常微分方程及其数值解法

蔡 晖 编

厦门大学出版社

常微分方程及其数值解法

蔡 晖 编

厦门大学出版社

[闽]新登字 09 号

常微分方程及其数值解法

蔡 晖 编

*

厦门大学出版社出版发行

厦门大学印刷厂印刷

*

开本 850×[redacted].875 印张 192 千字

1994 年 1 月 第 1 版 1994 年 1 月 第 1 次印刷

印数：1—1000 册

ISBN 7—5615—0876—X/0.53

定价：5.80 元

前　言

本书是作者在数学系各专业多次使用的自编讲义《常微分方程及其数值解法》的基础上，经再次修改和整理而成的。在编写中，力求做到由浅入深、顺序渐进、重点突出、难易适中、便于自学。

全书共分五章：第一章主要介绍微分方程的基本概念和一些典型微分方程的实际背景；第二章是微分方程的初等解法，主要介绍几类方程的解法以及变量替换的处理思想与技巧；第三章重点介绍一阶微分方程解的存在唯一性定理及解的有关性质；第四章介绍一阶线性微分方程组和高阶线性微分方程的基本理论以及常系数一阶线性微分方程组和常系数高阶线性方程的解法；第五章比较系统地讨论一阶微分方程数值解法的基本理论和方法。此外，在附录部分简要地介绍拉普拉斯变换及其应用。最后，给出书中各章习题的答案。在讲授中，根据不同专业的要求，对部分内容可有所取舍。

在编写过程中，主要参考书如下：

(1) 王高雄等：《常微分方程》；

(2) 高素志等：《常微分方程》；

(3) 王柔怀、伍卓群：《常微分方程讲义》；

(4) M. Braun：《微分方程及其应用》(张鸿林译)；

(5) 李荣华、冯果忱：《微分方程数值解法》；

(6) 关治、陈景良：《数值计算方法》。

辜联昆教授、钟同德教授对本书的编写给予热情的鼓励和支

持。辜老师认真地审阅了全稿，对本书的内容和写法都提出了宝贵的指导性意见，在此对二位老师表示衷心的感谢。在出版过程中，得到厦门大学出版社陈天择、蒋东明、厦门大学印刷厂吴顺升以及厦门大学数学系孙晓静等同志的大力支持和帮助，使本书得以顺利出版，对此也表示深深的谢意。

由于作者水平有限，书中疏漏之处在所难免，恳望同志们和读者提出批评、指教。

作　者

1994 年元月于厦门大学

目　　录

第一章 绪　论

§1.1 引　言

数学分析中所研究的函数，是反映客观世界物质运动过程中量与量之间的一种关系.在大量的实际问题中，遇到稍为复杂的一些运动过程时，反映运动规律的量与量之间的关系（即函数）往往不能直接写出来.却比较容易建立这些变量与它们的导数（或微分）间的关系式，称为微分方程.它是一类与代数方程、三角函数方程、差分方程等有限方程有着完全不同性质的方程.在这类方程中，作为未知而要去求的是某个函数.

下面就是一些微分方程的例子.

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{1.1}$$

$$\frac{dy}{dx} + p(y)x = q(x) \tag{1.2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + hx\frac{dx}{dt} + kx = F(t) \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + h\frac{d\varphi}{dt} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0 \tag{1.4}$$

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)}) = 0 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{（热传导方程）} \tag{1.6}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{(波动方程)} \tag{1.7}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0\text{(Laplace 方程)} \tag{1.8}$$

只含一个自变量的微分方程称为**常微分方程**，如上面(1.1)—(1.5)，而含多于一个以上自变量的微分方程称为**偏微分方程**，如(1.6)—(1.8). 由若干个微分方程组成的系统称为**微分方程组**.

常微分方程的研究主要起源于力学问题(牛顿利用微积分讨论的质点力学问题，就归结为常微分方程组的研究)，它是与微积分学的研究同时生长起来的一个数学分支. 远在十七、八世纪，在力学、天文、物理和技术科学研究中，就已借助于微分方程取得了巨大的成就. 如 1846 年 Leverrier 应用微分方程确定出海王星在天空中的位置. 在二十世纪之前，微分方程问题主要来源于力学、物理学和几何学. 而到了现在几乎在自然科学、工程技术、社会科学的每一部门或多或少都有微分方程的问题. 常微分方程已经发展成为数学中的一个庞大的分支，不仅内容丰富，理论深刻，而且应用十分广泛. 近二十多年来，由于电子计算机的普遍使用，使得过去许多无法求解的微分方程问题获得了数值解，从而能更多地认识解的种种性质及其数值特征，这就为微分方程理论应用于工程技术实际问题提供了定量的依据. 常微分方程这门学科，无论在理论研究，还是数值求解以及实际应用方而都已经达到了十分广泛的地步. 常微分方程的方法论也正在为广大科学工作者，工程技术人员所掌握.

常微分方程研究的中心任务是：确定方程的解(包括近似解，数值解)和讨论解的性质.

作为基础课教材，本书不可能包括常微分方程的所有内容，只能介绍其中最重要，最常用的基本概念，基本理论和基本方法.

§1.2 一些常见的微分方程问题

本段将通过几个具体的例子，粗略地介绍常微分方程的一些直观背景和如何建立相应的数学模型即微分方程问题.

例1 物体冷却过程的数学模型

将某物体放置于空气中，在开始时刻 $t=0$ 时测量得它的温度为 $u_0=150^\circ C$，10 分钟后测量得到温度为 $u_1=100^\circ C$，我们要求决定此物体的温度 u 和时间 t 的关系，并计算 20 分钟后物体的温度. 这里我们假设空气的温度保持为 $u_a=24^\circ C$.

解 为了解决上述的问题，需要应用牛顿冷却定律：热量总是从温度高向温度低的物体传导的；在一定的温度范围内，一个物体的温度变化速度与这一物体的温度和其所在的介质温度的差值成比例.

设物体在时刻 t 的温度为 $u=u(t)$，则温度的变化率以 $\frac{du}{dt}$ 表示. 注意到热量是由温度高往温度低的物体传导的，故 $u>u_a$，因此温度差 $u-u_a$ 恒正；又由于物体将随时间而逐渐冷却，故温度变化率 $\frac{du}{dt}<0$. 由牛顿冷却定律得到

$$\frac{du}{dt}=-k(u-u_a) \tag{1.9}$$

这里 $k>0$ 是比例常数. 方程(1.9)就是冷却过程的数学模型，它含有未知函数及其一阶导数 $\frac{du}{dt}$，这样的方程，我们称它为**一阶微分方程**.

为了决定物体的温度 u 和时间 t 的关系，我们要从方程(1.9)中“解出”u，注意到 u_a 是常数，且 $u-u_a>0$，可把(1.9)改写成

$$\frac{d(u-u_a)}{u-u_a}=-kdt \tag{1.10}$$

这样，变量 u 和 t 被“分离”开来了，两边积分得

$$\ln(u-u_a)=-kt+\tilde{c} \tag{1.11}$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数. 由对数的定义，可得到

$$u-u_a=e^{-kt+\tilde{c}}=e^{\tilde{c}}e^{-kt}$$

由此，令 $c=e^{\tilde{c}}$ 即得

$$u=u_a+ce^{-kt} \tag{1.12}$$

根据“初始条件”：

$$当 t=0 时 u=u_0 \tag{1.13}$$

可以确定出 $c=u_0-u_a$，于是得到

$$u=u_a+(u_0-u_a)e^{-kt} \tag{1.14}$$

我们可以利用另一个条件确定 k 的数值，由条件 $t=10, u=u_1$，得到

$$u_1=u_a+(u_0-u_a)e^{-10k}$$

由此

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{u_0-u_a}{u_1-u_a}$$

用给定的 $u_0=150$，$u_1=100$，$u_a=24$ 代入，得到

$$k=\frac{1}{10}\ln\frac{150-24}{100-24}=\frac{1}{10}\ln 1.66\approx 0.051$$

从而 $$u=24+126e^{-0.051t} \tag{1.15}$$

这样，根据(1.15)式，就可以计算出任何时刻 t 物体的温度 u 的数值. 例如 20 分钟后的温度 $u_2\approx 70^\circ C$. (1.15)式还告诉我们，当 $t\to+\infty$ 时，$u\to 24^\circ C$. 这可以解释为：经过一段时间后，物体的温度和空气的温度将会没有什么差别了. 事实上，经过 2 小时后，物体的温度已变为 $24.3^\circ C$，与空气的温度已相当接近，而经过 3 小时后，

物体的温度为 24.01℃，这时，一般的测量仪器已经测不出它与空气温度的差别了.

实用上，人们认为冷却过程已经基本结束了，所以经过一段时间后(如 3 小时后)可以认为物体的温度和空气的温度并没有什么差别，这与我们在实际生活中所观察的结果是相符合的.

我们从例 1 可以大体看出用微分方程解决实际问题的基本步骤：(1)建立起实际问题的数学模型，也就是建立反映这个实际问题的微分方程；(2)求解这个微分方程；(3)用所得的数学结果解释实际问题，从而予测到某些物理过程的特定性质，以便达到解决实际问题的目的.

微分方程的"解"可以用图形表示出来，这可以给我们一个简明直观的了解，图(1.1)就是解(1.15)的图形.

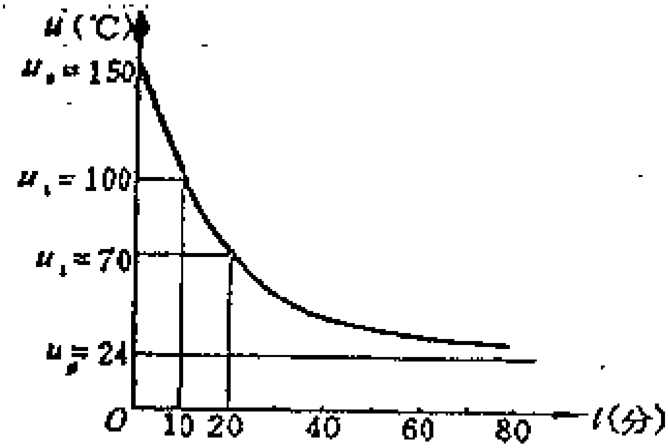


图 (1.1)

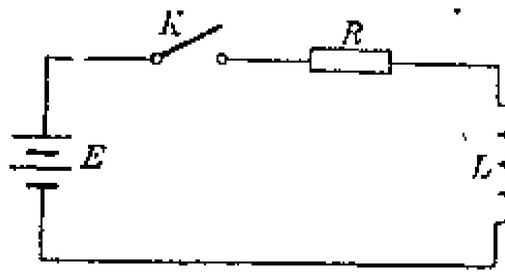


图 (1.2)

例 2 如图(1.2)的 R—L 电路，它包含电感 L、电阻 R 和电源 E. 设 $t=0$ 时，电路中没有电流. 我们要建立：当开关 K 合上后，电流 I 应该满足的微分方程，这里假设 R、L、E 都是常数.

解 为了建立电路的微分方程，我们引用关于电路的基尔霍

夫第二定律：在闭合回路中，所有支路的电压降的代数和等于零.

注意到经过电阻 R 的电压降是 RI. 而经过电感 L 的电压降是 $L\frac{dI}{dt}$，由基尔霍夫第二定律得到

$$E - L\frac{dI}{dt} - RI = 0$$

即

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = \frac{E}{L} \tag{1.16}$$

求出的 $I=I(t)$ 应满足条件

$$\text{当 } t = 0 \text{ 时} \qquad I = 0 \tag{1.17}$$

如果假定在 $t=t_0$ 时刻 $I=I_0$，电源 E 突然短路，因而 E 变成为零，那么电流应满足方程

$$\frac{dI}{dt} + \frac{R}{L}I = 0 \tag{1.18}$$

及条件：

$$\text{当 } t = t_0 \text{ 时} \qquad I = I_0 \tag{1.19}$$

例 3 $R-L-C$ 电路

如图(1.3)所示的 $R-L-C$ 电路，它包括电感 L，电阻 R 和电容 C，我们设 R、L、C 均为常数，电源 $e(t)$ 是时间 t 的已知函数，求当开关 K 合上后，电流 I 所满足的微分方程.

解 注意到经过电感 L，电阻 R 和电容 C 的电压降分别为：$L\frac{dI}{dt}$，RI 和 $\frac{Q}{C}$，其中 Q 为电量，因此由基尔霍夫第二定律得到

$$e(t) = L\frac{dI}{dt} + RI + \frac{Q}{C} \tag{1.20}$$

因为 $I=\frac{dQ}{dt}$，微分(1.20)得到

$$\frac{d^2I}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC}I = \frac{1}{L}\frac{de(t)}{dt} \tag{1.21}$$

这就是电流应满足的常微分方程，如果 $e(t)=$ 常数，则(1.21)为

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{dI}{dt}+\frac{1}{LC}I=0 \tag{1.22}$$

如果 $R=0$ 即只是 $L-C$ 电路，则得到

$$\frac{d^2I}{dt^2}+\frac{1}{LC}I=0 \tag{1.23}$$

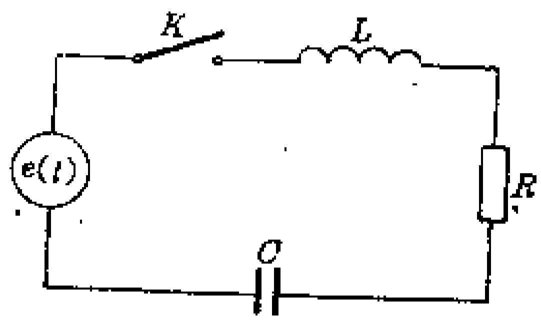


图 (1.3)

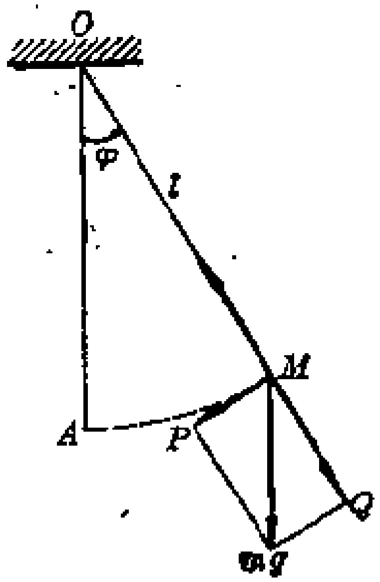


图 (1.4)

例 4　数学摆(单摆)

数学摆是系于一根长度为 l 的线上而质量为 m 的质点 M，在重力的作用下，它在垂直于地面的平面上作园周运动，如图(1.4)所示，我们要确定摆的运动方程.

解　设取反时针运动的方向作为计算摆与铅垂线所成的角 φ 的正方向，质点 M 沿园周的切向速度 v 可表示成 $v=l\dfrac{d\varphi}{dt}$，作用于质点 M 的地球引力的大小为 mg，其方向铅直向下. 把重力分解成两个分量 $\overrightarrow{MQ}$ 和 $\overrightarrow{MP}$，沿细线方向的分力 $\overrightarrow{MQ}$ 的大小为 $mg\cos\varphi$，其方向沿半径 $\overrightarrow{OM}$ 方向，且指向外，这个分力正好与线的拉力相抵

消，它不会引起质点 M 的速度 v 的数值变化. 重力的第二个分力 $\overrightarrow{MP}$ 沿着圆周的切线方向，它引起质点 M 的速度 v 的数值改变，由于 $\overrightarrow{MP}$ 总使质点 M 向平衡位置 A 的方向运动，即当角 φ 为正时，质点 M 向减少 φ 的方向运动. 而当 φ 为负时，则向增大 φ 的方向移动，所以 $\overrightarrow{MP}$ 的数值等于 $-mg\sin\varphi$. 根据牛顿第二定律得到数学摆的运动方程为：

$$m\frac{dv}{dt}=-mg\sin\varphi \tag{1.24}$$

即

$$\frac{dv}{dt}=-g\sin\varphi$$

由 $\frac{dv}{dt}=l\frac{d^2\varphi}{dt^2}$，(1.24)可化为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}=-\frac{g}{l}\sin\varphi \tag{1.25}$$

关系式(1.25)是包含 φ 及其二阶导数的方程，并且 φ 不是线性而是以非线性的形式出现在方程中，要直接由(1.25)求 φ 随着时间变化的解析表达式是困难的.

如果只研究摆的微小振动，即当 φ 比较小的时候，微分方程(1.25)可以作线性化处理，即用 φ 代替 $\sin\varphi$，这样就得到自由微小振动时摆的运动方程

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.26}$$

如果假设摆是在一个粘性的介质中摆动，那么沿着摆的运动方向存在着一个与速度 v 成比例的阻力. 设其阻力系数为 μ，则摆的运动方程变为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=0 \tag{1.27}$$

如果沿着摆的运动方向还存在一个恒作用于质点 M 的外力

$F(t)$，此时摆的运动称为强迫微小振动，其方程为

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{\mu}{m}\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\varphi=\frac{1}{ml}F(t) \tag{1.28}$$

当要确定摆的一个特定运动状态时，我们应该给出摆的初始状态：

$$\text{当 } t=0 \text{ 时，}\quad \varphi=\varphi_0,\quad \frac{d\varphi}{dt}=\omega_0 \tag{1.29}$$

这里 φ_0 代表摆的初始位置，ω_0 代表摆的初始角速度.

从以上几个例子中不难发现，完全无关的，本质上不同的物理现象有时可以用同一个类型的微分方程来刻划. 例如，反映物体冷却过程的方程(1.9)和反映 $R-L$ 电路中电流变化规律的方程(1.16)都可归结成方程

$$\frac{dy}{dt}+k^2y=B \tag{1.30}$$

只不过对不同的现象常数 k,B 的物理意义不同而已. 研究方程(1.30)，也就是研究(1.9)和(1.16). 类似地，$R-L-C$ 电路方程(1.21)及数学摆方程(1.28)也具有同一形式

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b\frac{dy}{dt}+cy=f(t) \tag{1.31}$$

这里 b,c 是常数. 又 $L-C$ 电路(1.23)与无阻力的作自由微小摆动的数学摆运动方程(1.26)都属于同一数学模型

$$\frac{d^2y}{dt^2}+k^2y=0 \tag{1.32}$$

这里 k 是常数. 因此，我们将某类微分方程研究清楚之后，可以用来解释许多领域里的问题，这就避免了大量重复性劳动，这也正是数学抽象化的优点.

不同的物理现象可以具有相同的数学模型这一事实，还为许多应用数学工作者和工程技术人员提供用模拟方法解决物理或工

程技术问题的理论根据. 如利用电路来模拟某些力学系统或机械系统等在现在已相当普遍.

以上我们只举出常微分方程的一些物理背景，我们还可以举出一些生物、化学、自动控制等方面提出的常微分方程.

例 5 运载火箭的运动规律

近代火箭是利用逐渐燃烧的气体，高速向后喷出的办法来增加火箭本身的运动速度，火箭在运动中由于不断喷出高速气体，它的质量是变化的，在力学中称为**变质量物质的运动**. 设火箭在运动过程中，以常速度 C 每秒喷出质量为 G 的物质气体（C 称为喷气速度）. 令 $v(t)$ 为火箭在 t 时刻的速度，$M(t)$ 为火箭在 t 时刻的质量. 于是有：

$$G=-\frac{dM}{dt}$$

在 $t+\Delta t$ 时刻，火箭的质量和速度分别为

$$M(t+\Delta t)=M+\Delta M,\quad v(t+\Delta t)=v+\Delta v$$

根据动量守恒定律，有：

$$(M+\Delta M)(v+\Delta v)-Mv=\Delta M\cdot c+F\Delta t$$

这里 $F(t)$ 表示火箭所受的外力. 在上式的两边分别除以 Δt，并略去高阶项 $\Delta M\cdot\Delta v$ 再令 $\Delta t\to 0$，两边取极限得：

$$M\frac{dv}{dt}+(v-c)\frac{dM}{dt}=F$$

方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dM}{dt}=-G\\[2ex] M\dfrac{dv}{dt}+(v-c)\dfrac{dM}{dt}=F\end{cases}\tag{1.33}$$

刻划作为质点看待的火箭的运动规律.

例 6 生物总数的数学模型.

说明:我们讨论一个孤立的生物种群,即假设在一个地区内没有迁移,也没有和其他种群形成捕食和被捕食的关系.再者,生物数量的增减是一个一个地进行的,它是时间的函数,但不是连续函数.然而,当数量很大时,在短时间内只有极少量的变化(增加或减少)则可近似地认为总数是时间 t 的连续函数,甚至是可微的.

以 $p=p(t)$ 表示 t 时刻的种群数量,其增长率 $\gamma(t,p)$ 为出生率与死亡率之差,则总数的变化率为

$$\frac{dp}{dt}=\gamma(t,p)p \tag{1.34}$$

这就是描述种群总数变化的方程,它是一阶微分方程.在最简单的情况下 $\gamma(t,p)\equiv a$(常数),就得到线性方程

$$\frac{dp}{dt}=ap \tag{1.35}$$

方程(1.35)就是著名的马尔萨斯(Malthus)生物增长定律,也称马尔萨斯方程,如果在时刻 t_0 统计出的生物总数为 p_0,就构成"初值问题":

$$\begin{cases}\dfrac{dp}{dt}=ap\\ p(t_0)=p_0\end{cases} \tag{1.36}$$

当生物总数非常大,各生物个体之间必为各自的生存条件而竞争,模型(1.35)与实际情况偏离较大,此时通常采用模型

$$\frac{dp}{dt}=(a-bp)p \tag{1.37}$$

$-bp^2$ 称为竞争项,常数 a,b 称为生物总数的生命系数.方程(1.37)称为生物总数增长统计筹算律.它是由荷兰的数学生物学家弗胡斯特(Verhulst)首先发现的.一般说来,常数 b 比 a 小得多,因此如果 p 不太大,则竞争项 $-bp^2$ 同 ap 相比可以略去不计,但当 p 非常大时,竞争项 $-bp^2$ 就不能忽略了.

例 7　捕食一被捕食者的数学模型.

这个问题是在研究相互制约的鱼类总数的变化时提出的. 数学家沃特拉(V. Volterra)研究了这个问题. 他将鱼分成两类:掠肉鱼(如鲨鱼等)作为捕食者,总数以 $y(t)$表示,食用鱼作为被捕食者,总数以 $x(t)$表示. 他假设被捕食者本身的食物是充足的,即它们内部竞争不剧烈. 当不存在掠肉鱼时,食用鱼总数的增长率遵循着马尔萨斯方程(1.35),但当它们与捕食者(掠肉鱼)相遇时,就有可能被吃掉. 两类鱼相遇的次数与它们的总数乘积成正比,故单位时间内相遇的次数为 $bxy(b>0)$,显然,这将使食用鱼的增长率下降,故得方程$\frac{dx}{dt}=ax-bxy$. 而对捕食者(掠肉鱼),当它们不遇到食肉鱼时,由于缺乏食品,其数量自然要减少,增长率为$\frac{dy}{dt}=-cy$ $(c>0)$,而当它们与食用鱼相遇时,由于食品的增加,将促使它们的增长,其增长率与 xy 成正比,设为 $exy(e>0)$,于是得到方程$\frac{dy}{dt}=-cy+exy$,将两个方程联立起来得到方程组:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = ax - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -cy + exy \end{cases} \tag{1.38}$$

(1.38)是当不存在人类的渔业活动时,掠肉鱼和食用鱼相互影响所遵循的微分方程组. 如果还考虑到捕鱼活动的影响,得到

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = (a-\epsilon)x - bxy \\ \dfrac{dy}{dt} = -(c+\epsilon)y + exy \end{cases} \tag{1.39}$$

对(1.39)的分析表明,降低捕鱼量,对掠肉鱼有利.

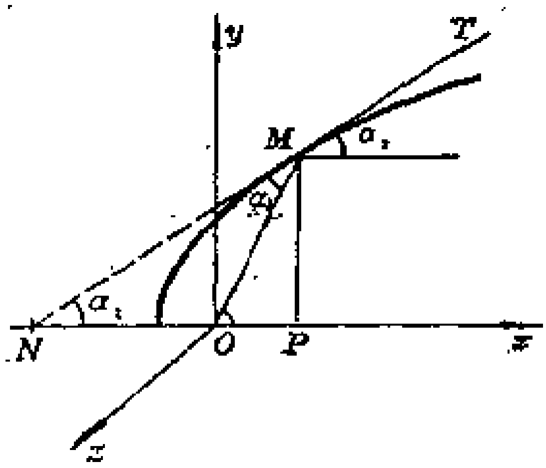
例 8　探照灯反射镜面的形状

在制造探照灯的反射镜面时，总要求将点光源射出的光线平行地反射出去，以保证探照灯有良好的方向性，试求反射镜面的几何形状.

解 取光源所在处为坐标原点，而 x 轴平行于光的反射方向如图(1.5). 设所求的曲面由曲线

$$\begin{cases} y = f(x) \\ z = 0 \end{cases}$$

绕 x 轴旋转而成，则求反射镜面归结为求曲线 $y=f(x)$ 的问题.



图(1.5)

过曲线 $y=f(x)$ 上任一点 $M(x,y)$ 作切线 NT，则由光的反射定律，入射角等于反射角，容易推知

$$\alpha_1 = \alpha_2$$

从而

$$\overline{OM} = \overline{ON}$$

注意到

$$\frac{dy}{dx} = \mathrm{tg}\alpha_1 = \frac{\overline{MP}}{\overline{NP}}$$

及 $\overline{OP}=x, \overline{MP}=y, \overline{OM}=\sqrt{x^2+y^2}$，就得到函数 $y=f(x)$ 应满足的微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \tag{1.40}$$

例 9 (1) 求平面上的一切园所满足的微分方程；

(2) 求以原点为中心的一切园所满足的微分方程；

(3) 求半径为定值的一切园所满足的微分方程.

解 (1)平面是任一园所满足的方程为：

$$(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2 \tag{1.41}$$

其中 a,b,r 为参数，把 y 看作是 x 的函数，关于 x 微分三次得：

$$\begin{aligned}(x-a)+(y-b)y' &= 0\\ 1+y'^2+(y-b)y'' &= 0\\ 3y'y''+(y-b)y''' &= 0\end{aligned} \tag{1.42}$$

由后二式消去 $y-b$，即得所求的微分方程为

$$(1+y'^2)y'''-3y'(y'')^2=0$$

(2) $a=b=0$，故所求方程为

$$x+yy'=0 \tag{1.43}$$

(3) r 为定数，故(1.41)只有二个参数 a,b，关于 x 微分(1.41)两次，消去 a,b，可得方程

$$\frac{y''}{(1+y'^2)^{3/2}}=\pm\frac{1}{r} \tag{1.43}$$

§1.3 基本概念

本讲义只讨论常微分方程，因而今后所讲的“微分方程”一词，都应理解为常微分方程或常微分方程组.

(1) 微分方程的阶.

方程中出现的未知函数的最高阶导数的阶数，称为方程的阶数. 例如方程 $(\frac{dy}{dx})^2+2y=\sin x$ 是一阶的，而 $\frac{d^2y}{dx^2}+x^2\frac{dy}{dx}+3y=e^x$ 则是二阶的，一般 n 阶微分方程具有形式

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.44}$$

这里 $F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})$ 是 $x,y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的已知函数，而且一定含有 $y^{(n)}$；y 是未知函数，x 是自变量.

(2) 线性和非线性.

如果方程(1.44)的左端为 $y,y',\cdots,y^{(n)}$ 的一次有理整式，则称方程(1.44)为 n 阶线性微分方程，一般 n 阶线性微分方程具有

形式

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \tag{1.45}$$

其中 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$，$f(x)$ 为 x 的已知函数.

不是线性的方程称为**非线性方程**. 例如 $\frac{d^2\varphi}{dt^2}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0$ 是二阶非线性方程.

(3) 解和隐式解.

如果定义在 (a,b) 上的可微函数 $y=\varphi(x)$ 代入方程(1.44)后能使它变为恒等式，即有

$$F(x,\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n)}(x))\equiv 0 \tag{1.46}$$

则称函数 $y=\varphi(x)$ 为方程(1.44)在区间 (a,b) 上的**解**，例如在§1.1 的例 1 中函数 $u=u_a+(u_0-u_a)e^{-kt}$ 就是方程(1.9)的解，而且 $u=u_a+ce^{-kt}$(其中 c 为任意常数)均是方程(1.9)的解. 如果由关系式 $\Phi(x,y)=0$ 在区间 (a,b) 上决定的隐函数 $y=\varphi(x)$ 是方程(1.44)的解，我们就称 $\Phi(x,y)=0$ 为方程(1.44)在区间 (a,b) 上的**隐式解**，或称**积分**. 例如，一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}$，有解 $y=\sqrt{1-x^2}$ 和 $y=-\sqrt{1-x^2}$；而关系式 $x^2+y^2=1$ 就是它的隐式解.

应当指出，方程(1.44)若有解，一般有无限多个解，而且每个解的定义区间是不同的. 为简单起见，我们把方程的解和隐式解通称为方程的解. 微分方程的解的求法也可称为微分方程的**积分法**.

(4) 通解和特解

我们把含有 n 个相互独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的解

$$y=\varphi(x,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

称为 n 阶方程(1.44)的**通解**. 类似地可以定义方程(1.44)的**隐式通解**；不含任意常数的解称为方程(1.44)的**特解**. 所谓 n 个常数

$c_2,\cdots,c_n$ 相互独立，其确切含意是：$\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n-1)}(x)$ 关于 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 的 Jacobi 行列式不为零，即

$$\frac{D(\varphi,\varphi',\cdots,\varphi^{(n-1)})}{D(c_1,c_2,\cdots,c_n)}$$

$$=\begin{vmatrix} \frac{\partial\varphi}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi}{\partial c_n} \\ \frac{\partial\varphi'}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi'}{\partial c_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_1} & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_2} & \cdots & \frac{\partial\varphi^{(n-1)}}{\partial c_n} \end{vmatrix} \neq 0 \qquad (1.47)$$

例如方程 $y''+4y=0$ 有通解 $y=c_1\sin 2x+c_2\cos 2x$，其中 c_1,c_2 为任意常数，而 $y=\sin 2x$ 与 $y=\cos 2x$ 均是方程的特解.

(5)定解条件和定解问题

为了确定微分方程的一个特解而给出解所必需满足的附加条件称为**定解条件**. 常见的定解条件有**初值条件**和**边值条件**. n 阶方程(1.44)的初值条件是指如下的 n 个条件：

$$当\ x=x_0\ 时, y=y_0, \frac{dy}{dx}=y_0', \cdots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{(n-1)}}=y_0^{(n-1)} \qquad (1.48)$$

这里 $x_0,y_0,y_0',\cdots,y_0^{n-1}$ 是给定的 $n+1$ 个常数. 初值条件(1.48)有时可以写成

$$y(x_0)=y_0, \frac{dy(x_0)}{dx}=y_0', \cdots, \frac{d^{(n-1)}y(x_0)}{dx^{n-1}}=y_0^{n-1} \qquad (1.48)'$$

求微分方程满足定解条件的解，称为**定解问题**. 当定解条件为初值条件(1.48)时，相应的定解问题称为**初值问题**. 本书主要讨论初值问题. 不同的初值条件，对应的定解问题的解也不同. 如果方

程(1.44)存在通解.那么一般可以利用初值条件从通解中确定出常数而得到初值问题的解.

(6) 积分曲线和方向场.

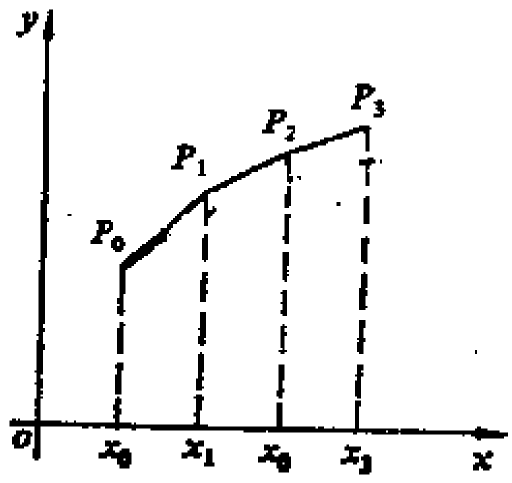
如果在 xoy 平面上把解 $y=\varphi(x)$ 画出，它是一条平面曲线，称之为方程(1.44)的**积分曲线**.特别，一阶方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.49}$$

满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的特解就是通过 (x_0,y_0) 的一条积分曲线，而且在这条积分曲线上每一点 (x,y) 的切线斜率 $\frac{dy}{dx}$ 刚好等于函数 $f(x,y)$ 在这点的值.

设函数 $f(x,y)$ 的定义域为 D，在每一点 $(x,y)\in D$ 处画上一个小直线段，其斜率等于 $f(x,y)$，我们把带有这种直线段的区域 D 称为由方程(1.49)规定的**向量场**.从几何的观点上看，求方程(1.49)通过 (x_0,y_0) 的一条积分曲线，就是在区域 D 内求一条通过点 (x_0,y_0) 的曲线，使其上每一点 (x,y) 处切线的斜率都与方向场在该点的方向 $f(x,y)$ 吻合.

常用的 Euler 折线法，就是根据方向场的原理，从点 $p(x_0,y_0)$ 开始作以 $f(x_0,y_0)$ 为斜率的直线段，沿着它向右移动到一个新点 $p_1(x_1,y_1)$ 然后再作以 $f(x_1,y_1)$ 为斜率的直线段，沿着它仍向右移动到第二点 $p_2(x_2,y_2)$，…，如此继续下去，就在 p_0 点的右方构造一条折线(左方可以类似作出)，它可以近似地代表积分曲线，如果 x_i 与 $x_{i+1}(i=0,1,2,\cdots)$ 的距离缩短，则所作的折线会更接近积分曲线.如图(1.6).



(图 3.6)

第一章　习　　题

1. 指出下面微分方程的阶数，并回答方程是否线性的：

(1) $\frac{dy}{dx}=4x^2-y$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2}-(\frac{dy}{dx})^2+12xy=0$

(3) $(\frac{dy}{dx})^2+x\frac{dy}{dx}-3y^2=0$

(4) $\frac{dy}{dx}=P(x)y^2+Q(x)y+R(x)$

（其中 $P(x)$, $Q(x)$, $R(x)$ 为已知函数）

(5) $x\frac{d^2y}{dx^2}-5\frac{dy}{dx}+3xy=\sin x$

(6) $\frac{dy}{dx}+\cos y+2x=0$

(7) $\frac{d^3y}{dx^3}-(\frac{dy}{dx})^4+x^2y=0$

(8) $(7x^3-3y^2)dx+(5x+y)dy=0$

2. 试验证下面的函数均为方程 $\frac{d^2y}{dx^2}+\omega^2y=0$ 的解，这里 $\omega>0$ 是常数.

(1) $y=\cos\omega x$　　(2) $y=c_1\cos\omega x$（c_1 是任意常数）

(3) $y=\sin\omega x$　　(4) $y=c_2\sin\omega x$（c_2 是任意常数）

(5) $y=c_1\cos\omega x+c_2\sin\omega x$（$c_1$, c_2 是任意常数）

(6) $y=A\sin(\omega x+B)$（A, B 是任意常数）

3. 验证下列各函数是相应微分方程的解.

(1) $y=ce^{\int p(x)dx}$, $\frac{dy}{dx}=p(x)y$

(2) $y=2+c\sqrt{1-x^2}$, $(1-x^2)y'+xy=2x$

(c 为任意常数)

(3) $y=e^x$, $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$

(4) $y=-\frac{1}{x}$, $x^2y'=x^2y^2+xy+1$

(5) $y=c_1e^{kx}+c_2e^{-kx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}-k^2y=0$

(c_1, c_2 为常数)

(6) $y=-\frac{g(x)}{f(x)}$, $y'=\frac{f'(x)}{g(x)}y^2-\frac{g'(x)}{f(x)}$

4. 给定一阶微分方程 $\frac{dy}{dx}=2x$

(1) 求出它的通解;

(2) 求通过点(1,4)的特解;

(3) 求出与直线 $y=2x+3$ 相切的解;

(4) 求出满足条件 $\int_0^1 ydx=2$ 的解

(5) 绘出(2),(3),(4)中的积分曲线.

5. 对微分方程 $4x^2y'^2-y^2=xy^3$,证明其积分曲线关于坐标原点(0,0)成中心对称的曲线,也是此微分方程的积分曲线.

6. 物体在空气中冷却的速度与物体和空气的温度成比例,如果物体在 20 分钟内由 100°C 冷至 60°C,那么,在多久的时间内,这个物体的温度达到 30°C,假设空气的温度为 20°C.

7. 试建立分别具有下列性质的曲线所满足的微分方程.

(1) 曲线上任一点的切线与坐标原点到这点的连线夹角为定角 α;

(2) 曲线上任一点的切线介于两坐标轴之间的部分等于定长 l;

(3) 曲线上任一点的切线与两坐标轴所围成的三角形的面积

都等于常数；

（4）曲线上任一点的切线的纵截距是切点的横坐标和纵坐标的等差中项；

（提示：过(x,y)的切线的横截距和纵截距分别为$x-\frac{y}{y'}$和$y-xy'$）

8. 求以初速度v_0在空气上铅直上抛的物体的运动方程. 设该物体的质量为m，物体所受的阻力与速度的平方成正比例.

9. 一容器内盛有200升的盐水，含盐s_0斤. 设从$t=0$开始以4升/分的速度向容器内注入含盐0.5斤/升的盐水，经充分搅拌后又以同样的速度流出容器. 试求任何时刻$t>0$容器内盐的浓度所应满足的微分方程.

第二章　微分方程的初等解法

微分方程发展的初期，即从十七世纪后期牛顿(Newton)和莱布尼兹(Leibniz)发明微积分以后至十八世纪末，研究的主题是：设法把当时遇到的一些类型的微分方程的求解问题化为积分(求原函数)的问题，这类方法，习惯上称之为初等积分法. 但能用初等积分方法求解的微分方程的类型很有限. 一般的微分方程是没有初等解法的，这很像求解 n 次代数方程，能用四则运算及方根把解表示出来的代数方程也是少数. 然而这并不影响我们的讨论，因为能用初等解法求解的方程，在实际问题出现的微分方程中仍占有相当的部分，因此掌握这类方程的解法还是有重要的实际意义的. 本章主要讨论一阶微分方程的初等解法.

§2.1　变量分离方程与变量替换

2.1.1　变量分离方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = f(x)\varphi(y) \tag{2.1}$$

的方程称为**变量分离方程**. 这种方程的特点是：右端是只含 x 的函数 $f(x)$ 和只含 y 的函数 $\varphi(y)$ 的乘积，且 $f(x)$，$\varphi(y)$ 分别是 x 和 y 的连续函数.

如果 $\varphi(y)\neq 0$，我们可将(2.1)改写成

$$\frac{dy}{\varphi(y)} = f(x)dx \tag{2.2}$$

这叫做"分离变量". 如果 y 作为 x 的函数是方程(2.1)的解,那么(2.2)式的两端是彼此恒等的微分. 两边积分,就得到

$$\int \frac{dy}{\varphi(y)} = \int f(x)dx + c \tag{2.3}$$

这里我们把常数 c 明确地表示出来,而把 $\int \frac{dy}{\varphi(y)}$, $\int f(x)dx$ 分别理解为 $\frac{1}{\varphi(y)}$, $f(x)$ 的某一原函数. 如无特别声明,今后也作这样的理解. 当然常数 c 的取值必须保证(2.3)有意义为前提.

把(2.3)式作为确定 y 是 x 的原函数的关系式. 容易验证由(2.3)所确定的原函数 $y=y(x,c)$,对任一个常数 c,都满足方程(2.1),因而(2.3)是方程(2.1)的通解.

如果存在 y_0,使得 $\varphi(y_0)=0$,由直接代入可知 $y\equiv y_0$ 也是方程(2.1)的解. 但可能它不包含在方程的通解(2.3)中,这时应当予以补上.

例1 求解方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\sqrt{1-y^2}}{\sqrt{1-x^2}}$$

解 将方程的变量分离,得到

$$\frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, |x| < 1, |y| < 1$$

两边积分便得到通解 $\arcsin y = \arcsin x + c$,进一步可得:

$$y = \sin(\arcsin x + c) = x\cos c + \sqrt{1-x^2}\sin c$$
$$= x\sqrt{1-c_1^2} + c_1\sqrt{1-x^2}$$

其中常数 $c_1 = \sin c$,而 c 为任意常数.

容易看出 $y=\pm 1$ 也是方程的解,但它不包含在上述的通解

中.

对于初值问题,我们可以用两种方法求解:或者利用初值条件 $y(x_0)=y_0$ 确定出通解(2.3)中的 c,或者把方程(2.2)的两端分别自 y_0 至 y 及从 x_0 至 x 积分,得到

$$\int_{y_0}^{y}\frac{dy}{\varphi(y)}=\int_{x_0}^{x}f(x)dx \tag{2.4}$$

例 2　试求下列初值问题的解

$$e^y\frac{dy}{dx}-x-x^3=0\qquad y(1)=1$$

解　方法 I:把方程写成下面的形式

$$e^y dy=(x+x^3)dx$$

两边积分可得通解

$$e^y=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+c$$

令 $x=1,y=1$ 得到 $1=\ln(\frac{3}{4}+c)$,由此得到 $c=e-\frac{3}{4}$,因此初值问题的解为:

$$y=\ln(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+e-\frac{3}{4})$$

方法 II:同样把方程写成 $e^y dy=(x+x^3)dx$,再由(2.4)有

$$\int_1^y e^y dy=\int_1^x(t+t^3)dt$$

因而　$$e^y-e=\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{4}$$

于是　$$y=\ln(\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{4}x^4+e-\frac{3}{4}).$$

例 3　求初值问题

$$e^x dx-ydy=0,y(0)=1$$

的解.

解 由(2.4)有

$$\int_1^y y dy = \int_0^x e^t dt$$

因而$(\frac{1}{2}y^2-\frac{1}{2})=e^x-1$，即$y^2=2e^x-1$，$y=\pm\sqrt{2e^x-1}$. 由于$y(0)=1$故$y=\sqrt{2e^x-1}$. 为了保证$y$为实值及$\frac{dy}{dx}$的存在，必须限制$x$使$2e^x-1>0$，所以初值问题的定义区间应为$x>\ln\frac{1}{2}$.

例4 第一章§1.2例6关于生物总数的微分方程(1.37)

$$\frac{dp}{dt}=ap-bp^2 \tag{2.5}$$

其中a,b为常数且为正.

解 (i)当不考虑竞争项$-bp^2$时，方程(2.5)变成

$$\frac{dp}{dt}=ap \tag{2.6}$$

容易求出方程(2.6)的通解$p=ce^{at}$. 如果考虑初值条件$p(t_0)=p_0$，那么相应的初值问题就是马尔萨斯方程的初值问题，其解为$p(t)=p_0e^{a(t-t_0)}$. 即遵循马尔萨斯总数增长定律的任何物种的生物总数都随时间按指数函数的方式增长. 当生命系数a取0.02时，这个公式非常准确地反映了在1700年—1961年期间估计的人口总数. 但在几百年以后，由于人口基数将增加很多，这个数学模型就不合理了.

方程(2.6)不仅是生物总数的数学模型，也是放射性物质衰变的数学模型，只不过常数a换成常数$-k(k>0)$. 如果能测得在初始时刻t_0放射性物质的数量为p_0，便可得到在任意时刻t，放射性物质的数量为$p(t)=p_0e^{-kt}$，且随着时间t的增大，$p(t)$越来越少，最终趋于零. 这与实际的结果是相符的.

(ii)当群体内部存在竞争时，讨论方程(2.5)的解. 注意到a, b

为常数，故可按变量分离方法求解.

$$\frac{dp}{ap-bp^2}=dt \tag{2.7}$$

设在 t_0 时刻的生物总数为 p_0，即 $p(t_0)=p_0$，利用(2.4)有：

$$t-t_0=\int_{p_0}^{p}\frac{dp}{ap-bp^2}$$

$$=\int_{p_0}^{p}\frac{1}{a}\left(\frac{1}{p}+\frac{b}{a-bp}\right)dp$$

$$=\frac{1}{a}\ln\frac{p(a-bp_0)}{p_0(a-bp)}$$

由此可解出

$$p(t)=\frac{ap_0}{bp_0+(a-bp_0)e^{-a(t-t_0)}} \tag{2.8}$$

由(2.8)可以看出，当 $t\to+\infty$ 时 $p(t)\to\frac{a}{b}$，且当 $0<p_0<\frac{a}{b}$ 时 $p(t)$ 是单增函数. 此外，由 $\frac{d^2p}{dt^2}=a\frac{dp}{dt}-2bp\frac{dp}{dt}=(a-2bp)(a-bp)p$ 可以看出，当 $p<\frac{a}{2b}$ 时，$\frac{dp}{dt}$ 是增加的；而当 $p>\frac{a}{2b}$ 时，$\frac{dp}{dt}$ 是单减的. 上述讨论表明：在生物总数达到其极限值 $\frac{a}{b}$ 的一半以前的期间是加速生长期. 过了这一时刻后，生长的速度逐渐下降，而成为减速生长期. 这个结论，被在试管中培养的原生物草履虫的实验所证实.

但当考虑人口总数时，情况就复杂多了，众多的因素对生命系数 a，b 有重大影响.

如果 a，b 不是常数，而是 t 的函数，微分方程(2.7)可按下段的伯努利方程的求解方法进行.

例 5 求初值问题 $(1+e^y)\frac{dy}{dx}=\cos x$，$y(\frac{\pi}{2})=3$，的解.

解 由(2.4)有

$$\int_3^y (1+e^y)dy = \int_{\frac{\pi}{2}}^x \cos t dt$$

于是 $$y + e^y = 2 + e^3 + \sin x$$

因不能由上式解出 $y=y(x)$. 所以这个初值问题只能得到隐式解而不是显式解. 事实上，对大多数变量分离的方程来说，通常只能得到隐式解.

2.1.2 可化为变量分离的方程

有些微分方程，看上去并不是变量分离的，但是通过一次或多次的变量替换可化为变量分离的方程. 利用变量替换求解微分方程是一种常用的技巧. 在本章中，我们将反复应用这一技巧，希望读者能细心体会.

(1)齐次方程

方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{2.9}$$

称为**一阶齐次微分方程**，如果右端函数 $f(x,y)$ 是 x,y 的零次齐次函数，即对每个实数 t 恒有

$$f(tx,ty) \equiv f(x,y) \tag{2.10}$$

在恒等式(2.10)中令 $t=\frac{1}{x}$，可得

$$f(x,y) \equiv f(1,\frac{y}{x}) \triangleq g(\frac{y}{x})$$

则方程(2.9)可写成：

$$\frac{dy}{dx} = g(\frac{y}{x}) \tag{2.11}$$

例如微分方程

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2},$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y\sin\frac{y}{x}}{x-y\cos\frac{y}{x}},\quad (x^2+y^2)dx+2xydy=0$$

可以分别改写成

$$\frac{dy}{dx}=\frac{1+(\frac{y}{x})^2}{1-(\frac{y}{x})^2},\quad \frac{dy}{dx}=\frac{1+\frac{y}{x}\sin\frac{y}{x}}{1-\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}},$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2}[(\frac{y}{x})+(\frac{x}{y})].$$

所以它们都是一阶齐次微分方程.

为了解方程(2.11),自然想到作变换 $u=\frac{y}{x}$,即 $y=xu$.于是 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$,代入(2.11),便得到 u 所适合的方程:

$$\frac{du}{dx}=\frac{g(u)-u}{x} \tag{2.12}$$

这是一个变量分离的方程,若 $g(u)-u\neq 0$,则可求出(2.12)的通解为:

$$\int\frac{du}{g(u)-u}=\ln|x|-\ln|c| \tag{2.13}$$

或 $$x=ce^{\int\frac{du}{g(u)-u}}$$

代回原来的变量,便得到(2.11)的通解.

如果 $g(u)-u=0$ 有解 $u=u_0$,则方程(2.12)还有解 $u=u_0$,从而方程(2.11)除了有通解(2.13)外,还有解 $y=u_0x$,且一般不含在通解中.

例 6 求解方程

$$x\frac{dy}{dx}+2\sqrt{xy}=y(x<0).$$

解 将方程改写成

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{\frac{y}{x}}+\frac{y}{x}$$

这是齐次方程. 以 $u=\frac{y}{x}$ 及 $\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$ 代入方程，原方程化为

$$x\frac{du}{dx}=2\sqrt{u}$$

分离变量后，再两边积分，可以得到通解

$$\sqrt{u}=\ln(-x)+c$$

即 $$u=[\ln(-x)+c]^2 \qquad (\ln(-x)+c>0)$$

这里 c 是任意常数，代回原来的变量，得原方程的通解为：

$$y=x[\ln(-x)+c]^2 \qquad (\ln(-x)+c>0)$$

此外还有解 $y\equiv0$，它不包含在通解中.

例 7 探照灯反射镜面方程(§1.2 例 8)

解 由§1.2 例 8 可知探照灯反射镜面的母线 $y=f(x)$ 应满足的方程为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x+\sqrt{x^2+y^2}} \tag{2.14}$$

这是齐次方程. 引入新变量 $u=\frac{y}{x}$，可将它化为变量分离的方程，再经直接积分，即可求得方程的解，这个求解过程留给读者完成.

在齐次方程的求解中，也可以把 x 看作是 y 的函数，此时方程经过变换 $v=\frac{x}{y}$，而化为变量分离的方程. 以方程(2.14)为例，由 $x=vy$ 得 $\frac{dx}{dy}=v+y\frac{dv}{dy}$，代入(2.14)得

$$v+y\frac{dv}{dy}=v+\mathrm{Sgn}y\sqrt{1+v^2}$$

这里 $\mathrm{Sgn}y$ 为 y 的符号函数，于是

$$\frac{dy}{y} = \operatorname{Sgn} y \frac{dv}{\sqrt{1+v^2}} \tag{2.15}$$

积分(2.15)，并代回原来变量，经过简单整理，最后得

$$y^2 = c(c + 2x) \tag{2.16}$$

其中 c 为任意正常数.

(2.16)就是所求的平面曲线，它是抛物线. 因此，反射镜面的形状为旋转抛物面.

$$y^2 + z^2 = c(c + 2x)$$

(2)可化为齐次方程的方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{a_1x + b_1y + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{2.17}$$

的方程可以通过变量替换化为变量分离的方程，这里 a_1,a_2,b_1,b_2,c_1,c_2 均为常数. 当 $c_1=c_2=0$ 时方程(2.17)就是齐次方程，现设 c_1，c_2 至少有一个不为零，分二种情形来讨论：

(1) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}=0$ 即 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}$ 的情形. 设比值为 k，即 $\frac{a_1}{a_2}=\frac{b_1}{b_2}=k$，则方程可写成

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{k(a_2x + b_2y) + c_1}{a_2x + b_2y + c_2}\right) \tag{2.18}$$

作未知函数的替换 $u=a_2x+b_2y$，则 $\frac{du}{dx}=a_2+b_2\frac{dy}{dx}$. 由(2.17)得

$$\frac{du}{dx} = a_2 + b_2 f\left(\frac{ku + c_1}{u + c_2}\right) \tag{2.19}$$

这显然是变量分离方程.

(2) $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}\neq 0$ 引进新的变量 X,Y：$x=X+\alpha$，$y=Y+\beta$ 其中 α,β 是待定常数，代入(2.17)得：

$$\frac{dy}{dX}=f\left(\frac{a_1(X+\alpha)+b_1(Y+\beta)+c_1}{a_2(X+\alpha)+b_2(Y+\beta)+c_2}\right)$$

$$=f\left(\frac{a_1X+b_1Y+a_1\alpha+b_1\beta+c_1}{a_2X+b_2Y+a_2\alpha+b_2\beta+c_2}\right)\tag{2.20}$$

为使(2.20)是齐次的,显然应选取 α,β,使

$$\begin{cases}a_1\alpha+b_1\beta+c_1=0\\ a_2\alpha+b_2\beta+c_2=0\end{cases}\tag{2.21}$$

由于 $\Delta=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq0$,故可以找到方程组(2.21)唯一的一组解 α,β. 于是方程(2.20)变成

$$\frac{dY}{dX}=f\left(\frac{a_1X+b_1Y}{a_2X+b_2Y}\right)=g\left(\frac{Y}{X}\right)\tag{2.22}$$

这是一个齐次方程.

因此,我们得到这类方程求解的一般步骤:

1° 解联立代数方程组(2.21),设其解为 $\bar{\alpha},\bar{\beta}$;

2° 作变换 $\begin{cases}X=x-\bar{\alpha}\\ Y=y-\bar{\beta}\end{cases}$,将方程(2.17)化为齐次方程(2.22);

3° 再经变换 $u=\dfrac{Y}{X}$,将方程(2.22)化为变量分离方程;

4° 求解上述变量分离方程,最后代回原来变量可得原方程(2.17)的解.

例 8 求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x-y+1}{x+y-3}\tag{2.23}$$

解 解方程组

$$\begin{cases}\alpha-\beta+1=0\\ \alpha+\beta-3=0\end{cases}$$

得 $\alpha=1$,$\beta=2$. 令 $x=X+1$,$y=Y+2$,代入(2.23)有

$$\frac{dY}{dX}=\frac{X-Y}{X+Y} \tag{2.24}$$

再令 $u=\frac{Y}{X}$，即 $Y=Xu$，则(2.24)化为

$$\frac{dX}{X}=\frac{1+u}{1-2u-u^2}du$$

两边积分得 $\ln X^2=-\ln|u^2+2u-1|+\tilde{c}$，因此

$$X^2(u^2+2u-1)=\pm e^{\tilde{c}}$$

记 $c_1=\pm e^{\tilde{c}}$，并代回原变量，得通解

$$Y^2+2XY-X^2=c_1$$

即 $$(y-2)^2+2(x-1)(y-2)-(x-1)^2=c_1$$

此外，容易验证

$$u^2+2u-1=0$$

即 $$Y^2+2XY-X^2=0$$

也是方程(2.24)的解，因此方程(2.23)的通解为

$$y^2+2xy-x^2-6y-2x=c$$

其中 c 为任意常数，包括 $c=0$.

通过上面的讨论，我们可以看到，给定一个微分方程，如果能通过适当的初等变换化为变量分离的方程，也就可解了. 但由于变换要根据每一个方程的特点去寻找，无一定规律可循，这就需要多做习题、总结经验，才能达到熟练的地步，初等变换是解微分方程的有力工具之一，在今后的讨论中会有更深刻的体会. 下面再举二个例子，从中可以看出初等变换在求解过程中所起的作用.

例 9 求解方程

$$\frac{dy}{dx}+x^3(y-x)^2=1$$

解 将方程改写成

$$\left(\frac{dy}{dx}-1\right)+x^3(y-x)^2=0$$

显然，设 $u=y-x$，就可把原方程化为变量分离方程

$$\frac{du}{dx}+x^3u^2=0$$

不难得到上述方程的解为 $u=(\frac{1}{4}x^4+c)^{-1}$，其中 c 为任意常数，从而原方程的通解为

$$\frac{1}{y-x}=\frac{1}{4}x^4+c,$$

此外，还有特解 $y=x$

例 10　求解方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^6}{3xy^5+3x^2y^2}$$

解　将方程改写成

$$3y^2\frac{dy}{dx}=\frac{x^2+y^6}{xy^3+x^2}=\frac{1+(\frac{y^3}{x})^2}{\frac{y^3}{x}+1}$$

令 $u=\frac{y^3}{x}$，$y^3=xu$，则 $3y^2\frac{dy}{dx}=u+x\frac{du}{dx}$，

代入原方程得

$$u+x\frac{du}{dx}=\frac{1+u^2}{1+u},\quad x\frac{du}{dx}=\frac{1-u}{1+u}$$

当 $u\neq 1$ 时，分离变量并两边积分得到通解

$$-u-2\ln|1-u|=\ln|x|+c$$

及特解 $u=1$. 因此我们得到原方程的通解为

$$-\frac{y^3}{x}-2\ln|1-\frac{y^3}{x}|=\ln|x|+c$$

即
$$y^3+2x\ln|x-y^3|=x\ln|x|-cx$$

此外，还有特解 $y^3=x$.

§ 2.2　恰当方程及积分因子

2.2.1　恰当方程

一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)$$

可以写成微分的形式

$$f(x,y)dx-dy=0$$

也可以写成对称形式

$$M(x,y)dx+N(x,y)dy=0 \tag{2.25}$$

这里 x,y 处于完全平等的地位. 假设 $M(x,y)$ 和 $N(x,y)$ 在矩形域

$$R=\{a\leqslant x\leqslant b,c\leqslant y\leqslant d\}$$

上连续，且具有一阶连续偏导数. 另外，还假设 $M(x,y)$，$N(x,y)$ 不同时为零.

如果(2.25)的左端恰好为某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分，即

$$du=M(x,y)dx+N(x,y)dy\equiv\frac{\partial u}{\partial x}dx+\frac{\partial u}{\partial y}dy \tag{2.26}$$

则称方程(2.25)为**恰当方程**或**全微分方程**. 这时方程(2.25)的通解为 $u(x,y)\equiv c$，这里 c 为任意常数，而函数 $u(x,y)$ 称为微分式(2.26)的**原函数**. 因此只要能找到原函数 $u(x,y)$，恰当方程就可解了. 在一些简单的情况下，可以用观察法求出 $u(x,y)$.

例1　求解方程

$$1+\cos(x+y)+\cos(x+y)\frac{dy}{dx}=0$$

解　方程可写成

$$[1+\cos(x+y)]dx+\cos(x+y)dy$$

$$= dx + \cos(x+y)(dx+dy) = d[x+\sin(x+y)] = 0$$

因此，原函数

$$u(x,y) = x + \sin(x+y) = c$$

于是

$$y = -x + \arcsin(c-x)$$

但是，多数方程靠观察是难以判断是否为恰当方程，因此，自然会提出如下的问题：

(1) 如何判断方程(2.25)是否为恰当方程?

(2) 如果(2.25)是恰当方程，怎样求原函数$u(x,y)$?

(3) 如果(2.25)不是恰当方程能否设法把方程(2.25)转化成恰当方程?

下面的定理可以很好地回答问题(1)(2).

定理 设函数$M(x,y)$，$N(x,y)$在区域$R=\{a\leqslant x\leqslant b, c\leqslant y\leqslant d\}$上连续，且具一阶连续偏导数，则(2.25)为恰当方程的充要条件是

$$\frac{\partial M}{\partial y} \equiv \frac{\partial N}{\partial x} \tag{2.27}$$

在R内处处成立.

证 必要性. 设(2.25)为恰当方程，那么依定义必存在函数$u(x,y)$使得

$$du \equiv M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

所以，$\frac{\partial u}{\partial x}=M(x,y)$，$\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$. 将此二式分别关于$y$，$x$求偏导数，得到

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial M}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

由于$M(x,y)$，$N(x,y)$的连续可微性，所以

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

即(2.27)在 R 内成立.

充分性 设(2.27)在 R 内成立,现要找一个二元函数 $u(x,y)$,使它满足

$$du = M(x,y)dx + N(x,y)dy = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

由 $M(x,y)=\frac{\partial u}{\partial x}$,将 y 看作参数,对 x 积分得到

$$u(x,y) = \int M(x,y)dx + \varphi(y) \qquad (2.28)$$

其中 $\varphi(y)$ 为 y 的任意连续可微函数,现要证明,可以选取合适的 $\varphi(y)$,使得 $\frac{\partial u}{\partial y}=N(x,y)$. 为此,将(2.28)的两端关于 y 求偏导数,得到

$$\frac{\partial u}{\partial y}= \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \varphi'(y) = N(x,y)$$

因此 $$\varphi'(y)= N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx \qquad (2.29)$$

可以证明,在(2.27)成立的前提下,(2.29)式的右端与 x 无关. 事实上,当我们对(2.29)式右端关于 x 求导时,有

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial x}\left[N(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] \\
&= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right] \\
&= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial}{\partial x}\int M(x,y)dx\right] \\
&= \frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y} \equiv 0
\end{aligned}$$

由于 M、N 具有连续的偏导数,所以上述的交换求导的顺序是允许的. 于是我们可以通过积分(2.29)式得到

$$\varphi(y) = \int\left[N - \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx\right]dy$$

将 $\varphi(y)$ 的表达式代人(2.28),即得

$$u(x,y)=\int M(x,y)dx+\int[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy$$

因此恰当方程的通解为

$$\int M(x,y)dx+\int[N(x,y)-\frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx]dy=c$$

证毕.

这个定理不仅给出了判断恰当方程的方法,而且也给出求恰当方程通解的具体过程.

例 2 求解方程

$$(y\cos x+2xe^y)dx+(\sin x+x^2e^y+2)dy=0 \quad (2.29)$$

解 $M=y\cos x+2xe^y$, $N=\sin x+x^2e^y+2$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}=\cos x+2xe^y=\frac{\partial N}{\partial x}$$

所以方程是恰当方程. 现求函数 $u(x,y)$,使它同时满足如下的两个方程.

$$\frac{\partial u}{\partial x}=y\cos x+2xe^y \quad (2.30)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin x+x^2e^y+2 \quad (2.31)$$

由(2.30)关于 x 积分得到

$$u(x,y)=y\sin x+x^2e^y+\varphi(y) \quad (2.32)$$

为了确定 $\varphi(y)$,将(2.32)式关于 y 求导

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\sin x+x^2e^y+\varphi'(y)$$

要使这个等式与(2.31)一致,必须有 $\varphi'(y)=2$,从而 $\varphi(y)=2y$. 所以

$$u(x,y)=y\sin x-x^2e^y+2y$$

故得方程(2.29)的通解为

$$y\sin x + x^2e^y + 2y = c$$

［注］ 定理中的区域 R 可以不必限制为矩形域而为平面上的单连通区域，结论同样成立.

在判断方程为恰当方程后，有时并不需按上述一般的方法求解而可以采用“分项组合”. 先把那些本身已构成全微分的项分出，再把剩下的项“凑”成全微分. 这种方法要求记住一些简单的二元函数的全微分，如

$$\left.\begin{aligned}
&ydx + xdy = d(xy)\\
&\frac{ydx - xdy}{y^2} = d\left(\frac{x}{y}\right)\\
&\frac{-ydx + xdy}{x^2} = d\left(\frac{y}{x}\right)\\
&\frac{ydx - xdy}{xy} = d\left(\ln\left|\frac{x}{y}\right|\right)\\
&\frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} = d\left(\operatorname{arctg}\frac{x}{y}\right)\\
&\frac{ydx - xdy}{x^2 - y^2} = \frac{1}{2}d\left(\ln\left|\frac{x-y}{x+y}\right|\right)
\end{aligned}\right\} \tag{2.33}$$

例 3　求方程 $(3x^2+6xy^2)dx+(6x^2y+4y^3)dy=0$ 的通解.

解　由于 $M=3x^2+6xy^2$，　$N=6x^2y+4y^3$，　又 $\dfrac{\partial M}{\partial y}=12xy=\dfrac{\partial N}{\partial x}$ 于是方程是恰当方程. 用“分项组合”的方法求通解. 把方程重新组合成

$$3x^2dx + 4y^3dy + 6xy^2dx + 6x^2ydy = 0$$

即有
$$dx^3 + dy^4 + 3y^2dx^2 + 3x^2dy^2 = 0$$

或
$$d(x^3 + y^4 + 3x^2y^2) = 0$$

因此通解为

$$x^3 + y^4 + 3x^2y^2 = c$$

例 4　求解初值问题

$$4x^3e^{x+y}+x^4e^{x+y}+2x+(x^4e^{x+y}+2y)\frac{dy}{dx}=0,\ y(0)=1$$

解　因 $M=4x^3e^{x+y}+x^4e^{x+y}+2x$，　$N=x^4e^{x+y}+2y$

又
$$\frac{\partial M}{\partial y}=(x^4+4x^3)e^{x+y}=\frac{\partial N}{\partial x}$$

所以方程是恰当方程. 用"分项组合"求出通解. 原方程可写成

$$2xdx+2ydy+(x^4+4x^3)e^{x+y}dx+x^4e^{x+y}dy=0$$

即
$$dx^2+dy^2+d(x^4e^{x+y})=0$$

方程的通解为 $x^2+y^2+x^4e^{x+y}=c$. 由条件 $y(0)=1$，得 $c=1$. 因此初值问题的解为

$$x^2+y^2+x^4e^{x+y}=1$$

2.2.2　积分因子

现在解决问题(3)：当方程(2.25)不是恰当方程时，能否设法使它转化成为恰当方程. 积分因子就是为了解决这个问题而引进的概念.

如果存在连续函数 $\mu=\mu(x,y)\neq 0$ 使得方程

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy=0 \tag{2.34}$$

为一恰当方程，即存在函数 $v(x,y)$，使

$$\mu(x,y)M(x,y)dx+\mu(x,y)N(x,y)dy\equiv dv$$

则称 $\mu(x,y)$ 为**方程(2.25)的积分因子**.

这时 $v(x,y)=c$ 是方程(2.34)的通解，因而也是(2.25)的通解. 例如方程

$$ydx-xdy=0 \tag{2.35}$$

并非恰当方程，但乘上 y^{-2} 后，就成为恰当方程. 因而方程(2.35)的通解为 $\frac{x}{y}=c$，所以 $\mu(x,y)=y^{-2}$ 就是方程(2.35)的一个积分因子. 但由(2.33)可以看出(2.35)有各种不同的积分因子 x^{-2}，y^{-2}，

$(xy)^{-1}$，$(x^2\pm y^2)^{-1}$等等. 可以证明，只要方程有解，就存在着积分因子，而且不是唯一的，从而在具体求解过程中，由于所选择的积分因子不同，所得到的通解可能具有不同的形式，但它们所定义的积分曲线是一样的.

如何求积分因子？观察法自然是最简便的途径. 但当观察有困难时，为了寻找积分因子，我们可以根据函数 $\mu(x,y)\neq 0$ 为方程(2.25)的积分因子的充要条件

$$\frac{\partial(\mu M)}{\partial y}\equiv\frac{\partial(\mu N)}{\partial x}$$

即
$$N\frac{\partial\mu}{\partial x}-M\frac{\partial\mu}{\partial y}=\mu\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\tag{2.36}$$

来决定 $\mu(x,y)$. 但方程(2.36)是一个以 $\mu(x,y)$ 为未知函数的一阶偏微分方程. 求解偏微分方程一般比求常微分方程困难. 其实，我们并不需要求方程(2.36)的通解，而只需求出它的一个非零特解就够了. 这个要求，在某些特殊情形下是可以做到的.

例如我们可以寻找方程(2.36)的仅与 x 有关的解 $\mu=\mu(x)$. 那么，$\frac{\partial\mu}{\partial y}=0$，$\frac{\partial\mu}{\partial x}=\frac{d\mu}{dx}$，这时(2.36)就变成

$$N\frac{d\mu}{dx}=\left(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}\right)\mu$$

即
$$\frac{d\mu}{\mu}=\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}dx\tag{2.37}$$

由此可知，方程(2.25)有一个仅与 x 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{N}=\psi(x)\tag{2.38}$$

这里 $\psi(x)$仅为 x 的函数. 假定条件(2.38)成立. 根据(2.37)可以

求得方程(2.25)的一个积分因子为

$$\mu(x)=\exp(\int\psi(x)dx) \tag{2.39}$$

同样,方程(2.25)有仅与 y 有关的积分因子的充要条件是

$$\frac{\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}}{-M}=\varphi(y) \tag{2.40}$$

这里 $\varphi(y)$ 仅是 y 的函数,从而可求得方程(2.25)的一个积分因子

$$\mu(y)=\exp(\int\varphi(y)dy) \tag{2.41}$$

例 5 求方程 $(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+(x^2+y^2)dy=0$ 的通解.

解 $M=2xy+x^2y+\frac{y^3}{3}$, $N=x^2+y^2$,

$$\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x}=2x+x^2+y^2-2x=x^2+y^2\neq 0$$

因而方程不是恰当方程,但

$$\frac{1}{N}(\frac{\partial M}{\partial y}-\frac{\partial N}{\partial x})=1$$

故有一个仅与 x 有关的积分因子 $\mu=e^x$. 以 $\mu=e^x$ 乘以方程的两边得

$$e^x(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+e^x(x^2+y^2)dy=0 \tag{2.42}$$

方程(2.42)为恰当方程. 为求 $v(x,y)$,由 $\frac{\partial v}{\partial x}=\mu M$ 有

$$\begin{aligned} v(x,y)&=\int\mu(x)M(x,y)dx+\varphi(y) \\ &=\int e^x(2xy+x^2y+\frac{y^3}{3})dx+\varphi(y) \\ &=e^x(x^2y+\frac{y^3}{3})+\varphi(y) \end{aligned}$$

由 $$\frac{\partial v}{\partial y}=e^x(x^2+y^2)+\varphi'(y)=e^x(x^2+y^2)$$

可算出 $\varphi(y)=$常数，不妨取 $\varphi(y)=0$，于是得通解

$$e^x(x^2+\frac{y^3}{3})=c$$

积分因子一般是不容易求得的. 我们可先求特殊形状的积分因子如只与 x 有关或只与 y 有关的积分因子或通过观察"分项组合"来求积分因子. 用积分因子方法解题，需要一定的技巧，就要多做习题，从中体会其诀窍.

例 6 求解方程 $\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}+\sqrt{1+(\frac{x}{y})^2}\qquad(y>0)$

解 这是齐次方程，可用前面介绍的方法，也可用积分因子法. 先把方程改写成

$$xdx+ydy=\sqrt{x^2+y^2}dx$$

或 $$d(x^2+y^2)=2\sqrt{x^2+y^2}dx$$

容易看出，此方程有积分因子 $\mu=(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}$. 以 μ 乘之得

$$\frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}d(x^2+y^2)=dx$$

故方程的通解为

$$(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}=2x+c$$

可以肯定：对于这个方程，用积分因子法求解，要比前面讲过的变量替换的求解方法简单的多. 事实上，用积分因子法的观点可以把许多初等解法统一起来，例如：

变量分离的方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x)g(y).$$

有积分因子 $\mu(x,y)=\frac{1}{g(y)}$，$(g(y)\neq0)$.

齐次方程

$$\frac{dy}{dx}=g(\frac{y}{x})$$

有积分因子 $\mu(x,y)=[xg(\frac{y}{x})-y]^{-1}(xg(\frac{y}{x})-y\neq 0)$.

§ 2.3 一阶线性方程及有关方程

2.3.1 一阶线性方程的解法

一阶线性方程的一般形式为

$$a(x)\frac{dy}{dx}+b(x)y+c(x)=0$$

在 $a(x)\neq 0$ 的区间上可以写成

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y+Q(x) \tag{2.43}$$

本节主要讨论形如(2.43)的线性方程，并假设 $p(x)$，$Q(x)$在所考虑的区间上是连续的. 若 $Q(x)\equiv 0$ 称

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y \tag{2.44}$$

为方程(2.43)相应的**齐次一阶线性方程**. 若$Q(x)\not\equiv 0$，则(2.43)为**非齐次一阶线性方程**，$Q(x)$称为非齐次项或自由项.

(2.44)是变量分离的方程，可用§2.1 介绍的方法求解，得到通解为

$$y=ce^{\int p(x)dx} \tag{2.45}$$

其中 c 为任意数. 此外，$y=0$也是方程(2.44)的一个解. 如果允许(2.45)中的 $c=0$，那么 $y=0$也包含在通解(2.45)之中.

现在讨论非齐次线性方程(2.43)通解的求法. 主要介绍**常数变易法和积分因子方法**. 先介绍常数变易法. 不难看出方程(2.44)

是方程(2.43)的特殊情况，二者既有联系又有区别. 因此可以断定两个方程的解也应该有一定的联系而又有区别. 我们试图利用方程(2.44)的通解(2.45)求方程(2.43)的通解. 显然，如果(2.45)中 c 保持常数，它只能是(2.44)的通解而不是(2.43)的通解. 因此，我们设想：在(2.45)中将常数 c 变成 x 的待定函数 $c(x)$，使它满足(2.43)，从而确定出 $c(x)$. 为此令

$$y = c(x)\ e^{\int p(x)dx} \tag{2.46}$$

微分(2.46)式，得到

$$\frac{dy}{dx} = c'(x)\ e^{\int p(x)dx} + c(x)p(x)\ e^{\int p(x)dx} \tag{2.47}$$

以(2.46)、(2.47)代入(2.43)得

$$c'(x)\ e^{\int p(x)dx} + p(x)y = p(x)y + Q(x)$$

由此得到

$$c'(x) = e^{-\int p(x)dx}Q(x) \tag{2.48}$$

积分(2.48)后有

$$c(x) = \int Q(x)\exp(-\int p(x)dx)dx + \tilde{c} \tag{2.49}$$

这里 $\tilde{c}$ 是任意常数，将(2.49)代入(2.46)得到

$$y(x) = e^{\int p(x)dx}[\tilde{c} + \int Q(x)\exp(-\int p(x)dx)dx] \tag{2.50}$$

可以验证(2.50)是方程(2.43)的通解. 这种将常数变易为待定函数的方法通常称为**常数变易法**. 以后在非齐次的高阶线性方程和一阶线性方程组的求解中还要用到这种方法. 事实上，常数变易法也是一种变量替换方法，通过变换(2.46)把方程(2.43)的求解化为对变量分离的方程(2.48)的求解. 由于计算公式(2.50)不易记住，在应用时常是遵循上述步骤求解，反而直接迅速.

现介绍利用积分因子法求(2.43)的通解. 把方程改写成

$$[p(x)y + Q(x)]dx - dy = 0 \tag{2.51}$$

不难看出(2.51)有与 x 有关的积分因子 $\mu = \mu(x) = \exp(-\int p(x)dx)$，以它乘以(2.51)得到

$$[p(x)\exp(-\int p(x)dx)y + Q(x)\cdot\exp(-\int p(x)dx)]dx$$

$$-\exp(-\int p(x)dx)dy = 0$$

即 $\quad yde^{-\int p(x)dx} + e^{-\int p(x)dx}dy - Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx = 0$

或写成 $\quad d(ye^{-\int p(x)dx}) - Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx = 0$

因此(2.43)的通解为 $ye^{-\int p(x)dx} - \int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx = c$

即

$$y = e^{\int p(x)dx}[c + \int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx] \tag{2.52}$$

这与用常数变易法所得的结果(2.50)完全一样.

例1 求方程 $(x+1)\dfrac{dy}{dx} - ny = e^x(x+1)^{n+1}$ 的通解.(n 为常数)

解 用常数变易法求解，先把方程化为标准形式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{n}{1+x}y + e^x(1+x)^n \tag{2.53}$$

容易求出(2.53)相应的齐次线性方程的通解为

$$y = c(1+x)^n \tag{2.54}$$

把(2.54)中的常数 C 看成 x 的待定函数 $c(x)$，即

$$y = c(x)(1+x)^n \tag{2.55}$$

微分之，得到

$$\frac{dy}{dx} = C'(x)(1+x)^n + n(1+x)^{n-1}c(x) \tag{2.56}$$

以(2.55)和(2.56)代入方程(2.53)，得到

$$C'(x)=e^x$$

积分后得到 $C(x)=e^x+\tilde{C}$，由此可得原方程的通解为

$$y=(1+x)^n(\tilde{C}+e^x)$$

这里 $\tilde{C}$ 为任意常数. 请读者再用积分因子法求解.

例2 求方程 $\frac{dy}{dx}=\frac{y}{2x-y^2}$ 的通解.

解 原方程不是线性方程，但可以把它改写成

$$\frac{dx}{dy}=\frac{2}{y}x-y \tag{2.57}$$

将 x 看作未知函数，y 看作自变量. 这样关于 x 及 $\frac{dx}{dy}$ 来说，方程(2.57)就是以 x 为未知函数的线性方程了. 用常数变易法可以得到原方程的通解为

$$x=y^2(\tilde{C}-\ln|y|)$$

这里 $\tilde{C}$ 为任意常数. 当然，也可用积分因子法直接求出原方程的通解，结果是一样的.

2.3.2 线性方程的性质

关于线性方程(2.43)，(2.44)，有如下重要性质：

性质1 若已知方程(2.43)的一特解，则(2.43)的通解可以表为相应的齐次线性方程(2.44)的通解与这一特解之和.

这一性质是公式(2.50)的直接推广. 在(2.50)式中第一项 $ce^{\int p(x)dx}$ 为相应齐线性方程(2.44)的通解，而第二项 $e^{\int p(x)dx}\int Q(x)e^{-\int p(x)dx}dx$ 则为非齐次线性方程(2.43)的一个特解. 今后还会看到，这个性质对任何线性微分方程(组)也成立.

性质2 若已知方程(2.43)的二个特解 $y_1(x)$，$y_2(x)$，则不用积分就可以得到非齐次线性方程(2.43)的通解为

$$y(x) = y_1(x) + C[y_1(x) - y_2(x)]$$

其中C为任意常数.

性质3 线性方程(2.43)经自变量代换$x=\varphi(t)$后,仍保持为线性方程,这里要求$\varphi'(t)\neq 0$

性质4 线性方程(2.43)经未知函数变换$y(x)=a(x)u+b(x)$,仍保持其线性性. 其中$a(x)$,$b(x)$为任何连续函数,且$a(x)\neq 0$.

性质3和性质4对其他线性方程(组)也成立,这些性质的证明由读者自己完成.

此外,当$p(x)$,$Q(x)$在$[a,b]$上连续时,由通解公式(2.50)可以看出一阶线性微分方程(2.43)的解在区间$[a,b]$上也有定义. 这种解的全局存在性是线性微分方程(2.43)所特有的. 方程(2.43)还有另一特点,就是由通解(2.50)可以确定出满足初值条件$y(x_0)=y_0$的初值问题解的表达式:

$$y = \exp\left(\int_{x_0}^{x} p(t)dt\right)\left[y_0 + \int_{x_0}^{x} Q(t)\exp\left(\int_{x_0}^{t} - p(s)ds\right)dt\right] \tag{2.58}$$

且(2.43)初值问题的解是唯一的.

这些结果的严格证明将在第三章中介绍.

2.3.3 可化为线性方程的方程

(1)伯努利(Bernoulli)方程

形如

$$\frac{dy}{dx} = p(x)y + Q(x)y^n \tag{2.59}$$

的方程,称为伯努利方程,这里$p(x)$,$Q(x)$为x的连续函数$n\neq 0$,1是实常数.

伯努利于1697年利用变量替换$u=y^{1-n}(n\neq 1)$把方程(2.59)

化为线性方程，事实上

$$\frac{du}{dx}=(1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx} \tag{2.60}$$

把(2.60)及 $u=y^{1-n}$ 代入(2.59)式得到

$$\frac{du}{dx}=(1-n)p(x)u+(1-n)Q(x) \tag{2.61}$$

这是线性方程，可按上面介绍的方法求得它的通解，然后代回原来的变量，便可得到(2.59)的通解. 此外，当 $n>0$ 时方程还有解 $y=0$.

例3 求方程 $\frac{dy}{dx}=6\frac{y}{x}-xy^2$ 的通解

解 这是 $n=2$ 的伯努利方程，令 $u=y^{-1}$，则 $\frac{du}{dx}=-y^{-2}\frac{dy}{dx}$. 代入原方程得线性方程

$$\frac{du}{dx}=-\frac{6}{x}u+x$$

求得通解为 $u=cx^{-6}+\frac{1}{8}x^2$，代回原来变量 y，得到

$$\frac{1}{y}=Cx^{-6}+\frac{1}{8}x^2 \qquad 或 \qquad \frac{x^6}{y}-\frac{x^8}{8}=C$$

这就是原方程的通解. 此外，还有解 $y\equiv 0$

(2) 黎卡提(Riccati)方程

近几年来在最佳控制等方面用到的一个古老方程——黎卡提方程：

$$\frac{dy}{dx}+p(x)y+Q(x)y^2=R(x) \tag{2.62}$$

刘维尔(Liouville)于1841年证明了在一般情形下这个方程不能由积分求解，但若已知这个方程的一个特解 $y_1(x)$，就可用变量替换把它化为伯努利方程，只要令

$$y=y_1(x)+u(x) \tag{2.63}$$

代入(2.62)式得到

$$y_1' - u' + p(x)(y_1 + u) + Q(x)(y_1 + u)^2 = R(x)$$

因 y_1 为(2.62)的特解，有

$$y_1' + p(x)y_1 + Q(x)y_1^2 = R(x)$$

故得关于 $u(x)$ 的伯努利方程

$$u' + [p(x) + 2Q(x)y_1]u + Q(x)u^2 = 0$$

例4 求方程 $\frac{dy}{dx}=y^2-\frac{2}{x^2}$ 的解.

解 通过观察，发现方程有一个特解 $y_1=\frac{1}{x}$. 令 $y=\frac{1}{x}+u$，由(2.64)得关于 u 伯努利方程：

$$u' = \frac{2u}{x} + u^2$$

$n=2$，再作变换 $v=u^{-1}$，所得的线性方程为：

$$\frac{dv}{dx} + \frac{2v}{x} = -1$$

利用公式或直接计算可得通解

$$v = cx^{-2} - \frac{x}{3}$$

由于 $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{v}$，故得原方程通解为：$y=\frac{1}{x}+\frac{3x^2}{3c-x^3}$

有些方程通过变量替换也可化为伯努利方程或黎卡提方程.

例5 求方程 $x\ln x\cdot\sin y\frac{dy}{dx}+\cos y(1-x\cos y)=0$ 的解.

解 原方程可写成

$$-x\ln x \cdot \frac{d\cos y}{dx} + \cos y = x\cos^2 y$$

令 $u=\cos y$，得伯努利方程

$$\frac{du}{dx} - \frac{1}{x\ln x}u = -\frac{u^2}{\ln x}$$

再令 $v=u^{-1}$，代入上式得

$$\frac{dv}{dx}+\frac{v}{x\ln x}=\frac{1}{\ln x}$$

此线性方程的通解为

$$v(x)=e^{-\int (x\ln x)^{-1}dx}\left[c+\int\frac{1}{\ln x}e^{\int (x\ln x)^{-1}dx}dx\right]$$

代回原变量得原方程通解为

$$(x+c)\cos y=\ln x$$

§2.4 一阶隐式方程

一阶隐式微分方程的一般形式为

$$F(x,y,y')=0 \tag{2.65}$$

如果能从(2.65)中解出导数 y' 的一个或若干个显式表达式 $y'=f_i(x,y)$，则可根据 $f_i(x,y)$ 的具体形式选择前面介绍的某种方法求解. 但如果难于解出 y'，或即使解出 y'，但其表达式相当复杂，则宜采用引进参数的方法使之变为导数已解出的类型. 这是本节处理问题的基本思想. 主要介绍以下四种类型：

2.4.1 可解出 y 或 x 的方程

(1)类型 $y=f(x,y')$

假定 $f(x,y')$ 有连续的偏导数，引进参数

$$p=\frac{dy}{dx}=y'$$

方程 $y=f(x,y')$ 化为

$$y=f(x,p) \tag{2.66}$$

将(2.66)式两边对 x 求导，并以 $p=\frac{dy}{dx}$ 代入，得到

$$p=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial p}\frac{dp}{dx} \tag{2.67}$$

(2.67)是关于 P 的一阶显式方程,若能求出(2.67)的通解为

$$p=\psi(x,c)$$

则原方程的通解为

$$y=f(x,\varphi(x,c));$$

若求出(2.67)的通解是

$$x=\psi(p,c)$$

则得原方程通解的参数表示

$$x=\psi(p,c) \qquad y=f(\psi(p,c),p);$$

若得到(2.67)的通解是

$$g(x,p,c)=0$$

则得原方程通解的参数表示:

$$g(x,p,c)=0 \qquad y=f(x,p).$$

例1 求解拉格朗日(Lagrange)方程

$$y=xf(y')+g(y') \tag{2.68}$$

解 记 $p=y'$,并对(2.68)的两边关于 x 求导,得到

$$\begin{aligned} p&=f(p)+xf'(p)\frac{dp}{dx}+g'(p)\frac{dp}{dx} \\ &=f(p)+[xf'(p)+g'(p)]\frac{dp}{dx} \end{aligned} \tag{2.69}$$

可以把方程(2.69)化为关于 x 的线性方程:

$$\frac{dx}{dp}+\frac{f'(p)x}{f(p)-p}=-\frac{g'(p)}{f(p)-p} \tag{2.70}$$

记(2.70)的通解为

$$x=c\varphi(p)+\psi(p)$$

其中 $\varphi(p)$,$\psi(p)$为确定的函数,则方程(2.68)通解的参数形式为:

$$x=c\varphi(p)+\psi(p) \qquad y=xf(p)+g(p)$$

其中 C 为任意常数,p 为参数.

例2 求解方程 $y=(y')^2-xy'+\frac{1}{2}x^2$.

解 令 $p=y'$,得到

$$y=p^2-xp+\frac{1}{2}x^2 \tag{2.71}$$

两边对 x 求导,得到

$$p=2p\frac{dp}{dx}-x\frac{dp}{dx}-p+x$$

或

$$\left(\frac{dp}{dx}-1\right)(2p-x)=0.$$

从$\frac{dp}{dx}-1=0$,解得 $p=x+c$,并把它代入(2.71)得方程通解

$$y=\frac{x^2}{2}+cx+c^2 \tag{2.72}$$

又从$2p-x=0$解得 $p=\frac{x}{2}$并代入(2.71)又得方程的一个解

$$y=\frac{x^2}{4} \tag{2.73}$$

注意此解与通解(2.72)中的每一条积分曲线均相切(见图2.1),这样的解我们称之为**奇解**.在下一章将给出奇解的确切定义.

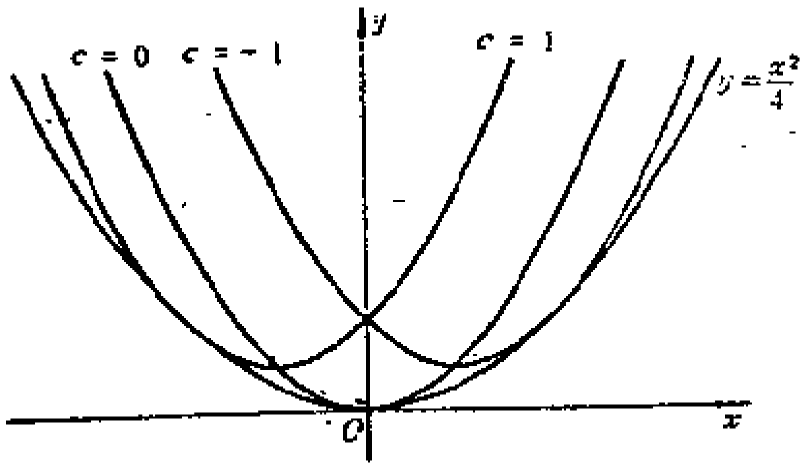


图 (2.1)

(2)类型 $x=f(y,y')$

这种类型的解法与上段完全类似，引进参数 $p=y'$，原方程变为

$$x=f(y,p) \tag{2.74}$$

将(2.74)的两边关于 y 求导数，然后以 $\frac{dx}{dy}=\frac{1}{p}$ 代入，得到

$$\frac{1}{p}=\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial p}\cdot\frac{dp}{dy} \tag{2.75}$$

方程(2.75)是关于 y、p 的显式方程，但它的导数 $\frac{dp}{dy}$ 已经解出，可用前几节所介绍的方法求解，按所得结果情况的不同，得原方程通解的不同表示形式，与上段相似.

例3　求解方程 $(y')^3-4xyy'+8y^2=0$

解　记 $p=y'$ 由原方程可解出

$$x=\frac{p^2}{4y}+\frac{2y}{p} \tag{2.76}$$

两边对 y 求导数，并以 p 换 y' 有

$$\frac{1}{p}=\left(\frac{p}{2y}-\frac{2y}{p^2}\right)\frac{dp}{dy}-\frac{p^2}{4y^2}+\frac{2}{p}$$

整理得

$$\frac{dp}{dy}\cdot\frac{p^3-4y^2}{2yp^2}=\frac{p^3-4y^2}{4y^2p}$$

或
$$\frac{p^3-4y^2}{2yp}\left(\frac{1}{p}\frac{dp}{dy}-\frac{1}{2y}\right)=0$$

由
$$\frac{1}{p}\frac{dp}{dy}-\frac{1}{2y}=0$$

积分得 $p=cy^{\frac{1}{2}}$ 代入(2.76)得原方程的通解为：

$$y = [\frac{c}{2}x - (\frac{c}{2})^3]^2 = (c_1x - c_1^3)^2 \qquad c_1 = \frac{c}{2}$$

而由 $p^3 - 4y^2 = 0$可解出 $p = (2y)^{\frac{2}{3}}$. 代入(2.76)又得方程的一个解为

$$x = \frac{3}{2}(2y)^{\frac{1}{3}} \quad 或 \quad y = \frac{4}{27}x^3.$$

2.4.2 **不显含 y(或 x)的方程**

(3) 类型 $f(x, y') = 0$

仍记 $p = y'$，从几何的观点看，$f(x, p) = 0$代表 xp 平面上的一条曲线，若能找出平面曲线 $f(x, p) = 0$的参数表达式

$$x = \varphi(t), \qquad p = \psi(t) \tag{2.77}$$

则由 $dy = pdx = \psi(t)\varphi'(t)dt$ 有

$$y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c$$

于是得到方程 $f(x, y') = 0$的参数形式的通解

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \int \psi(t)\varphi'(t)dt + c \quad (c \text{ 为常数}) \end{cases} \tag{2.78}$$

例4 求解方程 $x^3 + (y')^3 - 3xy' = 0$(这里 $y' = \frac{dy}{dx}$)

解 令 $y' = p = tx$. 则由方程得

$$x = \frac{3t}{1 + t^3} \qquad p = \frac{3t^2}{1 + t^3}$$

于是

$$dy = \frac{9(1 - 2t^3)t^2}{(1 + t^3)^2}dt$$

积分后得到

$$y = \int \frac{9(1 - 2t^3)t^2}{(1 + t^3)^2}dt = \frac{3}{2}\,\frac{1 + 4t^3}{(1 + t^3)^2} + c$$

因此，方程通解的参数形式：

$$x=\frac{3t}{1+t^3} \qquad y=\frac{3}{2}\frac{1+4t^3}{(1+t^3)^2}+c.$$

(4)类型 $f(y,y')=0$

问题仍在于 yp 平面上的曲线 $f(y,p)=0$的参数表示是否存在，若存在，则解法完全与上段类似. 记 $p=y'$，引入参数，将方程表为参数形式

$$y=\varphi(t) \qquad p=\psi(t) \tag{2.79}$$

由关系式 $dy=pdx$ 得 $\varphi'(t)dt=\psi(t)dx$ 由此有

$$dx=\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt \qquad x=\int\frac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c$$

于是方程通解的参数表示式为：

$$\begin{cases} x=\int\dfrac{\varphi'(t)}{\psi(t)}dt+c \\ y=\varphi(t) \qquad (c\text{ 为常数}) \end{cases} \tag{2.80}$$

此外，若 $f(y,0)=0$有实根 $y=k$ 时，则 $y=k$ 也是方程的解.

例5 求解方程 $y^2(1-y')=(2-y')^2$

解 令$2-y'=yt$ 微分方程消去 y'后，得

$$y^2(yt-1)=y^2t^2$$

由此得
$$y=t+\frac{1}{t}, \quad p=y'=1-t^2$$

这是原微分方程的参数形式，因此

$$dx=\frac{dy}{p}=-\frac{1}{t^2}dt$$

积分后得到

$$x=\frac{1}{t}+c$$

于是，方程通解的参数表示式为

$$
\begin{cases}
x = \dfrac{1}{t} + c \\[2ex]
y = \dfrac{1}{t} + t
\end{cases}
$$

或消去参数 t 得

$$y = x + \frac{1}{x - c} - c$$

其中 c 为常数.

此外，当 $y' = 0$时，原方程变为 $y^2 = 4$，于是 $y = \pm 2$也是方程的解

［注］ 对于一般的隐式方程

$$F(x, y, y') = 0 \tag{2.81}$$

记 $p = y'$，若能找出曲面 $F(x, y, p) = 0$的参数表示

$$x = \varphi(u, v) \quad y = \psi(u, v) \quad p = \xi(u, v) \tag{2.82}$$

则由 $dy = p dx$ 有

$$\frac{\partial\psi}{\partial u}du + \frac{\partial\psi}{\partial v}dv = \xi(u, v)(\frac{\partial\varphi}{\partial u}du + \frac{\partial\varphi}{\partial v}dv)$$

由此解出$\dfrac{dv}{du}$得一阶显方程：

$$\frac{dv}{du} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial u} - \xi(u, v)\dfrac{\partial\varphi}{\partial u}}{\xi(u, v)\dfrac{\partial\varphi}{\partial v} - \dfrac{\partial\psi}{\partial v}} \tag{2.83}$$

若能求出这个方程的通解 $v = g(u, c)$，即可得原方程(2.81)的通解的参数表达式：

$$x = \psi(u, g(u, c)) \qquad y = \varphi(u, g(u, c)) \tag{2.84}$$

§ 2.5　高阶方程的降阶法

n 阶微分方程一般可以写成

$$F(t,x,x'\cdots,x^{(n)})=0 \tag{2.85}$$

$n\geqslant2$时，统称为**高阶方程**. 与一阶方程的通解含有一个任意常数相类似，n 阶方程(2.85)的通解含有 n 个相互独立的任意常数 $c_1,c_2,\cdots c_n$. 一般的高阶方程没有普遍适用的解法，如果能够选择适当的变换使方程的阶数降低，往往可以使问题简化，甚至有可能使问题获得解决. 这一节我们介绍一些简单的可降阶的类型，当问题不明显地属于这些类型时，要作具体分析，才能确定是否可以降阶.

(1) 方程不显含未知函数，或更一般地，方程不含未知函数及其直到 $k-1(k\geqslant1)$ 阶导数的方程，它的一般形状是

$$F(t,x^{(k)},\cdots x^{(n)})=0 \tag{2.86}$$

若令 $y=x^{(k)}$，则方程即降为关于 y 的 $n-k$ 阶方程

$$F(t,y,\cdots,y^{(n-k)})=0 \tag{2.87}$$

它比原来方程低 k 阶. 一般来说，阶数低的方程较阶数高的方程容易求解. 如果能求出方程(2.87)的通解

$$y=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$$

即

$$x^{(k)}=\varphi(t,c_1,c_2,\cdots,c_{n-k})$$

再经过 k 次积分得到

$$x=\psi(t,c_1,c_2,\cdots,c_n)$$

其中 c_1、$c_2,\cdots,c_n$ 为任意常数，可以验证这就是方程(2.86)的通解.

例1 求方程$\dfrac{d^5x}{dt^5}-\dfrac{1}{t}\dfrac{d^4x}{dt^4}=0$ 的解。

解 令 $y=\dfrac{d^4x}{dt^4}$则方程化为

$$y'-\frac{1}{t}y=0$$

这是一阶线性方程，积分后得 $y=c_1t$，即 $x^{(4)}=c_1t$，于是

$$x = c_1t^5 + c_2t^4 + c_3t^3 + c_4t + c_5$$

其中 $c_1,\cdots,c_5$ 为任意常数，这就是原方程的通解。

(2) 不显含自变量 t 的方程，其一般形式是

$$F(x,x',\cdots,x^{(n)}) = 0 \tag{2.88}$$

这时，若用 $y=x'$ 作为新的未知函数，而视 x 为自变量，则方程可以降低一阶。

事实上，在所作的假定下，$x'=y,x''=\frac{dy}{dt}=\frac{dy}{dx}\cdot\frac{dx}{dt}=y\frac{dy}{dx},x^{(3)}=y(\frac{dy}{dx})^2+y^2\frac{d^2y}{dx^2},\cdots$，采用数学归纳法，不难证明 $x^{(k)}$ 可用 $y,\frac{dy}{dx},\cdots,\frac{d^{k-1}y}{dx^{k-1}}$ 表出 $(k\leqslant n)$，将这些表达式代入(2.88)中，就得到

$$G(x,y,y',\cdots,y^{(n-1)}) = 0 \tag{2.89}$$

这是关于 y 的 $n-1$ 阶方程，比原方程(2.88)低一阶。

例2 求解方程 $xx''+(x')^2=0$

解 令 $y=x'$，直接计算可得 $x''=y\frac{dy}{dx}$，于是原方程化为 $xy\frac{dy}{dx}+y^2=0$. 得到 $y=0$ 或 $x\frac{dy}{dx}+y=0$，积分后得 $xy=C$ 即 $x'=\frac{c}{x}$，所以 $x^2=c_1t+c_2(c_1=2c)$，这就是原方程的通解.

(3) 方程

$$F(t,x,x',\cdots,x^{(n)}) = 0 \tag{2.90}$$

的左端是某个 $(n-1)$ 阶微分表达式 $\Phi(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)})=0$ 对 t 的全导数即

$$F(t,x,x',\cdots,x^{(n)}) = \frac{d}{dt}\Phi(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)}) \tag{2.91}$$

我们称方程(2.90)为全微分方程。这时显然有

$$\Phi(t,x,x',\cdots,x^{(n-1)}) = c_1 \tag{2.92}$$

方程(2.92)是 $n-1$ 阶方程，这样就将原方程降了一阶。如果能求

得(2.92)的全部解

$$x = \varphi(t, c_1, \cdots, c_n)$$

那么，它就是原方程(2.90)的全部解，其中 $c_1, \cdots, c_n$ 是任意常数。

与一阶方程一样，有时(2.90)的方程未必是全微分方程。但乘上某个适当的函数 $\mu(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)})$ 后能使方程

$$\mu(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)}) F(t, x, x', \cdots, x^{(n)}) = 0 \qquad (2.93)$$

成为全微分方程，这时就称函数 $\mu(t, x, x', \cdots, x^{(n-1)})$ 是方程(2.90)的积分因子.

例3 求解方程 $xx'' - (x')^2 = 0$

解 这个方程可用(2)的方法求解，也可用积分因子法求解.原方程不是全微分方程，但乘上 $\mu = \frac{1}{x^2}(x \neq 0)$ 后，方程左边可表示为

$$\frac{1}{x}x'' - \frac{1}{x^2}(x')^2 = \frac{d}{dt}(\frac{1}{x}x')$$

从而得到全微分方程

$$\frac{d}{dt}(\frac{x'}{x}) = 0$$

所以

$$\frac{x'}{x} = c_1$$

由此得原方程的通解

$$x = c_2 e^{c_1 t} \qquad (c_2 \neq 0)$$

此外，在乘积分因子时，我们限制了 $x \neq 0$，而 $x = 0$ 也是原方程的解，因此去掉 $c_2 \neq 0$ 的限制后，$x = 0$ 就可包含在通解之内，所以

$$x = c_2 e^{c_1 t}$$

是方程的全部解，包含有二个任意常数。

例4 一个质量为 m 的质点，在只依赖于其位置 x 的外力 $f(x)$ 作用下，运动方程为

$$m\frac{d^2x}{dt^2}=f(x) \tag{2.94}$$

求方程(2.94)的解.

解 此方程可用(2)的方法求解，也可用积分因子法。把方程写成

$$mx''-f(x)=0$$

它不是全微分方程，但乘上因子 x' 后，左边是全微分

$$mx'x''-f(x)x'=\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}m(x')^2-\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi\right]$$

即可化为全微分方程

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi\right]=0$$

积分后得到

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2-\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2\Big|_{x=x_0}=\int_{x_0}^{x}f(\xi)d\xi \tag{2.95}$$

关系式(2.95)是关于 x 的一阶微分方程，不显含自量 t，可以用已经介绍的初等方法求解. 进一步分析(2.95)，可以发现其左边为质点从 x_0 移到 x 时动能的增量；右边是外力 $f(x)$ 所做的功. 因此(2.95)式表明外力 $f(x)$ 所作的功等于质点动能的增量，这就是所谓的动能定律.

我们在本章介绍了一阶微分方程的初等解法及解某些高阶微分方程的降阶法. 但最基础的仍然是变量分离方程和恰当方程. 其他类型的方程均可借助变量替换或积分因子化为这两种类型. 特别要指出的是对一阶线性微分方程的求解方法、解的表达式以及解的性质的讨论，将启发我们对很重要的一类方程——线性方程(组)的深入讨论.

第二章 习 题

求下列方程的解：

1. $y^2dx+(x+1)dy=0$，并求满足初始条件 $x=0, y=1$ 的特解。

2. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1+y^2}{xy+x^3y}$

3. $\sec^2x\cdot \mathrm{tg}\,y dx+\sec^2y\,\mathrm{tg}\,x dy=0$

4. $x\dfrac{dy}{dx}=y+\sqrt{x^2-y^2}$

5. $\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{e^{y^2+3x}}{y}=0$

6. $x(\ln x-\ln y)dy-ydx=0$

7. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{(x+y)^2}$

8. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x-y+1}{x-2y+1}$

9. $\dfrac{dy}{dx}=(x+1)^2+(4y+1)^2+8xy+1$

10. $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2x^3+3xy^2+x}{3x^2y+2y^3-y}$

11. 证明方程 $\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx}=f(xy)$ 经变换 $u=xy$ 可化为变量分离方程，并由此求解下列方程

(1) $y(1+x^2y^2)dx=xdy$

(2) $\dfrac{x}{y}\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2+x^2y^2}{2-x^2y^2}$

12. $\dfrac{dy}{dx}-\dfrac{n}{x}y=e^xx^n$， n 为常数.

13. $\cos x \dfrac{dy}{dx} = y\sin x + \sin^2 x$

14. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x + y^3}$

15. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{e^y + 3x}{x^2}$

16. $y = e^x + \int_0^x y dx$

17. $x \dfrac{dy}{dx} - 4y = x\sqrt{y}$

18. $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{y}{x} + \dfrac{y^2}{x^3}$

19. $(xye^{\frac{x}{y}} + y^2)dx - x^2 e^{\frac{x}{y}} dy = 0$

20. $x^2 y dx = (x^3 + y^4)dy$

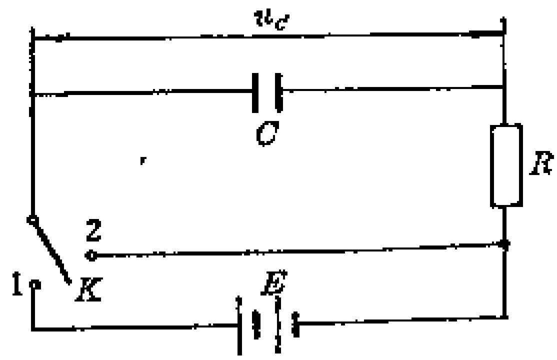
21. 已知 $f(x)\int_0^x f(t)dt = 1, x \neq 0$，试求函数的一般表达式

22. 设函数 $\varphi(t)$ 在实轴 $-\infty < t < +\infty$ 上连续，$\varphi'(0)$ 存在，且有性质 $\varphi(t-s) = \varphi(t)\cdot\varphi(s)$，试求出函数 $\varphi(t)$.

23. 设连续函数 $x(t)$ 具有性质 $x(t+s) = \dfrac{x(t) + x(s)}{1 - x(t)x(s)}$ 且 $x'(0)$ 存在，试求 $x(t)$.

24. 电容器的充电与放电。

在右图所示的 $R-C$ 电路中，开始时电容器 C 上没有电荷，两端的电压为零，我们把开关合上"1"后，电池 E 就对电容 C 充电. 电容 C 两端的电压 u_c 逐渐升高，经过相当时间后，电容充电完毕. 我们再把开关 K 合上"2"，这时电容开始放电过程。现设 $E = 10$伏，



$R=100$欧，$C=0.01$法，

(1)试求充电时 u_c 的变化规律。经过多长时间电容 C 上的电压 $u_c=5$伏?

(2)充电完毕，开关 K"1"突然转至"2"，开始放电过程. 试求 u_c 的变化规律，并问经过多长时间 $u_c=5$伏?

25. 一质量为 m 的质点，有大小与时间立方成正比(设比例系数为 k_1)的外力作用在其上，从初速为零开始作直线运动. 此外，质点又受阻力，其大小与速度和时间的乘积成正比(设比例系数为 k_2)，试求速度函数 $v(t)$.

26. 设一摩托艇在湖水中行驶，水的阻力与艇速成正比，设在艇速达到10千米/小时发动机停止工作，经过20秒钟，艇速是6千米/小时，试求在发动机停止工作后2分钟的艇速。

27. 求一曲线，使其切线在纵轴上的截距等于切点的横坐标。

28. 验证下列方程是恰当方程，并求出方程的解：

(1) $\left[\dfrac{y^2}{(x-y)^2}-\dfrac{1}{x}\right]dx+\left[\dfrac{1}{y}-\dfrac{x^2}{(x-y)^2}\right]dy=0$

(2) $$\left(\frac{1}{y}\sin\frac{x}{y}-\frac{y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+1\right)dx+\left(\frac{1}{x}\cos\frac{y}{x}-\frac{x}{y^2}\sin\frac{x}{y}+\frac{1}{y^2}\right)dy=0$$

29. 试导出方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$分别具有 $\mu(x+y)$和 $\mu(xy)$的积分因子的充要条件.

30. 设 $f(x,y)$及$\dfrac{\partial f}{\partial y}$连续，试证方程 $dy-f(x,y)dx=0$为线性方程的充要条件是它有仅依赖于 x 的积分因子.

31. 试证齐次方程 $M(x,y)dx+N(x,y)dy=0$，当 $xM+yN\neq0$时有积分因子 $\mu=\dfrac{1}{xM+yN}$，如果方程还是恰当的，试证它的

通解可表为 $xM(x,y)+yN(x,y)=c$（c 为任意常数）

求下列方程的解：

32. $2x(ye^{x^2}-1)dy+e^{x^2}dy=0$

33. $[x\cos(x+y)+\sin(x+y)]dx+x\cos(x+y)dy=0$

34. $x(4ydx+2xdy)+y^3(3ydx+5xdy)=0$

35. $(x^2y^3+y)dx+(x^3y^2-x)dy=0$

36. $(x^2y-2xy^2)dx-(x^3-3x^2y)dy=0$

37. $y=\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2-x\dfrac{dy}{dx}+\dfrac{x^2}{2}$

38. $xy'^3=1+y'$　　　　39. $y=y'^2e^{y'}$

40. $y=xy'+y'+y'^2$　　　　41. $y=2xy'+y^2y'^3$

42. $y'^2-(x+y)y'+xy=0$

求解下列方程（式中 $x'=\dfrac{dx}{dt},x''=\dfrac{d^2x}{dt^2},\cdots$）

43. $x''-tx''+(x''')^3=0$

44. $a^2x''=[1+(x')^2]^3$　　$(a>0)$

45. $x''-\dfrac{1}{t}x'+(x')^2=0$　（提示：方程两端除以 x'）

46. $txx''+t(x')^2-xx'=0$

47. 雨点受重力作用下落，而空气的阻力与下落速度的平方成正比，求雨点的运动规律。

48. 求曲线 $y=y(x)$，使它在任意一点 (x,y) 的曲率等于在这点 (x,y) 的切线与横轴交角的正弦。

49. 已知微分方程 $f(x)\dfrac{dy}{dx}+x^2+y=0$ 有积分因子 $\mu=x$，求一切的 $f(x)$.

50. 如果已知黎卡提方程的一个特解 y_1，求下列方程的解。

(1) $y'e^{-x}+y^2-2ye^x=1-e^{2x}$　　　$(y_1=e^x)$

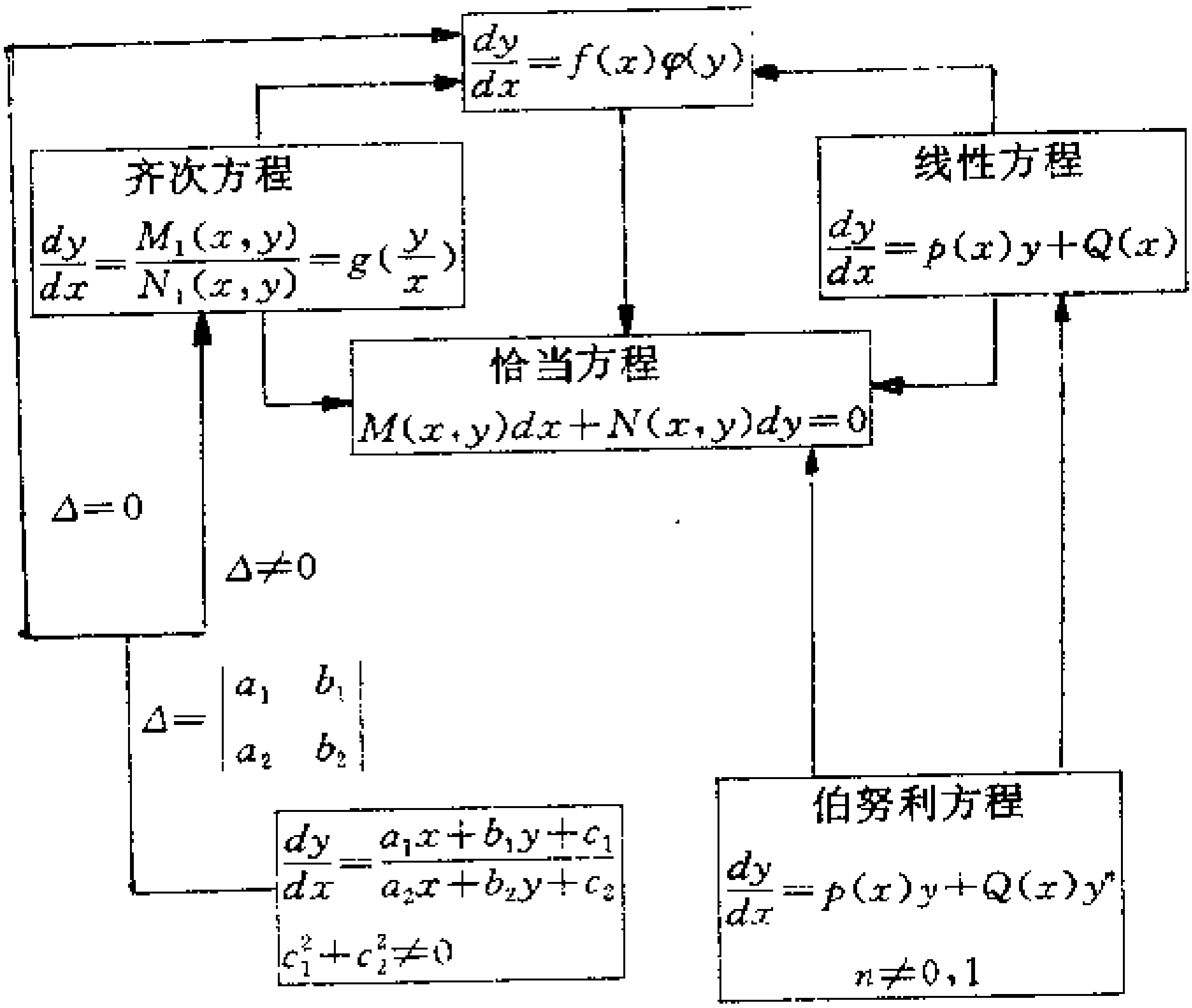
(2) $y'+y^2-2y\sin x=\cos x-\sin^2x$　$(y_1=\sin x)$

(3) $x^2y' = x^2y^2 + xy + 1$　　　　　　$(y_1 = x^{-1})$

(4) $y' = (x-1)y^2 + (1-2x)y + x$　　$(y_1 = 1)$

51. 请完成下面框图2中由一个方程到另一个方程的变换，每个变换都举出一个方程为例说明.

（图 2）



第三章　常微分方程的一般理论

在第二章中介绍了能用初等解法求通解的常微分方程的若干类型. 有了通解,就可以根据给定的条件(如初值条件,边值条件)确定它的特解. 但是,刘维尔曾证明黎卡提方程(除一些特殊情形外)一般不能用初等解法. 事实上,能用初等解法求通解的方程只是少数,所以用通解求特解的方法在实用上是难以进行的. 幸好在实际问题中所需要的是求满足一定条件的特解(即定解问题的解),因此对定解问题的研究被提到重要的地位. 本章只讨论初值问题的解. 首先,我们必须解决初值问题解是否存在?如果存在是否唯一?

容易举出解存在而不唯一的例子. 例如方程

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{y}$$

过(0,0)点的解就不唯一,事实上,$y\equiv 0$是过(0,0)点的解,此外函数 $y=x^2$或更一般地,函数

$$y = \begin{cases} 0 & 0 \leqslant x \leqslant c \\ (x-c)^2, & c < x \leqslant 1 \end{cases}$$

都是方程过(0,0)而定义于区间$0\leqslant x\leqslant 1$上的解。这里 C 是满足 $0<C<1$的任一数。

本章介绍的存在唯一性定理明确地肯定了方程的解在一定条件下的存在性和唯一性。它是常微分方程理论中最基本的定理,有其重大的理论意义. 另一方面,由于能求得准确解的微分方程为数不多,因此微分方程的近似解法具有十分重大的实际意义,而存在

唯一性定理是进行近似解法的理论基础和前提，此外，在证明定理的过程中，还具体地提供了求近似解的途径. 因此存在唯一性定理不仅有重大的理论意义而且也有它的实用价值.

由于初值是由实验测定的，自然会有误差，如果初值的微小变化引起解的大变化，那么所求的解就没有多大的价值. 因此我们还有必要讨论初值问题的解与初值的依赖关系。

本章重点介绍和证明一阶方程解的存在唯一性定理，此外，还介绍解的一些性质，如解的延拓，解对初值的连续依赖性等. 其证明思想可以推广到高阶方程和一阶方程组.

§3·1 初值问题解的存在唯一性定理和逐步逼近法

3·1·1 存在唯一性定理

1° 先考虑导数已解出的一阶微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{3.1}$$

定理1 假设：(1) $f(x,y)$ 在闭矩形 R：

$$|x-x_0|\leqslant a,\quad |y-y_0|\leqslant b \tag{3.2}$$

中连续，记

$$M=\max_{(x,y)\in R}|f(x,y)|,h=\min\left(a,\frac{b}{M}\right) \tag{3.3}$$

(2) $f(x,y)$ 关于 y 满足下列条件（称李普希兹条件）：存在常数 $L>0$，使得不等式

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant L|y_1-y_2| \tag{3.4}$$

对所有 $(x,y_1),(x,y_2)\in R$ 都成立，L 称为利普希兹常数. 则在区间 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上方程(3.1)存在唯一的连续解 $y=\varphi(x)$，且

满足初始条件

$$\varphi(x_0) = y_0 \tag{3.5}$$

我们采用皮卡(Picard)逐步逼近法来证明这个定理. 为简单起见,只就区间 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h$ 来讨论,对于 $x_0-h \leqslant x \leqslant x_0$的讨论完全一样,为方便起见,利普希兹条件简写成 Lip 条件.

证:证明步骤如下:(i)证明求微分方程初值问题(3.1)(3.5)的解等价于求积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(x,y)dx \tag{3.6}$$

的连续解;(ii)在区间 $|x-x_0| \leqslant h$ 上构造一个连续函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$,称为皮卡逐次逼近序列;(iii)证明 $\{\varphi_n(x)\}$ 在区间 $|x-x_0| \leqslant h$ 上一致收敛;(iv)证明 $\{\varphi_n(x)\}$ 的极限函数 $\varphi(x)$ 是方程(3.6)的连续解;(v)证明满足积分方程(3.6)的连续解必为 $\varphi(x)$.

(i) 如果 $y=\varphi(x)$ 在任一区间 (α,β) 内满足方程(3.1)且对任一 $x_0 \in (\alpha,\beta)$,满足 $\varphi(x_0)=y_0$,则有

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} \equiv f(x,\varphi(x)), \quad \varphi(x_0) = y_0$$

对第一式自 x_0到 x 积分就得到

$$\varphi(x) - \varphi(x_0) = \int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))d\xi \qquad \alpha < x_0, x < \beta$$

即

$$\varphi(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))d\xi$$

因此,$y=\varphi(x)$ 是积分方程(3.6)定义在 (α,β) 内的连续解.

反之,若在 (α,β) 内连续的函数 $\varphi(x)$ 是积分方程(3.7)的解,那么

$$\varphi(x) \equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi(\xi))d\xi \tag{3.7}$$

在 (α,β) 内成立,因此当 $x=x_0$时得

$$\varphi(x_0) = y_0$$

又因为 $f(x,\varphi(x))$ 在 (α,β) 内连续，所以 (3.7) 两边关于 x 微分可以得到

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} = f(x,\varphi(x))$$

这就是说，求解微分方程的初值问题(3.1)(3.5)可以转化为积分方程(3.6)的求解问题. 因此，为了证明存在定理，只须证明积分方程(3.6)在 $|x-x_0|\leqslant h$ 上至少有一个连续解.

(ii)构造皮卡逐次逼近函数列：

$$\varphi_0(x) = y_0$$

$$\varphi_n(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi \qquad (3.8)$$

$$n = 1,2,\cdots$$

如果存在某个正整数 k，使得 $\varphi_{k+1}(x)=\varphi_k(x)$，那么，$\varphi_k(x)$ 就是积分方程(3.6)的解；如果始终不发生这种情况，就得到函数列 $\{\varphi_n(x)\}$.

可以用归纳法证明 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有定义，连续，且满足不等式

$$|\varphi_n(x) - y_0| \leqslant b \qquad (3.9)$$

即

$$(x,\varphi_n(x)) \in R \qquad (n = 0,1,2,\cdots)$$

由于当 $|x-x_0|\leqslant a$ 时，$(x,y_0)\in R$，因此 $f(x,y_0)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+a$ 是连续的，由(3.8)定义的 $\varphi_1(x)$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+a$ 上是有定义、连续的，并且

$$|\varphi_1(x) - y_0| \leqslant \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi,y_0)d\xi\right|$$

$$\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(\xi,y_0)|d\xi$$

$$\leqslant M(x - x_0)$$

所以当 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ 时

$$|\varphi_1(x) - y_0| \leqslant Mh \leqslant b$$

即

$$(x, \varphi_1(x)) \in R$$

现设 $\varphi_k(x)$ 在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ 上有定义、连续且满足不等式(3.9)，于是在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ 上，$(x, \varphi_k(x)) \in R$. 所以 $f(x, \varphi_k(x))$ 在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ 上有定义，且 $|f(x, \varphi_k(x))| \leqslant M$，由(3.8)定义的 $\varphi_{k+1}(x)$ 在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ 上有定义、连续且

$$\begin{aligned}
|\varphi_{k+1}(x) - y_0| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_k(\xi))d\xi\right| \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(\xi, \varphi_k(\xi))|d\xi \\
&\leqslant M(x - x_0) \leqslant Mh \leqslant b
\end{aligned}$$

因此函数序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ 上有定义，连续且满足(3.9)

(iii) 为证 $\{\varphi_n(x)\}$ 在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ 上的一致收敛性，只需证明级数(它的部份和序列就是 $\varphi_n(x)$)

$$\begin{aligned}
&\varphi_0(x) + [\varphi_1(x) - \varphi_0(x)] + [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)] \\
&\quad + \cdots + [\varphi_n(x) - \varphi_{n-1}(x)] + \cdots \\
&= \varphi_0(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k(x) - \varphi_{k-1}(x)] \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

在 $x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + h$ 上是一致收敛的. 现在用 Lip 条件(3.4)来估计(3.10)的每一项：

$$\begin{aligned}
|\varphi_1(x) - \varphi_0(x)| &= \left|\int_{x_0}^{x} f(\xi, y_0)d\xi\right| \\
&\leqslant \int_{x_0}^{x} |f(\xi, y_0)|d\xi \leqslant M(x - x_0)
\end{aligned}$$

而$|\varphi_2(x)-\varphi_1(x)|=\left|\int_{x_0}^{x}[f(\xi,\varphi_1(\xi))-f(\xi,y_0)]d\xi\right|$

$$
\begin{aligned}
&\leqslant \int_{x_0}^{x} L|\varphi_1(\xi)-y_0|d\xi \leqslant ML\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)d\xi \\
&= \frac{ML}{2}(x-x_0)^2
\end{aligned}
$$

一般，假定已证得

$$
|\varphi_n(x)-\varphi_{n-1}(x)| \leqslant \frac{ML^{n-1}}{n!}(x-x_0)^n
$$

便可以推出

$$
\begin{aligned}
|\varphi_{n+1}(x)-\varphi_n(x)| &\leqslant \int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_n(\xi))-f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))|d\xi \\
&\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_n(\xi)-\varphi_{n-1}(\xi)|d\xi \\
&\leqslant \frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}
\end{aligned}
$$

于是由数学归纳法得知，对所有的正整数k，有如下的估计

$$
|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)| \leqslant \frac{ML^{k-1}}{k!}(x-x_0)^k, \quad x_0 \leqslant x \leqslant x_0+h \tag{3.11}
$$

从而可知，当$x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$时

$$
|\varphi_k(x)-\varphi_{k-1}(x)| \leqslant \frac{ML^{k-1}}{k!}h^k \tag{3.12}
$$

(3.12)式的右端是正项收敛级数

$$
\sum_{k=1}^{\infty} ML^{k-1}\frac{h^k}{k!}
$$

的一般项，由维尔斯特拉斯判别法知级数(3.10)在$x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$上一致收敛，记其和函数为$\varphi(x)$. 因而序列$\{\varphi_n(x)\}$也在$x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$上一致收敛于$\varphi(x)$，且$\varphi(x)$在$x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$上连续.

(iv)证明 $\varphi(x)$ 是积分方程(3.6)的解. 由于不等式(3.9)对 $n=1,2,\cdots$ 成立. 当 $n\to+\infty$ 时得

$$|\varphi(x)-y_0|\leqslant b \qquad x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$$

即 $(x,\varphi(x))\in R$, 根据 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lip 条件, 有

$$|f(x,\varphi_n(x))-f(x,\varphi(x))|\leqslant L|\varphi_n(x)-\varphi(x)|$$

因此, 当 $n\to+\infty$ 时, $f(x,\varphi_n(x))$ 在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛于 $f(x,\varphi(x))$, 这样, 对(3.8)式两边取极限, 得到

$$\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(x)=y_0+\lim_{n\to+\infty}\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi$$

$$=y_0+\int_{x_0}^{x}\lim_{n\to+\infty}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi$$

$$=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))d\xi$$

即

$$\varphi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi))d\xi \qquad (3.13)$$

从而积分方程(3.6)存在解 $y=\varphi(x)$, 且它在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上是连续的, 这样也就证明了初值问题(3.1)(3.5)的连续解存在.

(v) 设 $\psi(x)$ 是积分方程(3.6)定义在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上的另一个连续解, 我们将证明在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上, $\varphi(x)\equiv\psi(x)$

为此, 我们先证明 $\psi(x)$ 也是序列 $\{\varphi_n(x)\}$ 的一致收敛极限函数. 由 $\varphi_n(x)$ 的定义:

$$\varphi_0(x)=y_0$$

$$\varphi_n(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_{n-1}(\xi))d\xi \qquad (n\geqslant 1)$$

$$\psi(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\psi(\xi))d\xi$$

我们可以进行如下的估计

$$|\varphi_0(x)-\psi(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\psi(\xi))|d\xi\leqslant M(x-x_0)$$

$$|\varphi_1(x)-\psi(x)|\leqslant\int_{x_0}^{x}|f(\xi,\varphi_0(\xi))-f(\xi,\psi(\xi))|d\xi$$

$$\leqslant\int_{x_0}^{x}L|\varphi_0(\xi)-\psi(x)|d\xi\leqslant ML\int_{x_0}^{x}(\xi-x_0)d\xi=\frac{ML}{2!}(x-x_0)^2$$

和前面一样，可以用归纳法证明

$$|\varphi_n(x)-\psi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \qquad (3.14)$$

因此，在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上有

$$|\varphi_n(x)-\psi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1} \qquad (3.15)$$

当 $n\to+\infty$ 时，(3.15)的右端趋于零，因而$\{\varphi_n(x)\}$在 $x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$ 上一致收敛于 $\psi(x)$. 根据极限的唯一性，即得

$$\varphi(x)\equiv\psi(x) \qquad x_0\leqslant x\leqslant x_0+h$$

因此解的唯一性得证. 证毕.

附注1 关于定理中 h 的几何解释（看图3·1）

在定理1中 $|f(x,y)|\leqslant M$，方程(3.1)的积分曲线的切线斜率都位于 $-M$ 和 M 之间，如果过初始点 $p(x_0,y_0)$ 引斜率为 $-M$ 和 M 的两条直线，它们和 R 的边界相交于 B、C，和 B_1、C_1，因为积分曲线的斜率介于直线 BC_1 和 B_1C 的斜率 M 与 $-M$ 之间，所以当 $|x-x_0|\leqslant h$ 时，积分曲线上的点 $(x,\varphi(x))$ 的纵坐标满足不等式

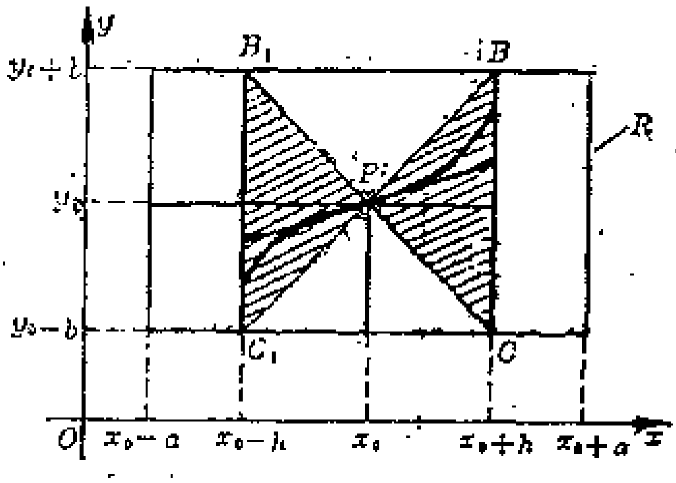


图 (3.1)

$$|\varphi(x)-\varphi(x_0)| = |\varphi(x)-y_0| \leqslant M|x-x_0| \leqslant b$$

也就是说，过(x_0,y_0)点的积分曲线必位于三角形域B_1PC_1和BPC中.

附注2 由于 Lip 条件比较难于检验，常用$f(x,y)$在R上对y有连续偏导数这一较强条件来代替，事实上，如果在R上$\frac{\partial f}{\partial y}$存在且连续，则$\frac{\partial f}{\partial y}$在$R$上有界. 设在$R$上$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \leqslant L$，这时

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)| \leqslant \left|\frac{\partial f(x,y_2+\theta(y_1-y_2))}{\partial y}\right| |y_1-y_2|$$

$$\leqslant L|y_1-y_2|$$

这里$(x,y_1),(x,y_2)\in R, 0<\theta<1$. 但反过来，满足 Lip 条件的函数$f(x,y)$不一定有偏导数存在，例如$f(x,y)=|y|$在任何区域都满足利普希兹条件，但在$y=0$处没有导数.

注3 Lip 条件是唯一性的充分条件而非必要条件. 例如方程

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases} y\ln|y| & y\neq 0 \\ 0 & y=0 \end{cases} \tag{3.16}$$

右端函数在x轴上任一点$(x,0)$的邻域内都不满足 Lip 条件(3.4)，但方程(3.16)有通解.

$$y=\pm\exp(ce^x) \tag{3.17}$$

及特解$y\equiv 0$，对C的任何有限值，积分曲线(3.17)都不与$y=0$相交，故过x轴上任一点$(x,0)$，仍只有唯一的积分曲线$y=0$. 而对方程

$$\frac{dy}{dx}=2\sqrt{y} \tag{3.18}$$

在本章的开头，我们就指出，过点$(0,0)$而定义在$0\leqslant x\leqslant 1$上的解至少有两个：$y\equiv 0$及$y=x^2$，可以验证$f(x,y)=2\sqrt{y}$在任一点

$(x,0)$的邻域都不满足 Lip 条件，否则存在 $L>0$，使得$|2y^{\frac{1}{2}}-0|\leqslant L|y-0|$，从而$2|y|^{\frac{1}{2}}\leqslant L|y|$，即$|y|^{\frac{1}{2}}\geqslant\frac{2}{L}$，但在 $y=0$附近，此不等式不成立. 这样，对方程(3.18)在包含 x 轴上点的区域内不满足定理1的条件，因此解可能不唯一.

附注4 如果定理中的条件被加强成为：$f(x,y)$在带形域$\{\alpha\leqslant x\leqslant\beta,|y|<+\infty\}$中连续，且对 y 满足 Lip 条件，则只要用

$$M_0=\max_{[\alpha,\beta]}|f(x,y_0)|$$

代替 M，就可像定理1完全同样证明：在整个区间$[\alpha,\beta]$上方程(3.1)存在唯一的满足初始条件(3.5)的连续解 $y=\varphi(x)$. 由此可得：对线性方程

$$\frac{dy}{dx}=P(x)y+Q(x)$$

只要 $P(x)$，$Q(x)$在$[\alpha,\beta]$上连续，就满足定理1的条件，且由任一初值(x_0,y_0)，$x_0\in[\alpha,\beta]$ 所确定的解在整个区间$[\alpha,\beta]$上都有定义.

附注5 证明解的存在唯一性定理的方法有多种，除了我们介绍的皮卡逐次逼近法外，还有欧拉(Enler)折线法(参阅第五章)，皮卡逼近法所构成的函数列$\{\varphi_n(x)\}$是解析近似解列，而欧拉方法得到的是数值近似解，或称方程的数值解，这是形式各异的近似解，但在一定条件下都可以收敛于方程的准确解. 此外，如果我们不把初值问题化为等价的积分方程也可以直接构造微分方程的近似解列$\{y_n(x)\}$，其中 $y_n(x)$满足方程$\frac{dy_n}{dx}=f(x,y_{n-1}(x))$及 $y(x_0)=y_0$，用同样的思路也可以证明解存在性.

附注6 如果只为证明解的唯一性，我们甚至不必假设 $f(x,y)$在 R 上连续，而只需假设$f(x,y)$关于 y 在 R 上满足 Lip 条件，具体证明如下：

用反证法. 设初值问题(3.1)(3.5)在$|x-x_0|\leqslant h$上除了解$\varphi(x)$还有另一解$\psi(x)$即在$|x-x_0|\leqslant h$上,$\varphi(x)-\psi(x)\not\equiv 0$不妨设在任意接近$x_0$而大于$x_0$的地方总有$x$使得$\varphi(x)-\psi(x)\neq 0$,研究函数

$$\sigma(x)=[\varphi(x)-\psi(x)]^2$$

它在区间$\left[x_0,x_0+\frac{1}{3L}\right]$(如果$\frac{1}{3L}>h$,则改取区间$[x_0,x_0+h]$)上连续,不恒等于零,故必在其中一点$x_1$上取到最大值$K>0$,注意到$\sigma(x_0)=0$,且

$$\begin{aligned}\sigma'(x)&\leqslant|\sigma'(x)|=2|\varphi(x)-\psi(x)|\left|\frac{d\varphi(x)}{dx}-\frac{d\psi(x)}{dx}\right|\\&=2|\varphi(x)-\psi(x)||f(x,\varphi(x))-f(x,\psi(x))|\\&\leqslant 2L[\varphi(x)-\psi(x)]^2=2L\sigma(x)\end{aligned}$$

而由微分中值定理有

$$\begin{aligned}K&=\sigma(x_1)=\sigma(x_1)-\sigma(x_0)=\sigma'(x_2)(x_1-x_0)\\&\leqslant 2L\sigma(x_2)\cdot(x_1-x_0)\leqslant 2L\cdot\frac{1}{3L}\cdot\sigma(x_1)\\&\leqslant\frac{2}{3}K\end{aligned}$$

(其中$x_0<x_2<x_1$)产生矛盾,同样可证如果在$[x_0-h,x_0]$上$\varphi(x)\not\equiv\psi(x)$,也会出现矛盾,因此只能$\varphi(x)\equiv\psi(x)$,即解是唯一的.

关于初值问题(3.1)(3.5)解的唯一性,还有各式各样的判别法则,迄今仍是数学工作者的研究课题之一,例如有下面的判别定理:

Peano **定理**. 如果$f(x,y)$在(x_0,y_0)的邻域中是y的不增函数,则方程(3.1)最多只能有一个自(x_0,y_0)向右行的解.

附注7 对于一阶显式方程组的初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dy_i}{dx} = f_i(x, y_1, \cdots, y_n); \\ y_i(x_0) = y_i^0 \qquad i = 1, \cdots, n;\end{cases} \tag{3.19}$$

如果函数 $f_i(x,y_1,\cdots,y_n)(i=1,2,\cdots,n)$满足下列条件:

(i) $f_i(i=1,\cdots,n)$在闭域 D: $|x-x_0|\leqslant a$, $|y_i-y_i^0|\leqslant b(i=1,2,\cdots,n)$上连续, $a,b>0$, 记

$$M = \max_{i,D}|f_i(x, y_1, \cdots, y_n)|, \quad h = min\left\{a, \frac{b}{M}\right\}$$

(ii) $f_i(i=1,\cdots,n)$关于 $y_1,\cdots,y_n$ 满足 Lip 条件:存在常数 $L>0$,使得 D 中任二点$(x,y_1',\cdots,y_n')$及$(x,y_1'',\cdots,y_n'')$满足不等式

$$|f_i(x, y_1', \cdots, y_n') - f_i(x, y_1'', \cdots, y_n'')|$$
$$\leqslant L\sum_{i=1}^{n}|y_i' - y_i''| \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

则初值问题(3.19)在区间$|x-x_0|\leqslant h$ 上存在唯一的解组

$$y_i = \varphi_i(x) \text{ 且 } \varphi_i(x_0) = y_i^0 \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

其证明方法完全类似于定理1.

附注8 定理1是一百多年以前的结果,把它的证明方法和结果加以抽象化并推广便得到著名的压缩映象原理(或称不动点原理)利用压缩映象原理来证明定理1就更加简单了.在实变与泛函的课程里将会介绍不动点原理.一个很典型的例子就是本章的习题6.

2° 一阶隐式方程

$$F(x, y, y') = 0 \tag{3.20}$$

为了能解出 y',原函数存在定理的条件应当得到满足,即若 $F(x,y,y')$在(x_0,y_0,y_0')的某邻域内连续,且 $F(x_0,y_0,y_0')=0$,

但$\frac{\partial F}{\partial y'}\neq 0$，则在$(x_0,y_0)$的某邻域中存在唯一的连续函数

$$y' = f(x,y) \tag{3.21}$$

使$y_0'=f(x_0,y_0)$.

更进一步.如果$F(x,y,y')$关于所有变元存在连续的偏导数，则$f(x,y)$对x,y也存在着连续的偏导数.且有

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F}{\partial y}\bigg/\frac{\partial F}{\partial y'} \tag{3.22}$$

它在(x_0,y_0)的某个邻域中显然是有界的，于是依定理1方程(3.20)满足初始条件$y(x_0)=y_0$的解存在且唯一，即方程(3.20)的过点(x_0,y_0)且切线斜率为y_0'的积分曲线存在且唯一，这样就得到了下面的定理.

定理2 如果在点(x_0,y_0,y_0')的某邻域中

(i) $F(x,y,y')$对所有变元一次连续可微；

(ii) $F(x_0,y_0,y_0')=0$；

(iii) $\frac{\partial F(x_0,y_0,y_0')}{\partial y'}\neq 0$

则方程(3.20)当$|x-x_0|\leqslant h$($h>0$,充分小)时存在唯一的解

$$y = y(x)$$

满足给定的初值条件

$$y(x_0) = y_0 \tag{3.23}$$

及某确定的(即满足$F(x_0,y_0,y_0')=0$)的方向限制

$$y'(x_0) = y_0' \tag{3.24}$$

［注］ 再强调一次，(3.24)中的y_0'不能任意给定，对给定的(x_0,y_0)，它必须满足$F(x_0,y_0,y_0')=0$，例如对方程

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 1 \tag{3.25}$$

可以验证定理2的条件都得到满足，这时$\frac{dy}{dx}=\pm 1$，得两族通解$y=$

$x+c_1$，$y=-x+c_2$，这样过每一点(x_0,y_0)都有两条积分曲线，但方向不同，一条积分曲线的切线斜率为1，另一条切线斜率为-1，所以就定向来说，过(x_0,y_0)的积分曲线仍是唯一的. 又如对方程

$$(y')^2-(x+y)y'+xy=0 \tag{3.26}$$

将它改写成

$$(y'-x)(y'-y)=0 \tag{3.26'}$$

由此得到两个显式方程：

$$y'=x;\quad y'=y$$

其通解分别为

$$y=\frac{x^2}{2}+c_1;y=c_2e^x$$

对直线 $y=x$ 上的每一点，两族积分曲线各有一条曲线在此点相切，因此具有同一定向，唯一性不成立. 原因在于对直线 $y=x$ 上任意给定的初值点(x_0,x_0)所确定的 y'_0，同时满足关系式 $F_{y'}'(x_0,x_0,y_0')=0$，即定理2的条件(ii)不成立，破坏了唯一性.

3·1·2　近似计算和误差估计

存在唯一性定理不仅肯定了解的存在唯一性，而且证明中采用的逐步逼近法也是求方程近似解的一种实用的方法. 在估计式(3.15)中令 $\psi(x)=\varphi(x)$. 就得到第 n 次近似解 $\varphi_n(x)$和准确解 $\varphi(x)$在区间$|x-x_0|\leqslant h$ 内的误差估计式

$$|\varphi_n(x)-\varphi(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1} \tag{3.27}$$

因此，在进行近似计算时，可以根据对误差的要求，确定逼近的次数 n，从而定出 n 次近似解 $\varphi_n(x)$

例1　在域 R：$\{|x|\leqslant 1,|y|\leqslant 1\}$上确定初值问题

$$\frac{dy}{dx}=x^2+y^2,\quad y(0)=0$$

解的存在区间，并求误差不超过0.05的近似解

解　这时 $M=\max\limits_{(x,y)\in R}|f(x,y)|=2$，$h=\min\left\{a,\dfrac{b}{m}\right\}=\min\left\{1,\dfrac{1}{2}\right\}=\dfrac{1}{2}$，在 R 上 $f(x,y)=x^2+y^2$，$\dfrac{\partial f}{\partial y}=2y$，故利普希兹常数可取为 $L=2$，由(3.27)有

$$|\varphi(x)-\varphi_n(x)|\leqslant\frac{ML^n}{(n+1)!}h^{n+1}$$

$$=\frac{2\times 2^n}{(n+1)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\frac{1}{(n+1)!}$$

由于$\dfrac{1}{(3+1)!}=\dfrac{1}{24}<\dfrac{1}{20}=0.05$，故为使误差不超过0.05，需取 $n=3$. 逐次逼近函数为：

$$\varphi_0\equiv 0,\quad \varphi_1(x)=\int_0^x[x^2+\varphi_0^2(x)]dx=\frac{x^3}{3}$$

$$\varphi_2(x)=\int_0^x[x^2+\varphi_1^2(x)]dx=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}$$

$$\varphi_3(x)=\int_0^x[x^2+\varphi_2^2(x)]dx$$

$$=\frac{x^3}{3}+\frac{x^7}{63}+\frac{2x^{11}}{2079}+\frac{x^{15}}{59535}$$

$\varphi_3(x)$就是所求的近似解，在区间$-\dfrac{1}{2}\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{2}$上，这个解与准确解的误差不会超过0.05.

§3·2　解的延拓

§3·1中解的存在唯一性定理是局部性的. 它只肯定解至少在区间$|x-x_0|\leqslant h$，$h=\min\left\{a,\dfrac{b}{M}\right\}$上存在，区间$|x-x_0|\leqslant h$ 比起原来的定义区间$|x-x_0|\leqslant a$ 可能小得多，甚至可能出现这样的情况：即随 $f(x,y)$定义区域的增大，而能肯定的解的存在区间反而

缩小了. 例如在§3·1·2·的例1中, 当 $f(x,y)$ 的定义域为 $-1\leqslant x\leqslant 1$, $-1\leqslant y\leqslant 1$ 时, $h=\frac{1}{2}$; 而当定义区域为: $-2\leqslant x\leqslant 2$, $-2\leqslant y\leqslant 2$ 时, $M=8$, $h=min\left\{2,\frac{2}{8}\right\}=\frac{1}{4}$. 这种局部性使我们感到非常不满意. 而且实践上往往也要求解的存在区间能尽量地扩大, 以便充分地利用原有的定义区间. 解的延拓概念就自然地产生了. 下面讨论解的延拓概念, 通过它我们可以将§3·1存在唯一性定理的局部结果扩大到较大的范围.

假设方程(3.1)的右端函数 $f(x,y)$ 在某一区域 G 内连续, 且关于 y 满足局部的 Lip 条件, 即对于区域 G 内的每一点, 存在以其为中心的完全含于 G 内的闭矩形 R, 在 R 上 $f(x,y)$ 关于 y 满足 Lip 条件(对于不同的点, 域 R 的大小和常数 L 可能不同)

设方程(3.1)的解 $y=\varphi(x)$ 已定义在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上, 现取 $x_1=x_0+h$, $y_1=\varphi(x_0+h)$, 然后以 $Q_1(x_1,y_1)$ 为中心, 作一小矩形. 使它连同边界都含在区域 G 的内部. 再由§3·1定理1, 可知存在 $h_1>0$, 使得在区间 $|x_1-x|\leqslant h_1$ 上, 方程(3.1)有过 (x_1,y_1) 的解 $y=\psi(x)$ 且在 $x=x_1$ 处有 $\psi(x_1)=\varphi(x_1)$. 由于唯一性, 显然在解 $y=\psi(x)$ 和解 $y=\varphi(x)$ 共同存在的区间 $x_1-h_1\leqslant x\leqslant x_1$ 上, $\psi(x)\equiv\varphi(x)$. 但在区间 $x_1\leqslant x\leqslant x_1+h_1$ 上, 解 $y=\psi(x)$ 仍有定义. 我们把它看成是原来定义在区间 $|x-x_0|\leqslant h$ 上的解 $y=\varphi(x)$ 向右方的延拓, 这样我们就在区间 $[x_0-h_0, x_0+h_0+h_1]$ 上确定方程的一个解

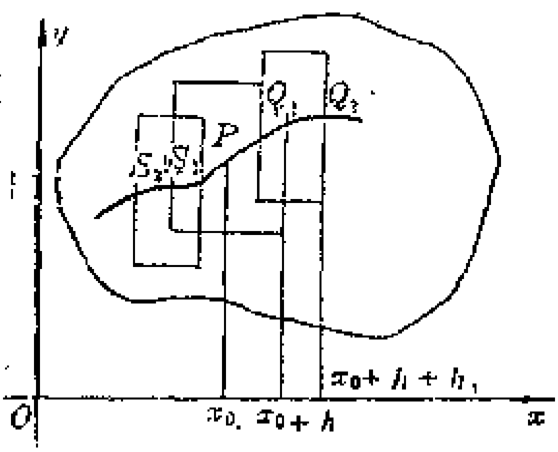


图 (3.2)

$$y=\begin{cases}\varphi(x), x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h\\ \psi(x), x_0+h<x\leqslant x_0+h+h_1\end{cases}$$

即把解延拓到较大的区间 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_0+h+h_1$ 上，再令 $x_2=x_1+h_1$，$y_2=\varphi(x_1+h_1)$，$Q_2(x_2,y_2)\in G$. 我们又可以 (x_2,y_2) 为中心，作一小矩形，使它连同其边介都含在区域 G 内. 仿前，又可以把解延拓到更大的区间 $x_0-h\leqslant x\leqslant x_2+h_2$，其中 h_2 是某一正常数. 对于 x 减小的一边可以同样讨论，将解向左延拓，用几何的语言来说，上述解的延拓，就是在原来的积分曲线 $y=\varphi(x)$ 左右两端各接上一个积分曲线段. 如此进行下去，最后我们将得到一个解 $y=\tilde{\varphi}(x)$，它不能再向左右延拓. 这样的解称为方程(3.1)的饱和解. 任一饱和解 $y=\tilde{\varphi}(x)$ 的最大存在区间必定是一个开区间 $\alpha<x<\beta$. 因为如果这个区间的右端是闭的，那么 β 便是有限数，且点 $(\beta,\tilde{\varphi}(\beta))\in G$，这样一来，解 $y=\tilde{\varphi}(x)$ 就还能继续向右方延拓，从而它是非饱和的，对左端点 α 可以同样地讨论. 下面的定理给出了延拓的最终结果(略去证明).

解的延拓定理 设 G 为有界开区域(其边界为 ∂G)，方程(3.1)右端函数 $f(x,y)$ 在区域 G 中连续，且在 G 内关于 y 满足局部的 Lip 条件，如果方程(3.1)的解 $y=\varphi(x)$ 在 G 中的最大存在区间是(α,β)，那么必有：

$$\lim_{x\to\alpha+0}\rho((x,\varphi(x)),\partial G)=\lim_{x\to\beta-0}\rho((x,\varphi(x)),\partial G)=0 \quad (3.28)$$

其中 $\rho((x,y),\partial G)$ 表示 G 中点 (x,y) 到边界 ∂G 的距离.

推论 如果 G 为无界区域，$f(x,y)$ 满足上面延拓定理的条件，方程(3.1)的通过 (x_0,y_0) 的解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓，以向 x 增大的一方的延拓来说，有下面的两种情况：

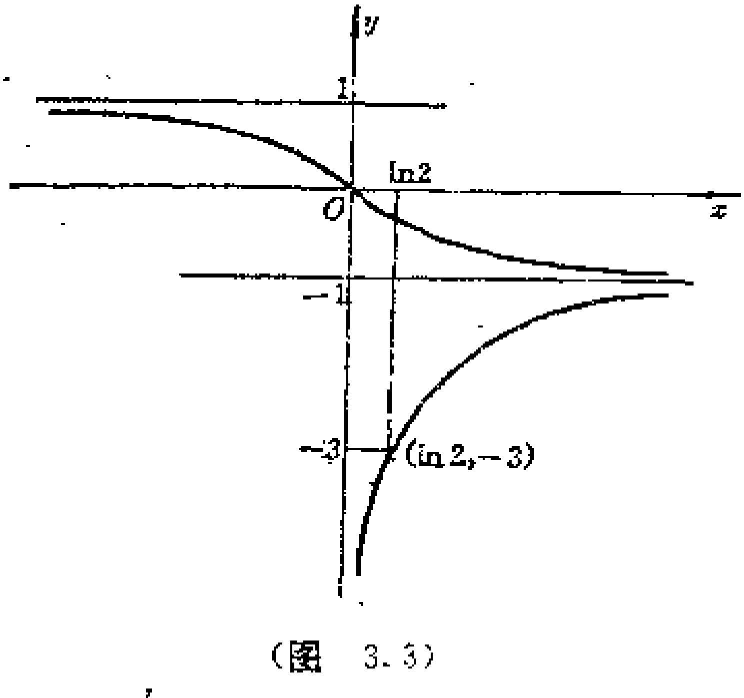
(i) 解 $y=\varphi(x)$ 可以延拓到区间 $[x_0,+\infty)$；

(ii) 解 $y=\varphi(x)$ 只能延拓到 $[x_0,\beta)$，其中 β 为有限数，则或是当 $x\to\beta-0$ 时 $y=\varphi(x)$ 无界或是 $\lim\limits_{x\to\beta-0}\rho((x,\varphi(x)),\partial G)=0$.

例1 讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{y^2-1}{2}$ 的分别通过点 $(0,0)$，$(\ln 2,-3)$ 的

解的存在区间.

解 此方程右端函数确定在整个 xy 平面上且满足解的存在唯一性定理及解的延拓条件，容易求得此方程的通解为 $y=\frac{(1+ce^x)}{(1-ce^x)}$，故通过$(0,0)$的解为 $y=\frac{1-e^x}{1+e^x}$. 这个解的最大存在区间为$(-\infty,+\infty)$，这就是延拓定理推论中的(i)情况. 而通过点$(ln2,-3)$的解为 $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$，这个解的最大存在区间为$0<x<+\infty$（参看图(3.3)）. 过点$(\ln 2,-3)$的解 $y=\frac{1+e^x}{1-e^x}$向右方可以延拓到$+\infty$，但对于 x 减少的一方来说，向左方只能延拓到0，因为当 $x\to 0^+$时，$y\to-\infty$，这就是解的延拓定理推论中(ii)中的第一种情况.



（图 3.3）

例2 讨论方程$\frac{dy}{dx}=1+\ln x$ 满足条件 $y(1)=0$解的存在区间.

解 方程右端函数于右半平面 $x>0$上定义且满足解的延拓定理的条件，这里区域 G（右半平面）是无界开区域，y 轴是它的边

界. 容易求得问题的解 $y=x\ln x$, 它在区间 $0<x<+\infty$ 上有定义, 连续且当 $x\to 0$ 时 $y\to 0$, 即所求的解向右方可以延拓到 $+\infty$, 但向左方只能延拓到0, 且当 $x\to 0$ 时, 积分曲线上的点 (x,y) 趋向于区间 G 的边界上的点, 这对应于延拓定理推论中(ii)的第二种情况.

例3　讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=y^2$ 满足条件 $y(0)=y_0\,(y_0\neq 0)$ 解的存在区间.

解　方程的右端函数 $f(x,y)=y^2$ 在平面连续并关于 y 满足局部的 Lip 条件. 初值问题的解为:

$$y=\frac{y_0}{1-y_0x} \tag{3.29}$$

如果限定 $x\geqslant 0$, 并只考虑正解 $y(x)>0$, 则解(3.29)仅在有限区间 $[0,\dfrac{1}{y_0})$ 内定义, 当 $x\to\dfrac{1}{y_0}$ 时, $y\to+\infty$, 这种现象称为解的**爆破**(Blowing－up).

例4　讨论方程 $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{1-y}$ 满足条件 $y(0)=y_0\,(y_0>0)$ 解的存在区间.

解　方程右端函数 $f(x,y)=\dfrac{1}{1-y}$ 在区域 $\{|x|<+\infty,-\infty<y<1\}$ 上连续且关于 y 满足局部的 Lip 条件($f(x,y)$ 关于 y 有局部有界的导数), 解

$$y=1+\sqrt{(y_0-1)^2-x} \tag{3.40}$$

若限定 $x\geqslant 0$, 则解(3.40)仅当 $x\in[0,(y_0-1)^2]$ 时有定义, 当 $x>(y_0-1)^2$ 时, y 不再取实值, 而当 $x\to(y_0-1)^2$ 时, $\dfrac{dy}{dx}\to\infty$, 即 y 本身有界而导数有爆破. 由于当 $x>(y_0-1)^2$ 时, 无实值, 故这种现象称为解的**熄灭**(Quenching).

解的爆破和熄灭现象迄今仍是数学工作者感兴趣的课题, 它

有重要的实用价值.

最后要指出,应用解的延拓定理的推论不难证明:如果函数 $f(x,y)$ 于整个 xy 平面上有定义,连续且有界,同时存在关于 y 的一阶连续偏导数,则方程(3.1)的任一解均可以延拓到区间 $-\infty < x < +\infty$.

§3.3 解对初值和参数的连续性和可微性

微分方程

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y) \tag{3.1}$$

满足初值条件

$$y(x_0) = y_0 \tag{3.5}$$

的解,会因初值 (x_0,y_0) 的变化而变化,它们的相互依赖关系记为

$$y = \varphi(x,x_0,y_0)$$

它满足 $y_0=\varphi(x_0,x_0,y_0)$,例如方程

$$\frac{dy}{dx} = y$$

满足初值条件 $y(x_0)=y_0$ 的解是 $y=y_0e^{x-x_0}$,它是 x,x_0,y_0 的函数.

本节要讨论 φ 是否为 (x_0,y_0) 的连续函数?这个问题具有重要的理论意义和实际价值.下面的定理回答了这个问题.

定理3 假设 $f(x,y)$ 在区域 D 内是连续的,关于 y 满足 Lip 条件;又设 $y=\psi(x)$ 是方程(3.1)在 $[a,b]$ 上的一个解,那么,存在 $\delta>0$,只要 (x_0,y_0) 满足条件

$$a \leqslant x_0 \leqslant b, \quad |y_0 - \psi(x_0)| \leqslant \delta \tag{3.41}$$

初值问题(3.1)(3.5)的解 $y=\varphi(x,x_0,y_0)$ 至少在 $[a,b]$ 上有定义,并且关于 x,x_0,y_0 是闭域

$$V: \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad a \leqslant x_0 \leqslant b, \quad |y_0 - \psi(x_0)| \leqslant \delta$$

上的三元连续函数

证 分析定理3的结论，即要证明存在区域 V 及 V 上的三元连续函数 $\varphi(x,x_0,y_0)$. 对于每个满足条件(3.41)的(x_0,y_0)，即 $\varphi(x,x_0,y_0)$作为 x 的函数，是积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\tau, y(\tau))dt$$

在$[a,b]$上的解，由此不难想到用逐次逼近法来寻找 φ.

由于当 $a \leqslant x \leqslant b$ 时，$y=\psi(x)$ 为方程(3.1)的解，所以积分曲线完全包含在 D 内，从而存在 $\delta_1>0$，使得闭区域

$$D_1 = \{(x,y) | \quad a \leqslant x \leqslant b, \quad |y - \psi(x)| \leqslant \delta_1\}$$

完全包含在 D 内. 由于 $f(x,y)$在 D 上关于 y 满足 Lip 条件，所以存在常数 $L>0$，使得不等式

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2|$$

对任何$(x,y_1),(x,y_2) \in D_1$成立. 令

$$V = \{(x,x_0,y_0) | a \leqslant x \leqslant b, a \leqslant x_0 \leqslant b, |y_0 - \varphi(x_0)| \leqslant \delta\}$$

这里取定 $\delta \leqslant \delta_1 e^{-L(b-a)}$，然后构造如下 V 上的函数列$\{\varphi_n(x,x_0,y_0)\}$:

$$\varphi_0(x,x_0,y_0) = y_0 - \varphi(x_0) + \psi(x)$$

$$\varphi_n(x,x_0,y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{n-1}(\xi,x_0,y_0))d\xi$$

$$(n = 1,2,3,\cdots)$$

先用数学归纳法证明如下(i)～(iii)：

(i) 每个 $\varphi_n(x,x_0,y_0)$在 V 上有定义，且$(x,\varphi_n(x,x_0,y_0)) \in D_1$；

(ii) 每个 $\varphi_n(x,x_0,y_0)$在 V 上连续；

(iii) $|\varphi_{n+1}(x,x_0,y_0) - \varphi_n(x,x_0,y_0)|$

$$\leqslant \frac{L^{n+1}|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}|y_0-\psi(x_0)| \tag{3.42}$$

显然，$\varphi_0(x, x_0, y_0)$在V上有定义，且由

$$|\varphi_0(x, x_0, y_0)-\psi(x)|=|y_0-\psi(x_0)|\leqslant\delta\leqslant\delta,$$

可知$(x, \varphi_0(x, x_0, y_0))\in D_1$. 而由$\varphi_0(x, x_0, y_0)$的表达式可得$\varphi_0(x, x_0, y_0)$在$V$上连续，且

$$\begin{aligned}
&|\varphi_1(x, x_0, y_0)-\varphi_0(x, x_0, y_0)| \\
&\quad=|y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi, x_0, y_0))d\xi-y_0+\psi(x_0)-\psi(x)| \\
&\quad=|\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_0(\xi, x_0, y_0))d\xi-\int_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi))d\xi| \\
&\leqslant L\int_{x_0}^{x}|\varphi_0(\xi, x_0, y_0))-\psi(\xi)|d\xi \\
&\leqslant L|y_0-\psi(x_0)||(x-x_0)|
\end{aligned}$$

这说明当$n=0$时(i)－(iii)成立. 再设$n\leqslant k-1$以上(i)－(iii)成立，于是.

(i) $\varphi_k(x, x_0, y_0)$显然在V上有定义，又当$a\leqslant x_0\leqslant b$时

$$\begin{aligned}
|\varphi_k(x, x_0, y_0)-\psi(x)|&=|y_0+\int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{k-1}(\xi, x_0, y_0))d\xi \\
&\quad-\psi(x_0)-\int_{x_0}^{x} f(\xi, \psi(\xi))d\xi| \\
&\leqslant|y_0-\psi(x_0)|+\int_{x_0}^{x}|f(\xi, \varphi_{k-1}(\xi, x_0, y_0)) \\
&\quad-f(\xi, \psi(\xi))|d\xi \\
&\leqslant|y_0-\psi(x_0)|+L\int_{x_0}^{x}|\varphi_{k-1}(\xi, x_0, y_0))-\psi(\xi)|d\xi \\
&\leqslant|y_0-\psi(x_0)|+L\int_{x_0}^{x}\{|\varphi_{k-1}(\xi, x_0, y_0)
\end{aligned}$$

$$- \varphi_{k-2}(\xi, x_0, y_0)| + |\varphi_{k-2}(\xi, x_0, y_0)$$

$$- \varphi_{k-3}(\xi, x_0, y_0)| + \cdots + |\varphi_1(\xi, x_0, y_0)) - \varphi(\xi)| \,] d\xi$$

$$\leqslant |y_0 - \psi(x_0)| + L\int_{x_0}^{x} \sum_{i=1}^{k} \frac{L^{i-1}|\xi - x_0|^{i-1}}{(i-1)!} |y_0 - \psi(x_0)| ds$$

$$= |y_0 - \psi(x_0)| \sum_{i=0}^{k} \frac{L^i |x - x_0|^i}{i!}$$

$$\leqslant |y_0 - \psi(x_0)| e^{L|x-x_0|} \leqslant \delta e^{L(b-a)} < \delta_1$$

所以$(x, \varphi_k(x, x_0, y_0)) \in D_1$.

(ii)由 f 和 φ_{k-1} 的连续性及 $(x, \varphi_{k-1}(x, x_0, y_0)) \in D_1$，可知

$\varphi_k(x, x_0, y_0) = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(\xi, \varphi_{k-1}(\xi, x_0, y_0)) d\xi$ 在 V 连续；

(iii)

$$|\varphi_{k+1}(\xi, x_0, y_0) - \varphi_k(\xi, x_0, y_0)|$$

$$= \left| \int_{x_0}^{x} [f(\xi, \varphi_k(\xi, x_0, y_0)) - f(\xi, \varphi_{k-1}(\xi, x_0, y_0))] dx \right|$$

$$\leqslant L\int_{x_0}^{x} \frac{L^k |\xi - x_0|^k}{k!} |y_0 - \psi(x_0)| d\xi$$

$$= \frac{L^{k+1}|x - x_0|^{k+1}}{(k+1)!} |y_0 - \psi(x_0)|$$

于是当 $n=k$ 时(i)—(iii)成立.

最后来完成定理的证明. 首先注意到函数列$\{\varphi_n(x, x_0, y_0)\}$在 V 上的一致收敛性等价于级数 $\varphi_0(x, x_0, y_0) + \sum_{k=1}^{\infty} [\varphi_k(x, x_0, y_0) - \varphi_{k-1}(x, x_0, y_0)]$在 V 上的一致收敛性.

由于当$(x, x_0, y_0) \in V$ 时

$$|\varphi_{n+1}(x, x_0, y_0) - \varphi_n(x, x_0, y_0)|$$

$$\leqslant \frac{L^{n+1}|b - a|^{n+1}}{(n+1)!} |y_0 - \psi(x_0)| \leqslant \delta \frac{L^{n+1}|x - x_0|^{n+1}}{(n+1)!}$$

而$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L^{n+1}|b-a|^{n+1}}{(n+1)!}$收敛. 根据维尔斯特拉斯定理，函数列$\{\varphi_n(x,x_0,y_0)\}$在$V$上一致收敛于$\varphi(x,x_0,y_0)$，又由每个$\varphi_n$在$V$上连续知$\varphi(x,x_0,y_0)$在$V$上连续. 在等式

$$\varphi_{n+1}(x,x_0,y_0)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi_n(\xi,x_0,y_0))d\xi$$

两边令$n\to+\infty$取极限，便得

$$\varphi(x,x_0,y_0)=y_0+\int_{x_0}^{x}f(\xi,\varphi(\xi,x_0,y_0))d\xi$$

其中$(x,x_0,y_0)\in V$. 这说明，对每个满足条件$a\leqslant x_0\leqslant b$，$|y_0-\varphi(x_0)|\leqslant\delta$的$(x_0,y_0)$，$\varphi(x,x_0,y_0)$是初值问题(3,1)(3,5)的解，而且$\varphi(x,x_0,y_0)$在$V$上连续. 证毕.

微分方程被用来描述物理过程时，往往含有参数. 例如在第一章例2的$R-L$电路电流强度$I(t)$满足的微分方程

$$\frac{dI}{dt}+\frac{R}{L}I=\frac{E}{L}$$

中，R，L是参数. $\frac{R}{L}$因电阻R和电感L的不同而不同，而R，L的数据是由实验测定的，因而必有误差. 参数的变化必将对解产生影响，因此我们有必要讨论方程的解对参数的依赖关系.

一般地，我们讨论含参数μ的微分方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y,\mu) \tag{3.43}$$

假设$f(x,y,\mu)$在区域G内是(x,y,μ)的连续函数，这时对于不同的μ，(3.43)对应于不同的方程. 运用定理3的方法，可以证明下面

的定理.

定理4 假设 $f(x,y,\mu)$ 在区域 G 内连续，在 G 内关于 y 一致地满足局部的 Lip 条件，即其利普希兹常数不依赖于 μ，$(x_0,y_0,\mu_0)\in G$，$y=\varphi(x;x_0,y_0,\mu_0)$ 是方程(3.43)通过点 (x_0, y_0) 的解，且在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有定义. 其中 $a\leqslant x_0\leqslant b$. 则存在 $\eta>0$，使得当 $|\mu-\mu_0|<\eta$ 时，方程(3.43)以 (x_0,y_0) 为初值的解 $y=\varphi(x;\mu)$ 在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上存在，并且是 (x,μ) 的连续函数.

定理的证明留给读者完成.

进一步，还可以加强对 $f(x,y)$ 的要求，得到更好的结果.

定理5 若 $f(x,y)$ 及 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 都在区域 D 内连续，则方程(3.43)的解 $y=\varphi(x;x_0,y_0)$ 作为 x,x_0,y_0 的函数，在它的存在范围内是连续可微的.

证 由 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 在区域 D 内连续，推知 $f(x,y)$ 在 D 内关于 y 满足局部的 Lip 条件. 因此在定理的条件下，解对初值的连续性定理成立，即 $y=\varphi(x;x_0,y_0)$ 在它的定义范围内关于 x,x_0,y_0 是连续的，下面进一步证明函数 $\varphi(x;x_0,y_0)$ 在存在范围内任一点的偏导数 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x},\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0},\dfrac{\partial\varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续.

先证 $\dfrac{\partial\varphi}{\partial x_0}$ 存在且连续.

设 $y=\varphi(x,x_0,y_0)\triangleq\varphi$ 和 $y=\varphi(x,x_0+\Delta x_0,y_0)\triangleq\psi$ 分别是由初值 (x_0,y_0) 和 $(x_0+\Delta x_0,y_0)$ 确定的方程的解（$|\Delta x_0|\leqslant\alpha$，$\alpha$ 为足够小的正数，这样能保证 φ 和 ψ 同在某一区间有定义，且当 $|\Delta x_0|\to 0$ 时 $\varphi-\psi\to 0$），即

$$\varphi\equiv y_0+\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi)dx \quad 和 \quad \psi\equiv y_0+\int_{x_0+\Delta x_0}^{x}f(x,\psi)dx$$

于是 $\psi-\varphi\equiv\int_{x_0+\Delta x_0}^{x}f(x,\psi)dx-\int_{x_0}^{x}f(x,\varphi)dx$

$$=-\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0}f(x,\psi)dx+\int_{x_0}^{x}\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}(\psi-\varphi)dx$$

其中$0<\theta<1$，注意到$\frac{\partial f}{\partial y}$及$\varphi,\psi$的连续性，我们有

$$\frac{\partial f(x,\varphi+\theta(\psi-\varphi))}{\partial y}=\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1$$

$$-\frac{1}{\Delta x_0}\int_{x_0}^{x_0+\Delta x_0}f(x,\psi)dx=-f(x_0,y_0)+r_2$$

这里r_1,r_2具有这样性质：当$|\Delta x_0|\to0$时，$r_1\to0,r_2\to0$，且当$\Delta x_0=0$时$r_1=0,r_2=0$，因此对$\Delta x_0\neq0$有

$$\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}\equiv-[f(x_0,y_0)+r_2]$$

$$+\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}dx$$

即$z=\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}+r_1\right]z\\ z(x_0)=-f(x_0,y_0)+r_2\equiv z_0\end{cases}\tag{3.44}$$

的解，在这里$\Delta x_0\neq0$被看作参数.显然，当$|\Delta x_0|=0$时上述初值问题仍然有解.根据解对初值和参数的连续性定理知，$\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}$是$x,x_0,z_0,\Delta x_0$的连续函数，从而存在

$$\lim_{|\Delta x_0|\to0}\frac{\psi-\varphi}{\Delta x_0}\equiv\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$$

而$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}$是初值问题

$$\begin{cases}\dfrac{dz}{dx}=\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y}z\end{cases}$$

$$z(x_0) = -f(x_0, y_0)$$

的解，不难求得

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_0} = -f(x_0, y_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx\right)$$

显然它是 x, x_0, y_0 的连续函数.

同理可证 $\frac{\partial \varphi}{\partial y_0}$ 存在且连续. 事实上，设 $y = \tilde{\psi}(x, x_0, y_0 + \Delta y_0)$ 为对应于初值 $(x, y_0 + \Delta y_0)$ 的解，$|\Delta y_0| \leqslant \alpha$，类似上述推演过程可证 $\frac{\tilde{\psi} - \psi}{\Delta y_0}$ 是初值问题.

$$\begin{cases} \dfrac{dz}{dx} = \left[\dfrac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} + O(\Delta y_0)\right] z \\ z(x_0) = 1 \end{cases}$$

的解，因而

$$\frac{\tilde{\psi} - \psi}{\Delta y_0} = \exp\left(\int_{x_0}^{x}\left[\frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} + O(\Delta y_0) dx\right]\right)$$

故存在极限

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_0} = \lim_{\Delta y_0 \to 0} \frac{\tilde{\psi} - \psi}{\Delta y_0} = \exp\left(\int_{x_0}^{x} \frac{\partial f(x,\varphi)}{\partial y} dx\right)$$

且为 x, x_0, y_0 的连续函数.

至于 $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ 的存在及其连续性，则由 φ 满足方程

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} \equiv f(x, \varphi(x, x_0, y_0))$$

直接得到. 证毕.

最后证明解的可微性定理.

解的可微性定理 如果函数 $f(x,y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内 m 次连续可微，则初值问题(3.1)(3.5)的解 $y = \varphi(x)$ 在其存在区间上为 $m+1$ 次连续可微.

证明 把 $y=\varphi(x)$ 代入方程(3.1)得恒等式

$$\frac{d\varphi}{dx}\equiv f(x,\varphi(x))$$

两边求导数得

$$\frac{d^2\varphi}{dx^2}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dx}=\frac{\partial f}{\partial x}+\frac{\partial f}{\partial y}\cdot f(x,\varphi(x))$$

如此进行下去,即可知当 $f(x,y)$ 对 x 及 y 为 m 次连续可微对解 $y=\varphi(x)$ 在其存在区间上对 x 为 $m+1$ 次连续可微. 证毕.

§3.4 奇解与包络

在§2.4中,我们曾提到方程的奇解,本节将对它作较系统的研究.

定义4.1 若 $\varphi(x,y)=0$ 是方程 $F(x,y,y')$ 的一个解.不含任意常数.在它所对应的积分曲线上的每一点处,解的唯一性被破坏,则称此解为微分方程的**奇解**.

下面介绍求奇解的几种方法.

3.4.1 一阶显式方程的奇解

一阶显式方程

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{3.1}$$

由存在唯一性定理可知,唯一性不成立,有可能在函数 $f(x,y)$ 关于 y 不满足 Lip 条件的点发生,但这个条件不易检验,所以可以考虑 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 无界的点,也就是

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}=0 \tag{3.45}$$

的点,但由(3.45)确定的点可能包含多条曲线 $\varphi_i(x,y)=0$,每一条

曲线不一定都是方程(1)的积分曲线，即使是积分曲线，也不一定会破坏唯一性，因此，在由(3.45)式得出的 $\varphi_i(x,y)=0(i=1,2,\cdots,k)$ 后，还必须验证 $\varphi_i(x,y)=0$ 是否为积分曲线，是否破坏唯一性。但若(3.1)有奇解，必包含在满足(3.45)的曲线 $\varphi_i(x,y)=0$ 之中。

例1 研究方程 $\dfrac{dy}{dx}=\sqrt{1-y^2}$ 的解

解 函数 $f(x,y)=\sqrt{1-y^2}$ 当 $|y|\leqslant 1$，$|x|<+\infty$ 连续，而导数 $\dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{-y}{\sqrt{1-y^2}}$ 在 $y=\pm 1$ 不存在，由 $\sqrt{1-y^2}=0$，得两条直线 $y=\pm 1$，它们都是方程的解，还可以验证，在直线 $y=\pm 1$ 的每一点，都有通解 $y=sin(x+c)$ 中的一条曲线与它们相切，故 $y=\pm 1$ 确为奇解。

例2 $\dfrac{dy}{dx}=(y-x)^{\frac{2}{3}}+5$

解 $f(x,y)=(y-x)^{\frac{2}{3}}+5$ 在全平面上连续，由 $\left(\dfrac{\partial f}{\partial y}\right)^{-1}=\dfrac{3}{2}(y-x)^{\frac{1}{3}}=0$，得 $y=x$，但它不是解，故方程无奇解。

3.4.2 **p 判别曲线**

一阶隐式方程

$$F(x,y,p)=0 \qquad p=y' \tag{3.46}$$

由关于隐式方程的存在唯一性定理(3.1.1)知，当

$$\frac{\partial F}{\partial p}(x,y,p)=0 \tag{3.47}$$

时唯一性可能不成立，由(3.46)，(3.47)消去 p 得到曲线

$$\varphi(x,y)=0$$

称为 p 判别曲线。它可由多条曲线组成，但我们必须先检验它是否为积分曲线，然后再验证唯一性是否被破坏。但若方程(3.46)有奇解，它必在 p 判别曲线中。事实上，条件(3.47)不成立既是解具

唯一性的充分条件，则(3.47)就是唯一性受破坏的必要条件. 故奇解必须同时满足(3.46)，(3.47).

例3　研究方程 $x-y=\frac{4}{9}(y')^2-\frac{8}{27}(y')^3$ 的解.

解　首先由方程

$$\begin{cases} x-y=\dfrac{4}{9}p^2-\dfrac{8}{27}p^3 \\ \dfrac{8}{9}(p-p^2)=0 \end{cases}$$

解得 p 判别曲线为：

$$y=x \text{ 和 } y=x-\frac{4}{27}$$

直接验算 $y=x$ 不是原方程的解，$y=x-\frac{4}{27}$ 是原方程的解. 为了检验 $y=x-\frac{4}{27}$ 是否为奇解，我们求出原方程的解：

$$(y-c)^2=(x-c)^3 \tag{3.48}$$

直接计算可知过直线 $y=x-\frac{4}{27}$ 上的任一点 $(x_0,x_0-\frac{4}{27})$. 在积分曲线族(3.48)中有一条曲线 $(y-x_0+\frac{4}{9})^2=(x-x_0+\frac{4}{9})^3$ 在该点与直线 $y=x-\frac{4}{27}$ 相切，即在直线 $y=x-\frac{4}{27}$ 的每一点上，沿同一方向有两条积分曲线，依定义，$y=x-\frac{4}{27}$ 为奇解.

例4　研究方程 $(y')^2-y^3=0$ 的解.

解　由 $\begin{cases} p^2-y^3=0 \\ 2p=0 \end{cases}$ 解得 p 判别曲线为 $y=0$，它是一个特解，但不是奇解，因为原方程有通解 $y=\frac{4}{(x+c)^2}$，对任意的 c，它都不与 $y=0$ 相交，即 $y=0$ 上各点的唯一性不受破坏，故 $y=0$ 不是奇解.

3.4.3 包络与奇解

定义4.2 设给定单参数曲线族

$$\Phi(x,y,c)=0 \tag{3.49}$$

其中 c 为参数. 曲线族(3.49)的包络是指这样的曲线，它与曲线族(3.49)中的每一条曲线切于一点或若干个点，即过这条曲线上的每一点，都有曲线族(3.49)的一条和它在这点相切.

从定义可见，一阶微分方程通解的包络(如果它存在的话)一定是奇解；反之，微分方程的奇解(如果存在的话)也是方程的通解的包络. 因而为了求方程的奇解，可以先求通解，然后求通解的包络.

由微分几何学可得(略去证明)：曲线族 $\Phi(x,y,c)=0$ 的包络包含在由下列二方程

$$\begin{cases}\Phi(x,y,c)=0\\ \Phi'_c(x,y,c)=0\end{cases} \tag{3.50}$$

消去 c 而得到的曲线之中，此曲线称为(3.49)的 c **判别曲线**.

在 c 判别曲线中，除包络外，还可以包含别的曲线，c 判别曲线中究竟哪一条是包络还要实际检验.

例5 求解克莱洛(Clairaut)方程

$$y=xp+f(p) \qquad p=y' \tag{3.51}$$

解 将(3.51)两边关于 x 取导数，并以 $p=\frac{dy}{dx}$ 代入得

$$p=x\frac{dp}{dx}+p+f'(p)\frac{dp}{dx}$$

即
$$\frac{dp}{dx}(x+f'(p))=0$$

如果 $\frac{dp}{dx}=0$，则有 $p=c$，代入(3.51)得

$$y=cx+f(c) \tag{3.52}$$

这里 c 为任意常数，(3.52)是(3.51)的通解.

如果 $x+f'(p)=0$，将它和(3.51)联合起来

$$\begin{cases}x+f'(p)=0\\ y=xp+f(p)\end{cases} \quad 即 \quad \begin{cases}x=-f'(p)\\ y=-pf'(p)+f(p)\end{cases} \tag{3.53}$$

这是(3.51)的一个特解，其中 p 为参数. 可以验证此解为通解的包络. 由此，我们知道克莱罗方程的通解是一直线族，此直线族的包络就是方程的奇解.

例6　求所有这样的曲线，它的切线与坐标轴所围成的三角形的面积为常数2.

解　设所求的曲线为 $y=y(x)$，在曲线上的点 $(x,y(x))$ 的切线方程为

$$Y-y=y'(X-x)$$

这里 x,y,y' 是固定的，而 (X,Y) 是切线上的点，这条切线在坐标轴上的截距分别为

$$X_0=\frac{y-xy'}{-y},\quad Y_0=y-xy'$$

依题意可得曲线所满足的微分方程为

$$\frac{1}{2}\left|(y-xy')\left(\frac{y-xy'}{-y}\right)\right|=2$$

即

$$(y-xy')^2=\mp 4y' \tag{3.54}$$

其中±号是指 $y'<0$ 时，取"—"号；而当 $y'>0$ 时，取"+"号.

先解方程

$$(y-xy')^2=-4y'\ (y'<0)$$

得到

$$y=xy'\pm 2\sqrt{-y'}.$$

这是克莱洛方程，可求得通解

$$y=cx\pm 2\sqrt{-c}\qquad (c>0)$$

它是直线族，而特解是

$$\begin{cases} x = \pm \dfrac{1}{\sqrt{-p}} \\ y = xp \pm 2\sqrt{-p} \end{cases}$$

消去 p 得到双曲线 $xy=1$.

同理,解方程

$$(y - xy')^2 = 4y'(y' > 0)$$

得到通解为 $y=cx\pm2\sqrt{c}\,(c>0)$和双曲线族 $xy=-1$. 在所有的解中,解 $xy=\pm1$是方程的奇解.

第三章　习　　题

1. 求方程$\frac{dy}{dx}=x-y^2$通过点(0,0)的第三次近似解 $\varphi_3(x)$，并且估计解 $\varphi(x)$与 $\varphi_3(x)$在 $x=\frac{1}{2}$及 $x=1$时的误差.

2. 利用逐次逼近法求方程

$$\frac{dy}{dx}=y^2-x^2$$

通过点(0,1)的近似解 $\varphi_1(x)$，$\varphi_3(x)$并估计 $\varphi(x)-\varphi_2(x)$在 $x=\frac{1}{4}$时的误差.

3. 讨论方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3}{2}y^{\frac{1}{3}}$$

在怎样的区域中满足解的存在唯一性定理的条件，并求通过点(0,0)的一切解.

4. 对微分方程

$$\frac{dy}{dx}=\begin{cases} y\ln y & \text{当 } y>0 \text{ 时} \\ 0 & \text{当 } y=0 \text{ 时} \end{cases}$$

讨论是否满足初值问题解的存在唯一性定理的条件？求解该方程并确定解的唯一性是否成立，

5. 证明格朗瓦耳(Grinwall)不等式

设 k 为非负常数，$f(x)$和 $g(x)$为在区间 $\alpha\leqslant x\leqslant\beta$ 的连续非负函数，且满足不等式

$$f(x)\leqslant k+\int_{\alpha}^{x}f(s)g(x)ds \qquad \alpha\leqslant x\leqslant\beta$$

则有 $$f(t) \leqslant k\exp\left(\int_c^x g(s)ds\right)(\alpha \leqslant x \leqslant \beta)$$

并由此证明定理1的唯一性.

6. 设 $f(x)$ 定义于 $-\infty < x < +\infty$, 满足条件

$$|f(x_1) - f_2(x)| \leqslant N|x_1 - x_2|$$

其中 $N<1$, 证明方程

$$x = f(x)$$

存在唯一的一个解.

(提示:任取 x_0, 作逐步逼近点列 $x_{n+1} = f(x_n)$, $n=0,1,2,\cdots$, 然后证明 x_n 收敛于方程的唯一解.)

7. 给定积分方程

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda\int_b^a K(x,\xi)\varphi(\xi)d\xi \qquad (*)$$

其中 $f(x)$ 是 $[a,b]$ 上的已知连续函数, $K(x,\xi)$ 是 $a\leqslant x\leqslant b, a\leqslant\xi\leqslant b$ 上的已知连续函数, 证明当 $|\lambda|$ 足够小时(λ 是常数), $(*)$ 在区间 $[a,b]$ 上存在唯一连续解.

(提示:作逐步逼近函数序列

$$\varphi_0(x) = f(x)$$

$$\varphi_{n+1}(x) = f(x) + \lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi_n(\xi)d\xi \quad n = 0,1,2,\cdots)$$

8. 假设 $f(x,y)$ 在 $|x|\leqslant a, |y|\leqslant b$ 上连续, 且关于 y 是单调不减的, $f(x,0)\geqslant 0$, 当 $0\leqslant x\leqslant a$ 时, 试用逐次逼近法证明满足初值 $y(0)=0$ 的解在 $x\leqslant h$ 上存在, 其中

$$h = \min\{a, \frac{b}{M}\}, \quad M = \max_R |f(x,y)|.$$

9. 研究方程: (1) $\frac{dy}{dx} = 1 + y^2$ 的解的存在区间;

(2) $xy' + y - e^x = 0, y(1) = e$ 的解的存在区间;

(3) $(1-x^2)y'+xy=1$的解能否延拓到 $x=\pm 1$?

10. 假设 $f(x,y)$在区域 D 内连续,且关于 y 满足 Lip 条件(常数为 L). 试证对方程 $y'=f(x,y)$的任意两个解 $\varphi(x)$及 $\psi(x)$,在其公共存区间$[a,b]$上成立不等式

$$|\varphi(x)-\psi(x)|\leqslant|\varphi(x_0)-\psi(x_0)|e^{L|x-x_0|}$$

其中 $x_0\in[a,b]$.

11. 假设函数 $p(x)$和 $Q(x)$于区间$[\alpha,\beta]$上连续,$y=\varphi(x,x_0,y_0)$是方程

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y+Q(x)$$

的解,$y_0=\varphi(x_0,x_0,y_0)$,试求$\frac{\partial\varphi}{\partial x_0},\frac{\partial\varphi}{\partial y_0},\frac{\partial\varphi}{\partial x}$并从解的表达式出发,利用对参数求导数的方法,验证结果.

12. 给定方程

$$\frac{dy}{dx}=\sin(\frac{y}{x})$$

试求$\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial x_0},\frac{\partial y(x,x_0,y_0)}{\partial y_0}$当 $x_0=1,y_0=0$的表达式.

13. 设方程

$$\frac{dy}{dx}=p(x)y^2+q(x)y+R(x)$$

满足初值条件 $y(x_0)=y_0$的解为 $y=y(x,x_0,y_0)$,不解方程,直接求出$\frac{\partial y}{\partial x_0},\frac{\partial y}{\partial y_0}$在点$(x_0,y_0)$的值.

14. 求解下列方程,并求奇解(如果存在的话)

(1) $y=2xy'+\frac{1}{2}x^2+y'^2$,　　(2) $y=x(1+y')+(y')^2$;

(3) $(y')^2+(x+1)y'-y=0$,　　(4) $y'=\ln(xy'-y)$

15. 求一曲线,使由原点到曲线任一切线的距离等于 a.

第四章　一阶线性微分方程组与高阶线性微分方程

本章讨论线性微分方程组及高阶线性微分方程. 线性方程(组)的重要性不仅是由于它们描述了大量具迭加性质的物理、力学、工程技术等方面的问题，而且还在于它们的理论比较成熟，还可以作为讨论非线性微分方程的基础. 对一阶线性微分方程组，我们引进了矩阵和向量表示，并充分利用矩阵的性质来简化讨论，使结果更加简练明了.

§4.1　引　　言

4.1.1　记号和定义

我们考虑方程组

$$\frac{dy_i}{dx} = a_{i1}(x)y_1 + a_{i2}y_2 + \cdots + a_{in}(x)y_n + f_i(x)$$

$$(i = 1,2,\cdots,n) \tag{4.1}$$

的一阶线性方程组，其中已知函数 $a_{ij}(x)$，$f_i(x)$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$ 为区间 $[a,b]$ 上的连续函数，方程组(4.1)关于未知函数 $y_1(x)$，$\cdots$，

$y_n(x)$ 及其一阶导数 $\frac{dy_1}{dx},\cdots,\frac{dy_n}{dx}$ 是线性的. 引进下面的记号：

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_{11}(x) & a_{12}(x) & \cdots & a_{1n}(x) \\ a_{21}(x) & a_{22}(x) & \cdots & a_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(x) & a_{n2}(x) & \cdots & a_{nn}(x) \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

这里 $A(x)$ 是 $n\times n$ 矩阵，它的元素是 n^2 个函数 $a_{ij}(x)$ $(i,j=1,2,$

$\cdots,n)$，简记 $A(x)=[a_{ij}(x)]_{n\times n}$，而

$$\vec{f}(x)=(f_1(x),f_2(x),\cdots,f_n(x))^T,$$

$$\vec{y}(x)=(y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x))^T$$

$$\vec{y}'(x)=(\frac{dy_1}{dx},\frac{dy_2}{dx},\cdots,\frac{dy_n}{dx})^T \triangleq (y_1',y_2'\cdots,y_n')^T$$

为 n 维列向量或 $n\times 1$矩阵.

显然，矩阵的相加、相乘、矩阵与纯量的相乘等运算法则对以函数作为元素的矩阵 $A(x)$同样成立. 这样方程组(4·1)可以写成下面的形式

$$\vec{y}'(x)=A(x)\vec{y}(x)+\vec{f}(x) \tag{4.3}$$

当$\vec{f}(x)\equiv 0$为齐次，$\vec{f}(x)\not\equiv 0$为非齐次.

例如：方程组

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dx}=3y_1-7y_2+9y_3+x\\ \dfrac{dy_2}{dx}=15y_1+y_2-y_3+e^x\\ \dfrac{dy_3}{dx}=7y_1+6y_3\end{cases}$$

可写成下面简洁的形式

$$\vec{y}'=\begin{bmatrix}3&-7&9\\15&1&-1\\7&0&6\end{bmatrix}\vec{y}+\begin{bmatrix}x\\e^x\\0\end{bmatrix},\quad \vec{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{bmatrix}$$

我们引进下面的概念.

一个矩阵或一个向量在 $a\leqslant x\leqslant b$ 上称为连续的，可导的或可积的，如果它的每个元都为$[a,b]$上的连续函数，可微函数、可积函数.

一个 $n\times n$ 矩阵 $B(x)$或一个 n 维列向量 $\vec{u}(x)$：

$$B(x)=\begin{bmatrix} b_{11}(x) & b_{12}(x) & \cdots & b_{1n}(x) \\ b_{21}(x) & b_{22}(x) & \cdots & b_{2n}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}(x) & b_{n2}(x) & \cdots & b_{nn}(x) \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}(x)=(u_1(x),\cdots,u_n(x))^T$$

它们的导数或在$[a,b]$上的积分分别由下式给出：

$$B'(x)=\begin{bmatrix} b_{11}'(x) & b_{12}'(x) & \cdots & b_{1n}'(x) \\ b_{21}'(x) & b_{22}'(x) & \cdots & b_{2n}'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1}'(x) & b_{n2}'(x) & \cdots & b_{nn}'(x) \end{bmatrix}$$

$$\vec{u}'(x)=(u_1'(x),\cdots,u_n'(x))^T$$

$$\int_a^b B(x)dx=\begin{bmatrix} \int_a^b b_{11}(x)dx & \int_a^b b_{12}(x)dx & \cdots & \int_a^b b_{1n}(x)dx \\ \int_a^b b_{21}(x)dx & \int_a^b b_{22}(x)dx & \cdots & \int_a^b b_{2n}(x)dx \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \int_a^b b_{n1}(x)dx & \int_a^b b_{n2}(x)dx & \cdots & \int_a^b b_{nn}(x)dx \end{bmatrix}$$

$$\int_a^b \vec{u}(x)dx=\left(\int_a^b u_1(x)dx,\int_a^b u_2(x)dx,\cdots,\int_a^b u_n(x)dx\right)^T$$

对可微的$n\times n$矩阵$A(x)$，$B(x)$及n维向量$\vec{u}(x)$，$\vec{v}(x)$，下面的等式成立：

1° $\quad (A(x)+B(x))'=A'(x)+B'(x)$

$\quad\quad (\vec{u}(x)+\vec{v}(x))'=\vec{u}'(x)+\vec{v}'(x)$

2° $\quad (A(x)B(x))'=A'(x)B(x)+A(x)B'(x)$

3° $\quad (A(x)\vec{u}(x))'=A'(x)\vec{u}(x)+A(x)\vec{u}'(x)$

现给出方程组(4.3)及其初值问题解的定义：

定义1.1 称n维向量函数$\vec{u}(x)$为方程组(4.3)在$[\alpha,\beta]\subseteq$

$[a,b]$上的解，如果 $\vec{u}(x)$ 在$[\alpha,\beta]$上连续可微且满足方程(4.3)，即有

$$\vec{u}'(x) \equiv A(x)\vec{u}(x) + \vec{f}(x) \qquad x \in [\alpha,\beta]$$

定义1.2　称 $\vec{u}(x)$ 为初值问题

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x) \\ \vec{y}(x_0) = \vec{\eta} \end{cases} \tag{4.4}$$

在$[\alpha,\beta]$上的解，如果对已知的 $x_0\in[\alpha,\beta]$及 n 维常向量 $\vec{\eta}$，$\vec{u}(x)$ 为方程组(4.3)在$[\alpha,\beta]$上的解，且满足 $\vec{u}(x_0)=\vec{\eta}$.

例1　检验向量 $\vec{\varphi}(x)=(e^{-x},-e^{-x})^T$ 为初值问题

$$\vec{y}'(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\vec{y},\quad \vec{y}(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

在$(-\infty,+\infty)$上的解.

解　显然

$$\vec{\varphi}(0) = (1,-1)^T，且\ \vec{\varphi}'(x) = (-e^{-x},e^{-x})^T,$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\vec{\varphi}(x) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{-x} \\ -e^{-x} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -e^{-x} \\ e^{-x} \end{bmatrix} \qquad x \in (-\infty, +\infty)$$

所以 $\vec{\varphi}(x)$ 为初值问题的解.

4.1.2　化 n 阶线性微分方程为一阶线性微分方程组

n 阶线性方程的标准形式为

$$y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \tag{4.5}$$

其中 $a_i(x)(i=1,2,\cdots,n)$及右边函数 $f(x)$为 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续函数，$y^{(k)}=\dfrac{d^k y}{dx^k}(k=1,2,\cdots,n)$.

引进记号

$$L[\quad]\triangleq\frac{d^n}{dx^n}+a_1(x)\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}+\cdots+a_n(x) \tag{4.6}$$

则方程(4.5)可写成 $L[y]=f(x)$. 称记号(4.6)为 n **阶线性微分算子**.

考虑 n 阶线性微分方程的初值问题

$$\begin{cases}L[y]=f(x)\\ y(x_0)=\eta_1,y'(x_0)=\eta_2,\cdots,y^{(n-1)}(x_0)=\eta_n\end{cases} \tag{4.7}$$

其中 $x_0\in[a,b]$,$\eta_1,\cdots,\eta_n$ 为 n 个已知常微. 我们指出,定解问题(4.7)可化为下面的一阶线性微分方程组的初值问题:

$$\vec{y}'(x)=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -a_n(x) & -a_{n-1}(x) & \cdots & \cdots & -a_1(x)\end{bmatrix}\vec{y}(x)$$

$$+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f(x)\end{bmatrix} \tag{4.8}$$

$$\vec{y}(x_0)=(\eta_1,\cdots,\eta_n)^T=\vec{\eta}$$

其中 $\vec{y}'(x)=(y_1',\cdots,y_n')^T$,$\vec{y}(x)=(y_1,\cdots,y_n)^T$

事实上,令 $y_1(x)=y(x)$,$y_2(x)=y'(x)$,$\cdots$,$y_n(x)=y^{(n-1)}(x)$,这时

$$\begin{cases}y_1'=y_2\\ y_2'=y_3\\ \cdots\\ y_{n-1}'=y_n\\ y_n'=-a_n(x)y_1-a_{n-1}(x)y_2\cdots-a_1(x)y_n+f(x)\end{cases}$$

且 $y_1(x_0)=y(x_0)=\eta_1, y_2(x_0)=y'(x_0)=\eta_2,\cdots,y_n(x_0)$

$$=y^{(n-1)}(x_0)=\eta_n,$$

即可化为初值问题(4.8)

设$\varphi(x)$为初值问题(4.7)在$[a,b]$上的解，因此$\varphi(x)$在$[a,b]$上有直到n阶的连续导数，令

$$\vec{u}(x)=(u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x))^T$$

其中$u_1(x)=\varphi(x),u_2(x)=\varphi'(x),\cdots,u_n(x)=\varphi^{(n-1)}(x)$，则

$$\vec{u}'(x)=\begin{bmatrix}u_1'(x)\\u_2'(x)\\\vdots\\u_n'(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\varphi'(x)\\\varphi''(x)\\\vdots\\\varphi^{(n)}(x)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}\varphi'(x)\\\varphi''(x)\\\vdots\\\varphi^{(n-1)}(x)\\-a_1(x)\varphi^{(n-1)}_{(x)}\quad -a_2(x)\varphi^{(n-2)}_{(x)}\quad \cdots\quad -a_n(x)\varphi(x)+f(x)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}u_2(x)\\u_3(x)\\\cdots\\u_n(x)\\-a_n(x)u_1(x)\quad -a_{n-1}(x)u_2(x)\quad \cdots\quad -a_1(x)u_n(x)+f(x)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&0&\cdots&1\\-a_n(x)&-a_{n-1}(x)&\cdots&\cdots&-a_1(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_1\\u_1\\\vdots\\u_n(x)\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ f(x)\end{bmatrix}$$

且 $\vec{u}(x_0)=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^T$. ，这表示向量 $\vec{u}(x)=(\varphi(x),\varphi'(x),\cdots,\varphi^{(n-1)}(x))^T$ 是初值问题(4.8)的解.

反之，设向量 $\vec{v}(x)=(v_1(x),v_2(x),\cdots,v_n(x))^T$ 是问题(4.8)在$[a,b]$上的解，定义 $\omega(x)=v_1(x)$，则由(4.8)的第1个方程有 $\omega'(x)=v_1'(x)=v_2(x)$，由第2个方程有 $\omega''(x)=v_2'(x)=v_3(x)$，$\cdots$，由第 $n-1$个方程有 $\omega^{(n-1)}(x)=v_n(x)$，最后由第 n 个方程有

$$\begin{aligned}\omega^{(n)}(x)= v_n'(x) &= - a_n(x)v_1(x) - a_{n-1}(x)v_2(x)\\ &- \cdots - a_1(x)v_n(x) + f(x) = - a_1(x)\omega^{(n-1)}(x)\\ &- a_2(x)\omega^{(n-2)}(x) - \cdots - a_n(x)\omega(x) + f(x)\end{aligned}$$

由此可得：

$$\omega^{(n)}(x) + a_1(x)\omega^{(n-1)}(x) + \cdots + a_n(x)\omega(x) = f(x)$$

及$\omega(x_0) = v_1(x_0) = \eta_1,\omega'(x_0) = v_2(x_0)\eta_2,\cdots,\omega^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$

即 $\omega(x)=v_1(x)$是方程(4,7)的解.

由上面的讨论，我们可以看出初值问题(4.7)与初值问题(4.8)在下面的意义下是等价的：给定一个初值问题的解，就可以构造另一初值问题的解. 例如二阶微分方程初值问题

$$\begin{cases}y'' - 2y' + y = 2\\ y_{(0)} = 1, \quad y'(0) = 0\end{cases}$$

在$(-\infty,+\infty)$上有解 $y=xe^x-e^x+2$，则相应的一阶线性方程组的初值问题为

$$\begin{bmatrix}y'_1(x)\\ y'_2(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 2\end{bmatrix}$$

$$\vec{y}(0)=\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

在$(-\infty,+\infty)$有解 $\vec{\varphi}(x)=(xe^x-e^x+2,xe^x)^T$.

但是 n 阶线性方程可以化为由 n 个一阶线性方程组成的方程组，并不意味着任一个由 n 个一阶线性方程组成的一阶线性方程组都可以化为一个 n 阶线性微分方程，例如方程组

$$\vec{y}'=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\vec{y},\quad \vec{y}=\begin{bmatrix}y_1\\y_2\end{bmatrix}$$

就不能化为一个二阶线性方程.

不仅 n 阶线性微分方程可以化为一阶线性微分方程组，而且由二个以上的高阶线性微分方程组成的线性微分方程组都可以化为一阶线性方程组. 例如方程组

$$\begin{cases}y''+a_1(x)y'+a_2(x)y+a_3(x)z'+a_4(x)z=f_1(x)\\ z''+b_1(x)z'+b_2(x)z+b_3(x)y'+b_4(x)y=f_2(x)\end{cases}$$

可以令 $y_1=y,y_2=y',y_3=z,y_4=z'$ 则上面的方程组可以化为

$$\begin{bmatrix}y'_1\\y'_2\\y'_3\\y'_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0 & 0\\-a_2(x) & -a_1(x) & -a_4(x) & -a_3(x)\\0 & 0 & 0 & 1\\-b_4(x) & -b_3(x) & -b_2(x) & -b_1(x)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\f_1(x)\\0\\f_2(x)\end{bmatrix}$$

［注］ 任一个高阶微分方程或方程组都可以通过类似的变换化为一个相应的一阶微分方程组. 如

$$\frac{d^2y}{dx^2}=f(x,y,y')$$

令 $y_1=y, y_2=y'$，相应的一阶微分方程组就是

$$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = f(x, y_1, y_2). \end{cases}$$

§4.2 存在唯一性定理

4.2.1 预备知识

对 n 维向量 $\vec{y}=(y_1, y_2, \cdots, y_n)^T$ 及 $n\times n$ 矩阵 $A(x)=[a_{ij}(x)]_{n\times n}$ 我们定义其范数(亦称模)为

$$\|\vec{y}(x)\| = \sum_{i=1}^{n} |y_i(x)|, \quad \|A(x)\| = \sum_{i,j=1}^{n} |a_{ij}(x)|$$

设 $A(x), B(x)$ 为 $n\times n$ 矩阵，$\vec{y}(x), \vec{z}(x)$ 为 n 维向量，容易验证有下面的性质：

1° $\|\vec{y}(x)\|=0$(或 $\|A(x)\|=0$)当且仅当 $y_i(x)=0(i=1,\cdots,n)$ 或 $a_{ij}(x)=0(i,j=1,\cdots,n)$.

2° 对任一常数 c 有：

$$\|c\vec{y}(x)\| = |c|\|\vec{y}(x)\|, \quad \|cA(x)\| = |c|\|A(x)\|.$$

3° $\|A(x)\vec{y}(x)\| \leqslant \|A(x)\|\|\vec{y}(x)\|$

$$\|A(x)B(x)\| \leqslant \|A(x)\|\|B(x)\|.$$

4° $\|\vec{y}(x) + \vec{z}(x)\| \leqslant \|\vec{y}(x)\| + \|\vec{z}(x)\|$

$$\|A(x) + B(x)\| \leqslant \|A(x)\| + \|B(x)\|.$$

5° $\left\|\int_\alpha^\beta \vec{y}(x)dx\right\| \leqslant \int_\alpha^\beta \|\vec{y}(x)\|dx,$

$$\left\|\int_\alpha^\beta A(x)dx\right\| \leqslant \int_\alpha^\beta \|A(x)\|dx$$

显然，$\vec{y}(x)$ 或 $A(x)$ 的范数均为 x 的函数. 向量 $\vec{y}(x)$ 的范数定义与它在 n 维欧氏空间的范数定义 $|\vec{y}(x)|=\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i^2)\right)^{\frac{1}{2}}$ 不一样，但

可以证明对一切的 $\vec{y}(x)$ 有

$$|\vec{y}| \leqslant \|\vec{y}(x)\| \leqslant \sqrt{n}\,|\vec{y}|$$

因而在研究向量函数的极限，连续性、有界性、可微性时，不论用哪种范数运算，结论都是一样的，故称这两种范数定义是等价的.

在定义向量及矩阵的范数后，我们就可以定义向量列、矩阵列在区间$[a,b]$上的收敛性及一致收敛性.

称向量列$\{\vec{y}_k(x)\}$，其中$(\vec{y}_k(x)=(y_{1k}(x),\cdots,y_{nk}(x))^T$ 在$[a,b]$上**收敛或一致收敛**，如果对每个 $i(i=1,\cdots,n)$函数列$\{y_{ik}(x)\}$在$[a,b]$上收敛或一致收敛. 易知在区间$[a,b]$上连续的向量函数序列$\{\vec{y}_k(x)\}$的一致收敛极限向量 $\vec{y}(x)$也在$[a,b]$上连续.

类似函数级数的收敛定义. 我们称向量函数级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\vec{y}_k(x)$收敛（一致收敛），如果其部份和作成的向量序列在区间$[a,b]$上是收敛的（一致收敛的）. 对于向量函数级数，一致收敛的维氏判别法也成立：如果

$$\|\vec{y}_k(x)\| \leqslant M_k \quad a \leqslant x \leqslant b \quad k=1,2,\cdots$$

且级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty}M_k$ 收敛. 则$\sum\limits_{k=1}^{\infty}\vec{y}_k(x)$在$[a,b]$上一致收敛.

积分号下取极限对于一致收敛的向量函数列也成立，即如果向量函数列$\{\vec{y}_k(x)\}$在$[a,b]$上一致收敛，则有

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b \vec{y}_k(x)\mathrm{dx} = \int_a^b \lim_{k\to\infty}\vec{y}_k(x)\mathrm{dx}$$

对于矩阵函数序列$\{A_k(x)\}$，也有类似于上而向量函数列的有关定义和结果.

4.2.2 存在致一性定理

为了讨论方便起见，可以把一阶线性微分方程组的初值问题

$$\begin{cases} \vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x) & a \leqslant x \leqslant b \\ \vec{y}(x_0) = \vec{\eta} & x_0 \in [a,b] \end{cases} \tag{4.4}$$

在$[a,b]$上的求解化为求积分方程组

$$\vec{y}(x) = \vec{\eta} + \int_{x_0}^{x} [A(s)\vec{y}(s) + \vec{f}(s)]\mathrm{d}s \tag{4.9}$$

在$[a,b]$上的连续解. 这样,对初值问题(4.4)解的存在唯一性的讨论可以化为对方程组(4.9)解的存在唯一性的讨论. 在作出皮卡逐次逼近列

$$\begin{cases} \vec{y}_0(x) = \vec{\eta} \\ \vec{y}_k(x) = \vec{\eta} + \int_{x_0}^{x} [A(s)\vec{y}_{k-1}(s) + \vec{f}(s)]\mathrm{d}s \quad (k = 1,2,\cdots) \end{cases}$$

后,利用上面的予备知识,类似于第三章关于一阶微分方程初值问题存在唯一性定理的证明程序,可以证明如下的存在唯一性定理.

定理1 (存在唯一性定理)如果$A(x)$是$n\times n$矩阵,$\vec{f}(x)$是n维列向量,它们都在$[a,b]$上连续,则对于$[a,b]$上任何数x_0及任一常向量$\vec{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n)^T$,方程组

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x) \tag{4.3}$$

在整个区间$[a,b]$上存在唯一的连续解$\vec{\varphi}(x)$,且满足条件$\vec{\varphi}(x_0)=\vec{\eta}$.

由于n阶线性微分方程的初值问题(4.7)与一阶线性方程组初值问题(4.8)的等价性,下面的推论是很自然的.

推论 如果$a_i(x)(i=1,\cdots,n)$,$f(x)$均为$[a,b]$上的连续函数,则对区间$[a,b]$上的任一x_0及任何一组数$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$,方程

$$L[y] \triangleq y^{(n)} + a_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_n(x)y = f(x) \tag{4.5}$$

在整个区间$[a,b]$上存在唯一的解$\varphi(x)$,且满足条件

$$\varphi(x_0) = \eta_1, \varphi'(x_0) = \eta_2, \cdots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = \eta_n$$

值得指出的是,关于一阶线性微分方程组解的定义区间是系数矩阵$A(x)$与非齐次项$\vec{f}(x)$在其上连续的区间$[a,b]$,而不像在第三章中,对于一般的一阶微分方程,解只存在于x_0的某个邻域,

经过延拓后才能定义在较大的区间. 线性微分方程(组)初值问题解的存在唯一性定理称为全局性的存在唯一性定理. 而第三章中相应的定理则是局部性的结论.

§4.3 一阶线性微分方程组解的基本理论

4.3.1 齐次一阶线性微分方程组

本段主要讨论齐次一阶线性微分方程组

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) \tag{4.10}$$

所有解的代数结构问题. 假设 $n\times n$ 矩阵 $A(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 根据向量函数的微分法则, 有如下的迭加原理.

定理2 (迭加原理) 如果 $\vec{u}(x)$ 和 $\vec{v}(x)$ 均为方程组(4.10)的解, 则它们的线性组合 $\alpha\vec{u}(x)+\beta\vec{v}(x)$ 也是方程组(4.10)的解, 这里 α,β 是任意常数.

定理2的结果可以推广到任意有限个解的线性组合. 由此不难得到结论: 一阶齐次线性微分方程组(4.10)的所有解组成一个线性空间.

为了讨论方程组(4.10)解的结构形式, 我们引进向量组的线性相关与线性无关的概念.

定义3.1 称定义在 $[a,b]$ 上的向量函数 $\vec{y}_1(x),\vec{y}_2(x),\cdots,\vec{y}_m(x)$ 是**线性相关的**, 如果存在不全为零的常微 $c_1,\cdots,c_m$, 使得恒等式

$$c_1\vec{y}_1(x)+c_2\vec{y}_2(x)+\cdots+c_m\vec{y}_m(x)\equiv 0, a\leqslant x\leqslant b$$

成立. 否则称 $\vec{y}_1(x),\vec{y}_2(x),\cdots,\vec{y}_m(x)$ 为**线性无关**.

例如对任一正整数 k, 下面的 $k+1$ 个 n 维向量

$$\begin{bmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}x\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},\cdots,\begin{bmatrix}x^k\\0\\\vdots\\0\end{bmatrix},$$

在任何区间上都线性无关，而向量函数

$$\begin{bmatrix}\cos^2 x\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\sin^2 x\\0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\0\end{bmatrix}$$

在任何区间上线性相关.

设有定义在$[a,b]$上的 n 个向量函数 $\vec{y}_1(x),\vec{y}_2(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$，其中 $\vec{y}_k(x)=(y_{1k}(x),\cdots,y_{nk}(x))^T(k=1,\cdots,n)$. 由这 n 个向量函数构成的行列式：

$$W[\vec{y}_1(x),\vec{y}_2(x),\cdots,\vec{y}_n(x)]\triangleq W(x)$$

$$=\begin{vmatrix}y_{11}(x) & y_{12}(x) & ,\cdots & ,y_{1n}(x)\\ y_{21}(x) & y_{22}(x) & ,\cdots & ,y_{2n}(x)\\ \cdots & ,\cdots & ,\cdots & ,\cdots\\ y_{n1}(x) & y_{n2}(x) & ,\cdots & ,y_{nn}(x)\end{vmatrix}$$

称为这 n 个向量函数的**伏朗斯基**(Wronsky)**行列式**，利用这个行列式的值可以判别方程组(4.10) n 个解的线性无关或相关性.

定理3 如果 n 个向量函数 $\vec{y}_1(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$ 在$[a,b]$上线性相关，则它的**伏朗斯基**行列式 $W(x)\equiv 0, a\leqslant x\leqslant b$

证明 由 $\vec{y}_1(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$ 在$[a,b]$上线性相关，依定义必存在不全为零的常数 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 使得

$$c_1\vec{y}_1(x)+c_2\vec{y}_2(x)+\cdots+c_n\vec{y}_n(x)\equiv 0 \qquad (4.11)$$

把(4.11)看作是以 $c_1,\cdots,c_n$ 为末知量的齐次线性代数方程组，这个方程组的系数行列式就是 $\vec{y}_1(x),\vec{y}_2(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$ 的**伏朗斯基**行列式 $W(x)$. 由齐次线性代数方程组的理论知道，要使方程组

(4.11)有非零解，其系数行列式必为零，即 $W(x)\equiv 0, a\leqslant x\leqslant b$.

证毕.

定理4 设 $\vec{y}_1(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$ 为方程组(4.10)在$[a,b]$上的解，则它们在$[a,b]$上线性无关的充要条件为其伏朗斯基行列式 $W(x)\neq 0, a\leqslant x\leqslant b$.

证明 如果在$[a,b]$上 $W(x)\neq 0$，则由定理3可知 $\vec{y}_1(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$在$[a,b]$上线性无关.

反之，当 $\vec{y}_1(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$ 在$[a,b]$上线性无关时，我们要证明 $W(x)\neq 0, a\leqslant x\leqslant b$. 若不然，必存在 $x_0\in[a,b]$，使得 $W(x_0)=0$. 考虑下面的以 $c_1,\cdots,c_n$ 为未知量的齐次线性代数方程组

$$c_1\vec{y}_1(x_0)+c_2\vec{y}_2(x_0)+\cdots+c_n\vec{y}_n(x_0)=0 \qquad (4.12)$$

它的系数行列式为 $W(x_0)=0$，由此可知方程组(4.12)存在非零解 $\overline{C}_1,\overline{C}_2,,\cdots,\overline{C}_n$. 以这 n 个不全为零的常数构造向量函数 $\vec{\varphi}(x)$

$$\vec{\varphi}(x)=\overline{C}_1\vec{y}_1(x)+\overline{C}_2\vec{y}_2(x)+\cdots+\overline{C}_n\vec{y}_n(x) \qquad (4.13)$$

由定理2易知 $\vec{\varphi}(x)$ 为方程组(4.10)的解. 注意到(4.12)，可知解 $\vec{\varphi}(x)$ 满足条件 $\vec{\varphi}(x_0)=0$. 但在$[a,b]$上，方程组(4.10)有一个恒为零的向量函数解，在 x_0 点也为零向量. 由唯一性定理可得 $\vec{\varphi}(x)\equiv 0$，即

$$\overline{C}_1\vec{y}_1(x)+\overline{C}_2\vec{y}_2(x)+\cdots+\overline{C}_n\vec{y}_n(x)\equiv 0$$

由于 $\overline{C}_1,\overline{C}_2,,\cdots,\overline{C}_n$ 不全为零. 这与 $\vec{y}_1(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$ 线性无关矛盾. 故有 $W(x)\neq 0. a\leqslant x\leqslant b$.

证毕.

由定理3、定理4可知，方程组(4.10)的 n 个解 $\vec{y}_i(x)(1\leqslant i\leqslant n)$ 相应的伏朗斯基行列式或者恒等于零或者恒不等于零，因此定理4的充要条件也可用 $W(x_0)\neq 0$代替，其中 x_0 为$[a,b]$中任一点. 但对任意的 n 个 n 维向量，即使在$[a,b]$上 $W(x)\equiv 0$，也未必是线性相关的. 例如向量 $\vec{y}_1=(1,0,0)^T, \vec{y}_2=(x,1,0)^T$ 和 $\vec{y}_3=(x^2,x,0)^T$

相应的伏朗斯基行列式 $W(x)\equiv 0(-\infty<x<+\infty)$ 但在 $(-\infty,+\infty)$ 上三个向量是线性无关的.

利用定理1和定理4可以得到方程组(4.10)解的结构形式.

定理5 （结构定理）

1° 齐次线性微分方程组(4.10)存在 n 个线性无关解；

2° 如果 $\vec{y}_1(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$ 是方程组(4.10)的线性无关解，则方程组(4.10)的任一解 $\vec{\varphi}(x)$ 可表示为

$$\vec{\varphi}(x)=c_1\vec{y}_1(x)+c_2\vec{y}_2(x)+\cdots+c_n\vec{y}_n(x)$$

其中 $c_1,c_2,\cdots,c_n$ 为确定的常数.

证明 先证1°. 任取 $x_0\in[a,b]$，根据解的存在唯一性定理，方程组(4.10)分别满足初始条件：$\vec{y}(x_0)=(1,0,\cdots 0)^T$，$\vec{y}(x_0)=(0,1,0,\cdots,0)^T,\cdots,\vec{y}(x_0)=(0,\cdots,0,1)^T$ 的 n 个解 $\vec{y}_1(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$ 一定存在. 由于这 n 个解在 x_0 点的伏朗斯基行列式 $W(x_0)=1\neq 0$，据定理4可知，$\vec{y}_1(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上线性无关.

再证2°. 设 $\vec{\varphi}(x)$ 为方程组(4.10)的任一解，而 $\vec{y}_1(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$ 为方程组(4.10)的一组线性无关解. 任取 $x_0\in[a,b]$，并令

$$\vec{\varphi}(x_0)=c_1\vec{y}_1(x_0)+c_2\vec{y}_2(x_0)+\cdots+c_n\vec{y}_n(x_0)\tag{4.13}$$

可把(4.13)看作是以 $c_1,\cdots,c_n$ 为未知量的非齐次线性代数方程组，即

$$\begin{cases}\varphi_1(x_0)=c_1y_{11}(x_0)+c_2y_{12}(x_0)+\cdots+c_ny_{1n}(x_0)\\ \varphi_2(x_0)=c_1y_{21}(x_0)+c_2y_{22}(x_0)+\cdots+c_ny_{2n}(x_0)\\ \quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\\ \varphi_n(x_0)=c_1y_{n1}(x_0)+c_2y_{n2}(x_0)+\cdots+c_ny_{nn}(x_0)\end{cases}\tag{4.14}$$

由于 $\vec{y}_1(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$ 线性无关，据定理4有 $W(x_0)\neq 0$. 而 $W(x_0)$ 是方程组(4.14)的系数行列式，据线性代数方程组的理论，方程组(4.14)有唯一的非零解 $\overline{C}_1,\overline{C}_2,\cdots,\overline{C}_n$. 以这组常数构造向量函数

$$\bar{y}(x) = \bar{C}_1\bar{y}_1(x) + \bar{C}_2\bar{y}_2(x) + \cdots + \bar{C}_n\bar{y}_n(x)$$

由迭加原理，$\bar{y}(x)$ 也是方程组(4.10)在 $[a,b]$ 上的解．且有

$$\bar{y}(x_0) = \bar{C}_1\bar{y}_1(x_0) + \bar{C}_2\bar{y}_2(x_0) + \cdots + \bar{C}_n\bar{y}_n(x_0)$$

从而向量 $\bar{y}(x)$ 与 $\bar{\varphi}(x)$ 有相同的初值 $\bar{y}(x_0)=\bar{\varphi}(x_0)$．由唯一性定理，可得 $\bar{y}(x)\equiv\bar{\varphi}(x)$，即

$$\bar{\varphi}(x) = \bar{C}_1\bar{y}_1(x) + \bar{C}_2\bar{y}_2(x) + \cdots + \bar{C}_n\bar{y}_n(x).$$ 证毕．

推论 方程组(4.10)的所有解组成 n 维向量空间．

称方程组(4.10)的 n 个线性无关解 $\bar{y}_1(x),\cdots,\bar{y}_n(x)$ 为(4.10)的一个**基本解组**．显然，方程组(4.10)有无限多个基本解组．如果以解向量 $\bar{y}_1(x),\cdots,\bar{y}_n(x)$ 为列，排成 $n\times n$ 的矩阵，则称此矩阵为方程组(4.10)的**解矩阵**．而由 n 个线性无关解组成的解矩阵，则称它为(4.10)**基解矩阵**．若以记号 $\Phi(x)$ 表示方程组(4.10)的基解矩阵，则由一阶齐次线性方程组解的结构理论可知，对方程组(4.10)的任一解 $\bar{\varphi}(x)$，可以表示成

$$\bar{\varphi}(x) = \Phi(x)\cdot C \tag{4.15}$$

这里 C 为确定的 n 维常向量．

设 $\Phi(x)$ 为方程组(4.10)的基解矩阵，且由向量 $\bar{y}_1(x),\cdots,\bar{y}_n(x)$ 所组成．据基解矩阵的定义可知，行列式 $det\Phi(x)=W[\bar{y}_1(x),\cdots,\bar{y}_n(x)]=W(x)$，因此 $\det\Phi(x)\neq0$，由定理4可知，若(4.10)的解矩阵 $\Psi(x)$ 在 x_0 点相应的行列式 $\det\Psi(x_0)\neq0$，那么，$\Psi(x)$ 必为基解矩阵，其中 x_0 为 $[a,b]$ 上的任一点．因而可以得出：(4.10)的一个解矩阵 $\Phi(x)$ 是**基解矩阵**的充要条件是 $\det\Phi(x_0)\neq0(a\leqslant x_0\leqslant b)$．

例1 验证

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} e^x & xe^x \\ 0 & e^x \end{bmatrix}$$

为方程组

$$\vec{y}'(x)=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\vec{y}(x),\text{其中 }\vec{y}(x)=\begin{bmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\end{bmatrix}$$

的基解矩阵.

解 先验证 $\Phi(x)$ 为解矩阵. 令 $\vec{\varphi}_1(x)$, $\vec{\varphi}_2(x)$ 表示 $\Phi(x)$ 的第一、二列向量. 此时

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\vec{\varphi}_1(x)=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^x\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^x\\0\end{bmatrix}=\vec{\varphi}_1{}'(x)$$

$$\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\vec{\varphi}_2(x)=\begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}xe^x\\e^x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(1+x)e^x\\e^x\end{bmatrix}=\vec{\varphi}_2{}'(x)$$

所以 $\vec{\varphi}_1(x)$, $\vec{\varphi}_2(x)$ 均为方程组的解向量, 因而 $\Phi(x)=[\vec{\varphi}_1(x),\vec{\varphi}_2(x)]$ 是解矩阵.

其次, 由于 $\det\Phi(0)=1$, 所以 $\Phi(x)$ 是方程组的基解矩阵.

方程组(4.10)有无限多个基解矩阵, 且有如下的性质:

1° 如果 $\Phi(x)$ 为方程组(4.10)在 $[a,b]$ 上的基解矩阵. 则

$$\Phi'(x)=A(x)\Phi(x)\qquad a\leqslant x\leqslant b$$

2° 如果 $\Phi(x)$ 为(4.10)在 $[a,b]$ 上的基解矩阵, 则 $\Psi(x)=\Phi(x)\cdot C$ 也是(4.10)在 $[a,b]$ 上的基解矩阵, 其中 C 为非奇异的 $n\times n$ 常数矩阵.

性质1°、2°的证明由读者自己完成.

3° 如果 $\Phi(x)$, $\Psi(x)$ 均为(4.10)在 $[a,b]$ 上的基解矩阵, 则必存在一个非奇异的 $n\times n$ 常数矩阵 C, 使得 $\Psi(x)=\Phi(x)\cdot C$, $a\leqslant x\leqslant b$.

事实上, 由于 $\Phi(x)$ 为基解矩阵. 故其逆矩阵 $\Phi^{-1}(x)$ 一定存在. 现令 $\Phi^{-1}(x)\Psi(x)\triangleq X(x)$ 或 $\Psi(x)=\Phi(x)X(x)\quad(a\leqslant x\leqslant b)$, 易知 $X(x)$ 是 $n\times n$ 的可微矩阵, 且 $\det X(x)\neq 0(a\leqslant x\leqslant b)$.

于是, 由性质1°有

$$A(x)\Psi(x) \equiv \Psi'(x) = \Phi'(x)X(x) + \Phi(x)X'(x)$$
$$= A(x)\Phi(x)X(x) + \Phi(x)X'(x)$$
$$= A(x)\Psi(x) + \Phi(x)X'(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b))$$

由此推得 $\Phi(x)X'(x) \equiv 0$，而 $\Phi(x)$ 为非奇异矩阵，故有 $X'(x) \equiv 0$，即 $X(x)$ 为常数矩阵，记为 C，因而有

$$\Psi(x) = \Phi(x) \cdot C \qquad a \leqslant x \leqslant b$$

可以确定出 $C = \Phi^{-1}(a)\Psi(a)$，且是 $n \times n$ 的非奇异矩阵.

特别，把方程组(4.10)满足关系式 $\Phi(x_0) = E$(单位矩阵)的基解矩阵 $\Phi(x)$ 称为**标准基解矩阵**，记为 $\Phi(x, x_0)$. 可以证明，方程组(4.10)的任一基解矩阵 $\Psi(x)$ 都可由它构造出一个标准的基解矩阵

$$\Phi(x, x_0) = \Psi(x)\Psi^{-1}(x_0)$$

且当 $\Phi(x, x_0)$ 已知时，方程组(4.10)满足初值条件 $\vec{y}(x_0) = \vec{\eta}$ 的特解 $\vec{\varphi}(x)$ 可以表示成

$$\vec{\varphi}(x) = \Phi(x, x_0)\vec{y}(x_0) = \Phi(x, x_0)\vec{\eta} \qquad (4.16)$$

(4.16)式给出了由任意的初始状态 $\vec{y}(x_0) = \vec{\eta}$ 到任意时刻 x 的状态 $\vec{y}(x)$ 的转移关系，因此，称标准基解矩阵 $\Phi(x, x_0)$ 为齐次方程组(4.10)的**状态转移矩阵**.

4.3.2 非齐次一阶线性微分方程组

本段讨论非齐次一阶线性微分方程组

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}(x) \qquad (4.3)$$

解的结构问题，这里 $A(x)$，$\vec{f}(x)$ 仍在 $[a, b]$ 上连续，向量 $\vec{f}(x)$ 通常称为强迫项. 若(4.3)描述一个力学系统，$\vec{f}(x)$ 就代表外力. 方程组(4.3)相应的齐次线性方程组为

$$\vec{y}'(x) = A(x)\vec{y}(x) \qquad (4.10)$$

容易验证方程组(4.3)解的两个性质：

性质1 如果 $\vec{\varphi}(x)$ 是方程组(4.3)的解，而 $\vec{\psi}(x)$ 是方程组(4.

10)的解，则 $\vec{\varphi}(x)+\vec{\psi}(x)$ 也为(4.3)的解，

性质2 如果 $\vec{\varphi}(x)$ 和 $\vec{\psi}(x)$ 均为(4.3)的解，则 $\vec{\varphi}(x)-\vec{\psi}(x)$ 必为方程组(4.10)的解.

下面的定理给出方程组(4.3)解的结构形式.

定理6 设 $\Phi(x)$ 为方程组(4.10)的基解矩阵，$\bar{\vec{\varphi}}(x)$ 是方程组(4.3)的一个特解，则(4.3)的任一解 $\vec{\varphi}(x)$ 可表为

$$\vec{\varphi}(x)=\Phi(x)\cdot C+\bar{\vec{\varphi}}(x) \tag{4.17}$$

这里 C 是确定的常数向量.

证明 由性质2可知 $\vec{\varphi}(x)-\bar{\vec{\varphi}}(x)$ 是方程组(4.10)的解. 再由定理5或(4.15)式可得

$$\vec{\varphi}(x)-\bar{\vec{\varphi}}(x)=\Phi(x)\cdot C$$

这里的 C 是确定的常向量，由此即得

$$\vec{\varphi}(x)=\Phi(x)\cdot C+\bar{\vec{\varphi}}(x)$$ 证毕.

定理6指出，为了寻找方程组(4.3)的任一解，只需知道(4.3)的一个特解和它相应的齐次线性微分方程组(4.10)的一个基解矩阵，进一步我们还要指出，利用已知的基解矩阵，可以求出方程组(4.3)的一个特解，这种方法就是所谓的**常数变易法**.

由上面的讨论可知，如果 C 是常向量，则 $\vec{\varphi}(x)=\Phi(x)\cdot C$ 是方程组(4.10)的 解，但不可能是方程组(4.3)的解(这称为线性方程组解的**二择一性质**). 现在我们借助于形式 $\vec{\varphi}(x)=\Phi(x)\cdot C$，但把常向量 C 变易成向量函数 $C(x)$，而试图求方程组(4.3)形如

$$\vec{\varphi}(x)=\Phi(x)\cdot C(x) \tag{4.18}$$

的解，由此来确定待定的向量函数 $C(x)$.

设(4.3)有形如(4.18)的解，代入(4.3)得到

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}'(x)&=\Phi'(x)C(x)+\Phi(x)C'(x)\\&=A(x)\Phi(x)C(x)+\Phi(x)C'(x)\\&=A(x)\vec{\varphi}(x)+\Phi(x)C'(x)\end{aligned}$$

但是 $\vec{\varphi}'(x)=A(x)\vec{\varphi}(x)+\vec{f}(x)$，故 $C'(x)$ 必须满足

$$\Phi(x)C'(x)=\vec{f}(x) \tag{4.19}$$

由于 $\Phi(x)$ 在$[a,b]$上为非奇异的，所以 $\Phi^{-1}(x)$ 存在，用 $\Phi^{-1}(x)$ 乘(4.19)的两边，然后积分得到

$$C(x)=\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds \qquad a\leqslant x_0,x\leqslant b.$$

这样，我们得到特解

$$\bar{\vec{\varphi}}(x)=\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds \tag{4.20}$$

且 $\bar{\vec{\varphi}}(x_0)=0$. 据定理6，若已知方程组(4.10)的一个基解矩阵 $\Phi(x)$，则方程组(4.3)任一解 $\vec{\varphi}(x)$ 可以表示成

$$\vec{\varphi}(x)=\Phi(x)C+\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds \tag{4.21}$$

此表达式完全由基解矩阵 $\Phi(x)$ 所决定.

利用(4.21)可以得到初值问题

$$\begin{cases}\vec{y}'(x)=A(x)\vec{y}(x)+\vec{f}(x)\\ \vec{y}'(x_0)=\vec{\eta}\end{cases} \tag{4.4}$$

在$[a,b]$上解的表达式为

$$\begin{aligned}\vec{\varphi}(x)&=\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\vec{\eta}+\int_{x_0}^{x}\Phi(x)\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds\\ &=\Phi(x,x_0)\vec{\eta}+\int_{x_0}^{x}\Phi(x,s)\vec{f}(s)ds\end{aligned} \tag{4.22}$$

其中 $\Phi(x,x_0)$，$\Phi(x,s)$ 是由基解矩阵 $\Phi(x)$ 构成的状态转移矩阵. 分析(4.22)的组成，可以发现初值问题(4.4)的解实际上由两部份组成. 第一部分是方程组(4.10)满足初值 $\vec{y}(x_0)=\vec{\eta}$ 的解 $\Phi(x,x_0)\vec{\eta}$，第二部分是方程组(4.3)满足初值 $\vec{y}(x_0)=0$ 的解. 对一般的非齐次线性方程(组)解的组成也有类似的结果.

例2　求解初值问题

$$\vec{y}'(x)=\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}\vec{y}(x)+\begin{bmatrix}e^{-x}\\0\end{bmatrix}$$

$$\vec{y}(x)=\begin{bmatrix}y_1(x)\\y_2(x)\end{bmatrix},\quad \vec{y}(0)=\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

解　在例1中我们已经知道相应的齐次线性方程组有基解矩阵 $\Phi=\begin{bmatrix}e^x & xe^x\\0 & e^x\end{bmatrix}$，从而

$$\det\Phi(x)=\begin{vmatrix}e^x & xe^x\\0 & e^x\end{vmatrix}=e^{2x}$$

由此可求出 $\Phi(x)$ 的逆矩阵 $\Phi^{-1}(x)=\dfrac{1}{\det\Phi(x)}\begin{bmatrix}e^x & -xe^x\\0 & e^x\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}e^{-x} & -xe^{-x}\\0 & e^{-x}\end{bmatrix}$，$\Phi^{-1}(0)=\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$，因此有

$$\Phi(x)\Phi^{-1}(0)\vec{y}(0)=\begin{bmatrix}e^x & xe^x\\0 & e^x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1\\1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}(x-1)e^x\\e^x\end{bmatrix}$$

$$\Phi(x)\int_0^x\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds=\Phi(x)\int_0^x e^{-s}\begin{bmatrix}1 & -s\\0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}e^{-s}\\0\end{bmatrix}ds$$

$$=\begin{bmatrix}e^x & xe^x\\0 & e^x\end{bmatrix}\int_0^x\begin{bmatrix}e^{-2s}\\0\end{bmatrix}ds=\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\\0\end{bmatrix}$$

最后得解的表达式：

$$\vec{\varphi}(x)=\Phi(x)\Phi^{-1}(0)\vec{y}(0)+\Phi(x)\int_0^x\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)ds$$

$$=\begin{bmatrix}(x-1)e^x\\ e^x\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{1}{2}(e^x-e^{-x})\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xe^x-\frac{1}{2}(e^x+e^{-x})\\ e^x\end{bmatrix}$$

4.3.3 高阶线性微分方程

本段讨论形如

$$L[y]\equiv y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=f(x)\quad(4.5)$$

的 n 阶线性微分方程. 若 $f(x)\not\equiv 0$,方程为非齐次的;若 $f(x)\equiv 0$,方程为齐次的. 由4.1.2可知,方程(4.5)等价于一个一阶线性方程组

$$\vec{y}'(x)=A(x)\vec{y}(x)+\vec{F}(x)\qquad(4.23)$$

其中 $$A(x)=\begin{bmatrix}0&1&0&\cdots&0\\0&0&1&\cdots&0\\\cdots&\cdots&\cdots&\cdots&\cdots\\0&0&\cdots&\cdots&1\\-a_n(x)&-a_{n-1}(x)&\cdots&\cdots&-a_1(x)\end{bmatrix}$$

$$F(x)=\begin{bmatrix}0\\ \ddots\\0\\f(x)\end{bmatrix}$$

$$\vec{y}(x)=(y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x))^T.$$

利用这种等价关系,根据前面关于一阶线性微分方程组的有关定理,可以得到一系列的平行结果.

先定义函数组 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$ 的线性相关与线性无关性.

设 $y_1(x),\cdots,y_m(x)$ 定义在 $[a,b]$ 上,若存在一组不全为零的常数 $c_1,\cdots,c_m$,使得

$$c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_my_m(x)\equiv 0\quad a\leqslant x\leqslant b\qquad(4.24)$$

就称 $y_1(x),\cdots,y_m(x)$ 在 $[a,b]$ 上**线性相关**，否则为**线性无关**. 特别当 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_m(x)$ 在 $[a,b]$ 上具连续的 k 阶导数时，由(4.24)可以得出

$$\begin{cases} c_1y_1'(x)+c_2y_2'(x)+\cdots+c_my_m'(x)\equiv 0 \\ c_1y_1''(x)+c_2y_2''(x)+\cdots+c_my_m''(x)\equiv 0 \qquad (a\leqslant x\leqslant b) \\ \cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots\quad\cdots \\ c_1y_1^{(k)}(x)+c_2y_2^{(k)}(x)+\cdots+c_my_m^{(k)}(x)\equiv 0 \end{cases} \tag{4.25}$$

不难举出函数组在 $[a,b]$ 上线性相关与线性无关的例子.

设定义在 $[a,b]$ 上的函数组 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 具直到 $n-1$ 阶导数则称

$$W[y_1(x),\cdots,y_n(x)]\triangleq W(x)$$

$$=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \cdots & y_n'(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

为函数组 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 在 $[a,b]$ 上的**伏朗斯基行列式**. 注意到在4.1.2中化 n 阶线性微分方程为一阶线性微分方程组的变换，把 $y_i(x)$ 与向量 $(y_i(x),y_i'(x),\cdots,y_i^{(n-1)}(x))^T(i=1,2,\cdots,n)$ 对应起来，上面关于 n 个函数的伏朗斯基行列式的定义就很自然的了.

先介绍齐次线性微分方程

$$L[y]\equiv y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_n(x)y=0 \tag{4.26}$$

解的有关性质.

注意到 n 阶线性微分方程(4.26)与 $\vec{F}(x)\equiv 0$ 的方程组(4.23)的等价关系，可以得出下面的结论.

定理2' （迭加原理）若 $\varphi(x),\psi(x)$ 是方程(4.26)的两个解，

则它们的线性组合 $\alpha\varphi(x)+\beta\psi(x)$ 也是方程(4.26)的解，这里 α,β 是任意的常数.

定理2* 的结果可以毫无困难地推广到方程 (4.26)有限个解的线性组合，而且可以得出方程(4.26)的**所有解组成一个线性空间.**

同样，利用伏朗斯基行列式可以判别函数组的线性相关性.

定理3* 若 n 个函数 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 在$[a,b]$上线性相关，则其伏朗斯基行列式 $W(x)\equiv0 \quad (a\leqslant x\leqslant b)$.

定理4* 设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 为方程(4.26)在$[a,b]$上的解，则它们在$[a,b]$上线性无关的充要条件为其伏朗斯基行列式 $W(x)\neq0 \quad (a\leqslant x\leqslant b)$.

利用函数组的线性相关性定义及当 $k=n$ 的(4.25)式，类似于定理3，定理4的证明可以得到定理3*，定理4* 的结果. 需要注意的是，对任意 n 个函数 $u_1(x),\cdots,u_n(x)$，但不是方程(4.26)的解，定理3* 的逆不一定成立，例如

$$y_1(x)=\begin{cases}x^2 & -1\leqslant x\leqslant0\\ 0 & 0\leqslant x\leqslant1.\end{cases}\qquad y_2(x)=\begin{cases}0 & -1\leqslant x\leqslant0\\ x^2 & 0\leqslant x\leqslant1.\end{cases}$$

组成的函数组在$[-1,1]$上的 $W(x)\equiv0$，但 $y_1(x),y_2(x)$ 在$[-1,1]$上线性无关.

对于方程(4.26)也有如下的结构定理：

定理5* （结构定理）

1° 齐次 n 阶线性方程(4.26)有 n 个线性无关解；

2° 若 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 是方程(4.26)的线性无关解，则方程(4.26)的任一解 $\varphi(x)$ 可以表示为

$$\varphi(x)=c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\cdots+c_ny_n(x) \qquad (4.27)$$

其中 $c_1,\cdots c_n$ 为确定的常数，而当 $c_1,c_2,\cdots c_n$ 为任意常数时，(4.27)就是方程(4.26)的通解，且包含方程的所有解.

推论 方程(4.26)的所有解组成一个 n 维线性空间.

称方程(4.26)的 n 个线性无关解 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 为它的**基本解组**. 显然,基本解组不是唯一的,它可以有无限多个.

例3 验证 $y_1(x)=e^{2x},y_2=e^{3x}$ 是方程

$$y''-5y'+6y=0$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上的基本解组.

解 容易验证 $y_1(x),y_2(x)$ 是方程的解,而

$$W(x)=W[y_1(x),y_2(x)]=\begin{vmatrix} e^{2x} & e^{3x} \\ 2e^{2x} & 3e^{3x} \end{vmatrix}=e^{5x}\neq 0$$

因此 $y_1(x),y_2(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 线性无关,故是方程在 $(-\infty,+\infty)$ 上的基本解组.

对于非齐次 n 阶线性微分方程(4.5)也有类似定理6的结论.

定理6' 设 $y_1(x),y_2(x),\cdots,y_n(x)$ 为齐线性方程(4.26)的基本解组,而 $\bar{\varphi}(x)$ 是非齐次方程(4.5)的一个特解,则(4.5)的任一解可以表示成

$$\varphi(x)=c_1y_1(x)+\cdots+c_ny_n(x)+\bar{\varphi}(x) \qquad (4.28)$$

其中 $c_1,\cdots c_n$ 为确定的常数. 而当 $c_1,\cdots c_n$ 为任意常数时,(4.28)为方程(4.5)的通解,且包含方程的所有解.

当(4.26)的一个基本解组 $y_1(x),\cdots,y_n(x)$ 已知时,利用方程(4.5)与方程组(4.23)的等价性以及求非齐次一阶线性方程组(4.3)特解的常数变易法,可得方程(4.26)的一个特解的计算公式为

$$\bar{\varphi}(x)=\sum_{i=1}^{n}y_i(x)\int_{x_0}^{x}\frac{W_{ni}(\tau)}{W(\tau)}f(\tau)d\tau \qquad (4.29)$$

$W(x)$ 是它们的伏朗斯基行列式,W_{ni} 是 $W(x)$ 中第 n 行第 i 列元素的代数余子式.

特别当 $n=2$ 时,(4.5)为

$$L[y]=y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x) \qquad (4.30)$$

若 $y_1(x)$，$y_2(x)$ 为(4.30)的基本解组，则要使 $\bar{\varphi}(x)=c_1(x)y_1(x)+c_2(x)y_2(x)$ 成为(4.30)的一个特解，$c_1(x)$，$c_2(x)$ 只需满足下面方程

$$\begin{cases} c_1'(x)y_1(x)+c_2'(x)y_2(x)=0 \\ c_1'(x)y_1'(x)+c_2'(x)y_2'(x)=f(x) \end{cases} \tag{4.31}$$

解(4.31)得

$$c_1'(x)=\frac{-f(x)y_2(x)}{W(x)}, \quad c_2'(x)=\frac{f(x)y_1(x)}{W(x)}$$

故有

$$\bar{\varphi}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{y_2(x)y_1(\tau)-y_1(x)y_2(\tau)}{W(\tau)}f(\tau)d\tau \tag{4.32}$$

例4 已知方程 $y''+y=0$ 有基本解组 $y_1(x)=\cos x$，$y_2(x)=\sin x$，求方程 $y''+y=\mathrm{tg}x$ 的一个特解.

解 取 $x_0=0$，直接由公式(4.32)可得特解

$$\begin{aligned}\bar{\varphi}(x)&=\int_0^x\frac{\sin x\cos\tau-\cos x\sin\tau}{\cos^2\tau+\sin^2\tau}\cdot\mathrm{tg}\tau d\tau \\ &=\sin x\int_0^x\sin\tau d\tau-\cos x\int_0^x\frac{\sin^2\tau}{\cos\tau}d\tau \\ &=\sin x-\cos x\cdot\ln|\sec x+\mathrm{tg}x|\end{aligned}$$

由于 $\sin x$ 是相应齐次线性方程的解，故非齐次方程有特解

$$\bar{\varphi}(x)=-\cos x\cdot\ln|\sec x+\mathrm{tg}x|$$

例5 求方程 $xy''-y'=x^2$ 于 $x\neq0$ 上的解

解 先把方程化为标准形式

$$y''-\frac{y'}{x}=x \qquad x\neq0$$

相应的齐次线性方程为 $y''-\frac{y'}{x}=0$，直接积分可得 $y=\frac{1}{2}Ax^2+B$，这里 A,B 为任意常数. 易见1. x^2 为基本解组. 由(4.32)式，可得

特解

$$\bar{\varphi}(x)=\int_{x_0}^{x}\frac{(x^2-\tau^2)\tau}{2\tau}d\tau \qquad (x,x_0>0)$$

$$=\frac{x^3}{3}-\frac{x_0^3}{3}$$

故原方程的通解为 $\varphi(x)=c_1+c_2x^2+\frac{x^3}{3}$.

§4.4 常系数高阶线性方程的解法

4.4.1 齐次 n 阶常系数线性方程和欧拉(Euler)方程

一般变系数线性方程,即使是二阶的,也没有普遍的解法. 我们只能讨论它的通性、定性地给出通解的结构形式. 但对常系数线性方程

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x) \qquad (4.33)$$

及

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=0 \qquad (4.34)$$

其中 $a_i(i=1,\cdots,n)$ 均为实常数,则可以得到通解的具体表达式.

由 §4.3的讨论可知,方程(4.33)和(4.34)的求解关键在于求出方程(4.34)的一个基本解组. 下面用欧拉在1743年建立的待定指数法求方程(4.34)的基本解组.

先用函数 $y=e^{\lambda x}$尝试求解,其中 λ 为待定常数,把它代入(4.34)式的左边得

$$L[e^{\lambda x}]=e^{\lambda x}(\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n)\triangleq F(\lambda)e^{\lambda x}$$

其中

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$$

是 λ 的 n 次多项式. 易知 $y=e^{\lambda x}$为方程(434)解的充要条件是:λ 为代数方程

$$F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n=0 \tag{4.35}$$

的根.因此方程(4.35)起着预示方程(4.34)解的特性的作用,故称它为方程(4.34)的**特征方程**,它的根称为**特征根**.由代数学的基本理论可知方程(4.35)有 n 个根(包括复根).下面根据不同的情况进行讨论.

1° 特征根 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$即均为单根.对此可以得到方程(4.34)的 n 个解:$e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},\cdots,e^{\lambda_n x}$.而且这 n 个解是线性无关的.此时,若 $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 均为实数,则方程(4.34)的通解为

$$y(x)=c_1e^{\lambda_1 x}+c_2e^{\lambda_2 x}+\cdots+c_ne^{\lambda_n x}$$

而若 $F(\lambda)=0$有复单根,则由于 $a_i(i=1,\cdots,n)$均为实常数,因而复根必成对出现.设 $\lambda_1=\alpha+i\beta$ 是特征根,则 $\lambda_2=\alpha-i\beta$ 也是特征根,对此方程(4.34)有两个实变量的复值解

$$e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x),$$
$$e^{(\alpha-i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x-i\sin\beta x)$$

可以证明上述两个解的实部和虚部也是方程(4.34)的解(见本章习题9、10、11).故对应于特征方程(4.35)的一对共轭复根 $\alpha\pm i\beta$ 可得方程(4.34)的两个实值解:$e^{\alpha x}\cos\beta x,e^{\alpha x}\sin\beta x$.

2° 特征根有重根.设 λ_1 为 k 重根,由微分学的理论可知 $F(\lambda_1)=F'(\lambda_1)=\cdots=F^{(k-1)}(\lambda_1)=0,F^{(k)}(\lambda_1)\neq0$,特征方程 $F(\lambda)=0$有因子$(\lambda-\lambda_1)^k$,即 $F(\lambda)=(\lambda-\lambda_1)^kF_1(\lambda_1),F_1(\lambda_1)\neq0$.

先设 $\lambda_1=0$,由 $F(0)=F'(0)=\cdots\cdots=F^{(k-1)}(0)=0$可得 $a_n=a_{n-1}=\cdots=a_{n-k+1}=0$,从而特征方程 $F(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-k}\lambda^k=0$.因而相应的方程(4.34)应取形式

$$L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-k}y^{(k)}=0$$

它显然有 k 个线性无关解$1,x,x^2,\cdots,x^{k-1}$,故特征方程(4.35)的 k 重零根对应着方程(4.34)k 个线性无关解$1,x,x^2,\cdots,x^{k-1}$.

若 $\lambda_1 \neq 0$，可作变换 $y=z(x)e^{\lambda_1 x}$，并注意到

$$y^{(m)}=(z(x)e^{\lambda_1 x})^{(m)}=e^{\lambda_1 x}[z^{(m)}+m\lambda_1 z^{(m-1)}+\cdots+\lambda_1^m z]$$

可得 $$L[z(x)e^{\lambda_1 x}]=(z^{(n)}+b_1 z^{(n-1)}+\cdots+b_n z)e^{\lambda_1 x}$$

$$\triangleq L_1[z]\cdot e^{\lambda_1 x}$$

方程(4.34)化为

$$L_1[z]\triangleq z^{(n)}+b_1 z^{(n-1)}+\cdots+b_n z=0 \qquad (4.36)$$

$b_i(i=1,\cdots n)$仍为常数，而相应的特征方程为

$$G(\mu)=\mu^n+b_1\mu^{n-1}+\cdots+b_n=0 \qquad (4.37)$$

直接计算可得

$$F(\lambda_1+\mu)e^{(\lambda_1+\mu)x}=L[e^{(\lambda_1+\mu)x}]=L_1[e^{\mu x}]e^{\lambda_1 x}$$
$$=G(\mu)e^{\mu x}e^{\lambda_1 x}$$

因此 $F(\lambda_1+\mu)=G(\mu)$，即方程 $G(\mu)=0$的 k 重零根 $\mu_1=0$对应着方程 $F(\lambda)=0$的 k 重根 $\lambda=\lambda_1$，这样，就能化为前面已讨论过的情况了.

方程(4.37)的 k 重根 $\mu_1=0$对应着方程(4.39)的 k 个解$1,x,x^2,\cdots\cdots,x^{k-1}$，因而对应于特征方程(4.36)的 k 重实根 $\lambda=\lambda_1$的 k 个解分别为

$$e^{\lambda_1 x},xe^{\lambda_1 x},\cdots,x^{k-1}e^{\lambda_1 x} \qquad (4.38)$$

对 $F(\lambda)=0$的其他多重特征根也可进行类似的讨论.

设 $F(\lambda)=0$有重数分别为 $k_1,\cdots,k_l(k_1+\cdots+k_l=n)$的实特征根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_l$，则方程(4.34)有解

$$\begin{aligned}&e^{\lambda_1 x},xe^{\lambda_1 x},\cdots,x^{k_1-1}e^{\lambda_1 x},e^{\lambda_2 x},xe^{\lambda_2 x},\cdots,x^{k_2-1}e^{\lambda_2 x},\cdots,\\&e^{\lambda_l x},xe^{\lambda_l x},\cdots,x^{k_l-1}e^{\lambda_l x}\end{aligned} \qquad (4.39)$$

可以证明(4.39)中的 n 个解是线性无关的(证明从略)

对于特征方程 $F(\lambda)=0$有复重根的情况，也可仿前面处理. 但应注意到若 $\lambda_1=\alpha+i\beta$ 为 $F(\lambda)=0$的 k 重根，则 $\lambda_2=\alpha-i\beta$ 也为方

程的 k 重根，因而对于 $\lambda=\alpha\pm i\beta$，我们得到方程(4.34)的$2k$ 个实值解

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\quad xe^{\alpha x}\cos\beta x,\quad \cdots,x^{k_1-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$
$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\quad xe^{\alpha x}\sin\beta x,\quad \cdots,x^{k_1-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$$

例1　求 $y^{(4)}-y=0$的通解

解　特征方程为 $\lambda^4-1=0$，其特征根分别为 $\lambda_1=1,\lambda_2=-1,\lambda_3=i,\lambda_4=-i$，都是单根.

故方程有基本解组 $e^x,e^{-x},\cos x,\sin x$，方程的通解为：

$$y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3\cos x+c_4 sin x.$$

例2　求 $y^{(3)}-3y''+3y'-y=0$的通解.

解　特征方程为 $\lambda^3-3\lambda^2+3\lambda-1=0$，$\lambda=1$为三重根. 故方程的基本解组为 e^x,xe^x,x^2e^x，通解为

$$y=c_1e^x+c_2xe^x+c_3x^2e^x$$

例3　求 $y^{(4)}+2y''+y=0$的通解

解　特征方程 $\lambda^4+2\lambda^2+1=0$，有二重虚根 $\lambda=\pm i$，因而基本解组为 $\cos x,x\cos x,\sin x,x\sin x$，方程的通解为

$$y=(c_1+c_2x)\cos x+(c_3+c_4x)\sin x.$$

有些变系数线性方程可以通过变量替换化为常系数线性方程，一类典型的方程是欧拉方程：

$$x^n\frac{d^ny}{dx^n}+a_1x^{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots+a_{n-1}x\frac{dy}{dx}+a_ny=0 \tag{4.40}$$

其中 $a_1,\cdots,a_n$ 为常数. 引进自变量替换：

$$x=e^t,\qquad t=\ln x$$

这里先假定 $x>0$，计算 y 的各阶导数：

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}=e^{-t}\frac{dy}{dt},\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}(\frac{dy}{dx})\frac{dt}{dx}=e^{-2t}(\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{dy}{dt})$$

用数学归纳法可以证明一般有：

$$\frac{d^k y}{dx^k}=e^{-kt}\left(\frac{d^k y}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}\right),k=1,2,\cdots$$

式中 $\beta_1,\cdots,\beta_{k-1}$都是常数，于是

$$x^k\frac{d^k y}{dx^k}=\frac{d^k y}{dt^k}+\beta_1\frac{d^{k-1}y}{dt^{k-1}}+\cdots+\beta_{k-1}\frac{dy}{dt}$$

$$(k=1,\cdots,n)$$

将上述的关系式代入(4,40)，就得到常系数的 n 阶线性方程

$$\frac{d^n y}{dt^n}+b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}+\cdots+b_{n-1}\frac{dy}{dt}+b_n y=0 \qquad (4.41)$$

其中 $b_1,\cdots,b_n$ 为常数，因而可用前面介绍的方法求通解，再代回原来的变量就可求得原方程(4.40)的通解.

由上面的演算过程可以看出解方程(4.40)的方法. 由于方程(4.41)有形如 $y=e^{\lambda t}$的解，因面方程(4.40)就有形如 $y=x^\lambda$ 的解，于是可以直接寻求方程(4.40)的具形式 $y=x^\lambda$ 的解. 为此，将 $y=x^\lambda$ 代入方程(4.40)，并消去因子 x^k，就得到确定 k 的代数方程

$$k(k-1)\cdots(k-n+1)$$

$$+a_1k(k-1)\cdots(k-n+2)+\cdots+a_n=0 \qquad (4.42)$$

可以证明(4.42)正是方程(4.41)的特征方程. 因此方程(4.42)的 m 重实根 $k=k_0$对应着方程(4.40)的 m 个解：

$$x^{k_0},\quad x^{k_0}\ln x,\quad \cdots,\quad x^{k_0}\ln^{m-1}x$$

而当方程(4.42)有 m 重复根 $k=\alpha+i\beta$ 时，方程(4.40)相应的$2m$个解为：

$$x^\alpha cos(\beta\ln x),\quad x^\alpha\ln x cos(\beta\ln x),\quad \cdots,\quad x^\alpha\ln^{m-1}x cos(\beta\ln x)$$

$$x^\alpha\sin(\beta\ln x),\quad x^\alpha\ln x\sin(\beta\ln x),\quad \cdots,\quad x^\alpha\ln^{m-1}x\sin(\beta\ln x)$$

［注］ 对 $x<0$可令$-x=e^t$ 而进行同样讨论，为确定起见，应该用自变量变换 $t=\ln|x|$代回.

例4　求方程 $x^3y^{(3)}+x^2y''-2xy'+2y=0$的通解.

解　设 $y=x^k$，代入方程得

$$k(k-1)(k-2)+k(k-1)-2k+2=0$$

即 $k^3-2k^2-k+2=0$，其根为 $k_1=1,k_2=-1,k_3=2$，故原方程通解

$$y=c_1x+c_2x^{-1}+c_3x^2$$

例5　求一般二阶的欧拉方程 $x^2y''+axy'+by=0$的通解，a，b 为常数.

解　设 $y=x^k$，得到 k 应满足的方程

$$k(k-1)+ak+b=k^2+(a-1)k+b=0$$

从而

$$k_{1,2}=\frac{1-a\pm\sqrt{(a-1)^2-4b}}{2}$$

(i) 当$(a-1)^2-4b>0$时，原方程的通解为

$$y=c_1x^{k_1}+c_2x^{k_2};$$

(ii) 当$(a-1)^2-4b=0$时，原方程的通解为

$$y=c_1x^{k_1}+c_2x^{k_1}\ln|x|;$$

(iii) 当$(a-1)^2-4b<0$时，$k_{1,2}=\alpha\pm i\beta$，原方程的通解为

$$y=x^{\alpha}[c_1\cos(\beta\ln|x|)+c_2\sin(\beta\ln|x|)].$$

一般方程能否化为常系数线性方程，没有一般的判别准则，必须靠经验判定. 如

例6　求$(1-x^2)y''-xy'+y=0$的通解

解　作变换 $x=\cos t$，则有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}=-\frac{1}{\sin t}\frac{dy}{dt},\quad \frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{\sin^2t}\frac{d^2y}{dt^2}-\frac{\cos t}{\sin^3t}\frac{dy}{dt}$$

代入原方程得：

$$\frac{d^2y}{dt^2}+y=0$$

其通解为：$y=c_1\cos t+c_2\sin t$，故原方程的通解为 $y=c_1x+c_2\sqrt{1-x^2}$.

通过上面的讨论可以看出，对于常系数 n 阶线性方程，不必通过求积而只需解一个代数方程就可以得到方程的基本解组，这给方程的求解带来极大的方便.

4.4.2　**非齐次 n 阶常系数线性微分方程**

在4.3.3中，我们用常数变易法给出求非齐次的高阶线性方程特解的公式(4.29)，但是这个公式在应用时不方便. 而对一些特殊的右边函数 $f(x)$，有求特解的更简便的方法——**待定系数法**. 尽管在使用时有某些限制，但对实际问题已够用了. 它的特点也是不需通过求积而只用代数方法，即可求特解.

下面介绍待定系数法. 先讨论二阶常系数方程

$$L[y]=y''+a_1y'+a_2y=f(x) \tag{4.43}$$

类型 I　如果 $f(x)=(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m)e^{\sigma x}$，其中 σ 及 b_i $(i=0,1,\cdots,m)$ 为实常数，则方程(4.43)有形如

$$\bar{y}=x^k(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_m)e^{\sigma x} \tag{4.44}$$

的特解，当 σ 为特征根时，k 取其重数，否则 $k=0$. 而 $B_0,B_1,\cdots,B_m$ 为待定的常数，可以通过比较系数确定.

事实上，令 $Q(x)=x^k(B_0x^m+B_1x^{m-1}+\cdots+B_m)$，将 $\bar{y}=Q(x)e^{\sigma x}$ 代入(4.43)，得

$$(Q''+2\sigma Q'+\sigma^2Q)e^{\sigma x}+a_1(\sigma Q+Q')e^{\sigma x}+a_2Qe^{\sigma x}$$
$$=(b_0x^m+b_1x^{m-1}+\cdots+b_m)e^{\sigma x}$$

消去 $e^{\sigma x}$ 并整理得到

$$Q''(x)+(2\sigma+a_1)Q'(x)+(\sigma^2+a_1\sigma+a_2)Q(x)$$
$$=b_0x^m+b_1x^m\cdots+b_m \tag{4.45}$$

要使(4.45)成为恒等式，必需要求其左边为 m 次多项式，如这样，

便可比较左右两边同次幂的系数，共得 $m+1$ 个方程，恰好可以陆续定出 $B_0, B_1, \cdots, B_m$. 因此我们仅需指出保证(4.45)左边为 m 次多项式的条件：

(i) σ 不是特征根，这时 $\sigma^2+a_1\sigma+a_2\neq 0$，当取 $k=0$ 时，(4.45)左边恰为 m 次多项式；

(ii) σ 为单重特征根，这时 $\sigma^2+a_1\sigma+a_2=0$，但 $2\sigma+a_1\neq 0$. 取 $k=1$，$Q'(x)=(B_1x^{m+1}+\cdots+B_mx)'$ 为 m 次多项式，即(4.45)左边为 m 次多项式；

(iii) σ 为二重特征根，这时 $\sigma^2+2a_1\sigma+a_2=0$. 且 $2\sigma+a_1=0$，若取 $k=2$，则(4.45)的左边也是 m 次多项式；

例7 求解方程

$$y''-2y'-3y=e^{-x}$$

解 相应的齐次线性方程的特征方程为 $\lambda^2-2\lambda-3=0$. 有特征根 $\lambda_1=-1, \lambda_2=3$. 由于 $\lambda_1=\sigma=-1$，故应求形如

$$\bar{y}=B_0xe^{-x}$$

的特解，其中 B_0 为待定常数，代入原方程得：

$$-4B_0e^{-x}=e^{-x}$$

所以 $B_0=\frac{-1}{4}$，即方程有特解 $\bar{y}=\frac{-1}{4}xe^{-x}$，从而方程通解为

$$y=c_1e^{-x}-c_2e^{3x}-\frac{1}{4}xe^{-x}$$

类型Ⅱ 如果 $f(x)=[A(x)\cos\beta x+B(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$，其中 α，β 为常数，$A(x)$，$B(x)$ 为实系数多项式，且它们中最高次数为 m，则方程(4.43)有形如

$$\bar{y}(x)=x^k[P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x]e^{\alpha x} \qquad (4.46)$$

的特解. 这时，当 $\sigma=\alpha\pm i\beta$ 为特征根时，k 取其重数即 $k=1$，否则 $k=0$，而 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 均为待定的次数不超过 m 的实系数多项式，可以通过比较系数的方法来确定.

事实上，回顾一下类型Ⅰ的讨论过程，易见当特征根不是实数而为复数时，有关的结论仍然成立. 现将 $f(x)$ 表为指数形式

$$f(x)=\frac{1}{2}[A(x)-iB(x)]e^{(\alpha+i\beta)x}+\frac{1}{2}[A(x)+iB(x)]e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$\triangleq f_1(x)+f_2(x)$$

根据非齐次线性方程迭加原理(见本章习题8)，方程 $L[y]=f_1(x)$ 与 $L[y]=f_2(x)$ 的解之和必为方程(4.43)的解.

注意到 $\overline{f_1(x)}=f_2(x)$，易知，若 y_1 为 $L(y)=f_1(x)$ 的解，则 $\overline{y}_1$ 必为 $L(y)=f_2(x)$ 的解，因此直接利用类型Ⅰ的结果，可得方程(4.43)有特解：

$$\tilde{y}(x)=x^kD(x)e^{(\alpha+i\beta)x}+x^k\overline{D(x)}e^{(\alpha-i\beta)x}$$

$$=x^k[P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x]e^{\alpha x}$$

其中 $D(x)$ 为 x 的 m 次多项式，而 $P(x)=2Re\{D(x)\}$，$Q(x)=2Im\{D(x)\}$. 显然 $P(x)$，$Q(x)$ 为实系数的多项式，且次数不超过 m，可见上述结论成立.

例8　求方程 $y''+2y'+2y=f(x)$

(i)　$f(x)=xe^x\cos x$

(ii)　$f(x)=e^{-x}\sin x$

的通解.

解　特征方程为 $\lambda^2+2\lambda+2=0$ 有特征根 $\lambda=-1\pm i$，因而相应的齐次线性方程的通解为 $e^{-x}(c_1\cos x+c_2\sin x)$.

(i) 由于 $\sigma=1+i$ 不是特征根，故原方程有形如

$$\tilde{y}(x)=e^x[(A_0x+A_1)\cos x+(B_0x+B_1)\sin x]$$

的特解，将它代入原方程得：

$$[4(A_0+B_0)x+4A_0+4A_1+2B_0+2B_1]e^x\cos x$$

$$+[4(-A_0+B_0)x-4A_0-2A_1+4B_0+4B_1]e^x\sin x$$

$$=xe^x\cos x$$

比较同类项的系数得：

$$\begin{cases}4(A_0+B_0)=1\\4A_0+4A_1+2B_0+2B_1=0\\4(-A_0+B_0)=0\\4(A_0-B_0)+2A_1-4B_1=0\end{cases}$$

解此方程组得 $A_0=\frac{1}{8},A_1=-\frac{1}{16},B_0=\frac{1}{8},B_1=-\frac{1}{8}$，故特解为：

$$\bar{y}(x)=\frac{1}{16}(2x-1)e^x\cos x+\frac{1}{8}(x-1)e^x\sin x$$

原方程的通解为：

$$y(x)=(c_1\cos x+c_2\sin x)e^{-x}+\bar{y}(x)$$

(ii)由于 $\sigma=-1\pm i$ 为特征根(单重)，故方程有形如

$$\bar{y}(x)=xe^{-x}(A\cos x+B\sin x)$$

的特解.将它代入原方程得：

$$2Be^{-x}\cos x-2Ae^{-x}\sin x=e^{-x}\sin x$$

比较系数后有 $B=0,A=-\frac{1}{2}$，故有特解为 $\bar{y}(x)=-\frac{1}{2}xe^{-x}\sin x$，因此原方程通解为

$$y(x)=(c_1\cos x+c_2\sin x)e^{-x}-\frac{1}{2}xe^{-x}\sin x.$$

［注］ 对类型Ⅱ的特殊情形：$f(x)=A(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 或 $f(x)=A(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$，可用更简便的方法，即所谓的复数法求解.为此，引入辅助方程

$$y''+a_1y'+a_2y=A(x)e^{(\alpha+i\beta)x}$$

根据欧拉公式 $e^{(\alpha+i\beta)x}=e^{\alpha x}(\cos\beta x+i\sin\beta x)$，则此方程解的实部与虚部分别是方程

$$y''+a_1y'+a_2y=A(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$$

$$y''+a_1y'+a_2y=A(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$$

的实值解，而辅助方程本身的求解过程归结为类型Ⅰ的求解.

例9 求方程 $y''+4y=\cos 2x$ 的一个特解.

解 考虑辅助方程

$$y''+4y=e^{2ix}$$

经计算知 $\sigma=2i$ 为单重特征根，故须求形如

$$\bar{y}=A_0xe^{2ix}$$

的特解，代入辅助方程，经整理得

$$4iAe^{2ix}=e^{2ix}$$

故得 $A=\frac{1}{4i}=-\frac{i}{4}$，所以

$$\bar{y}=-\frac{i}{4}xe^{2ix}=\frac{-i}{4}x(\cos 2x+i\sin 2x)$$

$$=\frac{x}{4}\sin 2x-\frac{i}{4}x\cos 2x$$

所以 $\bar{y}$ 的实部 $y^*=\frac{x}{4}\sin 2x$ 为原方程的一个特解.

对于 $n\geq 3$ 的高阶线性方程 $L[y]=f(x)$，当 $f(x)$ 具类型Ⅰ或类型Ⅱ的形式时，也有(4.44)或(4.46)形式的特解.

例 10 求方程 $y^{(4)}-2y''=1+x^2+3xe^x$ 的通解.

解 特征方程 $\lambda^4-2\lambda^2=0$，有特征根 $\lambda_1=0$(二重)，$\lambda_2=\sqrt{2}$，$\lambda_3=-\sqrt{2}$，因此相应齐次线性方程有通解 $c_1+c_2x+c_3e^{\sqrt{2}x}+c_4e^{-\sqrt{2}x}$.

先求方程 $y^{(4)}-2y''=1+x^2$ 的特解. 由于 $\sigma=0$ 是二重特征根，故这个方程有特解 $\bar{y}_1(x)=x^2(B_0x^2+B_1x+B_2)$，代入方程并比较等式两边系数得 $B_0=-\frac{1}{24}$，$B_1=0$，$B_2=-\frac{1}{2}$，从而 $\bar{y}_1(x)=-\frac{1}{24}x^4-\frac{1}{2}x^2$.

再求方程 $y^{(4)}-2y''=3xe^x$ 的特解，由于 $\sigma=1$ 不是特征根，故

这个方程有特解 $\bar{y}_2(x)=(A_0x+A_1)e^x$，类似上面做法可得 $A_0=-3$，$A_1=0$，故 $\bar{y}_2(x)=-3xe^x$.

由方程的迭加原理，原方程的通解为

$$y(x)=c_1+c_2x+c_3e^{\sqrt{2}x}+c_4e^{-\sqrt{2}x}-x^2(\frac{1}{24}x^2+\frac{1}{2})-3xe^x$$

§4.5 常系数线性方程组的解法

对于常系数的线性方程组

$$\vec{y}'=A\vec{y} \tag{4.47}$$

其中 A 为 $n\times n$ 的常数矩阵. 方程组(4.47)基解矩阵的结构是本节讨论的重点. 我们将仿照常系数高阶线性方程，不通过求积而只用代数的方法来构造基解矩阵. 现在先介绍矩阵指数的概念.

4.5.1 矩阵指数 $\exp A$ 的定义和性质

设 A 为 $n\times n$ 的实常数矩阵. 定义矩阵指数 $\exp A$ 为下面矩阵级数的和

$$\exp A=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{A^k}{k!}=E+A+\frac{A^2}{2!}+\cdots+\frac{A^m}{m!}+\cdots \tag{4.48}$$

其中 E 为 n 阶单位矩阵. A^m 是 A 的 m 次幂，这里我们规定 $A^0=E$，$0!=1$，

可以证明级数(4.48)对任意的 A 都是收敛的. 事实上，由于 $\frac{\|A^k\|}{k!}\leqslant\frac{\|A\|^k}{k!}$，而对任一矩阵 A，$\|A\|$是一个确定的实数，所以数值级数

$$\|E\|+\|A\|+\frac{\|A\|^2}{2!}+\cdots+\frac{\|A\|^m}{m!}+\cdots$$

是收敛的，且其和为 $e^{\|A\|}+n-1$，故级数(4.48)对任一 A 收敛，因而 $\exp A$ 有意义，且为一个确定的矩阵.

进一步可以断言，级数

$$\exp Ax = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(Ax)^k}{k!} \tag{4.49}$$

在$(-\infty,+\infty)$内的任一有限区间上一致收敛，故有意义.

矩阵指数 $\exp A$ 有如下性质：

1° 若矩阵 A,B 可交换，即 $AB=BA$，则

$$\exp(A+B) = \exp A \cdot \exp B \tag{4.50}$$

事实上，由于级数(4.49)是绝对收敛的，因而关于绝对收敛数值级数运算的一些定理，如项的重新排列不改变级数的收敛性、级数和以及级数的乘法定理等都可以用到矩阵级数中来. 首先，由二项式定理及 $AB=BA$，有

$$\exp(A+B) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A+B)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k} \frac{A^l}{l!}\frac{B^{k-l}}{(k-l)!}\right] \tag{4.51}$$

其次，根据绝对收敛级数的乘法定理有：

$$\begin{aligned}\exp A \cdot \exp B &= \left(\sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}\right)\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}\right) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{A^i}{i!}\left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{B^j}{j!}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\left[\sum_{l=0}^{k} \frac{A^l}{l!} \cdot \frac{B^{k-l}}{(k-l)!}\right]\end{aligned} \tag{4.52}$$

比较(4.51)和(4.52)，可得(4.50)式.

2° 对任一矩阵 A，$(\exp A)^{-1}$存在且

$$(\exp A)^{-1} = \exp(-A) \tag{4.53}$$

事实上，A 与$(-A)$是可交换的，故在(4.51)中令 $B=-A$，可得

$$\exp A \cdot \exp(-A) = \exp(A+(-A)) = \exp o = E$$

因此 $\qquad (\exp A)^{-1} = \exp(-A)$

3° 如果 T 为非奇异矩阵，则

$$\exp(T^{-1}AT) = T^{-1}(\exp A)T \tag{4.54}$$

事实上，由矩阵指数定义有

$$\begin{aligned}
\text{xp}(T^{-1}AT) &= E + T^{-1}AT + \frac{(T^{-1}AT)^2}{2!} + \cdots + \frac{(T^{-1}AT)^m}{m!} + \cdots \\
&= E + T^{-1}AT + \frac{T^{-1}A^2T}{2!} + \cdots + \frac{T^{-1}A^mT}{m!} + \cdots \\
&= E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{T^{-1}A^kT}{k!} = E + T^{-1}\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right)T \\
&= T^{-1}(\exp A)T
\end{aligned}$$

4.5.2　**齐次常系数线性方程组基解矩阵的计算**

现在我们可以构造常系数线性方程组

$$\vec{y}'(x) = A\vec{y}(x) \tag{4.47}$$

的基解矩阵，并得出解的表达式.

定理 7　矩阵 $\Phi(x)=\exp Ax$ 是方程组(4.47)的一个基解矩阵，且 $\Phi(0)=E$，即为状态转移矩阵 $\Phi(x,0)$.

证明　由定义易知 $\Phi(0)=E$，微分 $\Phi(x)=\exp Ax$，得

$$\begin{aligned}
\Phi'(x) = (\exp Ax)' &= A + \frac{A^2x}{1!} + \frac{A^3x^2}{2!} + \cdots + \frac{A^kx^{k-1}}{(k-1)!} + \cdots \\
&= A(\exp Ax) = A\Phi(x)
\end{aligned}$$

这表明 $\Phi(x)$ 为方程组(4.47)的解矩阵. 又因为 $\det\Phi(0)=\det E=1$，故 $\Phi(x)$ 为基解矩阵且为状态转移矩阵.　　　　证毕.

由定理7可得对方程组(4.47)的任一解 $\vec{\varphi}(x)$ 都具有

$$\vec{\varphi}(x) = (\exp Ax)\cdot C \tag{4.55}$$

在某些情况，我们容易得到方程组(4.47)的基解矩阵 $\exp At$ 的具体形式.

例1　如果 A 是一个对角形矩阵

$$A=\begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} \quad \text{(其中未写出的元素均为零)}$$

试求 $\exp Ax$

解 由(4.48)可得

$$\exp Ax = E + Ax + \frac{A^2x^2}{2!} + \cdots + \frac{A^kx^k}{k!} + \cdots$$

$$= E + \begin{bmatrix} a_1 & & & \\ & a_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} a_1^2 & & & \\ & a_2^2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^2 \end{bmatrix} \frac{x^2}{2!}$$

$$+ \cdots + \begin{bmatrix} a_1^k & & & \\ & a_2^k & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_n^k \end{bmatrix} \frac{x^k}{k!} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} e^{a_1x} & & & \\ & e^{a_2x} & & \\ & & \ddots & \\ & & & e^{a_nx} \end{bmatrix}$$

例2 试求方程组 $\overline{y}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \overline{y}$ 的基解矩阵.

解 因为

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \triangleq A_1 + A_2$$

由于矩阵 A_1，A_2 可交换，故有

$$\exp Ax = \exp A_1 x \cdot \exp A_2 x = \exp\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} x \cdot \exp\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x$$

$$= \begin{bmatrix} e^{2x} & 0 \\ 0 & e^{2x} \end{bmatrix} \cdot \left\{ E + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{x^2}{2!} + \cdots \right\}$$

但$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$，所以级数只有两项，因此基解矩阵就是

$$\exp Ax = e^{2x}\begin{bmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

上面仅对一些很特殊的情况计算 $\exp Ax$，但对一般的矩阵 A，只知 $\exp Ax$ 是一个矩阵，它的每一个元素究竟是什么并没有具体给出. 下面利用线性代数的基本知识给出齐次方程组(4.47)的基解矩阵 $\exp Ax$ 的计算公式.

为了计算基解矩阵，我们引进矩阵 A 的特征根和特征向量的概念. 类似于 § 4.4，我们试图求方程组

$$\vec{y}' = A\vec{y} \tag{4.47}$$

形如

$$\vec{\varphi}(x) = e^{\lambda x}C \quad (C \neq 0) \tag{4.56}$$

的解，其中常数 λ 及常向量 C 是特定的，为此将(4.56)代入方程组(4.47)得到

$$\lambda e^{\lambda x} \cdot C = Ae^{\lambda x} \cdot C$$

由 $e^{\lambda x} \neq 0$，上式变成

$$(\lambda E - A)\vec{C} = 0 \tag{4.57}$$

这表示 $e^{\lambda x}C$ 为(4.47)的解的充要条件为常数 λ 和常向量 C 满足方程(4.57). 方程(4.57)可以看作是以 C 的 n 个分量为未知量的齐次线性代数方程组. 根据线性代数的基本理论，这个方程组具有非

零解的充要条件是 λ 满足方程

$$F(\lambda) \triangleq det(\lambda E - A) = 0 \tag{4.58}$$

(4.58)为 λ 的 n 次方程，称为 A **的特征方程**，其根称为 A **的特征根**，对应于 λ 而满足方程(4.57)的非零向量 $\vec{u}$ 称为**对应于特征根 λ 的特征向量**，也称为方程组(4.47)的特征向量.

由上面的讨论可知，$\vec{y}=e^{\lambda x}C$ 是方程组(4.47)的解的充要条件为：λ 是 A 的特征根，而 C 是对应于 λ 的特征向量. 由于方程(4.58)是 n 次的，所以 A 只有 n 个特征根，但不一定都互不相同. 根据线性代数知识，当 A 有 n 个不同特征根，即 $\lambda_i \neq \lambda_j (i \neq j)$ 时，相应地有 n 个特征向量 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$，且这 n 个特征向量线性无关. 如果某 λ_0 为 A 的 m 重特征根，且矩阵 $(\lambda_0 E - A)$ 的秩为 l，则当 $l = n - m$ 时，对应于 λ_0 的线性无关特征向量有 m 个；而当 $l > n - m$ 时，对应于 λ_0 的特征向量个数少于 m. 因此有如下的结论：

定理8 若矩阵 A 有 n 个线性无关的特征向量 $\vec{u}_1, \vec{u}_2, \cdots, \vec{u}_n$，它们对应的特征根为 $\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n$（不必各不相同）则矩阵

$$\Phi(x) = \{e^{\lambda_1 x}\vec{u}_1, e^{\lambda_2 x}\vec{u}_2, \cdots, e^{\lambda_n x}\vec{u}_n\}$$

是方程组(4.47)的一个基解矩阵.

例 3 求方程组 $\vec{y}' = A\vec{y}$ 的基解矩阵，其中 $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 3 \end{bmatrix}$

解 A 的特征方程为

$$F(\lambda) = \det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 5 \\ -5 & 3-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 6\lambda + 34 = 0$$

其特征根 $\lambda_1 = 3 + 5i$，$\lambda_2 = 3 - 5i$. 对应于 $\lambda_1 = 3 + 5i$ 的特征向量 $\vec{u}_1 = (u_{11}, u_{21})^T$ 必须满足方程组：

$$(A - (3+5i)E)\vec{u}_1 = \begin{bmatrix} -5i & 5 \\ -5 & -5i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} \\ u_{21} \end{bmatrix} = 0$$

因此 u_{11}, u_{21} 满足方程组

$$\begin{cases} -iu_{11}+u_{21}=0 \\ -u_{11}-iu_{21}=0 \end{cases}$$

其解为 $\vec{u}_1=\alpha(1,i)^T$，$\alpha\neq0$为任意常数. 类似地可求出对应于另一特征根 $\lambda_2=3-5i$ 的特征向量 $\vec{u}_2=(u_{12},u_{22})^T=\beta(i,1)^T$，$\beta\neq0$为任意常数. $(1,i)^T$，$(i,1)^T$ 是对应于 λ_1,λ_2的两个线性无关向量. 根据定理8，矩阵

$$\Phi(x)=\begin{bmatrix} e^{(3+5i)x} & ie^{(3-5i)x} \\ ie^{(3+5i)x} & e^{(3-5i)x} \end{bmatrix}$$

就是一个基解矩阵，且是复值的.

〔注〕 不难证明齐次线性方程组(4.47)的任一复值基解矩阵的实部和虚部均为方程组(4.47)的实值基解矩阵. 如例3中的基解矩阵

$$\Phi(x)=\begin{bmatrix} e^{(3+5i)x} & ie^{(3-5i)x} \\ ie^{(3+5i)x} & e^{(3-5i)x} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} e^{3x}\cos5x, & e^{3x}\sin5x \\ -e^{3x}\sin5x & e^{3x}\cos5x \end{bmatrix}$$

$$+i\begin{bmatrix} e^{3x}\sin5x & e^{3x}\cos5x \\ e^{3x}\cos5x & -e^{3x}\sin5x \end{bmatrix}$$

$$Re\{\Phi(x)\}=e^{3x}\begin{bmatrix} \cos5x & \sin5x \\ -\sin5x & \cos5x \end{bmatrix},$$

$$Im\{\Phi(x)\}=e^{3x}\begin{bmatrix} \sin5x & \cos5x \\ \cos5x & -\sin5x \end{bmatrix}$$

$Re\{\Phi(x)\}$，$\mathrm{Im}\{\Phi(x)\}$均为实基解矩阵.

例4 求方程组 $\vec{y}'=A\vec{y}$的基解矩阵，其中

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -2 & -2 & 2 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix},\quad \vec{y}(x)=(y_1,y_2,y_3)^T$$

解 A 的特征方程为

$$det(A-\lambda E)=\begin{bmatrix}3-\lambda & 2 & -1\\ -2 & -2-\lambda & 2\\ 3 & 6 & -1-\lambda\end{bmatrix}$$

$$=-(\lambda^3-12\lambda+16)=0$$

特征根 $\lambda_1=-4,\lambda_2=\lambda_3=2$

对于特征根 $\lambda_1=-4$，相应的特征向量 $\vec{u}_1=(u_{11},u_{21},u_{31})^T$ 应满足线性代数方程组

$$(A+4E)\vec{u}_1=\begin{bmatrix}7 & 2 & -1\\ -2 & 2 & 2\\ 3 & 6 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}\\ u_{21}\\ u_{31}\end{bmatrix}=0$$

解得 $\vec{u}_1=\alpha(1,-2,3)^T$，$\alpha\neq0$为任意向量.

对于特征根 $\lambda_2=2$，其重数 $m=2$，而$(A-2E)$的秩 $l=1=n-m$ 故相应的特征向量有2个，可由方程组

$$(A-2E)\vec{u}_i=\begin{bmatrix}1 & 2 & -1\\ -2 & -4 & 2\\ 3 & 6 & -3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{1i}\\ u_{2i}\\ u_{3i}\end{bmatrix}=0$$

$$(i=1,2)$$

确定，解得 $\vec{u}_2=\beta(-2,1,0)^T,\vec{u}_3=\gamma(1,0,1)^T,\beta\neq0,\gamma\neq0$为任意常数. 取 $\alpha=\beta=\gamma=1$，则$(1,-2,3)^T,(-2,1,0)^T,(1,0,1)^T$ 为 A 的线性无关特征向量，据定理8，方程组的基解矩阵为

$$\Phi(x)=\begin{bmatrix}e^{-4x} & -2e^{2x} & e^{2x}\\ -2e^{-4x} & e^{2x} & 0\\ 3e^{-4x} & 0 & e^{2x}\end{bmatrix}$$

一般说，定理8中的基解矩阵$\Phi(x)$不一定是$\exp Ax$，但根据基解矩阵的性质2°，可以确定出它们的关系：

$$\exp Ax=\Phi(x)\Phi^{-1}(0) \tag{4.59}$$

从而已知方程组(4.47)的任一基解矩阵 $\Phi(x)$，均可构造标准基解矩阵 $\exp Ax$，且若 A 是实常数矩阵，$\exp Ax$ 也是实的，故公式(4.59)给出一个构造实矩阵的方法. 例如由例3所得的基解矩阵 $\Phi(x)$，可得

$$\exp Ax=\begin{bmatrix} e^{(3+5i)x} & ie^{(3-5i)x} \\ ie^{(3+5i)x} & e^{(3-5i)x} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{2}e^{3x}\begin{bmatrix} e^{5ix} & ie^{-5ix} \\ ie^{5ix} & e^{-5ix} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{bmatrix}$$

$$=e^{3x}\begin{bmatrix} \cos5x & \sin5x \\ -\sin5x & \cos5x \end{bmatrix}$$

现在介绍一种直接计算 $\exp Ax$ 的方法. 先引进一些有关的线性代数知识.

假设 A 是一个 $n\times n$ 的常数矩阵，$\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 是 A 的 k 个不同特征根，其重数分别为 $n_1,n_2,\cdots,n_k$ 且 $n_1+\cdots+n_k=n$，那么对应于 n_j 重的特征根 λ_j，线性代数方程组

$$(A-\lambda_j E)^{n_j}\vec{u}=0 \qquad (j=1,\cdots,k) \tag{4.60}$$

所有的解构成 n 维欧氏空间 U 的一个 n_j 维子空间 $U_j(j=1,\cdots,k)$ 且 n 维空间 U 可表示成 $U_1,\cdots,U_k$ 的直接和即

$$U=U_1+U_2+\cdots+U_k$$

从而对 n 维空间 U 中的任一个向量 $\vec{u}$，存在唯一的向量 $\vec{u}_1,\cdots,\vec{u}_k$，其中 $\vec{u}_j\in U_j(j=1,\cdots,k)$ 使得

$$\vec{u}=\vec{u}_1+\vec{u}_2+\cdots+\vec{u}_k \tag{4.61}$$

对此分解有两种特殊情况：(i)如果 A 有 n 个各异特征根即 $\lambda_i\neq\lambda_j$ $(i\neq j)$则对任一向量 $\vec{u}\in U$，分解式(4.61)中的 $\vec{u}_j$ 可表示成 $\vec{u}_j=c_j\vec{v}_j$，$(j=1,\cdots,n)$，其中 $\vec{v}_1,\cdots,\vec{v}_n$ 是 A 的一组线性无关的特征向量，而 C_j 为某些常数. n 维空间 U 可以表示成 n 个一维空间 U_j 的

直接和；(ii)A 只有一个特征根，即有 n 重特征根就不必再对空间 U 进行分解了.

现在我们先寻找满足初值条件 $\vec{\varphi}(0)=\vec{\eta}$的解 $\vec{\varphi}(x)$. 由结构定理知道 $\vec{\varphi}(x)=\exp Ax\cdot\vec{\eta}$，但这仅是一般表达式，我们希望能具体计算出 $\vec{\varphi}(x)$的各个分量. 据 $\exp Ax$ 的定义，$\exp Ax\cdot\vec{\eta}$也是一个无穷级数，因而难于计算，如果我们能适当地分解向量 $\vec{\eta}$，使 $\exp Ax\cdot\vec{\eta}$的分量能表示成 x 的指数函数与 x 的幂函数乘积的有限项线性组合，就解决了 $\exp Ax\cdot\vec{\eta}$的计算问题.

假设 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$ 分别是 A 的 $n_1,\cdots,n_k$ 重不同的特征根，由(4.61)有

$$\vec{\eta}=\vec{v}_1+\vec{v}_2+\cdots+\vec{v}_k \tag{4.62}$$

其中 $\vec{v}_j\in U_j(j=1,\cdots,k)$，因为子空间 U_j 是由方程组(4.60)产生的，$\vec{v}_j$ 一定满足方程组(4.60)，因而得到

$$(A-\lambda_jE)^l\vec{v}_j=0\qquad l\geqslant n_j(j=1,\cdots,k) \tag{4.63}$$

注意到当矩阵是对角形时，其相应的矩阵指数很容易求得，且有

$$E=\exp(\lambda_jEx)\cdot\exp(-\lambda_jEx)=e^{\lambda_jx}\cdot\exp(-\lambda_jEx) \tag{4.64}$$

由(4.63)及(4.64)式，可以得到

$$\begin{aligned}\exp Ax\cdot\vec{v}_j&=\exp Ax\cdot E\cdot\vec{v}_j=\exp Ax[e^{\lambda_jx}\cdot\exp(-\lambda_jEx)]\vec{v}_j\\&=e^{\lambda_jx}\cdot\exp(A-\lambda_jE)x\cdot\vec{v}_j=e^{\lambda_jx}(E+(A-\lambda_jE)x+\cdots\\&\quad+\frac{x^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(A-\lambda_jE)^{n_j-1})\,\vec{v}_j\end{aligned}$$

再根据分解式(4.62)，可知方程组(4.47)具初值 $\vec{y}(0)=\vec{\eta}$的解可表为：

$$\vec{\varphi}(x)=\exp Ax\cdot\vec{\eta}=(\exp Ax)\sum_{j=1}^{k}\vec{v}_j=\sum_{j=1}^{k}(\exp Ax)\vec{v}_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j x}\left[E + x(A-\lambda_j E) + \cdots + \frac{x^{n_j-1}}{(n_j-1)!}(A-\lambda_j E)^{n_j-1}\vec{v}_j\right]$$

$$= \sum_{j=1}^{k} e^{\lambda_j x}\left[\sum_{l=0}^{n_j-1} \frac{x^l}{l!}(A-\lambda_j E)^l\right]\vec{v}_j \tag{4.65}$$

特别,若 A 只有一个特征根 λ,即 λ 为 n 重特征根时,空间不必分解. 此时对任意向量 $\vec{u}\in U$,都满足

$$(A-\lambda E)^n\vec{u} = 0$$

据 $\exp Ax$ 的定义,有

$$\begin{aligned}\exp Ax &= \exp Ax \cdot E\\ &= \exp Ax \cdot [e^{\lambda x}\cdot \exp(-\lambda E x)] = e^{\lambda x}\exp(A-\lambda E)x\\ &= e^{\lambda x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^j}{j!}(A-\lambda E)^j \end{aligned} \tag{4.66}$$

为了具体得出 $expAx$,只要注意

$$\exp Ax = \exp Ax \cdot E = [\exp Ax\cdot \vec{e}_1, \cdots, \exp Ax \cdot \vec{e}_n]$$

其中 $\vec{e}_1=(1,0,\cdots,0)^T, \vec{e}_2=(0,1,0,\cdots,0)^T,\cdots,\vec{e}_n=(0,\cdots,0,1)^T$ 是单位向量. 依次令 $\vec{\eta}=\vec{e}_1, \vec{\eta}=\vec{e}_2,\cdots,\vec{\eta}=\vec{e}_n$,便得 n 个解,以这 n 个解为列,即得 $expAx$.

例5 求方程组 $\vec{y}'=\vec{A}y$的 $\exp Ax$,其中 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -1 & 4\end{bmatrix}$

解 $det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}2-\lambda & 1\\ -1 & 4-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-6\lambda+9=(\lambda-3)^2=0$,$\lambda=3$是 A 的二重特征根,且$(A-3E)$的秩为1,故只有一个特征向量.

可用两种计算公式计算 $\exp Ax$

(i) 由于 $\lambda=3$是二重特征根,$n_1=2$,所以只有一个子空间. 由(4.66)有

$$\exp Ax = e^{3x}\{E + (A - 3E)x\}$$
$$= e^{3x}\left\{E + x\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\} = e^{3x}\begin{bmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{bmatrix}$$

(ii) 先求满足初值条件 $\vec{y}(0)=\vec{\eta}$ 的解 $\vec{\varphi}(x)=\exp Ax\cdot\vec{\eta}$

将 $\lambda_1=3, n_1=2$ 及 $\vec{\eta}=(\eta_1,\eta_2)^T$ 代入(4.65)，由于 $\vec{\eta}$ 不必分解，故得

$$\vec{\varphi}(x) = e^{3x}\{E + x(A - 3E)\}\vec{\eta}$$
$$= e^{3x}\left\{E + x\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix}$$

分别令 $\vec{\eta}=\vec{e}_1=(1,0)^T, \vec{\eta}=\vec{e}_2=(0,1)^T$，可得

$$\vec{\varphi}_1(x) = e^{3x}(1-x, -x)^T, \vec{\varphi}_2(x) = e^{3x}(x, 1+x)^T$$

从而得 $\exp Ax=[\vec{\varphi}_1(x),\vec{\varphi}_2(x)]=e^{3x}\begin{bmatrix} 1-x & x \\ -x & 1+x \end{bmatrix}$

例6 求方程组 $\vec{y}'=\vec{A}y$ 满足初始条件 $\vec{y}(0)=\vec{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^T$ 的解，并求 $\exp Ax$，其中 $A=\begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

解 A 的特征方程为

$$\det(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ 2 & -\lambda & 1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$
$$= -(\lambda - 1)(\lambda - 2)^2 = 0$$

$\lambda_1=1, \lambda_2=2$(二重)，而$(A-2E)$的秩 $l=2>n-m$，所以 U 由子空间 U_1 和 U_2 组成，且 U_1, U_2 分别由满足方程组

$$(A - E)\vec{u} = 0 \text{ 和 } (A - 2E)^2\vec{u} = 0$$

的向量组成. 方程组

$$(A-E)\vec{u}_1=\begin{bmatrix}2 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\\ 1 & -1 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{11}\\ u_{21}\\ u_{31}\end{bmatrix}=0$$

的解为 $\vec{u}_1=(0,\alpha,\alpha)^T$，$\alpha\neq0$为任意常数，子空间$U_1$由向量$\vec{u}_1$构成.

而方程组

$$(A-2E)^2\vec{u}_2=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 0\\ -1 & 1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}u_{12}\\ u_{22}\\ u_{32}\end{bmatrix}=0$$

的解为 $\vec{u}_2=(\beta,\beta,\gamma)^T$，$\beta\neq0$，$\gamma\neq0$为任意常数，子空间$U_2$由向量$\vec{u}_2$构成.

现确定$\vec{v}_1\in U_1$，$\vec{v}_2\in U_2$，使$\vec{\eta}=\vec{v}_1+\vec{v}_2$. 由于$\vec{v}_1\in U_1$，$\vec{v}_2\in U_2$，所以

$$\vec{v}_1=(0,a,a),\quad \vec{v}_2=(b,b,c)^T$$

其中a,b,c是待确定的常数，应满足$\vec{\eta}=(\eta_1,\eta_2,\eta_3)^T=\vec{v}_1+\vec{v}_2$，即

$$\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_2\\ \eta_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ a\\ a\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}b\\ b\\ c\end{bmatrix}$$

因而得$b=\eta_1$，$a=\eta_2-\eta_1$，$c=\eta_3-\eta_2+\eta_1$，$\vec{v}_1=(0,\eta_2-\eta_1,\eta_2-\eta_1)^T$，$\vec{v}_2=(\eta_1,\eta_1,\eta_3-\eta_2+\eta_1)^T$，根据(4.65)，我们得到满足初值条件$\vec{y}(0)=\vec{\eta}$的解为：

$$\vec{\varphi}(x)=e^xE\vec{v}_1+e^{2x}\{E+(A-2E)x\}\vec{v}_2$$

$$=e^x\begin{bmatrix}0\\ \eta_2-\eta_1\\ \eta_2-\eta_1\end{bmatrix}+e^{2x}\left\{E+x\begin{bmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{bmatrix}\right\}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_1\\ \eta_3-\eta_2+\eta_1\end{bmatrix}$$

$$=e^x\begin{bmatrix}0\\ \eta_2-\eta_1\\ \eta_2-\eta_1\end{bmatrix}+e^{2x}\begin{bmatrix}1+x & -x & x\\ 2x & 1-2x & x\\ x & -x & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\eta_1\\ \eta_1\\ \eta_3-\eta_2-\eta_1\end{bmatrix}$$

$$
= e^{x}\begin{bmatrix} 0 \\ \eta_2 - \eta_1 \\ \eta_2 - \eta_1 \end{bmatrix} + e^{2x}\begin{bmatrix} \eta_1 + x(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_1 + x(\eta_3 - \eta_2 + \eta_1) \\ \eta_3 - \eta_2 + \eta_1 \end{bmatrix}
$$

为了得到 $\exp Ax$，依次令 $\bar{\eta}=(1,0,0)^T$，$\bar{\eta}=(0,1,0)^T$，$\bar{\eta}=(0,0,1)^T$，代入上式就可得到了三个线性无关解，用这三个解为列作矩阵，即得

$$
\exp Ax = \begin{bmatrix} (1+x)e^{2x} & -xe^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{x}+(1+x)e^{2x} & e^{x}-xe^{2x} & xe^{2x} \\ -e^{x}+e^{2x} & e^{x}-e^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix}
$$

值得指出的是公式(4.65)告诉我们，常数微分方程组(4.47)的任一解都可通过有限次代数运算求出来，不必通过求积得到，从而提供了一个用代数方法求 $\exp Ax$ 的计算公式.

目前，计算基解矩阵 $\exp Ax$ 的方法有多种，不一一介绍. 我们仅介绍 E. J. Putzer 利用哈密顿一凯莱定理得到的一种计算方法. 他把 $\exp Ax$ 的计算问题，归结为求解带下三角矩阵的一阶线性微分方程组的初值问题，方法较简单. 下面不加证明地给出 $\exp Ax$ 的计算公式：

$$
\exp Ax = \sum_{i=0}^{n-1} r_{i+1}(x)P_i
$$

其中 $P_0=E$，$P_i=\prod_{k=1}^{i}(A-\lambda_k E)\quad(i=1,\cdots,n)$，而 $r_i(x)\quad(i=1,\cdots,n)$ 是初值问题

$$
\begin{cases} r'_1(x) = \lambda_1 r_1(x) \\ r'_i(x) = \lambda_i r_i(x) + r_{i-1}(x) \quad (i=2,\cdots,n) \\ r_1(0)=1, \quad r_i(0)=0 \qquad (i=2,\cdots,n) \end{cases}
$$

的解，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$ 是矩阵 A 的特征根(不必相异).

现在应用这一方法计算例6的 $\exp Ax$，这时 $\lambda_1=1$，$\lambda_2=2$，$\lambda_3=$

2，求解初值问题

$$\begin{cases} r'_1(x) = r_1(x) \\ r'_2(x) = 2r_2(x) + r_1(x) \\ r'_3(x) = 2r_3(x) + r_2(x) \\ r_1(0) = 1, \quad r_2(0) = r_3(0) = 0 \end{cases}$$

得到 $r_1(x)=e^x$，$r_2(x)=e^{2x}-e^x$，$r_3(x)=(x-1)e^{2x}+e^x$，直接计算得

$$P_1 = A - E = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$P_2 = (A - E)(A - 2E) = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

最后得到

$$\begin{aligned} \exp Ax &= r_1(x)P_0 + r_2(x)P_1 + r_3(x)P_2 \\ &= \begin{bmatrix} (1+x)e^{2x} & -xe^{2x} & xe^{2x} \\ -e^x + (1+x)e^{2x} & e^x - xe^{2x} & xe^{2x} \\ -e^x + e^{2x} & e^x - xe^{2x} & e^{2x} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

与例6的结果一致.

有了基解矩阵 $\exp Ax$ 的计算公式，利用矩阵指致的性质，就可得方程(4.47)满足初值条件 $\vec{y}(x_0)=\vec{\eta}$ 的解的表达式

$$\vec{\varphi}(x) = \exp A(x - x_0)\vec{\eta} \qquad (4.67)$$

例7 对例5的方程组，求满足 $\vec{y}(0)=(1,0)^T$ 的解

解 由例5可知

$$\exp Ax = e^{3x}\begin{bmatrix} 1-x & x \\ -x & 1-x \end{bmatrix}$$

因而初值问题的解为

$$\vec{\varphi}(x)=\exp Ax\cdot\vec{y}(0)=e^{3x}\begin{bmatrix}1-x & x\\ -x & 1+x\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}$$

$$=e^{3x}\begin{bmatrix}1-x\\-x\end{bmatrix}$$

4.5.3 非齐次常系数线性方程组

在4.2.2的公式(4.21)给出非齐次线性方程组初值问题

$$\begin{cases}\vec{y}'=A(x)\vec{y}(x)+\vec{f}(x)\\ \vec{y}(x_0)=\vec{\eta}\end{cases}\tag{4.4}$$

解的表达式

$$\vec{\varphi}(x)=\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)\vec{\eta}+\Phi(x)\int_{x_0}^{x}\Phi^{-1}(s)\vec{f}(s)\mathrm{d}s\tag{4.21}$$

其中 $\Phi(x)$ 为相应的齐次线性方程组的基解矩阵. 当 A 为常数矩阵时,$\Phi(x)=\exp Ax$ 为基解矩阵,这时(4.21)式可表示成

$$\vec{\varphi}(x)=[\exp A(x-x_0)]\cdot\vec{\eta}+\int_{x_0}^{x}[\exp A(x-s)]\vec{f}(s)ds\tag{4.68}$$

例8 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\4 & 3\end{bmatrix}$, $\vec{f}(x)=(0,e^{x})^T$, $\vec{\eta}=(1,0)^T$, 试求方程组 $\vec{y}'(x)=A\vec{y}(x)+\vec{f}(x)$ 满足初值条件 $\vec{y}(0)=\vec{\eta}$ 的解

解 $\det(A-\lambda E)=\begin{vmatrix}1-\lambda & 2\\4 & 3-\lambda\end{vmatrix}=\lambda^2-4\lambda-5=0$

特征根为 $\lambda_1=5$, $\lambda_2=-1$, 不难求出

$$\exp Ax=\begin{bmatrix}\frac{1}{3}e^{5x}+\frac{2}{3}e^{-x} & \frac{1}{3}(e^{5x}-e^{-x})\\ \frac{2}{3}(e^{5x}-e^{-x}) & \frac{2}{3}e^{5x}+\frac{1}{3}e^{-x}\end{bmatrix}$$

$$\exp Ax\cdot\vec{\eta}=(\frac{1}{3}e^{5x}+\frac{2}{3}e^{-x},\frac{2}{3}e^{5x}-\frac{2}{3}e^{-x})^T$$

$$\int_0^x [\exp A(x-s)]\bar{f}(s)ds = \int_0^x e^s \begin{bmatrix} \frac{1}{3}e^{5(x-s)} - \frac{1}{3}e^{-(x-s)} \\ \frac{2}{3}e^{5(x-3)} + \frac{1}{3}e^{-(x-s)} \end{bmatrix} ds$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{12}e^{5x}(1-e^{-4x}) - \frac{1}{6}e^{-x}(e^{2x}-1) \\ \frac{1}{6}e^{5x}(1-e^{-4x}) + \frac{1}{6}e^{-x}(e^{2x}-1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{1}{12}e^{5x} - \frac{1}{4}e^{x} + \frac{1}{6}e^{-x} \\ \frac{1}{6}e^{5x} - \frac{1}{6}e^{-x} \end{bmatrix}$$

所以 $\quad \bar{\varphi}(x) = (\frac{5}{12}e^{5x} + \frac{5}{6}e^{-x} - \frac{1}{4}e^{x}, \frac{5}{6}e^{5x} - \frac{5}{6}e^{-x})^T.$

有时对具体方程采用具体的特殊方法求解更简单，例如可用消去法求解.下面举例说明.

例9 求解方程组

$$\begin{cases} y_1' + 5y_1 + y_2' + 7y_2 = 8 & (1) \\ 2y_1' + y_1 + 3y_2' + y_2 = \cos x & (2) \end{cases}$$

解 这是一个非齐次线性方程组.按常规求特解需求积，计算量较大.而如用消去法把它化为相应的二阶线性方程，就可用较简单的方法求解.具体做法如下：

以2×(1)减(2)得：$9y_1 - y_2' + 13y_2 = 16 - \cos x$，因此

$$y_1 = \frac{1}{9}(y_2' - 13y_2 + 16 - \cos x) \tag{3}$$

$$y_1' = \frac{1}{9}(y_2'' - 13y_2' + \sin x)$$

代入(1)式得

$$y_2'' + y_2' - 2y_2 = -8 - \sin x + 5\cos x \tag{4}$$

这里一个二阶常系数线性方程，相应齐次方程的基本解组为 e^{-2x}，e^x. 利用待定系数法，可求得特解为

$$\bar{y}_2 = A + B\sin x + C\cdot\cos x = 4 + \frac{4}{5}\sin x - \frac{7}{5}\cos x$$

故方程(4)的通解为

$$y_2(x) = c_1e^{-2x} + c_2e^x + \frac{4}{5}\sin x - \frac{7}{5}\cos x + 4$$

再把 $y_2(x)$代入(3)得

$$y_1(x) = -\frac{5}{3}c_1e^{-2x} - \frac{4}{3}c_2e^x - \sin x + 2\cos x - 4$$

所以方程组的任一解为

$$\vec{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}c_1e^{-2x} - \frac{4}{3}c_2e^x \\ c_1e^{-2x} + c_2e^x \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\sin x + 2\cos x - 4 \\ \frac{4}{5}\sin x - \frac{7}{5}\cos x + 4 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{5}{3}e^{-2x} & -\frac{4}{3}e^x \\ e^{-2x} & e^x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

$$+ \begin{bmatrix} -\sin x + 2\cos x - 4 \\ \frac{4}{5}\sin x - \frac{7}{5}\cos x + 4 \end{bmatrix},$$

其中 c_1,c_2为确定的常数.

类似也可由方程组先消去 $y_2(x)$得到 $y_1(x)$的二阶线性方程，求得此二阶方程的通解后，再求 $y_2(x)$的表达式.

〔注〕 常系数高阶线性方程或线性方程组，也可用拉普拉斯(Laplace)变换求解，详细讨论见附录.

§4.6 二阶变系数线性方程

由前面的讨论可以看出，常系数线性方程(组)的求解可归结为代数方程的求解进行，但对变系数的线性方程，这种方法就不再适用，也没有统一的解法，通常只能用近似解法(解析近似解或数值解法)．下面介绍的降阶法及幂级数解法就是在一定条件下求解二阶变系数线性方程常用的方法．

4.6.1 降阶法

对于线性微分方程，当已知 n 阶齐线性方程的一个解时，即可得出一个新的 $n-1$ 阶的线性方程，由它可得原方程其余的解．这种方法类似于当已知代数方程的一个解时，可降低此代数方程的次数的情况，我们称这种方法为**降阶解法**．

本段只介绍二阶变系数线性方程的降阶解法，对更高阶的线性方程，处理方法类似，

考虑二阶变系数齐线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \tag{4.69}$$

若已知它的一个解 $y_1(x)$，可令 $y(x)=u(x)y_1(x)$，并代入(4.69)得：

$$\begin{aligned}u''(x)y_1(x)+2u'(x)y_1'(x)+p(x)u'(x)y_1(x)\\+u(x)[y_1''(x)+p(x)y'(x)+q(x)y_1(x)]=0\end{aligned}$$

由于 $y_1(x)$ 为方程(4.69)的解，故 $y_1''+p(x)y_1'+q(x)y_1=0$．从而 $u(x)$ 满足方程

$$y_1(x)u''(x)+(2y_1'+p(x)y_1)u'=0$$

再令 $z(x)=u'(x)$，则上式化为

$$y_1(x)z'(x)+(2y_1'(x)+p(x)y_1(x))z(x)=0 \tag{4.70}$$

这是关于 $z(x)$ 的一阶线性方程，它的通解为

$$z(x)=c_1\exp\left(-\int\frac{2y_1'+py_1}{y_1}dx\right)=c_1y_1^{-2}\cdot\exp\left(-\int p(x)dx\right)$$

从而

$$u(x)=\int c_1y_1^{-2}(x)\cdot\exp\left(-\int p(x)dx\right)dx+c_2$$

故有

$$y(x)=y_1(x)\left[c_1\int y_1^{-2}(x)\cdot\exp\left(-\int p(x)dx\right)dx+c_2\right] \tag{4.71}$$

这里 c_1,c_2 为任意常数. 取 $c_2=0,c_1=1$，得方程(4.69)的一个特解：

$$y_2(x)=y_1(x)\int y_1^{-2}(x)\cdot\exp\left(-\int p(x)dx\right)\cdot dx \tag{4.72}$$

它显然与 $y_1(x)$ 线性无关，因为它们之比不等于常数. 因此表达式(4.71)是方程(4.69)的通解.

例1 已知 $y_1(x)=\frac{\sin x}{x}$ 是方程 $y''+\frac{2}{x}y'+y=0$ 的解，试求方程的通解

解 这里 $p(x)=\frac{2}{x}$，由公式(4.71)有

$$y(x)=\frac{\sin x}{x}\left[c_1\int\frac{x^2}{\sin^2x}\cdot\exp\left(-\int\frac{2}{x}dx\right)+c_2\right]$$

$$=\frac{\sin x}{x}\left[c_1\int\frac{dx}{\sin^2x}+c_2\right]=\frac{\sin x}{x}[c_1\mathrm{ctg}x+c_2]$$

其中 c_1,c_2 是任意常数. 这就是方程的通解.

4.6.2 级数解法

从4.6.1讨论可以看出齐次二阶线性方程(4.69)的求解问题可归纳为求方程的特解，但特解大都在较特殊情况下才能得到. 对较复杂的情况，需用某个级数 $\sum_{k=1}^{\infty}a_k\varphi_k(x)$ 的形式去求解. 特别是常

用幂级数或广义幂级数的形式去求解，

考虑二阶齐次线性方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}+p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=0 \tag{4.69}$$

及初值条件 $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'$ 情况.

不失一般性，可设 $x_0=0$，否则可引进新变量 $t=x-x_0$ 化为 $t=0$，我们把有关的结论介绍给读者而略去证明.

定理9 若方程(4.69)中系数 $p(x)$ 和 $q(x)$ 都能展成 x 的幂级数，且收敛区间为 $|x|<R$，则方程(4.69)有形如

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \tag{4.73}$$

的特解，且也以 $|x|<R$ 为级数的收敛区间.

定理10 若方程(4.69)中系数 $p(x)$，$q(x)$ 具这样性质：$xp(x)$ 和 $x^2q(x)$ 均能展成 x 的幂级数，且收敛区间为 $|x|<R$，则方程(4.69)有形如

$$y(x)=x^{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \tag{4.74}$$

的特解，这里 $a_0\neq0$，α 是一个待定的常数，且级数(4.74)也以 $|x|<R$ 为级数收敛区间.

例2 求方程 $y''-2xy'-4y=0$ 的满足条件 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的解.

解 $p(x)=-2x, q(x)=-4$，故 p、q 满足定理8的条件且 $p(x)$，$q(x)$ 已为幂级数展开式了，其收敛区间为 $|x|<+\infty$，因而方程有收敛区间为 $|x|<+\infty$ 的级数解.

设方程的级数解为

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kx^k \tag{4.75}$$

由初值条件知 $a_0=0, a_1=1$ 因而

$$y = x + a_2x^2 + a_3x^3 + \cdots + a_nx^n + \cdots$$

$$y' = 1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \cdots + na_nx^{n-1} + \cdots$$

$$y'' = 2a_2x + 3 \cdot 2a_3x + \cdots + n(n-1)a_nx^{n-2} + \cdots$$

将 y', y'' 代入方程，合并 x 的同次幂项，并令各项系数为零. 得到

$$2a_0 = 0$$

$$3 \cdot 2a_3 - 2 - 4 = 0$$

$$4 \cdot 3a_4 - 4a_2 - 4a_2 = 0$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$n(n-1)a_n - 2(n-2)a_{n-2} - 4a_{n-2} = 0$$

$$\cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

即得 $\quad a_2 = 0, a_3 = 1, a_4 = 0, \cdots, a_n = \dfrac{2}{n-1}a_{n-2}, \cdots$

或 $\quad a_3 = 1, a_5 = \dfrac{1}{2!}, a_7 = \dfrac{1}{3!}, \cdots, a_{2k+1} = \dfrac{1}{k!}$

$$a_2 = 0, a_4 = 1, \cdots, a_{2k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots)$$

将 $a_i (i = 0, 1, 2, \cdots)$ 代回(4.75)，就得到

$$y = x + x^3 + \frac{x^5}{2!} + \cdots + \frac{x^{2k+1}}{k!} + \cdots$$

$$= x\left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2!} + \cdots + \frac{x^{2k}}{k!} + \cdots\right) = xe^{x^2} \quad (4.76)$$

这就是问题的解. 如果要求方程的通解，可由这个解再利用公式(4.71)求得通解. 也可以用幂级数法求满足初值条件 $y(0) = 1, y'(0) = 0$ 的另一个特解，所得的解与特解(4.76)线性无关.

例3　在 $x = 0$ 附近求 n 阶贝塞尔(Bessel)方程

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)y = 0 \qquad (4.77)$$

的级数解.

解　将方程改写

$$y'' + \frac{1}{x}y' + (1 - \frac{n^2}{x^2})y = 0$$

系数 $p(x) = \frac{1}{x}, q(x) = (1 - \frac{n^2}{x^2})$，满足 $xp(x) = 1, x^2q(x) = x^2 - n^2$ 可展成幂级数条件，收敛区间为 $|x| < +\infty$，由定理10方程有形如

$$y = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha} \tag{4.78}$$

的解，这里 $a_0 \neq 0$，a_k 和 α 是待定常数，将(4.78)代入(4.77)得

$$x^2 \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + k)(\alpha + k - 1)a_k x^{\alpha+k-2} + x \sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + k)a_k x^{\alpha+k-2} +$$

$$+ (x^2 - n^2) \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha+k} = 0$$

把 x 的同次幂项归在一起，上式就变为

$$\sum_{k=0}^{\infty} (\alpha + k)(\alpha + k - 1) + (\alpha + k) - n^2]a_k x^{\alpha+k}$$

$$+ \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha+k+2} = 0$$

令 x 各次幂的系数等于零，得一系列方程：

$$\begin{cases} a_0(\alpha^2 - n^2) = 0 \\ a_1[(\alpha + 1)^2 - n^2] = 0 \\ a_k[(\alpha + k)^2 - n^2] + a_{k-2} = 0 \quad k = 2, 3, \cdots \end{cases} \tag{4.79}$$

因为 $a_0 \neq 0$，故从(4.79)的第一个方程解得 α 的两个值：$\alpha = n, \alpha = -n$，分别代入(4.79)就可从中递推确定所有的系数 a_k.

先考虑 $\alpha = n$ 时方程(4.77)的一个解，把 $\alpha = n$ 代入(4.79)得

$$a_1 = 0, a_k = \frac{a_{k-2}}{k(2n + k)} \quad k = 2, 3, \cdots$$

从而求得

$$a_{2k-1} = 0,$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}\cdot k!(n+1)(n+2)\cdots(n+k)},$$

$$k=1,2,\cdots$$

将各 a_k 代人(4.78)得到方程(4.77)的一个解：

$$y_1(x)=a_0\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k 2^n}{k!(n+1)(n+2)\cdots(n+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\quad a_0\neq 0 \tag{4.80}$$

既是求(4.77)的特解，不妨令 $a_0=(2^n\Gamma(n+1))^{-1}$. 注意到 Γ 函数的性质：$\Gamma(s+1)=s\Gamma(s)$ 及 $\Gamma(n+1)=n!$（n 为正整数），(4.80)式变为

$$y_1(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!(n+1)(n+2)\cdots(n+k)\Gamma(n+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2k}\triangleq J_n(x)$$

$J_n(x)$是由贝塞耳方程定义的特殊函数，称为 n 阶贝塞耳函数.

为了求另一个特解，我们自然想到求 $\alpha=-n$ 时方程(4.77)的形如

$$y(x)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k x^{-n+k}$$

的解. 注意到只要 $n\neq$非负整数，像上面对于 $\alpha=n$ 时的求解过程一样，我们总可以求得

$$a_{2k-1}=0,$$

$$a_{2k}=(-1)^k\frac{a_0}{2^{2k}\cdot k!(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k)}$$

$$k=1,2,\cdots$$

使它们满足(4.79)中一系列方程，因而

$$y_2(x)=a_0 x^{-n}$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^k a_0\cdot 2^{-n}}{k!(-n+1)(-n+2)\cdots(-n+k)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \quad (4.81)$$

是(4.77)的一个特解，若令 $a_0=2^n(\Gamma(-n+1))^{-1}$. 则(4.81)变成

$$y_2(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}\triangleq J_{-n}(x)$$

$J_{-n}(x)$称为$-n$ **阶贝塞耳函数**，显然，除去因子 $x^{\pm n}$后级数(4.80)和(4.81)对所有 x 都收敛，因此当 $n\neq$非负整数时，$J_n(x)$和 $J_{-n}(x)$都是方程(4.77)的解，而且线性无关. 因为它们可展为由 x 的不同幂次开始的级数，从而它们的比不可能是常数，于是方程(4.77)的通解可写成

$$y(x)=c_1J_n(x)+c_2J_{-n}(x) \quad (4.82)$$

这里 c_1,c_2为任意常数.

当 $n=$非负整数时，我们不能从方程组(4.79)中确定出 a_{2k}($k\geqslant n$)，因此不能像上面一样求得方程的通解，这时可由上段介绍的降阶法，求出与 $J_n(x)$线性无关的特解

$$y_2(x)=J_n(x)\int J_n^{-2}(x)\,e^{-\int\frac{1}{x}dx}dx=J_n(x)\int\frac{dx}{xJ_n^2(x)}$$

此时方程(4.77)的通解为

$$y(x)=c_1J_n(x)+c_2J_n(x)\int\frac{dx}{xJ_n^2(x)} \quad (4.83)$$

其中 c_1,c_2为任意常数.

在应用中常遇到方程

$$x^2y''+xy'+(m^2x^2-n^2)y=0 \quad (4.84)$$

利用变量替换 $t=mx$ 可把方程(4.82)化为贝塞耳方程. 事实上，$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dt}{dx}=m\frac{dy}{dt}$，$\frac{d^2y}{dx^2}=m^2\frac{d^2y}{dt^2}$，方程(4.82)变成贝塞耳方程：

$$t^2y''+ty'+(t^2-n^2)y=0$$

因此按上面程序进行讨论，当 n 不为整数时，方程(4.82)的通解为

$$y = c_1 J_n(mx) + c_2 J_{-n}(mx)$$

例如方程 $x^2y'' + xy' + (4x^2 - \frac{9}{25}) = 0$，其通解为 $y = c_1 J_{\frac{3}{5}}(2x) + c_2 J_{-3/5}(2x)$. 而方程 $x^2y'' + xy' + (3x^2 - 4)y = 0$ 的通解则为

$$y = c_1 J_2(\sqrt{3}\,x) + c_2 J_2(\sqrt{3}\,x)\int \frac{dx}{xJ_n^2(\sqrt{3}\,x)}$$

用同样的方法可以在 $|x| < 1$ 求勒让德(Legender)方程

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + l(l + 1)y = 0 \tag{4.85}$$

的级数解，特别当 l 为整数时，方程(4.85)的级数解，退化成多项式. 勒让德方程的解称为**勒让德函数**.

贝塞耳函数和勒让德函数是工程技术上应用广泛的特殊函数. 其函数值有表可查.

幂级数解法不仅提供了求满足一定条件的线性微分方程初值问题解的一种解析方法，而且还给出了求线性微分方程近似解的一种方法. 我们可以按误差要求确定出级数解的前 n 项和作为初值问题的近拟解.

第四章　习　　题

1. 将下面的初值问题化为等价的一阶方程组的初值问题：

(1) $y''+2y'+7xy=e^{-x}, y(1)=7, y'(1)=-2$；

(2) $y^{(4)}+y=xe^{x}, y(0)=1, y'(0)=-1, y''(0)=2, y^{(3)}(0)=0$；

(3) $\begin{cases} y''+5z'-7y+6z=e^{x} \\ z''+13z'-2z-15y=\cos x \end{cases}$

$y(0)=1, y'(0)=0, z(0)=0, z'(0)=1$

2. 给定方程组

$$\vec{y}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\vec{y}, \qquad \vec{y}=\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \qquad (*)$$

(1) 试验证 $\vec{u}(x)=(\cos x,-\sin x)^T$，$\vec{v}(x)=(\sin x,\cos x)^T$ 分别是方程组（*）的满足初值条件 $\vec{u}(0)=(1,0)^T$，$\vec{v}(0)=(0,1)^T$ 的解；

(2) 试验证 $\omega(x)=c_1\vec{u}(x)+c_2\vec{v}(x)$ 是方程组（*）的满足初值条件 $\vec{\omega}(0)=(c_1,c_2)^T$ 的解，其 c_1, c_2 是任意常数.

3. 试用逐步逼近法求方程组

$$\vec{y}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\vec{y} \qquad \vec{y}=(y_1,y_2)^T$$

满足初值条件 $\vec{y}(0)=(0,1)^T$ 的第三次近似解.

4. 试验证

$$\Phi(x)=\begin{bmatrix} x^2 & x \\ 2x & 1 \end{bmatrix}$$

是方程组

$$\vec{y}'(x)=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -\dfrac{2}{x^2} & \dfrac{2}{x}\end{bmatrix}\vec{y} \qquad \vec{y}=(y_1,y_2)^T$$

在不包含原点的区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的基解矩阵，由此求非齐次方程组 $\vec{y}'=A(x)\vec{y}(x)+\vec{f}(x)$ 的一个解，$\vec{f}(x)=(x,x^2)^T$.

5. 考虑方程组

$$\vec{y}'=A(x)\vec{y} \qquad (*)$$

其中 $A(x)$ 是区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续的 $n\times n$ 矩阵，它的元素为 $a_{ij}(x)i,j=1,2,\cdots,n$.

(1) 如果 $\vec{y}_1(x),\vec{y}_2(x),\cdots,\vec{y}_n(x)$ 是方程组(*)的任意 n 个解，试证它们的伏朗斯基行列式 $W[\vec{y}_1(x),\vec{y}_2(x),\cdots,\vec{y}_n(x)]\triangleq W(x)$ 满足下面的一阶线性微分方程

$$W'(x)=[a_{11}(x)+a_{22}(x)+\cdots+a_{nn}(x)]W(x)$$

(提示：利用行列式的微分公式，求出 $W(x)$ 的表达式)

(2) 解上面的一阶线性微分方程，证明下面的公式

$$W(x)=W(x_0)\exp\left(\int_{x_0}^{x}[a_{11}(s)+a_{22}(s)+\cdots+a_{nn}(s)]ds\right)$$

$$x_0,x\in[a,b]$$

6. 设 $\Phi(x)$ 为方程 $\vec{y}'=A(x)\vec{y}(x)$(A 为 $n\times n$ 常数矩阵)的标准基解矩阵(即 $\Phi(0)=E$)证明

$$\Phi(x)\Phi^{-1}(x_0)=\Phi(x-x_0)$$

7. 设 $A(x),\vec{f}(x)$ 分别为区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续的 $n\times n$ 矩阵和 n 维列向量，试证方程组

$$\vec{y}'=A(x)\vec{y}(x)+\vec{f}(x)$$

存在且最多存在 $(n+1)$ 个线性无关解.

8. 试证非齐次线性微分方程组的迭加原理：设 $\vec{y}_1(x),\vec{y}_2(x)$ 分别为方程组

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}_1(x) \text{ 及 } \vec{y}' = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}_2(x)$$

的解，则 $\vec{y}_1(x)+\vec{y}_2(x)$是方程组

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}_1(x) + \vec{f}_2(x)$$

的解.

9. 设 $\vec{\varphi}(x)=\vec{u}(x)+i\vec{v}(x)$是方程组 $\vec{y}'=A(x)\vec{y}(x)$的复值解，其中 $A(x)$为实矩阵，试证 $\vec{\varphi}(x)$的实部 $\vec{u}(x)$和虚部 $\vec{v}(x)$及 $\vec{\varphi}(x)$的共轭 $\vec{u}(x)-i\vec{v}(x)$，均为此方程组的解.

10. 设 $\vec{\varphi}(x)=\vec{u}(x)+i\vec{v}(x)$为方程组 $\vec{y}'=A(x)\vec{y}(x)+\vec{f}(x)$的复值解，其中 $A(x)$，$\vec{f}(x)$均为实的. 试证 $\vec{\varphi}(x)$的实部 $\vec{u}(x)$和 $\vec{\varphi}(x)$的共轭 $\vec{u}(x)-i\vec{v}(x)$，也是方程组的解；$\vec{\varphi}(x)$的虚部 $\vec{v}(x)$是 $\vec{y}'=A(x)\vec{y}(x)$的解.

11. 设 $\vec{\varphi}(x)=\vec{u}(x)+i\vec{v}(x)$为方程组 $\vec{y}'=A(x)\vec{y}(x)+\vec{f}_1(x)+i\vec{f}_2(x)$的解，其中 $A(x)$和 $\vec{f}_1(x)$，$\vec{f}_2(x)$均为实的. 则 $\vec{u}(x)$、$\vec{v}(x)$分别为方程组

$$\vec{y}' = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}_1(x) \text{ 和 } \vec{y}' = A(x)\vec{y}(x) + \vec{f}_2(x)$$

的解.

（注：对 n 阶线性方程 $L(y)=f(x)$，也有类似习题7－11的结论）

12. 设 $A(x)$为区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上连续的 $n\times n$ 实矩阵，$\Phi(x)$为方程 $\vec{y}'=A(x)\vec{y}(x)$的基解矩阵，而 $\vec{y}=\vec{\varphi}(x)$为其一解，试证

(1) 对于方程 $\vec{z}'=-A^T(x)\vec{z}$的任一解 $\vec{z}=\vec{\psi}(x)$必有 $\vec{\psi}^T(x)\vec{\varphi}(x)\equiv$常数.

(2) $\Psi(x)$为方程 $\vec{z}'=-A^T(x)\vec{z}$的基解矩阵的充要条件是存在常数矩阵 C，值得 $\Psi^T(x)\Phi(x)\equiv C$.

13. 作出以方阵 $\begin{bmatrix} e^x\cos x & -\sin x \\ e^x\sin x & \cos x \end{bmatrix}$为基解矩阵的齐次线性方程组.

14. 设 $y(x)$ 和 $z(x)$ 是区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上的连续函数，试证：如果在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上有 $\frac{y(x)}{z(x)}\neq$ 常数，或 $\frac{z(x)}{y(x)}\neq$ 常数，则 $y(x)$ 和 $z(x)$ 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上线性无关.

15. 试验证 $y''-y=0$ 的基本解组为 e^x, e^{-x}，并求此方程适合初值条件 $y(0)=1, y'(0)=0$ 及 $y(0)=0, y'(0)=1$ 的基本解组(称为标准基本解组，即有 $W(0)=1$)并由此求出方程适合初值条件 $y(0)=y_0, y'(0)=y_0'$ 的解.

16. 试验证 $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=0$ 有基本解组 x, e^x，并求方程 $y''+\frac{x}{1-x}y'-\frac{1}{1-x}y=x-1$ 的通解.

17. 试求下列方程的通解

(1) $y^{(4)}-5y''+4y=0$

(2) $y^{(3)}-3ay''+3a^2y'-a^3y=0$

(3) $y^{(5)}-4y^{(3)}=0$

18. 试求下列方程的通解：

(1) $y''-a^2y=x+1$；

(2) $y''-6y'+8y=e^x+e^{2x}$；

(3) $y^{(4)}+y=x^3$；

(4) $y''+y=\sin x\sin 2x$；

(5) $y''-2y'+2y=xe^x\cos x$；

(6) $y''+y=\cos x-\frac{1}{\sin^3 x}$

19. 试求下列方程的通解

(1) 求 $x^2y''+xy'-y=0$ 的通解；

(2) 求 $x^2y''-xy'+2y=x\ln x$ 的通解.

20. 火车沿水平的道路运动，火车的重量为 p，机车的牵引力是 F，运动时的阻力 $W=a+bv$，其中 a、b 为常数，而 v 是火车速

度；s 是走过的路程，试确定火车的运动规律，设 $t=0$ 时 $s=0$，$v=0$.

21. 设 $\varphi(x)$ 是方程 $y''+k^2y=f(x)$ 的解. 其中 k 为常数，函数 $f(x)$ 于 $0\leqslant x<+\infty$ 上连续，试证

(1) 当 $k\neq0$ 时，可选择常数 c_1、c_2，使得

$$\varphi(x)=c_1\cos kx+c_2\sin kx+\frac{1}{k}\int_0^x \sin k(x-s)f(s)\mathrm{d}s$$
$$0\leqslant x<+\infty$$

(2) 当 $k=0$ 时方程的通解可表示为

$$y(x)=c_1+c_2x+\int_0^x (x-s)f(s)\mathrm{d}s \quad (0\leqslant x<+\infty)$$

其中 c_1、c_2 为任意常数.

22. 试求方程组 $\vec{y}'=A\vec{y}$ 的基解矩阵 $\exp Ax$.

(1) $A=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}$；

(2) $A=\begin{bmatrix}2 & -1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$；

(3) $A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & 0 & 1\end{bmatrix}$

23. 试求方程组 $\vec{y}'=A\vec{y}+\vec{f}(x)$ 的解 $\vec{\varphi}(x)$：

(1) $\vec{\varphi}(0)=(-1,1)^T \quad A=\begin{bmatrix}0 & 6\\ -1 & -5\end{bmatrix}$，$\vec{f}(x)=\begin{bmatrix}e^x\\ 1\end{bmatrix}$

(2) $\vec{\varphi}(0)=\vec{0} \quad A=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ -6 & -11 & -6\end{bmatrix}$，$\vec{f}(x)=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ e^x\end{bmatrix}$

(3) 把(2)化为相应的三阶线性方程的初值问题求解.

24. 试求$\begin{cases} y''+z''+y+z=\sin x \\ y'+2z'=e^{-x} \end{cases}$的通解

25. 求解初值问题

$$\begin{cases} y_1''-3y_1'+2y_1+y_2'+y_2=0 \\ y_1'+2y_1+y_2'-y_2=0 \\ y_1(0)=1,y_1'(0)=-1,y_2(0)=0 \end{cases}$$

26. 试证对于二阶齐次线性方程

$$y''+p(x)y'+q(x)y=0$$

其中 $p(x),q(x)$为连续函数:

(1) 若 $p(x)\equiv -xq(x)$,则 $y=x$ 是方程的解

(2) 若存在常数 m 使得 $m^2+mp(x)+q(x)\equiv 0$,则方程有解 $y=e^{mx}$.

27. 求解方程 $xy''-2(1+x)y'+(2+x)y=0 \quad (x\neq 0)$

28. 用幂级数方法求解下列方程:

(1) $y''+xy'+y=0, \quad y(0)=0,y'(0)=1$

(2) $2xy''+y'+xy=0$

(3) $4xy''+2y'+y=0$

29. 求解贝塞耳方程 $x^2y''+xy'+(x^2-\frac{1}{4})y=0$(提示:$\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$).

第五章　常微分方程的数值解法

§5.1　引言

在前几章中，我们已对一些典型的微分方程(如某些特殊的一阶非线性方程，线性方程(组)等)介绍了求解析解的方法. 但即使是线性方程要得到解析解也并非易事. 更不用说非线性方程. 也有一些方程虽然可以得到解的解析表达式，但是要计算它在给定点上的数值却很困难. 如初值问题

$$\begin{cases} y' = 1 - 2xy \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

我们很容易得到解析解为 $y = e^{-x^2}\left[1 + \int_0^x e^{t^2}dt\right]$，但要计算它在具体点上的数值，还得应用数值积分方法. 因此，除了少数微分方程，大多数的微分方程都用近似方法求解. 我们所熟知的逐次逼近法，级数解法就是近似解法，它们给出定解问题解的近似表达式，通常称为近似解析方法. 另一种近似方法就是数值解法，它给出定解问题的解在某些点的近似值. 利用电子计算机解微分方程，主要使用数值解法.

数值解法的最大优点是：对任意一个微分方程几乎都可以使用现有的各种数值解法求其解的近似值(当然，各种方法的工作量大小，精度高低是不同的). 不论是线性问题或是非线性问题；不论是初值问题还是边值问题，使用时基本上都不需要改变数值解法

技巧. 由于数值解法具有不需考虑方程类型，只需按工作量的大小，精度的要求来选用的特点使得它具有广泛的应用性，尤其是在电子计算机技术高度发达的当今时代更为显著.

本章主要研究常微分方程初值问题

$$
\begin{cases}
\dfrac{dy}{dx} = f(x,y) \qquad x_0 < x \leqslant b & (5.1)\\
y(x_0) = y_0 & (5.2)
\end{cases}
$$

的数值解法.

求初值问题(5.1)(5.2)的数值解就是要在区间$[x_0,b]$的一些离散的点$\{x_i\}$上，计算出解$y(x)$的近似值$y_1,y_2,\cdots,y_n$，其中 $x_i = x_{i-1}+h_i$ $(i=1,2,\cdots n)$，x_i 称为**节点**，h_i 称**步长**. 在多数情况下，考虑不变步长，即$h_i=h(i=1,2,\cdots n)$，则有 $x_i=x_0+ih(i=0,1,\cdots n)$其中 h 可取为$\dfrac{(b-x_0)}{n}$，n 为某正整数. 以下记问题(5.1)(5.2)的准确解$y(x)$在节点x_m的值为$y(x_m)$，而记$y(x_m)$的近似值为y_m，它是某一数值方法的计算结果. 又记$f_m=f(x_m,y_m)$，请注意它和$f(x_m,y(x_m))$是不同的，后者等于$\dfrac{dy(x_m)}{dx}$.

本章介绍的数值方法为差分方法(也称逐步方法). 通常应先把初值问题(5.1)(5.2)化为在给定节点上的差分方程初值问题，称这个过程为离散化. 离散化的主要途径有：化导数为差商的方法；台劳(Taylor)展开法；数值积分法. 这些方法给了利用解$y(x)$在前面若干节点上的近似值，以计算节点x_{m+1}上解的近似值y_{m+1}的规则.

数值解法有单步法和多步法之分. **单步法**在计算y_{m+1}时只利用y_m，而**多步法**计算y_{m+1}时不仅要利用y_m还要利用y_{m-1}，y_{m-2}，$\cdots$一般的 k 步法要用到$y_m,y_{m-1},\cdots,y_{m-k+1}$.

单步法和多步法都有**显式方法**和**隐式方法**之分. 单步显式方

法计算公式可以写成

$$y_{m+1} = y_m + h\Phi(x_m, y_m, h) \tag{5.3}$$

通常把(5.3)式称为**显式单步方法**或称显式单步方法(5.3).(5.3)的右边不包含 y_{m+1}.**隐式的单步方法**计算公式一般写成

$$y_{m+1} = y_m + h\Phi(x_m, y_m, y_{m+1}, h) \tag{5.4}$$

右边显含 y_{m+1},所以每步都要解 y_{m+1}的一个方程.(5.3),(5.4)中的 Φ 是给定的函数.对多步方法来说,显式和隐式方法的意义与此类似.

在本章各节的讨论中,我们都假定方程(5.1)右边函数 $f(x,y)$在区域 $G:\{x_0 \leqslant x \leqslant b, |y| < +\infty\}$上连续,且关于 y 满足 Lip 条件,即存在常数 L,使得对所有的$(x,y_1),(x,y_2) \in G$,恒成立不等式

$$|f(x,y_1) - f(x,y_2)| \leqslant L|y_1 - y_2| \tag{5.5}$$

这些条件保证了初值问题(5.1)(5.2)解的存在唯一性以及解对初值 x_0, y_0,函数 $f(x,y)$的连续依赖关系,即定解问题(5.1),(5.2)具有适定性.

§ 5.2 欧拉(Euler)方法

欧拉方法是初值问题(5.1)(5.2)最简单的数值解法,但实际上并不常用,因为它的精度较差.但由于它有明显的几何意义,有利于初学者直观了解数值解是怎样逼近准确解的,特别是它较其他方法分析起来要简便,有助于了解数值解法的实质,因此本节加以介绍.有些常微分方程教材,也利用它来论证解的存在性.

5.2.1 欧拉方法和它几何意义

解初值问题(5.1)(5.2)的显式欧拉方法计算公式是:

$$\begin{cases} y_0 = y(x_0) \\ y_{m+1} = y_m + hf(x_m, y_m) \end{cases} \tag{5.6}$$

这是一个递推公式，可由以下几种途径得到.

(i) 如果用向前差商来近似地代替在 x_m 处的导数 $y'(x_m)$，

$$\frac{y(x_{m+1}) - y(x_m)}{h} \approx y'(x_m) = f(x_m, y(x_m))$$

即
$$y(x_{m+1}) \approx y(x_m) + hf(x_m, y(x_m))$$

以 y_i 代替 $y(x_i)(i=1,2,\cdots)$代入上式，便得(5.6)，这就是化导数为差商的方法.

(ii) 假设在 x_m 附近 $y(x)$可以用台劳展开：

$$y(x_{m+1}) = y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2}y''(x_m) + \cdots$$

略去比 h 高阶的项，并分别用 y_m，y_{m+1}代替 $y(x_m)$，$y(x_{m+1})$也可得(5.6)，这就是台劳展开法.

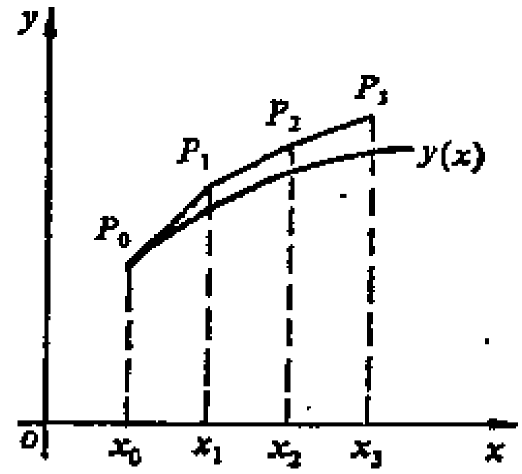
(iii) 由于在积分区间$[x_m, x_{m+1}]$上微分方程$\frac{dy}{dx}=f(x, y(x))$等价于积分方程

$$y(x_{m+1}) - y(x_m) = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(\tau, y(\tau))d\tau \tag{5.7}$$

把右边的积分式用左矩形公式 $hf(x_m, y(x_m))$代替，再分别用 y_{m+1}，y_m 代替 $y(x_{m+1})$，$y(x_m)$也可以得到(5.6). 这就是数值积分的方法.

显式欧拉方法有很明显的几何意义. 初值问题(5.1)(5.2)的解 $y(x)$是 xy 平面上过 $p_0(x_0, y_0)$点的一条曲线. 从 p_0 点出发，以 $f(x_0, y_0)$为斜率作一直线与直线 $x=x_1$ 交于点 $p_1(x_1, y_1)$，显然 y_1 =

$y_0+hf(x_0,y_0)$，再从 p_1 出发以 $f(x_1,y_1)$ 为斜率作一直线段与直线 $x=x_2$ 交于点 $p_2(x_2,y_2)$，其余类推. 这样就得到 p_0 为起点的一条折线 l_0，它可以作为积分曲线 $y(x)$ 的一条近似曲线. 类似地，分别以 $\frac{h}{2},\frac{h}{2^2},\cdots\frac{h}{2^k},\cdots$ 为步长，按上述的方法进行就可得以 p_0 点为起点的折线族 $\{l_k\}$，如(图 5.1).



(图 5.1)

欧拉方法便是以折线序列 $\{l_k\}$ 来逼近问题(5.1)(5.2)准确解的方法，所以也称为折线法.

欧拉方法(5.6)是显式方法. 但如果在(5.7)式右边积分式用右矩形公式近似，可得问题(5.1)(5.25)另一种数值方法——隐式欧拉方法：

$$y_{m+1}=y_m+hf(x_{m+1},y_{m+1}) \tag{5.8}$$

它的右边包含 y_{m+1}. 为了得到更精确的方法，还可以用梯形公式近似(5.7)右边积分式：

$$\int_{x_m}^{x_{m+1}} f(\tau,y(\tau))d\tau \approx \frac{h}{2}[f(x_m,y(x_m))+f(x_{m+1},y(x_{m+1}))]$$

再分别用 y_m,y_{m+1} 代替 $y(x_m),y(x_{m+1})$，就得到又一种数值方法——梯形方法：

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{2}[f(x_m,y_m)+f(x_{m+1},y_{m+1})] \tag{5.9}$$

它也是隐式方法.

隐式方法(5.8)及(5.9)的计算技巧将在后面介绍. 而如果用

$y_m + hf(x_m, y_m)$代替(5.9)右边的 y_{m+1}，又可以得到一个显式方法.我们称它为改进的欧拉方法：

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_m + hf(x_m, y_m))] \tag{5.10}$$

把上面各种欧拉方法的计算公式和标准形式(5.3)和(5.4)对照，有

显式欧拉方法：

$$\Phi(x_m, y_m, h) = f(x_m, y_m)$$

改进的欧拉方法：

$$\Phi(x_m, y_m, h) = \frac{1}{2}[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_m + hf(x_m, y_m))]$$

隐式欧拉方法：

$$\Phi(x_m, y_m, y_{m+1}, h) = f(x_{m+1}, y_{m-1})$$

梯形方法：

$$\Phi(x_m, y_m, y_{m+1}, h) = \frac{1}{2}[f(x_m, y_m) + f(x_{m+1}, y_{m+1})]$$

5.2.2 数值方法的误差，欧拉方法离散误差的估计

求问题(5.1),(5.2)的数值方法的误差有两种来源：一个来自用数值方法的解 y_m 近似准确解 $y(x_m)$；另一个来自计算工具的有限精确度，在计算过程中不可避免会产生舍入误差. 舍入误差的产生受诸多因素的影响，比较复杂，但还是可以设法估计出它的界. 例如，可以把舍入误差当作随机变量，采用统计方法，可得较好的估计. P. Henrici 对此作了系统的研究，具体可参阅他的专著：常微分方程离散变量方法(包雪松等译.科学出版社，1985). 本章主要讨论前一种误差.

定义 2.1　称

$$e_m = y(x_m) - y_m$$

为某种数值方法在 x_m 点的**整体截断误差**，简称**截断误差**，亦称为**离散误差**. 它是由于微分方程的离散化所产生的. e_m 不仅与第 m 步的计算有关，还与自第 1 步至第 $m-1$ 步的计算都有关，所以称这种误差是整体的.

为了简化对误差的分析，我们着重分析计算中的某一步，对一般的单步显式方法(5.3)，即

$$y_{m+1} = y_m + h\Phi(x_m, y_m, h)$$

定义 2.2 设 $y(x)$ 为问题(5.1)(5.2)的准确解，称

$$R_{m+1} = y(x_{m+1}) - y(x_m) - h\Phi(x_m, y(x_m), h) \quad (5.11)$$

为显式单步法(5.3)在 x_{m+1} 的**局部截断误差**. 这个定义来自这样的事实：如果 $y_m = y(x_m)$，即设第 m 步及以前各步设有误差，则由(5.3)式计算下一步所得的 y_{m+1} 与准确解 $y(x_{m+1})$ 之差为

$$\begin{aligned} R_{m+1} &= y(x_{m+1}) - y_{m+1} \\ &= y(x_{m+1}) - [y_m + h\Phi(x_m, y_m, h)] \\ &= y(x_{m+1}) - y(x_m) - h\Phi(x_m, y(x_m), h) \end{aligned}$$

即在此假设下，$R_{m+1} = y(x_{m+1}) - y_{m+1}$，这就是定义 2.2 中称 R_{m+1} 为"局部"的原因，整体截断误差 e_m 和局部截断误差 R_m 的意义显然不同.

定义 2.3 设 $y(x)$ 为初值问题(5.1)(5.2)的准确解，(5.3)为一种显式单步法，则满足

$$y(x+h) - y(x) - h\Phi(x, y(x), h) = O(h^{p+1}) \quad (5.12)$$

的整数 P 称为方法(5.3)的阶.

由定义 2.2 和 2.3 可知如果 (5.3) 是 P 阶方法，则有 $R_m = O(h^{p+1})$，即方法是 P 阶时，局部截断误差是 h 的 $p+1$ 次，反之亦然. 因此我们往往主要关心 R_m 按 h 展开式的第一项.

定义 2.4 如果(5.3)是一种 P 阶方法，其局部截断误差可写成

$$R_{m+1}=\Psi(x_m,y(x_m))h^{p+1}+0(h^{p+2}) \qquad (5.13)$$

则 $\Psi(x_m,y(x_m))h^{p+1}$称为方法((5.3)的**局部截断误差主项**,简称**误差主项**.

下面讨论欧拉方法的截断误差.假设(5.1)右边函数 $f(x,y)$ 在 $G=\{x_0\leqslant x\leqslant b,|y|<+\infty\}$上具有有界连续导数.因而对初值问题(5.1)(5.2)的解 $y(x)$,必存在两个常数 M 和 L,使得

$$|y''(x)|\leqslant\left|\frac{df(x,y)}{dx}\right|\leqslant M \qquad (5.14)$$

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|=\left|\frac{\partial f(x,\eta)}{\partial y}\right||y_1-y_2|\leqslant L|y_1-y_2| \qquad (5.15)$$

成立,其中 η 是介于 y_1,y_2 间的一个量,$(x,y_1),(x,y_2)$为 D 中的任意两点.

现设 $y(x)$为初值问题(5.1)(5.2)的准确解,则有台劳展开式

$$y(x+h)=y(x)+hy'(x)+\frac{h^2}{2}y''(x)+\frac{h^3}{3!}y'''(\xi)$$
$$(x<\xi<x+h). \qquad (5.16)$$

今后为方便起见,分别以 $Df(x,y(x)),\cdots,D^kf(x,y(x))$表示 $\frac{df(x,y(x))}{dx},\cdots,\frac{d^kf(x,y(x))}{dx^k}$.对于欧拉方法(5.6),$\Phi(x,y(x),h)=f(x,y)$.当 $y(x)$为方程(5.1)的解时,$y'(x)=f(x,y(x))$,$y''=Df(x,y(x))$,$y'''=D^2f(x,y(x))$,故有

$$y(x+h)-y(x)-h\Phi(x,y(x),h)=$$
$$=\frac{h^2}{2}Df(x,y(x))+\frac{h^3}{3!}D^2f(\xi,y(\xi))=0(h^2) \qquad (5.17)$$

依定义,方法(5.6)是一阶的,且其局部截断误差为

$$R_{m+1}=\frac{h^2}{2}Df(x_m,y(x_m))+0(h^3) \qquad (5.18)$$

即方法(5.6)的 R_{m+1} 与 h^2 同阶，且误差主项为 $\frac{h^2}{2}Df(x_m,y(x_m))$，其估计为：

$$|R_{m+1}| \leqslant \frac{h^2}{2}M \tag{5.19}$$

对于改进的欧拉方法(5.10)，$\Phi(x,y,h)=\frac{1}{2}[f(x,y)+f(x+h,y+hf(x,y))]$. 容易得出 $R_{m+1}=0(h^3)$，因而方法是 2 阶的.

现估计欧拉方法(5.6)的整体截断误差. 注意到当令 $x=x_m$ 时，(5.17)也可表示成

$$y(x_m+h)=y(x_m)+hf(x_m,y(x_m))+R_{m+1} \tag{5.20}$$

由(5.20)减(5.6)得

$$\begin{aligned} y(x_{m+1})-y_{m+1} &= y(x_m)-y_m \\ &\quad + h[f(x_m,y(x_m))-f(x_m,y_m)]+R_{m+1} \end{aligned}$$

或
$$e_{m+1}=e_m+h[f(x_m,y_m)-f(x_m,y(x_m)]+R_{m+1}$$

由(5.5)和(5.19)有

$$\begin{aligned} |e_{m+1}| &\leqslant |e_m|+hL|e_m|+\frac{h^2}{2}M \\ &= (1+hL)|e_m|+\frac{h^2}{2}M \end{aligned} \tag{5.21}$$

反复利用(5.21)可得

$$\begin{aligned} |e_{m+1}| &\leqslant (1+hL)^{m+1}|e_0|+\frac{Mh}{2L}\sum_{i=0}^{m}(1+hL)^i \\ &= (1+hL)^{m+1}|e_0|+\frac{Mh}{2L}[(1+hL)^{m+1}-1] \\ &\qquad m=0,1,2\cdots,n-1. \end{aligned} \tag{5.22}$$

其中 e_0 为初始值误差. 注意到 $(1+hL)<e^{hL}$，于是对 $x_{m+1}=x_0+(m+1)h\leqslant b$，有

$$|e_{m+1}| \leqslant e^{(m+1)hL}|e_0|+\frac{Mh}{2L}[e^{(m+1)hL}-1]$$

$$\leqslant e^{L(b-x_0)}|e_0| + \frac{Mh}{2L}[e^{L(b-x_0)} - 1] \tag{5.23}$$

特别当 $e_0=0$,即没有初始值误差时,(5.23)化为

$$|e_{m+1}| \leqslant \frac{M}{2L}[e^{L(b-x_0)} - 1]h \tag{5.24}$$

因此欧拉方法(5.6)的整体截断误差与 h 同阶. 比较(5.19)(5.24)可看出局部截断误差比整体截断误差高一阶. 对其他的数值方法,其局部截断误差与整体截断误差间也保持着类似的关系. 它们都与方程及 h 有关. h 的次数越高,精度就越高.

由(5.24)不难看出,用 y_m 来近似表示 $y(x_m)$,所产生的误差,最多是一个固定常数$\frac{M}{2L}[e^{L(b-x_0)}-1]$的 h 倍. 作为一种粗略的估计,当把 h 减少$\frac{1}{2}$,根据(5.24),欧拉方法(5.6)的整体截断误差将减少$\frac{1}{2}$,这与实际计算的结果基本相符.

例1 对于初值问题:

$$\frac{dy}{dx} = y + x \quad (0 < x \leqslant 1), \quad y(0) = 0 \tag{5.25}$$

(i) 求问题(5.25)的准确解;

(ii) 写出解初值问题(5.25)欧拉方法(5.6)的具体计算公式;

(iii) 取 $h=0.1$,并令 $e_0=0$,利用(5.22)估计误差 e_m 的界,并与 $e_m=y(x_m)-y_m$ 作比较;

(iv) 利用(5.24)确定 h,使整体截断误差不超过 10^{-3}.

解

(i) 初值问题(5.25)的解为:$y(x)=e^x-x-1$

(ii) $y_0=0, y_{m+1}=y_m+hf(x_m, y_m)$

$$=y_m+h(y_m+x_m)=(1+h)y_m+hx_m \quad m=0,1,\cdots n-$$

1.

(iii) $M=\max\limits_{[0,1]}|Df(x,y(x))|=\max\limits_{[0,1]}|e^x|=e$

$$L=\max_{[0,1]}\left|\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right|=1, h=0.1$$

由估计式(5.22)有

$$|e_m| \leqslant \frac{0.1\times e}{2}[(1+0.1)^m-1] \qquad (5.26)$$

由此可计算出在 x_m 点上的估计 $\max|e_m|$ 及 $e_m=y(x_m)-y_m$.

计算结果填入表 5.1

表 5.1

m	x_m	$y(x_m)$	y_m	$max\|e_m\|$	$e_m=y(x_m)-y_m$
0	0.0	0	0		
1	0.1	0.0052	0	0.0055	0.0052
2	0.2	0.0214	0.0010	0.0128	0.0114
3	0.3	0.0497	0.0211	0.0222	0.0189
4	0.4	0.0918	0.0641	0.0349	0.0277
5	0.5	0.1487	0.1105	0.0502	0.0382
6	0.6	0.2221	0.1716	0.0704	0.0505
7	0.7	0.3138	0.2487	0.0960	0.0651
8	0.8	0.4255	0.3436	0.1226	0.0819
9	0.9	0.5596	0.4479	0.1678	0.1017
10	1.0	0.7183	0.5941	0.2175	0.1246

(iv) 由(5.24),步长 h 应满足

$$|e_m| \leqslant \frac{e}{2}(e-1)h < 10^{-3}$$

所以步长 h 应小于 $2\times10^{-4}\times(e^2-e)^{-1}$. 从而 n 应大于 $10^4(e^2-e)\approx2335$. 因此，为了确保 $y(1)$的近似值精确到 10^{-3}. 我们必须迭代 2335 次.

从表中 5.1 可以看出，用估计式(5.22)所得的截断误差的界要比实际的截断误差大. 不过利用(5.22)还是可以帮助我们选取能保证精度的步长 h.

5.2.3　收敛性与稳定性

为了确认数值方法是否适用，首先必须回答：当步长 h 取得充分小时，所得的数值解能否足够地接近准确解，这就是所谓方法的收敛性. 其次，由于初始值大都是通过测量得到的，难免有误差. 因此还必须考虑初始值误差的影响在后面的计算中会不会无限制地扩大，即初值的误差能否在计算中得到控制. 这就是方法的稳定性问题.

定义 2.5　对于所有在 G 上连续，且关于 y 满足 Lip 条件的 $f(x,y)$ 如果相应的初值问题(5.1)(5.2)的一个单步方法

$$y_{m+1}=y_m+h\Phi(x_m,y_m,h) \tag{5.3}$$

产生的近似解，对于任一固定的 $x\in[x_0,b]$，$x=x_0+nh$，均有

$$\lim_{h\to0}y_n=y(x)$$

则称(5.3)是收敛的.

定义 2.6　如果存在常数 C 与 h_0. 使对任意初始值 y_0 及 z_0，由(5.3)给出的相应数值解 y_m 和 z_m，当 $0<h\leqslant h_0$. $(mh\leqslant b-x_0)$，满足关系式

$$|y_m-z_m|\leqslant c|y_0-z_0| \tag{5.27}$$

则称单步方法(5.3)是稳定的.

上述稳定性的意义是指对任何的 $0<h\leqslant h_0$，由单步方法(5.3)给出的解 y_m(不考虑舍入误差)连续地依赖于初值 y_0.

定理 1　如果 $f(x,y)$ 及其导数在 G 内连续且有界，并设初始

值无误差，即 $e_0=0$，则求解(5.1)(5.2)的欧拉方法(5.6)是收敛的.

定理 1 的证明不难由(5.24)式得到.

定理 2 在定理 1 关于 $f(x,y)$ 的条件下，欧拉方法(5.6)是稳定的.

证 考虑

$$y_{m+1}=y_m+hf(x_m,y_m) \tag{5.28}$$

$$z_{m+1}=z_m+hf(x_m,z_m) \tag{5.29}$$

令 $\varepsilon_m=y_m-z_m$，(5.28)减(5.29)得

$$\begin{aligned}|\varepsilon_{m+1}| &= |y_m-z_m+hf(x_m,y_m)-hf(x_m,z_m)|\\ &\leqslant |y_m-z_m|+h|f(x_m,y_m)-f(x_m,z_m)|\\ &\leqslant |y_m-z_m|+hL|y_m-z_m|=(1+hL)|\varepsilon_m| \end{aligned} \tag{5.30}$$

反复迭代并利用(5.30)式得

$$|\varepsilon_{m+1}|\leqslant(1+hL)^{m+1}|\varepsilon_0|$$

当 $mh\leqslant b-x_0$ 时，有 $(1+hL)^m<e^{mhL}<e^{L(b-x_0)}$，因此

$$|\varepsilon_{m+1}|\leqslant e^{L(b-x_0)}|e_0| \tag{5.31}$$

令 $C=e^{L(b-x_0)}$ 即得(5.27)，依定义，欧拉方法(5.6)是稳定的. 证毕.

欧拉方法(5.6)的优点是简单易行，每一步只要计算一个函数值 $f(x_m,y_m)$，但它是一阶方法，精度较低. 欧拉方法(5.6)比较适用于方程的解或导数具有间断的情况. 由例 1(iii)可以看出，当取 $h=0.1$ 时，其误差超过 0.1. 为了提高精度必须缩小步长，但步长的缩小又会带来工作量的很大增加；由(iv)看出为使误差小于 10^{-3}，步长 h 应小于 $2\times10^{-3}(e^2-e)^{-1}$，计算在 $x=1$ 处的数值解需迭代 2335 次，计算量很大，效益很差. 更为严重的是繁多的计算次数引起的舍入误差积累足以使计算失去意义. 因此为了实际的需要，必须寻找较高精度的数值方法.

通过前面的讨论，我们了解到初值问题(5.1)(5.2)数值解法的基础研究内容应包括：数值公式的构造；误差估计；数值方法的收敛性和稳定性.

§5.3 高阶单步法

我们称 $p>1$ 的单步方法(5.3)为高阶单步方法.本节只介绍显式的台劳展开方法和龙格—库塔(Runge—Kutta)方法.

5.3.1 台劳展开方法

如果 $y(x)$ 是问题(5.1)(5.2)的解，那么其高阶导数 $y^{(k)}(x)$ 可由函数 $f(x,y)$ 确定：

$$
\begin{aligned}
&y'(x) = f(x,y(x)),\\
&y''(x) = Df(x,y(x)) = f_x(x,y) + f_y(x,y)f(x,y)\\
&y'''(x) = D^2f(x,y(x)) = f_{xx} + 2f\,f_{xy} + f^2f_{yy} + f_xf_y + ff_y^2\\
&\qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots \quad \cdots
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

由函数 $y(x)$ 的台劳展开有

$$
\begin{aligned}
y(x+h) &= y(x) + hy'(x) + \frac{h^2}{2}y''(x) + \cdots\\
&\quad + \frac{h^p}{p!}y^{(p)}(x) + \frac{h^{p+1}}{(p+1)!}y^{(p+1)}(x) + 0(h^{p+2})
\end{aligned}
\tag{5.33}
$$

若令

$$
\begin{aligned}
\Phi(x,y,h) &= f(x,y) + \frac{h}{2}Df(x,y) + \cdots + \frac{h^{p-1}}{p!}D^{p-1}f(x,y)\\
&= \sum_{i=1}^{p}\frac{h^{i-1}}{i!}D^{i-1}f(x,y)
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

则由(5.33)有

$$
y(x+h) - y(x) - h\Phi(x,y,h)
$$

$$=\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}D^p f(x,y)+0(h^{p+2}) \tag{5.35}$$

在(5.33)中令 $x=x_m$，并注意到(5.34)，可得

$$y(x_{m+1})=y(x_m)+h\Phi(x_m,y(x_m),h)+r_{m+1} \tag{5.36}$$

(5.36)中的 r_{m+1} 为台劳展开式的余项：

$$r_{m+1}=\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}D^p f(x_m,y(x_m))+0(h^{p+2})$$

在(5.36)中舍去余项 r_{m+1} 并分别以 y_m, y_{m+1} 代替 $y(x_m), y(x_{m+1})$ 得

$$\begin{aligned} y_{m+1}&=y_m+h\Phi(x_m,y_m,h)\\ &=y_m+h\sum_{i=1}^{p}\frac{h^{i-1}}{i!}D^{i-1}f(x_m,y_m), \qquad m=0,1,2,\cdots,n \end{aligned} \tag{5.37}$$

利用初始条件(5.2)和公式(5.37)，由 $y_0=y(x_0)$ 可得到 $y_1, y_2, \cdots, y_n$. 称(5.37)为**台劳展开方法**.

根据局部截断误差的定义(5.11)，可得台劳展开方法的局部截断误差

$$\begin{aligned} R_{m+1}=r_{m+1}&=\frac{h^{p+1}}{(p+1)!}D^p f(x_m,y(x_m))\\ &+0(h^{p+2})=0(h^{p+1}) \end{aligned} \tag{5.38}$$

由(5.12)可知方法(5.37)是 p 阶的. 当 $p=1$ 时，(5.37)为欧拉方法. 台劳展开方法的精度随着 p 的增大而增大，可按需要选取适当的 p. 常用的是 $p\leqslant 3$ 的台劳展开法. 对固定的步长 h，可以预料用 $p>1$ 的台劳展开方法计算出解的近似值 y_m 要较之欧拉方法(5.6)所得的近似值精确. 这是台劳展开方法的优点.

但是，不论是用手算或是用计算机计算，台劳展开方法都不是好的实用方法，因为它需求出各节点的各阶导数值，既麻烦又复

杂，特别对较大的 p，工作量很大(除非函数 $f(x,y)$特别简单). 不过，这种方法具有较高的精度，且不像多步法哪样，在计算时需要附加初值.

5.3.2 **龙格—库塔(Runge—Kutta)方法**

为了克服台劳展开方法(5.37)不便计算高阶导数的缺点，龙格和库塔在 1900 年前后间接地利用函数的台劳展开公式提出一种新的计算方法，称为龙格—库塔方法，简称 $R-K$ 方法，它的基本思路是：用若干点(不一定是节点)上函数值 f 的线性组合代替 f 在点上各阶导数值，然后按台劳公式展开，确定其组合的系数，以提高方法的精度. 这样做既可避免计算 f 的各阶导数，又能保证精度的要求. 具体做法如下：令

$$\Phi(x,y,h) = \sum_{i=1}^{N} c_i k_i \tag{5.39}$$

其中 c_i 为待定的"权因子"，且 $\sum\limits_{i=1}^{N} c_i = 1$，

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x,y) \\ k_i &= f(x + a_i h, y + h\sum_{l=1}^{i-1} b_{il} k_l) \\ a_i &= \sum_{l=1}^{i-1} b_{il} \qquad i = 2,\cdots,N \end{aligned} \tag{5.40}$$

当 $\Phi(x,y,h)$由(5.39)，(5.40)定义时，称

$$y_{m+1} = y_m + h\Phi(x_m,y_m,h) = y_m + h\sum_{i=1}^{N} c_i k_i \tag{5.41}$$

为 N 级的 $R-K$ 方法. 当 $N=1$ 时 $\Phi(x_m,y_m,h)=f(x_m,y_m)$，即为欧拉方法(5.6). 在(5.40)中出现的参数 a_i,b_{il},c_i 均是待定的. 它为提高数值方法的阶数创造了条件.

$R-K$ 方法的参数是这样确定的：设 $y(x)$为问题(5.1)(5.2)的解. 将(5.40)中的 k_i 在$(x_m,y(x_m))$处按二元函数台劳公式展

开，代入(5.39)，再将 $y(x_m+h)$ 在 x_m 处展成 h 的台劳级数. 令 $h\Phi(x_m,y(x_m),h)$ 与 $y(x_m+h)-y(x_m)$ 的 h 同次幂 $h^i(i\leqslant p)$ 的系数相等，就得到确定 a_i,b_{il},c_i 的方程组，从而得到 p 阶 $R-K$ 方法的计算公式.

现以 $N=2$ 为例推导二级的 $R-K$ 方法. 设 $y(x)$ 为(5.1)(5.2)的解.

$$\begin{aligned} y(x_m+h) &= y(x_m)+hy'(x_m)+\frac{h^2}{2}y''(x_m)+0(h^3) \\ &= y(x_m)+hf(x_m,y(x_m))+\frac{h^2}{2}[f_x(x_m,y(x_m)) \\ &\quad +f(x_m,y(x_m))\cdot f_y(x_m,y(x_m))]+0(h^3) \end{aligned} \tag{5.42}$$

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_m,y(x_m)) \\ k_2 &= f(x_m+a_2h,y(x_m)+a_2hk_1) \\ &= f(x_m,y(x_m))+a_2hf_x(x_m,y(x_m))+a_2hk_1f_y(x_m,y(x_m))+0(h^2) \\ &= f(x_m,y(x_m))+a_2hf_x(x_m,y(x_m)) \\ &\quad +a_2hf(x_m,y(x_m))f_y(x_m,y)x_m))+0(h^2) \end{aligned} \tag{5.43}$$

把 k_1,k_2 代入(5.39)有

$$\begin{aligned} \Phi(x_m,y(x_m),h) &= c_1k_1+c_2k_2=c_1f(x_m,y(x_m))+c_2[f(x_m,y(x_m)) \\ &\quad +a_2hf_x(x_m,y(x_m))+a_2hf(x_m,y(x_m))f_y(x_m,y(x_m))]+0(h^2) \end{aligned}$$

利用(5.42)，(5.43)，比较 $y(x_m+h)-y(x_m)$ 与 $h\Phi(x_m,y(x_m),h)$，并令 h,h^2 项的系数相等，则得

$$c_1+c_2=1,\quad a_2c_2=\frac{1}{2} \tag{5.44}$$

上式有三个未知数，但只有两个方程，视其中一个未知数为参数，可得一个含参数的解族. 这样，我们得到对应的二级方法就有无限多个. 例如视 c_1 为参数，就有

$$c_2=1-c_1,\qquad a_2=\frac{1}{2(1-c_1)}$$

若取 $c_1=0,\frac{1}{4},\frac{1}{2}$. 分别可得三个典型的二级 $R-K$ 方法：

$$y_{m+1}=y_m+hf\left(x_m+\frac{h}{2},y_m+\frac{h}{2}f(x_m,y_m)\right) \tag{5.45}$$

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{4}f(x_m,y_m)+\frac{3h}{4}f\left(x_m+\frac{2}{3}h,y_m+\frac{2}{3}hf(x_m,y_m)\right) \tag{5.46}$$

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{2}f(x_m,y_m)+\frac{h}{2}f(x_m+h,y_m+hf(x_m,y_m)) \tag{5.47}$$

(5.45)称为**中点法**(**亦称修正的欧拉方法**)；(5.46)称为**二级 Heun 方法**，(5.47)**就是改进的欧拉方法**(5.10).

令 $\Phi(x,y,h)=c_1k_1+c_2k_2+c_3k_3$ 其中

$$k_1=f(x,y)$$

$$k_2=f(x+a_2h,y+a_2hk_1)$$

$$k_3=f(x+a_3h,y+(a_3-b_{32})hk_1+b_{32}hk_2)$$

仿照上述的做法可以推导三级的 $R-K$ 方法. 其未知量 c_1、c_2、c_3、a_2、a_3 及 b_{32} 由四个方程确定，因此三级的 $R-K$ 方法也有无限多个. 这里我们列举二个常用的方法：

(i) 三级 Heun 方法：

$$\begin{cases} y_{m+1}=y_m+\dfrac{h}{4}(k_1+3k_3) \\ k_1=f(x_m,y_m) \\ k_2=f\left(x_m+\dfrac{h}{3},y_m+\dfrac{h}{3}k_1\right) \\ k_3=f\left(x_m+\dfrac{2}{3}h,y_m+\dfrac{2}{3}hk_2\right) \end{cases} \tag{5.48}$$

(ii) 三级的库塔(kutta)方法：

$$\begin{cases} y_{m+1} = y_m + \dfrac{h}{6}(k_1 + 4k_2 + k_3) \\ k_1 = f(x_m, y_m) \\ k_2 = f\left(x_m + \dfrac{h}{2}, y_m + \dfrac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f(x_m + h, y_m - hk_1 + 2hk_2) \end{cases} \tag{5.49}$$

下面是诸多的四级 $R-K$ 方法中两个主要的方法：

$$(\text{I}) \quad \begin{cases} y_{m+1} = y_m + \dfrac{h}{8}(k_1 + 3k_2 + 3k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_m, y_m) \\ k_2 = f\left(x_m + \dfrac{h}{3}, y_m + \dfrac{h}{3}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_m + \dfrac{2}{3}h, y_m - \dfrac{h}{3}k_1 + hk_2\right) \\ k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_1 - hk_2 + hk_3) \end{cases} \tag{5.50}$$

$$(\text{II}) \quad \begin{cases} y_{m+1} = y_m + \dfrac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \\ k_1 = f(x_m, y_m) \\ k_2 = f\left(x_m + \dfrac{h}{2}, y_m + \dfrac{h}{2}k_1\right) \\ k_3 = f\left(x_m + \dfrac{h}{2}, y_m + \dfrac{h}{2}k_2\right) \\ k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3) \end{cases} \tag{5.51}$$

(5.51)是四级 $R-K$ 方法中应用最广泛又最常用的方法，称为经典的 $R-K$ 方法. 当 $f(x,y)$ 与 y 无关时，(5.51)恰为定积分近似计算中的辛普森(Simpson)公式，所以(5.51)可视为辛普森公式的推广.

例 2　用欧拉方法(5.6)，改进的欧拉方法(5.10)及经典的 $R-K$ 方法(5.51)求解初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = -y + x + 1 \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

在 $x=0.5$ 处的数值解，取 $h=0.1$

解　数值方法(5.6)、(5.10)、(5.51)的计算公式分别为：

$$y_{m+1} = y_m + hf_m = 0.9y_m + 0.1x_m + 0.1$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}[f_m + f(x_m + h, y_m + hf_m)]$$

$$= 0.905y_m + 0.095x_m + 0.1$$

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)$$

$$k_1 = f_m = -y_m + x_m + 1$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1) = -0.95y_m + 0.95x_m + 1$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2) = -0.9525y_m + 0.9525x_m + 1$$

$$k_4 = f(x_m + h, y_m + hk_3) = -0.90475y_m + 0.90475x_m + 1$$

用三种方法所得的计算结果及与准确解 $y(x)=x+e^{-x}$ 相比较如表(5.2)所示

表 5.2

x_m	$y(x_m)$	方法(5.6)	
		y_m	$\lvert y(x_m)-y_m\rvert$
0	1.000000	1.000000	0
0.1	1.004837	1.000000	4.873×10^{-3}
0.2	1.018731	1.010000	8.731×10^{-3}
0.3	1.040818	1.029000	1.182×10^{-2}
0.4	1.070320	1.056100	1.422×10^{-2}
0.5	1.106531	1.090490	1.604×10^{-2}

方法(5.10)			方法(5.51)	
x_m	y_m	$\lvert y(x_m)-y_m\rvert$	y_m	$\lvert y(x_m)-y_m\rvert$
0	1.000000	0	1.0000000	0
0.1	1.005000	1.6×10^{-4}	1.0048375	8.2×10^{-8}
0.2	1.019025	2.9×10^{-4}	1.0187309	1.5×10^{-7}
0.3	1.041218	4.0×10^{-4}	1.0408184	2.0×10^{-7}
0.4	1.070802	4.8×10^{-4}	1.0703203	2.4×10^{-7}
0.5	1.107076	5.5×10^{-4}	1.1065309	2.7×10^{-7}

由上面的计算结果可以看出，经典的 $R-K$ 方法计算结果要比欧拉方法及改进的欧拉方法都好，但经典的 $R-K$ 方法每步需计算四个函数值，而方法(5.10)和方法(5.6)只需分别计算二个和一个函数值，工作量较小. 为了提高方法(5.6)和方法(5.10)的精度，应当缩短步长 h，但计算量就要增加. 实践表明，在计算量大致相同的情况下，经典的 $R-K$ 方法的计算结果比另两种好. 例如初值问题 $y'=-y+1, y(0)=0$ 分别用欧拉方法(5.6)($h=0.025$)，改进的欧拉方法(5.10)($h=0.05$)及经典的 $R-K$ 方法(5.51)(h

$=0.1$)计算在 $x=0.5$ 的数值解．所得的结果分别为 0.397312、0.393337 和 0.39346909，而 $y(0.5)=0.39346934$，它们与准确解的误差分别为 3.8×10^{-3}，1.3×10^{-4}，2.8×10^{-7}，由此可见，$R-K$ 方法是精度较高的单步方法.

$N\leqslant4$ 的 $R-K$ 方法，其阶数 p 与级数 N 是一致，即二级、三级、四级的 $R-K$ 方法分别是二阶、三阶、四阶方法. 但当 $N>4$ 就没有这种关系了，阶数比级数小，所以四阶以上的 $R-K$ 方法计算函数值 f 的工作量将大大增加. 但对大量的实际问题，四级的 $R-K$ 方法已能满足精度的要求了.

前面介绍都是显式方法，也可以构造隐式的 $R-K$ 方法，只要把(5.40)式改写成

$$k_1=f(x,y)$$

$$k_i=f(x+a_ih,y+h\sum_{l=1}^{i}b_{il}k_l)\quad(i=1,2,\cdots,N)\qquad(5.52)$$

如

$$\begin{cases}y_{m+1}=y_m+\dfrac{h}{2}(k_1+k_2)\\k_1=f(x_m,y_m)\\k_2=f(x_m+h,y_m+\dfrac{h}{2}(k_1+k_2))\end{cases}\qquad(5.53)$$

就是一个二级隐式 $R-K$ 方法. (5.53)就是梯形方法(5.9)，它较二级的改进欧拉方法(5.10)精度要高，但计算量较大. 因为它需要解一个含 y_{m+1} 的方程.

由局部截断误差的定义，可得二级 $R-K$ 方法的局部截断误差为

$$R_{m+1}=h^3(\frac{1}{6}-\frac{a_2}{4})(f_{xx}+2f_{xy}+f^2f_{yy})$$

$$+\frac{h^3}{6}(f_x f_y + f f_y^2) + 0(h^4) = 0(h^3) \qquad (5.54)$$

一般说，级数越高，相应的 R_{m+1} 的表示越繁. 在实际计算中，对截断误差的估计大都通过外推法得到.

5.3.3 高阶单步方法的收敛性、稳定性和相容性

在下面的讨论中，均不考虑舍入误差，关于收敛性有如下的定理.

定理 3 如果初值问题(5.1)(5.2)的单步方法

$$y_{m+1} = y_m + h\Phi(x_m, y_m, h) \qquad (5.3)$$

的局部截断误差为 $0(h^{p+1})(p\geqslant 1)$，且 $\Phi(x,y,h)$ 关于 y 满足 Lip 条件：存在常数 $L>0$，使得

$$|\Phi(x,y_1,h) - \Phi(x,y_2,h)| \leqslant L|y_1 - y_2| \qquad (5.55)$$

对任意 y_1, y_2 成立. 则，方法(5.3)收敛且

$$e_{m+1} = y(x_{m+1}) - y_{m+1} = 0(h^p)$$

证 根据局部截断误差 R_{m+1} 的定义和假设

$$R_{m+1} = y(x_{m+1}) - y(x_m) - h\Phi(x_m, y(x_m), h) = 0(h^{p+1})$$

故存在常数 $c>0$，使得 $|R_{m+1}|\leqslant ch^{p+1}$，故有

$$\begin{aligned}
e_{m+1} &= |y(x_{m+1}) - y_{m+1}| \\
&= |y(x_m) + h\Phi(x_m, y(x_m), h) + R_{m+1} - y_{m+1} - h\Phi(x_m, y_m, h)| \\
&\leqslant |y(x_m) - y_m| + h|\Phi(x_m, y(x_m), h) - \Phi(x_m, y_m, h) + Ch^{p+1} \\
&\leqslant (1 + Lh)|y(x_m) - y_m| + Ch^{p+1} \leqslant \cdots \\
&\leqslant (1 + Lh)^{m+1}e_0 + Ch^{p+1}[1 + (1 + Lh) + \cdots + (1 + Lh)^{m+1}] \\
&= \frac{Ch^{p+1}}{Lh}[(1 + Lh)^{m+1} - 1] + (1 + Lh)^{m+1}|e_0|
\end{aligned}$$

若取 $y(x_0)=y_0$，则 $e_0=0$，由熟知的不等式可得

$$|e_{m+1}| \leqslant \frac{ch^p}{L}[e^{(m+1)hL} - 1]$$

即对任意的 n 有

$$|e_n| \leqslant \frac{ch^p}{L}[e^{nhL}-1] \tag{5.56}$$

当 $x=x_n(=x_0+nh)$ 时，$e^{nhL}\leqslant e^{L(b-x_0)}$，从而有

$$|e_n| \leqslant c_1 h^p \qquad (p\geqslant 1) \tag{5.57}$$

从而有 $\lim\limits_{h\to 0} y_n = y(x)$，对固定的 $x=x_0+nh$ 成立，同时

$$e_m = y(x_m) - y_m = O(h^p) \tag{5.58}$$

证毕.

在以上的讨论中，数值方法(5.3)是 p 阶，即 $R_{m+1}=O(h^{p+1})$，p 至少等于 1，即 $p+1\geqslant 2$. 这样就可以利用 $p\geqslant 1$ 证明方法的收敛性. 不难看出，若方程(5.1)右边函数 $f(x,y)$ 关于 y 满足 L_{ip} 条件，则各种欧拉方法，台劳方法，$R-K$ 方法中相应的 $\Phi(x,y,h)$ 关于 y 也满足 Lip 条件，从而满足定理 3 的条件，因而这些方法都是收敛的.

关于方法(5.3)的稳定性，有如下的结论.

定理 4 如果 $\Phi(x,y,h)$ 关于 y 也满足 L_{ip} 条件，则方法(5.3)是稳定的.

定理的证明完全类似欧拉方法稳定性的证明，请读者自己完成.

若将 R_{m+1} 按变量 h 在 $h=0$ 的附近作台劳展开，得到

$$\begin{aligned}
R_{m+1} &= y(x_{m+1}) - y(x_m) - h\Phi(x_m,y(x_m),h) \\
&= \left[y(x_m) + hy'(x_m) + \frac{h^2}{2}y''(x_m) + \cdots\right] - y(x_m) \\
&\quad - h[\Phi(x_m,y(x_m),0) + \cdots] \\
&= h[y'(x_m) - \Phi(x_m,y(x_m),0)] + \cdots
\end{aligned}$$

由于，$R_{m+1}=O(h^{p+1})$，从而 $p\geqslant 1$ 的充要条件是 $y'(x_m)=\Phi(x_m,y(x_m),0)$，其中 $y'(x_m)=f(x_m,y(x_m))$. 我们作如下定义.

定义 3.1 在方法(5.3)中，如果 $\Phi(x,y,0)\equiv f(x,y)$，则称方

法(5.3)与初值问题(5.1)(5.2)相容.

由以上讨论可知,与问题(5.1)(5.2)相容的方法必有 $p\geqslant 1$,即相容的方法至少是一阶的.

对于与初值问题(5.1)(5.2)相容的方法(5.3),如果 Φ 关于 y 满足 Lip 条件,则由定理 3,可得此方法是收敛的. 若把(5.3)写成

$$\frac{y_{m+1}-y_m}{h}=\Phi(x_m,y_m,h) \tag{5.59}$$

并令 $x=x_m(=x_0+mh)$ 固定. 因为 $h\to 0$, $y_m\to y(x_m)$,所以(5.59)式可写成 $y'(x_m)=\Phi(x_m,y(x_m),0)$,即

$$y'(x_m)=f(x_m,y(x_m)) \tag{5.60}$$

这意味着 $h\to 0$ 时,数值方法(5.3)的计算式趋于微分方程(5.60),这就是相容一词的意义.

在一定条件下,方法(5.3)的收敛性与相容性等价,我们不加证明地给出下面定理.

定理 5 如果 $\Phi(x,y,h)$ 对 $x_0\leqslant x\leqslant b$, $0<h\leqslant h_0$ 以及任意的 y 关于 x,y,h 满足 Lip 条件,则方法(5.3)收敛的充要条件是方法(5.3)关于问题(5.1)(5.2)是相容的.

如果 $f(x,y)$ 在 G 中具有连续导数,那么前面所介绍的各种方法都满足定理 3、5 的条件,因而这些方法都是收敛的也是相容的.

§5.4 线性多步方法

为了提高数值方法的精度,可用多步方法. 本节只讨论线性多步方法,即由 y_{m+j}, f_{m+j} $(j=0,1,\cdots,k)$ 的线性关系确定的计算方法. 一般的线性 k 步方法为

$$\alpha_k y_{m+k}+\alpha_{k-1}y_{m+k-1}+\cdots+\alpha_0 y_m$$

$$= h[\beta_k f_{m+k} + \beta_{k-1} f_{m+k-1} + \cdots + \beta_0 f_m] \qquad (5.61)$$

其中 $\alpha_j,\beta_j(j=0,1,\cdots,k)$为与 m 无关的常数，$f_j=f(x_j,y_j)$，通常取 $\alpha_k\neq0$，且 $|\alpha_0|+|\beta_0|\neq0$，由于(5.61)两边可乘一常数，所以可规定 $\alpha_k=1$，因而

$$y_{m+k} = -(\alpha_0 y_m + \alpha_1 y_{m+1} + \cdots + \alpha_{k-1} y_{m+k-1}) + h(\beta_0 f_m + \beta_1 f_{m+1} + \cdots + \beta_k f_{m+k}) \qquad (5.62)$$

或
$$y_{m+k} = h\beta_k f_{m+k} + g \qquad (5.63)$$

其中
$$g = \sum_{j=0}^{k-1} (h\beta_j f_{m+j} - \alpha_j y_{m+j})$$

若 $\beta_k=0$，则(5.61)为**显式方法**；若 $\beta_k\neq0$，则(5.61)为**隐式方法**，此时(5.63)中 g 的各项是已知的，但右边第一项含有 y_{m+k}，所以(5.63)是含 y_{m+k}的方程且一般是非线性的. 可用迭代法求解：

$$y_{m+k}^{(l+1)} = h\beta_k f(x_{m+k}, y_{m+k}^{(l)}) + g \qquad (5.64)$$

其中 $y_{m+k}^{(0)}$任意给出，$l=1,2,\cdots$，迭代到满足精度要求结束. 可以证明在 $h<\dfrac{1}{L|\beta_k|}$ 的条件下，迭代式(5.64)是收敛的，这就可保证每步能计算出 y_{m+k}.

下面分别介绍利用数值积分方法和待定系数方法确定线性多步方法的计算公式.

5.4.1 阿当斯(Adams)方法

(一) 阿当斯显式方法(亦称 Adams－Bashforth 方法). 考虑初值问题

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = f(x,y) & (5.1) \\ y(x_0) = y_0 & (5.2) \end{cases}$$

设 $y(x)$是(5.1)(5.2)的解，对方程(5.1)自 x_m 到 x_{m+1}积分得

$$y(x_{m+1}) - y(x_m) = \int_{x_m}^{x_{m+1}} f(x, y(x))dx \qquad (5.65)$$

为了把(5.65)的右边离散化以得到数值计算公式，可用外插多项式近似代替右边被积函数 $f(x,y(x))$. 现在以 $k=3$ 为例推导三步的阿当斯显式方法. 取插值基点为 x_{m-2},x_{m-1},x_m，相应地有 $y(x_j)$ 及 $f(x_j,y(x_j))(j=m-2,m-1,m)$，记 $f_j^*=f(x_j,y(x_j))$. 我们先利用牛顿(Newton)向后差分公式构造通过函数值 f_m^*、f_{m-1}^*、f_{m-2}^*的插值多项式 $p_{m,3}(x)(x_m\leqslant x\leqslant x_{m+1})$：

$$p_{m,3}(x)=f_m^*+\frac{x-x_m}{h}\nabla f_m^*+\frac{(x-x_m)(x-x_{m-1})}{2!h^2}\nabla^2 f_m^* \tag{5.66}$$

其中 $\nabla f_m^*=f_m^*-f_{m-1}^*$, $\nabla^2 f_m^*=\nabla f_m^*-\nabla f_{m-1}^*=f_m^*-2f_{m-1}^*+f_{m-2}^*$. 这是一个关于 x 的二次多项式，为方便起见引进辅助变量 $\tau=\frac{x-x_m}{h}(0\leqslant\tau\leqslant 1)$并注意等步长，(5.66)可改写成

$$p_{m,3}(x)=p(x_m+\tau h)=f_m^*+\tau\nabla f_m^*+\frac{\tau(\tau+1)}{2!}\nabla^2 f_m^* \tag{5.67}$$

(5.67)为 τ 的二次多项式. 这样，在$[x_m,x_{m+1}]$上可把方程(5.1)表示成

$$y'(x)=f(x,y(x))=p_{m,3}(x)+r_{m,3}(x)$$

其中 $r_{m,3}(x)$为插值公式的余项，且

$$\begin{aligned}r_{m,3}(x)&=r_{m,3}(x_m+\tau h)\\&=\frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)}{3!}\cdot h^3D^3f(\xi,y(\xi)),\quad x_{m-2}\leqslant\xi\leqslant x_{m+1}.\end{aligned}$$

则有 $$\begin{aligned}y(x_{m+1})-y(x_m)&=\int_{x_m}^{x_{m+1}}p_{m,3}(t)dt+\int_{x_m}^{x_{m+1}}r_{m,3}(t)dt\\&=h\int_0^1\left(f_m^*+\tau\nabla f_m^*+\frac{\tau(\tau+1)}{2!}\nabla^2 f_m^*\right)d\tau\\&\quad+\int_{x_m}^{x_{m+1}}r_{m,3}(x)dx\end{aligned}$$

$$Df_m^* = (f_m^* - f_{m-1}^*)/h + \frac{h}{2}D^2 f_m^* + 0(h^2)$$

$$D^2 f_m^* = \frac{1}{h^2}(f_m^* - 2f_{m-1}^* + f_{m-2}^*) + 0(h)$$

代入(5.69)得

$$y(x_m + h) = y(x_m) + h\Big[f_m^* + \frac{h}{2}(f_m^* - f_{m-1}^*)$$

$$+ \frac{h^2}{4}D^2 f_m^* + \frac{h^2}{3!}D^2 f_m^* + 0(h^3)\Big]$$

$$= y(x_m) + \frac{h}{12}(23f_m^* - 16f_{m-1}^* + 5f_{m-2}^*) + 0(h^2)$$

以 y_j 代替 $y(x_j)$ 并略去 $0(h^3)$ 项,可得(5.68).

(二) 阿当斯隐式方法(亦称 Adams－Moulton 方法).

这种方法的计算公式的推导过程类似于阿当斯显式方法,不同的是用内插多项式来近似(5.65)中的被积函数 $f(x,y(x))$. 仍以 $k=3$ 为例推导三步的阿当斯隐式方法的计算公式. 取插值基点 $x_{m-2}, x_{m-1}, x_m, x_{m+1}$,并利用牛顿向后差分公式构造通过函数值 $f_{m+1}^*, f_m^*, f_{m-1}^*, f_{m-2}^*$ 的插值多项式 $P_{m,3}^*(x)$ $(x_m \leqslant x \leqslant x_{m+1})$,

$$P_{m,3}^*(x) = f_{m+1}^* + \frac{x - x_{m+1}}{h}\nabla f_{m+1}^* + \frac{(x - x_{m+1})(x - x_m)}{2!h^2}\nabla^2 f_{m-1}^*$$

$$+ \frac{(x - x_{m+1})(x - x_m)(x - x_{m+1})}{3!h^3}\nabla^3 f_{m+1}^* \qquad (5.70)$$

(5.70)是 x 的三次多项式. 令 $x = x_{m+1} + \tau h$ $(-1 \leqslant \tau \leqslant 0)$,(5.70)可化为

$$p_{m,3}^*(x) = p_{m,3}^*(x_{m+1} + \tau h) = f_{m+1}^* + \tau\nabla f_{m+1}^*$$

$$+ \frac{\tau(\tau + 1)}{2!}\nabla^2 f_{m+1}^* + \frac{\tau(\tau + 1)(\tau + 2)}{3!}\nabla^3 f_{m+1}^*$$

这样在 $[x_m, x_{m+1}]$ 上可把方程(5.1)表示成

$$y' = f(x, y(x)) = p_{m,3}^*(x) + r_{m,3}^*(x)$$

其中 $r_{m,3}^{*}(x)$ 为插值公式的余项，且

$$r_{m,3}^{*}(x) = \frac{\tau(\tau+1)(\tau+2)(\tau+3)h^{4}}{4!}\nabla^{4} f(\zeta, y(\zeta)),$$

$$x_{m-2} < \zeta < x_{m+1}$$

则(5.65)也可表示为

$$\begin{aligned} y(x_{m+1}) - y(x_m) &= \int_{x_m}^{x_{m+1}} p_{m,3}^{*}(x)dx + \int_{x_m}^{x_{m+1}} r_{m,3}^{*}(x)dx \\ &= h\int_{-1}^{0} p_{m,3}^{*}(x_{m+1}+\tau h)d\tau + \int_{x_m}^{x_{m+1}} r_{m,3}^{*}(x)dx \end{aligned}$$

从而可得计算公式：

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24}[9f_{m+1} + 19f_m - 5f_{m-1} + f_{m-2}] \quad (5.71)$$

(5.71)就是三步的阿当斯隐式方法．常用的阿当斯隐式方法列于表 5.4.

表 5.4

k	计　算　公　式
1	$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{2}(f_{m+1} + f_m)$（梯形公式）
2	$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{12}(5f_{m+1} + 8f_m - f_{m-1})$
3	$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{24}(9f_{m+1} + 19f_m - 5f_{m-1} + f_{m-2})$
4	$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{720}(251f_{m-1} + 646f_m - 264f_{m-1} + 106f_{m-2} - 19f_{m-3})$

应当指出，不论是显式或是隐式的阿当斯 k 步方法都不能仅靠初始值 y_0 起步计算．必须补充$(k-1)$个“附加初值”才能进行计算．通常选择与 k 步方法同阶的单步方法计算附加初值 $y_1, y_2, \cdots,$

y_{k-1}，例如可用台劳方法或 $R-K$ 方法.

例 3 分别用四步阿当斯显式方法和三步阿当斯隐式方法解初值问题 $y'=-y+x+1\quad(0\leqslant x\leqslant 1)$，$y(0)=1$.

解 取 $h=0.1$，$f_m=-y_m+x_m+1$，$x_m=mh=0.1m$.

(i) 四步阿当斯显式方法：

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m+\frac{h}{24}(55f_m-59f_{m-1}+37f_{m-2}-9f_{m-3}) \\ &= \frac{1}{24}[18.5y_m+5.9y_{m-1}-3.9y_{m-2} \\ &\quad +0.9y_{m-3}+0.24m+2.52] \end{aligned}$$

(ii) 三步阿当斯隐式方法

$$\begin{aligned} y_{m+1} &= y_m+\frac{h}{24}(9f_{m+1}+19f_m-5f_{m-1}+f_{m-2}) \\ &= \frac{1}{24}[-0.9y_{m+1}+22.1y_m-0.5y_{m-1} \\ &\quad -0.1y_{m-2}+0.24m+2.52] \end{aligned}$$

计算结果如表 5.5，其中显式方法附加初值 y_1,y_2,y_3 及隐式方法的附加初值 y_1,y_2 均用准确解 $y=e^{-x}+x$ 在相应点的值，对一般方程可用四阶的 $R-K$ 方法计算附加初值.

表 5.5

x_i	阿当斯显式	误差	阿当斯显式	误差
0.3			1.04081801	2.1×10^{-7}
0.4	1.07032292	2.9×10^{-6}	1.07031966	3.8×10^{-7}
0.5	1.10653548	4.8×10^{-6}	1.10653014	5.2×10^{-7}
0.6	1.14881841	6.8×10^{-6}	1.14881101	6.3×10^{-7}
0.7	1.19659339	8.1×10^{-6}	1.19658459	7.1×10^{-7}
0.8	1.24933816	9.2×10^{-6}	1.24932819	7.7×10^{-7}
0.9	1.30657961	1.0×10^{-5}	1.30656884	8.1×10^{-7}
1.0	1.36788996	1.1×10^{-5}	1.36787860	8.4×10^{-7}

从上面计算可以看出，三步的阿当斯隐式方法要较四步的阿当斯显式方法精度高.

5.4.2 用待定系数法确定线性多步法

对一般的线性 k 步方法

$$\alpha_k y_{m+k} + \alpha_{k-1} y_{m+k-1} + \cdots + \alpha_0 y_m = h(\beta_k f_{m+k} + \beta_{k-1} f_{m+k-1} + \cdots + \beta_0 f_m) \qquad (5.61)$$

可以按精度的要求，用待定系数的方法来构造计算公式. 它比直接用插值公式构造计算公式更为灵活. 下面介绍这种方法.

定义算子

$$\mathfrak{L}[y(x);h] = \sum_{j=0}^{k} [\alpha_j y(x+jh) - h\beta_j y'(x+jh)] \qquad (5.72)$$

其中 $y(x)$ 为任意的 $[x_0, b]$ 上的连续可微函数，α_j，β_j 为待定的系数. 若 $y(x)$ 充分可微，将 $y(x+jh)$ 和 $y'(x+jh)$ 作台劳展开得

$$y(x+jh) = y(x) + jhy'(x) + \frac{(jh)^2}{2!} y''(x) + \cdots$$

$$y'(x+jh)=y'(x)+jhy''(x)+\frac{(jh)^2}{2!}y^{(3)}(x)+\cdots$$

代入(5.72)得

$$\mathscr{L}[y(x);h]=c_0y(x)+c_1hy'(x)+\cdots+c_lh^ly^{(l)}(x)+\cdots \tag{5.73}$$

其中 $c_l(l=0,1,\cdots)$ 为常数，与 α_j,β_j 之间存在着关系式：

$$c_0=\alpha_0+\alpha_1+\cdots+\alpha_k$$

$$c_0=(\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+k\alpha_k)-(\beta_0+\beta_1+\cdots+\beta_k)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$c_l=\frac{1}{l!}(\alpha_1+2^l\alpha_2+\cdots+k^l\alpha_k)-\frac{1}{(l-1)!}(\beta_1+2^{l-1}\beta_2+\cdots+k^{l-1}\beta_k)\quad l=2,3,\cdots \tag{5.74}$$

定义 4.1 如果(5.73)式中

$$c_0=c_1=\cdots=c_p=0,\qquad c_{p+1}\neq 0$$

则称算子$\mathscr{L}$对应的线性多步法(5.61)是 p 阶的方法.

若 $y(x)$具有 $P+2$ 阶连续导数，那么只要取 k 适当大，就可选取 α_j,β_j 使得 $c_0=c_1=\cdots=c_p=0,c_{p+1}\neq0$，对所选出的 α_j,β_j 有

$$\mathscr{L}[y(x);h]=c_{P+1}h^{P+1}y^{(P+1)}(x)+O(h^{P+2}) \tag{5.75}$$

设 $y(x)$为方程 $y'=f(x,y)$的解. 由算子定义(5.72)及(5.75)可以导出

$$\begin{aligned}&\sum_{j=0}^{k}[\alpha_jy(x+jh)-h\beta_jy'(x+jh)]\\&=\sum_{j=0}^{k}[\alpha_jy(x+jh)-h\beta_jf(x+jh,y(x+jh))]\\&=c_{P+1}h^{P+1}y^{(P+1)}(x)+O(h^{P+2})\end{aligned} \tag{5.76}$$

舍去右边项，并以 y_i 代替 $y(x_i)$，便得到线性 k 步法(5.61)

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{m+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{m+j} \tag{5.61}$$

其中 α_j，β_j 由如下方程组确定：

$$C_0 = C_1 = \cdots = C_p = 0,\quad C_{p+1} \neq 0$$

利用待定系数法构造方法(5.61)，其最大优点在于可以选择系数 α_j，β_j 使得(5.76)右边的阶数尽可能高或得到较简单的数值方法.

现以 $k=2$ 为例说明如何利用待定系数法构造计算方法. 线性 2 步方法的一般公式为

$$\alpha_2 y_{m+2} + \alpha_1 y_{m+1} + \alpha_0 y_m = h(\beta_2 f_{m+2} + \beta_1 f_{m+1} + \beta_0 f_m) \tag{5.77}$$

令 $\alpha_2=1$，并记 $\alpha_0=a$，则 α_1、β_0、β_1、β_2 需由 4 个方程

$$C_0 = C_1 = C_2 = C_3 = 0$$

确定，因此有

$$C_0 = a + \alpha_1 + 1 = 0$$

$$C_1 = \alpha_1 + 2 - (\beta_0 + \beta_1 + \beta_2) = 0$$

$$C_2 = \frac{1}{2\,!}(\alpha_1 + 4) - (\beta_1 + 2\beta_2) = 0$$

$$C_3 = \frac{1}{3\,!}(\alpha_1 + 8) - \frac{1}{2}(\beta_1 + 4\beta_2) = 0$$

解得：

$$\alpha_1 = 1 - a,\quad \beta_0 = -\frac{1}{12}(1 + 5a),\quad \beta_1 = \frac{2}{3}(1 - a)$$

$$\beta_2 = \frac{1}{12}(5 + a)$$

从而一般的线性 2 步方法为

$$y_{m+2} - (1 + a)y_{m+1} + a y_m$$

$$= \frac{h}{12}[(5 + a)f_{m+2} + 8(1 - a)f_{m+1} - (1 + 5a)f_m] \tag{5.78}$$

且有

$$C_4 = \frac{1}{4!}(\alpha_1 + 16) - \frac{1}{3!}(\beta_1 + 8\beta_2) = -\frac{1}{4!}(1 + a)$$

$$C_5 = \frac{1}{5!}(\alpha_1 + 32) - \frac{1}{4!}(\beta_1 + 16\beta_2) = -\frac{1}{3 \cdot 5!}(17 + 13a)$$

选取不同的参数 a，可得不同的线性 2 步方法. 现把常见的列在表 5.6（p 表示方法的阶数）

表 5.6

a	p	计算公式	
-1	4	$y_{m+2} = y_m + \frac{h}{3}(f_{m+1} + 4f_{m+1} + f_m)$	米勒（Milne）方法
0	3	$y_{m+2} = y_{m+1} + \frac{h}{12}(5f_{m+1} + 8f_{m+1} - f_m)$	阿当斯隐式方法
-5	3	$y_{m+2} = -4y_{m+1} + 5y_m + h(4f_{m+1} + 2f_m)$	2 步显式方法

此外，若在(5.77)中令 $\alpha_2 = 1, \beta_2 = 0, \alpha_0 = 1$，就得 2 步二阶的阿当斯显式方法：

$$y_{m+2} = y_{m+1} + \frac{h}{2}(3f_{m+1} - f_m);$$

而若令 $\alpha_2 = 1, \beta_2 = \beta_0 = \alpha_1 = 0$，可得 2 步二阶的中点法

$$y_{m+2} = y_m + 2hf_{m+1}$$

对 3 步方法，值得一提的是四阶的哈明（Hamming）方法：

$$y_{m+3} = \frac{1}{8}(9y_{m+2} - y_m) + \frac{3h}{8}(f_{m+3} + 2f_{m+2} - f_{m+1})$$

根据算子 $\mathcal{L}[y(x);h]$ 的定义(5.72)，如果 $y(x)$ 是方程(5.1)

的解,那么(5.72)可表成:

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y(x_{m+j}) = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j y'(x_{m+j}) + \mathcal{L}[y(x_m);h]$$

$$= h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f(x_{m+j}, y(x_{m+j})) + \mathcal{L}[y(x_m);h] \tag{5.79}$$

假定 y_i 满足(5.61),并设用(5.61)计算时 y_{m+k} 之前各步均无误差,即 $y(x_{m+j})=y_{m+j}(j=0,1,\cdots,k-1)$,由(5.79)减(5.61),并注意到 $\alpha_k=1$. 得

$$y(x_{m+k}) - y_{m+k} = h\beta_k[f(x_{m+k}, y(x_{m+k})) - f(x_{m+k}, y_{m+k})] + \mathcal{L}(y(x_m), h)$$

利用微分中值定理可得

$$\mathcal{L}[y(x_m),h] = [1 - h\beta_k \frac{\partial f(x_{m+k}, \eta_{m+k})}{\partial y}][y(x_{m+k}) - y_{m+k}] \tag{5.80}$$

其中 η_{n+k} 为 y_{m+k} 至 $y(x_{m+k})$ 中的一点. 当 $\beta_k=0$,即方法是显式时,

$$\mathcal{L}[y(x_m);h] = y(x_{m+k}) - y_{m+k} \tag{5.81}$$

因此可用 $\mathcal{L}[y(x_m);h]$ 表征当 $y_{m+j}=y(x_{m+j})(0\leqslant j\leqslant k-1)$ 时,利用(5.61)计算而产生的误差,由此我们给出下面定义.

定义 4.2 设 $y(x)$ 为问题(5.1)(5.2)的解,(5.61)是一种线性多步方法,则称

$$R_{m+k} \triangleq \mathcal{L}[y(x_m);h] = \sum_{j=0}^{k}[\alpha_j y(x_{m+j}) - h\beta_j y'(x_{m+j})]$$

为方法(5.61)在 x_{m+k} 的**局部截断误差**.

若(5.61)是 p 阶方法,则从(5.73)有

$$R_{m+k} = C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_m) + 0(h^{p+2}) \tag{5.82}$$

称 $C_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_m)$ 为**局部截断误差主项简称误截主项**;C_{p+1} 为

误差主项系数.

对于欧拉方法 $y_{m+1}=y_m+hf_m$，有 $C_0=C_1=0, C_2=\frac{1}{2}$. 按定义有

$$R_{m+1}=y(x_{m+1})-y(x_m)-hy'(x_m)=\frac{1}{2}h^2y''(x_m)+0(h^3)$$

所以欧拉方法是一阶的，其局部截断误差主项为$\frac{h^2}{2}y''(x_m)$. 这与§2 的定义和结果一致.

对 3 步的阿当斯显式方法(5.68)，直接计算可得 $C_0=C_1=C_2=C_3=0, C_4=\frac{3}{8}\neq 0$，故为三阶方法. 对一般的 k 步阿当斯显式方法，也有 $C_0=C_1=\cdots C_k=0, C_{k+1}\neq 0$，因而是 k 阶的.

对 3 步的阿当斯隐式方法(5.71)，直接计算可得 $C_0=C_1=C_2=C_3=C_4=0, C_5\neq 0$，故为四阶方法，对一般的 k 步阿当斯隐式方法，也有 $C_0=C_1=\cdots\cdots C_{k+1}=0, C_{k+2}\neq 0$，因而是 $k+1$ 阶的. 记

$$\rho(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\lambda^j\ ;\quad \sigma(\lambda)=\sum_{j=0}^{k}\beta_j\lambda^j \tag{5.83}$$

(5.83)由多步方法(5.61)唯一确定. 反之，给定(5.83)则可唯一确定一个 k 步方法. 可用下式确定计算方法的阶数 p 和误差主项系数 C_{p+1}:

$$\rho(1+z)-\sigma(1+z)ln(1+z)=C_{p+1}z^{p+1}+0(h^{p+2}) \tag{5.84}$$

式中的 ρ,σ 由(5.83)定义(略去具体证明).

k 步法提高数值解的精度，与同阶的单步法比较计算量要小些. 但 k 步法不是自起步的. 必须先给出附加初值 $y_1, y_2, \cdots, y_{k-1}$，它们通常由误差阶数不低于 k 步法的单步法确定，一般用 $R-K$ 方法，但不论用哪种方法，都必须验证所选择的步长是否满足精度的要求，这个问题留待后面讨论.

5.4.3 予估——校正法

一般说，多步隐式方法较显式方法精度高，但隐式方法的计算公式是含有 y_{m+k} 的方程，不能立即得到 y_{m+k}. 为此我们采用迭代式(5.64)求 $y_{m+k}^{(l+1)}$，当 $l\to\infty$ 时，$y_{m+k}^{(l+1)}$ 收敛 y_{m+k}，只要 $h<\frac{1}{L|\beta_k|}$. 在实际操作中，我们只需迭代到 $y_{m+k}^{(l)}$，使 $|y_{m+k}^{(l)}-y_{m+k}^{(l-1)}|<\delta$ 为止，这时取 $y_{m+k}^{(l)}$ 作为 y_{m+k}. 这种迭代的方法不能规定迭代的次数，且每一步都要计算 $f(x_{m+k},y_{m+k}^{(l)})$. 计算量较大.

为了减少计算量，常用另一种方法：**予估——校正法**，简称**予校法**. 它的做法是：先选择一个 y_{m+k} 的予估值 $y_{m+k}^{(0)}$，它是由另一个显式方法提供的，然后对予先规定的迭代次数 N，用迭代式

$$y_{m+k}^{(l)}=h\beta_k f(x_{m+k},y_{m+k}^{(l-1)})+g \qquad (l=1,2,\cdots) \quad (5.64)$$

计算，其中 $g=\sum_{j=0}^{k-1}(h\beta_j f_{m+j}-\alpha_j y_{m+j})$，每用(5.64)迭代一次，称作了一次校正，这种先取定予估值 $y_{m+k}^{(0)}$ 再校正 N 次的方法就是予校法. 为了减少迭代的次数，通常选择误差阶数与隐式方法

$$y_{m+k}=h\beta_k f_{m+k}+g \qquad (5.63)$$

相同阶数的显式方法

$$y_{m+k}^{(0)}=\sum_{j=0}^{k-1}(h\beta_j^* f_{m+j}-\alpha_j^* y_{m+j}) \qquad (5.85)$$

提供予估值 $y_{m+k}^{(0)}$，因此予校法是由公式(5.85)和(5.64)联合构成的计算方法，简写成 PC 算法(Predictor－Corrector method). 称(5.85)为予估算式(P 算式). 而称(5.64)为校正算式(C 算式). 由于有了较合理的予估算式(5.85). 对事先指定的误差 δ，一般取 $l=1,2,3$ 就能保证 $|y_{m+k}^{(l)}-y_{m+k}^{(l-1)}|<\delta$. 如果校正次数过多，则必须减小步长 h 或改用其他的显式方法作为予估方法.

记 P 为一次的予估，C 为单次校正迭代，再记 E 为函数 f 的

一次求值(Evaluation). 对一般线性 k 步方法可以这样设计计算步骤：先由(5.85)提供予供予估值 $y_{m+k}^{(0)}$，再计算 $f_{m+k}^{(0)}=f(x_{m+k}, y_{m+k}^{(0)})$，并把 $y_{m+k}^{(0)}$，$f_{m+k}^{(0)}$代入(5.64)得 $y_{m+k}^{(1)}$，以上的计算记为 PEC. 若再求一次函数值 $f_{m+k}^{(1)}=f(x_{m+k}, y_{m+k}^{(1)})$再迭代校正一次得 $y_{m+k}^{(2)}$，以上计算记为 PECEC 或 $P(EC)^2$，如果规定进行 N 次迭代校正，就接受 $y_{m+k}^{(N)}$近似 y_{m+k}，则所得计算记为 $P(EC)^N$. 在下一步的计算中，需要的函数值 f_{m+k}有两种处理方法：一是用上面计算的

$$f_{m+k}^{(N-1)}=f(x_{m+k}, y_{m+k}^{(N-1)})$$

作为 f_{m+k}，相应的计算格式、记为 $P(EC)^N$；另一种处理方法是再计算 $f_{m+k}^{(N)}=f(x_{m+k}, y_{m+k}^{(N)})$作为 f_{m+k}，这样的计算格式记为 $P(EC)^NE$. $P(EC)^N$ 和 $P(EC)^NE$ 的具体计算格式为：

(i) $P(EC)^N$：

$$\begin{aligned}
P:\ & y_{m+k}^{(0)}=\sum_{j=0}^{k-1}[h\beta_j^* f_{m+j}^{(N-1)}-\alpha_j^* y_{m+j}^{(N)}]\\
E:\ & f_{m+k}^{(l)}=f(x_{m+k}, y_{m+k}^{(l)})\\
C:\ & y_{m+k}^{(l+1)}=h\beta_k f_{m+k}^{(l)}+\sum_{j=0}^{k-1}[h\beta_j f_{m+j}^{(N-1)}-\alpha_j y_{m+j}^{(N)}]\\
& l=0,1,\cdots,N-1,\quad m=0,1,2,\cdots
\end{aligned}\tag{5.86}$$

(ii) $P(EC)^NE$：

$$\begin{aligned}
P:\ & y_{m+k}^{(0)}=\sum_{j=0}^{k-1}[h\beta^* f_{m+j}^{(N)}-\alpha_j^* y_{m+j}^{(N)}]\\
E:\ & f_{m+k}^{(l)}=f(x_{m+k}, y_{m+k}^{(l)})\\
C:\ & y_{m+k}^{(l+1)}=h\beta_k f_{m+k}^{(l)}+\sum_{j=0}^{k-1}[h\beta_j f_{m+j}^{(N)}-\alpha_j y_{m+j}^{(N)}],\\
& (l=0,1,\cdots,N-1)\\
E:\ & f_{m+k}^{(N)}=f(x_{m+k}, y_{m+k}^{(N)})\quad m=0,1,2,\cdots
\end{aligned}\tag{5.87}$$

对某些较简单的方程 $y'=f(x,y)$，可以从隐式的线性多步法

(5.63)的计算公式解出 y_{m+k} 的表达式，直接利用表达式计算 y_{m+k} 比用予校法计算可减少计算量且更准确. 例如对线性方程 $y'=p(x)y+q(x)$，能从多步法(5.63)解出：

$$y_{m+k}=[1-h\beta_k p(x_{m+k})]^{-1}[h\beta_k q(x_{m+k})+\sum_{j=0}^{k-1}(h\beta_j f_{m+j}-\alpha_j y_{m+j})] \tag{5.88}$$

只要取 $h\neq(\beta_k p(x_{m+k}))^{-1}$，不需迭代. 由此所得的 y_{m+k} 就是由(5.63)计算出的精确值.

例 4 用四阶的阿当斯予校法的 PECE 计算格式求解初值问题 $y'=-y+x+1, y(0)=1, 0\leqslant x\leqslant 1$. 取 $h=0.1$ 并与例 3 的四阶阿当斯隐式方法作比较.

解 四阶的阿当斯予校方法常是取四阶 4 步的阿当斯显式方法为予估方法，再由 3 步四阶的阿当斯隐式方法作校正，它的 PECE 格式是：

$$P:\quad y_{m+4}^{(0)}=y_{m+3}^{(1)}+\frac{h}{24}[55f_{m+3}^{(1)}-59f_{m+2}^{(1)}+37f_{m+1}^{(1)}-9f_{m}^{(1)}]$$

$$E:\ f_{m+4}^{(0)}=f(x_{m+k}, y_{m+4}^{(0)})$$

$$C:\ y_{m+4}^{(1)}=y_{m+3}^{(1)}+\frac{h}{24}[9f_{m+4}^{(0)}+19f_{m+3}^{(1)}-5f_{m+1}^{(1)}+f_{m+2}^{(1)}]$$

$$E:\ y_{m+4}^{(1)}=f(x_{m+4}, y_{m+4}^{(1)})$$

PECE 方法的附加初值 y_1, y_2, y_3 用四阶的 $R-K$ 方法计算. 把计算的结果列于表 5.7

表 5.7

		予校法		阿当斯隐式方法	
x_m	$y(x_m)$	y_m	$\lvert y(x_m)-y_m\rvert$	y_m	$\lvert y(x_m)-y_m\rvert$
0.4	1.07032004	1.07031992	1.3×10^{-7}	1.07031966	3.8×10^{-7}
0.5	1.10653066	1.10653027	3.9×10^{-7}	1.10653014	5.2×10^{-7}
0.6	1.14881163	1.14881103	6.0×10^{-7}	1.14881101	6.3×10^{-7}
0.7	1.19658530	1.19658453	7.7×10^{-7}	1.19658469	7.1×10^{-7}
0.8	1.24932896	1.24932806	9.0×10^{-7}	1.24932819	7.7×10^{-7}
0.9	1.30656965	1.30656866	1.0×10^{-6}	1.30656884	8.1×10^{-7}
1.0	1.36787944	1.36787834	1.1×10^{-6}	1.36787860	8.4×10^{-7}

由表 5.7 可以看出用四阶阿当斯予校法的计算结果不如直接用四阶阿当斯隐式方法计算的精度高，这是由于方程(5.1)是线性的，不需迭代，利用阿当斯隐式公式所得到的 y_{m+k} 已是数值解的精确值了.

予校法最大优点还在于每一步都能算出局部截断误差的误差主项. 设 P 阶的予估方法(5.85)和校正方法(5.64)的误差主项系数分别为 C_{p+1} 和 $\bar{C}_{p+1}$. 对一种予校方法的 $P(EC)^NE$ 格式，予估方法(5.85)的局部截断误差为

$$y(x_{m+k})-y_{m+k}^{(0)}=c_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_m)+0(h^{p+2}) \quad (5.89)$$

经过 N 次校正迭代后，校正方法(5.64)的局部截断误差为

$$y(x_{m+k})-y_{m+k}^{(N)}=\bar{c}_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_m)+0(h^{p+2}) \quad (5.90)$$

$c_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_m)$ 和 $\bar{c}_{p+1}h^{p+1}y^{(p+1)}(x_m)$ 分别为方法(5.85)和(5.64)的误差主项，由于解 $y(x)$ 一般是未知的，故难以计算局部截断误差. 但在予校方法中，可以利用(5.89)和(5.90)计算出误差主项. 由(5.90)减(5.89)得

$$y_{m+k}^{(N)} - y_{m+k}^{(0)} = (c_{p+1} - \bar{c}_{p+1})h^{p+1}y^{(p+1)}(x_m) + 0(h^{p+2}) \tag{5.91}$$

略去 $0(h^{p+2})$ 项得

$$h^{p+1}y^{(p+1)}(x_m) \approx (c_{p+1} - \bar{c}_{p+1})^{-1}(y_{m+k}^{(N)} - y_{m+k}^{(0)})$$

代回(5.90)有

$$y(x_{m+k}) - y_{m+k}^{(N)} \approx \bar{c}_{p+1}(c_{p+1} - \bar{c}_{p+1})^{-1}(y_{m+k}^{(N)} - y_{m+k}^{(0)}) \triangleq d_{m+k} \tag{5.92}$$

d_{m+k} 就是以 $y_{m+k}^{(N)}$ 近似 $y(x_{m+k})$ 产生误差的粗略估计，可以作为局部截断误差主项且是可由(5.92)确定的数值. 类似地可以得到予估法(5.85)的局部截断误差主项估计：

$$y(x_{m+k}) - y_{m+k}^{(0)} \approx c_{p+1}(c_{p+1} - \bar{c}_{p+1})^{-1}(y_{m+k}^{(N)} - y_{m+k}^{(0)}) \tag{5.93}$$

予校法的效率很高，这是目前普遍使用它的主要原因之一，对微分方程数值解的计算，最耗时的是计算 $f(x,y)$ 及其导数，例如在四阶 $R-K$ 方法中，每步都得计算四个 f 的函数值，而在予校法中，不论其阶数如何，为了予估只计算在 x_{m+k} 点的值 f_{m+k}，其余的 $f_{m+i}(i<k)$ 都已在前面算出并贮存着. 为了校正，一般也只需在 x_{m+k} 点计算一二次的 f 值，就能满足要求. 所以对多数问题，予校方法要比同阶的 $R-K$ 方法计算量少，特别当 $f(x,y)$ 的形式比较复杂时，一般采用线性多步方法，如阿当斯予校法. 当然，要准确地评价不同方法的效率，除了 f 的计算次数外，还必须考虑许多因素，我们不在此详细讨论.

§5.5 线性多步法的进一步讨论

5.5.1 收敛性、稳定性和相容性

考虑问题(5.1)(5.2)的线性 k 步法

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{m+j} = h\sum_{j=0}^{k}\beta_j f_{m+j} \qquad (5.61)$$

其中 $\alpha_k=1, |\alpha_0|+|\beta_0|>0$

假定我们可用其他方法提供 k-1 个附加初值 $y_1,\cdots,y_{k-1}$，且有

$$\lim_{h\to 0} y_i = y_0 = y(x_0) \qquad (1\leqslant i\leqslant k\text{-}1) \qquad (5.93)$$

定义 5.1 设条件(5.93)成立. 如果对所有在 G 内连续且关于 y 满足 Lip 条件的 $f(x,y)$，由一个线性 k 步法产生的数值解 y_n，对所有固定的 $x\in[x_0,b]$，$x=x_n=x_0+nh$，均有 $\lim_{h\to 0} y_n = y(x)$，则称 k 步法(5.61)是**收敛的**.

定义 5.2 如果对所有关于 y 满足 Lip 条件的 $f(x,y)$，存在常数 C,h_0，使得当 $0<h\leqslant h_0$ 时，相应于初值 y_0,Z_0 及附加初值 y_i 及 $Z_i(1\leqslant i\leqslant k\text{-}1)$ 由 k 步法(5.61)所得的数值解 y_m,Z_m 满足不等式

$$\max_{mk\leqslant b-x_0} |y_m - Z_m| \leqslant CM_0 \qquad (m=k,k+1,\cdots) \qquad (5.94)$$

其中
$$M_0 = \max_{0\leqslant j<k} |y_i - Z_i|$$

则称方法(5.61)是**稳定的**.

定理 6 线性 k 步法(5.61)稳定的充要条件是 $\rho(\lambda)$ 的所有根均在单位圆内，且在单位圆上的根为单根.

方法的稳定性质(不论是单步或多步的)确切地刻划了当 h 充分小时，数值解连续地依赖于初值的性质.

定义 5.3 如果线性 k 步法(5.61)相应的算子 $\mathcal{L}[y(x);h]$ 至少是一阶的，即 $\mathcal{L}[y(x);h]=O(h^2)$，则称 k 步法(5.61)是**相容的**.

定理 7 线性 k 步法(5.61)为相容的充要条件是

$$\rho(1)=0 \qquad \rho'(1)=\sigma(1)$$

即
$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j = 0; \qquad \sum_{j=0}^{k} j\alpha_j = \sum_{j=0}^{k}\beta_j \qquad (5.95)$$

关于收敛性，稳定性，相容性之间存在着下面的等价关系.

定理8 设$f(x,y)$在区域$G:\{x_0\leqslant x\leqslant b,|y|<+\infty\}$中连续且关于$y$满足Lip条件，相容性条件(5.95)成立，则$k$步法(5.61)的收敛性与稳定性等价即收敛性的充要条件是相容且稳定的.

以上定理略去证明，可参阅C.W吉尔《常微分方程初值问题的数值解法》(科学出版社，1978)

一个可用的数值解法必须是收敛的，或说必须是相容且稳定的. 我们前面所介绍的方法都是收敛.

5.5.2 绝对稳定性

一种好的计算方法应当是用最小的计算量(包括人工和计算机的计算量)，获得满足精度要求的计算结果. 因此除了公式的繁简特征外，误差是判别计算方法优劣的重要标准. 在这里只考虑理论误差即截断误差是不够的，还必须考虑计算中的舍入误差.

前面介绍的稳定性概念描述了在不考虑舍入误差的前提下当h充分小时，初始值误差对以后计算的影响，因此这种稳定性也称为渐近稳定性. 但在实际计算中，舍入误差总是存在. 而且随着步长h的缩小，计算次数增加会使舍入误差的积累随之增大，因此只考虑渐近稳定性是不够的. 为了刻划误差的传播情况，我们将引进一个新的稳定性概念—**绝对稳定性**，它在实际计算中更有重要意义.

先讨论(5.1)的模型方程

$$\frac{dy}{dx}=\mu y \quad (\mu \text{为常数}) \tag{5.96}$$

其相应的k步法(5.61)的计算公式为

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j y_{m+j}=h\sum_{j=0}^{k}\beta_j(\mu y_{m+j}) \tag{5.97}$$

或

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\bar{h}\beta_j)y_{m+j}=0 \tag{5.98}$$

其中 $\bar{h}=\mu h$. (5.98)为齐次常系数线性差分方程. 令 $y_{m+j}=\lambda^j$, 代入(5.98)得

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\bar{h}\beta_j)\lambda^j=\rho(\lambda)-\bar{h}\sigma(\lambda)=0 \tag{5.99}$$

称(5.99)为差分方程(5.98)的**特征方程**, 其根 $\lambda_1,\cdots,\lambda_k$(可以有重根或复根)称为**特征根**. 若 $\lambda_i\neq\lambda_j(i\neq j)$, 则由差分方程解的结构理论, 可知方程(5.98)的解为

$$y_m=\sum_{j=0}^{k}B_j\lambda_j^m \tag{5.100}$$

其中 B_j 为待定常数, 它由"初值" $y_0,y_1,\cdots,y_{k-1}$ 确定. 若特征根有重根, 不妨设 λ_1 为 l 重根($1<l\leqslant k$)则解为

$$\begin{aligned}y_m=&[B_1+mB_2+m(m-1)B_3+\cdots+m(m-1)\\&\cdots(m-l+2)B_l]\lambda_1^m+B_{l+1}\lambda_2^m+\cdots+B_k\lambda_{k-l}^m\end{aligned} \tag{5.101}$$

若还有其他的重根, 不难得出类似(5.101)解的表达式.

设 $y(x)$ 为方程(5.96)的解, 记 $y_m^*=y(x_m)$. 由算子 $\mathfrak{L}[y(x_m);h]$的定义, 有

$$\begin{aligned}\mathfrak{L}[y(x),h]&=\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j y(x_{m+j})-h\beta_j y'(x_{m+j})]\\&=\sum_{j=0}^{k}[\alpha_j y_{m+j}^*-h\mu\beta_j y_{m+j}^*]\end{aligned}$$

从而有

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\bar{h}\beta_j)y_{m+j}^*=\mathfrak{L}[y_m^*;h] \tag{5.102}$$

记 $e_m=y_m^*-y_m$, 由(5.102)减(5.98)得

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\bar{h}\beta_j)e_{m+j}=\mathfrak{L}[y_m^*;h] \tag{5.103}$$

这表示截断误差 e_m 满足非齐次线性差分方程(5.103),其右边为局部截断误差 R_{m+k}.

由于计算机字长的限制或其他原因,利用(5.61)计算数值解 y_m 只能得到其近似值 $\hat{y}_m$,它不满足(5.61)而满足

$$\sum_{j=0}^{k}\alpha_j\hat{y}_{m+j}=\bar{h}\sum_{j=0}^{k}\beta_j\hat{y}_{m+j}+\eta_m$$

即

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\bar{h}\beta_j)\hat{y}_{m+j}=\eta_m \tag{5.104}$$

这也是一个非齐次线性差分方程,用(5.104)减(5.98)并记 $\hat{e}_m=\hat{y}_m-y_m$,则舍入误差 $\hat{e}_m$ 满足差分方程

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\bar{h}\beta_j)\hat{e}_{m+j}=\eta_m \tag{5.105}$$

为讨论方便起见,不妨设 $\eta_m=\eta$,并注意到(5.61)是相容的 $\mathcal{L}[y(x);h]=0(h^2)$,所以可把(5.103)中 $\mathcal{L}[y_m^*;h]$ 换成 $0(h^2)$.

由数值计算产生的总误差为

$$\begin{aligned}y_m^*-\hat{y}_m&=(y_m^*-y_m)+(y_m-\hat{y}_m)\\&=e_m+\hat{e}_m\end{aligned}$$

因此误差的估计就化为估计如下差分方程的解 e_m 和 $\hat{e}_m$:

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\bar{h}\beta_j)e_{m+j}=0(h^2) \tag{5.106}$$

$$\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\bar{h}\beta_j)\hat{e}_{m+j}=\eta \tag{5.107}$$

根据非齐次常系数线性差分方程解的结构理论,差分方程(5.106)和(5.107)的解可分别表示成

$$\begin{aligned}e_m&=\sum_{j=0}^{k}c_j\lambda_j^m+0(h^2)/\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\bar{h}\beta_j)\\\hat{e}_m&=\sum_{j=0}^{k}\hat{c}_j\lambda_j^m+\eta/\sum_{j=0}^{k}(\alpha_j-\bar{h}\beta_j)\end{aligned} \tag{5.108}$$

其中 λ_j 为齐次常系数差分方程(5.98)的特征方程(5.99)的单根，(5.108)中的系数 c_j 和 $\hat{c}_j(j=1,\cdots,k)$分别由 $e_0,e_1,\cdots,e_{k-1}$及 $\hat{e}_0,\cdots,\hat{e}_{k-1}$决定. 对方程(5.99)有重根情况，(5.108)的第一部份有类似(5.101)的表达式.

由(5.108)看出，要使误差 $e_m,\hat{e}_m$ 不随 m 的增大而变为无界，必须有 $|\lambda_j|<1$，即当 $|\lambda_j|<1$ 时，在某一时刻 x_q 的误差对以后计算的影响将逐步减少.

定义 5.1 对指定的 $\bar{h}$，如果特征方程(5.99)的根 λ_j 满足 $|\lambda_j|<1$，则称线性 k 步法(5.61)关于 $\bar{h}$ 是绝对稳定的. 如果对 $\bar{h}\in(\alpha,\beta)$，方法(5.61)均是绝对稳定的，则称(α,β)为方法(5.61)的**绝对稳定区间**.

上面讨论的绝对稳定性是针对模型方程(5.96)的. 对一般的一阶方程 $y'=f(x,y)$，可视 $\mu=\dfrac{\partial f}{\partial y}$，因此 μ 是随(x,y)而变化的. 对固定的步长 h，μ 的变化将引起 $\bar{h}=\mu h$ 的变化. 因此，若 $\bar{h}=\mu\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 属于绝对稳定区间，则对方程(5.1)而言，k 步法(5.61)是绝对稳定的，这样就把绝对稳定性的概念推广到一般方程.

应当指出，不论是渐近稳定性或是绝对稳定性都是数值解法与微分方程 $y'=f(x,y)$的一种关联关系. 而关于初值问题(5.1)(5.2)解的稳定性，则只由方程决定而与求解方法无关.

进一步研究表明，对收敛的数值方法，其绝对稳定性的必要条件是当 h 充分小时 $\bar{h}<0$，下面将给出一些方法的绝对稳定区间.

(i) 阿当斯方法(以二步为例)

2 步阿当斯显式方法

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{2}(3f_m-f_{m-1})$$

相应的特征方程为

$$\lambda^2 - \lambda - \bar{h}(\frac{3}{2}\lambda - \frac{1}{2}) = 0$$

$$\lambda = \frac{1 + \frac{3}{2}\bar{h} \pm \sqrt{(1 + \frac{3}{2}\bar{h})^2 - 2\bar{h}}}{2}$$

由此可得当$-1<\bar{h}<0$时 $|\lambda|<1$，即2步显式阿当斯方法的绝对稳定区间为$(-1,0)$.

2步阿当斯隐式方法

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{12}(5f_{m+1} + 8f_m - f_{m-1})$$

相应的特征方程为

$$\lambda^2 - \lambda - \bar{h}(\frac{5}{12}\lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda - \frac{1}{12}) = 0$$

由$|\lambda|<1$可得$-6<\bar{h}<0$，即绝对稳定区间为$(-6,0)$. 类似可求出k步阿当斯显式或隐式方法的绝对稳定区间，把常用的阿当斯方法的绝对稳定区间列于表5.8

表5.8

k	阿当斯显式方法		阿当斯显式方法	
	P（阶数）	绝对稳定区间	P	绝对稳定区间
1	1	$(-2,0)$	2	$(-\infty,0)$
2	2	$(-1,0)$	3	$(-6,0)$
3	3	$(-\frac{6}{11},0)$	4	$(-3,0)$
4	4	$(-\frac{6}{11},0)$	5	$(-\frac{90}{49},0)$

由表5.8可以看出，对相同的步数，隐式法较显式法的绝对稳

定区间大，因而稳定性较好，这是隐式的阿当斯方法的一个重要优点.

(ii) 米勒方法：

$$y_{m+2}=y_m+\frac{h}{3}(f_{m+2}+4f_{m+1}+f_m)$$

这是 2 步四阶方法，其特征方程为

$$\lambda^2-1-\frac{\bar{h}}{3}(\lambda^2+4\lambda+1)=0$$

可以求出其根 $\lambda_1=1+\bar{h}+0(\bar{h}^2)$，$\lambda_2=-1+\dfrac{\bar{h}}{3}+0(\bar{h}^2)$. 由此看出，不论 μ 的符号如何，当 h 充分小时，λ_1,λ_2 中总有一个绝对值大于 1，所以米勒方法对任何的 $\bar{h}$ 都不是绝对稳定的，因而误差得不到控制，故在实际应用中并不采用米勒方法. 而采用 3 步四阶的哈明方法：

$$y_{m+3}=\frac{1}{8}(9y_{m+2}-y_m)+\frac{3}{8}h(f_{m+3}+2f_{m+2}-f_{m+1}).$$

对于单步方法的绝对稳定性的讨论，也可从模型方程(5.96)开始. 以 $R-K$ 方法为例讨论.

(iii) R-K 方法.

为了讨论 $R-K$ 方法的绝对稳定区间，可以先讨论台劳展开方法(5.37)的绝对稳定区间.

设 $y(x)$ 为方程 $y'=\mu y$ 的解，则 $y''=\mu^2 y,\cdots,y^{(i)}=\mu^i y$. 由 P 阶台劳展开法：

$$y_{m+1}=y_m+h\sum_{i=1}^{p}\frac{h^{i-1}}{i!}D^{i-1}f(x_m,y_m)\tag{5.37}$$

有 $$y_{m+1}=[1+(\mu h)+\frac{(\mu h)^2}{2!}+\cdots+\frac{(kh)^p}{p!}]y_m$$

其特征方程为

$$\lambda - \left(1 + \bar{h} + \frac{\bar{h}^2}{2!} + \cdots + \frac{\bar{h}^p}{p!}\right) = 0 \qquad (5.109)$$

由$|\lambda|<1$可以确定p阶的台劳展开方法的绝对稳定区间.

注意到$R-K$方法计算公式的推导思想，可以得出p阶的$R-K$方法的$\Phi(x,y,h)=\sum_{i=1}^{N}c_i k_i$关于$h$的展开式与$p$阶的台劳展开式中$h$的同次幂的系数相同，因而$R-K$方法的特征方程也为(5.109). 所以$p$阶的$R-K$方法与$p$阶的台劳展开方法具有相同的绝对稳定区间. 现把$p$阶的台劳展开方法和$R-K$方法绝对稳定区间列于表5.9

表 5.9

p	λ	绝对稳定区间
1	$1+\bar{h}$	$(-2,0)$
2	$1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2}$	$(-2,0)$
3	$1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2}+\frac{\bar{h}^3}{3!}$	$(-2.51,0)$
4	$1+\bar{h}+\frac{\bar{h}^2}{2}+\frac{\bar{h}^3}{3!}+\frac{\bar{h}^4}{4!}$	$(-2.78,0)$

比较表5.8和5.9可以看出$R-K$方法的绝对稳定区间较同阶的阿当斯显式法要大，因此尽管它每步的计算量大，但步长可以适当放大.从而总计算量有时反而可能减少，这正是$R-K$方法被广泛使用的原因之一. 但不论用哪种方法，如果有绝对稳定区间(α,β)，则应取$\bar{h}\in(\alpha,\beta)$，否则会产生很大的误差.

对于予校方法，它的绝对稳定区间，不仅依赖于予估方法和校正方法的选择，还与校正的次数N及格式有关. 例如四阶的阿当

斯予校法的绝对稳定区间依不同的计算格式有：(i)PEC 格式(-0.16,0)；(ii)PECE 格式(-1.25,0)；(iii) $P(EC)^2$ 格式(-0.90,0). 可以看出 PEC 格式较 PECE，$P(EC)^2$ 的绝对稳定区间小.

对一种 k 步数值方法，其绝对稳定区间通常随阶数的增大而缩小. 例如五、六、七、八阶的阿当斯予校法的 PECE 算式的绝对稳定区间分别为(-1.0,0)，(-0.7,0)，(-0.5,0)，(-0.4,0).

5.5.3 李查德森(Richarolson)外推法

外推方法是提高数值方法计算精度及估计计算误差常用的有效方法. 它的处理思想是：如果用某种数值解法得到数值解，它与初值问题(5.1)(5.2)准确解之间的误差有简单的渐近公式，则分别用步长 h 和 $\frac{h}{2}$ 求数值解，再以它们的线性组合构成新的数值解，使它与准确解误差的主要部份在线性组合的过程中消除，从而提高了方法的阶数. 再分别取 $\frac{h}{2^2}, \frac{h}{2^3}, \cdots$，反复地利用上面的处理方法，在每次线性组合中消去剩余误差中的主要部份，计算精度就逐步提高，具体做法如下：

用 $y(x;h)$ 表示步长为 h 的某种数值方法得到的数值解，如果关于 h 有如下的展开式：

$$y(x;h) = y(x) + A_1 h + A_2 h^2 + \cdots + A_p h^p + A_{p+1} h^{p+1} + \cdots \tag{5.110}$$

其中 $y(x)$ 为问题(5.1)(5.2)的准确解. 再以新步长 $\frac{h}{2}$ 进行计算，得到另一数值解

$$y(x;\frac{h}{2}) = y(x) + A_1(\frac{h}{2}) + A_2(\frac{h}{2})^2 + \cdots + A_p(\frac{h}{2})^p + A_{p+1}(\frac{h}{2})^{p+1} + \cdots \tag{5.111}$$

若 $y(x;h)$ 在 x 处的截断误差为 p 阶的，则(5.110)(5.111)式中的

$A_1=A_2=\cdots=A_{p-1}=0$，所以有

$$y(x;h)=y(x)+A_ph^p+A_{p+1}h^{p+1}+\cdots \tag{5.112}$$

$$y(x;\frac{h}{2})=y(x)+A_p(\frac{h}{2})^p+A_{p+1}(\frac{h}{2})^{p+1}+\cdots \tag{5.113}$$

将(5.113)$\times 2^p$减(5.112)得：

$$2^py(x;\frac{h}{2})-y(x;h)=(2^p-1)y(x)+\frac{1}{2}A_{p+1}h^{p+1}+\cdots$$

$$y(x)=\frac{2^py(x;\frac{h}{2})-y(x;h)}{(2^p-1)}+0(h^{p+1}) \tag{5.114}$$

从而可以看出，若在 $y(x;h)$ 和 $y(x;\frac{h}{2})$ 的线性组合中略去高阶项 $0(h^{p+1})$，并以此作为 $y(x)$ 的新的数值解计算公式：

$$\bar{y}(x)=\frac{2^py(x;\frac{h}{2})-y(x;h)}{(2^p-1)} \tag{5.115}$$

则 $\bar{y}(x)$ 的截断误差阶数为 $p+1$，从而把数值解的精度提高 1 阶．这种做法称为**李查德森外推方法**．

例如欧拉方法(5.6)它的截断误差为 $0(h)$．因此(5.110)中 $p=1$，$A_1\neq 0$，由外推法得到新的数值计算公式：

$$\bar{y}(x)=\frac{2y(x;\frac{h}{2})-y(x;h)}{(2-1)}=2y(x;\frac{h}{2})-y(x;h)$$

相应的截断误差为 $0(h^2)$．

为了使数值解满足予定的误差，要求尽可能减少计算量．在计算中必须不断调整步长，为此应当对计算误差有一个较好的估计．外推方法可以得到较好的误差估计．

若所用的数值方法为 p 阶，$y(x;h)$ 和 $y(x;\frac{h}{2})$ 有展开式(5.112)、(5.113)用 e_h 和 $e_{h/2}$ 分别表示用步长 h，$\frac{h}{2}$ 进行计算产生的截

断误差. 由(5.114)分别减 $y(x;h)$ 、$y(x;\frac{h}{2})$得

$$e_h = y(x) - y(x;h)$$

$$= \frac{2^p y(x;\frac{h}{2}) - y(x;h)}{(2^p - 1)} - y(x;h) + 0(h^{p+1})$$

$$= 2^p(2^p - 1)^{-1}[y(x;\frac{h}{2}) - y(x;h)] + 0(h^{p+1})$$

$$e_{h/2} = y(x) - y(x;\frac{h}{2})$$

$$= \frac{2^p y(x;\frac{h}{2}) - y(x;h)}{(2^p - 1)} - y(x;\frac{h}{2}) + 0(h^{p+1})$$

$$= (2^p - 1)^{-1}[y(x;\frac{h}{2}) - y(x;h)] + 0(h^{p+1})$$

略去高阶项 $0(h^{p+1})$，就得到截断误差 e_n，$e_{\frac{h}{2}}$ 的近似值：

$$\bar{e}_h = (2^p - 1)^{-1}2^p[y(x_j\frac{h}{2}) - y(x_jh)] \qquad (5.116)$$

$$\bar{e}_{\frac{h}{2}} = (2^p - 1)^{-1}[y(x_j\frac{h}{2}) - y(x_jh)] \qquad (5.117)$$

$\bar{e}_h$，$\bar{e}_{\frac{h}{2}}$ 实际上与 $y(x)$ 无关. 而只与数值解 $y(x;h)$，$y(x;\frac{h}{2})$有关，用 $\bar{e}_h$，$\bar{e}_{\frac{h}{2}}$ 作为截断误差 e_h，$e_{\frac{h}{2}}$ 的近似值，在计算的过程中随时判断是否满足精度要求. 具体做法如下：用步长 h 计算出在 x_m 处满足精度要求的 y_m，然后分别以 h，$\frac{h}{2}$ 为步长计算 y_{m+1}，并按(5.116)和(5.117)计算 $\bar{e}_h$，$\bar{e}_{\frac{h}{2}}$. 对予先指定的精度要求 ε，若 $|\bar{e}_h| < \varepsilon$ 且相差不大，就认为 h 是合适的，可以继续以 h 为步长计算 y_{m+2}；若 $|\bar{e}_h| > \varepsilon$，$|\bar{e}_{\frac{h}{2}}| < \varepsilon$，则表明步长 h 太大，以 $\frac{h}{2}$ 为步长较合适，以 $\frac{h}{2}$ 为新步长重新计算直到满足精度要求为止，并在下一步计算中把这样选定

的步长作为新步长，继续计算. 如果$|\bar{e}_h|<<\varepsilon$，则表明步子过小，应将步长放大为 $2h$ 作为新步长进行下一步的计算，如此继续下去.

前面的讨论，实际上是在没有舍入误差的假设下进行的. 但在计算的后期，舍入误差可能占主导地位，如果再用缩小步长的方法，就不能达到减少误差的目的. 此时就得选用精度更高的方法.

现举例说明外推方法的效果.

例 5 (i) 用欧拉方法及外推方法计算初值问题

$$y' = -y,\ y(0) = 1$$

在 $x=1$ 处的数值解 $y(1;h)$；(ii) 用(5.116)估计欧拉方法截断误差；(iii)计算两种方法的误差 $y(1)-y(1;h)$.

解 初值问题的准确解为 $y=e^{-x}$，$y(1)=0.3678794$，我们把以不同步长计算的结果列在表 5.10

表 5.10

h	欧位方法 $y(1;h)$	外推法 $\bar{y}(1)$	欧拉法误差 $y(1)-y(1;h)$	用(5.116)估计误差	外推法误差 $y(1)-\bar{y}(1)$
1	0.0000000	0.5000000	−0.3678794	−0.5000000	0.1321206
$\frac{1}{2}$	0.2500000	0.3828126	−0.1178794	−0.1328126	0.0149331
$\frac{1}{4}$	0.3164063	0.3708116	−0.0514731	−0.0544052	0.0029321
$\frac{1}{8}$	0.3464089	0.3635393	−0.0242705	−0.0249304	0.0006599
$\frac{1}{15}$	0.3560741	0.3680364	−0.0118053	−0.0119622	0.0001569
$\frac{1}{32}$	0.3620552	0.3679177	−0.0058242	−0.0058626	0.0000382
$\frac{1}{64}$	0.3649865				

从表中可以看出：欧拉方法的截断误差为 $O(h)$，而外推方法的截断误差为 $O(h^2)$；用外推公式(5.116)估计欧拉方法的截断误差与误差 $y(1)-y(1;h)$ 很接近，且步长越小，近似程度越好.

5.5.4 关于方法阶和步长的选择

如何选择初值问题(5.1)(5.2)的数值解法？基本原则是既要满足精度要求又要计算量少. 为此，就必需合理地选择方法以及阶数和步长. 但这也是很困难的问题，我们只能提供一些基本原则. 更深入的介绍可参阅有关文献.

首先，注意到近似解的误差不仅依赖于步长的大小，也和解的可微程度有关. 通常，方法的阶数不应超过方程(5.1)解的可微次数，即若 $f(x,y)$ 为 p 次可微，则方法的阶数不应超过 $p+1$. 对可微性较差的 $f(x,y)$，只能用低阶方法如欧拉方法等，如精度不够，可通过缩小步长或用外推方法提高精度. 其次要注意高阶方法一般较低阶方法稳定性差，因此很高阶的方法一般是不适用的.

在确定了方法及其阶数后，原则上可以用理论误差估计式确定步长，但是一般说来是不适用的，因为这种估计将误差过分地放大. 通常利用截断误差主项来确定步长，即为使误差不超过 ϵ，只需选取 h，使其截断误差主项不超过 ϵ 而接近 ϵ，然后利用外插技巧在计算中不断调整步长以减少计算量并达到误差要求，对于予校法则可直接利用在计算中提供的误差主项来选取步长.

确定步长时，还应当注意方法的绝对稳定性. 如果是绝对稳定的，还得选取 h 使 $\bar{h}=\mu h$ 或 $\bar{h}=\frac{\partial f}{\partial y}\cdot h$ 属于绝对稳定区间.

最后应当指出，一阶方程初值问题的数值解法，可以推广到一阶微分方程组、高阶微分方程初值问题甚至边值问题，限于篇幅，不一一赘述.

目前各种数值解法都有一些标准程序和软件，供计算使用.

第五章　习　题

1. 用欧拉方法分别求初值问题 $y'=5y,y(0)=1$ 及 $y'=-5y,y(0)=1$ 在 $x=1$ 处的数值解，取步长为 $\frac{1}{10},\frac{1}{20}$.

(1) 观察两个初值问题准确解与数值解在 $x=1$ 处的差是否满足误差估计(5.23)

(2)第二个初值问题在步长缩小后精度是否提高?

2. 仿照一阶方程情形构造方程组

$$\begin{cases} y_1' = f_1(x,y_1,y_2) \\ y_2' = f_2(x,y_1,y_2) \end{cases}$$

初值问题的欧拉方法.

3. 对初值问题 $y'=y-x,y(0)=2$，用三阶的 $R-K$ 方法：

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{6}(k_1+4k_2+k_3)$$

其中
$$k_1=f(x_m,y_m)$$
$$k_2=f(x_m+\frac{h}{2},y_m+\frac{h}{2}k_1)$$
$$k_3=f(x_m+h,y_m-hk_1+2hk_2)$$

以 $h=0.1$ 求 $y(0.3)$的近似值.

4. 对初值问题 $y'=\frac{4x}{y}-xy,y(0)=3$ 用四阶经典的 $R-K$ 方法($h=0.1$)：

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{6}(k_1+2k_2+3k_3+k_4)$$

其中
$$k_1=f(x_m,y_m)$$

$$k_2 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1)$$

$$k_3 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_2)$$

$$k_4 = f(x_m + \frac{h}{2}, y_m + hk_3)$$

及改进的欧拉方法($h=0.05$)求 $y(0.3)$的近似值.

5. 验证用中点法,Heun 方法及改进的欧拉方法求解初值问题 $y'=-y+x+1, y(0)=1$ 时,对任意步长 h,都得到同样的近似值,试解释其原因.

6. 试证明由 $y_{m+1}=y_m+\frac{h}{6}[4f(x_m,y_m)+2f(x_{m+1},y_{m+1})+hf'(x_m,y_m)]$确定的隐式单步方法的阶数为 3.

7. 试证明中点法 $y_{m+1}=y_m+hk, k=f(x_m+\frac{h}{2}), y_m+\frac{h}{2}f(x_m,y_m)$是二阶的,并计算其误差主项.

8. 确定常数 α,β,使方法

$$y_{m+3}-y_m+\alpha(y_{m+2}-y_{m+1})=h\beta(f_{m+2}+f_{m+1})$$

为四阶的,并求出误差主项系数.

9. 用三阶的阿当斯显式和隐式方法分别解初值问题

$y'=5y, y(0)=0$ 和 $y'=-5y, y(0)=1$. 取步长为$\frac{1}{10},\frac{1}{20}$,观察准确解与数值解在 $x=1$ 处的误差,并与欧拉方法计算结果作比较.

10 如果 $\rho(\lambda)=\lambda^3-\lambda^2+\frac{\lambda}{4}-\frac{1}{4}$,求 $\sigma(\lambda)$,使得 $\sigma(\lambda)$为二次多项式且方法为三阶,并求出误差主项系数.

11. 求二阶隐式方法

$$y_{m+1}=y_m+\frac{h}{2}(k_1+k_2)$$

$$k_1=f(x_m,y_m)$$

$$k_2 = f\left(x_m + h, y_m + \frac{h}{2}(k_1 + k_2)\right)$$

的误差主项，绝对稳定区域.

12. 试求系数 a,b,c 使三步方法

$$y_{m+3} = y_m + h(af_{m+2} + bf_{m+1} + cf_m)$$

的阶数尽可能高，并写出其局部截断误差.

13. 分别用二阶的阿当斯显式方法和隐式方法、阿当斯予校法解初值问题 $y' = \frac{1}{x}(y + y^2)$ $y(1) = -2$, $1 \leqslant x \leqslant 3$.
取 $h = 0.5$，用改进的欧拉方法求附加初值 y_1.

14. 用四阶经典的 $R-K$ 方法求解方程初值问题

$$\begin{cases} y_1' = 3y_1 + 2y_2 & y_1(0) = 0 \\ y_2' = 4y_1 + y_2 & y_2(0) = 1 \end{cases}$$

取 $h = 0.1$，$0 \leqslant x \leqslant 0.4$.

15. 用三级 $R-K$ 方法

$$y_{m+1} = y_m + \frac{h}{4}(k_1 + 3k_3)$$

$$k_1 = f(x_m, y_m)$$

$$k_2 = f\left(x_m + \frac{h}{2}, y_m + \frac{h}{2}k_1\right)$$

$$k_3 = f\left(x_m + \frac{2}{3}h, y_m + \frac{2}{3}hk_2\right)$$

求解初值问题：$y'' - 2y' + 2y = e^{2x}\sin x$ $(0 \leqslant x \leqslant 0.2)$，
$y(0) = -0.4$，$y'(0) = -0.6$. 取 $h = 0.1$.

16. 给出由下列多项式定义的 PECE 算法（米勒方法）并计算误差主项：

$$p:\ \rho^*(\lambda) = \lambda^4 - 1, \qquad \sigma^*(\lambda) = \frac{4}{3}(2\lambda^3 - \lambda^2 + 2\lambda)$$

$$c:\ \rho(\lambda) = \lambda^2 - 1, \qquad \sigma(\lambda) = \frac{1}{3}(\lambda^2 + 4\lambda + 1).$$

17. 在上题中，将校正算法的特征多项式换成

$$c: \rho(\lambda) = \lambda^3 - \frac{9}{8}\lambda^2 + \frac{1}{8} \qquad \sigma(\lambda) = \frac{3}{8}(\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda)$$

时称为哈明算法，试给出其 $PECE$ 算法，并计算它的误差主项.

附录 I　拉普拉斯(Laplace)变换及其应用

一　拉普拉斯变换定义及其基本性质

1° 定义：如果在实变数 $x\geqslant 0$ 上有定义的函数 $f(x)$ 使积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx}f(x)dx = \lim_{T\to+\infty}\int_0^T e^{-sx}f(x)dx \tag{1}$$

对于已给的一些 s(这里 s 一般取复数)存在，则称积分

$$F(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx}f(x)dx \tag{2}$$

为函数 $f(x)$ 的**拉普拉斯变换**(简称 L－变换)并记为 $F(s)=\mathcal{L}[f(x)]$

2° 存在条件.

如果 $f(x)$ 在 $x\geqslant 0$ 的每个有限区间上分段连续，且存在着常数 $M>0,\sigma\geqslant 0$，使对于所有的 $x\geqslant 0$ 都有

$$|f(x)| \leqslant Me^{\sigma x} \tag{3}$$

则拉普拉斯积分(1)在上半平面 $R_e S>\sigma$ 上一定存在，即函数 $f(x)$ 的 L－变换存在，并称 $f(x)$ 为**原函数**，而把它的 L－变换称为**象函数**. 原函数 $f(x)$ 与象函数 $F(s)$ 有一一对应的关系.

3° 基本性质

在这里只介绍在解方程中用到的一些基本性质。

(i) **线性性质**　如果 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是原函数，α 和 β 是任意两个(复)常数，则有关系式

$$\mathcal{L}[\alpha f(x)+\beta g(x)] = \alpha\mathcal{L}[f(x)]+\beta\mathcal{L}[g(x)] \tag{4}$$

利用拉普拉斯积分(1)容易直接验证这个关系式成立. 根据这个性质，我们可以推导出若干个原函数线性组合的 L－变换.

(ii) **原函数的微分性质**. 如果原函数 $f(x)$ 及其直到 n 阶的导

数都是原函数，则有

$$\mathfrak{L}[f'(x)]=S\mathfrak{L}[f(x)]-f(0)$$

更一般地有

$$\mathfrak{L}[f^{(n)}(x)]=S^n\mathfrak{L}[f(x)]-S^{n-1}f(0)-S^{n-2}f'(0)\cdots\cdots f^{(n-1)}(0) \tag{4}$$

(iii) **象函数的微分性质** 如果 $F(s)$ 是 $f(x)$ 的 L－变换，则 $F(s)$ 作为 S 的函数有

$$F'(s)=-\int_0^{\infty}x(f(x)e^{-sx}dx=\mathfrak{L}[-xf(x)]$$

更一般地有

$$F^{(n)}(s)=(-1)^n\int_0^{\infty}x^nf(x)e^{-sx}dx=(-1)^n\mathfrak{L}[x^nf(x)] \tag{5}$$

(iv) **象函数的自变量平移** 设 a 为任意常数，则

$$F(s+a)=\mathfrak{L}[e^{-ax}f(x)] \tag{6}$$

利用 L－变换的定义和分部积分，不难直接证明性质(i)－(iv)。

有了这些基本性质，可以不必进行冗长的积分计算就能计算出许多函数的 L－变换。

例 1 对于 $f(x)\equiv1$ $(x\geqslant0)$

$$F(s)=\mathfrak{L}[1]=\int_0^{\infty}e^{-sx}dx=\lim_{T\to\infty}\int_0^Te^{-sx}dx$$

$$=\lim_{T\to+\infty}(\frac{1}{s}-e^{-sT})=\frac{1}{s}(Res>0)$$

由性质(iii)可以直接得到 $\mathfrak{L}[x]=-\frac{d\mathfrak{L}[1]}{ds}=\frac{1}{s^2}(Res>0)$ 更一般可以得到 $\mathfrak{L}[x^n]=(-1)^n\frac{d^n\mathfrak{L}[1]}{ds^n}=\frac{n!}{s^{n+1}}(Res>0)$

例 2 求 $f(x)=\sin\omega x$ 的 L－变换

解　$F(s)=\int_0^{\infty}\sin\omega x\cdot e^{-sx}dx$，而 $\sin\omega x=\frac{1}{2i}[e^{i\omega x}-e^{-i\omega x}]$，其中 i 为虚数单位. 依定义

$$F(s)=\mathcal{L}[\sin\omega x]=\lim_{T\to\infty}\int_0^T\frac{1}{2i}(e^{i\omega x}-e^{-i\omega x})e^{-sx}dx$$

$$=\frac{1}{2i}[\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-(s-i\omega)x}dx-\lim_{T\to\infty}\int_0^T e^{-(s+i\omega)x}dx]$$

$$=\frac{1}{2i}(\frac{1}{s-i\omega}-\frac{1}{s+i\omega})=\frac{\omega}{s^2+\omega^2}(Res>0).$$

利用性质(iv)可以得到 $\mathcal{L}[e^{ax}\sin\omega x]=F(s-a)=\frac{\omega}{(s-a)^2+\omega^2}(Res>a)$，而由性质(iii)则有 $\mathcal{L}[x\sin\omega x]=-F'(s)=\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}(Res>0)$ 及 $\mathcal{L}[xe^{ax}\sin\omega x]=-F'(s-a)=\frac{2\omega(s-a)}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}(Res>a)$ 等.

类似地，我们可以得到 $\mathcal{L}[\cos\omega x]=\frac{s}{s^2+\omega^2}(Res>0)$；$\mathcal{L}[e^{ax}\cos\omega x]=\frac{s-a}{(s-a)^2+\omega^2}(Res>a)$ 及 $\mathcal{L}[xe^{ax}\cos\omega x]=\frac{(s-a)^2-\omega^2}{[(s-a)^2+\omega^2]^2}(Res>a)$ 等.

二　拉普拉斯逆变换

在运用L－变换法求解常系数线性微分方程(组)时，我们要碰到如何根据象函数 $F(s)$ 去求原函数 $f(x)$ 的问题，这种由复变数的表达式 $F(s)$ 去推导实变数表达式 $f(x)$ 的数学运算。叫做**拉普拉斯逆变换**(简称L－逆变换)一般记L－逆变换的符号为 $\mathcal{L}^{-1}$，因而有

$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=f(x)$$

根据复变函数论的有关知识，通过 $F(s)$ 可以得到 $f(x)$ 的表达式：

$$f(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty}F(s)e^{sx}dx\quad(x>0)\tag{7}$$

式中 $c=Res>\sigma(\sigma\geqslant 0$ 为实常数)称为**收敛横坐标**.

直接由(7)计算 $f(x)$ 是比较复杂的，在具体应用时往往不必去积分(7)而只要直接运用拉普拉斯变换表就够了. 当所研究的变换式 $F(s)$ 不能在拉普拉斯变换表中找到时，一般地，也只要运用部份分式展开法，将 $F(s)$ 写成那些已知的 L－逆变换的 s 的简单函数即可.

如果 $F(s)$ 可以分解成如下的形式：

$$F(s)=F_1(s)+F_2(s)+\cdots+F_n(s)$$

并且 $F_i(s)(1\leqslant i\leqslant n)$ 的 L－逆变换容易求出，那么

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}[F(s)]&=\mathcal{L}^{-1}[F_1(s)]+\mathcal{L}^{-1}[F_2(s)]+\cdots+\mathcal{L}^{-1}[F_n(s)]\\&=f_1(x)+f_2(x)+\cdots+f_n(x)\end{aligned}$$

其中 $f_i(x)$ 为 $F_i(s)(1\leqslant i\leqslant n)$ 的 L－逆变换.

例 3 若 $F(s)=\dfrac{s}{s^2-4s+9}$ 求其逆变换.

解 利用部份分式展开法，$F(s)$ 可展开成：

$$F(s)=\frac{s}{s^2-4s+9}=\frac{s-2}{(s-2)^2+5}+\frac{2}{(s-2)^2+5}$$

而 $\mathcal{L}[\cos\sqrt{5}x]=\dfrac{s}{s^2+5}$，$\mathcal{L}[\sin\sqrt{5}x]=\dfrac{\sqrt{5}}{s^2+5}$，利用 L－变换的基本性质有：$\mathcal{L}[e^{2x}\cos\sqrt{5}x]=\dfrac{s-2}{(s-2)^2+5}$，$\mathcal{L}[e^{2x}\sin\sqrt{5}x]=\dfrac{\sqrt{5}}{(s-2)^2+5}$，从而

$$\begin{aligned}f(x)&=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]\\&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s-2}{(s-2)^2+5}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{(s-2)^2+5}\right]\\&=e^{2x}\cos\sqrt{5}x+\frac{2}{\sqrt{5}}e^{2x}\sin\sqrt{5}x\end{aligned}$$

$$= e^{2x}(\cos\sqrt{5}\,x + \frac{2}{\sqrt{5}}e^{2x}\sin\sqrt{5}\,x)$$

例 4　$F(s)=\dfrac{s+3}{s^2+3s+2}$　求逆变换 $f(x)$.

解

$$F(s)=\frac{s+3}{s^2+3s+2}=\frac{2}{s+1}-\frac{1}{s+2}$$

$$f(x)=\mathcal{L}^{-1}[F(s)]=\mathcal{L}^{-1}[\frac{2}{s+1}]-\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{s+2}]$$

$$=2e^{-x}-e^{-2x}\quad(x\geqslant 0).$$

三　利用 L－变换求解 n 阶常系数线性微分方程

设给定 n 阶常系数线性方程的初值问题

$$\begin{cases} L[y]=y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x) & (8)\\ y(0)=y_0,y'(0)=y_0',\cdots,y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)} & (9)\end{cases}$$

其中 $a_i(1\leqslant i\leqslant n)$ 为常数，而 $f(x)$ 连续且为原函数.

现介绍用拉普拉斯变换法求初值问题(8)(9)的解. 其求解步骤如下：

(i) 对方程(8)的两边施以 L－变换，并利用初值条件(9)和变换的线性性质，把关于未知函数 $y(x)$ 的微分方程变为关于象函数 $Y(s)=\mathcal{L}[y(x)]$ 的代数方程；

(ii) 解关于 $Y(s)$ 的代数方程得 $Y(s)=g(s)$.

(iii) 通过查拉普拉斯变换表(或直接计算)求出原函数 $y(x)$，则 $y(x)$ 就是初值问题(8)、(9)的解. 下面举例说明.

例 5　求方程 $y'''+3y''+3y'+y=1$ 满足初始条件 $x(0)=x'(0)=x''(0)=0$ 的解.

解　对方程两边施以 L－变换得

$$(s^3+3s^2+3s+1)Y(s)=\frac{1}{s}$$

由此得 $Y(s)=s^{-1}(s+1)^{-3}$，把 $Y(s)$ 分解成部份分式

$$Y(s)=\frac{1}{s(s+1)^3}=\frac{1}{s}-\frac{1}{s+1}-\frac{1}{(s+1)^2}-\frac{1}{(s+1)^3}$$

查表查得

$$y(x)=\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s(s+1)^3}\right]=1-e^{-x}-xe^{-x}-\frac{1}{2}x^2e^{-x}$$

这就是初值问题的解.

例 6 求解初值问题 $y''+a^2y=b\sin ax$；$y(0)=y_0$，$y'(0)=y_0'$ 其中 a、b 为非零常数.

解 对方程施以 L－变换得到

$$s^2Y(s)-y_0s-y_0'+a^2Y(s)=\frac{ab}{s^2+a^2}$$

即
$$(s^2+a^2)Y(s)=\frac{ab}{s^2+a^2}+y_0s+y_0'$$

$$Y(s)=\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}+\frac{y_0s}{s^2+a^2}+\frac{y_0'}{s^2+a^2}$$

由于
$$\frac{ab}{(s^2+a^2)^2}=\frac{b}{2a}\left[\frac{1}{s^2+a^2}-\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right],$$

所以

$$y(x)=\mathscr{L}^{-1}[Y(s)]=\frac{b}{2a^2}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{a}{s^2+a^2}\right]-\frac{b}{2a}\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s^2-a^2}{(s^2+a^2)^2}\right]$$
$$+y_0\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+a^2}\right]+y_0'\mathscr{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^2+a^2}\right]$$
$$=\frac{1}{2a^2}[(b+2ay_0')\sin ax+a(2ay_0-bx)\cos ax].$$

例 7 求解初值问题 $y''+2y'+y=e^{-x}$，$y(1)=y'(1)=0$.

解 先令 $t=x-1$，将原初值问题化为

$$y''+2y'+y=e^{-(t+1)},y(0)=y'(0)=0.$$

再对方程两边施以 L－变换得到

$$(s^2+2s+1)Y(s)=\frac{1}{s+1}\cdot\frac{1}{e}.$$

因此 $Y(s)=(s+1)^{-3}$，从而 $y(t)=\mathcal{L}^{-1}[(s+1)^{-3}]=\frac{1}{2e}t^2e^{-t}$. 换回原来的变量得：

$$y(x)=\frac{1}{2e}(x-1)^2e^{-(x-1)}=\frac{1}{2}(x-1)^2e^{-x}$$

这就是所要求的解.

细心的读者会发现：当对方程(8)施以 L－变换，得到的关于 $Y(s)$ 的代数方程为：

$$F(s)Y(s)=A(s)+B(s) \tag{10}$$

其中 $F(s)=s^n+a_1s^{n-1}+\cdots+a_n$ 是方程(8)的特征多项式；$A(s)=s^{n-1}y_0+s^{n-2}y_0'+\cdots+y_0^{(n-1)}$；而 $B(s)=\mathcal{L}[f(x)]$. 因此在用拉普拉斯变换法求解初值问题(8)、(9)时，可以直接应用公式(10)进行计算.

四　利用 L－变换求解一阶常系数线性方程组

L－变换不仅可以解 n 阶常系数线性微分方程也可以解一阶常系数线性方程组. 为此，把实变量函数的 L－变换的概念推广到 n 维向量 $\vec{f}(x)$. 定义

$$\mathcal{L}[\vec{f}(x)]=\int_0^{+\infty}e^{-sx}\vec{f}(x)\,dx$$

为 n 维向量函数 $\vec{f}(x)$ 的 L－变换.

考虑常系数线性方程组

$$\vec{y}'=A\vec{y}+\vec{f}(x) \tag{11}$$

其中 A 为 $n\times n$ 常数矩阵，$\vec{f}(x)$ 为 $0\leqslant x<+\infty$ 上的连续的 n 维向量函数. 若存在常数 $M>0$ 及 $\sigma>0$，使不等式

$$\|\vec{f}(x)\|\leqslant Me^{\sigma x} \tag{12}$$

对充分大的 x 成立，则初值问题

$$\vec{y}' = A\vec{y} + \vec{f}, \quad \vec{y}(0) = \vec{\eta}$$

的解 $\vec{\varphi}(x)$ 及 $\vec{\varphi}'(x)$ 与 $\vec{f}(x)$ 一样存在着 L－变换，函数 L－变换的基本性质对于向量函数的 L－变换也成立.

设 $\vec{f}(x)$ 为 n 维连续向量且存在 L－变换. 记 $Y(s) = \mathcal{L}[\vec{y}(x)] = (Y_1(s), Y_2(s), \cdots, Y_n(s))^T$，其中 $Y_i(s) = \mathcal{L}[y_i(x)]$. 对方程组(11)施以 L－变换得

$$sY(s) - \vec{y}(0) = AY(s) + F(s)$$

或
$$(sE - A)Y(s) = F(s) + \vec{\eta} \tag{13}$$

由(13)可以得到 $Y(s)$ 的表达式，再查询拉普拉斯变换表就能得到初值问题的解 $\vec{y}(x)$.

例 8 求方程组 $\vec{y}' = A\vec{y}$ 满足 $y_1(0) = 0, y_2(0) = 1$ 的解，其中

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}, \quad \vec{y} = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{bmatrix}.$$

解 记 $Y_1(s) = \mathcal{L}[y_1(x)], Y_2(s) = \mathcal{L}[y_2(x)]$，对方程组两边施以 L－变换得方程组：

$$\begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ 1 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

解出 $Y_1(s) = \dfrac{1}{(s-3)^2}, Y_2(s) = \dfrac{s-2}{(s-3)^2} = \dfrac{1}{s-3} + \dfrac{1}{(s-3)^2}$ 取逆变换即得解 $\vec{\varphi}(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x))^T$，其中

$$\varphi_1(x) = xe^{3x}, \varphi_2(x) = e^{3x} + xe^{3x} = (x+1)e^{3x}$$

为了得到方程组的基解矩阵，可以求方程组满足 $y_1(0) = 1, y_2(0) = 0$ 的解 $\vec{\psi}(x) = (\psi_1(x), \psi_2(x))^T$. 如前一样，我们得到方程组：

$$\begin{bmatrix} s-2 & -1 \\ 1 & s-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

其解为 $Y_1(s) = \dfrac{s-4}{(s-3)^2} = \dfrac{1}{s-3} - \dfrac{1}{(s-3)^2}, Y_2(s) = \dfrac{-1}{(s-3)^2}$，取逆变

换得到 $\psi_1(x)=(1-x)e^{3x}$，$\psi_2(x)=-xe^{3x}$. 由此可得基解矩阵

$$\Phi(x)=\begin{bmatrix}\varphi_1(x) & \psi_1(x)\\ \varphi_2(x) & \psi_2(x)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}xe^{3x} & (1-x)e^{3x}\\ (x+1)e^{3x} & -xe^{3x}\end{bmatrix}$$

类似于例 8 的做法也可以利用 L—变换求齐次 n 阶常系数线性方程组 $L[y]=0$ 的基本解组.

利用 L—变换，还可以直接去求解高阶常系数线性方程组，而不必先把它化为一阶的常系数线性方程组.

例 10　试求方程组

$$\begin{cases}y_1''-2y_1'-y_2'+2y_2=0\\ y_1'-2y_1+y_2'=2e^{-x}\end{cases}$$

满足初值条件 $y_1(0)=3$，$y_1'(0)=2$，$y_2(0)=0$ 的解 $\varphi(x)=(\varphi_1(x),\varphi_2(x))^T$.

解　令 $Y_1(s)=\mathcal{L}[y_1(x)]$，$Y_2(s)=\mathcal{L}[y_2(x)]$，对方程组取 L—变换，得到

$$\begin{cases}[s^2Y_1(s)-3s-2]-2[sY_1(s)-3]-sY_2(s)+2Y_2(s)=0\\ [sY_1(s)-3]-2Y_1(s)+sY_2(s)=\dfrac{-2}{s+1}\end{cases}$$

整理后得到

$$\begin{cases}(s^2-2s)Y_1(s)-(s-2)Y_2(s)=3s-4\\ (s-2)Y_1(s)+sY_2(s)=\dfrac{3s+1}{s+1}\end{cases}$$

解上面方程组，即有

$$Y_1(s)=\frac{3s^2-4s-1}{(s+1)(s-1)(s-2)}=\frac{1}{s-1}+\frac{1}{s+1}+\frac{1}{s-2}$$

$$Y_2(s)=\frac{2}{(s+1)(s-1)}=\frac{1}{s-1}-\frac{1}{s+1}$$

再取逆变换就得到解

$$\varphi_1(x)=e^x+e^{-x}+e^{2x},\quad \varphi_2(x)=e^x-e^{-x}$$

从上面的例子我们可以看出，应用L一变换可以把求解常系数线性方程(组)的问题化为求解线性代数方程(组)的问题，如果方程的阶数不很高的话，那么它的解是容易求出来的，特别是求非齐次常系数线性方程(组)的特解十分快捷. 这就是利用L一变换求解的好处.

最后必须指出：并非所有的常系数线性微分方程(组)都能用L一变换求解，仅当$f(x)$(或$\mathcal{F}(x)$)为原函数才能进行。

为方便起见，现将求解常系数线性方程(组)的初值问题时经常遇到的L一变换列成一简表如下.

附录 Ⅱ

拉普拉斯变换表

序号	原函数	象函数 $F(s)=\int_0^{\infty} e^{-sx} f(x)dx$	$F(s)$的定义域
1	1	$\frac{1}{s}$	$Res>0$
2	x	$\frac{1}{s^2}$	$Res>0$
3	x^n	$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$Res>0$
4	e^{ax}	$\frac{1}{s-a}$	$Res>Rea$
5	xe^{ax}	$\frac{1}{(s-a)^2}$	$Res>Rea$
6	$x^n e^{ax}$	$\frac{n!}{(s-a)^{n+1}}$	$Res>Rea$
7	$\sin\omega x$	$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$Res>0$
8	$\cos\omega x$	$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$Res>0$
9	$\mathrm{sh}\omega x$	$\frac{\omega}{s^2-\omega^2}$	$Res>\|\omega\|$
10	$\mathrm{ch}\omega x$	$\frac{s}{s^2-\omega^2}$	$Res>\|\omega\|$
11	$x\sin\omega x$	$\frac{2s\omega}{(s^2+\omega^2)^2}$	$Res>0$
12	$x\cos\omega x$	$\frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$	$Res>0$
13	$e^{\lambda x}\sin\omega x$	$\frac{\omega}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$Res>\lambda$
14	$e^{\lambda x}\cos\omega x$	$\frac{s-\lambda}{(s-\lambda)^2+\omega^2}$	$Res>\lambda$
15	$xe^{\lambda x}\sin\omega x$	$\frac{2\omega(s-\lambda)}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	$Res>\lambda$
16	$xe^{\lambda x}\cos\omega x$	$\frac{(s-\lambda)^2-\omega^2}{[(s-\lambda)^2+\omega^2]^2}$	$Res>\lambda$

习 题 答 案

第一章

1. (1)一阶线性;(2)二阶非线性;(3)一阶非线性;(4)一阶非线性;(5)二阶线性;(6)一阶非线性;(7)三阶非线性;(8)一阶非线性.

4. (1)$y=x^2+c$;(2)$y=x^2+3$;(3)$y=x^2+4$;(4)$y=x^2+\frac{5}{3}$.

6. 60 分钟.

7. (1)$y'=\frac{y+x\text{tg}\alpha}{x-y\text{tg}\alpha}$;

(2)$(x-\frac{y}{y'})^2+(y-xy')^2=l^2$;

(3)$|(y-xy')(x-\frac{y}{y'})|=c$, $c>0$ 为常数;

(4)$y-xy'=\frac{x+y}{2}$.

8. $m\frac{dv}{dt}=-kv^2-mg \qquad v(t_0)=v_0$.

9. 浓度 $N(t)=\frac{S(t)}{200}=\frac{S_0}{200}e^{-0.02t}+\frac{1}{2}(1-e^{-0.02t})$

其中 $S(t)$ 表示 t 时刻容器内含盐总量.

第二章

1. $\frac{1}{y}=\ln(1+x)+1$.

2. $1+y^2=\frac{cx^2}{1+x^2}$.

3. $\text{tg}x\cdot\text{tg}y=c$, $y=0$ 或 $x=0$.

4. $y=x\sin(\ln|x|+c)$.

5. $3e^{-y^2} - 2e^{3x} = c$.

6. $y = c(\ln|y| - \ln|x| + 1)$ 及 $x = ey$.

7. $y = \mathrm{arctg}(y+x) + c$

8. $y^2 + x^2 - xy - x - y = \tilde{c}$ （$\tilde{c}$ 为可包含 C 的常数）

9. $x + 4y + 1 = \frac{3}{2}\mathrm{tg}6(x+c)$

10. $(y^2 - x^2 + 2)^5 = c(x^2 + y^2)$

11. (1) $y = cx\sqrt{2+x^2y^2}$, $y = 0$ 或 $x = 0$.

(2) $\ln\left|\frac{y}{x}\right| = \frac{1}{4}x^2y^2 - c$

12. $y = x^n(c + e^x)$

13. $y\cos x - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x = c$

14. $x = y(c + \frac{1}{2}y^2)$, $y = 0$

15. $x^3 e^{-y} = c - \frac{1}{2}x^2$

16. $y = e^x(1+x)$

17. $y = (cx^2 - \frac{x}{2})^2$, $y = 0$

18. $y = \frac{x}{c - \ln|x|}$, $y = 0$

19. $e^{\frac{x}{y}} + \ln|x| = c$

20. $x^3 - 3y^4 = cy^3$, $y = 0$

21. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2x}}$

22. $\varphi(t) = e^{\varphi'(0)t}$

23. $x = \mathrm{tg}x'(0)t$

24. (1) $t = \ln 2$; (2) $t = \ln 2$

25. $m\frac{dv}{dt} = k_1t^3 - k_2tv$, $v(0) = 0$.

$$v(t)=\frac{2mk_1}{k_2^2}\exp(-\frac{k_2}{2m}t^2)+\frac{k_1}{k_2}(t^2-\frac{2m}{k_2})$$

26. $\frac{dv}{dt}=kv$, $\quad v(0)=\frac{25}{9}m/秒$;

$$v(t)=\frac{252}{9}\exp(\frac{\ln3-\ln5}{20}t),\qquad v(120)\approx0.1296m/秒$$

27. $y=xy'+x$; $y=cx-x\ln|x|$

28. (1) $\ln|\frac{y}{x}|-\frac{xy}{x-y}=c$

(2) $\cos\frac{x}{y}-\sin\frac{y}{x}-x+\frac{1}{y}=c$

32. $ye^{x^2}=c+x$

33. $x\sin(x+y)=c$

34. $x^4y^2+x^3y^5=c$

35. $\frac{1}{2}x^2y^2+\ln x-\ln y=c$，$y=0$

36. $\frac{x}{y}-2\ln x+3\ln y=c$，$y=0$

37. $y=\frac{1}{2}(x+c)^2+\frac{c^2}{2}$，奇解 $y=\frac{x^2}{4}$

38. $\begin{cases}x=p^{-3}+p^{-2}\\ y=\frac{3}{2}p^{-2}-\frac{2}{p}+c\end{cases}$，$\qquad p$ 为参数.

39. $\begin{cases}x=(t+1)e^t+c\\ y=t^2e^t\end{cases}$，$\qquad t$ 为参数

40. $y=cx+c+c^2$，$y=-\frac{(x+1)^2}{4}$

41. $y^2=2cx+c^3$

42. $(y-\frac{x^2}{2}-c)(y-ce^x)=0$

43. $x=\frac{1}{6}c_1t^3+\frac{1}{2}c_1^3t^2+c_2t+c_3$

44. $\begin{cases} t=\dfrac{a^2}{4}\sin p\cos^3 p+\dfrac{3a^2}{8}\sin p\cos p+\dfrac{3a^2}{8}+c_1 \\ x=-\dfrac{a^2}{4}\cos^4 p+c_2 \end{cases}$ p 为参数

45. $e^x=\dfrac{1}{2}c_1t^2+c_2, x=0$

46. $x=-2c_1t+c_2t^2$

47. $m\dfrac{d^2s}{dt^2}=-k(\dfrac{ds}{dt})^2+mg, s(0)=0, s'(0)=0$

$s(t)=\dfrac{m}{k}\ln(ch\sqrt{\dfrac{kg}{m}}t)$

48. $x=\ln|\sin(y-c_1)|+c_2$

49. $f(x)=\dfrac{1}{x}(c+\dfrac{1}{2}x^2)$

50. (1) $y=e^x+\dfrac{1}{e^x+c}$；(2) $y=\sin x+\dfrac{1}{x+c}$；

(3) $xy=\dfrac{1}{c-\ln|x|}-1$；(4) $y=1+\dfrac{1}{x+ce^x}$

第三章

1. 取 $a=b=1 \quad h=1$

$\varphi_1(x)=\dfrac{1}{2}x^2$；$\varphi_2(x)=\dfrac{1}{2}x^5-\dfrac{1}{20}x^5$；$\varphi_3(x)=\dfrac{1}{2}x^5-\dfrac{1}{20}x^8+\dfrac{x^8}{160}-\dfrac{x^{11}}{4400}$；$|\varphi(\dfrac{1}{2})-\varphi_3(\dfrac{1}{2})|\leqslant\dfrac{1}{12}$. $|\varphi(1)-\varphi_3(1)|\leqslant\dfrac{1}{3}$.

2. $\varphi_1(x)=1+x-\dfrac{1}{3}x^3$；$\varphi_2(x)=1+x+x^2-\dfrac{1}{6}x^4-\dfrac{2}{15}x^5+\dfrac{1}{63}x^7$

$R:\{|x|\leqslant 1 \quad |y-1|\leqslant 1\}, M=4, L=4, h=\dfrac{1}{4}$

$|\varphi(\dfrac{1}{4})-\varphi_2(\dfrac{1}{4})|\leqslant\dfrac{1}{6}$.

3. $|y|\geqslant\sigma>0$, $|x|<+\infty$(σ 为任一正常数)；

通过(0,0)的一切解为 $y=0$ 及 $|y|=\begin{cases}0 & x\geqslant c\\ (x-c)^{\frac{3}{2}} & x>c,\end{cases}$ ($c\geqslant 0$ 为任意常数)

4. $\ln|\ln y|=x+c$ 及 $y=0$ 唯一性成立，但不满足存在唯一性定理条件。

9. (1) 对$\forall$ (x_0,y_0)，$y=\mathrm{tg}(x+\mathrm{arctg}y_0-x_0)$，$(-\frac{\pi}{2}+x_0-\mathrm{arctg}y_0, \frac{\pi}{2}+x_0-\mathrm{arctg}y_0)$；

(2) $y=\frac{1}{x}e^x(0,+\infty)$，

(3) $y=\begin{cases}x+c\sqrt{x^2-1} & |x|>1\\ x+c\sqrt{1-x^2} & |x|<1\end{cases}$ $c\neq 0$ 的常数，不能延拓

当 $c=0$，$y=x$ 时，可以延拓至 $x\pm1$.

11. $\frac{\partial\varphi}{\partial x_0}=-[p(x_0)y_0+Q(x_0)]\exp(\int_{x_0}^{x}p(s)ds)$

$\frac{\partial\varphi}{\partial y_0}=\exp(\int_{x_0}^{x}p(s)ds)$

$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=p(x)\varphi(x,x_0,y_0)+Q(x)$

12. $\frac{\partial y}{\partial x_0}=0$，$\frac{\partial y}{\partial y_0}=|x|$

13. $\left.\frac{\partial y}{\partial x_0}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=-p(x_0)y_0^2-q(x_0)y_0-R(x_0)$

$\left.\frac{\partial y}{\partial x_0}\right|_{\substack{x=x_0\\ y=y_0}}=1.$

14. (1)$y=-\frac{x^2}{4}+cx+c^2$；$y=\frac{-1}{2}x^2$；

(2) $\begin{cases} x=ce^{-p}-2p+2 \\ y=c(p-1)e^{-p}-2p^2+2 \end{cases}$ p 为参数

(3) $y=c(x+1)+c^2$; $\frac{1}{4}(x+1)^2+y=0$.

(4) $y=cx-e^c$; $y=x\ln x-x$.

15. $y=xy'\pm a\sqrt{1+y'^2}$; $x^2+y^2=a^2$

第四章

1. (1) $\vec{y}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -7x & -2 \end{bmatrix}\vec{y}+\begin{bmatrix} 0 \\ e^{-x} \end{bmatrix}$ $\vec{y}(1)=\begin{bmatrix} 7 \\ -2 \end{bmatrix}$;

(2) $\vec{y}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\vec{y}+\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ xe^x \end{bmatrix}$ $\vec{y}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$;

(3) $\vec{w}'=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 0 & -6 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 15 & 0 & 2 & -13 \end{bmatrix}\vec{w}+\begin{bmatrix} 0 \\ e^x \\ 0 \\ \cos x \end{bmatrix}$ $\vec{w}(0)=\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$.

3. $\vec{\varphi}_3(x)=(x-\frac{x^3}{3!},1-\frac{x^2}{2!})^T$.

4. $\vec{\varphi}(x)=(2x^2+\frac{x^4}{6}-x^2\ln x,2x+\frac{2}{3}x^3-2x\ln x)^T$.

13. $A(x)=\begin{bmatrix} \cos 2x & \frac{1}{2}\sin 2x-1 \\ \frac{1}{2}\sin^2 x+1 & \sin^2 x \end{bmatrix}$

15. $y=chx$, $y=shx$, $y=y_0chx+y_0'shx$.

16. $y=c_1e^x+c_2x-(x+1)^2$

17. (1) $y=c_1e^x+c_2e^{-x}+c_3e^{2x}+c_4e^{-2x}$;

(2) $y=(c_1+c_2x+c_3x^2)e^{ax}$;

(3) $y=c_1e^{2x}+c_2e^{-2x}+c_3x^2+c_4x+c_5$

18. (1) $a\neq 0, y=c_1e^{-ax}+c_2e^{ax}-\frac{1}{a^2}(x+1)$; $a=0$,

$$y=c_1+c_2x+\frac{x^2}{6}(x+3).$$

(2) $y=c_1e^{4x}+c_2e^{2x}+\frac{1}{3}e^x+\frac{1}{6}e^{2x}$

(3) $$y=\left(c_1\cos\frac{\sqrt{2}}{2}+c_2\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{-\frac{\sqrt{2}}{2}x}$$
$$+\left(c_3\cos\frac{\sqrt{2}}{2}+c_4\sin\frac{\sqrt{2}}{2}\right)e^{\frac{\sqrt{2}}{2}x}$$

(4) $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{x}{4}\sin x-\frac{1}{16}\cos 3x$

(5) $y=e^x(c_1\cos x+c_2\sin x)+\frac{x}{4}e^x(\cos x+x\sin x)$

(6) $y=c_1\cos x+c_2\sin x+\frac{x}{2}\sin x-\frac{1}{2\sin x}$

19. (1) $y=c_1x+c_2x^{-1}$;

(2) $y=x(c_1\cos(\ln|x|)+c_2\sin(\ln|x|))+x\ln|x|$.

20. $S=\frac{F-a}{b}t-\frac{(F-a)p}{b^2g}[1-\exp(-\frac{bg}{p}t)]$.

22. (1) $\exp Ax=\begin{bmatrix}3e^{-2x}-2e^{-3x} & 6e^{-2x}-6e^{-3x}\\ -e^{-2x}+e^{-3x} & -2e^{-2x}+3e^{-3x}\end{bmatrix}$

(2) $\exp Ax=$

$$\begin{bmatrix}\cos x+2\sin x & -\sin x & 2\sin x\\ \cos x-1-2\sin x & 1-\sin x & 2\sin x\\ \frac{1}{2}\cos x-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}\sin x & \frac{1}{2}-\frac{1}{2}(\cos x-\sin x) & \cos x-\sin x\end{bmatrix}$$

(3) $\exp Ax=$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2}(e^{3x}+e^{-x}) & \frac{1}{4}(e^{3x}-e^{-x})+xe^{-x} & \frac{3}{8}(e^{3x}-e^{-x})-\frac{x}{2}e^{-x} \\ \frac{1}{4}(e^{3x}-e^{-x}) & \frac{1}{8}(e^{3x}+7e^{-x})-\frac{x}{2}e^{-x} & \frac{3}{16}(e^{3x}-e^{-x})+\frac{x}{4}e^{-x} \\ \frac{1}{2}(e^{3x}-e^{-x}) & \frac{1}{4}(e^{3x}-e^{-x})-xe^{-x} & \frac{1}{8}(3e^{3x}+5e^{-x})+\frac{x}{2}e^{-x} \end{bmatrix}$$

23. (1) $\vec{\varphi}(x)=\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{x}-e^{-2x}-\frac{3}{2}e^{-3x}+1 \\ -\frac{1}{12}e^{x}+\frac{1}{3}e^{-2x}+\frac{3}{4}e^{-3x} \end{bmatrix}$

(2) $\vec{\varphi}(x)=\begin{bmatrix} -3e^{x}+4e^{-2x})-\frac{3}{2}e^{-3x}+\frac{1}{2}e^{x} \\ 3e^{x}-8e^{-2x}+\frac{9}{2}e^{-3x}+\frac{1}{2}e^{x} \\ -3e^{x}+16e^{-2x})-\frac{27}{2}e^{-3x}+\frac{1}{2}e^{x} \end{bmatrix}$

(3) $\begin{cases} y'''+6y''+11y'+6y=e^{x} \\ y(0)=y'(0)=y''(0)=0 \end{cases}$

$y=-3e^{x}+4e^{-2x}-\frac{3}{2}e^{-3x}+\frac{1}{2}e^{x}.$

24. $\begin{cases} z=e^{-x}-c_1\cos x+c_2\sin x-\frac{1}{2}(\cos x+\sin x) \\ y=-e^{-x}+(c_1-c_2)\sin x+(c_1+c_2)\cos x+\sin x \end{cases}$

25. $\varphi_1(x)=\frac{1}{4}e^{-2x}+\frac{2}{3}e^{-x}+\frac{1}{12}e^{2x},\varphi_2(x)=\frac{1}{3}(e^{-x}-e^{2x})$

27. $y=(\frac{1}{3}c_1x^3+c_2)e^{x}$

28. (1) $y=x-\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{1\cdot3\cdot5}+\cdots$

$+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}+\cdots$

(2) $\alpha=0, y_1=1+\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}}{2^k k!\ (4k-1)(4k-5)\cdots 11\cdot 7\cdot 3}$

$\alpha=\frac{1}{2}, y_2=x^{\frac{1}{2}}(1+\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{2^k k!\ (4k+1)(4k-3)\cdots 9\cdot 5\cdot 1})$

(3) $y=c_1(1-\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{4!}-\frac{x^3}{6!}+\cdots+(-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}+\cdots)$

$+c_2\sqrt{x}(1-\frac{x}{3!}+\frac{x^2}{5!}-\frac{x^3}{7!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{n-1}}{(2n-1)!}+\cdots)$

29. $y=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}(c_1\sin x+c_2\cos x)$

第一章 绪　论

§1.1 引　言

数学分析中所研究的函数，是反映客观世界物质运动过程中量与量之间的一种关系. 在大量的实际问题中，遇到稍为复杂的一些运动过程时，反映运动规律的量与量之间的关系（即函数）往往不能直接写出来，却比较容易建立这些变量与它们的导数（或微分）间的关系式，称为微分方程. 它是一类与代数方程、三角函数方程、差分方程等有限方程有着完全不同性质的方程. 在这类方程中，作为未知而要去求的是某个函数.

下述就是一些微分方程的例子.

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{1.1}$$

$$\frac{dy}{dx}+p(y)x=q(x) \tag{1.2}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2}+hx\frac{dx}{dt}+kx=F(t) \tag{1.3}$$

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}+h\frac{d\varphi}{dt}+\frac{g}{l}\sin\varphi=0 \tag{1.4}$$

$$F(x,y,y',\cdots,y^{(n)})=0 \tag{1.5}$$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\text{（热传导方程）} \tag{1.6}$$