数值逼近课后习题答案（部分）

4. Baskacov 算子 试证：若函数 $f(x)$ 在区间 $[0,a]$, $a>0$, 上连续，在 $x=a$ 为右连续且在实数轴上有界，则 Baskacov 算子序列

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty} f\left(\frac{k}{n}\right)C_{-n}^{k}(-x)^k(1+x)^{-n-k},$$

$$C_{-n}^{k}=\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!},$$

在这个区间上一致收敛于 $f(x)$。

证明： 注意到一般的函数 $f(x)$ 在 $x=t$ 点的 Taylor 展开是：

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k,$$

那么 $f(0)$ 在 x 点的 Taylor 展开是：

$$f(0)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-x)^k,$$ 于是

$$B_n(1;x)=\sum_{k=0}^{\infty} C_{-n}^{k}(-x)^k(1+x)^{-n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}(1+x)^{-n-k}(-x)^k$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\left((1+x)^{-n}\right)^{(k)}}{k!}(-x)^k$$

$$=(1+x)^{-n}\big|_{x=0}$$

$$=(1+0)^{-n}=1$$

$$B_n(t;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}C_{-n}^{k}(-x)^k(1+x)^{-n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n}\frac{(-n)(-n-1)\cdots(-n-k+1)}{k!}(1+x)^{-n-k}(-x)^k$$

$$=x\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-n-1)\cdots(-n-1-(k-1)+1)}{(k-1)!}(1+x)^{-(n-1)-(k-1)}(-x)^{k-1}$$

$$\overset{m=k-1}{=} x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-n-1)\mathbf{L}(-n-1-m+1)}{m!}(1+x)^{-(n-1)-m}(-x)^{m}$$

$$=x\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left((1+x)^{-n-1}\right)^{(m)}}{m!}(-x)^{m}$$

$$=x\times(1+x)^{-n-1}|_{x=0}$$

$$=x\times(1+0)^{-n-1}=x$$

$$B_n(t^2;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}C_{-n}^{k}(-x)^{k}(1+x)^{-n-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k^2}{n^2}\frac{(-n)(-n-1)\mathbf{L}(-n-k+1)}{k!}(1+x)^{-n-k}(-x)^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(k(k-1)+k)}{n^2}\frac{(-n)(-n-1)\mathbf{L}(-n-k+1)}{k!}(1+x)^{-n-k}(-x)^{k}$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k(k-1)}{n^2}\frac{(-n)(-n-1)\mathbf{L}(-n-k+1)}{k!}(1+x)^{-n-k}(-x)^{k}+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{k}{n^2}\frac{(-n)(-n-1)\mathbf{L}(-n-k+1)}{k!}(1+x)^{-n-k}(-x)^{k}$$

$$=(1+\frac{1}{n})x^2\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-n-2)\mathbf{L}(-(n-2)-m+1)}{m!}(1+x)^{-(n-2)-m}(-x)^{m}+\frac{x}{n}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-n-1)\mathbf{L}(-(n-1)-m+1)}{m!}(1+x)^{-(n-1)-m}(-x)^{m}$$

$$=(1+\frac{1}{n})x^2(1+x)^{-n-2}|_{x=0}+\frac{x}{n}(1+x)^{-n-1}|_{x=0}$$

$$=x^2+\frac{x^2}{n}+\frac{x}{n}\to x^2\,(n\to\infty)$$

那么根据 Korovkin 定理，得：

Baskacov 算子序列

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}f\left(\frac{k}{n}\right)C_{-n}^{k}(-x)^{k}(1+x)^{-n-k},$$

$C_{-n}^{k}=\dfrac{(-n)(-n-1)\mathbf{L}(-n-k+1)}{k!}$，在这个区间上一致收敛于 $f(x)$。

孟玲玲

14. 验证下列积分算子是奇异积分算子

Weierstrass 积分：

$$W_n(x)=\left(\frac{n}{p}\right)^{1/2}\int_a^b e^{-n(t-x)^2}f(t)dt$$

证明：对于任一固定的 $x \in [a,b]$， $e^{-n(t-x)^2}$ 是 t 的可积函数

做变换 $y = t - x$， 有

$$\Delta = \left(\frac{n}{p}\right)^{1/2} \int_a^b e^{-(t-x)^2 dt} = \left(\frac{n}{p}\right)^{1/2} \int_{a-x}^{b-x} e^{-ny^2} dy\text{，其中 } a - x < 0\text{，} \ b - x > 0$$

再做变换 $z = \sqrt{n} y$， 有

$$\Delta = \left(\frac{n}{p}\right)^{1/2} \int_{a-x}^{b-x} e^{-ny^2} dy = \left(\frac{n}{p}\right)^{1/2} \int_{\sqrt{n}(a-x)}^{\sqrt{n}(b-x)} \frac{1}{\sqrt{n}} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{\sqrt{n}(a-x)}^{\sqrt{n}(b-x)} e^{-z^2} dz$$

因为， $a - x < 0$， $b - x > 0$

所以 $\sqrt{n}(a-x) \to -\infty$， $\sqrt{n}(b-x) \to +\infty$， $(n \to \infty)$

又 $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} dx = 2\int_0^{+\infty} e^{-x^2 dx} = 2 * \frac{\sqrt{p}}{2} = \sqrt{p}$

从而有

$$\lim_{n\to\infty} \Delta = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{\sqrt{n}(a-x)}^{\sqrt{n}(b-x)} e^{-z^2} dz = \frac{1}{\sqrt{p}} \lim_{n\to\infty} \int_{\sqrt{n}(a-x)}^{\sqrt{n}(b-x)} e^{-z^2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-z^2} dz$$

$$= \frac{1}{\sqrt{p}} * \sqrt{p} = 1$$

即 $\left(\frac{n}{p}\right)^{1/2} \int_a^b e^{-(t-x)^2 dt} \xrightarrow{1} 1$， $n \to \infty$， 一致收敛

Weierstrass 积分是奇异积分算子

得证。

Fejer 积分

$$F_n(x) = \frac{1}{2np} \int_{-p}^{p} \left(\frac{\sin \frac{1}{2} n(t-x)}{\sin a \frac{1}{2}(t-x)} \right)^2 f(t) dt$$

证明：因为$\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}nu}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2=\dfrac{1-\cos nu}{1-\cos u}$。而$(1-\cos u)(n+2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos ku)=1-\cos nu$，

所以，$\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}nu}{\sin\frac{1}{2}u}\right)^2=n+2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos ku$，

所以$\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}n(t-x)}{\sin\frac{1}{2}(t-x)}\right)^2=n+2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos k(t-x)$

因为$\int_{-p}^{p}n+2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos k(t-x)dt=2np+2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\int_{-p}^{p}\cos k(t-x)dt$，

而$\int_{-p}^{p}\cos k(t-x)dt=\dfrac{\sin k(p-x)+\sin k(p+x)}{k}=0$，

从而$\int_{-p}^{p}n+2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos k(t-x)dt=2np$

所以$\int_{-p}^{p}\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}n(t-x)}{\sin a\frac{1}{2}(t-x)}\right)^2dt=\int_{-p}^{p}n+2\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\cos k(t-x)dt=2np$

所以$\dfrac{1}{2np}\int_{-p}^{p}\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}n(t-x)}{\sin a\frac{1}{2}(t-x)}\right)^2dt=1$

所以$F_n(x)=\dfrac{1}{2np}\int_{-p}^{p}\left(\dfrac{\sin\frac{1}{2}n(t-x)}{\sin a\frac{1}{2}(t-x)}\right)^2f(t)dt$为奇异积分算子。

Vallee-Poussin 积分

$$V_n=\frac{\sqrt{np}}{2p}\int_{-p}^{p}\cos^{2n}\left(\frac{t-x}{2}\right)f(t)dt\,; \qquad (1)$$

定义： 设 $K_n(t,x)(n=1,2,\cdots\cdots)$定义于方形区域$a\le t\le b, a\le x\le b$上，对于

任一固定的x值，它是t的可积函数，且当$a \le a \le x \le b \le b$时，恒有

$$\int_a^b K_n(t,x)dt \xrightarrow{1} 1, \quad n \to \infty \qquad (2)$$

（"$\xrightarrow{1}$"表示一致收敛），则 $K_n(t,x)$称为一个核。具有形式

$$f_n = \int_a^b K_n(t,x) f(t)dt$$

的积分称为奇异积分。

证明：为了证明式（1）是奇异积分算子，由定义只需验证式（2）成立即可。并且由定义可知式（2）中的积分上下限可以取为式（1）中积分的上下限。

首先，给出 Euler 积分中的$\Gamma(x)$（嘎玛函数）的一些性质：

$$\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^{2n-1} t \sin^{2m-1} t dt = \frac{\Gamma(n)\Gamma(m)}{2\Gamma(n+m)} \qquad (3)$$

$$\Gamma(n+\frac{1}{2}) = \frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{p} \qquad (4)$$

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{p} \qquad (5)$$

$$\Gamma(n+1) = n! \qquad (6)$$

其次， 考虑核积分

$$K_n = \frac{\sqrt{np}}{2p}\int_{-p}^{p} \cos^{2n}(\frac{t-x}{2})dt$$

化简上式中的积分项

$$\int_{-p}^{p} \cos^{2n}(\frac{t-x}{2})dt = \int_{-p-x}^{p-x} \cos^{2n}\frac{u}{2}du = 2\int_0^{p} \cos^{2n}\frac{u}{2}du$$ （前”=”由积分变换,后”=”由周期函数积分性质）

$$= 4\int_0^{\frac{p}{2}} \cos^{2n} u du \quad (\text{积分变换})$$

$$=4\frac{\Gamma(\frac{2n+1}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(n+1)}$$（由式（3））

$$=\frac{(2n-1)!!p}{2^{n-1}n!}$$ (由式(4),(5),(6)并化简得)

于是可得：

$$K_n=\frac{(2n-1)!!p}{2^{n-1}n!}\frac{\sqrt{np}}{2p}=\frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\sqrt{np}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sqrt{np} \qquad （7）$$

注： 上式中 $(2n-1)!!=1\cdot3\cdot5\cdot\mathbf{L}\cdot(2n-1)$， $(2n)!!=2\cdot4\cdot6\cdot\mathbf{L}\cdot(2n)$

再，考虑如下的结果：

$$I_n=\int_0^{\frac{p}{2}}\cos^{2n}xdx \qquad （8）$$

由分部积分可知有如下结果；

$$I_{2n}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{p}{2} \qquad （9）$$

$$I_{2n+1}=\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \qquad （10）$$

由式（8），显然可得 $I_{2n+1}\le I_{2n}\le I_{2n-1}$， 因为对任意 $0\le x\le\frac{p}{2}$ ，$\cos^{2n+1}x\le\cos^{2n}x\le\cos^{2n-1}x$， 于是由积分的不等式性质可得。

从而可得：

$$1\le\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\le\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} \quad , \qquad 而 \quad \frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}}=\frac{2n+1}{2n},$$

在前面的不等式中取极限，由夹挤定理得；

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=1 \quad , \qquad 而 \qquad \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}=\frac{p}{2}(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!})^2(2n+1)$$

即 $$\lim_{n\to\infty}\frac{p}{2}(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!})^2(2n+1)=1,$$

从而， $$\lim_{n\to\infty}(\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!})^2(2n+1)=\frac{2}{p},$$

于是可得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sqrt{2n+1}=\sqrt{\frac{2}{p}}$$

于是就得到：

$$\lim_{n\to\infty}K_n=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sqrt{np}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\sqrt{2n+1}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2n+1}}\sqrt{np}=\sqrt{\frac{2}{p}}\sqrt{\frac{p}{2}}=1$$

在整个计算过程中可以看到与 x 的取值无关，显然K_n一致收敛到 1。再由定义，即可知证明了$V_n(x)$为奇异积分算子。

Landau 积分

$$L_n(x)=(\frac{n}{p})^{\frac{1}{2}}\int_0^1[1-(t-x)^2]^n f(t)dt$$

分析与解答 由第 13 题（Page15）的题设部分可以找到奇异积分算子的定义：设 $K_n(x,t),(n=1,2,\mathbf{L})$定义于方形区域$a\le x\le b,a\le t\le b$，对于任一固定的$x$值，它是$t$的可积函数，当$a\le a\le x\le b\le b$时，恒有

$$\int_a^b K_n(x,t)dt\xrightarrow{1}1,n\to\infty$$

（“$\xrightarrow{1}$”表示一致收敛），则$K_n(x,t),(n=1,2,\mathbf{L})$称为一个核。具有形式

$$f_n(x)=\int_a^b K_n(x,t)f(t)dt$$

的积分称为奇异积分。

Landau 积分 $L_n(x)=(\frac{n}{p})^{\frac{1}{2}}\int_0^1[1-(t-x)^2]^n f(t)dt$是奇异积分算子

$$\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{p})^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^1(1-x^2)^n dx\xrightarrow{1}1 \qquad （2）$$

下面我们来证明（2）式成立。

因为 $\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx$，做变换 $x=\cos t$，则有

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx = 2\int_0^1 (1-x^2)^n dx = 2\int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2n+1} t dt$$
$$= 2\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

我们首先来证明

$$\frac{p}{2} = \lim_{n\to\infty}\frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n+1)} \qquad (3)$$

证明　令

$$I_{2n} = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2n} t dt = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\cdot\frac{p}{2} \qquad (4)$$

$$I_{2n+1} = \int_0^{\frac{p}{2}} \sin^{2n+1} t dt = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \qquad (5)$$

由（4）和（5）得

$$\frac{p}{2} = \frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n+1)}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} \qquad (6)$$

注意到 当 $0\le t\le\frac{p}{2}$ 时，$\sin^{2n+1} t\le\sin^{2n} t\le\sin^{2n-1} t$　自然的有

$I_{2n+1}\le I_{2n}\le I_{2n-1}$。所以

$$1\le\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}}\le\frac{I_{2n-1}}{I_{2n+1}} = \frac{2n+1}{2n}\to 1,(n\to\infty)$$

因此 $\lim_{n\to\infty}\frac{I_{2n}}{I_{2n+1}} = 1$。对（6）式两端求极限即得到欲证的结果。

现在我们可以求证 $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{p})^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx \xrightarrow{1} 1$ 了。

$$\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{p})^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{p})^{2}2\cdot\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{p})^{2}\cdot 2\cdot\left(\frac{((2n)!!)^2}{((2n-1)!!)^2(2n+1)(2n+1)}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=\lim_{n\to\infty}2\cdot(\frac{n}{p}\cdot\frac{p}{2}\cdot\frac{1}{2n+1})^{\frac{1}{2}}=2\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{2(2n+1)})^{\frac{1}{2}}=2\cdot\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

这就证明了 $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{p})^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx\to 1$。很显然该收敛还是一致的，因为收敛的过程与具体的 x 取值无关。所以 $\lim_{n\to\infty}(\frac{n}{p})^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx\xrightarrow{1}1$。

前面提到过

Landau 积分 $L_n(x)=(\frac{n}{p})^{\frac{1}{2}}\int_{0}^{1}[1-(t-x)^2]^n f(t)dt$ 是奇异积分算子

$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}(\frac{n}{p})^{\frac{1}{2}}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^n dx\xrightarrow{1}1$。这二者间的等价关系我们再做一点说明。事实上，Landau 积分可以写成如下的形式：

$$(L_n f)(x)=\frac{1}{I_n}\int_{0}^{1}f(t)j^{n}(t-x)dx$$

这里 $I_n=\int_{-1}^{1}j^{n}(x)dx$。根据奇异积分的定义可知两者间是等价的。

第二章习题

2. 试证明对于任何连续函数来说，它的最佳逼近多项式所具有的交错点组中偏离点的个数不可能是无穷

证明： $\forall f(x)\in c[a,b]$, $p(x)$ 是 $f(x)$ 的最佳逼近多项式,假设 $p(x)$ 关于 $f(x)$ 所具有的交错点组中偏离点的个数有无穷多.

记此交错点中偏离点构成的数列为 $\{x_n\}$,由 Bolzano-Weierstrass 定理,则 $\{x_n\}$ 中必有收敛的交错点子列 $\{x_{n_i}\}$.

令 $Q(x)=f(x)-p(x)$,取 $e_0=\mathbf{V}(p)$,对 $\forall d>0$,由于 $\{x_{n_i}\}$ 收敛,则存在正整数 N,当正整数

$k,l>N$ 时 $\left|x_{n_k}-x_{n_l}\right|<d$,取 x_{n_k} 为正偏差点，x_{n_l} 为负偏差点.则

$$\left|Q(x_{n_k})-Q(x_{n_l})\right|=2\mathbf{V}(p)>e_0 \qquad (1)$$

又 $f(x)$, $p(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $Q(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续从而一致连续.与(1)矛盾.从而假设不成立, $p(x)$ 关于 $f(x)$ 所具有的交错点组中偏离点的个数不可能有无穷多.

3. 试证明 $C[a\quad b]$ 还有这样的函数，它在 Pn 中的最佳逼近多项式具有无穷多个偏离点(虽然它们不成为交错组)。

分析与解答：大致思想：我们最终目的是根据已知的多项式 Pn 构造出这样的连续函数 $f(x)$，它具有无穷个偏离点。首先由 Tchebyshev 特征性定理知：Pn 要想成为 $f(x)$ 的最佳逼近多项式，必须且只需有不少于 $n+2$ 个正负交错的偏离点。因为我们构造的 $f(x)$ 具有无穷多个偏离点，故至少在一组正负交错的偏离点之间含有无穷多个负偏离点或正偏离点，为保证在区间 $[a\quad b]$ 上至少有 n+2 个偏离点，我们首先将区间 $[a\quad b]$ 等分 $2(n+2)$ 份，

记节点列为： x_i i = 1,2 …… $2(n+2)$，则 $x_i=a+\dfrac{i(b-a)}{2(n+2)}$ 记小区间[$x_{i-1}\quad x_i$]为区间 $[a\quad b]$ 的第 i 个小区间。

现这样构造函数 $f(x)$：当 $i=4k+1$，令 $f(x)=p(x)-\Delta(p)\quad x\in[x_{i-1}\quad x_i]$

当 $i=4k+1$，令 $f(x)$ 为连接点 $p(x_{i-1})$ 和点 $p(x_i)$ 的直线，其中 $p(x_{i-1})$ 和 $p(x_i)$ 为多项式 $p(x)$ 在点 x_{i-1} 和点 x_i 处的值；

当 $i=4k+1$，令 $f(x)=p(x)+\Delta(p)\quad x\in[x_{i-1}\quad x_i]$

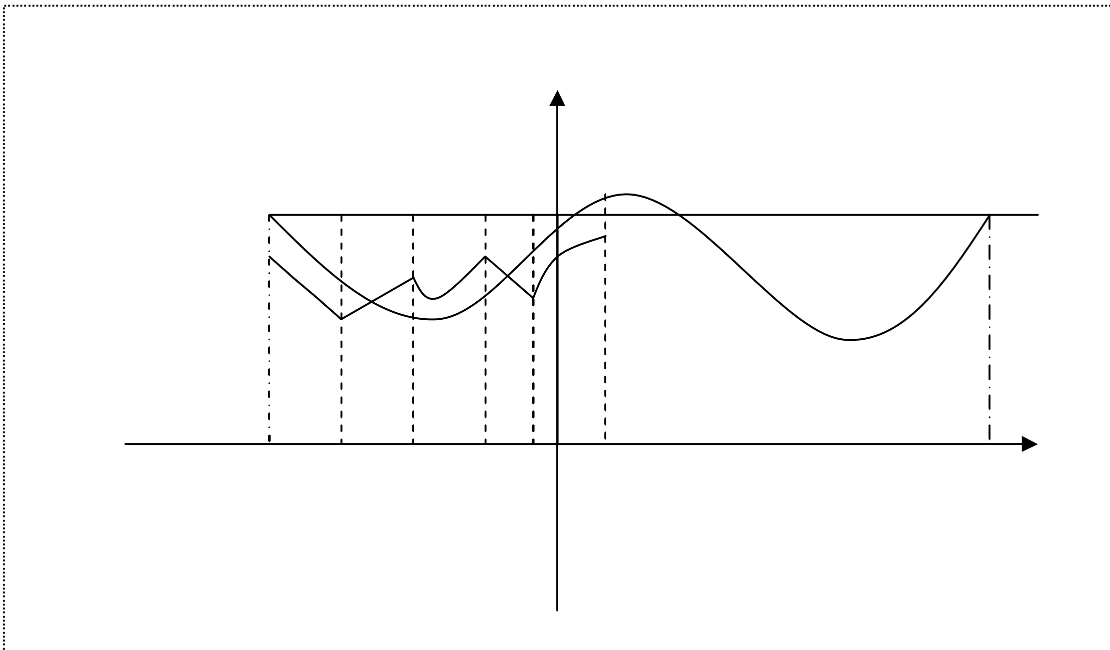
当 $i=4k+1$，令 $f(x)$ 为连接点 $p(x_{i-1})$ 和点 $p(x_i)$ 的直线，其中 $p(x_{i-1})$ 和 $p(x_i)$ 为多项式 $p(x)$ 在点 x_{i-1} 和点 x_i 处的值；整数 k 只是起控制小区间的作用，$k=0,1\mathbf{K}\mathbf{K}[\dfrac{n+2}{2}]$。

证明：构造这样的函数

$$f(x)=\begin{cases} p(x)-\Delta(p) & \mathrm{x}\in[x_{i-1}\quad x_i]\quad \mathrm{i=4k+1} \\ \text{连接点}p(x_{i-1})\text{和点}p(x_i)\text{的直线} & \mathrm{x}\in[x_{i-1}\quad x_i]\quad \mathrm{i=4k+2} \\ p(x)+\Delta(p) & \mathrm{x}\in[x_{i-1}\quad x_i]\quad \mathrm{i=4k+3} \\ \text{连接点}p(x_{i-1})\text{和点}p(x_i)\text{的直线} & \mathrm{x}\in[x_{i-1}\quad x_i]\quad \mathrm{i=4k+4} \end{cases}$$

$$k=0,1\ldots\ldots[\frac{n+2}{2}]$$

$f(x)$ 为连续函数显然成立。点列 x_i 为连续函数 $f(x)$ 关于多项式 Pn 的正负偏离点，并且其个数为 $n+2$，由 Tchebyshev 特征性定理知：Pn 是连续函数 $f(x)$ 的最佳逼近多项式，但是由函数的构造过程可以看出当i=4k+1和i=4k+3时，在区间[$x_{i-1}\quad x_i$] 中的点与函数 $f(x)$ 的差值都是 $\Delta(p)$，由此可以推出位于这些区间的点都是函数 $f(x)$ 关于多项式 Pn 的偏离点，故由此推出函数 $f(x)$ 的偏离点数有无穷多个，因此对于任意的多项式 Pn，我们都可以找到相应的连续函数 $f(x)$，使得 $f(x)$ 关于多项式 Pn 有无穷多个偏离点，虽然它们不成为正负交错的。



构造的连续函数 $f(x)$ 的大致图形如上图表示；在此只是给出图形的一部分，注意第一小区间为曲线 $f(x)=p(x)-\Delta(p)$，第二小区间为连接点 $p(x_1)$ 和点 $p(x_2)$ 的直线，以后以此类

推；希望能给大家理解函数 $f(x)$ 的构造起帮助作用。

4. 试在一切具有最高次项系数为 a 的 n 次多项式 $f(x)=ax^n+\mathbf{L}$ 中找出于 $[-1,1]$ 区间上与零偏差最小的多项式。

证明：不难看出寻求最小零偏差多项式 $p_n(x)$ 的问题，等价于寻求函数 $f(x)=ax^n$ 的 $n-1$
次最佳一致逼近多项式的问题。

设 $p_{n-1}(x)=ax^n-a\hat{T}_n(x)$ 其中 $\hat{T}_n(x)=2^{1-n}\cos(n\arccos x)$，下证 $p_{n-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式。

$f(x)-p_{n-1}(x)=ax^n-(ax^n-a\hat{T}_n(x))=a2^{1-n}\cos(n\arccos x)$

$\Delta(p)=\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|a2^{1-n}\cos(n\arccos x)\right|=|a|2^{1-n}\max\limits_{-1\le x\le 1}\left|\cos(n\arccos x)\right|$

易证在点列 $x_k=\cos\dfrac{kp}{n}$ $k=0,1,\mathbf{L},n$ 上 $f(x)-p_{n-1}(x)$ 以正负交错的符号取到 $\Delta(p)$ 的值，又 $n+1\ge(n-1)+2$，由 Tchebyshew 定理知 $p_{n-1}(x)$ 是 $f(x)$ 的 $n-1$ 次最佳一致逼近多项式。

所以 $p_n(x)=a\hat{T}_n(x)=a2^{1-n}\cos(n\arccos x)$ 是 $[-1,1]$ 区间上最高次项系数为 a 的 n 次与零偏差最小的多项式。

5. 在 x=ξ 处取 η 值得所有 n 次多项式中，求出在[-1,1]的最小零偏差多项式。

解答：1、当 **|ξ|>1** 时，满足 **Pn(ξ)=** η 的所有 **n** 次多项式 **Pn(x)** 中，

$\bar{T}_n(x)=\dfrac{h}{\mathrm{T_n}(x)}$ **Tn(x)** 与零偏差最小，其证明如下：

∵ 切比雪夫多项式 **Tn(x)** 的切比雪夫交错点组为 $x_i=\cos\dfrac{ip}{n}$ **(i=0,1,2,⋯,n)**

∴ 切比雪夫多项式的所有零点都在（**-1**，**1**）中，故 **Tn(ξ)≠0**

假设有次数不高于 **n** 的多项式 **Qn(x)**，使 **Qn(ξ)=** η 且在区间
[-1，1] 上有

$$|Q_n(x)|<\max_{-1\le x\le 1}|\bar{T}_n(x)|=\frac{|h|}{\mathrm{T_n}(x)}$$

令 $R_n(x)=\bar{T}_n(x)-Q_n(x)$

则 $R_n(x)$在点 x_i (i=0,1,2,…,n)上依次取交错符号的值

因此，多项式 $R_n(x)$在[-1,1]内有不少于 n 个互异的根，而 ξ 也它的根，故 $R_n(x)=0$，矛盾。

$\therefore \bar{T}_n(x)=\dfrac{h}{T_n(x)}T_n(x)$与零偏差最小。

2 当|ξ|≤1 时

（1） 当 $T_n(\xi)=\eta$ 时，显然切比雪夫多项式 $T_n(x)$在[-1，1]与零偏差最小
则 $T_n(x)$为所求

（2） 当 $T_n(\xi)\neq\eta$ 且 $T_n(\xi)\neq 0$ 时，可得 $\bar{T}_n(x)=\dfrac{h}{T_n(x)}T_n(x)$在区间[-1，1]

与零的偏差最小，证明如下：

∵ 切比雪夫多项式 $T_n(x)$的切比雪夫交错点组为 $x_i=\cos\dfrac{ip}{n}$ (i=0,1,2,…,n)且 $T_n(\xi)\neq 0$

∴ 假设存在次数不高于 n 的多项式 $G_n(x)$，使 $G_n(x)=\eta$ 且在区间[-1，1]上有

$$|G_n(x)|<\max_{-1\le x\le 1}|\bar{T}_n(x)|=\frac{|h|}{T_n(x)}$$

令 $F_n(x)=\bar{T}_n(x)-G_n(x)$

则 $F_n(x)$ 在点 x_i (i=0,1,2,…,n)上依次取交错符号的值

因此，多项式 $F_n(x)$在[-1,1]内有不少于 n 个互异的根，而 ξ 也它的根，故 $F_n(x)=0$，矛盾。

(3)当 $T_n(\xi)\neq\eta$ 且 $T_n(\xi)=0$ 时

一定存在 $\xi\notin[a,b]\subset[-1,1]$

令 $t=\dfrac{b+a}{2}+\dfrac{b-a}{2}x$　　　　$x\in[-1,1]$

即 $x=\dfrac{2t-b-a}{b-a}$

则有 $T_n(x)=T_n\left(\dfrac{2t-b-a}{b-a}\right)$　　　　$t\in[a,b]$

类似情形 1 可得 $\overset{\Delta}{T}_n(x)=\dfrac{h}{T_n\left(\dfrac{2x-b-a}{b-a}\right)}T_n\left(\dfrac{2x-b-a}{b-a}\right)$　　　　$x\in[a,b]$

与零的偏差最小。即为所求。

6.　证明

$$T_m\left(T_n\left(x\right)\right)=T_n\left(T_m\left(x\right)\right)=T_{mn}\left(x\right)$$

特别的，

$$T_n\left(2x^2-1\right)=2T_n^{\ 2}\left(x\right)-1$$

证：我们知道 Tchebyshev 多项式 $T_n=\cos\left(n\arccos x\right)$

则　$T_m\left(T_n\left(x\right)\right)=\cos\left(m\arccos\left(\cos\left(n\arccos x\right)\right)\right)=\cos\left(mn\arccos x\right)=T_{mn}\left(x\right)$

同样　有 $T_n\left(T_m\left(x\right)\right)=\cos\left(n\arccos\left(\cos\left(m\arccos x\right)\right)\right)=\cos\left(mn\arccos x\right)=T_{mn}\left(x\right)$

所以有　$T_m\left(T_n\left(x\right)\right)=T_n\left(T_m\left(x\right)\right)=T_{mn}\left(x\right)$

我们知道 $T_2\left(x\right)=\cos\left(2\arccos x\right)=2x^2-1$

则 $T_n\left(T_2\left(x\right)\right)=T_2\left(T_n\left(x\right)\right)=2T_n^{\ 2}\left(x\right)-1$

证毕

7.　证明 $T_m\left(x\right)T_n\left(x\right)=\dfrac{1}{2}\left(T_{m+n}\left(x\right)+T_{m-n}\left(x\right)\right)$

证：　$T_m\left(x\right)T_n\left(x\right)=\cos\left(m\arccos x\right)*\cos\left(n\arccos x\right)$

$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(m\arccos x+n\arccos x\right)+\cos\left(m\arccos x-n\arccos x\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(\cos\left(\left(m+n\right)\arccos x\right)+\cos\left(\left(m-n\right)\arccos x\right)\right)$$
$$=\frac{1}{2}\left(T_{m+n}\left(x\right)+T_{m-n}\left(x\right)\right)$$

证毕

注：以上两题主要是利用 Tchebyshev 多项式表达式和三角函数性质证明。

12. 两个函数的最佳逼近多项式之和，是否一定是这两个函数之和的最佳逼近。

分析与解答：这个问题用更为精确的数学语言可描述为：

设 $f(x),g(x)\in C[a,b]$，它们于 P_n 中的最逼近多项式分别为：$p(x),q(x)$，即

$\Delta(p)=E_n(f),\Delta(q)=E_n(g)$。令 $h(x)=f(x)+g(x)$，是否有以下等式成立：

$\Delta(p+q)=E_n(f+g)$，其中 $\Delta(p+q)=\|p+q-h\|_\infty$。

首先我们可以很容易找到一个简单例子满足上述等号成立。

设 $f(x)\in c[a,b]$，则 $f(x)$ 于 P_0 中的最佳逼近多项式，可根据 Tchebyshev 定理得到：

$$p(x)=\frac{1}{2}\{\min_{a\le x\le b} f(x)+\max_{a\le x\le b} f(x)\}=\frac{M+m}{2}$$

在此区 $f(x)=\ln x, g(x)=\dfrac{1}{x}$ 于 $[1,2]$ 上，在 P_0 中的最佳逼近多项式分别为：

$$p(x)=\frac{0+\ln 2}{2}=\frac{\ln 2}{2}$$

$$q(x)=\frac{1+\frac{1}{2}}{2}=\frac{3}{4}$$

而 $h(x)=\ln x+\dfrac{1}{x}$，$h'(x)=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^2}>0$。$h(x)$ 的最佳逼近多项式为：

$$m(x)=\frac{3}{4}+\frac{\ln 2}{2}=p(x)+q(x)$$

从而上述等号成立。但是就是对于这样一类函数的逼近问题，也并不能保证所有情况等号都成立，也就是说，对任意 $f(x), g(x)\in C[a,b]$，也不一定有：

$$\min f(x)+\max f(x)+\min g(x)+\max g(x)=\min(f+g)+\max(f+g)$$

下面我们再给出一对例子。

$$f(x)=\begin{cases}3-8x & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ -5+8x & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases} \text{ 与 } g(x)=\begin{cases}-1+4x & 1\le x\le \frac{1}{2}\\ 3-4x & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$$

根据 Tchebyshev 定理以及这两个函数本身的对称性，很容易判断这两个函数于 P_1 的最佳逼近多项式分别为 $p(x)=1, q(x)=0$。

而

$h(x)=f(x)+g(x)=\begin{cases}2-4x & 0\le x\le \frac{1}{2}\\ -2+4x & \frac{1}{2}\le x\le 1\end{cases}$ 于 P_1 中的最佳逼近多项式为 $m(x)=1=p(x)+q(x)$。

如果我们对 $f(x)$ 做一下改动，也就是想改变偏离点（从某种意义上），具体如下：

$$\bar{f}(x)=\begin{cases} 1 & 0\le x\le 1/4 \\ 3-8x & 1/4\le x\le 1/2 \\ -5+8x & 1/2\le x\le 3/4 \\ 1 & 3/4\le x\le 1 \end{cases}$$

其最佳逼近多项式为 $\bar{p}(x)=0$ 。

而

$$\bar{h}(x)=\bar{f}(x)+g(x)=\begin{cases} 4x & 0\le x\le 1/4 \\ 2-4x & 1/4\le x\le 1/2 \\ -2+4x & 1/2\le x\le 3/4 \\ 4-4x & 3/4\le x\le 1 \end{cases}$$

的最佳逼近多项式为 $\bar{m}(x)=\dfrac{1}{2}\ne\bar{p}(x)+q(x)$ 。

这也反映了特征性定理关于偏离点分布于最佳逼近多项式之间的必然联系。

至此，对于本题中提出的问题已经有了答案。但是仍有很多问题。

1 是否存在这样一类函数集合，使其中的任意两个函数满足题目中的这种性质。这种函数还是容易找得到的。比如 $\{f(x)\,|\,f(x)\in C[a,b],\ f'(x)\text{保号}\}$ 。

2 对于这样一种问题，其中一点是函数求和，或者说两个函数求和之后到底函数的什么特征发生了改变。

3 我们也可以提出这样一个问题：若对于两个函数在 P_i 中的最佳逼近多项式之和是这两个函数之和的最佳逼近多项式，那么在 P_{i+1} 中是否也有这种性质。(相超军)

13. 给定平面上的 n 个点 $p_i(x_i,y_i)$，i=1,……,n. p_0 是另外一个点。试指出，存在一条过 p_0 的直线：$y=a_0x+a_1$，使得 $\max\limits_{1\le i\le n}\left|y_i-\left(a_0x_i+a_1\right)\right|=\min$ 。并请进一步推广此性质。

证明：由于对任意的过 p_0 的直线均有 $\max\limits_{1\le i\le n}\left|y_i-\left(a_0x_i+a_1\right)\right|\ge 0$

故 $\inf\max\limits_{1\le i\le n}\left|y_i-(a_ox_i+a_1)\right|$ 存在。

不妨令 $\inf\max\limits_{1\le i\le n}\left|y_i-(a_ox_i+a_1)\right|$=A

因此对任何给定的$e>0$,必有一条过p_0点的直线 P：y=a_0x+a_1

使得 $A\le\max\limits_{1\le i\le n}|y_i-(a_ox_i+a_1)|<A+e$

特别取$e=\frac{1}{m}$，存在$p_m: y_m=a_{0,m}x+a_{1,m}$使

$A\le\max\limits_{1\le i\le n}|y_i-(a_{o,m}x_i+a_{1,m})|<A+\frac{1}{m}$

于是有 $\max\limits_{n}|y_i-(a_{o,m}x_i+a_{1,m})|<A+1$

又由$a_{0,m}x_0+a_{1,m}=y_0$故$a_{1,m}=y_0-a_{0,m}x_0$

所以 $|y_i-(a_{o,m}x_i+a_{1,m})|<A+1$

$$|y_i-(a_{o,m}x_i+y_o-a_{0,m}x_0)|<A+1$$

$$|y_i-y_0+a_{o,m}(x_i-x_0)|<A+1$$

令 $B=\max\limits_{1\le i\le n}|y_i-y_0|$，$C=\min\limits_{1\le i\le n}|x_0-x_i|\ne 0$

故有$|a_{0,m}|<\frac{A+B+1}{C}$

此时有 $|a_{1,m}|=|y_0-a_{0,m}x_0|\le|y_0|+|x_0||a_{0,m}|<|y_0|+|x_0|\frac{A+B+1}{C}$

所以数列{$a_{0,m}$}，{$a_{1,m}$}均有界

由 Bolzano-Weierstrass 定理，可逐次选出两个同时收敛的子序列{ $a_{0,m}^{(j)}$}，{$a_{1,m}^{(j)}$}。

使得 $\lim\limits_{j\to\infty}a_{0,m}^{(j)}=a_{M0}$，$\lim\limits_{j\to\infty}a_{1,m}^{(j)}=a_{M1}$

又令$\max\limits_{1\le i\le n}|x_i|=M$

对于任意的 $e_j>0$，存在 N>0,当 j>N 时，有

$$|a_{0,m}^{(j)}-a_{M0}|<\frac{e_j}{2M}，\quad |a_{1,m}^{(j)}-a_{M1}|<\frac{e_j}{2}$$

所以对于直线 P: y=$a_{M0}x+a_{M1}$ 有

$$\max_{1\le i\le n}\left|y_i-(a_{M0}x_i+a_{M1})\right|$$

$$=\max_{1\le i\le n}\left|y_i-(a_{0,m}^{(j)}x_i+a_{1,m}^{(j)})+(a_{0,m}^{(j)}x_i+a_{1,m}^{(j)})-(a_{M0}x_i+a_{M1})\right|$$

$$\le\max_{1\le i\le n}\left|y_i-(a_{0,m}^{(j)}x_i+a_{1,m}^{(j)})\right|+\max_{1\le i\le n}\left|(a_{0,m}^{(j)}-a_{M0})\,x_i+a_{1,m}^{(j)}-a_{M1}\right|$$

$$\le\max_{1\le i\le n}\left|y_i-(a_{0,m}^{(j)}x_i+a_{1,m}^{(j)})\right|+\max_{1\le i\le n}\left|a_{0,m}^{(j)}-a_{M0}\right|\left|x_i\right|+\max_{1\le i\le n}\left|a_{1,m}^{(j)}-a_{M1}\right|$$

$$<A+\frac{1}{m_j}+\frac{e_j}{2M}*M+\frac{e_j}{2}$$

$$<A+\frac{1}{m_j}+e_j$$

所以当 $j\to\infty$ 时，$\max_{1\le i\le n}\left|y_i-(a_{M0}x_i+a_{M1})\right|\le A+e_j$

由 e_j 的任意性可知：$\max_{1\le i\le n}\left|y_i-(a_{M0}x_i+a_{M1})\right|\le$ A

又由于 $\max_{1\le i\le n}\left|y_i-(a_{M0}x_i+a_{M1})\right|\ge A$

所以 $\max_{1\le i\le n}\left|y_i-(a_{M0}x_i+a_{M1})\right|$ =A.

因而直线 P：$y=a_{M0}x+a_{M1}$ 为所求直线

推广：给定平面内的 n 个点 $p_i(x_i,y_i), i=1,\dots,n.$ $p_{0,1},\dots,p_{0,n-1}$ 是另外 n-1 个点，则存在一条过这 n-1 个点. $p_{0,1},\dots,p_{0,n-1}$ 的 n-1 次曲线：

$$y=a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-2}x+a_{n-1},$$

使得 $\max_{1\le i\le n}\left|y_i-(a_0x^{n-1}+a_1x^{n-2}+\dots+a_{n-2}x+a_{n-1})\right|=\min$ (郭兵)

16. 设 f 的各阶导数都存在，且在 $[a,b]$ 中不变号，试证 $E_0(f)>E_1(f)>\mathbf{L}$

证：（反证）若 $E_n(f)=E_{n+1}(f)$，设 p_n 为 f 中在 P_n 中的最佳逼近多项式，则 $f-p_n$ 交错变号 n+3 次。由函数的连续性,知 $f(x)-p(x)=0$ 在 $[a,b]$ 至少有 n+2 个根.由 Rolle 定理

知在(a,b)内 $f'(x)-p'(x)=0$ 至少有 n+1.反复用 Rolle 定理 $f^{(n)}(x)-p^{(n)}(x)=0$ 在(a,b)至少有 2 个根,再次用 Rolle 定理知 $f^{(n+1)}(x)-p^{(n+1)}(x)=0$。由于 $p^{(n+1)}(x)=0$ 这样得到在某点比如x 处 $f^{(n+1)}(x)=0$。由于 $f^{(n+1)}(x)$ 在$[a,b]$内不变号，不妨设为 $f^{(n+1)}(x)>=0$，由于 $f^{(n+1)}(x)$ 不变号，也就是不在一个区间段上恒为零，这样一来在x 两侧至少分别有点x_1、x_2 使 $f^{(n+1)}(x_1)>0$ 和 $f^{(n+1)}(x_2)>0$。这样由 Lagrange 中值定理,存在h_1,h_2 分别满足 $f^{(n+2)}(h_1)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_1)-f^{(n+1)}(x)}{x_1-x}<0$ 和 $f^{(n+2)}(h_2)=\dfrac{f^{(n+1)}(x_2)-f^{(n+1)}(x)}{x_2-x}>0$ 这样与 $f^{(n+2)}(x)$ 在$[a,b]$内不变号矛盾.证毕. （亓万峰）

第四章习题

3. 试求 $f(x)=|x|$ 关于 Legendre 多项式和 Tchebyshev 多项式的展开式。

解答：关于 Legendre 多项式的展开式

Legendre 多项式的表达式为

$$P_n(x)=\frac{1}{2^n n!}\left(\frac{d}{dx}\right)^n\left(x^2-1\right)^n$$

二项式展开，逐项微分之后，有如下的一般形式：

$$P_n(x)=\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}$$

$$f(x)=|x| \sim \sum_{n=0}^{\infty}a_n P_n(x)$$

其中

$$a_n=(f(x),P_n)=\int_{-1}^{1}|x|\left[\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k}\right]dx \qquad \text{（权函数为 1）}$$

$$=\int_0^1\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k+1}dx$$

$$-\int_{-1}^0\sum_{k=0}^{[n/2]}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k+1}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{[n/2]}[\int_0^1(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k+1}dx$$

$$-\int_{-1}^0(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^n k!(n-k)!(n-2k)!}x^{n-2k+1}dx]$$

$$=\begin{cases} 0 & n\text{为奇数} \\ \sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^{n-1}k!(n-k)!(n-2k)!(n-2k+2)} & \text{n为偶数} \end{cases}$$

故 $f(x)=|x| \sim \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}a_{\mathrm{n}}P_n(x)$

$$a_n=\begin{cases} 0 & n\text{为奇数} \\ \sum_{k=0}^{n/2}(-1)^k\frac{(2n-2k)!}{2^{n-1}k!(n-k)!(n-2k)!(n-2k+2)} & \text{n为偶数} \end{cases}$$

关于 Tchebyshev 多项式的展开式：
Tchebyshev 多项式的的表达式为

$T_n=\cos(n\arccos x)$，是权值为 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 的直交多项式

$$f(x)=|x| \sim \sum_{\mathrm{n=0}}^{\infty}a_{\mathrm{n}}T_n(x)$$

其中

$$a_n=(f(x),T_n(x))=\int_{-1}^1|x|\cos(n\arccos x)(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$=\int_0^1\frac{x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cos(n\arccos x)dx+\int_{-1}^0\frac{-x}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\cos(n\arccos x)dx$$

$$=\int_{\frac{p}{2}}^0\frac{\cos t}{(1-\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}}\cos(nt)(-\sin t)dt+\int_p^{\frac{p}{2}}\frac{-\cos t}{(1-\cos^2 t)^{\frac{1}{2}}}\cos(nt)(-\sin t)dt$$

$$=\int_{\frac{p}{2}}^0-\cos t\cos(nt)dt+\int_p^{\frac{p}{2}}\cos t\cos(nt)dt$$

$$=-\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)t}{n+1}+\frac{\sin(n-1)t}{n-1}\right)\Big|_{\frac{p}{2}}^0+\frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n+1)t}{n+1}+\frac{\sin(n-1)t}{n-1}\right)\Big|_p^{\frac{p}{2}}$$

$$=\begin{cases} -\dfrac{2}{(n+1)(n-1)} & n=4k \\ \dfrac{2}{(n+1)(n-1)} & n=4k+2 \\ 0 & n=4k+1\text{或}4\text{k}+3 \end{cases}$$

故

$$f(x)=|x| \sim \sum_{\text{n}=0}^{\infty} a_{\text{n}} T_n(x)$$

$$a_n=(f(x),T_n(x))=\begin{cases} -\dfrac{2}{(n+1)(n-1)} & n=4k \\ \dfrac{2}{(n+1)(n-1)} & n=4k+2 \\ 0 & n=4k+1\text{或}4\text{k}+3 \end{cases}$$

专 题

Weierstrass 第一定理的几种证明

0 定理的重述

Weierstrass 第一定理 (1885)

设 $\boldsymbol{f(x)} \in \boldsymbol{C[a,b]}$,那么对于任意给定的 $\varepsilon > \mathbf{0}$,都存在这样的多项式 $\boldsymbol{p(x)}$ 使得

$$\max_{a \le x \le b} |\boldsymbol{p(x)} - \boldsymbol{f(x)}| < \varepsilon$$

成立。

对于该定理的证明,Bernstein 给出了一种构造性的证明方法,被认为是最漂亮的证明方法。事实上,除了 Bernstein 的证明方法之外还有很多其它的方法.这里我们主要来看一下切比雪夫(Tchebyshev),勒贝格(Lebesgue),郎道(Landau)以及 Weierstrass 本人给出的证明。

1. Tchebyshev 的证明

该证明方法利用 Tchebyshev 多项式,引入了一个多项式核.

（1）准备知识

引理 1 恒等式

$$\cos nx = 2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\cos^k\theta, n = 1,2,\cdots \qquad (1)$$

成立,其中 $\lambda_0^{(n)},\cdots,\lambda_{n-1}^{(n)}$ 为某些常数.

证明　用数学归纳法证明.

当 $n=1$ 时,结论显然成立.

假设当 $m \le n, m, n \in N$ 时结论依然成立,在(1)式中以 $n-1$ 代替 n 得到

$$\cos(n-1)x = 2^{n-2}\cos^{n-1}\theta + \sum_{k=0}^{n-2}\lambda_k^{(n-1)}\cos^k\theta$$

从而得到

$$\cos(n-1) = \sum_{k=0}^{n-1}\mu_k\cos^k\theta$$

这里 μ_k 为常数.又因为

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta$$

所以

$$\begin{aligned}
&\cos(n+1)\theta = (\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta) - \cos(n-1)\theta \\
&= 2\cos\theta\cos n\theta - \cos(n-1)\theta \\
&= 2\cos\theta[2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\cos^k\theta] - \sum_{k=0}^{n-1}\mu_k\cos^k\theta \\
&= 2^n\cos^{n+1}\theta + \sum_{k=0}^{n}\upsilon_k\cos^k\theta
\end{aligned}$$

这里 υ_k 为常数.

由归纳法原理知原命题对所有的 n 均成立.　　证毕

推论 1　当 $x \in [0,1]$ 时,恒等式

$$\cos(n\arccos x) = 2^{n-1}\cos^n(\arccos x) + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\cos^k(\arccos x) \qquad (2)$$

成立.

定义 1　称多项式

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \qquad (3)$$

为 Tchebyshev 多项式或 n 次 Tchebyshev 多项式.

设 $T_{2n+1}(x) = \cos((2n+1)\arccos x)$ 是 $2n+1$ 次 Tchebyshev 多项式.对任意的 $n \in N$,在[-1,1]上令

$$K_n(x) = \frac{1}{\gamma_n}\left[\frac{T_{2n+1}(x)}{x}\right]^2 \qquad (4)$$

这里

$$\gamma_n = \int_{-1}^{1}\left[\frac{T_{2n+1}(x)}{x}\right]^2 dx \qquad (5)$$

如上定义的 $K_n(x)$ 在定理的证明中将起到多项式核的作用,它具有如下的性质:

性质 1　$K_n(x)$ 是 $4n$ 次多项式,且是偶函数.

性质 2　$\int_{-1}^{1} K_n(x)dx = 1.$

性质 3　对于任意的 $\delta \in (0,1)$,以及 $n \in N$ 都有 $\int_{\delta}^{1} K_n(x)dx < \frac{1}{n\delta}$.

根据 $K_n(x)$ 的定义我们不难验证性质 1 和性质 2,下面我们来证明一下性质 3.

证明：　首先,

$$\begin{aligned}
\gamma_n &= \int_{-1}^{1}\left[\frac{T_{2n+1}}{x}\right]^2 dx \\
&= 2\int_{0}^{1}\left[\frac{\cos(2n+1)(\frac{\pi}{2} - \arcsin x)}{x}\right]^2 dx \\
&= 2\int_{0}^{1}\left[\frac{\sin(2n+1)\arcsin x}{x}\right]^2 dx \\
&= 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2n+1}}\left[\frac{\sin(2n+1)\frac{t}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right]^2 \cos\frac{t}{2}\, dt
\end{aligned}$$

因为当 $t\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 时, $\frac{2}{\pi}t\le\sin t\le t$. 而且当 $t\in[0,\frac{\pi}{2n+1}]$ 时, $\cos\frac{t}{2}$ 是单调递减函数,故 $\cos\frac{t}{2}>\cos\frac{\pi}{4n+2}\ge\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}$.

所以, $\gamma_n>2\int_0^{\frac{\pi}{2n+1}}\frac{(\frac{2}{\pi}(2n+1)\frac{t}{2})^2}{(\frac{t}{2})^2}\frac{1}{2}dt=\frac{4n+2}{\pi}>n$

因此 $\int_\delta^1 K_n(x)dx<\frac{1}{n\delta}$.　　　　　　　　　　　　　证毕

（2.）定理证明

我们只需要证明 $[a,b]\equiv[-1,1]$ 的情况.事实上,作一个线性变换 $t=\frac{(b-a)x+a+b}{2}$,便可实现转化.下面我们证明 $f(x)\in C[-1,1]$ 的情况.

首先,将 $f(x)$ 连续开拓到[-2,2]上.我们令

$$f(x)=\begin{cases} f(-1),x\in[-2,-1] \\ f(x),x\in[-1,1] \\ f(1),x\in[1,2] \end{cases}$$

显然, $f(x)$ 在[-2,2]上连续,从而一致连续.

对任意的 $n\in N$,当 $x\in[-1,1]$ 时,以 $K_n(x)$ 为核构造函数

$$p_n(x)=\frac{1}{3}\int_{-2}^{2}f(t)K_n(\frac{t-x}{3})dx \qquad (1\text{-}1)$$

由于 $K_n(x)$ 是 $4n$ 次多项式,则 $p_n(x)$ 也是 $4n$ 次多项式.

令　$\eta=\frac{t-x}{3}$,则 $t=3\eta+x$.于是(1-1)式可化为

$$p_n(x)=\int_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}}f(x+3\eta)K_n(\eta)d\eta \qquad (1\text{-}2)$$

由于 $\int_{-1}^{1}K_n(x)dx=1$. 故

$$|f(x)-p_n(x)|=\left|\int_{-1}^{1} f(x)K_n(\eta)d\eta-\int_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} f(x+3\eta)K_n(\eta)d\eta\right|$$

$$=\left|\int_{-\frac{\delta}{3}}^{\frac{\delta}{3}}[f(x)-f(x+3\eta)]K_n(\eta)d\eta+\left(\int_{-1}^{-\frac{\delta}{3}}+\int_{\frac{\delta}{3}}^{1}\right)f(x)K_n(\eta)d\eta-\left(\int_{\frac{-2-x}{3}}^{-\frac{\delta}{3}}+\int_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2-x}{3}}\right)f(x+3\eta)K_n(\eta)$$

$$\le\int_{-\frac{\delta}{3}}^{\frac{\delta}{3}}|f(x)-f(x+3\eta)|K_n(\eta)d\eta+\left(\int_{-1}^{-\frac{\delta}{3}}+\int_{\frac{\delta}{3}}^{1}\right)|f(x)|K_n(\eta)d\eta-\left(\int_{\frac{-2-x}{3}}^{-\frac{\delta}{3}}+\int_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2-x}{3}}\right)|f(x+3\eta)|K$$

将上式中的三个积分依次记为 I_1,I_2,I_3.由于 $f(x)$ 在[-2,2]上一致连续,

故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $x_1,x_2\in[-2,2]$ 且 $|x_1-x_2|<\delta$ 时必有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon \qquad (1\text{-}3)$$

设 $M=\max\limits_{x\in[-2,2]}|f(x)|$ 则

$$I_1\le\varepsilon\int_{-\frac{\delta}{3}}^{\frac{\delta}{3}}K_n(\eta)d\eta<\varepsilon$$

$$I_2\le 2M\int_{\frac{\delta}{3}}^{1}K_n(\eta)d\eta<\frac{6M}{n\delta}$$

$$I_3\le M\left(\int_{\frac{-2-x}{3}}^{-\frac{\delta}{3}}+\int_{\frac{\delta}{3}}^{\frac{2-x}{3}}\right)K_n(\eta)d\eta\le\left(\int_{-1}^{-\frac{\delta}{3}}+\int_{\frac{\delta}{3}}^{1}\right)K_n(\eta)d\eta<\frac{6M}{n\delta}$$

所以

$$|f(x)-p_n(x)|<\varepsilon+\frac{12M}{n\delta}$$

故 $\forall\varepsilon>0$, 先取定 δ 使得(1-3)式成立,然后再取充分大的 n 就有

$$|f(x)-p_n(x)|<2\varepsilon\,. \qquad \text{证毕}$$

2. Lebesgue 的证明

我们首先来证明两个引理.

引理 1 函数 $f(x)=|x|$ 在[-1,1]上可以展成一致收敛的多项式级数.

证明 当$|t|<1$时,由 Taylor 级数理论得

$$\sqrt{1-t}=1-\frac{t}{2}-\sum_{t=2}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}t^{n} \qquad (2\text{-}1)$$

当$t=1$时,由

$$\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}=\sqrt{\left(\frac{(2n-1)!!}{(2n-2)!!}\right)^{2}\frac{1}{4n^{2}}}=\sqrt{\frac{1\cdot 3}{2^{2}}\frac{3\cdot 5}{4^{2}}\cdots\frac{(2n-5)(2n-3)}{(2n-2)^{2}}\frac{1}{2n-1}\frac{1}{4n^{2}}}<\frac{1}{2n\sqrt{2n-1}}$$

于是级数(2-1)在[-1,1]上一致收敛.再由

$$|x|=\sqrt{1-(1-x^{2})}$$

于是

$$|x|=1-\frac{1-x^{2}}{2}-\sum_{t=2}^{\infty}\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}(1-x^{2})^{n}$$

此级数在$|x|<1$时一致收敛. 证毕

引理 2 函数 $l(x)=\begin{cases}0, x<0\\ x, x\geq 0\end{cases}$ 在[-1,1]上可以展成一致收敛得多项式级数.

证明 因为 $l(x)=\dfrac{|x|+x}{2}=\dfrac{x}{2}+\dfrac{|x|}{2}$

由引理 1 马上可以推出命题的结果.

设 $f(x)$ 在[0,1]上连续,从而一致连续.取点 $x_k=\dfrac{k}{m},(k=0,1,\cdots,m)$ 把区间[0,1]等分为 m 个区间$[x_k,x_{k+1}],(k=0,1,\cdots,m-1)$.相邻两区间仅端点公共..

由于 $f(x)$ 在[0,1]上一致连续,故 $\forall\varepsilon>0,\exists\delta>0$ 当 $x_1,x_2\in[0,1]$ 且$|x_1-x_2|<\delta$ 时必有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

取 m 充分大,使得$\dfrac{1}{m}<\delta$.考虑连接点$(x_k,f(x_k))$的折线 $f_m(x)$,则

$$|f(x)-f_m(x)|<\varepsilon \qquad (2\text{-}2)$$

问题归结为在[0,1]上用多项式一致逼近 $f_m(x)$.因此,我们先分析一下 $f_m(x)$

的性质.

首先我们证明 $f_m(x)$ 可以表示为一些更简单的函数之和.事实上,设 $f_{m,0}(x)=f(0)$,我们把它看成是 $f_m(x)$ 的第一步"近似",两者在 $x=0$ 处相等.现在令

$$f_{m,1}(x)=f_{m,0}(x)+l_0(x) \quad 其中\ l_0(x)=\begin{cases}0,(x<0)\\ mx(f(\frac{1}{m})-f_{m,0}(\frac{1}{m})),(x\geq 0)\end{cases}$$

则很容易看到 $f_{m,1}(x)$ 在 $[0,\frac{1}{m}]$ 上与 $f_m(x)$ 相等.我们称 $f_{m,1}(x)$ 是对 $f_m(x)$ 的第二步"近似"。 如果令 $l(x)=\begin{cases}0,x\leq 0\\ x,x>0\end{cases}$，则有

$$f_{m,1}(x)=f(0)+C_0\,l(x) \quad , \quad C_0=m[f(\frac{1}{m})-f(0)]。$$

现在再设 $f_{m,2}(x)=f_{m,1}(x)+l_1(x)$,

$$其中\quad l_1(x)=\begin{cases}0,x\leq\frac{1}{m}\\ (mx-1)[f(\frac{2}{m})-f_{m,1}(\frac{2}{m})],x>\frac{1}{m}\end{cases}$$

则很容易看到 $f_{m.2}(x)$ 在 $[0,\frac{2}{m}]$ 上与 $f_m(x)$ 相等.我们称 $f_{m.2}(x)$ 是对 $f_m(x)$ 的第三步"近似"。利用 $l(x)=\begin{cases}0,x\leq 0\\ x,x>0\end{cases}$， $f_{m.2}(x)$ 可以表达为：

$$f_{m,2}(x)=f_{m,1}(x)+C_1\,l(x-\frac{1}{m}) \quad 其中 C_1=m[f(\frac{2}{m})-f_{m,1}(\frac{2}{m})]$$

从而有： $f_{m,2}(x)=f(0)+C_0\,l(x)+C_1\,l(x-\frac{1}{m})$。

如此进行 m 步，我们得到

$$f_m(x)=f_{m,m}(x)=f(0)+\sum_{j=0}^{m-1}C_j\,l(x-\frac{j}{m}) \qquad (2\text{-}3)$$

其中， $C_j,(j=0,1,\ldots,m-1)$ 是与 m， $f(\frac{j}{m})$ 有关的常数。

根据式（2-2）和式（2-3）以及引理我们很容易得到欲证的结果。 证毕

以上的两种证明方法都只用到了微积分的内容,下面我们将介绍两种建立在

线性正算子基础上的证法。郎道(Landau)以及 Weierstrass 本人给出的证明。在给出证明之前我们先证明一个引理和一个定理。

引理　设 $j(x)\in C[-b,b]$，并且 $j(0)=1;\quad 0\le j(x)<1,(x\ne 0,x\in[-b,b])$，如果令 $I_n=\int_{-b}^{b} j^n(x)dx \quad I_n(d)=\int_{-d}^{d} j^n(x)dx \qquad 0<d\le b$

则

$$\lim_{n\to\infty}\frac{I_n(d)}{I_n}=1$$

证明　我们有

$$I_n=\int_{-b}^{b} j^n(x)dx=\int_{-b}^{-d} j^n(x)dx+\int_{-d}^{d} j^n(x)dx+\int_{d}^{b} j^n(x)dx$$

$$=I_n(d)+(\int_{-b}^{-d} j^n(x)dx+\int_{d}^{b} j^n(x)dx)$$

令 $q_1=\max\limits_{-b\le x\le -d} j(x)$， $q_2=\max\limits_{d\le x\le b} j(x)$， $q=q(d)=\max\{q_1,q_2\}$ 则 $j(x)$ 满足

$$0\le j(x)\le q=q(d)<1 \quad x\in[-b,-d]\cup[d,b]$$

从而有

$$0\le(\int_{-b}^{-d}+\int_{d}^{b})j^n(x)dx<2q^n(b-d)<2q^n b$$

现在估计 $I_n(d)$ 的值。由于在点 $x=0$ 处函数 $j(x)$ 连续且 $j(0)=1$，所以对 $e=\frac{1-q}{2}>0,\exists d_1>0$ 且 $d_1<d$，使得当 $|x|<d_1$ 时，有

从而有 $I_n(d)=\int_{-d}^{d} j^n(x)dx\ge\int_{-d_1}^{d_1} j^n(x)dx>\tilde{q}^n 2d_1$

故 $I_n(d)\le I_n<I_n(d)+2bq^n$

注意到 $1\le\frac{I_n}{I_n(d)}<1+\frac{2bq^n}{2d_1\tilde{q}^n}=1+\frac{b}{d_1}(\frac{q}{\tilde{q}})^n$

由于 $\tilde{q}>q$，所以上面的不等式右端趋于 1，这就证明了引理。

定理　若函数 $j(x)$ 满足引理条件且

$$I_n=\int_{-b}^{b} j^n(x)dx \quad f\in C[a,b]$$

则算子序列

$$(L_n f)(x)=\frac{1}{I_n}\int_{a}^{b} f(t)j^n(t-x)dt \qquad 0<b-a\le b$$

在区间$[a+d,b-d],(d>0)$上一致收敛于函数$f(x)$。

证明　根据 Korovkin 定理，我们只需验明在区间$[a+d,b-d],(d>0)$上，序列$L_n 1\to 1$，而序列$(L_n y)(x)\to 0$ 其中$y(t)=(t-x)^2$。

结合引理的结论，这两点都是可以验证的。

下面我们给出 Weierstrass 第一定理的 Landau 证法以及 Weierstrass 证法。

3. Landau 的证法

证　由于$f\in C[a,b]$，我们不妨把它看成是在整个实数轴上连续的函数。事实上,，如果$x\le a$时，令$f(x)=f(a)$；如果$x\ge b$时，令$f(x)=f(b)$。所得的函数仍然记为$f(x)$，它在整个实数轴上连续。

现在令 $a_1=a-d$， $b_1=b+d$， $d>0$。并且令

$$(L_n f)(x)=\frac{1}{I_n}\int_{a_1}^{b_1} f(t)\{\frac{b^2-(t-x)^2}{b^2}\}^n dt \qquad b=b_1-a_1$$

其中 $I_n=\int_{-b}^{b}(\frac{b^2-x^2}{b^2})^n dx$。

称上述的算子为 Landau 算子。容易验证 Landau 算子是线性正算子，且是多项式。

注意到 Landau 算子是定理中所考虑算子的特例，且可从那里令$j(x)=\frac{b^2-x^2}{b^2}$ $-b\le x\le b$ 而得到。由于函数$j(x)=\frac{b^2-x^2}{b^2}$满足条件$j(0)=1$，$0\le j(x)<1,(x\ne 0,x\in[-b,b])$，所以根据定理结论知道 Landau 算子在区间$[a_1+d,b_1-d]=[a,b]$上一致收敛于$f(x)$。从而 Weierstrass 第一定理得证。

4. Weierstrass 的证法

证　由于$f\in C[a,b]$，我们不妨把它看成是在整个实数轴上连续的函数。事实上,，如果$x\le a$时，令$f(x)=f(a)$；如果$x\ge b$时，令$f(x)=f(b)$。所得的函数仍然记为$f(x)$，它在整个实数轴上连续。

现在令 $a_1 = a - d$ ，$b_1 = b + d$ ，$d > 0$。并且令

$$(W_n f)(x) = \frac{1}{I_n}\int_{a_1}^{b_1} f(t) e^{-n(t-x)^2} dt \qquad b = b_1 - a_1$$

其中 $I_n = \int_{-b}^{b} e^{-nx^2} dx$。

称上述的算子为 Weierstrass 算子。容易验证 Weierstrass 算子是线性正算子。

注意到 Weierstrass 算子是定理中所考虑算子的特例，且可从那里令 $j(x) = e^{-x^2} \quad -b \le x \le b$ 而得到。由于函数 $j(x) = e^{-x^2}$ 满足条件 $j(0) = 1$，$0 \le j(x) < 1, (x \ne 0, x \in [-b, b])$，所以根据定理结论知道 Weierstrass 算子在区间 $[a_1 + d, b_1 - d] = [a, b]$ 上一致收敛于 $f(x)$。从而 $\forall e > 0,$ 当 n 充分大时，有不等式

$$|(W_n f)(x) - f(x)| < \frac{e}{2} \qquad a \le x \le b \tag{4-1}$$

对于使不等式（4-1）成立的每一个固定的 n，我们下面来证明函数 $(W_n f)(x)$ 用多项式可以任意的逼近。为此，把函数 $e^{-n(t-x)^2}$ 按 $(t-x)$ 展成幂级数。由于

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2!} + \mathbf{L} + \frac{u^m}{m!} + \mathbf{L} \tag{4-2}$$

并令 $u = -n(t-x)^2$，得到

$$e^{-n(t-x)^2} = 1 - n(t-x)^2 + \frac{n^2(t-x)^4}{2!} + \mathbf{L} + (-1)^m \frac{n^m (t-x)^{2m}}{m!} + \mathbf{L} \tag{4-3}$$

级数（4-2）对一切值收敛，并且在每一个闭区间上一致收敛。由于 $a_1 \le x, t \le b_1$，所以 $(t-x)^2 \le (b_1 - a_1)^2 = b^2$，$0 \ge -n(t-x)^2 = u \ge -nb^2$。级数（4-2）在区间 $[-nb^2, 0]$ 上收敛，因而级数（4-3）在 $a_1 \le x, t \le b_1$ 上也一致收敛。取级数（4-3）的部分和

$$S_m(t-x) = 1 - n(t-x)^2 + \frac{n^2(t-x)^4}{2!} + \mathbf{L} + (-1)^m \frac{n^m (t-x)^{2m}}{m!}$$

使得不等式

$$|e^{-n(t-x)^2} - S_m(t-x)| < \frac{I_n e}{2Mb} \qquad a_1 \le x, t \le b_1 \tag{4-4}$$

成立。其中 $M = \max_{a_1 \le x \le b_1} |f(x)|$，$b = b_1 - a_1$。令

$$p(x)=\frac{1}{I_n}\int_{a_1}^{b_1} f(t)S_m(t-x)dt$$

且注意到不等式（4-4），则得到

$$(W_n f)(x)-p(x)=\frac{1}{I_n}\int_{a_1}^{b_1} f(t)\{e^{-n(t-x)^2}-S_m(t-x)\}dt$$

$$|(W_n f)(x)-p(x)|\le\frac{1}{I_n}\int_{a_1}^{b_1}|f(t)||e^{-n(t-x)^2}-S_m(t-x)|dt$$

$$<\frac{M}{I_n}\bullet\frac{I_n e}{2Mb}b=\frac{e}{2} \qquad (4\text{-}5)$$

容易证明， $p(x)$ 为多项式。

最后有

$$|f(x)-p(x)|\le|f(x)-(W_n f)(x)|+|(W_n f)(x)-p(x)|$$

由不等式（4-1）和（4-5）得

$$|f(x)-p(x)|<e \qquad a\le x\le b$$

从而 Weierstrass 第一定理得证。　　　　证毕

当然，对于 Weierstrass 第一定理证明的方法还有很多。比较这几种不同的证明方法我们可以看到，无论用哪种方法，都得找一个多项式 $p(x)$ 与 $C[a,b]$ 中的函数 $f(x)$ 作比较。这样的多项式有的直接可以得到，例如 Bernstein 多项式，以及 Landau 多项式，这给证明带来很大的便利；有的是间接的得到的，这些多项式表达起来不是很方便的，例如 Weierstrass 的证法将证明分成两个部分。毋庸置疑，这些证法本身都有值得我们借鉴的地方。

Bernstein 多项式的性质

定理 1： $B_n(f)=\sum_{t=0}^{n}\Delta^t f(0)\binom{n}{t}x^t$ 　　(1)

其中，差分是在 $x=0/n,1/n,\ldots,(n-1)/n,n/n$ 上进行计算的。

定理 2（Popoviciu T.）：若 $f(x)\in c[0,1]$，而 $B_n(f)$ 为他的伯恩斯坦多项式，则

$$|B_n(f)-f(x)|\le\frac{3}{2}w\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right), \qquad (2)$$

其中$w(d)$为$f(x)$在$[0,1]$上的连续模。

证：由伯恩斯坦多项式的定义，有

$$\left|B_n(f)-f(x)\right|=\left|\sum_{k=0}^{n} f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}-f(x)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right|$$

$$\le\sum_{k=0}^{n}\left|f(\frac{k}{n})-f(x)\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\text{。}\qquad(3)$$

$$\left|f(\frac{k}{n})-f(x)\right|\le w\left(\left|\frac{k}{n}-x\right|\right)=w\left(\left|\frac{k}{n}-x\right|\sqrt{n}\bullet\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\le\left(\left|\frac{k}{n}-x\right|\sqrt{n}+1\right)w\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right),$$

$$\left|B_n(f)-f(x)\right|\le w\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+1\right]\text{。}\qquad(4)$$

由 Holder 不等式，我们有

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]^2\le\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]\left[\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\right]$$

由于

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}\le\frac{1}{4n}$$

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{1}{2\sqrt{n}}\qquad(5)$$

将(5)代入(4)便有(2)。

推论 1：若$f(x)\in Lip_{M^a}, 0<a\le 1$，则

$$\left|B_n(f)-f(x)\right|\le\frac{3M}{2\sqrt{n^a}}\text{。}\qquad(6)$$

推论是 Kac M.独立于 Popoviciu T.而求得的，Kac M.曾证明：它的阶不可能在改善了。因此，对任何连续函数用伯恩斯坦多项式来逼近，其逼近的精确性是很不理想的。此种情况可以表示成下面的结果：

定理 3（瓦隆诺夫斯卡雅）：若有界函数$f(x)$在点x处存在有限的二阶导数$f''(x)$，则

$$B_n(f)=f(x)+\frac{f''(x)}{2n}x(1-x)+\frac{r(n)}{n}, \tag{7}$$

其中 $r(n)\to 0(n\to\infty)$。

在给出定理的证明前，先给出一个引理

引理 1：存在一个与 n 无关的常数 c,使得对所有的 $x\in[0,1]$ 有

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge n^{-1/4}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{C}{n^{3/2}} \tag{8}$$

证：考虑和式

$$S_m(x)=\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^m\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \tag{9}$$

$S_0(x)=1, S_1(x)=0, S_2(x)=nx(1-x)$,对(9)式进行微分，可得

$$S'_m(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(k-nx)^{m-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\left[-mnx(1-x)+(k-nx)^2\right]$$

$$=-mnS_{m-1}(x)+\frac{S_{m+1}(x)}{x(1-x)}$$

因此有

$$S_{m+1}(x)=x(1-x)\left[S'_m(x)+mnS_{m-1}(x)\right] \tag{10}$$

由此递推式，我们有结论：$S_m(x)$ 是一个以 x 为变量，n 为参数的多项式。特别的，对 n 的次数而言，S_3 是一次的，S_4 是二次的，S_5 是二次的，S_6 是三次的。因此存在常数 c，使得对所有 $x\in[0,1]$ 有 $|S_6|\le cn^3$。

由于 $\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge n^{-1/4}$，所以有 $(k-nx)^6\ge n^{9/2}$，因此

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge n^{-1/4}}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le\frac{1}{n^{9/2}}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^6\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=n^{-9/2}S_6(x)\le\frac{c}{n^{3/2}}$$

定理 3 的证明　由有限导数 $f''(x)$ 的存在可推出

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\left[\frac{f''(x)}{2}+l(t)\right](t-x)^2 \tag{11}$$

其中 $l(t)$ 随 $t-x$ 同趋于零。令 $t=\frac{k}{n}$，有

$$f(\frac{k}{n})=f(x)+f'(x)\left(\frac{k}{n}-x\right)+\left[\frac{f''(x)}{2}+l(\frac{k}{n})\right]\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 \tag{12}$$

在(12)两边乘上 $\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$，然后求和，我们得到

$$B_n(f)=\sum_{k=0}^{n}f(\frac{k}{n})\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=f(x)+\frac{x(1-x)}{2n}f''(x)+\sum_{k=0}^{n}l\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \tag{13}$$

将最后一个和式记为 S。对 $\forall e>0$，存在充分大的 n，使得 $|t-x|<n^{-1/4}$ 时，有 $|l(t)|\le e$。因此

$$S\le\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<n^{-1/4}}\left|l\left(\frac{k}{n}\right)\right|\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}+\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|\ge n^{-1/4}}\left|l\left(\frac{k}{n}\right)\right|\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

将两个和式分别记为 $\sum_1$，$\sum_2$，则

$$\left|\sum\nolimits_1\right|\le e\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right|<n^{-1/4}}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\le e\frac{x(1-x)}{n}\le\frac{e}{4n}\text{。}$$

由于 $|l(t)|(t-x)^2$ 是有界的，记 $M=\sup\limits_{\substack{0\le x\le 1\\ x\le t\le 1}}|l(t)|(t-x)^2$，那么由引理 1 得

$$\left|\sum\nolimits_2\right|\le\frac{Mc}{n^{3/2}}\text{。}$$

因此有 $|nS|\le n\left(\left|\sum_1\right|+\left|\sum_2\right|\right)\le\frac{e}{4}+\frac{Mc}{n^{1/2}}$，当 n 充分大时有 $|nS|\le e$。将 nS 记为 $r(n)$ 就得到定理。

定理表明不论怎样改善函数 $f(x)$ 的性质，对于伯恩斯坦多项式 $B_n(f)$ 都不能达到高于 $1/n$ 的逼近的阶（线性函数除外，此时 $B_n(f)$ 在 $n>0$ 市将完全与它相同）。这个事实使得伯恩斯坦多项式在数值计算中的应用几乎没有什么前途。但下面的几个定理将告诉我们，与

其他逼近方式相比，伯恩斯坦多项式是一种光滑的逼近，也就是说如果逼近函数 $f(x)$ 是可微的，我们不仅有 $B_n(f) \to f(x)$，而且还有 $B'_n(f) \to f'(x)$，对更高阶的微商也同样成立。因此说伯恩斯坦多项式是一种对函数及其导数的联合逼近。

定理 4：若定义于 $[0,1]$ 上的有界函数 $f(x)$ 在点 x 处有有限导数 $f'(x)$，则

$$\lim_{n\to 0} B_n'(f) = f'(x)$$

证：若 $0 < x < 1$，则我们把 $B_n'(f)$ 表示为

$$B_n'(f) = f(0)(-n)(1-x)^{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(k-nx)x^{k-1}(1-x)^{n-k-1} + f(1)nx^{n-1}$$

$$= \frac{1}{x(x-1)}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)(k-nx)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} \qquad (14)$$

由有限导数 $f'(x)$ 存在，故由 Lagrange 中值定理，有

$$f\left(\frac{k}{n}\right) = f(x) + \left[f'(x) + l\left(\frac{k}{n}\right)\right]\left(\frac{k}{n} - x\right)$$

其中 $l(t) = l(t,x) \to 0$，当 $t - x \to 0$。我们可以得到

$$B_n'(f) = f'(x) + \frac{1}{nx(1-x)}\sum_{k=0}^{n} l\left(\frac{k}{n}\right)(k-nx)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\text{。}$$

借助于(13)中的记号，

$$B_n'(f) = f'(x) + \frac{nS}{x(1-x)}$$

从以证明的事实 $nS \to 0$，知 $0 < x < 1$ 时定理成立。

在 $x = 0$ 或 $x = 1$ 出的情况特别简单。

上面的定理带有局部的性质，下面给出的定理是在整个区间上一致成立的。

定理 5：若 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续的导数 $f'(x)$，则 $B_n'(f)$ 一致收敛于 $f'(x)$。

证：$B_n(f) = f(0)(1-x)^n + \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} + f(1)x^n$

从而

$$B_n'(f)=(-n)f(0)(1-x)^{n-1}-\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}+$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}kx^{k-1}(1-x)^{n-k}+nf(1)x^{n-1}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-\sum_{k=0}^{n-1}f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)(k+1)\binom{n}{k+1}-f\left(\frac{k}{n}\right)(n-k)\binom{n}{k}\right]x^k(1-x)^{n-k-1}$$

得

$$B_n'(f)=n\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}$$

由于导数 $f'(x)$ 在 $[0,1]$ 上处处存在，应用 Lagrange 公式有

$$n\left[f\left(\frac{k-1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=f'(z_k^{(n)}),$$

其中 $\frac{k}{n}<z_k^{(n)}<\frac{k+1}{n}$。这样，

$$B_n'(f)=\sum_{k=0}^{n-1}f'(z_k^{(n)})\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}$$

$$=\sum_{k=0}^{n-1}f'(\frac{k}{n-1})\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}+\sum_{k=0}^{n-1}\left[f'(z_k^{(n)})-f'\left(\frac{k}{n-1}\right)\right]\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{n-k-1}$$

(16)

显然第一个和式便是 $f'(x)$ 的 $n-1$ 阶伯恩斯坦多项式，因而其在 $[0,1]$ 上一致的收敛于 $f'(x)$。另一方面由于 $\frac{k}{n}<z_k^{(n)}<\frac{k+1}{n},\frac{k}{n}<\frac{k}{n-1}<\frac{k+1}{n}$，

所以

$$\left|z_k^{(n)}-\frac{k}{n-1}\right|<\frac{1}{n}。$$

如果记 $f'(x)$ 得连续模为 $w^{(1)}(d)$，我们有

$$\left|f'(z_k^{(n)})-f'\left(\frac{k}{n-1}\right)\right|\le w^{(1)}\left(\frac{1}{n}\right)$$

因此，(16)中第二个和式不大于$w^{(1)}(\frac{1}{n})$，所以一致的趋于零。

更一般的有定理

定理 6：设 $f(x)\in C^{p}\left[0,1\right]$，那么 $\lim\limits_{n\to 0} B_n^{(p)}(f)=f^{(p)}(x)$ 在$\left[0,1\right]$上一致的成立。

引理 2：设 p 是一个整数，且 $p\geq 0$，那么

$$B_n^{(p)}(f)=\frac{(n+p)!}{n!}\sum_{t=0}^{n}\mathbf{V}^{p}f\left(\frac{t}{p+1}\right)\binom{n}{t}x^{t}(1-x)^{n-t} \tag{17}$$

定理 7：设 p 是一个固定的整数，并且$0\leq p\leq n$。若

$$m\leq\frac{n^{p}}{n(n-1)\mathbf{K}(n-p+1)}B_n^{(p)}(f)\leq M,0\leq x\leq 1 \tag{22}$$

特别地，如果 $p=0$，那么 $B_n^{(p)}(f)$ 前的因数应是 1。

证：由(17)知

$$B_n^{(p)}(f)=n(n-1)\mathbf{K}(n-p+1)\sum_{t=0}^{n-p}\mathbf{V}^{p}f\left(\frac{t}{n}\right)\binom{n-p}{t}x^{t}(1-x)^{n-p-t}$$

反复利用 Lagrange 中值定理，我们有

$$\mathbf{V}^{p}f\left(\frac{t}{n}\right)=\frac{1}{n^{p}}f^{(p)}(z_t),\frac{t}{n}<z_t<\frac{t+p}{n}$$

若 $p=0$，则令 $z_t=\frac{t}{n}$。等式显然成立。因此

$$Q=\frac{n^{p}}{n(n-1)\mathbf{K}(n-p+1)}B_n^{(p)}(f)=\sum_{t=0}^{n-p}f^{(p)}(z_t)\binom{n-p}{t}x^{t}(1-x)^{n-p-t}\text{。}$$

由于在$\left[0,1\right]$上 $x^{t}(1-x)^{n-p-t}\geq 0$，并且注意(22),我们有

$$m=m\sum_{t=0}^{n-p}\binom{n-p}{t}x^{t}(1-x)^{n-p-t}\leq Q\leq M\sum_{t=0}^{n-p}\binom{n-p}{t}x^{t}(1-x)^{n-p-t}=M\text{。}$$

推论 2：（1）若 $f^{(p)}(x)\geq 0,x\in\left[0,1\right]$，那么 $B_n^{(p)}(f)\geq 0,\left[0,1\right]$。

（2）若 $f(x)$ 在$\left[0,1\right]$上是非递减的，那么 $B_n(f)$在$\left[0,1\right]$上也是非递减的。

（3）若 $f(x)$ 在 $x\in[0,1]$ 上是凸的，那么 $B_n(f)$ 在 $[0,1]$ 上也是凸的。

单位分解性的一些应用 (Bernstein 多项式)

我们知道,在 Bernstein 证明 weierstrass 第一定理的过程中，不仅证明了近似多项式序列 $p_n(x)$ 的存在性，而且还给出了构造 $p_n(x)$ 的一个具体方法．事实上,

$B_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$，$(n=1,\quad 2,\quad 3,\quad \cdots)$ 便构成了连续函数 $f(x)(0\le x\le 1)$ 的一个近似多项式序列.

注意到，$\{B_{k,n}(x)=\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\}$ 的单位分解性,即:

$$\sum_{k=0}^{n} B_{k,n}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\equiv[x+(1-x)]^n\equiv 1$$

在整个证明过程中起了很重要的作用．事实上,Bernstein 多项式的这一单位分解性质在很多证明的过程中都有很重要的作用.

1. 在推广到 m 阶导数的情形中的应用

定理:如果 $f(x)$ 在[0,1]上连续且其导数直到 m 阶为止在[0,1]上均存在且连续,则 Bernstein 多项式 $B_n(f,x)$ 的前 m 阶导数均在[0,1]上一致收敛到 $f(x)$ 的同阶导数,即:

$$\lim_{n\to\infty} B_n^{(r)}(f,x)=f^{(r)}(x), r=0,\mathbf{L},m$$

证明：这里我们只证明一阶导数的形式,其余的类似.

为了估计 $\left|B_n^{'}(f,x)-f'(x)\right|$，只需估计出 $\left|B_n^{'}(f,x)-B_{n-1}(f',x)\right|$ 和 $\left|B_{n-1}(f',x)-f'(x)\right|$ 即可.记 $j(x)=n\left[f\left(\frac{n-1}{n}x+\frac{1}{n}\right)-f\left(\frac{n-1}{n}x\right)\right]$,则可知:

$$B_n^{'}(f,x)=B_{n-1}(j)(x)$$

$$=\sum_{j=0}^{n-1}\left[\frac{f(\frac{j+1}{n})-f(\frac{j}{n})}{\frac{1}{n}}\right]\binom{n-1}{j}(1-x)^{n-1-j}x^j.$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} f'(x_j)\binom{n-1}{j}(1-x)^{n-1-j}x^j, \quad \frac{j}{n} < x_j < \frac{j+1}{n} \ (j=0,1,\cdots,n-1).$$

故 $$\left|B_n'(f,x) - B_{n-1}(f',x)\right|$$

$$\le \sum_{j=0}^{n-1}\left|f'(x_j) - f'\left(\frac{j}{n-1}\right)\right|\binom{n-1}{j}(1-x)^{n-1-j}x^j.$$

$\forall \varepsilon > 0$,取$\delta > 0$,使得当 $x, y \in [0,1]$,$|x-y|<\delta$ 时成立$|f'(x)-f'(y)| < \dfrac{\varepsilon}{2}$; 再取 $N \in \mathbb{N}^*$ 满足$\dfrac{1}{N}<\delta$,则当$n>N$ 时,有$-\delta < -\dfrac{1}{n} \le \dfrac{j}{n} - \dfrac{j}{n-1} < x_j - \dfrac{j}{n-1}$ $< \dfrac{j+1}{n} - \dfrac{j}{n-1} \le \dfrac{1}{n} < \delta$,故$\forall j=0,1,\cdots,n-1$,成立$\left|f'(x_j) - f'\left(\dfrac{j}{n-1}\right)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.

于是,当$n>N$ 时,$\forall\ x \in [0,1]$ 都成立

$$\left|B_n'(f,x) - B_{n-1}(f',x)\right|$$

$$< \sum_{j=0}^{n-1}\frac{\varepsilon}{2}\binom{n-1}{j}(1-x)^{n-1-j}x^j = \frac{\varepsilon}{2}.$$

如果取 $N \in \mathbb{N}^*$ 更大一些,还可使得当 $n > N$ 时,$\forall x \in [0,1]$ 都成立 $\left|B_{n-1}(f',x) - f'(x)\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$.于是,

$$\left|B_n'(f,x) - f'(x)\right|$$

$$\le \left|B_n'(f,x) - B_{n-1}(f',x)\right| + \left|B_{n-1}(f',x) - f'(x)\right| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

2. 在解答 Borel 问题中的应用

E.Borel 曾经提出过这样一个问题:作这样的多项式$P_{k,n}(x)$,使得对于多项式 $P_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\dfrac{k}{n}\right)P_{k,n}(x)$ 和对于任意一个在[0,1]上连续的函数 $f(x)$,就每一个充分大的n来说,不等式$|f(x) - P_n(x)| < \varepsilon$ 在[0,1]上都成立.

我们知道,Borel 自己解决了这个问题.但是如果按照他的论证手续去寻找$P_{k,n}(x)$的表达式,那是很复杂的.现在,根据 Bernstein 多项式的构造形式,我们只需取: $P_{k,n}(x) = B_{k,n}(x) = \dbinom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$ 就圆满的解决了 Borel 的问题.

3.在用整系数多项式逼近连续函数中的应用

我们可以证明:对给定的在[a,b] $(0<a<b<1)$上的任何连续函数 $f(x)$,可找到整系数多项式序列 $P_n(x)$,使得 $P_n(x)\to f(x)$ 在[a,b]上一致成立.

证明:同样是利用 Bernstein 多项式来构造.

把 x 的整数部分记为 $[x]$,我们可知多项式 $P_n(x)=\sum_{k=0}^{n}[\binom{n}{k}f(\frac{k}{n})]x^k(1-x)^{n-k}$ 的系数全为整数,并且有:

$$|B_n(f,x)-P_n(x)|\le|f(1)|x^n+\sum_{k=1}^{n-1}x^k(1-x)^{n-k}+(1-x)^n|f(0)|$$

记 $|f(x)|$ 的上界为 M,则有:

$$|B_n(f,x)-P_n(x)|\le M\{b^n-(1-a)^n\}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$\le M\{b^n-(1-a)^n\}x^n+\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}$$

$$=M\{b^n-(1-a)^n\}x^n+\frac{1}{n}\xrightarrow{1}0$$

从而有: $|f(x)-P_n(x)|<\frac{e}{2}+\frac{e}{2}=e$ 证毕.

4. 在曲线生成上的应用

在计算机辅助几何设计中，我们接触了多种生成曲线的方法,发现它们的基函数组都为 n 次 Bernstein 多项式,同时,通过 Bernstein 多项式的相关性质,包括单位分解性.相应的得到了生成的曲线和曲面的许多相关特征,这里我们来看一种 Bézier 曲线方法

定义 n 次 Bézier 曲线为:

$$C(u)=\sum_{i=0}^{n}B_{i,n}(u)P_i,\qquad 0\le u\le 1.$$

其中基函数组 $\{B_{i,n}(u)\}$为 n 次 Bernstein 多项式的基函数组,

$$B_{i,n}(u)=\binom{n}{i}u^i(1-u)^{n-i}.$$

而几何系数 $\{P_i\}$称为控制点,并且 $u\in[0,1]$.

显然, 基函数 $\{B_{i,n}(u)\}$具有单位分解性

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u) \equiv 1, \quad 0 \le u \le 1;$$

利用这一条性质，我们可得到：任一条 n 次 Bézier 曲线 $C(u)=\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u)P_i$，均可以表示成同它等价的 n+1 次 Bézier 曲线，即可求得一组 $P_i^{(1)}, i=0,\ldots,n$，使得

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u)P_i = \sum_{i=0}^{n+1} B_{i,n+1}(u)P_i^{(1)}$$

用 $u+(1-u)\equiv 1$ 乘上式左端，并比较两端系数，可得

$$P_i^{(1)} = \frac{1}{n+1}\left[iP_{i-1}+(n-i+1)P_i\right], i=0,1,\ldots,n+1$$

这两个式子称为 Bézier 曲线的升阶公式.

更进一步的,**我们可采用把 n 次 Bézier 曲线 $\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u)P_i$ 乘以 $\sum_{j=0}^{r} B_{j,r}(u)\equiv 1$ 的办法，**使之升阶为一条 $n+r$ 次 Bézier 曲线

$$\sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(u)P_i = \sum_{i=0}^{n+r} B_{i,n+r}(u)P_i^{(r)}$$

其中 $P_i^{(r)}$ 为

$$P_i^{(r)} = \sum_{j=0}^{r} \binom{i}{j}\binom{n+r-i}{n-j}P_j \Big/ \binom{n+r}{n}, i=0,1,\ldots,n+r$$

上面我们简单介绍了 Bernstein 基函数的单位分解性在相关领域内的一些应用,事实上,除了 Bernstein 基函数以外,还有其他一些基函数及多项式核也具有单位分解性质,并且都起着很重要的作用.

A. 先介绍一下广义 Ball 基函数:

1. 定义:任意给定正整数 n,定义区间[0,1]n 次广义 Ball 基函数为:

$$b_i^{\,n}(t) = \binom{[\frac{n}{2}]+i}{i} t^i (1-t)^{[\frac{n}{2}]+1}, 0 \le i \le [\frac{n}{2}]-1,$$

$$b_{[\frac{n}{2}]}^{\,n}(t) = \binom{2[\frac{n}{2}]}{[\frac{n}{2}]} t^{[\frac{n}{2}]} (1-t)^{[\frac{n+1}{2}]}, b_{n-i}^{\,n}(t) = b_i^{\,n}(1-t), 0 \le i \le [\frac{n}{2}],$$

即 $n=2m+1$ 时，$b_i^{\,n}(t)=\begin{pmatrix} m+i \\ i \end{pmatrix} t^i(1-t)^{m+1}, b_{n-i}^{\,n}(t)=b_i^{\,n}(1-t), 0\le i\le m$

$n=2m$ 时，$b_i^{\,n}(t)=\begin{pmatrix} m+i \\ i \end{pmatrix} t^i(1-t)^{m+1}, b_{n-i}^{\,n}(t)=b_i^{\,n}(1-t), 0\le i\le m-1$,

$$b_m^{\,n}(t)=\begin{pmatrix} n \\ m \end{pmatrix} t^m(1-t)^m$$

为给出广义 Ball 基函数的性质,我们引入广义二项组合系数

$$\begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}=\frac{m(m-1)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

其中 k 为正整数,m 为任意实数,并约定: $\begin{pmatrix} m \\ 0 \end{pmatrix}=1, \begin{pmatrix} m \\ k \end{pmatrix}=0, k<0$

则可得到下面两个等式:

$$\begin{pmatrix} -m \\ k \end{pmatrix}=(-1)^k\begin{pmatrix} m+k-1 \\ k \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} n \\ k \end{pmatrix}=\sum_{i=0}^{k}\begin{pmatrix} m \\ i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} n-m \\ k-i \end{pmatrix}$$

其中 n,k 为正整数,m 为实数.从而有:

2. 命题:广义 Ball 基函数有性质:

(1) 正性: $b_i^{\,n}(t)\ge 0, 0\le i\le n$

(2) 递推关系: $b_i^{\,2m+1}(t)=b_i^{\,2m}(t), b_{2m+1-i}^{\,2m+1}(t)=b_{2m-i}^{\,2m}(t)\ge 0, 0\le i\le m-1$,

$b_m^{\,2m}(t)=b_m^{\,2m+1}(t)+b_{2m+1}^{\,2m+1}(t)$

(3) 单位分解性: $\sum_{i=0}^{n} b_i^{\,n}(t)=1, 0\le t\le 1$

由广义 Ball 基函数定义的广义 Ball 曲线为:

$$P^n(t)=\sum_{i=0}^{n} P_i b_i^{\,n}(t), 0\le t\le 1, P_0,\cdots P_n \text{ 为控制点}$$

同样的,可以由广义 Ball 基函数的单位分解性得到这样一个结论:

n 次广义 Ball 曲线可以形式地看成高阶的广义 Ball 曲线.

事实上,它与 Bernstein 基函数构成一组等价的基.n 次广义 Ball 曲线和 n 次 Bezier 曲线可以相互表示.

B. 多项式核

在 weierstrass 第一定理的诸多证明方法中,就有一种方法是从切比雪夫多项

式构造的多项式核 $K_n(x)$ 出发,来给出定理证明的.事实上,通过多项式核来构造函数的代数多项式和三角多项式是一种较常见的方法.

首先给出构造的定义:

设 $K_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^k$ 是某个 n 次多项式.于是对于 $[a,b]$ 上的任何一个可积函数 $f(x)$,卷积:

$P(x)=\int_a^b f(t)K_n(x-t)dt$ 表示一个 n 次代数多项式.

完全相同的,如果 $K_n(t)=\sum_{k=0}^{n}(a_k\cos kt+b_k\sin kt)$ 是某个 n 阶三角多项式,则对于 $[0,2p]$ 上的任何一个可积函数 $f(x)$,积分 $\int_0^{2p} f(u)K_n(x-u)du=T_n(x)$ 是一个 n 阶三角多项式.用类似这样的方式构造的多项式称为通过多项式核 $K_n(x)$ 或 $K_n(t)$ 所得到的多项式.

事实上,正是因为这些多项式核有很多很好的性质(是在对称区间上讨论),才促使我们应用它们去解决一些函数逼近问题.在多项式核的众多性质当中,其中有一条就是单位分解性.称为核的正规性,即:

$$\int_{-a}^{a}K_n(t)dt=1$$

具有这种性质的多项式核有很多，包括有 Dirichlet 核,Jackson 核,Fejer 核等等.下面我们给出利用多项式核证明 weierstrass 第一定理的证明,看看单位分解性在当中所起的作用.

定理:设 $f(x)\in C[a,b]$,那么对于任意给定的 $e>0$,都存在这样的多项式 $P(x)$,使得:

$$\max_{a\le x\le b}|P(x)-f(x)|<e$$

证明: $T_{2n+1}(x)=\cos(2n+1)\arccos x$ 是 $2n+1$ 次切比雪夫多项式.因为 $T_{2n+1}(0)=0$,所以 $T_{2n+1}(x)$ 能被 x 除尽.

我们考虑形如: $K_n(x)=\frac{1}{g_n}[\frac{\cos(2n+1)\arccos x}{x}]^2$ 的 $4n$ 次多项式 $K_n(x)$,其中:

$$g_n=\int_{-1}^{1}[\frac{\cos(2n+1)\arccos x}{x}]^2dx$$

这个多项式将起核的作用.

易知: $\int_{-1}^{1} K_n(x)dx = 1$;

并且对任何 $d \in (0,1)$ 及任何 $n = 1, 2 \ldots$, 有

$$\int_d^1 K_n(x)dx = \frac{1}{g_n}\int_d^1 [\frac{\cos(2n+1)\arccos x}{x}]^2 dx \le \frac{1}{n}\int_d^1 \frac{1}{x^2}dx < \frac{1}{nd}$$

我们首先对 $a=-1, b=1$ 的情况给出 Weierstrass 定理的证明.令:

$$f(x) = \begin{cases} f(-1), x \in [-2,-1], \\ f(1), x \in [1,2] \end{cases}$$

将函数 $f(x)$ 连续的开拓到区间[-2,2]上.函数 $f(x)$ 作为连续函数,必定在[-2,2]上一致连续.因此,任给 $e > 0$,可以找到 $d\,(0 < d < 1)$,对于区间[-2,2]上任何满足不等式 $|x' - x''| < d$ 的点 x' 与 x'',都有: $|f(x') - f(x'')| < e$

对于所有的 $x \in [-1,1]$ 及每一个 $n = 1, 2 \ldots$, ,确定一个 $4n$ 次多项式:

$$P_n(x) = \frac{1}{3}\int_{-2}^{2} f(t) K_n(\frac{t-x}{3})dt$$

作变换 $\frac{t-x}{3} = h$ 可得

$$P_n(x) = \int_{\frac{-2-x}{3}}^{\frac{2-x}{3}} f(3h+x) K_n(h)dh$$

由 $\int_{-1}^{1} K_n(h)dh = 1$ 可得: $f(x) = \int_{-1}^{1} f(x) K_n(h)dh$

因而有:

$$|f(x) - P_n(x)| \le \int_{-d/3}^{d/3} |f(x) - f(3h+x)| K_n(h)dh +$$

$$(\int_{-d/3}^{d/3} + \int_{d/3}^{1}) |f(x)K_n(h)dh| + (\int_{(-2-x)/3}^{d/3} + \int_{d/3}^{(2-x)/3}) |f(3h+x)K_n(h)dh|$$

从而由多项式 $K_n(x)$ 的性质,并用 M 表示函数 $|f(x)|$ 在区间[-2,2]上的上确界,可得:

$$|f(x) - P_n(x)| \le \frac{e}{2}\int_{-1}^{1} K_n(h)dh + 2M\int_{d/3}^{1} K_n(h)dh + 2M\int_{d/3}^{1} K_n(h)dh \le \frac{e}{2} + 4M\frac{3}{nd}$$

于是令 $n \to \infty$,则对于所有的 $x \in [-1,1]$,可得: $|f(x) - P_n(x)| < e$.

这就在 $a=-1, b=1$ 的情况下证明了 Weierstrass 定理.

对于任意的区间[a,b],只要作变换: $x = a + \frac{b-a}{2}(u+1)$.并构造一个在[-1,1]上定义

的连续函数：$j(u) = f[a + \frac{b-a}{2}(u+1)]$.

则按照上面已经证明的,可以对于这个函数找到一个多项式$p_n(u)$,满足:

$$|j(u) - p_n(u)| < e$$

然后,令：$P_n(x) = p_n(\frac{2x-b-a}{b-a})$,则可得到：$|f(x) - P_n(x)| = |j(u) - p_n(u)| < e$.证毕.

Lagrange 插值多项式发散于插值函数的重要结果

1901年， Runge 发现 $f(x)=\frac{1}{1+25x^2}$ $x \in [-1,+1]$ ，用等距结点 $E = \left\{-1 + \frac{2j}{n}\right\}, n \in N, j = 0,1,\ldots,n.$ 对其进行拉格朗日插值，当 $0.726\ldots < |x| < 1$ 时，插值余项并不收敛到0。

1914年， G.Faber 发现了:对于任一结点组序列$\{X_n\}_1^\infty$，都存在一个函数 $f_1 \in C[-1,+1]$ 使得

$$\lim_{n\to\infty} \left\| L_n(f_1, X_n, x) - f_1 \right\|_\infty \neq 0$$

1931年， S.N.Bernstein 又证明:对于每一个结点组序列$\{X_n\}_1^\infty$，存在 $f_2 \in C[-1,+1]$，使得在$[-1,+1]$上至少有一个点 x_0，使得

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \left| L_n(f_2, X_n, x_0) \right| = \infty$$

这个结论在1980年为 P.Erdős 与 P.Ve′rtesi 所发展，他们证明了对于任何$\{X_n\}_1^\infty$，都存在 $f_3 \in C[-1,+1]$，使得对于$[-1,+1]$上几乎处处的x成立着：

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|L_n(f_3, X_n, x)\right| = \infty$$

1918年，S.N.Bernstein 考虑了非常自然的等距结点组 $E=\left\{-1+\frac{2j}{n}\right\}, n\in N, j=0,1,\ldots,n.$ 和一个极其简单的函数 $f(x)=|x|$,证明了

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left|L_n(|x|, X_n, x)\right| = \infty, \forall x\in(-1,1), x\neq 0$$

1943年，Grünwald 发现：若 $f\in C[-1,+1]$，则以第一类 Chebyshev 多项式 $T_n(x)=\cos n ac\cos x$ 的全部零点 $\{x_k\}_{k=1}^{n}$ 为插值结点组的 f 的 Grünwald 插值多项式：

$$\mathrm{G}_{\mathrm{n}}(f,x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k).l_k^2(x)$$

其中

$$l_k(x)=\frac{T_n(x)}{(x-x_k)T_n^{'}(x_k)}, k=1,2,\ldots,n$$

在 (-1,1)上处处收敛于 $f(x)$，而且是内闭一致收敛的。

连续函数按照 Tchebyshev 多项式展开的性质

Bernstein 多项式给出了用代数多项式一致逼近给定函数的可以实现的数值方法，但是其收敛速度很慢。另外一种数值方法 Remes 方法【1】（P18）又较为复杂。实际中，人们经常是使用 Tchebyshev 多项式展开来完成对给定连续函数的一致逼近多项式的构造。

1．Tchebyshev 多项式的直交性质

$\{T_n(x)\}_{n=0,1,\ldots}$ 在[－1,1]区间上，以权函数 $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ 直交，即

$\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}T_i(x)T_j(x)dx=0, i\neq j$

2．按 Tchebyshev 多项式展开的具体作法

采用如下的公式替换有 Taylor 展开的幂级数 x^k：

$x^k=\frac{1}{2^{k-1}}[T_k(x)+C_k^1T_{k-1}(x)+C_k^2T_{k-2}(x)+...]$ 其中，最后一项为

$...+C_k^{k-1/2}T_1(x)$，k 为奇数 或者 $...+C_k^{k/2}T_0(x)$，k 为偶数

3．常见的低次幂的 x^k 表达式【2】（P29）

这里略去。

4．连续函数关于 Tchebyshev 多项式展开的收敛性

定义 对于任意 $f\in C[-1,1]$，令 $g(y)=f(\cos y)$，$0\leq y\leq p$，且有 $g(y)$ 为偶函数，同时 $g(-p)=g(p)$。故可以将 $g(y)$ 延拓，使得 $g(y)\in C_{2p}$。称 $g(y)$ 为 $f(x)$ 的诱导函数。

引理 1 用 $w_f(d)$ 和 $w_g(d)$ 分别表示 $f\in C[-1,1]$ 和 $g(y)\in C_{2p}$ 的连续模数，则 $w_g(d)\leq w_f(d)$。

引理 2（连续函数关于 Fourier 级数展开的收敛性）对任意给定的 $f\in C_{2p}$，则当 $n\geq 2$ 时，对任何 x，有 $|s_n(f)(x)-f(x)|\leq(3+\ln n)E_n^*(f)$，其中，$E_n^*(f)$ 为用 n 阶三角多项式对 f 的最佳逼近。当 f 满足 Dini-Lipschitz 条件 $\lim_{d->0^+}(w_f(d)\ln d)=0$，$f(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛于 $f(x)$。

定理 设 $f\in C[-1,1]$，则当 $n\geq 2$ 时，对于 f 关于 Tchebyshev 多项式 $\{T_k(x)\}_{k=0}^n$ 的展开 $s_n(f)(x)$ 有如下的估计：$|s_n(f)(x)-f(x)|\leq(3+\ln n)E_n(f)$。从而当 f 满足 Dini-Lipschitz 条件 $\lim_{d->0^+}(w_f(d)\ln d)=0$ 时，$s_n(f)(x)$ 一致收敛于 $f(x)$。

证明：设 $f\in C[-1,1]$，其关于 Tchebyshev 多项式展开的前 n 项部分和为

$$s_n(f)(x)=\frac{a_0}{2}T_0(x)+\sum_{k=1}^{n}a_kT_k(x)$$

其中 $T_0(x)\equiv 1, T_k(x)=\cos(k\arccos x), k=1,2...$，并且

$$a_k = \frac{2}{p}\int_{-1}^{1}\frac{1}{\sqrt{1-t^2}}f(t)T_k(t)dt$$

令 $x = \cos y$，代入以上两式，则得：

$$s_n(f)(\cos y) = \frac{a_0}{2}T_0(x) + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos ky$$，其中

$a_k = \frac{2}{p}\int_{2}^{p} f(\cos y)\cos kydy = \frac{1}{p}\int_{-p}^{p} g(y)\cos kydy$ 这样，我们有 $f \in C[-1,1]$ 的 Tchebyshev 多项式展开的部分和恰为其诱导函数 $g \in C_{2p}$ 的 Fourier 级数的部分和【1】（P66）。由引理 1，当 f 满足 Dini-Lipschitz 条件 $\lim_{d->0^+}(w_f(d)\ln d) = 0$ 时，有 $\lim_{d->0^+}(w_g(d)\ln d) = 0$，再由引理 2，$g(x)$ 的 Fourier 级数一致收敛于 $g(x)$。从而定理得证。

参考书目：

【1】《数值逼近》马富明 常玉堂（吉大本科教材）

【2】《数值逼近》王仁宏（教材）