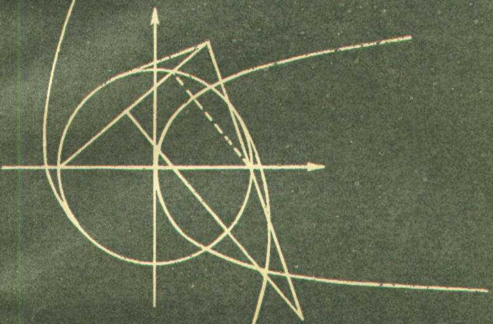
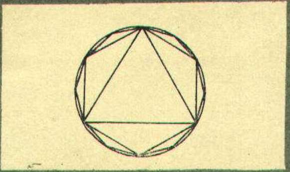


# 无穷多个数能相加吗?



山东科学技术出版社

# 无穷多个数能相加吗？

葛 钟 美

山东科学技术出版社

## 内 容 提 要

本书围绕"无穷多个数能相加吗？"这个既重要又有趣的数学问题，介绍了有关数列、极限和级数的基础知识，这些知识对理论研究和解决实际问题都是很有用的。

本书知识性强，说理清楚，文字朴实简明，是一本较好的课外读物。它将启迪广大青年学习高等数学的兴趣和要求，很适宜中学生阅读和中学教师教学参考。


无穷多个数能相加吗？

葛钟美

*

山东科学技术出版社出版

山东省新华书店发行

山东新华印刷厂潍坊厂印刷

*

787×1092 毫米 32 开本　5 印张　105 千字

1983 年 7 月第 1 版　1983 年 7 月第 1 次印刷

印数：1—20,000

书号 13195·103　定价 0.45 元

# 目　　录

# 引　言

无穷多个数能相加吗？这一有趣的问题可能会引起争论．有的说："只要有时间，一项接着一项地加下去不就行了吗？难道还不会进行加法运算？"有的说："别忘记这是无穷多个数啊！无穷多个就永远不可能加完，它们的和就不可能找到，所提的问题也无法解决．"还有的说："问题提得实在没必要，在现实生活中有这一类的问题吗？"

实际上，无穷多个数相加的问题是个既现实又很重要的数学问题．在中学数学中，我们已经接触过有关的问题．任何有理数都可以表示成有限小数或无限循环小数，如 $\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{1}{3}=0.\dot{3}$．这里 $0.\dot{3}$ 的意思就是 $0.333\cdots$，一直没完没了的写下去，当然也可以写成

$$\frac{1}{3}=0.\dot{3}=0.333\cdots=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}+\cdots.$$

这就是说 $\frac{1}{3}$ 是由 $\frac{3}{10}$，$\frac{3}{100}$，$\frac{3}{1000}$，$\cdots$，这无穷多个数加起来的．同样，任一个无限循环小数都可以表示成无穷多个数相加所得到的和．

再如，单位圆的面积等于 $\pi$．而单位圆的面积也可以按如下的方法求得：先求出圆内接正三角形 $ABC$ 的面积

$$\mathrm{I}=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

然后，分别取$\overparen{AB}$，$\overparen{BC}$，$\overparen{CA}$的中点$E$、$F$、$D$作成三角形$ABE$、$BFC$、$CDA$，求出它们的面积之和

$$\mathrm{II}_1+\mathrm{II}_2+\mathrm{II}_3=\frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

用同样的方法分别取$\overparen{AD}$，$\overparen{DC}$，$\overparen{CF}$，$\overparen{FB}$，$\overparen{BE}$，$\overparen{EA}$的中点$G$、$H$、$I$、$J$、$K$、$L$作成三角形$ADG$,$DCH$,$CFI$，$FBJ$，$BEK$，$EAL$。求出它们的面积之和

$$\mathrm{III}_1+\mathrm{III}_2+\cdots+\mathrm{III}_6=3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right).$$

如果我们继续这样求下去，大家都会承认，圆面积就应该是这无穷多个三角形面积之和，即

$$\pi=\frac{3\sqrt{3}}{4}+\frac{3\sqrt{3}}{4}+3\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cdots,$$

这就是说$\pi$是由上述无穷多个数相加所得到的和。这样的方法我国古代称之为“割圆术”（图1）。

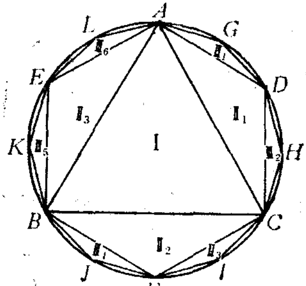



图1

上面两个实例说明提出无穷多个数相加的问题是有实际意义的，而且无穷多个数相加有可能得到一个确定的和数。那么您是否会以为任何无穷多个数都可以求和呢？其实，并不尽然。很简单，$1+1+1+\cdots$这无限多个“1”就不会以有限数作为它的和。

看来，无穷多个数相加的含义是什么？如何判断给定的无穷多个数能否相加？怎样求得可以相加的无穷多个数的和？这种运算有些什么性质？这些问题都值得深入研究。在高等数学中研究这些问题的篇章是级数理论。级数理论发展到今天已有几百年的历史，内容非常丰富，在理论研究和解决实际问题中都是很有用的。为了让具有初中数学程度的读者能看懂这本小册子，本书主要介绍了有关数列、极限、级数等三部分内容。亲爱的读者，您想知道无穷多个数能否相加的答案吗？那么，就请您看一看这本小册子，它将给您做出满意的回答！

# 一、从数$\pi$史话到数列概念

## 从数$\pi$史话谈起

圆周率$\pi$对每个读者来说都是非常熟悉的，从小学学习圆周长、圆面积的求法开始就用到$\pi$的近似值3.1416．为了能取得$\pi$的更精密的近似值，几千年来很多数学家都专门研究过它．有位德国数学家指出："在数学史上，许多国家的数学家都找过更精密的圆周率，因此圆周率的精确度可以作为衡量一个国家数学发展水平的标志."我国古代南北朝的数学家祖冲之在计算圆周率方面取得辉煌成就，他求得

$$3.1415926<\pi<3.1415927.$$

这一结果，曾在数学史上保持了上千年的最优记录．直至微积分出现以后，用级数法于1706年突破$\pi$的百位大关．法国夏因克斯耗费廿年心血于1873年发表707位的$\pi$值．1948年英国弗格森和美国雷恩奇发表808位之$\pi$值，创级数计算$\pi$近似值的最高纪录．电子计算机问世之后，计算高位$\pi$值已轻而易举．1973年法国纪劳德与波叶用计算机，历时百日得到一百万位的$\pi$值．不久之后美国克努斯把$\pi$值推进到一百五十万位．如果我们把$\pi$的不足近似值按小数位的多少依次排列起来，就得到一列数

$$a_1=3.1,\ a_2=3.14,\ a_3=3.141,\ a_4=3.1415,\ \cdots,$$
$$a_{32}=3.1415926535897932384626433832795 0,\ \cdots,$$

至今我们已精确地知道了 $a_{150万}$。读者可能会问：是否位数大到某一数 $n_0$，会有 $\pi=a_{n_0}$ 呢？不会的，早在 18 世纪就证明了 $\pi$ 是无理数，用小数表示它，是一个无限不循环小数。因此，上述关于 $\pi$ 的一列数，可以无限地写下去。这一列数叫做一个数列。

下面请看生产中的数列实例。

为了反映炼钢炉的炉膛温度变化，装有自动测温装置。规定每隔两分钟测一次，把从某时刻起两小时内的温度数据依次排列起来就得到一列数，称为温度数列

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ \cdots,\ T_{60}.$$

时间间隔越大，得到温度数列的项数就越多，设想时间无限延续下去，所得到的温度数列就是无穷多个数的排列

$$T_1,\ T_2,\ T_3,\ \cdots,\ T_n,\ \cdots.$$

象这样顺次测量或记录得到的数据，依次排列起来的实例，在科学实验、生产实际中到处都是。如气象观测记录有气温数列，气压数列，温度数列等。工厂有日产量数列，某种原料消耗量数列等。实际中的数列一般是有限项，但为了考察数列变化的状态，我们常常设想过程无限延续，得到一个项数无限的数列。把实际中具体的各种数列抽象化就得到如下的数列定义。

## 数 列 的 概 念

**凡是按一定次序排列的一列数就叫做数列。**数列中的每一个数叫做数列的一项，各项依次叫做这个数列的第一项（或首项），第二项，……，第 $n$ 项，……。项数有限的数列叫做

有穷数列，一般形式是

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n;$$

项数无限的数列叫做无穷数列，其一般形式是

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n,\ \cdots.$$

数列都可以简记为$\{a_n\}$，其中 $a_n$ 是数列的第 $n$ 项，也叫做数列的通项。下面让我们来看看各种形形色色的数列吧。

1. 某钢厂把生产的钢材堆成如图2的形状，从最上面的一排起，各排钢材的个数构成数列：

$$3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7. \tag{1}$$

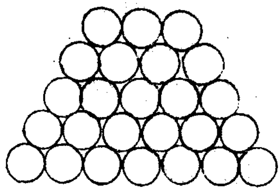


图2

2. 把自然数的倒数依次排列起来，就得到一个数列：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ \frac{1}{n},\ \cdots. \tag{2}$$

3. 把$\sqrt{2}$的不足近似值，按照精确到

$$\frac{1}{10},\ \frac{1}{10^2},\ \frac{1}{10^3},\ \cdots.$$

的顺序排列起来，就得到了一个有理数数列：

$$1.4,\ 1.41,\ 1.414,\ \cdots. \tag{3}$$

4. 把$\frac{1}{2}$的1次幂，2次幂，3次幂，4次幂，……顺次排列起来，得到一个数列：

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \frac{1}{16},\ \cdots. \tag{4}$$

5. 把$-\frac{1}{2}$的1次幂，2次幂，3次幂，4次幂，……顺次排列起来，得到一个数列：

$$-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \cdots. \tag{5}$$

6．将 $2n-1$ 按 $n$ 取 1，2，3，4，…所得的数排列起来，得到一个数列：

$$1, 3, 5, 7, 9, \cdots. \tag{6}$$

7．将 $-2n$ 按 $n$ 依次取 1，2，3，4，…所得的数排列起来，得到一个数列：

$$-2, -4, -6, -8, -10, \cdots. \tag{7}$$

8．将 $\frac{1+(-1)^n}{n}$ 按 $n$ 依次取 1，2，3，4，…所得的数排列起来，得到一个数列：

$$0, 1, 0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \cdots. \tag{8}$$

看过这些例子后，我们再来认识一下数列的通项，如果数列的通项 $a_n$ 与 $n$ 的关系，可以用公式来表示，这个公式就叫做这个数列的通项公式．在上述 8 个数列中，除了数列(3)外，其他数列都有通项公式，它们依次为

$$a_n=n+2\ (n=1, 2, 3, 4, 5), \quad a_n=\frac{1}{n}, \quad a_n=\frac{1}{2^n},$$

$$a_n=\left(-\frac{1}{2}\right)^n, \quad a_n=2n-1, \quad a_n=-2n, \quad a_n=\frac{1+(-1)^n}{n}.$$

一般来说，写出一个数列的通项对我们研究数列的性质常常是有用的．现在，我们来练习一下，根据通项公式写出数列的各项；反之，如果一个数列存在通项公式，可根据数列的前几项写出其通项公式来．

例如，已知数列的通项公式是

$$a_n=\frac{1}{n(n+1)}, \tag{9}$$

那么，它的前六项应依次是

$$a_1=\frac{1}{1\cdot 2}=\frac{1}{2}, \qquad a_2=\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{1}{6},$$

$$a_3=\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{1}{12}, \qquad a_4=\frac{1}{4\cdot 5}=\frac{1}{20},$$

$$a_5=\frac{1}{5\cdot 6}=\frac{1}{30}, \qquad a_6=\frac{1}{6\cdot 7}=\frac{1}{42}.$$

再如，已知数列的通项公式是

$$a_n=n!=1\cdot 2\cdot 3\cdots n, \tag{10}$$

那么，它的前 5 项依次是

$$a_1=1,\ a_2=1\cdot 2=2,\ a_3=1\cdot 2\cdot 3=6,$$

$$a_4=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=24,\ a_5=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120.$$

反之，若已知一个数列的前 6 项为

$$-2,\ -4,\ -8,\ -16,\ -32,\ -64, \tag{11}$$

那么，这个数列的通项公式可通过观察得到

$$a_n=-2^n,$$

依次取 $n=1$，2，3，4，5，6 验证，说明写出的通项公式是正确的。

对于数列

$$1,\ 1\frac{1}{9},\ \frac{1}{3},\ 1\frac{1}{81},\ \frac{1}{5},\ 1\frac{1}{729},\ \cdots, \tag{12}$$

也可通过观察得到它的通项公式

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n} & \text{当 } n \text{ 为奇数时，}\\[2ex] 1+\dfrac{1}{3^n} & \text{当 } n \text{ 为偶数时。}\end{cases}$$

由此可知，作为数列的通项公式可能不是单一的式子。

至此，请读者试试看，能否解答下面的几个问题。

1. 从小到大排列着的所有自然数的平方是个怎样的数列？

2. 根据下列通项公式，写出各数列的前五项：

（1）$a_n=5n$；　　（2）$a_n=(-1)^{2n+1}$；

（3）$a_n=-n^2-1$；　　（4）$a_n=n^{(-1)^n}$.

3. 写出下列各数列的通项公式，并写出第五项：

（1）$2,\ \frac{3}{2},\ \frac{4}{3},\ \frac{5}{4},\ \cdots$,

（2）$\frac{1}{1\cdot2},\ \frac{1}{2\cdot3},\ \frac{1}{3\cdot4},\ \frac{1}{4\cdot5},\ \cdots$,

（3）$\frac{1\cdot3}{2\cdot4},\ \frac{3\cdot5}{4\cdot6},\ \frac{5\cdot7}{6\cdot8},\ \frac{7\cdot9}{8\cdot10},\ \cdots$,

（4）$\frac{10}{3},\ \frac{20}{9},\ \frac{30}{27},\ \frac{40}{81},\ \cdots$,

（5）$-\frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ -\frac{1}{27},\ \frac{1}{81},\ \cdots$.

[答案：（1）$a_n=\frac{n+1}{n}$,　　（2）$a_n=\frac{1}{n(n+1)}$,

（3）$a_n=\frac{(2n-1)(2n+1)}{2n(2n+2)}$,　　（4）$a_n=\frac{10\cdot n}{3^n}$,

（5）$a_n=\frac{1}{(-3)^n}$]

4. 已知数列：1，4，7，10，…，

（1）写出这数列的通项公式；

（2）下列各数是这数列的一项吗？假若是的话，是第几项？

298；4891；10536.

〔答案：(1) $a_n=3n-2$，(2) 第 100 项，第 1631 项，不是〕

5。已知数列的通项公式为 $a_n=n(n+2)$

(1) 求这数列的第 9 项，第 98 项。

(2) 下列各个数是否是这数列的某一项。若是的话，是第几项？

a) 80； b) 100； c) 120。

〔我们一起来做这(2)中的 a)。设 $a_n=80$，那么，代入通项公式后，得 $80=n(n+2)$，即 $n^2+2n-80=0$，$(n+10)(n-8)=0$。所以 $n=-10$（舍去）；$n=8$。由此可知 80 是这个数列的第 8 项。〕

## 单调数列，有界数列

读者如果再仔细观察上一节介绍的几个数列，那将会发现，有些数列中各项的排列是有些特殊规律的。例如，数列 (2)、(4)、(7)，从第 2 项起，每一项都小于它前面的一项；而数列 (1)、(3)、(6)，从第 2 项起，每一项都大于它前面的一项，这类数列称为单调数列。一个数列如果从第二项起，每一项都大于它的前面的一项，也就是说对于任何自然数 $n$ 满足 $a_n<a_{n+1}$，这个数列叫做**递增数列**；如果从第二项起，每一项都小于它前面的一项，也就是说对于任何自然数 $n$ 满足 $a_n>a_{n+1}$，这个数列叫做**递减数列**；如果从第二项起，每一项都不小于它前面的一项，也就是说对于任何自然数 $n$ 满足 $a_n\leqslant a_{n+1}$，这个数列叫做**不减数列**；如果从第二项起，每一项都不大于它前面的一项，也就是说对于任何自然数 $n$ 满足

$a_n \geqslant a_{n+1}$，这个数列叫做**不增数列**．这四类数列统称**单调数列**．

递增数列与不减数列统称为**单增数列**，递减数列与不增数列统称为**单减数列**．

例如数列

$$1,1,3,3,5,5,\cdots,n-\frac{1+(-1)^n}{2},\ \cdots$$

是个不减数列．

数列

$$1,1,\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{5},\ \cdots,\ \frac{1}{n-\frac{1+(-1)^n}{2}},\ \cdots$$

是个不增数列．

常数列

$$1,1,1,\cdots,\frac{n}{n},\ \cdots$$

可看成是不增数列，也可看成是不减数列，因此也是单调数列．

在上节中列举的数列（5）和数列(8)，即$\left\{\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$和$\left\{\frac{1+(-1)^n}{n}\right\}$都不是单调数列，因为偶数项都大于它前面的一项，而奇数项都小于它前面的一项．我们把非单调的数列称为**摆动数列**．那么，这两个数列都是摆动数列．

现在，我们就数列各项的取值范围来考察上节的几个数列．

数列(1)的各项都是正的，且 $a_n \leqslant 7$，也就有 $|a_n| \leqslant 7$；

数列(2)的各项也都是正的，且不超过 1，即 $0 < a_n \leqslant 1$，也就有 $|a_n| \leqslant 1$；

数列(3)的各项都是正的，且$1.4 \leqslant a_n < 1.5$，也就有$|a_n| < 1.5$；

数列(5)是摆动数列，它的各项有$-\frac{1}{2} \leqslant a_n \leqslant \frac{1}{4}$，也就有$|a_n| \leqslant \frac{1}{2}$；

数列(8)是摆动数列，其各项都大于或等于零，且不超过1，即$0 \leqslant a_n \leqslant 1$，也就有$|a_n| \leqslant 1$。

上述几个数列有一个共同的特点，即对于每个数列都存在一个相应的正数$M$，使数列各项都有$|a_n| \leqslant M$。对这一类数列我们下个定义：

若存在一个正数$M>0$，使得数列的任一项的绝对值都小于$M$，即对于所有自然数$n$，都有$|a_n| \leqslant M$，那么就称数列$\{a_n\}$为**有界数列**，数$M$称为数列$\{a_n\}$的界数；如果数列$\{a_n\}$找不到这样的数$M$，就称数列$\{a_n\}$为**无界数列**。

如果存在一个数$K$，对于所有自然数$n$，都有$a_n \leqslant K$，那么就说数列$\{a_n\}$有上界，$K$为$\{a_n\}$的一个上界。

如果存在一个数$m$，对于所有的自然数$n$，都有$a_n \geqslant m$，那么就说数列$\{a_n\}$有下界，$m$为$\{a_n\}$的一个下界。

数列(6)，即$\{a_n = 2n-1\}$，对于一切自然数$n$，都有$a_n \geqslant 1$，因此$\{a_n\}$有下界1，但由于当$n$无限增大时，$a_n$也无限增大，因而找不到一个数可作为数列$\{a_n\}$的界数，因此数列(6)无界。

类似的情况，数列$\{-2n\}$是一个有上界$-2$，而无下界的数列，此数列是无界数列。

由这两个例子我们看到，一个数列如果仅有上界或仅有

下界，那一定是一个无界数列。必须是既有上界又有下界的数列，才能是有界数列。

现在，我们再来看另外几个数列的单调性与有界性。

(1) $\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{3}{4}$，…，$\frac{n}{n+1}$，…，

(2) $-1$，$-2$，$-3$，…，$-n$，…，

(3) $-2$，$4$，$-8$，…，$(-2)^n$，…。

解 (1) $a_n=\frac{n}{n+1}$，要得到 $a_{n+1}$，只要把通项公式中的 $n$ 换成 $n+1$，所以，

$$a_{n+1}=\frac{n+1}{(n+1)+1}=\frac{n+1}{n+2}.$$

而
$$a_{n+1}-a_n=\frac{n+1}{n+2}-\frac{n}{n+1}=\frac{(n+1)^2-n(n+2)}{(n+1)(n+2)}$$
$$=\frac{1}{(n+1)(n+2)}>0,$$

得
$$a_{n+1}>a_n,$$
即这个数列是递增数列。

又
$$|a_n|=\frac{n}{n+1}<1,$$

所以，这个数列又是有界数列。也就是说数列 $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$ 是递增有界数列。

(2) 容易判断数列 $\{-n\}$ 是个递减无界数列。

(3) 数列 $\{(-2)^n\}$ 的偶数项为正数，奇数项为负数，因此 $\{(-2)^n\}$ 是个摆动数列；又因为 $|(-2)^n|=2^n$，$2^n$ 随着 $n$ 的增大而无限增大，所以不可能存在一个界数 $M$，使对于一

切自然数$n$，都有$2^n<M$成立，所以$\{(-2)^n\}$是个无界数列。也就是说，该数列是个无界的摆动数列。

因为在研究无穷多个数能否相加时，常要考虑数列的单调性与有界性，因此，建议读者研究一下上节练习里第一题到第三题中各数列的单调性与有界性。

另外，如果您碰到这样一个问题：

设两个数列的通项公式分别是

$$a_n=1-\frac{1}{10^n} \text{ 和 } b_n=2-\frac{1}{10^n}$$

第三个数列的各项依次是这两个数列的对应项的和，就是

$$c_1=a_1+b_1, \ c_2=a_2+b_2, \ c_n=a_n+b_n, \ \cdots$$

您能写出这个数列的通项公式吗？这个数列的单调性与有界性如何？

〔答案：单增，有界〕

# 二、小高斯的速算故事与等差数列

## 小高斯的速算故事

一百多年前，德国有一位数学家叫高斯（1777—1855），他的父亲是个装水管的工人，有丰富的实践经验。高斯从小就听父亲讲一些生产中的简易计算方法，养成了做题时动脑筋速算的习惯。在他十岁的时候，一次上算术课，老师出了一个题目：

$$1+2+3+\cdots+98+99+100=?$$

老师写完题目，同学们都忙着一项接一项地累加起来。可是高斯并不这样，他看了看，又想了想，发现这100个数相加有内在规律，这就是$1+100=101$，$2+99=101$，$3+98=101$，$\cdots 50+51=101$，那么

$$1+2+3+\cdots+98+99+100=(1+100)\times 50=5050。$$

就这样，高斯虽然最后动手算，可是因为他分析了题目中各个数的内在联系，找到了简捷的计算方法，结果他最先得出了正确的答案。

对于高斯相加的这100个数，如果把它看成一个数列，它们有这样的特点，后项都比前项多1，即$a_{n+1}=a_n+1$ $(n=1, 2, \cdots 99)$。第一项（首项）加最后一项（末项）一定等于第二项加倒数第二项，因为一个加数增加1而另一个加

数减少1，所以和数不变．依此类推，这样100个数相加的总和就等于50个首项与末项之和，“50”是根据项数的一半得来的，因此可以写出这一百个数相加的公式：

$$(首项+末项)\times(项数\div 2)=总和.$$

读者只要稍加考虑，就会发现这个公式不仅仅对这个题目适用，只要相加的一列数有这样的特点——数列的后一项与前一项之差是一个常数，这个公式都适用．下面专门来研究这种数列．

## 等差数列的概念

若一个数列，从第二项起，每一项减去它前面的一项所得的差都等于某一常数，那么这个数列就叫做**等差数列**．这个常数叫做公差，通常用字母 $d$ 来表示：

$$d=a_n-a_{n-1}\quad(n\geqslant 2).$$

例如，数列3，7，11，15是等差数列，公差 $d=4$．

又如数列8，3，$-2$，$-7$，$-12$，…，$13-5n$，…也是等差数列．事实上，$a_n=13-5n$，$a_{n-1}=13-5(n-1)$，所以 $d=a_n-a_{n-1}=(13-5n)-[13-5(n-1)]=-5$．

比较这两个数列，我们发现前者是递增数列，后者是递减数列，因为前者的公差 $d=4>0$，后者的公差 $d=-5<0$．一般来说，对于等差数列，由于 $a_n=a_{n-1}+d$，所以当 $d>0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为递增数列；当 $d<0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 是递减数列；当 $d=0$ 时，数列 $\{a_n\}$ 为常数数列．

等差数列的通项 $a_n=a_{n-1}+d$ $(n\geqslant 2)$．如果知道数列的首项和公差我们也可以直接计算通项 $a_n$，下面我们用数学归

纳法证明等差数列的通项公式为

$$a_n = a_1 + (n-1)d.$$

**证明** 首先，显然有

$$a_1 = a_1 + 0d,$$

$$a_2 = a_1 + d,$$

$$a_3 = a_2 + d = a_1 + 2d,$$

$$a_4 = a_3 + d = a_1 + 3d.$$

这表明，当 $n=1$，2，3，4 时，公式是正确的。

下面我们来证明：如果这个公式对第 $m$ 项成立，即

$$a_m = a_1 + (m-1)d,$$

那么，它对于第 $m+1$ 项仍成立。事实上，

$$a_{m+1} = a_m + d = a_1 + (m-1)d + d = a_1 + md.$$

以上已论证的两项事实就保证了这个公式对任意自然数 $n$ 都成立。上面我们一开始就证明了公式对 $n=1$，2，3，4 时都成立，由此根据第二项事实就保证公式对于 $n=5$ 时成立，那么它对于数列 $n=6$ 时也成立，…。这样我们可以断言对于任意自然数 $n$ 这个公式始终成立。即

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

为等差数列的通项公式。

这种证明方法称为数学归纳法，在数学中凡是对于所有自然数都要求成立的命题一般都要用这一方法来证明。

利用上述通项公式，在 $a$，$d$，$n$，$a_n$ 这四个量中，只要知道其中的任意三个，就可以求出另外的一个。

例如，求下表中的未知数：

| | $a_1$ | $d$ | $n$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|
| (1) | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | 12 | ? |
| (2) | 2 | ? | 9 | 18 |
| (3) | 3 | 2 | ? | 21 |
| (4) | ? | 4 | 26 | 105 |

**解** 由 $a_n = a_1 + (n-1)d$，

(1) $a_{12} = \frac{1}{2} + (12-1)\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} + \left(-\frac{11}{2}\right) = -5$；

(2) $d = \frac{a_n - a_1}{n-1} = \frac{18-2}{9-1} = 2$；

(3) $n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1 = \frac{21-3}{2} + 1 = 9 + 1 = 10$；

(4) $a_1 = a_n - (n-1)d = 105 - (26-1)4 = 105 - 100 = 5$。

再如，已知等差数列的第二项是 4，第八项是 16，求它的第 12 项。

分析：只要求出 $a_1$ 和 $d$ 就可以求出 $a_{12}$ 了，因此根据题意先列出关于 $a_1$ 和 $d$ 的方程组，解出 $a_1$ 和 $d$，再求 $a_{12}$。

**解** 由 $a_2 = 4$，$a_8 = 16$，可列出方程组

$$\begin{cases} a_1 + d = 4, & (1) \\ a_1 + (8-1)d = 16, & (2) \end{cases}$$

解这个方程组，得

$$d = 2，\quad a_1 = 2。$$

所以，$\quad a_{12} = a_1 + (12-1)d = 2 + 11 \cdot 2 = 24$。

## 等差数列前$n$项的求和公式

前面我们介绍了德国数学家高斯小时速算的故事。当时，他是用这公式来算的：

$$和=(首项+末项)\times(项数\div 2).$$

当然，我们也可以改写为

$$和=\frac{(首项+末项)\times 项数}{2}$$

下面我们仍用数学归纳法来证明这一推测是正确的。

设$\{a_n\}$为等差数列，$d$为公差，则等差数列前$n$项之和

$$S_n=\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}. \qquad (1)$$

**证明** 当$n=1$时，$a_n=a_1$，代入公式（1）的右端，得

$$\frac{(a_1+a_n)\times n}{2}=\frac{(a_1+a_1)\times 1}{2}=a_1.$$

公式（1）的左端$S_1=a_1$，所以当$n=1$时，公式（1）是成立的。

再假设$n=m$时公式（1）成立，即

$$S_m=\frac{(a_1+a_m)\times m}{2},$$

我们来证明当$n=m+1$时公式（1）也成立，

因为 $$a_{m+1}=a_1+md,$$

于是 $$S_{m+1}=S_m+a_{m+1}$$
$$=\frac{(a_1+a_m)\times m}{2}+(a_1+md)$$

$$=\frac{[a_1+a_1+(m-1)d]\times m}{2}+\frac{2(a_1+md)}{2}$$

$$=\frac{(2a_1+md)(m+1)}{2}$$

$$=\frac{[a_1+(a_1+md)]}{2}(m+1)$$

$$=\frac{(a_1+a_{m+1})\times(m+1)}{2}.$$

即公式（1）对$n=m+1$时亦成立。由数学归纳法，可知公式（1）对一切自然数$n$都成立。

如果我们把等差数列的求和公式和通项公式结合起来，即

$$\begin{cases}a_n=a_1+(n-1)d,\\ S_n=\dfrac{(a_1+a_n)\times n}{2}.\end{cases}$$

则在$a_1$，$a_n$，$d$，$n$，$S_n$五个量中只要知道其中的任意三个就可求出其他的两个了。

例如，求等差数列

$$18,\ 14,\ 10,\ 6,\ \cdots$$

的前10项之和。

解　由$a_1=18$，$a_2=14$，

得　$d=14-18=-4$，

$a_{10}=a_1+(10-1)d=18+9\times(-4)=-18$。

所以　$S_{10}=\dfrac{(a_1+a_{10})\times 10}{2}=\dfrac{[18+(-18)]\times 10}{2}=0$。

再如，在等差数列中，已知$d=2$，$a_n=1$，$S_n=-8$，求$n$。

**解** 把 $d=2$，$a_n=1$，$S_n=-8$
代入公式

$$\begin{cases} a_n = a_1 + (n-1)d, \\ S_n = \dfrac{n(a_1+a_n)}{2}. \end{cases}$$

得

$$\begin{cases} a_1 + 2(n-1) = 1, & (1) \\ \dfrac{n(a_1+1)}{2} = -8. & (2) \end{cases}$$

从(1)式得 $a_1 = 3-2n$，

代入(2)式，并化简得 $n^2-2n-8=0$，

解这个方程得 $n=4$，$n=-2$。因为项数不能为负数，所以只能取 $n=4$。

等差数列的上述两个公式在研究等差数列时，由于已知的三个量不同，要解决的问题一共有十类。当您填出下表空白格中的数时，就说明了这一问题。

| | $a_1$ | $a_n$ | $d$ | $n$ | $S_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 7 | 39 | | 9 | |
| 2 | 8 | | $-2$ | | 14 |
| 3 | 31 | | $-7$ | 10 | |
| 4 | 1 | 61 | 5 | | |
| 5 | | | 12 | 40 | 9400 |
| 6 | 2 | | | 3 | 441 |
| 7 | | 22 | 0.4 | 43 | |

（续）

| | $a_1$ | $a_n$ | $d$ | $n$ | $S_n$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 8 | | 2.57 | 1.3 | | 266 |
| 9 | −4.5 | 100 | | | 955 |
| 10 | | −15 | | 11 | 0 |

## 调　和　数　列

在结束这一部分时，我们再给读者介绍一个和等差数列有联系的数列——调和数列。

若一数列各项的倒数成等差数列，则此数列叫做调和数列。

例如，数列：$\frac{1}{2}$，$\frac{1}{5}$，$\frac{1}{8}$，$\frac{1}{11}$，…。

$$\frac{1}{3},\quad 1,\quad -1,\quad -\frac{1}{3},\quad \cdots.$$

等都是调和数列。我们可以通过等差数列来研究调和数列。

例如，一调和数列第 15 项为 $\frac{1}{25}$，第 23 项为 $\frac{1}{41}$，求此调和数列。

**解**　设此调和数列为 $\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$，其分母构成一个等差数列 $\{a_n\}$，按题意，应有 $a_{15}=25$，$a_{23}=41$，由通项公式，得

$$\begin{cases}a_1+(15-1)d=25,\\ a_1+(23-1)d=41.\end{cases}$$

解方程组，得 $d=2$，$a_1=-3$。

数列$\{a_n\}$为$\{-3+2(n-1)\}$，所求的调和数列$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$为

$$-\frac{1}{3},\ -1,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{5},\ \frac{1}{7},\ \cdots,\ \frac{1}{-3+2(n-1)},\ \cdots.$$

又如，已知 $a$，$b$，$c$ 为调和数列，求证：

$$\frac{a}{b+c-a},\ \frac{b}{c+a-b},\ \frac{c}{a+b-c}$$

也为调和数列。

证明 $\because$ $a$，$b$，$c$ 为调和数列，

$$\therefore\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{b},\ \frac{1}{c}\text{ 为等差数列，}$$

即
$$\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}.$$

这样由
$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{a}\right)=\frac{a+b+c}{b}-\frac{a+b+c}{a},$$

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=\frac{a+b+c}{c}-\frac{a+b+c}{b},$$

可推知 $\frac{a+b+c}{a}$，$\frac{a+b+c}{b}$，$\frac{a+b+c}{c}$ 为等差数列，因此

$$\frac{a+b+c}{a}-2,\ \frac{a+b+c}{b}-2,\ \frac{a+b+c}{c}-2$$

为等差数列，即

$$\frac{b+c-a}{a},\ \frac{a+c-b}{b},\ \frac{a+b-c}{c}$$

为等差数列，故

$$\frac{a}{b+c-a},\ \frac{b}{a+c-b},\ \frac{c}{a+b-c}$$

为调和数列。

当然，我们直接按照调和数列的定义来验证也可得出答

案。

等差数列这一节结束了，本节提出了两个公式

$$a_n = a_1 + (n-1)d,$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)\times n}{2}.$$

如果读者想熟练地掌握这两个公式以解决等差数列的有关问题，那么，请您做做下面的几个题目。

1. 求下面各等差数列的第 $n$ 项

(1) 3，7，11，…；

(2) 11，7，3，…；

(3) 1，$\frac{1}{3}$，$-\frac{1}{3}$，…；

(4) $-3$，$-1\frac{1}{2}$，0，…。

[答案：(1) $a_n = 4n-1$，(2) $a_n = 15-4n$，

(3) $a_n = \frac{5}{3} - \frac{2}{3}n$，(4) $a_n = \frac{3}{2}n - \frac{9}{2}$]

2. 求下表中的未知数

| | $a_1$ | $d$ | $n$ | $a_n$ |
|---|---|---|---|---|
| (1) | 1 | $\frac{2}{3}$ | 100 | ? |
| (2) | 0 | 0.5 | ? | 5 |
| (3) | ? | $\frac{3}{4}$ | 30 | $15\frac{3}{4}$ |
| (4) | $-38$ | ? | 15 | $-10$ |

〔答案：(1) $a_n=67$， (2) $n=11$。 (3) $a_1=-6$，(4) $d=2$〕

3。等差数列的第2项与第4项的和是16，第1项与第5项的积是28，求它的第3项。

〔答案：$a_3=8$〕

4。若$a^2$，$b^2$，$c^2$成等差数列，求证$\frac{1}{b+c}$，$\frac{1}{a+c}$，$\frac{1}{a+b}$也成等差数列。

5。(1) 等差数列的通项公式是$a_n=2n+1$，求它前$n$项和的公式。

〔答案：$S_n=n^2+2n$〕

(2) 等差数列前$n$项和的公式是$S_n=3n^2$，求它的通项公式。

〔答案：$a_n=6n-3$〕

# 三、古印度太子发不出奖品的故事与等比数列

## 印度太子西拉谟发不出奖品的故事

传说古印度有人发明了一种棋类游戏，太子西拉谟打算奖励发明者，让他自己选择奖品．发明者请求，按军棋盘上的格数赏给他米粒，但须第一格给他一粒米，第二格两粒米，第三格四粒米，以下各格的米粒数是它前一格米粒数的二倍．太子应允了他的请求，按军棋盘上的64个方格计算应发给发明者的米粒数，结果使太子目瞪口呆了，因为全国的存米还不够数！现在我们也来计算一下应给发明者的米是多少粒？

米粒的数目是64个数的和，第一个数是1，第2个数是2，以下每个数是它前一个数的二倍．如此，64个数的和$S$为

$$S=1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{62}+2^{63}, \qquad (1)$$

我们不打算一项项地累加起来，而是考虑用较简便的方法来计算和数．用2乘等式的两边

$$2S=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{63}+2^{64}, \qquad (2)$$

(2)式减(1)式，则得等号左边的数是$S$，右边是$2^{64}-1$，即$S=2^{64}-1=18446744073709551615$．这么多粒米，若把它铺撒在地球表面上，可以铺成约为9毫米厚的米层！难怪太

子西拉谟发不出这奖品了。

在这个问题中，所求米粒数实际上是要求一个数列的前64项之和，而这个数列：1，2，$2^2$，$2^3$，…，$2^{62}$，$2^{63}$，…，由第二项起，每一个数等于其前一个数乘以“2”（相同的数）。这样的数列叫做等比数列，本节就将研究这种数列。

## 等比数列的概念

若一个数列从第二项起，每一项与它的前面一项的比都等于某一个非零常数，那么这个数列就叫做**等比数列**。这个常数叫做等比数列的**公比**，等比数列的公比通常用字母 $q$ 来表示。

例如，数列

$$27,\ 9,\ 3,\ 1,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{9},\ \cdots.$$

是等比数列，公比 $q=\frac{1}{3}$。

数列

$$4,\ -2,\ 1,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{8},\ \cdots.$$

也是等比数列，公比 $q=-\frac{1}{2}$。

如果已知一个数列是等比数列，其第一项为 $a_1$，公比为 $q$，那么就可以写出它的通项公式为

$$a_n=a_1q^{n-1}. \tag{3}$$

**证明** 当 $n=1$ 时，公式(3)的右端 $a_1q^{n-1}=a_1q^0=a_1$，公式(3)左端 $a_n=a_1$，左端＝右端，即公式(3)成立。

若假定这个公式对于 $n=m$ 时成立，即

$$a_m=a_1q^{m-1},$$

于是 $$a_{m+1}=a_mq=a_1q^{m-1}q=a_1q^m.$$

因此当 $n=m+1$ 时，公式(3)也成立．这样我们就用数学归纳法证明了等比数列的通项公式为

$$a_n=a_1q^{n-1}.$$

于是，根据等比数列的第一项和公比 $q$ 可以写出数列的通项公式。由通项公式可写出等比数列的任意一项。

例如，求等比数列 3，12，…的第六项。

解　按题意 $a_1=3$，$q=\frac{12}{3}=4$，所以

$$a_6=3\times4^5=3072.$$

我们还可以在 81 和 1 之间插入三个正数，使它们和这两个数成等比数列。

解　按题意 $a_1=81$，$a_5=1$．由通项公式我们有

$$a_5=a_1q^{5-1}.$$

所以 $$q^4=\frac{a_5}{a_1}=\frac{1}{81},$$

$$q=\pm\frac{1}{3}.$$

因为题中要求插入的是三个正数，所以取 $q=\frac{1}{3}$，要求的三个数为

$$a_2=81\times\frac{1}{3}=27,$$

$$a_3=27\times\frac{1}{3}=9,$$

$$a_4 = 9 \times \frac{1}{3} = 3.$$

最后，请读者注意，如果$\{a_n\}$是等比数列，且设 $a_1>0$，则

（1）当 $q>1$时，它是一个递增数列．例如数列

$$2,\ 4,\ 8,\ 16,\ 32,\ 64,\ \cdots,$$

其相邻两项之差是逐渐增大的，而且距首项越远其差数越大，所以不象递增等差数列那样均匀地增长．又当 $n$ 无限增大时，$a_n$ 的值也可以无限地增大，只要 $n$ 足够大，$a_n$ 可以大于给定的任意大的正数$A$，所以它是无界递增数列．

（2）当 $0<q<1$ 时，它是一个递减数列．例如数列

$$4,\ 2,\ 1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{8},\ \cdots,$$

其相邻两项之差是逐渐减小的，而且距离首项越远，其差数也越小，所以不象递减等差数列那样均匀地减少而是越来越缓慢地减少．又因各项都为正数，且不超过 $a_1$，即 $0<a_n\leqslant a_1$，可见$\{a_n\}$是有界递减数列．

## 等比数列前 $n$ 项的求和公式

本节开始时所讲的故事就是求一个数列前 64 项之和的问题．在前面我们已给出了求和的方法，现在我们把这个方法推广为求一般等比数列前 $n$ 项之和的公式．

设$\{a_n\}$为等比数列，$q$ 为公比（$q\neq1$），则等比数列前 $n$ 项之和

$$S_n = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}.$$

**证明** 用 $q$ 乘以等式

$$S_n=a_1+a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1} \tag{4}$$

的两边，得

$$qS_n=a_1q+a_1q^2+\cdots+a_1q^{n-1}+a_1q^n, \tag{5}$$

(4)式减去(5)式，得

$$S_n(1-q)=a_1-a_1q^n.$$

因为 $q\neq1$，两边除以 $(1-q)$，得

$$S_n=\frac{a_1(1-q^n)}{1-q}, \tag{6}$$

注意到 $a_n=a_1q^{n-1}$，亦可以把公式写成

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}. \tag{7}$$

这样已知等比数列四个量 $a_1$，$q$，$n$，$S_n$ 中的任意三个，要求另一个量时，可用公式(6)，而在等比数列四个量 $a_1$，$q$，$a_n$，$S_n$ 中知道任意三个，要求另一个量时可用公式(7)。

自然，当 $q=1$ 时，公式(6)不适用，此时 $S_n=na_1$。

**例 1** 若等比数列 $a_1=1$，$q=\frac{1}{3}$，求前 8 项之和。应用公式(6)，由

$a_1=1$，$q=\frac{1}{3}$，$n=8$，得

$$S_8=\frac{a_1(1-q^8)}{1-q}=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^8}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3-\frac{1}{3^7}}{2}=\frac{3280}{2187}.$$

**例 2** 对于等比数列 $q=3$，$n=5$ 及 $S_5=242$，要求 $a_1$，

$a_5$ 时，可先用公式(6)求 $a_1$，再用通项公式求 $a_5$。

把 $q=3$，$n=5$ 及 $S_5=242$ 代入公式(6)，得

$$242=\frac{a_1(1-3^5)}{1-3},$$

由此得
$$a_1=\frac{242}{121}=2,$$

$$a_5=a_1q^4=2\cdot 3^4=162.$$

例 3　如果等比数列首项等于 2，末项等于 162，$q$ 等于 3，那么，用公式(7)可求得等比数列各项之和.

$$S_n=\frac{a_1-a_nq}{1-q}=\frac{2-162\times 3}{1-2}=484.$$

类似于等差数列，利用求和公式(6)和通项公式(3)，在已知等比数列的五个量 $a_1$，$q$，$n$，$a_n$，$S_n$ 中的任意三个时，就可求出另外的两个. 这样的问题一共也有十类，我们不再一一罗列，读者自己可以把这十类问题列出一个表来.

最后，看一个较繁的题目.

已知一个等比数列，$a_1=48$，$n=7$，$a_n=\frac{3}{4}$，求 $q$ 及 $S_n$.

解　把 $a_1=48$，$n=7$，$a_n=\frac{3}{4}$ 代入求和公式(6)和通项公式 (3)，得

$$\begin{cases}\dfrac{3}{4}=48q^6, & (8)\\[2ex] S_7=\dfrac{48(1-q^7)}{1-q}. & (9)\end{cases}$$

由(8)式得 $q^6=\frac{1}{2^6}$，所以

$$q=\pm\frac{1}{2}\ （在实数范围内），$$

分别代入(9)式，得

$$S_7=\frac{48\left[1-\left(-\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1+\frac{1}{2}}=\frac{129}{4}=32\frac{1}{4},$$

及
$$S_7=\frac{48\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^7\right]}{1-\frac{1}{2}}=\frac{381}{4}=95\frac{1}{4}.$$

故得

$$\begin{cases}q=\frac{1}{2},\\ S_7=95\frac{1}{4};\end{cases}\qquad \begin{cases}q=-\frac{1}{2},\\ S_7=32\frac{1}{4}.\end{cases}$$

仿照本节的例题，读者可类似地解答下列问题。

1. 求下列等比数列第 4 项和第 $n$ 项

(1) $2,\ -1,\ \frac{1}{2},\ \cdots$;

(2) $\frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{8},\ \cdots$;

(3) $\sqrt{2}+1,\ 1,\ \sqrt{2}-1,\ \cdots$;

(4) $(a+b)^2,\ (a^2-b^2),\ (a-b)^2,\ \cdots$.

2. 求等比数列的第 12 项，如果：

(1) $q=4$，$a_8=256$；

(2) $q=-\frac{1}{3}$，$a_9=\frac{4}{9}$.

[答案：(1) $a_{12}=65536$，(2) $a_{12}=\frac{4}{243}$]

3. 在 160 和 5 中间插入 4 个数，使它们与已知数组成等

比数列。试写出这个等比数列。

〔答案：$a_n=5\cdot2^{n-1}$〕

4．如果 $a_1=3$，$q=2$，$S_n=189$，求等比数列的项数．

〔答案：$n=6$〕

5．如果 $a_1=1$，$n=3$，$S_3=157$，求公比。

〔答案：$-13$ 或 $12$〕

6．已知等比数列中 $a_1+a_2=9$，$a_1-q=2\frac{3}{4}$，求 $a_3$。

$\left[\text{答案：}\frac{25}{4}\text{或}-\frac{225}{4}\right]$

# 四、从古语看数列的收敛性

## 从“一尺之棰，日取其半，万世不竭”谈起

战国时代哲学家庄周所著的《庄子·天下篇》中有这样一句话：一尺之棰，日取其半，万世不竭。也就是说，一根长为一尺的棒槌，每天截去一半，这样的过程可以无限制地进行下去。现在我们提出这样的问题。假设截棒槌这件事真的能一直进行下去的话，那么，截去的棒槌总长 $L$ 是多少？留下的棒槌长度 $l$ 又是多少？

我们先做下面的两个记录。

(1) 把每天截后剩下部分的长度记录如下(单位为尺)：

第一天剩下 $\frac{1}{2}$；第二天剩下 $\frac{1}{2^2}$；第三天剩下 $\frac{1}{2^3}$；…，第 $n$ 天剩下 $\frac{1}{2^n}$；…，这样得到一个无穷数列

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}: \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{2^3}, \cdots, \frac{1}{2^n}, \cdots. \tag{1}$$

(2) 把每天截下的部分相加起来，可以得到棒槌截去部分的总长。记录如下(单位为尺)：

第一天截去 $\frac{1}{2}$；前二天共截去 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}$；前三天共截去 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}\cdots$；前 $n$ 天共截去 $\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}\cdots$。这同样也得到一个数列

## 实数的绝对值

设 $a$ 为一实数，如果 $a$ 为正数，那么 $a$ 的绝对值就是它本身；如果 $a$ 为负数，那么 $a$ 的绝对值就是与它相反的正数 $-a$；零的绝对值还是零。用记号 $|a|$ 表示 $a$ 的绝对值，即

$$|a|=\begin{cases}a, & 当 a\geqslant 0;\\ -a, & 当 a<0.\end{cases}$$

由此可知 $|a|$ 总是表示正数或零，且有 $|a|=\sqrt{a^2}$，就几何意义来说，$|a|$ 在数轴上表示点 $a$ 与原点 $O$ 之间的距离。

根据绝对值的定义，可得到几个以后经常要用的关系：

1° $$-|a|\leqslant a\leqslant|a|. \tag{1}$$

事实上，当 $a\geqslant 0$ 时，有 $-|a|\leqslant a=|a|$；

当 $a<0$ 时，有 $-|a|=a<|a|$。

因此对任意的实数 $a$，(1)式成立。

2° 当 $K>0$ 时，绝对值不等式 $|a|\leqslant K$

与 $$-K\leqslant a\leqslant K$$

是等价的。

事实上，若 $|a|\leqslant K$，有 $-|a|\geqslant -K$，

再由(1)式，可得

$$-K\leqslant-|a|\leqslant a\leqslant|a|\leqslant K.$$

又若 $-K\leqslant a\leqslant K$，则当 $a\geqslant 0$ 时，$a=|a|\leqslant K$；当 $a<0$ 时，$a=-|a|\geqslant -K$。即 $|a|\leqslant K$。所以对任意的实数 $a$，都有 $|a|\leqslant K$。

同理可证，绝对值不等式 $|a|<K(K>0)$ 与 $-K<a<K$ 是等价的。

接着，让我们再来复习绝对值的运算性质.

1° 和的绝对值不大于各项绝对值的和，即

$$|a+b|\leqslant|a|+|b| \tag{2}$$

事实上，由(1)式，得

$$-|a|\leqslant a\leqslant|a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant|b|,$$

把两式相加，得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant(|a|+|b|),$$

即 $$|a+b|\leqslant|a|+|b|.$$

应用数学归纳法，不难把(2)式推广为对任意有限项之和都成立的不等式：

$$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|.$$

2° 差的绝对值不小于各项绝对值的差，即

$$|a-b|\geqslant|a|-|b|. \tag{3}$$

事实上， $\because\quad |a|=|(a-b)+b|,$

由(2)式，得 $|(a-b)+b|\leqslant|a-b|+|b|,$

于是 $|a|\leqslant|a-b|+|b|,$

即 $|a|-|b|\leqslant|a-b|.$

由于若干个因子的乘积的绝对值与各因子的符号没有关系，商的绝对值与被除数及除数的符号没有关系，因此有下面两个命题成立.

3° 乘积的绝对值等于各项绝对值的乘积，

即 $$|a_1\cdot a_2\cdot\cdots\cdot a_n|=|a_1|\cdot|a_2|\cdot\cdots\cdot|a_n|. \tag{4}$$

4° 商的绝对值等于被除数及除数的绝对值的商，即

$$\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}. \tag{5}$$

此外，我们知道实数可以用数轴上的点来表示，以后我们对实数和其在数轴上的对应点就不加区别，常用一个符号来表示，如数 $a$ 在数轴上对应的点就是点 $a$。$|a|$在数轴上代表点 $a$ 到原点 $o$ 的距离，$|x-a|$代表点 $x$ 到点 $a$ 的距离，例如$|x+3|$代表点 $x$ 到点 $-3$ 的距离。

最后，我们给读者介绍“区间”的概念。把一些实数放在一起构成一个集合，就称为一个数集。全体实数是一个数集；同样全体自然数构成一个数集，称为自然数集；全体有理数构成一个数集，称为有理数集。在数集中，我们今后用得最多的是各种各样的区间。所谓一个区间，是指数轴上的一“段”直线上的所有的点构成的点集（数集）。这种数集通常可用不等式表示。

（1）整个数轴。这是两头都没有限制的，这个区间记为$(-\infty,+\infty)$，或记为$-\infty<x<+\infty$。后一种表示法是直接指明属于这个数集的数（即 $x$）是哪一些。

（2）左边没有限制而右边有限制的。这又分右边的端点在点集内和不在点集内两种情况，前者记为$(-\infty,a]$，后者记为$(-\infty,a)$，此处 $a$ 是右端点。如果用直接指明哪些 $x$ 属于这一数集的办法来表示，则前者是$-\infty<x\leqslant a$，后者是$-\infty<x<a$。类似地还有右边无限制而左边有限制的区间$[a,+\infty)$和$(a,+\infty)$。或表示为 $a\leqslant x<+\infty$，和 $a<x<+\infty$。

（3）两边都有限制的，这时真正是一个线段，如果左端点是 $a$，右端点是 $b$，则当然又应根据端点是否在内而分成以下几类：

$[a,b]$，即 $a\leqslant x\leqslant b$；

$(a,b)$，即 $a<x<b$；

$$[a,b),\ 即\quad a\leqslant x<b;$$

$$(a,b],\ 即\quad a<x\leqslant b.$$

它们依次称为闭区间，开区间，左闭右开区间和左开右闭区间。这些区间都称为有限区间。

例 1　指明满足下列不等式的 $x$ 所在区间

（1）$|x|\leqslant 8$，即 $-8\leqslant x\leqslant 8$，区间为 $[-8,8]$。

（2）$|x-3|<1$，即 $-1<x-3<1$，解不等式得

$$2<x<4,$$

区间为

$$(2,4).$$

例 2　解不等式 $|x-2|+|x+3|\leqslant 8$。

解　1）当 $x\geqslant 2$ 时

$$|x-2|=x-2,\quad |x+3|=x+3,$$

所以

$$|x-2|+|x+3|\leqslant 8,$$

即

$$x-2+x+3\leqslant 8.$$

整理得

$$2\leqslant x\leqslant 3\frac{1}{2}.$$

2）当 $x\leqslant -3$ 时，

$$|x-2|=-(x-2),\quad |x+3|=-(x+3),$$

所以

$$|x-2|+|x+3|\leqslant 8,$$

即

$$-(x-2)-(x+3)\leqslant 8.$$

整理得

$$-2x\leqslant 9,$$

即

$$-\frac{9}{2}\leqslant x\leqslant -3.$$

3）当 $-3<x<2$ 时，

$$|x-2|=-(x-2),\quad |x+3|=x+3.$$

所以

$$|x-2|+|x+3|\leqslant 8,$$

即 $$-(x-2)+(x+3)\leqslant 8,$$

整理得 $5\leqslant 8$，说明此时不等式恒成立。

综合上面这三种情况，得不等式的解为

$$-4\frac{1}{2}\leqslant x\leqslant 3\frac{1}{2} \quad \text{或} \quad \left[-4\frac{1}{2},3\frac{1}{2}\right].$$

解绝对值不等式的题，稍不小心就会出错，读者不妨练习一下。

1. 证明：$|x|\geqslant B$ 成立的充分必要条件是 $x\geqslant B$ 或 $x\leqslant -B$，其中 $B$ 是常数。

2. 指明满足下列不等式的 $x$ 所在的区间：

(1) $|x|\leqslant 2$； (2) $|x-1|<1$；

(3) $|x|\geqslant 5$； (4) $\left|x+\frac{1}{2}\right|\geqslant\frac{1}{2}$.

〔答案：(1) $[-2,2]$，(2) $(0,2)$，(3) $(-\infty,-5]$ 或 $[5,+\infty)$，(4) $(-\infty,-1]$ 或 $[0,+\infty)$〕

3. 证明：当 $|x+1|<\frac{1}{2}$ 时，$|x-2|<\frac{7}{2}$.

〔提示：$|x-2|=|x+1-3|\leqslant|x+1|+3$〕

4. 证明：当 $|x-1|\leqslant 1$ 时，$|x^2-1|\leqslant 3|x-1|$.

5. 解下列不等式：

(1) $|x-5|<8$； (2) $|2x+4|\geqslant 10$；

(3) $|x|>|x+1|$； (4) $|x+1|+|x-1|\leqslant 4$.

〔答案：(1) $(-3,13)$，(2) $[3,+\infty)$，$(-\infty,-7]$，(3) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$，(4) $[-2,2]$〕

## 数列极限的概念

什么是数列的极限？是否每个数列都有极限？要回答这些问题，就让我们从分析下列数列随 $n$ 变化的特性开始吧！

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\cdots. \qquad (1)$$

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\cdots,\ \frac{n-1}{n},\cdots. \qquad (2)$$

$$1,\ 2\frac{1}{2},\ 1\frac{2}{3},\ 2\frac{1}{4},1\frac{4}{5},\ 2\frac{1}{6},\ \cdots,2+\frac{(-1)^n}{n},\cdots. \qquad (3)$$

$$1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\cdots,\ n^2,\cdots. \qquad (4)$$

$$1,\ 2,\ \frac{1}{3},\ 4,\ \frac{1}{5},\ 6,\cdots,\ n^{(-1)^n},\cdots. \qquad (5)$$

考察数列(1) $\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，显然当 $n$ 越大时，$a_n$ 越小，在 $n$ 无限增大时，$a_n$ 就趋近于零．考察数列(2) $\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$，也可发现这数列有个明显的趋势，当 $n$ 越大时，$a_n=\frac{n-1}{n}$ 越大，在 $n$ 无限增大时，$a_n$ 就趋近于 1．考察数列(3) $\left\{2+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$，它是个摆动数列，但是也有个确定的趋势，当 $n$ 无限增大时，数列趋近于 2．总起来说这三个无穷数列有个共同特点，当 $n$ 无限增大时，它们的变化趋势都是趋于某个常数．这类数列我们就说它们是有极限的．

现在我们考察数列(4)和(5)，它们就不再具有上述特点，例如数列$\{n^2\}$，当$n$越大时$a_n$也越大，当$n$无限增大时，$a_n$也就无止境地增大，这类数列，通常称为无穷大量（这类数列的特征是绝对值无止境地增大）。最后一个数列$\{n^{(-1)^n}\}$则又是另一种类型，当$n$增大时，奇数项越来越小，偶数项越来越大，整个数列随$n$增大时既不趋于某一个常数，又不象数列(4)那样，无限制的增大下去。

这样，大体上我们可按随$n$无限增大时$a_n$的变化状态，把数列$\{a_n\}$归纳为三类：第一类是$a_n$无限趋近某一常数$l$，数列$\{a_n\}$有极限；第二类是$|a_n|$无限增大，数列$\{a_n\}$是无穷大量；第三类是$a_n$既不趋近某一常数，$|a_n|$又不无限增大。前二类数列其变化状态具有一定的趋势，值得我们着重研究，尤其是有极限的数列，它是我们解答无穷多个数能否相加的基础。下面就来研究有极限的数列。

若数列$\{a_n\}$当$n$无限增大时，$a_n$无限接近某一个确定的常数$l$，我们就称数列$\{a_n\}$**收敛**，$l$称为它的**极限**，记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，或者记为$a_n\to l(n\to\infty)$。反之，若$\{a_n\}$不收敛，我们就称它为**发散**。

例如前面提到的三个数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$，$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$，$\left\{2+\frac{(-1)^n}{n}\right\}$都是收敛的，数列(1)的极限是零，数列(2)的极限是1，数列(3)的极限是2，可以写成

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0,\ \lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n}=1,\ \lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{(-1)^n}{n}\right)=2,$$

而$\{n^2\}$和$\{n^{(-1)^n}\}$都不会趋近于一个固定的数，因此$\{n^2\}$和$\{n^{(-1)^n}\}$都是发散的。

以上这个极限定义是描述性的，好处是一说大家都明白，但并不很精确。若把“当$n$无限增大时，$a_n$无限接近某一确定的常数$l$”用联系$n$、$a_n$、$l$的数学式子表达出来，在逻辑上就严格精确了。好！现在让我们来完成这个较为艰巨的任务吧。

详细考察$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$，它的意思是说，当$n$越大，$\frac{1}{2^n}$就越小，例如当$n>100$时，也就是说100项以后，数列的每一项都要小于$\frac{1}{2^{100}}$，即$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^{100}}$。当$n>1000$时，亦即1000项以后，数列的每一项都要小于$\frac{1}{2^{1000}}$，即$\frac{1}{2^n}<\frac{1}{2^{1000}}$，…。依此类推，就可以断言：“当$n$充分大时，$\frac{1}{2^n}$与零之差可以小于预先给定的任意小的正数。”

用同样的分析方法我们再看下面的例子。

考察数列$\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$，当$n\to\infty$时，它以零为极限。

当$n$充分大时，$\left\{(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\right\}$可与零任意地接近，也就是说只要$n$足够的大，就可以使$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|$小于预先给定的任意小的正数。

比方说，要想使$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<0.1$，只须$n>\frac{1}{0.1}=10$；要想使$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<0.01$，只须$n>\frac{1}{0.01}$

$=100$;要想使$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<0.001$,只须$n>\frac{1}{0.001}=1000$; 要想使$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<0.0003$，只须$n>\frac{1}{0.0003}=3333\frac{1}{3}$，因为$n$只取正整数,因此当$n>3333$即可。

现在，如果我们提出一般的要求：若对于预先给定的任意小的一个正数，用$\varepsilon$表示，那么要想使$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}<\varepsilon$，$n$须要取到多么大？显然只须要$n>\frac{1}{\varepsilon}$。我们可以列出如下的一张表：

| $\left\|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right\|=\frac{1}{n}<$ | 0.1 | 0.01 | 0.001 | 0.0003 | $\varepsilon(>0)$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $n>$ | 10 | 100 | 1000 | 3333 | $\frac{1}{\varepsilon}$ |

表中第一行表示$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|$“要多小”的要求，是我们预先提出的，第二行说明为了达到这种要求，$n$应该“增大到多大”。

通过上面的分析，我们看到“想使$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|=\frac{1}{n}$小于预先给出的任意小的正数，只要$n$充分大即可”这句话完整地精确地表达出来，应该是：

对于任意给定的正数$\varepsilon$，总可以找到这样的正整数$N>\frac{1}{\varepsilon}$，使得当$n\geqslant N$时，就有

$$\left|(-1)^{n+1}\frac{1}{n}-0\right|<\varepsilon.$$

那么，对于一般数列$\{a_n\}$，如果以常数 $l$ 为极限，所谓"$a_n$ 随 $n$ 无限增大时可以无限接近 $l$"，或者说"只要 $n$ 增大到一定程度 $|a_n-l|$ 就可以小于预先给定的任意小的正数"，就应该精确地表达为："对于任意给定的正数 $\varepsilon$，总可以找到这样的正整数 $N$，使得当 $n\geqslant N$ 时，有 $|a_n-l|<\varepsilon$。"这时，称 $l$ 为数列$\{a_n\}$的极限。

设$\{a_n\}$为一个数列，$l$ 为一个定数。如果对于任意给定的正数 $\varepsilon$，总可以找到这样的正整数 $N$，使得当 $n\geqslant N$ 时，有

$$|a_n-l|<\varepsilon。$$

就说数列$\{a_n\}$当 $n$ 趋于无穷时，以 $l$ 为极限，或者说数列$\{a_n\}$收敛于 $l$，并且记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=l, \quad 或 \quad a_n\to l \ (n\to\infty)$$

如果数列$\{a_n\}$没有极限，就说它是发散的。

这称之为极限的"$\varepsilon-N$"定义。应该说，掌握极限的概念是学习高等数学的关键。无穷多个数能否相加的问题，实质上就是一个数列的极限问题。因为这个概念比较抽象，我们才花了这么多笔墨对极限概念进行分析。

为了帮助读者进一步理解这个定义，我们再给出数列极限的几何解释。从数轴上看，数列$\{a_n\}$对应于数轴上的一串点$a_1$，$a_2$，…，$a_n$，…。若 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，就是点 $a_n$ 随 $n$ 无限增大时要无限地接近点 $l$。在定义中不等式

$$|a_n-l|<\varepsilon,$$

就是

$$l-\varepsilon<a_n<l+\varepsilon,$$

它表示点 $a_n$ 在开区间 $(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$ 内。因此$\{a_n\}$以 $l$ 为极限就是对数轴上的任一个区间$(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$，总可以找到这样的正整数 $N$，从第 $N$ 项起所有的点 $a_n$ 都将落在 $(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$ 内。

既然第 $N$ 项起所有的 $a_n$ 都落在 $(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$ 内，那么不落在这个区间内的点至多只有 $N-1$（有限）个。我们也可以说：开区间 $(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$ 内有$\{a_n\}$几乎全部的点。因为这里以 $l$ 为中心，$\varepsilon$ 为半径的区间 $(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$，其半径 $\varepsilon$ 可以任意的小。因而，可以说$\{a_n\}$内几乎全部的点，都可以任意的靠近 $l$。

在对极限定义了解清楚后，我们就可以依据定义来严格证明某些数列极限的存在性了。

**例 1** 证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = 0 \quad (0<a<1)$。

分析：根据定义，只要证明对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，总可以找到正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时，有

$$|a^n - 0| < \varepsilon. \tag{1}$$

这样的$N$能不能找到呢？因为 $0<a<1$，所以要想使(1)式成立，可解不等式 $a^n<\varepsilon$。两边取对数，得到 $n\ln a<\ln\varepsilon$，又由于 $\ln a<0$，则应有 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}$。也即欲使 $a^n<\varepsilon$，只要 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}$即可，我们可取一个正整数 $N>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}$。

**证明** 对于任给的 $\varepsilon>0$，取一个正整数 $N>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}$，则当 $n\geqslant N$ 时，有 $n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln a}$，即 $n\ln a<\ln\varepsilon$，

从而得 $a^n<\varepsilon$，

故有 $|a^n-0|<\varepsilon$。

这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty} a^n=0$。

例 2 证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^3+1}=0$。

分析：要证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2n}{n^3+1}=0$，只须证明对于任给 $\varepsilon>0$，总能找到一个 $N$，使当 $n\geqslant N$ 时，恒有

$$\left|\frac{2n}{n^3+1}-0\right|<\varepsilon \tag{2}$$

成立。因为

$$\left|\frac{2n}{n^3+1}-0\right|=\frac{2n}{n^3+1}<\frac{2n}{n^3}=\frac{2}{n^2},$$

所以要想求得使不等式(2)成立的 $n$，可解不等式

$$\frac{2}{n^2}<\varepsilon.$$

得 $$n>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}.$$

**证明** 对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在一个 $N>\sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$，当 $n\geqslant N$ 时，不等式 $\left|\frac{2n}{n^3+1}-0\right|<\varepsilon$ 成立。这就证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n^3+1}=0.$$

上面两个题，我们是把分析与证明过程分开写的，下面的问题我们用分析法直接证明，就不再把分析与证明分开写了。

例 3　证明　$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+5}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}.$$

证明　$$\left|\frac{n^2-n+5}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|$$
$$=\left|\frac{3n^2-3n+15-3n^2-2n+4}{3(3n^2+2n-4)}\right|$$
$$=\left|\frac{-5n+19}{3(3n^2+2n-4)}\right|.$$

我们利用适当地加强不等式的办法，来达到解不等式的目的。

事实上，当 $n>2$ 时，$2n-4>0$，则 $3n^2+2n-4>0$；当 $n>4$ 时，由于 $5n-19>0$，有 $|-5n+19|=5n-19$，所以当 $n>4$ 时

$$\left|\frac{-5n+19}{3(3n^2+2n-4)}\right|=\frac{5n-19}{3(3n^2+2n-4)}<\frac{5n}{9n^2}=\frac{5}{9n}<\frac{1}{n}.$$

因此要使 $\left|\frac{n^2-n+5}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon$ 成立，只需 $\frac{1}{n}<\varepsilon$ 成立。

解不等式　$$\frac{1}{n}<\varepsilon,$$

得　$$n>\frac{1}{\varepsilon}.$$

因此对于任给的 $\varepsilon>0$，总存在一个 $N>\max\left\{4,\frac{1}{\varepsilon}\right\}$,* 当 $n\geqslant N$ 时，使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，当然也有

---

* "max"是英文"最大"一词的缩写，记号 $\max\left\{4,\frac{1}{\varepsilon}\right\}$ 表示 $4,\frac{1}{\varepsilon}$ 中的最大数，例如 $\max\{5,8\}=8$。

$$\left|\frac{n^2-n+5}{3n^2+2n-4}-\frac{1}{3}\right|<\varepsilon,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^2-n+5}{3n^2+2n-4}=\frac{1}{3}.$$

例 4 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \quad (a>1)$。

**证明** 由 $a>1$，知 $\sqrt[n]{a}>1$，或 $|\sqrt[n]{a}-1|=\sqrt[n]{a}-1$。所以，欲使 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$，只要 $\sqrt[n]{a}-1<\varepsilon$，即

$$\sqrt[n]{a}<\varepsilon+1,$$

$$a<(1+\varepsilon)^n.$$

因为
$$(1+\varepsilon)^n=1+n\varepsilon+\frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^n,$$

所以
$$(1+\varepsilon)^n>1+n\varepsilon,$$

因此，当 $1+n\varepsilon>a$ 时，就有 $(1+\varepsilon)^n>a$，

即
$$|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$$

成立。解不等式

$$1+n\varepsilon>a,$$

得
$$n>\frac{a-1}{\varepsilon}.$$

由此可知，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个 $N>\dfrac{a-1}{\varepsilon}$，当 $n\geqslant N$ 时，就有 $|\sqrt[n]{a}-1|<\varepsilon$ 成立，即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1.$$

例 5 证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$。

**证明** $|\sqrt[n]{n}-1|=\sqrt[n]{n}-1$，

那么，要想使 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$，就只要使 $\sqrt[n]{n}-1<\varepsilon$，即

$$\sqrt[n]{n}<1+\varepsilon,$$

$$n<(1+\varepsilon)^n,$$

$\because$ $$(1+\varepsilon)^n=1+n\varepsilon+\frac{n(n-1)}{2!}\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^n,$$

$$(1+\varepsilon)^n>\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2,$$

$\therefore$ 当 $\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2>n$ 时，就有 $(1+\varepsilon)^n>n$ 成立。

解不等式

$$\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2>n,$$

得 $$n>\frac{2}{\varepsilon^2}+1.$$

由此可知，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总存在一个 $N>\frac{2}{\varepsilon^2}+1$，当 $n\geqslant N$ 时，就有 $|\sqrt[n]{n}-1|<\varepsilon$ 成立，即

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1.$$

这里，请读者考虑一下，为什么在本题中展开 $(1+\varepsilon)^n$ 时，取 $(1+\varepsilon)^n>\frac{n(n-1)}{2}\varepsilon^2$，而不取 $(1+\varepsilon)^n>1+\varepsilon n$ 呢？由此可知，在运用定义证明数列存在极限时，能够恰当地加强不等式是个关键性的技巧问题，读者如能理解并掌握，那么，自学微积分是不会有多大困难的。可通过证明下列问题来鉴定一下您在这方面具备的能力。

请按 $\varepsilon-N$ 定义证明：

1. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin n}{n}=0$；　　2. $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}$；

3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{2n+1}=0$;  4. $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})=0$;

5. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\ln n}{n^2}=0$;  6. $\lim\limits_{n\to\infty} n^3q^n=0\quad(|q|<1)$;

7. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+n}{2n^2-1}=\dfrac{3}{2}$;  8. $\lim\limits_{n\to\infty}(\overbrace{0.999\cdots9}^{n})=1$;

9. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt{n^2+n}}{n}=1$;

10. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{1\cdot2}+\dfrac{1}{2\cdot3}+\cdots+\dfrac{1}{n(n-1)}\right)=1$;

11. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{2^n}=0$;  12. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n}{n!}=0$.

## 无穷小量与无穷大量

无穷小量这个名词很多读者都听说过，也许有人把它当作是个很小很小的量．例如，原子的重量只有 $1.66\times10^{-24}$ 克，那么这个量该是个无穷小量了吧？其实这种看法是错误的．在数学里所说的无穷小量是指一个以零为极限的变量．作为数列来说，极限值为零的数列就是无穷小量．根据数列极限的定义，我们可把无穷小量的精确定义叙述如下：

若对于任意给定的正数$\varepsilon$，总可以找到这样的正整数$N$，使得当$n\geqslant N$时，有$|a_n|<\varepsilon$，我们就说数列$\{a_n\}$是个无穷小量．记为$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$.

用这个定义可以证明 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+1}{n^2+1}=0$.

**证明** $\frac{n+1}{n^2+1}<\frac{n+n}{n^2}<\frac{2}{n}$,

所以，对于任意给定的正数 $\varepsilon$，总存在一个正整数 $N>\frac{2}{\varepsilon}$，使得当 $n\geqslant N$ 时，有不等式

$$\left|\frac{n+1}{n^2+1}\right|<\varepsilon$$

成立。这就证明了 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n+1}{n^2+1}=0$。

类似地，不难证明下列数列

$$\left\{\frac{1}{n!}\right\},\ \{(-0.999)^n\},\ \left\{\frac{1+2+\cdots+n}{n^3}\right\}$$

都是无穷小量(留给读者作练习).

凡是无穷小量在变化过程中都要无限地接近于零，但是它们可以采取各种不同的形式接近于零.

例如，数列

$$\frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots.$$

是个无穷小量，$a_n=\frac{1}{2^n}$随着 $n$ 的增加而减小，当 $n$ 无限增大时，$a_n$ 无限地接近于零，但是所有 $a_n$ 都不等于零.

又如，数列 $1,0,\frac{1}{3},0,\frac{1}{5},0,\cdots,\frac{1+(-1)^{n+1}}{2n},\cdots$.

当 $n\to\infty$ 时，$\frac{1+(-1)^{n+1}}{2n}$ 要无限地接近于零，但是它在变化过程中偶数项恒等于零.

再如，数列 $-1,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{3},\ \frac{1}{4},\ \cdots,\ (-1)^n\frac{1}{n},\ \cdots$.

当 $n\to\infty$时，$(-1)^n\frac{1}{n}$虽然时而比零大，时而比零小，但其绝对值还是无限地缩小，无限地接近于零，而永远不会是零。

特别，常数列：0，0，…，0，…

它显然满足无穷小量的定义，因此也是无穷小量。这是一个特殊情况。

无穷小量在研究极限时有着特殊的作用，因为每一个有极限的数列，都可以表示为一个常量与一个无穷小量之和，这种关系可表述为：

数列$\{a_n\}$以$A$为极限的充分必要条件是数列$\{a_n-A\}$为无穷小量。

**证明** 先证必要性，若$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$，则对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，总可以找到一个自然数$N$，当$n\geqslant N$时，有$|a_n-A|<\varepsilon$，也即数列$\{a_n-A\}$是无穷小量。

再证充分性。若$\lim\limits_{n\to\infty}(a_n-A)=0$，则对于任意给定的正数$\varepsilon>0$，总可以找到一个自然数$N$，当$n\geqslant N$时，有$|a_n-A|<\varepsilon$，即$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=A$。

这个命题说明了，若$\{a_n\}$以$A$为极限，则$a_n$与极限$A$之差$a_n-A=x_n$是一个无穷小量，而由$a_n=A+x_n$，说明$a_n$总可以表示为极限$A$与某个无穷小量$x_n$之和。反之，如果一个数列$a_n$可以表示为一个常量$A$和一个无穷小量$x_n$之和，则$a_n$就应以$A$为极限。常数列$a_n=A$是特例，它可以看成是常量$A$与无穷小量“零”之和，因此，常数列$a_n=A$有极限$A$，即$\lim\limits_{n\to\infty}A=A$。

现在我们来讨论另外一类数列$\{b_n\}$，它们与无穷小量恰恰相反，当$n$趋向于无穷时，$b_n$的绝对值无限制地增大，我们就说数列$\{b_n\}$在$n$趋于无穷时为一个无穷大量。究竟什么是无限制地增大呢？如何从数量关系上来刻画无穷大量这一概念呢？仿照数列极限的$\varepsilon-N$定义，下面我们写出无穷大量的$M-N$定义。

若对于任意给定的正数$M$，总可以找到一个正整数$N$，当$n\geqslant N$时，便有$|b_n|>M$成立，我们就说数列$\{b_n\}$是个无穷大量，记为$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=\infty$。

若对于任意给定的正数$M$，总可以找到一个正整数$N$，当$n\geqslant N$时，便有$b_n>M$，则我们说$\{b_n\}$是个正无穷大量，记为$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=+\infty$。

若对于任意给定的正数$M$，总存在一个$N$，当$n\geqslant N$时，便有$b_n<-M$，则说数列$\{b_n\}$是个负无穷大量，记为$\lim\limits_{n\to\infty}b_n=-\infty$。

应用这一定义，可以证明数列$\{-n^2\}$当$n$无限增大时，是负无穷大量。

事实上，对于任意给定的正数$M$，只须取自然数$N>\sqrt{M}$，则当$n\geqslant N$时，便有$-n^2<-M$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}(-n^2)=-\infty$。

试证明：若$|q|>1$，则$\lim\limits_{n\to\infty}q^n=\infty$。

**证明** 对于任意给定的正数$M$，要想使$|q^n|>M$，可对不等式两边取对数，得到

$$n\ln|q|>\ln M,$$

解此不等式，由$|q|>1$，$\ln|q|>0$，

得 $$n>\frac{\ln M}{\ln|q|}.$$

于是，对于任意给定的正数 $M$，总存在一个正整数 $N>\frac{\ln M}{\ln|q|}$，当 $n\geqslant N$时，永远有 $|q^n|>M$ 成立，即

$$\lim_{n\to\infty} q^n=\infty.$$

读者也可以类似地证明数列$\{\sqrt{n}\}$，$\{n!\}$，$\{\ln n\}$，$\left\{\frac{n^2+1}{2n+1}\right\}$，$\left\{\frac{n^2+1}{2n-1}\right\}$等都是无穷大量。

至此，读者不难发现，这两类特殊的数列之间有着密切的联系。如数列$\left\{\frac{1}{n}\right\}$是无穷小量，数列$\{n\}$是无穷大量，而$\frac{1}{n}$与$n$互为倒数。对于一般的无穷大量与无穷小量之间的这种关系，可叙述如下：

如果 $a_n$ 恒不为零，则$\{a_n\}$是无穷小量的充要条件为$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是无穷大量。

**证明**：若 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=0$，则对于任意给定的正数 $M$，总可以找到正整数 $N$，当 $n\geqslant N$ 时，使得 $|a_n|<\frac{1}{M}$，即 $\left|\frac{1}{a_n}\right|>M$ $(a_n\neq 0)$，所以$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是个无穷大量。

反之，若$\left\{\frac{1}{a_n}\right\}$是个无穷大量，则对于任意给定的正数 $\varepsilon$，总可以找到一个正整数$N$，当 $n\geqslant N$ 时，恒有$\left|\frac{1}{a_n}\right|>\frac{1}{\varepsilon}$，即$|a_n|<\varepsilon$，所以$\{a_n\}$是个无穷小量。

最后，我们留下几个题目供读者思考。

1. 您能按定义说明数列为无穷小量与无穷大量的几何意义吗？

2. 您能举例说明下列关于无穷小量的定义是错误的吗？

(1) 对任意 $\varepsilon>0$，存在 $N$，当 $n\geqslant N$ 时，有 $a_n<\varepsilon$ 成立。

(2) 对任意 $\varepsilon>0$，存在无限个 $a_n$，使 $|a_n|<\varepsilon$。

3. 您能举出满足下列要求的数列吗？

(1) 无界数列，但不是无穷大量；

(2) 有界数列，但发散。

# 五、数列极限的基本性质

有极限的数列具有那些性质呢？例如，收敛数列的极限是否唯一？收敛数列是否有界等．这些性质从数列极限的几何意义出发，读者能够想象出结论应当是肯定的．为了使读者加深对极限这一概念的理解并学会利用这些性质，我们根据极限的定义分八个命题来证明数列极限的这些基本性质．

**唯一性**　任何收敛数列的极限都是唯一的．

分析：由数列极限的几何解释，若数列$\{a_n\}$有极限，则$\{a_n\}$内几乎全部的点都集中在极限值附近．当然，$\{a_n\}$内的点是不可能同时几乎全部集中在两个不同的点附近的，也就是说，任何收敛数列$\{a_n\}$的极限都是唯一的．

**证明**　设数列$\{a_n\}$收敛，我们用反证法来证明它的极限是唯一的．不妨设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，　$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=B$，且$A<B$．那么，对于$\varepsilon_0=\dfrac{B-A}{2}>0$，总可以找到正整数$N_1$和$N_2$使得当$n\geqslant N_1$时，有

$$|a_n-A|<\varepsilon_0=\frac{B-A}{2}, \tag{1}$$

当$n\geqslant N_2$时，有

$$|a_n-B|<\varepsilon_0=\frac{B-A}{2}, \tag{2}$$

于是当取$n_0>\max\{N_1,\ N_2\}$时，从(1)式

有 $$a_{n_0}-A<\frac{B-A}{2},$$

得 $$a_{n_0}<\frac{B+A}{2}. \tag{3}$$

从(2)式，有

$$-\frac{B-A}{2}<a_{n_0}-B,$$

得 $$a_{n_0}>\frac{A+B}{2}. \tag{4}$$

(3)式、(4)式同时成立是不可能的，由此可知假设$A<B$是错误的，同理可证$B<A$也是不可能的，因此只有$A=B$，亦即收敛数列的极限是唯一的。

**有界性** 任何收敛数列都是有界的。

分析：设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，那么，从某个$N$开始，$a_n$将全部落在区间$(l-1,\ l+1)$内，在$(l-1,\ l+1)$外最多只有$\{a_n\}$内的前$N-1$个点。于是$\{a_n\}$是个有界数列是不难想象的了。

**证明** 设数列$\{a_n\}$收敛，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=l$，由极限定义，对于取定的$\varepsilon_0=1$，存在正整数$N$，使当$n\geqslant N$时，

有 $$|a_n-l|<\varepsilon_0=1,$$

或 $$l-1<a_n<l+1.$$

显然取 $M=\max\{|a_1|,\ |a_2|,\ \cdots,\ |a_{N-1}|,\ |l+1|,|l-1|\}$时，对一切$n$都有

$$|a_n|\leqslant M,$$

即$\{a_n\}$是有界的。

**不等性** 若$x_n\leqslant y_n\quad(n=1,2,3,\cdots)$，且$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n$

都存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$。

分析：设$\{x_n\}$、$\{y_n\}$都有极限，于是$\{x_n\}$、$\{y_n\}$内的点分别几乎都集中到其极限值的附近。若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n > \lim\limits_{n\to\infty} y_n$，那么，那些集中在其极限值附近的点 $x_n$ 与 $y_n$，也应有不等式 $x_n > y_n$ 成立。这就与假设产生了矛盾。

**证明** 用反证法。设 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$。

若 $A > B$，由$\{x_n\}$、$\{y_n\}$的收敛性，对于 $\varepsilon_0 = \dfrac{A-B}{2}$，总可以找到正整数 $N_1$，$N_2$，当 $n \geqslant N_1$ 时，

有
$$|x_n - A| < \frac{A-B}{2}, \tag{5}$$

当 $n \geqslant N_2$ 时，

有
$$|y_n - B| < \frac{A-B}{2}, \tag{6}$$

于是，当取 $n_0 > \max\{N_1, N_2\}$时，从(5)式有

$$x_{n_0} > A - \frac{A-B}{2} = \frac{A+B}{2},$$

从(6)式有

$$y_{n_0} < B + \frac{A-B}{2} = \frac{A+B}{2},$$

从而有
$$x_{n_0} > y_{n_0},$$

这显然与题设条件矛盾，由此可知 $A \not> B$，即$A \leqslant B$。

读者可以考虑当命题中条件改为 $x_n < y_n$ 时，那么，是否就应有结论 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n < \lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 成立呢？这个结论是不成立的，您能举例说明吗？

**两边夹收敛性** 若 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n$ $(n = 1, 2, \cdots)$

且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = A$。

分析：这是个很形象的性质，由 $x_n \leqslant z_n \leqslant y_n (n=1,2,3,\cdots)$，那么点 $z_n$ 夹在点 $x_n$ 与 $y_n$ 之间。当 $x_n$ 与 $y_n$ 都跑到点 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$ 附近时，当然，就夹着 $z_n$ 一齐跑到点 $A$ 附近去了。也就应有

$$\lim_{n\to\infty} z_n = A.$$

**证明** 对于任意给定的 $\varepsilon > 0$，因为 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = A$，所以总可以找到 $N_1$、$N_2$，使当 $n \geqslant N_1$ 时，

有 $$|x_n - A| < \varepsilon, \tag{7}$$

当 $n \geqslant N_2$ 时，有 $$|y_n - A| < \varepsilon, \tag{8}$$

若取 $N = \max\{N_1, N_2\}$，则当 $n \geqslant N$ 时，(7)、(8)式应同时成立。

即 $$A - \varepsilon < x_n < A + \varepsilon,$$

$$A - \varepsilon < y_n < A + \varepsilon.$$

由题设 $$x_n \leqslant z_n \leqslant y_n,$$

就应有 $$A - \varepsilon < x_n \leqslant z_n \leqslant y_n < A + \varepsilon,$$

即 $$|z_n - A| < \varepsilon,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty} z_n = A.$$

**绝对值收敛性** 若 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = |A|$。

**证明** 对于任意给定的正数 $\varepsilon > 0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，总可以找到一个 $N$，当 $n \geqslant N$ 时，有

$$|x_n - A| < \varepsilon,$$

因此也就有

$$\big||x_n|-|A|\big|\leqslant|x_n-A|<\varepsilon$$

成立。

即 $$\lim_{n\to\infty}|x_n|=|A|.$$

**加减运算法则** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)$存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B$。

**证明** 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，总可以存在正整数 $N_1$，$N_2$，当 $n\geqslant N_1$ 时有 $|x_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，当 $n\geqslant N_2$ 时，有 $|y_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$。* 于是当 $n\geqslant N=\max\{N_1,N_2\}$ 时

$$\begin{aligned}|(x_n\pm y_n)-(A\pm B)|&\leqslant|x_n-A|+|y_n-B|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

即 $$\lim_{n\to\infty}(x_n\pm y_n)=A\pm B.$$

**乘法运算法则** 若 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$，$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)$ 存在，且 $\lim\limits_{n\to\infty}(x_n\cdot y_n)=A\cdot B$。

分析：因为

$$\begin{aligned}|x_ny_n-AB|&=|x_ny_n-y_nA+y_nA-AB|\\&\leqslant|x_n-A||y_n|+|A||y_n-B|,\end{aligned}$$

---

* 在极限定义中，由于 $\varepsilon$ 是任给的正数，因此对于 $\dfrac{\varepsilon}{2}>0$，也应存在一个正整数 $N$，当 $n\geqslant N$ 时，有 $|a_n-l|<\dfrac{\varepsilon}{2}$ 成立。类似的情况，以后不再说明了。

所以，欲使 $|x_n y_n - AB| < \varepsilon$,

只要 $|x_n - A||y_n| < \frac{\varepsilon}{2}$, $|A|\ |y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.

**证明** 因为$\{y_n\}$有极限，从而$\{y_n\}$有界，因此总可以找到常数$M>0$，使$|y_n| \leqslant M(n=1,2,\cdots)$。同时，对于任意给定的$\varepsilon>0$，总可存在一个正整数$N_1$，当$n \geqslant N_1$时，使$|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2(|A|+1)}$（若$A \neq 0$，可使$|y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2|A|}$），因此，有$|A||y_n - B| < \frac{\varepsilon}{2}$.

再因$\{x_n\}$有极限$A$，那么对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在一个正整数$N_2$，当$n \geqslant N_2$时，使

$$|x_n - A| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

因此有

$$|x_n - A||y_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

于是，对于任意给定的$\varepsilon>0$，总可以找到一个$N=\max\{N_1, N_2\}$，当$n \geqslant N$时，

有

$$\begin{aligned}|x_n y_n - AB| &\leqslant |x_n - A||y_n| + |A||y_n - B| \\ &\leqslant M|x_n - A| + |A||y_n - B| \\ &< M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + |A| \frac{\varepsilon}{2|A|+1} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,\end{aligned}$$

即

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = A \cdot B.$$

**除法运算法则** 若$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = A$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = B$，$y_n \neq 0$，$B \neq 0$，则$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n}$存在，且$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n} = \frac{A}{B}$.

**证明** 由于$\frac{x_n}{y_n}=x_n\cdot\frac{1}{y_n}$，我们只须证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{B}$，再由乘法运算法则就可以得到

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n}=\lim_{n\to\infty}x_n\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=A\cdot\frac{1}{B}=\frac{A}{B},$$

下面证明$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{B}$. 由于$\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|B-y_n|}{|By_n|}$，我们分别考虑$|By_n|$和$|B-y_n|$。

因为$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B\neq0$，所以$\lim\limits_{n\to\infty}|y_n|=|B|\neq0$，对于$\varepsilon_0=\frac{|B|}{2}$，存在一个正整数$N_1$，当$n\geqslant N_1$时，

有
$$\big||y_n|-|B|\big|<\frac{|B|}{2},$$

$$-\frac{|B|}{2}<|y_n|-|B|<\frac{|B|}{2}.$$

由此推知
$$|y_n|>\frac{|B|}{2}>0,$$

$$|By_n|>\frac{B^2}{2}.$$

再由$\lim\limits_{n\to\infty}y_n=B$，则对于任给的$\varepsilon>0$，总存在一个正整数$N_2$，当$n\geqslant N_2$时，有

$$|y_n-B|<\frac{B^2\varepsilon}{2}.$$

于是，对任给的$\varepsilon>0$，总可以找到一个正整数$N=\max\{N_1,N_2\}$，当$n\geqslant N$时，

有
$$\left|\frac{1}{y_n}-\frac{1}{B}\right|=\frac{|B-y_n|}{|By_n|}<\varepsilon.$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y_n}=\frac{1}{B}.$$

现在我们利用极限的基本性质计算一些数列的极限。

例 1　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{3n^2+2n-3}{n^2+1}$.

解　由于 $\dfrac{3n^2+2n-3}{n^2+1}=\dfrac{3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}$,

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}=0$，由乘法运算法则得
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}=0.$$
由加减运算法则得
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(3+\frac{2}{n}-\frac{3}{n^2}\right)&=\lim_{n\to\infty}3+\lim_{n\to\infty}\frac{2}{n}-\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\\&=3+0-0=3,\end{aligned}$$
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=1+0=1.$$
由除法运算法则得
$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{3n^2+2n-3}{n^2+1}&=\lim_{n\to\infty}\frac{3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}}{1+\dfrac{1}{n^2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(3+\dfrac{2}{n}-\dfrac{3}{n^2}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n^2}\right)}\\&=\frac{3}{1}=3.\end{aligned}$$

例 2　求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}$.

解　与例 1 相仿，我们得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+2+3+\cdots+n}{n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n(n+1)}{2(n^2+1)}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}+1}{2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)}{\lim\limits_{n\to\infty}2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{1}{2}.$$

**例3** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}$.

**解** 由于

$$(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}$$

$$=\frac{(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})\sqrt{n}}{(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}$$

$$=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1},$$

于是问题便转化为求 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}$ 了.

因为 $$1<\sqrt{1+\frac{1}{n}}<\sqrt{\left(1+\frac{1}{n}\right)^2}=1+\frac{1}{n},$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=1.$$

由两边夹收敛性得

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{1}{n}}=1,$$

从而 $$\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1\right)=2,$$

所以 $$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\sqrt{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1}=\frac{1}{2}.$$

**例 4** 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdots\sqrt[2^n]{2}$.

**解** 设 $a_n=\sqrt{2}\cdot\sqrt[4]{2}\cdot\cdots\cdot\sqrt[2^n]{2}$

$$=2^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^n}}=2^{\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}}=2^{1-\frac{1}{2^n}}$$

显然 $$2^{1-\frac{1}{n}}<2^{1-\frac{1}{2^n}}<2,$$

即 $$\frac{2}{\sqrt[n]{2}}=2^{1-\frac{1}{n}}<a_n<2.$$

因为 $$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt[n]{2}}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty}2}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{2}}=\frac{2}{1}=2,$$

由两边夹收敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}a_n=2.$$

**例 5** 设 $x_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+n}}$, $y_n=\dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$,

$$z_n=\frac{1}{\sqrt{n^2+1}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n}},$$

求 $\lim\limits_{n\to\infty}z_n$.

**解** 因为 $$\frac{1}{1+\frac{1}{n}}<\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}}=x_n<1,$$

$$\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}<y_n=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}<1.$$

而 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\frac{1}{n^2}}=1.$$

所以，由两边夹收敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\lim_{n\to\infty}y_n=1.$$

又 $$x_n=\frac{n}{\sqrt{n^2+n}}\leqslant z_n\leqslant\frac{n}{\sqrt{n^2+1}}=y_n,$$

仍由两边夹收敛性，得

$$\lim_{n\to\infty}z_n=1.$$

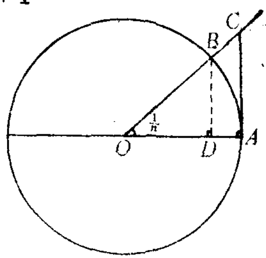



图 3

例 6　求证 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$.

我们先考虑单位圆上的圆心角为 $\frac{1}{n}$ 弧度的扇形 $AOB$(图 3)，在 $A$ 点作切线交 $OB$ 于 $C$，则因 $OA$ 之长为 1，$AC$ 之长就为 $\operatorname{tg}\frac{1}{n}$，$BD$ 之长为 $\sin\frac{1}{n}$，所以 $\triangle AOC$ 之面积为 $\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{n}$，$\triangle AOB$ 之面积为 $\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}$，又扇形 $AOB$ 之面积为 $\frac{1}{2n}$，因为

$$\triangle AOB\text{ 的面积}<\text{扇形 }AOB\text{ 的面积}<\triangle AOC\text{ 的面积},$$

所以有 $$\frac{1}{2}\sin\frac{1}{n}<\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}\operatorname{tg}\frac{1}{n}.$$

各项除以 $\sin\frac{1}{n}\neq0$,

得
$$1<\frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}<\frac{1}{\cos\frac{1}{n}}.$$

注意到 $0<\frac{1}{n}<\frac{\pi}{2}$,

有
$$\cos\frac{1}{n}>0,\quad \frac{\frac{1}{n}}{\sin\frac{1}{n}}>0,$$

所以上式可改写成
$$1>\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}>\cos\frac{1}{n}.$$

因此有 $0<1-\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}<1-\cos\frac{1}{n}=2\sin^2\frac{1}{2n}\leqslant 2\left(\frac{1}{2n}\right)^2=\frac{1}{2n^2}$,

又因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2n^2}=0$,

由两边夹收敛性,

得
$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right)=0,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1.$$

在上述证明过程中还证明了

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)=0,$$

即
$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{1}{n}=1.$$

当 $a$ 为常量时，同理可证

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{a}{n}}{\frac{a}{n}}=1,\quad \lim_{n\to\infty}\cos\frac{a}{n}=1.$$

在高等数学中极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$和后面我们要讲的另一个极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$ 被称为是两个重要极限。下面我们利用$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1$ 来计算某些数列的极限。

例 7 求 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}\frac{K}{n}}{\frac{1}{n}}$， $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}}$.

解
$$\lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{tg}\frac{K}{n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{K}{n}}{\cos\frac{K}{n}}\cdot\frac{K}{\frac{K}{n}}$$

$$=K\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{K}{n}}{\frac{K}{n}}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\cos\frac{K}{n}}$$

$$= K \cdot 1 \cdot 1 = K.$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{1-\cos\frac{1}{n}}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{\sqrt{2}\,\sin\frac{1}{2n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot\frac{1}{2n}}{\sqrt{2}\sin\frac{1}{2n}}$$

$$= \sqrt{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2n}}{\sin\frac{1}{2n}} = \sqrt{2}.$$

**本节所介绍的有关极限的两边夹收敛性、四则运算法则以及重要极限$\left(\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}=1\right)$，都是求数列极限的重要工具。**

请读者仿照例题的解法求出下列数列的极限：

1. 利用极限性质计算：

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n+1)^2}+\cdots+\frac{1}{(2n)^2}\right)$;

(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^3+2n^2-n+1}{2n^3-3n^2+2}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^n}}{1+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{4^n}}$;

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-2)^n+3^n}{(-2)^{n+1}+3^{n+1}}$.

[答案：(1) 0，(2) $\frac{3}{2}$，(3) $\frac{3}{2}$，(4) $\frac{1}{3}$]

2. 求下列数列的极限

(1) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{5}{n^2}}{\operatorname{tg}\dfrac{1}{n^2}}$;　　(2) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^2}}$;

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin\dfrac{\alpha}{n}}{\sin\dfrac{\beta}{n}}$; ($\alpha,\beta$都是常数)

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{1}{n}-\sin\dfrac{1}{n}}{\sin^3\dfrac{1}{n}}$;　　(5) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\operatorname{ctg}\dfrac{1}{n}$.

[答案：(1) 5，(2) $\infty$，(3) $\dfrac{\alpha}{\beta}$；(4) $\dfrac{1}{2}$，(5) 1 ]

# 六、极限的存在定理

上节我们在数列极限存在的前提下，研究了极限的性质。很明显，凡是收敛数列所具有的性质都是数列收敛的必要条件。现在的问题是：数列具备什么条件它才是收敛的？也就是数列收敛的充分条件是什么？本节讲述的有关极限存在的原理和定理就告诉我们如何根据数列的某些条件来判断其收敛性。

## 单调数列收敛原理

收敛数列的有界性告诉我们，任意一个收敛数列一定是有界数列，但是有界数列不一定是收敛的。例如，数列$\{(-1)^n\}$就是不收敛的有界数列。值得注意的是，如果所说的数列是单调的，又是有界的，那么该数列就是收敛的了。

观察数列 $\left\{\dfrac{n-1}{n}\right\}$：$0,\ \dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{4}{5},\ \cdots$.  (1)

$$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}:\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \frac{1}{2^3},\ \frac{1}{2^4},\ \frac{1}{2^5},\ \cdots. \quad (2)$$

数列(1)是一个递增的数列，同时又是有界的。这个数列所有的项都在区间$[0,1]$内，当$n\to\infty$时，点$\dfrac{n-1}{n}$不断地向右移动，无限地趋近于1，即$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n-1}{n}=1$。读者容易看出，

1是数列$\left\{\frac{n-1}{n}\right\}$的最小上界。

数列(2)是一个递减数列，同时又是有界的。这个数列的所有项都属于$\left[0,\frac{1}{2}\right]$，当$n\to\infty$时，点$\frac{1}{2^n}$不断向左移动，趋近于零，即$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{2^n}=0$。同样读者容易看出0是数列$\left\{\frac{1}{2^n}\right\}$的最大下界。

一般来说，一个单增（减）的数列$\{a_n\}$，如有上（下）界，那么，当$n$无限增大时，$a_n$无限趋近数列的最小（大）上（下）界$a$，因此应有$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$。这一结论很重要，我们把它叫做数列收敛的基本原理。

**基本原理** 单调有界数列有极限。

基本原理不但可以用来直接检验单调数列极限的存在性，而且可以用它推出其他极限存在定理。因此，它在高等数学中是一个占有重要地位的命题。

现在，我们先用基本原理来证明数列

$$\{\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}}_{n\text{重}}\}$$

存在极限，并求出此极限。

**解** $x_1=\sqrt{2}$，$x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}$，$x_3=\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}$，$\cdots$，

显见 $$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}},$$

因为 $$x_1=\sqrt{2}<x_2=\sqrt{2+\sqrt{2}}.$$

若设 $x_n>x_{n-1}$ 成立，

则 $$x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}>\sqrt{2+x_{n-1}}=x_n.$$

由归纳法，$x_n<x_{n+1}$ 对一切 $n$ 成立。从而$\{x_n\}$是递增数列。

又由 $x_1=\sqrt{2}<2$，$x_2=\sqrt{2+x_1}<\sqrt{2+2}=2$，

若 $x_n<2$，则 $x_{n+1}=\sqrt{2+x_n}<\sqrt{2+2}=2$.

由归纳法，对一切 $n$，$x_n<2$。即$\{x_n\}$以 2 为上界。根据基本原理，$\{x_n\}$存在极限。设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=a$，由

$$x_n=\sqrt{2+x_{n-1}}\,,$$

即
$$x_n^2=2+x_{n-1},$$

令 $n\to\infty$ 求极限得

$$a^2=2+a.$$

解出上述方程的二个解：$a_1=2$，$a_2=-1$。$a_2$ 不合题意，于是 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=2$。

例 设给定数列 $a_1=\sqrt{2}$，$a_2=(\sqrt{2})^{a_1}=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}$，$a_3=(\sqrt{2})^{a_2}=(\sqrt{2})^{\sqrt{2}^{\sqrt{2}}}$，$\cdots$，$a_n=(\sqrt{2})^{a_{n-1}}=(\sqrt{2})^{\overbrace{\sqrt{2}^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{\sqrt{2}}}}}}^{n\text{个}}}$，$\cdots$，证明$\{a_n\}$有极限。

**证明** 首先运用归纳法来证明数列是单调增加的。因为 $\sqrt{2}>1$，所以$(\sqrt{2})^{\sqrt{2}}>\sqrt{2}$，即 $a_2>a_1$。如果 $a_n>a_{n-1}$ 成立，由 $a_{n+1}=(\sqrt{2})^{a_n}$，$a_n=(\sqrt{2})^{a_{n-1}}$，$\therefore$ $a_{n+1}>a_n$。

再证明数列是有界的。因为 $a_1=\sqrt{2}<2$，如果 $a_n<2$成立，则 $a_{n+1}=(\sqrt{2})^{a_n}<2$ 也成立。由归纳法可知，$a_n<2$ 对一切自然数成立。根据基本原理知$\{a_n\}$有极限。

这里，我们用基本原理来证明另一个重要极限：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$。

**证明** 先证数列$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$是单调递增的.由二项式展开，可得

$$
\begin{aligned}
x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n&=1+\frac{n}{1}\cdot\frac{1}{n}+\frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{1}{n}\right)^2+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{n!}n(n-1)(n-2)\cdots3\cdot2\cdot1\left(\frac{1}{n}\right)^n\\
&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\\
&\quad+\cdots+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{2}{n}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n}\right).
\end{aligned}\tag{3}
$$

同样

$$
\begin{aligned}
x_{n+1}&=1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)+\cdots\\
&\quad+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{n+1}\right)\\
&\quad+\frac{1}{(n+1)!}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)\left(1-\frac{2}{n+1}\right)\cdots\left(1-\frac{n}{n+1}\right).
\end{aligned}
$$

比较$x_n$和$x_{n+1}$，后者比前者多最后一项，且$x_{n+1}$的前$n+1$项都不小于$x_n$的相应项，所以$x_n\leqslant x_{n+1}$ $(n=1,2,\cdots)$.

再证$\{x_n\}$有界. 在(1)中用“0”去换$\frac{1}{n}$, $\frac{2}{n}$, $\cdots$, $\frac{n-1}{n}$，使得

$$
\begin{aligned}
0\leqslant x_n&\leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{n!}\\
&\leqslant 2+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\\
&=2+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2^n}\right)\Big/\left(1-\frac{1}{2}\right)
\end{aligned}
$$

$$=3-\frac{1}{2^{n-1}}<3,$$

即 $\{x_n\}$ 是有界数列。

由基本原理可知 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 存在，以后我们总用 $e$ 来表示 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$，即

$$e=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n.$$

$e$ 是一个无理数，我们这里就不加证明了，它的前 15 位小数是：

$$e=2.718281828459045\cdots.$$

无论在理论上还是在实用上，$e$ 这个数都有特殊的重要性。

应用这个重要极限，我们可以计算出数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}\right\}$与$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}$的极限。

**解** $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+3}$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^3$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^3=e\cdot 1^3=e.$$

$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{-n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=\frac{1}{e}.$$

读者不难算出数列$\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+5}\right\}$与$\left\{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\right\}$的极限。

对于基本原理还有一点要告诉读者，这个原理反映了实数连续不断地布满数轴的重要性质（称为实数系的完备性）。假若我们仅限于在有理数系统内讨论单调数列的话，这一原理就不成立了。例如，由$\sqrt{2}$的不足近似值构成的数列：

$$a_1=1,\ a_2=1.4,\ a_3=1.41,\ a_4=1.414,\ \cdots.$$

$\{a_n\}$是单调增加且以1.5为上界的，但它的极限$\sqrt{2}$不再是有理数，也就是说在有理数范围内，单调有界数列可能没有极限（极限不再是有理数）。

下述的区间套定理是一个直观、有趣的定理，这个定理在高等数学中也是常用的工具。

**定理**（闭区间套定理） 设$[a_n, b_n]$ $(n=1,2,\cdots)$是一串套缩的闭区间，即对于任意$n$，都有

$$a_n \leqslant a_{n+1} < b_{n+1} \leqslant b_n.$$

又设当$n\to\infty$时，区间$[a_n, b_n]$的长度$b_n-a_n\to 0$，则必存在唯一的一点$c$，它属于所有这些闭区间，即

$$a_n \leqslant c \leqslant b_n \qquad (n=1,2,\cdots).$$

**证明** 由区间是套缩的，即

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots,$$

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant \cdots,$$

且
$$a_1 \leqslant a_n < b_n \leqslant b_1 \quad (n=1,2,\cdots).$$

这就是说$\{a_n\}$，$\{b_n\}$都是单调有界数列，因而都有极限。

又据 $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$，

$$\therefore\quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} a_n,$$

令$c=\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n$，由基本原理可知$a_n\leqslant c\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$。

以上证明了存在$c$包含于所有$[a_n,b_n]$内，现在再证明这样的点是唯一的。若不然，还存在另一点$c^*$，$c^*\neq c$，$c^*$与$c$一样都属于所有的区间$[a_n,b_n]$。这样一来，应有

$$0<|c-c^*|\leqslant b_n-a_n$$

对一切$n$成立，这便和$\lim\limits_{n\to\infty}(b_n-a_n)=0$相矛盾。

这里我们应用基本原理证明了闭区间套定理，下面我们还将应用闭区间套定理推证出数列收敛的哥西准则。因此，也可以说基本原理是论证哥西准则的依据。另外，在这一段里，我们还曾用基本原理推证出了重要极限$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=e$。基本原理确实是一个重要的命题。

请读者应用它来解答几个问题。

1。利用基本原理，证明$\{x_n\}$有极限。

(1) $x_n=\dfrac{1}{3+1}+\dfrac{1}{3^2+1}+\cdots+\dfrac{1}{3^n+1}$；

(2) $x_n=\sqrt[n]{a}\qquad(0<a<1)$。

2。对于数列$x_1=\sqrt{c}$，…，$x_n=\sqrt{c+x_{n-1}}$，…，$c$为某一正数，您能证明它有极限，并求出极限来吗？

3。若$x_1=a>0$，$y_1=b>0\quad(a<b)$，

$$x_{n+1}=\sqrt{x_ny_n},\quad y_{n+1}=\frac{x_n+y_n}{2},$$

证明：$\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\lim\limits_{n\to\infty} y_n$。　　〔提示：$x_n\leqslant y_n$〕

## 哥西收敛准则

基本原理使用时是有局限性的，因为它仅对单调数列适用，我们把它叙述成单调数列收敛的充要条件是数列有界。对于一般数列，有界仅是数列收敛的必要条件，不是充分条件。那么，一般数列收敛的充要条件是什么呢？

首先，我们介绍哥西数列的概念：如果数列$\{a_n\}$对于任意给定的$\varepsilon>0$，存在正整数$N$，使当$m$、$n\geqslant N$时，$|a_n-a_m|<\varepsilon$成立。我们称$\{a_n\}$为哥西数列。

这就是说，哥西数列各项的值越到后面，彼此越是接近，以至它们之间差的绝对值可小于任何预先所给的正数。或者形象地说，哥西数列的项越到后面越是“挤”到一起。容易想到收敛数列几乎所有的项都“挤”到极限值附近，因此收敛数列是哥西数列，于是，我们有

**定理 1** 收敛数列是哥西数列。

**证明** 设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=A$，则对于任意给定的$\varepsilon>0$，总存在一个正整数$N$，当$n\geqslant N$时，有$|a_n-A|<\dfrac{\varepsilon}{2}$，于是当$n,m\geqslant N$时，就有

$$\begin{aligned}|a_n-a_m|&=|a_n-A+A-a_m|\\&\leqslant|a_n-A|+|a_m-A|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

考虑定理1的逆命题：如果数列$\{a_n\}$是哥西数列，在数轴上$a_n$越到后来越是“挤”到一起，考虑到数轴为实数所布满，那么哥西数列$\{a_n\}$就会几乎都“挤”到某个实数$a$附近，

因而哥西数列$\{a_n\}$收敛于 $a$。我们用区间套定理来证明。

**定理 2** 哥西数列是收敛数列。

**证明** 设$\{a_n\}$为哥西数列．取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，由题设条件，对此 $\varepsilon_0$ 存在正整数 $N_0$，使当 $n\geqslant N_0$ 时，

有
$$|x_n-x_{N_0+1}|<\varepsilon_0=\frac{1}{2},$$

即
$$x_{N_0+1}-\frac{1}{2}<x_n<x_{N_0+1}+\frac{1}{2}.$$

令
$$a=x_{N_0+1}-\frac{1}{2},\ b=x_{N_0+1}+\frac{1}{2},$$

那么，当 $n\geqslant N_0$ 时，所有点 $x_n$ 都在区间$[a,b]$内，区间$[a,b]$的长为 $b-a=1$。

将$[a,b]$以它的中点 $\frac{a+b}{2}$ 为分点分成两个“半区间” $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$，$\left[\frac{a+b}{2},b\right]$，在此两个“半区间”中至少有一个包含$\{x_n\}$的无限多个点（否则，$[a,b]$只能包含$\{x_n\}$中有限个点，导致矛盾）。取$[a,b]$中包含有无限多个点 $x_n$ 的一个“半区间”，记为$[a_1,b_1]$，$b_1-a_1=\frac{1}{2}(b-a)=\frac{1}{2}$.同样将$[a_1,b_1]$分为两个“半区间”，取其中一个包含有无穷多个点 $x_n$ 的“半区间”记为$[a_2,b_2]$，$b_2-a_2=\frac{1}{2}(b_1-a_1)=\frac{1}{2^2}$，如此继续下去，我们可以得到一串闭区间：

$[a,b]$，$[a_1,b_1]$，…，$[a_n,b_n]$，$[a_{n+1},b_{n+1}]$，…，它们

有 $\quad a_n\leqslant a_{n+1}<b_{n+1}\leqslant b_n \qquad (n=1,2,\cdots)$，

$$b_{n+1}-a_{n+1}=\frac{1}{2}(b_n-a_n)$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2^{n+1}}\to 0\quad(n\to\infty),$$

即这一串闭区间满足闭区间套定理的条件，因此存在唯一的一点 $A$，此 $A$ 属于一切区间 $[a_n,b_n]$ 内。

现在我们证明 $A$ 就是数列 $\{x_n\}$ 的极限。事实上，对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由题设条件，一定存在一个正整数 $N_1$，当 $n$，$m\geqslant N_1$ 时，便有

$$|x_n-x_m|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

另一方面，由 $b_n-a_n=\frac{1}{2^n}$，对于 任 意 给定的 $\varepsilon>0$，存在一个正整数 $N_2$，当 $n\geqslant N_2$ 时，有 $\frac{1}{2^n}<\frac{\varepsilon}{2}$. 取 $N=\max\{N_1,N_2\}$，并且在区间 $[a_{N+1},\ b_{N+1}]$ 中取一点 $x_{m_0}$，且 $m_0>N$（因为 $[a_{N+1},b_{N+1}]$ 中包含有无穷多个点 $x_n$，因此这样的 $x_{m_0}$ 一定存在）。当 $n\geqslant N$ 时，有

$$\begin{aligned}|x_n-A|&=|x_n-x_{m0}+x_{m0}-A|\\&\leqslant|x_n-x_{m0}|+|x_{m0}-A|\\&\leqslant|x_n-x_{m0}|+(b_{N+1}-a_{N+1})\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由极限定义，得 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=A$.

综合定理 1，定理 2，便得**哥西准则**：数列收敛的充要条件是数列为哥西数列。

**例 1** 证明数列 $\{x_n\}=\left\{\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2^2}+\cdots+\frac{\sin n}{2^n}\right\}$ 有

极限。

**证明** 设$m \geqslant n$，则

$$|x_m - x_n| = \left|\frac{\sin(n+1)}{2^{n+1}} + \frac{\sin(n+2)}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{\sin m}{2^m}\right|$$

$$\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^m}$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{2^{m-n-1}}\right)$$

$$= \frac{1}{2^{n+1}} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}}{1 - \frac{1}{2}} < \frac{1}{2^n},$$

对于任意给定的$\varepsilon > 0$，只要取$N > \dfrac{\ln \varepsilon}{\ln \frac{1}{2}}$，当$n \geqslant N$时便有$\dfrac{1}{2^n} < \varepsilon$。对这一$N$，当$m \geqslant n \geqslant N$时，

$$|x_m - x_n| < \frac{1}{2^n} < \varepsilon.$$

根据哥西准则，$\{x_n\}$是有极限的。

例 2 证明数列$\{x_n\} = \left\{1 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \cdots + \dfrac{1}{n^2}\right\}$有极限。

**证明** 对于任意给定的$\varepsilon > 0$，取$N > \dfrac{1}{\varepsilon}$，当$m \geqslant n \geqslant N$时，由于

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n(n-1)} < \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n},$$

所以
$$|x_m - x_n| = \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2} + \cdots + \frac{1}{m^2}$$

$$< \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) + \cdots$$

$$+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)$$

$$=\frac{1}{n}-\frac{1}{m}<\frac{1}{n}<\varepsilon.$$

根据哥西收敛准则，数列 $\{x_n\}$ 是有极限的。

**例 3** 证明数列 $\{x_n\}=\left\{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right\}$不收敛。

**证明** 对于任意大的 $N$，取 $n=N+1$，$m=2(N+1)$，当然 $m>n>N$，但是

$$|x_m-x_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{m}$$

$$>\frac{1}{m}+\frac{1}{m}+\cdots+\frac{1}{m}$$

$$=\frac{m-n}{m}=\frac{N+1}{2(N+1)}=\frac{1}{2}.$$

由此可知，当取 $\varepsilon_0=\frac{1}{2}$，对任意的 $N$，总能找到 $m$、$n$，$m>n>N$(例如，取 $n=N+1$，$m=2(N+1)$)，使

$$|x_m-x_n|>\frac{1}{2}.$$

即数列$\{x_n\}$不满足哥西准则的条件，所以$\{x_n\}$不收敛。

在这里，我们请读者注意，用哥西收敛准则来判别数列有无极限，与从定义出发来判别数列的极限是有区别的。从定义出发来证明数列有极限，必须事先知道极限值是什么，而在实际应用时，我们往往不知道这个极限是什么数，哥西收敛准则的好处就在于仅仅考察数列本身来判断数列是否收敛。从理论上来说，任何一个数列都可用哥西收敛准则来判

断其收敛性，因此称其为准则．在具体使用时还常会遇到一些技巧性的问题．

您能利用哥西准则证明下列数列是收敛的吗？

1．设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{q^k}{K}\qquad |q|<1$；

$$\left[\text{提示：}|x_m-x_n|=\left|\frac{q^{n+1}}{n+1}+\frac{q^{n+2}}{n+2}+\cdots+\frac{q^m}{m}\right|\right.$$

$$\left.\leqslant\frac{1}{1-|q|}\cdot\frac{1}{n+1}\right]$$

2．设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_k}{10^k}$（其中 $p_k$ 是不超过 10 的自然数）；

$$\left[\text{提示：}|x_m-x_n|=\left|\frac{p_{n+1}}{10^{n+1}}+\frac{p_{n+2}}{10^{n+2}}+\cdots+\frac{p_m}{10^m}\right|\right.$$

$$\left.\leqslant\frac{1}{10^{n-1}}\right]$$

3．设 $x_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\frac{1}{K}$．

$$\left[\text{提示：}|x_m-x_n|=\left|\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}-\frac{1}{n+4}+\cdots\right.\right.$$

$$\left.\left.+(-1)^{m-n+1}\frac{1}{m}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}\right]$$

若数列 $\{x_n\}$ 不满足哥西收敛准则就发散，那么您能用确切的数学语言把“数列 $\{x_n\}$ 不满足哥西收敛准则”叙述出来吗？并用它证明数列

$$\left\{1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right\}$$

是发散数列。

# 七、无穷多个数能相加吗

具备了上面的知识，我们就可以来研究无穷多个数能否相加的问题了，从数学上来讲，这便是无穷级数理论。无穷级数概念的起源是很早的，我国魏晋时代的刘徽已经具有了初步的无穷级数的思想，他近似计算了圆周率。级数理论随着生产、技术的发展逐渐形成并完备起来。目前它已成为数学理论的一个重要分支，在高等数学以及科学技术中都有着广泛的应用。因此，数学家们称级数理论为高等数学中的工具篇。

## 等 比 级 数

正如我们在本书前言中所说，算术中的循环小数已经涉及到“无穷多个数相加”的问题。现在让我们从分析循环小数入手来寻求这一问题的答案。

我们知道，将$\frac{1}{3}$化为小数时，就出现无限循环小数

$$\frac{1}{3}=0.\dot{3}.$$

对此作如下分析：

$$0.3=\frac{3}{10},$$

$$0.33=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2},$$

$$0.333=\frac{3}{10}+\frac{3}{100}+\frac{3}{1000}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3},$$

…………

计算到第 $n$ 位小数，得到表达式

$$\overbrace{0.33\cdots3}^{n\text{位}}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}.$$

容易看出，$n$ 越大，所得小数就越近似于 $\frac{1}{3}$，如果让 $n\to\infty$，那么就得到

$$0.\dot{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots,$$

即
$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots.$$

这样，$\frac{1}{3}$这个数就被表示成无穷等比数列$\left\{\frac{3}{10^n}\right\}$各项之和。

对我们有启示作用的是：等式

$$\frac{1}{3}=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

的右端

$$\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}+\cdots$$

应当如何理解，它并不是把无穷多项一项项地累加求和。累加可以求出它的前 $n$ 项之和

$$S_n=\frac{3}{10}+\frac{3}{10^2}+\cdots+\frac{3}{10^n}=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}-\frac{\frac{3}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}},$$

然后看随 $n\to\infty$ 这一过程 $S_n$ 的变化趋势，我们自然地把 $S_n$ 的极限

$$\lim_{n\to\infty} S_n=\frac{\frac{3}{10}}{1-\frac{1}{10}}-\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{3}{10^{n+1}}}{1-\frac{1}{10}}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$$

作为此数列"无穷多项之和"。一般地，对于一个首项为 $a$，公比为 $q$，并且 $|q|<1$ 的等比数列：

$$a,\ aq,\ aq^2,\ \cdots,\ aq^{n-1},\ \cdots,$$

自然应当定义它的各项的和就是等比数列的前 $n$ 项之和 $S_n$，在 $n\to\infty$ 时的极限，即

$$\begin{aligned}S&=\lim_{n\to\infty} S_n\\&=\lim_{n\to\infty}(a+aq+\cdots+aq^{n-1})\\&=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a}{1-q}-\frac{aq^n}{1-q}\right)\\&=\frac{a}{1-q}.\end{aligned}$$

此处 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{aq^n}{1-q}=0$ 是由 $|q|<1$ 保证的。我们把各项和写作

$$a+aq+\cdots+aq^{n-1}+\cdots=\frac{a}{1-q}.$$

例如，根据这一公式，可把 $0.\dot{1}\dot{2}$ 化为分数。

解　$0.\dot{1}\dot{2}=\frac{12}{100}+\frac{12}{(100)^2}+\cdots+\frac{12}{(100)^n}+\cdots,$

它是首项为 $\frac{12}{100}$，公比为 $\frac{1}{100}$ 的等比数列各项之和，由公式

$$S=\frac{a}{1-q}$$

得 $$0.\dot{1}\dot{2}=\frac{\frac{12}{100}}{1-\frac{1}{100}}=\frac{12}{99}=\frac{4}{33}.$$

我们知道分数化为小数可能得到有限小数及循环小数，现在我们有了求等比数列各项和（在$|q|<1$的条件下）的公式，就能把任何一个循环小数化成分数。由此可见，有限小数和循环小数表示的实数是有理数，无限不循环小数表示的实数是无理数。

我们把等比数列的各项用加号连接起来，得到形如

$$a+aq+aq^2+\cdots+aq^{n-1}+\cdots$$

的式子叫做等比级数。

$$S_n=a+aq+\cdots+aq^{n-1}$$

叫做级数的前$n$项和。

当$|q|<1$时，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=\dfrac{a}{1-q}$存在，这时称$\dfrac{a}{1-q}$为等比级数的和。

当$|q|>1$时，随$n\to\infty$，$S_n$不存在极限$\left(\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{aq^{n+1}}{1-q}\text{不存在}\right)$，这时，等比级数没有和。

到此，我们得到了无穷多个数能否相加问题的部分解答：如果无穷多个数组成一个等比数列，当公比$|q|<1$时，无穷多个数$a,aq,aq^2,\cdots$可以相加，其和为$\dfrac{a}{1-q}$。而当公比$|q|>1$（$a\neq0$）时，这无穷多个数相加得不到确定的结果，也就没有和。

## 无穷级数的一般概念

在前言中我们提到求单位圆的面积问题，我们来对它进行具体分析。

如图 1 所示，在半径为 1 的圆中，先作内接正三角形 $ABC$，它的面积记为 $u_1$；再分别取圆弧 $\overset{\frown}{AB}$，$\overset{\frown}{BC}$，$\overset{\frown}{CA}$ 的中点 $E$、$F$、$D$ 作三角形 $ABE$、$BFC$、$CDA$，这三个三角形面积的和记为 $u_2$，那么内接正六边形的面积是两数的和 $u_1+u_2$；再用同样的方法得六个三角形面积之和记为 $u_3$，那么内接正十二边形的面积是三数的和 $u_1+u_2+u_3$；如此继续做下去可得内接正 $3\times 2^{n-1}$ 边形的面积是 $n$ 个数的和

$$u_1+u_2+\cdots+u_n.$$

正 $3\times 2^{n-1}$ 边形的面积 $S_n$ 是 $\pi$ 的近似值，随着 $n$ 无限制增大，$S_n$ 无限制地趋近于 $\pi$。这就是说，单位圆面积 $\pi$ 应该等于数列 $\{u_n\}$ 前 $n$ 项之和的极限。

如果给定一个数列

$$u_1,\ u_2,\ \cdots,\ u_n,\ \cdots, \tag{1}$$

将此数列各项顺次用加号连接起来，所得到的式子

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots, \tag{2}$$

或简写为 $\sum\limits_{k=1}^{\infty}u_k$ 就称为**无穷级数**或简称为**级数**，而(1)中的每个数叫做级数(2)的项，$u_n$ 叫做级数(2)的**通项**。级数(2)的前 $n$ 项之和

$$S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n,$$

或简写为 $S_n=\sum_{k=1}^{n} u_k$，叫做级数(2)的前 $n$ 项部分和。

如果级数(2)的部分和所作成的数列$\{S_n\}$存在极限 $S$，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S,$$

则称级数(2)是收敛的，$S$ 叫做级数(2)的和，可写成

$$S=\sum_{k=1}^{\infty} u_k = u_1+u_2+\cdots u_n+\cdots.$$

称 $$r_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k = u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}+\cdots$$

为级数(2)的第 $n$ 个余项。

如果数列$\{S_n\}$不存在极限，则称级数(2)发散，此时级数没有和。

由上面的分析可知无穷多个数能否相加的问题，就是级数(2)收敛或发散的问题，当级数收敛，就意味着相应的无穷多个数能“相加”，其和是 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$。当级数发散，就意味着相应的无穷多个数的和不能求得。可见对一个级数，判别它是收敛还是发散的，应当是我们研究级数理论的第一个课题。

下面先研究几个级数的敛散性。

**例 1** 讨论无穷等比级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = 1+q+q^2+\cdots+q^{n-1}+\cdots$$

的敛散性。

在本节中已经讨论了当 $|q|<1$ 时级数收敛，且

$$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}=\frac{1}{1-q},$$

而当$|q|>1$时，级数发散.

若$q=-1$时，因为$S_n=\frac{1+(-1)^{n+1}}{2}$，所以$\{S_n\}$无极限，从而级数发散.

若$q=1$时，因为

$$S_n=1+1+\cdots+1=n,$$

显然

$$\lim_{n\to\infty} S_n=+\infty,$$

所以级数也发散.

这样，级数$\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1}$当$|q|\geqslant 1$时都发散，仅当$|q|<1$时收敛，收敛时其和为$\frac{1}{1-q}$. 这是级数理论中的一个重要结果，今后将会常常用到.

例 2　判断级数

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}+\cdots$$

是否收敛？如果收敛，求它的和.

解　部分和

$$S_n=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{n(n+1)}$$

$$=\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots$$

$$+\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=1-\frac{1}{n+1},$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n+1}\right)=1,$$

所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)}$ 收敛，它的和是 1。

**例 3** 判断级数

$$(1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)+\cdots$$

是否收敛？如果收敛，求它的和。

**解** $$S_n=(1+1)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots$$
$$+\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$
$$=\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-1}}\right)$$
$$+\left(1+\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$$
$$=\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1-\frac{1}{3^n}}{1-\frac{1}{3}}$$
$$=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right),$$

于是 $$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)+\frac{3}{2}\left(1-\frac{1}{3^n}\right)\right]=3\frac{1}{2},$$

即
$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)=3\frac{1}{2}.$$

因而级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$收敛，其和为$3\frac{1}{2}$.

例 4　判断级数
$$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\frac{5}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$$
是否收敛？如果收敛，求它的和。

解　$S_n=\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}$,

$$\frac{1}{2}S_n=\frac{1}{2^2}+\frac{3}{2^3}+\cdots+\frac{2n-1}{2^{n+1}}.$$

于是
$$\begin{aligned}\frac{1}{2}S_n&=S_n-\frac{1}{2}S_n\\&=\frac{1}{2}+\frac{2}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\cdots+\frac{2}{2^n}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\cdots+\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=2\cdot\frac{\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2^n}\right)}{1-\frac{1}{2}}-\frac{1}{2}-\frac{2n-1}{2^{n+1}}\\&=2\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-\frac{1}{2}-\frac{2n-1}{2^{n+1}},\end{aligned}$$

所以
$$S_n=4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1-\frac{2n-1}{2^n}.$$

那么
$$\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\left[4\left(1-\frac{1}{2^n}\right)-1-\frac{2n-1}{2^n}\right].\qquad(3)$$

在前面我们已经证明了

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{a^n}=0 \quad (a>1),$$

因此有 $$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0,\quad \lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2^n}=0,$$

再由 $$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2^{n+1}}=0,$$

代入(3)式，得

$$\lim_{n\to\infty} S_n=3.$$

即级数 $$\frac{1}{2}+\frac{3}{2^2}+\cdots+\frac{2n-1}{2^n}+\cdots$$

收敛，它的和等于3.

研究了上面几个级数的收敛性，我们再次请大家注意，级数和 $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 这一联系着无限项和与有限项和的极限的式子，反映了 $S_n$ 与 $S$ 之间的辩证关系. $S_n$ 是有限项的和，它不是无限项之和 $S$，$S_n$ 与 $S$ 是不同的，但两者又有联系，$S_n$ 近似于 $S$，$n$ 越大 $S_n$ 含有的项越多，$S_n$ 越近似于 $S$，当 $n$ 无限增大时，$S_n$ 的极限就是无限项的和 $S$. 我们理解了有限项和与无限项和之间的这种辩证关系，才能举一反三，从实质上掌握级数的知识.

我们学习了级数收敛，发散的基本概念，就能正确回答本书提出的问题了，请读者试试看，做出您的回答.

# 级数的收敛性与数列极限的存在性

从级数收敛的定义可知，研究级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性和求级数和的问题，实质上就是研究数列 $\{S_n\}$ 的极限存在性和求它的极限值的问题，因而关于无穷级数理论的任何一个问题，都可用相应的数列及其极限的说法来叙述。这也就是我们在研究无穷多个数能否相加的问题之前，要花相当的篇幅来介绍数列极限的道理。在后面我们讨论级数的各个问题，都要运用数列极限的知识。

反过来，若先给出数列

$$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots,$$

令 $\quad u_1 = S_1,\ u_2 = S_2 - S_1,\ \cdots,\ u_n = S_n - S_{n-1},\ \cdots,$

则级数

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

的前 $n$ 项部分和为

$$\begin{aligned} u_1 + u_2 + \cdots + u_n &= S_1 + (S_2 - S_1) + \cdots + (S_n - S_{n-1}) \\ &= S_n, \end{aligned}$$

它恰好是数列 $\{S_n\}$ 的第 $n$ 项。因此，如果级数收敛，且和为 $S$，那么，数列 $\{S_n\}$ 也就收敛，且 $S$ 是 $\{S_n\}$ 的极限，即

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S。$$

由此可见，数列极限的存在性及其极限值的问题也可化为无穷级数的收敛性及其和数的问题。总之，研究无穷级数的收敛性及其求和的问题，不过是研究数列极限的存在性及其求极限值的另一种形式而已。在解决实际问题时，有时把

求某些数列极限的问题化为求相应的无穷级数和的问题来解决可能很简便。

为了使读者熟悉级数的记法以及掌握级数敛散性概念，请解答下列问题。

1. 写出下列级数的通项：

(1) $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots$；

(2) $\frac{2}{1}-\frac{3}{2}+\frac{4}{3}-\frac{5}{4}+\cdots$；

(3) $\frac{\sin 1}{2}+\frac{\sin 2}{2}+\frac{\sin 3}{2}+\cdots$；

(4) $\frac{\cos 1!}{1\cdot 2}+\frac{\cos 2!}{2\cdot 3}+\frac{\cos 3!}{3\cdot 4}+\cdots$；

(5) $\frac{\sqrt{x}}{2}+\frac{x}{2\cdot 4}+\frac{x\sqrt{x}}{2\cdot 4\cdot 6}+\frac{x^2}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}+\cdots$；

(6) $\frac{a^2}{3}-\frac{a^3}{5}+\frac{a^4}{7}-\frac{a^5}{9}+\cdots$.

[答案：(1) $\frac{1}{2n-1}$，(2) $(-1)^{n+1}\frac{n+1}{n}$，(3) $\frac{\sin n}{2^n}$，(4) $\frac{\cos n!}{n(n+1)}$，(5) $\frac{x^{\frac{n}{2}}}{2^n\cdot n!}$，(6) $\frac{(-a)^{n+1}}{2n+1}$]

2. 将下列级数写成展开式的形式：

(1) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2n-1}{2^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n(n+2)}$；

(3) $\sum_{n=1}^{+\infty}\left[(-1)^n+\sin\frac{n\pi}{4}\right]$；

(4) $\sum_{n=1}^{+\infty}[(-1)^n+(-1)^{2n+1}]$；

(5) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\cos\frac{n\pi}{4}+\sin\frac{n\pi}{4}\right)$.

3. 求下列级数的和：

(1) $\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}\right)+\cdots$;

(2) $\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 7}+\cdots+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$.

$\left[\text{答案：(1) } 1\frac{1}{2}\text{；(2) } \frac{1}{3}\right]$

## 八、无穷多个数相加的基本性质

无穷多个数“相加”与有限多个数相加是不相同的．首先有限多个数总有和，而无穷多个数仅在相应的级数收敛时才有和．本节我们主要介绍收敛级数的一些基本性质．请读者把它们与有限项和的性质相比较，同时记住研究基本性质的主要目的是用以研究级数的敛散性．

**性质 1**　级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

收敛的必要条件是

$$\lim_{n\to\infty} u_n = 0.$$

**证明**　因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，所以其前 $n$ 项的部分和 $S_n$，当 $n\to\infty$ 时有极限，设为 $S$．由于

$$S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1} + u_n$$
$$= S_{n-1} + u_n,$$

所以

$$u_n = S_n - S_{n-1}.$$

则

$$\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty}(S_n - S_{n-1})$$
$$= \lim_{n\to\infty} S_n - \lim_{n\to\infty} S_{n-1}$$
$$= S - S = 0.$$

根据这个性质，如果一个级数的一般项 $u_n$ 不趋向于

$0(n\to\infty)$，则该级数一定发散。象 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$，当 $n\to\infty$ 时，$u_n=n\to\infty$，并不趋向于零，故级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n$ 是发散的。再如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$，当 $n\to\infty$ 时，$u_n=\frac{1}{\sqrt[n]{n}}\to1\neq0$，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n]{n}}$ 是发散的。

值得注意的是性质 1 是级数收敛的必要而不充分的条件，可不要认为一般项 $u_n$ 趋于零，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 一定收敛。请看下面两个例子。

例如，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\cdots$$
$$+\underbrace{\frac{1}{K}+\cdots+\frac{1}{K}}_{k\text{项}}+\cdots,$$

显然当 $K\to\infty$ 时，$u_n\to0$，但级数 $S_1=1$，$S_3=1+1=2$，$S_6=3$，$S_{\frac{k+1}{2}k}=K$，因为当 $K\to\infty$ 时，$S_{\frac{k+1}{2}k}\to\infty$，所以 $\{S_n\}$ 是一个无界的数列，因此数列 $\{S_n\}$ 是发散的，即 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

再如调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots,$$

当$n\to\infty$时，$u_n=\dfrac{1}{n}\to 0$，但是原级数$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$是发散级数，事实上

$$1+\frac{1}{2}>\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}>\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\cdots+\frac{1}{16}=\frac{1}{2},$$

一般地有

$$\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}>\frac{2^k-2^{k-1}}{2^k}=\frac{1}{2}.$$

由此可知，级数的前$2^k$项之和

$$\begin{aligned}S_{2^k}&=\left(1+\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)\\&\quad+\cdots+\left(\frac{1}{2^{k-1}+1}+\frac{1}{2^{k-1}+2}+\cdots+\frac{1}{2^k}\right)\\&>\frac{K}{2}.\end{aligned}$$

显然当$K\to\infty$时，$S_{2^k}\to\infty$，因而$\{S_n\}$是个无界的数列，由此可知$\{S_n\}$是发散的，故$\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$发散。

请大家记住这个调和级数，它满足级数收敛的必要条件，而又是发散的，我们要常常用到它。

类似于有限和对乘法的分配律成立$\left(C\sum_{k=1}^{n}u_k=\sum_{k=1}^{n}Cu_k\right)$，

级数和有如下的性质。

**性质 2** 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和为 $S$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 收敛，其和为 $CS$。即对收敛级数有

$$\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

**证明** 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 的前 $n$ 项之和

$$S'_n = \sum_{k=1}^{n} Cu_k = C\sum_{k=1}^{n} u_k,$$

则

$$\lim_{n\to\infty} S'_n = \lim_{n\to\infty}\left[C\sum_{k=1}^{n} u_k\right] = C\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} u_k = CS.$$

故

$$\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n = C\sum_{n=1}^{\infty} u_n = CS.$$

这说明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 收敛，且其和为 $CS$。

用反证法可以证明如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，那么级数 $\sum_{n=1}^{\infty} Cu_n$ 也是发散的。

利用级数收敛定义和上面两个性质，读者可以判断下列级数的敛散性。

(1) $\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\cdots$；

(2) $\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{4}{5}+\cdots$；

(3) $-\frac{8}{9}+\frac{8^2}{9^2}-\frac{8^3}{9^3}+\cdots$；

(4) $\frac{9}{8}+\frac{9^2}{8^2}+\frac{9^3}{8^3}+\cdots$；

(5) $\ln\frac{2}{1}+\ln\frac{3}{2}+\ln\frac{4}{3}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}+\cdots$；

(6) $1+\ln 3+\ln^2 3+\cdots+\ln^{n-1}3+\cdots$；

(7) $-1+\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{1}{\sqrt[4]{4}}-\cdots$。

〔答案：(1) 散，(2) 散，(3) 敛，(4) 散，(5) 散，(6) 散，(7) 散〕

**性质 3** 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都收敛，其和分别为 $a$ 与 $b$，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 也收敛，且其和为 $a \pm b$。

**证明** 考虑前 $n$ 项之和

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k)=\sum_{k=1}^{n}u_k \pm \sum_{k=1}^{n}v_k.$$

两边取极限，有

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}(u_k \pm v_k)\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k \pm \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}v_k\\&=a \pm b.\end{aligned}$$

这表示级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛，且其和为 $a \pm b$。

这个性质告诉我们，两个收敛级数的相应项相加（或相

减）后所得到的级数仍然是收敛的。

这一性质和有限个数的和相应的性质是一致的。但要注意，由 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n)$ 收敛不能得到 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛的结论，这又与有限和不同。例如，取 $u_n=1$，$v_n=1$，$n=1,2,\cdots$，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(u_n-v_n)$收敛，但 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$发散。

**性质 4** 在级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

前面去掉有限项或加上有限项，不影响级数的收敛性或发散性。

**证明** 设级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

收敛，其和为 $S$。

去掉级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 的前 $N$ 项后得到级数

$$u_{N+1}+u_{N+2}+\cdots+u_{N+n}+\cdots; \tag{2}$$

它的第 $n$ 个部分和为

$$\sigma_n=u_{N+1}+u_{N+2}+\cdots+u_{N+n};$$

而级数(1)的第 $N+n$ 个部分和及第 $N$ 个部分和分别为

$$S_{N+n}=u_1+u_2+\cdots+u_N+\cdots+u_{N+n};$$

$$S_N=u_1+u_2+\cdots+u_N;$$

显然 $$\lim_{n\to\infty}\sigma_n=\lim_{n\to\infty}(S_{N+n}-S_N)=S-S_N,$$

即级数(2)收敛，并且有和 $S-S_N$。

若级数(1)发散，则 $S_{N+n}$ 当 $n$ 趋于无穷时极限不存在，

易见 $\sigma_n$ 的极限也不存在。所以级数(2)发散。

类似可证，在级数(1)前面加上有限项不影响级数收敛性或发散性（读者可自行证明）。

为了掌握收敛级数的基本性质，请解答下列问题。

1. 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足条件：

i) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} + u_{2n})$ 收敛。

证明级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

2. 为什么 $\sum_{n=1}^{\infty} (u_n + v_n)$ 收敛，而 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 可能都发散？

# 九、怎样判别无穷多个正数能否相加

我们知道，研究无穷多个数相加的问题，首先是判别相应的级数的敛散性。我们已经介绍了用级数敛散性定义及收敛级数的基本性质判别一些级数的敛散性，但这还是很不够的，例如，对于级数

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}+\cdots,$$

用定义判别它的敛散性，得先找出 $S_n$ 与 $n$ 的关系式，这就遇到了困难。即使找到以 $n$ 表示的 $S_n$ 的关系式，有时求 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ 也很困难，这是遇到的另一困难。应用收敛级数的基本性质时，$u_n=\frac{1}{n^2}\to 0\ (n\to\infty)$，级数虽然满足收敛的必要条件，却不能得出敛散性的结论，运算性质也用不上。看来，进一步研究判别级数敛散性的判别法很有必要。

怎么办？只能具体问题具体分析。拿 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 来说，它的各项是正的，$S_n$ 随 $n$ 增加而单调增加，自然地我们想到，可否用单调数列收敛的基本原理来判别级数的敛散性？本节我们就专门研究正项级数的敛散性判别法。

## 正项级数收敛原理

对于正项级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

我们来考虑它的部分和数列

$$S_1,\ S_2,\ \cdots,\ S_n,\ \cdots.$$

因为 $u_{n+1}\geqslant 0$，故有

$$S_{n+1}=S_n+u_{n+1}\geqslant S_n.$$

所以，部分和数列是一个单增的数列.

**正项级数收敛原理** 正项级数

$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots$$

收敛的充分必要条件是它的部分和数列$\{S_n\}$为有界数列.

**证明** 必要性 设级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

是收敛的，则数列$\{S_n\}$有极限 $S$，根据极限性质，$\{S_n\}$必有界.

充分性 设数列$\{S_n\}$有界. 因为正项级数的部分和数列$\{S_n\}$单增，因此$\{S_n\}$必定有极限. 即级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

这个原理是建立一切正项级数收敛（或发散）判别法的根据. 这里我们先运用这个原理来研究"$p$ 级数"的收敛性.

设有"$p$ 级数"

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots,$$

考虑它的收敛性.

1° 若 $p\leqslant 1$ 时，有

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}\geqslant 1+\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{3^p}+\frac{1}{4^p}\geqslant\frac{1}{3}+\frac{1}{4}>\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}+\frac{1}{8^p}\geqslant\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}>\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{2},$$

……

$$\frac{1}{(2^m+1)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{m+1})^p}\geqslant\frac{1}{2^m+1}+\cdots+\frac{1}{2^{m+1}}>2^m\cdot\frac{1}{2^{m+1}}=\frac{1}{2}.$$

因而前 $2^{m+1}$ 项的部分和 $S_{2^{m+1}}$ 有

$$\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{m+1})^p}>1+\underbrace{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2}}_{(m+1)\text{个}}$$

$$=1+\frac{m+1}{2}.$$

由于 $m$ 可以任意大，故部分和 $\{S_n\}$ 无界．由收敛原理可知“$p$ 级数”当 $p\leqslant 1$ 时是发散的．

2° 若 $p>1$，则

$$\frac{1}{1^p}=1,$$

$$\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}<\frac{1}{2^p}+\frac{1}{2^p}=\frac{2}{2^p}=\frac{1}{2^{p-1}},$$

$$\frac{1}{4^p}+\frac{1}{5^p}+\frac{1}{6^p}+\frac{1}{7^p}<\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}+\frac{1}{4^p}=\frac{4}{4^p}$$

$$=\left[\frac{1}{2^{p-1}}\right]^2,$$

……

$$\frac{1}{(2^m)^p}+\frac{1}{(2^{m+1})^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{m+1}-1)^p}$$

$$<\underbrace{\frac{1}{(2^m)^p}+\cdots+\frac{1}{(2^m)^p}}_{2^m 个}=2^m\cdot\frac{1}{(2^m)^p}=\left[\frac{1}{2^{p-1}}\right]^m,$$

故 $$S_{2^{m+1}-1}<\frac{1-\left(\frac{1}{2^{p-1}}\right)^{m+1}}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}<\frac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}.$$

因为$\{S_n\}$是单增数列，由$n\leqslant 2^n-1$，有$S_n\leqslant S_{2^n-1}<\dfrac{1}{1-\frac{1}{2^{p-1}}}$，

即部分和数列$\{S_n\}$为有界数列。据收敛原理可知“$p$级数”当$p>1$时收敛。

“$p$级数”与等比级数一样也是一个常常用到的重要级数。$p=1$时“$p$级数”就是调和级数，$p>1$时级数收敛，它的和存在，但这个和与$p$的关系我们却不知道，这一点又不同于等比级数。等比级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$，当$|q|<1$时，它的和是$\dfrac{a}{1-q}$；而“$p$级数”$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}(p=2)$，尽管我们知道它是收敛的，可它的和是什么我们现在还不知道。这种情况以后经常遇到。

## 比 较 原 则

根据正项级数收敛原理判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 的收敛性时，应研究部分和数列$\{S_n\}$的有界性。但要求通项 $S_n$ 的解析式有时是很困难的。“$p$ 级数”就是这样，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ 也是这样。对于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$，如果我们注意到

$$\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n} \qquad (n=1,2,\cdots)$$

是成立的。那么，由等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}$ 的收敛性，就可知其部分和数列$\{S_n\}$为有界数列，再由 $\frac{1}{2^n+1}<\frac{1}{2^n}$，就应有级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ 的部分和 $S_n'<S_n$，从而推得$\{S_n'\}$有界，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n+1}$ 收敛。这样通过直接比较两个级数的一般项 $u_n$ 而来判断级数收敛性的方法，就是判别正项级数敛散性的比较原则。

**比较原则** 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 是两个正项级数，且

$$u_n\leqslant v_n \qquad (n=1,2,\cdots)，则$$

1° 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛；

2° 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 必发散。

证明　1° 因为正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，根据收敛原理，其部分和数列

$$\{S_n\}=\left\{\sum_{k=1}^{n} v_k\right\}$$

有界，即存在常数$M$，使得

$$S_n\leqslant M \qquad (n=1,2,\cdots),$$

由题设，$u_n\leqslant v_n \quad (n=1,2,\cdots)$,

推得

$$\sum_{k=1}^{n} u_k\leqslant\sum_{k=1}^{n} v_k\leqslant M.$$

即正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的部分和数列也有界。再由本节收敛原理可知，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 必收敛。

2°用反证法。如果结论不正确，即级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则由 1°，得 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。这与假设矛盾。定理证毕。

由前节性质 4，把比较原则中的条件 $u_n\leqslant v_n (n=1,2,\cdots)$，改成存在$N$，当 $n\geqslant N$ 时，$u_n\leqslant v_n$，则结论仍然成立。

用比较原则判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$$

的敛散性。

解 $\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}<\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}\qquad(n=1,2,\cdots)$.

而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ 为 $p=\dfrac{3}{2}$ 的“$p$ 级数”，所以是收敛的，由比较原则知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$ 收敛。

再来判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 收敛性。

解 $\dfrac{1}{n!}\leqslant\dfrac{1}{2^{n-1}}$

由于级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{2^{n-1}}$ 是收敛的，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 收敛。

有的时候 $u_n\leqslant v_n$ 的关系不成立或是难于证明，而 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}$ 容易求出来，这时我们可用下面的推论。

推论 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 为两个正项级数，如果极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=k\qquad(0\leqslant k<+\infty,\ v_n\neq 0)$$

存在，则

1° 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，且 $k<+\infty$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

2° 当级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散，且 $k>0$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

证明 1° 因为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，且 $k<+\infty$，则对于某

个给定的正数$\varepsilon_0$，由极限定义，存在一个自然数$N$，当$n\geqslant N$时，有

$$\left|\frac{u_n}{v_n}-k\right|<\varepsilon_0,$$

或
$$k-\varepsilon_0<\frac{u_n}{v_n}<k+\varepsilon_0,$$

即
$$u_n<(k+\varepsilon_0)v_n,$$

级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(k+\varepsilon_0)v_n$就收敛，再由比较原则推得级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛。

2° 若级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，且$k>0$，则对取定的$\varepsilon_0=\dfrac{k}{2}$，由极限定义，一定存在一个$N$，使$n\geqslant N$时

$$-\varepsilon_0<\frac{u_n}{v_n}-k,$$

即
$$\frac{u_n}{v_n}>k-\varepsilon_0=k-\frac{k}{2}=\frac{k}{2},$$

$$u_n>\frac{k}{2}v_n.$$

因为$\dfrac{k}{2}$为一确定的正数，则由$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散知道，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散。

应用推论和刚刚研究过的收敛级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$，容易得到级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot n!}$的收敛性。

**解** 因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{n\cdot n!}}{\dfrac{1}{n!}}=0$,

则由级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ 收敛，可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\cdot n!}$ 收敛。

同样，我们来判断级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a+bn)^2}$ 的敛散性（$a\neq 0$, $b\neq 0$）。

**解** 由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\dfrac{1}{(a+bn)^2}}{\dfrac{1}{n^2}}=\dfrac{1}{b^2}$

而"$p$ 级数"$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 是收敛的，因此级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{(a+bn)^2}$ 收敛。

应用推论容易证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 是发散的。

**解** 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\dfrac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

$$=\ln e=1,$$

而调和级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 是发散的，由推论可知级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\left(1+\dfrac{1}{n}\right)$ 发散。

## 正项级数收敛判别法

应用比较原则及其推论，技巧在于选取适当的已知敛散性的正项级数作为进行比较的“尺子”。从原则上说，凡已知敛散性的级数都有资格充当“尺子”，问题是这把“尺子”对给定的级数适当不适当。通俗地说，要判断给定的级数收敛，所找到的“尺子”应是收敛的，其通项不小于给定级数的通项。判断给定级数发散，所找的“尺子”应是发散的，其通项不大于给定级数通项。选取适当的“尺子”确非一件容易的事情。我们介绍以等比级数、“$p$ 级数”作“尺子”建立以下常用的简便判别法(方法本身就不加证明了)。

**哥西判别法** 设

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n + \cdots$$

是正项级数，我们有：

1° 如果可找到这样一个正数 $r<1$，使得从某项 $u_N$ 以后($n>N$)，都有

$$\sqrt[n]{u_n} \leqslant r < 1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

2° 如果有无穷多个 $u_n$，使得

$$\sqrt[n]{u_n} \geqslant 1,$$

则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

**推论** 如果正项级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots,$$

有 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l$ 存在，则

1° 当 $l<1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

2° 当 $l>1$ 时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

如果读者深入研究一下哥西判别法及推论的证明就会知道，这里建立判别法所用的"尺子"是等比级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$。当通项使 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=l<1$ 或 $l>1$ 时，判别法能作出结论。当 $l=1$ 时，判别法不能作出结论，即判别法失效。例如 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 及 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 都有 $l=1$，但是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散，而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛。

应用哥西判别法的推论判别

$$\frac{1}{3}+\left(\frac{2}{5}\right)^2+\left(\frac{3}{7}\right)^3+\cdots+\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n+\cdots$$

的敛散性。

解　因为 $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{2n+1}=\frac{1}{2}<1.$$

由推论可知此级数收敛。

以 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}r^n$ 为"尺子"，哥西判别法是将通项 $u_n$ 开 $n$ 次方

来与 $r$ 比较，其实等比级数更显明的特性是$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{r^{n+1}}{r^n}=r$，用这一特性来比较就得下面的达朗贝尔判别法。

**达朗贝尔判别法** 对正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$。

1° 如果有这样一个正数 $r<1$ 和某一个 $N$ 存在，使得当 $n\geqslant N$ 时，都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\leqslant r,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛。

2° 若当 $n\geqslant N$ 时，都有

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}\geqslant 1,$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散。

**例** 考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}=1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots$$

的敛散性。

这里 $$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}\leqslant\frac{1}{2}<1 \quad (\text{当 } n\geqslant 1 \text{ 时})。$$

由达朗贝尔判别法，$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$收敛。

注意：上面两个判别法中的条件 $\sqrt[n]{u^n}\leqslant r<1$ 和 $\frac{u_{n+1}}{u_n}$

$\leqslant r<1$ 不能降低成 $\sqrt[n]{u_n}<1$ 和 $\frac{u_{n+1}}{u_n}<1$。例如，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$，虽然

$$\sqrt[n]{\frac{1}{n}}<1 \quad (n\geqslant 2)$$

$$\frac{u_{n+1}}{u_n}=\frac{\frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n}}=\frac{n}{n+1}<1 \qquad (n=1,2,\cdots),$$

但我们知道调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 是发散的。

**推论** 如果对于正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 有 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=l$，则

1° 当 $l<1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛；

2° 当 $l>1$ 时，$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

现在来考察级数

$$1+\frac{2!}{2^2}+\frac{3!}{3^2}+\cdots+\frac{n!}{n^n}+\cdots \text{的敛散性。}$$

**解** 因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n=\frac{1}{e}<1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}$ 收敛。

我们再考察级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$ 的敛散性。

解　因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{5^{n+1}}{(n+1)^5}\frac{n^5}{5^n}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{5}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^5}=5>1,$$

故级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{5^n}{n^5}$ 发散。

同样当 $l=1$ 时，用此法不能判断级数的敛散性。例如 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 和 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 都有 $l=1$，但是 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散而 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛。

拉贝判别法　设 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为正项级数

1°　如果存在一个自然数 $N$，使当 $n\geqslant N$ 时，有

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\leqslant 1,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 发散。

2°　如果存在一个自然数 $N$ 和这样的一个 $r>1$，使得当 $n\geqslant N$ 时，有

$$n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)\geqslant r>1,$$

则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

推论　如果正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，有

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=l$$

存在，则 1° 当$l>1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛；

2° 当$l<1$时，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$发散。

例 1 考察级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}^{*}$$的敛散性。

因为

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{u_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1} \Big/ \frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!} \frac{1}{2n+3}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{2n+2}{2n+1} \cdot \frac{2n+3}{2n+1} = 1,$$

因此用达朗贝尔判别法不能判断其敛散性。

若用拉贝判别法检验时，由于

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{(2n+2)(2n+3)}{(2n+1)^2} - 1\right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{n(6n+5)}{(2n+1)^2} = \frac{3}{2} > 1,$$

故级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{1}{2n+1}$收敛。

例 2 考察级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}(a>0)$的敛散性。

---

* “!!”称为双阶乘。

$(2n)!! = (2\cdot1)(2\cdot2)(2\cdot3)\cdots(2\cdot n)$,

$(2n-1)!! = (2\cdot1-1)(2\cdot2-1)(2\cdot3-1)\cdots(2\cdot n-1)$.

因为

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)(a+n+1)n!}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{a+n+1}=1,$$

故用达朗贝尔判别法不能确定其敛散性。

改用拉贝判别法，由于

$$\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{a+n+1}{n+1}-1\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{an}{n+1}=a。$$

当 $a>1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ 收敛；当 $a<1$ 时，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{(a+1)(a+2)\cdots(a+n)}$ 发散；当 $a=1$ 时原级数可写成 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n+1}$，级数发散。

由这两个例子可以看到拉贝判别法较达朗贝尔判别法敏锐，有些级数不能用达朗贝尔判别法判断其敛散性，而能用拉贝判别法判断。但是我们也应注意到达朗贝尔判别法较之拉贝判别法应用简便。因此两者各有特点，另外我们还介绍过哥西判别法，建议读者对这三种判别法作一比较，明确其各自的特点，以便灵活应用，熟练掌握。

对下面的十个题目读者可按其各自特点选用适当判别法，也可以各种判别法都试一试。

考察下列级数的敛散性：

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$； 2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$；

3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\operatorname{tg}\frac{1}{n}$； 4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n n!}{n^n}$；

5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n n!}{n^n}$； 6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n)!}$；

7. $\sum_{n=1}^{\infty}2^n\sin\frac{\pi}{3^n}$； 8. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{\left(n+\frac{1}{n}\right)^n}$；

9. $\left(\frac{1}{2}\right)^p+\left(\frac{1\cdot3}{2\cdot4}\right)^p+\left(\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}\right)^p+\cdots$；

10. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}\ !}{(2+\sqrt{1})(2+\sqrt{2})\cdots(2+\sqrt{n})}$.

本节结束时，作为收敛原理的推论，我们介绍收敛的正项级数的一个重要性质。

**交换律定理** 收敛的正项级数随意改变它的各项次序，仍得到收敛级数并且其和不变.

**证明** 设 $S=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 为收敛的正项级数，经改变次序得到的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$，我们证明 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，且其和等于 $S$.

分别以 $S_n$，$\bar{S}_n$ 记级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的部分和. 由收敛原理我们知道 $\{S_n\}$ 以 $S$ 为最小上界，我们来看 $S$ 也是 $\{\bar{S}_n\}$ 的上界. 事实上，任取 $m$，有 $\bar{S}_m=v_1+v_2+\cdots+v_m$，其中 $v_1,v_2,$

$\cdots, v_m$ 都是 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 的项，即 $v_1 = u_{n_1}$, $v_2 = u_{n_2}, \cdots, v_m = u_{n_m}$，若 $N = \max\{n_1, \cdots n_m\}$，那么 $v_1$，$v_2, \cdots v_m$ 各项都包含在和 $S_N = u_1 + u_2 + \cdots + u_N$ 之中，

$$\therefore \quad \bar{S}_m \leqslant S_N.$$

但 $S_N \leqslant S$，因此 $\bar{S}_m \leqslant S$。根据收敛原理，级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，并且 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n \leqslant S = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$，同理可得

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} v_n,$$

于是
$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n.$$

读者注意，在收敛级数不是正项级数的情况下，交换律不成立。下一节我们将举例说明这一问题。

# 十、怎样判别无穷多个数能否相加

前面我们研究了正项级数的敛散性，同号级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-u_n)$与$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$有相同的敛散性可归为正项级数的敛散性来判别。现在的问题是一般情况下级数的各项并不同号，例如

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots,$$

$$1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^4}-\frac{1}{2^5}+\cdots.$$

这种各项符号可正可负的级数称为任意项级数。研究这类级数的敛散性，也就是判别无穷多个数能否相加。

在收敛级数的性质1中，我们知道通项$u_n\to 0(n\to\infty)$是级数收敛的必要而不充分的条件，能否找出收敛的必要充分条件呢？

**级数收敛的哥西准则** 设级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n=u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots$$

的部分和数列为$\{S_n\}$，那么级数收敛的必要与充分条件是：对于任意给定的$\varepsilon>0$，总可以找到正整数$N$，使得当$m,n\geqslant N$时，都有

$$|S_m-S_n|<\varepsilon.$$

如果设 $m,n$ 中较大者为 $m$，并记为 $m=n+p$，$(p=1,2,\cdots)$，那么有

$$|S_m-S_n|=\left|\sum_{k=1}^{n+p}u_k-\sum_{k=1}^{n}u_k\right|$$
$$=|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon.$$

直观地说，级数收敛的必要充分条件是充分远的（指 $n\geqslant N$）"片断" $u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}$，不论含有多少项（指 $p$ 可以任意大），"片断"的绝对值 $|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|$ 可以任意地小（指小于 $\varepsilon$）。对比着必要不充分的条件 $u_n\to 0(n\to\infty)$，大家可以想象收敛的级数要求其充分远的任意"片断"之绝对值任意地小。那自然要求级数在其充分远后的每一项的绝对值都可以任意小了。

收敛的哥西准则在理论上有重要的意义，它告诉了我们级数收敛的充要条件，但在用它来判别级数的敛散性时，一般来说并不简便。下面请读者看两个用哥西准则判断级数收敛的例子。

例如，可以用哥西准则证明级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$$

是收敛的。

事实上

$$|u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}|$$
$$=\left|\frac{(-1)^n}{n+1}+\frac{(-1)^{n+1}}{n+2}\right.$$
$$\left.+\cdots+\frac{(-1)^{n+p-1}}{n+p}\right|$$

$$=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^{p}}{n+p},$$

当 $p$ 为偶数时

$$上式=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)-\cdots$$

$$-\left(\frac{1}{n+p-2}-\frac{1}{n+p-1}\right)-\frac{1}{n+p};$$

当 $p$ 为奇数时，

$$上式=\frac{1}{n+1}-\left(\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}\right)-\left(\frac{1}{n+4}-\frac{1}{n+5}\right)-\cdots$$

$$-\left(\frac{1}{n+p-1}-\frac{1}{n+p}\right);$$

因此总有

$$|u_{n+1}+\cdots+u_{n+p}|<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n}.$$

所以对于任意给定的 $\varepsilon>0$，总可以找到一个 $N>\frac{1}{\varepsilon}$，当 $n\geqslant N$ 时，使 $\frac{1}{n}<\varepsilon$，

即 $$|u_{n+1}+\cdots+\cdots+u_{n+p}|<\varepsilon$$

成立，所以级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n}$ 收敛。

利用哥西准则，证明调和级数

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$$

是发散的。

事实上，$|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|$

$$=\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right|$$

$$=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p},$$

令 $p=n$，则 $\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}>\frac{n}{n+n}=\frac{1}{2}$。

那么，当我们给定 $\varepsilon_0=\frac{1}{4}$ 时，对任意的 $N$，当 $n\geqslant N$ 时，选 $p=n$，则

$$\left|\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+p}\right|>\frac{1}{2}>\frac{1}{4}=\varepsilon_0,$$

由哥西准则得级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ 发散。

请读者试用哥西准则考察下列级数的敛散性，以掌握哥西准则。

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n}{2^n}$；　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n(n+1)}$；

(3) $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$。

〔答案：(1) 敛，(2) 敛，(3) 散〕

## 交　错　级　数

读者一定会体验到哥西准则应用起来并不简便，因此判别级数敛散性，总是首先要多着眼于分析给定级数的特殊性，用适应于特殊性的判别方法简捷地得出结论，到了用不上特

殊性时，才用哥西准则，正是基于这一考虑，我们来研究两类特殊的任意项级数，它们是交错级数与绝对收敛级数。

形如

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$$
$$(u_n>0,\ n=1,2,\cdots)$$

的级数叫做交错级数。

例如，$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$，

这个级数叫做莱布尼兹级数，它的收敛性首先由与牛顿一起发明微积分的德国数学家莱布尼兹所证明。级数的特性是各项符号正负交错出现，通项绝对值单调地趋向于零，具有这些特性的级数可以用哥西准则证明它的收敛性。

**莱布尼兹定理** 设交错级数

$$u_1-u_2+u_3-u_4+\cdots+(-1)^{n-1}u_n+\cdots$$
$$(u_n>0,\ n=1,2,\cdots),$$

对所有 $n\geqslant1$ 满足

$$u_n\geqslant u_{n+1},$$

且
$$\lim_{n\to\infty}u_n=0,$$

则此交错级数收敛。

**证明** 对于任意给定的 $\varepsilon>0$，由于 $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$，总可以找到正整数 $N$，当 $n\geqslant N$ 时，

$$|u_n|=u_n<\varepsilon.$$

而对于任意的自然数 $p$，由于 $u_n$ 是不增数列，就应有

$$|(-1)^n u_{n+1}+(-1)^{n+1}u_{n+2}+\cdots+(-1)^{n+p-1}u_{n+p}|$$
$$=u_{n+1}-u_{n+2}+u_{n+3}-u_{n+4}+\cdots+(-1)^{p-1}u_{n+p}$$

$$
=\begin{cases} u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-\cdots-(u_{n+p-1}-u_{n+p}) \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } p \text{ 为奇数时,} \\ u_{n+1}-(u_{n+2}-u_{n+3})-\cdots-(u_{n+p-2}-u_{n+p-1})-u_{n+p} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \text{当 } p \text{ 为偶数时} \end{cases}
$$

$\leqslant u_{n+1}<\varepsilon$.

根据哥西准则，该交错级数收敛。

在定理的证明中，可以明显看出，这种交错级数去掉它的前 $n$ 项之后所得到的余项的绝对值，总是小于或等于它的第 $n+1$ 项的绝对值。

即 $\left|(-1)^n u_{n+1}+(-1)^{n+1}u_{n+2}+\cdots+(-1)^{n+p-1}u_{n+p}+\cdots\right|\leqslant u_{n+1}$,

这一结论在近似计算中用来作误差估计是很有效的(参看本书最后一章)。

现在我们用莱布尼兹定理证明莱布尼兹级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\cdots+\frac{(-1)^{n-1}}{n}+\cdots$$

的收敛性。

事实上，由 $1>\frac{1}{2}>\frac{1}{3}>\cdots>0$，且 $\frac{1}{n}\to 0(n\to\infty)$，

级数满足莱布尼兹定理条件，所以莱布尼兹级数收敛。

读者试用莱布尼兹定理研究下列级数的敛散性：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^p}$； (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{n\pi}{2}$；

(3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\sin(\pi\sqrt{n^2+1})$； (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+2}{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}$.

## 绝 对 收 敛

如果变号级数

$$u_1+u_2+\cdots+u_n+\cdots \tag{1}$$

的每一项的绝对值所构成的（正项）级数

$$|u_1|+|u_2|+\cdots+|u_n|+\cdots \tag{2}$$

收敛，就称级数(1)绝对收敛。

例如，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\dfrac{1}{n^2}$ 是绝对收敛的，这是因为它的每一项绝对值所构成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$$

是 $p=2$ 的"$p$ 级数"。

显然，同号级数如果收敛，必是绝对收敛。

如果变号级数(1)收敛，而它的每一项绝对值所构成的级数(2)发散，我们就称级数(1)条件收敛。

例如，莱布尼兹级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$$

是条件收敛的，这是因为它自身是收敛的，而它的每项绝对值所构成的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|(-1)^{n-1}\frac{1}{n}\right|=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

是调和级数，因此是发散的。

由此可见无穷多个数能相加时，各数取绝对值之后不一

定能相加。如果取绝对值后能够相加，原来无穷多个数一定能相加，这就是下面的绝对收敛定理。

**绝对收敛定理** 若 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也收敛。

**证明** 因为 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛，由级数哥西准则，对于任意给出的 $\varepsilon>0$，恒存在正整数 $N$，对任意自然数 $p$，有

$$\Big|\,|u_n+1|+|u_n+2|+\cdots+|u_n+p|\,\Big|<\varepsilon,$$

从而有

$$\begin{aligned}&|u_{n+1}+u_{n+2}+\cdots+u_{n+p}|\\ \leqslant{}&|u_{n+1}|+|u_{n+2}|+\cdots+|u_{n+p}|<\varepsilon,\end{aligned}$$

再由级数的哥西准则，级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛。

这一定理的作用在于，给变号级数提供了一个收敛的判别法，而且是用研究正项级数收敛的方法来研究变号级数的收敛性。

例如，研究变号级数

$$\frac{\sin\alpha}{1^2}+\frac{\sin 2\alpha}{2^2}+\frac{\sin 3\alpha}{3^2}+\cdots+\frac{\sin n\alpha}{n^2}+\cdots$$

的收敛性，其中 $\alpha$ 是常数。

由于
$$\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|\leqslant\frac{1}{n^2},$$

因为级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 是收敛的，所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{\sin n\alpha}{n^2}\right|$ 收敛，再由本定理，可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\alpha}{n^2}$ 收敛。

例如，证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!}{n^n}$收敛.

$$
\text{因为}\quad \lim_{n\to\infty}\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^{n+1}\dfrac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}}{(-1)^n\dfrac{n!}{n^n}}\right|
$$

$$
=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}\cdot\frac{n^n}{n!}
$$

$$
=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^n
$$

$$
=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n}
$$

$$
=\frac{1}{e}<1,
$$

所以根据达朗贝尔判别法，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!}{n^n}$绝对收敛，再由本定理可知，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n\dfrac{n!}{n^n}$收敛.

请读者研究下列级数是绝对收敛还是条件收敛的：

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^p}$；　　(2) $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{[n+(-1)^n]^p}$.

按上面分析可知，收敛的变号级数区分为绝对收敛级数与条件收敛级数，这两类级数有些性质是迥然不同的．正是绝对收敛级数才具有有限项和的普通性质，限于篇幅这里我们只给读者介绍“交换律”．

**交换律定理**　绝对收敛级数，随意改变它的各项的次序得到的级数仍然收敛于同一个和．

证明 设级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 为绝对收敛的，改变它的次序得到的级数为 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$。根据正项级数交换律定理，因为 $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 是由收敛级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 改变次序得到的，所以 $\sum_{n=1}^{\infty} |v_n|$ 收敛。再据绝对收敛定理，$\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是收敛的。下面证明 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{k=1}^{\infty} u_n$。

为此，我们记 $p_n = \dfrac{|u_n| + u_n}{2}$，$q_n = \dfrac{|u_n| - u_n}{2}$，注意到 $p_n \geqslant 0$，$q_n \geqslant 0$，并且 $u_n = p_n - q_n$。由 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛，因而 $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$，$\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ 均收敛，记其和分别为 $P$，$Q$。因此

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} (p_n - q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n - \sum_{n=1}^{\infty} q_n = P - Q,$$

同理，

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|v_n| + v_n}{2} - \frac{|v_n| - v_n}{2}\right)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|v_n| + v_n}{2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|v_n| - v_n}{2}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{|v_n| + v_n}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{|v_n| - v_n}{2}$ 分别是级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{|u_n| + u_n}{2}$ 及 $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{|u_n| - u_n}{2}$ 改变次序得出的，由正项级数交换律成立，

我们有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|v_n|+v_n}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}p_n=P,\quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{|v_n|-v_n}{2}=\sum_{n=1}^{\infty}q_n=Q.$$

于是

$$\sum_{n=1}^{\infty}v_n=P-Q=\sum_{n=1}^{\infty}u_n.$$

这个定理告诉我们，对于绝对收敛的级数也象有限和那样有交换律成立，但对条件收敛的级数来说交换律不成立。

例如，条件收敛级数

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}+\cdots,$$

设它的和是 $S$．如果调动它的项的次序，使每一正项之后跟着两个负项，得级数

$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}+\cdots,$$

把上述两个级数的部分和分别记为 $S_n$ 及 $\bar{S}_n$，那么

$$\begin{aligned}\bar{S}_{3m}&=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)\\&=\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{4n-2}-\frac{1}{4n}\right)\\&=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{m}\left(\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n}\right)=\frac{1}{2}S_{2m}.\end{aligned}$$

这样一来，

$$\lim_{m\to\infty}\bar{S}_{3m}=\frac{1}{2}\lim_{m\to\infty}S_{2m}=\frac{1}{2}S,$$

而

$$\bar{S}_{3m-1}=\bar{S}_{3m}+\frac{1}{4m},\quad \bar{S}_{3m-2}=\bar{S}_{3m-1}+\frac{1}{4m-2},$$

所以
$$\lim_{n\to\infty}\bar{S}_n=\lim_{m\to\infty}\bar{S}_{3m}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\bar{S}_{3m-1}$$
$$=\lim_{m\to\infty}\bar{S}_{3m-2}=\frac{1}{2}S,$$

即
$$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\cdots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{4n-2}$$
$$-\frac{1}{4n}+\cdots=\frac{1}{2}S.$$

条件收敛的级数改变各项的次序得到的级数可以是不收敛的，也可以收敛于任意给定的一个数。这就是有名的黎曼定理，我们不加证明地叙述如下。

**黎曼定理** 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，那么改变级数项的次序得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 可能是发散的，也可能是收敛的；对于预先取定的数 $B$，都可以重新配置级数的项的次序，使所得的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛于 $B$。

下面我们简单地叙述两个级数的乘积运算。

设有级数
$$u_1+u_2+u_3+\cdots+u_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}u_n$$
与
$$v_1+v_2+v_3+\cdots+v_n+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}v_n,$$
我们称级数
$$(u_1v_1)+(u_2v_1+u_1v_2)+(u_3v_1+u_2v_2+u_1v_3)$$
$$+\cdots+(u_nv_1+u_{n-1}v_2+\cdots+u_1v_n)+\cdots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (u_n v_1 + u_{n-1} v_2 + \cdots + u_1 v_n)$$

为级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的乘积级数.

**乘积定理** 如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 是绝对收敛的，则它们的乘积级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n v_1 + u_{n-1} v_2 + \cdots + u_1 v_n)$$

也是绝对收敛的，并且

$$\sum_{n=1}^{\infty} (u_n v_1 + u_{n-1} v_2 + \cdots + u_1 v_n) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n\right) \cdot \left(\sum_{n=1}^{\infty} v_n\right).$$

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 都是条件收敛的，则其乘积级数可能发散(证明略).

现在我们得到对本书提出的有关无穷多个数能否相加问题的回答是：**无穷多个数相加仅在相应的级数收敛的情况下，它才有和，这时无穷多项相加之和的含意，是考察它的前 $n$ 项和 $S_n$ 的变化状态，当 $n\to\infty$ 时，$S_n$ 存在极限，这一极限定义为无穷多个数相加之和.** 收敛级数的和是有限和 $S_n$ 的极限，因此它既与有限和有关，但又不同于有限和. 有限和的有些性质对收敛级数来说仍然成立，例如，和对乘法的分配律等；一般地说有限项和的性质对收敛级数不能无条件的成立，例如，交换律等，只有绝对收敛的级数才保持有限和的这些性质.

如果我们把级数和看作一种无穷多项相加的运算，它实

质是关于部分和数列$\{S_n\}$求极限的运算．反过来数列的极限运算也可以化成相应的级数和运算．极限运算与通常实数的加、减、乘、除运算不同之处，在于并非每一$\{S_n\}$极限都存在．因此在这里关于级数的敛散性的判别就成为首先要研究的问题．本书介绍了一些常用的判别法，这些判别法在数学理论和应用当中经常要用到，希望读者能通过练习，学会灵活地判别级数的敛散性．限于篇幅，另一些判别法本书未能介绍，读者可在有关的高等数学书中找到．

# 十一、级数理论的应用举例

本书以上介绍了级数理论的一些初步知识，关于级数理论的工具作用，这里只能作为举例介绍级数理论应用的一星半点．为此我们先介绍幂级数的概念，然后介绍应用幂级数对函数值进行近似计算．

## 幂级数及其收敛区域

什么样的级数是幂级数呢？我们知道 $ax^n$ 这样的函数叫做幂函数，这里 $x$ 是自变量，$n$ 是一正整数，$a$ 是一实数．幂级数是各项都是自变量 $x$ 的幂函数的级数，幂级数的一般形式是

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + a_{n+1} x^{n+1} + \cdots \qquad (1)$$

这里 $a_0$，$a_1$，$a_2$，$\cdots$，$a_n\cdots$为已知的系数．这个级数的前 $n+1$ 项的和，记为 $s_{n+1}(x)$，是一个 $n$ 次多项式（当 $a_n \neq 0$ 时）．大家都知道多项式是我们学过的函数当中性质很好的一类函数，它的值只要把自变数乘幂再乘以系数并相加就得出来了，在电子计算机上计算特别方便．多项式是有限项幂函数之和，而幂级数（1）则是无限项幂函数之和（当然都按升幂排列），直观地说幂函数是无穷次的多项式．

先来研究幂级数的收敛问题．

任给一个幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots 。$$

对于每一固定的点 $x = x_0$，它变成一个数值级数

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n + \cdots, \tag{2}$$

如果级数(2)收敛，则称 $x_0$ 是幂级数(1)的**收敛点**。如果级数(2)发散，则称 $x_0$ 是幂级数(1)的**发散点**。收敛点的全体称为幂级数(1)的**收敛区域**，发散点的全体则称**发散区域**。

例如，等比级数

$$1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} + x^n + \cdots, \tag{3}$$

当 $|x| < 1$ 时，它是收敛的，它的和等于 $\frac{1}{1-x}$；当 $|x| \geqslant 1$ 时级数发散。因此，级数(3)的收敛区域为 $(-1,1)$。

再如幂级数

$$1 + x + 2x^2 + 3x^3 + \cdots + nx^n + \cdots, \tag{4}$$

应用达朗贝尔判别法可知，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \left|\frac{nx^n}{(n-1)x^{n-1}}\right| = \frac{n}{n-1}|x|$，当 $n \to \infty$ 时，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| \to |x|$。因此，当 $|x| < 1$ 时级数收敛；当 $|x| > 1$ 时级数发散，当 $|x| = 1$ 时，级数的通项 $nx^n \nrightarrow 0 (n \to \infty)$，级数也发散。因此，级数(4)的收敛区域为 $(-1,1)$。

一般地，我们有如下命题：

假设级数(1)有 $\lim\limits_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right| = \rho \quad (n \geqslant 2)$，那么

1° 当 $\rho=0$，则级数（1）对$(-\infty,\infty)$中每一点 $x$ 都收敛；

2° 当 $\rho=+\infty$，则级数（1）除了 $x=0$ 之外，在每一点都发散；

3° 当 $\rho$ 为某一正数，级数(1)当$|x|<\frac{1}{\rho}$时收敛，当$|x|>\frac{1}{\rho}$时发散，$|x|=\frac{1}{\rho}$时不能肯定。

**证明** 对级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots, \tag{1}$$

应用达朗贝尔判别法：

$$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{a_nx^n}{a_{n-1}x^{n-1}}\right|=\left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|\cdot|x|\to\rho|x|\ (n\to\infty).$$

因此：

1° 当 $\rho=0$ 时，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to\rho|x|=0\ (n\to\infty)$，即（1）对任意的 $x$ 值都收敛；

2° 当 $\rho=\infty$ 时，对 $x\neq0$，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to\rho|x|=\infty(n\to\infty)$，级数(1)发散。对 $x=0$，(1)收敛是显然的。

3° 当 $\rho$ 为一正数时，对$|x|<\frac{1}{\rho}$，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to\rho\cdot|x|<1$ $(n\to\infty)$，级数(1)收敛；对$|x|>\frac{1}{\rho}$，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to\rho|x|>1$，级数发散；对$|x|=\frac{1}{\rho}$，$\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|\to\rho|x|=1$，(1)的敛散性不能肯定。

若更深入地研究将会知道，对任一幂级数(1)，必定存在一个非负数$R$，使对一切$|x|<R$的点$x$，幂级数(1)都收敛（如果$R=0$，则幂级数(1)仅在$x=0$时收敛），而对一切$|x|>R$的点$x$，幂级数(1)都发散。$R$称为此幂级数的**收敛半径**。区间$(-R,R)$称为此幂级数的**收敛区间**。在收敛区间端点处(即$x=-R,R$)，幂级数可能收敛也可能发散。如果幂级数(1)在$(-\infty,+\infty)$上收敛；我们记作$R=+\infty$。

现在，幂级数的收敛问题已经完全归结为确定其收敛半径$R$和研究幂级数在收敛区间端点的收敛性。

有了收敛半径的定义之后，上面的命题可叙述为：若$\lim\limits_{n\to\infty}\left|\dfrac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\rho$，则$R=\dfrac{1}{\rho}$（当$\rho=0$时，$R=\infty$；当$\rho=\infty$时，$R=0$）。并且从命题证明中，可知级数(1)在开区间$(-R,R)$内绝对收敛。

例1　求级数

$$x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots$$

的收敛半径和收敛区域。

解

$$\because\quad \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\frac{\dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n-1}}\to 1=\rho\quad(n\to\infty),$$

$$\therefore\quad R=\frac{1}{\rho}=\frac{1}{1}=1.$$

于$x=1$处，级数成为莱布尼兹级数，

$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$，它是收敛的；

于 $x=-1$ 处，级数成为

$-1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{n}-\cdots$，它是发散的。

∴ 收敛区域为 $(-1,1]$。

例 2　求级数

$$1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots$$

的收敛半径和收敛区域。

解

$$\because\quad \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\frac{\dfrac{1}{(n-1)!}}{\dfrac{1}{(n-2)!}}=\frac{1}{n-1}\to 0\quad (n\to\infty),$$

∴　$R=\infty$，即收敛区域为 $(-\infty,\infty)$。

例 3　求 $1-x+\frac{x^3}{3!}-\frac{x^5}{5!}+\cdots+(-1)^{n+1}\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots$ 的收敛半径和收敛区域。

解　令 $a_n=(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n+1)!}$，对级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 应用达朗贝尔判别法，

$$\because\quad \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\left|\frac{\dfrac{1}{(2n+1)!}}{\dfrac{1}{(2n-1)!}}\right|=\frac{1}{2n(2n-1)}\to 0$$

$$(n\to\infty).$$

即每一 $x$ 点，都是幂级数的收敛点。所以收敛半径 $R=+\infty$，收敛区域为 $(-\infty,+\infty)$。

例 4　求 $1+x+2!x^2+3!x^3+\cdots+n!x^n+\cdots$ 的收敛半径。

解

$$\because \quad \left|\frac{a_n}{a_{n-1}}\right|=\left|\frac{(n-1)!}{(n-2)!}\right|=n-1\to\infty \qquad (n\to\infty).$$

$\therefore$　$R=0$，即级数仅在 $x=0$ 点收敛。

仿照上面的例题，请大家求出下列幂级数的收敛半径：

(1)　$x+2x^2+3x^3+\cdots+kx^k+\cdots$；

(2)　$1-x+(2!)x^2-(3!)x^3+(4!)x^4$
$+\cdots+(-1)^n(n!)x^n+\cdots$；

(3)　$x-\dfrac{1}{3!}x^3+\dfrac{1}{5!}x^5-\dfrac{1}{7!}x^7+\cdots$
$+(-1)^{n+1}\dfrac{1}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots$；

(4)　$1+\dfrac{1}{1!}x+\dfrac{1}{2!}x^2+\dfrac{1}{3!}x^3+\cdots+\dfrac{1}{n!}x^n+\cdots$；

(5)　$x-\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{4}x^4+\cdots+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n}x^n+\cdots$.

〔答案：(1)$R=1$，　(2)$R=0$，　(3)$R=\infty$，　(4)$R=\infty$，(5)$R=1$〕

## 幂级数的运算

在十七、十八世纪的时候，还没有明确的一般的函数概念，数学家们除了由多项式出发，经过运算得到“有理函数”及“无理函数”之外，很自然地把多项式推广到次数无限的多项式——幂级数．幂级数作为无限项幂函数之和仅在它

的收敛区域内这个和才有意义，它的和是定义在收敛区域上的函数。例如在(-1,1)区间内我们有

$$1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots=\frac{1}{1-x},$$

而当$|x|\geqslant 1$时，等号左端的级数是发散的（虽然$\frac{1}{1-x}$在$x\neq 1$时都有定义）。这里再次显出无限项之和与有限项之和是有质的差别的。有趣的是在十八世纪，许多数学家并不注意这种差别，有时就闹出差错来。我们必须牢记：幂级数和多项式不同，多项式在整个数轴上都有定义，而幂级数只在它的收敛区域内才有定义。两个多项式经过加、减、乘等运算还是多项式，而两个幂级数如何进行加、减、乘等运算呢？设已知两个幂级数

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots=f(x),$$

$$b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots=g(x),$$

这两幂级数按如下的定义来定义加、减、乘运算：

加法

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)+(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots)=(a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+\cdots+(a_n+b_n)x^n+\cdots.$$

减法

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)-(b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots++b_nx^n+\cdots)=(a_0-b_0)+(a_1-b_1)x+(a_2-b_2)x^2+\cdots+(a_n-b_n)x^n+\cdots.$$

乘法

$$(a_0+a_1x+a_2x_2+\cdots+a_nx^n+\cdots)\cdot(b_0+b_1x+b_2x^2$$

$$+\cdots+b_nx^n+\cdots)=a_0b_0+(a_0b_1+a_1b_0)x$$
$$+(a_0b_2+a_1b_1+a_2b_0)x^2+\cdots+(a_0b_n+a_1b_{n-1}$$
$$+\cdots+a_nb_0)x^n+\cdots.$$

注意到幂级数在它的收敛区间内是绝对收敛的，按照绝对收敛级数的运算性质可知，上述定义的幂级数的加、减、乘运算，其和、差、积的幂级数至少在两个幂级数收敛区间的公共部分，即两收敛区间的较小区间内是收敛的（注意：也可能出现和、差、积的收敛区间比原来的两级数的收敛区间都大的情况！）。

至于除法，两个多项式相除，一般说其商不再是多项式，而两幂级数相除的商仍可能表示成一幂级数．以

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots$$

为例来说吧．左端分式分子是零次多项式，分母是一次多项式，分子、分母都可看作幂级数．$\frac{1}{1-x}$不是多项式，但在$|x|<1$时，它是右端幂级数之和．幂级数在它的收敛区间内还有其他一些类似于多项式的运算性质，大家在高等数学中可以学到，诸如幂级数可以象多项式那样逐项微分、积分，这些更深刻的运算性质，这里我们就难于介绍了．

## 初等函数的展开式

既然幂级数有许多性质和多项式的性质类似，当一函数能表示成一幂级数的时候，就可以通过幂级数来研究这个函数．首先可以用多项式来近似计算函数值，例如，由$|x|<1$

有

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots,$$

从而就有近似公式

$$\frac{1}{1-x}\approx 1+x+x^2+\cdots+x^n.$$

我们在中学数学中所学的初等函数，如三角函数，反三角函数、指数函数、对数函数等等，它们在一定范围内都可以表示成幂级数，其幂级数叫做函数的幂级数展开式。下面我们把基本初等函数的幂级数展开式列举出来。

（1）三角函数、反三角函数的幂级数展开式。

我们知道，在中学里三角函数是由几何方法定义的，例如：

$\alpha$ 表示 $ox$ 轴正向射线绕原点转过的角的弧度数，在角 $\alpha$ 的终边上任取一点，其坐标为$(a,b)$，那么 $\sin\alpha$ 的定义是

$$\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

根据幂级数的理论，若以 $x$ 表示角的弧度数，那么三角函数的幂级数展开式如下

$$\sin x=x-\frac{1}{3!}x^3+\frac{1}{5!}x^5-\frac{1}{7!}x^7+\cdots+\frac{(-1)^{n+1}}{(2n+1)!}x^{2n+1}+\cdots,\qquad |x|<\infty.$$

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4-\frac{1}{6!}x^6+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,\qquad |x|<\infty.$$

（$|x|<\infty$ 表示幂级数的收敛半径 $R=+\infty$）

$$\operatorname{arc\,tg} x = x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots$$
$$+(-1)^n\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}+\cdots \qquad |x|\leqslant 1.$$

（2）指数函数与对数函数的幂级数展开式

$$e^x=1+x+\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{3!}x^3+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots \qquad |x|<\infty.$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+$$
$$+(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}+\cdots \qquad -1<x\leqslant 1.$$

（3）二项式定理的推广

大家熟知，当 $n$ 为自然数时

$$(1+x)^n=1+nx+\frac{n(n-1)}{2!}x^2+\cdots$$
$$+\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}x^k+\cdots+x^n,$$

右端是 $n$ 次多项式，一共是 $(n+1)$ 项．如果展开式中的自然数 $n$ 换成任意实数 $\alpha$，上述展开式中 $k$ 次项为

$$\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k,$$

一般地有

$$(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^3$$
$$+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k$$
$$+\cdots, \qquad |x|<1.$$

可见上述幂级数展开是二项式定理的推广．要注意的是 在 $\alpha$

不等于自然数的一般情况下，仅对$|x|<1$，展开式才成立。

读者可用关于幂级数收敛区域的命题验证上述各幂级数的收敛区域．大家自然会提出，为什么右端的级数在相应的收敛区域内恰好等于左端的函数？它的严格证明超出了本书的范围．这里，我们把基本初等函数的幂级数展开列举出来，是为了说明它们在近似计算方面的应用．

有了上面列出的基本初等函数的幂级数展开公式，我们可以运用级数的运算求出其他一些函数的幂级数展开式．

例如由

$$e^x=1+\frac{1}{1!}x+\frac{1}{2!}x^2+\cdots+\frac{1}{n!}x^n+\cdots,$$

我们来求 $e^{-x^2}$ 的展开，可以把上式中的 $x$ 换成 $-x^2$ 就得

$$e^{-x^2}=1+\frac{(-1)}{1!}x^2+\frac{1}{2!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n}+\cdots.$$

再如由

$$\cos x=1-\frac{1}{2!}x^2+\frac{1}{4!}x^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}+\cdots,$$

我们来求 $x\cos\frac{x}{2}$的展开，可以把上式中 $x$ 换为$\frac{x}{2}$得

$$\cos\frac{x}{2}=1-\frac{1}{2!}\left(\frac{x}{2}\right)^2+\frac{1}{4!}\left(\frac{x}{2}\right)^4+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}+\cdots,$$

两端乘以 $x$ 便得

$$x\cos\frac{x}{2}=x-\frac{1}{2!2^2}x^3+\frac{1}{4!2^4}x^5+\cdots+\frac{(-1)^n}{(2n)!2^{2n}}x^{2n+1}+\cdots.$$

读者试试看，写出下列函数的幂级数展开：

(1) $\frac{e^x - e^{-x}}{2}$；　　(2) $\sin\frac{x}{2}$；

(3) $\cos^2 x$；　　(4) $(1+x)\ln(1+x)$。

## 函数幂级数展开的应用举例

前面我们说过，函数表示成幂级数，那么函数就可以用幂级数的部分和——按升幂排列的多项式来近似表示。例如，由

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \cdots + \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} + \cdots,$$

可知当$|x|$比较小时，可用$x$，$x-\frac{x^3}{3!}$，或$x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}$，…等次数不同的多项式来近似代替$\sin x$，假若取$x-\frac{x^3}{3!}$来近似代替$\sin x$，其精确度可以达到$\frac{|x|^5}{5!}$的范围内。这样按精确度要求来取$\sin x$的展开式的部分和计算函数的近似值，是近似计算的基本方法。在电子计算机问世之前，曾有很多数学工作者为了编造函数用表贡献了自己的毕生精力。现代使用电子计算机，按照级数方法来造正弦、余弦、对数等常用的函数表，就成为轻而易举的了。

下面举例说明幂级数在近似计算中的应用。

(1) $e$ 的近似计算。

由 $e^x = 1 + x + \frac{1}{2!}x^2 + \cdots + \frac{1}{n!}x^n + \cdots,\qquad |x| < +\infty,$

取 $x=1$，可得

$$e=1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}+\cdots,$$

这样把 $e$ 表示成无限多个正数的和，就可以按精确度要求，用有限项的和作为 $e$ 的近似值。比如说要求精确到小数第四位，我们来研究一下该取几项就够了。

$$\because\quad 0<e-\left(1+1+\frac{1}{2!}+\cdots+\frac{1}{(n-1)!}\right)$$

$$=\frac{1}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}+\cdots$$

$$<\frac{1}{n!}+\frac{1}{nn!}+\frac{1}{n^2n!}+\cdots+\frac{1}{n^kn!}+\cdots$$

$$=\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}+\cdots\right)$$

$$=\frac{1}{n!}\frac{1}{1-\frac{1}{n}}=\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n-1}.$$

可见只要 $\frac{1}{(n-1)!}\cdot\frac{1}{n-1}<\frac{1}{10^4}$ 便可，这只要取 $n=8$ 就

有
$$\frac{1}{(8-1)!}\cdot\frac{1}{8-1}=\frac{1}{35280}<\frac{1}{10^4}.$$

于是，按精确度为 $\frac{1}{10^4}$ 的要求，

$$e\doteq1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\frac{1}{4!}+\frac{1}{5!}+\frac{1}{6!}+\frac{1}{7!}\doteq2.7183.$$

（2）$\pi$ 的近似计算.

由 $\operatorname{arctg} x=x-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5-\frac{1}{7}x^7+\cdots$

$$+\frac{(-1)^n}{2n-1}x^{2n-1}+\cdots$$

当 $x=1$ 时，有

$$\frac{\pi}{4}=\operatorname{arc\,tg}1=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\cdots+\frac{(-1)^n}{2n-1}+\cdots,$$

这等式右端的级数收敛太慢，用它来计算 $\pi$，假若要求精确到 $10^{-5}$，就得计算到50000项！

当 $x$ 较小，级数可以收敛得较快，如取 $x=\frac{1}{5}$，

$\varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}$，$\operatorname{tg}2\varphi=\dfrac{\frac{2}{5}}{1-\frac{1}{25}}=\dfrac{5}{12}$，$\operatorname{tg}4\varphi=\dfrac{\frac{5}{6}}{1-\frac{25}{144}}=\dfrac{120}{119}$。令

$\psi=4\varphi-\frac{\pi}{4}$，$\operatorname{tg}\psi=\operatorname{tg}\left(4\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\operatorname{tg}4\varphi-\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1+\operatorname{tg}4\varphi\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\frac{120}{119}-1}{1+\frac{120}{119}}$

$=\dfrac{1}{239}$。由此可得

$$\frac{\pi}{4}=4\varphi-\psi=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

将 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}=\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\cdots$

及 $\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}=\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{239}\right)^5$

$$-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{239}\right)^7+\cdots,$$

代入上式，便有

$$\frac{\pi}{4}=4\varphi-\psi=4\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{5}-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{239}$$

$$\doteq 4\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7+\cdots\right]$$

$$-\left[\frac{1}{239}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{239}\right)^3+\cdots\right],$$

上式最右端第一方括弧内级数取前四项，是其和的不足近似值；第二方括弧内级数取前一项是其和的过剩近似值．由此可知，用

$$\frac{\pi}{4}\approx 4\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7\right]-\frac{1}{239},$$

误差在 $4\frac{1}{9\cdot5^9}+\frac{1}{3\cdot239^3}<0.5\cdot10^{-6}$，而

$$4\cdot\left[4\left[\frac{1}{5}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{5}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5}\right)^5-\frac{1}{7}\left(\frac{1}{5}\right)^7\right]-\frac{1}{239}\right]$$

$$\doteq 3.1415916,$$

因此，可取 $\pi\approx3.14159$.

（3）函数值近似计算举例．

例 1　计算$\sqrt[5]{245}$的近似值，精确到小数四位．

**解**　$\sqrt[5]{245}=\sqrt[5]{3^5+2}=3\left(1+\frac{2}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}}$.

把$\left(1+\frac{2}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}}$按二项式定理的推广公式展开，可得

$$\sqrt[5]{245}=3\left(1+\frac{2}{3^5}\right)^{\frac{1}{5}}$$

$$=3\left(1+\frac{1}{5}\,\frac{2}{3^5}-\frac{4}{1\cdot2\cdot5^2}\cdot\frac{2^2}{3^{10}}+\cdots\right).$$

右端括号内级数是一交错级数，而由

$$\frac{3\cdot4\cdot2^2}{1\cdot2\cdot5^2\cdot3^{10}}=\frac{2^3}{5^2\cdot3^9}<\frac{1}{2\cdot10^4},$$

便得

$$\sqrt[5]{245}\approx 3\left(1+\frac{2}{5\cdot 3^5}\right)\approx 3.0049.$$

例 2　求 ln 2 的近似值精确到小数四位。

解　若直接用 $\ln 2=\ln(1+1)$的展开式

$$\ln 2=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots,$$

级数收敛太慢，例如要精确到 0.0001，就必须取到上万项之和！一般使用下面的展开式来实际计算对数值：

$$\begin{aligned}\ln\frac{1+x}{1-x}&=\ln(1+x)-\ln(1-x)\\&=\left(x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots\right)-\left(-x-\frac{x^2}{2}\right.\\&\qquad\left.-\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}-\cdots\right)\\&=2\left(x+\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{5}x^5+\cdots\right).\end{aligned}$$

将 $x$ 写成$\dfrac{1}{2N+1}$，其中$N$为自然数。这样

$$\ln\frac{1+\dfrac{1}{2N+1}}{1-\dfrac{1}{2N+1}}=\ln\frac{N+1}{N}=\ln(N+1)-\ln N$$

$$=2\left[\frac{1}{2N+1}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^3+\frac{1}{5}\left(\frac{1}{2N+1}\right)^5+\cdots\right].$$

取$N=1$，便得

$$\ln 2=2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}+\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}\right.$$

$$+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\cdots\Big),$$

而 $$2\left(\frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9}+\frac{1}{11}\cdot\frac{1}{3^{11}}+\cdots\right)<\frac{2}{3^{11}}\left[1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots\right]$$

$$=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{9}}=\frac{2}{3^{11}}\cdot\frac{9}{8}=\frac{1}{4\cdot3^9}<\frac{1}{10^4}.$$

所以 $\ln 2$ 的精确到小数四位的近似值为

$$\ln 2\approx2\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7}\right)\approx0.6931.$$

**例 3** 计算 $\sin 10^\circ$，精确度为 $10^{-5}$。

**解** 我们先把 $10^\circ$ 变成弧度数

$$10^\circ=\frac{10^\circ}{360^\circ}\cdot2\pi=\frac{\pi}{18}=0.174533.$$

$$\sin 10^\circ=\sin\frac{\pi}{18}=\frac{\pi}{18}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3+\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5+\cdots,$$

因为 $$\frac{1}{5!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^5<\frac{1}{120}(0.18)^5<0.0000016.$$

所以取级数前两项之和，精确度可达 $10^{-5}$，即

$$\sin 10^\circ=\sin\frac{\pi}{18}\approx\frac{\pi}{18}-\frac{1}{3!}\left(\frac{\pi}{18}\right)^3$$

$$\approx0.174533-\frac{1}{6}(0.174533)^3\approx0.17364.$$

（4）欧拉公式

由 $$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\frac{x^8}{8!}+\cdots$$

$$+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+\cdots$$

$$=1+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^4}{4!}+\frac{(ix)^6}{6!}+\frac{(ix)^8}{8!}$$

$$+\cdots+\frac{(ix)^{2n}}{(2n)!}+\cdots;$$

$$i\sin x=i\left[x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}+\cdots\right.$$

$$\left.+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots\right]$$

$$=(ix)+\frac{(ix)^3}{3!}+\frac{(ix)^5}{5!}+\cdots+\frac{(ix)^{2n+1}}{(2n+1)!}+\cdots.$$

两者加起来，

$$\cos x+i\sin x=1+(ix)+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}$$

$$+\cdots+\frac{(ix)^n}{n!}+\cdots,$$

恰好是 $$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+\cdots$$

的 $x$ 代以 $ix$，自然地在复数范围里定义

$$e^{ix}=1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\cdots+\frac{(ix)^n}{n!}+\cdots$$

$$=\cos x+i\sin x.$$

这便是著名的欧拉公式：

$$e^{ix}=\cos x+i\sin x,$$

或

$$\cos x=\frac{1}{2}(e^{ix}+e^{-ix}),$$

$$\sin x=\frac{1}{2i}(e^{ix}-e^{-ix}).$$

由欧拉公式将三角函数与指数函数联系起来，使我们可以运

用指数运算法则导出三角函数的关系式。如

$$e^{i(x+y)}=\cos(x+y)+i\sin(x+y).$$

另一方面

$$\begin{aligned}e^{i(x+y)}&=e^{ix}\cdot e^{iy}=(\cos x+i\sin x)(\cos y+i\sin y)\\&=(\cos x\cos y-\sin x\sin y)+i(\cos x\sin y\\&\quad+\sin x\cos y),\end{aligned}$$

可得 $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y,$

$$\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y.$$

再如 $e^{inx}=\cos nx+i\sin ny,$

而 $e^{inx}=(e^{ix})^n=(\cos x+i\sin x)^n,$

将右端展开，其实部就是 $\cos nx$，虚部就是 $\sin nx$。

我们知道：复数 $x+iy$ 在极坐标系下可写成

$$x+iy=r(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

这里 $r=\sqrt{x^2+y^2}$，$\varphi=\mathrm{tg}^{-1}\dfrac{y}{x}$。根据欧拉公式，将复数表示成：

$$x+iy=re^{i\varphi}.$$

这样一来，代数中的德·莫佛公式就很容易得到：

$$(x+iy)^n=(re^{i\varphi})^n=r^ne^{in\varphi}.$$

请你从下列近似计算题目中至少选三道做一做，这样你才能领会本节内容的含意。

求函数近似值。

1. $\ln 3$ （精确到0.001）；

2. $\sqrt{e}$ （精确到0.001）；

3. $\dfrac{1}{10.3}$ （精确到0.0001）；

〔提示：利用$\frac{1}{10.3}=\frac{1}{10}\cdot\frac{1}{1+\frac{3}{100}}$，并用$\frac{1}{1+x}$的展开式〕

4．$\sqrt[3]{1.015}$ （精确到 0.0001）；

5．$\sin 1°$ （精确到 0.0001）；

6．$\sin 10°$ （精确到 0.0001）．

书号 13195·103
定价 0.45 元