三维空间的结构

丘成桐

哈佛大学数学系

所有图形取自顾险峰，王雅琳，
丘成桐的合作文章，由顾险峰提供

先生们, 女士们:

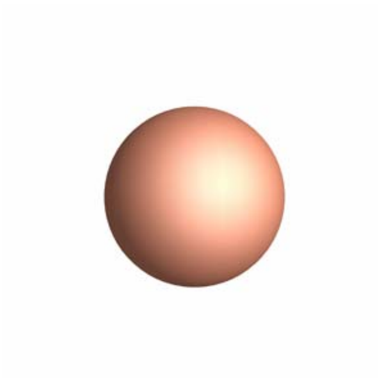
今天我将会告诉你们数学上的一页篇章是如何结束和新的篇章正在开始。

请允许我先从一些基本的观察开始。

几何结构

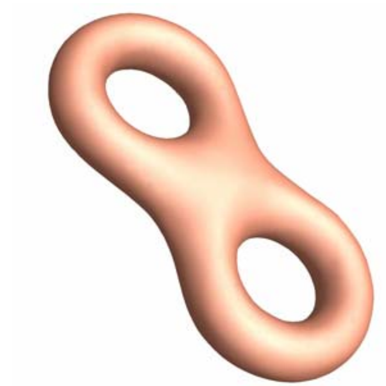
几何学的主要目的是描述与分类有趣的几何结构。我们在日常生活中看到许多有趣的几何结构。

我举几个例子：



亏格0

亏格1



亏格2

亏格3

曲面的亏格就是环柄的数目。

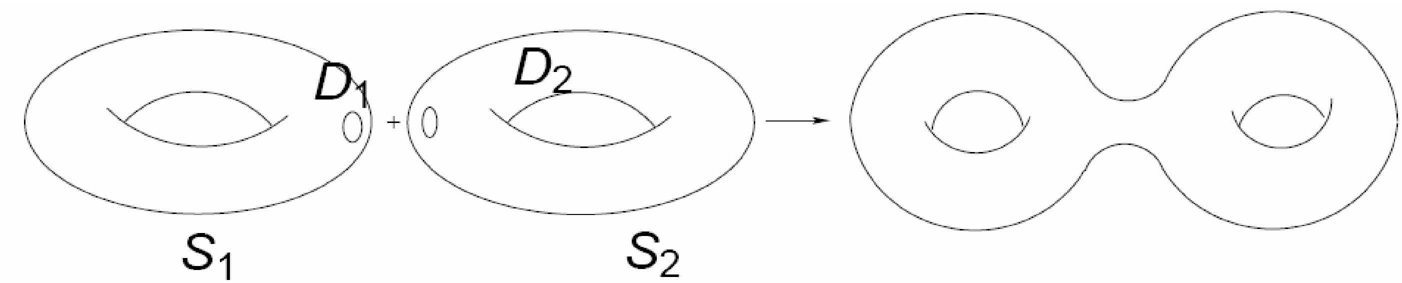
连通和

构造曲面的一个抽象和主要的方法是作曲面的连通和。

连通和

连通和$S_1\#S_2$是通过删除圆盘 D_i 并且钻孔曲面$S_i - D_i$通过微分同胚$h:\partial D_1\rightarrow\partial D_2$粘合起来，于是

$$S_1\#S_2=(S_1-D_1)\cup_h(S_2-D_2).$$



例子

通过连通和构造的亏格等于**8**的曲面

曲面结构定理

定理（曲面分类定理）

任意闭的可定向的曲面是如下曲面之一:
球面，环面或有限多个环面的连通和。

共形几何

为了更深入理解曲面，庞加莱建议理解这些二维对象上的共形几何。

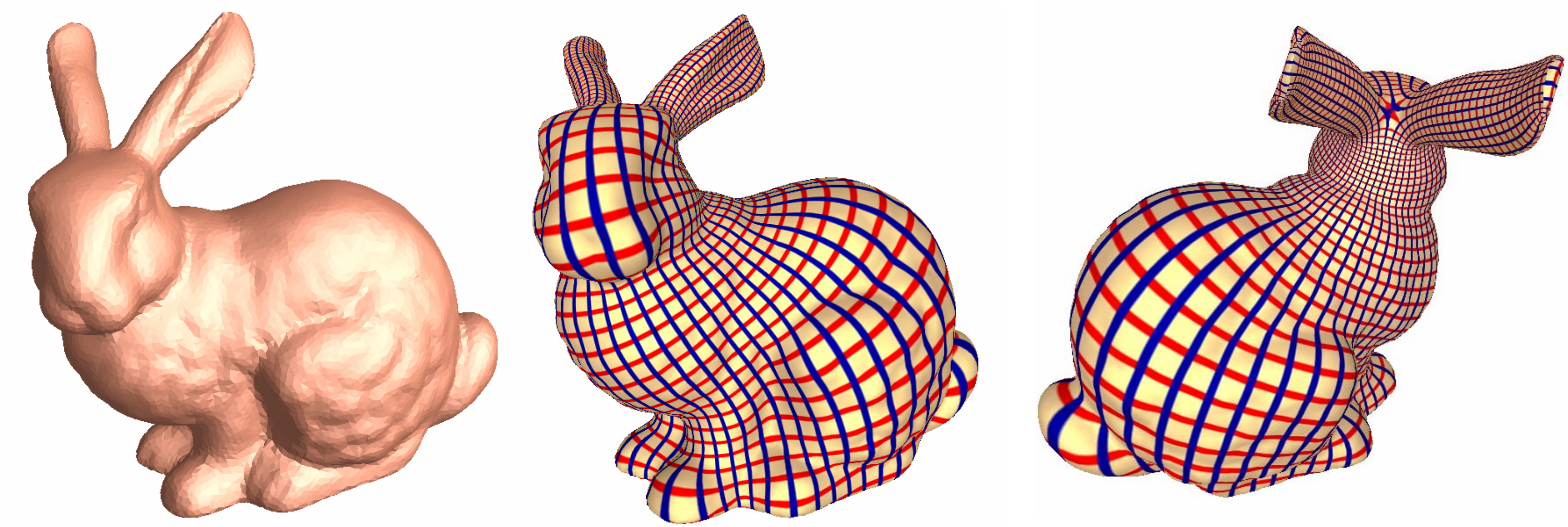
例子

在地球上我们利用经线和纬线来确定方位。它们互相垂直。当我们将方形的地图映到球面上的时候，距离产生了扭曲。比如，北极附近很小的区域在方形地图上是很大的区域。不过，经线与纬线的正交性在映照下保持不变。所以，如果一艘船在海上航行，我们可以用地图精确地指引它的航向。

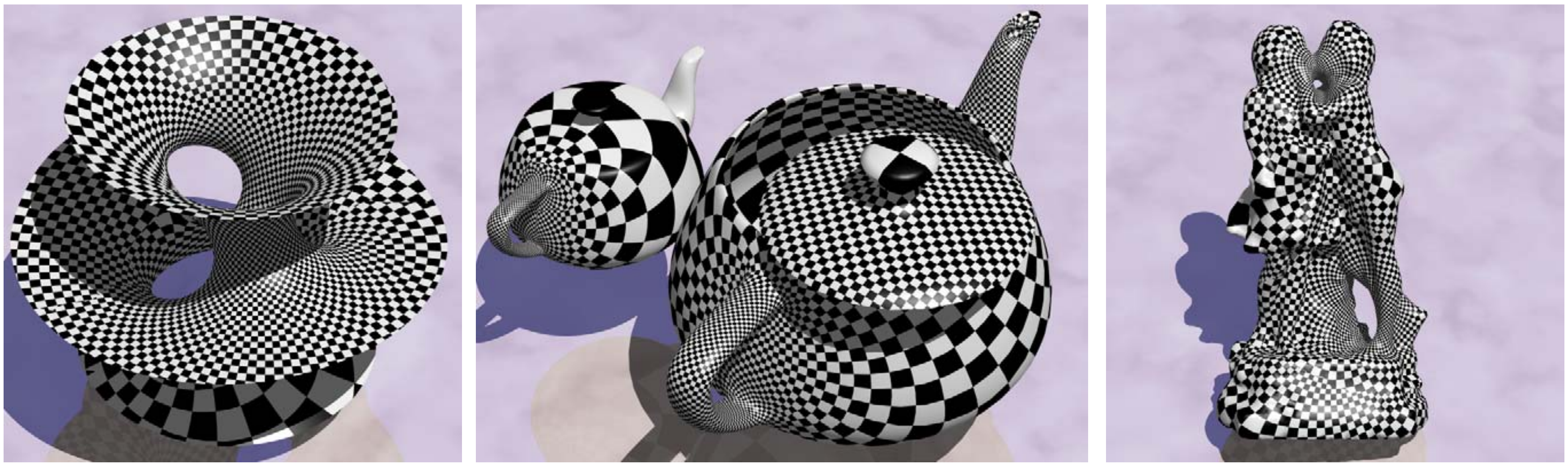
地球

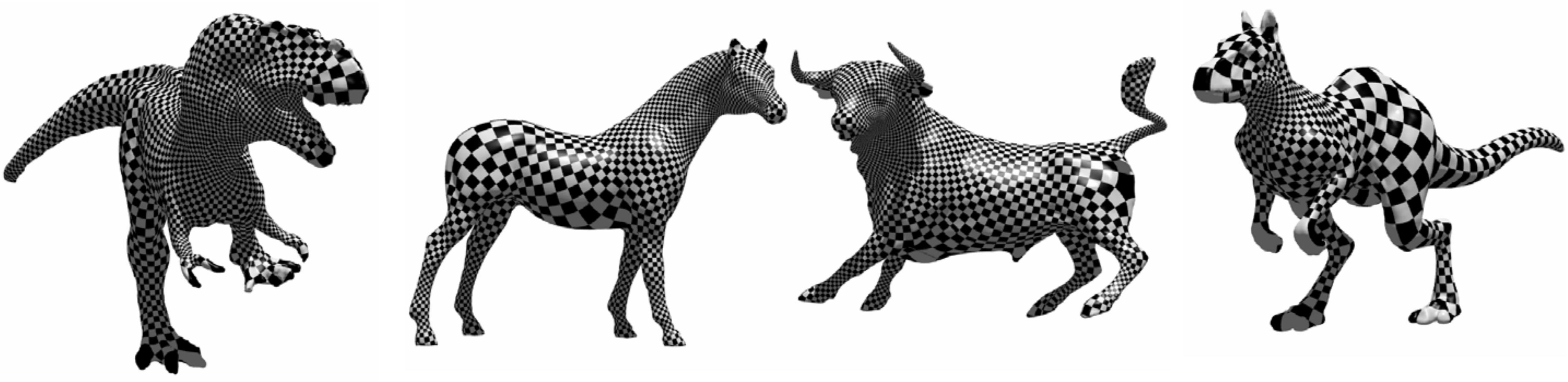
共形几何

庞加莱（**Poincare**）发现，我们可以在任何曲面上绘制经线（篮色曲线）与纬线（红色曲线）。

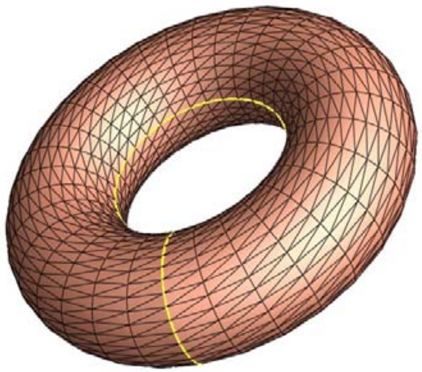
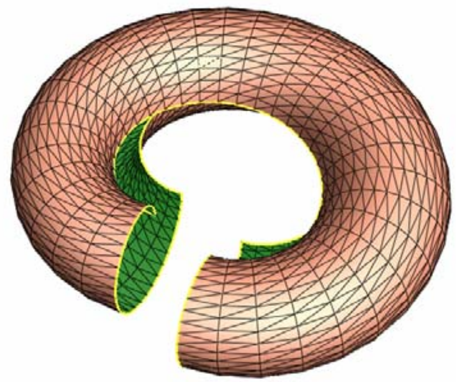
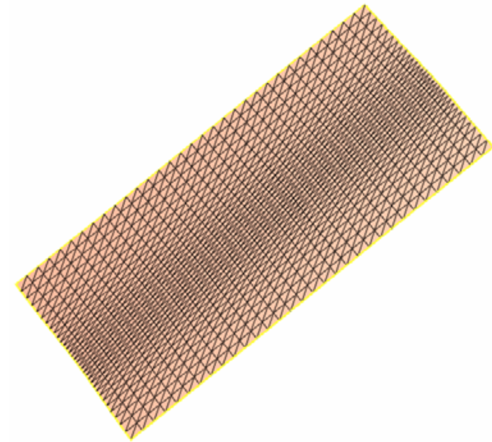
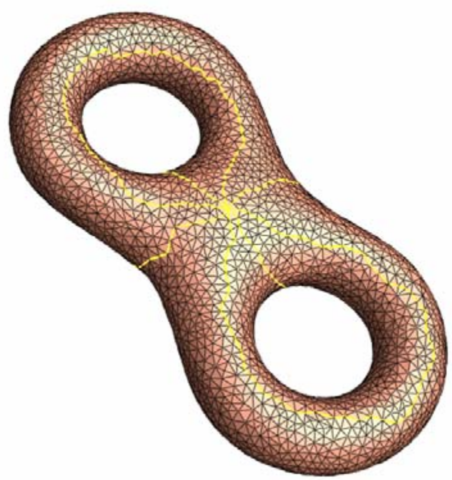
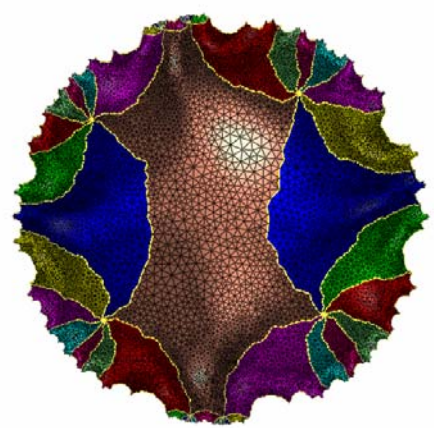


共形结构





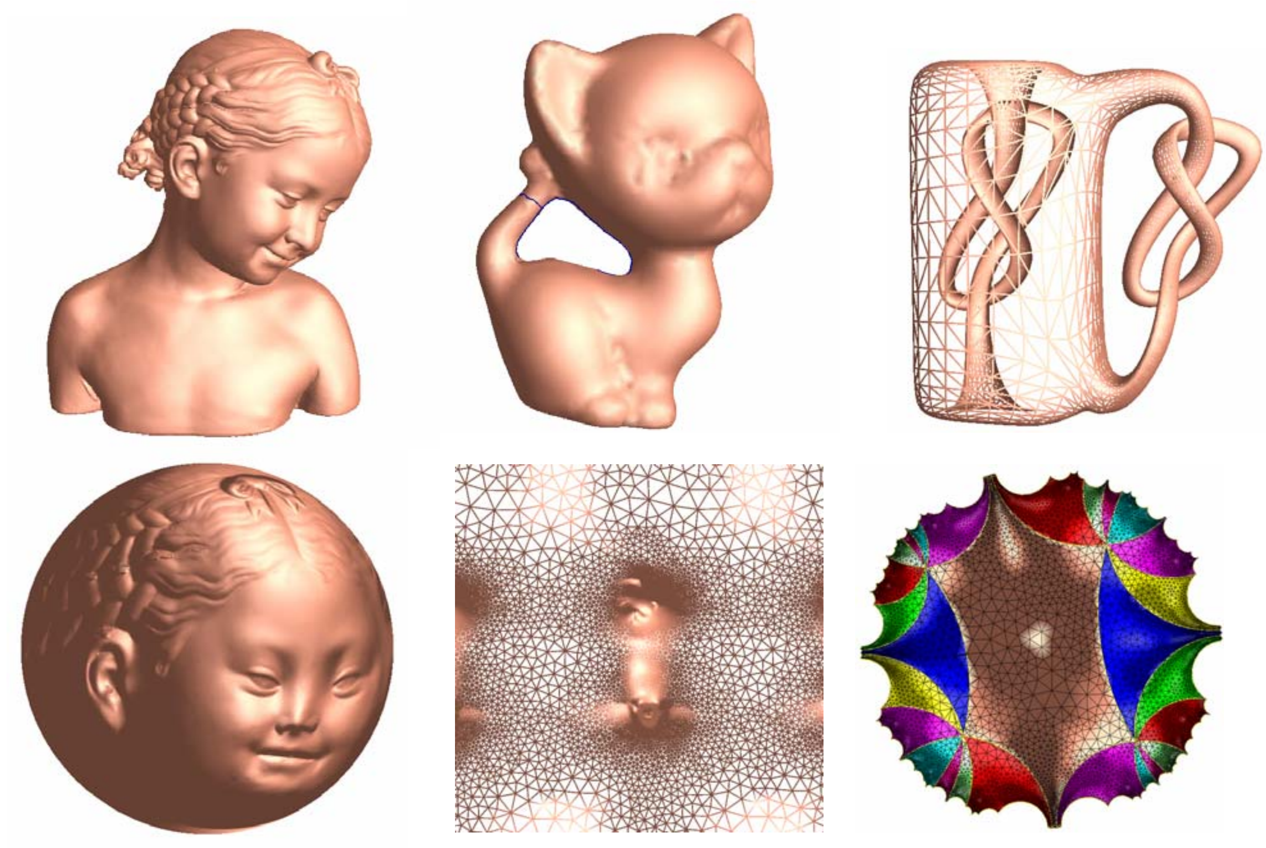
我们可以沿着曲面上某些特殊的曲线切割，然后把曲面在平面或圆盘上展开。在这个过程中，经线与纬线保持不变。

曲面上共形结构的例子

定理（庞加莱单值化定理）

任意二维封闭空间必与一常高斯曲率空间共形等价。



球面　　欧氏　　双曲

曲面上的**Hamilton**方程

我们可以通过曲率变动任意曲面。这种形变就是曲面的**Hamilton**的**Ricci** 流。这种形变最后得到常曲率空间。这一方法是**Hamilton**发明的，可用来改变任意维空间。

三维流形

到目前为止，我们所讨论的空间只有两个自由度。与束缚于曲面上的虫子所看到的二维空间不一样，我们所生存的空间有三个自由度。虽然我们的三维空间看起来是平坦的，但还有许多自然而不平坦的三维空间。

三维流形

例子

相空间

在二十世纪初，庞加莱研究粒子动力学的相空间。相空间由 $(x;v)$，即粒子的位置与速度组成。例如，如果一个粒子在二维曲面 Σ 上以单位速度自由移动，那么这个粒子就有三个自由度。这就产生了一个三维空间 $\boldsymbol{M}$。

纤维丛

如果我们对 M 上每个点 $(x;v)$，赋以点 $x \in \Sigma$，我们得到一个从 M 到 Σ 的映射。当我们固定点 x，v 可以取任意单位向量, 因此 v 可以在单位圆上自由移动。我们称 M 是 Σ 上的纤维丛而它的纤维是单位圆。

庞加莱猜想

高维拓扑学可以说是从庞加莱的问题开始：

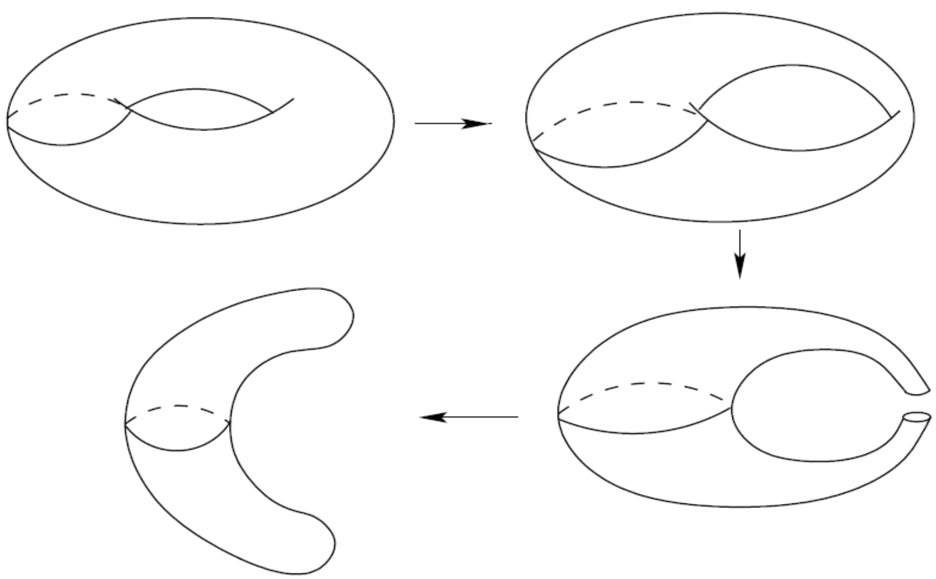
庞加莱猜测

一个闭的三维空间，若其上的每条闭曲线都可以连续收缩到一个点，那么从拓扑上来看，这个空间是否就是球面？

这个问题不仅是一个著名的难题，而且是三维拓扑理论的中心问题。

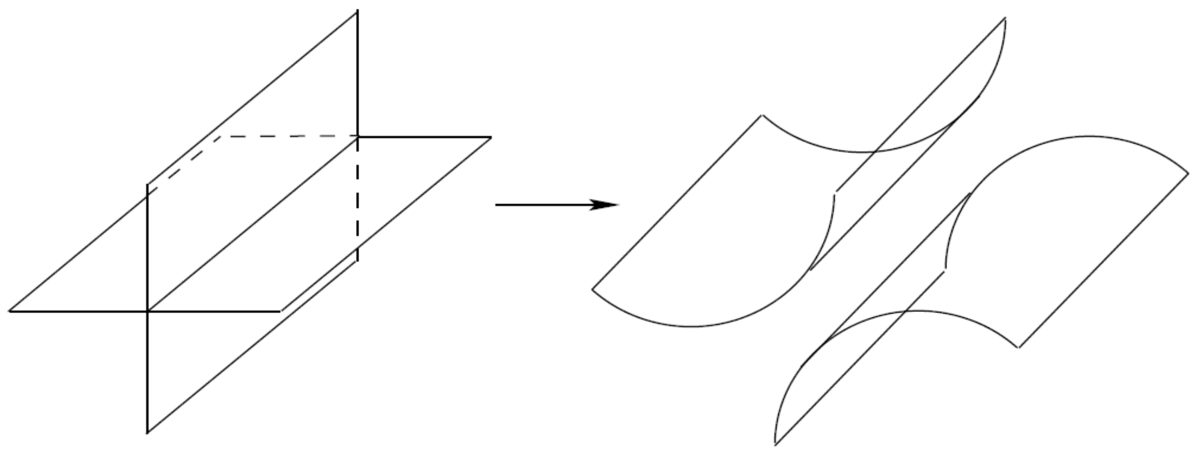
拓扑手术

拓扑学家研究这个问题已经有一百多年历史了。主要的工具是切割与粘合，或称手术，来简化一个空间的拓扑。



拓扑手术

在七十年代以前, 主要的工具有**Dehn**引理，提供了将自相交叉的曲面简化为无交叉曲面的工具。



拓扑手术

定理（Dehn引理）

如果存在从圆盘到三维空间的一个映射，且不在圆盘边界上自相交叉，那么存在另一个到三维空间的没有自交叉的映射，且限制在边界上与原来的映射相等。

Dehn引理的一种基于极小曲面理论的版本是Meeks–丘成桐发现的，对以后的发展很有帮助。

拓扑手术

第二个工具是**Haken**引入的不可压缩曲面的构造。它被用来将三维流形切割成片。**Walhausen**用这一方法证明了重要的定理。**(**不可压缩曲面是一种嵌入曲面，且具有如下性质：如果一条闭环路不能在曲面上收缩到一个点，那么它也不能在三维空间中收缩到一个点。**)**

特殊曲面

有几个重要的一维和二维空间在理解三维空间的过程中起了重要的作用。

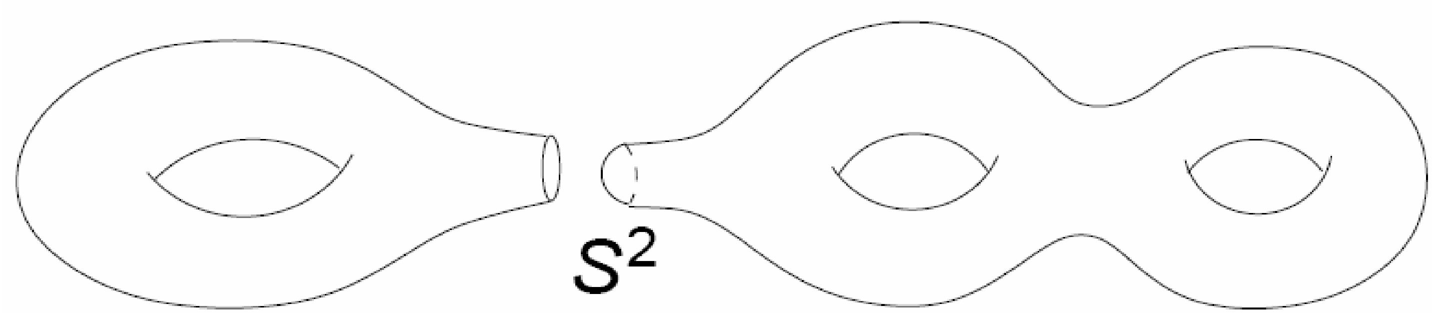
1. 圆周

Seifert 构造了许多三维空间，可以写成圆周的连续族。上面提到的相空间是**Seifert**空间的一个例子。

特殊曲面

2. 二维球面

我们可以通过在两个三维空间上的各挖去一个实心球，然后沿着球面粘合起来。

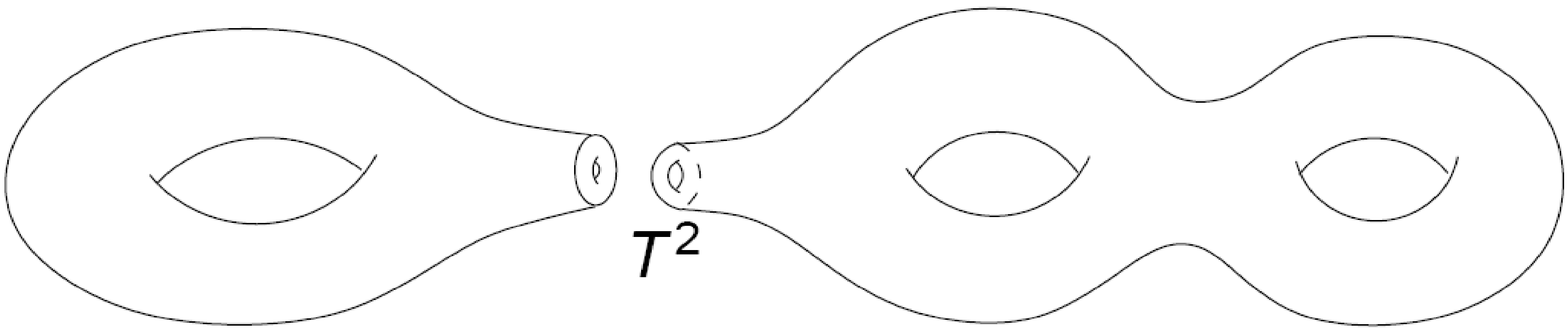


相反，**Kneser**和**Milnor**证明每个三维空间可以通过球面唯一分解成不可约分支。一个空间称为是不可约的，如果每个嵌入球面都是这个空间中的一个三维球的边界。

特殊曲面

2. 环面

Jaco-Shalen, Johannson的一个定理说，我们可以通过沿环面切割作进一步分解。



三维空间的结构

几何化猜测 **(Thurston)**：

三维空间的结构是由如下的基本空间所合成的**:**

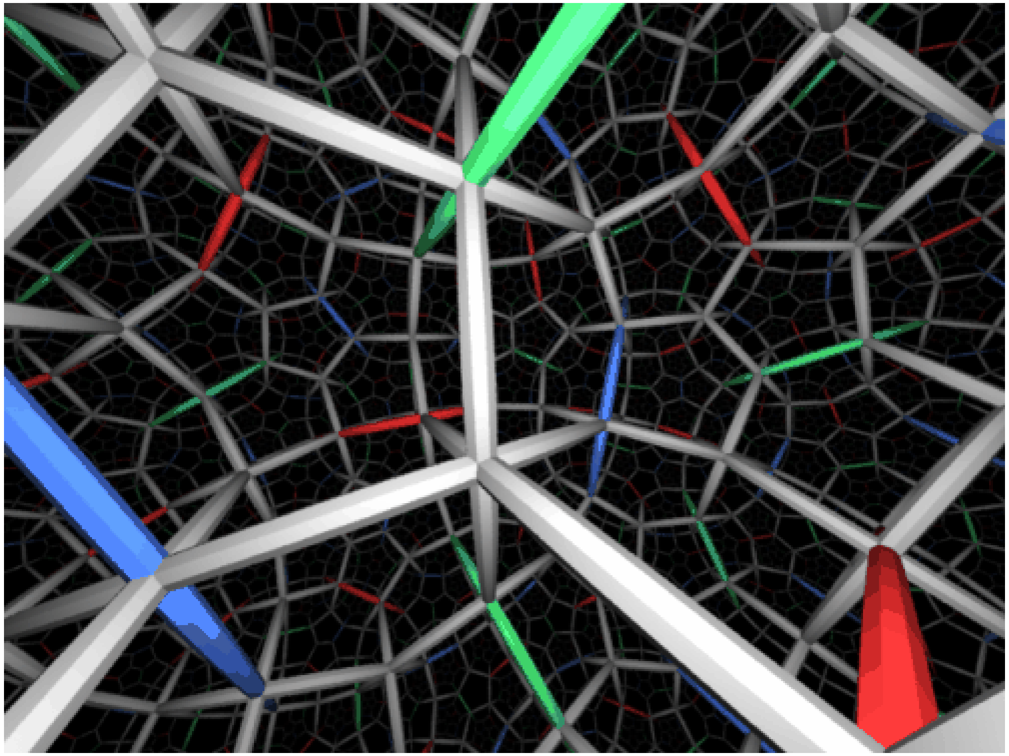
(1).（庞加莱猜测）如果三维空间上每条闭环路都可以收缩到一个点，那么这个空间就是三维球面。

(2).（空间形式问题）将三维球面上的点等同起来得到的空间。这由线性等距的一个有限群所支配，类似于晶体的对称。

(3). **Seifert** 空间及其类似于**(2)**用有限群得出的空间。

(4). （**Thurston**猜测**:**双曲空间）边界由环面构成的三维空间，空间中每个二维球面都是某个球的边界，每个不可压缩的环面可以用适当的方法形变到边界；这种空间被猜测为带有常负曲率的空间，并且可以通过双曲球的一个离散对称群得到。

三维双曲空间



用十二面体拼成的双曲空间（**Charlie Gunn**）

三维空间的结构

Thurston猜测将三维空间的分类简化为群论问题，发展出了许多工具。他和一些后来的学者证明了当三维空间足够大时（这是Haken和Walhausen所研究的空间），猜想成立。（一个空间里如果有非平凡和不可压缩的嵌入曲面，我们称它为足够大的。）

可惜Thurston的证明方法很难用到最一般的流形上。

几何分析

另一方面，从**70**年代开始，一群几何分析学家应用非线性偏微分方程来构造空间的几何结构。**Yamabe**考虑了将一个空间共形地变为为常数量曲率空间。可是这种方法不能用来区分空间的拓扑。

几何分析

一个重要的发现是**1976**年凯勒一爱因斯坦空间的构造。事实上，我用这个方法证明了复情形的庞加莱猜测。在复几何中被称为**Severi**猜测，即每个同伦等价于复射影平面的复曲面必是复射影平面。

几何分析

将几何与分析的想法结合起来理解几何与拓扑的学科称为几何分析。而这一学科可以追溯到**19**世纪**50**年代，在过去**30**年中有了长足的发展。

这一学科有两大支柱：非线性分析与几何。由于许多学者的努力，这两个学科在**70**年代都变得很成熟。**(**见我的综述文章**``Perspectives on Geometric Analysis'' in Survey in Differential Geometry, Vol 10, 2006)** 。

爱因斯坦空间

　　我现在介绍一下几何分析的想法如何用来解决庞加莱猜测。

　　在三维空间情形，我们需要构造爱因斯坦结构，这是受到了重力理论中的爱因斯坦方程启发。对任何一个三维空间结构，我们找一种方法将它形变到一个满足爱因斯坦方程的空间结构。这种形变必须依赖于空间的曲率。

爱因斯坦方程

　　爱因斯坦的相对论告诉我们，在重力影响下，时空具有曲率。空间不断地改变。空间的整体拓扑随着曲率（重力）的分布而变化。相反的，整体拓扑非常重要，它提供了重力分布的限制条件，也可以看作重力的源头。

爱因斯坦结构

假设

我们假设三维空间是紧致无边的（也就是闭的）。

Ricci 张量

在三维空间中，空间的曲率从不同方向测量会不一样。这种测量受**Ricci张量** R_{ij} 支配。这本质上是空间的物质张量。

Ricci曲率

数量曲率

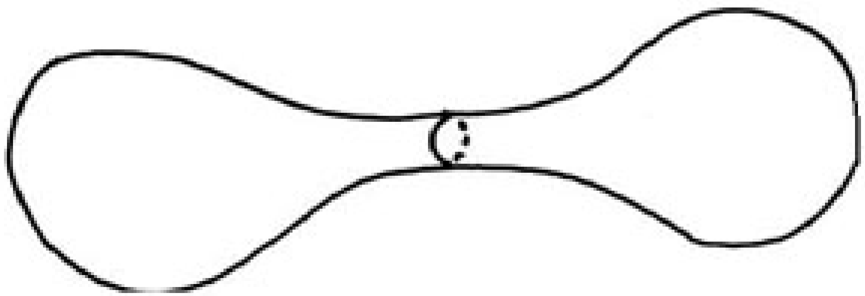
与方向无关的一个重要的量是**数量曲率** ***R***。它是 R_{ij} 的迹，可以用来测量测地球的扩张或收缩：

$$Volume(B(p,r)) \sim \frac{4\pi}{3}\left(r^3 - \frac{1}{30}R(p)r^5\right),$$

其中 $B(p,r)$ 是以 ***p*** 为圆心，以 ***r*** 为半径的球，$R(p)$ 是 ***p*** 点的数量曲率。

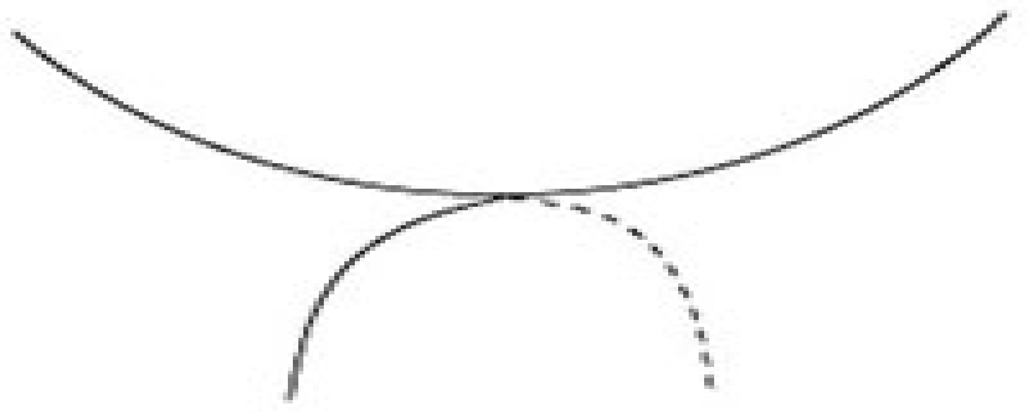
Ricci曲率

二维哑铃型曲面



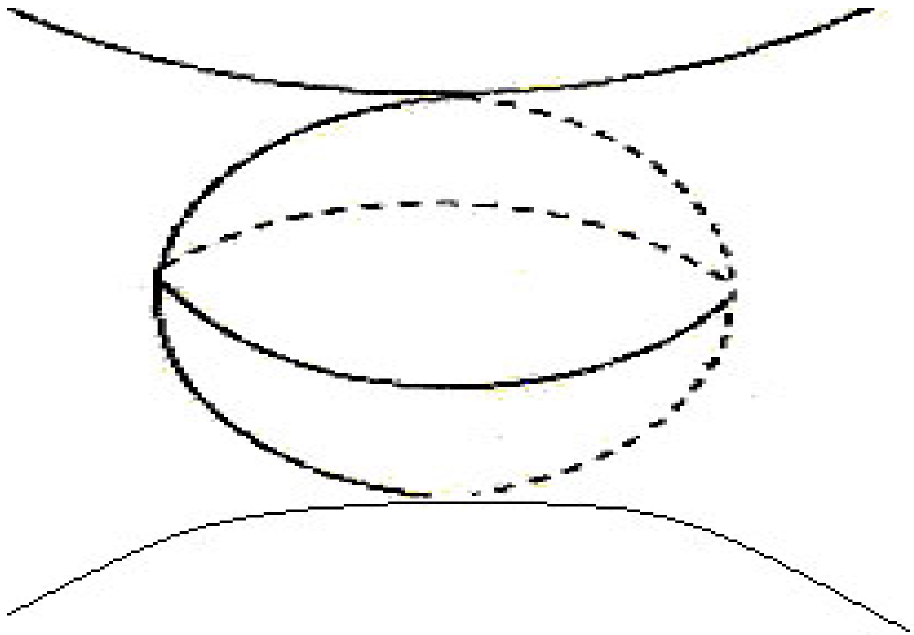
Ricci 曲率

二维鞍马型负曲率曲面



Ricci曲率

可是，在三维，一个颈有下面的形状：



这个片是具有很大正曲率的二维球 面。所以颈部的数量曲率可以是正的。

爱因斯坦方程动力学

粗略的说，质量密度由空间的数量曲率加上动量密度组成。爱因斯坦动力方程迫使黑洞的形成，将空间分为两部分：数量曲率为正的部分空间和可能具有黑洞的部分空间。一般来说, 在黑洞视界以内，拓扑趋向于容许负曲率结构。

重力理论中有两个量支配空间的动力学：度量与动量。动量很难控制。所以目前很难用广义相对论的爱因斯坦方程来研究空间的拓扑。

Hamilton方程

1979年，**Hamilton**发展了新的方程来研究空间的变动。**Hamilton**的方程是如下的：

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial t} = -2R_{ij}.$$

与重力驱动空间不同，他用**Ricci**曲率来驱动，这类似于热扩散。热传导方程具有使空间光滑的性质。它能够将热源瞬间传递到空间上的任何一点。

这个方程也被物理学家在同一时期考虑（首先出现在**Friedan**的论文里）。不过观点有很大不同。

奇点

另一方面，整体拓扑与方程中由于曲率产生的非线性项确实将空间部分区域变为点，出现空间的拓扑塌陷。我们称这种点为空间的奇点。

1982年时，**Hamilton**在这个方程的研究方面发表了第一篇文章。从正曲率空间开始，他证明了，在他的方程支配下，在作保持体积不变的膨胀以后，空间不会遇到任何奇点，这就导致曲率在每个方向都是常数的空间。这种空间可以是三维球面，也可以是球面在有限等距群作用下的商。

看到**Hamilton**的定理后，我确信**Hamilton**的方程正是完成几何化纲领所需要的方程。

(在**Hamilton**的文章发表以后不久，出现了**Huisken**用平均曲率形变凸曲面的文章。平均曲率流方程是理解**Hamilton** 方程的一个很好的模型。**)**

我们建议用他的方程不断地改变三维空间，最后会将空间分解。这将会导致**Kneser, Jacob-Shalen, Johannson**的拓扑分解定理。我们希望哈密尔顿方程的渐近状态会分解成几个部分，或者塌陷，或者产生满足爱因斯坦方程的结构。

在三维空间中，爱因斯坦结构是常曲率的。可是，形变会产生奇点。主要的问题是找到描述所有奇点的办法。以下我们将介绍这个重要的发展。

Hamilton纲领

Hamilton的想法是通过拓扑手术把奇点除去，在手术以后继续他的方程。如果再次发展出奇点，则重复手术，继续前进。

如果我们可以证明在任意有限时间段内，只需做有限次手术，并且**Hamilton**方程的解的长时间行为得到了很好的了解，那么我们就能够识别出初始流形的拓扑结构。所以，**Hamilton**的纲领如果能够成功实施，将会导致庞加莱猜想与**Thurston**猜想的证明。

Hamilton的贡献的重要性与创造性永远不会被高估。这个领域里的任何专家都会认可**Hamilton**是整个理论最主要的贡献者。

Hamilton纲领

2002年**12**月，**Perelman**说：

“遵循**Hamilton**纲领将会推出闭三维流形的几何化猜想。”

“在这篇文章中，我们完成**Hamilton**纲领中的一些细节。”

现在我们将根据年代发展，描述**Hamilton**的纲领。分成几个阶段：

I. 先验估计

早在**90**年代，**Hamilton**系统地发展理论，来理解奇点的结构。在我的建议下，他证明了当曲率为非负时，他的流的 李伟光**-**丘成桐 型估计（李伟光**-**丘成桐 **-Hamilton**估计）。这一估计提供了**Hamilton**方程行为的先验控制。

先验估计是证明非线性微分方程存在性定理的关键。一个直观的例子可以解释如下：一位导弹工程师设计导弹的轨线，他可能需要知道发射十分钟后导弹的位置与速度。由于风速的改变，他的估计可能很不相同。可是只要这个估计在一定的精度范围内，他就可以知道如何去设计导弹。如何决定这个精度范围, 这就叫作先验估计。

李伟光-丘成桐-Hamilton 估计

在证明非线性微分方程的过程中，我们需要找到一些量的先验估计，来控制这个方程。基于解释李伟光-丘成桐不等式,**Hamilton**发现了一个通过扩张孤立子导出精细估计的原理.对于具有非负曲率**Hamilton**方程,这是李伟光-丘成桐 -**Hamilton** 估计给出的:

对任意**1**一形式 W_a 和**2**一形式U_{ab}，我们有

$$M_{ab}W_aW_b + 2P_{abc}U_{ab}W_c + R_{abcd}U_{ab}U_{cd} \geq 0$$

其中 $P_{abc} = \nabla_a R_{bc} - \nabla_b R_{ac}$,

$$M_{ab} = \Delta R_{ab} - \frac{1}{2}\nabla_a\nabla_b R + 2R_{abcd}R_{cd} - R_{ac}R_{bc} + \frac{1}{2t}R_{ab}$$

拼挤估计

在应用这种估计研究奇点结构的过程中，**Hamilton**发现（**Ivey**也独立得到）三维空间上他的方程的一个曲率拼挤估计。这使得他发现，奇点的一个邻域与非负曲率空间相似。

于是在附加了非塌陷条件下，**Hamilton**得到了最可能出现的奇点的结构。只有一类奇点他无法确定其存在性。（他将这类奇点称为雪茄型）。

II. Hamilton关于几何化的工作

1995年，他发展了用常平均曲率曲面叶化的几何手术的方法来研究具有正迷向曲率四维流形的拓扑。

1996年，**Hamilton**继续分析在合适正则性条件（他称之为非奇异解）下的时空结构。特别的，他证明容许非奇异解的三维空间满足几何化猜想。

这些惊人的工作是建立在对几何与非线性微分方程的深刻分析基础上的。这两篇文章令人深信，几何化纲领可以用**Hamilton**的方法在可期待的一段时间内加以破解。

Hamilton工作中的主要组成部分

在他深刻的分析中，需要如下几个主要部分：

1. 他自己在 郑绍远-李伟光-丘成桐 **1981** 年得到的单射半径估计工作基础上证明的关于空间收敛性的紧性定理。
2. **Mostow** 刚性定理的量化改进，刚性定理说具有有限体积的三维空间上至多只有一个常负曲率度量。

3. 用环面分解空间的过程中，他需要证明环面是不可压缩的。他的证明依赖于 **Meeks-**丘成桐 和 **Schoen-**丘成桐 发展的极小曲面理论。**Meeks-**丘成桐 的工作得到了三维拓扑的 **Smith** 猜测证明中需要的一个等变 **Dehn** 引理。**Schoen-**丘成桐 的工作与他们证明广义相对论中正质量猜测有关。

III. Perelman 的突破

在前面提到的这些工作出来以后，**Hamilton**的方法给庞加莱猜测与几何化猜测的证明带来了一片光明。主要的困难在于如何利用局部曲率的界来对单射半径进行某种控制，以理解奇点的结构与奇点手术的过程。

2002年**11**月，**Perelman** 推出预印本 **"The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications"**。在引言中，他说他的主要目的是执行**Hamilton**的纲领。

与**1986**年李伟光-丘成桐的工作相平行的，**Perelman** 用路径积分引入了一个时空距离函数，用来验证一般的非塌陷条件。令 σ 是任意链接 ***p*** 到 ***q*** 的时空道路，我们定义作用

$$\int_0^{\tau} \sqrt{s}(R + |\dot{\sigma}(s)|^2)ds.$$

在所有 ***p*** 与 ***q*** 之间的道路取极小值，我们定义了时空距离函数。

Perelman 定义他的约化体积

$$\int (4\pi\tau)^{-\frac{n}{2}} \exp\left\{-\frac{1}{2\sqrt{\tau}} L(q,\tau)\right\}$$

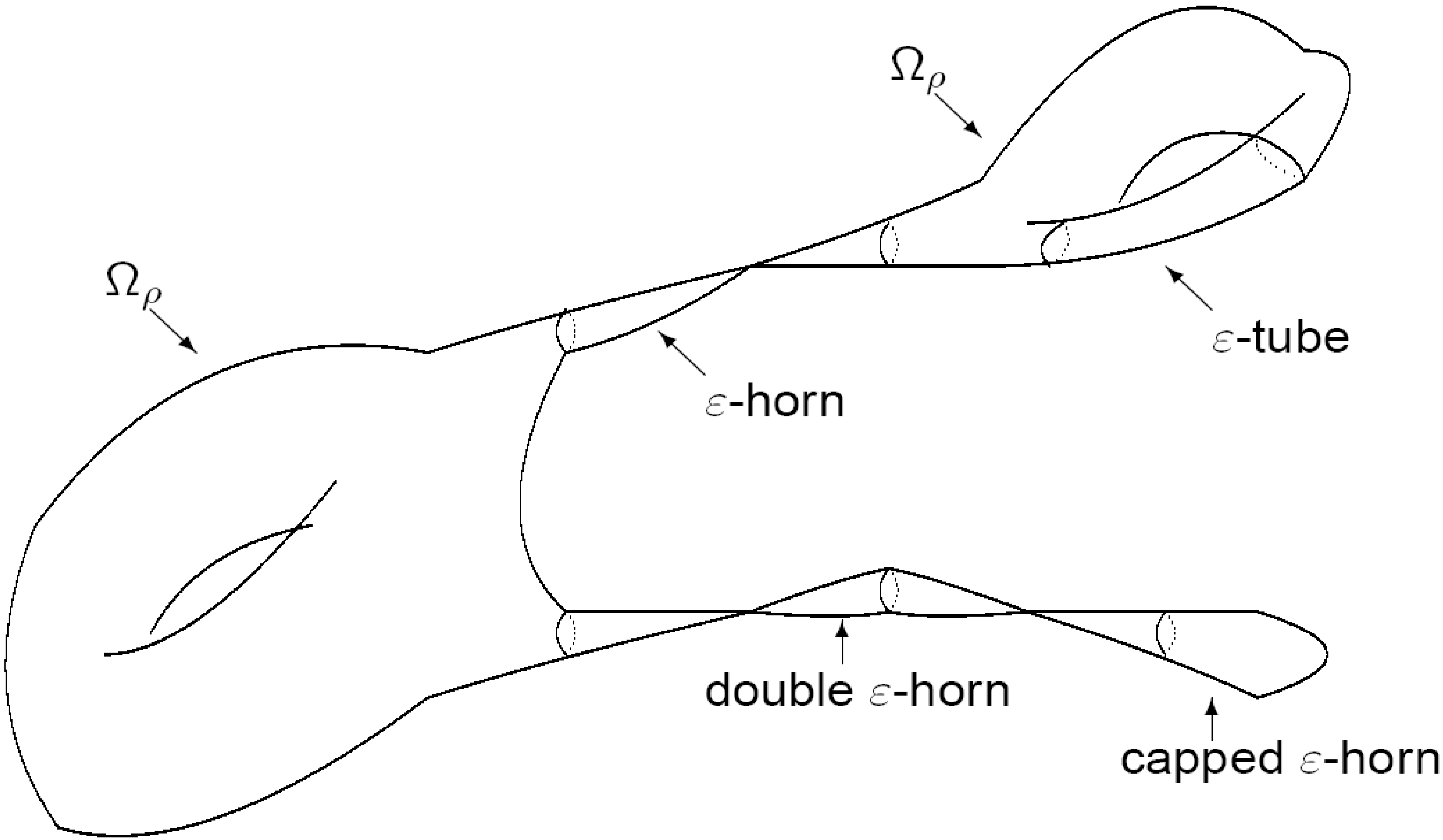
并注意到在**Hamilton**方程下，约化体积是递减的。

Perelman 说：**“**李伟光**-**丘成桐对一个线性抛物方程赋以**‘**长度**’**，与我们的情况几乎完全一样。**”**

比例尺论证方法

Perelman 进一步发展了一个重要的，改进的比例尺论证方法，来完成**Hamilton**对于奇点的分类，得到了一致并整体的奇点结构定理。

奇点结构



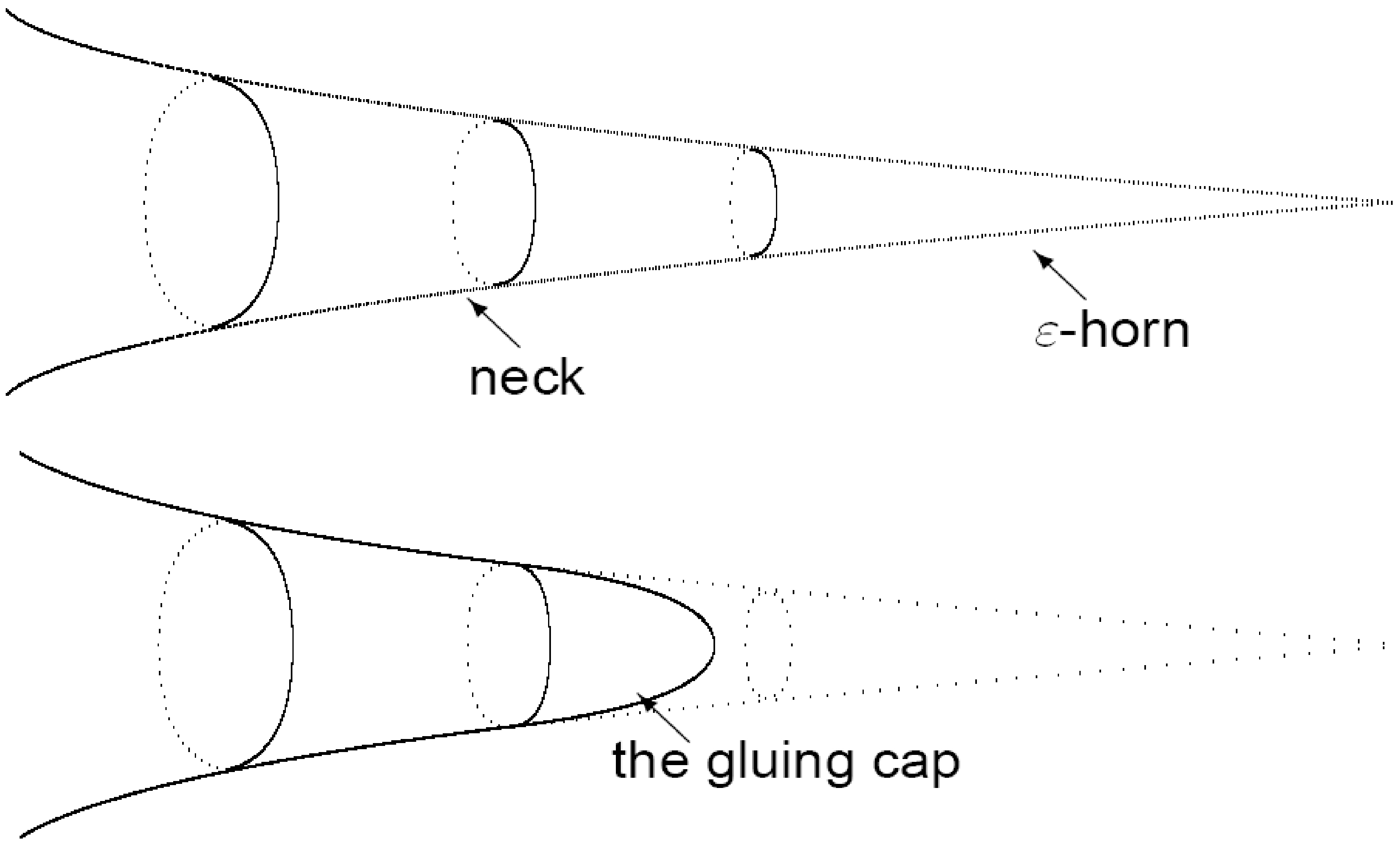
Ω_ρ
Ω_ρ
ε-tube
ε-horn
double ε-horn
capped ε-horn

Hamilton的几何手术

现在我们需要一个施行几何手术的办法。在**1995**年，**Hamilton**已经对四维空间开创了一种手术过程，给出了施行这种手术的具体方法。

我们可以检验，**Hamilton**的几何手术对三维空间也成立。手术的步骤介绍如下：

Hamilton的几何手术



手术时间的离散性

真正的挑战在与证明每个有限时间段内只进行有限次手术。问题在于，当我们在进行每次手术时，可能会引入误差，积累到一定程度手术就会越来越频繁。

2003年**3**月，**Perelman** 推出了另一篇预印本，题为**“Ricci flow with surgery on three manifolds”,** 其中他改进了**Hamilton**的几何手术过程，随着时间演进，手术的精度也不断提高。

Perelman 引入了比例尺论证方法来研究手术时间离散性问题。

手术时间的离散性，比例尺论证

当对**Hamilton**方程的手术解采用比例尺论证，我们遇到如何应用**Hamilton**紧性定理的困难，因为这个紧性定理只对光滑解有效。

克服这个困难的想法由两部分组成：

1. （**Perelman**）**:** 选择截断半径充分小，将手术区域远推。

手术时间的离散性--比例尺论证方法

2. （曹怀东－朱熹平）：建立了三个关于手术解的时间延展的结果，使得**Hamilton**的紧性定理仍然可用。为了达到这个目的，他们需要对手术区域的延伸有深刻的了解，这用到 陈兵龙-朱熹平关于非紧流形上**Hamilton**方程解的唯一性定理。

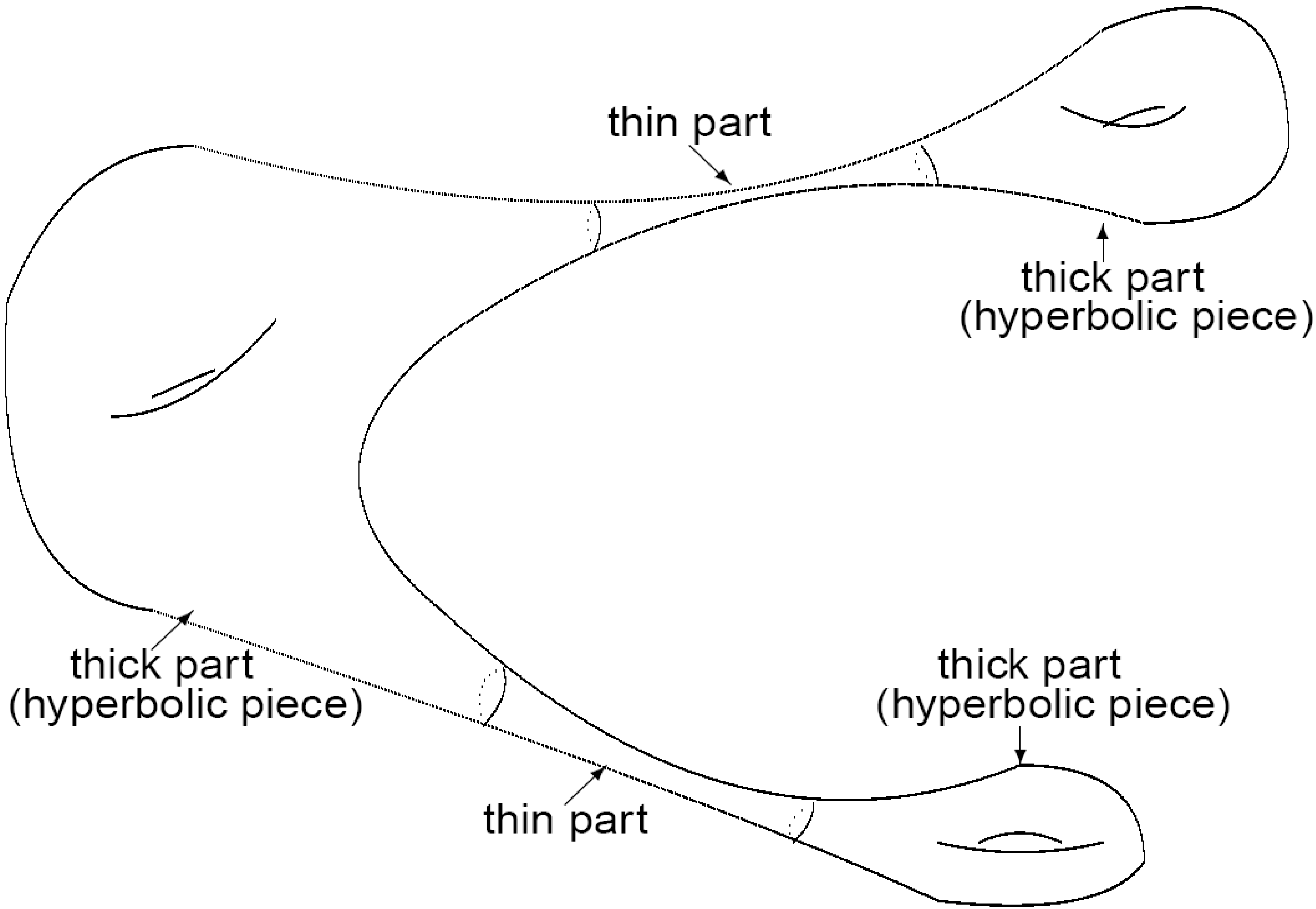
总结庞加莱猜测证明

一旦知道手术相对于时间是离散的，我们可以完成正数量曲率三维空间的分类，这是**Schoen-**丘成桐最早研究的问题。

更重要的，对单连通三维空间，结合**Colding-Minicozzi**（**2005**）的有限时间消亡性结果，这就提供了庞加莱猜测的完整证明。

IV. 几何化猜测的证明：粗细分解

为了研究一般空间的结构，我们仍然需要分析**Hamilton**方程的手术解的长时间行为。正如我们在 **II** 中所提到的，**Hamilton**在**1996**年研究了一些特殊光滑解的行为。


thin part
thick part
(hyperbolic piece)
thick part
(hyperbolic piece)
thick part
(hyperbolic piece)
thin part

粗细分解

Hamilton证明任意三维非奇异解容许一种粗细分解，其中粗的部分由有限多个双曲空间组成，而细的部分塌陷。通过改进 **Schoen-**丘成桐的极小曲面理论，**Hamilton**进一步证明双曲片的边界是不可压缩环面。所以，任何非奇异解都是可以几何化的。

粗细分解

虽然非奇异的假设的有局限性，但**Hamilton**的想法与论证在 **Perelman** 的工作中起了很关键的作用，特别用来分析一般手术解的长时间行为。

这样, **Perelman** 宣称可以用粗细分解来给出 **Thurston** 几何化猜测的证明。

粗细分解

对于粗的部分，基于李伟光-丘成桐-**Hamilton** 的估计，**Perelman** 建立了一个关键的椭圆型估计，使得他可以证明粗的部分由双曲片组成。对细的部分，由于他只能得到截面曲率的一个**(**局部**)**下界**,** 他宣布了一个新的塌陷结果。假设这个新的塌陷结果成立，**Perelman** 认为手术解与**Hamilton**工作中的非奇异解具有相同的长时间行为，这个结论可以推出 **Thurston** 几何化猜想的证明。

粗细分解

虽然 **Perelman** 期望的这个新的塌陷结果还未见诸文献，**Shioya-Yamaguchi** 在闭空间的特殊情形发表了一个塌陷结果的证明。最近，曹怀东－朱熹平在前面工作的基础上给出了 **Thurston** 几何化猜想的一个完全证明。

后记

在 **Perelman** 的工作中，许多关键的证明思想只是作了勾画或略述，而经常缺少完全的细节。最近曹怀东－朱熹平**2005**年提交给《亚洲数学杂志》（ **Asian Journal of Mathematics**） 的文章给出了庞加莱与 **Thurston** 几何化猜想的第一个完整与详细的描述。他们在自己工作基础上，给出了 **Perelman** 工作的几个步骤的新证明。

过去三年中，许多数学家试图探究: **Hamilton**与**Perelman** 的想法是否可以结合起来**? Kleiner** 与 **Lott** （**2004**）在网上公布了关于 **Perelman**部分工作的注记。不过这些注记与完整的证明相差甚远。在曹怀东－朱熹平的工作在**2006**年**4**月宣布以后，**Kleiner** 与 **Lott** 在五月底公布了一篇比他们在**2004**年完整的笔记。他们的方法与曹怀东－朱熹平的方法有所不同。要完全理解他们的笔记还需要一些时间，因为在其中几个关键的地方仍然非常粗略。

Hamilton纲领的成功是过去三十年中几何分析学家集体努力的成果。这应该被看作几何分析学科伟大的成就，它的奇妙之处在于只用几何与分析就能够证明极度困难的拓扑学定理。

Hamilton方程是一个复杂的非线性偏微分方程组。这是数学家们第一次能够理解复杂的偏微分方程组的奇点和演化。

类似的方程组在自然现象中比比皆是。解决**Hamilton**方程的方法将给这些自然的方程**,** 如**Navier-Stokes** 方程和爱因斯坦方程**,** 的研究带来曙光。

Hamilton方程的数值计算应当在计算机图形中有用的**,** 在二维图形的研究中已由顾险峰**-**王雅琳**-**丘成桐所证实。

庞加莱（**Poincare):**

``思想仅是漫漫长夜中的一个闪光**,** 但这闪光意味着所有一切。**”**

庞加莱在**1904**年的闪光已照明了廿世纪拓扑学主要部分。庞加莱还开创了黎曼**(Riemann)** 曲面的几何与分析理论。这个理论是廿世纪所有数学发展的主要支柱之一。我相信三维空间的完全理解将在廿一世纪中起到类似的作用。