序　　言

本习题集包括了与莫斯科大学数学力学系所采用的大纲相适应的常微分方程课程的习题. 部分习题取自于 Н. М. 丘捷尔和 Р. О. 库兹明, Г. Н. 别尔曼, М. Л. 克拉斯诺夫和 Г. И. 马卡连科的各著名习题集以及 В. В. 斯捷潘诺夫, Г. 菲利浦斯等著名教程. 大多数习题是新编的. 较难的习题标上了星号.

在每节的开头, 对于该节解题所必须的一些基本方法, 都做了简要的叙述或者给出了相应教材的索引. 在有些情形下, 还给出了一些典型问题的详细解法.

书中采用了下列各教程的符号:

[1]——В. В. 斯捷潘诺夫, 微分方程教程.

[2]——И. Г. 彼德罗夫斯基, 常微分方程论讲义.

[3]——Л. С. 庞特利亚金, 常微分方程.

[4]——Л. Э. 艾利斯哥尔兹, 微分方程和变分法.

[5]——Б. П. 吉米多维奇, 稳定性数学理论讲义.

А. Ф. 菲利波夫

1973 年

目　　录

§1. 等斜线. 曲线族微分方程的建立

1. 方程 $y'=f(x, y)$ 通过点 (x, y) 的解应当在这一点具有等于 $f(x, y)$ 的导数值 y'，即它应当与通过该点和 Ox 轴的交角为 $\alpha=\operatorname{arctg}f(x, y)$ 的直线相切. 在 (x, y) 平面上，使方程 $y'=f(x, y)$ 的解的切线具有同一斜率的切点的轨迹叫做等斜线. 因此，等斜线的方程具有 $f(x, y)=k$ 的形状，其中 k 是常数.

为了近似地求出方程 $y'=f(x, y)$ 的解，可以画出足够多的等斜线，然后再描出解的图形，即与等斜线 $f(x, y)=k_1$, $f(x, y)=k_2$, …在交点上具有斜率分别为 k_1, k_2, …的切线. 应用这一方法的例子见[1]，第 I 章，§1，第 3 段，或者[4]，第 1 章，§1.

2. 为了建立曲线族

$$\varphi(x, y, C_1, \cdots, C_n)=0 \tag{1}$$

所满足的微分方程，应当把 y 看做 x 的函数，对等式(1)微分 n 次，然后再把所得到的那些方程和方程(1)联立，消去任意常数 C_1, …, C_n.

例 建立曲线族

$$C_1x+(y-C_2)^2=0 \tag{2}$$

的微分方程.

因为曲线族方程含有两个参数，所以视 $y=y(x)$ 时，将其微分两次：

$$C_1+2(y-C_2)y'=0, \tag{3}$$

$$2y'^2+2(y-C_2)y''=0. \tag{4}$$

先消去 C_1. 由方程(3)有 $C_1=-2(y-C_2)y'$；将其代入(2)时，就得到

$$-2xy'(y-C_2)+(y-C_2)^2=0. \tag{5}$$

再消去 C_2. 由方程(4)我们有 $y-C_2=-y'^2/y''$；将其代入(5)时，化简后就得到曲线族的微分方程 $y'+2xy''=0$.

3. 与给定曲线族的每条曲线都交成定角 φ 的曲线叫做该曲线族的等角轨线。轨线和曲线在交点 (x, y) 的切线对于 Ox 轴的倾角 β 和 α 具有 $\beta=\alpha\pm\varphi$ 的关系。设

$$y'=f(x, y) \tag{6}$$

是给定曲线族的微分方程，而

$$y'=f_1(x, y) \tag{7}$$

是等角轨线族的方程，这时 $\operatorname{tg}\alpha=f(x, y)$，$\operatorname{tg}\beta=f_1(x, y)$。因此，如果已知方程(6)和角 φ，则不难求出 $\operatorname{tg}\beta$，然后写出轨线的微分方程(7)。

如果给定曲线族的微分方程是

$$F(x, y, y')=0 \tag{8}$$

的形状，则在建立等角轨线方程时也可以不从(8)中解出 y'。此时需要在方程(8)中以 $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}(\beta\mp\varphi)$ 代替 y'，其中 $\operatorname{tg}\beta=y'$ 是轨线切线的斜率。

如果这个曲线族的方程所给定的形状为 $\varphi(x, y, C)=0$，则应该首先写出这个曲线族的微分方程，并且只有在此之后才能写出轨线的微分方程。

在1~14各题中，利用画等斜线(近似地)给出方程的解。

1. $y'=y-x^2$。
2. $2(y+y')=x+3$。
3. $y'=\dfrac{x^2+y^2}{2}-1$。
4. $(y^2+1)y'=y-x$。
5. $yy'+x=0$。
6. $xy'=2y$。
7. $xy'+y=0$。
8. $y'+y=(x-y')^3$。
9. $y'=x-e^y$。
10. $y(y'+x)=1$。
11. $y'=\dfrac{y-3x}{x+3y}$。
12. $y'=\dfrac{y}{x+y}$。
13. $x^2+y^2y'=1$。
14. $(x^2+y^2)y'=4x$。

15. 写出方程 $y'=f(x, y)$ 的解的极大值或者极小值点 (x, y)的轨迹方程．如何区分极大值点与极小值点？

16. 写出下列各方程解的图形中拐点的轨迹方程：① $y'=y-x^2$; ② $y'=x-e^y$; ③ $x^2+y^2y'=1$; ④ $y'=f(x, y)$。

在 **17～29** 各题中，建立给定曲线族的微分方程。

17. $y=e^{Cx}$.

18. $y=(x-C)^3$.

19. $y=Cx^3$.

20. $y=\sin(x+C)$.

21. $x^2+Cy^2=2y$.

22. $y^2+Cx=x^3$.

23. $y=C(x-C)^2$.

24. $Cy=\sin Cx$.

25. $y=ax^2+be^x$.

26. $(x-a)^2+by^2=1$.

27. $\ln y=ax+by$.

28. $y=ax^3+bx^2+cx$.

29. $x=ay^2+by+c$.

30. 建立圆心在直线 $y=2x$ 上，半径为 1 的圆的微分方程．

31. 建立其轴与 Oy 轴平行，并且同时与 $y=0$ 和 $y=x$ 两直线相切的抛物线的微分方程．

32. 建立同时与 $y=0$ 和 $x=0$ 两直线相切，并且位于第一象限和第三象限的圆的微分方程．

33. 建立其轴平行于 Oy 轴，并且通过坐标原点的所有的抛物线的微分方程．

34. 建立与横坐标轴相切的所有的圆的微分方程。

在 **35**、**36** 两题中，求出给定曲线族所满足的微分方程组．

35. $ax+z=b$, $y^2+z^2=b^2$.

36. $x^2+y^2=z^2-2bz$, $y=ax+b$.

在 **37~50** 各题中，建立与给定曲线族交成定角 φ 的轨线的微分方程①：

37. $y=Cx^4$, $\varphi=90°$. **38.** $y^2=x+C$, $\varphi=90°$.

39. $x^2=y+Cx$, $\varphi=90°$. **40.** $x^2+y^2=a^2$, $\varphi=45°$.

41. $y=kx$, $\varphi=60°$. **42.** $3x^2+y^2=C$, $\varphi=30°$.

43. $y^2=2px$, $\varphi=60°$. **44.** $r=a+\cos\theta$, $\varphi=90°$.

45. $r=a\cos^2\theta$, $\varphi=90°$. **46.** $r=a\sin\theta$, $\varphi=45°$.

47. $y=x\ln x+Cx$, $\varphi=\operatorname{arc\,tg} 2$.

48. $x^2+y^2=2ax$, $\varphi=45°$.

49. $x^2+C^2=2Cy$, $\varphi=90°$.

50. $y=Cx+C^3$, $\varphi=90°$.

§2. 可分离变量的方程

1. 可分离变量的方程能够写成

$$y'=f(x)g(y) \tag{1}$$

的形状，以及

$$M(x)N(y)dx+P(x)Q(y)dy=0 \tag{2}$$

的形状．为了解出这类方程，我们在它的两端乘以或者除以一个因式，使在方程的一端只出现 x，在另一端只出现 y，然后对两端积分．

当用含有未知量 x 和 y 的因式去除方程的两端时，可能丢掉使这个因式为零的解．

例 解方程

$$x^2y^2y'+1=y. \tag{3}$$

把方程化为(2)的形状：

$$x^2y^2\frac{dy}{dx}=y-1;\quad x^2y^2\,dy=(y-1)dx.$$

① 在 37~50 各题中所得到的方程均可用在以后各节中所讲的方法求解．

再将方程的两端除以 $x^2(y-1)$:

$$\frac{y^2}{y-1}\,dy=\frac{dx}{x^2}.$$

变量已经被分离. 积分方程的两端:

$$\int\frac{y^2}{y-1}\,dy=\int\frac{dx}{x^2};\quad \frac{y^2}{2}+y+\ln|y-1|=-\frac{1}{x}+C.$$

当用 $x^2(y-1)$除时，可能丢解 $x=0$ 和 $y-1=0$，即 $y=1$. 显然，$y=1$ 是方程(3)的解，而 $x=0$ 不是.

2. 用代换 $z=ax+by$(或者 $z=ax+by+c$，其中 c 为任意常数) 可以将形如 $y'=f(ax+by)$的方程化成可分离变量的方程.

在 **51～65** 各题中，解出给定的方程，并对每个方程画出一些积分曲线. 同时求出满足初始条件 (在那些给定初始条件的问题里)的解.

51. $xy\,dx+(x+1)\,dy=0.$ **52.** $\sqrt{y^2+1}\,dx=xy\,dy.$

53. $(x^2-1)y'+2xy^2=0;\quad y(0)=1.$

54. $y'\operatorname{ctg}x+y=2;\quad y(0)=-1.$

55. $y'=3\sqrt[3]{y^2};\quad y(2)=0.$

56. $xy'+y=y^2;\quad y(1)=0.5.$

57. $2x^2yy'+y^2=2.$ **58.** $y'-xy^2=2xy.$

59. $e^{-s}\left(1+\frac{ds}{dt}\right)=1.$ **60.** $z'=10^{x+z}.$

61. $x\frac{dx}{dt}+t=1.$ **62.** $y'=\cos(y-x).$

63. $y'-y=2x-3.$

64. $(x+2y)y'=1;\quad y(0)=-1.$

65. $y'=\sqrt{4x+2y-1}.$

在 **66** 和 **67** 两题中，求出方程当 $x\to+\infty$ 时满足给定条件的解.

66. $x^2y'-\cos 2y=1$; $y(+\infty)=9\pi/4$.

67. $3y^2y'+16x=2xy^3$; 当 $x\to+\infty$ 时 $y(x)$ 有界.

68. 求出下列各曲线族的正交轨线: ① $y=Cx^2$; ② $y=Ce^x$; ③ $Cx^2+y^2=1$.

在 **69*** 和 **70*** 两题中分离变量，但是所得到的积分不能用初等函数表示. 然而在研究其收敛性之后，就可以给出问题的答案.

69*. 试证明，方程 $y'=\sqrt[3]{\dfrac{y^2+1}{x^4+1}}$ 的每条积分曲线都有两条水平渐近线.

70*. 研究方程 $y'=\sqrt{\dfrac{\ln(1+y)}{\sin x}}$ 的积分曲线在坐标原点邻域内的性质. 证明，自第一象限边界上的每一点只能引出一条通过该象限内部的积分曲线.

§3. 几何与物理问题①

1. 为了求解以下所引进的几何问题，需要画出图形，用 $y=y(x)$ 表示所求的曲线(如果问题是在直角坐标系中求解)，并且用 x, y 和 y' 表示问题中所提到的各个量. 这时在问题的条件下所给定的关系式就将成为微分方程，从中便可以求出未知函数 $y(x)$.

2. 在物理问题中首先应该解决，把什么值取作自变量，把什么值取作未知函数的问题. 然后要表示出，当自变量 x 得到增量 Δx 时，未知函数 y 将改变多少，即用问题中谈到的值的大小表示出差 $y(x+\Delta x)-y(x)$. 将这个差除以 Δx，并且当 $\Delta x\to 0$ 时取极限，就得到从中可以求

① 本节的所有问题都可以化成可分离变量的方程. 化成其它形状方程的问题可在相应的各节中找到. 对于解题时所需要的指数函数值与对数函数值可从书末的表中查找.

出未知函数的微分方程，在大多数问题中都要给出某些条件，利用这些条件就可以确定出在微分方程的通解中出现的常数．有时利用导数的物理意义，还可以用比较简单的方法建立微分方程（如果自变量是时间 t，则 $\frac{dy}{dt}$ 就是 y 值的变化速度）．

在有些问题里，建立方程时需要用到前文问题（或者一些问题）中所阐述过的物理定律．

例 现有每公升含 0.3 千克食盐的水溶液，以每分钟 2 公升的速度将其连续注入盛有 10 公升纯水的容器里．溶液到容器里经过稀释后又以同样的速度自容器中流出．问经过 5 分钟后，容器里将剩有多少食盐？

解 把时间 t 取作自变量，而把试验开始后经过 t 分钟时容器里食盐的数量取作未知函数 $y(t)$．我们来求出在时刻 t 到 $t+\Delta t$ 这段时间内食盐的变化量是多少．在一分钟内注入食盐溶液 2 公升，而在 Δt 分钟内则注入 $2\Delta t$ 公升；在这 $2\Delta t$ 公升中含有 $0.3\cdot 2\Delta t=0.6\Delta t$ 千克的食盐．另一方面，在 Δt 时间内自容器中流出 $2\Delta t$ 公升的溶液．在时刻 t 整个容器(10 公升)中含有 $y(t)$ 千克的食盐．因此，如果在 Δt 时间内容器中所含的食盐数量不变，则在流出的 $2\Delta t$ 公升的溶液中将含有 $0.2\Delta t\cdot y(t)$ 千克的食盐．但是在这段时间里当 $\Delta t\to 0$ 时它改变一个无穷小量，那么在流出的 $2\Delta t$ 公升的溶液中将含有 $0.2\Delta t(y(t)+\alpha)$ 千克的食盐，其中当 $\Delta t\to 0$ 时 $\alpha\to 0$．

因而，在 $(t, t+\Delta t)$ 这段时间内流入的溶液中含有 $0.6\Delta t$ 千克的食盐，而在流出的溶液中含有 $0.2\Delta t(y(t)+\alpha)$ 千克．于是在这段时间内食盐的增量 $y(t+\Delta t)-y(t)$ 等于所求出的值之差，即

$$y(t+\Delta t)-y(t)=0.6\Delta t-0.2\Delta t\cdot(y(t)+\alpha).$$

除以 Δt，并且当 $\Delta t\to 0$ 时取极限．在左端得到导数 $y'(t)$，而在右端得到 $0.6-0.2y(t)$，因为当 $\Delta t\to 0$ 时 $\alpha\to 0$．

于是，我们有微分方程 $y'(t)=0.6-0.2y(t)$．解这个方程，得

$$y(t)=3-Ce^{-0.2t}. \tag{1}$$

因为当 $t=0$ 时容器里没有食盐，所以 $y(0)=0$．在(1)中令 $t=0$，我们

求出 $y(0)=3-C$; $0=3-C$; $C=3$. 把这个 C 值代入(1)时，得到 $y(t)=3-3e^{-0.2t}$. 当 $t=5$ 时容器中将有

$$y(5)=3-3e^{-0.2\cdot5}=3-3e^{-1}\approx1.9$$

千克的食盐.

71. 求一曲线，使由其上任意一点的切线、过切点平行于 Oy 轴的直线和横轴所围成的三角形的面积等于常数 a^2.

72. 求一曲线，使在上题中所作三角形的两条直角边的和等于常数 b.

73. 求出具有下列性质的曲线：从曲线上任一点所引出的切线和法线在横轴上所截得的线段长等于 $2a$.

74. 求一曲线，使其上任意一点的切线与横轴交点的横坐标等于切点横坐标的一半.

75. 求出具有下列性质的曲线：从曲线上任一点引出分别平行于坐标轴的两条直线，使这两条直线与坐标轴所围成的矩形的面积被曲线分成的比为 1:2.

76. 求一曲线，使其上任意一点的切线与极半径的夹角等于该切线与极轴的夹角.

在 **77～79** 各题中，可认为流入的气体(或者液体)因搅拌而均匀地分布于容器之中.

77. 有一充满空气(80% 的氮气和 20% 的氧气)的容器，其容积为 20 公升. 以每秒钟 0.1 公升的速度向其中流入氮气，不断搅拌，同时混合后的气体又以同样的速度流出. 问经过多长时间容器里将有 99% 的氮气?

78. 在一水槽中，盛有 100 公升共含 10 千克食盐的水溶液. 向其中连续注入纯水(每分钟 5 公升)，稀释后的食盐

溶液又以同样的速度流出．问经过1小时后，水槽中将剩有多少食盐？

79. 有一容积为200米^{3}的房间，其中的空气含有0.15%的碳酸气(CO_2)．通风机在每一分钟内送入含CO_2 0.04%的空气20米^3．问经过多长时间，房间里的空气所含的碳酸气将减少三分之二？

在**80～82**各题中，将用到如下事实：物体冷却(或者加热)的速度与物体和周围介质的温度差成比例．

80. 在10分钟内物体的温度从100°冷却到60°．周围空气温度保持为20°．问需要多长时间物体的温度将冷却到25°？

81. 向一盛有温度为20°，质量为1千克的水的容器中放入一个比热为0.2，温度为75°，质量为0.5千克的铝质物体．经过1分钟后水的温度增加2°．问需要多长时间水和物体的温度将差1°？用于容器加热和其它热量的耗损忽略不计．

82. 将温度为a度的金属块放入炉中，在1小时内其温度均匀地从a度上升到b度．当炉中的温度与金属的温度相差T度时．金属以每分钟为kT度的速度被加热．求出经过1小时后金属块的温度．

83. 小船在水的阻力作用下做减速运动，阻力的大小与船的速度成比例．船的初速度为1.5米/秒，经过4秒钟后

数量成比例.

84. 放射性物质在 30 天中衰变原有数量的 50%. 问经过多长时间将剩下原有数量的 1%?

85. 根据实验, 在 1 年里每克镭衰变 0.44 毫克. 问经过多少年将衰变现有镭的数量的一半?

86. 在所研究的一块矿石里含有 100 毫克的铀和 14 毫克的铀铅 (урановый свинец)①. 已知, 铀在 $4.5 \cdot 10^9$ 年中衰变原有数量的一半, 并且当 238 克的铀全部衰变时生成 206 克的铀铅. 试确定这块矿石的年龄. 认为在矿石形成时不含有铅, 并且存在于铀和铅之间的放射结果忽略不计(因为它们的衰变比铀快得多).

87. 光耗损于薄水层的数量与射入水中光的数量、水层的厚度成比例. 厚度为 35 厘米的水层耗损射入光的一半. 问厚度为 2 米的水层将耗损怎样一部分光?

为了建立 **88~90** 各题中的微分方程, 把速度取作未知函数是比较方便的. 取重力加速度等于 10 米/秒^2.

88. 跳伞员从 1.5 千米的高度跳下, 到 0.5 千米的高度张伞. 问经过多长时间他落到了张伞的地方? 已知人在正常密度的空气中降落的极限速度为 50 米/秒. 略去空气密度随高度的不同而发生的变化. 空气的阻力与速度的平方成比例.

89. 将一重为 0.4 千克的足球以 20 米/秒的速度上抛. 空气阻力与速度的平方成比例, 并且当速度为 1 米/秒时阻力等于 0.48 克. 试计算球的上升时间和最大高度. 当不计空气阻力时, 这些结果将发生怎样的变化?

---

① 系指铀放射出 α 线后所得到的铅. 这里指 $U^{238} \longrightarrow 8\,He^4 + Pb^{206}$ 中的铅 (Pb^{206}). ——译者注

90. 一球从 16.3 米的高处无初速度地落下. 试计算出在考虑空气阻力时的降落时间(见 89 题). 求出降落的末速度.

在 **91~95** 各题中, 将用到下述事实: 液体从容器中流出的速度等于 $0.6\sqrt{2gh}$, 其中 $g=10$ 米/秒^2 为重力加速度, h 为流孔上方水平面的高度.

91. 有一直径为 $2R=1.8$ 米, 高为 $H=2.45$ 米的圆柱形水槽. 柱轴竖直放着. 柱底有一直径为 $2r=6$ 厘米的小圆孔. 问在多长时间内可使全槽中的水经小圆孔全部流尽?

92. 在圆柱水平放置而小圆孔位于圆柱的最下部时求解上题.

93. 竖直放置的圆柱形水槽底部有一小孔. 在 5 分钟内可流出全槽水的一半. 问在多长时间内流尽所有的水?

94. 漏斗是一个底圆半径 $R=6$ 厘米、高 $H=10$ 厘米的顶点向下的圆锥形. 问在多长时间内可由锥顶直径为 0.5 厘米的小圆孔中流尽所有的水?

95. 以每秒钟 1.8 公升的速度向底面为 60 厘米×75 厘米、高为 80 厘米的矩形水槽注水. 水槽底部有一面积为 2.5 厘米^2 的小孔. 问在多长时间内可以注满水槽? 将结果与底部为无孔水槽的注满时间相比较.

96. 长为 1 米的橡皮条在 f 千克力的作用下伸长 kf 米. 如果把一根长为 l、重为 P 的这样的橡皮条的一端挂起来, 问在其自身重力的作用下它将伸长多少?

97. 假如地面上的大气压强等于 1 千克/厘米^2, 空气的密度为 0.0012 克/厘米^3, 求出高为 h 处的压强. 利用密度与压强成比例的波义尔 (Бойл)–马略特 (Мариотт) 定律(即略去空气的温度随高度而发生的变化).

98. 为使河船停在码头，要从船上抛下绕向码头立柱上的缆绳．如果缆绳围立柱绕三圈，缆绳对立柱的摩擦系数等于 1/3，并且工人在码头上以 10 千克的力拉住缆绳的自由端，问对船将产生多大的牵制力？

99. 在一容积为 v 米^3 的密闭房间里，放有一开口盛水的容器．水的蒸发速度与水蒸气的数量 q_1 和 q 之差成比例，其中 q_1 是在给定温度下 1 米^3 空气中饱和水蒸气的数量，q 是在所考虑的时刻 1 米^3 空气中具有水蒸气的数量(可以认为空气和水的温度以及进行蒸发的面积都不变)．在初始时刻容器中有 m_0 克的水，而在 1 米^3 的空气中有 q_0 克的水蒸气．问经过一段时间 t，容器中将剩有多少水？

100. 火箭在储满燃料时的质量为 M，未储燃料时的质量为 m，从火箭喷出燃烧物的速度等于 c，火箭的初速度为零．求出燃料燃烧以后火箭的速度，重力和空气阻力略去不计(齐奥尔可夫斯基(Циолковский)公式)．

§4. 齐 次 方 程

1. 齐次方程可以写成

$$y'=f\left(\frac{y}{x}\right)$$

的形状，以及 $M(x, y)dx+N(x, y)dy=0$ 的形状，其中 $M(x, y)$和 $N(x, y)$是同次齐次函数①．为了解出此方程，可以用代换 $y=tx$ 把它化为可分离变量的方程．

例 解方程 $xdy=(x+y)dx$.

这是齐次方程．我们设 $y=tx$．这时 $dy=tdx+xdt$．代入方程，

① 如果对于所有的 $k>0$，都有 $M(kx, ky)=k^nM(x, y)$，那么函数 $M(x, y)$ 叫做 n 次齐次函数．

得到

$$x(x\,dt+t\,dx)=(x+tx)dx;\ x\,dt=dx.$$

解这个可分离变量的方程

$$dt=\frac{dx}{x};\ t=\ln|x|+C.$$

回到原来的变量 y 时，就得到 $y=x(\ln|x|+C)$. 此外，还有用 x 除时丢掉的解 $x=0$.

2. 形如

$$y'=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{ax+by+c}\right)$$

的方程，可以用把坐标原点移到直线 $ax+by+c=0$ 和 $a_1x+b_1y+c_1=0$ 的交点上的方法化成齐次的. 如果这两条直线不相交，则 $a_1x+b_1y=k(ax+by)$；因此，方程具有 $y'=F(ax+by)$的形状，用代换 $z=ax+by$ (或者 $z=ax+by+c$)可化成可分离变量的方程，见 § 2, 第 2 段.

3. 有些方程可用代换 $y=z^m$ 化为齐次的. 数 m 通常是预先未知的. 为了求出此数，应当将 $y=z^m$ 代入方程. 为了使方程成为齐次的，如果可能的话，要求从中求出数 m. 如果这样做不行，则方程就不能用这种方法变为齐次的.

例 给定方程 $2x^4yy'+y^4=4x^6$. 作代换 $y=z^m$ 后方程具有 $2mx^4z^{2m-1}z'+z^{4m}=4x^6$ 的形状. 这个方程当其各项的次数彼此相等，即 $4+(2m-1)=4m=6$ 时将是齐次的. 当 $m=3/2$ 时，这些方程同时被满足. 因此，用代换 $y=z^{3/2}$ 就可以把方程变为齐次的.

解方程 101～129.

101. $(x+2y)dx-x\,dy=0$.

102. $(x-y)dx+(x+y)dy=0$.

103. $(y^2-2xy)dx+x^2\,dy=0$.

104. $2x^3y'=y(2x^2-y^2)$. **105.** $y^2+x^2y'=xyy'$.

106. $(x^2+y^2)y'=2xy$. **107.** $xy'-y=x\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}$.

108. $xy' = y - xe^{\frac{y}{x}}$.

109. $xy' - y = (x+y)\ln \dfrac{x+y}{x}$.

110. $xy' = y\cos \ln \dfrac{y}{x}$. **111.** $(y + \sqrt{xy})dx = x\,dy$.

112. $xy' = \sqrt{x^2 - y^2} + y$.

113. $(2x - 4y + 6)dx + (x + y - 3)dy = 0$.

114. $(2x + y + 1)dx - (4x + 2y - 3)dy = 0$.

115. $x - y - 1 + (y - x + 2)y' = 0$.

116. $(x + 4y)y' = 2x + 3y - 5$.

117. $(y + 2)dx = (2x + y - 4)dy$.

118. $y' = 2\left(\dfrac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

119. $(y'+1)\ln \dfrac{y+x}{x+3} = \dfrac{y+x}{x+3}$.

120. $y' = \dfrac{y+2}{x+1} + \operatorname{tg} \dfrac{y-2x}{x+1}$.

121. $x^3(y' - x) = y^2$. **122.** $2x^2y' = y^3 + xy$.

123. $2x\,dy + (x^2y^4 + 1)y\,dx = 0$.

124. $y\,dx + x(2xy + 1)dy = 0$.

125. $2y' + x = 4\sqrt{y}$. **126.** $y' = y^2 - \dfrac{2}{x^2}$.

127. $2xy' + y = y^2\sqrt{x - x^2y^2}$.

128. $\dfrac{2}{3}xyy' = \sqrt{x^6 - y^4} + y^2$.

129. $2y + (x^2y + 1)xy' = 0$.

130. 求出与给定各曲线族交成 45° 角的轨线，从曲线的切线到轨线的切线之间的夹角按负方向计算.

① $y = x\ln Cx$; ② $(x - 3y)^4 = Cxy^6$.

131. 求一曲线，使其任一点的切线与横轴的交点到切

点的距离等于该交点到坐标原点的距离.

132. 求一曲线, 使坐标原点到其任一切线的距离等于切点的横坐标.

133. 对于怎样的 α 和 β, 方程 $y'=ax^{\alpha}+by^{\beta}$ 可以用代换 $y=z^{m}$ 变为齐次的?

134*. 设函数 $f(k)$ 连续, 且 $y=k_0x$ 是方程 $y'=f(y/x)$ 的解. 试证明:

① 如果 $f'(k_0)<1$, 则任何一个其它的解都不与直线 $y=k_0x$ 在坐标原点相切;

② 如果 $f'(k_0)>1$, 则有无穷多个解与这条直线相切.

135. 近似地画出下列各方程的积分曲线(不解方程):

① $y'=\dfrac{y(2y-x)}{x^2}$;　　② $y'=\dfrac{2y^2-x^2}{xy}$;

③ $y'=\dfrac{2y^3-x^2y}{2x^2y-x^3}$;　　④* $xy'=y+\sqrt{y^2+\dfrac{y^3}{x}}$.

提示　射线 $y=kx$ 和与其相交的方程 $y'=f(y/x)$ 的积分曲线之间的夹角的正切等于 $(f(k)-k)/(1+kf(k))$ (为什么?). 为了近似地画出积分曲线, 应当研究这一分式的符号对 k 的依赖关系.

§5. 一阶线性方程

1. 方程

$$y'+a(x)y=b(x) \tag{1}$$

叫做一阶线性方程. 为了解出这个方程, 首先要解出方程

$$y'+a(x)y=0 \tag{2}$$

(这一方程可以用分离变量法来做, 见 §2), 并且在其通解中用未知函数 $C(x)$ 代替任意常数 C. 然后把所得到的关于 y 的表达式代入方程 (1), 从而求出函数 $C(x)$.

2. 有些方程如果交换未知函数和自变量的位置可以变为线性的. 例如,方程 $y=(2x+y^3)y'$, 当 y 是 x 的函数时是非线性的. 我们把它写成微分形式: $y\,dx-(2x+y^3)dy=0$. 这样在这个方程里 x 和 dx 都是线性的,所以当把 x 看做未知函数, 把 y 看作自变量时, 方程将是线性的. 这个线性方程可以写成

$$\frac{dx}{dy}-\frac{2}{y}x=y^2$$

的形式,并与方程(1)相类似地求解.

3. 为了解出伯努利(Бернулли)方程,即方程

$$y'+a(x)y=b(x)y^n \quad (n\neq 1),$$

应当将其两端除以 y^n 并作代换 $1/y^{n-1}=z$. 代换后得到可用上述方法求解的线性方程(例子见[1],第1章, § 4, 第2段,例10).

4. 黎卡提(Риккати)方程, 即 $y'+a(x)y+b(x)y^2=c(x)$, 在一般情形下不能用求积法解出. 如果知道一个特解 $y_1(x)$, 那么可用代换 $y=y_1(x)+z$ 将其化为伯努利方程并可对伯努利形式的方程用求积法求解.

有时根据方程自由项(不含 y 的项)的形状可以找到特解. 例如,对于方程 $y'+y^2=x^2-2x$, 当取 $y=ax+b$ 时, 左端将有与右端相类似的项, 将其代入方程,并使同类项的系数相等时,就可求出 a 和 b (如果所给形状的特解存在的话,因为它绝不是永远存在的). 另一个例子: 对方程 $y'+2y^2=6/x^2$ 进行同样地讨论, 使我们可以求出形如 $y=a/x$ 的特解. 将 $y=a/x$ 代入方程时,将求出常数 a.

解方程 **136~160.**

136. $xy'-2y=2x^4$. **137.** $(2x+1)y'=4x+2y$.

138. $y'+y\operatorname{tg}x=\sec x$. **139.** $(xy+e^x)\,dx-x\,dy=0$.

140. $x^2y'+xy+1=0$. **141.** $y=x(y'-x\cos x)$.

142. $2x(x^2+y)dx=dy$. **143.** $(xy'-1)\ln x=2y$.

144. $xy'+(x+1)y=3x^2e^{-x}$.

145. $(x+y^2)dy=y\,dx$. **146.** $(2e^y-x)y'=1$.

147. $(\sin^2 y+x\operatorname{ctg} y)y'=1$.

148. $(2x+y)dy=y\,dx+4\ln y\,dy$.

149. $y'=\dfrac{y}{3x-y^2}$.

150. $(1-2xy)y'=y(y-1)$.

151. $y'+2y=y^2e^x$. **152.** $(x+1)(y'+y^2)=-y$.

153. $y'=y^4\cos x+y\operatorname{tg} x$.

154. $xy^2y'=x^2+y^3$. **155.** $xy\,dy=(y^2+x)dx$.

156. $xy'-2x^2\sqrt{y}=4y$.

157. $xy'+2y+x^5y^3e^x=0$.

158. $2y'-\dfrac{x}{y}=\dfrac{xy}{x^2-1}$.

159. $y'x^3\sin y=xy'-2y$.

160. $(2x^2y\ln y-x)y'=y$.

用变量替换或者微分法，将方程**161～166**化为线性方程，并解之。

161. $x\,dx=(x^2-2y+1)dy$.

162. $(x+1)(yy'-1)=y^2$.

163. $x(e^y-y')=2$.

164. $(x^2-1)y'\sin y+2x\cos y=2x-2x^3$.

165. $y(x)=\int_0^x y(t)dt+x+1$.

166. $\int_0^x (x-t)y(t)dt=2x+\int_0^x y(t)dt$.

在**167～171**各题中，将给定的黎卡提方程化成伯努利方程并解之，用选择法求出特解。

167. $x^2y'+xy+x^2y^2=4$.　**168.** $3y'+y^2+\frac{2}{x^2}=0$.

169. $xy'-(2x+1)y+y^2=-x^2$.

170. $y'-2xy+y^2=5-x^2$.

171. $y'+2ye^x-y^2=e^{2x}+e^x$.

172. 求曲线族 $y^2=Ce^x+x+1$ 的正交轨线.

173. 求一曲线，使由其任一点的切线、二坐标轴和过切点平行于纵轴的直线所围成的梯形面积等于常数值 $3a^2$.

174. 求一曲线，使由其任一点的切线、横轴和切点到坐标原点的线段所围成的三角形面积等于常数值 a^2.

175. 在水槽里盛有 100 公升含 10 千克食盐的水溶液. 每分钟向水槽中注入 5 公升的水，稀释后的溶液又以同一速度流向另一个最初装满 100 公升纯水的水槽. 多余的液体流掉. 问在什么时候第二个水槽中食盐的数量最大？它等于多少？

176. 在 Δt 时间内(其中 Δt 很小，且以年为单位)，每克镭中有 $0.00044\Delta t$ 克衰变而生成 $0.00043\Delta t$ 克的氡. 在 Δt 时间内每克氡中有 $70\cdot\Delta t$ 克衰变. 在试验开始时已有某一数量 x_0 的纯镭. 问什么时候生成尚未衰变的氡的数量最大？

177. 给定一阶线性方程的两个不同的解 y_1 和 y_2. 试用它们表示出这个方程的通解.

178. 求出方程

$$y'\sin 2x=2(y+\cos x)$$

当 $x\to\pi/2$ 时仍为有界的解.

179*. 设在方程 $xy'+ay=f(x)$ 中有 $a=\text{const}>0$，当 $x\to0$ 时 $f(x)\to b$. 试证明，当 $x\to0$ 时方程只有一个有界的解，并求出这个解当 $x\to0$ 时的极限.

180*. 设在上题的方程中 $a=\text{const}<0$, 当 $x\to0$ 时 $f(x)\to b$. 试证明, 这个方程的所有解当 $x\to0$ 时都具有同一的有限极限. 求出这个极限.

在 **181~183** 各题中, 用无穷限的积分表示所求的解.

181*. 试证, 方程 $\dfrac{dx}{dt}+x=f(t)$ 在 $-\infty<t<+\infty$ 上有一个有界解, 其中当 $-\infty<t<+\infty$ 时 $|f(t)|\leqslant M$. 求出这个解. 并证明, 如果函数 $f(t)$ 为周期函数, 所求出的解也是周期的.

182*. 试证, 方程 $xy'-(2x^2+1)y=x^2$ 只有一个解当 $x\to+\infty$ 时有有限的极限, 并求出这个极限. 用积分表示出这个解.

183*. 求出方程

$$y'=2y\cos^2x-\sin x$$

的周期解.

184*. 设在方程 $\dfrac{dx}{dt}+a(t)x=f(t)$ 中, $a(t)\geqslant c>0$, 当 $t\to+\infty$ 时 $f(t)\to0$. 试证, 这个方程的每个解当 $t\to+\infty$ 时都趋于零.

185*. 设在上题的方程中有 $a(t)\geqslant c>0$, 并设 $x_0(t)$ 是满足初始条件 $x_0(0)=b$ 的解. 证明, 对任意的 $\varepsilon>0$, 都存在这样的 $\delta>0$, 如果函数 $f(t)$ 和数 b 的变化小于 δ (即用这样的函数 $f_1(t)$ 和数 b_1 代替它们, $|f_1(t)-f(t)|<\delta$, $|b_1-b|<\delta$), 则当 $t\geqslant0$ 时解 $x_0(t)$ 的变化小于 ε. 解的这个性质叫做持续扰动作用下的稳定性.

§6. 全微分方程．积分因子

1. 方程

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 \tag{1}$$

叫做全微分方程，如果它的左端是某一个函数 $F(x, y)$的全微分．当 $\frac{\partial M}{\partial y}=\frac{\partial N}{\partial x}$ 时，就是这样．为了解出方程(1)，应当求出其全微分 $dF(x, y)=F'_x dx+F'_y dy$ 等于方程(1)左端的函数 $F(x, y)$．这时方程(1)的通解可以写成 $F(x, y)=C$ 的形式，其中 C 是任意常数．

例　解方程

$$(2x+3x^2y)dx+(x^3-3y^2)dy=0. \tag{2}$$

因为 $\frac{\partial}{\partial y}(2x+3x^2y)=3x^2$, $\frac{\partial}{\partial x}(x^3-3y^2)=3x^2$, 所以方程(2)是全微分方程．我们求出其全微分 $dF=F'_x dx+F'_y dy$ 等于方程(2)左端的函数 $F(x, y)$，即这样的函数 F:

$$F'_x=2x+3x^2y, \quad F'_y=x^3-3y^2. \tag{3}$$

把 y 看作常数时，对 x 积分方程(3)的第一式；这时需要确定 y 的未知函数 $\varphi(y)$来代替积分常数，

$$F=\int(2x+3x^2y)dx=x^2+x^3y+\varphi(y).$$

把 F 的这个表达式代入方程(3)的第二式时，可求出 $\varphi(y)$:

$$(x^2+x^3y+\varphi(y))'_y=x^3-3y^2; \quad \varphi'(y)=-3y^2;$$

$$\varphi(y)=-y^3+\text{const}.$$

因此，可以取 $F(x, y)=x^2+x^3y-y^3$，方程(2)的通解将具有

$$x^2+x^3y-y^3=C$$

的形式．

2. 称这样的函数 $m(x, y)\neq 0$ 为方程

$$M(x, y)dx+N(x, y)dy=0 \tag{4}$$

的积分因子，它使方程(4)乘以这个函数后变为全微分方程．如果方程(4)中的函数 M 和 N 都具有连续的偏导数，并且不同时为零，则积分因

子存在．但是对于它没有一般的求法(当不知道方程(4)的通解时)．

有时积分因子可以用[1]中第 II 章，§3，第3段或者[4]中第1章，§5所讲的方法求出．为了解出某些方程，可以采用分出全微分的方法，这时要用到已知的微分公式：

$$d(xy)=y\,dx+x\,dy,\quad d(y^2)=2y\,dy,$$

$$d\left(\frac{x}{y}\right)=\frac{y\,dx-x\,dy}{y^2},\quad d(\ln y)=\frac{dy}{y}$$

等等．

例 解方程

$$y\,dx-(4x^2y+x)dy=0. \tag{5}$$

首先，我们把表示全微分的那些项分成一组．因为 $y\,dx-x\,dy=-x^2d(y/x)$，所以将方程(5)除以 $-x^2$ 时，有

$$d\left(\frac{y}{x}\right)+4y\,dy=0,\quad d\left(\frac{y}{x}\right)+d(2y^2)=0.$$

这是全微分方程．直接积分(无需化成(1)的形式)，得解

$$\frac{y}{x}+2y^2=C.$$

此外，除以 $-x^2$ 曾丢解 $x=0$．

注意 因为方程(5)除以 $-x^2$，即乘以 $-1/x^2$ 后得到了全微分方程，所以方程(5)的积分因子等于 $-1/x^2$．

3. 如果由方程(4)中可以分出某个函数 $\varphi(x, y)$ 的全微分，则有时当把变量 (x, y) 变到 (x, z) 或者 (y, z) 时方程可以化简，其中 $z=\varphi(x, y)$．

例 1) 解方程 $y\,dx-(x^2y+x)dy=0$．象上例中一样分出全微分后，得到

$$d\left(\frac{y}{x}\right)+xy\,dy=0.$$

改用变量 $z=y/x$ 和 y 时，就得到容易求解的方程

$$dz+\frac{y^2}{z}\,dy=0.$$

2) 解方程 $(xy+y^4)dx+(x^2-xy^3)dy=0$．

为了分出全微分我们对各项分组如下，

$$x(y\,dx+x\,dy)+y^3(y\,dx-x\,dy)=0,$$

$$xd(xy)+y^3d\left(\frac{x}{y}\right)=0.$$

除以 x 并且作代换 $xy=u$, $x/y=v$ 后，将得到容易求解的方程

$$du+\frac{u^2}{v^3}\,dv=0.$$

在 **186～194** 各题中，验证给定的方程是全微分方程，并解之.

186. $2xy\,dx+(x^2-y^2)dy=0.$

187. $(2-9xy^2)x\,dx+(4y^2-6x^3)y\,dy=0.$

188. $e^{-y}dx-(2y+xe^{-y})dy=0.$

189. $\frac{y}{x}\,dx+(y^3+\ln x)dy=0.$

190. $\frac{3x^2+y^2}{y^2}\,dx-\frac{2x^3+5y}{y^3}\,dy=0.$

191. $2x(1+\sqrt{x^2-y})dx-\sqrt{x^2-y}\,dy=0.$

192. $(1+y^2\sin 2x)dx-2y\cos^2 x\,dy=0.$

193. $3x^2(1+\ln y)dx=\left(2y-\frac{x^3}{y}\right)dy.$

194. $\left(\frac{x}{\sin y}+2\right)dx+\frac{(x^2+1)\cos y}{\cos 2y-1}\,dy=0.$

试用求积分因子或作变量替换的方法解出方程 **195～220**.

195. $(x^2+y^2+x)dx+y\,dy=0.$

196. $(x^2+y^2+y)dx-x\,dy=0.$

197. $y\,dy=(x\,dy+y\,dx)\sqrt{1+y^2}.$

198. $xy^2(xy'+y)=1.$　**199.** $y^2\,dx-(xy+x^3)dy=0.$

200. $\left(y-\frac{1}{x}\right)dx+\frac{dy}{y}=0.$

201. $(x^3+3\ln y)y\,dx=x\,dy$.

202. $y^2\,dx+(xy+\operatorname{tg}xy)dy=0$.

203. $y(x+y)dx+(xy+1)dy=0$.

204. $y(y^2+1)dx+x(y^2-x+1)dy=0$.

205. $(x^2+2x+y)dx=(x-3x^2y)dy$.

206. $y\,dx-x\,dy=2x^3\operatorname{tg}\dfrac{y}{x}\,dx$.

207. $y^2\,dx+(e^x-y)dy=0$.

208. $xy\,dx=(y^3+x^2y+x^2)dy$.

209. $x^2y(y\,dx+x\,dy)=2y\,dx+x\,dy$.

210. $(x^2-y^2+y)dx+x(2y-1)dy=0$.

211. $(2x^2y^2+y)dx+(x^3y-x)dy=0$.

212. $(2x^2y^3-1)y\,dx+(4x^2y^3-1)x\,dy=0$.

213. $y(x+y^2)dx+x^2(y-1)dy=0$.

214. $(x^2-\sin^2 y)dx+x\sin 2y\,dy=0$.

215. $x(\ln y+2\ln x-1)dy=2y\,dx$.

216. $(x^2+1)(2x\,dx+\cos y\,dy)=2x\sin y\,dx$.

217. $(2x^3y^2-y)dx+(2x^2y^3-x)dy=0$.

218. $x^2y^3+y+(x^3y^2-x)y'=0$.

219. $(x^2-y)dx+x(y+1)dy=0$.

220. $y^2(y\,dx-2x\,dy)=x^3(x\,dy-2y\,dx)$.

§7. 解的存在性与唯一性

1. 方程

$$y'=f(x,\ y) \tag{1}$$

以 $y(x_0)=y_0$ 为初始条件的解的存在与唯一性定理。

设在闭区域 $R(|x-x_0|\leqslant a,\ |y-y_0|\leqslant b)$ 上的函数 f 和 f'_y 连续①。这时在某一区间 $x_0-d\leqslant x\leqslant x_0+d$ 上存在满足方程(1)和初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的唯一解。

同时可以取

$$d=\min\left\{a,\ \frac{b}{m}\right\},$$

其中 a 和 b 是在上边所给出的，而 m 是在 R 上使 $|f|\leqslant m$ 的任意数。

由公式 $\quad y(x_0)=y_0,\ y_k(x)=y_0+\int_{x_0}^{x} f(s,\ y_{k-1}(s))ds$

所确定的逐次近似，在指定的区间上一致地收敛到解。

注意 为了使解存在，只要求 $f(x,\ y)$ 在区域 R 上连续就够了，但是这时的解可能不是唯一的。

2. 方程组

$$\begin{cases} y'_1=f_1(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y'_n=f_n(x,\ y_1,\ \cdots,\ y_n) \end{cases} \tag{2}$$

用向量符号可以写成：

$$y'=f(x,\ y), \tag{3}$$

其中 $y=(y_1,\ \cdots,\ y_n)$ 和 $f=(f_1,\ \cdots,\ f_n)$ 都是向量函数。函数 f 连续意味着所有函数 $f_1,\ \cdots,\ f_n$ 都连续，而把 $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ 看做是由偏导数 $\dfrac{\partial f_i}{\partial y_k}$ 所组成的矩阵，$i,\ k=1,\ \cdots,\ n$。

解的存在与唯一性定理和第一段所有的结论，对于写成形状(3)的方程组仍然是正确的，此时，$|y|$ 表示向量 y 的长：$|y|=\sqrt{y_1^2+\cdots+y_n^2}$。

3. 关于 n 阶方程

$$y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)}) \tag{4}$$

的解的存在与唯一性定理.

设函数 f 及其对 $y, y', \cdots, y^{(n-1)}$ 的一阶偏导数在 D 上都连续，并且点 $(x_0,\ y_0,\ y'_0,\ \cdots,\ y_0^{(n-1)})$ 位于 D 的内部。这时方程(4)在初始条件

---

① 对于 f'_y 连续性的要求可以换作其有界性或者利普希兹条件：$|f(x,\ y_1)-f(x,\ y_2)|\leqslant k|y_1-y_2|$，$k=\text{const}$。

$$y(x_0)=y_0,\ y'(x_0)=y'_0,\ \cdots,\ y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$$

下具有唯一的解。

如果按照公式 $y=y_1,\ y'=y_2,\ y''=y_3,\ \cdots,\ y^{(n-1)}=y_n$ 引进新的未知函数，方程(4)可以化成形如(2)的方程组。这时方程(4)变为方程组

$$y'_1=y_2,\ y'_2=y_3,\ \cdots,\ y'_{n-1}=y_n,\ y'_n=f(x,\ y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n).$$

这是方程组(2)的特殊情形，于是对于它第2段的所有结论都适用。

4. 解的开拓. 在许多情况下，方程(1)或者方程组(2)的解不仅在第1段所指出的区间上存在，而且在更大的区间上也存在。

如果方程(1)或者方程组(2)在有界闭区域上满足存在定理的条件，则所有的解都可以开拓到这个区域的边界。

如果方程(1)或者方程组(3)的右端在区域 $\alpha<x<\beta,\ |y|<\infty$ (α 和 β 可能是有限的或者是无限的)上连续，满足不等式

$$|f(x,\ y)|\leqslant a(x)|y|+b(x),$$

函数 $a(x)$ 和 $b(x)$ 连续，则所有的解都可以开拓到整个区间 $\alpha<x<\beta$ 上。

221. 求出在已知初始条件下所给定的各方程解的逐次近似 $y_0,\ y_1,\ y_2$:

① $y'=x-y^2,\ y(0)=0.$

② $y'=y^2+3x^2-1,\ y(1)=1.$

③ $y'=y+e^{y-1},\ y(0)=1.$

④ $y'=1+x\sin y,\ y(\pi)=2\pi.$

222. 求出下列各方程和方程组解的两次逐次近似(不算原有的):

① $y'=2x+z,\ z'=y;\ y(1)=1,\ z(1)=0.$

② $\dfrac{dx}{dt}=y,\ \dfrac{dy}{dt}=x^2;\ x(0)=1,\ y(0)=2.$

③ $y''+y'^2-2y=0;\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$

④ $\dfrac{d^2x}{dt^2}=3tx$; $x(1)=2$, $\left.\dfrac{dx}{dt}\right|_{t=1}=-1$.

223. 指出下列各方程和方程组在给定初始条件下的解具有怎样的存在区间:

① $y'=x+y^3$, $y(0)=0$. ② $y'=2y^2-x$, $y(1)=1$.

③ $\dfrac{dx}{dt}=t+e^x$, $x(1)=0$.

④ $\dfrac{dx}{dt}=y^2$, $\dfrac{dy}{dt}=x^2$, $x(0)=1$, $y(0)=2$.

224*. 对于以 $y(0)=0$ 为初始条件的方程 $y'=x-y^2$, 求出解的三次近似,并估计其当 $0\leqslant x\leqslant 0.5$ 时的误差.

提示 估计级数的余项, 级数的收敛性在解的存在性定理中证明, 见[1], 第 II 章, § 1; [2], § 15.

225. 利用唯一性的充分条件, 在(x, y)平面上找出每一点都有方程的唯一解通过的区域.

① $y'=2xy+y^2$, ② $y'=2+\sqrt[3]{y-2x}$,

③ $(x-2)y'=\sqrt{y}-x$, ④ $y'=1+\operatorname{tg} y$,

⑤ $(y-x)y'=y\ln x$, ⑥ $xy'=y+\sqrt{y^2-x^2}$.

226. 对于怎样的非负数 a, 方程 $y'=|y|^a$ 的解的唯一性被破坏? 在哪些点上被破坏?

227. 利用形如 $y'=f(y)$的方程的解的唯一性的充分必要条件(见[1], 第 III 章, § 4, 第 1 段小号字或者[2], § 4), 研究下列各方程. 求出使 $f(y)$不变号的区域后, 近似地画出解的图形. 对于方程 ⑤ 和 ⑥, 按照在 $y=0$ 处的连续性确定其右端.

① $y'=\sqrt[3]{y^2}$, ② $y'=y\sqrt[3]{y+1}$,

③ $y'=(y-1)\sqrt{y^3}$, ④ $y'=\arccos y$,

⑤ $y'=y\ln y$, ⑥ $y'=y\ln^2 y$.

228. 下列各方程和方程组在怎样的初始条件下存在唯一的解？

① $y'=\operatorname{tg} y+\sqrt[3]{x}$， ② $(x+1)y''=y+\sqrt{y}$，

③ $(x-y)y'y'''=\ln xy$， ④ $y''-yy'''=\sqrt[5]{y'-x}$，

⑤ $\dfrac{dx}{dt}=y^2+\sqrt[3]{t}$，$\dfrac{dy}{dt}=\sqrt[3]{x}$，

⑥ $\dfrac{dx}{dt}=y^3+\ln(t+1)$，$x\dfrac{dy}{dt}=\sqrt[3]{y-t}$.

229. 在(x, y)平面上，给定方程的两个解的图形能够在某一点(x_0, y_0)相交吗？

① 对于方程 $y'=x+y^2$， ② 对于方程 $y''=x+y^2$.

230. 在(x, y)平面上，给定方程的两个解的图形能够在某一点(x_0, y_0)彼此相切吗？

① 对于方程 $y'=x+y^2$， ② 对于方程 $y''=x+y^2$，

③ 对于方程 $y'''=x+y^2$.

231. 方程 $y^{(n)}=x+y^2$ 存在多少个同时满足两个条件 $y(0)=1$, $y'(0)=2$ 的解？分别考虑 $n=1, 2, 3$ 的情形.

232. 方程 $y^{(n)}=f(x, y)$（f 和 f'_y 在整个(x, y)平面上连续）有多少个沿着与 Ox 轴成 α 角的方向通过点(x_0, y_0)的解？考虑 $n=1$, $n=2$ 和 $n\geqslant 3$ 的情形.

233. 对于怎样的 n，方程 $y^{(n)}=f(x, y)$（f 和 f'_y 连续）可能有两个函数 $y_1=x$, $y_2=x+x^4$ 的解？

234. f 是连续可微函数，对于怎样的 n，方程 $y^{(n)}=f(x, y, y', \cdots, y^{(n-1)})$可能有两个函数 $y_1=x$, $y_2=\sin x$ 的解？

235*. 设 $f(x, y)$对 x, y 连续，并且当 y 增加时对每一个 x 都不增. 试证明，如果方程 $y'=f(x, y)$的两个解都

满足同一个初始条件 $y(x_0)=y_0$，则当 $x\geqslant x_0$ 时这两个解相同.

236. 下列各方程和方程组的解在坐标原点的邻域内有几阶导数(关于解的光滑性定理，见[2]，§ 19 或者[4]，§ 6，定理 1.4)?

① $y'=x+y^{7/3}$，　　② $y'=x|x|-y^2$，

③ $y''=|x^3|+y^{5/3}$，　　④ $y'''=y-x\sqrt[3]{x}$，

⑤ $\dfrac{dx}{dt}=t+y,\ \dfrac{dy}{dt}=x+t^2|t|$，

⑥ $\dfrac{dx}{dt}=y^2+\sqrt[3]{t^4},\ \dfrac{dy}{dt}=\sqrt[3]{x}$.

237*. 对于怎样的 a，每一个解都能开拓到无穷区间 $-\infty<x<+\infty$ 上去?

① 对于方程 $y'=|y|^a$，

② 对于方程 $y'=(y^2+e^x)^a$，

③ 对于方程 $y'=|y|^{a-1}+x|\sqrt[3]{y}|^{2a}$，

④ 对于方程组 $y'=(y^2+z^2+2)^{-a},\ z'=y(1+z^2)^a$.

238*. 对于下列各方程证明，在 $x_0\leqslant x<+\infty$ 上存在满足任意初始条件 $y(x_0)=y_0$ 的解:

① $y'=x^3-y^3$，　　② $y'=xy+e^{-y}$.

239*. 设在 $(x,\ y)$ 的整个平面上函数 $f(x,\ y)$ 和 $f'_y(x,\ y)$ 连续，并且 $f'_y(x,\ y)\leqslant k(x)$，函数 $k(x)$ 连续. 证明，方程 $y'=f(x,\ y)$ 在 $x_0\leqslant x<+\infty$ 上存在以 $y(x_0)=y_0$ 为任意初始条件的解.

240*. 给定用向量写出方程组 $y'=f(x,\ y)$，在每一点 $(x,\ y)$ 的邻域内满足存在定理的条件. 设在区域 $|y|>b$ 上，对所有的 x

$$y\cdot f(x,\ y)\leqslant k(x)|y|^2,$$

其中 $y\cdot f$ 表示数量积，而函数 $k(x)$ 连续．证明，方程组在 $x_0\leqslant x<+\infty$ 上存在以 $y(x_0)=y_0$ 为任意初始条件的解．

§8．导数未解出的方程

1． 形如 $F(x, y, y')=0$ 的方程可以用下列各方法求解．

① 将方程对 y' 解出，即从方程 $F(x, y, y')=0$ 中把 y' 用 x 和 y 表示出来．得到一个或者几个形如 $y'=f(x, y)$ 的方程．可以解出其中的每一个方程．

② 引进参数法①

假设方程 $F(x, y, y')=0$ 可以对 y 解出，即可以写成 $y=f(x, y')$ 的形式．引进参数

$$p=\frac{dy}{dx}=y' \tag{1}$$

时，就得到

$$y=f(x, p). \tag{2}$$

取等式(2)两端的全微分，并且用 $p\,dx$ 代替 dy（由(1)）后，我们得到形如

$$M(x, p)dx+N(x, p)dp=0$$

的方程．如果求出这个方程的形如 $x=\varphi(p)$② 的解，则利用等式(2)，可得到原方程用参数 $x=\varphi(p)$, $y=f(\varphi(p), p)$ 表示的解．

用同样的方法可以求解形如 $x=f(y, y')$ 的方程．

例 解方程 $y=x+y'-\ln y'$．

引进参数 $p=y'$：

$$y=x+p-\ln p. \tag{3}$$

取等式(3)两端的全微分，并且根据(1)用 $p\,dx$ 代替 dy：

---

① 这里所叙述的是这一方法的最简单的情形．更一般的情况见[1]，第III章，§3，第1段．

② 一般说来，应该得到形如 $x=\varphi(p, C)$ 的解，这时利用等式(2)，就得到原方程用参数表示的解：$x=\varphi(p, C)$, $y=f(\varphi(p, C), p)$．——译者注

$$dy = dx + dp - \frac{dp}{p};\ p\,dx = dx + dp - \frac{dp}{p}.$$

解出所得到的方程．将含有 dx 的项移向左端，含有 dp 的项移向右端：

$$(p-1)dx = \frac{p-1}{p}\,dp. \tag{4}$$

① 如果 $p \neq 1$，则约去 $p-1$：

$$dx = \frac{dp}{p},\ x = \ln p + C.$$

将此式代入(3)时，就得到用参数表示的解：

$$x = \ln p + C,\ y = p + C. \tag{5}$$

此时可以消去参数 p 而得到显式的解．为此，从方程(5)的第一式将 p 用 x 表示出来，即 $p = e^{x-C}$．再将其代入方程的第二式得到所求的解：

$$y = e^{x-C} + C. \tag{6}$$

② 考虑在(4)中 $p=1$ 的情形．把 $p=1$ 代入(3)时，我们又得到解

$$y = x + 1 \tag{7}$$

(如果在等式 $p=1$ 中仍以 y' 代替 p 则是错误的，因为积分之后得到 $y = x + C$)．

2. 方程 $F(x, y, y') = 0$ 的解 $y = \varphi(x)$ 叫做奇解，如果在它的每一点上，除了该解之外，还有和解 $y = \varphi(x)$ 在这一点具有同一切线，并且在该点任意小的邻域内都不重合①的另一个解通过．

如果函数 $F(x, y, y')$ 与偏导数 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 和 $\frac{\partial F}{\partial y'}$ 都连续，则方程

$$F(x, y, y') = 0 \tag{8}$$

的任何一个奇解同时还满足方程

$$\frac{\partial F(x, y, y')}{\partial y'} = 0. \tag{9}$$

因此，为了求出方程(8)的奇解，应当从方程(8)和(9)中消去 y'．所得到的方程 $\psi(x, y) = 0$ 叫做判别曲线方程．对于每支判别曲线需要验证，这个分支是不是方程(8)的解．如果是解，则还需要验证，这个解是不是奇解，即在它的每一点上是否还有其它的解与之相切．

---

① 这是取自[1]的定义．还有与此不同的其它定义．

例 求出方程

$$y=x+y'-\ln y' \tag{10}$$

的奇解.

将等式两端对 y' 微分:

$$0=1-\frac{1}{y'}. \tag{11}$$

从方程(10)和(11)中消去 y'. 由(11)式我们有 $y'=1$; 将其代入(10)式时,就得到判别曲线方程

$$y=x+1. \tag{12}$$

我们来验证,它是不是奇解. 为此首先验证,它是不是方程(10)的解. 将(12)式代入(10)式时,就得到恒等式 $x+1=x+1$. 可见,曲线(12)是解.

现在我们来验证,这个解是不是奇解,即在其每一点上是否有其它的解与之相切. 在第1段中曾经求出由公式(6)表示的其它解. 我们写出曲线 $y=y_1(x)$ 和 $y=y_2(x)$ 在横坐标为 x_0 的点上的相切条件:

$$y_1(x_0)=y_2(x_0),\ y_1'(x_0)=y_2'(x_0). \tag{13}$$

对于解(6)和(12)这些条件是 $e^{x_0-C}+C=x_0+1$, $e^{x_0-C}=1$. 由第二式我们有 $C=x_0$; 将其代入第一式时,就得到 $1+x_0=x_0+1$. 这个等式对所有的 x_0 都成立. 可见,解(12)对于每个 x_0 都有曲线族(6)的一条曲线在横坐标为 x_0 的点上与之相切. 这正是对应于 $C=x_0$ 的那条曲线.

于是,在解(12)的每一点上总有(6)的一个解与之相切而不重合. 可见,解(12)是奇解.

如果解族象(5)式那样,是用参数形式表示的,则可以类似地验证相切所满足的条件. 这时需要考虑 $y'=p$.

3. 如果方程 $F(x, y, y')=0$ 的积分曲线族 $\Phi(x, y, C)=0$ 有包线 $y=\varphi(x)$, 则这个包线就是这个方程的奇解. 如果函数 Φ 具有连续的一阶导数,则为了求出包线,应当从方程

$$\Phi(x, y, C)=0,\ \frac{\partial\Phi(x, y, C)}{\partial C}=0$$

中消去 C, 并且验证,所得到的曲线是不是包线,即在这条曲线的每一

点上是否有曲线族的曲线与之相切. 这个验证可以通过第2段末所讲的方法利用相切条件(13)来进行.

在**241～250**各题中，求出给定方程的全部解；找出奇解(如果有的话)；画出图形.

241. $y'^2-y^2=0$. **242.** $8y'^3=27y$.

243. $(y'+1)^3=27(x+y)^2$.

244. $y^2(y'^2+1)=1$. **245.** $y'^2-4y^3=0$.

246. $y'^2=4y^3(1-y)$. **247.** $xy'^2=y$.

248. $yy'^3+x=1$.

249. $y'^3+y^2=yy'(y'+1)$.

250. $4(1-y)=(3y-2)^2y'^2$.

从方程**251～266**中解出y'，之后用通常的方法(§2, §4, §5, §6)求出通解. 如果有奇解再求出奇解.

251. $y'^2+xy=y^2+xy'$. **252.** $xy'(xy'+y)=2y^2$.

253. $xy'^2-2yy'+x=0$. **254.** $xy'^2=y(2y'-1)$.

255. $y'^2+x=2y$. **256.** $y'^3+(x+2)e^y=0$.

257. $y'^2-2xy'=8x^2$. **258.** $(xy'+3y)^2=7x$.

259. $y'^2-2yy'=y^2(e^x-1)$.

260. $y'(2y-y')=y^2\sin^2 x$.

261. $y'^4+y^3=y^4$.

262. $x(y-xy')^2=xy'^2-2yy'$.

263. $y(xy'-y)^2=y-2xy'$.

264. $yy'(yy'-2x)=x^2-2y^2$.

265. $y'^2+4xy'-y^2-2x^2y=x^4-4x^2$.

266. $y(y-2xy')^2=2y'$.

用引进参数法解方程**267～286**.

267. $x=y'^3+y'$.　　**268.** $x(y'^2-1)=2y'$.

269. $x=y'\sqrt{y'^2+1}$.　　**270.** $y'(x-\ln y')=1$.

271. $y=y'^2+2y'^3$.　　**272.** $y=\ln(1+y'^2)$.

273. $(y'+1)^3=(y'-y)^2$.　　**274.** $y=(y'-1)e^{y'}$.

275. $y'^4-y'^2=y^2$.　　**276.** $y'^2-y'^3=y^2$.

277. $y'^4=2yy'+y^2$.

278. $y'^2-2xy'=x^2-4y$.

279. $5y+y'^2=x(x+y')$.　　**280.** $x^2y'^2=xyy'+1$.

281. $y'^3+y^2=xyy'$.　　**282.** $2xy'-y=y'\ln yy'$.

283. $y'=e^{xy'/y}$.　　**284.** $y=xy'-x^2y'^3$.

285. $y=2xy'+y^2y'^3$.　　**286.** $y(y-2xy')^3=y'^2$.

解拉格朗日(Лагранж)方程和克莱罗(Клеро)方程(**287**～**296** 题).

287. $y=xy'-y'^2$.　　**288.** $y+xy'=4\sqrt{y'}$.

289. $y=2xy'-4y'^3$.　　**290.** $y=xy'-(2+y')$.

291. $y'^3=3(xy'-y)$.　　**292.** $y=xy'^2-2y'^3$.

293. $xy'-y=\ln y'$.　　**294.** $xy'(y'+2)=y$.

295. $2y'^2(y-xy')=1$.　　**296.** $2xy'-y=\ln y'$.

297. 已知微分方程的解族，求出此方程的奇解：

① $y=Cx^2-C$,　　② $Cy=(x-C)^2$,

③ $y=C(x-C)^2$,　　④ $xy=Cy-C^2$.

298. 求一曲线，使其任一点的切线与两坐标轴所组成的三角形面积为 $2a^2$.

299. 求一曲线，使其任一点的切线在两坐标轴上所截得的截距长的倒数平方和等于 1.

300. 求一通过坐标原点的曲线，使由第一象限角的两边所截其法线段之长等于常数 2.

§9. 各类一阶方程①

解出方程 **301~330**, 并且画出其解的图形.

301. $xy'+x^2+xy-y=0$. **302.** $2xy'+y^2=1$.

303. $(2xy^2-y)dx+x\,dy=0$.

304. $(xy'+y)^2=x^2y'$. **305.** $y-y'=y^2+xy'$.

306. $(x+2y^3)y'=y$. **307.** $y'^3-y'e^{2x}=0$.

308. $x^2y'=y(x+y)$.

309. $(1-x^2)dy+xy\,dx=0$.

310. $y'^2+2(x-1)y'-2y=0$.

311. $y+y'\ln^2 y=(x+2\ln y)y'$.

312. $x^2y'-2xy=3y$.

313. $x+yy'=y^2(1+y'^2)$.

314. $y=(xy'+2y)^2$. **315.** $y'=\dfrac{1}{x-y^2}$.

316. $y'^3+(3x-6)y'=3y$. **317.** $x-\dfrac{y}{y'}=\dfrac{2}{y}$.

318. $2y'^3-3y'^2+x=y$.

319. $(x+y)^2y'=1$.

320. $2x^3yy'+3x^2y^2+7=0$.

321. $\dfrac{dx}{x}=\left(\dfrac{1}{y}-2x\right)dy$. **322.** $xy'=e^y+2y'$.

323. $2(x-y^2)dy=y\,dx$.

324. $x^2y'^2+y^2=2x(2-yy')$.

325. $dy+(xy-xy^3)dx=0$.

326. $2x^2y'=y^3(2xy'-y)$.

---

① §9 的所有问题都可用以前所讲的方法求解.

327. $\dfrac{y-xy'}{x+yy'}=2.$

328. $x(x-1)y'+2xy=1.$

329. $xy(xy'-y)^2+2y'=0.$

330. $(1-x^2)y'-2xy^2=xy.$

解方程 **331~420.**

331. $y'+y=xy^3.$

332. $(xy^4-x)dx+(y+xy)dy=0.$

333. $(\sin x+y)dy+(y\cos x-x^2)dx=0.$

334. $3y'^3-xy'+1=0.$

335. $yy'+y^2\operatorname{ctg}x=\cos x.$

336. $(e^y+2xy)dx+(e^y+x)x\,dy=0.$

337. $xy'^2=y-y'.$

338. $x(x+1)(y'-1)=y.$

339. $y(y-xy')=\sqrt{x^4+y^4}.$

340. $xy'+y=\ln y'.$

341. $x^2(dy-dx)=(x+y)y\,dx.$

342. $y'+x\sqrt[3]{y}=3y.$

343. $(x\cos y+\sin 2y)y'=1.$

344. $y'^2-yy'+e^x=0.$ **345.** $y'=\dfrac{x}{y}e^{2x}+y.$

346. $(xy'-y)^3=y'^3-1.$ **347.** $(4xy-3)y'+y^2=1.$

348. $y'\sqrt{x}=\sqrt{y-x}+\sqrt{x}.$

349. $xy'=2\sqrt{y}\cos x-2y.$

350. $3y'^4=y'+y.$ **351.** $y^2(y-xy')=x^3y'.$

352. $y'=(4x+y-3)^2.$

353. $(\cos x-x\sin x)y\,dx+(x\cos x-2y)dy=0.$

354. $x^2y'^2-2xyy'=x^2+3y^2.$

355. $\frac{xy'}{y} + 2xy\ln x + 1 = 0$.

356. $xy' = x\sqrt{y-x^2} + 2y$.

357. $(1-x^2y)\,dx + x^2(y-x)\,dy = 0$.

358. $(2xe^y + y^4)y' = ye^y$. **359.** $xy'(\ln y - \ln x) = y$.

360. $2y' = x + \ln y'$.

361. $(2x^2y - 3y^2)y' = 6x^2 - 2xy^2 + 1$.

362. $yy' = 4x + 3y - 2$.

363. $y^2y' + x^2\sin^3 x = y^3\operatorname{ctg} x$.

364. $2xy' - y = \sin y'$.

365. $(x^2y^2+1)y + (xy-1)^2xy' = 0$.

366. $y\sin x + y'\cos x = 1$.

367. $x\,dy - y\,dx = x\sqrt{x^2+y^2}\,dx$.

368. $y^2 + x^2y'^5 = xy(y'^2 + y'^3)$.

369. $y' = \sqrt[3]{2x-y} + 2$.

370. $\left(x - y\cos\frac{y}{x}\right)dx + x\cos\frac{y}{x}\,dy = 0$.

371. $2\left(x^2y + \sqrt{1+x^4y^2}\right)dx + x^3\,dy = 0$.

372. $(y' - x\sqrt{y})(x^2-1) = xy$.

373. $y'^3 + (y'^2 - 2y')x = 3y' - y$.

374. $(2x+3y-1)\,dx + (4x+6y-5)\,dy = 0$.

375. $(2xy^2 - y)\,dx + (y^2 + x + y)\,dy = 0$.

376. $y = y'\sqrt{1+y'^2}$. **377.** $y^2 = (xyy'+1)\ln x$.

378. $4y = x^2 + y'^2$.

379. $2x\,dy + y\,dx + xy^2(x\,dy + y\,dx) = 0$.

380. $x\,dx + (x^2\operatorname{ctg} y - 3\cos y)\,dy = 0$.

381. $x^2y'^2 - 2(xy-2)y' + y^2 = 0$.

382. $xy' + 1 = e^{x-y}$. **383.** $y' = \operatorname{tg}(y-2x)$.

384. $3x^2 - y = y'\sqrt{x^2+1}$. **385.** $yy' + xy = x^3$.

386. $x(x-1)y' + y^3 = xy$.

387. $xy' = 2y + \sqrt{1+y'^2}$.

388. $(2x+y+5)y' = 3x+6$.

389. $y' + \operatorname{tg} y = x\sec y$. **390.** $y'^4 = 4y(xy'-2y)^2$.

391. $y' = \dfrac{y^2-x}{2y(x+1)}$. **392.** $xy' = x^2e^{-y}+2$.

393. $y' = 3x+\sqrt{y-x^2}$.

394. $x\,dy - 2y\,dx + xy^2(2x\,dy + y\,dx) = 0$.

395. $(x^3-2xy^2)dx + 3x^2y\,dy = x\,dy - y\,dx$.

396. $(yy')^3 = 27x(y^2-2x^2)$.

397. $y' - 8x\sqrt{y} = \dfrac{4xy}{x^2-1}$.

398. $[2x - \ln(y+1)]dx - \dfrac{x+y}{y+1}\,dy = 0$.

399. $xy' = (x^2+\operatorname{tg} y)\cos^2 y$.

400. $x^2(y-xy') = yy'^2$. **401.** $y' = \dfrac{3x^2}{x^3+y+1}$.

402. $y' = \dfrac{(1+y)^2}{x(y+1)-x^2}$. **403.** $(y-2xy')^2 = 4yy'^3$.

404. $6x^5y\,dx + (y^4\ln y - 3x^6)\,dy = 0$.

405. $y' = \dfrac{1}{2}\sqrt{x} + \sqrt[3]{y}$.

406. $2xy'+1 = y + \dfrac{x^2}{y-1}$.

407. $yy'+x = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{x^2+y^2}{x}\right)^2$.

408. $y' = \left(\dfrac{3x+y^3-1}{y}\right)^2$.

409. $(x\sqrt{y^2+1}+1)(y^2+1)\,dx = xy\,dy$.

410. $(x^2+y^2+1)yy' + (x^2+y^2-1)x = 0$.

411. $y^2(x-1)dx=x(xy+x-2y)dy$.

412. $(xy'-y)^2=x^2y^2-x^4$.

413. $xyy'-x^2\sqrt{y^2+1}=(x+1)(y^2+1)$.

414. $(x^2-1)y'+y^2-2xy+1=0$.

415. $y'\operatorname{tg} y+4x^3\cos y=2x$.

416. $(xy'-y)^2=y'^2-\dfrac{2yy'}{x}+1$.

417. $(x+y)(1-xy)dx+(x+2y)dy=0$.

418. $(3xy+x+y)y\,dx+(4xy+x+2y)x\,dy=0$.

419. $(x^2-1)dx+(x^2y^2+x^3+x)dy=0$.

420. $x(y'^2+e^{2y})=-2y'$.

§10. 可降阶的方程

1. 如果在方程里不出现未知函数 y, 即方程具有 $F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \cdots, y^{(n)})=0$ 的形式, 则取方程里出现的最低阶导数作为新的未知函数, 即作代换 $y^{(k)}=z$ 时, 方程可以降阶.

2. 如果在方程里不出现自变量 x, 即方程具有 $F(y, y', y'', \cdots, y^{(n)})=0$ 的形式, 则取 y 作为新的自变量, 而取 $y'=p(y)$ 作为新的未知函数时, 方程可以降阶.

例 解方程 $2yy''=y'^2+1$.

方程里没出现 x, 设 $y'=p(y)$. 这时

$$y''=\frac{d(y')}{dx}=\frac{dp(y)}{dx}=\frac{dp}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}=p'p.$$

将 $y'=p$ 和 $y''=pp'$ 代入方程时, 就得到 $2ypp'=p^2+1$. 方程已经被降阶. 解所得到的方程, 求出 $p=\pm\sqrt{Cy-1}$. 因此 $y'=\pm\sqrt{Cy-1}$. 由这个方程我们得到

$$4(Cy-1)=C^2(x+C_2)^2.$$

3. 如果方程对于 y 及其导数都是齐次的, 即同时以 ky, ky',

ky''，… 代替 y，y'，y''，… 时方程不变，则用代换 $y'=yz$ 可以把方程降阶，其中 z 是新的未知函数.

4. 如果方程对 x 和 y 是广义齐次的，即以 kx 代替 x，以 $k^m y$ 代替 y(同时以 $k^{m-1}y'$ 代替 y'，以 $k^{m-2}y''$ 代替 y'' 等等) 方程不变，则方程可以降阶. 为了知道方程是不是齐次的，并且求出数 m，应当使经上述代换后，方程的每项里出现数 k 的幂指数彼此相等. 例如经这一代换后在方程 $2x^4y''-3y^2=x^4$ 的第一项里数 k 将出现 $4+(m-2)$ 次幂，在第二项里将出现 $2m$ 次幂，在第三项里将出现 4 次幂. 因此 m 应当满足方程

$$4+(m-2)=2m=4.$$

由此 $m=2$. 如果所得到的关于 m 的方程是不相容的，则微分方程在所说的意义下就不是齐次的.

求出数 m 后，要作代换 $x=e^t$，$y=ze^{mt}$，其中 $z=z(t)$ 是新的未知函数，而 t 是新的自变量. 我们将得到不出现自变量 t 的方程. 这个方程可以用前面讨论过的方法降阶.

5. 如果方程的两端能够变成某些函数对 x 的全导数的形状，则方程容易降阶. 例如，假设给定的方程为 $yy''=y'^2$. 两端除以 yy'，得到

$$\frac{y''}{y'}=\frac{y'}{y};\ (\ln y')'=(\ln y)';\ \ln y'=\ln y+\ln C;\ y'=yC.$$

方程已经被降阶.

解方程 421～450.

421. $x^2y''=y'^2$.　　**422.** $2xy'y''=y'^2-1$.

423. $y^3y''=1$.　　**424.** $y'^2+2yy''=0$.

425. $y''=2yy'$.　　**426.** $yy''+1=y'^2$.

427. $y''(e^x+1)+y'=0$.　　**428.** $y'''=y''^2$.

429. $yy''=y'^2-y'^3$.　　**430.** $y'''=2(y''-1)\operatorname{ctg}x$.

431. $2yy''=y^2+y'^2$.　　**432.** $y''^3-xy''=2y'$.

433. $y''^2+y'=xy''$.　　**434.** $y''+y'^2=2e^{-y}$.

435. $xy''' = y'' - xy''$. **436.** $y''^2 = y'^2 + 1$.

437. $y'' = e^y$. **438.** $y'' - xy''' + y'''^3 = 0$.

439. $2y'(y'' + 2) = xy''^2$. **440.** $y^4 - y^3y'' = 1$.

441. $y'^2 = (3y - 2y')y''$. **442.** $y''(2y' + x) = 1$.

443. $y''^2 - 2y'y''' + 1 = 0$.

444. $(1 - x^2)y'' + xy' = 2$.

445. $yy'' - 2yy'\ln y = y'^2$.

446. $(y' + 2y)y'' = y'^2$.

447. $xy'' = y' + x\sin\frac{y'}{x}$. **448.** $y'''y'^2 = y''^3$.

449. $yy'' + y = y'^2$. **450.** $xy'' = y' + x(y'^2 + x^2)$.

用化多次积分为一次积分的公式解方程 **451～454**（见[1]，第 IV 章，§2，第 1 段）。

451. $xy^{(4)} = 1$. **452.** $xy'' = \sin x$.

453. $y''' = 2xy''$. **454.** $xy^{(4)} + y''' = e^x$.

将方程 **455～462** 的两端变为全导数形式后，解之。

455. $yy''' + 3y'y'' = 0$. **456.** $y'y''' = 2y''^2$.

457. $yy'' = y'(y' + 1)$. **458.** $5y'''^2 - 3y''y^{(4)} = 0$.

459. $yy'' + y'^2 = 1$. **460.** $y'' = xy' + y + 1$.

461. $xy'' = 2yy' - y'$. **462.** $xy'' - y' = x^2yy'$.

在 **463～480** 各题中，利用方程的齐次性将给定的方程降阶，并解之。

463. $xyy'' - xy'^2 = yy'$. **464.** $yy'' = y'^2 + 15y^2\sqrt{x}$.

465. $(x^2 + 1)(y'^2 - yy'') = xyy'$.

466. $xyy'' + xy'^2 = 2yy'$. **467.** $x^2yy'' = (y - xy')^2$.

468. $y'' + \frac{y'}{x} + \frac{y}{x^2} = \frac{y'^2}{y}$.

469. $y(xy'' + y') = xy'^2(1 - x)$.

470. $x^2yy''+y'^2=0$. **471.** $x^2(y'^2-2yy'')=y^2$.

472. $xyy''=y'(y+y')$. **473.** $4x^2y^3y''=x^2-y^4$.

474. $x^3y''=(y-xy')(y-xy'-x)$.

475. $\dfrac{y^2}{x^2}+y'^2=3xy''+\dfrac{2yy'}{x}$.

476. $y''=\left(2xy-\dfrac{5}{x}\right)y'+4y^2-\dfrac{4y}{x^2}$.

477. $x^2(2yy''-y'^2)=1-2xyy'$.

478. $x^2(yy''-y'^2)+xyy'=(2xy'-3y)\sqrt{x^3}$.

479. $x^4(y'^2-2yy'')=4x^3yy'+1$.

480. $yy'+xyy''-xy'^2=x^3$.

在 **481～500** 各题中，将给定方程降阶，化成一阶方程.

481. $y''(3+yy'^2)=y'^4$. **482.** $y''^2-y'y'''=\left(\dfrac{y'}{x}\right)^2$.

483. $yy'+2x^2y''=xy'^2$. **484.** $y'^2+2xyy''=0$.

485. $2xy^2(xy''+y')+1=0$.

486. $x(y''+y'^2)=y'^2+y'$.

487. $y^2(y'y'''-2y''^2)=y'^4$.

488. $y(2xy''+y')=xy'^2+1$.

489. $y''+2yy'^2=\left(2x+\dfrac{1}{x}\right)y'$.

490. $y'y'''=y''^2+y'^2y''$. **491.** $yy''=y'^2+2xy^2$.

492. $y''^4=y'^5-yy'^3y''$. **493.** $2yy'''=y'$.

494. $y'''y'^2=1$. **495.** $y^2y'''=y'^3$.

496. $x^2yy''+1=(1-y)xy'$.

497. $yy'y'''+2y'^2y''=3yy''^2$.

498. $(y'y'''-3y''^2)y=y'^5$.

499. $y^2(y'y'''-2y''^2)=yy'^2y''+2y'^4$.

500. $x^2(y^2y''' - y'^3) = 2y^2y' - 3xyy'^2$.

在**501~505**各题中，求出满足给定初始条件的解.

501. $yy'' = 2xy'^2$; $y(2) = 2$, $y'(2) = 0.5$.

502. $2y''' - 3y'^2 = 0$; $y(0) = -3$, $y'(0) = 1$, $y''(0) = -1$.

503. $x^2y'' - 3xy' = \dfrac{6y^2}{x^2} - 4y$; $y(1) = 1$, $y'(1) = 4$.

504. $y''' = 3yy'$; $y(0) = -2$, $y'(0) = 0$, $y''(0) = 4.5$.

505. $y''\cos y + y'^2 \sin y = y'$; $y(-1) = \dfrac{\pi}{6}$, $y'(-1) = 2$.

506. 求一曲线，使其任一点的曲率半径等于过这一点的法线界于该点与横轴间线段长的两倍. 考虑两种情形：①曲线凸向横轴；②曲线凹向横轴.

507. 求一曲线，使其任一点的曲率半径与过该点的切线和横轴间夹角的余弦成反比.

508. 设有一条两端固定、不可伸长的弦. 每单位长的水平射影上受到相同负荷的作用(链桥的链). 试确定其平衡公式. 弦的自身重量略去不计.

509. 求出一条均匀的不可伸长(两端固定)的弦在其自身重力作用下的平衡公式.

510*. 试证明，摆的运动方程 $y'' + \sin y = 0$ 具有当 $x \to +\infty$ 时趋于 π 的特解 $y(x)$.

§11. 常系数线性方程

1. 为了解出常系数线性齐次方程

$$a_0y^{(n)} + a_1y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1}y' + a_ny = 0, \tag{1}$$

应当写出特征方程

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\lambda + a_n = 0 \tag{2}$$

并且求出其全部的根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$.

方程(1)的通解是由一些被加项所组成的和，对于方程(2)的每个单根 λ_i，被加项的形式为 $C_i e^{\lambda_i x}$，而对于方程(2)的每个重根 λ，被加项的形式为

$$(C_{m+1}+C_{m+2}x+C_{m+3}x^2+\cdots+C_{m+k}x^{k-1})e^{\lambda x}, \tag{3}$$

其中 k 是根的重数，所有的 C_i 都是任意常数．方程(1)的系数和根 λ 在这里可以是实数或者是复数．

如果方程(1)的所有系数都是实的，则在根 λ 为复数时，解也可以写成实数的形式．对于每一对共轭复根 $\lambda=\alpha\pm\beta i$，如果是两个单根，在通解公式中所包含的被加项是

$$C_{m+1}e^{\alpha x}\cos\beta x+C_{m+2}e^{\alpha x}\sin\beta x.$$

如果每个根 $\alpha+\beta i$ 和 $\alpha-\beta i$ 都具有重数 k，则所包含的被加项是

$$P_{k-1}(x)e^{\alpha x}\cos\beta x+Q_{k-1}(x)e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

这里 P_{k-1} 和 Q_{k-1} 都是与(3)中的多项式类似的 $k-1$ 次多项式，其系数都是任意常数．

例 解方程 $y^{(5)}-2y^{(4)}-16y'+32y=0$.

写出特征方程

$$\lambda^5-2\lambda^4-16\lambda+32=0.$$

将左端分解因式，求根：

$$(\lambda-2)(\lambda^4-16)=0,\ (\lambda-2)^2(\lambda+2)(\lambda^2+4)=0,$$

$$\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-2,\ \lambda_4=2i,\ \lambda_5=-2i.$$

按照上述办法写出通解

$$y=(C_1+C_2x)e^{2x}+C_3e^{-2x}+C_4\cos 2x+C_5\sin 2x$$

(多项式 C_1+C_2x 的次数比根 $\lambda=2$ 的重数小 1).

2. 对于右端由函数 $b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$, $e^{\alpha x}$, $\cos\beta x$, $\sin\beta x$ 的和与积所组成的常系数线性非齐次方程，可以用待定系数法求出其特解.

对于右端为 $P_m(x)e^{\gamma x}$ 的方程，其中 $P_m(x)=b_0+b_1x+\cdots+b_mx^m$，特解具有

$$y_1=x^sQ_m(x)e^{\gamma x} \tag{4}$$

的形式，其中 $Q_m(x)$ 是 m 次多项式．当 γ 不是特征方程(2)的根时，数 $s=0$，而当 γ 是根时，则 s 就等于这个根的重数．为了求出多项式 $Q_m(x)$ 的系数，应当把解(4)代入微分方程并且使方程左右两端同类项的系数相等．

如果方程的右端出现正弦和余弦，则可以按照欧拉(Эйлер)公式

$$\cos\beta x=\frac{e^{i\beta x}+e^{-i\beta x}}{2},\quad \sin\beta x=\frac{e^{i\beta x}-e^{-i\beta x}}{2i} \tag{5}$$

将其用指数函数表示出来，于是问题化成了已经考虑过的情形．

如果方程左端的系数都是实的，则不用变为复值函数(5)也行．

对于右端为

$$e^{\alpha x}(P(x)\cos\beta x+Q(x)\sin\beta x) \tag{6}$$

的方程，可以找到形如

$$y_1=x^s e^{\alpha x}(R_m(x)\cos\beta x+T_m(x)\sin\beta x) \tag{7}$$

的特解，其中当 $\alpha+\beta i$ 不是特征方程的根时，$s=0$，否则 s 等于根 $\alpha+\beta i$ 的重数，而 R_m 和 T_m 都是 m 次多项式，m 是多项式 P 和 Q 的最高次数．为了求出多项式 R_m 和 T_m 的系数，应该把解(7)代入方程并使同类项的系数相等．

对于右端形如(6)的实系数方程还有一个求出其特解的方法如下．首先解出右端为 $P(x)e^{(\alpha+\beta i)x}$ 的方程．这个解的实数部分将是右端为 $P(x)e^{\alpha x}\cos\beta x$ 的方程的解，而虚数部分将是右端为 $P(x)e^{\alpha x}\sin\beta x$ 的方程的解．

如果方程右端等于某些形如 $P(x)e^{\gamma x}$ 与形如(6)的函数的和，则特解可以按照下述办法找到．

右端为 $f_1+\cdots+f_p$ 的线性方程的特解等于具有同一左端，而右端分别为 $f_1, \cdots, f_p$ 的方程的特解的和．

在所有的情形下，线性非齐次方程的通解都等于这个方程的一个特解与具有同一左端的齐次方程的通解的和．

例 解方程

$$y'''-6y''+9y'=xe^{3x}+e^{3x}\cos 2x. \tag{8}$$

特征方程 $\lambda^3-6\lambda^2+9\lambda=0$ 具有重数为 2 的根 $\lambda=3$ 和重数为 1 的

根 $\lambda=0$. 因此，对应的齐次方程的通解具有 $y_0=(C_1+C_2x)e^{3x}+C_3$ 的形式.

方程(8)的右端是由两个形如(6)的被加项所组成的和，对于第一项 $\gamma=\alpha+\beta i=3$, 而对于第二项 $\alpha+\beta i=3+2i$. 因为这两个数不同，所以应当分别求出方程

$$y'''-6y''+9y'=xe^{3x}, \tag{9}$$

$$y'''-6y''+9y'=e^{3x}\cos 2x \tag{10}$$

的特解.

数 $\gamma=3$ 是重数为 $s=2$ 的根，所以根据(4)，方程(9)的特解具有 $y_1=x^2(ax+b)e^{3x}$ 的形式. 将 $y=y_1$ 代入(9)，求出 $a=1/18$, $b=-1/18$.

其次，数 $\alpha+\beta i=3+2i$ 不是特征方程的根，因此根据(7)，方程(10)的特解具有 $y_2=e^{3x}(c\cos 2x+d\sin 2x)$ 的形式. 将 $y=y_2$ 代入(10)，求出 $c=-3/52$, $d=-1/26$.

方程(8)的通解为 $y=y_0+y_1+y_2$, 其中 y_0, y_1, y_2 已被求出.

3. 以任意函数 $f(x)$ 为右端的线性非齐次方程

$$a_0y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\cdots+a_ny=f(x) \tag{11}$$

可以用常数变易法求解. 假设已经求出具有同一左端的线性齐次方程的通解为 $y=C_1y_1+\cdots+C_ny_n$. 这时求方程(11)形如

$$y=C_1(x)y_1+\cdots+C_n(x)y_n$$

的解. 函数 $C_i(x)$ 由方程组

$$\begin{gathered}
C_1'y_1+\cdots+C_n'y_n=0,\\
C_1'y_1'+\cdots+C_n'y_n'=0,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
C_1'y_1^{(n-2)}+\cdots+C_n'y_n^{(n-2)}=0,\\
a_0(C_1'y_1^{(n-1)}+\cdots+C_n'y_n^{(n-1)})=f(x)
\end{gathered}$$

所确定.

4. 欧拉方程

$$a_0x^ny^{(n)}+a_1x^{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}xy'+a_ny=f(x), \tag{12}$$

当 $x>0$ 时用自变量代换 $x=e^t$（或者 $x<0$ 时 $x=-e^t$）可以化成常系数

线性方程．对于所得到的常系数方程，特征方程具有

$$a_0\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-n+1)+\cdots+a_{n-2}\lambda(\lambda-1)+a_{n-1}\lambda+a_n=0$$

的形状．这个方程是用 k 个依次减 1 的数之积 $\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)\cdots(\lambda-k+1)$ 代替(12)中的乘积 $x^k y^{(k)}$ 而写出的．

例 解方程

$$x^3y'''-x^2y''+2xy'-2y=x^3. \tag{13}$$

我们可以立刻写出特征方程并解得：

$$\begin{gathered}\lambda(\lambda-1)(\lambda-2)-\lambda(\lambda-1)+2\lambda-2=0,\\ (\lambda-1)(\lambda^2-3\lambda+2)=0,\ \lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2.\end{gathered} \tag{14}$$

对于这些 λ，常系数齐次方程的通解(根据第 1 段)具有

$$y_0=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{2t}$$

的形式．

为了解出非齐次方程(13)，首先去掉(14)中的括号：$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0$．根据这个特征方程写出微分方程的左端，而右端可以用代换 $x=e^t$ 由方程(13)的右端得到：

$$y_t'''-4y_t''+5y_t'-2y=e^{3t}.$$

因为数 3 不是特征方程的根，所以我们求形如 $y_1=ae^{3t}$ 的特解．代入方程时，求出 $a=1/4$．

因此通解具有

$$\begin{aligned}y=y_0+y_1&=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{2t}+\frac{1}{4}e^{3t}\\ &=(C_1+C_2\ln x)x+C_3x^2+\frac{1}{4}x^3\quad(x>0)\end{aligned}$$

的形式．当 $x<0$ 时将得到类似的公式，但是要用 $\ln|x|$ 代替 $\ln x$．

5．为了解出 **635～640** 以及 **879** 题，可以利用下列电路理论定律．

对于电路中的每个节点，流向节点的电流之和等于流出节点的电流之和．

在任何闭合回路中，电源电动势的代数和等于其余所有部分回路上电压降的代数和．

电阻为 R 的电压降等于 RI; 自感为 L 的电压降等于 $L\frac{dI}{dt}$; 电容为 C 的电容器的电压降等于 q/C, 其中 $q=q(t)$是在时刻 t 电容器上的电荷; 同时 $\frac{dq}{dt}=I$; 在所有这三种情形下 $I=I(t)$都是在给定时刻 t 流过所考虑那一段电路的电流强度。在这些公式中用安培、欧姆、亨利、库伦、法拉、秒等分别表示 I、R、L、q、C、t 的单位, 用伏特表示电压降的单位.

例 串联: 电动势按照规律 $E=V\sin\omega t$ 变化的电源、电阻 R 和电容 C. 求在稳恒条件① 下电路中的电流强度.

解 任何部分电路中的电流强度 $I=I(t)$都是相等的(根据串联定律). 电阻的电压降等于 RI, 而电容的电压降等于 q/C. 因此,

$$RI+\frac{q}{C}=V\sin\omega t.$$

将其微分并利用 $\frac{dq}{dt}=I$, 我们就得到方程

$$R\frac{dI}{dt}+\frac{I}{C}=V\omega\cos\omega t. \tag{15}$$

这是常系数线性方程. 为了找到稳恒条件, 我们要求出这个方程的周期解. 根据方程右端的形式, 求出形如

$$I=A_1\cos\omega t+B_1\sin\omega t \tag{16}$$

的解. 把(16)式代入(15)式并使同类项的系数相等时, 就得到一个包括两个方程的代数方程组, 从中可以求出 A_1 和 B_1. 但是在电工学上重要的并不是知道系数 A_1 和 B_1, 而是知道电流强度变化的振幅. 因此把(16)式改写成

$$I=A\sin(\omega t-\varphi) \tag{17}$$

的形式. 将变为角 ωt 和 φ 的三角函数的(17)式代入方程(15), 首先使 $\sin\omega t$ 的系数相等, 然后再使 $\cos\omega t$ 的系数相等, 我们可得到

$$RA\omega\sin\varphi+\frac{A}{C}\cos\varphi=0,\quad RA\omega\cos\varphi-\frac{A}{C}\sin\varphi=V\omega.$$

由此求出

① 电流强度等于常量或者作周期变化的条件叫做稳恒条件.

$$\operatorname{tg}\varphi = -\frac{1}{RC\omega}, \quad A = \frac{V}{\sqrt{R^2 + (\omega C)^{-2}}}.$$

现在我们说明，为什么把所求出的周期解的条件叫做稳恒条件。方程(15)的通解等于所求出的特解(17)与线性齐次方程

$$R\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = 0 \tag{18}$$

的通解之和。因为方程(18)的解 $I = ke^{-t/RC}$（这里 k 是任意常数）当 $t \to +\infty$ 时趋于零，因此方程(15)的任一解当 $t \to +\infty$ 时都无限地（并且很快地）接近所求出的周期解(17)。

解方程 **511～548.**

511. $y'' + y' - 2y = 0.$ **512.** $y'' + 4y' + 3y = 0.$

513. $y'' - 2y' = 0.$ **514.** $2y'' - 5y' + 2y = 0.$

515. $y'' - 4y' + 5y = 0.$ **516.** $y'' + 2y' + 10y = 0.$

517. $y'' + 4y = 0.$ **518.** $y''' - 8y = 0.$

519. $y^{(4)} - y = 0.$ **520.** $y^{(4)} + 4y = 0.$

521. $y^{(6)} + 64y = 0.$ **522.** $y'' - 2y' + y = 0.$

523. $4y'' + 4y' + y = 0.$ **524.** $y^{(5)} - 6y^{(4)} + 9y''' = 0.$

525. $y^{(5)} - 10y''' + 9y' = 0.$

526. $y^{(4)} + 2y'' + y = 0.$

527. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0.$

528. $y''' - y'' - y' + y = 0.$

529. $y^{(4)} - 5y'' + 4y = 0.$

530. $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0.$

531. $y''' - 3y' + 2y = 0.$

532. $y^{(4)} + 4y'' + 3y = 0.$

533. $y'' - 2y' - 3y = e^{4x}.$

534. $y'' + y = 4xe^x.$ **535.** $y'' - y = 2e^x - x^2.$

536. $y''+y'-2y=3xe^x$.

537. $y''-3y'+2y=\sin x$.

538. $y''+y=4\sin x$. **539.** $y''-5y'+4y=4x^2e^{2x}$.

540. $y''-3y'+2y=x\cos x$.

541. $y''+3y'-4y=e^{-4x}+xe^{-x}$.

542. $y''+2y'-3y=x^2e^x$.

543. $y''-4y'+8y=e^{2x}+\sin 2x$.

544. $y''-9y=e^{3x}\cos x$.

545. $y''-2y'+y=6xe^x$.

546. $y''+y=x\sin x$. **547.** $y''+4y'+4y=xe^{2x}$.

548. $y''-5y'=3x^2+\sin 5x$.

在 **549～574** 各题中，对于每个给定的方程，写出其未定系数的特解（无需求出系数值）.

549. $y''-2y'+2y=e^x+x\cos x$.

550. $y''+6y'+10y=3xe^{-3x}-2e^{3x}\cos x$.

551. $y''-8y'+20y=5xe^{4x}\sin 2x$.

552. $y''+7y'+10y=xe^{-2x}\cos 5x$.

553. $y''-2y'+5y=2xe^x+e^x\sin 2x$.

554. $y''-2y'+y=2xe^x+e^x\sin 2x$.

555. $y''-8y'+17y=e^{4x}(x^2-3x\sin x)$.

556. $y'''+y'=\sin x+x\cos x$.

557. $y'''-2y''+4y'-8y=e^{2x}\sin 2x+2x^2$.

558. $y''-6y'+8y=5xe^{2x}+2e^{4x}\sin x$.

559. $y''+2y'+y=x(e^{-x}-\cos x)$.

560. $y'''-y''-y'+y=3e^x+5x\sin x$.

561. $y''-6y'+13y=x^2e^{3x}-3\cos 2x$.

562. $y''-9y=e^{-3x}(x^2+\sin 3x)$.

563. $y^{(4)}+y''=7x-3\cos x$.

564. $y''+4y=\cos x\cdot\cos 3x$.

565. $y'''-4y''+3y'=x^2+xe^{2x}$.

566. $y''-4y'+5y=e^{2x}\sin^2 x$.

567. $y''+3y'+2y=e^{-x}\cos^2 x$.

568. $y''-2y'+2y=(x+e^x)\sin x$.

569. $y^{(4)}+5y''+4y=\sin x\cdot\cos 2x$.

570. $y''-3y'+2y=2^x$. **571.** $y''-y=4\,\mathrm{sh}\,x$.

572. $y''+4y'+3y=\mathrm{ch}\,x$.

573. $y''+4y=\mathrm{sh}\,x\cdot\sin 2x$.

574. $y''+2y'+2y=\mathrm{ch}\,x\cdot\sin x$.

用常数变易法解方程 **575～581.**

575. $y''-2y'+y=\dfrac{e^x}{x}$. **576.** $y''+3y'+2y=\dfrac{1}{e^x+1}$.

577. $y''+y=\dfrac{1}{\sin x}$. **578.** $y''+4y=2\,\mathrm{tg}\,x$.

579. $y''+2y'+y=3e^{-x}\sqrt{x+1}$.

580. $y''+y=2\sec^3 x$. **581*.** $x^3(y''-y)=x^2-2$.

求出方程 **582～588** 满足给定初始条件的解.

582. $y''-2y'+y=0$; $y(2)=1$, $y'(2)=-2$.

583. $y''+y=4e^x$; $y(0)=4$, $y'(0)=-3$.

584. $y''-2y'=2e^x$; $y(1)=-1$, $y'(1)=0$.

585. $y''+2y'+2y=xe^{-x}$; $y(0)=y'(0)=0$.

586. $y'''-y'=0$; $y(0)=3$, $y'(0)=-1$, $y''(0)=1$.

587. $y'''-3y'-2y=9e^{2x}$; $y(0)=0$, $y'(0)=-3$,

$$y''(0)=3.$$

588. $y^{(4)}+y''=2\cos x$; $y(0)=-2$, $y'(0)=1$,

$$y''(0)=y'''(0)=0.$$

在 589~600 各题中解欧拉方程.

589. $x^2y''-4xy'+6y=0$.

590. $x^2y''-xy'-3y=0$.

591. $x^3y'''+xy'-y=0$.

592. $x^2y'''=2y'$.

593. $x^2y''-xy'+y=8x^3$.

594. $x^2y''+xy'+4y=10x$.

595. $x^3y''-2xy=6\ln x$.

596. $x^2y''-3xy'+5y=3x^2$.

597. $x^2y''-6y=5x^3+8x^2$.

598. $x^2y''-2y=\sin\ln x$.

599. $(x-2)^2y''-3(x-2)y'+4y=x$.

600. $(2x+3)^3y'''+3(2x+3)y'-6y=0$.

应用各种方法解方程:

601. $y''+2y'+y=\cos ix$.

602. $y''-2y'+y=xe^x\sin^2 x$.

603. $y''+2iy=8e^x\sin x$.

604. $y''+2iy'-y=8\cos x$.

605. $y'''-8iy=\cos 2x$.

606. $y''-\frac{2y}{x^2}=3\ln(-x)$.

607. $y''+2y'+y=xe^x+\frac{1}{xe^x}$.

608. $y''+2y'+5y=e^{-x}(\cos^2 x+\operatorname{tg} x)$

609. $x^2y''-2y=\frac{3x^2}{x+1}$.

610. $x^2y''-xy'+y=\frac{\ln x}{x}+\frac{x}{\ln x}$.

611*. $y''+y=f(x)$.

612*. 为了使 **611** 题方程的所有解当 $x\to+\infty$ 时都是有界的，需给函数 $f(x)$ 加上怎样的条件才行？

在 **613～618** 各题中，建立具有给定特解的常系数(尽可能是较低阶的)线性齐次微分方程.

613. $y_1=x^2e^x$.　　**614.** $y_1=e^{2x}\cos x$.

615. $y_1=x\sin x$.　　**616.** $y_1=xe^x\cos 2x$.

617. $y_1=xe^x,\ y_2=e^{-x}$.　　**618.** $y_1=x,\ y_2=\sin x$.

619. 对于怎样的 a 和 b，方程 $y''+ay'+by=0$ 的所有的解在整个数轴 $-\infty<x<+\infty$ 上都是有界的？

620. 对于怎样的 a 和 b，方程 $y''+ay'+by=0$ 的所有的解当 $x\to+\infty$ 时都趋于零？

621. 对于怎样的 a 和 b，方程 $y''+ay'+by=0$ 至少有一个解 $y(x)\neq0$，当 $x\to+\infty$ 时趋于零？

622. 对于怎样的 a 和 b，方程 $y''+ay'+by=0$ 的每一个解($y(x)\equiv0$ 除外)的绝对值从某个 x 开始都是单调递增的？

623. 对于怎样的 a 和 b，方程 $y''+ay'+by=0$ 的每一个解都在 x 的无穷点集上为零？

624*. 对于怎样的 a 和 b，方程 $y''+ay'+by=0$ 的所有的解当 $x\to+\infty$ 时都满足关系 $y=o(e^{-x})$？

625*. 对于给定的 $b>0$ 选出这样的 a，使方程 $y''+ay'+by=0$ 以 $y(0)=1,\ y'(0)=0$ 为初始条件的解当 $x\to+\infty$ 时可以迅速地趋于零.

626. 对于怎样的 k 和 ω，方程 $y''+k^2y=\sin\omega t$ 至少有一个周期解？

627. 求出方程 $\ddot{x}+a\dot{x}+bx=\sin\omega t$ 的周期解，并且画出其振幅依赖于 ω 值的图形.

628. 求出方程 $\ddot{x}+\dot{x}+4x=e^{i\omega t}$ 的周期解，并且在复数平面上，画出这个解的振幅当 ω 从 0 变到 $+\infty$ 时所经过的曲线.

629*. 给定方程 $y''+ay'+by=f(x)$，同时 $|f(x)|\leqslant m$ $(-\infty<x<+\infty)$，而特征方程的根 $\lambda_2<\lambda_1<0$. 求出当 $-\infty<x<+\infty$ 时的有界解. 证明，① 所有其它的解当 $x\to+\infty$ 时都无限地接近于这个解；② 如果 $f(x)$ 是周期函数，则这个解也是周期的.

提示　应用常数变易法，把所得到的积分下限取为使其收敛的无穷大.

在 **630～632** 各题中，将用到下述事实：弹簧以指向平衡位置的力 kx，作用在离开平衡位置的距离为 x 的重物上.

630. 如果发生的运动是无阻力的，求出挂在弹簧上质量为 m 的物体自由振动的周期.

631. 弹簧的一端固定不动，而另一端挂一质量为 m 的重物. 当重物以速度 v 运动时，阻力等于 hv. 当 $t=0$ 时处在平衡位置的重物速度为 v_0. 研究在 $h^2<4km$ 和 $h^2>4km$ 的情况下重物的运动状况.

632. 当给重物一个 $f=b\sin\omega t$ 的周期外力的补充条件时求解上题. 证明，在任何初始条件下重物的运动都将是接近周期的，并求出这个周期运动(强迫振动).

633. 在弹性杆的一端系一质量为 m 的物体. 杆的另一端按照在时刻 t 的位移为 $B\sin\omega t$ 进行振动. 杆中产生的弹性力与其两端的位移差成比例. 求出质量为 m 的物体强迫振动的振幅. $A>B$ 可能吗(杆的质量和摩擦忽略不计)?

634. 一个质量为 m 的质点，沿着 Ox 轴在 $9mr_0$ 力的作用下离开点 $x=0$，又在 $4mr_1$ 力的作用下接近点 $x=1$ 运动，其中 r_0 和 r_1 是质点到这两点的距离．试确定以

$$x(0)=2,\ \dot{x}(0)=0$$

为初始条件的质点运动．

635. 电路由路端电压为 V 的直流电源、电阻 R、自感 L 和在 $t=0$ 时接通的开关串联而成．求出电流强度对时间的依赖关系(当 $t>0$ 时)．

636. 用电容为 C 的电容器代替自感 L 求解上题．电路接通前电容器不充电．

637. 电阻 R 与当 $t=0$ 时电荷为 q、电容为 C 的电容器串联．当 $t=0$ 时电路闭合．求出当 $t>0$ 时电路中的电流强度．

638. 将自感 L、电阻 R 以及当 $t=0$ 时电荷为 q 电容为 C 的电容器串联．当 $t=0$ 时电路闭合．求出电路中的电流强度和当放电具有振动性质时的振动频率．

639. 将电动势按照规律 $E=V\sin\omega t$ 变化的电源、电阻 R 和自感 L 串联．求出电路中的电流强度(稳恒条件)．

640. 串联电动势按照规律 $E=V\sin\omega t$ 变化的电源、电阻 R、自感 L 和电容 C．求出电路中的电流强度(稳恒条件)．对于怎样的频率 ω 电流强度最大？

§12. 变系数线性方程

1. 这一节的大多数问题都是用线性微分方程的一般理论(见[1]，第 V 章，§2，§3 或者[4]，第 2 章，§3，§5)以及对二阶线性方程定性研究的方法(见[1]，第 VI 章，§2，第 1 段，第 3 段)解决的．对于其它

的一些问题都给出了提示或者引用的文献.

2. 如果知道 n 阶线性齐次方程的一个特解 y_1, 则方程可以降阶, 并且保持其线性. 为此需要将 $y=y_1z$ 代入方程, 然后再用代换 $z'=u$ 降阶.

已知二阶线性齐次方程 $a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0$ 的一个特解 y_1, 为了求出其通解, 可以用上述方法降阶. 但是比较方便的是应用奥斯特洛格拉斯基(Остроградский)-刘维尔(Лиувилл)公式:

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=Ce^{-\int P(x)dx},\ P(x)=\frac{a_1(x)}{a_0(x)},$$

其中 y_1 和 y_2 是给定方程的任意两个解.

例 设已知方程

$$(x^2+1)y''-2xy'+2y=0 \tag{1}$$

的一个特解为 $y_1=x$. 根据奥斯特洛格拉得斯基-刘维尔公式, 我们得到

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}=Ce^{-\int\left(\frac{-2x}{x^2+1}\right)dx};\ y_1y_2'-y_1'y_2=C(x^2+1).$$

因为函数 y_1 是已知的, 所以我们得到一个关于 y_2 的一阶线性方程. 它可以用下述更简单的方法求解. 将方程的两端除以 y_1^2 后, 从左端我们得到分式 y_2/y_1 的导数

$$\left(\frac{y_2}{y_1}\right)'=\frac{y_1y_2'-y_1'y_2}{y_1^2}=\frac{C(x^2+1)}{y_1^2}.$$

因为 $y_1=x$, 所以有

$$\frac{y_2}{y_1}=\int C\cdot\frac{x^2+1}{x^2}\,dx+C_2=C\left(x-\frac{1}{x}\right)+C_2,$$

$$y_2=C(x^2-1)+C_2x.$$

这就是方程(1)的通解.

3. 对于二阶线性方程, 不存在求特解的一般方法. 在有些情形下可以用选择法来求.

例 求出方程

$$(1-2x^2)y''+2y'+4y=0 \tag{2}$$

的代数多项式特解(如果存在这样的解).

首先求出多项式的次数. 将 $y=x^n+\cdots$ 代入方程(2), 并且只写出字母 x 的最高次项, 我们得到 $-2x^2\cdot n(n-1)x^{n-2}+\cdots+4x^n+\cdots=0$. 再使 x 最高次项的系数等于零, 就得到 $-2n(n-1)+4=0$; $n^2-n-2=0$. 由此 $n_1=2$; 根 $n_2=-1$ 不合题意(因为多项式的次数都是正整数). 因而, 多项式只能是二次的. 我们用 $y=x^2+ax+b$ 的形式来求它. 代入方程(2)时, 得到 $(4a+4)x+2+2a+4b=0$. 因而 $4a+4=0, 2+2a+4b=0$. 由此 $a=-1$, $b=0$. 于是多项式 $y=x^2-x$ 就是特解.

4. 在解 **738~750** 各题时, 将用到从[5]的第 V 章, §7 中得到的下述断言.

设当 $t_0\leqslant t<\infty$ 时 $|f(t)|\leqslant\frac{c}{t^{1+\alpha}}$; c, $\alpha=\mathrm{const}>0$. 那么

1) 当 $t\to+\infty$ 时, 方程 $u''+(1+f(t))u=0$ 具有如下两个线性无关的解:

$$u_1(t)=\cos t+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right),\ u_2(t)=\sin t+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right);$$

2) 当 $t\to+\infty$ 时, 方程 $u''-(1+f(t))u=0$ 具有如下两个线性无关的解:

$$u_1(t)=e^t\left(1+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right),\ u_2(t)=e^{-t}\left(1+O\left(\frac{1}{t^\alpha}\right)\right).$$

在 **641~662** 各题中, 研究给定的诸函数是否线性相关. 在每个问题中函数都是在它们公共的定义域上考虑的.

641. $x+2$, $x-2$. **642.** $6x+9$, $8x+12$.

643. $\sin x$, $\cos x$. **644.** 1, x, x^2.

645. $4-x$, $2x+3$, $6x+8$.

646. x^2+2x, $3x^2-1$, $x+4$.

647. x^2-x+3, $2x^2+x$, $2x-4$.

648. e^x, e^{2x}, e^{3x}. **649.** x, e^x, xe^x.

650. 1, $\sin^2 x$, $\cos 2x$. **651.** $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $2+e^x$.

652. $\ln(x^2)$, $\ln 3x$, 7.　　**653.** x, 0, e^x.

654. $\operatorname{sh} x$, $\operatorname{ch} x$, $2e^x-1$, $3e^x+5$.

655. 2^x, 3^x, 6^x.　　**656.** $\sin x$, $\cos x$, $\sin 2x$.

657. $\sin x$, $\sin(x+2)$, $\cos(x-5)$.

658. $\sqrt{x}$, $\sqrt{x+1}$, $\sqrt{x+2}$.

659. $\operatorname{arc\,tg} x$, $\operatorname{arc\,ctg} x$, 1.　**660.** x^2, $x|x|$.

661. x, $|x|$, $2x+\sqrt{4x^2}$.　**662.** x, x^3, $|x^3|$.

663. ① 由图 1 的图象所表示的函数在区间$[a, b]$上是线性相关的吗？ ② 这个问题对于图 2 呢？

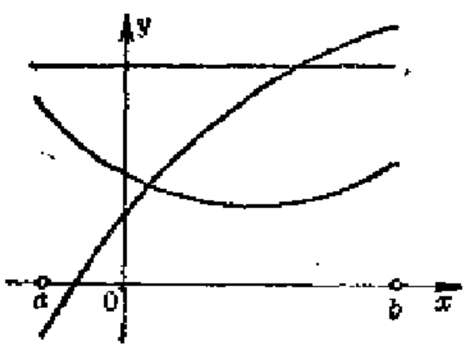


图 1

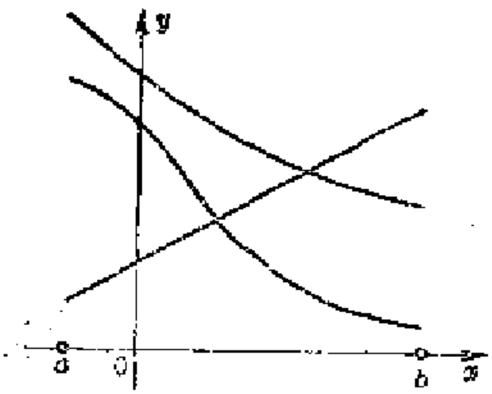


图 2

664. 已知函数 y_1, …, y_n 的伏隆斯基(Вронский)行列式在点 x_0 等于零，而在点 x_1 不等于零. 能够说这些函数在区间$[x_0, x_1]$上具有什么样的线性相关(或者无关)性？

665. 函数 y_1, …, y_n 的伏隆斯基行列式对所有的 x 都等于零. 这些函数能够线性相关吗？ 能够线性无关吗？

666. 对于函数 y_1, …, y_n, ① 如果只知道它们是线性相关的，能够说这些函数具有什么样的伏隆斯基行列式？ ② 如果只知道它们是线性无关的呢？

667. 函数 $y_1=x$, $y_2=x^5$, $y_3=|x^5|$都满足方程 $x^2y''-$

$5xy'+5y=0$. 它们在区间$(-1, 1)$上是线性相关的吗？试说明其理由.

668. 证明，方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$（系数连续的）对于同一 x 值取极大值的两个解线性相关.

669. 给定方程 $y'''+xy=0$ 的四个解，其图形在同一点彼此相切. 这些解能有几个是线性相关的？

670. 利用关于线性方程解的存在区间的已知结论（[1]，第 V 章，§1 末），确定下列各方程在给定初始条件下的解具有怎样的存在区间（不解出方程）：① $(x+1)y''-2y=0$, $y(0)=0$, $y'(0)=2$. ② $y''+y\operatorname{tg}x=0$, $y(5)=1$, $y'(5)=0$.

671. 在(x, y)平面上，（系数连续的）方程 $y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=0$ 的两个解的图形能够彼此 ① 相交，② 相切吗？

672. 对于怎样的 n，**671** 题的方程可能具有特解 $y=x^5$？

673. 在区间$(-1, 1)$上几阶的线性齐次方程可能具有这样的四个特解：$y_1=x^2-2x+2$, $y_2=(x-2)^2$, $y_3=x^2+x-1$, $y_4=1-x$？

在 **674～680** 的每个问题中，写出具有给定特解的线性齐次微分方程（尽可能是低阶的）.

674. $1, \cos x$. **675.** x, e^x.

676. $3x, x-2, e^x+1$.

677. $x^2-3x, 2x^2+9, 2x+3$.

678. $e^x, \operatorname{sh}x, \operatorname{ch}x$. **679.** x, x^2, e^x.

680. $x, x^3, |x^3|$.

在 **681～701** 各题中，已知给定方程的特解，求出其通解. 在那些没给出特解的问题中，可以用选择法. 例如，

用形如指数函数 $y_1=e^{ax}$ 或者代数多项式 $y_1=x^n+ax^{n-1}+bx^{n-2}+\cdots$ 求出其特解.

681. $(2x+1)y''+4xy'-4y=0$.

682. $x^2(x+1)y''-2y=0$; $y_1=1+\dfrac{1}{x}$.

683. $xy''-(2x+1)y'+(x+1)y=0$.

684. $xy''+2y'-xy=0$; $y_1=\dfrac{e^x}{x}$.

685. $y''-2(1+\operatorname{tg}^2 x)y=0$; $y_1=\operatorname{tg} x$.

686. $x(x-1)y''-xy'+y=0$.

687. $(e^x+1)y''-2y'-e^xy=0$; $y_1=e^x-1$.

688. $x^2y''\ln x-xy'+y=0$.

689. $y''-y'\operatorname{tg} x+2y=0$; $y_1=\sin x$.

690. $(x^2-1)y''+(x-3)y'-y=0$.

691. $xy''-(x+1)y'-2(x-1)y=0$.

692. $y''+4xy'+(4x^2+2)y=0$; $y_1=e^{ax^2}$.

693. $xy''-(2x+1)y'+2y=0$.

694. $x(2x+1)y''+2(x+1)y'-2y=0$.

695. $x(x+4)y''-(2x+4)y'+2y=0$.

696. $x(x^2+6)y''-4(x^2+3)y'+6xy=0$.

697. $(x^2+1)y''-2y=0$.

698. $2x(x+2)y''+(2-x)y'+y=0$.

699. $xy'''-y''-xy'+y=0$; $y_1=x$, $y_2=e^x$.

700. $x^2(2x-1)y'''+(4x-3)xy''-2xy'+2y=0$;

$$y_1=x,\ y_2=1/x.$$

701. $(x^2-2x+3)y'''-(x^2+1)y''+2xy'-2y=0$;

$$y_1=x,\ y_2=e^x.$$

在**702**、**703**两题中，如果已知其对应的线性齐次方程的特解是多项式，求出线性非齐次方程的通解。

702. $(x+1)xy''+(x+2)y'-y=x+\dfrac{1}{x}$.

703. $(2x+1)y''+(2x-1)y'-2y=x^2+x$.

在**704**、**705**两题中，已知二阶线性非齐次方程的两个特解，试求出其通解。

704. $(x^2-1)y''+4xy'+2y=6x$; $y_1=x$, $y_2=\dfrac{x^2+x+1}{x+1}$.

705. $(3x^3+x)y''+2y'-6xy=4-12x^2$; $y_1=2x$,
$y_2=(x+1)^2$.

在**706～710**各方程中，用未知函数的线性代换 $y=\alpha(x)z$ 消去含有一阶导数的项。

706. $x^2y''-2xy'+(x^2+2)y=0$.

707. $x^2y''-4xy'+(6-x^2)y=0$.

708. $(1+x^2)y''+4xy'+2y=0$.

709. $x^2y''+2x^3y'+(x^2-2)y=0$.

710. $xy''+y'+xy=0$.

在**711～715**各方程中，用自变量代换 $t=\varphi(x)$ 消去含有一阶导数的项。

711. $xy''-y'-4x^3y=0$.

712. $(1+x^2)y''+xy'+y=0$.

713. $x^2(1-x^2)y''+2(x-x^3)y'-2y=0$.

714. $y''-y'+e^{4x}y=0$.　　**715.** $2xy''+y'+xy=0$.

716. 已知二阶线性非齐次方程的三个特解为 $y_1=1$,

$y_2=x$, $y_3=x^2$，写出其通解.

717. 如果已知方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的所有解及各自的一阶导数当 $x\to+\infty$ 时都趋于零，能够说 $p(x)$ 是怎样的函数？

提示　利用刘维尔公式.

718. 证明，当 $q(x)<0$ 时方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的解不可能有正的极大值.

719. 方程 $y''+q(x)y=0$ 解的图形的拐点可能在哪里？

720. 方程 $y''+q(x)y=0$（函数 $q(x)$ 连续）的两个解的图形能够处于图 3①，图 3②，图 3③，图 3④ 的位置吗？

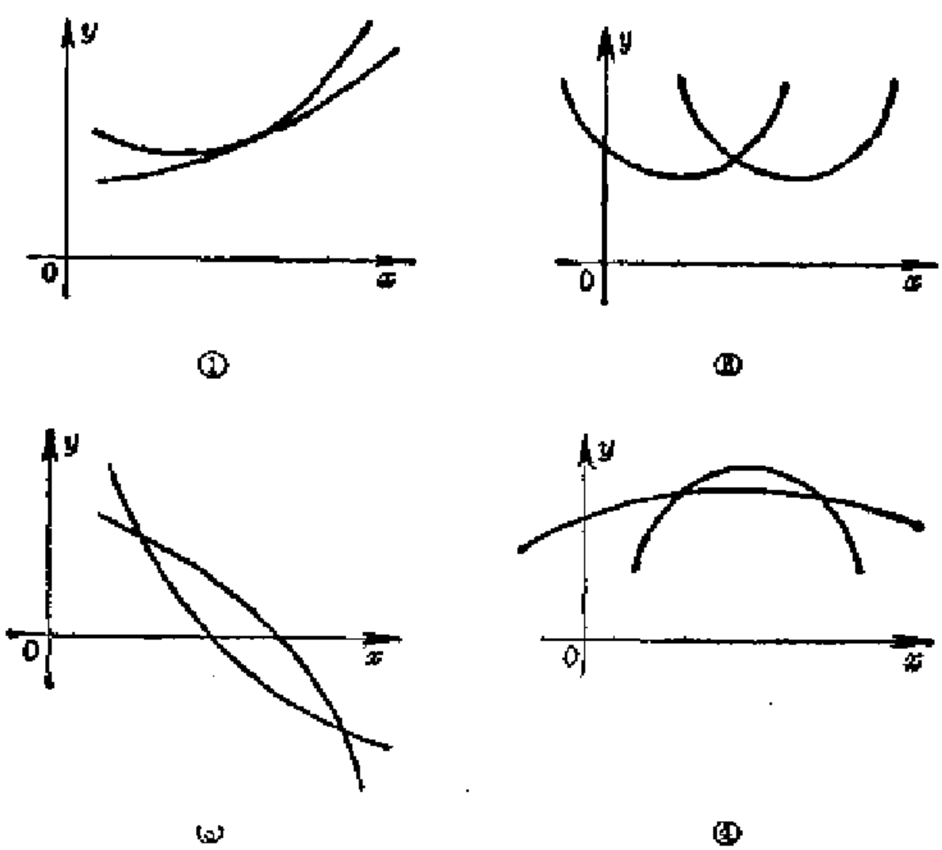


图　3

721. 证明，(系数连续的)方程 $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ 的任何两个线性无关的解的比，都不可能有局部极大值点.

722. 证明，当 $q(x)>0$ 时对于方程 $y''+q(x)y=0$ 的任何解 $y(x)$ 来说，比 $y'(x)/y(x)$ 在 $y(x)\neq 0$ 的区间上都是递减的.

723. 试证，当 $q(x)\leqslant 0$ 时方程 $y''+q(x)y=0$ 以 $y(x_0)>0$, $y'(x_0)>0$ 为正初始条件的所有解，对于所有的 $x>x_0$ 都是正的.

724. 试证，方程 $y''-x^2y=0$ 以 $y(0)=1$, $y'(0)=0$ 为初始条件的解是一个处处为正的偶函数.

725*. 试证，当 $q(x)\leqslant 0$ 时边值问题

$$y''+q(x)y=0,\ y(x_1)=a,\ y(x_2)=b$$

对于任何的 a、b 和 $x_1\neq x_2$ 都具有唯一的解. 并证明，当 $b=0$ 时这个解是单调函数.

726. 求出方程 $y''+my=0$ 的任一(不恒为零的)解的相邻两零点间的距离，其中 $m=\text{const}>0$. 在区间 $a\leqslant x\leqslant b$ 上可能包含多少个零点?

在 **727～730** 各题中，利用上题的结果和比较定理(见[1]，第 VI 章，§2，第 3 段)，对于在给定区间上的下列方程的任一(不恒为零的)解，分别估计出相邻两零点间距离的上、下界.

727. $y''+2xy=0$, $20\leqslant x\leqslant 45$.

728. $xy''+y=0$, $25\leqslant x\leqslant 100$.

729. $y''-2xy'+(x+1)^2y=0$, $4\leqslant x\leqslant 19$.

730. $y''-2e^xy'+e^{2x}y=0$, $2\leqslant x\leqslant 6$.

731*. 试证，方程 $y''+xy=0$ 在区间 $-25\leqslant x\leqslant 25$ 上至少具有 15 个零点.

732. 设 $x_1, x_2, \cdots$是方程 $y''+q(x)y=0$ 的解按照增大的顺序依次排列的零点，其中 $q(x)>0$；当 $x_1\leqslant x<\infty$ 时函数 $q(x)$连续并且是递增的．证明，$x_{n+1}-x_n<x_n-x_{n-1}$（即相邻两零点间的距离是递减的）．

733. 在上题中用 C 表示当 $x\to\infty$ 时函数 $q(x)$的有限的或者无穷的极限．证明，$\lim\limits_{n\to\infty}(x_{n+1}-x_n)=\pi/\sqrt{C}$．

734*. 设 y 和 z 分别是方程 $y''+q(x)y=0$ 和 $z''+Q(x)z=0$ 以 $y(x_0)=z(x_0)$，$y'(x_0)=z'(x_0)$为同一初始条件的两个解，并且在区间(x_0, x_1)上有 $Q(x)>q(x)$，$y(x)>0$，$z(x)>0$．证明，在此区间上比 $z(x)/y(x)$是递减的．

735*. 假设 **732** 题的条件被满足，并且设

$$b_n=\max_{x_n\leqslant x\leqslant x_{n+1}}|y(x)|.$$

证明，$b_1>b_2>b_3>\cdots$．

736*. 假设 **733** 题中的极限 C 是有限的．证明，当 $n\to\infty$ 时 $b_n\to B>0$（用 **735** 题的记号）．

737*. 用自变量代换 $t=\varphi(x)$将方程

$$\frac{d^2y}{dx^2}\pm\frac{y}{(\psi(x))^4}=0$$

化成

$$\frac{d^2y}{dt^2}+b(t)\frac{dy}{dt}\pm y=0$$

的形式，然后用代换 $y=a(t)u$ 去掉一阶导数(这个变换叫做刘维尔变换．在许多情况下，它可以把方程 $y''+q(x)y=0$ 化成类似形式的方程，但是 y 的系数为«几乎常数»(在区间(t_0, ∞)上有微小变化)．这使我们便于研究当 $x\to\infty$ 时解的渐近性质)．

在 **738～748** 各题中，利用刘维尔变换(见 **737** 题)

和本节开始第 4 段的断言，研究给定方程的解当 $x\to+\infty$ 时的渐近性质.

738. $y''+x^4y=0$.　　**739.** $y''-x^2y=0$.

740. $y''+x^2y=0$.　　**741.** $y''+e^{2x}y=0$.

742. $xy''-y=0$.　　**743.** $y''-xy=0$.

744. $xy''+2y'+y=0$.

745. $y''-2(x-1)y'+x^2y=0$.

746*. $y''+(x^4+1)y=0$.　　**747*.** $(x^2+1)y''-y=0$.

748*. $x^2y''+y\ln^2x=0$.

在 **749**, **750** 两题中，应用两次刘维尔变换，给出方程解的更精确的渐近表示.

749*. $y''-4x^2y=0$.　　**750*.** $xy''+y=0$.

§13. 边 值 问 题

1. 为了求出边值问题

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=f(x),\ x_0\leqslant x\leqslant x_1, \tag{1}$$

$$\alpha y'(x_0)+\beta y(x_0)=0,\ \gamma y'(x_1)+\delta y(x_1)=0 \tag{2}$$

的解，应当把方程(1)的通解代入边界条件(2)，并且从这些条件中确定出(如果可能的话)在通解中出现的任意常数. 与初值问题(柯西问题)不同的是边值问题并不总是有解.

2. 定义在 $x_0\leqslant x\leqslant x_1$, $x_0<s<x_1$ 上，并对区间 $(x_0,\ x_1)$ 上每个固定的 s 具有下列性质的函数 $G(x,\ s)$(作为 x 的函数)，叫做边值问题(1), (2)的格林(Грин)函数:

1) 当 $x\neq s$ 时它满足方程

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=0; \tag{3}$$

2) 当 $x=x_0$ 和 $x=x_1$ 时它满足边界条件(2);

3) 当 $x=s$ 时它对 x 连续，而对 x 的导数具有等于 $1/a_0(s)$ 的跳跃，即

$$G(s+0,\ s)=G(s-0,\ s),\ G'_x\Big|_{x=s+0}=G'_x\Big|_{x=s-0}+\frac{1}{a_0(s)}. \tag{4}$$

为了求出边值问题(1)，(2)的格林函数，应当求出方程(3)分别满足边界条件(2)的第一式和第二式的两个(不恒为零的)解 $y_1(x)$ 和 $y_2(x)$。如果 $y_1(x)$ 不同时满足两个边界条件，则格林函数存在，并且可以求出其形如

$$G(x,\ s)=\begin{cases} ay_1(x) & (x_0\leqslant x\leqslant s),\\ by_2(x) & (s\leqslant x\leqslant x_1). \end{cases} \tag{5}$$

函数 a 和 b 依赖于 s，并且可以用函数(5)满足条件(4)来确定，即

$$by_2(s)=ay_1(s),\ by'_2(s)=ay'_1(s)+\frac{1}{a_0(s)}.$$

3. 如果格林函数 $G(x,\ s)$ 存在，则边值问题(1)，(2)的解可以用公式

$$y(x)=\int_{x_0}^{x}G(x,\ s)f(s)ds$$

表示.

4. 数 λ 叫做问题

$$a_0(x)y''+a_1(x)y'+a_2(x)y=\lambda y, \tag{6}$$

$$\alpha y'(x_0)+\beta y(x_0)=0,\ \gamma y'(x_1)+\delta y(x_1)=0 \tag{7}$$

的特征值，如果对于这个 λ，方程(6)具有满足边界条件(7)的不恒为零的解 $y(x)$。这个解 $y(x)$ 叫做特征函数.

求出 **751～762** 各方程满足给定边界条件的解.

751. $y''-y=2x;\ y(0)=0,\ y(1)=-1.$

752. $y''+y'=1;\ y'(0)=0,\ y(1)=1.$

753. $y''-y'=0;\ y(0)=-1,\ y'(1)-y(1)=2.$

754. $y''+y=1;\ y(0)=0,\ y\left(\frac{\pi}{2}\right)=0.$

755. $y''+y=1;\ y(0)=0,\ y(\pi)=0.$

756. $y''+y=2x-\pi$; $y(0)=0$, $y(\pi)=0$.

757. $y''-y'-2y=0$; $y'(0)=2$, $y(+\infty)=0$.

758. $y''-y=1$; $y(0)=0$, 当 $x\to+\infty$ 时 $y(x)$有界.

759. $y''-2iy=0$; $y(0)=-1$, $y(+\infty)=0$.

760. $x^2y''-6y=0$; $y(0)$有界, $y(1)=2$.

761. $x^2y''-2xy'+2y=0$; 当 $x\to0$ 时 $y(x)=o(x)$, $y(1)=3$.

762. $x^2y''+5xy'+3y=0$; $y'(1)=3$, 当 $x\to+\infty$ 时 $y(x)=O(x^{-2})$.

763*. 对于怎样的 a, 边值问题 $y''+ay=1$, $y(0)=0$, $y(1)=0$ 无解?

对于 **764～779** 题的每一个边值问题, 作出格林函数.

764. $y''=f(x)$· $y(0)=0$, $y(1)=0$.

765. $y''+y=f(x)$; $y'(0)=0$, $y(\pi)=0$.

766. $y''+y'=f(x)$; $y(0)=0$, $y'(1)=0$.

767. $y''-y=f(x)$; $y'(0)=0$, $y'(2)+y(2)=0$.

768*. $y''+y=f(x)$; $y(0)=y(\pi)$, $y'(0)=y'(\pi)$.

769. $x^2y''+2xy'=f(x)$; $y(1)=0$, $y'(3)=0$.

770. $xy''-y'=f(x)$; $y'(1)=0$, $y(2)=0$.

771. $x^2y''-2y=f(x)$; $y(1)=0$, $y(2)+2y'(2)=0$.

772. $y''=f(x)$; $y(0)=0$, 当 $x\to+\infty$ 时 $y(x)$有界.

773. $y''+y'=f(x)$; $y'(0)=0$, $y(+\infty)=0$.

774. $xy''+y'=f(x)$; $y(1)=0$, 当 $x\to+\infty$ 时 $y(x)$ 有界.

775. $y''+4y'+3y=f(x)$; $y(0)=0$, 当 $x\to+\infty$ 时 $y(x)$

$=O(e^{-2x})$.

776. $x^2y''+xy'-y=f(x)$; $y(1)=0$, 当 $x\to+\infty$ 时 $y(x)$ 有界.

777. $x^2y''+2xy'-2y=f(x)$; $y(0)$ 有界, $y(1)=0$.

778. $y''-y=f(x)$; 当 $x\to\pm\infty$ 时 $y(x)$ 有界.

779. $x^2y''-2y=f(x)$; 当 $x\to0$ 和 $x\to+\infty$ 时 $y(x)$ 有界.

780. 对于怎样的 a, 存在边值问题 $y''+ay=f(x)$, $y(0)=0$, $y(1)=0$ 的格林函数?

781*. 如果已知 $0\leqslant f(x)\leqslant m$, 试从上、下两侧估计方程 $x^2y''+2xy'-2y=f(x)$ 当 $x\to0$ 和 $x\to+\infty$ 时有界的解 $y(x)$ 及其一阶导数.

提示 把解用格林函数写出来.

在 **782～785** 各题中, 求出特征值和特征函数.

782. $y''=\lambda y$; $y(0)=0$, $y(l)=0$.

783. $y''=\lambda y$; $y'(0)=0$, $y'(l)=0$.

784. $y''=\lambda y$; $y(0)=0$, $y'(l)=0$.

785. $x^2y''=\lambda y$; $y(1)=0$, $y(a)=0(a>1)$.

§14. 常系数线性方程组

1. 一般说来, 可以用消去未知函数的方法把方程组化为只含一个未知函数的高阶方程(见[1], 第 VII 章, §1, 第 2 段或者[4], 第 8 章, §2). 这个方法只是对于解不太复杂的方程组是方便的.

例 解方程组 $\dot{x}=y+1$, $\dot{y}=2e^t-x$.

消去 y. 由第一个方程有 $y=\dot{x}-1$. 代入第二个方程时, 就得到 $\ddot{x}=2e^t-x$. 解出这个二阶方程 (用 §11 的方法), 求出 $x=C_1\cos t+$

$C_2\sin t+e^t$. 可见，$y=\dot{x}-1=-C_1\sin t+C_2\cos t+e^t-1$.］

2. 为了解出方程组$\left(\text{其中 }\dot{x}\text{ 表示 }\dfrac{dx}{dt}\right)$

$$\begin{cases}\dot{x}_1=a_{11}x_1+\cdots+a_{1n}x_n,\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ \dot{x}_n=a_{n1}x_1+\cdots+a_{nn}x_n,\end{cases}\tag{1}$$

或者用向量记为 $\dot{x}=Ax$，其中 x 是向量，A 是矩阵：

$$x=\begin{pmatrix}x_1\\ \cdots\\ x_n\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}a_{11}&\cdots&a_{1n}\\ \cdots\cdots&\cdots\\ a_{n1}&\cdots&a_{nn}\end{pmatrix},$$

应当求出特征方程

$$\begin{vmatrix}a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n}\\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots\cdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda\end{vmatrix}=0\tag{2}$$

的根.

对于特征方程的每个单根 λ_i，都存在一个解 $C_iv^ie^{\lambda_it}$ 与之对应，其中 C_i 是任意常数，v^i 是矩阵 A 对应于 λ_i 的特征向量.

对于重根 λ，如果具有与其重数相等的线性无关的特征向量 v^1，…，v^k，则与其对应的解为 $C_1v^1e^{\lambda t}+\cdots+C_kv^ke^{\lambda t}$.

如果对于重数为 k 的根 λ 只有 m 个线性无关的特征向量，而 $m<k$，则对应于这个 λ，可以求出形如 $k-m$ 次多项式与 $e^{\lambda t}$ 的乘积，即形如

$$\begin{cases}x_1=(a+bt+\cdots+dt^{k-m})e^{\lambda t},\\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ x_n=(p+qt+\cdots+st^{k-m})e^{\lambda t}\end{cases}\tag{3}$$

的解①. 为了求出系数 a，b，…，s，应当把解(3)代入方程组(1). 使方程左右两端同类项的系数相等，就得到一个关于 a，b，…，s 的线性代数方程组. 然后再求出这个方程组的一般解. 系数 a，b，…，s 应该依赖于 k 个任意常数，其中 k 是特征根 λ 的重数.

---

① 如果已知矩阵 A 的约当(Жордан)形，当 $k\leqslant 3$ 时数 $k-m$ 不可能减小，而当 $k\geqslant 4$ 时则是可能的.

对于每个 λ，在求出上述形状的解，并且将其相加之后，就得到方程组(1)的通解。

例 解方程组

$$\dot{x}=2x+y+z,\ \dot{y}=-2x-z,\ \dot{z}=2x+y+2z. \tag{4}$$

建立并求解特征方程

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & 1 \\ -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & 1 & 2-\lambda \end{vmatrix}=0, \tag{5}$$

$$\lambda^3-4\lambda^2+5\lambda-2=0,\ \lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=1.$$

对于单根 $\lambda_1=2$，当解出方程组

$$\begin{cases} \beta+\gamma=0, \\ -2\alpha-2\beta-\gamma=0, \\ 2\alpha+\beta=0 \end{cases} \tag{6}$$

(这个方程组的系数等于当 $\lambda=2$ 时行列式(5)的元素)时，就可以求出特征向量$(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$。从(6)中求得 $2\alpha=-\beta=\gamma$。可见，向量$(1,\ -2,\ 2)$就是特征向量，而

$$x=e^{2t},\ y=-2e^{2t},\ z=2e^{2t} \tag{7}$$

就是方程组(4)的一个特解。

对于重根 $\lambda=1$，首先确定线性无关特征向量的个数，当 $\lambda=1$ 时由(5)式我们得到矩阵

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

它的阶 $n=3$，秩 $r=2$。线性无关特征向量的个数 $m=n-r=1$。根 $\lambda=1$ 具有重数 $k=2$。因为 $k>m$，所以应该求形如 $k-m=1$ 次多项式与 $e^{\lambda t}$ 的乘积，即形如

$$x=(a+bt)e^t,\ y=(c+dt)e^t,\ z=(f+gt)e^t \tag{8}$$

的解。为了求出系数 $a,\ b,\ \cdots$，将(8)式代入方程组(4)，并且使同类项

的系数相等. 我们就得到方程组

$$\begin{aligned} b+d+g=0,\ b=a+c+f, \\ -2b-d-g=0,\ d=-2a-c-f, \\ 2b+d+g=0,\ g=2a+c+f. \end{aligned} \tag{9}$$

我们来求出这个方程组的一般解. 从左边的两个方程, 我们有 $b=0$, $g=-d$. 将其代入余下的各方程时, 就得到

$$0=a+c+f,\ d=-2a-c-f \tag{10}$$

(其它方程是已经写出的结果). 解方程组(10), 例如对 a 和 f:

$$a=-d,\ f=d-c.$$

这样一来, 所有的未知数都可以用 c 和 d 表示出来. 设 $c=C_1$, $d=C_2$, 则有 $a=-C_2$, $b=0$, $f=C_2-C_1$; $g=-C_2$. 方程组(9)的一般解已经被求出.

将所求出的 a, b, …的值代入(8)式并且加上乘以 C_3 的特解(7), 就得到方程组(4)的通解:

$$x=-C_2e^t+C_3e^{2t},\ y=(C_1+C_2t)e^t-2C_3e^{2t},$$

$$z=(C_2-C_1-C_2t)e^t+2C_3e^{2t}.$$

8. 方程组(1)的另一个解法. 对于任何一个矩阵都存在一组使其具有约当形的基底. 约当形的每个 $p\geqslant 1$ 阶的约当块都有一组满足方程

$$\begin{aligned} &Ah_1=\lambda h_1, \qquad h_1\neq 0, \\ &Ah_2=\lambda h_2+h_1, \\ &Ah_3=\lambda h_3+h_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &Ah_p=\lambda h_p+h_{p-1} \end{aligned} \tag{11}$$

的基底向量 $h_1, h_2, \cdots, h_p$ 与之对应. 向量 h_1 叫做特征向量, 而 $h_2, h_3, \cdots, h_p$ 叫做伴随向量. 对于每一组 $h_1, h_2, \cdots, h_p$, 都有方程组 $\dot{x}=Ax$ 的 p 个线性无关的解 $x^1, x^2, \cdots, x^p$(上标表示解的序码)与之对应:

$$
\begin{aligned}
x^1 &= e^{\lambda t} h_1,\\
x^2 &= e^{\lambda t}\left(\frac{t}{1!}h_1 + h_2\right),\\
x^3 &= e^{\lambda t}\left(\frac{t^2}{2!}h_1 + \frac{t}{1!}h_2 + h_3\right),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
x^p &= e^{\lambda t}\left(\frac{t^{p-1}}{(p-1)!}h_1 + \frac{t^{p-2}}{(p-2)!}h_2 + \cdots + \frac{t}{1!}h_{p-1} + h_p\right).
\end{aligned}
\tag{12}
$$

所有这样的解的总数等于所有约当块阶数的和，即等于矩阵的阶数。这些解构成方程组 $\dot{x}=Ax$ 的基本解组.

对于公式(12)的记忆方法. 对应特征向量 h_1 的是解 $x^1=e^{\lambda t}h_1$. 如果都去掉 $e^{\lambda t}$，则(12)式右端的每一行可由前一行对 t 的积分得到，同时要将积分常数取做接下来的一个向量.

4. 在 λ 为复数根的情形时，所讲的方法将给出用复数值函数表示的解. 如果这时方程组(1)的系数是实的，则解也可以只用实数值函数表示. 为此，需要用到对应于根 $\lambda=\alpha+\beta i(\beta\neq0)$ 的复数值解的实数部分和虚数部分是线性无关解的这一事实.

例 解方程组 $\dot{x}=4x-y,\ \dot{y}=5x+2y$.

建立并求解特征方程

$$
\begin{vmatrix}4-\lambda & -1\\ 5 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda^2-6\lambda+13=0,\ \lambda=3\pm2i.
$$

对于根 $\lambda=3+2i$，求特征向量 $(a,\ b)$:

$$
\begin{cases}(1-2i)a-b=0,\\ 5a-(1+2i)b=0.\end{cases}
$$

可以取 $a=1,\ b=1-2i$. 我们有特解

$$
x=e^{(3+2i)t},\ y=(1-2i)e^{(3+2i)t}.
$$

因为所给的方程组是实系数的，所以对应于根 $\lambda=3-2i$ 的解无需再求，它将是所求出解的复共轭. 为了得到两个实数解，要取所求出复数解的实数部分和虚数部分. 因为 $e^{(3+2i)t}=e^{3t}(\cos2t+i\sin2t)$，所以

$$
\begin{cases}x_1=\operatorname{Re}e^{(3+2i)t} &=e^{3t}\cos2t,\\ y_1=\operatorname{Re}(1-2i)e^{(3+2i)t} &=e^{3t}(\cos2t+2\sin2t),\end{cases}
$$

$$\begin{cases} x_2=\operatorname{Im} e^{(3+2i)t} & =e^{3t}\sin 2t, \\ y_2=\operatorname{Im}(1-2i)e^{(3+2i)t}=e^{3t}(\sin 2t-2\cos 2t). \end{cases}$$

把通解用所求出的两个线性无关的解表示：

$$x=C_1x_1+C_2x_2=C_1e^{3t}\cos 2t+C_2e^{3t}\sin 2t,$$

$$y=C_1y_1+C_2y_2=C_1e^{3t}(\cos 2t+2\sin 2t)+C_2e^{3t}(\sin 2t-2\cos 2t).$$

5．为了解出未化成正规形式的方程组

$$\begin{cases} a_{10}x^{(n)}+a_{11}x^{(n-1)}+\cdots+a_{1n}x+b_{10}y^{(n)}+b_{11}y^{(n-1)}+\cdots+b_{1n}y=0, \\ a_{20}x^{(n)}+a_{21}x^{(n-1)}+\cdots+a_{2n}x+b_{20}y^{(n)}+b_{21}y^{(n-1)}+\cdots+b_{2n}y=0, \end{cases}$$

应当建立特征方程

$$\begin{vmatrix} a_{10}\lambda^n+a_{11}\lambda^{n-1}+\cdots+a_{1n} & b_{10}\lambda^n+b_{11}\lambda^{n-1}+\cdots+b_{1n} \\ a_{20}\lambda^n+a_{21}\lambda^{n-1}+\cdots+a_{2n} & b_{20}\lambda^n+b_{21}\lambda^{n-1}+\cdots+b_{2n} \end{vmatrix}=0$$

并求出它的根．此后再用第2段的方法求解．

类似地可以求解有三个或者更多个方程的方程组．

6．对于常系数的线性非齐次方程组

$$\dot{x}_i=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n+f_i(t), \quad i=1, \cdots, n, \tag{13}$$

当函数 $f_i(t)$ 是由函数 $b_0+b_1t+\cdots+b_mt^m$, $e^{\alpha t}$, $\cos\beta t$, $\sin\beta t$ 的和与积组成时，可以用待定系数法求出其特解．这可以按照下列变换，用求解一个常系数线性方程的办法来作，见§11的第2段．如果 $f_i(t)=P_{m_i}(t)e^{\gamma t}$，其中 $P_{m_i}(t)$ 是 m_i 次多项式，则方程组(13)的特解不能用 $t^sQ_m(t)e^{\gamma t}$ 的形式，而要用

$$x_i=Q^i_{m+s}(t)e^{\gamma t}, \quad i=1, \cdots, n \tag{14}$$

的形式来求，其中 $Q^i_{m+s}(t)$ 是未知系数的 $m+s$ 次多项式，$m=\max m_i$．当 γ 不是特征方程(2)的根时 $s=0$，而当 γ 是根时，则可以取 s 等于这个根的重数（或者更确切地说，s 比齐次方程组的通解中被 $e^{\gamma t}$ 所乘的多项式的最高次数大1）．多项式的未知系数可以用把(14)式代入给定的方程组(13)并比较同类项系数的方法来确定．

也可以类似地确定当 $f_i(t)$ 中含有 $e^{\alpha t}\cos\beta t$ 和 $e^{\alpha t}\sin\beta t$ 时的多项式的次数，而数 $\gamma=\alpha+\beta i$ 是特征方程的根．

例　解方程组

$$\begin{cases} \dot{x}=4x-y+e^{3t}(t+\sin t), \\ \dot{y}=x+2y+te^{3t}\cos t. \end{cases} \tag{15}$$

首先，对齐次方程组 $\dot{x}=4x-y$, $\dot{y}=x+2y$, 求出特征方程的根 $\lambda_1=\lambda_2=3$, 并象在第 2 段那样求出通解

$$x_0=(C_1t+C_2)e^{3t},\ y_0=(C_1t+C_2-C_1)e^{3t}.$$

在方程组(15)中对于函数 te^{3t}, $e^{3t}\sin t$, $te^{3t}\cos t$, 数 $\alpha+\beta i$ 相应地等于 3, $3+i$, $3+i$. 因此，应当分别求出方程组

$$\dot{x}=4x-y+te^{3t},\qquad \dot{y}=x+2y, \tag{16}$$

$$\dot{x}=4x-y+e^{3t}\sin t,\ \dot{y}=x+2y+te^{3t}\cos t \tag{17}$$

的特解. 对于方程组(16), $\alpha+\beta i=3=\lambda_1=\lambda_2$, $s=2$, $m=1$. 根据(14)可以求出形如

$$x_1=(at^3+bt^2+ct+d)e^{3t},\ y_1=(ft^3+gt^2+ht+j)e^{3t}$$

的特解. 对于方程组(17), $\alpha+\beta i=3+i\neq\lambda_{1,2}$, $s=0$, $m=1$. 特解具有

$$x_2=(kt+l)e^{3t}\sin t+(mt+n)e^{3t}\cos t,$$

$$y_2=(pt+q)e^{3t}\sin t+(rt+s)e^{3t}\cos t$$

的形式. 求出系数 a, b, …的值以后，方程组(15)的通解可以写成

$$x=x_0+x_1+x_2,\ y=y_0+y_1+y_2$$

的形式.

7. 如果知道具有系数 $a_{ik}(t)$ 的齐次方程组的通解，就可以用常数变易法求出非齐次方程组

$$\dot{x}_i=a_{i1}(t)x_1+\cdots+a_{in}(t)x_n+f_i(t),\quad i=1,\ \cdots,\ n,$$

的解. 为此要在齐次方程组的通解公式中，用未知函数 $C_i(t)$ 代替任意常数 C_i. 再把所得到的关于 x_i 的表达式代入给定的非齐次方程组，并且从这个方程组中求出 $C_i(t)$.

8. 级数和

$$e^A=E+\frac{A}{1!}+\frac{A^2}{2!}+\frac{A^3}{3!}+\cdots \tag{18}$$

叫做矩阵 A 的指数函数 e^A, 其中 E 是单位矩阵. 对于任何矩阵 A, 这个级数都收敛.

e^A 的性质：

① 如果 $A=CMC^{-1}$，则 $e^A=Ce^MC^{-1}$；

② 如果 $AB=BA$，则 $e^{A+B}=e^A\cdot e^B=e^B\cdot e^A$；

③ 矩阵 $X(t)=e^{tA}$ 满足方程 $\dfrac{dX}{dt}=AX$；$X(0)=E$。

e^A 的求法：

1）用解微分方程组的方法．根据性质 ③ 矩阵 e^{tA} 的第 i 列是以 $x_i(0)=1$ 和当 $k\neq i$ 时 $x_k(0)=0$ 为初始条件(用向量表示)的方程组 $\dot{x}=Ax$ 的解(x_i 是向量 x 的第 i 个坐标)．

2）用把矩阵化成约当形的方法．假设 C 是这样的矩阵，$C^{-1}AC=M$ 具有约当形，即由约当块 K_i 组成．每个约当块都具有 $K=\lambda E+F$ 的形式，矩阵 F 的所有元素除主对角线以上第一斜行之外都为零．因此 $F^m=0$，其中 m 是矩阵 F 的阶，于是用级数(18)容易求出 e^F．因为还有 $e^{\lambda E}=e^\lambda E$，所以

$$e^K=e^{\lambda E+F}=e^{\lambda E}\cdot e^F=e^\lambda E\cdot e^F=e^\lambda e^F.$$

由约当块 e^{K_i} 组成矩阵 e^M 后，由性质 ① 将求出 e^A．证明和例见[5]，第 1 章，§ 12～§ 14．

在 **786～812** 各题中，解出给定的方程组$\left(\dot{x}\text{ 表示 }\dfrac{dx}{dt}\right.$ 等等；为了减少计算量，在有些问题中给出了特征方程的根$\left.\right)$．

786. $\begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\ \dot{y}=3x+4y.\end{cases}$　　**787.** $\begin{cases}\dot{x}=x-y,\\ \dot{y}=y-4x.\end{cases}$

788. $\begin{cases}\dot{x}+x-8y=0,\\ \dot{y}-x-y=0.\end{cases}$　　**789.** $\begin{cases}\dot{x}=x+y,\\ \dot{y}=3y-2x.\end{cases}$

790. $\begin{cases}\dot{x}=x-3y,\\ \dot{y}=3x+y.\end{cases}$　　**791.** $\begin{cases}\dot{x}+x+5y=0,\\ \dot{y}-x-y=0.\end{cases}$

792. $\begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\ \dot{y}=4y-x.\end{cases}$　　**793.** $\begin{cases}\dot{x}=3x-y,\\ \dot{y}=4x-y.\end{cases}$

794. $\begin{cases} \dot{x}=2y-3x, \\ \dot{y}=y-2x. \end{cases}$ **795.** $\begin{cases} \dot{x}-5x-3y=0, \\ \dot{y}+3x+y=0. \end{cases}$

796. $\begin{cases} \dot{x}=x+z-y, \\ \dot{y}=x+y-z, \\ \dot{z}=2x-y \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1)$. **797.** $\begin{cases} \dot{x}=x-2y-z, \\ \dot{y}=y-x+z, \\ \dot{z}=x-z \end{cases}$ $(\lambda_1=0,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1)$.

798. $\begin{cases} \dot{x}=2x-y+z, \\ \dot{y}=x+2y-z, \\ \dot{z}=x-y+2z \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=3)$. **799.** $\begin{cases} \dot{x}=3x-y+z, \\ \dot{y}=x+y+z, \\ \dot{z}=4x-y+4z \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=5)$.

800. $\begin{cases} \dot{x}=4y-2z-3x, \\ \dot{y}=z+x, \\ \dot{z}=6x-6y+5z \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=2,\ \lambda_3=-1)$. **801.** $\begin{cases} \dot{x}=x-y-z, \\ \dot{y}=x+y, \\ \dot{z}=3x+z \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=1\pm 2i)$.

802. $\begin{cases} \dot{x}=2x+y, \\ \dot{y}=x+3y-z, \\ \dot{z}=2y+3z-x \end{cases}$ $(\lambda_1=2,\ \lambda_{2,3}=3\pm i)$. **803.** $\begin{cases} \dot{x}=2x+2z-y, \\ \dot{y}=x+2z, \\ \dot{z}=y-2x-z \end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_{2,3}=\pm i)$.

804. $\begin{cases} \dot{x}=4x-y-z, \\ \dot{y}=x+2y-z, \\ \dot{z}=x-y+2z \end{cases}$ $(\lambda_1=2,\ \lambda_2=\lambda_3=3)$. **805.** $\begin{cases} \dot{x}=2x-y-z, \\ \dot{y}=3x-2y-3z, \\ \dot{z}=2z-x+y \end{cases}$ $(\lambda_1=0,\ \lambda_2=\lambda_3=1)$.

806. $\begin{cases} \dot{x}=y-2x-2z, \\ \dot{y}=x-2y+2z, \\ \dot{z}=3x-3y+5z \end{cases}$ $(\lambda_1=3,\ \lambda_2=\lambda_3=-1)$. **807.** $\begin{cases} \dot{x}=3x-2y-z, \\ \dot{y}=3x-4y-3z, \\ \dot{z}=2x-4y \end{cases}$ $(\lambda_1=\lambda_2=2,\ \lambda_3=-5)$.

808. $\begin{cases}\dot{x}=x-y+z,\\ \dot{y}=x+y-z,\\ \dot{z}=2z-y\end{cases}$ $(\lambda_1=\lambda_2=1,\ \lambda_3=2)$.

809. $\begin{cases}\dot{x}=y-2z-x,\\ \dot{y}=4x+y,\\ \dot{z}=2x+y-z\end{cases}$ $(\lambda_1=1,\ \lambda_2=\lambda_3=-1)$.

810. $\begin{cases}\dot{x}=2x+y,\\ \dot{y}=2y+4z,\\ \dot{z}=x-z\end{cases}$ $(\lambda_1=\lambda_2=0,\ \lambda_3=3)$.

811. $\begin{cases}\dot{x}=2x-y-z,\\ \dot{y}=2x-y-2z,\\ \dot{z}=2z-x+y\end{cases}$ $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=1)$.

812. $\begin{cases}\dot{x}=4x-y,\\ \dot{y}=3x+y-z,\\ \dot{z}=x+z\end{cases}$ $(\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=2)$.

在 **813～825** 各题中，解出未化成正规形式的方程组.

813. $\begin{cases}\ddot{x}=2x-3y,\\ \ddot{y}=x-2y.\end{cases}$

814. $\begin{cases}\ddot{x}=3x+4y,\\ \ddot{y}=-x-y.\end{cases}$

815. $\begin{cases}\ddot{x}=2y,\\ \ddot{y}=-2x.\end{cases}$

816. $\begin{cases}\ddot{x}=3x-y-z,\\ \ddot{y}=-x+3y-z,\\ \ddot{z}=-x-y+3z.\end{cases}$

817. $\begin{cases}2\dot{x}-5\dot{y}=4y-x,\\ 3\dot{x}-4\dot{y}=2x-y.\end{cases}$

818. $\begin{cases}\ddot{x}+\dot{x}+\dot{y}-2y=0,\\ \dot{x}-\dot{y}+x=0.\end{cases}$

819. $\begin{cases}\ddot{x}-2\ddot{y}+\dot{y}+x-3y=0,\\ 4\ddot{y}-2\ddot{x}-\dot{x}-2x+5y=0.\end{cases}$

820. $\begin{cases}\ddot{x}-x+2\ddot{y}-2y=0,\\ \dot{x}-x+\dot{y}+y=0.\end{cases}$

821. $\begin{cases}\ddot{x}-2\dot{y}+2x=0,\\ 3\dot{x}+\ddot{y}-8y=0.\end{cases}$

822. $\begin{cases}\ddot{x}+3\ddot{y}-x=0,\\ \dot{x}+3\dot{y}-2y=0.\end{cases}$

823. $\begin{cases}\ddot{x}+5\dot{x}+2\dot{y}+y=0,\\ 3\ddot{x}+5x+\dot{y}+3y=0.\end{cases}$

824. $\begin{cases}\ddot{x}+4\dot{x}-2x-2\dot{y}-y=0,\\ \ddot{x}-4\dot{x}-\ddot{y}+2\dot{y}+2y=0.\end{cases}$

825. $\begin{cases}2\ddot{x}+2\dot{x}+x+3\ddot{y}+\dot{y}+y=0,\\ \ddot{x}+4\dot{x}-x+3\ddot{y}+2\dot{y}-y=0.\end{cases}$

在 **826～845** 各题中，解出线性非齐次方程组.

826. $\begin{cases}\dot{x}=y+2e^{t},\\ \dot{y}=x+t^{2}.\end{cases}$ **827.** $\begin{cases}\dot{x}=y-5\cos t,\\ \dot{y}=2x+y.\end{cases}$

828. $\begin{cases}\dot{x}=3x+2y+4e^{5t},\\ \dot{y}=x+2y.\end{cases}$

829. $\begin{cases}\dot{x}=2x-4y+4e^{-2t},\\ \dot{y}=2x-2y.\end{cases}$

830. $\begin{cases}\dot{x}=4x+y-e^{2t},\\ \dot{y}=y-2x.\end{cases}$ **831.** $\begin{cases}\dot{x}=2y-x+1,\\ \dot{y}=3y-2x.\end{cases}$

832. $\begin{cases}\dot{x}=5x-3y+2e^{3t},\\ \dot{y}=x+y+5e^{-t}.\end{cases}$ **833.** $\begin{cases}\dot{x}=2x+y+e^{t},\\ \dot{y}=-2x+2t.\end{cases}$

834. $\begin{cases}\dot{x}=x+2y,\\ \dot{y}=x-5\sin t.\end{cases}$ **835.** $\begin{cases}\dot{x}=2x-4y,\\ \dot{y}=x-3y+3e^{t}.\end{cases}$

836. $\begin{cases}\dot{x}=2x-y,\\ \dot{y}=y-2x+18t.\end{cases}$ **837.** $\begin{cases}\dot{x}=x+2y+16te^{t},\\ \dot{y}=2x-2y.\end{cases}$

838. $\begin{cases}\dot{x}=2x+4y-8,\\ \dot{y}=3x+6y.\end{cases}$ **839.** $\begin{cases}\dot{x}=2x-3y,\\ \dot{y}=x-2y+2\sin t.\end{cases}$

840. $\begin{cases}\dot{x}=x-y+2\sin t,\\ \dot{y}=2x-y.\end{cases}$ **841.** $\begin{cases}\dot{x}=2x-y,\\ \dot{y}=x+2e^{t}.\end{cases}$

842. $\begin{cases}\dot{x}=4x-3y+\sin t,\\ \dot{y}=2x-y-2\cos t.\end{cases}$

843. $\begin{cases}\dot{x}=2x+y+2e^t,\\ \dot{y}=x+2y-3e^{4t}.\end{cases}$ **844.** $\begin{cases}\dot{x}=x-y+8t,\\ \dot{y}=5x-y.\end{cases}$

845. $\begin{cases}\dot{x}=2x-y,\\ \dot{y}=2y-x-5e^t\sin t.\end{cases}$

在 **846~850** 各题中，用常数变易法解出给定的方程组.

846. $\begin{cases}\dot{x}=y+\operatorname{tg}^2 t-1,\\ \dot{y}=-x+\operatorname{tg} t.\end{cases}$

847. $\begin{cases}\dot{x}=2y-x,\\ \dot{y}=4y-3x+\dfrac{e^{3t}}{e^{2t}+1}.\end{cases}$

848. $\begin{cases}\dot{x}=-4x-2y+\dfrac{2}{e^t-1},\\ \dot{y}=6x+3y-\dfrac{3}{e^t-1}.\end{cases}$

849. $\begin{cases}\dot{x}=x-y+\dfrac{1}{\cos t},\\ \dot{y}=2x-y.\end{cases}$

850. $\begin{cases}\dot{x}=3x-2y,\\ \dot{y}=2x-y+15e^t\sqrt{t}.\end{cases}$

解出用向量形式 $\dot{x}=Ax$ 所写成的方程组 **851~866**，其中 x 是向量，A 是给定的矩阵.

851. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}.$

852. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\end{pmatrix}.$

853. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix}1 & -2\\ 2 & -3\end{pmatrix}.$

854. $\dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}3 & -2\\ 4 & -1\end{pmatrix}.$

855. $\dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 3 & -1 & -2\end{pmatrix}.$

856. $\dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}1 & -2 & 2\\ 1 & 4 & -2\\ 1 & 5 & -3\end{pmatrix}.$

857. $\dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 2\\ -2 & -1 & 2\\ -3 & -2 & 3\end{pmatrix}.$

858. $\dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}-3 & 2 & 2\\ -3 & -1 & 1\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$

859. $\dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}3 & -3 & 1\\ 3 & -2 & 2\\ -1 & 2 & 0\end{pmatrix}.$

860. $\dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}.$

861. $\dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 0 & 1\\ 2 & 2 & 1\end{pmatrix}.$

862. $\dot{x}=Ax,\quad A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\\ -1 & 0 & 1\end{pmatrix}.$

863. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 2\\ -1 & 0 & 2\\ -2 & 0 & 3\end{pmatrix}$.

864. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 1 & 0 & -1\\ 2 & 2 & -3\end{pmatrix}$.

865. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix}4 & 2 & -2\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 3 & -1\end{pmatrix}$.

866. $\dot{x}=Ax,\ A=\begin{pmatrix}2 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 0\\ 3 & -1 & -1\end{pmatrix}$.

在 **867～873** 各题中，求出给定矩阵 A 的指数函数 e^A.

867. $A=\begin{pmatrix}3 & 0\\ 0 & -2\end{pmatrix}$.　　**868.** $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}$.

869. $A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}$.　　**870.** $A=\begin{pmatrix}3 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$.

871. $A=\begin{pmatrix}-2 & -4\\ 1 & 2\end{pmatrix}$.

872. $A=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.　　**873.** $A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 2\end{pmatrix}$.

在 **874** 和 **875** 两题中，不计算矩阵 e^A，求 $\det e^A$.

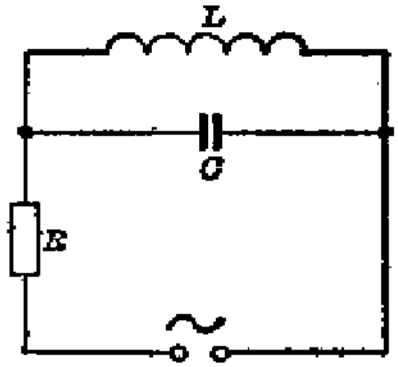
874. $A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$.

875. $A=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 1 & -1\\ 2 & 1 & -3\end{pmatrix}$.

876. 质量为 m 的物体，于(x, y)平面上，在 a^2mr 力的作用下接近点$(0, 0)$运动，其中 r 是物体到这点的距离. 求出物体以 $x(0)=d$, $y(0)=0$, $\dot{x}(0)=0$, $\dot{y}(0)=v$ 为初始条件的运动方程和这一运动的轨线.

877. 弹簧的一端在点 O 固定不动，另一端挂一质量为 $3m$ 的重物，这重物还连接另一挂有质量为 $2m$ 的重物的弹簧. 两个重物沿着通过 O 点的同一条直线做无摩擦运动. 每个弹簧在 a^2mx 力的作用下伸长 x. 求出该系统可能的周期运动.

878. 在一轴的两端各固定一个转动惯量分别为 I_1 和 I_2 的小轮. 当一个小轮对于另一个小轮的转角为 φ 时，由于轴的变形而产生旋转力矩为 $K\varphi$ 的弹性力. 求出在无外力作用时轴的旋转振动频率.



$E=V\sin\omega t$

图 4

879. 在电动势为 $E=V\sin\omega t$ 的电源上串联一电阻 R. 往下的电路分为两支，其中一支联接自感 L，另一支联接电容 C（图 4）. 求出电路中通过电阻 R 的电流强度（稳恒条件）. 当频率 ω 为何值时电流强度最大？最小？

提示　关于建立电路问题中的微分方程见 §11 第 5 段.

880*. 为了使（用向量表示的）方程组 $\dot{x}=Ax+f(t)$ 对于每一个以 ω 为周期的连续向量函数 $f(t)$ 都具有周期解，needs给矩阵 A 的特征根加上怎样的条件才行？

提示 应用向量形式的常数变易法，把通解用基本矩阵 e^{tA}、函数 $f(t)$ 和初始条件表示出来．再利用周期性条件．

§15. 稳 定 性

1. 考虑方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),\quad i=1,\ \cdots,\ n \tag{1}$$

或者用向量表示的

$$\frac{dx}{dt}=f(t,\ x),\ x=(x_1,\ \cdots,\ x_n). \tag{2}$$

假设所有的函数 f_i 和 $\dfrac{\partial f_i}{\partial x_k}$ 当 $t_0\leqslant t<\infty$ 时都连续．

如果对于任意的 $\varepsilon>0$，总存在这样一个 $\delta>0$，使对方程组的初始值满足不等式

$$|x(t_0)-\varphi(t_0)|<\delta \tag{3}$$

的任何一个解 $x(t)$，不等式

$$|x(t)-\varphi(t)|<\varepsilon$$

对所有的 $t\geqslant t_0$ 都成立．那么方程组(2)的解 $x=\varphi(t)$ 叫做利亚普诺夫(Ляпунов)稳定的．

如果对于某一个 $\varepsilon>0$，这样的 δ 不存在，则解 $\varphi(t)$ 叫做不稳定的．

如果解 $\varphi(t)$ 除了满足利亚普诺夫稳定外，所有与其初始条件充分接近的解当 $t\to+\infty$ 时都无限地接近它，即如果由不等式(3)得出 $x(t)-\varphi(t)\to 0(t\to+\infty)$，那么解 $\varphi(t)$ 叫做渐近稳定的．

稳定性存在或者不存在不依赖于 t_0 的选取．

方程组(2)的解 $x=\varphi(t)$ 的稳定性问题，可以用未知函数代换 $x-\varphi(t)=y$ 把它由(2)化到另一个方程组的零解 $y(t)\equiv 0$ 的稳定性问题．

2. 用一次近似研究稳定性． 设 $x_i(t)\equiv 0(i=1,\ \cdots,\ n)$ 是方程组(1)的解．为了研究它的稳定性，我们把函数 f_i（例如）按照泰勒(Тейлор)

公式在点 $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ 的附近展开，分出其线性部分．所得到的方程组往往可以用下列定理研究．

利亚普诺夫定理．考虑方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=a_{i1}x_1+\cdots+a_{in}x_n+\psi_i(t,\ x_1,\ \cdots,\ x_n),\quad i=1,\ \cdots,\ n,\qquad(4)$$

其中 a_{ik} 是常数，而 ψ_i 是高于一阶的无穷小量，确切地说，当 $|x|<\delta$ 时

$$|\psi_i|\leqslant\gamma(x)|x|,\ i=1,\ \cdots,\ n,\ 当\ |x|\to 0\ 时\ \gamma(x)\to 0,\qquad(5)$$

其中 $|x|=\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2}$．

这时如果矩阵 (a_{ik}), $i,\ k=1,\ \cdots,\ n$ 的所有特征根都具有负的实数部分，则方程组(4)的零解是渐近稳定的；如果只要有一个特征根具有正的实数部分，则零解是不稳定的．

例 研究方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=\sqrt{4+4y}-2e^{x+y},\\ \dot{y}=\sin ax+\ln(1-4y),\ a=\mathrm{const}\end{cases}$$

的零解的稳定性．

按照泰勒公式分出函数的线性部分时，我们就得到

$$\begin{cases}\dot{x}=-2x-y+\psi_1(x,\ y),\\ \dot{y}=ax-4y+\psi_2(x,\ y),\end{cases}$$

其中函数 ψ_1 和 ψ_2 等于 $O(x^2+y^2)$，可见满足条件(5)．我们来求出系数矩阵的特征根

$$\begin{vmatrix}-2-\lambda & -1\\ a & -4-\lambda\end{vmatrix}=0,\ \lambda^2+6\lambda+8+a=0,$$

$$\lambda_{1,2}=-3\pm\sqrt{1-a}.$$

当 $a>1$ 时两根都是复数，$\operatorname{Re}\lambda_{1,2}=-3<0$，而当 $-8<a\leqslant 1$ 时两根都是负实数，可见，在这两种情况下零解都是渐近稳定的．

当 $a<-8$ 时有一个根是正数，可见，零解是不稳定的．

当 $a=-8$ 时我们有 $\lambda_1=0$, $\lambda_2=-6$，这乃是用上述定理所不能解决的稳定性问题．

3．用利亚普诺夫函数研究稳定性． 函数

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}=\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial v}{\partial x_1}f_1+\cdots+\frac{\partial v}{\partial x_n}f_n$$

叫做函数 $v(t, x_1, \cdots, x_n)$ 沿方程组(1)的积分曲线所取的导数，其中 $f_1, \cdots, f_n$ 是方程组(1)的右端.

利亚普诺夫定理. 如果存在可微函数 $v(x_1, \cdots, x_n)$，在区域 $|x|<\varepsilon_0$ 上满足条件

1) 当 $x\neq 0$ 时 $v>0$，而 $v(0)=0$，

2) 当 $0<|x|<\varepsilon_0$，$t>t_0$ 时 $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}\leqslant 0$，

则方程组(1)的零解是利亚普诺夫稳定的.

如果用较强的条件

3) 当 $|x|<\varepsilon_0$，$t>t_0$ 时 $\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}\leqslant -w(x)<0$，

代替条件 2)，而函数 $w(x)$ 当 $|x|<\varepsilon_0$ 时连续，那么方程组(1)的零解是渐近稳定的.

切塔叶夫(Четаев)定理. 假设方程组(1)有零解，并且设在空间 $x_1, \cdots, x_n$ 的某个区域 V 上存在可微函数 $v(x_1, \cdots, x_n)$，同时满足

1) 点 $x=0$ 属于区域 V 的边界，

2) 当 $|x|<\varepsilon_0$ 时在区域 V 的边界上 $v=0$，

3) 当 $t>t_0$ 时在区域 V 上有 $v>0$，$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{(1)}\geqslant w(x)>0$，其中函数 $w(x)$ 连续.

这时方程组(1)的零解是不稳定的.

对于利亚普诺夫函数 v，不存在一般的构造方法（当不知道方程组(1)的解时）．在一些情形下，可以造出形如二次型 $v=\sum_{i,j} b_{ij}x_ix_j$ 或者形如二次型与方程组右端非线性函数积分的和的利亚普诺夫函数.

4. 实系数方程

$$a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_{n-1}\lambda+a_n=0,\ a_0>0 \tag{6}$$

的全部根均有负实部的条件.

1) 必要条件: 所有的 $a_i>0$．在 $n\leqslant 2$ 时这个条件也是充分的.

2) 拉乌斯 (Раус)–古尔维茨 (Гурвиц) 条件: 充分必要条件是

使古尔维茨矩阵

$$\begin{Bmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & a_0 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_n \end{Bmatrix}$$

的所有对角主子式都是正的.

在这个矩阵的主对角线上是数 $a_1, \cdots, a_n$. 在同一行上每个数的下标号比前一个数的下标号小1. 下标号为 $i>n$ 或者 $i<0$ 的数 a_i 用零代替.

古尔维茨矩阵的对角主子式为:

$$\Delta_1=a_1,\ \Delta_2=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix},\ \Delta_3=\begin{vmatrix} a_1 & a_0 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{vmatrix},\ \cdots \tag{7}$$

3) 列纳尔(Льенар)–希帕尔(Шипар)条件: 充分必要条件是所有的 $a_i>0$ 和 $\Delta_{n-1}>0$, $\Delta_{n-3}>0$, $\Delta_{n-5}>0$, $\cdots$, 其中 Δ_i 由(7)式给出.

这个条件和拉乌斯–古尔维茨条件是等价的, 但它是比较方便的, 因为它包含较低阶的行列式.

例 对于怎样的 a 和 b, 方程 $\lambda^4+2\lambda^3+a\lambda^2+3\lambda+b=0$ 的根都具有负实部?

写出列纳尔–希帕尔条件:

$$a>0,\ b>0,\ \Delta_3=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & a & 2 \\ 0 & b & 3 \end{vmatrix}=6a-4b-9>0,\ \Delta_1=2>0.$$

由此我们得到条件 $b>0$, $6a>4b-9$.

4) 米海洛夫(Михайлов)准则: 充分必要条件是使得在复数平面上的点 $f(i\omega)$ 当 ω 从0变到 $+\infty$ 时不通过坐标原点, 并且绕原点沿正向的转角为 $n\pi/2$, 其中 $f(\lambda)$ 是(6)式的左端.

米海洛夫准则的另一个(等价的)说法是: 充分必要条件是使 $a_na_{n-1}>0$, 并使多项式

$$p(\xi)=a_n-a_{n-2}\xi+a_{n-4}\xi^2-\cdots,$$
$$q(\eta)=a_{n-1}-a_{n-3}\eta+a_{n-5}\eta^2-\cdots$$

的根从 ξ_1 开始都是彼此不等而交替的正数，即

$$0<\xi_1<\eta_1<\xi_2<\eta_2\cdots$$

(我们指出(6)的左端多项式当 $\lambda=i\omega$ 时等于 $p(\omega^2)+i\omega q(\omega^2)$)。

例 $f(\lambda)=\lambda^5+2\lambda^4+7\lambda^3+8\lambda^2+10\lambda+6$. 这里 $a_n=6>0$, $a_{n-1}=10>0$, 而多项式 $p(\xi)=6-8\xi+2\xi^2$, $q(\eta)=10-7\eta+\eta^2$ 有根 $\xi_1=1$, $\xi_2=3$, $\eta_1=2$, $\eta_2=5$. 可见，$0<\xi_1<\eta_1<\xi_2<\eta_2$. 根据米海洛夫准则，多项式 $f(\lambda)$ 的所有根都具有负实部.

5. 带有周期系数的线性方程组零解的稳定性条件见[5]中第 III 章, § 16.

用稳定性定义求解 **881～898** 各题.

881. 用利亚普诺夫稳定性定义说明下列各方程在给定初始条件下的解是不是稳定的.

① $3(t-1)\dot{x}=x$, $x(2)=0$. ② $\dot{x}=4x-t^2x$, $x(0)=0$.

③ $\dot{x}=t-x$, $x(0)=1$. ④ $2t\dot{x}=x-x^3$, $x(1)=0$.

在 **882～888** 各题中，在 (x, y) 平面上画出给定方程组在点 $(0, 0)$ 附近的轨线，并且根据图形说明其零解是不是稳定的.

882. $\dot{x}=-x$, $\dot{y}=-2y$. **883.** $\dot{x}=x$, $\dot{y}=2y$.

884. $\dot{x}=-x$, $\dot{y}=y$. **885.** $\dot{x}=-y$, $\dot{y}=2x^3$.

886. $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-\sin x$.

887. $\dot{x}=y$, $\dot{y}=x^3(1+y^2)$.

888. $\dot{x}=-y\cos x$, $\dot{y}=\sin x$.

889. 在相平面上画出方程组 $\frac{dx}{dt}=P(x, y)$, $\frac{dy}{dt}=Q(x, y)$ 的轨线，其中 P, P'_x, P'_y, Q, Q'_x, Q'_y 都连续(图 5).

能够说，当 $t\to+\infty$ 时解具有怎样的性质？零解是渐近稳定的吗？是利亚普诺夫稳定的吗？

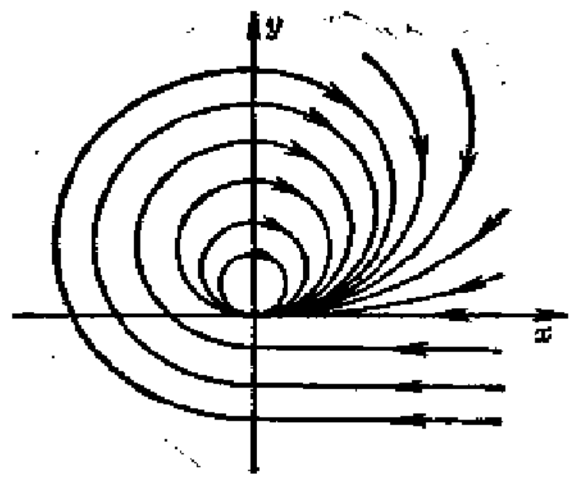


图 5

在 **890～892** 各题中，如果知道方程组的通解具有给定的形式，试说明这方程组的零解是不是稳定的。

890. $x=C_1\cos^2 t-C_2e^{-t}$, $y=C_1t^4e^{-t}+2C_2$.

891. $x=\dfrac{C_1-C_2t}{1+t^2}$, $\qquad y=(C_1t^3+C_2)e^{-t}$.

892. $(C_1-C_2t)e^{-t}$, $\qquad y=\dfrac{C_1\sqrt[3]{t}}{\ln(t^2+2)}+C_2$.

893. 证明，对于方程 $\dfrac{dx}{dt}=a(t)x$（其中函数 $a(t)$ 连续），零解利亚普诺夫稳定的充分必要条件是

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\int_0^t a(s)ds<+\infty.$$

894. 证明，如果线性微分方程组的任何一个解都是利亚普诺夫稳定的，则这个方程组的所有解都是稳定的。

895. 证明，如果线性齐次方程组的每一个解当 $t\to+\infty$ 时都是有界的，则其零解是利亚普诺夫稳定的。

896. 证明，如果线性齐次方程组的每一个解当 $t\to+\infty$ 时都趋于零，则其零解是渐近稳定的。

897. 证明，如果线性齐次方程组至少有一个当 $t\to+\infty$ 时无界的解，则其零解是不稳定的。

898. 如果已经知道，当 $t\to+\infty$ 时 $a_{11}(t)+a_{22}(t)\to$

$b>0$，那么方程组 $\dot{x}_1=a_{11}(t)x_1+a_{12}(t)x_2$，$\dot{x}_2=a_{21}(t)x_1+a_{22}(t)x_2$ 的零解是稳定的吗？

在 **899～906** 各题中，用一次近似的利亚普诺夫稳定性定理研究零解的稳定性。

899. $\begin{cases}\dot{x}=2xy-x+y,\\ \dot{y}=5x^4+y^3+2x-3y.\end{cases}$

900. $\begin{cases}\dot{x}=x^2+y^2-2x,\\ \dot{y}=3x^2-x+3y.\end{cases}$

901. $\begin{cases}\dot{x}=e^{x+2y}-\cos 3x,\\ \dot{y}=\sqrt{4+8x}-2e^y.\end{cases}$

902. $\begin{cases}\dot{x}=\ln(4y+e^{-3x}),\\ \dot{y}=2y-1+\sqrt[3]{1-6x}.\end{cases}$

903. $\begin{cases}\dot{x}=\ln(3e^y-2\cos x)\\ \dot{y}=2e^x-\sqrt[3]{8+12y}.\end{cases}$

904. $\begin{cases}\dot{x}=\operatorname{tg}(y-x),\\ \dot{y}=2^y-2\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-x\right).\end{cases}$

905. $\begin{cases}\dot{x}=\operatorname{tg}(z-y)-2x,\\ \dot{y}=\sqrt{9+12x}-3e^y,\\ \dot{z}=-3y.\end{cases}$

906. $\begin{cases}\dot{x}=e^x-e^{-3z},\\ \dot{y}=4z-3\sin(x+y),\\ \dot{z}=\ln(1+z-3x).\end{cases}$

在 **907～912** 各题中，研究参数 a 和 b 为何值时零解是渐近稳定的。

907. $\begin{cases}\dot{x}=ax-2y+x^2,\\ \dot{y}=x+y+xy.\end{cases}$ 908. $\begin{cases}\dot{x}=ax+y+x^2,\\ \dot{y}=x+ay+y^2.\end{cases}$

909. $\begin{cases}\dot{x}=x+ay+y^2,\\ \dot{y}=bx-3y-x^2.\end{cases}$ 910. $\begin{cases}\dot{x}=y+\sin x,\\ \dot{y}=ax+by.\end{cases}$

911. $\begin{cases}\dot{x}=2e^{-x}-\sqrt{4+ay},\\ \dot{y}=\ln(1+9x+ay).\end{cases}$

912. $\begin{cases}\dot{x}=\ln(e+ax)-e^{y},\\ \dot{y}=bx+\operatorname{tg} y.\end{cases}$

913. 研究方程组

$$\dot{x}=y^2-2ty-2y-x,\ \dot{y}=2x+2t^2+e^{2t-2y}$$

的解 $x=-t^2$, $y=t$ 是不是稳定的.

914. 研究方程组

$$\begin{cases}\dot{x}=\ln\left(x+2\sin^2\dfrac{t}{2}\right)-\dfrac{y}{2},\\ \dot{y}=(4-x^2)\cos t-2x\sin^2 t-\cos^3 t.\end{cases}$$

的解 $x=\cos t$, $y=2\sin t$ 是不是稳定的.

在 915~922 各题中，对于给定的方程组求出所有的静止点,并且研究其稳定性.

915. $\begin{cases}\dot{x}=y-x^2-x,\\ \dot{y}=3x-x^2-y.\end{cases}$ 916. $\begin{cases}\dot{x}=(x-1)(y-1),\\ \dot{y}=xy-2.\end{cases}$

917. $\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=\sin(x+y).\end{cases}$ 918. $\begin{cases}\dot{x}=\ln(y^2-x),\\ \dot{y}=x-y-1.\end{cases}$

919. $\begin{cases}\dot{x}=3-\sqrt{4+x^2+y},\\ \dot{y}=\ln(x^2-3).\end{cases}$

920. $\begin{cases}\dot{x}=e^{y}-e^{x},\\ \dot{y}=\sqrt{3x+y^2}-2.\end{cases}$

921. $\begin{cases}\dot{x}=\ln(1+y+\sin x),\\ \dot{y}=2+\sqrt[3]{3\sin x-8}.\end{cases}$

922. $\begin{cases}\dot{x}=-\sin y,\\ \dot{y}=2x+\sqrt{1-3x-\sin y}.\end{cases}$

在**923～931**各题中，造出利亚普诺夫函数后，应用利亚普诺夫定理或者切塔叶夫定理研究零解的稳定性.

923. $\begin{cases}\dot{x}=x^3-y,\\ \dot{y}=x+y^3.\end{cases}$

924. $\begin{cases}\dot{x}=y-x+xy,\\ \dot{y}=x-y-x^2-y^3.\end{cases}$

925. $\begin{cases}\dot{x}=2y^3-x^5,\\ \dot{y}=-x-y^3+y^5.\end{cases}$

926. $\begin{cases}\dot{x}=xy-x^3+y^3,\\ \dot{y}=x^2-y^3.\end{cases}$

927. $\begin{cases}\dot{x}=y-3x-x^3,\\ \dot{y}=6x-2y.\end{cases}$

928. $\begin{cases}\dot{x}=2y-x-y^3,\\ \dot{y}=x-2y.\end{cases}$

929. $\begin{cases}\dot{x}=-x-xy,\\ \dot{y}=y^3-x^3.\end{cases}$

930. $\begin{cases}\dot{x}=x-y-xy^2,\\ \dot{y}=2x-y-y^3.\end{cases}$

931*. $\begin{cases}\dot{x}=-f_1(x)-f_2(y),\\ \dot{y}=f_3(x)-f_4(y),\end{cases}$

其中 $\operatorname{sgn} f_i(z)=\operatorname{sgn} z$, $i=1, 2, 3, 4$.

在**932～948**各题中，利用多项式的所有根均有负实部的已知条件，例如利用拉乌斯-古尔维茨条件或者米海洛夫准则，研究零解的稳定性.

932. $y'''+y''+y'+2y=0$.

933. $y'''+2y''+2y'+3y=0$.

934. $y^{(4)}+2y'''+4y''+3y'+2y=0$.

935. $y^{(4)}+2y'''+3y''+7y'+2y=0$.

936. $y^{(4)}+2y'''+6y''+5y'+6y=0$.

937. $y^{(4)}+8y'''+14y''+36y'+45y=0$.

938. $y^{(4)}+13y'''+16y''+55y'+76y=0$.

939. $y^{(4)}+3y'''+26y''+74y'+85y=0$.

940. $y^{(4)}+3.1y'''+5.2y''+9.8y'+5.8y=0$.

941. $y^{(5)}+2y^{(4)}+4y'''+6y''+5y'+4y=0$.

942. $y^{(5)}+2y^{(4)}+5y'''+6y''+5y'+2y=0$.

943. $y^{(5)}+3y^{(4)}+6y'''+7y''+4y'+4y=0$.

944. $y^{(5)}+4y^{(4)}+9y'''+16y''+19y'+13y=0$.

945. $y^{(5)}+4y^{(4)}+16y'''+25y''+13y'+9y=0$.

946. $y^{(5)}+3y^{(4)}+10y'''+22y''+23y'+12y=0$.

947. $y^{(5)}+5y^{(4)}+15y'''+48y''+44y'+74y=0$.

948. $y^{(5)}+2y^{(4)}+14y'''+36y''+23y'+68y=0$.

在**949～958**各题中，研究参数 a 和 b 为何值时零解是渐近稳定的.

949. $y'''+ay''+by'+2y=0$.

950. $y'''+3y''+ay'+by=0$.

951. $y^{(4)}+2y'''+3y''+2y'+ay=0$.

952. $y^{(4)}+ay'''+y''+2y'+y=0$.

953. $ay^{(4)}+y'''+y''+y'+by=0$.

954. $y^{(4)}+y'''+ay''+y'+by=0$.

955. $y^{(4)}+ay'''+4y''+2y'+by=0$.

956. $y^{(4)}+2y'''+ay''+by'+y=0$.

957. $y^{(4)}+ay'''+4y''+by'+y=0$.

958. $y^{(4)}+2y'''+4y''+ay'+by=0$

为了研究 **959** 和 **960** 两题中带有周期系数的方程和方程组的解的稳定性，应当求出单值矩阵，并且算出乘数，见

[5]，第 III 章，§ 15，§ 16.

959. 研究方程

$$\ddot{x}+p(t)x=0,\ p(t)=a^2(0<t<\pi),$$
$$p(t)=b^2(\pi<t<2\pi),\ p(t+2\pi)\equiv p(t)$$

当参数取下列各值时零解的稳定性：

① $a=0.5,\ b=0$；　　② $a=0.5,\ b=1$；

③ $a=0.5,\ b=1.5$；　　④ $a=0.75,\ b=0$；

⑤ $a=1,\ b=0$；　　⑥ $a=1,\ b=1.5$.

960. 研究，对于怎样的 a 和 b，带有周期系数的方程组

$$\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\end{pmatrix}=A(t)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix},\ A(t+2)\equiv A(t),$$

当 $0<t<1$ 时 $A(t)=\begin{pmatrix}0 & a\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，当 $1<t<2$ 时 $A(t)=\begin{pmatrix}0 & 0\\ b & 0\end{pmatrix}$

的零解是稳定的.

§ 16. 奇　　点

1. 使函数 $P(x,\ y)=0,\ Q(x,\ y)=0$ 的点叫做方程组

$$\frac{dx}{dt}=P(x,\ y),\quad \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y) \tag{1}$$

或者方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{Q(x,\ y)}{P(x,\ y)} \tag{2}$$

的奇点，其中函数 P 和 Q 连续可微.

2. 为了研究方程组

$$\frac{dx}{dt}=ax+by,\quad \frac{dy}{dt}=cx+dy \tag{3}$$

或者方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{cx+dy}{ax+by}\quad\left(\frac{dx}{dy}=\frac{ax+by}{cx+dy}\right)\tag{4}$$

的奇点，应当求出特征方程

$$\begin{vmatrix}a-\lambda & b\\ c & d-\lambda\end{vmatrix}=0\tag{5}$$

的根．如果两根是相同符号的不同实数，则奇点是结点(图 6 ①)；如果两根符号相异，则是鞍点(图 6 ②)；如果两根是实数部分异于零的复数，则奇点是焦点(图 6 ③)；如果两根是纯虚数，则是中心点(图 6 ④)；如果两根相等且不为零(即 $\lambda_1=\lambda_2\neq 0$)，则奇点可能是退化结点(图 6 ⑤)或者是临界结点(图 6 ⑥)，同时临界结点只有在方程组 $\frac{dx}{dt}=ax$, $\frac{dy}{dt}=ay$ $\left(\text{或者方程 } \frac{dy}{dx}=\frac{y}{x}\right)$的情形时才成立，而在 $\lambda_1=\lambda_2\neq 0$ 的所有其它情形时奇点都是退化结点。

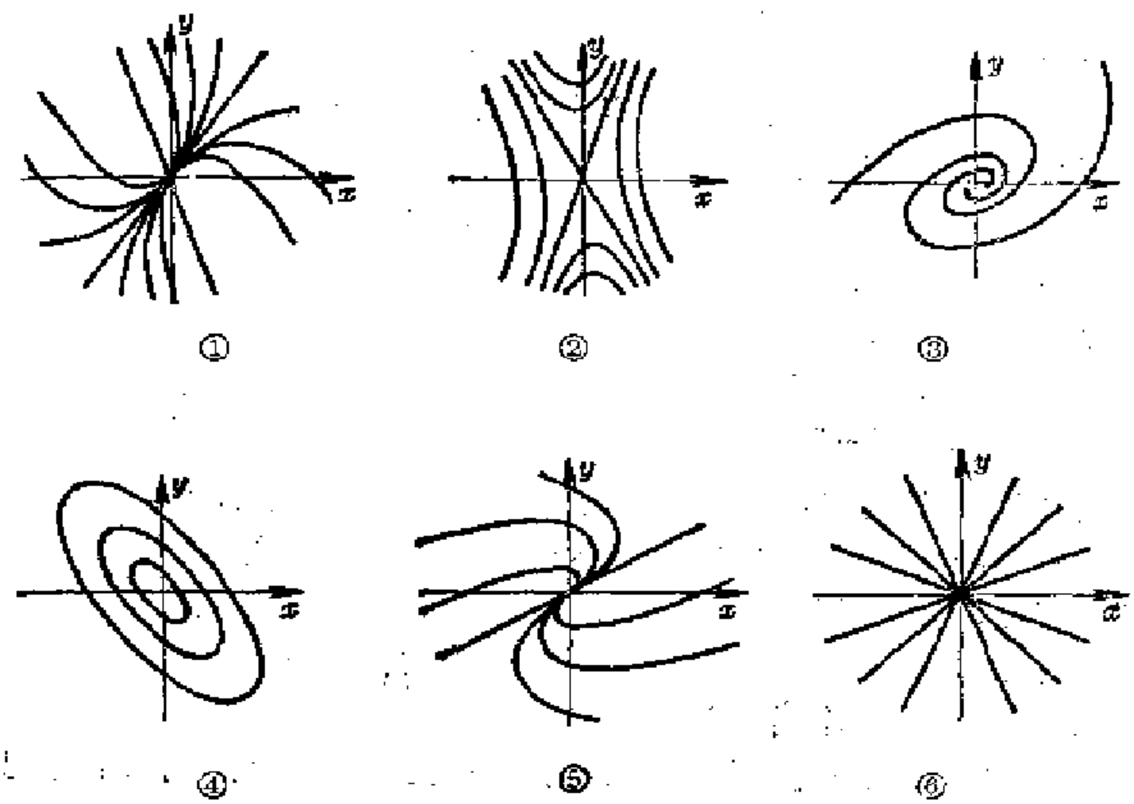


图 6

如果方程(5)的一个根或者两个根等于零，则又有

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}=0,$$

因此，方程(4)右端的分式可以化简．方程具有 $\frac{dy}{dx}=k$ 的形式，于是解可由(x, y)平面上的一些平行直线表示出来．

为了在(x, y)平面上画出方程(4)在结点、鞍点和退化结点情形时的积分曲线(即方程组(3)的轨线)，应当首先求出由通过奇点的那些直线所表示的解．这些直线总是沿着方程组(3)的系数矩阵$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$的特征向量方向．在结点情形时，积分曲线都与一条具有绝对值最小的 λ 所对应的特征向量的方向的直线相切．

在焦点情形时，需要确定轨线的旋转方向．为此，首先应该根据 $\mathrm{Re}\,\lambda$ 的符号研究这一点的稳定性．其次要确定运动是在奇点周围沿着轨线的什么方向上发生的．为此，只要作出在任何一点(x, y)由公式(3)所确定的速度向量$\left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}\right)$就可以了．

在结点退化的情况下可以类似地研究运动的方向．

例 1 研究方程组

$$\dot{x}=2x,\ \dot{y}=x+y \tag{6}$$

的奇点 $x=0,\ y=0$．

建立并求解特征方程

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix}=0,\ (2-\lambda)(1-\lambda)=0,\ \lambda_1=1,\ \lambda_2=2.$$

两个特征根是相同符号的不同实数．因此奇点是结点(图 6① 的类型)．对于 $\lambda_1=1$，求出的特征向量为$(0, 1)$；对于 $\lambda_2=2$，求出的特征向量为$(1, 1)$．在(x, y)平面上，作出通过坐标原点，并且具有这两个向量方向的直线．然后再作出在坐标原点与其中第一条直线相切的那些曲线，因为 $|\lambda_1|<|\lambda_2|$，见图 7．

积分曲线的另一个作法．将(6)中的一个方程除以另一个后，得到形如(4)的方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{x+y}{2x}\left(或者\ \frac{dx}{dy}=\frac{2x}{x+y}\right).$$

我们来找出通过奇点形如 $y=kx$(以及 $x=0$)的那些直线．将其代入所写出的方程时，我们求出 $k=1$．可见，$y=x$ 和 $x=0$ 就是所求的那些直线．其余的积分曲线可利用等斜线作出(图 7)．

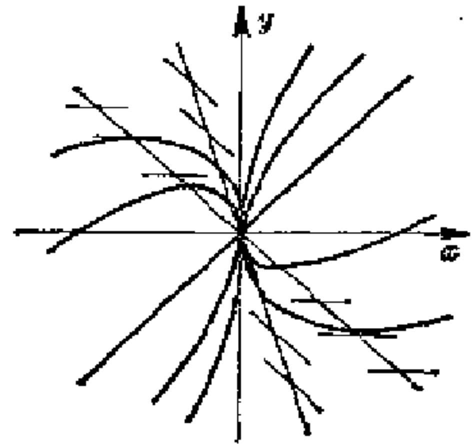


图 7

例 2 研究方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{4x-3y}{x-2y} \tag{7}$$

的奇点．

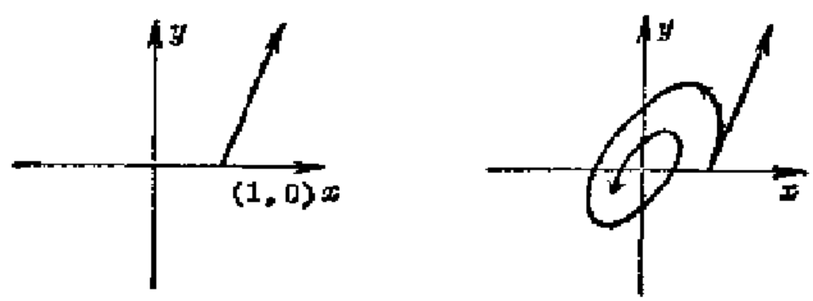
我们来求出特征方程的根

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & -2\\ 4 & -3-\lambda\end{vmatrix}=0;\ \lambda^2+2\lambda+5=0;\ \lambda=-1\pm 2i.$$

奇点是焦点．把方程(7)变为方程组

$$\frac{dx}{dt}=x-2y,\quad \frac{dy}{dt}=4x-3y. \tag{8}$$

作出在点(1, 0)的速度向量$\left(\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt}\right)$．根据(8)式它等于$(x-2y,\ 4x-3y)$．在点 $x=1$, $y=0$ 上我们得到向量(1, 4)(图 8①)．因此，对应 t 的增加运动是与轨线的逆时针方向一致的．因为根 λ 的实数部分等于 $-1<0$，所以奇点是渐近稳定的，因此当 t 增大时解无限地接近奇点．于是在作逆时针方向运动时，轨线都接近坐标原点(图 8②)．



① ②

图 8

3. 为了研究比较一般的方程组(1)或者方程(2)的奇点，应当把坐标原点移到所研究的奇点上，并根据泰勒展开式在这点的邻域内把函数 P 和 Q 展开到一阶项．这时方程组(1)具有

$$\frac{dx_1}{dt}=ax_1+by_1+\varphi(x_1,\ y_1),\ \frac{dy_1}{dt}=cx_1+dy_1+\psi(x_1,\ y_1) \qquad (9)$$

的形式，其中 $x_1,\ y_1$ 是(移动后的)新坐标，$a,\ b,\ c,\ d$ 都是常数．我们假设，对于某一个 $\varepsilon>0$，有

$$\text{当 } x_1\to 0,\ y_1\to 0 \text{ 时，} \frac{\varphi(x_1,\ y_1)}{r^{1+\varepsilon}}\to 0,\quad \frac{\psi(x_1,\ y_1)}{r^{1+\varepsilon}}\to 0,$$

其中 $r=\sqrt{x_1^2+y_1^2}$．显然，如果函数 P 和 Q 在所研究的点上二次可微时，这个条件是满足的(当 $\varepsilon<1$ 时)．我们还假设，特征方程(5)所有根的实数部分都异于零．这时，方程组(9)的奇点 $x_1=0,\ y_1=0$ 与去掉函数 φ 和 ψ 所得到的方程组(3)的奇点将是同样类型的．其次，对于方程组(3)和(9)，轨线接近奇点时所沿方向的斜率都是相同的(但是，对应于方程组(3)的直线 $y=kx$ 可能是方程(9)的曲线)，而在焦点情形时，旋转方向也是相同的．

当方程组(3)的奇点是中心点时，对于方程组(9)可能是焦点或者中心点．为了判别中心点的存在，只要(但不是必要)判别方程组(9)的轨线具有通过所研究奇点的对称轴就可以了．如果方程组(9)所化成的形如(2)的方程以 $-x$ 代替 x(或者以 $-y$ 代替 y)不变，显然对称轴存在．为了判别焦点的存在，充分必要条件是使方程组(9)的零解当 $t\to+\infty$ 或者 $t\to-\infty$ 时是渐近稳定的．对于稳定性的研究，可以利用利亚普诺夫函数来进行．这是比较难做的，因为在所考虑的情形下，往往要把利亚普诺夫函数取为 $x,\ y$ 的二次，三次和四次幂的项的和的形状．

在 961~978 各题中，研究方程和方程组的奇点．在 $(x,\ y)$ 平面上画出积分曲线(或者轨线)．

961. $y'=\dfrac{2x+y}{3x+4y}$．　　**962.** $y'=\dfrac{x-4y}{2y-3x}$．

963. $y'=\dfrac{y-2x}{y}$.

964. $y'=\dfrac{x+4y}{2x+3y}$.

965. $y'=\dfrac{x-2y}{3x-4y}$.

966. $y'=\dfrac{2x-y}{x-y}$.

967. $y'=\dfrac{y-2x}{2y-3x}$.

968. $y'=\dfrac{4y-2x}{x+y}$.

969. $y'=\dfrac{y}{x}$.

970. $y'=\dfrac{4x-y}{3x-2y}$.

971. $\begin{cases}\dot{x}=3x,\\ \dot{y}=2x+y.\end{cases}$

972. $\begin{cases}\dot{x}=2x-y,\\ \dot{y}=x.\end{cases}$

973. $\begin{cases}\dot{x}=x+3y,\\ \dot{y}=-6x-5y.\end{cases}$

974. $\begin{cases}\dot{x}=x,\\ \dot{y}=2x-y.\end{cases}$

975. $\begin{cases}\dot{x}=-2x-5y,\\ \dot{y}=2x+2y.\end{cases}$

976. $\begin{cases}\dot{x}=3x+y,\\ \dot{y}=y-x.\end{cases}$

977. $\begin{cases}\dot{x}=3x-2y,\\ \dot{y}=4y-6x.\end{cases}$

978. $\begin{cases}\dot{x}=y-2x,\\ \dot{y}=2y-4x.\end{cases}$

在 **979～992** 各题中，求出并研究给定方程和方程组的奇点.

979. $y'=\dfrac{2y-x}{3x+6}$.

980. $y'=\dfrac{2x+y}{x-2y-5}$.

981. $y'=\dfrac{4y^2-x^2}{2xy-4y-8}$.

982. $y'=\dfrac{2y}{x^2-y^2-1}$.

983. $y'=\dfrac{x^2+y^2-2}{x-y}$.

984. $y'=\dfrac{y+\sqrt{1+2x^2}}{x+y+1}$.

985. $\begin{cases}\dot{x}=x^2-y,\\ \dot{y}=\ln(1-x+x^2)-\ln 3.\end{cases}$

986. $\begin{cases}\dot{x}=\ln(2-y^2),\\ \dot{y}=e^x-e^y.\end{cases}$

987. $\begin{cases}\dot{x}=(2x-y)(x-2),\\ \dot{y}=xy-2.\end{cases}$

988. $\begin{cases}\dot{x}=\sqrt{x^2-y+2}-2,\\ \dot{y}=\operatorname{arc\,tg}(x^2+xy).\end{cases}$

989. $\begin{cases}\dot{x}=x^2-y,\\ \dot{y}=x^2-(y-2)^2.\end{cases}$

990. $\begin{cases}\dot{x}=\ln\dfrac{y^2-y+1}{3},\\ \dot{y}=x^2-y^2.\end{cases}$

991. $\begin{cases}\dot{x}=\ln(1-y+y^2),\\ \dot{y}=3-\sqrt{x^2+8y}.\end{cases}$

992. $\begin{cases}\dot{x}=\sqrt{(x-y)^2+3}-2,\\ \dot{y}=e^{y^2-x}-e.\end{cases}$

对于方程 **993~997**，作出积分曲线在坐标原点邻域内的分布图形.

提示　在 **993~997** 各题中，奇点不属于 § 16 开头所考虑过的类型. 为了研究这些奇点，可以作出一些等斜线. 然后再说明积分曲线从怎样的方向接近奇点.

993*. $y'=\dfrac{xy}{x+y}$.　　**994*.** $y'=\dfrac{x^2+y^2}{x^2+y}$.

995*. $y'=\dfrac{2xy}{y+x^2}$.　　**996*.** $y'=\dfrac{xy}{y-x^2}$.

997*. $y'=\dfrac{y^2}{y+x^2}$.

998. 试证，如果方程

$$(ax+by)dx+(mx+ny)dy=0$$

的奇点是中心点，则这个方程是全微分方程. 反之，则不然.

999*. 试证，如果上题的方程不是全微分方程，但是在

坐标原点的邻域内具有连续的积分因子，则奇点是鞍点（当 $an\neq bm$ 时）。

1000*. 假设在方程

$$y'=\frac{ax+by+p(x,\ y)}{cx+dy+q(x,\ y)} \tag{1}$$

中，函数 p 和 q 在点(0, 0)的某一邻域内有定义，并且连续可微．而在该点(0, 0)上 $p=p'_x=p'_y=q=q'_x=q'_y=0$．试证，如果方程(1)以 $-y$ 代替 y 时不变，而特征方程

$$\begin{vmatrix} c-\lambda & d \\ a & b-\lambda \end{vmatrix}=0$$

的两个根都是纯虚数，则奇点(0, 0)是中心点。

§17. 相 平 面

1. 关于相空间、相平面、自治系统、轨线的概念见[1]的第 VII 章，§ 1，第 4 段或者[3]的 § 15 或者[4]的第 3 章，§ 1.

2. 为了在相平面$(x,\ y)$上作出方程组

$$\dot{x}=f_1(x,\ y),\ \dot{y}=f_2(x,\ y) \tag{1}$$

的轨线，可以直接研究这个方程组，或者将其一个方程除以另一个，把它变成一个一阶方程

$$\frac{dy}{dx}=\frac{f_2(x,\ y)}{f_1(x,\ y)}. \tag{2}$$

方程组(1)的轨线将是方程(2)的积分曲线．或者解方程(2)（这往往要比解方程组(1)简单），或者用等斜线的方法(§ 1)，这时必须研究方程组的奇点(用 § 16 的方法)，都可以作出这些轨线。

为了在相平面上作出方程 $\ddot{x}=f(x,\ \dot{x})$ 的轨线，必须把这个方程变为方程组 $\dot{x}=y,\ \dot{y}=f(x,\ y)$，这正是象方程组(1)那样所研究的方程组．

3. 一条闭轨线，当 $t\to+\infty$ 或者 $t\to-\infty$ 时，如果存在一个无限接

近于它的轨线所完全充满的邻域，这条闭轨线就叫做极限环。如果轨线仅当 $t\to+\infty$ 时接近于它，极限环叫做稳定的；如果轨线仅当 $t\to-\infty$ 时接近于它，极限环叫做不稳定的；如果轨线当 $t\to+\infty$ 时从环的一侧接近于它，而当 $t\to-\infty$ 时从环的另一侧接近于它，则极限环叫做半稳定的。关于极限环见[3]，§ 28，[2]，§ 25.

在 **1001～1020** 各题中，对于给定的方程，在相平面上画出轨线。根据图形，当 $t\to+\infty$ 时对于解的性质作出结论。

1001. $\ddot{x}+4x=0$.　**1002.** $\ddot{x}-x=0$.

1003. $\ddot{x}-x+x^2=0$.　**1004.** $\ddot{x}-3x^2=0$.

1005. $\ddot{x}+2x^3=0$.　**1006.** $\ddot{x}+2x^3-2x=0$.

1007. $\ddot{x}+e^x-1=0$.　**1008.** $\ddot{x}-2^x+x+1=0$

1009. $\ddot{x}-\sin x=0$.　**1010.** $\ddot{x}+2\cos x-1=0$.

1011. $\ddot{x}-4\dot{x}+3x=0$.　**1012.** $\ddot{x}+2\dot{x}+5x=0$.

1013. $\ddot{x}-\dot{x}-2x=0$.　**1014.** $\ddot{x}+2\dot{x}+\dot{x}^2+x=0$.

1015. $\ddot{x}+\dot{x}+2x-x^2=0$.　**1016.** $\ddot{x}+\dot{x}^2-x^2+1=0$.

1017. $\ddot{x}+2^{\dot{x}}-x^2=0$.

1018. $\ddot{x}+\sqrt{x^2+\dot{x}^2}-1=0$.

1019. $\ddot{x}+5\dot{x}-4\ln\dfrac{x^2+1}{2}=0$.

1020. $\ddot{x}+\dot{x}+\operatorname{arc\,tg}(x^2-2x)=0$.

在 **1021～1034** 各题中，在相平面上画出给定方程组的轨线，并研究其奇点。

1021. $\begin{cases}\dot{x}=2x+y^2-1,\\ \dot{y}=6x-y^2+1.\end{cases}$　**1022.** $\begin{cases}\dot{x}=y^2-4x^2,\\ \dot{y}=4y-8.\end{cases}$

1023. $\begin{cases}\dot{x}=4-4x-2y,\\ \dot{y}=xy,\end{cases}$　**1024.** $\begin{cases}\dot{x}=1-x^2-y^2,\\ \dot{y}=2x.\end{cases}$

1025. $\begin{cases}\dot{x}=2+y-x^2,\\ \dot{y}=2x(x-y).\end{cases}$

1026. $\begin{cases}\dot{x}=xy-4,\\ \dot{y}=(x-4)(y-x).\end{cases}$

1027. $\begin{cases}\dot{x}=1-x^2-y^2,\\ \dot{y}=2xy.\end{cases}$

1028. $\begin{cases}\dot{x}=2(x-1)(y-2),\\ \dot{y}=y^2-x^2.\end{cases}$

1029. $\begin{cases}\dot{x}=(x+y)^2-1,\\ \dot{y}=-y^2-x+1.\end{cases}$

1030. $\begin{cases}\dot{x}=(2x-y)^2-9,\\ \dot{y}=9-(x-2y)^2.\end{cases}$

1031. $\begin{cases}\dot{x}=(2x-y)^2-9,\\ \dot{y}=(x-2y)^2-9.\end{cases}$

1032. $\begin{cases}\dot{x}=x^2+y^2-6x-8y,\\ \dot{y}=x(2y-x+5).\end{cases}$

1033. $\begin{cases}\dot{x}=x^2-y,\\ \dot{y}=(x-y)(x-y+2).\end{cases}$

1034. $\begin{cases}\dot{x}=x^2+y^2-5,\\ \dot{y}=(x-1)(x+3y-5).\end{cases}$

1035. 导出摆的无阻力运动方程. 对于方程中出现的所有常数都等于1的情形，在相平面上画出轨线. 对不同类型的轨线给出物理解释.

1036. 导出阻力与速度平方成比例的摆的运动方程. 在相平面上画出轨线的图形.

提示 利用1035题的图形.

1037. 一常力的大小等于摆的重量的一半，其方向始

终沿着摆的运动圆弧的切线方向，导出摆在该常力作用下的运动方程.

取常数 l 和 g 都等于 1，在相平面上画出所得方程的轨线. 不同类型的轨线表示摆怎样的运动?

1038. 将质量为 m 的重物挂在弹簧上. 当重物拉开的距离为 x 时，弹簧以指向平衡位置的力 kx 作用在重物上. 摩擦力 $f=\text{const}$，并且与重物速度的方向相反. 当 $t=0$ 时，重物离开平衡位置的距离为 h、速度为零.

试导出重物的运动方程. 取 $m=2$, $k=2$, $f=1$, $h=5$ 时，在相平面上表示出重物的运动.

1039. 假设当摆向上运动时其长等于 l，向下运动时其长等于 $L>l$，试在相平面上画出变长摆的微振动. 在每一次全振动中振幅增大多少倍(例如：秋千摆动)?

提示 在微振动时认为 $\sin x\approx x$. 摆长的变化是在瞬时(飞快地)发生的，这时摆对于竖直轴的倾角以及运动的数量矩都不适用于快速.

对于用极坐标写出的 **1040~1046** 各方程组，在相平面上画出其轨线，并研究是否有极限环.

1040. $\dfrac{dr}{dt}=r(1-r^2)$, $\dfrac{d\varphi}{dt}=1$.

1041. $\dfrac{dr}{dt}=r(r-1)(r-2)$, $\dfrac{d\varphi}{dt}=1$.

1042. $\dfrac{dr}{dt}=r(1-r)^2$, $\dfrac{d\varphi}{dt}=1$.

1043. $\dfrac{dr}{dt}=\sin r$, $\dfrac{d\varphi}{dt}=1$.

1044. $\dfrac{dr}{dt}=r(|r-1|-|r-2|-2r+3)$, $\dfrac{d\varphi}{dt}=1$.

1045. $\frac{dr}{dt}=r\sin\frac{1}{r}$, $\frac{d\varphi}{dt}=1$.

1046. $\frac{dr}{dt}=r(1-r)\sin\frac{1}{1-r}$, $\frac{d\varphi}{dt}=1$.

1047*. 在怎样的条件下，方程组

$$\frac{dr}{dt}=f(r),\ \frac{d\varphi}{dt}=1$$

具有极限环，其中函数 $f(r)$ 连续？在怎样的条件下这个极限环是稳定的？不稳定的？半稳定的？

1048*. 常数 a 取怎样的值时，方程组

$$\frac{d\varphi}{dt}=1,\ \frac{dr}{dt}(r-1)(a+\sin^2\varphi)$$

具有稳定的极限环？不稳定的极限环？

对于方程 **1049～1052**，利用等斜线在相平面上画出轨线，并研究其奇点．根据图形，对于当 $t\to+\infty$ 时解的性质和存在闭轨线的可能性作出结论。

1049. $\ddot{x}+\dot{x}^3-\dot{x}+x=0$.

1050. $\ddot{x}+(x^2-1)\dot{x}+x=0$.

1051. $\ddot{x}+\dot{x}-2\operatorname{arc\,tg}\dot{x}+x=0$.

1052. $\ddot{x}+2^{\dot{x}}-\dot{x}+x=0$.

1053*. 对于方程 $\ddot{x}+2a\dot{x}-b\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}+x=0$ $(0<a<1, b>0)$，在相平面上作出轨线，并且求出极限环与 Ox 轴的交点．

提示　求出轨线与 Ox 轴的两个相邻交点的横坐标之间的关系．

1054. 试证，方程 $\ddot{x}+F(\dot{x})+x=0$ 在相平面上不可能有极限环，其中函数 F 连续，当 $y>0$ 时 $F(y)>0$，当 $y<0$ 时 $F(y)<0$.

提示　研究全导数 $\frac{d}{dt}(x^2+y^2)$ 的符号。

1055*. 假设$f(x, y)$和f'_x, f'_y连续，$f(0, 0)<0$，而当$x^2+y^2>b^2$时有$f(x, y)>0$. 试证，方程$\ddot{x}+f(x, \dot{x})\dot{x}+x=0$具有周期解$x(t)\neq 0$.

提示　过渡到相平面，并研究全导数$\frac{d}{dt}(x^2+y^2)$的符号. 作出不能引出任何轨线的环. 应用[3]中的定理21.

§18. 解对于初始条件和参数的依赖性. 微分方程的近似解

1. 考虑用向量表示的方程组

$$\frac{dx}{dt}=f(t, x), \tag{1}$$

其中$x=(x_1, \cdots, x_n)$, $f=(f_1, \cdots, f_n)$. 假设在所考虑的区域上向量函数f对t, x连续，对x满足利普希兹(Липшиц)条件①

$$\|f(t, y)-f(t, x)\|\leqslant k\|y-x\|. \tag{2}$$

用$\|\ \|$表示通常采用的向量模

$$\|x\|=\sqrt{|x_1|^2+\cdots+|x_n|^2},$$

$$\|x\|=|x_1|+\cdots+|x_n|,$$

或者

$$\|x\|=\max_{i=1,\cdots,n}|x_i|$$

中的任意一个.

设$x(t)$是方程组(1)的解，而$y(t)$是满足不等式

$$\left\|\frac{dy}{dt}-f(t, y)\right\|\leqslant\eta,\quad \|y(0)-x(0)\|\leqslant\delta$$

的向量函数. 这时有估计式

① 如果在对x为凸形的区域上有$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right|\leqslant a(i, j=1, \cdots, n)$，则$f$在这个区域上满足常数为$k=na$的利普希兹条件.

$$\|x(t)-y(t)\| \leqslant \delta e^{k|t|}+\frac{\eta}{k}(e^{k|t|}-1) \tag{3}$$

成立。

应用这个不等式可以粗糙地估计出方程组(1)的近似解 $y(t)$ 的误差，以及当 $\|g(t, y)-f(t, y)\| \leqslant \eta$ 时估计方程组(1)的解 $x(t)$ 与方程组 $\frac{dy}{dt}=g(t, y)$ 的解 $y(t)$ 之差的上界。

2. 如果在方程组

$$\frac{dx_i}{dt}=f_i(t, x_1, \cdots, x_n, \mu), \quad i=1, \cdots, n \tag{4}$$

及其初始条件

$$x_i(0)=a_i(\mu), \quad i=1, \cdots, n \tag{5}$$

中，μ 是参数，函数 f_i 和 $a_i(i=1, \cdots, n)$ 连续，并且对 $x_1, \cdots, x_n, \mu$ 具有连续偏导数，则解具有对参数 μ 的连续导数．导数 $\frac{\partial x_i}{\partial \mu}=u_i$, $i=1, \cdots, n$ 满足线性方程组

$$\frac{du_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j+\frac{\partial f_i}{\partial \mu}, \; i=1, \quad \cdots, n \tag{6}$$

和初始条件 $u_i(0)=a_i'(\mu)$, $i=1, \cdots, n$. 公式(6)中导数 $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}$ 和 $\frac{\partial f_i}{\partial \mu}$ 的值是在 $x_1=x_1(t), \cdots; x_n=x_n(t)$ 时取的，其中 $x_1(t), \cdots, x_n(t)$ 是以(5)为初始条件的方程组(4)的解。

特别地，如果假设 $a_k(\mu)=\mu$, 当 $i \neq k$ 时 $a_i(\mu)=\text{const}$, 并认为所有的函数 $f_1, \cdots, f_n$ 都不依赖于 μ, 则从前面的结论得出，对于以 $x_i(0)=a_i$, $i=1, \cdots, n$ 为初始条件的方程组(4)，其解的分量 $x_1, \cdots, x_n$ 对初始值 a_k 的导数 $\frac{\partial x_i}{\partial a_k}=u_i(i=1, \cdots, n)$ 存在，并且满足方程组

$$\frac{du_i}{dt}=\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_j} u_j, \quad i=1, \cdots, n$$

和初始条件当 $i \neq k$ 时 $u_i(0)=0$, $u_k(0)=1$.

3. 如果在(4)和(5)中函数 f_i 和 a_i 对 $x_1, \cdots, x_n, \mu$ (在 $\mu=0$ 附近)都具有直到 m 阶的连续导数，则解对 μ 也具有直到 m 阶的连续导数，因此，根据泰勒公式对参数 μ 可以作幂展开：

$$x(t)=v_0(t)+\mu v_1(t)+\mu^2 v_2(t)+\cdots+\mu^m v_m(t)+o(\mu^m). \tag{7}$$

这里 x 和 v_i 是 n 维向量函数. 为了求出函数 $v_i(t)$, 可以将(4)和(5)的右端对 μ 作幂展开, 再把展式(7)代进去, 并且使方程两端 μ 的同次幂的系数相等. 将得到一个微分方程组, 从中可以依次地确定出 $v_0(t)$, $v_1(t)$, $\cdots$.

当 f_i 和 a_i 为 $x_1, \cdots, x_n, \mu$ 的解析函数时, 解 $x(t)$ 对于很小的 μ 可以展成 μ 的收敛幂级数(根据解对参数的解析依赖性定理, 见[4], 第1章, §6). 这个级数的系数与展式(7)的系数是相同的.

上述方法, 只有当能用已知的方法解出 $\mu=0$ 的方程时, 才能用来求解 μ 很小的微分方程.

例 将问题

$$\dot{x}=x^2+2\mu t^{-1}, \quad x(1)=-1 \tag{8}$$

的解对参数 μ 作幂展开.

我们来求形如 $x(t)=v_0(t)+\mu v_1(t)+\mu^2 v_2(t)+\cdots$ 的解. 将其代入(8)式, 并且使 μ 的同次幂的系数相等, 就得到方程组

$$\begin{aligned}
&\dot{v}_0=v_0^2, && v_0(1)=-1,\\
&\dot{v}_1=2v_0v_1+2t^{-1}, && v_1(1)=0,\\
&\dot{v}_2=2v_0v_2+v_1^2, && v_2(1)=0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

从第一个方程及其初始条件中我们求出 $v_0(t)=-t^{-1}$. 将其代入第二个方程, 就得到

$$\dot{v}_1=-2t^{-1}v_1+2t^{-1}, \quad v_1(1)=0.$$

由此

$$v_1(t)=1-t^{-2}.$$

把所求出的 v_0 和 v_1 代入第三个方程, 得到

$$\dot{v}_2=-2t^{-1}v_2+(1-t^{-2})^2, \quad v_2(1)=0.$$

解出这个线性方程, 并且利用初始条件, 求出

$$v_2(t)=\frac{t}{3}-\frac{2}{t}+\frac{8}{3t^2}-\frac{1}{t^3}.$$

因此, 问题(8)的解具有

$$x(t)=-\frac{1}{t}+\mu\left(1-\frac{1}{t^2}\right)+\mu^2\left(\frac{t}{3}-\frac{2}{t}+\frac{8}{3t^2}-\frac{1}{t^3}\right)+o(\mu^2)$$

的形式. 应用这个方法可以将这个展开继续进行下去。

用类似的方法可以得到非线性方程，特别是形如

$$\ddot{x}+a^2x=\mu f(t,\ x,\ \dot{x},\ \mu) \tag{9}$$

的方程的周期解对于参数的幂展开式，其中函数 f 是 t 的周期函数. 这时无需从二阶方程变到方程组. 在求 $v_0(t)$, $v_1(t)$, …时出现的任意常数已经不再由初始条件确定，而是由周期性条件确定了(见[4]，第2章，§8).

当(9)式的右端不依赖于 t 时，解 $x(t)$的周期不能预先知道. 这时在方程(9)中，应当从 t 过渡到新的自变量 $\tau=t(1+b_1\mu+b_2\mu^2+\cdots)$，并且求出周期为 $2\pi/a$ 的解 $x(\tau)$. 系数 b_1 通常由 $v_1(\tau)$的周期解的存在条件确定，等等(见[4]，第2章，§8).

4. 如果函数 $f(x,\ y)$在点$(x_0,\ y_0)$的邻域内是解析的，即可以展成$(x-x_0)$和$(y-y_0)$的幂级数，则以 $y(x_0)=y_0$ 为初始条件的方程 $y'=f(x,y)$的解也是解析函数，即在点 x_0 的邻域内可以展成幂级数(见[2]，§18和[1]，第II章，§1，第6段). 类似的断言对于以 $y(x_0)=y_0, y'(x_0)=y_0'$, …, $y^{(n-1)}(x_0)=y_0^{(n-1)}$ 为初始条件的方程 $y^{(n)}=f(x,\ y,\ y',\ \cdots,\ y^{(n-1)})$也是正确的.

例 求出以 $y(0)=2$, $y'(0)=1$ 为初始条件的方程 $y''=xy^2-y'$ 的级数形式的解.

我们来求形如级数

$$y=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots=2+x+a_2x^2+a_3x^3+\cdots \tag{10}$$

的解. 由初始条件可得 $a_0=2$, $a_1=1$. 将级数代入微分方程，就得到

$$2a_2+6a_3x+12a_4x^2+\cdots$$
$$=x(2+x+a_2x^2+\cdots)^2-1-2a_2x-3a_3x^2-\cdots.$$

将右端想象成幂级数的形状，并且使方程两端 x 的同次幂的系数相等，就得到 $2a_2=-1$, $6a_3=4-2a_2$, $12a_4=4-3a_3\cdots$. 由此求出

$$a_2=-\frac{1}{2},\ a_3=\frac{5}{6},\ a_4=\frac{1}{8},\ \cdots.$$

因此，
$$y=2+x-\frac{1}{2}x^2+\frac{5}{6}x^3+\frac{1}{8}x^4+\cdots.$$

5. 对于方程

$$p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+p_n(x)y=0, \tag{11}$$

所有的 $p_i(x)$ 在点 x_0 的邻域内解析，并且 $p_0(x_0)=0$，即最高阶导数的系数在点 x_0 为零，幂级数形状的解可能不存在．在这种情形下，可以存在广义幂级数形状的解

$$a_0(x-x_0)^r+a_1(x-x_0)^{r+1}+a_2(x-x_0)^{r+2}+\cdots, \tag{12}$$

其中数 r 不一定是整数(见[1]，第 VI 章，§ 2，第 2 段，或者[4]，第 2 章，§ 7)．为了求出这个广义幂级数解，要把级数(12)代入方程(11)，并使方程两端 $(x-x_0)$ 的最低次幂的系数相等，求出指数 r 可能有的值，然后对其中的每个 r 值来确定系数 a_k．

1056. 如果数 y_0 的变化小于 0.01，试估计，以 $y(0)=y_0=0$ 为初始条件的方程 $y'=x+\sin y$ 的解当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时可能改变多少？

1057. 如果在方程的右端补充一个函数 $\varphi(t)$，$|\varphi(t)|\leqslant 0.1$(即如果附加某一个外力)，试估计，以 $x(0)=0$，$\dot{x}(0)=0$ 为初始条件的方程 $\ddot{x}+\sin x=0$ 的解当 $0\leqslant t\leqslant T$ 时可能改变多少？

1058. 为了近似地求出方程 $\ddot{x}+\sin x=0$ 的解，将其用方程 $\ddot{x}+x=0$ 来代替．如果已知当 $|x|\leqslant 0.25$ 时，$|x-\sin x|<0.003$，试估计，以 $x(0)=0.25$，$\dot{x}(0)=0$ 为初始条件的解当 $0\leqslant t\leqslant 2$ 时所产生的误差．

在 **1059～1063** 各题中，估计近似解在给定区间上的误差．

1059. $y'=\dfrac{x}{4}-\dfrac{1}{1+y^2}$，$y(0)=1$；$\tilde{y}=1-\dfrac{x}{2}$，$|x|\leqslant\dfrac{1}{2}$.

1060. $\dot{x}=x-y,\ \dot{y}=tx,\ x(0)=1,\ y(0)=0;\ \tilde{x}=1+t+\dfrac{t^2}{2},$ $\tilde{y}=\dfrac{t^2}{2},\ |t|\leqslant 0.1.$

1061. $y''-x^2y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0;\ \ \tilde{y}=e^{\frac{x^4}{12}},\ |x|\leqslant 0.5.$

1062. $y'=\dfrac{1}{y}+x,\ y(0)=1;\ \tilde{y}=1+x,\ 0\leqslant x\leqslant\dfrac{1}{4}.$

1063. $y'=2xy^2+1,\ y(0)=1;\ \tilde{y}=\dfrac{1}{1-x},\ |x|\leqslant\dfrac{1}{4}.$

提示 首先划出一个包含近似解 $\tilde{y}$ 的有界区域，并假定在这个区域上包含精确解 y. 对这个区域先估计利普希兹常数. 然后再估计 $|y-\tilde{y}|$. 用这个估计检验在划出的区域上是否包含 y.

在1064～1073各题中，求出给定方程和方程组的解对参数或者对初始值的导数.

1064. $y'=y+\mu(x+y^2),\ y(0)=1;$ 求出 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}.$

1065. $y'=2x+\mu y^2,\ y(0)=\mu-1;$ 求出 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}.$

1066. $y'=y+y^2+xy^3,\ y(2)=y_0;$ 求出 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial y_0}\right|_{y_0=0}.$

1067. $\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{x}{t}+\mu te^{-x},\ x(1)=1;$ 求出 $\left.\dfrac{\partial x}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}.$

1068. $\dfrac{dx}{dt}=x^2+\mu tx^3,\ x(0)=1+\mu;$ 求出 $\left.\dfrac{\partial x}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}.$

1069. $\begin{cases}\dot{x}=4ty^2,\\ \dot{y}=1+5\mu x,\end{cases}$ $x(0)=y(0)=0;$ 求出 $\left.\dfrac{\partial x}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}.$

1070. $\begin{cases}\dot{x}=xy+t^2,\ x(1)=x_0,\\ 2\dot{y}=-y^2,\ y(1)=y_0;\end{cases}$ 求出 $\left.\dfrac{\partial x}{\partial y_0}\right|_{\substack{x_0=3\\ y_0=2}}.$

1071. $\begin{cases}\dot{x}=x+y,\ x(0)=1+\mu,\\ \dot{y}=2x+\mu y^2,\ y(0)=-2;\end{cases}$ 求出 $\left.\dfrac{\partial y}{\partial\mu}\right|_{\mu=0}.$

1072. $\ddot{x}-\dot{x}=(x+1)^2-\mu x^2$; $x(0)=\frac{1}{2}$, $\dot{x}(0)=-1$; 求出 $\left.\frac{\partial x}{\partial \mu}\right|_{\mu=1}$.

1073. $\ddot{x}=\frac{2}{t}-\frac{2}{x}$, $x(1)=1$, $\dot{x}(1)=b$; 求出 $\left.\frac{\partial x}{\partial b}\right|_{b=1}$.

提示　当 $b=1$ 时函数 $x=t$ 是解.

在 **1074～1078** 各题中，求出解对微参数 μ 幂展开的 2～3 项.

1074. $y'=4\mu x-y^2$, $y(1)=1$.

1075. $y'=\frac{2}{y}-5\mu x$, $y(1)=2$.

1076. $xy'=\mu x^2+\ln y$, $y(1)=1$.

1077. $y'=\frac{6\mu}{x}-y^2$, $y(1)=1+3\mu$.

1078. $y'=e^{y-x}+\mu y$, $y(0)=-\mu$.

对于方程 **1079～1085**，用微参数法(见[4]，第 2 章，§8) 近似地求出周期等于方程右端周期的周期解；μ 是微参数.

1079. $\ddot{x}+3x=2\sin t+\mu\dot{x}^2$.

1080. $\ddot{x}+5x=\cos 2t+\mu x^2$.

1081. $\ddot{x}+3x+x^3=2\mu\cos t$.

1082. $\ddot{x}+x^2=1+\mu\sin t$.

1083. $\ddot{x}+\sin x=\mu\sin 2t$.

1084*. $\ddot{x}+x=\sin 3t-\sin 2t+\mu x^2$; 只求出零次近似.

1085*. $\ddot{x}+x=6\mu\sin t-x^3$.

在 **1086～1090** 各题中，用微参数法(见[4]，第 2 章，§8，第 4 段)近似地求出给定方程的周期解.

1086. $\ddot{x}+x-x^2=0$.　　**1087.** $\ddot{x}+x+x^3=0$.

1088. $\ddot{x}+\sin x=0$.　　**1089.** $\ddot{x}+x=\mu(1-x^2)\dot{x}$.

1090. $\ddot{x}+x=\mu(\dot{x}-\dot{x}^3)$.

在 **1091～1097** 题的每个问题中，求出满足给定初始条件的幂级数形式的解．算出级数前几项的系数(包括 x^4 的系数在内)．

1091. $y'=y^2-x$; $y(0)=1$.

1092. $y'=x+\dfrac{1}{y}$; $y(0)=1$.

1093. $y'=y+xe^y$; $y(0)=0$.

1094. $y'=2x+\cos y$; $y(0)=0$.

1095. $y'=x^2+y^3$; $y(1)=1$.

1096. $y''=xy'-y^2$; $y(0)=1$, $y'(0)=2$.

1097. $y''=y'^2+xy$; $y(0)=4$, $y'(0)=-2$.

1098*. 对于以 $y(0)=1$ 为初始条件的方程 $y'=y^2-x$，作出优方程(见[2]，§18)后，估计其幂级数解收敛半径的下界．

1099*. 如果在幂级数解中只取前四项(包括 a_4x^4 在内)，试估计，以 $y(0)=0$ 为初始条件的方程 $y'=e^y-x^2y$ 的解当 $|x|\leqslant 0.2$ 时可以有怎样的精确度．

在 **1100～1109** 各题中，对于每个给定的方程，求出线性无关的幂级数解．在容易作出的情况下，将得到的级数和用初等函数表示出来．

1100. $y''-x^2y=0$.　　**1101.** $y''-xy'-2y=0$.

1102. $(1-x^2)y''-4xy'-2y=0$.

1103. $(x^2+1)y''+5xy'+3y=0$.

1104. $(1-x)y''-2y'+y=0$.

1105. $(x^2-x+1)y''+(4x-2)y'+2y=0$.

1106. $y''-xy'+xy=0$. **1107.** $y''+y\sin x=0$.

1108. $xy''+y\ln(1-x)=0$.

1109. $y'''-xy''+(x-2)y'+y=0$.

在 **1110～1116** 各题中，求出方程的幂级数(或者广义幂级数)解.

1110. $xy''+2y'+xy=0$.

1111. $2x^2y''+(3x-2x^2)y'-(x+1)y=0$.

1112. $9x^2y''-(x^2-2)y=0$.

1113. $x^2y''-x^2y'+(x-2)y=0$.

1114. $x^2y''+2xy'-(x^2+2x+2)y=0$.

1115. $xy''-xy'-y=0$. **1116.** $xy''+y'-xy=0$.

1117. 求出方程 $xy''+y'-xy=0$ 当 $x\to 0$ 时与 **1116** 题的答案中所指的解线性无关的精确到 $O(x^6)$ 的解.

在 **1118～1120** 各题中，指出所给定的方程是否有幂级数(或者广义幂级数)形式的解.

1118. $x^2y''+xy'-(x+2)y=0$.

1119. $x^2y''+xy'+(1-x)y=0$.

1120. $x^2y''+(3x-1)y'+y=0$.

在 **1121～1125** 各题中，求出给定方程的三角级数(见[1]，第 VI 章，§1，第 3 段或者[4]，第 2 章，§7)形式的周期解.

1121. $y''-3y=f(x)$，当 $|x|\leqslant\pi$ 时 $f(x)=|x|$，$f(x+$

$2\pi)\equiv f(x)$.

1122. $y''+y'+y=|\sin x|$.

1123. $y'''-y'-y=\dfrac{2\sin x}{5-4\cos x}$.

提示　方程 **1123** 右端的傅里叶级数展开式具有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}2^{-n}\sin nx$ 的形式.

1124. $y''-x^2y=f(x)$，当 $0\leqslant x\leqslant 1$ 时 $f(x)=x(1-x)$，$f(x+1)\equiv f(x)$.

1125. $y''+9y=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\dfrac{\sin 2kx}{k^2}$.

在 **1126～1129** 各题中，用欧拉折线法(或者不用它而用迭代法，见[4]，第 1 章，§6，§7)在指定的区间上近似地求出满足给定初始条件的各方程的解．以 $h=0.2$ 或者 $h=0.1$ 为步长分别计算到小数点后第二位或者第三位.

1126. $y'=y^2+x$，$0\leqslant x\leqslant 1$；$y(0)=0.3$.

1127. $y'=\dfrac{1}{y}+x$，$0\leqslant x\leqslant 1$；$y(0)=1$.

1128. $y'=\dfrac{x}{y}-y$，$0\leqslant x\leqslant 1$；$y(0)=1$.

1129. $y'=\dfrac{x^2}{x+y}$，$1\leqslant x\leqslant 2$；$y(1)=0$.

在 **1130～1135** 各题中，用阿达姆斯(Адамс)或者什捷尔麦尔(Штермер)方法(见[4]，第 1 章，§7)近似地计算下列各方程在指定区间上的解．算到小数点后第三位．用幂级数算出解在初始点的值.

1130. $y'=y$，$0\leqslant x\leqslant 1$；$y(0)=1$.

1131. $y'=y^2-x$，$0\leqslant x\leqslant 1$；$y(0)=0.5$.

1132. $y'=\frac{1}{y}-x,\ 0\leqslant x\leqslant 1;\ y(0)=1.$

1133. $y'=x^2-y^2,\ 1\leqslant x\leqslant 2;\ y(1)=1.$

1134. $y''=xy,\ 0\leqslant x\leqslant 1;\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$

1135. $xy''+y'+xy=0,\ 0\leqslant x\leqslant 1;\ y(0)=1,\ y'(0)=0.$

在(由方程 $y'=f(x, y)$ 所确定的)方向场的某些曲线 $y=\varphi_i(x)$ 的点上，比较方向场与这些曲线切线的方向时，就可以解出 **1136～1140** 各题.

1136*. 从上、下两侧估计方程 $y'=2+\sin x-y^2,\ 0\leqslant x<+\infty,\ y(0)=1$ 的解(在 (x, y) 平面上作出这个解不能越出的带形 $\alpha\leqslant y\leqslant\beta$).

1137*. 从上、下两侧估计方程 $y'=\frac{1}{y}+2x,\ 0\leqslant x<+\infty,\ y(0)=1$ 的解.

1138*. 证明，以 $y(4)=2$ 为初始条件的方程 $y'=x-y^2$ 的解，当 $4<x<\infty$ 时满足不等式 $\sqrt{x}-0.07<y(x)<\sqrt{x}$.

1139*. 证明，对于以 $y(x_0)=y_0$ 为初始条件的方程 $y'=x-y^2$ 的解 $y(x)$，当 $x\to+\infty$ 时有 $y(x)-\sqrt{x}\to 0$，其中 $x_0\geqslant 0,\ y_0\geqslant 0$.

1140*. 从上、下两侧估计方程 $y'=2y^2-\cos^2 5x$ 在区域 $y<0$ 上的周期解.

§19. 非线性方程组

1. 可以用消去未知函数的方法把微分方程组化成一个方程(有时化成在每个方程中只含有一个未知函数的几个方程). 详见[1]，第 VII 章，§1，第 2 段，或者[4]，第 3 章，§2.

例 1 解方程组

$$y' = \frac{z}{x}, \quad z' = \frac{(y-z)^2 + xz}{x^2}. \tag{1}$$

解 从给定方程中消去 z. 由第一个方程有 $z = xy'$. 代入第二个方程时，化简后就得到

$$x^3 y'' = (y - xy')^2.$$

给定的方程组(1)已经被化成一个二阶方程. 这个方程可以用 § 10 所讲的方法(降阶法)求解. 从这个方程求出 y 以后，还要用等式 $z = xy'$ 求出 z.

2. 在用消去未知函数的方法求解方程组时，通常要得到较高阶的方程，因此在许多情形下，用求可积组合的方法求解方程组是比较方便的(见[1]，第 VII 章，§ 5，第 2 段).

例 2 解方程组①

$$\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz} = \frac{dz}{-xy}. \tag{2}$$

前两个分式组成第一个可积组合. 约去等式 $\frac{dx}{xz} = \frac{dy}{yz}$ 中的 $\frac{1}{z}$ 并积分，我们就得到初积分②

$$\frac{x}{y} = C_1. \tag{3}$$

为了求出第二个可积组合，可以利用相等分式的下列性质：如果

$$\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \cdots = \frac{a_n}{b_n} = t,$$

则对任何的 $k_1, k_2, \cdots, k_n$, 有

$$\frac{k_1 a_1 + k_2 a_2 + \cdots + k_n a_n}{k_1 b_1 + k_2 b_2 + \cdots + k_n b_n} = t.$$

利用这个性质，由(2)式就得到

$$\frac{y \cdot dx + x \cdot dy}{y \cdot xz + x \cdot yz} = \frac{dz}{-xy}; \quad \frac{d(xy)}{2xyz} = \frac{dz}{-xy}; \quad d(xy) = -2z\,dz.$$

① 方程组(2)是写成对称形状的，关于微分方程组的对称形见[1]，第 VII 章，§ 5，第 1 段，或者[4]，第 3 章，§ 3.

② 关于初积分见[1]，第 VII 章，§ 4 或者[3]，§ 23.

因此，

$$xy+z^2=C_2. \tag{4}$$

显然，初积分(3)和初积分(4)是无关的．方程组已被解出．

也可以利用已知的初积分(3)从方程组(2)中消去一个未知函数，例如 x，来代替求第二个可积组合．由(3)有 $x=C_1y$．代入方程(2)的第二式，就得到

$$\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-C_1y^2}.$$

由此 $-C_1y\,dy=z\,dz$；$z^2=-C_1y^2+C_2$．把公式(3)中关于 C_1 的表达式代入此式，便又求出一个初积分：$z^2+xy=C_2$．

在1141～1160各题中，解出给定的方程组．

1141． $y'=\frac{x}{z},\ z'=-\frac{x}{y}$.

1142． $y'=\frac{y^2}{z-x},\ z'=y+1$.

1143． $y'=\frac{z}{x},\ z'=\frac{z(y+2z-1)}{x(y-1)}$.

1144． $y'=y^2z,\ z'=\frac{z}{x}-yz^2$.

1145． $2zy'=y^2-z^2+1,\ z'=z+y$.

1146． $\frac{dx}{2y-z}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$.

1147． $\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}=\frac{dz}{z}$.

1148． $\frac{dx}{y+z}=\frac{dy}{x+z}=\frac{dz}{x+y}$.

1149． $\frac{dx}{y-x}=\frac{dy}{x-y+z}=\frac{dz}{x-y}$.

1150． $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{u}=\frac{dz}{x}=\frac{du}{y}$.

1151. $\frac{dx}{y-u}=\frac{dy}{z-x}=\frac{dz}{u-y}=\frac{du}{x-z}$.

1152. $\frac{dx}{z}=\frac{dy}{xz}=\frac{dz}{y}$.

1153. $\frac{dx}{z^2-y^2}=\frac{dy}{z}=-\frac{dz}{y}$

1154. $\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{xy+z}$.

1155. $\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{xy\sqrt{z^2+1}}$.

1156. $\frac{dx}{x+y^2+z^2}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$.

1157. $\frac{dx}{x(y+z)}=\frac{dy}{z(z-y)}=\frac{dz}{y(y-z)}$.

1158. $-\frac{dx}{x^2}=\frac{dy}{xy-2z^2}=\frac{dz}{xz}$.

1159. $\frac{dx}{x(z-y)}=\frac{dy}{y(y-x)}=\frac{dz}{y^2-xz}$.

1160. $\frac{dx}{x(y^2-z^2)}=-\frac{dy}{y(z^2+x^2)}=\frac{dz}{z(x^2+y^2)}$.

在**1161～1163**各题中，对于给定的微分方程组和函数φ，检验关系式$\varphi=C$是不是方程组的初积分.

1161. $\frac{dx}{dt}=\frac{x^2-t}{y}$, $\frac{dy}{dt}=-x$; $\varphi_1=t^2+2xy$; $\varphi_2=x^2-ty$.

1162. $\dot{x}=xy$, $\dot{y}=x^2+y^2$; $\varphi_1=x\ln y-x^2y$; $\varphi_2=\frac{y^2}{x^2}-2\ln x$.

1163. $\frac{dx}{y}=-\frac{dy}{x}=\frac{dz}{u}=-\frac{du}{z}$; $\varphi=yz-ux$.

1164. 检验方程组

$$\frac{dx}{x}=\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

的初积分 $\quad \dfrac{x+y}{z+x}=C_1,\ \dfrac{z-y}{x+y}=C_2$

是否无关.

1165*. 证明，在含有结点型或者焦点型奇点的邻域内，对于方程组

$$\frac{dx}{dt}=p(x,\ y),\ \frac{dy}{dt}=Q(x,\ y),$$

不可能存在形如 $\varphi(x,\ y)=C$ 的初积分，φ 是连续函数，在奇点任意小的邻域内 $\varphi\neq\text{const}$.

1166. 假设 $\varphi_1(t,\ x,\ y)=C_1,\ \varphi_2(t,\ x,\ y)=C_2$ 是方程组

$$\frac{dx}{dt}=f_1(t,\ x,\ y),\ \frac{dy}{dt}=f_2(t,\ x,\ y)$$

的初积分；函数 f_1, f_2 及其对 x, y 的一阶偏导数连续. 又设在 t, x, y 空间中曲面 $\varphi_1(t,\ x,\ y)=1$, $\varphi_2(t,\ x,\ y)=2$ 只有一条公共曲线(即两曲面沿这条曲线彼此相切或者相交). 证明，这条曲线是给定方程组的积分曲线.

§20. 一阶偏微分方程

1. 为了解出偏微分方程

$$a_1\frac{\partial z}{\partial x_1}+\cdots+a_n\frac{\partial z}{\partial x_n}=b, \tag{1}$$

其中 a_1, $\cdots$, a_n, b 依赖于 x_1, $\cdots$, x_n, z, 应该写出常微分方程组

$$\frac{dx_1}{a_1}=\cdots=\frac{dx_n}{a_n}=\frac{dz}{b}, \tag{2}$$

并求出这个方程组 n 个无关的初积分

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1(x_1, \cdots, x_n, z)=C_1, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \varphi_n(x_1, \cdots, x_n, z)=C_n.\end{array}\right\} \tag{3}$$

把方程(1)的通解写成非显式:

$$F(\varphi_1, \cdots, \varphi_n)=0, \tag{4}$$

其中 F 是任意可微函数.

特别地，如果 z 只是在(3)式中的一个初积分里出现，例如在最后的一个里出现，则通解也可以写成:

$$\varphi_n(x_1, \cdots, x_n, z)=f(\varphi_1, \cdots, \varphi_{n-1}), \tag{5}$$

其中 f 是任意可微函数. 从等式(5)解出 z 后，就得到方程(1)显式形式的通解.

2. 为了求出满足微分方程

$$a_1(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial x}+a_2(x, y, z)\frac{\partial z}{\partial y}=b(x, y, z), \tag{6}$$

并且通过给定曲线

$$x=u(t),\ y=v(t),\ z=w(t) \tag{7}$$

的曲面 $z=z(x, y)$，应当求出方程组

$$\frac{dx}{a_1}=\frac{dy}{a_2}=\frac{dz}{b} \tag{8}$$

的两个无关的初积分

$$\varphi_1(x, y, z)=C_1,\ \varphi_2(x, y, z)=C_2. \tag{9}$$

把 x, y, z 的参数表达式(7)代入这两个初积分，我们就得到形如

$$\phi_1(t)=C_1,\ \phi_2(t)=C_2 \tag{10}$$

的两个方程. 从中消去 t 后，就得到关系式 $F(C_1, C_2)=0$. 用初积分(9)的左端代替这里的 C_1 和 C_2，就得到所求的解.

当(10)式的两个方程中都不出现 t 时，曲线(7)是方程组(8)的积分曲线，即是方程(6)的特征线，于是柯西问题具有无穷多个解(见[1]，第 VIII 章，§ 3，第 4 段).

例 求出方程

$$xz\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}=-xy \tag{11}$$

的通解以及通过曲线

$$y=x^2,\ z=x^3 \tag{12}$$

的积分曲面.

解　建立方程组

$$\frac{dx}{xz}=\frac{dy}{yz}=\frac{dz}{-xy},$$

并且求出其初积分(见§19, 例2)

$$\frac{x}{y}=C_1,\ z^2+xy=C_2. \tag{13}$$

因此,方程(11)的通解可以写成非显式的形式

$$F\left(\frac{x}{y},\ z^2+xy\right)=0,$$

其中 F 是任意函数. 因为 z 只是在(13)中的一个初积分里出现, 所以也可以写成显式. 我们得到

$$z^2+xy=f\left(\frac{x}{y}\right);\ z=\pm\sqrt{f\left(\frac{x}{y}\right)-xy},$$

其中 f 是任意函数.

为了求出通过用参数表示的曲线(12)的积分曲面, 例如取 x 作为参数时的曲线:

$$x=x,\ y=x^2,\ z=x^3,$$

把这些参数表达式代入(13)后,就得到

$$\frac{1}{x}=C_1,\ x^6+x^3=C_2.$$

消去 x 后,就得到

$$\frac{1}{C_1^6}+\frac{1}{C_1^3}=C_2.$$

用初积分(13)的左端代替 C_1 和 C_2, 就得到所求的解

$$\left(\frac{y}{x}\right)^6+\left(\frac{y}{x}\right)^3=z^2+xy.$$

3. 关于解两个一阶偏微分方程的方程组和普法弗(Пфафф)方程见[1], 第IX章, §1和§2, 第1, 2, 3段.

对于 1167～1188 的每个方程求出通解。

1167. $y\frac{\partial z}{\partial x}-x\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

1168. $(x+2y)\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$.

1169. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+z\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

1170. $(x-z)\frac{\partial u}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial u}{\partial y}+2z\frac{\partial u}{\partial z}=0$.

1171. $y\frac{\partial z}{\partial x}+x\frac{\partial z}{\partial y}=x-y$.

1172. $e^{x}\frac{\partial z}{\partial x}+y^{2}\frac{\partial z}{\partial y}=ye^{x}$.

1173. $2x\frac{\partial z}{\partial x}+(y-x)\frac{\partial z}{\partial y}-x^{2}=0$.

1174. $xy\frac{\partial z}{\partial x}-x^{2}\frac{\partial z}{\partial y}=yz$.

1175. $x\frac{\partial z}{\partial x}+2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^{2}y+z$.

1176. $(x^{2}+y^{2})\frac{\partial z}{\partial x}+2xy\frac{\partial z}{\partial y}+z^{2}=0$.

1177. $2y^{4}\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=x\sqrt{z^{2}+1}$.

1178. $x^{2}z\frac{\partial z}{\partial x}+y^{2}z\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$.

1179. $yz\frac{\partial z}{\partial x}-xz\frac{\partial z}{\partial y}=e^{z}$.

1180. $(z-y)^{2}\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy$.

1181. $xy\frac{\partial z}{\partial x}+(x-2z)\frac{\partial z}{\partial y}=yz$.

1182. $y\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{y}{x}$.

1183. $\sin^2 x\frac{\partial z}{\partial x}+\operatorname{tg} z\frac{\partial z}{\partial y}=\cos^2 z$.

1184. $(x+z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y+z)\frac{\partial z}{\partial y}=x+y$.

1185. $(xz+y)\frac{\partial z}{\partial x}+(x+yz)\frac{\partial z}{\partial y}=1-z^2$.

1186. $(y+z)\frac{\partial u}{\partial x}+(z+x)\frac{\partial u}{\partial y}+(x+y)\frac{\partial u}{\partial z}=u$.

1187. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+(z+u)\frac{\partial u}{\partial z}=xy$.

1188. $(u-x)\frac{\partial u}{\partial x}+(u-y)\frac{\partial u}{\partial y}-z\frac{\partial u}{\partial z}=x+y$.

求出满足给定条件的 **1189～1193** 各方程的解.

1189. $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$; 当 $y=1$ 时 $z=2x$.

1190. $\frac{\partial z}{\partial x}+(2e^x-y)\frac{\partial z}{\partial y}=0$; 当 $x=0$ 时 $z=y$.

1191. $2\sqrt{x}\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=0$; 当 $x=1$ 时 $z=y^2$.

1192. $\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}+2\frac{\partial u}{\partial z}=0$; 当 $x=1$ 时 $u=yz$.

1193. $x\frac{\partial u}{\partial x}+y\frac{\partial u}{\partial y}+xy\frac{\partial u}{\partial z}=0$; 当 $z=0$ 时 $u=x^2+y^2$.

在 **1194～1210** 各题中，求出满足给定方程并通过给定曲线的曲面.

1194. $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+xy\frac{\partial z}{\partial y}=x$; $x=0$, $z=y^2$.

1195. $x\frac{\partial z}{\partial x}-2y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+y^2;\ y=1,\ z=x^2.$

1196. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-xy;\ x=2,\ z=y^2+1.$

1197. $\operatorname{tg} x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z;\ y=x;\ z=x^3.$

1198. $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=z^2(x-3y);\ x=1,\ yz+1=0.$

1199. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z-x^2-y^2;\ y=-2,\ z=x-x^2.$

1200. $yz\frac{\partial z}{\partial x}+xz\frac{\partial z}{\partial y}=xy;\ x=a,\ y^2+z^2=a^2.$

1201. $z\frac{\partial z}{\partial x}-xy\frac{\partial z}{\partial y}=2xz;\ x+y=2,\ yz=1.$

1202. $z\frac{\partial z}{\partial x}+(z^2-x^2)\frac{\partial z}{\partial y}+x=0;\ y=x^2,\ z=2x.$

1203. $(y-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(z-x)\frac{\partial z}{\partial y}=x-y;\ z=y=-x.$

1204. $x\frac{\partial z}{\partial x}+(xz+y)\frac{\partial z}{\partial y}=z;\ x+y=2z,\ xz=1.$

1205. $y^2\frac{\partial z}{\partial x}+yz\frac{\partial z}{\partial y}+z^2=0;\ x-y=0,\ x-yz=1.$

1206. $x\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}=y;\ y=2z,\ x+2y=z.$

1207. $(y+2z^2)\frac{\partial z}{\partial x}-2x^2z\frac{\partial z}{\partial y}=x^2;\ x=z,\ y=x^2.$

1208. $(x-z)\frac{\partial z}{\partial x}+(y-z)\frac{\partial z}{\partial y}=2z;\ x-y=2,\ z+2x=1.$

1209. $xy^3\frac{\partial z}{\partial x}+x^2z^2\frac{\partial z}{\partial y}=y^3z;\ x=-z^3,\ y=z^2.$

1210*. $x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=2xy;\ y=x,\ z=x^2.$

1211. 求出与曲面族

$$z^2=Cxy$$

交成直角的曲面的方程.

1212. 求出通过直线

$$y=x,\ z=1,$$

并与曲面族 $\quad x^2+y^2+z^2=Cx$

正交的曲面.

1213. 写出其母线平行于向量$(a,\ b,\ c)$的柱面所满足的偏微分方程. 求出这个方程的通解.

1214. 利用上题结果,求出其母线平行于向量$(1,\ -1,\ 1)$, 并且以

$$x+y+z=0,\ x^2+xy+y^2=1$$

为准线的柱面方程.

1215. 写出其顶点在给定点$(a,\ b,\ c)$的所有圆锥曲面所满足的偏微分方程,并解之.

1216. 求一曲面, 使其上任一点的切平面在 Ox 轴上的截距为切点横坐标的一半.

在**1217~1219** 各题中,解出给定的方程组.

1217. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=\dfrac{z}{x}, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{2z}{y}. \end{cases}$ **1218.** $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=y-z, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=xz. \end{cases}$

1219. $\begin{cases} \dfrac{\partial z}{\partial x}=2yz-z^2, \\ \dfrac{\partial z}{\partial y}=xz. \end{cases}$

在 **1220～1223** 各题中，求出满足给定普法弗方程的曲面.

1220. $(x-y)dx+z\,dy-x\,dz=0$.

1221. $3yz\,dx+2xz\,dy+xy\,dz=0$.

1222. $(z+xy)dx-(z+y^2)dy+y\,dz=0$.

1223. $(2yz+3x)dx+xz\,dy+xy\,dz=0$.

答　　案

15. $f(x, y)=0$; $f'_x<0\,(\max)$, $f'_x>0\,(\min)$. **16.** ① $y=x^2+2x$; ② $x=2\operatorname{ch} y$; ③ $xy^2=-(1-x^2)^2$; $y=0$; ④ $f'_x+f\cdot f'_y=0$. **17.** $y=e^{xy'/y}$. **18.** $y'=3y^{2/3}$. **19.** $xy'=3y$. **20.** $y^2+y'^2=1$. **21.** $x^2y'-xy=yy'$. **22.** $2xyy'-y^2=2x^3$. **23.** $y'^3=4y(xy'-2y)$. **24.** $y'=\cos\dfrac{x\sqrt{1-y'^2}}{y}$. **25.** $x(x-2)y''-(x^2-2)y'+2(x-1)y=0$. **26.** $(yy''+y'^2)^2=-y^3y''$. **27.** $y''y^2(\ln y-1)=y'^2(xy'-y)$. **28.** $x^3y'''-3x^2y''+6xy'-6y=0$. **29.** $y'''y'=3y''^2$. **30.** $(y-2x)^2(y'^2+1)=(2y'^2+1)^2$. **31.** $xy'^2=y(2y'-1)$. **32.** $(xy'-y)^2=2xy(y'^2+1)$. **33.** $x^2y''-2xy'+2y=0$. **34.** $(y''y+y'^2+1)^2=(y'^2+1)^3$. **35.** $yy'+zz'=0$, $y^2+2xzz'=x^2z'^2$. **36.** $x^2+y^2=z^2-2z(y-xy')$; $x+yy'=zz'-z'(y-xy')$. **37.** $4yy'=-x$. **38.** $y'=-2y$. **39.** $(x^2+y)y'=-x$. **40.** $(x+y)y'=y-x$; $(x-y)y'=x+y$. **41.** $(x\mp y\sqrt{3})y'=y\pm x\sqrt{3}$. **42.** $(3x\mp y\sqrt{3})y'=y\pm 3x\sqrt{3}$. **43.** $(2x\mp y\sqrt{3})y'=y\pm 2x\sqrt{3}$. **44.** $r'\sin\theta=r^2$. **45.** $r'=\dfrac{1}{2}r\operatorname{ctg}\theta$. **46.** $r'=r\operatorname{ctg}(\theta\pm 45^\circ)$. **47.** $(x+2y)y'=-3x-y$; $(3x+2y)y'=y-x$. **48.** $y'[2xy\pm(x^2-y^2)]=y^2-x^2\pm 2xy$. **49.** $x(1+y'^2)=-2yy'$. **50.** $yy'^3+xy'^2=-1$. **51.** $y=C(x+1)e^{-x}$; $x=-1$. **52.** $\ln|x|=C+\sqrt{y^2+1}$; $x=0$. **53.** $y(\ln|x^2-1|+C)=1$, $y=0$; $y[\ln(1-x^2)+1]=1$. **54.** $y=2+C\cos x$; $y=2-3\cos x$. **55.** $y=(x-C)^3$; $y=0$; $y=(x-2)^3$; $y=0$. **56.** $y(1-Cx)=1$; $y=0$; $y(1+x)=1$. **57.** $y^2-2=Ce^{1/x}$. **58.** $(Ce^{-x^2}-1)y=2$; $y=0$. **59.** $e^{-s}=1+Ce^{t}$. **60.** $s=-\lg(C-10^{x})$. **61.** $x^2+t^2-2t=C$. **62.** $\operatorname{ctg}\dfrac{y-x}{2}=x+C$; $y-x=2\pi k$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$ **63.** $2x+y-1=Ce^{x}$. **64.** $x+2y+2=Ce^{y}$; $x+2y+2=0$. **65.** $\sqrt{4x+2y-1}-2\ln(\sqrt{4x+2y-1}+2)=x+C$. **66.** $y=\operatorname{arctg}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)+2\pi$. **67.** $y=2$. **68.** ① $2y^2+x^2=C$; ② $y^2-2x=C$; ③ $y^2=Ce^{x^2+y^2}$. **71.** $(C\pm x)y=2a^2$. **72.** $b\ln y-y=\pm x+C$, $0<y<b$. **73.** $a\ln(a\pm\sqrt{a^2-y^2})\mp\sqrt{a^2-y^2}=x+C$. **74.** $y=Cx^2$. **75.** $y=Cx^2$; $y^2=Cx$. **76.** $r(1\pm\cos\varphi)=C$. **77.** 氮的数量(以公升为单位)$x(t)=20-4e^{-t/200}$; 当

$t=200\ln 20\approx 600$ 秒$=10$ 分钟时 $x(t)=19.8$. **78.** 食盐的数量 $x(t)=10e^{-t/20}$; $x(60)=10e^{-3}\approx 0.5$ 千克. **79.** CO_2 的体积(以立方米为单位) $x(t)=0.08+0.22e^{-t/10}$; 当 $t=10\ln 11\approx 24$ 分钟时 $x(t)=0.1$. **80.** 物体的温度 $x(t)=20+80\cdot 2^{-t/10}$; 当 $t=40$ 分钟时 $x(t)=25$. **81.** 水和物体的温度差 $x(t)=55\cdot(3/5)^t$; 当 $t=\ln 55/(\ln 5-\ln 3)\approx 8$ 分钟时 $x(t)=1$. **82.** 金属的温度 $x(t)=a+\dfrac{b-a}{60}\left(t-\dfrac{1-e^{-kt}}{k}\right)$; $x(60)=b-\dfrac{b-a}{60k}(1-e^{-60k})$. **83.** 速度(以米/秒为单位) $v(t)=(2/3)^{(t/4)-1}$; 当 $t=4\left(\dfrac{2}{\lg 1.5}+1\right)\approx 50$ 秒时 $v(t)=0.01$; 路程 $s=\dfrac{6}{\ln 1.5}\approx 15$ 米. **84.** 剩下物质的数量 $x(t)=x(0)\cdot 2^{-t/30}$; 当 $t=60/\lg 2\approx 200$ 天时 $x(t)=0.01x(0)$. **85.** 剩下镭的数量 $x(t)=x(0)\cdot(1-0.00044)^t$; 当 $t=(\ln 0.5):\ln(1-0.00044)\approx 1600$ 年时 $x(t)=\dfrac{1}{2}x(0)$. **86.** 铀的数量 $x(t)=x(0)e^{-\alpha t}$, $\alpha=\ln 2/(4.5\cdot 10^9)$; $x(t)=100$, $x(0)=100+14\cdot\dfrac{238}{206}=116.2$; $t=4.5\cdot 10^9\cdot\dfrac{\lg 1.162}{\lg 2}\approx 970\cdot 10^6$ 年. **87.** 透过层为 x 厘米的光的数量 $y(x)=y(0)\cdot 2^{-x/35}$; $y(200)=y(0)\cdot 2^{-40/7}\approx 0.02y(0)$; 耗损为 $100\%-2\%=98\%$. **88.** 速度 $v(t)=50\,\mathrm{th}\,\dfrac{t}{5}$, 路程(以米为单位) $s(t)=250\ln\mathrm{ch}\,\dfrac{t}{5}$; 当 $\mathrm{ch}\,\dfrac{t}{5}=e^4$, $t\approx 5(4+\ln 2)\approx 23$ 秒时 $s(t)=1000$. **89.** 速度 $v(t)=\sqrt{\dfrac{g}{k}}\,\mathrm{tg}\,\sqrt{kg}(C-t)$, $g=10$, $k=0.012$, $C=\dfrac{1}{\sqrt{kg}}\,\mathrm{arc\,tg}\,\sqrt{\dfrac{k}{g}}\,v(0)\approx 1.75$; 当 $t=C\approx 1.75$ 秒时 $v(t)=0$; 最大高度 $h=\dfrac{1}{2k}\ln\left(\dfrac{k}{g}v^2(0)+1\right)\approx 16.3$ 米(无空气阻力的 $t=2$ 秒, $h=20$ 米). **90.** 速度 $v(t)=\sqrt{\dfrac{g}{k}}\,\mathrm{th}\sqrt{kg}\,t$, 路程 $s(t)=\dfrac{1}{k}\ln\mathrm{ch}\sqrt{kg}\,t$; 当 $t=\dfrac{1}{\sqrt{kg}}\cdot\ln\left(e^{kh}+\sqrt{e^{2kh}-1}\right)\approx 1.87$ 秒时 $s(t)=h=16.3$ 米, $v(t)=\sqrt{\dfrac{g}{k}(1-e^{-2kh})}\approx 16.4$ 米/秒. **91.** 水平面的高为 $h(t)$; $\sqrt{H}-\sqrt{h}=0.3\sqrt{2g}\,\dfrac{r^2}{R^2}t$; 当 $t=\dfrac{R^2}{0.3r^2}\sqrt{\dfrac{H}{2g}}\approx 1050$ 秒$=17.5$ 分时 $h(t)=0$. **92.** $(2R-h(t))^{3/2}=0.45\pi r^2\sqrt{2g}\,\dfrac{t}{H}$, 当 $t=\dfrac{2RH}{0.45\pi r^2}\sqrt{\dfrac{R}{g}}\approx 1040$ 秒时 $h(t)=0$. **93.** $\sqrt{H}-\sqrt{h(t)}=kt$, $k=\dfrac{\sqrt{H}}{5}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$; 当 $t=5(2+\sqrt{2})\approx 17$ 分钟时 $h(t)=0$. **94.** $H^{5/2}-[h(t)]^{5/2}=\dfrac{3d^2H^2t}{5R^2}\sqrt{2g}$; 当 $t=(4R^2/3d^2)\sqrt{2H/g}\approx 27$ 秒时 $h(t)=0$. **95.** 槽中水的体积为 $x(t)$ 公升; $t=\dfrac{2q}{a^2}\ln\dfrac{q}{q-a\sqrt{x}}-\dfrac{2}{a}\sqrt{x}$, $q=1.8$, $a=10^{-3/2}$; 当 $t=260$ 秒时 $x(t)=360$ (对于底部无孔水槽 $t=200$ 秒). **96.** 下段

为 x 的伸长等于 $y(x)=\frac{kPx^2}{2l}$，全绳的伸长等于 $y(l)=\frac{kPl}{2}$． **97**．在高为 h 千米处的压强为 $P(h)=e^{-0.12h}$(千克/厘米^2)． **98**．缆绳离开原来位置的转角为 φ (以弧度为单位) 的拉力等于 $f(\varphi)=f(0)e^{\varphi/3}$; $f(6\pi)=10e^{2\pi}\approx5000$ 千克． **99**．剩下水的数量 $m(t)=m_0-v(q_1-q_0)(1-e^{-\frac{k}{v}t})$，$k$ 为比例系数． **100**．燃烧质量为 x 的燃料后火箭的速度 $v(x)=C\cdot\ln\frac{M}{M-x}$; $v(M-m)=C\ln\frac{M}{m}$． **101**． $x+y=Cx^2$; $x=0$． **102**． $\ln(x^2+y^2)=C-2\operatorname{arc\,tg}(y/x)$． **103**． $x(y-x)=Cy$; $y=0$． **104**． $x=\pm y\sqrt{\ln Cx}$; $y=0$． **105**． $y=Ce^{y/x}$． **106**． $y^2-x^2=Cy$, $y=0$． **107**． $\sin\frac{y}{x}=Cx$． **108**． $y=-x\ln\ln Cx$． **109**． $\ln\frac{x+y}{x}=Cx$． **110**． $\ln Cx=\operatorname{ctg}\left(\frac{1}{2}\ln\frac{y}{x}\right)$; $y=xe^{2k\pi}$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$． **111**． $x\ln Cx=2\sqrt{xy}$; $y=0$; $x=0$． **112**． $\arcsin\frac{y}{x}=\ln Cx\cdot\operatorname{sgn}x$; $y=\pm x$． **113**． $(y-2x)^3=C(y-x-1)^2$; $y=x+1$． **114**． $2x+y-1=Ce^{2y-x}$． **115**． $(y-x+2)^2+2x=C$． **116**． $(y-x+5)^5(x+2y-2)=C$． **117**． $(y+2)^2=C(x+y-1)$; $y=1-x$． **118**． $y+2=Ce^{-2\operatorname{arc\,tg}\frac{y+2}{x-3}}$． **119**． $\ln\frac{y+x}{x+3}=1+\frac{C}{x+y}$． **120**． $\sin\frac{y-2x}{x+1}=C(x+1)$． **121**． $x^2=(x^2-y)\ln Cx$; $y=x^2$． **122**． $x=-y^2\ln Cx$; $y=0$． **123**． $x^2y^4\ln Cx^2=1$; $y=0$; $x=0$． **124**． $y^2e^{-1/xy}=C$; $y=0$; $x=0$． **125**． $(2\sqrt{y}-x)\ln C(2\sqrt{y}-x)=x$; $2\sqrt{y}=x$． **126**． $1-xy=Cx^3(2+xy)$; $xy=-2$． **127**． $2\sqrt{(1/xy^2)-1}=-\ln Cx$; $xy^2=1$; $y=0$． **128**． $\arcsin\frac{y^2}{|x^3|}=\ln Cx^3$; $|x^3|=y^2$． **129**． $x^2y\ln Cy=1$; $y=0$． **130**． ① $y^2=C(x+y)$; $y=-x$; ② $(y+x)^2(y-2x)^4=C(y-x)^3$; $y=x$． **131**． $y=C(x^2+y^2)$． **132**． $x^2+y^2=Cx$． **133**． 当 $\frac{1}{\beta}-\frac{1}{\alpha}=1$ 时． **136**． $y=Cx^2+x^4$． **137**． $y=(2x+1)(C+\ln|2x+1|)+1$． **138**． $y=\sin x+C\cos x$． **139**． $y=e^x(\ln|x|+C)$; $x=0$． **140**． $xy=C-\ln|x|$． **141**． $y=x(C+\sin x)$． **142**． $y=Ce^{x^2}-x^2-1$． **143**． $y=C\ln^2x-\ln x$． **144**． $xy=(x^3+C)e^{-x}$． **145**． $x=y^2+Cy$; $y=0$． **146**． $x=e^y+Ce^{-y}$． **147**． $x=(C-\cos y)\sin y$． **148**． $x=2\ln y-y+1+Cy^2$． **149**． $x=Cy^3+y^2$; $y=0$． **150**． $(y-1)^2x=y-\ln Cy$; $y=0$; $y=1$． **151**． $y(e^x+Ce^{2x})=1$; $y=0$． **152**． $y(x+1)(\ln|x+1|+C)=1$; $y=0$． **153**． $y^{-3}=C\cos^3x-3\sin x\cos^2x$; $y=0$． **154**． $y^3=Cx^3-3x^2$． **155**． $y^2=Cx^2-2x$, $x=0$． **156**． $y=x^4\ln^2Cx$; $y=0$． **157**． $y^{-2}=x^4(2e^x+C)$; $y=0$． **158**． $y^2=x^2-1+C\sqrt{|x^2-1|}$． **159**． $x^2(C-\cos y)=y$; $y=0$． **160**． $xy(C-\ln^2y)=1$． **161**． $x^2=Ce^{2y}+2y$． **162**． $y^2=C(x+$

$1)^2-2(x+1)$. **163.** $e^{-y}=Cx^2+x$. **164.** $\cos y=(x^2-1)\ln C(x^2-1)$. **165.** $y=2e^x-1$. **166.** $y=-2e^x$. **167.** $y=\frac{2}{x}+\frac{4}{Cx^5-x}$; $y=\frac{2}{x}$. **168.** $y=\frac{1}{x}+\frac{1}{Cx^{2/3}+x}$; $y=\frac{1}{x}$. **169.** $y=x+\frac{x}{x+C}$; $y=x$. **170.** $y=x+2+\frac{4}{Ce^{4x}-1}$; $y=x+2$. **171.** $y=e^x-\frac{1}{x+C}$; $y=e^x$. **172.** $3x=C\sqrt{|y|}-y^2$; $y=0$. **173.** $xy=Cx^3+2a^2$. **174.** $xy=a^2+Cy^2$. **175.** 经过 20 分钟; 3.68 千克. **176.** 经过 62 天. **177.** $y=y_1+C(y_2-y_1)$. **178.** $y=\operatorname{tg}x-\sec x$. **179.** b/a. **180.** b/a. **181.** $x(t)=\int_{-\infty}^{t}e^{s-t}f(s)ds=\int_{-\infty}^{0}e^{z}f(z+t)dz$. **162.** 当 $x\to+\infty$ 时 $y(x)=x\int_{+\infty}^{x}e^{x^2-t^2}dt\to-\frac{1}{2}$. **183.** $y(x)=\int_{0}^{\infty}e^{-s-\sin s\cdot\cos(s+2x)}\cdot\sin(x+s)ds$. **186.** $3x^2y-y^3=C$. **187.** $x^2-3x^3y^2+y^4=C$. **188.** $xe^{-y}-y^2=C$. **189.** $4y\ln x+y^4=C$. **190.** $x+\frac{x^3}{y^2}+\frac{5}{y}=C$. **191.** $x^2+\frac{2}{3}(x^2-y)^{3/2}=C$. **192.** $x-y^2\cos^2 x=C$. **193.** $x^3+x^3\ln y-y^2=C$. **194.** $x^2+1=2(C-2x)\sin y$. **195.** $2x+\ln(x^2+y^2)=C$. **196.** $x+\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{y}=C$. **197.** $\sqrt{1+y^2}=xy+C$. **198.** $2x^3y^3-3x^2=C$. **199.** $y^2=x^2(C-2y)$; $x=0$. **200.** $(x^2-C)y=2x$. **201.** $x^2+\ln y=Cx^3$; $x=0$. **202.** $y\sin xy=C$. **203.** $\frac{x^2}{2}+xy+\ln|y|=C$; $y=0$. **204.** $-x+1=xy(\operatorname{arc\,tg}y+C)$; $x=0$; $y=0$. **205.** $x+2\ln|x|+\frac{3}{2}y^2-\frac{y}{x}=C$; $x=0$. **206.** $\sin\frac{y}{x}=Ce^{-x^2}$. **207.** $\ln|y|-ye^{-x}=C$; $y=0$. **208.** $\ln\left(\frac{x^2}{y^2}+1\right)=2y+C$; $y=0$. **209.** $x^2y\cdot\ln Cxy=-1$; $x=0$; $y=0$. **210.** $x^2+y^2=y+Cx$; $x=0$. **211.** $x^2y+\ln|x/y|=C$; $x=0$; $y=0$. **212.** $2xy^2+(1/xy)=C$; $x=0$; $y=0$. **213.** $\ln\left|\frac{x+y}{y}\right|+\frac{y(1+x)}{x+y}=C$; $y=0$; $y=-x$. **214.** $\sin^2 y=Cx-x^2$; $x=0$. **215.** $y=C\ln x^2y$. **216.** $\sin y=-(x^2+1)\ln C(x^2+1)$. **217.** $xy(C-x^2-y^2)=1$; $x=0$; $y=0$. **218.** $y^3=Cx^2e^{x^2y^2}$. **219.** $x\sqrt{1+(y^2/x^2)}+\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+(y^2/x^2)}\right)=C$; $x=0$. **220.** $x^3-4y^2=Cy\sqrt[3]{xy}$; $x=0$; $y=0$. **221.** ① $y_0=0$, $y_1=x^2/2$, $y_2=(x^2/2)-(x^5/20)$. ② $y_0=1$, $y_1=x^3$, $y_2=1+x^3-x+(x^7-1)/7$. ③ $y_0=1$, $y_1=1+2x$, $y_2=\frac{1}{2}(e^{2x}+1)+x+x^2$. ④ $y_0=2\pi$, $y_1=\pi+x$, $y_2=2\pi+x+x\cos x-\sin x$. **222.** ① $y_0=1$, $z_0=0$; $y_1=x^2$, $z_1=x-1$; $y_2=x^2+(x-1)^2/2$, $z_2=(x^3-1)/3$. ② $x_0=1$, $y_0=2$; $x_1=1+2t$, $y_1=2+t$; $x_2=1+2t+(t^2/2)$, $y_2=$

$2x+t+2t^2+(4/3)t^3$. ③ $y_0=1,\ y_1=1,\ y_2=1+x^2$. ④ $x_0=2,\ x_1=3-t,\ x_2=5-4t+t^2$. **223**. ① $-0.5\leqslant x\leqslant 0.5$. ② $0.87\leqslant x\leqslant 1.13$. ③ $0.8\leqslant t\leqslant 1.2$. ④ $-0.1\leqslant t\leqslant 0.1$. **224**. $y_3=\frac{x^2}{2}-\frac{x^5}{20}+\frac{x^8}{160}-\frac{x^{11}}{4400}$, $|y-y_3|<0.00003$. **225**. ① 全平面. ② $y\neq 2x$. ③ $x\neq 2,\ y>0$. ④ $y\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots$. ④ $x>0,\ y\neq x$. ⑤ $x\neq 0,\ |y|>|x|$. **226**. 当 $0<a<1$ 时在 Ox 轴的点上. **228**. ① x_0 和 y_0' 任意, $y_0\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots$. ② $x_0\neq -1,\ y_0>0$, y_0' 任意. ③ $x_0\neq y_0,\ x_0y_0>0,\ y_0'\neq 0$, y_0'' 任意. ④ $x_0\neq y_0',\ y_0\neq 0$, y_0'' 任意. ⑤ t_0 和 y_0 任意, $x_0\neq 0$. ⑥ $t_0>-1,\ x_0\neq 0,\ y_0\neq t_0$. **229**. ① 不能. ② 能. **230**. ① 不能. ② 不能. ③ 能. **231**. 在 $n=1$ 的情形时无解, 当 $n=2$ 时有一个解, 当 $n=3$ 时有无穷多个解. **232**. 在 $n=1$ 的情形, 当 $\operatorname{tg}\alpha\neq f(x_0,\ y_0)$ 时无解, 而当 $\operatorname{tg}\alpha=f(x_0,\ y_0)$ 时只有一个解; 在 $n=2$ 的情形时有一个解, 而当 $n\geqslant 3$ 时有无穷多个解. **233**. $n\geqslant 5$. **234**. $n\geqslant 4$. **236**. ① 3. ② 2. ③ 4. ④ 4. ⑤ 3. ⑥ 1. **237**. ① $0\leqslant a\leqslant 1$. ② $a\leqslant\frac{1}{2}$. ③ $1\leqslant a\leqslant\frac{3}{2}$. ④ $-\frac{1}{2}\leqslant a\leqslant 0$. **241**. $y=Ce^{\pm x}$. **242**. $y^2=(x+C)^3$; $y=0$. **243**. $y+x=(x+C)^3$; $y=-x$. **244**. $(x+C)^2+y^2=1$; $y=\pm1$. **245**. $y(x+C)^2=1$; $y=0$. **246**. $y[1+(x-C)^2]=1$; $y=0$; $y=1$. **247**. $(y-x)^2=2C(x+y)-C^2$; $y=0$. **248**. $(x-1)^{4/3}+y^{4/3}=C$. **249**. $4y=(x+C)^2$; $y=Ce^x$. **250**. $y^2(1-y)=(x+C)^2$; $y=1$. **251**. $y=Ce^x$; $y=Ce^{-x}+x-1$. **252**. $x^2y=C$; $y=Cx$. **253**. $x^2+C^2=2Cy$; $y=\pm x$. **254**. $(x+C)^2=4Cy$; $y=0$; $y=x$. **255**. $\ln|1\pm 2\sqrt{2y-x}|=2(x+C\pm\sqrt{2y-x})$; $8y=4x+1$. **256**. $4e^{-y/3}=(x+2)^{4/3}+C$. **257**. $y=2x^2+C$; $y=-x^2+C$. **258**. $y=Cx^{-3}\pm 2\sqrt{x/7}$. **259**. $\ln Cy=x\pm 2e^{x/2}$, $y=0$. **260**. $\ln Cy=x\pm\sin x$; $y=0$. **261**. $\operatorname{arctg}u+\frac{1}{2}\ln|(u-1)/(u+1)|=\pm x+C$, 其中 $u=\sqrt[4]{1-(1/y^2)}$; $y=0$; $y=\pm1$. **262**. $x^2+(Cy+1)^2=1$; $y=0$. **263**. $(Cx+1)^2=1-y^2$; $y=\pm1$. **264**. $2(x-C)^2+2y^2=C^2$; $y=\pm x$. **265**. $y=Ce^{\pm x}-x^2$. **266**. $y^2=C^2x-C$; $4xy^2=-1$. **267**. $x=p^3+p$, $4y=3p^4+2p^2+C$. **268**. $x=\frac{2p}{p^2-1}$, $y=\frac{2}{p^2-1}-\ln|p^2-1|+C$. **269**. $x=p\sqrt{p^2+1}$, $3y=(2p^2-1)\sqrt{p^2+1}+C$. **270**. $x=\ln p+(1/p)$, $y=p-\ln p+C$. **271**. $x=3p^2+2p+C$, $y=2p^3+p^2$; $y=0$. **272**. $x=2\operatorname{arctg}p+C$, $y=\ln(1+p^2)$; $y=0$. **273**. $x=\ln|p|\pm\frac{3}{2}\ln\left|\frac{\sqrt{p+1}-1}{\sqrt{p+1}+1}\right|\pm 3\sqrt{p+1}+C$, $y=p\pm(p+1)^{3/2}$; $y=\pm1$. **274**. $x=e^p+C$, $y=(p-1)e^p$; $y=-1$,

275. $x=\pm\left(2\sqrt{p^2-1}+\arcsin\frac{1}{|p|}\right)+C,\ y=\pm p\sqrt{p^2-1}$; $y=0$. **276.** $x=\pm\left(\ln\left|\frac{1-\sqrt{1-p}}{1+\sqrt{1-p}}\right|+3\sqrt{1-p}\right)+C,\ y=\pm p\sqrt{1-p}$; $y=0$. **277.** $x=\pm 2\sqrt{1+p^2}-\ln(\sqrt{p^2+1}\pm 1)+C,\ y=-p\pm p\sqrt{p^2+1}$; $y=0$. **278.** $4y=C^2-2(x-C)^2$; $2y=x^2$. **279.** $x=-\frac{p}{2}+C,\ 5y=C^2-\frac{5p^2}{4}$; $x^2=4y$. **280.** $\pm xp\sqrt{2\ln Cp}=1,\ y=\mp\left(\sqrt{2\ln Cp}-\frac{1}{\sqrt{2\ln Cp}}\right)$. **281.** $pxy=y^2+p^3,\ y^2(2p+C)=p^4$; $y=0$. **282.** $y^2=2Cx-C\ln C$; $2x=1+2\ln|y|$. **283.** $Cx=\ln Cy$; $y=ex$. **284.** $xp^2=C\sqrt{|p|}-1,\ y=xp-x^2p^3$; $y=0$. **285.** $2p^2x=C-C^2p^2,\ py=C$; $32x^3=-27y^4$; $y=0$. **286.** $y^2=2C^3x+C^2$; $27x^2y^2=1$. **287.** $y=Cx-C^2$; $4y=x^2$. **288.** $x\sqrt{p}=\ln p+C,\ y=\sqrt{p}(4-\ln p-C)$; $y=0$. **289.** $x=3p^2+Cp^{-2},\ y=2p^3+2Cp^{-1}$; $y=0$. **290.** $y=Cx-C-2$. **291.** $C^3=3(Cx-y)$; $9y^2=4x^3$. **292.** $x=C(p-1)^{-2}+2p+1,\ y=Cp^2(p-1)^{-2}+p^2$; $y=0$; $y=x-2$. **293.** $y=Cx-\ln C$; $y=\ln x+1$. **294.** $y=\pm 2\sqrt{Cx}+C$; $y=-x$. **295.** $2C^2(y-Cx)=1$; $8y^3=27x^2$. **296.** $xp^2=p+C,\ y=2+2Cp^{-1}-\ln p$. **297.** ① $4y=x^4$; ② $y=0,\ y=-4x$; ③ $y=0,\ 27y=4x^3$; ④ $y=4x$. **298.** $xy=\pm a^2$. **299.** $x^2+y^2=1$. **300.** $x=p(p^2+2)/(\sqrt{p^2+1})^3,\ y=p^2/(\sqrt{p^2+1})^3$ 和 $x=p/(\sqrt{p^2+1})^3,\ y=(2p^2+1)/(\sqrt{p^2+1})^3$. **301.** $y=x(Ce^{-x}-1)$. **302.** $(Cx+1)y=Cx-1$; $y=1$. **303.** $y(x^2-C)=x$; $y=0$. **304.** $x(C-y)=C^2$; $x=4y$. **305.** $y(x+C)=x+1$; $y=0$. **306.** $x=Cy+y^3$; $y=0$. **307.** $y=C$; $y=C\pm e^x$. **308.** $y\ln Cx=-x$; $y=0$. **309.** $y^2=C(x^2-1)$; $x=\pm 1$. **310.** $2y=2C(x-1)+C^2$; $2y=-(x-1)^2$. **311.** $x=Cy+\ln^2 y$. **312.** $y=Cx^2e^{-3/x}$. **313.** $(x-C)^2+y^2=C$; $4(y^2-x)=1$. **314.** $4x^2y=(x+2C)^2$; $y=0$. **315.** $x=Ce^y+y^2+2y+2$. **316.** $3y=3C(x-2)+C^3$; $9y^2=4(2-x)^3$. **317.** $y^2=C(xy-1)$; $xy=1$. **318.** $4(x-C)^3=27(y-C)^2$; $y=x-1$. **319.** $x+y=\operatorname{tg}(y-C)$. **320.** $x^3y^2+7x=C$. **321.** $y(xy-1)=Cx$. **322.** $-e^{-y}=\ln C(x-3)$. **323.** $x=y^2(C-2\ln|y|)$; $y=0$. **324.** $3xy=C\pm 4x^{3/2}$. **325.** $y^2(Ce^{x^2}+1)=1$; $y=0$. **326.** $y^2=2x\ln Cy$; $y=0$. **327.** $\ln(x^2+y^2)+\operatorname{arctg}(y/x)=C$. **328.** $(x-1)^2y=x-\ln|x|+C$. **329.** $C^2x^2+2y^2=2C$; $2x^2y^2=1$. **330.** $y(C\sqrt{|x^2-1|}-2)=1$; $y=0$. **331.** $y^2(Ce^{2x}+x+0.5)=1$; $y=0$. **332.** $y^2-1=C(x+1)^4e^{-5x}(y^2+1)$; $x=-1$. **333.** $y\sin x-\frac{x^3}{3}+\frac{y^2}{2}=C$. **334** $x=3p^2+p^{-1},\ y=2p^3-\ln|p|+C$. **335.** $3y^2=2\sin x+C\sin^{-2}x$. **336.** $x(e^y+xy)=C$. **337.** $x(p-1)^2=\ln Cp-p,\ y=xp^2+p$; $y=0$; $y=x+1$. **338.** $(x+1)y=x^2+x\ln Cx$;

339. $y^4+\sqrt{x^4+y^4}=C$. **340.** $px=C\sqrt{p}-1$, $y=\ln p-C\sqrt{p}+1$. **341.** $y=x\,\mathrm{tg}\ln Cx$; $x=0$. **342.** $y^{2/3}=Ce^{2x}+(x/3)+(1/6)$; $y=0$. **343.** $x=Ce^{\sin y}-2(1+\sin y)$. **344.** $Cy=C^2e^x+1$; $y=\pm 2e^{x/2}$. **345.** $y^2=(x^2+C)e^{2x}$. **346.** $y=Cx-\sqrt[3]{C^3-1}$; $y^3=(x^{3/2}\pm 1)^2$. **347.** $x(y^2-1)^2=y^3-3y+C$. **348.** $\sqrt{y-x}-\sqrt{x}=C$; $y=x$. **349.** $x\sqrt{y}=\sin x+C$; $y=0$. **350.** $x=4p^3-\ln Cp$, $y=3p^4-p$; $y=0$. **351.** $y^2+2x^2\ln Cy=0$; $y=0$. **352.** $4x+y-3=2\,\mathrm{tg}(2x+C)$. **353.** $xy\cos x-y^2=C$. **354.** $4Cxy=C^2x^4-1$. **355.** $xy(\ln^2 x+C)=1$. **356.** $2\sqrt{y-x^2}=x\ln Cx$; $y=x^2$. **357.** $(y^2/2)-(1/x)-xy=C$; $x=0$. **358.** $x=Cy^2-y^2(y+1)e^{-y}$; $y=0$. **359.** $y(\ln y-\ln x-1)=C$. **360.** $x=2p-\ln p$, $y=p^2-p+C$. **361.** $2x^3-x^2y^2+y^3+x=C$. **362.** $(y-4x+2)^4(2y+2x-1)=C$. **363.** $y^3=(C-x^3)\sin^3 x$. **364.** $p^2x=p\sin p+\cos p+C$, $py=p\sin p+2\cos p+2C$; $y=0$. **365.** $x^2y^2-1=xy\ln Cy^2$; $y=0$. **366.** $y=C\cos x+\sin x$. **367.** $|x|=\ln\left(\frac{y}{x}+\sqrt{1+\frac{y^2}{x^2}}\right)+C$; $x=0$. **368.** $(y-x)^2=2C(x+y)-C^2$; $y^{2/3}-x^{2/3}=C$; $y=0$. **369.** $27(y-2x)^2=(C-2x)^3$; $y=2x$. **370.** $\sin(y/x)=-\ln Cx$. **371.** $x^2(x^2y+\sqrt{1+x^4y^2})=C$. **372.** $3\sqrt{y}=x^2-1+C\sqrt[4]{|x^2-1|}$; $y=0$. **373.** $x=\frac{C}{p^2}-p-\frac{3}{2}$, $y=C\left(\frac{2}{p}-1\right)-\frac{p^2}{2}$; $y=x+2$; $y=0$. **374.** $(2x+3y-7)^{-3}=Ce^{x+2y}$. **375.** $(x^2+y+\ln Cy)y=x$; $y=0$. **376.** $x=2\sqrt{p^2+1}-\ln(1+\sqrt{p^2+1})+\ln Cp$, $y=p\sqrt{p^2+1}$; $y=0$. **377.** $y^2=C\ln^2 x+2\ln x$. **378.** $x=Cue^u$, $4y=C^2e^{2u}(2u^2+2u+1)$; $x^2=2y$. **379.** $xy^2\ln Cxy=1$; $x=0$; $y=0$. **380.** $x^2\sin^2 y=2\sin^3 y+C$. **381.** $y=2C-C^2x$; $xy=1$. **382.** $xe^y=e^x+C$. **383.** $\sin(y-2x)-2\cos(y-2x)=Ce^{x+2y}$. **384.** $y=(2x+C)\sqrt{x^2+1}-x^2-Cx-2$. **385.** $(y+x^2)^2(2y-x^2)=C$. **386.** $(x-1)^2=2y^2(x-\ln Cx)$; $y=0$. **387.** $x=p[\ln(1+\sqrt{p^2+1})-\ln Cp]$, $2y=xp-\sqrt{p^2+1}$; $2y=-1$. **388.** $(y+3x+7)(y-x-1)^3=C$. **389.** $\sin y=Ce^{-x}+x-1$. **390.** $y=C^2(x-C)^2$; $16y=x^4$. **391.** $y^2=x-(x+1)\ln C(x+1)$. **392.** $e^y=x^2\ln Cx$. **393.** $(y-2x\sqrt{y-x^2})(2\sqrt{y-x^2}+x)=C$. **394.** $xy^2=\ln x^2-\ln Cy$; $x=0$, $y=0$. **395.** $x(y^2+x^2)^3=\frac{2}{5}y^5+\frac{4}{3}x^2y^3+2x^4y+Cx^5$; $x=0$. **396.** $(u-1)\ln Cx^6(u-1)^5(u+2)^4=3$，其中 $u^2=(y^2/x^2)-2$; $y^2=3x^2$. **397.** $\sqrt{y}=(x^2-1)(2\ln|x^2-1|+C)$; $y=0$. **398.** $x^2-(x-1)\ln(y+1)-y=C$. **399.** $\mathrm{tg}\,y=x^2+Cx$; $y=(2k+1)\pi/2$, $k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots$. **400.** $y^2=Cx^2+C^2$. **401.** $x^3=Ce^y-y-2$. **402.** $y+1=x\ln C(y+1)$; $y=-1$. **403.** $y^2=2C^2(x-C)$; $8x^3=27y^2$. **404.** $x^3=y^3(C-y\ln y+y)$; $y=0$. **405.** $\ln C(u-v)^3$

$\left(u^2+uv+\frac{v^2}{3}\right)^3=2\operatorname{arctg}\frac{2u+v}{v}$，其中 $u^3=y$, $v^2=x$; $y^3=x^6$. **406.** $(y-1)^5=x^2+Cx$. **407.** $(x^2+y^2)(Cx+1)=x$. **408.** $3x+y^3-1=\operatorname{tg}(3x+C)$. **409.** $(C-x^2)\sqrt{y^2+1}=2x$. **410.** $(x^2+y^2+1)^2=4x^2+C$. **411.** $xy-x=y(y-x)\ln|Cy/(y-x)|$; $x=0$; $y=0$; $y=x$. **412.** $y=\pm x\,\mathrm{ch}(x+C)$; $y=\pm x$. **413.** $\sqrt{y^2+1}=x(Ce^x-1)$. **414.** $(y-x)\ln C\frac{x-1}{x+1}=2$; $y=x$. **415.** $(Ce^{x^2}+2x^2+2)\cos y=1$. **416.** $(y^2-Cx^2+1)^2=4(1-C)y^2$; $y=\pm x$. **417.** $y^2+xy-1=Ce^{x^2/2}$. **418.** $6x^3y^4+2x^3y^3+3x^2y^4=C$. **419.** $x+\frac{1}{x}+y^2-2y+2=Ce^{-y}$; $x=0$. **420.** $e^y(C^2x^2+1)=2C$; $x^2=e^{-2y}$. **421.** $C_1x-C_1^2y=\ln|C_1x+1|+C_2$; $2y=x^2+C$; $y=C$. **422.** $9C_1^2(y-C_2)^2=4(C_1x+1)^3$; $y=\pm x+C$. **423.** $C_1y^2-1=(C_1x+C_2)^2$. **424.** $y^3=C_1(x+C_2)^2$; $y=C$. **425.** $y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$; $\ln\left|\frac{y-C_1}{y+C_1}\right|=2C_1x+C_2$; $y(C-x)=1$; $y=C$. **426.** $C_1y=\pm\sin(C_1x+C_2)$; $C_1y=\pm\mathrm{sh}(C_1x+C_2)$; $y=C\pm x$. **427.** $y=C_1(x-e^{-x})+C_2$. **428.** $y=C_3-(x+C_1)\ln C_2(x+C_1)$; $y=C_1x+C_2$. **429.** $y+C_1\ln|y|=x+C_2$; $y=C$. **430.** $2y=C_1\cos 2x+(1+2C_1)x^2+C_2x+C_3$. **431.** $y=C_1[1\pm\mathrm{ch}(x+C_2)]$; $y=Ce^{\pm x}$. **432.** $x=C_1p+3p^2$; $y=\frac{12}{5}p^5+\frac{5}{4}C_1p^4+C_1^2\frac{p^3}{6}+C_2$; $y=C$. **433.** $y=C_1\frac{x^2}{2}-C_1^2x+C_2$; $y=(x^3/12)+C$. **434.** $e^y+C_1=(x+C_2)^2$. **435.** $y=C_1(x+2)e^{-x}+C_2x+C_3$. **436.** $y=\pm\mathrm{ch}(x+C_1)+C_2$. **437.** $e^y\sin^2(C_1x+C_2)=2C_1^2$; $e^y\,\mathrm{sh}^2(C_1x+C_2)=2C_1^2$; $e^y(x+C)^2=2$. **438.** $y=C_1\frac{x^3}{6}-C_1^2\frac{x^2}{2}+C_2x+C_3$; $y=\frac{\pm 8}{315}x^3\sqrt{3x}+C_1x+C_2$. **439.** $2C_1y=(x-C_1)^3+C_2$; $y=C$; $y=C-2x^2$. **440.** $\ln|y^2+C_1\pm\sqrt{y^4+2C_1y^2+1}|=2x+C_2$; $y=\pm 1$. **441.** $x=3C_1p^2+\ln C_2p$, $y=2C_1p^3+p$; $y=C$. **442.** $x=C_1e^p-2p-2$, $y=C_1(p-1)e^p-p^2+C_2$. **443.** $12(C_1y-x)=C_1^2(x+C_2)^3+C_3$. **444.** $y=C_1(x\sqrt{x^2-1}-\ln|x+\sqrt{x^2-1}|)+x^2+C_2$; $y=C_1(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)+x^2+C_2$. **445.** $\ln y=C_1\operatorname{tg}(C_1x+C_2)$; $\ln|(\ln y-C_1)/(\ln y+C_1)|=2C_1x+C_2$; $(C-x)\ln y=1$; $y=C$. **446.** $x=u-\ln|1+u|+C_2$，其中 $u=\pm\sqrt{1+4C_1y}$; $y=C$; $y=Ce^{-x}$. **447.** $C_1^2y=(C_1^2x^2+1)\operatorname{arctg}C_1x-C_1x+C_2$; $2y=k\pi x^2+C$, $k=0$, ± 1, ± 2, $\cdots$. **448.** $x=\ln|p|+2C_1p+C_2$, $y=p+C_1p^2+C_3$; $y=C_1x+C_2$. **449.** $C_1^2y+1=\pm\mathrm{ch}(C_1x+C_2)$; $C_1^2y-1=\sin(C_1x+C_2)$; $2y=(x+C)^2$; $y=0$. **450.** $y=C_2-\ln\left|\cos\left(\frac{x^2}{2}+C_1\right)\right|$. **451.** $6y=x^3\ln|x|+C_1x^3+C_2x^2+C_3x+C_4$. **452.** $y=x\int_0^x\frac{\sin t}{t}\,dt+\cos x+$

C_1x+C_2. **453.** $y=C_1\left[x\int_0^x e^{t^2}dt-\frac{e^{x^2}}{2}\right]+C_2x+C_3$. **454.** $y=\frac{x^2}{2}\int_1^x\frac{e^t}{t}dt-\frac{x+1}{2}e^x+C_1x^3\ln|x|+C_2x^2+C_3x+C_4$. **455.** $C_2y^2-C_1=C_2^2(x+C_3)^2$; $y=C$. **456.** $C_1y=\ln|C_1x+C_2|+C_3$, $y=C_1x+C_2$. **457.** $C_1y-1=C_2e^{C_1x}$; $y=C-x$; $y=0$. **458.** $y=\pm\sqrt{C_1x+C_2}+C_3x+C_4$; $y=C_1x^2+C_2x+C_3$. **459.** $y^2=x^2+C_1x+C_2$. **460.** $y=e^{x^2/2}\left(C_1\int e^{-x^2/2}dx+C_2\right)-1$. **461.** $y=C_1\operatorname{tg}(C_1\ln C_2x)$; $C_2(y+C_1)|x|^{2C_1}=y-C_1$; $y\ln Cx=-1$. **462.** $y=4C_1\operatorname{tg}(C_1x^2+C_2)$; $2\ln\left|\frac{y-C_1}{y+C_1}\right|=C_1x^2+C_2$; $y(C-x^2)=4$, $y=C$. **463.** $y=C_2e^{Cx^2}$. **464.** $\ln C_2y=4x^{5/2}+C_1x$; $y=0$. **465.** $y=C_2(x+\sqrt{x^2+1})^{C_1}$. **466.** $y^2=C_1x^3+C_2$. **467.** $y=C_2xe^{-C_1/x}$. **468.** $y=C_2|x|^{C_1-(1/2)\ln|x|}$. **469.** $y=C_2\left|\frac{x}{x+C_1}\right|^{1/C_1}$; $y=C$; $y=Ce^{-1/x}$. **470.** $|y|^{C_1^2+1}=C_2\left(x-\frac{1}{C_1}\right)|x+C_1|^{C_1^2}$; $y=C$. **471.** $y=C_2x(\ln C_1x)^2$; $y=Cx$. **472.** $\ln|y|=\ln|x^2-2x+C_1|+\int\frac{2dx}{(x-1)^2+C_1-1}+C_2$; $y=C$. **473.** $4C_1y^2=4x+x(C_1\ln C_2x)^2$. **474.** $y=-x\ln(C_2\ln C_1x)$; $y=Cx$. **475.** $\frac{y}{x}=C_2-3\ln\left|\frac{1}{x}-C_1\right|$; $y=Cx$. **476.** $x^2y=C_1\operatorname{tg}(C_1\ln C_2x)$, $C_2(x^2y+C_1)|x|^{2C_1}=x^2y-C_1$; $x^2y\ln Cx=-1$. **477.** $4(C_1y-1)=C_1^2\ln^2C_2x$. **478.** $Cy=x^{3/2}(C_2x^C+2)$; $y=Cx^{3/2}$; $y=-2x^{3/2}\ln Cx$. **479.** $2C_2x^2y=(C_2x-C_1)^2-1$; $xy=\pm1$. **480.** $2C_1C_2y=C_2^2|x|^{2+C_1}+|x|^{2-C_1}$. **501.** $(3-x)\cdot y^5=8(x+2)$. **502.** $y(x+2)=-x-6$. **503.** $(1-\ln x)^2y=x^2$. **504.** $y=3\operatorname{th}^2\frac{x\sqrt{3}}{2}-2$. **505.** $\ln\operatorname{tg}\left(\frac{y}{2}+\frac{\pi}{6}\right)=2x-2$. **506.** ① $4(C_1y-1)=C_1^2(x+C_2)^2$; ② $y\sqrt{(C_1/y)-1}+C_1\arccos\sqrt{y/C_1}=C_2\pm x$. **507.** $y=C_2-k\ln\cos\left(\frac{x}{k}+C_1\right)$. **508.** $y=\frac{p}{2T}x^2+C_1x+C_2$; p 是单位长度水平射影上的负荷，T 是弦的张力的水平分量。 **509.** $ay=\operatorname{ch}(ax+C_1)+C_2$. $a=q/T$，q 是单位弦长的重量，T 见 **508** 题答案。 **511.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}$. **512.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{-3x}$. **513.** $y=C_1+C_2e^{2x}$. **514.** $y=C_1e^{2x}+C_2e^{x/2}$. **515.** $y=e^{2x}(C_1\cos x+C_2\sin x)$. **516.** $y=e^{-x}(C_1\cos 3x+C_2\sin 3x)$. **517.** $y=C_1\cos 2x+C_2\sin 2x$. **518.** $y=C_1e^{2x}+e^{-x}(C_2\cos x\sqrt{3}+C_3\sin x\sqrt{3})$. **519.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3\cos x+C_4\sin x$. **520.** $y=e^x(C_1\cos x+C_2\sin x)+e^{-x}(C_3\cos x+C_4\sin x)$. **521.** $y=e^{x\sqrt{3}}(C_1\cos x+C_2\sin x)+C_3\cos 2x+C_4\sin 2x+e^{-x\sqrt{3}}\cdot(C_5\cos x+C_6\sin x)$. **522.** $y=e^x(C_1+C_2x)$. **523.** $y=e^{-x/2}(C_1+C_2x)$. **524.** $y=C_1+C_2x+C_3x^2+e^{3x}(C_4+C_5x)$. **525.** $y=C_1+C_2e^x+C_3e^{-x}+C_4e^{3x}+C_5e^{-3x}$. **526.** $y=(C_1+C_2x)\cos x+(C_3+C_4x)\sin x$. **527.** $y=e^x(C_1+$

$C_2x+C_3x^2)$. **528.** $y=e^x(C_1+C_2x)+C_3e^{-x}$. **529.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+C_3e^{2x}+C_4e^{-2x}$. **530.** $y=C_1+(C_2+C_3x)\cos 2x+(C_4+C_5x)\sin 2x$. **531.** $y=e^x(C_1+C_2x)+C_3e^{-2x}$. **532.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+C_3\cos x\sqrt{3}+C_4\sin x\sqrt{3}$. **533.** $y=C_1e^{-x}+C_2e^{3x}+(1/5)e^{4x}$. **534.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+(2x-2)e^x$. **535.** $y=C_1e^x+C_2e^{-x}+xe^x+x^2+2$. **536.** $y=C_1e^x+C_2e^{-2x}+\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}\right)e^x$. **537.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+0.1\sin x+0.3\cos x$. **538.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x-2x\cos x$. **539.** $y=C_1e^x+C_2e^{4x}-(2x^2-2x+3)e^{2x}$. **540.** $y=C_1e^x+C_2e^{2x}+(0.1x-0.12)\cos x-(0.3x+0.34)\sin x$. **541.** $y=C_1e^x+C_2e^{-4x}-\frac{x}{5}e^{-4x}-\left(\frac{x}{6}+\frac{1}{36}\right)e^{-x}$. **542.** $y=C_1e^x+C_2e^{-3x}+\left(\frac{x^3}{12}-\frac{x^2}{16}+\frac{x}{32}\right)e^x$. **543.** $y=e^{2x}(C_1\cos 2x+C_2\sin 2x)+0.25e^{2x}+0.1\cos 2x+0.05\sin 2x$. **544.** $y=C_1e^{3x}+C_2e^{-3x}+e^{3x}\left(\frac{6}{37}\sin x-\frac{1}{37}\cos x\right)$. **545.** $y=(C_1+C_2x+x^3)e^x$. **546.** $y=\left(C_1-\frac{x^2}{4}\right)\cos x+\left(C_2+\frac{x}{4}\right)\sin x$. **547.** $y=(C_1+C_2x)e^{-2x}+\left(\frac{x}{16}-\frac{1}{32}\right)e^{2x}$. **548.** $y=C_1+C_2e^{5x}-0.2x^3-0.12x^2-0.048x+0.02(\cos 5x-\sin 5x)$.

575. $y=e^x(x\ln|x|+C_1x+C_2)$. **576.** $y=(e^{-x}+e^{-2x})\ln(e^x+1)+C_1e^{-x}+C_2e^{-2x}$. **577.** $y=(C_1+\ln|\sin x|)\sin x+(C_2-x)\cos x$. **578.** $y=\sin 2x\ln|\cos x|-x\cos 2x+C_1\sin 2x+C_2\cos 2x$. **579.** $y=e^{-x}\left(\frac{4}{5}(x+1)^{5/2}+C_1+C_2x\right)$. **580.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x-\frac{\cos 2x}{\cos x}$. **581.** $y=-\frac{1}{x}+C_1e^x+C_2e^{-x}$. **582.** $y=(7-3x)e^{x-2}$. **583.** $y=2\cos x-5\sin x+2e^x$. **584.** $y=e^{2x-1}-2e^x+e-1$. **585.** $y=e^{-x}(x-\sin x)$. **586.** $y=2+e^{-x}$. **587.** $y=(x-1)\cdot(e^{2x}-e^{-x})$. **588.** $y=x-x\sin x-2\cos x$. **589.** $y=C_1x^2+C_2x^3$. **590.** $y=C_1x^3+C_2x^{-1}$. **591.** $y=x(C_1+C_2\ln|x|+C_3\ln^2|x|)$. **592.** $y=C_1+C_2\ln|x|+C_3x^3$. **593.** $y=x(C_1+C_2\ln|x|)+2x^3$. **594.** $y=C_1\cos(2\ln|x|)+C_2\sin(2\ln|x|)+2x$. **595.** $y=C_1x^2+\frac{1}{x}\left(C_2-\frac{2}{3}\ln x-\ln^2 x\right)$. **596.** $y=x^2(C_1\cos\ln|x|+C_2\sin\ln|x|+3)$. **597.** $y=C_1x^3+C_2x^{-2}+x^3\ln|x|-2x^2$. **598.** $y=C_1x^2+C_2x^{-1}+0.1\cos\ln x-0.3\sin\ln x$. **599.** $y=(x-2)^2(C_1+C_2\ln|x-2|)+x-1.5$. **600.** $y=C_1\left(x+\frac{3}{2}\right)+C_2\left|x+\frac{3}{2}\right|^{3/2}+C_3\left|x+\frac{3}{2}\right|^{1/2}$. **601.** $y=\left(C_1+C_2x+\frac{x^2}{4}\right)e^{-x}+\frac{1}{8}e^x$. **602.** $y=\frac{1-x}{16}e^{3x}-\frac{1+x}{16}e^{-x}+\left(\frac{x^3}{12}+C_1x+C_2\right)e^x$. **603.** $y=C_1e^{(-1+i)x}+[C_2+(i-1)x]e^{(1-i)x}-e^{(1+i)x}$. **604.** $y=(2x^2+C_1x+C_2)e^{-ix}-e^{ix}$. **605.** $y=C_1e^{(\sqrt{2}+i)x}+C_2e^{(i-\sqrt{2})x}+$

$\left(C_3-\frac{x}{24}\right)e^{-2ix}+\frac{i}{32}e^{2ix}$. **606.** $y=\frac{C_1}{x}+\left[C_2-\frac{1}{3}\ln(-x)+\frac{1}{2}\ln^2(-x)\right]x^2$. **607.** $y=(C_1+C_2x+x\ln|x|)e^{-x}+\frac{x-1}{4}e^{x}$. **608.** $y=e^{-x}\left[\frac{1}{8}+\left(C_1-\frac{x}{2}\right)\cos 2x+\left(C_2+\frac{x}{8}+\frac{1}{2}\ln|\cos x|\right)\sin 2x\right]$. **609.** $y=x^2\ln\frac{C_1x}{x+1}-\frac{x}{2}+1-\frac{1}{x}\ln C_2(x+1)$. **610.** $y=x[C_1+(C_2+\ln|\ln x|)\ln x]+\frac{1+\ln x}{4x}$. **611.** $y=C_1\cos x+C_2\sin x+\int_0^x\sin(x-s)f(s)\,ds$. **612.** $\int_0^x f(s)\cos s\,ds$ 和 $\int_0^x f(s)\sin s\,ds$ 当 $x\to+\infty$ 时有界. **613.** $y'''-3y''+3y'-y=0$. **614.** $y''-4y'+5y=0$. **615.** $y^{(4)}+2y''+y=0$. **616.** $y^{(4)}-4y'''+14y''-20y'+25y=0$. **617.** $y'''-y''-y'+y=0$. **618.** $y^{(4)}+y''=0$. **619.** $a=0$, $b>0$. **620.** $a>0$, $b>0$. **621.** $b<0$ 或者 $b\geqslant 0$, $a>0$. **622.** $b>0$, $a\leqslant -2\sqrt{b}$. **623.** $a^2<4b$. **624.** $a>2$, $b>a-1$. **625.** $a=2\sqrt{b}$. **626.** $\omega\neq\pm k$. **627.** $x=\frac{(b-\omega^2)\sin\omega t-a\omega\cos\omega t}{(b-\omega^2)^2+a^2\omega^2}$; 振幅 $A=\frac{1}{\sqrt{(b-\omega^2)^2+a^2\omega^2}}$; 当 $\omega^2=b-\frac{a^2}{2}$ 时达到 $\max A$. **628.** $x=\frac{e^{i\omega t}}{4-\omega^2+i\omega}$. **629.** $x(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{e^{\lambda_1(t-s)}-e^{\lambda_2(t-s)}}{\lambda_1-\lambda_2}f(s)\,ds=\int_0^{\infty}\frac{e^{\lambda_1 z}-e^{\lambda_2 z}}{\lambda_1-\lambda_2}f(t-z)\,dz$; $|x(t)|\leqslant\frac{m}{b}$. **630.** $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$. **631.** 在 $h^2>4km$ 的情形时 $x=\frac{v_0}{2\gamma}\left(e^{(-\alpha+\gamma)t}-e^{(-\alpha-\gamma)t}\right)$, $\alpha=\frac{h}{2m}$, $\gamma=\frac{\sqrt{h^2-4km}}{2m}$. 在 $h^2<4km$ 的情形时 $x=\frac{v_0}{\beta}e^{-\alpha t}\sin\beta t$, $\alpha=\frac{h}{2m}$, $\beta=\frac{\sqrt{4km-h^2}}{2m}$. **632.** $x(t)=\frac{b(k-m\omega^2)\sin\omega t-bh\omega\cos\omega t}{(k-m\omega^2)^2+h^2\omega^2}$. **633.** $A=\frac{kB}{k-m\omega^2}$. **634.** $x=4-2\cos t$. **635.** $I=\frac{V}{R}\left(1-e^{-\frac{Rt}{L}}\right)$. **636.** $I=\frac{V}{R}e^{-t/RC}$. **637.** $I=\frac{q}{RC}e^{-t/RC}$. **638.** $I=\frac{q}{\omega CL}e^{-Rt/2L}\sin\omega t$, $CR^2<4L$, $\omega=\frac{\sqrt{4CL-R^2C^2}}{2LC}$. **639.** $I=A\sin(\omega t-\varphi)$, $A=\frac{V}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$, $\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L}{R}$. **640.** $I=A\sin(\omega t-\varphi)$,

$$A=\frac{V}{\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}},\ \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{\omega L-\frac{1}{\omega C}}{R};$$ 当 $\omega^2=\frac{1}{LC}$ 时 $\max A=\frac{V}{R}$.

641. 不是. **642.** 是. **643.** 不是. **644.** 不是. **645.** 是. **646.** 不是. **647.** 是. **648.** 不是. **649.** 不是. **650.** 是. **651.** 不是. **652.** 是. **653.** 是. **654.** 是. **655.** 不是. **656.** 不是. **657.** 是.

658. 不是. 659. 是. 660. 不是. 661. 是. 662. 不是. 663. ① 不是. ② 不是. 664. 线性无关. 665. 可能线性相关或者无关. 666. ① $W\equiv 0$; ② 什么也不能说. 667. 线性无关. 方程不满足定理条件. 669. 两个. 670. ① $-1<x<\infty$. ② $\frac{3}{2}\pi<x<\frac{5}{2}\pi$. 671. ① 当 $n\geqslant 2$ 时可能. ② 当 $n\geqslant 3$ 时可能. 672. $n\geqslant 4$. 673. $n\geqslant 2$. 674. $y''-y'\operatorname{ctg}x=0$. 675. $(x-1)y''-xy'+y=0$. 676. $y'''-y''=0$. 677. $(2x^2+6x-9)y''-(4x+6)y'+4y=0$. 678. $y''-y=0$. 679. $(x^2-2x+2)y'''-x^2y''+2xy'-2y=0$. 680. $x^2y''-3xy'+3y=0$. 681. $y=C_1x+C_2e^{-2x}$. 682. $y=C_1\left(1+\frac{1}{x}\right)+C_2\left(\frac{x}{2}+1-\frac{x+1}{x}\ln|x+1|\right)$. 683. $y=e^x(C_1x^2+C_2)$. 684. $xy=C_1e^{-x}+C_2e^x$. 685. $y=C_1\cdot\operatorname{tg}x+C_2(1+x\operatorname{tg}x)$. 686. $y=C_1(1+x\ln|x|)+C_2x$. 687. $y=C_1(e^x-1)+\frac{C_2}{e^x+1}$. 688. $y=C_1x+C_2(\ln x+1)$. 689. $y=C_1\sin x+C_2\left(2-\sin x\cdot\ln\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$. 690. $y=C_1(x-3)+\frac{C_2}{x+1}$. 691. $y=C_1e^{2x}+C_2(3x+1)e^{-x}$. 692. $y=(C_1+C_2x)e^{-x^2}$. 693. $y=C_1(2x+1)+C_2e^{2x}$. 694. $y=C_1(x+1)+C_2x^{-1}$. 695. $y=C_1(x+2)+C_2x^2$. 696. $y=C_1(x^3+2)+C_2x^3$. 697. $y=C_1(x^2+1)+C_2[x+(x^2+1)\operatorname{arctg}x]$. 698. $y=C_1\sqrt{|x|}+C_2(x-2)$. 699. $y=C_1x+C_2e^x+C_3e^{-x}$. 700. $y=C_1x+C_2x^{-1}+C_3(x\ln|x|+1)$. 701. $y=C_1x+C_2e^x+C_3(x^2-1)$. 702. $y=C_1(x+2)+\frac{C_2}{x}+\left(\frac{x}{2}+1\right)\ln|x|+\frac{3}{2}$. 703. $y=C_1(2x-1)+C_2e^{-x}+\frac{x^2+1}{2}$. 704. $y=\frac{C_1}{x+1}+\frac{C_2}{x-1}+x$. 705. $y=C_1(x^2+1)+C_2x^{-1}+2x$. 706. $z''+z=0$. 707. $z''-z=0$. 708. $z''=0$. 709. $x^2z''-2z=0$. 710. $4x^2z''+(4x^2+1)z=0$. 711. $y''_{tt}-y=0$. 712. $y''_{tt}+y=0$. 713. $(t^2-1)y''_{tt}-2y=0$. 714. $y''_{tt}+t^2y=0$. 715. $8y''_{tt}+t^2y=0$. 716. $y=1+C_1(x-1)+C_2(x^2-1)$. 717. 当 $x\to+\infty$ 时 $\int p(x)dx\to+\infty$. 719. 在 $y=0$ 和 $x=x_i$ 各直线上, 其中 $q(x_i)=0$. 720. ① 不能. ② 能. ③ 不能. ④ 不能. 726. $\pi/\sqrt{m}$; $[(b-a)\sqrt{m}/\pi]$ 个或者再多一个(方括号表示整数部分). 727. $0.33<d<0.5$. 728. $15.7<d<32$. 729. $0.49<d<1$. 730. $0.15<d<1.2$. 737. $u''_{tt}+(\pm 1+\psi^3\psi''_{xx})u=0$, $t=\int\frac{dx}{(\psi(x))^2}$, $y=\psi u$.

在738～750各答案中，那些没有给出的 y_2 可以在 y_1 中用正弦代替余弦

得到. **738.** $y_1=\frac{1}{x}\cos\frac{x^3}{3}+O(1/x^4)$. **739.** $y_{1,2}=x^{-1/2}e^{\pm x^2/2}(1+O(x^{-2}))$.
740. $y_1=\frac{1}{\sqrt{x}}\cos\frac{x^2}{2}+O(x^{-5/2})$. **741.** $y_1=e^{-x/2}\cos e^x+O(e^{-3/2x})$.
742. $y_{1,2}=x^{1/4}e^{\pm 2\sqrt{x}}(1+O(x^{-1/2}))$. **743.** $y_{1,2}=x^{-1/4}e^{\pm\frac{2}{3}x^{3/2}}(1+O(x^{-3/2}))$.
744. $y_1=x^{-3/4}\cos 2\sqrt{x}+O(x^{-5/4})$. **745.** $y_1=e^{(x-1)^2/2}\left[(2x)^{-1/4}\cos\frac{(2x)^{3/2}}{3}+O(x^{-7/4})\right]$. **746.** $y_1=\frac{1}{x}\cos\frac{x^3}{3}+O\left(\frac{1}{x^2}\right)$. **747.** $y_{1,2}=x^{(1\pm\sqrt{5})/2}(1+O(x^{-2}))$. **748.** $y_1=\sqrt{\frac{x}{\ln x}}\left[\cos\left(\frac{1}{2}\ln^2 x-\frac{1}{8}\ln\ln x\right)+O(\ln^{-2}x)\right]$.
749. $y_{1,2}=\left[1\pm\frac{3}{32x^2}+\frac{105}{2048x^4}+O(x^{-6})\right]\frac{e^{\pm x^2}}{\sqrt{2x}}$. **750.** $y_1=x^{1/4}\left(1+\frac{3}{64x}\right)\cdot\cos\left(2\sqrt{x}+\frac{3}{16\sqrt{x}}\right)+O(x^{-5/4})$. **751.** $y=(\operatorname{sh}x/\operatorname{sh}1)-2x$. **752.** $y=x+e^{-x}-e^{-1}$. **753.** $y=e^x-2$. **754.** $y=1-\sin x-\cos x$. **755.** 无解.
756. $y=2x-\pi+\pi\cos x+C\sin x$, C 是任意数. **757.** $y=-2e^{-x}$. **758.** $y=e^{-x}-1$. **759.** $y=-e^{(-1-i)x}$. **760.** $y=2x^3$. **761.** $y=3x^2$. **762.** $y=-x^{-3}$. **763.** $a=(2n-1)^2\pi^2$, $n=1, 2, 3, \cdots$. **764.** $G=(s-1)x\ (0\leqslant x\leqslant s)$, $G=s(x-1)\ (s\leqslant x\leqslant 1)$. **765.** $G=\sin s\cos x\ (0\leqslant x\leqslant s)$, $G=\cos s\sin x\ (s\leqslant x\leqslant\pi)$. **766.** $G=e^s(e^{-x}-1)\ (0\leqslant x\leqslant s)$, $G=1-e^s\ (s\leqslant x\leqslant 1)$. **767.** $G=-e^{-s}\operatorname{ch}x\ (0\leqslant x\leqslant s)$, $G=-e^{-x}\operatorname{ch}s\ (s\leqslant x\leqslant 2)$. **768.** $G=\frac{1}{2}\sin|x-s|$.
769. $G=\frac{1}{x}-1\ (1\leqslant x\leqslant s)$, $G=\frac{1}{s}-1\ (s\leqslant x\leqslant 3)$. **770.** $G=\frac{s^2-4}{2s^2}\ (1\leqslant x\leqslant s)$, $G=\frac{x^2-4}{2s^2}\ (s\leqslant x\leqslant 2)$. **771.** $G=\frac{1-x^3}{3s^3x}\ (1\leqslant x\leqslant s)$, $G=\frac{1-s^3}{3s^3x}\ (s\leqslant x\leqslant 2)$.
772. $G=-x\ (0\leqslant x\leqslant s)$, $G=-s\ (s\leqslant x)$. **773.** $G=-1\ (0\leqslant x\leqslant s)$, $G=-e^{s-x}\ (s\leqslant x<\infty)$. **774.** $G=-\ln x\ (1\leqslant x\leqslant s)$, $G=-\ln s\ (s\leqslant x<\infty)$.
775. $G=\frac{1}{2}e^s(e^{-3x}-e^{-x})\ (0\leqslant x\leqslant s)$, $G=\frac{1}{2}e^{-3x}(e^s-e^{3s})\ (s\leqslant x<\infty)$.
776. $G=(1-x^2)/2s^2x\ (1\leqslant x\leqslant s)$, $G=(1-s^2)/2s^2x\ (s\leqslant x<\infty)$. **777.** $G=x(s^3-1)/3s^2\ (0\leqslant x\leqslant s)$, $G=s(x^3-1)/3x^2\ (s\leqslant x\leqslant 1)$. **778.** $G=-(1/2)e^{-|x-s|}$.
779. $G=-x^2/3s^3\ (0\leqslant x\leqslant s)$, $G=-1/3x\ (s\leqslant x<\infty)$. **780.** $a\neq k^2\pi^2$, $k=1, 2, 3, \cdots$. **781.** $-\frac{m}{2}\leqslant y\leqslant 0$, $-\frac{m}{3x}\leqslant y'\leqslant\frac{m}{3x}$. **782.** $\lambda_k=-k^2\pi^2/l^2$, $y_k=\sin(k\pi x/l)$, $k=1, 2, 3, \cdots$. **783.** $\lambda_k=-k^2\pi^2/l^2$, $y_k=\cos(k\pi x/l)$, $k=0, 1, 2, \cdots$. **784.** $\lambda_k=-\left(k-\frac{1}{2}\right)^2\frac{\pi^2}{l^2}$, $y_k=\sin\left(k-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi x}{l}$, $k=1, 2, 3, \cdots$.
785. $\lambda_k=-\left(\frac{k\pi}{\ln a}\right)^2-\frac{1}{4}$, $y_k=\sqrt{x}\sin\frac{k\pi\ln x}{\ln a}$, $k=1, 2, 3, \cdots$. **786.** $x=$

$C_1e^t+C_2e^{5t}$, $y=-C_1e^t+3C_2e^{5t}$. **787.** $x=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$, $y=2C_1e^{-t}-2C_2e^{3t}$. **788.** $x=2C_1e^{3t}-4C_2e^{-3t}$, $y=C_1e^{3t}+C_2e^{-3t}$. **789.** $x=e^{2t}(C_1\cos t+C_2\sin t)$, $y=e^{2t}[(C_1+C_2)\cos t+(C_2-C_1)\sin t]$. **790.** $x=e^t(C_1\cos 3t+C_2\sin 3t)$, $y=e^t(C_1\sin 3t-C_2\cos 3t)$. **791.** $x=(2C_2-C_1)\cos 2t-(2C_1+C_2)\sin 2t$, $y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t$. **792.** $x=(C_1+C_2t)e^{2t}$, $y=(C_1+C_2+C_2t)e^{2t}$. **793.** $x=(C_1+C_2t)e^t$, $y=(2C_1-C_2+2C_2t)e^t$. **794.** $x=(C_1+2C_2t)e^{-t}$, $y=(C_1+C_2+2C_2t)e^{-t}$. **795.** $x=(C_1+3C_2t)e^{2t}$, $y=(C_2-C_1-3C_2t)e^{2t}$. **796.** $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $y=C_1e^t-2C_3e^{-t}$, $z=C_1e^t+C_2e^{2t}-5C_3e^{-t}$. **797.** $x=C_1+3C_2e^{2t}$, $y=-2C_2e^{2t}+C_3e^{-t}$, $z=C_1+C_2e^{2t}-2C_3e^{-t}$. **798.** $x=C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$, $y=C_1e^t+C_2e^{2t}$, $z=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{3t}$. **799.** $x=C_1e^t+C_2e^{2t}+C_3e^{5t}$, $y=C_1e^t-2C_2e^{2t}+C_3e^{5t}$, $z=-C_1e^t-3C_2e^{2t}+3C_3e^{5t}$. **800.** $x=C_1e^t+C_3e^{-t}$, $y=C_1e^t+C_2e^{2t}$, $z=2C_2e^{2t}-C_3e^{-t}$. **801.** $x=e^t(2C_2\sin 2t+2C_3\cos 2t)$, $y=e^t(C_1-C_2\cos 2t+C_3\sin 2t)$, $z=e^t(-C_1-3C_2\cos 2t+3C_3\sin 2t)$. **802.** $x=C_1e^{2t}+e^{3t}(C_2\cos t+C_3\sin t)$, $y=e^{3t}[(C_2+C_3)\cos t+(C_3-C_2)\sin t]$, $z=C_1e^{2t}+e^{3t}[(2C_2-C_3)\cos t+(2C_3+C_2)\sin t]$. **803.** $x=C_2\cos t+(C_2+2C_3)\sin t$, $y=2C_1e^t+C_2\cos t+(C_2+2C_3)\sin t$, $z=C_1e^t+C_1\cos t-(C_2+C_3)\sin t$. **804.** $x=C_1e^{2t}+(C_2+C_3)e^{3t}$, $y=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}$, $z=C_1e^{2t}+C_3e^{3t}$. **805.** $x=C_1+C_2e^t$, $y=3C_1+C_3e^t$, $z=-C_1+(C_2-C_3)e^t$. **806.** $x=C_1e^{3t}+C_2e^{-t}$, $y=-C_1e^{3t}+(C_2+2C_3)e^{-t}$, $z=-3C_1e^{3t}+C_3e^{-t}$. **807.** $x=C_1e^{2t}+C_3e^{-5t}$, $y=C_2e^{2t}+3C_3e^{-5t}$, $z=(C_1-2C_2)e^{2t}+2C_3e^{-5t}$. **808.** $x=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{2t}$, $y=(C_1-2C_2+C_2t)e^t$, $z=(C_1-C_2+C_2t)e^t+C_3e^{2t}$. **809.** $x=(C_2+C_3t)e^{-t}$, $y=2C_1e^t-(2C_2+C_3+2C_3t)e^{-t}$, $z=C_1e^t-(C_2+C_3+C_3t)e^{-t}$. **810.** $x=C_1+C_2t+4C_3e^{3t}$, $y=C_2-2C_1-2C_2t+4C_3e^{3t}$, $z=C_1-C_2+C_2t+C_3e^{3t}$. **811.** $x=(C_1+C_3t)e^t$, $y=(C_2+2C_3t)e^{-t}$, $z=(C_1-C_2-C_3-C_3t)e^t$. **812.** $x=(C_1+C_2t+C_3t^2)e^{2t}$, $y=[2C_1-C_2+(2C_2-2C_3)t+2C_3t^2]e^{2t}$, $z=[C_1-C_2+2C_3+(C_2-2C_3)t+C_3t^2]e^{2t}$. **813.** $x=3C_1e^t+3C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t$, $y=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3\cos t+C_4\sin t$. **814.** $x=-2e^t(C_1+C_2+C_2t)-2e^{-t}(C_3-C_4+C_4t)$, $y=e^t(C_1+C_2t)+e^{-t}(C_3+C_4t)$. **815.** $x=e^t(C_1\cos t+C_2\sin t)+e^{-t}(C_3\cos t+C_4\sin t)$, $y=e^t(C_1\sin t-C_2\cos t)+e^{-t}(C_4\cos t-C_3\sin t)$. **816.** $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3e^{2t}+C_5e^{-2t}$, $y=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_4e^{2t}+C_6e^{-2t}$, $z=C_1e^t+C_2e^{-t}-(C_3+C_4)e^{2t}-(C_5+C_6)e^{-2t}$. **817.** $x=3C_1e^t+C_2e^{-t}$, $y=C_1e^t+C_2e^{-t}$. **818.** $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+2C_3e^{-2t}$, $y=2C_1e^t+C_3e^{-2t}$. **819.** $x=3Ce^{-t}$, $y=Ce^{-t}$. **820.** $x=-2C_2e^{3t}+C_1e^t$, $y=C_1e^{-t}+C_2e^{3t}$. **821.** $x=2C_1e^{2t}+2C_2e^{-2t}+2C_3\cos 2t+2C_4\sin 2t$, $y=3C_1e^{2t}-3C_2e^{-2t}-C_3\sin 2t+C_4\cos 2t$. **822.** $x=C_1e^{\frac{t}{2}}-4C_2e^{-2t}$, $y=C_1e^{\frac{t}{2}}+C_2e^{-2t}$. **823.** $x=(C_1+C_2t)e^t+C_3e^{-t}$, $y=(-2C_1-C_2-2C_2t)e^t-4C_3e^{-t}$. **824.** $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+C_3e^{2t}+C_4e^{-2t}$, $y=$

$C_1e^t+5C_2e^{-t}+2C_3e^{2t}+2C_4e^{-2t}$. **825.** $x=C_1+C_2e^t+C_3\cos t+C_4\sin t$, $y=-C_1-C_2e^t+\left(\frac{3}{5}C_4-\frac{4}{5}C_3\right)\cos t-\left(\frac{3}{5}C_3+\frac{4}{5}C_4\right)\sin t$. **826.** $x=C_1e^t+C_2e^{-t}+te^t-t^2-2$, $y=C_1e^t-C_2e^{-t}+(t-1)e^t-2t$. **827.** $x=C_1e^{2t}+C_2e^{-t}-2\sin t-\cos t$, $y=2C_1e^{2t}-C_2e^{-t}+\sin t+3\cos t$. **828.** $x=C_1e^t+2C_2e^{4t}+3e^{5t}$, $y=-C_1e^t+C_2e^{4t}+e^{5t}$. **829.** $x=C_1(\cos 2t-\sin 2t)+C_2(\cos 2t+\sin 2t)$, $y=C_1\cos 2t+C_2\sin 2t+e^{-2t}$. **830.** $x=C_1e^{2t}+C_2e^{3t}+(t+1)e^{2t}$, $y=-2C_1e^{2t}-C_2e^{3t}-2te^{2t}$. **831.** $x=(C_1+2C_2t)e^t-3$, $y=(C_1+C_2+2C_2t)e^t-2$. **832.** $x=C_1e^{2t}+3C_2e^{4t}-e^{-t}-4e^{3t}$, $y=C_1e^{2t}+C_2e^{4t}-2e^{-t}-2e^{3t}$. **833.** $x=C_1e^t\cos t+C_2e^t\sin t+e^t+t+1$, $y=C_1e^t(-\cos t-\sin t)+C_2e^t(\cos t-\sin t)-2e^t-2t-1$. **834.** $x=C_1e^{-t}+2C_2e^{2t}-\cos t+3\sin t$, $y=-C_1e^{-t}+C_2e^{2t}+2\cos t-\sin t$. **835.** $x=4C_1e^t+C_2e^{-2t}-4te^t$, $y=C_1e^t+C_2e^{-2t}-(t-1)e^t$. **836.** $x=C_1e^{3t}+3t^2+2t+C_2$, $y=-C_1e^{3t}+6t^2-2t+2C_2-2$. **837.** $x=2C_1e^{2t}+C_2e^{-3t}-(12t+13)e^t$, $y=C_1e^{2t}-2C_2e^{-3t}-(8t+6)e^t$. **838.** $x=2C_1e^{3t}-2C_2-6t+1$, $y=3C_1e^{3t}+C_2+3t$. **839.** $x=3C_1e^t+C_2e^{-t}+3\sin t$, $y=C_1e^t+C_2e^{-t}-\cos t+2\sin t$. **840.** $x=C_1\cos t+C_2\sin t+t\sin t-t\cos t$, $y=C_1(\sin t+\cos t)+C_2(\sin t-\cos t)-2t\cos t+\sin t+\cos t$. **841.** $x=(C_1+C_2t-t^2)e^t$, $y=[C_1-C_2+(C_2+2)t-t^2]e^t$. **842.** $x=C_1e^t+3C_2e^{2t}+\cos t-2\sin t$, $y=C_1e^t+2C_2e^{2t}+2\cos t-2\sin t$. **843.** $x=C_1e^t+C_2e^{3t}+te^t-e^{4t}$, $y=-C_1e^t+C_2e^{3t}-(t+1)e^t-2e^{4t}$. **844.** $x=C_1\cos 2t-C_2\sin 2t+2t+2$, $y=(C_1+2C_2)\cos 2t+(2C_1-C_2)\sin 2t+10t$. **845.** $x=C_1e^t+C_2e^{3t}+e^t(2\cos t-\sin t)$, $y=C_1e^t-C_2e^{3t}+e^t(3\cos t+\sin t)$. **846.** $x=C_1\cos t+C_2\sin t+\operatorname{tg} t$, $y=-C_1\sin t+C_2\cos t+2$. **847.** $x=C_1e^t+2C_2e^{2t}-e^t\ln(e^{2t}+1)+2e^{2t}\operatorname{arc\,tg} e^t$, $y=C_1e^t+3C_2e^{2t}-e^t\ln(e^{2t}+1)+3e^{2t}\operatorname{arc\,tg} e^t$. **848.** $x=C_1+2C_2e^{-t}+2e^{-t}\ln|e^t-1|$, $y=-2C_1-3C_2e^{-t}-3e^{-t}\ln|e^t-1|$. **849.** $x=C_1\cos t+C_2\sin t+t(\cos t+\sin t)+(\cos t-\sin t)\ln|\cos t|$, $y=(C_1-C_2)\cos t+(C_1+C_2)\sin t+2\cos t\ln|\cos t|+2t\sin t$. **850.** $x=(C_1+2C_2t-8t^{5/2})e^t$, $y=(C_1+2C_2t-C_2-8t^{5/2}+10t^{3/2})e^t$. **851.** $x=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{3t}\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

852. $x=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-2\end{pmatrix}$. **853.** $x=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}2t\\2t-1\end{pmatrix}$.

854. $x=C_1e^t\begin{pmatrix}\cos 2t\\ \cos 2t+\sin 2t\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}\sin 2t\\ \sin 2t-\cos 2t\end{pmatrix}$. **855.** $x=C_1e^t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}$. **856.** $x=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\end{pmatrix}$.

857. $x=C_1e^t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2\cos t\\2\cos t\\3\cos t-\sin t\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}2\sin t\\2\sin t\\3\sin t+\cos t\end{pmatrix}$. **858.** $x=C_1e^{-2t}\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}\cos 2t\\-\sin 2t\\\cos 2t\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}\sin 2t\\\cos 2t\\\sin 2t\end{pmatrix}$. **859.** $x=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}\cos t-\sin t\\\cos t\\\sin t\end{pmatrix}+C_3e^t\begin{pmatrix}\cos t+\sin t\\\sin t\\-\cos t\end{pmatrix}$. **860.** $x=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_3e^t\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$. **861.** $x=C_1e^{3t}\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$. **862.** $x=C_1\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}+C_3e^t\begin{pmatrix}1\\t+1\\-t\end{pmatrix}$. **863.** $x=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+C_2e^t\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^t\begin{pmatrix}2t\\2t\\2t+1\end{pmatrix}$. **864.** $x=C_1e^{-t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{-t}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+C_3e^{-t}\begin{pmatrix}t+1\\t\\2t\end{pmatrix}$. **865.** $x=C_1e^{2t}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+C_2e^{2t}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+C_3e^{2t}\begin{pmatrix}2t+1\\t\\3t\end{pmatrix}$. **866.** $x=C_1\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}t\\t-1\\2t-1\end{pmatrix}+C_3\begin{pmatrix}t^2\\t^2-2t+2\\2t^2-2t\end{pmatrix}$. **867.** $\begin{pmatrix}e^2&0\\0&e^{-2}\end{pmatrix}$. **868.** $\begin{pmatrix}\cos 1&\sin 1\\-\sin 1&\cos 1\end{pmatrix}$.

869. $\begin{pmatrix}e^3&e^2\\0&e^3\end{pmatrix}$. **870.** $\begin{pmatrix}2e^2-e&e-e^2\\2e^2-2e&2e-e^2\end{pmatrix}$. **871.** $\begin{pmatrix}-1&-4\\1&3\end{pmatrix}$.

872. $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&e^2\end{pmatrix}$. **873.** $\begin{pmatrix}e^2&e^2&\frac{e^2}{2}\\0&e^2&e^2\\0&0&e^2\end{pmatrix}$. **874.** e^3. **875.** e^{-1}. **876.** $x=d\cos at$, $y=\frac{v}{a}\sin at$; 椭圆 $\left(\frac{x}{d}\right)^2+\left(\frac{ay}{v}\right)^2=1$. **877.** $x=C_1\sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}+C_2\right)$, $y=\frac{3}{2}C_1\sin\left(\frac{at}{\sqrt{6}}+C_2\right)$; $x=C_3\sin(at+C_4)$, $y=-C_3\sin(at+C_4)$. **878.** $\frac{1}{2\pi}\cdot\sqrt{K\left(\frac{1}{I_1}+\frac{1}{I_2}\right)}$. **879.** $I=A\sin(\omega t-\varphi)$, $A=\frac{V}{\sqrt{R^2+(\omega L/(1-\omega^2LC))^2}}$

当 $\omega=0$ 和 $\omega=\infty$ 时 $\max A=\frac{V}{L}$, 当 $\omega^2=\frac{1}{LC}$ 时 $\min A=0$. **880.** $\lambda\neq\frac{2\pi k}{\omega}i$, $k=0, \pm1, \pm2, \cdots$. **881.** ① 不稳定. ② 稳定. ③ 稳定. ④ 不稳定. **882.** 渐近稳定. **883.** 不稳定. **884.** 不稳定. **885.** 稳定. **886.** 稳定. **887.** 不稳定. **888.** 稳定. **889.** 所有的解都趋于零. 不定, 不是. **890.** 稳定. **891.** 渐近稳定. **892.** 不稳定. **898.** 不是. **899.** 稳定. **900.** 不稳定. **901.** 不稳定. **902.** 稳定. **903.** 不稳定. **904.** 稳定. **905.** 稳定. **906.** 不稳定. **907.** $-2<a<-1$. **908.** $a<-1$. **909.** $ab<-3$. **910.** $a<b<-1$. **911.** $0<a<2$. **912.** $-be<a<-e$. **913.** 稳定. **914.** 不稳定. **915.** $(0, 0)$不稳定, $(1, 2)$稳定. **916.** $(1, 2)$和$(2, 1)$都不稳定. **917.** $(2k\pi, 0)$不稳定, $((2k+1)\pi, 0)$稳定. **918.** $(3, 2)$不稳定, $(0, -1)$稳定. **919.** $(2, 1)$稳定, $(-2, 1)$不稳定. **920.** $(1, 1)$不稳定, $(-4, -4)$稳定. **921.** $(2k\pi, 0)$不稳定, $((2k-1)\pi, 0)$稳定. **922.** $(-1, 2k\pi)$稳定, $(-1, (2k+1)\pi)$不稳定. **923.** 不稳定. **924.** 稳定. **925.** 稳定. **926.** 不稳定. **927.** 稳定. **928.** 稳定. **929.** 不稳定. **930.** 稳定. **931.** 稳定. **932.** 不稳定. **933.** 稳定. **934.** 稳定. **935.** 不稳定. **936.** 稳定. **937.** 不稳定. **938.** 不稳定. **939.** 不稳定. **940.** 稳定. **941.** 不稳定. **942.** 稳定. **943.** 不稳定. **944.** 不稳定. **945.** 稳定. **946.** 不稳定. **947.** 稳定. **948.** 不稳定. **949.** $a>0, b>0, ab>2$. **950.** $3a>b>0$. **951.** $0<a<2$. **952.** 对所有的 a 都不稳定. **953.** $a>0, b>0, a+b<1$. **954.** $b>0, a>b+1$. **955.** $b>0, a>0, 8a-a^2b>4$. **956.** $a>2, b>0, 2ab-b^2>4$. **957.** $a>0, b>0, 2-\sqrt{3}<\frac{a}{b}<2+\sqrt{3}$. **958.** $0<a<8$, $0<b<8a-a^2$. **959.** ① 稳定; ② 稳定; ③ 不稳定; ④ 不稳定; ⑤ 不稳定; ⑥ 稳定. **960.** $-4<ab<0$ 和 $a=b=0$. **961.** 鞍点. **962.** 结点. **963.** 焦点. **964.** 结点. **965.** 鞍点. **966.** 中心点. **967.** 退化结点. **968.** 结点. **969.** 奇结点. **970.** 焦点. **971.** 结点. **972.** 退化结点. **973.** 焦点. **974.** 鞍点. **975.** 中心点. **976.** 退化结点. **977** 和 **978.** 奇点充满整个直线. **979.** $(-2, -1)$是结点. **980.** $(1, -2)$是焦点. **981.** $(4, 2)$是结点, $(-2, -1)$是焦点. **982.** $(1, 0)$是奇结点, $(-1, 0)$是鞍点. **983.** $(1, 1)$是焦点, $(-1, -1)$是鞍点. **984.** $(0, -1)$是退化结点, $(2, -3)$是鞍点. **985.** $(2, 4)$是结点, $(-1, 1)$是鞍点. **986.** $(1, 1)$是焦点, $(-1, -1)$是鞍点. **987.** $(2, 1)$是结点, $(1, 2)$是鞍点, $(-1, -2)$是焦点. **988.** $(1, -1)$是焦点, $(0, -2)$是鞍点, $(-2, 2)$是结点. **989.** $(-2, 4)$是结点, $(1, 1)$是焦点, $(2, 4)$和$(-1, 1)$都是鞍点.

990. $(-2,\ 2)$退化结点；$(1,\ -1)$是焦点；$(2,\ 2)$和$(-1,\ -1)$都是鞍点。 **991**. $(3, 0)$是焦点，$(1, 1)$是结点，$(-1,\ 1)$和$(-3,\ 0)$都是鞍点. **992**. $(0,\ 1)$和$(0,\ -1)$都是鞍点，$(-1,\ 0)$是焦点，$(3, 2)$是结点. **993**. 在 $y>0$ 的区域上积分曲线的分布和鞍点的积分曲线分布一样，在 $y<0$ 的区域上和结点的积分曲线分布一样. **994**. 通过点$(0,\ 0)$只有一条在该点具有第一种尖点的曲线. 其它曲线均不通过奇点. **995**. 在 $y<0$ 的区域上所有积分曲线的两端都接近奇点，而在 $y>0$ 的区域上无一曲线接近奇点. **996**. 有两条通过奇点并且彼此相切的积分曲线，其它积分曲线的分布和鞍点的积分曲线分布一样. **997**. 在 $y>0$ 的区域上积分曲线不接近奇点. 在 $y<0,\ x<0$ 的区域上积分曲线的分布和退化结点的积分曲线分布相似，而在 $y<0,\ x>0$ 区域上和鞍点相似。 **1021**. $(0,\ 1)$是鞍点，$(0,\ -1)$是焦点. **1022**. $(1,\ 2)$是鞍点，$(-1,\ 2)$是结点. **1023**. $(1,\ 0)$是鞍点，$(0,\ 2)$是退化结点. **1024**. $(0,\ 1)$是中心点，$(0,\ -1)$是鞍点. **1025**. $(2,\ 2)$是结点，$(0,\ -2)$是鞍点，$(-1,\ -1)$是焦点。 **1026**. $(2,\ 2)$是鞍点，$(4,\ 1)$和$(-2,\ -2)$都是焦点. **1027**. $(1,\ 0)$和$(-1,\ 0)$都是鞍点，$(0,\ 1)$和$(0,\ -1)$都是中心点. **1028**. $(1,\ 1)$是鞍点，$(1,\ -1)$是结点，$(2,\ 2)$和$(-2,\ 2)$都是焦点. **1029**. $(0,\ 1)$和$(0,\ -1)$都是鞍点，$(1,\ 0)$是焦点，$(-3,\ 2)$是结点. **1030**. $(1,\ -1)$和$(-1,\ 1)$都是结点，$(3,\ 3)$和$(-3,\ -3)$都是鞍点. **1031**. $(1,\ -1)$和$(-1,\ 1)$都是鞍点，$(3,\ 3)$和$(-3,\ -3)$都是结点。 **1032**. $(0,\ 0)$是焦点，$(7,\ 1)$是结点，$(0,\ 8)$和$(3,\ -1)$都是鞍点。 **1033**. $(0,\ 0)$是焦点，$(2,\ 4)$是结点，$(1,\ 1)$和$(-1,\ 1)$都是鞍点. **1034**. $(2,\ 1)$是结点，$(-1,\ 2)$是焦点，$(1,\ 2)$和$(1,\ -2)$都是鞍点。 **1035**. $l\ddot{\varphi}+g\sin\varphi=0$。 **1036**. $ml\ddot{\varphi}+kl^2\dot{\varphi}|\dot{\varphi}|+mg\sin\varphi=0$。 **1037**. $\ddot{\varphi}+\sin\varphi=\frac{1}{2}$. **1038**. $m\ddot{x}+f\,\mathrm{sgn}\,\dot{x}+kx=0$. **1039**. 增到$(L/l)^3$倍。 **1047**. $f(r_0)=0$；当 r 增大时函数 $f(r)$ 的符号从正变到负；从负变到正；通过零时不变号. **1048**. $a<-1/2$；$a>-1/2$. **1053**. $x=\pm b\,\mathrm{cth}\,\frac{xa}{2\sqrt{1-a^2}}$. **1054**. $\dot{x}=y$；$\frac{d}{dt}(x^2+y^2)=-2yF(y)<0$ 当 $y\neq 0$ 时。 **1056**. 小于 0.03. **1057**. 小于 $0.05(e^{2T}-1)$. **1058**. 误差小于 0.081. **1059**. $|\tilde{y}-y|<0.018$. **1060**. $|\tilde{x}-x|+|\tilde{y}-y|<0.0012$. **1061**. $|\tilde{y}-y|<0.002$. **1062**. $|\tilde{y}-y|<0.015$. **1063**. $|\tilde{y}-y|<0.034$. **1064**. $e^{2x}-x-1$. **1065**. $\frac{x^5}{5}-\frac{2x^3}{3}+x+1$. **1066**. e^{x-2}. **1067**. $t(e^{-1}-e^{-t})$. **1068**. $\frac{1-t-\ln(1-t)}{(1-t)^2}$. **1069**. t^8. **1070**. $t^2\ln t+2t^2-2t$. **1071**. $-e^{t}-2e^{-t}-3e^{-2t}$. **1072**. $-\frac{e^{2t}}{72}-\frac{e^{-2t}}{4}+\left(\frac{5}{36}-\frac{t}{3}\right)e^{-t}+\frac{1}{8}$. **1073**. $\frac{t^2}{3}$

$-\frac{1}{3t}$. **1074.** $y=\frac{1}{x}+\mu\left(x^2-\frac{1}{x^2}\right)+\mu^2\left(-\frac{x^5}{7}+\frac{2x}{3}-\frac{32}{21x^2}+\frac{1}{x^5}\right)+O(\mu^3)$.
1075. $y=2\sqrt{x}+2\mu(x^{-1/2}-x^2)+\mu^2\left(\frac{1}{4}x^{7/2}-\frac{4}{3}x+\frac{25}{12}x^{-1/2}-x^{-5/2}\right)+O(\mu^3)$.
1076. $y=1+\mu(x^2-x)+\mu^2x(1-x)^3/6+O(\mu^3)$. **1077.** $y=\frac{1}{x}+3\mu+\mu^2\left(\frac{3}{x^2}-3x\right)+O(\mu^3)$. **1078.** $y=x-\mu(x+1)+(\mu^2/2)(e^x-x^2-2x-1)+O(\mu^3)$.
1079. $x=\sin t+\mu\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cos 2t\right)+\mu^2\left(\frac{1}{2}\sin t-\frac{1}{6}\sin 3t\right)+O(\mu^3)$. **1080.** $x=\cos 2t+\mu\left(\frac{1}{10}-\frac{1}{22}\cos 4t\right)+\mu^2\left(\frac{17}{110}\cos 2t+\frac{1}{682}\cos 6t\right)+O(\mu^3)$. **1081.** $x=\mu\cos t+\mu^3\left(-\frac{3}{8}\cos t+\frac{1}{24}\cos 3t\right)+O(\mu^5)$. **1082.** $x_1=1+\mu\sin t-\frac{\mu^2}{4}(1+\cos 2t)+O(\mu^3)$, $x_2=-1-\frac{\mu}{3}\sin t+\frac{\mu^2}{36}\left(1-\frac{1}{3}\cos 2t\right)+O(\mu^3)$. **1083.** $x_1=-\frac{\mu}{3}\sin 2t+\frac{\mu^3}{648}\left(\sin 2t-\frac{1}{35}\sin 6t\right)+O(\mu^5)$, $x_2=x-\frac{\mu}{5}\sin 2t-\frac{\mu^3}{1000}\left(\frac{1}{5}\sin 2t-\frac{1}{111}\sin 6t\right)+O(\mu^5)$. **1084.** $x=\frac{1}{8}\sin t+\frac{1}{3}\sin 2t-\frac{1}{8}\sin 3t+O(\mu)$.
1085. $x=2\mu^{\frac{1}{2}}\sin t-\mu\left(\frac{1}{12}\sin t+\frac{1}{4}\sin 3t\right)+O(\mu^{\frac{3}{2}})$. **1086.** $x=C\cos\tau+C^2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\cos\tau-\frac{1}{6}\cos 2\tau\right)+O(C^3)$, $\tau=t\left(1-\frac{5}{12}C^2+O(C^3)\right)+C_2$. **1087.** $x=C\cos\tau+\frac{C^3}{32}(\cos 3\tau-\cos\tau)+O(C^5)$, $\tau=t\left(1+\frac{3}{8}C^2+O(C^4)\right)+C_2$. **1088.** $x=C\cos\tau+\frac{C^3}{192}(\cos\tau-\cos 3\tau)+O(C^5)$, $\tau=t\left(1-\frac{C^2}{16}+O(C^4)\right)+C_2$. **1089.** $x=2\cos\tau-\frac{\mu}{4}\sin 3\tau+O(\mu^2)$, $\tau=t\left(1-\frac{\mu^2}{16}+O(\mu^4)\right)+C$. **1090.** $x=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\tau+\frac{\mu}{12\sqrt{3}}\sin 3\tau+O(\mu^2)$, $\tau=\left(1-\frac{\mu^2}{16}+O(\mu^3)\right)t+C$. **1091.** $y=1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{2x^3}{3}+\frac{7x^4}{12}+\cdots$. **1092.** $y=1+x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3}+\cdots$. **1093.** $y=\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{6}+\cdots$. **1094.** $y=x+x^2-\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{4}-\cdots$. **1095.** $y=1+2(x-1)+4(x-1)^2+\frac{25}{3}(x-1)^3+\frac{81}{4}(x-1)^4+\cdots$. **1096.** $y=1+2x-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{3}\cdots\cdots$. **1097.** $y=4-2x+2x^2-2x^3+\frac{19}{6}x^4+\cdots$. **1098.** $R>0.73$.
1099. 误差小于 0.00024. **1100.** $y_1=1+\frac{x^4}{3\cdot 4}+\frac{x^8}{3\cdot 4\cdot 7\cdot 8}+\cdots$, $y_2=x+\frac{x^5}{4\cdot 5}+\frac{x^9}{4\cdot 5\cdot 8\cdot 9}+\cdots$. **1101.** $y_1=1+\frac{x^2}{1}+\frac{x^4}{1\cdot 3}+\frac{x^6}{1\cdot 3\cdot 5}+\cdots$, $y_2=x+\frac{x^3}{2}+$

$\frac{x^5}{2\cdot4}+\frac{x^7}{2\cdot4\cdot6}+\cdots=xe^{\frac{x^2}{2}}$. **1102.** $y_1=1+x^2+x^4+\cdots=\frac{1}{1-x^2}$, $y_2=x+x^3+x^5+\cdots=\frac{x}{1-x^2}$. **1103.** $y_1=1-\frac{3}{2}x^2+\frac{3\cdot5}{2\cdot4}x^4-\cdots=(1+x^2)^{-\frac{3}{2}}$, $y_2=x-\frac{4}{3}x^3+\frac{4\cdot6}{3\cdot5}x^5-\cdots$. **1104.** $y_1=1-\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{2}-\frac{11x^4}{24}-\cdots$, $y_2=x+x^2+\frac{5x^3}{6}+\frac{3x^4}{4}+\cdots$. **1105.** $y_1=1+x-x^3-x^4+x^6+x^7-\cdots=\frac{1}{1-x+x^2}$, $y_2=xy_1$. **1106.** $y_1=1-\frac{x^3}{6}-\frac{x^5}{40}+\cdots$, $y_2=x+\frac{x^3}{6}-\frac{x^4}{12}+\cdots$. **1107.** $y_1=1-\frac{x^3}{6}+\frac{x^5}{120}+\cdots$, $y_2=x-\frac{x^4}{12}+\frac{x^6}{180}+\cdots$. **1108.** $y_1=1+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{12}+\frac{5x^4}{72}+\cdots$, $y_2=x+\frac{x^3}{6}+\frac{x^4}{24}+\cdots$. **1109.** $y_1=1-\frac{x^3}{6}+\cdots$, $y_2=x+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{12}+\cdots$, $y_3=x^2+\frac{x^4}{4}-\cdots$. **1110.** $y_1=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\cdots=\frac{\sin x}{x}$, $y_2=\frac{1}{x}-\frac{x}{2!}+\frac{x^3}{4!}-\cdots=\frac{\cos x}{x}$. **1111.** $y_1=\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2!}+\frac{x^2}{3!}+\cdots=\frac{e^x}{x}$, $y_2=|x|^{1/2}\left(1+\frac{2x}{5}+\frac{(2x)^2}{5\cdot7}+\frac{(2x)^3}{5\cdot7\cdot9}+\cdots\right)$. **1112.** $y_1=x^{1/3}\left(1+\frac{x^2}{5\cdot6}+\frac{x^4}{5\cdot6\cdot11\cdot12}+\cdots\right)$, $y_2=x^{2/3}\cdot\left(1+\frac{x^2}{6\cdot7}+\frac{x^4}{6\cdot7\cdot12\cdot13}+\cdots\right)$. **1113.** $y_1=\frac{1}{x}+1+\frac{x}{2}$, $y_2=x^2+\frac{x^3}{4}+\frac{x^4}{4\cdot5}+\frac{x^5}{4\cdot5\cdot6}+\cdots=6\left(\frac{e^x-1}{x}-1-\frac{x}{2}\right)$. **1114.** $y_1=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x}+\frac{1}{2}+\frac{x^2}{8}+\frac{x^3}{40}+\frac{7x^4}{720}+\cdots$, $y_2=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{5}+\frac{x^4}{20}+\cdots$. **1115.** $y_1=x+x^2+\frac{x^3}{2!}+\frac{x^4}{3!}+\cdots=xe^x$. **1116.** $y_1=1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}+\frac{x^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\cdots$. **1117.** $y_2=\left(1+\frac{x^2}{2^2}+\frac{x^4}{2^2\cdot4^2}+\cdots\right)\ln|x|-\frac{x^2}{4}-\frac{3x^4}{128}-\cdots$. **1118.** y_1 和 y_2 是含无理指数的广义幂级数. **1119.** y_1 和 y_2 是含复指数的级数. **1120.** 没有广义幂级数形式的解,因为所得到的级数 $y=1+1!x+2!x^2+3!x^3+\cdots$ 的收敛半径为零. **1121.** $y=-\frac{\pi}{6}+\frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos(2k-1)x}{(2k-1)^2(k^2-k+1)}$. **1122.** $y=\frac{2}{\pi}+\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{16k^4-4k^2+1}\left(\cos 2kx-\frac{2k}{4k^2-1}\sin 2kx\right)$. **1123.** $y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(k^3+k)\cos kx-\sin kx}{2^k[(k^3+k)^2+1]}$. **1124.** $y=-\frac{1}{6\pi^2}+\frac{1}{\pi^4}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2k\pi x}{k^2(4k^2+1)}$. **1125.** $y=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin 2kx}{k^2(9-4k^2)}+C_1\cos 3x+C_2\sin 3x$. **1136.** $1\leqslant y\leqslant\sqrt{3}$. **1137.** $1+x^2<y<1+x^2+\operatorname{arctg}x$. **1141.** $y=C_2e^{C_1x^2}$, $z=\frac{1}{2C_1C_2}e^{-C_1x^2}$. **1142.** $y=C_2e^{C_1x}$, $z=x+\frac{C_2}{C_1}e^{C_1x}$; $y=0$, $z=x+C$.

1143. $y=\frac{x+C_1}{x+C_2}$, $z=\frac{(C_2-C_1)x}{(x+C_2)^2}$. **1144.** $y=C_2e^{C_1x^2}$, $z=\frac{2C_1}{C_2}xe^{-C_1x^2}$; $y=0$, $z=Cx$. **1145.** $y=-\frac{1}{C_1}+\frac{C_1}{2}(x+C_2)-\frac{C_1}{4}(x+C_2)^2$, $z=\frac{C_1}{4}(x+C_2)^2+\frac{1}{C_1}$. **1146.** $y=C_1z$, $x=2y-z+C_2$. **1147.** $x^2-y^2=C_1$, $x+y=C_2z$.
1148. $x-y=C_1(y-z)$, $(x+y+z)(x-y)^2=C_2$. **1149.** $x+z=C_1$, $(x+y+z)\cdot(y-3x-z)=C_2$. **1150.** $x^2-z^2=C_1$, $y^2-u^2=C_2$, $(x+z)=C_3(u+y)$.
1151. $x+z=C_1$, $y+u=C_2$, $(x-z)^2+(y-u)^2=C_3$. **1152.** $x^2-2y=C_1$, $6xy-2x^3-3z^2=C_2$. **1153.** $y^2+z^2=C_1$, $x-yz=C_2$. **1154.** $x=C_1y$, $xy-z=C_2x$. **1155.** $x=C_1y$, $xy-2\sqrt{z^2+1}=C_2$. **1156.** $y=C_1z$, $x-y^2-z^2=C_2z$. **1157.** $y^2+z^2=C_1$, $x(y-z)=C_2$. **1158.** $xz=C_1$, $xy+z^2=C_2$.
1159. $x+z-y=C_1$, $\ln|x|+\frac{z}{y}=C_2$. **1160.** $x^2+y^2+z^2=C_1$, $yz=C_2x$.
1161. 1) 是; 2) 不是. **1162.** 1) 不是; 2) 是. **1163.** 是. **1164.** 相关. **1167.** $z=f(x^2+y^2)$. **1168.** $z=f(xy+y^2)$. **1169.** $u=f(y/x,\ z/x)$.
1170. $u=f((x-y)/z,\ (x+y+2z)^2/z)$. **1171.** $F(x^2-y^2,\ x-y+z)=0$.
1172. $F\left(e^{-x}-y^{-1},\ z+\frac{x-\ln|y|}{e^{-x}-y^{-1}}\right)=0$. **1173.** $F(x^2-4z,\ (x+y)^2/x)=0$.
1174. $F(x^2+y^2,\ z/x)=0$. **1175.** $F\left(\frac{x^2}{y},\ xy-\frac{3z}{x}\right)=0$. **1176.** $F\left(\frac{1}{x+y}+\frac{1}{z},\ \frac{1}{x-y}+\frac{1}{z}\right)=0$. **1177.** $F(x^2+y^4,\ y(z+\sqrt{z^2+1}))=0$. **1178.** $F\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y},\ \ln|xy|-\frac{z^2}{2}\right)=0$. **1179.** $F(x^2+y^2,\ \operatorname{arctg}(x/y)+(z+1)e^{-z})=0$.
1180. $F(z^2-y^2,\ x^2+(y-z)^2)=0$. **1181.** $F\left(\frac{z}{x},\ 2x-4z-y^2\right)=0$.
1182. $F(z-\ln|x|,\ 2x(z-1)-y^2)=0$. **1183.** $F(\operatorname{tg}z+\operatorname{ctg}x,\ 2y-\operatorname{tg}^2z)=0$.
1184. $F((x+y+z)/(x-y)^2,\ (x-y)(x+y-2z))=0$. **1185.** $F((x-y)(z+1),\ (x+y)(z-1))=0$. **1186.** $F(u(x-y),\ u(y-z),\ (x+y+z)/u^2)=0$.
1187. $F(x/y,\ xy-2u,\ (z+u-xy)/x)=0$. **1188.** $F((x-y)/z,\ (2u+x+y)z,\ (u-x-y)/z^2)=0$. **1189.** $z=2xy$. **1190.** $z=ye^x-e^{2x}+1$.
1191. $z=y^2e^{2\sqrt{z}-2}$. **1192.** $u=(1-x+y)(2-2x+z)$. **1193.** $u=(xy-2z)\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)$. **1194.** $y^2-x^2-\ln\sqrt{y^2-x^2}=z-\ln|y|$. **1195.** $2x^2(y+1)=y^2+4z-1$. **1196.** $(x+2y)^2=2x(z+xy)$. **1197.** $\sqrt{z/y^3}\sin x=\sin\sqrt{z/y}$.
1198. $2xy+1=x+3y+z^{-1}$. **1199.** $x-2y=x^2+y^2+z$. **1200.** $2x^2-y^2-z^2=a^2$. **1201.** $[(y^2x-2)^2-x^2+z]y^2z=1$. **1202.** $x^2+z^2=5(xz-y)$.
1203. $3(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2$. **1204.** $xz=(xz-y-x+2z)^2$.
1205. $(1+yz)^3=3yz(1+yz-x)+y^3$. **1206.** $x+y+z=0$. **1207.** $2(x^3-$

$4z^3-3yz)^2=9(y+z^2)^3$. **1208**. $(x-y)(3x+y+4z)=4z$. **1209**. $xz+y^2=0$. **1210**. $z=xy+f(y/x)$，其中 f 是 $f(1)=0$ 的任意可微函数. **1211**. $F(x^2-y^2,\ 2x^2+z^2)=0$. **1212**. $2y^2+z^2=z(x^2+y^2+z^2)$. **1213**. $F(bx-ay,\ cx-az)=0$. **1214**. $x^2+3y^2+z^2+3xy+xz+3yz=1$. **1215**. $F((y-b)/(x-a),\ (z-c)/(x-a))=0$. **1216**. $F(x^2/y,\ z/y)=0$. **1217**. $z=Cxy^3$. **1218**. 无解. **1219**. $z=0$. **1220**. 无解. **1221**. $x^3y^2z=C$. **1222**. $z=y^2-xy$. **1223**. $x^2yz=C-x^3$; $x=0$.

指数函数与对数函数表

表 1

x	e^x	x	$\ln x$	$\lg x$
0.00	1.000	1.0	0.000	0.000
0.05	1.051	1.1	0.095	0.041
0.10	1.105	1.2	0.182	0.079
0.15	1.162	1.3	0.262	0.114
0.20	1.221	1.4	0.336	0.146
0.25	1.284	1.5	0.405	0.176
0.30	1.350	1.6	0.470	0.204
0.35	1.419	1.7	0.531	0.230
0.40	1.492	1.8	0.588	0.255
0.45	1.568	1.9	0.642	0.279
0.50	1.649	2.0	0.693	0.301

表 2

x	e^x	x	$\ln x$	$\lg x$
−3	0.050	3	1.099	0.477
−2	0.135	4	1.386	0.602
−1	0.368	5	1.609	0.699
0	1.000	6	1.792	0.778
1	2.718	7	1.946	0.845
2	7.389	8	2.079	0.903
3	20.09	9	2.197	0.954
4	54.60	10	2.303	1.000
5	148.4	11	2.398	1.041
π	23.14	20	2.996	1.301
2π	535.5	100	4.605	2.000

为求出表 1 中元素之间的函数值，可以施用线性插值法。