高等代数附册

习题答案与提示

（第二版）

北京大学数学系几何与代数教研室代数小组　编

高等教育出版社

高等学校教学参考书

高等代数附册

习题答案与提示

（第二版）

北京大学数学系
几何与代数教研室代数小组

高等教育出版社

本书是北京大学数学系几何与代数教研室代数小组所编《高等代数》(第二版)一书的附册．内容为习题、答案与提示．第一部分把原书的习题集中起来了，第二部分是各章习题的答案或提示．

本书第二版除对第一版内容作了一些订正外，主要是根据《高等代数》第二版因增加章节而补充的习题，相应作出了提示和答案．

图书在版编目(CIP)数据

《高等代数》附册：习题答案与提示/北京大学数学系几何与代数教研室代数小组编．—2版．—北京：高等教育出版社，1992.6(2001重印)

ISBN 7-04-003753-X

Ⅰ.高…　Ⅱ.北…　Ⅲ.高等代数　Ⅳ.O15

中国版本图书馆CIP数据核字(95)第20284号

出版发行	高等教育出版社		
社　址	北京市东城区沙滩后街55号	邮政编码	100009
电　话	010—64054588	传　真	010—64014048
网　址	http://www.hep.edu.cn		
经　销	新华书店北京发行所		
印　刷	河北省香河县印刷厂	版　次	1979年3月第1版
开　本	850×1168　1/32		1992年6月第2版
印　张	4	印　次	2001年5月第11次印刷
字　数	90 000	定　价	4.40元

前　　言

应广大读者的要求，我们对我校编的《高等代数》一书中的习题和补充题作了答案和提示．计算题只给答案，有少数计算题因答案不是唯一的，就不给答案．对一部分证明题，特别是补充题给了提示．作提示的目的是启发思考、提供解题的方法和线索．但是解题的思路和方法是多种多样的，不要因为提示而束缚了思想．我们赞成刻苦钻研，独立思考，方法不拘一格，这样才能起到对内容加深理解和灵活运用的作用．

北京大学数学力学系
几何与代数教研室代数小组

1979.2.

目　　录

第一部分　习　　题

第二部分　答案与提示

第一部分 习 题

第一章 多 项 式

习 题

1. 用 $g(x)$除 $f(x)$，求商 $q(x)$与余式 $r(x)$:

   1) $f(x)=x^3-3x^2-x-1, g(x)=3x^2-2x+1$;

   2) $f(x)=x^4-2x+5, g(x)=x^2-x+2$.

2. m, p, q 适合什么条件时，有

   1) $x^2+mx-1 \mid x^3+px+q$;

   2) $x^2+mx+1 \mid x^4+px^2+q$.

3. 用综合除法求 $g(x)$除 $f(x)$的商 $q(x)$与余式 $r(x)$:

   1) $f(x)=2x^5-5x^3-8x, g(x)=x+3$;

   2) $f(x)=x^3-x^2-x, g(x)=x-1+2i$.

4. 用综合除法把 $f(x)$表成 $x-x_0$ 的方幂和，即表成

$$c_0+c_1(x-x_0)+c_2(x-x_0)^2+\cdots$$

的形式:

   1) $f(x)=x^5, x_0=1$;

   2) $f(x)=x^4-2x^2+3, x_0=-2$;

   3) $f(x)=x^4+2ix^3-(1+i)x^2-3x+7+i, x_0=-i$.

5. 求 $f(x)$与 $g(x)$的最大公因式:

   1) $f(x)=x^4+x^3-3x^2-4x-1, g(x)=x^3+x^2-x-1$;

   2) $f(x)=x^4-4x^3+1, g(x)=x^3-3x^2+1$;

3) $f(x)=x^4-10x^2+1$,

$g(x)=x^4-4\sqrt{2}x^3+6x^2+4\sqrt{2}x+1$.

6. 求 $u(x),v(x)$使 $u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x))$:

1) $f(x)=x^4+2x^3-x^2-4x-2$,

$g(x)=x^4+x^3-x^2-2x-2$;

2) $f(x)=4x^4-2x^3-16x^2+5x+9$,

$g(x)=2x^3-x^2-5x+4$;

3) $f(x)=x^4-x^3-4x^2+4x+1, g(x)=x^2-x-1$.

7. 设 $f(x)=x^3+(1+t)x^2+2x+2u$, $g(x)=x^3+tx+u$ 的最大公因式是一个二次多项式,求 t,u 的值.

8. 证明: 如果 $d(x)|f(x)$, $d(x)|g(x)$, 且 $d(x)$ 为 $f(x)$ 与 $g(x)$的一个组合,那么 $d(x)$是 $f(x)$与 $g(x)$的一个最大公因式.

9. 证明: $(f(x)h(x),g(x)h(x))=(f(x),g(x))h(x)$, ($h(x)$的首项系数为1).

10. 如果 $f(x),g(x)$不全为零,证明:

$$\left(\frac{f(x)}{(f(x),g(x))},\ \frac{g(x)}{(f(x),g(x))}\right)=1.$$

11. 证明: 如果 $f(x),g(x)$不全为零,且

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x),g(x)),$$

那么$(u(x),v(x))=1$.

12. 证明:如果$(f(x),g(x))=1$, $(f(x),h(x))=1$,那么

$$(f(x),g(x)h(x))=1.$$

13. 设 $f_1(x),\cdots,f_m(x),g_1(x),\cdots,g_n(x)$都是多项式,而且

$$(f_i(x),g_j(x))=1\ (i=1,2,\cdots,m;\ j=1,2,\cdots,n),$$

求证: $(f_1(x)f_2(x)\cdots f_m(x),g_1(x)g_2(x)\cdots g_n(x))=1$.

14. 证明: 如果$(f(x),\ g(x))=1$, 那么 $(f(x)g(x),\ f(x)+g(x))=1$.

15. 求多项式 x^n-1 在复数范围内和在实数范围内的因式分解.

16. 求下列多项式的公共根:

$f(x)=x^3+2x^2+2x+1$; $g(x)=x^4+x^3+2x^2+x+1$.

17. 判别下列多项式有无重因式:

1) $f(x)=x^5-5x^4+7x^3-2x^2+4x-8$;

2) $f(x)=x^4+4x^2-4x-3$.

18. 求 t 值使 $f(x)=x^3-3x^2+tx-1$ 有重根.

19. 求多项式 x^3+px+q 有重根的条件.

20. 如果 $(x-1)^2 | Ax^4+Bx^2+1$, 求 A, B.

21. 证明: $1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}$不能有重根.

22. 如果 a 是 $f'''(x)$的一个 k 重根, 证明 a 是

$$g(x)=\frac{x-a}{2}[f'(x)+f'(a)]-f(x)+f(a)$$

的一个 $k+3$ 重根.

23. 证明: x_0 是 $f(x)$的 k 重根的充分必要条件是 $f(x_0)=f'(x_0)=\cdots=f^{(k-1)}(x_0)=0$, 而 $f^{(k)}(x_0)\neq 0$.

24. 举例说明断语"如果 α 是 $f'(x)$的 m 重根, 那么 α 是 $f(x)$ 的 $m+1$ 重根"是不对的.

25. 证明: 如果 $(x-1) | f(x^n)$, 那么 $(x^n-1) | f(x^n)$.

26. 证明: 如果 $(x^2+x+1) | f_1(x^3)+xf_2(x^3)$, 那么

$$(x-1) | f_1(x), \ (x-1) | f_2(x).$$

27. 求下列多项式的有理根:

1) $x^3-6x^2+15x-14$;

2) $4x^4-7x^2-5x-1$;

3) $x^5+x^4-6x^3-14x^2-11x-3$.

28. 下列多项式在有理数域上是否可约?

1) x^2+1;

2) $x^4-8x^3+12x^2+2$;

3) x^6+x^3+1;

4) x^p+px+1，p 为奇素数;

5) $x^4+4kx+1$，k 为整数.

29. 用初等对称多项式表出下列对称多项式:

1) $x_1^2x_2+x_1x_2^2+x_1^2x_3+x_1x_3^2+x_2^2x_3+x_2x_3^2$;

2) $(x_1+x_2)(x_1+x_3)(x_2+x_3)$;

3) $(x_1-x_2)^2(x_1-x_3)^2(x_2-x_3)^2$;

4) $x_1^2x_2^2+x_1^2x_3^2+x_1^2x_4^2+x_2^2x_3^2+x_3^2x_4^2+x_2^2x_4^2$;

5) $(x_1x_2+x_3)(x_2x_3+x_1)(x_3x_1+x_2)$;

6) $(x_1+x_2+x_1x_2)(x_2+x_3+x_2x_3)(x_1+x_3+x_1x_3)$.

30. 用初等对称多项式表出下列 n 元对称多项式:

1) $\sum x_1^4$;

2) $\sum x_1^2x_2x_3$;

3) $\sum x_1^2x_2^2$;

4) $\sum x_1^2x_2^2x_3x_4$.

($\sum a x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 表示所有由 $a x_1^{l_1}x_2^{l_2}\cdots x_n^{l_n}$ 经过对换得到的项的和.)

31. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是方程 $5x^3-6x^2+7x-8=0$ 的三个根，计算

$$(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_2+\alpha_2^2)(\alpha_2^2+\alpha_2\alpha_3+\alpha_3^2)(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2).$$

32. 证明: 三次方程 $x^3+a_1x^2+a_2x+a_3=0$ 的三个根成等差数列的充分必要条件为

$$2a_1^3-9a_1a_2+27a_3=0.$$

补 充 题

1. 设 $f_1(x)=af(x)+bg(x)$，$g_1(x)=cf(x)+dg(x)$，并且

$ad-bc\neq 0$，证明：$(f(x), g(x))=(f_1(x), g_1(x))$.

2. 证明：只要$\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}$，$\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}$的次数都大于零，就可以适当选择适合等式

$$u(x)f(x)+v(x)g(x)=(f(x), g(x))$$

的 $u(x)$ 与 $v(x)$，使

$$\partial(u(x))<\partial\left(\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}\right),$$

$$\partial(v(x))<\partial\left(\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}\right).$$

3. 证明：如果 $f(x)$ 与 $g(x)$ 互素，那么 $f(x^m)$ 与 $g(x^m)$ $(m\geqslant 1)$ 也互素.

4. 证明：如果 $f_1(x)$，$f_2(x)$，$\cdots$，$f_{s-1}(x)$ 的最大公因式存在，那么 $f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{s-1}(x), f_s(x)$ 的最大公因式也存在，且

$$\begin{aligned}&(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{s-1}(x), f_s(x))\\&=((f_1(x), f_2(x), \cdots, f_{s-1}(x)), f_s(x)).\end{aligned}$$

再利用上式证明，存在多项式 $u_1(x), u_2(x), \cdots, u_s(x)$ 使

$$\begin{aligned}&u_1(x)f_1(x)+u_2(x)f_2(x)+\cdots+u_s(x)f_s(x)\\&=(f_1(x), f_2(x), \cdots, f_s(x)).\end{aligned}$$

5. 多项式 $m(x)$ 称为多项式 $f(x)$，$g(x)$ 的一个最小公倍式，如果1) $f(x)\mid m(x), g(x)\mid m(x)$，2) $f(x), g(x)$ 的任一个公倍式都是$m(x)$的倍式. 我们以$[f(x), g(x)]$表示首项系数是 1 的那个最小公倍式. 证明：如果 $f(x), g(x)$ 的首项系数都是 1，那么

$$[f(x),\ g(x)]=\frac{f(x)g(x)}{(f(x), g(x))}.$$

6. 证明定理 5 的逆，即：设 $p(x)$ 是次数大于零的多项式，如果对于任何两个多项式 $f(x)$，$g(x)$，由 $p(x)\mid f(x)g(x)$ 可以推出 $p(x)\mid f(x)$ 或者 $p(x)\mid g(x)$，那么 $p(x)$ 是不可约多项式.

7. 证明：次数>0且首项系数为1的多项式$f(x)$是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是，对任意的多项式$g(x)$必有$(f(x),g(x))=1$，或者对某一正整数m，$f(x)\mid g^m(x)$。

8. 证明：次数>0且首项系为1的多项式$f(x)$是某一不可约多项式的方幂的充分必要条件是，对任意多项式$g(x),h(x)$，由$f(x)\mid g(x)h(x)$可以推出$f(x)\mid g(x)$，或者对某一正整数m，$f(x)\mid h^m(x)$。

9. 证明：$x^n+ax^{n-m}+b$不能有不为零的重数大于2的根。

10. 证明：如果$f(x)\mid f(x^n)$，那么$f(x)$的根只能是零或单位根。

11. 如果$f'(x)\mid f(x)$，证明：$f(x)$有n重根，其中$n=\partial(f(x))$。

12. 设$a_1,a_2,\cdots,a_n$是n个不同的数，而

$$F(x)=(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n).$$

证明：

1) $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\frac{F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}=1$;

2) 任意多项式$f(x)$用$F(x)$除所得的余式为

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{f(a_i)F(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}.$$

13. $a_1,a_2,\cdots,a_n$与$F(x)$同上题，$b_1,b_2,\cdots,b_n$是任意n个数，显然

$$L(x)=\sum_{i=1}^{n}\frac{b_iF(x)}{(x-a_i)F'(a_i)}$$

适合条件

$$L(a_i)=b_i,\quad i=1,2,\cdots,n.$$

这称为拉格朗日(Lagrange)插值公式。

利用上面的公式求：

1) 一个次数<4的多项式$f(x)$，它适合条件：$f(2)=3$,

$f(3)=-1, f(4)=0, f(5)=2$;

2) 一个二次多项式 $f(x)$，它在 $x=0, \frac{\pi}{2}, \pi$ 处与函数 $\sin x$ 有相同的值；

3) 一个次数尽可能低的多项式 $f(x)$，使得 $f(0)=1, f(1)=2, f(2)=5, f(3)=10$.

14. 设 $f(x)$ 是一个整系数多项式，试证：如果 $f(0)$ 与 $f(1)$ 都是奇数，那么 $f(x)$ 不能有整数根.

15. 设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 是方程 $x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0$ 的根，证明：$x_2, \cdots, x_n$ 的对称多项式可以表成 x_1 与 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 的多项式.

16. $f(x)=(x-x_1)(x-x_2)\cdots(x-x_n)=x^n-\sigma_1x^{n-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_n$. 令 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k\ (k=0,1,2,\cdots)$.

1) 证明：

$$x^{k+1}f'(x)=(s_0x^k+s_1x^{k-1}+\cdots+s_{k-1}x+s_k)f(x)+g(x)$$

其中 $g(x)$ 的次数 $<n$ 或 $g(x)=0$.

2) 由上式证明牛顿(Newton)公式：

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\sigma_2s_{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}\sigma_{k-1}s_1+(-1)^k k\sigma_k=0,$$

对于 $1\leqslant k\leqslant n$；

$$s_k-\sigma_1s_{k-1}+\cdots+(-1)^n\sigma_ns_{k-n}=0, \text{对于 } k>n.$$

17. 根据牛顿公式用初等对称多项式表示 s_2, s_3, s_4, s_5, s_6.

18. 证明：如果对于某一个 6 次方程有 $s_1=s_3=0$，那么

$$\frac{s_7}{7}=\frac{s_5}{5}\cdot\frac{s_2}{2}.$$

19. 求一个 n 次方程使

$$s_1=s_2=\cdots=s_{n-1}=0.$$

20. 求一个 n 次方程使

$$s_2=s_3=\cdots=s_n=0.$$

第二章 行 列 式

习 题

1. 决定以下 9 级排列的逆序数，从而决定它们的奇偶性:

   1) 134782695;　　2) 217986354;

   3) 987654321.

2. 选择 i 与 k 使

   1) $1274i56k9$ 成偶排列;

   2) $1i25k4897$ 成奇排列.

3. 写出把排列 12435 变成排列 25341 的那些对换.

4. 决定排列 $n(n-1)\cdots 21$ 的逆序数，并讨论它的奇偶性.

5. 如果排列 $x_1x_2\cdots x_{n-1}x_n$ 的逆序数为 I，排列 $x_nx_{n-1}\cdots x_2x_1$ 的逆序数是多少?

6. 在 6 级行列式中，$a_{23}a_{31}a_{42}a_{56}a_{14}a_{65}$; $a_{32}a_{43}a_{14}a_{51}a_{66}a_{25}$ 这两项应带有什么符号?

7. 写出 4 级行列式中所有带有负号并且包含因子 a_{23} 的项.

8. 按定义计算行列式:

$$1)\ \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix};\ 2)\ \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix};$$

$$3)\ \begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}$$

9. 由行列式定义证明：

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & b_5 \\ c_1 & c_2 & 0 & 0 & 0 \\ d_1 & d_2 & 0 & 0 & 0 \\ e_1 & e_2 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0.$$

10. 由行列式定义计算

$$f(x) = \begin{vmatrix} 2x & x & 1 & 2 \\ 1 & x & 1 & -1 \\ 3 & 2 & x & 1 \\ 1 & 1 & 1 & x \end{vmatrix}$$

中 x^4 与 x^3 的系数，并说明理由.

11. 由

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = 0$$

证明：奇偶排列各半.

12. 设

$$P(x) = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & \cdots & x^{n-1} \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \cdots & a_1^{n-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & a_{n-1} & a_{n-1}^2 & \cdots & a_{n-1}^{n-1} \end{vmatrix}$$，其中 $a_1, a_2, \cdots, a_{n-1}$ 是互

不相同的数.

1) 由行列式定义，说明 $P(x)$ 是一 $(n-1)$ 次多项式；

2) 由行列式性质，求 $P(x)$ 的根.

13. 计算下面的行列式:

1) $\begin{vmatrix} 246 & 427 & 327 \\ 1014 & 543 & 443 \\ -342 & 721 & 621 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} x & y & x+y \\ y & x+y & x \\ x+y & x & y \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$; 4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$;

5) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+y & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-y \end{vmatrix}$;

6) $\begin{vmatrix} a^2 & (a+1)^2 & (a+2)^2 & (a+3)^2 \\ b^2 & (b+1)^2 & (b+2)^2 & (b+3)^2 \\ c^2 & (c+1)^2 & (c+2)^2 & (c+3)^2 \\ d^2 & (d+1)^2 & (d+2)^2 & (d+3)^2 \end{vmatrix}$.

14. 证明

$$\begin{vmatrix} b+c & c+a & a+b \\ b_1+c_1 & c_1+a_1 & a_1+b_1 \\ b_2+c_2 & c_2+a_2 & a_2+b_2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} a & b & c \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}.$$

15. 算出行列式

1) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}$

的全部代数余子式.

16. 计算下面的行列式:

1) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & -1 & 4 \\ 2 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 5 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 3 & 5 \end{vmatrix}$; 2) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & -1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & \frac{1}{2} \end{vmatrix}$.

17. 计算下列 n 级行列式:

1) $\begin{vmatrix} x & y & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & x & y \\ y & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix}$;

2) $\begin{vmatrix} a_1-b_1 & a_1-b_2 & \cdots & a_1-b_n \\ a_2-b_1 & a_2-b_2 & \cdots & a_2-b_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_n-b_1 & a_n-b_2 & \cdots & a_n-b_n \end{vmatrix}$;

3) $\begin{vmatrix} x_1-m & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1 & x_2-m & \cdots & x_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n-m \end{vmatrix}$;

4) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & n \end{vmatrix}$; 5) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n-1 & n \\ 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 & 1-n \end{vmatrix}$.

18. 证明:

1) $$\begin{vmatrix} a_0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{vmatrix} = a_1a_2\cdots a_n\left(a_0 - \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right);$$

2) $$\begin{vmatrix} a_0 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-2} & 0 & 0 & \cdots & x & -1 \\ a_{n-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \end{vmatrix} = a_0x^{n-1} + a_1x^{n-2} + \cdots + a_{n-1};$$

3) $$\begin{vmatrix} \alpha+\beta & \alpha\beta & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & \alpha+\beta & \alpha\beta & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \alpha+\beta & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & \alpha+\beta \end{vmatrix} = \frac{\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}}{\alpha-\beta};$$

4) $$\begin{vmatrix} \cos\alpha & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2\cos\alpha & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2\cos\alpha & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2\cos\alpha \end{vmatrix} = \cos n\alpha;$$

5) $$\begin{vmatrix} 1+a_1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1+a_2 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+a_3 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1+a_n \end{vmatrix}$$

$$= a_1a_2\cdots a_n\left(1 + \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{a_i}\right).$$

19. 用克兰姆法则解下列线性方程组:

1) $\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=6, \\ 3x_1-3x_2+3x_3+2x_4=5, \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=3, \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=4, \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-2x_4=6, \\ 2x_1-x_2-2x_3-3x_4=8, \\ 3x_1+2x_2-x_3+2x_4=4, \\ 2x_1-3x_2+2x_3+x_4=-8; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1+2x_2-2x_3+4x_4-x_5=-1, \\ 2x_1-x_2+3x_3-4x_4+2x_5=8, \\ 3x_1+x_2-x_3+2x_4-x_5=3 \\ 4x_1+3x_2+4x_3+2x_4+2x_5=-2, \\ x_1-x_2-x_3+2x_4-3x_5=-3 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 5x_1+6x_2=1, \\ x_1+5x_2+6x_3=0, \\ x_2+5x_3+6x_4=0, \\ x_3+5x_4+6x_5=0, \\ x_4+5x_5=1. \end{cases}$

20. 设$a_1, a_2, \cdots, a_n$是数域P中互不相同的数,$b_1, b_2, \cdots, b_n$是数域P中任一组给定的数,用克兰姆法则证明;存在唯一的数域P上的多项式$f(x)=c_0x^{n-1}+c_1x^{n-2}+\cdots+c_{n-1}$使

$$f(a_i)=b_i, \quad i=1,2,\cdots,n.$$

21. 设水银密度h与温度t的关系为

$$h=a_0+a_1t+a_2t^2+a_3t^3.$$

由实验测定得以下数据:

t	0℃	10℃	20℃	30℃
h	13.60	13.57	13.55	13.52

求$t=15$℃,40℃时水银密度(准确到小数两位)。

补 充 题

$$\sum_{j_1j_2\cdots j_n}\begin{vmatrix} a_{1j_1} & a_{1j_2} & \cdots & a_{1j_n} \\ a_{2j_1} & a_{2j_2} & \cdots & a_{2j_n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{nj_1} & a_{nj_2} & \cdots & a_{nj_n} \end{vmatrix} = ?$$

这里 $\sum\limits_{j_1j_2\cdots j_n}$ 是对所有 n 级排列求和.

2. 证明:

$$\frac{d}{dt}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\begin{vmatrix} a_{11}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{1j}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{2j}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}(t) & \cdots & \frac{d}{dt}a_{nj}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{vmatrix}.$$

3. 证明:

1) $$\begin{vmatrix} a_{11}+x & a_{12}+x & \cdots & a_{1n}+x \\ a_{21}+x & a_{22}+x & \cdots & a_{2n}+x \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}+x & a_{n2}+x & \cdots & a_{nn}+x \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} + x\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij},$$

其中 A_{ij} 是 a_{ij} 的代数余子式;

2) $$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}A_{ij}=\begin{vmatrix} a_{11}-a_{12} & a_{12}-a_{13} & \cdots & a_{1,n-1}-a_{1n} & 1 \\ a_{21}-a_{22} & a_{22}-a_{23} & \cdots & a_{2,n-1}-a_{2n} & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1}-a_{n2} & a_{n2}-a_{n3} & \cdots & a_{n,n-1}-a_{nn} & 1 \end{vmatrix}.$$

4. 计算下面的 n 级行列式

1) $$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ 2 & 3 & 4 & \cdots & 1 \\ 3 & 4 & 5 & \cdots & 2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ n & 1 & 2 & \cdots & n-1 \end{vmatrix};$$

2) $$\begin{vmatrix} \lambda & a & a & a & \cdots & a \\ b & \alpha & \beta & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \alpha & \beta & \cdots & \beta \\ b & \beta & \beta & \alpha & \cdots & \beta \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b & \beta & \beta & \beta & \cdots & \alpha \end{vmatrix};$$

3) $$\begin{vmatrix} x & a & a & \cdots & a & a \\ -a & x & a & \cdots & a & a \\ -a & -a & x & \cdots & a & a \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -a & -a & -a & \cdots & -a & x \end{vmatrix};$$

4) $$\begin{vmatrix} x & y & y & \cdots & y & y \\ z & x & y & \cdots & y & y \\ z & z & x & \cdots & y & y \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ z & z & z & \cdots & x & y \\ z & z & z & \cdots & z & x \end{vmatrix};$$

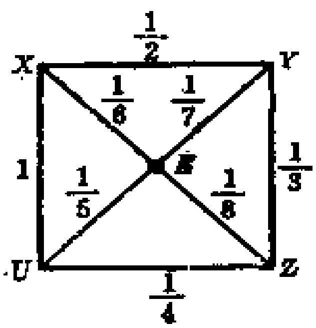
5) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-2} & x_2^{n-2} & \cdots & x_n^{n-2} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}.$$

5. 计算 $f(x+1)-f(x)$，其中

$$f(x)=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x \\ 1 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & x^2 \\ 1 & 3 & 3 & 0 & \cdots & 0 & x^3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & n & C_n^2 & C_n^3 & \cdots & C_n^{n-1} & x^n \\ 1 & n+1 & C_{n+1}^2 & C_{n+1}^3 & \cdots & C_{n+1}^{n-1} & x^{n+1} \end{vmatrix}.$$

6. 右图表示一电路网络，每条线上标出的数字是电阻，E 点接地，由 X,Y,U,Z 点通入电流，强度皆为100A（安培），求这四点的电位.

（用基尔霍夫定律.）



第三章　线性方程组

习　　题

1. 用消元法解下列线性方程组:

1) $\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3-4x_4=1, \\ x_1+3x_2+2x_3-2x_4+x_5=-1, \\ x_1-2x_2+x_3-x_4-x_5=3, \\ x_1-4x_2+x_3+x_4-x_5=3, \\ x_1+2x_2+x_3-x_4+x_5=-1; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_4+2x_5=1, \\ x_1-x_2-3x_3+x_4-3x_5=2, \\ 2x_1-3x_2+4x_3-5x_4+2x_5=7, \\ 9x_1-9x_2+6x_3-16x_4+2x_5=25; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-2x_2+3x_3-4x_4=4, \\ x_2-x_3+x_4=-3, \\ x_1+3x_2+x_4=1, \\ -7x_2+3x_3+x_4=-3; \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3x_1+4x_2-5x_3+7x_4=0, \\ 2x_1-3x_2+3x_3-2x_4=0, \\ 4x_1+11x_2-13x_3+16x_4=0, \\ 7x_1-2x_2+x_3+3x_4=0; \end{cases}$

5) $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3+x_4=1, \\ 3x_1-2x_2+2x_3-3x_4=2, \\ 5x_1+x_2-x_3+2x_4=-1, \\ 2x_1-x_2+x_3-3x_4=4; \end{cases}$

6) $\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3-x_4=1, \\ 3x_1+2x_2+\ \ x_3-x_4=1, \\ 2x_1+3x_2+\ \ x_3+x_4=1, \\ 2x_1+2x_2+2x_3-x_4=1, \\ 5x_1+5x_2+2x_3\qquad\ =2. \end{cases}$

2. 把向量 β 表成向量 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$ 的线性组合:

1) $\beta=(1,2,1,1)$, $\alpha_1=(1,1,1,1)$,
$\alpha_2=(1,1,-1,-1)$, $\alpha_3=(1,-1,1,-1)$,
$\alpha_4=(1,-1,-1,1)$;

2) $\beta=(0,0,0,1)$, $\alpha_1=(1,1,0,1)$,
$\alpha_2=(2,1,3,1)$, $\alpha_3=(1,1,0,0)$,
$\alpha_4=(0,1,-1,-1)$.

3. 证明:如果向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性无关,而 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r,\beta$ 线性相关,则向量 β 可以由 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 线性表出.

4. $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, $i=1,2,\cdots,n$. 证明:如果 $|a_{ij}|\neq 0$,那么 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 线性无关.

5. 设 $t_1,t_2,\cdots,t_r$ 是互不相同的数,$r\leqslant n$. 证明: $\alpha_i=(1,t_i,\cdots,t_i^{n-1})$, $i=1,2,\cdots,r$, 是线性无关的.

6. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 线性无关,证明: $\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2+\alpha_3,\alpha_3+\alpha_1$ 也线性无关.

7. 已知 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r,证明: $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中任意 r 个线性无关的向量都构成它的一极大线性无关组.

8. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r, $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中的 r 个向量,使得 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 中每个向量都可被它们线性表出,证明: $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_r}$ 是 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的一极大线性无关组.

9. 用消元法求下列向量组的极大线性无关组与秩:

1) $\alpha_1=(6,4,1,-1,2)$, $\alpha_2=(1,0,2,3,-4)$,

$\alpha_3=(1,4,-9,-16,22)$, $\alpha_4=(7,1,0,-1,3)$;

2) $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$,

$\alpha_3=(3,0,7,14)$, $\alpha_4=(1,-1,2,0)$,

$\alpha_5=(2,1,5,6)$.

10. 证明：如果向量组(I)可以由向量组(II)线性表出，那么(I)的秩不超过(II)的秩.

11. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是一组 n 维向量，已知单位向量 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \cdots, \varepsilon_n$ 可被它们线性表出，证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关.

12. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 是一组 n 维向量，证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ 线性无关的充分必要条件是任一 n 维向量都可被它们线性表出.

13. 证明：方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n \end{cases}$$

对任何 $b_1, b_2, \cdots, b_n$ 都有解的充分必要条件是系数行列式 $|a_{ij}|\neq 0$.

14. 已知 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 有相同秩，证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r, \alpha_{r+1}, \cdots, \alpha_s$ 等价.

15. 设 $\beta_1=\alpha_2+\alpha_3+\cdots+\alpha_r$, $\beta_2=\alpha_1+\alpha_3+\cdots+\alpha_r$, $\cdots$, $\beta_r=\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_{r-1}$, 证明：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 与 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 有相同的秩.

16. 计算下列矩阵的秩：

1) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 4 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & 6 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} 14 & 12 & 6 & 8 & 2 \\ 6 & 104 & 21 & 9 & 17 \\ 7 & 6 & 3 & 4 & 1 \\ 35 & 30 & 15 & 20 & 5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 14 & 32 \\ 4 & 5 & 6 & 32 & 77 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

17. 讨论 λ, a, b 取什么值时下列方程组有解，并求解:

1) $\begin{cases} \lambda x_1 + x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 + \lambda x_2 + x_3 = \lambda, \\ x_1 + x_2 + \lambda x_3 = \lambda^2; \end{cases}$

2) $\begin{cases} (\lambda+3)x_1 + x_2 + 2x_3 = \lambda, \\ \lambda x_1 + (\lambda-1)x_2 + x_3 = 2\lambda, \\ 3(\lambda+1)x_1 + \lambda x_2 + (\lambda+3)x_3 = 3; \end{cases}$

3) $\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4, \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3, \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4. \end{cases}$

18. 求下列齐次线性方程组的一个基础解系:

1) $\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 0, \\ 3x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 - 3x_5 = 0, \\ x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 0, \\ 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 3x_4 - x_5 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 = 0, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 = 0, \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 0, \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3+x_4-x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3-x_4-x_5=0, \\ x_1+7x_2-5x_3-5x_4+5x_5=0, \\ 3x_1-x_2-2x_3+x_4-x_5=0; \end{cases}$

4) $\begin{cases} x_1-2x_2+x_3-x_4+x_5=0, \\ 2x_1+x_2-x_3+2x_4-3x_5=0, \\ 3x_1-2x_2-x_3+x_4-2x_5=0, \\ 2x_1-5x_2+x_3-2x_4+2x_5=0. \end{cases}$

19. a,b 取什么值时，线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1, \\ 3x_1+2x_2+x_3+x_4-3x_5=a, \\ x_2+2x_3+2x_4+6x_5=3, \\ 5x_1+4x_2+3x_3+3x_4-x_5=b \end{cases}$$

有解？在有解的情形，求一般解.

20. 设 $x_1-x_2=a_1, x_2-x_3=a_2, x_3-x_4=a_3, x_4-x_5=a_4, x_5-x_1=a_5$. 证明：这方程组有解的充分必要条件为

$$\sum_{i=1}^{5} a_i=0.$$

在有解的情形，求出它的一般解.

21. 证明：与基础解系等价的线性无关向量组也是基础解系.

22. 设齐次方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0 \end{cases}$$

的秩为 r，证明：方程组的任意 $n-r$ 个线性无关的解都是它的一个基础解系.

23. 证明：如果 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_t$ 是一线性方程组的解，那么 $u_1\eta_1 + u_2\eta_2 + \cdots + u_t\eta_t$（其中 $u_1 + u_2 + \cdots + u_t = 1$）也是一个解.

24. 多项式 $2x^3 - 3x^2 + \lambda x + 2$ 与 $x^4 + \lambda x^2 - 3x - 1$ 在 λ 取什么值时，有公共根？

25. $R(f, g)$ 与 $R(g, f)$ 的关系是怎样的？

26. 解下列联立方程：

1) $\begin{cases} 5y^2 - 6xy + 5x^2 - 16 = 0, \\ y^2 - xy + 2x^2 - y - x - 4 = 0; \end{cases}$

2) $\begin{cases} x^2 + y^2 + 4x - 2y + 3 = 0, \\ x^2 + 4xy - y^2 + 10y - 9 = 0; \end{cases}$

3) $\begin{cases} y^2 + (x-4)y + x^2 - 2x + 3 = 0, \\ y^3 - 5y^2 + (x+7)y + x^3 - x^2 - 5x - 3 = 0. \end{cases}$

补 充 题

1. 假设向量 β 可以经向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性表出，证明：表示法是唯一的充分必要条件是 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 线性无关.

2. 设 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_r$ 是一组线性无关的向量，

$$\beta_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ij}\alpha_j,\ i = 1, 2, \cdots, r.$$

证明：$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_r$ 线性无关的充分必要条件是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1r} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{r1} & a_{r2} & \cdots & a_{rr} \end{vmatrix} \neq 0.$$

3. 证明：$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_s$（其中 $\alpha_1 \neq 0$）线性相关的充分必要条件是至少有一 α_i（$1 < i \leqslant s$）可被 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_{i-1}$ 线性表出.

4. 证明：一个向量组的任何一个线性无关组都可以扩充成一极大线性无关组.

5. 设 $\alpha_1=(1,-1,2,4)$, $\alpha_2=(0,3,1,2)$, $\alpha_3=(3,0,7,14)$, $\alpha_4=(1,-1,2,0)$, $\alpha_5=(2,1,5,6)$.

1) 证明: α_1,α_2 线性无关;

2) 把 α_1,α_2 扩充成一极大线性无关组.

6. 已知两向量组有相同的秩,且其中之一可被另一个线性表出,证明:这两个向量组等价.

7. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 的秩为 r, 在其中任取 m 个向量 $\alpha_{i_1},\alpha_{i_2},\cdots,\alpha_{i_m}$,证明:此向量组的秩$\geqslant r+m-s$.

8. 设向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s$; $\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$; $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_t$ 的秩分别为 r_1,r_2,r_3, 证明:

$$\max(r_1,r_2)\leqslant r_3\leqslant r_1+r_2.$$

9. 线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n-1,1}x_1+a_{n-1,2}x_2+\cdots+a_{n-1,n}x_n=0 \end{cases}$$

的系数矩阵为

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n} \end{pmatrix}.$$

设 M_i是矩阵中划去第 i 列剩下的$(n-1)\times(n-1)$矩阵的行列式。

1) 证明: $(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$是方程组的一个解;

2) 如果 A 的秩为 $n-1$,那么方程组的解全是$(M_1,-M_2,\cdots,(-1)^{n-1}M_n)$的倍数.

10. 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$, $i=1,2,\cdots,s$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$

证明：如果线性方程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{s1}x_1+a_{s2}x_2+\cdots+a_{sn}x_n=0\end{cases}$$

的解全是方程 $b_1x_1+b_2x_2+\cdots+b_nx_n=0$ 的解，那么 β 可以由 α_1, $\alpha_2,\cdots,\alpha_s$ 线性表出。

11. 设 η_0 是线性方程组的一个解，$\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_t$ 是它的导出方程组的一个基础解系，令

$$\gamma_1=\eta_0,\gamma_2=\eta_1+\eta_0,\cdots,\gamma_{t+1}=\eta_t+\eta_0.$$

证明：线性方程组的任一个解 γ，都可表成

$$\gamma=u_1\gamma_1+u_2\gamma_2+\cdots+u_{t+1}\gamma_{t+1},$$

其中 $u_1+u_2+\cdots+u_{t+1}=1$.

12. 设

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

为一实数域上的矩阵. 证明：

1）如果 $|a_{ii}|>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|, i=1,2,\cdots,n$，那么 $|A|\neq 0$;

2）如果 $a_{ii}>\sum\limits_{j\neq i}|a_{ij}|, i=1,2,\cdots,n$，那么 $|A|>0$.

13. 求出通过点 $M_1(1,0,0)$, $M_2(1,1,0)$, $M_3(1,1,1)$, $M_4(0,1,1)$ 的球面的方程.

14. 求出通过点 $M_1(0,0)$, $M_2(1,0)$, $M_3(2,1)$, $M_4(1,1)$, $M_5(1,4)$ 的二次曲线的方程.

15. 求下列曲线的直角坐标方程：

1) $x=t^2-t+1, y=2t^2+t-3$;

2) $x=\frac{2t+1}{t^2+1}, y=\frac{t^2+2t-1}{t^2+1}$。

16. 求结式:

1) $\frac{x^5-1}{x-1}$与$\frac{x^7-1}{x-1}$;

2) x^n+x+1 与 x^2-3x+2;

3) x^n+1 与$(x-1)^n$。

第四章 矩 阵

习 题

1. 设

1) $A=\begin{pmatrix}3&1&1\\2&1&2\\1&2&3\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}1&1&-1\\2&-1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$;

2) $A=\begin{pmatrix}a&b&c\\c&b&a\\1&1&1\end{pmatrix}$, $\quad B=\begin{pmatrix}1&a&c\\1&b&b\\1&c&a\end{pmatrix}$,

计算 AB, $AB-BA$.

2. 计算:

1) $\begin{pmatrix}2&1&1\\3&1&0\\0&1&2\end{pmatrix}^2$; $\quad$ 2) $\begin{pmatrix}3&2\\-4&-2\end{pmatrix}^5$;

3) $\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}^n$; $\quad$ 4) $\begin{pmatrix}\cos\varphi&-\sin\varphi\\\sin\varphi&\cos\varphi\end{pmatrix}^n$;

5) $(2,3,-1)\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}(2,3,-1)$;

6) $(x,y,1)\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&b_1\\a_{12}&a_{22}&b_2\\b_1&b_2&c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\1\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}^2$, $\begin{pmatrix}1&-1&-1&-1\\-1&1&-1&-1\\-1&-1&1&-1\\-1&-1&-1&1\end{pmatrix}^n$

8) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}^n$.

3. 设 $f(\lambda)=a_0\lambda^m+a_1\lambda^{m-1}+\cdots+a_m$，$A$ 是一个 $n\times n$ 矩阵，定义 $f(A)=a_0A^m+a_1A^{m-1}+\cdots+a_mE$.

1) $f(\lambda)=\lambda^2-\lambda-1$, $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$,

2) $f(\lambda)=\lambda^2-5\lambda+3$, $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$.

试求 $f(A)$.

4. 如果 $AB=BA$，矩阵 B 就称为与 A 可交换，设

1) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;　　2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

求所有与 A 可交换的矩阵.

5. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{pmatrix}$$，其中 $a_i\neq a_j$ 当 $i\neq j$ $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

证明：与 A 可交换的矩阵只能是对角矩阵.

6. 设

$$A=\begin{pmatrix} a_1E_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2E_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_rE_r \end{pmatrix},$$

其中 $a_i \neq a_j$ 当 $i \neq j(i, j=1, 2, \cdots, r)$, E_i 是 n_i 级单位矩阵, $\sum_{i=1}^{r} n_i = n$.

证明：与 A 可交换的矩阵只能是准对角矩阵

$$\begin{pmatrix} A_1 & & & \\ & A_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & A_r \end{pmatrix},$$

其中 A_i 是 n_i 级矩阵 $(i=1, \cdots, r)$.

7. 用 E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素为 1，而其余元素全为零的 $n\times n$ 矩阵，而 $A=(a_{ij})_{n\times n}$，证明：

1) 如果 $AE_{12}=E_{12}A$，那么当 $k\neq 1$ 时 $a_{k1}=0$，当 $k\neq 2$ 时 $a_{2k}=0$;

2) 如果 $AE_{ij}=E_{ij}A$，那么当 $k\neq i$ 时 $a_{ki}=0$，当 $k\neq j$ 时 $a_{jk}=0$，且 $a_{ii}=a_{jj}$;

3) 如果 A 与所有的 n 级矩阵可交换，那么 A 一定是数量矩阵，即 $A=aE$.

8. 如果 $AB=BA$，$AC=CA$，证明：$A(B+C)=(B+C)A$; $A(BC)=(BC)A$.

9. 如果 $A=\frac{1}{2}(B+E)$，证明：$A^2=A$ 当且仅当 $B^2=E$.

10 矩阵 A 称为对称的，如果 $A'=A$，证明：如果 A 是实对称矩阵且 $A^2=0$，那么 $A=0$.

11. 设 A,B 都是 $n\times n$ 的对称矩阵，证明：AB 也对称当且仅当 A,B 可交换.

12. 矩阵 A 称为反对称的，如果 $A'=-A$. 证明：任一 $n\times n$ 矩阵都可表为一对称矩阵与一反对称矩阵之和.

13. 设 $s_k=x_1^k+x_2^k+\cdots+x_n^k$, $k=0,1,2,\cdots$, $a_{ij}=s_{i+j-2}$, $i,j=1,2,\cdots,n$.

证明：

$$|a_{ij}|=\prod_{i<j}(x_i-x_j)^2.$$

14. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，证明：存在一个 $n\times n$ 非零矩阵 B 使 $AB=0$ 的充分必要条件是 $|A|=0$.

15. 设 A 是 $n\times n$ 矩阵，如果对任一 n 维向量 $X=\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_n\end{pmatrix}$ 都有 $AX=0$，那么 $A=0$.

16. 设 B 为一 $r\times r$ 矩阵，C 为一 $r\times n$ 矩阵，且秩$(C)=r$. 证明：

1) 如果 $BC=0$，那么 $B=0$；

2) 如果 $BC=C$，那么 $B=E$.

17. 证明

$$\text{秩}(A+B)\leqslant\text{秩}(A)+\text{秩}(B).$$

18. 设 A,B 为 $n\times n$ 矩阵. 证明：如果 $AB=0$，那么

$$\text{秩}(A)+\text{秩}(B)\leqslant n.$$

19. 证明：如果 $A^k=0$，那么

$$(E-A)^{-1}=E+A+A^2+\cdots+A^{k-1}.$$

20. 求 A^{-1}，设

1) $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $ad-bc=1$; 2) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$;

3) $A=\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$; 4) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -2 & -6 \end{pmatrix}$;

5) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; 6) $A=\begin{pmatrix} 3 & 3 & -4 & -3 \\ 0 & 6 & 1 & 1 \\ 5 & 4 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 3 & 2 \end{pmatrix}$;

7) $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & -5 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; 8) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 8 \\ -1 & -3 & -1 & -6 \end{pmatrix}$;

9) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 4 \\ 2 & 7 & 6 & -1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$; 10) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

21. 设

$$X=\begin{pmatrix} 0 & A \\ C & 0 \end{pmatrix},$$

已知 A^{-1}, C^{-1} 存在，求 X^{-1}。

22. 设

$$X=\begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

其中 $a_i \neq 0 (i=1,2,\cdots,n)$，求 X^{-1}.

23. 求矩阵 X. 设

1) $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}_n X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix}_n$;

4) $X \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

24. 证明：

1) 如果 A 可逆对称(反对称)，那么 A^{-1} 也对称(反对称)；

2) 不存在奇数级的可逆反对称矩阵.

25. 矩阵 $A=(a_{ij})$ 称为上(下)三角形矩阵，如果 $i>j(i<j)$ 时有 $a_{ij}=0$. 证明：

1) 两个上(下)三角矩阵的乘积仍是上(下)三角矩阵；

2) 可逆的上(下)三角矩阵的逆仍是上(下)三角矩阵.

26. 证明:

$$|A^*|=|A|^{n-1},$$

其中 A 是 $n\times n$ 矩阵($n\geqslant 2$).

27. 证明: 如果 A 是 $n\times n$ 矩阵($n\geqslant 2$),那么

$$秩(A^*)=\begin{cases}n, 当秩(A)=n,\\ 1, 当秩(A)=n-1,\\ 0, 当秩(A)<n-1.\end{cases}$$

28. 用两种方法求

$$A=\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ \hline 1 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & -1 & 1\end{array}\right)$$

的逆矩阵,(1)用初等变换;

(2)按 A 中的划分,利用分块乘法的初等变换.(注意各小块矩阵的特点.)

29. A, B分别是 $n\times m$ 矩阵和 $m\times n$ 矩阵. 证明

$$\begin{vmatrix}E_{m\times m} & B\\ A & E_{n\times n}\end{vmatrix}=|E_{n\times n}-AB|=|E_{m\times m}-BA|.$$

30. A, B如上题,$\lambda\neq 0$. 证明

$$|\lambda E_{n\times n}-AB|=\lambda^{n-m}|\lambda E_{m\times m}-BA|.$$

补 充 题

1. 设 A 是一个 $n\times n$ 矩阵,秩$(A)=1$,证明:

1) $A=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ \vdots\\ a_n\end{pmatrix}(b_1, b_2, \cdots, b_n)$;

2) $A^2=kA$.

2. 设 A 为 2×2 矩阵，证明：如果 $A^l=0$，$l\geqslant2$，那么 $A^2=0$.

3. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，证明：如果 $A^2=E$，那么

$$\text{秩}(A+E)+\text{秩}(A-E)=n.$$

4. 设 A 为 $n\times n$ 矩阵，且 $A^2=A$，证明：

$$\text{秩}(A)+\text{秩}(A-E)=n.$$

5. 证明：

$$(A^*)^*=|A|^{n-2}A,$$

其中 A 是 $n\times n$ 矩阵 $(n>2)$.

6. 设 A,B,C,D 都是 $n\times n$ 矩阵，且 $|A|\neq0$，$AC=CA$，证明：

$$\begin{vmatrix}A & B\\ C & D\end{vmatrix}=|AD-CB|.$$

7. 设 A 是一 $n\times n$ 矩阵，且秩$(A)=r$，证明：存在一 $n\times n$ 可逆矩阵 P 使 PAP^{-1} 的后 $n-r$ 行全为零.

8. 1) 把矩阵

$$\begin{pmatrix}a & 0\\ 0 & a^{-1}\end{pmatrix}$$

表成形式为

$$\begin{pmatrix}1 & x\\ 0 & 1\end{pmatrix}\text{与}\ \begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix} \qquad (1)$$

的矩阵的乘积；

2) 设

$$A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$$

为一复数矩阵，$|A|=1$，证明：A 可以表成形式为(1)的矩阵的乘积.

9. 设 A 是一 $n\times n$ 矩阵，$|A|=1$，证明：

A可以表成 $P(i,j(k))$这一类初等矩阵的乘积.

10. 设

$$A=(a_{ij})_{sn},B=(b_{ij})_{nm}.$$

证明

$$\text{秩}(AB)\geqslant\text{秩}(A)+\text{秩}(B)-n.$$

11. 矩阵的列(行)向量组如果是线性无关的,就称该矩阵为列(行)满秩的. 设 A 是 $m\times r$ 矩阵,则 A 是列满秩的充分必要条件为存在 $m\times m$ 可逆阵 P 使

$$A=P\begin{pmatrix}E_{r\times r}\\0\end{pmatrix}.$$

同样地,A 为行满秩的充分必要条件为存在 $r\times r$ 可逆矩阵 Q 使

$$A=(E_{m\times m},0)Q.$$

12. $m\times m$ 矩阵 A 的秩为 r,则有 $m\times r$ 的列满秩矩阵 P 和 $r\times n$ 的行满秩矩阵 Q,使 $A=PQ$.

13. A 为 $m\times n$ 复矩阵. $A=PQ$ 如上题,则

$$G=\bar{Q}'(Q\bar{Q}')^{-1}(\bar{P}'P)^{-1}\bar{P}'$$

为 A 的一个 Moore-Penrose 广义逆.

14. 证明 A 的 Moore-Penrose 广义逆是唯一的.

第五章　二　次　型

习　　题

1. 用非退化线性替换化下列二次型为标准形并利用矩阵验算所得结果：

1) $-4x_1x_2+2x_1x_3+2x_2x_3$;

2) $x_1^2+2x_1x_2+2x_2^2+4x_2x_3+4x_3^2$;

3) $x_1^2-3x_2^2-2x_1x_2+2x_1x_3-6x_2x_3$;

4) $8x_1x_4+2x_3x_4+2x_2x_3+8x_2x_4$;

5) $x_1x_2+x_1x_3+x_1x_4+x_2x_3+x_2x_4+x_3x_4$;

6) $x_1^2+2x_2^2+x_4^2+4x_1x_2+4x_1x_3+2x_1x_4+2x_2x_3+2x_2x_4$
$+2x_3x_4$;

7) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2+2x_1x_2+2x_2x_3+2x_3x_4$.

2. 证明：秩等于 r 的对称矩阵可以表成 r 个秩等于 1 的对称矩阵之和.

3. 证明：

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

合同，其中 $(i_1i_2\cdots i_n)$ 是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列.

4. 设 A 是一个 n 级矩阵，证明：

1) A 是反对称矩阵当且仅当对任一个 n 维向量 X，有 $X'AX=0$;

2) 如果 A 是对称矩阵，且对任一个 n 维向量 X 有 $X'AX$

$=0$，那么 $A=0$.

5. 如果把实 n 级对称矩阵按合同分类，即两个实 n 级对称矩阵属于同一类当且仅当它们合同，问共有几类？

6. 证明：一个实二次型可以分解成两个实系数的一次齐次多项式的乘积的充分必要条件是，它的秩等于 2 和符号差等于 0，或者秩等于 1.

7. 判别下列二次型是否正定：

1) $99x_1^2-12x_1x_2+48x_1x_3+130x_2^2-60x_2x_3+71x_3^2$;

2) $10x_1^2+8x_1x_2+24x_1x_3+2x_2^2-28x_2x_3+x_3^2$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$;

4) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{i=1}^{n-1}x_ix_{i+1}$.

8. t 取什么值时，下列二次型是正定的：

1) $x_1^2+x_2^2+5x_3^2+2tx_1x_2-2x_1x_3+4x_2x_3$;

2) $x_1^2+4x_2^2+x_3^2+2tx_1x_2+10x_1x_3+6x_2x_3$.

9. 证明：如果 A 是正定矩阵，那么 A 的主子式全大于零，所谓主子式就是行指标与列指标相同的子式.

10. 设 A 是实对称矩阵. 证明：当实数 t 充分大之后，$tE+A$ 是正定矩阵.

11. 证明：如果 A 是正定矩阵，那么 A^{-1} 也是正定矩阵.

12. 设 A 为一个 n 级实对称矩阵，且 $|A|<0$，证明：必存在实 n 维向量 $X\neq 0$ 使 $X'AX<0$.

13. 如果 A,B 都是 n 级正定矩阵，证明：$A+B$ 也是正定矩阵.

14. 证明：二次型 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 是半正定的充分必要条件是它的正惯性指数与秩相等.

15. 证明：$n\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2-\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\right)^2$ 是半正定的.

16. 设 $f(x_1, \cdots, x_n)=X'AX$ 是一实二次型，若有实 n 维向量 X_1, X_2 使

$$X_1'AX_1>0,\ X_2'AX_2<0$$

证明：必存在实 n 维向量 $X_0\neq 0$ 使 $X_0'AX_0=0$.

补 充 题

1. 用非退化线性替换化下列二次型为标准形，并用矩阵验算所得结果：

1) $x_1x_{2n}+x_2x_{2n-1}+\cdots+x_nx_{n+1}$;

2) $x_1x_2+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$;

3) $\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n}x_ix_j$;

4) $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$, 其中 $\bar{x}=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}$.

2. 设实二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$

$$=\sum_{i=1}^{s}(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\cdots+a_{in}x_n)^2,$$

证明：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的秩等于矩阵

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn}\end{pmatrix}$$

的秩.

3. 设 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=l_1^2+l_2^2+\cdots+l_p^2-l_{p+1}^2-\cdots-l_{p+q}^2$, 其中 $l_i(i=1,2,\cdots, p+q)$是 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的一次齐次式，证明：$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$的正惯性指数$\leqslant p$, 负惯性指数$\leqslant q$.

4. 设

$$A=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$$

是一对称矩阵，且 $|A_{11}|\neq 0$，证明：存在 $T=\begin{pmatrix} E & X \\ 0 & E \end{pmatrix}$ 使

$$T'AT=\begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix}$$

其中 $*$ 表示一级数与 A_{22} 相同的矩阵.

5. 设 A 是反对称矩阵，证明：A 合同于矩阵

$$\begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & & & & & \\
-1 & 0 & & & & & & & & \\
 & & 0 & 1 & & & & & & \\
 & & 1 & 0 & & & & & & \\
 & & & & \ddots & & & & & \\
 & & & & & 0 & 1 & & & \\
 & & & & & -1 & 0 & & & \\
 & & & & & & & 0 & & \\
 & & & & & & & & \ddots & \\
 & & & & & & & & & 0
\end{pmatrix}$$

6. 设 A 是 n 级实对称矩阵，证明：存在一正实数 c 使对任一个实 n 维向量 X 都有

$$|X'AX|\leqslant cX'X.$$

7. 主对角线上全是 1 的上三角矩阵称为特殊上三角矩阵.

1）设 A 是一对称矩阵，T 为特殊上三角矩阵，而 $B=T'AT$，证明：A 与 B 的对应顺序主子式有相同的值；

2）证明：如果对称矩阵 A 的顺序主子式全不为 0，那么一定有一特殊上三角矩阵 T 使 $T'AT$ 成对角形；

3）利用以上结果证明定理 6 的充分性.

8. 证明

1) 如果$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j(a_{ij}=a_{ji})$是正定二次型，那么

$$f(y_1,y_2,\cdots,y_n)=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & y_1\\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & y_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & y_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}$$

是负定二次型；

2) 如果 A 是正定矩阵，那么

$$|A|\leqslant a_{nn}P_{n-1},$$

这里P_{n-1} 是 A 的$n-1$ 级的顺序主子式；

3) 如果 A 是正定矩阵，那么

$$|A|\leqslant a_{11}a_{22}\cdots a_{nn};$$

4) 如果 $T=(t_{ij})$是 n 级实可逆矩阵，那么

$$|T|^2\leqslant\prod_{i=1}^{n}(t_{1i}^2+\cdots+t_{ni}^2).$$

9. 证明：实对称矩阵 A 是半正定的充分必要条件是 A 的一切主子式全大于或等于零(所谓 k 级主子式是指形为

$$\begin{vmatrix}a_{i_1i_1} & a_{i_1i_2} & \cdots & a_{i_1i_k}\\ a_{i_2i_1} & a_{i_2i_2} & \cdots & a_{i_2i_k}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{i_ki_1} & a_{i_ki_2} & \cdots & a_{i_ki_k}\end{vmatrix}$$

的 k 级子式，其中 $1\leqslant i_1<\cdots<i_k\leqslant n$)。

第六章　线 性 空 间

习　　题

1. 设 $M\subset N$，证明：

$$M\cap N=M,\ M\cup N=N.$$

2. 证明

$$M\cap(N\cup L)=(M\cap N)\cup(M\cap L),$$
$$M\cup(N\cap L)=(M\cup N)\cap(M\cup L).$$

3. 检验以下集合对于所指的线性运算是否构成实数域上的线性空间：

1) 次数等于 $n(n\geqslant1)$ 的实系数多项式的全体，对于多项式的加法和数量乘法；

2) 设 A 是一个 $n\times n$ 实数矩阵，A 的实系数多项式 $f(A)$ 的全体，对于矩阵的加法和数量乘法；

3) 全体实对称(反对称，上三角)矩阵，对于矩阵的加法和数量乘法；

4) 平面上不平行于某一向量的全部向量所成的集合，对于向量的加法和数量乘法；

5) 全体实数的二元数列，对于下面定义的运算①：

$$(a_1,b_1)\oplus(a_2,b_2)=(a_1+a_2,b_1+b_2+a_1a_2),$$
$$k\circ(a_1,\ b_1)=\left(ka_1,kb_1+\frac{k(k-1)}{2}a_1^2\right);$$

6) 平面上全体向量，对于通常的加法和如下定义的数量

① 为了与通常的加法、乘法区别，这里我们分别用“$\oplus$”与“$\circ$”来代表所定义的向量加法与数量乘法．下同．

乘法:

$$k\circ\alpha=0;$$

7) 集合与加法同6),数量乘法定义为:

$$k\circ\alpha=\alpha;$$

8) 全体正实数 R^+,加法与数量乘法定义为:

$$a\oplus b=ab,$$

$$k\circ a=a^k.$$

4. 在线性空间中,证明:

1) $k0=0$;

2) $k(\alpha-\beta)=k\alpha-k\beta$.

5. 证明:在实函数空间中,$1, \cos^2 t, \cos 2t$ 是线性相关的.

6. 如果 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ 是线性空间 $P[x]$ 中三个互素的多项式,但其中任意两个都不互素,那么它们线性无关.

7. 在 P^4 中,求向量 ξ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 下的坐标,设

1) $\varepsilon_1=(1,1,1,1)$, $\varepsilon_2=(1,1,-1,-1)$,
$\varepsilon_3=(1,-1,1,-1)$, $\varepsilon_4=(1,-1,-1,1)$,
$\xi=(1,2,1,1)$;

2) $\varepsilon_1=(1,1,0,1)$, $\varepsilon_2=(2,1,3,1)$,
$\varepsilon_3=(1,1,0,0)$, $\varepsilon_4=(0,1,-1,-1)$,
$\xi=(0,0,0,1)$.

8. 求下列线性空间的维数与一组基:

1) 数域 P 上的空间 $P^{n\times n}$;

2) $P^{n\times n}$ 中全体对称(反对称,上三角)矩阵作成的数域 P 上的空间;

3) 第 3 题 8) 中的空间;

4) 实数域上由矩阵 A 的全体实系数多项式组成的空间,其中

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\omega&0\\0&0&\omega^2\end{pmatrix},\quad \omega=\frac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}.$$

9. 在 P^4 中，求由基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 到基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 的过渡矩阵，并求向量 ξ 在所指基下的坐标. 设

1) $\begin{cases}\varepsilon_1=(1,0,0,0),\\ \varepsilon_2=(0,1,0,0),\\ \varepsilon_3=(0,0,1,0),\\ \varepsilon_4=(0,0,0,1),\end{cases}\qquad \begin{cases}\eta_1=(2,1,-1,1),\\ \eta_2=(0,3,1,0),\\ \eta_3=(5,3,2,1),\\ \eta_4=(6,6,1,3),\end{cases}$

$\xi=(x_1,x_2,x_3,x_4)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标；

2) $\begin{cases}\varepsilon_1=(1,2,-1,0),\\ \varepsilon_2=(1,-1,1,1),\\ \varepsilon_3=(-1,2,1,1),\\ \varepsilon_4=(-1,-1,0,1),\end{cases}\qquad \begin{cases}\eta_1=(2,1,0,1),\\ \eta_2=(0,1,2,2),\\ \eta_3=(-2,1,1,2),\\ \eta_4=(1,3,1,2),\end{cases}$

$\xi=(1,0,0,0)$ 在 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 下的坐标；

3) $\begin{cases}\varepsilon_1=(1,1,1,1),\\ \varepsilon_2=(1,1,-1,-1),\\ \varepsilon_3=(1,-1,1,-1),\\ \varepsilon_4=(1,-1,-1,1),\end{cases}\qquad \begin{cases}\eta_1=(1,1,0,1),\\ \eta_2=(2,1,3,1),\\ \eta_3=(1,1,0,0),\\ \eta_4=(0,1,-1,-1),\end{cases}$

$\xi=(1,0,0,-1)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的坐标.

10. 继第 9 题 1)，求一非零向量 ξ，它在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 与 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下有相同的坐标.

11. 证明：实数域作为它自身上的线性空间与第 3 题 8) 中的空间同构.

12. 设 V_1,V_2 都是线性空间 V 的子空间，且 $V_1\subset V_2$，证明：如果 V_1 的维数和 V_2 的维数相等，那么 $V_1=V_2$.

13. 设 $A\in P^{n\times n}$：

1) 证明：全体与 A 可交换的矩阵组成 $P^{n\times n}$ 的一子空间，记作 $C(A)$；

2) 当 $A=E$ 时，求 $C(A)$；

3) 当

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n \end{pmatrix}$$

时，求 $C(A)$ 的维数和一组基.

14. 设

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix},$$

求 $P^{3\times 3}$ 中全体与 A 可交换的矩阵所成子空间的维数和一组基.

15. 如果 $c_1\alpha+c_2\beta+c_3\gamma=0$，且 $c_1c_3\neq 0$，证明：$L(\alpha,\beta)=L(\beta,\gamma)$.

16. 在 P^4 中，求由向量 $\alpha_i(i=1,2,3,4)$ 生成的子空间的基与维数. 设

1) $\begin{cases} \alpha_1=(2,1,3,1), \\ \alpha_2=(1,2,0,1), \\ \alpha_3=(-1,1,-3,0), \\ \alpha_4=(1,1,1,1); \end{cases}$　　2) $\begin{cases} \alpha_1=(2,1,3,-1), \\ \alpha_2=(-1,1,-3,1), \\ \alpha_3=(4,5,3,-1), \\ \alpha_4=(1,5,-3,1). \end{cases}$

17. 在 P^4 中，求由齐次方程组

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2-5x_3+4x_4=0, \\ 3x_1-x_2+3x_3-3x_4=0, \\ 3x_1+5x_2-13x_3+11x_4=0 \end{cases}$$

确定的解空间的基与维数.

18. 求由向量 α_i 生成的子空间与由向量 β_i 生成的子空间的交的基和维数. 设

1) $\begin{cases}\alpha_1=(\ \ 1,2,1,0),\\ \alpha_2=(-1,1,1,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\beta_1=(2,-1,0,1),\\ \beta_2=(1,-1,3,7);\end{cases}$

2) $\begin{cases}\alpha_1=(1,1,0,0),\\ \alpha_2=(1,0,1,1),\end{cases}$ $\begin{cases}\beta_1=(0,0,1,1),\\ \beta_2=(0,1,1,0);\end{cases}$

3) $\begin{cases}\alpha_1=(\ \ 1,2,-1,-2),\\ \alpha_2=(\ \ 3,1,\ \ 1,\ \ 1),\\ \alpha_3=(-1,0,\ \ 1,-1),\end{cases}$ $\begin{cases}\beta_1=(\ \ 2,5,-6,-5),\\ \beta_2=(-1,2,-7,\ \ 3).\end{cases}$

19. 设 V_1 与 V_2 分别是齐次方程组 $x_1+x_2+\cdots+x_n=0$ 与 $x_1=x_2=\cdots=x_n$ 的解空间, 证明 $P^n=V_1\oplus V_2$.

20. 证明: 如果 $V=V_1\oplus V_2, V_1=V_{11}\oplus V_{12}$, 那么 $V=V_{11}\oplus V_{12}\oplus V_2$.

21. 证明: 每一个 n 维线性空间都可以表示成 n 个一维子空间的直和.

22. 证明: 和 $\sum\limits_{i=1}^{s}V_i$ 是直和的充分必要条件是:

$$V_i\cap\sum_{j=1}^{i-1}V_j=\{0\}\ (i=2,\cdots,s).$$

23. 在给定了空间直角坐标系的三维空间中, 所有自原点引出的向量添上零向量构成一个三维线性空间 R^3.

1) 问所有终点都在一个平面上的向量是否为子空间.

2) 设有过原点的三条直线, 这三条直线上的全部向量分别成为三个子空间 L_1, L_2, L_3. 问$L_1+L_2, L_1+L_2+L_3$ 能构成哪些类型的子空间, 试全部列举出来.

3) 就用几何空间的例子来说明: 若 U, V, X, Y 是子空间, 满足 $U\dot{+}V=X, X\supset Y$, 是否一定有 $Y=Y\cap U\dot{+}Y\cap V$.

补 充 题

1. 1) 证明：在 $P[x]_n$ 中，多项式

$f_i=(x-a_1)\cdots(x-a_{i-1})(x-a_{i+1})\cdots(x-a_n)$，$(i=1,2,\cdots,n)$ 是一组基，其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是互不相同的数；

2) 在 1)中，取 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是全体 n 次单位根，求由基 $1,x,\cdots,x^{n-1}$ 到基 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 的过渡矩阵.

2. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$ 是 n 维线性空间 V 的一组基，A 是一 $n\times s$ 矩阵，

$$(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n)A.$$

证明：$L(\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_s)$的维数等于 A 的秩.

3. 设 $f(x_1,\cdots,x_n)$是一秩为 n 的二次型，证明：存在 R^n 的一个$\frac{1}{2}(n-|s|)$维子空间 V_1(其中 s 为符号差数)，使对任一$(x_1,\cdots,x_n)\in V_1$ 有 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=0$.

4. 设 V_1,V_2 是线性空间V的两个非平凡的子空间，证明：在 V 中存在 α 使 $\alpha\overline{\in}V_1,\alpha\overline{\in}V_2$ 同时成立.

5. 设 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 是线性空间 V 的 s 个非平凡的子空间，证明：V 中至少有一向量不属于 $V_1,V_2,\cdots,V_s$ 中任何一个.

第七章 线性变换

习 题

1. 判别下面所定义的变换,哪些是线性的,哪些不是:

1) 在线性空间 V 中,$A\xi=\xi+\alpha$,其中 $\alpha\in V$ 是一固定的向量;

2) 在线性空间 V 中,$A\xi=\alpha$,其中 $\alpha\in V$ 是一固定的向量;

3) 在 P^3 中,$A(x_1,x_2,x_3)=(x_1^2,x_2+x_3,x_3^2)$;

4) 在 P^3 中,$A(x_1,x_2,x_3)=(2x_1-x_2,x_2+x_3,x_1)$;

5) 在 $P[x]$中,$Af(x)=f(x+1)$;

6)在 $P[x]$中,$Af(x)=f(x_0)$,其中 $x_0\in P$ 是一固定的数;

7) 把复数域看作复数域上的线性空间,$A\xi=\xi$;

8) 在 $P^{n\times n}$ 中,$A(X)=BXC$,其中 B, $C\in P^{n\times n}$ 是两个固定的矩阵.

2. 在几何空间中,取正交坐标系 $Oxyz$. 以 A 表将空间绕 Ox 轴由 Oy 向 Oz 方向旋转 90° 的变换,以 B 表绕 Oy 轴由 Oz向 Ox 方向旋转 90° 的变换,以C 表绕 Oz 轴由 Ox 向 Oy 方向旋转 90° 的变换. 证明:

$$A^4=B^4=C^4=E,\quad AB\neq BA,\text{但 } A^2B^2=B^2A^2.$$

并检验$(AB)^2=A^2B^2$ 是否成立.

3. 在 $P[x]$中,$Af(x)=f'(x)$,$Bf(x)=xf(x)$. 证明:

$$AB-BA=E.$$

4. 设 A,B 是线性变换,如果 $AB-BA=E$,证明:

$$A^kB-BA^k=kA^{k-1},\ k>1.$$

5. 证明：可逆变换是 1—1 对应.

6. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 是线性空间 V 的一组基，$\boldsymbol{A}$ 是 V 上的线性变换，证明 $\boldsymbol{A}$ 可逆当且仅当 $\boldsymbol{A}\varepsilon_1,\boldsymbol{A}\varepsilon_2,\cdots,\boldsymbol{A}\varepsilon_n$ 线性无关.

7. 求下列线性变换在所指定基下的矩阵：

1) 第 1 题 4) 中变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

2) $[O;\varepsilon_1,\varepsilon_2]$ 是平面上一直角坐标系，$\boldsymbol{A}$ 是平面上的向量对第一和第三象限分角线的垂直投影，$\boldsymbol{B}$ 是平面上的向量对 ε_2 的垂直投影，求 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{AB}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 下的矩阵；

3) 在空间 $P[x]_n$ 中，设变换 $\boldsymbol{A}$ 为 $f(x)\to f(x+1)-f(x)$. $\boldsymbol{A}$ 在基

$$\varepsilon_0=1,\ \varepsilon_i=\frac{x(x-1)\cdots(x-i+1)}{i!}(i=1,2,\cdots,n-1)$$

下的矩阵；

4) 六个函数

$$\varepsilon_1=e^{ax}\cos bx,\qquad \varepsilon_2=e^{ax}\sin bx,$$
$$\varepsilon_3=xe^{ax}\cos bx,\qquad \varepsilon_4=xe^{ax}\sin bx,$$
$$\varepsilon_5=\frac{1}{2}x^2e^{ax}\cos bx,\qquad \varepsilon_6=\frac{1}{2}x^2e^{ax}\sin bx$$

的所有实系数线性组合构成实数域上一个六维线性空间. 求微分变换 $\boldsymbol{D}$ 在基 $\varepsilon_i(i=1,2,\cdots,6)$ 下的矩阵；

5) 已知 P^3 中线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\eta_1=(-1,1,1)$，$\eta_2=(1,0,-1)$，$\eta_3=(0,1,1)$ 下的矩阵是

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&0\\-1&2&1\end{pmatrix}.$$

求 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

6) 在 P^3 中，$\mathcal{A}$ 定义如下：

$$\begin{cases}\mathcal{A}\eta_1=(-5,\ \ 0,3),\\ \mathcal{A}\eta_2=(\ \ 0,-1,6),\\ \mathcal{A}\eta_3=(-5,-1,9),\end{cases}\quad 其中\begin{cases}\eta_1=(-1,\ \ 0,2),\\ \eta_2=(\ \ 0,\ \ 1,1),\\ \eta_3=(\ \ 3,-1,0).\end{cases}$$

求 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1=(1,0,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,0)$，$\varepsilon_3=(0,0,1)$ 下的矩阵；

7) 同上，求 $\mathcal{A}$ 在 η_1,η_2,η_3 下的矩阵.

8. 在 $P^{2\times2}$ 中定义线性变换

$$\mathcal{A}_1(X)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}X,$$

$$\mathcal{A}_2(X)=X\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{A}_3(X)=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}X\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}.$$

求 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\mathcal{A}_3$ 在基 $E_{11},E_{12},E_{21},E_{22}$ 下的矩阵.

9. 设三维线性空间 V 上的线性变换 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}.$$

1) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_3,\varepsilon_2,\varepsilon_1$ 下的矩阵；

2) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1,k\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵，其中 $k\in P$ 且 $k\neq0$；

3) 求 $\mathcal{A}$ 在基 $\varepsilon_1+\varepsilon_2,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 下的矩阵.

10. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换. 如果 $\mathcal{A}^{k-1}\xi\neq0$，但 $\mathcal{A}^k\xi=0$，求证 $\xi,\mathcal{A}\xi,\cdots,\mathcal{A}^{k-1}\xi(k>0)$ 线性无关.

11. 在 n 维线性空间中，设有线性变换 $\mathcal{A}$ 与向量 ξ，使得 $\mathcal{A}^{n-1}\xi\neq0$，但 $\mathcal{A}^n\xi=0$. 求证 $\mathcal{A}$ 在某组基下的矩阵是

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

12. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间. 证明:V 的与全体线性变换可以交换的线性变换是数乘变换.

13. $\mathscr{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换. 证明:如果 $\mathscr{A}$ 在任意一组基下的矩阵都相同,那么 $\mathscr{A}$ 是数乘变换.

14. 设 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基,已知线性变换 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 & 5 \\ 2 & -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

1) 求 $\mathscr{A}$ 在基 $\eta_1 = \varepsilon_1 - 2\varepsilon_2 + \varepsilon_4$, $\eta_2 = 3\varepsilon_2 - \varepsilon_3 - \varepsilon_4$, $\eta_3 = \varepsilon_3 + \varepsilon_4$, $\eta_4 = 2\varepsilon_4$ 下的矩阵;

2) 求 $\mathscr{A}$ 的核与值域;

3) 在 $\mathscr{A}$ 的核中选一组基,把它扩充成 V 的一组基,并求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵;

4) 在 $\mathscr{A}$ 的值域中选一组基,把它扩充成 V 的一组基,并求 $\mathscr{A}$ 在这组基下的矩阵.

15. 给定 P^3 的两组基

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= (1,0,1), & \eta_1 &= (1,2,-1), \\ \varepsilon_2 &= (2,1,0), & \eta_2 &= (2,2,-1), \\ \varepsilon_3 &= (1,1,1); & \eta_3 &= (2,-1,-1). \end{aligned}$$

定义线性变换

$$\boldsymbol{A}\varepsilon_i=\eta_i, \qquad i=1,2,3.$$

1) 写出由基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 到基 η_1, η_2, η_3 的过渡矩阵;

2) 写出 $\boldsymbol{A}$ 在基 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 下的矩阵;

3) 写出 $\boldsymbol{A}$ 在基 η_1, η_2, η_3 下的矩阵.

16. 证明:

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} \lambda_{i_1} & & & \\ & \lambda_{i_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_{i_n} \end{pmatrix}$$

相似. 其中 $(i_1 i_2 \cdots i_n)$ 是 $1, 2, \cdots, n$ 的一个排列.

17. 如果 A 可逆,证明: AB 与 BA 相似.

18. 如果 A 与 B 相似, C 与 D 相似, 证明

$$\begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & C \end{pmatrix} 与 \begin{pmatrix} B & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix}$$

相似.

19. 求复数域上线性空间 V 的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 的特征值与特征向量,已知 $\boldsymbol{A}$ 在一组基下的矩阵为:

1) $A=\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$, 2) $A=\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$,

3) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$,

4) $A=\begin{pmatrix} 5 & 6 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$, 5) $A=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$,

6) $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ -2 & 0 & 3 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$, 7) $A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & -8 & -2 \end{pmatrix}$,

20. 在上题中哪些变换的矩阵可以在适当的基下变成对角形？在可以化成对角形的情况，写出相应的基变换的过渡矩阵 T，并验算 $T^{-1}AT$.

21. 在 $P[x]_n$ 中 $(n>1)$，求微分变换 $\mathcal{D}$ 的特征多项式，并证明，$\mathcal{D}$ 在任何一组基下的矩阵都不可能是对角矩阵.

22. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 0 & -3 & 4\\ 0 & 4 & 3\end{pmatrix},$$

求 A^k.

23. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4$ 是四维线性空间 V 的一组基，线性变换 $\mathcal{A}$ 在这组基下的矩阵为

$$A=\begin{pmatrix}5 & -2 & -4 & 3\\ 3 & -1 & -3 & 2\\ -3 & \frac{1}{2} & \frac{9}{2} & -\frac{5}{2}\\ -10 & 3 & 11 & -7\end{pmatrix}.$$

1) 求 $\mathcal{A}$ 在基

$$\begin{aligned}\eta_1&=\varepsilon_1+2\varepsilon_2+\varepsilon_3+\varepsilon_4,\\ \eta_2&=2\varepsilon_1+3\varepsilon_2+\varepsilon_3,\\ \eta_3&=\varepsilon_3,\\ \eta_4&=\varepsilon_4\end{aligned}$$

下的矩阵；

2) 求 $\mathcal{A}$ 的特征值与特征向量；

3) 求一可逆矩阵 T，使 $T^{-1}AT$ 成对角形.

24. 1) 设 λ_1,λ_2 是线性变换 $\mathcal{A}$ 的两个不同特征值，$\varepsilon_1,\varepsilon_2$ 是分别属于 λ_1,λ_2 的特征向量，证明：$\varepsilon_1+\varepsilon_2$ 不是 $\mathcal{A}$ 的特征向量；

2）证明：如果线性空间 V 的线性变换 $\boldsymbol{A}$ 以 V 中每个非零向量作为它的特征向量，那么 $\boldsymbol{A}$ 是数乘变换.

25. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是 V 的线性变换，且 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$. 证明：

1）如果 λ_0 是 $\boldsymbol{A}$ 的一特征值，那么 V_{λ_0} 是 $\boldsymbol{B}$ 的不变子空间；

2）$\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 至少有一个公共的特征向量.

26. 设 V 是复数域上的 n 维线性空间，而线性变换 $\boldsymbol{A}$ 在基 ε_1 $\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵是一若当块. 证明：

1）V 中包含 ε_1 的 $\boldsymbol{A}$-子空间只有 V 自身；

2）V 中任一非零 $\boldsymbol{A}$-子空间都包含 ε_n；

3）V 不能分解成两个非平凡的 $\boldsymbol{A}$-子空间的直和.

27. 求下列矩阵的最小多项式

1) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 　　2) $\begin{pmatrix} 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \\ 3 & -1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 & -3 \end{pmatrix}$.

补　充　题

1. 设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是线性变换，$\boldsymbol{A}^2=\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}^2=\boldsymbol{B}$. 证明：

1）如果 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$，那么 $\boldsymbol{AB}=0$；

2）如果 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$，那么 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB})^2=\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}-\boldsymbol{AB}$.

2. 设 V 是数域 P 上 n 维线性空间. 证明：由 V 的全体线性变换组成的线性空间是 n^2 维的.

3. 设 $\boldsymbol{A}$ 是数域 P 上 n 维线性空间 V 的一个线性变换. 证明：

1）在 $P[x]$ 中有一次数 $\leqslant n^2$ 的多项式 $f(x)$，使 $f(\boldsymbol{A})=0$；

2）如果 $f(\boldsymbol{A})=0, g(\boldsymbol{A})=0$，那么 $d(\boldsymbol{A})=0$，这里 $d(x)$ 是 $f(x)$ 与 $g(x)$ 的最大公因式；

3) $\mathcal{A}$ 可逆的充分必要条件是，有一常数项不为零的多项式 $f(x)$ 使 $f(\mathcal{A})=0$.

4. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的可逆线性变换.

1) 证明: $\mathcal{A}$ 的特征值一定不为 0;

2) 证明: 如果 λ 是 $\mathcal{A}$的特征值，那么$\frac{1}{\lambda}$是 $\mathcal{A}^{-1}$ 的特征值.

5. 设 $\mathcal{A}$ 是线性空间 V 上的线性变换，证明: $\mathcal{A}$ 的行列式为零的充分必要条件是 $\mathcal{A}$ 以零作为一个特征值.

6 设 A 是一 n 级下三角矩阵，证明:

1) 如果 $a_{ii}\neq a_{jj}$ 当 $i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n$, 那么 A 相似于一对角矩阵;

2) 如果 $a_{11}=a_{22}=\cdots=a_{nn}$, 而至少有一 $a_{i_0j_0}\neq 0(i_0>j_0)$, 那么 A 不与对角矩阵相似.

7. 证明: 任一 $n\times n$ 复系数矩阵 A, 存在可逆矩阵 T, 使 $T^{-1}AT$ 是上三角矩阵.

8. 如果 $\mathcal{A}_1,\mathcal{A}_2,\cdots,\mathcal{A}_s$ 是线性空间 V 的 s 个两两不同的线性变换，那么在 V 中必存在向量 α, 使 $\mathcal{A}_1\alpha,\mathcal{A}_2\alpha,\cdots,\mathcal{A}_s\alpha$ 也两两不同.

9. 设 $\mathcal{A}$ 是有限维线性空间 V 的线性变换，W 是 V 的子空间，$\mathcal{A}W$ 表示由 W 中向量的象组成的子空间. 证明:

$$\text{维}(\mathcal{A}W)+\text{维}(\mathcal{A}^{-1}(0)\cap W)=\text{维}(W).$$

10. 设 $\mathcal{A},\mathcal{B}$ 是 n 维线性空间 V 的两个线性变换. 证明:

$$\mathcal{A}\mathcal{B}\text{ 的秩}\geqslant \mathcal{A}\text{ 的秩}+\mathcal{B}\text{ 的秩}-n.$$

11. 设 $\mathcal{A}^2=\mathcal{A},\mathcal{B}^2=\mathcal{B}$. 证明:

1) $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 有相同值域的充分必要条件是 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{B}$, $\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{A}$;

2) $\mathcal{A}$ 与 $\mathcal{B}$ 有相同的核的充分必要条件是 $\mathcal{A}\mathcal{B}=\mathcal{A}$, $\mathcal{B}\mathcal{A}=\mathcal{B}$.

第八章 λ－矩阵

习　题

1. 化下列 λ-矩阵成标准形：

1) $\begin{pmatrix} \lambda^3-\lambda & 2\lambda^2 \\ \lambda^2+5\lambda & 3\lambda \end{pmatrix}$；　　2) $\begin{pmatrix} 1-\lambda & \lambda^2 & \lambda \\ \lambda & \lambda & -\lambda \\ 1+\lambda^2 & \lambda^2 & -\lambda^2 \end{pmatrix}$；

3) $\begin{pmatrix} \lambda^2+\lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & (\lambda+1)^2 \end{pmatrix}$；

4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \lambda^2 \\ 0 & 0 & \lambda^2-\lambda & 0 \\ 0 & (\lambda-1)^2 & 0 & 0 \\ \lambda^2-\lambda & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$；

5) $\begin{pmatrix} 3\lambda^2+2\lambda-3 & 2\lambda-1 & \lambda^2+2\lambda-3 \\ 4\lambda^2+3\lambda-5 & 3\lambda-2 & \lambda^2+3\lambda-4 \\ \lambda^2+\lambda-4 & \lambda-2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$；

6) $\begin{pmatrix} 2\lambda & 3 & 0 & 1 & \lambda \\ 4\lambda & 3\lambda+6 & 0 & \lambda+2 & 2\lambda \\ 0 & 6\lambda & \lambda & 2\lambda & 0 \\ \lambda-1 & 0 & \lambda-1 & 0 & 0 \\ 3\lambda-3 & 1-\lambda & 2\lambda-2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

2. 求下列 λ-矩阵的不变因子：

1) $\begin{pmatrix} \lambda-2 & -1 & 0 \\ 0 & \lambda-2 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$；　2) $\begin{pmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 5 & 4 & 3 & \lambda+2 \end{pmatrix}$；

3) $\begin{pmatrix} \lambda+\alpha & \beta & 1 & 0 \\ -\beta & \lambda+\alpha & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda+\alpha & \beta \\ 0 & 0 & -\beta & \lambda+\alpha \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \lambda+2 \\ 0 & 1 & \lambda+2 & 0 \\ 1 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ \lambda+2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} \lambda+1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda+2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda-1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda-2 \end{pmatrix}$.

3. 证明

$$\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_n \\ -1 & \lambda & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ 0 & -1 & \lambda & \cdots & 0 & a_{n-2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \lambda & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & \lambda+a_1 \end{pmatrix}$$

的不变因子是 $\overbrace{1, 1, \cdots, 1}^{n-1\text{个}}$, $f(\lambda)$, 其中 $f(\lambda)=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n$.

4. 设 A 是数域 P 上一个 $n\times n$ 矩阵，证明 A 与 A' 相似.

5. 设

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1 & \lambda \end{pmatrix},$$

求 A^k.

6. 求下列复系数矩阵的若当标准形:

1) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 13 & 16 & 16 \\ -5 & -7 & -6 \\ -6 & -8 & -7 \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix}$; 4) $\begin{pmatrix} 4 & 5 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 3 & 7 & -3 \\ -2 & -5 & 2 \\ -4 & -10 & 3 \end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix} -4 & 2 & 10 \\ -4 & 3 & 7 \\ -3 & 1 & 7 \end{pmatrix}$,

9) $\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 \\ -1 & 8 & 6 \\ 2 & -14 & -10 \end{pmatrix}$; 10) $\begin{pmatrix} 8 & 30 & -14 \\ -6 & -19 & 9 \\ -6 & -23 & 11 \end{pmatrix}$;

11) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 0 & 0 \\ 7 & 1 & 2 & 1 \\ -7 & -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & 6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & 8 \end{pmatrix}$

14) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

第九章　欧几里得空间

习　题

1. 设 $A=(a_{ij})$ 是一个 n 级正定矩阵，而

$$\alpha=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\ \beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$$

在 R^n 中定义内积 (α,β) 为

$$(\alpha,\beta)=\alpha A\beta'.$$

1) 证明在这个定义之下，R^n 成一欧氏空间；

2) 求单位向量 $\varepsilon_1=(1,0,\ \cdots,0)$，$\varepsilon_2=(0,1,\cdots,\ 0)$，$\cdots$，$\varepsilon_n=(0,,0,\cdots,1)$ 的度量矩阵；

3) 具体写出这个空间中的柯西-布涅柯夫斯基不等式.

2. 在 R^4 中，求 α，β 之间的夹角 $\langle\alpha,\ \beta\rangle$（内积按通常定义）．设

1) $\alpha=(2,1,3,2)$，$\beta=(1,2,-2,1)$；

2) $\alpha=(1,2,2,3)$，$\beta=(3,1,5,1)$；

3) $\alpha=(1,1,1,2)$，$\beta=(3,1,-1,0)$.

3. $d(\alpha,\beta)=|\alpha-\beta|$ 通常称为 α 与 β 的距离，证明：

$$d(\alpha,\gamma)\leqslant d(\alpha,\beta)+d(\beta,\gamma).$$

4. 在 R^4 中求一单位向量与 $(1,1,-1,1)$，$(1,-1,-1,1)$，$(2,1,1,3)$ 正交.

5. 设 $\alpha_1,\alpha_3,\cdots,\alpha_n$ 是欧氏空间 V 的一组基，证明：

1) 如果 $\gamma\in V$ 使 $(\gamma,\alpha_i)=0$，$i=1,2,\cdots,n$，那么 $\gamma=0$；

2) 如果 γ_1，$\gamma_2\in V$ 使对任一 $\alpha\in V$ 有 $(\gamma_1,\alpha)=(\gamma_2,\alpha)$，那么 $\gamma_1=\gamma_2$.

6. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是三维欧氏空间中一组标准正交基，证明：

$$\alpha_1=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1+2\varepsilon_2-\varepsilon_3),\alpha_2=\frac{1}{3}(2\varepsilon_1-\varepsilon_2+2\varepsilon_3),$$

$$\alpha_3=\frac{1}{3}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2-2\varepsilon_3)$$

也是一组标准正交基.

7. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4,\varepsilon_5$ 是五维欧氏空间 V 的一组标准正交基，$V_1=L(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$，其中 $\alpha_1=\varepsilon_1+\varepsilon_5,\alpha_2=\varepsilon_1-\varepsilon_2+\varepsilon_4$，$\alpha_3=2\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3$，求 V_1 的一组标准正交基.

8. 求齐次线性方程组

$$\begin{cases}2x_1+x_2-x_3+x_4-3x_5=0,\\ x_1+x_2-x_3\qquad\qquad+x_5=0,\end{cases}$$

的解空间(作为 R^5 的子空间)的一组标准正交基.

9. 在 $R[x]_4$ 中定义内积为 $(f,g)=\int_{-1}^{1}f(x)g(x)dx$. 求 $R[x]_4$ 的一组标准正交基(由基 $1,x,x^2,x^3$ 出发作正交化).

10. 设 V 是一 n 维欧氏空间，$\alpha\neq0$ 是 V 中一固定向量，

1) 证明：

$$V_1=\{x\mid(x,\alpha)=0,x\in V\}$$

是 V 的一子空间；

2) 证明：V_1 的维数等于 $n-1$.

11. 1) 证明：欧氏空间中不同基的度量矩阵是合同的；

2) 利用上述结果证明：任一欧氏空间都存在标准正交基.

12. 设 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 是 n 维欧氏空间 V 中一组向量，而

$$\Delta=\begin{pmatrix}(\alpha_1,\alpha_1) & (\alpha_1,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_1,\alpha_m)\\ (\alpha_2,\alpha_1) & (\alpha_2,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_2,\alpha_m)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ (\alpha_m,\alpha_1) & (\alpha_m,\alpha_2) & \cdots & (\alpha_m,\alpha_m)\end{pmatrix}.$$

证明：当且仅当 $|\Delta|\neq0$ 时 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$ 线性无关.

13. 证明：上三角的正交矩阵必为对角矩阵，且对角线上的元素为+1或-1.

14. 1) 设A为一个n级实矩阵，且$|A|\neq 0$. 证明A可以分解成QT：

$$A=QT,$$

其中Q是正交矩阵，T是一上三角形矩阵：

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

且$t_{ii}>0(i=1,2,\cdots,n)$. 并证明这个分解是唯一的；

2) 设A是n级正定矩阵，证明存在一上三角形矩阵T，使

$$A=T'T.$$

15. 设η是欧氏空间中一单位向量，定义

$$A\alpha=\alpha-2(\eta,\alpha)\eta.$$

证明：

1) A是正交变换. 这样的正交变换称为镜面反射；

2) A是第二类的；

3) 如果n维欧氏空间中，正交变换A以1作为一个特征值，且属于特征值1的特征子空间V_1的维数为$n-1$，那么A是镜面反射.

16. 证明：反对称实数矩阵的特征值是零或纯虚数.

17. 求正交矩阵T使$T'AT$成对角形，其中A为：

1) $\begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}$；　　2) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & -4 \\ -2 & -4 & 5 \end{pmatrix}$；

3) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 4 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　　4) $\begin{pmatrix} -1 & -3 & 3 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & 3 \\ 3 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & 3 & -3 & -1 \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

18. 用正交线性替换化下列二次型为标准形:

1) $x_1^2+2x_2^2+3x_3^2-4x_1x_2-4x_2x_3$;

2) $x_1^2-2x_2^2-2x_3^2-4x_1x_2+4x_1x_3+8x_2x_3$;

3) $2x_1x_2+2x_3x_4$;

4) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2-2x_1x_2+6x_1x_3-4x_1x_4-4x_2x_3+6x_2x_4-2x_3x_4$.

19. 设 A 是 n 级实对称矩阵,证明: A 正定的充分必要条件是 A 的特征多项式的根全大于零.

20. 设 A 是 n 级实矩阵, 证明: 存在正交矩阵 T 使 $T^{-1}AT$ 为三角矩阵的充分必要条件是 A 的特征多项式的根全是实的.

21. 设 A, B 都是实对称矩阵,证明:存在正交矩阵 T 使 $T^{-1}AT=B$ 的充分必要条件是 A、B 的特征多项式的根全部相同.

22. 设 A 是 n 级实对称矩阵, 且 $A^2=A$, 证明存在正交矩阵 T 使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & 1 & & & \\ & & & & 0 & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

23. 证明：如果 A 是正交变换，那么 A 的不变子空间的正交补也是 A 的不变子空间.

24. 欧氏空间 V 中的线性变换称为反对称的，如果对任意的 $\alpha, \beta \in V$,

$$(A\alpha, \beta) = -(\alpha, A\beta).$$

证明：

1) A 为反对称的充分必要条件是，A 在一组标准正交基下的矩阵为反对称的；

2) 如果 V_1 是反对称线性变换的不变子空间，则 $V_1^\perp$ 也是.

25. 证明：向量 $\beta \in V_1$ 是向量 α 在子空间 V_1 上的内射影的充分必要条件是，对任意的 $\xi \in V_1$,

$$|\alpha - \beta| \leqslant |\alpha - \xi|.$$

26. 设 V_1, V_2 是欧氏空间 V 的两个子空间. 证明：

$$(V_1 + V_2)^\perp = V_1^\perp \cap V_2^\perp$$

$$(V_1 \cap V_2)^\perp = V_1^\perp + V_2^\perp$$

27. 求下列方程的最小二乘解：

$$\begin{cases} 0.39\,x - 1.89\,y = 1, \\ 0.61\,x - 1.80\,y = 1, \\ 0.93\,x - 1.68\,y = 1, \\ 1.35\,x - 1.50\,y = 1. \end{cases}$$

用"到子空间距离最短的线是垂线"的语言表达出上面方程的最小二乘解的几何意义. 由此列出方程并求解. (用三位有效数字计算).

补 充 题

1. 证明正交矩阵的实特征根为±1.

2. 证明：奇数维欧氏空间中的旋转一定以 1 作为它的一个特

征值.

3. 证明：第二类正交变换一定以-1作为它的一个特征值.

4. 设$\mathcal{A}$是欧氏空间V的一个变换. 证明：如果$\mathcal{A}$保持内积不变，即对于$\alpha,\beta\in V$，$(\mathcal{A}\alpha,\ \mathcal{A}\beta)=(\alpha,\beta)$，那么它一定是线性的，因而它是正交变换.

5. 设$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_m$和$\beta_1,\ \beta_2,\ \cdots,\beta_m$是$n$维欧氏空间中两个向量组. 证明存在一正交变换$\mathcal{A}$，使

$$\mathcal{A}\alpha_i=\beta_i,\quad i=1,2,\cdots,m$$

的充分必要条件为

$$(\alpha_i,\alpha_j)=(\beta_i,\beta_j),\quad i,j=1,2,\cdots,m.$$

6. 设A是n级实对称矩阵，且$A^2=E$，证明：存在正交矩阵T使得

$$T^{-1}AT=\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & -E_{n-r} \end{pmatrix}.$$

7. 设$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=X'AX$是一实二次型，$\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n$是$A$的特征多项式的根，且$\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\cdots\leqslant\lambda_n$. 证明对任一$X\in R^n$，有

$$\lambda_1X'X\leqslant X'AX\leqslant\lambda_nX'X.$$

8. 设二次型$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$的矩阵为A，λ是A的特征多项式的根，证明存在R^n中的非零向量$(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)$使得

$$f(\bar{x}_1,\bar{x}_2,\cdots,\bar{x}_n)=\lambda(\bar{x}_1^2+\bar{x}_2^2+\cdots+\bar{x}_n^2).$$

9. 1) 设α,β是欧氏空间中两个不同的单位向量，证明存在一镜面反射$\mathcal{A}$，使

$$\mathcal{A}(\alpha)=\beta;$$

2) 证明：n维欧氏空间中任一正交变换都可以表成一系列镜面反射的乘积.

10. 设A,B是两个$n\times n$实对称矩阵，且B是正定矩阵. 证明存在一$n\times n$实可逆矩阵T使$T'AT$与$T'BT$同时为对角形.

11. 证明酉空间中两组标准正交基的过渡矩阵是酉矩阵.

12. 证明:酉矩阵的特征根的模为 1.

13. 设 A 是一个 n 级可逆复矩阵,证明 A 可以分解成

$$A=UT,$$

其中 U 是酉矩阵,T 是一个上三角形矩阵

$$T=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ 0 & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & t_{nn} \end{pmatrix},$$

其中对角线元素 $t_{ii}(i=1,2,\cdots,n)$ 都是正实数, 并证明这个分解是唯一的.

14. 证明厄米特矩阵的特征值是实数,并且它的属于不同特征值的特征向量相互正交.

第十章　双线性函数

习　题

1　V 是数域 P 上一个 3 维线性空间，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是它的一组基，f 是 V 上一个线性函数，已知

$$f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=1,f(\varepsilon_2-2\varepsilon_3)=- \ ,\ f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=-3,$$

求 $f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)$.

2. V 及 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 同上题，试找出一个线性函数 f，使

$$f(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=f(\varepsilon_1-2\varepsilon_3)=0,f(\varepsilon_1+\varepsilon_2)=1.$$

3. 设 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3$ 是线性空间 V 的一组基，$f_1,\ f_2,\ f_3$ 是它的对偶基，

$$\alpha_1=\varepsilon_1-\varepsilon_3,\alpha_2=\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3,\alpha_3=\varepsilon_2+\varepsilon_3,$$

试证 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 是 V 的一组基并求它的对偶基（用 $f_1,\ f_2,f_3$ 表出）.

4. 设 V 是一个线性空间，$f_1,f_2,f_3,\cdots,f_s$ 是 V^* 中非零向量，试证，存在 $\alpha\in V$，使

$$f_i(\alpha)\neq0,\quad i=1,2,\cdots,s.$$

5. 设 $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_s$ 是线性空间 V 中非零向量，证明有 $f\in V^*$ 使

$$f(\alpha_i)\neq0,i=1,2,\cdots,s.$$

6. $V=P[x]_3$，对 $p(x)=c_0+c_1x+c_2x^2\in V$ 定义

$$f_1(p(x))=\int_0^1 p(x)dx,$$

$$f_2(p(x))=\int_0^2 p(x)dx,$$

$$f_3(p(x))=\int_0^{-1}p(x)dx.$$

试证f_1，f_2，f_3都是V上线性函数，并找出V的一组基$p_1(x)$，$p_2(x)$，$p_3(x)$使f_1,f_2,f_3是它的对偶基.

7. 设V是一个n维欧氏空间，它的内积为(α,β)，对V中确定的向量α，定义V上一个函数α^*：

$$\alpha^*(\beta)=(\alpha,\beta).$$

1）证明α^*是V上线性函数；

2）证明V到V^*的映射：

$$\alpha\rightarrow\alpha^*$$

是V到V^*的一个同构映射.（在这个同构下，欧氏空间可看成自身的对偶空间.）

8. 设$\boldsymbol{A}$是P上n维线性空间V的一个线性变换.

1）证明：对V上线性函数f，$f\boldsymbol{A}$仍是V上线性函数

2）定义V^*到自身的映射$\boldsymbol{A}^*$为：

$$f\rightarrow f\boldsymbol{A}$$

证明$\boldsymbol{A}^*$是V^*上的线性变换.

3）设$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$是$V$的一组基，$f_1,f_2,\cdots,f_n$是它的对偶基，并设$\boldsymbol{A}$在$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$下的矩阵为$A$. 证明$\boldsymbol{A}^*$在$f_1,f_2,\cdots,f_n$下的矩阵为$A'$.（因此$\boldsymbol{A}^*$称做$\boldsymbol{A}$的转置映射）

9. 设V是数域P上一个线性空间. $f_1,\cdots,f_k$是V上k个线性函数.

1）证明下列集合

$$W=\{\alpha\in V\mid f_i(\alpha)=0,1\leqslant i\leqslant k\}$$

是V的一个子空间，W称为线性函数$f_1,\cdots,f_k$的零化子空间.

2）证明：V的任一个子空间皆为某些线性函数的零化子空间.

10. 设 A 是 P 上一个 m 级矩阵. 定义 $P^{m\times n}$ 上一个二元函数

$$f(X,Y)=\mathrm{Tr}(X'AY)\ X,Y\in P^{m\times n}.$$

1) 证明 $f(X,Y)$ 是 $P^{m\times n}$ 上双线性函数;

2) 求 $f(X,Y)$ 在基 $E_{11},E_{12},\cdots,E_{1n},\ E_{21},E_{22},\cdots,E_{2n},\cdots,E_{m1},E_{m2},\cdots,\ E_{mn}$ 下的度量矩阵. (E_{ij} 表示 i 行 j 列的元素为 1, 而其余元素全为零的 $m\times n$ 矩阵.)

11. 在 P^4 中定义一个双线性函数 $f(X,Y)$, 对 $X=(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $Y=(y_1,y_2,y_3,y_4)$, $f(X,Y)=3x_1y_2-5x_2y_1+x_3y_4-4x_4y_3$,

1) 给定 P^4 的一组基

$$\varepsilon_1=(1,-2,-1,0),\ \varepsilon_2=(1,-1,1,0),$$
$$\varepsilon_3=(-1,2,1,1),\ \varepsilon_4=(-1,-1,0,1).$$

求 $f(X,Y)$ 在这组基下的度量矩阵;

2) 另取一组基 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$;

$$(\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4)=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)T,$$

其中

$$T=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&1&-1&-1\\1&-1&1&-1\\1&-1&-1&1\end{pmatrix},$$

求 $f(X,Y)$ 在 $\eta_1,\eta_2,\eta_3,\eta_4$ 下的度量矩阵.

12. 设 V 是复数域上线性空间, 其维数 $n\geqslant2$, $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上一个对称双线性函数.

1) 证明 V 中有非零向量 ξ 使 $f(\xi,\xi)=0$;

2) 如果 $f(\alpha,\beta)$ 是非退化的, 则必有线性无关的向量 ξ,η 满足

$$f(\xi,\eta)=1,$$
$$f(\xi,\xi)=f(\eta,\eta)=0.$$

13. 试证：线性空间 V 上双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 为反对称的充要条件是：对任意 $\alpha\in V$ 都有 $f(\alpha,\alpha)=0$.

14. 设 $f(\alpha,\beta)$ 是 V 上对称的或反对称的双线性函数. α, β 是 V 中两个向量，如果 $f(\alpha,\beta)=0$，则称 α,β 正交. 再设 K 是 V 的一个真子空间，证明：对 $\xi\overline{\in}K$，必有非零 $\eta\in K+L(\xi)$ 使

$$f(\eta,\alpha)=0$$

对所有 $\alpha\in K$ 都成立.

15. 设 V 与 $f(\alpha,\beta)$ 同上题，K 是 V 的一个子空间. 令 $K^{\perp}=\{\alpha\in V\mid f(\alpha,\beta)=0,\forall\beta\in K\}$.

1) 试证 $K^{\perp}$ 是 V 的子空间，($K^{\perp}$ 称为 K 的正交补)

2) 试证，如果 $K\cap K^{\perp}=\{0\}$，则 $V=K+K^{\perp}$.

16. 设 $V,f(\alpha,\beta),K$ 同上题，并设 $f(\alpha,\beta)$ 限制在 K 上是非退化的，试证：$V=K+K^{\perp}$ 的充要条件是 $f(\alpha,\beta)$ 在 V 上为非退化的.

17. 设 $f(\alpha,\beta)$ 是 n 维线性空间 V 上的非退化对称双线性函数，对 V 中一个元素 α，，定义 V^* 中一个元素 α^*：

$$\alpha^*(\beta)=f(\alpha,\beta)\quad \beta\in V.$$

试证：1) V 到 V^* 的映射 $\alpha\to\alpha^*$ 是一个同构映射；

2) 对 V 的每组基 $e_1,\cdots,e_n$，有 V 的唯一的一组基 $e'_1,\cdots,e'_n$ 使

$$f(e_i,e'_j)=\delta_{ij};$$

3) 如果 V 是复数域上 n 维线性空间，则有一组基 $\eta_1,\cdots,\eta_n$，使 $\eta_i=\eta'_i\quad i=1,2,\cdots,n$.

18. 设 V 是对于非退化对称双线性函数 $f(\alpha,\beta)$ 的 n 维伪欧氏空间. V 的一组基 $e_1,\cdots,e_n$ 如果满足

$$f(e_i,e_i)=1\qquad i=1,2,\cdots,p;$$
$$f(e_i,e_i)=-1\quad i=p+1,\cdots,n;$$
$$f(e_i,e_j)=0\qquad i\neq j.$$

则称为V的一组正交基. 如果V上的线性变换A满足

$$f(A\alpha, A\beta)=f(\alpha,\beta) \qquad \alpha\beta\in V,$$

则称A为V的一个伪正交变换. 试证

1) 伪正交变换是可逆的，且逆变换也是伪正交变换；

2) 伪正交变换的乘积仍是伪正交变换；

3) 伪正交变换在伪正交基下的矩阵T满足

$$T\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}T'=\begin{pmatrix}1&&&&&\\&\ddots&&&&\\&&1&&&\\&&&-1&&\\&&&&\ddots&\\&&&&&-1\end{pmatrix}.$$

第十一章　代数基本概念介绍

习　题

1. 设 R 为全体实数的集合，而

$$M=\{(a,b)\mid a,b\in R,a\neq 0\}.$$

在 M 上定义运算如下：

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,ad+b).$$

验证 M 对上述运算成一群.

2. 1) 找出正四边形的对称群；

2) 找出空间正四面体的对称群.

3. 设

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3 & 4 & 5\\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2\end{pmatrix}.$$

1) 把 A,B 分解成轮换的乘积；

2) 求 $AB, A^{-1}BA, A^2, A^3$.

4. 证明：如果群 G 中每个元素 x 都适合 $x^2=e$，那么 G 是交换群.

5. 证明：任何一个置换都能分解成一些对换的乘积，而分解式中包含的对换个数的奇偶性与分解式无关.

6. 证明 $|A_n|=\frac{n!}{2}$.

7. 设 G 是一非空集合，在 G 上定义一个乘法，它具有性质：1) $(ab)c=a(bc)$，2) 对所有的 $a,b\in G$，方程 $ax=b$，$ya=b$ 有解. 证明 G 是一群.

8. 当G为有限群：$G=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$时，G的乘法可以用一个表

	a_1	a_2	$\cdots$	a_n
a_1	a_1a_1	a_1a_2	$\cdots$	a_1a_n
a_2	a_2a_1	a_2a_2	$\cdots$	a_2a_n
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$
a_n	a_na_1	a_na_2	$\cdots$	a_na_n

表示，它称为G的**乘法表**. 试写出

1）U_3 的乘法表；

2）S_3 的乘法表.

9. 设a是群G的任一元素. 求证：G中所有与a可交换的元素的集合是G的一子群.

10. A为n级实数对称矩阵，令$O(A)$为所有适合$P'AP=A$的可逆矩阵P组成的集合. 证明$O(A)$对乘法组成一群，且当两个实数对称矩阵A,B合同时，$O(A)$与$O(B)$同构.

11. 证明：当a,b是实数且$a\neq 0$时，直线上全体变换

$$x'=ax+b$$

组成一变换群L，它与第1题中的群是同构的.

12. 证明：正四面体的对称群与A_4同构.

13. 在全体整数的有序偶上定义运算如下：

$$(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d),$$

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,bd).$$

证明：对于这样的运算全体整数的有序偶成一环.

14. 在上题中把乘法的定义改为

$$(a,b)\cdot(c,d)=(ac,ad)$$

全体整数的有序偶还成环吗？

15. 设$C(-\infty,+\infty)$是全体定义在$(-\infty,+\infty)$上连续实函数的集合，定义运算如下：

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x),$$

$$(f\cdot g)(x)=f(g(x)).$$

验证 C 是否成一个环．

16. 在环R中，如果元素a，b可交换，即$ab=ba$，那么二项式定理

$$(a+b)^n=a^n+C_n^1a^{n-1}b+\cdots+C_n^{n-1}ab^{n-1}+b^n$$

成立，这里 n 是正整数.

17. 设 R 是一环，所谓R的中心 $Z(R)$ 是指与环中所有元素可交换的元素的集合. 证明中心是一子环.

18. 环R称为一布尔(Boole)环，如果R中每个元素x都合条件

$$x^2=x,$$

证明在布尔环中

1) $x+x=0$，对所有的 $x\in R$；

2) $xy=yx$，对所有的 $x,y\in R$.

19. 设P是一域，R是一环. 证明：如果R与P同构，那么R也是域.

20. 在实数域上二级矩阵环 $M_2(R)$中，令 K 是所有形式为

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}, a,b\in R$$

的矩阵组成的子集合.

1) 证明 K 是环 $M_2(R)$的一个子域；

2) 定义

$$\sigma(a+bi)=\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

证明σ是复数域K到 K 的一个同构映射.

21. 证明：有理数域Q到自身的同构只有恒等映射.

第二部分　答案与提示

第一章　多　项　式

习　题

1. 1) $q(x)=\frac{1}{3}x-\frac{7}{9}$,　　$r(x)=-\frac{26}{9}x-\frac{2}{9}$;

   2) $q(x)=x^2+x-1$,　　$r(x)=-5x+7$.

2. 1) $p=-m^2-1$,　　$q=m$;

   2) $p=2-m^2$,　　$q=1$　　或　　$m=0$,　　$p=q+1$.

3. 1) $q(x)=2x^4-6x^3+13x^2-39x+109$,　　$r(x)=-327$;

   2) $q(x)=x^2-2ix-(5+2i)$,　　$r(x)=-9+8i$.

4. 1) $f(x)=(x-1)^5+5(x-1)^4+10(x-1)^3+10(x-1)^2$
   $+5(x-1)+1$;

   2) $f(x)=(x+2)^4-8(x+2)^3+22(x+2)^2-24(x+2)$
   $+11$;

   3) $f(x)=(x+i)^4-2i(x+i)^3-(1+i)(x+i)^2$
   $-5(x+i)+7+5i$.

5. 1) $(f(x),g(x))=x+1$;

   2) $(f(x),g(x))=1$;

   3) $(f(x),g(x))=x^2-2\sqrt{2}x-1$.

6. 1) $u(x)=-x-1$,　　$v(x)=x+2$;

   2) $u(x)=-\frac{1}{3}x+\frac{1}{3}$,　　$v(x)=\frac{2}{3}x^2-\frac{2}{3}x-1$;

3) $u(x)=-x-1$, $\quad v(x)=x^3+x^2-3x-2$.

7. $t=-4$, $\quad u=0$.

12. 提示：主要应用本章定理 3.

14. 提示：主要应用本章习题 12.

15. 提示：利用 n 次单位根的三角表示.

在复数范围内：$x^n-1=(x-1)(x-\varepsilon)\cdots(x-\varepsilon^{n-1})$,

其中

$$\varepsilon=\cos\frac{2\pi}{n}+i\sin\frac{2\pi}{n};$$

在实数范围内：当 n 为奇数时：

$$x^n-1=(x-1)[x^2-(\varepsilon+\varepsilon^{n-1})x+1][x^2-(\varepsilon^2+\varepsilon^{n-2})x+1]\cdots\cdots$$
$$[x^2-(\varepsilon^{\frac{n-1}{2}}+\varepsilon^{\frac{n+1}{2}})x+1],$$

其中

$\varepsilon^i+\varepsilon^{n-i}=2\cos\frac{2i\pi}{n}$是一个实数，$i=1,2,\cdots,\frac{n-1}{2}$，当 n 为偶数时：

$$x^n-1=(x+1)(x-1)[x^2-(\varepsilon+\varepsilon^{n-1})x+1][x^2-(\varepsilon^2+\varepsilon^{n-2})x+1]\cdots\cdots[x^2-(\varepsilon^{\frac{n-2}{2}}+\varepsilon^{\frac{n+2}{2}})x+1].$$

16. $x=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$.

17. 1) 有； 2) 无.

18. $t=3,-\frac{15}{4}$.

19. $4p^3+27q^2=0$.

20. $A=1, B=-2$.

25. 提示：将根与因式的关系应用于 n 次单位根.

26. 提示：注意两个三次单位原根都是 x^2+x+1 的根.

27. 1) $x=2$; 2) $x_1=x_2=-\frac{1}{2}$;

3) $x_1=3, x_2=x_3=x_4=x_5=-1$.

28. 都不可约.

提示：对于 3) 作替换 $x=y+1$，再利用爱森斯坦判别法.

4)和 5) 仿上.

29. 1) $f(x_1, x_2, x_3)=\sigma_1\sigma_2-3\sigma_3$;

2) $f(x_1, x_2, x_3)=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3$;

3) $f(x_1, x_2, x_3)=\sigma_1^2\sigma_2^2-4\sigma_1^3\sigma_3-4\sigma_2^3+18\sigma_1\sigma_2\sigma_3$

$-27\sigma_3^2$;

4) $f(x_1, x_2, x_3, x_4)=\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$;

5) $f(x_1, x_2, x_3)=\sigma_3^2+\sigma_3+\sigma_1^2\sigma_3-2\sigma_2\sigma_3+\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3$;

6) $f(x_1, x_2, x_3)=\sigma_1\sigma_2-\sigma_3+\sigma_2^2+\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2\sigma_3+\sigma_3^2$.

30. 1) $\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4$;

2) $\sigma_1\sigma_3-4\sigma_4$;

3) $\sigma_2^2-2\sigma_1\sigma_3+2\sigma_4$;

4) $\sigma_2\sigma_4-4\sigma_1\sigma_5+9\sigma_6$.

31. $-\frac{1679}{625}$.

补 充 题

1. 提示：注意 a, b, c, d 都是常数，且 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$.

2. 提示：记 $f_1(x)=\frac{f(x)}{(f(x), g(x))}$，$g_1(x)=\frac{g(x)}{(f(x), g(x))}$，首先证明：如果 $\partial(u(x))<\partial(g_1(x))$，则必有 $\partial(v(x))<\partial(f_1(x))$，其次，将 $u(x)f_1(x)+v(x)g_1(x)=1$ 变形，使得 $\partial(u(x))<\partial(g_1(x))$.

3. 提示：应用定理 3.

5. 提示：先证当$(f(x),g(x))=1$时，结论成立．然后再证一般情形；或利用因式分解唯一性定理.

6. 提示：反证法.

7. 提示：充分条件的证明可应用反证法.

8. 提示：充分条件的证明可应用反证法.

10. 提示：如果 α 是 $f(x)$的一个根，则 α^n 也是.

12. 提示：1）应用本章定理 9；

2）利用带余除法的唯一性.

13. 1) $f(x)=-\frac{2}{3}x^3+\frac{17}{2}x^2-\frac{203}{6}x+42$;

2) $f(x)=-\frac{4}{\pi^2}x^2+\frac{4}{\pi}x$;

3) $f(x)=x^2+1$.

14. 提示：利用反证法．假如 $f(x)$ 有一个整数根 α，则有 $\alpha|f(0)$，且 $f(0)$和 $f(1)$同奇偶.

15. 提示：用 $x-x_1$ 除 $f(x)=x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n$，作带余除法，将 $x_2,\cdots,x_n$ 的初等对称多项式用 x_1 和 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的多项式表出.

16. 提示：1）应用恒等式

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x-x_i}\text{和}\frac{1}{x-x_i}=\frac{1}{x}\sum_{r=0}^{k}\left(\frac{x_i}{x}\right)^r+\frac{\left(\frac{x_i}{x}\right)^{k+1}}{x-x_i}.$$

17. 1）当 $n\geqslant 6$ 时，$s_2=\sigma_1^2-2\sigma_2$,

$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2+3\sigma_3$,

$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2-4\sigma_4$,

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3$$
$$+5\sigma_5,$$
$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$
$$+6\sigma_1\sigma_5-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2-6\sigma_6;$$

2) 当 $n=5$ 时，s_2, s_3, s_4, s_5 同 1)，

$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$
$$+6\sigma_1\sigma_5-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2,$$

3) 当 $n=4$ 时，s_2, s_3, s_4 同 1)，

$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_1\sigma_4-5\sigma_2\sigma_3,$$
$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-6\sigma_1^2\sigma_4$$
$$-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3-2\sigma_2^3+6\sigma_2\sigma_4+3\sigma_3^2;$$

4) 当 $n=3$ 时，s_2, s_3 同 1)，

$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+4\sigma_1\sigma_3+2\sigma_2^2,$$
$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1^2\sigma_3+5\sigma_1\sigma_2^2-5\sigma_2\sigma_3,$$
$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+6\sigma_1^3\sigma_3+9\sigma_1^2\sigma_2^2-12\sigma_1\sigma_2\sigma_3$$
$$-2\sigma_2^3+3\sigma_3^2;$$

5) 当 $n=2$ 时，s_2 同 1)，

$$s_3=\sigma_1^3-3\sigma_1\sigma_2,$$
$$s_4=\sigma_1^4-4\sigma_1^2\sigma_2+2\sigma_2^2,$$
$$s_5=\sigma_1^5-5\sigma_1^3\sigma_2+5\sigma_1\sigma_2^2,$$
$$s_6=\sigma_1^6-6\sigma_1^4\sigma_2+9\sigma_1^2\sigma_2^2-2\sigma_2^3.$$

19. $x^n+a=0$，其中 a 为任意复数。

20. $\sum\limits_{i=0}^{n}(-1)^i\dfrac{\sigma_1^i}{i!}x^{n-i}=0.$

第二章　行　列　式

习　题

4. $\frac{1}{2}n(n-1)$；当 $n=4k$ 或 $4k+1$ 时为偶排列．当 $n=4k+2$ 或 $4k+3$ 时为奇排列．

5. $\frac{1}{2}n(n-1)-I$.

8. 1) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}n!$；2) $(-1)^{n-1}n!$；3) $(-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}}n!$.

9. 提示：展开式中每一项至少含有一个零因子．

10. x^4 的系数为 2；x^3 的系数为 -1.

12. 根为 $a_1, a_2, \cdots\cdots a_{n-1}$.

13 1) -294×10^5；　2) $-2(x^3+y^3)$；　3) 48；　4) 160；5) x^2y^2；　6) 0.

16. 1) -483；　2) $\frac{3}{8}$.

17. 提示：1) 按一行(或一列)展开；
2) $n=1,2$ 单独计算，$n\geqslant 3$ 时证明行列式等于零；
3) 注意各行元素之和相等；
4) 应用行列式性质 6；
5) 从左起，依次将前一列加到后一列．

答案：1) $x^n+(-1)^{n+1}y^n$；　2) 当 $n=1$ 时，为 a_1-b_1；
当 $n=2$ 时，为 $(a_1-a_2)(b_1-b_2)$；当 $n\geqslant 3$ 时，为零；
3) $(-1)^n m^{n-1}(m-\sum_{i=1}^{n}x_i)$；　4) $-2(n-2)!$ $(n\geqslant 2)$；

5) $(-1)^{n-1}\frac{(n+1)!}{2}$.

18. 提示：本题中每小题均可用数学归纳法，但也可不用.

1) 将第一列的元素除 a_0 外全化为零，再计算.

2) 应用数学归纳法，先按第一行展开.

3) 应用第二数学归纳法，先按第一行展开.

4) 应用第二数学归纳法，先按第 n 行展开.

5) 先将第一列的(－1)倍加到其余各列，然后将第一列的元素(除 $1+a_1$ 外)化为零.

19. 1) $x_1=1,\quad x_2=1,\quad x_3=1,\quad x_4=1$;

2) $x_1=1,\quad x_2=2,\quad x_3=-1,\quad x_4=-2$;

3) $x_1=4,\quad x_2=-14,\quad x_3=-4,\quad x_4=7,\quad x_5=13$;

4) $x_1=\frac{1507}{665},\ x_2=-\frac{229}{133},\ x_3=\frac{37}{35},\ x_4=-\frac{79}{133},\ x_5=\frac{212}{665}$.

21. $t=15℃$，$h=13.56$；$t=40℃$，$h=13.48$.

补 充 题

1. 0.

3. 提示：1) 累次应用行列式性质 3. 将它拆成 2^n 个行列式之和.

2) 将 1) 中左端行列式用 2) 中右端行列式和 $|a_{ij}|$ 表出之；或直接仿 1) 计算亦可.

4. 提示：1) 先将各列加到第一列，提出公因子 $\frac{n(n+1)}{2}$，然后依次第 n 行减第 $n-1$ 行，第 $n-1$ 行减第 $n-2$ 行……第二行减第一行，再按第一列展开，最后来计算 $n-1$ 级行列式

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1-n \\ 1 & 1 & \cdots & 1-n & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & 1-n & \cdots & 1 & 1 \\ 1-n & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix};$$

2) 原行列式记为 $f(n)$，用 $g(n)$ 表示下面行列式：把原行列式中的第 n 行，第 n 列元素 α 换成 β 后，得到的新行列式. 将原行列式的第 $n-1$ 列加到第 n 列，然后按最后一列展开，即得递推公式：

$$f(n)=(\alpha-\beta)(f(n-1)+g(n-1)).$$

再应用数学归纳法，计算 $g(n)$ $n\geqslant 2$ 得到：

$$g(n)=(\lambda\beta-ab)(\alpha-\beta)^{n-2},\quad n\geqslant 2.$$

最后，由上面的递推公式，即可得到：

$$f(n)=(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha-ab+(n-2)(\lambda\beta-ab)],n\geqslant 2.$$

即：

$$f(n)=(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+\lambda\beta(n-2)-ab(n-1)],n\geqslant 2;$$

3) 将原行列式记为 $f(n)$，依次将第二列的 (-1) 倍加到第一列. 第三列的 (-1) 倍加到第二列，……，第 n 列的 (-1) 倍加到第 $n-1$ 列，然后按第一列展开，得到递推公式：

$$f(n)=(x-a)f(n-1)+a(x+a)^{n-1},\quad n\geqslant 2.$$

再利用已知：$f(1)=x$ 从而推出

$$f(n)=\frac{1}{2}[(x+a)^n+(x-a)^n];$$

4) 与 3) 类似；

5) 引进第 $n+1$ 个量 x_{n+1}，考虑由 $1,x_1,x_2,\cdots,\ x_{n+1}$ 构成的范德蒙行列式：

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n & x_{n+1} \\ x_1^2 & x_2^2 & \cdots & x_n^2 & x_{n+1}^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \cdots & x_n^{n-1} & x_{n+1}^{n-1} \\ x_1^n & x_2^n & \cdots & x_n^n & x_{n+1}^n \end{vmatrix}.$$

此行列式的展开式中 x_{n+1}^{n-1} 的系数的(－1)倍就是所要求的行列式.

答案：1) $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\frac{n^{n-1}(n+1)}{2}$;

2) 当 $n=1$ 时，为 λ; 当 $n\geqslant 2$ 时，为

$(\alpha-\beta)^{n-2}[\lambda\alpha+\lambda\beta(n-2)-ab(n-1)]$;

3) $\frac{1}{2}[(x+a)^n+(x-a)^n]$;

4) 当 $y\neq z$ 时，为$\frac{y(x-z)^n-z(x-y)^n}{y-z}$;

当 $y=z$ 时，为$[x+(n-1)y](x-y)^{n-1}$;

5) $\prod\limits_{1\leqslant j<i\leqslant n}(x_i-x_j)\sum\limits_{k=1}^{n}x_k$

5. 提示：将 $f(x+1)-f(x)$ 的最后一列的每一项按二项式展开. 答案：$(n+1)!x^n$.

6. U, X, Y, Z 点的电位分别为

$$\frac{223400}{12907}, \frac{210100}{12907}, \frac{188400}{12907}, \frac{183300}{12907}.$$

第三章　线性方程组

习　题

1. 1) $x_1=-\frac{1}{2}x_5$, $x_2=-1-\frac{1}{2}x_5$, $x_3=0$, $x_4=-1-\frac{1}{2}x_5$, x_5 任意；

2) 无解；

3) $x_1=-8$, $x_2=3$, $x_3=6$, $x_4=0$；

4) $x_1=\frac{3}{17}x_3-\frac{13}{17}x_4$, $x_2=\frac{19}{17}x_3-\frac{20}{17}x_4$, x_3, x_4 任意；

5) 无解；

6) $x_1=\frac{1+5x_4}{6}$, $x_2=\frac{1-7x_4}{6}$, $x_3=\frac{1+5x_4}{6}$.

2. 1) $\beta=\frac{5}{4}\alpha_1+\frac{1}{4}\alpha_2-\frac{1}{4}\alpha_3-\frac{1}{4}\alpha_4$；

2) $\beta=\alpha_1-\alpha_3$.

9. 1) 秩为 3；2) 秩为 3.

11. 提示：可由本章习题 10 导出.

12. 提示：必要性可由本章习题 3 导出，充分性可由本章习题 11 推出.

13. 提示：必要性可由本章习题 12 和定理 6 导出.

14. 提示：注意利用本章习题 3.

15. 提示：考察向量 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_r$ 的系数构成的行列式是否为零.

16. 1) 4； 2) 3； 3) 2； 4) 3； 5) 5.

17. 1) 当 $\lambda\neq1$, -2 时有唯一解 $x_1=-\frac{1+\lambda}{2+\lambda}$, $x_2=\frac{1}{2+\lambda}$, $x_3=\frac{(1+\lambda)^2}{2+\lambda}$;

当 $\lambda=1$ 时,有无穷多解 $x_1=1-x_2-x_3$, x_2, x_3 任取;

当 $\lambda=-2$ 时无解.

2) 当 $\lambda\neq0, 1$ 时有唯一解, $x_1=\frac{\lambda^3+3\lambda^2-15\lambda+9}{\lambda^2(\lambda-1)}$, $x_2=\frac{\lambda^3+12\lambda-9}{\lambda^2(\lambda-1)}$, $x_3=\frac{-4\lambda^3+3\lambda^2+12\lambda-9}{\lambda^2(\lambda-1)}$;

当 $\lambda=0, 1$ 时无解.

3) 当 $a\neq1, b\neq0$ 时有唯一解 $x_1=\frac{1-2b}{b(1-a)}$, $x_2=\frac{1}{b}$, $x_3=\frac{4b-2ab-1}{b(1-a)}$;

当 $a=1$, $b=\frac{1}{2}$ 时有无穷多解 $x_1=2-x_3$, $x_2=2$, x_3 任取;

当 $a=1$, $b\neq\frac{1}{2}$ 时无解;

当 $b=0$ 时无解.

18. 1) $\eta_1=(1,-2,1,0,0)$, $\eta_2=(1,-2,0,1,0)$, $\eta_3=(5,-6,0,0,1)$;

2) $\eta_1=(-1,1,1,0,0)$, $\eta_2=\frac{1}{6}(7,5,0,2,6)$;

3) $\eta=\left(2,4,\frac{8}{3},\frac{13}{3},1\right)$;

4) $\eta_1=(-1,-1,1,2,0)$, $\eta_2=\frac{1}{4}(1,0,0,5,4)$.

19. 当 $a=0$, $b=2$ 时有解. 一般解为: $(-2,3,0,0,0)+k_1(1,-2,1,0,0)+k_2(1,-2,0,1,0)+k_3(5,-6,0,0,1)$, 其中

$k_i(i=1,2,3)$任取.

20. 提示: 根据线性方程组有解的判别定理, 一般解为: $(0, -a_1, -\sum_{i=1}^{2}a_i, -\sum_{i=1}^{3}a_i, -\sum_{i=1}^{4}a_i)+k(1,1,1,1,1)$, k 任取.

24. $\lambda=-3$.

25. $R(f,g)=(-1)^{mn}R(g,f)$ 其中 $m=\partial(f(x))$, $n=\partial(g(x))$

26. 1) $\begin{cases}x_1=1,\\y_1=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_2=1,\\y_2=-1,\end{cases}$ $\begin{cases}x_3=-1,\\y_3=1,\end{cases}$

$\begin{cases}x_4=2,\\y_4=2;\end{cases}$

2) $\begin{cases}x=-3,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$

$\begin{cases}x=-\dfrac{10+3\sqrt{5}}{5},\\y=\dfrac{5-\sqrt{5}}{5},\end{cases}$ $\begin{cases}x=-\dfrac{10-3\sqrt{5}}{5}\\y=\dfrac{5+\sqrt{5}}{5};\end{cases}$

3) $\begin{cases}x=0,\\y=1,\end{cases}$ $\begin{cases}x=0,\\y=3,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=2,\end{cases}$ $\begin{cases}x=-1,\\y=3,\end{cases}$

$\begin{cases}x=2,\\y=1+\sqrt{2}\,i,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2;\\y=1-\sqrt{2}\,i.\end{cases}$

补 充 题

2. 提示: 化成齐次线性方程组有无非零解的问题.

10. 提示: 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ $i=1,2\cdots,s$, $\beta=(b_1,b_2,\cdots,b_n)$.

首先说明向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots\alpha_s$ 与向量组 $\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_s,\beta$ 同秩, 然后应用本章补充题 6 或习题 14.

12. 提示: 1) 根据本章定理 5 的推论, 只需证明齐次线性方

程组

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=0,\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=0,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=0\end{cases}$$

只有零解. 这等于证明：对任一非零实向量 $\beta=(c_1,c_2,\cdots,c_n)$ 恒可找到某一个向量 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in})$ 使得:

$$a_{i1}c_1+a_{i2}c_2+\cdots+a_{in}c_n\neq0.$$

2) 应用数学归纳法. (1) 考察行列式 $|A|$ 的第一行元素的代数余子式 $A_{11},A_{12},\cdots,A_{1n}$, 利用第二章定理 3 证明：绝对值 $|A_{11}|,|A_{12}|,\cdots,|A_{1n}|$ 中的最大值只能是 $|A_{11}|$, 即:

$$|A_{11}|>|A_{1i}|\quad i=2,3,\cdots,n.$$

(2) 从而证明 $|A|>0$.

13. $x^2+y^2+z^2-x-y-z=0$.

14. $x^2-2xy-x+2y=0$.

15. 提示：应用结式.

答案：1) $4x^2+y^2-4xy-23x+7y+19=0$;

2) $8x^2+5y^2-4xy-8x+2y-7=0$.

16. 1) 1; 2) $3\cdot2^n+9$; 3) $(-1)^n\cdot2^n$.

第四章 矩 阵

习 题

1\. 1) $AB=\begin{pmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 6 & 1 & 0 \\ 8 & -1 & 2 \end{pmatrix}$, $AB-BA=\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -2 \end{pmatrix}$;

2) $AB=\begin{pmatrix} a+b+c & a^2+b^2+c^2 & b^2+2ac \\ a+b+c & b^2+2ac & a^2+b^2+c^2 \\ 3 & a+b+c & a+b+c \end{pmatrix}$,

$AB-BA=$

$$\begin{pmatrix} b-ac & a(a-b)+b(b-1)+c(c-1) & (b^2-a^2)+2c(a-1) \\ c-bc & 2(ac-b) & a(a-b)+b(b-1)+c(c-1) \\ 3-2a-c^2 & c-bc & b-ac \end{pmatrix}.$$

2\. 1) $\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 9 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} \cos n\varphi & -\sin n\varphi \\ \sin n\varphi & \cos n\varphi \end{pmatrix}$; 5) 0, $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -2 & -3 & 1 \\ -2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $a_{11}x^2+2a_{12}xy+a_{22}y^2+2b_1x+2b_2y+c$;

7) $\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; 当 $n=2k$ 时为 $4^k\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$,

当 $n=2k+1$ 时为 $4^k\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

8) $\begin{pmatrix} \lambda^n & n\lambda^{n-1} & \frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2} \\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1} \\ 0 & 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$.

3. 1) $\begin{pmatrix} 5 & 1 & 3 \\ 8 & 0 & 3 \\ -2 & 1 & -2 \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4. 1) $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ 0 & x_{11} \end{pmatrix}$, 其中 $x_{1j}(i=1, j=1,2)$ 为任意实数;

2) $\begin{pmatrix} x_{11} & 0 & 0 \\ x_{21} & x_{11}+\frac{1}{3}x_{21} & \frac{2}{3}x_{31} \\ x_{31} & \frac{1}{3}x_{31} & x_{11}+\frac{1}{3}x_{21}+\frac{1}{3}x_{31} \end{pmatrix}$,

其中 $x_{i1}(i=1,2,3)$ 为任意实数;

3) $\begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} \\ 0 & x_{11} & x_{12} \\ 0 & 0 & x_{11} \end{pmatrix}$, 其中 $x_{1j}(j=1,2,3)$ 为任意实数.

13. 提示:求证的等式右端等于一个范德蒙行列式的平方.

16. 提示:注意 BC 的行向量是 C 的行向量的线性组合.

17. 提示:注意 $A+B$ 的行向量组可由 A 的行向量组和 B 的行向量组联合表出. 并参考第三章补充题 8.

18. 提示:注意 B 的行向量是下列齐次线性方程组

$$A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}=0$$

的解.

19. 提示：根据定义 8 进行验证.

20. 1) $A^{-1}=\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$; 2) $A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$;

3) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 \\ 1 & -5 & -3 \\ -1 & 6 & 4 \end{pmatrix}$;

4) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 22 & -6 & -26 & 17 \\ -17 & 5 & 20 & -13 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$;

5) $A^{-1}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

6) $A^{-1}=\begin{pmatrix} -7 & 5 & 12 & -19 \\ 3 & -2 & -5 & 8 \\ 41 & -30 & -69 & 111 \\ -59 & 43 & 99 & -159 \end{pmatrix}$;

7) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 & -38 \\ 0 & 1 & -2 & 7 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

8) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -3 & 2 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & -3 & -4 \\ 2 & -2 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

9) $A^{-1}=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-1 & 3 & -7 & 20\\ -7 & -3 & 5 & -10\\ 9 & 3 & -3 & 6\\ 3 & 3 & -3 & 6\end{pmatrix}$;

10) $A^{-1}=\begin{pmatrix}2^{-1} & -2^{-2} & 2^{-3} & -2^{-4} & 2^{-5}\\ 0 & 2^{-1} & -2^{-2} & 2^{-3} & -2^{-4}\\ 0 & 0 & 2^{-1} & -2^{-2} & 2^{-3}\\ 0 & 0 & 0 & 2^{-1} & -2^{-2}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2^{-1}\end{pmatrix}$.

21. $X^{-1}=\begin{pmatrix}0 & C^{-1}\\ A^{-1} & 0\end{pmatrix}$.

22. $X^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 0\cdots\cdots 0 & a_n^{-1}\\ a_1^{-1} & 0\cdots\cdots 0 & 0\\ 0 & a_2^{-1}\cdots 0 & 0\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots\\ 0 & 0\cdots\cdots a_{n-1}^{-1} & 0\end{pmatrix}$.

23. 1) $X=\begin{pmatrix}2 & -23\\ 0 & 8\end{pmatrix}$; 2) $X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}11 & 3 & 6\\ -1 & -3 & 0\\ 4 & 6 & 0\end{pmatrix}$;

3) $X=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}_n$;

4) $X=\frac{1}{6}\begin{pmatrix}-2 & 2 & 8\\ 4 & 2 & 2\\ 4 & 5 & 8\end{pmatrix}$.

26. 提示：参考 27 题。

28. $A^{-1}=\frac{1}{4}A$.

29. $$|E_{n\times n}-AB|=\begin{vmatrix}E_{m\times m} & 0\\ A & E_{n\times n}-AB\end{vmatrix}$$
$$=\left|\begin{pmatrix}E_{m\times m} & B\\ A & E_{n\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{m\times m} & -B\\ 0 & E_{n\times n}\end{pmatrix}\right|$$
$$=\begin{vmatrix}E_{m\times m} & B\\ A & E_{n\times n}\end{vmatrix}=\left|\begin{pmatrix}E_{m\times m} & -B\\ 0 & E_{n\times n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_{m\times m} & B\\ A & E_{n\times n}\end{pmatrix}\right|$$
$$=\begin{vmatrix}E_{m\times m}-BA & 0\\ A & E_{n\times n}\end{vmatrix}$$
$$=|E_{m\times m}-BA|$$

30. $$\lambda^{-n}|\lambda E_{n\times n}-AB|=\left|E_{n\times n}-\frac{AB}{\lambda}\right|=\begin{vmatrix}E_{m\times m} & \frac{B}{\lambda}\\ A & E_{n\times n}\end{vmatrix}$$
$$=\left|E_{m\times m}-\frac{BA}{\lambda}\right|=\lambda^{-m}|\lambda E_{m\times m}-BA|.$$

补 充 题

2. 提示：设 $A=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$，由 $A^l=0, l\geqslant 2$ 可知 $|A|=ad-bc=0$.

从而证明：$A^2-(a+d)A=0$，最后证明 $a+d=0$.

3. 提示：应用本章习题 17 和习题 18.

4. 提示：仿上题的证明.

5. 提示：由 A^* 的定义以及本章习题 27.

6. 提示：将 A, B, C, D 看作元素，施行行初等变换把左下角元素化成零，再利用 $AC=CA$ 即得结论.

8. 提示：1）施行行初等变换和列初等变换 $P(i, j(k))$ 可将

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a^{-1} \end{pmatrix}$化成单位矩阵;

2) 先施行行和列的初等变换 $P(i,\ j(k))$ 将 A 化为 1)的形式，再利用 1).

9. 提示：先施行行和列的初等变换 $P(i,j(k))$，将 A 化成对角形，然后仿照上题 1)的方法，应用归纳法，证明可以用初等变换 $P(i,j(k))$将行列式为 1 的对角形矩阵化成单位矩阵.

10. 提示：首先存在可逆矩阵P和Q，使得 $PAQ=A_1$ 为标准形，记 $Q^{-1}B=B_1$. 设秩$(A)=r$，秩$(B)=s$，则易证 $A_1B_1=PAB$ 的 r 个非零的行向量组至少包含 B_1 的 $r+s-n$ 个线性无关的行向量(参考第 3 章的补充题 7).

11. 列满秩时 $A=P_1\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}Q_1=P_1\begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$=P_1\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1^{-1} & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} Q_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$=P_1\begin{pmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & E \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E \\ 0 \end{pmatrix}.$$

12. $A=P_1\begin{pmatrix} E_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}Q_1=\left(P_1\begin{pmatrix} E_r \\ 0 \end{pmatrix}\right)((E_r,0)Q_1)$

14. 设 G_1,G_2 为 A 的两个 Moore-Penrose 广义逆. 则

$$G_1=G_1AG_1=G_1AG_2AG_1=\overline{G_1A}'\overline{G_2A}'G_1=\overline{G_2AG_1A}'G_1$$

$$=\overline{G_2A}'G_1=G_2AG_1=G_2\,\overline{AG_1}'=G_2\overline{AG_2AG_1}'$$

$$=G_2\overline{AG_1}'\overline{AG_2}'=G_2AG_1AG_2=G_2AG_2=G_2.$$

第五章　二　次　型

习　　题

1. 1) $-4y_1^2+4y_2^2+y_3^2$;　　2) $y_1^2+y_2^2$;

   3) $y_1^2-y_2^2$;　　4) $8y_1^2+2y_2^2-2y_3^2-8y_4^2$;

   5) $6y_1^2-y_2^2-2y_3^2-y_4^2$;　　6) $y_1^2+2y_2^2-2y_3^2$;

   7) $y_1^2+y_2^2+2y_3^2-2y_4^2$.

5. $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$.

7. 1) 是; 2) 不是; 3) 是; 4) 是.

8. 1) $-\frac{4}{5}<t<0$;

   2) 不论 t 取何值,所得二次型都不正定.

15. 提示:原二次型记为 $f(x_1,x_2,\cdots,x_n)$,作变形:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=(n-1)\left(x_n-\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)^2$$

$$+\frac{n}{n-1}f(x_1,x_2,\cdots,x_{n-1},0).$$

然后利用数学归纳法,或直接利用恒等式:

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=\sum_{i<j}(x_i-x_j)^2.$$

16. 提示:实际上,X_0 可取作形式 αX_1+X_2,α 为适当的实数.

补　充　题

1. 提示:1) 引进替换:

$$\begin{cases} x_k = y_{2k-1}, & k=1,2,\cdots,n, \\ x_k = y_{2(2n+1-k)}, & k=n+1,n+2,\cdots,2n. \end{cases}$$

原二次型化为 $y_1y_2+y_3y_4+\cdots+y_{2n-1}y_{2n}$，再对 n 作归纳法，化为标准型.

2）作替换

$$\begin{cases} x_{2k-1}+x_{2k+1}=y_{2k-1}, \\ x_{2k}=y_{2k}, \end{cases} \quad k=1,2,3,\cdots$$

再对 n 分奇、偶进行讨论. 并规定，若 $l>n$，

$$x_l=y_l=0.$$

3）将形如

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2+\frac{2}{k}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_i x_j \qquad (k\text{ 为正整数})$$

的二次型记为 $f(n,k)$，则原二次型为 $f(n,2)$. 首先证明恒等式：

$$f(n,k)=\left(x_n+\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{n-1}x_i\right)^2+\left(1-\frac{1}{k^2}\right)f(n-1,k+1),\ k\geqslant 2,$$

然后对 n 作归纳法. 将 $f(n,2)$ 化为标准型.

4）作替换

$$\begin{cases} y_1=x_1-\bar{x}, \\ y_2=x_2-\bar{x}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_{n-1}=x_{n-1}-\bar{x}, \\ y_n=x_n, \end{cases}$$

注意 $\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})=0$. 因而原二次型化为

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2+(y_1+y_2+\cdots+y_{n-1})^2$$

$$=2(y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n-1}y_iy_j),$$

归结为本题的 3).

答案: 1) $y_1^2+y_2^2+\cdots+y_n^2-y_{n+1}^2-y_{n+2}^2-\cdots-y_{2n}^2$;

2) 当 n 为偶数, 即 $n=2k$ 时为 $y_1^2-y_2^2+\cdots+y_{n-1}^2-y_n^2$; 当 n 为奇数, 即 $n=2k+1$ 时为 $y_1^2-y_2^2+\cdots+y_{n-2}^2-y_{n-1}^2$;

3) $y_1^2+\dfrac{3}{4}y_2^2+\dfrac{4}{6}y_3^2+\cdots+\dfrac{n+1}{2n}y_n^2$;

4) $2y_1^2+\dfrac{3}{2}y_2^2+\dfrac{4}{3}y_3^2+\cdots+\dfrac{n}{n-1}y_n^2$.

2. 提示: 设矩阵 $A=(a_{ij})$ 的秩为 r. 将变量的足标作适当调换, 将平方项的次序作适当调换. 可设 A 的左上角 r 级子式不为零, 于是作替换:

$$\begin{cases} y_1=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_r=a_{r1}x_1+\cdots+a_{rn}x_n, \\ y_{r+1}=x_{r+1}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n=x_n \end{cases}$$

后, 原二次型化为:

$$y_1^2+y_2^2+\cdots+y_r^2+l_{r+1}^2+l_{r+2}^2+\cdots+l_n^2,$$

其中 $l_{r+1}, l_{r+2}, \cdots, l_n$ 都是 $y_1, y_2, \cdots, y_r$ 的一次齐次式, 显然, 二次型是 $y_1, y_2, \cdots, y_r$ 的正定型.

3. 提示: 设二次型 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的秩为 r, 仿上题可知 $p+q\geqslant r$. 在适当的非退化线性替换

$$\begin{cases} z_1=\sum\limits_{i=1}^{n} b_{1i}x_i, \\ z_2=\sum\limits_{i=1}^{n} b_{2i}x_i, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ z_n=\sum\limits_{i=1}^{n} b_{ni}x_i \end{cases}$$

之下，原二次型化为：

$$f(x_1,x_2,\cdots,x_n)=g(z_1,z_2,\cdots,z_n)$$
$$=z_1^2+z_2^2+\cdots+z_{p'}^2-z_{p'+1}^2-z_{p'+2}^2-\cdots-z_{p'+q'}^2$$

而且有 $p'+q'=r$. 再仿照本章定理 4 的证明方法来证明

$$p'\leqslant p,\ q'\leqslant q.$$

5. 提示：可仿照本章定理 2 后的例题进行. 不过在这里不是考虑左上角 a_{11} 是否为零的问题，而是考虑左上角 $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ 是否为 $\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}$ $a\neq 0$ 的问题.

6. 提示：取向量集合 $S=\{X\in V\mid X'X=1\}$，V 表示实数域上 n 维向量空间. 根据数学分析的理论可知：$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的实函数 $|X'AX|$ 在 S 上是有界的，取一个上界 C，则 C 即符合所求；或者应用本章习题 10，取一个正实数 C，使得 $CE+A$ 和 $CE-A$ 都正定，则 C 即符合所求.

8. 提示：1) 设 $\alpha_i=(a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in}),\ i=1,2,\cdots,n,$

$$\beta=(y_1,y_2,\cdots,y_n),\ A=(a_{ij}),$$

则 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 是 $y_1,\ y_2,\cdots,\ y_n$ 的二次型. 容易证明：当 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 具体给定之后，函数值 $f(y_1,y_2,\cdots,y_n)$ 等于

$$-C'AC,\ C=(c_1,c_2,\cdots,c_n),$$

其中 c_i 是 $\beta=c_1\alpha_1+c_2\alpha_2+\cdots+c_n\alpha_n$ 线性表示的系数.

2) 记

$$g(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & y_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & y_2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & a_{n-1,n-1} & y_{n-1} \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_{n-1} & 0 \end{vmatrix}$$

将本题 1) 用于 $g(y_1,y_2,\cdots,y_{n-1})$，即可证明 8.2).

9. 提示：应用标准型证明必要性．为了证明充分性，先证明一个事实：如果矩阵 $A=(a_{ij})$ 的一切主子式都大于等于零，则对于任意正实数 ε，$A+\varepsilon E$ 恒为正定．为此又需先证明在 $|A+\lambda E|=\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n$ 中，a_k 等于 A 中一切 k 级主子式之和．

第六章　线性空间

习　　题

1. 提示：应用集合相等的定义.

2. 提示：同上.

3. 1) 否；2) 是；3) 是；4) 否；5) 是；6) 否；7) 否；8) 是.

6. 提示：反证法.

7. 1) $\xi=\frac{5}{4}\varepsilon_1+\frac{1}{4}\varepsilon_2-\frac{1}{4}\varepsilon_3-\frac{1}{4}\varepsilon_4$;

   2) $\xi=\varepsilon_1-\varepsilon_3$.

8. 1) n^2维；　2) $\frac{n(n+1)}{2}$维，$\frac{n(n-1)}{2}$维，$\frac{n(n+1)}{2}$维；

   3) 1 维；　4) 3 维.

9. 1) 过渡矩阵 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 & 6 \\ 1 & 3 & 3 & 6 \\ -1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$,

   $\xi=x_1'\eta_1+x_2'\eta_2+x_3'\eta_3+x_4'\eta_4$，其中

   $x_1'=\frac{4}{9}x_1+\frac{1}{3}x_2-x_3-\frac{11}{9}x_4$,

   $x_2'=\frac{1}{27}x_1+\frac{4}{9}x_2-\frac{1}{3}x_3-\frac{23}{27}x_4$,

   $x_3'=\frac{1}{3}x_1\qquad\qquad-\frac{2}{3}x_4$,

   $x_4'=-\frac{7}{27}x_1-\frac{1}{9}x_2+\frac{1}{3}x_3+\frac{26}{27}x_4$.

2) 过渡矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&0&1\\1&1&0&1\\0&1&1&1\\0&0&1&0\end{pmatrix}$,

$$\xi=\frac{3}{13}\varepsilon_1+\frac{5}{13}\varepsilon_2-\frac{2}{13}\varepsilon_3-\frac{3}{13}\varepsilon_4.$$

3) 过渡矩阵 $A=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}3&7&2&-1\\1&-1&2&3\\-1&3&0&-1\\1&-1&0&-1\end{pmatrix}$,

$$\xi=-2\eta_1-\frac{1}{2}\eta_2+4\eta_3-\frac{3}{2}\eta_4.$$

10. $\xi=(-a,-a,-a,a)\quad(a\neq0)$.

12. 提示:证明 V_1 的一组基也是 V_2 的一组基.

13. 3) $C(A)$的维数等于 n.

14. 维数等于 5.

16. 1) 3 维; 2) 2 维.

17. 2 维.

18. 1) 1 维; 2) 0 维; 3) 1 维.

补 充 题

1. 提示:2) 注意 $x^n-1=\prod\limits_{i=1}^{n}(x-a_i)$, 如何将 f_i 的系数简单地用单位根表出.

2. 提示:首先证明 $\beta_{i_1},\beta_{i_2},\cdots,\beta_{i_l}(l\leqslant s)$线性相关的充要条件是 A 的 $i_1,i_2,\cdots,i_l$ 各列线性相关.

3. 提示: 利用 $f(x_1,\cdots,x_n)$的标准形 $y_1^2+\cdots+y_{\frac{n+s}{2}}^2-y_{\frac{n+s}{2}+1}^2$

$-\cdots-y_n^2$，作出一个由$\dfrac{n+[s]}{2}$个独立的 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的线性型组成的齐次线性方程组使得它的解空间符合要求.

4. 提示：取向量 $\alpha\overline{\in}V_1$ 和向量 $\beta\overline{\in}V_2$. 如果 $\alpha\overline{\in}V_2$，则α 即合所求. 假设 $\alpha\in V_2$，证明所有形如 $k\alpha+\beta$ 的向量都不属于 V_2. 从而证明这样任意两个不同的线性组合 $k_1\alpha+\beta$ 和 $k_2\alpha+\beta$，其中必有一个既不属于 V_1 又不属于 V_2.

5. 提示，对 s 作归纳法，将上题的证明方法推广到任意(有限)多个真子空间的情形.

第七章　线性变换

习　题

1. 1) $\alpha=0$ 时是线性变换;$\alpha\neq0$ 时不是.

   2) $\alpha=0$ 时是线性变换;$\alpha\neq0$ 时不是.

   3) 不是;　　4) 是;　　5) 是;　　6) 是;

   7) 不是;　　8) 是.

4. 提示:对 k 作归纳法.

7. 1) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; 2) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$,

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ AB=\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix};$$

3) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ & & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & & 0 & 0 \end{pmatrix}$;　　4) $\begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -b & a & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -b & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -b & a \end{pmatrix}$;

5) $\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$;

6) $\frac{1}{7}\begin{pmatrix} -5 & 20 & -20 \\ -4 & -5 & -2 \\ 27 & 18 & 24 \end{pmatrix}$; 7) $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -5 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

8. 1) $\begin{pmatrix} a & 0 & b & 0 \\ 0 & a & 0 & b \\ c & 0 & d & 0 \\ 0 & c & 0 & d \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} a & c & 0 & 0 \\ b & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & c \\ 0 & 0 & b & d \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} a^2 & ac & ab & bc \\ ab & ad & b^2 & bd \\ ac & c^2 & ad & cd \\ cb & cd & bd & d^2 \end{pmatrix}$.

9. 1) $\begin{pmatrix} a_{33} & a_{32} & a_{31} \\ a_{23} & a_{22} & a_{21} \\ a_{13} & a_{12} & a_{11} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} a_{11} & ka_{12} & a_{13} \\ \frac{a_{21}}{k} & a_{22} & \frac{a_{23}}{k} \\ a_{31} & ka_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} a_{11}+a_{12} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+a_{22}-a_{11}-a_{12} & a_{22}-a_{12} & a_{23}-a_{13} \\ a_{31}+a_{32} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

10. 提示:反证法. 设有 $a_0\xi+a_1\boldsymbol{A}\xi+\cdots+a_{k-1}\boldsymbol{A}^{k-1}\xi=0$, a_i不全为零. 用 $\boldsymbol{A}$ 的适当方幂作用于两端将引出矛盾.

12. 提示:参看第四章习题 7.

13. 提示: 利用 $\boldsymbol{A}$ 在不同基下的矩阵的关系并参考第四章习题 7.

14. 1) $\begin{pmatrix} 2 & -3 & 3 & 2 \\ \frac{2}{3} & -\frac{4}{3} & \frac{10}{3} & \frac{10}{3} \\ \frac{8}{3} & -\frac{16}{3} & \frac{40}{3} & \frac{40}{3} \\ 0 & 1 & -7 & -8 \end{pmatrix}$;

2) $A^{-1}(0)=L(\alpha_1,\alpha_2)$,

其中 $\alpha_1=\left(-2,-\frac{3}{2},1,0\right),\alpha_2=(-1,-2,0,1)$,

$AV=L(A\varepsilon_1,A\varepsilon_2)$;

3)

$$B=\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\\ \frac{9}{2} & 1 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 0 & 0\\ 2 & -2 & 0 & 0\end{pmatrix};$$

4)

$$C=\begin{pmatrix}5 & 2 & 2 & 1\\ \frac{9}{2} & 1 & \frac{3}{2} & 2\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

15. 1) $\begin{pmatrix}-2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$;

2) $\begin{pmatrix}-2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-2 & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{3}{2} & \frac{3}{2}\\ 1 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{2}\end{pmatrix}$.

19. 1) 特征值为 7, -2, 相应的特征向量为 $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-4\\5\end{pmatrix}$;

2) 当 $a\neq0$ 时，特征值为 ai，$-ai$，相应的特征向量为

$\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$;

当 $a=0$ 时，特征值为 0，0，相应的特征向量为

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$;

3) 特征值为 2，2，2，-2，相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

4) 特征值为 2，$1+\sqrt{3}$ 和 $1-\sqrt{3}$，相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ \sqrt{3}-2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -\sqrt{3}-2 \end{pmatrix};$$

5) 特征值为 1，1，-1，相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix};$$

6) 特征值为 0，$\sqrt{14}i$，$-\sqrt{14}i$，相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3+2\sqrt{14}i \\ 13 \\ 2-3\sqrt{14}i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3-2\sqrt{14}i \\ 13 \\ 2+3\sqrt{14}i \end{pmatrix};$$

7) 特征值为 1，-2，相应的特征向量为

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 20 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

20. 1) 可写成 $T=\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$;

2) 可写成 $T=\begin{pmatrix}1 & 1\\ i & -i\end{pmatrix}$;

3) 可写成 $T=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\ 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 1\end{pmatrix}$,

4) 可写成 $T=\begin{pmatrix}-2 & -3 & -3\\ 1 & 1 & 1\\ 0 & \sqrt{3}-2 & -\sqrt{3}-2\end{pmatrix}$;

5) 可写成 $T=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

6) 可写成 $T=\begin{pmatrix}-3 & 3+2\sqrt{14}i & 3-2\sqrt{14}i\\ 1 & 13 & 13\\ -2 & 2-3\sqrt{14}i & 2+3\sqrt{14}i\end{pmatrix}$.

21. $|\lambda E-D|=\lambda^n$.

22. k 为偶数时

$$A^k=\begin{pmatrix}1 & 0 & -1+5^k\\ 0 & 5^k & 0\\ 0 & 0 & 5^k\end{pmatrix};$$

k 为奇数时

$$A^k=\begin{pmatrix}1 & 4\cdot 5^{k-1} & -1+3\cdot 5^{k-1}\\ 0 & -3\cdot 5^{k-1} & 4\cdot 5^{k-1}\\ 0 & 4\cdot 5^{k-1} & 3\cdot 5^{k-1}\end{pmatrix}.$$

23. 1)

$$\begin{pmatrix}0 & 0 & 6 & -5\\ 0 & 0 & -5 & 4\\ 0 & 0 & \frac{7}{2} & -\frac{3}{2}\\ 0 & 0 & 5 & -2\end{pmatrix};$$

2) 特征值为 $0, 0, \frac{1}{2}, 1$, 特征向量为

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix};$$

3) $$T=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & 6 \end{pmatrix}.$$

24. 2) 提示：应用 1) 证明 $\boldsymbol{A}$ 只有一个特征值，即得 2).

25. 2) 提示：考虑 $\boldsymbol{B}|V_{\lambda_0}$ 至少有一个特征向量.

26. 2), 3) 提示：$\boldsymbol{A}$ 在 V 中只有唯一的特征向量 ε_n（除相差一个倍数外）.

27. 1) $f(x)=x^2-1$; 2) $f(x)=x^2$.

补 充 题

1. 1), 2) 提示：直接展开等式左端，利用假设，即得等式右端.

2. 提示：考虑数域 P 上 V 的全体线性变换和数域 P 上 $n\times n$ 全体的矩阵的关系.

3. 1) 提示：设 $f(x)\in P[x], 0\leqslant\partial f(x)\leqslant m$. 注意 $f(\boldsymbol{A})=0$ 与变换 $\boldsymbol{E}, \boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \cdots, \boldsymbol{A}^m$ 在 P 上线性相关这两者是一回事.

3) 提示：换个说法，$\boldsymbol{A}$ 可逆的充要条件是单位变换 $\boldsymbol{E}$ 可以表成 $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{A}^2, \cdots, \boldsymbol{A}^{n^2}$ 的线性组合.

5. 提示：考察 $\boldsymbol{A}$ 的行列式和它的特征值的关系.

6. 1) 提示：参考本章定理 8 的推论 1.

2）提示：反证法．并注意与数量矩阵相似的矩阵只能是它自身．

7．提示：设矩阵 A 是线性变换 $\mathcal{A}$ 在一组基 $\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$ 下的矩阵．首先 $\mathcal{A}$ 有一个特征值 λ_1 和属于它的特征向量 η_1，于是将 η_1 扩充成一组基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$．那么，$\mathcal{A}$ 在基 $\eta_1,\eta_2,\cdots,\eta_n$ 下的矩阵为

$$B=\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ 0 & b_{32} & \cdots & b_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}.$$

设 T 为从 ε_i 到 η_i 的过渡矩阵．则有

$$B=T^{-1}AT.$$

然后对 n 作归纳法．

8．提示：将本题转化成第六章补充题 5．

9．提示：参考本章定理 11 的证明．

10．提示：把 $\mathcal{B}V$ 考虑成 9 题中的 W，利用 9 题结果进行讨论．

第八章 λ－矩阵

习 题

1. 1) $\begin{pmatrix}\lambda & 0\\ 0 & \lambda(\lambda^2-10\lambda-3)\end{pmatrix}$；　2) $\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \lambda & \\ 0 & & \lambda(\lambda+1)\end{pmatrix}$；

3) $\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \lambda(\lambda+1) & \\ 0 & & \lambda(\lambda+1)^2\end{pmatrix}$；

4) $\begin{pmatrix}1 & & & 0\\ & \lambda(\lambda-1) & & \\ & & \lambda(\lambda-1) & \\ 0 & & & \lambda^2(\lambda-1)^2\end{pmatrix}$；

5) $\begin{pmatrix}1 & & 0\\ & \lambda-1 & \\ 0 & & (\lambda-1)^2(\lambda+1)\end{pmatrix}$；

6) $\begin{pmatrix}1 & & & & 0\\ & 1 & & & \\ & & 1 & & \\ & & & \lambda(\lambda-1) & \\ 0 & & & & \lambda^2(\lambda-1)\end{pmatrix}$.

2. 1) $1,1,(\lambda-2)^3$；2) $1,1,1,\lambda^4+2\lambda^3+3\lambda^2+4\lambda+5$；

3) 当 $\beta\neq0$ 时为：$1,1,1,[(\lambda+\alpha)^2+\beta^2]^2$；

当 $\beta=0$ 时为：$1,1,(\lambda+\alpha)^2,(\lambda+\alpha)^2$；

4) $1,1,1,(\lambda+2)^4$；5) $1,1,1,(\lambda^2-1)(\lambda^2-4)$.

5. $A^k=\begin{pmatrix}\lambda^k & 0 & 0\\ k\lambda^{k-1} & \lambda^k & 0\\ \frac{k(k-1)}{2}\lambda^{k-2} & k\lambda^{k-1} & \lambda^k\end{pmatrix}$.

6. 1) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix}-3&0&0\\0&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$; 3) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&-1&0\\0&1&-1\end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&1&1\end{pmatrix}$; 5) $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&i&0\\0&0&-i\end{pmatrix}$; 6) $\begin{pmatrix}2&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;

7) $\begin{pmatrix}0&0&0\\1&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}$; 8) $\begin{pmatrix}2&0&0\\1&2&0\\0&1&2\end{pmatrix}$; 9) $\begin{pmatrix}-1&0&0\\1&-1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$;

10) $\begin{pmatrix}\lambda_1 & & \\ & \lambda_2 & \\ & & \lambda_3\end{pmatrix}$,

其中 $\lambda_1=\sqrt[3]{4+\sqrt{1016}}+\sqrt[3]{4-\sqrt{1016}}$,

$\lambda_2=\omega\sqrt[3]{4+\sqrt{1016}}+\omega^2\sqrt[3]{4-\sqrt{1016}}$,

$\lambda_3=\omega^2\sqrt[3]{4+\sqrt{1016}}+\omega\sqrt[3]{4-\sqrt{1016}}$,

这里，$\omega=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$;

11) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$; 12) $\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&0&0\\0&1&1&0\\0&0&1&1\end{pmatrix}$;

13) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7+\sqrt{30} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 7-\sqrt{30} \end{pmatrix}$; 14) $\begin{pmatrix} \varepsilon & & & 0 \\ & \varepsilon^2 & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \varepsilon^n \end{pmatrix}$,

其中 $\varepsilon=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$.

第九章　欧几里得空间

习　题

1. 2) 度量矩阵 $B=A$;

3) $\left|\sum_{i,j} a_{ij}x_i y_j\right| \leqslant \sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}x_i x_j}\cdot\sqrt{\sum_{i,j} a_{ij}y_i y_j}$.

2. 1) $\frac{\pi}{2}$; 2) $\frac{\pi}{4}$; 3) $\cos^{-1}\frac{3}{\sqrt{77}}$.

4. $\pm\frac{1}{\sqrt{26}}(-4,0,-1,3)$.

7. $\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(\varepsilon_1+\varepsilon_5)$, $\beta_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(\varepsilon_1-2\varepsilon_2+2\varepsilon_4-\varepsilon_5)$,

$\beta_3=\frac{1}{2}(\varepsilon_1+\varepsilon_2+\varepsilon_3-\varepsilon_5)$.

8. $\beta_1=\frac{1}{\sqrt{2}}(0,1,1,0,0)$, $\beta_2=\frac{1}{\sqrt{10}}(-2,1,-1,2,0)$,

$\beta_3=\frac{1}{\sqrt{315}}(7,-6,6,13,5)$.

9. $\beta_1=\frac{\sqrt{2}}{2}$,　$\beta_2=\frac{\sqrt{6}}{2}x$,　$\beta_3=\frac{\sqrt{10}}{4}(3x^2-1)$,

$\beta_4=\frac{\sqrt{14}}{4}(5x^3-3x)$.

11. 提示：见 364 页上对度量矩阵的讨论.

12. 提示：注意内积$\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\alpha_i,\ \sum_{j=1}^{n} y_j\alpha_j\right)$等于二次型

$$(x_1,\cdots,x_n)\Delta\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}.$$

14. 1)提示：将A的列向量进行正交化和单位化相当于在A的右边乘一些上三角矩阵，对角线上元素都大于零. 唯一性可由13题导出.

2)提示：将A看成欧氏空间的内积在一组基下的度量矩阵，再将这基标准正交化，其过渡矩阵是上三角形，记为T_1. 于是$E=T'_1AT_1$. 另一种方法是. A合同于单位矩阵因而$A=P'P$根据1)P可化成QT，于是即得结论.

15. 1)—3)提示 考察A在η以及与η正交的向量上的作用.

16. 提示：参考教材377页引理1的证明.

17. 1) $\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$; 2) $\begin{pmatrix} -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{2}{3\sqrt{5}} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{4}{3\sqrt{5}} & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{5}{3\sqrt{5}} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$;

3) $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

4) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{\sqrt{3}}{6} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$;

5)
$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{3}}{6} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

18. 1) 正交线性替换

$$\begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}y_1 - \frac{2}{3}y_2 - \frac{1}{3}y_3, \\ x_2 = \frac{2}{3}y_1 + \frac{1}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = \frac{1}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_3. \end{cases}$$

标准型

$$-y_1^2 + 2y_2^2 + 5y_3^2;$$

2) 正交线性替换

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{2}{5}\sqrt{5}\,y_1 + \frac{2\sqrt{5}}{15}y_2 - \frac{1}{3}y_3, \\ x_2 = \frac{1}{5}\sqrt{5}\,y_1 + \frac{4\sqrt{5}}{15}y_2 - \frac{2}{3}y_3, \\ x_3 = \qquad\qquad \frac{\sqrt{5}}{3}y_2 + \frac{2}{3}y_3. \end{cases}$$

标准型

$$2y_1^2 + 2y_2^2 - 7y_3^2;$$

3) 正交线性替换

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_4 \\ x_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_2 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_4 \\ x_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \\ x_4 = \frac{1}{\sqrt{2}}y_1 - \frac{1}{\sqrt{2}}y_3 \end{cases}$$

标准型

$$y_1^2 + y_2^2 - y_3^2 - y_4^2;$$

4）正交线性替换

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4, \\ x_2 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4, \\ x_3 = \frac{1}{2}y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 - \frac{1}{2}y_4, \\ x_4 = \frac{1}{2}y_1 + \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 + \frac{1}{2}y_4. \end{cases}$$

标准型

$$y_1^2 - 3y_2^2 - y_3^2 + 7y_4^2.$$

20. 提示：参考第七章补充题 7 的作法.

23. 提示：应用$(\mathbf{A}x, \mathbf{A}x) = (x, y)$.

25. 提示：充分性用反证法.

补 充 题

1. 提示：将$(\mathbf{A}x, \mathbf{A}x) = (x, x)$应用于特征向量 x.

2. 提示：注意旋转的行列式等于 1，考虑一个 $n \times n$ 矩阵的行列式和它的特征值的关系.

3. 提示· 仿2题.

4. 提示: 计算$|A(k\alpha+l\beta)-kA\alpha-lA\beta|$.

5. 提示: 首先根据上题4建立子空间$L(\alpha_1,\cdots,\alpha_m)$到子空间$L(\beta_1,\cdots,\beta_m)$的变换,它保持运算而且保持内积不变; 然后利用正交补,将这个变换扩充成整个欧氏空间的一个正交变换.

7. 提示: 用正交变换将$f(x_1,\cdots,x_n)$化成$f(x_1,\cdots,x_n)=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\cdots+\lambda_ny_n^2$然后进行讨论.

8. 提示: 仿上题,利用上述标准型进行讨论.

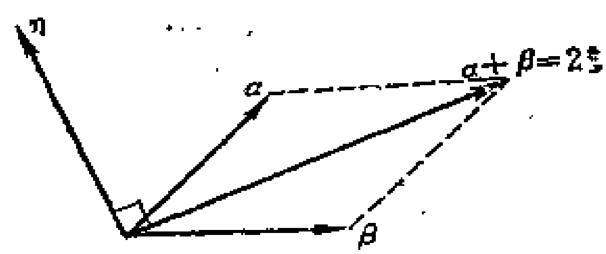
9. 1) 提示: 利用本章习题15,求一镜面反射

$$Ax=x-2(x,\eta)\eta,$$

使得$A\alpha=\beta$,即等于求一单位向量η使

$$\alpha=k\eta+\xi,\quad \beta=-k\eta+\xi,$$

其中ξ为与η正交的一个适当的向量. 从而可知$\eta=\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)$. $k=\frac{1}{2}|\alpha-\beta|$. 如图$\eta$和$\xi$都在$\alpha$和$\beta$决定的平面内.



2) 提示: 设正交变换A将一组标准正交基$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$变到另一组标准正交基$\beta_1,\beta_2,\cdots,\beta_n$. 于是根据1)存在一个镜面反射$A_1$使得$A_1\alpha_1=\beta_1$. 因而$A_1\alpha_2,\cdots,A_1\alpha_n$和$\beta_2,\cdots,\beta_n$都落在$L(\beta_1)$的正交补空间$V_1$内。然后对$n$作归纳法.

10. 提示: 将B看作欧氏空间在某组基下的度量矩阵, 然后将本章定理7的证明方法施用于A.

11. 提示：参考 370 页关于欧氏空间的讨论.

12. 提示：将$(Ax, Ax)=(x, x)$应用于特征向量 x.

13. 提示：类似于前面的 14 题的证明.

14. 提示：参考教材 377 页引理 1 和 379 页引理 4 的证明.

第十章　双线性函数

习　题

1. $f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)=4x_1-7x_2-3x_3$.

2. $f(x_1\varepsilon_1+x_2\varepsilon_2+x_3\varepsilon_3)=x_2$.

3. $g_1=f_2-f_3$，$g_2=f_1-f_2+2f_3$，　$g_3=-f_1+f_2-f_3$.

4. 提示：用第六章补充题 5.

5. 提示：用上题.

6. $p_1(x)=-\dfrac{3}{2}x^2+x+1$，　$p_2(x)=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{6}$，

$$p_3(x)=-\frac{1}{2}x^2+x-\frac{1}{3}.$$

9. 提示：n 维线性空间 V 的每个真子空间都可看成有限多个 $n-1$ 维子空间之交

10. 设 $A=(a_{ij})$ 则度量矩阵为

$$\begin{pmatrix} a_{11}E_n & a_{12}E_n & \cdots & a_{1m}E_n \\ a_{21}E_n & a_{22}E_n & \cdots & a_{2m}E_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1}E_n & a_{m2}E_n & \cdots & a_{mm}E_n \end{pmatrix}$$

11.

1) $\begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 & -14 \\ -1 & 2 & 2 & -7 \\ 0 & -11 & 1 & 14 \\ 15 & 4 & -15 & -2 \end{pmatrix}$；　2) $\begin{pmatrix} -6 & 46 & 8 & 24 \\ -18 & 26 & 16 & -72 \\ -2 & -38 & 0 & 0 \\ -6 & 86 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

12. 1) 取 α,β 无关．若 $f(\alpha,\alpha)\neq 0$，则

$f(x\alpha+\beta, x\alpha+\beta)=f(\alpha,\alpha)x^2+2f(\alpha,\beta)x+f(\beta,\beta)=0$ 有解;

2) 对非零 ξ, $f(\xi,\xi)=0$. 因 f 非退化, 所以存在 δ 使 $f(\xi,\delta)=1$. 令 $\eta=\delta-\frac{f(\delta,\delta)}{2}\xi$ 即可.

13. $f(\alpha,\beta)+f(\beta,\alpha)=f(\alpha+\beta,\alpha+\beta)-f(\alpha,\alpha)-f(\beta,\beta)$

14. 提示: 类似 Schmidt 正交化过程.

15. 2) 用上题.

16. 用 15 题.

17. 2),3) 提示:对称矩阵合同于对角形.

18. 1) 若 $\alpha\neq0$, $\exists_\beta$ 使 $f(\alpha,\beta)\neq0$. 于是 $f(A\alpha,A\beta)=f(\alpha,\beta)\neq0\Rightarrow A\alpha\neq0$,即$A$单$\Rightarrow A$满,即$A$可逆,$f(A^{-1}\alpha,A^{-1}\beta)=f(AA^{-1}\alpha,AA^{-1}\beta)=f(\alpha,\beta)$.

3) 伪正交变换把伪正交基变为伪正交基.

第十一章　代数基本概念介绍

习　题

2. 2) 提示：

空间任一旋转必使某直线上的点都不动．因而必然保持正四面体的某一对称轴不动．正四面体有七条对称轴，四条是顶点和对面中心的连线，三条是对棱中点的连线．

4. 提示：注意在现在的条件下 $x^{-1}=x$．从而证明 $ab=ba$．

5. 提示 1：对文字数 n 作归纳法．任一个置换

$$\sigma=\begin{pmatrix}1\cdots i\cdots n\\ a_1\cdots a_i\cdots a_n\end{pmatrix},\ a_i=n,$$

左乘以对换 (na_n) 即化成 $n-1$ 个文字的置换：

$$(na_n)\sigma=\begin{pmatrix}1\cdots i\cdots n-1\,n\\ a_1\cdots a_n\cdots a_{n-1}\,n\end{pmatrix}$$

（当 $a_n=n$ 时，(na_n) 即表示恒等置换）．

提示2：参考54页定理 2．将排列 $123\cdots n$ 与置换$\begin{pmatrix}1&2&\cdots&n\\1&2&\cdots&n\end{pmatrix}$对应，对排列进行对换就相当于置换左乘以对换．

7. 提示：在 G 中任取一元素 a，方程 $ax=a$ 的一解记作 $x=e$．设 b 为 G 的任意元素，利用方程 $ya=b$ 有解，来证明

$$be=b.$$

因而 e 为 G 的一个右单位．仿此，证明 G 也有一个左单位，记为 e，由此

$$e=e',$$

所以 G 有单位 e．其次，方程 $ax=e$ 和方程 $ya=e$ 都有解，证明逆

元素存在．所以 G 是一个解．

18. 1) 提示：考察$(x+x)^2$；

2) 提示：考察$(x+x)^2$；

21. 提示：首先Q的任一自同构保持零元素0和单位元素1都不动．