

序

数(shù)起源于数(shǔ),量(liàng)起源于量(liáng)。在有文字历史之前人类就有了数和图形的概念。几千年来,数学由人类生产和社会实践的需求而产生和发展。她不仅被用于科学和技术各领域,也渗透到经济和管理领域以及老百姓的日常生活之中。她不仅是一种工具和语言,也是人们重要的思考方式。她是一种文化,是人类文明的一个重要组成部分。

人类生产和社会实践的需求是数学产生和发展的根本动力。与此同时,数学还有自身内部逻辑完善和追求数学美的强大内部动力。这种内部动力的意义和作用往往不被人们所正确理解,被视为“抽象的游戏”。此外,数学的术语和符号也不易看懂。从中学几何证明开始,数学论述的书写形式就被训练成以固有的逻辑推理为基础,而这种形式常常是探究和思考的真正数学思维方式的颠倒。这一切使人们对数学望而生畏,把数学看成是少数人的一种专门技艺。

综上所述,我们迫切需要用生动的语

言,把数学的进步和数学的思想方法通俗地介绍给大众,让更多的人认识到数学的作用和意义,在不同的工作领域中自觉地采用数学思维方式,使数学更贴近大众。在这方面,盛立人教授撰写的《老百姓的数学》丛书是一个很好的尝试。作者用轻松活泼的语言把人们带进千姿百态的数学世界,让人们领略数学在老百姓日常生活中所起的作用和影响。我相信这套书对于普及和传播数学知识和思想,让民众更加了解、掌握和运用数学,会起到促进的作用。

从某种意义上说,撰写通俗性数学普及读物比撰写专业数学著作和论文更为困难,它需要作者对数学和相关领域的深刻理解,也需要文采。我们需要更多的有识之士共同努力,做好数学的普及与传播这项艰巨而又神圣的事业。

冯克勤

识于 2000 年 3 月

作者的话

—

这是一套关于数学的通俗书籍。作者想通过本书来向读者证明两件事：第一，数学是无所不在的；第二，数学是童叟皆宜的。因此我们可以说，本书的读者对象就是普通老百姓——每一位完成九年制义务教育的老百姓。

作者长期以来一直在思考这么一个问题：面向 21 世纪，人们应当怎样在文明素质方面做好准备，以迎接世界范围高科技时代的到来？或者说，我们应当在学校和社会之间做些什么铺垫性的工作，才能真正实现科学的社会化和普及化。

一个理想的、倡导学科学和用科学的社会氛围应当具有这样的魅力：

第一，能使十分严谨但略显呆板的课堂内容变为活生生的社会常识。倘使我们能有办法让每个人在面对社会时，能像牛顿所说那样“在在慎思”，真可谓善莫大矣！

第二，能让人们在各自工作领域中，自觉地养成理性思考的习惯，时时改善本职工作，以便人人都能成为高科技时代的参与者，而不是同路人。

但是造就这样一个“理想王国”不管是在建立一座“乌托邦”，因而不是一二个人，或是一朝一夕可以完成的。

二

1996 年给作者带来一个极好的机遇。那一年作者给安徽大

学的几个文科系(社会学、经济和管理等专业)开设了两门新的公选课:《社会选择》和《实用规划》,作为文科数学课的辅助课程。实践说明,这两门课深受文科学生,乃至不少理科学生的欢迎。追踪调查显示,学生们对于这种比传统数学课更灵活、更实用、更轻松的数学,是非常感兴趣的。

正是出于这样的效果,使作者心中燃起了勇气:倘使这些材料能在大学校园外也发挥它应有的作用,也许正是为我们上面提到的那个理想氛围在添砖加瓦。或许那时就产生了写一部书的想法。

但是此事想的容易,做起来极难。作者既要时时克服犹豫、彷徨等心理上的障碍,还要不断索求大量资料。幸而我得到的却都是支持和勉励:在南京大学、中国科学技术大学和安徽大学的师长、朋友和同事们的不断鼓励下,才毅然动起笔来。

我最初确定选材的标准是:有实用价值,有深厚背景,有现代意识;同时,材料应不与现有许多通俗书籍重复;方法应强调实用且易于掌握。经多方考虑,将本套书分成五个分册。

《千姿百态的几何世界》

《数学家走近社会学》

《数学家走进管理学》

《计算机的数学故事》

《统计——数字的科学》

在撰写过程中,取材最多的是圣 Olaf 学院, Lynn A. Steen 教授领衔主编的(参与写作的专家达 15 位之多)

For all practical purposes: Introduction to contemporary mathematics.

除此之外,采集和借鉴的来自报章书刊的材料,为数极多。对于有关作者和译者,在此一并表示我的谢意,不再一一列出。

三

本书从开始撰写到刊行,先后经历5年时间,其间最深切的体会是:比起撰写一部学术专著来,撰写通俗材料其实更为困难。由于受作者能力的限制,选材虽然很用心思,实际仍不能免俗;行文力求流畅生动,写来却时有晦涩;内容纵有考虑,难度仍难以驾驭。这就造成本套书目前这个样子。不足之处,还希望宽容的读者多多包涵才是。

清华大学冯克勤教授对本书表示了自始至终的关注,并愿为之作序,在此表示我衷心的感谢。

最后,在严肃著作的出版和商品经济尚未协调运行的今天,安徽教育出版社毅然支持本书出版,令人感动,特陈数语,以表谢意。

盛立人

安徽大学数学系

2000年10月

目 录

第一章 形状、大小、款式	1
§ 1 形状、大小与匹配	1
§ 2 漫说款式——一对孪生美神	10
§ 3 款式与图案——对称问题	14
§ 4 款式与图案——漫说瓷砖拼装	24
思考题	40
第二章 漫说人口问题	47
§ 1 马尔萨斯人口论和指数增长律	47
§ 2 漫说晚婚与晚育	51
§ 3 人口结构与增长	55
§ 4 再生曲线——人口增长会产生混乱吗?	58
思考题	64
第三章 测量:从地球到宇宙(从欧几里德到爱因斯坦)	70
§ 1 《几何原本》与测量学	70
§ 2 从勾股定理谈起	75
§ 3 宇宙测量与圆锥曲线	83
§ 4 新几何与新宇宙观	92
思考题	105

第四章 漫说分形与混沌	112
§1 我们到底生活在几度空间里?	112
§2 维数与分形理论	121
§3 混沌现象	131
思考题	144
部分思考题答案与提示	147

第一章 形状、大小、款式

§ 1 形状、大小与匹配

一、漫说度量

在这一节里,我们将从我们身边的一草一木、一景一物谈起,为的是去说明自然界的万物生长是如何地协调、和谐、匹配和美。本书主题实际上是几何学。如果说我们的目的是通过从近在咫尺的身边世界到广袤无垠的神秘宇宙这一变化无穷的观察历程,为你提供一部同样变化无穷但逻辑结构清楚严密的生动的几何学,那么本章作为一个开头,主要是讨论上面说到的和谐性。例如我们要问,世间万物的大小与形状有无一定的关系(匹配问题)?如果有,那么这种搭配有没有一个最佳化程式(即款式问题)?这一章讨论将使我们能明白这么一个道理:世上涉及的形状、大小和款式问题,几乎可以说是万物与生俱来的要求。或许,也只有数学家可以尽量把它解释清楚。

在讨论我们的问题之前,为了今后的计算方便,有必要先理顺一下度量制。

我国已经颁布了度量法规,因而只允许使用公制(即以米度量距离,以千克度量重量,以升度量容量等)。但随着改革开放的深入,日益增多的进口产品实际上仍袭用进口国家的度量制,例如英制式(英尺,码,英寸),这些都给人们带来许多不便。

最初建议使用公制式的是法国人莫顿(Gabrial Mouton)于

1670 年提出的,并于 1795 年被最后接受。1 米的长度被定为从北极到赤道的距离(沿经过巴黎的经线度量)的十万分之一。以后重新定义成刻在一根(铂-铱)金属棒的两条线之间的距离,此棒被安置在巴黎近郊的国际度量中心,并被保持在零摄氏度之下。最后,于 1960 年又被重新定义:电流通过氦-86 气体时,其原子发出的橘红光的波长的 165076375 倍,被定义为 1 米长。然后定义 1 米的百分之一是 1 厘米,1 米的 1000 倍是 1 千米,等等。此外,仍把那根标准铂-铱金属棒的重量定义为 1 千克。

这样,在公制下,我们有

距离:1 千米 = 1000 米 = 100000 厘米,

1 米 = 100 厘米。

面积:1 平方米 = 1 米 \times 1 米 = 100 厘米 \times 100 厘米
= 10000 平方厘米。

体积:1 立方米 = 1 米 \times 1 米 \times 1 米
= 100 厘米 \times 100 厘米 \times 100 厘米
= 1000000 立方厘米。

(对于容量,1 升 = 1000 立方厘米。)

重量:1 千克 = 1000 克。

在英制下,我们有

距离:1 英里 = 5280 英尺,1 英尺 = 12 英寸。

(1 码 = 36 英寸。)

面积:1 平方英里 = 1 英里 \times 1 英里 = 5280 英尺 \times 5280 英尺
= 27878400 平方英尺
= 27878400 \times 12 \times 12 平方英寸
= 4014489600 平方英寸。

(1 平方英里 = 640 英亩,1 英亩 = 43560 平方英尺。)

体积:1 立方英里 = 5280 英尺 \times 5280 英尺 \times 5280 英尺
= 147597952000 立方英尺

$$\approx 148 \times 10^9 \times 12 \times 12 \times 12 \text{ 立方英寸}$$

$$\approx 2.5 \times 10^{14} \text{ 立方英寸。}$$

(对于容量, 1 加仑 \approx 231 立方英寸。)

重量: 1 英吨 = 2000 磅。

比较两种度量制, 我们有

距离: 1 英寸 = 2.54 厘米,

$$1 \text{ 英尺} = 2.54 \times 12 \text{ 厘米} = 30.48 \text{ 厘米,}$$

$$1 \text{ 英里} = 5280 \text{ 英尺} = 30.48 \times 5280 \text{ 厘米}$$

$$= 160934.4 \text{ 厘米} = 1609.344 \text{ 米} \approx 1.61 \text{ 千米。}$$

$$1 \text{ 厘米} = 1/2.54 \text{ 英寸} = 0.393701 \text{ 英寸} \approx 0.4 \text{ 英寸。}$$

$$1 \text{ 米} = 100 \times 0.393701 \text{ 英寸} = 39.3701 \text{ 英寸。}$$

$$(1 \text{ 码} = 2.54 \times 36 \text{ 厘米} = 91.44 \text{ 厘米} = 0.9144 \text{ 米。})$$

重量: 1 磅 = 0.45359237 千克,

$$1 \text{ 千克} = 1/0.45359237 \text{ 磅} \approx 2.205 \text{ 磅。}$$

有了这些比较表, 我们就可以方便地变换单位。

下面开始讨论我们的匹配问题。

二、如来佛身高是多少?

小说《西游记》里说到, 孙悟空一个跟头翻了十万八千里 (54000 千米), 居然没能离开如来佛的手心; 但是会有多少人去想: 如来佛身高多少? 无独有偶, 西方在 20 世纪 30 年代拍过一部电影《金刚》, 说的是有人在非洲猎得一头身高 30 多米的猩猩, 带到纽约展览, 结果造成金刚——人们给猩猩起的名字——大闹纽约的故事。

但是金刚塑造得再巧妙, 却逃不出数学家的法眼。只消略加计算, 即可明白金刚是不存在的。要说清楚这件事, 需要讲点压力和压强的概念。

考虑两块铁, 其形状都是立方体, 后者是前者的两倍放大 (图

1-1)。现在铁块的重量全压在立方体的底面上,物理学里把单位底面积上承载的重量称为压强,用以度量底部受力情况。假如立方体的每边长为1米,因为铁的密度约是8000千克/立方米,因此很容易算出,一块边长1米的立方体铁块的压强是

$$\begin{aligned} & \text{体积} \times \text{密度} / \text{底面积} \\ &= (1 \text{ 米} \times 1 \text{ 米} \times 1 \text{ 米}) \times (8000 \text{ 千克} / \text{立方米}) / (1 \text{ 米} \times 1 \text{ 米}) \\ &= 8000 \text{ 千克} / \text{平方米}。 \end{aligned}$$

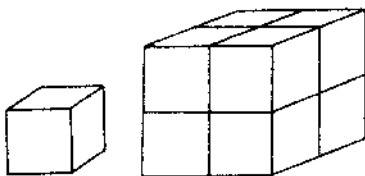


图 1-1

同样,放大两倍的那块铁块底面的压强是

$$(2 \times 2 \times 2) \times 8000 / (2 \times 2) = 16000 (\text{千克} / \text{平方米})。$$

说得仔细一些,当边长放大2倍时,体积增加了8倍,压强增加了2倍。把这计算多看几遍,可知更一般的规律也是对的:如果把立方体放大 n 倍,则体积和重量都增加 n^3 倍,但压强增加 n 倍。例如我们来算一下一块边长为10米的立方体铁块底面的压强。现在体积 V 是1000立方米,重量 W 是 $1000 \times 8000 = 8000000$ (千克),底面积 A 是100平方米,因此底面的压强是

$$\begin{aligned} p &= W / A = 8000000 \text{ 千克} / 100 \text{ 平方米} \\ &= 80000 \text{ 千克} / \text{平方米}。 \end{aligned}$$

注意,当放大倍数不断增加时,很可能会发生这样一种现象:铁块本身的重量超过了底面的承受能力,这时铁在自身重量之下将发生形变——或者弯曲,或者折断。实验证明,一块以5千米为边长的立方体,如果是用铁铸就的,便会发生上述情况。这种可以承受的最大压强,我们称之为耐压强度。换句话说,铁的耐压强度

是 4×10^7 千克/平方米。计算如下。

一块边长 5 千米的立方体等于一块边长 1 米的立方体放大 5000 倍。因此,根据我们刚才说的,边长 5 千米的立方铁块,比起一块边长 1 米的立方铁块,底面压强将放大大约 5000 倍。所以耐压强度就是

$$5000 \times 8000 = 4 \times 10^7 \text{ (千克/平方米)}。$$

有了这个数字,我们立刻得知,金刚是不可能存在的:因为骨质的耐压强度远不如铁;再说,在物体放大某一倍数时,体积和重量以立方比例增加,而压强仅以倍数增加。金刚的高度是常人的 20 倍,重量应是常人的 8000 倍,但它的骨架的耐压强度只是常人的 20 倍!当然,如来佛更是不可能存在的,除非他和金刚都为自己设计了新型合金骨架,因而铸就了金刚不坏之身。

三、山能有多高?

我们现在顺着上面这个想法,去看一看,地球上的山到底能有多高? 350 年前,一位伟大的科学家伽里略(后文我们还要不断谈到他)曾经用一样的想法计算出了这么一个结果:地球上最高的树不得高于 90 米。他的计算不算最准确;现在已经知道世界上最高的树是长在美国西海岸的一株红杉,高达 110 米。

已经知道地球上最高的山是埃弗勒斯峰,高约为 10 千米。我们就以它为模型,算一下它的底面压强是多少? 在计算前我们得作一些符合实际的假定。设山峰是一个圆锥体,它的高度和它的底圆直径相等(见图 1-2),则

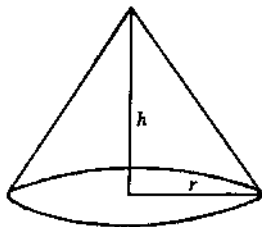


图 1-2

$$\text{体积 } V = \pi \times r^2 \times \frac{h}{3},$$

$$\text{底面积 } S = \pi \times r^2。$$

(用这个公式计算埃弗勒斯峰的体积大约是 260 立方千米,底面积大约是 80 平方千米。)再假定整个山由花岗石组成,有均匀密度。已知花岗石的密度为 2600 千克/立方米,其耐压强度是 5×10^8 千克/平方米。埃弗勒斯峰有多重呢? 计算如下。

体积 = 260 立方千米 = 26×10^{10} 立方米。

重量 = $2600 \times 26 \times 10^{10} = 676 \times 10^{12}$ (千克)。

现在埃弗勒斯峰的底面积大约是 8×10^6 平方米,因此最后算出埃弗勒斯峰的压强等于

$$\frac{676 \times 10^{12}}{8 \times 10^6} = 8.45 \times 10^7 \text{ (千克/平方米)}。$$

由于这个数大大低于花岗石的耐压强度 5×10^8 千克/平方米,所以埃弗勒斯峰至今耸立不动。

用上面这个算法可以估算出地球上最高的花岗石山,其高度不超过 30 千米;但物理学家们从实际出发考虑,得到的限度是 20 千米。

我们能设想用别的物质组成的山能有多高? 譬如冰山、木山。我们能设想别的星球上的山能有多高? 是不是要决定于那里的重力?

四、人到底有多大能耐

从上面的讨论我们应该得出一个结论:你要改变物体的比例,你就得改变物体的质量或形状。或者也可以说,物体的大小和它的形状(或质量)必须互相协调。这就是我们在章首谈到的匹配问题。例如一座大楼和一部机器显然不会有同一造型,再说木质和塑料都不足以作为材料,其质量非得是铝、铁等金属不可。因此碰到匹配问题时,或者改用更强的材料,或者改变你的设计。例如,你可以将图 1-3 左边的装置改成右边的装置,以便减弱底面的压强。

在自然界里这种现象更突出。一只小动物的骨架不如大动物

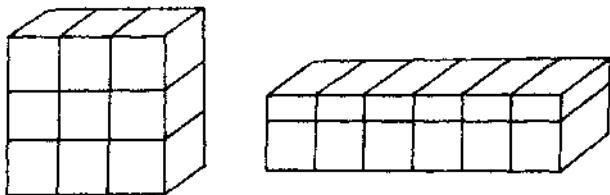


图 1-3

结实。例如一只老鼠和一只大象既然都是用相仿的材料制成,其形状肯定是不同的。因为如果老鼠大如大象,那它的腿将不足以支持全身的重量。一只 30 吨重的恐龙,必须常常减轻体重以适合生存环境,否则就得被自然界淘汰。这种体重和形状的匹配也可以看作物体体积和面积之间的一种内在关系。自然界的这种现象,人们长期以来都是知道的,并且,或许可以说是存疑已久。要不然,为什么有这么多的诗人和词家会通过诗文来表达他们的意愿呢?请看:

我欲乘风归去,又恐琼楼玉宇,高处不胜寒。(苏轼)

可上九天揽月,可下五洋捉鳖。(毛泽东)

也许我们现在可以给诗人们说说,为什么人本身没有诸如神兵天降、一蹴登高、如鱼在水、翱翔长空的本事?

先说坠落。一只老鼠可以从十层楼房坠落而安然无恙,一只猫也可以从两层高楼安然跳下,但一个人只能从与自己身高相近的高度跳下。为什么?这是因为坠落时所需要的能量与坠落物的重量,即其体积成正比。这个能量需要被物体本身或周围的环境——例如声音——所吸收。坠落物的吸收则仰仗物体的表面积,一如立方铁块仰仗其底面一样。物体愈大,从而其体积愈大,从而其下坠能量也愈大,且其增加速度远大于面积的增加——因为前者以立方速度增加,后者以平方速度增加。因此,体积增加,从同一高度坠落的危险也增大。

且说潜水。一条鲸鱼可以在水下历时 20 分钟而不呼吸,我们

却不能,为什么?其基本原因是因我们没有它那么大。哺乳动物停止呼吸的能力决定于两件事:蓄于肺部的氧气的体积和氧气被肺表面吸收的速度。前者与动物的体积、因而与动物的长度的立方成正比,后者与动物的长度的平方成正比。因此,潜水时间应当与肺部的体积和肺部的面积之比成正比,即与动物的长度成正比。可见,与鲸鱼相比,人就没有这种能耐了。也许个别人可以比一般人潜水时间更长一些(传说中的瑜伽功可以让人潜水 72 个小时),这种有关特异功能的讨论就不属于本书范围了。

再看**跳高**。一只跳蚤可以垂直上跳 60 厘米,这要超过它的身高好多倍。许多人相信,如果跳蚤像人一样大,则它可以上跳 300 米。但这只是一种想像而已。一只放大的跳蚤与一只小跳蚤几乎跳得一样高!这是因为,肌肉的强度与肌肉截面面积成正比,跳高仰仗于肌肉长度的突然收缩,所以跳高的能力将与肌肉的体积成正比。但跳蚤的体积与其腿部肌肉的体积成正比。比方说,一只跳蚤的腿部肌肉如果只占其全身的 1%,如果我们把它放大到人一样大,则其腿部肌肉仍占全身的 1%。对这两只跳蚤来讲,它们的肌肉能量几乎是一样的:它们仍然在跳高时产生 100 倍自身重量的能量,因而它们跳得一样高。

现说**飞行**。驻留空中飞行所必需的能量正比于羽翼负荷,或者说取决于重量与翅膀面积的比。我们记得,在放大时,重量将随飞鸟或飞机的长度的立方成正比。但羽翼的面积仅与长度的平方成正比。因此,羽翼负荷将正比于飞行物的长度。例如将一只鸟或飞机放大 4 倍,则它们的体积将放大 64 倍,而它们的羽翼面积只放大了 16 倍。所以羽翼面积每增加一平方米,就得承担 4 倍的重量。其次,你还必须保持运动。为了保持在一个飞行高度,必须尽快飞行以便提升羽翼。这种飞行的最小速度与羽翼负荷的平方根成正比。把两件事结合起来考虑,我们就可以知道,这个最小速度与长度的平方根成正比。就是说,我们的飞行物放大 4 倍,则必

须加快 2 倍飞行！例如一只麻雀，它的最小飞行速度大约为每小时 30 千米。一只鸵鸟大约是麻雀的 25 倍长，所以鸵鸟的最小飞行速度是每小时 $\sqrt{25} \times 30 = 150$ (千米)。你见过一只慢慢飞行的鸵鸟吗？巨鸟不都是极快地飞行吗？当然，鸵鸟不是麻雀，也不是飞鹰。有许多大飞鸟往往生有并不成比例的翅翼，以保持翅翼负荷的平衡。生物学家考证出来的是，650 万年前的飞行恐龙，其张开的翼长是 10 米，重为 50 千克。

利用我们的匹配问题的讨论方法，还可以解释许多自然界的现象，例如冷血动物的体型，等等，相信我们的读者已经跃跃欲试，想亲自动手了。

但是，我们宁可在这里给读者一个忠告：尽管用了不多的数学我们就能解释上面种种自然现象，但人毕竟不是万能的。自然界还有更多的有趣现象，生物学家和数学家至今仍然无法作出满意的解释。让我们来举一些例子。

珊瑚虫会在自己身上划“日历”，一年后在自己身上刻下了 365 条环纹。

生物学家观察到蜜蜂的惊人组织能力：每天早上当太阳正好升起在地平线 30 度时，大批侦察蜂外出侦察蜜源，回来后向蜂王报告诸如蜜源的方位、数量及距离等情报，于是蜂王指派工蜂出击。这时候奇迹出现了，派出工蜂的数量永远是处于最佳状态：它们既能个个吃饱，又供回巢酿蜜。

将一只死蚱蜢切成大小为 1:2:4 的 3 块，那么 40 分钟后，蚂蚁开始出击。生物学家发现，分别扑向 3 块美食的 3 群蚂蚁的数量大概是 28 只、44 只和 89 只，差不多也是 1:2:4。

当丹顶鹤成群迁徙时，总是排成“人”字形列队，其中“人”字的夹角永远是 110 度。这还不算，人们还发现，鹤群前进方向并不正好是夹角的分角线方向，而是略为偏一些： $54^{\circ}44'8''$ 。令人惊叹的是，金刚石晶体的棱角正好也是 $54^{\circ}44'8''$ 。

你能给这些奇妙现象作出解释吗?

§2 漫说款式——一对孪生美神

一、斐波那契数列和黄金分割

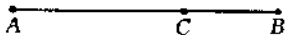
所谓款式,在日常生活里其实是没有精确含义的。但如果我们仔细观察自然界的万物百态,我们可能更要大吃一惊:它们的款式完全受着一对孪生美神的安排和支配。这一对美神是斐波那契数列和黄金分割。下面先说定义,再慢慢地描绘自然界。

斐波那契(Fibonacci)数列:

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, \dots$$

它的作法是,开始两数是1和1,此后每一个数是前两个数的和。

黄金分割:将一条线段 AB 用下面办法来找一个分点 C (图1-4):要求较长段与较短段的比等于全长和较长段的比(或者我们说,较长段是全长与较短段的比



例中项)。换言之,即要求 $\frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC}$ 。

图 1-4

比值 $G = \frac{CB}{AC}$ 即称为黄金分割,很容易看出

$$\begin{aligned} \frac{1}{G} &= \frac{AC}{CB} = \frac{AB}{AC} = \frac{(AC + CB)}{AC} \\ &= 1 + \frac{CB}{AC} = 1 + G, \end{aligned}$$

或者说, G 满足一个二次方程 $G^2 + G - 1 = 0$, 由此得到一个(正的)根

$$G = 0.618034 \dots$$

我们来看看黄金比和斐波那契数怎样在支配我们的周围世界。

图1-5是向日葵和鹦鹉螺的2张照片。我们看到它们都分

布有一些螺线。这些螺线的分布有许多有趣的性质。例如,向日葵有两组螺线:一组顺时针旋转,另一组逆时针旋转。如果你数一下两组螺线的个数,那么你会发现,一组共有 55 条螺线,另一组有 89 条螺线,55 和 89 正好是斐波那契数列中两个相邻数。为什么植物会有这么整齐的数字关系呢?这个问题涉及植物生长动力学,虽经广泛的研究,但至今还没有令人满意的答案。

有人曾经断言:“宇宙万物,凡符合黄金分割律的总是最美的形体。”事实证明,0.618 在建筑、书法、绘画、音乐里都有充分的表现。许多艺术家常常遵循黄金分割律进行创作。古希腊雕塑家斐狄亚斯(Phidias)便是用了黄金律建造了著名的执政院。而古典画家绝大多数都是从黄金律开始启蒙教育的,据说这将使他们能严格地掌握人体素描的基本功。



图 1-5

近年来人们发现,医学也与之有着千丝万缕的联系。为什么人在 22~24 摄氏度最舒适,因为人体温度 37 度的黄金分割是 22.8 度;人体结构如下:头顶至脐与脐到脚底之比;臀宽与躯干之比;下肢长与全身之比,均近于 0.618。医学家现在还告诫人们:大致四分动六分静,才是较佳的养生之术。有人分析说,每饭六七分饱的人几乎从不生胃病;又,摄入的饮食以六分粗粮、四分细粮为宜。一年 12 个月,其黄金分割即七八月底,当是结婚的最佳时间,等等。

在鹦鹉螺和向日葵之间,以及黄金分割和斐波那契数列之间,存在一种内在关系。

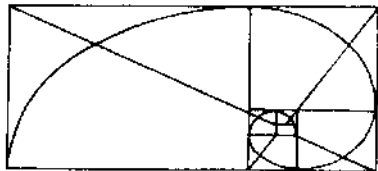


图 1-6

图 1-6 中每一个长方形都叫做黄金长方形,意思是其宽与长之比为黄金分割。曲线表示一条螺线,称之为对数螺线。鹦鹉螺的形状为一对数螺线。向日葵的螺线则近似于一条对数螺线。数学上的联系是什么呢?让我们看看下面这个由相邻斐波那契数的比值构成的数列:

$$\frac{1}{1} = 1.0, \frac{2}{1} = 2.0, \frac{3}{2} = 1.5, \frac{5}{3} = 1.666\cdots, \frac{8}{5} = 1.6,$$

$$\frac{13}{8} = 1.625, \frac{21}{13} = 1.615\cdots, \cdots$$

可以证明,上面这个数列将从两个方面趋于

$$\frac{1}{G} = 1.618034\cdots$$

二、数学性质

斐波那契原名比哥罗(Leonard Pisano Bigollo),1170 年生于意大利比萨城。此人可算得上是中世纪最伟大的数学家了,传说正是他第一个采用较方便的阿拉伯数字出版著作,以取代在他以前的罗马数字。遗憾的是我们现在对他的生平事迹所知甚少,只知道他曾跟随乃父到过阿尔及利亚经商,并在埃及、叙利亚和希腊求过学。他的一本著作名《Libri abbaci》,讨论了如下的兔子问题,也就是引出斐波那契数列的问题。

每对兔子逐月生一对(雌雄各一)小兔,每对小兔两月后逐月生一对(雌雄)小兔;今设年初在兔房里放上一对小兔,问一年以后,有多少对小兔?

以 F_N 记第 N 月兔房里的兔对数,则 $F_1 = 1, F_2 = 2, F_3 = 3, F_4 = 5, F_5 = 8$ 。从这些尝试里可以推出这么个规律:每一个 F_n 是前两个 F_{n-2} 和 F_{n-1} 之和。理由是, F_n 可以分成两部分:一部分来自第 $n-1$ 月初时已有的兔数,共有 F_{n-1} ;另一部分来自第 n 月初新生的兔数,共有 F_{n-2} 。依题意, $n-2$ 月初在兔房中的兔子到第 n 月初时都能生一对小兔,因此

$$F_n = F_{n-1} + F_{n-2}.$$

我们说过,这就得到了斐波那契数列 $(1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots)$ 。

斐波那契数列是一种所谓递归数列:它的每一项是由前面的一个或几个项唯一确定。现在的情况是:数列里的每一数是前两个数的和。

斐波那契数列曾被认为是最有趣的数学对象之一,引起了早期的很大一批数学家的兴趣。即使在今日,它的魅力仍未消失。下面列举一些这个数列的简单性质,更多的将放在思考题里,它们中有一些还是近年才发现的。

1. 我们有一个寻求第 n 个斐波那契数的通式:

$$(1) F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n;$$

$$(2) F_n = \begin{cases} \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\rfloor, & (n \text{ 为奇或偶}) \\ \left\lfloor \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+1} \right\rfloor + 1, & \end{cases}$$

($\lfloor x \rfloor$ 表示 x 的整数部分.)

2. 第 12 面所说的数列性质实际上就是要证明下面的极限式

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} \rightarrow 1.618\cdots = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

用上面的通式,经过计算我们有

$$\frac{F_{n+1}}{F_n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \left\{ \frac{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^{n+1}}{1 - \left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^n} \right\},$$

因此我们的问题相当于去证明下面这个十分明显的结论(因 $\frac{\sqrt{5}-3}{2}$ 的绝对值小于 1):

$$\left(\frac{\sqrt{5}-3}{2}\right)^n \rightarrow 0.$$

3. 下面两个性质或许可以用来说明鹦鹉螺和向日葵上螺线数字的规律。

(1) 用 $k \gg m$ 表示 $k \geq m+2$, 则每个正整数 n 都可以表示成

$$n = F_{k_1} + F_{k_2} + \cdots + F_{k_r},$$

其中 $k_1 \gg k_2 \gg \cdots \gg k_r \gg 0$.

(2) 上述表达式是唯一的。

对于递归数列特别有兴趣的读者,将在本章思考题里得到满足。

§3 款式与图案——对称问题

只需略加调配,万物即能生辉! 这是 700 多年前,一位著名哲学家托马斯·阿奎斯(Thomas Aquinas)留下的一句话。要注意的是,在那个时代还没产生我们现在称之为美学(Aesthetic)的这门学科。本节我们打算从这句话出发,去探索一下有关图案的款式问题。具体地说,我们将从美学欣赏的最基本要素——对称现象

开始。当然,我们用的仍然是数学方法。

如果你请教一下字典,那么你会发现,对称跟美丽这两个词,实在很难给出定义。有的字典上这么说:对称是系统组成中的“对应、等价或认同”;有的字典则说:对称是系统的“各部分的安排和组成的对应”;“美是和谐地安排或平衡的结果”。如我们看到的,定义中还有些词似乎还有必要给以定义。

从最狭窄的意义上来说,对称可以视为对象物的部分之间的“镜像对应”。例如晶体,它在外表和内在原子构造上都具有这种对称性。而从最广泛的意义上来说,对称包含了平衡、相似和重复等概念。用对称观点来欣赏图案,这便是本节的主题;而我们也将看到,数学在这里留下了凝重的一笔!

在上节里我们看到,向日葵的果实沿着螺线分布时出现了相似性和重复性,结果向日葵以自己的(同时也是合理的)方式安排了重复性——这是一种平衡。假如只有一枝螺线,那么没有重复也就没有平衡。在手工对象——如墙纸、楼房——出现的对称里,平衡是常用的方法。数学家描绘平衡的办法是用了一种叫做**刚体运动**或**保距运动**的概念。

可以这样来描述刚体运动对于一张图案的作用。图案是由许多个(有时有无穷多个)基本图形(我们称之为元素图案)排列而成,一个刚体运动可以理解为一种移动:它同时把图案里每一个元素拿出来,移动,或许还要旋转,甚至翻个儿,然后放回去,但决不许更改元素的大小和形状。拿图 1-7 中的基本元素——矩形 a ——来说,经过 6 种移动,分别变成图形 $b \sim g$: 图形 b 是缩小了一半;图形 c 是改变了角度,所以都不是刚体运动。图 e 、 f 与原图 a 一模一样,但图形 e 实际上已在平面上绕矩形中心作了一个 180 度的旋转,而图形 f 则是绕中垂线(虚线)在空间作了 180 度的旋转(这种旋转我们称之为关于中垂线的反射)。图 d 是经过绕中心的 90 度旋转;图形 g 是绕矩形对角线作 180 度旋转得来。

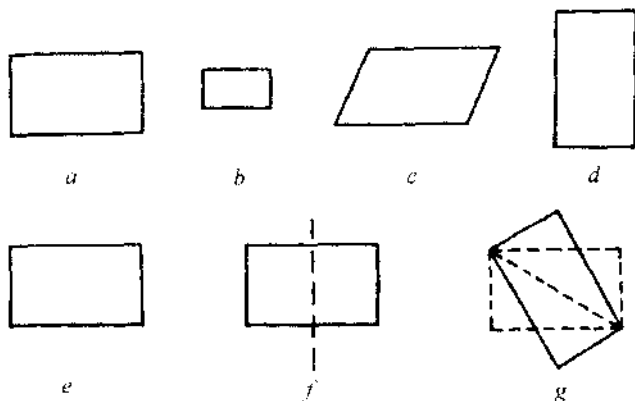


图 1-7

这些移动都没有改变矩形的形状和大小,因此从 a 到 d, e, f, g 的运动都是刚体运动。因此我们可以说,所有的旋转和反射都是刚体运动。还有一种叫做平移——只是简单地按同一方向移动一个距离——这当然也是一种刚体运动。

还有没有别的刚体运动呢?有!可以称之为滑动反射。试看图 1-8 沿一个方向行走时留下脚印所构成的图案。

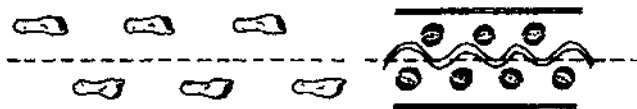


图 1-8

这种移动可以看成是一个平移跟一个反射的混合物(但并不能把它简单地看成一个平移后继一个反射,或是反之。你只要试一下就可以知道,两者的效果不一样)。综上所述,我们知道刚体运动一共有 4 种:

1. (关于某一条直线)反射;
2. (绕某一点的)旋转;

3. (按一固定距离的)平移;
4. (关于一直线的)滑行反射。

为了研究对称性,我们特别感兴趣的是那些能保持图案不变的刚体运动。例如图 1-7 中图形 e 和 f ,我们已经说过,在绕中心 180 度旋转和绕中垂线镜面反射后,矩形图形没有变化(也许这儿有个游戏可以让我们更好理解上述问题。图案游戏:你转过身去,我进行一个变换,你再转过身来,看一看什么东西已经有了变化)。

其次,图 1-7 的图形 d 来自绕中心旋转 90 度,已与原来图形不同,可见它不能保持图案不变。最后我们来看滑行反射,图 1-8 的脚印图案,在一个关于行进路线方向的反射变换之下,将要引起变化。但对滑动反射却能保持图案不变。同样,一个两步或四步的行进方向的平移也能保持图案不变;但一步平移则不行。下例或许可以帮助你对于反射概念的理解。

例 1 你能把下面这个序列无限地写下去吗?

1, 2, 3, 4, 5, ...

构造这个例子的想法来自西方世界的一本名著《字母之艺术》,作者是阿西莫夫(Isaac Asimow)。他的想法挺怪:将每一个字母从左到右,从右到左,从上到下,从下到上,或是别的方法都写上一遍(这意思等于说,将字母进行一切反射变换),结果会

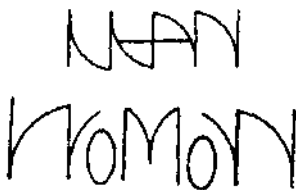


图 1-9

怎样呢?这就得出来许多谁也不认识的符号,但相当美!上例即为其中之一。或许你已经知道,上例这个序列正是 $\{1, 2, 3, \dots\}$ 。图 1-9 两个图案代表什么字,你能判断出来吗?答案:上图是男人(MAN),下图是女人(WOMAN)。

现在再回到图案,在千千万万的图案中,研究者怎么来理出个

头绪呢?

经过上面的尝试,我们现在可以正式提出我们的问题:

图形的对称运作问题: 给了一个图案, 试确定所有可能的、使图案保持不变的刚体运动。

如果我们能解决这个问题, 我们就有了一种将图案分类的方法。成千上万个图案一旦按上述问题分了类, 同一个类别中的图案在某种意义下就可以看成是同一种东西; 同一类别中的两个图案, 它们虽然不同, 但都有一个共性, 即在某一具体的刚体变换下能保持不变。

一个图案可以看作是基本图形(我们上面称之为元素图形)的(有限或无限)重复排列。例如在自然界和艺术里的图案都只有有限个重复排列。现在根据元素图形重复方向不同, 我们把图案分成三大类:

无重复方向——称为蔷薇花状图案;

沿一个方向重复——称为带状图案;

多于一个方向重复——称为墙纸花图案。

让我们分别看一看这三类图案的对称运作问题有些什么解答?

先看蔷薇花图案。如果图案内只有一枝花, 则它的重复应当是, 花瓣围着花枝进行重复(图 1-10(a))。这时平移和滑行反射显然都不能施行。图案将在某一角度的旋转下保持不变, 且这个角度与花瓣个数有关。反射能不能保持图案的不变呢? 有时行, 有时不行。这得看花瓣是不是具有对称性。大多数花都有对称性, 少数花却没有。一个最常用的例子是我们小时候差不多人人玩过的纸风车, 它没有反射对称性(请看图 1-10(b))。今后将一枝含有 N 个花瓣的蔷薇花图案称为 N -重对称。如果它没有反射对称, 那么元素图案便是整个花瓣; 如果有反射对称, 则元素图案便是半个花瓣, 因为一个旋转或一个反射即可得出整个花瓣。

上面给出的, 能保持图案不变性的仅有的刚体运动种类的这

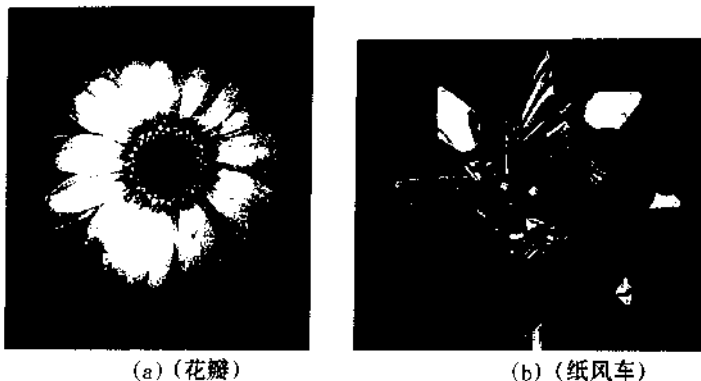


图 1-10

一事实,又称之为李那多(Leonardo)定理。传说是李那多在一次设计教堂时遇到这样的问题:为了不破坏教堂的对称性,要不要追加一个神龛。

现在来看带状图案的对称运作问题。

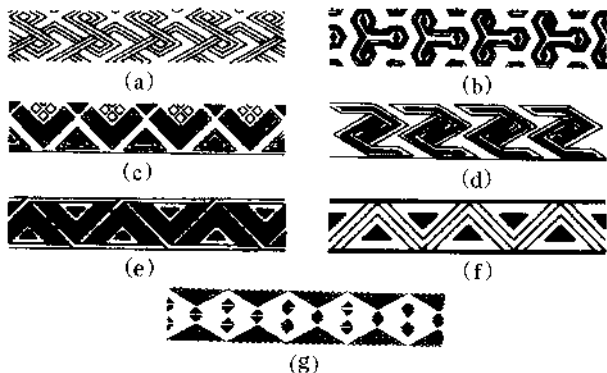


图 1-11

图 1-11 给出了 7 种图案,它们被认为是扎伊尔的巴库巴地区的文化代表。相传那里的人经常把这些图案印在衣服、用具乃至身

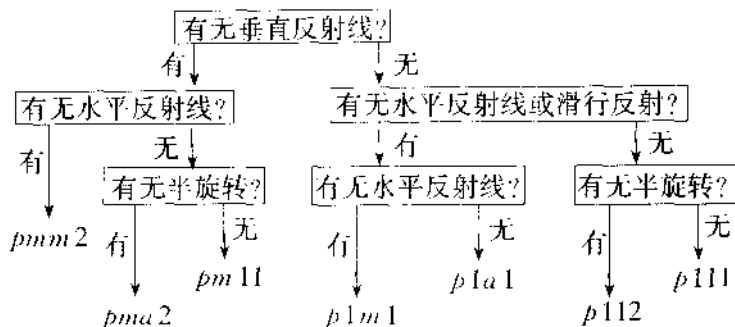
上。说来不信,这7种图案正好能回答我们的问题。对于图案(a),除了平移,没有别的刚体运动能保持图案不变。其次,图案(b)有一个水平线的对称,所以沿图案带的中心线的反射,是一个满足我们的要求的刚体运动。再看图案(c),对于一条位于V形中间或两个V形之间的垂直线,图案关于这条垂直线的镜面反射,可以保持不变。对于图案(d),一个半周旋转能使图案不变。最后我们看图案(e),容易通过试验知道,滑行反射能使图案保持不变。换句话说,我们已发现5个图案可以通过4个刚体变换来保持不变:平移,反射,旋转和滑行反射。再问有没有别的图案可以通过上述4种刚体运动的种种组合来保持图案的不变呢?研究图案的数学家发现,答案是还有2种:一个是垂直线的反射(即半旋转)或者是加上一个滑行反射但无水平线反射(例如图案(f)),或是加上一个滑行反射和一个水平反射(例如图案(g))。一句话,对于带状图案,除了上述这7种,再没有别的能保持图案不变的刚体运动了!

这实在是一个相当惊人的结果!你只要想想,对于成千上万的图案,我们只有7种方法能沿着带域去重复图案!在这7类图案中的每一类,任意两个看来完全不同的设计实际上在分享着由基本元素图案产生的同一图案。

研究图案学的人借用结晶学的记号来进行上面的分类。用4个符号来区分,其法如下:

1. 第一个符号永远是 p (图案的英文字 Pattern 的第一字母);
2. 如果图案有一条垂直反射线时,第二个符号记为 m 。如不然,则记为 1;
3. 如果图案有一条水平反射线,则第三个符号记为 m ;如果图案有一个滑行反射而无水平反射线,则第三个符号记为 a 。除此两种情况外,记为 1;
4. 如果图案有一个半旋对称,则第四个符号记为 2。否则记为 1。

下表的流程图画出了带状图案的所有情况



例 2 布勃罗的陶器艺术(图 1-12)。

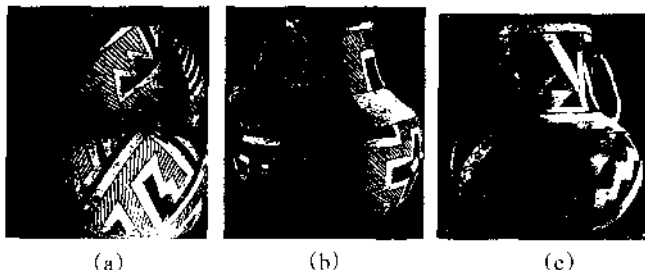


图 1-12

图 1-12 是在新墨西哥州的卢恩河附近,一处叫布勃罗的地方出土的旧水壶。那上面的图案曾使研究图案的人大感兴趣。我们现在看一看它们属于哪一类。

图(a)有无垂直反射? 无。有无水平反射或滑行反射? 无。有无半旋? 无。因此记号是 $p111$ 。

图(b)(箭头对角线的解释)有无垂直反射? 无。有无水平反射或滑行反射? 无。有无半旋? 有, 故记号是 $p112$ 。

图(b)(文字对角线的解释)有无垂直反射线? 有。有无水平反射线? 有。故记号是 $pmm2$ 。

图(c)有无垂直反射? 无。有无水平反射或滑行反射? 有。

故记号是 $p112$ 。

最后,我们简单地说一下墙纸图案的对称运作问题。

数学家已经证明,墙纸图案共有 17 种刚体运动能保持不变。我们只把结果写在下面。这些资料相对地比较宝贵,也许说不定哪一天对读者有用。

仍用 4 个符号。

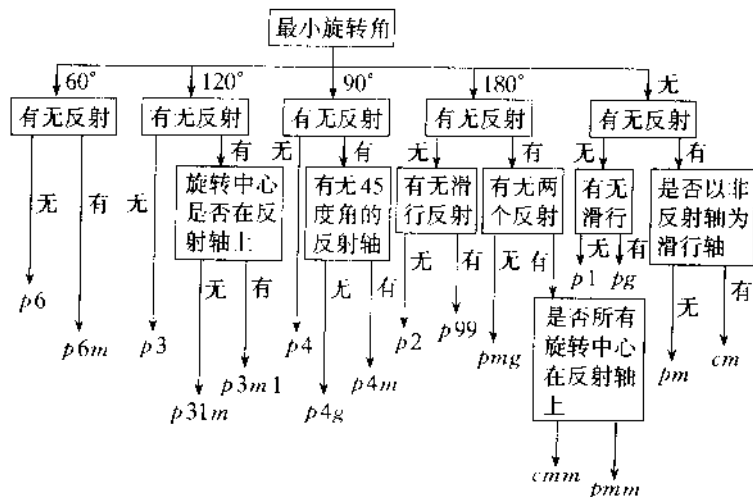
1. 如果图案的所有旋转中心都位于反射线上,第一个符号记为 c ; 否则记为 p 。

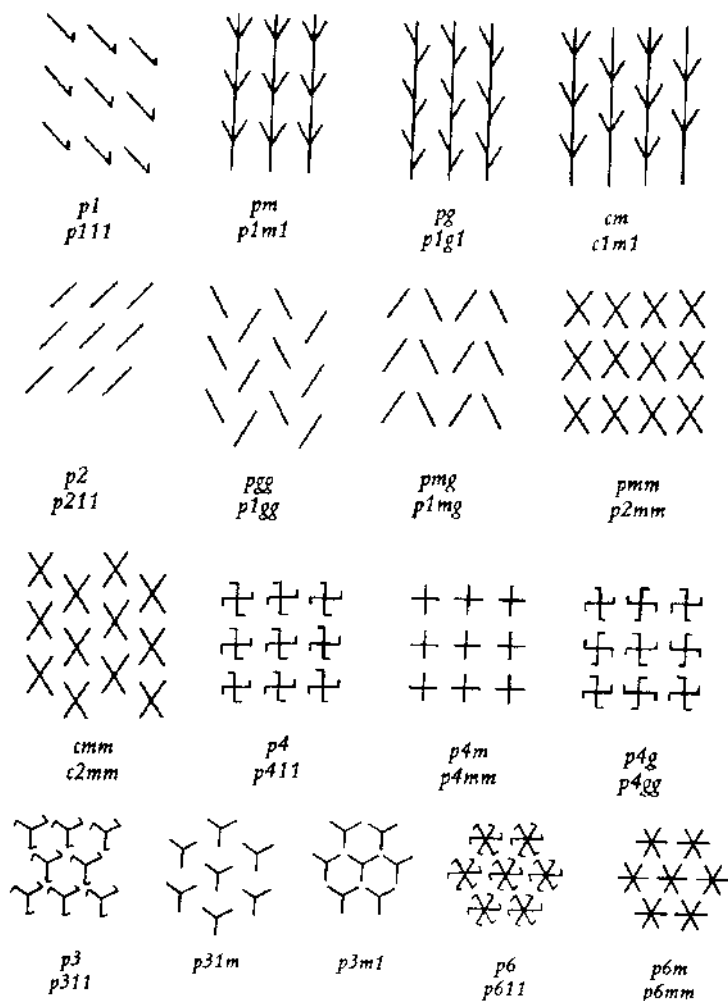
2. 如果图案有旋转对称,分别按其旋转角不同,以 1, 2, 3, 4, 或 6 记第二个符号。

3. 以 m, g 或 1 来记第三个符号,它们分别对应于:有镜面反射,有滑行反射或无反射对称。

4. 第四个符号(m, g 或 1)表示相对于一条轴的对称,此轴与第三符号的对称轴交成一个角。

下面是 17 种情况的流线和它们的标准图案。





我们这里使用的方法实际上是 19 世纪结晶学刚起步时用的组合方法。为了分类与晶体相关的三维空间的晶体图案的结构，数学家在经过好长一段时间后终于证明，恰好有 230 种晶体图案！

对称研究,特别是用于晶体学的对称研究,其背景可以追溯到一门相当深刻的学科——高等代数中的群论。当然,谈论它将受到本书要求的限制。

§ 4 款式与图案——漫说瓷砖拼装

一、正规与半正规拼装

当我们的祖先在用石头砌墙、铺地、筑路的时候,已经意识到一个美字;他们经常设法使石头铺成美丽的图案。拼铺图案的方法惟一要求是:要求石头或瓷砖正好严丝合缝地拼在一起,既不能留下空白,也不能出现重叠。今后我们就把这种铺拼图案的办法叫做拼装技术(Tiling)。或许我们都未能想到的是,拼装技术里蕴含着许多困难的数学问题。

在上节讨论中已经知道,每一种图案都有它的基本的元素图案。我们将按照基本元素图案的形状和数量,先将拼装技术进行分类,然后分别予以讨论。结果我们将发现,拼装理论要比我们想像的复杂得多;拼装理论至今还有一些问题被称为开问题,即未解决问题,数学家至今都还没有找到最后答案。

在一种拼装的图案里,如果基本元素图案只有一种,我们便称之为一元拼装。否则称为多元拼装。在一个一元拼装里,如果每一个基本元素都是正多边形(正三角形、正五边形、正十二边形等),这种拼装便称之为正规(一元)拼装。

我们先来研究最简单的情形——一元正规拼装。为此需要就正多边形的内角问题说几句话。在平面几何里已经知道,一个任意凸 n 边形的内角之和等于 $(n-2) \times 180^\circ$, 因此一个正 n 边形每一个内角等于 $\frac{(n-2)180^\circ}{n}$ 。例如,正五边形每一内角等于 108° ,

正六角形每一内角等于 120° ，等等。下面的图 1-13 也可以说是一个证明。

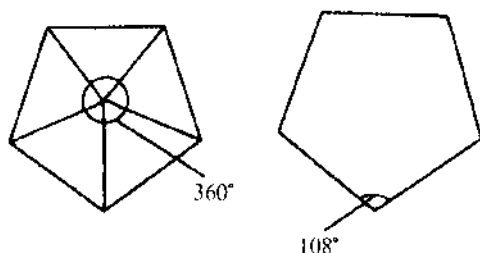


图 1-13

对于正规拼装，我们再限制一下我们的问题：即要求在拼装时其基本元素图案，即正多边形，边与边完全吻合。这种拼装可以称之为棱棱拼装。例如图 1-14 中的(a)是棱对棱的，而图(b)则不是。

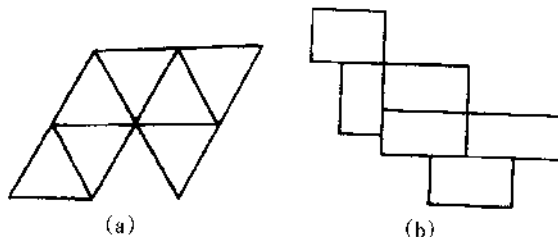


图 1-14

我们现在问，一个棱对棱的一元正规拼装，一共有几种？

乍看起来此问题大得没边，其实稍加分析即可知道种数是不多的。在图案里随便取一个基本元素的随便一个顶点加以分析，就可以发现，这个顶点的周围已经被同类的正多边形挤得满满的。如果在这个顶点处可以容纳 m 个正 n 多边形，那么在图案的每一个同样的顶点处也可以容纳 m 个正 n 多边形。因此算出 m 和 n ，等于解决了问题。

再进一步分析可知, m 应当除尽 360。即 $\frac{360}{m}$ 应当是个整数。但 m 明显不能少于 3, 否则顶点也就不成其为顶点了。再看 n , n 起码要比 2 大, 因为边数最小的元素图案是正三角形。但 n 实际上也不能太大。为什么? 这要从正多边形的内角的值说起了。上面已经说过, 一个正 n 边形的一个内角等于 $(n-2) \times \frac{180^\circ}{n}$ 。所以要完成一个棱对棱的单元正规拼装, 在每一个元素图案的顶点处, 应当成立下面这个式子:

$$m \times (n-2) \times \frac{180^\circ}{n} = 360^\circ,$$

其中 m 和 n 还一定要是整数。此式可改写成

$$m = \left(\frac{2n}{n-2} \right)^\circ$$

现在如果 n 挺大, 比方说 $n > 6$, 即 $3n - 2n > 6$, 则可写成 $2n < 3n - 6 = 3(n-2)$, 或者一样的可写成 $\frac{2n}{n-2} < 3$ 。这等于说 $m < 3$ 。这跟上面的分析 $m > 3$ 是矛盾的。矛盾说明 $n > 6$ 是不对的。因此, n 只能是 3, 4, 5 和 6 这四个数。但当 $n = 5$ 时, 相当于基本元素图案是正五边形。它的内角是 108° 。它不能除尽 360。即上面的 m 不是整数。所以 n 也不能等于 5。因此我们得到最后结论是: n 只可能是 3, 4, 6。换句话说, 我们只能找到三种一元正规的棱对棱的拼装, 其基本元素是正三角形、正四边形和正六边形。你在图 1~15 里可以找到那三种拼装方法。

换句话说, 我们轻而易举地解决了只用一种正多边形的棱对棱的(即一元正规)拼装问题。接下来的话题是问, 对于多元棱对棱的正规拼装问题, 解答应该是怎么样的呢? 按照定义的意思是要问, 在基本元素图案里出现一种以上的正多边形时, 拼装方法共有几种?

我们尊重历史的做法, 今后把这种多元正规的(棱对棱的)拼

装方法称为半正规拼装。解决的办法仍然是去计算一个顶点周围的角度搭配情况。当然,现在的情况要复杂得多了。在一个顶点处,我们有一些允许的情形,如 2 个正六边形和 2 个正三角形,它们的内角正好配成 360° ,或是 1 个正三角形,1 个正六边形和 2 个正方形等;也有一些不允许的情形,如 3 个正方形和 1 个正六边形等。问题是,即使我们消除了所有的不允许场合,我们也不能保证拼装就一定能完成。由于基本元素的多样性,在一个顶点允许(或不允许)的情形,在另一个顶点可能就变成不允许(或允许)了。我们准备详细分析这个问题,只把数学家研究得到的结论写在下面。

半正规拼装方法只有 8 种。具体地说就是:能参与半正规拼装的基本元素图案只有 5 种,它们是:正三角形,正方形,正六边形,正八边形和正十二边形。这 5 种基本元素图案的种种组合,只有 8 种可能实现。

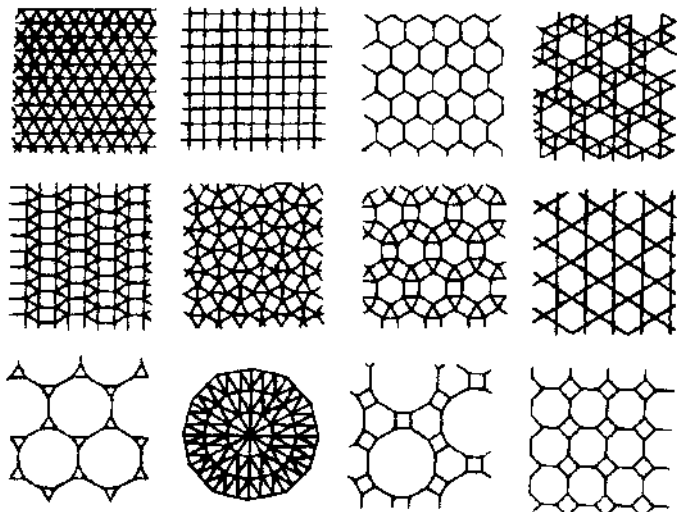


图 1-15

在图 1-15 中我们一共画出了 12 个图案,其中有 3 个是正规拼装,有 8 个是半正规拼装。(还有 1 个呢?)

接下来我们来谈谈一元非正规拼装,即只允许用一种(不一定是正的)多边形瓷砖来进行拼装。这个问题相当有趣。

首先,我们可以通过画图很容易地知道:任意一个三角形均可以用来构成全平面的拼装!任意一个凸四边形也可以用来构成全平面的拼装!理由也只有两句话:两个相同的三角形可以拼成一个平行四边形;任一四边形的四内角之和等于 360° (见本章末思考题)。

一个多边形称之为凸的,如果这个图形总是位于它的每一边的延长线的一侧。我们现在进一步放宽要求:要求拼装并不一定是棱对棱。要问,是不是任一凸多边形都可以构成全平面的一元拼装。例如,在正文里已经知道,正五边形是无法构成全平面拼装的。但对于任意凸五边形(且不要求棱对棱),情况怎样呢?你只要稍为试上一试,就可以知道不是每一个五边形都可以(像三角形那样)构成平面拼装的。能不能找一种出来呢?能不能把所有能构成全平面拼装的五边形都找出来呢?

早在 1918 年,人们就找到了 5 种可以用来构成全平面拼装的五边形;此后过了好多年,人们都不知道还有没有第 6 种。到了 1968 年,一位 35 年来一直从事五边形拼装的数学家宣布:他找了余下的仅有 3 种!换句话说,可以用来进行全平面拼装的五边形瓷砖只有 8 种(例如,一个有一对平行边的五边形便是其中的一类)。

1975 年有人在《科学美国人》杂志上载文,洋洋洒洒对 8 种特殊五边形瓷砖进行分类。这篇文章似乎惹恼了一位业余数学家,不久他宣称:已经找到了第 9 种!事情没有完。又过了两年,另一位业余数学家丽丝(Marjorie Rice)——一位家庭妇女,她仅有的数学教育是 36 年前在高中里学到的一本《普通数学》——宣布,她找到了另外 4 种!

20 年过去了,现在情况又怎么样了呢?即是否已经找到 13

种以外的五边形呢？也许我们还得等下去。

关于多边形的拼装问题，我们最后用几句话总结。任何三边形和凸四边形瓷砖都可以全平面拼装；对于凸六边形瓷砖，至今已证明只有 3 种可组成全平面拼装。还有，任何一种七边或多于七边的瓷砖，均不能构成全平面拼装。

二、非周期拼装

顾名思义，与非周期拼装相对应的是周期拼装，所以我们先对之进行说明。我们上面讨论的所有拼装都是周期拼装。可以用下面的办法来描述周期拼装：用一张透明的薄膜覆盖这个拼装，并把拼装印刻在薄膜上面，然后沿一个方向平移薄膜，则移动一个适当的距离后，薄膜上的印痕将正好与拼装图案完全吻合。我们还要求，这种吻合现象至少要在两个或两个以上方向实现。

另一种描述周期拼装的办法是，在图案拼装中设定一个基本区域，当我们适当地在两个方向移动这个基本区域，即可以得出全拼装。用上一节中对称的话来说是，周期拼装是这样一种拼装，它对于两个或两个以上方向的平移都能保持不变。因此，我们上一节谈到的墙纸图案，实际上也可以称之为周期平面图案。最后，凡不具有上述性质的拼装，便称为非周期拼装。

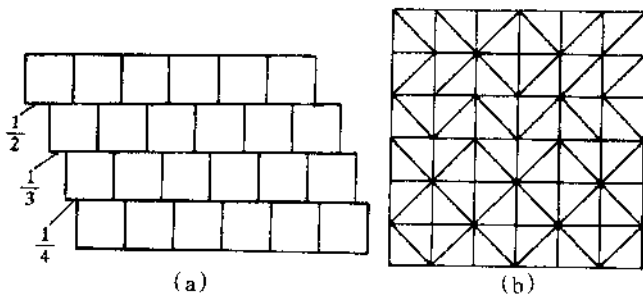


图 1 16

注意,我们现在讨论的对象是拼装的周期性,因此诸如棱对棱拼装和正规拼装等概念在这里是不加注意的。我们首先来举两个非周期拼装的例子。第一个例子是个非棱对棱的正规拼装,第二个例子是个棱对棱的非正规拼装。先看第一个。这是一个基本元素是边长为1的正方形的拼装,将正方形先排成一排,第二排比起第一排只是向右移动了 $\frac{1}{2}$ 距离。第三排比起第二排来又向右移动了 $\frac{1}{3}$ 距离。然后第四排是 $\frac{1}{4}$,第五排是 $\frac{1}{5}$ 等。见图1-16(a)。我们说这是一个非周期拼装,理由如下。要想出现周期性,只有一个可能:像上述这样的移动,在进行到某一步时,正方形将重新与上一排正方形对齐。按照我们的做法,这相当于说,对于某一个步数 n ,数 $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$ 应当是个整数。但我们又很容易证明下面的断言。

断言:对于任何一个整数 n ,和式

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

不可能是整数。

证明:我们先把上式的分母排成一个数列 $(2, 3, \cdots, n)$ 。下面分几步来证明断言。

1. 假定2到 n 这 $n-1$ 个数中,有一个含有因子2最多,比方说有 k 个,则这个数可以写成 $2^k \times a$,这里 a 是个奇数。我们证明 $a \neq 1$ 。换句话说,在2到 n 之间含有最多个因子2的数一定是 2^k 。

证明其实并不难。如果 $a \neq 1$,则因为 a 是奇数,所以它至少等于3。因此在 $(2, 3, 4, \cdots, n)$ 里一定有比 $2^k \cdot 3$ 更小的两个数 2^k 和 $2^k \times 2 = 2^{k+1}$,这就出现了矛盾:因为已经说过,2到 n 的 $n-1$ 个数中含有因子2的最高数额是 k ,而不是 $k+1$ 。

2. 现在将和式 S 通分, 则它的公分母一定是 $2^k \cdot b$, 其中 b 是个奇数, 分子仍然是一个和式, 由 $n-1$ 项组成。在这些项中, 除了一项来自 $\frac{1}{2^k} = \frac{b}{2^k \cdot b}$ 外, 每项都含有因子 2, 因此, 因为 b 是奇数, 所以分子加起来也是个奇数。但是上面已经说过分母是个偶数 $2^k \cdot b$, 这就证明 S 不会是个整数。

你可以再试试将上述拼装向上或沿对角线方向移动, 看看能不能使正方形重新吻合。

另一个例子是将一个全平面棱对棱的正方形拼装(可以将它看作是由坐标格子构成)添上一些对角线(见图 1-16(b))。但添法没有规定, 完全是随机的。这是一个非正规拼装(因为基本元素图案是直角三角形, 而非正三角形), 同时也是个非周期拼装(因为随机地添加对角线, 将使你永远找不到基本区域)。

图 1-17 是另一个非周期拼装的例子。

对于一个单一拼装, 不管它是不是正规的或棱对棱的拼装, 数学家一直以来都知道这么一个事实:

凡是它的基本元素图案可用来构成一张非周期拼装, 则一定也可以用这个基本元素图案来构造一张周期拼装。

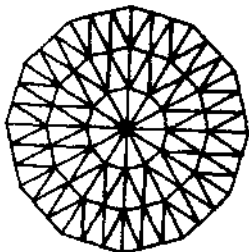


图 1-17

不幸, 直到今天, 数学家既不能证明它, 也不能否定它。这就是我们说过的有关拼装理论的一个未解决的问题。换句话说, 上面事实只是一个猜测。如果要肯定这个猜测, 数学家就必须对任何一种形状的基本元素图案, 证明这个结论。反过来, 如果否定这个猜测, 则数学家就必须找出一个非周期拼装, 并证明它的基本元素图案决不可能构成一个周期拼装。

可惜的是, 对这个看来简单的猜测, 数学家至今在两方面都没

有什么进展,哪怕是找出一个特殊的基本图案也好!

三、潘罗斯(Penrose)拼装

从上节我们看到,单就周期或非周期拼装而言,单一拼装问题已经显得相当复杂;如果我们进而研究多元拼装的(非)周期性问题,那么它的困难程度也就可以想见的了。但是事实上并非如此,数学家在多元拼装的周期与非周期性问题,实际却获得了更多的成果。我们现在就来看看拼装理论里最有意思也最富成果的这部分理论。

长期以来数学家都相信,如果你能用一组形状各异的图案来完成一个非周期拼装,那么你也一定可以用这同一组图案去完成一个周期拼装。但,如同上面那个猜测一样,直到1964年为止,数学家对于这个屡试不爽的事实,却一直找不到合适的解法。

1964年有人第一次找到了一堆图案,它们只能构成一个非周期拼装。这个发现当然相当不容易,但数学家对此并不满意,因为那堆玩意儿太大,不同形状的图案的总数在2万个以上!又过了几年,有人找到一堆为数较少的图案具有同样性质——但总数也有100多个!

1970年牛津大学的一位数学物理教授潘罗斯给出了一组具有同一性质的全新图案,但个数却只有两个!

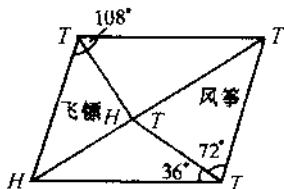
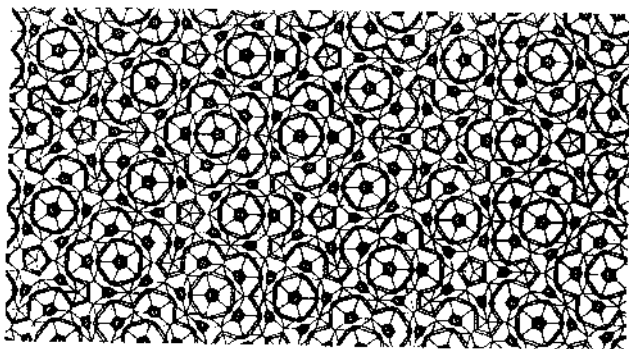


图 1-18

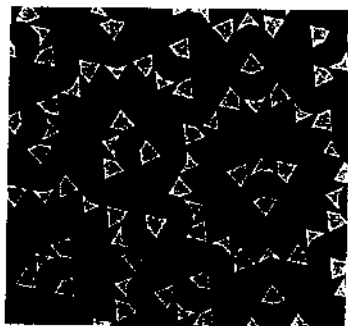
在一个菱形(我们记得,一个菱形是一个四边相等的四边形)里,用黄金分割去划分两根对角线中较长的那一根。然后连结这个

分点与另两个顶点,从而将菱形分成两个四边形——一个凹一个凸。潘罗斯称前者为飞镖,称后者为风筝。潘罗斯拼装技巧中的瓷砖便是由这飞镖和风筝组成(它们的边长与角度关系见图1-18)。

由于这两个基本元素来自一个菱形,因此自然可以知道两者能完成一个周期拼装。同理,如果想组成一个非周期拼装,则两者必须分开拼装才行。为此,将飞镖的前顶点和后顶点记为 H ,两个翼端记为 T 。对风筝则反法记之。我们的拼装规则是,只有同字母的顶点才能相遇:头对头,尾对尾。



(a)



(b)

图1-19

剑桥大学的康惠(John Conway)建议了一个实施此规则的十分漂亮的方法,他在不同的块上画了一些不同颜色的圆弧,要求相邻的棱必须以同色弧相连。他得到的便是一个美丽的拼装照片(图1-19)。实际上康惠把飞镖当作是举起双手的孩子,拼装小块的规则便是让孩子们手拉着手。因此潘罗斯拼装便像一圈跳舞的孩子。照片(b)画出的的是一个由两只鸟形图案构成的拼装,是潘罗斯拼装的一种变形。

有趣的是,潘罗斯拼装图形具有出乎意外的对称性,当然这已不是我们上节谈到的那种普遍的对称性。具体地说,这里仍出现重复性;有时潘罗斯拼装会具有一条反射线。但或许更叫人吃惊的是,每一个潘罗斯拼装里都有一个很大的区域,其中出现五重或十重旋转对称!让我们稍为详细地谈一下这个问题。例如图1-20中的带10个黑块所围的区域,如果我们通过它的中心作一个五分之一周的旋转,则这个区域与原有的似乎完全吻合。当然,远离此区域的地方可能完全不一样了。要注意的是,如果我们作一个十分之一周的旋转,此区域不再保持不变。此外,在我们刚才所作的康惠的比喻当中,在孩子们围成的圈子里也有一个五重对称。

事实上,有两个也只有两个潘罗斯拼装,其整个拼装有一个蔷薇花式的五重旋转对称。图1-19里已经作出了这两个拼装。我们从5个集中在一点的风筝图出发。将飞镖和风筝剪成更小的飞镖和风筝,再将它们放大成原来的大小,以便每一次覆盖更多的面积(我们的图上并未放大)。康惠称此种手术为紧缩(Deflation)。随着我们一步步紧缩,我们(交替)得到两个不同的拼装,两者都具有五重旋转中心,在中心处,一个集中5个飞镖,另一个集中5个风筝。

这种旋转对称来自何方?在飞镖的尾部和风筝的接合部,其内角或为 72° 或为 36° ,两者分别是 360° 的五分之一和十分之一。如果我们记得多边形围绕一点的内角匹配情况,我们就可以知道

使用这种瓷砖时,必然会产生五重和十重旋转对称。

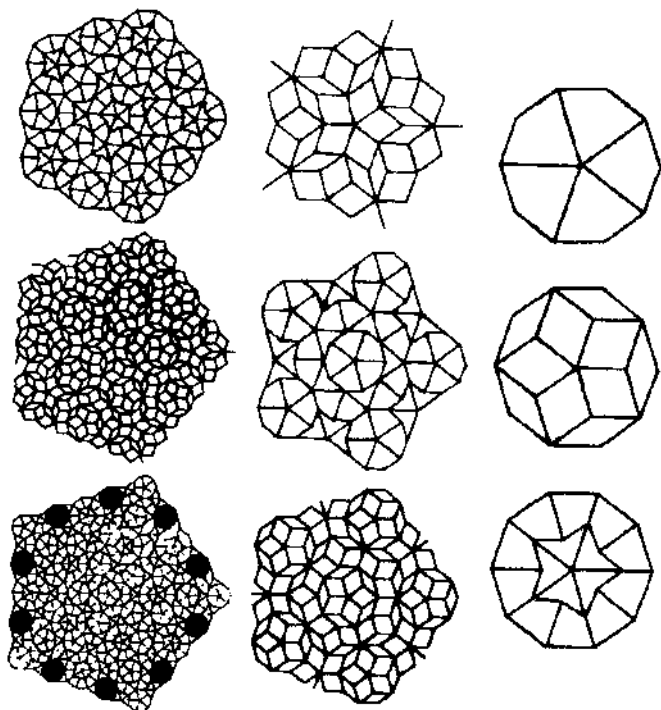


图 1-20

最后我们来证明潘罗斯拼装的非周期性。为此就需要康惠的另一种手术——膨胀(Inflation),它正好是紧缩手术的逆向。办法是将飞镖沿中线剪开,然后让得到的两个三角形在短的棱上粘合起来(注意不是粘在剪痕原处)。结果我们得到一个更大飞镖和风筝的拼装。

现在用反证法来证明潘罗斯拼装的非周期性。假定某一潘罗斯的拼装是周期的,即它有一个平移对称。让 D 表示沿平移方向第一次重复的距离,对每一重复的同一元素图案进行膨胀手术,则

膨胀以后的拼装仍有平移对称,且沿平移方向至第一次重复的距离仍是 D 。现在一次又一次地进行膨胀手术,直到飞镖和风筝变得相当大以使两者的宽度大于 D 。我们刚才说过,这样的拼装仍然具有距离为 D 的平移。但实际上这是不可能的,因为在一块瓷砖里不可能有重复。矛盾来自我们关于周期性的假设,因此一切潘罗斯拼装都是非周期拼装。

尽管是非周期性的拼装,但所有的潘罗斯拼装都极为相似:一个拼装里的任意有限区域被包围在每一其他拼装的某一内部;事实上,此种情况在每一拼装里会出现无限多次。

[附录 1] 关于拼装的小结

关于拼装问题,我们只讨论到这里,现在用一张表格把本章形形色色的拼装现象总结如下:

种类	基本元素		方 法
周 期 拼 装	正规拼装	一元拼装 3 种:正三角形,四边形,六边形 多元拼装 5 种:正三角形,正方形,正六边形,正八边形和正十二边形	共 8 种。图 1-15。
	非正规拼装	一元拼装 任意三边和凸四边形 仅有 3 种凸六边形 已找到 13 种凸五边形 多元拼装 不清楚	
非 周 期 拼 装	单元拼装	猜测:凡是可以用来构成一张非周期拼装的基本元素图案,一定也可以用它来构成一张周期拼装	潘 罗 斯 (两元) 非周期拼装
	多元拼装	猜测:凡是可以用来构成一张非周期拼装的一组形状各异的图案一定可以用它来构成一张周期拼装	

[附录 2] 阿曼(Anmmam)棒——音乐序列

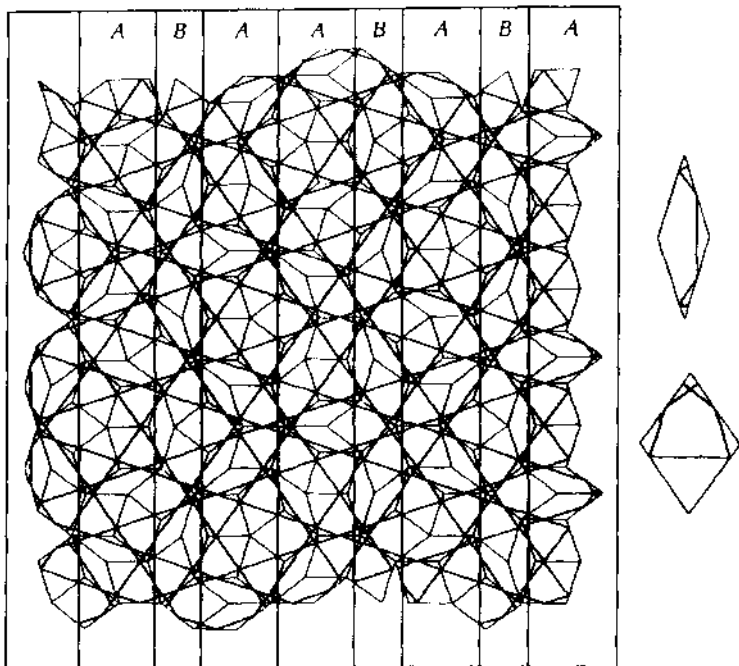


图 1-21

为进一步弄清楚潘罗斯拼装的非周期性,阿曼引进一个方法,即阿曼棒;对之所反映的现象,人们称之为拟周期性。

在潘罗斯的双菱形拼装里(图 1-21,其实对任一潘罗斯拼装都如此),我们可以找到 5 组平行线,每一组可从下一组旋转 72 度得到,因而构成一个五边形的格子。在同一组平行线里,平行线之间的距离则只有两种:或为 A 或为 B。你能猜出较小的 B 与较大的 A 的比值吗?你一定猜是黄金分割,是不?

是的,是黄金分割,从图 1-21 的有限部分可以看出,我们有一个 A 与 B 的数列

$A, B, A, A, B, A, B, A, A, B, A, B, A, \dots$

潘罗斯拼装的非周期性反映出这么一个事实:上述数列是个无限不循环的无穷数列。这个序列,称为音乐列。

不要以为只有两个数写成的数列一定会是个周期数列,就像由 7 个音符组成的乐谱一样,或是像由 $0, 1, 2, \dots, 9$ 九个数可以组成许多循环小数一样,任何有限个符号都可以组成许多非周期无穷序列,因此,人们也把上面这个数列当作是潘罗斯拼装的一个直线上的模拟。

虽然上面这个数列是非周期的,但却很有规律:任意两个 B 不得重复;三个 A 也不能重复;任一潘罗斯拼装的任一有限部分在任一别的潘罗斯拼装里都会无限次地重复;最后,在任一潘罗斯拼装里,飞镖与风筝之比,以及 A 与 B 之比都是黄金分割,近于 1.618。因此,如果你想用潘罗斯小块来拼装一个潘罗斯图案,那么你得准备比飞镖多 1.6 倍以上的风筝才好。

四、歇兹曼晶体和巴罗定律

尽管在 1970 年,潘罗斯的发现在一群几何学家和休假的数学家圈子里影响很大,但很少有人想到他的工作会有什么实际意义。1980 年甚至有数学家把潘罗斯拼装朝三维空间推广,用多面体非周期地填满空间。跟平面情况一样,在那里也出现五重对称。

1982 年美国国家标准化办事处的一群科学家在寻找一种超强铝合金时,出乎意料地发现了五重对称性。

一般说来,锰不能与铝合成合金,但实验家还是制成了少量合金晶体,办法是让两种金属在每秒 100 万度的冷却速度下冷却混合。化学家歇兹曼(Daniel Shechtman)像平常一样开展了一系列测试以决定这种特殊晶体的原子结构。但他的测试差点没有结

果：锰铝合金的原子结构十分不可思议，以致于歌兹曼花了3个月时间才说服他的同事。原来这种特殊合金的晶体产生的拼装违反了结晶学的一个基本定律。我们记得，平面上不可能产生一个正五边形的拼装，结晶学里也有一个表示晶体抗衡性的巴罗(Barlow)定律：晶体不可能有一个以上的五重对称中心。

巴罗是19世纪一位英国数学家，但今天他的名字却是与一本早年在实用科学中极为有用的数表——巴罗表——联在一起。就像证明潘罗斯拼装的非周期性一样，巴罗也是用反证法证明了他的定律。

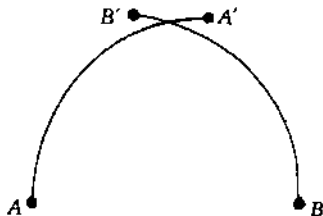


图 1-22

假如出现了两个以上的五重对称中心，且 A 与 B 是其中最近的两个(如图 1-22)。将图中的拼装 B 作五分之一周旋转，其时 A 被移至 A' ，由于绕 B 有一个五重中心，故作为五重中心 A 的像 A' 也应是个五重中心。今绕 A 反时针将拼装作一五分之一旋转，此时 B 被移至 B' 。现在 A' 与 B' 都是五重对称中心，但 A' 与 B' 的距离要比 A 与 B 的距离要小，这与假设 A 与 B 为最近的旋转中心相矛盾。

作为一个数学定理，巴罗定律指出平面或空间的周期拼装里，五重对称是不可能的。但出于理论与实验上的原因，化学家仍趋于相信这么一个具有三维拼装的晶体的存在。原子阵的非对称排列对于一个晶体是不可思议的。所以直到潘罗斯的发现为止，对于一个非周期拼装(或原子阵列)，谁也无法实现这种五重对称性

的正常现象。化学家也可以简单地讲歇兹曼的合金不是晶体。在经典意义上是不算,但从别的考虑来说,应当算。也许我们可以说,科学本身正在拓广晶体的概念。这一次我们发现,却是纯粹数学家在向应用数学家挑战。

思考题

1. 考虑下图中的正方形 $PQRS$ 和内部一点 C 。设 P' 是 P 点在射线 CP 上的像,要求 $CP' = 2CP$ 。同理作出 Q, R, S 的像 Q', R', S' 以及正方形 $PQRS$ 内每一点的像。这样的变换称为扩张。

考虑三角形 DEF 及其外部一点 C 。 D' 是 D 在射线 CD 上的像,要求 $2CD' = CD$ 。同理作出 E, F 的像 E', F' 以及三角形内任一点的像。这样的变换称为压缩。

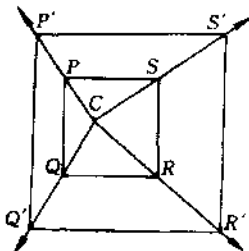


图 1-23

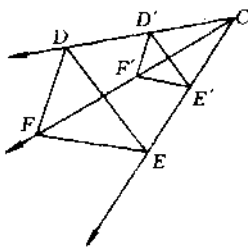


图 1-24

现在定义一个变换如下。一个变换称作中心在 C 的比例因子为 k 的放样变换,如果它将 C 变成 C ,将任一别的点 P 变成射线 CP 上的 P' ,且 $CP' = kCP$ 。很清楚,当 $k > 1$ 时,这个放样就是一个扩张变换;而当 $0 < k < 1$ 时,这是一个压缩放样;当 $k = 1$ 时,这是一个恒等变换。

(1) 图 1-25 是一些点和坐标

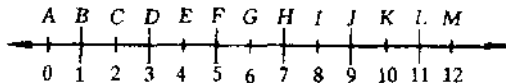


图 1-25

求 D 在中心 A 、比例因子为 2 的放样的像点。

求 G 在中心 A 、比例因子为 1 的放样的像点。

求 D 在中心 A 、比例因子为 3 的放样的像点。

(2)如图 1-25。

求 K 在中心 A 、比例因子为 $\frac{1}{2}$ 的放样的像点。

求 J 在中心 A 、比例因子为 $\frac{1}{3}$ 的放样的像点。

求 A 在中心 A 、比例因子为 6 的放样的像点。

2. (1) 设 xy -平面上有三点 $A(-2, 4)$, $B(0, -5)$ 和 $C(5, 6)$ 。求三角形 ABC 在以原点为中心、比例因子为 $\frac{1}{2}$ 的放样变换的像 $A'B'C'$ 。

(2) 同上, 设三点为 $D(-5, -6)$, $E(-1, 0)$, $F(4, -2)$, 求三角形 DEF 在以原点为中心、比例因子为 3 的放样变换的像 $D'E'F'$ 。

3. 确定下面各命题的是或非。

(1) 放样变换保持距离;

(2) 放样变换保持点之间的次序;

(3) 放样变换保持点的共线性;

(4) 放样变换保持交角的值;

(5) 放样变换保持直线的平行;

(6) 放样变换保持直线的垂直。

4. “立方倍积”是古希腊著名的三大难题之一: 要求只用圆规和直尺, 将一个立方体变成一个 2 倍体积的立方体。已经知道此问题无解, 有关于此的是一段传说。希腊的弟洛斯城的公民不堪于黑热病的肆虐, 因而求教于祭司。祭司说, 要避免灾难, 必须将原有的祭台扩建, 要求新的与旧的几何上相似, 但新祭台体积是旧祭台的 2 倍。此问题当时曾惊动了不少人, 包括著名哲学家柏拉图。柏拉图说, 上帝无意于扩大祭台, 此问题只是嘲弄那些轻视数学和几何学的人。

我们现在的的问题是

(1) 如果新祭台的长、宽、高都是原祭台的 2 倍, 前者体积是多少?

(2) 祭司问题里的放样比例是多少?

5. 下面一些语句选自某某日报, 请给以评论。

- (1)“新的洗牙剂将清除您的牙污 300%!”
- (2)“对于投递失误,本公司 6 个月来已 100% 改进。”
- (3)“倘利息已从 10% 降为 5%,实为 100% 降价。”
6. 一个光年是光行进一年的距离,已知光速为 3×10^8 米,则一光年合多少千米?
7. 一只大猩猩约重 200 千克,高 5 米。
- (1)如果猩猩身高减半,试估计其重量。
- (2)你的计算里有什么假定?
- (3)猩猩两脚并在一起约有 1 平方米的面积。当猩猩站立时,其压强是多少(千克/平方米)?
- (4)如果金刚是猩猩的 10 倍放样,则金刚体重多少?
- (5)金刚的腿部压强是多少(千克/平方米)?
8. 用代数学证明比例增长律:面积的比例因子是体积的比例因子的 $\frac{2}{3}$ 幂。
9. 试证明斐波那契数列的通项公式(见正文)。
10. 计算下面数列 (L_1, L_2, \dots) :
- $L_1 = 1, L_2 = 3, L_{n+1} = L_n + L_{n-1}$ (当 $n > 2$ 时)。试计算
- (1) L_3 到 L_{10} ;
- (2) $\frac{L_{i+1}}{L_i}, i = 1, 2, \dots, 9$ 。
11. 历史上曾经有过一个协会,被称为斐波那契协会,专门扶植对斐波那契数列和其他数列的爱好者。斐波那契本人创立此协会于 800 年前,但只存在了 30 年。1988 年一位高中生在《斐波那契季刊》上发表了一篇文章《假定兔子生得更多!》,说道:
- 要是代替每月生一对小兔,而设大兔每月生两对小兔,斐波那契数会有什么变化?
- 由此得到的数列称为贝他那契(Beta-Nacci)数列。
- (1)前 12 个月里每月有多少兔子?
- (2)贝他那契数列 B_n 的一般公式怎样?
- (3)试求出前 11 个比例 $\frac{B_{n+1}}{B_n}$ 的值;
- (4)上述比值有无极限? 极限是几?

(5) 作一张表比较 $3B_n$ 与 2^n , 试问能不能从表中看出些什么规律?

(6) 如果大兔每月生三对小兔, 会得到什么数列? (称为伽玛那契(Gamma Nacci)数列)

(7) 如果大兔每月生 Q 对小兔呢?

12. (1) 试证明

$$F_n = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & \cdots \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix} \quad (n-1 \text{ 阶行列式})$$

(2) ① $F_1 + F_2 + \cdots + F_n = F_{n+2} - 1$;

② $F_1 + F_2 + \cdots + F_{2n-1} = F_{2n}$;

③ $F_1^2 + F_2^2 + \cdots + F_n^2 = F_n F_{n+1}$;

13. 试证明, 斐波那契数的个位数将顺次取遍 0 到 9 各数。

14. (1) 贝他那契数列的个位数怎样重复?

(2) 伽玛那契数列的个位数怎样重复?

(3) 贝他那契数列的末两位数怎样重复?

15. 试证明正文 § 2 中斐波那契数的性质 3。

16. 试指出下列命题中的真伪。

(1) 直线反射保持共线性;

(2) 直线反射保持直线上的点序;

(3) 一线段在一直线反射下保持长度;

(4) 一对平行线在直线反射下保持平行。

17. (1) 试证明, 图 1-26 的五边形中,

对角线与边长之比等于黄金比。

(2) 试证明正十边形外接圆半径与其一
边之比为黄金比。

18. 确定下列命题的真伪。

(1) 一对垂直线在直线反射下保持垂
直;

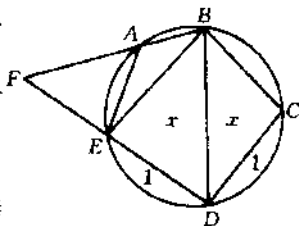


图 1-26

(2)正方形在直线反射下仍为正方形;

(3)正方形的顶点 A, B, C, D 为顺时针方向,它们在直线反射下的像 A', B', C', D' 亦为顺时针方向。

19. 英文 26 个字母里哪些字母

(1)有一条水平的反射对称线?

(2)有一条垂直的反射对称线?

(3)有旋转对称?

(4)有前述几种的组合?

20. 对下列每一个带状图案确定其保图案的刚体变换。

(1) $A A A A A A A A A A$;

(2) $B B B B B B B B B B$;

(3) $X X X X X X X X X X$;

(4) $F F F F F F F F F F$;

(5) $N N N N N N N N N N$;

(6) $d b p q d b p q d b p q$;

(7) $b d b d b d b d b d b d$ 。

21. 在图 1-27 中,每一带状域有一对三角形。

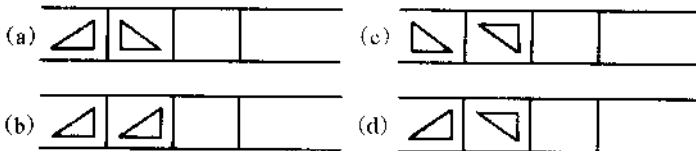


图 1-27

(1)试确定一个运动(平移、反射、旋转或滑行反射)将左边三角形变为右边三角形;

(2)画出后 4 个三角形,要求第 2 个三角形被移动到下一位置时使用的别的同类运动,等等。

(3)试问得到图案各属 7 种标准中的哪一种。

22. 用墙纸花图案的(晶体学)记号,读出图 1-28 中的 4 种图案。

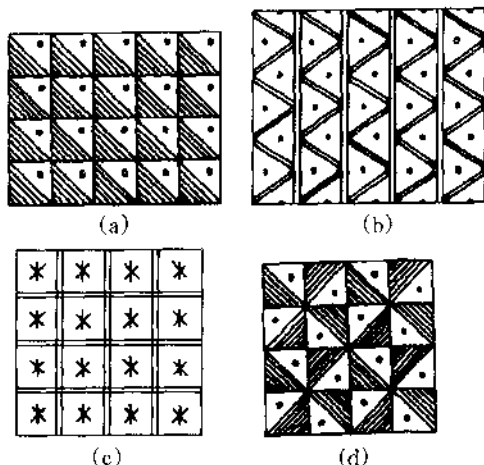


图 1-28

23. (1) 证明任一三角形均可以构成一个全平面拼装。

(2) 证明任一四边形均可以构成一个全平面拼装。

(3) 图 1-29(a) 这个六边形有什么特点? 用它能不能来构成一个全平面的拼装?

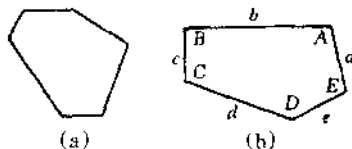


图 1-29

(4) 试证明, 任何一个有一对平行边的五边形瓷砖, 一定可以构成全平面拼装。

(5) 图 1-29(b) 中五边形便是丽丝找到的最后 4 种中的一类: 图中 $A = C = D = 120^\circ$, $B = E = 90^\circ$, $a = e$, $a + e = d$ 。试证明这是一个可全平面拼装的五边形瓷砖。

24. 正文中谈到的兔子问题可以直接使我们进入非周期拼装和音乐序列。令 A 和 B 分别表示一对大兔和一对小兔。让我们用一种特殊办法来记

录每月末的兔子数——或者是 A 或者是 B 。一对兔子在其出生后的第二个月之末便可视为大兔子。所以在第一个月之末, 我们的序列正好是 A ; 在第二个月之末也是如此。当一对大兔子有了一对小兔时, 将新的 B 直接写在 A 的右边。因此在第三个月之末, 我们的序列成为 AB ; 在第四个月之末, 成为 ABA , 因为第一对小兔已经长大。而在第五个月之末, 我们有 $ABAAB$ 。

数学家和计算机专家称上面这种序列构成法为位移系统: 每一步将每一 A 换为 AB , 将每一 B 换为 A 。

(1) 第六个月末, 序列是什么?

(2) 为什么两个 B 不能相连?

(3) 为什么三个 A 不能相连?

(4) 试证明, 从第四个月开始, 当月的序列由下法构成: 取下一个月的序列, 再后继一个两月前的序列。

25. 对任一个 A 与 B 的序列, 可以像潘罗斯拼装一样进行压缩和膨胀手术。这两种手术都保持序列的音乐性: 对一个音乐序列进行压缩或膨胀手术, 结果仍得一音乐序列。

(1) 膨胀可以用来生成一个音乐序列。第一步从一个 B 开始。然后施行膨胀: 代 A 为 AB , 代 B 为 A 。证明到第 n 步时序列里有 F_n 个符号。

(2) 压缩可以用来检验一个 A 与 B 的有限块是否属于一个音乐序列。每一个压缩步骤分两部分: 首先, 替代每一个 A 为 $(\frac{A}{2})(\frac{A}{2})$, 替代 B 为 $(\frac{A}{2})(\frac{A}{2})$, 随后合并相邻的 $(\frac{A}{2})$ 成一个 A , 使 A 的分式形式不再出现。另

一种办法可以导致同一结果: 从左到右, 代 B 为 A , 代 AA 为 B , 并消除单个 A 。压缩以后的块将更短。如果在每一步后, 我们有一个块具有两个或两个以上的 B 在一列中, 或是具有三个或三个以上的 A 在一列中, 则原来的块不可能是音乐序列的任何一部分; 反过来, 原来的块有可能被压缩成一个单一符号, 这时我们就可以下结论说, 原来的块是一个音乐序列的一部分(事实上是无限多次地出现在一个音乐序列里)。试检验两个序列: $ABAABABAAB$, $ABAABAABA$ 。

第二章 漫说人口问题

§1 马尔萨斯人口论和指数增长律

人口增长是一个全世界都极为关注的问题,有报导说在未来几十年内世界人口将达到 80 亿,因此人们担心地球上的粮食能否最终支持庞大的人口增长。

其实,并非每个人都真正了解到人口问题的实质;举个例子,差不多每个人都听说过马尔萨斯(Thomas Malthus)人口论,但真正了解这个理论的,除了专家以外,知道详情的人不会太多。现在看来,至少有这么几个问题是在研究人口增长时必须首先弄清楚的:人口的含义是什么?人口的结构与变迁情况又怎样?例如,所谓人口结构,是指我们必须把人口分成一些类别:男女性别分类,不同的年龄层次分类,知识结构分类等。显然,人口结构问题与提高人口素质有很大关系。而所谓变迁情况则是指,人口数量常常随着社会经济、自然灾害、战争等环境因素或增或减。因此,在谈到人口增长,自然包含了两个方面:增长与减少,或者我们常说,正增长与负增长。

本章我们将要讨论的便是人口幅度以及这个幅度随着时间变化引起的问题。我们将研究两类人口增长的模型。为了减少读者阅读的困难,我们用存款利息计算来比喻和叙述人口增长问题。

假如有人在银行里存了一笔钱,则有两种方法可以计算利息:单利法和复利法。例如,我们在银行里存入 10000 元钱(常称之为本金),规定年息是 10%;一年以后,连本带息你将得到 11000 元,

其中 1000 元是利息。要是你每年都只取走利息,你的本金 10000 元将永远保持不变,你每年的利息当然也不会变化。比方说,5 年,连本带息你一共拥有 $10000 + 5 \times 1000 = 15000$ 元钱。依此类推,过了 10 年,你的本息和就是本金的翻番,即 $10000 + 10 \times 1000 = 20000$ 元。此种计算利息的方法便是单利法。我们马上可以写出单利法的计算公式:分别用 A (元) 和 r 来记本金和利息率,用 n 来记存款时间(以年为单位),则 n 年以后本息和就是

$$A(1 + r \times n) \text{ (元)}, \quad (1)$$

现在看一看另一种计息方法,即复利法。这一回你不要取走利息,把它跟本金放在一起当作新的本金,那么第二年你将得到的利息是 $(10000 + 1000) \times 10\% = 1100$ 。因此,两年内你共得 2100 元利息,比同期单利计息多得 100 元(本息和总计是 12100 元)。要是 5 年内你都不取走利息(比方说存一个 5 年定期的户头),那么 5 年以后本息和该是多少呢? 计算如下:

第二年本息和是

$$\begin{aligned} 12100 + 12100 \times 10\% &= 12100 + 1210 \\ &= 13310 \text{ (元)}, \end{aligned}$$

第四年本息和是

$$\begin{aligned} 13310 + 13310 \times 10\% &= 13310 + 1331 \\ &= 14641 \text{ (元)}, \end{aligned}$$

第五年本息和是

$$\begin{aligned} 14641 + 14641 \times 10\% &= 14641 + 1464.1 \\ &= 16105.1 \text{ (元)}. \end{aligned}$$

比同期单利计息(那时本息和是 15000 元)整整高出 1105.1 元,即等于单利存款 6 年! 下面是本例单利与复利计息的比较表。

单利与复利本息和比较表(单位:元)

年 份	复 利	单 利
5	16105.10	15000
7	19487.17	17000
8	21435.89	18000
10	24937.42	20000
20	67275.0	30000
50	1173908.5	60000
100	137806123.4	110000

从这张表可以知道,7年后你的本息和就快要翻番,10年后本息和将近一番半(同年单利计息只有一番)。20年后,复利计本息和是原来的近7倍,单利计则只有3倍。50年后,前者高达120倍弱,后者仅6倍,而1个世纪以后,前者高达14000倍弱,后者仅11倍。时间愈长两者的差距固然愈来愈大,但令人费解的是,差距竟会这么大!

数学上把单利计息称为线性增长,把复利计息称为指数增长。很容易导出复利计算公式。

仍按前面的算法,第一年本息和是 $A + A \times r = A(1 + r)$, 第二年本息和是 $A(1 + r) + A(1 + r) \times r = A(1 + r)^2$, 不用说第三年本息和是 $A(1 + r)^3$, 因此复利计算公式是

$$A(1 + r)^n (\text{元}). \quad (2)$$

其中本金为 A , 年利率为 r , 存期为 n 年。

公式(1)与(2)都随着 n 的增长而增长,但(2)式的增长是指数型,即以乘幂速度增加,这远比(1)式中的乘数速度增长要快得多。我们把两个式子用图2-1来表示。

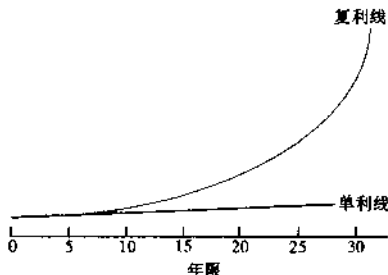


图 2-1

图中的复利线在数学上称为指数曲线,我们看到它的坡度陡斜得相当厉害,从而其增长当然也极快!有个故事可以形象地描述指数速度增长之快。

传说现属美国的阿拉斯加州原是俄国土地,100多年前由俄国沙皇卖给美国。当时那块地方是一片荒芜,所以俄国开价是300卢布。好多年过去,谁也记不起这件事,直到二战以后,阿拉斯加的繁荣发展使苏联人后悔不迭。其时 K.G.B(克格勃)却发现了一份极有价值的档案:有证据证明,美国当时并没有付款!因此苏联人就有权利索还地价款,这项款子值多少呢?我们替他们来算一下。

以一个卢布值1.7美金计,所以300卢布价值510美金,以国际贷款利率最底率20%起算,我们得算出100年的本息和是多少。于是按照我们上面讲的公式(2),美国应当偿还苏联大约

$$510 \times (1 + 20\%)^{100} \approx 42237200000 \text{ (美金)}$$

即420多亿美元。这样一笔巨款恐怕已经超过了整个阿拉斯加州好几年的工农业总产值了(1994年初洛杉矶大地震造成该市瘫痪,实际损失仅76亿美金)。不用说,这当然只是个美国式的传奇故事,相信不会有外交上的纠纷存在(不过美国还是有人把这个故事拍成一部惊险电影)。

讲了一大段指数增长速度的感性认识以后,现在要回到我们

的人口问题上来了。

马尔萨斯的人口论便是告诉人们这样一个现象：地球上粮食的增长都是线性增长，不幸，人口却以指数形式在增长！

如果我们用上面这个故事来看待马尔萨斯命题的话，不用说，咱们的地球过上几年，就得人满为患，不知变成什么样子了！我们当然没法接受这个观点（下文还要谈及）。但是，人类的繁衍本能又确实是像复利那样在增长人口（例如，我们以第一代和第二代分别比喻作本金和利息，那么二代就应当包含在复利之中），因此起码跟指数式的增长有着某种联系。换句话说，对于人口增长，我们确实应当提高警惕，任何漠然处之的态度都是相当危险的。

实际上，根据联合国有关人口问题组织的调查，人口增长的速度远比马尔萨斯说的要慢，但确实又比我们想象的要快！至于人口到底以什么样式在增长，涉及到人口模型的结构。我们在下文将看到，其实马尔萨斯理论代表的是最为简单的一种模型，真正的人口结构问题远比他说的要复杂，而人口问题专家面临的真正问题是，直到今天，还没有找到一个描述人口结构的合适的模型！

§ 2 漫说晚婚与晚育

目前，在许多国家和地区里，由于考虑到人口问题的潜在威胁，采取的是我们称之为晚婚优生的措施。其目的是尽量延长下一代的生成。联系到上文比喻的计息法，我们仍然用计息法来考察一下晚婚问题。但我们的目的是，除了从一个侧面来说明晚婚晚育的合理外，还要介绍一个十分重要的概念——数 e 。

其实我们很容易明白，晚婚的意义相当于延长计息期：例如将月利率改为年利率或者更长。这是因为常识告诉我们，计息期愈短，利息愈高（所以银行里的利息表写得很清楚，存期愈短，利率愈低）。仍以本金 10000 元为例，年利率也是 10%，看一看以季度计

息,一年后本息和是多少。

我们现在应当分四期计息,每季的利率是 $\frac{10\%}{4} = \frac{1}{40}$ 。第一季度的本息和是

$$10000 + 10000 \times \frac{1}{40} = 10000(1 + 0.025) = 10250(\text{元})$$

于是依照复利公式,一年后本息和该是

$$10000(1 + 0.025)^4 = 11038.1(\text{元})$$

比年计息多了 38.1 元。要是以月计息呢? 容易算出来,一年的本息和是

$$10000(1 + \frac{1}{120})^{12} = 11047.1(\text{元})$$

同样,如以日计息,则一年的本息和是

$$10000(1 + \frac{1}{3650})^{365} = 11051.6(\text{元})$$

两者分别比年计息多了 47.1 元和 51.6 元。如果我们分别算出季、月和日计息 5 年及 10 年的本息和,则得下表:

年 限	年计息	季计息	月计息	日计息	无限小计息
1	11000	11038.1	11047.1	11051.6	11051.7
5	16105.1	16386.2	16453.1	16486.1	16487.2
10	25937.4	26850.6	27070.4	27179.1	27182.8

这张表告诉我们一个现象:日、月或季计息虽比年计息更多,但多得很有限。请看 5 年的本息和,日计息只比月计息高 33 元,比季计息和年计息也不过高了几百元。10 年的本息和情况也差不多。

请注意该表最后一栏,这栏数是怎么来的? 我们先问,如果仍以年率 10% 为标准,而以时或分或秒,甚至以十分之一秒来计息,

情况是不是好些呢,不管我们怎样计息,如果计息的期限是一年的 n 分之一(比如一季是一年的四分之一,一月是一年的十二分之一,等等),则依照我们上面的计算方法,一年的本息和应是 $10000 \times (1 + \frac{1}{10n})^n$; 5 年的本息和是 $10000(1 + \frac{1}{10n})^{5n}$; 而 10 年的本息和则是 $10000(1 + \frac{1}{10n})^{10n}$, 注意, n 愈大表示计息的期限愈短。要问利息是不是无限制地提高,在数学上就是要问,数 $(1 + \frac{1}{10n})^{10n}$, 或数 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 是不是随着 n 变大而愈来愈大? 请看下表:

n	1	10	100	10000	1000000
$(1 + \frac{1}{n})^n$	2.0000000...	2.5937425...	2.7048138...	2.7181459...	2.7182682...

数 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 确实随 n 增加而增加,但增加得愈来愈慢。数学上已经证明,这个数将与一个定数 e 愈来愈靠近。用数学符号来记是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^n = e = 2.71828459045 \dots$$

这是高等数学中一个非常特殊的、叫做超越数的数。我们也把上式称为 $(1 + \frac{1}{n})^n$ 以 e 为极限。数学里也已证明,对随便什么数 x , 数 $(1 + \frac{x}{n})^n$ 将以 e^x 为极限, 而数 $(1 + \frac{x}{n})^{nn}$ 将以 e^{nx} 为极限。因此,在我们的计息问题里的数 $(1 + \frac{1}{10n})^n$ 将以 $e^{0.1}$ 为极限。

可见,在计息问题上,指望缩短计息期来增加利息,意义是不大的。因为 1 年、5 年或 10 年的本息和决不会超过 $10000e^{0.1} =$

11051.7(元), $10000e^{\frac{5}{10}} = 16487.2$ (元)或 $10000e^{\frac{10}{10}} = 27182.8$ (元)。注意这三个数正是 P53 表的最后一栏。但是,反过来,延长计息期则确实可以降低利息,这是显而易见的。

回到人口问题,如果以利息比作新生人口,那么提倡晚婚,相当于延长计息期,即相当于降低利息,也相当于降低人口出生率,这显然是一项控制人口的好办法。我们现在就来作一个模拟计算,看一看,在我国,晚婚 5 年或 10 年可以少生多少人口。我们先作一个理想的假定,即设 2000 年时我国人口为 12 亿,每年的出生率控制在千分之一以内。当年出生的孩子要在 20 年以后才能生育。因此在这 20 年内人口均以千分之一线性递增,即我们理想地假定新增人口不产生新的人口,换言之,就像本金增加部分不计息一样,在这 20 年内,人口可以像单利那样计算;20 年以后才开始复利计算。如果提倡晚婚晚育 5 年或 10 年,等于是把复利推迟 5 年或 10 年计算。提倡晚婚晚育的意义就在于看看两种算法的相差是多少。

依照上面的假定,到 2020 年,依单利公式,我国人口应为

$$12 \times (1 + \frac{20}{1000}) = 12.24(\text{亿})$$

从 2021 年开始,人口逐年依复利公式

$$12.24 \times [(1 + \frac{1}{1000})^n - 1](\text{亿})$$

递增;所以到 2025 年时,人口增加了

$$12.24 \times (1.001^5 - 1) = 0.3013(\text{亿})$$

即 3000 多万。8 年以后,即 2028 年,人口增加了

$$12.24 \times (1.001^8 - 1) = 0.3383(\text{亿})$$

即 3300 多万。同理,到 2030 年人口增加了

$$12.24 \times (1.001^{10} - 1) = 0.363(\text{亿})$$

即 3600 多万。

假定要求晚育 5 年,那么到 2025 年止,依单利公式,人口的增加是

$$12 \times (1 + \frac{25}{1000} - 1) = 0.3000 \text{ (亿)}$$

即比不晚育要少生 $0.3013 - 0.3000 = 0.0013$ (亿) 即少生 13 万人口;或者说得形象一些,即少生了一个小型的县。同样的道理,要是要求晚育 8 年,那么到 2028 年,人口的增加不是上面复利算出来的 0.3383 亿,而是

$$12 \times (1.028 - 1) = 0.3360 \text{ (亿)}$$

或者说少生了 $0.3383 - 0.3360 = 0.0023$ (亿),即少生 23 万人口,相当于一个中等县人口。要是晚育 10 年,则同理算出 2030 年时少生了

$$0.3630 - 12 \times 0.030 = 0.3630 - 0.3600 = 0.0030 \text{ (亿)}$$

即少生 30 万人口,相当于一个大县的人口。

当然我们的计算是在十分理想的假定下进行的,现实生活要比我们理解的复杂得多。即使这样,晚婚晚育的意义也是很清楚的了。

§ 3 人口结构与增长

其实马尔萨斯人口论的意义,与其说是给出人口的增长的一种描绘,倒不如说是向人类提出了警告:人口将以比我们想像更快的速度在增长!从这个意义上讲,马尔萨斯人口论是积极的。但是,他提出的模型则过于简单,失真得厉害。最初他给出的是一个酷似复利法的公式

$$P = P_0(1 + r)^n,$$

其中 P_0 表示初始人口量, P 表示 n 年以后的人口量, n 表示时间(年), r 称之为人口增长率。在马尔萨斯人口论里,

$$r = r_1 - r_2,$$

其中 r_1, r_2 分别表示出生率和死亡率

按照这个公式,我国人口从 1995 年的 11.8 亿,到 2005 年时将达

$$11.8 \times (1.001)^{10} = 12.04 \text{ (亿)}$$

(增长率控制在千分之一),即增加 2400 万人口,美国 1990 年的人口是 2.5 亿,每年的增长率是千分之七,则 2000 年人口量是

$$2.5 \times (1 + 0.007)^{10} = 2.68 \text{ (亿)}$$

即增加 1800 万人口。更严重的是第三世界的某些国家,例如尼日利亚,增长率是百分之三,因此其人口将从 1990 年的 1.18 亿增长到 2000 年的

$$1.18 \times (1 + 0.03)^{10} = 1.57 \text{ (亿)}$$

多出的人口将近原人口的三分之一!以这种速度增长的话,要不了几年,人口数就成了天文数字。

可见在用几何增长率预报人口增长时必须十分小心。事实上,上述这种以单一的增长率 r 按复利计算的模型并不是很理智的,没有一种生物会无限地生长下去,因为它常常受到诸如粮食、迁徙等社会和空间的限制。生物繁衍到一定水平时,由于没有足够的能量源供应新的成员,势必要停止再行繁衍下去,因此几何增长律的意义也就失了真。

一个现实的生物生长模型里,其增长百分率 r 常常随着生物幅员 r 的变化而变化,并且有时会因生物幅员的增加变为负数 α (在美国历史上,从 1865 年到 1945 年就发生过这种情况)。这种负增长出现在如下的情况:当群体幅员增加时,承担群体的能源开始减少,或者说,承担极大人口的能源源开始枯竭。为了说得更明白一些,我们再拿生物学中一个叫做捕食系统的现象为例:大鱼依赖微生物为生,当大鱼繁殖到相当程度时,微生物将被消耗殆尽,从而导致大鱼的减少,但当大鱼减少到一定的水平时,微生物又开

始大量增长,再一次形成大鱼的繁衍增长,如此周而复始,循环不已。在实验室里有人已经证实了这个生态现象。

那个环境能源能以支撑的极大生物幅员,常称为环境容量。一个合理的生物增长模型,应当把这个环境容量计算在内;换言之,应当把上述增长率乘上一个因子,而这个因子又能刻画生物幅员如何接近环境容量,具体作法是取

$$\text{增长率} = r(1 - \frac{\text{生物幅员}}{\text{环境容量}}) = r(1 - \frac{P}{M})$$

人口学家把这个模型称之为逻辑斯蒂(Logistic)模型。这个模型便具有我们刚才说的性质。例如,当人口幅员 P 较小时, $\frac{P}{M}$ 的值也较小,故 $(1 - \frac{P}{M})$ 为正,即人口为正增长;反之,当 P 超过 M 时, $(1 - \frac{P}{M}) < 0$, 人口为负增长。

资料显示,从 1790 年到 1950 年美国人口基本上按照逻辑斯蒂模型在增长,其时增长率为 0.031(相当于当前第三世界一些国家的增长率),1790 年的人口量是 3900000,而 $M = 2$ 亿。到 1920 年时,人口已达 1.06 亿,相当于环境容量的一半,其年增长率也将近原来的一半,即 1.5%。从 1950 年到 1990 年,人口已增长到 2.50 亿,超过了环境容量,因此用逻辑斯蒂模型来预报人口增长,会导致很大误差。实际上美国的人口结构还有一个因素相当麻烦——移民的增长也使预报与实际之间存在较大差异。

可见逻辑斯蒂模型也不是一个理想的描绘人口结构的好方法。但这个模型却被生物学家相当看重,原因是许多生物的生长规律在实验室环境里比较准确地符合逻辑斯蒂模型。图 2-2 是一张实验室环境里果蝇(幼虫在植物中的孵化物)的增长示意图,其中黑点是果蝇起初生长情况,曲线 P 表示用最简单的线性增长方式来近似描绘果蝇增长。曲线 Q 则表示几何增长方式的近似

图, 曲线 L 则是依逻辑斯蒂模型来近似表达。可见曲线 L 的近似程度相当高。

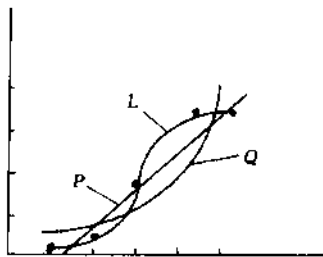


图 2-2

§ 4 再生曲线——人口增长会产生混乱吗?

在人口问题(包括更广泛的生物群体)的研究里,再生曲线是常常被用到的工具。画张图就可以明白它的含义。图 2-3(a)中的曲线是表示人口幅员随时间变化的规律,但如果我们把横标与纵标分别表示本年和来年的幅员量,则可称之为再生曲线。因此,例如今年幅员数是 x , 则曲线在 x 处到达的高度 $f(x)$ 便是来年的幅员数。再看图 2-3(b), 那里多了一条虚线, 这条虚线与横轴正好交成 45 度角。因此它上面的每一点处的横标与纵标总是相等。很容易明白, 如果点 $P(x, f(x))$ 位于虚线上方, 表示 $f(x) - x > 0$, 即表示来年的幅员有了增加; 反之, 如果点 P 落在虚线下方, 则 $f(x) - x < 0$, 即表示来年幅员在减少。图(b)中有一个数 x_e , 它对应的曲线高度正好是曲线与虚线的交点, 即表示 $f(x_e) = x_e$, 即来年与今年幅员保持平衡。在数学上还有一个名词——点 x_e 称为再生曲线的不动点。

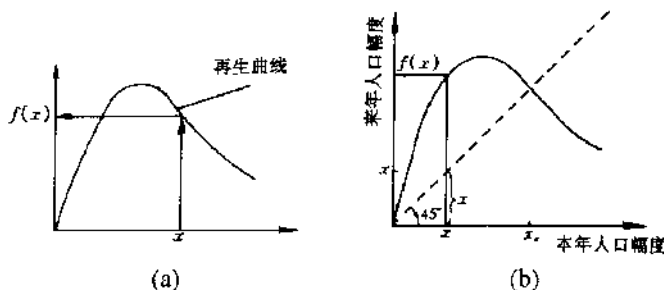


图 2-3

有一个好办法可以在同一条再生曲线上画出每年的幅员增长情况。像上面那样,先从横轴上的 x 出发作出 $P(x, f(x))$ 点,我们说过, $f(x)$ 便是来年的幅员量。过 P 点作一条平行于横轴的直线,使它与虚线相交于 P' 点,再过 P' 点作平行于纵轴的直线,使它相交于再生曲线的 Q 点。则 Q 点的高度便是第二年的幅员量。理由如下:请注意 P' 点的横、纵坐标正好相等(其实虚线上的每一点都是这样的),即两个坐标都等于 P 点的纵标 $f(x)$,于是 Q 点的高度正好是 $f(f(x))$,以 $f^2(x)$ 记这个数。注意 $f(x)$ 的来年的幅员当然是 x 的第二年的幅员。同样的道理,第四年、第五年、第六年……的幅员量分别应是

$f(f(f(x)))$ (记为 $f^3(x)$), $f(f(f(f(x))))$ (记为 $f^4(x)$),
 $f(f(f(f(f(x))))$ (记为 $f^5(x)$), …

一般地,如果今年的幅员量是 x ,则第 n 年以后的幅员量应是

$$f^n(x) = \underbrace{f(\cdots f(x) \cdots)}_{n \uparrow}$$

下面是三个例子,我们用图 2-4 表示幅员增长的情况。其中每一对(上下)图构成了绘图法。

注意,在我们的讨论中出现了一个近代数学中十分重要的概念——迭代。我们在下面几章中将要详细谈论这个重要的概念,但目前我们只指出与人口增长有关的一桩事情——混乱现象。

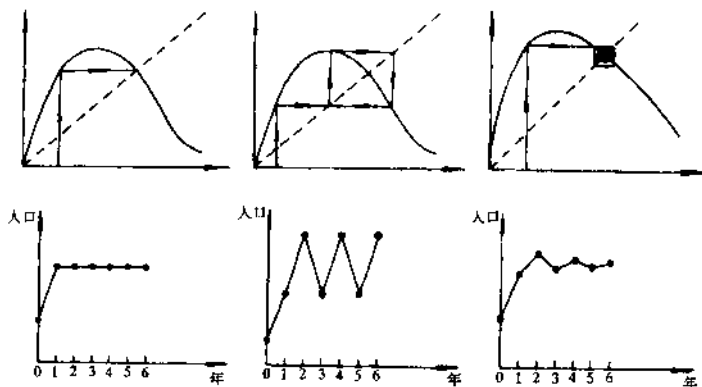


图 2-4

任意给了一个函数 $f(x)$, 让 x 用一个数 t 代入, 则得到另一个数 $t_1 = f(t)$ 。再把这个数代入函数 $f(x)$, 又得另一个数 $t_2 = f(t_1) = f(f(t)) = f^2(t)$, 然后再代入 $f(x)$, 等等, 这样我们就有了一个数列, 写出来就是

$$t, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$$

其中

$$t_n = \underbrace{f(\dots f(x) \dots)}_{n \text{ fold}} = f^n(x)$$

便称之为函数 $f(x)$ 在 $x=t$ 处的 n 次迭代。关于这个迭代过程, 数学家感兴趣的问题是, 上述这个数列在迭代次数 n 增大时有什么样的规律? 比方说, 搞计算的人就常常要问, 这个数列有没有极限? 这本来是个计算数学中的经典问题, 但是近年来却发现了一个极为重要的数学现象——混沌态。人们发现在物理学、力学、化学、天文学乃至经济理论中广泛存在着一种十分混乱无序的现象, 因此引起科学家的浓厚兴趣。据专家们估计, 短短的十几年中, 有关混沌的论文已达数千篇。在下一章里, 我们还要细谈这个问题。由于迭代过程实际上已经涉及人口预报问题, 因此有必要对有关的基本概念

在此先行讨论一番,让我们先从一个数学例子开始。

对于一个函数 $f(x)$, 上面曾把使 $f(x) = x$ 的 x_l 称为函数 $f(x) = x$ 的一个不动点。更广泛一点, 如果有一个数 x_p 使 $f^k(x_p) = x_p$ (还应该假定, 对任何更小的 $l, 0 < l < k$, 都有 $f^l(x_p) \neq x_p$), 即 x_p 至少经 k 次迭代以后重又回到 x_p , 则称是函数的 (周期为 k 的) 周期点。显然, 一个不动点也是一个周期为 1 的周期点。从前面的讨论可知, 在再生曲线图上, 不动点相当于曲线与虚线的交点的横标值。

就人口问题来说, 不动点是个好东西, 因为从上面曾讨论过的例子里可知, 如果我们碰到人口幅员正好是再生曲线的一个不动点, 则人口增长从此进入稳定期, 即人口幅员永远保持一个常量。如果我们碰到了周期点, 情况也不算坏, 因为这相当于说人口幅员每过几年总得周而复始, 保持稳定。不幸, 这只是个相当美妙的梦幻; 事实上, 我们现在连再生曲线是什么样儿都不清楚, 遑论它的不动点。即使你有了一个非常简单的函数, 你往往也很难算出或很难量出不动点的准确值 (何况它有时可能根本不存在)。举个例子, 函数 $y = x^2$ 的不动点可由 $x^2 = x$ 或 $x(x - 1) = 0$ 算出, 故有两个不动点 0 和 1。但如果你的绘图工具不能准确地量出 0 和 1, 而只能量出两个与 0 和 1 很靠近的数, 试问这两个数能否代替 0 和 1 这两个不动点呢? 恐怕不行!

事实上, 从图 2-5 可知: 对于很靠近 0 的点 P (不管在 0 的哪一边), 用它进行迭代, 则迭代不了几回, 就将与 0 非常靠近; 反之, 对于位于很靠近 1 的点 Q , 将之进行迭代的话, 则其迭代将距 1 愈来愈远。我们常把前者称为稳定不动点, 而称后者为不稳定不动点。可见只有稳定不动点在实用上才有价值, 换言之, 我们在研究不动点的时候还需要同时研究它的稳定性。

我们来看一个特殊的函数

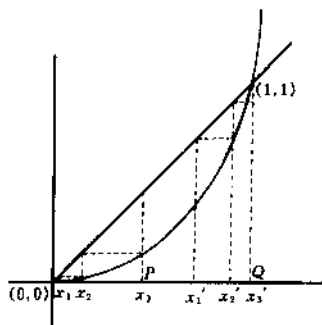


图 2-5

$$f(x) = ax(1-x), x \geq 0.$$

其中 a 是个与 x 无关的常数,称为参数。容易算出它有两个不动点: $x' = 0$ 和 $x' = 1 - \frac{1}{a}$ 。我们将看到,随着 a 值的不同,它们有着完全不同的稳定性质。

兹分几种情况加以讨论。

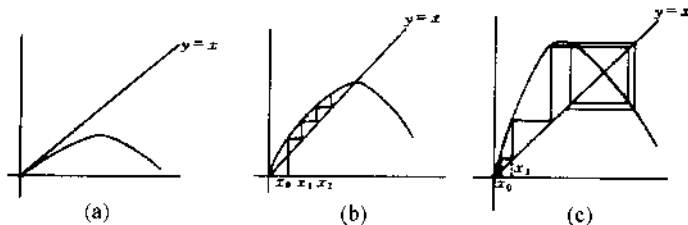


图 2-6

(1) 设 $0 < a < 1$ 。

此时因 $1 - \frac{1}{a} < 0$, 故依假设只有一个不动点 $x' = 0$ 。从图 2-6(a) 可以试验出来, 这是个稳定的不动点。

(2) 设 $1 < a < 3$ 。

这时有两个不动点 $x' = 0$ 和 $x'' = 1 - \frac{1}{a}$ 。从图 2-6(b) 可以试验出来, $x'' = 1 - \frac{1}{a}$ 是稳定不动点, $x' = 0$ 是不稳定不动点(例如, 在 0 附近任取一个值 t 出发进行迭代, 则迭代值 t_n 最后都趋向于 x'')。

(3) 设 $3 < a < 1 + \sqrt{6} \approx 3.449$ 。

这时两个不动点 x' 和 x'' 都变成不稳定, 因此从它们近旁出发的数经迭代后都离它们远去, 不再回到 x' 和 x'' 。但进一步的计算发现, 迭代值并未离得很远, 分别在两个特殊的数 p 与 q 之间跳来跳去(图 2-6(c))。具体的情况是这样的: 从任一数 t 出发, 第一次迭代到达 $f(t)$, 第二次迭代到达 $f(f(t)) = p$ (或 q), 第三次迭代到达 $f(f(f(t))) = q$ (或 p), 从此以后的规律是

$$\cdots p \rightarrow q \rightarrow p \rightarrow q \rightarrow p \rightarrow q \cdots$$

因此, 用我们刚才的术语来讲是, p, q 分别是函数 $f(x)$ 的(周期为 2 的)周期点。要算出这两个点, 也就是去解方程 $f^2(x) = x$; 但由于

$$\begin{aligned} f^2(x) &= f(f(x)) = a[f(x)][1 - f(x)] \\ &= a[ax(1-x)][1 - ax(1-x)] \end{aligned}$$

故相当于解方程

$$a^2 x(1-x)[1 - ax(1-x)] = x$$

就可以了。我们得出两个正根分别是

$$p = \frac{1}{2a}(1 + a - \sqrt{(a+1)(a+3)})$$

$$q = \frac{1}{2a}(1 + a + \sqrt{(a+1)(a+3)})$$

换句话说, 在现在的 a 的范围下, 不但有两个不动点 x' 及 x'' , 而且还有两个双周期点 p, q 。这种情形称之为周期倍化现象。

(4) $1 + \sqrt{6} < a < 3.544$ 。

有人仔细算出了这种情形的迭代情况,我们只写出结论如下。
上面那 2 个周期点又分化为 4 个周期点(周期为 4)。

$$\begin{array}{ccc}
 0.3828 & \xrightarrow{f} & 0.8269 \\
 \uparrow f & & \downarrow f \\
 0.8750 & \xleftarrow{f} & 0.5009
 \end{array}$$

(5) 当 a 再变大时,函数 $f(x)$ 的周期点的个数(和周期)也不断地增加,例如当 $a > 3.544$ 时将有 8 个周期点(周期为 8);当 $a > 3.564$ 时,将出现 16 个周期点(周期为 16),等等。最后,当不断靠近一个特殊的数 $3.569945972\cdots$ 时,将出现不计其数的周期点,而且每一个的周期也愈来愈大。或者用我们刚才的术语来说是,出现了周期无穷大倍化现象。

这是一种什么现象呢? 我们说,这便是一种混沌状态。已经证明,这时存在一个数 t^* ,函数无论怎样迭代,都回不到 t^* 自身。就是说,函数的变化已经进入不可捉摸的、杂乱无章的无序状态。

回到我们的人口问题来,会不会出现一条再生曲线,使相应于某参数的某值时,也出现混沌态呢? 当然,对于人口模型至少现在还不知道再生曲线的形状,但人口增长的无序状态的潜在危险,我们是不能低估的。有一点是挺奇怪的,只要人口还在增长,或是不断减少,即再生曲线一直在单调上升(或单调下降),则混沌状态就不会发生。可见,研究人口的增长方式,是一个相当复杂的也是相当困难的问题。

思考题

1. 在财政或经济部门有时需要考虑下列问题。在一定利率和一定年限的条件下,你应该开一个多少本金的账户,才能得到预定的本息? 用 $100r\%$

来记年率,本金是 P ,预定本息是 A ,则对 n 年的存期,我们有这么一个式子

$$P = \frac{A}{(1+r)^n}$$

(1)现在你打算为你未来 8 年的学费 15000 元作准备,对一个季复利为 10% 的账户,你应当存入多少本金?

(2)如果利率只有 8% 呢?

2. 在通货膨胀时期,价格非常像人口的指数增长。

(1)假设美国从 1990 年到 1995 年的膨胀率是每年 5%,问 1990 年值 1 元钱的产品到 1995 年时值多少?

(2)以 I 表示通货膨胀时期的有效年膨胀率,则 1 元钱在一年以后便值 $1 \times (1+I)$,即 1 元钱只能买到 $\frac{1}{1+I} = 1 - \frac{I}{1+I}$ (元)的产品。量 $D = -\frac{I}{1+I}$ 常为负值,一如利息,不过现在是负的。而现在的 P 元钱的价值在 n 年后相当于 $P(1+I)^n$ 元。如果从 1990 年到 1995 年的通货膨胀率是 5%,那么 1995 年 1 元钱在 1990 年该值多少?

(3)如果你在 1990 年花了 1000 元买了一台洗衣机,那么在 1995 年该机的标价应是多少?

3. 七二手则。有这么一个简单的手算法可以帮助你很快地计算出多少时间后你的本息是本金的两倍。用 $100r\%$ 记年利率,则大约需 $\frac{72}{100r}$ 年后,本息是本金的两倍。

(1)对年利率为 3%,4% 和 5% 的三种情况,在预期获得两倍本金的要求下,试算出原本金。

(2)如果年利率是 8% 和 9% 呢?

(3)如果年利率是 12%,24% 和 36% 呢?

(4)请证明七二手则。(注:这是个西方人习惯的算法,但在理论上似乎还缺乏根据。如果我们用近似式 $\ln(1+r) \approx r$,则我们将得到一个六九手则。用 72 代替 69 可能是因为 72 是 12 的倍数。)

4. 1996 年 7 月 23 日,《新民晚报》登载如下消息:543 年前(1453 年)英王爱德华四世曾向牛津大学借过 140 磅。由于牛津大学办学经费困难,急需筹款,不得已,出示当年爱德华写下的羊皮文书,要求皇室归还本息。现问,对应于下面的(1)~(5)中的利率,皇室应该归还多少磅?

- (1)年率为 1% ;
- (2)年率为 3% ;
- (3)年率为 5% ;
- (4)月率为 0.5% ;
- (5)月率为 1% 。

5. 有时需要从已知本金 P 、存期 n 和本息 A 出发去计算利率, 则仍由 $A = P(1+r)^n$ 可得到

$$r = \left(\frac{A}{P}\right)^{\frac{1}{n}} - 1.$$

以上题为例, 对于皇室的欠款, 众说不一: 有的说要归还 1.3 亿磅, 有的说应归还 250 亿磅, 又有的说应归还 4 万多亿磅。请你算一下三种说法的利率。

(提示: $140 \times (1.05)^{543} = 4.5 \times 10^{13}$, $140 \times (1.04)^{543} = 2.5 \times 10^{11}$, $140 \times (1.03)^{543} = 1.3 \times 10^9$ 。)

6. (1) 已知 $P = 7373.93$, $A = 7416.59$, $n = 28$ 天。求日息率 r 及年息率。

(2) 如果本金是 733135 元, 仍以 28 日同利率计息, 问本息多少?

7. 1990 年有一家银行刊登广告说: “如果你从 1980 年起每年在基金里放上 100 元, 那么现在你就有了 37747 元!” 试问你在这期间里共存入了多少钱? 如果存款放在每月的第一天, 从 1980 年 1 月 1 日开始, 到 1990 年 12 月 31 日止, 按月在月末付息。在这期间你共存入了多少钱? 以月复利计, 基金的利率是多少, 才能达到广告所说的结果?

提示: 用公式

$$1 + x^2 + \cdots + x^n = \frac{x^{n+1} - 1}{x - 1}$$

8. 如果你在银行里每年存入 1000 元, 以 8% 获(复利)息。你第一次得益是你的孩子 2 岁的时候, 最后一次得益是你的孩子 17 岁时(共付了 16 次), 那末当你孩子 18 岁上大学时, 你能得多少?

9. (1) 发展中国家的全体人口在 1990 年中大约是 30 亿, 其增长速度大约是 2.4%。如果以这样的速度继续增长, 问到 2000 年中, 人口幅员是多少?

(2)如果上题中人口增长率从1995年起减为2%,则到2000年中期人口幅员是多少?

(3)如果本题中人口增长率每年递减 $\frac{1}{12}$ 个百分点,问2000年中期人口幅员是多少?

10. (1)津巴布韦1990年人口少于1000万。如果前10年以1%递增,后10年以4%递增,问20年后人口幅员多少?

(2)同一问题反问之。如果前10年以4%递增,后10年以1%递增,则20年后人口幅员多少?

(3)你能否依前两题的讨论,就最高及最低增长率的分布提出一个控制最后人口幅员的建议?(1995年津巴布韦人口增长率是3.5%,列为全世界最高。)

11. 试用七二法则对下列人口分布作一个估计。

(1)中国,11亿,1.4%;

(2)全世界,53亿,1.7%;

(3)非洲,6.6亿,2.9%;

(4)欧洲,5亿,0.3%;

(5)美国,2.5亿,0.7%。

12. (1)委内瑞拉人口在1990年时是2000万。如果其前10年的增长率是2.4%,试问1980年时人口幅员多少?

(2)1980年巴西人口是1.5亿,年增长率为2%。同年美国人口是2.5亿,增长率是0.7%。如果两者都以这样的增长率继续下去,问何时两国人口一样?

13. 放射性元素放射出粒子后以一定比率衰减。元素减少一半需要的时间称为半寿长。例如镭-226同位素的半寿长为1600年,即1000克的镭226在1600年后只剩下500克。经3200年后只剩下250克等。

(1)同位素碳14半寿长为5700年。如果一物质含有这种同位素20000克,多少年后物质内仅含5000克?

(2)同位素钷30寿长为24000年。一物质含有此元素10000克,多少年后只剩下1250克?

(3)铀238同位素半寿长为45亿年,多少年后40克此种元素只剩下5

克?

14. 碳同位素可用来测量化石的年份, 活性碳 ^{14}C 同位素里每克每小时可放射出大约 900 种射线。测量每克每小时的射线数, 便可估计出化石的年份。例如化石每克每小时放射出 28 种元素, 则可以通过下表估算出化石的年龄。

化石年龄(年)	放射射线(每克每小时)
0	900
5700	450
11400	225
17100	112.5
22800	56.25
28500	28.125

(1) 一种化石每克每小时放射碳 - 14 约 7 个射线。试确定此化石的年龄。

(2) 一化石已确定约有 5100 年年龄。问碳元素每克每小时放射的射线数是多少?

15. (1) 如果幅员为 P 的人口量依比例 r 增长, 其中 $r = P(100 - P)$ 。试估计与 r 最大值对应的 P 值。

(2) 通过观察发现人口幅员 P 的增长由 $Pk(1 - \frac{P}{100})$ 给出。今视 k 为一年的增长比例(无约束的人口增长率), 数 100 是环境容量。

① 设 $k = 0.8$, 初始幅员是 10。试测定后 10 次观察的幅员。② 同上, 设初始幅员是 110。试与上题结果进行比较。③ 同上, $k = 1.8$ 。

(3) 通过上面各题, 试分析幅员增长与参数的依赖关系。

16. 仿上题, 设模型为 $Pk(1 - \frac{P}{M})$, 其中 M 为环境容量。又设此容量在前 5 次观察中为 100, 然后是 70(此种情况常称为环境突变)。

(1) 对初始幅员 20, $k = 0.9$, 试求前 10 次观察所得的幅员。

(2) 假定环境容量随年份 n 而变, $M = 100 + 5n$ 。设初始幅员为 10, $k = 0.7$, 求前 10 次观察所得的幅员。

(3) 同上, 但初始幅员为 10, $k = 2$, 求前 10 次观察的幅员。

(4) 经过上面各题讨论, 试分析你所得到的结果。

第三章 测量:从地球到宇宙 (从欧几里德到爱因斯坦)

§ 1 《几何原本》与测量学

1600 多年以前,人们对待宇宙的办法,除了一双肉眼,一无所有。但是人们照样能比较精确地测量地球上许多对象,甚至测量地球本身以及地球到月亮的距离等。人们能取得这些成就,缘因当时的一本名著《几何原本》。此书写于公元前 300 年,传说中的作者是欧几里德(Euclid),人们常称为《欧几里德原本》。这本书的影响——一直延续到今天——至今我们中学平面几何的绝大部分内容来自此书。现在看来使这本书成为不朽之作的原因有两个:第一,它总结古希腊甚至更早时期(包括巴比伦和埃及时期)的所有几何、算术和测量方面的知识。第二,它第一次把杂乱无章的数学理论逻辑化、规范化。具体地说,欧几里德尽量做到了使书中每一个结论或定理都可以从它自己认定的一些最基本的概念推理出来。从《几何原本》开始,几何学从此进入了一个理性阶段。举个例子,比欧几里德还要早 300 年,一位名叫泰勒斯(Thales)的人(我们后面还要谈到这个人的工作,但对于生活在 2600 余年(公元前约 600 年)前的泰勒斯,至今人们所知甚少,只知道是希腊哲学的奠基人之一,并被希腊人和罗马人尊为“希腊七贤”之一)就已经指出,在一圆中,直径所对的圆周角为 90 度(即为直角)。但正是在《原本》里才第一次被用更简单更直观的事实给推出来。可惜的是,由于时代的限制,欧几里德并没把这件事做得很好,给后人也留下了许多疑案。事实是,欧几里德的想法需要后人再加以完善,

而完成这项工作的是另一个伟大的人——德国著名数学家希尔伯特(Hilbert)。本章在第四节还要谈这个问题。

《几何原本》共分 13 篇,包括算术、平面几何和立体几何。其中有两件事相当重要,这就是有关三角形的全等与相似概念,以及勾股定理的证明。后一个问题我们将在下文再讨论,这一节我们将要做的事情是要看一看,在欧几里德或更早时期,人们是怎样用这些简单的几何知识来进行工程测量的。具体地说,我们要介绍当时有名的三大工程,即海船测距、金字塔测高和隧道的测向。

有关问题将涉及四个伟人:泰勒斯、欧几里德、阿里斯塔库斯(Aristarchus)和爱拉托斯耐斯(Eratosthenes),其中后三人为同时代人,而他们每个人都创造出新方法,为测量工作做出了很大贡献。我们上面说的三个问题,前两个是泰勒斯早 300 年前就提出来的。

海船测距

如图 3-1(a),需要测量海船 B 与岸边 A 点处的距离。泰勒斯的办法如下:从 A 点沿海岸垂直于 AB 方向行走任意一段距离,作一个标记 S ,要求 S 较高,以能目测一切(图 3-1(b)),随后继续往前走上相同距离至 C 点。然后转一个直角,朝远离海岸方向行走。如果当他走到 E 点时正好看到海船在点 S 的后面(即点

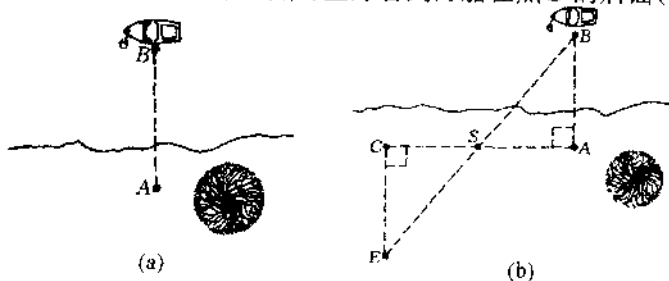


图 3-1

E, S 及海船在一条直线上), 则 CE 长便是所要测量的海船距离。

现在看来, 泰勒斯的方法的理由是十分浅显的: 直角三角形 ASB 与 CSE 全等, 因此 $AB = EC$ 。请不要轻视这个方法, 这个方法是在这样的时代出现的: 那时没有任何平面几何, 当然更没有全等三角形概念, 时间是公元前 600 年。

金字塔测高

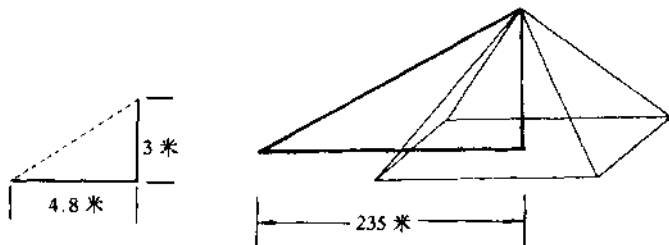


图 3-2

图 3-2 中的四棱锥为金字塔, 左边的小三角形表示一个装置, 即在地上树起一根 3 米的杆子, 在某一时刻, 它在太阳光底下的影子比方说是 4.8 米。泰勒斯在同一时刻测得金字塔在太阳光底下的影子是 235 米。因为这数字是在同一时刻测出的, 故由于那两个粗线三角形相似, 从而泰勒斯测得的塔高应从下式来计算

$$\text{金字塔高} = 235 \times \frac{3}{4.8} = 146.875 (\text{米})。$$

要注意的是, 本题中比例值 (杆高 / 杆影长) 是解决问题的关键。其实这个数在一天里的不同时刻有着不同的值, 因为这个数来自太阳在地平线上升起的角度。泰勒斯特地根据不同的太阳高度编了一张表如下:

太阳在地平线上的升角 H (单位:度)	比值(杆高/杆影长) R
5(近于地平线)	0.08749
10	0.17633
20	0.36397
30	0.57735
40	0.83910
45(近于地平线与正上方的正中间)	1.00000
50	1.19175
60	1.73205
70	2.74748
80	5.67128
87	19.08114
89(近于正上方)	57.28997

有了这张表,我们可把泰勒斯的方法总结如下:

1. 先测出待求物体某一时刻在太阳光下的影子长度 s ;
2. 测定太阳在地平线上的角度 H (通常我们称之为仰视角),
在上面这张表中找出与仰角相应的数 R ;
3. 数 $s \times R$ 便是所求物体的高度。

我们不用再去解释泰勒斯方法的理由了,因为上面那张表正好就是我们熟悉的正切三角函数表。只是我们要说,也许这张表正是历史上第一张三角函数表哩!

隧道测向

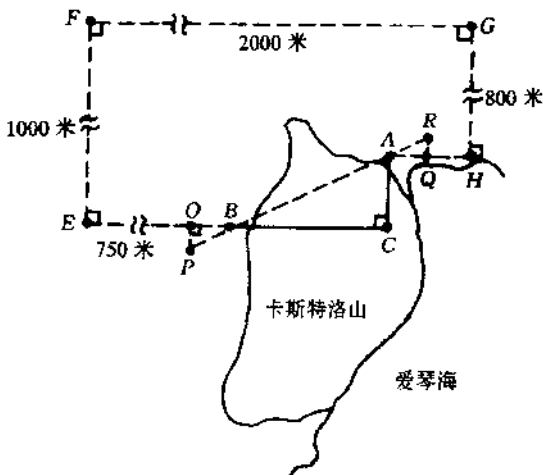
著名希腊历史学家希罗陶图斯(Herodotus,生活在泰勒斯前约100年)在它的著作中曾经描写过希腊萨摩(Samos)岛的工程,其中有一个是有关打通卡斯特洛(Castro)山向萨摩岛首府

引水的隧道工程。不料 2500 年以后,考古学家们于 1882 年真的发现了希罗陶图斯描写过的那条隧道:这条隧道长 1 千米,高与宽约 2 米。使人们感到惊奇的是那隧道建造之精良:考古学家在底部发现一些沟渠,内装特殊的道口,隧道还特别装有通风口和壁龛,前者用作通风和清除碎石,后者是矿工们安放工作灯的地方。考古学家对之讨论了好久好久。因为后人发现,从两端同时挖掘的工人在中心相遇时曾发生位置偏差:左右相差仅 10 米,上下相差只有 3 米。这在当时的条件下被认为是相当了不起的事情。

图 3-3 便是卡斯特洛山隧道的略图。使考古学家感兴趣的是:当时人们是怎样为开掘隧道测定方向的,因为那时《几何原本》还没有诞生。(顺便说个例子,与卡斯特洛山隧道差不多同时期在耶路萨冷附近也有过一项穿山工程,但结果质量很差:那隧道是一条蜿蜒伸长的曲线,长度是两端连线长的 2 倍。)卡斯特洛山隧道的事过了很长时间才得到解答,人们在一位作家赫龙(Heron)的书里找到一个与之相仿的解法。我们现在略加修正,将这个方法写在下面。

图 3-3 中隧道的入口是 A 与 B ,位于卡斯特洛山的两侧,现在如图 3-3 那样作出点 E, F, G, H 。其中已知距离分别是 $BE = 750$ 米, $EF = 1000$ 米, $FG = 2000$ 米, $GH = 800$ 米, $HA = 250$ 米(这些数字都是暂设的)。现在三角形 ABC 位于山下,无法直接测得,但由减法已可知 $AC = 200$ 米, $BC = 1000$ 米,因此三角形的两个直角边的比(常称勾股比)为 1 比 5。要想知道隧道方向,在隧道出口处 A 与 B 点如图 3-3 作两个适当的三角形,即三角形 BOP (例如,取 $BO = 50$ 米, $OP = 10$ 米)和三角形 AQR (例如,取 $AQ = 50$ 米, $QR = 10$ 米)。现在一切都清楚了:由于上面两个小三角形和三角形 ABC 都是相似直角三角形,因此 RA 或 PB 的方向便是我们所要的隧道方向。

换句话说,2500 年以前,人们已经表现出掌握相似三角形的聪明睿智!



§ 2 从勾股定理谈起

一、勾股定理

几何原本的又一重要内容是所谓勾股定理,这是指下面的定理:

任何直角三角形的两个直角边(较长边称为股,较短边称为勾)的平方和等于斜边(称弦)的平方。

从历史上看,至今西方科学家都承认,勾股定理应是我国科学家的专利。有关这方面的史实大致如下:我国西汉时期——约公元前 10 世纪——出了一本数学书《周髀算经》,上面翔实地记下了如下事实:我国数学家商高——公元前 1120 年——在回答周公时(看来这种问答活动大致相当于现在的学术讨论会)已经总结出“勾三股四弦五”这样一条富有远见的规律。因此,这可以说是勾

股定理的特殊情形。但到了公元前 7~6 世纪,另一位数学家陈子即已得到上面样式的普遍的勾股定理。所以算起来时间要比《原本》早上差不多半个世纪。此外,历史学家还在古书上发现,公元前 21 世纪夏禹治水时已经发现有使用勾股定理的迹象。

在欧洲则通常把这个定理称之为毕达哥拉斯定理(Pythagore-ath),以纪念公元前 6 世纪古希腊时代杰出的科学家毕达哥拉斯,因为也是他第一个从理论上严格证明了勾股定理。历史上还记载说,对于这个命名,毕达哥拉斯为此向神祇供奉了 100 头牛。

二、勾股定理的证明

我们现在最感兴趣的事是《几何原本》中关于勾股定理的证明。说到勾股定理的证明,已有报导说,有据可查的证明至少有 300 多种。这又一次反映出这个定理的魅力。欧几里德在《原本》中介绍的证明,也是以后一直被写在教科书中的那一个,如图 3-4。

欧几里德的证明的主要想法是证明图 3-4(a)中在勾上和在股上所作的正方形的面积之和正好等于弦上所作正方形面积。再进一步是,他像图 3-4(a)那样将弦上正方形分成两个小矩形 I 和 II,然后证明 I 和 II 分别等于勾和股上的正方形面积。欧几里德的证明在数学上非常完美、和谐,并且严格。受到面积的启发,我们可以另给一个证明(见图 3-4(b))

这一次我们仍然要证明正方形 $ABDE$ 的面积等于正方形 $ACHF$ 和正方形 $HGDI$ 的面积和。注意,在图 3-4(b)中正方形 $ABDE$ 分成四块 2, 4, 6, 7; 正方形 $HIDG$ 分成两块 4 和 5; 而正方形 $ACHF$ 分成三块 1, 2 和 3。现在再注意面积 $7 = \text{面积 } 3 + \text{面积 } 5$, 面积 $6 = \text{面积 } 1$, 于是我们有

$$\begin{aligned} ABDE &= 2 + 4 + 6 + 7 = 2 + 4 + 1 + (3 + 5) \\ &= (1 + 2 + 3) + (4 + 5) \\ &= ACHF + HIDG. \end{aligned}$$

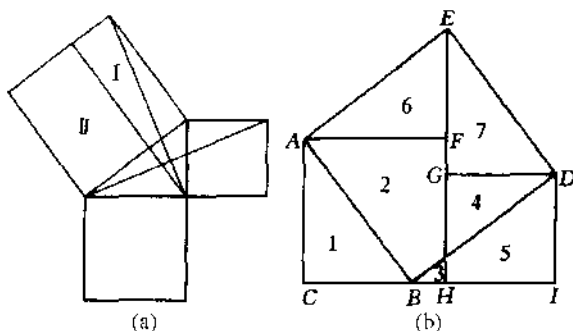


图 3-4

这个证明表面上看来与欧几里德的原证没有什么两样，但是我想用下面的办法来重新看一看它。设想我们的正方形由一些纸片组成，于是上面的证明相当于是：将正方形 $HIDG$ 剪成两块 4 和 5，将正方形 $ACHF$ 剪成三块 1、2 和 3。然后将这 5 块纸片严丝合缝地贴到正方形 $ABDE$ 上去。不用说，这种类似于裁缝师傅的办法，是证明面积相等最好的办法。因为一般说来，下面这个原则是不会错的。

等组原理 如果对于两个图形，我们能将其中之一剪成小块，将之严丝合缝地贴到另一个图形上去，则我们就称这两个图形是等组。显然，两个图形等组，则必等积。

现在看来，我们的证明要比欧几里德的证明要强一些，因为你只要仔细看一下就可以知道，他的证明没法用剪贴的办法来完成，而我们的却行。能不能将欧几里德的证明重新改造一下，以便使用我们的剪贴方法呢？这就需要提出一个普遍的、与上面等组原理完全相反的问题来。

等组问题 两个图形等积，是否一定等组？

换句话说，如果两个图形等积，能不能将其中之一剪成小块，并把它严丝合缝地贴到另一个上去？你只要稍为试试就可以知

道这个问题相当困难,原因就是它完全不像一个平面几何问题。后人推测,这个等组问题实际上欧几里德也已经考虑到了,但因为实在太难,终于没有在《原本》里留下什么文字。

到了19世纪初,有两个人重新考虑了这个问题,其中一人是匈牙利数学家包利埃(Bolyai),另一个是德国军官盖尔文(Gerwien)。对于平面多边形,他们不约而同地证明了下面这个十分有趣的定理。

定理 对于平面上任意两个多边形,如果他们等积,则必定等组。

换句话说,对于平面多边形,只要它们等积,则一定可以彼此用适当的办法进行上面讲过的剪贴法。使人感到意外的是,他们所给的证明竟然十分简单(当然也十分巧妙)。

下面我们就来介绍这个方法。具体说来,他们实际上只证明了这么几件事情:

第一,两个等底等高的(因而也是等积的)平行四边形一定是等组的;

第二,传递性:如果有三个多边形 A, B 与 C , 并且 A 与 B 等组, B 与 C 等组, 则 A 与 C 也等组;

第三,任意两个等积的矩形一定等组;

第四,任意一个多边形一定与一个与之等积的矩形等组。

我们先来看看,有了这几件事怎样来证明上面的定理。假定我们现在有两个等积的多边形 I 与 II 。根据上面第四件事,它俩将分别与矩形 A 与 B 等组。根据第三件事,矩形 A 与 B 等积,从而等组。现在 I 与 A 等组, A 与 B 等组, 而 B 又与 II 等组, 于是根据第二件事, 即传递性, I 就与 II 等组。定理就这样证明了。

怎样来证明上面四件事呢? 这只要画几张图就行了。对第一件事,我们有下面的图3-5。

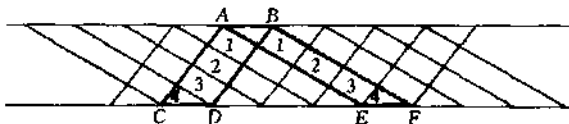


图 3-5

其中 $ABCD$ 与 $ABEF$ 便是两个等底等高的平行四边形,上图给出两者的剪贴办法。

对第二件事,请读者仔细理解下面的话: A 与 B 等组的意思是,可将 A 分成小块贴到 B 上去。 B 与 C 等组的意思是,可将 B 分成小块贴到 C 上去。现在 B 身上就有了两种剪拼法,将这两种剪法合在一起,等于是用更细的小块来拼剪 B ,这当然也是一种剪拼法。而这个剪拼法既可以使 A 与 B 等组,又可以使 B 与 C 等组。这第二件事就这样证明了。

对第三件事,我们有如图 3-6。

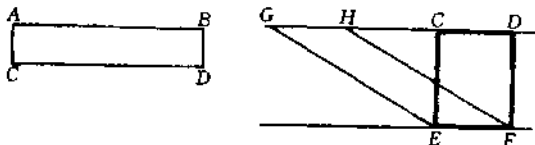


图 3-6

图中 $ABCD$ 与 $CDEF$ 是两个等积的矩形。我们再多作一个平行四边形 $EFGH$,要求 $EG \approx AB$ 。现在这三个平行四边形都是等高,因而根据第一及第二件事,它们应当等组。

最后,对于第四件事,下面的图 3-7 就显得很清楚了。

仔细看一下上面这个证明的四个步骤,就可以发现,证明过程实际上也给出了,对两个等积的多边形 A 与 B ,怎样去寻找我们所需要的、严丝合缝的拼剪法。根据我们的方法,首先取一定长线段 l ,将 A 和 B 按第四件事的办法拼成两个有一边长为 l 的矩形 C 和 D ,既然 C 和 D 等积,它们因此也全等。也就是说我们有了两

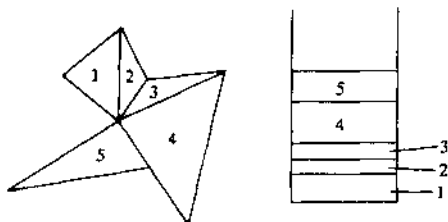


图 3-7

种拼剪法Ⅰ和Ⅱ：Ⅰ将 C 拼成 A ，Ⅱ将 D 拼成 B 。再把Ⅰ和Ⅱ用第二件事合并成 $C = D$ 的一种新拼法Ⅲ，那么根据第二件事，Ⅲ正好是使 A 与 B 等组的一种拼剪法。

可见，盖尔文和包里埃的成就，把一桩不着边际的事完全规范化了。这实在是件很了不起的事情！当然，如果每一次都按照上面的办法来寻找拼剪法，还是相当麻烦的。正要遇上寻找拼剪法时，常常是具体情况具体处理。下面几张图便是特殊问题特殊处理的例子。

例 1 怎样将一个三角形拼剪成矩形？图 3-8 便是解答，其中， M 与 N 是 AB 和 BC 的中点。

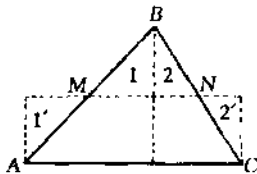


图 3-8

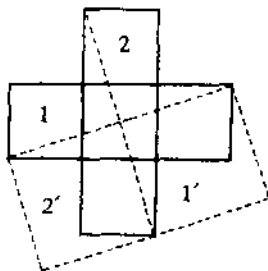


图 3-9

例 2 怎样将一个十字架拼剪成一个长宽比为 2 比 1 的矩形？图 3-9 便是解答，其中分别将 1 和 2 嵌入到 $1'$ 和 $2'$ 去。

我们已经十分顺利地解决了这个平面拼剪问题，要强调的是，

我们的问题只限于平面多边形。对于别的平面图形，例如面积相等的圆和椭圆，是否也有同类的等组定理呢？看来好像还没有人去想过这个问题。再问，对于空间的情况又如何呢？比方说，两个等体积的多面体（例如三棱锥），是否也有这种拼剪法呢？（我们可以设想有两个三棱锥，要问能不能把其中之一切成许多小块，使它们正好严丝合缝地堆砌成另一个？）提出这个问题是十分自然的。但我们要说，这一提却又提出一桩惊天动地的所谓世界难题的大事来。

三、希尔伯特和他的 23 个世界难题

1900 年，杰出的德国数学家希尔伯特，作为当代世界数学界的泰斗，在哥本哈根世界数学会上作了一个演说。在那次演说中他向全世界的数学家提出了 23 个难题，作为人类智慧向自然界挑战的宣言书。从此，这 23 个称之为希尔伯特问题的世界难题，构成了 20 世纪数学活动的重要内容。

在这张难题清单中，我们上面提到的多面体的拼切问题被列在第三位。希尔伯特以一位伟大的数学家所独具的敏锐观察力，看到了这个问题的艰难程度。对于这个现在公认的希尔伯特第三问题，他是这样来提问的：

1. 两个体积一样的多面体，可不可以把它们分割成两组一模一样的小多面体？

2. 两个等高等底的四面体，可不可以把它们分割成两组一模一样的小多面体？

注意后一问题是前一问题的特例。正面回答第一个问题等于回答了第二个问题；否定了第二个问题等于否定了第一个问题。在这两种情况下，都算是彻底解决了希尔伯特第三问题。

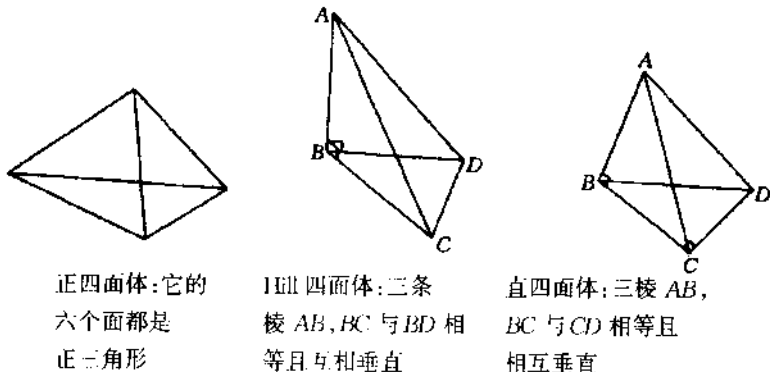
当我们在 20 世纪之末回顾一下希尔伯特的难题时，我们遗憾地看到，其中还有一大半没有得到解决。要说特别，惟独这个第三问题似乎得天独厚。

首先是1901年,即希尔伯特提出问题才1年,希尔伯特的同僚台恩(Dehn)证明了一件非常重要的事:一个立方体和一个与之等积的正四面体,是决不能等组的。即不能把一个立方体切成小块,以使之堆砌成一个正四面体,或者反之。

注意台恩是证明了不会存在有我们所需要的切割方法,这与我们上面解决平面拼剪问题是两种不同的想法。他的做法是用反证法:如果存在这种切割方法,就要与另一个公认的数学结论(这个结论是说:数 $\frac{1}{\pi} \arccos \frac{1}{3}$ 是个无理数)发生矛盾。

台恩的成果完全否定了上面第一个问题。或者我们可以说,台恩已经把希尔伯特第三问题一下子解决了一半。这一重要的结果使人相信希尔伯特第三问题的解决大概花不了多少时间了。因为正方体还不是四面体,所以为了最后解决希尔伯特第三问题,不少人开始去寻找希尔伯特所要的那两个四面体。

遗憾的是,这一找又找了半个世纪!直到1950年,一位瑞士数学家哈德维格(Hadwiger)才最后找到希尔伯特想要的,而台恩一直没有找到的那两个四面体。



正四面体:它的
六个面都是
正三角形

赫伦四面体:三条
棱 AB, BC 与 BD 相
等且互相垂直

直四面体:三棱 $AB,$
 BC 与 CD 相等且
相互垂直

图 3-10

图 3-10 画出 3 个四面体,其中正四面体已被台恩用来证明与立方体不等组;另两个便是否定希尔伯特问题的那两个四面体:一个称为直四面体,另一个称为希尔(Hill)四面体。

对此问题感兴趣的读者可以参考作者与严镇军合写的《从勾股定理谈起》(上海教育出版社,1985)或他们合写的文章《希尔伯特第三问题》(初等数学论丛, No. 3, 1987)。

§ 3 宇宙测量与圆锥曲线

我们在第二节中已经看到,在欧几里德时代,人们是如何凭借不多的几何知识进行实际测量工作的。不仅如此,那时的人们已经有着更大的目标:如何去认识或如何去测量宇宙?我们在这里先提供几个例子。

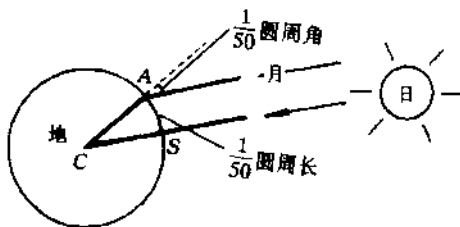


图 3-11

测量地球周长

这件事是公元前约 200 年由爱拉托斯耐斯(Eratosthenes)完成的。图 3-11 便是他的构思图,说明如下:爱拉托斯耐斯发现,太阳在某一时刻位于埃及的西奈城(今称阿斯旺,图中的 S 点)的正上方,而在同一时刻,在位于西奈城正北方的亚历山大城(图中 A 点)里,太阳不在正上方,而有一个偏角,测得这个偏角是圆周角的 $\frac{1}{50}$ 。由上图可知,对这两城,太阳的照射方向应当是平行的,

因此爱拉托斯耐斯断定,从西奈城到亚历山大城的距离正好是地球周长的五十分之一。

当时测得的两城距离是 5000 斯太第(古希腊计长单位),于是得出地球周长应为 $5000 \times 50 = 250000$ (斯太第)。

一个斯太第又是多长呢? 后人不清楚。据历史学家普林(Pliny)的估算,一个斯太第约等于 157.5 米,于是按爱拉托斯耐斯的算法可算出地球周长是 157.5×250000 米 = 39375 千米。

如果按照我们现在的计量法,把地球北极到赤道的距离(也就是地球周长的四分之一)的万分之一定为 1 千米,可知实际地球周长应为 40000 千米。可见爱拉托斯耐斯的估算是相当准确的,何况在他以后好多年还有人相信地球不是圆的哩!

测量日月距比

知道了地球的周长(从而也知道了地球的半径),阿利斯塔库斯(Aristarchus)开始考虑去测量更长的不可达距离。他测量出来的日地距和月地距虽然远不如爱拉托斯耐斯测量地球那样准确,但他提供的方法却是值得称道的。正是他指出应当怎样用三角形和圆的几何知识来描绘我们宇宙的形象,也是他第一次指出天体的距离远比人们想像的要小得多。

用一下简单的几何学,阿利斯塔库斯首先确定了日月距比,即日地距和月地距的比例。

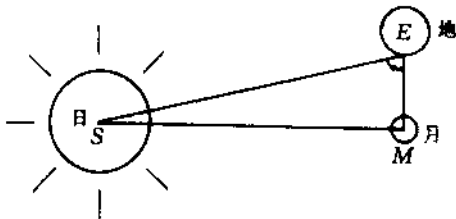


图 3-12

阿利斯塔库斯首先注意到当一个月中的两天出现半满月(其

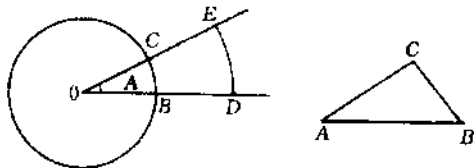
时太阳只照到月亮的一半,另一半在阴影里,我们称之为新月)时,月、地、日三者应构成一个直角三角形 MES ,如图 3-12。因此要测量日月距比 $\frac{ES}{ME}$,先得测出 E 处的角 α 。有了这个角 α ,根据上一节中的正切表,可以找到 $\frac{MS}{EM}$ 的值。又因为 SM 与 SE 比起 EM 要大得多,所以日月距比 $\frac{ES}{ME}$ 就可以以 $\frac{MS}{EM}$ 的值来代替。

阿利斯塔库斯估计角 $\alpha = 87^\circ$, 因此得 $\tan \alpha = 19$ 。换句话说, 他得出结论: 太阳到地球的距离是月球到地球的距离的 19 倍。

不论是泰勒斯,也不论是阿利斯塔库斯,它们用正切表来估算几何比,现在看来是显得过于粗糙一些。譬如对于角 α 的估计,尽管测量起来并不容易,但对于所要的比值,可能会因为任何一点小误差而发生巨大的偏差。现在我们已经知道, α 角实际上只与直角相差六分之一度,即 $\alpha = 89\frac{5}{6}$ 度,因此 $\tan \alpha \approx 390$ 。这就是真实的日月比的值。换句话说,真实值是阿利斯塔库斯测得值的 20 倍。

测量日地距与月地距

有了上面的日月比,现在实际上等于要求测量出月地距。阿利斯塔库斯测量月地距的办法是用了月蚀理论。100年以后另一个天文学家赫巴休斯(Hipparchus)也是用这个方法测得月地距,精度只与现在知道的值相差不足百分之一。



弧 BC 长 = 角 $A \times \frac{\pi}{180} \times$ 半径。 $A + B + C = 180^\circ$

图 3-13

倍,如图所示。由于日与月在太空中观察到的大小相差不多,我们在图上测得 $C = \text{圆周角的} \frac{1}{1440}$, $D = \text{圆周角的} \frac{1}{720}$ 。因此 $C + D = \text{圆周角的} (\frac{1}{1440} + \frac{1}{720}) = \text{圆周角的} \frac{1}{480} = 0.75 \text{ 度}$ 。注意 $A + B + E = C + D + E$, 即三角形三角之和等于两直角, 故有 $A + B = C + D = 0.75 \text{ 度}$ 。现在角 A 与角 B 相比较太小了, 所以可以将角 B 当作 0.75 度 来计算。

当 B 甚小时, 线段 TE 与一个中心在 B 、半径为 BT 的圆弧 TE 相近, 因此根据上面说的圆的基本性质, 就有

$$TE = \frac{\pi}{180} \times BT \times B,$$

解出 B 得 $B = \frac{180}{\pi} \times \frac{TE}{BT}$ 。用 $B = 0.75 \text{ 度}$ 代入, 我们得到

$$BT = \frac{180}{\pi} \times \frac{TE}{0.75} \approx 80 \times TE$$

换言之, 月球与地球的距离是地球半径的 80 倍。我们现在知道的是, 月地距是地球半径的 60 倍。

有了月地距, 如果都以地球半径为单位, 乘以 19 倍(应该是乘以 400 倍)我们就得到日地距。我们现在已经知道, 这个距离近似是 1.5×10^8 千米。

不用说, 这个方法也可以对待太阳系里的任何行星。

如果说测量地球上的可达物只是人类为了生活的需要, 那么测量宇宙应视为人类为了认识的需要。而我们也可以说, 近代科学的发展正是受到这样的思想的推动。

一般人都把近代科学的发展, 从 17 世纪中叶伽里略(Galileo Galilei 1564—1642)、开普勒(Johannes Kepler 1571—1630)和牛顿(Isacca Newton 1642—1727)的工作开始算起。这些工作有这么几个特点: 首先是实验技术, 其次是定量刻划, 最后是完整的数学方法。如果说老一代科学家致力于解释苹果为什么会掉下来, 那

么这一代科学家则想解释苹果是怎么掉下来的。这就需要量的概念。其次,提供数学方法的目的是为了能为自然现象做出预报,并由此可以解释甚至预报一大类有关现象。

1609年,伽里略在得知丹麦一位工程师怎样把两片镜面适当地放在一个长管子里——这是望远镜的前身——立刻感到这是个研究宇宙的好工具。于是他制造自己的望远镜。现在有据可查的是,他自行制造的望远镜已经可以达到32倍。正是通过这架望远镜,他第一次看到了月球的表面:那上面山峦起伏,可完全不像亚里士多德所说的“一片光滑”。这个发现使他下定了探索宇宙奥秘的决心;而更重要的是,对于亚里士多德和托勒米时代有关宇宙本质的学说,他从根本上产生了疑虑。

亚里士多德和托勒米是希腊时期的哲学家和地理学家。在他们的学说中有一个根本思想便是:宇宙是一个很大的天穹,而地球是我们宇宙的不动中心,即地心说。而我们熟知的波兰天文学家哥白尼的故事则是1800年以后的事了。现在看来伽里略可能比哥白尼更早怀疑地心说;不同的是,他要拿出更多说服人的证据来。他的一个重要证据是发现了作为行星的木星有4个月亮,而这4个月亮却并没有绕着地球在转。既然地球也有月亮,为什么地球不会是个行星呢?遗憾的是,在那个时代,光有这些证据是动摇不了地心说的。

伽里略以后半个世纪,牛顿制成了第一架反射望远镜,以代替伽里略的折射望远镜。除了物理光学上的原因(牛顿用一块镜子取代伽里略望远镜中的镜片,改进了后者的色斑现象),更重要的是,牛顿利用了抛物线——2000年前已经发现的圆锥曲线之一——的反射性质。我们现在已经知道,任何平行于抛物线对称轴的光线在镜面上都会反射到抛物线的焦点上(见图3-15,其中 F 是焦点, A 是顶点)。牛顿就此解决了折射望远镜中的成像问题。当然,以那时的工艺,牛顿没法做成完整的抛物镜面,所以他只用一个球面镜来代替。现代天文学会告诉你望远镜已经发展到什么

程度,我们就不再说下去了。我们感兴趣的是抛物线和它的伙伴们——圆锥曲线。

古希腊已经知道圆锥曲线是由一张平面从不同方向截取一个锥面得来的。除了抛物线,还有椭圆、双曲线和圆(它可以看作椭圆的特例)。(见图 3-16)

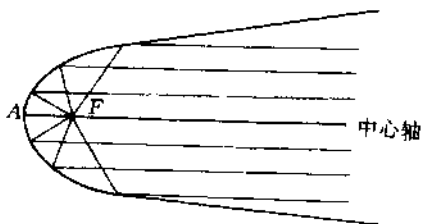


图 3-15

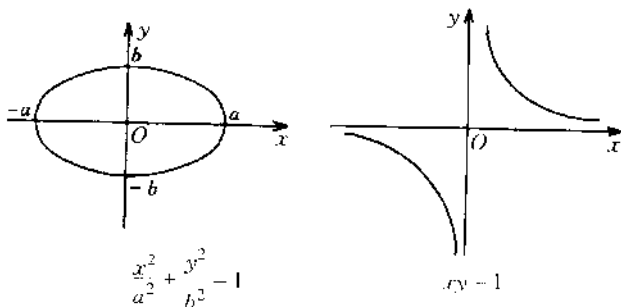


图 3-16

我们已经知道,在解析几何里,圆锥曲线被称为二次曲线。伽里略除了发现抛物线可以用到望远镜上,他的另一个著名的研究是关于自由落体,在那里仍然是抛物线在计算中起着重要作用。但是他或许没有想到的是,圆锥曲线日后将会在太阳系里起着举足轻重的作用。这就是开普勒的行星定律。

跟伽里略一样,开普勒也是个坚定的日心说者,但他对太阳系的看法十分有趣。从下面的说明可以看出,《几何原本》仍然是当

时人们仅有的数学工具。《原本》的后几卷里曾经介绍过正多面体，一共写出了 5 种（后来被证明，正多面体事实上也只有这 5 种）：正四面体，正六面体，正八面体，正十二面体和正二十面体。对于当时仅发现的 6 大行星：水星，金星，地球，火星，木星和土星，他是这样来给它们安排位置的：首先它们全在不同的 6 个球面上运动，将地球运动的球面外接一个正十二面体，则火星便在它的外接球面上；在这个球面上外接一个正四面体，则木星便在它的外接球面上；再在这个球面上外接一个正六面体，则土星便在它的外接球面上。现在在地球运动球面上内接一个正二十面体，则它的内接球面便是金星的运动球面；再在这个球面作一个内接正八面体，则水星便在内接球面上。

我们至今不知道开普勒是怎样得知这个结论的。为了建立这个形式上十分协调的太阳系的理论，他需要适合它们的一系列数据。为此他于 1600 年替著名丹麦天文学家布拉赫（T. Brache 1546—1601）打工，因为当时布拉赫以拥有最多的行星数据而驰名天文界。同年开普勒宣布他将在一星期内解决下面的火星问题：为火星计算出它的轨道，要求它与随时观察所得的值吻合。当时每次观察所得是一条 4 秒钟的弧。实际上他花了 4 年才得到一个解，能基本符合布拉赫的数据。但是用它来检验预报，发现完全不准确。

人们常说，苦难是最好的老师。在巨大的失败面前，开普勒并没有失望。他又花了 2 年多的时间，终于走出了革命性的一步。他的研究表明，按照托雷米关于重物将在圆形轨道上运动的结论是完全错误的。他因此不但找到了火星问题的准确解答，而且进一步完成了新的行星理论。1609 年他发表了经过 6 年辛苦研究的成果，即我们现在都已熟知的开普勒三大定律：

1. 椭圆轨道律。每一个行星都在一条椭圆轨道上运行，太阳位于椭圆的一个焦点上；

2. 面积律。在椭圆轨道的任何处,相同时间内行星和太阳联线扫过的面积总是相等的;

3. 周期律。行星运行周期的平方与行星和太阳的平均距离的立方成正比(平均距离指椭圆的长轴的一半)。

(图3-17示意地画出了前两定理。)

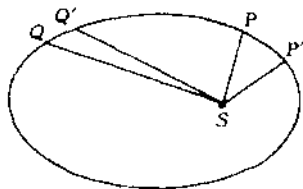


图3-17

这段历史生动地告诉我们,2000年前希腊人发现的圆锥曲线终于在科学的发展中(进一步的应用还表现在物理学、建筑学和工程学里)作出了巨大的贡献。

在结束这一节的时候,我们还想告诉读者一桩有趣的有关太阳系的小故事。

我们仍以日地距作为测量单位(在天文学里称为一个天文单位),则我们现在已经知道太阳系九大行星与太阳的距离如下表:

序 号	星 别	距 离	近 似
0	水星	0.39	0.55
1	金星	0.72	0.7
2	地球	1	1
3	火星	1.52	1.6
4	(缺)	2.67	2.8
5	木星	5.2	5.2
6	土星	9.55	10

7	天王星	19.22	19.6
8	海王星	30.11	38.8
9	冥王星	39.6	77.2

(最后3个近似值误差较大)这些表示距离的数字有些什么规律吗?有人发现,除个别行星外,它们可以用下面公式来统一计算它们的近似距离,并且效果极佳:

$$A = 4 + \frac{(3 \times 2^{n-1})}{10}$$

其中, n 表示序号。事实上,

水星, $n=0, A=0.55$;金星, $n=1, A=0.7$;地球, $n=2, A=1$;火星, $n=3, A=1.6$;C星, $n=4, A=2.8$;木星, $n=5, A=5.2$;土星, $n=6, A=10$;天王星, $n=7, A=19.6$;海王星, $n=8, A=38.8$;冥王星, $n=9, A=77.2$ 。

§4 新几何与新宇宙观

一、牛顿的巨著《原理》

大约在伽里略去世后50年,牛顿开始把他的注意力集中到伽里略和开普勒曾研究过的许多问题,特别是地球力学和天体力学的一些问题。他把这两种力学统一成一部演绎的数学理论,然后形成了一部为后人传颂的不朽著作《自然哲学之数学原理》(拉丁文是 *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*)。

完全跟欧几里德写作《原本》的方式一样,牛顿在他的《原理》中一开始就列出了一系列概念和定义:质量、力、惯性和动量。然后他又陈述了三个运动律,作为他那套演绎系统的出发点:

1. 在一直线上,一物体在未受到外力时,一直处于静止状态,或是无加速运动状态。

2. 在任一瞬时，作用于一物体上的力等于其质量与加速度的乘积。

3. 对每一个作用，都有一个等效反作用。

利用开普勒的第二定律，牛顿又完成了万有引力定律的陈述：在任两物体之间存在着相互吸引力，这个力与物体的质量成正比，与两者距离的平方成反比。写成式子可能更好理解一些：

$$F = \frac{Gm_1m_2}{r^2}$$

其中 F 是吸引力， m_1 与 m_2 是物体的质量， r 是两者的距离， G 是万有引力常数。相信学过中学物理的人都知道上面所谓的牛顿三大定理。

牛顿坚信他的万有引力律，因而把它作为一切演绎的基本假设。连同那三个运动律，引力律使牛顿创造出的一方数学园地，在这里他推导出伽里略的动力学、阿基米德和伽里略发展的静力学、开普勒的行星运动律，以及其他一些理论。我们甚至可以设想，正是这个数学系统，一下子将哥白尼、开普勒和伽里略的理论全部包含进去。

牛顿的一位好友哈雷爵士(E. Halley, 1656—1742)建议牛顿发表他的发现，而且给以财政资助。《原理》一书实际上包含了更多有关数学和物理极有价值的发现：它能解释月球轨道的扰动、彗星的运动、流星的陨落以及潮汐现象。巨著虽然发表于1687年，但牛顿10年前已经完全发现了万有引力律。1679年他在对月球位置进一步观察的基础上，用这个定律重新测量了地球半径。

哈雷本人也深受牛顿工作的吸引，着手于整理彗星的历史纪录。哈雷发现他在1679年观察到的一颗彗星在一椭圆轨道上运行，并且运动周期是76年。这也就是我们熟知的哈雷彗星。也是根据牛顿的理论，后来的天文学家得以准确预报天王星和冥王星的存在和位置(1990年在冥王星的发现纪念会上，人们得悉1930

年发现此星的人还健在)。此外,根据牛顿理论观察和预报,还有将近 10 余颗远距离行星位于太阳系内。

无论是牛顿,还是开普勒等人,他们的数学方法都是以那本《原本》为基础。可见从公元 5 世纪直到 19 世纪,欧几里德几何——包括它在三维空间里的推广——一直在统治着我们。我们也习以为常地认为这是我们仅有的从事科学的数学工具。但是随着新科学、新宇宙观的出现,科学本身开始向欧几里德几何进行了挑战,这就是非欧几里德几何的出现。

二、非欧几何——双曲几何

我们原来的几何学是由一系列称为定理和推论的命题组成的。这些命题都是从一些假设(也是一些命题)——我们称之为公设——推出来的。欧几里德从 5 个公设出发,推出来一个庞大的定理体系,这个体系就是欧几里德几何。可以将他的 5 个公设简单陈述于下。

1. 两点决定一直线。
2. 任一直线段常可以被延长。
3. 用任意点为圆心,以任意长为半径,可以画一圆。
4. 所有直角均相等。
5. 如果 l 是任一直线, P 是任一不在 l 上的点,则正好可以作一条过 P 的直线 m 与 l 不相交。

欧几里德认为这 5 条公理是绝对的、不言而喻的真理。当然,前 4 个特别简单的公设看起来毫无关联,因而可以把它们当作逻辑上独立。换言之,它们中的任一个都不能从另外几个推出来。但是关于 l 与 m 平行的公设(即它们不相交)——后人称为平行公设或第 5 公设,看起来并不那么简单。早期的许多几何学家认为它可以从前 4 个公设推出来。欧几里德自己可能也认为这个公设或许是不必要的:例如在《原本》里,他一直忍住不用第 5 公设,

足足推导了 30 个定理。企图用前 4 个公设推出平行公设的尝试经历了很长一段时期,或许可以称得上是数学史上最悲壮的一幕。不知道有多少数学家自以为找到了证明(即从公设 1~4 推出公设 5),临了却发现,自己无意之中又用上了一个不在公设 1~4 中的某一个命题,而这个命题实际上正好与公设 5 逻辑等价,因此他们无意中堕入了恶性循环。话虽这么说,这些等价命题中的有一些,其本身也很重要,我们列举几个如下。

1. 三角形三个内角之和等于两直角;
2. 通过不在一直线上的三个点,恰可以画一个圆;
3. 平行线必定等距离。

正当第 5 公设像幽灵一样困扰着欧洲大陆的数学家时,有两位杰出人士以他们独有的睿智和可贵的勇气,提出了完全不同的看法。这两个人是俄国数学家罗巴切夫斯基(Nicolai Ivanovich Lobachevsky, 1793—1856)和匈牙利数学家包利埃(Janos Bolyai, 1802—1860)。他们两人完全独立地指出:欧几里德的平行公设与前 4 个公设逻辑上是独立的,因此有理由相信第 5 公设可以用一个与之矛盾的假设代替之。他们两人同时选择了下面的公设。

公设 H 如果 l 是任一直线, P 是不在此直线上的任一点,则必存在一条以上的直线通过 P 且不与 l 相交。

用公设 H 可以推出一个定理与推论的庞大的体系,我们现在称之为双曲几何。这个体系中的某些定理跟老的体系一模一样:它们都是只用上述公设 1~4——它们在两个体系中都成立——证明的。但双曲几何又提供了一些新的令人非常吃惊的定理,其中之一便是作为双曲几何模型的伪圆。

回到平行公设,图 3-18 中有一直线 l 和一个不在其上的点 P ,从 P 向直线 l 引一条垂直线,垂足是 A 。现在考虑垂直于 PA 的直线 PE , PE 平行于 l ,而根据公设 5,这是仅有的过 P 的 l 的平行线。但如果我们用公设 H,那么应当还有一条直线 m ,它过 P

且平行于 l 。假设 m 与 PA 交成一个锐角,如图所示。这时一定还有另一条直线 n 与 PA 交成相等的锐角,但位于 PE 的另一侧,而且, n 也平行于 l ,由此我们可以得到第一个惊人的结论:过 P 存在无限多条直线平行于 l 。

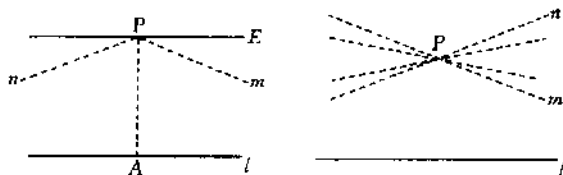


图 3-18

为什么?理由如下,因为过 P 的所有直线可以被 m 和 n 分成两类:一类包括 PA ,另一类包括 PE 。第二类中的直线都位于 m 和 n 之间。而这些直线全都平行于 l 。

利用类似的推理方法,包里埃和罗巴切夫斯基又发现许多不常见的定理,我们列出其三(见图 3-19):

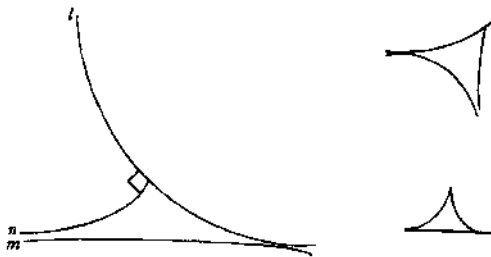


图 3-19

1. 三角形三内角之和小于两直角;
2. 凡相似三角形都全等,即具有同一形状的三角形必具有同一大小;
3. 给了两条平行线,必有第二条直线,垂直于其一而平行于另一。

包里埃和罗巴切夫斯基实际上是推出了整整一部几何学。但如我们看到的，凡是证明中用到公设 H 的定理，都与欧几里德几何格格不入。问题因此产生了：对于 1000 多年来习惯于《几何原本》的人，他们自然是无法接受这些结论的，偏激一点的会视之为异端邪说。由此可见，发表他们的著作是需要勇气的。

罗巴切夫斯基最初发表他的非欧几何学时，称之为“虚的几何学”，由于他用的是俄文写作，所以没有引起过多的注意。直到他去世以后人们才发现他的著作的伟大科学意义。包里埃发表他的非欧几何学，是附在他父亲的一本著作后面，写了一个 26 面的附录。乃父（正是这位父亲解决了我们在上节中谈到的平面等组问题）因此十分自豪，将书寄给他的一位朋友，一位当时数学界的风云人物，高斯（Carl Friedrich Gauss 1777—1855），以征求他对此事的看法。高斯的回信后人看来值得深思：他说早在几年以前他已经发现了这种几何学，只是，他一直没有勇气发表。

后人发现，高斯其实已经在非欧几何学的研究中做了相当深入的工作，例如他证明，三角形的面积不可能任意大，因为三角形总是被包含在一个所谓渐近三角形之内，这个渐近三角形的每一条边同时平行于另外两条。

我们把公设 H 引起的非欧几何学叫做双曲几何学，是因为下一节我们还要讨论另一种非欧几何学——椭圆几何学。这两个名字是另一位几何大家克莱茵（F. Klein）建议的：双曲，拉丁文的意思是“超级，过量”，用以说明这个几何里有着太多的平行线；椭圆，拉丁文的意思是“不足，欠缺”，自然是用以说明这个几何里平行线太少。而欧几里德几何因此也被称作抛物几何学，因为抛物一词在拉丁文的意思是“比较”。

三、非欧几何——椭圆几何

在双曲几何被发现后，一位年青的德国数学家黎曼

(G.F. Bernhard Riemann 1826—1866) 又一次在谨慎地审视着欧几里德几何。他分析了那里的公设 2: “每一直线段常可被延长”。他以为这句话完全不同于另一句话: “直线是无限长”。即, 无界限不能等同于无限延长。

设想你在地球表面行走, 顺着某一条线, 久而久之, 你可能仍旧回到出发点, 你显然在一条有限长的道路上旅行, 但它可以是无限长的, 因为它可以重复行走。黎曼在仔细研究了这种回归曲线后得出结论, 要想重述欧几里德的公设 2, 非得更改公设 5 不可, 于是黎曼建议把第 5 公设改成:

公设 E: 任意两条直线总是相交。

由此黎曼从公设 E 导出了一部椭圆几何。比起欧几里德几何学来, 如同双曲几何一样, 这部几何里出现了许多不可思议的命题。让我们通过航海学里的球面几何来理解这门新的非欧几何学。

我们要问, 在球面上什么是直线? 用平面上两点间的最短距离来要求它显然不合适; 因为这里直线会像隧道一样穿越地球。因此, 起码应当在球面上考虑这个最短距离。

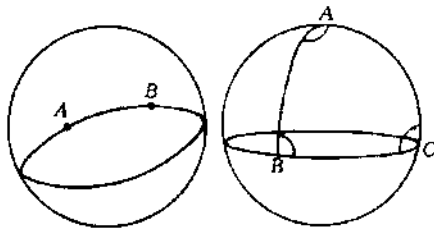


图 3-20

在图 3-20 中, 用一张过 A 及 B 点的平面去截球面, 将得一个圆——称之为截圆。用这个圆的 AB 圆弧长来度量 A, B 两点的距离是合适的。但是还有问题: 过 A, B 两点可以作很多平面,

因此也就是得到很多截圆。用哪一个截圆上的圆弧来度量 A, B 两点的距离为好呢? 对此需要进一步分析。在所有的截圆中, 各自的弯曲程度都不相同, 但是有一点可以肯定: 圆愈大, 弯曲程度愈小。而弯曲程度愈小, 度量 A, B 两点间的距离也就愈短。这个分析告诉我们, 应当用最大的截圆(也就是弯曲程度最小的截圆)——今后称之为大圆——上的 AB 弧来度量 A, B 两点在球面上的距离。最大的截圆是什么呢? 稍加思索即可知: 这是过 A, B 两点以及球心的平面在球面上的截圆。我们因此也就将这样得到的截圆上的 AB 弧, 理解为连结球面上两点 A, B 之间的直线。

熟悉球面几何学的飞行员都知道怎么作远距离飞行: 如果他从未赤道上某点出发, 目的地同是赤道上某一点, 则他只要沿赤道飞行就行了。如果他的出发地和目的地具有同一纬度(例如上海和合肥), 则他必朝西偏北飞行才对: 因为他必须沿大圆飞行。

现在回到我们的平行公设来。这一次我们会发现: 在球面几何里, 平行线是没有的。这是因为, 在球面上每两个大圆总是相交的。这也就是上面公设 E 的由来。此外, 我们还可以进一步发现: 球面上的三角形的三个内角之和可以大于两直角。例如赤道上的两端和北极这三点组成的三角形 ABC 便如此, 其内角和为 270° (见图 3-20)。

现在, 三种几何学——欧几里德几何、双曲几何和椭圆几何——就可以用一个三角形的内角和的大小来加以区分:

双曲几何学——三角形内角和小于两直角;

抛物几何学——三角形内角和等于两直角;

椭圆几何学——三角形内角和大于两直角。

下面是有关内角和的一个讨论:

以图 3-21 中三角形 ABC 为例, 我们来证明 $A + B + C =$ 两直角。

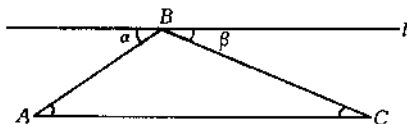


图 3-21

从顶点 B 画一条直线平行于 AC 边。根据平行线的性质, 内错角相等, 即 $\angle A = \alpha$, $\angle C = \beta$ 。现在 $\alpha + \angle ABC + \beta =$ 两直角, 所以代换后的 $\angle A + \angle ABC + \angle C =$ 两直角。

但是我们不能把这个证明用在球面上, 因为这里没有平行线。球面上任两条直线, 即两个大圆, 总是相交的。事实上, 在那里三角之和常大于两直角。我们也不能把这个证明用在双曲几何上, 因为那里有太多的平行线。如果我们画一条直线 l 过 B , 又使 $\alpha = \angle A$, 则 $\angle C$ 常要小于 β 。所以三角之和常小于两直角。

非欧几何的出现, 从被怀疑到被接受, 经过的时间不算长, 因为 1905 年一种新的宇宙观——相对论——的出现使非欧几何顿时身价百倍, 我们下节要谈这个问题。但非欧几何的产生确实使人看到了欧几里德《原本》的不足: 多少人多少年来视为经典的几何学的老祖宗, 原来也是矛盾百出 (后人发现, 除第 5 公设外, 还有些问题)。现在非欧几何产生了, 虽然内容上有些别扭, 但形式上还是严密的。问题是: 在非欧几何里是不是也会出现像第 5 公设那样的致命的缺陷呢? 还有, 我们到底应当怎样来看待《原本》呢?

回答这个问题和完成这件工作的, 便是那位提出 23 个世界难题的希尔伯特。

1899 年希尔伯特发表了《几何基础》一书, 在这本书里他对欧几里德《原本》进行了改造, 完整而清楚地回答了人们关心的问题。他做了这么几件事:

第一, 他给了点、线和面的定义, 作为一种基本元素。然后他列出了 5 组公理如下。

第Ⅰ组：关联公理（共 8 个）；

第Ⅱ组：顺序公理（共 4 个）；

第Ⅲ组：合同公理（共 5 个）；

第Ⅳ组：连续公理（共 2 个）；

第Ⅴ组：平行公理（共 1 个）。

第二，他认为上述公理组便是欧几里德几何的基础。为了证明这一点，他极为出色地证明：如果这些公理组有矛盾，那么普通的算术也有矛盾。单就这一点，他基本上解决了 2000 多年来的悬案。就是说，他已经将《原本》改造成一部没有矛盾的理论。

第三，他又与后来一些数学家合作讨论了非欧几何。这些工作可以用下面两句话来说明。

——“公理组Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ + 公理Ⅴ”便是无矛盾的欧几里德几何。

——“公理组Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ + 公理 H （或公理 E ）”也是无矛盾的，即非欧几何。

我们这里只说一句，是法国数学家布旺加莱（H. Poincaré）第一个证明非欧几何无矛盾。他的办法也许更绝：他干脆在半平面上画出一组图，在上面能完全满足公理组Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ和公理 E 的每一条公理。一个已经实现了的理论体系，还会有矛盾吗？

四、新宇宙观

1905 年，爱因斯坦（Albert Einstein 1879—1955）发表了特殊相对论，这是一宗相当复杂的理论，但是却构成了自牛顿的《哲学原理》以来物理学的一次最伟大的革命。

爱因斯坦生在德国一个具有自由思想的犹太家庭里，虽然周围人都觉得他脑子里常常会出现许多怪念头，但在中学里的成绩却不敢恭维。他自己后来承认特别不喜欢德国式的教学方法。1890 年他到他向往已久的瑞士读书，并在那儿当上了一个书记

员。1905 年和 1916 年发表了特殊相对论和广义相对论,特别是他的广义相对论在 1919 年成功地受到检验以后,受到全世界科学家的赞赏和敬仰。二战期间,纳粹强迫他离开德国。他选择了美国普林斯顿的高等研究所,在这儿一直工作到去世,享年 76 岁,1948 年爱因斯坦曾来我国访问。

在特殊相对论里,爱因斯坦提出了一种来看待宇宙过程中各类事件的新方法。某一事件在我们三维空间中占了一个位置,同时也在过程中占了一个时间。因此一个事件应该在一个 4 个坐标的四维空间——称为时空——中定下来:用 3 个坐标来确定它在空间中的位置,用第 4 个坐标来确定它在时间中的位置。爱因斯坦又发现,一个事件在时空中的定位,还常常决定于观察者所在的位置——也就是说,决定于观察者所用的坐标系的原点和定向。对同一事件,不同的观察者可以得到完全不同的观察结果,特别当其中之一以比其他人更快的速度运动时,更是如此。

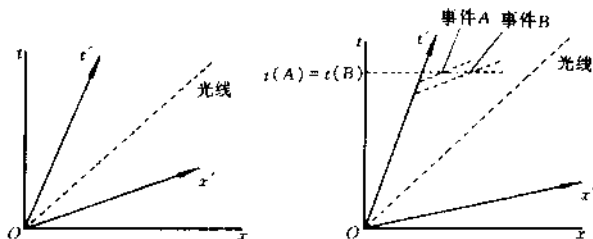


图 3-22

让我们用几何观点来看一看爱因斯坦的上述想法。在相对论里,两事件间的距离常称为区间,可以划分成两个部分:空间部分和时间部分。空间部分来自事件在三维空间中的位置,时间部分来自分隔事件的时间长度。由于这种划分跟坐标系和定向有关,所以对于不同的观察者自然就有着不同的观察结果。但是,作为联结四维时空中的两事件的距离,即区间,则是绝对的。就是说,

对于一个在常速运动的观察者和一个静止不动的观察者来说,观察结果是相同的。图 3-22 反映出这一现象:左图中坐标 t 和坐标 x 分别表示时间和空间; xOt 表示一个静止不动的坐标系, $x'Ot'$ 表示运动坐标系。图 3-22 表示,在 xOt 坐标系中的观察者认为事件 A 和 B 同时发生,但 $x'Ot'$ 坐标系中的观察者却认为事件 A 先于 B 发生。

当 1982 年意大利西西里半岛的火山爆发那一瞬间,如果南京紫金山有一位天文学家正好在观察 100 光年远的一个天文现象(光年表示光行走一年所经过的距离,所以它不是时间距离,而是空间距离),那么对我们位于地球上的人来说(相对于地球来说可以视为静止不动的),火山爆发和天文现象便是发生在一个世纪前后的两个事件:它们的空间距离相距 100 光年,而时间距离则相距 100 年。但是对于位于距地球 50 光年远的、以地球同样的常速度运动的观察者来说,两事件距离的空间部分和时间部分是完全不同的:一个观察者认定两个事件相隔 200 年,另一位认定它们同时发生。可见,这种时间和空间的划分对于我们平常习惯的几何学来说是相当别扭的,因为从几何角度来说两点距离自然是不变的。

在爱因斯坦发表他的第一篇论文不到 3 年,一位德国数学家明科夫斯基(Hermann Minkowski 1864—1909)为爱因斯坦的工作提供了几何解释,并且大大化简了爱因斯坦的论述。明科夫斯基所用的几何学我们现在常称之为明科夫斯基几何,要注意的是,这又是一种非欧几何学。他借用了黎曼的另一个出色的思想:数学空间的性质完全由度量距离的方法所确定。因此可以说,距离公式决定了几何的性质。

如果两个事件在时空中的坐标是 (x_1, y_1, z_1, t_1) , (x_2, y_2, z_2, t_2) ,则在明科夫斯基空间里度量距离的公式是

$$L = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 - (x_2 - x_1)^2 - (y_2 - y_1)^2 - (z_2 - z_1)^2}.$$

但在欧几里德几何里,计算距离的公式是

$$D = \sqrt{(t_2 - t_1)^2 + (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}。$$

(它实际上是商高定理的推广)

在特殊相对论发表后 10 年多一点时间,爱因斯坦又发表了他的广义相对论。这项工作同样也影响着科学世界。而爱因斯坦在这里发挥的又一个革命思想是:空间一直是弯曲的。他的真实想法是,光线总是循着最短距离行进,而不是直线行进。因此在弯曲空间里,光线也要弯曲。此外他又认为,光线弯曲程度在宇宙各处并不相同:在重力场愈大的地方,弯曲得愈厉害。

爱因斯坦的这些想法,将要在 1919 年一次日全食中接受考验:其时来自远距离星光的光线将从近处经过太阳,人们可以更清楚地看一下光线是否会变弯。爱因斯坦是对的:光线确实是弯曲行进的,那次观察结果跟爱因斯坦的预报非常接近。这又一次说明,广义相对论中的几何学里的直线跟欧几里德几何是不同的。

我们现在要问,什么是爱因斯坦使用的几何呢?现在看来答案有好几种。首先“曲线”概念接近于椭圆几何,因为穿过宇宙中的直线都会回到原处。其次,爱因斯坦实际上使用的是明可夫斯基几何的一种变形:他的距离公式在宇宙各处将随重力场的不同而不同。所以爱因斯坦使用的是椭圆几何的一种修正,但仍然是一种非欧几何。

关于几何学的讨论我们想在这里打住了,因为再要详细地讨论这个问题就将完全超出本书的范围。作者只希望通过本章能使读者最终明白这么一个道理:任何抽象的数学理论,都应受到宇宙观察的检验。不论是从古代测量和《原本》的关系来看,还是从新宇宙观和非欧几何的关系来看,都是如此。

思考题

1. 在下图中定出角 v 及 u .

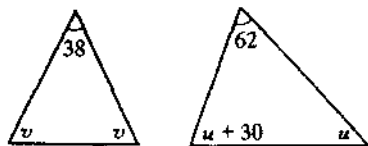


图 3-23

2. (1) 比爱拉托斯耐斯更早一些时候, 也有人测量过地球周长, 方法如下: 测得从罗西马契亚(今近于土耳其)到西奈约相当于全圆的 $\frac{1}{15}$, 即 24 度, 其距离是 20000 史太弟。在这些数字下算出地球的周长。

(2) 用法计算周长误差不小, 约 20%。原因是两城距离实际上只有 1899 千米。以 40232 千米作为地球的周长, 又设罗西马契亚在西奈正北, 问两城实际上占有多少弧角?

(3) 正文中爱拉托斯耐斯的计算也是不准的, 因为他把亚历山大港当作位于西奈正北 805 千米。实际上西奈城偏东 306 千米, 距亚历山大港为 837 千米。现在依上面两题, 假设西奈位于罗西马契亚以南 1818 千米, 偏东 628 千米, 问怎样计算地球周长?

3. (1) 下图给了一个简便而实用的测量月亮半径的方法。

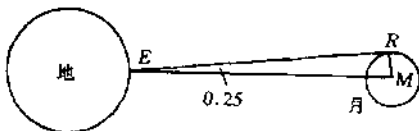


图 3-24

假定 $ER = 384393$ 千米, E 处观察所得的月球宽度的角为 0.25 度。注意 $\tan 0.25 = 0.00436$ 。试求 RM 。

(2)从地球观察月球和太阳宽度的角几乎是一样的。但太阳距地球 149659160 千米,半径为 665920 千米,月地距 384560 千米,求月半径。

4.我们可以用下法测量月地距。

(1) A 及 B 是地球上相距 805 千米的两个点,测量 $\angle AOB$ 。

(2)计算 $\angle OAB$ 和 $\angle OBA$ 。

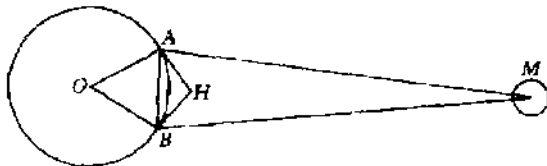


图 3-25

(3) AH 及 BH 是地球上的水平线,求 $\angle ABH$ 和 $\angle BAH$ 。

(4)从点 A 及 B 同时观察月球,以确定 $\angle MAH$ 及 $\angle MBH$ 。最后算出 $\angle AMB$ 。

(5)算出距离 AM 和 BM 。

5.有两人在赤道上行走,相距中心角是 89.07° (注意 $\tan 89.07^\circ = 61.60295$)。其时两人同时发现,月亮在一人头顶正上方,在另一人地平线上。设地球半径为 6378.5 千米,试求月地距离 PM 。

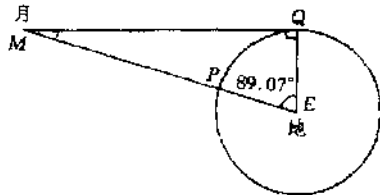


图 3-26

6.用上面测量月地距办法不能用来测量地球与水星的距离。下图设地球与水星(E 及 V)在太阳系圆形轨道上运行。要注意的是,当 E 和 V 运动时,角 VES 在变,惟有当角 EVS 为直角时,为最大,等于 47° 。查正弦函数表得 $\sin 47^\circ = VS/ES = 0.73135$ 。试算出水日距。

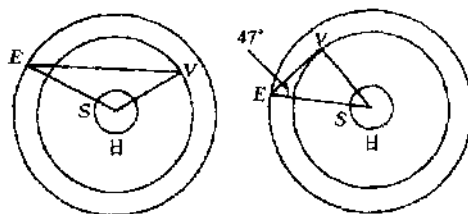


图 3-27

7. 希腊时期的另一位哲学家赫巴库斯(Hipparchus)充分利用日食以测量月球的半径。其时,在赫莱斯邦(记为 H)地区人们不能看到太阳,但在距此 1030 千米的亚历山大港(记为 A),太阳只被挡住五分之四。我们现在有示意图 3-28。

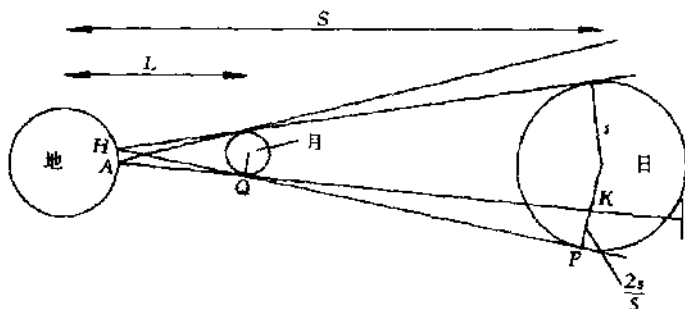


图 3-28

A 及 H 点即为观察点南北两城。以 L , S 分别记月地距及日地距,以 l 及 s 记月半径及日半径。注意三角形 AHQ 及 KQP 为相似,你就可以得出一个比例式,其中可以将 $S - L$ 近似改成 S 。再用月球正好遮住太阳这个事实,你就可以得出一个方程,用 AH 来表示 l 。最后用 AH 距离为 1030 千米算出 l 之值。

8. 上题是通过两个观察者来完成测量的,本题则只通过一个观察者来完成月地距测量,其法如下。

(1) 写出两个月球轨道弧长的方程,一个用月地距表示,另一个用月半径表示。以 1738 千米作为月半径,你就可以估计出月地距。

(2) 设一次日全食的时间是 125 分钟, 月球绕行一周的时间是 29 天 12 小时 44 分钟 2.8 秒. 这两个数字将使你得出用角表示的月半径, 然后是月地距。

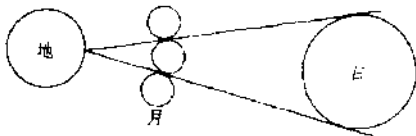


图 3-29

9. 1989 年 8 月 10 日的月全食发生在巴西中部地区, 历时 220 分钟, 图 3-30 相当准确地画出了现实情况, 图中 O 是一位观察者的位置 (有关数字同上题, 地球半径为 6378.5 千米). 我们依此来算出月地距。

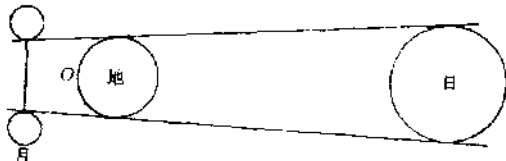


图 3-30

(1) 一次月全食过程月球运行的距离近于一个地半径加上一个月直径, 由此算出月地距。

(2) (1) 题的算法略为大一些, 现在来改进它. 设日地平均距离为 149659160 千米, 日半径为 665920 千米. 在图 3-31 中你可以看出, 一个月全食时间, 月球走过了一个地球直径 ($2e$) 加上一个月球直径 ($2l$) 减去 $2(\frac{l}{217})$, 其中 L 是月地距。

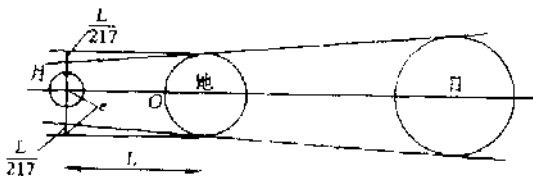


图 3-31

10. (1) 已知地日的平均距离为 149659160 千米, 地球轨道的偏心率 e 是 0.0167. 试写出地球的轨道方程。

(2)已知月地的最大距离与最小距离分别为 406686 千米与 356690 千米,写出月球轨道方程. ($e = \frac{c}{a}$, $c = \sqrt{a^2 - b^2}$, a, b 分别表示椭圆的长短半轴)

11. 天王星的平均距离是 44.95 亿千米,偏心率是 0.0082. 冥王星的平均距离为 59 亿千米,偏心率为 0.2481. 试说明,有时天王星比冥王星更靠近太阳(例如 1969 年到 2002 年).

12. (1)如同对于月球的计算一样,从人造卫星的旋转周期可以算出其高度. 现假设轨道为圆形,月球的准确周期是 27 日 7 小时 43 分 11.5 秒,到地心的平均距离为 384393 千米. 1957 年发射的第一颗人造卫星历时 88 分钟绕地一周. 试求其高度.

(2)1990 年发射的哈勃空间望远镜其高度为 613 千米,试求其周期.

13. 大多数彗星的轨道都是抛物线,这表示它们只能在太阳系里出现一次便远遁而去. 少数彗星是双曲线轨道,但大多数椭圆轨道的彗星,其轨道的偏心率相当高. 今已知哈雷彗星的周期为 76.1 年,偏心率是 0.999. 试求其近日点的距离.

14. 设一行星在一直线上匀速运动,如图 3-32

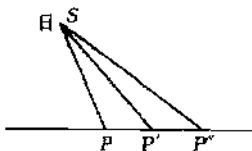


图 3-32

试证明太阳与行星的连线在相等时间内扫过相等面积。

15. (1)在月球及地球之间找出一个点来,使它受到的月与地的引力正好相等(地球质量为 5.979×10^{24} 千克,月球质量为 7.35×10^{22} 千克,两者平均距离为 383403 千米)。

(2)同样,在日地之间找出这样一个点来. 已知太阳质量是地球的 330000 倍,日地的平均距离为 149659160 千米

16. 伽里略曾经算出月亮山的近似高度,其结论是月亮山不得高于 6.44 千米. 他的讨论如下:

(1)他确定了地半径与月半径的比为 $\frac{7}{2}$,又认为地球直径为11265千米(实际上是12713.5千米),用这些数字算出月球直径、地球及月球周长。

(2)图3-33右边半圆表示四分之一的月球面, TB 是 B 点的切线,表示太阳射线, AT 表示月亮山。伽里略测得 AB 弧等于月直径的 $\frac{1}{20}$,且认为近似等于 TB 。试问伽里略测得的 TB 长度等于多少?

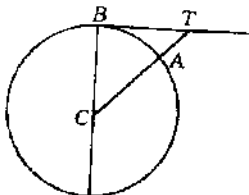


图 3-33

(3)算出月亮山顶到月心的距离,即 CT 长度。

(4)最后算出 AT 长度。

17. (1)试在椭圆几何里找出一个三角形,其三内角均为直角。

(2)设 ABC 为任一三角形。欧几里德第5公设说明其时恰有一条过 C 的直线平行于 AB 。今反过来要求证明,若三角形 ABC 内角和等于 180° ,则第5公设成立。

18. 在图3-34中,设角 A 及 B 均为直角,角 C 及 D 为锐角。

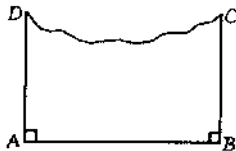


图 3-34

(1)试证明若 $AD = BC$,则角 C 和角 D 相等。

(2)试证明三角形 ABD 及 BCD 的内角和小于 180° 。

19. 我们在正文中已经遇到过多面体(例如四面体、正十二面体等),称多面体上各个平面图形(多边形)为面,面与面的交线称为棱,棱与棱的交点称为顶。

(1)以 V, E 及 F 分别记一个多面体的顶、棱及面的个数,试算出立方体与四面体的 V, E 及 F 。

(2)注意 $V + F$ 常大于 E ,试通过对各种具体多面体的试探,然后填写 $V + F + E - (\quad)$ 。

20. 如果一个多面体各个面都是全等多边形,又各个顶为同样个数的棱所集中,则称之为正多面体。下面以 P 及 Q 分别记一面上的棱数和每一棱所属的面数(例如对于正方体, $P=4, Q=3$)。

(1)对正四面体和正八面体试确定其 P 及 Q 值。

(2)对立方体、正四面体和正八面体试确定 PF 及 QV 的值。

(3)试问值 PF 有什么意义?

(4)证明 $QV=2E$ 。

(5)确定正十二面体的顶数与棱数。

(6)确定正二十面体的顶数与棱数。

21. 牛顿已经知道,两个力同时作用于一个物体时,将得到图 3-35 中的合力,即以 F' 及 F'' 为边的平行四边形的对角线。

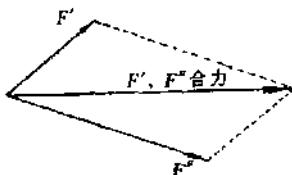


图 3-35

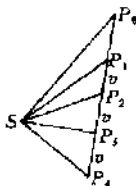


图 3-36

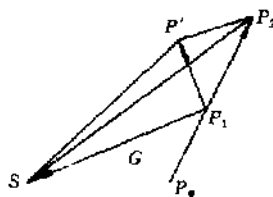


图 3-37

利用这个概念,牛顿以如下办法证明了开普勒定律。

(1)设某一重物在无外力作用下以每秒 v 米运动。设 S 为任意一个点,不在运动直线上。令 P_0, P_1, P_2, P_3, P_4 是 P 点每隔一秒所达到的位置。试比较三角形 $SP_0P_1, SP_1P_2, SP_2P_3$ 的面积。

(2)现设太阳在 S 点产生引力 G 。在时刻 $t=1$ 时, G 使行星 P_1 沿 P_1S 运动,但同时,惯性力使行星由 P_1 沿 P_1P_2 方向运动。试指出 $t=1$ 及 $t=2$ 时行星在引力与惯性力的合力下的合力方向。

(3)试比较三角形 SP_1P_0, SP_1P_2 的面积,并由此推出开普勒定律。

第四章 漫说分形与混沌

§1 我们到底生活在几度空间里？

一、从碳分子到海岸线

大约在 20 世纪 30 年代和 60 年代,有两件完全不同的事情在困扰着两位在完全不同领域里工作的科学家。后一位是加拿大的工业化学家,名凯伊(B.H. Kaye),他接受了一项有关环保工业的研究任务:怎样从燃烧的烟气中区分出有害物?作为试点,他选择了碳黑与油烟作为他的研究对象。两者在商业上几乎使用同一名称,但前者是天然气在缺氧条件下燃烧而成,是制造橡胶的重要原料,它不含任何高分子碳化合物,因此基本上不含有致癌物(医学界已经弄清楚,正是不完全燃烧的含碳高分子物才会产生致癌物)。但油烟就不一样了:它是任何石油和煤不完全燃烧产生的黑色沉积物的总称,自然含有致癌物。但是怎样来区分它们呢?工业化学家们又进一步发现,如果把一个碳分子的边界当作一个椭圆来看,那么它的长轴与短轴比是不是大于 3 往往是这个碳分子是不是完全燃烧的一个很好的客观判据。凯伊的主要工作便是广泛研究碳黑颗粒的形状和尺寸。在高倍电子显微镜下,他首先发现碳黑颗粒的边界并不是一条椭圆,只能近似地当作它是一个椭圆。为了控制这种近似所带来的误差,他希望知道碳黑颗粒的周长。正是这个问题开始困扰了他:在他的想像中,愈是高倍的电子显微镜,愈是应该得到更精确的周长值。但是结果却出乎意外:用

放大倍数更高的新设备观察时虽然可看到更详细的细节,但周长却在无限制地增长(见图4-1)。但一个有限图形的周长会无限地增长,这在几何上是难以想像的事。

凯伊很快从资料获悉,几十年前一位地理学家理查逊(Richardson)在测量大不列颠海岸线的长度时,也碰到过类似问题:愈是使用公认的提高精度的精确方法(例如尽量多设测量点,即取一个分段尽可能小的折线来代替海岸曲线)去测量,得到的海岸线就愈是无节制地增长,见图4-2。



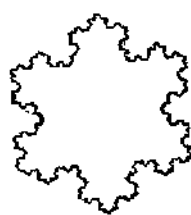
碳黑轮廓
(高放大倍数)

图4-1



大不列颠海岸线

图4-2



N级三分Koch岛

图4-3

凯伊从这两件毫无关联事情的类似性里意识到,他和理查逊可能碰到了一种比较复杂的新曲线。而后在一些纯数学的书,他找到的一种被称为柯赫(Koch)岛的曲线如图4-3。

注意图4-3画出的柯赫岛只是一种象征,下面我们马上要给出它的正式定义。现在对于凯伊来说重要的是要问:它碰到的碳黑颗粒的边缘曲线(或是理查逊碰到的大不列颠海岸线)是不是正是与柯赫岛边缘同类的曲线呢?为此,让我们先来看看什么是真正的柯赫岛。

二、神秘岛——柯赫岛

我们这里要说的,并非法国作家儒勒·凡尔纳笔下的神秘岛,

应该称之为几何学家柯赫的神秘岛。图 4-3 画出的只是柯赫岛的一种近似,真正的柯赫岛是画不出来的。但我们可以说出它的构造方法,从而可以画出尽量精确的近似图。请看下图,其中图 4-5 是从图 4-4 这个正三角形让它在每边的三等分中段上凸隆起一个小正三角形得来的(每一个小三角形的边长是原边长的三分之一,这时图 4-5 变成一个带有 12 条边的六角星)。现在在图 4-5 这个十二边形里,让它的每一边的三等分中段上再各凸起一个更小的小三角形,这样我们就得到一个特别的带有 $48(=4 \times 12)$ 条边的正四十八角星。然后我们让这种“在每一边的三等分中段上凸起一个小正三角形”的手术永远延续下去($4 \times 48 = 192$ 边形, $4 \times 192 = 768$ 边形,等等),那个最后得到的理想中的曲线便称之为柯赫岛(上面图 4-3 只画出了一个有 192 条边的近似柯赫岛)。

我们马上可以算出一个有趣的事实:柯赫岛的面积总是有限的,但它却具有无限长的边界。

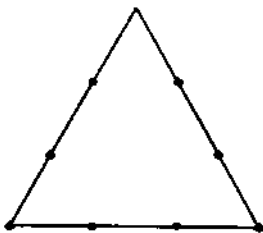


图 4-4

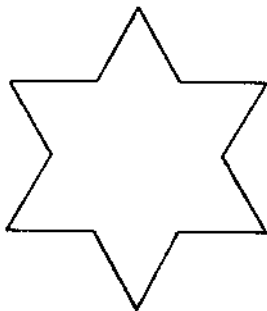


图 4-5

我们从图 4-4 开始,称之为 0—级近似柯赫岛;同样,分别称图 4-5、图 4-6 等为它的 1—级、2—级近似等。设 0 级近似的边长是 $L_0 = 3$,那么很容易算出它的面积(即边长为 1 的正三角形面

积)是

$$A' = \frac{\sqrt{3}}{4}。$$

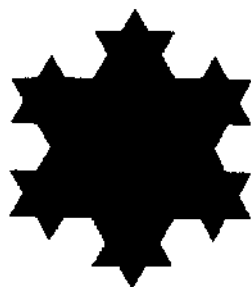


图 4-6

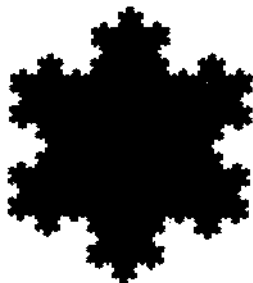


图 4-7

注意 1 级近似比 0 级近似多了 3 个小三角形, 每一个小三角形的面积的边长是大三角形的边长的三分之一, 因此小三角形的面积是大三角形面积的九分之一, 所以 1 级近似柯赫岛的面积比 0 级近似的面积多了

$$A = 3 \times \frac{1}{9} \times A' = \frac{A'}{3},$$

即 1 级近似柯赫岛的面积为

$$A + A' = A' \left(1 + \frac{1}{3} \right) = \frac{4}{3} \times A' = \frac{\sqrt{3}}{4} \times \frac{4}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}。$$

再看 2 级近似, 依照作法, 它比 1 级近似多了 12 个更小的三角形, 而每一个小三角形是 1 级近似中的小三角形的九分之一。上面已经用 A 来记 1 级近似中 3 个小三角形的面积和, 于是数一下可以知道, 2 级近似的面积比 1 级近似多了 $\frac{4}{9} \times A$, 因此 2 级近似的面积是

$$A' + A = \frac{4}{9} \times A。$$

由于某一级近似的面积总是比前一次近似的面积多出部分再多九分之四(即每一个小三角形在下一级近似里将产生4个小的新三角形,这些新小三角形的面积是原来小三角形的九分之一),所以我们可以写出第 n 级近似柯赫岛的面积公式的通式如下

$$\begin{aligned} S_n &= A' + A + \frac{4}{9}A + (\frac{4}{9})^2A + \cdots + (\frac{4}{9})^{n-1}A \\ &= A' + A(1 + \frac{4}{9} + (\frac{4}{9})^2 + \cdots + (\frac{4}{9})^{n-1}). \end{aligned}$$

现在真正柯赫岛的面积应当是取极限

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n.$$

不难算出这个极限的值,只要注意 $A' = \frac{\sqrt{3}}{4}$, $A = \frac{A'}{3} = \frac{\sqrt{3}}{12}$, 以及

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (1 + \frac{4}{9} + (\frac{4}{9})^2 + \cdots + (\frac{4}{9})^{n-1}) = \frac{1}{1 - \frac{4}{9}} = \frac{9}{5},$$

最后可得柯赫岛的面积是

$$S = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{\sqrt{3}}{12} \times \frac{9}{5} = \frac{\sqrt{3}}{4} (1 + \frac{3}{5}) = \frac{2\sqrt{3}}{5}.$$

很显然这是个有限数,即柯赫岛具有有限面积。但是另一方面,要是我们来计算柯赫岛的周长,则可以发现,每一次近似的边长都是前一次近似的边长的 $\frac{1}{3}$,但前一次近似的每一条边变成下一次近似中的4条边,所以这一次近似的周长应是上一次近似的周长的 $\frac{4}{3}$ 倍,用 L_n 来记 n 级近似柯赫岛的周长(注意0级近似的周长 $L_0 = 3$),则我们可以写成

$$L_n = (\frac{4}{3})^n L_0.$$

由此可以看到,柯赫岛的边界长 L 应当是下面的极限

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} L_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 3(\frac{4}{3})^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{4^n}{3^{n-1}}.$$

由于 $\frac{4}{3} > 1$, 这是个无穷大, 即, 当 n 愈来愈大时, L 会变得要多大就有多大。换句话说, 柯赫岛具有无限长的周界。

回到凯伊和理查逊的困惑问题, 既然真正的柯赫岛画不出来, 而他们的对象又是实实在在的东西(即碳黑和海岸线), 这又是怎么回事? 想来他们碰到的虽然不刚好是柯赫岛, 至少也是一类柯赫岛的同类物, 又因其实际上存在, 想必一定是这类理想中的曲线的相当高级的近似曲线。拿柯赫岛来说, 要是他们碰到的是一条, 例如 $n = 10000$ (或者更大) 的 n -级近似柯赫岛, 则这时柯赫岛面积仍不会超过上面这个数 S , 但它的周长大约等于

$$L_{10000} = 3 \times \left(\frac{4}{3}\right)^{10000} \approx 7.31959981878815 \times 10^{1249}.$$

这个数大致等于在 732 后面加上 1247 个 0, 不管你采用什么测量单位, 这都是个在实验室里无法进行测量的天文数字。可见, 凯伊担心他们已经遇到了新东西, 并非全是空穴来风。我们在后面还要仔细讨论凯伊与理查逊的研究工作, 但目前引起我们好奇心的应当说是像柯赫那样一类怪曲线。

三、什么是空间的维数

让我们再回到柯赫岛的边界曲线, 我们应当怎样来设想这么一个现象: 在一块有限的空间里怎样才能放进一条要有多长就有多长的曲线呢? 如果我们放下了, 由于它被压挤在一起, 势必密密麻麻地完全覆盖一块面积。如果这样, 边界曲线看来已经没有我们直观中的线状的形象了。这样的曲线你还能称它为曲线吗? 如果不称其为曲线, 是不是该称之为面, 或是别的什么东西呢? 等等。提出这样一些问题是十分自然的, 因为那跟我们常识里的几何直观相当不协调(注: 这个问题最早是意大利数学家皮阿诺(Peano)提出来的, 他真的做出一条曲线, 能够填满一个正方形)。倘使我们再要问, 我们平常的几何直观又是打哪儿来的? 我们就

要问一个更带有根本性的问题：我们到底生活在几度空间里？

在日趋现代化的今天，我们常常可以听到一些挺时髦的词儿流行在人们的嘴边：“三维影视”（即立体电影），“三维动画”（指立体游戏软件），“三维或多维经济模式”、“三维管理方法”。曾经有一个时期，三维或多维这两个词用得挺烂的。说来说去，无非是在强调一种立体概念或多层次概念，似乎我们原来一直是生活在二维甚或一维空间，今天才重见天日似的。这实在是一种误导。事实上，我们对维数这个词儿是知道得极少极少的。

人们对于所处空间的感觉自然是从其周围对象的感觉开始的，例如我们每个人都知道有前方、侧方与上方3种行动选择，我们对于周围事物的感觉则常有长、宽与高3种度量概念（对于一条大河，则是长、宽与深）。同样，要想确定某一事物（例如一座著名宝塔的塔顶）的位置，只要知道它的经度、纬度与高度3个数量（常称坐标）就可了。是不是因为老碰到这个数字3，我们就说我们是生活在三维空间里呢？拿人和一只甲虫来比较，区别之一是人可以翱翔天际，但甲虫不能。是不是可以说甲虫生活在二维空间里呢？也不见得，因为有些甲虫在被围困在一圈绳子中间时，常常能越过绳子爬出来，可见它们有时也是识得上方的。但实验证明，一只蝎子确实不能从包围的一圈绳子中爬出来，它只会绕着绳子转个不停。我们自然很难设想，在一只凶狠的蝎子的脑子里居然只有二维概念。

对于上面所说的二维与三维概念，首先被数学家注意到了，但是开始时也是十分模糊的。例如我们在前章里说过，欧几里德在《几何原本》中曾经企图定义点和直线的概念，但并不成功。只是在欧几里德以后，数学家还是把一条直线叫做一维，一张曲面叫做二维，一块立体叫做三维。再以后，有人把一个点叫做零维。要注意的是，这些都是数学家为了研究学问的方便，才这么理想化的，究竟维数是什么意思，还是没有人能给出确切的定义。当然，在现

实生活中这些概念都不存在。你能把一段细绳子叫做一维曲线吗？你能把一张薄饼子称为二维曲面吗？事实是，世上万物无不都具有大小粗细厚薄，即统统都是三维的。

还要注意的是，没有人会去谈论四维物或五维物的。有人曾经设想过，假如人是识得四维的动物，那么这大千世界更要变得光怪陆离，不可收拾。例如，在你周围的人便会突然出现或突然消失：因为他们都从空间的第四维归去来兮；你还有本事能知过去未来，因为那只不过是你在第四维上前后观望了一下而已。

我们说了这么多现象，只有一个目的：说明维数是个十分神秘的、很不容易说清楚的概念。数学家直到 20 世纪 30 年代才真正弄清维数的定义。我们在下一节中再来谈这个问题。

回到我们上面提到的柯赫岛边界曲线那样一类怪曲线，它对于已经成形的维数的定义来说实在是个考验：从几何上来理解，这些怪曲线的主要特征是，你既不能称它为一维曲线，又不能称它为二维面。仍然是数学家们提出了一个想法：能不能用一个介于 0 与 1 之间的分数去定义它的维数呢？乍看之下，这个想法近乎荒唐。从我们上面提到的种种现象里，即使是在理想的情况下，我们也从未想到过维数会是个分数。但是有一位数学家门代勃劳 (Mandelbrot) 早在 1960 年就在美国杂志《科学》上发表了的想法。他最初用这么一句话来解释：“如果说我们现在平均每个家庭有 2.2 个孩子，谁会对 0.2 个孩子觉得不可理解呢？”

像任何重大的新思想的产生一样，当门代勃劳于 1977 年出版了详细论述分数维的书《分形：形成、机遇和维数》以后，它创造的专论分数维数的学科——分形学——从此诞生，并且随之而来的是在工程、化学、测量、物理、机械等许多领域里提供了无穷无尽的应用，时至今日，可以说仍是方兴未艾。我们在下一节中将要详细讨论维数，既有整数维数，也有分数维数。作为本节的结束，让我们列举门代勃劳给出的几个例子和它们的维数。下一节会谈论它

们的计算方法。

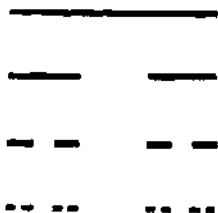


图 4-8



图 4-9

柯赫岛的边界维数 $= \frac{\lg 4}{\lg 3} = 1.2618$;

图 4-8 康托(Cantor)尘, 维数 $= \frac{\lg 2}{\lg 3} = 0.6309$;

图 4-9 谢品斯基(Sierpinski)地毯, 维数 $= 1.5850$;

图 4-10 门格(Menger)奶酪, 维数 $= 2.7268$ 。

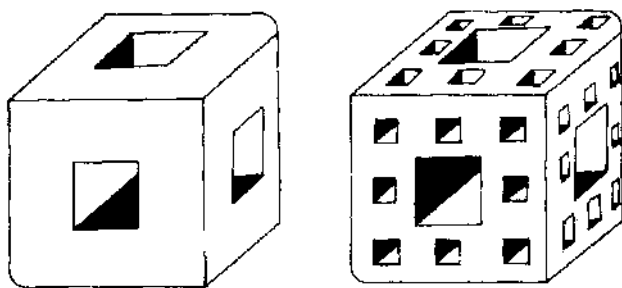


图 4-10

§ 2 维数与分形理论

一、整数维数

对于我们所处空间的维数,数学家有着自己的看法,他们以下列方式定义了三维空间:

$$R^3 = \{(x, y, z); x, y, z \text{ 都是实数}\}$$

这是一个纯粹的数学定义,意思是,把所有可能的三实数构成的组 (x, y, z) 的全体放在一起,就构成了三维空间 R^3 。如果我们把一个三实数组 (x, y, z) 叫做 R^3 中的一个点,则 x, y 和 z 便可称之为该点的坐标。因此,三维空间是由无数个点组成的,每一个点则又由它自己的坐标决定。人们事实上已经接受了这个 R^3 作为我们日常生活的空间,因为我们刚才已经说过,在我们周围差不多每样东西都可以用 3 个数决定。我们也把这个 3,称为 R^3 的维数。

下一个问题是,在 R^3 中给了一个几何对象(如曲线、曲面或一个半径为 1 的球体——称之为单位球)之后,怎样来判断或给出它的维数来? R^3 相当大(大到无限),但在其中的一个单位球则不算大,它们会有一样的维数吗?在欧几里德的几何里,已经知道,维数是几何体内在的一种重要性质,应该跟几何体的大小无关(例如一条一维直线有无限长,但一块球体总是有限的,却被认作是三维的)。问题是,在 R^3 中有着无穷无尽的几何图像,或者说,有着不计其数的集合,有没有一个一般的方法,能对任何集合给出它的维数来?而且这个定义还必须具有普适性:当我们用它来定义简单几何对象时,应当有我们直观的维数值(例如 R^3 的维数是 3,直线、曲面和球体等几何对象的维数是 1, 2 和 3 等)。这就是数学家面对的新问题。

20 世纪二三十年代出现了一门新的数学,叫做拓扑学(Topol-

ogy, 老的叫法是 analysis situs)。这是一门专论几何对象的形变性质, 而不涉及其大小的几何学。它的开山鼻祖是布旺加莱、库拉套斯基(Kouratauski)等人。事实证明, 这门新几何今日已经成为当代数学的重要基础。

上述这个维数问题便受到当时许多拓扑学家的极大关注, 有些人对之进行了尝试。有一点要强调的是, 在那个时代, 人们心目中的维数当然只会是整数。也许正因如此, 维数问题的解决进展得很缓慢。1937 年美国数学家霍维茨(Hurewicz)出版了一本书:《维数论》(Dimension Theory), 以一种十分精确十分直观的方式给出了维数的定义, 用他的定义, 相当广泛也相当复杂的一类集合都可给定维数。并且, 在他定义的维数概念下, 上面说过的 R^3 、直线、曲面和球体的维数正好是 3, 1, 2 和 3 等。霍维茨的工作可以说是比较完整地论述了到那时为止有关的维数定义和有关问题, 遗憾的是我们不能介绍他的这个定义, 因为那将要涉及太多的专门知识。我们将要采取的是一种完全直观的方式, 并且, 这个方法还可以用来讨论我们更感兴趣的问题——分数维。

顺便说一下, 与 R^3 一样, 我们还可以定义二维空间 R^2 和 n 维空间 R^1 如下:

$$R^2 = \{(x, y); x, y \text{ 都是实数}\}; R^1 = \{(x); x \text{ 是实数}\}.$$

不言而喻, R^1, R^2 正是我们日常所说的直线和平面。更一般地, 我们还可以定义更抽象的 n 维空间

$$R^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_1, x_2, \dots, x_n \text{ 均为实数}\}.$$

当 n 等于 4 或 5 时, R^n 便是我们刚才谈到过的四维空间和五维空间。也是在霍维茨那本书里, 首先证明了 R^n 的维数正好是 n 。

二、维数的定义

在 R^3 里任意给了一个几何对象 G (例如一个单位边长的正方体), 我们把 G 放大成一个相似的图形 G' (例如让单位正方体

放大成一个边长为 2 的正方体), 设放大的比例数是 s (例如上面那个正方形的放大比例数是 $s=2$), 它的体积因此也跟着放大, 假设体积被放大了 n 倍 (容易看出, 上面正方体的体积则被放大了 $n=8$ 倍)。我们用一个数 d 把上面两个数 n 和 s 以下面公式联系起来

$$n = s^d, \quad (1)$$

则我们就把数 d 叫做几何体 G 的维数。如果以 $V(G)$ 表示几何体 G 的体积, 则把公式(1)写完整了就是

$$\frac{V(G')}{V(G)} = s^d. \quad (2)$$

(例如上述正方体的维数就得出 $8=2^d$ 来解出, 即是 $d=3$ 维的。) 如果用一下对数概念, 则在(1)的两边同时取对数, 得

$$\lg n = d \times \lg s.$$

因此最后得维数公式

$$d = \frac{\lg n}{\lg s}. \quad (3)$$

我们要强调的是, 现在给出的定义 (跟霍维茨的定义毫无关系), 只是一个权宜之计, 目的是为了说清楚问题。但这个定义对于 R^3 中的正规有限图形是有效的 (它跟霍维茨的定义值几乎一致), 特别, 它还能用来讨论分数维数。

我们先来计算具有整数维数的几何图形。

单位直线段 L 。这时放大 s 倍, L 的长度便放大 s 倍, 故维数是

$$d = \frac{\lg s}{\lg s} = 1.$$

单位边长的正方形 D 。单位正方形的面积为 1, 放大 s 倍后, 面积应为 s^2 , 可知 n 等于 s^2 , 因此 D 的维数是

$$d = \frac{\lg(s^2)}{\lg s} = 2 \times \frac{\lg s}{\lg s} = 2.$$

半径为 r 的圆周 S 。这时其周长是 $2\pi r$ ，而半径为 sr 的圆周周长是 $2\pi sr$ ，于是 $n = s$ ，故维数是 1。

单位半径的圆盘 C 。其面积为 π ，半径放大 s 倍后，面积变成 $\pi \cdot s^2$ ，因此 $n = s^2$ ，故其维数是

$$d = \frac{\lg(s^2)}{\lg s} = 2.$$

单位正方体的维数上面已经算过是 3。

半径是 r 的球面 S^2 。注意 S^2 的面积是 $4\pi r^2$ ，但半径为 sr 的球面面积是 $4\pi(sr)^2$ ，因此 $n = s^2$ 。于是 S^2 的维数是

$$d = \frac{\lg s^2}{\lg s} = 2.$$

半径是 r 的球体 D^3 。其体积是 $\frac{4}{3}\pi r^3$ ，半径为 rs 的球体体积是 $\frac{4}{3}\pi(sr)^3$ ，于是 $n = s^3$ ，从而 D^3 的维数为 3。

以上计算十分简单，下面我们来计算一个稍为繁一点的例子。

一个勾、股、弦分别是 A, B 和 C 的直角三角形，我们选择的放大比例数是 $\sqrt{5}$ 。原三角形的面积是 $\frac{AB}{2}$ ，放大后的三角形的面积是 $\frac{(\sqrt{5}A)(\sqrt{5}B)}{2} = \frac{5AB}{2}$ ，故

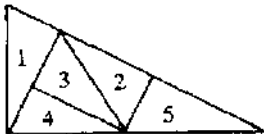


图 4-11

面积放大了 5 倍，即 $n = 5$ 。于是根据维数公式，我们得

$$d = \frac{\lg 5}{\lg \sqrt{5}} = 2.$$

还是二维对象。图 4-11 是放大 5 倍的示意图。

三、分数维的计算

我们现在用上面定义的类似想法来计算一些图形的分数维

数。我们只讨论 4 个例子,即柯赫岛、康托尘、谢品斯基地毯和门格奶酪。

柯赫岛(见图 4-7)

根据定义,柯赫岛的周界曲线是一条具有无限多个锯齿的理论上的曲线,但是它相当整齐——我们说它具有自相似性。意思是,从这条曲线上任意取出一小段 L ,则这小段 L 中的任意一个更小段,都与原小段 L 相似。让我们讲得更精确一些:柯赫曲线的任一片段 L 都可以看作是由 4 个与它完全相似的小片段组成,而每一个相似小段都是 L 的(比例系数为 $\frac{1}{3}$)缩小(请见前文的图 4-7)。再把这句话倒过来说就是,将 L 放大 3 倍,就得到 4 个与 L 完全一样的片段。因此根据我们维数的定义就是, $n=4$, $s=3$,而柯赫岛周界曲线的维数就是

$$d = \frac{\lg 4}{\lg 3} = 1.2618。$$

这是一个维数大于 1 小于 2 的曲线。

我们要强调的是,正是由于它的自相似性,我们才顺利计算出柯赫岛的周界曲线来。如果换一条别的曲线,而这条曲线却不具有自相似性,例如黑碳颗粒的边界,计算就是另一回事了。

康托尘

康托尘的作法如下(图 4-8):在一条长度是 1 的直线段上剔去中央那个三分之一段,保留两边那两个三分之一段,这时我们说我们得到了康托尘的第一次近似;下一步是对留下的两小段的每一个再进行同样手术“剔去中央三分之一段,保留两侧两个三分之一小段”,这就得到了二次近似。因此两次近似由 4 个小线段组成,每一个的长度是 $\frac{1}{9}$ 。完全一样地可以作出康托的三次近似、四次近似等。显然,三次近似由 8 个小线段组成,每一个的长度是

$\frac{1}{27}$;四次近似由 16 个小线段组成,每个长度是 $\frac{1}{81}$,等等。一般地,第 n 次近似由 2^n 个小线段组成,每个长度是 $\frac{1}{3^n}$ 。让 n 趋向无限大,就得到了一条理想中的曲线——康托尘。

严格说来,我们是不能把康托尘当作一条曲线的,想像中它应当是分布在一条单位直线上的的一组疏疏朗朗的飘逸的点。例如,当我们用坐标来记这条单位直线时,则在 $\frac{1}{3}$ 与 $\frac{2}{3}$ 之间完全没有康托尘的点;同样在 $\frac{1}{9}$ 与 $\frac{2}{9}$ 之间以及在 $\frac{7}{9}$ 与 $\frac{8}{9}$ 之间也完全没有康托尘的点,等等。但是康托尘却仍有自相似性:每一次近似里的每一个小段 L ,都可以看作由两个跟 L 完全相似的更小的片段组成,但缩小比例数是 $\frac{1}{3}$ 。根据这个自相似性,用计算柯赫岛完全一样的道理可知康托尘的维数应是

$$d = \frac{\lg 2}{\lg 3} = 0.6309,$$

即维数不到 1。

说到这个康托尘——在拓扑学里又叫做康托集——是个非常重要的集,它有许多意想不到的性质不是肉眼可以一下能看出的。举个例子,康托尘的点并不疏稀,假如我们同意用一一对应的办法来比较两组数的多少的话,那么已经证明,康托尘的点比所有自然数还要多。我们上面讲过,一个点可以称为具有维数 0。2 个点、3 个点或有限个点组成的点集当然也可以视为维数为 0,但康托尘既然包含了这么多个点,就不能设想它的维数是 0。看来我们算出它的维数是 0.6309,有它的内在几何意义。

谢品斯基地毯

在一个正三角形里,剔去一个与之相似的小三角形,这个三角形的顶点正好落在原三角形的三边的中点上(见图 4-9)。这样

就剩下 3 个小三角形组成的图形(这些小三角形的边长是原三角形的一半,即它的缩小比例数是 $\frac{1}{2}$),称之为谢品斯基地毯的第一次近似。在 3 个小三角形里再施行“剔去一个中间小三角形”的手术,我们就得到第二次近似——它由 9 个更小的小三角形组成,每一个的边长是最初那个三角形的 $\frac{1}{4}$ 。把这个过程无限制地继续下去,我们就得到一个分布在三角里的、由稀稀落落的点构成的一片图案——称之为谢品斯基地毯。我们来计算它的维数。

仍然用它的自相似性——谢品斯基地毯的每一个小三角形由 3 个与它完全相似的被缩小的小三角形组成。由于每两次近似的缩小比例是 $\frac{1}{2}$,因此我们得 $n=3, s=2$ 。于是按维数公式,我们得到谢品斯基地毯的维数是

$$d = \frac{\lg 3}{\lg 2} = 1.5850.$$

注意此例与前两例的不同:与柯赫岛不同的是,谢品斯基地毯来自一块二维三角形的镂空,而前者来自一条一维直线的扭曲;形象地说起来,后者是从一个二维的东西减掉一点,前者是从一维的东西堆积一点。与康托尘不同的是,两者都是一片稀落的点,但谢品斯基地毯中的点集是分布在一块二维盘子(三角形)上,而康托尘的点集则是分布在一段一维线段上,所以前者的维数在 1 与 2 之间,后者的维数在 0 与 1 之间。

门格奶酪

将一块单位立方体用下面方法来穿洞:先将每个面(共有 6 个)分成 9 等份(各为一缩小比例为 $\frac{1}{3}$ 的小正方形),选其当中一个垂直打洞,这样也就打穿了对面那个面的中央小正方形。用完全一样的方法从另外两对对立面垂直打洞。这样我们就得到一个从

哪个面都能穿透的立方体——称为门格奶酪的一级近似。

上述做法等于是,先将立方体分成完全相等的 27 个小立方体,然后剔去中心段——注意共剔去了 7 个小正方体,还余下 20 个(见图 4-10)。现在对余下的 20 个立方体的每一个再进行一次上述类似的打洞手术。结果我们得到 $20 \times 20 = 400$ 个更小的立方体,称为门格奶酪的二次近似。将这个打洞手术无限制地进行下去,我们就得了一个像是被蛀虫蛀空的蛋糕,称之为门格奶酪。我们来计算它的维数。

现在,不需要再多重复理由,我们可以知道, $n = 20$, $s = 3$ (即缩小比例数是 $\frac{1}{3}$),于是依照维数公式我们得到门格奶酪的维数是

$$d = \frac{\lg 20}{\lg 3} \approx 2.7268$$

这一次我们得到了一个介于 2 与 3 之间的维数。

四、分形理论

我们上面对于 4 种怪图算出了它们的维数,对于出现分数维数这样一个事实,有必要强调几点。

首先,这里的维数概念已经不像三维、四维空间那样有着非常明确的几何意义(例如长宽高之于三维,等等)。分维数只是一种合理的定义,用来刻划一类新的几何现象,或者可以说是在刻划一些几何图形的表面的粗糙程度——当你用手抚摸一条像柯赫岛的边缘曲线时,你的第一个感觉是相当粗糙,它不如一条直线那样细巧,又不像一块平面那样光滑。这时分数维就是你这样的感觉的一个最好的描绘。同理,你也可以这样去理解康托尘、谢品斯基地毯和门格奶酪。

其次,从维数计算中我们还可发现这样一条几何规律:镂空的方体比平面强(门格奶酪的维数介于 2 与 3 之间),蛀光的地毯比

丝线强(谢品斯基地毯的维数介于1与2之间),最后,康托尘比没有强。上面这三句话的另一个意义是:康托尘的长度、谢品斯基地毯的面积和门格奶酪的体积实际上都等于零。我们可以用数列极限概念来严格证明这件事。

记得我们是从一条长度为1的线段无限步地逐次剔去一系列小线段才得到康托尘。因此康托尘的长度应当是

$$\begin{aligned} & 1 - \left[\frac{1}{3} + 2 \frac{1}{9} + 4 \frac{1}{27} + 8 \frac{1}{81} + \cdots + 2^{n-1} \frac{1}{3^n} + \cdots \right] \\ &= 1 - \frac{1}{3} \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3} \right)^n + \cdots \right] \end{aligned}$$

上式方括号内的数正好是极限值

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{2}{3} \right)^n \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 - \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}}{1 - \frac{2}{3}} = 3, \end{aligned}$$

所以康托尘的长度是 $1 - \frac{1}{3} \times 3 = 0$ 。

对于谢品斯基地毯,我们是从一个边长为1的正三角形(因而面积是 $A = \frac{\sqrt{3}}{4}$)无限步地剔去一些小三角形得到的,因此它的面积应是

$$\begin{aligned} & A - \left[\frac{A}{4} + 3 \frac{A}{16} + 9 \frac{A}{64} + \cdots + 3^{n-1} \frac{A}{4^n} + \cdots \right] \\ &= A \left\{ 1 - \frac{1}{4} \left[1 + \frac{3}{4} + \left(\frac{3}{4} \right)^2 + \cdots + \left(\frac{3}{4} \right)^n + \cdots \right] \right\} \end{aligned}$$

方括号内的数正好是极限值

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1 - \left(\frac{3}{4} \right)^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}} \right] = 4,$$

因此谢品斯基地毯的面积是 $A\left(1 - \frac{1}{4} \times 4\right) = 0$ 。

同样可以算出门格奶酪的体积也是零。

第三,在上面4个分数维数的计算中,我们说过,我们实际上非常强烈地依靠着图形的自相似性。没有这一点,计算则无从谈起。自然要问,一旦碰到没有自相似性的图形时怎么办?正是为了解决这个问题,数学家发展了一门新兴科学——分形学。

在这门新兴学科里,首先是给出分数维数的严格定义,称为豪斯道夫(Hausdorff)维数。我们上面所给的定义只是豪斯道夫维数的一种非常直观的简化,严格说来是不能称之为真正定义的。也正因为如此,我们才只能论及具有自相似性的图形的维数。

为形形色色的图形提供分数维的计算方法还不是分形理论的惟一目的,一个更重要的目的是利用分形现象来研究在数学、物理、化学乃至经济学里出现的一些微观或随机模型。例如物理学中有名的布朗运动。

【附录】关于维数的童话

读者也许读过一本有名的儿童读物《爱丽丝漫游仙境》,其实这本书是位真正的数学家写的。自从分形理论出现以后,许多科学家都期望出现一本《仙境》的续集。在那个仙境里,爱丽丝将会碰到层出不穷的分形集:例如她住的旅馆一定有门格奶酪那种形状;她走过的小道一定是一条柯赫曲线;她上的楼梯一定是一座魔梯;她食用的一定是明科夫斯基腊肠(请见本章思考题1),等等。因为每一种分形都有无穷长度或边界,这就给爱丽丝带来无穷无尽的烦恼。

比这更早的,1884年就有人出版了一本数学童话:《扁平国》。作者是一位小学校长,也是一位神学和文学的研究家。现在看来此书可贵之处是,尽管那时拓扑学还没有成形,但作者讲述的是一个(三维)球体访问(二维)正方形的故事,已经涉及许多偏离常人

直观以外的几何现象,读起来令人爱不释手。

关于这种用童话或漫画形式来表达复杂的几何或物理现象的想法,国外已经作过许多尝试。1984年本人从国外获得一本刚刚出版的漫画集《分形》,作者是阳·斯蒂伐。书中讲述两个朋友的一次旅行中所碰到的形形色色的分形集,其有意义之处是书中完全用漫画形式来陈述复杂的分形理论。本处所给的维数定义即出自该书,令人遗憾的是,我国至今还没有同类出版物。

§3 混沌现象

一、怪吸引子

我们在谈论人口问题时曾经说起人口会不会有朝一日发生爆炸或完全无序这么一个问题。那个问题主要是研究再生曲线引起的,其主要原因来自所谓迭代现象。其实这是迭代过程的一个普遍现象,当然只是在近代才被发现,并由此产生了一门新的、介于数学与物理等好几门学科之间的边缘科学——混沌理论。其中一个重要内容就是所谓怪吸引子。

早在1963年一位美国气象学家劳伦茨(Lorenz)为了更精确地研究一类流体现象,他把一组现成的但较为复杂的微分方程组进行了化简,结果发现,方程化简了,简化方程所描述的流体现象已经跟原来的流体过程一点关系都没有了。对此他并不感到意外,因为在许多研究工作中,过分的简化会导致失真,这是常见的失误。如果他还想研究那个流体现象,那他就必须仔细地再一次为他的流体过程提供一个更恰当的化简系统。但是一件惊人事情的出现,使他完全失去了对原来流体过程的兴趣,却把全部精力都关注在他那个失真的化简系统上了。这个失真的化简系统是日后极为有名的劳伦茨模型。为了忠于史实,我们把这个三元非线性

性常微分方程组抄在下面

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma(x-y), \\ \dot{y} = -xz + rx - y, \\ \dot{z} = xy - bz, \end{cases}$$

这里 x, y 和 z 是代表系统坐标的变量, 而 r, b 和 σ 则是某些物理常数, 通常称为参数。劳伦茨模型从表面上看不算复杂, 问题是它的相曲线——这是微分方程理论中的专门术语, 表示以 x, y, z 为坐标的点随着时间改变在空间中画出的曲线——随着参数的改变将变得愈来愈复杂, 其特点是无序、敏感、混乱等; 当参数无限靠近某些数时, 那相曲线绘出的动态图形便形成了一种被称为怪吸引子的东西。

什么是怪吸引子呢? 以本书的数学要求而言, 作者实在想不出适当的形象模型提供给我们的读者。简单地说, 就是这样一种运动状态: 它有一种内在随机性, 表现出非常强的稳定性和敏感性, 并且, 它还具有我们在上文介绍的分形理论中的自相似性。

在日常生活中我们勉强找到一个例子是被动吸烟。设想有个人正在吞云吐雾地抽烟, 再设想旁边有个人一口气把那位瘾君子吐出来的烟全部吸将进去。我们说, 那位被动吸烟者的被害过程, 正好是怪吸引子的一个描述。那一大块烟雾被慢慢吞吸, 直至消失, 这表示这块烟雾趋向的稳定性; 你随便在烟雾块中用手指碰它一下, 烟雾便激烈地动起来, 这表示它的敏感性, 等等。

差不多在 1964 年, 家住法国名城尼斯的一位天文学家爱依 (Henon), 用一具袖珍计算器对一类挺简单的平面坐标变换进行迭代。他大约算了 700 多次迭代, 找到了一个点, 这是一个周期为 7 的周期点。具体地说, 他的对象是这么一个简单代换 (将 x, y 变为 X, Y)

$$X = 1 + by - ax^2, Y = x$$

(其中 a, b 是常数) 因此他的迭代计算公式便是

$$x_{n+1} = 1 + by_n - ax_n^2$$

$$y_{n+1} = -x_n$$

本来找到一个周期点并不算什么大事,但这一次却不同,一旦出现了周期 7 的周期点,进一步的迭代立刻出现了混乱现象。情形与劳伦茨怪吸引子十分相似,以至于人们也把它算作是一个怪吸引子。我们在下文再来详谈这个问题。

继劳伦茨和爱依以后,人们又在生态学、热力学、动力体系(包括经济行为、社会学)内遇到一些外表形状简单、行为却极为复杂的系统,都具有这些怪异性。这就是今天已经成形的、我们称之为混沌理论的由来。

怪吸引子的出现对数学家、物理学家们提出了许多新的课题。例如,究竟什么才是混沌态的真正含义?能不能对怪吸引子给出一个严格的数学定义?等等。比较分形理论而言,这方面可以回答的问题更少。这也就完全限制了我们对这个理论的更多介绍。我们下文能够做到的事便只有把问题限制在迭代讨论上。以下介绍三个方面,即直线上(或一维)的迭代、平面上的迭代(或爱依迭代)以及另一些有意义的例子。

我们还要再强调一下,分形理论与混沌理论之所以这么受到人们的关注,有一个重要原因是:从 20 世纪 50 年代起,数学物理学已经由线性模型转到非线性模型的研究。因此近代科学产生了一个相当宽广的领域——非线性理论。而分形与混沌正好是人们在研究非线性理论时获得的特有现象。因此我们可以说,这些理论构成了近代科学中的新特色——非线性现象。

二、再论逻辑斯蒂模型

我们在人口问题的讨论中曾介绍过迭代这一概念。连带还介绍了不动点(稳定的及不稳定的不动点)和周期点等概念。我们特别还拿一个函数 $f(x) = ax(1-x)$ 作为例子,讨论了它所产生的

迭代值 $x_{n+1} = ax_n(1-x_n)$ 当参数 a 变化时所引起的各种变化。我们一定还记得, 对于一定的参数 a 值, 迭代会出现两个周期为 2 的周期点, 对于另一个参数值 a' , 迭代过程会出现 4 个周期为 4 的周期点, ……如果我们把那些使周期点及其周期突然改变的参数值称为分叉值(即如果当 a 跨过某一个数值 p 时, 迭代过程的一个周期为 1(或周期为 2)的不动点变为一个周期为 2(或周期为 4)的周期点, 就称 p 是参数 a 的一个 1 分为 2(或 2 分为 4)的分叉值), 那么我们可以把那--节的讨论打成一张表格在后面。

注意上述函数 $y = ax(1-x)$ 与人口论里讨论过的逻辑斯蒂模型很相似, 习惯上也将之称为逻辑斯蒂迭代。

序号 n	分叉情况	a_n	$\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n+1} - a_n}$
1	1 分为 2	3	
2	2 分为 4	3.449489743	4.751446
3	4 分为 8	3.544090359	4.656251
4	8 分为 16	3.564407266	4.668242
5	16 分为 32	3.568759420	4.66874
6	32 分为 64	3.569691610	4.6691
7	64 分为 128	3.569891259	4.669
8	128 分为 256	3.569934019	4.669
9	256 分为 512	3.569943176
10	512 分为 1024	3.569945137
11	1024 分为 2048	3.569945557
.....

这张表格的第三栏列出的数, 表示参数 a 的分叉值; 第一、二栏表示产生分叉的序号和形势。因此, $a_1 = 3$, 表示当 a 通过 3 时, 将产生 2 个周期为 2 的周期点, 一个稳定, 另一个不稳定; 而 $a_2 = 3.449489743$ 时, 表示参数 a 通过这个数时, 迭代将由 2 个(周期为 2 的)周期点变为 4 个(周期为 4 的)周期点, 2 个稳定, 2 个不稳

定;等等。现在从上表可以看出,当 a 从 $a_2, a_3 = 3.544090359, a_4 = 3.564407266, \dots$ 逐渐变大时,迭代过程将会产生 4 个, 8 个, 16 个, \dots , 512 个, 1024 个 \dots 周期点(并且每个周期点的周期也愈来愈大,且其中至少有一半是稳定的)。相对于这个增加周期点个数与周期长度的过程,人们称之为周期倍化过程。现已确证,无节制的周期倍化正是混沌现象特征之一。

周期倍化现象的结果是什么呢?当参数 a 经过上表第三栏的各个分叉数 a_1, a_2, a_3, \dots 时,理论上有一个极限值 $a_\infty = 3.569945672\dots$,而当参数 a 无限靠近或是超过这个数时,我们能设想发生什么情况呢?

第一,显然,将出现无限多个周期无限长的周期点。换句话说,迭代过程出现了一类特殊的点,这类点的每一个都是周期点,其中有些周期很短,迭代几次就还原了,有些则周期特长,甚至愈来愈长。这样的迭代过程,已经完全处于无序状态,或者说,迭代进程已经处于混沌状态。

第二,上面说过,这些特殊点或周期点的个数也已变成无限大,但这无限大又是怎么一个概念呢?从周期倍化的示意图 4-12 里,我们是否能想起某些我们熟识的事呢?是的,当 a 经过 a_∞ 时,周期点的个数正好与一个我们遇到过的集合的点成为 1 对 1 的对应:这个集合不是别的什么,正是康托尘。于是根据我们前几节关于分形的讨论,我们立刻知道:在混沌状态时,周期点组成的集合恰好有维数 $\frac{\lg 2}{\lg 3} = 0.6309$ 。

第三,对于这么一个集合,或说得形象一些,一个维数为 0.6309 的块状物,其中至少有一半是稳定周期点,因此这个块状物的附近的点在迭代过程中将被“吸引”到这个块状物上,像一块磁铁一样。如果我们能结合上面第一、二个特征来看待这个集合,显然,我们正好碰到了一个怪吸引子。



图 4-12

第四,上表第五栏列出的是各分叉值的间隔比值 $\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} - a_n}$, 这是个数列,随着分叉次数 n 的增加,已被证明有一个极限值。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1} - a_n} = \delta = 4.669201660910299097 \dots$$

这个数被称为费根包(Freigenbaum)常数。令人意外的是,数学家对此数可谓绞尽脑汁,至今还不知道它是个什么样的数:它是个无理数还是有理数?是不是一个像圆周率 π 和自然对数底数 e 那样的超越数,而不是代数数?等等,数学家至今连一个问题都回答不了。

说起来我们研究的逻辑斯蒂模型并不复杂,它的图形也不过是条抛物线,为什么当参数 a 变化时会发生这么多的复杂现象?这个问题可以这样来看:我们把模型写成 $f(x) = ax - ax^2$,就有了一个非线性项 ax^2 ,模型虽然简单,却仍然是个非线性的变换。因此我们说我们上面所讨论的仍然是非线性的复杂性,不过,这种能在非常简单的一维(直线)上发掘出来的新理论,却是近几年才得到的成果,常称为一维动力系统理论。这个理论的产生同时也再一次揭示了混沌现象的复杂性和普遍性。现在让我们在这里列上这个理论的先驱者的名字:约克(J. A. York),李天岩,沙柯夫斯基(Sharkovsky),费根包等。并且我们还要在这里着重介绍一下非常著名非常有趣的李天岩-约克定理。

三、李天岩-约克定理:3 周期带来乱七八糟

我们在讨论逻辑斯蒂迭代模型时看到过,当参数值 a 经过分叉值时,发生了紊乱或混沌,那时我们说,其特征是表现在无节制的周期倍化现象:迭代过程将出现 2 个、4 个、 \dots 、 2^n 个、 \dots 周期是 2, 4, \dots , 2^n , \dots 的周期点。进一步的观察发现,实际上存在的周期点还要多得多。怎么个多法呢? 具体说来就是,随便给一个自然数 m , 总可以找到一个周期点, 它的周期正好是 m 。换句话说,一旦出现混沌态, 周期点和它的周期将会要多少就有多少地增加, 而不光是成倍地增加。因此情况要比我们想像的还要混乱。这究竟是怎么回事呢? 数学家对此长期以来束手无策。不料却是一个偶然的机, 竟将这个问题搞得水落石出, 而且引出一段富有戏剧性的轶事来。

大约在 1972 年, 美国著名华裔数学家李天岩教授当时还在美国马里兰大学读博士, 他的导师是约克教授。他们的同事, 专门研究气象学的数学家费勒(Feller)给了他们几篇劳伦茨的论文, 那时劳伦茨的怪吸引子还没有像现在这样出名, 但却已经引起了数学家的广泛兴趣。几天以后, 约克告诉李天岩说他有个想法挺有意思, 你不妨试着玩儿, 说不定能帮助咱们更好地理解劳伦茨的文章。大约过了一周, 李得到了一个结果, 写出来就是

李-约克定理 假定函数 $f: R \rightarrow R$ 是一个连续函数, 再假定它有一个周期为 3 的周期点, 那么, 对于任意一个正整数 m , 函数 f 就有一个周期是 m 的周期点。(李的定理当然还包含了别的内容, 我们不去说它了。)

李证明这个定理用的完全是初等方法, 即一个大学二年级的学生都能无困难地读懂它。正因为如此, 李和约克当时只觉得这个结果挺好玩, 谁也没有想到实际上他们已经得到了一个日后在混沌理论中大有石破天惊之势, 称得上是奠基性的重大成果。这

个定理以后被称为 3 周期蕴含混沌。也就是我们标题里说的:3 周期带来乱七八糟。

更有趣的是,当李天岩把它的定理投至美国一家挺有名但专登通俗文章的杂志《Mathematic Monthly》时,竟遭退稿,理由是“太含有研究性,不合读者口味”。由于没有时间改写,那篇日后将会成人间瑰宝的奇文就此在李天岩的抽屉里被搁置了整整一年。要不是另一位大师造访马里兰大学,真理“3 周期蕴含混沌”也许就此烟没不彰,再不能重见天日。

现在让我们说明一下李-约克定理的意义。

李-约克定理的第一个意义是回答了上文提到的“周期要多长就有多长”的问题:在所有的周期点当中,最要紧的是周期为 3 的周期点;只要有了一个 3 周期的周期点,也就有了一切,因为根据这个定理,我们就有了以任何数为周期的周期点,特别,也就有了周期为 $2, 4, 8, \dots, 2^n, \dots$ 的周期点,即有了周期倍化律,从而也有了混沌。此即:3 周期蕴含混沌。

其次,李-约克定理的适用范围极广:不光对于逻辑斯蒂模型,只要求函数 $f(x)$ 是连续,都能使 3 周期蕴含混沌。因此,对于任何一个连续函数 $f(x, a)$, 其中 a 是参数,我们就有了一个至少是理论上寻找混沌的方法:去求这样的数 a_∞ , 对这个数,我们可以找到一个数 p , 使得 $f^3(p, a_\infty) = f(f(f(p, a_\infty), a_\infty), a_\infty) = p$ 。

李-约克定理以极为简洁的方式告诉人们关于直线上产生混沌的方式和原因,但是从直观上来说也有一定的不足,那就是 3 周期来得稍为突然一些。大多数人在第一次读这个定理时都有一种知其然而不知其所以然的感觉。在回答这个直观性问题时,又发生了一个有趣的故事。原来正当西方数学家在热衷谈论李-约克定理时,有人发现早在 20 世纪 60 年代,前苏联联乌克兰共和国科学院院士、数学家沙柯夫斯基,已经得到过一个比李-约克定理更

为漂亮的成果,只是一直未被人注意(也许是因为沙柯夫斯基还未接触到劳伦茨那样的理论),故在西方一直鲜为人知。李-约克定理于1975年终于在《Mathematic Monthly》发表以后,人们才想起下面这个定理。

沙柯夫斯基定理 将全体自然数按下面的规律重新排列

$1, 2, 4, \dots; \dots, \dots, 7 \times 2^k, 5 \times 2^k, 3 \times 2^k; \dots, \dots, 7 \times 2^3, 5 \times 2^3, 3 \times 2^3; \dots, 7 \times 2^2, 5 \times 2^2, 3 \times 2^2; \dots, 7, 5, 3$

对于一类相当广泛的函数 $f(x)$, 如果它有一个周期点以某一数 p 为周期, 则任意选取一个在上述排列中位于 p 前面的自然数 q , $f(x)$ 一定也有一个周期为 q 的周期点。

(注:上述这个排列,作法如下:将1排在最前面,接下来由小到大排上全体2的幂次数;然后将全体奇数(除去1)依大到小的次序排到末尾;最后用下面办法排列其余各数:从右边开始,依从小到大的次序排上全体奇数的2倍,再排上全体奇数的4倍,再排上全体奇数的8倍……再排上全体奇数的 2^n 倍,等等。要注意的是,这样的排法实际上已经排出了所有自然数了。例如,数6144可以写成 $1024 \times 6 = 3 \times 2^{11}$,显然它上面排列中占了一个位置。)

很明显,沙柯夫斯基定理以李-约克定理为其特殊情况,因为在上述排列中,数字3正好排在末尾。

李-约克定理的重新被认识,缘于普林斯顿大学的生物数学家梅伊(Robert May)来马里兰大学的访问,当他的演讲中就生物数学中十分重要的(也是我们上文介绍过的)逻辑斯蒂模型进行细致的讨论时,提到了关于产生混乱现象问题。后来当约克在飞机场上把李天岩的定理告诉梅伊时,梅伊简直大吃一惊,可以说,使李-约克定理成为家喻户晓的还不是后来的论文发表和出版,倒是得益于梅伊把这个定理带到欧州和世界各地广为演讲介绍。但即使如此,李-约克定理比沙柯夫斯基定理晚了七八年。

有关李-约克定理和沙柯夫斯基定理,还有许多丰富的内容,

可惜都超出了本书的范围。

四、高维的怪吸引子

我们在 4.1 中曾谈到过爱依的平面变换如下

$$X = 1 + by - ax^2, Y = x$$

相应迭代的计算公式便是

$$x_{n+1} = 1 + by_n - ax_n^2,$$

$$y_{n+1} = x_n.$$

上面的公式实际上可视为是平面上的变换:把点 $P(x, y)$ 变到 $P'(X, Y)$,

$$H: (x, y) \rightarrow (X, Y) = (1 + by - ax^2, x).$$

因此 H 的二次迭代可以写成

$$\begin{aligned} H^2(x, y) &= H(H(x, y)) = H(1 + by - ax^2, x) \\ &= (1 + bx - a(1 + by - ax^2)^2, 1 + by - ax^2) \\ &= (1 - a + bx + 2aby + 2a^2(1 + by)x^2 - ab^2y^2 - a^3x^4, 1 + by - ax^2). \end{aligned}$$

类似可以写出 $H^3(x, y), H^5(x, y)$ 等表达式,当然它们将愈来愈复杂。

爱依用袖珍计算机算到 $n = 700$ 时得到了一个周期为 7 的周期点 $(-1.031, 1.227)$, 即(常参数已取 $a = 0.3$ 及 $b = 1.4$)

$$H^7(-1.031, 1.227) = (-1.031, 1.227)$$

具体计算是

$$\begin{aligned} &(-1.031, 1.227) \rightarrow (-0.014, -1.031) \rightarrow (0.690, -0.014) \\ &\rightarrow (0.376, 0.690) \rightarrow (1.203, 0.376) \rightarrow (-0.248, 1.023) \\ &\rightarrow (1.227, -0.248) \rightarrow (-1.031, 1.227) \end{aligned}$$

注意,我们现在可不能再李-约克定理了,因为那个定理只在直线上有效;但爱依还是由此得到了一个怪吸引子,称为爱依怪吸引子,我们把它描绘如下。

仍然取 $a = 0.3$, $b = 1.4$, 则 H 有两个不稳定的不动点 $A(0.631, 0.631)$, $B(-1.131, -1.131)$ 。经过 A 可找到两条曲线, 记为 M 及 M' (见图 4-13), 在 A 邻近且在曲线 M 上的点经

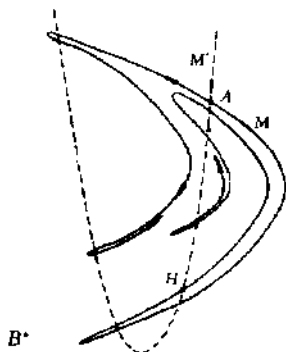


图 4-13

迭代后将远离 A 点, 而在 M' 上的点经迭代后将趋近 A 点。一个重要的事实是: 平面上任意一点 (A 及 B 不在其中) 经重复迭代后将无限靠近曲线 M , 图中画出的是经过电子计算机算出来的曲线 M 的形状。 M 就是爱依的怪吸引了。

除了爱依怪吸引子以外, 在空间中也有混沌态, 例如劳伦茨系统 (见第一段) 便会产生一个三维混沌态, 即三维怪吸引子。现在情况当然更复杂, 我们就不去谈它了。后面图中的几张照片表现了更复杂的迭代所产生的分形图。其中图 4-14, 4-15, 4-16 均为门代勃劳集, 又在图 4-15 中, (b) 是 (c) 中小方块的放大, (a) 是 (b) 中小方块的放大。又图 4-16 中 (a) 是 (b) 中小方形的放大。

随着科学技术, 尤其是计算机的发展, 现在已经不像当年那样视怪吸引子为怪物, 真所谓见怪不怪。不但在数学物理学科中, 而且在生物学、生理学 (群体遗传、疾病流行等) 都可见到混沌现象。值得一提的是, 在动力体系理论中, 美国数学家斯梅尔 (Smale) 得出了所谓马蹄, 这也是个怪吸引子。但斯梅尔的研究至少在理论

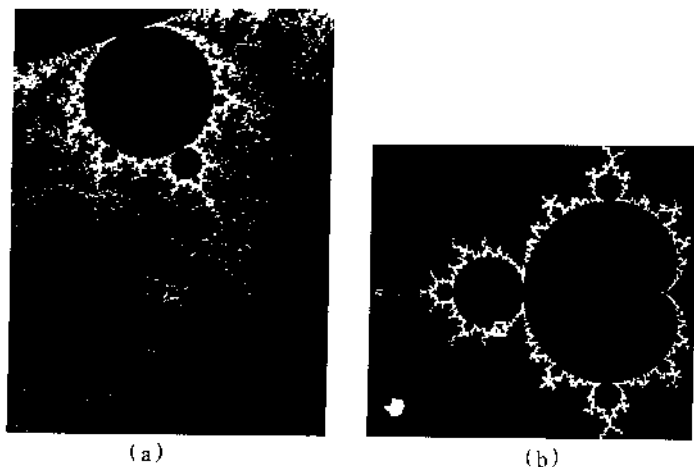


图 4-14

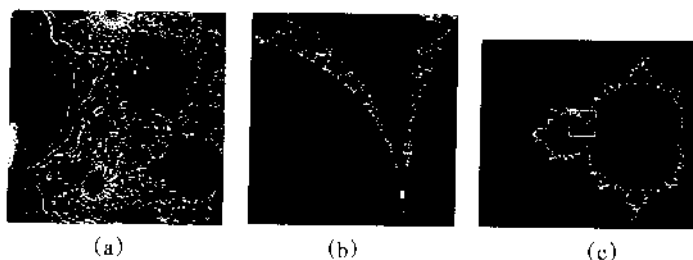


图 4-15

上是极为深刻的,因为他的工作后来一直延伸到经典力学的许多著名问题,后期直接进入了经济领域,在数学界的影响极大。斯梅尔后来获费尔茨奖——数学领域中的诺贝尔奖。

有报导说,有人已经将混沌理论和方法用到社会学中去。我们虽然至今尚未见到有关资料,但想来这应是早晚的事。

人世沧桑,牛顿和他的力学在发展初期,是决不会发掘出怪吸引子来的,因为那时的世界可以叫做线性的世界,即便出现了也只

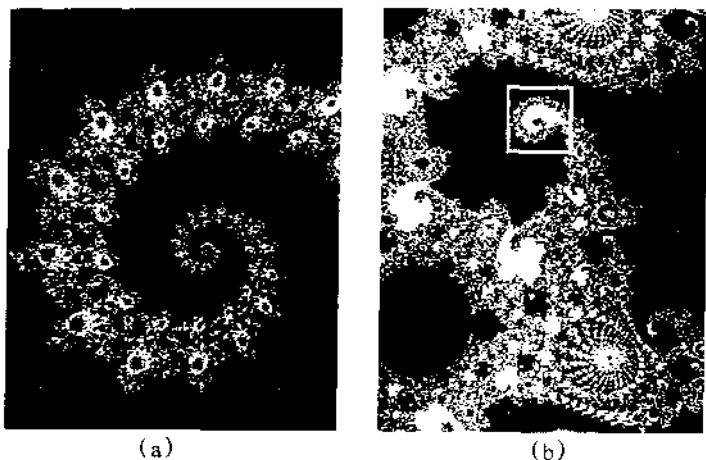


图 4-16

会怀疑仪器或计算有毛病。其实从历史看,劳伦茨也不是最早发现混沌态的人,西方科学家后来知道早在1960年,日本京都大学工学院电机系教授上田皖亮就已经在一类叫做达芬(Duffing)方程的研究中发现混乱现象:对适当选取的常参数,那个方程的轨道将会乱七八糟地运行。不过当时谁也不相信他的研究成果,一致认为只可能是他的计算出了错。这件事直到法国人鲁勒(D.Ruelle)于1978年访问日本,才逐渐在世界上传开了来。现在大家管上田的发现叫做上田吸引子,或日本吸引子。

其实,对于怪吸引子还可以追溯得更远一些,作者同意许多研究家的观点,最早文学记载出于苏东坡之手。宋元丰四年旧历七月十五晚——请注意,这是至今为止有关怪吸引子的描述的最早的最确切的日期——苏东坡邀客夜游,即兴赋诗,有人和着乐声唱了起来;那清明隽永的词儿,你能说这不是被后人称为怪吸引子那个玩意儿的最动人的描绘吗?请听:

其声呜呜然,如怨如慕,如泣如诉,余音袅袅,不绝如缕。

思考题

1. (1) 请你设计一架有限长的楼梯, 使任何人都不能走到尽头(我们称这类梯子为魔梯)。

(2) 请你设计一根腊肠, 你随便切下一段来, 都永远吃不完。我们称这类腊肠为明科夫斯基腊肠)。

2. 下面是早几年流行在英国的一支童谣:

一个歪斜的人, 养了一只歪斜的猫,
走过歪斜的一英里, 抓到一只歪斜的老鼠。
歪歪斜斜地 歪斜的人, 歪斜的猫, 歪斜的老鼠,
捡到了一枚歪斜的六便士, 都挤在歪斜的小屋里。

请你选一个分形集, 以它为主题, 也编一段类似的童谣。

3. 请你根据正文中有关扁平国的传说, 编一段一个圆访问一条直线的故事。

4. 1 个单位正方形被分成 16 个小正方形(如图 4-17 那样)删去 8 个小正方形。对于余下的 5 个正方形(4 小 1 大), 用同法处理之。试证明最终得到的分形集的维数 s 满足方程

$$4\left(\frac{1}{4}\right)^s + \left(\frac{1}{2}\right)^s = 1.$$

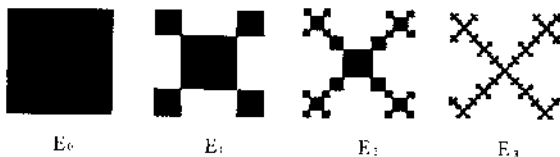


图 4-17

5. 用四比三的比例将一个正方形分成 12 个小长方形。如图 4-18 删去其中 6 个, 并将此种手续不断继续下去。试求最后得到的分形集的维数。

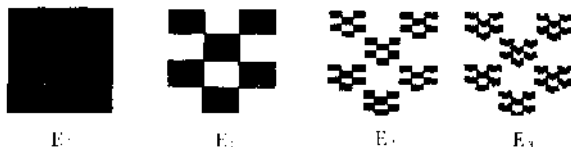


图 4-18

6. 求集合 $\{0, 1, \frac{1}{4}, \frac{1}{9}, \frac{1}{16}, \dots\}$ 的维数。

7. 在 0 到 1 之间的数中列出所有这样的数, 它们每一个的十进制小数都不含数字 5。问这样的数(包括 0 和 1)构成的集合的维数是多少?

8. 取出单位正方形里每一个这样的点 (X, Y) (X, Y 都是位于 0 和 1 之间的数), 其中 X 和 Y 的十进制小数里都不含数字 5。求这样得到的集合的维数。

9. 单位圆 S 上的每一个点都可以用 0 到 2π 之间的某数 a 表示。试求下面集合 F 的维数

$$F = \{a \in S; 0 \leq 3^k a \leq \pi, k = 1, 2, \dots\}.$$

10. (变形的柯赫曲线)取一数 $0 < a < \frac{1}{3}$ 。在每一单位长的线段上, 将中段长为 a 的小段改成一个边长为 a 的正三角形, 并将这种过程继续下去。试证明所得分形集的维数 s 满足下面的方程

$$2a^s + 2\left(\frac{1}{2}(1-a)\right)^s = 1.$$

11. 求证图 4-19 构成的分形集的维数 s 满足方程

$$3\left(\frac{1}{3}\right)^s + 2\left(\frac{1}{4}\right)^s = 1$$

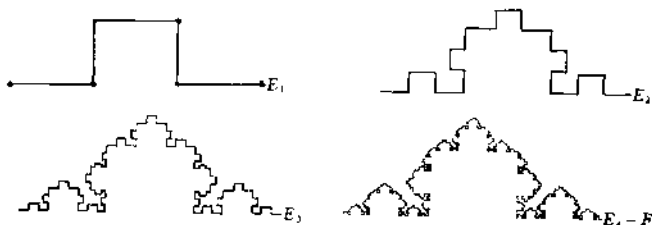


图 4-19

12. 求图 4-20 构成的分形集的维数 s_d 。

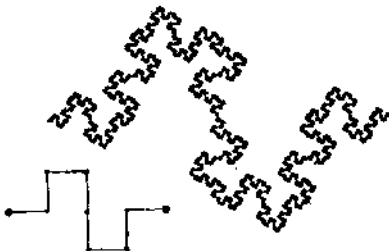


图 4-20

13. 求图 4-21 构成的分形集的维数 s_d 。

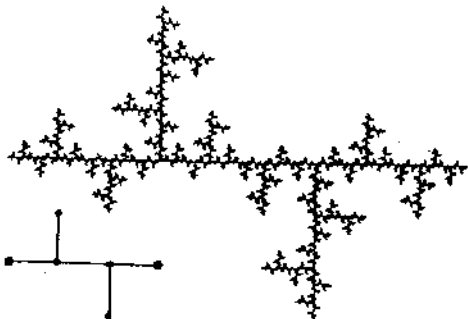


图 4-21

14. 设 $0 < x < \frac{1}{2}$ 。设 F 是下面的集合, 求其维数

$$F = \left\{ \sum_{k=1}^{\infty} a_k x^k : a_k = 0, 1; k = 1, 2, \dots \right\}.$$

15. 仿照逻辑斯蒂模型的讨论, 试研究下面函数的迭代过程

$$f(x) = 2(1 - |2x - 1|).$$

16. 在爱依平面变换里取 $a = 1.4, b = 0.3$ 。证明: 爱依变换将把一个顶点是 $(1.32, 0.133), (-1.33, 0.42), (-1.06, -0.5)$ 和 $(1.245, -0.14)$ 的四边形变成自己。

部分思考题答案与提示

第一章

1. (1) 这三个像点分别为 G, G', J 。

2. (1) $A'(-1, 2), B'(0, -2.5), C'(2.5, 3)$ 。

3. 所有命题均为正确, 除去(1), 但当 $k=1$ 时命题仍为真。

4. (1) 新祭台是原祭台的 8 倍, 不能说成“新的比老的大上 8 倍”。

(2) $\sqrt{2} \approx 1.26$ 。

11. (1) 1, 1, 3, 5, 11, 21, 43, 85, 171, 341, 683, 1365

(2) $B_n = B_{n-1} + 2B_{n-2}$ 。

(3) 1, 3, 1.667, 2.2, 1.909, 2.048, 1.977, 2.012, 1.994, 2.003, 1.999。

(4) $x=2, -1$, 应当不计根 -1 。

(5) $B_n = \lceil 2^n - (-1)^n \rceil / 3$ 。

16. 全部成立。

17. (1) 注意 $\angle ABE$ 与 $\angle AEB$ 相等, 故两者均为 36° 。因此 $\angle BDE = 72^\circ$, 从而依对称性, $\angle BDE, \angle FBD$ 及 $\angle FDB$ 均为 72° 。其次, $\angle FAE$ 及 $\angle FEA$ 均为 72° , 因而 $\triangle FAE$ 及 $\triangle BDE$ 全等。因此边 AF 等于 x 。最后, $\triangle FBD$ 及 $\triangle BDE$ 相似, 故两者的角分别为 $72^\circ, 72^\circ$ 及 36° , 且由对应边成比得 $(x+1):x = x:1$, 或 $x^2 - x - 1 = 0$ 。

19. (1) $B, C, D, E, H, I, K, O, X$ 。

(2) $A, H, I, M, O, T, U, V, W, X, Y$ 。

(3) H, I, N, O, S, X, Z 。

(4) H, I, O, X 。

20. (1) 对通过 A 的中心垂线的反射。

(2) 对水平中线的反射。

(3) 对于中心水平线的反射, 对于通过 X 的中心垂直线的反射, 绕 X 的中心作 180 度旋转。

24. (1) ABBAABABA.

(2) 每一 B 来自上个月的一个 A , 它必须位于 B 的紧左边, 所以每一 B 必须前接一个 A .

(3) 最左边的两个 A 必定来自上个月中的两个 B .

(4) 我们证明 4 个月的序列遵循这个规则. 假设这个规则对于所有前面月份都对, 考虑最后一月, 看看它将如何改变本月的序列. 上一月的序列由一个第一部分, 即由过去两月的序列组成. 这个第一部分, 依照我们的假设已经知道, 要变成上一月的序列. 上个月序列的第二部分是前三个月的序列, 再依假设可知, 将变成来自前两个月的序列. 所以本月的序列将由上月的序列继以一个来自两个月前的序列得到.

第二章

1. (2) 8104.03 元.

2. (1) 1.28 元. (2) 0.78 元. (3) 3476.55 元.

6. (1) 日息率为

$$R = \left(\frac{7416.59}{7373.93} \right)^{1/28} - 1 = (1.005785246)^{0.035714286} - 1 = 0.000206042.$$

年息率是 $(1 + 0.000206042)^{365} - 1 = 1.0780972 - 1 \approx 7.81\%$.

7. 10 年期间你共支付 120 个 100 元, 即 12000 元. 用题上的公式, 其中 x 为未知数, $x - 1$ 即为月息率. 于是从方程

$$\frac{x^{120}}{x - 1} - 1 = 37747$$

解得 $x = 1.016467$. 因此年利率为 $12 \times (1.016467) = 19.76\%$, 有效年利率为 $(1.016467)^{12} - 1 = 21.65\%$.

9. (1) 38 亿. (3) 37.2 亿.

10. (2) 1640 万.

11. 人口增长翻番的年限是 (1) 51 年; (2) 42 年; (3) 25 年.

12. (1) 1570 万.

13. (1) 11400 年. (2) 72000 年.

15. (1) 50.

16. (1) 34.4, 54.7, 77.0, 92.9, 98.8, 62.2, 68.4, 69.8, 70.0, 70.0.

(2) 16.3, 26.2, 40.2, 58.9, 80.7, 102.1, 119.5, 131.8, 140.2, 146.6;

(3) 28.1, 69.9, 124.8, 114.9, 133.5, 126.3, 142.6, 137.3, 151.8, 148.1.

(4) 当 $k=0.7$ 时人口增长; 当 $k=2$ 时人口出现震荡现象. 除上述两种情况外, 人口幅员都有上界.

第三章

2. (2) 27°

3. (1) $\tan 0.25^\circ = RM/ER$, 故 $RM = ER \cdot \tan 0.25^\circ = 384393 \times 0.00436 = 1676$ (千米).

4. (1) 比较 805 千米与地球周长 40250 千米, 可知 $\angle AOB$ 为 7.2° .

(2) 86.4°

(3) $\angle ABH$ 与 $\angle BAH$ 均为 $90^\circ - 86.4^\circ = 3.6^\circ$.

(4) 将 $\angle ABH$ 与 $\angle BAH$ 加到 $\angle MAH$ 与 $\angle MBH$ 上去以求出 $\angle MAB$ 与 $\angle MBA$, 然后从 180° 减去这些角, 即得 $\angle AMB$.

(5) 设想月球是半径 $MA = MB$ 的圆的中心, 则沿圆的从 A 到 B 的距离近似等于沿地球周长的距离, 即 805 千米. 注意到 $\angle AMB$ 与全周长的关系可确定圆周的周长, 从而得出半径, 继而得出月地距.

6. $VS = ES \times \sin 47^\circ = 149659160 \times 0.73135 = 1.1 \times 10^8$ (千米).

8. (1) 用 L 表示月地的距离, r 表示月球半径, 则月球轨道的周长是

$$2\pi L = 360 \times 4r = 360 \times 4 \times 1738$$

故 $L = 399280$ 千米.

(2) 125 分钟是 42524.05 分钟的 $1/340.19$, 所以得到月球直径的视角是 1.06° . 因此我们关于距离 L 的新的估计值可从

$$2\pi L = 340.19 \times 4r = 340.19 \times 4 \times 1738$$

得出为 376576 千米. (1992 年 1 月 4 日的月食, 月地的距离在 356400 千米与 384393 千米之间.)

10. (2) 我们有 $a + c = 406686$ 以及 $a - c = 356690$, 所以得 $a = 381689$, $c = 25031$, $b = 380867$. 因此方程是

$$\frac{x^2}{381689^2} + \frac{y^2}{380867^2} = 1.$$

12. (1) 月球轨道历时 39343.2 分钟, 人造卫星轨道历时 88 分钟, 所以两者轨道周长之比为 447。取此比例的三分之二幂, 即给出两者到地球的平均距离之比: 58.5。因此人造卫星到地球中心的距离为 $\frac{1}{58.5} \times 384393 = 6571$ (千米)。从而与地球表面的距离为

$$6571 - 6378 = 193 \text{ (千米)}。$$

14. 等时性相当于线段 PP' , $P'P''$ 等长。但 $\triangle SPP'$ 与 $\triangle SP'P''$ 同底同高, 故等积。

15. (2) 质量比的平方根 $\sqrt{330000} = 574$ 给出距离的比。故此物体必在距离太阳中心的 $149659160 \div 574 = 260730$ (千米) 处。

16. (1) 月球直径为 3218.6 千米, 地球周长为 35404.6 千米, 月球周长为 10042 千米。

(2) 160.9 千米。

(3) BT 垂直于 CB 。

(4) 令 r 为月球半径, 则有

$$\begin{aligned} AT &= CT - CA - CT = r = \sqrt{CB^2 + BT^2} - r \\ &= \sqrt{r^2 + \left(\frac{2r}{20}\right)^2} - r = 0.0050r, \end{aligned}$$

即 8.05 千米。

18. (1) 画出线段 AC , BD 以作出两对三角形, 第一对为 $\triangle ADB$ 与 $\triangle BCA$, 显然为全等, 因此 $AC = BD$ 。第二对为 $\triangle ACD$ 与 $\triangle BDC$, 亦为全等, 因此对应角相等。

(2) 两三角形 ABD 与 BCD 的内角和等于四个角 A, B, C, D 之和。但 $\angle C$ 与 $\angle D$ 为锐角, 故此和小于 360° , 因此三角形之一或二的内角和必少于 180° 。

20. (1) $P = 3, Q = 3$ 。

(2) 立方体: $PF = QV = 24$ 。正四面体: $PF = QV = 12$ 。正八面体: $PF = QV = 24$ 。

(3) 棱的 2 倍。

(5) $V = 20, E = 30$ 。

(6) $V = 12, E = 30$ 。

第四章

5. $\frac{3}{2}$

7. $\frac{\lg 9}{\lg 10} = \lg 9$

8. $\frac{2\lg 9}{\lg 10} = 2\lg 9$

9. $\frac{\lg 2}{\lg 3}$

12. $\frac{\lg 8}{\lg 4} = \frac{3}{2}$