弱不动点性质与 schauder 猜想

作者：程天任

本文主要介绍弱不动点性质与 schauder 猜想，提出三个推论。前两个是关于弱不动点性质的推论，涉及到泛函分析与算子代数，我们主要是从泛函的角度来分析弱不动点的性质。最后一个是关于 schauder 猜想的推论，阐述了 schauder 猜想在泛函分析与拓扑中的作用。本文用到一些泛函的工具，借助这些工具，来探讨这两个问题。

首先，我们来看弱不动点性质：

定理 1：

G 是一个紧群，Da 是 B(G)的有界子集的递减网。ϕ_m 是一个弱收敛序列，并且有弱极限 ϕ。则：

$$\limsup \limsup\{\|\phi_M - \psi\| : \psi \in D_a\} = \limsup\{\|\phi - \psi\| : \psi \in D_a\} + \limsup\|\phi_m - \phi\|$$

有结果：

$$\sum_{i\in\sigma_1} \|\psi_n(i)\| > (p-\varepsilon)/2$$

$$\sum_{i\in\sigma_2/\sigma_1} \|\psi_n(i)\| > (p-\varepsilon)/2$$

$$\sum_{i\in\sigma_3/\sigma_2} \|\psi_n(i)\| > (p-\varepsilon)/2$$

定理 2：

设映射 $f:R^2\to R^2$满足:若$x_1,x_2\in R^2$且$d(x_1,x_2)\in Q_+$时有

$d(f(x_1),f(x_2))=d(x_1,x_2)$,则对一切$x_1,x_2\in R^2$均有

$d(f(x_1),f(x_2))=d(x_1,x_2)$,

推论：

下面，我们以定理 2 为工具，来讨论这个问题：

因为，

$\|\phi_{m1}\|>q-\varepsilon/4$

$\|\phi_{m1}-\psi_n\|<r+\varepsilon/4$

$\|\psi_n\|>r-q+p-\varepsilon/4$

所以，

$\|\phi_{m1}\|/p>q/p-\varepsilon/4p$

$\|\psi_n\|/p>r/p-q/p+1-\varepsilon/4p$

如果，$q>p$

则，

$$\|\phi_{m1}\|/p>q/p-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\varepsilon/4p$$

但是，$\sqrt{2}$是无理数，故$\left|2q^2-p^2\right|>1$

所以，

$$q/p-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\varepsilon/4p>\frac{1}{4p^2}+\frac{\sqrt{2}}{2}-\varepsilon/4p$$

$$\|\phi_{m1}\| > \frac{1}{4p} + \frac{\sqrt{2}}{2}p - \varepsilon/4$$

又因为：

$$r - q + p > \|\psi_n\| > r - q + p - \varepsilon/4$$

所以，

$$\|\psi_n\|/p < \frac{r}{p} - \frac{q}{p} - \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$< \frac{r}{p} - \frac{1}{4p^2} + \frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$

$$\|\psi_n\| < r - \frac{1}{4p} + \frac{\sqrt{2}}{2}p + p$$

$$\|\phi_{m1}\| - \|\psi_n\| > (\frac{1}{4p} + \frac{\sqrt{2}}{2}p - \varepsilon/4) - (r - \frac{1}{4p} + \frac{\sqrt{2}}{2}p + p)$$

$$> \frac{1}{2p} - r - p - \frac{\varepsilon}{4}$$

设$\varepsilon < d(x,y)$,取$r \in Q$，使得$d(x,y) - \varepsilon < r < d(x,y)$。再取

$r' = \varepsilon/4$，则有：

$$r + r' > r + \varepsilon/4$$

$$> \|\phi_{m1} - \psi_n\|$$

$$> \|\phi_{m1}\| - \|\psi_n\|$$

$$>\frac{1}{2p}-r-p-\frac{\varepsilon}{4}$$

$$r>\frac{1}{2p}-r-p-\frac{\varepsilon}{4}-r^{'}$$

$$>\frac{1}{2p}-r-p-\varepsilon/2$$

$$2r>\frac{1}{2p}-p-\varepsilon/2$$

$$r>\frac{1}{4p}-\frac{p}{2}-\frac{\varepsilon}{4}$$

$$d(x,y)>r>\frac{1-2p^{2}}{4p}-\frac{\varepsilon}{4}=\frac{1-2p^{2}}{4p}-r^{'}$$

$$p\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$r+r^{'}>\frac{1-2p^{2}}{4p}$$

因为，

$$r+r^{'}>d(x,y)$$

所以，

$$d(x,y)\in(\frac{1-2p^{2}}{4p}-r^{'},\frac{1-2p^{2}}{4p})$$

如果$r^{'}>\varepsilon/4$

$$r+r^{'}>\frac{1}{2p}-r-p-\frac{\varepsilon}{4}>\frac{1}{2P}-r-p-r^{'}$$

如果$r^{'}<\varepsilon/4$

$$r-2r^{'}>\frac{1}{2p}-r-p-\varepsilon>\frac{1}{2p}-r-p-r$$

其中，$r^{'}=d(y,z)$

考虑$\sum\limits_{i\in\sigma_2/\sigma_1}\|\psi_n(i)\|>(p-\varepsilon)/2$与$\sum\limits_{i\in\sigma_{3}/\sigma_2}\|\psi_n(i)\|>(p-\varepsilon)/2$的情况。

可以得到类似结果。

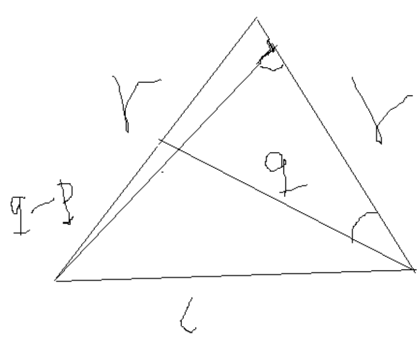
如果我们用$\sqrt{k}$替换$\sqrt{2}$，又会得到什么结果呢？

例如：

考虑连续区间$0<\frac{\sqrt{k}}{k}<\frac{\sqrt{k-1}}{k-1}<\ldots\ldots\ldots<\frac{\sqrt{3}}{3}<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$

令p包含于这些区间。由以上两个不等式，可以确定p包含于哪些区间之中。下面，我们来考虑角度：

有图：



得到：$\cos\theta=\dfrac{r^2+(r-q+p)^2-q^2}{2r(r-q+p)}$

其中，$\theta_1=180^\circ-\theta$

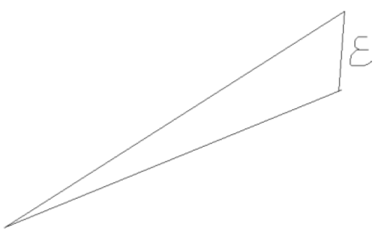
1.$\dfrac{\sin\theta}{l}=\dfrac{\sin(\pi/2-\theta/2)}{r}$

2.$\cos\theta_1=\dfrac{2r^2-l^2}{2r^2}$

我们得出：$q=\dfrac{4r^3+4r^2p+3rp^2}{6rp+4r^2}$

进而，再次消去q。这样，可以根据极坐标估计积分。

解答：运用本例中提出的方法可以估计如下图形的体积：



运用积分式：$\int_0^{\frac{\varepsilon}{4}}+\int_{\frac{\varepsilon}{4}}^{\varepsilon}$，其中$q=\dfrac{4r^2+4r\ \ p+3p^2}{6p+4r}$

其中，我们用到数论中的不等式$\sqrt{2}$是无理数，故$\left|2q^2-p^2\right|>1$

以及$\left|q/p-\frac{\sqrt{2}}{2}\right|>\frac{1}{4p^2}$

定理 1：

假设 Da 是 M 的有界子集的递减网,ε_M 是 M 中有界不相交序列。

$\varepsilon_m = e_m \varepsilon_m e_m$ 则，

$$\limsup\{\|\psi\|:\psi\in D_a\}+\overline{\lim}\|\varepsilon_m\| = \lim\overline{\lim}\sup\{\|\varepsilon_m-\psi\|:\psi\in D_a\}$$

定理 2：

设 X 为 BANACH 空间，$A,B\in BL(X)$。则$\sigma(AB)$与$\sigma(BA)$最多相差｛0｝。

推论：

考虑算子π_1,π_k,ψ_n

设$\psi_n = A$

$\pi_1 = B_1$

$\pi_K - \pi_{K-1} = B_K - B_{K-1}$

设$k\notin\sigma(AB), k\neq 0$

$F = AB - kI$

$G = BA - kI$

则，$FA = AG$

$GB = BF$

$A = F^{-1}AG$

$B = GBF^{-1}$

有：

$$kI = BA - G = GBF^{-2}AG - G$$

$$I = GS$$

其中，

$$S = \frac{1}{k}(BF^{-2}AG - I)$$

我们取 $T = BF^{-2}AG$

如果 $\|T_k\| \leq k$

设：

$$A_1 = \frac{1}{1}(T_1 - I)$$

$$A_2 = \frac{1}{2}(T_2 - T_1 - I)$$

…………

$$A_k = \frac{1}{k}(T_k - T_{k-1} - I)$$

当 $k > 2$ 时，利用数学归纳法

$A_k < 1$,得到：

$$T_k < \frac{k(k+3)}{2}$$

$$T_{k-1} < \frac{(k-1)(k+2)}{2}$$

$$T_k - T_{k-1} < k - 1$$

即，

$$(B_k - B_{k-1})F^{-2}AG < k - 1$$

$$
\begin{aligned}
\pi_K - \pi_{K-1} = B_K - B_{K-1} \\
&< (k-1)G^{-1}A^{-1}F^2 \\
&= (k-1)G^{-1}\psi_n{}^{-1}F^2 \\
&= (k-1)\,\psi_n{}^{-1}F \\
&= (k-1)(B_n - kA^{-1})
\end{aligned}
$$

则，

$$
\begin{aligned}
\|(\pi_k - \pi_{k-1})\psi_n\| &< (k-1)(B_n A - k) \\
&= (k-1)G
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\|\psi_n(\pi_k - \pi_{k-1})\| &< (k-1)(AB_n - k) \\
&= (k-1)F
\end{aligned}
$$

$$
\|(\pi_k - \pi_{k-1})\psi_n(\pi_k - \pi_{k-1})\|
$$

$$
< (k-1)^2 G^2 A^{-1}
$$

$$
= (k-1)^2 A^{-1} F^2
$$

则，

$$
(k-1)G + (k-1)F + \frac{(k-1)^2}{2}(G^2A^{-1} + A^{-1}F^2) > p - 3\varepsilon
$$

解答：这种方法的关键在于估计出投影算子π_k的上界。运用数学归纳法，我们把$\pi_k - \pi_{k-1}$的上界转化为求π_k的上界。接下来，我们可以引入例 1 中的结果（连续区间）：

$0 < \frac{\sqrt{k}}{k} < \frac{\sqrt{k-1}}{k-1} < .... < \frac{\sqrt{3}}{3} < \frac{\sqrt{2}}{2} < 1$ 我们得到：

首先，设$\pi_k < m$。我们得到($\psi_n = A > 1$)：

即，$[m(r-q)-k](k-1)+1 > \sqrt{p+1}$。我们把$r-q$消去，令例1 区间中的$k$与本例中的$k$相等。

引入公式：$q = \dfrac{4r^2+4r\ \ p+3p^2}{6p+4r}$，取$r = \dfrac{3}{2}p$

得到：$k^4 - 2k^3 + 3k^2 - 2k > p$

最后，我们来看一个关于 schauder 猜想的推论。要说明的是，这个推论与前面的弱不动点性质并无直接关联。

首先，来叙述几个定理：

定理 1：

X 是一个线性度量空间中的无限维凸集，Ai 是 X 的有限维子集，$\varepsilon > 0$ 存在不相交有限子集 Bi∈X 以至于：

1.$B = \bigcup Bi$是 X 的线性独立子集

2.对每个$x \in convBi$，$\left\| x - convAi \right\| < \varepsilon$

3. 存 在 仿 射 映 射 $h: conv \to A conv$，$A = \bigcup_{i=1}^{n} A_i$， 以 至 于 $\left\| x - h(x) \right\| < \varepsilon$

定理 2：

对于每个 i，存在一个连续映射gi从$f_i(Xi)$到凸多面体$Fi \subset X$以

至于$\sum_{1}^{n}\|gi(y)-y\|<2^{-4}\varepsilon$

定理 3：

若$e=(1,1,.....)$且$e_1,e_2,......$是单位向量，则｛$e,e_1,e_2,......$｝是 c 的 schauder 基。

推论：

我们以定理三中的一种方法入手：

设$x(j)=a_j h(v_j)/v_j=\lambda h(v_j)/v_j$

若$x\in c,\lim x(n)=\lambda$

令，

$$x_n=\lambda e+\sum(x(j)-\lambda)e_j$$

则对$1\le j\le n,$有：

$$x_n(j)=\lambda+x(j)-\lambda=x(j)$$

$j>n,$有：

$$x_n(j)=\lambda$$

因为，

$$\|x-y\|=\left\|\sum a_j(h(v_j)-v_j)\right\|\le\sum\left\|h(v_j)-v_j\right\|\le\varepsilon$$

所以，

$$\|x_n\|=\|\lambda e+x-y\|\le\lambda\sqrt{n}+\varepsilon$$

即$1\le j\le n$时，

$$\lambda h(v_j)/v_j\le\lambda\sqrt{n}+\varepsilon$$

$$h(v_j) \le (\sqrt{n} + \frac{\varepsilon}{\lambda}) v_j$$

令$Y_i = span\{u_1, ..., u_{i-1}, u_{i+1}, ..., u_n\}$

$c_i = d(u_i, Y_i)$，$c = \min c_i$

则Y_i有限维闭且$u_i \notin Y_i$

令$y_j = -\sum_{i \ne j} (\frac{k_i}{k_j}) u_i$

则，

$$\left\|\sum k_i u_i \right\| = \left\| k_j u_j - k_j y_j \right\| \ge \left| k_j \right\| c \;|$$

因为，

$$\left\| h(v_j) \right\| \le \sqrt{n} + \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

所以，

$$\left\| \sum a_j h(v_j) \right\| \le \sqrt{n} + \frac{\varepsilon}{\lambda}$$ ，（ $\sum a_j = 1$）

即，

$$\left| a_j \right\| c \;| < \sqrt{n} + \frac{\varepsilon}{\lambda}$$

$$|c| < \frac{\sqrt{n} + \frac{\varepsilon}{\lambda}}{|a_j|}$$

如果：

$$\| r - x \| \le 2(n+1) \| x - X \|$$ （见文献 3）

所以，

$$\frac{\sqrt{n}+\frac{\varepsilon}{\lambda}}{|a_j|} > \frac{\|r-x\|}{2(n+1)}$$

$$2(\sqrt{n}+\frac{\varepsilon}{\lambda})(n+1) > \|r-x\||a_j|$$

由ε的任意性，有：

$$2\sqrt{n}(n+1)/|a_j| > \|r-x\|$$

解答：我们考虑到不等式$\|x_n\| \le \lambda\sqrt{n}+\varepsilon$

与等式$x(j)=\lambda h(v_j)/v_j = x_n(j)$。我们可以得出最后的结果：

$2\sqrt{n}(n+1)/|a_j| > \|r-x\|$。其中，($i \neq j$)

接下来，我们考虑$a_j(i \neq j)$,这个问题。要满足$|c| > \|x-X\|$

我们必须取a_i，使得$c_i = d(u_i, Y_i)$，$c = \min c_i$。即i是使得$c = \min d(u_i, Y_i)$最小的那个维度。且a_j取除了a_i以外的任何一个a_j。这样我们就得到了最后不等式成立的条件。

参考文献

1.fixed point property for banach algebras associated to locally compact groups,2009…………………………………….........A.ToMing.Lau,peter F

2.fixed point properties of semigroups of nonexpansive mappings,2010 …...……...N.Randrianantoanina

3.the fixed point property for weakly admissible compact convex sets:searching for a solution to schauder s conjecture,1994..Nguyen To Nhu

联系邮箱：pqrs008@126.com