RAPPORT SUR LES TRAVAUX DE M. CARTAN

fait à la Faculté des Sciences de l'Université de Paris.

PAR

H. POINCARÉ.

. . . . . Le rôle prépondérant de la théorie des groupes en mathématiques a été longtemps insoupçonné; il y a quatre-vingts ans, le nom même de groupe était ignoré. C'est GALOIS qui, le premier, en a eu une notion claire, mais c'est seulement depuis les travaux de KLEIN et surtout de LIE que l'on a commencé à voir qu'il n'y a presque aucune théorie mathématique où cette notion ne tienne une place importante.

On avait cependant remarqué comment se font presque toujours les progrès des mathématiques; c'est par généralisation sans doute, mais cette généralisation ne s'exerce pas dans un sens quelconque. On a pu dire que la mathématique est l'art de donner le même nom à des choses différentes. Le jour où on a donné le nom d'addition géométrique à la composition des vecteurs, on a fait un progès sérieux, si bien que la théorie des vecteurs se trouvait à moitié faite; on en a fait un autre du même genre quand on a donné le nom de multiplication à une certaine opération portant sur les quaternions. Il est inutile de multiplier les exemples, car toutes les mathématiques y passeraient. Par cette similitude de nom, en effet, on met en évidence une similitude de fait, une sorte de parallélisme qui aurait pu échapper à l'attention. On n'a plus ensuite qu'à calquer, pour ainsi dire, la théorie nouvelle sur une théorie ancienne déjà connue.

Il faut s'entendre, toutefois: il faut donner le même nom à des choses différentes, mais à la condition que ces choses soient différentes quant à la matière, mais non quant à la forme. A quoi tient ce phénomène mathématique si souvent constaté? Et d'autre part en quoi consiste cette communauté de forme qui subsiste sous la diversité de la matière? Elle tient à ce que toute théorie mathématique est, en dernière analyse, l'étude des propriétés d'un groupe d'opérations, c'est-à-dire d'un système formé par certaines opérations fondamentales et par toutes les combinaisons qu'on en peut faire. Si, dans une autre théorie, on étudie d'autres opérations qui se combinent d'après les mêmes lois, on verra naturellement se dérouler une suite de théorèmes correspondant un à un à ceux de la première théorie, et les deux théories pourront se développer avec un parallélisme parfait; il suffira d'un artifice de langage, comme ceux dont nous parlions tout à l'heure, pour que ce parallélisme devienne manifeste et donne presque l'impression d'une identité complète. On dit alors que les deux groupes d'opérations sont isomorphes ou bien qu'ils ont même structure.

Si alors on dépouille la théorie mathématique de ce qui n'y apparaît que comme un accident, c'est-à-dire de sa matière, il ne restera que l'essentiel, c'est-à-dire la forme; et cette forme, qui constitue pour ainsi dire le squelette solide de la théorie, ce sera la structure du groupe.

On distinguera parmi les groupes possibles quatre catégories principales, sans compter certains groupes étranges ou composites qui ne rentrent dans aucune catégorie, ou qui participent des caractères de deux ou plusieurs d'entre elles. Ce sont:

I. Les groupes discontinus et finis, ou groupes de Galois; ce sont ceux qui président à la résolution des équations algébriques, à la théorie des permutations, etc. . . .

II. Les groupes discontinus et infinis; ce sont ceux que l'on rencontre dans la théorie des fonctions elliptiques, des fonctions fuchsiennes etc. . . .

III. Les groupes continus et finis ou groupes de Lie proprement dits; ce sont ceux auxquels se rattachent les principales théories géométriques, telles que la géométrie euclidienne, la géométrie non-euclidienne, la géométrie projective, etc. . . .

IV. Les groupes continus et infinis, beaucoup plus complexes, beaucoup plus rebelles aux efforts du géomètre. Ils sont en connexion naturelle avec la théorie des équations aux dérivées partielles.

M. Cartan a fait faire des progrès importants à nos connaissances sur trois de ces catégories, la 1ère la 3e et la 4e. Il s'est principalement placé au point de vue le plus abstrait de la structure, de la forme pure, indépendamment de la matière, c'est-à-dire, dans l'espèce, du nombre et du choix des variables indépendantes.

Groupes continus et finis.

Je commencerai par les groupes continus et finis, qui ont été introduits par LIE dans la science; le savant norvégien a fait connaître les principes fondamentaux de la théorie, et il a montré en particulier que la structure de ces groupes dépend d'un certain nombre de constantes qu'il désigne par la lettre c affectée d'un triple indice et entre lesquelles il doit y avoir certaines relations. Il a enseigné également comment on pouvait construire le groupe quand on connaissait ces constantes. Mais il restait à discuter les diverses manières de satisfaire aux relations qui doivent avoir lieu entre les constantes c; on pouvait supposer que les divers types de structure seraient extrêmement nombreux et extrêmement variés, de sorte que l'énumération en serait à peu près impossible. Il ne semble pas en être tout à fait ainsi, au moins en ce qui concerne les groupes simples.

La distinction entre les groupes simples et les groupes composés est due à GALOIS et elle est essentielle, puisque les groupes composés peuvent toujours être construits en partant des groupes simples. Il est clair que le premier problème à résoudre est la construction des groupes simples.

Vers 1890, KILLING a annoncé que tous les groupes simples continus et finis rentrent: soit dans quatre grands types généraux déjà signalés par LIE, soit dans cinq types particuliers dont les ordres sont respectivement 14, 52, 78, 133, et 248. C'était là un résultat d'une très haute importance; malheureusement toutes les démonstrations étaient fausses; il ne restait que des aperçus dénués de toute force probante.

Il était réservé à M. CARTAN de transformer ces aperçus en démonstrations rigoureuses; il suffit d'avoir lu le mémoire de KILLING pour comprendre combien cette tâche était difficile. La méthode repose sur la considération de l'équation caractéristique, et en particulier de la forme quadratique $\psi_r(e)$ qui est le coëfficient de ω^{r-2} dans cette équation; cette considération permet de reconnaître si le groupe est intégrable, ou de trouver son plus grand sous groupe invariant intégrable, ou enfin de reconnaître si le groupe est simple ou semi-simple.

M. CARTAN a donné une manière de former, dans chaque type, les groupes linéaires simples dont le nombre des variables est aussi petit que possible.

Une des plus importantes applications des groupes de LIE est l'intégration des équations différentielles ordinaires ou partielles qui sont inaltérées par les transformations d'un groupe. M. CARTAN a appliqué cette méthode au cas des systèmes d'équations aux dérivées partielles dont l'intégrale générale ne dépend que de constantes arbitraires. Les opérations à faire sont toutes de nature rationnelle ou algébrique.

Groupes discontinus et finis.

M. Cartan a fait faire aussi un progrès important à la théorie des groupes de Galois, en les rattachant à celle des nombres complexes. On sait qu'on désigne par nombres complexes des expressions algébriques susceptibles de subir des opérations qui peuvent être regardées comme des généralisations de l'addition et de la multiplication, et auxquelles on peut appliquer les règles ordinaires du calcul avec cette différence que la multiplication, quoique associative, n'est pas commutative. Le plus connu des systèmes de nombres complexes a reçu le nom de quaternions et on en a fait des applications nombreuses en Mécanique et en Physique Mathématique.

Ces nombres complexes ont un lien intime avec les groupes de Lie et en particulier avec les groupes linéaires simplement transitifs; il y a, à ce sujet, un théorème de M. Poincaré dont M. Cartan a donné une nouvelle démonstration. La théorie des nombres complexes a été poussée plus loin par M. M. Scheffers et Mollien qui en ont entrepris la classification et ont les premiers mis en évidence l'importance de la distinction entre les systèmes à quaternions et les systèmes sans quaternions.

M. Cartan est arrivé à résoudre complètement le problème, par une heureuse adaptation des méthodes qui lui avaient réussi dans l'étude des groupes de Lie. Il a pris comme point de départ une équation caractéristique qui n'est pas tout à fait la même que celle qu'on envisage à propos des groupes de Lie, mais qui se prête à une discussion analogue. M. Cartan a montré comment on peut construire un système quelconque par la combinaison d'un système pseudonul et de systèmes simples, et comment les systèmes simples se réduisent aux quaternions généralisés; comment enfin les systèmes dits de la 2^{e} classe se déduisent facilement de ceux de la 1ère classe. Il a étudié aussi le cas où les coëfficients sont des nombres réels.

Ces résultats ne constituent pas, comme on pourrait être tenté de le croire, une simple curiosité mathématique. Ils sont au contraire susceptibles d'applications nombreuses. En particulier, ils se rattachent à la théorie des groupes de Galois; il est clair que les lois de la composition des substitutions d'un groupe de Galois sont associatives, sans être commutatives; elles peuvent donc être regardées comme les règles de la multiplication d'un système d'unités complexes; et par conséquent elles définissent un système de nombres complexes. Or si on applique à ce système le théorème de M. Cartan, on retrouve, de la façon la plus simple et pour ainsi dire d'un trait de plume, les résultats que M. Frobe-

NIUS avait obtenus par une tout autre voie et qui avaient été regardés à juste titre comme le plus grand progrès que la théorie des groupes de GALOIS eût fait depuis longtemps.

On peut, par cette voie, reconnaître quels sont les groupes linéaires les plus simples qui sont isomorphes à un groupe de GALOIS donné, ce qui nous conduit au problème de l'intégration algébrique des équations différentielles linéaires. M. POINCARÉ a eu l'occasion d'appliquer les principes de M. CARTAN à l'intégration algébrique d'une équation linéaire.

Groupes Continus et Infinis.

La détermination des groupes continus infinis présente beaucoup plus de difficultés que celle des groupes finis et c'est là que M. CARTAN a déployé le plus d'originalité et d'ingéniosité. Il s'est restreint d'ailleurs à une certaine classe de groupes infinis, la plus importante au point de vue des applications, et celle sur laquelle l'attention de LIE avait surtout été attirée, je veux parler des groupes dont les transformations finies dépendent de fonctions arbitraires d'un ou de pluseurs paramètres, ou, plus généralement, de ceux où les variables transformées, considérées comme fonctions des variables primitives, constituent l'intégrale générale d'un système d'équations aux dérivées partielles.

M. CARTAN s'est d'ailleurs servi, dans cette étude, de résultats importants qu'il avait obtenus dans des travaux antérieurs relatifs aux équations aux dérivées partielles et aux équations de PFAFF, travaux dont nous parlerons plus loin.

La théorie de la structure, telle que LIE l'expose dans l'étude des groupes finis, n'est pas susceptible d'être immédiatement généralisée et étendue aux groupes infinis. M. CARTAN lui substitue donc une autre théorie de la structure, équivalente à la première en ce qui concerne les groupes finis, mais susceptible de généralisation. Si f est une fonction quelconque des variables x, et si les $X_i f$ représentent les symboles de LIE, on aura identiquement:

$$df + \Sigma X_i f \omega_i = 0$$

les ω_i étant des expressions de PFAFF dépendant des paramètres du groupe et de leurs différentielles.

Au lieu de faire jouer le rôle essentiel aux symboles $X_i f$, comme le faisait LIE, M. CARTAN l'attribue aux expressions de PFAFF ω qui sont invariantes par les substitutions du groupe des paramètres. Les relations qui définissent la structure se présentent alors sous une autre forme. Au lieu de relations linéaires entre les $X_i f$ et leurs crochets, nous aurons des relations linéaires entre les covariants bilinéaires des ω et des combinaisons bilinéaires de ces mêmes expressions. Les coëfficients de ces relations sont les mêmes dans les deux cas, quoique dans un autre ordre; ce sont les constantès c de LIE.

Sans sortir encore du domaine des groupes finis, M. CARTAN a illustré cette théorie nouvelle en l'appliquant à des exemples concrets, et en particulier au groupe des déplacements de l'espace; il a montré comment elle se rattachait à la théorie classique du trièdre mobile de M. DARBOUX et comment elle permettait l'étude des invariants différentiels des surfaces et en particulier de ceux de certaines surfaces imaginaires remarquables.

Voyons maintenant comment ces notions peuvent être étendues aux groupes infinis. La notion d'isomorphisme holoédrique ou mériédrique peut être facilement définie en ce qui concerne les groupes finis, parce que l'on n'a qu'à faire correspondre une à une les transformations infinitésimales des deux groupes à comparer. Nous ne pouvons plus employer ce procédé lorsque les transformations infinitésimales sont en nombre infini; M. CARTAN donne donc une définition différente, quoique équivalente à la première dans le cas où celle-ci a un sens. Un groupe est le prolongement d'un autre quand il transforme les mêmes variables que cet autre et de la même manière et qu'il transforme en même temps d'autres variables auxiliaires. Par exemple, le groupe des déplacements des points de l'espace aura pour prolongement le groupe des déplacements des droites ou celui des cercles de l'espace. Deux groupes sont alors isomorphes quand deux de leurs prolongements sont semblables.

Le théorème fondamental de LIE peut alors être étendu aux groupes infinis; on montre que tout groupe infini est isomorphe au groupe qui laisse invariantes à la fois certaines fonctions U et certaines expressions de PFAFF ω et $\tilde{\omega}$. Les différentielles totales des U s'expriment linéairement en fonctions des ω, les covariants bilinéaires des ω (mais non ceux des $\tilde{\omega}$) s'expriment bilinéairement en fonctions des ω et des $\tilde{\omega}$. Les coëfficients de ces relations linéaires ou bilinéaires jouent le rôle des constantes c de LIE. Ce sont des fonctions des invariants U. Ce qui caractérise les groupes transitifs, c'est qu'il n'y a pas d'invariants et par conséquent que les coëfficients se réduisent à des constantes. Ce qui caractérise les groupes finis, c'est que les expressions $\tilde{\omega}$ n'existent pas.

Les coëfficients en question peuvent-ils être choisis arbitrairement? Non, ils sont assujettis à certaines conditions que M. CARTAN détermine et qui peuvent être regardées comme la généralisation des conditions de structure de LIE.

Les trois théorèmes fondamentaux de LIE se trouvent donc étendus aux groupes infinis, de sorte que M. CARTAN a fait pour ces groupes ce que LIE avait fait pour les groupes finis.

Cette analyse a mis en évidence des résultats tout à fait surprenants. Un groupe fini est toujours isomorphe à un groupe transitif, par exemple à celui qu'on appelle son groupe paramétrique, et on aurait pu être tenté de croire qu'il en était de même pour les groupes infinis, puisqu'au premier abord la démonstration ne semblait mettre en œuvre que la notion générale de groupe. Au contraire, M. CARTAN a montré qu'il existe des groupes infinis qui ne sont isomorphes à aucun groupe transitif.

Ce n'est pas tout: un groupe infini peut être mériédriquement isomorphe à lui-même, un groupe infini peut n'admettre aucun sous groupe invariant maximum, etc. . . . La notion du prolongement normal permet ensuite à M. CARTAN de déterminer tous les groupes isomorphes à un groupe infini donné. Citons un résultat particulier. Les groupes qui ne dépendent que de fonctions arbitraires d'un argument, s'ils sont transitifs, sont isomorphes au groupe général d'une variable.

Etant donné un groupe défini par ses équations de structure, M. CARTAN montre qu'on peut déterminer les équations de structure de tous ses sous-groupes par des procédés purement algébriques et il applique cette méthode à des cas particuliers tels que celles du groupe général de deux variables où il retrouve, par une voie nouvelle, quelques sous groupes déjà connus et importants par leurs applications.

Si l'on se donne deux systèmes différentiels et un groupe, on peut se demander s'il y a des transformations du groupe qui transforment un des systèmes dans l'autre et quelles elles sont; on peut se demander également s'il y a dans le groupe des transformations qui n'altéreront pas l'un de ces systèmes différentiels et qui naturellement formeront un sous-groupe. L'étude de ce sous-groupe a fait également l'objet d'un mémoire de M. CARTAN.

Enfin M. CARTAN s'est proposé en ce qui concerne les groupes infinis, le même problème qu'il avait résolu pour les groupes finis, la formation de tous les groupes simples. Il a montré qu'ici aussi, les groupes simples peuvent se ramener à un nombre restreint de types; ceux qui sont primitifs et d'où l'on peut déduire tous les groupes transitifs simples se répartissent en six grandes classes; quant aux groupes simples qui ne sont isomorphes à aucun groupe transitif, ils peuvent être déduits des précédents par des procédés que M. CARTAN nous fait connaître.

Le problème proposé se trouve donc entièrement résolu.

Equations aux Dérivées Partielles.

Le problème de l'intégration d'un système d'équations aux dérivées partielles a fait l'objet de travaux nombreux. M. CARTAN s'est placé pour l'étudier à un point de vue particulier: il remplace le système d'équations aux dérivées partielles par le système correspondant d'équations de PFAFF, c'est-à-dire d'équations aux différentielles totales.

Dans la théorie des expressions de PFAFF, il y a une notion, introduite par M. M. FROBENIUS et DARBOUX, qui joue un rôle extrêmement important, c'est celle du covariant bilinéaire; nous avons déjà vu apparaître ce covariant à propos de la théorie des groupes infinis. M. CARTAN en a donné une interprétation nouvelle à l'aide du calcul de GRASSMANN, et cette interprétation l'a conduit à une généralisation. De chaque expression de PFAFF, il déduit une série d'expressions différentielles qu'il appelle ses dérivées; la dérivée première est le covariant bilinéaire; la dérivée n^e est $n + 1$ fois linéaire. C'est en cherchant quelle est la première de ces dérivées qui s'annule identiquement que l'on reconnaîtra si, et jusqu'à quel point, il est possible de réduire le nombre des variables indépendantes sur lesquelles porte l'expression.

Cette considération a permis à M. CARTAN de retrouver sous une forme extrêmement simple tous les résultats connus relatifs au problème de PFAFF et un assez grand nombre de résultats entièrement nouveaux.

Comment maintenant cela peut-il servir à la résolution d'un système d'équations de PFAFF, et surtout à reconnaître quel est le degré d'arbitraire que comporte l'intégrale générale d'un pareil système? C'est en se servant de la notion d'involution que M. CARTAN a résolu cette question. Un système est dit en involution si, jusqu'à une certaine valeur de m, par toute multiplicité intégrale à m dimensions passe une multiplicité intégrale à $m + 1$ dimensions. M. CARTAN donne une manière de reconnaître si un système est en involution pour les valeurs de m inférieures à un nombre donné, et, par là, de savoir combien la solution générale contient de fonctions arbitraires de 1, de 2, . . ., de n variables.

On retrouve ainsi sous une forme nouvelle la théorie des caractéristiques de CAUCHY, celle des caractéristiques de MONGE, celle des solutions singulières, etc. . . .; on retrouve également sous une forme plus simple tous les résultats de M. RIQUIER.

M. CARTAN a appliqué sa méthode à un certain nombre de cas particuliers où l'intégration peut se faire par des équations differentielles ordinaires. Il l'a également complétée en s'aidant de la théorie des groupes qui lui était si familière; il a ainsi reconnu des cas où l'on peut déterminer les invariants d'un système de PFAFF, sans en déterminer les caractéristiques, c'est-à-dire d'une façon rationnelle, et d'autres où les caractéristiques s'obtiennent sans intégration.

Conclusions.

On voit que les problèmes traités par M. CARTAN sont parmi les plus importants, les plus abstraits et les plus généraux dont s'occupent les Mathématiques; ainsi que nous l'avons dit, la théorie des groupes est, pour ainsi dire, la Mathématique entière, dépouillée de sa matière et réduite à une forme pure. Cet extrême degré d'abstraction a sans doute rendu mon exposé un peu aride; pour faire apprécier chacun des résultats, il m'aurait fallu pour ainsi dire lui restituer la matière dont il avait été dépouillé; mais cette restitution peut se faire de mille façons différentes; et c'est cette forme unique que l'on retrouve ainsi sous une foule de vêtements divers, qui constitue le lien commun entre des théories mathématiques qu'on s'étonne souvent de trouver si voisines.

M. CARTAN en a donné récemment un exemple curieux. On connait l'importance en Physique Mathématique de ce qu'on a appelé le groupe de LORENTZ; c'est sur ce groupe que reposent nos idées nouvelles sur le principe de relativité et sur la Dynamique de l'Electron. D'un autre côté, LAGUERRE a autrefois introduit en géométrie un groupe de transformations qui changent les sphères en sphères. Ces deux groupes sont isomorphes, de sorte que mathématiquement ces deux théories, l'une physique, l'autre géométrique, ne présentent pas de différence essentielle.

Les rapprochements de ce genre se présenteront en foule à ceux qui étudieront avec soin les travaux de LIE et de M. CARTAN. M. CARTAN n'en a pourtant signalé qu'un petit nombre, parce que, courant au plus pressé, il s'est attaché à la forme seulement et ne s'est préoccupé que rarement des diverses matières dont on la pouvait revêtir.

Les résultats les plus importants énoncés par M. CARTAN lui appartiennent bien en propre. En ce qui concerne les groupes de LIE, on n'avait que des énoncés et pas de démonstration; en ce qui concerne les groupes de GALOIS, on avait les théorèmes de FROBENIUS qui avaient été rigoureusement démontrés, mais par une méthode entièrement différente; enfin en ce qui concerne les groupes infinis on n'avait rien: pour ces groupes infinis, l'œuvre de M. CARTAN correspond à ce qu'a été pour les groupes finis l'œuvre de LIE, celle de KILLING, et celle de CARTAN lui-même.

. . . . .