

第 T1 次讲稿 (第三学期第一次)

第 T1 次讲稿, 用于 2008 年 8 月 29 日, 星期五, 2 节课.

内容: 下册第十六章, Euclid 空间上的点集拓扑. 其中第一节为基本的点集拓扑概念.

一开始可以说一下拓扑学是起源于数学分析的又一个数学分支.

§16.1 Euclid 空间上点集拓扑的基本概念

一. 集合的直积

基本定义, 即由两个非空集合 A 和 B 生成一个新的集合:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\},$$

称为 A 和 B 的直积.

特别是在第一册 §1.1 中的 \mathbb{R}^2 本身, 就是 $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. 将直积 \times 作为一种运算, 则还可以多次进行, 例如生成 \mathbb{R}^n 等.

今后常用的是由 \mathbb{R} 的两个数集生成的直积, 例如

$$[a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\},$$

它是 \mathbb{R}^2 的子集. 几何上它是平面上的一個矩形, 并且包含了边界上的所有点.

同样可以得到 $(a, b) \times (c, d)$, $(a, b) \times [c, d]$ 等等.

二. Euclid 空间

这里可以讲一下 Bourbaki 学派的观点: 各个数学学科研究的对象都是在某个集合中赋以某种结构而形成的.

在高等代数中也有这个内容, 但除了定义之外, 并不重复. 因为在代数中关心的是代数结构, 而在我们这里关心的是极限.

定义的方法分为几步.

首先是用直积引入集合:

$$\mathbb{R}^n = \overbrace{\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}^{n \uparrow} = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid -\infty < x_i < \infty, i = 1, \cdots, n\}.$$

第二步是在集合 \mathbb{R}^n 中赋以线性空间的结构. 这就是在该集合中引入两种运算, 加与数乘, 并满足相应的公理. 具体来说即对于 \mathbb{R}^n 的任何两个点 (元或向量), $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \cdots, y_n)$, 定义它们的和为

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (x_1 + y_1, \cdots, x_n + y_n).$$

又对于任何 $\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, 定义它们的积为

$$\lambda \mathbf{x} = (\lambda x_1, \cdots, \lambda x_n).$$

关于这两种运算应当满足的公理, 可以从代数教科书中找到. 这里从略.

为了研究 \mathbb{R}^n 中的极限, 需要有距离的概念. 这有各种引进方法. 在 Euclid 空间中采用从内积引入距离的方法. 即对于 \mathbb{R}^n 的任何两个点 (元或向量), $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$, 定义它们的内积为

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n.$$

由此就可以引入向量的范数和距离.

三. Euclid 范数和距离

在有了内积之后, 定义 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ 的范数为

$$|\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{x}, \mathbf{x})} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}.$$

并称为 Euclid 范数^①. 在 \mathbb{R}^n 中可以引进其他范数, 当然这时就不是 Euclid 空间了.

这里联系内积和范数的一个基本不等式是 Schwarz 不等式:

$$|(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq |\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}|.$$

实际上在证明中并不需要知道在什么样的具体空间中, 只要是内积空间就够了. 例如, 在上册 p.232 的例 7, 即在 $f, g \in R[a, b]$ 时, 就成立

$$\left(\int_a^b fg \right)^2 \leq \int_a^b f^2 \cdot \int_a^b g^2,$$

这就是 Schwarz 不等式, 也称为 Cauchy 不等式, 或 Buniakowskii 不等式. (在习惯上于 \mathbb{R}^n 更多地称为 Cauchy 不等式.)

由 Schwarz 不等式可以证明 \mathbb{R}^n 中的三角形不等式. 例如, 只要如下计算,

$$0 \leq |\mathbf{x} + \mathbf{y}|^2 = (\mathbf{x} + \mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|^2 + 2(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + |\mathbf{y}|^2 \leq |\mathbf{x}|^2 + 2|\mathbf{x}| \cdot |\mathbf{y}| + |\mathbf{y}|^2,$$

两边开方即得所要的三角形不等式:

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}|.$$

四. 邻域

与 \mathbb{R} 中一样, 对于给定的点 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ 和 $\delta > 0$ 引入以 \mathbf{a} 为心以 δ 为半径的邻域:

$$\begin{aligned} O_\delta(\mathbf{a}) &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{x} - \mathbf{a}| < \delta\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid (x_1 - a_1)^2 + \dots + (x_n - a_n)^2 < \delta^2\}. \end{aligned}$$

① 这里可以联系到第二册中两次在函数空间中引入范数. 第一次是对于 $[a, b]$ 上的函数 f 引入 $\|f\| = \sup_{x \in [a, b]} |f(x)|$, 它对于刻画一致收敛性质是有用的. 这种范数不是通过内积引入的. 第二次是对于 $[-\pi, \pi]$ 上的函数 f 引入 $\|f\| = \sqrt{\int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) dx}$. 这个范数是可以从内积 $(f, g) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(x) dx$ 引入的. 这个内积在引入 Fourier 级数的一开始就起作用, 这就是三角函数系是正交系. 然后在 Bessel 不等式和 Parseval 等式中进一步刻画了 Fourier 级数的特性, 特别是可以推出三角函数系的完全性, 而 Fourier 级数就是函数的正交展开式.

与过去一样, 若不强调邻域的半径, 则简单地将以 \mathbf{x} 为中心的某个邻域记为 $O(\mathbf{x})$. 同样定义去心邻域 $O_\delta(\mathbf{a}) - \{\mathbf{a}\}$.

五. 收敛

设 $\{\mathbf{x}_k\}$ 是空间 \mathbb{R}^n 中的一个点列, 其中 $\mathbf{x}_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \forall k \in \mathbb{N}$, 又记 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, 则就可以给出点列极限的定义.

定义 0.1 称点列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 以 \mathbf{a} 为极限, 或收敛于 \mathbf{a} , 若 $\forall \varepsilon > 0, \exists K, \forall k \geq K : |\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \varepsilon$. 记为 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$, 或简记为 $\mathbf{x}_k \rightarrow \mathbf{a} (k \rightarrow \infty)$.

这样就可以将第二章数列极限理论中的许多结果推广到 \mathbb{R}^n 中来. 举一个例子. 这就是极限的惟一性定理. 实际上惟一性是最基本的, 只是平时往往不自觉使用它. 例如, 切线惟一, 因为从定义来看它源于极限惟一.

定理 0.1 (极限的惟一性定理) 若有 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}, \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{b}$, 则 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$.

证 1 用反证法. 设 $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, 则 $|\mathbf{a} - \mathbf{b}| > 0$. 取 $\varepsilon = \frac{1}{3}|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$, 则 $O_\varepsilon(\mathbf{a}) \cap O_\varepsilon(\mathbf{b}) = \emptyset$. (这里还是根据三角形不等式.)

另一方面, 根据点列 $\{\mathbf{x}_k\}$ 既收敛于 \mathbf{a} , 又收敛于 \mathbf{b} , 则有 $K, \forall k \geq K$, 同时成立 $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \varepsilon, |\mathbf{x}_k - \mathbf{b}| < \varepsilon$. 于是点 \mathbf{x}_k 在 $k \geq K$ 时同时属于 $O_\varepsilon(\mathbf{a})$ 和 $O_\varepsilon(\mathbf{b})$. 引出矛盾. \square

证 2 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists K, \forall k \geq K$, 同时成立 $|\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \frac{\varepsilon}{2}, |\mathbf{x}_k - \mathbf{b}| < \frac{\varepsilon}{2}$.

利用三角形不等式, 则就有

$$|\mathbf{a} - \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a} - \mathbf{x}_k| + |\mathbf{x}_k - \mathbf{b}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

由于 $\varepsilon > 0$ 可取到任意小, 因此只能是 $\mathbf{a} = \mathbf{b}$. \square

注 这与第二章完全一样. 但还是值得学, 其中证一可作图. 此外, 用 $\varepsilon = \frac{1}{2}|\mathbf{a} - \mathbf{b}|$ 也可以. 还有就是两个证明中都要用到三角形不等式.

同样可以引入 \mathbb{R}^n 中的有界性概念. 称点集 A 有界, 若存在 $M > 0$, 使得 $\forall \mathbf{x} \in A$, 成立 $|\mathbf{x}| < M$.

然后就可以证明收敛点列必定有界. 这可以留作练习题.

下面的定理在投影的意义上建立了 \mathbb{R}^n 中的点列收敛与第二章的数列收敛之间的联系, 这对于将过去许多一维的结果推广到高维提供了一种有效的方法.

定理 0.2 (坐标收敛定理) 设给定点列 $\mathbf{x}_k = (x_1^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}) \forall k$, 又给定点 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, 则 $\lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k = \mathbf{a}$ 的充分必要条件是对于每一个 $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, 有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_i^{(k)} = a_i$.

这就是说 \mathbb{R}^n 中的点列收敛等价于点列的坐标形成的 n 个数列同时收敛. 证明留作练习题. (关键之处即是存在下列不等式

$$\forall i = 1, \dots, n, \quad |x_i^{(k)} - a_i| \leq |\mathbf{x}_k - \mathbf{a}| < \sum_{i=1}^n |x_i^{(k)} - a_i|.$$

七. 内点、外点、边界点、聚点和孤立点

(这里修改书中的内容, 取消极限点与聚点的区分, 主要是一般书中都将点列看成为无重复的无限个点. 当然对于数列则允许重复. 例如上面的定理 2 就是如此. 但对于点列若也允许重复, 则就没有意思了.)

所有这些概念都是对于 \mathbb{R}^n 中的一个给定的非空子集 (也称点集) 而言的. 将它记为 $S \subset \mathbb{R}^n$.

1. 内点. (教科书上册没有, 但我们讲课中已经引进了.)

定义 0.2 称点 $x \in S$ 为 S 的内点, 若存在点 x 的某个邻域 $O(x) \subset S$.

将一个集合 S 的所有内点全体称为该集合的内部, 记为 S^0 . 例如在 \mathbb{R} 中, $[a, b]^0 = (a, b)$, $\mathbb{Q}^0 = \emptyset$.

定义 0.3 称点 $y \notin S$ 为 S 的外点, 若存在点 y 的某个邻域 $O(y) \cap S = \emptyset$.

例如, 在 \mathbb{R} 中, $[a, b]$ 的所有外点全体就是 $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$. 但 b 不是外点. 又如 \mathbb{Q} 没有外点.

下面举一个重要例子:

$$O_\delta(\mathbf{a})^0 = O_\delta(\mathbf{a}),$$

这就是说邻域中每个点都是内点.

证 任取点 $x_0 \in O_\delta(\mathbf{a})$, 要证明它是 $O_\delta(\mathbf{a})$ 的内点.

取 $\delta_1 = \delta - |\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}|$, 则 $\delta_1 > 0$. 考虑 $\mathbf{x} \in O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0)$, 则该点到 \mathbf{a} 的距离为

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| + |\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}| < \delta_1 + |\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}| = \delta,$$

这样就证明了当 $\mathbf{x}_0 \in O_\delta(\mathbf{a})$ 时, 存在 $\delta_1 > 0$, 使得以 \mathbf{x}_0 为中心的 δ_1 邻域

$$O_{\delta_1}(\mathbf{x}_0) \subset O_\delta(\mathbf{a}),$$

这样就证明了 \mathbf{x}_0 是 $O_\delta(\mathbf{a})$ 的内点. 由于每个 $\mathbf{x}_0 \in O_\delta(\mathbf{a})$ 都如此, 因此所要求证的结论成立. \square

定义 0.4 称点 x 为集合 S 的边界点, 若对该点的每一个邻域, 其中既有 S 的点, 又有不是 S 的点. 边界点全体记为 ∂S .

S 的边界点可以属于 S , 也可以不属于 S .

也就是 $\forall O(x)$, 既有 $O(x) \cap S \neq \emptyset$, 又有 $O(x) \cap S^c \neq \emptyset$. 这里 S^c 是 S 在 \mathbb{R}^n 中的补集. 例如, 在 \mathbb{R} 中, $[a, b)$ 的边界点为 a, b . 在 \mathbb{R} 中, \mathbb{Q} 的边界点全体只能是 \mathbb{R} . 后者当然不太直观了.

注意在以上概念中, 必须明白指出在什么集合中考虑其子集的内点, 外点和边界点. 例如, 在 \mathbb{R}^2 中考虑 x 轴上的 $S = [a, b)$, 则 S 没有内点, 而 $\mathbb{R}^2 - S$ 之外, 除了点 $(b, 0)$ 之外都是外点. 边界点全体为 $[a, b]$, 比 S 还大.

定义 0.5 设 $x \in \mathbb{R}^n$, $S \subset \mathbb{R}^n$, 若 x 的任何去心邻域中总含有 S 中的点, 则称 x 为 S 的聚点, 也称为 S 的极限点.

(这等价于说在 x 的每个邻域中含有 S 中异于 x 的点.)

注 教科书上引入极限点的做法不妥, 使得任何集合的任何点, 包括孤立点, 都是极限点了. 实际上一般书中的极限点就是聚点. 此外, 这样还使得后面的定理 2 出问题, 其中的第二句“有界点列必存在极限点”. 这里若允许点列重复, 则不需要证了. 若不允许重复, 则孤立点如何可称为极限点? 在陈纪修书中同样存在问题. 那里定义没错, 问题是自然认为点列必是互不相同的可列个点. 这没错, 应当如此理解. 但这样一来, 姚的错误就更为明显了.

数列中允许重复, 因为数列是 \mathbb{N} 到 \mathbb{R} 的映射. 但对于点列, 则是无限点集中的一类, 即只含可列个点的点集.

这里需要作一点讨论.

引理 设有点 x 与点集 S , 则下列三个条件等价:

- (1) x 是 S 的聚点;
- (2) 在点 x 的每个邻域中有 S 的无限多个点; (可见有限点集不会有聚点.)
- (3) 存在属于 S 的点列收敛于 x .

证 (1) \implies (2). 根据条件, 在 x 的一个去心邻域中有 S 的点. 若其中只有 S 中的有限多个点, 则可以取 x 的半径充分小的去心邻域, 将以上有限多个点都排除在外, 从而与聚点定义矛盾.

(2) \implies (3). 先在点 x 的邻域 $O_1(x)$ 中任取 S 中的某个点为 x_1 . 记 $\delta_1 = \min\{|x - x_1|, \frac{1}{2}\} > 0$, 则在 $O_{\delta_1}(x) - \{x\}$ 中也有 S 中的点, 取其中之一为 x_2 , 则 $x_2 \neq x_1$. 然后记 $\delta_2 = \min\{|x - x_2|, \frac{1}{3}\} > 0$, 在 $O_{\delta_2}(x) - \{x\}$ 中也有 S 中的点, 取其中之一为 x_3 , 如此继续, 就得到点列 $\{x_k\}$, 使得 $|x - x_k| < \frac{1}{k}$. 可见它收敛于 x .

(3) \implies (1). 任取 x 的一个去心邻域, 设其半径为 $\varepsilon > 0$. 则由于存在收敛于 x 又属于 S 的点列, 记为 $\{x_k\}$, 因此存在 $K, \forall k \geq K$, 使得 $|x - x_k| < \varepsilon$. 由于其中有无限多个点, 因此存在与 x 不同的点, 即在它的去心邻域中. \square

还应当指出, S 中的点若不是聚点, 则称为孤立点. 例如, 在 \mathbb{R} 中的可列点集 $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, 则其中的每一个点都是孤立点. 但 0 是 S 的聚点.

S 的内点必是聚点, 外点一定不是聚点. 边界点则不一定. 例如上面的离散点集, 它自身的每个点都是边界点, 点 0 不属于它, 也是边界点. 但只有这一个边界点是聚点.

第 T2 次讲稿 (第三学期第二次)

第 T2 次讲稿, 用于 2008 年 9 月 3 日, 星期三, 3 节课.

内容: 继续第十六章, Euclid 空间上的点集拓扑. 其中 §16.1 为基本的点集拓扑概念上次还只讲了一半, §16.2 是将 4 个实数系基本定理推广到 \mathbb{R}^n 中.

引理 设有点 x 与点集 S , 则下列三个条件等价:

- (1) x 是 S 的聚点:
- (2) 在点 x 的每个邻域中有 S 的无限多个点^①;
- (3) 存在属于 S 的点列收敛于 x .

证 (1) \implies (2). 根据条件, 在 x 的一个去心邻域中有 S 的点. 若其中只有 S 中的有限多个点, 则可以取 x 的半径充分小的去心邻域, 将以上有限多个点都排除在外, 从而与聚点定义矛盾.

(2) \implies (3). 先在点 x 的邻域 $O_1(x)$ 中任取 S 中的某个点为 x_1 . 记 $\delta_1 = \min\{|x - x_1|, \frac{1}{2}\} > 0$, 则在 $O_{\delta_1}(x) - \{x\}$ 中也有 S 中的点, 取其中之一为 x_2 , 则 $x_2 \neq x_1$. 然后记 $\delta_2 = \min\{|x - x_2|, \frac{1}{3}\} > 0$, 在 $O_{\delta_2}(x) - \{x\}$ 中也有 S 中的点, 取其中之一为 x_3 , 如此继续, 就得到点列 $\{x_k\}$, 使得 $|x - x_k| < \frac{1}{k}$. 可见它收敛于 x .

(3) \implies (1). 任取 x 的一个去心邻域, 设其半径为 $\varepsilon > 0$. 则由于存在收敛于 x 又属于 S 的点列, 记为 $\{x_k\}$, 因此存在 $K, \forall k \geq K$, 使得 $|x - x_k| < \varepsilon$. 由于其中有无限多个点, 因此存在与 x 不同的点. \square

还应当指出, S 中的点若不是聚点, 则称为孤立点. 例如, 在 \mathbb{R} 中的可列点集 $\{\frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$, 则其中的每一个点都是孤立点. 但 0 是 S 的聚点.

S 的内点必是聚点, 外点一定不是聚点. 边界点则不一定. 例如上面的离散点集, 它自身的每个点都是边界点, 点 0 不属于它, 也是边界点. 但只有这一个边界点是聚点. 又如 \mathbb{R} 中的点集 $S = [0, 1) \cup \{2\}$, 则聚点全体为 $[0, 1]$, 边界点为 $\{0, 1, 2\}$.

八. 开集

定义 0.1 设 $S \subset \mathbb{R}^n$, 且 S 中的每个点都是内点, 则称 S 为 \mathbb{R}^n 中的一个开集.

形象化来看, 开集就是不含边界点的点集. 例如, \mathbb{R} 的 9 种区间中, $(-\infty, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, (a, b) 是开集, 其他不是开集. 当然, 它们在 \mathbb{R}^2 都不是开集, 因为根本没有内点.

^① 可见有限点集不会有聚点.

注意: 邻域和去心邻域都是开集. 今后又常将邻域称为开球, 它就是 \mathbb{R}^n 中的不带边界的 n 维球.

开集的主要特征由下列定理所刻画.

定理 0.1 在 \mathbb{R}^n 中的开集具有以下三个性质:

- (1) 全空间 \mathbb{R}^n 和 \emptyset 都是开集.
- (2) 任意个开集的并仍为开集;
- (3) 有限个开集的交仍为开集;

证 先讨论 (1). 从定义可见, 在 \mathbb{R}^n 中, 每个点的每个邻域当然仍在这个空间中, 因此这个全空间自身是开集^①.

至于 \emptyset 是开集则可以看成为一个约定^②.

(2) 设有一族开集 $\{O_\lambda, \lambda \in \Lambda\}$, 即其中 Λ 为指标集, 每一个 O_λ 为开集. 则要证明 $S = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda$ 为开集.

为此只要证明 S 的每个点为 S 的内点. 设 $x \in S$, 则按照定义, 存在某个 $\lambda \in \Lambda$, 使得 $x \in O_\lambda$. 由于 O_λ 为开集, 因此存在 $\delta > 0$, 使得 $O_\delta(x) \subset O_\lambda$, 从而也有 $O_\delta(x) \subset S$. 即 x 为 S 的内点.

(3) 设有有限个开集, 记为 O_1, \dots, O_n . 若它们的交为空集, 则从 (3) 就知道是开集. 否则, 任取 $x \in S = \bigcap_{i=1, \dots, n} O_i$, 则因 $x \in O_i$, 而 O_i 为开集, 因此存在 $\delta_i > 0$, 使得邻域 $O_{\delta_i}(x) \subset O_i$. 对每个 $i = 1, \dots, n$ 都这样做, 并取 $\delta = \min_{i=1, \dots, n} \delta_i$, 就知道 $O_\delta(x) \subset O_i$ 对每个 $i = 1, \dots, n$ 成立, 因此 $O_\delta(x)$ 属于 S . 从而 x 是 S 的内点. \square

注 上述定理的 (3) 不能将“有限”改为“任意”. 例如在 \mathbb{R} 中, $(-\frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n})$ 是开集, 取所有正整数 n , 得到可列个开集. 它们的交是 $[0, 1]$, 不是开集.

推论 \mathbb{R}^n 中的任何开集必是若干个开球的并.

证 设 S 为 \mathbb{R}^n 中的一个开集. 若为空集, 则可以理解为是半径等于 0 的开球. 否则, 对每个 $x \in S$, 存在某个邻域 $O(x) \subset S$. 取所有这些邻域的并就等于 S . \square

注 称以下集合

$$\{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid a_i < x_i < b_i, i = 1, \dots, n\}$$

为 \mathbb{R}^n 中的开长方体. 还可以将 $(\frac{1}{2}(a_1 + b_1), \dots, \frac{1}{2}(a_n + b_n))$ 称为上述长方体的中心. 容易看出, 任何开球中有中心相同的开长方体, 反之, 任何开长方体中有中心相同的开球. 因此, 上述推论也可以将其中的开球换为开长方体.

① 但要注意, 若将 \mathbb{R} 看成为 \mathbb{R}^2 的子集, 则前者一个内点都没有, 当然不是开集. 总之, 什么是当前讨论的全空间, 必须一开始就要说清楚.

② 在数学的定义中这类情况很多. 开集的定义是它的每一个点为内点, 由于空集中没有任何点, 因此也符合这个要求. 从而可以理解空集也是开集.

注 在本章的标题中出现了“拓扑”这个名词. 这里对于什么是拓扑和拓扑空间作出一般性解释.

给定一个集合 S , 又给定由 S 的某些子集所成的族为 \mathcal{U} . 若 \mathcal{U} 满足以下三个条件:

- (1) $S \in \mathcal{U}, \emptyset \in \mathcal{U}$;
- (2) \mathcal{U} 中任意个元的并仍在 \mathcal{U} 中;
- (3) \mathcal{U} 中有限个元的交仍在 \mathcal{U} 中;

则称 \mathcal{U} 中的每一个元为开集, 称 \mathcal{U} 是 S 的一个拓扑, 称 S 为拓扑空间.

由此可知, 在 \mathbb{R}^n 中规定了开集后, 就成为一个拓扑空间. 由于这个拓扑是从距离而来的, 因此也称为距离拓扑, 或度量拓扑. 而上述拓扑空间定义中的拓扑结构是独立于距离或度量的一种结构.

九. 闭集

定义 0.2 设 $S \subset \mathbb{R}^n$, 若 $\mathbb{R}^n - S$ 为 \mathbb{R}^n 中的开集, 则称 S 为 \mathbb{R}^n 中的闭集.

例如, $[a, b]$ 是 \mathbb{R} 中的闭集, 因为它的补集 $(-\infty, a) \cup (b, +\infty)$ 是 \mathbb{R} 中的开集. 然而, $[a, b]$ 也是 \mathbb{R}^n ($n > 1$) 中的闭集. 因为它的补集的每个点都是内点.

注 利用集合论中的对偶律 (也称为 de Morgan 定律), 即对于 \mathbb{R}^n 中的任意多个集合 $A_\lambda, \lambda \in \Lambda$, 总成立以下两个等式^①

$$\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c, \quad \left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda^c,$$

就可以从定理 3 得到关于闭集的三个性质:

- (1) 任意个闭集的交为闭集;
- (2) 有限个闭集的并为闭集;
- (3) 全空集和空集为闭集.

与开集类似, 在上面的性质 (2) 中不能将“有限”改为“任意”. 例如, 令 $A_n = [-1 + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}] \forall n$, 则它们的并为 $(-1, 1)$, 不是闭集.

然而还有刻画闭集的更有效的方法.

定理 0.2 集 S 为闭集的充分必要条件是 S 的所有聚点属于 S .

证 必要性 设 S 为闭集, 且有聚点 x . 我们要证明 $x \in S$.

^① 见教科书上册第 8 页最后一行. 可以当场口头上证一个的一边, 或用中学数学已经引入的 Venn 图作出解释.

用反证法. 设 $x \notin S$, 则 $x \in S^c$. 由于 S^c 开, 因此存在 $\delta > 0$, 使得 $O_\delta(x) \subset S^c$. 于是 x 不可能是 S 的聚点, 引出矛盾.

充分性 设 S 包含所有聚点. 用反证法, 设这样的 S 不是闭集, 则 S^c 不是开集, 于是它不空, 且至少有一个点 $x \in S^c$ 不是 S^c 的内点. 这表明, $\forall O(x)$, $O(x) \not\subset S^c$. 因 $x \notin S$, 这表明 $O(x) - \{x\} \cap S \neq \emptyset$. 于是 x 是 S 的聚点, 引出矛盾. \square

注 上述定理包含一个推论, 即没有聚点的集合一定是闭集. 这只要考虑其补集即可知一定是开集.

证 1 的两部分都用反证法. 实际上也都可以不用反证法. 我们将它们写为第二个证明.

证 2 必要性 设 S 为闭集. 则 S^c 为开集. $\forall x \in S^c$, 存在一个邻域 $O(x) \subset S^c$, 因此 $O(x) \cap S = \emptyset$. 这样就证明了 S^c 中没有 S 的聚点, 从而 S 的所有聚点 (if any) 都属于 S .

充分性 也只要看 S^c . 由于 S 已经包含了所有聚点, 因此 $\forall x \in S^c$, x 一定不是 S 的聚点. 按照聚点定义, 又因 x 已不在 S 中, 因此至少存在一个邻域 $O(x)$, 其中没有 S 中的点. 于是 $O(x) \subset S^c$. 即表明 x 是 S^c 的内点. 由于 S^c 中全为内点, 因此 S^c 开. \square

定义 0.3 设 S 为 \mathbb{R}^n 的子集, 称集合

$$\overline{S} = S \cup \{S \text{ 的所有聚点}\}$$

为 S 的闭包.

注 1 容易证明闭包必是闭集. 设点 $x \notin \overline{S}$, 则 x 既不属于 S , 又不是 S 的聚点, 因此有一个邻域 $O(x)$ 与 S 不交. 对这个邻域中的每一个点 y , 存在一个邻域 $O(y) \subset O(x)$, 因此 y 既不属于 S , 也不是 S 的聚点. 这表明 \overline{S}^c 为开集.

注 2 闭包的另一个表达式为:

$$\overline{S} = S \cup \partial S.$$

这可以不引入聚点概念来理解闭包, 还是很不错的. 特别是下面的闭区域就需要这个概念. 这里要会证明, 边界点集 ∂S 中的点若不属于 S , 则一定是 S 的聚点.

十. 区域

定义 0.4 设 D 是 \mathbb{R}^n 的子集, 若对于 D 中的任何两点 x, y , 都可以用完全处在 D 内的一条折线相联接, 则称 D 为连通集.

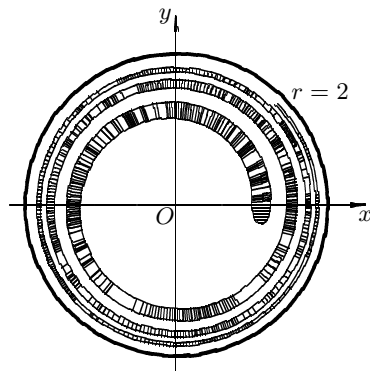
注 教科书中的定义不妥当, 因为什么叫连续曲线还没有定义. 可以证明对于开集来说, 它等价于拓扑学中提出的连通开集的定义, 即不能分解为两个不交开集的并.

下面是今后多元微积分中用得最多的点集拓扑概念——区域.

定义 0.5 称 \mathbb{R}^n 中的非空连通开集为开区域 (region, domain), 简称为区域. 又称开区域的闭包为闭区域.

注 注意, 闭区域与非空连通闭集不同, 后者未必有内点, 而闭区域也不一定连通.

如右图所示, 在半径为 2 的圆内有两条旋转的螺线, 它们逼近 $r = 2$ 的圆周. 用这两条螺线为边界围成一个连通开集, 记为区域 D . 但 D 的边界点 ∂D 除了上述螺线之外还包含圆周 $r = 2$. 可以看出, 圆周上的点 ($r = 2$) 和圆内的点 ($r < 2$) 用处于 \overline{D} 的任何连续曲线都不可能相联结. (这个圆周上的任意两点之间也不能用 \overline{D} 中的折线相联结.)



§16.2 Euclid 空间上点集拓扑的基本定理

这就是要将实数系基本定理推广到 \mathbb{R}^n ($n > 1$), 为引入极限作准备.

在 6 个实数系基本定理中, 确界存在定理和单调有界数列收敛定理都依赖于 \mathbb{R} 中的序关系, 即实数集中有大小关系. 但当 $n > 1$ 时, \mathbb{R}^n 中没有序关系, 因此不能推广. 然而, 其他 4 个基本定理都可以推广到任何有限维的 Euclid 空间中去.

定理 0.1 (闭长方形套定理) 设 $\Delta_n \forall n$ 是 \mathbb{R}^2 中的闭长方形序列, 且满足

(1) $\Delta_1 \supset \Delta_2 \supset \cdots \supset \Delta_n \supset \cdots$,

(2) Δ_n 的直径 $\rho_n \rightarrow 0$, 其中 $\rho_n = \max_{x', x'' \in \Delta_n} |x' - x''|$, 即 Δ_n 的对角线长度, 则存在惟一的点 $(\xi, \eta) \in \Delta_n \forall n$.

证明概要 只对于 $n = 2$ 作证明. 设 $\Delta_n = [a_n, b_n] \times [c_n, d_n] \forall n$. 然后只要将每个矩形投影到 x 轴和 y 轴上, 分别形成两个闭区间套, 利用 $\rho_n = \sqrt{(b_n - a_n)^2 + (d_n - c_n)^2} \forall n$, 则从 $\rho_n \rightarrow 0$ 可知两个闭区间套的长度都趋于 0. 然后分别用 \mathbb{R} 的闭区间套定理, 分别得到 ξ 和 η . 然后证明点 (ξ, η) 合乎要求即可. 且这时有 $a_n \rightarrow \xi, b_n \rightarrow \xi, c_n \rightarrow \eta, d_n \rightarrow \eta$. \square

注 另一种形式是闭球套定理. 即 p.12 的练习题 2. 还可以推广为有界闭集套必有公共点, 而当有界闭集套的直径趋于 0 时这公共点惟一.

定理 0.2 (Bolzano–Weierstrass 凝聚定理) \mathbb{R}^n 中的有界点列必有收敛子点列.

证明概要 同样只要用投影法即可解决, 但与上面不同, 如果在每个坐标方向独立用 \mathbb{R} 中的凝聚定理, 则不能得到收敛的子点列, 因为几次得到的子列不一定相同. 办法是按照顺序从子列再取子列. 具体来说, 对点列 $\{x_k\}$ 的第一个坐标形成的数列 $\{x_1^{(k)}\}$, 用凝聚定理得到收敛子列, 记为 $\{x_1^{(k_j)}\}$. 然后在原来的点列中就取出一个子点列 $\{x_{k_j}\}$. 它的第一个坐标收敛. 这个子点列的子点列仍然是原来的点列的子点列. 因此我们可以将这个子点列改记为 $\{y_j\}$. 然后考虑它的第二个坐标形成的数列, 并对它用 \mathbb{R} 的凝聚定理. 这样有限次后就得到一个子点列, 它的每个坐标收敛, 从而这个子点列收敛. \square

注 也可以用闭长方形套定理来证明. 这就是用上册 p.44 证明 $n = 1$ 的凝聚定理的方法. 实际上这代表了两条思路. 一条是用 $n = 1$ 时的结论, 另一条是用 $n = 1$ 时的方法.

推论 (聚点定理) 有界无限点集必有聚点.

证 设 S 是 \mathbb{R}^n 中的有界无限点集, 则可以从 S 取出一个点列 $\{x_k\}$. 根据上述定理, 存在收敛子列 $\{x_{k_j}\}$. 记其极限为 a , 则在 a 的每一个邻域中有该子列中

的无限多个点, 也就是有 S 中的无限多个点. (于是在 a 的去心邻域中一定有 S 的点.) 可见 a 是 S 的聚点. \square

定理 0.3 (Cauchy 收敛准则) \mathbb{R}^n 中点列 $\{x_k\}$ 收敛的充要条件是: $\forall \varepsilon > 0$, $\exists K, \forall k, l \geq K : |x_k - x_l| < \varepsilon$.

证明概要 用投影法, 在每个坐标轴的投影都是基本数列, 因此都收敛. 这样就得到所要的结论. \square

定理 0.4 (有限开覆盖定理) 设 S 是 \mathbb{R}^n 中的有界闭集, 则 S 的任何一个开覆盖中必有有限子覆盖.

证明概要 这里似乎无法用投影法. 回顾上册 p.308 的有限开覆盖定理的证明, 当时是用闭区间套定理来证明的. 现在可以将这个方法借用过来.

为简明起见, 在 \mathbb{R}^2 中来叙述. 用反证法. 设 S 有一个开覆盖 $\{O_\alpha \mid \alpha \in A\}$, 但 S 在其中没有有限子覆盖.

由于 S 有界, 可以用一个闭矩形 $\Delta_1 \supset S$. 然后将从它得到 4 个闭子矩形. 则这 4 个闭矩形与 S 的交集中至少有一个也在 $\{O_\alpha \mid \alpha \in A\}$ 没有子覆盖. 选定相应的闭子矩形 Δ_2 . 如此继续, 就可以如 $n = 1$ 一样引出矛盾. \square

注 与 $n = 1$ 类似, 在 \mathbb{R}^n 中以上 4 个定理等价.

第 T3 次讲稿 (第三学期第三次)

第 T3 次讲稿, 用于 2008 年 9 月 5 日, 星期五, 2 节课.

内容: 第十七章, Euclid 空间上映射的极限和连续.

§17.1 多元函数的极限和连续

一. 多元函数

n 元函数 f 的标准记号为

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \mapsto y = f(\mathbf{x}).$$

称 D 为映射 f 的定义域, 记为 $\mathcal{D}(f)$, 称集合

$$f(D) = \{y \in \mathbb{R} \mid y = f(\mathbf{x}), \mathbf{x} \in D\}$$

为映射 f 的值域, 记为 $\mathcal{R}(f)$.

由此可见, n 个自变量都是实数, 定义域是 Euclid 空间的子集. 因变量也是实数. 因此也称为 n 元实函数.

例题 0.1 二元函数 $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, 由表达式可确定其自然定义域为 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$.

几何上的图像就是单位球的上半球面. 它是 \mathbb{R}^3 中的闭集.

例题 0.2 给定平面上两个向量 $\mathbf{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, 则它们的夹角为

$$\theta = \arccos \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \sqrt{b_1^2 + b_2^2}}.$$

可以将 θ 看成为 a_1, a_2, b_1, b_2 的 4 元函数. 其自然定义域是 $(a_1, a_2) \neq (0, 0)$ 和 $(b_1, b_2) \neq (0, 0)$ 同时成立.

二. 多元函数的极限

设有 \mathbb{R}^n 中的开集 D , 点 $\mathbf{a} \in D$, 当然是 D 的一个内点. 又设有函数 $f: D - \{\mathbf{a}\} \rightarrow \mathbb{R}$. (其实只要 f 在 \mathbf{a} 的一个去心邻域上有定义就够了.)

定义 0.1 若存在实数 A , 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{a}) - \{\mathbf{a}\}: |f(\mathbf{x}) - A| < \varepsilon$, 则称当 $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}$ 时 f 收敛, 称 A 为其极限, 记为

$$\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = A,$$

或简写为 $f(\mathbf{x}) \rightarrow A (\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a})$. 也可以不用向量记号写为

$$\lim_{\substack{x_1 \rightarrow a_1 \\ \vdots \\ x_n \rightarrow a_n}} f(x_1, \dots, x_n) = A.$$

其中的去心邻域就是去心开球, 在需要时也可以换为去心立方体邻域或去心长方体邻域代替. 若不用向量记号, 则 $\mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{a}) - \{\mathbf{a}\}$ 等价于

$$0 < (x_1 - a_1)^2 + \cdots + (x_n - a_n)^2 < \delta^2,$$

而去心正方体邻域可写为

$$|x_1 - a_1| < \delta, \cdots, |x_n - a_n| < \delta, \quad (x_1, \cdots, x_n) \neq (a_1, \cdots, a_n),$$

这些都可以用 $n = 2$ 来作几何想像. 下面举例时也多数用 n 来说明问题.

下面看一个例子.

例题 0.3 设 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$, 讨论 f 在原点 $(0, 0)$ 的极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 是否存在.

解 1 f 的自然定义域是 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$. 令 $y = mx$, 则

$$f(x, mx) = \frac{mx^2}{(1 + m^2)x^2},$$

在 $x \neq 0$ 时, 右边等于 $\frac{m}{1 + m^2}$. 于是当 (x, y) 沿着直线趋于原点时, 极限值与 m 有关. 因此 f 在 $(0, 0)$ 的极限不存在. \square

解 2 用极坐标, 令 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, r \neq 0$. 则有

$$f(r \cos \theta, r \sin \theta) = \frac{r^2 \sin \theta \cos \theta}{r^2} = \cos \theta \sin \theta,$$

可见当 θ 固定时, 极限值与 θ 有关. 如点 (x, y) 以螺线方式趋于原点, 则 f 的值在 $-\frac{1}{2}$ 和 $\frac{1}{2}$ 之间摆动. \square

注 在一维情况, $x \rightarrow a$ 的极限过程可以分解为 $x \rightarrow a^+$ 和 $x \rightarrow a^-$. $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ 的充分必要条件是同时有 $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = A$, 或者说 $f(\pm a) = A$. 于是只要有一个单侧极限不存在, 或者两个单侧极限存在但不相等, 就可以推出 f 在点 a 的极限不存在. 上面的例题与此类似.

例题 0.4 设 $f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}$, 讨论 f 在 $(0, 0)$ 的极限是否存在.

解 1 直接估计

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq |x| \cdot \frac{|xy|}{x^2 + y^2} \leq \frac{1}{2} |x|,$$

可见 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$. \square

解 2 用极坐标, $f(r \cos \theta, r \sin \theta) = r \cos^2 \theta \sin \theta$, 可见

$$|f(x, y)| \leq r = \sqrt{x^2 + y^2},$$

因此极限为 0. \square

注 这里可以看出用极坐标处理这类问题的优点, 事先就可以看出分子关于 r 为 3 阶, 分母为 r^2 , 因此极限为 0.

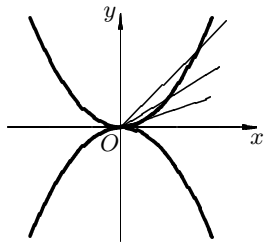
下一个例题指出, 即使在趋于点 a 的所有直线上 f 的极限都存在且相同, 也还不足以保证 f 在点 a 一定存在极限. 由此可见, 这里的问题比一维情况要复杂得多.

例题 0.5 设 $f(x, y) = \begin{cases} 0, & x^2 \leq |y|, \text{ 或 } y = 0, \\ 1, & \text{其他,} \end{cases}$ 讨论极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 是否存在.

解 当 (x, y) 沿直线 l 趋于原点时, 有各种情况发生.

若 l 与 x 轴重合, 则 f 恒等于 0, 因此极限为 0.

对于 l 的其他情况, 其上的点迟早要进入 $x^2 \leq |y|$ 的范围中. 若 l 与 y 轴重合, 则 l 始终如此. 否则, 这时 l 的方程是 $y = mx$, 其中 $m \neq 0$. 于是 $x^2 \leq |y|$ 就是 $x^2 \leq |m| \cdot |x|$. 由于 $x \neq 0$, 这就是 $|x| \leq |m|$. 从而只要 x 充分小, f 就恒等于 0. 因此极限也是 0.



于是我们发现在通向 $(0, 0)$ 的每一条直线上, 当点趋于原点时, f 的极限都存在, 且都等于 0. 但是在 $(0, 0)$ 的任意邻近, 都有 $f(x, y) = 1$ 的点 (x, y) , 因此极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y)$ 不存在. (当然也可以用一条曲线 $y = \frac{1}{2}x^2$ ($x > 0$), 当点 (x, y) 沿此曲线趋于原点时, $f(x, y) \equiv 1$, 可见极限为 1.) \square

关于多元函数极限的下列性质只列出不证明, 因为与一维情况没有本质差异.

性质 1 (局部有界性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ 存在, 则有 $\delta > 0$, 使得 f 在 $O_\delta(a) - \{a\}$ 上有界.

性质 2 (局部保号性) 若 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A > 0$ 存在, 则有 $\delta > 0$, 使得 f 在 $O_\delta(a) - \{a\}$ 上取正值.

性质 3 (局部比较定理) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$,

- (1) 若有 $\delta > 0$, 使得在 $O_\delta(a) - \{a\}$ 上 $f(x) \geq g(x)$, 则 $A \geq B$;
- (2) 反之, 若有 $A > B$, 则存在 $\delta > 0$, 使得在 $O_\delta(a) - \{a\}$ 上 $f(x) > g(x)$.

性质 3 (四则运算法则) 设 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$, 则有

- (1) $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = A \pm B$;
- (2) $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$;
- (3) 在 $B \neq 0$ 时, $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

四. 多元连续函数

这里都是将一元连续函数的有关定义和性质推广到多元函数, 没有本质上的新内容.

设有 \mathbb{R}^n 中的开集 D , 函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, 点 $\mathbf{a} \in D$, 若有 $\lim_{\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$, 则称 f 在点 \mathbf{a} 处连续. 又若 f 在 D 处处连续, 则称 f 在 D 上连续, 或 f 是 D 上的连续函数.

用 ε - δ 语言, 则 f 于点 \mathbf{a} 连续就是

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{a}) : f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(f(\mathbf{a})).$$

其中最后我们将 $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$ 用邻域语言写出. 这样为今后引入从 $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ($m > 1$) 的连续映射作好准备.

此外还需要定义域 D 为一般集合时的连续函数概念. 上面只是给出了 f 在定义域的内点处的连续性概念. 对于其他点, 如一维那样用单侧连续性是不合适的, 因为从多元函数的极限讨论已经可以看到问题要复杂得多. 此外, 我们也只对于在一个去心邻域上又定义的函数给出了它在邻域中心的极限的定义. 一个简单的解决办法是在一维时也已经采用过的^①. 我们将它写为一个正式的定义.

定义 0.2 设 f 是定义于 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的函数, 点 $\mathbf{a} \in D$, 称 f 在点 \mathbf{a} 处连续, 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall \mathbf{x} \in O_\delta(\mathbf{a}) \cap D : f(\mathbf{x}) \in O_\varepsilon(f(\mathbf{a})).$

注 在这样的定义下, 若点 $\mathbf{a} \in D$ 是定义域 D 的一个孤立点, 则 f 一定在点 \mathbf{a} 处连续. 事实上, 这时存在 $\delta_0 > 0$, 使得在邻域 $O_{\delta_0}(\mathbf{a}) \cap D = \{\mathbf{a}\}$, 因此无论对什么 $\varepsilon > 0$, 只要取 $\delta = \delta_0$, 则条件就满足了.

从函数极限的四条性质就立即可以得到连续函数的四条局部性质, 与一元连续函数完全类似. 下面只补充一条性质, 它是复合函数连续性的一个特殊情况. 又为简单起见, 只叙述并证明 $n = 2$ 的情况.

性质 5 设 D 是 \mathbb{R}^2 中的开集, $(x_0, y_0) \in D$, 函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto z = f(x, y)$, 于点 (x_0, y_0) 处连续. 又设有两个函数 $x = x(t), y = y(t)$, 在开区间 I 上定义, 值域 $(x, y) \in D, t = t_0 \in I$ 时 $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$, 且 $x(t), y(t)$ 于点 t_0 连续, 则复合函数 $f((x(t), y(t)))$ 于点 t_0 连续.

证 根据 f 于点 (x_0, y_0) 连续, 因此对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (x, y) (|x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta) : |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon.$ (这相当于用正方形邻域.)

^① 例如, 在一维情况对于区间 $[a, b]$ 的左端点 a , 函数 f 在该点连续可以定义为 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) \cap [a, b] : |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$ 另一种方法是用单侧极限, 即 $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$ 但从前面的例子可见, 这对于多元函数是不合适的.

对上述 $\delta > 0$, 根据 $x(t), y(t)$ 在点 t_0 连续, 存在 $\eta > 0$, 当 $|t - t_0| < \eta$ 时, 有 $|x - x_0| = |x(t) - x(t_0)| < \delta$, $|y - y_0| = |y(t) - y(t_0)| < \delta$.

综合以上, 当 $|t - t_0| < \eta$ 时就有

$$|f(x(t), y(t)) - f(x(t_0), y(t_0))| = |f(x, y) - f(x_0, y_0)| < \varepsilon,$$

即证明了 $f(x(t), y(t))$ 于点 t_0 连续. \square

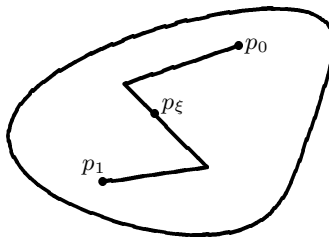
五. 连续函数的零点存在定理

定理 0.1 设 D 是 \mathbb{R}^n 中的一个区域, 点 $p_0, p_1 \in D$, f 是 D 上的连续函数, 且 $f(p_0) > 0$, $f(p_1) < 0$, 则在 D 内连结 p_0, p_1 的任何一条折线上, 至少存在一点 p_ξ , 使得 $f(p_\xi) = 0$.

证 只讨论 $n = 2$. 如右图所示, 设折线的方程为

$$x = x(t), y = y(t), \quad t_0 \leq t \leq t_1,$$

设 t_0, t_1 分别与点 p_0, p_1 对应. 则由于 $x(t), y(t)$ 于 $[t_0, t_1]$ 上连续, 用上面的性质 5, 可见复合函数 $f(x(t), y(t))$ 也在 $[t_0, t_1]$ 上连续. 然后只要用一元连续函数的零点存在定理, 即有 $t_\xi \in (t_0, t_1)$, 使得 $f(x(t_\xi), y(t_\xi)) = 0$. 于是所求的点 $p_\xi = (x(t_\xi), y(t_\xi))$. \square



六. 有界闭集上连续函数的性质

这里将有界闭区域改为有界闭集, 更广一点. 当然这里需要连续性的一般性定义, 而这在前面已经做好了准备工作.

以下两个定理的证明放到后面, 将作为更一般的连续映射的性质的特例而得到.

定理 0.2 设 f 是有界闭集 D 上的连续函数, 则 $f(D)$ 有界, 且有最大值和最小值. 又若 D 为有界闭区域, 则 $f(D)$ 为有界闭区间.

定理 0.3 设 f 是有界闭集 D 上的连续函数, 则 f 在 D 上一致连续.

七. 累次极限

为简明起见, 这里只在 \mathbb{R}^2 中讨论.

首先, 将前面的多元函数极限称为重极限, 将 n 元函数极限称为 n 重极限, 将二元函数极限称为二重极限.

设 D 是 \mathbb{R}^2 中的开集, $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, $\mathbf{a} = (x_0, y_0) \in D$, 则可能存在以下两种极限:

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y), \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \lim_{y \rightarrow y_0} f(x, y),$$

分别称为先 x 后 y 的二次极限和先 y 后 x 的二次极限, 统称为累次极限.

具体来说, 先看 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$. 这时用正方形邻域或长方形邻域比较方便. 如右下图所示, 作出了点 (x_0, y_0) 的一个正方形去心邻域, 也就是

$$\{(x, y) \mid |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta, (x, y) \neq (x_0, y_0)\}.$$

于是对于满足 $0 < |y - y_0| < \delta$ 的每一个 y , 将 y 作为参数, 令 $x \rightarrow 0$, 若存在极限, 这就是 $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$.

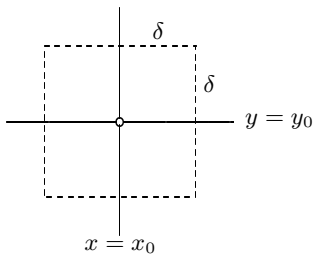
若对每个这样的 y 都有上述极限, 则可以记为

$$\phi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y),$$

在 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时有定义. 然后可以考虑这个函数 $\phi(y)$ 在 $y = y_0$ 的极限. 若有定义, 就称为先 x 后 y 的二次极限, 如前记为

$$\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \phi(y).$$

同样定义先 y 后 x 的二次极限.



注 由以上累次极限的定义可以看出, 在讨论累次极限时, 函数 f 不仅可以在点 (x_0, y_0) 处没有定义, 而且可以在 $x = x_0$ 和 $y = y_0$ 两条直线上没有定义.

在引入以上定义之后, 一个严重的问题 (即不能回避的问题) 就是两个累次极限与二重极限之间的关系, 其中包括存在性和极限值两个方面. 在讨论之前, 先注意在两个累次极限定义中, 函数 f 只需要在 $(x - x_0)(y - y_0) \neq 0$ 时有定义即可. 这等于说, 在点 (x_0, y_0) 的一个邻域中, 即使 $x = x_0$ 和 $y = y_0$ 两条直线上 f 都没有定义, 仍然可以定义两个累次极限. 但二重极限则只允许 f 在点 (x_0, y_0) 处没有定义.

由于这里涉及到三个极限, 出现多种可能, 我们还是先举几个例子看一看会发生什么情况.

例题 0.6 设 $f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{y} + y \sin \frac{1}{x}, & xy \neq 0, \\ 0, & xy = 0, \end{cases}$ 讨论 f 在 $(0, 0)$ 的二重极限和两个累次极限.

解 从 $|f(x, y)| \leq |x| + |y|$ 可见 $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} f(x, y) = 0$.

现在观察 $\phi(y) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y)$. 当然只有当 $\phi(y)$ 在 $y = 0$ 的某一个去心邻域上有定义的前提下, 才能考虑先 x 后 y 的二次极限.

于是只要在 $y \neq 0$ 且 $|y|$ 充分小时来考察 $\phi(y)$. 固定这样的 y , 它是参数, 不参加 $x \rightarrow 0$ 的极限过程. 而这个极限过程中按照极限的定义, $x \neq 0$.

这时从表达式可见, 第一项趋于 0, 第二项没有极限, 因此对于所有 $y \neq 0$, $\phi(y)$ 不存在.

容易看出, $y = 0$ 时 $f(x, 0) \equiv 0$, 因此 $\phi(0) = 0$. 但这没有用处. 因为考虑 $\lim_{y \rightarrow 0} \phi(y)$ 时需要的不是 $\phi(0)$. 于是先 x 后 y 的二次极限不存在, 因为其中的第一次极限在 $y \neq 0$ 时不存在.

从对称性可以知道, 先 y 后 x 的二次极限也不存在, 问题出在第一次极限在 $x \neq 0$ 时不存在.

结论: 在这个例题中, f 在点 $(0, 0)$ 处存在二重极限, 但两个累次极限都不存在. \square

例题 0.7 设 $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2} \forall (x, y) \neq (0, 0)$, 讨论 f 在点 $(0, 0)$ 的累次极限.

解 在例题 3 中已经证明 f 在 $(0, 0)$ 的二重极限不存在. 对于先 x 后 y 的二次极限, 先看第一次极限, 即

$$\phi(y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{xy}{x^2 + y^2},$$

从表达式可以直接看出, 在参数 $y \neq 0$ 时, 总有 $\phi(y) = 0$. 于是也就有 $\lim_{y \rightarrow 0} \phi(y) = 0$. (此题中也有 $\phi(y) = 0$, 但这并不需要.) 这样就知道先 x 后 y 的二次极限为 0. 从对称性可知先 y 后 x 的二次极限也是 0.

结论: 在这个例题中 f 在点 $(0, 0)$ 不存在二重极限, 但存在两个累次极限, 且相等. \square

(以上两个例子是补充的, 不是教科书上的.)

第 T4 次讲稿 (第三学期第 4 次)

第 T4 次讲稿, 用于 2008 年 9 月 10 日, 星期三, 3 节课.

内容: 第十七章, Euclid 空间上映射的极限和连续. 这次用两节课讲完. 第三节课开始第十八章.

上次最后两个例题都是补充例题, 一个说明可以存在二重极限, 但不存在两个累次极限; 另一个说明反过来的情况也是存在的.

下面是按照书上编号的例题 6.

例题 0.6 设 $f(x, y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} \forall (x, y) \neq (0, 0)$, 讨论 f 在点 $(0, 0)$ 的两个累次极限.

解 由表达式可直接看出当 $y \neq 0$ 时有 $\lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1$, 从而先 x 后 y 的二次极限 $\lim_{y \rightarrow 0} \lim_{x \rightarrow 0} f(x, y) = -1$.

同样从表达式直接看出当 $x \neq 0$ 时有 $\lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$, 从而先 y 后 x 的二次极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \lim_{y \rightarrow 0} f(x, y) = 1$.

于是 f 在点 $(0, 0)$ 的两个累次极限都存在, 但不相等. \square

下面是这方面的一个定理, 它给出了两个累次极限相等的一个充分条件. 其中的内容比教科书上要多一点.

定理 0.1 设存在二重极限 $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A$, 又设当 $y \neq y_0, |y - y_0|$ 充分小时, 存在极限 $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$, 则存在先 x 后 y 的二次极限, 且等于 A , 即有 $\lim_{y \rightarrow y_0} \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = A$.

证 从存在二重极限可知, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall |x - x_0| < \delta, |y - y_0| < \delta, (x_0, y_0) \neq (0, 0)$, 成立 $|f(x, y) - A| < \varepsilon$. 这就是

$$A - \varepsilon < f(x, y) < A + \varepsilon. \quad (1)$$

不妨设 δ 已经充分小, 使得当 $0 < |y - y_0| < \delta$ 时, $\varphi(y) = \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y)$ 已经存在.

对于满足 $0 < |y - y_0| < \delta$ 的 y , 在 (1) 中将 y 看作为参数, 令 $x \rightarrow x_0$, 就得到

$$A - \varepsilon \leq \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) = \varphi(y) \leq A + \varepsilon,$$

这已经证明了 $\lim_{y \rightarrow y_0} \varphi(y) = A$. \square

推论 设 f 在点 (x_0, y_0) 存在二重极限, 又存在两个二次极限, 则三个极限值相等.

注 当然只要存在二重极限, 又存在两个第一次极限 (书上称为里层极限), 就保证两个累次极限存在且三个极限值相等. 例题 6 就是存在二重极限但不保证两

个累次极限存在从例子. 当然上述定理只是一个充分条件. 例题 7 表明不存在二重极限时仍然可以存在两个累次极限且相等. 例题 8 表明存在两个累次极限但不相等也是可能的. 从上述定理的逆否命题可知, 例题 8 中的函数 f 在 $(0, 0)$ 不存在二重极限.

此外, 如前面所说, 上述定理中的条件可以减弱, 这就是将二重极限的定义中 f 在点 (x_0, y_0) 的一个去心邻域上有定义的前提条件降低为只在 $\{(x, y) \in O(x_0, y_0) - \{(x_0, y_0)\} \mid x \neq x_0, y \neq y_0\}$ 上有定义, 其他不变. (教科书中称为去十字二重极限, 这也不错, 就是不知道 $n > 1$ 时有什么其他名称.)

§17.2 Euclid 空间上的映射

设 D 是 \mathbb{R}^n 的一个子集, 定义

$$f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m,$$

其中 m 可以与 n 相同, 也可以不同, 这就是从 D 到 \mathbb{R}^m 的一个映射.

由于 $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$, 因此可以写为 $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m)$, 其中每一个 y_i ($i = 1, \dots, m$) 是一个 n 元函数, 即可写为

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m = f_m(x_1, \dots, x_n).$$

例题 0.1 $n = 1, m = 3$ 的例子是三维向量值函数. 可以写为

$$\mathbf{c}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

$$t \mapsto (x, y, z),$$

其中 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 是 $[a, b]$ 上的三个函数. 若它们都是连续函数, 则称它们在 \mathbb{R}^3 中的图像为三维连续曲线.

例题 0.2 $n > 1, m = 1$, 这就是前面的 n 元函数.

例题 0.3 设 D 是 \mathbb{R}^3 中的一个区域, $D = \{(r, \varphi, \theta) \mid r > 0, 0 < \theta < 2\pi, 0 < \varphi < \pi\}$, 又设

$$T: D \rightarrow \mathbb{R}^3,$$

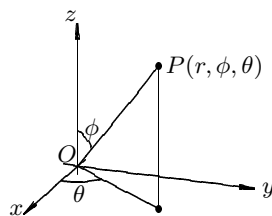
$$(r, \varphi, \theta) \mapsto (x, y, z),$$

其中 x, y, z 都是定义域 D 上的 r, φ, θ 的三元函数. 采用下列表达式时 T 就是空间球面坐标变换:

$$x = r \sin \varphi \cos \theta,$$

$$y = r \sin \varphi \sin \theta,$$

$$z = r \cos \varphi.$$



而且在定义域 D 上是一一映射.

注 这里可以先讲一下极坐标变换, 即从映射观点来看这个变换. 这时映射的定义域取为 $D = \{(r, \theta) \mid r > 0, 0 < \theta < 2\pi\}$, 映射的对应关系是

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

这是多元微积分中常用的变换. 从映射观点来看, 它实现了从 D 到 xOy 平面上下列区域的一一映射:

$$\{(x, y) \mid y = 0 \text{ 时 } x < 0\}.$$

如下图所示, 极坐标变换是 $rO\theta$ 平面上区域 D 到 xOy 平面的一个映射. 在 D 中 r 等于常数的垂直细直线映射到 xOy 平面上的同心圆, 而 D 中 θ 等于常数的水平虚线映射到 xOy 平面上从原点出发的射线.

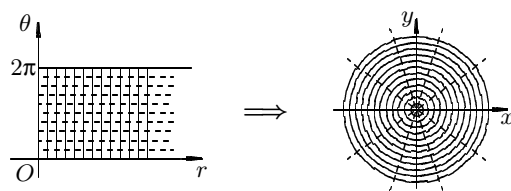


图 1: 从映射观点看极坐标变换

§17.3 连续映射

一. 连续映射的概念

首先要讲极限. 对于从 $D \subset \mathbb{R}^n$ 到 \mathbb{R}^m 中的映射 f , 设 f 在点 a 的某一个去心邻域上有定义. 则容易讲前面一元函数和多元函数的极限概念推广过来, 这就是

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A \iff \forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall x \in O_\delta(a) - \{a\} : f(x) \in O_\varepsilon(A),$$

其中 x, a 是 n 维向量, 点 a 可以属于也可以不属于 f 的定义域 D . $O_\delta(a) - \{a\}$ 是 n 维去心邻域, 即 n 维去心开球, f, A 是 m 维向量, $O_\varepsilon(A)$ 是 m 维邻域, 即 m 维开球. 若用距离 $|\cdot|$ 记号, 则有两种距离, 即 n 维 Euclid 距离和 m 维 Euclid 距离.

$$x \in O_\delta(a) - \{a\} \iff 0 < |x - a| < \delta,$$

$$f(x) \in O_\varepsilon(A) \iff |f(x) - A| < \varepsilon.$$

在此基础上, 设 f 在点 a 的一个邻域上有定义, 即点 a 是定义域 D 的内点. f 在点 a 连续就定义为

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

对于 D 的边界点, 则也可以定义函数极限和连续性. 这时只要讲上面的去心邻域 $O_\delta(a) - \{a\}$ 或者邻域 $O_\delta(a)$ 用它们与 D 的交代替即可.

利用第十六章中点列收敛等价于每个坐标收敛, 于是就有以下性质:

性质 设函数 $f = (f_1, \dots, f_m)$, 定义域是 $D \subset \mathbb{R}^n$, $a \in D$, 则 f 在点 a 连续的充要条件是每一个 f_i ($i = 1, \dots, m$) 在点 a 连续.

若 f 在定义域 D 上处处连续, 则称 f 为 D 上的连续映射. 从上述性质可知, 这等价于它的 m 个分量都是 D 上的 n 元连续函数.

三. 有界闭集上连续映射的性质

这里考虑定义域比有界闭区域更广一些连续映射.

这方面的主要结果如下. 它是一元函数中相应定理的推广.

定理 0.1 有界闭集上的连续映射的值域一定是有界闭集.

(我们也称有界闭集为紧集. 于是定理就是说, 连续映射将紧集映到紧集.)

证 设 K 是 \mathbb{R}^n 中的有界闭集, $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为连续映射, 要证明 $f(K)$ 为 \mathbb{R}^m 中的有界闭集.

先证明值域 $f(K)$ 为闭集. 设 y 是值域的聚点, 则存在值域 $f(K)$ 中的点列 $\{y_k\}$ 收敛于 y .

对每个 k 有 $y_k = f(x_k)$, 利用 $\{x_k\}$ 为有界点列, 从凝聚定理知道, 它存在收敛子列 $\{x_{k_i}\}$. 记 $a = \lim_{i \rightarrow \infty} x_{k_i}$, 则 a 为 K 的聚点. 由于 K 为闭集, 因此 $a \in K$.

利用 f 在点 a 连续, 又利用 $\{y_k\}$ 的子列 $\{y_{k_i}\}$ 也收敛于 y , 因此就有

$$y = \lim_{i \rightarrow \infty} y_{k_i} = \lim_{i \rightarrow \infty} f(x_{k_i}) = f(a),$$

这就证明了 $y \in f(K)$.

然后证明 $f(K)$ 有界. 用反证法, 设有 $f(K)$ 中的一个无界点列 $\{y_k\}$, 即一方面对每个 k 有 $y_k = f(x_k)$, $x_k \in K$; 另一方面有 $\lim_{k \rightarrow \infty} |y_k| = +\infty$.

与前面一样利用 K 为有界闭集, 在 $\{x_k\}$ 中存在收敛子列, 且其极限属于 K . 不妨设已经有 $\lim_{k \rightarrow \infty} x_k = a \in K$, 则由于 f 在点 a 连续, 因此局部有界. 这导致 k 充分大时, y_k 有界, 引出矛盾. \square

注 这里两次使用凝聚定理. 由于在前面聚点的定义后已经证明它等价于点列收敛于它, 因此用凝聚定理非常方便. 若用有限覆盖定理则比较难说一点. 虽然从本质上说, 有界闭集就是紧集, 而紧集的一般性定义应当是其有限覆盖性质.

由此就有关于多元函数的推论. 它当然是一元连续函数的性质的推广.

推论 1 有界闭集上的多元函数的值域是 \mathbb{R} 中的有界闭集.

利用连续函数的零点存在定理, 可以得到一元连续函数的介值定理的推广.

定理 0.2 连通集上的多元连续函数的值域是区间.

由此可以得到上一节中的定理 3.

下面的推论 2 与书中 p.25 的推论 2 不同.

推论 2 有界闭区域上的多元连续函数的值域为有界闭区间.

证 根据闭区域的定义, 一定可以写为 $\overline{D} = D \cup \partial D$, 其中 D 是闭区域的所有内点组成的开集. 于是边界点集中每个点是 D 的聚点.

先看 $f(D)$. 从上述定理 2 知道 $f(D)$ 是区间. 又由定理 1 知道 $f(\overline{D})$ 有界, 因此 $f(D)$ 是有界区间. 不论它是否闭, 它的闭包 $\overline{f(D)}$ 一定是有界闭区间.

下面只要证明 $f(\overline{D}) = \overline{f(D)}$ 就够了. 分成两点来证明.

(i) $f(\overline{D}) \supset \overline{f(D)}$.

用反证法. 若 (i) 不成立, 则存在点 $x_0 \in \overline{f(D)}$, 但 $x_0 \notin f(\overline{D})$. 于是 $x_0 \in f(\overline{D})^c$. 由定理 1 知 $f(\overline{D})$ 闭, 因此其补集 $f(\overline{D})^c$ 开, 从而存在 x_0 的一个邻域 $O(x_0) \subset f(\overline{D})^c$. 这表明邻域 $O(x_0) \cap f(\overline{D}) = \emptyset$, 于是也有 $O(x_0) \cap f(D) = \emptyset$. 然而这与 $x_0 \in \overline{f(D)}$ 矛盾. 因此 (i) 成立.

(ii) $f(\overline{D}) \subset \overline{f(D)}$ ^①.

① 从《数学分析习题课讲义》下册命题 18.2.1 可见, 当 f 连续时, 这个包含关系无条件成立. 但若 D 不是有界闭集, 则等号未必成立. 例如一元函数情况中 $f(x) = \arctan x$, $D = [0, +\infty)$, 则 $\overline{D} = D$, $f(\overline{D}) = [0, 1) \subsetneq \overline{f(D)} = [0, 1]$.

由于 $f(\overline{D}) = f(D) \cup f(\partial D)$, 因此只要证明 $f(\partial D) \subset \overline{f(D)}$.

设 $x_0 \in \partial D$, 则因 D 开, 因此 x_0 不属于 D , 但是 D 的聚点. 于是有 $x_n \rightarrow x_0$, $x_n \in D \forall n$. 因 f 在点 x_0 连续, 因此也有 $f(x_n) \rightarrow f(x_0)$. 于是或者已有 $f(x_0) \in f(D)$, 或者 $f(x_0)$ 是 $f(D)$ 的聚点, 则属于 $f(D)$ 的闭包. 因此总是有 $f(x_0) \in \overline{f(D)}$. 即 (ii) 成立. \square

注 1 以上证明的 $f(\overline{D}) = \overline{f(D)}$ 不仅对于有界闭区域 D 上的多元连续函数 f 成立, 从证明可见,

注 书上 p.25 中推论 2 是连通有界闭集上的连续函数的值域为有界闭区间. 这本身没有错. 由于闭区域不一定连通, 因此不能由这个推论 2 得到前面 p.20 的定理 2. 于是书中没有给出这个定理的证明.

四. 一致连续

这里的定义和关于 Cantor 定理的证明与一元函数完全相同 (见上册 p.108), 可以不讲.

下面对于 Cantor 定理给一个新的证明. (时间不够未讲.)

证 设 $K \subset \mathbb{R}^n$ 为有界闭集, $f: K \rightarrow \mathbb{R}^m$ 为连续映射, 要证明 f 在 K 上一致连续.

构造 K 与自身的直积

$$K \times K \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}.$$

则 $K \times K$ 是 \mathbb{R}^{2n} 中的有界闭集. (p.13 之习题 2(2) 证明闭集与闭集之直积为闭集. 有界性是明显的.) 这里可以参见图 1, 它是一个示意图, 可以想象为 $n = 1$, $K \times K$ 就是 $[a, b; a, b]$.

对于给定的 $\varepsilon > 0$, 定义 $K \times K$ 的子集

$$A = \{(x, y) \in K \times K \mid |f(x) - f(y)| \geq \varepsilon\},$$

则从 f 连续可以推出 A 为闭集.

同时考虑 $K \times K$ 中的另一个子集

$$B = \{(x, y) \in K \times K \mid x = y\}.$$

它也是有界闭集.

由于 $\varepsilon > 0$, 可见 $A \cap B = \emptyset$. 令 $d(A, B)$ 为集 A 和 B 之间的距离, 则有 $d(A, B) > 0$. (这里利用教科书 p.13 的习题 3,4.)

取 $\delta = d(A, B)$. 下面我们证明当 $x', x'' \in K$, 且 $|x' - x''| < \delta$ 时, 就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. (这里 $|x' - x''|$ 是 \mathbb{R}^n 中的距离, $|f(x') - f(x'')|$ 是 \mathbb{R}^m 中的距离.)

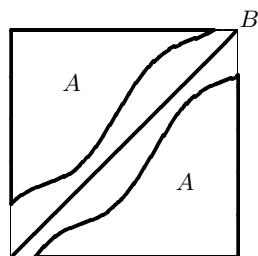


图 2: Cantor 定理的新证明示意图

为此只要证明点 $(x', x'') \notin A$.

实际上计算点 (x', x'') 到集 B 的距离:

$$\begin{aligned} d((x', x''), B) &= \inf_{(x, y) \in B} |(x', x'') - (x, y)| = \inf_{x \in K} |(x', x'') - (x, x)| \\ &\leq |(x', x'') - (x', x')| = |x' - x''| < \delta = d(A, B), \end{aligned}$$

因此就保证了 $(x', x'') \notin A$. 于是就有 $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. \square

第十八章 偏导数

§18.1 偏导数和全微分

一. 偏导数的概念

从定义于区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数 $z = f(x, y)$ 开始, 固定 y , 若 z 对 x 可导, 则就将这个导数称为 z 关于 x 的偏导数, 记为 $\frac{\partial z}{\partial x}$, 或 z_x . 它反映了固定第二个自变量 y 时, 因变量 z 关于第一个自变量 x 的变化率. 同样可以固定 x , 定义 z 关于 y 的偏导数, 记为 $\frac{\partial z}{\partial y}$, 或 z_y .

详细一点说, 设 f 在区域 D 上定义, 点 $(x_0, y_0) \in D$, 则可以定义 f 在该点对 x 的偏导数为下列偏差商的极限

$$\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} = z_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x},$$

如果该极限存在的话. 同样可以定义 $\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y} = z_y(x_0, y_0)$.

这里明显可以看到与导数相同之处, 偏导数的定义也是逐点进行的, 因此是函数的局部性质的反映. 在 (x_0, y_0) 为内点的时候, 只要增量 Δx 或者 Δy 充分小, 则极限定义中的偏差商就有意义.

以上定义当然可以推广到在区域 D 上有定义的一般多元函数 $f(x_1, \dots, x_n)$, 定义它在点 (x_1^0, \dots, x_n^0) 处的 n 个偏导数, 记为

$$\frac{\partial f(x_1^0, \dots, x_n^0)}{\partial x_i}, \quad i = 1, \dots, n.$$

也可以记为 $f_{x_i}(x_1^0, \dots, x_n^0)$, $i = 1, \dots, n$.

例题 0.4 设 $z = x \cos(xy)$, 则就有

$$z_x = \cos(xy) - xy \sin(xy), \quad z_y = -x^2 \sin(xy). \quad \square$$

例题 0.5 设 $u = x^2 + y^2 + yze^{x-z}$, 则有

$$u_x = 2x + yze^{x-z}, \quad u_y = 2y + ze^{x-z}, \quad u_z = ye^{x-z} - yze^{x-z}. \quad \square$$

补充例题.

例题 0.6 气体状态方程 $p = \frac{RT}{V}$, 其中 p 为压强, R 为常数, T 为绝对温度, V 为体积. 于是在 T 固定时, p 与 V 成反比关系. 即物理学上的等温过程. 这时

$$\frac{\partial p}{\partial V} = -\frac{RT}{V^2}.$$

若固定 V , 则称为等容过程, 压强与温度成正比,

$$\frac{\partial p}{\partial T} = \frac{R}{V}.$$

这两个偏导数分别反映了两种不同的物理过程中压强相对与体积与温度的变化率

二. 偏导数和连续性

如同导数情况一样, 一个基本问题是多元函数存在偏导数时是否连续. 具体来说, 设 f 在区域 D 的某点 (x_0, y_0) 处存在两个偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$, 问: f 在点 (x_0, y_0) 是否连续?

有点出人意料的是, 对上述问题的答案是否定的.

例题 0.7 设函数 $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 从第十七章的例题 3

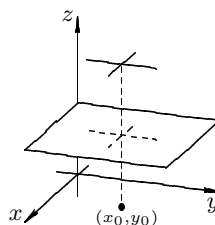
知道 f 在点 $(0, 0)$ 处没有极限, 因此当然不连续. 但从 $f(x, 0) \equiv 0$, $f(0, y) \equiv 0$, 可见 f 在 $(0, 0)$ 的两个偏导数都存在, 且都等于 0. \square

注 几何上如何理解上述事实可留作思考题.

例题 0.8 设 $f(x, y) = \begin{cases} 2, & (x - x_0)(y - y_0) = 0, \\ 1, & \text{其他}, \end{cases}$

则当 $x \equiv x_0$ 或 $y \equiv y_0$ 时 $f \equiv 2$, 因此在 (x_0, y_0) 的两个偏导数都等于 0. 但 f 显然在该点不连续.

从右图所示可见, 在点 (x_0, y_0) 的两个偏导数只能反映函数在 x, y 两个方向上的变化率. \square

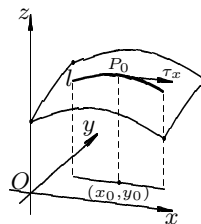


注 上述例子似乎说明偏导数的引入不是很成功, 因为它只描述了函数 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的两个特殊方向的变化率, 而对于 f 在该点邻近的其他特性描述无用. 下面会看到, 在略微加强条件之后就可以改变这种情况.

三. 偏导数的几何意义

对于一般的 $z = f(x, y)$, 如右图所示, 看成为在三维空间的一张曲面. 固定 $y = y_0$, 则就得到一个变元 x 的函数 $z = f(x, y_0)$. 从几何上就是上述曲面上的一条曲线. 它可以用三维空间的参数方程表出:

$$l: \begin{cases} x = x, \\ y = y_0, \\ z = f(x, y_0). \end{cases}$$

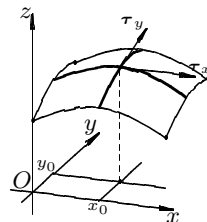


这时该曲线在点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ ($z_0 = f(x_0, y_0)$) 的切向量就是

$$\tau_x = (1, 0, f_x(x_0, y_0)).$$

同样可以给出 $f_y(x_0, y_0)$ 的几何意义. 在右图中在曲面 $z = f(x, y)$ 上作出了经过点 (x_0, y_0, z_0) 的两条曲线, 分别为 $x = x_0$ 和 $y = y_0$ 所决定, 并分别作出了曲面上的这两条曲线在该点的曲线 τ_x 和 τ_y . 即

$$\tau_x = (1, 0, f_x(x_0, y_0)), \quad \tau_y = (0, 1, f_y(x_0, y_0)).$$



第 T5 次讲稿 (第三学期第 5 次)

第 T5 次讲稿, 用于 2008 年 9 月 12 日, 星期五, 2 节课.

内容: 第十八章上次已经讲了一节课, 继续讲 §18.1.

五. 高阶偏导数

若 $f(x, y)$ 的偏导数 $f_x(x, y)$ 在某一个区域 D 中处处存在, 则它就是一个新的二元函数, 即偏导函数. 当然 $f_y(x, y)$ 也可能如此. 于是又可以考虑它们的偏导数. 这里与一元情况相比更为复杂. 我们采用下列记号.

用 $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ 或者 f_{xx} 表示 $f_x(x, y)$ 关于 x 的偏导数, 称为 f 关于 x 的二阶偏导数.

同样用 $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ 或者 f_{yy} 表示 $f_y(x, y)$ 关于 y 的偏导数, 称为 f 关于 y 的二阶偏导数.

有点复杂的问题是混合二阶偏导数. (称关于不同自变量的高阶偏导数为混合偏导数.) 用 $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ 或者 f_{xy} 表示 $f_x(x, y)$ 关于 y 的偏导数, 称为 f 的先 x 后 y 的二阶偏导数. 这就是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right), \quad f_{xy} = (f_x)_y.$$

注 这里的记号与先后的规定在各种教科书中不完全一致. 从上面的写法可以认为这里的规定还是比较合理的. 由于后面会讲到的理由, 混合高阶偏导数在连续条件下与对自变量求偏导的顺序无关, 因此这不是一个重要问题.

此外, 加 “'” 的做法也很普遍, 即将 f_x 写为 f'_x , 将 f_{xx} 写为 f''_{xx} 或 f''_x , 将 f_{xy} 写为 f''_{xy} 等等.

例题 0.1 设 $f = x^3y + xy^3$, 求出所有一阶和二阶偏导数.

解 先求出

$$f_x = 3x^2y + y^3, \quad f_y = x^3 + 3xy^2,$$

然后就可以求出

$$f_{xx} = 6xy, \quad f_{xy} = 3x^2 + 3y^2, \quad f_{yx} = 3x^2 + 3y^2, \quad f_{yy} = 6xy. \quad \square$$

注 可以注意到 $f_{xy} = f_{yx}$. 以后会知道这是经常发生的现象.

六. 关于混合偏导数的求导顺序

首先举出一个例子, 说明混合偏导数中顺序不同时结果可能不同.

例题 0.2 设给定函数 $f(x, y) = \begin{cases} xy \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 求在点

$(0, 0)$ 的两个二阶混合偏导数.

解 从偏导数的定义可以看出, 为求 $f_{xy}(0, 0)$, 并不要求出作为全平面上有定义的 $f_x(x, y)$, 而只要先求出 $f_x(0, y)$ 就够了:

$$\begin{aligned} f_x(0, y) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(\Delta x, y) - f(0, y)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} y \cdot \frac{\Delta x^2 - y^2}{\Delta x^2 + y^2} \\ &= \begin{cases} -y, & y \neq 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases} = -y. \end{aligned}$$

于是就有

$$f_{xy}(0, 0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(0, \Delta y) - f_x(0, 0)}{\Delta y} = -1.$$

当然从 $f_x(0, y) = -y$ 已经可以知道 $f_{xy}(0, y) = -1$ 对 $y \neq 0$ 都成立.

从对称性可以看到一定有 $f_y(x, 0) = x$, 从而得到 $f_{yx}(0, 0) = 1$. 这表明在点 $(0, 0)$ 的两个混合二阶偏导数 $f_{xy}(0, 0)$ 和 $f_{yx}(0, 0)$ 不相等. \square

下面给出保证混合偏导数与求偏导顺序无关的充分条件.

定理 0.1 设二元函数 $f(x, y)$ 的两个混合偏导数 $f_{xy}(x, y)$ 和 $f_{yx}(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 处连续, 则 $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$.

分析 (用分析方式写, 教科书上那样写过分“突然”了.)

首先注意条件是什么. 由于 f_{xy} 和 f_{yx} 作为两个二元函数在点 (x_0, y_0) 连续, 因此它们都在点 (x_0, y_0) 的某一个邻域上有定义. 既然如此, 则两个一阶偏导数当然也是如此, 即在点 (x_0, y_0) 的某一个邻域中有定义.

从 $f_{xy}(x_0, y_0)$ 的定义开始. 即有

$$\begin{aligned} f_{xy}(x_0, y_0) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) \Big|_{(x_0, y_0)} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f_x(x_0, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)}{\Delta y} \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta y} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y)}{\Delta x} \right. \\ &\quad \left. - \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x} \right] \\ &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta}{\Delta x \Delta y} \right), \end{aligned} \quad (1)$$

其中记号 Δ 如下为 4 项的代数和:

$$\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0).$$

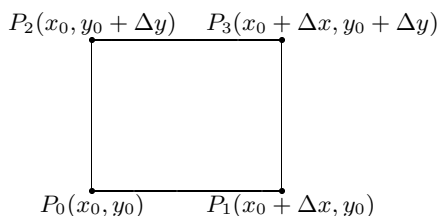
完全同样可以得到

$$f_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta}{\Delta x \Delta y} \right). \quad (2)$$

于是, 问题成为作为 $\Delta x, \Delta y$ 的二元函数 $\frac{\Delta}{\Delta x \Delta y}$ 的两个累次极限是否相等的问题. (存在性已经没有问题了.)

注意上述二元函数的分子是一个矩形的 4 个顶点上的 f 的函数值的代数和. 如右图所示是 $\Delta x > 0, \Delta y > 0$ 时的一个矩形, 并将其顶点标志为 P_0, P_1, P_2, P_3 . 于是有

$\Delta = f(P_0) - f(P_1) - f(P_2) + f(P_3)$.
(这个代数和在偏微分方程中是有用的.)



下面的方法就是反复用 Lagrange 微分中值定理. 例如对于 $f(P_0) - f(P_1)$ 和 $f(P_2) - f(P_3)$ 就可以分别关于 x 微分中值定理, 然后再对于 y 用微分中值定理. 但这里还有困难. 为此需要用一点技巧. 这写在下面的证明中.

证 设 $\Delta x \neq 0, \Delta y \neq 0$, 令

$$\Delta = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0),$$

则如 (1), (2) 所示, 有

$$f_{xy}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta}{\Delta x \Delta y} \right), \quad f_{yx}(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left(\frac{\Delta}{\Delta x \Delta y} \right).$$

以下只要证明 $\frac{\Delta}{\Delta x \Delta y}$ 在 $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$ 时的二重极限存在. 为此引入辅助函数

$$\varphi(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0),$$

则有

$$\Delta = \varphi(x_0 + \Delta x) - \varphi(x_0).$$

用 Lagrange 微分中值定理, 就有

$$\begin{aligned} \Delta &= \varphi'_x(x_0 + \theta_1 \Delta x) \Delta x \quad (0 < \theta_1 < 1) \\ &= [f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0)] \Delta x. \end{aligned}$$

然后再一次用微分中值定理, 就得到

$$\Delta = f_{xy}(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta x \Delta y, \quad 0 < \theta_1, \theta_2 < 1.$$

这样在 $\Delta x \Delta y \neq 0$ 时就得到

$$\lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{\Delta}{\Delta x \Delta y} = f_{xy}(x_0, y_0),$$

然后应用 §17.1 定理 4 即可. \square

注 回顾证明过程, 可见定理条件中两个混合偏导函数 f_{xy}, f_{yx} 于点 (x_0, y_0) 为连续的条件只用了一半. 此外, 所涉及的二重极限的存在是在去十字的邻域中讨论的, 这在前面都已经解释过. 这个定理可以推广, 对一般多元函数的混合偏导数, 只要在所关心的点处连续, 则混合偏导数就与求偏导顺序无关. 这为计算高阶偏导数带来很大的方便.

八. 全微分的概念

多元函数的全微分概念是一元函数的微分概念的自然推广. 回顾一元函数的微分概念, 虽然它的引进与导数概念的引进很不一样, 但由于可导等价于可微, 因此微分在一元微分学中微分概念所起的作用并不突出. 与之不同, 多元函数的全微分在多元函数微分学中的地位要比在一元函数微分学中的微分重要得多.

设有二元函数

$$f: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R},$$

$$(x, y) \mapsto z = f(x, y).$$

其中 D 为开集. 对于点 $(x_0, y_0) \in D$, 考虑增量

$$\Delta z = \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0).$$

为简明起见, 记 $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, 即点 (x_0, y_0) 和 $(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)$ 之间的距离.

定义 0.1 若存在常数 A, B , 使得成立

$$\Delta z = A\Delta x + B\Delta y + o(r) \quad (r \rightarrow 0),$$

则称 f 于点 (x_0, y_0) 可微, 且称 $A\Delta x + B\Delta y$ 为 f 在点 (x_0, y_0) 的全微分, 并记为

$$dz = A dx + B dy,$$

其中 $dx = \Delta x, dy = \Delta y$.

从定义可见, 多元函数全微分的定义与过去的一元函数微分的定义完全相同, 即函数在指定点邻近是否可以用线性函数逼近的问题. 在可微时, 微分 dz 就是增量 Δx 和 Δy 的线性函数. 当 r 充分小时, 有 $\Delta z \approx dz$.

下面的问题是: 在什么条件下 f 在点 (x_0, y_0) 可微? 在可微时系数 A, B 等于什么?

先解决比较容易的第二个问题.

性质 1 若 f 在点 (x_0, y_0) 可微, 则定义中的系数为

$$A = f_x(x_0, y_0), \quad B = f_y(x_0, y_0).$$

证 根据定义有全微分定义中的 A, B , 使得

$$\Delta z = \Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + B\Delta y + o(r) \quad (r \rightarrow 0),$$

其中 $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$. 于是当 $\Delta y = 0$ 时, 就有

$$\Delta f = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0) = A\Delta x + o(\Delta x) \quad (\Delta x \rightarrow 0),$$

这就导致

$$f_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = A.$$

完全同样可以证明 $f_y(x_0, y_0) = B$. \square

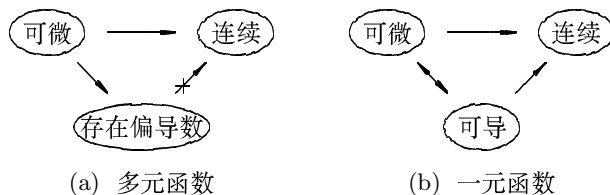
又可以从全微分的定义推出它的下一个性质.

性质 2 若 f 在点 (x_0, y_0) 可微, 则 f 在该点连续.

证 从 $\Delta f = A\Delta x + B\Delta y + o(r)$ ($r \rightarrow 0$) 可见当 $r \rightarrow 0$ 时就有 $\Delta f \rightarrow 0$. 从 $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$ 可知这就是

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0). \quad \square$$

回顾前面二元函数在某点存在两个偏导数但函数却在该点不连续的例子, 可见多元函数的可微要比存在偏导数强. 在下面的图 (a) 中作出了可微、存在偏导数和连续之间的关系, 为了作对比, 在图 (b) 中作出了一元函数时可微、可导和连续之间的关系.



这里重要的是只要将存在偏导数的条件适当加强, 就可以推出可微.

定理 0.2 设二元函数 f 的两个一阶偏导数 f_x, f_y 在点 (x_0, y_0) 连续, 则 f 在点 (x_0, y_0) 可微.

证 这里的主要工具是 Lagrange 微分中值定理. 如下估计 Δf :

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) \\ &= f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) \Delta x + f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) \Delta y \quad (0 < \theta_1, \theta_2 < 1) \\ &= f_x(x_0, y_0) \Delta x + f_y(x_0, y_0) \Delta y + \varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y, \end{aligned}$$

其中 $\varepsilon_1 = f_x(x_0 + \theta_1 \Delta x, y_0 + \Delta y) - f_x(x_0, y_0)$, $\varepsilon_2 = f_y(x_0, y_0 + \theta_2 \Delta y) - f_y(x_0, y_0)$. 由于 f_x, f_y 在点 (x_0, y_0) 连续, 因此当 $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$ 时 ε_1 和 ε_2 都收敛于 0. 这样就可以用 Cauchy 不等式得到

$$|\varepsilon_1 \Delta x + \varepsilon_2 \Delta y| \leq \sqrt{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2} \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2} = o(1)r = o(r) \quad (r \rightarrow 0),$$

即 f 在点 (x_0, y_0) 可微. \square

注 1 定理可以推广到一般的多元函数. 此外还可以将条件减弱一点, 即在上述定理中只要有一个偏导数在点 (x_0, y_0) 连续, 另一个偏导数在该点存在也可以推出相同的结论.

注 2 今后经常对多元函数除了加以可微条件之外, 有时也加以连续可微条件, 这就是说存在所有的连续偏导数, 从而保证可微.

与一元函数情况类似, 对于自变量的增量经常写为自变量的微分, 这样全微分就可以写为

$$df = f_x(x_0, y_0)dx + f_y(x_0, y_0)dy.$$

又不只是考虑某个点的全微分时就写为 $df = f_x(x, y)dx + f_y(x, y)dy$, 这时全微分成为 x, y, dx, dy 的 4 元函数.

高阶全微分

设 $z = f(x, y)$. 称前面定义的全微分 $dz (= df)$ 为一阶全微分. 若将 dz 中的 d 看成为作用于函数 f 上的算子^①, 它的作用就是将 x, y 的二元函数分别对 x, y 求偏导并乘以 dx 和 dy 后求和. 在约定 dx, dy 相同的条件下就可以定义二阶全微分为

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \\ &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2\partial x}dy\right)dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \end{aligned}$$

又若将求偏导运算看成算子, 记为 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}$, 则可以将上述二阶全微分记为

$$d^2z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z,$$

其中约定

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

对于更高阶的微分都可以类似地给出定义和计算, 这时用上述算子记号进行计算是很方便的:

$$d^n z = d(d^{n-1}z) = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z.$$

① 在数学中经常将从函数到函数的映射称为算子. 例如求导数运算就可以看成从 $f(x)$ 到 $f'(x)$ 的一个算子.

第 T6 次讲稿 (第三学期第 6 次)

第 T6 次讲稿, 用于 2008 年 9 月 17 日, 星期三, 3 节课.

内容: 第十八章, 先讲完 §18.1 的最后一点: 高阶微分. 主要是讲 §18.2, 链式法则. 这里开始出现了计算方面的困难.

高阶全微分

设 $z = f(x, y)$. 称前面定义的全微分 $dz (= df)$ 为一阶全微分. 若将 dz 中的 d 看成为作用于函数 f 上的算子^①, 它的作用就是将 x, y 的二元函数分别对 x, y 求偏导并乘以 dx 和 dy 后求和. 在约定 dx, dy 相同的条件下就可以定义二阶全微分为

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \\ &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)dx + d\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2\partial x}dy\right)dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \end{aligned}$$

又若将求偏导运算看成算子, 记为 $\frac{\partial}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial}{\partial y}$, 则可以将上述二阶全微分记为

$$d^2z = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 z,$$

其中约定

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}, \quad \left(\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 = \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

对于更高阶的微分都可以类似地给出定义和计算, 这时用上述算子记号进行计算是很方便的:

$$d^n z = d(d^{n-1}z) = \left(dx\frac{\partial}{\partial x} + dy\frac{\partial}{\partial y}\right)^n z.$$

① 在数学中经常将从函数到函数的映射称为算子. 例如求导数运算就可以看成从 $f(x)$ 到 $f'(x)$ 的一个算子. 这里将微分和求偏导数都从算子角度来理解是必要的. 此外, 也说明按照 Leibniz 传统形成的记号 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 等比按照 Lagrange 传统形成的记号 z_x 有优越性.

§18.2 链式法则

一. 复合函数求导的链式法则

如一元函数微分学中的求导运算一样, 在多元函数微分学中链式法则是重要的计算工具.

看一个简单情况. 设 $z = f(x, y)$, $x = x(s)$, $y = y(s)$, 则就可以构成复合函数 $z = f(x(s), y(s))$. 对此有下列链式法则.

定理 0.1 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, $x_0 = x(s_0)$, $y_0 = y(s_0)$, 且 $x(s), y(s)$ 在点 s_0 均可导, 则当 $s = s_0$ 时, 复合函数 $z = f(x(s), y(s))$ 在点 s_0 可导, 且有

$$z_s|_{s=s_0} = \frac{d}{ds} f(x(s), y(s))|_{s=s_0} = f_x(x_0, y_0)x'(s_0) + f_y(x_0, y_0)y'(s_0).$$

证 直接计算上式左边的导数, 即 $z_s|_{s=s_0}$. 写出差商

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = \frac{1}{\Delta s} [f(x(s_0 + \Delta s), y(s_0 + \Delta s)) - f(x_0, y_0)],$$

利用 f 在点 (x_0, y_0) 可微, 就有

$$f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y,$$

其中 $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$, $o(r)$ 是对于 $r \rightarrow 0$ 而言的. 利用

$$\Delta x = x(s_0 + \Delta s) - x(s_0), \quad \Delta y = y(s_0 + \Delta s) - y(s_0)$$

就可以将差商写为

$$\frac{\Delta f}{\Delta s} = f_x(x_0, y_0) \frac{x(s_0 + \Delta s) - x(s_0)}{\Delta s} + f_y(x_0, y_0) \frac{y(s_0 + \Delta s) - y(s_0)}{\Delta s} + \frac{o(r)}{\Delta s}.$$

利用 $x(s), y(s)$ 在 s_0 可导, 就有

$$\frac{o(r)}{\Delta s} = \frac{r}{\Delta s} o(1) = \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{\Delta s}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{\Delta s}\right)^2} o(1) = o(1) \quad (\Delta s \rightarrow 0),$$

这里利用了当 $\Delta s \rightarrow 0$ 时也有 $r \rightarrow 0$, 因此 $o(1)$ ($r \rightarrow 0$) 也是 $o(1)$ ($\Delta s \rightarrow 0$).

最后令 $\Delta s \rightarrow 0$ 就得到

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta s} = f_x(x_0, y_0)x'(s_0) + f_y(x_0, y_0)y'(s_0). \quad \square$$

注 上面只是链式法则最简单的情况. 可以推广如下. (教科书上要到第二十章 p.99 才有此内容, 只是更为一般一些.)

为简单起见, 均用连续可微条件, 即所有偏导数存在且连续, 这同时保证了可微性成立.

设有多元函数

$$f: \text{区域 } D \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R},$$

$$\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_m) \mapsto z = f(\mathbf{y}).$$

又有映射

$$\begin{aligned} g: \text{区域 } D_1 \subset \mathbb{R}^n &\rightarrow \mathbb{R}^m, \\ \mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) &\mapsto \mathbf{y} = g(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

也可写为 $y_i = g_i(x_1, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, m$. 设映射 g 在点 $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ 处连续可微, 且 $g(\mathbf{a}) \in D$, 则在点 \mathbf{a} 的一个邻域内存在复合映射 $F = f \circ g$, 它将该邻域映入 \mathbb{R} 中. 可以写为

$$z = F(x_1, \dots, x_n) = f(g_1(x_1, \dots, x_n), \dots, g_m(x_1, \dots, x_n)).$$

若又假设 f 在点 $g(\mathbf{a})$ 处连续可微, 则 F 的偏导数就有下列链式法则:

$$F_{x_i}|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \frac{\partial z}{\partial x_i}|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \sum_{j=1}^m \frac{\partial f}{\partial y_j}|_{\mathbf{y}=g(\mathbf{a})} \frac{\partial g_j}{\partial x_i}|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}, \quad i = 1, \dots, n,$$

这里的计算用矩阵向量乘法更为清楚:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_1}{\partial x_n} & \dots & \frac{\partial g_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{a}} \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial y_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial y_m} \end{pmatrix}_{\mathbf{y}=g(\mathbf{a})},$$

其左边是 $n \times 1$ 阶阵 (即 n 维列向量), 右边是 $n \times m$ 阶阵乘以 $m \times 1$ 阶阵 (即 m 维列向量).

上面的链式法则是对于复合之后为多元函数而言的, 当然还可以考虑更一般的复合映射和相应的链式法则.

在定理 1 中是 $n = 1, m = 2$ 的情况, 即有

$$z_s|_{s=s_0} = \begin{pmatrix} x_s & y_s \end{pmatrix}_{s=s_0} \begin{pmatrix} f_x \\ f_y \end{pmatrix}_{x=x_0, y=y_0}.$$

又如 $u = f(x, y, z)$, 其中 $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, $z = z(s, t)$, 则复合函数为 $u = f(x(s, t), y(s, t), z(s, t))$. 其链式法则为

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial s} &= u_s = u_x x_s + u_y y_s + u_z z_s, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= u_t = u_x x_t + u_y y_t + u_z z_t. \end{aligned}$$

写成矩阵乘法形式就是 $n = 2, m = 3$ 时的上述乘积:

$$\begin{pmatrix} u_s \\ u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_s & y_s & z_s \\ x_t & y_t & z_t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix},$$

或者

$$\begin{pmatrix} u_s & u_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_s & x_t \\ y_s & y_t \\ z_s & z_t \end{pmatrix}.$$

在实际使用链式法则时, 一个常见的问题是容易发生记号上的混淆, 需要注意克服.

例题 0.1 设 $z = z(x, y)$, $y = y(x)$, 满足复合函数链式法则的条件, 求 z 对 x 的导数.

解 若写出 $z_x = z_x + z_y y_x$, 则两边都有 z_x , 是否可以消去?

其实两边的 z_x 根本不同. 左边的 z_x 是一元函数 $z = z(x, y(x))$ 对 x 的导数, 右边的 z_x 是将 z 看成为二元函数时对第一个自变量 x 的偏导数, 然后其中用 $y = y(x)$ 代入.

教科书中提出了 3 个方法 (见 p.40), 建议用其中第一个或第二个方法.

第一个方法, 先加个说明, 即将二元函数 $z(x, y)$ 对第一个自变量的偏导数记为 z_1 , 对第二个自变量的偏导数记为 z_2 , 则就有

$$z_x = z_1 + z_2 y_x.$$

第二个方法, 将函数和因变量用不同记号, 一开始写 $z = f(x, y)$, 然后有

$$z_x = f_x + f_y y_x,$$

这样也比较清楚. 当然也可以同时使用两个方法, 即将题改写为 $z = f(x, y)$, 又将其两个偏导数约定记为 f_1 和 f_2 . \square

例题 0.2 设 $u = f(x, y, t)$, $x = x(s, t)$, $y = y(s, t)$, 满足复合函数链式法则的条件, 则可将 f 的三个偏导数分别记为 f_1, f_2, f_3 , 然后就有

$$u_s = f_1 x_s + f_2 y_s, \quad u_t = f_1 x_t + f_2 y_t + f_3.$$

例题 0.3 设 $z = f(u, v)$ 在 \mathbb{R}^2 上二阶连续可微, 又设 $u = x^2 y$, $v = \frac{y}{x}$, 求 z 关于 x, y 的所有一阶和二阶偏导数.

解 用 f_u, f_v, f_{uu} 等表示二元函数 $f(u, v)$ 的偏导数, 用 z_x, z_y, z_{xx} 等表示二元

函数 $z = f(x^2y, \frac{y}{x})$ 的偏导数, 则就可以直接计算如下:

$$\begin{aligned}
 z_x &= f_u \cdot 2xy + f_v \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right), \\
 z_y &= f_u \cdot x^2 + f_v \cdot \frac{1}{x}, \\
 z_{xx} &= f_{uu} \cdot 4x^2y^2 + f_{uv} \cdot (2xy) \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) + f_u \cdot 2y \\
 &\quad + f_{vu} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot (2xy) + f_{vv} \cdot \frac{y^2}{x^4} + f_v \cdot \frac{2y}{x^3} \\
 &= 4x^2y^2f_{uu} - \frac{4y^2}{x}f_{uv} + \frac{y^2}{x^4}f_{vv} + 2yf_u + \frac{2y}{x^3}f_v, \\
 z_{xy} &= f_{uu} \cdot 2xy \cdot x^2 + f_{uv} \cdot 2xy \cdot \frac{1}{x} + f_u \cdot 2x \\
 &\quad + f_{vu} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot x^2 + f_{vv} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) \cdot \frac{1}{x} + f_v \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) \\
 &= 2x^3yf_{uu} + yf_{uv} - \frac{y}{x^3}f_{vv} + 2xf_u - \frac{1}{x^2}f_v, \\
 z_{yy} &= x^4f_{uu} + 2xf_{uv} + \frac{1}{x^2}f_{vv}. \quad \square
 \end{aligned}$$

例题 0.4 设二元函数 $f(x, y)$ 二阶可微, $z = f(x, e^x)$, 求 $\frac{dz}{dx}$, $\frac{d^2z}{dx^2}$.

解 直接用链式法则计算如下:

$$\begin{aligned}
 \frac{dz}{dx} &= f_x + f_y e^x, \\
 \frac{d^2z}{dx^2} &= f_{xx} + f_{xy}e^x + f_{yx}e^x + f_{yy}e^{2x} + f_y e^x, \\
 &= f_{xx} + 2f_{xy}e^x + f_{yy}e^{2x} + f_y e^x. \quad \square
 \end{aligned}$$

例题 0.5 设 f 是二阶可微的一元函数, $z = f(x - 2y^2)$, 求二元函数 z 的所有二阶偏导数.

解 直接计算如下:

$$\begin{aligned}
 z_x &= f'(x - 2y^2), \\
 z_y &= f'(x - 2y^2)(-4y), \\
 z_{xx} &= f''(x - 2y^2), \\
 z_{xy} &= f''(x - 2y^2)(-4y), \\
 z_{yy} &= f''(x - 2y^2) \cdot 16y^2 - 4f'(x - 2y^2). \quad \square
 \end{aligned}$$

例题 0.6 设 $u = f(x, y) = \begin{cases} \frac{|x|^\alpha y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0), \\ 0, & (x, y) = (0, 0), \end{cases}$ 其中 $\alpha > 0$. 若令 $x = t, y = t$, 是否可以用链式法则求 $t = 0$ 时的导数.

解 由于 $\alpha > 0$, 可看出 $f(0, y) \equiv 0, f(x, 0) \equiv 0$, 因此 $f_x(0, 0) = f_y(0, 0) = 0$. 又有 $x'_t \equiv 1, y'_t \equiv 1$, 于是有

$$f_x(0, 0)x'_t + f_y(0, 0)y'_t = 0.$$

另一方面, 直接将 $x = y = t$ 代入 $u = f(x, y)$ 中, 则得到

$$u = u(t) = \begin{cases} \frac{|t|^\alpha}{2t}, & t \neq 0, \\ 0, & t = 0. \end{cases}$$

由此可见, $u(t)$ 在 $t = 0$ 处当 $0 < \alpha \leq 1$ 时不连续, 当然不可导. 这与其他情况的结果可一起列表如下:

	$0 < \alpha \leq 1$	$1 < \alpha < 2$	$\alpha = 2$	$\alpha > 2$
$u'(0)$	不存在	$+\infty$	$\frac{1}{2}$	0

由此可见, 只有 $\alpha > 2$ 时才能用链式法则正确求出 $u_t|_{t=0}$. \square

注 讲课时将 f 的表达式中的绝对号去掉了, 但对于一般的指数 α 来说, 还是应当加绝对号才正确. 此外, 链式法则定理中的条件只是充分条件, 不能从它不满足来判定链式法则能否用. 因此上面的讲法与书上不同. 当然可以倒过来证明 $u = f(x, y)$ 于 $(0, 0)$ 一定不可微.

三. 全微分的几何意义 (即切平面)

如前所述, 多元函数在某一点存在偏导数只反映了函数在指定的坐标轴方向的变化率. 即使函数在该点存在所有一阶偏导数, 也不能保证函数在该点连续. 然而, 可微则保证连续. 现在考察全微分的几何意义.

设 f 在点 (x_0, y_0) 存在偏导数 $f_x(x_0, y_0)$ 和 $f_y(x_0, y_0)$.

先回顾前面关于偏导数的几何意义.

当 $y = y_0$ 时变动 x 就得到在曲面 $z = f(x, y)$ 上的曲线, 它就是曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 $y = y_0$ 的交线. 该曲线在点 P_0 的切向量是

$$\tau_x = (1, 0, f_x(x_0, y_0)).$$

这可以从该曲线的参数形式 $x = x, y = y_0, z = f(x, y_0)$ 就可以得到.

同样, 曲面 $z = f(x, y)$ 与 $x = x_0$ 的交线在点 P_0 的切线是

$$\tau_y = (0, 1, f_y(x_0, y_0)).$$

考虑三维空间的下列平面方程:

$$Z = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)(X - x_0) + f_y(x_0, y_0)(Y - y_0),$$

它经过点 $P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$. 记该平面为 Π , 其法向量是 $\pm \mathbf{n}$, 其中

$$\mathbf{n} = (f_x(x_0, y_0), f_y(x_0, y_0), -1).$$

可以看出 $\tau_x \perp \mathbf{n}$ 和 $\tau_y \perp \mathbf{n}$, 且有

$$\tau_x \times \tau_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & f_x(x_0, y_0) \\ 0 & 1 & f_y(x_0, y_0) \end{vmatrix} = -f_x(x_0, y_0)\mathbf{i} - f_y(x_0, y_0)\mathbf{j} + \mathbf{k} = -\mathbf{n},$$

这表明以 \mathbf{n} 为法向量且过点 P_0 的平面是由 τ_x 和 τ_y 决定的, 而 τ_x 和 τ_y 都在平面 Π 上.

现在设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, 则有

$$z = f(x, y) = f(x_0, y_0) + f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y + o(r) \quad (r \rightarrow 0).$$

由此可见,

$$z - Z = o(r) \quad (r \rightarrow 0).$$

即当点 $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ 时, 曲面 $z = f(x, y)$ 与平面 Π 在 z 方向之差为高于一阶的无穷小量.

称平面 Π 为曲面 $z = f(x, y)$ 过点 P_0 的切平面. 这里要指出, 在一元函数中用割线的极限位置定义切线的方法在二元函数情况是无效的.

下面进一步刻画切平面的一个重要性质. 考虑曲面 $z = f(x, y)$ 上经过点 P_0 的曲线, 则可以证明, 如该曲线在点 P_0 有切线, 则该切线一定在上述切平面上. 我们将它写成下列定理并给出证明.

定理 0.2 设 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 可微, 记点 $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ 为 P_0 , 则在曲面上任何一条经过 P_0 的曲线 l 若在 P_0 有切线, 则此切线一定在切平面上.

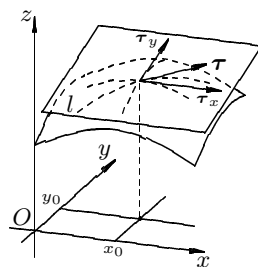
证 设曲线 l 的参数方程为 $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in I$. 则曲线 l 在曲面 $z = f(x, y)$ 上就等价于成立恒等式 $z(t) \equiv f(x(t), y(t))$, 而曲线 l 经过点 P_0 则表明存在 $t_0 \in I$, 使得 $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0, z(t_0) = f(x_0, y_0)$.

设 l 于点 P_0 有切线, 则切向量就是 $\boldsymbol{\tau} = (x'(t_0), y'(t_0), z'(t_0))$. 需要证明的是 $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$.

为此只要对恒等式 $z(t) = f(x(t), y(t))$ 在点 $t = t_0$ 处用链式法则, 就有

$$z'(t_0) = f_x(x(t_0), y(t_0))x'(t_0) + f_y(x(t_0), y(t_0))y'(t_0).$$

由于 $x(t_0) = x_0, y(t_0) = y_0$, 这就是 $\boldsymbol{\tau} \perp \mathbf{n}$. \square



如右上图所示, 在曲面上过点 P_0 作出了三条曲线, 其中两条分别为平面 $x = x_0$ 和 $y = y_0$ 与曲面的交线, 它们在 P_0 的切向量就是 τ_x 和 τ_y . 第三条曲线代表证明中过 P_0 的任意曲线 l , 它在点 P_0 的切向量是 τ . 所有这些切向量都在切平面上.

注 只要 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 存在两个一阶偏导数, 就可以定义经过点 P_0 且以 \mathbf{n} 为法线的一张平面. 但只有当 f 在该点可微的条件下这张平面才具有切平面的性质, 即 $z - Z = o(r)$ ($r \rightarrow 0$), 同时具有定理 2 中的性质. 这可以回顾本章的例 4.

四. 一阶微分的形式不变性

与一元函数的情况完全类似, 可以用链式法则推导出一阶微分的形式不变性.

设 $z = f(x, y)$. 若 x, y 为自变量, f 可微, 则有

$$dz = f_x dx + f_y dy. \quad (*)$$

现在假设 $x = x(u, v), y = y(u, v)$, 且均可微, 并有复合函数

$$z = f(x(u, v), y(u, v)).$$

则以 u, v 为自变量, x, y 为中间变量, 就可以从链式法则计算得到

$$\begin{aligned} dz &= z_u du + z_v dv \\ &= (f_x x_u + f_y y_u) du + (f_x x_v + f_y y_v) dv \\ &= f_x (x_u du + x_v dv) + f_y (y_u du + y_v dv) \\ &= f_x dx + f_y dy. \end{aligned} \quad (**)$$

其中利用了 $dx = x_u du + x_v dv, dy = y_u du + y_v dv$.

比较 (*) 与 (**) 的最后一行, 可见在形式上相同. 这就叫做一阶微分的形式不变性.

然而实际上二者根本不同. 首先, 微分算子 d 是对于真正的自变量而言的, 因此 (*) 是 x, y, dx, dy 的 4 元函数, 而 (**) 是 u, v, du, dv 的 4 元函数, 只是最后可以写成与 (*) 相同的形式.

其次, 在 (*) 中 $dx = \Delta x, dy = \Delta y$, 而在 (**) 中以上两个等式一般不成立. 这时有

$$\Delta x = dx + o(r) \quad (r \rightarrow 0),$$

$$\Delta y = dy + o(r) \quad (r \rightarrow 0),$$

其中 $r = \sqrt{\Delta u^2 + \Delta v^2} = \sqrt{du^2 + dv^2}$.

与一元函数中的一阶微分形式不变性不同的是, 多元函数的一阶微分形式不变性有多方面的用处. 下面将逐步举例.

第 T7 次讲稿 (第三学期第 7 次)

第 T7 次讲稿, 用于 2008 年 9 月 19 日, 星期五, 2 节课.

内容: 结束第十八章, 主要是高阶微分以及计算举例. 然后开始第十九章, 主要还是计算. 下次讲隐函数存在定理.

与一元函数的情况相同, 高阶微分不具有形式不变性.

例如, 设 $z = z(x, y)$. 且二阶连续可微.

在 x, y 为自变量时, 已经在上一节得到

$$d^2z = z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2.$$

现在假设 $z = f(x, y)$ 中的 x, y 只是中间变量, 它们分别是其他一个或多个自变量的函数. 例如 $x = x(u), y = y(u)$, 或者 $x = x(u, v), y = y(u, v)$, 或者 $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w)$ 等. 下面的推导对所有这些情况都成立. 计算中假设链式法则需要的条件都满足.

首先从上述一阶微分的形式不变性有

$$dz = z_x dx + z_y dy,$$

然后求二阶全微分, 计算如下:

$$\begin{aligned} d^2z &= d(dz) \\ &= d(z_x dx + z_y dy) \end{aligned} \tag{1}$$

$$= d(z_x)dx + z_x d^2x + d(z_y)dy + z_y d^2y \tag{2}$$

$$= (z_{xx}dx + z_{xy}dy)dx + (z_{yx}dx + z_{yy}dy) + z_x d^2x + z_y d^2y \tag{3}$$

$$= z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2 + z_x d^2x + z_y d^2y. \tag{4}$$

这里需要作如下说明.

首先, 算子 d 是对于真正的自变量而言的.

其次, 从 (5) 到 (2) 的计算中, 利用了 $d(fg) = f dg + g df$, 其中 f, g 都是某些自变量的函数. 此外, 由于 $d(dx)$ 和 $d(dy)$ 未必为 0, 就记为 d^2x 和 d^2y .

还有, 从 (2) 到 (3) 的计算中, 则是又一次利用一阶微分的形式不变性来计算 $d(z_x)$ 和 $d(z_y)$.

最后的公式 (4) 对所有情况都成立. 与 x 和 y 为自变量的情况相比多了最后两项, 因此我们说二阶全微分不具有形式不变性.

若 x, y 是真正自变量的线性函数, 则也有 $d^2x = 0$ 和 $d^2y = 0$. 于是形式上二阶微分也不变.

作为一个应用, 我们来重新计算前面的例 5 (p.42) 和例 3 (p.41).

例 5 的解 2 记 $u = x - 2y^2$, 求 $z = f(u)$ 关于 x, y 的所有二阶偏导数.

按照前面的公式 (4) 有

$$d^2z = f''(u)du^2 + f'(u)d^2u.$$

于是只要计算出

$$du = dx - 4ydy, \quad d^2u = -4dy^2,$$

代入即得

$$\begin{aligned} d^2z &= f''(u)(dx - 4ydy)^2 + f'(u)(-4dy^2) \\ &= f''(u)dx^2 - 8f''(u)dx dy + 16y^2f''(u)dy^2 - 4f'(u)dy^2 \\ &= f''(u)dx^2 - 8f''(u)dx dy + [16y^2f''(u) - 4f'(u)]dy^2, \end{aligned}$$

然后从中即可读出所要的 z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} . \square

下面是例 3 的新解法. (请同学同时看教科书 p.41, 只是书上用 z_{11} 等, 而我们将它改写为 f_{uu} 等.)

例题 3 的解 2 设 $z = f(u, v)$ 又设 $u = x^2y, v = \frac{y}{x}$, 先求 z 关于 x, y 的一阶偏导数. 这里 u, v 是中间变量, x, y 是自变量.

先用一阶微分形式不变性计算一阶全微分如下:

$$\begin{aligned} dz &= f_u du + f_v dv \\ &= f_u(2xydx + x^2dy) + f_v(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy). \\ &= (2xyf_u - \frac{y}{x^2}f_v)dx + (x^2f_u + \frac{1}{x}f_v)dy. \end{aligned}$$

再与 $dz = z_x dx + z_y dy$ 比较, 就得到所要的 z_x, z_y 为:

$$z_x = 2xyf_u - \frac{y}{x^2}f_v, \quad z_y = x^2f_u + \frac{1}{x}f_v.$$

然后再计算二阶偏导数. 这时只要利用 (4) 即可. 除了在上面已经求出的 du 和 dv 之外, 还需要

$$\begin{aligned} d^2u &= d(du) = d(2xydx + x^2dy) = 2ydx^2 + 4xdxdy, \\ d^2v &= d(dv) = d(-\frac{y}{x^2}dx + \frac{1}{x}dy) = \frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2}{x^2}dxdy. \end{aligned}$$

然后将 du, dv, d^2u, d^2v 一起代入 (4) 中, 就有

$$\begin{aligned} d^2z &= f_{uu}(4x^2y^2dx^2 + 4x^3ydx dy + x^4dy^2) \\ &\quad + 2f_{uv}(-\frac{2y^2}{x}dx^2 + ydx dy + xdy^2) \\ &\quad + f_{vv}(\frac{y^2}{x^4}dx^2 - \frac{2y}{x^3}dxdy + \frac{1}{x^2}dy^2) \\ &\quad + f_u(2ydx^2 + 4xdxdy) + f_v(\frac{2y}{x^3}dx^2 - \frac{2}{x^2}dxdy). \end{aligned}$$

将右边整理为 dx, dy 的二次多项式, 并与

$$d^2z = z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2$$

作比较, 就可以求出所要的 z_{xx}, z_{xy}, z_{yy} . 它们的表达式与前面相同, 这里从略. \square

注 这里的计算不见得比原来的方法简单, 但对于理解全微分法有帮助. 此外, 对于二阶偏导数的计算还说明, 虽然二阶全微分没有形式不变性, 但公式 (4) 对计算还是有用的.

第十九章 隐函数存在定理和隐函数求导法

§19.1 隐函数求导法

这一节完全讲计算, 而将理论问题, 即是否存在隐函数, 它是否可导等等放到下一节去处理.

一. 一个方程的情况

这一小节的内容与上册 §6.3 之五. 隐函数求导法基本相同, 即假定存在隐函数, 且可微, 如何计算其偏导数. 差别在于上册的隐函数总是一元函数, 而这里则可以是多元函数. 例如, 假设从方程

$$F(x, y, z) = 0$$

可确定出二元函数 $z = z(x, y)$, 则将它代入方程后就得到关于 x, y 的恒等式

$$F(x, y, z(x, y)) \equiv 0.$$

假设这个隐函数 $z = z(x, y)$ 有偏导数, 又设 F 可微, 则就可以将恒等式对 x 求导, 得到

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0.$$

在 $\frac{\partial z}{\partial z} \neq 0$ 的条件下, 就可以得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_x}{F_z}.$$

当然右边的表达式中 $z = z(x, y)$, 从而是二元函数.

同样可以得到

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}}{\frac{\partial F}{\partial z}} = -\frac{F_y}{F_z}.$$

而且可以注意到条件 $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ 是相同的.

下面主要是举例.

例题 0.1 设从 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 可确定隐函数 $z = z(x, y)$, 求 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial z}{\partial y}$.

解 1 在方程中将 z 换为 $z(x, y)$, 然后对 x 求导, 就有

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2z}{c^2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$

于是在 $z \neq 0$ 时可以得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{z}{c^2}} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}.$$

同样在 $z \neq 0$ 时可以得到

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{c^2 y}{b^2 z}. \quad \square$$

解 2 对方程求全微分, 即有

$$\frac{2x}{a^2} dx + \frac{2y}{b^2} dy + \frac{2z}{c^2} dz = 0,$$

然后改写为

$$dz = -\frac{c^2 x}{a^2 z} dx - \frac{c^2 y}{b^2 z} dy,$$

则右边的 dx 和 dy 的系数就是要求的 z_x, z_y . \square

例题 0.2 设 F 为二阶可微的三元函数, 又设从方程 $F(xy, y+z, xz) = 0$ 可确定出隐函数 $z = z(x, y)$, 求 z_x, z_y, z_{xy} .

解 1 用 $z = z(x, y)$ 代入方程中, 就可以得到关于 x, y 的恒等式 $F(xy, y+z(x, y), xz(x, y)) \equiv 0$. 为避免混淆, 将三元函数 F 的三个偏导数记为 F_1, F_2, F_3 . 对 x 求导得到

$$F_1 y + F_2 z_x + F_3 (z + x z_x) = 0, \quad (5)$$

于是在 $F_2 + x F_3 \neq 0$ 的条件下就可以得到

$$z_x = -\frac{y F_1 + z F_3}{F_2 + x F_3}.$$

同样可以将恒等式对 y 求导得到 $F_1 x + F_2 (1 + z_y) + F_3 x z_y = 0$, 从而得到

$$z_y = -\frac{x F_1 + F_2}{F_2 + x F_3}.$$

注意两个偏导数的表达式中分母是相同的.

为了计算 z_{xy} , 可以从 z_x 对 y 求导, 也可以从 z_y 对 x 求导. 又为了避免分式求导的计算, 可以从 (5) 对 y 求导, 得到

$$\begin{aligned} & F_1 + y(F_{11}x + F_{12}(1 + z_y) + F_{13}xz_y) \\ & + F_2 z_{xy} + z_x(F_{21}x + F_{22}(1 + z_y) + F_{23}xz_y) \\ & + (z_y + x z_{xy})F_3 + (z + x z_x)(F_{31}x + F_{32}(1 + z_y) + F_{33}xz_y) = 0. \end{aligned}$$

将其中不含有 z_{xy} 的所有项之和记为 Δ , 则就有

$$z_{xy} = -\frac{\Delta}{F_2 + x F_3},$$

这里的分母与前面 z_x, z_y 的表达式中的分母又是相同的. 当然这里的 Δ 中还含有 z_x 和 z_y , 应当用前面的表达式代入. 计算从略. \square

(此题的 z_{xy} 表达式太长, 作为例题不合适.)

解 2 只对于一阶偏导数介绍与解 1 不同的算法.

直接对方程求全微分得到

$$F_1(xdy + ydx) + F_2(dy + dz) + F_3(xdz + zdx) = 0,$$

将它改写为

$$(F_2 + xF_3)dz = -(yF_1 + zF_3)dx - (xF_1 + F_2)dy,$$

这样就可以得出 z_x, z_y . \square

例题 0.3 从方程 $F(xy, y + z, xz) = 0$ 计算 x_z

解 从题可见是由方程确定 $x = x(y, z)$, 然后计算 x 对 z 的偏导数.

如上例的解 2 那样用全微分法, 就可以得到

$$x_z = -\frac{F_2 + xF_3}{yF_1 + zF_3}. \quad \square$$

第 T8 次讲稿 (第三学期第 8 次)

第 T8 次讲稿, 用于 2008 年 9 月 24 日, 星期三, 3 节课.

内容: 结束 §19.1, 隐函数求导法. 然后主要讲 §19.2, 隐函数存在定理.

二. 方程组的情况

与上面一样这里只讲计算方法. 设由方程组

$$\begin{cases} F(x, y, z, u, v) = 0, \\ G(x, y, z, u, v) = 0 \end{cases}$$

确定 u, v 为 x, y, z 的隐函数: $u = u(x, y, z)$, $v = v(x, y, z)$, 并假设下面计算中涉及到的偏导数都存在.

现在以 u_x, v_x 的计算为例. 将隐函数代入原来的方程组, 就得到关于三个变量 x, y, z 的两个恒等式, 然后将它们关于 x 求偏导, 这样就得到

$$F_x + F_u u_x + F_v v_x = 0,$$

$$G_x + G_u u_x + G_v v_x = 0,$$

然后将以上两式作为关于 u_x, v_x 的线性代数方程组求解, 用 Cramer^①法则得到

$$u_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_x & F_v \\ G_x & G_v \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}, \quad v_x = -\frac{\begin{vmatrix} F_u & F_x \\ G_u & G_x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}}.$$

引入记号 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$, 并称为 F, G 关于 u, v 的 Jacobi^②行列式, 则

可以将上述答案改写为

$$u_x = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, v)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}, \quad v_x = -\frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}}.$$

例题 0.1 设 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 求 $r_x, r_y, \theta_x, \theta_y$.

解 1 这里既可以用隐函数求导法, 也可以解出 r, θ 为 x, y 的显函数后直接求导. 我们用两个方法来做以作比较. 此外, 本题的内容在直角坐标与极坐标之间的变量代换中是常用的. 为简明起见只写出 r_x, θ_x 的计算过程.

① 克拉默 (Gabriel Cramer, 1704–1752), 瑞士数学家.

② 雅可比 (Carl Gustav Jacob Jacobi, 1804–1851), 德国数学家.

用隐函数方法. 将由方程确定的 $r = r(x, y), \theta = \theta(x, y)$ 代入方程 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$, 然后将两个方程分别对 x 求导, 得到

$$1 = r_x \cos \theta + r(-\sin \theta)\theta_x,$$

$$0 = r_x \sin \theta + r(\cos \theta)\theta_x,$$

然后可以解出

$$r_x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -r \sin \theta \\ 0 & r \cos \theta \end{vmatrix}}{r} = \cos \theta, \quad \theta_x = \frac{\begin{vmatrix} \cos \theta & 1 \\ \sin \theta & 0 \end{vmatrix}}{r} = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

另一个方法是先从两个方程解出 $r = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan \frac{y}{x}$, 然后直接求偏导得到

$$r_x = \frac{x}{r} = \cos \theta,$$

$$\theta_x = \frac{1}{1 + (y/x)^2} \cdot \left(-\frac{y}{x^2}\right) = -\frac{y}{r^2} = -\frac{\sin \theta}{r}.$$

可见两种方法的计算结果完全相同.

同样可以求出

$$r_y = -\frac{y}{r} = -\sin \theta, \quad \theta_y = \frac{x}{r^2} = \frac{\cos \theta}{r}. \quad \square$$

解 2 对于方程 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ 求全微分得到

$$dx = \cos \theta dr - r \sin \theta d\theta,$$

$$dy = \sin \theta dr + r \cos \theta d\theta,$$

从中解出

$$dr = \cos \theta dx - \sin \theta dy,$$

$$d\theta = \frac{1}{r}(-\sin \theta dx + \cos \theta dy),$$

然后从右边的系数即得所求的 4 个偏导数. \square

例题 0.2 设有方程 $\begin{cases} x + y + z + u + v = 1, \\ x^2 + y^2 + z^2 + u^2 + v^2 = 2, \end{cases}$ 求 x_u, y_u, x_{uu}, y_{uu} .

解 1 这类问题首先是要分清楚什么是自变量, 什么是因变量. 从题可见 x, y 是因变量. 由于在今后的隐函数存在定理中将证明在一定条件下 2 个方程恰好确定两个函数, 因此 z, u, v 都是自变量.

将方程确定的隐函数 $x = x(z, u, v), y = y(z, u, v)$ 代入方程, 得到关于 z, u, v 的两个恒等式, 然后对 u 求偏导. 这样就得到

$$x_u + y_u + 1 = 0, \quad 2xx_u + 2yy_u + 2u = 0.$$

然后就可以解出

$$x_u = \frac{u - y}{y - x}, \quad y_u = \frac{x - u}{y - x}.$$

以下可以从 x_u 直接计算 x_{uu} . (教科书上的方法不是这样, 但并无优点.)

$$\begin{aligned} x_{uu} &= \frac{(1-y_u)(y-x) - (y_u-x_u)(u-y)}{(y-x)^2} \\ &= \frac{1}{y-x} + \frac{y_u(x-y) - y_u(u-y) + x_u(u-y)}{(y-x)^2} \\ &= \frac{1}{y-x} + \frac{y_u(x-u) + x_u(u-y)}{(y-x)^2} \\ &= \frac{1}{y-x} + \frac{(x-u)^2 + (u-y)^2}{(y-x)^3}. \end{aligned}$$

同样可以计算得到 y_{uu} . 但从 $x_u + y_u + 1$ 对 u 求偏导得到 $x_{uu} + y_{uu} = 0$, 因此 $y_{uu} = -x_{uu}$. \square

解 2 先用全微分法求 x_u, y_u . 将给定的两个方程求全微分, 得到

$$\left. \begin{aligned} dx + dy + dz + du + dv &= 0, \\ xdx + ydy + zdz + udu + vdv &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

用 Cramer 法则解出 dx, dy 为 dz, du, dv 线性的组合, 得到

$$\begin{aligned} dx &= \frac{1}{y-x} [(u-y)du + (v-y)dv + (z-y)dz], \\ dy &= \frac{1}{y-x} [(x-u)du + (x-v)dv + (x-z)dz]. \end{aligned}$$

其中右边 du 的系数即所要求的 x_u, y_u .

为了求二阶偏导数, 可以对 (1) 再作用算子 d , 注意 x, y 为因变量, u, v, z 为自变量, 就得到

$$\left. \begin{aligned} d^2x + d^2y &= 0, \\ x d^2x + dx^2 + y d^2y + dy^2 + dz^2 + du^2 + dv^2 &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

解出

$$(x-y)d^2x = -dx^2 - dy^2 - dz^2 - du^2 - dv^2,$$

将前面已经得到的 dx, dy 代入收集 du^2 的系数就得到 x_{uu} . 再乘以 -1 就得到 y_{uu} . \square

例题 0.3 设给定 $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$, 求 z_x, z_y .

解 1 首先还是要看清题意. 从所要求的 z_x, z_y 可知 z 为因变量, x, y 为自变量. 于是应当从前两个方程 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 确定出 u, v 为 x, y 的函数, 然后代入 $z = z(u, v)$ 中, 使得 z 成为 x, y 的函数, 即 $z = z(u(x, y), v(x, y))$.

于是就有

$$\begin{aligned} z_x &= z_u u_x + z_v v_x, \\ z_y &= z_u u_y + z_v v_y. \end{aligned}$$

由于 $z(u, v)$ 给定, 因此认为 z_u, z_v 已知, 余下只要计算 u_x, u_y, v_x, v_y . 这就是要求从 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 确定的反函数的偏导数. 计算方法同前, 即将 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 代入前两个方程, 得到两个关于 x, y 的恒等式:

$$x \equiv x(u(x, y), v(x, y)), \quad y \equiv y(u(x, y), v(x, y)),$$

然后将它们对 x 求偏导, 得到

$$1 = x_u u_x + x_v v_x, \quad 0 = y_u u_x + y_v v_x.$$

从中可以解出

$$u_x = \frac{-y_v}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \quad v_x = \frac{y_u}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}.$$

同样将前述两个恒等式对 y 求偏导, 得到

$$0 = x_u u_y + x_v v_y, \quad 1 = y_u u_y + y_v v_y,$$

并解出

$$u_y = \frac{x_v}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \quad v_y = \frac{-x_u}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}.$$

最后将 u_x, v_x, u_y, v_y 代入前面 z_x, z_y 的表达式中, 就得到

$$z_x = -\frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}, \quad z_y = -\frac{\frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}. \quad \square$$

解 2 将给定的三个方程中用 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 代入, 然后对 x 求偏导, 得到

$$\begin{cases} 1 = x_u u_x + x_v v_x \\ 0 = y_u u_x + y_v v_x \\ z_x = z_u u_x + z_v v_x \end{cases}$$

然后改写为关于 z_x, u_x, v_x 的线性方程组:

$$\begin{pmatrix} 0 & x_u & x_v \\ 0 & y_u & y_v \\ -1 & z_u & z_v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_x \\ u_x \\ v_x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

用 Cramer 法则就得到 $z_x = -\frac{\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}}$. 对 z_y 的计算完全相同, 从略. \square

解 3 与解 2 相近的是用全微分法, 先有

$$\begin{cases} dx = x_u du + x_v dv \\ dy = y_u du + y_v dv \\ dz = z_u du + z_v dv \end{cases}$$

然后改写为关于 dz, du, dv 的线性方程组:

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v & 0 \\ y_u & y_v & 0 \\ z_u & z_v & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} du \\ dv \\ dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} dx \\ dy \\ 0 \end{pmatrix},$$

用 Cramer 法则解出 dz , 就得到

$$dz = \frac{1}{-\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}} \cdot \begin{vmatrix} x_u & x_v & -dx \\ y_u & y_v & -dy \\ z_u & z_v & 0 \end{vmatrix},$$

然后可以从中直接读出 z_x, z_y , 它们就是上式右边的展开式中 dx 和 dy 的系数. \square

§19.2 隐函数存在定理

一. 一个方程的情况

对于能否从一个给定的方程 $F(x, y) = 0$ 确定某个隐函数 $y = f(x)$ 的问题, 可以借助于三维空间从几何上进行思考.

设曲面的方程为 $z = F(x, y)$, 则首先, 什么情况下这个曲面与 xOy 坐标平面有交? 其次是它们的非空交集是否能够用某个函数 $y = f(x)$ 来描述?

这里的第一个问题就不容易. 在某些条件下也许可以用前面的零点存在定理来证明这样的非空交是存在的. 本章对这个问题不作讨论, 而是从一开始假设, 已经存在一个点 (x_0, y_0) , 使得 $F(x_0, y_0) = 0$. 于是曲面 $z = F(x, y)$ 与 xOy 坐标面至少交于一个点 $(x_0, y_0, 0)$.

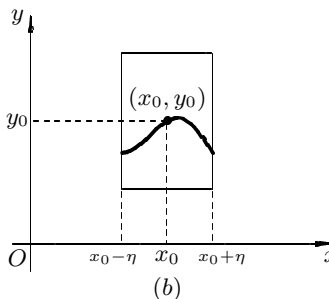
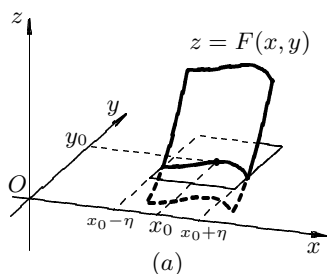
接下来的问题自然就是在 xOy 坐标面上点 (x_0, y_0) 的邻近, 是否存在经过该点的交线, 它可以用 $y = f(x)$ 来描述.

如右图 (a) 所示, 设曲面 $z = F(x, y)$ 的边界用粗曲线表示, 它在坐标面 xOy 以下部分用虚线标出. 曲面与该坐标面, 即 $z = 0$ 的交线经过点 (x_0, y_0) . 在区间 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 上确定了一个隐函数 $y = f(x)$.

在右图 (b) 上就是在 xOy 平面上的隐函数 $y = f(x)$ 的图像.

当然这需要一定的条件. 否则, 例如曲面 $z = x^2 + y^2$ 与平面 $z = 0$ 只交于一点 $(0, 0)$, 并不能生成在某个区间上有定义的隐函数.

此外, 我们还希望隐函数具有良好的性质, 例如连续性和可微性等.



下面是这方面的主要结果.

定理 0.1 设二元函数 $F(x, y)$ 满足下列条件:

- (1) $F(x_0, y_0) = 0$,
- (2) 在点 (x_0, y_0) 的某一个邻域 D 内对 x 和 y 有连续偏导数,
- (3) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$,

则有以下结论:

- (i) 存在在点 (x_0, y_0) 的一个矩形邻域

$$\{(x, y) \mid |x - x_0| < \eta, |y - y_0| < b'\} \subset D,$$

使得在这个邻域内, 存在惟一的隐函数 $y = f(x)$, 其定义域为 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, 当 $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 时, 成立恒等式 $F(x, f(x)) \equiv 0$, 且满足 $f(x_0) = y_0$;

(ii) f 在 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 上连续;

(iii) f 在 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 上有连续导函数.

证 不妨取 D 为以下长方形邻域^①:

$$D = \{(x, y) \mid |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\}.$$

注意条件 (3) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ 是关键条件, 以下不妨设 $F_y(x_0, y_0) > 0$. 在证明中可参看下面的图中的 4 个分图.

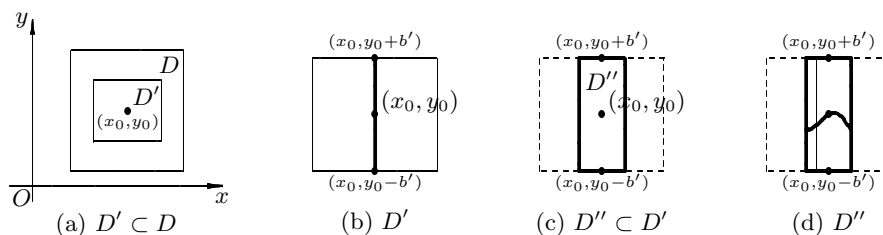


图 1: 隐函数定理证明示意图

由于 $F_y(x, y)$ 是二元连续函数, 因此存在以 (x_0, y_0) 为中心的一个长方形闭区域 (参看分图 (a))

$$D' = \{(x, y) \mid |x - x_0| \leq a', |y - y_0| \leq b'\} \subset D,$$

使得 $F_y(x, y)$ 在 D' 上处处大于 0^②.

考虑闭区域 D' 中 $x = x_0$ 的直线段, 即 $\{(x_0, y) \mid y_0 - b' \leq y \leq y_0 + b'\}$ (参看分图 (b)). 则由于函数 $z = F(x_0, y)$ 关于 y 的导数在 $(y_0 - b', y_0 + b')$ 上处处大于 0, 因此是 y 的严格单调增加函数. 从 $F(x_0, y_0) = 0$ 可知有

$$F(x_0, y_0 - b') < 0, \quad F(x_0, y_0 + b') > 0.$$

利用二元函数 $F(x, y)$ 在 D 上连续, 因此从连续函数的保号性知道在点 $(x_0, y_0 - b')$ 邻近 F 小于 0, 而在点 $(x_0, y_0 + b')$ 上大于 0. 特别我们考虑闭区域 D' 的上下边界, 则存在 $\eta > 0$, 使得成立

$$F(x, y_0 - b') < 0 \quad \forall x_0 - \eta < x < x_0 + \eta,$$

$$F(x, y_0 + b') > 0 \quad \forall x_0 - \eta < x < x_0 + \eta.$$

这样就得到一个长方形闭区域 (参看分图 (c))

① 实际上取定一个 D 全无必要, a, b 也从未起作用. 因此今后改写时都可以去掉, 从取定 D' 开始即可.

② 于是若 $x \in O_{a'}(x_0)$, 则至多只有一个 $y \in O_{b'}(y_0)$ 使得 $F(x, y) = 0$. 因此隐函数的惟一性已经在 D' 中成立. 但为了保证存在隐函数, 则可能还需要缩小区域 D' .

$$D'' = \{(x, y) \mid x_0 - \eta \leq x \leq x_0 + \eta, y_0 - b' \leq y \leq y_0 + b'\} \subset D',$$

在闭区域 D'' 的下边界上 F 处处小于 0, 而在上边界上 F 处处大于 0. 任取点 $x \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, 固定这个 x 值, 作出在 D'' 中连接点 $(x, y_0 - b')$ 与 $(x, y_0 + b')$ 的直线段, 并考虑在其中 F 的值. 由于 $F(x, y_0 - b') < 0$, $F(x, y_0 + b') > 0$, 且 $F_y(x, y) > 0 \forall y \in (y_0 - b', y_0 + b')$, 因此 F 是 y 的严格单调增加函数, 从而存在惟一的点 $y \in (y_0 - b', y_0 + b')$, 使得 $F(x, y) = 0$ (参看分图 (d)).

这样就证明了对于 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 中的每一个 x , 在闭区域 D'' 的内部存在惟一的 y , 满足 $F(x, y) = 0$. 我们就将这个 y 记为 $f(x)$, 从而就证明了在 D'' 中存在惟一的隐函数 $y = f(x)$ 满足 $F(x, f(x)) = 0$. 这完成了定理中 (i) 的证明.

关于 (ii), 即 $y = f(x)$ 在 $(x_0 - \eta, x_0 + \eta)$ 中处处连续的证明, 其方法与上面完全相同, 等于再重复一次. 可简要叙述如下, 同时参看图 2, 其中的细曲线就是隐函数 $y = f(x)$ 的图像.

取定点 $x_1 \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, 要证明 $y = f(x)$ 于点 x_1 连续. 记 $y_1 = f(x_1)$. 对于给定的 $\varepsilon > 0$, 不妨设已经有 $O_\varepsilon(y_1) \subset O_{b'}(x_0)$, 这样使得所有讨论都在 D'' 的内部进行. 再次利用 $F_y(x, y) > 0$, 从 $F(x_1, y_1) = 0$, 可见有

$$F(x_1, y_1 - \varepsilon) < 0, \quad F(x_1, y_1 + \varepsilon) > 0.$$

然后利用 F 的保号性, 存在 $\delta > 0$, 使得成立

$$F(x, y_1 - \varepsilon) < 0 \quad \forall |x - x_1| < \delta,$$

$$F(x, y_1 + \varepsilon) > 0 \quad \forall |x - x_1| < \delta.$$

这样就得到一个长方形闭区域

$$D''' = \{(x, y) \mid |x - x_1| \leq \delta, |y - y_1| \leq \varepsilon\} \subset D'',$$

在闭区域 D''' 的下边界上 F 处处小于 0, 而在上边界上 F 处处大于 0. 任取点 $x \in (x_1 - \delta, x_1 + \delta)$, 固定这个 x 值, 作出在 D''' 中连接点 $(x, y_1 - \varepsilon)$ 与 $(x, y_1 + \varepsilon)$ 的直线段, 并考虑在其中 F 的值.

由于 $F(x, y_1 - \varepsilon) < 0$, $F(x, y_1 + \varepsilon) > 0$, 且 $F_y(x, y) > 0 \forall y \in (y_1 - \varepsilon, y_1 + \varepsilon)$, 因此 F 是 y 的严格单调增加函数, 从而存在惟一的点 $y \in (y_0 - b', y_0 + b')$, 使得 $F(x, y) = 0$.

然而这样的点在 D'' 中是惟一的, 因此上述与 x 对应的 y 只能就是在 (i) 中确定的隐函数 $f(x)$. 由于 $|f(x) - f(x_1)| < \varepsilon$, 因此已经证明了 $y = f(x)$ 于点 x_1 连续. (教科书没有强调这里利用了 (i) 中的惟一性, 这是关键处, 不讲是不对的.)

(iii) 取定某点 $x \in O_\eta(x_0)$, 又取 Δx 使得也有 $x + \Delta x \in O_\eta(x_0)$. 为了研究差

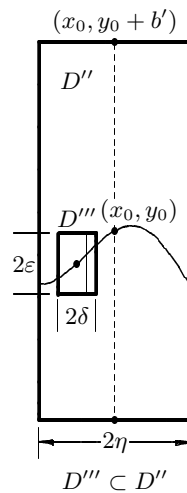


图 2: 隐函数连续性的证明

商 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, 需要设法将隐函数 $y = f(x)$ 在这时的增量 $\Delta y = \Delta f$ 表达出来.

利用 $F(x, f(x)) = 0$, $F(x + \Delta x, f(x + \Delta x)) = 0$, 而 $f(x + \Delta x) = f(x) + \Delta f = y + \Delta y$, 就可以用中值定理如下:

$$\begin{aligned} 0 &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y) \\ &= F(x + \Delta x, y + \Delta y) - F(x, y + \Delta y) + F(x, y + \Delta y) - F(x, y) \\ &= F_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y) \Delta x + F_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \Delta y. \quad (0 < \theta_1, \theta_2 < 1) \end{aligned}$$

由于点 $(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)$ 和 $(x, y + \theta_2 \Delta y)$ 都落在闭区域 D' 内, 因此 $F_y(x, y + \theta_2 \Delta y) \neq 0$, 从而可以写出差商

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = -\frac{F_x(x + \theta_1 \Delta x, y + \Delta y)}{F_y(x, y + \theta_2 \Delta y)}.$$

注意右边表达式中的 $y = f(x)$, $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$.

最后令 $\Delta x \rightarrow 0$, 利用 $y = f(x)$ 连续, 就有 $\Delta y \rightarrow 0$, 又利用 F 为二元连续函数, 因此就可见 $y = f(x)$ 可导, 且

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x(x, f(x))}{F_y(x, f(x))}.$$

又注意到 F 的两个偏导数都是二元连续函数, 而 $f(x)$ 又连续, 因此从复合函数连续性定理就知道导函数 $y'(x)$ 在 $O_\eta(x_0)$ 上连续. \square

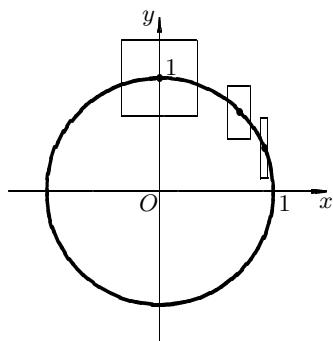


图 3: 隐函数存在定理的局部性

注 1 这里要强调隐函数存在定理的局部性. 这可以用最简单的例子来说明. 设考虑单位圆的方程

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - 1 = 0.$$

并对于其上的点 (x_0, y_0) 考虑上述隐函数存在定理的应用. 这时条件 $F_y(x_0, y_0) \neq 0$ 就是 $y_0 \neq 0$. 这表明在单位圆上除了点 $(1, 0), (0, -1)$ 之外, 其他点的邻近都存在满足 $y_0 = f(x_0)$ 的隐函数 $y = f(x)$, 即使得 $x^2 + f(x)^2 - 1 \equiv 0$.

然而这样的隐函数 $y = f(x)$ 的定义域的大小与点 (x_0, y_0) 有关. 在图上对于三个不同点, 即 $(0, 1)$, $(\cos \frac{\pi}{4}, \sin \frac{\pi}{4})$ 和 $(\cos \frac{\pi}{8}, \sin \frac{\pi}{8})$, 分别给出了隐函数存在定理中的闭区域 D''' , 即 $[x_0 - \eta, x_0 + \eta] \times [y_0 - b', y_0 + b']$. 可以看出, 对于第三个点, η 相当小.

另一方面, 我们知道对于每一个 $x_0 \in (-1, 1)$, 存在两个 y_0 值, 即 $\pm \sqrt{1 - x_0^2}$, 满足方程 $x_0^2 + y_0^2 = 1$. 这与隐函数存在定理中的惟一性不矛盾. 因为后者的惟一

性是指在点 (x_0, y_0) 的充分小的邻域中, 满足方程的隐函数是惟一的. 这也表明定理的结论具有强烈的局部性特征.

注 2 定理 1 中的条件 (1)–(3) 当然只是存在隐函数的充分条件. 若从隐函数存在和连续的要求来看, 可以将定理 1 中的条件减弱为 F 为二元连续, 且在点 (x_0, y_0) 的邻近关于 y 严格单调. 对于严格单调增加的情况的证明与上述定理中的 (i), (ii) 完全相同.

注 3 定理的结论 (iii) 已经覆盖了结论 (ii), 但从证明来看, 只有建立 (ii) 之后才能证明 (iii). 从导数 $\frac{dy}{dx}$ 的表达式可以归纳地推出, 若 $F(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的一个邻域中 n 阶连续可微 (即有所有的 n 阶偏导数, 且都是连续的二元函数), 则隐函数 $y = y(x)$ 也有 n 阶连续导函数.

以上定理 1 是一个方程的最简单情况, 其中只含两个变量. 一个方程的更一般的情况是从

$$F(x_1, \dots, x_n, y) = 0$$

确定隐函数 $y = f(x_1, \dots, x_n)$.

对于这个问题有下列定理 2. 它给出了多元隐函数存在的充分条件. 定理的叙述比较长, 但证明的整个过程并没有新的思想方法, 与定理 1 完全相同, 从略.

定理 0.2 设 $n+1$ 元函数 $F(x_1, \dots, x_n, y)$ 满足下列条件:

- (1) $F(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) = 0$,
- (2) 在点 $(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$ 的某一个邻域 D 内对每一个变量都有连续偏导数,
- (3) $F_y(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0) \neq 0$,

则有以下结论:

- (i) 存在点 $(x_1^0, \dots, x_n^0, y^0)$ 的一个长方体邻域

$$\{(x_1, \dots, x_n, y) \mid |x_i - x_i^0| < \delta_i, i = 1, \dots, n, |y - y^0| < b\} \subset D,$$

使得在此邻域内, 存在惟一的隐函数 $y = f(x_1, \dots, x_n)$, 其定义域为

$$A = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i - x_i^0| < \delta_i, i = 1, \dots, n\},$$

当 $(x_1, \dots, x_n) \in A$ 时成立恒等式

$$F(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \equiv 0,$$

且满足 $y^0 = f(x_1^0, \dots, x_n^0)$;

- (ii) f 在 A 上连续;
- (iii) f 在 A 上关于 x_1, \dots, x_n 有连续偏导数.

这里可以如定理 1 一样得到隐函数 $y = f(x)$ 的偏导数公式为

$$\frac{\partial y}{\partial x_i} = -\frac{F_{x_i}}{F_y}, \quad i = 1, \dots, n.$$

其中 $x_i = x_i^0$, $i = 1, \dots, n$, $y = y^0$.

如在此回顾本章的例题 1 和例题 2, 则不难看出, 在它们的答案中, 偏导数的分母不等于 0 就是定理 2 中的条件 (2).

第 T9 次讲稿 (第三学期第 9 次)

第 T9 次讲稿, 用于 2008 年 9 月 26 日, 星期五, 2 节课.

内容: 主要讲方程组的隐函数存在定理, 超出教材内容.

(先重新讲定理 1 的惟一性, 因为书上恰好不重视这一点. 此外, 这对于后面的理解非常重要.)

对于定理 1 中隐函数惟一性的再解释 在 D'' (的内部) 中存在惟一的隐函数, 这表明, 对于每一个 $x \in O_\eta(x_0)$, 存在惟一的 $y \in O_{\eta'}(y_0)$, 满足 $F(x, y) = 0$. 于是就可以将这个对应关系记为函数 f . 这时又可以说, 只要在 D'' 中有点 (x, y) , 使得 $F(x, y) = 0$, 则就有 $y = f(x)$. 此外, 还可以看出, 在 D' 中由于处处 $F_y > 0$, 隐函数的惟一性已经成立.

二. 方程组的情况

为简明起见, 先讨论在给定两个 4 个变量的方程

$$F(x, y, u, v) = 0, \quad G(x, y, u, v) = 0$$

时, 如何可以由它们确定 u, v 为 x, y 的函数

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y).$$

这样的问题在前面的例题 4 已经见到. 此外, 在例题 5 中则出现了两个含 5 个变量 u, v, x, y, z 的方程, 要求从方程组确定 u, v 为 x, y, z 的函数. 在这两个例题的答案中, 导数的分母都出现了 Jacobi 行列式. 与一个方程确定隐函数的情况类似, 分母上的 Jacobi 行列式不等于 0 就是这里的关键条件.

下面叙述并证明关于 4 个变量和两个方程情况的隐函数存在定理, 当然其中的条件只是充分条件.

定理 0.3 设两个 4 元函数 $F(x, y, u, v)$ 和 $G(x, y, u, v)$ 满足下列条件:

- (1) $F(P_0) = 0, G(P_0) = 0$,
- (2) 在点 $P_0(x_0, y_0, u_0, v_0)$ 的某一个邻域 D 内对每一个变元都有连续偏导数,
- (3) 在点 P_0 的 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} \Big|_{P_0} \neq 0$,

则存在点 P_0 的一个邻域

$$\{(x, y, u, v) \mid |x - x_0| < a, |y - y_0| < b, |u - u_0| < c, |v - v_0| < d\} \subset D,$$

使得在该邻域中存在惟一的连续可微的隐函数组 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 其定义域为

$$A = \{(x, y) \mid |x - x_0| < a, |y - y_0| < b\},$$

当 $(x, y) \in A$ 时成立恒等式

$$F(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0, \quad G(x, y, u(x, y), v(x, y)) \equiv 0,$$

且满足 $u(x_0, y_0) = u_0, v(x_0, y_0) = v_0$.

证明概要 以下只写出证明的主要步骤, 其中用的是消去法.

第一步是从关键条件 $\begin{vmatrix} F_u(P_0) & F_v(P_0) \\ G_u(P_0) & G_v(P_0) \end{vmatrix} \neq 0$ 出发. 这时行列式的第一行至少有一个数不等于 0. 不妨设有 $F_v(P_0) \neq 0$, 则对于方程

$$F(x, y, u, v) = 0$$

在点 P_0 用前面的定理 2, 知道存在 P_0 的一个邻域, 在其中存在惟一的隐函数

$$v = \varphi(x, y, u),$$

它在点 (x_0, y_0, u_0) 的一个邻域中连续可偏导, 满足

$$F(x, y, u, \varphi(x, y, u)) \equiv 0, \quad v_0 = \varphi(x_0, y_0, u_0),$$

且有

$$\varphi_x = -\frac{F_x}{F_v}, \quad \varphi_y = -\frac{F_y}{F_v}, \quad \varphi_u = -\frac{F_u}{F_v}.$$

第二步是考虑第二个方程 $G = 0$. 将上面得到的 $v = \varphi(x, y, u)$ 代入 G 中, 为了方便起见, 改记

$$\psi(x, y, u) = G(x, y, u, \varphi(x, y, u)).$$

对于方程

$$\psi(x, y, u) = 0$$

来说, 条件 $\psi(x_0, y_0, u_0) = 0$ 和光滑性不成问题, 关键之处是计算出

$$\psi_u = G_u + G_v \varphi_u = G_u + G_v \cdot \left(-\frac{F_u}{F_v}\right) = -\frac{1}{F_v} \cdot \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)}.$$

这时右边用 $x = x_0, y = y_0, u = u_0$ 代入, 则从 $v_0 = \varphi(x_0, y_0, u_0)$ 可见, 从定理的条件推出 $\psi_u(x_0, y_0, u_0) \neq 0$. 于是可以对于含三个变量的方程 $\psi(x, y, u) = 0$ 再次用定理 2, 从而推出在点 (x_0, y_0, u_0) 的一个邻域中可惟一确定隐函数 $u = u(x, y)$, 且对 x, y 连续可偏导. 这时成立恒等式

$$\psi(x, y, u(x, y)) = G(x, y, u(x, y), \varphi(x, y, u(x, y))) \equiv 0.$$

最后令

$$\varphi(x, y, u(x, y)) = v(x, y),$$

则所得到的 $u(x, y), v(x, y)$ 就满足定理的全部要求. \square

下面给出一般情况的从方程组确定隐函数组的存在定理.

定理 0.4 给定有 m 个未知量的 n 个方程的方程组

$$\left. \begin{aligned} F_1(x_1, \cdots, x_m) &= 0, \\ &\cdots \cdots \cdots \\ F_n(x_1, \cdots, x_m) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

其中 $m > n$. 设点 $P_0(x_1^{(0)}, \cdots, x_m^{(0)})$ 满足该方程组, 函数 F_1, \cdots, F_n 在点 P_0 的某

个邻域 D 中连续可微, 且设 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{P_0} \neq 0$, 则存在点 P_0 的一个邻域

$$\{(x_1, \dots, x_m) \mid |x_i - x_i^{(0)}| < a_i, i = 1, \dots, m\} \subset D,$$

使得在该邻域中存在惟一的连续可微的隐函数组

$$x_1 = x_1(x_{n+1}, \dots, x_m), \dots, x_n = x_n(x_{n+1}, \dots, x_m),$$

其定义域为

$$A = \{(x_{n+1}, \dots, x_m) \mid |x_i - x_i^{(0)}| < a_i, i = n+1, \dots, m\},$$

当 $(x_{n+1}, \dots, x_m) \in A$ 时成立恒等式

$$F_i(x_1(x_{n+1}, \dots, x_m), \dots, x_n(x_{n+1}, \dots, x_m), x_{n+1}, \dots, x_m) \equiv 0, i = 1, \dots, n,$$

且满足条件

$$x_1^{(0)} = x_1(x_{n+1}^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}), \dots, x_n^{(0)} = x_n(x_{n+1}^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}).$$

这个定理的证明有多种方法. 下面用数学归纳法和定理 3 中的消去法来证.

证明概要 对于方程组中方程的个数 n 用数学归纳法, 其中对 $m > n$ 不作其他限制. $n = 1$ 时即定理 2, $n = 2, m = 4$ 时即定理 3. 不难将定理 3 中的 m 从 4 改为大于 n 的任意正整数.

设定理的结论对 $n - 1$ 已经成立, 在这个归纳假设下讨论 n 的情况.

从 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{P_0} \neq 0$, 可见第一行不会都是 0. 不妨假设 $\frac{\partial F_1}{\partial x_1} \Big|_{P_0} \neq 0$, 于是可以用定理 2 于方程组 (1) 的第一个方程 $F_1(x_1, \dots, x_m) = 0$, 知道存在点 P_0 的一个邻域, 使得在这个邻域中存在惟一的连续可微的隐函数

$$x_1 = x_1(x_2, \dots, x_m), \quad (2)$$

满足条件 $x_1^{(0)} = x_1(x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$, 且在其定义域 (点 $(x_2^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ 的一个邻域) 上成立恒等式

$$F_1(x_1(x_2, \dots, x_m), x_2, \dots, x_m) \equiv 0.$$

并由此可以求出

$$\frac{\partial x_1}{\partial x_j} = -\frac{\frac{\partial F_1}{\partial x_j}}{\frac{\partial F_1}{\partial x_1}}, \quad j = 2, \dots, m,$$

现在将 $x_1 = x_1(x_2, \dots, x_m)$ 代入方程组 (1) 的后 $n - 1$ 个方程中, 这样就消去了 x_1 , 得到由 $n - 1$ 个方程组成的新方程组, 改记为

$$\left. \begin{aligned} G_2(x_2, \dots, x_m) &= F_2(x_1(x_2, \dots, x_m), x_2, \dots, x_m) = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ G_n(x_2, \dots, x_m) &= F_n(x_1(x_2, \dots, x_m), x_2, \dots, x_m) = 0, \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

然后用归纳假设. 为此只需要计算 G_2, \dots, G_n 关于 x_2, \dots, x_n 的 Jacobi 行列式.

由 (3) 出发对 $i, j = 2, \dots, n$ 有

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_i}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial x_j} + \frac{\partial F_i}{\partial x_j}.$$

由此就可以看出, 对于 $j = 2, \dots, n$, 在 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)}$ 中将第一列分别乘以 $\frac{\partial x_1}{\partial x_j}$ 加到第 j 列, 并利用上面已经写出的偏导数 $\frac{\partial x_1}{\partial x_j}$ 的表达式, 就可以得到如下等式:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial F_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial F_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & 0 & \dots & 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial G_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_1} & \frac{\partial G_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial G_n}{\partial x_n} \end{vmatrix} = \frac{\partial F_1}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial(G_2, \dots, G_n)}{\partial(x_2, \dots, x_n)}.$$

由此可见, 从 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \Big|_{P_0} \neq 0$ 可以推出新的方程组 (3) 的 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(G_2, \dots, G_n)}{\partial(x_2, \dots, x_n)}$ 在点 $(x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ 不等于 0. 这样就可以用归纳假设于方程组 (3), 并在点 $(x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ 的一个邻域中惟一确定出连续可微的隐函数组 $x_2 = x_2(x_{n+1}, \dots, x_m), \dots, x_n = x_n(x_{n+1}, \dots, x_m)$, 且满足条件 $x_2^{(0)} = x_2(x_{n+1}^{(0)}, \dots, x_m^{(0)}), \dots, x_n^{(0)} = x_n(x_{n+1}^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$.

将上述隐函数组代入 (2) 中的 $x_1 = x_1(x_2, \dots, x_m)$, 得到

$$x_1(x_2(x_{n+1}, \dots, x_m), \dots, x_n(x_{n+1}, \dots, x_m), x_{n+1}, \dots, x_m),$$

这样就确定出 x_1, \dots, x_n 为 x_{n+1}, \dots, x_m 的函数, 并可以验证它们满足定理在 n 时的全部结论. 细节从略. \square

第 T10 次讲稿 (第三学期第 10 次)

第 T10 次讲稿, 用于 2008 年 10 月 7 日, 星期二, 2 节课. (这原为习题课, 因故与本周星期五的大课对换.)

内容: 先讲逆映射存在定理, 然后讲计算.

下面补充一般形式的反函数 (逆映射) 存在定理. 它与定理 4 等价. 在下图中以 $n = 2$ 为例作出了示意图.

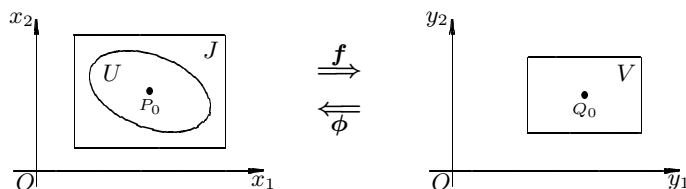


图 1: 逆映射定理的示意图

定理 0.5 给定从点 $P_0(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ 的一个邻域 $D \in \mathbb{R}^n$ 到 \mathbb{R}^n 的连续可微映射 $\mathbf{y} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, 即当 $(x_1, \dots, x_n) \in D$ 时有连续可微的 n 个 n 元函数

$$y_i = f_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, n, \quad (1)$$

且在点 P_0 的 Jacobi 行列式

$$\left. \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right|_{P_0} \neq 0,$$

则存在含有点 P_0 的一个连通开集 $U \subset D$, 使得

- (i) 映射 \mathbf{f} 在 U 上为单射,
- (ii) 在像集 $V = \mathbf{f}(U)$ 上存在连续可微的逆映射 $\mathbf{x} = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{y})$.

证 将 (1) 看成为含 $2n$ 个未知量 $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n$ 的 n 个方程的方程组, 引入记号 $y_i^{(0)} = f_i(x_1^{(0)}, \dots, x_n^{(0)})$ ($i = 1, \dots, n$), 点 $Q_0(y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$, 然后用定理 4, 可知分别存在点 P_0 和 Q_0 的邻域

$$J = \{(x_1, \dots, x_n) \mid |x_i - x_i^{(0)}| < a_i, i = 1, \dots, n\},$$

$$V = \{(y_1, \dots, y_n) \mid |y_i - y_i^{(0)}| < b_i, i = 1, \dots, n\},$$

使得在 \mathbb{R}^{2n} 中点 (P_0, Q_0) 的邻域 $J \times V$ 内存在惟一的连续可微的隐函数组

$$x_1 = \varphi_1(y_1, \dots, y_n), \dots, x_n = \varphi_n(y_1, \dots, y_n),$$

其定义域为 V , 当 $\mathbf{y} \in V$ 时成立恒等式

$$y_i \equiv f_i(\varphi_1(y_1, \dots, y_n), \dots, \varphi_n(y_1, \dots, y_n)), \quad i = 1, \dots, n, \quad (2)$$

且满足 $x_i^{(0)} = \varphi_i(y_1^{(0)}, \dots, y_n^{(0)})$, $i = 1, \dots, n$.

以下记 $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi_1, \dots, \varphi_n)$, $U = \boldsymbol{\varphi}(V)$, 则一定有 $U \subset J$. 我们来证明它们满足定理的结论.

首先, 从 (2) 可见, f 在 $U = \varphi(V)$ 上的作用就是将点 $\varphi(y)$ 映回到 y . 当 $y, y' \in V$ 且 $y \neq y'$ 时, 不可能有 $\varphi(y) = \varphi(y')$, 因此映射 φ 在 V 上是单射. 由于 $U = \varphi(V)$, 因此 f 在 U 上也是单射. 这样 f 和 φ 就实现了 U 和 V 之间的双射, 即互为逆映射, 且有 $V = f(U)$.

下面要证明 U 为开集. 任取点 $P \in U$, 我们要证明 P 是 U 的内点.

由于 U 与 V 的双射关系, 点 $f(P) = Q \in V$. 利用 f 在点 P 连续, 对 $\varepsilon > 0$, 且不妨设 $O_\varepsilon(Q) \subset V$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $x \in O_\delta(P)$ 时, 就有 $y = f(x) \in O_\varepsilon(Q)$. 由于总可以取

$$O_\delta(P) \subset J,$$

利用在 $J \times V$ 上满足方程组 $y = f(x)$ 的隐函数组的惟一性, 因此从 $y = f(x)$, $y \in V$ 和 $x \in J$ 就推出 $x = \varphi(y)$. 这样就证明了 $O_\delta(P)$ 中的每个 x 都是 $\varphi(y)$, 其中 $y \in V$, 即有 $x \in U$. 这表明 $O_\delta(P) \subset U$, 即 U 中每一个点都是内点.

最后利用 φ 连续, 因此从 V 连通即可推出 $U = \varphi(V)$ 连通^①. 这样就完成了 U 是连通开集 (即区域) 的证明. \square

注 1 这里需要指出: 与一元函数中的反函数存在定理有截然不同之处, 即当 $n > 1$ 时的逆映射存在定理只能是局部性质的.

对 $n = 1$ 来说, 若 $y = f(x)$ 在区间 I 上处处可微, 且 $f'(x)$ 处处不等于 0, 则它必定保号, 从而 $y = f(x)$ 在区间 I 上一定严格单调, 于是反函数 $x = f^{-1}(y)$ 在区间 $f(I)$ 上整体存在.

但以下例子表明, 对 $n = 2$ 来说, 即使在区域的每一个点处定理 5 的条件都满足, 仍然不足以保证大范围的逆映射存在.

例如设在区域 $D = \{(x, y) \mid 0 < x^2 + y^2 < 1\}$ 上有映射

$$f: u = x^2 - y^2, v = 2xy,$$

则从 $u^2 + v^2 = (x^2 + y^2)^2$ 可知 $0 < u^2 + v^2 < 1$, 而且可以证明 $f(D) = \{(u, v) \mid 0 < u^2 + v^2 < 1\}$. 又可以计算出 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 2x & -2y \\ 2y & 2x \end{vmatrix} = 4(x^2 + y^2) \neq 0 \quad \forall (x, y) \in D$$

可知, 对于 D 中每一个点来说, 映射 f 局部都存在逆映射. 但在整个 D 上来看, f 不可能有逆映射. 为此用极坐标 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, u = \rho \cos \varphi, v = \rho \sin \varphi$, 就发现有

$$\rho = r^2, \varphi = 2\theta,$$

因此 f 是从 D 到 $f(D)$ 的二对一的映射.

^① 这只是比教科书 p.25 的定理 2 广一点.

注 2 可以简要地介绍如何从逆映射存在定理证明一般情况的隐函数存在定理, 即从定理 5 证明定理 4.

对于定理 4 中给定的方程 $F_i(x_1, \dots, x_m) = 0, i = 1, \dots, n, m > n$, 构造从 \mathbb{R}^m 的点 $P_0(x_1^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ 到 \mathbb{R}^m 的映射 $y = f(x)$:

$$y_i = F_i(x), i = 1, \dots, n,$$

$$y_j = x_j, j = n+1, \dots, m.$$

记点 $f(P_0) = (0, \dots, 0, x_{n+1}^{(0)}, \dots, x_m^{(0)})$ 为 Q_0 , 则就可见 f 在点 P_0 的 Jacobi 行列式等于 $\frac{\partial(F_1, \dots, F_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \neq 0$, 因此满足定理 5 的条件. 于是就可以推出存在 P_0 的邻域 J 和 Q_0 的邻域 V , 使得对每一个点 $y \in V$, 存在惟一的点 $x \in J$, 使得满足 $y = f(x)$. 特别将 y 的前 n 个坐标为 0, 这样就可以得到定理 4 所要求的隐函数组. 细节从略.

不妨用上述方法回顾定理 1, 对于方程 $F(x, y) = 0$, 可以定义从 (x_0, y_0) 的一个邻域到 (u, v) 的映射:

$$u = F(x, y), v = x.$$

这时根据定理 1 的条件, Jacobi 行列式 $\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} F_x & F_y \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ 在点 (x_0, y_0) 处不等于 0, 因此在 $u = 0, v = x_0$ 的一个邻域到 (x_0, y_0) 的一个邻域上存在惟一的逆映射 $x = x(u, v), y = y(u, v)$. 由惟一性可见 $x = x(u, v) = v$, 而 $y = y(0, x)$ 就提供了定理 1 所要求的隐函数. 细节从略.

这里还需要介绍变量代换中需要的一个结论. 即在定理的条件满足时, 在恒等式 (2) 的两边对 $y_i (i = 1, \dots, n)$ 求偏导, 就得到矩阵等式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{pmatrix},$$

其中将原映射的偏导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 改记为 $\frac{\partial y_i}{\partial x_j}$, 将逆映射的偏导数 $\frac{\partial \varphi_i}{\partial y_j}$ 改记为 $\frac{\partial x_i}{\partial y_j}$.

对上述矩阵等式的两边取它们的行列式, 就得到关于正映射和逆映射的 Jacobi 行列式之间的重要等式:

$$1 = \frac{\partial(y_1, \dots, y_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \cdot \frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(y_1, \dots, y_n)},$$

这在今后的变量代换的 Jacobi 行列式的计算中是有用的.

补充例题 对于从 uv 平面到 xy 平面的映射

$$x = u + v, y = u^2 + v^2$$

讨论逆映射的存在性.

解 写出 x, y 关于 u, v 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2u & 2v \end{pmatrix},$$

可见对于 $u_0 \neq v_0$ 的点 (u_0, v_0) , 可以用逆映射定理知道, 存在点 (u_0, v_0) 的一个邻域 U , 使得给定的映射成为该邻域到 xy 平面上的点 $(u_0 + v_0, u_0^2 + v_0^2)$ 的一个邻域 V 上的双射, 从而在邻域 V 上存在逆映射 $u = u(x, y), v = v(x, y)$. (这里的邻域 U 和 V 都不必是圆邻域.)

然而对于满足 $u_0 = v_0$ 的点 (u_0, v_0) , 就不能再用逆映射定理. 当然它只是存在局部逆映射的一个充分条件. 在条件不满足时不能提供什么结论.

由于本题的映射非常简单, 因此不难直接研究映射表达式得到结论.

首先, 从映射关于 u, v 的对称性, 当 $u \neq v$ 时, uv 平面上的两个不同点 (u, v) 和 (v, u) 一定映射到 xy 平面上的同一个点, 即所谓二对一映射. 当 $u = v$ 时则直接可见该映射将 uv 平面上的直线 $u = v$ 一对一地映射为 xy 平面上的抛物线 $y = \frac{1}{2}x^2$. 在图 2 中的左分图中以粗黑直线表出直线 $u = v$, 在右分图中用粗黑线描出上述抛物线. 同时左分图中以 $u = v$ 为边界的两个半平面均映射成为右分图中处于抛物线上方的闭区域, 这可以从 Cauchy 不等式得到:

$$|x| = |1 \cdot u + 1 \cdot v| \leq \sqrt{2}\sqrt{u^2 + v^2} = \sqrt{2y},$$

从而有 $y \geq \frac{1}{2}x^2$.

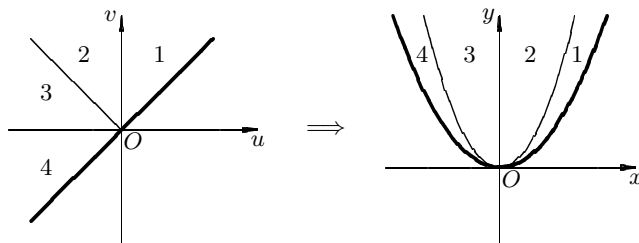


图 2: 由 $x = u + v, y = u^2 + v^2$ 定义的映射

不难进一步看出, 在图 2 左分图中若只考虑直线 $u = v$ 的左上方的半平面, 并用坐标轴和 $u + v = 0$ 将它分成 4 个子区域, 则就分别映射为右分图中的 4 个子区域. 其中的细曲线是抛物线 $y = x^2$, 即 $u + v = 0$ 的像. 映射实现了左分图的半闭平面和右分图的 $S = \{(x, y) \mid y \geq \frac{1}{2}x^2\}$ 之间的一一对应. 将定义域限制在 S 上, 则分别存在到左边的两个半平面的逆映射.

特别对于满足 $u_0 = v_0$ 的点 (u_0, v_0) 来说, 在它的邻域中, 由满足 $u = v$ 的直线段分成的两个开集 (半邻域) 同时映射到上述 S 内的一个开集上 (可以写出其边界的表达式). 无论该邻域取得多么小, 都不能实现到 xy 上的一一映射.

下面介绍计算, 其中注意学习全微分方法.

例题 0.1 给定方程组 $\begin{cases} u^2 + v^2 + x^2 + y^2 = 1, \\ u - v + xy = 0, \end{cases}$ 试确定适当的条件使得:

- (1) 由方程组可以惟一确定 u, v 是 x, y 的可微函数,
- (2) 由方程组可以惟一确定 u, x 是 v, y 的可微函数^①.

解 记 $F(u, v, x, y) = u^2 + v^2 + x^2 + y^2 - 1$, $G(u, v, x, y) = u - v + xy$, 求出 F, G 关于 u, v, x, y 的 Jacobi 矩阵如下:

$$\begin{pmatrix} 2u & 2v & 2x & 2y \\ 1 & -1 & y & x \end{pmatrix},$$

就可以得到

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(u, v)} = -2(u + v), \quad \frac{\partial(F, G)}{\partial(u, x)} = 2uy - 2x = 2(uy - x).$$

用定理 3 可知, 在 $u + v \neq 0$ 时, 可以惟一确定 u, v 为 x, y 的可微函数; 而当 $x - uy \neq 0$ 时, 可以惟一确定 u, x 是 v, y 的可微函数. \square

四. 微分表达式的变量代换

例题 0.2 对于二阶偏微分方程

$$\frac{1}{(x+y)^2} \left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{(x+y)^3} \left(\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \right) = 0$$

作自变量代换 $u = xy, v = x - y$.

解 1 设 $z = z(x, y)$ 二阶连续可偏导, 且是方程的解, 则问题就是要将 z 关于 x, y 的一阶和二阶偏导数用 $u, v, \frac{\partial z}{\partial u}, \dots$ 等表出, 然后代入方程就得到以 u, v 为自变量的偏微分方程. 这里因变量 z 不变.

以 u, v 为中间变量, 即 $z = z(u(x, y), v(x, y))$, 用链式法则就有

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x},$$

这里的观点是将 u, v 作为中间变量, 即从 $z(u(x, y), v(x, y))$ 将 z 看成为 x, y 的函数. 由于已经显式给出了 $u = xy, v = x - y$, 因此从上述计算就可以得到

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y \frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial v}.$$

同样有

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x \frac{\partial z}{\partial u} - \frac{\partial z}{\partial v}.$$

然后就可以计算出二阶偏导数:

^① 这里的惟一性应当按照隐函数存在定理中的内容来理解.

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= y \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} y + \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} y + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\
&= y^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2y \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial z}{\partial u} + y \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} x - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right) + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u} x - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\
&= xy \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + (x-y) \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} - \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} + \frac{\partial z}{\partial u}, \\
\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= x \left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} x - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \right) - \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} x + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\
&= x^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 2x \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}.
\end{aligned}$$

然后计算出

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} &= (x+y)^2 \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 2 \frac{\partial z}{\partial u}, \\
\frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} &= (x+y) \frac{\partial z}{\partial u}.
\end{aligned}$$

代入方程后得到 $\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{(x+y)^2} \frac{\partial z}{\partial u} = 0$. 利用 $(x+y)^2 = v^2 + 4u$, 最后得到所求的偏微分方程为

$$\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{v^2 + 4u} \frac{\partial z}{\partial u} = 0. \quad \square$$

解 2 (全微分法) 这里用 Lagrange 的偏导数记号. 写出 x, y 为自变量时的一阶全微分

$$dz = z_x dx + z_y dy = z_u du + z_v dv,$$

可见只要令 $dx = dy = 1$, 就可以将 $z_x + z_y$ 用 u, v, du, dv 表示出来. 利用 $u = xy, v = x - y$, 就可以计算出 $du = ydx + xdy$, $dv = dx - dy$, 当 $dx = dy = 1$ 时得到 $du = x + y$, $dv = 0$, 因此

$$z_x + z_y = dz = z_u(x+y).$$

同样写出 x, y 为自变量, u, v 为中间变量的二阶全微分

$$\begin{aligned}
d^2 z &= z_{xx} dx^2 + 2z_{xy} dx dy + z_{yy} dy^2 \\
&= z_{uu} du^2 + 2z_{uv} du dv + z_{vv} dv^2 + z_u d^2 u + z_v d^2 v,
\end{aligned}$$

令 $dx = 1, dy = 1$, 就可将 $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy}$ 用 $u, v, z_u, z_v, z_{uu}, z_{uv}, z_{vv}$ 表出. 从 $du = ydx + xdy$ 和 $dv = dx - dy$ 即可求出 $d^2 u = 2 dx dy = 2$, $d^2 v = 0$, 因此得到

$$z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = d^2 z = z_{uu}(x+y)^2 + 2z_u.$$

合并以上结果就得到

$$\frac{1}{(x+y)^2} (z_{uu}(x+y)^2 + 2z_u) - \frac{1}{(x+y)^2} z_u = z_{uu} + \frac{1}{(x+y)^2} z_u = 0,$$

即得到与解 1 相同的结果. \square

第 T11 次讲稿 (第三学期第 11 次)

第 T11 次讲稿, 用于 2008 年 10 月 8 日, 星期三, 3 节课.

内容: 讲计算, 结束第十九章. 然后开始第二十章, 即偏导数的应用.

例题 0.3 对于微分表达式 $z_x^2 + z_y^2$ 作变量代换

$$x = uv, \quad y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2),$$

求代换后的表达式.

解 1 目的是要将 z_x, z_y 用 u, v, z_u, z_v 等表示出来. 以 u, v 为中间变量, 即 $z = z(u(x, y), v(x, y))$, 写出

$$z_x = z_u u_x + z_v v_x,$$

$$z_y = z_u u_y + z_v v_y,$$

则需要求出 u, v 关于 x, y 的偏导数. 而 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 是由两个方程 $x = uv, y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ 确定的. 将 $u = u(x, y), v = v(x, y)$ 代入得到 x, y 的恒等式, 然后对 x 求偏导, 得到

$$1 = u_x v + v_x u, \quad 0 = u u_x - v v_x,$$

这样就可以解出

$$u_x = \frac{v}{u^2 + v^2}, \quad v_x = \frac{u}{u^2 + v^2}.$$

同样有对 y 求偏导得到的方程组

$$0 = u_y v + u v_y, \quad 1 = u u_y - v v_y,$$

并解出

$$u_y = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad v_y = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

最后将它们代入前面的 z_x, z_y 的表达式中, 平方相加, 就得到

$$z_x^2 + z_y^2 = \frac{1}{u^2 + v^2} (z_u^2 + z_v^2). \quad \square$$

解 2 在解 1 中是从 $z = z(u(x, y), v(x, y))$ 出发对 x, y 求偏导. 现在采取不同的观点, 将 x, y 作为中间变量, 则有

$$z = z(x(u, v), y(u, v)),$$

然后对 u, v 求偏导. 这样就有

$$z_u = z_x x_u + z_y y_u, \quad z_v = z_x x_v + z_y y_v,$$

由于题中给定了 x, y 为 u, v 的函数, 因此直接可以得到

$$z_u = v z_x + u z_y, \quad z_v = u z_x - v z_y,$$

这样就有

$$z_u^2 + z_v^2 = (u^2 + v^2)(z_x^2 + z_y^2),$$

即得到与解 1 相同的结果. \square

例题 0.4 选择常数 α 和 β , 使得方程

$$az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} = 0$$

在线性代换

$$u = x + \alpha y, \quad v = x + \beta y$$

之后尽可能简单. 其中设 $b^2 - ac = 0, c \neq 0$.

解 按照 $z = z(u(x, y), v(x, y))$ 计算 z 关于 x, y 的一阶和二阶偏导数:

$$z_x = z_u + z_v,$$

$$z_y = z_u\alpha + z_v\beta,$$

$$z_{xx} = z_{uu} + 2z_{uv} + z_{vv},$$

$$\begin{aligned} z_{xy} &= z_{uu}\alpha + z_{uv}\beta + z_{vu}\alpha + z_{vv}\beta \\ &= \alpha z_{uu} + (\alpha + \beta)z_{uv} + \beta z_{vv}, \end{aligned}$$

$$z_{yy} = z_{uu}\alpha^2 + 2z_{uv}\alpha\beta + z_{vv}\beta^2.$$

代入方程中得到

$$\begin{aligned} az_{xx} + 2bz_{xy} + cz_{yy} &= (a + 2b\alpha + c\alpha^2)z_{uu} + (2a + (\alpha + \beta)2b + c2\alpha\beta)z_{uv} \\ &\quad + (a + 2b\beta + c\beta^2)z_{vv} = 0. \end{aligned}$$

利用条件 $b^2 - ac = 0, c \neq 0$, 可知只要取 $\alpha = -b/c$, 就可以使得 z_{uu} 的系数为 0. 同时 z_{uv} 的系数为

$$2a + (\alpha + \beta)2b + 2c\alpha\beta = 2\beta(c\alpha + b) + 2a + 2b\alpha = 2(a - \frac{b^2}{c}) = 0,$$

因此只要任取 $\beta \neq -\frac{b}{c}$, 就可以将原来的方程化简为

$$z_{vv} = 0. \quad \square$$

以下两个例题中不仅自变量作代换, 而且因变量也参与代换.

例题 0.5 在方程 $z_{xx} + 2z_{xy} + z_{yy} = 0$ 中, 作代换

$$u = x + y, \quad v = x - y, \quad w = xy - z,$$

将 w 看作 u, v 的函数, 求其满足的方程.

解 1 以 u, v 为中间变量, 则有

$$z = xy - w(u(x, y), v(x, y)),$$

这样就可以将 z 关于 x, y 的一阶和二阶偏导数用 w 关于 u, v 的偏导数表示出来.

利用 $u = x + y, v = x - y$, 就有

$$z_x = y - w_u - w_v,$$

$$z_y = x - w_u + w_v,$$

然后有

$$z_{xx} = -w_{uu} - w_{uv} - w_{vu} - w_{vv} = -w_{uu} - 2w_{uv} - w_{vv},$$

$$z_{xy} = 1 - w_{uu} + w_{uv} - w_{vu} + w_{vv} = 1 - w_{uu} + w_{vv},$$

$$z_{yy} = -w_{uu} + 2w_{uv} - w_{vv}.$$

代入方程就可得到 $2 - 4w_{uu} = 0$, 即

$$w_{uu} = \frac{1}{2}. \quad \square$$

解 2 (全微分法) 利用方程的表达式可见, 只要在 $z = z(x, y)$ 的二阶全微分表达式

$$d^2z = z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2$$

中令 $dx = dy = 1$ 就可以得到.

现在将 $w = xy - z$ 看成为 $w(u(x, y), v(x, y))$, 然后计算

$$dw = ydx + xdy - dz,$$

$$d^2w = 2dxdy - d^2z$$

可见令 $dx = dy = 1$ 后方程成为 $d^2w - 2 = 0$.

以下按照 $w = w(u, v)$ 来计算 d^2w . 这时有

$$d^2w = w_{uu}du^2 + 2w_{uv}dudv + w_{vv}dv^2 + w_u du^2 + w_v dv^2,$$

由于当 $dx = dy = 1$ 时有 $du = dx + dy = 2$, $dv = dx - dy = 0$, $d^2u = d^2v = 0$ (这里利用了 u, v 为 x, y 的线性函数), 因此得到 $d^2w = 4w_{uu}$.

合并以上结果得到 $4w_{uu} = 2$, 即与解 1 相同. \square

例题 0.6 在方程 $(xy + z)z_x + (1 - y^2)z_y = x + yz$ 中作代换

$$u = yz - x, \quad v = xz - y, \quad w = xy - z,$$

并将 w 看成为 u, v 的函数, 求其偏微分方程.

解 1 从 $z = xy - w$ 出发, 以 u, v 为中间变量, 则有

$$z_x = y - w_u u_x - w_v v_x = y - w_u(yz_x - 1) - w_v(z + xz_x),$$

$$z_y = x - w_u u_y - w_v v_y = x - w_u(z + yz_y) - w_v(xz_y - 1),$$

然后从中解出

$$z_x = \frac{y + w_u - zw_v}{1 + yw_u + xw_v},$$

$$z_y = \frac{x - zw_u + w_v}{1 + yw_u + xw_v}.$$

将以上两个表达式代入方程, 即得到 $w_v = 0$. \square

解 2 (全微分法) 利用一阶微分的形式不变性, 写出

$$du = -dx + zdy + ydz,$$

$$dv = zdx - dy + zdz,$$

$$dw = ydx + xdy - dz.$$

这样就可以写出

$$\begin{aligned} dz &= y dx + x dy - w_u du - w_v dv \\ &= y dx + x dy - w_u(-dx + z dy + y dz) - w_v(z dx - dy + x dz), \end{aligned}$$

然后整理成

$$(1 + yw_u + xw_v)dz = (y + w_u - zw_v)dx + (x - zw_u + w_v)dy,$$

就得到 z_x 和 z_y . 以下同解 1. \square

解 3 (全微分法) 在解 2 中的 du 等表达式中代入 $dz = z_x dx + z_y dy$, 然后改写为

$$\begin{aligned} dw &= (y - z_x)dx + (x - z_y)dy, \\ du &= (-1 + yz_x)dx + (z + yz_y)dy, \\ dv &= (z + xz_x)dx + (-1 + xz_y)dy. \end{aligned}$$

则可以看出下列行列式等于 0:

$$\begin{vmatrix} dw & y - z_x & x - z_y \\ du & -1 + yz_x & z + yz_y \\ dv & z + xz_x & -1 + xz_y \end{vmatrix}.$$

这样就可以写出 dw 为 du 和 dv 的线性组合, 它们的系数就是 w_u 和 w_v . 特别是上述行列式中 dv 的余子式恰好等于 0, 因此即有 $w_v = 0$. \square

第二十章 偏导数的应用

§20.1 偏导数在几何上的应用

一. 曲线的切向量、切线和法平面

首先是回顾三维空间中曲线的内容. 教科书上册 §8.5, 最近的 §17.2 的例题 1, 都有这方面的内容, 这里再重复一下.

三维空间曲线的参数表示形式为

$$x = x(t), y = y(t), z = z(t), \quad a \leq t \leq b,$$

其中当 $x(t), y(t), z(t)$ 分别在 $[a, b]$ 连续时称曲线为连续曲线. 又若 $x(t), y(t), z(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微, 且 $x'(t), y'(t), z'(t)$ 不同时为 0, 则称为光滑曲线. 一般还加上不自交的条件, 这等价于从 $[a, b]$ 到 $(x(t), y(t), z(t))$ 的映射为单射. 由此可见, 曲线是一维区间的同胚象. (至少应当在逆映射存在定理处引入同胚概念, 若能更早一些更好.)

以上曲线的向量表示为

$$\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b,$$

且当 $x(t), y(t), z(t)$ 可导时, 在它们不同时等于 0 的条件下就得到该曲线的切向量

$$\mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j} + z'(t)\mathbf{k}, \quad a \leq t \leq b.$$

由此即可作出曲线上某点处的切线方程和法平面方程.

例题 0.7 求螺旋线 $l: x = a \cos t, y = a \sin t, z = ct$ 在点 $(a, 0, 0)$ 的切线方程和法平面方程. (参见图 1, 其中设 $a > 0, c > 0$.)

解 在螺旋线 l 上任意点的切向量是

$$\boldsymbol{\tau} = (-a \sin t, a \cos t, c),$$

点 $(a, 0, 0)$ 对应的参数 $t = 0$. 这时切向量 $\boldsymbol{\tau}|_{t=0} = (0, a, c)$, 因此螺旋线在点 $(a, 0, 0)$ 的切线方程是

$$\frac{x-a}{0} = \frac{y-0}{a} = \frac{z-0}{c}.$$

也可以写为直线的参数形式:

$$x = a, y = at, z = ct,$$

或者写为两张平面 $x = a, cy - az = 0$ 的交线. (在图 1 中作出了过点 $(a, 0, 0)$ 的切线, 它在平面 $x = a$ 上.)

从切向量 $(0, a, c)$ 即可写出过点 $(a, 0, 0)$ 的法平面方程为 $ay + cz = 0$. (这个平面方程中不出现 x , 这表明该平面含有 x 轴. 在图 1 中作出了上述切线与法平面供参考.) □

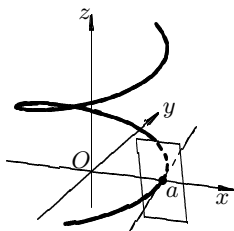


图 1: 螺旋线在某点的切线

如上题中的切线就可以写为参数形式,也可以写为两张平面的交线,在三维空间中用两张曲面的交线来确定曲线的例子也很多.下面我们来研究在这种表示方式中如何计算曲线的切线和法平面.

设给定两个由方程

$$F(x, y, z) = 0, \quad G(x, y, z) = 0$$

描述的曲面,并考虑它们的交.

如同在隐函数问题(那就是 $z - F(x, y) = 0$ 与 $z = 0$ 的交线问题)中那样,假定 F, G 是连续函数,且已经对某点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 满足

$$F(x_0, y_0, z_0) = 0, \quad G(x_0, y_0, z_0) = 0.$$

我们的问题是方程组 $F = G = 0$ 是否在点 P_0 邻近确定一条连续曲线,或光滑曲线.这里当然需要一定的条件,为此我们用隐函数存在定理.如同在三个变量两个方程的情况那样,设 F, G 在点 P_0 邻近连续可偏导,写出它们在点 P_0 处的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{pmatrix} \Big|_{P_0},$$

并假设该矩阵的秩为 2,即至少有一个二阶子式不等于 0.不失一般性,设有

$$\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \Big|_{P_0} \neq 0,$$

则就可以用方程组的隐函数存在定理,在点 P_0 的某个邻域中可以惟一确定隐函数

$$y = y(x), \quad z = z(x),$$

且是连续可微的.在三维空间中这两个方程分布是母线平行于 z 轴和 y 轴的两个柱面.

在几何上这代表了一条光滑曲线,它以在点 x_0 的某一个邻域中的 x 为参数,方程就是

$$x = x, \quad y = y(x), \quad z = z(x).$$

它的切向量是

$$\tau = (1, y'(x), z'(x)),$$

可以用隐函数求导法得到.具体来说,将隐函数代入方程,得到关于 x 的两个恒等式 $F(x, y(x), z(x)) \equiv 0, G(x, y(x), z(x)) \equiv 0$,然后写出全微分,就有

$$dF = F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0,$$

$$dG = G_x dx + G_y dy + G_z dz = 0.$$

将上述两式两边除以 dx ,就成为关于 $y'(x)$ 和 $z'(x)$ 的线性方程组,

$$F_y y'(x) + F_z z'(x) = -F_x,$$

$$G_y y'(x) + G_z z'(x) = -G_x.$$

利用前述条件, 可知在 $x = x_0$ 邻近, Jacobi 行列式 $\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)} \neq 0$. 从而可以解出

$$y'(x) = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(z, x)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}, \quad z'(x) = \frac{\frac{\partial(F, G)}{\partial(x, y)}}{\frac{\partial(F, G)}{\partial(y, z)}}.$$

这样就确定了曲线的切方向向量 $(1, y'(x), z'(x))$.

另一个方法是引入以下两个向量:

$$\mathbf{r}_1 = (F_x, F_y, F_z), \quad \mathbf{r}_2 = (G_x, G_y, G_z),$$

即上述 Jacobi 矩阵的两个行向量. 该矩阵的秩为 2 表明这两个向量不相关. 从前面的推导可见曲线的切方向 $\boldsymbol{\tau} = (1, y'(x), z'(x))$ 与它们都正交. 从而就可以得到

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2 = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}.$$

在相差一个常数因子的意义上这与上面的结果是一致的.

例题 0.8 求两柱面 $x^2 + y^2 = 1, x^2 + z^2 = 1$ 的交线在点 $P_0(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ 的切线方程和法平面方程 (参见图 2).

解 1 从方程组可以直接解出 y, z 为 x 的函数.

对于点 P_0 , 取 $0 \leq x \leq 1$ 即可, 这样就有

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad z = \sqrt{1 - x^2}.$$

这样就可以计算出 $(1, y'(x), z'(x))$, $0 < x \leq 1$. 用

$x = 1/\sqrt{2}$ 代入得到切向量

$$\boldsymbol{\tau} = (1, -\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}).$$

为方便起见, 可以改取 $\boldsymbol{\tau} = (1, -1, -1)$.

于是切线方程为

$$\frac{x - \frac{1}{\sqrt{2}}}{1} = \frac{y - \frac{1}{\sqrt{2}}}{-1} = \frac{z - \frac{1}{\sqrt{2}}}{-1},$$

同时法平面方程为

$$(x - \frac{1}{\sqrt{2}}) - (y - \frac{1}{\sqrt{2}}) - (z - \frac{1}{\sqrt{2}}) = x - y - z + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0. \quad \square$$

解 2 用参数方程也很方便. 令

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \sin t, \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{2},$$

当 $t = \frac{\pi}{4}$ 时得到点 P_0 . 就可以得到 $\boldsymbol{\tau} = (1, -1, -1)$. 其余同前. \square

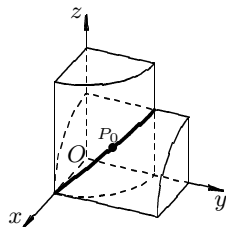


图 2: 两个柱面正交的曲线

解3 记 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1$, $G(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1$, 则得到 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}.$$

由于在点 P_0 处三个二阶子式都不等于 0, 因此可以在该点的邻域中惟一确定曲线 l , 它可以用三个变量中的任何一个作为参数. 从

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{vmatrix} = 4xyi - 4x^2j - 4xyk$$

可见在点 P_0 可将切向量取为 $\tau = (1, -1, -1)$. 其余同前. \square

注 如下图所示是由两个圆柱 $x^2 + y^2 \leq 1$ 和 $x^2 + z^2 \leq 1$ 正交的公共部分, 它在古代中国数学中称为牟合方盖, 是由刘徽首先提出的.

左分图中用粗黑曲线描出例题中的曲线

$$x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + z^2 = 1,$$

其余的细线是牟合方盖与三个坐标面的交线. 为表示牟合方盖的常见形状, 左分图中的直角坐标轴的位置与平时所取的位置不同. 在右分图中则用粗黑线表示牟合方盖的轮廓线, 并去掉看不到的虚线.

由图可见在例题的曲线中有自交点 $(1, 0, 0)$ 和 $(-1, 0, 0)$. 若将曲线方程写为 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ 和 $G(x, y, z) = x^2 + z^2 - 1 = 0$, 则其 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 2x & 0 & 2z \end{pmatrix}$$

在这两个点处的秩等于 1, 因此隐函数定理失效. 而从自交点的存在可以知道在这两个点的邻域方程 $F = G = 0$ 也确实不能确定经过它们的曲线.

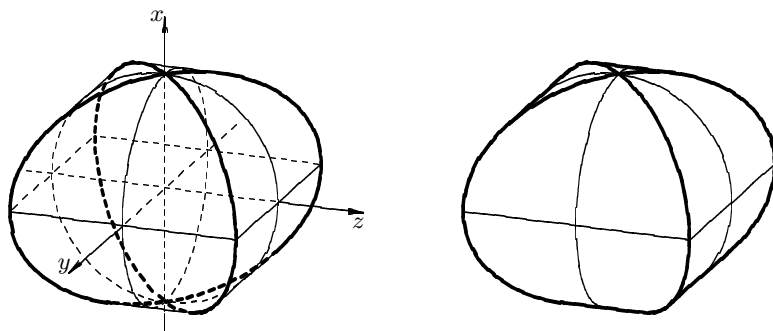


图 3: 牟合方盖的示意图

二. 曲面的法向量、法线和切平面

首先注意, 曲面在某个点处的法向量、法线和切平面实际上是一回事. 若知道法向量 \mathbf{n} , 也就可以写出曲面在该点的法线方程和切平面方程. 反之, 如有法线方程或切平面方程, 也就可以从中读出法向量 \mathbf{n} .

曲面的数学表示有几种方式. 我们讲过去最熟悉的曲面表示作为第一种.

(i) 由 $z = f(x, y)$ 给定的曲面, 在 §18.2 已经介绍了法向量和切平面等内容. 这一小节将对于以其他方式给出的曲面介绍法向量、法线和切平面的计算方法.

本小节主要介绍曲面的另外两种表示方式.

(ii) 由方程 $F(x, y, z) = 0$ 给定的曲面.

根据隐函数理论, 设在某点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 处 $F(P_0) = 0$. 若 F 在该点连续可微, 且 $F_z(P_0) \neq 0$, 则从隐函数存在定理知道在点 P_0 的一个邻域中存在惟一的隐函数 $z = f(x, y)$, 满足 $z_0 = f(x_0, y_0)$, f 于 (x_0, y_0) 的一个邻域内连续可微, 且有偏导数公式

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}.$$

于是我们已经将情况 (ii) 归结为情况 (i). 按照教科书 p.45 第四行的公式, 就知道法向量为

$$\mathbf{n} = \pm \left(-\frac{F_x}{F_z}, -\frac{F_y}{F_z}, -1 \right) \Big|_{P_0}.$$

或者写成对称的形式, 即

$$\mathbf{n} = \pm (F_x, F_y, F_z) \Big|_{P_0}.$$

这时在 $F_x(P_0), F_y(P_0), F_z(P_0)$ 中只要有一个不等于 0 都可以得到相同的结果.

更为方便的计算方法是对于 $F(x, y, f(x, y)) \equiv 0$ 求全微分, 得到

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0.$$

令 $x = x_0, y = y_0, z = f(x_0, y_0) = z_0$ 代入, 且改写 $dx = x - x_0, dy = y - y_0, dz = z - z_0$, 就得到过 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 的切平面方程

$$F_x(P_0)(x - x_0) + F_y(P_0)(y - y_0) + F_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

这与上面的结果相同.

注 这里要注意, 同样的一个等式

$$F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0,$$

在曲线和曲面两种情况的意义是不同的.

对于由 $F(x, y, z) = 0$ 和 $G(x, y, z) = 0$ 确定的曲线, 如前所说在一定的条件下有 $y = y(x), z = z(x)$, 因此 $dy = y'(x) dx, dz = z'(x) dx$. 代入上式得到

$$F_x + F_y y'(x) + F_z z'(x) = 0,$$

它的意义是向量 (F_x, F_y, F_z) 与切向量正交. 若将 dx, dy, dz 改写为 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$, 则 $dy = y'(x) dx, dz = z'(x) dx$ 就是切线方程, 点 (x, y, z) 在切线上.

对于由 $F(x, y, z) = 0$ 确定的曲面, 如前所说在一定的条件下有 $z = f(x, y)$, 因此有 $dz = z_x dx + z_y dy$. 若将

$$z_x = -\frac{F_x}{F_z}, \quad z_y = -\frac{F_y}{F_z}$$

代入, 就得到等价的等式 $F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$.

另一方面, 若将 dx, dy, dz 改写为 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$, 则 $dz = z_x dx + z_y dy$ 就是切平面. 因此同样在 $F_x dx + F_y dy + F_z dz = 0$ 中将 dx, dy, dz 改写为 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$, 则也得到切平面方程, 而点 (x, y, z) 在切平面上也就是向量 $(x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ 在切平面上.

第 T12 次讲稿 (第三学期第 12 次)

第 T12 次讲稿, 用于 2008 年 10 月 15 日, 星期三, 3 节课.

内容: 第二十章, 偏导数的应用. 从双参数曲面表示开始, 接下去是方向导数, 梯度, Taylor 公式. 极值可开一个头.

(iii) 以双参数形式给出的曲面方程为

$$x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v),$$

其中 (u, v) 就是给出曲面的两个参数. 设上述三个函数在 uv 平面上的一个区域 D 上有定义, 并对 u, v 存在连续偏导数.

如果将地球看为中心取为原点的一个球体, 则球面上的经纬度就是球面的双参数形式. 但在数学上则用球面坐标 φ, θ 将球心在原点半径为 R 的球面表示为

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, y = R \sin \varphi \sin \theta, z = R \cos \varphi.$$

(注意要区分开球坐标和球面坐标, 它们的含义是不同的.)

一般而言, 以 u, v 为自变量的三个函数 $x = x(u, v), y = y(u, v), z = z(u, v)$ 是否能够在空间的某个点的邻近确定某个曲面, 这可以用隐函数理论解决.

设由参数点 $(u_0, v_0) \in D$ 确定三维空间的某一个点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 其中 $x_0 = x(u_0, v_0), y_0 = y(u_0, v_0), z_0 = z(u_0, v_0)$. 写出 x, y, z 关于 u, v 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \\ z_u & z_v \end{pmatrix},$$

并设在 (u_0, v_0) 处矩阵的秩为 2. 例如, 这时设子式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Big|_{(u_0, v_0)} \neq 0,$$

则就可从 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 在点 (u_0, v_0, x_0, y_0) 的一个邻域内惟一确定出反函数组 $u = u(x, y), v = v(x, y)$, 满足 $u_0 = u(x_0, y_0), v_0 = v(x_0, y_0)$. 这样就得到曲面方程

$$z = z(u(x, y), v(x, y)),$$

且经过点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

为了求曲面的法向量或切平面, 可以用 §18.2 中的切平面的思想. 这就是固定 $v = v_0$, 则 $x = x(u, v_0), y = y(u, v_0), z = z(u, v_0)$ 确定了曲面上的一条参数曲线, 它在点 P_0 的切向量是

$$\tau_u = (x_u, y_u, z_u) \Big|_{u=u_0, v=v_0}.$$

同样固定 $u = u_0$, 则 $x = x(u_0, v), y = y(u_0, v), z = z(u_0, v)$ 确定了曲面上的一条参数曲线, 它的点 P_0 切向量是

$$\tau_v = (x_v, y_v, z_v) \Big|_{u=u_0, v=v_0}.$$

根据 §18.2 中刻画切平面特征的定理 2 (教科书 p.45), 在曲面于点 P_0 有切平面时 (即 $z = z(x, y)$ 于 (x_0, y_0) 可微), 经过该点的任意一条光滑曲线的切向量都在该切平面上. 于是上述 τ_u 和 τ_v 都在该切平面上, 也就是与切平面的法向量正交.

由于 τ_u 和 τ_v 就是前述 Jacobi 矩阵的两个列向量, 因此在该矩阵于点 (u_0, v_0) 的秩为 2 的前提下, 向量 τ_u 和 τ_v 线性无关, 因此它们的向量积 $\tau_u \times \tau_v$ 就完全决定了切平面的法方向向量 \mathbf{n} . 这样就得到公式

$$\mathbf{n} = \pm \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix}.$$

另一种方法是全微分法, 它直接确定切平面, 然后从切平面方程中看出其法向量, 并可写出法线方程. (这与上面的方法恰好相反.)

首先从前面的三个方程 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ 写出方程组

$$dx = x_u du + x_v dv,$$

$$dy = y_u du + y_v dv,$$

$$dz = z_u du + z_v dv.$$

然后将 dx, dy, dz 改写为 $x - x_0, y - y_0, z - z_0$, 则可见它就是 τ_u 和 τ_v 的线性组合, 因此由这三个向量组成的行列式等于 0, 这就是

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = 0,$$

其中 $u = u_0, v = v_0$. 可以看出, 这个行列式就是曲面经过点 P_0 的切平面方程. 将它展开得到的 x, y, z 前的系数就决定了法向量方向.

例题 0.1 求曲面 $z = x^2 + y^2 - 1$ 在点 $(2, 1, 4)$ 处的法向量的方向余弦, 并求出其法线方程和切平面方程.

解 这是最熟悉的曲面方程. 可以直接计算 z_x, z_y 后得到 $\mathbf{n} = \pm(z_x, z_y, -1)$, 然后再做下去. 从略.

这里用前面说的全微分方法来做. 先从曲面方程写出全微分

$$dz = 2x dx + 2y dy,$$

然后用 $x = 2, y = 1, dx = x - 2, dy = y - 1, dz = z - 4$ 代入得到

$$z - 4 = 4(x - 2) + 2(y - 1),$$

整理后为

$$4x + 2y - z = 6.$$

这就是所求的切平面方程. 从中又可直接读出 $\mathbf{n} = \pm(4, 2, -1)$. 它的方向余弦是

$$\cos \alpha = \pm \frac{4}{\sqrt{21}}, \cos \beta = \pm \frac{2}{\sqrt{21}}, \cos \gamma = \mp \frac{1}{\sqrt{21}}.$$

法线方程是

$$\frac{x-2}{4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z-4}{-1}. \quad \square$$

§20.2 方向导数和梯度

本节的内容可以说是场论的开始. 进一步的内容则见本书第二十四章的第5节. 这里需要指出场的概念来自于物理学, 例如电场、磁场、引力场、温度场、电位场等等. 但同时也提供了许多有用的数学概念. 数学分析只是介绍各种场所需要的一些基本数学工具.

一. 数量场

场有两种: 数量场和向量场. 现在先介绍数量场.

设 $D \subset \mathbb{R}^n$, 给定 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, 则称 f 是 D 上的一个数量场.

对于给定的数量场 f 和常数 c , 称

$$S = \{x \in D \mid f(x) = c\}$$

为数量场 f 的一个等值面 (等量面). 若 $n = 2$, 则称为等量线或等值线. 例如天气预报中的等压面、等温面, 地形图中的等高线都是非常有用的工具.

最常用的数量场是二维的平面场和三维的空间场.

类似地如在一个区域的每一个点处定义一个向量, 则就得到向量场.

二. 方向导数

二元函数 $z = f(x, y)$ 在点 $P_0(x_0, y_0)$ 的偏导数 z_x, z_y 只描述了 z 在 x 方向和 y 方向的变化率. 现在考虑 z 沿着任意方向 l 的变化率, 这里将方向 l 与 $-l$ 作为两个方向看待, 这样就可以引入方向导数为下列极限:

$$\frac{\partial f}{\partial l}(P_0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{f(P_0 + tl) - f(P_0)}{t},$$

若极限存在的话. 也可以将上述方向导数简记为 f_l 或 z_l .

这里要指出, 在各种教科书和其他文献中对于方向导数的定义不完全一致. 如上面的定义可见, 方向导数不仅仅与 l 所表示的方向有关, 而且还和该向量的长度 $|l|$ 有关. 方向导数的另一种定义中则规定 l 必须是单位向量, 即 $|l| = 1$. 下面我们就采取这样的定义.

对于 $n = 1$, 则方向导数就成了 $y = f(x)$ 在点 x_0 处的两个单侧导数, 它们可以不相等. 因此方向导数即使在坐标轴方向也与偏导数概念不一样. 函数在某个点沿所有方向的方向导数都存在时, 并不保证在该点存在两个偏导数. 例如 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在点 $(0, 0)$ 就是如此.

方向导数的以上概念和定义可以推广到一般的 n 元函数. 下面以 $n = 3$ 为例介绍方向导数与可微之间的关系. 它同时也表明, 在可微条件下, 沿坐标轴方向的偏导数同时也解决了沿任何方向的方向导数计算问题.

定理 0.1 设 $z = f(x, y, z)$ 于点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ 可微, 则 f 沿任何方向 $l = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$ 的方向导数都存在, 且有计算公式

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}}(P_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) \cos \gamma.$$

证 从条件可以直接写出

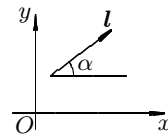
$$\begin{aligned} f(P_0 + t\mathbf{l}) - f(P_0) &= f(x_0 + t \cos \alpha, y_0 + t \cos \beta, z_0 + t \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0) \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(P_0) t \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(P_0) t \cos \beta + \frac{\partial f}{\partial z}(P_0) t \cos \gamma + o(t) \quad (t \rightarrow 0^+), \end{aligned}$$

除以 t , 令 $t \rightarrow 0^+$ 即可. \square

注 对于平面情况, 设 $f(x, y)$ 是区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的二元函数, 则对于 D 的每一点 (x, y) , f 沿单位向量 \mathbf{l} 的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \mathbf{l}} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \sin \alpha,$$

如右图所示, α 是向量 \mathbf{l} 与 x 轴正向 (即向量 \mathbf{i}) 的夹角.



例题 0.1 设 $u = xy - y^2z + ze^x$, 计算 u 在点 $(1, 0, 2)$ 沿方向 $\mathbf{l} = (2, 1, -1)$ 的方向导数.

解 先求出 u 在该点的三个偏导数值:

$$\left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(1,0,2)} = (y + ze^x) \Big|_{(1,0,2)} = 2e,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(1,0,2)} = (x - 2yz) \Big|_{(1,0,2)} = 1,$$

$$\left. \frac{\partial u}{\partial z} \right|_{(1,0,2)} = (-y^2 + e^x) \Big|_{(1,0,2)} = e,$$

然后求出给定方向的方向余弦为 $\cos \alpha = \frac{2}{\sqrt{6}}$, $\cos \beta = \frac{1}{\sqrt{6}}$, $\cos \gamma = \frac{-1}{\sqrt{6}}$, 代入用定理 1 的公式就得到

$$\frac{\partial u}{\partial \mathbf{l}}(1, 0, 2) = 2e \frac{2}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{6}} - e \frac{1}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}}(3e + 1). \quad \square$$

三. 梯度

梯度是场论中的重要概念, 并在许多方面得到使用.

以 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上的数量场 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为例, 设 f 对其各个变元连续可偏导, 则称向量

$$\text{grad } f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

为 f 在点 (x, y, z) 的梯度. 这里的符号 grad 是 gradient 的缩写. 此外, 如 p.211 所示, 在场论中经常使用一个微分算子 ∇ , 定义为

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k},$$

读作 nabla, 它是 Hamilton^①引进的, 因此也称为 Hamilton 算子. 于是梯度又可以

① 哈密顿 (William Rowan Hamilton, 1805–1865), 英国数学家、力学家.

记为 $\text{grad } f = \nabla f$.

如上所说, 从数量场 f 出发, 可以在 D 的每一点处得到一个梯度向量, 这样就生成了一个向量场, 称为数量场 f 的梯度场.

为了解释梯度的意义, 我们来讨论一个重要问题, 即 f 沿什么方向增长最快?

设方向 \boldsymbol{l} 为单位向量, 则从关于方向导数的定理 1, 并利用梯度记号, 就得到

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}}(x, y, z) = \text{grad } f(x, y, z) \cdot \boldsymbol{l} = |\text{grad } f(x, y, z)| \cdot |\boldsymbol{l}| \cdot \cos \theta,$$

其中 $|\boldsymbol{l}| = 1$, θ 是方向 \boldsymbol{l} 与梯度 $\text{grad } f$ 的夹角, 因此可见当 $\theta = 0$ 时方向导数达到最大. 这个最大值就等于 grad 的范数

$$|\text{grad } f| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2}.$$

于是梯度向量 grad 的方向代表了 f 增长最快的方向, 而梯度的模长代表了方向导数的最大值^①. 因此 gradient 在普通语言中也可翻译为坡度和倾斜度等.

补充内容: 此外, 梯度还与前面的等值面有密切联系.

对于数量场 $f: D \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, 设 f 连续可微, 考虑其某个等值面

$$S_c = \{(x, y, z) \in D \mid f(x, y, z) = c\},$$

并设点 $P_0(x_0, y_0, z_0) \in S_c$, 则当 $f_x(P_0), f_y(P_0), f_z(P_0)$ 不全为 0 时, 可以用隐函数存在定理知道在点 P_0 的一个邻域内惟一地确定了一个曲面, 而且该曲面在点 P_0 的切平面为 $df|_{P_0} = 0$, 也就是

$$f_x(P_0)(x - x_0) + f_y(P_0)(y - y_0) + f_z(P_0)(z - z_0) = 0.$$

用梯度的语言来说, 即等值面上梯度不等于 $\mathbf{0}$ 的点存在切平面, 而梯度就是该切平面的法向量 (之一).

举一个二维情况的最简单例子, 设有 $f = x^2 + y^2$, 则如右图所示, 其等值线就是以原点为中心的同心圆. 在图中的某点处用一个向量表示出梯度方向 (但该向量的模并不等于梯度的模), 同时作出了等值线在该点的切线, 它与梯度方向是正交的.

具体来说, 对于点 $(x_0, y_0) \neq (0, 0)$, $c = \sqrt{x_0^2 + y_0^2} > 0$, 在该点的梯度向量为 $\text{grad } f = (2x_0, 2y_0)$, 过该点的切线为

$$x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = x_0x + y_0y - c^2 = 0.$$

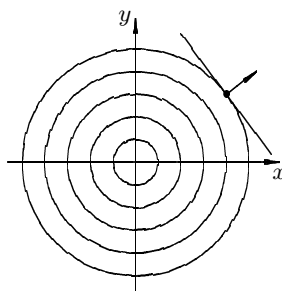


图 1: $x^2 + y^2$ 的等值线

① 也可以对于定理给出的方向导数计算公式用 Cauchy 不等式, 即有

$$\left| \frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{l}} \right| \leq \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^2} \cdot \sqrt{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma} = |\text{grad } f|,$$

且知道成立等号的条件是 $\text{grad } f$ 与 \boldsymbol{l} 共线. 这样就推出相同的结论.

下面是场论中的一个典型例子.

例题 0.2 设在空间原点处 $\mathbf{0}$ 有一个点电荷 q , 在真空中产生一个静电场, 在空间任意点 (x, y, z) 处的电位是

$$V = \frac{q}{r}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2},$$

这样就在 $\mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ 上定义了一个数量场, 其梯度是

$$\text{grad } V = -\frac{q}{r^2} \cdot \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r} = -\frac{q}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}).$$

可以看出, 由上述点电荷生成的静电场的电场强度 \mathbf{E} 与 V 之间的关系是

$$\mathbf{E} = -\text{grad } V.$$

这就是由数量场生成一个向量场的具体例子. \square

§20.3 Taylor 公式

为简明起见主要讨论二元函数的情况.

如高阶微分中一样, 采用算子记号如下:

$$(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})f(x, y) = \Delta x \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \Delta y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y),$$

并归纳地定义

$$(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^{n+1} = (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^n,$$

这样就可以得到

$$(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^2 f(x, y) = \Delta x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) + 2\Delta x \Delta y \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \Delta y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y),$$

并可以用数学归纳法证明对每一个正整数 n 成立

$$(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^n f(x, y) = \sum_{i=0}^n C_n^i \frac{\partial^n f}{\partial x^i \partial y^{n-i}} \Delta x^i \Delta y^{n-i}. \quad (1)$$

下面就是将第七章中带有 Lagrange 型余项的 Taylor 公式推广到多元函数. (也称为 Taylor 中值定理.)

定理 0.2 设函数 $f(x, y)$ 在区域 $D = O_a((x_0, y_0))$ 内关于 x, y 有所有的 $n+1$ 阶连续偏导数, 记 $\Delta x = x - x_0$, $\Delta y = y - y_0$, 则对每个 $(x, y) \in D$ 成立公式

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\Delta y \\ &\quad + \frac{1}{2!}(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^2 f(x_0, y_0) + \cdots + \frac{1}{n!}(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0, y_0) \\ &\quad + \frac{1}{(n+1)!}(\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^{n+1} f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y), \end{aligned}$$

这里的最后一项称为 Lagrange 余项, 其中 $0 < \theta < 1$.

证 对于给定的点 $(x, y) \in D$, 且 $(x, y) \neq (x_0, y_0)$, 构造辅助函数

$$\varphi(t) = f(x_0 + t\Delta x, y_0 + t\Delta y), \quad 0 \leq t \leq 1,$$

从而将二维问题归结为一维.

从定理的条件可知 $\varphi(t)$ 在区间 $[0, 1]$ 上 $n+1$ 阶连续可微, 利用第七章的带有 Lagrange 型余项的 Taylor 公式于 $\varphi(t)$, 就得到在点 $t=0$ 的展开式:

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \varphi'(0)t + \frac{1}{2!}\varphi''(0)t^2 + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0)t^n + \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta t)t^{n+1},$$

其中 $0 < \theta < 1$. 然后用 $t=1$ 代入, 得到

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \varphi'(0) + \frac{1}{2!}\varphi''(0) + \cdots + \frac{1}{n!}\varphi^{(n)}(0) + \frac{1}{(n+1)!}\varphi^{(n+1)}(\theta).$$

最后利用 $\varphi(1) = f(x, y)$, $\varphi(0) = f(x_0, y_0)$, $\varphi'(0) = f_x(x_0, y_0)\Delta x + f_y(x_0, y_0)\Delta y$, 并归纳地证明

$$\varphi^{(k)}(0) = (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^k f(x_0, y_0),$$

这样就得到了所需要的公式. \square

推论 设 $f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的一个邻域中有关于 x, y 的所有 n 阶连续偏导数, 则就有

$$f(x, y) = f(x_0, y_0) + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^k f(x_0, y_0) + o(r^n) \quad (r \rightarrow 0),$$

其中 $r = \sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$.

证 对 f 在点 (x_0, y_0) 的邻域中用定理 1, 则所得的展开式与推论中的等式右边的前 n 项都相同, 因此只要证明

$$\begin{aligned} & (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y) \\ & - (\Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y})^n f(x_0, y_0) = o(r^n) \quad (r \rightarrow 0). \end{aligned}$$

利用前面的等式 (1), 上式左边的两项分别含有 $n+1$ 项, 从而只要证明, 对每个 $i = 0, 1, \dots, n$, 成立

$$\frac{1}{n!} C_n^i \left(\frac{\partial^n f(x_0 + \theta \Delta x, y_0 + \theta \Delta y)}{\partial x^i \partial y^{n-i}} - \frac{\partial^n f(x_0, y_0)}{\partial x^i \partial y^{n-i}} \right) \Delta x^i \Delta y^{n-i} = o(r^n) \quad (r \rightarrow 0).$$

最后, 利用每一个 n 阶偏导数都在点 (x_0, y_0) 连续, 且

$$|\Delta x^i \Delta y^{n-i}| \leq r^n,$$

可见结论成立. \square

注 显然这个推论就是第七章中带 Peano 型余项的 Taylor 公式在多元函数情况的推广. 由于它的证明中利用了定理 2, 因此需要各阶偏导数在点 (x_0, y_0) 的一个邻域中连续. 若将条件减弱为各阶偏导数只在点 (x_0, y_0) 连续, 则上述证明不能成立. 这时可以用数学归纳法给出一个独立的证明. 从略. 此外, 从 $n=1$ 可以知道, 对偏导数不加连续性要求是不能成立的. 这在一元函数情况不同.

§20.4 极值

一. 多元函数极值的必要条件

这里可以如一元函数情况那样引入极值、极值点的定义, 并从 Fermat 定理推广到多元情况.

定理 0.1 (多元函数的 Fermat 定理) 设 $f(x)$ 是区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的多元函数, 点 $\mathbf{a} \in D$ 是 f 的极值点, 且 f 在 \mathbf{a} 存在所有的一阶偏导数, 则

$$\text{grad } f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}.$$

证 记 $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$, 则对于 $i \in \{1, \dots, n\}$, 在 $y = f(x_1, \dots, x_n)$ 中, 对于 $j \in \{1, \dots, n\} - \{i\}$, 固定 $x_j = a_j$, 这样就得到以 x_i 为自变量的一元函数, 它以 a_i 为极值点, 且存在对 x_i 的导数. 用 Fermat 定理, 就知道 $f_{x_i}(\mathbf{a}) = 0$. 由于对每个 $i = 1, \dots, n$ 都如此, 因此 f 在点 \mathbf{a} 的梯度向量 $\text{grad } f(\mathbf{a})$ 为零向量. \square

与一元函数情况相同, 将满足条件 $\text{grad } f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ 的点 \mathbf{a} 称为函数 f 的驻点.

当然驻点未必是极值点, 极值点也未必是驻点. 然而, 尽管如此, 驻点概念在解决极值问题和最值问题中还是有用的. 这些都与一元函数相同.

书上举了一个例子, 即马鞍面 $z = xy$, 原点 $(0, 0)$ 是驻点, 但不是极值点.

第 T13 次讲稿 (第三学期第 13 次)

第 T13 次讲稿, 用于 2008 年 10 月 17 日, 星期五, 2 节课.

内容: 第二十章, 偏导数的应用. 从极值充分条件的证明开始.

二. 多元函数极值的充分条件

这里正是高等代数的二次型理论发挥作用的地方.

设 $y = f(\mathbf{x})$ 是区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的多元函数, 点 $\mathbf{a} \in D$ 为驻点, 又设 f 在点 \mathbf{a} 的一个邻域中有连续的所有二阶偏导数, 则可以写出 f 在该点的带 Peano 型余项的 Taylor 公式:

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (a_1, \dots, a_n) \Delta x_i \Delta x_j + o(r^2) \quad (r \rightarrow 0),$$

其中 $r = \sqrt{\Delta x_1^2 + \dots + \Delta x_n^2}$.

显然上式右边出现了二次型. 引入矩阵

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} f_{11} & f_{12} & \dots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \dots & f_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_{n1} & f_{n2} & \dots & f_{nn} \end{pmatrix},$$

其中 $f_{ij} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}$, $i, j = 1, \dots, n$. 称 \mathbf{H} 为 f 在点 \mathbf{a} 的 Hesse^① 矩阵. 又记 $\Delta \mathbf{x} = (\Delta x_1, \dots, \Delta x_n)^T$, 这样就可以将上面的公式改写为

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = \Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} + o(r^2) \quad (r \rightarrow 0),$$

这里 $r = |\Delta \mathbf{x}|$.

这样就可以得到下列定理, 它比教科书 p.82 上的定理 2 更广一点. 对于 Hesse 矩阵的定号性可以用高等代数中的 Sylvester^① 定理解决, 即实对称阵为正定的充分必要条件是该矩阵的各阶顺序主子式都大于零.

定理 0.1 (多元函数极值的充分条件) 设 $f(\mathbf{x})$ 是区域 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上的多元函数, \mathbf{a} 为 f 的驻点, 且 f 在点 \mathbf{a} 的一个邻域内二阶连续可微, \mathbf{H} 为 f 在该点的 Hesse 矩阵, 则

- (1) 若 \mathbf{H} 为正定, 则 \mathbf{a} 是极小值点;
- (2) 若 \mathbf{H} 为负定, 则 \mathbf{a} 是极大值点;
- (3) 若 \mathbf{H} 为不定, 则 \mathbf{a} 一定不是极值点.

① 海赛 (Ludwig Otto Hesse, 1811–1874), 德国数学家.

① 西尔维斯特 (James Joseph Sylvester, 1814–1897), 英国数学家.

证^① 考虑单位球面 $S = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^n \mid |\mathbf{y}| = 1\}$. 同时考虑二次型 $Q(\mathbf{y}) = \mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y}$.

(1) 由于 \mathbf{H} 正定, 函数 Q 在 S 上处处大于 0. 利用连续函数 $Q(\mathbf{y})$ 在有界闭集 S 上取到正最小值 λ , 就得到

$$\mathbf{y}^T \mathbf{H} \mathbf{y} \geq \lambda > 0 \quad \forall \mathbf{y} \in S.$$

取 $\mathbf{y} = \Delta \mathbf{x} / |\Delta \mathbf{x}|$ 代入, 就有

$$\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} \geq \lambda \Delta \mathbf{x}^T \Delta \mathbf{x} = \lambda r^2,$$

从而就有

$$f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) \geq (\lambda + o(1))r^2 \quad (r \rightarrow 0),$$

因此当 r 充分小时, $f(\mathbf{x}) \geq f(\mathbf{a})$ 成立, 即 \mathbf{a} 是 f 的极小值点.

(2) \mathbf{H} 负定时的证明同 (1).

(3) 设有某个 $\Delta \mathbf{x}$ 使得 $\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} < 0$, 则固定 $\Delta \mathbf{x}$, 对于 $t > 0$ 有以下表达式

$$f(\mathbf{a} + t\Delta \mathbf{x}) - f(\mathbf{a}) = t^2(\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} + o(1)|\Delta \mathbf{x}|^2) \quad (t \rightarrow 0),$$

可见当 $t > 0$ 充分小时 $f(\mathbf{a} + t\Delta \mathbf{x}) < f(\mathbf{a})$. 因此点 \mathbf{a} 不可能是极小值点.

同样设有某个 $\Delta \mathbf{x}$ 使得 $\Delta \mathbf{x}^T \mathbf{H} \Delta \mathbf{x} > 0$, 则可以证明 \mathbf{a} 也不可能是极大值点. 合并以上可见 \mathbf{a} 一定不是极值点. \square

注 定理中的情况 (3) 是一元函数中没有的情况. 对于一元函数 $f(x)$ 来说, 若 $f'(x_0) = 0$, 且存在 $f''(x_0)$, 则当 $f''(x_0) > 0$ 时点 x_0 为极小值点, 当 $f''(x_0) < 0$ 时点 x_0 为极大值点. 这分别相当于上述定理中的情况 (1) 和 (2). 当 $f''(x_0) = 0$ 时则不能判定, 这相当于上述定理所没有讨论的 Hesse 矩阵 \mathbf{H} 为半定的情况.

例题 0.1 求 $z = x^2 + xy + y^2$ 的极值.

解 用 Fermat 定理, 从 $z_x = 2x + y = 0$ 和 $z_y = x + 2y = 0$ 可见, 可疑极值点只可能是 $(0, 0)$.

写出 $z(x, y)$ 在点 $(0, 0)$ 的 Hesse 矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 0.5 \\ 0.5 & 1 \end{pmatrix}$, 从高等代数知识即可知道它是正定二次型, 因此点 $(0, 0)$ 为极小值点, 极小值为 0. (容易看出这也就是最小值.) \square

(原来的例题较好, 目前这个例子太平庸.)

三. 最值问题

上面一个补充例题实际上就是解决最值问题的例子. 对于多元函数来说, 求最值的基本思路与一元函数是类似的, 只是这里会出现更为复杂的情况. 下面举出两点与一元函数不同之处.

^① 这个定理可以用高等代数中的有关知识作出证明. 以下的证明则只依赖于分析工具. 在 (1) 中的 λ 就是正定阵的最小正特征值.

(1) 对于一元函数来说, 如 $y = f(x)$ 在区间内只有一个极小值点 (极大值点), 则它就是最小值点 (最大值点), 但对多元函数就没有这样的结论.

例如, 设在全平面上有定义的函数

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2(1-x) + y^2(x - \frac{1}{3})^2, & x \leq \frac{1}{3}, \\ x^2(1-x) + y(x - \frac{1}{3})^2, & x > \frac{1}{3}, \end{cases}$$

则可分段求出 f_x 和 f_y , 而且发现都在全平面上连续, 因此 f 可微.

从 $x > \frac{1}{3}$ 时的 $f_y = (x - \frac{1}{3})^2$ 可见在 $x > \frac{1}{3}$ 时没有驻点. 对于 $x \leq \frac{1}{3}$ 则从 $f_y = 2y(x - \frac{1}{3})^2 = 0$ 只能有 $y = 0$ 和 $x = \frac{1}{3}$. 再写出 $f_x = 2x - 3x^2 + 2y^2(x - \frac{1}{3}) = 0$, 可见只能得到一个驻点 $(0, 0)$.

从 $f(x, y) = x^2 + \frac{1}{9}y^2 + O_3$, 其中 O_3 为高于 2 次的项, 可见 $(0, 0)$ 是极小值点, 极小值为 0. 然而 $f(2, 0) = -4$, 可见上述极小值不是最小值.

注 这个例子用拼接方法作出. 利用 $(x - \frac{1}{3})^2$ 的方法使得拼接后偏导数仍然连续, 从而可微. 又利用拼接使得 $x \leq \frac{1}{3}$ 时的表达式的另一个落在 $x > \frac{1}{3}$ 的驻点消失. 这个驻点是鞍点. 当然也可以找出不用拼接方法的例子.

(2) 在多元函数的最值问题中, 主要困难往往在于边界集上的讨论. 对于一元函数来说, 区间的边界至多只有两点, 将该处的函数值计算出来就是. 而对于多元函数来说, 闭区域的边界千变万化, 如何讨论往往比求极值点困难得多. 这将在本章的下一节专门讨论. 在本节下面我们只举出比较简单的例子, 也就是边界容易处理的情况.

补充例题 求 $z = xy\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}}$ 的极值, 其中设 $a > 0, b > 0$.

解 自然定义域是闭区域

$$\{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

如右图所示, 在定义域内由坐标轴划分为 4 个区域. 用粗黑线表示 $z = 0$ 的点集, 又用 \pm 号标出 $z(x, y)$ 的符号, 于是已经可以断定, 在一、三象限中有极大值, 在二、四象限中有极小值.

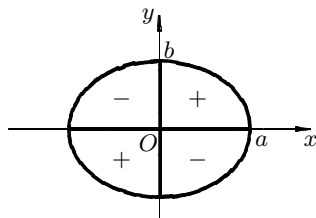


图 1: 定义域及函数的符号

又从对称性可以知道, 只要求出第一象限的极大值, 它也就是第三象限的极大值, 又乘以 -1 后也就得到第二和第四象限的极小值.

为方便起见将函数 z 的根号下的表达式简记为 Δ , 则可以计算 z_x 如下:

$$z_x = y\sqrt{\Delta} - \frac{2x^2}{a^2\sqrt{\Delta}} = \frac{y}{a^2\sqrt{\Delta}} \left(1 - \frac{2x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right),$$

由对称性可得到 z_y , 并根据 Fermat 定理列出方程组

$$\frac{2x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{2y^2}{b^2} = 1.$$

于是解出 $\frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{3}$, 在第一象限中的解就是

$$x = \frac{a}{\sqrt{3}}, \quad y = \frac{b}{\sqrt{3}}.$$

由连续函数的最值定理, $z(x, y)$ 在第一象限一定达到最大值, 且大于 0. 由于最大值点为内点, 因此必是极大值点. 这样就知道上面求出的驻点就是极大值点, 也是最大值点. 将它代入 $z(x, y)$ 中, 可见极大值 (即最大值) 为 $\frac{ab}{3\sqrt{3}}$. \square

注 这里从连续函数的最值定理就已经可以判定, 因此不必计算驻点的 Hesse 矩阵. 以上解法还充分利用了对称性, 从而不必再对函数作变量代换, 省去了许多额外的麻烦.

例题 0.2 在闭区域 $D: x^2 + y^2 \leq 1$ 上求 $z = x^3 + xy^2 - x$ 的最值.

解 先求极值点, 这时只要考虑内点 $x^2 + y^2 < 1$.

列出方程组

$$z_x = 3x^2 + y^2 - 1 = 0, \quad z_y = 2xy = 0,$$

即可解出驻点为 $(\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, 0)$. (另外两个点 $(0, \pm 1)$ 在边界 ∂D 上不必考虑.) 计算出

$$z(\frac{1}{3}, 0) = -\frac{2}{3\sqrt{3}}, \quad z(-\frac{1}{3}, 0) = \frac{2}{3\sqrt{3}},$$

由 $z = x(x^2 + y^2 - 1)$ 可见在边界上 $z = 0$, 因此在上述两个驻点上的函数值分别为最小值和最大值. \square

例题 0.3 有一块宽 24 厘米的矩形薄铁皮, 把两边折起来, 如图做成一个矩形水槽, 问当 x 和 θ 为何值时, 水槽的容量最大.

解 这就是要使得水槽截面的梯形面积最大, 写出梯形面积为

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}[(24 - 2x) + (24 - 2x) + 2x \cos \theta]x \sin \theta \\ &= 24x \sin \theta - 2x^2 \sin \theta + x^2 \sin \theta \cos \theta, \end{aligned}$$

其中变量的范围为 $0 \leq x \leq 12, 0 \leq \theta \leq \pi$. 由此可见 S 在边界上为 0, 因此最大值必定在内点达到.

用 Fermat 定理, 列出方程组

$$S_x = 24 \sin \theta - 4x \sin \theta + 2x \sin \theta \cos \theta = 0,$$

$$S_\theta = 24x \cos \theta - 2x^2 \cos \theta + x^2 \cos 2\theta = 0,$$

由于所求为内点, 因此可以约去 x 和 $\sin \theta$, 得到

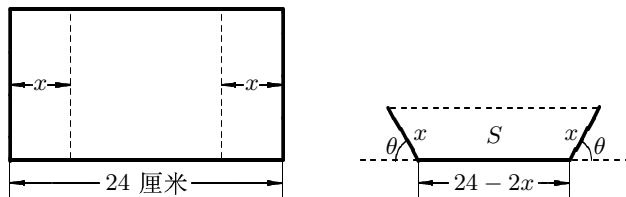


图 2: 水槽容量的最值问题

$$12 - 2x + x \cos \theta = 0, \quad 24 \cos \theta - 2x \cos \theta + x \cos 2\theta = 0,$$

将第一式乘 $2 \cos \theta$ 与第二式相减, 得到

$$2x \cos \theta - x = 0,$$

并再约去 x , 就可求出 $\theta = \frac{\pi}{3}$. 然后再代入前面的第一式得到 $x = 8$. 由于极值点惟一, 而边界上 $S = 0$, 因此这就是所求的极大值点. \square

注 容易理解答案为什么是 $x = 8$ 和 $\theta = \frac{\pi}{3}$. 为此只要在图 2 的右边在水平的虚线上边作出与下面对称的梯形, 从而问题变成在周长给定时 6 边形的面积何时最大? 显然答案是取正 6 边形, 从而答案只能是 $x = 24/3$ 和 $\theta = \pi/3$. 当然在周长给定的 n 边形中面积最大的是正 n 边形这本身是一个有趣的约束最值问题, 它一定有许多种不同的数学证明. 此问题供思考用.

四. 最小二乘法

如右图所示, 设有平面上的 n 个点 $(x_1, y_1), \dots, (x_i, y_i)$, 似乎呈现出线性关系, 问题是如何配一条直线 $y = ax + b$, 使得与这 n 点最为接近.

这里的 n 个点是从实验得到的. 一般来说, 无论怎样取 a, b , 都不可能使得等式 $y_i = ax_i + b$ 对每一个 i 成立.

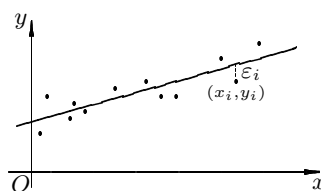


图 3: 最小二乘法示意图

定义 $\varepsilon_i = ax_i + b - y_i$, $i = 1, \dots, n$, 由 Gauss 提出的最小二乘法的思想是寻找 a, b , 使得

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^n \varepsilon_i^2 = \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2$$

达到最小^①.

① 从问题本身似乎使得 $\sum_{i=1}^n |\varepsilon_i|$ 达到最小更为自然一点, 但为了能够发挥微分学的作用, 使用 Gauss 提出的 ε 显然要方便得多.

这里 ε 是 a, b 的二元函数, 于是可以由 Fermat 定理列出以下方程:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \varepsilon}{\partial a} &= 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)x_i = 2 \left(a \sum_{i=1}^n x_i^2 + b \sum_{i=1}^n x_i - \sum_{i=1}^n x_i y_i \right) = 0, \\ \frac{\partial \varepsilon}{\partial b} &= 2 \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i) = 2 \left(a \sum_{i=1}^n x_i + nb - \sum_{i=1}^n y_i \right) = 0,\end{aligned}$$

并解出

$$\hat{a} = \frac{n \sum_{i=1}^n x_i y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}, \quad \hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2 \sum_{i=1}^n y_i - \sum_{i=1}^n x_i \sum_{i=1}^n x_i y_i}{n \sum_{i=1}^n x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2}.$$

这里有几个问题需要讨论, 首先上面的两个分式的分母是否会等于 0?

利用 Cauchy 不等式, 就有

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i \right)^2 \leq n \sum_{i=1}^n x_i^2, \quad (1)$$

且仅当所有 x_i 均相等时成立等式. 于是只要不是这种特殊情况, 以上求解公式总是正确的. (显然, 这种情况不在最小二乘法考虑的范围中. 如果发生, 则取所有的 y_i 的算术平均值即可.)

第二个问题是这样求出的 \hat{a}, \hat{b} 是否使得 $\varepsilon(a, b)$ 达到最小值. 这里的关键在于函数 $\varepsilon(a, b)$ 是在 a, b 的全平面上具有如下形式的二次函数:

$$\begin{aligned}\varepsilon(a, b) &= \sum_{i=1}^n (ax_i + b - y_i)^2 \\ &= a^2 \sum_{i=1}^n x_i^2 + 2ab \sum_{i=1}^n x_i + nb^2 - 2a \sum_{i=1}^n x_i y_i - 2b \sum_{i=1}^n y_i + \sum_{i=1}^n y_i^2,\end{aligned}$$

可见当 (1) 中成立严格不等号时, 前三项是关于 a, b 的正定二次型, 因此必有

$$\lim_{|a|+|b| \rightarrow \infty} \varepsilon(a, b) = +\infty.$$

这就保证 $\varepsilon(a, b)$ 存在最小值, 且一定是极小值. 由于前述计算表明极小值点惟一, 因此它就是最小值点.

注 若对于由实验得到的数据用其他类型的曲线更为合适, 则也可以用类似的方法求出该曲线. 例如对于 $y = ae^{bx}$ ($a > 0$). 可以通过取对数的方法变成为 $\ln y = \ln a + bx$, 然后再用上述最小二乘法.

第 T14 次讲稿 (第三学期第 14 次)

第 T14 次讲稿, 用于 2008 年 10 月 22 日, 星期三, 3 节课.

内容: 第二十章, §20.5 Lagrange 乘子法

§20.5 Lagrange 乘子法

一. 约束极值 (最值) 问题

也称为条件极值问题. 反之, 前面讨论的极值问题可称为无约束极值问题, 或无条件极值问题. 相应地也有约束最值问题或条件最值问题. 与以前相同, 极值是局部性质的问题, 而最值则是整体来说的.

先从一个简单例子开始.

例题 0.1 平方和等于 1 的两个数, 何时其和最大?

解 1 将两个数记为 x, y , 则约束条件是 $x^2 + y^2 = 1$, 称 $z = x + y$ 为目标函数. 对 x, y 用 Cauchy 不等式就可以得到

$$x + y \leq \sqrt{x^2 + y^2} \sqrt{2} = \sqrt{2},$$

且于 $x = y = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 时成立等号, 即达到最大值 $\sqrt{2}$. \square

解 2 从约束条件消去一个变量, 使问题归结为无约束最值问题. 例如消去 y , 问题归结为在 $[-1, 1]$ 上求函数 $z = x + \sqrt{1 - x^2}$ 的最大值. 用一元函数求最值方法即可. 以下请读者自己完成. \square

解 3 引入参数, 这也有可能将约束最值问题归结为无约束最值问题. 例如在本题中令 $x = \cos \theta$, $y = \sin \theta$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则目标函数成为 $z = \cos \theta + \sin \theta$. 用三角函数和差化积公式即可解决. 以下请读者自己完成. \square

评论 以上几个方法都缺乏一般意义, 对于稍微复杂一点的约束极值或约束最值问题难以使用. 于是需要寻找新的方法. 在下面介绍了 Lagrange 乘子法后我们还回再回到这个例题来.

二. Lagrange 乘子法

先讲只有一个约束条件的 Lagrange 乘子法. 又为了简明起见, 只对于两个变量的情况写出定理和证明.

设 $F(x, y)$ 和 $f(x, y)$ 于开集 D 上连续可微, 问题是在约束 $F(x, y) = 0$ 的条件下求目标函数

$$z = f(x, y)$$

的极值, 即求 $\max_{F(x,y)=0} f(x, y)$ 或 $\min_{F(x,y)=0} f(x, y)$ 的解.

定义下列 Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda F(x, y),$$

称 Lagrange 函数中的 λ 为 Lagrange 乘子, 它是新的未知量.

定理 0.1 (最简单情况的 Lagrange 乘子法) 设点 (a, b) 是在约束 $F(x, y) = 0$ 的条件下目标函数 $f(x, y)$ 的约束极值点或约束最值点, 且梯度 $\text{grad } F = (F_x, F_y)$ 在点 (a, b) 处不是零向量, 则一定存在数 λ_0 , 使得 λ_0, a, b 是 Lagrange 函数 L 的驻点, 即满足

$$L_x = L_y = L_\lambda = 0.$$

注 定理 1 是极值点的必要条件, 不是充分条件. 这与过去的 Fermat 定理的意义是相同的. 此外, 下面的应用中经常是对于条件最值点用 Lagrange 乘子法. 这里涉及到条件极值点与条件最值点是否有区别? 这在该定理的证明中可以知道, 对于等式约束而言, 二者没有区别, 或者说, 条件最值点也是条件极值点.

在证明之前, 我们先将这个方法用于例 1, 看具体如何用法.

例题 1 的解 4 这时在满足约束条件的点上梯度向量 $(2x, 2y)$ 不会是零向量, 满足定理的条件. 作 Lagrange 函数

$$L = x + y + \lambda(x^2 + y^2 - 1),$$

然后写出驻点的方程为

$$1 + 2\lambda x = 0, 1 + 2\lambda y = 0, x^2 + y^2 = 1,$$

从中可见 $\lambda \neq 0$, 且 $x = y$. 这样就得到 $x = y = \pm \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\lambda = \mp \frac{\sqrt{2}}{2}$. 这样就得到两个极值点, 其中之一是所求问题的解.

这里要注意, 定理 1 是极值点满足的必要条件, 因此求出的只是嫌疑点. 对于本题来说, 需要从有界闭集 $x^2 + y^2 = 1$ 上目标函数有最大值和最小值出发, 知道存在两个最值点. 由于上面一共只有两个解, 从而已经求出了最大值点和最小值点. \square

定理 1 的证明 不妨设 $F_x(a, b) \neq 0$, 按照隐函数存在定理, 在点 (a, b) 的一个邻域内存在惟一的连续可微隐函数 $y = y(x)$, 满足 $y(a) = b$ 和 $F(x, y(x)) \equiv 0$. 对该恒等式求导得到

$$F_x + F_y y' = 0. \quad (1)$$

另一方面, $z = f(x, y(x))$ 在点 $x = a$ 有极值 (这里利用隐函数定理中隐函数 $y = y(x)$ 在点 (a, b) 的一个邻域内存在惟一, 因此从 (a, b) 为极值点或最值点就推出 $x = a$ 是 $f(x, y(x))$ 的极值点. 又利用隐函数在点 a 邻近连续可微, 因此用 Fermat 定理计算得到

$$z_x(a) = f_x(a, b) + f_y(a, b)y'(a) = 0.$$

在 (1) 中用 $x = a$ 代入, 得到

$$F_x(a, b) + F_y(a, b)y'(a) = 0.$$

由此可见向量 $(f_x(a, b), f_y(a, b))$ 与向量 $(F_x(a, b), F_y(a, b))$ 共线. 由于后者不是零向量, 因此存在 λ_0 , 使得在点 (a, b) 处 $(f_x, f_y) = -\lambda_0(F_x, F_y)$, 这就是

$$\begin{cases} f_x(a, b) + \lambda_0 F_x(a, b) = 0, \\ f_y(a, b) + \lambda_0 F_y(a, b) = 0, \end{cases}$$

也就是对于 $x = a, y = b, \lambda = \lambda_0$ 成立 $L_x = L_y = 0$. $L_\lambda = 0$ 就是约束条件 $F(x, y) = 0$, 对于点 (a, b) 当然满足. \square

注 1 由定理的证明可见在该定理的条件下, 条件最值点也是条件极值点, 即这时只要求出所有条件极值点, 其中取最值的就是条件最值点.

注 2 将定理 1 推广到多于 2 个变量的情况是容易的, 细节可作为练习题.

定理 1 有明显的几何意义. 下面给出了两个示意图. 先看左下图.

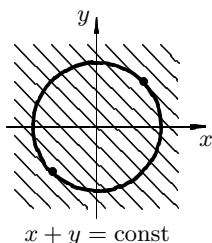


图 8: $x^2 + y^2 = 1$ 与 $x + y$ 的等值线

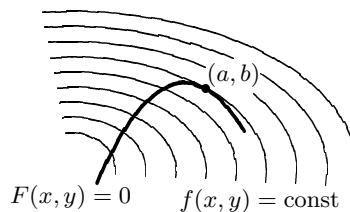


图 9: Lagrange 乘子法的几何意义

图 8 就是例题 1 的几何意义. 其中作出了目标函数 $x + y$ 的等值线, 同时又用粗黑线作出了约束条件, 即圆 $x^2 + y^2 = 1$. 其中的两个黑点就是在圆上与 $x + y$ 的某条等值线相切的点, 一条是 $x + y = \frac{\sqrt{2}}{2}$, 另一条是 $x + y = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. 对于满足约束条件, 即圆 $x^2 + y^2 = 1$ 上的其他点, 记为 (x_0, y_0) , 经过它的 $x + y$ 的等值线与圆不相切, 于是在点 (x_0, y_0) 的任意邻近, 在满足约束条件的 $x^2 + y^2 = 1$ 上, 目标函数 $x + y$ 的值既可大于 $x_0 + y_0$, 也可小于 $x_0 + y_0$, 因此这样的 (x_0, y_0) 就不会是约束极值点.

图 9 是更为一般的情况, 可以对照定理 1 的证明来看. 其中用粗黑曲线表示约束条件 $F(x, y) = 0$, 又用一族细曲线表示目标函数 $f(x, y)$ 的若干条等值线. 点 (a, b) 是约束极值点. 如果在点 (a, b) 处的梯度向量 $\text{grad } f$ 不是零向量, 且曲线 $F(x, y) = 0$ 与等值线 $f(x, y) = f(a, b)$ 在点 (a, b) 处不相切, 则当点 (x, y) 在点 (a, b) 处沿曲线 $F(x, y) = 0$ 变化时, f 的值就可能取到大于 $f(a, b)$ 和小于 $f(a, b)$ 的值, 从而与 (a, b) 为极值点矛盾. 因此 F, f 在该点的两个梯度向量必须共线, 即

$$\operatorname{grad} f(a, b) \parallel \operatorname{grad} F(a, b).$$

注 一种特殊情况是 $\lambda_0 = 0$. 从乘子法可见这时 $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$, 即点 (a, b) 是目标函数 f 的驻点. 这时图 9 所显示的情况, 即曲线 $F(x, y) = 0$ 与 f 的等值线在点 (a, b) 处相切, 就未必成立. 例如等值线 $f(x, y) = f(a, b)$ 退化为一个孤立点也是可能的. 然而由于 $\operatorname{grad} f = \mathbf{0}$, $\operatorname{grad} f \parallel \operatorname{grad} F$ 仍然成立.

(以下两个补充例题未讲.)

补充例题 1 给定三维空间的一张平面 $S: Ax + By + Cz + D = 0$, 其中 a, b, c 不同时为 0, 又给定一点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, 求它到上述平面的最短距离.

解 这是在解析几何中已经解决的问题. 现在从约束最值问题的角度来重新考察它. 可以将目标函数设为^①

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2,$$

问题就是在约束条件 $Ax + By + Cz + D = 0$ 下求 f 的最小值.

从 Euclid 空间中点到集合的距离概念可见, 上述约束最小值问题的解存在惟一, 而且约束最小值点也是约束极小值点.

由于 A, B, C 不同时为 0, 因此梯度非零条件满足. 这样就可以用定理 1.

作 Lagrange 函数

$$L = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 + \lambda(Ax + By + Cz + D),$$

然后求解方程组

$$2(x - x_0) + \lambda A = 0,$$

$$2(y - y_0) + \lambda B = 0,$$

$$2(z - z_0) + \lambda C = 0,$$

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

由前三式可见, 只要点 P_0 不在约束平面上 λ 就不可能等于 0. 从前三个方程将 x, y, z 用 λ 表出, 代入最后一个方程即可确定

$$\lambda = 2 \frac{Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D}{A^2 + B^2 + C^2}.$$

由此即可解出极值点. 由于求解的惟一性, 因此也就是最值点.

从计算的简便来看, 可以从上述前三个方程得到

$$f(x, y, z) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \frac{\lambda^2}{4}(A^2 + B^2 + C^2),$$

然后将上面得到的 λ 代入并开方就得到所求的答案:

$$\min_{Ax+By+Cz+D=0} \sqrt{f(x, y, z)} = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \quad \square$$

① 这里不用 $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2}$ 为目标函数, 而用它的平方, 明显是为了计算方便. 这是常用的技巧.

补充例题 2 求平面上点 (x_0, y_0) 到椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 的距离, 其中设 $a \neq b$.

解 这里的距离就是指从点 (x_0, y_0) 到椭圆上点的最小距离. 它的存在性问题. 同样应用定理 1 的梯度非零条件满足.

这时的目标函数为 $f(x, y) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2$, 作 Lagrange 函数

$$L(x, y, \lambda) = (x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \lambda(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1),$$

然后列出驻点方程组

$$L_x = 2(x - x_0) + 2\lambda\frac{x}{a^2} = 0,$$

$$L_y = 2(y - y_0) + 2\lambda\frac{y}{b^2} = 0, .$$

$$L_\lambda = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

前两个方程的几何意义很清楚, 即连接极值点 (a, b) 与点 (x_0, y_0) 的直线与椭圆在点 (a, b) 的切线正交, 也就是说该直线是椭圆在点 (a, b) 的法线 (的一部分).

关于从一个给定点作给定的椭圆的法线问题是一个比较复杂的问题, 就极值点来说, 可能有 2, 3, 4 个解, 而其中长度最小的就是距离问题的解. (其中长度最大的就是从点 (a, b) 到椭圆上的点的最大距离.)

这可以从上述三个方程看出, 即若从前两个方程消去 λ , 则得到关于 x, y 的两个二次方程. 或者从前两个方程解出 x, y 用 λ 表出, 代入第三个方程, 则得到关于 λ 的 4 次方程.

在下面的图 10 中给出了各种可能性的示意图. 其中除了用粗黑曲线作出椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ 之外, 还用细曲线作出了具有 4 个尖点的曲线, 它的方程是

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}},$$

它是椭圆的渐屈线方程. 结论是: 从渐屈线外的点出发可引出 2 条法线 (见分图 (a)); 从渐屈线上的非尖点出发可引出 3 条法线 (见分图 (b)), 但从尖点出发则只能引出 2 条法线; 从渐屈线内的点出发可引出 4 条法线 (见分图 (c)). 有关的计算细节从略. 这里只指出, 这个问题最早是古希腊数学家 Appollonius^① 提出和解决的.

(参见《数学分析习题课讲义》上册 p.412 对第八章第二组参考题 20 的注解.)

三. 注意点

对于多元函数的约束极值和约束最值问题来说, Lagrange 乘子法相当于一元函数中的 Fermat 定理, 但更复杂一些. 与一元函数情况类似, 对于 Lagrange 乘子法的使用提出以下几个注意要点.

① 阿波罗尼奥斯 (Apollonius, 约公元前 262-190 年), 古希腊数学家.

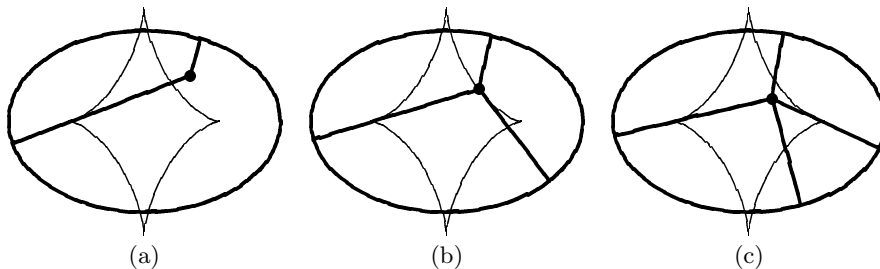


图 10: 从给定点作椭圆的法线问题的各种可能解

(1) Lagrange 乘子法只是极值点的必要条件, 因此所得的解只是约束极值 (或约束最值) 的嫌疑点.

(2) 除了用 Lagrange 乘子法求出的嫌疑点之外, 满足以下条件的点也是约束极值 (或约束最值) 的嫌疑点: (i) 约束条件中的函数 F 和目标函数 f 的不连续可微的点; (ii) 使得 Jacobi 矩阵 (F_x, F_y) 降秩的点.

(3) 实际上需要解决的多数问题是约束最值问题. 这时最好能够利用有界闭集上连续函数必有最值等方法事先判定最值的存在性.

(4) 若事先能肯定最值点存在, 则可以将上述 (1) 与 (2) 点中所说的极值嫌疑点全部求出, 然后计算所有嫌疑点上的目标函数值来确定最值点和最值.

(5) 对于约束最值问题, 如满足约束条件的点集不是有界闭集, 则有可能需要采取附加手段将点集转化为有界闭集来研究. 这将在后面通过例题来介绍.

例题 0.2 在约束条件 $g(x, y) = y^2 + yx^2 = 0$ 下, 求 $z = f(x, y) = x^2 + (y - 1)^2$ 的最值.

解 这实际上就是点 $(0, 1)$ 到曲线 $g(x, y) = 0$ 的距离最值问题. 由于该曲线无界, 因此最大值不存在 (参见右图). 又求出 $g(x, y)$ 的梯度 $(2xy, x^2 + y^2)$, 可见在 $(0, 0)$ 点为零向量. 因此这也是极值嫌疑点.

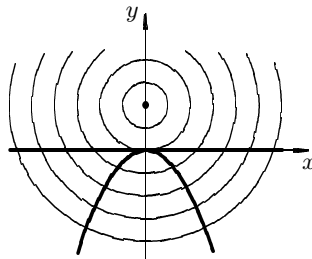


图 11: 又一个距离最值问题

对于 $(0, 0)$ 之外的点试用 Lagrange 乘子法求嫌疑点. 作出

$$L(x, y, \lambda) = x^2 + (y - 1)^2 + \lambda(y^2 + yx^2),$$

则驻点方程为

$$L_x = 2x + 2\lambda xy = 0,$$

$$L_y = 2(y - 1) + 2\lambda y + \lambda x^2 = 0,$$

$$L_\lambda = y^2 + yx^2 = 0.$$

可以发现该方程组无解.

于是嫌疑点只有点 $(0, 0)$. 由于最小值点存在, 因此它就是所求的最小值点. 从表达式知道最小值为 1. (从图 11 可直接看出, 满足约束的点 (x, y) 都有 $y \leq 0$, 因此 $(0, 0)$ 就是最小值点, 最小值为 1.) \square

五. 多个约束条件下的 Lagrange 乘子法

设函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 与

$$g_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, k, \quad k < n$$

在 \mathbb{R}^n 中的开集 D 上连续可微, 要求在满足约束条件

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

时目标函数 $z = f(x_1, \dots, x_n)$ 的约束极值或约束最值.

定义这时的 Lagrange 函数为

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) + \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

其中的 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 称为 Lagrange 乘子.

在定理 1 (及其注) 中解决了 $k = 1$ 的问题, 进一步可以推广如下.

定理 0.2 设点 $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ 是在约束条件 $g_1 = \dots = g_k = 0$ 的条件下目标函数 f 的约束极值点, 且 Jacobi 矩阵 $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n}$ 在点 P_0 处满秩, 则一定存在 k 个数 $\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0$, 它们与 x_1^0, \dots, x_n^0 一起是 Lagrange 函数 L 的驻点, 即满足下列 $n + k$ 个方程:

$$L_{x_1} = 0, \dots, L_{x_n} = 0; L_{\lambda_1} = 0, \dots, L_{\lambda_k} = 0.$$

注 与定理 1 相同, 这里的结论只是约束极值问题的必要条件, 不是充分条件. 其中的 Jacobi 矩阵满秩在只有一个约束条件时就是梯度向量非零的条件.

在证明之前先举例.

例题 0.3 在约束条件 $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 下求 $W = xyz$ 的最值.

解 1 为了用 Lagrange 乘子法时的变量个数, 可以先用 $z = -x - y$ 代入第二个约束和目标函数中, 然后再做下去. 见教科书 p.91. 这个方法的缺点是破坏了问题原来的对称性. 从略.

解 2 (这时 L 为 5 元方程, 驻点方程为 5 元的 5 个方程, 求解不易. 教科书中的方法是事先消去 z , 减少一个未知量, 这当然是一个办法. 缺点是破坏了问题本身具有的对称性. 下面不用此法做.)

首先从紧集上连续函数必有最值知道问题有解, 且为极值点. 又可看出最大值必大于 0, 最小值必小于 0.

这时的 Jacobi 矩阵为

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2x & 2y & 2z \end{pmatrix},$$

除非 $x = y = z$, 矩阵一定满秩. 由于有约束条件 $x + y + z = 0$ 和 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $x = y = z$ 不可能成立. 于是定理 2 的条件满足.

作出 Lagrange 函数 $L = xyz + \lambda(x + y + z) + \mu(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$, 就有

$$L_x = yz + \lambda + 2\mu x, L_y = zx + \lambda + 2\mu y, L_z = xy + \lambda + 2\mu z.$$

(另外两个就是约束条件, 不必再写.)

从这三个方程组合出 $xL_x + yL_y + zL_z = 3xyz + 2\mu$. 又写出 $xL_x = 0, yL_y = 0, zL_z = 0$, 并将其中的第一项 xyz 用 $-2\mu/3$ 代入, 这样就得到新的方程组

$$\begin{cases} 2\mu x^2 + \lambda x = -\frac{2\mu}{3}, \\ 2\mu y^2 + \lambda y = -\frac{2\mu}{3}, \\ 2\mu z^2 + \lambda z = -\frac{2\mu}{3}. \end{cases}$$

于是 (对于固定的 λ, μ 来说) x, y, z 满足同一个二次方程, 因此其中至少有两个相等. 如前所说, 达到最值的点的三个坐标不可能相等. 于是只能是恰好两个坐标相等.

再从问题的对称性知, 这种极值点或最值点的个数一定是 3 的倍数, 且达到相同的最值. 因此不妨设 $x = y \neq z$ 直接求解. (以下不再需要关于 L 的驻点方程组, 也没有必要去求出 Lagrange 乘子 λ, μ .)

问题已经转化为在约束条件 $2x + z = 0, 2x^2 + z^2 = 1$ 下求 $W = x^2z$ 的最值. 从前两个约束已经可以解出 $x = \pm \frac{1}{\sqrt{6}}, z = \mp \sqrt{\frac{2}{3}}$, 从而得到 $W = \mp \frac{1}{3\sqrt{6}}$. 利用在有界闭集 $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 上 W 一定有最值, 可见上述结果已经提供了所要求的最大值和最小值. \square

解 3 可以从两个约束条件消去 x, y , 从而成为 z 的一元函数的最值问题, 则可操作如下.

具体来说, 即从 $x^2 + y^2 = 1 - z^2$ 和 $(x + y)^2 = z^2$ 解出 $xy = z^2 - \frac{1}{2}$, 于是得到 $W(z) = z^3 - \frac{1}{2}z$, 问题在于这个一元函数的定义域. 这相当于再解一个约束最值问题: 即在 $x + y + z = 0, x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的条件下求 z 的最大值和最小值. 可以求出这个区间为

$$\left[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right].$$

然后可以求出 $W(z)$ 在点 $-\frac{1}{\sqrt{6}}$ 和上述区间的右端点处同时达到最大值 $\frac{1}{3\sqrt{6}}$, 而在点 $\frac{1}{\sqrt{6}}$ 和上述区间的左端点处同时达到最小值 $-\frac{1}{3\sqrt{6}}$. \square

例题 0.4 有三个点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ 分别位于三条不相交的^①光滑曲线 $g_1(x_1, y_1) = 0$, $g_2(x_2, y_2) = 0$, $g_3(x_3, y_3) = 0$ 上, 证明: 当 $\triangle ABC$ 的面积取最小值时, 该三角形的高与对应的法线重合.

证 这里有 6 个自变量, 有三个约束条件.

三角形 $\triangle ABC$ 的面积为

$$S = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix},$$

且由题意假设 S 已经存在最小值. 由于三条曲线彼此不交, 因此这个最小三角形不会退化一条直线段或一点.

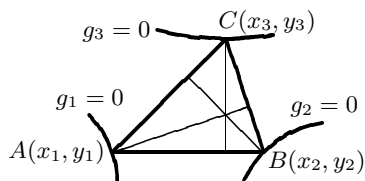


图 12: 最小面积三角形的特征

由于条件中假设三条曲线光滑, 因此在顶点 A, B, C 处相应曲线的梯度向量都不是零向量, 即一定存在法线. 这同时保证了 g_1, g_2, g_3 关于 $x_1, y_1, x_2, y_2, x_3, y_3$ 的 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial y_1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial y_2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} & \frac{\partial g_3}{\partial y_3} \end{pmatrix}$$

满秩, 即秩为 3.

作 $L = S + \lambda_1 g_1 + \lambda_2 g_2 + \lambda_3 g_3$, 就得到

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = \frac{1}{2}(y_2 - y_3) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial x_1} = 0,$$

$$\frac{\partial L}{\partial y_1} = -\frac{1}{2}(x_2 - x_3) + \lambda_1 \frac{\partial g_1}{\partial y_1} = 0,$$

以及类似的其他 4 个方程, 此外还有三个约束条件. 下面只证明顶点 A 处曲线 $g_1(x_1, y_1)$ 的法线与三角形对边 BC 上的高重合, 对于其他两个顶点的证明是完全类似的.

由于最小三角形不退化, 顶点 $B(x_2, y_2)$ 与 $C(x_3, y_3)$ 不重合, 因此从方程可见 $\lambda_1 \neq 0$. 这时过顶点 A 的曲线 $g_1 = 0$ 在点 A 的法线方向就是梯度向量 $(\frac{\partial g_1}{\partial x_1}, \frac{\partial g_1}{\partial y_1})$. 另一方面, 三角形对边 BC 的方向向量是 $(x_3 - x_2, y_3 - y_2)$. 利用驻点方程可见它们正交, 因此过顶点 A 的三角形的高与曲线 $g_1(x_1, y_1)$ 在点 A 的法线重合. \square

^① 原题中未对三条曲线加不相交条件, 容易举出反例说明这是错误的.

第 T15 次讲稿 (第三学期第 15 次)

第 T15 次讲稿, 用于 2008 年 10 月 24 日, 星期五, 2 节课.

内容: 第二十章, 讲完 §20.5 Lagrange 乘子法并略讲 §20.6, 结束这一章, 也就是结束多元微分学.

七. 其他例子

将例题 5 与例题 6 的顺序换一下.

例题 0.1 求二次型 $\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$) 在约束条件 $|\mathbf{x}|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 1$ 下的最大值和最小值.

解 (在 Hesse 矩阵定号情况讨论中已经讨论过这个问题, 不同的是现在可以最值与高等代数中的知识联系起来.)

首先用有界闭集上连续函数必有最小值和最大值, 又从约束条件知道梯度向量非零的条件一定满足.

作 Lagrange 函数

$$L(x_1, \cdots, x_n, \lambda) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j - \lambda(x_1^2 + \cdots + x_n^2 - 1),$$

则驻点方程为以下方程组

$$L_{x_1} = 2[(a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n] = 0,$$

$$L_{x_2} = 2[a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n] = 0,$$

.....

$$L_{x_n} = 2[a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n] = 0$$

和约束条件.

将二次型的矩阵记为 $A = (a_{ij})_{i,j=1,\dots,n}$, 则上述方程组有非零解的充分必要条件是 λ 为 A 的特征值. 由于 A 是实对称阵, 因此存在 n 个实特征值.

对于特征值 λ 和对应的单位特征向量, 可以从上述方程组组合得到

$$\sum_{i=1}^n x_i L_{x_i} = 2 \left[\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j - \lambda(x_1^2 + \cdots + x_n^2) \right] = 0,$$

这就是

$$\mathbf{x}^T A \mathbf{x} = \lambda \mathbf{x}^T \mathbf{x} = \lambda.$$

从而可见这时二次型的值就等于特征值 λ , 也就是相应的 Lagrange 乘子. 因此本题的最大值和最小值就是矩阵 A 的最大特征值和最小特征值. \square

例题 0.2 求在约束条件 $x_1 + \cdots + x_n = a$ 下函数 $u = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$ 的最大值, 其中假设 $a > 0, \alpha_i > 0, x_i > 0, i = 1, \cdots, n, n > 1$.

解 首先讨论最大值是否存在. 将函数 u 的定义域扩张到 $x_1 + \cdots + x_n = a > 0$, $x_i \geq 0$, $i = 1, \cdots, n$, 则就得到一个有界闭集^①. 由此可见最大值存在. 又由于只要有一个 $x_i = 0$ 就导致 $u = 0$, 可见最大值点一定在每个 $x_i > 0$ 时达到, 于是也就是原问题的极大值点. 从约束条件可见梯度不为零的条件成立. 这样就可以用 Lagrange 乘子法.

由于 u 为乘积形式, 采用取对数的方法将目标函数改为

$$v = \ln u = \alpha_1 \ln x_1 + \alpha_2 \ln x_2 + \cdots + \alpha_n \ln x_n,$$

然后作 Lagrange 函数

$$L(x_1, \cdots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \ln x_i - \lambda(x_1 + \cdots + x_n - a).$$

这样就得到驻点方程

$$L_{x_i} = \frac{\alpha_i}{x_i} - \lambda, \quad i = 1, \cdots, n,$$

$$L_{\lambda} = x_1 + \cdots + x_n - a.$$

从前 n 个方程解出 $x_i = \frac{\alpha_i}{\lambda}$, $i = 1, \cdots, n$, 代入最后一个方程 (即约束条件), 就可以得到 λ 以及 x_i 的解为

$$\lambda = \frac{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}{a}, \quad x_i = \frac{a\alpha_i}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n}, \quad i = 1, \cdots, n.$$

由于前面的分析, 存在最大值点, 且为极大值点, 因此用上述方法求出的惟一极值点就是所要的最大值点. 所求的最大值是

$$\begin{aligned} \max_{x_1 + \cdots + x_n = a} u &= \prod_{i=1}^n \left(\frac{a\alpha_i}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \right)^{\alpha_i} \\ &= \left(\frac{a}{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \right)^{\alpha_1 + \cdots + \alpha_n} \alpha_1^{\alpha_1} \cdots \alpha_n^{\alpha_n}. \quad \square \end{aligned}$$

注 1 若 $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 1$, 则就得到

$$x_1 \cdots x_n \leq \left(\frac{x_1 + \cdots + x_n}{n} \right)^n,$$

且当 $x_1 = \cdots = x_n$ 时成立等号, 这就是平均值不等式.

注 2 同样可以导出广义平均值不等式 (见教科书上册 p.180 的例 3). 为此对于一切 $x_i, p_i > 0$, $i = 1, \cdots, n$, 用 $p_i x_i / (p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n)$ 代替例题中的 x_i , 用 p_i 代替其中的 α_i , $i = 1, \cdots, n$. 这时 $a = 1$, 并从例题的最后结果得到

$$\prod_{i=1}^n \left(\frac{p_i x_i}{p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n} \right)^{p_i} \leq \frac{p_1^{p_1} \cdots p_n^{p_n}}{(p_1 + \cdots + p_n)^{p_1 + \cdots + p_n}},$$

整理后就得到广义平均值不等式

^① 为了能够使用有界闭集上连续函数的良好性质, 在原问题的定义域不是有界闭集 (即紧集) 的情况, 将定义域适当扩张为有界闭集是常用的方法, 这就是紧化 (compactification) 方法.

$$x_1^{p_1} \cdots x_n^{p_n} \leq \left(\frac{p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n}{p_1 + \cdots + p_n} \right)^{p_1 + \cdots + p_n},$$

还可从例题中的最大值点惟一推出当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n$ 时成立等号.

九. 约束条件为不等式的例子

例题 0.3 求 $f(x, y) = x + y$ 在不等式约束条件 $x^2 + y^2 \leq 1$ 下的最值.

解 首先还是从有界闭集上连续函数必有最值知道最小值和最大值都存在.

可以分别考虑 f 在 $x^2 + y^2 = 1$ 和在 $x^2 + y^2 < 1$ 上的最值. 对于前者, 已在例 1 中讨论过最大值问题. 在定理 1 证明前求出的两个极值点分别就是最大值点和最小值点. (可参看该题以前的解法和附图.)

若 f 在后者的区域中有最值, 则必是无约束极值点. 因此可以用 Fermat 定理求解. 然而从 $f_x = f_y = 1$ 可见不存在极值点. 因此 f 的最值只能在边界上达到. \square

例题 0.4 试用 Lagrange 乘子法证明 Cauchy 不等式:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2},$$

并指出等号成立的条件.

解 (将不等式的证明化为约束极值问题来处理是一种很有效的方法, 本题是这方面的一个例子.)

记 $\sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} = A$, $\sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2} = B$, 则 Cauchy 不等式就成为

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq AB.$$

将 A, y_1, \cdots, y_n 固定, 也就是作为参数, 将 x_1, \cdots, x_n 看成为变量, 然后在约束条件

$$g(x) = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 - A^2 = 0$$

下求目标函数 $z = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$ 的最大值和最小值.

若 $A = 0$, 则所有 $x_i = 0$, $i = 1, \cdots, n$, 于是 $z = 0$. 同样若 $B = 0$ 时也是如此. 以下设 $A, B > 0$.

从有界闭集上连续函数有最值, 因此最大值和最小值存在, 且都是极值. 同时 g 的梯度向量非零, 因此可以用 Lagrange 乘子法来求极值点.

作 Lagrange 函数

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda) = \sum_{i=1}^n x_i y_i + \lambda(x_1^2 + \dots + x_n^2 - A^2),$$

就得到

$$y_i + 2\lambda x_i = 0, \quad i = 1, \dots, n.$$

由 $B > 0$ 可见 $\lambda \neq 0$, 于是 $x_i = -\frac{y_i}{2\lambda}$, $i = 1, \dots, n$. 将 x_1, \dots, x_n 的上述表达式代入约束条件, 就可以求出 $\lambda^2 = \frac{B^2}{4A^2}$, 就有

$$\lambda = \pm \frac{B}{2A}.$$

并得到极值点

$$x_i = \mp \frac{y_i A}{B}, \quad i = 1, \dots, n.$$

这样就得到

$$\sum_{i=1}^n x_i y_i = \mp AB,$$

其中的正号和负号分别对应了目标函数的最大值和最小值. 由此就得到 Cauchy 不等式.

从最值点的表达式可见, 在 Cauchy 不等式中成立等号的条件是 \mathbf{x} 与 \mathbf{y} 共线 (其中包括两个向量中一个或两个都是零向量的情况). \square

十. 关于 Lagrange 乘子法的进一步讨论

本小节是对教科书增加的材料, 其中主要是: (1) 定理 2, 即一般情况的 Lagrange 乘子法的证明; (2) 关于约束极值的充分条件问题 (未讲).

首先我们来证明定理 2. 为方便起见, 将前面的定理 2 重新叙述如下.

设函数 $f(x_1, \dots, x_n)$ 与

$$g_i(x_1, \dots, x_n), \quad i = 1, \dots, k, \quad k < n$$

在 \mathbb{R}^n 中的开集 D 上连续可微, 要求在满足约束条件

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = 0, \quad i = 1, \dots, k,$$

时目标函数 $z = f(x_1, \dots, x_n)$ 的约束极值或约束最值.

这时作 Lagrange 函数如下 (其中和式前写为负号):

$$L(x_1, \dots, x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) - \sum_{i=1}^k \lambda_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

其中的 $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ 称为 Lagrange 乘子^①.

定理 0.2 设点 $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ 是在约束条件 $g_1 = \dots = g_k = 0$ 的条件下目标函数 f 的约束极值点 (或约束最值点), 且 Jacobi 矩阵 $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n}$ 在点 P_0

^① 从下面的证明可见在 Lagrange 函数中第二项前用负号更为自然, 从定理 1 的证明也可以看到这一点.

处满秩, 则一定存在 k 个数 $\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0$, 它们与 x_1^0, \dots, x_n^0 一起是 Lagrange 函数 L 的驻点, 即满足下列 $n+k$ 个方程:

$$L_{x_1} = 0, \dots, L_{x_n} = 0; \quad L_{\lambda_1} = 0, \dots, L_{\lambda_k} = 0.$$

分析 其中后 k 个方程就是约束条件, 又不含有乘子, 对点 P_0 总是满足的. 因此只要考虑前 n 个方程.

利用梯度向量的概念, 可以将前 n 个等式写成一个向量等式, 即成立

$$\text{grad } f(P_0) = \sum_{i=1}^k \lambda_i^0 \text{grad } g_i(P_0), \quad (1)$$

这样就知道 (1) 有明显的几何意义, 即在点 $P_0(x_1^0, \dots, x_n^0)$ 处目标函数 f 的梯度向量可以用约束条件中的函数 g_1, \dots, g_k 在该点的梯度向量线性表出, 其组合系数就是 λ_i^0 ($i = 1, \dots, k$).

证 写出在点 P_0 处由约束条件中的 k 个函数的偏导数组成的 Jacobi 矩阵 $\left(\frac{\partial g_i}{\partial x_j}\right)_{1 \leq i \leq k, 1 \leq j \leq n}$, 即一个 $k \times n$ 矩阵:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_k}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial g_k}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{P_0}.$$

从定理的条件知这个矩阵满秩 (注意 $1 \leq k < n$), 因此可以用隐函数存在定理^①于 $g_1 = \dots = g_k = 0$, 由此推知在点 P_0 的一个邻域中存在惟一的隐函数, 即使得 x_1, \dots, x_n 中的 k 个变量成为另外 $n-k$ 个变量的函数. 该隐函数是从 \mathbb{R}^{n-k} 中的一个邻域到 \mathbb{R}^k 的映射, 满足 k 个约束条件.

将上述隐函数组代入约束条件中得到关于 $n-k$ 个变量的 k 个恒等式. 利用一阶全微分的形式不变性就有以下 k 个等式 (当然在点 P_0 处也成立):

$$\left. \begin{aligned} dg_1 &= \frac{\partial g_1}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_1}{\partial x_n} dx_n = 0, \\ &\dots\dots\dots \\ dg_k &= \frac{\partial g_k}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial g_k}{\partial x_n} dx_n = 0. \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

另一方面, 由于 P_0 为极值点, 将上述隐函数组代入目标函数 f 中, 就使得 f 从 n 个自变量的函数变成 $n-k$ 个自变量的函数, 同时问题从约束极值成为无约束极值. 用 Fermat 定理就知道这个函数在极值点处对于这 $n-k$ 个自变量的偏导数

^① 教科书中只在第十九章的 p.58 介绍了 $n=4, k=2$ 的特殊情况,

等于 0, 也就是 $dz = 0$. 利用一阶微分的形式不变性, 就可以不区分在 x_1, \dots, x_n 中的自变量和隐函数的因变量, 从而得到^①

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n = 0. \quad (3)$$

现在考察向量 $d\mathbf{x} = (dx_1, \dots, dx_n)$. 从条件 (2) 可见 $d\mathbf{x}$ 与 k 个线性无关向量 $\text{grad } g_1(P_0), \dots, \text{grad } g_k(P_0)$ 正交. 将这 k 个向量张成的 k 维子空间记为

$$M = \text{Span}\{\text{grad } g_1(P_0), \dots, \text{grad } g_k(P_0)\},$$

则 $d\mathbf{x} \perp M$, 也就是 $d\mathbf{x} \in M^\perp$, 这里的记号 M^\perp 是 M 的正交补子空间.

条件 (3) 表明向量 $\text{grad } f(P_0)$ 与所有这样的 $d\mathbf{x}$ 正交, 由于 $d\mathbf{x}$ 的全体组成 M^\perp , 而 $(M^\perp)^\perp = M$, 因此 $\text{grad } f(P_0) \in M$, 这表明它是 $\text{grad } g_1(P_0), \dots, \text{grad } g_k(P_0)$ 的线性组合, 即成立 (1), 其组合系数就是定理所要求的 Lagrange 乘子. \square

本小节的第二个问题是考虑能否将前面用 Hesse 矩阵给出的无约束极值充分条件推广到约束极值的情况.

由于在约束极值问题中, f 在点 P_0 的一阶偏导数并不都等于 0, 因此不能将 Δf 写成为自变量增量的二次型加上高阶项, 并从二次型的定号与不定号来判定是否是极值以及极值的类型.

这里可以介绍用 Lagrange 函数的 Hesse 矩阵来判定极值的方法. 记 $\mathbf{x}^0 = (x_1^0, \dots, x_n^0)$, $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$, $\boldsymbol{\lambda}^0 = (\lambda_1^0, \dots, \lambda_k^0)$, 并设 f, g_1, \dots, g_k 均在点 P_0 邻近二阶连续可微. 利用 Lagrange 函数 $L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda})$ 以 $(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0)$ 为驻点, 就有

$$\begin{aligned} \Delta f &= f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}^0) \\ &= L(\mathbf{x}, \boldsymbol{\lambda}^0) - L(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \\ &= \frac{1}{2!} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 L}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}^0, \boldsymbol{\lambda}^0) \Delta x_i \Delta x_j + o(r^2) \quad (r \rightarrow 0), \end{aligned}$$

其中 $r = |\Delta \mathbf{x}|$ 与过去相同.

① 这里要对 (3) 作一点解释. 恰如定理 1 中那样, 从约束条件 $F(x, y) = 0$ 在点 (a, b) 邻近“解出” $y = y(x)$, 代入目标函数得到 $z = f(x, y(x))$. 由于它在点 a 的邻域内于 a 达到极值, 因此 $z_x(a) = 0$, 同时也有 $dz = 0$. 利用一阶微分的形式不变性就有

$$df = f_x(a, b) dx + f_y(a, b) dy = 0,$$

其中的两个偏导数当然一般不等于 0. 在定理 1 的证明中代替 $df = 0$ 的是

$$z_x(a) = f_x(a, b) + f_y(a, b)y'(a) = 0.$$

这里的 (dx, dy) 就是曲线 $F(x, y) = 0$ 在点 (a, b) 的切向量.

对于 (3) 中的 $df = 0$ 也是如此. 用隐函数代入后它是 $n - k$ 个自变量的函数 (也就是用约束条件和隐函数定理消去了 k 个变量), 在极值点处对于它们的偏导数都等于 0, 因此也同时有 $df = 0$. 在推出 (3) 时的情况完全相同. 正是由于一阶全微分的形式不变性, 不需要在 x_1, \dots, x_n 中区分哪些是自变量, 哪些是因变量.

于是需要考虑 Lagrange 函数的 Hesse 矩阵是否定号. 由上式可见, 若该 Hesse 矩阵定号, 则也就是右边的二次型为定号, 于是就可以判定点 \mathbf{x}^0 为约束极值点, 且可以知道其极值类型. 然而, 由于这里的 $\Delta \mathbf{x}$ 的 n 个分量并非独立, 而满足线性约束条件 (2), 因此在 L 的 Hesse 矩阵为不定号的情况下需要作进一步讨论, 这与无约束极值的情况不一样.

举一个简单例子, 即两数之和为 1 时它们的乘积何时最大. 这当然可以用初等方法解决, 但也可以用于解释前面的一些问题.

例题 0.5 在约束条件 $x + y = 1$ 下求 $f(x, y) = xy$ 的最大值.

解 从直线 $x + y = 1$ 穿过 3 个象限可知 xy 的最大值只能在 $x, y > 0$ 达到, 且也是极大值. 作 Lagrange 函数

$$L = xy + \lambda(x + y - 1),$$

则从

$$L_x = y + \lambda = 0, L_y = x + \lambda = 0, x + y = 1$$

可解出 $x = y = \frac{1}{2}$, 即最大值点.

写出 L 关于 x, y 的 Hesse 矩阵, 则是 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, 它是不定号的矩阵. 对应的二次型是 $2\Delta x\Delta y$. 然而由于其中的 Δx 和 Δy 不独立, 因此不能从上述二次型不定号作出什么结论.

从约束可知有 $\Delta x + \Delta y = 0$, 代入上述二次型中就得到 $-2\Delta x^2$, 可推出点 $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ 为极大值点.

(由于目标函数 f 为二次, 约束为一次, 因此有

$$\begin{aligned} \Delta f &= (x + \Delta x)(y + \Delta y) + \lambda_0(x + \Delta x + y + \Delta y - 1) - (xy + \lambda_0(x + y - 1)) \\ &= (y + \lambda_0)\Delta x + (x + \lambda_0)\Delta y + \Delta x\Delta y = \Delta x\Delta y \end{aligned}$$

因此 Δf 为二次, 它和约束导出的 $\Delta x + \Delta y = 0$ 中的 $\Delta x, \Delta y$ 可以取任意大的值, 从而通过上述分析 (不需要作事先分析) 同时也可以断定极大值点也是最大值点.)

最后指出, 这里的问题相当于讨论线性约束下的二次型的定号问题. 对简单的具体问题用消去法即可. 下面举出 Finsler^① 定理供参考.

定理 设 $\mathbf{x}^T Q \mathbf{x}$ 是 \mathbb{R}^n 中的二次型, \mathbf{x} 满足线性约束条件 $G\mathbf{x} = \mathbf{0}$, 其中 G 为 $k \times n$ 阶矩阵 ($1 \leq k < n$), 则上述二次型为正定 (即对非零 \mathbf{x} 始终取正值) 的充分必要条件是当数 λ 充分大时, 矩阵 $Q + \lambda G^T G$ 为正定阵.

① 芬斯勒 (Paul Finsler, 1890–1970), 德国数学家.

§20.6 向量值函数的全导数

一. 全导数的概念

这里要推广过去的导数概念到一般映射.

设有 $f: D \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, $(x_1, \dots, x_n) \mapsto (y_1, \dots, y_m)$, 即对于 $j = 1, \dots, m$ 的每一个 y_j 是 x_1, \dots, x_n 的 n 元函数, 可写成

$$\mathbf{f}(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n)),$$

称 f_j 为 \mathbf{f} 的第 j 个坐标函数, $j = 1, \dots, m$.

设 \mathbf{a} 是 D 的内点. 如何将一元函数的导数概念推广到这里? 差商中的分子分母都必须为数. 偏导数就是这样来的. 但我们已经知道偏导数概念太弱, 连映射的连续性都不能保证. 若要求偏导数连续, 则已经不是一个点上的概念了.

对于向量值函数, 自变量是参数 t 的情况, 即 $n = 1, m > 1$ 的情况, 可以对因变量向量的每一个分量去做出差商后取极限. 这在 $n > 1$ 时就没法做.

办法还是从全微分的定义出发. 即在点 \mathbf{a} 的一个邻域内, 能否存在一个线性映射来逼近 \mathbf{f} . 这里的线性映射与 \mathbf{f} 一样, 都是从 \mathbb{R}^n 到 \mathbb{R}^m 的映射.

从高等代数可以知道, 这样的线性映射可以用向量和矩阵工具来表示. 考虑全微分中的线性部分, 可以猜想这里的线性映射应当具有以下形式:

$$\mathbf{f}(\mathbf{a}) + \mathbf{A}(\mathbf{x} - \mathbf{a}),$$

其中 \mathbf{A} 是 $m \times n$ 阶矩阵 $(a_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$.

若记 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$, $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$ 为列向量, 则上式等式的第 i 个分量就是

$$f_i(a_1, \dots, a_n) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(x_j - a_j),$$

其中 $i = 1, \dots, m$.

由此可见, a_{ij} 应当取为 f_i 对 x_j 在点 \mathbf{a} 的偏导数. 因此也就是 f_1, \dots, f_m 关于 x_1, \dots, x_n 的 Jacobi 矩阵:

$$\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{a}}.$$

现在给出定义.

定义 0.1 设 \mathbf{f} 的每个坐标函数 f_i 在点 \mathbf{a} 可微, 则称 \mathbf{f} 在点 \mathbf{a} 可微, 且称 $\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n}$ 为 \mathbf{f} 在点 \mathbf{a} 的全导数, 并记为 $\mathbf{f}'(\mathbf{a})$.

下面是已知的三个特例:

对于 $m = n = 1$, 这就是一元函数的导数; 对于 $m = 1, n > 1$, 这就是多元函数的偏导数组成的向量, 也就是梯度向量 $\text{grad } f$ (不妨将它看成为列向量); 对于 $m > 1, n = 1$, 也就是向量值函数的切向量.

利用偏导数连续保证可微的定理, 容易证明教科书上的第一个定理, 即将可微概念推广到一般的映射.

定理 0.1 设 f 的每个坐标函数 f_i 于点 a 处关于每个自变量 x_i 有连续的偏导数, 则 f 在点 a 处可微.

下面我们证明, 用上述定义得到的可微性概念确实是以前关于一元函数和多元函数的可微性概念的推广.

定理 0.2 设 f 于点 a 可微, 则有

$$f(x) - f(a) = f'(a)(x - a) + o(x - a) \quad (x \rightarrow a).$$

这里先注意左边是 m 维向量, 右边第一项是 $m \times n$ 阶矩阵与 n 向量的乘积, 因此得到的也是 m 阶向量. 右边第二项当然是 m 阶向量, 作为余项, 它与 x 和 a 有关, 不妨记为 $r(x, a)$, 则定理表明有

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|r(x, a)|}{|x - a|} = 0,$$

即当 $x \rightarrow a$ 时是比无穷小量 $|x - a|$ 更为高阶的无穷小量.

证 证明很简单. 记

$$r(x, a) = (r_1(x, a), \dots, r_m(x, a))^T,$$

则按照定义对于每一个 $i = 1, \dots, m$ 有

$$r_i(x, a) = f_i(x) - f_i(a) - \left[\frac{\partial f_i}{\partial x_1}(a)(x_1 - a_1) + \dots + \frac{\partial f_i}{\partial x_n}(a)(x_n - a_n) \right]$$

且成立

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{|r_i(x, a)|}{|x - a|} = 0.$$

由于

$$|r| = \sqrt{r_1^2 + \dots + r_m^2},$$

因此定理的结论成立. \square

小结 对于从 Euclid 空间 \mathbb{R}^n (中的区域) 到 Euclid 空间 \mathbb{R}^m 的一般映射 f , 我们引入了映射在某点 a 的全微分和全导数的一般性概念, 这时的全导数就是 f 在点 a 的 Jacobi 矩阵, 而在此前的导数、梯度向量和向量值函数的切向量都是这里的全导数概念的特例.

二. 链式法则

设有 \mathbb{R}^n 中的开集 D , 并在 D 上定义有映射

$$\mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^k,$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x});$$

又设有 \mathbb{R}^k 中的开集 E , 并在 E 上定义有映射

$$\mathbf{g}: E \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$\mathbf{u} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{u});$$

则在条件 $\mathbf{f}(D) \subset E$ 成立时, 就得到在 $D \subset \mathbb{R}^n$ 上定义的复合映射 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$:

$$\mathbf{g} \circ \mathbf{f}: D \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

$$\mathbf{x} \mapsto \mathbf{y} = \mathbf{g}(\mathbf{f}(\mathbf{x})).$$

定理 0.3 若 \mathbf{f} 的各个坐标函数在点 $\mathbf{a} \in D$ 处连续可偏导, \mathbf{g} 的各个坐标函数在点 $\mathbf{b} = \mathbf{f}(\mathbf{a})$ 处连续可偏导, 则复合函数 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ 的各个坐标函数在点 \mathbf{a} 处连续可偏导, 且在它们的全导数之间成立

$$(\mathbf{g} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{a}) = \mathbf{g}'(\mathbf{b}) \circ \mathbf{f}'(\mathbf{a}).$$

证 上式左边是 $m \times n$ 阶矩阵, 也可以理解为一个线性变换. 右边是 $m \times k$ 阶矩阵与 $k \times n$ 阶矩阵的乘积, 也可以理解为两个线性变换的复合.

将 m 维向量函数 $\mathbf{g} \circ \mathbf{f}$ 记为

$$\mathbf{g} \circ \mathbf{f} = (h_1, \dots, h_m),$$

则就有

$$h_i(\mathbf{x}) = g_i(f_1(\mathbf{x}), \dots, f_k(\mathbf{x})), \quad i = 1, \dots, m.$$

利用多元函数的链式法则就可以对于所有的 $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$ 得到

$$\frac{\partial h_i(\mathbf{a})}{\partial x_j} = \frac{\partial g_i}{\partial u_1}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x_j}(\mathbf{a}) + \dots + \frac{\partial g_i}{\partial u_k}(\mathbf{b}) \cdot \frac{\partial f_k}{\partial x_j}(\mathbf{a}),$$

这就是所要证明的结论. \square

注 可以将定理中的连续可偏导条件减弱为可微条件, 结论仍然成立.

推论 设 D 是 \mathbb{R}^n 中的开集, \mathbf{f} 是从 D 到 \mathbb{R}^n 的可微映射, 且存在可微的逆映射 \mathbf{f}^{-1} . 设点 $\mathbf{a} \in D, \mathbf{f}(\mathbf{a}) = \mathbf{b}$, 则就有

$$(\mathbf{f}^{-1} \circ \mathbf{f})'(\mathbf{a}) = (\mathbf{f}^{-1})'(\mathbf{b}) \circ \mathbf{f}'(\mathbf{a}) = \mathbf{1},$$

其中最右边的 $\mathbf{1}$ 是恒等映射, 它的矩阵表示就是单位阵 I .

注 这是一元函数中反函数求导法则的推广. 即若 $y = y(x)$ 在点 a 可微, $y'(x) \neq 0$, 则存在反函数 $x = x(y)$, 且也可微. 若 $b = y(a)$, 则有

$$x'_y(b)y'_x(a) = 1,$$

或写为

$$y'_x(x) = \frac{1}{x'_y(y(x))}.$$

第 T16 次讲稿 (第三学期第 16 次)

第 T16 次讲稿, 用于 2008 年 10 月 29 日, 星期三, 3 节课.

内容: 第二十一章, 重积分, 第一次.

与单重积分 (即定积分) 从曲边梯形的面积问题开始一样, 可以从曲顶柱体的体积问题开始引入二重积分. 然而这样就需要对于平面图形建立比较一般的面积概念. 下面采取从矩形上的二重积分开始的方法, 而在后面解决平面图形的面积问题.

§21.1 矩形上的二重积分

一. 矩形的分划

设 $A = [a, b] \times [c, d]$ ($= [a, b; c, d]$) 是 \mathbb{R}^2 内的一个闭矩形, 又设

$x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$ 是 $[a, b]$ 的一个分划,

$y_0 = c < y_1 < \cdots < y_m = d$ 是 $[c, d]$ 的一个分划,

则可以在矩形内用直线 $x = x_i$ 和 $y = y_j$ ($i = 1, \cdots, m; j = 1, \cdots, n$) 对矩形 A 作出一个分划, 这就是将 A 分划为 mn 个子闭矩形

$$A_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j], \quad i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m.$$

又记

$$d_{ij} = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (y_j - y_{j-1})^2},$$

即 A_{ij} 的直径.

将上述分划记为

$$P = \{x_0, x_1, \cdots, x_m; y_0, y_1, \cdots, y_n\},$$

并用

$$\|P\| = \max_{i,j} d_{ij}$$

作为 A 的上述分划的细度. (教科书中称为长度, 这不妥.)

二. 矩形 A 上的积分定义

f 是定义于 A 上的二元函数. 现在仿照一元函数的 Riemann 积分定义, 任取介点 $P_{ij}(\xi_i, \eta_j) \in A_{ij}$, 并构造出 Riemann 和

$$\sum_{ij} f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_j = y_j - y_{j-1}$.

若在分划 P 的细度 $\|P\| \rightarrow 0$ 时, 与分划和介点无关地, 上述 Riemann 和有极限, 则称 f 在 A 上 Riemann 可积, 将此极限值定义为 f 在矩形 A 上的二重积分, 记为

$$\iint_A f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b \int_c^d f(x, y) \, dx \, dy,$$

并称 f 为被积函数, 称 A 为积分区域. 也可以简记为 $\iint_A f$.

与一元函数的 Riemann 积分相同, 可以证明若 f 于矩形 A 上 Riemann 可积, 则 f 在 A 上一定有界. 此外同样可以引入 f 在矩形 A 上的 Darboux 上和与 Darboux 下和, 并证明有关的性质. 具体来说, 对每个子闭矩形 A_{ij} , 令

$$M_{ij} = \sup_{P \in A_{ij}} f(P), \quad m_{ij} = \inf_{P \in A_{ij}} f(P),$$

然后就可以分别定义 Darboux 上和与下和为

$$\begin{aligned} \overline{S}_P &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m M_{ij} \Delta x_i \Delta y_j, \\ \underline{S}_P &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m m_{ij} \Delta x_i \Delta y_j. \end{aligned}$$

将它们相减, 并引入振幅

$$\omega_{ij} = M_{ij} - m_{ij},$$

则就得到与一元函数积分中振幅面积对应的和式

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \Delta x_i \Delta y_j,$$

可以称为振幅体积. 它对于可积性的判定是有用处的.

三. 二重积分的几何意义

设 f 是定义在闭矩形 $A = [a, b] \times [c, d]$ 上的非负连续函数, 则如图 1 所示, 可以将二重积分

$$\iint_A f(x, y) dx dy$$

想象成三维空间中以曲面 $z = f(x, y)$ 为顶, 以 xOy 平面上的矩形 A 为底面的柱体 (今后称为曲顶柱体) 的体积.

采用与一元积分学中求曲边梯形面积的相同方法. 将 A 作分划就意味着将以 A 为底的曲顶柱体分解为有限多个以 A_{ij} 为底的小曲顶柱体 (在图 1 中作出了其中的一个). 以底为 A_{ij} 且高为某个 $f(P_{ij})$ ($P_{ij} \in A_{ij}$) 的长方体就是对于小曲顶柱体体积的逼近. 用底为 A_{ij} 高为 $\max_{(x,y) \in A_{ij}} f(x, y)$ 和 $\min_{(x,y) \in A_{ij}} f(x, y)$ 的两个长方体则可以将上述长方体 (和小曲顶柱体) 夹在中间. 对于 i, j 求和, 就是用 Darboux 上和与下和将 Riemann 和夹在中间.

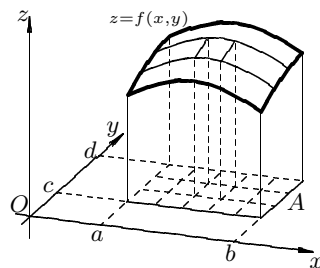


图 1: 作为曲顶柱体体积的二重积分

当 f 在 A 上可积时, 只要分划的细度趋于 0, 上和与下和的极限就相同, 这就是曲顶柱体的体积.

四. 可积充要条件

与数列极限、函数极限和定积分进行类比就可以理解, 仅仅从二重积分的定义出发是难以解决许多问题的, 这里必须建立如何判定可积的准则. 与定积分的可积充要条件类似, 可以证明以下定理.

定理 0.1 对于在矩形 $A = [a, b] \times [c, d]$ 上定义的函数 f , 以下三个条件等价:

- (1) 函数 f 于 A 上 Riemann 可积,
- (2) $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = 0$,
- (3) 对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists P$, 使得 $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \Delta x_i \Delta y_j < \varepsilon$.

利用多元函数的 Cantor 定理 (即有界闭集上的连续函数必定一致连续) 和上述条件 (3) 就容易证明在 A 上的连续函数可积, 此外, 不连续点为有限个的有界函数也可积.

在闭矩形 $A = [0, 1] \times [0, 1]$ 上定义 Dirichlet 函数

$$D(x, y) = \begin{cases} 1, & x, y \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{其他情况}, \end{cases}$$

则可见对于任何分划都有 $\omega_{ij} = 1 - 0 = 1$, 因此振幅体积始终为 1, 即是有

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \omega_{ij} \Delta x_i \Delta y_j = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \Delta x_i \Delta y_j = 1,$$

因此 $D(x, y)$ 在 $A = [0, 1] \times [0, 1]$ 上不可积.

五. 零测度集

与一元函数的积分类似, 为了彻底解决什么样的函数为 Riemann 可积的问题, 需要引入多维空间的零测度集. 此外, 这也为后面的面积定义问题作好了理论准备. 为了不发生混淆, 今后常将过去的零测度集称为一维零测度集. 以下叙述的二维零测度集可以没有困难地推广到一般的 n 维空间中去.

定义 0.1 设 S 是平面 \mathbb{R}^2 内的一个点集. 若对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在至多可列个开矩形^① $\Delta_1, \dots, \Delta_n, \dots$, 使得

$$(1) \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n \supset S,$$

$$(2) \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n| < \varepsilon, \text{ 其中 } |\Delta_n| \text{ 是 } \Delta_n \text{ 的面积,}$$

则称 S 是 \mathbb{R}^2 内的一个 (二维的) 零测度集, 简称为 (二维) 零集.

容易证明二维零测度集的下列性质, 其中的内容和证明方法与一维零测度集相同.

性质 1 零测度集的子集也是零测度集.

性质 2 平面上的可列集必是零测度集.

性质 3 平面上的可列个零测度集的并集仍然是零测度集.

注 需要注意, 在 \mathbb{R}^1 上的区间 $[0, 1]$ 不是一维的零测度集, 但却是二维的零测度集. 因此今后在用到零测度集概念时, 在必要时必须附加说明是何种维数的零测度集.

对于在 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上定义的函数 f , 若 f 的不连续点为二维零测度集, 则称 f 在 D 上几乎处处连续.

除了以上概念之外, 我们还介绍零容度集的概念.

^① 与一维情况类似, 若将定义中的开矩形换为闭矩形, 包括退化为点和线段的闭矩形, 仍然得到相同的零测度集.

定义 0.2 设 S 是平面 \mathbb{R}^2 内的一个点集. 若对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在有限个开矩形^① $\Delta_1, \dots, \Delta_n$, 使得

$$(1) \bigcup_{k=1}^n \Delta_k \supset S,$$

$$(2) \sum_{k=1}^n |\Delta_k| < \varepsilon, \text{ 其中 } |\Delta_k| \text{ 是 } \Delta_k \text{ 的面积,}$$

则称 S 是 \mathbb{R}^2 内的一个 (二维的) 零容量集^② (在不发生混淆时也称为零集).

注 1 显然零容量集一定是零测度集, 反之则不一定成立. 例如在 \mathbb{R}^2 中两个坐标都是有理数的全体为零测度集, 但不是零容量集. 又如无界集可能是零测度集, 但一定不是零容量集.

注 2 零测度集的闭包未必是零测度集, 但零容量集的闭包仍是零容量集.

前者可以用注 1 中的例子来说明. 后者则当 $S \subset \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$, 且每个 Δ_i 为闭矩形时, 利用有限个闭集的并仍为闭集, 因此同时有 $\overline{S} \subset \bigcup_{i=1}^n \Delta_i$.

注 3 利用有限覆盖定理可以知道, 有界闭集 (即紧集) 为零测度集时也一定是零容量集. 由于任何点集的边界为闭集, 因此对有界点集 S 来说, ∂S 为零测度集时则也是零容量集. 统称为零集.

六. Lebesgue 定理

与一元函数的 Riemann 可积问题一样有以下重要结论. 它的证明是类似的. 由于其重要性, 也是为了有一次重复学习的机会, 下面给出其证明. 读者可以和对于 $n = 1$ 的证明作比较.

定理 0.2 在闭矩形 $A = [a, b] \times [c, d]$ 上定义的函数 f 为 Riemann 可积的充分必要条件是 f 在 A 上有界且几乎处处连续.

证 必要性 (\Rightarrow). 从前面已知 f 在 A 上可积则有界. 现在将 f 在 A 上的间断点全体所成集合记为 D , 我们要证明 D 为零测度集.

与一元函数情况相同, 从连续性定义可知, 每个间断点处 f 的振幅大于 0. 固定一个正数 $\delta > 0$, 考虑 D 中振幅大于等于 δ 的间断点所成的子集, 并记为

$$D_\delta = \{(x_0, y_0) \in D \mid \omega_f((x_0, y_0)) \geq \delta\}.$$

对给定的 $\varepsilon > 0$, 从定理 1 之条件 (3) 知道, 存在闭矩形 A 的一个分划 P , 使得 P 所对应的振幅体积

^① 这里也可以将开矩形换为闭矩形.

^② 也经常称零容量集为 Jordan 零测度集, 而称定义 1 中的零测度集为 Lebesgue 零测度集.

$$\sum_{i,j} \omega_{ij} \Delta \sigma_{ij} < \varepsilon \delta,$$

其中 $\Delta \sigma_{ij} = \Delta x_i \Delta y_j = |A_{ij}|$.

将分划 P 确定的所有闭子矩形按照 f 在其上的振幅大小分成 $\omega_{ij} < \delta$ 和 $\omega_{ij} \geq \delta$ 的两类, 则有

$$\delta \sum_{\omega_{ij} \geq \delta} \Delta \sigma_{ij} \leq \sum_{\omega_{ij} \geq \delta} \omega_{ij} \Delta \sigma_{ij} < \varepsilon \delta,$$

由此可见 $\sum_{\omega_{ij} \geq \delta} \Delta \sigma_{ij} < \varepsilon$, 即振幅大于等于 δ 的闭子矩形 A_{ij} 的面积之和小于 ε .

对于每个点 $(x_0, y_0) \in D_\delta$, 在包含 (x_0, y_0) 为内点的闭子矩形上 f 的振幅大于等于 δ . 因此 D_δ 中的点不可能是 $\omega_{ij} < \delta$ 的闭子矩形的内点, 这样就只能有

$$D_\delta \subset \left(\bigcup_{\omega_{ij} \geq \delta} A_{ij} \right) \bigcup \left(\bigcup_{i,j} \partial A_{ij} \right),$$

由于每个 ∂A_{ij} 都是二维零测度集, 这样就得到了 D_δ 的有限覆盖, 其中矩形的面积之和小于 ε . 由于 $\varepsilon > 0$ 可任意小, 因此 D_δ 为零测度集.

由于 f 的每个间断点必定属于某个 D_δ , 只要 $\delta > 0$ 足够小, 因此有

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_{\frac{1}{n}}.$$

对 $\forall \varepsilon > 0$, 用总面积小于 $\varepsilon/2$ 的有限个矩形覆盖 D_1 , 用总面积小于 $\varepsilon/4$ 的有限个矩形覆盖 D_2 , 如此继续下去, 就得到了覆盖 D 的至多可列个矩形, 它们的面积之和小于 ε , 因此 D 为二维的零测度集.

充分性 (\Leftarrow). 从 f 有界知道有 $M > 0$, 使得 $|f(x, y)| < M \forall (x, y) \in A$.

对于给定的 $\varepsilon > 0$, 由于 f 的间断点集 D 为零测度集, 因此存在总面积不超过 ε 的至多可列个开矩形覆盖 D . 今后将这样的开矩形称为第一类开矩形^①.

对于连续点 (x, y) , 利用该点振幅为 0, 因此存在覆盖点 (x, y) 的开矩形, 使得 f 在其上的振幅小于 ε . 对每个连续点如此做, 就得到覆盖所有连续点的开矩形族, 今后将如此得到的开矩形称为第二类开矩形.

合并以上所有两类开矩形, 就得到关于闭矩形 A 的开覆盖. 用有限覆盖定理, 在这个开覆盖中存在 A 的有限子覆盖, 即有限个开矩形, 它们的并仍然覆盖 A .

将这有限个开矩形的所有顶点投影到 x 轴和 y 轴上, 将 x 轴上越出 $[a, b]$ 和 y 轴上越出 $[c, d]$ 的投影点去掉, 并自动加入端点 a, b, c, d , 这样就得到 $[a, b]$ 的分划和 $[c, d]$ 的分划, 并生成闭矩形 A 的分划 P .

考虑由分划 P 得到的所有闭子矩形 A_{ij} . 可以看出, 每一个 A_{ij} 一定为某个第一类开矩形或第二类开矩形所覆盖.

^① 由于这里是应用有限覆盖定理作准备, 因此在充分性证明中都只用开矩形.

按照 $\omega_{ij} \geq \varepsilon$ 和 $\omega_{ij} < \varepsilon$ 将所有闭子矩形分成两类.

对于 $\omega_{ij} \geq \varepsilon$ 的第一类 A_{ij} , 由于它只能为第一类开矩形所覆盖, 因此它们的面积总和小于 ε . 虽然 f 在这类 A_{ij} 上的振幅可能较大, 但总有 $\omega_{ij} \leq 2M$.

对于 $\omega_{ij} < \varepsilon$ 的第二类 A_{ij} , 则它们的面积之和不会超过 A 的面积 $|A| = (b-a)(d-c)$.

于是与这个分划 P 对应的振幅体积满足不等式

$$\sum_{i,j} \omega_{ij} \Delta \sigma_{ij} = \left(\sum_{\omega_{ij} \geq \varepsilon} + \sum_{\omega_{ij} < \varepsilon} \right) \omega_{ij} \Delta \sigma_{ij} \leq 2M\varepsilon + |A|\varepsilon = (2M + |A|)\varepsilon.$$

因此根据定理 1 之 (3) 可知 f 在 A 上 Riemann 可积. \square

七. 可积函数的性质

以下几个性质都是一元函数积分性质的平行推广.

性质 1 (关于被积函数的线性性质) 设 f, g 都在闭矩形 A 上可积, α, β 是两个实数, 则 $\alpha f + \beta g$ 也在 A 上可积, 且有

$$\iint_A (\alpha f + \beta g) = \alpha \iint_A f + \beta \iint_A g.$$

性质 2 (关于积分区域的可加性质) 设闭矩形 A 可以分解为 n 个闭矩形 A_i , $i = 1, \dots, n$ 的并, 其中的任何两个矩形的内部不相交, 则 f 在 A 上可积等价于 f 也在每一个 A_i ($i = 1, \dots, n$) 上可积, 且当可积时成立等式

$$\iint_A f = \sum_{i=1}^n \iint_{A_i} f.$$

性质 3 (比较性质) 设 f, g 都在闭矩形 A 上可积, 且在 A 上处处成立 $f(x, y) \leq g(x, y)$, 则有

$$\iint_A f \leq \iint_A g.$$

性质 4 (绝对可积性质) 若 f 在闭矩形 A 上可积, 则 $|f|$ 也在 A 上可积, 且有

$$\left| \iint_A f \right| \leq \iint_A |f|.$$

性质 5 (被积函数乘积的可积性) 设 f, g 都在闭矩形 A 上可积, 则 $f \cdot g$ 也在 A 上可积.

性质 6 (积分中值定理) 设 f, g 都在闭矩形 A 上可积, g 在 A 上不变号, 则存在常数 μ , 使得成立

$$\iint_A fg = \mu \iint_A g,$$

其中 $\mu \in [m, M]$, m, M 分别是 f 在 A 上的下确界和上确界.

又若 f 在 A 上连续, 则存在点 $(\xi, \eta) \in A$, 使得成立

$$\iint_A f = f(\xi, \eta) \iint_A g,$$

特别当 $g \equiv 1$ 在 A 上成立时, 就有

$$\iint_A f = f(\xi, \eta)|A|,$$

其中 $|A|$ 为闭矩形 A 的面积.

八. 矩形上二重积分的计算

先介绍二次积分.

先看下列二次积分, 称为先 y 后 x 的二次积分:

$$\int_a^b \left\{ \int_c^d f(x, y) dy \right\} dx$$

其中 $f(x, y)$ 在 $A = [a, b] \times [c, d]$ 上有定义. 设积分 $\int_c^d f(x, y) dy$ 对于 $x \in [a, b]$ 有意义, 因此是 x 的函数, 记为

$$\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy.$$

设 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 就得到上述二次积分. 今后就写为 $\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

同样定义先 x 后 y 的二次积分

$$\int_c^d \left\{ \int_a^b f(x, y) dx \right\} dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

例题 0.1 计算 $[-1, 1; 0, \frac{\pi}{2}]$ 上函数 $x \sin y - ye^x$ 的两个二次积分.

解 先 x 后 y 的二次积分是

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} dy \int_{-1}^1 (x \sin y - ye^x) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{x^2}{2} \sin y - ye^x \right) \Big|_{x=-1}^{x=1} dy \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} y(e^{-1} - e) dy \\ &= (e^{-1} - e) \frac{y^2}{2} \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= \frac{1}{8}(e^{-1} - e)\pi^2. \end{aligned}$$

先 y 后 x 的二次积分是

$$\begin{aligned}
\int_{-1}^1 dx \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x \sin y - y e^x) dy &= \int_{-1}^1 \left(-x \cos y - \frac{y^2}{2} e^x \right) \Big|_{y=0}^{y=\frac{\pi}{2}} dx \\
&= \int_{-1}^1 \left(x - \frac{\pi^2}{8} e^x \right) dx \\
&= -\frac{\pi^2}{8} e^x \Big|_{-1}^1 \\
&= \frac{\pi^2}{8} (e^{-1} - e). \quad \square
\end{aligned}$$

注 注意两个二次积分相等不是偶然的. 这就是下列定理的内容.

定理 0.3 设 f 在 $A = [a, b; c, d]$ 上可积, 且对于每一个 $x \in [a, b]$, 存在积分 $\varphi(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, 则 $\varphi(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且有

$$\iint_A f = \int_a^b \varphi(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy.$$

(将这个定理的内容与教科书 p.20 的定理 4 比较, 可见非常像. 当然我们这里的极限要复杂得多. 不能将那里的结论直接用到这里. 但可以学习那里的方法.)

证 记积分 $\iint_A f = I$, 则要证明: 对每一个给定的 $\varepsilon > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得对细度小于 δ 的每一个分划 P_x , 以及与 P_x 相容的每个介点集 ξ , 成立

$$|\sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \Delta x_i - I| < \varepsilon.$$

从 f 于 A 上可积的条件知道, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall P (\|P\| < \delta), \forall (\xi_{ij}, \eta_{ij}) \in A_{ij} \ i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m,$

$$\left| \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f(\xi_{ij}, \eta_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j - I \right| < \varepsilon.$$

取 $\xi_{ij} = \xi_i$ 只与 i 有关, 取 $\eta_{ij} = \eta_j$ 只与 j 有关, 这样就得到

$$\left| \sum_{i=1}^n \Delta x_i \sum_{j=1}^m f(\xi_i, \eta_j) \Delta y_j - I \right| < \varepsilon.$$

再令 $\max_j |\Delta y_j| \rightarrow 0$, 由于对每个 $x \in [a, b]$, 积分 $\int_c^d f(x, y) dy = \varphi(x)$ 存在, 因此就得到

$$\left| \sum_{i=1}^n \varphi(\xi_i) \Delta x_i - I \right| \leq \varepsilon. \quad (1)$$

对于 $[a, b]$ 的分划 $P_x = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$, 若 $\|P_x\| = \max_i \Delta x_i < \delta, \xi_i \in [x_{i-1}, x_i] \ \forall i = 1, \dots, n$, 则总可以将 P_x 扩张为 $[a, b; c, d]$ 的一个分划 P , 使得

$$\|P\| = \max_{i,j} \sqrt{\Delta x_i^2 + \Delta y_j^2} < \delta,$$

从上述推导就可以得到 (1), 这就证明了 $\varphi \in R[a, b]$, 且 $\int_a^b \varphi = I$. \square

注 教科书上用 Darboux 上和与下和来做, 问题是上册的定积分理论中虽然引入了这两个概念, 但并没有讨论过它们的极限, 因此前后不一致. 此外在分划细度趋于 0 的写法上也还有不妥处.

推论 3 设 f 在 $A = [a, b; c, d]$ 上连续, 则

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx = \int_A f(x, y) dx dy.$$

上述推论提供了计算二重积分的两种方法. 但难易程度未必相同.

例题 0.2 设 $A = [0, 1] \times [0, 1]$, 求

$$I = \iint_A \frac{y dx dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

解 容易看出先 y 后 x 的二次积分要容易计算一些:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_0^1 \frac{y dy}{(1 + x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 2}} \right) dx \\ &= \ln(x + \sqrt{x^2 + 1}) \Big|_0^1 - \ln(x + \sqrt{x^2 + 2}) \Big|_0^1 \\ &= \ln \frac{(1 + \sqrt{2})\sqrt{2}}{1 + \sqrt{3}}. \quad \square \end{aligned}$$

注 还可能存在这样的情况, 即有一个二次积分无法用普通的方法求出, 而另一个二次积分却容易求出. 因此在上面的例子中我们不去比较另一种方法如何了.

此外, 若去掉 f 在闭矩形 A 上为二元连续的条件, 则在二重积分与两个二次积分之间就可能出现许多复杂的可能性. 在本书原来的版本中有讨论. 此外还可以看《微积分学教程》.

§21.2 一般区域上的二重积分

一. 有界集上二重积分的定义

设 $D \subset \mathbb{R}^2$ 为一有界闭区域, f 于 D 上有定义. 问题是如何定义 f 在 D 上的积分? 从几何上看, 就是以 D 为底的曲顶柱体的体积问题.

这里的基本方法是将问题归之于前面已经解决的闭矩形上的二重积分.

定义在包含 D 的一个闭矩形 A 上的函数

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in A - D, \end{cases}$$

然后定义 f 于 D 上可积就是 F 在 A 上可积, 且在后者可积时定义

$$\iint_D f = \iint_A F.$$

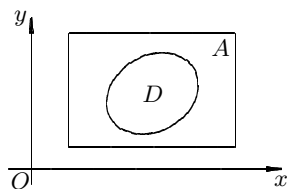


图 2: 一般区域上的二重积分定义

为方便起见, 称上述 F 为函数 f 的零扩张 (这里的扩张就是延拓).

可以看出以上定义中的可积性以及可积情况时的积分值都不依赖于闭矩形 A 的选择, 只要使得 D 完全在 A 的内部中即可.

下面先讲教科书 p.117 的定理 2, 其中的内容可以作为在 D 上定义的函数 f 的积分定义^①, 并与上述零扩张无关.

定理 0.2 设函数 f 在有界集 D 上可积, P 为 D 的分划, 则

$$\iint_D f = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{\Delta_{ij} \subset D} f(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j,$$

其中 Δ_{ij} 是由分划 P 生成的子矩形, 其面积 $|\Delta_{ij}| = \Delta x_i \Delta y_j$, 介点 $P_{ij} \in \Delta_{ij}$, 和式只对于完全落在 D 中的那些 Δ_{ij} 求和.

证 取 $A = [a, b] \times [c, d] \supset D$, 并在 A 上作 f 的零扩张 F . 用分点 $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$ 和 $c = y_0 < y_1 < \cdots < y_m = d$ 作分划 P , 得到闭子矩形 $\Delta_{ij} = [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$, $i = 1, \cdots, n; j = 1, \cdots, m$. 区别出落在 D 内和不是如此的两类子矩形. 在图 3 中用粗黑线描出了分别属于这两类的两个子矩形.

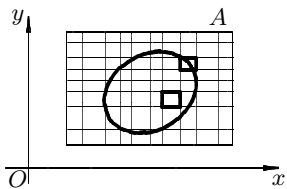


图 3: 零扩张后的分划

根据可积的定义, 有

^① 在不少教科书中直接从定义域 D 的分划开始, 且使用更为一般的曲线网进行分划. 但这样就涉及到什么样的曲线网是允许使用的, 从而就必须先讨论面积问题.

$$\iint_D f = \iint_A F = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n F(P_{ij}) \Delta x_i \Delta y_j.$$

利用其中介点 P_{ij} 可任取, 对于 $\Delta_{ij} - D \neq \emptyset$ 取 $P_{ij} \in \Delta_{ij} - D$, 于是 $F(P_{ij}) = 0$, 而当 $\Delta_{ij} \subset D$ 时, 总有 $F(P_{ij}) = f(P_{ij})$, 这样就得到定理所要的结论. \square

定理 2 以可积性为条件, 因此没有涉及到一般有界区域上函数的可积性问题.

从以下的分析可以知道这时的可积性与积分区域和其中定义的被积函数两者都有关系.

当然也有例外情况. 这就是在积分区域 D 上被积函数 $f(x) \equiv 0$ 的情况. 这时从零扩张可见在包含 D 的矩形 A 上扩张得到的函数 F 也恒等于 0, 因此可积, 且积分值为 0. 从而推出 f 在 D 上可积, 积分值为 0. 这表明, 在有界的定义域上恒等于 0 的函数总是可积的.

然而一般来说, 积分区域将起重要作用. 其中一个重要问题就是: 若 f 在 D 上处处连续, 或者几乎处处连续, 则 f 是否在 D 上可积?

分析一个简单例子即可知道这与积分区域有什么联系. 设 f 在有界闭区域 D 上恒等于 1, 则对于包含 D 在其内部的闭矩形 A , 就有

$$F(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in A - D, \end{cases}$$

这时边界 ∂D 的每一个点都可能是 F 的间断点. 对于一般的函数 f , 情况也是如此.

利用上一小节的 Lebesgue 定理就得到下列结论.

定理 0.1 设函数 f 的定义域 D 是边界 ∂D 为零集的有界闭区域, 则 f 为 Riemann 可积的充分必要条件是它在 D 上几乎处处连续且有界.

证 取矩形 $A \supset D$, 将 f 零延拓到 A 上得到 F . 则 F 在 A 上的不连续点集不会越出 f 在 D 中的不连续点集和 ∂D 之并. 由于这两个集都是零测度集, 因此 F 在 D 上几乎处处连续,

推论 设有界函数 f 的定义域 D 是边界 ∂D 为零集的有界闭区域, 若 f 在 D 中除了有限条曲线外处处连续, 且这些曲线都是零集, 则 f 在 D 上 Riemann 可积.

注 1 由于任何集合的边界为闭集, 因此有界闭区域的边界一定是有界闭集, 从而上述定理中的 ∂D 既是零测度集, 也是零容度集, 简称为零集.

注 2 在某些教科书中不加证明地列出下列定理: 在有界闭区域上的连续函数可积. 实际上这是错误的. 因为可以构造出边界不是零测度集的有界闭区域 D ^①,

① 从《分析中的反例》第十一章第 4 题知道存在以单闭曲线为边界的 Jordan 区域, 而其边界不是零集.

这时在 D 上恒等于 1 的连续函数就不是 Riemann 可积了. 还有许多教科书在重积分一开始就声明只考虑边界为零集的有界闭区域, 避免了这里的困难.

第 T17 次讲稿 (第三学期第 17 次)

第 T17 次讲稿, 用于 2008 年 10 月 31 日, 星期五, 2 节课. (因运动会只讲了 55 分钟.)

内容: 讲曲线为零集的 6 种情况的证明, 讲面积定义与二重积分关系.

下面给出判定曲线为零集的常用法则. 先证明一个引理.

引理 设平面曲线 C 有参数方程表示 $x = x(t), y = y(t)$, $a \leq t \leq b$, $x(t), y(t)$ 为 $[\alpha, \beta]$ 上的连续函数, 且其中至少有一个为连续可微, 则曲线 C 为零集.

证 对于区间 $[a, b]$ 作分划 $P = \{t_0, t_1, \dots, t_n\}$, 其中 $t_0 = a < t_1 < \dots < t_n = b$, 这样就将曲线 C 分为 n 段.

对于 $i = 1, \dots, n$, 记 a_i, b_i 为 $x(t)$ 在子区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的最小值和最大值, 又记 c_i, d_i 为 $y(t)$ 在子区间 $[t_{i-1}, t_i]$ 上的最小值和最大值, 则曲线 C 就为 n 个矩形 $[a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$ ($i = 1, \dots, n$) 的并所覆盖.

不妨设 $x(t)$ 在 $[a, b]$ 上连续可微, 于是有 $M > 0$, 使得 $|x'(t)| \leq M \forall t \in [a, b]$. 于是就有 $b_i - a_i \leq M(t_i - t_{i-1})$, $i = 1, \dots, n$.

另一方面, 利用 $y(t)$ 在 $[a, b]$ 上的一致连续性, 可以将上述分划 P 取得足够细, 使得 $d_i - c_i < \varepsilon \forall i = 1, \dots, n$.

综合以上就可以估计覆盖曲线 C 的矩形面积之和为

$$\sum_{i=1}^n (b_i - a_i)(d_i - c_i) \leq \varepsilon M \sum_{i=1}^n \Delta t_i = \varepsilon M(\beta - \alpha),$$

这样就证明了 C 为零集. \square

注 Peano 举出过用参数方程表示的连续曲线, 它可以充满一个正方形. 由此可知, 若仅仅假定 $x(t), y(t)$ 连续, 则上述引理的结论不成立.

下面列举为零集的常用曲线, 它们解决了大多数计算问题中的需要.

例题 0.1 以下几类平面曲线都是二维零集:

1. $a \leq x \leq b$ 上的连续函数 $y = f(x)$ 的图像;
2. $c \leq y \leq d$ 上的连续函数 $x = g(y)$ 的图像;
3. 由参数方程 $x = x(t), y = y(t)$, $a \leq t \leq b$ 描述的光滑曲线;
4. 分段光滑的连续曲线, 即由有限段光滑曲线连接而成的连续曲线;
5. 可求长的连续曲线 (可求长的定义见上册 p.274);
6. 由方程 $F(x, y) = 0$ 确定的有界曲线, 其中设 F 连续可微, 且在满足方程的每个点处 F_x, F_y 不同时等于 0.

证 对于前两类曲线为零集的积分可以从过去所学的定积分知识得出.

对于第 1 类曲线, 从 $f \in C[a, b]$ 知道 $f \in R[a, b]$, 因此对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在分划 P , 使得对应的振幅面积 $\sum_{i=1}^n \omega_i \Delta x_i < \varepsilon$. 这个振幅面积就是覆盖曲线的 n 个矩形的面积之和.

对于第 2 类曲线, 只要将 x, y 的地位对换即可.

(若将前两类看成为以 x 或 y 为参数的曲线, 则也可以从前面的引理得到它们是零集的结论.)

对于第 3 类曲线可用引理解决.

对于第 4 类曲线, 由于分段是指可以分为有限段, 而每一段都是零集, 因此它们的并也是零集.

对第 5 类曲线, 设可求长连续曲线 C 的弧长为 l , 取充分大的正整数 n , 然后将曲线分成长度相同的 n 段, 每一段的弧长为 l/n . 将分段的端点按照顺序记为 M_0, M_1, \dots, M_n (若为封闭曲线则 $M_n = M_0$). 对 $i = 1, \dots, n$, 以 M_i 为中心, 作边长为 $4l/n$ 的正方形邻域, 则就得到覆盖整个曲线 C 的 n 个正方形, 它们的面积之和为 $16l^2/n$. 因此只要 n 充分大, 这些正方形的面积之和小于事先给定的 $\varepsilon > 0$. 因此曲线 C 为零集.

对于第 6 类曲线, 对满足方程 $F(x, y) = 0$ 的每一个点 $P_0(x_0, y_0)$, 可以用隐函数存在定理确定出在 P_0 的一个邻域中存在惟一的隐函数, 并具有第 1 类或第 2 类曲线的形式, 因此在每一个邻域中的曲线段是零集. 最后用有限覆盖定理就可以知道整个曲线为零集. \square

接下来在这里对于平面集合的面积概念作一个简要的介绍.

在本课程的一元积分学中解决了曲边梯形等平面图形的面积计算问题. 其缺点是将面积是否存在归结为相应的定积分是否存在, 这里目的和手段有混淆之疑. 较为合理的观点是将积分看成为计算面积的一种手段, 而对平面图形的面积应当给出独立的定义.

下面认为多边形的面积定义和它的计算问题在理论上已经解决. 粗糙地说, 这里的方法就是将多边形分划为有限个三角形, 而将多边形的面积定义为这些三角形的面积之和.

在这个基础上我们要对一般的平面有界图形讨论其是否可求面积, 而在可求面积时如何定义面积, 以及它与二重积分的联系.

以下的平面图形就是指平面集合, 并不附加其他条件.

如何对于一般的平面有界集合考虑它的面积问题, 这里的传统方法是用多边形从该集合的内部和外部来逼近该集合. 其中更为方便且具实用价值的方法就是用平面上的正方形网格来作逼近.

如右图所示, 对一个以封闭曲线为边界的闭区域, 用等间距的水平直线和垂直直线作出网格, 然后分别计算在闭区域内部和外部的的小方格的个数, 就可以得到该闭区域面积的不足近似值和过剩近似值.

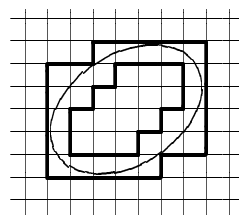


图 1: 用网格法求平面图形面积的近似值

从图 1 可见, 这也就是用两个多边形将区域的边界夹在中间. 当然还可以用其他的多边形来做这样的事.

这样就可以给出面积的定义.

定义 0.1 如果包含图形 D 的所有多边形的面积的下确界等于被 D 所包含的所有多边形的面积的上确界, 则称 D 为可求面积的, 或有面积的, 并将上述确界值定义为 D 的面积.

与这个面积定义有关的最基本结论如下.

定理 0.1 平面有界集 D 可求面积的充分必要条件是边界 ∂D 为零容度集^①.

证 为简明起见, 将定义中的多边形加以限制, 要求它的每条边与坐标轴之一平行. 对于这样修改后的定义与原来的定义的等价性的证明从略.

^① 这里强调零容度集是为了说明在平面有界集的面积定义及其基本定理中并不需要引入零测度集的概念.

由于 D 有界, 可以用一个矩形 A 包含 D 在其内部. 然后用平行与坐标轴的若干条水平直线和垂直直线对 A 作分划 P . (但不必像图 1 中那样要求用等距分划.) 然后将所有由分划 P 生成的子矩形分为三类:

1. 完全在 D 的外部的子矩形;
2. 与 D 有交但不在 D 的内部的子矩形;
3. 完全在 D 的内部子矩形.

将所有第 2, 3 类子矩形取并就得到包含 D 的多边形, 记其面积为 $U(P)$. 将所有第 3 类子矩形取并就得到 D 所包含的多边形, 记其面积为 $L(P)$. 若不存在第 3 类子矩形时定义 $L(P) = 0$, 特别当 D 无内点时必是如此. 这时 $U(P) - L(P)$ 就是覆盖边界集 ∂D 的有限个第 2 类矩形的面积之和.

取所有可能的分划 P , 定义

$$\alpha = \inf_P U(P), \quad \beta = \sup_P L(P),$$

则总有 $\beta \leq \alpha$ 成立. 当 $\alpha = \beta$ 时称 D 为可求面积, 并将这个值称为 D 的面积, 记为 $|D|$. 下面开始证明^①.

充分性 设有界集 D 的 ∂D 为零容量集. 则对 $\varepsilon > 0$, 存在有限个闭矩形覆盖 ∂D , 且使得它们的面积之和小于 ε . 这里设这些矩形的边都是平行于坐标轴的. 在必要时将这有限个闭矩形适当增大一些, 总可以使得 D 的边界点是这些矩形的并集的内点, 同时面积仍然小于 ε .

将所有这些矩形的边延长就可以生成矩形 A 的一个分划 P , 同时其中的第 2 类矩形的面积之和仍然小于 ε , 即 $U(P) - L(P) < \varepsilon$. 由于 $L(P) \leq \beta \leq \alpha \leq U(P)$, 这样就得到 $\alpha - \beta < \varepsilon$. 由 ε 的任意性可见 $\alpha = \beta$.

必要性 这时 $|D| = \alpha = \beta$. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 存在分划 P_1 , 使得 $|D| \leq U(P_1) < |D| + \frac{\varepsilon}{2}$, 又存在分划 P_2 , 使得 $|D| \geq L(P_2) > |D| - \frac{\varepsilon}{2}$.

合并 P_1 和 P_2 得到加细的分划 P , 则 $U(P) \leq U(P_1)$, $L(P) \geq L(P_2)$, 因此有

$$|D| - \frac{\varepsilon}{2} < L(P) \leq U(P) < |D| + \frac{\varepsilon}{2},$$

于是由 P 生成的第二类子矩形的总面积小于 ε , 同时覆盖了 ∂D . \square

注 容易理解, 若 D 是零容量集, 则 $|D| = 0$. 然而, 若 D 是二维零测度集, 则 D 未必可求面积. 例如定义平面有界集 D 如下:

$$\{(x, y) \in [0, 1; 0, 1] \mid x, y \in \mathbb{Q}\},$$

则因 D 为可列集, 因此是零测度集. 但包含 D 的任何多边形的面积不小于 1, 同时 D 不包含任何多边形, 因此 $\sup_P L(P) = 0$, $\inf_P U(P) = 1$, 即 D 不可求面积. 实际上容易看出这个集合的边界 $\partial D = [0, 1; 0, 1]$, 当然不是零容量集.

^① 从下面的证明可以看出所用的方法与定积分的可积性理论中的方法非常相似. 这当然不是偶然的.

将这个结论与二重积分联系起来, 就得到下列定理. 它也给出了用积分定义一般平面集合面积的可能性.

定理 0.2 平面有界集 D 可求面积的充分必要条件是: 在 D 上恒等于 1 的函数 f 在 D 上为 Riemann 可积. 这时的积分值 $\iint_D dx dy$ 就是 D 的面积 $|D|$.

证 在包含 D 于内部的闭矩形 A 上作 f 的零扩张 F , 我们先证明: F 的不连续点全体就是 ∂D .

若点 $P \notin \partial D$, 则当 P 为 D 的内点时, F 在 P 的一个邻域中恒等于 1, 当 P 为 D 的外点时, F 在 P 的一个邻域中恒等于 0, 因此函数 F 在这两类点处都连续. 对于点 $P \in \partial D$, 在 P 的每一个邻域中 F 可以取到 0, 也可以取到 1, 因此 P 一定是 F 的不连续点.

从 Lebesgue 定理知道 F 在 A 上可积的充分必要条件是 ∂D 为零集. 由于 F 在 A 上可积就是 f 在 D 上可积, 而 ∂D 为零集就是 D 可求面积, 因此结论成立.

当 D 可求面积时, 应用 p.117 的定理 2 于函数 f , 可见有

$$I = \iint_D f = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{\Delta_{ij} \subset D} \Delta x_i \Delta y_j,$$

由于和式中的子矩形 $\Delta_{ij} \subset D$, 因此它们的面积之和不超于 $|D|$, 从而 $I \leq |D|$. 但由于如上一个定理证明所示, $|D| = \sup_P L(P)$, 而每个 $L(P)$ 都是某一个分划生成的子矩形面积之和, 因此 $I < |D|$ 是不可能的. 这样就有 $I = |D|$. \square

如前所说, 存在边界不是零集的有界闭区域, 它当然也就没有面积. 回顾定理 2 和积分的定义, 可见即使在边界不是零集的有界区域上, 恒等于 0 的函数也总是可积的. 当然还可以举出在边界不是零集上不恒等于 0 的可积函数的例子. (在赵显曾的《数学分析拾遗》中举出一个边界不是 0 集的开区间, 并在该区域上定义一个处处大于 0 的函数, 它在该区域上的二重积分存在.) 但这些都不是本课程今后要关心的内容. 下面只对于边界为零集的情况介绍计算方法.

注 前面引入了零测度集和零容度集, 并指出对于有界闭集来说, 这两个概念等价. 因此经常统称为零集而不加区分. 然而对于二重积分中的某些问题, 这两种零集所起的作用还是不一样的. 例如, 在一元积分学中, 若 f, g 是定义在区间 $[a, b]$ 上的两个有界函数, 且只在有限个点上取不同的值, 则 f, g 在 $[a, b]$ 上同时可积或不可积, 而在可积时具有相同的积分值. 其实这里的有限点可以换为 (一维的) 零容度集, 但不能换为零测度集. 下面对于二重积分来叙述这方面的结果. 为此只要建立下列例题中的结论即可.

例题 0.2 设 f 是定义在有界集 $D \subset \mathbb{R}^2$ 上的函数, 使得 f 取值不为零的点集 $B = \{(x, y) \in D \mid f(x, y) \neq 0\}$ 为零容度集, 则 f 在 D 上可积, 且 $\iint_D f = 0$.

证 取包含 D 在其内部的一个矩形 A , 并将 f 零扩张为 A 上的函数 F . 对于点 $P \in A - (\partial A \cup \overline{B})$, 存在一个邻域 $O(P) \subset A - (\partial A \cup \overline{B})$, 在此邻域上 F 恒等于 0. 这样就表明 F 在 A 上除了 $\partial A \cup \overline{B}$ 之外处处连续.

由于零容度集的闭包仍为零容度集, ∂A 和 \overline{B} 都是零集, 因此 F 在 A 上几乎处处连续, 从而可积.

现在只要证明 $\iint_A F = 0$. 对 A 的任何分划 P , 在它生成的每一个闭子矩形 A_{ij} 内总有点 P_{ij} , 使得 $F(P_{ij}) = 0$. 这样得到的 Riemann 和只能等于 0. 令分划的细度趋于 0 就得到 $\iint_A F = \iint_D f = 0$. \square

第 T18 次讲稿 (第三学期第 18 次)

第 T18 次讲稿, 用于 2008 年 11 月 5 日, 星期三, 3 节课.

内容: 第二十一章, 重积分的计算和变量代换.

二. 一般区域上二重积分的计算

主要考虑两种典型区域, 即图 1 与图 2 中所示区域. 可分别称为 x 型区域和 y 型区域. 对于其他区域可以用分解为这两种区域的并来处理.

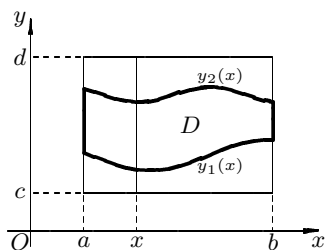


图 1: x 型区域示意图

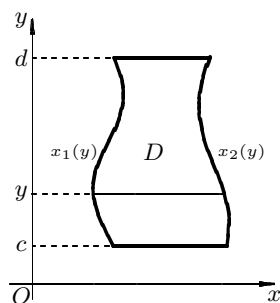


图 2: y 型区域示意图

设闭区域 D 具有图 1 所示的形式, 也就是

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

其中 $y_1(x), y_2(x)$ 是在 $[a, b]$ 上的两个连续函数, 且处处有 $y_1(x) \leq y_2(x)$. 今后称该区域为 x 型区域.

设函数 f 在 D 上可积. 如图 1 所示, 取闭矩形 $A = [a, b] \times [c, d] \supset D$, 定义 f 在 A 上的零扩张

$$F(x, y) = \begin{cases} f(x, y), & (x, y) \in D, \\ 0, & (x, y) \in A - D. \end{cases}$$

根据定义有

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_A F(x, y) dx dy.$$

若 f 在 D 上连续, 则对每个固定的 $x \in [a, b]$, $F(x, y)$ 作为 y 的函数至多只有两个间断点, 因此存在 $\int_c^d F(x, y) dy$. 这样就可以用矩形上二重积分转化为先 y 后 x 的二次积分, 即有

$$\iint_A F(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy.$$

利用对积分区间的可加性, 就有

$$\int_c^d F(x, y) dy = \int_a^{y_1(x)} F(x, y) dy + \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} F(x, y) dy + \int_{y_2(x)}^d F(x, y) dy,$$

由于右边的第一个和第三个积分为 0, 这就得到对这类区域的二重积分计算公式:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) \, dy.$$

对称地可以举出图 2 中所示的另一类区域, 即

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

其中 $x_1(y), x_2(y)$ 是在 $[c, d]$ 上的两个连续函数, 且处处成立 $x_1(y) \leq x_2(y)$, 今后称为 y 型区域.

用完全相同的方法, 当 f 在 D 上可积时, 可以导出下列计算公式:

$$\iint_D f(x, y) \, dx \, dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) \, dx.$$

以下是举例.

例题 0.1 求积分 $I = \iint_D (2 - x - y) \, dx \, dy$, 其中 D 由 $y = x, y = x^2$ 围成.

解 首先要作出积分区域的草图, 如下面的图 3(a) 所示. 这对于确定积分限是必要的步骤.

由于区域 D 同时为 x 型区域和 y 型区域, 因此可以用两种方法来计算.

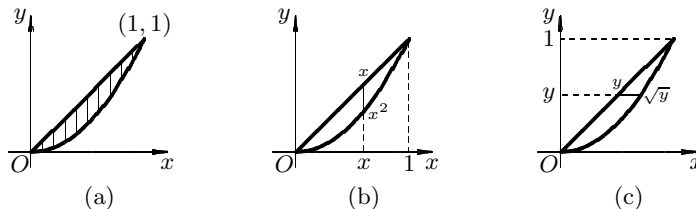


图 3: 由 $y = x$ 和 $y = x^2$ 围成的区域上的二重积分计算

作为 x 型区域可计算如下:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dx \int_{x^2}^x (2 - x - y) \, dy = \int_0^1 \left(2y - xy - \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=x} dx \\ &= \int_0^1 \left(2x - x^2 - \frac{x^2}{2} - 2x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{7}{2}x^2 + x^3 + \frac{x^4}{2} \right) dx \\ &= \left(x^2 - \frac{7}{6}x^3 + \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{10} \right) \Big|_0^1 = -\frac{1}{6} - \frac{1}{4} + \frac{1}{10} \\ &= \frac{1}{60}(-10 + 15 + 6) = \frac{11}{60}. \end{aligned}$$

作为 y 区域则可计算如下:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} (2-x-y) dx = \int_0^1 \left(2x - \frac{x^2}{2} - xy \right) \Big|_{x=y}^{x=\sqrt{y}} dy \\
&= \int_0^1 \left(2\sqrt{y} - \frac{y}{2} - y^{3/2} - 2y + \frac{y^2}{2} + y^2 \right) dy = \int_0^1 \left(2y^{1/2} - \frac{5}{2}y - y^{3/2} + \frac{3}{2}y^2 \right) dy \\
&= \left(\frac{4}{3}y^{3/2} - \frac{5}{4}y^2 - \frac{2}{5}y^{5/2} + \frac{1}{2}y^3 \right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} - \frac{2}{5} + \frac{1}{2} \\
&= \frac{1}{60}(80 - 75 - 24 + 30) = \frac{11}{60}. \quad \square
\end{aligned}$$

注 利用重积分关于被积函数的线性性质, 又利用被积函数的特性, 可以如下计算:

$$\begin{aligned}
I &= 2|D| - \int_0^1 x dx \int_{x^2}^x dy - \int_0^1 y dy \int_y^{\sqrt{y}} dx \\
&= \frac{1}{3} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} \right) - \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{3} \right) = \frac{1}{60}(15 - 24 + 20) = \frac{11}{60}.
\end{aligned}$$

例题 0.2 求由 $z = xy$, $z = x + y$, $x + y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ 所围成的空间区域的体积.

解 先考虑后三个方程, 即三个平行于 z 轴的平面, 因此围成母线平行于 z 轴的柱体, 它没有顶和底. 该柱体在 xOy 坐标面上的投影就是三角形 $x \geq 0$, $y \geq 0$, $x + y \leq 1$. 将这个三角形记为 D . 在此范围内有

$$0 \leq xy \leq \frac{1}{4}(x+y)^2 \leq x+y,$$

于是可以将所关心的空间区域想象成为在上述柱体内由上曲面 $z = x + y$ 和下曲面 $z = xy$ 围成的有界区域. 它是具有相同底面的两个曲顶柱体之差, 这样就有

$$\begin{aligned}
V &= \iint_D (x+y-xy) dx dy \\
&= \int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x+y-xy) dy \\
&= \int_0^1 \left(xy + (1-x)\frac{1}{2}y^2 \right) \Big|_0^{y=1-x} dx \\
&= \int_0^1 \left[x(1-x) + \frac{1}{2}(1-x)^3 \right] dx \\
&= \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{8} = \frac{1}{24}(12 - 8 + 3) = \frac{7}{24}. \quad \square
\end{aligned}$$

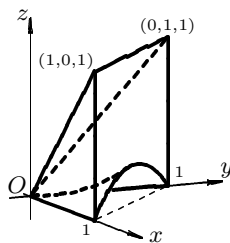


图 4: 柱体的体积计算

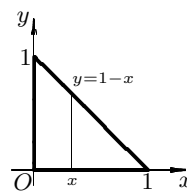


图 5: 柱体在 xOy 坐标面的投影

例题 0.3 求 $I = \iint_D e^{-y^2} dx dy$, 其中 D 是以 $(0,0), (1,1), (0,1)$ 为顶点的闭三角形 (见图 6).

解 对这个三角形积分区域来说, 它既是 x 型区域, 也是 y 型区域. 但是在先 y 后 x 的二次积分

$$I = \int_0^1 dx \int_x^1 e^{-y^2} dy$$

中的内层积分却无法用 Newton-Leibniz 公式来计算.

然而另一个二次积分的计算却没有任何困难:

$$I = \int_0^1 e^{-y^2} dy \int_0^y dx = \int_0^1 ye^{-y^2} dy = -\frac{1}{2}e^{-y^2} \Big|_0^1 = \frac{1}{2}(1 - e^{-1}). \quad \square$$

例题 0.4 设函数 f 连续, 要求将下面的先 x 后 y 的二次积分

$$I = \int_0^2 dy \int_{-\sqrt{1-(y-1)^2}}^{\sqrt{1-(y-1)^2}} f(x, y) dx$$

改为先 y 后 x 的二次积分.

解 先将该二次积分转化为二重积分 $I = \iint_D f$, 为此只需要确定这时的积分区域 D 是什么.

从内层积分的上下限就可以确定

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + (y-1)^2 \leq 1\}.$$

如右图那样作出 D , 就不难由此写出所求的另一个二次积分为

$$I = \int_{-1}^1 dx \int_{1-\sqrt{1-x^2}}^{1+\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy. \quad \square$$

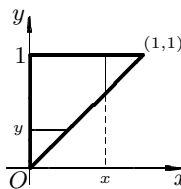


图 6: 三角形的积分区域

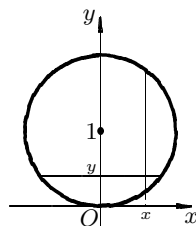


图 7: 由二次积分确定积分区域

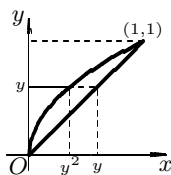


图 8: 改变二次积分的顺序

例题 0.5 求二次积分 $I = \int_0^1 dx \int_x^{\sqrt{x}} \frac{\sin y}{y} dy$.

解 由于内层积分不能用 Newton-Leibniz 公式求出, 因此设法改变积分顺序来计算 I . 为此首先要求出二重积分的积分区域. 如左图所示, 积分区域是

$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq \sqrt{x}\}.$$

这样就可以得到另一个二次积分并作计算如下:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 dy \int_{y^2}^y \frac{\sin y}{y} dx = \int_0^1 (1-y) \sin y dy \\ &= -(1-y) \cos y \Big|_0^1 - \int_0^1 \cos y dy = 1 - \sin 1. \quad \square \end{aligned}$$

§21.3 曲面面积与重积分的变量代换

从一元积分学可知变量代换在计算积分中的重要性. 本节要对于重积分来建立变量代换公式, 当然要比一元情况困难得多. 又为了简明起见, 本节只讨论二重积分的变量代换公式. 下面先叙述定理, 介绍它的用法, 然后作出证明.

一. 曲面的参数表示与曲面面积

曲线 l 的参数方程形式为

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

其中 $t \in I$, I 为某个区间.

曲面 S 的双参数方程形式为

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v),$$

其中 $(u, v) \in D$, D 是 u, v 平面上的某个有界集. 以下假设从 D 到 S 的映射为单射, 即不同的参数值 (u, v) 对应于 S 上不同的点.

若用向量表示则可将曲面 S 表示为

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v), \quad (u, v) \in D,$$

其中 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{r}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$.

现在考虑固定参数 v 的值, 则当 u 变化时就得到曲面 S 上的一条曲线, 今后称为 u 曲线. 同样可以定义曲面 S 上的 v 曲线. 取各个不同的 v 值对应的 u 曲线和各个不同的 u 值对应的 v 曲线, 就得到如图 9(a) 中的曲线坐标网.

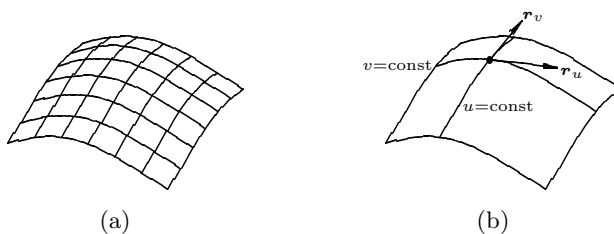


图 9: 曲面 S 上由 u 曲线和 v 曲线组成的曲线坐标网

现设 $\mathbf{r}(u, v)$ 连续可微, 则 \mathbf{r}_u 是 u 曲线的切向量, 而 \mathbf{r}_v 是 v 曲线的切向量. 在图 9(b) 上对曲面 S 上的某个点作出了经过该点的 u 曲线和 v 曲线, 并作出它们在该点的切向量 \mathbf{r}_u 和 \mathbf{r}_v . (这里可以回顾第十八章中关于偏导数 z_x 和 z_y 的几何意义. 那里的曲面方程为 $z = z(x, y)$, 相当于用 x, y 作为双参数的情况.)

若在曲面 S 的每个点处的 \mathbf{r}_u 和 \mathbf{r}_v 都不共线, 即 Jacobi 矩阵

$$\begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix}$$

满秩, 则称 S 为光滑曲面. 这时由 $\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ 确定曲面在该点的法线和切平面. 又若在 S 上处处有 $\mathbf{r}_u \perp \mathbf{r}_v$, 则得到曲面 S 上的正交曲线坐标网.

下面考虑如何计算光滑曲面 S 的面积 $|S|$. (在上下文清楚的情况下也经常将曲面 S 的面积记为 S .)

对于 uv 平面上的有界集 D , 用一个闭矩形将它包含在内, 然后对该闭矩形作分划

$$P = \{u_0, u_1, \dots, u_n; v_0, v_1, \dots, v_m\},$$

则当分划生成的闭小矩形 $\Delta_{ij} = [u_{i-1}, u_i] \times [v_{j-1}, v_j] \subset D$ 时, 在映射 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 下就成为曲面 S 上由 $u = u_{i-1}, u = u_i, v = v_{j-1}, v = v_j$ 确定的 u 曲线和 v 曲线围成的一小块曲面, 记为 S_{ij} . 直观上容易看出, 这一小块曲面的边与向量 $\mathbf{r}_u \Delta u_i$ 和 $\mathbf{r}_v \Delta v_j$ 很接近, 而曲面 S_{ij} 则与由这两个向量确定的平行四边形很接近, 因此其面积 $|S_{ij}|$ 与向量积 $|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u_i \Delta v_j$ 很接近. 这样我们就定义曲面 S 的面积如下:

$$|S| = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{\Delta_{i,j} \subset D} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \Delta u_i \Delta v_j,$$

如果右边极限存在的话.

注 这里的曲面面积定义方法与曲线弧长的定义方法很不一样. 对于曲线来说, 如上册 §10.2 所示, 弧长是用曲线的内接折线长度的上确界来定义的, 而对于光滑曲线则可以用积分来计算. 如前所述, 对于曲面来说, 实际上是用平行四边形逼近由分划确定的小块曲面, 然后用这些平行四边形的面积和来逼近曲面面积. 在几何上来看, 这些平行四边形的总体并不形成一个曲面. 这里实际上存在更为深刻的原因. 已经证明, 如果模仿对曲线作内接折线的方法, 在曲面上取许多点, 然后构造曲面的内接多面形, 并将曲面面积定义为内接多面形的每一个面的直径趋于 0 时的面积的极限, 则可以举出反例说明这样的做法不能成功. 这就是著名的 Schwarz 例子. 见《微积分学教程》第三卷的 §17.2.

现在给出具体的曲面面积计算公式.

对于可以用 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ 表示的曲面, 设 $z(x, y)$ 连续可微, 则将 x, y 看成为双参数, 就有

$$\mathbf{r} = (x, y, z(x, y)),$$

于是有

$$\mathbf{r}_x = (1, 0, z_x), \quad \mathbf{r}_y = (0, 1, z_y),$$

这样就可以计算得到

$$\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & z_x \\ 0 & 1 & z_y \end{vmatrix} = -z_x \mathbf{i} - z_y \mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

这样就得到曲面面积计算公式为

$$|S| = \iint_D |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| dx dy = \iint_D \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy.$$

对于一般情况的双参数方程 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 表示的曲面 S , 则可以将被积函数计算如下:

$$\begin{aligned} |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| &= |\mathbf{r}_u| \cdot |\mathbf{r}_v| \cdot |\sin(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)| \\ &= |\mathbf{r}_u| \cdot |\mathbf{r}_v| \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v)} \\ &= \sqrt{|\mathbf{r}_u|^2 \cdot |\mathbf{r}_v|^2 - (\mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v)^2} = \sqrt{EG - F^2}, \end{aligned}$$

其中

$$E = |\mathbf{r}_u|^2 = x_u^2 + y_u^2 + z_u^2,$$

$$F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v = x_u x_v + y_u y_v + z_u z_v,$$

$$G = |\mathbf{r}_v|^2 = x_v^2 + y_v^2 + z_v^2.$$

(对于正交曲线坐标网则 $F = 0$.) 于是曲面面积公式是

$$|S| = \iint_D \sqrt{EG - F^2} du dv.$$

注 与曲线弧长微分 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt$ (当曲线为 $x = x(t), y = y(t)$ 时), $ds = \sqrt{1 + y'^2(x)} dx$ (当曲线为 $y = y(x)$ 时) 类似地, 这里可以引入面积微分的记号

$$dS = \sqrt{EG - F^2} du dv,$$

其中将 $du dv$ 理解为 uv 平面上的矩形面积 $\Delta u \Delta v$, 而 $\sqrt{EG - F^2}$ 就是一个缩小放大系数. 对于 $u = x, v = y$ 的情况就更容易理解, 即曲面上投影到 xy 平面上为小矩形 $[x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j]$ 的一小块曲面的面积与小矩形面积之比的极限. 若作出曲面上过点 (x_{i-1}, y_{j-1}) 的切平面, 则就得到该切平面上的一个平行四边形. 它的面积即 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \Delta x \Delta y$, 而这个平行四边形在 xy 平面上的投影面积就是 $\Delta x \Delta y$.

例题 0.1 求柱面 $x = x(t), y = y(t), z = s, \alpha \leq t \leq \beta, 0 \leq s \leq h$ 的面积 σ , 其中 $x = x(t), y = y(t), \alpha \leq t \leq \beta$ 是 xy 平面上无自交点的光滑曲线 Γ , 弧长为 l .

解 1 显然答案为 lh . 因此这只是用来检验前面所学的曲面面积公式是否得到正确答案的一个简单例子.

从该柱面的双参数表示

$$\mathbf{r} = (x(t), y(t), s),$$

可以计算出

$$\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_s = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x'_t & y'_t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = x'_t \mathbf{i} - y'_t \mathbf{j},$$

这样就可以代入曲面面积公式中计算得到

$$\begin{aligned}\sigma &= \int_{\alpha}^{\beta} \int_0^h |\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_s| dt ds \\ &= \int_0^h ds \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x_t'^2(t) + y_t'^2(t)} dt = hl. \quad \square\end{aligned}$$

解 2 另一种方法是计算 $\sqrt{EG-F^2}$. 这里 $E = x_t^2 + y_t^2$, $F = 0$, $G = 1$, 因此就有 $\sqrt{EG-F^2} = \sqrt{x_t^2 + y_t^2}$, 其余与解 1 相同. \square

例题 0.2 求以原点 $(0, 0, 0)$ 为顶点, 圆 $x = R \cos \theta, y = R \sin \theta, z = h$ 为底的圆锥面的面积 S , $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

解 1 写出曲面的双参数表示

$$\mathbf{r} = (Rt \cos \theta, Rt \sin \theta, ht), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

则就有 $\mathbf{r}_t = (R \cos \theta, R \sin \theta, h)$ 和 $\mathbf{r}_{\theta} = (-Rt \sin \theta, Rt \cos \theta, 0)$, 因此有

$$\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_{\theta} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ R \cos \theta & R \sin \theta & h \\ -Rt \sin \theta & Rt \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = -Rht \cos \theta \mathbf{i} - Rht \sin \theta \mathbf{j} + R^2 t \mathbf{k},$$

于是 $|\mathbf{r}_t \times \mathbf{r}_{\theta}| = Rt\sqrt{R^2 + h^2}$, 可见所求面积为

$$S = \int_0^1 t dt \int_0^{2\pi} R\sqrt{R^2 + h^2} d\theta = \pi R\sqrt{R^2 + h^2}. \quad \square$$

解 2 从双参数表示直接求出

$$E = x_t^2 + y_t^2 + z_t^2 = R^2 + h^2,$$

$$F = x_t x_{\theta} + y_t y_{\theta} + z_t z_{\theta} = R \cos \theta \cdot (-Rt \sin \theta) + R \sin \theta \cdot Rt \cos \theta = 0,$$

$$G = x_{\theta}^2 + y_{\theta}^2 + z_{\theta}^2 = R^2 t^2.$$

于是被积函数为 $Rt\sqrt{R^2 + h^2}$, 其余与解 1 同. \square

注 利用圆锥面为可展面, 就容易求出上述结果. 因此本题也是属于检验本章的曲面面积公式是否成立的一个简单例子.

例题 0.3 若曲面 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ 中的 z 分量 $z(u, v) \equiv 0$, 则曲面就成为 xy 平面的一部分. 这时曲面面积有公式

$$S = \iint_D J(u, v) du dv,$$

$$\text{其中 } J(u, v) = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right|.$$

证 这时可以计算出 $\mathbf{r}_u = (x_u, y_u, 0)$, $\mathbf{r}_v = (x_v, y_v, 0)$, 因此有

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_u & x_v & 0 \\ y_u & y_v & 0 \end{vmatrix} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \mathbf{k},$$

代入公式 $S = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$ 即可. \square

注 1 由于要求 $x(u, v), y(u, v)$ 连续可微, 因此只要 D 是零边界的有界闭集就可以保证上述积分存在.

注 2 由于曲面面积采取定义的方法, 因此例 3 的结论实际上存在问题, 这就是曲面面积对于平面上的图形面积来说与前面定义的面积是否相同? 教科书对此采取的思路是取巧, 然而避开了主要问题. 此外, 这样的做法也失去了解释 Jacobi 行列式的一个机会. 这都是不可取之处. 一个补救方法是在后面讲了曲线积分后对例 3 的公式给出一个证明.

例题 0.4 求椭圆 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ 的面积 S , 其中设 $a, b > 0$.

解 这就是将椭圆看成为从 r, θ 平面上的矩形 $[0, 1] \times [0, 2\pi]$ 映射到 xy 平面的像, 试用方才得到的例 3 的公式来验证是否正确.

直接计算出 Jacobi 行列式的绝对值

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a \cos \theta & -ar \sin \theta \\ b \sin \theta & br \cos \theta \end{vmatrix} = abr,$$

这样就可以计算出

$$S = \int_0^1 \int_0^{2\pi} abr dr d\theta = ab\pi. \quad \square$$

补充例题 恰如上述球面面积计算中所说, 在 §10.3 已经介绍过旋转体的面积计算, 这是我们第一次遇到曲面面积的计算问题. 可以证明那里的公式是本节介绍的一般公式的一个特例.

设有在上半平面, 即 $y \geq 0$ 内的曲线 $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$ 绕 x 轴旋转一周, 则所生成的曲面面积为

$$S = \int_a^b 2\pi y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

在此基础上并结合曲线的弧长微分就可以得到更一般的旋转体面积公式

$$S = 2\pi \int_0^l y ds,$$

其中曲线处于 $y \geq 0$ 内, 是分段光滑的连续曲线, 可以是封闭的, l 是曲线的弧长.

证 为此只要将旋转曲面用双参数方程表示出来:

$$x = x, y = y(x) \cos \theta, z = y(x) \sin \theta, \quad a \leq x \leq b, 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

然后计算出

$$\mathbf{r}_x = (1, y'(x) \cos \theta, y'(x) \sin \theta), \quad \mathbf{r}_\theta = (0, -y(x) \sin \theta, y(x) \cos \theta),$$

就得到 $E = 1 + y'^2(x)$, $F = 0$, $G = y^2(x)$ 和 $\sqrt{EG - F^2} = y(x)\sqrt{1 + y'^2(x)}$, 曲面面积为

$$S = \int_a^b \int_0^{2\pi} y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx d\theta = 2\pi \int_a^b y(x) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx.$$

对于更一般的情况则只要写出曲面的双参数方程

$$x = x(s), \quad y = y(s) \cos \theta, \quad z = y(s) \sin \theta, \quad 0 \leq s \leq l, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

然后作同样计算即可. \square

二. 变量代换公式

将上述例 3 的公式推广就得到二重积分的变量代换公式.

定理 0.1 设映射 $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$ 在定义域 D_{uv} 上连续可微, 且是从 D_{uv} 到 D_{xy} 的一一映射, 其 Jacobi 行列式的绝对值在 D_{uv} 上处处有

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \neq 0,$$

又设 D_{uv} 为零边界的有界闭集, 则当 $f(x, y)$ 是 D_{xy} 上的连续函数时, 成立以下二重积分的变量代换公式:

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) J du dv.$$

注 上述公式将左边关于 x, y 的二重积分转化右边为关于 u, v 的二重积分. 这里要做三件事: (1) 将 $dx dy$ 变为 $J du dv$; (2) 将被积函数 $f(x, y)$ 变为复合函数 $f(x(u, v), y(u, v))$; (3) 将积分区域从 D_{xy} 变为 D_{uv} .

对于二重积分的变量代换来说, 最常用的是极坐标变换: $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$. 这时的 Jacobi 行列式为

$$J = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r,$$

由于一般设 $r \geq 0$, 这里不需要再取绝对值. 这个结果应当记住, 即将 $dx dy$ 变为 $r dr d\theta$.

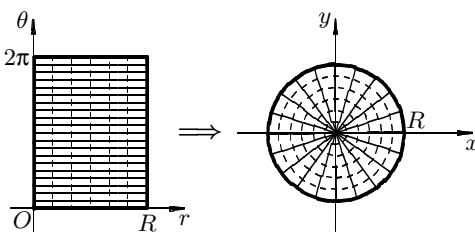


图 10: 极坐标变量代换

注 Jacobi 行列式的绝对值 J 就是变量代换下面积的缩小放大比例系数. 从图 14 可见, 在 $r\theta$ 平面上相同的小矩形, 面积都是 $\Delta r \Delta \theta$, 但映射到 xy 平面时得到的“曲边矩形”的面积是随着 r 而变化的. 因此这是解释 J 的意义的一个好例子.

在证明变量代换公式之前先举例说明其用法. 注意在用变量代换公式时要考虑三点, 即积分区域, 被积函数和 Jacobi 行列式 (取绝对值).

例题 0.5 求二重积分 $I = \iint_{D_R} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$, 其中积分区域 $D_R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$.

解 这是不能用二次积分方法求积的典型例子. 采用极坐标代换, 则 $D_{r\theta}$ 就成为简单的 $[0, R] \times [0, 2\pi]$ (这是 $r\theta$ 平面上的矩形). 利用前面已经得到的 $J = r$, 就容易求出

$$I = \int_0^R \int_0^{2\pi} e^{-r^2} r dr d\theta = -\frac{1}{2} e^{-r^2} \Big|_0^R \cdot 2\pi = \pi(1 - e^{-R^2}). \quad \square$$

第 T19 次讲稿 (第三学期第 19 次)

第 T19 次讲稿, 用于 2008 年 11 月 7 日, 星期五, 2 节课.

内容: 第二十一章, 重积分的变量代换公式的证明, 举例, 开始三重积分.

例题 0.6 求半径为 R 的球面积. (过去用旋转面的公式计算过, 见上册 p.284 例 6.)

解 1 (这里不需要用变量代换公式)

写出球面的球面坐标方程

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, \quad y = R \sin \varphi \sin \theta, \quad z = R \cos \varphi, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

计算出

$$\mathbf{r}_\varphi = (R \cos \varphi \cos \theta, R \cos \varphi \sin \theta, -R \sin \varphi),$$

$$\mathbf{r}_\theta = (-R \sin \varphi \sin \theta, R \sin \varphi \cos \theta, 0),$$

就可以得到 $E = R^2$, $F = 0$, $G = R^2 \sin^2 \varphi$, 因此有

$$\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \varphi,$$

然后计算积分得到

$$S = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi R^2 \sin \varphi \, d\theta \, d\varphi = 4\pi R^2. \quad \square$$

注 思考题: 对于用球面坐标时的缩放系数 $R^2 \sin \varphi$ 作出几何解释.

解 2 用直角坐标方程 $z = \pm \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 则只要计算第一卦限中的球面面积乘 8. 其定义域为 $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq R^2, x, y \geq 0\}$. 求出 $z_x = -x/z$, $z_y = -y/z$, 于是有 $\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = R/z$, 即需要计算积分

$$S = 8 \iint_{\substack{x^2 + y^2 \leq R^2 \\ x, y \geq 0}} \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} \, dx \, dy,$$

为此用极坐标变换, 则有

$$S = 8R \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R \frac{r \, dr}{\sqrt{R^2 - r^2}} = 4\pi R (-\sqrt{R^2 - r^2}) \Big|_0^R = 4\pi R^2. \quad \square$$

注 在解 2 中的定义域边界邻近偏导数 z_x, z_y 可以无界, 从而导致二重广义积分的计算, 用极坐标变换后仍然是广义积分, 但计算没有困难.

例题 0.7 求椭球体 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1$ 的体积.

解 由对称性只要求出在第一卦限的体积乘以 8. 于是有

$$V = 8 \iint_{\substack{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1 \\ x, y \geq 0}} c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}} dx dy,$$

这时最合适的是广义极坐标变换 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. 可以先计算出 Jacobi 行列式为 $J = abr$, 于是就有

$$V = 8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 c \sqrt{1 - r^2} abr dr = 4abc\pi \cdot \left(-\frac{1}{3}(1 - r^2)^{\frac{3}{2}}\right) \Big|_0^1 = \frac{4}{3}abc\pi. \quad \square$$

例题 0.8 求由两条抛物线 $y^2 = px, y^2 = qx$ ($0 < p < q$) 和两条直角双曲线 $xy = a, xy = b$ ($0 < a < b$) 所围成的区域 D 的面积.

解 如图 15(a) 所示, 在 xy 平面上表示区域 D 的边界曲线是不方便的. 因此虽然求面积时的被积函数只是恒等于 1 的简单函数, 我们还是愿意用变量代换方法.

引入变量

$$u = \frac{y^2}{x}, \quad v = xy,$$

其中 $p \leq u \leq q, a \leq v \leq b$.

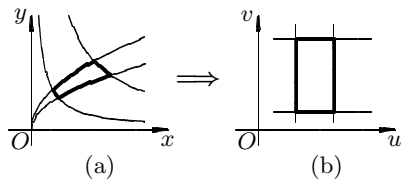


图 1: 平面区域变换

这样就将 xy 平面上的闭区域 D 映射为 uv 平面上的闭矩形 $[p, q] \times [a, b]$. 如下计算 Jacobi 行列式

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \frac{1}{\frac{\partial(u, v)}{\partial(x, y)}} = \frac{1}{\begin{vmatrix} -\frac{y^2}{x^2} & \frac{2y}{x} \\ y & x \end{vmatrix}} = -\frac{x}{3y^2} = -\frac{1}{3u},$$

然后取绝对值代入变量代换公式, 就可以得到

$$\begin{aligned} S &= \iint_D dx dy = \int_p^q \int_a^b \frac{1}{3u} du dv \\ &= \frac{1}{3}(b - a) \ln \frac{q}{p}. \quad \square \end{aligned}$$

四. 变量代换公式的证明

为方便起见, 重新列出该定理如下.

定理 0.2 设映射 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 在定义域 D_{uv} 上连续可微, 且是从 D_{uv} 到 D_{xy} 的一一映射, 其 Jacobi 行列式的绝对值在 D_{uv} 上处处有

$$J = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| \neq 0,$$

又设 D_{uv} 为零边界的有界闭集, 则当 $f(x, y)$ 是 D_{xy} 上的连续函数时, 成立以下二重积分的变量代换公式:

$$\iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy = \iint_{D_{uv}} f(x(u, v), y(u, v)) J du dv.$$

证 如前所说, 在承认 p.126 例 3 中的公式的基础上来证明这个定理. 实际上那个公式就是 f 恒等于 1 情况的变量代换公式.

记复合函数 $f(x(u, v), y(u, v)) = F(u, v)$, 则从条件可知 F 于有界闭集 D_{uv} 上连续, 因此一致连续. 于是对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall (u_1, v_1), (u_2, v_2) \in D_{uv}$, 只要 $\sqrt{(u_1 - u_2)^2 + (v_1 - v_2)^2} < \delta$, 就成立

$$|F(u_1, v_1) - F(u_2, v_2)| < \varepsilon.$$

在 uv 平面上用平行于坐标轴的两族平行直线将有界闭集 D_{uv} 分划为有限个直径均小于 δ 的子集, 记为 $d_i, i = 1, \dots, m$. 又将 d_i 在映射 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 下的像, 即 xy 平面上的子集, 记为 D_i . (在图 2 中作出了完全落在 D_{uv} 内的小矩形映射到 D_{xy} 内的一个曲边四边形的情况, 对于含有边界点的其他子集的情况是类似的.)

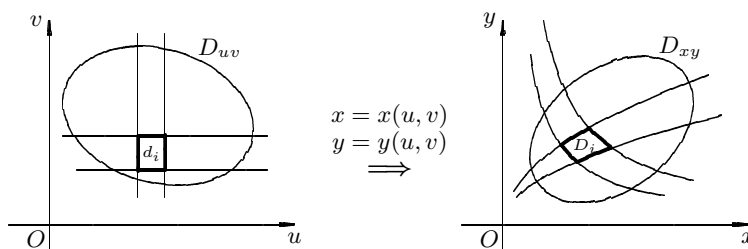


图 2: 变量代换的示意图

现在对于变量代换公式两边的积分之差的绝对值作如下估计:

$$\begin{aligned} \Delta &= \left| \iint_{D_{uv}} F(u, v) J(u, v) du dv - \iint_{D_{xy}} f(x, y) dx dy \right| \\ &\leq \sum_{i=1}^m \left| \iint_{d_i} F(u, v) J(u, v) du dv - \iint_{D_i} f(x, y) dx dy \right| \end{aligned}$$

(对上述和式中的每个积分用积分中值定理, 这时 J 的非负性起了作用,)

$$= \sum_{i=1}^m \left| F(s_i, t_i) \iint_{d_i} J(u, v) du dv - f(\xi_i, \eta_i) \cdot |D_i| \right|$$

(利用前面例题 3 中的结论, 就有 $\iint_{d_i} J(u, v) du dv = |D_i|$)

$$= \sum_{i=1}^m |F(s_i, t_i) - f(\xi_i, \eta_i)| \cdot |D_i|$$

(利用 D_i 是 d_i 的像, 存在 $(s'_i, t'_i) \in d_i$, 使得有 $\xi_i = x(s'_i, t'_i), \eta_i = y(s'_i, t'_i)$)

$$= \sum_{i=1}^m |F(s_i, t_i) - F(s'_i, t'_i)| \cdot |D_i| \leq \varepsilon |D_{xy}|,$$

最后利用 ε 可以任意小, 这样就证明了 $\Delta = 0$. \square

§21.4 三重积分和 n 重积分

这里从定义开始都是与二重积分类似的, 并没有全新的思想. 下面只是对三重积分作简略的介绍, 它们都可以推广到一般的 n 重积分. 本节的重点完全在于计算, 包括物理应用.

一. 长方体上的三重积分

主要内容如下:

1. 长方体上的三重积分的定义. 其中涉及到分划、介点、Riemann 和及其极限.
2. 引入上和与下和, 证明可积的充要条件.
3. 引入零测度集和零容度集. 特别对于有界闭集来说, 零测度集和零容度集等价, 统称为零集. 对于长方体上的函数来说, 同样有以下的 Lebesgue 定理, 它彻底解决了函数为 Riemann 可积的充分必要条件,

定理 0.1 长方体 A 上的函数 f 为 Riemann 可积的充分必要条件是 f 在 A 上有界且几乎处处连续.

注 由于间断点全体所成集合未必闭, 因此这里不能用零容度集的概念. 引入零容度集是因为容度, 即 Jordan 测度, 为体积概念提供了一个合适的解决方法, 同时对于一般有限集的可积性提供了方便的判定条件.

4. 三重积分的物理解释. 这里不说几何意义, 因为这要到 4 维空间中才行, 然而我们并没有在 4 维空间中的直观感受.

最直观的一个物理解释是从密度求质量. 设在某个长方体 A 内分布着某种物质, 其密度为 $\rho(x, y, z)$. (当然密度函数定义本身就需要极限概念.) 设函数 ρ 在 A 上可积, 则长方体 A 内物质的质量就是三重积分

$$m = \iiint_A \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$$

5. 三重积分的性质.
6. 化三重积分为累次积分.

设长方体 $A = [a, b] \times [c, d] \times [e, f]$, f 在 A 上可积, 则在一定的条件下 (例如处处连续的条件就足够了), 可以用按照一定顺序的累次积分来计算三次积分. 例如有先 z , 再 y , 后 x 的三次积分为

$$\iiint_A f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_c^d dy \int_e^f f(x, y, z) dz,$$

当然要求各个里层积分存在. 若 f 处处连续, 则可以证明所有 $3! = 6$ 个三次积分全部相等, 都可以用来计算三重积分.

二. 有界集上的三重积分

与二重积分相同, 采用零扩张的方法给出有界集上三重积分的定义, 同时利用 Lebesgue 定理得到如下基本结论.

定理 0.2 设 D 是 \mathbb{R}^3 中边界为零集的有界集, 则 f 在 D 上可积的充分必要条件是 f 在 D 上有界且几乎处处连续.

需要知道边界为零集的一些常用区域. 例如, 分片光滑曲面就是如此. 当然其中就包括长方体的边界. 这里需要相应的函数分片连续可微. 又如, 下列有界闭集

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \sigma_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

若其中 σ_{xy} 为二维的零边界的有界闭集, z_1, z_2 在 σ_{xy} 上连续, 则 ∂D 是三维零集.

对于三维形体 D 的体积, 可以定义为在 D 上恒等于 1 的函数在 D 上可积时, 称 D 为可求体积的三维形体, 并将该积分值定义为 D 的体积. 于是 D 可求体积的充分必要条件是 ∂D 为零集.

三. 一般区域上三重积分的计算

设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 为有界闭区域, f 在 D 上连续. 若区域 D 具有前面所说的形式, 即

$$D = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in \sigma_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\},$$

其中 σ_{xy} 为二维的零边界的有界闭集, z_1, z_2 在 σ_{xy} 上连续, 则 σ_{xy} 就是 D 在 xy 平面上的投影. 过点 $(x, y) \in \sigma_{xy}$, 作平行于 z 轴的直线, 与边界 ∂D 交于点 $z_1(x, y), z_2(x, y)$, 则就有

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \iint_{\sigma_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

上式右边的内层积分是 x, y 的函数, 若记为 $F(x, y)$, 则右边就是二重积分 $\iint_{\sigma_{xy}} F(x, y) dx dy$. 若 σ_{xy} 适合一定的条件, 则可以将这个二重积分化为某一个二次积分, 这样也就可以将一般区域上的三重积分化为三次积分.

另一种对偶的方法是先作二重积分后作一重积分. 设 D 在 z 轴上的投影为 $[a, b]$, 对每个 $z \in [a, b]$, 过点 $(0, 0, z)$ 作平行于坐标面 xy 的水平面与 D 交于 σ_z . 同时将 σ_z 看成为上式交集在 xy 上的投影. 则就有

$$\iiint_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{\sigma_z} f(x, y, z) dx dz.$$

特别当 $f(x, y, z) \equiv 1 \forall (x, y, z) \in D$ 时, 对应的三重积分就是 D 的体积, 因此上面的两个公式提供了体积计算的两种方法. 可以称为是向坐标平面投影和向坐标轴投影的两种方法. 通俗地可以说成相当于将一个大萝卜切丝还是切片的两种方法.

切丝法是向某个坐标面投影, 这里有三种选择. 若将 D 向 xy 平面投影, 就有

$$V = \iiint_D dx dy dz = \iint_{\sigma_{xy}} dx dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} dz = \iint_{\sigma_{xy}} [z_2(x, y) - z_1(x, y)] dx dy,$$

显然这就是学了二重积分后得到的计算体积的公式.

切片法就是向某个坐标轴投影, 也有三种选择. 若将 D 向 z 轴投影, 就有

$$V = \iiint_D dx dy dz = \int_a^b dz \iint_{\sigma_z} dx dy,$$

若 σ_z 满足一定的条件, 则可以将里层的二重积分化为二次积分, 从而又得到三重积分对应的某一个三次积分.

若记 σ_z 的面积为 $S(z)$, 则体积 V 就是上册已经熟悉的积分 $\int_a^b S(z) dz$, 只是那里经常写成关于 x 的积分, 也就是将三维形体向 x 轴投影所得到的公式. (这里要回忆 §10.3, 其标题虽然是旋转体的体积 (和侧面积), 但实际上开始讲的就是这里用切片法来计算体积的方法. 其前提是每一片的面积 $S(z)$ 已知, 或容易求出, 而旋转体的截面积就是圆或圆环等已经会求的面积.)

例题 0.1 求三重积分 $\iiint_D \frac{dx dy dz}{(1+x+y+z)^3}$,

其中 D 是平面 $x+y+z=1$ 和坐标面 $x=0, y=0, z=0$ 围成的闭区域.

解 1 如右图所示, 积分区域 D 为第一卦限中由平面 $x+y+z=1$ 所截出的一个四面体. 将 D 向 xy 面投影得到

$$\sigma_{xy} = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1\},$$

于是就可以计算如下:

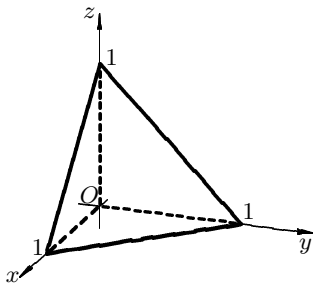


图 3: 积分区域为四面体上的三重积分

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\sigma_{xy}} dx dy \int_0^{1-x-y} \frac{dx}{(1+x+y+z)^3} \\
&= \iint_{\sigma_{xy}} \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \Big|_{z=0}^{z=1-x-y} \right) dx dy \\
&= \frac{1}{2} \iint_{\sigma_{xy}} \left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right) dx dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 dx \int_0^{1-x} \left(\frac{1}{(1+x+y)^2} - \frac{1}{4} \right) dy \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(-\frac{1}{1+x+y} \Big|_{y=0}^{y=1-x} - \frac{1}{4}(1-x) \right) dx \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{1}{1+x} - \frac{3}{4} + \frac{x}{4} \right) dx = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}. \quad \square
\end{aligned}$$

注 这实际上就相当于计算下列类型的一个三次积分

$$I = \int_0^1 dx \int_0^{1-x} dy \int_0^{1-x-y} f(x, y, z) dz.$$

解 2 若将积分区域 D 投影到 z 轴, 则就得到

$$I = \int_0^1 dz \iint_{\sigma_z} \frac{dx dy}{(1+x+y+z)^3},$$

其中 $\sigma_z = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x+y \leq 1-z\}$. 若又将里层的二重积分写为二次积分, 就有

$$I = \int_0^1 dz \int_0^{1-z} dx \int_0^{1-z-x} \frac{1}{(1+x+y+z)^3} dy,$$

由于关于 x, y, z 的对称性, 这与解 1 没有区别. \square

解 3 此题还有其他方法, 例如用 Catalan 方法可如下求解. 对于 $0 < t < 1$, 用平面 $x+y+z=t$ 和 $x+y+z=t+\Delta t$ 截闭区域 D , 所得到的形体的体积可以看成底在 xy 上的两个锥体的体积之差. 其中一个的底是直角边为 t 的直角等边三角形, 高为 t , 另一条只要将 t 改为 $t+\Delta t$ 即可. 这样就得到

$$\frac{1}{6}[(t+\Delta t)^3 - t^3] = \frac{1}{2}t^2\Delta t + O(\Delta t^2),$$

而在这个形体上被积函数的值在 $\frac{1}{(1+t)^3}$ 和 $\frac{1}{(1+t+\Delta t)^3}$ 之间, 将它乘以前面的体积, 则就得到 $\frac{t^2}{2(1+t)^3}\Delta t + O(\Delta t^2)$.

然后对 $[0, 1]$ 作分划, 并对每个 $[t_{i-1}, t_i]$ 写出上述表达式并相加, 这样就得到了一个 Riemann 和. 当分划的细度趋于 0 时就得到一个定积分 $\int_0^1 \frac{t^2 dt}{2(1+t)^3}$. 于是就将三重积分 I 直接转化为单重积分, 计算如下:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \frac{t^2 dt}{2(t+1)^3} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{(t+1)^2 - 2(t+1) + 1}{(t+1)^3} dt \\
&= \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{dt}{t+1} - \int_0^1 \frac{dt}{(t+1)^2} + \int_0^1 \frac{dt}{2(t+1)^3} \\
&= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{(t+1)^2} \Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{1}{2} + \frac{3}{16} = \frac{1}{2} \ln 2 - \frac{5}{16}. \quad \square
\end{aligned}$$

注 这种方法来自积分定义本身, 它具有很大的灵活性. 我们知道, 一元函数的定积分 $\int_a^b f(x) dx$ 是 Riemann 和的极限, 即 $\sum_{i=1}^n f(\xi_i) \Delta x_i$ 的极限, 二重积分以及三重积分都是如此. Catalan 方法也是如此, 当然完全可以严格化. 只是平时我们往往跳过严格化的步骤就直接写出最后答案. 在应用中称之为微元法.

例题 0.2 求三重积分 $I = \iiint_D \frac{xy}{\sqrt{z}} dx dy dz$, 其中的积分区域 D 为锥面 $\frac{z^2}{c^2} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$ 与平面 $z = c, x = 0, y = 0$ 围成于第一卦限的闭区域, 其中 $a, b, c > 0$.

解 1 将积分区域 D 向 xy 平面投影得到第一象限的平面区域

$$\sigma_{xy} = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}.$$

然后计算

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{\sigma_{xy}} xy dx dy \int_c^{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}}} \frac{dz}{\sqrt{z}} \\
&= \iint_{\sigma_{xy}} 2xy \sqrt{c} \left[1 - \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^{\frac{1}{4}} \right] dx dy.
\end{aligned}$$

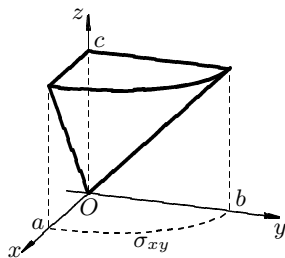


图 4: 第一卦限的锥体部分形体

为了进一步计算下去, 根据积分区域 σ_{xy} 和被积函数的情况, 可以采用广义极坐标 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$, 这时的 Jacobi 行列式的绝对值为 abr , 于是有

$$\begin{aligned}
I &= 2a^2b^2\sqrt{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^1 \sin \theta \cos \theta \cdot r^3 (1 - r^{\frac{1}{2}}) dr \\
&= 2a^2b^2\sqrt{c} \cdot \left(\frac{1}{2} \sin^2 \theta \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left(\frac{1}{4} - \frac{2}{9} \right) \\
&= \frac{1}{36} a^2 b^2 \sqrt{c}. \quad \square
\end{aligned}$$

解 2 将 D 投影到 z 轴上则得到

$$I = \int_0^c \frac{dz}{\sqrt{z}} \iint_{\sigma_z} xy \, dx \, dy$$

其中 $\sigma_z = \{(x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq \frac{z^2}{c^2}\}$. 以下对里层积分还是用广义极坐标变换为宜, 这样就有

$$\iint_{\sigma_z} xy \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{z}{c}} a^2 b^2 r^3 \cos \theta \sin \theta \, dr = \frac{1}{2} \int_0^{\frac{z}{c}} a^2 b^2 r^3 \, dr = \frac{1}{8} a^2 b^2 c^{-4} z^4,$$

最后就有

$$I = \frac{1}{8} a^2 b^2 c^{-4} \int_0^c z^{7/2} \, dz = \frac{1}{8} a^2 b^2 c^{-4} \cdot \frac{2}{9} z^{9/2} \Big|_0^c = \frac{1}{36} a^2 b^2 c^{1/2}. \quad \square$$

注 虽然被积函数在分母上有 \sqrt{z} , 但在 D 内仍有界. 用平均值不等式即有

$$\left| \frac{xy}{\sqrt{z}} \right| \leq \frac{ab}{2} \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right) \frac{1}{\sqrt{z}} \leq \frac{ab}{2} \cdot \frac{z^2}{c^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{z}} \leq \frac{1}{2} a^2 b^2 c^{-1/2}.$$

第 T20 次讲稿 (第三学期第 20 次)

第 T20 次讲稿, 用于 2008 年 11 月 12 日, 星期三, 3 节课.

内容: 第二十一章, 三重积分与 n 重积分.

四. 三重积分的变量代换

完全与二重积分的变量代换一样, 我们不加证明地叙述对三重积分的变量代换公式. 这就是以下定理.

定理 0.1 设映射 $x = x(u, v, w), y = y(u, v, w), z = z(u, v, w)$ 在定义域 D_{uvw} 上连续可微, 且是从 D_{uvw} 到 D_{xyz} 的一一映射, 其 Jacobi 行列式的绝对值在 D_{uvw} 上处处有

$$J = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| \neq 0,$$

又设 D_{uvw} 为零边界的有界闭集, 则当 $f(x, y, z)$ 是 D_{xyz} 上的连续函数时, 成立以下三重积分的变量代换公式:

$$\iiint_{D_{xyz}} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{D_{uvw}} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) J du dv dw.$$

注 上述公式将左边关于 x, y, z 的三重积分转化右边为关于 u, v, w 的三重积分. 这里要做三件事: (1) 将 $dx dy dz$ 变为 $J du dv dw$; (2) 将被积函数 $f(x, y, z)$ 换为复合函数 $f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$; (3) 将积分区域从 D_{xyz} 变为 D_{uvw} .

下面叙述最常用的两种变量代换, 然后举例.

1. 球坐标代换, 即

$$x = \rho \sin \varphi \cos \theta, y = \rho \sin \varphi \sin \theta, z = \rho \cos \varphi,$$

其中 $\rho \geq 0, 0 \leq \varphi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

直接计算 x, y, z 关于 ρ, φ, θ 的 Jacobi 行列式为

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \varphi, \theta)} &= \begin{vmatrix} \sin \varphi \cos \theta & \rho \cos \varphi \cos \theta & -\rho \sin \varphi \sin \theta \\ \sin \varphi \sin \theta & \rho \cos \varphi \sin \theta & \rho \sin \varphi \cos \theta \\ \cos \varphi & -\rho \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} \\ &= \rho^2 (\cos^2 \varphi \sin \varphi + \sin^3 \varphi) = \rho^2 \sin \varphi. \end{aligned}$$

由于 ρ, φ 的取值范围, 就有 $J = \rho^2 \sin \varphi$.

注 过去已经使用过球面坐标代换, 即从 (φ, θ) 到半径 R 的球面上的变量代换 $x = R \sin \varphi \cos \theta, y = R \sin \varphi \sin \theta, z = R \cos \varphi$, 这与上面的球坐标变换有密切联系. 注意球面坐标变换的 $\sqrt{EG - F^2} = R^2 \sin \varphi$, 而上述球坐标变换的 $J = \rho^2 \sin \varphi$, 两者完全一致.

2. 柱坐标代换, 即

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z,$$

其中 $r \geq 0, 0 \leq \theta \leq 2\pi, -\infty < z < +\infty$. 由于这相当于平面极坐标再加上第三个变量 z , 而 z 不变, 因此容易计算出

$$\left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} \right| = r.$$

以下是举例.

例题 0.1 求 $I = \iiint_D z \, dx \, dy \, dz$, 其中 D 是由上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4 \ (z \geq 0)$ 和抛物面 $x^2 + y^2 = 3z$ 所围成的闭区域.

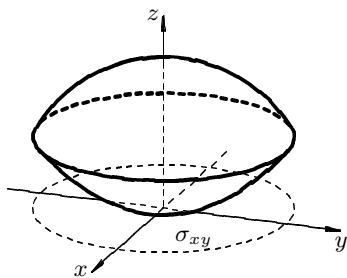


图 1: 球面和抛物面围成的形体

解 1 用柱坐标代换 $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = z$, 则被积函数不变. 从两个曲面的交线 (参见图 1) 为圆

$$x^2 + y^2 = 3, \quad z = 1,$$

可先确定出变量 r, θ 的范围为 $0 \leq r \leq \sqrt{3}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 然后求出 z 的范围为

$$r^2/3 \leq z \leq \sqrt{4-r^2},$$

这样就可以计算如下:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\sqrt{3}} r \, dr \int_{r^2/3}^{\sqrt{4-r^2}} z \, dz = 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r \left(\frac{1}{2} z^2 \Big|_{z=r^2/3}^{z=\sqrt{4-r^2}} \right) dr \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3}} r \cdot \frac{1}{2} (4 - r^2 - \frac{r^4}{9}) dr = \pi \int_0^{\sqrt{3}} (4r - r^3 - \frac{r^5}{9}) dr \\ &= \pi \left(2r^2 - \frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{54} r^6 \right) \Big|_0^{\sqrt{3}} = \pi \left(6 - \frac{9}{4} - \frac{27}{54} \right) = \frac{13}{4} \pi. \quad \square \end{aligned}$$

解 2 将积分区域向 xy 平面投影得到闭区域 $\sigma_{xy} = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 3\}$ (见图 1), 于是就有

$$I = \iint_{\sigma_{xy}} dx \, dy \int_{(x^2+y^2)/3}^{\sqrt{4-x^2-y^2}} z \, dz = \iint_{\sigma_{xy}} \frac{1}{2} [4 - x^2 - y^2 - \frac{1}{9} (x^2 + y^2)^2] dx \, dy,$$

然后若用极坐标代换就与解 1 的计算相同. \square

解 3 将积分区域 D 向 z 轴投影, 得到区间 $[0, 2]$. 利用 z 为常值的水平面与 D 的截面 σ_z 总是圆, 它的半径在 $0 \leq z \leq 1$ 时为 $\sqrt{3z}$, 而在 $1 \leq z \leq 2$ 时为 $\sqrt{4-z^2}$, 就有

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^2 dz \iint_{\sigma_z} dx dy \\
 &= \int_0^1 3\pi z^2 dz + \int_1^2 \pi z(4-z^2) dz \\
 &= \pi + \pi \left(2z^2 - \frac{1}{4}z^4 \right) \Big|_1^2 = \frac{13}{4}\pi. \quad \square
 \end{aligned}$$

例题 0.2 求球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 2rz$ ($r > 0$) 和一个锥面围成的形体 D 的体积 V , 其中的锥面以 z 为轴, 顶角为 2α .

解 1 由于这是旋转体体积, 因此用一元函数的定积分即可. 在图 2 中作出了形体 D 在 yz 平面上的投影 (用粗黑线描出其边界). 用 z 为常值的水平面与 D 的交集 σ_z 为圆. 利用锥面的方程为

$$x^2 + y^2 = z^2 \tan^2 \alpha,$$

就可以求出截面 σ_z 的面积为

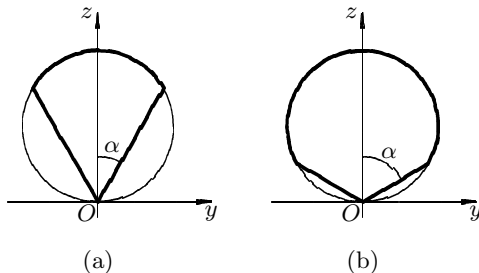


图 2: 球面与锥面围成的形体的投影

$$|\sigma_z| = \begin{cases} \pi z^2 \tan^2 \alpha, & 0 \leq z \leq 2r \cos^2 \alpha, \\ \pi(2rz - z^2), & 2r \cos^2 \alpha \leq z \leq 2r. \end{cases}$$

然后计算如下:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2r \cos^2 \alpha} \pi z^2 \tan^2 \alpha dz + \int_{2r \cos^2 \alpha}^{2r} \pi(2rz - z^2) dz \\
 &= \frac{8\pi}{3} r^3 \tan^2 \alpha \cos^6 \alpha + \pi r(4r^2 - 4r^2 \cos^4 \alpha) - \frac{\pi}{3}(8r^3 - 8r^3 \cos^6 \alpha) \\
 &= \frac{4}{3} \pi r^3 (1 - \cos^4 \alpha). \quad \square
 \end{aligned}$$

解 2 用球坐标代换, 则 D 在 ρ, φ, θ 空间中的对应区域为:

$$0 \leq \varphi \leq \alpha, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \rho \leq 2r \cos \varphi.$$

因此就可以计算如下:

$$\begin{aligned}
 V &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\alpha \sin \varphi d\varphi \int_0^{2r \cos \varphi} \rho^2 d\rho \\
 &= 2\pi \int_0^\alpha \frac{8}{3} r^3 \cos^3 \varphi \sin \varphi d\varphi = \frac{4}{3} \pi r^3 (1 - \cos^4 \alpha). \quad \square
 \end{aligned}$$

注 若将 D 投影到 z 轴上, 则与解 1 无异. 若将 D 投影到 xy 平面上, 则图 2(b) 表明, 它与 $\alpha \leq \frac{\pi}{4}$ 的图(a)是不一样的.

例题 0.3 设 $a, b, c > 0$, 求由曲面 $\left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \right)^2 = ax$ 所围闭区域的体积 V .

解 1 这不是常见的曲面, 为此需要先对其大致形状作分析. 如作坐标轴方向的缩小放大代换 $x = ax', y = by', z = cz'$, 又将 x', y', z' 重记为 x, y, z , 则曲面方程简化为

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = a^2 x.$$

再作齐次变换 $x = a^{2/3}x', y = a^{2/3}y', z = a^{2/3}z'$, 又改记 x', y', z' 为 x, y, z , 则方程就变成

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x.$$

由于以上两次的变量代换的 Jacobi 行列式的绝对值分别为 abc 和 a^2 , 因此只要按照曲面方程 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x$ 求出其所围体积, 然后乘以 a^3bc 即可.

曲面方程 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x$ 是以 x 轴为旋转轴的旋转面, 作出曲面与 $y = 0$ 的交线如图 3 所示. 若在 xz 平面上用极坐标 $x = r \cos \varphi, z = r \sin \varphi$, 就是

$$r^3 = \cos \theta,$$

其中 $-\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. 可见曲面在 $0 \leq x \leq 1$ 之间, 在此范围内作平行 yz 坐标面的平面与曲面的交线为圆

$$y^2 + z^2 = \sqrt{x} - x^2.$$

将上式右边乘以 π 就是截面面积.

最后就有

$$V = \pi a^3 bc \int_0^1 (\sqrt{x} - x^2) dx = \frac{\pi}{3} a^3 bc. \quad \square$$

解 2 最后一步用球坐标代换计算也不难. 这时在 ρ, φ, θ 空间中的积分区域为

$$-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq \varphi \leq \pi, \quad 0 \leq \rho \leq (\sin \varphi \cos \theta)^{\frac{1}{3}},$$

并利用对称性, 则就有

$$\begin{aligned} V &= a^3 bc \cdot 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \varphi d\varphi \int_0^{(\sin \varphi \cos \theta)^{1/3}} \rho^2 d\rho \\ &= \frac{4}{3} a^3 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \theta d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{\pi}{3} a^3 bc. \quad \square \end{aligned}$$

注 两个解法都可以直接对原来的曲面方程进行计算, 只是在预处理之后计算更简单一些.

下面一个例题具有伟大的历史意义, 也可以说是重积分的第一次重要的应用. 为此我们简要地回顾 Newton 对万有引力定律的发现过程.

众所周知, Newton 在 1665–1666 年左右发现了万有引力定律. 然而在所有的推导过程中都是将天体看成为一个质点来处理的, 其中包括地月运动和地球对地面物体的吸引在内都是如此. 那么这种做法究竟是近似还是精确的? 若是近似, 则误差有多大? 这是长期困惑 Newton 的一个重要问题. Newton 的最主要著作《自

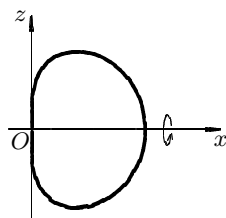


图 3: 旋转面 $(x^2 + y^2 + z^2)^2 = x$ 的生成

然哲学的数学原理》发表于 1687 年. 在 Florian Cajori 关于《原理》的历史与解释性注释的第 40 条中说: “使 Newton (的发表) 延误二十年之久的真正原因是一个十分困难的理论问题, 它关系到球体对其外一点的吸引——他直到 1684 年或 1685 年才解决这一问题.”

Newton 最终解决了这个问题, 他发现, 只要球体内的密度只与到球心的距离有关 (即所谓球对称体), 则两个球体之间的引力就等于将它们的质量集中在球心时所计算的引力, 因此将天体看成为质点的做法是精确的, 不会带来误差. 用今天的语言来说, 这就是一个重积分的应用问题.

《原理》一书中第一编的第十二章为球体的吸引力, 对上述问题作了彻底的讨论, 然后又在第三编将结论列为第 8 个命题, 其原文 (英译文) 如下:

If two globes gravitate toward each other, and their matter is homogeneous on all sides in region that are equally distant from their centers, then the weight of either globe toward the other will be inversely as the square of the distance between the centers. (见《原理》的 1999 年英译本 p.811.)

此外, Newton 还以 4 个推论的形式指出了该命题在天文学上的重要应用.

现将该问题中最主要的计算部分独立为一个引理, 其结果还在多个方面有用.

引理 设积分 $I(\rho) = \int_0^\pi \frac{(\rho \cos \varphi - c) \sin \varphi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi$, 其中 $c > 0, \rho \geq 0$, 则有

$$I(\rho) = \begin{cases} -\frac{2}{c^2}, & 0 \leq \rho < c, \\ -\frac{1}{c^2}, & \rho = c, \\ 0, & \rho > c. \end{cases}$$

证 作代换 $t = \cos \varphi$, 然后用分部积分法计算如下:

$$\begin{aligned} I(\rho) &= \int_{-1}^1 \frac{\rho t - c}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c t)^{3/2}} dt \\ &= 2(\rho^2 + c^2 - 2\rho c t)^{-1/2} \cdot \frac{\rho t - c}{2\rho c} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 \frac{1}{\rho c} (\rho^2 + c^2 - 2\rho c t)^{-1/2} \rho dt \\ &= \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\rho - c}{|\rho - c|} + \frac{\rho + c}{\rho + c} \right) - \int_{-1}^1 \frac{1}{c} (\rho^2 + c^2 - 2\rho c t)^{-1/2} dt, \end{aligned}$$

在 $0 \leq \rho < c$ 时, 积分外的项均抵销, 因此就得到

$$I(\rho) = -\frac{1}{c} \cdot (\rho^2 + c^2 - 2\rho c t)^{1/2} \cdot \frac{-1}{\rho c} \Big|_{-1}^1 = \frac{1}{\rho c^2} [|\rho - c| - (\rho + c)] = -\frac{2}{c^2}.$$

在 $c < \rho$ 时有

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho c} \left(\frac{\rho - c}{|\rho - c|} + 1 \right) + \frac{1}{\rho c^2} [|\rho - c| - (\rho + c)] = 0,$$

在 $\rho = c$ 可直接从原来的积分表达式计算 I , 它是一个常义积分, 即有

$$\begin{aligned} I(c) &= -\frac{1}{2\sqrt{2}c^2} \int_0^\pi \frac{\sin \varphi d\varphi}{\sqrt{1-\cos \varphi}} \left(= -\frac{1}{2\sqrt{2}c^2} \cdot 2\sqrt{1-\cos \varphi} \Big|_0^\pi \right) \\ &= -\frac{1}{2c^2} \int_0^\pi \cos \frac{\varphi}{2} d\varphi = -\frac{1}{c^2}. \end{aligned}$$

注 作为含参变量积分, 被积函数 $g(\rho, \varphi) = \frac{(\rho \cos \varphi - c) \sin \varphi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos \varphi)^{3/2}}$ 在点 $\rho = c, \varphi = 0$ 处极限不存在, 而且无界, 因此该点是一个奇点. 然而对所有 $\rho \neq c$, $g(\rho, \varphi)$ 对 φ 的积分都是常义积分, 而在 $\rho = c$ 时处 $g(c, \varphi) = -\frac{1}{2c^2} \cos \frac{\varphi}{2}$, 完全正常. 只是 $\rho \neq c$ 时 $g(\rho, 0) = 0$, 而 $\rho = c$ 时按照连续延拓有 $g(c, 0) = -\frac{1}{2}$.

例题 0.4 (Newton) 求密度只依赖于到球心距离的球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 对单位质点的引力.

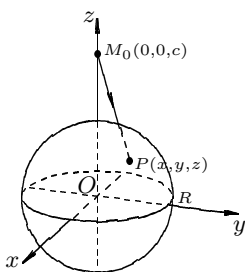


图 4: 球体对球外一个质点的吸引力

解 不妨将该质点放在 z 轴上的点 $M_0(0, 0, c)$ 处, 其中 $c \geq 0$. 设密度为 $r = r(\rho)$, ρ 为球体内点 (x, y, z) 到球心的距离 $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, $0 \leq \rho \leq R$.

采用微元法. (图 4 所示是 $c > R$ 的情况, 即质点 M_0 在球外.) 设 $dx dy dz$ 是球体中的点 $P(x, y, z)$ 处的一个微小部分的体积, 称为体积微元, 其质量就是密度 r 乘以 $dx dy dz$. 考虑该微元对质点 $M_0(0, 0, c)$ 的引力. 将这个引力记为 $f_1 \mathbf{i} + f_2 \mathbf{j} + f_3 \mathbf{k}$, 其方向为 $\overrightarrow{M_0 P}$. 这个方向的单位向量是

$$\mathbf{e} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (z - c)\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + (z - c)^2}},$$

根据万有引力定律, 得到下列表达式:

$$f_1 \mathbf{i} + f_2 \mathbf{j} + f_3 \mathbf{k} = k \cdot \frac{r dx dy dz}{x^2 + y^2 + (z - c)^2} \cdot \mathbf{e},$$

其中 k 为万有引力常数. 以下只要在球体 $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ 上积分即可. 将积分后得到的引力记为

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k},$$

则由于对称性, 引力 \mathbf{F} 在 x, y 两个方向上的分量均为 0, 即 $F_1 = F_2 = 0$. 因此可以记 $\mathbf{F} = F_3 \mathbf{k}$. 若 $c = 0$, 则也有 $F_3 = 0$. 以下设 $c > 0$. 这时有

$$F_3 = k \iiint_D \frac{r(\rho)(z - c)}{[x^2 + y^2 + (z - c)^2]^{3/2}} dx dy dz,$$

积分区域为 $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\}$. (当 $c < R$ 时被积函数无界, 是广义重积分, 可以证明只要 $r(\rho)$ 在 D 上有界即保证该广义重积分收敛, 这可以参见下一章. 但如下作球坐标代换后成为常义重积分.)

用球坐标代换得到

$$\begin{aligned} F_3 &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R kr(\rho)\rho^2 d\rho \int_0^\pi \frac{(\rho \cos \varphi - c) \sin \varphi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi \\ &= \int_0^R 2\pi kr(\rho)\rho^2 d\rho \int_0^\pi \frac{(\rho \cos \varphi - c) \sin \varphi}{(\rho^2 + c^2 - 2\rho c \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi, \end{aligned}$$

其中的里层积分 (记为 $I(\rho)$) 的计算已经在引理中解决.

先讨论质点在球外的情况, 即 $c \geq R > 0$ 的情况. 对于 $c > R > 0$ 的情况, 该积分 $I(\rho)$ 在区间 $[0, R]$ 上等于常数 $-\frac{2}{c^2}$. 对于 $c = R$ (地球对于地面上物体的引力就属于这种情况), $I(\rho)$ 只在该区间的右端点 $\rho = R$ 处取不同的值 $-\frac{1}{c^2}$, 因此可以统一处理如下:

$$F_3 = -\frac{4\pi k}{c^2} \int_0^R r(\rho)\rho^2 d\rho.$$

由于这时的球体质量为

$$M = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^R \rho^2 r(\rho) d\rho = 4\pi \int_0^R \rho^2 r(\rho) d\rho,$$

于是就可以得到结论: $F_3 = -\frac{kM}{c^2}$, 即球体对球外质点的引力相当于将球体质量集中在球心时的引力.

然后考虑 $0 < c < R$ 的情况. 这时 $I(\rho)$ 在区间 $[0, R]$ 上的取值已在引理中解决, 即在 $[0, c)$ 上恒等于 $-2/c^2$, 在点 c 处等于 $-1/c^2$, 而在 $(c, R]$ 上恒等于 0, 因此得到

$$F_3 = -\frac{4\pi k}{c^2} \int_0^c r(\rho)\rho^2 d\rho,$$

又将原球体内半径为 c 的同心球质量记为 M_c , 则有

$$M_c = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\pi \sin \varphi d\varphi \int_0^c \rho^2 r(\rho) d\rho = 4\pi \int_0^c \rho^2 r(\rho) d\rho,$$

因此这时有 $F_3 = -\frac{kM_c}{c^2}$. 这表明球体对于球内质点的引力相当于该质点到球心距离为半径的球体质量集中在球心时的引力^①. □

注 1 由例题的结论就可以证明两个球体之间的引力与将球体的质量集中在球心时的两个质点之间的引力相同, 只要球体的密度只与到球心的距离有关. 这就是 Newton 需要解决的问题. 这里若要详细写出则是一个 6 重积分问题, 但原则上已经没有困难, 从略.

① 特别可知球面上均匀分布的质量对球内质点的引力为 0. 这就是 Newton 在《原理》第一编中的第十二章的第一个命题 (命题 70). 他是用几何方法来证明的, 这与该书所采取的方式一致. 又可知, 均匀球体对球内质点的引力与质点到球心距离成正比. 这就是《原理》第一编的命题 73.

注 2 上述结论还出现在静电学等领域中. 由于点电荷之间的作用力也与距离平方成反比 (Coulomb 定律), 因此静电场和重力场有许多类似的结果. 例如, 均匀带电球面产生的电场, 在球面外的场强分布正象球面上的电荷都集中在球心时所形成的一个点电荷产生的场强分布一样, 而在球面内部的场强则处处为 0.

五. n 重积分的例子

这里的理论内容与二重积分、三重积分都是类似的. 因此只通过举例介绍如何计算. 书上的例子还太少.

例题 0.5 计算 $V_n = \int \cdots \int_{D_n} dx_1 dx_2 \cdots dx_n$, 其中的积分区域为

$$D_n = \{(x_1, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1 + \cdots + x_n \leq a, x_1 \geq 0, \cdots, x_n \geq 0\},$$

其中 $a \geq 0$.

解 在坐标轴方向作等比例的缩小放大变换 $x_1 = a\xi_1, \cdots, x_n = a\xi_n$, 则有 $\frac{\partial(x_1, \cdots, x_n)}{\partial(\xi_1, \cdots, \xi_n)} = a^n$. 在 (ξ_1, \cdots, ξ_n) 空间中, 积分区域为 (标准单形)

$$D'_n = \{(\xi_1, \cdots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \xi_1 + \cdots + \xi_n \leq 1, \xi_1 \geq 0, \cdots, \xi_n \geq 0\},$$

这时 $V_n = a^n W_n$, 其中

$$W_n = \int \cdots \int_{D'_n} d\xi_1 \cdots d\xi_n.$$

用累次积分方法, 有

$$W_n = \int_0^1 d\xi_n \int \cdots \int_{\substack{\xi_1 + \cdots + \xi_{n-1} \leq 1 - \xi_n \\ \xi_1 \geq 0, \cdots, \xi_{n-1} \geq 0}} d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1}.$$

然后对于其中里层的 $n-1$ 重积分用类似的方法得到

$$\int \cdots \int_{\substack{\xi_1 + \cdots + \xi_{n-1} \leq 1 - \xi_n \\ \xi_1 \geq 0, \cdots, \xi_{n-1} \geq 0}} d\xi_1 \cdots d\xi_{n-1} = (1 - \xi_n)^{n-1} W_{n-1},$$

于是有

$$\begin{aligned} W_n &= W_{n-1} \int_0^1 (1 - \xi_n)^{n-1} d\xi_n \\ &= W_n \cdot \frac{1}{n} (1 - \xi_n)^n (-1) \Big|_0^1 = \frac{1}{n} W_{n-1}. \end{aligned}$$

由此即知 $W_n = \frac{1}{n} W_{n-1} = \frac{1}{n(n-1)} W_{n-2} = \cdots = \frac{1}{n(n-1) \cdots 2} W_1$. 由于 $W_1 = 1$, 因此即得 $W_n = \frac{1}{n!}$, 并求出本题的答案为 $V_n = \frac{a^n}{n!}$. \square

例题 0.6 求 n 维球体 $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq R^2$ 的体积 V_n .

解 与上题类似可以有 $V_n = R^n W_n$, 其中 W_n 是 n 维单位球的体积. (已知 $W_1 = 2, W_2 = \pi, W_3 = \frac{4\pi}{3}$.)

同样用累次积分方法, 有

$$\begin{aligned}
W_n &= \int_{\xi_1^2 + \dots + \xi_n^2 \leq 1} \dots \int d\xi_1 \dots d\xi_n \\
&= \int_{-1}^1 d\xi_n \int_{\xi_1^2 + \dots + \xi_{n-1}^2 \leq 1 - \xi_n^2} \dots \int d\xi_1 \dots d\xi_{n-1} \\
&= W_{n-1} \int_{-1}^1 (1 - \xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi_n.
\end{aligned}$$

对于最后的积分用代换 $\xi_n = \sin t$, 就有

$$\int_{-1}^1 (1 - \xi_n^2)^{\frac{n-1}{2}} d\xi_n = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n-1} t \cdot \cos t dt = 2 \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot I,$$

其中 $I = \begin{cases} \frac{\pi}{2}, & n \text{ 为偶数}, \\ 1, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$ 于是就得到递推公式

$$W_n = 2 \cdot \frac{(n-1)!!}{n!!} \cdot I.$$

以下分两种情况讨论.

对于 $n = 2m$ 有

$$\begin{aligned}
W_{2m} &= 2 \cdot \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot \frac{\pi}{2} \cdot W_{2m-1} \\
&= \pi \cdot \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!} \cdot 2 \cdot \frac{(2m-2)!!}{(2m-1)!!} \cdot W_{2m-2} \\
&= \frac{\pi}{m} W_{2m-2},
\end{aligned}$$

用这个递推公式, 并利用 $W_2 = \pi$ (即单位圆面积), 就得到

$$W_{2m} = \frac{\pi^2}{m(m-1)} W_{2m-4} = \dots = \frac{\pi^{m-1}}{m(m-1) \dots 2} W_2 = \frac{\pi^m}{m!}.$$

对于 $n = 2m+1$ 则可以利用 W_{2m} 的公式得到

$$\begin{aligned}
W_{2m+1} &= 2 \cdot \frac{(2m)!!}{(2m+1)!!} \cdot W_{2m} \\
&= 2 \cdot \frac{2m(2m-2) \dots 4 \cdot 2}{(2m+1)!!} \cdot \frac{\pi^m}{m!} \\
&= \frac{2^{m+1} \pi^m}{(2m+1)!!}.
\end{aligned}$$

最后得到 n 维球的体积为

$$V_n = \begin{cases} \frac{\pi^m}{m!} \cdot R^n, & n = 2m, \\ \frac{2^{m+1} \pi^m}{(2m+1)!!} \cdot R^n, & n = 2m+1. \end{cases} \quad \square$$

第 T21 次讲稿 (第三学期第 21 次)

第 T21 次讲稿, 用于 2008 年 11 月 14 日, 星期五, 2 节课.

内容: 简要地浏览第二十二章, 然后开始讲第二十三章 曲线积分. (由于今年春节是 1 月 25 日, 比历史上的最早记录只晚了 4 天, 教学课时不足, 对第二十二章的广义重积分只能割爱.)

§23.1 第一类曲线积分

一. 物理背景

设 C 是空间中的一条光滑曲线, 其上发布有质量. 设已知线密度函数为 $\rho(x, y, z)$, $(x, y, z) \in C$, 如何求曲线 C 上分布的质量.

若 $\rho = \text{const}$, 则质量

$$m = \rho \int_C ds,$$

即密度常数乘以曲线的弧长, 后者在上册 §10.2 已经作过介绍. 对于空间曲线 C 为参数表示 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$ 的情况, 曲线弧长为

$$\int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt.$$

对于一般情况来说, 线密度函数 $\rho(x, y, z)$ 就是通过在一小段曲线上的质量除以该小段曲线的弧长, 当该段弧长趋于 0 时的极限来定义的. 因此就可以看出计算曲线上分布的总质量的方法是通过积分

$$m = \int_C \rho ds,$$

其中 ds 是弧长的微分. 对于空间曲线表示 $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $\alpha \leq t \leq \beta$, 有 $ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$.

称上述积分为第一类曲线积分, 称其中的曲线 C 为积分路径. 它的严格定义将在下面给出.

二. 第一类曲线积分的定义

定义 0.1 设 C 为一条分段光滑曲线, 方程为 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, 其中 $x(t), y(t), z(t)$ 为分段连续可微, $f(x, y, z)$ 是在 C 上有定义的函数, 则称下列积分

$$\int_C f ds = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt$$

为第一类曲线积分.

注 在定义中的等式左边是第一类曲线积分的记号, 而右边是该记号的意义, 也就是计算方法.

此外, 由于同一条曲线可以有不同的表示方式, 因此需要说明第一类曲线积分的值是与各种表示方式独立的. 这可以从定积分的变量代换公式得到.

与定积分的情况相同, 第一类曲线积分关于被积函数具有线性性质. 这就是说当 $\int_C f ds$ 和 $\int_C g ds$ 存在时, 则对于任意常数 c_1, c_2 成立

$$\int_C (c_1 f + c_2 g) ds = c_1 \int_C f ds + c_2 \int_C g ds.$$

定积分关于积分区间的可和性也可以推广到第一类曲线积分上. 具体来说, 设曲线 C 分成为 C_1 和 C_2 两段. 则当 f 在曲线 C 上的第一类曲线积分存在时, f 在 C_1 和 C_2 上的第一类曲线积分也都存在, 且成立

$$\int_C f ds = \int_{C_1} f ds + \int_{C_2} f ds.$$

反之, 若 f 在 C_1 和 C_2 上的第一类曲线积分都存在, 则 f 在曲线 C 上的第一类曲线积分也存在, 且成立前述等式.

例题 0.1 求一段螺旋线的质量, 其中曲线的方程为 $C: x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt, 0 \leq t \leq 2\pi, a, b > 0$, 密度函数 $\rho(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$.

解 为此只要计算第一类曲线积分 $\int_C \rho ds$. 这时 $ds = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{a^2 + b^2} dt, \rho(x(t), y(t), z(t)) = a^2 + b^2 t^2$, 于是曲线 C 的总质量为

$$M = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} (a^2 + b^2 t^2) dt = \sqrt{a^2 + b^2} (2\pi a^2 + \frac{8\pi^3}{3} b^2). \quad \square$$

例题 0.2 计算第一类曲线积分 $I = \int_C (x + y) ds$, 其中 C 是 $\triangle ABC$ 的边界, 该三角形的顶点为 $A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1)$.

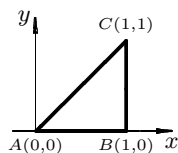


图 1: 第一类曲线积分的积分路径

解 利用可加性, 有

$$I = \left\{ \int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BC}} + \int_{\overline{CA}} \right\} (x + y) ds.$$

以下分别计算三段直线上的积分.

在 \overline{AB} 上, $x = x, y = 0, 0 \leq x \leq 1, ds = dx$, 因此有

$$\int_{\overline{AB}} (x + y) ds = \int_0^1 x dx = \frac{1}{2}.$$

在 \overline{BC} 上, $x = 1, y = y, 0 \leq y \leq 1, ds = dy$, 因此有

$$\int_{\overline{BC}} (x + y) ds = \int_0^1 (1 + y) dy = \frac{3}{2}.$$

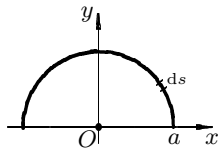
在 \overline{CA} 上, $x = x, y = x, 0 \leq x \leq 1, ds = \sqrt{y_x'^2 + x_x'^2} dx = \sqrt{2} dx$, 因此有

$$\int_{\overline{CA}} (x+y) ds = \sqrt{2} \int_0^1 2x dx = \sqrt{2}.$$

最后就得到 $I = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} + \sqrt{2} = 2 + \sqrt{2}$. \square

注 根据第一类曲线积分的定义, 参数表示时的区间 $[\alpha, \beta]$ 必须满足 $\alpha < \beta$, 因此在 \overline{CA} 上积分时, 既然用 x 为参数, 则参数变化范围只能是从 0 到 1, 而不能是从 1 到 0.

例题 0.3 求一均匀的半圆周 (设线密度 $\rho = 1$) 对位于圆心的单位质点的引力. 设 a 为圆半径, G 为万有引力常数.



解 将单位质点放在原点, 考虑半径为 a 的上半圆周对原点的单位质点的引力.

设引力为

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j},$$

图 2: 半圆周对原点的引力 则从对称性可知 $F_1 = 0$. 为求 F_2 , 可以用微元法.

在圆周上点 (x, y) 处取一小段弧 ds , 因密度为 1, 其质量就是 ds . 它对于原点的引力大小为 $\frac{G ds}{a^2}$. 方向为 $x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$. 由于点 (x, y) 在圆周上, 该方向的单位向量是 $\frac{1}{a}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j})$. 将半圆周曲线记为 C , 就可以将分量 F_2 用第一类曲线积分表出

$$F_2 = \int_C \frac{Gy}{a^3} ds.$$

取曲线 C 的参数方程为 $x = a \cos \theta, y = a \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi$, 则有 $ds = a d\theta$, 于是就可以计算得到

$$F_2 = \frac{G}{a^3} \int_0^\pi R^2 \sin \theta d\theta = \frac{2G}{a^3}. \quad \square$$

注 这里不妨问一个问题: 半圆周上均匀分布的质量对圆心的质点的引力是否等于将总质量集中在半圆周的质心处对圆心质点的引力?

§23.2 第二类曲线积分

在第一类曲线积分 $\int_C f \, ds$ 中若令 f 恒等于 1, 则就得到曲线弧长. 因此第一类曲线积分可看成为曲线弧长公式的推广. 然而, 第二类曲线积分则具有全新的特色. 我们仍然从物理背景开始来引入这类新的积分.

一. 物理背景

设 $D \subset \mathbb{R}^3$ 是一个区域, 在 D 上定义了一个力场 \mathbf{F} . 取定坐标系后可以将 \mathbf{F} 表示如下:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) \mathbf{i} + Q(x, y, z) \mathbf{j} + R(x, y, z) \mathbf{k}.$$

用场论的语言来说就是在 D 上定义了一个向量场 (或矢量场). 在取定坐标系时上述向量表达式的每一个分量的系数就是 D 上的数量场.

设点 A, B 均在 D 内. 我们考虑某一个质点在力场 \mathbf{F} 中从点 A 沿某条曲线 C 到点 B , 问题是如何计算力场 \mathbf{F} 所作的功 W . 设曲线 C 由参数方程表示如下:

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}, \quad t_A \leq t \leq t_B,$$

其中 t_A, t_B 是点 A, B 对应的参数值, 同时设 $x(t), y(t), z(t)$ 在区间 $[t_A, t_B]$ 上均连续可微. 这里要注意曲线 C 现在是有确定方向的. 由以上的参数表示可知曲线方向与参数 t 的增加方向一致.

仍然用微元法. 在曲线上取一小段微元, 并用向量表示为 $\mathbf{r}(t+dt) - \mathbf{r}(t)$, 则可以近似地用微分表示为

$$d\mathbf{r} = (dx, dy, dz),$$

设在点 $\mathbf{r}(t)$ 处的力为 $\mathbf{F}(x(t), y(t), z(t))$, 则质点沿曲线方向移动这一小段微元时, 力场所作的功近似地为 $\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$.

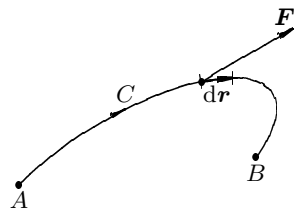


图 3: 在力场内质点移动做功

将这样的微元相加, 就可以将力场所作的功用下列积分来计算:

$$W = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{AB} P \, dx + Q \, dy + R \, dz,$$

这就是第二类曲线积分.

注意这类新的曲线积分的一个重要特点是它与曲线的方向有关. 例如上述问题中如果质点是从曲线的点 B 到点 A , 其他都不变, 则所作的功就是上述 W 乘以 -1 , 即有

$$\int_{BA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

我们同样称第二类曲线积分中的曲线为积分路径. 由上可见, 第二类曲线积分的积分路径 C 是有向曲线. 这与第一类曲线积分完全不同.

二. 第二类曲线积分的定义

定义 0.2 称积分

$$I = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy + R dz$$

为第二类曲线积分, 其中 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $d\mathbf{r} = (dx, dy, dz)$, \mathbf{F} 是在有向曲线 \widehat{AB} 上定义的向量值函数

$$\mathbf{F}(x, y, z) = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz.$$

对 \widehat{AB} 而言, 除了连续之外, 还要求它是分段光滑曲线, 即可以表示为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [t_A, t_B]$, 其中 $x(t), y(t), z(t)$ 为分段连续可微函数, 在每段内满足

$$x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t) \neq 0,$$

且 $\mathbf{r}(t_A) = A$, $\mathbf{r}(t_B) = B$.

积分 I 的定义和计算公式为

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt. \end{aligned}$$

注 1 在引进第一类曲线积分时是从弧长微分 ds 开始的, 其优点是不依赖于曲线的参数表示方式. 对于第二类曲线积分也可以如此给出定义. 这对于理解这类积分是有帮助的. 为此改变图 3 为图 4, 并给出定义如下.

如图 4 所示, 在曲线上某点邻近取弧长微元 ds , 又从该点作曲线的单位切向量 $\boldsymbol{\tau}$. 这时要注意切向量有两个可能的取向, 而现在规定取与曲线 \widehat{AB} 的方向一致的单位切向量.

同时作出在该点的向量 \mathbf{F} . 如同上一小节用做功来引入第二类曲线积分时那样, 质点沿着从 A 到 B 的方向移动 ds 所作的功就是

$$\mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds.$$

对所有 ds 求和就得到积分

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds.$$

若改变曲线的方向为从点 B 到点 A , 则根据上述定义只要将上述单位切向量反向即可, 而对积分的影响当然就是乘以 -1 .

注意, 这样一来我们对于第二类曲线积分就有三种表示形式:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}, \quad \int_C P dx + Q dy + R dz, \quad \int_C \mathbf{F} \cdot \boldsymbol{\tau} ds,$$

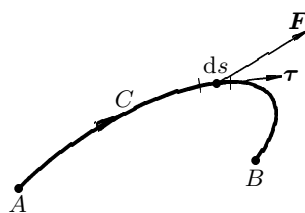


图 4: 第二类曲线积分的另一种定义方式

它们在各种不同场合都要用到.

在曲线用参数方程 $(x(t), y(t), z(t))$ 表出时, 利用

$$ds = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t) + z'^2(t)} dt,$$

切向量为 $\pm(x'(t), y'(t), z'(t))$, 然后写出与曲线取向一致的单位切向量, 就可以知道上述定义与前面的定义是一致的.

注 2 与第一类曲线积分不同的是在第二类曲线积分中的曲线是有方向的, 如果 A 是起点, B 是终点, 则在其参数表示中并不要求 $t_A < t_B$. 因此就有

$$\begin{aligned} \int_{\widehat{BA}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= \int_{t_B}^{t_A} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \\ &= - \int_{t_A}^{t_B} [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) \\ &\quad + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt \\ &= - \int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \end{aligned}$$

回顾定积分中允许积分下限大于积分上限的情况, 即有

$$\int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx,$$

这与上述第二类曲线积分的性质相同. 反之, 第一类曲线积分则相当于只允许积分下限小于积分上限的定积分.

第二类曲线积分也具有关于被积函数的线性性质和关于曲线的可加性, 证明从略.

对于平面上的有向曲线, 同样可以定义第二类曲线积分为

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy,$$

其中 $P = P(x, y), Q = Q(x, y)$.

此外, 还需要指出, 对于平面上的封闭曲线, 它有两个取向. 其中之一称为正向, 另一个称为负向. 对于圆周来说, 称逆时针方向为正向, 顺时针方向为负向. 对一般的封闭曲线来说, 根据 Jordan 定理, 单闭曲线分平面为两个区域, 称为内部和外部.

定义 0.3 闭曲线有两个取向. 对于曲线上的点及其充分小的邻域, 使内部区域在该点左侧的前进方向就是闭曲线的正向. 与正向相反的方向是闭曲线的负向.

例题 0.1 求第二类曲线积分 $I = \int_C y^2 dx + x^2 dy$, 其中曲线 C 是上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y \geq 0$, 方向是从点 $(-a, 0)$ 到 $(a, 0)$.

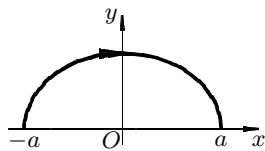


图 5: 积分路径为半个椭圆

解 对于积分路径 C 用参数方程

$$x = a \cos t, y = b \sin t,$$

曲线取向是从 $t = \pi$ 到 $t = 0$. 于是有 (其中 $\cos^3 t$ 在 $[0, \pi]$ 上积分为 0):

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi}^0 [b^2 \sin^2 t \cdot (-a \sin t) + a^2 \cos^2 t \cdot (b \cos t)] dt \\ &= ab^2 \int_0^{\pi} \sin^3 t dt = 2ab^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 t dt = \frac{4}{3} ab^2. \quad \square \end{aligned}$$

例题 0.2 求 $\int_C 2xy dx - x^2 dy$, 其中 C 为封闭折线 \overline{ABCA} , $A(0, 0)$, $B(1, 0)$, $C(1, 1)$ (见图 1).

解 根据积分关于路径的可加性有

$$I = \left(\int_{\overline{AB}} + \int_{\overline{BC}} + \int_{\overline{CA}} \right) 2xy dx - x^2 dy.$$

在 \overline{AB} 上, 令 x 为参数, 从 0 到 1. 这时有 $y = 0, dy = 0$, 于是被积表达式的两项都等于 0, 这样就有

$$\int_{\overline{AB}} 2xy dx - x^2 dy = 0.$$

在 \overline{BC} 上, 令 y 为参数, 从 0 到 1. 这时 $x = 1, dx = 0$, 因此有

$$\int_{\overline{BC}} 2xy dx - x^2 dy = \int_0^1 (-1) dy = -1.$$

在 \overline{CA} 上, 令 x 为参数, 从 1 到 0. 这时 $y = x, dy = dx$, 因此有

$$\int_{\overline{CA}} 2xy dx - x^2 dy = \int_1^0 (2x^2 - x^2) dy = - \int_0^1 x^2 dx = -\frac{1}{3}.$$

合并以上得到 $I = 0 + (-1) + (-\frac{1}{3}) = -\frac{4}{3}$. \square

第 T22 次讲稿 (第三学期第 22 次)

第 T22 次讲稿, 用于 2008 年 11 月 19 日, 星期三, 3 节课.

内容: 继续讲第二十三章 曲线积分.

例题 0.3 求 $I = \int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中 C 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), $z \geq 0$ 和柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 的交线, 方向为从 z 轴正向看去的逆时针方向.

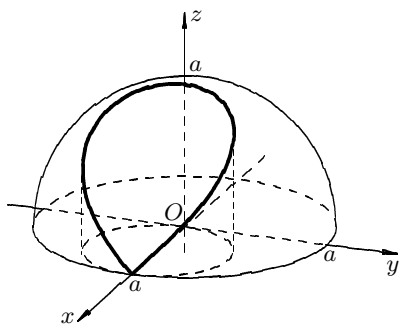


图 1: 上半球面与柱面的交线

解 首先将柱面方程改写为

$$(x - \frac{a}{2})^2 + y^2 = \frac{a^2}{4},$$

参考左图, 可见可以将曲线在 xy 平面上的投影参数化为

$$x = \frac{a}{2} + \frac{a}{2} \cos \theta, \quad y = \frac{a}{2} \sin \theta,$$

参数 θ 从 0 到 2π . 将它们代入球面方程, 即有

$$z = \sqrt{a^2 - (x^2 + y^2)} = \sqrt{a^2 - ax} = a \sin \frac{\theta}{2}.$$

现在可以将所得的曲线参数方程代入第二类曲线积分公式中得到:

$$I = \frac{a^3}{8} \int_0^{2\pi} \left[-\sin^3 \theta + 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta + (1 + \cos \theta)^2 \cos \frac{\theta}{2} \right] d\theta.$$

下面分别对上述积分号下的方括号内的三项计算其积分.

在区间 $[0, 2\pi]$ 上从 $\sin^3(2\pi - \theta) = -\sin^3 \theta$, 可见函数 $\sin^3 \theta$ 关于区间中点 π 为奇函数, 因此积分 $\int_0^{2\pi} \sin^3 \theta d\theta = 0$.

又有

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} 4 \sin^2 \frac{\theta}{2} \cos \theta d\theta &= 2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos \theta) \cos \theta d\theta \\ &= -2 \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta d\theta = -2\pi. \end{aligned}$$

对第三个积分则有

$$\int_0^{2\pi} (1 + \cos \theta)^2 \cos \frac{\theta}{2} d\theta = \int_0^{2\pi} 4 \cos^5 \frac{\theta}{2} d\theta = 0,$$

这里再次利用了被积函数关于区间中点 π 为奇函数, 因此积分为 0.

合并以上得到

$$I = \frac{a^3}{8} \cdot (-2\pi) = -\frac{\pi a^3}{4}. \quad \square$$

三. 全微分情况

定义 0.1 设在含曲线 \widehat{AB} 的一个开集中存在连续可微函数 $\varphi(x, y)$, 使得成立

$$d\varphi = P(x, y) dx + Q(x, y) dy,$$

则称 $P dx + Q dy$ 为全微分式 (或恰当式), 称 φ 为该全微分式的原函数 (或势函数).

注 由定义可知, 若 φ 是 $P dx + Q dy$ 的原函数, 则加上任意常数 C 得到的 $\varphi + C$ 也是该微分式的原函数. 因此似乎只要在曲线所在的区域内选定一个即可.

但后面会看到, 这不一定做得到. 在一元函数中原函数主要用于计算定积分, 因此只要取定一个即可. 而对于多元函数来说, 由于区域可以有洞, 因此在沿着某条路径积分计算第二类曲线积分时, 有可能从一个原函数连续过渡到另一个原函数. 下面就会看到这样的例子.

定理 0.1 设 \widehat{AB} 是分段光滑的平面曲线, $P dx + Q dy$ 是在包含该曲线的一个区域上的全微分式, φ 为其原函数, 则该全微分式在 \widehat{AB} 上的第二类曲线积分等于原函数在两端之差, 即有:

$$I = \int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy = \varphi \Big|_A^B = \varphi(x_B, y_B) - \varphi(x_A, y_A),$$

其中 (x_A, y_A) 和 (x_B, y_B) 分别是点 A 和 B 的坐标.

证 从条件知道有 $\varphi_x = P$, $\varphi_y = Q$, 因此积分成为 $I = \int_{\widehat{AB}} \varphi_x dx + \varphi_y dy$.

设曲线 \widehat{AB} 的参数表示为 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $t \in [t_A, t_B]$, 则就可以计算曲线积分 I 如下:

$$\begin{aligned} I &= \int_{t_A}^{t_B} [\varphi_x(x(t), y(t))x'(t) + \varphi_y(x(t), y(t))y'(t)] dt \\ &= \varphi(x(t), y(t)) \Big|_{t_A}^{t_B} = \varphi(x_B, y_B) - \varphi(x_A, y_A), \end{aligned}$$

这里一方面利用 φ 可微必连续, 从而 $\varphi(x(t), y(t))$ 在区间 $[t_A, t_B]$ 上连续; 另一方面利用 $x(t), y(t)$ 又分段光滑, 因此除有限点之外, $\varphi(x(t), y(t))$ 的导数就等于被积函数. 这样就可以用 Newton-Leibniz 公式 (见上册 p.218). \square

注 从定理可见, 对于全微分式的第二类曲线积分来说, 它的值似乎只与端点处的原函数值有关, 而与积分路径的具体形状 (即表达式) 无关. 因此可以将积分写为

$$\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy = \int_A^B P dx + Q dy.$$

但这里还不能说是积分与具体路径无关, 它还涉及到区域是否为单连通,

下面是几个常见的全微分式:

$$\begin{aligned}
 x \, dx + y \, dy &= \frac{1}{2} d(x^2 + y^2), \\
 y \, dx + x \, dy &= d(xy), \\
 \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2} &= d\left(\frac{y}{x}\right), \\
 \frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} &= d\left(\arctan \frac{y}{x}\right).
 \end{aligned}$$

对上面的最后一个原函数需要作较详细的讨论.

用连续延拓的方法就可以证明这里的原函数是点 $(x, y) (\neq (0, 0))$ 到原点的联接直线段与 x 正向的夹角, 即极坐标中的极角 θ , 也称为幅角. 由于在点 $(x, y) (\neq (0, 0))$ 的极角可以相差 2π 的倍数, 而在反正切函数 $\arctan x$ 的定义中则规定其值域只在 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ 内, 因此在超出这个范围时需要加上 (或减去) π 的倍数. 这里即使使用多值函数 $\text{Arctan } x$ 也不行. 因为它在 $x = 0 (y \neq 0)$ 时也没有定义, 并不能成为在去心平面区域 $\mathbb{R}^2 - \{0\}$ 上满足条件的原函数. 因此上面最后一式的右边只在 $|\theta| < \frac{\pi}{2}$ 时才是正确的.

连续延拓的方法简述如下. 从在一、四象限已经有定义的原函数 $\arctan \frac{y}{x}$ 开始, 可以先在 $x = 0, y > 0$ 时定义原函数的值为 $\frac{\pi}{2}$, 在 (x, y) 处于第二、三象限时定义为 $\arctan \frac{y}{x} + \pi$, 然后沿反时针方向得到 θ 的多值分支. 同样可以在 $x = 0, y < 0$ 时定义原函数的值为 $-\frac{\pi}{2}$, 然后沿顺时针方向得到 θ 的其余多值分支. 这样得到的多值函数在去心平面的每一点处都连续可微, 而且其全微分等于 $\frac{x \, dy - y \, dx}{x^2 + y^2}$, 因此就是所求的原函数.

这样我们就有

$$\frac{-y \, dx + x \, dy}{x^2 + y^2} = d\theta,$$

并约定对于今后出现的原函数 $\arctan \frac{y}{x}$ 就自动理解为它的连续延拓 θ .

关于原函数的以上定义和定理都可以推广到 \mathbb{R}^3 中. 其中常见的全微分式是

$$\frac{x \, dx + y \, dy + z \, dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = d\left(-\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right).$$

这里若记 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, 则就可以与前面有关例题中的结果相联系, 即有

$$\text{grad}\left(\frac{1}{r}\right) = -\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{r^3}.$$

例题 0.4 求 $I = \int_{(0,0)}^{(1,1)} y \, dx + x \, dy$.

解 由于 $d(xy) = y \, dx + x \, dy$, 因此就有

$$I = xy \Big|_{(0,0)}^{(1,1)} = 1. \quad \square$$

下面是一个重要的例题. 其中的记号 \oint 表示积分路径为闭曲线.

例题 0.5 (Gauss 积分) 求 $\oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 其中路径 C 是不经过原点的闭曲线.

解 如前所述, 在去心平面 $\mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$ 上本题的被积表达式是全微分, 其原函数是点 (x, y) ($\neq (0, 0)$) 在极坐标中的极角 θ . 这里需要分三种情况来讨论, 同时请参见下面的附图.

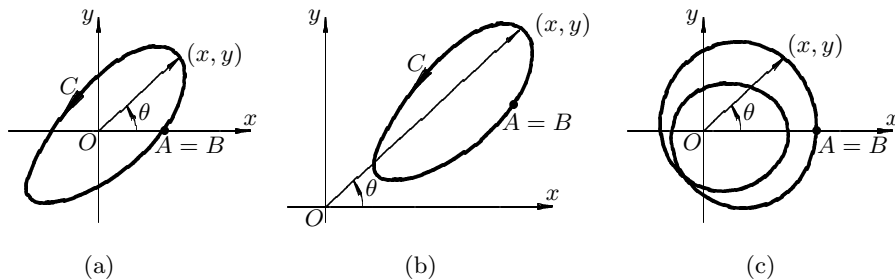


图 2: Gauss 积分

(i) 如图 2(a) 所示, 闭曲线 C 从点 A 开始以逆时针方向围绕原点一周回到点 $B = A$. 这时极角 θ 连续 (但不必单调) 地从 0 变化到 2π , 因此虽然 $A = B$, 但却有 $\theta_A = 0, \theta_B = 2\pi$, 因此就有

$$I = \theta \Big|_A^B = 2\pi.$$

(ii) 如图 2(b) 所示, 闭曲线 C 不围绕原点, 即原点在 C 的外部, 则 $\theta_A = \theta_B$, 因此 $I = 0$.

(iii) 如图 2(c) 所示, 闭曲线 C 围绕原点按照逆时针方向旋转两周, 因此有 $\theta_A = 0, \theta_B = 4\pi$, 于是 $I = 4\pi$.

依此类推, 若闭曲线围绕原点按照逆时针方向旋转 n 周, 则 $I = 2n\pi$, 而若闭曲线围绕原点按照顺时针方向旋转 n 周, 则 $I = -2n\pi$. \square

例题 0.6 求使得地球表面的单位质点脱离重力场所需作的功.

解 记 G 为万有引力常数, M 为地球质量, 取地球中心为原点, 于是地球对位置在点 (x, y, z) 的单位质点的引力为

$$\mathbf{F} = -\frac{GM}{r^2} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{GM}{r^3}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}),$$

其中 $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

在此重力场中将单位质点沿曲线 C 移动就是要克服引力做功, 因此可以用第二类曲线积分表出为

$$\int_C -\mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = GM \int_C \frac{x dx + y dy + z dz}{r^3}.$$

如前所说, 已知上述积分号下的被积表达式是全微分式, 其原函数是 $-\frac{1}{r}$, 因此积分与路径无关.

要使得地面的单位质点脱离地球的引力场相当于将该质点按照某条轨道送到无穷远处. 不妨设该质点的起始位置为 $(0, 0, R)$, 而将无穷远处用 ∞ 表示, 则所要作的功是

$$W = GM \int_{(0,0,R)}^{\infty} \frac{\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}}{r^3} = -GM \frac{1}{r} \Big|_R^{+\infty} = \frac{GM}{R}.$$

利用地面的重力加速度为 $g = \frac{GM}{R^2}$, 这样就有 $W = gR$.

现在采取在地面上给予质量为 m 的质点以速度 v_0 的方法来发射该质点. 这样获得的动能就可以用来克服地球引力做功, 因此应当成立等式:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgR,$$

因此得到 $v_0 = \sqrt{2gR}$.

用 $g = 9.81$ 米/秒² 和 $R = 6371$ 米代入就得到 $v_0 = 11.2$ 千米/秒, 这就是第二宇宙速度. \square

注 这里还是离不开与路径无关的概念.

五. 两类曲线积分的联系

先考虑将第二类曲线积分转化为第一类曲线积分.

设 \widehat{AB} 是光滑曲线 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$, $t \in [t_A, t_B]$, 且设 $t_A < t_B$. $\mathbf{r}'(t)$ 是曲线的切向, 记 $\boldsymbol{\tau} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|}$ 是单位切向量, 它可以用方向余弦表示为

$$\boldsymbol{\tau} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

其中 α, β, γ 是 $\boldsymbol{\tau}$ 与 x 轴, y 轴和 z 轴的正向的夹角.

利用弧长微分

$$ds = \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2 + z'(t)^2} dt = |\mathbf{r}'(t)| dt,$$

因此有

$$d\mathbf{r} = \mathbf{r}'(t) dt = \boldsymbol{\tau} ds,$$

这样就可以对于 $\mathbf{f} = (P, Q, R)$ 得到

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\widehat{AB}} \mathbf{f} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_{\widehat{AB}} (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) ds,$$

这样就在 $t_A < t_B$ 的条件下将第二类曲线积分化为第一类曲线积分. 对于 $t_A > t_B$ 的情况, 利用

$$\int_{\widehat{AB}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r} = - \int_{\widehat{BA}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{r},$$

可见只要乘以 -1 即可.

同样可以将第一类曲线积分转化为第二类曲线积分.

设 $t_A < t_B$, 利用 $\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} = |\boldsymbol{\tau}|^2 = 1$, $\boldsymbol{\tau} ds = d\mathbf{r}$, 因此就有

$$\int_{\widehat{AB}} F ds = \int_{\widehat{AB}} F \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} ds = \int_{\widehat{AB}} F \boldsymbol{\tau} \cdot d\mathbf{r},$$

其中右边的最后一个积分就是 $F\mathbf{r} = (F \cos \alpha, F \cos \beta, F \cos \gamma)$ 在有向曲线 \widehat{AB} 上的第二类曲线积分, 这就是

$$\int_{\widehat{AB}} F ds = \int_{\widehat{AB}} F \cos \alpha dx + F \cos \beta dy + F \cos \gamma dz.$$

例题 0.7 设 $u(x, y)$ 为二元连续函数, C_R 是圆周 $x^2 + y^2 = R^2$, 要求将第一类曲线积分

$$I = \frac{1}{2\pi R} \int_{C_R} u(x, y) ds$$

化为第二类曲线积分.

解 1 对于 C_R 上的点 (x, y) , 在该点沿逆时针方向的切向可以将向量 (x, y) 旋转正 90° 得到. 因此若记 (x, y) 的方向为 $(\cos \theta, \sin \theta)$, 则切方向的单位向量就是

$$\boldsymbol{\tau} = (\cos(\theta + \frac{\pi}{2}), \sin(\theta + \frac{\pi}{2})) = (-\sin \theta, \cos \theta) = \frac{(-y, x)}{R}.$$

又利用 $\boldsymbol{\tau} ds = d\mathbf{r} = (dx, dy)$, 这样就有

$$\begin{aligned} I &= \frac{1}{2\pi R} \oint_{C_R} u \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau} ds \\ &= \frac{1}{2\pi R^2} \oint_{C_R} -yu dx + xu dy. \quad \square \end{aligned}$$

解 2 利用 C_R 是半径为 R 的圆, 因此就有

$$ds = R d\theta = R d\left(\arctan \frac{y}{x}\right) = R \cdot \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} = \frac{-y dx + x dy}{R},$$

代入 I 的积分表达式即可. \square

§23.3 Green 公式

曲线积分理论中的核心是 Green 公式. 从下面的定理可见, 它建立了第二类曲线积分与二重积分之间的联系.

一. Green 公式

定理 0.2 (Green 公式) 设 D 是平面上的有界区域, 其边界 $C = \partial D$ 为分段光滑的曲线, 取正向, 则当 $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上连续可微时, 有

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy.$$

注 右边的被积函数可以用行列式来记忆:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ P & Q \end{vmatrix} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}.$$

先看一个例子, 它表明应用 Green 公式进行计算时的一个基本技巧.

例题 0.1 求 $I = \int_C xy^2 dy - x^2 y dx$, 其中 C 是上半圆周 $x^2 + y^2 = a^2, y \geq 0$, 取向从 $B(a, 0)$ 到 $A(-a, 0)$, $a > 0$.

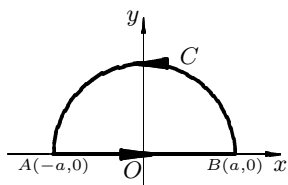


图 3: 添加辅助线的方法

解 1 题中的曲线 C 不是闭曲线, 可以添上一段有向直线段 \overline{AB} , 这样就得到封闭曲线 $C \cup \overline{AB}$, 它所围的区域为上半圆 $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2, y \geq 0\}$.

用 Green 公式于 D 及其 $\partial D = C \cup \overline{AB}$, 由于在 \overline{AB} 上 $y = 0, dy = 0$, 因此

$$\int_{\overline{AB}} xy^2 dy - x^2 y dx = 0.$$

这样就有

$$\begin{aligned} I &= \oint_{C \cup \overline{AB}} xy^2 dy - x^2 y dx = \iint_D \left(\frac{\partial(xy^2)}{\partial y} + \frac{\partial(x^2 y)}{\partial x} \right) dx dy \\ &= \iint_D (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^\pi \int_0^a r^3 dr = \frac{\pi}{4} a^4. \quad \square \end{aligned}$$

解 2 此题当然可以按照第二类曲线积分的计算公式来做. 用参数表示 $x = a \cos t, y = a \sin t$, t 从 0 到 π , 就有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi 2a^4 \sin^2 t \cos^2 t dt = 4a^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 t (1 - \sin^2 t) dt \\ &= 4a^4 \frac{\pi}{4} \left(1 - \frac{3}{4} \right) = \frac{\pi}{4} a^4. \quad \square \end{aligned}$$

注 作为第一个例子就介绍添加辅助线的方法是不错的, 但这个例子太简单, 解 1 似乎比解 2 还复杂, 不能说明 Green 公式的优点.

二. Green 公式的证明

由于区域的形状可以非常复杂, 分几种情况讨论.

(i) 设区域 D 可表示为

$$D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\},$$

且假设平行于 y 轴的任何直线与 D 的边界 ∂D 至多只有两个交点. 如图 4 所示, 边界曲线 $\partial D = C_1 \cup C_2$, 其中 C_i 由 $y = y_i(x)$, $a \leq x \leq b$ 描述, $i = 1, 2$.

讨论 $Q = 0$ 的情况. 这时二重积分的被积函数为 $-\frac{\partial P}{\partial y}$. 由于 P 的偏导函数是二元连续函数, 因此可以用累次积分计算如下:

$$\begin{aligned} \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy &= \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \left(-\frac{\partial P}{\partial y}(x, y)\right) dy \\ &= \int_a^b [P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))] dx \end{aligned}$$

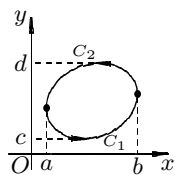


图 4: 简单区域的示意图

对于 Green 公式中的第二类曲线积分, 这时可以计算如下:

$$\begin{aligned} \oint_C P dx &= \int_{C_1} P dx + \int_{C_2} P dx \\ &= \int_a^b P(x, y_1(x)) dx + \int_b^a P(x, y_2(x)) dx \\ &= \int_a^b [P(x, y_1(x)) - P(x, y_2(x))] dx, \end{aligned}$$

这样就证明了 $Q = 0$ 时的 Green 公式, 即

$$\iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\right) dx dy = \oint_C P dx.$$

若区域 D 又可以表示为

$$D = \{(x, y) \mid c \leq y \leq d, x_1(y) \leq x \leq x_2(y)\},$$

且假设平行于 x 轴的任何直线与区域 D 的边界 ∂D 至多只有两个交点 (参见图 4), 则同样可以证明在 $P = 0$ 时的 Green 公式成立, 即有

$$\iint_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dy.$$

综合以上并将两个等式相加, 就得到 Green 公式.

又可以看出, 在讨论 $Q = 0$ 的情况中, 如果允许直线 $x = a$, $x = b$ 与 ∂D 有多于两个的交点, 即长度为正的直线段, 则对于二重积分 $\iint_D (-P_y) dx dy$ 没有影响, 而

对于第二类曲线积分 $\oint_C P dx$ 来说, 由于 $dx = 0$, 因此在平行 y 轴的直线段上的积分等于零, 因此公式仍然成立. 同样, 在讨论 $P = 0$ 时, 也可以允许直线 $y = c$ 和 $y = d$ 与 ∂D 有多于两个的交点, 即长度为正的直线段.

不妨称满足以上两个条件的区域 D 为简单区域. 用二重积分化二次积分时的语言来说, 简单区域同时是 x 型区域和 y 型区域. 于是已经证明对简单区域的 Green 公式成立.

第 T23 次讲稿 (第三学期第 23 次)

第 T23 次讲稿, 用于 2008 年 11 月 21 日, 星期五, 2 节课.

内容: 完成 Green 公式的证明. 继续讲第二十三章 曲线积分.

(ii) 区域 D 不是简单区域, 但可以用有限条分段光滑曲线分割为有限个子区域 $D_i, i = 1, \dots, n$, 使得其中每个子区域 D_i 都是简单区域. 在图 1 中 $n = 4$, 所添加的都是直线段.

这时要注意添加到 D 内的每一条分段光滑曲线同时是两个子区域的边界 (的一部分). 这里的关键之处是作为不同子区域的正向边界的一部分, 这些新添加的曲线的取向恰好相反. 在图 1 中对每一条添加的直线段都用两个箭头标出了它们分属于不同子区域时的取向.

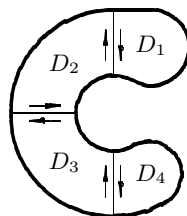


图 1: 可分割为有限个简单区域的情况

根据已经证明的情况 (i), 对每个子区域上成立 Green 公式. 现在考虑将它们相加后得到什么.

先考虑对每个子区域的 Green 公式中的第二类曲线积分求和. 如前所述, 在图 1 中对于 D_1 用 Green 公式时, 由于 ∂D_1 取正向, 因此作为 D_1 和 D_2 共同边界的直线段的取向从上到下. 然而当我们对于 D_2 用 Green 公式时, ∂D_2 取正向, 于是上述直线段的取向乃是从下到上了. 于是在将这两个子区域上的 Green 公式相加时, 在这条直线段上的第二类曲线积分就抵销了. 依此类推, 所有子区域边界上的第二类曲线积分之和就恰好等于在 ∂D 上的第二类曲线积分, 即有

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \left(\oint_{\partial D_1} + \dots + \oint_{\partial D_n} \right) P dx + Q dy.$$

另一方面, 从二重积分关于积分区域的可加性, 直接就有

$$\iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \left(\iint_{D_1} + \dots + \iint_{D_n} \right) \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy.$$

由于上面两个等式右边的相应顺序的项相等, 因此在 D 上的 Green 公式成立.

(iii) 以上两种区域的共同点是它们的边界都是一条连续的封闭曲线 (即单闭曲线), 然而作为连通开集的区域, 它的边界还可能由多条单闭曲线组成的. 这样就需要将这两类不同的区域区分开来. 为此引入定义.

定义 0.1 若在区域 D 中的每条单闭曲线都可以在 D 内连续收缩为一点, 则称 D 为单连通区域, 否则称 D 为多连通区域.

平时我们常将单连通区域称为没有洞的区域, 而将多连通区域称为有洞的区域, 并将其中洞的数目作为区分多连通区域的依据. 在图 2 中就是分别有一个洞、两个洞和三个洞的三个多连通区域, 其中用阴影线表示“挖去”的洞.

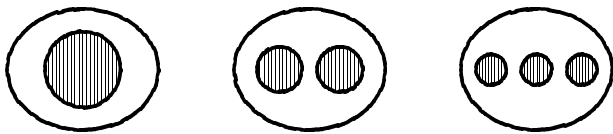


图 2: 多连通区域的例子

还应当指出, 在前面的许多例题中已经见到过多连通区域. 例如去心平面

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \neq 0\} = \mathbb{R}^2 - \{(0, 0)\}$$

就是有一个洞 (实际上是一个孔) 的多连通区域, 因为围绕原点的单闭曲线不可能在 D 内连续收缩为一点. 例题...中的结论实际上已经提示我们多连通区域和单连通区域会带来完全不同的答案.

在多连通区域上 Green 公式的证明教科书中放到下面的第五小节中, 讲课时可以直接讲下去.

三. 其他例子

下面是一个重要例子, 其结果在许多问题中 useful.

例题 0.2 设区域 D 满足 Green 公式中的条件满足, $u(x, y)$ 在 D 上二阶连续可微, 要求将第一类曲线积分 $\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds$ 转化为二重积分, 其中 \mathbf{n} 是曲线 C 的单位外法向量.

解 为了写出方向导数 $\frac{\partial u}{\partial n}$, 先要求出 \mathbf{n} . 设曲线 C 的参数表示以弧长为参数, 即 $x = x(s), y = y(s), 0 \leq s \leq l$, 其中 l 是 C 的弧长, 且要求 s 的增长方向就是闭曲线 C 的正向. 这时, 与正向一致的单位切向量 $\boldsymbol{\tau} = (x'(s), y'(s))$.

如图 3 所示, 其中只画出了 $C = \partial D$ 的一部分, 它的取向由单位切向量 $\boldsymbol{\tau}$ 表出. 这时的单位外法向量 $\mathbf{n} = (y'(s), -x'(s))$.

于是 u 在 \mathbf{n} 方向的方向导数为

$$\frac{\partial u}{\partial n} = u_x y'(s) - u_y x'(s),$$

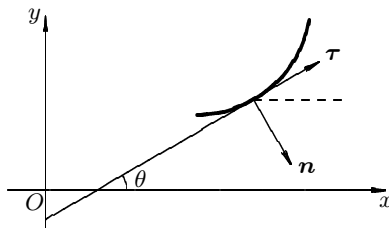


图 3: 切向量与外法向量的关系

由此即可将第一类曲线积分转化为第二类曲线积分, 然后用 Green 公式得到:

$$\oint_C \frac{\partial u}{\partial n} ds = \oint_C u_x dy - u_y dx = \iint_D (u_{xx} + u_{yy}) dx dy. \quad \square$$

注 从 τ 的表达式推出 n 的表达式 (或相反) 可以用三角函数关系来做. 如上一个例题中 $\tau = (x'(s), y'(s))$ 同时写为 $\tau = (\cos \theta, \sin \theta)$, 则就有 (参考图 3):

$$n = (\cos(\theta - \frac{\pi}{2}), \sin(\theta - \frac{\pi}{2})) = (\sin \theta, -\cos \theta) = (y'(s), -x'(s)).$$

当然还可以用其他方法. 例如, 在教科书 p.173 的例 7 中则需要从单位外法向量求单位切向量, 其中用的就是乘以虚数 i 的复数方法.

注 2 在这个例题中从第一类曲线积分到第二类曲线积分的转化是利用被积表达式中出现 $x'(s) ds = dx$ 和 $y'(s) ds = dy$ 来实现的. 如果用前面引入 $1 = \tau \cdot \tau$ 的方法也可以, 但计算量要大得多.

从 Green 公式可以导出平面图形面积计算的新公式.

为此只要在 Green 公式中取 $P = -y, Q = x$, 这样就有

$$\oint_{\partial D} -y dx + x dy = 2 \iint_D dx dy = 2|D|,$$

其中记 D 的面积为 $|D|$. 于是得到面积计算公式

$$|D| = \iint_D dx dy = \frac{1}{2} \oint_{\partial D} -y dx + x dy.$$

当然还有

$$|D| = \oint_{\partial D} -y dx = \oint_{\partial D} x dy.$$

其中的第一式对于 D 为 x 区域, 即有 $D = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, y_1(x) \leq y \leq y_2(x)\}$ 时, 就可以推导出过去熟知的面积公式 (见上册 p.269 的 (10.1.1)):

$$|D| = \int_a^b [y_2(x) - y_1(x)] dx.$$

请读者完成这个推导.

注 在上册 p.271 实际上已经出现过这样的公式, 当然那里没有曲线积分的概念, 同时也只限于上面所说的简单区域 (参见上册 p.271 的图 10-9). 从 Green 公式可知, 这个面积计算公式对于以分段光滑的闭曲线为边界的平面区域都是成立的.

书中下面的例 3 与上册 p.271 的例 5 完全重复了. 它说明在上面的三个面积公式中我们往往还愿意用第一个, 虽然它长一点, 但也许计算会更方便一些.

例题 0.3 求椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a, b > 0$) 所围的面积.

解 用参数方程 $x = a \cos t, y = b \sin t, 0 \leq t \leq 2\pi$, 则就有

$$\begin{aligned}
 |D| &= \frac{1}{2} \oint_C -y dx + x dy \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [-b \sin t \cdot a(-\sin t) + a \cos t \cdot b \cos t] dt = \pi ab. \quad \square
 \end{aligned}$$

五. 区域 D “有洞” 情况的 Green 公式

只对有一个洞的区域 D 给出证明, 其中的方法可以用于有多个洞的区域.

如图 4 所示, 设区域 D 的边界由两条分段光滑的单闭曲线 C 和 C_1^* 组成, 其中 C_1^* 的内部是用阴影线标出的洞. C 和 C_1^* 的取向对于区域 D 都是正向. (这里要注意 C_1^* 的取向是顺时针方向, 因此对其内部 (即洞) 区域而言是反向的).

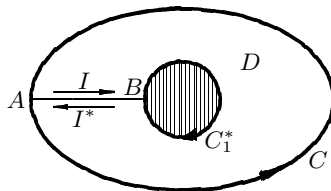


图 4: 对有洞区域添加辅助线

下面先描述证明的方法. 这就是如图所示添加辅助线. 用一条分段光滑曲线连接 C 上的点 A 和 C_1^* 的点 B , 同时将从 A 到 B 记为曲线 I , 而将从 B 到 A 记为曲线 I^* . 于是从点 A 出发沿 C 的正向一周回到 A , 然后沿 I 到点 B , 再沿 C_1^* 的正向一周回到 B , 最后沿 I^* 回到 A . 这样的复合闭曲线所围绕的区域和原来的区域 D 只差连接 A 和 B 的一条分段光滑曲线. 由于它是零集, 对于在 D 上的二重积分没有影响. 而对于第二类曲线积分来说, 由于 I 和 I^* 反向, 因此在其上的积分抵销. 用通俗的话来说, 就是将图 4 中的多连通区域 D 沿着一条曲线 AB 剪开使得它不再有洞, 即成为单连通区域. 对于有多个洞的区域当然也可以这样做.

对于上述单连通区域可以用 Green 公式 得到

$$\left(\oint_C + \int_I + \oint_{C_1^*} + \int_{I^*} \right) P dx + Q dy = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy,$$

由于 $\int_I = -\int_{I^*}$, 而 $C \cup C_1^*$ 就是 D 的取正向的边界, 因此就得到所要的 Green 公式:

$$\oint_{\partial D} P dx + Q dy = \iint_D \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy. \quad \square$$

补充例题 (重做 p.170 的例 5 (即 Gauss 积分)) 求 $I = \oint_C \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$, 其中 C 是不经过原点的分段光滑闭曲线.

解 这时 $P(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$, $Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$, 先计算

$$-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{2}{x^2 + y^2} - \frac{2y^2}{(x^2 + y^2)^2} - \frac{2x^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0,$$

由此可见, 若闭曲线 C 所围区域 D 不包含原点, 则对 D 用 Green 公式, 就知道 $I = 0$.

若 C 包含原点在其内部, 则由于 P, Q 在原点没有定义, 因此需要采取挖洞的方法, 即取足够小的正数 $\varepsilon > 0$, 使得圆周 $C_\varepsilon: x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ 完全在 C 的内部. 然后对于 C 和 C_ε 之间的多连通区域用 Green 公式. 这时若 C 和 C_ε 都取正向, 则就得到

$$I = \oint_{C_\varepsilon} \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2} = \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi.$$

这与前面的结果相同.

对于围绕原点旋转多次的闭曲线 C 上的 Gauss 积分可以用分解的方法来处理, 从略. \square

注 可以先讲上面这个例子, 这样还可以为调和函数的例 4 的解 1 减轻困难. 要提出补线与挖洞是应用 Green 公式中的基本手段.

补充例题 (即教科书 p.126 的例 3.) 设映射 $x = x(u, v), y = y(u, v), (u, v) \in D_{uv}$, 连续可微, 设 Jacobi 行列式 $\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$ 在 D_{uv} 上无零点, 从 D_{uv} 到 D_{xy} 为一一映射, 边界 ∂D_{uv} 为分段光滑曲线, 则在 xy 平面上的映像 D_{xy} 的面积为

$$|D_{xy}| = \iint_{D_{uv}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

注 教科书用积分公式定义曲面面积, 然后于 $z = 0$ 时导出平面图形在曲线坐标下的面积公式. 它实际上是接下来 (p.127) 证明重积分的变量代换公式的关键所在. 这里的做法属于取巧, 全然不顾平面图形面积本来有定义, 也不考虑曲面面积的定义方法如何与参数表示方式的无关性, 而后者实际上要依赖于重积分的变量代换公式. 因此这里用 Green 公式对于那里的例 3 给出一个独立证明.

证 从平面图形的面积等于被积函数恒等于 1 时的二重积分出发, 并用 Green 公式将它转化为第二类曲线积分:

$$|D_{xy}| = \iint_{D_{xy}} dx dy = \iint_{D_{xy}} \left(\frac{\partial}{\partial x} x \right) dx dy = \oint_{\partial D_{xy}} x dy.$$

假设 uv 平面上分段光滑的边界 ∂D_{uv} 的参数表示为 $u = u(t), v = v(t), a \leq t \leq b, u(a) = u(b), v(a) = v(b)$, 其中 t 的增加方向为边界曲线的正向, 则 xy 平面上 ∂D_{xy} 的参数表示为 $x = x(u(t), v(t)), y = y(u(t), v(t)), a \leq t \leq b$, 但此时 t 的增加方向不一定与边界曲线的正向一致.

于是可以将上面最后的第二类曲线积分计算如下:

$$\oint_{\partial D_{xy}} x dy = \pm \int_a^b x(u(t), v(t)) [y_u u'(t) + y_v v'(t)] dt,$$

其中左边的第二类曲线积分的路径 ∂D_{xy} 总是取正向, 等号右边的符号 \pm 则规定如下, 若参数 t 的增加方向与 ∂D_{xy} 的正向一致, 则取正号, 否则取负号.

上式右边的 Riemann 积分又可以转化为 uv 平面上的第二类曲线积分, 然后再用 Green 公式将它转化为二重积分如下:

$$\begin{aligned} \int_a^b x(u(t), v(t)) [y_u u'(t) + y_v v'(t)] dt &= \oint_{\partial D_{uv}} xy_u du + xy_v dv \\ &= \iint_{D_{uv}} \left(-\frac{\partial(xy_u)}{\partial v} + \frac{\partial(xy_v)}{\partial u} \right) du dv \\ &= \iint_{D_{uv}} (-x_v y_u - xy_{uv} + x_u y_v + xy_{vu}) du dv \\ &= \iint_{D_{uv}} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv \end{aligned}$$

综合以上就得到

$$|D_{xy}| = \pm \iint_{D_{uv}} \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} du dv,$$

其中当 D_{uv} 映到 D_{xy} 时若保持边界曲线的正向不变时, 右边的 \pm 取正号, 否则取负号. 由于左边的面积总是非负的, 而右边积分号下的 Jacobi 行列式在 D_{uv} 上保号, 因此可以将两种情况统一为

$$|D_{xy}| = \iint_{D_{uv}} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv. \quad \square$$

注 1 用 Green 公式的上述证明有一个缺点, 这就是要求 $y_{uv} = y_{vu}$, 因此需假设 $y = y(u, v)$ 的二阶混合偏导数连续, 这超出了前面的条件. 可以用其他方法绕过这个困难. 这里从略.

注 2 从上述证明可以看到不需要假设从 D_{uv} 到 D_{xy} 为一一映射. 此外, 用更为复杂的工具可以将 Jacobi 行列式保号的条件也去掉. 这里从略. (事实上在上述证明的最后一步之前没有用过 Jacobi 行列式保号的条件.) 只是提请读者注意, 对于单重积分来说, 在上册 p.250 的换元公式中不要求连续可微的变量代换 $u = u(x)$ 为一一映射, 也不要求其导数保号. 这个注解表明对于重积分的变量代换也是如此, 只是证明要困难得多.

第 T24 次讲稿 (第三学期第 24 次)

第 T24 次讲稿, 用于 2008 年 11 月 26 日, 星期三, 3 节课.

内容: 从调和函数例子开始, 讲 Green 定理, 结束第二十三章 曲线积分.

在讲新课之前先看前面 p.167 开始有关第二类曲线积分的例题是否可以用 Green 公式来计算.

例题 0.1 求第二类曲线积分 $I = \int_C y^2 dx + x^2 dy$, 其中曲线 C 是上半椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, y \geq 0$, 方向是从点 $(-a, 0)$ 到 $(a, 0)$.

解 添上从点 $(a, 0)$ 到点 $(-a, 0)$ 的直线段, 这样就形成封闭回路. 应用 Green 公式, 由于在上述直线段上 $y = 0, dy = 0$, 又考虑到回路的取向为顺时针方向, 这样就有

$$I = - \iint_D (-2y + 2x) dx dy.$$

由于积分区域 D 关于 y 轴对称, 因此上述二重积分的被积函数中 $2x$ 一项的积分为 0. 然后用广义极坐标 $x = ar \cos \theta, y = br \sin \theta$ 计算得到

$$I = - \int_0^\pi d\theta \int_0^1 -2br \sin \theta \cdot abr dr = -4\pi ab^2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{4}{3}\pi ab^2. \quad \square$$

例题 0.2 求 $\int_C 2xy dx - x^2 dy$, 其中 C 为封闭折线 \overline{ABCA} , $A(0, 0), B(1, 0), C(1, 1)$ (见右图).

解 直接用 Green 公式得到

$$I = \iint_D -4x dx dy = -4 \int_0^1 dx \int_0^x dy = -4 \int_0^1 x^2 dx = -\frac{4}{3}.$$

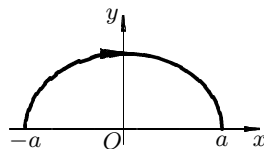


图 1: 积分路径为半个椭圆

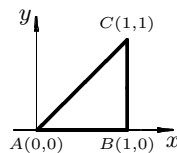


图 2: 第一类曲线积分的积分路径

例题 0.3 求 $I = \int_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz$, 其中 C 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ ($a > 0$), $z \geq 0$ 和柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 的交线, 方向为从 z 轴正向看去的逆时针方向.

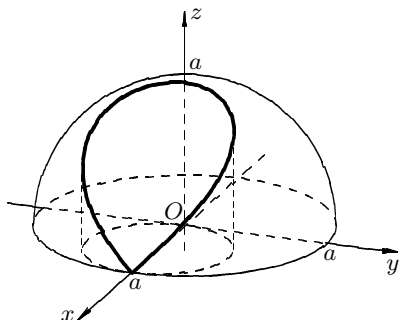


图 3: 上半球面与柱面的交线

解 这不是平面上的第二类曲线积分, 但仍然可以用投影到 xy 平面的方法来用 Green 公式.

这时 C 的上述投影是 $x^2 + y^2 = ax$, 记为 C_1 , 且取正向. 它也就是圆周

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{4}.$$

在 C_1 上有

$$z = \sqrt{a^2 - ax}.$$

(这里也可以用 $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$, 只是计算量稍大一点.)

以下将 xy 平面上 C_1 所围区域记为 D , 然后用 Green 公式, 同时还用区域和被积函数的对称性:

$$\begin{aligned} I &= \int_{C_1} y^2 dx + (a^2 - ax) dy + x^2 \cdot \frac{-a}{2\sqrt{a^2 - ax}} dx \\ &= \int_{C_1} \left(y^2 - \frac{ax^2}{2\sqrt{a^2 - ax}}\right) dx + (a^2 - ax) dy \\ &= \iint_D (-2y - a) dx dy \quad (\text{利用对称性可知 } -2y \text{ 在 } D \text{ 上的积分为 } 0) \\ &= -a|D| = -\frac{\pi}{4}a^3. \quad \square \end{aligned}$$

p.170 的例 4 过于简单, 不必考虑. 例 5 的 Gauss 积分在前面已经用 Green 公式重新计算过了. p. 171 是到无穷远处的积分, 也不再讨论了.

下面是 §23.2 的例 7 的续. 其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ 为 Laplace 算子, 二阶偏微分方程 $\Delta u = 0$ 称为 Laplace 方程或调和方程, 满足该方程的函数称为调和函数.

例题 0.4 (调和函数的平均值定理) 设 $u(x, y)$ 在区域 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 上连续, 在其内点处二阶连续可微, 且满足 $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, 证明

$$I = \frac{1}{2\pi R} \oint_{C_R} u(x, y) ds = u(0, 0).$$

证 1 (这是书中的证明方法, 较复杂.) 首先用 p.173 的例 7, 有

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_R} \frac{-yu dx + xu dy}{x^2 + y^2},$$

积分号下的分母在 C_R 上为 R^2 , (本来可以移出到积分号前, 但现在不能移出去, 否则就做不下去. 这也是应用 Green 公式中的一种技巧.)

由于分母在原点为 0, 因此不能直接用 Green 公式. 方法是用圆 $C_\varepsilon: x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ ($0 < \varepsilon < R$) 挖一个洞, 然后对于介于 C_R 和 C_ε 之间的多连通区域 D_ε 用 Green 公式, 得到

$$\oint_{C_R} -\frac{yu}{r^2} dx + \frac{xu}{r^2} dy = \oint_{C_\varepsilon} -\frac{yu}{r^2} dx + \frac{xu}{r^2} dy + A,$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, C_ε 取逆时针方向.

下面的主要工作是证明上式右边的第二项 A 为 0. 写出

$$A = \iint_{\varepsilon < r < R} \left[\left(\frac{yu}{r^2} \right)'_y + \left(\frac{xu}{r^2} \right)'_x \right] dx dy.$$

由于 $r_x = \frac{x}{r}$, $r_y = \frac{y}{r}$, 就有

$$\begin{aligned} \left(\frac{yu}{r^2} \right)'_y + \left(\frac{xu}{r^2} \right)'_x &= \left(\frac{u}{r^2} - \frac{2yu}{r^3} \cdot \frac{y}{r} + \frac{y}{r^2} \cdot u_y \right) + \left(\frac{u}{r} - \frac{2xu}{r^3} \cdot \frac{x}{r} + \frac{x}{r^2} \cdot u_x \right) \\ &= \frac{ry}{r} \cdot u_y + \frac{rx}{r} \cdot u_x \\ &= (\ln r)'_x \cdot u_x + (\ln r)'_y \cdot u_y \\ &= (\ln r \cdot u_x)'_x + (\ln r \cdot u_y)'_y, \end{aligned}$$

其中最后利用了条件 $u_{xx} + u_{yy} = 0$.

然后再反方向对 A 用 Green 公式, 得到在 $\partial D_\varepsilon = C_R \cup C_\varepsilon$ 上与原来不同的第二类曲线积分:

$$\begin{aligned} A &= \iint_{\varepsilon < r < R} [(\ln r \cdot u_x)'_x + (\ln r \cdot u_y)'_y] dx dy \\ &= \left(\oint_{C_R} - \oint_{C_\varepsilon} \right) - \ln r \cdot u_y dx + \ln r \cdot u_x dy \\ &= \ln R \oint_{C_R} (-u_y dx + u_x dy) - \ln \varepsilon \oint_{C_\varepsilon} (-u_y dx + u_x dy) = 0, \end{aligned}$$

这里是将两个第二类曲线积分中的 $\ln r$ 提出到积分号外之后再次对它们用 Green 公式, 将它们转化为二重积分, 其被积函数为 $u_{xx} + u_{yy} = 0$, 因此这两项都等于 0.

于是就证明了对于每一个 $\varepsilon \in (0, R]$, 都成立以下等式, 即有

$$I = \frac{1}{2\pi} \oint_{C_\varepsilon} \frac{-yu dx + xu dy}{r^2} = \frac{1}{2\pi\varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon} u(-y dx + x dy).$$

用极坐标 $x = \varepsilon \cos \theta$, $y = \varepsilon \sin \theta$ 代入, 就得到

$$I = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\varepsilon \cos \theta, \varepsilon \sin \theta) d\theta.$$

令 $\varepsilon \rightarrow 0$ 就得到 $I = u(0, 0)$. \square

§23.4 Green 定理

书上直到这里才引入单连通与多连通区域, 太晚了点. 实际上在 Green 公式的证明中已经需要这些概念了.

一. Green 定理

定理 0.1 (Green 定理) 设 D 是平面上的单连通区域, $P(x, y), Q(x, y)$ 在 D 上连续可微, 则以下四个命题等价:

(1) 对 D 中的任一分段光滑的闭曲线 Γ , 有 $\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = 0$. (闭路积分为 0.)

(2) 对于 D 内的任意两点 A, B , 积分 $\int_{\widehat{AB}} P dx + Q dy$ 只与点 A, B 有关, 而与具体的曲线 $\widehat{AB} \subset D$ 的形状无关. (积分与路径无关.)

(3) 在 D 内存在单值可微函数 $\varphi(x, y)$, 使得成立 $d\varphi = P dx + Q dy$, 称 φ 为势函数或即原函数. (存在势函数.)

(4) 在 D 内处处成立 $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. (恰当条件, 即检验 $P dx + Q dy$ 为恰当微分形式的条件.)

当上述条件之一满足时, 势函数全体为

$$\varphi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy,$$

其中点 (x_0, y_0) 为 D 内的任一固定点, C 为任意常数.

注 这里 D 是单连通区域, P, Q 在 D 内没有奇点是关键条件. 如前面的 Gauss 积分的例题可见, 当这些条件不满足时, 上述 4 个命题等价的结论就未必成立.

证 (1) \implies (2). 设 C_1, C_2 是在区域 D 内从 A 到 B 的两条曲线, 记 C_2^* 为 C_2 的反向曲线, 则 $AC_1BC_2^*A$ 就成为闭路, 因此从 (1) 就有 (为简明起见略去了被积表达式):

$$0 = \int_{AC_1B} + \int_{BC_2^*A} = \int_{AC_1B} - \int_{AC_2B},$$

这样就有 $\int_{C_1} = \int_{C_2}$.

(2) \implies (3). 利用 (2) 就可以定义单值函数

$$\varphi(x, y) = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} P dx + Q dy,$$

以下只要证明 $\varphi_x = P$ 和 $\varphi_y = Q$.

对于点 $(x + \Delta x, y)$, 取从 (x_0, y_0) 到 (x, y) 的任意路径 (当然要求在 D 内), 然后取从 (x, y) 到 $(x + \Delta x, y)$ 的直线段, 这样就可以写出差商

$$\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt,$$

利用积分中值定理, 存在 $\xi \in [x, x + \Delta x]$, 使得 $\int_x^{x+\Delta x} P(t, y) dt = P(\xi, y)$, 于是就有 $\frac{\Delta\varphi}{\Delta x} = P(\xi, y)$. 令 $\Delta x \rightarrow 0$, 利用 P 连续, 就得到 $\varphi_x = P(x, y)$. 同样可以得到 $\varphi_y = Q(x, y)$.

(3) \implies (4). 从 $\varphi_x = P, \varphi_y = Q$ 出发, 利用 P, Q 连续可微, 就有 $P_y = \varphi_{xy} = \varphi_{yx} = Q_x$.

(4) \implies (1). 设 Γ 是 D 内的分段光滑闭曲线, 所围区域记为 D_1 . 由于 D 为单连通区域, 因此 Γ 所围区域 D_1 也是单连通区域. 对此区域用 Green 公式就有

$$\oint_{\Gamma} P dx + Q dy = \iint_{D_1} \left(-\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx dy = 0. \quad \square$$

注 在这 4 个等价命题中, (4) 是最容易验证的. 在 (3) 的证明中的方法可以用于具体构造势函数 (即原函数). 下面就是一个例子.

例题 0.1 求 $\varphi(x, y)$, 使得满足

$$d\varphi = (4x^3y^3 - 3y^2 + 5) dx + (3x^4y^2 - 6xy - 4) dy.$$

解 首先要解决 φ 是否存在. 记 $P(x, y) = 4x^3y^3 - 3y^2 + 5$, $Q(x, y) = 3x^4y^2 - 6xy - 4$, 则就有 $P_y = 12x^3y^2 - 6y$, $Q_x = 12x^3y^2 - 6y$, 可见满足恰当条件, 从而在全平面存在势函数 φ .

计算 φ 的简单方法是取合适的路径, 对于本题的问题可以取从 $(0, 0)$ 到 $(x, 0)$, 然后从 $(x, 0)$ 到 (x, y) 的两段直线组成的折线, 即有

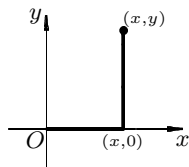


图 4: 计算势函数所用的积分路径

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= C + \int_0^x P(u, 0) du + \int_0^y Q(x, v) dv \\ &= C + \int_0^x 5 dx + \int_0^y (3x^4v^2 - 6xv - 4) dv \\ &= C + 5x + x^4y^3 - 3xy^2 - 4y. \quad \square \end{aligned}$$

注 在确定存在势函数之后, 可以从 $\varphi_x = P(x, y) = 4x^3y^3 - 3y^2 + 5$ 对 x 积分, 将其中的 y 看成为参数, 得到 $\varphi = x^4y^3 - 3xy^2 + 5x + C(y)$, 其中最后一项为待定函数. 然后代入 $\varphi_y = Q(x, y) = 3x^4y^2 - 6xy - 4$, 即有 $C'(y) = -4$, 因此可确定 $C(y) = -4y + C$. 当然也可以先从 $\varphi_y = Q(x, y)$ 出发, 所得的表达式中有关于 x 的待定函数, 然后用 $\varphi_x = P(x, y)$ 求出最后的势函数.

这里需要注意, 对于区域 D 是多连通, 即有洞的情况, Green 定理的结论如何?

我们只讨论在该定理的第 (4) 点, 即恰当条件满足的情况下会有什么结论.

对于定理的 (1), 从定理证明中 (4) \implies (1) 可见, 若闭路内部没有洞, 则积分仍然为 0. 反之, 若闭路内有洞, 则积分未必为 0. 前面的 Gauss 积分例题就是如此.

又不难对于每一个洞发现围绕该洞一周但不包围其他洞的封闭曲线上的积分是常数. 这个常数称为该洞的循环常数. 例如 Gauss 积分例题中洞 $(0, 0)$ 的循环常数就是 2π .

对于定理的 (2), 只要从点 A 到点 B 的两条曲线之间没有洞, 则积分仍然相等.

对于定理的 (3), 这时仍然可以存在势函数 (即原函数), 但不一定是单值的. 例如 Gauss 积分例题中的 θ 就是多值的原函数. 这里要注意, 多值原函数是一个函数, 它与一个原函数加上任意常数后仍然是原函数不是一回事.

三. 进一步的例子

例题 0.2 (Gauss 的代数基本定理) n 次代数方程 ($n > 0$) 至少有一个复根.

证 设 $f(z) = z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0$, 其中 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}$ 都是复数, $z = x + iy$ 是复变量.

取充分大的正数 R , 使得满足不等式

$$R > 1 + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_{n-1}|.$$

于是在 $|z| = R$ 时就可以将 $f(z)$ 写为

$$f(z) = z^n(1 + w),$$

其中

$$w = \frac{a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_1z + a_0}{z^n}.$$

由 R 的取法, 就有

$$\begin{aligned} |w| &\leq \frac{|a_{n-1}|R^{n-1} + \cdots + |a_1|R + |a_0|}{R^n} \\ &\leq \frac{R^{n-1}}{R^n}(|a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|) < 1. \end{aligned}$$

现在计算当 z 按照逆时针方向绕圆周 $C_R: x^2 + y^2 = R^2$ 一周时, $f(z)$ 的幅角变化.

由 $f(z) = z^n(1 + w)$ 可见

$$\text{Arg } f(z) = n\text{Arg } z + \text{Arg } (1 + w).$$

右边的第一项的变化量是 $2n\pi$. 为了计算右边的第二项的变化量, 只要从 $|w| < 1$ 可看出 $1 + w$ 在复平面上始终处于以 $1 + 0i$ 为中心, 以 1 为半径的开圆内, 因此 $1 + w$ 的幅角变化为 0.

这里还应当注意, 由于 $|w| < 1$, 当 $z \in C_R$ 时, 一定有 $f(z) \neq 0$. 这就是说当 z 沿 C_R 一周时, 复平面上的曲线 $f(z)$ 不会经过原点.

记 $f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$, 其中 P, Q 都是二元实函数, 则就可以用第二类曲线积分来计算当 z 沿正向绕 C_R 一周时, $f(z)$ 的幅角变化:

$$\oint_{C_R} \frac{P dQ - Q dP}{P^2 + Q^2} = \oint_{C_R} d\left(\arctan \frac{Q}{P}\right) = 2n\pi \neq 0.$$

这里的第一个等式来自于一阶微分的形式不变性, 第二个等式则是前面对于 $f(z) = z^n(1+w)$ 的幅角变化计算结果. (其中对于 $\arctan Q/P$ 按照前面计算 Gauss 积分时的连续延拓来理解, 也就是 $f(z)$ 的幅角 θ .)

现在可以证明代数基本定理的结论了. 用反证法. 设某个 $f(z)$ 在复平面上没有零点, 则 $P^2 + Q^2$ 也在 xy 平面上没有零点. 于是根据 Green 定理知道, 由于存在势函数, 在闭路上的第二类曲线积分一定等于 0, 即有:

$$\oint_{C_R} \frac{P dQ - Q dP}{P^2 + Q^2} = 0,$$

从而引出矛盾. 因此 $f(z) = 0$ 一定有根. \square

注 证明中的第二类曲线积分仍然以 x, y 为变量, 只是利用一阶微分的形式不变性, 表面上写成了 P, Q 为中间变量的积分. 若 $f(z) = z$, 则就是前面的 Gauss 积分.

第 T25 次讲稿 (第三学期第 25 次)

第 T25 次讲稿, 用于 2008 年 11 月 28 日, 星期五, 2 节课.

内容: 讲完第二十三章 曲线积分, 开始第二十四章 曲面积分.

第二十三章的最后一个例题 (教科书 p.184).

例题 0.3 设 D 是以点 $(0,0)$ 为内点的凸闭集, 其边界 C 为分段光滑曲线, 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 于 D 上连续可微. 在 C 的每个点 (x,y) 上向量 $\mathbf{v}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ 与矢径 $\mathbf{r} = (x,y)$ 不同向. 证明: $\mathbf{v}(x,y)$ 在 D 中必存在零点, 即存在 $(x_0, y_0) \in D$, 使得 $P(x_0, y_0) = Q(x_0, y_0) = 0$.

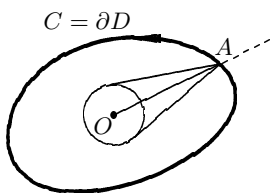


图 1: 凸闭集边界的特征

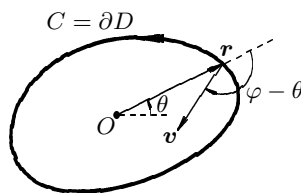


图 2: \mathbf{r} 与 \mathbf{v} 的关系

证 首先要说明凸集条件的作用. 由于 D 是凸闭集, 而 $O = (0,0)$ 是 D 的内点, 这样就可以证明从原点出发的任何方向的半射线与边界只交于一点.

为此只要取一个在 D 中的邻域 $O_\delta(O)$, 然后从某一个边界点 A 作该邻域边界圆的两条切线 (参看图 1). 由于 D 是凸集, 因此在两条切线和邻域边界圆弧围成的区域内的所有点都是 D 的内点. 特别是直线段 \overline{OA} 中除边界点 A 之外都是 D 的内点. 由此可见其中不会有第二个边界点, 而且在 \overline{OA} 向 A 端方向的延长线上也不会有第二个边界点.

这样就使得我们可以用极坐标的极角 θ 作为边界曲线的参数, 将边界曲线 C 表示为 $x = x(\theta), y = y(\theta), 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

如图 2 所示, 矢径向量 \mathbf{r} 幅角为 θ , 在点 (x,y) 绕 C 一周后的变化为 2π , 记 \mathbf{v} 的幅角为 φ . 由于 \mathbf{v} 与 \mathbf{r} 始终不同向, 因此 \mathbf{v} 与 \mathbf{r} 的夹角 $\varphi - \theta$ 始终在 $(-2\pi, 0)$ 或者 $(0, 2\pi)$ 之间, 于是在点 (x,y) 绕 C 一周后 \mathbf{v} 的幅角变化也只能是 $2\pi \neq 0$,

另一方面, 向量 $\mathbf{v}(x,y) = (P,Q)$ 绕 C 正向一周的幅角变化可以用第二类曲线积分表示为

$$I = \oint_C \frac{Q dP - P dQ}{P^2 + Q^2} = \oint_C d \left(\arctan \frac{Q}{P} \right).$$

用反证法. 若 $P^2 + Q^2$ 在 D 中没有零点, 则就可以用 Green 定理知道积分值 $I = 0$. 引出矛盾. \square

注 可以用 \mathbf{v} 为不变的常向量和 $\mathbf{v} - \mathbf{r}$ 为常向量的两个例子来说明本题的意义. 此外在计算 $\varphi - \theta$ 时若从 \mathbf{r} 方向按照逆时针方向来计算, 则差角就始终大于 0 而小于 2π . 如果像图 2 中那样则差角就在 $(-2\pi, 0)$ 之中了. 这些都可以用图说明.

现在用这个例题的结论来证明著名的 Brouwer 不动点定理的一种特殊情况. (即教科书 p.184 的练习题 1.)

Brouwer 不动点定理 由 n 维闭球到自身的连续映射一定有不动点.

对于 $n = 1$ 就是过去熟悉的一个题: 设 $f \in C[a, b]$, 且 $f([a, b]) \subset [a, b]$, 则存在 $\xi \in [a, b]$, 使得 $f(\xi) = \xi$. 这里的 ξ 就是映射 f 的不动点.

当 $n > 1$ 时 Brouwer 不动点定理的证明很不容易, 我们在下面只在 $n = 2$ 和映射为连续可微条件下用上面的例 3 为工具给出一个证明.

证 这时取单位圆为 $D: x^2 + y^2 \leq 1$, 设映射 $(x, y) \rightarrow (P(x, y), Q(x, y))$ 为连续可微, 且 $P^2 + Q^2 \leq 1$.

定义映射

$$\mathbf{v}(x, y) = (P(x, y) - x, Q(x, y) - y),$$

则可以证明当 $(x, y) \in \partial D = C$ 时, $\mathbf{v}(x, y)$ 与 $\mathbf{r} = (x, y)$ 不会同向. 实际上若发生同向的情况, 则存在 $k > 0$, 使得

$$P(x, y) - x = kx, \quad Q(x, y) - y = ky,$$

但这样一来就有

$$P^2 + Q^2 = (1 + k)^2(x^2 + y^2) = (1 + k)^2 > 1,$$

与条件 $P^2 + Q^2 \leq 1$ 矛盾. 用例题的结论即知存在 (x_0, y_0) , 使得 $\mathbf{v}(x_0, y_0) = (0, 0)$, 也就是

$$P(x_0, y_0) = x_0, \quad Q(x_0, y_0) = y_0,$$

这就是说点 (x_0, y_0) 是映射 $(x, y) \rightarrow (P, Q)$ 的不动点. \square

以下补充一个例子. 它与前面 p.170 的 Gauss 积分类似, 但有一些新的技巧.

补充例题 求积分 $I = \oint_C \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$, 其中 C 是以点 $(1, 0)$ 为圆心, R 为半径

的圆, 取正向.

解 首先计算

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{-4x^2 - y^2 + 2y^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4x^2 + y^2 - 8x^2}{(4x^2 + y^2)^2} = \frac{y^2 - 4x^2}{(4x^2 + y^2)^2},$$

可见恰当条件满足. 奇点为 $(0, 0)$, 于是当 $R < 1$ 时, 可直接用 Green 公式知道积分 $I = 0$.

若 $R > 1$, 则可以取 $\varepsilon > 0$ 充分小, 使得曲线 $C_\varepsilon: 4x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ 在 C 内. 在 C 与 C_ε 之间的区域上用 Green 定理, 知道 $I = \oint_{C_\varepsilon} \frac{x dy - y dx}{4x^2 + y^2}$.

当然可以直接计算上述曲线积分. 但也可以再将 ε 放大为 1, 则就有

$$I = \oint_{C_1} \frac{x \, dy - y \, dx}{4x^2 + y^2} = \oint_{C_1} x \, dy - y \, dx = 2 \iint_{D_1} dx \, dy = 2|D_1|,$$

其中 D_1 是 C_1 包围的椭圆区域. 由于长半轴为 1, 短半轴为 $1/2$, 因此 $I = 2|D_1| = \pi$. \square

注 当 $R = 1$ 时在 C 上有奇点. 如同广义积分那样可以用极限来定义. 这时可以计算出积分为 $\pi/2$.

现在开始讲第二十四章 曲面积分.

§24.1 第一类曲面积分

一. 面积元

由于这里的内容在前面都已经讲过, 采取以自学为主的方法.

需要时请自己回顾教科书 p.70 开始对曲面的介绍 (还有在第十八章对于切平面的内容), 以及教科书 p.124 开始的 §21.3 的第一小节的内容. 该小节的标题是曲面的参数表示与曲面的面积. 其中包括曲面面积计算公式

$$|S| = \iint_D |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv = \iint_D dS,$$

这里的曲面方程为 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$. 设曲面光滑或分片光滑, 即设 $\mathbf{r}(u, v)$ 连续可微, 且 \mathbf{r}_u 和 \mathbf{r}_v 处处不共线. 这相当于曲面处处有切平面. (回顾 p.44 的切平面概念和 p.71 关于切平面方程的讨论.)

称上述公式中的 $dS = |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| du dv$ 为曲面的面积元. 它是 uv 平面上以 Δu 和 Δv 为边的矩形在曲面上的映象的线性主部. (在前面应当使用类似的名称, 例如二重积分中在直角坐标下的 $dx dy$ 和在极坐标下的 $r dr d\theta$ 为面积元等.)

对于平时最熟悉的曲面 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$, 则可将 x, y 作为双参数而写出

$$\mathbf{r} = (x, y, z(x, y)).$$

这时的面积元为

$$\begin{aligned} dS &= |\mathbf{r}_x \times \mathbf{r}_y| dx dy = |(1, 0, z_x) \times (0, 1, z_y)| dx dy \\ &= \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy, \end{aligned}$$

这都在 p.125 见过.

下面一般均假设上面提到的区域都是零边界的有界闭区域.

二. 物理背景

与第一类曲线积分相同, 采用曲面上分布的质量问题来引入第一类曲面积分.

设在曲面 S 分布有质量, 点 $P(x, y, z) \in S$, 取包含点 P 的一小块曲面, 设其面积为 ΔS , 质量为 ΔM , 就可以定义在点 P 的平均质量面密度为

$$\bar{\rho} = \frac{\Delta M}{\Delta S},$$

然后将小块的直径 $d \rightarrow 0$ 时的极限

$$\rho(x, y, z) = \lim_{d \rightarrow 0} \frac{\Delta M}{\Delta S}$$

定义为 S 上点 P 处的质量面密度. 这样可以看出 S 的总质量为

$$M = \iint_S \rho(x, y, z) \, dS,$$

其中 dS 为面积元. 这个积分就是第一类曲面积分.

可见第一类曲面积分的被积函数恒等于 1 时就得到曲面面积.

三. 第一类曲面积分的定义

现在给出第一类曲面积分的定义.

定义 0.1 设曲面 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$, 函数 $f(x, y, z)$ 在 S 上有定义, 则定义 f 在 S 上的第一类曲面积分为

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(\mathbf{r}(u, v)) |\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v| \, du \, dv.$$

这个定义同时给出了第一类曲面积分的计算方法, 即将它归结为右边的二重积分来计算.

对于以 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ 给定的曲面, 就有

$$\iint_S f(x, y, z) \, dS = \iint_D f(x, y, z(x, y)) \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} \, dx \, dy.$$

以下是第一类曲面积分的最基本性质.

(1) 非负性质. 若 $f \geq 0$, 且 $\iint_S f \, dS$ 存在, 则 $\iint_S f \, dS \geq 0$.

(2) 关于被积函数的线性性质. 设 $\iint_S f \, dS$ 和 $\iint_S g \, dS$ 存在, 则对任意实数 α, β ,

成立

$$\iint_S (\alpha f + \beta g) \, dS = \alpha \iint_S f \, dS + \beta \iint_S g \, dS.$$

(3) 关于曲面的可加性质. 若 $S = S_1 \cup S_2$, 且 S_1 和 S_2 除边界外不相交, 则在 $\iint_{S_1} f \, dS$ 和 $\iint_{S_2} f \, dS$ 存在时, 就有

$$\iint_S f \, dS = \iint_{S_1} f \, dS + \iint_{S_2} f \, dS.$$

例题 0.4 求 $I = \iint_S \sqrt{x^2 + y^2} \, dS$, 其中 S 是以原点为中心, R 为半径的球面.

解 1 利用对称性, 记 S_+ 为上半球面 $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$, 则有

$$I = 2 \iint_{S_+} \sqrt{x^2 + y^2} \, dS.$$

下面只要计算面积元

$$dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} = \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2 - y^2}} dx dy,$$

然后就有

$$I = 2R \iint_{x^2+y^2 \leq R^2} \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{R^2-x^2-y^2}} dx dy.$$

可以采用极坐标来计算上述二重积分. 这样就有

$$I = 2R \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}} dr = 4\pi R \int_0^R \frac{r^2}{\sqrt{R^2-r^2}} dr.$$

用三角代换 $r = R \sin \varphi$, 就有

$$I = 4\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi R^3. \quad \square$$

解 2 用球面坐标来表示曲面 S , 即

$$x = R \sin \varphi \cos \theta, y = R \sin \varphi \sin \theta, z = R \cos \varphi,$$

则已知面积元为 $dS = R^2 \sin \varphi d\varphi d\theta$ (见 p.128), 因此就有

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} R^3 \sin^2 \varphi d\varphi = 4\pi R^3 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \pi R^3. \quad \square$$

例题 0.5 求均匀球面 S (不妨设面密度 $\rho = 1$) 对一单位质点的引力 \mathbf{F} .

解 这个问题实际上已经在第二十一章 p.140 的例 6 中解决. 以下简要地复述一下.

首先取合适的坐标. 以球心为原点, 将单位质点放在 z 轴上的 $(0, 0, c)$ 处, 设 $c \geq 0$. 从对称性知 $\mathbf{F} = (0, 0, F)$, 其中

$$F = G \iint_S \frac{z-c}{r^3} dS,$$

其中 $r = \sqrt{x^2 + y^2 + (z-c)^2}$.

用球面坐标 $x = R \sin \varphi \cos \theta, y = R \sin \varphi \sin \theta, z = R \cos \varphi$, 即可与上一个例子一样有

$$\begin{aligned} F &= G \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{R \cos \varphi - c}{(R^2 + c^2 - 2Rc \cos \varphi)^{3/2}} \cdot R^2 \sin \varphi d\varphi \\ &= 2\pi G R^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(R \cos \varphi - c) \sin \varphi}{(R^2 + c^2 - 2Rc \cos \varphi)^{3/2}} d\varphi. \end{aligned}$$

以下计算见前面的引理.

§24.2 第二类曲面积分

一. 面积元向量

设 $S: \mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ 是光滑或分片光滑曲面, $\pm \mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v$ 是 S 的法向量, 称

$$d\mathbf{S} = \pm(\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv$$

为面积元向量. 从定义可见, $d\mathbf{S}$ 是曲面的法向量, 模长等于上一节中定义的面积元 dS , 即有 $|d\mathbf{S}| = dS$, 其符号根据今后的需要而定. 也可以写出

$$d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS,$$

其中 \mathbf{n} 是指定的单位法向量.

对于由 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$ 给定的曲面, 若 $z(x, y)$ 分片连续可微, 则

$$d\mathbf{S} = \pm(-z_x, -z_y, 1) dx dy,$$

分别表示向上和向下的两个面积元向量.

二. 物理背景

与前面一样先从一个物理问题开始引入第二类曲面积分.

这就是计算不可压缩流体通过曲面的流量.

设想有不可压缩流体流过某个曲面 S . 考虑其上的面积元向量 $d\mathbf{S}$. 若流体在流过曲面时的速度向量 \mathbf{v} 与 $d\mathbf{S}$ 一致, 则单位时间中通过该面积元的流量近似地为 $|\mathbf{v}| dS$, 即相当于以 dS 为底以 $|\mathbf{v}|$ 为高的一个正圆柱体的体积.

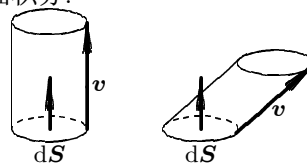


图 3: 流过面积元的流量计算

对于 \mathbf{v} 和 $d\mathbf{S}$ 不一定同向的一般情况, 则需要取这两个向量的内积, 而单位时间通过该面积元的流量为 $\mathbf{v} \cdot d\mathbf{S}$ (参见图 3).

于是通过曲面 S 的总流量就可以写成下列积分:

$$Q = \iint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S},$$

其中 $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x, y, z)$ 是流体在点 $(x, y, z) \in S$ 处的流速, $d\mathbf{S}$ 是在该点的面积元向量. 这样的积分就称为第二类曲面积分.

由于在每个点 (x, y, z) 处, $d\mathbf{S}$ 有两个方向, 因此在定义上述积分时首先要确定每一个面积元向量的取向. 如果将所有 $d\mathbf{S}$ 取相反方向, 则积分值也反号.

双侧曲面和单侧曲面

恰如平面上的 Jordan 曲线定理那样, 三维空间 \mathbb{R}^3 的封闭曲面, 只要是单位球面的连续双射下的映像, 就将全空间分成两个区域, 而该封闭曲面就是它们的公共边界. 这样就确定了内部和外部区域, 同时也就确定了曲面的内侧和外侧. 这样就可以对每个面积元向量 $d\mathbf{S}$ 按照该向量是指向内部还是外部来确定取什么方向.

这表明在计算通过封闭曲面的流量时有两种选择, 其中之一是规定流出为正, 即对应于取 $d\mathbf{S}$ 为指向外部的法向量. 另一种选择是规定流入为正, 这时的面积元向量为指向内部的法向量.

下面对于球面的侧的概念作一个正式的讨论.

曲线有两个取向, 相应地曲面有两侧, 但事情并不是如此简单.

对于光滑曲面上的点, 如前所说有两个法向量, 它们分别对应于该点邻近的曲面的两侧. 然而这只是局部性的概念.

在平时常见的双侧曲面之外还存在单侧曲面 (甚至还有单侧的封闭曲面), 其中最著名的就是 Möbius 带^①.

容易用狭长的纸条来制作 Möbius 带的模型. 如图 4 上方所示, 只要将纸条 $ABA'B'$ 绕虚线标出的中线旋转 180° , 然后将左右两边 AB 和 $A'B'$ 按照 A 对 A' , B 对 B' 的要求粘合在一起, 就得到该图下方的曲面.

在图 4 的曲面上的某一点 (x, y, z) 处画出了面积元向量 $d\mathbf{S}$ 在两个相反方向的向量.

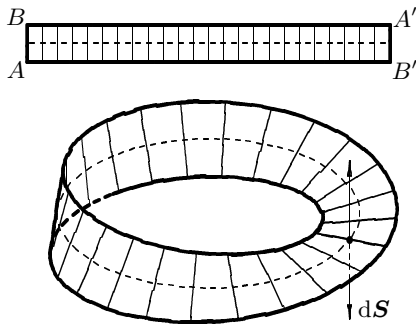


图 4: Möbius 带

取两个 $d\mathbf{S}$ 中的一个, 例如指向上方的一个向量, 然后将点 (x, y, z) 沿曲面的中线 (用虚线标出) 移动一周回到原来的出发点, 就可以发现该向量已经变为指向下方. 这表明, 就每一点的局部而言, 两个相反方向的 $d\mathbf{S}$ 表明有两侧, 但从全曲面来说, 则不存在可以区分的两侧.

用通俗的话来说, 普通的双侧曲面的两侧可以涂上两种不同的颜色, 只有当越过曲面的边缘 (如果该曲面有边的话) 时才会从一种颜色变为另一种颜色. 但对于 Möbius 带这样的单侧曲面来说, 这是不可能的. 如果要在某点 (x, y, z) 的局部范围的两侧开始涂上不同的颜色, 则在企图将整个曲面都涂上颜色时, 一定会在某处相遇, 而无法再做下去. (这里不需要像双侧曲面那样越过曲面的边缘.)

下面给出正式的定义.

定义 0.2 设 S 为光滑曲面, 任取点 $P(x, y, z) \in S$, 并选定在该点的一个法向量 \mathbf{n} . 当点 P 经过在曲面上的任何一条封闭曲线回到原来的位置时, 相应的法向量 \mathbf{n} 仍然与原来选定的指向一致, 则称 S 为双侧曲面.

由此可见, 对于单侧曲面来说, 无法计算流体通过曲面的流量.

本章以下只使用双侧曲面. 这时在计算流量或类似的问题中, 必定说明取哪一侧为正侧, 也就是规定在两个可能的 $d\mathbf{S}$ 中取哪一个, 然后才可以计算.

特别是对于封闭的 (双侧) 曲面, 一般都以外侧为正侧.

^① Möbius 带是光滑曲面, 容易写出该曲面的双参数方程. 除了理论上的重要性之外, 它也有实用价值.

第 T26 次讲稿 (第三学期第 26 次)

第 T26 次讲稿, 用于 2008 年 12 月 3 日, 星期三, 3 节课.

内容: 从第二类曲面积分定义开始.

四. 第二类曲面积分的定义

设 S 是由 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$, $(u, v) \in D$ 表示的光滑或分段光滑曲面, 又给定在 S 上定义的向量值函数

$$\mathbf{f}(x, y, z) = P(x, y, z)\mathbf{i} + Q(x, y, z)\mathbf{j} + R(x, y, z)\mathbf{k},$$

此外又指定曲面 S 的一侧, 这就是规定面积元向量 $d\mathbf{S}$, 或者说在两个法向量方向中规定取哪一个. 这时定义 \mathbf{f} 在曲面 S 的指定一侧的第二类曲面积为

$$\begin{aligned}\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \pm \iint_{D_{uv}} \mathbf{f}(\mathbf{r}(u, v)) \cdot (\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v) du dv \\ &= \pm \iint_{D_{uv}} \begin{vmatrix} P & Q & R \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} du dv \\ &= \pm \iint_{D_{uv}} \left[P \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} + Q \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} + R \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv.\end{aligned}$$

如前面所述, 面积元向量 $d\mathbf{S}$ 与面积元 dS 之间有关系 $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$, 因此又有

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS.$$

显然以上定义已经表明可以用二重积分或者第一类曲面积分来计算第二类曲面积分. (关于三个 Jacobi 行列式可参看教科书 p.71 和 p.125.)

对于以 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 给定的曲面 S , 设 $z(x, y)$ 连续可微, 这时有 $d\mathbf{S} = \pm(-z_x, -z_y, 1) dx dy$, 其中的正负号分别对应了曲面的上侧和下侧, 则就有

$$\iint_D \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \pm \iint_D (-Pz_x - Qz_y + R) dx dy.$$

又从定义可见, 若仅仅改变曲面的侧, 其他不变, 则这时的第二类曲面积分的值反号.

对于封闭曲面 S , 则有

$$\oiint_{S_{\text{外侧}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = - \oiint_{S_{\text{内侧}}} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S}.$$

平时规定若不加说明, 则总是取封闭曲面的外侧, 即以外侧为正侧.

例题 0.1 设 $S: x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $\mathbf{f} = (x, y, z)$, 求

$$I = \oint\limits_{S_R} \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S},$$

其中 S 取外侧.

解 这时 $d\mathbf{S} = \frac{\mathbf{r}}{r} dS$, $\mathbf{r} = (x, y, z)$, 又有 $\mathbf{f} = \mathbf{r} = (x, y, z)$, 这样就可以将第二类曲面积分转化为第一类曲面积分:

$$\begin{aligned} I &= \iint_S \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} dS = \iint_S r dS \\ &= R \iint_S dS = R|S| = 4\pi R^3. \quad \square \end{aligned}$$

例题 0.2 设 S 是曲面 $z = x^2 + y^2$, $x^2 + y^2 \leq 1$, $\mathbf{f} = (0, 0, x^2)$, 求

$$I = \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S},$$

其中 S 取上侧.

解 先计算指向上方的面积元向量

$$d\mathbf{S} = (-z_x, -z_y, 1) dx dy = (-2x, -2y, 1) dx dy,$$

于是就将第二类曲面积分转化为二重积分:

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (0, 0, x^2) \cdot (-2x, -2y, 1) dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} x^2 dx dy,$$

用极坐标代换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, 就有

$$I = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r^3 \cos^2 \theta dr = \frac{\pi}{4}. \quad \square$$

五. 第二类曲面积分的其他表示方式

以上的第二类曲面积分可以称为是向量表示形式, 此外还有其他形式:

(1) 方向余弦表示形式. 用 \mathbf{n} 表示与面积元向量 $d\mathbf{S}$ 同向的单位法向量, 即

$$\mathbf{n} = \frac{d\mathbf{S}}{dS} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma),$$

则就有

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \iint_S (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dS, \end{aligned}$$

这样就将第二类曲面积分转化为第一类曲面积分的非向量形式. 这本身也提供了一种计算方法, 在例 1 中就是如此.

从前面的第一类曲面积分知道它与曲面的取侧无关. 在上式右边是第一类曲面积分. 然而在其中出现了 \mathbf{n} , 因此如取法方向改取为 $-\mathbf{n}$, 则积分反号.

(2) 也经常将面积元向量约定记为

$$d\mathbf{S} = (dy dz, dz dx, dx dy),$$

然后将第二类曲面积分写为

$$\iint_S \mathbf{f} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

这里要注意, 右边的 $dy dz$ 等并不是二重积分的积分元, 它们只是向量 $d\mathbf{S}$ 的三个分量.

例题 0.3 将第二类曲面积分 $I = \iint_S R(x, y) dx dy$ 化为二重积分, 其中 S 是 $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$, 取下侧.

解 按照定义, 有 $\mathbf{f} = (0, 0, R)$, $d\mathbf{S} = (dy dz, dz dx, dx dy)$, 就可以将它写为向量形式:

$$I = \iint_S (0, 0, R) \cdot d\mathbf{S},$$

由给定的曲面是在 $z = 0$ 上, 并取下侧, 就有 $d\mathbf{S} = (0, 0, -1) dx dy$, 这里右边的 $dx dy$ 是二重积分的积分元. 这样就将 I 转化为二重积分:

$$I = \iint_{x^2+y^2 \leq 1} (0, 0, R) \cdot (0, 0, -1) dx dy = - \iint_{x^2+y^2 \leq 1} R dx dy. \quad \square$$

下面讨论比例 3 更为一般的情况, 即是如何将更为一般的积分

$$I = \iint_S R(x, y, z) dx dy,$$

转化为 xy 平面上的二重积分, 其中 S 为曲面 $z = z(x, y)$, $(x, y) \in D$. (在例 3 中曲面方程即 $z = 0$, $D = \{x^2 + y^2 \leq 1\}$, 且 R 与 z 无关.)

如前所述, $I = \iint_S R(x, y, z) \cos \gamma dS$, 其中 $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$, $\cos \gamma$ 是

单位法向量 \mathbf{n} 与 z 轴正向夹角的余弦.

若曲面取上侧, 则法向量为 $(-z_x, -z_y, 1)$, 因此 $\cos \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}$. 反之,

若曲面取下侧, 则上述法向量和余弦都应乘以 -1 . 这样就得到以下结论:

(i) 当曲面为 $S: z = z(x, y)$, $(x, y) \in D_{xy}$ 时,

$$I = \iint_S R(x, y, z) dx dy = \pm \iint_{D_{xy}} R(x, y, z(x, y)) dx dy.$$

其中当 S 取上侧时右边取“+”号, 当 S 取下侧时右边取“-”号. 这样就将第二类曲面积分转化为二重积分.

用相同的推理可以得到完全对称的结果:

(ii) 当曲面为 $S: x = x(y, z), (y, z) \in D_{yz}$ 时,

$$I = \iint_S P(x, y, z) dy dz = \pm \iint_{D_{yz}} P(x(y, z), y, z) dy dz.$$

其中当 S 取前侧时右边取“+”号, 当 S 取后侧时右边取“-”号, 其中前侧指余弦 $\cos \alpha > 0$, 后侧指 $\cos \alpha < 0$.

(iii) 当曲面为 $S: y = y(x, z), (x, z) \in D_{xz}$ 时,

$$I = \iint_S Q(x, y, z) dz dx = \pm \iint_{D_{xz}} Q(x, y(x, z), z) dx dz.$$

其中当 S 取右侧时右边取“+”号, 当 S 取左侧时右边取“-”号, 其中右侧指余弦 $\cos \beta > 0$, 左侧指 $\cos \beta < 0$.

于是我们看到, 除了一般的双参数 u, v 表示的曲面情况下将第二类曲面积分转化为二重积分的公式之外, 还有以直角坐标变量为双参数情况的上述转化方法. 它比较简单, 但也有缺点. 这就是对于 P, Q, R 要分别处理, 而且具体问题中的曲面往往可能要分片后才能使用上述 (i)–(iii) 的规则.

注 与第二类曲线积分比较, 上述 (i)–(iii) 相当于对曲线 $C: y = y(x), a \leq x \leq b$ 来计算积分 $\int_C P(x, y) dx$. 这时就有

$$\int_C P(x, y) dx = \pm \int_a^b P(x, y(x)) dx,$$

其中若 C 的取向与从 a 到 b 的方向一致, 则右边取正号, 否则取负号. 同样对于在 $C: x = x(y)$ 上的积分 $\int_C Q(x, y) dy$ 也有类似的规则.

六. 其他例子

例题 0.4 求 $I = \iint_S x^3 dy dz$, 其中 S 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0$, 取上侧.

解 1 从曲面 S 来看, 用 x, y 为自变量是自然的. 即有

$$z = c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}},$$

其定义域为 $D_{xy} = \{(x, y) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$.

为了将 I 转化为在 D_{xy} 上的二重积分, 根据约定有

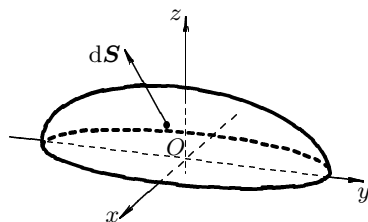


图 1: 上半椭球面取上侧

$$\iint_S P \, dy \, dz = \pm \iint_S x^3 \cos \alpha \, dS = \pm \iint_{D_{xy}} P \frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)} \, dx \, dy.$$

对于 $x = x, y = y, z = z(x, y)$, 则如第二类曲面积分定义后所述, 在曲面取上侧时在积分号前取正号, 且有 $\frac{\partial(y, z)}{\partial(x, y)} = -z_x$, 也就是上侧法向量 $(-z_x, -z_y, 1)$ 的第一个分量.

从椭球面方程直接计算出 $z_x = -\frac{c^2 x}{a^2 z}$, 因此得到所要的二重积分:

$$I = \iint_{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1} \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{x^4}{z} \, dx \, dy,$$

然后可用广义极坐标代换计算如下:

$$\begin{aligned} I &= ab \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^1 r \cdot \frac{c^2}{a^2} \cdot \frac{a^4 r^4 \cos^4 \theta}{c \sqrt{1-r^2}} \, dr \\ &= a^3 bc \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \, d\theta \int_0^1 \frac{r^5}{\sqrt{1-r^2}} \, dr \\ &= a^3 bc \cdot 4 \cdot \left(\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) \cdot \left(\frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} \right) = \frac{2}{5} \pi a^3 bc^2. \quad \square \end{aligned}$$

解 2 对于上半椭球面用广义球面坐标来描述, 即有

$$x = a \sin \varphi \cos \theta, \quad y = b \sin \varphi \sin \theta, \quad z = c \cos \varphi,$$

其中参数变化范围是 $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \theta \leq 2\pi$, 则就有

$$I = \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} x^3 \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} \, d\varphi \, d\theta,$$

其中的 Jacobi 行列式是

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(\varphi, \theta)} = \begin{vmatrix} b \cos \varphi \sin \theta & b \sin \varphi \cos \theta \\ -c \sin \varphi & 0 \end{vmatrix} = bc \sin^2 \varphi \cos \theta,$$

作为法向量的第一个分量, 它 x 同号, 因此与曲面 S 的上侧一致. (否则就要添上负号.)

这样就可以计算如下

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\substack{0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 \leq \theta \leq 2\pi}} a^3 \sin^3 \varphi \cos^3 \theta \cdot bc \sin^2 \varphi \cos \theta \, d\varphi \, d\theta \\ &= a^3 bc \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5 \varphi \, d\varphi \int_0^{2\pi} \cos^4 \theta \, d\theta \\ &= a^3 bc \left(\frac{4 \cdot 2}{5 \cdot 3} \right) \cdot 4 \cdot \left(\frac{3 \cdot 1}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} \right) = \frac{2}{5} \pi a^3 bc^2. \quad \square \end{aligned}$$

解 3 可以直接转化为 y, z 为自变量的二重积分. 但这时需要将曲面分为两片:

$$x = \pm a \sqrt{1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}},$$

即 $x \geq 0$ 和 $x \leq 0$ 两片, 记为 S_1 和 S_2 , 它们在 yz 平面上的投影相同, 都是 $\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, z \geq 0$, 记为区域 D .

由于取曲面的上侧, 因此法向量与 x 轴正向的夹角分别为锐角和钝角, 从而对于曲面的分解 $S = S_1 \cup S_2$ 来说, S_1 取前侧, S_2 取后侧, 这样就可以应用前面的规则确定出转化为二重积分时在积分号前分别取正号和负号. 又由于 S_1 和 S_2 在 yz 平面上的积分区域相同, 最后可以合成一个积分:

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S_1} x^3 dy dz + \iint_{S_2} x^3 dy dz \\ &= \iint_D a^3 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dy dz - \iint_D (-a^3) \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dy dz \\ &= 2 \iint_D a^3 \left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)^{\frac{3}{2}} dy dz. \end{aligned}$$

为计算最后的二重积分, 用广义极坐标

$$y = br \cos \theta, z = cr \sin \theta, 0 \leq \theta \leq \pi, 0 \leq r \leq 1,$$

这样就得到

$$\begin{aligned} I &= 2bc \int_0^\pi d\theta \int_0^1 a^3 r (1 - r^2)^{\frac{3}{2}} dr \\ &= 2a^3 bc \pi \left(-\frac{1}{5} (1 - r^2)^{\frac{5}{2}} \Big|_0^1 \right) = \frac{2}{5} a^3 bc \pi. \quad \square \end{aligned}$$

例题 0.5 电学中的 Gauss 定律, 即由点电荷 q 在真空中产生静电场 \mathbf{E} , 在 \mathbf{E} 通过以点电荷为中心的任意一个球面 S 的通量为

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 4\pi q,$$

其中取球面 S 的外侧.

解 根据 Coulomb 公式, 有 $\mathbf{E}(x, y, z) = \frac{q}{r^2} \mathbf{r}_0$, 其中 \mathbf{r}_0 是从原点到点 (x, y, z) 方向的单位向量, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

设 S 为以原点为中心, 以 $a > 0$ 为半径的球面, 则在球面外侧的单位法向量就是该点处的 \mathbf{r}_0 . 因此 \mathbf{E} 与 $d\mathbf{S}$ 共线, 在 $q > 0$ 时同向, 在 $q < 0$ 时反向.

这样就有

$$\iint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S \frac{q}{a^2} dS = \frac{q}{a^2} \cdot 4\pi a^2 = 4\pi q. \quad \square$$

§24.3 Gauss 公式

一. 物理背景

设 $\mathbf{v}(x, y, z) = (P, Q, R)$ 是不可压缩流体在点 (x, y, z) 处的流速, 则就是在 \mathbf{v} 有定义的区域内生成了一个向量场——流速场.

想象在这个场内的一个封闭曲面 S , V 是 S 所围的三维形体, 即有 $S = \partial V$.

问题是如何计算从 V 的表面 S 流出的总流量. 就 S 上的各个点而言, 可能是流入或者流出, 我们要计算的总流量是它们的代数和.

这里约定从 S 流出的量为正, 这也就是取面积元向量 $d\mathbf{S}$ 为曲面 S 的外法向, 即取 S 的外侧. 在前面已经从这个物理问题导出了第二类曲面积分, 只是曲面不一定是封闭的.

现在从完全不同的角度来考虑问题. 设想总流量大于 0 或小于 0, 则从不可压缩流体来看, 一定是在封闭曲面内部存在“源”或“汇” (英文中用 source 和 sink 来表示).

根据质量守恒定律, 从封闭曲面 S 流出的量 Q 应当等于 V 内部的每一小部分流出的量的总和.

现在考虑 V 内的一小块长方体

$$[x, x + \Delta x] \times [y, y + \Delta y] \times [z, z + \Delta z].$$

由于取流出该长方体的外表面的量为正, 因此在长方体最上面的一个面的面积元向量为 $(0, 0, 1) \Delta x \Delta y$, 而该面上的速度近似于 $\mathbf{v}(x, y, z + \Delta z)$, 因此从该面流出的量近似为

$$\mathbf{v}(x, y, z + \Delta z) \cdot (0, 0, 1) \Delta x \Delta y = R(x, y, z + \Delta z) \Delta x \Delta y.$$

同样可知从长方体下面的面积元向量是 $(0, 0, -1) \Delta x \Delta y$, 流出的量近似为 $-R(x, y, z) \Delta x \Delta y$. 于是经过这两个面流出的总量就是

$$[R(x, y, z + \Delta z) - R(x, y, z)] \Delta x \Delta y \approx \frac{\partial R}{\partial z} \Delta x \Delta y \Delta z.$$

对于长方体的其他 4 的面流出的量可作类似讨论. 将它们合并就得到从长方体流出的总量近似为

$$\left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) \Delta x \Delta y \Delta z.$$

由此给出一个新的概念: 即向量场 \mathbf{v} 的散度

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

也经常用 nabla 算子写为 $\nabla \cdot \mathbf{v}$.

考虑 V 内的每一点处的散度, 这就得到一个数量场. (前面曾经从数量场生成一个向量场——梯度场, 其中包括从势量场生成力场等. 现在是从向量场生成一个数量场——散度场.) 于是 V 的内部生成的总流量为

$$\iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \, dy \, dz,$$

同时根据前述的守恒律, 就有

$$\oiint_S \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{v} \, dx \, dy \, dz.$$

这就是 Gauss 公式, 它的数学证明将在下一小节给出.

三. Gauss 公式

这是 Green 公式在三维的推广, 也有称为 Green 公式的. 此外, 还称为 Ostrogradskii-Gauss 公式, 中文称为奥-高公式. 它的证明也与 Green 公式类似, 首先在下面证明该公式对于没有洞的闭区域成立, 然后在后面再讨论有洞的情况. 对于没有洞的情况也只详细讨论最简单的情况, 然后推广到一般.

定理 0.1 (Gauss 公式) 设 S 是片光滑的封闭曲面, 所围的闭区域为 V , 又设向量场 $\mathbf{a}(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$ 在 V 上连续可微, 取 $d\mathbf{S}$ 为 S 的外侧, 则成立

$$\oiint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx \, dy \, dz,$$

其中散度

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

证 从简单开始 (见图 2). 设闭区域 V 为:

$V = \{(x, y, z) \mid z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y), (x, y) \in D\}$, 其中 D 是 V 在 xy 平面上的投影. 同时 V 的边界 $S = \partial V$ 就成为用 $z = z_1(x, y)$ 表示的曲面 S_1 和用 $z = z_2(x, y)$ 表示的曲面 S_2 . (这里假设平行于 z 轴的直线与 V 的边界至多只交于 2 个点.)

又假设向量场 $\mathbf{a} = (0, 0, R)$, 即有 $P = Q = 0$, 则其散度为

$$\operatorname{div} \mathbf{a} = \frac{\partial R}{\partial z}.$$

这时公式右边的三重积分可以计算如下:

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx \, dy \, dz &= \iiint_V \frac{\partial R}{\partial z} \, dx \, dy \, dz \\ &= \iint_D dx \, dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} \, dz \\ &= \iint_D [R(x, y, z_2(x, y)) - R(x, y, z_1(x, y))] \, dx \, dy. \end{aligned}$$

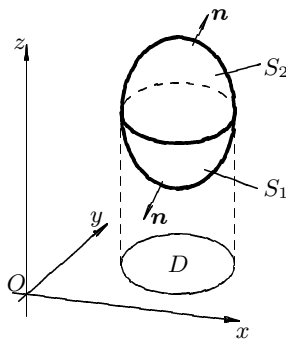


图 2: Gauss 公式证明示意图

另一方面, 公式左边的曲面积分可以分拆成在 S_1 和在 S_2 上的积分. 如图 2 所示, 在 S_2 上, 面积元向量 $d\mathbf{S}_2 = (-\frac{\partial z_2}{\partial x}, -\frac{\partial z_2}{\partial y}, 1)$, 即与 z 轴的正向夹角为锐角, 因此就有

$$\iint_{S_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_2} R(x, y, z) dx dy = \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy.$$

而在 S_1 上, 面积元向量 $d\mathbf{S}_1 = (\frac{\partial z_1}{\partial x}, \frac{\partial z_1}{\partial y}, -1)$, 即与 z 轴的正向夹角为钝角, 因此就有

$$\iint_{S_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} R(x, y, z) dx dy = - \iint_D R(x, y, z_2(x, y)) dx dy.$$

综合以上就得到

$$\oiint_S \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{S_1} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} + \iint_{S_2} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} dx dy dz.$$

用相同的方法, 假设闭区域 V 的边界与平行于 x 轴和 y 轴的任何直线都至多相交于两个点, 则就可以分别证明 Gauss 公式对于 $\mathbf{a} = (P, 0, 0)$ 和 $\mathbf{a} = (0, Q, 0)$ 成立. 再利用第二类曲面积分和三重积分关于被积函数都具有线性性质, 这样就得到了 \mathbf{a} 为一般情况的 Gauss 公式.

不妨称上述闭区域为简单区域. 对于更一般的闭区域, 则可以用分片光滑曲面将它分割成为有限个简单子区域的并. 注意到所添加的曲面同时是两个子区域的边界, 向量场 \mathbf{a} 在该曲面上要积分两次, 而面积元向量恰好相反, 因此两次的积分抵销. 这样就可以得到一般闭区域上的 Gauss 公式.

对于有洞的区域, 即边界由一个以上封闭曲面组成的情况, 也可以用添加曲面片的方法来解决. 所有这些都与 Green 公式的证明相类似. \square

第 T27 次讲稿 (第三学期第 27 次)

第 T27 次讲稿, 用于 2008 年 12 月 5 日, 星期五, 2 节课.

内容: 从 Gauss 公式 的应用到 Stokes 公式.

注意 Gauss 公式的两种形式. 首先是向量形式, 也就是场论中使用的形式为:

$$\oiint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx \, dy \, dz = \iiint_V \nabla \cdot \mathbf{a} \, dx \, dy \, dz,$$

其中也经常将体积元素 $dx \, dy \, dz$ 记为 dv .

另一种是不用向量表示的形式:

$$\oiint_{\partial V} P \, dy \, dz + Q \, dz \, dx + R \, dx \, dy = \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx \, dy \, dz.$$

下面讲 Gauss 公式的应用.

先补充一个例子, 即重新计算上一节的例 4 (p.195).

例题 0.0 求积分 $\iint_S x^3 \, dy \, dz$, S 是上半椭球面 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0$, 取上侧.

解 4 为了用 Gauss 公式, 对于取上侧的曲面 S 添加一片曲面

$$S_0 = \{(x, y, z) \mid z = 0, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\},$$

并取下侧. 这样 $S \cup S_0$ 就围成了一个闭区域, 即上半椭球体, 记为 V .

对 V 和其边界用 Gauss 公式, 就有

$$\iint_S x^3 \, dy \, dz + \iint_{S_0} x^3 \, dy \, dz = \iiint_V 3x^2 \, dx \, dy \, dz,$$

由于 S_0 上所取的面积元向量为 $(0, 0, -1)$, 而 $\iint_S P \, dy \, dz = \iint_S P \cos \alpha \, dS$, 因此在 S_0 上的积分为 0, 上述等式左边就是要求的 I . 于是只要计算右边的三重积分. 根据积分区域的特点, 可以用广义球面坐标代换如下:

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 abc \rho^2 \sin \varphi \cdot 3a^2 \rho^2 \sin^2 \varphi \cos^2 \theta \, d\rho \\ &= 3a^3 bc \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \, d\theta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 \varphi \, d\varphi \int_0^1 \rho^4 \, d\rho = 3a^3 bc \cdot \pi \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \pi a^3 bc. \quad \square \end{aligned}$$

例题 0.1 求 $I = \oiint_S x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$, 其中 S 是球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, 取外侧.

解 记 V 为 S 所围的球, 直接用 Gauss 公式即有

$$I = \iiint_V (x_x + y_y + z_z) dx dy dz = 3 \iiint_V dx dy dz = 3|V| = 4\pi a^3. \quad \square$$

注 这个公式告诉我们有可能用封闭界面上的第二类曲面积分来求出所围的体积, 而且有多个形式, 下面是其中的两个公式:

$$|V| = \frac{1}{3} \oint_{\partial V} x dy dz + y dz dx + z dx dy = \oint_{\partial V} z dx dy,$$

其中最后一个在 $V = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D_{xy}, z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)\}$ 时就可以立即转化为我们早就熟悉的用二重积分计算体积的公式

$$|V| = \iint_{D_{xy}} [z_2(x, y) - z_1(x, y)] dx dy,$$

当然目前对区域 V 的限制要广松得多.

例题 0.2 求积分 $I = \iint_S (x^2 \cos \alpha + y^2 \cos \beta + z^2 \cos \gamma) dS$, 其中 S 是锥面 $x^2 + y^2 = z^2$, $0 \leq z \leq h$, $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ 是锥面 S 上的法向量的方向余弦, 且 $\cos \gamma \leq 0$.

解 1 不难直接计算这个第一类曲面积分. 注意到 $z_x = \frac{x}{z}$, $z_y = \frac{y}{z}$, 所取的法向量为 $(z_x, z_y, -1)$, 这样就有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{r \leq h} \left(\frac{x^3}{z} + \frac{y^3}{z} - z^2 \right) dx dy \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h r(r^3 \cos^3 \theta + r^2 \sin^3 \theta - r^2) dr \\ &= 2\pi \int_0^h (-r^3) dr = -2\pi \cdot \frac{h^4}{4} = -\frac{\pi}{2} h^4. \quad \square \end{aligned}$$

解 2 积分 I 虽是第一类曲面积分, 但立即可以转化为第二类曲面积分:

$$I = \iint_S x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy,$$

其中 S 取下侧.

添加上平面 $S_0: z = h, x^2 + y^2 \leq h^2$, 并取上侧, 这样的 S_0 就与 S 一起成为分片光滑的封闭曲面, 而且取外侧. 将它们所围的区域记为 V , 则就可以用 Gauss 公式得到

$$I + \iint_{S_0} x^2 dy dz + y^2 dz dx + z^2 dx dy = \iiint_V 2(x + y + z) dx dy dz.$$

先计算在 S_0 上的积分. 由于在 S_0 上的法向量是 $(0, 0, 1)$, 因此被积表达式的前两项都是 0, 而第三项中 $z = h$, 且直接可转化为二重积分, 这样就得到

$$\iint_{S_0} z^2 dx dy = \iint_{x^2+y^2 \leq h^2} h^2 dx dy = \pi h^4.$$

对于上述三重积分可以用柱坐标代换计算:

$$\begin{aligned} \iiint_V 2(x+y+z) dx dy dz &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dr \int_0^h r[r(\cos\theta + \sin\theta) + z] dz \\ &= 2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^h dr \int_r^h rz dz = 2\pi \int_0^h r(h^2 - r^2) dr \\ &= \pi h^4 - \frac{\pi}{2} h^4 = \frac{\pi}{2} h^4. \end{aligned}$$

合并以上就得到 $I = -\pi h^4 + \frac{\pi}{2} h^4 = -\frac{1}{2} \pi h^4$. \square

例题 0.3 证明 Archimedes 浮体定律: 浸在液体里的物体所受到的浮力垂直向上, 其大小等于物体所排开的液体之重量.

证 设 ρ 是液体的密度, 将液体表面取为 xy 平面, 并取 z 轴垂直向下.

将浸入液体的物体表面记为曲面 S . 在深度 z 处的物体表面上面积为 dS 处所受到的力等于 $\rho g z \mathbf{n}_{\text{内}}$, 其中 g 为重力加速度, $\mathbf{n}_{\text{内}}$ 是曲面的单位内法向量. 通过积分就得到所要的浮力

$$\mathbf{F} = \oiint_S \rho g z \mathbf{n}_{\text{内}} dS = -\rho g \oiint_{S_{\text{外侧}}} z d\mathbf{S}.$$

注意上式是向量等式, 右边并非一个第二类曲面积分.

写出 $d\mathbf{S} = (dy dz, dz dx, dx dy)$, 则就得到在三个坐标轴方向的三个第二类曲面积分. 也可以将 S 的单位外法向量写为 $\mathbf{n}_{\text{外}} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma)$, 然后从 $d\mathbf{S}_{\text{外}} = \mathbf{n}_{\text{外}} dS$ 得到

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= -\rho g \oiint_S z(\mathbf{i} \cos \alpha + \mathbf{j} \cos \beta + \mathbf{k} \cos \gamma) dS \\ &= \left(-\rho g \oiint_S z dy dz \right) \mathbf{i} + \left(-\rho g \oiint_S z dz dx \right) \mathbf{j} + \left(-\rho g \oiint_S z dx dy \right) \mathbf{k} \\ &= 0 \mathbf{i} + 0 \mathbf{j} - \rho g \iiint_V dx dy dz = (-\rho g |V|) \mathbf{k} \end{aligned}$$

(这里用了三次 Gauss 公式), 这样就证明了所要的结论. \square

注 若密度 ρ 与深度 z 有关, 则 Archimedes 定律仍然正确. 但当密度与 x, y 有关时则方向不再是垂直向上了.

四. 区域有洞的情况

只讨论有一个洞的情况, 其推广是明显的.

设 S 为分片光滑的封闭曲面. 在 S 所围区域的内部有另一个分片光滑的封闭曲面 S_1 . 将 S 和 S_1 之间的区域记为 V . 设向量场 $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ 在 V 上连续可微.

这时也有 Gauss 公式成立:

$$\left(\iint_S + \iint_{S_1} \right) \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iint_{\partial V} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} = \iiint_V \operatorname{div} \mathbf{a} \, dx \, dy \, dz,$$

其中在 V 的边界 $\partial V = S \cup S_1$ 上取关于 V 的外侧, 这对于 S 也是外侧, 但对于 S_1 则是内侧了.

证明的方法与多连通区域上的 Green 公式的证明类似. 从略.

例题 0.4 求 $I = \oint_S \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{S}$, 其中 S 是包围原点的封闭曲面, $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

注 若将被积函数改为 $\operatorname{grad} \left(-\frac{q}{r} \right)$, 则这就是 p.196 例 5 的推广, 即证明一般形式的电学中的 Gauss 定律. 在那里只是对于以原点为中心的球面计算出通量为 $4\pi q$.

首先计算被积函数:

$$\operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2} (r_x, r_y, r_z) = -\frac{1}{r^3} (x, y, z) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}.$$

用半径充分小的 $\varepsilon > 0$ 球面 $S_\varepsilon: x^2 + y^2 + z^2 = \varepsilon^2$ 将原点包围起来, 然后就可以在 S 和 S_ε 之间的区域 V_ε 上用 Gauss 公式, 这样就有

$$I = \oint_{S_\varepsilon} \operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot d\mathbf{S} + \iiint_{V_\varepsilon} \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right) \, dx \, dy \, dz,$$

其中 S_ε 取外侧.

直接计算得到

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \left(\operatorname{grad} \left(\frac{1}{r} \right) \right) &= \operatorname{div} \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right) \\ &= \left(-\frac{x}{r^3} \right)_x + \left(-\frac{y}{r^3} \right)_y + \left(-\frac{z}{r^3} \right)_z \\ &= -\frac{3}{r^3} + \frac{3x}{r^4} \cdot \frac{x}{r} + \frac{3y}{r^4} \cdot \frac{y}{r} + \frac{3z}{r^4} \cdot \frac{z}{r} = 0. \end{aligned}$$

这样就得到

$$\begin{aligned} I &= \iint_{S_\varepsilon} -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot d\mathbf{S} \\ &= -\frac{1}{\varepsilon^3} \iiint_{r \leq \varepsilon} \operatorname{div} \mathbf{r} \, dx \, dy \, dz \\ &= -\frac{3}{\varepsilon^3} \iiint_{r \leq \varepsilon} dx \, dy \, dz = -\frac{3}{\varepsilon^3} \cdot \frac{4}{3} \pi \varepsilon^3 = -4\pi. \quad \square \end{aligned}$$

注 最后一步的计算利用在 S_ε 上 $r = \varepsilon$, 因此可以将分母的 r^3 提出到积分号前, 从而在 S_ε 内被积函数不再有奇性, 可以再一次用 Gauss 公式. 其中 $\operatorname{div} \mathbf{r} = \operatorname{d}(x, y, z) = 3$. 当然也可以写出

$$\iint_{S_\varepsilon} \mathbf{r} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iint_{S_\varepsilon} x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + y \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + z \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$$

之后再用 Gauss 公式.

教科书上的方法也不错. 这就是利用在 S_ε 上 $\mathrm{d}\mathbf{S} = \frac{\mathbf{r}}{r} \, \mathrm{d}S$, 然后就有

$$I = \iint_{S_\varepsilon} -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \, \mathrm{d}S = -\frac{1}{\varepsilon^2} \iint_{S_\varepsilon} \mathrm{d}S = -\frac{1}{\varepsilon^2} |S| = -4\pi.$$

第 T28 次讲稿 (第三学期第 28 次)

第 T28 次讲稿, 用于 2008 年 12 月 10 日, 星期三, 3 节课.

内容: 从 Stokes 公式 的证明开始.

§24.4 Stokes 公式

一. Stokes 公式

这里首先需要引进向量场的旋度概念. 设有连续可微的向量场 $\mathbf{a} = (P, Q, R)$, 则可以由 \mathbf{a} 生成一个新的向量场

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}, \end{aligned}$$

称为 \mathbf{a} 的旋度. 它反映了向量场 \mathbf{a} 的旋转程度, 是场论中的一个重要概念.

也可以用 $\operatorname{curl} \mathbf{a}$ 来表示旋度. 此外, 若用 nabla 算子 ∇ , 则就可以将旋度写为 $\nabla \times \mathbf{a}$.

下面介绍 Stokes 公式.

如图 1 所示, 分片光滑曲面 S 的边界是分段光滑的闭曲线 $C = \partial S$, C 的取向与 $d\mathbf{S}$ 符合右手法则. 通俗地说, 即设想一个人在 C 上沿所取的方向往前走时, 人的头与 $d\mathbf{S}$ 一致, 这时曲面应当在左侧. 我们称符合这个要求的曲面 S 和其边界 C 的取向为相容的.

定理 0.0 (Stokes 公式) 设 $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ 于曲面 S 上连续可微, S 与 C 的取向相容, 则成立

$$\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \left(= \iint_S \nabla \times \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} \right).$$

注 若不用向量形式, 则可以将 Stokes 公式写为

$$\begin{aligned} \oint_C P dx + Q dy + R dz &= \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} dS = \iint_S \begin{vmatrix} dy dz & dz dx & dx dy \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy, \end{aligned}$$

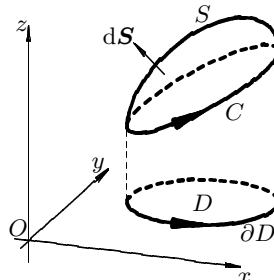


图 1: Stokes 公式中的曲面和曲线

显然这完全来自于对第二类曲面积分中向量积分元 $d\mathbf{S}$ 的多种表示形式. 又可以注意到, 最后一式的被积表达式中的第三项与 Green 公式中二重积分的被积表达式完全相同, 然后用变量循环置换即可得到前两项.

证 只对于最简单情况写出证明.

设曲面为 $S: z = z(x, y), (x, y) \in D$, 取上侧. 其中设 $z(x, y)$ 连续可微, D 是曲面在 xy 平面上的投影 (参看图 1). 又设 $\mathbf{a} = (P, 0, 0)$.

这时 $d\mathbf{S} = (-z_x, -z_y, 1) dx dy$, 代入到公式一边的第二类曲面积分中, 就有

$$\begin{aligned} \iint_S \operatorname{rot} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{S} &= \iint_D (0, P_z, -P_y) \cdot (-z_x, -z_y, 1) dx dy \\ &= - \iint_D (P_y + P_z \cdot z_y) dx dy \\ &= - \iint_D \frac{P(x, y, z(x, y))}{\partial y} dx dy \\ &= \oint_{\partial D} P(x, y, z(x, y)) dx. \quad (\text{这一步是对上式用 Green 公式的结果}) \end{aligned}$$

为了证明最后一个积分与 Stokes 公式另一边的曲线积分相同, 只需要将 C 参数化. 设 $C = \partial S$ 的参数表示为 $x = x(t), y = y(t), z = z(t), a \leq t \leq b$, 且当 t 从 a 到 b 时点 (x, y, z) 按照 C 的取向绕 C 一周. 这时其投影 ∂D 是 xy 上的平面封闭曲线, 其方程就是 $x = x(t), y = y(t), a \leq t \leq b$, 而且当 t 从 a 到 b 时恰好以正向绕 ∂D 一周 (参看图 1 的具体例子). 于是就有

$$\oint_{\partial D} P(x, y, z(x, y)) dx = \int_a^b P(x(t), y(t), z(x(t), y(t))) x'(t) dt.$$

又将三维空间的曲线积分参数化, 即得到

$$\oint_C P(x, y, z) dx = \int_a^b P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) dt,$$

由于边界 $C = \partial S$ 上也满足 $z = z(x, y)$, 即有 $z(t) = z(x(t), y(t))$, 因此以上两个积分相等. 即已经对于上述简单情况证明了 Stokes 公式成立.

可以对于 $(0, Q, 0)$ 和 $(0, 0, R)$ 和 S, C 比较简单情况作出同样的讨论, 最后将它们相加, 就解决了最简单情况的公式证明. 仿照 Green 公式的情况可以对一般情况下的 S 和 ∂S 作出证明. \square

证 2 也可以用投影法作出较为一般情况下的直接证明.

一开始就对边界曲线 C 作参数化, 于是就有

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz$$

$$= \int_a^b [P(x(t), y(t), z(t))x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))z'(t)] dt.$$

利用 $z(t) = z(x(t), y(t))$, 就有 $z'(t) = z_x x'(t) + z_y y'(t)$, 这样就有

$$\oint_C P dx + Q dy = \oint_{\partial D} P dx + Q dy,$$

$$\oint_C R dz = \oint_{\partial D} R(x, y, z(x, y)) \cdot (z_x(x, y) dx + z_y(x, y) dy),$$

合并之后就将空间的第二类曲线积分转化为平面上的第二类曲线积分:

$$\oint_C P dx + Q dy + R dz = \oint_{\partial D} (P + Rz_x) dx + (Q + Rz_y) dy.$$

由于右边已经是平面上的第二类曲线积分 (其中 $P = P(x, y, z(x, y))$ 等), 因此可以用 Green 公式得到

$$\oint_{\partial D} (P + Rz_x) dx + (Q + Rz_y) dy$$

$$= \oint_{\partial D} \left[-\frac{\partial}{\partial y} (P + Rz_x) + \frac{\partial}{\partial x} (Q + Rz_y) \right] dx dy$$

$$= \oint_{\partial D} \left[\left(\frac{\partial Q}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial y} \right) z_x + \left(\frac{\partial R}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial z} \right) z_y + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \right] dx dy.$$

另一方面, 公式的另一边为

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) dy dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) dz dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

$$= \iint_S \left[\left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) \cos \alpha + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) \cos \beta + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \cos \gamma \right] dS,$$

由于 $dS = \sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2} dx dy$, $(\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma) = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x^2 + z_y^2}}(-z_x, -z_y, 1)$,

代入后即成为二重积分, 可见两边相等. \square

二. 例子

先用 Stokes 公式重新做 p.168 的例 3. (当时是用第二类曲线积分定义来计算的, 后来学了 Green 公式后又用投影方法给出了第二个解法, 现在则用 Stokes 公式作为第三个解.)

这时的封闭曲线 C 是上半球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 与柱面 $x^2 + y^2 = ax$ 的交线. 以 C 为边界的曲面不是惟一的, 这里取上半球面上为 C 所围的部分为 S , 且取上侧, 这样就可以用 Stokes 公式得到

$$\begin{aligned} I &= \oint_C y^2 dx + z^2 dy + x^2 dz = \iint_S \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y^2 & z^2 & x^2 \end{vmatrix} dS \\ &= \iint_S (-2z \cos \alpha - 2x \cos \beta - 2y \cos \gamma) dS. \end{aligned}$$

由于取上侧, S 的法向量取为 $(-z_x, -z_y, 1)$. 从 S 的方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ 可求出 $z_x = -\frac{x}{z}$, $z_y = -\frac{y}{z}$. 代入后就将第二类曲面积分转化为二重积分:

$$I = \iint_D (-2x - 2\frac{xy}{z} - 2y) dx dy = -2 \iint_D x dx dy,$$

其中 D 是 S 向 xy 平面的投影, 即圆 $x^2 + y^2 \leq 2x$. 利用 D 关于 y 对称, 而上述积分的后两项中都含有关于 y 为奇函数的因子 y , 因此它们的积分为 0. 从而只留下了一项.

用极坐标代换 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ 来计算上述最后一个积分, 由于 ∂D 的表达式为 $r = a \cos \theta$, $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$, 就有

$$\begin{aligned} I &= -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{a \cos \theta} r^2 \cos \theta dr \\ &= -4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^3}{3} \cos^4 \theta d\theta \\ &= -\frac{4a^3}{3} \cdot \frac{3}{4 \cdot 2} \cdot \frac{\pi}{2} = -\frac{\pi a^3}{4}. \quad \square \end{aligned}$$

回到书上 p.205 的第一个例子, 它对于理解向量场的旋度的意义和 Stokes 公式都是有帮助的.

例题 0.1 设刚体绕 z 轴旋转 (该旋转轴未必与刚体相交), 加速度为 ω , 从 z 轴正向看下去为逆时针旋转, $\mathbf{v}(x, y, z)$ 表示在刚体旋转时所经过的点 (x, y, z) 处的速度, 求 $\text{rot } \mathbf{v}$.

解 如图所示, 在旋转轴上取定一点为原点, 则在刚体经过的点 (x, y, z) 处的旋转速度为

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}.$$

由于 $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega)$, 因此就有

$$\mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = -y\omega \mathbf{i} + x\omega \mathbf{j}.$$

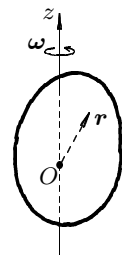


图 2: 刚体旋转的旋度计算

(这里可以事先看出速度向量与 $\boldsymbol{\omega}$ 和 \mathbf{r} 正交, 又若记它们的夹角为 θ , 则 $|\mathbf{v}| = r\omega \sin \theta$.) 于是就有

$$\text{rot } \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -y\omega & x\omega & 0 \end{vmatrix} = 2\omega \mathbf{k},$$

可见旋度确实反映了散度场内的旋转速度的大小.

现在取围绕旋转轴的封闭曲线 C . 为简单起见就取 $z = 0$ 平面上的圆 $x^2 + y^2 = R^2$, 取逆时针方向, 则就可以对于 C 和它所围绕的 $z = 0$ 平面上的曲面 $S: x^2 + y^2 \leq R^2, z = 0$, 取上侧, 用 Stokes 公式 (实际上也就是 Green 公式), 得到

$$\oint_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{r} = \iint_S \text{rot } \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \iint_S (0, 0, 2\omega) \cdot (0, 0, 1) dS = 2\omega |S| = 2\omega \pi R^2.$$

这表明在曲线 C 上的环流量就是 S 上的旋度之和 (积分就是求和), 这也就是 Stokes 公式的意义. \square

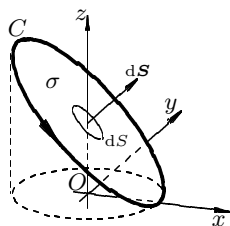


图 3: 用 Stokes 公式的例子

例题 0.2 求曲线积分

$$I = \oint_C (y-x) dx + (z-x) dy + (x-y) dz,$$

其中 C 是柱面 $x^2 + y^2 = a^2$ 和平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ ($a > 0, h > 0$) 的交线, 其方向从 z 轴正向看去为逆时针方向.

解 1 以 C 为边界的曲面不是惟一的, 这里取处于平面 $\frac{x}{a} + \frac{z}{h} = 1$ 上的椭圆最为简单, 将它记为 σ . 按照 Stokes 公式的要求, 取 σ 的上侧方向即与 C 的给定取向相容 (见图 3).

先从曲面 σ 所在的平面方程计算出 $dS = \frac{1}{\sqrt{a^2 + h^2}}(h, 0, a) dS$, 然后就可以用 Stokes 公式得到

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\sigma} \text{rot}(y-z, z-x, x-y) \cdot dS \\ &= \frac{1}{\sqrt{h^2 + a^2}} \iint_{\sigma} (-2, -2, -2) \cdot (h, 0, a) dS \\ &= \frac{-2(h+a)}{\sqrt{h^2 + a^2}} \iint_{\sigma} dS = \frac{-2(h+a)}{\sqrt{h^2 + a^2}} |\sigma|. \end{aligned}$$

由于 σ 是椭圆, 长半轴是 $\sqrt{h^2 + a^2}$, 短半轴是 a , 因此 $|\sigma| = \pi a \sqrt{h^2 + a^2}$. 合并以上得到 $I = -2\pi a(h+a)$. \square

解 2 若不用向量形式的公式, 则有

$$\begin{aligned} I &= \iint_{\sigma} \begin{vmatrix} \cos \alpha & \cos \beta & \cos \gamma \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y-z & z-x & x-y \end{vmatrix} dS \\ &= -2 \iint_{\sigma} (\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) dS \\ &= -2(\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma) |\sigma|. \end{aligned}$$

这里利用了 σ 为平面, 其法方向的方向余弦为常数.

以下若计算方向余弦, 则与解 1 相同.

一个不同的方法是用投影的思想. 利用 $\cos \alpha |\sigma|$ 是 σ 向 yz 平面的投影, 即是以 a, h 为半轴长的椭圆面积, 因此等于 πah . 同样, $\cos \beta |\sigma|$ 是 σ 向 xz 平面的投影, 这只是一个直线段, 面积为 0. 最后, $\cos \gamma |\sigma|$ 是 σ 向 xy 平面的投影, 即圆面积 πa^2 . 因此得到 $I = -2\pi(a^2 + ah)$. \square

解 3 当然也可以用 Green 公式来计算. 将 C 在 xy 平面上的投影记为 C_1 , 取

正向, 又将 C_1 所围的圆 $x^2 + y^2 \leq a^2$ 记为 D , 则就可以利用 $z = h - \frac{h}{a}x$ 并用 Green 公式得到

$$\begin{aligned} I &= \oint_{C_1} (y-x) dx + (h - \frac{h}{a}x - x) dy + (x-y)(-\frac{h}{a}) dx \\ &= \oint_{C_1} (y-x)(1 + \frac{h}{a}) dx + (h - \frac{h}{a}x - x) dy \\ &= \iint_D [-(1 + \frac{h}{a} - \frac{h}{a} - 1)] dx dy \\ &= -2(1 + \frac{h}{a}) \iint_D dx dy = -2(1 + \frac{h}{a})|D| \\ &= -2(1 + \frac{h}{a})\pi a^2 = -2\pi(a^2 + ah). \end{aligned}$$

解 4 由于曲线 C 容易参数化, 因此不用 Stokes 公式或 Green 公式直接计算曲线积分也是容易的.

令参数方程为

$$x = a \cos \theta, \quad y = a \sin \theta, \quad z = h(1 - \cos \theta), \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi,$$

则直接就有

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{2\pi} [(a \sin \theta - h + h \cos \theta)(-a \sin \theta) + (h(1 - \cos \theta) - a \cos \theta)a \cos \theta \\ &\quad + a(\cos \theta - \sin \theta)h \sin \theta] d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} (-a^2 - ah) d\theta = -2\pi(a^2 + ah). \quad \square \end{aligned}$$

四. “有孔”情况的 Stokes 公式

这与 Green 公式在单连通区域的证明完全相同, 结论是 Stokes 公式仍然成立, 只是曲面 S 的边界 ∂S 可以由多条曲线组成, 这时每一条曲线的曲线都应当与 S 的取向相容.

注 现在已经容易看到, 特别当 S 就是 xy 平面上的区域时, 若取上侧, 同时 $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ 中 $R = 0$, 且 P, Q 与 z 无关, 则 Stokes 公式就变成 Green 公式.

例题 0.3 (Ampère 环路定律) 设 z 轴有电流 I 通过, C 为绕 z 轴一周的封闭曲线, 方向见图 4. 设 I 产生的磁场强度为 \mathbf{B} , 求 \mathbf{B} 沿曲线 C 的环流量 $\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}$.

由于

$$\operatorname{rot} \mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{-2Iy}{x^2 + y^2} & \frac{2Ix}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} = \mathbf{0},$$

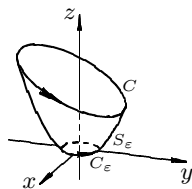


图 4: Ampère 环路定律

解 在点 (x, y, z) 处的磁场强度为

$$\mathbf{B} = \frac{2I}{x^2 + y^2}(-y, x, 0),$$

对于这个向量场来说, z 轴是奇线. 在 xy 平面上作圆 C_ε : $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$, 方向与 C 相同, 又作曲面 S_ε , 它以 C 和 C_ε 为边界. 这样就可以用有孔的 Stokes 公式如下:

$$\oint_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} = \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} + \iint_{S_\varepsilon} \text{rot } \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S}.$$

因此绕 C 的环流量和绕 C_ε 的环流量相同, 而 C_ε 上的积分容易计算如下

$$\begin{aligned} \oint_{C_\varepsilon} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{r} &= \oint_{C_\varepsilon} \frac{2I}{\varepsilon^2}(-y, x, 0) \cdot (dx, dy, dz) \\ &= \frac{2I}{\varepsilon^2} \oint_{C_\varepsilon} -y dx + x dy \\ &= \frac{2I}{\varepsilon^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \varepsilon^2} \left(-\frac{\partial(-y)}{\partial y} + \frac{\partial(x)}{\partial x} \right) dx dy \\ &= \frac{4I}{\varepsilon^2} \iint_{x^2+y^2 \leq \varepsilon^2} dx dy = 4\pi I, \end{aligned}$$

因此所求的环流量为 $4\pi I$. \square

注 参看 p.170 之例 5 比较, 可见那里已经解决了封闭曲线 C 在 xy 平面 (或平行于该平面) 中的情况. Stokes 公式使得这个定律可以推广到围绕 z 轴的任意光滑封闭曲线上.

五. 空间的“Green 定理”

对空间区域同样可以定义单连通和多连通的概念, 当然这里的单连通区域会有多种复杂情况. 例如在球内部挖去一个小球后所得的仍然是单连通区域, 但其边界则由两个封闭曲面组成, 而圆环面所围区域不是单连通的, 但其边界则是一个封闭曲面.

下面叙述平面 Green 定理的推广. 它的证明与平面情况类似, 从略.

定理 0.1 设 V 是 \mathbb{R}^3 中的单连通区域, $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ 在 V 内连续可微, 则以下四个命题等价:

(1) 对 V 中的任一分段光滑的闭曲线 Γ 上, 有 $\oint_{\Gamma} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$. (环流量为 0.)

(2) 对于 V 内的任意两点 A, B , 积分 $\int_{AB} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$ 只与点 A, B 有关, 而与具体的曲线 \widehat{AB} 的形状无关. (积分与路径无关.)

(3) 在 V 内存在单值可微函数 $\varphi(x, y, z)$, 使得成立

$$d\varphi = P dx + Q dy + R dz (= \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}),$$

称 φ 为势函数或原函数. (存在势函数.)

(4) 在 V 内处处成立 $\operatorname{rot} \mathbf{a} = \mathbf{0}$, 即 $\frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$, $\frac{\partial R}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial z}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. (空间恰当条件.)

当上述条件之一满足时, 势函数全体为

$$\varphi(x, y, z) = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + C = \int_{(x_0, y_0, z_0)}^{(x, y, z)} P dx + Q dy + R dz,$$

其中点 (x_0, y_0, z_0) 为 V 内的任一固定点, C 为任意常数.

例题 0.4 设 $\omega = (xy^2 + x^2y - f(x)y) dx + (f(x)y + 2x) dy + z dz$ 为恰当形式, 求 $f(x)$ 及势函数.

解 将 ω 写成 $\mathbf{a} \cdot d\mathbf{r}$, 计算旋度

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xy^2 + x^2y - f(x)y & f(x)y + 2x & z \end{vmatrix} \\ &= (0, 0, f'(x)y + 2 - 2xy - x^2 - f(x)). \end{aligned}$$

根据恰当条件, 应当有

$$f'(x)y + 2 - 2xy - x^2 - f(x) = (f'(x) - 2x)y + 2 - x^2 - f(x) = 0,$$

由于 y 可取任意值, 因此只能是 $f'(x) = 2x$. 然后即可看出 $f(x) = x^2 - 2x$.

于是得到

$$\mathbf{a} = (xy^2 + 2y, x^2y + 2x - 2y, z),$$

由此直接可以得到势函数为

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} + C \\ &= \int_{(0,0,0)}^{(x,y,z)} (xy^2 + 2y) dx + (x^2y + 2x - 2y) dy + z dz \\ &= \frac{1}{2}x^2y^2 + 2xy - y^2 + \frac{1}{2}z^2 + C. \quad \square \end{aligned}$$

§24.5 场论初步

本书的场论内容实际上从讲方向导数时引入梯度向量就开始了, 然后陆续引入了散度和通量、旋度和环流量、势函数等场论的基本概念. 其中最主要的是三大公式: Green 公式, Gauss 公式和 Stokes 公式. 又对于平面和空间分别得到了 Green 定理. 这里只是作一个小结.

注意在场论中普遍使用 nabla 算子 ∇ .

以下都在空间 \mathbb{R}^3 中来叙述.

一. 数量场和向量场

在区域 $D \subset \mathbb{R}^3$ 上定义的数值函数 $f(x, y, z)$ 称为 D 上的数量场, 同样, 在 D 上定义的向量值函数 $\mathbf{a}(x, y, z) = (P, Q, R)$ 称为 D 上的向量场.

对于数量场 f 有梯度

$$\text{grad } f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right),$$

即生成了一个向量场, 称为 f 的梯度场, f 就是这个梯度场的势函数. 如前所述, 梯度反映了 f 增长的最快方向和大小.

对于向量场 $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ 有散度

$$\text{div } \mathbf{a} = \nabla \cdot \mathbf{a} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z},$$

即生成了一个数量场, 称为 \mathbf{a} 的散度场. 如前所述, 散度反映了流体速度场中的“源”和“汇”.

从向量场 $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ 还有旋度

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{a} = \nabla \times \mathbf{a} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right), \end{aligned}$$

这样就又生成了一个向量场, 称为 \mathbf{a} 的旋度场. 如前所述, 旋度反映了向量场的旋转程度.

二. 梯度、散度和旋度的运算公式

设 f, g 为数量场, \mathbf{a}, \mathbf{b} 为向量场, 假定都连续可微. 则有以下用 nabla 算子写出的运算规则, 它们都可以按照定义直接验证.

$$\begin{aligned}
\nabla(\alpha f + \beta g) &= \alpha \nabla f + \beta \nabla g, \\
\nabla \cdot (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) &= \alpha \nabla \cdot \mathbf{a} + \beta \nabla \cdot \mathbf{b}, \\
\nabla \times (\alpha \mathbf{a} + \beta \mathbf{b}) &= \alpha \nabla \times \mathbf{a} + \beta \nabla \times \mathbf{b}, \\
\nabla(fg) &= (\nabla f)g + f(\nabla g), \\
\nabla \cdot (f\mathbf{a}) &= f(\nabla \cdot \mathbf{a}) + (\nabla f) \cdot \mathbf{a}, \\
\nabla \times (f\mathbf{a}) &= f(\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla f) \times \mathbf{a}, \\
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= 0, \\
\nabla \times (\nabla f) &= \mathbf{0}.
\end{aligned}$$

特别注意最后两个公式, 前者表明任何向量场的旋度的散度为零, 即旋度不生不灭, 后者表明任和数量场的梯度的旋度为零向量, 即梯度场没有任何旋转性质. 从 Green 定理知道这就是满足恰当条件, 在单连通区域内与存在势函数等价.

下面是关于 $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0$ 的验证. 由以下计算得到

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) &= \begin{vmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right),
\end{aligned}$$

可见对于二阶连续可微的向量场来说, 由于二阶混合偏导数与求偏导顺序无关, 因此一定成立.

同样可以直接验证 $\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$. 为此只要作如下计算:

$$\nabla \times (\nabla f) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix},$$

就可以直接看出当数量场 f 二阶连续可微时, 同样由于二阶混合偏导数与求偏导的顺序无关, 因此上述向量场的三个分量都恒等于 0. 这表明有势场一定满足恰当条件, 且对一般区域都如此.

此外还有常用记号为

$$\nabla \cdot \nabla f = \Delta f,$$

其中 $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$ 为 Laplace 算子, 二阶偏微分方程 $\Delta u = 0$ 称为 Laplace 方程或调和方程, 满足该方程的函数称为调和函数. 对于二维的情况已经在 p.178 的例 4 见过. 在习题课讲义的场论一章中有三维调和函数的一些命题和训练.

三. 保守场

设 D 是二维或三维单连通区域, \mathbf{a} 是 D 上的向量场. 将 Green 定理的内容重新叙述就可以写为保守场的定义.

定义 0.1 称向量场 \mathbf{a} 为保守场, 若以下等价条件之一成立:

- (1) 对 D 内任意闭曲线 C 有 $\oint_C \mathbf{a} \cdot d\mathbf{r} = 0$ (无环流场);
- (2) 在 D 内 $\text{rot } \mathbf{a} = \mathbf{0}$ (无旋场);
- (3) 存在 φ , 使得 $\mathbf{a} = \nabla \varphi$ (有势场或梯度场).

注 这就是用场论的语言重新叙述前面的 Green 定理:

$$\text{无环流场} \iff \text{保守场} \iff \text{有势场 (梯度场)} \iff \text{无旋场}.$$

相应地还可以建立以下结论:

$$\text{无源场} \iff \text{旋度场} \iff \text{无通量场 (管量场)},$$

其中无源场指散度处处为 0 的向量场, 旋度场是说它是某一个向量场生成的旋度场, 无通量场指任何封闭曲面的通量为 0. 管量场指对于由向量场决定的场线做成的管状区域来说, 通过任何截面的流量相同. 这里的主要证明过程就是教科书 p.215 的习题 7.

最后再对于 Green 公式作一点补充说明. 从 Stokes 公式的形式已经可以看出它以 Green 公式为其特例. 事实上, 只要 $\mathbf{a} = (P, Q, R)$ 中 $R \equiv 0$, 而 P, Q 与 z 无关, 则就得到 Green 公式.

以下说明 Green 公式也是 Gauss 公式的特例. 这里的一种推导方法是考虑平面上的封闭曲线的通量计算. 这时 $\mathbf{a} = (P, Q)$, 记曲线的单位外法向量为 \mathbf{n} , 则经过 $C = \partial D$ 流出的通量就是

$$\oint_{\partial D} (P, Q) \cdot \mathbf{n} \, ds.$$

记 $\boldsymbol{\tau}$ 为曲线 C 沿正向的单位切向量, 则就有 $d\mathbf{r} = (dx, dy) = \boldsymbol{\tau} \, ds$. 利用单位外法向量 \mathbf{n} 与 $\boldsymbol{\tau}$ 的关系, 可见有 $\mathbf{n} \, ds = (dy, -dx)$. 因此可以写出上述通量的非向量形式, 然后用 Green 公式得到

$$\oint_{\partial D} P \, dy - Q \, dx = \iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx \, dy.$$

可见对于二维情况的散度恰好就是 $\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}$, 这与三维情况完全一致..

在很多文献中也将上述最后一个等式称为 Green 公式.

由此可见, Green 公式既可以如 Gauss 公式那样, 理解为从封闭曲线流出的通量就是内部散度之和, 也可以如 Stokes 公式那样, 理解为封闭曲线上的环流量就是内部旋度之和.

第 T29 次讲稿 (第三学期第 29 次)

第 T29 次讲稿, 用于 2008 年 12 月 12 日, 星期五, 2 节课.

内容: 开始最后一章, 即第二十五章 含参变量的积分. 开始时对于场论还作了一些补充, 写在上一次讲稿中了.

§25.1 含参变量常义积分

一. 含参变量积分的概念

称积分

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) \, dy$$

为含参变量 x 的积分. 例如二重积分化为二次积分时的内层积分就是如此. 此外在定积分学习中也多次见到过含参变量的积分. 在这一章中将对于这类积分作专门讨论.

含参变量积分是引进函数的新方法^①. 在这一章中主要关心由含参变量积分定义的函数 $F(x)$ 的连续性、可微性和可积性, 以及相应的运算性质.

这里还可以对比无穷级数中的函数项级数. 相对于每一项都是常数的无穷级数来说, 函数项级数中的自变量就是参变量. 事实上本章的许多概念和方法, 例如一致收敛等, 都与函数项级数中的内容有直接的对应关系, 如前所述, 所讨论的主要问题也是相同的.

二. 含参变量常义积分

定理 0.1 (连续性定理) 设二元函数 $f(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续, 则以 x 为参变量的常义积分

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) \, dy$$

在 $[a, b]$ 上连续.

证 只要对每个点 $x_0 \in [a, b]$ 证明 F 在 x_0 连续.

对于任意 $x \in [a, b]$, 需要估计

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_c^d |f(x, y) - f(x_0, y)| \, dy.$$

^① 回顾数学分析课程中的已学内容, 可以看到引进函数的许多方法. 例如, 有变动积分限的定积分就是上述含参变量积分的一个特殊情况. 又如函数项级数, 由方程确定函数关系的隐函数等.

由于在 $[a, b] \times [c, d]$ 上的二元连续函数必定一致连续, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, $\forall (x', y'), (x'', y'') \in [a, b] \times [c, d]$, 只要 $|x' - x''| < \delta, |y' - y''| < \delta$, 就有 $|f(x', y') - f(x'', y'')| < \varepsilon$.

取 $y' = y'' = y \in [c, d], x' = x_0, x'' = x \in O_\delta(x_0) \cap [a, b]$, 可见 $\forall y \in [c, d]$ 成立:

$$|f(x, y) - f(x_0, y)| < \varepsilon.$$

于是对 $\forall x \in O_\delta(x_0) \cap [a, b]$ 就成立

$$|F(x) - F(x_0)| \leq \int_c^d |f(x, y) - f(x_0, y)| dy \leq \varepsilon(d - c),$$

这表明 F 在点 x_0 连续. 由于 x_0 可取到 $[a, b]$ 中任意一点, 因此 $F \in C[a, b]$. \square

注 1 这就是 $\lim_{x \rightarrow x_0} F(x) = F(x_0)$, 因此也就是

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d f(x_0, y) dy = \int_c^d \lim_{x \rightarrow x_0} f(x, y) dy,$$

即在 $[c, d]$ 上的积分运算和 $x \rightarrow x_0$ 的极限运算可交换.

注 2 这时 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 即存在积分 $\int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

从重积分知识知道还有

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

其中第二个二次积分的存在性可以用定理 1 于含参积分 $\int_c^d f(x, y) dy$ 得到, 但两个二次积分相等是需要另行证明的. 由于教科书中的安排, 我们已经学过重积分, 因此这里不必再证明了. 而且还知道上述积分等于 $\iint_{[a, b] \times [c, d]} f(x, y) dx dy$.

定理 0.2 (可导性定理) 设 $f(x, y)$ 和 $f_x(x, y)$ 在 $[a, b] \times [c, d]$ 上连续, 则 $F(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且有

$$F'(x) = \int_c^d f_x(x, y) dy.$$

证 任取点 $x_0 \in [a, b]$, 并设 $x = x_0 + \Delta x \in [a, b]$, 作出差商

$$\frac{\Delta F}{\Delta x} = \frac{1}{\Delta x} \int_c^d [f(x_0 + \Delta x, y) - f(x_0, y)] dy = \int_c^d f_x(x_0 + \theta \Delta x, y) dy,$$

其中 $0 < \theta < 1$, 它与 x_0, x, y 都可能有关.

从定理要求证明的结论可见, 需要对下列表达式作出估计:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - \int_c^d f_x(x_0, y) dy \right| &= \left| \int_c^d [f_x(x_0 + \theta \Delta x, y) - f_x(x_0, y)] dy \right| \\ &\leq \int_c^d |f_x(x_0 + \theta \Delta x, y) - f_x(x_0, y)| dy. \end{aligned}$$

以下与定理 1 的证明相同. 利用 $f_x(x, y)$ 二元连续, 从而在 $[a, b] \times [c, d]$ 上一致连续, 又利用 $0 < \theta < 1$, 可见 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$, 当 $|\Delta x| < \delta$ 时, 对一切 $y \in [c, d]$, 成立

$$|f_x(x_0 + \theta\Delta x, y) - f_x(x_0, y)| < \frac{\varepsilon}{d-c},$$

从而当 $0 < |\Delta x| < \delta$ 时就有

$$\left| \frac{\Delta F}{\Delta x} - \int_c^d f_x(x_0, y) dy \right| < \varepsilon.$$

这就是已经用 ε - δ 语言证明了

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta x} = \int_c^d f_x(x_0, y) dy. \quad \square$$

例题 0.1 通过对于含参变量 a 的积分 $\int_0^1 \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{1}{a}$ ($a \neq 0$) 求导, 即可计算出 $\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$.

解 通过在积分号下求导得到

$$\int_0^1 \frac{-2a dx}{(x^2 + a^2)^2} = -\frac{1}{a^2} \arctan \frac{1}{a} + \frac{1}{a} \cdot \left(-\frac{1}{a^2}\right) \frac{1}{1 + \frac{1}{a^2}},$$

整理得到

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{1}{a} + \frac{1}{2a^2(1 + a^2)}. \quad \square$$

例题 0.2 求 $I(\theta) = \int_0^\pi \ln(1 + \theta \cos x) dx$, 其中 $|\theta| < 1$.

解 利用积分号下求导得到

$$\begin{aligned} I'(\theta) &= \int_0^\pi \frac{\cos x}{1 + \theta \cos x} dx = \frac{1}{\theta} \int_0^\pi \left(1 - \frac{1}{1 + \theta \cos x}\right) dx \\ &= \frac{\pi}{\theta} - \frac{1}{\theta} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \theta \cos x}, \end{aligned}$$

然后计算最后一个积分.

用万能变换在这里还是比较合适的. 令 $t = \tan \frac{x}{2}$, 就有 $dx = \frac{2 dt}{1 + t^2}$, $\cos x = \frac{1 - t^2}{1 + t^2}$, 于是就可以计算得到

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \frac{dx}{1 + \theta \cos x} &= \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{(1 + t^2) + \theta(1 - t^2)} \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{2 dt}{(1 + \theta) + (1 - \theta)t^2} \\ &= \frac{2}{1 - \theta} \cdot \frac{1}{\sqrt{\frac{1 + \theta}{1 - \theta}}} \cdot \arctan \frac{t}{\sqrt{\frac{1 + \theta}{1 - \theta}}} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1 - \theta^2}}. \end{aligned}$$

这样就得到

$$I'(\theta) = \pi \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta \sqrt{1 - \theta^2}} \right).$$

然后计算不定积分 (计算过程中设 $\theta > 0$):

$$\begin{aligned}\int \left(\frac{1}{\theta} - \frac{1}{\theta\sqrt{1-\theta^2}} \right) d\theta &= \ln \theta + \int \frac{d\left(\frac{1}{\theta}\right)}{\sqrt{\frac{1}{\theta^2} - 1}} \\ &= \ln \theta + \ln\left(\frac{1}{\theta} + \sqrt{\frac{1}{\theta^2} - 1}\right) \\ &= \ln(1 + \sqrt{1 - \theta^2}) + C.\end{aligned}$$

利用 $I(0) = 0$, 就得到

$$I(\theta) = \pi(\ln(1 + \sqrt{1 - \theta^2}) - \ln 2). \quad \square$$

注 1 在上述计算中对于积分 $\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \theta \cos x}$ 除了用万能变换之外, 也可以用对称性方法如下计算 (参看《数学分析习题课讲义》上册的 §10.4.3), 即将 x 换为 $\pi - x$ 时积分不变, 从而有

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \frac{dx}{1 + \theta \cos x} &= \frac{1}{2} \int_0^\pi \left(\frac{1}{1 + \theta \cos x} + \frac{1}{1 - \theta \cos x} \right) dx \\ &= \int_0^\pi \frac{dx}{1 - \theta^2 \cos^2 x} = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \theta^2 \cos^2 x},\end{aligned}$$

然后用 $t = \tan x$ 就有

$$\begin{aligned}2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - \theta^2 \cos^2 x} &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{1}{1 + t^2} \cdot \frac{dt}{1 - \theta^2 \cdot \frac{1}{1 + t^2}} \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{dt}{1 - \theta^2 + t^2} = \frac{2}{\sqrt{1 - \theta^2}} \arctan \frac{t}{\sqrt{1 - \theta^2}} \Big|_0^{+\infty} \\ &= \frac{\pi}{\sqrt{1 - \theta^2}}.\end{aligned}$$

注 2 此题的被积函数 $f(\theta, x) = \ln(1 + \theta \cos x)$ 是在 $-1 < \theta < 1, 0 \leq x \leq \pi$ 的范围内连续, 同时 $f_\theta(\theta, x) = \frac{\cos x}{1 + \theta \cos x}$ 也是如此. 由于求导是局部运算, 因此对于任意给定的 θ_0 可以取充分小的 $\delta > 0$, 使得 $-1 < -1 + \delta < \theta_0 < 1 - \delta$, 然后在 $[1 - \delta, 1 + \delta] \times [0, \pi]$ 上用可导性定理.

第 T30 次讲稿 (第三学期第 30 次)

第 T30 次讲稿, 用于 2008 年 12 月 17 日, 星期三, 3 节课.

内容: 继续第二十五章 含参变量的积分. 讲完常义部分, 并开始广义部分.

例题 0.3 求 $I = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$, 其中设 $a, b > 0$.

解 1 首先要判定是否是常义积分. (因为从后面知道含参变量的广义积分与常义积分的讨论很不一样, 而本题表面上似乎 $x = 0, 1$ 有可能是奇点.) 可看出在 $x = 0$ 附近被积函数有界, 因此 $x = 0$ 不是奇点. 在 $x = 1$ 处, 被积函数是 $\frac{0}{0}$ 型的不定式. 用 L'Hospital 法则可知有极限, 因此 $x = 1$ 附近被积函数也有界, $x = 1$ 也不是奇点.

以下不妨设 a 固定, 以 b 为参变量, 对于函数

$$I(b) = \int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x} dx$$

求它对 b 的导数, 得到 $I'(b) = \int_0^1 x^b dx = \frac{1}{b+1}$. 又利用 $I(a) = 0$, 就可以最后得到 $I(b) = \ln(b+1) - \ln(a+1)$. \square

解 2 利用 $(x^y)'_y = x^y \ln x$, 可以对题中的被积函数倒用 Newton-Leibniz 公式, 将它写为一个定积分:

$$\frac{x^b - x^a}{\ln x} = \int_a^b x^y dy.$$

于是就有

$$I = \int_0^1 dx \int_a^b x^y dy = \int_a^b dy \int_0^1 x^y dx = \int_a^b \frac{dy}{y+1} = \ln \frac{b+1}{a+1}. \quad \square$$

注 在解 2 中交换积分顺序是关键. 如学习二重积分计算中所说, 两个二次积分的计算难度可能大不一样, 甚至有一个能算而另一个无法计算. 这里正是如此.

三. 可变限情形

定理 0.3 设 $f(x, y)$ 于 $[a, b] \times [\bar{c}, \bar{d}]$ 上连续, 函数 $c(x), d(x)$ 于 $[a, b]$ 上连续, 且其值不越出区间 $[\bar{c}, \bar{d}]$, 则含参变量积分

$$F(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f(x, y) dy$$

在 $[a, b]$ 上连续.

证 任取点 $x_0 \in [a, b]$, 记 $\Delta d = d(x) - d(x_0)$, $\Delta c = c(x) - c(x_0)$, 则对 $\forall x \in [a, b]$, 有

$$\begin{aligned}
F(x) - F(x_0) &= \int_{c(x_0)+\Delta c}^{d(x_0)+\Delta d} f(x, y) dx - \int_{c(x_0)}^{d(x_0)} f(x_0, y) dy \\
&= \int_{c(x_0)}^{d(x_0)} [f(x, y) - f(x_0, y)] dx + \int_{c(x_0)+\Delta c}^{c(x_0)} f(x, y) dy \\
&\quad + \int_{d(x_0)}^{d(x_0)+\Delta d} f(x, y) dy.
\end{aligned}$$

当 $x \rightarrow x_0$ 时, 利用 $c(x), d(x)$ 连续, f 有界, 就可以推出上式右边的第二项和第三项都趋于 0. 再用定理 1, 可见右边第一项也趋于 0, 因此就证明了 F 在点 x_0 连续. \square

下面的定理将定积分中对于变动积分限求导的定理推广到更为一般的情况, 同时也将定积分中对变动积分限求导的计算公式为其特例.

定理 0.4 在上一个定理的条件下, 若又假设 $c'(x), d'(x), f_x(x, y)$ 存在且连续, 则 $F'(x)$ 也存在, 且有

$$F'(x) = \int_{c(x)}^{d(x)} f_x(x, y) dy + f(x, d(x))d'(x) - f(x, c(x))c'(x).$$

证 由于三元函数

$$\varphi(x, c, d) = \int_c^d f(x, y) dy$$

的三个偏导数

$$\varphi'_1 = \int_c^d f_x(x, y) dy, \quad \varphi'_2 = -f(x, c), \quad \varphi'_3 = f(x, d)$$

都存在且连续, 因此 $\varphi(x, c, d)$ 连续可微. 应用复合函数求导的链式法则, 从 $F(x) = \varphi(x, c(x), d(x))$ 就得到

$$F'(x) = \varphi'_1 + \varphi'_2 c' + \varphi'_3 d',$$

将前面的 $\varphi'_1, \varphi'_2, \varphi'_3$ 代入即可. \square

注 本定理的结论也可以从差商出发求极限来证明, 但上面所用的方法无疑要好一些, 此外还有一个优点, 即这样的证明与公式的实际试用时的思路一致.

例题 0.4 设 $I(y) = \int_y^{y^2} e^{-yt^2} dt$, 求 $I'(y)$.

解 用定理 4 就有

$$\begin{aligned}
I'(y) &= \int_y^{y^2} (e^{-yt^2})'_y dt + e^{-y^5} \cdot (y^2)' - e^{-y^3} \cdot (y)' \\
&= \int_y^{y^2} -t^2 e^{-yt^2} dt + 2ye^{-y^5} - e^{-y^3}. \quad \square
\end{aligned}$$

例题 0.5 设 $f(t)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续, 求证: 函数

$$x(t) = \frac{1}{\omega} \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) \, ds$$

满足常微分方程

$$\ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = f(t),$$

及初始条件 $x(0) = \dot{x}(0) = 0$. (其中采用 Newton 的记号, 将 $x(t)$ 对于 t 的一阶导数记为 $\dot{x}(t)$, 二阶导数记为 $\ddot{x}(t)$.)

证 反复用两次定理 4 就得到

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= \frac{1}{\omega} \int_0^t (f(s) \sin \omega(t-s))'_t \, ds + \frac{1}{\omega} f(t) \sin \omega(t-t) \\ &= \int_0^t f(s) \cos \omega(t-s) \, ds, \\ \ddot{x}(t) &= \int_0^t (f(s) \cos \omega(t-s))'_t \, ds + f(t) \cos \omega(t-t) \\ &= -\omega \int_0^t f(s) \sin \omega(t-s) \, ds + f(t) \\ &= -\omega^2 x(t) + f(t), \end{aligned}$$

可见 $x(t)$ 满足所说的常微分方程. 又从 $x(t), \dot{x}(t)$ 的表达式即有 $x(0) = 0, \dot{x}(0) = 0$. \square

注 此题已经在上册 p.237 做过, 除了文字符号稍有不同之外完全一样. 当时当然没有含参变量积分的概念, 更没有这里的定理 4 提供的公式. 请读者思考, 为什么当时我们也能够解决这个问题?

例题 0.6 设 f 二阶可微, F 一阶可微, 又设

$$u(x, t) = \frac{1}{2} [f(x-at) + f(x+at)] + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(y) \, dy,$$

证明: 函数 u 满足弦振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

及初始条件 $u(x, 0) = f(x), u'_t(x, 0) = F(x)$.

证 $u(x, 0) = f(x)$ 显然成立. 用定理 4 就得到

$$\begin{aligned} u'_t &= -\frac{a}{2} f'(x-at) + \frac{a}{2} f'(x+at) \\ &\quad + \frac{1}{2a} F(x+at) \cdot (x+at)'_t - \frac{1}{2a} F(x-at) \cdot (x-at)'_t \\ &= -\frac{a}{2} f'(x-at) + \frac{a}{2} f'(x+at) + \frac{1}{2} F(x+at) + \frac{1}{2} F(x-at). \end{aligned}$$

于是就有 $u'_t(x, 0) = F(x)$. 然后不难直接得到

$$u''_t = \frac{a^2}{2} f''(x-at) + \frac{a^2}{2} f''(x+at) + \frac{a}{2} F'(x+at) - \frac{a}{2} F'(x-at).$$

对 x 的一阶和二阶偏导数更为容易, 即可计算得到

$$\begin{aligned}u'_x &= \frac{1}{2}[f'(x-at) + f'(x+at)] + \frac{1}{2a}(F(x+at) - F(x-at)), \\u''_x &= \frac{1}{2}[f''(x-at) + f''(x+at)] + \frac{1}{2a}(F'(x+at) - F'(x-at)),\end{aligned}$$

可见 $u(x, t)$ 是弦振动方程的解. \square

以下我们用含参变量常义积分为工具, 对于 p.178 例 4, 即调和函数的平均值定理给出一个新的证明.

为方便起见, 将从 p.173 开始的题意重新写在这里.

调和函数的平均值定理 设 $u(x, y)$ 在闭圆 $x^2 + y^2 \leq R^2$ 上连续, 在开圆 $x^2 + y^2 < R^2$ 内满足方程 $\Delta u \equiv u_{xx} + u_{yy} = 0$, 证明

$$I = \frac{1}{2\pi r} \oint_{C_R} u(x, y) ds = u(0, 0),$$

其中 C_R 是圆周 $x^2 + y^2 = R^2$.

证 2 由题意可见, 如将 R 改为变量 $r \in (0, R]$, 就得到

$$I(r) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} u(x, y) ds = u(0, 0),$$

其中 C_r 是圆周 $x^2 + y^2 = r^2$.

按照第一类曲线积分的计算方法, 用极坐标代换, 这时有 $ds = r d\theta$, 于是得到

$$I(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta.$$

利用含参变量的常义积分性质, 可见 $I(r)$ 在 $[0, R]$ 上连续, 在 $(0, R)$ 上可导, 而且可以通过在积分号下求导来计算 $I'(r)$. 于是就有

$$I'(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) d\theta.$$

由于在圆周 C_r 上的单位外法向量 \mathbf{n} 就是 $(\cos \theta, \sin \theta)$, 将上述积分写成第一类曲线积分后, 直接用上次补充的 Green 公式的另一种形式, 就得到

$$I'(r) = \frac{1}{2\pi r} \oint_{C_r} (u_x \cos \theta + u_y \sin \theta) ds = \frac{1}{2\pi r} \iint_{D_r} (u_{xx} + u_{yy}) dx dy = 0,$$

这里 D_r 是 C_r 所包围的圆区域, 最后利用 u 为调和函数的条件.

由此可见, $I(r)$ 在 $[0, R]$ 上是常值函数, 因此 $I = I(R) = I(0) = u(0, 0)$. \square

注 1 这里所用的 Green 公式是

$$\oint_{\partial D} (P \cos \alpha + Q \cos \beta) ds = \iint_D (P_x + Q_y) dx dy,$$

其中 $(\cos \alpha, \cos \beta)$ 是 ∂D 上的单位外法向量.

注 2 另一个方法是利用方向导数概念, 看出 $u_x \cos \theta + u_y \sin \theta = \frac{\partial u}{\partial n}$, 然后直接用例题 2 (pp.175–176) 的结果, 就得到

$$\begin{aligned}
2\pi I'(r) &= \int_0^{2\pi} \frac{\partial u}{\partial n} d\theta = \frac{1}{r} \oint_{C_r} \frac{\partial u}{\partial n} ds \\
&= \frac{1}{r} \iint_{x^2+y^2 \leq r^2} (u_{xx} + u_{yy}) dx dy = 0.
\end{aligned}$$

§25.2 含参变量广义积分

这里同时需要一元积分学中的广义积分和函数项级数中的一致收敛概念. 例
如设要讨论含参变量广义积分

$$F(x) = \int_a^{+\infty} f(x, y) dy$$

在点 x_0 是否连续. 写出

$$|F(x) - F(x_0)| = \left| \int_c^{+\infty} [f(x, y) - f(x_0, y)] dy \right|$$

就可以看出不能简单地将含参变量常义积分中的方法搬到这里来. 将上式右边分拆如下

$$\begin{aligned}
|F(x) - F(x_0)| &\leq \int_c^d |f(x, y) - f(x_0, y)| dy \\
&\quad + \left| \int_d^{+\infty} f(x, y) dy \right| + \left| \int_d^{+\infty} f(x_0, y) dy \right|,
\end{aligned}$$

就可以看出, 问题在于是否可能对于给定的 $\varepsilon > 0$, 当 d 足够大时使得右边的后两项同时小于 ε , 若可能, 则再对右边第一项令 x 和 x_0 充分接近, 使得它也小于 ε .

再仔细观察右边的后两项. 第三项没有困难, 由于 $x = x_0$ 时广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x_0, y) dy$ 收敛, 因此当 d 充分大时该项可以小于事先给定的 ε . 困难在于右边的第二项, 其中的参变量 x 可以取到 x_0 的一个邻域中的任何值, 要使得这一项对于所有这些 x 都充分小, 这就需要引进含参变量广义积分的一致收敛概念.

一. 含参变量广义积分的一致收敛性

设含参变量 x 的广义积分

$$F(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$$

只含有一个奇点 $+\infty$, 且对于区间 I 上的 x 都收敛.

为了下面讨论的方便, 引入余积分 (相当于无穷级数中的余项概念): 称

$$r(x, d) = \int_d^{+\infty} f(x, y) dy$$

为余积分, 它是 x, d 的二元函数, 其中 $x \in I, d \geq c$.

定义 0.1 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists d_\varepsilon \geq c, \forall d \geq d_\varepsilon, \forall x \in I$:

$$\left| \int_d^{+\infty} f(x, y) dy \right| < \varepsilon,$$

则称以 $+\infty$ 为奇点的含参变量 x 的广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上一致收敛.

例题 0.1 证明: 以 $+\infty$ 为奇点的 $I(b) = \int_0^{+\infty} e^{-x} \sin bx^2 dx$ 在 $b \in (-\infty, +\infty)$ 上一致收敛.

证 不难直接看出对每个 b 广义积分都收敛.

为证明其一致收敛性, 可以对余积分作估计, 这样就有

$$\left| \int_d^{+\infty} e^{-x} \sin bx^2 dx \right| \leq \int_d^{+\infty} e^{-x} dx = e^{-d},$$

可见对 $\forall \varepsilon > 0$, 只要取 $d_\varepsilon > \max\{0, \ln \frac{1}{\varepsilon}\}$, 就可以对于所有 $d \geq d_\varepsilon$ 和所有 $b \in (-\infty, +\infty)$ 成立

$$\left| \int_d^{+\infty} e^{-x} \sin bx^2 dx \right| < \varepsilon. \quad \square$$

例题 0.2 证明: $F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot \frac{\sin x}{x} dx$ 在 $s \in [\lambda, M]$ 上一致收敛, 其中 $0 < \lambda < M$.

证 可看出积分对 $s > 0$ 总是收敛的. 当 $0 < \lambda \leq s \leq M$ 时, 对余积分可以估计如下:

$$\left| \int_d^{+\infty} e^{-sx} \cdot \frac{\sin x}{x} dx \right| \leq \int_d^{+\infty} e^{-sx} dx \leq \int_d^{+\infty} e^{-\lambda x} dx = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda d},$$

可见对 $\forall \varepsilon > 0$, 只要取 $d_\varepsilon > \max\{0, \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\lambda \varepsilon}\}$, 就可以对所有 $d \geq d_\varepsilon$ 和所有的 $s \in [\lambda, M]$ 成立

$$\left| \int_d^{+\infty} e^{-sx} \cdot \frac{\sin x}{x} dx \right| < \varepsilon. \quad \square$$

注 由证明可见, 实际上该题的含参变量 s 的广义积分在 $(0, +\infty)$ 中的每一个有界闭子区间上都是一致收敛的, 这就称为在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛.

同样可以给出有限奇点的含参变量广义积分的一致收敛性定义. 不妨设以 x 为参变量的有界区间上的积分

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

以下限 c 为惟一奇点, 并假设该积分对于 $x \in I$ 都收敛.

这时可以定义余积分为

$$r(x, \delta) = \int_c^{c+\delta} f(x, y) dy,$$

它是 x 和 δ 的二元函数, 其中 $x \in I$, $\delta \in (0, d - c)$.

定义 0.2 若对 $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta_\varepsilon > 0, \forall \delta \in (0, \delta_\varepsilon], \forall x \in I :$

$$\left| \int_c^{c+\delta} f(x, y) dy \right| < \varepsilon,$$

则称以 c 为奇点的含参变量 x 的广义积分 $\int_c^d f(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上一致收敛.

对于含有多个奇点的含参变量积分, 当积分在每一个奇点处都一致收敛时才称该积分一致收敛.

第 T31 次讲稿 (第三学期第 31 次)

第 T31 次讲稿, 用于 2008 年 12 月 19 日, 星期五, 2 节课.

内容: 从 p.224 例 3 开始讲含参变量的广义积分. 然后是一致收敛判别法, 再举例.

例题 0.3 证明: 积分 $\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt$ 在 $s \in (0, +\infty)$ 上内闭一致收敛.

解 有两个奇点 0 和 $+\infty$ (当 $s \geq 1$ 时只有一个奇点 $+\infty$), 将积分分拆为

$$\int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt = \int_0^1 t^{s-1} e^{-t} dt + \int_1^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt.$$

对于 $0 < \lambda \leq s \leq M$, 第一个积分的余积分可以估计如下 (其中 $0 < \delta \leq 1$):

$$\left| \int_0^\delta t^{s-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_0^\delta t^{\lambda-1} dt = \frac{1}{\lambda} \delta^\lambda,$$

从最后一式当 $\delta \rightarrow 0^+$ 时极限为 0, 可见第一个积分在 $s \in [\lambda, M]$ 上一致收敛. (注意由于 $0 \leq t \leq \delta \leq 1$, 因此当 $s \in [\lambda, M]$ 时, $e^{s-1} \leq e^{\lambda-1}$.)

对第二个积分, 利用

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^{M-1}}{e^{-t/2}} = 0,$$

因此在 $[1, +\infty)$ 上 $t^{M-1} e^{-t/2}$ 有界, 即存在 $K > 0$, 使得 $t^{M-1} e^{-t/2} \leq K \forall t \geq 1$, 于是其余积分可估计如下 (其中 $d \geq 1$):

$$\left| \int_d^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt \right| \leq \int_d^{+\infty} t^{M-1} e^{-t} dt \leq K \int_d^{+\infty} e^{-t/2} dt = 2K e^{-d/2},$$

从最后一式当 $d \rightarrow +\infty$ 时极限为 0, 可见第二个积分在 $s \in [\lambda, M]$ 上一致收敛. 合并以上讨论可知积分 $\Gamma(s)$ 在 $(0, +\infty)$ 上内闭一致收敛. \square

例题 0.4 证明例 2 的积分在 $s \in [0, +\infty)$ 上一致收敛

证 此题最好还是在讲了 Cauchy 一致收敛准则后再做. 这时顺理成章地估计在区间 $[d, d']$ ($0 < d < d'$) 上的积分. 同时利用 $\frac{1}{e^{sx}x}$ 为单调减少的非负函数, 直接用积分第二中值定理就有

$$\left| \int_d^{d'} \frac{\sin x}{e^{sx}x} dx \right| = \left| \frac{1}{e^{sd}d} \int_d^{\xi} \sin x dx \right| \leq \frac{2}{d},$$

可见结论成立. \square

例题 0.5 证明: 积分 $F(s) = \int_0^{+\infty} s e^{-sy} dy$ 在 $s \in [0, 1]$ 上不一致收敛.

证 惟一奇点是 $+\infty$. 用反证法. 设积分在 $s \in [0, 1]$ 上一致收敛, 则对 $\forall \varepsilon > 0$, $\exists d_\varepsilon, \forall d \geq d_\varepsilon, \forall s \in [0, 1]$:

$$\left| \int_d^{+\infty} s e^{-sy} dy \right| < \varepsilon.$$

若 $s = 0$ 则积分显然为 0, 而当 $s > 0$ 时可直接求出为

$$\int_d^{+\infty} s e^{-sy} dy = -e^{-sy} \Big|_{y=d}^{y \rightarrow +\infty} = e^{-sd},$$

代入前面的不等式, 并令 $s \rightarrow 0^+$, 得到 $1 \leq \varepsilon$. 这与 $\varepsilon > 0$ 可任意小相矛盾. \square

注 可以证明上述积分在 $s \in (0, 1]$ 上内闭一致收敛.

三. 一致收敛判别法

这里只讨论以 $+\infty$ 为惟一奇点的含参变量广义积分的一致收敛判别法.

定理 0.1 (Cauchy 一致收敛准则) 含参变量 x 的广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上一致收敛的充分必要条件是: 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists d_\varepsilon, \forall d, d' \geq d_\varepsilon, \forall x \in I$:

$$\left| \int_d^{d'} f(x, y) dy \right| < \varepsilon.$$

定理 0.2 (Weierstrass 判别法) 设含参变量 x 的广义积分 $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上收敛, 又设有非负函数 $F(y), y \geq c$, 使得当 $x \in I, y \geq c$ 时成立 $|f(x, y)| \leq F(y)$, 且 $\int_c^{+\infty} F(y) dy$ 收敛, 则 $\int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上一致收敛.

定理 0.3 (1) Abel 判别法 设 $u(x, y)$ 关于 y 单调, 且在 $x \in I$ 和 $y \in [c, +\infty)$ 上一致有界, 又设 $\int_c^{+\infty} v(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上一致收敛, 则 $\int_c^{+\infty} u(x, y)v(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上一致收敛.

(2) Dirichlet 判别法 设 $\int_c^{+\infty} u(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上一致收敛, $u(x, y)$ 关于 y 单调, 关于 $x \in I$ 一致收敛于 0, 又设 $\int_c^d v(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 和 $d \in [c, +\infty)$ 上一致有界, 则 $\int_c^{+\infty} u(x, y)v(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上一致收敛.

证 利用 $u(x, y)$ 关于 y 单调, 在 $c \leq d < d'$ 时在区间 $[d, d']$ 上对于积分 $\int_d^{d'} u(x, y)v(x, y) dy$ 用积分第二中值定理, 则有 $\xi \in [d, d']$, 使得成立

$$\int_d^{d'} u(x, y)v(x, y) dy = u(x, d) \int_d^\xi v(x, y) dy + u(x, d') \int_\xi^{d'} v(x, y) dy,$$

以下分别利用两个判别法的不同条件作估计.

(1) 这时有 $M > 0$, 使得 $|u(x, y)| < M \forall x \in I, \forall y \in [c, +\infty)$. 又由于 $\int_c^{+\infty} v(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上一致收敛, 根据 Cauchy 准则的必要性, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists d_\varepsilon, \forall d, d' \geq d_\varepsilon, \forall x \in I$:

$$\left| \int_d^{d'} v(x, y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

于是就可以估计得到

$$\left| \int_d^{d'} u(x, y) v(x, y) dy \right| \leq 2M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon.$$

再根据 Cauchy 准则的充分性知道 $\int_c^{+\infty} u(x, y) v(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上一致收敛.

(2) 从积分 $\int_c^d v(x, y) dy$ 在 $x \in I, d \in [c, +\infty)$ 上一致有界的条件知存在 $M > 0$, 使得对于 $\forall d \geq c, \forall x \in I$, 成立 $\left| \int_c^d v(x, y) dy \right| < M$. 于是 $\forall d, d' \geq c, \forall x \in I$, 就有

$$\left| \int_d^{d'} v(x, y) dy \right| = \left| \int_a^d v(x, y) dy - \int_a^{d'} v(x, y) dy \right| < 2M.$$

再利用 $\lim_{y \rightarrow +\infty} u(x, y) = 0$ 在 $x \in I$ 上一致成立, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists d_\varepsilon \geq c, \forall d \geq d_\varepsilon, \forall x \in I: |u(x, y)| < \frac{\varepsilon}{4M}$. 于是可以从前面的等式估计得到

$$\left| \int_d^{d'} u(x, y) v(x, y) dy \right| \leq 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4M} \cdot 2M = \varepsilon.$$

再根据 Cauchy 准则的充分性知道 $\int_c^{+\infty} u(x, y) v(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上一致收敛. \square

现在回顾上面的例 4, 可以看出, 由于广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 收敛, 且与参变量无关, 而另一个因子 e^{-sx} 在 $x \in [0, +\infty)$ 上单调减少, 且关于 $s \in [0, +\infty)$ 一致成立 $0 \leq e^{-sx} \leq 1$, 因此用 Abel 判别法就可以得到例 4 所要的结论, 记含参变量广义积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot \frac{\sin x}{x} dx$$

对于 $s \in [0, +\infty)$ 一致收敛.

其实在例 4 的解题过程中就已经用了积分第二中值定理, 因此本质上和用 Abel 判别法是相同的.

第 T32 次讲稿 (第三学期第 32 次)

第 T32 次讲稿, 用于 2008 年 12 月 24 日, 星期三, 3 节课.

内容: 结束含参变量的广义积分一节.

四. 含参变量积分的性质

定理 0.1 (连续性定理) 设 $f(x, y)$ 于 $I \times [c, +\infty)$ 上连续, 参变量 x 的广义积分 $F(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上内闭一致收敛, 则 $F \in C(I)$.

证 对于点 $x_0 \in I$, 取 I 中的一个内闭区间 I_1 ^①, 使得 $x_0, x \in I_1$. 按一致收敛的定义, 对 $\forall \varepsilon > 0, \exists d_\varepsilon > c, \forall d > d_\varepsilon, \forall x \in I_1$:

$$\left| \int_d^{+\infty} f(x, y) dy \right| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

固定这个 d , 作如下分拆 (这就是引入广义积分一致收敛的引言中的做法):

$$\begin{aligned} |F(x) - F(x_0)| &\leq \left| \int_c^d [f(x, y) - f(x_0, y)] dy \right| \\ &\quad + \left| \int_d^{+\infty} f(x, y) dy \right| + \left| \int_d^{+\infty} f(x_0, y) dy \right|, \end{aligned}$$

则当 $x \in I_1$ 时后两项分别小于 $\varepsilon/3$. 对第一项则 (如含参变量常义积分那样处理) 利用 f 在 $I_1 \times [c, d]$ 上二元连续, 存在 $\delta > 0, \forall x \in O_\delta(x_0) \cap I_1$, 使得第一项也小于 $\varepsilon/3$, 于是就成立 $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$. \square

注 对于有多个奇点的情况结论同样成立.

现在重新回顾 p.226 的例 5. 即要证明积分 $F(s) = \int_0^{+\infty} se^{-sy} dy$ 在 $s \in [0, 1]$ 上不一致收敛.

实际上可以直接求出 $F(0) = 0$, 而在 $0 < s \leq 1$ 时

$$F(s) = -e^{-sy} \Big|_{y=0}^{y=+\infty} = 1,$$

可见 $F(s)$ 在 $[0, 1]$ 上有间断点, 因此根据连续性定理知道积分 $\int_0^{+\infty} se^{-sy} dy$ 对于 $s \in [0, 1]$ 不一致收敛.

定理 0.2 (积分顺序交换定理) 在定理 1 的条件下, 若区间 $I = [a, b]$, 则

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

① 若 I 本身已是有界闭区间, 则取 $I_1 = I$. 又若 x_0 为 I 的内点, 则也应当使得 x_0 是 I_1 的内点, 这样才能最后得到 F 在点 x_0 双侧连续.

证 任取 $d > c$, 记 $F_d(x) = \int_c^d f(x, y) dy$, 则有

$$\int_a^b F_d(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y) dx.$$

写出

$$|F_d(x) - F(x)| = \left| \int_c^d f - \int_c^{+\infty} f \right| = \left| \int_d^{+\infty} f \right|,$$

可见定理中的一致收敛条件就是 $F_d(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛于 $F(x)$. 令 $d \rightarrow +\infty$, 这样就有

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} \int_a^b F_d(x) dx = \int_a^b F(x) dx.$$

(这与第十四章中一致收敛函数列的积分极限定理完全相同 (见上册 p.364), 只是当时的自变量是离散的正整数 n , 其余无差别.) 这样就得到所要求证的

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b dx \int_c^{+\infty} f(x, y) dy = \int_c^{+\infty} dy \int_a^b f(x, y) dx. \quad \square$$

注 注意同时就证明了上式右边的广义极限收敛, 也就是证明了作为 y 的函数 $\int_a^b f(x, y) dx$ 在 $[c, +\infty)$ 上广义可积. \square

定理 0.3 (求导与积分交换定理) 设二元函数 $f(x, y)$ 及其偏导函数 $f'_x(x, y)$ 在 $I \times [c, +\infty)$ 上连续, 积分 $\int_c^{+\infty} f_x(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上内闭一致收敛, 又存在点 $x_0 \in I$ 使得积分 $\int_c^{+\infty} f(x_0, y) dy$ 收敛, 则 $F(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 $x \in I$ 上内闭一致收敛, 在 I 上可微, 且有

$$F'(x) = \int_c^{+\infty} f_x(x, y) dy.$$

证 先证积分 $F(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在区间 I 上有定义, 且内闭一致收敛.

任取一个内闭区间 $I_1 \subset I$, 且不妨设已经有 $x_0 \in I_1$. 然后来证明 $F(x)$ 对于 $x \in I_1$ 一致收敛.

对于 $[d, d'] \subset [c, +\infty)$ 和 I_1 , 有

$$\begin{aligned} \left| \int_d^{d'} f(x, y) dy \right| &= \left| \int_d^{d'} [f(x_0, y) + \int_{x_0}^x f_x(t, y) dt] dy \right| \\ &\leq \left| \int_d^{d'} f(x_0, y) dy \right| + \left| \int_{x_0}^x dt \int_d^{d'} f_x(t, y) dy \right|, \end{aligned}$$

(其中最后一式的第二项是通过交换积分顺序得到的.) 利用 $F(x_0)$ 有定义和 $\int_c^{+\infty} f_x(x, y) dy$ 在 I_1 上一致收敛, 对 $\varepsilon > 0$, $\exists d_\varepsilon, \forall d, d' > d_\varepsilon$, 同时成立

$$\left| \int_d^{d'} f(x_0, y) dy \right| < \varepsilon, \quad \left| \int_d^{d'} f_x(t, y) dy \right| < \varepsilon \quad \forall t \in I_1,$$

从而就有

$$\left| \int_d^{d'} f(x, y) dy \right| < (1 + |x - x_0|)\varepsilon \leq (1 + |I_1|)\varepsilon,$$

根据 Cauchy 准则, 可见 $F(x) = \int_c^{+\infty} f(x, y) dy$ 在 I 处处有定义, 且内闭一致收敛.

为研究 F 的可导性, 任取 $x_1, x \in I$, 对增量 $\Delta F = F(x) - F(x_1)$ 有:

$$\begin{aligned} \Delta F &= \int_c^{+\infty} [f(x, y) - f(x_1, y)] dy \\ &= \int_c^{+\infty} dy \int_{x_1}^x f_x(t, y) dt \\ &= \int_{x_1}^x dt \int_c^{+\infty} f_x(t, y) dy. \end{aligned}$$

这里利用了 $\int_c^{+\infty} f_x(t, y) dy$ 在 I 中内闭一致收敛的条件和上一个关于积分顺序的交换定理.

利用前面的连续性定理, 函数

$$\varphi(t) = \int_c^{+\infty} f_x(t, y) dy, \quad t \in I,$$

在 I 上连续, 因此就有

$$\begin{aligned} F'(x_1) &= \lim_{x \rightarrow x_1} \frac{F(x) - F(x_1)}{x - x_1} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\int_{x_1}^{x_1 + \Delta x} \varphi(t) dt}{\Delta x} = \varphi(x_1) = \int_c^{+\infty} f_x(x_1, y) dy. \end{aligned}$$

由于 $x_1 \in I$ 的任意性, 证毕. \square

(下一题改写.)

例题 0.6 设法用含参变量积分的方法计算 Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$.

解 1 第一个问题是如何引入参变量.

若考虑 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin \alpha x}{x} dx$, 则虽然有 $\left(\frac{\sin \alpha x}{x} \right)'_{\alpha} = \cos \alpha x$, 但 $\int_0^{+\infty} \cos \alpha x dx$ 发散.

因此采用前面例 2.4 中的积分, 记考虑

$$F(s) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \frac{\sin x}{x} dx, \quad s \geq 0,$$

然后用积分号下求导的方法在 $s > 0$ 时求 $F'(s)$, 并求出 $F(s)$, 最后得到所要求的 $F(0)$. 这里的要害是引入了改进收敛情况的因子 e^{-sx} . 这种方法常称为收敛因子方法.

从例 4 和定理 1 知道 $F(s)$ 在 $s \geq 0$ 有定义且连续. 若允许在积分号下求导, 则就有

$$F'(s) = \int_0^{+\infty} \left(e^{-sx} \frac{\sin x}{x} \right)'_s dx = \int_0^{+\infty} -e^{-sx} \sin x dx = -\frac{1}{1+s^2}. \quad ①$$

于是可从 $F'(s) = -\frac{1}{1+s^2}$, $s > 0$ 求出

$$F(s) = -\arctan s + C,$$

其中 C 是待定常数.

从 $F(s)$ 的表达式可以估计出 $|F(s)| \leq \int_0^{+\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{s}$, 因此有 $F(+\infty) = 0$. 可见上述常数 $C = \frac{\pi}{2}$. 这样就确定了 $s > 0$ 时函数 $F(s)$ 的表达式.

最后从 $F(s)$ 于 $s = 0$ 右连续可以推出

$$F(0) = \lim_{s \rightarrow 0^+} F(s) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \left(-\arctan s + \frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2},$$

这样就求出了 Dirichlet 积分的值为

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}.$$

余下的问题是要验证上述求导运算的合理性.

根据定理 3, 只要验证含参变量积分 $\int_0^{+\infty} -e^{-sx} \sin x dx$ 在 $s > 0$ 上是否是内闭一致收敛.

实际上对 $\forall \delta > 0$, 当 $s \geq \delta$ 时, 从余积分的估计有

$$\left| \int_d^{+\infty} -e^{-sx} \sin x dx \right| \leq \int_d^{+\infty} e^{-\delta x} dx = \frac{1}{\delta} e^{-\delta d},$$

可见当 d 充分大时左边的余积分就可小于事先给定的 $\varepsilon > 0$, 这已可推出积分 $\int_0^{+\infty} -e^{-sx} \sin x dx$ 在 $s \in (0, +\infty)$ 上内闭一致收敛. \square

注 对于类似的问题, 即用含参变量方法计算某些积分, 经常将验证这一步放到最后. 这是因为所设计的解题过程事先不知道是否能够成功. 只有成功时才需要去验证中间过程是否合理.

解 2 Dirichlet 积分有多种计算方法. 下面的方法仍然依赖于收敛因子, 但参变量与解 1 不同. 这就是考虑二元函数

$$J(s, a) = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \cdot \frac{\sin ax}{x} dx,$$

其中 $s \geq 0, a \geq 0$.

固定 $s > 0$, 以 a 为参变量, 则可以用 e^{-sx} 为优势函数, 从而用 Weierstrass 判别法知道积分对 $a \geq 0$ 一致收敛, 因此 $J(s, a)$ 对 $a \geq 0$ 连续.

① 这个积分的计算见上册 p.249 的练习题 1(1). 除了用分部积分法之外还可以用复数计算方法:

$$\int_0^{+\infty} e^{-sx} \sin x dx = \operatorname{Im} \int_0^{+\infty} e^{(-s+i)x} dx = \operatorname{Im} \frac{1}{s-i} = \frac{1}{s^2+1}.$$

又可见 $J(s, a)$ 对 a 可求偏导数如下:

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \int_0^{+\infty} e^{-sx} \sin ax \, dx.$$

这里只要对右边的积分再用 e^{-sx} 为优势函数就知道它也对 $s \geq 0$ 一致收敛. 上式右边的积分可以计算出来, 这样得到

$$\frac{\partial J}{\partial a} = \frac{s}{s^2 + a^2}, \quad a \geq 0,$$

于是就可以求出当 $s > 0, a \geq 0$ 时的表达式:

$$J(s, a) = \int_0^a \frac{s \, dt}{s^2 + t^2} = \arctan \frac{t}{s} \Big|_{t=0}^{t=a} = \arctan \frac{a}{s},$$

现在改变观点, 固定 $a > 0$ 时将 s 作为参变量, 则与例 4 一样知道广义积分在 $s \geq 0$ 上一致收敛, 因此连续. 于是有

$$J(0, a) = \lim_{s \rightarrow 0^+} \arctan \frac{a}{s} = \frac{\pi}{2},$$

而所求的 Dirichlet 积分就是 $J(0, 1) = \frac{\pi}{2}$. \square

五. 进一步的例子

下面一个例子没有新东西. 只是积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \, dx$ 还没有讲. 需要补充. 记

$$I(R) = \int_0^R e^{-x^2} \, dx. \text{ 我们的问题是要求 } I(+\infty).$$

利用二重积分知识有

$$I(R)^2 = \int_0^R e^{-x^2} \, dx \int_0^R e^{-y^2} \, dy = \iint_{[0, R; 0, R]} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy.$$

然后用两个 $1/4$ 圆, 即

$$C_1 = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

$$C_2 = \{(r, \theta) \mid 0 \leq r \leq \sqrt{2}R, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}\},$$

将正方形 $[0, R; 0, R]$ 夹在中间, 于是就有

$$\iint_{C_1} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy \leq I(R)^2 \leq \iint_{C_2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy.$$

可以看出两边的两个二重积分都是容易计算出来的:

$$\iint_{C_1} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^R r e^{-r^2} \, dr = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^R = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}),$$

$$\iint_{C_2} e^{-(x^2+y^2)} \, dx \, dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\sqrt{2}R} r e^{-r^2} \, dr = \frac{\pi}{2} \left(-\frac{1}{2} e^{-r^2} \right) \Big|_0^{\sqrt{2}R} = \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}),$$

于是就有夹逼关系:

$$\frac{\pi}{4} (1 - e^{-R^2}) \leq I(R)^2 \leq \frac{\pi}{4} (1 - e^{-2R^2}),$$

最后令 $R \rightarrow +\infty$, 得到 $I(+\infty)^2 = \frac{\pi}{4}$. 因此就得到

$$I(+\infty) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \quad \square$$

注 这在概率统计中是不可缺少的积分, 因此称为概率积分比较合适. 当然还有其他常用形式, 例如

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}, \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = 1,$$

最后一式就是说标准正态分布的密度函数为 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$.

计算概率积分的方法很多. 例如《数学分析习题课讲义》上册的例题 12.3.7. 在目前用的教科书中是 p.151 的例 1, 作为广义重积分的第一个例子. 所用的方法与上面完全相同. 此外, 还在 p.286 另有一个解法.

例题 0.7 求积分 $\varphi(b) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2} \cos 2bx dx$.

解 从 Weierstrass 判别法可见积分在 $b \in (-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 从定理 1 知道 $\varphi \in C(\mathbb{R})$. 若能够在积分号下求导, 就有

$$\begin{aligned} \varphi'(b) &= \int_0^{+\infty} -2xe^{-x^2} \sin 2bx dx \\ &= e^{-x^2} \sin 2bx \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2be^{-x^2} \cos 2bx dx = -2b\varphi(b), \end{aligned}$$

这样就得到一阶常微分方程. 可以积分得到其通解为 $\varphi(b) = Ce^{-b^2}$. 利用已知 $\varphi(0) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 因此最后得到 $\varphi(b) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-b^2}$.

余下的问题就是验证上述在积分号下求导运算的合理性. 从

$$|-2xe^{-x^2} \sin 2bx| \leq 2xe^{-x^2},$$

由于 $\int_0^{+\infty} 2xe^{-x^2} dx$ 收敛, 根据 Weierstrass 判别法可见积分号下求导得到的积分在 $b \in (-\infty, +\infty)$ 上一致收敛, 因此映射运算是合理的. \square

例题 0.8 证明: $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$ 在包含 0 的任何开区间上不一致收敛.

证 由于已知 $t = 1$ 时有 $F(1) = \frac{\pi}{2}$, 因此就可以通过变量代换直接求出

$$F(t) = \frac{\pi}{2} \operatorname{sgn}(t).$$

即函数 F 在点 $t = 0$ 处有跳跃点. 根据定理 1 可见结论成立. \square

例题 0.9 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx$, 其中设 $0 < \alpha < \beta < +\infty$.

解 1 由于被积函数可以写为积分

$$\frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} = \int_{\alpha}^{\beta} \sin tx dt,$$

因此就有

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{x} \int_\alpha^\beta \sin tx \, dt.$$

若右边的积分顺序可交换, 并利用上一个例题的结论, 则就有

$$I = \int_\alpha^\beta dt \int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx = \frac{\pi}{2}(\beta - \alpha).$$

余下的问题是证明上述积分顺序交换的合理性. 根据定理 2, 只要证明以 t 为参变量的广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin tx}{x} dx$ 在 $t \in [\alpha, \beta]$ 上一致收敛.

为此只要用 Dirichlet 判别法, 由于 $0 < \alpha < \beta < +\infty$, 因此在 $t \in [\alpha, \beta]$ 时就有

$$\left| \int_0^d \sin tx \, dx \right| = \left| \left(-\frac{\cos tx}{t} \right) \Big|_{x=0}^{x=d} \right| \leq \frac{2}{t} \leq \frac{2}{\alpha},$$

而另一个因子 $\frac{1}{x}$ 当 $x \rightarrow +\infty$ 时单调收敛于 0, 且与 t 无关, 可见结论成立. \square

解 2 将 $\alpha > 0$ 作为参变量, 定义

$$\varphi(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} dx,$$

若可以在积分号下求导, 则就有

$$\varphi'(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial \alpha} \left(\frac{\cos \alpha x - \cos \beta x}{x^2} \right) dx = \int_0^{+\infty} -\frac{\sin \alpha x}{x} dx = -\frac{\pi}{2},$$

于是 $\varphi(\alpha) = -\frac{\pi\alpha}{2} + C$. 利用 $\varphi(\beta) = 0$ 可确定 $C = \frac{\pi\beta}{2}$.

余下的问题是验证上述在积分号下求导的合理性. 这与解 1 中相同. \square

更为复杂的问题是二个无穷限积分的顺序交换的合理性问题. 教科书中举出了两个定理. 其中定理 4 是经典定理, 不难证明, 但在很多问题中难以直接应用, 需要其他技巧的配合. 定理 5 是新结果, 但要在 Lebesgue 积分的框架内来证明 (见 p.289), 不准备讲了. 对 p.234 的例 10 看学期最后有时间的话再说.

第 T33 次讲稿 (第三学期第 33 次)

第 T33 次讲稿, 用于 2008 年 12 月 26 日, 星期五, 2 节课.

内容: Beta 函数与 Gamma 函数.

§25.4 B 函数和 Γ 函数

一. 定义与基本公式

B 函数和 Γ 函数的定义为

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx, \quad p > 0, q > 0;$$

$$\Gamma(s) = \int_0^{+\infty} t^{s-1} e^{-t} dt, \quad s > 0.$$

用内闭一致收敛性和连续性定理知道这两个函数在它们的定义域上都是连续函数. (从 p.227 第一行的练习题的结论知道 B 函数在其定义域上连续, 从 §.2 例 3 知道 Γ 函数在其定义域上连续.)

Gamma 函数 $\Gamma(s)$ 的图像如下. 其中在 $s < 0$ 部分是根据下面的递推公式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 延拓得到的.

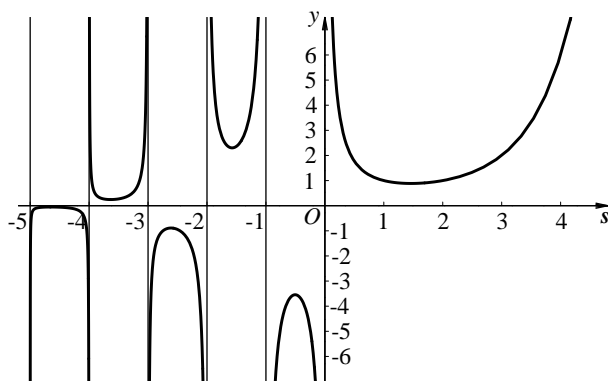


图 1: Gamma 函数 $y = \Gamma(s)$ 的图像

例题 0.1 求 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$.

解 写出 $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^{+\infty} t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^{+\infty} e^{-t} dt^{\frac{1}{2}}$, 作代换 $\sqrt{t} = u$, 就有

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}. \quad \square$$

下面的定理集中了 B 函数和 Γ 函数的最常用公式.

定理 0.1 (1) 对称性: $B(p, q) = B(q, p)$;

(2) 递推公式: $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$, $s > 0$, 特别有 $\Gamma(n+1) = n!$ (Γ 函数是阶乘的推广);

(3) B 函数与 Γ 函数的联系: $B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$, $p > 0, q > 0$;

(4) 余元公式: $\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}$, $0 < s < 1$;

(5) Legendre 加倍公式: $\Gamma(s)\Gamma\left(s + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{2^{2s-1}} \Gamma(2s)$.

证 (1) 在 $B(p, q)$ 的积分定义中用代换 $t = 1 - x$ 即可.

(2) 用分部积分法, 当 $s > 0$ 时有

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} t^s d(-e^{-t}) = -t^s e^{-t} \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} dt^s = s\Gamma(s).$$

直接可从定义得到 $\Gamma(1) = 1$, 于是有 $\Gamma(2) = 1\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(3) = 2\Gamma(2) = 2$, 即可从数学归纳法得到 $\Gamma(n+1) = n!$.

(3) 从 $\Gamma(p)\Gamma(q)$ 开始将这个乘积看成为二次积分, 然后转化为二重积分再用代换:

$$\begin{aligned} \Gamma(p)\Gamma(q) &= \int_0^{+\infty} t^{p-1} e^{-t} dt \int_0^{+\infty} u^{q-1} e^{-u} du \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^{p-1} u^{q-1} e^{-(t+u)} dt du. \end{aligned}$$

作代换 $t = x(1-y)$, $u = xy$, 它将区域 $t > 0, u > 0$ 变换为 $x > 0, 0 < y < 1$. 计算该代换的 Jacobi 行列式得到

$$\frac{\partial(t, u)}{\partial(x, y)} = \begin{vmatrix} 1-y & -x \\ y & x \end{vmatrix} = x,$$

这样就得到

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^1 dy \int_0^{+\infty} x^{p+q-1} e^{-x} y^{q-1} (1-y)^{p-1} dx = B(p, q)\Gamma(p+q).$$

(4) 利用 (3) 的余元公式就有

$$\begin{aligned} \Gamma(s)\Gamma(1-s) &= B(s, 1-s) = \int_0^1 x^{s-1} (1-x)^{-s} dx \\ &= \int_0^1 \left(\frac{x}{1-x}\right)^s \frac{dx}{x}. \end{aligned}$$

作代换 $t = x/(1-x)$, 则 $x = t/(1+t)$, $dx = \frac{dt}{(1+t)^2}$, 代入就有

$$\Gamma(s)\Gamma(1-s) = \int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{1+t} dt.$$

可以证明最后一个积分的值为 $\frac{\pi}{\sin \pi s}$. 由于这里需要较多的预备知识, 从略. 读者可以参看《数学分析习题课讲义》下册 p.302 的命题 23.3.3, 其中列举了三个证明, 其中所用到的知识都可在该书找到.

(5) 利用例 1 可以将 Legendre 公式改写为 $\frac{\Gamma(s)\Gamma(s)}{\Gamma(2s)} = \frac{1}{2^{2s-1}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(s)}{\Gamma(s+\frac{1}{2})}$,

也就是 $B(s, s) = \frac{1}{2^{2s-1}} B(\frac{1}{2}, s)$. 这可以证明如下.

写出 $B(s, s) = \int_0^1 x^{s-1}(1-x)^{s-1} dx$, 利用被积函数关于 $x = \frac{1}{2}$ 为偶函数, 因此有

$$\begin{aligned} B(s, s) &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} [x(1-x)]^{s-1} dx \\ &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left[\left(\frac{1}{2} \right)^2 - \left(x - \frac{1}{2} \right)^2 \right]^{s-1} dx = \frac{1}{2^{2s-1}} B\left(\frac{1}{2}, s\right). \end{aligned}$$

用代换 $u = 4(x - \frac{1}{2})^2$, 得到

$$B(s, s) = \frac{2}{2^{2s}} \int_0^1 (1-u)^{s-1} u^{-\frac{1}{2}} du. \quad \square$$

注 如前所说, 在图 1 中的 $\Gamma(s)$ 在 $s < 0$ 时是通过公式 $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ 延拓得到的. 例如从 $\Gamma(-\frac{1}{2}+1) = -\frac{1}{2}\Gamma(-\frac{1}{2})$, 就有

$$\Gamma(-\frac{1}{2}) = -2\Gamma(\frac{1}{2}) = -2\sqrt{\pi} \approx -3.545.$$

例题 0.2 求 $I = \int_0^1 x^5 \sqrt{1-x^3} dx$.

解 可以看出用 $x^3 = t$ 即可得到

$$I = \frac{1}{3} = \int_0^1 t(1-t)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{3} B(2, \frac{3}{2}).$$

利用 B 函数与 Γ 函数的联系就有

$$I = \frac{1}{3} \cdot \frac{\Gamma(2)\Gamma(\frac{3}{2})}{\Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{1}{3} \cdot \frac{\frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})}{\frac{5}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \Gamma(\frac{1}{2})} = \frac{4}{45}. \quad \square$$

例题 0.3 求 $I = \int_0^{+\infty} e^{-x^3} dx$.

解 作代换 $t = x^3$ 得到

$$I = \frac{1}{3} \int_0^{+\infty} t^{-\frac{2}{3}} e^{-t} dt = \frac{1}{3} \Gamma(\frac{1}{3}). \quad \square$$

例题 0.4 求 $I_{\alpha, \beta} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^\alpha \theta \cos^\beta \theta d\theta$.

解 对于可能的奇点 $\theta = 0$, 利用 $\sin \theta \sim \theta$ ($\theta \rightarrow 0$) 可见收敛的条件为 $\alpha > -1$, 同样对于可能的奇点 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 得到收敛条件为 $\beta > -1$.

在被积表达式中先分出 $\sin \theta \cos \theta d\theta = \frac{1}{2} d\sin^2 \theta$, 作代换 $x = \sin^2 \theta$, 就有

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,\beta} &= \frac{1}{2} \int_0^1 x^{\frac{\alpha-1}{2}} (1-x)^{\frac{\beta-1}{2}} dx \\
&= \frac{1}{2} B\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+1}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{\alpha+1}{2}) \Gamma(\frac{\beta+1}{2})}{\Gamma(\frac{\alpha+\beta}{2} + 1)}. \quad \square
\end{aligned}$$

注 若 α, β 中有一个为 0, 另一个为正整数, 则就得到过去熟知的公式:

$$I_{2n,0} = I_{0,2n} = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \cdot \frac{\pi}{2}, \quad I_{2n-1,0} = I_{0,2n-1} = \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

例题 0.5 求 $I_{\alpha,\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t)^\beta} dt$.

解 首先确定使广义积分收敛的参数范围. 对于奇点 0, 由于被积函数 $f(t) \sim t^\alpha$ ($t \rightarrow 0^+$), 收敛的条件是 $\alpha > -1$. 对于奇点 $+\infty$, $f(t) \sim t^{\alpha-\beta}$, 因此收敛条件是 $\beta - \alpha > 1$.

作代换 $u = \frac{t}{1+t}$, $du = \frac{dt}{(1+t)^2}$. 当 t 从 0 趋于 $+\infty$ 时, u 从 0 趋于 1. 于是就得到

$$\begin{aligned}
I_{\alpha,\beta} &= \int_0^1 u^\alpha (1-u)^{\beta-\alpha-2} du \\
&= B(\alpha+1, \beta-\alpha-1) = \frac{\Gamma(\alpha+1) \Gamma(\beta-\alpha-1)}{\Gamma(\beta)}.
\end{aligned}$$

特别当 $\alpha = s-1$, $\beta = 1$, $0 < s < 1$ 时就得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{1+t} dt = \Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}. \quad \square$$

例题 0.6 证明: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$.

证 只要用代换 $x^4 = t$, 就有 $4x^3 dx = dt$, 于是有

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \frac{1}{16} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{4}} dt \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{4}} dt \\
&= \frac{1}{16} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\
&= \frac{1}{16} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2}) \Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})} = \frac{\pi}{4}.
\end{aligned}$$

补充例题 从余元公式可以得到 $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^n}$ 当 $n > 1$ 时的一般公式. 平时经常见到的是

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \\
 I_3 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \\
 I_4 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \\
 I_6 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}.
 \end{aligned}$$

此外, 从下列证明可见在 I_n 中的 n 对大于 1 的任意实数都成立.

解 为此作代换 $x^n = t$, $nx^{n-1}dx = dt$, 就有

$$\begin{aligned}
 I_n &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{t^{\frac{1}{n}-1}}{1+t} dt = \frac{1}{n} B\left(\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right) \\
 &= \frac{1}{n} \Gamma\left(\frac{1}{n}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{n}}. \quad \square
 \end{aligned}$$

三. 当 $s \rightarrow +\infty$ 时 $\Gamma(s)$ 的性态

这就是将过去关于阶乘的 Stirling 公式推广到 Γ 函数, 得到同名的公式.

定理 0.2 (Stirling 公式) 对于 Γ 函数有 $\Gamma(s+1) \sim \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{2\pi s}$ ($s \rightarrow +\infty$).

分析 下面介绍的方法称为 Laplace 方法, 它可以解决许多含参变量积分的渐近性态的分析问题^①.

首先从表达式

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx$$

可以看出非负的被积函数于 $x = s$ 处达到最大值, 因此在该点附近的函数值对于积分作出最大的贡献 (见图 2).



图 2: 积分 $\Gamma(s+1)$ 的被积函数

由于这个最大值点的位置与参数 s 直接有关, 分析起来不方便, 我们作代换 $t = \frac{x}{s}$, 这样就得到

$$\Gamma(s+1) = s^{s+1} \int_0^{+\infty} e^{-s(t-\ln t)} dt.$$

记 $f(t) = t - \ln t$, 则 f 在 $t = 1$ 处达到最大值 1. 与前面一样, 对于大参数 s 来说, 只要 t 离开 1 时被积函数就迅速下降, 因此在 $t = 1$ 邻近的被积函数对积分作出最大贡献.

^① 这种方法又是复域中的鞍点法或最速下降法的特例. 此外这里还只是介绍如何获得渐近展开式的第一项.

写出 f 在 $t = 1$ 的 Taylor 展开式, 并只写到二次项, 就有

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2}(t-1)^2 + O_3,$$

将它代入积分中, 略去上述展开式中未写出的项, 就近似地有

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= s^{s+1}e^{-s} \int_0^{+\infty} e^{-s(t-\ln t-1)} dt \\ &\approx s^{s+1}e^{-s} \int_{1-\delta}^{1+\delta} e^{-\frac{s(t-1)^2}{2}} dt,\end{aligned}$$

这里最后将积分集中到点 $t = 1$ 的一个 δ 邻域上 ($\delta > 0$), 因为可以证明, 对大参数 s 来说, 在邻域 $O_\delta(1)$ 外的积分可忽略不计.

根据同样的理由, 又将积分限扩大为 $(-\infty, +\infty)$, 这样做的影响对于大参数也非常小, 于是就有

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &\approx s^{s+1}e^{-s} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{s(t-1)^2}{2}} dt \\ &= s^{s+1}e^{-s} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{st^2}{2}} dt \\ &= s^{s+1}e^{-s} \sqrt{\frac{2\pi}{s}} \\ &= \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{2\pi s},\end{aligned}$$

这样就得到了所求的 Stirling 公式 (最后一步用概率积分 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$). 问题就是要证明最后的表达式恰好是当 $s \rightarrow +\infty$ 时的 $\Gamma(s+1)$ 的等价无穷大.

证 从以上分析即可写出

$$I(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s^s e^{-s} \sqrt{s}} = \sqrt{s} \int_0^{+\infty} e^{-s(t-\ln t-1)} dt,$$

余下的问题只是要证明

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} I(s) = \sqrt{2\pi}.$$

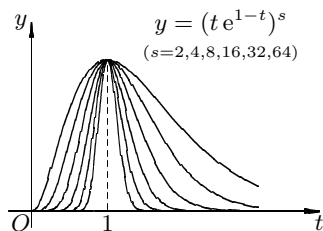


图 3: $\varphi(t)^s$ 的图像

将 $I(s)$ 的积分号下的被积函数写为 $\varphi(t)^s$, 其中

$$\varphi(t) = e^{-(t-\ln t-1)} = te^{1-t},$$

则可见函数 φ 在 $t \in [0, 1]$ 上严格单调增加, 在 $t \in [1, +\infty)$ 上严格单调减少.

如图 3 所示, $\varphi(t)^s$ 的图像下的面积随着 s 增大而越来越小. 我们要证明当 $s \rightarrow +\infty$ 时其面积值与 $\sqrt{2\pi}/\sqrt{s}$ 为等价无穷小量.

取充分小的 $\delta > 0$ (目前还没有取定), 将 $I(s)$ 按照其中积分的积分范围分拆为三项:

$$I(s) = \sqrt{s} \int_0^{1-\delta} (te^{1-t})^s dt + \sqrt{s} \int_{1-\delta}^{1+\delta} (te^{1-t})^s dt + \sqrt{s} \int_{1+\delta}^{+\infty} (te^{1-t})^s dt,$$

并在下面分别记为 $I_1(s), I_2(s), I_3(s)$.

对于 $I_1(s)$, 由于在 $[0, 1-\delta]$ 上 $\varphi(t) \leq \varphi(1-\delta) < 1$, 因此可估计为:

$$I_1(s) \leq \sqrt{s} \varphi(1-\delta)^s,$$

这样就得到 $\lim_{s \rightarrow +\infty} I_1(s) = 0$.

对于 $I_3(s)$, 由于在 $[1+\delta, +\infty)$ 上 $\varphi(t) \leq \varphi(1+\delta) < 1$, 因此可估计为:

$$I_3(s) = \sqrt{s} \int_{1+\delta}^{+\infty} (te^{1-t})^s dt \leq \sqrt{s} \varphi(1+\delta)^{s-1} \int_{1+\delta}^{+\infty} \varphi(t) dt,$$

由于最后一个广义积分收敛, 因此也有 $\lim_{s \rightarrow +\infty} I_3(s) = 0$.

现在来处理余下的主要部分 $I_2(s)$.

利用在 $t = 1$ 处展开的 Taylor 公式

$$t - \ln t - 1 = \frac{1}{2}(t-1)^2 + o((t-1)^2) \quad (t \rightarrow 1),$$

也就是有极限

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \ln t - 1}{(t-1)^2} = \frac{1}{2}.$$

因此对于 $\eta > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|t-1| < \delta$ 时成立不等式

$$\left(\frac{1}{2} - \eta\right)(t-1)^2 < t - \ln t - 1 < \left(\frac{1}{2} + \eta\right)(t-1)^2.$$

这样就可以得到关于 $I_2(s)$ 的不等式如下 (其中积分变量作了平移后仍记为 t):

$$\sqrt{s} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-st^2(\frac{1}{2}+\eta)} dt \leq I_2(s) \leq \sqrt{s} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-st^2(\frac{1}{2}+\eta)} dt.$$

利用概率积分可知当 $s \rightarrow +\infty$ 时上式的左右两边分别收敛于 $\sqrt{\frac{\pi}{1/2+\eta}}$ 和 $\sqrt{\frac{\pi}{1/2-\eta}}$.

现在综合以上讨论如下: 对 $\forall \varepsilon > 0$, 先取 $\eta > 0$, 使得满足

$$\sqrt{2\pi} - \frac{1}{6}\varepsilon < \sqrt{\frac{\pi}{1/2+\eta}} < \sqrt{\frac{\pi}{1/2-\eta}} < \sqrt{2\pi} + \frac{1}{6}\varepsilon,$$

由此确定 $\delta > 0$, 使得当 $|t-1| < \delta$ 时成立不等式

$$\left(\frac{1}{2} - \eta\right)(t-1)^2 < t - \ln t - 1 < \left(\frac{1}{2} + \eta\right)(t-1)^2.$$

然后确定 M , 使得当 $s > M$ 时, 同时成立

$$|I_1(s)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_3(s)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

且成立

$$\begin{aligned}\sqrt{\frac{\pi}{1/2+\eta}} - \frac{1}{6}\varepsilon &< \sqrt{s} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-st^2(\frac{1}{2}+\eta)} dt \leq I_2(s) \\ &\leq \sqrt{s} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-st^2(\frac{1}{2}+\eta)} dt < \sqrt{\frac{\pi}{1/2-\eta}} + \frac{1}{6}\varepsilon,\end{aligned}$$

从而就成立

$$|I_2(s) - \sqrt{2\pi}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当 $s > M$ 时就成立

$$|I(s) - \sqrt{2\pi}| \leq |I_1(s)| + |I_2(s) - \sqrt{2\pi}| + |I_3(s)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad \square$$

第 T34 次讲稿 (第三学期第 34 次)

第 T34 次讲稿, 用于 2008 年 12 月 31 日, 星期三, 3 节课.

内容: 结束本学期课程. 其中包括 Stirling 公式的 Laplace 方法证明, 然后讲两个例题: Laplace 积分与 Fresnel 积分.

例题 0.5 求 $I_{\alpha,\beta} = \int_0^{+\infty} \frac{t^\alpha}{(1+t)^\beta} dt$.

解 首先确定使广义积分收敛的参数范围. 对于奇点 0, 由于被积函数 $f(t) \sim t^\alpha$ ($t \rightarrow 0^+$), 收敛的条件是 $\alpha > -1$. 对于奇点 $+\infty$, $f(t) \sim t^{\alpha-\beta}$, 因此收敛条件是 $\beta - \alpha > 1$.

作代换 $u = \frac{t}{1+t}$, $du = \frac{dt}{(1+t)^2}$. 当 t 从 0 趋于 $+\infty$ 时, u 从 0 趋于 1. 于是就得到

$$\begin{aligned} I_{\alpha,\beta} &= \int_0^1 u^\alpha (1-u)^{\beta-\alpha-2} du \\ &= B(\alpha+1, \beta-\alpha-1) = \frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta-\alpha-1)}{\Gamma(\beta)}. \quad \square \end{aligned}$$

注 特别当 $\alpha = s-1$, $\beta = 1$, $0 < s < 1$ 时就得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{t^{s-1}}{1+t} dt = \Gamma(s)\Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s}.$$

例题 0.6 证明: $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} = \frac{\pi}{4}$.

证 只要用代换 $x^4 = t$, 就有 $4x^3 dx = dt$, 于是有

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^4}} \int_0^1 \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^4}} &= \frac{1}{16} \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{3}{4}} dt \int_0^1 (1-t)^{-\frac{1}{2}} t^{-\frac{1}{4}} dt \\ &= \frac{1}{16} B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right) B\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right) \\ &= \frac{1}{16} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{1}{4})}{\Gamma(\frac{3}{4})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(\frac{3}{4})}{\Gamma(\frac{5}{4})} = \frac{\pi}{4}. \end{aligned}$$

补充例题 从余元公式可以得到 $I_a = \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^a}$ 当 a 为大于 1 的任意实数时的一般公式. 平时经常见到的是 a 为正整数的以下几个积分:

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}, \\ I_3 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}, \\ I_4 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}, \\ I_6 &= \int_0^{+\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{\pi}{3}. \end{aligned}$$

解 为此作代换 $x^a = t$, $ax^{a-1} dx = dt$, 就有 (见例题 5 的注):

$$\begin{aligned} I_a &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{a} \cdot \frac{t^{\frac{1}{a}-1}}{1+t} dt = \frac{1}{a} B\left(\frac{1}{a}, 1 - \frac{1}{a}\right) \\ &= \frac{1}{a} \Gamma\left(\frac{1}{a}\right) \Gamma\left(1 - \frac{1}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \frac{\pi}{\sin \frac{\pi}{a}}. \quad \square \end{aligned}$$

三. 当 $s \rightarrow +\infty$ 时 $\Gamma(s)$ 的性态

这就是将过去关于阶乘的 Stirling 公式推广到 Γ 函数, 得到同名的公式.

定理 0.1 (Stirling 公式) 对于 Γ 函数有 $\Gamma(s+1) \sim \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{2\pi s}$ ($s \rightarrow +\infty$).

分析 下面介绍的方法称为 Laplace 方法, 它可以解决许多含参变量积分的渐近性态的分析问题^①.

首先从表达式

$$\Gamma(s+1) = \int_0^{+\infty} x^s e^{-x} dx$$

可以看出非负的被积函数于 $x = s$ 处达到最大值, Laplace 方法断定在该点附近的函数值对于积分作出最大的贡献 (见图 1). 该点的函数值就是 $\left(\frac{s}{e}\right)^s$.

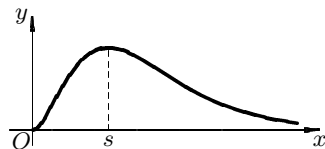


图 1: 积分 $\Gamma(s+1)$ 的被积函数

由于这个最大值点的位置 $x = s$ 随参数 s 而移动, 分析起来不方便, 我们作代换 $t = \frac{x}{s}$ 使得最大值点固定于 $t = 1$ 处. 于是被积表达式成为

$$(ts)^s e^{-ts} s dt = s^{s+1} t^s e^{-ts} dt = s^{s+1} e^{-s(t-\ln t)} dt,$$

这样就得到

$$\Gamma(s+1) = s^{s+1} \int_0^{+\infty} e^{-s(t-\ln t)} dt.$$

记 $f(t) = t - \ln t$, 则 f 在 $t = 1$ 处达到最小值 1. 同样要证明, 对大参数 s 来说, 只要 t 离开 1 时被积函数就迅速下降, 因此在 $t = 1$ 邻近的被积函数对积分作出最大贡献.

写出 f 在 $t = 1$ 的 Taylor 展开式, 并只写到二次项, 就有

$$f(t) = 1 + \frac{1}{2}(t-1)^2 + O_3(t \rightarrow 1),$$

将它代入积分中, 略去上述展开式中未写出的高次项, 又将积分集中到点 $t = 1$ 的 δ 邻域上 ($\delta > 0$) 的附近, 下面就是要证明有

^① 这种方法又是复域中的鞍点法或最速下降法的特例. 此外这里还只是介绍如何获得渐近展开式的第一项.

$$\begin{aligned}\Gamma(s+1) &= s^{s+1} e^{-s} \int_0^{+\infty} e^{-s(t-\ln t-1)} dt \\ &\sim s^{s+1} e^{-s} \int_{1-\delta}^{1+\delta} e^{-\frac{s(t-1)^2}{2}} dt.\end{aligned}$$

现在处理最后一个积分. 将 $t-1$ 作为积分变量并仍记为 t , 就有

$$\int_{-\delta}^{\delta} e^{-\frac{st^2}{2}} dt = \sqrt{\frac{2}{s}} \int_{-\delta\sqrt{\frac{s}{2}}}^{\delta\sqrt{\frac{s}{2}}} e^{-x^2} dx \sim \sqrt{\frac{2\pi}{s}} (s \rightarrow +\infty), \quad (1)$$

其中利用了概率积分.

于是就得到

$$\Gamma(s+1) \sim \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{2\pi s} (s \rightarrow +\infty),$$

这样就得到了所求的 Stirling 公式.

证 从以上分析即可写出

$$I(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s^s e^{-s} \sqrt{s}} = \sqrt{s} \int_0^{+\infty} e^{-s(t-\ln t-1)} dt,$$

余下的问题只是要证明

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} I(s) = \sqrt{2\pi}.$$

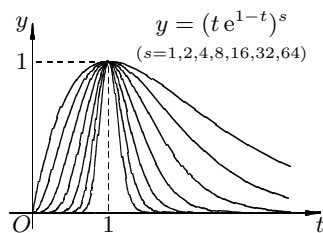


图 2: $\varphi(t)^s$ 的图像

将 $I(s)$ 的积分号下的被积函数写为 $\varphi(t)^s$, 其中

$$\varphi(t) = e^{-(t-\ln t-1)} = te^{1-t},$$

则可见函数 φ 在 $t \in [0, 1]$ 上严格单调增加, 在 $t \in [1, +\infty)$ 上严格单调减少.

如图 2 所示, $\varphi(t)^s$ 的图像下的面积随着 s 增大而越来越小. 我们要证明当 $s \rightarrow +\infty$ 时其面积值与 $\sqrt{2\pi}/\sqrt{s}$ 为等价无穷小量.

取充分小的 $\delta > 0$ (目前还没有取定), 将 $I(s)$ 按照其中积分的积分范围分拆为三项:

$$I(s) = \sqrt{s} \int_0^{1-\delta} \varphi(t)^s dt + \sqrt{s} \int_{1-\delta}^{1+\delta} \varphi(t)^s dt + \sqrt{s} \int_{1+\delta}^{+\infty} \varphi(t)^s dt,$$

并在下面分别记为 $I_1(s), I_2(s), I_3(s)$.

对于 $I_1(s)$, 由于在 $[0, 1-\delta]$ 上 $\varphi(t) \leq \varphi(1-\delta) < 1$, 因此可估计为:

$$I_1(s) \leq \sqrt{s} \varphi(1-\delta)^s,$$

这样就得到 $\lim_{s \rightarrow +\infty} I_1(s) = 0$.

对于 $I_3(s)$, 由于在 $[1+\delta, +\infty)$ 上 $\varphi(t) \leq \varphi(1+\delta) < 1$, 因此可估计为:

$$I_3(s) = \sqrt{s} \int_{1+\delta}^{+\infty} \varphi(t)^s dt \leq \sqrt{s} \varphi(1+\delta)^{s-1} \int_{1+\delta}^{+\infty} \varphi(t) dt,$$

由于最后一个广义积分收敛, 因此也有 $\lim_{s \rightarrow +\infty} I_3(s) = 0$.

现在来处理余下的主要部分 $I_2(s)$.

利用在 $t = 1$ 处展开的 Taylor 公式

$$t - \ln t - 1 = \frac{1}{2}(t-1)^2 + o((t-1)^2) \quad (t \rightarrow 1),$$

也就是有极限

$$\lim_{t \rightarrow 1} \frac{t - \ln t - 1}{(t-1)^2} = \frac{1}{2}.$$

因此对于 $\eta > 0$, 存在 $\delta > 0$, 使得当 $|t-1| < \delta$ 时成立不等式

$$\left(\frac{1}{2} - \eta\right)(t-1)^2 < t - \ln t - 1 < \left(\frac{1}{2} + \eta\right)(t-1)^2.$$

这样就可以得到关于 $I_2(s)$ 的不等式如下 (其中积分变量作了平移后仍记为 t):

$$\sqrt{s} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-st^2(\frac{1}{2}+\eta)} dt \leq I_2(s) \leq \sqrt{s} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-st^2(\frac{1}{2}-\eta)} dt.$$

利用概率积分如 (1) 一样计算就可知当 $s \rightarrow +\infty$ 时上式的左右两边分别收敛于 $\sqrt{\frac{\pi}{1/2+\eta}}$ 和 $\sqrt{\frac{\pi}{1/2-\eta}}$.

现在只要将以上讨论综合起来. 对 $\forall \varepsilon > 0$, 先取 $\eta > 0$, 使得满足

$$\sqrt{2\pi} - \frac{1}{6}\varepsilon < \sqrt{\frac{\pi}{1/2+\eta}} < \sqrt{\frac{\pi}{1/2-\eta}} < \sqrt{2\pi} + \frac{1}{6}\varepsilon,$$

由 η 确定 $\delta > 0$, 使得当 $|t-1| < \delta$ 时成立不等式

$$\left(\frac{1}{2} - \eta\right)(t-1)^2 < t - \ln t - 1 < \left(\frac{1}{2} + \eta\right)(t-1)^2.$$

然后确定 M , 使得当 $s > M$ 时, 同时成立

$$|I_1(s)| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad |I_3(s)| < \frac{\varepsilon}{3},$$

且成立

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{\pi}{1/2+\eta}} - \frac{1}{6}\varepsilon &< \sqrt{s} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-st^2(\frac{1}{2}+\eta)} dt \leq I_2(s) \\ &\leq \sqrt{s} \int_{-\delta}^{\delta} e^{-st^2(\frac{1}{2}-\eta)} dt < \sqrt{\frac{\pi}{1/2-\eta}} + \frac{1}{6}\varepsilon, \end{aligned}$$

从而就成立

$$|I_2(s) - \sqrt{2\pi}| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

于是当 $s > M$ 时就成立

$$|I(s) - \sqrt{2\pi}| \leq |I_1(s)| + |I_2(s) - \sqrt{2\pi}| + |I_3(s)| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

这就证明了 $I(s) \rightarrow \sqrt{2\pi} \quad (s \rightarrow +\infty)$. \square

补充例题. 求 Laplace 积分 $I(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx$, $a \geq 0$.

解 用 $\frac{1}{1+x^2}$ 为优势函数, 可见积分对 $a \geq 0$ 一致收敛, 因此是 $a \geq 0$ 上的连续函数. 此外还已知 $I(0) = \frac{\pi}{2}$.

还可以看出在 $a > 0$ 时有

$$I'(a) = - \int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx. \quad (2)$$

为此只要证明上式右边的积分对于 $a \in (0, +\infty)$ 内闭一致收敛. 实际上对于 $0 < a_0 \leq a$ 有

$$\left| \int_0^A \sin ax dx \right| = \left| -\frac{\cos ax}{a} \Big|_{x=0}^{x=A} \right| \leq \frac{2}{a_0},$$

而另一个因子 $\frac{x}{1+x^2}$ 与参变量 a 无关, 且是 x 的严格单调减少函数, 当 $x \rightarrow +\infty$ 时极限为 0. 因此用 Dirichlet 判别法即可知道积分对 $a \in [a_0, +\infty)$ 一致收敛.

我们看到 $I'(a)$ 的广义积分收敛情况已经不如 $I(a)$. 因此不可能再在积分号下对参变量求导. 这里可以从 $\frac{x}{1+x^2}$ 中分离出收敛慢的部分 $\frac{1}{x}$, 于是在 $a > 0$ 时有

$$I'(a) = - \int_0^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x(1+x^2)} \right) \sin ax dx = -\frac{\pi}{2} + \int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{x(1+x^2)} dx,$$

其中用到了 Dirichlet 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$.

可以看出, 上式最后一个积分又可以在积分号下求导, 得到在 $a > 0$ 有

$$I''(a) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = I(a).$$

这里利用了原来的积分对 $a \geq 0$ 一致收敛. (与 (2) 对比, 可见问题不是 $I'(a)$ 是否不能再求导的问题, 而是根据什么和如何计算的问题.)

写出二阶微分方程 $I''(a) = I(a)$ 的通解

$$I(a) = C_1 e^a + C_2 e^{-a},$$

利用 $|I(a)| \leq I(0) = \frac{\pi}{2}$, 可见 $C_1 = 0$. 再利用 $I(a)$ 于 $a \geq 0$ 上连续, 因此虽然上述方程与通解都只在 $a > 0$ 上有效, 仍然可以确定 $I(0) = \lim_{a \rightarrow 0^+} I(a) = C_2$, 即 $C_2 = \frac{\pi}{2}$. 于是最后得到 $I(a) = \frac{\pi}{2} e^{-a}$. \square

注 从 (2) 又得到

$$\int_0^{+\infty} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a},$$

它也称为 Laplace 积分. 有了这两个积分之后, 可以计算出以下类型的许多积分:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \sin ax dx, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} R(x) \cos ax dx,$$

其中 $R(x)$ 为有理函数.

补讲 p.234 的例 10.

例题 0.10 (Fresnel 积分) 求 $I = \int_0^{+\infty} \sin x^2 dx$ 和 $J = \int_0^{+\infty} \cos x^2 dx$.

解 由于下面采用的方法对 I, J 是相似的, 只写出对 I 的计算过程.

作代换 $x^2 = t$, 则积分变为 $I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} dt$. 过去已经用 Dirichlet 判别法知道这个广义积分收敛. 问题是如何计算它的值.

引入收敛因子, 即对于 $\alpha \geq 0$ 考虑积分

$$I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt.$$

由于 $\alpha = 0$ 时的广义积分收敛, 而 $e^{-\alpha t}$ 单调且一致有界, 根据 Abel 判别法, 可见积分 $I(\alpha)$ 对于 $\alpha \geq 0$ 一致收敛, 因此在 $\alpha \in [0, +\infty)$ 上连续.

以下我们将对于 $\alpha > 0$ 求出 $I(\alpha)$ 的表达式, 然后取极限得到所要的 $I = I(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} I(\alpha)$.

令 $0 < a < b$, 对于 $\alpha > 0$, 定义

$$I_{a,b}(\alpha) = \int_a^b \frac{\sin t}{2\sqrt{t}} e^{-\alpha t} dt.$$

然后利用概率积分 $\int_0^{+\infty} e^{-u^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, 就有

$$\int_0^{+\infty} e^{-tu^2} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}}.$$

用这个结果代入 $I_{a,b}(\alpha)$ 中得到

$$I_{a,b}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_a^b dt \int_0^{+\infty} e^{-t(u^2+\alpha)} \sin t du.$$

由于在 $t \in [a, b]$ 上有 $|e^{-t(u^2+\alpha)} \sin t| \leq e^{-au^2}$ 成立, 因此里层的广义积分在 $t \in [a, b]$ 上一致收敛, 这样就可以交换积分顺序得到

$$I_{a,b}(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} du \int_a^b e^{-t(u^2+\alpha)} \sin t dt.$$

这里的里层积分是可以求出的. 利用不定积分^①

$$\int e^{-\beta t} \sin t dt = \frac{e^{-\beta t}}{1+\beta^2} \cdot (-\cos t - \beta \sin t) + C,$$

就可以得到 $I_{a,b}(\alpha) = I_1 + I_2 + I_3 + I_4$, 其中

① 用分部积分法即可得到 (上册 p.213 的例 18), 也可用复数方法计算如下:

$$\int e^{-\beta t} \sin t dt = \operatorname{Im} \int e^{(-\beta+i)t} dt = \operatorname{Im} \frac{e^{(-\beta+i)t}}{-\beta+i} + C = \frac{e^{-\beta t}}{1+\beta^2} (-\cos t - \beta \sin t) + C.$$

$$\begin{aligned}
I_1 &= \frac{-\cos b \cdot e^{-b\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-bu^2}}{1+(u^2+\alpha)^2} du, \\
I_2 &= \frac{-\sin b \cdot e^{-b\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{(u^2+\alpha)e^{-bu^2}}{1+(u^2+\alpha)^2} du, \\
I_3 &= \frac{\cos a \cdot e^{-a\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{e^{-au^2}}{1+(u^2+\alpha)^2} du, \\
I_4 &= \frac{\sin a \cdot e^{-a\alpha}}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{(u^2+\alpha)e^{-au^2}}{1+(u^2+\alpha)^2} du.
\end{aligned}$$

现在分别讨论这 4 个积分. (表面上似乎复杂, 实际上这 4 个积分都很容易处理.)

将 I_1 和 I_2 中的两个积分号下的被积函数的分子中的 e^{-bu^2} 放大为 1, 就可看出有 $I_1 = o(1), I_2 = o(1)$ ($b \rightarrow +\infty$).

同样将 I_3 和 I_4 中的两个积分号下的被积函数的分子中的 e^{-au^2} 放大为 1, 就可以从 Weierstrass 判别法知道这两个积分在参变量 $a \in [0, 1]$ 上一致收敛, 从而当 $a \rightarrow 0^+$ 时可以在积分号下取极限, 这样就得到 $I_4 = o(1)$ ($a \rightarrow 0^+$), 同时就得到在 $\alpha > 0$ 时的 $I(\alpha)$ 的积分表达式:

$$I(\alpha) = \lim_{\substack{a \rightarrow 0^+ \\ b \rightarrow +\infty}} I_{a,b}(\alpha) = \lim_{a \rightarrow 0^+} I_3 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(u^2+\alpha)^2}.$$

最后从 $I(\alpha)$ 的积分表达式可见 $\alpha \rightarrow 0^+$ 可以通过积分号, 因此它对于 $\alpha = 0$ 也是正确的. 这样就得到

$$\begin{aligned}
I &= I(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+(u^2+\alpha)^2} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{2}},
\end{aligned}$$

其中用到积分 $\int_0^{+\infty} \frac{du}{1+u^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$ ②. \square

② 计算这个积分的一个较为简便的方法是先作代换 $x = 1/t$, 将 t 改写为 x , 将变换前和变换后的积分相加除 2, 然后如下进行:

$$I = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1+x^2}{1+x^4} dx = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{d\left(x - \frac{1}{x}\right)}{\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 + 2} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dy}{y^2 + 2} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$