前　言

数学是锻炼思维的体操，微积分是最好的体操教材之一。微积分对人类的科技进程起着决定性的作用。世界科学界，把 Newton 发现微积分的那一年(1966年)，公认为是近代物理学的开始。从那时算起，微积分已经诞生了三百多年，是一门成熟的数学学科，是高等学校理工科的主要基础课之一。但是，成熟是相对的，而不是绝对的，它仍然需要发展、完善和提高。因为它始终充满了勃勃生机，而且，目前正在向着深度和广度扩展。

高等学校在向学生传授知识的同时，要十分注意对学生创新能力的培养。创新应是高等教育活的灵魂，没有创新就不可能有发展和进步。创新是一个过程，不能割断历史，从基础教育就应开始，而且要寓于知识传授之中，学习敢于创新、善于创新，勿以善小而不为之。教师的教学内容和教学法的创新，对激励学生的学习和事业的创新，特别是对树立创新的雄心壮志，起着先导性的不可替代的启迪作用。应试教育(包括其考试模式)是僵化和死板的，快节奏填鸭式教育与素质教育的要求、创新意识格格不入。经验表明，教育要创新，而且也是可以创新的。

《数学分析拾遗》(以下简称为《拾遗》)是一本数学分析课补充读物，由 12 个各自独立的问题和两个附录组成，这些问题都是笔者在教学中积累起来的。之所以称其为《拾遗》，理由有两个：一是因为这些问题，确是地道的数学分析问题，而非其他；二是因为国内外现行的同类书中，尚未见到这些新颖有趣的材料。我们知道，"学会学习"本身比"学会什么"更重要。在每个问题的开始，我们不仅给出了问题的陈述，而且还说明了问题的背景，即问题是怎样提出来的和在什么情况下提出来的，以利于读者真正领会本书的精神实质。如果在阅读笔者写的《高等微积分》和《微积分教程》两书时，还有困难没能解决，可在《拾遗》中得到具体帮助。实践证明，将《拾遗》中的问题，融入数学分析课的教学，可取得明显的效果，是成功的。所以笔者著《拾遗》以飨读者，抛砖引玉。笔者坚持"一本好书，不求没有缺点，而应有特色，特色才是其灵魂"的观点，至今不悔。

"为祖国健康工作四十年"，这是笔者学生时代立下的誓言。在笔者的夙愿就要得以实现的时候，笔者心潮澎湃，思绪万千。笔者衷心感谢我的老同学顾新身教授、王泽涵高级工程师、冯世燡高级工程师和程乃毅高级工程师真诚无私的帮助，如果没有他们的帮助，也就不会有《拾遗》的问世。

衷心感谢北京大学的陈维桓教授，清华大学的韩云瑞教授，他们不但对本书稿提出了许多建设性的意见，而且还热情地促成了本书的出版。

此外，还要感谢赵翠宇讲师，她对本书稿撰写的早日完成，起了催化剂的作用。

我期望能把《拾遗》写得有血有肉，有声有色，言之有物，不流于形式，所以在行文方式与风格上，没有遵循通常的路径。但是，由于本人水平所限，错误和不当之处在所难免，恳请读者不吝赐教，欢迎多提宝贵意见，以便今后予以改进。

最后，还要感谢本书的编辑同志，正是他们卓有成效的工作与辛勤劳动，才使本书能得以早日问世。

赵显曾

2003年9月22日

于南京·龙江

目　　录

1. 区间序列的一个性质

D. Hilbert 说:"在讨论数学问题时,我相信特殊化比一般化起着更为重要的作用. 可能在大多数场合,我们寻找一个问题的答案而未能成功的原因,是在于这样的事实,即有一些比手头的问题更简单、更容易的问题没有完全解决或是完全没有解决. 这时一切都有赖于找出这些比较容易的问题,并用尽可能完善的方法和能够推广的概念来解决它们. 这种方法是克服数学困难的最重要的杠杆之一……."

具体问题是数学的鲜血."区间序列的一个性质",这个问题是如何提出的呢?在科技迅猛发展的今天,关于稳定性、可靠性的研究,越来越迫切、重要. 对非均匀分布的点态已感不满足,往往要通过有限认识无限,寻求一个数学结构稳定的范围(区间). 不禁要问:这个区间存在吗? 条件是什么? 如何搜索? 考虑到周期函数的特征,只要分析其在一个基本区间的性质即可. 于是,从集合论的角度看,若将周期函数看作是均匀分布的问题,那么非周期函数就可看作是非均匀分布的问题. 这就是下面我们所要讨论的问题.

为了叙述方便起见,我们称 $a>0$ 时的区间 $[a,b]$ 为正区间;而称 $b<0$ 时的区间 $[a,b]$ 为负区间.

定理 1 设 $\{[a_n,b_n]\}$ 是一正区间序列. 如果 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$,在 $[a_n,b_n]$ 上每一个点都具有某个性质 P,则存在一数 γ,使得点到 $\{n\gamma\}$ 中有子列 $\{n_j\gamma\}$,在子列的每一个点 $n_j\gamma$ 处也都具有某个性质 P.

证 取 $[\alpha_1,\beta_1]=[a_1,b_1]$,并考虑 $[n\alpha_1,n\beta_1]$(n 为正整数). 令 $N_1=\left[\dfrac{\alpha_1}{\beta_1-\alpha_1}\right]+1$,其中 $[x]$ 表示 x 的最大整数部分. 因此,当 $n\geqslant N_1$ 时,有

$$n\beta_1\geqslant(n+1)\alpha_1,$$

区间序列 $\{[n\alpha_1,n\beta_1]\}$ 覆盖数集 $\{x\mid x>N_1\alpha_1\}$. 于是,存在两个正整数 n_1 与 m_1,使得

$$[n_1\alpha_1,n_1\beta_1]\cap(a_{m_1},b_{m_1})\neq\varnothing,$$

记

$$[a'_{n_1},b'_{n_1}]=[n_1\alpha_1,n_1\beta_1]\cap[a_{m_1},b_{m_1}].$$

取 $\alpha_2=\dfrac{a'_{n_1}}{n_1}$，$\beta_2=\dfrac{b'_{n_1}}{n_1}$，则

$$[n_1\alpha_2,n_1\beta_2]\subseteq[a_{m_1},b_{m_1}]$$

上每一个点都具有某个性质 P，且由于

$$[n_1\alpha_2,n_1\beta_2]\subseteq[n_1\alpha_1,n_1\beta_1],$$

所以$[\alpha_2,\beta_2]\subseteq[\alpha_1,\beta_1]$.

再考虑$[n\alpha_2,n\beta_2]$. 当 $n\geqslant N_2=\left[\dfrac{\alpha_2}{\beta_2-\alpha_2}\right]+1$ 时，区间序列$\{[n\alpha_2,n\beta_2]\}$覆盖数集$\{x\,|\,x>N_2\alpha_2\}$. 于是，存在两个正整数 $n_2>n_1$ 和 $m_2>m_1$，使得

$$[n_2\alpha_2,n_2\beta_2]\cap(a_{m_2},b_{m_2})\neq\varnothing,$$

记

$$[a'_{n_2},b'_{n_2}]=[n_2\alpha_2,n_2\beta_2]\cap[a_{m_2},b_{m_2}].$$

取 $\alpha_3=\dfrac{a'_{n_2}}{n_2}$，$\beta_3=\dfrac{b'_{n_2}}{n_2}$，则$[n_2\alpha_3,n_2\beta_3]$上每一个点都具有某个性质 P，且$[\alpha_3,\beta_3]\subseteq[\alpha_2,\beta_2]$.

依次继续下去，得区间序列$\{[\alpha_n,\beta_n]\}$及两个正整数数列$\{n_j\}$与$\{m_j\}$，满足条件

(1) $[\alpha_{n+1},\beta_{n+1}]\subseteq[\alpha_n,\beta_n]$，$n=1,2,\cdots$；

(2) $n_j<n_{j+1}$，$m_j<m_{j+1}$，$j=1,2,\cdots$；

(3) $[n_j\alpha_{j+1},n_j\beta_{j+1}]\subseteq[a_{m_j},b_{m_j}]$，$j=1,2,\cdots$，

且$[n_j\alpha_{j+1},n_j\beta_{j+1}]$上每一个点都具有某个性质 P.

这样以来，由(1)可知

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n\leqslant\lim_{n\to\infty}\beta_n,$$

至少存在一数 $\gamma\in[\alpha_n,\beta_n]$（$n=1,2,\cdots$）. 由(2)可知$\{n_j\gamma\}$是$\{n\gamma\}$的子列；再根据(3)，对任意的正整数 j，

$$n_j\gamma\in[n_j\alpha_{j+1},n_j\beta_{j+1}]\subseteq[a_{m_j},b_{m_j}]$$

具有某个性质 P. 因此，γ 就是所要求的数.

定理 1 证毕.

定理 2 设$\{[a_n,b_n]\}$是一正区间序列. 如果$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$，在$[a_n,b_n]$上每一个点都具有某个性质 P，则存在一数 γ，使得点列$\left\{\dfrac{\gamma}{n}\right\}$中有子列$\left\{\dfrac{\gamma}{n_j}\right\}$，在子列的每一个点$\dfrac{\gamma}{n_j}$也都具有某个性质 P.

其证明与定理 1 的证明类似. 只要将前面证明中所考虑的区间$[n\alpha_1,n\beta_1]$换为

$\left[\frac{\alpha_1}{n},\frac{\beta_1}{n}\right]$，数集$\{x|x>N_1\alpha_1\}$换为$\left\{x\left|x<\frac{\beta_1}{N_1}\right.\right\}$，等等，定理 2 便可得证.

注 1　在定理 1 中“正区间序列”的条件可改成“$a_1>0$”，在定理 2 中该条件可改成“$a_n\geqslant 0$”.

注 2　上述两个定理，对于负区间序列，也有类似的结果，这里不再赘述.

最后，作为定理 1 的应用，证明下例.

例　设函数 f 在$(0,+\infty)$连续，且对任给的数 $\gamma>0$，都有

$$\lim_{n\to\infty}f(n\gamma)=0,$$

其中 n 为正整数，证明 $\lim\limits_{n\to+\infty}f(x)=0$.

证　用反证法. 假若不然，则必存在一个 $\varepsilon_0>0$ 及数列$\{x_n\}$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$，使得

$$|f(x_n)|>\varepsilon_0(n=1,2,\cdots).$$

由于 f 的连续性，所以存在含有点 x_n 的区间$[a_n,b_n]$，当 $x\in[a_n,b_n]$时，有

$$|f(x)|>\varepsilon_0.$$

于是，根据定理 1 可知，存在一数 $\gamma\geqslant a_1>0$，以及无限多个正整数 n_j：

$$n_1<n_2<\cdots<n_j<\cdots,$$

使得

$$|f(n_j\gamma)|\geqslant\varepsilon_0,$$

而这与已知条件相矛盾. 由此即得所证.

2. 周期函数之和的周期性

这里，所谓周期函数，均指定义在数轴 $\mathbf{R}$ 上的实值周期函数，与人们对周期函数的直观认识一致. 有关周期函数的重要意义是众所周知的. 至于两个周期函数迭加的周期性，是一个古老而且十分有趣的问题，但是作为周期函数论尚处于研究与发展之中.

两个周期函数的周期对它们迭加后的周期性有着重大的影响. 我们知道：定义域相同的两个周期函数，如果它们的周期是可公度的，则其和仍为周期函数. 当两个周期函数的周期不可公度时，情况就复杂得多了. Б. М. 列维坦在《概周期函数》一书中曾指出：两个连续周期函数，如果周期是不可公度的，那么这两个周期函数的和不是周期函数. 但是，有关此论断的证明，本人至今尚未见到公开报道. 事实上，考虑到以任意常数为周期的周期函数的存在性，仅有"周期是不可公度的"条件，显然该结论是欠妥当的；只要将条件改为"最小正周期是不可公度的"，结论就正确了. 李运樵教授等在《微积分标准化试题集》一书中指出：周期函数

$$f(x) = x - [x], g(x) = \sin x, \forall x \in \mathbf{R}$$

的和 $f(x)+g(x)$ 为非周期函数，但是没有证明. B. R. 盖尔鲍姆和 J. M. H. 奥姆斯特德在《分析中的反例》一书中证明了：周期函数 $\sin x$ 与 $\sin \alpha x$ 之和为非周期函数，其中 α 为无理数. 这只是一个特例，并非一般.

在给出两个周期函数之和的周期性的一般化结论之前，我们先证明一个引理.

引理 设 a、b 是两个不可公度的正数，则存在数偶序列 (m_k, n_k)，$k=1,2,3,\cdots$，使得

$$\lim_{k\to\infty}(m_k a + n_k b) = 0,$$

其中 m_k, n_k 都是整数.

证 为了确定起见，不妨设 $0<a<b$，且记 $b=a_0, a=a_1$. 根据辗转相除的方法，存在惟一的正整数 i_1 及 $a_2\in(0,a_1)$，使得

$$a_0 = i_1 a_1 + a_2,$$

并且 a_1、a_2 不可公度. 同理，存在惟一的正整数 i_2 及 $a_3\in(0,a_2)$，使得

$$a_1 = i_2 a_2 + a_3,$$

且 a_2、a_3 不可公度. 依此类推，存在惟一的正整数 i_k 及 $a_{k+1}\in(0,a_k)$，使得

$$a_{k-1} = i_k a_k + a_{k+1},$$

且 a_k、a_{k+1}不可公度($k=3,4,5,\cdots$).

因为 $a_3<a_2$ 及 $a_3\leqslant a_1-a_2$,所以有

$$a_3 < \frac{1}{2}\{a_2+(a_1-a_2)\} = \frac{a_1}{2} = \frac{a}{2};$$

又由于 $a_{2l+1}<a_{2l}$及 $a_{2l+1}\leqslant a_{2l-1}-a_{2l}$,故有

$$a_{2l+1} < \frac{1}{2}a_{2l-1} < \frac{1}{4}a_{2l-3} < \cdots < \frac{1}{2^l}a_1 \quad (l=2,3,4,\cdots).$$

考虑到

$$a_{k+1} < a_k, \quad (k=1,2,3,\cdots),$$

于是有

$$\lim_{k\to\infty} a_k = 0,$$

但是

$$a_2 = a_0 - i_1 a_1 = -i_1 a + b = m_1 a + n_1 b,$$

其中 $m_1=-i_1<0,n_1=1>0$. 而

$$a_3 = a_1 - i_2 a_2 = (1-i_2 m_1)a - i_2 n_1 b = m_2 a + n_2 b,$$

其中 $m_2=1-i_2m_1>0,n_2=-i_2n_1<0$,即 m_1 与 m_2、n_1 与 n_2 均异号,且$|m_2|>|m_1|$,$|n_2|\geqslant|n_1|$.一般,由数学归纳法可得

$$\begin{aligned} a_{k+1} &= a_{k-1} - i_k a_k = (m_{k-2}a + n_{k-2}b) - i_k(m_{k-1}a + n_{k-1}b) \\ &= (m_{k-2} - i_k m_{k-1})a + (n_{k-2} - i_k n_{k-1})b \\ &= m_k a + n_k b \quad (k=3,4,5,\cdots) \end{aligned}$$

其中整数 m_{k-1}与 m_k,n_{k-1}与 n_k 均异号,且当 $k\to\infty$时,有

$$|m_{k-1}| < |m_k| \to \infty, \quad |n_{k-1}| \leqslant |n_k| \to \infty.$$

综上,引理得证.

定理 1 设 $f(x)$和 $g(x)$是定义于数轴 $\mathbf{R}$ 上的周期函数,它们的最小正周期分别为 T_1,T_2.如果 $f(x)$,$g(x)$至少有一个是连续的,且 T_1,T_2 不可公度,则$f(x)+g(x)$为非周期函数.

证 为了确定起见,假设周期函数 $f(x)$在数轴 $\mathbf{R}$ 上连续.用反证法.假若不然,即 $f(x)+g(x)$是周期函数,那么必定存在一个正数 T,$\forall x\in\mathbf{R}$,都有

$$f(x+T)+g(x+T) = f(x)+g(x),$$

即

$$f(x+T)-f(x) = g(x)-g(x+T) \equiv \varphi(x).$$

以下,首先证明 $\varphi(x)$以 mT_1+nT_2 为周期,其中 m,n 为两个任意的整数.事实上,由于 $f(x)$,$g(x)$分别以 T_1,T_2 为周期,所以 $\varphi(x)$既以 T_1 为周期又以 T_2 为

周期，从而可知 $\varphi(x)$ 必定以 mT_1+nT_2 为周期（其中 m,n 为任意整数）. 于是，$\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x+T+mT_1+nT_2)-f(x+mT_1+nT_2)=f(x+T)-f(x).$$

其次，证明 $\varphi(x)=C$（常数），$\forall x\in\mathbf{R}$. 用反证法. 假设存在 $x_1\neq x_2$，使 $\varphi(x_1)\neq\varphi(x_2)$. 由于 $f(x)$ 的连续性，可知 $\varphi(x)$ 连续，因此，存在 $\delta>0$，使当 $|x-x_2|<\delta$ 时，有

$$\varphi(x)\neq\varphi(x_1).$$

因为 T_1 与 T_2 不可公度，由引理可知，存在整数偶 (m_0,n_0)，使

$$0<|m_0T_1+n_0T_2|<\delta.$$

又存在整数 k，使

$$x_1+k(m_0T_1+n_0T_2)\in(x_2-\delta,x_2+\delta).$$

由于 $\varphi(x)$ 是以 mT_1+nT_2 为周期的（m,n 为任意整数），所以

$$\varphi(x_1+k(m_0T_1+n_0T_2))=\varphi(x_1).$$

而这与 $x\in(x_2-\delta,x_2+\delta)$ 时 $\varphi(x)\neq\varphi(x_1)$ 相矛盾. 因此有

$$\varphi(x)=C,\ \forall x\in\mathbf{R}.$$

最后，证明 $C=0$. 由于

$$f(x+T)-f(x)=C,\ \forall x\in\mathbf{R},$$

所以对任意正整数 n，都有

$$f(x+nT)-f(x)=\sum_{k=1}^{n}\{f(x+kT)-f(x+(k-1)T)\}=nC.$$

考虑到 $f(x)$ 是数轴 $\mathbf{R}$ 上的连续周期函数，在一个周期上的振幅为一定值，故必有 $C=0$，即 $\forall x\in\mathbf{R}$，有

$$f(x+T)-f(x)=0,\quad g(x+T)-g(x)=0,$$

从而 T 既是 $f(x)$ 的周期又是 $g(x)$ 的周期. 由于 T_1 与 T_2 分别为 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最小正周期，所以存在两个正整数 p 与 q，使得

$$pT_1=T=qT_2.$$

因而 T_1 与 T_2 可公度，这与已知条件相矛盾.

综上，定理 1 得证.

如果去掉定理 1 中"$f(x)$，$g(x)$ 至少有一个是连续的"条件，结论未必成立. 因此，在某种意义下，这个定理是"最佳可能"的.

作为定理 1 的证明方法的一个应用，我们可以给出两个周期函数乘积的周期性的一个论断.

例 1 设 $f(x)$，$g(x)$ 是定义于数轴 $\mathbf{R}$ 上的周期函数，它们的最小正周期分别为 T_1，T_2. 如果 $f(x)$，$g(x)$ 至少有一个是连续的，且 T_1，T_2 不可公度，对任意

$x\in \mathbf{R}$,都有 $f(x)g(x)\neq 0$,则乘积 $f(x)g(x)$不是周期函数.

其实,例 1 的证明与定理 1 的证明完全类似. 采用反证法. 若 $f(x)$连续, $f(x)g(x)$是周期函数,则存在一正数 T,使得

$$f(x+T)g(x+T)=f(x)g(x),\ \forall x\in \mathbf{R},$$

即

$$\frac{f(x+T)}{f(x)}=\frac{g(x)}{g(x+T)}\equiv \psi(x),$$

且 $\psi(x)\neq 0$. 可分三步证明:

(1) $\psi(x)$以 mT_1+nT_2 为周期;

(2) $\psi(x)=C$(C 是非零常数);

(3) $C=1$.

从而可得 T_1 与 T_2 可公度,与题设矛盾. 于是例 1 获证.

有人曾以集合论为基础,建立加群的周期子集概念,定义了两个最小正周期不可公度的周期函数,给出了它们的和是周期函数的例子. 但是,这两个周期函数在共同的定义域上的最小正周期是完全一样的,似乎与常规并不相符,有点艰涩无味.

由定理 1 可知,要给出周期不可公度的两个周期函数之和为周期函数的例子(例 3),除了要求这两个周期函数必须是不连续的外,还要满足以下必要条件.

定理 2 设 $f(x)$与 $g(x)$都是定义在数轴 $\mathbf{R}$ 上的周期函数,它们的最小正周期分别为 T_1 与 T_2. 如果 T_1 与 T_2 不可公度,$h(x)=f(x)+g(x)$是周期函数,其周期为 $T_3>0$,则 T_3 与 T_1(或 T_2)不可公度.

证 用反证法. 假若 T_3 与 T_1 可公度,则必存在正整数 m 与 n,使得

$$mT_3=nT_1\equiv T,$$

于是周期函数

$$g(x)=h(x)-f(x)$$

是以 T 为周期的. 考虑到 $g(x)$以 T_2 为最小正周期,所以存在正整数 k,使得

$$nT_1=T=kT_2.$$

即 T_1 与 T_2 是可公度的,而这与已知条件相矛盾. 因此,T_3 与 T_1 不可公度.

同理可证,T_3 与 T_2 也不可公度.

定理 2 证毕.

例 2 证明周期函数

$$f(x)=x-[x],$$

$$g(x)=\begin{cases}1, & x=n\pi\quad (n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots),\\ 0, & x\in R\backslash\{n\pi\mid n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots\}\end{cases}$$

的和 $f(x)+g(x)$不是周期函数,其中$[x]$为 x 的最大整数部分.

证 显然 $f(x)$,$g(x)$的最小正周期 1 与 π 是不可公度的. 假若 $f(x)+g(x)$ 是周期函数,则存在常数 $T>0$,对任意 $x\in\mathbf{R}$,都有

$$f(x+T)+g(x+T)=f(x)+g(x),$$

即

$$f(x+T)-f(x)=g(x)-g(x+T).$$

令 $x=0$,得

$$f(T)-f(0)=g(0)-g(T).$$

由定理 2 可知 T 与 1,T 与 π 均不可公度,所以 $g(T)=0$. 于是,有

$$T-[T]=1,$$

而这与 $T-[T]<1$ 相矛盾,即 $f(x)+g(x)$不是周期函数.

为了将要构造我们所需要的例子(例 3),还要先给出全体实数的一个分类. 今特别取 $T_1=\sqrt{2}$,$T_2=\sqrt{3}$,$T_3=1$,则 T_1,T_2,T_3 显然是两两不可公度的正数,且当 j,m,n 是不全为零的整数时,$j+m\sqrt{2}+n\sqrt{3}\neq 0$. 由此,定义 $\mathbf{R}$ 中的一个等价关系为:设 x_1,x_2 是两个实数,如果存在整数数组 j,m,n,使得

$$x_1-x_2=j+m\sqrt{2}+n\sqrt{3},$$

则称 x_1 与 x_2 为等价数,记为 $x_1\sim x_2$.

对任意实数 x,令

$$\tilde{x}=\{y\mid y\sim x,y\in\mathbf{R}\},$$

称 $\tilde{x}$ 为 x 的一个等价类. 所有等价类的全体记为 $\mathscr{A}$,即

$$\mathscr{A}=\{A\mid \exists x\in\mathbf{R},A=\tilde{x}\}.$$

定理 3 存在数集 $E\subseteq\mathbf{R}$,对任给的 $x\in\mathbf{R}$,都有惟一的一组数(x',j,m,n),其中 $x'\in E$,而 j,m,n 为整数,使得

$$x=x'+j+m\sqrt{2}+n\sqrt{3}. \tag{1}$$

证 由上述对实数的分类可知,当 x_1 与 x_2 不等价时,$\tilde{x}_1\cap\tilde{x}_2\neq\varnothing$. 这样,$\mathbf{R}$ 被分成了两两不相交的非空的等价类,并且有

$$\mathbf{R}=\bigcup_{A\in\mathscr{A}}A.$$

由选择公理,存在一选择函数 φ,使得 $\varphi(A)=x'$,$A\in\mathscr{A}$,其中 $x'\in A\subseteq\mathbf{R}$. 因此,取 $E=\{x'\mid x'=\varphi(A),A\in\mathscr{A}\}$. 那么,对任一实数 x,都有惟一的一组数(x',j,m,n),使得

$$x=x'+j+m\sqrt{2}+n\sqrt{3},$$

其中 $x'\in E$,而 j,m,n 为整数. 定理 3 证毕.

为方便起见,称定理 3 中的表达式(1)为 x 关于 E 的分解式,并规定 0 的分解式为

$$0+0\cdot 1+0\cdot\sqrt{2}+0\cdot\sqrt{3},$$

而这只要定义 $\varphi(\widetilde{0})=0$ 即可.

例 3 下面构造所需要的例子. 对任一实数 x,都有惟一的分解式(1),定义

$$f(x)=2x'+j+n\sqrt{3},$$
$$g(x)=x'-j+m\sqrt{2},$$

则

$$h(x)=f(x)+g(x)=3x'+m\sqrt{2}+n\sqrt{3}.$$

证明:$f(x)$,$g(x)$,$h(x)$是分别以 $T_1=\sqrt{2}$,$T_2=\sqrt{3}$,$T_3=1$ 为最小正周期的周期函数,且均不连续.

证 由于对任一实数 x 的分解式(1)是惟一的,所以

$$x+\sqrt{2}=x'+j+(m+1)\sqrt{2}+n\sqrt{3},\quad x'\in E,$$

也惟一. 因此,根据函数 $f(x)$的定义,有

$$f(x+\sqrt{2})=2x'+j+n\sqrt{3}=f(x),\quad x\in\mathbf{R}.$$

即 $T_1=\sqrt{2}$是 $f(x)$的一个周期.

再证明 $T_1=\sqrt{2}$是 $f(x)$的最小正周期. 而这只要证明:如果 T 是 $f(x)$的周期,则 T 必为$\sqrt{2}$的整数倍. 为此,设 T 的分解式为

$$T=x_0+j_0+m_0\sqrt{2}+n_0\sqrt{3},\tag{2}$$

其中 j_0,m_0,n_0 为一整数数组. 因为 T 是 $f(x)$的周期,所以

$$f(T)=f(0)=0.$$

又由 $f(x)$的定义,有

$$f(T)=2x_0+j_0+n_0\sqrt{3},$$

因此,有

$$0=2x_0+j_0+n_0\sqrt{3}.\tag{3}$$

由式(2)减去式(3),得

$$T=-x_0+m_0\sqrt{2}.\tag{4}$$

式(2)加式(4),得

$$2T=j_0+2m_0\sqrt{2}+n_0\sqrt{3}.\tag{5}$$

这说明 $2T\sim 0$,即 $2T$ 是 0 的等价类中的数,式(5)是 $2T$ 的分解式,考虑到 $2T$ 还是 $f(x)$的周期,得

$$0=f(0)=f(2T)=j_0+n_0\sqrt{3}.\tag{6}$$

式(5)减去式(6)后,两边同除以 2,得 $T=m_0\sqrt{2}$,于是 $T_1=\sqrt{2}$确实是 $f(x)$的最小

正周期.

最后证明 $f(x)$ 不连续. 因为对任意一组不全为零的整数 j,m,n, 都有

$$j+m\sqrt{2}+n\sqrt{3}\neq 0.$$

所以对于 $\varepsilon_0=\frac{\sqrt{2}}{2}>0$, 任意 $\delta\in\left(0,\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$, 由引理可知, 存在整数数组 j_0,m_0,n_0, 使得

$$0<|j_0+m_0\sqrt{2}+n_0\sqrt{3}|<\frac{\delta}{2},$$

且 $m_0\neq 0$. 取 $x_0=0, x=x'+j_0+m_0\sqrt{2}+n_0\sqrt{3}$, 其中 $x'\in E\cap\left(-\frac{\delta}{2},\frac{\delta}{2}\right)$, 虽然

$$|x-x_0|\leqslant|x'|+|j_0+m_0\sqrt{2}+n_0\sqrt{3}|<\delta,$$

但是

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)|&=|2x'+j_0+n_0\sqrt{3}|\\&=|2x'+(j_0+m_0\sqrt{2}+n_0\sqrt{3})-m_0\sqrt{2}|\\&\geqslant|m_0\sqrt{2}|-2|x'|-|j_0+m_0\sqrt{2}+n_0\sqrt{3}|>\varepsilon_0.\end{aligned}$$

即 $f(x)$ 不连续.

同理可证, $g(x)$ 与 $h(x)$ 是分别以 $T_2=\sqrt{3}, T_3=1$ 为最小正周期的不连续的周期函数.

综上, 例 3 证毕.

总之, 我们的结论是: 设 $f(x)$ 与 $g(x)$ 是定义于数轴 **R** 上的最小正周期不可公度的两个周期函数, 则当它们至少有一个连续时, 其和 $f(x)+g(x)$ 不是周期函数; 当它们均不连续时, 其和 $f(x)+g(x)$ 可能是非周期函数, 也可能是周期函数.

顺便还要指出, 不难证明: 如果周期函数 f 为非常值的连续函数, 则必有最小正周期. 事实上, 假若不然, 设 f 无最小正周期. 取定一点 x_0, 因为 f 在点 x_0 连续, 可以任给 $\varepsilon>0$, 存在 $\delta>0$, 只要 $|x-x_0|<\delta$, 就有

$$|f(x)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

根据反证法的假设, 存在 f 的一个周期 T, 使得 $0<T<\delta$. 因此, 对任意给定的 y, 记 $\left[\frac{y-x_0}{T}\right]=n$(整数部分), 则 $0\leqslant y-nT-x_0<T<\delta$, 有

$$|f(y-nT)-f(x_0)|<\varepsilon,$$

考虑到 T 是 f 的周期, 所以 $f(y-nT)=f(y)$. 于是, 可得

$$|f(y)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

由于 y 与 x_0 是两个定点, ε 为任意正数, 便得 $f(y)=f(x_0)$. 又因为 y 的任意性, 可知对任意 x, 都有 $f(x)=f(x_0)$, 即 f 为常值函数, 矛盾.

3. 关于 Riemann 积分的定义

定积分定义中“两个任意性”的实质

设有限集 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$，满足条件

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b,$$

则称 T 是区间$[a,b]$的一个划分.

定义 设函数 f 定义于区间$[a,b]$，T 是$[a,b]$的任意一个划分，记 $\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$，$\lambda(T)=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}$. 在每个子区间$[x_{i-1},x_i]$上任意取一点 $\xi_i(i=1,2,\cdots,n)$，作 Riemann 和

$$R(f,T,\xi) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i.$$

若有一常数 I，对于任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使当 $\lambda(T)<\delta$ 时，就有

$$| R(f,T,\xi) - I |< \varepsilon,$$

则称当 $\lambda(T)\to 0$ 时 $R(f,T,\xi)$以 I 为极限，即

$$\lim_{\lambda(T)\to 0} R(f,T,\xi) = I;$$

并称函数 f 在区间$[a,b]$上 Riemann 可积，I 为 f 在$[a,b]$上的定积分，记为 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，即

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I.$$

这个定义的几何意义与物理意义十分清楚，它为定积分的实际应用提供了分析问题的思路、处理问题的方法，这是它的优点. 但是，由于在这个定义中有“两个任意性”，即任意划分 T 与任意选取中间点集 $\xi=\{\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_n\}$，所以这里的极限并不是通常的极限，而是一种新类型的极限，因此就使得定积分概念显得很复杂，难以掌握其实质.

其实，定积分定义中“两个任意性”的实质，只有“一个任意性”起作用，即或者

对特殊的划分 T 任取 ξ，或者对任意划分 T 取特殊的 ξ 均可.

鉴于函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，必有界，所以我们可以仅就有界函数来讨论这个问题. 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有界，$T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 是 $[a,b]$ 的任意一个划分，记

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\},$$
$$m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i\},$$
$$U(f,T) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$
$$L(f,T) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

由于

$$\inf\{f(x) \mid a \leqslant x \leqslant b\} \cdot (b-a) \leqslant L(f,T)$$
$$\leqslant U(f,T) \leqslant \sup\{f(x) \mid a \leqslant x \leqslant b\} \cdot (b-a),$$

所以对任意划分 T，$U(f,T)$ 的下确界与 $L(f,T)$ 的上确界都存在且有限. 令

$$\overline{I}(f) = \inf_T U(f,T),$$
$$\underline{I}(f) = \sup_T L(f,T),$$

则 $\underline{I}(f) \leqslant \overline{I}(f)$. 众所周知，有界函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件是 $\overline{I}(f) = \underline{I}(f)$.

定理 1 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上有界，划分 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$ 将 $[a,b]$ 等分成几个子区间，对任意 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ $(k=1,2,\cdots,n)$，若极限

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n} = I,$$

其中 I 为常数. 即任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n>N$ 时，有

$$\left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n} - I \right| < \varepsilon,$$

则函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = I$.

证 由于对任意 $\xi_i \in [x_{i-1},x_i]$ $(i=1,2,\cdots,n)$，有

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\frac{b-a}{n} = I,$$

所以

$$\lim_{n\to\infty} \left\{ \sum_{i=1}^{n} \sup_{\xi_i} f(\xi_i)\frac{b-a}{n} \right\} = I,$$

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\sum_{i=1}^{n}\inf_{\xi_i}f(\xi_i)\frac{b-a}{n}\right\}=I.$$

根据$\overline{I}(f)$与$\underline{I}(f)$的定义，显然

$$\overline{I}(f)\leqslant\sum_{i=1}^{n}\sup_{\xi_i}f(\xi_i)\frac{b-a}{n},$$

$$\underline{I}(f)\geqslant\sum_{i=1}^{n}\inf_{\xi_i}f(\xi_i)\frac{b-a}{n},$$

令 $n\to\infty$，便得

$$\overline{I}(f)\leqslant I\leqslant\underline{I}(f).$$

但因 $\underline{I}(f)\leqslant\overline{I}(f)$，从而有

$$\underline{I}(f)=\overline{I}(f)=I,$$

即函数 f 在区间$[a,b]$上 Riemann 可积，且有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I$.

定理 1 证毕.

定理 2 设函数 f 在区间$[a,b]$上有界，$T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$是$[a,b]$的任意一个划分，记

$$\lambda(T)=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{\Delta x_i\}=\max_{1\leqslant i\leqslant n}\{x_i-x_{i-1}\},$$

若 $\lim\limits_{\lambda(T)\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i=I$（$I$ 为常数），即任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，只要 $\lambda(T)<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i-I\right|<\varepsilon,$$

则函数 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积，且 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I$.

为了证明定理 2，先来证明一个引理.

引理 设函数 f 在区间$[\alpha,\beta]$上有界，且 m 和 M 分别为其下确界与上确界，则任给 $\varepsilon>0$，存在$[\alpha,\beta]$的一个划分 $\widetilde{T}=\{\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_k\}$，使得

$$f(\xi_i)(\xi_i-\xi_{i-1})\begin{cases}\geqslant\left(M_i-\dfrac{\varepsilon}{6}\right)(\xi_i-\xi_{i-1}), & i\text{ 为奇数},\\ >M_i(\xi_i-\xi_{i-1})-\dfrac{\varepsilon}{6N}, & i\text{ 为偶数},\end{cases}$$

其中

$$M_i=\sup\{f(x)\mid\xi_{i-1}\leqslant x\leqslant\xi_i\}\quad(i=1,2,\cdots,k),$$

$$k\leqslant 2N,\quad N=\left[\frac{12(M-m)}{\varepsilon}\right]+1,$$

这里$[x]$为 x 的最大整数部分.

证 记 $\xi_0=\alpha, g(x)=\sup\{f(t)\mid x\leqslant t\leqslant\beta\}(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$，则 g 在$[\alpha,\beta]$上不增，而且 $g(\alpha)=M$. 我们按以下办法，考虑对$[\alpha,\beta]$的划分.

第一步 若 $g(\beta)\geqslant M-\frac{\varepsilon}{12}$，由于 $g(\beta)=f(\beta)$，此时取 $\xi_1=\beta$，便有

$$f(\xi_1)\geqslant M-\frac{\varepsilon}{12}>M_1-\frac{\varepsilon}{6}.$$

令 $\widetilde{T}=\{\xi_0,\xi_1\}$，就是所要求的划分.

若 $g(\beta)<M-\frac{\varepsilon}{12}$，由于 $g(\alpha)=M$，必存在 $\bar{\xi}_1\in[\alpha,\beta]$，使得

$$g(x)\geqslant M-\frac{\varepsilon}{12},\quad 当\ \alpha\leqslant x\leqslant\bar{\xi}_1,$$

$$g(x)<M-\frac{\varepsilon}{12},\quad 当\ \bar{\xi}_1\leqslant x\leqslant\beta.$$

在上面的式子中，只有当 $\bar{\xi}_1=\alpha$（或 $\bar{\xi}_1=\beta$）时，我们才考虑“$x\leqslant\bar{\xi}_1$”（或“$\bar{\xi}_1\leqslant x$”）中的等号. 由 g 的定义可知，当 $\bar{\xi}_1\leqslant x\leqslant\beta$ 时 $f(x)<M-\frac{\varepsilon}{12}$，而且考虑到

$$g(\bar{\xi}_1-h)\geqslant M-\frac{\varepsilon}{12},$$

（当 $\bar{\xi}_1-h\leqslant\alpha$ 时，用 α 代替 $\bar{\xi}_1-h$），其中 $h=\frac{\varepsilon}{12N(M-m+1)}$，所以存在 $\xi_1\in[\bar{\xi}_1-h,\bar{\xi}_1]$，使得

$$f(\xi_1)\geqslant g(\bar{\xi}_1-h)-\frac{\varepsilon}{12}\geqslant g(\bar{\xi}_1)-\frac{\varepsilon}{12}\geqslant M-\frac{\varepsilon}{6}.$$

取

$$\xi_2=\begin{cases}\bar{\xi}_1+h, & 当\ \bar{\xi}_1+h<\beta,\\ \beta, & 当\ \bar{\xi}_1+h\geqslant\beta,\end{cases}$$

则有

$$f(\xi_1)(\xi_1-\xi_0)\geqslant\left(M_1-\frac{\varepsilon}{6}\right)(\xi_1-\xi_0),$$

$$\begin{aligned}f(\xi_2)(\xi_2-\xi_1)&=M_2(\xi_2-\xi_1)+\{f(\xi_2)-M_2\}(\xi_2-\xi_1)\\&\geqslant M_2(\xi_2-\xi_1)-(M-m)\cdot 2h>M_2(\xi_2-\xi_1)-\frac{\varepsilon}{6N}.\end{aligned}$$

如果 $\xi_2=\beta$，把$[\alpha,\beta]$划分成两个子区间即可. 如果 $\xi_2<\beta$，再进行下一步.

第二步 对区间$[\xi_2,\beta]$，重复第一步的做法，即若 $g(\beta)\geqslant g(\xi_2)-\frac{\varepsilon}{12}$，取 $\xi_3=\beta$，则对$[\xi_2,\beta]$不需再细分；若 $g(\beta)<g(\xi_2)-\frac{\varepsilon}{12}$，可得 ξ_3,ξ_4，使

$$f(\xi_3)(\xi_3-\xi_2)\geqslant\left(M_3-\frac{\varepsilon}{6}\right)(\xi_3-\xi_2),$$

$$f(\xi_4)(\xi_4-\xi_3)>M_4(\xi_4-\xi_3)-\frac{\varepsilon}{6N}.$$

如果 $\xi_4<\beta$,再按上述方法继续下去. 由于每次细分后,有

$$M_3<M_1-\frac{\varepsilon}{12},$$

$$M_{2j+1}<M_{2j-1}-\frac{\varepsilon}{12}<\cdots<M_1-\frac{j\varepsilon}{12},$$

而且 $M_1\leqslant M, M_{2j+1}\geqslant m$,所以

$$m<M-\frac{j\varepsilon}{12},$$

即

$$j<\frac{12(M-m)}{\varepsilon}<N.$$

这就是说,经过有限步,总存在 k,使 $\xi_k=\beta$,而且不管 k 是奇数还是偶数,都有 $k\leqslant 2N$. 因此 $\widetilde{T}=\{\xi_0,\xi_1,\cdots,\xi_k\}$就是所要求的一个划分.

由此,引理获证.

下面讨论定理 2 的证明.

设

$$m=\inf\{f(x)\mid a\leqslant x\leqslant b\},$$
$$M=\sup\{f(x)\mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

由定理 2 的条件可知,任给 $\varepsilon>0$,存在 $\delta>0$,对任意划分 $T=\{x_0,x_1,\cdots,x_n\}$,只要 $\lambda(T)<\delta$,就有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}f(x_i)\Delta x_i-I\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

由此取定一个划分 T(即 $\lambda(T)<\delta$),记

$$m_i=\inf\{f(x)\mid x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},$$
$$M_i=\sup\{f(x)\mid x_{i-1}\leqslant x\leqslant x_i\},$$

则 $m\leqslant m_i\leqslant M_i\leqslant M(i=1,2,\cdots,n)$. 根据引理可知,对每个区间$[x_{i-1},x_i](i=1,2,\cdots,n)$,都有一个划分 $T_i=\{\xi_{i,0},\xi_{i,1},\cdots,\xi_{i,k_i}\}$,使得

$$f(\xi_{i,j})(\xi_{i,j}-\xi_{i,j-1})\geqslant\left(M_{i,j}-\frac{\varepsilon}{6(b-a)}\right)(\xi_{i,j}-\xi_{i,j-1}),\quad j\text{ 为奇数},$$

$$f(\xi_{i,j})(\xi_{i,j}-\xi_{i,j-1})>M_{i,j}(\xi_{i,j}-\xi_{i,j-1})-\frac{\varepsilon}{6Nn},\quad j\text{ 为偶数},$$

其中

$$M_{i,j}=\sup\{f(x)\mid \xi_{i,j-1}\leqslant x\leqslant \xi_{i,j}\}\quad (j=1,2,\cdots,k_i),$$

$$k_i\leqslant 2N,\quad N=\left[\frac{12(b-a)(M-m)}{\varepsilon}\right]+1.$$

然后，再取划分 $T_i(i=1,2,\cdots,n)$的并，记作

$$T^*=\bigcup_{i=1}^{n}T_i=\{\eta_0,\eta_1,\cdots,\eta_r\}.$$

显然 T^* 是$[a,b]$的一个划分，而且 $r\leqslant 2Nn$，于是

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{r}f(\eta_i)(\eta_i-\eta_{i-1})&\geqslant\sum_{i=1}^{r}\sup\{f(x)\mid \eta_{i-1}\leqslant x\leqslant \eta_i\}\cdot(\eta_i-\eta_{i-1})\\&\quad-\frac{\varepsilon}{6(b-a)}\sum_{i\text{为奇数}}(\eta_i-\eta_{i-1})-\frac{\varepsilon}{6Nn}\sum_{i\text{为偶数}}1\\&\geqslant\sum_{i=1}^{r}\sup\{f(x)\mid \eta_{i-1}\leqslant x\leqslant \eta_i\}\cdot(\eta_i-\eta_{i-1})-\frac{\varepsilon}{3}\\&>\overline{I}(f)-\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

又因为 $\lambda(T^*)\leqslant\lambda(T)<\delta$，所以

$$\left|\sum_{i=1}^{r}f(\eta_i)(\eta_i-\eta_{i-1})-I\right|<\frac{\varepsilon}{2},$$

从而有

$$\overline{I}(f)-\frac{\varepsilon}{2}<\sum_{i=1}^{r}f(\eta_i)(\eta_i-\eta_{i-1})<I+\frac{\varepsilon}{2}.$$

但因 $I\leqslant\overline{I}(f)$，使得 $0\leqslant\overline{I}(f)-I<\varepsilon$. 由于 ε 的任意性，故 $\overline{I}(f)=I$.

对于确定的划分 T，同理还可作出$[a,b]$的另一个新的划分，使其相应的和数

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{s}f(\zeta_i)(\zeta_i-\zeta_{i-1})&\leqslant\sum_{i=1}^{s}\inf\{f(x)\mid \zeta_{i-1}\leqslant x\leqslant \zeta_i\}\cdot(\zeta_i-\zeta_{i-1})+\frac{\varepsilon}{3}\\&<\underline{I}(f)+\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

因此又有 $0\leqslant I-\underline{I}(f)<\varepsilon$，得 $\underline{I}(f)=I$. 综上便得

$$\underline{I}(f)=\overline{I}(f)=I,$$

即函数 f 在$[a,b]$上 Riemann 可积，且有 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=I$.

定理 2 证毕.

定理 1 和定理 2 揭示了定积分定义中“两个任意性”实际上只有“一个任意性”起主要作用. 因此没有必要强调定积分中 Riemann 和的极限的特殊性，等等.

关于二重积分的定义

在二重积分的定义中,也有“两个任意性”问题,是不是像定积分一样,只有“一个任意性”起作用呢? 为此,我们来讨论一个例子.

设函数 f 是定义在矩形 $D=[a,b]\times[c,d]$ 上的有界函数,$\Pi_1=\{x_0,x_1,\cdots,x_m\}$ 和 $\Pi_2=\{y_0,y_1,\cdots,y_n\}$ 分别为 $[a,b]$ 和 $[c,d]$ 的任意划分,则 $\Pi=\Pi_1\times\Pi_2$ 是 D 的划分. 记 $\|\Pi\|$ 为 Π 的范数,若极限

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{i-1},y_{j-1})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$$

存在且有限,问 f 在 D 上是否 Riemann 可积? 如果是,请证明之;否则,举例说明.

答案是否定的. 例如,设

$$f(x,y)=\begin{cases}0, & x\in[0,1]\text{ 无理数}, y\in[0,1];\\ 1, & x\in[0,1]\text{ 有理数}, y\in\left[0,\dfrac{1}{2}\right];\\ -1, & x\in[0,1]\text{ 有理数}, y\in\left(\dfrac{1}{2},1\right].\end{cases}$$

则 f 是矩形 $D=[0,1]\times[0,1]$ 上的有界函数. 虽然

$$\lim_{\|\Pi\|\to 0}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} f(x_{i-1},y_{j-1})(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})=0,$$

但是,在 Riemann 意义下,二重积分 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 却不存在.

其　他

顺便来谈谈定积分的近似计算问题.

关于定积分的近似计算,一般在数学分析教材中是不涉及的;在高等数学教材中,虽然都有这个内容,但只介绍方法(如矩形法和梯形法),而不介绍估计误差. 因此使这部分内容显得枯燥无味,学起来缺乏动力,往往流于形式.

诚然,在数值分析课中,对于矩形法和梯形法都给出了误差估计. 但是,由于这些估计都应用到了 Lagrange 插值多项式,所以如果把它们搬到高等数学中去,就有喧宾夺主之嫌,恐怕也欠妥当.

那么,怎样才能使定积分的近似计算成为微积分的一个有机组成部分呢? 我

认为下面的做法是可行的.

1）矩形法

用分点

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b,$$

将区间$[a,b]$分成 n 个长度相等的小区间，每个小区间的长度为 $\Delta x=\frac{b-a}{n}$. 以 $y_i=f(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n-1)$ 为高，在区间$[x_i,x_{i+1}]$上作矩形，并以$\frac{b-a}{n}y_i$ 作为 $\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值. 记

$$I_{\mathrm{rec}}(f) = \frac{b-a}{n}(y_0 + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1}),$$

则得矩形法公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx I_{\mathrm{rec}}(f).$$

定理 3 设函数 f 在区间$[a,b]$上连续可微，则矩形法公式的误差

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - I_{\mathrm{rec}(f)}\right| \leqslant \frac{M_1}{2n}(b-a)^2,$$

其中 $M_1=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f'(x)|\}$.

证 因为

$$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} [f(x)-f(x_i)]\mathrm{d}x,$$

而且由微分中值公式

$$f(x)-f(x_i) = f'(\xi_i)(x-x_i), \quad (x_i < \xi_i < x),$$

可得

$$\left|\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x - \frac{b-a}{n}y_i\right| \leqslant \int_{x_i}^{x_{i+1}} |f'(\xi_i)|(x-x_i)\mathrm{d}x$$
$$\leqslant M_1\int_{x_i}^{x_{i+1}} (x-x_i)\mathrm{d}x = \frac{M_1}{2n^2}(b-a)^2.$$

于是有

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - I_{\mathrm{rec}}(f)\right| \leqslant n\cdot\frac{M_1}{2n^2}(b-a)^2 = \frac{M_1}{2n}(b-a)^2.$$

定理 3 证毕.

2）梯形法

同矩形法一样，将区间$[a,b]$作 n 等分，令 $y_i=f(x_i)(i=0,1,2,\cdots,n)$. 用联结点$(x_i,y_i)$和$(x_{i+1},y_{i+1})$的弦来代替曲线段 $y=f(x)(x_i\leqslant x\leqslant x_{i+1})$，并以$\frac{b-a}{2n}(y_i$

$+y_{i+1})$作为$\int_{x_i}^{x_{i+1}} f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值. 记

$$I_{\text{trap}}(f)=\frac{b-a}{n}\left(\frac{y_0+y_n}{2}+y_1+y_2+\cdots+y_{n-1}\right),$$

则得梯形法公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx I_{\text{trap}}(f).$$

当 f 为线性函数时,梯形法是精确的. 关于误差估计,一般有以下定理.

定理 4 设函数 f 在区间$[a,b]$上二次连续可微,则梯形法公式的误差

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - I_{\text{trap}(f)}\right| \leqslant \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3,$$

其中 $M_2=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f''(x)|\}$.

证 记$[x_i,x_{i+1}]=[\alpha,\beta]$,则过点$(\alpha,f(\alpha))$和$(\beta,f(\beta))$的直线方程为

$$y=f(\alpha)+\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha).$$

由于

$$\begin{aligned}\Delta &= \int_\alpha^\beta\left[f(x)-f(\alpha)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\right]\mathrm{d}x\\
&= \int_\alpha^\beta\left[f(x)-f(\alpha)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\right]\mathrm{d}\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\\
&= \left[f(x)-f(\alpha)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha)\right]\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\Bigg|_\alpha^\beta\\
&\quad -\int_\alpha^\beta\left(x-\frac{\alpha+\beta}{2}\right)\left[f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right]\mathrm{d}x\\
&= -\int_\alpha^\beta\left[\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)\right]'\left[f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right]\mathrm{d}x\\
&= -\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)\left[f'(x)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}\right]\Bigg|_\alpha^\beta\\
&\qquad +\int_\alpha^\beta\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)f''(x)\mathrm{d}x\\
&= \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)f''(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

并注意到$(x-\alpha)(x-\beta)\leqslant 0(\alpha\leqslant x\leqslant\beta)$,所以

$$|\Delta|\leqslant\frac{M_2}{2}\int_\alpha^\beta[-(x-\alpha)(x-\beta)]\mathrm{d}x=\frac{M_2}{12}(\beta-\alpha)^3.$$

而$\beta-\alpha=\dfrac{b-a}{n}$,共有 n 个小区间$[x_i,x_{i+1}](i=0,1,2,\cdots,n-1)$,于是

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - I_{\mathrm{trap}(f)}\right| \leqslant n\mid\Delta\mid \leqslant \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3.$$

定理 4 证毕.

以上做法加强了理论联系实际,有利于提高读者的学习兴趣.

附注　若在矩形法中,令 $x_{i-\frac{1}{2}}=\dfrac{x_{i-1}+x_i}{2}$,以 $y_{i-\frac{1}{2}}=f(x_{i-\frac{1}{2}})(i=1,2,\cdots,n)$ 为高,在$[x_{i-1},x_i]$上作小矩形,并以$\dfrac{b-a}{n}y_{i-\frac{1}{2}}$作为$\displaystyle\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\mathrm{d}x$ 的近似值. 记

$$I_{\mathrm{mid}}(f)=\frac{b-a}{n}(y_{\frac{1}{2}}+y_{\frac{3}{2}}+\cdots+y_{n-\frac{1}{2}}),$$

则得矩形法的中点公式

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x \approx I_{\mathrm{mid}}(f).$$

当 f 为线性函数时,上式是精确的. 可以证明:若 f 在$[a,b]$上二次连续可微,则误差

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - I_{\mathrm{mid}}(f)\right| \leqslant \frac{M_2}{24n^2}(b-a)^3.$$

其中 $M_2=\max\limits_{a\leqslant x\leqslant b}\{|f''(x)|\}$.

4. 关于积分中值定理的内点性

众所周知，在微分中值定理中，其"中值"是在区间的内点取得的. 自然要问，在积分中值定理中，其"中值"是否也能在区间的内点取得呢?

积分第一中值定理的内点性

在数学分析教材中，积分第一中值定理通常叙述如下.

设函数 f 在$[a,b]$上连续，函数 g 在$[a,b]$上非负且可积，则存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

当然，也有的书上指出 $\xi\in(a,b)$，但并未给出其证明. 下面将给出这一结论及其推导过程.

定理 1(积分第一中值定理) 设函数 f 在$[a,b]$上连续，函数 g 在$[a,b]$上非负且可积，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(\xi)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为 f 在$[a,b]$上连续，所以有最大值 M 与最小值 m. 于是有

$$m\leqslant f(x)\leqslant M \text{ 且 } g(x)\geqslant 0\quad (a\leqslant x\leqslant b),$$

故

$$mg(x)\leqslant f(x)g(x)\leqslant Mg(x),$$

积分得

$$m\int_a^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x\leqslant M\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

因此存在 $\mu\in[m,M]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\mu\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

由连续函数中值定理可知，存在一点 $\eta\in[a,b]$，使

$$f(\eta)=\mu.$$

显然,当$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x=0$, 或 $m=M$,或 $m<M$ 且 $m<f(\eta)<M$ 时,必存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(\xi)=f(\eta)$,即命题成立.

余下只要证明,当$\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0$, $m<M$, $f(\eta)=m$ 或M 且 $\eta=a$ 或b 时,也存在 $\xi\in(a,b)$,使 $f(\xi)=f(\eta)$. 假设 $f(\eta)=m$ 时结论不成立,则对一切 $x\in(a,b)$有 $f(x)>f(\eta)$. 由于 g 在$[a,b]$上非负且可积,所以 g 的定积分关于积分限连续,从而存在 $\delta>0$,使得

$$\int_a^{a+\delta} g(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{b-\delta}^b g(x)\mathrm{d}x\leqslant\frac{1}{4}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

所以

$$\int_{a+\delta}^{b-\delta} g(x)\mathrm{d}x\geqslant\frac{1}{2}\int_a^b g(x)\mathrm{d}x>0.$$

考虑到 $f(x)-f(\eta)$是$[a+\delta,b-\delta]$上的正值连续函数,有

$$\overline{m}=\min_{a+\delta\leqslant x\leqslant b-\delta}\{f(x)-f(\eta)\}>0.$$

因而

$$\int_a^b[f(x)-f(\eta)]g(x)\mathrm{d}x\geqslant\int_{a+\delta}^{b-\delta}[f(x)-f(\eta)]g(x)\mathrm{d}x$$

$$\geqslant\overline{m}\int_{a+\delta}^{b-\delta} g(x)\mathrm{d}x>0,$$

即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x>f(\eta)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

得出矛盾. 这就是说,此时一定存在 $\xi\in(a,b)$,使得

$$f(\xi)=f(\eta).$$

同理可证,当 $f(\eta)=M$ 时结论亦真.

综上所述,定理 1 得证.

定理 1 还可推广到重积分的情况,此处不再赘述.

作为定理 1 的一个应用,证明下面的例子.

例 设函数 f 在$[a,b)$连续,且 $f(b-0)=+\infty$,广义积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,则存在一点 $\xi\in(a,b)$,使得

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=(b-a)f(\xi).$$

证 因为积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，所以积分 $\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)\mathrm{d}x$ 也收敛. 对任意 $\varepsilon\in\left(0,\frac{b-a}{2}\right)$，由定理 1 可知，存在一点 $\eta(\varepsilon)\in\left(\frac{a+b}{2},b-\varepsilon\right)$，使得

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x=\left(\frac{b-a}{2}-\varepsilon\right)f(\eta(\varepsilon)).$$

于是

$$\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\mathrm{d}x=\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b-\varepsilon} f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}\lim_{\varepsilon\to 0}f(\eta(\varepsilon)).$$

即 $\lim\limits_{\varepsilon\to 0}f(\eta(\varepsilon))$ 存在且有限，记为

$$\lim_{\varepsilon\to 0}f(\eta(\varepsilon))=\mu,\text{且 }\mu=\frac{\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\mathrm{d}x}{\frac{b-a}{2}}.$$

由于 $f\left(\frac{a+b}{2}\right)<f(b-0)=+\infty$，故 $f(x)$ 在 $\left[\frac{a+b}{2},b\right)$ 有最小值 $m=\min\limits_{\frac{a+b}{2}\leqslant x<b}\{f(x)\}$，且 $\mu\geqslant m$. 从而存在一点 $\xi_1\in\left[\frac{a+b}{2},b\right)$，使

$$f(\xi_1)=\mu.$$

又存在一点 $\xi_2\in\left(a,\frac{a+b}{2}\right)$，使

$$\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\mathrm{d}x=\frac{b-a}{2}f(\xi_2).$$

由连续函数中值定理可知，存在 $\xi\in[\xi_2,\xi_1]\subseteq(a,b)$，使

$$f(\xi)=\frac{1}{2}[f(\xi_1)+f(\xi_2)]=\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{b-a}.$$

由此，便得所证.

积分第二中值定理的内点性

现有的积分第二中值定理可以叙述如下.

定理 2(积分第二中值定理) 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上单调不增且非负，函数 g 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则存在一点 $\xi\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x.$$

在此定理中的“$\xi\in[a,b]$”，不能改为“$\xi\in(a,b)$”. 假如，设

$$f(x)=\begin{cases}2, & x=0,\\ 1, & 0<x<2\pi,\\ \dfrac{1}{2}, & x=2\pi,\end{cases}$$

$$g(x)=\sin x,\quad 0\leqslant x\leqslant 2\pi.$$

则 f 与 g 在区间$[0,2\pi]$上满足定理 2 的条件，且

$$\int_0^{2\pi}f(x)g(x)\mathrm{d}x=0.$$

但是要使得

$$f(0)\int_0^{\xi}g(x)\mathrm{d}x=2\int_0^{\xi}\sin x\mathrm{d}x=0,$$

必须取 $\xi=0$ 或 $\xi=2\pi$ 才行，也就是说，ξ 只能取积分区间的端点.

同理，即使将定理 2 的最后结果改写成

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a+0)\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x,$$

亦得不出 $\xi\in(a,b)$.

如果在定理 2 中加上一个非常一般化的条件，那么 ξ 一定能在(a,b)内取得.

定理 3 设函数 f 在区间$[a,b]$上单调不增且非负，$f(a+0)-f(b-0)>0$，函数 g 在$[a,b]$上 Riemann 可积，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{\xi}g(x)\mathrm{d}x.$$

证 由定理 2 可知，存在一点 $c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a)\int_a^{c}g(x)\mathrm{d}x.$$

如果 $c\in(a,b)$，取 $\xi=c$，定理 3 便已获证.

如果 $c\notin(a,b)$，则必定 $c=a$ 或 $c=b$. 令

$$G(x)=\int_a^x g(t)\mathrm{d}t,$$

则 G 在$[a,b]$上连续，故有

$$m=\min_{a\leqslant x\leqslant b}\{G(x)\},$$
$$M=\max_{a\leqslant x\leqslant b}\{G(x)\}.$$

当 $m=M$ 时或 $m<M$ 且 $m<G(c)<M$ 时，由连续函数中值定理易知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $G(\xi)=G(c)$，此时定理也成立. 余下只要证明：当 $m<M$ 且 $G(c)=m$ 或 $G(c)=M$ 时，一定有 $\xi\in(a,b)$，使得 $G(\xi)=G(c)$.

设 $T=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ 是$[a,b]$的任一划分，记 $\Delta x_k=x_k-x_{k-1}$，$\lambda(T)=$

$\max\limits_{1\leqslant k\leqslant n}\{\Delta x_k\}$，对任意 $\xi_k\in[x_{k-1},x_k](k=1,2,\cdots,n)$，作和式

$$\sigma(T)=\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}g(t)\mathrm{d}t.$$

令 $|f(x)|\leqslant L=\mathrm{const.}\ (a\leqslant x\leqslant b)$，$\omega_k$ 为 $g(x)$ 在 $[x_{k-1},x_k]$ 上的振幅，于是

$$\begin{aligned}&\left|\sigma(T)-\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)g(\xi_k)\Delta x_k\right|\\&=\left|\sum_{k=1}^{n}f(\xi_k)\int_{x_{k-1}}^{x_k}[g(t)-g(\xi_k)]\mathrm{d}t\right|\\&\leqslant L\sum_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k.\end{aligned}$$

由定积分存在的充要条件可知，当 $\lambda(T)\to 0$ 时，有 $\sum\limits_{k=1}^{n}\omega_k\Delta x_k\to 0$，即

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=\lim_{\lambda(T)\to 0}\delta(T) \qquad (*)$$

以下证明：当 $m<M$ 且 $G(c)=m$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $G(\xi)=m$. 用反证法，假若不然，则对一切的 $x\in(a,b)$ 都有 $G(x)>m$. 因为 $f(a+0)-f(b-0)>0$，所以存在 a_1 与 b_1，使得 $a<a_1<b_1<b$ 且 $f(a_1)-f(b_1)>0$. 设 a_1 与 b_1 是 T 的两个分点，并记 $a_1=x_{n_1}$，$b_1=x_{n_2}$，由 Abel 变换，得

$$\begin{aligned}\sigma(T)&=\sum_{k=1}^{n-1}[f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})]\int_a^{x_k}g(t)\mathrm{d}t+f(\xi_n)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t\\&=\sum_{k=1}^{n_1-1}[f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})]\int_a^{x_k}g(t)\mathrm{d}t+\sum_{k=n_1}^{n_2-1}[f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})]\int_a^{x_k}g(t)\mathrm{d}t\\&\quad+\sum_{k=n_2}^{n-1}[f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})]\int_a^{x_k}g(t)\mathrm{d}t+f(\xi_n)\int_a^b g(t)\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

设 $m_1=\min\limits_{a_1\leqslant x\leqslant b_1}\{G(x)\}$，则由反证法假设可知 $m_1>m$，并取 $\xi_1=a$，$\xi_n=b$，利用诸 $f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})$ 及 $f(b)$ 的非负性，由 Abel 引理，得

$$\begin{aligned}\sigma(T)&\geqslant m\sum_{k=1}^{n_1-1}[f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})]+m_1\sum_{k=n_1}^{n_2-1}[f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})]\\&\quad+m\sum_{k=n_2}^{n-1}[f(\xi_k)-f(\xi_{k+1})]+mf(b)\\&=m[f(a)-f(a_1)]+m_1[f(a_1)-f(b_1)]\\&\quad+m[f(b_1)-f(b)]+mf(b)\\&=mf(a)+(m_1-m)[f(a_1)-f(b_1)].\end{aligned}$$

令 $\lambda(T)\to 0$，对上式取极限，由（$*$）式便得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$$
$$\geqslant mf(a)+(m_1-m)[f(a_1)-f(b_1)]>mf(a),$$

与 $\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=mf(a)$ 矛盾，这表明，此时必存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $G(\xi)=m$.

同理可证：当 $m<M$ 且 $G(c)=M$ 时，存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $G(\xi)=M$.

综上所述，定理 3 得证.

推论 在定理 3 的条件下，存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a+0)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x.$$

事实上，令

$$\varphi(a)=f(a+0),\varphi(x)=f(x)\quad(a<x\leqslant b),$$

则由定理 3 可知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b \varphi(x)g(x)\mathrm{d}x=\varphi(a)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x=f(a+0)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x.$$

但是 $\int_a^b \varphi(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x$，代入上式即得推论.

最后，我们来证明积分第二中值定理的一般形式.

定理 4 设函数 f 在区间 $[a,b]$ 上单调，函数 g 在 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a+c)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x+f(b-0)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证 由于 f 在闭区间 $[a,b]$ 上单调，所以 $f(a+0)$ 与 $f(b-0)$ 存在. 为确定起见，不妨设 f 不增（f 不减时，可类似证之），考虑

$$\varphi(x)=\begin{cases}f(x)-f(b-0), & a\leqslant x<b,\\ 0, & x=b,\end{cases}$$

则当 $f(a+0)-f(b-0)>0$ 时，有 $\varphi(a+0)-\varphi(b-0)>0$，由定理 3 的推论可知，存在 $\xi\in(a,b)$，使得

$$\int_a^b \varphi(x)g(x)\mathrm{d}x=\varphi(a+0)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x.$$

即

$$\int_a^b [f(x)-f(b-0)]g(x)\mathrm{d}x=[f(a+0)-f(b-0)]\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x,$$

从而有

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x=f(a+0)\int_a^{\xi} g(x)\mathrm{d}x+f(b-0)\int_{\xi}^b g(x)\mathrm{d}x.$$

当 $f(a+0)=f(b-0)$ 时，由于

$$\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x = f(a+0)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x,$$

所以对于(a,b)内任意一点ξ,都有

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x &= f(a+0)\left\{\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + \int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x\right\} \\ &= f(a+0)\int_a^\xi g(x)\mathrm{d}x + f(b-0)\int_\xi^b g(x)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

综上所述,定理 4 得证.

由此可知,在定理 4 的意义下,积分第二中值定理的中值也具有内点性.

5. Riemann 可积函数的本性

众所周知，Riemann 积分是为“连续性较好”的函数设计的. 具体来说，就是：函数 f 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积的充要条件是 f 在 $[a,b]$ 上几乎处处连续. 但是，这个本性是借助于 Lebesgue 测度积分才揭示出来的，而 Riemann 积分本身并没有解决这个问题.

下面，在 Riemann 积分的意义下，我们将以二重积分为例，证明 Riemann 可积函数的这个本性.

两 个 引 理

设 D 是 Oxy 平面上的一个可求面积的有界点集，其面积记为 $\sigma(D)$.

定义 1 设 Γ 是 Oxy 平面上的一个点集. 若对任意 $\varepsilon>0$，都存在有限个边界平行于坐标轴的矩形 $I_1, I_2, \cdots, I_n$，使 $\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$，且 $\sum_{i=1}^{n} \sigma(I_i) < \varepsilon$，则称 Γ 为一个零面积集.

记号 $O(D,\delta)$ 表示平面点集 $D \subseteq R^2$ 的 $\delta(>0)$ 邻域，即

$$O(D,\delta) = \{M \mid \exists M_0 \in D, 使\ \rho(M,M_0) < \delta\},$$

其中 $\rho(M,M_0)$ 为点 M 与 M_0 间的距离.

引理 1 设 Γ 是一零面积集，则对任意的 $\varepsilon>0$，都存在 $\delta>0$ 及有限个矩形 I_1，$I_2, \cdots, I_n$，使 $O(\Gamma,\delta) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ 且 $\sum_{i=1}^{n} \sigma(I_i) < \varepsilon$.

证 由定义 1 可知，存在有限个矩形 $J_1, J_2, \cdots, J_n$，使 $\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} J_i$ 且 $\sum_{i=1}^{n} \sigma(J_i) < \varepsilon$. 把每个 J_i 的四边向外平移 $\delta(\delta>0)$ 后扩大成 I_i，只要 δ 充分小，仍然有

$$\sum_{i=1}^{n} \sigma(I_i) < \varepsilon,$$

且显然满足

$$O(\Gamma,\delta) \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i.$$

引理 1 证毕.

定义 2 设函数 f 定义于集 $D\subseteq\mathbf{R}^2$,称

$$\omega(f,D) = \sup\{f(M) \mid M \in D\} - \inf\{f(M) \mid M \in D\}$$

为 f 在 D 上的振幅. 又设点 $M_0\in\mathbf{R}^2$,对任意 $\delta>0$,$D\cap O(M_0,\delta)\neq\varnothing$,称

$$\lim_{\delta\to 0}\omega(f,D \cap O(M_0,\delta)) = \omega[f,M_0]$$

为函数 f 在点 M_0 处的本性振幅.

引理 2 设函数 f 定义于有界闭集 $D\subseteq\mathbf{R}^2$,对任意一点 $M\in D$,都有

$$\omega[f,M] < \eta \quad (\eta > 0),$$

则存在 $\delta>0$,当 $M',M''\in D$ 且 $\rho(M',M'')<\delta$ 时,有

$$| f(M') - f(M'') | < \eta.$$

证 用反证法. 假若不然,则对 $\frac{1}{n}$ $(n=1,2,\cdots)$,存在 $M'_n,M''_n\in D$,虽然 $\rho(M'_n,M''_n)<\frac{1}{n}$,但是却有

$$| f(M'_n) - f(M''_n) | \geqslant \eta.$$

因为 $\{M'_n\}\subseteq D$,D 是有界闭集,所以有子列 $\{M'_{n_i}\}$ 收敛于 $M_0\in D$. 由于

$$\begin{aligned}\rho(M''_{n_i},M_0) &\leqslant \rho(M'_{n_i},M''_{n_i}) + \rho(M'_{n_i},M_0)\\ &\leqslant \frac{1}{n_i} + \rho(M'_{n_i},M_0) \to 0 \quad (i\to\infty),\end{aligned}$$

故 $\{M''_{n_i}\}$ 亦收敛于 M_0. 于是对任意 $\delta>0$,总存在 $M'_{n_k},M''_{n_k}\in D\cap O(M_0,\delta)$,使

$$| f(M'_{n_k}) - f(M''_{n_k}) | \geqslant \eta.$$

从而有

$$\omega[f,M_0] \geqslant \eta,$$

与已知相矛盾. 引理 2 获证.

由引理 2 可知,有界闭集上的连续函数必一致连续. 在这个意义上,引理 2 是有界闭集上连续函数必一致连续定理的一种拓广.

可积函数的本性

定理 设有界函数 f 定义于闭矩形 $I=[a,b]\times[c,d]$. f 在 I 上 Riemann 可积的充要条件是对任意 $\eta>0$,$E_\eta=\{M|M\in I$ 且 $\omega[f,M]\geqslant\eta\}$ 是一个零面积集.

证 必要性. 设 f 在 I 上可积,则任给 $\varepsilon>0$ 和 $\eta>0$,存在 $\delta>0$,对于 I 的任意

划分 $T: I=\bigcup_{i=1}^{m} D_i$，只要其范数 $\|T\|=\max_{1\leqslant i\leqslant m}\{\operatorname{diam}(D_i)\}<\delta$，就有

$$\left|\sum_{i=1}^{m} f(\xi_i,\eta_i)\sigma(D_i)-\iint_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|<\frac{\eta\varepsilon}{5},$$

其中 (ξ_i,η_i) 是 D_i 上任意一点. 在不等式两边对于 $(\xi_i,\eta_i)\in D_i$ 取上、下确界，便得

$$\left|\overline{S}(f,T)-\iint_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\eta\varepsilon}{5},$$

$$\left|\underline{S}(f,T)-\iint_I f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\right|\leqslant\frac{\eta\varepsilon}{5}.$$

其中 $\overline{S}(f,T)$，$\underline{S}(f,T)$ 分别为 f 在划分 T 下的 Darboux 上、下和. 于是有

$$\sum_{i=1}^{m}\omega(f,D_i)\sigma(D_i)=\overline{S}(f,T)-\underline{S}(f,T)\leqslant\frac{2}{5}\eta\varepsilon.$$

今特取 I 的划分 T'：先将 I 分成四个全等的小矩形，其边长是 I 对应边长之半；再四等分诸小矩形，…. 依次下去，将 I 分成 4^n 个与 I 相似的全等小矩形，记作 I_1，$I_2,\cdots,I_{4^n}$. 由于 $n\to\infty$ 时，小矩形的直径（即对角线）趋于零，所以存在正整数 N，当 $n>N$ 时有 $\|T'\|<\delta$，从而

$$\sum_{i=1}^{4^n}\omega(f,I_i)\sigma(I_i)\leqslant\frac{2}{5}\eta\varepsilon.$$

考虑 $\{I_i\}$ 中使 $\omega(f,I_i)\geqslant\frac{\eta}{2}$ 的所有小矩形，记作 $I_{i_1},I_{i_2},\cdots,I_{i_k}$. 显然 $E_\eta\subseteq\bigcup_{j=1}^{k}I_{i_j}$，由于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\eta\sum_{j=1}^{k}\sigma(I_{i_j})&\leqslant\sum_{j=1}^{k}\omega(f,I_{i_j})\sigma(I_{i_j})\\&\leqslant\sum_{i=1}^{4^n}\omega(f,I_i)\sigma(I_i)\leqslant\frac{2}{5}\eta\varepsilon,\end{aligned}$$

所以

$$\sigma\Big(\bigcup_{j=1}^{k}I_{i_j}\Big)\leqslant\sum_{j=1}^{k}\sigma(I_{i_j})\leqslant\frac{4}{5}\varepsilon<\varepsilon,$$

即 E_η 是零面积集.

充分性. 为此，分以下四步进行.

1° 找出积分的目标值. 用平行于坐标轴的直线网将 I 分成 4^n 个与 I 相似的全等小矩形，记作 $I_1,I_2,\cdots,I_{4^n}$，作 Darboux 上和

$$\overline{S}_n(f)=\sum_{i=1}^{4^n}\sup\{f(M)\mid M\in I_i\}\sigma(I_i).$$

显然 $\bar{S}_n(f)$有下界 $\inf\{f(M)\,|\,M\in I\}\sigma(I)$，且随 n 增大而不增，因此$\{\bar{S}_n(f)\}$收敛，设收敛于 S. S 就是积分的目标值，对任意 $\varepsilon>0$，都存在 N_1，当 $n>N_1$ 时，就有

$$|\bar{S}_n(f)-S|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

2° 关于 E_η 与 f 的估计. 令 $\sup\{|f(M)|\,\big|\,M\in I\}+1=L$. 由于对任意 $\eta>0$，E_η 是零面积集，所以应用引理 1，任给 $\varepsilon>0$，存在 $\delta_1>0$ 及有限个矩形 $J_1,J_2,\cdots,J_l$，使

$$O(E_\eta,\delta_1)\subseteq\bigcup_{i=1}^{l}J_i \text{ 且} \sum_{i=1}^{l}\sigma(J_i)<\frac{\varepsilon}{16L}.$$

在集 $F=I-O\left(E_\eta,\frac{\sigma_1}{2}\right)$上，因为 $\omega[f,M]<\eta$，$\forall M\in F$，又 F 为有界闭集，故由引理 2 可知，存在 $\delta_2>0$，使当 $M',M''\in F$ 且 $\rho(M',M'')<\delta_2$ 时，总有

$$|f(M')-f(M'')|<\eta.$$

3° 估计两种划分下 Darboux 上和与 Riemann 和的差. 设两个划分

$$T: I=\bigcup_{j=1}^{p}D_j,\quad T': I=\bigcup_{i=1}^{m}G_i,$$

则

$$I=\bigcup_{j=1}^{p}\bigcup_{i=1}^{m}(D_j\cap G_i),$$

且有

$$\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}\sigma(D_j\cap G_i)=\sigma(I)=(b-a)(d-c),$$

$$\sum_{j=1}^{p}\sigma(D_j\cap G_i)=\sigma(G_i),$$

$$\sum_{i=1}^{m}\sigma(D_j\cap G_i)=\sigma(D_j).$$

划分 T 下 f 的 Riemann 和与划分 T' 下 f 的 Darboux 和的差为

$$\begin{aligned}&\sum_{j=1}^{p}f(\xi_j,\eta_j)\sigma(D_j)-\sum_{i=1}^{m}\sup\{f(x,y)\mid(x,y)\in G_i\}\sigma(G_i)\\&=\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}[f(\xi_j,\eta_j)-\sup\{f(x,y)\mid(x,y)\in G_i\}]\sigma(D_j\cap G_i).\end{aligned}$$

当 $D_j\cap G_i\neq\varnothing$时，$\forall\,(u_{ij},v_{ij})\in G_i\cap D_j$

$$\begin{aligned}&|[f(\xi_j,\eta_i)-\sup\{f(x,y)\mid(x,y)\in G_i\}]\sigma(D_j\cap G_i)|\\&\leqslant[|f(\xi_j,\eta_j)-f(u_{ij},v_{ij})|\\&\quad+|f(u_{ij},v_{ij})-\sup\{f(x,y)\mid(x,y)\in G_i\}|]\sigma(D_j\cap G_i)\end{aligned}$$

$$\leqslant [\omega(f,D_j)+\omega(f,G_i)]\sigma(D_j\cap G_i).$$

当 $D_j\cap G_i=\varnothing$ 时，由于 $\sigma(D_j\cap G_i)=0$，上式也成立. 于是

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=1}^{p}f(\xi_j,\eta_j)\sigma(D_j)-\sum_{i=1}^{m}\sup\{f(x,y)\mid(x,y)\in G_i\}\sigma(G_i)\right|\\&\quad\leqslant\sum_{j=1}^{p}\sum_{i=1}^{m}[\omega(f,D_j)+\omega(f,G_i)]\sigma(D_j\cap G_i)\\&\quad=\sum_{j=1}^{p}\omega(f,D_j)\sigma(D_j)+\sum_{i=1}^{m}\omega(f,G_i)\sigma(G_i).\end{aligned}$$

4° 证明 $\lim\limits_{\|T\|\to0}\sum\limits_{j=1}^{p}f(\xi_j,\eta_j)\sigma(D_j)=S$. 设 T' 是 1°中所规定的划分，T 是任意一划分，则由 3°得

$$\begin{aligned}&\left|\sum_{j=1}^{p}f(\xi_j,\eta_j)\sigma(D_j)-S\right|\\&\leqslant\left|\sum_{j=1}^{p}f(\xi_j,\eta_j)\sigma(D_j)-\sum_{i=1}^{4^n}\sup\{f(x,y)\mid(x,y)\in I_i\}\sigma(I_i)\right|\\&\quad+\left|\sum_{i=1}^{4^n}\sup\{f(x,y)\mid(x,y)\in I_i\}\sigma(I_i)-S\right|\\&\leqslant\sum_{j=1}^{p}\omega(f,D_j)\sigma(D_j)+\sum_{i=1}^{4^n}\omega(f,I_i)\sigma(I_i)+|\bar{S}_n(f)-S|.\end{aligned}$$

对任意 $\varepsilon>0$，取 $\eta=\dfrac{\varepsilon}{\delta(b-a)(d-c)}$，由 2°可知存在 δ_1 和 δ_2，令 $\delta=\min\left\{\dfrac{\delta_1}{2},\delta_2\right\}$，并设 $\|T\|<\delta$. 因为 $\|T'\|=\dfrac{1}{n}\sqrt{(b-a)^2+(d-c)^2}$，所以存在 N_2，当 $n>N_2$ 时，有 $\|T'\|<\delta$. 由 1°可知，当 $n>N=\max\{N_1,N_2\}$ 时，有 $\|T'\|<\delta$ 且 $|\bar{S}_n(f)-S|<\dfrac{\varepsilon}{2}$. 取定 n，使 $n>N$. 为估计和数 $\sum\limits_{j=1}^{p}\omega(f,D_j)\sigma(D_j)$，对 $\{D_j\}$ 进行分类：把全部落在 $O(E_\eta,\delta_1)$ 内的所有 D_j 全体记为 $\mathscr{A}$ 类，因为 $\|T\|<\delta\leqslant\dfrac{\delta_1}{2}$，故 $\mathscr{A}$ 类的所有小块覆盖 $O\left(E_\eta,\dfrac{\delta_1}{2}\right)$；再把全部落在 $F=I-O\left(E_\eta,\dfrac{\delta_1}{2}\right)$ 上的所有 D_j 记为 $\mathscr{B}$ 类，$\mathscr{B}$ 类的全体必覆盖不全落在 $O(E_\eta,\delta_1)$ 内的小块. 因此，总有

$$\sum_{j=1}^{p}\omega(f,D_j)\sigma(D_j)\leqslant\sum_{D_j\in\mathscr{A}}\omega(f,D_j)\sigma(D_j)+\sum_{D_j\in\mathscr{B}}\omega(f,D_j)\sigma(D_j).$$

由于

$$\omega(f,D_j)\leqslant\omega(f,I)\leqslant 2L,$$

以及 2°，所以有

$$\sum_{D_j\in\mathscr{A}}\omega(f,D_j)\sigma(D_j)\leqslant 2L\cdot\frac{\varepsilon}{16L}=\frac{\varepsilon}{8}.$$

又因 $\|T\|<\delta\leqslant\delta_2$，$D_j\subseteq F$ 时，由 2°可知

$$\omega(f,D_j)<\frac{\varepsilon}{8(b-a)(d-c)},$$

故

$$\sum_{D_j\in\mathscr{B}}\omega(f,D_j)\sigma(D_j)\leqslant\frac{\varepsilon}{8(b-a)(d-c)}\sigma(I)=\frac{\varepsilon}{8}.$$

从而有

$$\sum_{j=1}^{p}\omega(f,D_j)\sigma(D_j)\leqslant\frac{\varepsilon}{8}+\frac{\varepsilon}{8}=\frac{\varepsilon}{4}.$$

同理可证

$$\sum_{i=1}^{4^n}\omega(f,I_i)\sigma(I_i)\leqslant\frac{\varepsilon}{4}.$$

因此，当 $n>N$ 时，综上便得

$$\left|\sum_{j=1}^{p}f(\xi_j,\eta_j)\sigma(D_j)-S\right|<\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{4}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

即

$$\lim_{\|T\|\to 0}\sum_{j=1}^{p}f(\xi_j,\eta_j)\sigma(D_j)=S,$$

亦即函数 f 在 I 上可积.

定理证毕. 作为定理的应用，容易证明函数

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{1}{pq}, & (x,y)=\left(\dfrac{m}{p},\dfrac{n}{q}\right), p\text{ 与 }m, q\text{ 与 }n\text{ 均互质},\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

在$[0,1]\times[0,1]$上 Riemann 可积.

注　记

(1) 在定理中将“闭矩形”改为“可求面积的有界闭集”，结论仍成立.

(2) 因为函数 f 在 I 上的不连续点集为

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{M\,\middle|\,\omega[f,M]\geqslant\frac{1}{n},M\in I\right\},$$

所以若将定义 1 中“存在有限个…矩形 $I_1, I_2, \cdots, I_n$，使 $\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} I_i$ 且 $\sum_{i=1}^{n} \sigma(I_i) < \varepsilon$”改为“存在可列个…矩形 $I_1, I_2, \cdots, I_n, \cdots$，使 $\Gamma \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} I_i$ 且 $\sum_{i=1}^{\infty} \sigma(I_i) < \varepsilon$”，可以证明定理与在泛函分析中应用控制收敛定理所证明的结果一致. 但是，考虑到零面积集的定义在数学分析中多采用定义 1，此处就不再赘述.

6. 一个积分域没有面积的二重积分

在数学分析中，讨论二重积分时，始终都假定积分区域是有面积的. 人们不禁要问："积分区域有面积"的条件是否是必要条件呢？也就是说，如果积分区域没有面积，除了被积函数为零值函数外，二重积分是否就不可能存在呢？教科书中都没有回答.

数学中的反例颇具魅力，它的重要意义众所周知. 在此，我们首先构造了一个积分区域是没有面积的有界区域，然后定义了一个在该区域内处处取正值的被积函数，它的二重积分却存在.

没有面积的有界区域

为了构造一个没有面积的平面有界区域，先考虑一维集合的情形. 做一个收敛的正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$，使其和小于 1；将开区间 $(0,1)$ 中全部有理数排成一个数列 $\{r_n\}$（有理数集合是可数的）. 取无理数 b_1，满足条件

$$0 < b_1 \leqslant \min\left\{\frac{1}{2}a_1, r_1, 1-r_1\right\}.$$

以 r_1 为中心的开区间 (r_1-b_1, r_1+b_1)，记为

$$(\alpha_1, \beta_1) = (r_1 - b_1, r_1 + b_1).$$

将数列 $\{r_n\}$ 中所有包含在 (α_1, β_1) 中的数剔除，仍按原来数列的顺序得集合 $(0,1)\setminus(\alpha_1,\beta_1)$ 中的全部有理数数列，记为 $\{r_n^{(1)}\}$. 再取无理数 b_2，满足条件

$$0 < b_2 \leqslant \min\left\{\frac{1}{2}a_2, r_1^{(1)}, \mid r_1^{(1)} - \alpha_1 \mid, \mid r_1^{(1)} - \beta_1 \mid, 1 - r_1^{(1)}\right\}.$$

做以 $r_1^{(1)}$ 为中心的开区间 $(r_1^{(1)} - b_2, r_1^{(1)} + b_2)$，并记为

$$(\alpha_2, \beta_2) = (r_1^{(1)} - b_2, r_1^{(1)} + b_2).$$

将数列 $\{r_n^{(1)}\}$ 中所有包含在 (α_2, β_2) 中的数剔除，还按原数列的顺序得集合

$$(0,1) - (\alpha_1, \beta_1) - (\alpha_2, \beta_2)$$

中的全部有理数数列，记为$\{r_n^{(2)}\}$. 依次继续下去，便得一个开区间序列$(\alpha_n,\beta_n)(n=1,2,\cdots)$，它们两两不相交，各个区间的长度之和

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\beta_n-\alpha_n)=\sum_{n=1}^{\infty}2b_n\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n<1.$$

这些开区间的并集

$$G=\bigcup_{n=1}^{\infty}(\alpha_n,\beta_n),$$

是一开集，且包含了开区间$(0,1)$中的全部有理数. 记

$$F=[0,1]-G,$$

则F是含于闭区间$[0,1]$上的闭集，它的 Lebesgue 测度不小于

$$1-\sum_{n=1}^{\infty}a_n>0.$$

进而可以构造一个平面上没有面积的有界区域. 令

$$\Omega=\{(x,y)\mid 0<x<1,1<y<2\}\cup\{(x,y)\mid x\in G,0<y\leqslant 1\},$$

则Ω是一有界开区域(连通的开集). 下面证明Ω是不可求面积的. 若记

$$A=\{(x,y)\mid x=0\text{ 或 }x=1,1<y\leqslant 2\},$$
$$B=\{(x,y)\mid 0<x<1,y=2\},$$
$$C=\{(x,y)\mid x\in F,0\leqslant y\leqslant 1\},$$

则区域Ω的边界集为

$$\partial\Omega=A\cup B\cup C.$$

因为平面有界集Ω有面积的充分必要条件是其边界$\partial\Omega$为零面积集，所以只要证明$\partial\Omega$的面积

$$\sigma(\partial\Omega)=\sigma(A\cup B\cup C)\neq 0.$$

而A与B显然是零面积集(分别为两条与一条直线线段)，故只要证明C不是零面积集即可.

用反证法. 假设C是零面积集，则任给$\varepsilon>0$，必存在有限个边界分别平行于坐标轴的矩形$I_1,\cdots,I_m$，使$C\subset\bigcup_{i=1}^{m}I_i$，且各个面积之和

$$\sum_{i=1}^{m}\sigma(I_i)<\varepsilon.$$

设$I_i(i=1,2,\cdots,m)$在x轴上的投影是闭区间$[\delta_i,\tau_i]$，则$(0,1)-\bigcup_{i=1}^{m}[\delta_i,\tau_i]$是有限个开区间的并集，且包含在$G$中，从而包含在$G$的有限个构成区间之中. 于是开矩形区域$(0,1)\times(0,1)$的面积

$$\begin{aligned}
&\sigma((0,1)\times(0,1))\\
&=\sigma(\{(0,1)-\bigcup_{i=1}^{m}[\delta_i,\tau_i]\}\times(0,1))+\sigma(\{\bigcup_{i=1}^{m}[\delta_i,\tau_i]\}\times(0,1))\\
&\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\sum_{i=1}^{m}\sigma(I_i)<\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\varepsilon.
\end{aligned}\tag{1}$$

另一方面，由于 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n<1$，而 ε 可任意小，所以可使

$$\sum_{n=1}^{\infty}a_n+\varepsilon<1=\sigma((0,1)\times(0,1)),$$

与式(1)矛盾. 这就证明了 $\sigma(\partial\Omega)\neq 0$，即 Ω 是一个不可求面积的平面有界区域.

积分区域没有面积的二重积分

引理 设一元函数 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，则二重积分

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]}g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(d-c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

证 因为 $g(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上 Riemann 可积，所以由定积分存在的充分必要条件可知，任给 $\varepsilon>0$，都存在区间 $[a,b]$ 的一个划分

$$\Pi_1=\{x_0,x_1,x_2,\cdots,x_m\},$$

使得相应的

$$\sum_{i=1}^{m}\omega_i(g)\Delta x_i<\varepsilon,$$

其中 $\omega_i(g)$ 是 $g(x)$ 在区间 $[x_{i-1},x_i]$ 上的振幅，$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}$. 又设

$$\Pi_2=\{y_0,y_1,y_2,\cdots,y_n\}$$

是区间 $[c,d]$ 的一个划分，则

$$\begin{aligned}
\Pi=\Pi_1\times\Pi_2&=\{I_{ij}\mid 1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}\\
&=\{[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]\mid 1\leqslant i\leqslant m,1\leqslant j\leqslant n\}
\end{aligned}$$

是矩形区域 $[a,b]\times[c,d]$ 的一个划分. 因为

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}\omega_{ij}(g)\sigma(I_{ij})&=\sum_{j=1}^{n}\Big\{\sum_{i=1}^{m}\omega_{ij}(g)\Delta x_i\Big\}\Delta y_j\\
&=(d-c)\sum_{i=1}^{m}\omega_i(g)\Delta x_i<(d-c)\varepsilon,
\end{aligned}$$

其中 $\omega_{ij}(g)$ 是 g 作为二元函数在 I_{ij} 上的振幅；I_{ij} 的面积 $\sigma(I_{ij})=\Delta x_i\Delta y_j$. 由二重积分存在的充分必要条件知，二重积分 $\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]}g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在，且有

$$\iint\limits_{[a,b]\times[c,d]} g(x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = (d-c)\int_a^b g(x)\mathrm{d}x.$$

引理证毕.

设函数 f 定义于没有面积的有界区域 Ω:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1, & (x,y) \in (0,1)\times(1,2), \\ \rho(x,\partial G), & x \in G, 0 < y \leqslant 1. \end{cases}$$

其中 $\rho(x,\partial G)$ 是平面上点 (x,y) 在 x 轴上投影点 $(x,0)$ 到 G 的边界 ∂G 的距离. 于是, f 在 Ω 内处处取正值. 下面证明二重积分 $\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在. 若记

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & (x,y) \in \Omega, \\ 0, & (x,y) \in [0,1]\times[0,2]-\Omega, \end{cases}$$

则由有界区域上二重积分的定义可知

$$\iint\limits_{\Omega} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

再由二重积分关于积分区域的可加性,有

$$\iint\limits_{[0,1]\times[0,2]} \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 1 + \iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

而根据引理,要证明二重积分 $\iint\limits_{[0,1]\times[0,1]} \tilde{f}(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 存在,只要证明一元函数

$$g(x) = \begin{cases} 0, & x \in F, \\ \rho(x,\partial G), & x \in G, \end{cases}$$

在区间 $[0,1]$ 上 Riemann 可积即可. 其中 $\rho(x,\partial G)$ 为点 x 到 G 的边界 ∂G 的距离 (因为 $\tilde{f}(x,y)=g(x)$, 当 $(x,y)\in[0,1]\times[0,1]$).

事实上,任给 $\varepsilon>0$, 由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛,所以存在正整数 N, 使得 $\sum\limits_{n=N+1}^{\infty} a_n < \frac{\varepsilon}{2}$. 又因为当 $x\in[\alpha_i,\beta_i]$ $(i=1,2,\cdots,N)$ 时,有

$$g(x) = \min\{|x-\alpha_i|, |x-\beta_i|\} = \begin{cases} x-\alpha_i, & \alpha_i \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}(\alpha_i+\beta_i), \\ \beta_i - x, & \frac{1}{2}(\alpha_i+\beta_i) < x \leqslant \beta_i, \end{cases}$$

所以 $g(x)$ 在区间 $[\alpha_i,\beta_i]$ 上 Riemann 可积. 于是存在 $[\alpha_i,\beta_i]$ 的一个划分 T_i, 使 Darboux 上和与下和之差

$$\overline{S}_i(g,T_i) - \underline{S}_i(g,T_i) < \frac{\varepsilon}{2N}.$$

考虑到当 $x\in[0,1]-\bigcup\limits_{i=1}^{N}(\alpha_i,\beta_i)$ 时,有

$$0 \leqslant g(x) \leqslant \sup\{a_{N+1}, a_{N+2}, \cdots\} < \frac{\varepsilon}{2},$$

故 $g(x)$在$[0,1]-\bigcup\limits_{i=1}^{N}(\alpha_i,\beta_i)$(这里含有 $N+1$ 个闭区间)上,对其任意划分的 Darboux 上和与下和之差都小于$\frac{\varepsilon}{2}\times\{[0,1]-\bigcup\limits_{i=1}^{N}(\alpha_i,\beta_i)\}$的长度且小于$\frac{\varepsilon}{2}$.

令 $T=\{0\}\cup T_1\cup T_2\cup\cdots\cup T_N\cup\{1\}$,则 T 是区间$[0,1]$的一个划分. 在划分 T 下,$g(x)$的 Darboux 上和与下和之差

$$\overline{S}(g,T)-\underline{S}(g,T) < \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2N}\cdot N=\varepsilon,$$

所以 $g(x)$在区间$[0,1]$上 Rimann 可积. 对任意正整数 n,有

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}g(x)\mathrm{d}x+\int\limits_{[0,1]-\bigcup\limits_{i=1}^{n}(\alpha_i,\beta_i)}g(x)\mathrm{d}x=I_1+I_2. \tag{2}$$

由于

$$\begin{aligned}0\leqslant I_2 &\leqslant \sup\{g(x)\mid x\in[0,1]-\bigcup_{i=1}^{n}(\alpha_i,\beta_i)\}\times\{[0,1]-\bigcup_{i=1}^{n}(\alpha_i,\beta_i)\}\text{的长度}\\ &\leqslant \sup\{b_{n+1},b_{n+2},\cdots\}.\end{aligned}$$

所以$\lim\limits_{n\to\infty}I_2=0$. 又因为

$$I_1=\sum_{i=1}^{n}\int_{\alpha_i}^{\beta_i}g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{n}b_i^2,$$

故令 $n\to\infty$时,对式(2)两边取极限,得

$$\int_0^1 g(x)\mathrm{d}x=\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2.$$

综上所述,便有

$$\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=1+\sum_{i=1}^{\infty}b_i^2.$$

也就是说,虽然积分域 Ω 没有面积,但是处处取正值的函数 f 的二重积分 $\iint\limits_{\Omega}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 却存在.

7. 关于正项级数 Cauchy 判别法的推广

在正项级数收敛性的判别法中，J. d'Alembert 判别法、Raabe 判别法、Gauss 判别法是一个系列，其中以 J. d'Alembert 判别法最简单，依次一个比一个更细致. 但是，由于它们是建立在$\{a_n\}$单调(至多当 n 充分大以后)，且当 $n\to\infty$时$\frac{a_n}{a_{n+1}}$有一定的渐近式的基础之上，所以稍微破坏了这种较强的要求，因而就不适用了. 例如，这三个判别法都不能判断级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)}\right]^n$ 的敛散性，其中 $\pi(n)$为不超过 n 的素数个数，常数 $\alpha>0$. 事实上，当 n 充分大以后，因为

$$
\begin{aligned}
\frac{\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)}\right]^n}{\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)+1}\right]^{n+1}} &= \frac{1}{1-\frac{\alpha}{\pi(n)+1}}\left\{\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)}\right]\cdot\left[1+\frac{\alpha}{\pi(n)+1}\right.\right.\\
&\qquad \left.\left.+\left(\frac{\alpha}{\pi(n)+1}\right)^2+\cdots\right]\right\}^n\\
&= \frac{1}{1-\frac{\alpha}{\pi(n)+1}}\left\{1-\frac{\alpha}{\pi(n)[\pi(n)+1]}\cdot\right.\\
&\qquad \left.\left[1+\frac{\alpha}{\pi(n)+1}+\left(\frac{\alpha}{\pi(n)+1}\right)^2+\cdots\right]\right\}^n\\
&\leqslant \frac{1}{1-\frac{\alpha}{\pi(n)+1}}\left\{1-\frac{\alpha}{\pi(n)[\pi(n)+1]}\right\}^n\\
&= \frac{1}{1-\frac{\alpha}{\pi(n)+1}}\left\{1-\frac{n\alpha}{\pi(n)[\pi(n)+1]}\right.\\
&\qquad \left.+o\left(\frac{n}{\pi(n)[\pi(n)+1]}\right)\right\}<1,
\end{aligned}
$$

所以有

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)}\right]^n}{\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n+1)}\right]^{n+1}}=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\frac{\alpha}{\pi(n)}}>1, & \pi(n+1)=\pi(n),\\ \dfrac{\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)}\right]^n}{\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)+1}\right]^{n+1}}<1, & \pi(n+1)=\pi(n)+1\end{cases}$$

从而可得

$$n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\begin{cases}n\left[\dfrac{1}{1-\frac{\alpha}{\pi(n)}}-1\right]>\alpha, & \pi(n+1)=\pi(n),\\ n\left\{\dfrac{\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)}\right]^n}{\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)+1}\right]^{n+1}}-1\right\}<0, & \pi(n+1)=\pi(n)+1,\end{cases}$$

和

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{n}-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\cdot n\ln n\\ &=\begin{cases}\left[\dfrac{\alpha}{\pi(n)}-\dfrac{1}{n}\right]n\ln n=\left[\alpha-\dfrac{\pi(n)}{n}\right]\dfrac{n\ln n}{\pi(n)}>\alpha, & \pi(n+1)=\pi(n),\\ \left\{1-\dfrac{1}{n}-\dfrac{\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)+1}\right]^{n+1}}{\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)}\right]^n}\right\}n\ln n<0, & \pi(n+1)=\pi(n)+1.\end{cases}\end{aligned}$$

因此，用 J. d′Alembert 判别法、Raabe 判别法和 Gauss 判别法，都不能判断 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)}\right]^n(\alpha>0)$ 是否收敛.

考虑到 Cauchy 根值判别法有其独到之处，已有的判别法，有时满足不了更精确的需要. 因此有必要将 Cauchy 根值判别法加以推广. 下面，我们将给出两个定理，由此可以比较容易地解决级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left[1-\frac{\alpha}{\pi(n)}\right]^n$ 的敛散性问题.

两 个 定 理

定理 1 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，如果存在常数 $\alpha>1$ 及正整数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\geqslant\alpha,$$

则级数收剑;如果存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,有

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\leqslant 1,$$

则级数发散.

证 先证明定理的前半部分. 由于

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\geqslant\alpha>1,(n>N),$$

所以

$$\sqrt[n]{a_n}\leqslant 1-\frac{\alpha\ln n}{n}<e^{-\frac{\alpha\ln n}{n}}=\sqrt[n]{\frac{1}{n^\alpha}},(\text{只要 }N\text{ 充分大}).$$

即有

$$a_n<\frac{1}{n^\alpha},(n>N).$$

由于当 $\alpha>1$ 时,级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^\alpha}$ 收敛,可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

再证明定理的后半部分. 因为

$$(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}\leqslant 1,(n>N),$$

所以

$$\sqrt[n]{a_n}\geqslant 1-\frac{\ln n}{n}.$$

又考虑到

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n\ln n}}=e^{-\left(\frac{\ln n}{n}+\frac{\ln\ln n}{n}\right)}=1-\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right),$$

所以存在 $N_1>N$,使当 $n>N_1$ 时,有

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n\ln n}}<1-\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\ln n}{2n}<\sqrt[n]{a_n}.$$

即 $a_n>\frac{1}{n\ln n}(n>N_1)$. 因为级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$ 发散,可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

定理 1 证毕.

不难给出定理 1 的极限形式:对正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$,如果

$$\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}=\alpha,$$

则当 $\alpha>1$ 时级数收敛，当 $\alpha<1$ 时级数发散；而当 $\alpha=1$ 时，此判别法失效.

例如，我们知道级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}$，当 $\alpha>1$ 时收敛，当 $\alpha\leqslant1$ 时发散. 但是，若用定理 1 的极限形式，由于极限

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}&=\lim_{n\to\infty}\left(1-\sqrt[n]{\frac{1}{n\ln^{\alpha}n}}\right)\frac{n}{\ln n}\\&=\lim_{n\to\infty}(1-\mathrm{e}^{-\frac{\ln n}{n}-\frac{\alpha\ln\ln n}{n}})\frac{n}{\ln n}\\&=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\ln n}{n}+\frac{\alpha\ln\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln\ln n}{n}\right)\right]\frac{n}{\ln n}=1,\end{aligned}$$

所以不能判定该级数的敛散性. 如果进一步考虑，可以给出如下定理.

定理 2 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，如果存在常数 $\beta>1$ 及正整数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln\ln n}\geqslant\beta,$$

则级数收敛；如果存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln\ln n}\leqslant1,$$

则级数发散.

证 先证定理的前半部分. 因为

$$\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln\ln n}\geqslant\beta>1,(n>N),$$

所以

$$\begin{aligned}\sqrt[n]{a_n}&\leqslant1-\frac{\ln n}{n}-\frac{\beta\ln\ln n}{n}<\mathrm{e}^{-\frac{\ln n}{n}-\frac{\beta\ln\ln n}{n}}\\&=\sqrt[n]{\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}},\quad(N\text{ 充分大}).\end{aligned}$$

即 $a_n<\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}$. 由于级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^{\beta}}(\beta>1)$ 收敛，可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

再证定理的后半部分. 因为

$$\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln\ln n}\leqslant1\quad(n>N).$$

所以

$$\sqrt[n]{a_n}\geqslant1-\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\ln n}{n}>1-\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\ln n}{n}-\frac{\ln\ln\ln n}{2n}$$

$$> e^{-\frac{\ln n}{n}-\frac{\ln\ln n}{n}-\frac{\ln\ln\ln n}{n}} = \sqrt[n]{\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}}, \quad (N \text{充分大}).$$

即 $a_n > \frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$. 由级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n\ln\ln n}$ 发散,可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 也发散.

定理 2 证毕.

定理 2 的极限形式:对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 如果

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln\ln n}=\beta,$$

则当 $\beta>1$ 时级数收敛;当 $\beta<1$ 时级数发散;而当 $\beta=1$ 时,此法不能判定级数的敛散性.

例如,不能用定理 2 的极限形式判断级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n(\ln\ln n)^{\beta}}$ 的敛散性.

例 题

例 1 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 如果

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}=\alpha.$$

证 由 $\lim\limits_{n\to\infty}n\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\alpha$,可得

$$\frac{a_n}{a_{n+1}}=1+\frac{\alpha}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right).$$

因为

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^t=1+\frac{t}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),$$

所以任给 $\varepsilon>0$,存在正整数 N,使当 $n>N$ 时,有

$$\frac{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{(n+1)^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}<\frac{a_n}{a_{n+1}}<\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}=\frac{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{(n+1)^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}.$$

于是，当 $n>N$ 时，将 $\frac{a_N}{a_{N+1}}, \frac{a_{N+1}}{a_{N+2}}, \cdots, \frac{a_{n-1}}{a_n}$ 的不等式同序相乘，得

$$\frac{\frac{1}{N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}<\frac{a_N}{a_n}<\frac{\frac{1}{N^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}{\frac{1}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}},$$

即

$$\frac{a_N \cdot N^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}<a_n<\frac{a_N \cdot N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

从而

$$\left(1-\sqrt[n]{\frac{a_N \cdot N^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha-\frac{\varepsilon}{2}}}}\right)\frac{n}{\ln n}<(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}<\left(1-\sqrt[n]{\frac{a_N \cdot N^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}{n^{\alpha+\frac{\varepsilon}{2}}}}\right).$$

考虑到

$$\sqrt[n]{\frac{c}{n^t}}=\mathrm{e}^{\frac{\ln c-t\ln n}{n}}=1-\frac{t\ln n}{n}+o\left(\frac{\ln n}{n}\right),$$

所以当 $n\to\infty$ 时，上述不等式左右两端分别收敛于 $\alpha-\frac{\varepsilon}{2}$ 和 $\alpha+\frac{\varepsilon}{2}$. 因此，存在 $N_1>N$，使当 $n>N_1$ 时，有

$$\alpha-\varepsilon<(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}<\alpha+\varepsilon,$$

即

$$\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}=\alpha.$$

由此，命题获证.

例 2 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$，如果

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\cdot n\ln n=\beta,$$

则

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln\ln n}=\beta.$$

证 由 $\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}-\frac{a_{n+1}}{a_n}\right)\cdot n\ln n=\beta$ 可知

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=1-\frac{1}{n}-\frac{\beta}{n\ln n}+o\left(\frac{1}{n\ln n}\right).$$

所以任给 $\varepsilon>0$，存在正整数 N，使当 $n>N$ 时，有

$$\frac{\dfrac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^{\beta+\frac{\varepsilon}{2}}}}{\dfrac{1}{n(\ln n)^{\beta+\frac{\varepsilon}{2}}}}<\frac{a_{n+1}}{a_n}<\frac{\dfrac{1}{(n+1)[\ln(n+1)]^{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}}}{\dfrac{1}{n(\ln n)^{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}}}.$$

当 $n>N$ 时，由此可得

$$\frac{a_N\cdot N(\ln N)^{\beta+\frac{\varepsilon}{2}}}{n(\ln n)^{\beta+\frac{\varepsilon}{2}}}<a_n<\frac{a_N\cdot N(\ln N)^{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}}{n(\ln n)^{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}}.$$

于是

$$\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{\frac{a_N\cdot N(\ln N)^{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}}{n(\ln n)^{\beta-\frac{\varepsilon}{2}}}}\right)\frac{n}{\ln\ln n}<\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln\ln n}$$
$$<\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{\frac{a_N\cdot N(\ln N)^{\beta+\frac{\varepsilon}{2}}}{n(\ln n)^{\beta+\frac{\varepsilon}{2}}}}\right)\frac{n}{\ln\ln n}.$$

由此可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln\ln n}=\beta.$$

命题得证.

例 3 证明级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[1-\dfrac{\alpha}{\pi(n)}\right]^n$，当 $\alpha>1$ 时收敛，当 $\alpha\leqslant 1$ 时发散.

证 因为

$$\pi(n)\sim\frac{n}{\ln n}\quad(n\to\infty)$$

所以

$$\lim_{n\to\infty}(1-\sqrt[n]{a_n})\frac{n}{\ln n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\alpha}{\pi(n)}\cdot\frac{n}{\ln n}=\alpha.$$

由定理 1 的极限形式可知，当 $\alpha>1$ 时级数收敛，当 $\alpha<1$ 时级数发散. 而当 $\alpha=1$ 时，级数的敛散性不能用定理 1 来判定. 可用定理 2 判定级数 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left[1-\dfrac{1}{\pi(n)}\right]^n$ 发散. 这是因为

$$\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln\ln n}=\left[\frac{1}{\pi(n)}-\frac{\ln n}{n}\right]\frac{n}{\ln\ln n}$$
$$=\frac{\ln n}{\pi(n)\ln\ln n}\left[\frac{n}{\ln n}-\pi(n)\right]\leqslant 1.$$

事实上，当 $\dfrac{n}{\ln n}\leqslant\pi(n)$ 时，显然有

$$\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln\ln n}\leqslant 0\leqslant 1;$$

当$\frac{n}{\ln n}>\pi(n)$时，由于

$$\operatorname{li} n > \frac{n}{\ln n}, \quad \operatorname{li} n - \pi(n) = O\left(\frac{n}{\ln^3 n}\right),$$

可知

$$\begin{aligned}\left(1-\frac{\ln n}{n}-\sqrt[n]{a_n}\right)\frac{n}{\ln\ln n} &\leqslant \frac{\ln n[\operatorname{li} n-\pi(n)]}{\pi(n)\ln\ln n}\\ &= O\left(\frac{1}{\ln n}\right)\leqslant 1 \quad (n\ \text{充分大})\end{aligned}$$

综上所述，命题便得所证.

由上面的三个例子可知，作为 Cauchy 根值判别法推广的定理 1 和定理 2，既保留了 Raabe 判别法和 Gauss 判别法的优点，同时又避免了它们的弱点，而且这两个定理比 Cauchy 根值判别法更精细，比 Raabe 判别法和 Gauss 判别法的应用范围更宽广一些.

在此我体会到：没有明确问题而去寻求一般方法的人，他们的工作多半是徒劳无益的. 独立解决一些难度高的问题，对人们的帮助并不亚于一些行之有效的经验之谈.

8. Dirichlet 收敛原理和 Abel 收敛原理

在数学分析中，Dirichlet 判别法和 Abel 判别法，并被誉为是“更精确”、“更普遍”、“更细致”的判别法，且二者各有所长，相辅相成. 那么其条件是否还可减弱呢？回答是否定的. 因为这两个判别法的条件不但是充分的，而且是必要的，也就是说是完备的. 二者没有优劣之分，鉴于它们都有极其广泛和重要的应用，故我们将其称为“收敛原理（或收敛准则）”.

关于级数的情况

定理 1（Dirichlet 收敛原理） 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的充要条件是存在分解 $u_n = a_n b_n$，使 $\{a_n\}$ 单调趋于零，而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ 的部分和数列有界.

证 因为充分性，就是相应的通常的 Dirichlet 判别法，所以只要证明必要性即可.

根据 Cauchy 收敛原理，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，所以对于 $\frac{1}{1^3}$，存在正整数 n_1，使当 $k > n_1$ 时，有

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} u_n \right| < \frac{1}{1^3}.$$

一般地，对于 $\frac{1}{i^3}$，存在正整数 $n_i > n_{i-1}$，使当 $k > n_i$ 时，有

$$\left| \sum_{n=k}^{\infty} u_n \right| < \frac{1}{i^3}, (i = 2, 3, 4, \cdots).$$

这样，得出一个正整数列：

$$n_1 < n_2 < \cdots < n_i < \cdots.$$

令

$$a_n=\begin{cases}1, & 1\leqslant n\leqslant n_1,\\ \dfrac{1}{i}, & n_i<n\leqslant n_{i+1}, i=1,2,3,\cdots,\end{cases}$$

$$b_n=\frac{u_n}{a_n}, n=1,2,3,\cdots,$$

则显然 $u_n=a_nb_n$，而且$\{a_n\}$单调趋于零. 余下证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列有界. 事实上，对任意的正整数 n，若 $n\leqslant n_1$，由于

$$\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i}{a_i}=\sum_{i=1}^{n}u_i,$$

所以

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_i\right|\leqslant\sum_{i=1}^{n}|u_i|\leqslant\sum_{i=1}^{n_1}|u_i|=L\quad(L=\text{const.}).$$

若 $n>n_1$，必存在正整数 k，使得 $n_k<n\leqslant n_{k+1}$，此时，由于

$$\sum_{i=1}^{n}b_i=\sum_{i=1}^{n_1}u_i+\sum_{i=n_1+1}^{n_2}u_i+\sum_{i=n_2+1}^{n_3}2u_i+\sum_{i=n_3+1}^{n_4}3u_i+\cdots$$
$$+\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}(k-1)u_i+\sum_{i=n_k+1}^{n}ku_i,$$

所以有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_i\right|\leqslant\left|\sum_{i=1}^{n_1}u_i\right|+\left|\sum_{i=n_1+1}^{n_2}u_i\right|+2\left|\sum_{i=n_2+1}^{n_3}u_i\right|+3\left|\sum_{i=n_3+1}^{n_4}u_i\right|+\cdots$$
$$+(k-1)\left|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}u_i\right|+k\left|\sum_{i=n_k+1}^{n}u_i\right|$$
$$\leqslant\sum_{i=1}^{n_1}|u_i|+\left(\left|\sum_{i=n_1+1}^{\infty}u_i\right|+\left|\sum_{i=n_2+1}^{\infty}u_i\right|\right)+2\left(\left|\sum_{i=n_2+1}^{\infty}u_i\right|+\left|\sum_{i=n_3+1}^{\infty}u_i\right|\right)$$
$$+\cdots+(k-1)\left(\left|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{\infty}u_i\right|+\left|\sum_{i=n_{k+1}}^{\infty}u_i\right|\right)$$
$$+k\left(\left|\sum_{i=n_k+1}^{\infty}u_i\right|+\left|\sum_{i=n+1}^{\infty}u_i\right|\right)$$
$$\leqslant L+\left(\frac{1}{1^3}+\frac{1}{2^3}\right)+2\left(\frac{1}{2^3}+\frac{1}{3^3}\right)+\cdots$$
$$+(k-1)\left(\frac{1}{(k-1)^3}+\frac{1}{k^3}\right)+k\left(\frac{1}{k^3}+\frac{1}{k^3}\right)$$
$$\leqslant L+2\left(\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{k^2}\right)$$

$$\leqslant L+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=M\quad(M=\text{const.}).$$

总之,对任意正整数 n,都有

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_i\right|<M,$$

即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 的部分和数列有界.

定理 1 证毕.

由数列与极限的关系,不难给出关于数列的 Dirichlet 收敛原理:数列$\{u_n\}$收敛的充要条件是存在分解 $u_1=a_1b_1$,$u_n-u_{n-1}=a_nb_n(n=2,3,\cdots)$,使数列$\{a_n\}$单调收敛于零,而数列 $\left\{\sum\limits_{i=1}^{n}b_i\right\}$ 有界. 以下各定理,均有类似的结果,不再赘述.

定理 2(Abel 收敛原理) 数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛的充要条件是存在分解 $u_n=a_nb_n$,使$\{a_n\}$单调有界, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛.

证 定理的充分性,就是相应的 Abel 判别法,下面来证明定理的必要性.

设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,由 Dirichlet 收敛原理可知,存在分解 $u_n=\alpha_n\beta_n$,其中$\{\alpha_n\}$单调收敛于零,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n$ 的部分和数列有界. 令

$$a_n=\operatorname{sgn}\alpha_n\cdot\sqrt{|\alpha_n|},\quad b_n=\beta_n\cdot\sqrt{|\alpha_n|},$$

则 $u_n=a_nb_n$,且$\{a_n\}$单调收敛于零,必然单调有界,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 由 Dirichlet 收敛原理知其收敛.

定理 2 证毕.

定理 3(Dirichlet 收敛原理) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在区间 X 上一致收敛的充要条件是存在分解 $u_n(x)=a_n(x)b_n(x)$,使$\{a_n(x)\}$对每一个 $x\in X$ 单调,且在 X 上一致趋向于零,而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 的部分和序列在 X 上一致有界.

证 下面只证定理的必要性.

根据 Cauchy 收敛原理,由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上一致收敛,所以对于$\frac{1}{1^3}$,必存在与 x 无关的正整数 n_1,使当 $k>n_1$ 时,对一切的 $x\in X$ 都有

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}u_n(x)\right|<\frac{1}{1^3}.$$

一般地，对于$\frac{1}{i^3}$，存在与 x 无关的正整数 $n_i>n_{i-1}$，使当 $k>n_i$ 时，对一切的 $x\in X$ 都有

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}u_n(x)\right|<\frac{1}{i^3},(i=2,3,\cdots).$$

由此确定了一个正整数串：

$$n_1<n_2<\cdots<n_i<\cdots.$$

定义集合

$$E=\left\{x\left|\sum_{i=1}^{n_1}|u_i(x)|<1,x\in X\right.\right\},$$

与函数

$$N(x)=\begin{cases}1, & x\in E,\\ \sum\limits_{i=1}^{n_1}|u_i(x)|, & x\in X\backslash E.\end{cases}$$

又在 X 上作函数序列

$$a_n(x)=\begin{cases}N(x), & 1\leqslant n\leqslant n_1,\\ \frac{1}{i}, & n_i<n\leqslant n_{i+1},i=1,2,3,\cdots,\end{cases}$$

$$b_n(x)=\frac{u_n(x)}{a_n(x)},n=1,2,3,\cdots,$$

则显然 $u_n(x)=a_n(x)b_n(x)$，且 $a_n(x)$ 对每一个 $x\in X$ 单调，当 $n\to\infty$ 时在 X 上一致趋向于零. 余下来证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 的部分和序列在 X 上一致有界.

对任意正整数 n，若 $n\leqslant n_1$，由于

$$\sum_{i=1}^{n}b_i(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{u_i(x)}{a_i(x)}=\frac{1}{N(x)}\sum_{i=1}^{n}u_i(x),$$

所以

$$\left|\sum_{i=1}^{n}b_i(x)\right|\leqslant\frac{1}{N(x)}\sum_{i=1}^{n}|u_i(x)|\leqslant\frac{1}{N(x)}\sum_{i=1}^{n_1}|u_i(x)|\leqslant 1.$$

若 $n>n_1$，必存在正整数 k，使得 $n_k<n\leqslant n_{k+1}$，此时由于

$$\sum_{i=1}^{n}b_i(x)=\sum_{i=1}^{n_1}\frac{u_i(x)}{a_i(x)}+\sum_{i=n_1+1}^{n_2}\frac{u_i(x)}{a_i(x)}+\cdots+\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k}\frac{u_i(x)}{a_i(x)}+\sum_{i=n_k+1}^{n}\frac{u_i(x)}{a_i(x)}$$

$$= \frac{1}{N(x)} \sum_{i=1}^{n_1} u_i(x) + \sum_{i=n_1+1}^{n_2} u_i(x) + 2\sum_{i=n_2+1}^{n_3} u_i(x) + \cdots$$

$$+ (k-1)\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} u_i(x) + k\sum_{i=n_k+1}^{n} u_i(x),$$

所以有

$$\left|\sum_{i=1}^{n} b_i(x)\right| \leqslant \frac{1}{N(x)} \sum_{i=1}^{n_1} |u_i(x)| + \left|\sum_{i=n_1+1}^{n_2} u_i(x)\right| + 2\left|\sum_{i=n_2+1}^{n_3} u_i(x)\right| + \cdots$$

$$+ (k-1)\left|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{n_k} u_i(x)\right| + k\left|\sum_{i=n_k+1}^{n} u_i(x)\right|$$

$$\leqslant 1 + \left(\left|\sum_{i=n_1+1}^{\infty} u_i(x)\right| + \left|\sum_{i=n_2+1}^{\infty} u_i(x)\right|\right)$$

$$+ 2\left(\left|\sum_{i=n_2+1}^{\infty} u_i(x)\right| + \left|\sum_{i=n_3+1}^{\infty} u_i(x)\right|\right) + \cdots$$

$$+ (k-1)\left(\left|\sum_{i=n_{k-1}+1}^{\infty} u_i(x)\right| + \left|\sum_{i=n_k+1}^{\infty} u_i(x)\right|\right)$$

$$+ k\left(\left|\sum_{i=n_k+1}^{\infty} u_i(x)\right| + \left|\sum_{i=n+1}^{\infty} u_i(x)\right|\right)$$

$$\leqslant 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = M \quad (M = \text{const.}).$$

于是 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i(x)$ 的部分和序列在 X 上一致有界得证.

定理 3 证毕.

定理 4(Abel 收敛原理) 函数项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在区间 X 上一致收敛的充要条件是存在分解 $u_n(x)=a_n(x)b_n(x)$，使$\{a_n(x)\}$对每一个 $x\in X$ 单调，且在 X 上一致有界，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

证 充分性. 根据 Dirichlet 收敛原理，由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 X 上一致收敛，所以存在分解 $b_n(x)=\alpha_n(x)\beta_n(x)$，使得$\{\alpha_n(x)\}$对每个 $x\in X$ 单调，且在 X 上一致趋于零，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \beta_n(x)$ 的部分和序列在 X 上一致有界.

又因为 $a_n(x)$对每一个 $x\in X$ 单调，且在 X 上一致有界，所以 $a_n(x)$在 X 上存在有界的极限函数 $a(x)$，从而 $a(x)-a_n(x)$对每一个 x 单调，且当 $n\to\infty$时趋向于

零，在 X 上一致有界. 于是由 $\alpha_n(x)$ 与 $a(x)-a_n(x)$ 对每个 x 单调趋向于零，可知 $[a(x)-a_n(x)]\alpha_n(x)$ 对每个 x 也单调；由 $a(x)-a_n(x)$ 在 X 上一致有界，$\alpha_n(x)$ 在 X 上一致趋向于零，可知 $[a(x)-a_n(x)]\alpha_n(x)$ 在 X 上一致趋向于零. 这样，再用 Dirichlet 收敛原理，得

$$\sum_{n=1}^{\infty}[a(x)-a_n(x)]b_n(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\{[a(x)-a_n(x)]\alpha_n(x)\}\beta_n(x)$$

在 X 上一致收敛，故

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)&=\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x)b_n(x)\\&=a(x)\sum_{n=1}^{\infty}b_n(x)-\sum_{n=1}^{\infty}[a(x)-a_n(x)]b_n(x)\end{aligned}$$

在 X 上也一致收敛.

必要性. 因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 X 上一致收敛，所以存在分解 $u_n(x)=\alpha_n(x)\beta_n(x)$，其中 $\{\alpha_n(x)\}$ 对每个 $x\in X$ 单调，且在 X 上一致趋于零，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\beta_n(x)$ 的部分和序列在 X 上一致有界. 令

$$a_n(x)=\operatorname{sgn}\alpha_n(x)\cdot\sqrt{|\alpha_n(x)|},$$
$$b_n(x)=\beta_n(x)\sqrt{|\alpha_n(x)|},$$

则 $u_n(x)=a_n(x)b_n(x)$，且 $\{a_n(x)\}$ 对每个 x 单调，在 X 上一致有界，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n(x)$ 在 X 上一致收敛.

定理 4 证毕.

关于广义积分的情况

定理 5（Dirichlet 收敛原理） 积分 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是存在分解 $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$，使 $\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，且 $\varphi(+\infty)=0$；而对任意常数 $A\geqslant a$，积分 $\int_a^A\psi(x)\mathrm{d}x$ 存在且有界.

证 定理的充分性，就是相应的 Dirichlet 判别法. 下面来证明其必要性.

根据 Cauchy 收敛原理，由于 $\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，所以对于 $\frac{1}{1^3}$，存在常数 $A_1>a$，

使当 $A \geqslant A_1$ 时，有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{1^3}.$$

一般地，对于$\frac{1}{i^3}$，存在常数 $A_i \geqslant A_{i-1}+1$，使当 $A \geqslant A_i$ 时，有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{i^3}, (i=2,3,\cdots).$$

从而确定了一个数串：

$$a < A_1 < A_2 < \cdots < A_i < \cdots,$$

且 $\lim\limits_{i\to\infty} A_i = +\infty$. 令

$$\varphi(x) = \begin{cases} 1, & a \leqslant x \leqslant A_1, \\ \frac{1}{i}, & A_i < x \leqslant A_{i+1}, (i=1,2,\cdots). \end{cases}$$

$$\psi(x) = \frac{f(x)}{\varphi(x)}, (a \leqslant x < +\infty),$$

则显然有 $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$，且 $\varphi(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调，$\varphi(+\infty)=0$. 下面证明 $\psi(x)$ 也满足条件.

对任意常数 $A>a$，如果 $A \leqslant A_1$，由于

$$\int_a^A \psi(x)\mathrm{d}x = \int_a^A f(x)\mathrm{d}x,$$

从而可知积分 $\int_a^A \psi(x)\mathrm{d}x$ 存在；又因为 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上可积，则 $|f(x)|$ 在 $[a,A]$ 上也可积，得

$$\begin{aligned}\left|\int_a^A \psi(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \int_a^A |f(x)|\mathrm{d}x \\ &\leqslant \int_a^{A_1} |f(x)|\mathrm{d}x = L \quad (L=\text{const.}).\end{aligned}$$

如果 $A>A_1$，必存在正整数 k，使得 $A_k < A \leqslant A_{k+1}$；由于此时有

$$\begin{aligned}\int_a^A \psi(x)\mathrm{d}x &= \int_a^{A_1} \psi(x)\mathrm{d}x + \int_{A_1}^{A_2} \psi(x)\mathrm{d}x + \cdots + \int_{A_{k-1}}^{A_k} \psi(x)\mathrm{d}x + \int_{A_k}^A \psi(x)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^{A_1} f(x)\mathrm{d}x + \int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x + 2\int_{A_2}^{A_3} f(x)\mathrm{d}x + \cdots \\ &\quad + (k-1)\int_{A_{k-1}}^{A_k} f(x)\mathrm{d}x + k\int_{A_k}^A f(x)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

所以积分 $\int_a^A \psi(x)\mathrm{d}x$ 存在，而且有

$$\left|\int_a^A \psi(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\int_a^{A_1} f(x)\mathrm{d}x\right| + \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x)\mathrm{d}x\right| + 2\left|\int_{A_2}^{A_3} f(x)\mathrm{d}x\right| + \cdots$$

$$
\begin{aligned}
&+(k-1)\left|\int_{A_{k-1}}^{A_k} f(x)\mathrm{d}x\right|+k\left|\int_{A_k}^{A} f(x)\mathrm{d}x\right| \\
\leqslant &\int_a^{A_1} | f(x) | \mathrm{d}x+\left[\left|\int_{A_1}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{A_2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|\right] \\
&+2\left[\left|\int_{A_2}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{A_3}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|\right]+\cdots \\
&+(k-1)\left[\left|\int_{A_{k-1}}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{A_k}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|\right] \\
&+k\left[\left|\int_{A_k}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{A}^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x\right|\right] \\
\leqslant &L+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=M \quad (M=\text{const.}).
\end{aligned}
$$

即对任意常数 $A>a$,积分 $\int_a^A \psi(x)\mathrm{d}x$ 存在且有界.

定理 5 证毕.

定理 6(Abel 收敛原理) 积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是存在分解 $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$,使 $\varphi(x)$ 在$[a_1+\infty)$上单调有界,且积分 $\int_a^{+\infty}\psi(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证 充分性. 由于 $\varphi(x)$ 在$[a,+\infty)$上单调有界,所以必存在有限极限 $\varphi(+\infty)$. 因此

$$\varphi(x)\psi(x)=\varphi(+\infty)\psi(x)+[\varphi(x)-\varphi(+\infty)]\psi(x),$$

其中 $\varphi(x)-\varphi(+\infty)$单调,当 $x\to+\infty$时趋向于零;对任意 $A\geqslant a$, $\int_a^A\psi(x)\mathrm{d}x$ 有界$\left(\text{因为}\int_a^{+\infty}\psi(x)\mathrm{d}x \text{ 收敛}\right)$,所以由定理 5 可知积分$\int_a^{+\infty}[\varphi(x)-\varphi(+\infty)]\psi(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 于是积分

$$\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x=\int_a^{+\infty}\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

必要性. 若积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,由定理 5 可知,存在分解 $f(x)=u(x)v(x)$,其中 $u(x)$在$[a,+\infty)$上单调,且 $u(+\infty)=0$;而对任意常数 $A\geqslant a$,积分$\int_a^A v(x)\mathrm{d}x$ 存在且有界. 令

$$
\begin{aligned}
\varphi(x)&=\operatorname{sgn}u(x)\cdot\sqrt{| u(x) |},\\
\psi(x)&=\sqrt{| u(x) |}v(x),
\end{aligned}
$$

则 $\varphi(x)$在$[a,+\infty)$上单调趋向于零,必然有界;而$\int_a^{+\infty}\psi(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理6证毕.

定理7(Dirichlet 收敛原理) 设 $x=b$ 是 $f(x)$的奇点,积分$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是存在分解 $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$,使 $\varphi(x)$在$[a,b)$单调,且 $\varphi(b-0)=0$;而积分$\int_a^{b-\eta}\psi(x)\mathrm{d}x$ 对任意正数 $\eta(\eta<b-a)$存在且有界.

证 充分性就是相应的判别法,下证必要性.

根据 Cauchy 收敛原理,由于$\int_a^{+\infty}f(x)\mathrm{d}x$ 收敛,所以对于$\frac{1}{1^3}$,存在正数 $\eta_1(\eta_1<b-a)$,使当 $\eta\in(0,\eta_1)$时,有

$$\left|\int_{b-\eta}^b f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{1^3}.$$

一般地,对于$\frac{1}{i^3}$,存在 $\eta_i\in\left(0,\frac{1}{2}\eta_{i-1}\right]$,使当 $\eta\in(0,\eta_i)$时,有

$$\left|\int_{b-\eta}^b f(x)\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{i^3},(i=2,3,\cdots).$$

从而确定一数串

$$\eta_1>\eta_2>\cdots>\eta_i>\cdots.$$

且$\lim\limits_{i\to\infty}\eta_i=0$. 令

$$\varphi(x)=\begin{cases}1, & a\leqslant x\leqslant b-\eta_1,\\ \frac{1}{i}, & b-\eta_i<x\leqslant b-\eta_{i+1},(i=1,2,3,\cdots),\end{cases}$$

$$\psi(x)=\frac{f(x)}{\varphi(x)},a\leqslant x<b,$$

则 $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$,且 $\varphi(x)$在$[a,b)$上单调,$\varphi(b-0)=0$. 下面证明 $\psi(x)$也满足条件.

对任意正数 $\eta(\eta<b-a)$,如果 $\eta\geqslant\eta_1$,由于

$$\int_a^{b-\eta}\psi(x)\mathrm{d}x=\int_a^{b-\eta}f(x)\mathrm{d}x,$$

所以积分$\int_a^{b-\eta}\psi(x)\mathrm{d}x$ 存在;又因为 $f(x)$在$[a,b-\eta]$上可积,则$|f(x)|$在$[a,b-\eta]$上也可积,得

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\mathrm{d}x\right| &\leqslant\int_a^{b-\eta}|f(x)|\mathrm{d}x\\ &\leqslant\int_a^{b-\eta_1}|f(x)|\mathrm{d}x=L\quad(L=\text{const.}).\end{aligned}$$

如果 $\eta<\eta_1$ 时，必存在正整数 k，使 $\eta_{k+1}\leqslant\eta<\eta_k$，有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant & \left|\int_a^{b-\eta_1}f(x)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2}f(x)\mathrm{d}x\right| \\ & +2\left|\int_{b-\eta_2}^{b-\eta_3}f(x)\mathrm{d}x\right|+\cdots+(k-1)\left|\int_{b-\eta_{k-1}}^{b-\eta_k}f(x)\mathrm{d}x\right| \\ & +k\left|\int_{b-\eta_k}^{b-\eta}f(x)\mathrm{d}x\right| \\ \leqslant & L+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=M \quad (M=\text{const.}).\end{aligned}$$

即 $\int_a^{b-\eta}\psi(x)\mathrm{d}x$ 对任意正数 $\eta(<b-a)$ 存在且有界.

定理 7 证毕.

定理 8(Abel 收敛原理) 设 $x=b$ 是 $f(x)$ 的奇点，积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛的充要条件是存在分解 $f(x)=\varphi(x)\psi(x)$，使 $\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 单调且有界，而积分 $\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

证 充分性. 由于 $\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 单调有界，所以存在有限的 $\varphi(b-0)$. 因此

$$\varphi(x)\psi(x)=\varphi(b-0)\psi(x)+[\varphi(x)-\varphi(b-0)]\psi(x),$$

其中 $\varphi(x)-\varphi(b-0)$ 单调，当 $x\to b-0$ 时趋向于零；对任意正数 $\eta(\eta<b-a)$，$\int_a^{b-\eta}\psi(x)\mathrm{d}x$ 存在且有界$\left(\text{因为}\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x\text{ 收敛}\right)$，所以由 Dirichlet 收敛原理可知积分 $\int_a^b[\varphi(x)-\varphi(b-0)]\psi(x)\mathrm{d}x$ 收敛. 于是积分

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x=\int_a^b\varphi(x)\psi(x)\mathrm{d}x$$

收敛.

必要性. 若积分 $\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，由 Dirichlet 收敛原理可知，存在分解 $f(x)=u(x)v(x)$，其中 $u(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调，且 $u(b-0)=0$；而对任意正数 $\eta(\eta<b-a)$，积分 $\int_a^{b-\eta}v(x)\mathrm{d}x$ 存在且有界. 令

$$\varphi(x)=\operatorname{sgn}u(x)\cdot\sqrt{|u(x)|},$$
$$\psi(x)=\sqrt{|u(x)|}v(x),$$

则 $\varphi(x)$ 在 $[a,b)$ 上单调，且 $\varphi(b-0)=0$，必然有界；而积分 $\int_a^b\psi(x)\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 8 证毕.

对于含参变量广义积分的情况，有以下定理.

定理 9(Dirichlet 收敛原理) 积分$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$关于$y$在$[c,d]$上一致收敛的充要条件是存在分解

$$f(x,y)=\varphi(x,y)\psi(x,y),$$

使得$\varphi(x,y)$关于x单调，且当$x\to+\infty$时关于$y\in[c,d]$一致趋向于零；而$\int_a^A \psi(x,y)\mathrm{d}x$对$A\geqslant a$与$y\in[c,d]$一致有界.

证 这里的充分性，就是通常相应的 Dirichlet 判别法. 下面证明其必要性.

根据 Cauchy 收敛原理，由于$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$关于$y\in[c,d]$一致收敛，所以对于$\frac{1}{1^3}$，存在与$y$无关的常数$A_1>a$，使当$A>A_1$时，对所有的$y\in[c,d]$都有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{1^3}.$$

一般地，对于$\frac{1}{i^3}$，存在与y无关的常数$A_i\geqslant A_{i-1}+1$，使当$A>A_i$时，对所有$y\in[c,d]$都有

$$\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x\right|<\frac{1}{i^3}(i=2,3,\cdots).$$

从而确定一数列

$$a<A_1<A_2<\cdots<A_i<\cdots,$$

且$\lim\limits_{i\to\infty}A_i=+\infty$.

我们定义集合与函数

$$E=\left\{y\in[c,d]\,\middle|\,\int_a^{A_1}|f(x,y)|\mathrm{d}x<1\right\},$$

$$N(y)=\begin{cases}1, & y\in E,\\ \int_a^{A_1}|f(x,y)|\mathrm{d}x, & y\in[c,d]\backslash E.\end{cases}$$

在$[a,+\infty)\times[c,d]$上定义函数

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}N(y), & (x,y)\in[a,A_1]\times[c,d],\\ \frac{1}{i}, & (x,y)\in(A_i,A_{i+1}]\times[c,d],i=1,2,\cdots.\end{cases}$$

$$\psi(x,y)=\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)},\quad (x,y)\in[a,+\infty)\times[c,d].$$

则$f(x,y)=\varphi(x,y)\psi(x,y)$，且$\varphi(x,y)$关于$x$单调，当$x\to+\infty$时关于$y\in[c,d]$

一致趋向于零. 余下只要证明$\int_a^A \psi(x,y)\mathrm{d}x$关于$A\geqslant a$与$y\in[c,d]$一致有界即可.
事实上,若$A\leqslant A_1$,则

$$\left|\int_a^A \psi(x,y)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{N(y)}\int_a^{A_1} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x \leqslant 1.$$

若$A>A_1$,必存在正整数k,使得$A_k<A\leqslant A_{k+1}$,有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^A \psi(x,y)\mathrm{d}x\right| \leqslant{}& \frac{1}{N(y)}\int_a^{A_1} |f(x,y)|\,\mathrm{d}x + \left|\int_{A_1}^{A_2} f(x,y)\mathrm{d}x\right| \\ &+ 2\left|\int_{A_2}^{A_3} f(x,y)\mathrm{d}x\right| + \cdots + (k-1)\left|\int_{A_{k-1}}^{A_k} f(x,y)\mathrm{d}x\right| \\ &+ k\left|\int_{A_k}^{A} f(x,y)\mathrm{d}x\right|.\end{aligned}$$

尔后,和定理 5 类似可得

$$\left|\int_a^A \psi(x,y)\mathrm{d}x\right| \leqslant M \quad (M=\text{const.}).$$

定理 9 证毕.

定理 10(Abel 收敛原理) 积分$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$关于$y$在$[c,d]$上一致收敛的充要条件是存在分解

$$f(x,y)=\varphi(x,y)\psi(x,y),$$

使$\varphi(x,y)$关于x单调且一致有界,而$\int_a^{+\infty} \psi(x,y)\mathrm{d}x$关于$y\in[c,d]$一致收敛.

证 充分性. 根据定理 9,由$\int_a^{+\infty} \psi(x,y)\mathrm{d}x$关于$y\in[c,d]$一致收敛,故存在分解

$$\psi(x,y)=g(x,y)h(x,y),$$

使得$\int_a^A g(x,y)\mathrm{d}x$对$A\geqslant a$与$y\in[c,d]$一致有界,而$h(x,y)$关于$x$单调,且当$x\to+\infty$时关于$y\in[c,d]$一致趋向于零.

因为$\varphi(x,y)$对x单调且一致有界,所以当$x\to+\infty$时$\varphi(x,y)$在$[c,d]$上有有界的极限函数$\Phi(y)$. 于是$\Phi(y)-\varphi(x,y)$关于x单调,当$x\to+\infty$时趋向于零,且在$[a,+\infty)\times[c,d]$上一致有界. 从而可知$h(x,y)[\Phi(y)-\varphi(x,y)]$关于$x$单调,且当$x\to+\infty$时关于$y\in[c,d]$一致趋向于零,故积分

$$\begin{aligned}&\int_a^{+\infty} [\Phi(y)-\varphi(x,y)]\psi(x,y)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^{+\infty} g(x,y)\cdot\{h(x,y)[\Phi(y)-\varphi(x,y)]\}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

在$[c,d]$上一致收敛. 因此,积分

$$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^{+\infty} \varphi(x,y)\psi(x,y)\mathrm{d}x$$
$$= \int_a^{+\infty} \psi(x,y)\Phi(y)\mathrm{d}x - \int_a^{+\infty} [\Phi(y) - \varphi(x,y)]\psi(x,y)\mathrm{d}x$$

在$[c,d]$上一致收敛.

必要性. 若积分$\int_a^{+\infty} f(x,y)\mathrm{d}x$关于$y$在$[c,d]$上一致收敛,由 Dirichlet 收敛原理可知,存在分解

$$f(x,y) = u(x,y)v(x,y),$$

其中$u(x,y)$关于x单调,且当$x\to+\infty$时关于$y\in[c,d]$一致趋向于零;而$\int_a^A v(x,y)\mathrm{d}x$对$A\geqslant a$与$y\in[c,d]$一致有界. 令

$$\varphi(x,y) = \mathrm{sgn}u(x,y)\cdot\sqrt{|u(x,y)|},$$
$$\psi(x,y) = \sqrt{|u(x,y)|}v(x,y),$$

则$\varphi(x,y)$关于x单调且一致有界,而$\int_a^{+\infty}\psi(x,y)\mathrm{d}x$关于$y\in[c,d]$一致收敛.

定理 10 证毕.

关于含参变量的无界函数广义积分,还有两个收敛原理.

定理 11(Dirichlet 收敛原理) 设$x=b$是奇点,积分$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$关于$y$在$[c,d]$上一致收敛的充要条件是存在分解$f(x,y)=\varphi(x,y)\psi(x,y)$,使$\varphi(x,y)$关于$x\in[a,b)$单调,当$x\to b-0$时关于$y\in[c,d]$一致趋向于零,而$\int_a^{b-\eta}\psi(x,y)\mathrm{d}x$对任意正数$\eta(\eta<b-a)$与$y$在$[c,d]$上存在且一致有界.

证 充分性. 由于$\int_a^{b-\eta}\psi(x,y)\mathrm{d}x$对$\eta\in(0,b-a)$与$y\in[c,d]$存在且一致有界,所以存在常数$M$,对一切$\eta\in(0,b-a)$与$y\in[c,d]$都有

$$\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x,y)\mathrm{d}x\right|\leqslant M.$$

因此对任意$\eta,\eta'\in(0,b-a)$,有

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\psi(x,y)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x,y)\mathrm{d}x\right|+\left|\int_a^{b-\eta'}\psi(x,y)\mathrm{d}x\right|\leqslant 2M.$$

又由于$\varphi(x,y)$关于x单调,且当$x\to b-0$时关于$y\in[c,d]$一致趋向于零,所以任给$\varepsilon>0$,存在与y无关的常数$\eta_0\in(0,b-a)$,使当$0<b-x<\eta_0$时,对一切$y\in[c,d]$,有

$$|\varphi(x,y)|<\varepsilon.$$

于是,当$0<\eta,\eta'<\eta_0$时,由积分第二中值定理得

$$\left|\int_{b-\eta}^{b-\eta'}\varphi(x,y)\psi(x,y)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left|\varphi(b-\eta,y)\int_{b-\eta}^{\xi(y)}\psi(x,y)\mathrm{d}x\right| + \left|\varphi(b-\eta',y)\int_{\xi(y)}^{b-\eta'}\psi(x,y)\mathrm{d}x\right| < 4M\varepsilon.$$

由 Cauchy 收敛原理可知

$$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi(x,y)\psi(x,y)\mathrm{d}x$$

关于 $y\in[c,d]$一致收敛.

必要性. 因为$\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$一致收敛，所以对于$\frac{1}{1^3}$，存在与 y 无关的正数 $\eta_1(\eta_1<b-a)$，使当 $0<\eta<\eta_1$ 时，有

$$\left|\int_{b-\eta}^b f(x,y)\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{1^3},$$

对一切 $y\in[c,d]$都成立. 一般对于$\frac{1}{i^3}$，存在与 y 无关的 $\eta_i\in\left(0,\frac{1}{2}\eta_{i-1}\right]$，使当 $0<\eta<\eta_i$时，有

$$\left|\int_{b-\eta}^b f(x,y)\mathrm{d}x\right| < \frac{1}{i^3},(i=2,3,\cdots)$$

对一切 $y\in[c,d]$都成立. 从而确定一数串：

$$\eta_1>\eta_2>\cdots>\eta_i>\cdots,$$

且$\lim\limits_{i\to\infty}\eta_i=0$. 令

$$E=\left\{y\left|\int_a^{b-\eta_1}|f(x,y)|\mathrm{d}x<1, c\leqslant y\leqslant d\right.\right\},$$

$$N(y)=\begin{cases}1, & y\in E\\ \int_a^{b-\eta_1}|f(x,y)|\mathrm{d}x, & y\in[c,d]\backslash E.\end{cases}$$

定义

$$\varphi(x,y)=\begin{cases}N(y), & (x,y)\in[a,b-\eta_1]\times[c,d],\\ \frac{1}{i}, & (x,y)\in(b-\eta_i,b-\eta_{i+1}]\times[c,d], i=1,2,\cdots.\end{cases}$$

$$\psi(x,y)=\frac{f(x,y)}{\varphi(x,y)},\quad (x,y)\in[a,b)\times[c,d].$$

则 $f(x,y)=\varphi(x,y)\psi(x,y)$，$\varphi(x,y)$关于 x 单调减，当 $x\to b-0$ 时关于 $y\in[c,d]$一致趋向于零. 余下来证$\int_a^{b-\eta}\psi(x,y)\mathrm{d}x$ 对 $\eta\in(0,b-a)$与 $y\in[c,d]$一致有界. 事实上，当 $\eta\geqslant\eta_1$ 时，

$$\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x,y)\mathrm{d}x\right| \leqslant \frac{1}{N(y)}\int_a^{b-\eta_1}|f(x,y)|\mathrm{d}x \leqslant 1.$$

当 $\eta<\eta_1$ 时，必存在正整数 k，使 $\eta_{k+1}\leqslant\eta<\eta_k$，有

$$\begin{aligned}\left|\int_a^{b-\eta}\psi(x,y)\mathrm{d}x\right| &\leqslant \frac{1}{N(y)}\int_a^{b-\eta_1}|f(x,y)|\mathrm{d}x+\left|\int_{b-\eta_1}^{b-\eta_2}f(x,y)\mathrm{d}x\right| \\ &\quad +2\left|\int_{b-\eta_2}^{b-\eta_3}f(x,y)\mathrm{d}x\right|+\cdots+(k-1)\left|\int_{b-\eta_{k-1}}^{b-\eta_k}f(x,y)\mathrm{d}x\right| \\ &\quad +k\left|\int_{b-\eta_k}^{b-\eta}f(x,y)\mathrm{d}x\right| \\ &\leqslant 1+2\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}=M,\ (M=\text{const.}).\end{aligned}$$

定理 11 证毕.

定理 12(Abel 收敛原理) 设 $x=b$ 是奇点，积分 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛的充要条件是存在分解 $f(x,y)=\varphi(x,y)\psi(x,y)$，使 $\varphi(x,y)$ 关于 $x\in[a,b)$ 单调且一致有界，而 $\int_a^b\psi(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛.

证 充分性. 根据 Dirichlet 收敛原理，由 $\int_a^b\psi(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$ 一致收敛，故存在分解

$$\psi(x,y)=g(x,y)h(x,y),$$

使 $\int_a^{b-\eta}g(x,y)\mathrm{d}x$ 对于 $\eta\in(0,b-a)$ 与 $y\in[c,d]$ 一致有界，而 $h(x,y)$ 关于 $x\in[a,b)$ 单调，当 $x\to b-0$ 时关于 $y\in[c,d]$ 一致趋向于零.

又考虑到 $\varphi(x,y)$ 对 x 单调且一致有界，所以当 $x\to b-0$ 时 $\varphi(x,y)$ 在 $[c,d]$ 上有有界的极限函数 $\Phi(y)$. 于是 $h(x,y)[\Phi(y)-\varphi(x,y)]$ 关于 x 单调，当 $x\to b-0$ 时关于 $y\in[c,d]$ 一致趋向于零，故积分

$$\begin{aligned}&\int_a^b[\Phi(y)-\varphi(x,y)]\psi(x,y)\mathrm{d}x \\ &=\int_a^b g(x,y)\cdot\{h(x,y)[\Phi(y)-\varphi(x,y)]\}\mathrm{d}x\end{aligned}$$

在 $[c,d]$ 上一致收敛. 因此，积分

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x &= \int_a^b\varphi(x,y)\psi(x,y)\mathrm{d}x \\ &= \int_a^b\Phi(y)\psi(x,y)\mathrm{d}x-\int_a^b[\Phi(y)-\varphi(x,y)]\psi(x,y)\mathrm{d}x\end{aligned}$$

在 $[c,d]$ 上一致收敛.

必要性. 若 $\int_a^b f(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 y 在 $[c,d]$ 上一致收敛，由 Dirichlet 收敛原理知，存在分解

$$f(x,y)=u(x,y)v(x,y)$$

其中 $u(x,y)$关于 x 单调,当 $x\to b-0$ 时关于 $y\in[c,d]$一致趋向于零;而$\int_a^{b-\eta}v(x,y)\mathrm{d}x$ 对 $\eta\in(0,b-a)$与 $y\in[c,d]$一致有界. 令

$$\varphi(x,y)=\operatorname{sgn}u(x,y)\cdot\sqrt{|u(x,y)|},$$

$$\psi(x,y)=\sqrt{|u(x,y)|}v(x,y),$$

则 $\varphi(x,y)$关于 $x\in[a,b)$单调且一致有界,而$\int_a^b\psi(x,y)\mathrm{d}x$ 关于 $y\in[c,d]$一致收敛.

定理 12 证毕.

Dirichlet 与 Abel 收敛原理,不但具有重要的理论意义,而且有深远的现实意义. 由上可知,在用 Dirichlet(或 Abel)收敛原理证明 Abel(或 Dirichlet)收敛原理时,过程显得比较简洁,这里就不多说了.

最后,我们用构造性的方法,来证明一个典型的例子.

设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则存在不减的数列$\{b_n\}$,使 $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$,而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 仍收敛.

事实上,根据 Cauchy 收敛原理,因为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,所以对于$\frac{1}{2^1}$,存在正整数 N_1,使当 $k\geqslant N_1$ 时,有

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}a_n\right|<\frac{1}{2^1};$$

一般地,对于$\frac{1}{2^i}$,存在 $N_i>N_{i-1}$,使当 $k\geqslant N_i$ 时,有

$$\left|\sum_{n=k}^{\infty}a_n\right|<\frac{1}{2^i}\quad(i=2,3,\cdots).$$

由此得一正整数列:

$$N_1<N_2<\cdots<N_i<\cdots,$$

令

$$b_n=\begin{cases}1, & 1\leqslant n<N_1,\\ i+1, & N_i\leqslant n<N_{i+1},\quad i=1,2,3,\cdots\end{cases}$$

显然$\{b_n\}$单调增且发散于$+\infty$. 下面来证 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛. 为此,只要证明对任意 n,

部分和 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ 有界即可. 当 $n \leqslant N_1$ 时,则

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| = \sum_{k=1}^{n} a_k \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} a_k \equiv L,\ (L = \text{const.})$$

当 $n \geqslant N_1$ 时,则存在 i,使 $N_i \leqslant n < N_{i+1}$,于是

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| &= \sum_{k=1}^{N_1-1} a_k + 2\sum_{k=N_1}^{N_2-1} a_k + \cdots + i \sum_{k=N_{i-1}}^{N_i-1} a_k + (i+1)\sum_{k=N_i}^{n} a_k \\ &\leqslant L + \frac{2}{2^1} + \frac{3}{2^2} + \cdots + \frac{i}{2^{i-1}} + \frac{i+1}{2^i} \\ &\leqslant L + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{i+1}{2^i} \equiv M,\ (M = \text{const.}) \end{aligned}$$

总之,对任意 n,都有

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \right| \leqslant M,$$

即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

由上可知,对于任意收敛的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,总有比它收敛得更慢的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 存在,其中$\{b_n\}$单调增且发散于$+\infty$. 类似地,对于任何发散的正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$,可以用构造性的方法,给出比它发散得更慢的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$,这里的$\{b_n\}$单调减且收敛于零.

应当指出,以上诸定理中所说的“分解”是不惟一的,正是由于这个原因,这些定理才有极其广泛的应用.

Dirichlet 说:“研究数学如同研究其他领域一样,当清楚地了解自己陷入某种不可思议的境地时,这往往离新发现只剩下一半路程了.”

9. 两个初等不等式及其应用

在教学中，关于二项式级数在收敛区间端点的收敛性，是一个较困难的问题. 有的教材对此置之不理，有的则要借助于超越几何级数来解决. 笔者在讲课中感悟到，可用夹逼原理来解决这个问题. 下面就是我们的结论及其推导过程.

两个初等不等式

如果手中没有明确的问题，想凭空造出一个好的方法，多半是徒劳的；而一般方法的获得，往往是在解决具体问题之中，经常想着它们.

定理 1 设 k 为正整数，则

$$\frac{k-1}{k\sqrt[k]{n}} \leqslant \frac{k-1}{k} \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \cdots \cdot \frac{nk-1}{nk} \leqslant \frac{k-1}{\sqrt[k]{n(k+1)+k-1}}. \tag{1}$$

证 如果 $k=1$，式(1)显然成立.

如果 $k \geqslant 2$，用数学归纳法，分两步证明. 首先证明式(1)的左半部分.

当 $n=1$ 时，显然正确.

假设式(1)的左半部分对于正整数 n 成立，来证明对于 $n+1$ 亦成立. 由归纳法的假设，这只要证明

$$\frac{k-1}{k\sqrt[k]{n+1}} \leqslant \frac{k-1}{k\sqrt[k]{n}} \cdot \frac{(n+1)k-1}{(n+1)k},$$

即要证明

$$\frac{n+1}{n}[(n+1)k-1]^k \geqslant [(n+1)k]^k,$$

亦即

$$\frac{n+1}{n}\left[1-\frac{1}{(n+1)k}\right]^k \geqslant 1. \tag{2}$$

由 Bernoulli 不等式

$$(1+x)^k \geqslant 1+kx \quad (x>-1, k>1 \text{ 或 } k<0),$$

令

$$x=-\frac{1}{(n+1)k},$$

则

$$\frac{n+1}{n}\left[1-\frac{1}{(n+1)k}\right]^k \geqslant \frac{n+1}{n}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=1,$$

所以式(2)正确.

由此可知,对任意正整数 n,不等式(1)的左半部分成立.

下面证明不等式(1)的左半部分.

当 $n=1$ 时,要证式(1)的右半部分正确,只要证明

$$\frac{k-1}{k} \leqslant \frac{k-1}{\sqrt[k]{2k}}$$

即可. 而这个不等式成立的充要条件是

$$k^k \geqslant 2k \quad (k \geqslant 2).$$

但是,由于 $k \geqslant 2$,有

$$k^k-2k=k(k^{k-1}-2) \geqslant 0,$$

所以,此时不等式(1)的右半部分正确.

假设不等式(1)的右半部分对于正整数 n 成立,下面证明它对于 $n+1$ 也成立. 根据归纳法的假设,这只要证明

$$\frac{k-1}{\sqrt[k]{n(k+1)+k-1}} \cdot \frac{(n+1)k-1}{(n+1)k} \leqslant \frac{k-1}{\sqrt[k]{(n+1)(k+1)+k-1}}.$$

而这个不等式成立的充要条件是

$$\begin{aligned}&[(n+1)(k+1)+k-1] \cdot [(n+1)k-1]^k \\ &\leqslant [n(k+1)+k-1] \cdot [(n+1)k]^k,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&\{[(n+1)k-1]+(n+k+1)\}[(n+1)k-1]^k \\ &\leqslant \{[(n+1)k-1]+n\}\{[(n+1)k-1]+1\}^k. \end{aligned} \tag{3}$$

但是,根据 Newton 二项式公式,式(3)的右端不小于下式:

$$\begin{aligned}&\{[(n+1)k-1]+n\}\Big\{[(n+1)k-1]^k+k[(n+1)k-1]^{k-1} \\ &\quad +\frac{k(k-1)}{2}[(n+1)k-1]^{k-2}\Big\} \\ &\geqslant [(n+1)k-1]^{k+1}+(n+k)[(n+1)k-1]^k \\ &\quad +[(k-1)+nk][(n+1)k-1]^k \\ &=[(n+1)k-1]^{k+1}+(n+k+1)[(n+1)k-1]^k \\ &=\{[(n+1)k-1]+(n+k+1)\}[(n+1)k-1]^k,\end{aligned}$$

所以不等式(3)亦成立.

由此可知,对任意正整数 n,不等式(1)的右半部分成立.

综上,定理 1 证毕.

定理 2 设 $k\geqslant 2$,则

$$\frac{k}{(k+1)\sqrt[k]{n}}\leqslant\frac{k}{k+1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdot\cdots\cdot\frac{nk}{nk+1}\leqslant\frac{k}{\sqrt[k]{n(k+1)+k+4}}. \tag{4}$$

证 先证明式(4)的左半部分.

当 $n=1$ 时,式(4)显然成立.

假设对于 n 成立,对于 $n+1$,只要证明

$$\frac{k}{(k+1)\sqrt[k]{n+1}}\leqslant\frac{k}{(k+1)\sqrt[k]{n}}\cdot\frac{(n+1)k}{(n+1)k+1}.$$

这不等式等价于

$$\frac{n+1}{n}[(n+1)k]^k\geqslant[(n+1)k+1]^k,$$

即

$$\frac{n+1}{n}\left[1-\frac{1}{(n+1)k+1}\right]^k\geqslant 1. \tag{5}$$

由 Bernoulli 不等式,得

$$\begin{aligned}\frac{n+1}{n}\left[1-\frac{1}{(n+1)k+1}\right]^k&\geqslant\frac{n+1}{n}\left[1-\frac{k}{(n+1)k+1}\right]\\&>\frac{n+1}{n}\left[1-\frac{1}{n+1}\right]=1,\end{aligned}$$

所以式(5)正确.

由此可知,对任意正整数 n,式(4)的左半部分成立.

再证式(4)的右半部分. 当 $n=1$ 时,只要证明

$$\frac{k}{k+1}\leqslant\frac{k}{\sqrt[k]{2k+5}}.$$

它等价于

$$(k+1)^k\geqslant 2k+5.$$

因为 $k\geqslant 2$,有

$$(k+1)^k-(2k+5)\geqslant(k+1)^2-2k-5=(k+2)(k-2)\geqslant 0,$$

所以,此时式(4)的右半部分成立.

假设对于 n 成立,对于 $n+1$,只要证明

$$\frac{k}{\sqrt[k]{n(k+1)+k+4}}\cdot\frac{(n+1)k}{(n+1)k+1}\leqslant\frac{k}{\sqrt[k]{(n+1)(k+1)+k+4}}.$$

它等价于

$$\begin{aligned}&[(n+1)(k+1)+k+4][(n+1)k]^k\\&\leqslant[n(k+1)+k+4][(n+1)k+1]^k,\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}&[(n+1)k+(n+k+5)][(n+1)k]^k\\&\leqslant[(n+1)k+(n+4)][(n+1)k+1]^k.\end{aligned}\tag{6}$$

因为式(6)的右端不小于下式:

$$\begin{aligned}&[(n+1)k+(n+4)]\{[(n+1)k]^k+k[(n+1)k]^{k-1}\\&\quad+\frac{k(k-1)}{2}[(n+1)k]^{k-2}\Big\}\\&\geqslant[(n+1)k]^{k+1}+(n+k+4)[(n+1)k]^k\\&\quad+\left[\frac{k(k-1)}{2}+(n+4)k\right][(n+1)k]^{k-1}\\&>[(n+1)k]^{k+1}+(n+k+5)[(n+1)k]^k\\&=[(n+1)k+(n+k+5)][(n+1)k]^k,\end{aligned}$$

所以式(6)成立.

由此可知,对任意正整数 n,式(4)的右半部分成立.

综上,定理 2 证毕.

应 用

作为例子,先考虑二项式级数和超越几何级数在收敛区间端点的收敛性.

例 1 证明:二项式级数

$$(1+x)^m=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{m(m-1)\cdots(m-n+1)}{n!}x^n,$$

当 $x=1,-1<m<0$ 时,为条件收敛.

证 令 $u_0=1,u_n$ 表示二项式级数当 $x=1$ 时的通项,则

$$u_n=(-1)^n\frac{|m|(|m|+1)\cdots(|m|+n-1)}{n!},\ (n=1,2,\cdots).$$

由此可知,此时二项式级数是一个交错级数,而且显然有

$$|u_n|>|u_{n+1}|,\ (n=0,1,2,\cdots).$$

因为 $|u_n|>\dfrac{|m|}{n}$,所以级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 发散.

又因为 $0<|m|<1$,必定存在正整数 k,使得

$$|m| \leqslant \frac{k-1}{k},$$

故

$$\begin{aligned}
|u_n| &\leqslant \frac{\frac{k-1}{k}\left(\frac{k-1}{k}+1\right)\cdots\left(\frac{k-1}{k}+n-1\right)}{n!} \\
&= \frac{k-1}{k} \cdot \frac{2k-1}{2k} \cdot \cdots \cdot \frac{nk-1}{nk} \\
&\leqslant \frac{k-1}{\sqrt[k]{n(k+1)+k-1}}
\end{aligned}$$

可知 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$. 根据 Leibniz 判别法,可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} u_n$ 收敛.

综上所述,当 $x=1$, $-1<m<0$ 时,二项式级数条件收敛.

例 2 超越几何级数

$$F(\alpha,\beta,\gamma;x) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\ \beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n,$$

γ 不为负整数和零,当 $x=-1$, $-1<\gamma-\alpha-\beta\leqslant 0$ 时,该级数条件收敛.

证 令 $u_0=1$, u_n 为 $F(\alpha,\beta,\gamma;-1)$ 的通项,则

$$u_n = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n!\gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)}, \ (n=1,2,\cdots).$$

由此可知,存在正整数 $N_0 > \max\{|\alpha|,|\beta|,|\gamma|\}$,使得 $F(\alpha,\beta,\gamma;-1)$ 去掉前 N_0 项后是一个交错级数,并且

$$\begin{aligned}
\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| &= \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} \\
&= \frac{n^2+(1+\gamma)n+\gamma}{n^2+(\alpha+\beta)n+\alpha\beta} \\
&= 1 + \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right), \ (n\to\infty).
\end{aligned}$$

因为

$$\varepsilon = \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{2} > 0,$$

所以存在 $N \geqslant N_0$,当 $n \geqslant N$ 时,有

$$\left|\frac{u_n}{u_{n+1}}\right| > 1 + \frac{\varepsilon}{n} > 1,$$

即 $|u_n| > |u_{n+1}|$ $(n \geqslant N)$. 而对 $\varepsilon>0$,存在正整数 k,使得 $\frac{1}{k}<\varepsilon$,所以当 $n\geqslant N$ 时,有

$$\left|\frac{u_N}{u_{n+1}}\right| > \left(1+\frac{\varepsilon}{N}\right)\left(1+\frac{\varepsilon}{N+1}\right)\cdots\left(1+\frac{\varepsilon}{n}\right)$$
$$> \left(1+\frac{1}{Nk}\right)\left(1+\frac{1}{(N+1)k}\right)\cdots\left(1+\frac{1}{nk}\right)$$
$$= \frac{Nk+1}{Nk}\cdot\frac{(N+1)k+1}{(N+1)k}\cdot\cdots\cdot\frac{nk+1}{nk}$$
$$\geqslant \frac{k}{k+1}\cdot\frac{2k}{2k+1}\cdot\cdots\cdot\frac{(N-1)k}{(N-1)k+1}\cdot\frac{\sqrt[k]{n(k+1)+k+4}}{k},$$

从而便得 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$. 由 Leibniz 判别法可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}u_n$ 收敛.

当 $\gamma<\alpha+\beta$ 时,由 Raabe 判别法可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 发散;当 $\gamma=\alpha+\beta$ 时,由 Gauss 判别法可知级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}|u_n|$ 发散.

综上,便得所证.

最后,再来讨论一个级数的敛散性问题.

例 3 证明:级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{[\sqrt[m]{n}]}$ ($\alpha>0$, m 为正整数),当 $\alpha+\frac{1}{m}>1$ 且 $\alpha>1$ 时绝对收敛,当 $\alpha+\frac{1}{m}>1$ 且 $\alpha\leqslant1$ 时条件收敛,当 $\alpha+\frac{1}{m}\leqslant1$ 时发散,其中$[\sqrt[m]{n}]$为$\sqrt[m]{n}$的整数部分.

证 令 $a_n=\frac{1}{n^\alpha}$, $b_n=(-1)^{[\sqrt[m]{n}]}$,对任意正整数 n,存在正整数 k,使得

$$k^m\leqslant n<(k+1)^m,$$

故使 $k\leqslant[\sqrt[m]{n}]<k+1$ 成立的 b_n 的项数最多有

$$(k+1)^m-k^m=O(k^{m-1})=O(n^{1-\frac{1}{m}}).$$

因为

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|\leqslant(k+1)^m-k^m,$$

所以

$$\left|\sum_{k=1}^{n}b_k\right|=O(n^{1-\frac{1}{m}}).$$

又考虑到

$$a_n-a_{n+1}=\frac{1}{n^\alpha}-\frac{1}{(n+1)^\alpha}=O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right),$$

于是,当 $\alpha+\frac{1}{m}>1$ 时,由 Abel 变换,得

$$\sum_{n=N}^{N+p}a_nb_n=\sum_{n=N}^{N+p-1}\Big[(a_n-a_{n+1})\sum_{k=N}^{n}b_k\Big]+a_{N+p}\sum_{k=N}^{N+p}b_k$$
$$=O\Big(\sum_{n=N}^{N+p}\frac{1}{n^{\alpha+\frac{1}{m}}}\Big)+O\Big(\frac{1}{(N+p)^{\alpha+\frac{1}{m}-1}}\Big),$$

由 Cauchy 收敛原理可知,此时级数收敛. 但当 $\alpha\leqslant 1$ 时,有

$$\left|\sum_{n=k^m}^{(k+1)^m-1}\frac{(-1)^{[\sqrt[m]{n}]}}{n^\alpha}\right|\geqslant\frac{(k+1)^m-k^m}{(k+1)^{m\alpha}}$$
$$\geqslant\frac{mk^{m-1}}{(k+1)^m}=\frac{m}{k}\left(\frac{k}{k+1}\right)^m\sim\frac{m}{k}\ (k\to\infty),$$

根据级数的项加括号的性质,可知当 $\alpha+\dfrac{1}{m}>1$ 且 $\alpha\leqslant 1$ 时,级数为条件收敛. 而当 $\alpha>1$时,由于

$$\left|\sum_{n=k^m}^{(k+1)^m-1}\frac{(-1)^{[\sqrt[m]{n}]}}{n^\alpha}\right|\leqslant\frac{(k+1)^m-k^m}{k^{m\alpha}}$$
$$=\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^m-1}{k^{m(\alpha-1)}}=O\Big(\frac{1}{k^{1+m(\alpha-1)}}\Big),$$

故当 $\alpha+\dfrac{1}{m}>1$ 且 $\alpha>1$ 时级数绝对收敛.

当 $\alpha+\dfrac{1}{m}\leqslant 1$ 时,则

$$\left|\sum_{n=k^m}^{(k+1)^m-1}\frac{(-1)^{[\sqrt[m]{n}]}}{n^\alpha}\right|\geqslant\frac{mk^{m-1}}{(k+1)^{m\left(1-\frac{1}{m}\right)}}$$
$$=\frac{m}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{m-1}}\to m\quad(k\to\infty).$$

因此级数发散.

综上所述,命题得证.

10. Bernoulli 数和 Euler 数

设

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x}{e^x-1}, & x\neq 0,\\ 1, & x=0.\end{cases}$$

则 Bernoulli 数 B_n 是由幂级数展开式

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$

所定义的. 因为

$$1=\frac{e^x-1}{x}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{(n+1)!}\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n$$
$$=\sum_{n=0}^{\infty}\left\{\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k+1)!}\right\}x^n.$$

所以比较系数可得

$$B_0=1,\sum_{k=0}^{n}\frac{B_k}{k!(n-k+1)!}=0,(n=1,2,\cdots),$$

即

$$B_0=1,B_n=-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{n!}{k!(n-k+1)!}B_k,(n=1,2,\cdots).$$

又因为

$$f(-x)=\frac{-x}{e^{-x}-1}=\frac{-xe^x}{1-e^x}=x+f(x)$$

即

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}(-x)^n=x+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{B_n}{n!}x^n,$$

故

$$B_1=-\frac{1}{2},B_{2k+1}=0,(k=1,2,\cdots).$$

而 Euler 数 E_n 是由展开式

$$\sec x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_n}{n!} x^n$$

定义的. 显然

$$E_0 = 1, E_{2k+1} = 0, (k = 0, 1, 2, \cdots).$$

由于

$$1 = \cos x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E_{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{E_{2n-2k}}{(2k)!(2n-2k)!} \right\} x^{2n}.$$

比较系数，便得递推关系

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{E_{2n-2k}}{(2k)!(2n-2k)!} = 0 \quad (n = 1, 2, \cdots).$$

那么 Bernoulli 数和 Euler 数有什么关系呢？下面将看到，在引进了广义 Bernoulli - Euler 数以后，可以得出这两个数的统一表达式.

我们知道，在无穷级数的近似计算中，如果已知某些级数的和，就可以用它们来改进另一些与之有关的级数的收敛速度，求得和的近似值. 下面这些公式：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \tag{1}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}, \tag{2}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \tag{3}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^4} = \frac{7\pi^4}{720}, \tag{4}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 - a^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\frac{1}{\pi a} - \cot \pi a \right), \tag{5}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a} \left(\operatorname{cth} \pi a - \frac{1}{\pi a} \right), \tag{6}$$

在实际中是很有用的. 但是，要严格推导这些公式却较困难，一般要运用一些比较高深的方法，譬如运用 Fourier 级数或复变函数的解析理论.

这里，我们用初等方法，推导出了以下的一般结果

$$1 + \left(\frac{-1}{k-1} \right)^p + \left(\frac{1}{k+1} \right)^p + \left(\frac{-1}{2k-1} \right)^p + \left(\frac{1}{2k+1} \right)^p + \left(\frac{-1}{3k-1} \right)^p$$

$$+ \left(\frac{1}{3k+1} \right)^p + \cdots = \left(\frac{\pi}{k} \right)^p z_p(k), \tag{7}$$

其中 $k \geqslant 2$，p 为正整数，而 $z_p(k)$ 由下述递推公式所定义：

$$z_1(k)=\cot\frac{\pi}{k},\ z_2(k)=\cot^2\frac{\pi}{k}+1,$$

$$\begin{aligned}z_{2q+1}(k)=&\cot\frac{\pi}{k}\cdot z_{2q}(k)+\frac{1}{2!}z_{2q-1}(k)-\frac{1}{3!}\cot\frac{\pi}{k}\cdot z_{2q-2}(k)\\&-\frac{1}{4!}z_{2q-3}(k)+\cdots+(-1)^{q-1}\frac{1}{(2q)!}z_1(k)+(-1)^q\frac{1}{(2q)!}\cot\frac{\pi}{k},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}z_{2q+2}(k)=&\cot\frac{\pi}{k}\cdot z_{2q+1}(k)+\frac{1}{2!}z_{2q}(k)-\frac{1}{3!}\cot\frac{\pi}{k}\cdot z_{2q-1}(k)-\frac{1}{4!}z_{2q-2}(k)\\&+\cdots+(-1)^q\frac{1}{(2q+1)!}\cot\frac{\pi}{k}\cdot z_1(k)+(-1)^q\frac{1}{(2q+1)!},\\&q=1,2,3,\cdots.\end{aligned}$$

并称 $z_p(k)$ 为广义 Bernoulli - Euler 数. 尔后，应用式(7)，不仅可以很方便地算出式(1)到式(6)，而且还可得出 Bernoulli 数 B_p 和 Euler 数 E_p 的统一表达式：

$$z_p(4)=\begin{cases}(-1)^{\frac{p}{2}-1}\cdot 2^{2p-1}\cdot(2^p-1)\cdot\dfrac{B_p}{p!}, & p=2,4,6,\cdots,\\[2ex](-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdot 2^{p-1}\cdot\dfrac{E_{p-1}}{(p-1)!}, & p=1,3,5,\cdots.\end{cases}\tag{8}$$

三个引理

引理 1 方程

$$\begin{aligned}&x^{2m}-C_{2m}^1\cot\frac{\pi}{k}\cdot x^{2m-1}-C_{2m}^2x^{2m-2}+C_{2m}^3\cot\frac{\pi}{k}\cdot x^{2m-3}\\&+C_{2m}^4x^{2m-4}-\cdots+(-1)^mC_{2m}^{2m-1}\cot\frac{\pi}{k}\cdot x+(-1)^m=0\end{aligned}\tag{9}$$

的根为

$$x_1=\cot\frac{\pi}{2mk},\qquad x_2=-\cot\frac{(k-1)\pi}{2mk},$$

$$x_3=\cot\frac{(k+1)\pi}{2mk},\qquad x_4=-\cot\frac{(2k-1)\pi}{2mk},\ \cdots,$$

$$x_{2m-1}=\cot\frac{[(m-1)k+1]\pi}{2mk},\qquad x_{2m}=-\cot\frac{(mk-1)\pi}{2mk}.$$

证 由 de Moivre 公式

$$\begin{aligned}\cos 2m\alpha+\mathrm{i}\sin 2m\alpha&=(\cos\alpha+\mathrm{i}\sin\alpha)^{2m}\\&=\cos^{2m}\alpha+\mathrm{i}C_{2m}^1\cos^{2m-1}\alpha\sin\alpha-C_{2m}^2\cos^{2m-2}\alpha\sin^2\alpha\\&\quad-\mathrm{i}C_{2m}^3\cos^{2m-3}\alpha\sin^3\alpha+\cdots\end{aligned}$$

$$+(-1)^{m-1}\mathrm{i}C_{2m}^{2m-1}\cos\alpha\sin^{2m-1}\alpha+(-1)^m\sin^{2m}\alpha$$

和复数相等的定义,得

$$\cos 2m\alpha = \cos^{2m}\alpha - C_{2m}^2\cos^{2m-2}\alpha\sin^2\alpha+\cdots$$
$$+(-1)^m\sin^{2m}\alpha,$$
$$\sin 2m\alpha = C_{2m}^1\cos^{2m-1}\alpha\sin\alpha - C_{2m}^3\cos^{2m-3}\alpha\sin^3\alpha$$
$$+\cdots+(-1)^{m-1}C_{2m}^{2m-1}\cos\alpha\sin^{2m-1}\alpha.$$

两式相除,得

$$\cot 2m\alpha = [\cot^{2m}\alpha - C_{2m}^2\cot^{2m-2}\alpha + C_{2m}^4\cot^{2m-4}\alpha$$
$$-\cdots+(-1)^m]\cdot[C_{2m}^1\cot^{2m-1}\alpha - C_{2m}^3\cot^{2m-3}\alpha$$
$$+C_{2m}^{2m-5}\cot^{2m-5}\alpha-\cdots+(-1)^{m-1}C_{2m}^{2m-1}\cot\alpha]^{-1}.$$

令

$$\alpha_n=\frac{[(n-1)k+1]\pi}{2mk},\quad n=1,2,\cdots,2m$$

并用 $\alpha=\alpha_n$ 代入上式,得

$$\cot\frac{\pi}{k}=[\cot^{2m}\alpha_n - C_{2m}^2\cot^{2m-2}\alpha_n+\cdots+(-1)^m]\cdot$$
$$[C_{2m}^1\cot^{2m-1}\alpha_n - C_{2m}^3\cot^{2m-3}\alpha_n+\cdots+(-1)^{m-1}C_{2m}^{2m-1}\cot\alpha_n]^{-1},$$

即

$$\cot^{2m}\alpha_n - C_{2m}^1\cot\frac{\pi}{k}\cot^{2m-1}\alpha_n - C_{2m}^2\cot^{2m-2}\alpha_n + C_{2m}^3\cot\frac{\pi}{k}\cot^{2m-3}\alpha_n+\cdots$$
$$+(-1)^m C_{2m}^{2m-1}\cot\frac{\pi}{k}\cot\alpha_n+(-1)^m=0.$$

因此方程(9)的根为

$$x_n=\cot\alpha_n,\quad n=1,2,\cdots,2m.$$

考虑到

$$\cot\frac{[(2m-j-1)k+1]\pi}{2mk}=-\cot\frac{[(j+1)k-1]\pi}{2mk},\quad j=0,1,2,\cdots,m-1$$

所以引理 1 成立.

引理 2 设 S_j 是方程(9)所有 j 个不同的根 x_n 相乘积之和,则

$$\sum x_n^p = S_1\sum x_n^{p-1} - S_2\sum x_n^{p-2} + S_3\sum x_n^{p-3}$$
$$-\cdots+(-1)^{p-2}S_{p-1}\sum x_n+(-1)^{p-1}pS_p,$$

其中和号 $\sum$ 是 $\sum\limits_{n=1}^{2m}$ 的简写,以下类同.

证 设 $f(x_1^p x_2\cdots x_l)$ 是关于 $x_1,x_2,\cdots,x_{2m}$ 的齐次对称多项式,则

$$f(x_1^p x_2 \cdots x_l) = \begin{cases} S_l, & p=1, 1 \leqslant l \leqslant 2m, \\ S_l \sum x_n - (l+1) S_{l+1}, & p=2, 1 \leqslant l < 2m, \\ S_l \sum x_n^{p-1} - f(x_1^{p-1} x_2 \cdots x_l x_{l+1}), & l+2 \leqslant l+p-1 \leqslant 2m. \end{cases}$$

当 $p=1$ 和 $p=2$ 时，引理 2 显然成立. 而当 $p \geqslant 3$ 时，因为有

$$S_1 \sum x_n^{p-1} = \sum x_n^p + f(x_1^{p-1} x_2),$$

所以

$$\begin{aligned} \sum x_n^p &= S_1 \sum x_n^{p-1} - f(x_1^{p-1} x_2) \\ &= S_1 \sum x_n^{p-1} - S_2 \sum x_n^{p-2} + f(x_1^{p-2} x_2 x_3) = \cdots \\ &= S_1 \sum x_n^{p-1} - S_2 \sum x_n^{p-2} + S_3 \sum x_n^{p-3} - \cdots \\ &\quad + (-1)^{p-2} S_{p-1} \sum x_n + (-1)^{p-1} p S_p. \end{aligned}$$

由此，引理 2 得证.

引理 3 设 $p \leqslant m$，$z_p(k)$是广义 Bernoulli - Euler 数，则

$$\sum x_n^p = (2m)^p z_p(k) + O(m^{p-1}),$$

其中 x_n 为方程(9)的根，$O(m^{p-1})$为关于 m 的 $p-1$ 次多项式.

证 由 F. Vieta 定理，有

$$S_1 = C_{2m}^1 \cot \frac{\pi}{k} = 2m \cot \frac{\pi}{k},$$

$$S_2 = -C_{2m}^2 = -\frac{(2m)^2}{2!} + O(m),$$

$$\begin{aligned} S_{2q-1} &= (-1)^{q-1} C_{2m}^{2q-1} \cot \frac{\pi}{k} \\ &= (-1)^{q-1} \frac{(2m)^{2q-1}}{(2q-1)!} \cot \frac{\pi}{k} + O(m^{2q-2}), \end{aligned}$$

$$S_{2q} = (-1)^q C_{2m}^{2q} = (-1)^q \frac{(2m)^{2q}}{(2q)!} + O(m^{2q-1}).$$

所以，$\sum x_n$、$\sum x_n^2$ 显然是关于 m 的一次、二次多项式，再由引理 2，可知 $\sum x_n^p$ 是关于 m 的 p 次多项式. 若分别令 $p=2q+1$ 和 $p=2q+2$，即得

$$\begin{aligned} \sum x_n^{2q+1} &= 2m \cot \frac{\pi}{k} \cdot \sum x_n^{2q} + \frac{(2m)^2}{2!} \sum x_n^{2q-1} \\ &\quad - \frac{(2m)^3}{3!} \cot \frac{\pi}{k} \cdot \sum x_n^{2q-2} - \frac{(2m)^4}{4!} \sum x_n^{2q-3} \\ &\quad + \cdots + (-1)^{q-1} \frac{(2m)^{2q}}{(2q)!} \sum x_n \end{aligned}$$

$$+(-1)^q\frac{(2m)^{2q+1}}{(2q)!}\cot\frac{\pi}{k}+O(m^{2q})$$
$$=(2m)^{2q+1}z_{2q+1}(k)+O(m^{2q}).$$

$$\sum x_n^{2q+2}=2m\cot\frac{\pi}{k}\cdot\sum x_n^{2q+1}+\frac{(2m)^2}{2!}\sum x_n^{2q}$$
$$-\frac{(2m)^3}{3!}\cot\frac{\pi}{k}\cdot\sum x_n^{2q-1}-\cdots+(-1)^q\frac{(2m)^{2q+1}}{(2q+1)!}\cot\frac{\pi}{k}\cdot\sum x_n$$
$$+(-1)^q\frac{(2m)^{2q+2}}{(2q+1)!}+O(m^{2q+1})$$
$$=(2m)^{2q+2}z_{2q+2}(k)+O(m^{2q+1}).$$

于是,引理 3 得证.

定　理

定理　设常数 $k\geqslant 2$,p 为正整数,$z_p(k)$是广义 Bernoulli - Euler 数,则有式(7)成立.

证　设 $x_n(n=1,2,\cdots,2m)$是方程(9)的根,由引理 3 可知,当 $p=2q$ 时,有

$$\cot^{2q}\frac{\pi}{2mk}+\cot^{2q}\frac{(k-1)\pi}{2mk}+\cot^{2q}\frac{(k+1)\pi}{2mk}+\cot^{2q}\frac{(2k-1)\pi}{2mk}$$
$$+\cot^{2q}\frac{(2k+1)\pi}{2mk}+\cdots+\cot^{2q}\frac{[(m-1)k+1]\pi}{2mk}+\cot^{2q}\frac{(mk-1)\pi}{2mk}$$
$$=(2m)^{2q}z_{2q}(k)+O(m^{2q-1}).$$

因为,当 $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$时,有

$$\cot\alpha<\frac{1}{\alpha}<\csc\alpha,$$

所以

$$\left[\frac{2mk}{\pi}\right]^{2q}+\left[\frac{2mk}{(k-1)\pi}\right]^{2q}+\left[\frac{2mk}{(k+1)\pi}\right]^{2q}+\cdots+\left[\frac{2mk}{(mk-1)\pi}\right]^{2q}$$
$$>(2m)^{2q}\cdot z_{2q}(k)+O(m^{2q-1}).\tag{10}$$

又因为

$$\cot^{2q}\alpha=\csc^{2q}\alpha-(\mathrm{C}_q^1\cot^{2q-2}\alpha+\mathrm{C}_q^2\cot^{2q-4}\alpha+\cdots+\mathrm{C}_q^{q-1}\cot^2\alpha+1)$$
$$>\frac{1}{\alpha^{2q}}-O\left(\frac{1}{\alpha^{2q-2}}\right),$$

所以

$$\left[\frac{2mk}{\pi}\right]^{2q}+\left[\frac{2mk}{(k-1)\pi}\right]^{2q}+\left[\frac{2mk}{(k+1)\pi}\right]^{2q}+\cdots+\left[\frac{2mk}{(mk-1)\pi}\right]^{2q}$$
$$<(2m)^{2q}z_{2q}(k)+O(m^{2q-1}).\tag{11}$$

由式(10)和式(11),得

$$\left(\frac{\pi}{k}\right)^{2q}z_{2q}(k)+O\left(\frac{1}{m}\right)<1+\frac{1}{(k-1)^{2q}}+\frac{1}{(k+1)^{2q}}$$
$$+\frac{1}{(2k-1)^{2q}}+\cdots+\frac{1}{(mk-1)^{2q}}$$
$$<\left(\frac{\pi}{k}\right)^{2q}z_{2q}(k)+O\left(\frac{1}{m}\right),$$

令 $m\to\infty$,可知 $p=2q$ 时,式(7)成立.

当 $p=2q+1$ 时,有

$$\cot^{2q+1}\frac{\pi}{2mk}-\cot^{2q+1}\frac{(k-1)\pi}{2mk}+\cot^{2q+1}\frac{(k+1)\pi}{2mk}$$
$$-\cot^{2q+1}\frac{(2k-1)\pi}{2mk}+\cdots+\cot^{2q+1}\frac{[(m-1)k+1]\pi}{2mk}$$
$$-\cot^{2q+1}\frac{(mk-1)\pi}{2mk}=(2m)^{2q+1}z_{2q+1}(k)+O(m^{2q}).$$

因此,当 $k=2$ 时,定理显然成立.在以下的证明中,假设 $k>2$.由于

$$\cot\alpha-\cot\beta=\tan(\beta-\alpha)(1+\cot\alpha\cot\beta)$$
$$=\sin(\beta-\alpha)\csc\alpha\csc\beta,$$

所以,当 $0<\alpha<\beta<\frac{\pi}{2}$ 时,有

$$\cot^{2q+1}\alpha-\cot^{2q+1}\beta=\tan(\beta-\alpha)(1+\cot\alpha\cot\beta)\cdot$$
$$(\cot^{2q}\alpha+\cot^{2q-1}\alpha\cot\beta+\cot^{2q-2}\alpha\cot^2\beta+\cdots+\cot^{2q}\beta)$$
$$<\tan(\beta-\alpha)\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)\left(\frac{1}{\alpha^{2q}}+\frac{1}{\alpha^{2q-1}\beta}+\frac{1}{\alpha^{2q-2}\beta^2}+\cdots+\frac{1}{\beta^{2q}}\right).$$

从而可得

$$\tan\frac{(k-2)\pi}{2mk}\cdot\left(\frac{2mk}{\pi}\right)^{2q+2}\left\{\frac{1}{1\cdot(k+1)}\left[1+\frac{1}{k-1}+\cdots+\frac{1}{(k-1)^{2q}}\right]\right.$$
$$+\frac{1}{(k+1)(2k-1)}\left[\frac{1}{(k+1)^{2q}}+\frac{1}{(k+1)^{2q-1}(2k-1)}+\cdots+\frac{1}{(2k-1)^{2q}}\right]$$
$$+\cdots+\frac{1}{[(m-1)k+1](mk-1)}\left[\frac{1}{[(m-1)k+1]^{2q}}\right.$$
$$\left.\left.+\frac{1}{[(m-1)k+1]^{2q-1}(mk-1)}+\cdots+\frac{1}{(mk-1)^{2q}}\right]\right\}$$
$$+\tan\frac{(k-2)\pi}{2mk}\cdot O(m^{2q+1})$$

$$> (2m)^{2q+1} z_{2q+1}(k) + O(m^{2q}). \tag{12}$$

又因为

$$\begin{aligned}
\cot^{2q+1}\alpha - \cot^{2q+1}\beta &= (\cot\alpha - \cot\beta)(\csc^{2q}\alpha + \csc^{2q-1}\alpha\csc\beta + \cdots + \csc^{2q}\beta) \\
&\quad - (\cot\alpha - \cot\beta)[(\csc^{2q}\alpha - \cot^{2q}\alpha) \\
&\quad + (\csc^{2q-2}\alpha\csc^2\beta - \cot^{2q-2}\alpha\cot\beta) + \cdots + (\csc^{2q}\beta - \cot^{2q}\beta)] \\
&\quad - (\cot\alpha - \cot\beta)[\csc\alpha\csc\beta(\csc^{2q-2}\alpha + \csc^{2q-4}\alpha\csc^2\beta \\
&\quad + \cdots + \csc^{2q-2}\beta) - \cot\alpha\cot\beta(\cot^{2q-2}\alpha + \cot^{2q-4}\alpha\cot^2\beta \\
&\quad + \cdots + \cot^{2q-2}\beta)] \\
&= \sin(\beta-\alpha)\csc\alpha\csc\beta(\csc^{2q}\alpha + \csc^{2q-1}\alpha\csc\beta + \cdots + \csc^{2q}\beta) \\
&\quad - \tan(\beta-\alpha)(1+\cot\alpha\cot\beta)\{[(\cot^2\alpha+1)^q - \cot^{2q}\alpha] \\
&\quad + [(\cot^2\alpha+1)^{q-1}(\cot^2\beta+1) - \cot^{2q-2}\alpha\cot^2\beta] + \cdots \\
&\quad + [(\cot^2\beta+1)^q - \cot^{2q}\beta]\} \\
&\quad - \tan(\beta-\alpha)(1+\cot\alpha\cot\beta)\sec(\beta-\alpha)\{[(\cot^2\alpha+1)^{q-1} \\
&\quad + (\cot^2\alpha+1)^{q-2}(\cot^2\beta+1) + \cdots + (\cot^2\beta+1)^{q-1}] \\
&\quad + \cot\alpha\cot\beta[(\cot^2\alpha+1)^{q-1} - \cot^{2q-2}\alpha + (\cot^2\alpha+1)^{q-2}(\cot^2\beta+1) \\
&\quad - \cot^{2q-4}\alpha\cot^2\beta + \cdots + (\cot^2\beta+1)^{q-1} - \cot^{2q-2}\beta]\} \\
&\quad - \tan(\beta-\alpha)(1+\cot\alpha\cot\beta)[\sec(\beta-\alpha)-1]\cot\alpha\cot\beta(\cot^{2q-2}\alpha \\
&\quad + \cot^{2q-4}\alpha\cot^2\beta + \cdots + \cot^{2q-2}\beta) \\
&> \sin(\beta-\alpha)\cdot\frac{1}{\alpha\beta}\left(\frac{1}{\alpha^{2q}} + \frac{1}{\alpha^{2q-1}\beta} + \cdots + \frac{1}{\beta^{2q}}\right) \\
&\quad - \tan(\beta-\alpha)\cdot\left(1+\frac{1}{\alpha\beta}\right)\left\{[\sec(\beta-\alpha)+1]\cdot O\left(\frac{1}{\alpha^{2q-2}}\right)\right. \\
&\quad \left. + [\sec(\beta-\alpha)-1]\cdot O\left(\frac{1}{\alpha^{2q}}\right)\right\},
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\sin\frac{(k-2)\pi}{2mk}\cdot\left(\frac{2mk}{\pi}\right)^{2q+2}\left\{\frac{1}{1\cdot(k-1)}\left[1+\frac{1}{k-1}+\cdots+\frac{1}{(k-1)^{2q}}\right]\right. \\
&\quad + \frac{1}{(k+1)(2k-1)}\left[\frac{1}{(k+1)^{2q}} + \frac{1}{(k+1)^{2q-1}(2k-1)} + \cdots + \frac{1}{(2k-1)^{2q}}\right] \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{[(m-1)k+1](mk-1)}\left[\frac{1}{[(m-1)k+1]^{2q}}\right. \\
&\quad \left.\left. + \frac{1}{[(m-1)k+1]^{2q-1}(mk-1)} + \cdots + \frac{1}{(mk-1)^{2q}}\right]\right\} \\
&\quad - \tan\frac{(k-2)\pi}{2mk}\cdot O(m^{2q+1})
\end{aligned}$$

$$
-\tan\frac{(k-2)\pi}{2mk}\left[\sec\frac{(k-2)\pi}{2mk}-1\right]\cdot O(m^{2q+3})
$$

$$
<(2m)^{2q+1}z_{2q+1}(k)+O(m^{2q}). \tag{13}
$$

考虑到

$$
\frac{1}{[(j-1)k+1](jk-1)}=\frac{1}{k-2}\left[\frac{1}{(j-1)k+1}-\frac{1}{jk-1}\right],\ j=1,2,\cdots,m.
$$

故由式(12)和式(13),便得

$$
\left(\frac{\pi}{k}\right)^{2q+1}z_{2q+1}(k)\cdot\frac{\frac{(k-2)\pi}{2mk}}{\tan\frac{(k-2)\pi}{2mk}}+\frac{O\left(\frac{1}{m^2}\right)}{\tan\frac{(k-2)\pi}{2mk}}-O\left(\frac{1}{m}\right)
$$

$$
<1-\frac{1}{(k-1)^{2q+1}}+\frac{1}{(k+1)^{2q+1}}-\frac{1}{(2k-1)^{2q+1}}+\cdots-\frac{1}{(mk-1)^{2q+1}}
$$

$$
<\left(\frac{\pi}{k}\right)^{2q+1}z_{2q+1}(k)\cdot\frac{\frac{(k-2)\pi}{2mk}}{\sin\frac{(k-2)\pi}{2mk}}+\frac{O\left(\frac{1}{m^2}\right)}{\sin\frac{(k-2)\pi}{2mk}}
$$

$$
+\frac{\tan\frac{(k-2)\pi}{2mk}}{\sin\frac{(k-2)\pi}{2mk}}\left[O\left(\frac{1}{m}\right)+\frac{1-\cos\frac{(k-2)\pi}{2mk}}{\cos\frac{(k-2)\pi}{2mk}}\cdot O(m)\right].
$$

令 $m\to\infty$,可知 $p=2q+1$ 时,式(7)也成立.

综上,定理得证.

应　用

作为定理的应用,由式(7)可以得出以下重要且有趣的结果.

1. 在式(7)中,若令 $k=4,p=1$,便得到 Leibniz 级数

$$
1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots=\frac{\pi}{4}.
$$

2. 在式(7)中,若令 $k=4,p=2$,则有

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}=\frac{\pi^2}{8},
$$

从而可得式(1)和式(2);若令 $k=4,p=4$,则有

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^4}=\frac{\pi^4}{96},
$$

由此可得式(3)和式(4).

3. 在(7)中,若令 $k=4,p=2q$,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^{2q}}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2q}z_{2q}(4),$$

于是有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2q}}=\frac{\pi^{2q}}{2^{2q}(2^{2q}-1)}z_{2q}.$$

但是,我们知道

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2q}}=(-1)^{q-1}\frac{(2\pi)^{2q}}{2(2q)!}B_{2q},$$

其中 B_{2q} 为 Bernoulli 数,所以

$$z_{2q}(4)=(-1)^{q-1}\frac{2^{4q-1}(2^{2q}-1)}{(2q)!}B_{2q}. \tag{14}$$

若令 $k=4,p=2q+1$,则有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2q+1}}=\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2q+1}z_{2q+1}(4),$$

因为

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^{2q+1}}=(-1)^{q}\frac{\pi^{2q+1}}{2^{2q+2}(2q)!}E_{2q},$$

其中 E_{2q} 为 Euler 数,所以

$$E_{2q+1}(4)=(-1)^{q}\frac{2^{2q}}{(2q)!}E_{2q}. \tag{15}$$

这样,由(14)和(15),即可得出 Bernoulli 数 B_p 和 Euler 数 E_p 的统一表达式(8).

4. 如果把式(7)推广到复变量的情况,令 $p=1,\frac{\pi}{k}=z$,则当 $k\to\infty$ 时,$z=0$ 是一个极限点,由复变函数惟一性定理,可以得出半纯函数 $\cot z$ 的简单分式

$$\cot z=\frac{1}{z}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2z}{z^2-n^2\pi^2}. \tag{16}$$

但通常在复变函数中,将 $\cot z$ 展为简单分式的方法很麻烦. 再利用式(7),进而可得出 $\cot z$ 的任意正整数次幂的简单分式. 需要指出的是,在式(16)中,分别令 $z=\pi a$ 和 $z=i\pi a$,就可得出式(5)和式(6).

D. Hilbert 说:"只要一门科学分支能提出大量的问题,它就充满着生命力;而问题缺乏,则预示着独立发展的衰亡或终止. 正如人类的每项事业都追求着确定的目标一样,数学研究也需要自己的问题. 正是通过这些问题的解决,研究者锻炼其钢铁般的意志和力量,发现新方法和观点,达到更为广阔和自由的世界."

11. 调和级数的收敛子级数的和

这里所说的调和级数的收敛子级数，是指从调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 中去掉分母含有 0,1,2,…,9 中一个或几个数字的所有项而得到的级数. 我们分别用 $S^{(p)}(p=0,1,2,\cdots,9)$、$S^{*}$ 及 $S^{(e)}$ 表示分母中不含有数字 p、奇数数字及偶数数字的调和级数的子级数.

关于这些级数的收敛问题，特别是其和的估计，是很有趣的. 因此曾有很多人研究过，其经历是漫长的、曲折的. Kempner, A. J. 在 1914 年证明了 $S^{(9)}$ 是收敛的，其和小于 90，但是对于分母小于 10^n 的项数有多少，"不能确切指出". 后来，Pólya, G. 和 Szegö, G. 改进这个估计为 $S^{(9)}<80$，而且解决了上面"不能确切指出"的问题，但欠通俗. Boas, R. P 在 20 世纪 70 年代得出 $S^{(0)}\approx 23.103\,45$，精确到小数点后第五位数，但迄今我们尚未看到他的具体算法. 关于 $S^{(0)}$ 的估计，曾出现了一点反复. 1976 年，Honsberger, R. 曾指出 $S^{(e)}<7$，并且关于调和级数的子级数仍有很多问题待考虑，例如 S^{*} 就是一例.

下面，我们将借助于对正整数的代数表示，用具有一般性的方法，构造性地估计 $S^{(p)}(p=0,1,2,\cdots,9)$、$S^{*}$ 及 $S^{(e)}$ 的范围，从而证明其收敛性，同时还可容易地算出这些级数分母小于 10^n 的项数. 最后，给出求这些级数之和的近似值的有效方法. 由此，可以得到以下结果：

$$1.962\,608\,412<S^{*}<1.962\,608\,414,$$

$$3.171\,765\,473\,3<S^{(e)}<3.171\,765\,473\,5,$$

$$22.920\,635<S^{(9)}<22.920\,679,$$

$$23.103\,447\,4<S^{(0)}<23.103\,447\,9.$$

引 理

引理 1 若正整数 A 中不含有数字 $p(p=0,1,2,\cdots,9)$，且 $10^k\leqslant A<10^{k+1}(k=1,2,\cdots)$，则存在惟一一组整数 $l_0,l_1,\cdots,l_k$，使得

$$A = 10^k l_0 + 10^{k-1} l_1 + \cdots + 10 l_{k-1} + l_k,$$

其中 $1 \leqslant l_0 \leqslant 9$ 且 $l_0 \neq p$, $0 \leqslant l_i \leqslant 9$ 且 $l_i \neq p$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

推论 从 10^k 到 $10^{k+1}-1$,不含有数字 $p(p=1,2,\cdots,9)$ 的正整数有 8×9^k 个;如果 $p=0$,这样的数有 9^{k+1} 个.

引理 2 若 A 为正整数,且

$$\underbrace{8\cdots 89}_{k\text{位}} \leqslant A \leqslant \underbrace{8\cdots 8}_{k+1\text{位}},$$

则存在惟一一组整数 $l_0, l_1, \cdots, l_k$,使得

$$A = 10^k l_0 + 10^{k-1} l_1 + \cdots + 10 l_{k-1} + l_k,$$

其中 $1 \leqslant l_0 \leqslant 8$, $-1 \leqslant l_i \leqslant 8$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

引理 3 若 A 为正整数,且

$$10^k \leqslant A \leqslant \underbrace{89\cdots 9}_{k+1\text{位}},$$

则存在惟一一组整数 $l_0, l_1, \cdots, l_k$,使得

$$A = 10^k l_0 + 10^{k-1} l_1 + \cdots + 10 l_{k-1} + l_k,$$

其中 $1 \leqslant l_0 \leqslant 8$, $0 \leqslant l_i \leqslant 9$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

引理 4 设 $x > 0$,则

$$\frac{1}{x+1} < \ln \frac{x+1}{x} < \frac{1}{x}.$$

引理 5 若正整数 A 中不含有奇数数字,且

$$10^k < A < 10^{k+1}, \ (k = 1, 2, \cdots)$$

则存在惟一一组整数 $l_0, l_1, \cdots, l_k$,使得

$$A = 2(10^k l_0 + 10^{k-1} l_1 + \cdots + 10 l_{k-1} + l_k),$$

其中 $1 \leqslant l_0 \leqslant 4$, $0 \leqslant l_i \leqslant 4$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

推论 从 10^k 到 10^{k+1} 不含有奇数数字的正整数有 4×5^k 个.

引理 6 若 A 为正整数,且

$$\underbrace{4\cdots 45}_{k\text{位}} \leqslant A \leqslant \underbrace{4\cdots 4}_{k+1\text{位}},$$

则存在惟一一组整数 $l_0, l_1, \cdots, l_k$,使得

$$A = 10^k l_0 + 10^{k-1} l_1 + \cdots + 10 l_{k-1} + l_k,$$

其中 $1 \leqslant l_0 \leqslant 4$, $-5 \leqslant l_i \leqslant 4$, $i = 1, 2, \cdots, k$.

引理 7 若 A 为正整数,且

$$10^k \leqslant A \leqslant \underbrace{49\cdots 9}_{k+1\text{位}},$$

则存在惟一一组整数 $l_0, l_1, \cdots, l_k$,使得

$$A = 10^k l_0 + 10^{k-1} l_1 + \cdots + 10 l_{k-1} + l_k,$$

其中 $1\leqslant l_0\leqslant 4, 0\leqslant l_i\leqslant 9, i=1,2,\cdots,k$.

引理 8 若 $na_{n+1}\geqslant a_1+a_2+\cdots+a_n$，则

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n+a_{n+1}}{n+1}\geqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n},$$

且同时改变不等号的方向，命题亦真.

引理 9 设 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 为任意正数，则其调和平均数不超过算术平均数，即

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}}\leqslant\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}.$$

以上所列各个命题的正确性，是不难证明的，或是大家所熟知的，将在后面要用到.

和的范围估计

定理 1 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}+9\ln 9<S^{(9)}<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}+9\ln 11.$

证 令

$$S_0^{(9)}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8},$$

$$S_1^{(9)}=\sum_{l_0=1}^{8}\sum_{l_1=0}^{8}\frac{1}{10l_0+l_1},$$

$$S_k^{(9)}=\sum_{l_0=1}^{8}\sum_{l_1=0}^{8}\cdots\sum_{l_k=0}^{8}\frac{1}{10^k l_0+10^{k-1}l_1+\cdots+10l_{k-1}+l_k},\quad k=2,3,\cdots.$$

则由引理 1 可知

$$S^{(9)}=\sum_{k=0}^{8}S_k^{(9)},$$

而且，由引理 1 的推论可知 $S^{(9)}$ 中分母小于 10^n 的项数为

$$8+8\times 9+8\times 9^2+\cdots+8\times 9^{n-1}=9^n-1.$$

再令

$$\sum\nolimits_k^{(9)}=\sum_{l_0=1}^{8}\sum_{l_1=-1}^{8}\cdots\sum_{l_k=-1}^{8}\frac{1}{10^k l_0+10^{k-1}l_1+\cdots+10l_{k-1}+l_k}$$

$$=\sum_{\underbrace{8\cdots 89}_{k\text{位}}\leqslant n\leqslant\underbrace{8\cdots 8}_{k+1\text{位}}}\frac{1}{n},\quad(\text{引理 }2)$$

$$\sum\nolimits_k^{(9)'} = \sum_{l_0=1}^{8}\sum_{l_1=0}^{9}\cdots\sum_{l_k=0}^{9}\frac{1}{10^k l_0 + 10^{k-1} l_1 + \cdots + 10 l_{k-1} + l_k}$$
$$= \sum_{10^k \leqslant n \leqslant \underbrace{89\cdots9}_{k+1\text{位}}} \frac{1}{n}, \quad (\text{引理 } 3)$$

其中,$k=1,2,\cdots$. 利用引理 4,得

$$\sum\nolimits_k^{(9)} < \ln\frac{\overbrace{8\cdots89}^{k\text{位}}}{8\cdots89-1}\cdot\frac{8\cdots89+1}{8\cdots89}\cdot\frac{8\cdots89+2}{8\cdots89+1}\cdots\frac{\overbrace{8\cdots8}^{k+1\text{位}}}{8\cdots8-1}$$
$$= \ln\frac{\overbrace{1\cdots11}^{k+1\text{位}}}{\underbrace{1\cdots1}_{k\text{位}}} \leqslant \ln 11,$$
$$\sum\nolimits_k^{(9)'} > \ln\frac{10^k+1}{10^k}\cdot\frac{10^k+2}{10^k+1}\cdots\frac{9\times10^k}{9\times10^k-1} = \ln 9.$$

反复应用引理 8,得

$$S_k^{(9)} = \sum_{l_k=0}^{8}\left(\sum_{l_0=1}^{8}\sum_{l_1=0}^{8}\cdots\sum_{l_{k-1}=0}^{8}\frac{1}{10^k l_0 + 10^{k-1} l_1 + \cdots + 10 l_{k-1} + l_k}\right)$$
$$< \frac{9}{10}\sum_{l_k=-1}^{8}\left(\sum_{l_0=1}^{8}\sum_{l_1=0}^{8}\cdots\sum_{l_{k-1}-0}^{8}\frac{1}{10^k l_0 + \cdots + l_k}\right)$$
$$= \frac{9}{10}\sum_{l_{k-1}=0}^{8}\left(\sum_{l_0=1}^{8}\sum_{l_1=0}^{8}\cdots\sum_{l_{k-2}=0}^{8}\sum_{l_k=-1}^{8}\frac{1}{10^k l_0 + \cdots + l_k}\right)$$
$$< \left(\frac{9}{10}\right)^2\sum_{l_0=1}^{8}\sum_{l_1=0}^{8}\cdots\sum_{l_{k-2}=0}^{8}\sum_{l_{k-1}=-1}^{8}\sum_{l_k=-1}^{8}\frac{1}{10^k l_0 + \cdots + l_k}$$
$$< \cdots\cdots \qquad (\text{由归纳法易证})$$
$$< \left(\frac{9}{10}\right)^k\sum_{l_0=1}^{8}\sum_{l_1=-1}^{8}\cdots\sum_{l_k=-1}^{8}\frac{1}{10^k l_0 + \cdots + l_k}$$
$$= \left(\frac{9}{10}\right)^k\sum\nolimits_k^{(9)}, \quad (k=1,2,\cdots).$$

同理还有

$$S_k^{(9)} > \left(\frac{9}{10}\right)^k\sum\nolimits_k^{(9)'}, \quad (k=1,2,\cdots).$$

因而可得

$$S_0^{(9)} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\}\ln 9 < S^{(9)} < S_0^{(9)} + \left\{\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k\right\}\ln 11,$$

即

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}+9\ln 9 < S^{(9)} < 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{8}+9\ln 11.$$

定理 1 证毕.

由此,级数 $S^{(9)}$ 收敛. 计算定理 1 的近似值,便得

$$22.4928 < S^{(9)} < 24.2989.$$

若令

$$S_k^{(p)} = \sum_{\substack{l_0=1\\ l_0\neq p}}^{9} \sum_{\substack{l_1=0\\ l_1\neq p}}^{9} \cdots \sum_{\substack{l_k=0\\ l_k\neq p}}^{9} \frac{1}{10^k l_0 + 10^{k-1} l_1 + \cdots + 10 l_{k-1} + l_k},\ (k = 0,1,2,\cdots),$$

其中 p 为 $0,1,2,\cdots,8$ 中的任意一个数字,则由引理 1 可知

$$S^{(p)} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k^{(p)}.$$

用定理 1 的方法,亦可估计 $S^{(p)}$ 的范围.

根据引理 1 的推论可知,在分母小于

$$\underbrace{1\cdots1}_{k+1\text{位}} = \frac{1}{9}(10^{k+1} - 1),\ (k \geqslant 1)$$

之前,$S^{(0)}$ 的部分和为 $\sum\limits_{i=0}^{k-1} S_i^{(0)}$,含有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 中的

$$9 + 9^2 + \cdots + 9^k = \frac{9}{8}(9^k - 1)$$

项;而 $S^{(9)}$ 的部分和是

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{k-1} S_i^{(9)} + \sum_{l_2=0}^{8} \cdots \sum_{l_k=0}^{8} \frac{1}{10^k + 10^{k-2} l_2 + \cdots + l_k} \\
&+ \sum_{l_3=0}^{8} \cdots \sum_{l_k=0}^{8} \frac{1}{10^k + 10^{k-1} + 10^{k-3} l_3 + \cdots + l_k} \\
&+ \cdots + \sum_{l_k=0}^{8} \frac{1}{10^k + 10^{k-1} + \cdots + 10^2 + l_k} + \frac{1}{\underbrace{1\cdots10}_{k+1\text{位}}},
\end{aligned}$$

含有调和级数中的

$$\begin{aligned}
&(8 + 8\times 9 + 8\times 9^2 + \cdots + 8\times 9^{k-1}) + (1 + 9 + 9^2 + \cdots + 9^{k-1}) \\
&= (9^k - 1) + \frac{9^k - 1}{8} = \frac{9}{8}(9^k - 1)
\end{aligned}$$

项,即二者项数相同. 因为在调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n}$ 中,每当分母中出现一含数字 9 的项,接着分母就出现一个含数字 0 的项,而且当分母连续出现几个含有数字 9 的项,接着分母就连续出现同样个数含有数字 0 的项,其规律完全相同. 所以,$S^{(9)}$ 与 $S^{(0)}$ 的差别就在于 $S^{(9)}$ 中不含有带数字 9 但含有带数字 0 的项,而 $S^{(0)}$ 恰好与之相反. 因此有

$$S^{(9)} < S^{(0)}$$

同理可以说明关系

$$S^{(1)} < S^{(2)} < \cdots < S^{(9)}.$$

定理 2 $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln 5<S^{*}<\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln 11.$

证 令

$$S_0^{*} = \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8},$$

$$S_1^{*} = \frac{1}{2}\sum_{l_0=1}^{4}\sum_{l_1=0}^{4}\frac{1}{10l_0+l_1},$$

$$S_k^{*} = \frac{1}{2}\sum_{l_0=1}^{4}\sum_{l_1=0}^{4}\cdots\sum_{l_k=0}^{4}\frac{1}{10^k l_0+10^{k-1}l_1+\cdots+10l_{k-1}+l_k},\ (k=2,3,\cdots),$$

则由引理 5 可知

$$S^{*} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k^{*},$$

且由引理 5 的推论可得 S^{*} 中分母小于 10^n 的项数是

$$4+4\times5+4\times5^2+\cdots+4\times5^{n-1}=5^n-1.$$

再令

$$\sum\nolimits_k^{*} = \frac{1}{2}\sum_{l_0=1}^{4}\sum_{l_1=-5}^{4}\cdots\sum_{l_k=-5}^{4}\frac{1}{10^k l_0+10^{k-1}l_1+\cdots+10l_{k-1}+l_k}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{\underbrace{4\cdots45}_{k位}\leqslant n\leqslant\underbrace{4\cdots4}_{k+1位}}\frac{1}{n}, \qquad (引理 6)$$

$$\sum\nolimits_k^{*'} = \frac{1}{2}\sum_{l_0=1}^{4}\sum_{l_1=0}^{9}\cdots\sum_{l_k=0}^{9}\frac{1}{10^k l_0+10^{k-1}l_1+\cdots+10l_{k-1}+l_k}$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{10^k\leqslant n\leqslant\underbrace{49\cdots9}_{k+1位}}\frac{1}{n}, \qquad (引理 7)$$

其中,$k=1,2,\cdots$. 利用引理 4,得

$$\sum\nolimits_k^{*} < \frac{1}{2}\ln\frac{\overbrace{4\cdots45}^{k位}}{4\cdots45-1}\cdot\frac{4\cdots45+1}{4\cdots45}\cdot\cdots\cdot\frac{\overbrace{4\cdots4}^{k+1位}}{4\cdots4-1}$$

$$= \frac{1}{2}\ln\frac{\overbrace{1\cdots1}^{k+1位}}{\underbrace{1\cdots1}_{k位}} \leqslant \frac{1}{2}\ln 11,$$

$$\sum\nolimits_k^{*'} > \frac{1}{2}\ln\frac{10^k+1}{10^k}\cdot\frac{10^k+2}{10^k+1}\cdot\cdots\cdot\frac{49\cdots9+1}{\underbrace{49\cdots9}_{k+1位}}$$

$$= \frac{1}{2}\ln 5, \quad (k = 1,2,\cdots),$$

反复应用引理 8,得

$$S_k^* < \frac{1}{2}\left(\frac{5}{10}\right)^k \sum_{l_0=1}^{4}\sum_{l_1=-5}^{4}\cdots\sum_{l_k=-5}^{4} \frac{1}{10^k l_0 + 10^{k-1} l_1 + \cdots + 10 l_{k-1} + l_k}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^k \sum\nolimits_k^*, \quad (k = 1,2,\cdots).$$

同理还有

$$S_k^* > \left(\frac{1}{2}\right)^k \sum\nolimits_k^{*'}, \quad (k = 1,2,\cdots).$$

综上可得

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln 5 < S^* < \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{2}\ln 11.$$

定理 2 证毕.

计算定理 2 的近似值,有

$$1.846 < S^* < 2.241.$$

定理 3 $\frac{3}{2}\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right) < S^{(e)} < 2\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9}\right).$

证 令

$$S_0^{(e)} = 1\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{9},$$

$$S_1^{(e)} = \sum_{l_0=0}^{4}\sum_{l_1=0}^{4} \frac{1}{10(2l_0+1)+(2l_1+1)},$$

$$S_k^{(e)} = \sum_{l_0=0}^{4}\sum_{l_1=0}^{4}\cdots\sum_{l_k=0}^{4} \frac{1}{10^k(2l_0+1)+10^{k-1}(2l_1+1)+\cdots+(2l_k+1)},$$

其中 $k=2,3,\cdots$. 则不难知道

$$S^{(e)} = \sum_{k=0}^{\infty} S_k^{(e)}.$$

而 $S^{(e)}$ 中分母小于 10^n 的项数有 $\frac{5}{4}(5^n-1)$ 个.

考虑到 $S_{k+1}^{(e)}$ 段含有的项数是 $S_k^{(e)}$ $(k=0,1,2,\cdots)$ 段含有的项数的五倍,所以可将前者的每五项与后者的一项相对应,即使得

$$\sum_{l_{k+1}=0}^{4} \frac{1}{10^{k+1}(2l_0+1)+10^k(2l_1+1)+\cdots+10(2l_k+1)+(2l_{k+1}+1)}$$

与

$$\frac{1}{10^k(2l_0+1)+10^{k-1}(2l_1+1)+\cdots+(2l_k+1)}$$

对应起来,可得出级数$\sum\limits_{k=0}^{\infty} S_k^{(e)}$ 相邻两项之间的关系. 事实上,由于

$$\frac{1}{10^k(2l_0+1)+10^{k-1}(2l_1+1)+\cdots+(2l_k+1)}\cdot\frac{5}{10}$$

$$>\sum_{l_{k+1}=0}^{4}\frac{1}{10^{k+1}(2l_0+1)+10^k(2l_1+1)+\cdots+10(2l_k+1)+(2l_{k+1}+1)}$$

$$>\frac{5}{10^{k+1}(2l_0+1)+10^k(2l_1+1)+\cdots+10(2l_k+1)+5} \qquad \text{(引理 9)}$$

$$=\frac{5}{10^{k+1}(2l_0+1)+\cdots+10(2l_k+1)}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{5}{10^{k+1}(2l_0+1)+\cdots+10(2l_k+1)}}$$

$$\geqslant\frac{1}{10^k(2l_0+1)+\cdots+(2l_k+1)}\cdot\frac{5}{10}\cdot\frac{1}{1+\dfrac{5}{\underbrace{1\cdots10}_{k+2\text{位}}}}$$

$$=\frac{\overbrace{1\cdots1}^{k+1\text{位}}}{\underbrace{2\cdots23}_{k+1\text{位}}}\cdot\frac{1}{10^k(2l_0+1)+\cdots+(2l_k+1)},$$

所以,分别对 $l_0,l_1,\cdots,l_k$ 从 0 到 4 求和,即可得

$$\frac{\overbrace{1\cdots1}^{k+1\text{位}}}{\underbrace{2\cdots23}_{k+1\text{位}}}S_k^{(e)}<S_{k+1}^{(e)}<\frac{1}{2}S_k^{(e)},\quad (k=0,1,2,\cdots).$$

当取 $k=0$ 时,可以推知

$$\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}S_0^{(e)}<S^{(e)}<\left\{\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k\right\}S_0^{(e)},$$

即

$$\frac{3}{2}S_0^{(e)}<S^{(e)}<2S_0^{(e)}.$$

定理 3 证毕.

计算近似值,有

$$2.680<S^{(e)}<3.575.$$

和的近似值

前面已经给出了 $S^{(p)}$、S^* 及 $S^{(e)}$ 等范围的粗略估计. 但是,由于这些级数收敛得非常缓慢,所以有必要讨论它们的和的近似值. 而这只要注意到定理 1、定理 2

和定理 3 证明方法的实质，就可以得出求这些级数和的近似值的方法.

1. 定理 1 是从 $S_1^{(9)}$ 段开始，应用估计式

$$\left(\frac{9}{10}\right)^k \sum\nolimits_k^{(9)'} < S_k^{(9)} < \left(\frac{9}{10}\right)^k \sum\nolimits_k^{(9)}, \quad k=1,2,\cdots,$$

而得到的. 如果从 $S_k^{(9)}$ ($k\geqslant 2$) 段开始用该估计式，则

$$\sum_{i=0}^{k-1} S_i^{(9)} + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\ln 9 < S^{(9)} < \sum_{i=0}^{k-1} S_i^{(9)} + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{k}\ln\frac{10^{k+1}-1}{10^k-1}.$$

当取

$$S^{(9)} \approx \sum_{i=0}^{k-1} S_i^{(9)} + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\ln 9.6$$

时，其误差小于 $9\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\ln\frac{9.6}{9}$. 由于当 $k\to\infty$ 时，该误差趋向于零，所以只要 k 取足够大，就可以小于任意给定的精确度.

若将这个方法，用于求 $S^{(p)}$、S^* 及 $S^{(e)}$，则不难证明

$$\sum_{i=0}^{k-1} S_i^{(0)} + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\ln\frac{\overbrace{101\cdots1}^{k+2位}}{\underbrace{1\cdots1}_{k+1位}} < S^{(0)} < \sum_{i=0}^{k-1} S_i^{(0)} + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\ln\frac{10^{k+1}-1}{10^k-1},$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} S_i^{(1)} + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\ln\frac{\overbrace{101\cdots1}^{k+2位}}{\underbrace{21\cdots1}_{k+1位}} < S^{(1)} < \sum_{i=0}^{k-1} S_i^{(1)} + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\ln\frac{10^{k+1}-1}{2\times 10^k-1},$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} S_i^{(p)} + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\ln\frac{\overbrace{101\cdots1}^{k+2位}}{\underbrace{21\cdots1}_{k+1位}} < S^{(p)}$$

$$< \sum_{i=0}^{k-1} S_i^{(p)} + 9\left(\frac{9}{10}\right)^{k-1}\ln\frac{10^{k+1}-1}{10^k-1}, \quad (p=2,3,\cdots,8),$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} S_i^{*} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\ln 5 < S^{*} < \sum_{i=0}^{k-1} S_i^{*} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\ln\frac{10^{k+1}-1}{10^k-1},$$

$$\sum_{i=0}^{k-1} S_i^{(e)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k}\ln\frac{10^{k+2}-1}{10^{k+1}-1} < S^{(e)} < \sum_{i=0}^{k-1} S_i^{(e)} + \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\left[1+\frac{1}{2}\ln(10^{k+1}-1)\right].$$

特别是，由于

$$S^{(1)} > S_0^{(1)} + 9\ln\frac{101}{21} > 15.964,$$

$$S^{(0)} < S_0^{(0)} + 9\ln 11 < 24.411,$$

所以有

$$15.964 < S^{(p)} < 24.411,$$

其中 $p=0,1,2,\cdots,9$.

2. 鉴于定理 3 的证明方法纯粹是利用其内在联系，即对级数 $\sum\limits_{k=0}^{\infty} S_k^{(e)}$ 相邻两项的关系式

$$\frac{\overbrace{1\cdots1}^{k+1\text{位}}}{\underbrace{2\cdots23}_{k+1\text{位}}} S_k^{(e)} < S_{k+1}^{(e)} < \frac{1}{2} S_k^{(e)}, \quad k=0,1,2,\cdots.$$

从 $S_1^{(e)}$ 段开始进行估计而得到的. 那么我们可以给出另一个既简便、又精确的求和的近似值的方法. 事实上，如果对 $S_k^{(e)}(k\geqslant 2)$ 段以后用关系式，则

$$\sum_{i=0}^{k} S_i^{(e)} + \frac{\overbrace{1\cdots1}^{k+1\text{位}}}{\underbrace{1\cdots12}_{k+1\text{位}}} S_k^{(e)} < S^{(e)} < \sum_{i=0}^{k} S_i^{(e)} + S_k^{(e)}.$$

当取

$$S^{(e)} \approx \sum_{i=0}^{k} S_i^{(e)} + S_k^{(e)}$$

时，其误差小于 $\dfrac{1}{\underbrace{1\cdots12}_{k+1\text{位}}} S_k^{(e)}$. 由于当 $k\to\infty$ 时，$S_k^{(e)}\to 0$，所以只要 k 取足够大，该误差就可达到任意给定的精确度.

若将此法用于求 S^* 及 $S^{(p)}$，则有

$$\sum_{i=0}^{k} S_i^* + \frac{5\cdot 10^k}{5\cdot 10^k+2} S_k^* < S^* < \sum_{i=0}^{k} S_i^* + S_k^*,$$

$$\sum_{i=0}^{k} S_i^{(p)} + \frac{9^2\cdot 10^k}{9\cdot 10^k+45-p} S_k^{(p)} < S^{(p)}$$

$$< \sum_{i=0}^{k} S_i^{(p)} + 9S_k^{(p)}, \quad (p=0,1,2,\cdots,9).$$

3. 现用 2 给出的求级数和的近似值的方法，求得 $S^*, S^{(e)}, S^{(9)}, S^{(0)}$ 的近似值如下. 由公式

$$\sum_{k=0}^{7} S_k^* + \frac{10^8}{10^8+4} S_7^* < S^* < \sum_{k=0}^{7} S_k^* + S_7^*,$$

可得

$$1.962\,608\,412 < S^* < 1.962\,608\,414.$$

由

$$\sum_{k=0}^{8} S_k^{(e)} + \frac{111,111,111}{111,111,112} S_8^{(e)} < S^{(e)} < \sum_{k=0}^{8} S_k^{(e)} + S_8^{(e)},$$

得

$$3.1717654733<S^{(e)}<3.1717654735.$$

由

$$\sum_{k=0}^{6}S_k^{(9)}+\frac{9\cdot 10^6}{10^6+4}S_6^{(9)}<S^{(9)}<\sum_{k=0}^{6}S_k^{(9)}+9S_6^{(9)},$$

得

$$22.920635<S^{(9)}<22.920679.$$

由

$$\sum_{k=0}^{8}S_k^{(0)}+\frac{9\cdot 10^8}{10^8+5}S_8^{(0)}<S^{(0)}<\sum_{k=0}^{8}S_k^{(0)}+9S_8^{(0)},$$

得

$$23.1034474<S^{(0)}<23.1034479.$$

最后,应当指出,这里所给出的求和的近似值的方法,具有一般性,是切实可行的,还可以用它求从调和级数中去掉分母含有任何几个数字的所有项而得到的级数之和的近似值,此处不再赘述.

据说有这样一个故事,当有人问 Newton 怎样获得伟大的发现时,他回答说:"经常想着它们."这是个好主意,你有问题没解决吗? 经常想着它们,做一个有心人.

12. Riccati 方程的通解

在理论和实践中，非线性微分方程有着极其广泛的应用，而且越来越受到人们的关注. 但是，求解非线性微分方程却往往是很困难的.

众所周知，Riccati 方程

$$y' = p(x)y^2 + q(x)y + r(x), \tag{1}$$

在微分方程理论与应用中占有重要位置. 1841 年，Liouville 证明了方程(1)除了某些特殊情形以外，对一般的函数 p、q、r 而言，其通解不可能用初等函数或初等函数的积分来表示. 如果当 $a<x<b$ 时，函数 q 连续，而 p 可微，那么，方程(1)定义在区间 $\alpha<x<\beta(a\leqslant\alpha<\beta\leqslant b)$ 内的每一个解 y，经过变换

$$u(x) = \exp(-\int py\,\mathrm{d}x),$$

可化为下列线性微分方程

$$pu'' - (p' + pq)u' + p^2ru = 0;$$

反之，如果 $p\neq0$，那么，这个线性微分方程的每一个非零解 u，经过变换

$$y(x) = -\frac{u'}{up(x)}$$

则化为方程(1). 于是，由这个线性方程的每个非零解，就可求得非线性方程(1)的一个解.

假定 p、q、r 均为 $x\in(a,b)(a\geqslant-\infty,b\leqslant+\infty)$ 的连续函数，用线性化的方法，把求解一般的 Riccati 方程问题，完全转化成为求解相应的线性微分方程组的问题，而这个方程组的解，容易用计算机求得.

首先，线性微分方程组 Cauchy 问题

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\lambda & r\\ -p & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}\varphi_1(x_0)\\ \varphi_2(x_0)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix},\end{cases} \tag{2}$$

其中 λ、α、β 为任意常数，p、r 均为 $x\in(a,b)$ 的连续函数，x_0 为(a,b)内一点，则存在惟一解 $\begin{pmatrix}\varphi_1(x)\\ \varphi_2(x)\end{pmatrix}(a<x<b)$，而且当 $\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$ 时，有 $\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$.

定理 1 设$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$是 Cauchy 问题(2)的非零解,则对于任意给定的 $x_0\in(a,b)$,当 $\varphi_2(x_0)\neq 0$ 时,在 x_0 的某个邻域内,$\begin{pmatrix}\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}\end{pmatrix}$满足方程

$$y'=p(x)y^2+2\lambda y+r(x); \tag{3}$$

当 $\varphi_2(x_0)=0$ 时,$\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}$在 x_0 的某个邻域内满足方程

$$z'=-r(x)z^2-2\lambda z-p(x). \tag{4}$$

证 当 $\varphi_2(x_0)\neq 0$ 时,由 φ_2 的连续性知,存在 x_0 的某个邻域,使得在该邻域内,有

$$\varphi_2(x)\neq 0.$$

因此

$$\begin{aligned}\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)'&=\frac{\varphi_1'\varphi_2-\varphi_1\varphi_2'}{\varphi_2^2}\\&=\frac{(\lambda\varphi_1+r\varphi_2)\varphi_2-\varphi_1(-p\varphi_1-\lambda\varphi_2)}{\varphi_2^2}\\&=p\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)^2+2\lambda\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_2}\right)+r,\end{aligned}$$

所以$\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}$确实是方程(3)的解.

当 $\varphi_2(x_0)=0$ 时,由于

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix},$$

所以由线性微分方程组理论可知,必有

$$\varphi_1(x_0)\neq 0.$$

再由 φ_1 的连续性,在 x_0 的某个邻域内,$\varphi_1(x)\neq 0$,故有

$$\begin{aligned}\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)'&=\frac{\varphi_2'\varphi_1-\varphi_2\varphi_1'}{\varphi_1^2}\\&=\frac{(-p\varphi_1-\lambda\varphi_2)\varphi_1-\varphi_2(\lambda\varphi_1+r\varphi_2)}{\varphi_1^2}\\&=-r\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)^2-2\lambda\left(\frac{\varphi_2}{\varphi_1}\right)-p.\end{aligned}$$

即此时$\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}$满足方程(4).

定理 1 证毕.

必须指出,当 $y(x)\neq 0$ 及∞时,方程(3)与(4)是等价的. 事实上,只要在方程

(3)中令$\frac{1}{y}=z$,即得方程(4);反之亦真.由定理 1 可知,方程(3)的解只在使$\varphi_2(x_0)\neq 0$ 的 x_0 的某个邻域中存在,而在(a,b)内的解不一定存在.但是,考虑到 $\varphi_2(x)$的零点一定不是 $\varphi_1(x)$的零点$\left(\text{只要初始条件}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}\right)$,所以若 $\varphi_2(x_0)=0$,方程(3)的解在 x_0 处为无穷型间断.这时可以通过方程(4)的解 $z=\frac{1}{y}$在 x_0 处将 y 连接起来,从而求得方程(3)在区间(a,b)内的"广义解".不难证明:当

$$p(x)\neq 0\quad (a<x<b)$$

时,$\varphi_2(x)$的零点是孤立点.

下面定义 Riccati 方程(3)的广义解.

定义 我们称 $y(x)$为 Riccati 方程(3)在区间(a,b)内的一个广义解,如果对任意给定 $x_0\in(a,b)$,当 $y(x_0)$为有限时,则在 x_0 的某个邻域中,$y(x)$满足方程(3);如果 $y(x_0)$为无限时,则在 x_0 的某个邻域中,$z=\frac{1}{y(x)}$满足方程(4).

定理 2 设$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$与$\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{bmatrix}$分别为 Cauchy 问题(2)当

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\text{与}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}$$

时的特解,则

$$\frac{\varphi_1}{\varphi_2}=\frac{\mu\psi_1(x)+\upsilon\chi_1(x)}{\mu\psi_2(x)+\upsilon\chi_2(x)},(|\mu|+|\upsilon|\neq 0). \tag{5}$$

是 Riccati 方程(3)在区间(a,b)内的通解(广义的).

证 显然$\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}$与$\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{bmatrix}$是 Cauchy 问题(2)中方程组的两个线性无关解组,故当

$$|\mu|+|\upsilon|\neq 0$$

时

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}+\upsilon\begin{bmatrix}\chi_1(x)\\ \chi_2(x)\end{bmatrix}$$

是该方程组的通解.由定理 1 和定义可知,式(5)是方程(3)的解.虽然表面上式(5)含有两个积分常数 μ、υ,但是因为它关于积分常数是齐次的,所以实际上只依赖于一个任意常数 $k=\frac{\mu}{\upsilon}$(可以为∞).这就是说,式(5)是方程(3)的带一个任意常数的解.

为了说明式(5)就是方程(3)的通解,我们只须证明凡是方程(3)的解一定可以表示成式(5)的形式即可. 事实上,设 $y(x)$是方程(3)的一个解,令 φ_2 满足

$$\varphi_2' = -(py+\lambda)\varphi_2,$$

再令 $\varphi_1 = y\varphi_2$,则由直接计算可知,φ_1、φ_2 满足

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}' = \begin{pmatrix}\lambda & r\\ -p & -\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}.$$

所以存在 μ、υ,使

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix} = \mu\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix} + \upsilon\begin{bmatrix}\chi_1(x)\\ \chi_2(x)\end{bmatrix},$$

从而可得式(5).

综上所述,式(5)是方程(3)的通解(广义的).

定理 2 证毕.

定理 3 设 p、q、r 均为 $x\in(a,b)$ 的连续函数,而 $Q(x) = \int q(x)\mathrm{d}x$,那么,如果$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$是方程组

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}' = \begin{bmatrix}0 & r(x)\mathrm{e}^{-Q(x)}\\ -p(x)\mathrm{e}^{Q(x)} & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}$$

的通解,则

$$y = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\mathrm{e}^{Q(x)}$$

是一般 Riccati 方程(1)在(a,b)内的通解.

证 令 $y = u\mathrm{e}^{Q(x)}$,将此代入方程(1),得

$$u' = p(x)\mathrm{e}^{Q(x)}u^2 + r(x)\mathrm{e}^{-Q(x)}. \tag{6}$$

这个方程是方程(3)当 $\lambda=0$ 时的特殊情形,由定理 2 可知

$$u = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}$$

是方程(6)在区间(a,b)内的通解. 于是,立即可得一般 Riccati 方程(1)在(a,b)内的通解为

$$y = \frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\mathrm{e}^{Q(x)}.$$

定理 3 证毕.

为了便于应用,将求非线性 Riccati 方程(1)在(a,b)中的广义通解的步骤总结如下:

1° 计算一个不定积分 $Q(x)$:

$$Q(x)=\int q(x)\mathrm{d}x.$$

2° 解两个 Cauchy 问题：

$$\begin{cases}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix}'=\begin{bmatrix}0 & r(x)\mathrm{e}^{-Q(x)}\\ -p(x)\mathrm{e}^{Q(x)} & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{pmatrix},\\ \begin{pmatrix}\psi_1(x_0)\\ \psi_2(x_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}\end{cases}$$

和

$$\begin{cases}\begin{bmatrix}\chi_1\\ \chi_2\end{bmatrix}'\begin{bmatrix}0 & r(x)\mathrm{e}^{-Q(x)}\\ -p(x)\mathrm{e}^{Q(x)} & 0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix},\\ \begin{bmatrix}\chi_1(x_0)\\ \chi_2(x_0)\end{bmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix},\end{cases}$$

其中 $x_0\in(a,b)$.

3° 给两个任意常数 μ、υ，它们满足条件

$$|\mu|+|\upsilon|\neq 0.$$

令

$$\begin{pmatrix}\varphi_1\\ \varphi_2\end{pmatrix}=\mu\begin{pmatrix}\psi_1(x)\\ \psi_2(x)\end{pmatrix}+\upsilon\begin{pmatrix}x_1(x)\\ x_2(x)\end{pmatrix}$$

和

$$y=\frac{\varphi_1(x)}{\varphi_2(x)}\mathrm{e}^{Q(x)}. \tag{7}$$

式(7)就是 Riccati 方程(1)在区间(a,b)内的广义通解，它依赖于一个任意常数 $k=\dfrac{\mu}{\upsilon}$.

实践证明：不少科学上的发明创造，并不是按部就班地进行逻辑推理所能得到的，它往往要打破常规，大胆设想，另外创造出独具一格的方法，才能获得丰硕的果实.

附录 A　吉米多维奇《数学分析习题集》的几个习题

Б. П. 吉米多维奇著《数学分析习题集》(以下简称《习题集》)一书的中译本自 20 世纪 50 年代初在我国问世以来，已经半个多世纪了. 因为它的题目数量多，难度大，叙述严谨，由浅入深，所以对我国数学分析的教与学影响很大，是一本备受读者青睐的好书，迄今不衰. 不仅有些数学分析教材的习题，大多取自于该习题集，甚至还把这其中的习题叙述成定理，写进教材的正文. 尤其是近年来，出版了各种版本的《数学分析习题集题解》以及指导书等. 但是，在浩瀚的书海中，尚未见到有关评论《习题集》方面的文章.

众所周知，金无足赤，一本好书也并非是十全十美的，也会有缺点和错误. 如果能认真地开展一些讨论，那么对提高认识，搞清问题是有裨益的. 下面仅就《习题集》的几个上下极限题，谈谈我的看法.

我们知道，无限极限与有限极限是不同的，绝不能把有限极限的运算法则，搬到无限极限中去，必须要认真对待. 由于《习题集》的第 131、132、133 题，忽视了无限极限与有限极限的区别，所以都是值得商榷的，在题目给定的条件下，均有反例存在. 要使这三个题的结论成立，应当增加适当条件. 例如，在第 131、132、133(a) 题中，加上“在扩充的实数域中，$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$，$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n+\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$，…，$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\varliminf\limits_{n\to\infty}y_n$，$\varliminf\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$，…，均有意义”即可. 至于在第 133(б)题中，除了要求“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\cdot\varlimsup\limits_{n\to\infty}y_n$ 有意义”外，还必须加上“$\lim\limits_{n\to\infty}x_n>0$”的条件.

尔后，再来看看《习题集》中第 134 题的问题.

在数学分析中，收敛一词是与发散相对的，收敛通常是针对有有限极限而言. 在《习题集》第 134 题的条件下，可以证明：$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 是允许的，得取出“x_n 收敛”. 因此在该题已知条件不变的情况下，只要将结论“x_n 收敛”改为“x_n 或收敛或发散于$+\infty$”就对了. 如果要使该题的原结论成立，只要把原题的两个条件“至少有一个成立”，改为两个条件“都成立”即可. 现作为两个例子，证明如下.

例 1　证明：如果对某个序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$，任意序列 $y_n(n=1,2,\cdots)$，下面两个等式

(a)　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$,

(б)　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$,

至少有一个成立,则序列 x_n 或收敛或发散于$+\infty$.

证　若式(a)成立,可取 $y_n=-x_n$,则

$$0=\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_n-x_n)=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n).$$

考虑到

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)=-\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

所以有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n=\underline{\lim_{n\to\infty}}x_n.\tag{*}$$

若式(б)成立,可取 $y_n=-1$,则由

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(-x_n)=-\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n,$$

亦可得式(*)成立.于是,极限$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

要证命题成立,余下只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=-\infty$ 不可能即可.用反证法,假设不然,令

$$y_n=\begin{cases}x_n, & n=1,3,5,\cdots,\\ -x_n, & n=2,4,6,\cdots,\end{cases}$$

则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=+\infty$. 因而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=(-\infty)+(+\infty)$$

无意义,即式(a)不成立;又

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}(x_ny_n)=+\infty\neq-\infty=\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n,$$

式(б)也不成立,得出矛盾.证毕.

例 2　证明:如果对某个序列 $x_n(n=1,2,\cdots)$,任意序列 $y_n(n=1,2,\cdots)$,下面两个等式

(a)　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_n+y_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$,

(б)　$\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}(x_ny_n)=\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n$

都成立,则序列 x_n 收敛.

证　由例 1 可知,只要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=+\infty$ 是不可能的即可.用反证法,假设不然,若取 $y_n=-x_n$,则 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}y_n=-\infty$,因此

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n+\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=(+\infty)+(-\infty)$$

无意义,式(a)不成立;若取

$$y_n=\begin{cases}\dfrac{1}{x_n}, & x_n>0,\\ 0, & x_n\leqslant 0.\end{cases}$$

因为满足 $x_n\leqslant 0$ 的 n 仅有有限个，所以有

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=0,$$

从而

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}x_n\cdot\overline{\lim_{n\to\infty}}y_n=0\cdot(+\infty)$$

无意义，式(б)不成立，得出矛盾. 证毕.

顺便还要指出，《习题集》第 2897(б)题的“答案”及其有关的题解，均是不完全的，因为 $R_1\cdot R_2$ 可能是“$0\cdot\infty$ 型不定式”，而使得 R 不确定. 这正是受到了第 132(б)题的影响所致.

最后，谈两点看法：

(1) 有人说，这些小问题谁都知道，不必小题大做. 我不这样看，本来是小问题，而发展到现在，涉及面如此之广，影响之大，时间之长，已经不再是小问题；即使是小问题，也应严肃、认真对待，不能违背防微杜渐的道理.

(2) 敢于坚持真理，修正错误，做到真理面前人人平等. 要知道，敢于挑战权威是创新的一个要素. 所以，我衷心希望，认真开展学术评论，当今尤其需要这样.

附录B 两个微积分问题

问题1 通常的数列极限问题中,数列是由等式关系给出.在实际问题中,往往会遇到由不等式确定的数列,这种数列的极限如何解决呢?

例1 讨论下列两种条件下数列$\{a_n\}$的收敛性.

(1) 满足条件

$$a_{n+1}^2+q(a_n+a_{n+1})^2\leqslant a_n^2,\quad n=1,2,\cdots$$

其中常数$q\in(0,1)$.

(2) 满足条件

$$a_{n+1}^2+q(a_{n+1}+a_n)\leqslant a_n^2,\quad n=1,2,\cdots$$

其中常数$q\in(0,1)$.

解 (1) 当$\{a_n\}$为正数数列时,由于

$$a_{n+1}^2+q(a_{n+1}+a_n)^2\geqslant(1+q)a_{n+1}^2,$$

可得

$$a_{n+1}^2\leqslant\frac{1}{1+q}a_n^2,$$

知$\{a_n\}$单调减有下界,所以$\{a_n\}$收敛,且收敛于零.

当$\{a_n\}$为负数数列时,与上类似可知$\{a_n\}$单调增有上界,故$\{a_n\}$也收敛,且收敛于零.

当$\{a_n\}$为任意数列时,其敛散性不确定.这是因为,由已知条件可得

$$\left(a_{n+1}+\frac{q}{1+q}a_n\right)^2-\frac{1}{(1+q)^2}a_n^2\leqslant 0,$$

即有

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{q}{1+q}\right)^2\leqslant\frac{1}{(1+q)^2}.\tag{*}$$

于是,若取$a_n=(-1)^n\dfrac{n+1}{n}(n=1,2,\cdots)$,则

$$\frac{a_{n+1}}{a_n}=-\frac{n(n+2)}{(n+1)^2},$$

$$\left(\frac{a_{n+1}}{a_n}+\frac{q}{1+q}\right)^2=\left\{\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}-\frac{q}{1+q}\right\}^2,$$

在 $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}\geqslant q$ 时,有

$$0\leqslant\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}-\frac{q}{1+q}\leqslant\frac{1}{1+q};$$

在 $\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}<\frac{q}{1+q}$ 时,有

$$0<\frac{q}{1+q}-\frac{n(n+2)}{(n+1)^2}<\frac{q}{1+q}<\frac{1}{1+q}.$$

所以数列 $\left\{(-1)^n\frac{n+1}{n}\right\}$ 满足(*),但是该数列发散. 又若取 $a_n=\frac{(-1)^n}{n}$,同理可证 $\left\{\frac{(-1)^n}{n}\right\}$ 也满足(*),而它是收敛的. 因此 $\{a_n\}$ 的敛散性不定;但若 $\{a_n\}$ 收敛,亦收敛于零.

(2) 当 $\{a_n\}$ 是正数数列时,可知其单调减且有界,所以 $\{a_n\}$ 收敛,且收敛于零.

当 $\{a_n\}$ 是负数数列时,其敛散性不定. 这是因为

$$a_{n+1}^2-a_n^2\leqslant -q(a_{n+1}+a_n).$$

即

$$a_{n+1}\geqslant a_n-q.$$

若取 $a_n=-\frac{n}{2}q$,则 $\{a_n\}$ 发散;若取 $a_n=-\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$,则 $\{a_n\}$ 收敛,且未必收敛于零.

当 $\{a_n\}$ 是任意数列时,其敛散性亦不定. 因为,若取 $a_n=(-1)^nq\left(1+\frac{1}{n}\right)$,$\{a_n\}$ 满足已知条件,且发散;若取 $a_n=\frac{(-1)^n}{n}q$,$\{a_n\}$ 虽然也满足已知条件,却是收敛的. 如果 $\{a_n\}$ 收敛,或收敛于零或收敛于负数.

问题 2 在解决实际问题时,经常出现形状为

$$\int_0^\pi\frac{dx}{(1-a\cos x)^{3/2}},\quad \int_0^\pi\frac{1-b\cos x}{(1-a\cos x)^{3/2}}dx$$

的积分,其中 $a\in(0,1)$. 那么,这种积分怎样把它积出来呢?

例 2 设

$$I_n=\int_0^\pi\frac{dx}{(1-a\cos x)^{n-\frac{1}{2}}},\quad n=0,1,2,\cdots$$

其中 $a\in(0,1)$. 证明:

(1) I_1、I_0 是两个椭圆积分.

(2) 当 $n\geqslant 1$ 时,有

$$I_{n+1}=\frac{1}{1-a^2}\left\{\frac{4(n-1)}{2n-1}I_n-\frac{2n-3}{2n-1}I_{n-1}\right\}.$$

证 (1) $I_1=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-a\cos x}}=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-a\left(2\cos^2\frac{x}{2}-1\right)}}$,

令 $\frac{x}{2}=t$, $\frac{2a}{1+a}=k^2\in(0,1)$,得

$$I_1=\frac{2}{\sqrt{1+a}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-k^2\cos^2 t}}\quad\left\{令\ t=\frac{\pi}{2}-\theta\right\}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{1+a}}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}}.$$

这是一个第一型椭圆积分. 同样还有

$$I_0=\int_0^{\pi}\sqrt{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x=2\sqrt{1+a}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-k^2\sin^2\theta}\mathrm{d}\theta$$

是一个第二型椭圆积分.

(2) 由于 $n\geqslant 1$ 时,有

$$I_n=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(1-a\cos x)^{n-\frac{1}{2}}}=\int_0^{\pi}\frac{(1-a\cos x)+a\cos x}{(1-a\cos x)^{n-\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$=I_{n-1}+\int_0^{\pi}\frac{a\cos x}{(1-a\cos x)^{n-\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x\qquad\{分部积分\}$$

$$=I_{n-1}+\left.\frac{a\sin x}{(1-a\cos x)^{n-\frac{1}{2}}}\right|_0^{\pi}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi}\frac{a^2\sin^2 x}{(1-a\cos x)^{n+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$=I_{n-1}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi}\frac{(a^2-1)+(1+a\cos x)(1-a\cos x)}{(1-a\cos x)^{n+\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$=I_{n-1}-\left(n-\frac{1}{2}\right)(1-a^2)I_{n+1}+\left(n-\frac{1}{2}\right)\int_0^{\pi}\frac{2-(1-a\cos x)}{(1-a\cos x)^{n-\frac{1}{2}}}\mathrm{d}x$$

$$=I_{n-1}-\left(n-\frac{1}{2}\right)(1-a^2)I_{n+1}+(2n-1)I_n-\left(n-\frac{1}{2}\right)I_{n-1}$$

$$=-\left(n-\frac{1}{2}\right)(1-a^2)I_{n+1}+(2n-1)I_n-\left(n-\frac{3}{2}\right)I_{n-1},$$

所以

$$I_{n+1}=\frac{1}{1-a^2}\left\{\frac{4(n-1)}{2n-1}I_n-\frac{2n-3}{2n-1}I_{n-1}\right\}.$$

特别是,当 $n=1$ 时,便得

$$I_2=\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(1-a\cos x)^{3/2}}=\frac{1}{1-a^2}\int_0^{\pi}\sqrt{1-a\cos x}\mathrm{d}x.$$

至于积分

$$\int_0^{\pi}\frac{1-b\cos x}{(1-a\cos x)^{3/2}}\mathrm{d}x=\frac{b}{a}\int_0^{\pi}\frac{\left(\frac{a}{b}-1\right)+(1-a\cos x)}{(1-a\cos x)^{3/2}}\mathrm{d}x$$

$$=\frac{a-b}{a(1-a^2)}\int_0^{\pi}\sqrt{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x+\frac{b}{a}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-a\cos x}}\,\mathrm{d}x$$

归结为两个椭圆积分的组合.

我们知道,椭圆积分是不能表示为有限形式的. 由于 $a\in(0,1)$,根据二项式级数,可展为

$$\sqrt{1-a\cos x}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!}a^n\cos^n x.$$

在区间$[0,\pi]$上逐项积分,并注意到

$$\int_0^{\pi}\cos^{2m+1}x\mathrm{d}x=0,\quad m=0,1,2,\cdots$$

$$\int_0^{\pi}\cos^{2m}x\,\mathrm{d}x=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2m}x\,\mathrm{d}x=\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}\pi,$$

便得

$$\int_0^{\pi}\sqrt{1-a\cos x}\,\mathrm{d}x$$

$$=\pi\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-2m+1\right)}{(2m)!}\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}a^{2m}\right\}.$$

同理还有

$$\int_0^{\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-a\cos x}}$$

$$=\pi\left\{1+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}+2m-1\right)}{(2m)!}\cdot\frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}a^{2m}\right\}.$$

其实,直接将 $\frac{1-b\cos x}{(1-a\cos x)^{3/2}}$ 展为级数,进行积分,$\int_0^{\pi}\frac{1-b\cos x}{(1-a\cos x)^{3/2}}\mathrm{d}x$ 的结果显得更为简洁一些.

参考文献

1 华罗庚. 高等数学引论(第一卷第一分册). 北京:科学出版社,1963
2 华罗庚. 指数和的估计及其在数论中的应用. 北京:科学出版社,1963
3 范德瓦尔登. 代数学 Ⅰ. 北京:科学出版社,1963
4 日本数学会. 数学百科辞典. 北京:科学出版社,1984
5 E. 卡姆克. 常微分方程手册. 张鸿林译. 北京:科学出版社. 1980
6 Б. П. 列维坦. 概周期函数. 余家荣,张延昌译. 北京:高等教育出版社,1956
7 Ц. Ц. 普里瓦洛夫. 复变函数引论. 北京:人民教育出版社,1960
8 北京大学数学力学系. 高等代数. 北京:人民教育出版社,1978
9 夏道行,吴卓人,严绍宗,舒五昌. 实变函数论与泛函分析(上册). 北京:人民教育出版社,1978
10 尤秉礼. 常微分方程补充教程. 北京:人民教育出版社,1983
11 Б. П. 吉米多维奇. 数学分析习题集. 李荣涑译. 北京:人民教育出版社,1958
12 江泽坚等. 数学分析. 北京:人民教育出版社,1978
13 Г. М. 菲赫金哥尔茨. 微积分学教程. 北京:人民教育出版社,1979
14 H. P. 格林斯潘,D. J. 班奈. 微积分(上册). 北京:人民教育出版社,1979
15 陈传璋等. 数学分册(下册). 北京:人民教育出版社,1982
16 何琛,史济怀,徐森林. 数学分析(第二册). 北京:高等教育出版社,1985
17 廖可人,李正元. 数学分析(第三册). 北京:高等教育出版社,1987
18 郭大钧,陈玉妹,裘卓明. 数学分析. 济南:山东科学技术出版社,1982
19 徐利治. 数学分析的方法及例题选讲. 1955
20 费定晖,周学圣. 数学分析习题集题解. 济南:山东科学技术出版社,1980
21 裴礼文. 数学分析中的典型问题与方法. 北京:高等教育出版社,2002
22 G·波利亚,G·舍贵. 数学分析中的问题和定理(第一卷). 上海:上海科学技术出版社,1981
23 李运樵,敖武峰,裘北泰. 微积分标准化试题集. 国防科技大学出版社,1993
24 B. R. 盖尔鲍姆,J. M. H. 奥姆斯特德. 分析中的反例. 高枚译. 上海:上海科学技术出版社,1980
25 汪林. 实分析中的反例. 北京:高等教育出版社,1989
26 叶怀安. 泛函分析. 合肥:安徽教育出版社,1984
27 宣立新,马明. 周期函数初论. 合肥:安徽教育出版社,1990

28 Honsberger, R. . Mathematical Gems Ⅱ ,Capter 10(江嘉禾译,一个奇妙的级数,《数学译林》,1982 年,第 1 卷第 4 期.)

29 Knopp, K. Theory and application of infinete series, 1957

30 Klambauer, G. Problems and Propositions in Analysis. New York: Marcel Dekker, INC, 1979

［Ｇｅｎｅｒａｌ　Ｉｎｆｏｒｍａｔｉｏｎ］
书名＝数学分析拾遗
作者＝赵显曾著
页数＝１０６
ＳＳ号＝１１６８５３６９
出版日期＝２００６年7月

前言

目录