13.1 平面中的点集

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 记 $D = \{(x, y)|2x \le x^2 + y^2 < 4\}$. 试指出点集 D 的内部 D°, 外点所成的集合和边界 ∂D.

解: 点集 D 的图形如图所示. 满足不等式

$$2x < x^2 + y^2 < 4$$

的点 (x, y) 都是 D 的内点, 因此 D 的内部是两个圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 之间 (不含圆周) 的部分, 即 $D^\circ = \{(x, y)|2x < x^2 + y^2 < 4\}$;

D 的外点是大圆以外以及小圆以内的点;

D 的边界是这两个圆周, 即

$$\partial D = \{(x, y)|2x = x^2 + y^2\} \cup \{(x, y)|x^2 + y^2 = 4\}.$$

□

例 2 记 $D = \{(x, y)|2x \le x^2 + y^2 < 4\}$. 试指出点集 D 的导集和孤立点.

解: 点集 D 的图形如图所示. 注意到一个点集的内点当然是此点集的聚点, 而外点不是聚点; 又 D 的边界 ∂D 显然也是 D 的聚点. 因此, D 的导集是两个圆 $(x-1)^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 + y^2 = 4$ 之间 (包含圆周) 的部分, 即 $D' = \{(x, y)|2x \le x^2 + y^2 \le 4\}$.

点集 D 的每一个点的任意邻域中都有 D 的无穷多个点, 因此 D 无孤立点. □

例 3 空集 $\emptyset$ 和 $\mathbb{R}^2$ 既是开集又是闭集.

解: 容易看出 $\mathbb{R}^2$ 既是开集又是闭集, 因为其中的每一点都是内点, 且 $\mathbb{R}^2$ 包含了自己的每一个聚点. 上面已经论证过 $\emptyset$ 是闭集, 知 $\emptyset = \mathbb{R}^2 \backslash \mathbb{R}^2$, 即空集作为 $\mathbb{R}^2$ 的余集, 是开集. □

例 4 判断例 1 中的点集 D 是不是开集或闭集.

解: 点集 D 不是开集, 因为圆 $2x = x^2 + y^2$ 上的点属于 D 但却不是 D 的内点;

点集 D 也不是闭集, 因为圆 $x^2 + y^2 = 4$ 上的点是 D 的聚点却不属于 D. □

例 5 判断例 1 中的点集 D 是不是区域.

解: 连通的开集 $D^\circ = \{(x, y)|2x < x^2 + y^2 < 4\}$ 是开域; 闭集 $D' = \{(x, y)|2x \le x^2 + y^2 \le 4\}$ 是闭域.

点集 D 是区域, 因为 D 是由开域 $D^\circ = \{(x, y)|2x < x^2 + y^2 < 4\}$ 连同其部分边界 $\{(x, y)|2x = x^2 + y^2\}$ 所组成的点集, 但 D 本身既不是开域也不是闭域. □

例 6 设 $A=\{(1/n,1/n^2)\ |n=2,3,\cdots\}$, $B=((0,1)\times(0,1))\setminus A$. 试给出点集 A 和 B 的内部, 孤立点, 导集和边界.

解: 点集 A 显然没有内点, 即 $A^\circ=\emptyset$; A 中的每一点都是 A 的孤立点, 因为对于 $(1/n,1/n^2)\in A$, 可取 $\delta=1/n(n+1)$, 则 $B_\delta(1/n,1/n^2)$ 中除去点 $(1/n,1/n^2)$ 外, 再无 A 中的任何点. 坐标原点显然是 A 的一个聚点, 且是唯一的一个聚点. A 中的每一点都是 A 的边界点, 原点亦然, 故 $\partial A=A\cup\{(0,0)\}$.

对于点集 B, 其中每一点 $P(x,y)$ 都是 B 的内点, 因为可取 $\delta>0$ 足够小, 使得 $B_\delta(x,y)$ 中没有 A 的任何点且完全包含在 B 中. 故点集 B 是开集. B 的边界是 $\partial B=([0,1]\times[0,1])\setminus((0,1)\times(0,1))\cup A$. 点集 B 显然没有孤立点. 容易看出, 点集 A 中的每一个点还是 B 的聚点, 实际上, 点集 B 的聚点全体构成了单位闭矩形 $[0,1]\times[0,1]$, 即 $B'=[0,1]^2$.

读者可以根据定义, 逐一验证这些结论, 并在 $\mathbb{R}^2$ 中画出这些点集的图形. □

思考题

1. 不是开集的点集是否一定是闭集? 不是闭集的点集是否一定是开集?

2. 一个点集的边界点是否一定是这个点集的聚点? 反之又如何?

3. 在 $\mathbb{R}$ 中如何定义一个集合的内点? $\mathbb{R}$ 中的集合可以视为 $\mathbb{R}^2$ 中位于 x 轴上的点集, 其内点是否也是 $\mathbb{R}^2$ 中的内点?

4. 点集 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|xy\geq 0\}$ 是否是区域?

习题

1. 用 Cauchy 不等式证明向量的三角形不等式和距离的三角形不等式.

证明. (1) 设向量 $\boldsymbol{r_1}=(x_1,y_1),\boldsymbol{r_2}=(x_2,y_2)$, 则向量 $\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{r_2}=(x_1+x_2,y_1+y_2)$, 下证: $\|\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{r_2}\|\leqslant\|\boldsymbol{r_1}\|+\|\boldsymbol{r_2}\|$.

事实上，由 Cauchy 不等式 $|\boldsymbol{r_1}\cdot\boldsymbol{r_2}|\leqslant\|\boldsymbol{r_1}\|\cdot\|\boldsymbol{r_2}\|$, 得

$$\begin{aligned}\|\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{r_2}\|^2 &= (x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\\ &= x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+y_1^2+2y_1y_2+y_2^2\\ &= \|\boldsymbol{r_1}\|^2+\|\boldsymbol{r_2}\|^2+2\boldsymbol{r_1}\cdot\boldsymbol{r_2}\\ &\leqslant \|\boldsymbol{r_1}\|^2+\|\boldsymbol{r_2}\|^2+2\|\boldsymbol{r_1}\|\cdot\|\boldsymbol{r_2}\|\\ &= (\|\boldsymbol{r_1}\|+\|\boldsymbol{r_2}\|)^2.\end{aligned}$$

故

$$\|\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{r_2}\|\leqslant\|\boldsymbol{r_1}\|+\|\boldsymbol{r_2}\|.$$

(2) 在 $\mathbb{R}^2$ 上, 任意两点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 之间的距离就是差向量 $\overrightarrow{OP_1}-\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{P_2P_1}$ 的长度，记作 $\|P_1-P_2\|$, 即 $\|P_1-P_2\|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}$, 下证：对 $\mathbb{R}^2$ 上的任意三个点 $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 和 $P_3(x_3,y_3)$，成立 $\|P_1-P_2\|\leqslant\|P_1-P_3\|+\|P_3-P_2\|$.

解法一：如图， $P_1(x_1,y_1),P_2(x_2,y_2)$ 和 $P_3(x_3,y_3)$ 为平面上不共线的三个点 (共线时不等式的等号显然成立).

令向量 $\overrightarrow{P_3P_1}=\boldsymbol{r_1},\overrightarrow{P_2P_3}=\boldsymbol{r_2}$, 则向量 $\overrightarrow{P_2P_1}=\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{r_2}$, 由上面证明的结论 $\|\boldsymbol{r_1}+\boldsymbol{r_2}\|\leqslant\|\boldsymbol{r_1}\|+\|\boldsymbol{r_2}\|$, 得

$$\|P_1-P_2\|\leqslant\|P_1-P_3\|+\|P_3-P_2\|.$$

解法二：由 Cauchy 不等式的三角形式： $\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{c^2+d^2}\geqslant\sqrt{(a+c)^2+(b+d)^2}$, 得

$$\begin{aligned}\|P_1-P_3\|+\|P_3-P_2\| &= \sqrt{(x_1-x_3)^2+(y_1-y_3)^2}+\sqrt{(x_3-x_2)^2+(y_3-y_2)^2}\\ &\geqslant \sqrt{(x_1-x_3+x_3-x_2)^2+(y_1-y_3+y_3-y_2)^2}\\ &= \sqrt{(x_2-x_2)^2+(y_2-y_2)^2}\\ &= \|P_1-P_2\|.\end{aligned}$$

故

$$\|P_1-P_2\|\leqslant\|P_1-P_3\|+\|P_3-P_2\|.$$

∎

2. 设 $E\subset\mathbb{R}^2$. 证明 E 是有界集的充分必要条件是 $d(E)<\infty$.

证明. (必要性) E 是有界集, 则存在某一点 $P_0(x_0,y_0)$ 和某个正数 R, 使得 $E\subset U(P_0;R)$, 对 $\forall P_1,P_2\in E$, 由距离的三角不等式，得

$$\|P_1-P_2\|\leqslant\|P_1-P_0\|+\|P_0-P_2\|\leqslant R+R=2R.$$

则

$$d(E)=\sup\{\|P_1-P_2\||P_1,P_2\in E\}\leqslant 2R<\infty.$$

必要性得证.

(充分性) 对任意固定的 $P_0\in E$, 对 $\forall P\in E$, 有

$$\|P_0-P\|\leqslant d(E)=\sup\{\|P_1-P_2\||P_1,P_2\in E\}<\infty,$$

故

$$P\in U(P_0,d(E)),$$

由 P 的任意性，有

$$E\subset U(P_0,d(E)).$$

故 E 为有界集.
充分性得证.

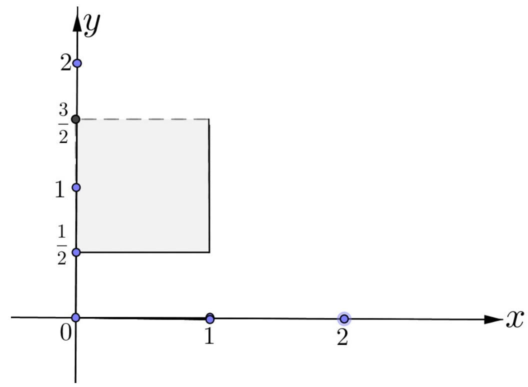
∎

3. 在平面上画出下列点集的图形, 说明这些点集是开集, 闭集, 区域或有界集等, 并写出这些点集的内点, 聚点和边界点所成的点集:

(1) $E=(0,1]\times[1/2,3/2)$;　(2) $E=\{(x,y)|x^2=y^2\}$;
(3) $E=\{(x,y)|x^2\neq y^2\}$;　(4) $E=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2x\}$;
(5) $E=\{(x,y)|x^2+y^2\leq 2x\ 且 x^2+y^2\geq 2y\}$;　(6) $E=\{(x,y)|x,y\in\mathbb{N}\}$.

解: (1) 点集 E 不是开集, 因为点集 $\{(x,y)|0<x\leqslant 1,y=1/2\}$ 和点集 $\{(x,y)|x=1,1/2\leqslant y<3/2\}$ 上的点属于 E 但却不是 E 的内点;

点集 E 也不是闭集, 因为点集 $\{(x,y)|0\leqslant x\leqslant 1,y=3/2\}$ 和点集 $\{(x,y)|x=0,1/2\leqslant y\leqslant 3/2\}$ 上的点是 E 的聚点却不属于 E.



(1). 图中阴影部分为点集 E.

点集 E 是区域, 因为 E 是由开域 $E^\circ = (0,1) \times (1/2, 3/2)$ 连同其部分边界 $\{(x,y)|0 < x \leqslant 1, y = 1/2\}, \{(x,y)|x = 1, 1/2 \leqslant y < 3/2\}$ 所组成的点集, 但 E 本身既不是开域也不是闭域.

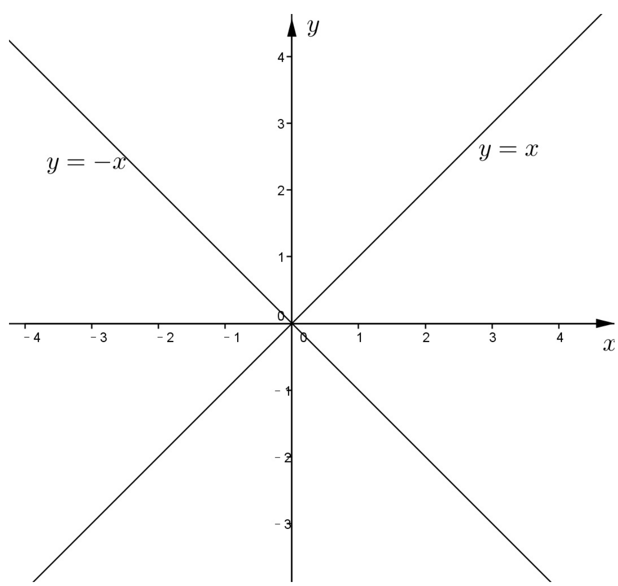
点集 E 是有界集，因为 $E \subset [0,1] \times [1/2, 3/2]$.

内点所成的点集: $E^\circ = (0,1) \times (1/2, 3/2)$

聚点所成的点集: $E' = [0,1] \times [1/2, 3/2]$

边界点所成的点集: $\partial E = [0,1] \times [1/2, 3/2] \setminus (0,1) \times (1/2, 3/2)$

(2) 点集 E 不是开集, 因为点集 E 的任何一个点都不是它的的内点;



(2). 图中两条直线构成点集 E.

点集 E 是闭集, 因为点集 E 的所有聚点都属于 E.

点集 E 不是区域, 因为点集 E 不具有连通性.

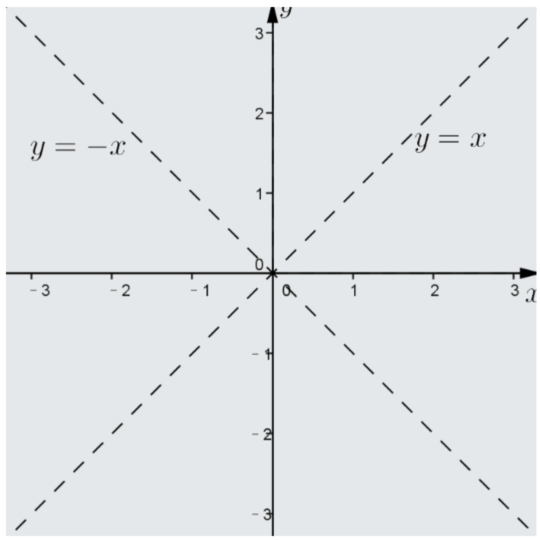
点集 E 是无界集，因为对 $\forall P_0(x_), y_0)$ 和任意的 R, 都有 E 不含于 $U(P_0, R)$.

内点所成的点集: E 没有内点集.

聚点所成的点集: $E' = E$

边界点所成的点集: $\partial E = E$

(3) 点集 E 是开集, 因为点集 E 的任何一个点都是它的的内点;



(3). 图中阴影部分为点集 E.

点集 E 不是闭集, 因为点集 $E = \{(x,y)|x^2 = y^2\}$ 上的点是 E 的聚点却不属于 E.

点集 E 不是区域, 因为点集 E 不具有连通性.

点集 E 是无界集，因为对 $\forall P_0(x_), y_0)$ 和任意的正数 R, 都有 E 不含于 $U(P_0, R)$.

内点所成的点集: $E^\circ = E$.

聚点所成的点集: $E' = \mathbb{R}^2$

边界点所成的点集: $\partial E = \{(x,y)|x^2 = y^2\}$

(4) 点集 E 不是开集, 因为点集 $\{(x,y)|x^2+y^2 = 2x\}$ 上的点属于 E 但却不是 E 的内点;

点集 E 是闭集, 因为点集 E 的所有聚点都属于 E.

点集 E 是区域, 因为 E 是由开域 $E^\circ = \{(x,y)|x^2+y^2 < 2x\}$ 连同其边界 $\{(x,y)|x^2+y^2 = 2x\}$ 所组成的点集, 且 E 是闭域.

点集 E 是有界集，因为 $E \subset \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 2x\}$.

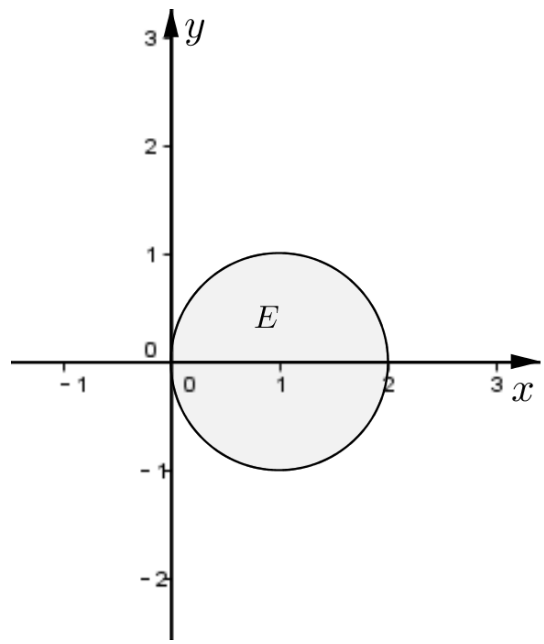
内点所成的点集: $E^\circ = \{(x,y)|x^2+y^2 < 2x\}$

聚点所成的点集: $E' = E$

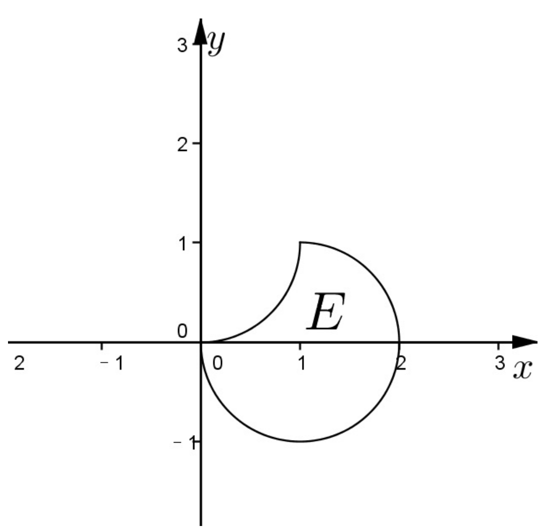
边界点所成的点集: $\partial E = \{(x,y)|x^2+y^2 = 2x\}$

(5) 点集 E 不是开集, 因为点集 $\{(x,y)|x^2+y^2 = 2x\}$ 和点集 $\{(x,y)|x^2+y^2 = 2y\}$ 上的点属于 E 但却不是 E 的内点;

点集 E 是闭集, 因为点集 E 的所有聚点都属于 E.



(4). 图中阴影部分为点集 E.



(5). 图中阴影部分为点集 E.

点集 E 是区域, 因为 E 是由开域 $E^\circ = B_1(1,0)\setminus \bar{B}_1(0,1)$ 连同其边界 $(\bar{B}_1(1,0)\setminus B_1(1,0))\setminus(B_1(1,0)\setminus \bar{B}_1(1,0))$ 所组成的点集, 且 E 是闭域.

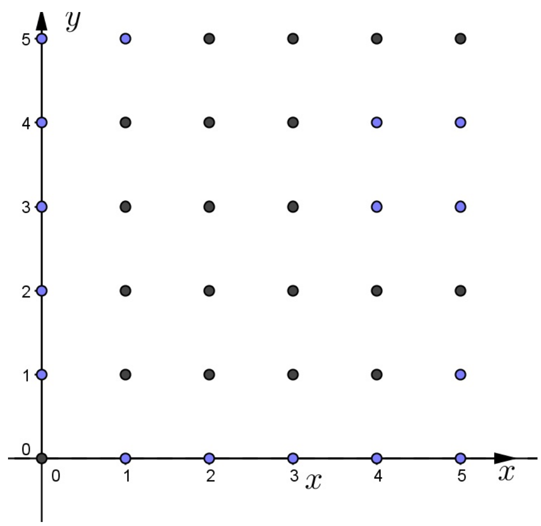
点集 E 是有界集，因为 $E\subset \bar{B}_1(1,0)$.

内点所成的点集: $E^\circ = B_1(1,0)\setminus \bar{B}_1(0,1)$

聚点所成的点集: $E' = E$

边界点所成的点集: $\partial E = (\bar{B}_1(1,0)\setminus B_1(1,0))\setminus(B_1(1,0)\setminus \bar{B}_1(1,0))$

(6) 点集 E 不是开集, 因为点集 E 的任何一个点都不是它的的内点;



(6). 图中无数多个点构成点集 E.

点集 E 是闭集, 因为点集 E 没有聚点, 即 E' 为空集，而空集是任何集合的子集，此时可将 E 视为闭集.

点集 E 不是区域, 因为点集 E 不具有连通性.

点集 E 是无界集，因为对 $\forall P_0(x_), y_0)$ 和任意的 R, 都有 E 不含于 $U(P_0,R)$.

内点所成的点集: E 没有内点.

聚点所成的点集: E 没有聚集.

边界点所成的点集: $\partial E = E$

□

4. 证明 $U(P_0)$ 是开集.

证明. (对于圆领域) 对 $\forall P\in U(P_0) = B_\epsilon(P_0)$, 取 $\delta = \epsilon - \|P-P_0\| > 0$, 则 $B_\delta(P)\subset B_\epsilon(P_0)$, 即知 P 是 $U(P_0)$ 的内点，故 $U(P_0)$ 是开集;

(对于方领域) 对 $\forall P(x,y)\in U(P_0) = (x_0-\epsilon, x_0+\epsilon)\times(y_0-\epsilon, y_0+\epsilon)$, 取 $\delta = \min\{\epsilon - |x-x_0|, \epsilon-|y-y_0|\} > 0$, 则 $U(P) = (x-\delta, x+\delta)\times(y-\delta, y+\delta)\subset U(P_0)$, 即知 P 是 $U(P_0)$ 的内点，故 $U(P_0)$ 是开集.

∎

5. 证明 P_0 是 E 的聚点等价于在 P_0 的任何一个邻域 $U^\circ(P_0)$ 中都有 E 的点.

证明. (必要性) P_0 是 E 的聚点，根据聚点的定义, P_0 的任何一个邻域 $U(P_0)$ 中都含有 E 中无穷多个点，从而在 P_0 的任何一个邻域 $U^\circ(P_0)$ 中必有 E 的点.
必要性得证.

(充分性) (反证法) 假设 P_0 不是 E 的聚点, 则在 P_0 的某一个邻域中只有 E 的有限个点，记为 $P_1, P_2, \cdots, P_n$, 设 $\delta = \min\limits_{k=1,2,\cdots,n}\{\|P_k - P_0\|\}$, 则 $U^\circ(P_0;\delta)\bigcap E = \emptyset$, 与题设矛盾, 故假设不成立,$P_0$ 是 E 的聚点.
充分性得证.

∎

6. 证明开集和闭集的下述性质: 开集的余集是闭集, 闭集的余集是开集; 有限个开集的交 (并) 是开集, 有限个闭集的并 (交) 是闭集.

证明. (1) 不妨设 E 是开集，则下证 E^c 是闭集，即对 E^c 的任一聚点 P_0，都有 $P_0 \in E^c$.
事实上，对 E^c 的任一聚点 P_0， P_0 的任一邻域都有不属于 E 的点，这样， P_0 就不可能是 E 的内点，从而 $P_0 \notin E$, 于是 $P_0 \in E^c$, 故 E^c 是闭集.

(2) 不妨设 E 是闭集，则下证 E^c 是开集，即 E^c 中的每一点都是 E^c 的内点.
用反证法：假设 E^c 不是开集, 由开集的定义知 E^c 中至少有一个点不是 E^c 的内点，设这个点为 P_0，根据内点的定义知，对点 P_0 的任何邻域 $U(P_0)$, 都有 $U(P_0)$ 不含与 E^c, 即 $U(P_0)$ 中含有 E 中的点，因此， P_0 为 E 的聚点，由 E 是闭集知 $P_0 \in E$，这与 $P_0 \in E^c$ 矛盾，故假设不成立, 从而 E^c 是开集.

注 1 *下面在证明有限个开集的交 (并) 是开集, 有限个闭集的并 (交) 是闭集的过程中，我们取"有限个"集合的个数为 $n = 2$.*

(3) 不妨设 F_1, F_2 为闭集，则下证 $F_1 \cup F_2$ 与 $F_1 \cap F_2$ 都为闭集.

(i) 事实上，设 P 为 $F_1 \cup F_2$ 的聚点，由实数完备性章节聚点的等价定义，存在一个各点互不相同的收敛于 P 的点列 $\{P_n\} \subset F_1 \cup F_2$, 因而 F_1 和 F_2 至少有一个集合含有 $\{P_n\}$ 的无穷多项，不妨设 $\{P_{n_k}\} \subset F_1$, 于是也有 $\{P_{n_k}\} \Rightarrow P(k \Rightarrow \infty)$, 从而 P 为 F_1 的聚点，又因为 F_1 为闭集，所以 $P \in F_1$, 故 $P \in F_1 \cup F_2$, 从而 $F_1 \cup F_2$ 为闭集.

(ii) 同理，设 P 为 $F_1 \cap F_2$ 的聚点，则存在一个各点互不相同的收敛于 P 的点列 $\{P_n\} \subset F_1 \cap F_2$, 于是，点列 $\{P_n\} \subset F_1$, 且 $\{P_n\} \Rightarrow P$，从而 P 为 F_1 的聚点；点列 $\{P_n\} \subset F_2$, 且 $\{P_n\} \Rightarrow P$, 从而 P 为 F_2 的聚点. 又因为 F_1, F_2 为闭集，所以 $P \in F_1$ 且 $P \in F_2$, 故 $P \in F_1 \cap F_2$, 从而 $F_1 \cap F_2$ 为闭集.

(4) 不妨设 E_1, E_2 为开集，则下证 $E_1 \cup E_2$ 与 $E_1 \cap E_2$ 都为开集.

(i) 事实上，对 $\forall A \in E_1 \cup E_2$, 有 $A \in E_1$ 或 $A \in E_2$, 不妨设 $A \in E_1$, 则存在点 A 的某邻域 $U(A)$, 使得 $U(A) \subset E_1$, 从而有 $U(A) \subset E_1 \cup E_2$, 因此, $E_1 \cup E_2$ 为开集.

(ii) 对 $\forall B \in E_1 \cap E_2$, 有 $B \in E_1$ 且 $B \in E_2$, 由于 E_1, E_2 为开集, 则存在点 B 的某邻域 $U(B, \delta_1)$, 使得 $U(B, \delta_1) \subset E_1$, 也存在点 B 的某邻域 $U(B, \delta_2)$, 使得 $U(B, \delta_2) \subset E_2$, 取 $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, 则点 B 的邻域 $U(B, \delta) \subset E_1 \cap E_2$, 所以 $E_1 \cap E_2$ 为开集.

∎

---

7. 试叙述 $\mathbb{R}$ 中开集的定义, 并证明若 A 和 B 是 $\mathbb{R}$ 中的开集, 则 $A \times B$ 亦然.

解: (1) 如果点集 E 的每一个点都是 E 的内点, 则称 E 为开集.

(2) 对 $\forall P(x, y) \in A \times B$ (其中 $x \in A, y \in B$),
A 是开集, 则 $\exists x$ 的一个 ϵ 邻域, 使得 $U(x, \epsilon) \subset A$,
B 是开集则 $\exists y$ 的一个 δ 邻域, 使得 $U(y, \delta) \subset B$,
则有 $(x - \epsilon, x + \epsilon) \times (y - \delta, y + \delta) \subset A \times B$,
即存在点 P 的邻域 $U(P) \subset A \times B$,
由 P 的任意性可知,$A \times B$ 也是开集

□

8. 设 x_0 是 $A \subset \mathbb{R}$ 的聚点, y_0 是 $B \subset \mathbb{R}$ 的聚点, 证明 (x_0, y_0) 是 $A \times B$ 的聚点.

证明. 任取点 $P(x_0, y_0)$ 的一个领域 $(x - \epsilon, x + \epsilon) \times (y - \delta, y + \delta) \subset A \times B$,
因为 x_0 是 A 的聚点, 则对 $\forall \epsilon > 0, U(x - \epsilon, x + \epsilon)$ 中含有 A 的无穷多个点,
又因为 y_0 是 B 的聚点, 则则对 $\forall \delta > 0, U(y - \delta, y + \delta)$ 中含有 B 的无穷多个点.
于是, 对 $\forall \epsilon > 0, \forall \delta > 0, (x_0, y_0)$ 的领域 $(x - \epsilon, x + \epsilon) \times (y - \delta, y + \delta)$ 中含有 $A \times B$ 的无穷多个点,
所以 (x_0, y_0) 是 $A \times B$ 的聚点. ∎

9. 证明: 任意点集 E 与其边界 ∂E 的并集 $E \cup \partial E$ 是闭集.

证明. 先证明, 若 P 是 E 的聚点, 则 P 不是 E 的内点就是 E 的边界点.
因为 P 是 E 的聚点, 则对任意点 P 的邻域 $U(P)$ 都含有 E 的无穷多个点, 从而, 对任意点 P 的邻域 $U(P)$, 都有 $U(P) \cap E \neq \emptyset$,

(1) 若 P 的邻域中存在某个邻域 $U(P)$, 使得 $U(P) \subset E$, 则 P 是 E 的内点;

(2) 若 P 不是 E 的内点, 则由上面得出的结论: 对任意点 P 的邻域 $U(P)$, 都有 $U(P) \cap E \neq \emptyset$ 可知, P 也不是 E 的外点, 从而 P 是 E 的边界点.

则 $E \cup \partial E$ 的所有聚点都包含在 $E \cup \partial E$ 中, 于是 $E \cup \partial E$ 是闭集. ∎

$$y = \left\{ \begin{array}{ll} x_1^2(1 + \frac{1}{x^2}) & \text{if } x_2 \neq 0 \\ 0 & \text{if } x_2 = 0 \end{array} \right\} \quad \text{for all}(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \tag{1}$$

$$f(x_1, x_2) = \begin{cases} x_1^2(1 + \frac{1}{x_2}) & \text{if } x_2 \neq 0, \\ 0 & \text{if } x_2 = 0. \end{cases} \tag{2}$$