姓名________ 学号 □□□□□□□□□□□ 学院________ 专业________ 座位号________

（密封线内不答题）

密 封 线

诚信应考,考试作弊将带来严重后果！

华南理工大学期末考试

《数学分析（一）》试卷 A

注意事项：1．考前请将密封线内填写清楚；

2．所有答案请直接答在试卷上(或答题纸上)；

3．考试形式：闭卷；

4．本试卷共 5 大题，满分 100 分， 考试时间 120 分钟。

题 号	一	二	三	四	五	总分
得 分						
评卷人						

一、选择题（每小题 3 分， 共 15 分）

1．已知四命题：

(a) 若$\{a_n\}$的任一个子列都收敛，则$\{a_n\}$可能不收敛；

(b) 若$\{a_n\}$有一个子列收敛，则$\{a_n\}$收敛；

(c) 若$\{a_{2n-1}\}$和$\{a_{2n}\}$都收敛于同一个常数，则$\{a_n\}$收敛；

(d) 若$\{a_n\}$单调，则$\{a_n\}$可能收敛；

在上述命题中，正确命题的个数是________

(A) 0　　(B) 1　　(C) 2　　(D) 3

2．下列各选项中，________是函数 $y=x[x]$ 的不连续点。

(A) -1　　(B) 0　　(C) 0.1　　(D) 2.5

3．设 $k>1$，则函数 $f(x)=\begin{cases} x^k\sin\dfrac{1}{x^2}, & x\neq 0 \\ 0, & x=0 \end{cases}$ 在点 $x=0$ 的导数 $f'(0)=$______

(A) 1　　(B) 0　　(C) -1　　(D) 不存在

4．已知 $g(x)$ 在 $x=0$ 的某邻域内连续，且 $g(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{g(x)}{\cos x-1}=2$ 则在点 $x=0$ 处 $g(x)$________

(A) 可导且 $g'(0)=0$　　(B) 不可导　　(C) 取得极小值　　(D) 取得极大值

5．下列命题

(a) $f(x)$ 在点 x_0 连续的充要条件是：对任意给定的 $\varepsilon>0$，存在 $\sigma>0$，当

$|x'-x_0|<\sigma$, $|x''-x_0|<\sigma$时，恒有$|f(x')-f(x'')|<\varepsilon$。

(b) 任一有界数列必有收敛的子列，同样若是一个无界数列，则也存在收敛子列。

(c) 设$x_n=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ $(\mathrm{n}=1,2,3,\cdots)$，则$\{x_n\}$是发散的。

(d) 设$0<\theta<1$，则

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}+\frac{x^{2n+3}}{(2n+3)!}\sin\left[\theta x+\left(n+\frac{3}{2}\right)\pi\right],$$

错误个数为______

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4

二、填空题（每题 3 分，共 15 分）

1．$\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=A$的$\varepsilon$语言描述为______

______

______。

2．数β为非空实数集E下确界的定义是______

______

______。

3．若$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x+a}{x}\right)^{2x}=\frac{1}{e}$，则$a=$______。

4．设$x=a\cos t,\quad y=b\sin t$，则$\frac{d^2y}{dx^2}=$______。

5．$\lim\limits_{x\to0}\frac{\cos x-e^{-\frac{x^2}{2}}}{x^4}=$______。

三、证明（每小题 6 分，共 24 分）

1．用定义证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3n^2+n}{2n^2-1}=\frac{3}{2}$。

2．证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n^2+2}}+\frac{1}{\sqrt{n^2+3}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{n^2+n+1}}\right)=1$。

3．试用 Cauchy 收敛准则证明

$x_n=\frac{\cos1}{1\cdot2}+\frac{\cos2}{2\cdot3}+\cdots+\frac{\cos n}{n\cdot(n+1)}$收敛。

4．若$u=g(x)$在点x_0可导，$g(x_0)=u_0$，而$y=f(u)$在u_0可导，则复合函数在点x_0可导。

四、计算（共26分）

1．求$f(x)=\dfrac{e^{\frac{1}{x}}-1}{e^{\frac{1}{x}}+1}$的间断点，并判别其类型。（6分）

2．求$y=(x-1)\sqrt[5]{x^2}$的极值、凸性和拐点。（10分）

3．设$f(x)=\begin{cases}\dfrac{e^x-g(x)}{x}, & x\neq 0\\ A, & x=0\end{cases}$，已知$g(x)$有连续的二阶导数，且$g(0)=1$。

1) 确定A的值，使$f(x)$在$x=0$处连续；

2) 求$f'(x)$，并讨论$f'(x)$在$x=0$处的连续性。（10分）

五、解答题（每小题10分，20分）

1．讨论

(1) 对于满足$0<\eta<1$的每个η，$f(x)=\cos\dfrac{1}{x}$在$[\eta, 1]$上的一致连续性；

(2) $f(x)=\sin\dfrac{1}{x}$在开区间$(0, 1)$上的一致连续性，并证明你的结论。

2．若$f(x)$在点x_0具有直到m阶连续导数，且

$$f'(x_0)=f''(x_0)=\cdots=f^{(m-1)}(x_0)=0,\ f^{(m)}(x_0)\neq 0,$$

试讨论当$x=x_0$时$f(x)$的极值情况。