐次线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+a_1(x)\frac{dy}{dx}+a_2(x)y=0 \tag{4.23}$$

为例说明之．定理 4.4.2 和定理 4.4.3 是属于常微分方程解析理论的范围，其证明要用到复变函数的理论，在此只能叙述这两定理而不证明．

定理 4.4.2 如果函数 $a_1(x)$ 和 $a_2(x)$ 在某点 $x = x_0$ 的邻域 $|x - x_0| < r$ 内都可以展开成 $(x - x_0)$ 的收敛的幂级数，则 (4.23) 的解在同一区间 $|x - x_0| < r$ 内也可以展开成 $(x - x_0)$ 的收敛的幂级数：

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k (x - x_0)^k . \tag{4.24}$$

例 5 如下形式的方程

$$(1 - x^2)\frac{d^2 y}{d x^2} - 2x \frac{d y}{d x} + n(n + 1) y = 0 \tag{4.25}$$

称为勒让德(Legendre)方程，其中 n 是任意的实数，试用幂级数法求勒让德方程的解．

解 把方程(4.25)写成(4.23)的形式之后，易知

$$a_1(x) = \frac{-2x}{1 - x^2}, \quad a_2(x) = \frac{n(n+1)}{1 - x^2},$$

它们在区间 $|x| < 1$ 内可以展开成收敛的 x 的幂级数．于是按定理 4.4.2，(4.25)的解可以展开成 x 的幂级数，在区间 $|x| < 1$ 内收敛．令

$$y = \sum_{k=0}^{\infty} C_k x^k \tag{4.26}$$

是(4.25)的解，今用待定系数法求出 C_k $(k = 0, 1, \cdots)$．由(4.26)易得

$$\frac{d y}{d x} = \sum_{k=1}^{\infty} k C_k x^{k-1},$$

$$\frac{d^2 y}{d x^2} = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) C_k x^{k-2},$$

将它们代入(4.25)，经过整理得到

$$
\begin{aligned}
&[2\cdot 1\,C_2+n(n+1)C_0]+[3\cdot 2\,C_3+(n-1)(n+2)C_1]\,x \\
&+\sum_{j=2}^{\infty}[(j+2)(j+1)C_{j+2}+(n-j)(n+j+1)C_j]\,x^j=0\,.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

于是推得下述一系列等式

$$C_2=-\frac{n(n+1)}{2\,!}C_0\,, \tag{4.28}$$

$$C_3=-\frac{(n-1)(n+2)}{3\,!}C_1\,, \tag{4.29}$$

$$C_{j+2}=-\frac{(n-j)(n+j+1)}{(j+2)(j+1)}C_j\quad(j=2,3,\cdots)\,. \tag{4.30}$$

由(4.28),(4.29)和(4.30)，再由数学归纳法可推得

$$
\begin{aligned}
C_4&=-\frac{(n-2)(n+3)}{4\cdot 3}C_2 \\
&=(-1)^2\frac{n(n-2)(n+1)(n+3)}{4\,!}C_0\,,
\end{aligned}
$$

$$C_{2k}=(-1)^k\frac{n(n-2)\cdots(n-2k+2)(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{(2k)\,!}C_0\,,$$

$$k=1,2,\cdots\,.$$

$$
\begin{aligned}
C_5&=-\frac{(n-3)(n+4)}{5\cdot 4}C_3 \\
&=(-1)^2\frac{(n-1)(n-3)(n+2)(n+4)}{5\,!}C_1\,,
\end{aligned}
$$

$$C_{2k+1}=(-1)^k\frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{(2k+1)\,!}C_1\,,$$

$$k=1,2,\cdots\,.$$

将所得到的系数代入(4.26)，得到(4.25)的解

$$
\begin{aligned}
y=&\,C_0\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{n(n-2)\cdots(n-2k+2)(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{(2k)\,!}x^{2k}\right) \\
&+C_1\left(x+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{(2k+1)\,!}x^{2k+1}\right),
\end{aligned}
\tag{4.31}
$$

这里 C_0 和 C_1 是两个可以任意取的常数，由定理 4.4.2 知，不论 C_0 和 C_1 是什么常数，级数(4.31)在区间 $|x|<1$ 内收敛，并且是(4.25)的解．在(4.31)中取 $C_0=1$，$C_1=0$ 所对应的 $y(x)$ 记为 $y_1(x)$；在(4.31)中取 $C_0=0$，$C_1=1$ 所对应的 $y(x)$ 记为 $y_2(x)$．易知 $y_1(x)$ 与 $y_2(x)$ 线性无关，所以当 C_0 和 C_1 为任意常数时，(4.31)是(4.25)的通解．

顺便指出，如果 n 是正偶数，则 $y_1(x)$ 中 $k=\frac{n}{2}+1$ 对应的项及其以后各项均应为零，故 $y_1(x)$ 成为一多项式：

$$1+\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}}(-1)^k\frac{n(n-2)\cdots(n-2k+2)(n+1)(n+3)\cdots(n+2k-1)}{(2k)!}x^{2k}.$$

如果 n 是正奇数，$y_2(x)$ 成为多项式：

$$x+\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}(-1)^k\frac{(n-1)(n-3)\cdots(n-2k+1)(n+2)(n+4)\cdots(n+2k)}{(2k+1)!}x^{2k+1}.$$

数学物理方程教科书中将详细讨论所谓勒让德多项式，那是由这里的多项式 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$ 乘以适当的常数而定义的(这样乘了以后，当然仍是(4.25)的解)，在此不深入介绍了．

定理 4.4.2 要求方程(4.23)中的系数 $a_1(x)$ 和 $a_2(x)$ 在 $x=x_0$ 的某邻域 $|x-x_0|<r$ 内可以展开成收敛的幂级数．但是有的方程并不如此．例如，数学物理中著名的贝塞尔(Bessel)方程

$$x^2\frac{d^2y}{dx^2}+x\frac{dy}{dx}+(x^2-m^2)y=0 \tag{4.32}$$

写成(4.23)的形式之后，成为

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{1}{x}\frac{dy}{dx}+\left(1-\frac{m^2}{x^2}\right)y=0. \tag{4.33}$$

对照(4.23)，$a_1(x)=\frac{1}{x}$，$a_2(x)=1-\frac{m^2}{x^2}$，它们在 $x=0$ 处无定义，当然更谈不上在 $x=0$ 的某邻域内展开成收敛的幂级数了．对于这样情况，有

定理 4.4.3 设方程(4.23)中的系数 $a_1(x)$和 $a_2(x)$分别可以写成

$$a_1(x)=\frac{A_1(x)}{x-x_0},\quad a_2(x)=\frac{A_2(x)}{(x-x_0)^2},$$

其中 $A_1(x)$和 $A_2(x)$在 $x=x_0$ 的某邻域 $|x-x_0|<r$ 内可以展开成收敛的幂级数，则方程(4.23)在 $0<|x-x_0|<r$ 内存在如下收敛的广义幂级数解:

$$y=(x-x_0)^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}C_k(x-x_0)^k, \tag{4.34}$$

这里 α是某一实数，$C_0\neq0$.

注 (4.34)中的因子$(x-x_0)^{\alpha}$可能会成为复数.例如，若 $\alpha=\frac{1}{2}$，则当 $-r<x-x_0<0$ 时，$(x-x_0)^{\alpha}$就成为复数了.定理 4.4.3 是包括了这种情形在内的.

例 6 求贝塞尔方程(4.32)的解.

解 将贝塞尔方程(4.32)化成(4.33)并与(4.23)对照知，

$$a_1(x)=\frac{1}{x},\quad a_2(x)=1-\frac{m^2}{x^2}=\frac{x^2-m^2}{x^2}.$$

再对照定理 4.4.3，$A_1(x)=1$，$A_2(x)=x^2-m^2$.在$|x|<\infty$内 $A_1(x)$与 $A_2(x)$都可以展开成收敛的幂级数.于是由定理 4.4.3，方程(4.32)在 $0<|x|<\infty$内存在收敛的广义幂级数解

$$y=\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^{k+\alpha}. \tag{4.35}$$

为了将(4.35)代入(4.32)，先求导数，有

$$\frac{dy}{dx}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)C_kx^{k+\alpha-1}, \tag{4.36}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)(k+\alpha-1)C_kx^{k+\alpha-2}. \tag{4.37}$$

将(4.35),(4.36)和(4.37)代入(4.32)，得

$$x^2\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}+x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+(x^2-m^2)y$$
$$=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)(k+\alpha-1)C_kx^{k+\alpha}+\sum_{k=0}^{\infty}(k+\alpha)C_kx^{k+\alpha}$$
$$+\sum_{k=0}^{\infty}C_kx^{k+\alpha+2}-\sum_{k=0}^{\infty}m^2C_kx^{k+\alpha}$$
$$\equiv 0\,.$$

合并 x 的同次幂项，得

$$(\alpha^2-m^2)C_0x^{\alpha}-[(\alpha+1)^2-m^2]C_1x^{\alpha+1}$$
$$+\sum_{k=2}^{\infty}\{[(k+\alpha)^2-m^2]C_k+C_{k-2}\}x^{k+2}\equiv 0\,.$$

x 的各次幂的系数均应等于零，于是

$$\begin{cases}(\alpha^2-m^2)C_0=0,\\ [(\alpha+1)^2-m^2]C_1=0,\\ [(\alpha+2)^2-m^2]C_2+C_0=0,\\ [(\alpha+k)^2-m^2]C_k+C_{k-2}=0,\quad k=2,3,\cdots\,.\end{cases}\tag{4.38}$$

因为 $C_0\neq 0$ (**见定理** 4.4.3)，**所以由**(4.38)**的第一式推得**

$$\alpha^2-m^2=0\,.$$

这是常数 α 应该满足的方程，称为指示方程，求得两个 α. $\alpha_1=m$，$\alpha_2=-m$. **先取** $\alpha_1=m$ (**不妨设** $m\geq 0$)，**则**

$$(m+k)^2-m^2=k(2m+k)\neq 0,\quad k=1,2,\cdots\,.$$

于是由(4.38)**推得**

$$C_1=C_3=\cdots=C_{2k-1}=\cdots=0,\tag{4.39}$$
$$[(m+2k)^2-m^2]C_{2k}+C_{2k-2}=0\,.\tag{4.40}$$

由(4.40)**不难用数学归纳法证明**

$$C_{2k}=\frac{(-1)^k}{2^{2k}k!(1+m)\cdots(k+m)}C_0,\quad k=1,2,\cdots\,.$$

为使上述系数公式表达简单，取

$$C_0 = \frac{1}{2^m \Gamma(1+m)}.$$

这里 Γ 就是《数学分析》中经常提到的 Γ 函数(例如可参阅陈传璋等编《数学分析》, 上海科学技术出版社出版), 于是

$$C_{2k} = \frac{(-1)^k}{2^{m+2k} k! \Gamma(1+m)\cdot(1+m)\cdots(k+m)}$$

$$= \frac{(-1)^k}{2^{m+2k}\Gamma(k+1)\Gamma(k+m+1)}, \tag{4.41}$$

将(4.39)和(4.41)代回(4.39), 得到(4.32)的一个解

$$J_m(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(k+m+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{m+2k}. \tag{4.42}$$

函数(4.42)称为第一类 m 阶贝塞尔函数.

再取 $\alpha = -m$, 则当 $m \neq$ 整数时, 可得到另一个解

$$J_{-m}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\Gamma(k+1)\Gamma(-m+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{-m+2k},$$

因为其中 x 的幂与 $J_m(x)$ 中 x 的幂不一样, 所以 $J_{-m}(x)$ 与 $J_m(x)$ 线性无关, 称 $J_{-m}(x)$ 为 $-m$ 阶第一类贝塞尔函数. 于是当 $m \neq$ 整数时, 得到贝塞尔方程(4.32)的通解

$$y = C_1 J_m(x) + C_2 J_{-m}(x),$$

其中 C_1, C_2 为两个任意常数.

当 $m =$ 整数且取 $\alpha = -m$ 时, 由 $C_0 \neq 0$,

$$(-m+k)^2 - m^2 = k(k-2m) \neq 0 \quad (k = 1, 2, \cdots, 2m-1)$$

及(4.38)的

$$[(-m+k)^2 - m^2] C_k + C_{k-2} = 0, \quad k = 2, 3, \cdots$$

知, $C_0 \neq 0$, $C_2 \neq 0$, $\cdots$, $C_{2m-2} \neq 0$,

$$[(-m+2m)^2 - m^2] C_{2m} + C_{2m-2} = 0,$$

这是一个矛盾. 所以当 $m =$ 正整数取 $\alpha = -m$ 得不到广义幂级数解, 应另想办法. 此时取 $\alpha \neq m$, 但 $|\alpha - m| < 1$, 则 $J_\alpha(x)$ 与 $J_{-\alpha}(x)$ 都有意义, 并且函数

$$y_\alpha(x)=\frac{J_\alpha(x)\cos\alpha\pi-J_{-\alpha}(x)}{\sin\alpha\pi}$$

也有意义(因 $\alpha\neq$整数，$\sin\alpha\pi\neq 0$)，它是 $J_\alpha(x)$与 $J_{-\alpha}(x)$的线性组合，所以 $y_\alpha(x)$也是微分方程

$$x^2y''+xy'+(x^2-\alpha^2)y=0$$

的解，令

$$Y_m(x)=\lim_{\alpha\to m}y_\alpha(x),$$

由解对参数的连续性知，$y=Y_m(x)$是贝塞尔方程(4.32)的解，并且可以证明，它与 $J_m(x)$线性无关，从而得到(4.32)的通解

$$y=C_1J_m(x)+C_2Y_m(x).$$

由定理 4.4.3 可知，若仅在实数范围内考虑，则一般说来，上述解仅在 $0<x<+\infty$范围内适用.

习　题　4.4

1. 已知某一个二阶非齐次线性方程有 3 个解：

$$y_1(x)=x^2,\quad y_2(x)=x^2+e^{2x},\quad y_3(x)=1+x^2+2e^{2x},$$

试求这个方程的通解.

2. 先由观察法找出方程

$$(2x-x^2)y''+2(x-1)y'-2y=-2$$

的两个解，再求其通解.

3. 求下列方程的通解：

(1) $y''-2y'+y=e^xx^{-2}$;

(2) $y''+9y=\cos(2x+5)$;

(3) $y''-y=(e^x+e^{-x})^{-1}(e^x-e^{-x})$;

(4) $xy''-y'=x^2$;

(5) $y''+\dfrac{x}{1+x}y'-\dfrac{1}{1+x}y=-\dfrac{1}{1+x}$;

(6) $x^3(1-\ln x)y''+x^2y'-xy=(1-\ln x)^2$，已知其对应的齐次方程的一个解 $y_1(x)=x$.

4. 设 $f(x)$在区间(α,β)上连续，a是正常数，试求方程 $y''+a^2y=$

$f(x)$在(α,β)上的通解．

5．设$\dfrac{d^2 x}{d t^2}+8\dfrac{d x}{d t}+7x=f(t)$，其中$f(t)$在区间$[0,+\infty)$上连续．

(1) 若$f(t)$在$[0,+\infty)$上有界，试证明：上述方程的每一个解在$[0,+\infty)$上也有界．

(2) 若$\lim\limits_{t\to+\infty}f(t)=0$，试证明：上述方程的每一个解$x(t)$满足

$$\lim_{t\to+\infty}x(t)=0 .$$

6．设函数$p(x)$，$q(x)$和$f(x)$在区间$[0,1]$上连续．求满足

$$\begin{cases}\dfrac{d^2 y}{d x^2}+p(x)\dfrac{d y}{d x}+q(x)y=f(x), \\ y(0)=a,\ y(1)=b\end{cases} \qquad (\mathrm{I})$$

的解的问题称边值问题．

(1) 试证明：边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2 y}{d x^2}+p(x)\dfrac{d y}{d x}+q(x)y=0, \\ y(0)=0,\ y(1)=0\end{cases} \qquad (\mathrm{II})$$

的任意两个解在区间$[0,1]$上都是线性相关的．

(2) 试证明：边值问题

$$\begin{cases}\dfrac{d^2 y}{d x^2}+p(x)\dfrac{d y}{d x}+q(x)y=f(x), \\ y(0)=0,\ y(1)=0\end{cases} \qquad (\mathrm{III})$$

存在惟一解的充分必要条件是边值问题(Ⅱ)仅有零解．

(3) 设(Ⅱ)有非零解，则当$f(x)$满足什么样的条件时，(Ⅲ)存在解？

7．求下列方程的通解：

(1) $x^3 y \quad -3x^2 y''+6xy'-6y=0$；

(2) $x^2 y''-2xy'+2y=x\ln x$；

(3) $x^3 y \quad +xy'-y=3x^4$；

(4) $(2x+1)^2 y''-2(2x+1)y'-12y=6x$．

8．试用幂级数(或广义幂级数)法，求下列方程的通解或满足初值条件的特解：

(1) $y''-2xy'-4y=0$，$y(0)=0$，$y'(0)=1$；

(2) $y''+xy'+y=0$；

(3)　$xy''+y'+y=0$　(在 $x=0$ 的邻域) .

本 章 小 结

线性方程是一类十分重要的方程, 线性微分方程的基本理论及其求解方法是本课程重点之一, 读者应予重视 . 这里将本章涉及的有关理论和解法概括如下:

理论方面主要包括以下几点, 要求读者掌握这些理论, 并理解这些理论在解题时的指导意义 .

1 . 线性微分方程初值问题解的存在惟一性定理, 即定理 4 .1 . 1 . 读者应特别注意初值问题解的存在区间 .

2 . 齐次线性微分方程解的叠加原理, 即引理 4 .1 .3 .

3 . 非齐次线性微分方程解的叠加原理 (见 § 4 .3 的引理 4 . 3 . 1) .

4 . 齐次线性方程通解结构理论, 即定理 4 .1 .3 . 需强调指出的是, n 阶齐次线性微分方程解的全体构成一个 n 维线性空间 .

5 . 非齐次线性方程通解结构的理论, 即定理 4 .1 .4 .

6 . 用幂级数方法或广义幂级数方法解线性微分方程的理论, 即定理 4 .4 .2 和 4 .4 .3 .

属于解法的主要有下述几方面 . 要求读者熟练掌握并运用这些方法于具体解题 .

1 . 求常系数齐次线性方程的基本解组的特征根法 . 它将解微分方程的问题归结为求一个 n 次代数方程的根的问题, 而无需用到积分运算, 具体解法见 § 4 2 末尾的小结 .

2 . 对于非齐次项 $f(x)=P_m(x)e^{\mu x}$ 的常系数非齐次线性方程, 可以用定理 4 .3 .1 所指明的方法步骤去求它的一个解 . 如果 $f(x)=P_m(x)e^{\mu x}\cos\nu x$ 或 $f(x)=Q_m(x)e^{\mu x}\sin\nu x$, 或 $f(x)=P_m(x)e^{\mu x}\cos\nu x+Q_m(x)e^{\mu x}\sin\nu x$ 的情形, 可令 $y^*(x)$ 为(3 21)式用待定系数法求之 .

3．求非齐次线性方程解的常数变易法，要事先知道对应齐次方程的一个基本解组．方法适用于一般非齐次线性方程．特别对于常系数非齐次线性方程，由于对应的齐次线性方程的基本解组已可求得，所以常数变易法对它总是行得通的．本节只介绍 $n=2$ 时的常数变易法．对于一般 n 情形，将在 5.3.2 节中介绍．$n=2$ 时由常数变易法求非齐次方程的解的公式见(4.12)．常数变易法还可用来讨论非齐次方程的解的性质(参见§4.4 例 3 及习题 4.4 的第 5 题和第 6 题)．

4．用幂级数或广义幂级数解二阶变系数齐次线性方程的适用条件分别见定理 4.4.2 和定理 4.4.3，具体解法参见其后的例 6 和例 7．

5．欧拉方程是一种变系数线性方程，它可通过一种特定的自变量变换化为常系数线性方程，详见 4.4.2 节．

6．一般的二阶齐次线性方程，如果已知它的一个非零解，则可按公式(1.20)求出它的通解．遗憾的是，一般的二阶齐次线性方程，要求出它的一个非零解也是颇为困难的．

除了上述一些理论和方法外，函数的线性相关与线性无关和朗斯基行列式等概念以及它们之间的关系，是本章所涉及的一些必要内容，读者应理解这些概念和关系，以及它们在本章中的作用．

复 习 题

1．设 $\varphi_1(t),\varphi_2(t),\cdots,\varphi_n(t)$ 是在区间 $\alpha<t<\beta$ 上有直到 $n-1$ 阶连续导数的函数，又它们的朗斯基行列式在 (α,β) 上恒等于零，并且对每一点 $t\in(\alpha,\beta)$，矩阵

$$\begin{bmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) & \cdots & \varphi_n(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) & \cdots & \varphi_n'(t) \\ \cdots & \cdots & & \cdots \\ \varphi_1^{(n-2)}(t) & \varphi_2^{(n-2)}(t) & \cdots & \varphi_n^{(n-2)}(t) \end{bmatrix}$$

的秩数等于 $n-1$. 试证：函数 $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \cdots, \varphi_n(t)$ 在每一点 $t \in (\alpha, \beta)$ 的某邻域内都是线性相关的.

2. 利用习题 4.1 的第 1 题和第 2 题的结论解方程

$$xy'' + \frac{1}{2}y' - y = 0.$$

3. 利用习题 4.1 的第 3 题结论解方程

$$y'' + \frac{2}{x}y'' + y = 0.$$

4. 应用习题 4.1 的前三题结论解下列方程:

(1) $xy'' - y' - x^3 y = 0$;

(2) $y'' - 4xy' + (4x^2 - 1)y = -3e^x \sin 2x$;

(3) $y'' - \frac{1}{\sqrt{x}}y' + \frac{y}{4x^2}(x + \sqrt{x} - 8) = 0$.

5. 设方程 (1.4) 的系数 $a(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ 在区间 $a \leq x \leq b$ 上连续, $y = \varphi(x)$ 是它的一个解. 求证: 若 $y = \varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上的零点有聚点, 则 $\varphi(x) \equiv 0$.

6. 不解方程, 试确定下列各方程在所给初值条件下的解的存在区间:

(1) $(x+1)y'' - 2y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 2$;

(2) $y'' + y\tan x = 0$, $y(5) = 1$, $y'(5) = 0$.

7. 已知下列二阶线性非齐次方程的两个解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$, 试求它们的通解:

(1) $(x^2 - 1)y'' + 4xy' + 2y = 6x$; $y_1 = x$, $y_2 = \dfrac{x^2 + x + 1}{x + 1}$;

(2) $(3x^3 + x)y'' + 2y' - 6xy = 4 - 12x^2$; $y_1 = 2x$, $y_2 = (x+1)^2$.

8. 求下列欧拉方程的通解:

(1) $t^2 \dfrac{d^2 x}{dt^2} + 2t\dfrac{dx}{dt} - n(n+1)x = 0$;

(2) $\dfrac{d^2 x}{dt^2} + \dfrac{1}{1+t}\dfrac{dx}{dt} + \dfrac{1}{(1+t)^2}x = 0$.