

复变函数复习重点

(一) 复数的概念

1. 复数的概念: $z = x + iy$, x, y 是实数, $x = \operatorname{Re}(z), y = \operatorname{Im}(z)$. $i^2 = -1$.

注: 一般两个复数不比较大小, 但其模 (为实数) 有大小.

2. 复数的表示

1) 模: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

2) 幅角: 在 $z \neq 0$ 时, 矢量与 x 轴正向的夹角, 记为 $\operatorname{Arg}(z)$ (多值函数); 主值 $\arg(z)$ 是位于 $(-\pi, \pi]$ 中的幅角。

3) $\arg(z)$ 与 $\arctan \frac{y}{x}$ 之间的关系如下:

当 $x > 0$, $\arg z = \arctan \frac{y}{x}$;

当 $x < 0$, $\begin{cases} y \geq 0, \arg z = \arctan \frac{y}{x} + \pi \\ y < 0, \arg z = \arctan \frac{y}{x} - \pi \end{cases}$;

4) 三角表示: $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta)$, 其中 $\theta = \arg z$; 注: 中间一定是“+”号。

5) 指数表示: $z = |z|e^{i\theta}$, 其中 $\theta = \arg z$ 。

(二) 复数的运算

1. 加减法: 若 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 则 $z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$

2. 乘除法:

1) 若 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2$, 则

$$z_1 z_2 = (x_1 x_2 - y_1 y_2) + i(x_2 y_1 + x_1 y_2);$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{x_1 x_2 + y_1 y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1 x_2 - y_2 x_1}{x_2^2 + y_2^2}.$$

2) 若 $z_1 = |z_1|e^{i\theta_1}, z_2 = |z_2|e^{i\theta_2}$, 则

$$z_1 z_2 = |z_1| |z_2| e^{i(\theta_1 + \theta_2)}; \quad \frac{z_1}{z_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}$$

3. 乘幂与方根

1) 若 $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}$ ，则 $z^n = |z|^n (\cos n\theta + i \sin n\theta) = |z|^n e^{in\theta}$ 。

2) 若 $z = |z|(\cos \theta + i \sin \theta) = |z|e^{i\theta}$ ，则

$$\sqrt[n]{z} = |z|^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right) \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n-1) \quad (\text{有 } n \text{ 个相异的值})$$

(三) 复变函数

1. 复变函数： $w = f(z)$ ，在几何上可以看作把 z 平面上的一个点集 D 变到 w 平面上的一个点集 G 的映射。

2. 复初等函数

1) 指数函数： $e^z = e^x (\cos y + i \sin y)$ ，在 z 平面处处可导，处处解析；且 $(e^z)' = e^z$ 。

注： e^z 是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数。（注意与实函数不同）

3) 对数函数： $\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2k\pi) \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ （多值函数）；

主值： $\ln z = \ln |z| + i \arg z$ 。（单值函数）

$\operatorname{Ln} z$ 的每一个主值分支 $\ln z$ 在除去原点及负实轴的 z 平面内处处解析，且 $(\ln z)' = \frac{1}{z}$ ；

注：负复数也有对数存在。（与实函数不同）

3) 乘幂与幂函数： $a^b = e^{b \operatorname{Ln} a} \quad (a \neq 0)$ ； $z^b = e^{b \operatorname{Ln} z} \quad (z \neq 0)$

注：在除去原点及负实轴的 z 平面内处处解析，且 $(z^b)' = bz^{b-1}$ 。

4) 三角函数： $\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$, $\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}$

$\sin z, \cos z$ 在 z 平面内解析，且 $(\sin z)' = \cos z$, $(\cos z)' = -\sin z$

注：有界性 $|\sin z| \leq 1, |\cos z| \leq 1$ 不再成立；（与实函数不同）

4) 双曲函数 $shz = \frac{e^z - e^{-z}}{2}, chz = \frac{e^z + e^{-z}}{2};$

shz 奇函数, ch 是偶函数。 sh, ch 在 z 平面内解析, 且 $(shz)' = chz, (chz)' = shz$ 。

(四) 解析函数的概念

1. 复变函数的导数

1) 点可导: $f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z};$

2) 区域可导: $f(z)$ 在区域内点点可导。

2. 解析函数的概念

1) 点解析: $f(z)$ 在 z_0 及其 z_0 的邻域内可导, 称 $f(z)$ 在 z_0 点解析;

2) 区域解析: $f(z)$ 在区域内每一点解析, 称 $f(z)$ 在区域内解析;

3) 若 $f(z)$ 在 z_0 点不解析, 称 z_0 为 $f(z)$ 的奇点;

3. 解析函数的运算法则: 解析函数的和、差、积、商 (除分母为零的点) 仍为解析函数; 解析函数的复合函数仍为解析函数;

(五) 函数可导与解析的充要条件

1. 函数可导的充要条件: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在 $z = x + iy$ 可导

$\Leftrightarrow u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x, y) 可微, 且在 (x, y) 处满足 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

此时, 有 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ 。

2. 函数解析的充要条件: $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 在区域内解析

$\Leftrightarrow u(x, y)$ 和 $v(x, y)$ 在 (x, y) 在 D 内可微, 且满足 C-R 条件:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x};$$

此时 $f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x}$ 。

注意：若 $u(x, y), v(x, y)$ 在区域 D 具有一阶连续偏导数，则 $u(x, y), v(x, y)$ 在区域 D 内是可微的。因此在使用充要条件证明时，只要能说明 u, v 具有一阶连续偏导且满足 $C-R$ 条件时，函数 $f(z) = u + iv$ 一定是可导或解析的。

3. 函数可导与解析的判别方法

- 1) 利用定义 (题目要求用定义，如第二章习题 1)
- 2) 利用充要条件 (函数以 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ 形式给出，如第二章习题 2)
- 3) 利用可导或解析函数的四则运算定理。(函数 $f(z)$ 是以 z 的形式给出，如第二章习题 3)

(六) 复变函数积分的概念与性质

1. 复变函数积分的概念： $\int_c f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta z_k$ ， c 是光滑曲线。

注：复变函数的积分实际是复平面上的线积分。

2. 复变函数积分的性质

- 1) $\int_c f(z) dz = -\int_{c^{-1}} f(z) dz$ (c^{-1} 与 c 的方向相反);
- 2) $\int_c [\alpha f(z) + \beta g(z)] dz = \alpha \int_c f(z) dz + \beta \int_c g(z) dz, \alpha, \beta$ 是常数;
- 3) 若曲线 c 由 c_1 与 c_2 连接而成，则 $\int_c f(z) dz = \int_{c_1} f(z) dz + \int_{c_2} f(z) dz$ 。

3. 复变函数积分的一般算法

- 1) 化为线积分: $\int_c f(z)dz = \int_c udx - vdy + i \int_c vdx + udy$; (常用于理论证明)
- 2) 参数方法: 设曲线 $c: z = z(t) (\alpha \leq t \leq \beta)$, 其中 α 对应曲线 c 的起点, β 对应曲线 c 的终点, 则 $\int_c f(z)dz = \int_\alpha^\beta f[z(t)]z'(t)dt$ 。

(七) 关于复变函数积分的重要定理与结论

1. 柯西—古萨基本定理: 设 $f(z)$ 在单连域 B 内解析, c 为 B 内任一闭曲线, 则

$$\oint_c f(z)dz = 0$$

2. 复合闭路定理: 设 $f(z)$ 在多连域 D 内解析, c 为 D 内任意一条简单闭曲线, c_1, c_2, \dots, c_n 是 c 内的简单闭曲线, 它们互不包含互不相交, 并且以 c_1, c_2, \dots, c_n 为边界的区域全含于 D 内, 则

$$\textcircled{1} \quad \oint_c f(z)dz = \sum_{k=1}^n \oint_{c_k} f(z)dz, \quad \text{其中 } c \text{ 与 } c_k \text{ 均取正向};$$

$$\textcircled{2} \quad \oint_\Gamma f(z)dz = 0, \quad \text{其中 } \Gamma \text{ 由 } c \text{ 及 } c^{-1} (k=1, 2, \dots, n) \text{ 所组成的复合闭路}。$$

3. 闭路变形原理: 一个在区域 D 内的解析函数 $f(z)$ 沿闭曲线 c 的积分, 不因 c 在 D 内作连续变形而改变它的值, 只要在变形过程中 c 不经过使 $f(z)$ 不解析的奇点。

4. 解析函数沿非闭曲线的积分: 设 $f(z)$ 在单连域 B 内解析, $G(z)$ 为 $f(z)$ 在 B 内的一个原函数, 则 $\int_{z_1}^{z_2} f(z)dz = G(z_2) - G(z_1) \quad (z_1, z_2 \in B)$

说明: 解析函数 $f(z)$ 沿非闭曲线的积分与积分路径无关, 计算时只要求出原函数即可。

5. 柯西积分公式: 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析, c 为 D 内任一正向简单闭曲线, c 的内部完全属于 D , z_0 为 c 内任意一点, 则

$$\oint_c \frac{f(z)}{z - z_0} dz = 2\pi i f(z_0)$$

6. 高阶导数公式：解析函数 $f(z)$ 的导数仍为解析函数，它的 n 阶导数为

$$\oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \quad (n=1, 2, \dots)$$

其中 c 为 $f(z)$ 的解析区域 D 内围绕 z_0 的任何一条正向简单闭曲线，而且它的内部完全属于 D 。

7. 重要结论：

$$\oint_c \frac{1}{(z-a)^{n+1}} dz = \begin{cases} 2\pi i, & n=0 \\ 0, & n \neq 0 \end{cases} \quad (c \text{ 是包含 } a \text{ 的任意正向简单闭曲线})$$

线)

8. 复变函数积分的计算方法

1) 若 $f(z)$ 在区域 D 内处处不解析，用一般积分法

$$\int_c f(z) dz = \int_a^\beta f[z(t)]z'(t) dt$$

2) 设 $f(z)$ 在区域 D 内解析，

● c 是 D 内一条正向简单闭曲线，则由柯西—古萨定理， $\oint_c f(z) dz = 0$

● c 是 D 内的一条非闭曲线， z_1, z_2 对应曲线 c 的起点和终点，则有

$$\int_c f(z) dz = \int_{z_1}^{z_2} f(z) dz = F(z_2) - F(z_1)$$

3) 设 $f(z)$ 在区域 D 内不解析

● 曲线 c 内仅有一个奇点：

$$\begin{cases} \oint_c \frac{f(z)}{z-z_0} dz = 2\pi i f(z_0) \\ \oint_c \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(z_0) \end{cases} \quad (f(z) \text{ 在 } c \text{ 内解析})$$

● 曲线 c 内有多于一个奇点：

$$\oint_c f(z) dz = \sum_{k=1}^n \oint_{c_k} f(z) dz \quad (c_i \text{ 内只有一个奇点 } z_k)$$

或：

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^n \operatorname{Res}[f(z), z_k] \quad (\text{留数基本定理})$$

- 若被积函数不能表示成 $\frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}$ ，则须改用第五章留数定理来计算。

(八) 解析函数与调和函数的关系

1. 调和函数的概念：若二元实函数 $\varphi(x, y)$ 在 D 内有二阶连续偏导数且满足 $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0$ ，

$\varphi(x, y)$ 为 D 内的调和函数。

2. 解析函数与调和函数的关系

- 解析函数 $f(z) = u + iv$ 的实部 u 与虚部 v 都是调和函数，并称虚部 v 为实部 u 的共轭调和函数。
- 两个调和函数 u 与 v 构成的函数 $f(z) = u + iv$ 不一定是解析函数；但是若 u, v 如果满足柯西—黎曼方程，则 $u + iv$ 一定是解析函数。

3. 已知解析函数 $f(z)$ 的实部或虚部，求解析函数 $f(z) = u + iv$ 的方法。

1) 偏微分法：若已知实部 $u = u(x, y)$ ，利用 $C-R$ 条件，得 $\frac{\partial v}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}$ ；

$$\text{对 } \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \text{ 两边积分，得 } v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + g(x) \quad (*)$$

$$\text{再对 } (*) \text{ 式两边对 } x \text{ 求偏导，得 } \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\int \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + g'(x) \quad (**)$$

$$\text{由 } C-R \text{ 条件， } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \text{，得 } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\int \frac{\partial u}{\partial x} dy \right) + g'(x) \text{，可求出 } g(x) \text{；}$$

$$\text{代入 } (*) \text{ 式，可求得 虚部 } v = \int \frac{\partial u}{\partial x} dy + g(x) \text{。}$$

2) 线积分法：若已知实部 $u = u(x, y)$ ，利用 $C-R$ 条件可得

$$dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy = -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy \text{，}$$

故虚部为 $v = \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} -\frac{\partial u}{\partial y} dx + \frac{\partial u}{\partial x} dy + c$;

由于该积分与路径无关, 可选取简单路径 (如折线) 计算它, 其中 (x_0, y_0) 与 (x, y) 是解析区域中的两点。

3) 不定积分法: 若已知实部 $u = u(x, y)$, 根据解析函数的导数公式和 $C-R$ 条件得知,

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} - i \frac{\partial u}{\partial y}$$

将此式右端表示成 z 的函数 $U(z)$, 由于 $f'(z)$ 仍为解析函数, 故

$$f(z) = \int U(z) dz + c \quad (c \text{ 为实常数})$$

注: 若已知虚部 v 也可用类似方法求出实部 u .

(九) 复数项级数

1. 复数项的极限

1) 复数列 $\{\alpha_n\} = \{a_n + ib_n\}$ ($n=1, 2, \dots$) 收敛于复数 $\alpha = a + bi$ 的充要条件为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = b \quad (\text{同时成立})$$

2) 复数列 $\{\alpha_n\}$ 收敛 \Leftrightarrow 实数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 同时收敛。

2. 复数项级数

1) 复数项级数 $\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n$ ($\alpha_n = a_n + ib_n$) 收敛的充要条件是级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 与 $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ 同时收敛;

2) 级数收敛的必要条件是 $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = 0$ 。

注: 复数项级数的敛散性可以归纳为两个实数项级数的敛散性问题的讨论。

(十) 幂级数的敛散性

1. 幂级数的概念：表达式 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 或 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 为幂级数。

2. 幂级数的敛散性

1) 幂级数的收敛定理—阿贝尔定理 (Abel)：如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_0 \neq 0$ 处收敛，那么对满足 $|z| < |z_0|$ 的一切 z ，该级数绝对收敛；如果在 z_0 处发散，那么对满足 $|z| > |z_0|$ 的一切 z ，级数必发散。

2) 幂级数的收敛域—圆域

幂级数在收敛圆域内，绝对收敛；在圆域外，发散；在收敛圆的圆周上可能收敛；也可能发散。

3) 收敛半径的求法：收敛圆的半径称收敛半径。

● 比值法 如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| = \lambda \neq 0$ ，则收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$ ；

● 根值法 $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|c_n|} = \lambda \neq 0$ ，则收敛半径 $R = \frac{1}{\lambda}$ ；

● 如果 $\lambda = 0$ ，则 $R = \infty$ ；说明在整个复平面上处处收敛；

如果 $\lambda = \infty$ ，则 $R = 0$ ；说明仅在 $z = z_0$ 或 $z = 0$ 点收敛；

注：若幂级数有缺项时，不能直接套用公式求收敛半径。（如 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^{2n}$ ）

3. 幂级数的性质

1) 代数性质：设 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ 的收敛半径分别为 R_1 与 R_2 ，记

$$R = \min(R_1, R_2),$$

则当 $|z| < R$ 时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} (\alpha a_n + \beta b_n) z^n = \alpha \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \beta \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \quad (\text{线性运算})$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n b_0 + a_{n-1} b_1 + \cdots + a_0 b_n) z^n \quad (\text{乘积运算})$$

2) 复合性质: 设当 $|\xi| < r$ 时, $f(\xi) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \xi^n$, 当 $|z| < R$ 时, $\xi = g(z)$ 解析且 $|g(z)| < r$,

则当 $|z| < R$ 时, $f[g(z)] = \sum_{n=0}^{\infty} a_n [g(z)]^n$ 。

3) 分析运算性质: 设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 的收敛半径为 $R \neq 0$, 则

● 其和函数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ 是收敛圆内的解析函数;

● 在收敛圆内可逐项求导, 收敛半径不变; 且 $f'(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n z^{n-1}$

$$|z| < R$$

● 在收敛圆内可逐项求积, 收敛半径不变; $\int_0^z f(z) dz = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} z^{n+1}$

$$|z| < R$$

(十一) 幂函数的泰勒展开

1. 泰勒展开: 设函数 $f(z)$ 在圆域 $|z - z_0| < R$ 内解析, 则在此圆域内

$f(z)$ 可以展开成幂级数 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} (z - z_0)^n$; 并且此展开式是唯一的。

注: 若 $f(z)$ 在 z_0 解析, 则 $f(z)$ 在 z_0 的泰勒展开式成立的圆域的收敛半径 $R = |z_0 - a|$;

其中 R 为从 z_0 到 $f(z)$ 的距 z_0 最近一个奇点 a 之间的距离。

2. 常用函数在 $z_0 = 0$ 的泰勒展开式

$$1) e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \quad |z| < \infty$$

$$2) \frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{\infty} z^n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^n + \cdots \quad |z| < 1$$

$$3) \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1} + \cdots \quad |z| < \infty$$

$$4) \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n} + \cdots \quad |z| < \infty$$

3. 解析函数展开成泰勒级数的方法

1) 直接法：直接求出 $c_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)$ ，于是 $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ 。

2) 间接法：利用已知函数的泰勒展开式及幂级数的代数运算、复合运算和逐项求导、逐项求积等方法将函数展开。

(十二) 幂函数的洛朗展开

1. 洛朗级数的概念： $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ ，含正幂项和负幂项。

2. 洛朗展开定理：设函数 $f(z)$ 在圆环域 $R_1 < |z - z_0| < R_2$ 内处处解析， c 为圆环域内绕 z_0 的任意一条正向简单闭曲线，则在此在圆环域内，有 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n (z - z_0)^n$ ，且展开式唯一。

3. 解析函数的洛朗展开法：洛朗级数一般只能用间接法展开。

*4. 利用洛朗级数求围线积分：设 $f(z)$ 在 $r < |z - z_0| < R$ 内解析， c 为 $r < |z - z_0| < R$ 内的任何一条正向简单闭曲线，则 $\oint_c f(z) dz = 2\pi i c_{-1}$ 。其中 c_{-1} 为 $f(z)$ 在 $r < |z - z_0| < R$ 内洛朗展开式中 $\frac{1}{z - z_0}$ 的系数。

说明：围线积分可转化为求被积函数的洛朗展开式中 $(z - z_0)^{-1}$ 的系数。

(十三) 孤立奇点的概念与分类

1. 孤立奇点的定义： $f(z)$ 在 z_0 点不解析，但在 z_0 的 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析。

2. 孤立奇点的类型:

1) 可去奇点: 展开式中不含 $z-z_0$ 的负幂项;

$$f(z) = c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots$$

2) 极点: 展开式中含有限项 $z-z_0$ 的负幂项;

$$f(z) = \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{c_{-(m-1)}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + c_2(z-z_0)^2 + \cdots = \frac{g(z)}{(z-z_0)^m},$$

其中 $g(z) = c_{-m} + c_{-(m-1)}(z-z_0) + \cdots + c_{-1}(z-z_0)^{m-1} + c_0(z-z_0)^m + \cdots$ 在 z_0 解析,

且 $g(z_0) \neq 0, m \geq 1, c_{-m} \neq 0$;

3) 本性奇点: 展开式中含无穷多项 $z-z_0$ 的负幂项;

$$f(z) = \cdots + \frac{c_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{c_{-1}}{(z-z_0)} + c_0 + c_1(z-z_0) + \cdots + c_m(z-z_0)^m + \cdots$$

(十四) 孤立奇点的判别方法

1. 可去奇点: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = c_0$ 常数;

2. 极点: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$

3. 本性奇点: $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ 不存在且不为 ∞ 。

4. 零点与极点的关系

1) 零点的概念: 不恒为零的解析函数 $f(z)$, 如果能表示成

$$f(z) = (z-z_0)^m \varphi(z),$$

其中 $\varphi(z)$ 在 z_0 解析, $\varphi(z_0) \neq 0, m$ 为正整数, 称 z_0 为 $f(z)$ 的 m 级零点;

2) 零点级数判别的充要条件

$$z_0 \text{ 是 } f(z) \text{ 的 } m \text{ 级零点} \Leftrightarrow \begin{cases} f^{(n)}(z_0) = 0, & (n=1, 2, \cdots, m-1) \\ f^{(m)}(z_0) \neq 0 \end{cases}$$

3) 零点与极点的关系: z_0 是 $f(z)$ 的 m 级零点 $\Leftrightarrow z_0$ 是 $\frac{1}{f(z)}$ 的 m 级极点;

4) 重要结论

若 $z=a$ 分别是 $\varphi(z)$ 与 $\psi(z)$ 的 m 级与 n 级零点, 则

- $z=a$ 是 $\varphi(z) \square \psi(z)$ 的 $m+n$ 级零点;
- 当 $m > n$ 时, $z=a$ 是 $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的 $m-n$ 级零点;

当 $m < n$ 时, $z=a$ 是 $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的 $n-m$ 级极点;

当 $m=n$ 时, $z=a$ 是 $\frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ 的可去奇点;

- 当 $m \neq n$ 时, $z=a$ 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 l 级零点, $l = \min(m, n)$

当 $m=n$ 时, $z=a$ 是 $\varphi(z)+\psi(z)$ 的 l 级零点, 其中 $l \geq m(n)$

(十五) 留数的概念

1. 留数的定义: 设 z_0 为 $f(z)$ 的孤立奇点, $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域 $0 < |z - z_0| < \delta$ 内解析, c 为该域内包含 z_0 的任一正向简单闭曲线, 则称积分 $\frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z) dz$ 为 $f(z)$ 在 z_0 的留数 (或残留), 记作

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{2\pi i} \oint_c f(z) dz$$

2. 留数的计算方法

若 z_0 是 $f(z)$ 的孤立奇点, 则 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = c_{-1}$, 其中 c_{-1} 为 $f(z)$ 在 z_0 的去心邻域内洛朗展开式中 $(z - z_0)^{-1}$ 的系数。

1) 可去奇点处的留数: 若 z_0 是 $f(z)$ 的可去奇点, 则 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = 0$

2) m 级极点处的留数

法则 I 若 z_0 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 则

$$\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m f(z)]$$

特别地, 若 z_0 是 $f(z)$ 的一级极点, 则 $\operatorname{Res}[f(z), z_0] = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$

注：如果极点的实际级数比 m 低，上述规则仍然有效。

法则 II 设 $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ ， $P(z), Q(z)$ 在 z_0 解析， $P(z_0) \neq 0$,

$$Q(z_0) = 0, Q'(z_0) \neq 0, \text{ 则 } \operatorname{Res}\left[\frac{P(z)}{Q(z)}, z_0\right] = \frac{P(z_0)}{Q'(z_0)}$$

(十六) 留数基本定理

设 $f(z)$ 在区域 D 内除有限个孤立奇点 z_1, z_2, \dots, z_n 外处处解析， c 为 D 内包围诸奇点的一条正向简单闭曲线，则

$$\oint_c f(z) dz = 2\pi i \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Res}[f(z), z_n]$$

说明：留数定理把求沿简单闭曲线积分的整体问题转化为求被积函数 $f(z)$ 在 c 内各孤立奇点处留数的局部问题。

注意：当在 c 内的起点较多时，采用无穷点处的留数进行转换。

无穷点留数的定义及计算方法需要掌握。

积分变换复习提纲

一、傅里叶变换的概念

- $F[f(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt = F(\omega)$
- $F^{-1}[F(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega = f(t)$

二、几个常用函数的傅里叶变换

- $F[e^{-\beta t}] = \frac{1}{\beta + j\omega}$
- $F[u(t)] = \frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)$
- $F[\delta(t)] = 1$
- $F[1] = 2\pi\delta(\omega)$
- $F[\cos \omega_0 t] = \pi(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$
- $F[\sin \omega_0 t] = j\pi(\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$
- $F[e^{-\beta|t|}] = \frac{2\beta}{\beta^2 + \omega^2}$

三、傅里叶变换的性质

- **位移性（时域）：** $F[f(t - t_0)] = e^{-j\omega t_0} F[f(t)]$
- **位移性（频域）：** $F[e^{j\omega_0 t} f(t)] = F(\omega) \Big|_{\omega = \omega - \omega_0} = F(\omega - \omega_0)$
- **位移性推论：** $F[\sin \omega_0 t f(t)] = \frac{1}{2j} [F(\omega - \omega_0) - F(\omega + \omega_0)]$
- **位移性推论：** $F[\cos \omega_0 t f(t)] = \frac{1}{2} [F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$
- **微分性（时域）：** $F[f'(t)] = (j\omega)F(\omega) \quad (|t| \rightarrow +\infty, f(t) \rightarrow 0)$,
 $F[f^{(n)}(t)] = (j\omega)^n F(\omega), \quad |t| \rightarrow +\infty, f^{(n-1)}(t) \rightarrow 0$
- **微分性（频域）：** $F[(-jt)f(t)] = F'(\omega), F[(-jt)^n f(t)] = F^{(n)}(\omega)$
- **相似性：** $F[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right) \quad (a \neq 0)$

四、拉普拉斯变换的概念

- $L[f(t)] = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-st} dt = F(s)$

五、几个常用函数的拉普拉斯变换

- $L[e^{kt}] = \frac{1}{s - k}$;
- $L[t^m] = \frac{\Gamma(m+1)}{s^{m+1}} = \frac{m!}{s^{m+1}}$ (m 是自然数); ($\Gamma(1) = 1, \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}, \Gamma(m+1) = m\Gamma(m)$)

- $L[u(t)] = L[1] = \frac{1}{s}$;
- $L[\delta(t)] = 1$
- $L[\sin kt] = \frac{k}{s^2 + k^2}, \quad L[\cos kt] = \frac{s}{s^2 + k^2}$
- $L[\sinh kt] = \frac{k}{s^2 - k^2}, \quad L[\cosh kt] = \frac{s}{s^2 - k^2}$
- 设 $f(t+T) = f(t)$, 则 $L[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T f(t) dt$ 。 ($f(t)$ 是以 T 为周期的周期函数)

六、拉普拉斯变换的性质

- 微分性 (时域): $L[f'(t)] = sF(s) - f(0), L[f''(t)] = s^2 F(s) - sf'(0) - f''(0)$
- 微分性 (频域): $L[t^n f(t)] = (-1)^n F^{(n)}(s)$, $L[(-t)^n f(t)] = F^{(n)}(s)$
- 积分性 (时域): $L[\int_0^t f(t) dt] = \frac{F(s)}{s}$
- 积分性 (频域): $L[\frac{f(t)}{t}] = \int_s^\infty F(s) ds$ (收敛)
- 位移性 (时域): $L[e^{at} f(t)] = F(s-a)$
- 位移性 (频域): $L[f(t-\tau)] = e^{-s\tau} F(s)$ ($\tau > 0, t < 0, f(t) \equiv 0$)
- 相似性: $L[f(at)] = \frac{1}{a} F(\frac{s}{a})$ ($a > 0$)

七、卷积及卷积定理

- $f_1(t) * f_2(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau$
- $F[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(w) \cdot F_2(w)$
- $F[f_1(t) \cdot f_2(t)] = \frac{1}{2\pi} F_1(w) * F_2(w)$
- $L[f_1(t) * f_2(t)] = F_1(s) \cdot F_2(s)$

八、几个积分公式

- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0)$
- $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \delta(t-t_0) dt = f(t_0)$

● $\int_0^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt = \int_0^{\infty} L[f(t)] ds = \int_0^{\infty} F(s) ds$ 16

● $\int_0^{+\infty} f(t) e^{-kt} dt = L[f(t)]|_{s=k}$

模拟试卷一

一.填空题

1. $\left(\frac{1-i}{1+i}\right)^7 =$ _____.

2. $I = \oint_c (|z| - e^z \sin z) dz$, 其中 c 为 $|z| = a > 0$ 的正向, 则

$I =$ _____.

3. $\tan \frac{1}{z}$ 能否在 $0 < |z| < R$ 内展成 Laurent 级数? _____

4. 其中 c 为 $|z| = 2$ 的正向: $\oint_c z^2 \sin \frac{1}{z} dz =$ _____

5. 已知 $F(\omega) = \frac{\sin \omega}{\omega}$, 则 $f(t) =$ _____

二.选择题

1. $f(z) = z \operatorname{Re}(z)$ 在何处解析_____

(A) 0

(B) 1

(C) 2

(D) 无

2. 沿正向圆周的积分. $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{z^2 - 1} dz =$ _____

(A) $2\pi i \sin 1$.

(B) 0.

(C) $\pi i \sin 1$.

(D)

以上都不对.

3. $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} 4^{-|n|} (z-1)^n$ 的收敛域为_____

(A) $\frac{1}{4} < |z-1| < 4$. (B) $1 < |z-2| < e$ (C) $1 < |z-1| < 2$. (D) 无法确定

4. 设 $z=a$ 是 $f(z)$ 的 m 级极点, 则 $\frac{f'(z)}{f(z)}$ 在点 $z=a$ 的留数是 _____.

(A) m . (B) $-2m$. (C) $-m$. (D) 以上都不对.

三. 计算题

1. $f(z) = u + iv$ 为解析函数, $u - v = x^3 + 3x^2y - 3xy^2 - y^3$, 求 u

2. 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点, 那么函数 $f(z)g(z)$ 在 $z=a$ 处极点如何?

3. 求下列函数在指定点 z_0 处的 Taylor 级数及其收敛半径。

$$f(z) = \frac{1}{z^2}, z_0 = -1$$

4. 求拉氏变换 $f(t) = \sin 6t$ (k 为实数)

5. 求方程 $y'' + 4y' + 3y = e^{-t}$ 满足条件 $y(0) = y'(0) = 1$ 的解.

四. 证明题

1. 利用 e^z 的 Taylor 展式, 证明不等式 $|e^z - 1| \leq e^{|z|} - 1 \leq |z|e^{|z|}$

2. 若 $F(\omega) = \mathcal{F}[f(t)]$ (a 为非零常数) 证明: $\mathcal{F}[f(at)] = \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$

模拟试卷一答案

一. 填空题

$$1. i \quad 2. 0 \quad 3. \text{否} \quad 4. -1/6 \quad 5. f(t) = \begin{cases} 0.5, & |t| < 1 \\ 0, & |t| > 1 \\ 0.25, & |t| = 1 \end{cases}$$

二.选择题

1. (D) 2. (A) 3. (A) 4. (C)

三.计算题

1. $u = 3x^2y - y^3 + c$

2. 函数 $f(z)g(z)$ 在 $z=a$ 处极点为 $m+n$ 级

3. $f(z) = \frac{1}{z^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n(z+1)^{n-1} \quad R=1$

4. $\frac{6}{s^2 + 36}$

5. $y(t) = -\frac{3}{4}e^{-3t} + \frac{7}{4}e^{-t} + \frac{1}{2}te^{-t}.$

模拟试卷二

一.填空题

1. C 为 $|z|=1$ 正向, 则 $\oint_C \bar{z} dz =$ _____

2. $f(z) = my^3 + nx^2y + i(x^3 + lxy^2)$ 为解析函数, 则 l, m, n 分别为 _____.

3. $\text{Res} \left[\frac{shz}{z^2}, 0 \right] =$ _____

4. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(z-2)^n}{n^2}$ 收敛半径为 _____

5. δ -函数的筛选性质是 _____

二.选择题

1. $f(t) = e^{-t}u(t-1)$, 则 $\mathcal{L}[f(t)] =$ _____

- (A) $\frac{e^{-(s-1)}}{s-1}$ (B) $\frac{e^{-(s-1)}}{s-1}$ (C) $2 \frac{e^{-(s-1)}}{s-1}$ (D) 以上都不对

2. $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则 $\mathcal{F}[(t-2)f(t)] =$ _____

- (A) $F'(\omega) - 2F(\omega)$ (B) $-F'(\omega) - 2F(\omega)$
(C) $iF'(\omega) - 2F(\omega)$ (D) 以上都不对

3. C 为 $|z|=3$ 的正向, $\oint_C \frac{dz}{z^3(z^{10}-2)}$ _____

- (A) .1 (B) 2 (C) 0 (D) 以上都不对

4. 沿正向圆周的积分 $\oint_{|z|=2} \frac{\sin z}{\left(z - \frac{\pi}{2}\right)^2} dz =$ _____

- (A).0. (B).2 (C).2+i. (D).

以上都不对.

三.计算题

1. 求 $\sin(3+4i)$.

2. 计算 $\oint_C \frac{dz}{(z-a)(z-b)}$, 其中 a, b 为不在简单闭曲线 c 上的复常数, $a \neq b$.

3. 求函数 $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$, $z_0 = 1$ 在指定点 z_0 处的 Taylor 级数及其收敛半径。

4. 求拉氏变换 $f(t) = e^{kt}$ (k 为实数)

四.证明题

1. $\sum_{n=0}^{\infty} C_n$ 收敛, 而 $\sum_{n=0}^{\infty} |C_n|$ 发散, 证明 $\sum_{n=0}^{\infty} C_n z^n$ 收敛半径为 1

2. 若 $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$, (a 为正常数) 证明:

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} F\left(\frac{s}{a}\right)$$

模拟试卷二答案

一.填空题

1. $2\pi i$ 2. $l = n = -3, m = 1$ 3. 1 4. 1

5. $\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) f(t) dt = f(0)$ - _

二.选择题

1. (B) 2. (C) 3. (C) 4. (A)

三.计算题

1.
$$\frac{e^{-4+3i} - e^{4-3i}}{2i}$$

2. 当 a 、 b 均在简单闭曲线 c 之内或之外时

$$\oint_c \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = 0,$$

当 a 在 c 之内, b 在 c 之外时
$$\oint_c \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{2\pi i}{a-b},$$

当 b 在 c 之内, a 在 c 之外时
$$\oint_c \frac{dz}{(z-a)(z-b)} = \frac{-2\pi i}{a-b},$$

$$3. f(z) = \frac{z-1}{z+1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{z-1}{2} \right)^{n+1} \quad R=2.$$

$$4. \frac{1}{s-k}$$

模拟试卷三

一.填空题

1. $z=0$ 为 $f(z) = z^2(e^{z^2} - 1)$ 的 _____ 级零点,

2. $\operatorname{Res}\left[\frac{1}{z^2 - z^3}, 0\right]$ _____.

3. a, b, c 均为复数, 问 $(a^b)^c$ 与 a^{bc} 一定相等吗? _____.

4. 每个幂级数的和函数在收敛圆内可能有奇点吗? _____

5. $\oint_C \frac{dz}{\cos z} =$ _____.

二.选择题

1. 设 u 和 v 都是调和函数, 如果 v 是 u 的共轭调和函数, 那么 v 的共轭调和函数为 _____.

(A) u . (B) $-u$. (C) $2u$ (D) 以上都不对。

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in}}{n}$ _____.

(A) . 发散. (B) 条件收敛 (C) 绝对收敛
(D) 无法确定

3. C 为 $|z|=2$ 的正向, 则 $\oint_C \frac{e^z dz}{z^2(z^2+9)} = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (A) .1 (B) 2 (C) $2\pi i \frac{1}{9}$ (D)

以上都不对

4. $\mathcal{F}[f(t)] = F(\omega)$, 则 $\mathcal{F}[f(1-t)] = \underline{\hspace{2cm}}$.

- (A) $F(\omega)e^{-i\omega}$ (B) $F(-\omega)e^{-i\omega}$ (C) $F(\omega)e^{i\omega}$ (D) 以上

都不对

三.计算题

1. 计算 $f(z) = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z+2}$, 从而证明 $\int_0^\pi \frac{1+2\cos\theta}{5+4\cos\theta} d\theta = 0$.

2. 求在指定圆环域内的 Laurent 级数

$$f(z) = \frac{z-1}{z^2}, |z-1| > 1.$$

3. 利用留数计算定积分:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\cos\theta}.$$

4. 求拉氏变换 $f(t) = te^{kt}$ (k 为实数).

四.证明题

1. 说明 $Lnz^2 = 2Lnz$ 是否正确, 为什么?

2. 利用卷积定理证明 $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(t)dt\right] = \frac{F(s)}{s}$

模拟试卷三答案

一.填空题

1. 4 2. 1 3. 不一定 4. 否 5. 0

二.选择题

1. (B) 2. (A) 3. (C) 4. (D)

三.计算题

1. $f(z) = \oint_{|z|=1} \frac{dz}{z+2} = 0,$

2. $f(z) = \frac{z-1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} (n+1) (z-1)^{-n-1}.$

3. $\frac{2}{3} \sqrt{3} \pi$

4. $\frac{1}{(s-k)^2}$

模拟试卷四

一.填空题

1. 复数 $z = \frac{1+i}{1-i}$ 三角表示形式_____.

2. 设 $u = x^2 - y^2 + xy$ 为调和函数, 其共轭调和函数为_____

3. $\sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-i)^n$ 能否在 $z=-2i$ 处收敛而 $z=2+3i$ 发散._____

4. $z=0$ 为 $f(z) = 6 \sin z^3 + z^3(z^6 - 6)$ 的级极点

5. 卷积定理为 _____

二.选择题

1. $F(\omega) = 2\pi\delta(\omega)$ 则 $f(t) =$ _____

- (A) .7 (B) 1 (C) 2 (D) 以

上都不对

2. 若 $(1 + \sqrt{3}i)^n = (1 - \sqrt{3}i)^n$, n 为整数. $n =$ _____

- (A) $6k$ (B) 3 (C) $3k$
(D) 6

3. C 是直线 OA , O 为原点, A 为 $2+i$, 则 $\int_C \operatorname{Re}(z) dz =$ _____

- (A) 0. (B) $(1+i)/2$. (C) $2+i$. (D) 以上都不对.

4. 设 $f(t) = \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right)$, 则 $\mathcal{L}[f(t)] =$ _____

- (A) $\frac{1 - \sqrt{3}s}{2(1 + s^2)}$ (B) $\frac{s - \sqrt{3}}{2(1 + s^2)}$ (C) $\frac{1}{1 + s^2} e^{-\frac{\pi}{3}s}$ (D) 以上

都不对

三. 计算题

1. 求在指定圆环域内的 Laurent 级数

$$f(z) = \frac{\sin z}{z}, 0 < |z| < \infty.$$

2. 设函数 $f(z)$ 与 $g(z)$ 分别以 $z=a$ 为 m 级与 n 级极点, 那么函数

$$\frac{f(z)}{g(z)} \text{ 在 } z=a \text{ 极点如何?}$$

3. 求 $f(t) = \begin{cases} E, & 0 < t < 5; \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$ 傅氏变换。

4. 求拉氏变换 $f(t) = e^{-2t} \sin 6t$.

四. 证明题

1. 若 $|\beta| < 1, |\alpha| = 1$, 求证 $\left| \frac{\alpha - \beta}{1 - \overline{\alpha}\beta} \right| = 1$

2. 若 $F(\varpi) = \mathcal{F}[f(t)]$, 证明: .

$$\mathcal{F}[f(t)\cos \omega_0 t] = \frac{1}{2}[F(\omega - \omega_0) + F(\omega + \omega_0)]$$

模拟试卷四答案

一. 填空题

1. $\cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$ 2. $\frac{y^2 - x^2}{2} + 2xy + c$

3. 否

4. 15

5. 略

二. 选择题

1. (B) 2. (C) 3. (C) 4. (C)

三. 计算题

1. $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) \frac{z^{2n}}{(2n+1)!}$

2. 当 $m > n$ 时, $z=a$ 为 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的 $m-n$ 级极点

当 $m \leq n$ 时, $z=a$ 为 $\frac{f(z)}{g(z)}$ 的可去奇点

3. $\frac{2E}{\varpi} e^{-\frac{5}{2}\varpi j} \sin \frac{5\varpi}{2}$

4. $\frac{6}{(s+2)^2+36}.$

四.证明题

1.略

2.略

模拟试卷五

一.填空题

1. $z^2 - 4iz - (4 - 9i) = 0$ 根为_____.

2. $\oint_{|z|=2} \frac{\bar{z}}{z} dz$ 和 $\oint_{|z|=4} \frac{\bar{z}}{z} dz$ 是否相等_____

3. 叙述傅氏积分定理_____

4. 拉氏变换的主要性质_____

二.选择题

1. 已知 $c_0 = 1, c_n = \frac{n!}{n^n}, c_{-n} = 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}$. 则 $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n (z-2)^n$ 的收敛圆环为

(A). $\frac{1}{4} < |z-2| < 4$. (B) $1 < |z-2| < e$ (C) $1 < |z-1| < 2$. (D) 无法确定

2. $w = \frac{1}{z}$ 将 z 平面上 $x^2 + y^2 = 4$ 映射成 w 平面上的_____

(A) .直线 (B) $u+v=1$ (C) $u^2 + v^2 = \frac{1}{4}$ (D) 以

上都不对

3. $z=0$ 是 $f(z)=z^2 e^{\frac{1}{z}}$ 什么奇点_____

- (A) .可去 (B)本性奇点 (C)2 级极点
(D) 以上都不对

4. $\delta(t-t_0)$ 的傅氏变换为_____

- (A) 1 (B) $e^{-i\omega t_0}$ (C) $e^{i\omega t_0}$
(D) 以上都不对

三.计算题

1. 解方程 $e^z + i = 0$.

2.利用留数计算定积分: $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{x^2 + 3^2} dx$

3. 利用能量积分求 $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx$

4.求 $F(s)=\frac{1}{s^2(s+1)}$ 的拉氏逆变换.

四.证明题

1. 试证 $\arg z$ 在原点与负实轴上不连续.

2. 下列推导是否正确? 若不正确, 把它改正:

$$\oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{1}{z(z-1)} dz = \oint_{|z|=\frac{3}{2}} \frac{\frac{1}{z}}{z-1} dz = 2\pi i \left(\frac{1}{z} \right) \Big|_{z=1} = 2\pi i.$$

模拟试卷五答案

一.填空题

$$1. \frac{3\sqrt{2}}{2} + \left(2 - \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)i \text{ 和 } -\frac{3\sqrt{2}}{2} + \left(2 + \frac{3\sqrt{2}}{2}\right)i$$

2. 相等

3. 略

4. 略

二.选择题

1. (B) 2. (C) 3. (B) 4. (B)

三.计算题

$$1. z = \left(-\frac{\pi}{2} + 2k\pi\right)i.$$

$$2. \frac{\pi}{3e^3}$$

$$3. \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx = \pi$$

$$4. e^{-t} + t - 1$$

复变函数与积分变换试题（本科）

一、填空题（每小题 2 分，共 12 分）

1、设 $z = 2\sqrt{2} - 2i$ ，则其三角表示式为_____；

2、满足 $|z+3| - |z-1| = 0$ 的 z 的轨迹是_____；

3、 $\operatorname{Ln}(\sqrt{3} + i) =$ _____；

4、 $5e^{jat}$ 的傅氏变换为_____;

5、 $\frac{1}{s^2 - s}$ 的拉氏逆变换为_____.

6、 $f(z) = \frac{1}{z^5 + 1}$ 在 $z_0 = 0$ 处展开成幂级数为_____。

二、选择题（每小题 2 分，共 10 分）

1、设 $f(z) = \cos z$ ，则下列命题正确的是（ ）

A、 $|f(z)|$ 是有界的；

B、 $f(z)$ 以 π 为周期；

C、 $f(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2}$ ；

D、 $f(z)$ 在复平面上处处解析。

2、设 $z = i$ ，则 $z^{48} + z^{21} + z^{10}$ 的值等于（ ）

A、1；

B、-1；

C、 i ；

D、 $-i$ 。

3、设 C 是正向圆周 $|z| = 2$ ，则 $\oint_C \frac{\bar{z}}{|z|} dz =$ （ ）

A、 $4\pi i$ ；

B、 $2\pi i$ ；

C、 2π ；

D、 4π 。

4、 $z=0$ 是 $\frac{1}{z \sin z}$ 的孤立奇点的类型为（ ）

A、二阶极点；

B、简单极点；

C、可去奇点；

D、本性奇点。

5、若幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ 在 $z_1 = 1+i$ 处发散，则该级数在 $z=2$ 处的敛散性为（ ）

A、绝对收敛；

B、条件收敛；

C、发散；

D、不能确定；

三、已知调和函数 $u = x^2 - y^2 + xy$, $f(i) = -1+i$ ，求解析函数 $f(z) = u + iv$ ，并求 $f'(z)$ 。（8 分）

四、设 $f(z) = x^2 + ixy$ ，试确定 $f(z)$ 在何处可导，何处解析，并求

可导点处的导数。(6分)

五、求下列函数的积分(每小题6分,共24分)

1、沿 $y=x$ 算出积分 $\int_0^{1+i} (x^2 + iy)dz$ 的值;

2、 $\oint_{|z|=3\pi} \frac{\sin z}{1 - \cos z} dz$;

3、 $\int_0^{2\pi} \frac{1}{5 + 3\cos \theta} d\theta$;

4、 $\oint_{|z|=1} \frac{\cos z}{z(z^2 - a^2)} dz$, 其中 $|a| \neq 1, a \neq 0$

六、将下列函数展开为级数(每小题7分,共14分)

1、将函数 $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$ 在 $z_0=1$ 处展开成幂级数,并指出其收敛区间。

2、将函数 $f(z) = \frac{2}{z^2(z-i)}$ 以 $z=i$ 为中心的圆环域内展开为洛朗级数。

七、求微分方程 $y'' + 4y' + 3y = e^{-t}, y(0) = y'(0) = 1$ 的解。(6分)

八、求下列函数的积分变换(每小题6分,共12分)

1、求 $f(t) = \begin{cases} e^{-t} \sin t, & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases}$ 的傅氏变换。

2、求 $f(t) = te^{-2t} \cos 7t$ 的拉氏变换

九、证明题(每小题4分,共8分)

1、设复数 z_1, z_2, \dots, z_n 全部满足 $Re(z_i) \geq 0, i=1, 2, \dots, n$, 且 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty} z_n^2$ 都

收敛, 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} |z_n|^2$ 也收敛。

2、已知 $f(z)$ 在 $0 < |z| < 1$ 内解析, 且 $\lim_{z \rightarrow 0} zf(z) = 1$, 证明 $z=0$ 是 $f(z)$ 的一级极点, 并求其留数。

