2017053046 17应数 时令丰.

P119.3. proof: ① V上两个线性变换和仍为V的线性变换.

$\Rightarrow$ 线性变换加.乘法仍是 $End_n(V)$ 的代数运算.

② 线性变换加法满足交换、结合律. 且零变换 0 是零元.

③ 线性变换 $\mathcal{A}$，$-\mathcal{A}$ 也是线变且 $\mathcal{A}+(-\mathcal{A})=0$. 负元 ✓

④ 恒等变换 ε 也是线变. $\mathcal{A}\varepsilon=\varepsilon\mathcal{A}=\mathcal{A}$. 单位元 ✓

⑤ 乘法满足结合律. 但且 $n\geq 2$ 时，乘法不满足交换律.

⑥ 线性变换乘法对加法满足两个分配律.

故：$End_n(V)$ 是关于线变换的加、乘法构成的一个有单位元的非交换环.

19. (1) $R=\{2^n\cdot m \mid m,n\in\mathbb{Z}\}$. 显然 $R\subseteq\mathbb{Q}$

且 $\forall m_{1,2}、n_{1,2}\in\mathbb{Z}$，$2^{n_1}m_1、2^{n_2}m_2\in R$ Let 令 $n=\min\{n_1,n_2\}$

$\Rightarrow 2^{n_1-n}、2^{n_2-n}\in\mathbb{Z}$. $\Rightarrow 2^{n_1}m_1-2^{n_2}m_2=2^n(2^{n_1-n}m_1-2^{n_2-n}m_2)\in R$.

$2^{n_1}m_1\cdot 2^{n_2}m_2=2^{n_1+n_2}m_1m_2\in R$.

R是 $\mathbb{Q}$ 子环.

(2) 由R定义. $U(R)=\{\pm 2^n \mid n\in\mathbb{Z}\}$.

23. Proof: 显然题中运算都为代数运算.

① $(A+B)+C=A+(B+C)$. $(A\cdot B)\cdot C=A\cap(B\cap C)=A\cdot(B\cdot C)$.

加.乘满足结合律.

② ϕ 为零元. X 为单位元. 又：$A+A=\phi\Rightarrow A$ 为A负元.

③ $A+B=(A-B)\cup(B-A)=(B-A)\cup(A-B)=B+A$. $A\cdot B=B\cap A=B\cdot A$.

加.乘满足交换律.

④ $(A+B)\cdot C=(A\cdot C)+(B\cdot C)$ 同理 $C\cdot(A+B)=C\cdot A+C\cdot B$、乘法对加法满足结合律.

故：$P(X)$ 关于所定义运算构成有单位元的交换环.

25. 构造令: $\phi: U(M_2(\mathbb{Z}_4)) \longrightarrow U(M_2(\mathbb{Z}_2))$. $\begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}a&b\\c&d\end{pmatrix}$.

可知ϕ是满同态. 故有: $\Phi: U(M_2(\mathbb{Z}_4))/\ker\phi \cong U(M_2(\mathbb{Z}_2))$.

由高代知识, $\ker\phi$ 有16个元素. $\Rightarrow$ $M_2(\mathbb{Z}_4)$ 有 $16\times 6=96$个可逆矩阵.

显然,令S由 $\begin{pmatrix}1&0\\1&1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}1&1\\1&0\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0&1\\1&1\end{pmatrix}$、$\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$ 构成,那么与$\ker\phi$相乘可得 $M_2(\mathbb{Z}_4)$中所有元素. $\Rightarrow U(M_2(\mathbb{Z}_4)) = \{AB \mid A\in S, B\in\ker\phi\}$.

P30.4. $\forall x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2 \in \mathbb{Z}$. 有: $\alpha = x_1+y_1\sqrt[3]{2}+z_1\sqrt[3]{4}$, $\beta = x_2+y_2\sqrt[3]{2}+z_2\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$

$\alpha-\beta = (x_1-x_2)+(y_1-y_2)\sqrt[3]{2}+(z_1-z_2)\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

$\alpha\beta = (x_1x_2+2y_1z_2+2z_1y_2)+(x_1y_2+y_1x_1+2z_1z_2)\sqrt[3]{2}+(x_1z_2+y_1y_2+x_2z_1)\sqrt[3]{4} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$.

又: $\forall a,b,c\in\mathbb{Q}$ 且不全为0.

$$(a+b\sqrt[3]{2}+c\sqrt[3]{4})^{-1} = \frac{(a^2-2bc)+(2c^2-ab)\sqrt[3]{2}+(b^2-ac)\sqrt[3]{4}}{a^3+2b^3+4c^3-6abc} \in \mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}].$$

故 $\mathbb{Q}[\sqrt[3]{2}]$ 关于通常数加,乘法构成一个域.

14.

	0	1	-1	i	-i	1+i	-1+i	1-i	-1-i
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	-1	i	-i	1+i	-1+i	1-i	-1-i
-1	0	-1	1	-i	i	-1-i	1-i	-1+i	1+i
i	0	i	-i	-1	1	-1+i	-1-i	1+i	1-i
-i	0	-i	i	1	-1	1-i	1+i	-1-i	-1+i
1+i	0	1+i	-1-i	-1+i	1-i	-i	1	-1	i
-1+i	0	-1+i	1-i	-1-i	1+i	1	i	-i	-1
1-i	0	1-i	-1+i	1+i	-1-i	-1	-i	i	1
-1-i	0	-1-i	1+i	1-i	-1+i	i	-1	1	-i

显然 $\mathbb{Z}_3[i]$ 是有限整环 $\Rightarrow$ 是一个域.

15. 由乘法表知：$(1+i)^2=-i$，$(1+i)^3=1-i$，$(1+i)^4=-1$，$(1+i)^5=-1-i$，$(1+i)^6=i$

$(1+i)^7=-1+i$，$(1+i)^8=1$，$(1+i)^9=1+i=(1+i)^1$.

$\langle 1+i\rangle$ 是循环群. $\Rightarrow U(Z_3[i])$ 是循环群.

19. $Z_4\oplus Z_{10}$.

可逆元：(1,1) (1,3) (3,1) (3,3) (1,7) (1,9) (3,7) (3,9)

零因子：$(0,y)$、$(2,y)$ $(y=0,1,2,\cdots 9)$ × $(0,y)$ $y=1\sim9$. $(2,y)$ $y=0\sim9$.

(x,y) $(x=1,3.\ y=0,2,4,5,6,8)$

幂零元：(0,0) (2,0).

21. (1) Proof：显然 G 对 H 乘法封闭. 且 G 中乘法满足结合、消去律.

$\Rightarrow$ 构成8阶群. 又：$ij\neq ji$ $\Rightarrow$ ~~not Abelian group~~. 非交换群.

(2) Subgroup：$H_1=\{1\}$、$H_2=\{\pm1\}$、$H_3=\{\pm1,\pm i\}$，$H_4=\{\pm1,\pm j\}$，$H_5=\{\pm1,\pm k\}$.

$H_6=G$. 且都是正规子群.

(3) $C(G)=\{\pm1\}$. 换位子群 $[G,G]=\{\pm1\}$.

P138.6. S所有理想：

$I_1=\left\{\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\right\}$，$I_2=S$，$I_3=\left\{\begin{pmatrix}x&y\\0&0\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$，$I_4=\left\{\begin{pmatrix}0&x\\0&y\end{pmatrix}\middle| x,y\in\mathbb{R}\right\}$，$I_5=\left\{\begin{pmatrix}0&x\\0&0\end{pmatrix}\middle| x\in\mathbb{R}\right\}$.

9. 设 $x+yi\in\langle1+2i\rangle$ $\Rightarrow$ $y-2x=-(x+yi)i+(1+2i)xi\in\langle1+2i\rangle$.

$\Rightarrow(1+2i)(y-2x)\in\langle5\rangle$. 即 $5\mid y-2x$. 又：$x+yi=x(1+2i)+(y-2x)i\in\langle1+2i\rangle$.

故 $\langle1+2i\rangle=\{x+yi\mid y\equiv2x\ (\mathrm{mod}\ 5)\}$.

$\overline{x+yi}=\overline{y-2x}=\overline{0}$ $\Rightarrow$ $5\mid y-2x$ 同理 $5\mid y-2x\Rightarrow\overline{0}=\overline{y-2x}$.

故 $Z[i]/I=\{\overline{0},\overline{1},\overline{2},\overline{3},\overline{4}\}$.

13. proof: 设 $a,b\in IJ$. $\Rightarrow \exists x_i\in I, y_i\in J$, $i=1,\cdots,m+n$. s.t. $a=\sum_{i=1}^{m}x_iy_i$, $b=\sum_{i=m+1}^{m+n}x_iy_i$. $a+b\in IJ$.

故 $\forall r\in R$, 有 $ra=r\sum_{i=1}^{m}x_iy_i=\sum_{i=1}^{m}(rx_i)y_i\in IJ$.

$ar=\sum_{i=1}^{m}x_i(ry_i)\in IJ$. 故 IJ 为 R 的理想.

$IJ\subseteq I$、$IJ\subseteq J$, 结合题意, $IJ\subseteq I\cap J$ 可得.

21. proof: ①令 $k=\max\{k_1,k_2,\cdots,k_s\}$. 对 $\forall x\in\langle p_1\cdots p_s\rangle$. 设 $x=p_1p_2\cdots p_sy\ (y\in\mathbb{Z})$

$x^k=d\cdot p_1^{k-k_1}p_2^{k-k_2}\cdots p_s^{k-k_s}y^k\in I$. $\Rightarrow \langle p_1p_2\cdots p_s\rangle\subseteq\sqrt{I}$.

② 同样. $\forall x\in\sqrt{I}$. $\exists k\in\mathbb{N}$, s.t $x^k\in I$. $\Rightarrow p_i^{k_i}\mid x^k$. $\Rightarrow p_i\mid x$.

又: p_i 两两互素. 因此 $p_1\cdots p_s\mid x \Rightarrow x\in\langle p_1\cdots p_s\rangle$. $\Rightarrow \sqrt{I}\subseteq\langle p_1\cdots p_s\rangle$.

综上, $\sqrt{I}=\langle p_1\cdots p_s\rangle$.

26. ① $\forall\bar{x}\in\sqrt{I}/I \Rightarrow x\in\sqrt{I} \Rightarrow \exists n\in\mathbb{N}$, s.t. $x^n\in I$.

即 $\bar{x}^n=\overline{x^n}=\bar{0}$. 故而 $\sqrt{I}/I\subseteq rad(R/I)$.

② $\forall\bar{x}\in rad(R/I)$. $\exists n\in\mathbb{N}$, s.t. $\bar{x}^n=\bar{0}$. 故而 $\overline{x^n}=\bar{x}^n=\bar{0}$.

可知 $\overline{x^n}=\bar{x}^n=\bar{0}\Rightarrow x\in\sqrt{I}$. $\Rightarrow rad(R/I)\subseteq\sqrt{I}/I$.

综上, $\cancel{\sqrt{I}=}\ \sqrt{I}/I=rad(R/I)$.

P48. 6. $\gcd(20,30)=10$. $\mathbb{Z}_{30}$ 中, $10\bar{a}=\bar{0}$ 且为幂等元 $\Rightarrow \bar{a}=\bar{0},\bar{6},\overline{15},\overline{21}$.

故: $\phi_1(\bar{x})=\bar{0}$, $\phi_2(\bar{x})=6\bar{x}$, $\phi_3(\bar{x})=15\bar{x}$, $\phi_4(\bar{x})=21\bar{x}$.

7.(3) $\mathbb{Z}_{12}$ 自同态. $\bar{0},\bar{1},\bar{4},\bar{9}$.

$\phi_1(\bar{x})=\bar{0}$, $\phi_2(\bar{x})=\bar{x}$, $\phi_3(\bar{x})=4\bar{x}$, $\phi_4(\bar{x})=9\bar{x}$.

17. proof: 环第二同构定理: $R/I = ~~\mathbb{Z}~~(I+J)/I \cong J/I\cap J = J/\{0\} \cong J$.   Q.E.D.

P152. 1.(2) $\mathbb{Z}_{12}$. 素理想: $2\mathbb{Z}_{12}, 3\mathbb{Z}_{12}$. 极大理想: $2\mathbb{Z}_{12}, 3\mathbb{Z}_{12}$.

2. 极大理想 (1)、(2)、(3)、(6). 素理想: (1)、(2)、(3)、(5)、(6).

$(3+i) = (1+i)(2-i)$ 且 $1+i, 2-i$ 不是单位. 故无(4).

6. proof: 易知 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 真理想为 I. 设 J 为 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 理想且包含 I.

任取 $(a,b)\notin I$. $\Rightarrow 3\nmid a$. $\Rightarrow a = a'+3k$. ($a'=1$或2, $k\in\mathbb{Z}$).

$\Rightarrow aa' = ~~\text{}~~ 1+3k'$. $\Rightarrow$ ~~(x,y)~~ $(1,0)\in J$. $\Rightarrow J=R \Rightarrow$ 是 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}$ 极大理想.

$(x,y) = (x,0)(1,0)+(0,y)\in J$.

Q.E.D.

7. $R = \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_{30}$.

	ord(R/I_1)
极大理想 $I_1 = \{(2\bar{x},\bar{y}) \mid \bar{x}\in\mathbb{Z}_8, \bar{y}\in\mathbb{Z}_{30}\}$	~~ord~~ ~~ord~~ 2
$I_2 = \{(\bar{x},2\bar{y}) \mid \bar{x}\in\mathbb{Z}_8, \bar{y}\in\mathbb{Z}_{30}\}$	2
$I_3 = \{(\bar{x},3\bar{y}) \mid \bar{x}\in\mathbb{Z}_8, \bar{y}\in\mathbb{Z}_{30}\}$	3
$I_4 = \{(\bar{x},5\bar{y}) \mid \bar{x}\in\mathbb{Z}_8, \bar{y}\in\mathbb{Z}_{30}\}$	5.

15. proof: ($\Leftarrow$): 设 $I=\{0\}$. $\forall x,y\in R$, 若 $xy\in I$. $\Rightarrow xy=0$. $\Rightarrow x=0$或$y=0$ $\Rightarrow x\in I$或$y\in I$.

零理想为 R 素理想.

($\Rightarrow$): $I=\{0\}$ 为 R 素理想. 若 $x,y\in R$, 有 $xy=0 \Rightarrow xy\in I \Rightarrow x=0$ 或 $y=0$.

故 R 是无零因子环.

Q.E.D.