紧群中 schauder 不动点的刻划

作者：程天任

记得我在弱不动点性质与 schauder 猜想一文中共提出了三个推论。前两个是关于弱不动点性质的推论，最后一个提出了 schauder 不动点的一个问题。这里，我们做一个尝试，把弱不动点的性质运用到 schauder 猜想的问题中去。进而对不动点做一个分类，以刻画紧群中的 schauder 不动点。

首先，我们简单地讲一讲文章 1 的思路：

在推论 1 中我们用了如下方法：

设$\varepsilon < d(x,y)$,取$r \in Q$，使得$d(x,y)-\varepsilon < r < d(x,y)$

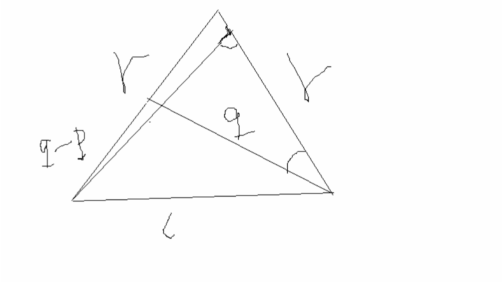
因为它是紧群，那么它可分，可以引入ε网。这一点，文中也提到了：

G 是一个紧群，Da 是 B(G)的有界子集的递减网。

另外，我在例 1 中还用了一个不等式：

我们用到数论中的不等式$\sqrt{2}$是无理数，故$\left|2q^2-p^2\right|>1$

以及$\left|q/p-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right|>\dfrac{1}{4p^2}$



另外，在例 1 中，我们用到一个图形（上图）

$\left\|\phi_{m1}\right\|>q-\varepsilon/4$

$\left\|\phi_{m1}-\psi_n\right\|<r+\varepsilon/4$

$\left\|\psi_n\right\|>r-q+p-\varepsilon/4$

则存在这种三角形，三边长分别为：$q,r,r-q+p$

我把其中一条边延长使这个三角形等腰，如果在一边上有一段小于ε的距离。则运用三角形正余弦定理，求出 q 的表达式。

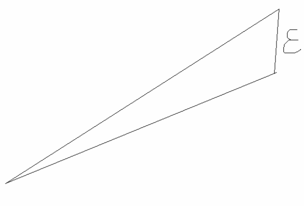
因为ψ_n是紧的，所以可以延拓(即延长这条边)。另外，看到

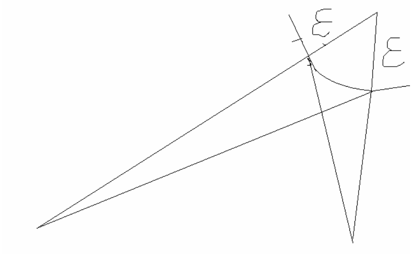
$r+r^{'}<r+\varepsilon$

$\varepsilon<d(x,y)$,取$r\in Q$，使得$d(x,y)-\varepsilon<r<d(x,y)$

$d(x,y)<r+r^{'}$

这样，一条边长为 r,另一条边长为 r+r’。因此，这样可以是等腰的,因为 r’小于ε。

比如：



令两个三角形面积相等，这样估计面积。

在例 2 中，最后，我设$r=\frac{3}{2}p$，令$r-q=0$。这样，我就消去了：$m(r-q)$。这样得到最后结果:

$$k^4-2k^3-k^2+2k>p$$

例 3 中，我们用到一个定理：

定理：设$u_1,u_2,\ldots\ldots\ldots u_n$是赋范空间 X 中线性无关的向量，则存在 c>0 使得对所有常数k_i有$\left\|\Sigma k_i u_i\right\|>ck_j$

接下来，我们来考虑紧群中不动点的刻画问题。首先，我们回忆一下问题三（文献 1）

根据不等式：$\lambda h(v_j)/v_j\le\lambda\sqrt{n}+\varepsilon$

我们可以直接写出：

$$\lambda h(v_j)/v_j\le\lambda+\lambda\varepsilon+\varepsilon$$

这样，我们得到最后的结果。在 i 使得$c=\min d(u_i,Y_i)$最小的那个维度上，成立不等式：$2(n+1)/\left|a_j\right|>\left\|r-x\right\|$

这个不等式成立的条件是紧致的度量空间。因为度量空间都是豪斯多夫空间，即度量空间是群。在考虑紧致性这个条件，我们可以引入紧群中弱不动点的性质。（豪斯多夫空间比度量空间更弱，弱不动点也比不动点弱）

根据参考文献 2 的结果：

定理 3（引理 1）：X 是一个线性度量空间，a 是 X 中的非零点。则存在收缩映射 ra: $X \to [0,a]$ 以至于

$$\|x - r_a(x)\| \le 4\|x - [0,a]\|$$

因为，$[x,y] = \{tx + (1-t)y : t \in [0,1]\}$

所以，$\|x - r_a(x)\| \le 4\|x - (1-t)a\|$

$$\|x - r_a(x)\| \le 4\|x - a + t_j a\|$$

考虑到：$t_j a = a_j \le \dfrac{2(n+1)}{\|r - x\|}$

即，$\|x - r_a(x)\| \le 4(\|x - a\| + \dfrac{2(n+1)}{\|r - x\|})$

接下来，我们考虑两个定理：

定理 1：设 X 是赋范线性空间，$a \in X$,k 是非零数。则映射：

$x \to x + a$，$x \to kx$ 是 X 到自身的同胚。

定理 2：X 是赋范线性空间，且同胚于开球 $U(0,r) = \{x \in X, \|x\| < r\}$

考虑到紧群中的弱不动点性质具有巴拿赫代数（banach 空间的性质），即在完备的条件下，我们可以采纳以上两个定理的方法。

考虑不等式：

$$\|x - r_a(x)\| \le 4(\|x - a\| + \frac{2(n+1)}{\|r - x\|})$$

这里，我们通过讨论弱不动点性质中的函数 φ 与 ψ 的联系来进一步研

究这个问题。

首先，我们设(参考文献 3)：

$$\varphi(y)=\frac{ry}{1+\|y\|}\to q$$

$$\psi(x-a)=\frac{x-a}{r-\|x-a\|}\to r-q+p$$

因为，$\varphi(y)=\frac{ry}{1+\|y\|}=x\le r$

所以，$r-\|x-a\|=\frac{r}{1+\|y\|}$

$$\|x-a\|=r-\frac{r}{1+\|y\|}<r-\frac{r}{1+r-q+p}$$

如果，$\frac{1}{\|r-x\|}=\frac{x-a}{r-\|x-a\|}\to\frac{x}{r-\|x\|}=\|y\|$

注：这里，我们用到如下性质：

性质：$T_{-a}T_a(x)=T_{-a}(x+a)=(x+a)-a=x$

则，$\|r-x\|=\frac{r}{(1+\|y\|)(x-a)}=\frac{r}{(1+\|y\|)\varphi(y)}$

所以，$\frac{1}{\|r-x\|}=\frac{(1+\|y\|)\varphi(y)}{r}\le\frac{(1+r-q+p)q}{r}$

我们把结果代入不等式，得到：

$$\left\|x-r_a(x)\right\|\leq 4[(r-\frac{r}{1+r-q+p})+2(n+1)\frac{(1+r-q+p)q}{r}]$$

设$r=\frac{3}{2}p$，令$r-q=0$，我们得到：

$$\left\|x-r_a(x)\right\|\leq 4[r(1-\frac{1}{1+p})+2(n+1)\frac{(1+p)\frac{3}{2}p}{r}]$$

这里，我们考虑文献 3 中的结果：

引理 5.1：G 是一个紧群，D(a)是 B（G）的有界子集的递减网。以及，φ_μ是弱收敛网且有弱极限φ。则，

$$r(\varphi)+\limsup\left\|\varphi_\mu-\varphi\right\|=\limsup r(\varphi_\mu)$$

导致：

$$\limsup\{\left\|\varphi_\mu-\varphi\right\|\psi\in D_a\}+\limsup\left\|\varphi_\mu-\varphi\right\|$$

$$=\limsup\limsup\{\left\|\varphi_\mu-\psi\right\|\psi\in D_a\}$$

因为：$r_a(x)=\sup\{\left\|x-y\right\|,y\in D_a\}$

所以，$\left\|x-r_a(x)\right\|=\left\|x-\sup\left\|x-y\right\|\right\|\geq\left\|x\right\|-\sup\left\|x-y\right\|$

根据引理中的结果，我们取极限，得到：

$$\lim\left\|\psi\right\|\leq 4[r(1-\frac{1}{1+p})+2(n+1)\frac{(1+p)\frac{3}{2}p}{r}]$$

考虑到$\psi\in D_a$是递减网，我们利用网的性质：

我们选择子网：$\lim_{(a,n)}\left\|\psi_{a,n}\right\|=\lim_\beta\left\|\psi_\beta\right\|$

$\left\|\psi_\beta\right\|>\sum\left\|\psi_\beta(i)\right\|\geq k(p-\varepsilon)/2$(引理 5.1)

$$k^{'}(p-\varepsilon)/2 \le 4[r(1-\frac{1}{1+p})+2(n+1)\frac{(1+p)\frac{3}{2}p}{r}$$

消去ε，得到：

$$\frac{k^{'}}{2}p \le 4[\frac{3}{2}p \bullet (1-\frac{1}{1+p})+2(n+1)(1+p)]$$

考虑到：$f(k)=k^4-2k^3-k^2+2k>p$

这里，我们做一分类：

$p=0$时，n可以取任何维数。

$p=1$时，$n \ge [(\frac{k^{'}}{8}-\frac{3}{4})/4-1]$

$p=2$时，$n \ge [(\frac{k^{'}}{4}-2)/6-1]$

$p=3$时，$n \ge [(\frac{3k^{'}}{8}-\frac{27}{8})/8-1]$

以此类推，我们取$p=n$归纳得：

$$n \ge [(\frac{nk^{'}}{8}-a)/(2n+2)-1]$$

$$f(k)=k^4-2k^3-k^2+2k>p$$

$$p=n \ge [(\frac{nk^{'}}{8}-a)/(2n+2)-1] \ge [(\frac{nk}{8}-a)/(2n+2)-1] \quad (k^{'}>k)$$

$$f(k) \ge [(\frac{nk}{8}-a)/(2n+2)-1]$$

因为，$f(k)\geq 0$

所以，我们取$\frac{nk}{8}-a>2n+2$

即，$n\geq\frac{16+8a}{k-16}$

接下来，我们设：$n_1=[(\frac{nk^{'}}{8}-a)/(2n+2)-1]$（$k^{'}>k$）

代入$f(k)$的不等式，得到

$$f(k)\geq n_1$$

$$k^4-2k^3-k^2+2k-n_1\geq 0$$

这是一个四次方程，我们配方得：

$$k^4-2k^3+k^2-k^2-k^2+2k-n_1\geq 0$$

$$(k^2-k)^2-2(k^2-k)-n_1\geq 0$$

解这个方程，我们得到：

$$k^2-k\geq 1+\sqrt{1+n_1}$$

即，$n_1\leq(k^2-k-1)^2-1$

如果我们把四次方程$f(k)\geq n_1$转化为三次，我们得到：

$$k^3-2k^2-k\ \ +2-\frac{n_1}{k}\geq 0$$

我们考虑盛金公式：

$$k^3=2k^2+k\ \ -2+\frac{n_1}{k}$$

$$A=b^2-3ac$$

$$B=bc-9ad$$

$$C=c^2-3bd$$

$$\Delta=B^2-4AC$$

即，$[2-9(2-\frac{n_1}{k})]^2=28[1+6(2-\frac{n_1}{k})]$

解得：$\frac{n_1}{k}=\frac{19}{9}$

即，$n_1=\frac{19}{9}k$

总结：

至于如何应用以上的结果，我们可以设$n=3$，即三维拓扑空间的情况。把式子代入不等式，我们得到：

$$n_1=[(\frac{nk^{'}}{8}-a)/(2n+2)-1]>\frac{19}{9}k$$

$$\frac{3}{8}k^{'}\geq 8(\frac{19}{9}k+1)+a$$

$$k^{'}\geq\frac{64}{3}(\frac{19}{9}k+1)+\frac{8}{3}a$$

又因为，

$$n=3\geq\frac{16+8a}{k-16}$$

所以，

$$k\geq\frac{64}{3}+\frac{8a}{3}$$

即，$k^{'}\geq\frac{64}{3}(\frac{19}{9}k+1)+\frac{8}{3}a\geq\frac{64}{3}(\frac{19}{9}(\frac{64}{3}+\frac{8a}{3})+1)+\frac{8}{3}a$

参考文献：

1.弱不动点性质与 schauder 猜想..................................cheng tianren

2.no roberts spaces is a counter-example to schauder’s conjecture

....Nguyen to nhu and le hoang tri

3.weak fixed point property and asymptotic centre for the fourier-stieltjes

algebra of a locally compact group...

....................................Gero fendler, anthony to-ming lau, michael leinert

联系邮箱：pqrs008@126.com