

# 目 录

<b>第一章 流形上的非蜕化光滑函数</b> .....	1
§ 1. 引论 .....	1
§ 2. 一些定义和引理 .....	4
§ 3. 用临界值刻划流形的同伦型 .....	13
§ 4. 例 .....	25
§ 5. Morse 不等式 .....	27
§ 6. 欧氏空间中的流形; 非蜕化函数的存在性 .....	31
§ 7. 关于超平面截面的 Lefschetz 定理.....	37
<b>第二章 Riemann 几何概要</b> .....	41
§ 8. 协变微分 .....	41
§ 9. 曲率张量 .....	48
§ 10. 测地线与完备性 .....	51
<b>第三章 对变分学的应用: 测地线</b> .....	63
§ 11. 光滑流形的道路空间 .....	63
§ 12. 道路的能量 .....	65
§ 13. 能量函数在临界道路处的 Hesse 泛函.....	69
§ 14. Jacobi 场; $E_{**}$ 的零化子空间 .....	73
§ 15. 指数定理 .....	79
§ 16. $\Omega^*$ 的有限维逼近.....	84
§ 17. 全道路空间的拓扑结构 .....	88
§ 18. 非共轭点的存在性 .....	92
§ 19. 拓扑结构与曲率的某些关系 .....	94
<b>第四章 对 Lie 群和对称空间的应用</b> .....	102
§ 20. 对称空间 .....	102
§ 21. Lie 群是对称空间 .....	104
§ 22. 极小测地线组成的全流形 .....	110
§ 23. Bott 关于酉群的周期性定理 .....	115

§ 24. 正交群的周期性定理 .....	124
附录 单调并的同伦型 .....	140
索引 .....	145

# 第一章 流形上的非蜕化光滑函数

## § 1. 引 论

在这一节里, 我们将讨论一个特例, 借以说明今后要对任意流形进行讨论的一般问题。让我们考虑一个环面  $M$ , 切于平面  $V$ , 如图 1 所示。

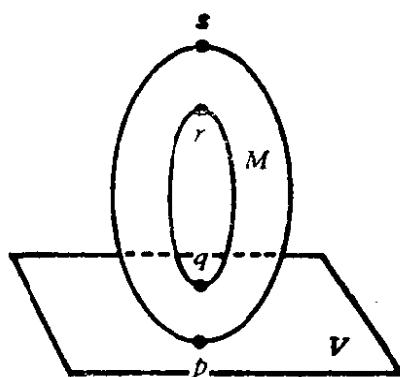


图 1

命  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  是关于平面  $V$  的高度 ( $\mathbf{R}$  总表示实数直线),  $M^a$  是合于  $f(x) \leq a$  的一切点  $x \in M$  的集合。于是下述事实为真:

- (1) 若  $a < f(p)$ , 则  $M^a$  是空集<sup>1)</sup>.
- (2) 若  $f(p) < a < f(q)$ , 则  $M^a$  同胚于一个 2 维胞腔。
- (3) 若  $f(q) < a < f(r)$ , 则  $M^a$  同胚于圆柱面:

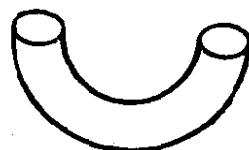


图 2

1) 这里的  $a < f(p)$  原文是  $a < 0 < f(p)$ . —— 译注

(4) 若  $f(r) < a < f(s)$ , 则  $M^a$  同胚于一个紧致流形, 其环柄数为 1, 边缘是一个圆周.

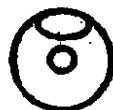


图 3

(5) 若  $f(s) < a$ , 则  $M^a$  是整个环面.

为了描述当  $a$  通过  $f(p), f(q), f(r), f(s)$  诸值时  $M^a$  发生的变化, 考虑同伦型比考虑同胚型要方便一些. 就同伦型而言:

(1)→(2) 的变化是粘合一个 0 维胞腔的运算. 因为, 就同伦型而言, 当  $f(p) < a < f(q)$  时, 空间  $M^a$  同一个 0 维胞腔毫无区别:



图 4

这里“ $\approx$ ”表示“具有同样的同伦型”.

(2)→(3) 的变化是粘合一个 1 维胞腔的运算:



图 5

(3)→(4) 的变化仍然是粘合一个 1 维细胞腔的运算:

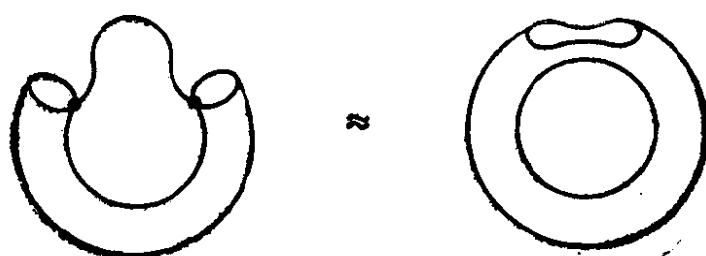


图 6

(4)→(5)的变化是粘合一个2维胞腔的运算。

“粘合一个 $k$ 维胞腔”的意义，可以确切定义如下。令 $Y$ 是任何一个拓扑空间，

$$e^k = \{x \in \mathbf{R}^k : \|x\| \leq 1\}$$

是 $k$ 维胞腔，由 $k$ 维欧氏空间中长度 $\leq 1$ 的所有向量组成，它的边缘

$$e^{k-1} = \{x \in \mathbf{R}^k : \|x\| = 1\},$$

记为 $S^{k-1}$ 。若 $g: S^{k-1} \rightarrow Y$ 是一个连续映像，那么先作 $Y$ 和 $e^k$ 的拓扑和（即是隔离并），然后把每个 $x \in S^{k-1}$ 和 $g(x) \in Y$ 看成一样，就得到

$$Y \bigcup_g e^k$$

( $Y$ 和 $k$ 维胞腔 $e^k$ 用 $g$ 粘合起来)。就 $k=0$ 的情形而言，让 $e^0$ 是一个点， $e^0 = S^{-1}$ 是空集，所以 $Y$ 和一个0维胞腔粘合起来，不过就是 $Y$ 和一个不属于它的点的并。

读者可能想到， $M^a$ 的同伦型发生变化的各点 $p, q, r$ 和 $s$ 的特性可以借助于函数 $f$ 加以简单的刻划。这些点是函数 $f$ 的临界点：如果我们在这些点的邻近选取任何一个坐标系 $(x, y)$ ，则偏导数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 和 $\frac{\partial f}{\partial y}$ 同时为零。在点 $p$ 处，我们可以选取 $(x, y)$ 使

得 $f = x^2 + y^2$ ，在点 $s$ 处可以使 $f = \text{常数} - x^2 - y^2$ ，而在点 $q$ 和 $r$ 处，可以使 $f = \text{常数} + x^2 - y^2$ 。注意：在每一点处， $f$ 的表达式中负号的个数，正好就是从 $M^a$ 过渡到 $M^b$ 时必须粘合的胞腔的维数，这里 $a < f$ （所考虑的点） $< b$ 。我们的头几个定理就是把这些事实推广到流形上的任意可微函数的情形。

## 参 考 文 献

为了进一步探讨 Morse 理论，下列基本文献是非常有用的。

- [1] M. Morse, The Calculus of Variations in the Large, American Mathematical Society, New York, 1934.
- [2] H. Seifert und W. Threlfall, Variationsrechnung im Grossen, New

- York, 1951(中译本: 大范围变分学, 江嘉禾译, 上海科学技术出版社, 1963).
- [3] R. Bott, The stable homotopy of the classical group, *Annals of Math.*, 70 (1959), 313—337.
- [4] R. Bott, Morse theory and its application to homotopy theory, 由 A. van de Ven 记录的(油印)讲义, University of Bonn, 1960.

## § 2. 一些定义和引理

“光滑”和“可微”这些字眼, 交替地用来表示  $C^\infty$  可微。光滑流形  $M$  在点  $p$  处的切空间记为  $TM_p$ 。如果  $g: M \rightarrow N$  是一个光滑映像,  $g(p) = q$ , 则  $g$  在切空间之间导出的线性映像记为  $g_*: TM_p \rightarrow TN_q$ .

现在命  $f$  是流形  $M$  上的一个光滑实值函数, 点  $p \in M$  称为  $f$  的临界点, 如果导出映像  $f_*: TM_p \rightarrow T\mathbf{R}_{f(p)}$  是零映像。这就是说, 如果在点  $p$  的邻域  $U$  中选取局部坐标系  $(x^1, \dots, x^n)$ , 则

$$\frac{\partial f}{\partial x^1}(p) = \dots = \frac{\partial f}{\partial x^n}(p) = 0.$$

实数  $f(p)$  称为  $f$  的临界值。

我们用  $M^*$  表示合于  $f(x) \leq a$  的一切点  $x \in M$  的集合, 如果  $a$  不是  $f$  的临界值, 则从隐函数定理可见,  $M^*$  是一个光滑的有边流形, 它的边缘  $f^{-1}(a)$  是  $M$  的光滑子流形。

一个临界点  $p$  称为非蜕化的, 如果矩阵

$$\left( \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p) \right)$$

是非异的。可以直接验证: 非蜕化性不依赖于坐标系的选择。这一点也可以从下述内蕴定义推出。

如果  $p$  是  $f$  的临界点, 我们来定义  $TM_p$  上的一个对称双线性泛函  $f_{**}$ , 称为  $f$  在点  $p$  处的 Hesse 泛函。若  $v, w \in TM_p$ , 则  $v$  和  $w$  可以扩张为向量场  $\tilde{v}$  和  $\tilde{w}$ 。命  $f_{**}(v, w) = \tilde{v}_p(\tilde{w}(f))$ , 其中  $\tilde{v}_p$  自然就是  $v$ , 而  $\tilde{w}(f)$  则表示  $f$  在方向  $\tilde{w}$  的方向导数。我们应该证明:  $f_{**}$  是完全确定的, 并且关于  $v$  和  $w$  是对称的。它是

对称的,因为

$$\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) - \tilde{w}_p(\tilde{v}(f)) = [\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0,$$

其中  $[\tilde{v}, \tilde{w}]$  是  $\tilde{v}$  和  $\tilde{w}$  的 Poisson 括号,而  $[\tilde{v}, \tilde{w}]_p(f) = 0$  是由于  $p$  是  $f$  的临界点.

这样一来,  $f_{**}$  是对称的. 它显然也是完全确定的, 因为  $\tilde{v}_p(\tilde{w}(f)) = v(\tilde{w}(f))$  不依赖于  $v$  的扩充  $\tilde{v}$ , 而  $\tilde{w}_p(\tilde{v}(f))$  不依赖于  $\tilde{w}$ .

如果  $(x^1, \dots, x^n)$  是点  $p$  处的一个局部坐标系,

$$v = \sum a_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p, \quad w = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x^i} \Big|_p,$$

则可取  $\tilde{w} = \sum b_i \frac{\partial}{\partial x^i}$ , 其中  $b_i$  表示常值函数. 于是

$$\begin{aligned} f_{**}(v, w) &= v(\tilde{w}(f))(p) = v\left(\sum b_i \frac{\partial f}{\partial x^i}\right)(p) \\ &= \sum_{i,j} a_i b_j \frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p), \end{aligned}$$

所以矩阵  $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(p)\right)$  就是双线性泛函  $f_{**}$  关于  $\frac{\partial}{\partial x^1} \Big|_p, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n} \Big|_p$  这组基的表示.

假设  $H$  是定义在向量空间  $V$  上的一个双线性泛函. 考虑  $V$  的一个子空间,使得  $H$  在这个子空间上是负定的,这种子空间的最大维数就定义为  $H$  的指数; 考虑向量  $v \in V$ , 使得对每个  $w \in V$  均有  $H(v, w) = 0$ , 所有这种向量  $v$  组成一个子空间, 称为  $H$  的零化子空间,它的维数称为  $H$  的零化数. 对于  $TM_p$  上的双线性泛函  $f_{**}$ , 现在可以界说它的指数和零化数了. 显然,  $f$  的临界点  $p$  非蜕化的充要条件是:  $f_{**}$  在  $TM_p$  上的零化数为零.  $f_{**}$  在  $TM_p$  上的指数,简称为  $f$  在点  $p$  处的指数. 下面的 Morse 引理表明:  $f$  在点  $p$  处的性态可以由这个指数完全刻划出来. 在叙述这个引理之前,我们先证明下面的

**引理 2.1** 命  $f$  是一个  $C^\infty$  函数, 定义在  $\mathbf{R}^n$  中原点 0 的一个

凸邻域  $V$  中, 使得  $f(0) = 0$ . 于是

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

其中  $g_i$  是某些适当的  $C^\infty$  函数, 定义在邻域  $V$  中, 合于

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0).$$

证 由于

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= \int_0^1 \frac{df(tx_1, \dots, tx_n)}{dt} dt \\ &= \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) \cdot x_i dt, \end{aligned}$$

所以我们可以命

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(tx_1, \dots, tx_n) dt.$$

**引理 2.2** (Morse 引理) 命  $p$  是  $f$  的一个非蜕化临界点. 于是存在  $p$  的一个邻域  $U$  和这个邻域中的局部坐标系  $(y^1, \dots, y^n)$ , 使得对一切  $i$  有  $y^i(p) = 0$ , 并且在整个邻域  $U$  中有恒等式

$$f = f(p) - (y^1)^2 - \cdots - (y^\lambda)^2 + (y^{\lambda+1})^2 + \cdots + (y^n)^2,$$

其中  $\lambda$  是  $f$  在点  $p$  处的指数.

证 我们首先证明: 对于  $f$  的任何一个这样的表达式,  $\lambda$  都一定是  $f$  在点  $p$  处的指数. 对于任何坐标系  $(z^1, \dots, z^n)$ , 如果

$$\begin{aligned} f(q) &= f(p) - (z^1(q))^2 - \cdots - (z^\lambda(q))^2 \\ &\quad + (z^{\lambda+1}(q))^2 + \cdots + (z^n(q))^2, \end{aligned}$$

则有

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^i \partial z^j}(p) = \begin{cases} -2, & \text{如果 } i = j \leq \lambda, \\ 2, & \text{如果 } i = j > \lambda, \\ 0, & \text{其它情形.} \end{cases}$$

这就表明  $f_{**}$  关于  $\left. \frac{\partial}{\partial z^1} \right|_p, \dots, \left. \frac{\partial}{\partial z^n} \right|_p$  这组基的代表矩阵是

$$\begin{bmatrix} -2 & & & \\ & \ddots & & \\ & & -2 & \\ & & & \ddots \\ & & & & 2 \\ & & & & & \ddots \\ & & & & & & 2 \end{bmatrix}$$

因此存在  $TM_p$  的一个  $\lambda$  维子空间,使得  $f_{**}$  为负定,并且存在一个  $n - \lambda$  维子空间  $V$ ,使得  $f_{**}$  为正定. 假若存在  $TM_p$  的一个子空间,其维数大于  $\lambda$ ,使得  $f_{**}$  为负定,则这个空间就会和  $V$  有非零的交<sup>1)</sup>,这显然是不可能的,因此  $\lambda$  是  $f_{**}$  的指数.

现在来证明:的确存在这样一个适当的坐标系  $(y^1 \dots y^n)$ . 显然,我们可以假设:  $p$  是  $\mathbf{R}^n$  的原点,并且  $f(p) = f(0) = 0$ . 按照引理 2.1,我们可以记

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n x_i g_i(x_1, \dots, x_n),$$

其中  $(x_1, \dots, x_n)$  在原点 0 的某个邻域中. 由于点 0 假定是临界点,所以<sup>2)</sup>

$$g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0.$$

因此,应用引理 2.1 于  $g_i$ ,我们有

$$g_i(x_1, \dots, x_n) = \sum_{j=1}^n x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n),$$

其中  $h_{ij}$  是某些适当的光滑函数,从而

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n x_i x_j h_{ij}(x_1, \dots, x_n).$$

可以假设  $h_{ij} = h_{ji}$ ,因为若命  $\bar{h}_{ij} = \frac{1}{2}(h_{ij} + h_{ji})$ ,则有  $\bar{h}_{ij}$

1) 原文是“这个子空间就会和  $V$  相交”. ——译注

2) 原文的公式是  $g_i(0) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(0) = 0$ ,显系笔误. 此外,请读者注意,本书中

局部坐标均用上标编号表示,如  $(u^1, \dots, u^n)$ ,而欧氏空间中的坐标则用下标编号表示,如  $(x_1, \dots, x_n)$ . 但原文偶有笔误,均依此改正,不再加注. ——译注

$= \bar{h}_{ii}$ , 且  $f = \sum x_i x_j \bar{h}_{ij}$ . 此外, 矩阵  $(h_{ij}(0))$  等于

$$\left( \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} (0) \right),$$

因而是非异的.

于是, 存在一个非异坐标变换, 使得  $f$  在原点 0 的某个可能较小的邻域中具有所要的表达式. 要看出这点, 我们可以完全仿照通常化二次型为对角型的证法 (例如见 Birkhoff and Maclane, A Survey of Modern Algebra, p. 271). 关键的一步可以说明如下.

用归纳法, 假设在 0 的某个邻域  $U_1$  中, 存在坐标系  $(u_1, \dots, u_n)$ , 使得在整个  $U_1$  中

$$f = \pm (u_1)^2 \pm \dots \pm (u_r)^2 + \sum_{i,j > r} u_i u_j H_{ij}(u_1, \dots, u_n),$$

其中矩阵  $(H_{ij}(u_1, \dots, u_n))$  是对称的. 对最后  $n - r + 1$  个坐标施行线性变换后, 可以假设  $H_{rr}(0) \neq 0$ . 命  $g(u_1, \dots, u_n)$  表示  $|H_{rr}(u_1, \dots, u_n)|$  的平方根, 它在点 0 的某个较小的邻域  $U_2 \subset U_1$  中是  $u_1, \dots, u_n$  的非零光滑函数. 现在引进新坐标  $v_1, \dots, v_n$  如下:

$$v_i = u_i, \text{ 如果 } i \neq r,$$

$$v_r(u_1, \dots, u_n) = g(u_1, \dots, u_n) \left[ u_r + \sum_{i>r} u_i \frac{H_{ir}(u_1, \dots, u_n)}{H_{rr}(u_1, \dots, u_n)} \right].$$

从反函数定理可见, 在 0 的某个充分小的邻域  $U_3$  中,  $v_1, \dots, v_n$  可以取作坐标. 容易验证, 在整个邻域  $U_3$  中,  $f$  可以表为

$$f = \sum_{i \leq r} \pm (v_i)^2 + \sum_{i,j > r} v_i v_j H_{ij}^r(v_1, \dots, v_n).$$

这就完成了归纳证明, 引理 2.2 证毕.

**推论 2.3** 非蜕化临界点是孤立的.

现在给出一些例子, 讨论  $\mathbf{R}$  和  $\mathbf{R}^n$  上的函数的蜕化临界点, 并加以图示如下.

(a)  $f(x) = x^3$ . 原点是蜕化的临界点。

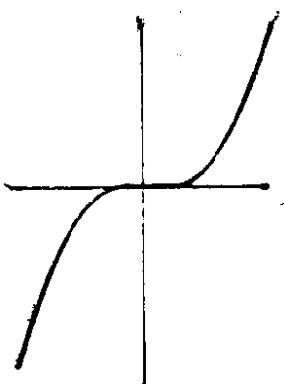


图 7

(b)  $f(x) = e^{-\frac{1}{x^2}} \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$ . 原点是蜕化的非孤立临界点。

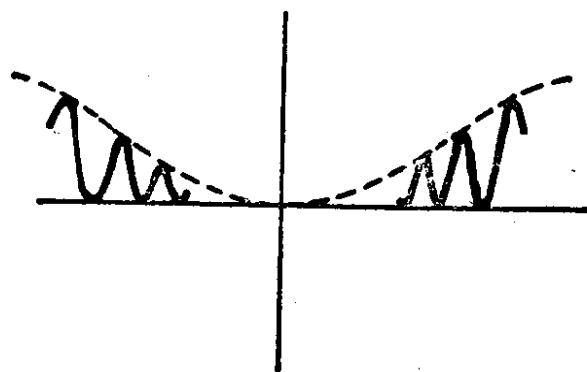


图 8

(c)  $f(x, y) = x^3 - 3xy^2 = (x + iy)^3$  的实部。原点(0, 0)是蜕化的临界点(“猴鞍点”)。

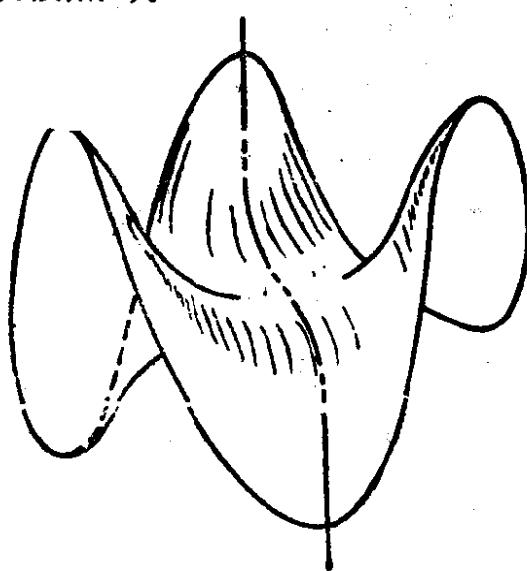


图 9

(d)  $f(x, y) = x^2$ . 临界点集是  $y$  轴<sup>1)</sup>, 它是  $\mathbf{R}^2$  的子流形. 临界点全是蜕化的.

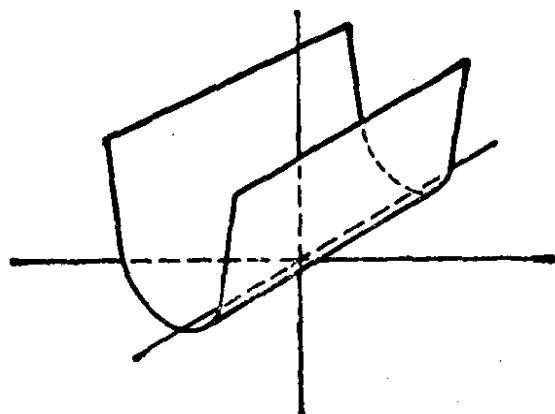


图 10

(e)  $f(x, y) = x^2y^2$ . 临界点全是蜕化的. 临界点集是  $x$  轴和  $y$  轴的并, 不是  $\mathbf{R}^2$  的子流形.

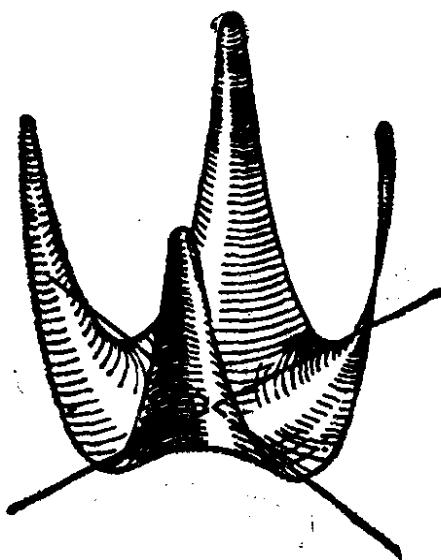


图 11

在结束本节之前, 让我们来讨论单参数微分同胚群. 想要深究的读者可以参考 K. Nomizu 的 Lie Groups and Differential Geometry.

1) 原文是“临界点集是  $x$  轴”. ——译注

流形  $M$  的单参数微分同胚群是一个  $C^\infty$  映像

$$\varphi: \mathbf{R} \times M \rightarrow M,$$

使得

- 1) 对于每个  $t \in \mathbf{R}$ , 由  $\varphi_t(q) = \varphi(t, q)$  定义的映像  $\varphi_t: M \rightarrow M$ , 是一个把  $M$  映成自身的微分同胚.
- 2) 对于所有的  $t, s \in \mathbf{R}$ , 有  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ .

给了  $M$  的一个单参数微分同胚群  $\varphi$ , 我们可以定义  $M$  上的一个向量场  $X$  如下. 对于每个光滑实值函数  $f$ , 命

$$X_q(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(q)) - f(q)}{h}.$$

我们说, 这个向量场  $X$  产生群  $\varphi$ .<sup>1)</sup>

**引理 2.4** 如果  $M$  上的光滑向量场  $X$  在一个紧致集  $K \subset M$  之外为零, 则  $X$  产生  $M$  的唯一一个单参数微分同胚群  $\varphi$ .

**证** 对于  $M$  上任何一条光滑曲线

$$c: t \rightarrow c(t) \in M,$$

我们定义它的速度向量

$$\frac{dc}{dt} \in TM_{c(t)}$$

为

$$\frac{dc}{dt}(f) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(c(t+h)) - f(c(t))}{h}^2$$

(比较 § 8). 现在假定  $\varphi$  是一个单参数微分同胚群, 由向量场  $X$  所产生. 于是, 对于每个固定的  $q$ , 曲线

$$t \rightarrow \varphi_t(q)$$

满足微分方程

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt} = X_{\varphi_t(q)}$$

1) “ $X$  产生群  $\varphi$ ” 这是自 Nomizu 以来的习惯说法, 虽然与  $X, \varphi$  的先后次序不吻合. ——译注

2) 原文右端是  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(t+h) - f(t)}{h}$ , 显系笔误. ——译注

以及初始条件

$$\varphi_0(q) = q.$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi_t(q)}{dt}(f) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_{t+h}(q)) - f(\varphi_t(q))}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\varphi_h(p)) - f(p)}{h} = X_p(f),\end{aligned}$$

其中  $p = \varphi_t(q)$ . 但是，大家知道，这样一个微分方程，局部而言，具有唯一解，光滑依赖于初始条件。[见 Graves, The Theory of Functions of Real Variables, p. 166. 注意：借助于局部坐标  $u^1, \dots, u^n$ , 这个微分方程可以改写为比较熟悉的形式：

$$\frac{du^i}{dt} = X^i(u^1, \dots, u^n), \quad i = 1, \dots, n.]$$

于是，对于  $M$  的每一点，存在一个邻域  $U$  和一个实数  $\varepsilon > 0$ ，使得当  $q \in U$ ,  $|t| < \varepsilon$  时，微分方程

$$\frac{d\varphi_t(q)}{dt} = X_{\varphi_t(q)}, \quad \varphi_0(q) = q$$

具有唯一光滑解。

紧致集  $K$  可以由有限多个这样的邻域  $U$  所覆盖。命  $\varepsilon_0 > 0$  表示相应诸数  $\varepsilon$  中的最小者。对于  $q \notin K$ , 命  $\varphi_t(q) = q$ . 于是对于  $|t| < \varepsilon_0$  和一切  $q \in M$ , 这个微分方程具有唯一解  $\varphi_t(q)$ . 这个解作为双变数函数是光滑的。此外，如果  $|t|, |s|, |t + s| < \varepsilon_0$ , 显然有  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ . 因此，每个这样的  $\varphi_t$  都是一个微分同胚。

现在剩下的就是还要对  $|t| \geq \varepsilon_0$  来定义  $\varphi_t$ . 任何一个数  $t$  可以表为  $\frac{\varepsilon_0}{2}$  的倍数再加上一个余数  $r$ ,  $|r| < \frac{\varepsilon_0}{2}$ . 如果  $t = k \frac{\varepsilon_0}{2} + r$ ,  $k \geq 0$ , 则命

$$\varphi_t = \varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \cdots \circ \varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}} \circ \varphi_r,$$

其中变换  $\varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$  重复  $k$  次。若  $k < 0$ , 只须以  $\varphi_{-\frac{\varepsilon_0}{2}}$  代替  $\varphi_{\frac{\varepsilon_0}{2}}$  并重复一次即可, 于是  $\varphi_t$  对一切  $t$  值有定义。不难验证,  $\varphi_t$  是完全确定的、光滑的, 并且满足条件  $\varphi_{t+s} = \varphi_t \circ \varphi_s$ 。这就完成了引理 2.4 的证明。

**注**  $X$  在一个紧致集之外为零, 这个假定不能取消。例如, 命  $M$  是单位开区间  $(0, 1) \subset \mathbf{R}$ ,  $X$  是  $M$  上的标准向量场  $\frac{d}{dt}$ , 则  $X$  不产生  $M$  的任何单参数微分同胚群。

### § 3. 用临界值刻划流形的同伦型

在整个这一节里, 若  $f$  是流形  $M$  上的实值函数, 则命

$$M^a = f^{-1}(-\infty, a] = \{p \in M : f(p) \leq a\}.$$

**定理 3.1** 命  $f$  是流形  $M$  上的光滑实值函数,  $a < b$ 。如果集合  $f^{-1}[a, b] = \{p \in M : a \leq f(p) \leq b\}$  是紧致集, 不含  $f$  的任何临界点, 则  $M^a$  微分同胚于  $M^b$ 。此外,  $M^a$  是  $M^b$  的形变收缩核, 所以包含映像  $M^a \rightarrow M^b$  是一个同伦等价。

证明的思想在于沿着超曲面  $f =$  常数的正交轨线把  $M^b$  向下推到  $M^a$  (见图 12)。

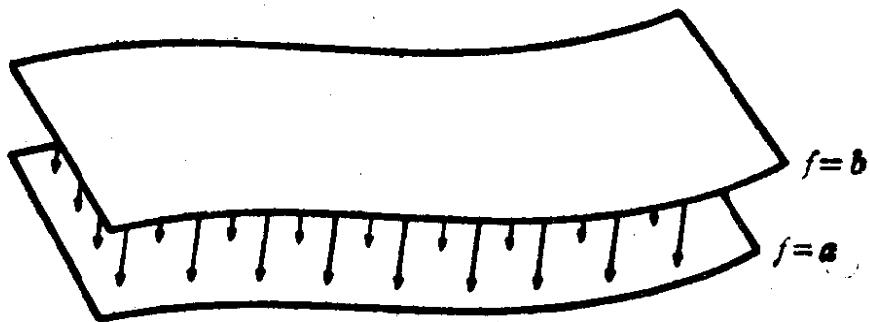


图 12

在  $M$  上选取一个 Riemann 尺度, 并命  $\langle x, y \rangle$  表示两个切向量的内积, 由这个尺度所确定。 $f$  的梯度  $\text{grad } f$  是  $M$  上的一

个向量场,由下面这个恒等式完全刻画出来<sup>1)</sup>: 对于任何向量场  $X$

$$\langle X, \operatorname{grad} f \rangle = X(f)$$

( $= f$  沿着  $X$  的方向导数). 因此, 向量场  $\operatorname{grad} f$  的零点正好就是  $f$  的临界点. 此外, 如果  $c: \mathbf{R} \rightarrow M$  是一条曲线, 其速度向量为  $\frac{dc}{dt}$ , 则有恒等式

$$\left\langle \frac{dc}{dt}, \operatorname{grad} f \right\rangle = \frac{d(f \circ c)}{dt}.$$

现在命  $\rho: M \rightarrow \mathbf{R}$  是一个光滑函数, 在整个紧致集  $f^{-1}[a, b]$  上等于  $1/\langle \operatorname{grad} f, \operatorname{grad} f \rangle$ , 而在这个集合的某个紧致邻域之外为零. 于是, 由

$$X_q = \rho(q)(\operatorname{grad} f)_q,$$

定义的向量场  $X$ , 满足引理 2.4 的条件, 从而  $X$  产生一个单参数微分同胚群

$$\varphi_t: M \rightarrow M.$$

对于固定的  $q \in M$ , 考虑函数  $t \rightarrow f(\varphi_t(q))$ . 如果  $\varphi_t(q)$  属于集合  $f^{-1}[a, b]$ , 则

$$\begin{aligned} \frac{df(\varphi_t(q))}{dt} &= \left\langle \frac{d\varphi_t(q)}{dt}, \operatorname{grad} f \right\rangle = \langle X, \operatorname{grad} f \rangle \\ &= +1. \end{aligned}$$

于是, 只要  $f(\varphi_t(q))$  在  $a$  和  $b$  之间, 则对应关系

$$t \rightarrow f(\varphi_t(q))$$

就是线性的, 并且导数为  $+1$ .

现在考虑微分同胚  $\varphi_{b-a}: M \rightarrow M$ . 显然, 这个映像把  $M^a$  微分同胚地映成  $M^b$ . 这就证明了定理 3.1 的前一半.

再定义单参数映像族

$$r_t: M^b \rightarrow M^b$$

1) 用典型记号, 借助于局部坐标  $u^1, \dots, u^n$ , 梯度向量的分量为

$$\sum_i g^{ij} \frac{\partial j}{\partial u^i} \quad (i = 1, \dots, n). \quad \text{——原注}$$

为

$$r_t(q) = \begin{cases} q, & \text{如果 } f(q) \leq a, \\ \varphi_{t(a-f(q))}(q), & \text{如果 } a \leq f(q) \leq b. \end{cases}$$

于是  $r_0$  是恒同映像,  $r_1$  是从  $M^b$  到  $M^a$  的收缩映像, 从而  $M^a$  是  $M^b$  的一个形变收缩核. 证毕.

注  $f^{-1}[a, b]$  是紧致的, 这个条件不能取消. 例如图 13 表示这个集合不是紧致的情形, 其中流形  $M$  不含点  $p$ . 显然,  $M^a$  不是  $M^b$  的形变收缩核.

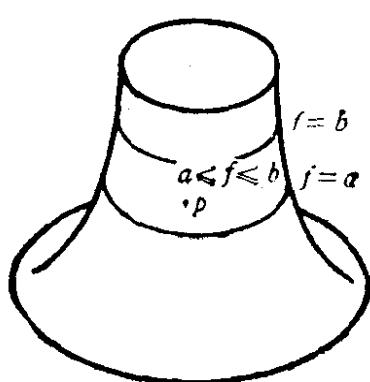


图 13

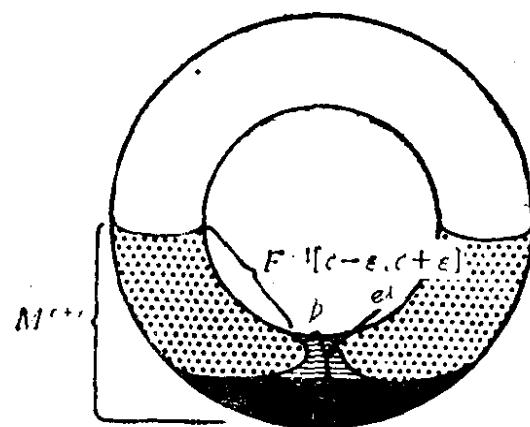


图 14

**定理 3.2** 命  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  是一个光滑函数,  $p$  是一个非蜕化临界点, 其指数为  $\lambda$ ,  $f(p) = c$ . 假设: 对于某个  $\epsilon > 0$ , 集合  $f^{-1}[c - \epsilon, c + \epsilon]$  是紧致的, 并且除了点  $p$  以外不再含有  $f$  的其他临界点. 于是, 当  $\epsilon$  充分小时,  $M^{c+\epsilon}$  的同伦型与  $M^{c-\epsilon}$  粘上一个  $\lambda$  维胞腔后的同伦型相同.

我们先就环面上的高度函数这个特例用图 14 说明一下证明这个定理的思想. 区域

$$M^{c-\epsilon} = f^{-1}(-\infty, c - \epsilon]$$

用重阴影来表示. 我们将引进一个新函数  $F: M \rightarrow \mathbf{R}$ , 使得在点  $p$  的某个小邻域中  $F < f$ , 而在这个邻域之外  $F$  和高度函数  $f$  完全相同, 于是区域  $F^{-1}(-\infty, c - \epsilon]$  就由  $M^{c-\epsilon}$  以及点  $p$  邻近的一个区域  $H$  组成. 这个  $H$  在图 14 中是用水平阴影区域来表示

的。选取一个适当的胞腔  $e^1 \subset H$ , (利用沿水平线的推移) 可以直接证明:  $M^{c-\varepsilon} \cup e^1$  是  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  的形变收缩核。最后, 应用定理 3.1 于函数  $F$  和区域  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$ , 可以看出  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  是  $M^{c+\varepsilon}$  的形变收缩核。这就是证明定理 3.2 的思想。

现在把这个证明详细地写出来。选取点  $p$  的邻域  $U$  以及  $U$  中的局部坐标系  $u^1, \dots, u^n$ , 使得恒等式

$$f = c - (u^1)^2 - \cdots - (u^k)^2 + (u^{k+1})^2 + \cdots + (u^n)^2$$

在整个  $U$  中处处成立, 所以临界点  $p$  具有坐标

$$u^1(p) = \cdots = u^n(p) = 0.$$

取  $\varepsilon > 0$  充分小, 使得

(1) 区域  $f^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  是紧致的, 并且除了点  $p$  外不再含有其它临界点。

(2) 在微分同胚嵌入映像

$$(u^1, \dots, u^n): U \rightarrow \mathbb{R}^n$$

下,  $U$  的像包含闭实心球

$$\{(u^1, \dots, u^n): \sum (u^i)^2 \leqslant 2\varepsilon\}.$$

现在定义  $e^1$  为  $U$  的一个子集, 由合于条件

$$(u^1)^2 + \cdots + (u^k)^2 \leqslant \varepsilon, \quad u^{k+1} = \cdots = u^n = 0$$

的点组成。所说的这些情况在图 15 中得到形象的说明: 两根坐

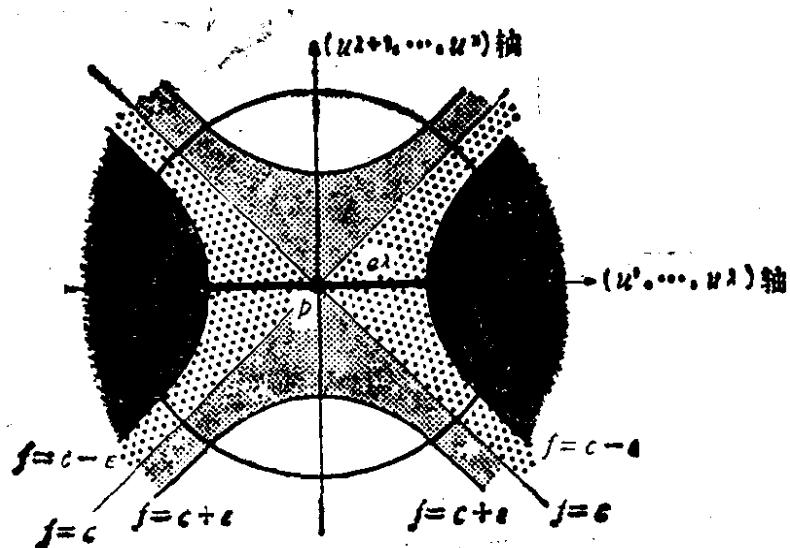


图 15

标线分别代表平面  $u^1 = \dots = u^\lambda = 0$  和  $u^{\lambda+1} = \dots = u^n = 0$ ；圆周表示半径为  $\sqrt{2\epsilon}$  的实心球的边缘；两条双曲线分别表示超曲面  $f^{-1}(c - \epsilon)$  和  $f^{-1}(c + \epsilon)$ ；区域  $M^{c-\epsilon}$  用重阴影表示，区域  $f^{-1}[c - \epsilon, c]$  用大点表示， $f^{-1}[c, c + \epsilon]$  则用小点表示；通过点  $p$  的水平黑线代表胞腔  $e^\lambda$ 。

注意， $e^\lambda \cap M^{c-\epsilon}$  正好是边缘  $e^\lambda$ ，所以  $e^\lambda$  和  $M^{c-\epsilon}$  自然粘合为  $M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$ 。我们必须证明： $M^{c-\epsilon} \cup e^\lambda$  是  $M^{c+\epsilon}$  的形变收缩核。

构造一个新的光滑函数  $F: M \rightarrow \mathbf{R}$  如下。命

$$\mu: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

是一个  $C^\infty$  函数，满足下列条件：

$$\mu(0) > \epsilon,$$

$$\text{对于 } r \geq 2\epsilon \text{ 有 } \mu(r) = 0,$$

$$\text{对于一切 } r \text{ 有 } -1 < \mu'(r) \leq 0, \text{ 其中 } \mu'(r) = \frac{d\mu}{dr}.$$

现在让  $F$  在坐标邻域  $U$  之外与  $f$  一致，而在这个坐标邻域内，则命

$$F = f - \mu[(u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2 + 2(u^{\lambda+1})^2 + \dots + 2(u^n)^2].$$

容易验证：在整个  $M$  上， $F$  是一个完全确定的光滑函数。

为方便计，再定义两个函数

$$\xi, \eta: U \rightarrow [0, \infty)$$

$$\xi = (u^1)^2 + \dots + (u^\lambda)^2,$$

$$\eta = (u^{\lambda+1})^2 + \dots + (u^n)^2.$$

于是，对于所有的  $q \in U$ ，

$$f(q) = c - \xi(q) + \eta(q),$$

$$F(q) = c - \xi(q) + \eta(q) - \mu(\xi(q) + 2\eta(q)).$$

**结论 1** 区域  $F^{-1}(-\infty, c + \epsilon]$  和区域  $M^{c+\epsilon} = f^{-1}(-\infty, c + \epsilon]$  重合。

**证** 在椭球  $\xi + 2\eta \leq 2\epsilon$  之外，函数  $F$  和  $f$  显然是相同的。在这个椭球之内，我们有

$$F \leq f = c - \xi + \eta \leq c + \frac{1}{2}\xi + \eta \leq c + s.$$

证毕。

**结论 2**  $F$  和  $f$  具有同样的临界点。

证 注意

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = -1 - \mu'(\xi + 2\eta) < 0,$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = 1 - 2\mu'(\xi + 2\eta) \geq 1.$$

由于

$$dF = \frac{\partial F}{\partial \xi} d\xi + \frac{\partial F}{\partial \eta} d\eta,$$

其中余切向量  $d\xi$  和  $d\eta$  只在原点处才同时为零，可见除了原点  $p$  外， $F$  在  $U$  中没有其它临界点。

现在考虑区域  $F^{-1}[c-s, c+s]$ 。根据结论 1 以及不等式  $F \leq f$ ，我们看出

$$F^{-1}[c-s, c+s] \subset f^{-1}[c-s, c+s].$$

因此，这个区域是紧致的。显然，它除了可能含有点  $p$  以外不能含有  $F$  的其它临界点。但是

$$F(p) = c - \mu(0) < c - s,$$

所以  $F^{-1}[c-s, c+s]$  不含  $F$  的任何临界点。再据定理 3.1，这就证明了下面的

**结论 3** 区域  $F^{-1}(-\infty, c-s]$  是  $M^{c+s}$  的形变收缩核。

为方便计，我们把  $F^{-1}(-\infty, c-s]$  这个区域记为  $M^{c-s} \cup H$ ，其中  $H$  表示  $F^{-1}(-\infty, c-s] - M^{c-s}$  的闭包。

**注** 按 Smale 的说法，区域  $M^{c-s} \cup H$  被说成是  $M^{c-s}$  和一条“柄”粘合起来。从定理 3.1 可见，有边流形  $M^{c-s} \cup H$  微分同胚于  $M^{c+s}$ 。这个事实在 Smale 的微分流形理论中是很重要的。（见 S. Smale, Generalized Poincaré's conjecture in dimensions greater than four, *Annals of Math.*, 74(1961), 391—406.）

现在考虑胞腔  $e^1$ , 由合于条件

$$\xi(q) \leq \varepsilon, \quad \eta(q) = 0$$

的所有点  $q \in U$  组成。注意,  $e^1$  含于“柄”  $H$  中。事实上, 由于  $\frac{\partial F}{\partial \xi} < 0$ , 我们有

$$F(q) \leq F(p) < c - \varepsilon;$$

但在  $q \in e^1$  时  $f(q) \geq c - \varepsilon$ .

现在的情况如图 16 所示: 区域  $M^{c-\varepsilon}$  用重阴影表示; 柄  $H$  用铅直箭头表示; 区域  $F^{-1}[c - \varepsilon, c + \varepsilon]$  则用点表示。

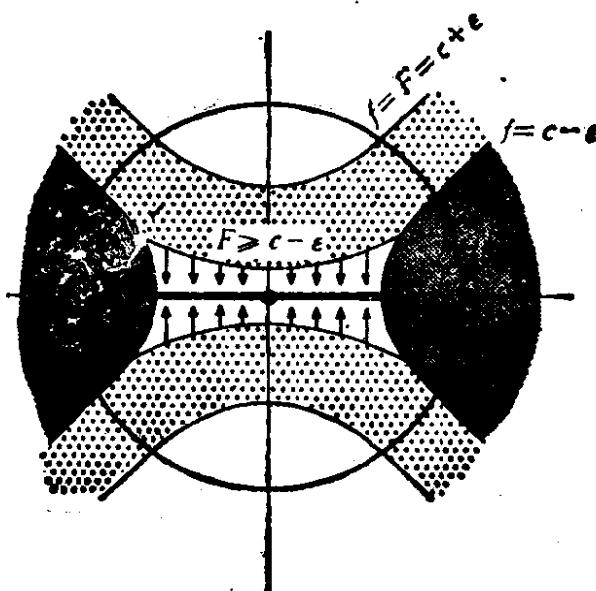


图 16

**结论 4**  $M^{c-\varepsilon} \cup e^1$  是  $M^{c-\varepsilon} \cup H$  的形变收缩核。

**证** 图 16 中的铅直箭头形象地表示出一个形变收缩映像  $r_1$ :  $M^{c-\varepsilon} \cup H \rightarrow M^{c-\varepsilon} \cup H$ . 更确切地说, 在邻域  $U$  之外, 命  $r_1$  是恒同映像; 在邻域  $U$  之内  $r_1$  定义如下. 我们需要分别考虑如图 17 所示的三种情形.

**情形 1** 在区域  $\xi \leq \varepsilon$  之内, 命  $r_1$  相当于下列变换

$$(u^1, \dots, u^n) \rightarrow (u^1, \dots, u^k, tu^{k+1}, \dots, tu^n).$$

于是  $r_1$  是恒同映像,  $r_1$  把整个区域  $\xi \leq \varepsilon$  映成  $e^1$ . 此外, 从不

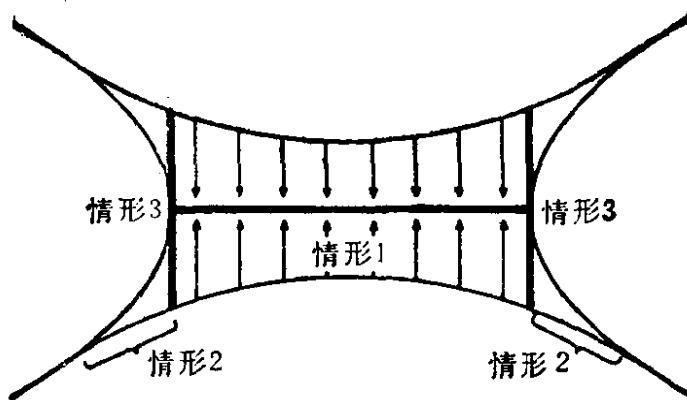


图 17

等式  $\frac{\partial F}{\partial \eta} > 0$  可见, 每个  $r_i$  都把区域  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  映入自身.

**情形 2** 在区域  $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$  之内, 命  $r_1$  相当于下述变换  $(u^1, \dots, u^n) \rightarrow (u^1, \dots, u^k, s_t u^{k+1}, \dots, s_t u^n)$ ,

其中数  $s_t \in [0, 1]$ , 定义为

$$s_t = t + (1-t) \left( \frac{\xi - \varepsilon}{\eta} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

于是  $r_1$  仍然是恒同映像,  $r_0$  把整个区域  $\varepsilon \leq \xi \leq \eta + \varepsilon$  映入超曲面  $f^{-1}(c - \varepsilon)$ . 读者应该验证: 函数  $s_t u^i$  当  $\xi \rightarrow \varepsilon$ ,  $\eta \rightarrow 0$  时仍然是连续的. 注意, 在  $\xi = \varepsilon$  时, 这个定义和情形 1 的定义一致.

**情形 3** 在区域  $\eta + \varepsilon \leq \xi$  内(即是在  $M^{c-\varepsilon}$  内), 命  $r_i$  是恒同映像. 这个定义当  $\xi = \eta + \varepsilon$  时与前面的定义是一致的.

这就证明了  $M^{c-\varepsilon} \cup e^1$  是  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  的形变收缩核<sup>1)</sup>. 从而, 再结合结论 3, 就完成了定理 3.2 的证明.

**注 3.3** 更一般地, 如果假设: 在  $f^{-1}(c)$  中存在  $k$  个非蜕化临界点  $p_1, \dots, p_k$ , 指数分别为  $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ , 那么可以相仿地证明:  $M^{c+\varepsilon}$  和  $M^{c+\varepsilon} \cup e^{\lambda_1} \cup \dots \cup e^{\lambda_k}$  具有同样的同伦型.

1) 这里的  $F^{-1}(-\infty, c - \varepsilon]$  原文是  $F^{-1}(-\infty, c + \varepsilon]$ . ——译注

**注 3.4** 把定理 3.2 的证明稍加修改，可以证明： $M^c$  也是  $M^{c+\varepsilon}$  的形变收缩核。事实上， $M^c$  是  $F^{-1}(-\infty, c)$  的形变收缩核，而后者又是  $M^{c+\varepsilon}$  的形变收缩核（见图 18）。把这个事实和定理 3.2 结合起来，容易看出： $M^{c-\varepsilon} \cup e^{\lambda}$  是  $M^c$  的形变收缩核。

**定理 3.5** 如果  $f$  是流形  $M$  上的可微函数，没有蜕化临界点，并且每个  $M^c$  都是紧致集，那么  $M$  具有一个 CW 复形的同伦型：对于指数为  $\lambda$  的每个临界点，这个复形有一个  $\lambda$  维胞腔。

(CW 复形的定义见 J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy I, *Bulletin of American Mathematical Society*, 55 (1949), 213—245.)

证明基于下面两个引理，讨论一个拓扑空间和一个胞腔的粘合问题。

**引理 3.6** (Whitehead) 命  $\varphi_0$  和  $\varphi_1$  是两个同伦的映像，把球面  $e^k$  映入  $X$ ，那么  $X$  的恒同映像可以扩张为一个同伦等价

$$k: X \underset{\varphi_0}{\cup} e^k \rightarrow X \underset{\varphi_1}{\cup} e^k.$$

**证** 用下面的公式来定义同伦等价  $k$ ：

$$k(x) = x, \text{ 如果 } x \in X,$$

$$k(iu) = 2iu, \text{ 如果 } 0 \leq i \leq \frac{1}{2}, u \in e^k,$$

$$k(iu) = \varphi_{2-i}(u), \text{ 如果 } \frac{1}{2} \leq i \leq 1, u \in e^k,$$

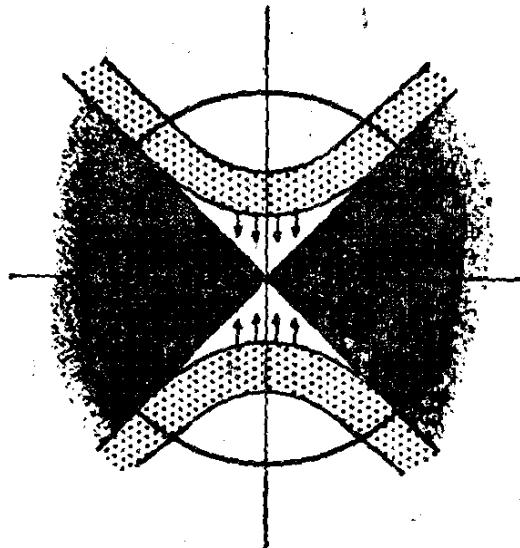


图 18

$M^c$  用重阴影表示  $F^{-1}[c, c + \varepsilon]$  用点表示

其中  $\varphi_1$  表示  $\varphi_0$  和  $\varphi_1$  之间的同伦,  $t_u$  表示数  $t$  和单位向量  $u$  的乘积. 仿此可以定义相应的映像

$$l: X \bigcup_{\varphi_1} e^1 \rightarrow X \bigcup_{\varphi_0} e^1.$$

不难验证: 复合映像  $kl$  和  $lk$  同伦于相应的恒同映像. 于是  $k$  是一个同伦等价.

想要进一步研究的读者可以参考 J. H. C. Whitehead, On simply connected 4-dimensional polyhedra, 引理 5, *Commentarii Math. Helvetici*, 22 (1949), 48—92.

**引理 3.7** 命  $\varphi: e^1 \rightarrow X$  是一个粘合映像, 那么任何同伦等价  $f: X \rightarrow Y$  均可扩张为同伦等价

$$F: X \bigcup_{\varphi} e^1 \rightarrow Y \bigcup_{f\varphi} e^1.$$

**证**(遵照 P. Hilton 的一篇未发表的文章) 映像  $F$  用下列条件定义:

$$\begin{cases} F|X = f, \\ F|e^1 = \text{恒同映像}. \end{cases}$$

命  $g: Y \rightarrow X$  是  $f$  的同伦逆, 映像

$$G: Y \bigcup_{f\varphi} e^1 \rightarrow X \bigcup_{g\varphi} e^1$$

用相应的条件定义:

$$\begin{cases} G|Y = g, \\ G|e^1 = \text{恒同映像}. \end{cases}$$

由于  $g\varphi$  同伦于  $\varphi$ , 从引理 3.6 可见, 存在同伦等价

$$k: X \bigcup_{g\varphi} e^1 \rightarrow X \bigcup_{\varphi} e^1.$$

我们先证明: 复合映像

$$kGF: X \bigcup_{\varphi} e^1 \rightarrow X \bigcup_{\varphi} e^1$$

同伦于恒同映像.

命  $h$  是  $gf$  和恒同映像之间的同伦. 从  $k$ ,  $G$  和  $F$  的各个定义

可见

$$kGF(x) = gf(x), \text{ 如果 } x \in X,$$

$$kGF(tu) = 2tu, \text{ 如果 } 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, u \in e^1,$$

$$kGF(tu) = h_{2-2t}\varphi(u), \text{ 如果 } \frac{1}{2} \leq t \leq 1, u \in e^1.$$

于是, 所要的同伦

$$q_r: X \bigcup_e e^1 \rightarrow X \bigcup_e e^1$$

就用下面的公式来定义:

$$q_r(x) = h_r(x), \text{ 如果 } x \in X,$$

$$q_r(tu) = \frac{2}{1+r} tu, \text{ 如果 } 0 \leq t \leq \frac{1+r}{2}, u \in e^1,$$

$$q_r(tu) = h_{2-2t+r}\varphi(u), \text{ 如果 } \frac{1+r}{2} \leq t \leq 1, u \in e^1.$$

因此,  $F$  具有左同伦逆.

根据下面的命题, 证明  $F$  是一个同伦等价就纯属形式了.

**命题** 如果映像  $F$  具有左同伦逆  $L$  和右同伦逆  $R$ , 则  $F$  是一个同伦等价, 并且  $R$  和  $L$  都是两边同伦逆.

**证** 关系

$$LF \simeq \text{恒同映像}, FR \simeq \text{恒同映像}$$

蕴涵

$$L \simeq L(FR) = (LF)R \simeq R,$$

从而

$$RF \simeq LF \simeq \text{恒同映像}.$$

这就证明了  $R$  是两边同伦逆.

引理 3.7 的证明现在可以完成如下. 关系

$$kGF \simeq \text{恒同映像}$$

说明  $F$  具有左同伦逆. 仿此可证  $G$  也具有左同伦逆. 于是, 据上述命题, 我们有:

**第一步** 由于  $k(GF) \simeq \text{恒同映像}$ , 而  $k$  已知具有左同伦逆,

可见  $(GF)k \simeq$  恒同映像.

**第二步** 由于  $G(Fk) \simeq$  恒同映像, 而  $G$  已知具有左同伦逆, 可见  $(Fk)G \simeq$  恒同映像.

**第三步** 由于  $F(kG) \simeq$  恒同映像, 而  $F$  以  $kG$  作为左同伦逆, 可见  $F$  是一个同伦等价.

这就完成了引理 3.7 的证明.

**定理 3.5 的证明** 命  $c_1 < c_2 < c_3 < \dots$  是  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  的临界值. 由于每个  $M^c$  都是紧致集, 所以序列  $\{c_i\}$  没有聚点. 当  $a < c_1$  时, 集  $M^a$  是空集. 假设:  $a = c_1, c_2, c_3, \dots$ , 并且  $M^a$  具有一个 CW 复形的同伦型. 命  $c$  是所有  $c_i > a$  的最小者. 据定理 3.1, 3.2 以及 3.3, 当  $\epsilon$  充分小时, 存在映像  $\varphi_1, \dots, \varphi_{j(c)}$ , 使得  $M^{c+\epsilon}$  具有  $M^{c-\epsilon} \bigcup_{\psi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \bigcup_{\psi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}}$  的同伦型; 并且存在同

伦等价  $h: M^{c-\epsilon} \rightarrow M^a$ . 我们已经假定: 存在同伦等价  $h': M^a \rightarrow K$ , 其中  $K$  是一个 CW 复形.

于是, 每个  $h' \circ h \circ \varphi_i$  经过胞腔逼近之后都同伦于一个映像

$\psi_i: e^{\lambda_i} \rightarrow K$  的  $(\lambda_i - 1)$  维骨架.

从而  $K \bigcup_{\psi_1} e^{\lambda_1} \cup \dots \bigcup_{\psi_{j(c)}} e^{\lambda_{j(c)}}$  是一个 CW 复形, 并且据引理 3.6,

3.7, 它和  $M^{c+\epsilon}$  具有同样的同伦型.

由归纳法可见, 任何  $M^a$  都具有 CW 复形的同伦型<sup>1)</sup>. 如果  $M$  是紧致的, 证明就完成了. 如果  $M$  不是紧致的, 但所有临界点均在某个紧致集  $M^a$  内, 那么仿照定理 3.1 的证明, 可证  $M^a$  是  $M$  的一个形变收缩核, 所以定理仍然得证.

如果存在无限多个临界点, 上面的作法就给出同伦等价的无限序列

$$\begin{array}{ccccccc} M^{a_1} & \subset & M^{a_2} & \subset & M^{a_3} & \subset & \dots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K_1 & \subset & K_2 & \subset & K_3 & \subset & \dots \end{array}$$

1) 这里的  $M^a$  原文是  $M^a$ . ——译注

其中每个映像都是前一个的扩张。命  $K$  表示诸  $K_i$  的并，具有直接极限拓扑，即是最精细的相容拓扑，并命  $g: M \rightarrow K$  是极限映像。于是， $g$  导出所有维数的同伦群的同构。这样～来，只须应用 Combinatorial Homotopy I 的定理 1，就可断定  $g$  是一个同伦等价。（Whitehead 的这个定理说：如果  $M$  和  $K$  都由 CW 复形所控制，则任何映像  $M \rightarrow K$ ，只要它导出各维数同伦群的同构，就必然是一个同伦等价。现在  $K$  当然由它本身所控制；要证明  $M$  也是由 CW 复形所控制，只须把  $M$  视为某个欧氏空间中管状邻域的收缩核即可。）定理 3.5 证毕。

**注** 我们也证明了：每个  $M^a$  都具有有限 CW 复形的同伦型：对于  $M^a$  中每个指数为  $\lambda$  的临界点，这个复形有一个  $\lambda$  维胞腔。这个事实即使当  $a$  是一个临界值时亦真（见注 3.4）。

#### § 4. 例

作为 § 3 诸定理的一个应用，我们来证明

**定理 4.1** (Reeb) 若  $M$  是一个紧致流形， $f$  是  $M$  上一个可微函数，只有两个临界点，均非蜕化，则  $M$  同胚于球面。

**证** 这个定理是从定理 3.1 以及 Morse 引理（§ 2.2）推出来的。两个临界点必为极小点与极大点；比如说， $f(p) = 0$  是极小值， $f(q) = 1$  是极大值。若  $\varepsilon$  充分小，则由 § 2.2 知， $M^\varepsilon = f^{-1}[0, \varepsilon]$  和  $f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$  这两个集合都是闭的  $n$  维胞腔，但按 § 3.1， $M^\varepsilon$  同胚于  $M^{1-\varepsilon}$ ，所以  $M$  乃是  $M^{1-\varepsilon}$  和  $f^{-1}[1 - \varepsilon, 1]$  这两个闭胞腔沿着它们的公共边缘拼合起来的并集。于是，不难构造出  $M$  和  $S^n$  之间的同胚映像了。

**注 1** 即使这两个临界点蜕化，定理仍然为真，但是，证明比较困难，（见 Milnor, Sommes de variétés différentiables et struc-

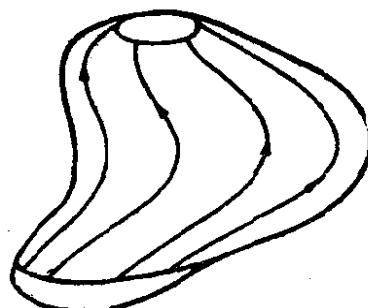


图 19

ctures différentiables des sphères, Bull. Soc. Math. de France, 87(1959), 439—444, 定理 1(3); 或见 R. Rosen, A weak form of the star conjecture for manifolds, Abstract 570—28, Notices Amer. Math. Soc., 7(1960), p. 380, 引理 1<sup>1</sup>.)

注 2 就  $S^n$  通常的微分结构而言,  $M$  不必微分同胚于  $S^n$ . (见 Milnor, On manifolds homeomorphic to the 7-sphere, Annals of Math., 64(1956), 399—405. 在这篇文章里, 对 7 维球面给出了一个非标准的微分结构; 找到这张球面上的一个函数, 具有两个非蜕化临界点, 从而证明这张球面和通常的  $S^7$  是拓扑等价的.)

作为前述诸定理的另一个应用, 我们指出: 对于一个  $n$  维流形说来, 如果在其上可以构造一个可微函数, 只有三个临界点, 那么(按照 Poincaré 对偶定理)这三个临界点具有指数 0,  $n$  和  $\frac{n}{2}$ , 而这个流形则同伦等价于一个  $\frac{n}{2}$  维球面再粘上一个  $n$  维胞腔. 这个情况是 J. Eells 和 N. Kuiper 在即将发表的文章中讨论的<sup>2)</sup>. 这种函数, 例如在实的或复的投影平面上就存在.

命  $CP_n$  是  $n$  维复投影空间, 我们把  $CP_n$  视为复数  $(n+1)$  元组  $(z_0, \dots, z_n)$  组成的等价类的集合, 其中  $\sum |z_i|^2 = 1$ .  $(z_0, \dots, z_n)$  的等价类记为  $(z_0:z_1:\dots:z_n)$ .

在  $CP_n$  上定义一个实值函数  $f$ :

$$f(z_0:z_1:\dots:z_n) = \sum c_i |z_i|^2,$$

其中  $c_0, c_1, \dots, c_n$  是各不相同的实常数.

为了确定  $f$  的临界点, 让我们考虑下面的局部坐标系. 命  $U_0$  是  $(z_0:z_1:\dots:z_n)$  组成的集合, 使得  $z_0 \neq 0$ . 再命

1) 本文系简报, 详细情况可参考 R. Rosen, Stellar neighborhoods in polyhedral manifolds, Proc. Amer. Math. Soc., 14(1963), 401—406. —译注

2) J. Eelles and N. Kuiper, Closed manifolds which admit nondegenerate functions with three critical points, Indag. Math., 23(1961), 411—417. —译注

$$|z_0| \frac{z_i}{z_0} = x_i + iy_i.$$

于是

$$x_1, y_1, \dots, x_n, y_n: U_0 \rightarrow \mathbf{R}$$

就是所要的坐标函数，把  $U_0$  微分同胚地映成  $\mathbf{R}^n$  中的开单位球。显然，

$$|z_i|^2 = x_i^2 + y_i^2, \quad |z_0|^2 = 1 - \sum (x_i^2 + y_i^2),$$

所以在整个坐标邻域  $U_0$  中处处有

$$f = c_0 + \sum_{i=1}^n (c_i - c_0)(x_i^2 + y_i^2).$$

于是  $f$  在  $U_0$  中只有一个临界点，就是这个坐标系的中心点

$$p_0 = (1:0:0:\dots:0).$$

$f$  在这一点是非蜕化的，其指数等于满足  $c_i < c_0$  的  $i$  的个数的二倍。

仿此，可以考虑另一些坐标系，其中心点分别为

$$p_1 = (0:1:0:\dots:0), \dots, p_n = (0:0:\dots:0:1).$$

由此可见， $f$  仅有的临界点就是  $p_0, p_1, \dots, p_n$ ； $f$  在  $p_k$  处的指数等于满足  $c_i < c_k$  的  $i$  的个数的二倍。因此，在 0 到  $2n$  之间的每个偶数都恰好是一个临界点的指数。按照定理 3.5，

$\mathbf{CP}_n$  同伦等价于形如

$$e^0 \cup e^2 \cup e^4 \cup \dots \cup e^{2n}$$

的  $CW$  复形。

从而， $\mathbf{CP}_n$  的整数同调群是

$$H_i(\mathbf{CP}_n, \mathbf{Z}) = \begin{cases} \mathbf{Z}, & i = 0, 2, 4, \dots, 2n, \\ 0, & \text{其他情形。} \end{cases}$$

## § 5. Morse 不等式

Morse 当初论述这个主题时，还没有定理 3.5 这样的结果可以利用， $M$  的拓扑结构与  $M$  上一个实值函数的临界点之间的关

系，则是借助于一组不等式来描述的，这一节就是要叙述原来的这个观点。

**定义** 命  $S$  是一个函数：对于某些空间偶，相应地有一个整数。 $S$  称为次可加的，如果  $X \supset Y \supset Z$  蕴涵  $S(X, Z) \leq S(X, Y) + S(Y, Z)$ 。等式成立时  $S$  称为可加的。

作为一个例子，把任何一个域  $F$  作为系数群，命

$$R_\lambda(X, Y) = (X, Y) \text{ 的第 } \lambda \text{ 个 Betti 数}$$

$$= H_\lambda(X, Y; F) \text{ 在 } F \text{ 上的秩，}$$

其中  $(X, Y)$  是任何空间偶，使得这个秩是有限的。考虑  $(X, Y, Z)$  的下面这部分正合序列

$$\cdots \rightarrow H_\lambda(Y, Z) \rightarrow H_\lambda(X, Z) \rightarrow H_\lambda(X, Y) \rightarrow \cdots,$$

容易看出  $R_\lambda$  是次可加的。

此外，Euler 示性数  $\chi(X, Y) = \sum (-1)^i R_i(X, Y)$  是可加的。

**引理 5.1** 命  $S$  是次可加的， $X_0 \subset \cdots \subset X_n$ 。于是

$$S(X_n, X_0) \leq \sum_{i=1}^n S(X_i, X_{i-1}).$$

若  $S$  可加，则等式成立。

**证** 对  $n$  用归纳法， $n = 1$  时等式显然成立， $n = 2$  的情形则为(次)可加性的定义。

如果结论对  $n - 1$  为真，则

$$S(X_{n-1}, X_0) \leq \sum_1^{n-1} S(X_i, X_{i-1}).$$

因此，

$$S(X_n, X_0) \leq S(X_{n-1}, X_0) + S(X_n, X_{n-1}) \leq \sum_1^n S(X_i, X_{i-1}).$$

结论对  $n$  亦真。

命  $S(X, \phi) = S(X)$ ，在引理 5.1 中取  $X_0 = \phi$ ，我们有

$$S(X_n) \leq \sum_1^n S(X_i, X_{i-1}). \quad (1)$$

若  $S$  可加, 则等式成立.

命  $M$  为一紧致流形,  $f$  是  $M$  上的可微函数, 具有孤立的非蜕化临界点. 命  $a_1 < \dots < a_k$ , 使得  $M^{a_i}$  恰好含有  $i$  个临界点, 而  $M^{a_k} = M$ . 于是

$$\begin{aligned} H_*(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) &= H_*(M^{a_{i-1}} \cup e^{\lambda_i}, M^{a_{i-1}}) \quad (\text{其中 } \lambda_i \\ &\quad \text{是临界点的指数}) \\ &= H_*(e^{\lambda_i}, e^{\lambda_i}) \quad (\text{据截除定理}) \\ &= \begin{cases} \text{系数群, 维数为 } \lambda_i \text{ 时,} \\ 0, \text{ 其他情形.} \end{cases} \end{aligned}$$

对于  $\phi = M^{a_0} \subset \dots \subset M^{a_k} = M$  和  $S = R_\lambda$  应用公式(1), 我们有

$$R_\lambda(M) \leq \sum_{i=1}^k R_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = c_\lambda;$$

其中  $c_\lambda$  表示指数为  $\lambda$  的临界点的个数. 把这个公式应用于  $S = \chi$  的情形, 我们有

$$\chi(M) = \sum_{i=1}^k \chi(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = c_0 - c_1 + c_2 - \dots \pm c_n.$$

这样, 我们就证明了

**定理 5.2 (弱性 Morse 不等式)** 若  $c_\lambda$  表示紧致流形  $M$  上指数为  $\lambda$  的临界点的个数, 则

$$R_\lambda(M) \leq c_\lambda, \tag{2}$$

$$\sum (-1)^\lambda R_\lambda(M) = \sum (-1)^\lambda c_\lambda. \tag{3}$$

稍强一些的不等式可由下述论断得证.

**引理 5.3** 命

$$\begin{aligned} S_\lambda(X, Y) &= R_\lambda(X, Y) - R_{\lambda-1}(X, Y) + R_{\lambda-2}(X, Y) \\ &\quad - \dots \pm R_0(X, Y), \end{aligned}$$

则函数  $S_\lambda$  是次可加的.

**证** 对于向量空间的正合序列

$$\xrightarrow{h} A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{j} C \xrightarrow{k} \dots \rightarrow D \rightarrow 0,$$

我们知道, 同态映像  $h$  的秩加上  $i$  的秩等于  $A$  的秩, 因此,

$$\begin{aligned}\text{rank } h &= \text{rank } A - \text{rank } i \\&= \text{rank } A - \text{rank } B + \text{rank } j \\&= \text{rank } A - \text{rank } B + \text{rank } C - \text{rank } k \\&\dots\dots \\&= \text{rank } A - \text{rank } B + \text{rank } C - \cdots \pm \text{rank } D.\end{aligned}$$

从而最后这个表达式  $\geq 0$ . 现在考虑空间  $X \supseteq Y \supseteq Z$  的正合同调序列, 把上面的计算方式应用于同态映像

$$H_{\lambda+1}(X, Y) \xrightarrow{\partial} H_\lambda(Y, Z),$$

我们看出

$$\begin{aligned}\text{rank } \partial &= R_\lambda(Y, Z) - R_\lambda(X, Z) + R_\lambda(X, Y) \\&\quad - R_{\lambda-1}(Y, Z) + \cdots \geq 0.\end{aligned}$$

合并同类项, 即得

$$S_\lambda(Y, Z) - S_\lambda(X, Z) + S_\lambda(X, Y) \geq 0.$$

证毕.

把  $S_\lambda$  这个次可加函数施行于空间

$$\phi \subset M^{a_1} \subset M^{a_2} \subset \cdots \subset M^{a_k},$$

我们得到 Morse 不等式:

$$S_\lambda(M) \leq \sum_{i=1}^k S_\lambda(M^{a_i}, M^{a_{i-1}}) = c_\lambda - c_{\lambda-1} + \cdots \pm c_0,$$

或

$$\begin{aligned}R_\lambda(M) - R_{\lambda-1}(M) + \cdots \pm R_0(M) &\leq c_\lambda - c_{\lambda-1} \\&\quad + \cdots \pm c_0.\end{aligned} \tag{4_\lambda}$$

这些不等式的确比前面的不等式强一些. 事实上, 将 (4\_\lambda) 和 (4\_{\lambda-1}) 相加, 得到 (2\_\lambda); 当  $\lambda > n$  时, 比较 (4\_\lambda) 和 (4\_{\lambda-1}), 则得到等式(3).

为了说明 Morse 不等式的用处, 让我们假设  $c_{\lambda+1} = 0$ , 于是  $R_{\lambda+1}$  也必须是零. 比较不等式 (4\_\lambda) 和 (4\_{\lambda+1}), 我们看出

$$R_\lambda - R_{\lambda-1} + \cdots \pm R_0 = c_\lambda - c_{\lambda-1} + \cdots \pm c_0.$$

现在假设  $c_{\lambda+1}$  也是零, 于是  $R_{\lambda+1} = 0$ . 同理可证

$$R_{\lambda+2} - R_{\lambda+3} + \cdots \pm R_0 = c_{\lambda+2} - c_{\lambda+3} + \cdots \pm c_0.$$

前面的等式减去这个等式, 我们得到下面的

**推论 5.4** 若  $c_{\lambda+1} = c_{\lambda+2} = 0$ , 则  $R_\lambda = c_\lambda$ , 且  $R_{\lambda+1} = R_{\lambda+2} = 0$ .

(当然, 这个结果也可以从定理 3.5 推出.) 注意, 这个推论使我们能够求得复投影空间的同调群(见 § 4)而无须利用定理 3.5.

## § 6. 欧氏空间中的流形; 非蜕化函数的存在性

尽管我们迄今所考虑的只是流形上没有蜕化临界点的函数, 可是我们却还不曾证明: 这种函数总是存在. 在这一节里, 我们将在嵌入  $\mathbf{R}^n$  的任何流形上构造许多函数, 没有蜕化临界点. 事实上, 如果对于固定的  $p \in \mathbf{R}^n$  定义函数  $L_p: M \rightarrow \mathbf{R}$  为  $L_p(q) = \|p - q\|^2$ , 那么, 对于几乎一切  $p$ , 函数  $L_p$  只有非蜕化临界点.

命  $M \subset \mathbf{R}^n$  是一个流形, 微分嵌入  $\mathbf{R}^n$ , 其维数  $k < n$ . 命  $N \subset M \times \mathbf{R}^n$  定义为

$$N = \{(q, v): q \in M, v \text{ 在 } q \text{ 处垂直于 } M\}.$$

不难证明:  $N$  是一个  $n$  维流形, 微分嵌入  $\mathbf{R}^{2n}$ . ( $N$  为  $M$  的法向量丛的全空间.)

命  $E: N \rightarrow \mathbf{R}^n$  是  $E(q, v) = q + v$  ( $E$  为“端点映像”).

**定义**  $e \in \mathbf{R}^n$  称为  $(M, q)$  的焦点, 其重数为  $\mu$ , 如果  $e = q + v$ , 其中  $(q, v) \in N$ , 而  $E$  在  $(q, v)$  处的 Jacobi 矩阵具有零化数  $\mu > 0$ . 点  $e$  称为  $M$  的焦点, 如果对于某个  $q \in M$ ,  $e$  是  $(M, q)$  的焦点.

直观上说来,  $M$  的焦点是  $\mathbf{R}^n$  的一个点, 使得邻近的法线在

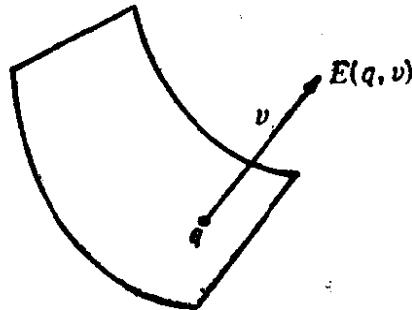


图 20

该处相交.

我们要用到下面的定理,但不予以证明.

**定理 6.1** (Sard) 若  $M_1$  和  $M_2$  是两个微分流形, 都有可数基, 并且有同样的维数,  $f: M_1 \rightarrow M_2$  是  $C^1$  映像, 那么临界点集的像在  $M_2$  中具有测度零.

$f$  的临界点是使得  $f$  的 Jacobi 矩阵为异矩阵的点. 定理 6.1 的证明见 de Rham, Variétés différentiables, Hermann, Paris, 1955, p.10.

**推论 6.2** 几乎所有的  $x \in \mathbf{R}^n$  都不是  $M$  的焦点.

**证** 刚才已经说过,  $N$  是一个  $n$  维流形. 点  $x$  为焦点的充要条件是:  $x$  属于  $E: N \rightarrow \mathbf{R}^n$  的临界点集的像. 因此, 焦点集具有测度零.

为了更好地了解焦点这个概念, 比较方便的是, 引进欧氏空间中流形的“第二基本形式”. 我们不打算给出一个不变的定义, 所以使用一个固定的局部坐标系.

令  $u^1, \dots, u^k$  是流形  $M \subset \mathbf{R}^n$  上一个区域的坐标, 于是从  $M$  到  $\mathbf{R}^n$  的包含映像确定  $n$  个光滑函数

$$x_1(u^1, \dots, u^k), \dots, x_n(u^1, \dots, u^k).$$

这些函数将简记为  $\mathbf{x}(u^1, \dots, u^k)$ , 其中  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ . 为一致起见, 点  $q \in M \subset \mathbf{R}^n$  现在也记为  $\mathbf{q}$ .

相应于这个坐标系的**第一基本形式**定义为实值函数组成的对称矩阵<sup>1)</sup>

$$(g_{ij}) = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} \right).$$

其次, **第二基本形式**则为向量值函数组成的对称矩阵  $(l_{ij})$ .

这个矩阵定义如下: 向量  $\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j}$  在  $M$  的每一点处可以表为

1) 原文的公式为  $(g_{ij}) = \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u_j} \right)$ , 显系笔误. ——译注

$M$  的一个切向量和  $M$  的一个法向量之和;  $\mathbf{l}_{ij}$  就定义为  $\frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j}$  的这个法分量. 命  $\mathbf{v}$  是  $M$  在  $q$  处的一个单位法向量, 矩阵

$$\left( \mathbf{v} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} \right) = (\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}_{ij})$$

可以称为“ $M$  在  $q$  处沿方向  $\mathbf{v}$  的第二基本形式”.

为简化讨论起见, 假定所选的坐标系使得  $(g_{ij})$  在  $q$  之值是单位矩阵. 这时, 矩阵  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}_{ij})$  的特征值  $K_1, \dots, K_k$  称为  $M$  在  $q$  处沿法方向  $\mathbf{v}$  的主曲率; 它们的倒数  $K_1^{-1}, \dots, K_k^{-1}$  称为主曲率半径<sup>1)</sup>. 当然, 可能碰到  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}_{ij})$  是异矩阵的情形; 这时, 诸  $K_i$  中将有一个或更多个为零, 因而相应的曲率半径  $K_i^{-1}$  不确定.

现在考虑由所有的  $q + t\mathbf{v}$  组成的法线  $l$ , 其中  $\mathbf{v}$  是一个固定的单位向量, 在  $q$  处与  $M$  正交.

**引理 6.3**  $(M, q)$  沿  $l$  的焦点正好是  $q + K_i^{-1}\mathbf{v}$  这些点, 其中  $1 \leq i \leq k$ ,  $K_i \neq 0$ . 于是,  $(M, q)$  沿着  $l$  至多有  $k$  个焦点, 每个焦点都是按其重数计算的.

**证** 选取流形上的  $n - k$  个向量场  $\mathbf{w}_1(u^1, \dots, u^k), \dots, \mathbf{w}_{n-k}(u^1, \dots, u^k)$ , 使得  $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k}$  都是单位向量, 彼此正交, 且均与  $M$  正交. 我们可以在流形  $N \subset M \times \mathbf{R}^n$  上引进坐标  $(u^1, \dots, u^k, t^1, \dots, t^{n-k})$  如下: 命  $(u^1, \dots, u^k, t^1, \dots, t^{n-k})$  与点

$$(\mathbf{x}(u^1, \dots, u^k), \sum_{\alpha=1}^{n-k} t^\alpha \mathbf{w}_\alpha(u^1, \dots, u^k)) \in N$$

相应. 于是, 函数

$$E : N \rightarrow \mathbf{R}^n$$

产生对应关系

$$(u^1, \dots, u^k, t^1, \dots, t^{n-k}) \xrightarrow{\circ} \mathbf{x}(u^1, \dots, u^k) \\ + \sum t^\alpha \mathbf{w}_\alpha(u^1, \dots, u^k),$$

1) 原文中诸  $K_i$  记为  $K_1, \dots, K_n$  以及  $K_1^{-1}, \dots, K_n^{-1}$ . ——译注

具有下列偏导数

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial u^i} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} + \sum_{\alpha} t^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{w}_{\alpha}}{\partial u^i},$$

$$\frac{\partial \mathbf{e}}{\partial t^{\beta}} = \mathbf{w}_{\beta}.$$

使这  $n$  个向量分别同  $\frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^1}, \dots, \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^k}, \mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n-k}$  这  $n$  个线性无关向量作内积, 我们得到一个  $n \times n$  矩阵, 其秩等于  $E$  在相应点处的 Jacobi 矩阵的秩.

这个  $n \times n$  矩阵显然具有下列形状

$$\begin{bmatrix} \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} + \sum_{\alpha} t^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{w}_{\alpha}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} \right) & \left( \sum_{\alpha} t^{\alpha} \frac{\partial \mathbf{w}_{\alpha}}{\partial u^i} \cdot \mathbf{w}_{\beta} \right) \\ 0 & \begin{array}{c} \text{(单 位)} \\ \text{(矩 阵)} \end{array} \end{bmatrix},$$

所以, 它的秩等于左上角的块矩阵的秩再加上  $n - k$ .<sup>1)</sup> 利用恒等式

$$0 = \frac{\partial}{\partial u^i} \left( \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \right) = \frac{\partial \mathbf{w}_{\alpha}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} + \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^i},$$

我们看出, 左上角块矩阵正好就是矩阵

$$(g_{ij} - \sum_{\alpha} t^{\alpha} \mathbf{w}_{\alpha} \cdot \mathbf{l}_{ij}).$$

于是, 我们有

**结论 6.4**  $\mathbf{q} + t\mathbf{v}$  是  $(M, \mathbf{q})$  的重数为  $\mu$  的焦点, 其充要条件是: 矩阵

$$(g_{ij} - t\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}_{ij}) \quad (*)$$

是异矩阵, 其零化数为  $\mu$ .

今设  $(g_{ij})$  是单位矩阵, 于是,  $(*)$  为异矩阵的充要条件是:

$\frac{1}{t}$  为矩阵  $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{l}_{ij})$  的特征值. 此外, 重数  $\mu$  等于  $\frac{1}{t}$  作为特征值的重数, 引理 6.3 证毕.

1) 原文没有“再加上  $n - k$ ”字样. ——译注

现在对于固定的  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$  让我们来研究函数

$$L_{\mathbf{p}} = f: M \rightarrow \mathbf{R},$$

其中

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}(u^1, \dots, u^k)) &= \|\mathbf{x}(u^1, \dots, u^k) - \mathbf{p}\|^2 \\ &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} - 2\mathbf{x} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{p} \cdot \mathbf{p}. \end{aligned}$$

我们有

$$\frac{\partial f}{\partial u^i} = 2 \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}),$$

于是,  $f$  以  $\mathbf{q}$  为临界点的充要条件是:  $\mathbf{q} - \mathbf{p}$  是  $M$  在  $\mathbf{q}$  处的法向量.

在临界点处的二阶偏导数是

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2 \left( \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^i} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial u^j} + \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial u^i \partial u^j} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{p}) \right).$$

如引理 6.3 之证, 命  $\mathbf{p} = \mathbf{x} + \imath \mathbf{v}$ , 这就得到

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u^i \partial u^j} = 2(g_{ij} - \mathbf{v} \cdot \mathbf{l}_{ij}).$$

因此, 我们有

**引理 6.5** 点  $\mathbf{q} \in M$  是  $f = L_{\mathbf{p}}$  的蜕化临界点的充要条件是:  $\mathbf{p}$  为  $(M, \mathbf{q})$  的焦点.  $\mathbf{q}$  作为临界点的零化数等于  $\mathbf{p}$  作为焦点的重数.

把这个结果同 Sard 定理的推论 6.2 结合起来, 我们立即得到

**定理 6.6** 对于几乎一切  $\mathbf{p} \in \mathbf{R}^n$  (即除了一个测度为零的集合外), 函数

$$L_{\mathbf{p}}: M \rightarrow \mathbf{R}$$

没有蜕化临界点.

这个定理有几个有趣的推论.

**推论 6.7** 在任何流形  $M$  上都存在没有蜕化临界点的可微函数, 使得每个  $M^\circ$  都是紧致的.

**证** 根据定理 6.6 以及  $n$  维流形  $M$  可以微分嵌入  $\mathbf{R}^{2n+1}$  作为

一个闭子集的事实(见 Whitney, Geometric Integration Theory, 113 页)得证.

**应用 1** 微分流形具有 CW 复形的同伦型. 这是从上述推论以及定理 3.5 推出的.

**应用 2** 在紧致流形  $M$  上存在向量场  $X$ , 使得  $X$  的临界点的指数之和等于  $M$  的 Euler 示性数  $\chi(M)$ . 证明如下. 对于  $M$  上任何可微函数  $f$ , 我们有  $\chi(M) = \sum (-1)^{\lambda} c_{\lambda}$ , 其中  $c_{\lambda}$  是指数为  $\lambda$  的临界点的个数, 但是, 在  $f$  的指数为  $\lambda$  的一点处, 向量场  $\text{grad } f$  的指数是  $(-1)^{\lambda}$ .

由此可见,  $M$  上任何向量场的指数之和都等于  $\chi(M)$ , 因为这个和数是一个拓扑不变量(见 Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, § 39.7).

上面的推论可以加强如下. 命  $k \geq 0$  是一个整数,  $K \subset M$  是紧致集.

**推论 6.8** 任何有界光滑函数  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  均可用无蜕化临界点的光滑函数  $g$  来均匀逼近. 此外, 可以选择函数  $g$ , 使得当  $i \leq k$  时,  $g$  的  $i$  阶导数在紧致集  $K$  上也均匀逼近  $f$  的相应导数.

(见 M. Morse, The critical points of a function of  $n$  variables, Transactions of the American Mathematical Society, 33 (1931), 71—91.)

**证** 选取一个嵌入映像  $h: M \rightarrow \mathbf{R}^n$ , 把  $M$  嵌入某个欧氏空间作为有界子集, 使得第一个坐标  $h_1$  正好是已知函数  $f$ . 命  $c$  是一个充分大的数. 在点  $(-c, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^n$  的邻近选取一点

$$p = (-c + \varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_n),$$

使得函数  $L_p: M \rightarrow \mathbf{R}$  非蜕化; 命

$$g(x) = \frac{L_p(x) - c^2}{2c},$$

$g$  显然是非蜕化的. 通过简单的计算, 我们有

$$g(x) = f(x) + \sum_1^n h_i(x)^2/2c - \sum_1^n \varepsilon_i h_i(x)/c$$

$$+ \sum_1^n \varepsilon_i^2 / 2c - s_1.$$

显然,若  $c$  充分大,诸  $\varepsilon_i$  充分小,则  $g$  将任意逼近  $f$ .

上面的理论也可以用来描述函数

$$L_p : M \rightarrow \mathbb{R}$$

在一个临界点处的指数.

**引理 6.9** ( $L_p$  的指数定理)  $L_p$  在一个非蜕化临界点  $q \in M$  处的指数等于  $(M, q)$  在从  $q$  到  $p$  的线段上的焦点数, 每个焦点都是按其重数计算的.

第三章中有一个类似的命题 (Morse 指数定理) 是非常重要的.

**证 矩阵**

$$\left( \frac{\partial^2 L_p}{\partial u^i \partial u^j} \right) = 2(g_{ii} - v \cdot l_{ii})$$

的指数等于负特征值的个数. 假设  $(g_{ii})$  是单位矩阵, 这个指数就等于  $(v \cdot l_{ii})$  这个矩阵的特征值中  $\geq \frac{1}{t}$  的个数. 把这个论断同 6.3 比较就得到所要的结论.

## § 7. 关于超平面截面的 Lefschetz 定理

作为已经建立的那些理论的应用, 我们来证明某些有关代数簇的拓扑结构的结果, 这些结果本来是 Lefschetz 利用完全不同的论证证明的, 我们现在的讲法属于 Andreotti 和 Frankel.<sup>1)</sup>

**定理 7.1** 若  $M \subset \mathbb{C}^n$  是  $n$  维复空间的非异仿射代数簇, 其实维数为  $2k$ , 则在  $i > k$  时  $H_i(M; \mathbb{Z}) = 0$ .

这是下述更强的定理的推论.

1) 见 S. Lefschetz, *L'analysis situs et la géométrie algébrique*, Paris, 1924, 以及 A. Andreotti and T. Frankel, *The Lefschetz theorem on hyperplane sections*, *Annals of Mathematics*, 69 (1959), 713—717. ——  
原注

**定理 7.2** 命  $M$  是一个复解析流形, 其复维数为  $k$ , 双解析嵌入  $\mathbf{C}^n$  作为闭子集, 则  $M$  具有  $k$  维 CW 复形的同伦型.

证明分为如下几步. 首先考虑  $k$  个复变数的二次型

$$Q(z^1, \dots, z^k) = \sum b_{ij} z^i z^j.$$

如果我们用  $x^h + iy^h$  来代替  $z^h$ , 然后取  $Q$  的实部, 我们就得到具有  $2k$  个实变数的一个实二次型:

$$Q'(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^k) = \sum b_{ij} (x^i + iy^i)(x^j + iy^j) \text{ 的实部.}$$

**结论 1** 若  $e$  为  $Q'$  的  $\mu$  重特征值, 则  $-e$  也是一个特征值, 并且具有同样的重数  $\mu$ .

**证** 恒等式  $Q(iz^1, \dots, iz^k) = -Q(z^1, \dots, z^k)$  表明: 二次型  $Q'$  可以通过变数的正交变换变成  $-Q'$ . 由此显然得到结论 1.

现在考虑一个复流形  $M$ , 双解析嵌入  $\mathbf{C}^n$  作为闭子集. 命  $q$  是  $M$  的一点.

**结论 2**  $(M, q)$  沿任何法线  $l$  的焦点成对出现, 对称地分布在  $q$  的两侧.

换言之, 若  $q + tv$  是焦点, 则  $q - tv$  也是焦点, 并且具有同样的重数.

**证** 在  $q$  的一个邻域内取  $M$  的复坐标  $z^1, \dots, z^k$ , 使得  $z^1(q) = \dots = z^k(q) = 0$ . 包含映像  $M \rightarrow \mathbf{C}^n$  确定  $n$  个复解析函数

$$w_a = w_a(z^1, \dots, z^k), \quad a = 1, \dots, n.$$

命  $v$  是一个固定的单位向量, 在  $q$  处与  $M$  正交. 考虑  $w$  和  $v$  的 Hermite 内积

$$\sum w_a \bar{v}_a = \sum w_a(z^1, \dots, z^k) \bar{v}_a,$$

它可以展开为复幂级数:

$$\sum w_a(z^1, \dots, z^k) \bar{v}_a = \text{常数} + Q(z^1, \dots, z^k) + \text{高次项},$$

其中  $Q$  表示一个二次齐次函数 (由于  $v$  与  $M$  正交, 所以不出现线性项).

现在用  $x^h + iy^h$  来代替  $z^h$  以得到  $M$  的一个实坐标系; 考虑

实内积

$$w \cdot v = \sum w_\alpha \bar{v}_\alpha \text{ 的实部,}$$

它具有实幂级数展开:

$$w \cdot v = \text{常数} + Q'(x^1, \dots, x^k, y^1, \dots, y^k) + \text{高次项},$$

其中二次型  $Q'$  显然确定  $M$  在  $q$  处沿法方向  $v$  的第二基本形式。按照结论 1,  $Q'$  的特征值是正负成对出现的, 所以  $(M, q)$  沿通过  $q$  和  $q + v$  的直线的焦点也是对称地成对出现, 这就证明了结论 2.

现在就容易证明 7.2 了。选取点  $p \in C^n$  使得距离平方函数

$$L_p: M \rightarrow \mathbf{R}$$

没有蜕化临界点。由于  $M$  是  $C^n$  的闭子集, 显然可见, 每个集合

$$M^a = L_p^{-1}[0, a]$$

都是紧致的。现在考虑  $L_p$  在临界点  $q$  处的指数, 按照 6.9, 这个指数等于  $(M, q)$  在从  $p$  到  $q$  的线段上的焦点个数。但是, 沿着通过  $p$  和  $q$  的整个直线上至多有  $2k$  个焦点, 对称地分布在  $q$  的两侧, 因而至多只有  $k$  个焦点位于  $p$  和  $q$  之间。

于是,  $L_p$  在  $q$  处的指数  $\leq k$ , 可见  $M$  和一个维数  $\leq k$  的 CW 复形有同样的同伦型, 7.2 证毕。

**推论 7.3 (Lefschetz)** 命  $V$  是复投影空间  $CP_n$  中的一个代数簇, 其复维数为  $k$ ;  $P$  为  $CP_n$  中的一张超平面, 含有  $V$  的奇点 (如果存在的话)。于是, 包含映像

$$V \cap P \rightarrow V$$

导出维数小于  $k - 1$  的各同调群的同构。此外, 导出同态

$$H_{k-1}(V \cap P; \mathbf{Z}) \rightarrow H_{k-1}(V; \mathbf{Z})$$

是映成的映像。

**证** 利用空间偶  $(V, V \cap P)$  的正合序列, 显然只须证明:  $r \leq k - 1$  时,  $H_r(V, V \cap P; \mathbf{Z}) = 0$ 。但 Lefschetz 对偶定理断定

$$H_r(V, V \cap P; \mathbf{Z}) \cong H^{k-r}(V - (V \cap P); \mathbf{Z});$$

而  $V - (V \cap P)$  是仿射空间  $CP_n - P$  中的非异代数簇, 所以从 7.2 可见, 在  $r \leq k - 1$  时, 上式右端的群是零群。

这个结果可以加强如下:

**定理 7.4 (Lefschetz)** 在上面推论的假设下, 当  $r < k$  时, 相对同伦群  $\pi_r(V, V \cap P)$  为零.

**证** 我们的证明基于下述事实: 存在  $V \cap P$  的一个邻域  $U$ , 可以在  $V$  中形变入  $V \cap P$ . 这个事实, 例如, 可以利用代数簇可剖分的定理来证明.

我们不用函数  $L_p: V - V \cap P \rightarrow \mathbf{R}$ , 而利用  $f: V \rightarrow \mathbf{R}$ , 定义为

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{如果 } x \in V \cap P, \\ 1/L_p(x), & \text{如果 } x \notin P. \end{cases}$$

由于  $L_p$  的临界点的指数  $\leq k$ , 可见  $f$  的临界点的指数  $\geq 2k - k = k$ . 函数  $f$  在  $\varepsilon \leq f < \infty$  时没有蜕化临界点, 所以  $V$  的同伦型与  $V^\varepsilon = f^{-1}[0, \varepsilon]$  粘上有限多个维数  $\geq k$  的胞腔后的同伦型相同.

选取  $\varepsilon$  充分小, 使得  $V^\varepsilon \subset U$ . 命  $I^r$  表示  $r$  维单位方体. 于是, 由于  $r < k$ , 把空间偶  $(I^r, \dot{I}^r)$  映入  $(V, V \cap P)$  的每个映像都可以形变为一个映像

$$(I^r, \dot{I}^r) \rightarrow (V^\varepsilon, V \cap P) \subset (U, V \cap P),$$

因而可以形变为映入  $(V \cap P)$  的映像, 证毕.

## 第二章 Riemann 几何概要

### § 8. 协变微分

第二章的目的是要对以后所需要的 Riemann 几何中某些基本概念给出一个简明的轮廓,至于详细情况,读者可以参考下列书籍: Nomizu, Lie Groups and Differential Geometry, The Mathematical Society of Japan, 1956; Laugwitz, Differentialgeometrie, Teubner, 1960; Helgason, Differential Geometry and Symmetric Spaces, Academic Press, 1962.

命  $M$  是一个光滑流形。

**定义** 在点  $p \in M$  处的仿射联络是一个函数: 对于每个切向量  $X_p \in TM_p$  和每个向量场  $Y$ , 相应地给出一个新的切向量

$$X_p \vdash Y \in TM_p,$$

称为  $Y$  沿方向  $X_p$  的协变导数<sup>1)</sup>。仿射联络作为  $X_p$  和  $Y$  的函数, 我们要求它是双线性的。此外, 如果

$$f: M \rightarrow \mathbb{R}$$

是一个实值函数,  $fY$  表示向量场

$$(fY)_q = f(q)Y_q,$$

那么我们还要求  $\vdash$  满足下面的恒等式:

$$X_p \vdash (fY) = (X_p f)Y_p + f(p)X_p \vdash Y.$$

( $X_p f$  照例表示  $f$  沿方向  $X_p$  的方向导数。)

$M$  上的整体性仿射联络(或简称联络)是一个函数: 对于每个  $p \in M$ , 相应地给出  $M$  在  $p$  处的一个仿射联络  $\vdash_p$ , 满足下列光滑性条件:

1) 注意: 这里的  $X \vdash Y$  与 Nomizu 的记号  $\nabla_X Y$  是一致的, 我们的记号是想要暗示微分算子  $X$  作用于向量场  $Y$ 。——原注

(1) 若  $X$  和  $Y$  是  $M$  上两个光滑向量场, 则由恒等式

$$(X + Y)_p = X_p +_p Y$$

所定义的向量场  $X + Y$  也必须是光滑的.

注意,自然还有

(2)  $X + Y$  作为  $X$  和  $Y$  的函数是双线性的,

$$(3) \quad (fX) + Y = f(X + Y),$$

$$(4) \quad X + (fY) = (Xf)Y + f(X + Y).$$

条件(1), (2), (3), (4)也可以作为联络的定义.

借助于坐标邻域  $U \subset M$  上定义的局部坐标  $u^1, \dots, u^n$ , 联络  $\Gamma_{ij}^k$  由  $U$  上的  $n^2$  个光滑实值函数确定如下: 命  $\partial_k$  表示  $U$  上的向量场  $\frac{\partial}{\partial u^k}$ , 于是  $U$  上任何向量场  $X$  可以唯一表为

$$X = \sum_{k=1}^n x^k \partial_k,$$

其中  $x^k$  是  $U$  上的实值函数. 特别是向量场  $\partial_i + \partial_j$  可以表为

$$(5) \quad \partial_i + \partial_j = \sum_k \Gamma_{ij}^k \partial_k.$$

$\Gamma_{ij}^k$  这些函数完全确定  $U$  上的联络. 事实上, 给了向量场  $X = \Sigma x^i \partial_i$  和  $Y = \Sigma y^j \partial_j$ , 我们可以按规则(2), (3), (4)展开  $X + Y$ , 得到公式

$$(6) \quad X + Y = \sum_k \left( \sum_i x^i y_{ii}^k \right) \partial_k,$$

其中记号  $y_{ii}^k$  表示实值函数

$$y_{ii}^k = \partial_i y^k + \sum_i \Gamma_{ii}^k y^i.$$

反之,给了  $U$  上的任何光滑实值函数  $\Gamma_{ij}^k$ , 我们可以用公式(6)来定义  $X + Y$ , 结果显然满足条件 (1), (2), (3), (4), (5).

我们可以利用联络  $\Gamma$  来定义一个向量场沿  $M$  上一条曲线的协变导数. 先给出一些定义.

$M$  上的参数曲线是指一个光滑函数  $c$ , 把实数直线映入  $M$ .

沿曲线  $c$  的向量场  $V$  是指一个函数：对于每个  $t \in \mathbf{R}$  相应地给出一个切向量

$$V_t \in TM_{c(t)}.$$

我们要求这个函数是光滑的，意义如下：对于  $M$  上任何光滑函数  $f$ ，对应关系

$$t \rightarrow V_t, f$$

应当定义  $\mathbf{R}$  上的一个光滑函数。

作为一个例子，曲线  $c$  的速度向量场  $\frac{dc}{dt}$  就是沿  $c$  的一个向量场，由下述规则定义：

$$\frac{dc}{dt} = c_* \frac{d}{dt},$$

其中  $\frac{d}{dt}$  表示实数直线上的标准向量场，而

$$c_* : T\mathbf{R}_t \rightarrow TM_{c(t)}$$

则表示映像  $c$  导出的切空间之间的同态映像(见图 21)。

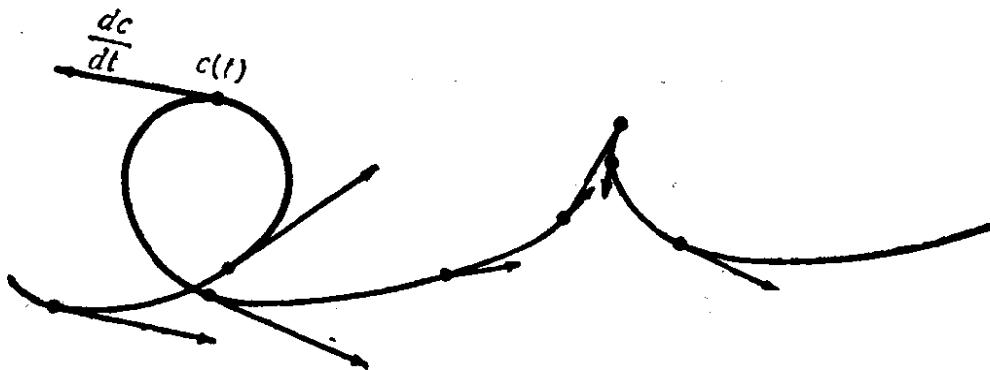


图 21

今设  $M$  上已经配备了仿射联络，于是沿  $c$  的任何向量场  $V$  确定一个新的沿  $c$  的向量场  $\frac{DV}{dt}$ ，称为  $V$  的协变导数。运算

$$V \rightarrow \frac{DV}{dt}$$

是由下列三个公理来刻划的：

$$(a) \quad \frac{D(V+W)}{dt} = \frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt},$$

(b) 若  $f$  是  $\mathbf{R}$  上的光滑实值函数, 则

$$\frac{D(fV)}{dt} = \frac{df}{dt} V + f \frac{DV}{dt},$$

(c) 若  $V$  由  $M$  上的向量场  $Y$  导出, 即是对每个  $t$  有  $V_t = Y_{c(t)}$ , 则  $\frac{DV}{dt}$  等于  $\frac{dc}{dt} + Y$  ( $= Y$  沿  $c$  的速度向量方向的协变导数).

**引理 8.1** 有一个而且只有一个运算  $V \rightarrow \frac{DV}{dt}$ , 满足这三个条件.

**证** 选取  $M$  的一个局部坐标系, 命  $u^1(t), \dots, u^n(t)$  表示点  $c(t)$  的坐标, 于是向量场  $V$  可以唯一地表为形式

$$V = \sum v^i \partial_i,$$

其中  $v^1, \dots, v^n$  是  $\mathbf{R}$  上的(或  $\mathbf{R}$  的一个适当的开子集上的)实值函数,  $\partial_1, \dots, \partial_n$  是坐标邻域上的标准向量场. 从 (a), (b) 和 (c) 可见,

$$\begin{aligned} \frac{DV}{dt} &= \sum_i \left( \frac{dv^i}{dt} \partial_i + v^i \frac{dc}{dt} + \partial_i \right) \\ &= \sum_k \left( \frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{du^i}{dt} \Gamma_{ij}^k v^j \right) \partial_k. \end{aligned}$$

反之, 用这个公式来定义  $\frac{DV}{dt}$ , 不难验证, 条件 (a), (b) 和 (c) 都满足.

沿  $c$  的一个向量场  $V$  称为平行向量场, 如果协变导数  $\frac{DV}{dt}$  恒为零.

**引理 8.2** 给了曲线  $c$ , 则在点  $c(0)$  的任何切向量  $V_0$  可以唯一扩张为一个沿  $c$  的平行向量场  $V$ .

**证** 微分方程

$$\frac{dv^k}{dt} + \sum_{i,j} \frac{du^i}{dt} \Gamma_{ij}^k v^j = 0$$

的解  $v^k(t)$  由原始值  $v^k(0)$  唯一确定. 由于这些方程是线性的, 所以它的解可以对  $t$  的所有有关的值有定义. (见 Graves, The Theory of Functions of Real Variables, p. 152.)

向量  $V$ , 称为由  $V_0$  沿  $c$  平移而得.

今设  $M$  是一个 Riemann 流形. 两个向量  $X_p$  和  $Y_p$  的内积记为  $\langle X_p, Y_p \rangle$ .

**定义**  $M$  上的一个联络  $\Gamma$  称为与  $M$  的 Riemann 尺度相容, 如果平移保持内积不变. 换言之, 对于任何参数曲线  $c$  和任何一对沿  $c$  的平行向量场  $P$  和  $P'$  而言, 内积  $\langle P, P' \rangle$  应当是常数.

**引理 8.3** 假设联络与尺度相容,  $V, W$  是任何两个沿  $c$  的向量场, 那么

$$\frac{d}{dt} \langle V, W \rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle.$$

**证** 选取沿  $c$  的平行向量场  $P_1, \dots, P_n$ , 在  $c$  的一点处两两正交, 因而在  $c$  的每一点处都两两正交, 于是, 已知向量场  $V$  和  $W$  可以分别表为  $\sum v^i P_i$  和  $\sum w^i P_i$  (其中  $v^i = \langle V, P_i \rangle$  是  $\mathbf{R}$  上的实值函数), 可见  $\langle V, W \rangle = \sum v^i w^i$ , 并且

$$\frac{DV}{dt} = \sum \frac{dv^i}{dt} P_i, \quad \frac{DW}{dt} = \sum \frac{dw^i}{dt} P_i.$$

因此,

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{DV}{dt}, W \right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt} \right\rangle &= \sum \left( \frac{dv^i}{dt} w^i + v^i \frac{dw^i}{dt} \right) \\ &= \frac{d}{dt} \langle V, W \rangle. \end{aligned}$$

证毕.

**推论 8.4** 对于  $M$  上任何向量场  $Y$  和  $Y'$  以及任何向量  $X_p \in TM_p$ , 我们有

$$X_p \langle Y, Y' \rangle = \langle X_p \Gamma Y, Y'_p \rangle + \langle Y_p, X_p \Gamma Y' \rangle.$$

**证** 选取曲线  $c$ , 使得它在  $t = 0$  处的速度向量是  $X_p$ , 再应用 8.3 即可.

**定义 8.5** 联络  $\Gamma$  称为对称的, 如果它满足恒等式<sup>1)</sup>

$$(X \Gamma Y) - (Y \Gamma X) = [X, Y].$$

( $[X, Y]$  照例表示两个向量场的 Poisson 括号,  $[X, Y] f = X(Yf) - Y(Xf)$ .) 把这个恒等式应用于  $X = \partial_i$ ,  $Y = \partial_j$  的情形, 由于  $[\partial_i, \partial_j] = 0$ , 我们得到关系

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0.$$

反之, 若  $\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$ , 利用公式(6), 不难验证: 联络  $\Gamma$  在整个坐标邻域中是对称的.

**引理 8.6** (Riemann 几何基本引理) 一个 Riemann 流形有一个而且只有一个对称联络同它的尺度相容.

(见 Nomizu, p. 76 及 Laugwitz, p. 95.)

**唯一性证明** 把 8.4 应用于向量场  $\partial_i$ ,  $\partial_j$ ,  $\partial_k$ , 并命  $\langle \partial_i, \partial_k \rangle = g_{ik}$ , 我们得到恒等式

$$\partial_i g_{jk} = \langle \partial_i \Gamma \partial_j, \partial_k \rangle + \langle \partial_j, \partial_i \Gamma \partial_k \rangle.$$

把  $i$ ,  $j$  和  $k$  的次序依次交换, 就得到关于<sup>2)</sup>

$$\langle \partial_i \Gamma \partial_j, \partial_k \rangle, \langle \partial_i \Gamma \partial_k, \partial_j \rangle \text{ 和 } \langle \partial_k \Gamma \partial_j, \partial_i \rangle$$

这三个量的三个线性方程 (由于  $\partial_i \Gamma \partial_j = \partial_j \Gamma \partial_i$ , 所以上面那种量只有三个). 这些方程具有唯一解, 这就得到第一 Christoffel 恒等式

$$(\partial_i \Gamma \partial_j, \partial_k) = \frac{1}{2} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}),$$

它的左端等于  $\sum_l \Gamma_{ij}^l g_{lk}$ . 用矩阵  $(g_{ik})$  的逆矩阵  $(g^{kl})$  相乘, 就得到第二 Christoffel 恒等式

1) 下面这种说法似乎可能更直观一些(也许不见得). 实值函数  $f$  沿两个向量  $X_p$ ,  $Y_p$  的“二阶协变导数”定义为表达式

$$X_p(Yf) - (X_p \Gamma Y)f,$$

其中  $Y$  表示  $Y_p$  的任何扩张向量场. 可以验证, 这个表达式不依赖于  $Y$  的选择 (见下面引理 9.1 的证明). 于是, 联络称为对称的, 如果上述二阶导数作为  $X_p$  和  $Y_p$  的函数是对称的. ——原注

2) 下面的第二个量原文是  $(\partial_j \Gamma \partial_i, \partial_k)$ . ——译注

$$\Gamma_{ii}^l = \sum_k \frac{1}{2} (\partial_i g_{ik} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}) g^{kl}.$$

因此,联络是由尺度唯一确定的。

反之,用这个公式定义  $\Gamma_{ii}^l$ ,可以验证,所得到的联络是对称的,与尺度相容的。证毕。

现在来考虑对称性的另一种刻划,这在今后是非常有用的。考虑  $M$  上的参数曲面,即是一个光滑函数。

$$S: \mathbf{R}^2 \rightarrow M.$$

所谓沿  $S$  的向量场  $V$ ,是指一个函数:对于每个  $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ ,相应地给出一个切向量

$$V_{(x, y)} \in TM_{S(x, y)}.$$

例如,两个标准向量场  $\frac{\partial}{\partial x}$  和  $\frac{\partial}{\partial y}$  产生沿  $S$  的两个向量场  $S_* \frac{\partial}{\partial x}$  和  $S_* \frac{\partial}{\partial y}$ ,它们将简记为  $\frac{\partial S}{\partial x}$  和  $\frac{\partial S}{\partial y}$ ,称为  $S$  的“速度向量场”。

对于任何沿  $S$  的光滑向量场  $V$ ,协变导数  $\frac{DV}{\partial x}$  和  $\frac{DV}{\partial y}$  是两个新的向量场,构造如下:对于每个固定的  $y_0$ ,把  $V$  限制在曲线

$$x \rightarrow S(x, y_0)$$

上,我们得到沿这条曲线的一个向量场,它关于  $x$  的协变导数就定义为  $\left(\frac{DV}{\partial x}\right)_{(x, y_0)}$ 。这样,也就沿整个参数曲面  $S$  定义了  $\frac{DV}{\partial x}$ 。

例如,我们可以作出  $\frac{\partial S}{\partial x}$  和  $\frac{\partial S}{\partial y}$  这两个向量场的两个协变导数。导数  $\frac{D}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial x}$  和  $\frac{D}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial y}$  不过就是适当坐标曲线的加速度向量。可是,混合导数  $\frac{D}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y}$  和  $\frac{D}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial x}$  却不能这样简单地加以说明。

**引理 8.7** 若联络是对称的,则

$$\frac{D}{\partial x} \frac{\partial S}{\partial y} = \frac{D}{\partial y} \frac{\partial S}{\partial x}.$$

**证** 借助于局部坐标系来表示等式的两端, 加以计算即可。

## § 9. 曲 率 张 量

一个仿射联络  $\Gamma$  的曲率张量  $R$  可以量度二阶协变导数  $\partial_i \Gamma (\partial_j \Gamma Z)$  关于  $i$  和  $j$  成对称的程度。给了向量场  $X, Y, Z$ , 定义一个新向量场  $R(X, Y)Z$  为<sup>1)</sup>

$$R(X, Y)Z = -X \Gamma (Y \Gamma Z) + Y \Gamma (X \Gamma Z) \\ + [X, Y] \Gamma Z.$$

**引理 9.1**  $R(X, Y)Z$  在点  $p \in M$  的值只依赖于在这点  $p$  处的向量  $X_p, Y_p, Z_p$ , 而不依赖于诸向量场在邻近各点的值。此外, 对应关系

$$(X_p, Y_p, Z_p) \rightarrow R(X_p, Y_p)Z_p$$

把  $TM_p \times TM_p \times TM_p$  变到  $TM_p$ , 是三线性的。

简言之, 这个引理可以表达为:  $R$  是一个“张量”。

**证**  $R(X, Y)Z$  显然是  $X, Y$  和  $Z$  的三线性函数。若  $X$  换成一个倍数  $fX$ , 则  $-X \Gamma (Y \Gamma Z), Y \Gamma (X \Gamma Z), [X, Y] \Gamma Z$  这三项就分别换成

- (1)  $-fX \Gamma (Y \Gamma Z),$
- (2)  $(Yf)(X \Gamma Z) + fY \Gamma (X \Gamma Z),$
- (3)  $-(Yf)(X \Gamma Z) + f[X, Y] \Gamma Z.$

把这三项加起来, 我们得到恒等式

$$R(fX, Y)Z = fR(X, Y)Z.$$

对于  $Y$  和  $Z$  而言, 通过相仿的计算也容易得到相应的恒等式。

今设  $X = \sum x^i \partial_i, Y = \sum y^j \partial_j, Z = \sum z^k \partial_k$ . 于是

$$R(X, Y)Z = \sum R(x^i \partial_i, y^j \partial_j)(z^k \partial_k) \\ = \sum x^i y^j z^k R(\partial_i, \partial_j) \partial_k.$$

计算这个表达式在  $p$  处的值, 我们得到公式

1) Nomizu 给  $R$  加上了一个负号。我们规定的记号有一个优点, 就是(在 Riemann 情形下)内积  $\langle R(\partial_k, \partial_i)\partial_j, \partial_l \rangle$  与典型记号  $R_{ijkl}$  一致。——原注

$$(R(X, Y)Z)_p = \sum x^i(p)y^j(p)z^k(p)(R(\partial_i, \partial_j)\partial_k)_p,$$

它只依赖于函数  $x^i, y^j, z^k$  在  $p$  处的值, 而不依赖于这些函数在邻近点处的值, 证毕.

现在考虑参数曲面

$$S: \mathbb{R}^2 \rightarrow M.$$

对于沿  $S$  的任何向量场  $V$ , 可以对它施行两个协变微分算子  $\frac{D}{\partial x}$  和  $\frac{D}{\partial y}$ . 一般说来, 这些算子并不是互相交换的.

$$\text{引理 9.2 } \frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} V - \frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial y} V = R\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right)V.$$

**证** 用局部坐标系来表示上式两端, 加以计算, 同时利用恒等式

$$\partial_i \vdash (\partial_i \vdash \partial_k) - \partial_i \vdash (\partial_i \vdash \partial_k) = R(\partial_i, \partial_i)\partial_k$$

即可.

[一个有意思的问题是: 能否构造一个沿  $S$  的向量场  $P$ , 它是平行向量场, 即是

$$\frac{D}{\partial x} P = \frac{D}{\partial y} P = 0,$$

并且在原点处取已知值  $P_{(0,0)}$ . 一般说来, 这样的向量场并不存在. 不过, 如果曲率张量碰巧是零, 则  $P$  可构造如下: 命  $P_{(x,0)}$  是沿  $x$  轴的平行向量场, 满足已知的原始条件. 对于每个固定的  $x_0$ , 命  $P_{(x_0, y)}$  是沿曲线

$$y \rightarrow S(x_0, y)$$

的一个平行向量场, 在  $y = 0$  时取已知值. 这就沿  $S$  处处确定了  $P$ . 显然,  $\frac{D}{\partial y} P$  恒为零,  $\frac{D}{\partial x} P$  沿  $x$  轴为零. 于是, 恒等式

$$\frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} P - \frac{D}{\partial x} \frac{D}{\partial y} P = R\left(\frac{\partial S}{\partial x}, \frac{\partial S}{\partial y}\right)P = 0$$

蕴涵  $\frac{D}{\partial y} \frac{D}{\partial x} P = 0$ . 换言之, 向量场  $\frac{D}{\partial x} P$  是沿曲线

$$y \rightarrow S(x_0, y)$$

的平行向量场。由于  $\left(\frac{D}{\partial x} P\right)_{(x_0,0)} = 0$ , 所以  $\frac{D}{\partial x} P$  恒为零, 这就证明了  $P$  是沿  $S$  的平行向量场.]

今后我们假设:  $M$  是一个 Riemann 流形, 配备了唯一的与尺度相容的对称联络。结果, 我们将证明张量  $R$  满足四个对称关系。

**引理 9.3** 一个 Riemann 流形的曲率张量  $R$  满足

- (1)  $R(X, Y)Z + R(Y, X)Z = 0,$
- (2)  $R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0,$
- (3)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle + \langle R(X, Y)W, Z \rangle = 0,$
- (4)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle R(Z, W)X, Y \rangle.$

**证** 斜对称关系(1)直接从  $R$  的定义推出。

由于(2)的所有三项都是张量, 所以只须就  $[X, Y]$ ,  $[X, Z]$  和  $[Y, Z]$  这些 Poisson 括号全为零的情形来证明(2)即可。在这个假定下, 我们应该验证下列恒等式

$$\begin{aligned} & -X \lrcorner (Y \lrcorner Z) + Y \lrcorner (X \lrcorner Z) \\ & -Y \lrcorner (Z \lrcorner X) + Z \lrcorner (Y \lrcorner X) \\ & + X \lrcorner (Z \lrcorner Y) - Z \lrcorner (X \lrcorner Y) = 0. \end{aligned}$$

但是, 联络的对称性蕴涵

$$Y \lrcorner Z - Z \lrcorner Y = [Y, Z] = 0.$$

于是, 前式中上面左边一项同下面左边一项抵消。同样, 其余各项也两两抵消, 这就证明了(2)。

要证明(3), 我们应当证明表达式  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle$  关于  $Z$  和  $W$  成斜对称。这显然等价于下述断言: 对所有  $X, Y, Z$  有

$$\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = 0.$$

我们仍然假设  $[X, Y] = 0$ , 所以

$$\langle R(X, Y)Z, Z \rangle = \langle -X \lrcorner (Y \lrcorner Z) + Y \lrcorner (X \lrcorner Z), Z \rangle.$$

换言之, 我们应该证明: 表达式

$$\langle Y \lrcorner (X \lrcorner Z), Z \rangle$$

关于  $X$  和  $Y$  对称。

由于  $[X, Y] = 0$ , 所以表达式  $YX\langle Z, Z \rangle$  关于  $X$  和  $Y$  对称. 由于联络与尺度相容, 我们有

$$X\langle Z, Z \rangle = 2\langle X \vdash Z, Z \rangle,$$

因而

$$YX\langle Z, Z \rangle = 2\langle Y \vdash (X \vdash Z), Z \rangle + 2\langle X \vdash Z, Y \vdash Z \rangle.$$

但右端最后一项显然关于  $X$  和  $Y$  对称, 所以  $\langle Y \vdash (X \vdash Z), Z \rangle$  关于  $X$  和  $Y$  对称, 这就证明了(3).

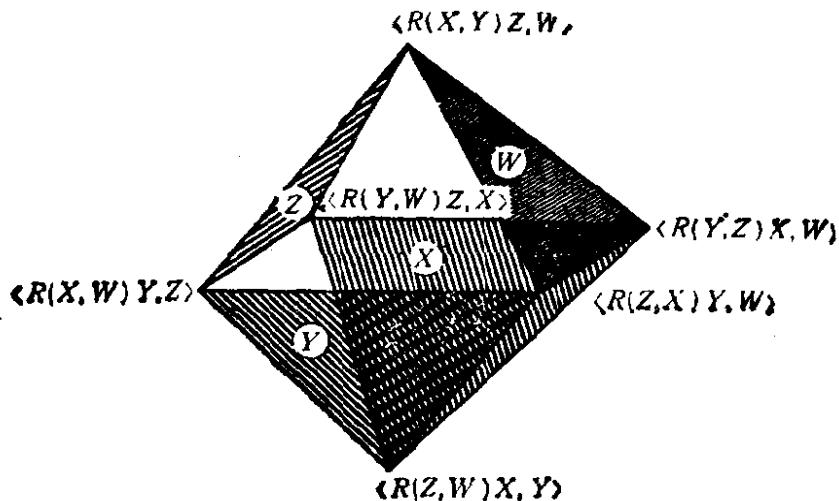


图 22

性质(4)可以从(1), (2)和(3)推出如下: 如图 22 所示, 公式(2)说: 在阴影三角形  $W$  的诸顶点处各量之和为零. 同样[利用(1)和(3)], 其余每个阴影三角形诸顶点处各量之和也是零. 把相应于上方两个阴影三角形的恒等式加起来, 再减去相应于下方两个三角形的恒等式, 可见最上顶点处的量的二倍减去最下顶点处的量的二倍为零. 这就证明了(4). 证毕.

## § 10. 测地线与完备性

命  $M$  是连通的 Riemann 流形.

**定义** 以  $I$  表示任何实数区间, 参数道路

$$\gamma: I \rightarrow M$$

称为一条测地线，如果加速度向量场  $\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}$  恒为零。因此，速度向量场  $\frac{d\gamma}{dt}$  必为沿  $\gamma$  的平行向量场。若  $\gamma$  是测地线，则恒等式

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle = 0$$

表明：速度向量的长度  $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{1/2}$  沿  $\gamma$  是常数。引进弧长函数

$$s(t) = \int \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt + \text{常数},$$

上述结论可以改述如下：沿着一条测地线，参数  $t$  是弧长的线性函数。参数  $t$  就是弧长的充要条件是  $\left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| = 1$ 。

利用坐标为  $u^1, \dots, u^n$  的局部坐标系，曲线  $t \rightarrow \gamma(t) \in M$  确定  $n$  个光滑函数  $u^1(t), \dots, u^n(t)$ 。于是，测地线方程  $\frac{D}{dt} \frac{d\gamma}{dt} = 0$  具有形状

$$\frac{d^2 u^k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k(u^1, \dots, u^n) \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} = 0.$$

因此，测地线是否存在要看一组二阶微分方程是否有解而定。

更一般地考虑任何形如

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dt})$$

的方程组，其中  $\mathbf{u}$  表示  $(u^1, \dots, u^n)$ ， $\mathbf{F}$  表示  $C^\infty$  函数组成的  $n$  元组，在点

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1) \in \mathbf{R}^{2n}$$

的某个邻域  $U$  内处处有定义。

**存在性和唯一性定理 10.1** 存在点  $(\mathbf{u}_1, \mathbf{v}_1)$  的一个邻域  $W$  和一个数  $\epsilon > 0$ ，使得对每个  $(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0) \in W$ ，微分方程

$$\frac{d^2 \mathbf{u}}{dt^2} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \frac{d\mathbf{u}}{dt})$$

有唯一解  $t \rightarrow \mathbf{u}(t)$ , 对  $|t| < \varepsilon$  有定义, 并满足原始条件

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{u}_0, \quad \frac{d\mathbf{u}}{dt}(0) = \mathbf{v}_0.$$

此外, 这个解还光滑地依赖于原始条件. 换言之, 从  $W \times (-\varepsilon, \varepsilon)$  到  $\mathbb{R}^n$  的对应关系

$$(\mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, t) \rightarrow \mathbf{u}(t)$$

是所有  $2n + 1$  个变元的  $C^\infty$  函数.

**证** 引进新变元  $v^i = \frac{du^i}{dt}$ , 这一组  $n$  个二阶微分方程变成一组  $2n$  个一阶微分方程

$$\begin{cases} \frac{d\mathbf{u}}{dt} = \mathbf{v}, \\ \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}(\mathbf{u}, \mathbf{v}). \end{cases}$$

于是, 从 Graves 的 Theory of Functions of Real Variables, p. 166, 就推出所要的结论(比较本书 § 2.4).

把这个定理应用于测地线微分方程, 我们得到下面的

**引理 10.2** 对于 Riemann 流形  $M$  上的每个点  $p_0$ , 存在  $p_0$  的一个邻域  $U$  和一个数  $\varepsilon > 0$ , 使得对于每个  $p \in U$  和每个长度  $< \varepsilon$  的切向量  $v \in TM_p$ , 存在唯一一条测地线

$$\gamma_v: (-2, 2) \rightarrow M,$$

满足条件

$$\gamma_v(0) = p, \quad \frac{d\gamma_v}{dt}(0) = v.$$

**证** 如果我们考虑的不是区间  $(-2, 2)$  而只是一个任意小的区间, 我们的结论立刻从 10.1 推出. 更确切地说, 存在  $p_0$  的邻域  $U$  和数  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$ , 使得对于每个  $p \in U$  和每个  $v \in TM_p$ ,  $\|v\| < \varepsilon_1$ , 存在唯一的测地线

$$\gamma_v: (-2\varepsilon_2, 2\varepsilon_2) \rightarrow M,$$

满足所要的原始条件.

为了得到更强的结论, 只须注意, 测地线微分方程具有下述齐

次性质：命  $c$  是任何常数；如果参数曲线

$$t \rightarrow r(t)$$

是一条测地线，那么参数曲线

$$t \rightarrow r(ct)$$

也是一条测地线。

今设  $\varepsilon$  小于  $\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2$ 。于是，若  $\|v\| < \varepsilon$ ,  $|t| < 2$ , 则有

$$\|v/\varepsilon_2\| < \varepsilon_1, \quad |\varepsilon_2 t| < 2\varepsilon_2.$$

因此，我们可以把  $r_v(t)$  定义为  $r_{v/\varepsilon_2}(\varepsilon_2 t)$ 。这就证明了 10.2.

下面的记号是方便的。命  $v \in TM_q$  是一个切向量；假设存在测地线

$$r: [0, 1] \rightarrow M,$$

满足条件

$$r(0) = q, \quad \frac{dr}{dt}(0) = v.$$

于是点  $r(1) \in M$  将记为  $\exp_q(v)$ , 称为切向量  $v$  的 **指数对应点**<sup>1)</sup>。于是，测地线  $r$  可以用公式

$$r(t) = \exp_q(tv)$$

来表示。引理 10.2 说：如果  $\|v\|$  充分小，则  $\exp_q(v)$  有定义，一般说来， $\exp_q(v)$  对于较大的向量  $v$  无定义。不过， $\exp_q(v)$  如果有定义，它总是唯一确定的。

**定义** 流形  $M$  称为**测地完备的**，如果  $\exp_q(v)$  对所有  $q \in M$  和所有向量  $v \in TM_q$  有定义，这显然等价于下述要求：

对于每个测地线段  $r_0: [\alpha, b] \rightarrow M$ ，可以把  $r_0$  延长为一条无限测地线

---

1) 这个名词的历史来源如下。若  $M$  是所有  $n \times n$  酉矩阵组成的群，则在单位矩阵  $I$  处的切空间  $TM_I$  可以同  $n \times n$  斜 Hermite 矩阵组成的空间等同起来。上面定义的函数

$$\exp_I: TM_I \rightarrow M$$

就由指数幂级数给出：

$$\exp_I(A) = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

——原注

$$\gamma: \mathbb{R} \rightarrow M.$$

在证明了某些局部性结果以后, 我们再回来研究完备性。

命  $TM$  是  $M$  的切流形, 由所有形如  $(p, v)$  的配对组成, 其中  $p \in M$ ,  $v \in TM_p$ . 我们赋予  $TM$  以下述  $C^\infty$  微分结构: 若  $(u^1, \dots, u^n)$  是开集  $U \subset M$  中的坐标系, 则在  $q \in U$  处的每个切向量均可唯一表为  $t^1\partial_1 + \dots + t^n\partial_n$ , 其中  $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u^i}|_q$ . 于是函数  $u^1, \dots, u^n, t^1, \dots, t^n$  构成开集  $TU \subset TM$  上的一个坐标系。

引理 10.2 说: 对于每个  $p \in M$ , 映像

$$(q, v) \mapsto \exp_q(v)$$

在点  $(p, 0) \in TM$  的一个邻域  $V$  中处处有定义。此外, 这个映像在整个  $V$  中是可微的。

现在考虑光滑函数  $F: V \rightarrow M \times M$ , 定义为  $F(q, v) = (q, \exp_q(v))$ . 我们指出:  $F$  在点  $(p, 0)$  的 Jacobi 矩阵是非异的。事实上, 把  $U \times U \subset M \times M$  上的导出坐标标记为  $(u_1^1, \dots, u_1^n, u_2^1, \dots, u_2^n)$ , 我们有

$$F_* \left( \frac{\partial}{\partial u^i} \right) = \frac{\partial}{\partial u_1^i} + \frac{\partial}{\partial u_2^i},$$

$$F_* \left( \frac{\partial}{\partial t^j} \right) = \frac{\partial}{\partial u_1^j}.$$

于是,  $F$  在  $(p, 0)$  的 Jacobi 矩阵具有形状  $\begin{pmatrix} I & I \\ 0 & I \end{pmatrix}$ , 因而是非异的。

从隐函数定理可见,  $F$  把  $(p, 0) \in TM$  的某个邻域  $V'$  微分同胚地映成  $(p, p) \in M \times M$  的某个邻域。我们可以假设: 第一个邻域  $V'$  的所有组成元素  $(q, v)$  使得  $q$  属于  $p$  的一个已知邻域  $U'$  而  $\|v\| < \varepsilon$ . 选取  $p$  的一个较小的邻域  $W$ , 使得  $F(V') \supset W \times W$ . 于是, 我们证明了下面的引理。

**引理 10.3** 对每个  $p \in M$  存在一个邻域  $W$  和一个数  $\varepsilon > 0$ , 使得

(1)  $W$  的任何两点均可用  $M$  中唯一一条长度  $< \varepsilon$  的测地线联结起来。

(2) 这条测地线光滑依赖于这两个点 [即是, 若  $t \rightarrow \exp_{q_1}(tv), 0 \leq t \leq 1$ , 是联结  $q_1$  和  $q_2$  的测地线, 那么配对  $(q_1, v) \in TM$  光滑依赖于  $(q_1, q_2)$ ].

(3) 对于每个  $q \in W$ , 映像  $\exp_q$  把  $TM_q$  中的  $\varepsilon$  开球微分同胚地映成一个开集  $U_q \supset W$ .

**注** 更细致一些, 可以选取  $W$ , 使得联结其中任何两点的测地线都完全位于  $W$  中. 见 J. H. C. Whitehead, Convex regions in the geometry of paths, *Quarterly Journal of Mathematics* (Oxford) Vol. 3 (1932), 33—42.

现在让我们研究测地线与弧长之间的关系。

**定理 10.4** 命  $W$  和  $\varepsilon$  如引理 10.3 所述,

$$\gamma: [0, 1] \rightarrow M$$

是联结  $W$  的两点而长度  $< \varepsilon$  的测地线, 再命

$$\omega: [0, 1] \rightarrow M$$

是联结同样两点的任何其他的逐段光滑曲线. 于是,

$$\int_0^1 \left\| \frac{d\gamma}{dt} \right\| dt \leq \int_0^1 \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt,$$

其中等式仅在点集  $\omega([0, 1])$  与  $\gamma([0, 1])$  重合时才能成立。

因此,  $\gamma$  是联结其端点的最短道路。

证明基于两个引理. 命  $q = \gamma(0)$ ,  $U_q$  如 10.3 中所述。

**引理 10.5** 在  $U_q$  中, 通过  $q$  的测地线都是超曲面

$$\{\exp_q(v): v \in TM_q, \|v\| = \text{常数}\}$$

的正交轨线。

**证** 命  $t \rightarrow v(t)$  表示  $TM_q$  中任何一条曲线, 使得  $\|v(t)\| = 1$ . 我们必须证明: 在  $U_q$  中, 相应的曲线

$$t \rightarrow \exp_q(r_0 v(t)), \quad 0 < r_0 < \varepsilon,$$

与测地射线

$$r \rightarrow \exp_q(r v(t_0))$$

正交。考虑参数曲面  $f$ , 定义为

$$f(r, t) = \exp_q(rv(t)), \quad 0 \leq r < \varepsilon.$$

我们应该证明: 对一切  $(r, t)$  有

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = 0.$$

我们有

$$\frac{\partial}{\partial r} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle = \left\langle \frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle + \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{\partial r} \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle,$$

其中右端第一个表达式为零, 因为曲线

$$r \rightarrow f(r, t)$$

是测地线; 第二个表达式等于

$$\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial r} \right\rangle = 0,$$

因为  $\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\| = \|v(t)\| = 1$ . 因此,  $\left\langle \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right\rangle$  这个量不依赖于  $r$ .

但在  $r = 0$  时我们有

$$f(0, t) = \exp_q(0) = q,$$

所以  $\frac{\partial f}{\partial t}(0, t) = 0$ , 从而  $\left( \frac{\partial f}{\partial r}, \frac{\partial f}{\partial t} \right)$  恒为零, 证毕.

现在考虑任何一条逐段光滑曲线

$$\omega: [a, b] \rightarrow U_q - \{q\}.$$

每个点  $\omega(t)$  均可唯一表为  $\exp_q(r(t)v(t))$  的形状, 其中  $0 < r(t) < \varepsilon$ ,  $\|v(t)\| = 1$ ,  $v(t) \in TM_q$ .

### 引理 10.6 长度

$$\int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt \geq |r(b) - r(a)|,$$

其中等式仅在函数  $r(t)$  单调而函数  $v(t)$  为常值时才成立.

于是, 联结以  $q$  为心的两个同心球壳的最短道路是测地射线.

证 命  $f(r, t) = \exp_q(rv(t))$ , 所以  $\omega(t) = f(r(t), t)$ ,

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial f}{\partial r} r'(t) + \frac{\partial f}{\partial t}.$$

由于右端两个向量相互正交，并且  $\left\| \frac{\partial f}{\partial r} \right\| = 1$ ，所以我们有：

$$\left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 = |r'(t)|^2 + \left\| \frac{\partial f}{\partial t} \right\|^2 \geq |r'(t)|^2,$$

其中等式仅在  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$  时才成立，因而仅在  $\frac{dv}{dt} = 0$  才成立。于是

$$\int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt \geq \int_a^b |r'(t)| dt \geq |r(b) - r(a)|,$$

其中等式仅在  $r(t)$  单调且  $v(t)$  为常值时才成立，证毕。

定理 10.4 的证明现在就是直截了当的了。考虑任何一条逐段光滑道路  $\omega$ ，从  $q$  通到一点

$$q' = \exp_q(rv) \in U_q,$$

其中  $0 < r < \varepsilon$ ,  $\|v\| = 1$ 。于是，对任何  $\delta > 0$ ，道路  $\omega$  必定含有一个线段，把半径为  $\delta$  的球壳联结到半径为  $r$  的球壳，并位于这两个球壳之间。这个线段的长度将  $\geq r - \delta$ ，因而让  $\delta$  趋于 0 时， $\omega$  的长度将  $\geq r$ 。若  $\omega([0, 1])$  与  $r([0, 1])$  不重合，则我们将得到严格的不等式。10.4 证毕。

定理 10.4 的一个重要推论是下面的

**推论 10.7** 假设道路  $\omega: [0, l] \rightarrow M$  以弧长为参数，其长度小于或等于从  $\omega(0)$  到  $\omega(l)$  的任何其他道路的长度，那么  $\omega$  是一条测地线。

**证** 如前，考虑  $\omega$  的任何一段，它位于开集  $W$  中，长度  $< \varepsilon$ 。按照定理 10.4，这一段必定是测度线，因而整个道路  $\omega$  是测地线。

**定义** 测地线  $\gamma: [a, b] \rightarrow M$  称为极小测地线，如果其长度小于或等于联结其端点的任何其他逐段光滑道路的长度。

**定理 10.4 断定：** 测地线的任何充分小的一段都是极小测地线。另一方面，长的测地线可能不是极小测地线。例如，我们不久将会看到，单位球面上的大圆弧是测地线；但是，如果这样一条弧的长度大于  $\pi$ ，它肯定不是极小测地线。

一般说来，极小测地线不是唯一的。例如，单位球面上两个对

径点可以用无限多条极小测地线联结起来。不过，下述断言为真。

两点  $p, q \in M$  的距离  $\rho(p, q)$  定义为联结这两点的所有逐段光滑道路的弧长的下确界。这显然使  $M$  成为一个尺度空间。从 10.4 容易推出，这个尺度与  $M$  的原来的拓扑结构是一致的。

**推论 10.8** 对于已知紧致集  $K \subset M$ ，存在数  $\delta > 0$ ，使得  $K$  中任何两点，如果其间的距离小于  $\delta$ ，就可以用唯一一条长度  $< \delta$  的测地线联结起来。此外，这条测地线还是极小测地线，光滑依赖于它的端点。

**证** 如 10.3 所述，我们可以用开集  $W_\alpha$  来覆盖  $K$ ；取  $\delta$  充分小，使得  $K$  中任何两点，其距离小于  $\delta$  时，就属于一个公共的  $W_\alpha$ 。证毕。

让我们回想一下，流形  $M$  称为测地完备的，如果每个测地线段均可无限延长。

**定理 10.9** (Hopf 及 Rinow<sup>1)</sup>) 若  $M$  是测地完备的，则任何两点均可用极小测地线联结起来。

**证** 给了  $p, q \in M$ ，其距离  $r > 0$ ，选取邻域  $U_p$ ，如引理 10.3 所述。命  $S \subset U_p$  表示以  $p$  为心、半径  $\delta < \varepsilon$  的球壳。由于  $S$  是紧致的，所以  $S$  上存在一点

$$p_0 = \exp_q(\delta v), \quad \|v\| = 1,$$

使得到  $q$  的距离为极小。我们来证明

$$\exp_q(rv) = q.$$

因此，测地线段  $t \rightarrow r(t) = \exp_p(tv), \quad 0 \leq t \leq r$ ，实际上是从  $p$  到  $q$  的极小测地线。

要证明的结论相当于：一个点沿测地线  $r$  向前移动必定越来越接近于  $q$ 。事实上，我们将证明：对每个  $t \in [\delta, r]$  有

$$\rho(r(t), q) = r - t. \quad (1_t)$$

1) 见 G. de Rham, Sur la réductibilité d'un espace de Riemann, *Commentarii Math. Helvetici*, Vol. 26(1952), p. 341 以及 H. Hopf and W. Rinow, Ueber den Begriff der vollständigen differentialgeometrischen Fläche, *Commentarii Math. Helvetici*, Vol. 3(1931), 209—225。——原注

这个恒等式在  $t = r$  时就是所要的结论。

首先，我们证明等式  $(1_s)$  为真。由于从  $p$  到  $q$  的每条道路必须穿过  $S$ ，所以我们有

$$\rho(p, q) = \min_{s \in S} (\rho(p, s) + \rho(s, q)) = \delta + \rho(p_0, q).$$

因此， $\rho(p_0, q) = r - \delta$ 。由于  $p_0 = \gamma(\delta)$ ，这就证明了  $(1_s)$ 。

命  $t_0 \in [\delta, r]$  表示使得  $(1_{t_0})$  为真的数  $t$  的上确界。于是，按照连续性，等式  $(1_{t_0})$  也为真。若  $t_0 < r$ ，我们将得到一个矛盾。命  $S'$  表示以  $\gamma(t_0)$  为心、以  $\delta'$  为半径的小球壳， $p'_0 \in S'$  是  $S'$  中



图 23

与  $q$  相距为极小的一点(见图 23)。于是，

$$\rho(\gamma(t_0), q) = \min_{s \in S'} (\rho(\gamma(t_0), s) + \rho(s, q)) = \delta' + \rho(p'_0, q),$$

因而

$$\rho(p'_0, q) = (r - t_0) - \delta'. \quad (2)$$

我们看出， $p'_0$  等于  $\gamma(t_0 + \delta')$ 。事实上，三角形不等式说，(利用(2))

$$\rho(p, p'_0) \geq \rho(p, q) - \rho(p'_0, q) = t_0 + \delta'.$$

但是，沿着  $\gamma$  从  $p$  到  $\gamma(t_0)$ ，然后再沿着一条极小测地线从  $\gamma(t_0)$  到  $p'_0$ ，给出一条从  $p$  到  $p'_0$  的道路，长度正好是  $t_0 + \delta'$ 。由于这条测地折线具有极小长度，从推论 10.7 可见，它是一条(不折的)测地线，因而与  $\gamma$  重合。

于是  $\gamma(t_0 + \delta') = p'_0$ ，等式(2)成为

$$\rho(\gamma(t_0 + \delta'), q) = r - (t_0 + \delta'), \quad (1_{t_0+\delta'})$$

这和  $t_0$  的定义矛盾。证毕。

结果,我们得到下面的

**推论 10.10** 若  $M$  是测地完备的,则  $M$  的每个有界子集都具有紧致闭包. 因此,  $M$  作为尺度空间是完备的(即是每个 Cauchy 序列都收敛).

**证** 若  $X \subset M$  具有直径  $d$ , 则对任何  $p \in X$ , 映像  $\exp_p: TM_p \rightarrow M$  把  $TM_p$  中半径为  $d$  的圆盘映成  $M$  的一个紧致子集; 由于定理 10.9, 这个子集含有  $X$ . 因而  $X$  的闭包是紧致的.

反之,若  $M$  作为尺度空间是完备的,那么利用引理 10.3 不难证明:  $M$  是测地完备的. 至于详细情况,读者可以参考 Hopf 和 Rinow 的文章. 今后, 我们对测地完备与尺度完备将不加区别, 而只是简单地说完备 Riemann 流形.

**关于测地线的一些熟知的例子** 在  $n$  维欧氏空间  $\mathbf{R}^n$  中, 对于通常的坐标系  $x_1, \dots, x_n$  和通常的 Riemann 尺度  $dx_1 \otimes dx_1 + \dots + dx_n \otimes dx_n$ , 我们有  $\Gamma_{ij}^k = 0$ ; 由  $t \rightarrow (x_1(t), \dots, x_n(t))$  所表示的测地线将满足方程组

$$\frac{d^2x_i}{dt^2} = 0,$$

这个方程组的解是直线. 这也可以从下述论证看出: 容易证明, 弧长公式

$$\int \left( \sum_{i=1}^n \left( \frac{dx_i}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dt$$

与通常把弧长定义为内接多边形长度的上确界是一致的. 从这个定义显然可见, 直线具有极小长度, 因而是测地线.

$S^n$  上的测地线正好是大圆, 即  $S^n$  与通过其中心的平面相交而得的圆.

**证** 关于平面  $E^2$  的反射是一个同尺映像  $I: S^n \rightarrow S^n$ , 它的不动点集是  $C = S^n \cap E^2$ . 命  $x$  和  $y$  是  $C$  的两点, 于是其间存在唯一一条测地线  $C'$ , 具有极小长度. 由于  $I$  是同尺映像, 所以曲线  $I(C')$  是  $I(x) = x$  和  $I(y) = y$  之间的一条测地线, 具有和  $C'$  一样的长度. 因此,  $C' = I(C')$ , 从而  $C' \subset C$ .

最后,由于通过  $S^n$  的任何点在任何已知方向上存在一个大圆,所以这些大圆全都是测地线.

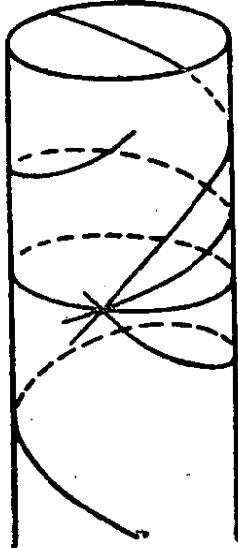


图 24

球面上两个对径点之间有无限多条具有极小长度的测地线,总起来具有连续统的势;所有其余点对之间都有唯一一条具有极小长度的测地线,同时也有无限多条非极小测地线,依赖于测地线绕球面转多少次以及沿哪个方向出发而定.

同理,旋转曲面上的每条经线都是测地线.

直圆柱面  $Z$  上的测地线是母线、垂直于母线的平面截出的圆周以及  $Z$  上的螺旋线等.

**证** 若  $L$  是  $Z$  的一条母线,那么把  $Z$  展开成  $\mathbf{R}^2$ , 我们得到一个同尺映像  $I: Z - L \rightarrow \mathbf{R}^2$ , 使得  $Z$  上的测地线正好就是  $\mathbf{R}^2$  中的直线在  $I^{-1}$  下的像.  $Z$  上两点之间有无限多条测地线.

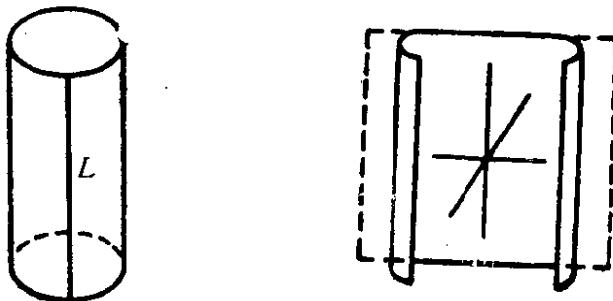


图 25

### 第三章 对变分学的应用：测地线

#### § 11. 光滑流形的道路空间

命  $M$  是一个光滑流形,  $p$  和  $q$  是  $M$  的两点(不必相异). 从  $p$  到  $q$  的逐段光滑道路是指一个映像  $\omega: [0, 1] \rightarrow M$ , 使得

- (1) 存在  $[0, 1]$  的分划  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ , 使得每个  $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$  都是  $C^\infty$  可微的,
- (2)  $\omega(0) = p, \omega(1) = q.$

$M$  上从  $p$  到  $q$  的所有逐段光滑道路的集合记为  $\mathcal{Q}(M; p, q)$ , 或简记为  $\mathcal{Q}(M)$  或  $\mathcal{Q}$ .

以后(§16 中)我们将给  $\mathcal{Q}$  以拓扑空间的结构, 但目前这倒不必. 我们将把  $\mathcal{Q}$  视为“无限维流形”之类的对象. 为了进行这种比较, 我们作下面的定义.

$\mathcal{Q}$  在道路  $\omega$  处的切空间, 是指一个向量空间, 由沿  $\omega$  的所有逐段光滑向量场  $W$  组成, 使得  $W(0) = 0, W(1) = 0$ . 记号  $T\mathcal{Q}_\omega$  就用来表示这个向量空间.

如果  $F$  是  $\mathcal{Q}$  上的一个实值函数, 自然要问: 切空间上的导出映像

$$F_*: T\mathcal{Q}_\omega \rightarrow T\mathcal{R}_{F(\omega)}$$

应该是什么意思? 当  $F$  是光滑流形  $M$  上通常意义下的光滑函数时, 我们可以定义  $F_*: TM_p \rightarrow T\mathcal{R}_{F(p)}$  如下: 给了  $X \in TM_p$ , 选取  $M$  上的一条光滑道路  $u \mapsto \alpha(u)$ , 在  $-\varepsilon < u < \varepsilon$  时有定义, 使得

$$\alpha(0) = p, \frac{d\alpha}{du}(0) = X.$$

于是,  $F_*(X)$  等于  $\left. \frac{d(F(\alpha(u)))}{du} \right|_{u=0}$  乘以基向量  
 $\left( \frac{d}{dt} \right)_{F(p)} \in T\mathcal{R}_{F(p)}.$

为了对  $F: Q \rightarrow R$  施行类似的操作, 我们需要下面的概念.

**定义** (在端点保持固定的条件下) 所谓  $\omega$  的变分, 是指一个函数

$$\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q, \quad \varepsilon > 0,$$

使得

$$(1) \quad \bar{\alpha}(0) = \omega;$$

(2) 存在  $[0, 1]$  的划分  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ , 使得由  $\alpha(u, t) = \bar{\alpha}(u)(t)$  所定义的映像.

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$$

在每个条状区域  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$  ( $i = 1, \dots, k$ ) 上都是  $C^\infty$  映像;

由于每个  $\bar{\alpha}(u)$  都属于  $Q = Q(M; p, q)$ , 所以还有

$$(3) \quad \text{对所有 } u \in (-\varepsilon, \varepsilon) \text{ 有 } \alpha(u, 0) = p, \alpha(u, 1) = q.$$

我们将用  $\alpha$  或者用  $\bar{\alpha}$  来表示这个变分. 更一般地, 如果在上述定义中,  $(-\varepsilon, \varepsilon)$  被换成  $R^n$  中原点 0 的一个邻域  $U$ , 则  $\alpha$  (或  $\bar{\alpha}$ ) 称为  $\omega$  的  $n$  参数变分.

现在可以把  $\bar{\alpha}$  视为  $Q$  中的“光滑道路”, 它的“速度向量”

$$\frac{d\bar{\alpha}}{du}(0) \in T\mathcal{Q}_\omega,$$

我们定义为沿  $\omega$  的向量场  $W$ , 由

$$W_t = \frac{d\bar{\alpha}}{du}(0)_t = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$$

给出. 显然,  $W \in T\mathcal{Q}_\omega$ . 这个向量场  $W$  也称为相应于变分  $\alpha$  的变分向量场.

注意, 对于任何  $W \in T\mathcal{Q}_\omega$ , 存在变分  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$ , 满足条件  $\bar{\alpha}(0) = \omega$ ,  $\frac{d\bar{\alpha}}{du}(0) = W$ . 事实上, 可以命

$$\bar{\alpha}(u)(t) = \exp_{\omega(t)}(u W_t).$$

仿照上面给出的定义, 如果  $F$  是  $\mathcal{Q}$  上的实值函数, 我们来定义

$$F_*: T\mathcal{Q}_\omega \rightarrow TR_{F(\omega)}$$

如下: 给了  $W \in T\mathcal{Q}_\omega$ , 选取变分  $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{Q}$ , 使得

$$\bar{\alpha}(0) = \omega, \quad \frac{d\bar{\alpha}}{du}(0) = W;$$

于是命  $F_*(W)$  等于

$$\left. \frac{d(F(\bar{\alpha}(u)))}{du} \right|_{u=0}$$

乘以切向量  $\left( \frac{d}{dt} \right)_{F(\omega)}$ . 当然, 如果对  $F$  不作任何假定, 就不能保证这个导数存在, 以及不依赖于  $\bar{\alpha}$  的选择. 我们不来研究  $F$  必须满足什么条件才能保证  $F_*$  具有这些性质了; 我们之所以说明如何定义  $F_*$ , 只是为了引出下面的定义.

**定义** 道路  $\omega$  称为函数  $F: \mathcal{Q} \rightarrow \mathbf{R}$  的临界道路, 如果对于  $\omega$  的每个变分  $\bar{\alpha}$  而言,  $\left. \frac{dF(\bar{\alpha}(u))}{du} \right|_{u=0}$  都是零.

**例** 若  $F$  在道路  $\omega_0$  处取其极小值, 并且导数  $\left. \frac{dF(\bar{\alpha}(u))}{du} \right|_{u=0}$  全有定义, 则  $\omega_0$  显然是一条临界道路.

## § 12. 道 路 的 能 量

今设  $M$  是 Riemann 流形, 向量  $v \in TM_p$  的长度记为  $\|v\| = \langle v, v \rangle^{1/2}$ . 对于  $\omega \in \mathcal{Q}$ , 定义  $\omega$  从  $a$  到  $b$  ( $0 \leq a < b \leq 1$ ) 的能量为

$$E_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|^2 dt.$$

我们也把  $E_0^1$  简写成  $E$ .

可以把能量和从  $a$  到  $b$  的弧长

$$L_a^b(\omega) = \int_a^b \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\| dt$$

进行比较如下。对  $f(t) = 1$  和  $g(t) = \left\| \frac{d\omega}{dt} \right\|$ , 应用 Schwarz 不等式

$$\left( \int_a^b f g dt \right)^2 \leq \left( \int_a^b f^2 dt \right) \left( \int_a^b g^2 dt \right),$$

我们看出

$$(L_a^b)^2 \leq (b-a) E_a^b,$$

这里等式成立的充要条件是:  $g$  为常值函数, 即参数  $t$  与弧长成正比。

今设从  $p = \omega(0)$  到  $q = \omega(1)$  有一条极小测地线  $\gamma$ . 于是

$$E(\gamma) = L(\gamma)^2 \leq L(\omega)^2 \leq E(\omega),$$

这里,  $L(\gamma)^2 = L(\omega)^2$  这个等式要成立, 必须  $\omega$  也是一条极小测地线, 当然, 参数可能重新选取(见 §10.7). 另一方面,  $L(\omega)^2 = E(\omega)$  这个等式要能成立, 必须参数与沿  $\omega$  的弧长成正比. 这就证明了: 除非  $\omega$  也是一条极小测地线, 否则我们将有  $E(\gamma) < E(\omega)$ . 换言之:

**引理 12.1** 命  $M$  是一个完备的 Riemann 流形,  $p, q \in M$  的距离为  $\rho$ . 于是能量函数

$$E: \mathcal{Q}(M; p, q) \rightarrow \mathbb{R}$$

正好在从  $p$  到  $q$  的极小测地线的集合上取其极小值  $\rho^2$ .<sup>1)</sup>

我们现在来考虑, 什么样的道路  $\omega \in \mathcal{Q}$  是能量函数  $E$  的临界道路.

命  $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{Q}$  是  $\omega$  的变分,  $W_t = \frac{\partial \alpha}{\partial t}(0, t)$  是相应的变分向量场, 此外, 命

$$V_t = \frac{d\omega}{dt} = \omega \text{ 的速度向量},$$

1) 引理中的  $\rho$  原文作  $d$ . ——译注

$$A_t = \frac{D}{dt} \frac{d\omega}{dt} = \omega \text{ 的加速度向量,}$$

$\Delta_t V = V_{t+} - V_{t-}$  = 速度向量在  $t$  处的跳跃,  $0 < t < 1$ .  
自然, 对于一切  $t$ , 除了有限多个值外, 我们有  $\Delta_t V = 0$ .

**定理 12.2 (第一变分公式)**

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left. \frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} \right|_{u=0} &= - \sum_t \langle W_t, \Delta_t V \rangle \\ &\quad - \int_0^1 \langle W_t, A_t \rangle dt. \end{aligned}$$

**证** 按照引理 8.3, 我们有

$$\frac{\partial}{\partial u} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle = 2 \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle.$$

因此,

$$\begin{aligned} \frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} &= \frac{d}{du} \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt \\ &= 2 \int_0^1 \left\langle \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

根据引理 8.7, 我们可以在上面这个公式里用  $\frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u}$  来代替  $\frac{D}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$ .

选取  $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ , 使得  $\alpha$  在每个条状区域  $(-\varepsilon, \varepsilon) \times [t_{i-1}, t_i]$  上是可微的. 这时, 可以在  $[t_{i-1}, t_i]$  上“分部积分”如下: 恒等式

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle \\ &\quad + \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle \end{aligned}$$

蕴涵

$$\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt = \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle \Big|_{t=t_{i-1}^+}^{t=t_i^-}$$

$$-\int_{t_{i-1}}^{t_i} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt.$$

把  $i = 1, \dots, k$  的各相应公式加起来, 利用  $t=0$  或  $1$  时  $\frac{\partial \alpha}{\partial u} = 0$  的事实, 就得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} &= - \sum_{i=1}^{k-1} \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \Delta_{t_i} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

令  $u = 0$ , 就得到所要的公式

$$\frac{1}{2} \frac{dE \circ \bar{\alpha}}{du}(0) = - \sum_i \langle W, \Delta_t V \rangle - \int_0^1 \langle W, A \rangle dt,$$

证毕。

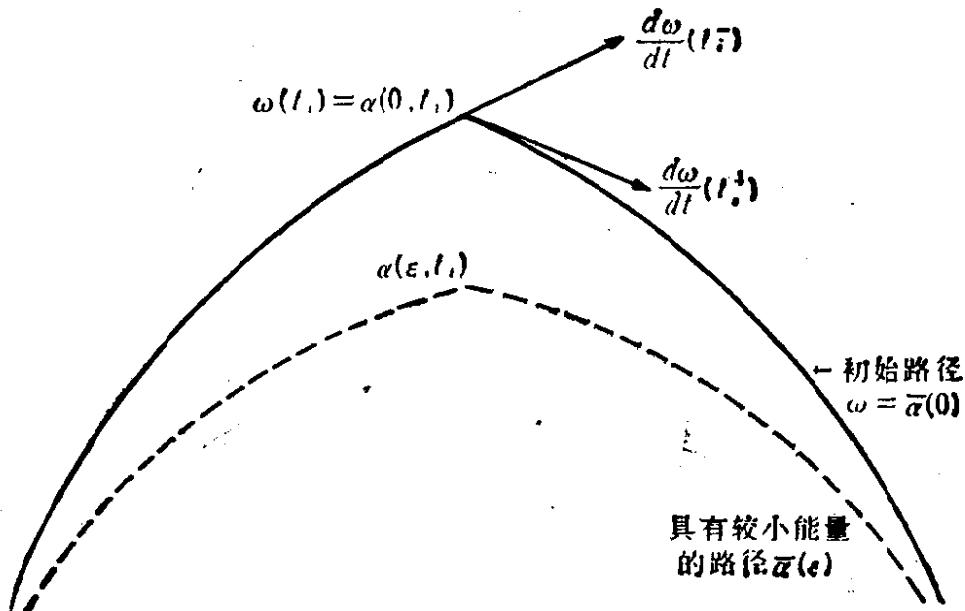


图 26

直观上说来, 在  $\frac{dE \circ \bar{\alpha}}{du}(0)$  的表达式里, 第一项说明: 使道路  $\omega$  朝着降低“转折度”的方向变化, 势必使能量  $E$  的值变小, 见图 26。第二项说明: 使曲线朝着它的加速度向量  $\frac{D}{Dt} \left( \frac{d\omega}{dt} \right)$  的方向变化, 也势必使  $E$  的值减少。

提醒一下,道路  $\omega \in \mathcal{Q}$  是测地线的充要条件是:  $\omega$  在整个区间  $[0,1]$  上是  $C^\infty$  可微的,并且  $\omega$  的加速度向量  $\frac{D}{dt} \left( \frac{d\omega}{dt} \right)$  沿  $\omega$  恒为零。

**推论 12.3** 道路  $\omega$  是函数  $E$  的临界点的充要条件是:  $\omega$  是一条测地线。

**证** 一条测地线显然是临界点。反之,命  $\omega$  是一个临界点,则存在  $\omega$  的一个变分,其变分向量场为  $W(t) = f(t)A(t)$ , 这里  $f(t)$  除了在诸  $t_i$  处为零外处处为正。于是

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{du}(0) = - \int_0^1 f(t) \langle A(t), A(t) \rangle dt.$$

这个表达式为零的充要条件是: 对一切  $t$  有  $A(t) = 0$ 。因此,每个  $\omega|_{[t_i, t_{i+1}]}$  都是测地线。

现在选取一个变分,使得  $W(t_i) = \Delta_{t_i} V$ 。于是

$$\frac{1}{2} \frac{dE}{du}(0) = - \sum \langle \Delta_{t_i} V, \Delta_{t_i} V \rangle.$$

如果这个表达式为零,则  $\Delta_{t_i} V$  处处为零,而  $\omega$  是  $C^1$  类可微的,即使在  $t_i$  这些点处亦然。因此,从微分方程的唯一性定理知。 $\omega$  处处是  $C^\infty$  可微的,从而  $\omega$  是一条不折的测地线。

### § 13. 能量函数在临界道路处的 Hesse 泛函

继续进行前节推演的那种类比,我们现在希望定义一个双线性泛函

$$E_{**}: T\mathcal{Q}_r \times T\mathcal{Q}_r \rightarrow \mathbf{R},$$

这里  $r$  是函数  $E$  的临界点,即是一条测地线。这个双线性泛函称为  $E$  在  $r$  处的 **Hesse 泛函**。

如果  $f$  是流形  $M$  上的实值函数,  $p$  为其临界点,则 Hesse 泛函

$$f_{**}: TM_p \times TM_p \rightarrow \mathbf{R}$$

可以定义如下：对于  $X_1, X_2 \in TM_p$ , 选取一个光滑映像  $(u_1, u_2) \rightarrow \alpha(u_1, u_2)$ , 定义在  $\mathbf{R}^2$  中原点  $(0, 0)$  的某个邻域上, 而在  $M$  中取值, 使得

$$\alpha(0, 0) = p, \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(0, 0) = X_1, \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(0, 0) = X_2.$$

于是

$$f_{**}(X_1, X_2) = \left. \frac{\partial^2 f(\alpha(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{(0,0)}.$$

由此得到  $E_{**}$  的定义如下. 对于向量场  $W_1, W_2 \in T\Omega_r$ , 选取一个双参数变分

$$\alpha: U \times [0, 1] \rightarrow M,$$

这里  $U$  是  $\mathbf{R}^2$  中原点  $(0, 0)$  的一个邻域, 使得

$$\begin{aligned} \alpha(0, 0, t) &= \gamma(t), \frac{\partial \alpha}{\partial u_1}(0, 0, t) = W_1(t), \\ \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}(0, 0, t) &= W_2(t) \end{aligned}$$

(见§11). 于是, Hesse 泛函  $E_{**}(W_1, W_2)$  就定义为下面的二阶偏导数

$$\left. \frac{\partial^2 E(\bar{\alpha}(u_1, u_2))}{\partial u_1 \partial u_2} \right|_{(0,0)},$$

其中  $\bar{\alpha}(u_1, u_2) \in \Omega$  表示由  $\bar{\alpha}(u_1, u_2)(t) = \alpha(u_1, u_2, t)$  所定义的道路. 这个二阶偏导数也简写为  $\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0)$ .

为了证明  $E_{**}$  完全有定义, 需要下面的定理.

**定理 13.1** (第二变分公式) 命  $\bar{\alpha}: U \rightarrow \Omega$  是测地线  $\gamma$  的一个双参数变分, 其变分向量场为

$$W_i = \frac{\partial \bar{\alpha}}{\partial u_i}(0, 0) \in T\Omega_r, \quad i = 1, 2.$$

于是, 能量函数的二阶偏导数  $\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0, 0)$  具有下面的表达式:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2}(0,0) &= - \sum_t \left\langle W_2(t), \Delta_t \frac{DW_1}{dt} \right\rangle \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1)V \right\rangle dt, \end{aligned}$$

其中  $V = \frac{d\gamma}{dt}$  表示速度向量场, 而

$$\Delta_t \frac{DW_1}{dt} = \frac{DW_1}{dt}(t^+) - \frac{DW_1}{dt}(t^-)$$

表示  $\frac{DW_1}{dt}$  在单位开区间中的有限多个间断点之一处的跳跃。

**证** 根据 12.2 我们有

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial E}{\partial u_2} &= - \sum_t \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

因此,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} &= - \sum_t \left\langle \frac{D}{\partial u_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle \\ &\quad - \sum_t \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial u_1} \Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle \frac{D}{\partial u_1} \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt \\ &\quad - \int_0^1 \left\langle \frac{\partial \alpha}{\partial u_2}, \frac{D}{\partial u_1} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \right\rangle dt. \end{aligned}$$

让我们来计算这个表达式在  $(u_1, u_2) = (0,0)$  时的值。由于  $\gamma = \alpha(0,0)$  是一条不折的测地线, 我们有

$$\Delta_t \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0, \quad \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = 0,$$

所以上面的表达式中第一项和第三项均为零。

把第二项整理一下, 我们得到

$$(13.2) \quad \frac{1}{2} \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} (0,0) = - \sum \left\langle W_2, \Delta_t \frac{D}{dt} W_1 \right\rangle - \int_0^1 \left\langle W_2, \frac{D}{\partial u_1} \frac{D}{\partial t} V \right\rangle dt.$$

为了使  $\frac{D}{\partial u_1}$  和  $\frac{D}{\partial t}$  这两个算子进行交换，我们需要引用曲率公式

$$\begin{aligned} \frac{D}{\partial u_1} \frac{D}{\partial t} V &= \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial u_1} V \\ &= R \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} \right) V = R(V, W_1)V. \end{aligned}$$

结合恒等式

$$\frac{D}{\partial u_1} V = \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial u_1} = \frac{D}{dt} W_1,$$

这就得到

$$(13.3) \quad \frac{D}{\partial u_1} \frac{D}{\partial t} V = \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1)V.$$

把这个表达式代入(13.2)就完全证明了定理 13.1.

**推论 13.4 表达式**

$$E_{**}(W_1, W_2) = \frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} (0,0)$$

是  $W_1$  和  $W_2$  的一个完全确定的对称双线性函数。

**证** 第二变分公式表明,  $\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} (0,0)$  只依赖于变分向量场  $W_1$  和  $W_2$ , 所以  $E_{**}(W_1, W_2)$  完全确定。这个公式也表明,  $E_{**}$  是双线性的。至于对称性

$$E_{**}(W_1, W_2) = E_{**}(W_2, W_1),$$

从第二变分公式是完全看不出来的, 而是从

$$\frac{\partial^2 E}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{\partial^2 E}{\partial u_2 \partial u_1}$$

这个对称性质直接推出的。

**注 13.5** 双线性泛函  $E_{**}$  的对角线项  $E_{**}(W, W)$  可以借助于  $\gamma$  的单参数变分来描述, 事实上,

$$E_{**}(W, W) = \frac{d^2 E \circ \bar{\alpha}}{du^2}(0),$$

这里  $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow Q$  表示  $\gamma$  的任何单参数变分，其变分向量场  $\frac{d\bar{\alpha}}{du}(0)$  等于  $W$ . 为了证明这个恒等式，只须引进双参数变分

$$\bar{\beta}(u_1, u_2) = \bar{\alpha}(u_1 + u_2),$$

并注意

$$\frac{\partial \bar{\beta}}{\partial u_i} = \frac{d\bar{\alpha}}{du}, \quad \frac{\partial^2 E \circ \bar{\beta}}{\partial u_1 \partial u_2} = \frac{d^2 E \circ \bar{\alpha}}{du^2}$$

即可. 作为这个注记的应用，我们有下面的

**引理 13.6** 若  $\gamma$  是从  $p$  到  $q$  的极小测地线，则双线性泛函  $E_{**}$  是半正定的，因而  $E_{**}$  的指数  $\lambda$  为零。

**证** 不等式  $E(\bar{\alpha}(u)) \geq E(\gamma) = E(\bar{\alpha}(0))$  蕴涵  $\frac{d^2 E(\bar{\alpha}(u))}{du^2}$  在  $u = 0$  处的值  $\geq 0$ ，因而对一切  $W$  有  $E_{**}(W, W) \geq 0$ .

## § 14. Jacobi 场; $E_{**}$ 的零化子空间

沿测地线  $\gamma$  的向量场  $J$  称为 **Jacobi 场**，如果它满足 Jacobi 微分方程

$$\frac{D^2 J}{dt^2} + R(V, J)V = 0,$$

其中  $V = \frac{d\gamma}{dt}$ . 这是一个二阶线性微分方程。[这个方程可以表示为更熟悉的形式如下：选取沿  $\gamma$  的法正交平行向量场  $P_1, \dots, P_n$ ，再命  $J(t) = \sum f^i(t)P_i(t)$ ，则 Jacobi 方程变成

$$\frac{d^2 f^i}{dt^2} + \sum_{j=1}^n a_j^i(t) f^j(t) = 0, \quad i = 1, \dots, n,$$

其中  $a_j^i = \langle R(V, P_j)V, P_i \rangle$ . ]于是，Jacobi 方程具有  $2n$  个线性无关的解，其中每个解在  $\gamma$  上都是处处有定义的，这些解都是  $C^\infty$  可微的。此外，一个已知的 Jacobi 场  $J$  由它的初始条件

$$J(0), \frac{D J}{dt}(0) \in TM_{r(0)}$$

完全确定。

命  $p = r(a)$ ,  $q = r(b)$  是测地线  $r$  上的两点,  $a \neq b$ .

**定义**  $p$  和  $q$  称为沿  $r$  共轭<sup>1)</sup>, 如果存在沿  $r$  的非零 Jacobi 场  $J$ , 在  $t = a$  和  $t = b$  处为零。 $p$  和  $q$  作为共轭点的重数等于所有这种 Jacobi 场组成的向量空间的维数。

今命  $r$  是  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q}(M; p, q)$  中的一条测地线。提醒一下:  
Hesse 泛函

$$E_{**}: T\mathcal{Q}_r \times T\mathcal{Q}_r \rightarrow \mathbf{R}$$

的零化子空间是  $T\mathcal{Q}_r$  的一个向量子空间, 其组成元素  $W_1$  对一切  $W_2 \in T\mathcal{Q}_r$  均有  $E_{**}(W_1, W_2) = 0$ ;  $E_{**}$  的零化数  $v$  等于这个零化子空间的维数;  $E_{**}$  是蜕化的, 如果  $v > 0$ .

**定理 14.1** 向量场  $W_1 \in T\mathcal{Q}_r$  属于  $E_{**}$  的零化子空间的充要条件是:  $W_1$  是一个 Jacobi 场。因此,  $E_{**}$  蜕化的充要条件是: 端点  $p$  和  $q$  沿  $r$  共轭。 $E_{**}$  的零化数等于  $p$  和  $q$  作为共轭点的重数。

**证**(比较 12.3 的证明) 若  $J$  是一个 Jacobi 场, 在  $p$  和  $q$  处为零, 则  $J$  当然属于  $T\mathcal{Q}_r$ . 第二变分公式(13.1)说:

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} E_{**}(J, W_2) &= \sum_i \langle W_2(t), 0 \rangle \\ &+ \int_0^1 \langle W_2, 0 \rangle dt = 0, \end{aligned}$$

所以  $J$  属于零化子空间。

反之, 假设  $W_1$  属于  $E_{**}$  的零化子空间。选取  $[0, 1]$  的一个分划  $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1$ , 使得  $W_1|_{[t_{i-1}, t_i]}$  对每个  $i$  都是光滑的。命  $f: [0, 1] \rightarrow [0, 1]$  是一个光滑函数, 在参数值  $t_0, t_1, \dots, t_k$  处为零, 其他各处均为正; 再命

1) 若  $r$  自身相交, 这个定义就变得含糊不清了, 所以, 我们宁可说: 参数值  $a$  和  $b$  关于  $r$  共轭。——原注

$$W_2(t) = f(t) \left( \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1) V \right),$$

于是

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} E_{**}(W_1, W_2) \\ &= \sum 0 + \int_0^1 f(t) \left\| \frac{D^2 W_1}{dt^2} + R(V, W_1) V \right\|^2 dt. \end{aligned}$$

既然这个表达式为零, 可见对于每个  $i$ ,  $W_1|_{[t_{i-1}, t_i]}$  都是 Jacobi 场.

现在命  $W'_2 \in TQ_\gamma$  是一个向量场, 使得

$$W'_2(t_i) = \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt}, i = 1, 2, \dots, k-1.$$

于是

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{2} E_{**}(W_1, W'_2) = \\ & \sum_{i=1}^{k-1} \left\| \Delta_{t_i} \frac{DW_1}{dt} \right\|^2 + \int_0^1 0 dt = 0, \end{aligned}$$

因而  $\frac{DW_1}{dt}$  没有跳跃. 但 Jacobi 方程的解  $W_1$  由向量  $W_1(t_i)$  和  $\frac{DW_1}{dt}(t_i)$  完全确定, 可见这  $k$  个 Jacobi 场  $W_1|_{[t_{i-1}, t_i]}, i = 1, 2, \dots, k$ , 总起来给出一个 Jacobi 场  $W_1$ , 在整个单位区间上处处是  $C^\infty$  可微的, 这就完全证明了 14.1.

由此可见,  $E_{**}$  的零化数  $\nu$  总是有限数, 这是因为沿  $\gamma$  只有有限多个线性无关的 Jacobi 场.

**注 14.2** 实际上, 零化数  $\nu$  满足  $0 \leq \nu < n$ . 由于在  $t = 0$  时为零的 Jacobi 场组成的空间正好具有维数  $n$ , 所以显然可见  $\nu \leq n$ . 现在让我们来造一个 Jacobi 场的例子, 使得它在  $t = 0$  时为零, 但在  $t = 1$  时不为零; 这就说明  $\nu < n$ . 事实上, 命  $J_t = tV_s$ , 这里  $V = \frac{d\gamma}{dt}$  表示速度向量场. 于是

$$\frac{DJ}{dt} = 1 \cdot V + t \frac{DV}{dt} = V$$

(由于  $\frac{DV}{dt} = 0$ ). 从而  $\frac{D^2J}{dt^2} = 0$ . 此外,  $R(V, J)V = tR(V, V)V = 0$ , 因为  $R$  关于头两个变元是斜对称的, 于是  $J$  满足 Jacobi 方程, 并且  $J_0 = 0$ ,  $J_1 \neq 0$ , 证毕.

**例 1** 假设  $M$  是“平坦的”, 即是曲率张量恒为零. 这时 Jacobi 方程变成  $\frac{D^2J}{dt^2} = 0$ . 命  $J(t) = \sum f^i(t)P_i(t)$ , 其中诸  $P_i$  是平行向量场, 这就得到  $\frac{d^2f^i}{dt^2} = 0$ . 显然, 沿  $\gamma$  的 Jacobi 场至多只能有一个零点. 因此, 现在没有共轭点, 而  $E_{**}$  是非蜕化的.

**例 2** 假设  $p$  和  $q$  是单位球面  $S^n$  上的对径点, 命  $\gamma$  是从  $p$  到  $q$  的一条大圆弧. 我们来证明:  $p$  和  $q$  是重数为  $n - 1$  的共轭点. 于是, 在这个例子里,  $E_{**}$  的零化数  $v$  取其最大值. 证明依赖于下面的讨论:

命  $\alpha$  是  $\gamma$  的单参数变分, 不必保持端点固定, 使得每个  $\bar{\alpha}(u)$  都是测地线, 即是, 命

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, 1] \rightarrow M$$

是一个  $C^\infty$  映像, 使得  $\alpha(0, t) = \gamma(t)$ , 而每个  $\bar{\alpha}(u)$  [定义为  $\bar{\alpha}(u)(t) = \alpha(u, t)$ ] 都是测地线.<sup>1)</sup>

**引理 14.3** 如果  $\alpha$  是  $\gamma$  的测地线变分, 则变分向量场

$$W(t) = \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$$

是沿  $\gamma$  的 Jacobi 场.

**证** 如果  $\alpha$  是  $\gamma$  的测地线变分, 则  $\frac{D}{dt} \frac{\partial \alpha}{\partial t}$  恒为零, 因而(见 13.3)

1) 下面, 这种变分简称为测地线变分. ——译注

$$\begin{aligned}
 \theta &= \frac{D}{\partial u} \frac{D}{\partial t} \frac{\partial \alpha}{\partial t} = \frac{D}{\partial t} \frac{D}{\partial u} \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\
 &\quad + R \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t} \\
 &= \frac{D^2}{\partial t^2} \frac{\partial \alpha}{\partial u} + R \left( \frac{\partial \alpha}{\partial t}, \frac{\partial \alpha}{\partial u} \right) \frac{\partial \alpha}{\partial t},
 \end{aligned}$$

因此变分向量场  $\frac{\partial \alpha}{\partial u}$  是 Jacobi 场.

于是, 把测地线加以转动就是得到 Jacobi 场的一个办法.

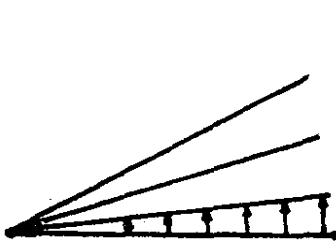


图 27

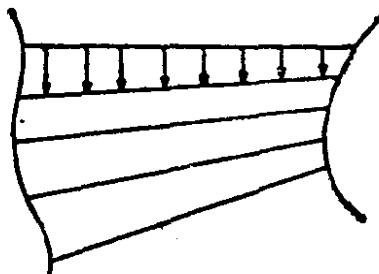


图 28

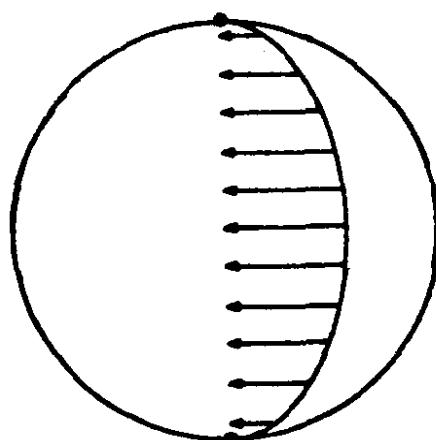


图 29

现在让我们再回到  $n$  维单位球面上两个对径点的例子. 保持  $p$  和  $q$  固定, 旋转这个球面, 则沿测地线  $\gamma$  的变分向量场是一个 Jacobi 场, 在  $p$  和  $q$  处都为零. 在  $n - 1$  个不同的方向上作旋转, 则得到  $n - 1$  个线性无关的 Jacobi 场, 所以  $p$  和  $q$  沿  $\gamma$  共轭, 重数为  $n - 1$ .

**引理 14.4** 沿测地线  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  的每个 Jacobi 场均可

由  $\gamma$  的测地线变分得到。

证 选取  $\gamma(0)$  的一个邻域  $U$ , 使得其中任何两点均由唯一一条极小测地线联结起来, 这条测地线微分依赖于两个端点。假设: 在  $0 \leq t \leq \delta$  时  $\gamma(t) \in U$ 。我们首先沿  $\gamma| [0, \delta]$  作一个 Jacobi 场  $W$ , 在  $t = 0$  和  $t = \delta$  时具有任意指定的值。选取一条曲线  $a: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ , 使得  $a(0) = \gamma(0)$ , 而

$$\frac{da}{du}(0) \in TM_{\gamma(0)}$$

是任意指定的向量。同样, 选取曲线  $b: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow U$ , 使得  $b(0) = \gamma(\delta)$ , 而  $\frac{db}{du}(0)$  任意。现在命

$$\bar{\alpha}(u): [0, \delta] \rightarrow M$$

是从  $a(u)$  到  $b(u)$  的唯一极小测地线, 这就定义了一个变分

$$\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \times [0, \delta] \rightarrow M.$$

于是, 公式  $t \rightarrow \frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$  定义一个 Jacobi 场, 满足已知端点条件。

沿  $\gamma| [0, \delta]$  的任何 Jacobi 场均可这样得到: 如果以  $\mathcal{G}(\gamma)$  表示所有沿  $\gamma$  的 Jacobi 场  $W$  组成的向量空间, 则公式  $W \mapsto (W(0), W(\delta))$  定义一个线性映像

$$l: \mathcal{G}(\gamma) \rightarrow TM_{\gamma(0)} \times TM_{\gamma(\delta)}.$$

我们刚才已经证明了  $l$  是映成的映像。由于这两个向量空间具有相同的维数  $2n$ , 可见  $l$  是一个同构, 即是, 沿  $\gamma$  的 Jacobi 场由它在  $\gamma(0)$  和  $\gamma(\delta)$  处的值所确定(更一般地, 一个 Jacobi 场由它在任何两个非共轭点处的值所确定)。因此, 上面的作法产生沿  $\gamma| [0, \delta]$  的一切可能的 Jacobi 场。

$\bar{\alpha}(u)$  的定义限于区间  $[0, \delta]$  这一点并不重要。如果  $\varepsilon$  充分小, 则利用  $[0, 1]$  的紧致性, 可以把  $\bar{\alpha}(u)$  延长为一条在整个单位区间  $[0, 1]$  上都有定义的测地线。这就得到测地线变分

$$\alpha': (-\varepsilon', \varepsilon') \times [0, 1] \rightarrow M,$$

以任何已知的 Jacobi 场作为变分向量场。

**注 14.5** 上面的论证表明：对于任何这样的邻域  $U$ ，沿  $U$  中一个测地线段的 Jacobi 场是由它在这条测地线的两个端点处的值所唯一确定的。

**注 14.6** 上述证明也表明：存在原点 0 的邻域  $(-\delta, \delta)$ ，使得如果  $t \in (-\delta, \delta)$ ，则  $\gamma(t)$  和  $\gamma(0)$  沿  $\gamma$  不共轭。我们在 15.2 中将会看到， $\gamma(0)$  沿整个测地线  $\gamma$  的共轭点的集合没有聚点。

## § 15. 指数定理

考虑  $TQ_\gamma$  的一个子空间，使得 Hesse 泛函

$$E_{**}: TQ_\gamma \times TQ_\gamma \rightarrow \mathbf{R}$$

在其上是负定的；这种子空间的最大维数  $\lambda$  就定义为  $E_{**}$  的指数。我们来证明下面的

**定理 15.1** (Morse)  $E_{**}$  的指数  $\lambda$  等于  $\gamma(0)$  沿  $\gamma$  的共轭点  $\gamma(t)(0 < t < 1)$  的个数；每个这样的共轭点都是按其重数来计数的。这个指数  $\lambda$  总是有限的<sup>1)</sup>。

作为一个直接推论，我们有

**推论 15.2** 沿测地线  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$ ， $\gamma(0)$  只能有有限多个共轭点。

为了证明定理 15.1，让我们先来估计  $\lambda$  的值，办法是：把向量空间  $TQ_\gamma$  分成两个彼此正交的子空间，使得  $E_{**}$  在其中之一上是正定的。

每个点  $\gamma(t)$  都含于一个开集  $U$  中，使得  $U$  中任何两点都由唯一一条极小测地线联接起来，而这条测地线微分依赖于它的端点(见 §10)。选取单位区间的一个分划

1) 关于这个结果的推广，见 W. Ambrose, The index theorem in Riemannian geometry, *Annals of Math.*, Vol. 73(1961), 49—86. ——原注

$$0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_k = 1,$$

充分精细,使每个线段  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  都位于上面那样一个开集  $U$  的内部,并且每个  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  都是极小测地线.

命  $T\mathcal{Q}_r(t_0, t_1, t_2, \dots, t_k) \subset T\mathcal{Q}_r$  是一个向量子空间,由沿  $\gamma$  的所有这样的向量场  $W$  组成:

- (1) 对每个  $i, W|_{[t_{i-1}, t_i]}$  都是沿  $\gamma|_{[t_{i-1}, t_i]}$  的 Jacobi 场.
- (2) 在  $t = 0, t = 1$  这两个端点处  $W$  为零.

于是,  $T\mathcal{Q}_r(t_0, t_1, \dots, t_k)$  是沿  $\gamma$  的屈折 Jacobi 场组成的有限维向量空间.

命  $T' \subset T\mathcal{Q}_r$  是一个向量子空间,由所有满足下述条件的向量场  $W \in T\mathcal{Q}_r$  组成:  $W(t_0) = 0, W(t_1) = 0, W(t_2) = 0, \dots, W(t_k) = 0$ .

**引理 15.3** 向量空间  $T\mathcal{Q}_r$  可以分解为直接和  $T\mathcal{Q}_r(t_0, t_1, \dots, t_k) \oplus T'$ . 这两个子空间关于内积  $E_{**}$  彼此正交. 此外,  $E_{**}$  在  $T'$  上的限制是正定的.

**证** 对于任何向量场  $W \in T\mathcal{Q}_r$ , 命  $W_1$  表示  $T\mathcal{Q}_r(t_0, t_1, \dots, t_k)$  中唯一一个满足  $W_1(t_i) = W(t_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ) 的“屈折 Jacobi 场”. 从 14.5 可见,  $W_1$  存在且唯一. 显然,  $W - W_1$  属于  $T'$ . 于是,  $T\mathcal{Q}_r(t_0, t_1, \dots, t_k)$  和  $T'$  这两个子空间生成  $T\mathcal{Q}_r$ , 并且只以零向量场为其公共元素.

若  $W_1$  属于  $T\mathcal{Q}_r(t_0, t_1, \dots, t_k)$  而  $W_2$  属于  $T'$ , 则第二变分公式(13.1)具有形状

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} E_{**}(W_1, W_2) &= - \sum_i \left\langle W_2(t), \Delta_t \frac{DW_1}{dt} \right\rangle \\ &\quad - \int_0^1 \langle W_2, 0 \rangle dt = 0. \end{aligned}$$

因此,这两个子空间关于  $E_{**}$  是彼此正交的.

对于任何  $W \in T\mathcal{Q}_r$ , Hesse 泛函  $E_{**}(W, W)$  可以解释为二阶导数  $\frac{d^2 E \circ \bar{\alpha}}{du^2}(0)$ , 这里  $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathcal{Q}$  是  $\gamma$  的任何一个变

分, 其变分向量场  $\frac{d\bar{\alpha}}{du}(0)$  等于  $W$  (见 13.5)<sup>1)</sup>. 如果  $W$  属于  $T'$ , 则可假设我们选取的  $\bar{\alpha}$  使得  $r(t_0), r(t_1), \dots, r(t_k)$  这些点保持固定. 换言之, 我们可以假设,  $\bar{\alpha}(u)(t_i) = r(t_i)$  ( $i = 0, 1, \dots, k$ ).

现在来证明:  $W \in T'$  时  $E_{**}(W, W) \geq 0$ . 事实上, 每个  $\bar{\alpha}(u) \in Q$  都是一条逐段光滑道路, 从  $r(0)$  经  $r(t_1)$  到  $r(t_2) \dots$  直到  $r(1)$ ; 而每个  $r|_{[t_{i-1}, t_i]}$  都是极小测地线, 因而与联结其端点的任何其他道路相比具有较小的能量. 这就证明了

$$E[\bar{\alpha}(u)] \geq E(r) = E[\bar{\alpha}(0)].$$

因此, 二阶导数在  $u = 0$  处的值必定  $\geq 0$ .

今证:  $W \in T'$  而  $W \neq 0$  时,  $E_{**}(W, W) > 0$ . 假如

$$E_{**}(W, W) = 0,$$

则  $W$  就要属于  $E_{**}$  的零化子空间. 事实上, 对于任何  $W_1 \in TQ_r(t_0, t_1, \dots, t_k)$ , 我们已经看到  $E_{**}(W_1, W) = 0$ ; 对于任何  $W_2 \in T'$ , 不等式

$$\begin{aligned} 0 &\leq E_{**}(W + cW_2, W + cW_2) \\ &= 2cE_{**}(W_2, W) + c^2E_{**}(W_2, W_2) \end{aligned}$$

对一切  $c$  值成立, 所以  $E_{**}(W_2, W) = 0$ . 于是,  $W$  属于零化子空间. 但  $E_{**}$  的零化子空间是由 Jacobi 场组成的; 由于  $T'$  不含非零 Jacobi 场, 所以  $W = 0$ .

因此, 二次型  $E_{**}(W, W)$  在  $T'$  上是正定的, 这就完全证明了 15.3.

一个直接推论是下面的

**引理 15.4**  $E_{**}$  的指数 (或零化数) 等于  $E_{**}$  限制在屈折 Jacobi 场组成的子空间  $TQ_r(t_0, t_1, \dots, t_k)$  上的指数 (或零化数). 特别是, 指数  $\lambda$  总是有限的 (因为  $TQ_r(t_0, t_1, \dots, t_k)$  是有限维向量空间).

证明是直截了当的.

1) 这里的  $\frac{d\bar{\alpha}}{du}(0)$  原文作  $\frac{d\bar{\alpha}}{dt}(0)$ . ——译注

命  $\gamma_\tau$  表示  $\gamma$  在区间  $[0, \tau]$  上的限制, 于是  $\gamma_\tau: [0, \tau] \rightarrow M$  是从  $\gamma(0)$  到  $\gamma(\tau)$  的测地线. 命  $\lambda(\tau)$  表示相应于这条测地线的 Hesse 泛函  $(E_0^\tau)_{**}$  的指数, 于是  $\lambda(1)$  就是我们实际上要去计算的指数. 首先注意:

**结论(1)**  $\lambda(\tau)$  是  $\tau$  的单调函数.

因为, 若  $\tau < \tau'$ , 则存在一个  $\lambda(\tau)$  维向量空间  $\mathcal{V}$ , 其组成元素是沿  $\gamma_\tau$  的向量场, 在  $\gamma(0)$  和  $\gamma(\tau)$  处为零, 使得  $(E_0^\tau)_{**}$  在这个向量空间上是负定的.  $\mathcal{V}$  中的每个向量场都可以扩张为沿  $\gamma_{\tau'}$  的向量场, 即是在  $\gamma(\tau)$  和  $\gamma(\tau')$  之间恒为零. 于是我们得到一个由沿  $\gamma_{\tau'}$  的场组成的  $\lambda(\tau')$  维向量空间, 使得  $(E_0^{\tau'})_{**}$  在其上是负定的. 从而  $\lambda(\tau) \leq \lambda(\tau')$ .

**结论(2)** 对于充分小的  $\tau$  值,  $\lambda(\tau) = 0$ .

因为, 若  $\tau$  充分小, 则  $\gamma_\tau$  是极小测地线, 因而据引理 13.6 有  $\lambda(\tau) = 0$ .

现在让我们来考查函数  $\lambda(\tau)$  的间断点. 首先注意,  $\lambda(\tau)$  是左连续的.

**结论(3)** 对于所有充分小的  $\epsilon > 0$ , 我们有

$$\lambda(\tau - \epsilon) = \lambda(\tau).$$

**证** 据 15.3, 数  $\lambda(1)$  可以解释为有限维向量空间  $TQ_\tau(t_0, t_1, \dots, t_k)$  上的一个二次型指数. 可以假设, 我们所取的分划使得, 比如说,  $t_i < \tau < t_{i+1}$ . 于是, 指数  $\lambda(\tau)$  可以解释为: 由沿  $\gamma_\tau$  的屈折 Jacobi 场组成的一个相应的向量空间上, 一个相应的二次型  $H_\tau$  的指数. 这个向量空间是用  $[0, \tau]$  的分划

$$0 < t_1 < t_2 < \dots < t_i < \tau$$

造出来的. 由于一个屈折 Jacobi 场是由它在屈折点  $\gamma(t_i)$  处的值唯一确定的, 所以这个向量空间同构于直接和

$$\Sigma = TM_{\gamma(t_1)} \oplus TM_{\gamma(t_2)} \oplus \dots \oplus TM_{\gamma(t_i)}.$$

注意,  $\Sigma$  这个向量空间不依赖于  $\tau$ . 显然,  $\Sigma$  上的二次型  $H_\tau$  是随  $\tau$  连续变化的.

既然  $H_\tau$  在一个  $\lambda(\tau)$  维子空间  $\mathcal{V} \subset \Sigma$  上是负定的, 所以

对于所有充分接近于  $\tau$  的  $\tau'$  而言,  $H_{\tau'}$  在  $\mathcal{V}'$  上也是负定的。因此,  $\lambda(\tau') \geq \lambda(\tau)$ 。但是, 如果  $\tau' = \tau - \varepsilon < \tau$ , 则由结论 1 我们也有  $\lambda(\tau - \varepsilon) \leq \lambda(\tau)$ , 从而  $\lambda(\tau - \varepsilon) = \lambda(\tau)$ 。

**结论(4)** 命  $\nu$  是 Hesse 泛函  $(E_0^*)_{**}$  的零化数, 则对所有充分小的  $\varepsilon > 0$  我们有

$$\lambda(\tau + \varepsilon) = \lambda(\tau) + \nu.$$

于是, 当变数  $t$  经过重数为  $\nu$  的共轭点时, 函数  $\lambda(t)$  的跳跃是  $\nu$ ; 除此以外, 这个函数是处处连续的。这个结论显然完全证明了指数定理。

现在来证明  $\lambda(\tau + \varepsilon) \leq \lambda(\tau) + \nu$ 。命  $H_{\tau}$  和  $\Sigma$  如结论(3)的证明所述。由于  $\dim \Sigma = ni$ , 可见  $H_{\tau}$  在某个  $ni - \lambda(\tau) - \nu$  维子空间  $\mathcal{V}' \subset \Sigma$  上是正定的, 从而, 对于所有充分接近于  $\tau$  的  $\tau'$  而言,  $H_{\tau'}$  在  $\mathcal{V}'$  上也是正定的。因此

$$\lambda(\tau') \leq \dim \Sigma - \dim \mathcal{V}' \leq \lambda(\tau) + \nu.$$

今证  $\lambda(\tau + \varepsilon) \geq \lambda(\tau) + \nu$ 。命  $W_1, \dots, W_{\lambda(\tau)}$  是  $\lambda(\tau)$  个沿  $\gamma_{\tau}$  的向量场, 它们在两个端点处均为零, 使得矩阵

$$[(E_0^*)_{**}(W_i, W_j)]$$

是负定的。再命  $J_1, \dots, J_{\nu}$  是沿  $\gamma_{\tau}$  的  $\nu$  个线性无关的 Jacobi 场, 也都在两个端点处为零。注意

$$\frac{D J_h}{dt}(\tau) \in T M_{\gamma(\tau)} (h = 1, \dots, \nu)$$

这  $\nu$  个向量是线性无关的, 所以可以选取沿  $\gamma_{\tau+\varepsilon}$  的  $\nu$  个向量场  $X_1, \dots, X_{\nu}$ , 使得矩阵

$$\left( \left\langle \frac{D J_h}{dt}(\tau), X_k(\tau) \right\rangle \right) \quad (h, k = 1, \dots, \nu)$$

等于  $\nu \times \nu$  单位矩阵。在  $\tau \leq t \leq \tau + \varepsilon$  时令向量场  $W_i$  和  $J_h$  等于零, 这样就把这些向量场扩张在  $\gamma_{\tau+\varepsilon}$  上。

利用第二变分公式, 容易看出

$$(E_0^{t+\varepsilon})_{**}(J_h, W_i) = 0,$$

$$(E_0^{t+\varepsilon})_{**}(J_h, X_k) = 2\delta_{hk} \text{ (Kronecker 记号)}.$$

今命  $c$  是一个充分小的数, 考虑  $\lambda(\tau) + \nu$  个沿  $\gamma_{\tau+\varepsilon}$  的向量场

$$W_1, \dots, W_{\lambda(\tau)}, c^{-1}J_1 - cX_1, \dots, c^{-1}J_\nu - cX_\nu.$$

我们来证明: 这些向量场张成一个  $\lambda(\tau) + \nu$  维向量空间, 在这个空间上二次型  $(E_0^{\tau+\varepsilon})_{**}$  是负定的。事实上,  $(E_0^{\tau+\varepsilon})_{**}$  关于这个基底的矩阵是

$$\begin{pmatrix} (E_0^{\tau})_{**}(W_i, W_j) & cA \\ cA^t & -4I + c^2B \end{pmatrix},$$

其中  $A$  和  $B$  是确定的矩阵。如果  $c$  充分小, 这个合成矩阵当然是负定的。这就证明了结论(4)。

指数定理 15.1 显然从结论(2), (3)和(4)推出。

## § 16. $\Omega^c$ 的有限维逼近

命  $M$  是一个连通的 Riemann 流形,  $p$  和  $q$  是  $M$  的两点 (不必相异)。从  $p$  到  $q$  的所有逐段  $C^\infty$  道路的集合  $\Omega = \Omega(M; p, q)$  可以赋予拓扑结构如下。命  $\rho$  表示  $M$  上由其 Riemann 尺度导出的拓扑尺度。给了  $\omega, \omega' \in \Omega$ , 分别具有弧长  $s(t), s'(t)$ , 定义它们的距离  $d(\omega, \omega')$  为

$$\max_{0 \leq t \leq 1} \rho(\omega(t), \omega'(t)) + \left[ \int_0^1 \left( \frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt} \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

[加上最后这一项是为了使能量函数

$$E_b^a(\omega) = \int_b^a \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 dt$$

成为从  $\Omega$  到实数域的连续函数。]这个尺度就在  $\Omega$  上导出所要的拓扑结构。

给了  $c > 0$ , 命  $\Omega^c$  表示闭子集  $E^{-1}([0, c]) \subset \Omega$ , 再命  $\text{Int } \Omega^c$  表示开子集  $E^{-1}([0, c))$ , 这里  $E = E_0^{\tau}: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  是能量函数。让我们来构造  $\Omega^c$  的一个有限维逼近, 借以研究它的拓扑结

构。

选取单位区间的一个分划  $0=t_0 < t_1 < \dots < t_k = 1$ 。命  $\mathcal{Q}(t_0, t_1, \dots, t_k)$  是  $\mathcal{Q}$  的一个子空间，由满足下列条件的道路  $\omega: [0, 1] \rightarrow M$  组成：

- (1)  $\omega(0) = p, \omega(1) = q;$
- (2) 对每个  $i = 1, \dots, k, \omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$  都是测地线。

最后，定义下面两个子空间

$$\mathcal{Q}^c(t_0, t_1, \dots, t_k) = \mathcal{Q} \cap \mathcal{Q}(t_0, t_1, \dots, t_k),$$

$$\text{Int } \mathcal{Q}^c(t_0, t_1, \dots, t_k) = (\text{Int } \mathcal{Q}) \cap \mathcal{Q}^c(t_0, t_1, \dots, t_k).$$

**引理 16.1** 命  $M$  是一个完备的 Riemann 流形， $c$  是一个固定的正数，使得  $\mathcal{Q}^c \neq \emptyset$ 。于是对于  $[0, 1]$  的所有充分精细的分划  $(t_0, t_1, \dots, t_k)$  而言，集合  $\text{Int } \mathcal{Q}^c(t_0, t_1, \dots, t_k)$  可以自然地配上一个有限维光滑流形的结构。

证 命  $S$  表示球体

$$\{x \in M : \rho(x, p) \leq \sqrt{c}\}.$$

注意，所有的道路  $\omega \in \mathcal{Q}^c$  都含于  $S \subset M$  这个子集中。这个事实可从不等式  $L^2 \leq E \leq c$  推出。

由于  $M$  是完备的，所以  $S$  是紧致集。因此，据 10.8，存在  $\epsilon > 0$ ，使得只要  $x, y \in S$  且  $\rho(x, y) < \epsilon$ ，则从  $x$  到  $y$  有唯一一条测地线，其长度小于  $\epsilon$ ，并且这条测地线可微地依赖于  $x$  和  $y$ 。

选取  $[0, 1]$  的分划  $(t_0, t_1, \dots, t_k)$ ，使得每个差数  $t_i - t_{i-1}$  都小于  $\epsilon^2/c$ 。于是，对每条屈折的测地线

$$\omega \in \mathcal{Q}^c(t_0, t_1, \dots, t_k),$$

我们有

$$\begin{aligned} (L_{t_{i-1}}^{\dot{\omega}} \omega)^2 &= (t_i - t_{i-1})(E_{t_{i-1}}^{\dot{\omega}} \omega) \\ &\leq (t_i - t_{i-1})(E\omega) \\ &\leq (t_i - t_{i-1})c < \epsilon^2, \end{aligned}$$

从而测地线  $\omega|_{[t_{i-1}, t_i]}$  由它的两个端点唯一确定，且可微地依赖于这两个端点。

既然屈折测地线  $\omega$  由  $(k-1)$  元组

$$(\omega(t_1), \omega(t_2), \dots, \omega(t_{k-1})) \in M \times M \times \cdots \times M$$

唯一确定, 所以

$$\omega \rightarrow (\omega(t_1), \dots, \omega(t_{k-1}))$$

这个对应关系显然定义了一个同胚映像, 把  $\text{Int}Q(t_0, t_1, \dots, t_k)^c$  映成  $k-1$  重乘积  $M \times \cdots \times M$  的某个开子集。于是, 把这个乘积中的微分构造搬过来, 就完成了 16.1 的证明。

为了缩短记号, 让我们用  $B$  来表示  $\text{Int}Q(t_0, t_1, \dots, t_k)^c$  这个由屈折测地线组成的流形。命

$$E': B \rightarrow \mathbf{R}$$

表示能量函数  $E: Q \rightarrow \mathbf{R}$  在  $B$  上的限制。

**定理 16.2** 函数  $E': B \rightarrow \mathbf{R}$  是光滑的。此外, 对于每个  $a < c$ , 集合  $B^a = (E')^{-1}[0, a]$  是紧致的, 而且是相应的集合  $Q^a$  的形变收缩核<sup>1)</sup>。 $E'$  的临界点正好就是  $E$  在  $\text{Int}Q^c$  中的临界点, 即是从  $p$  到  $q$  长度小于  $\sqrt{c}$  的不折的测地线。在每个这样的临界点  $r$  处, Hesse 泛函  $E''_{**}$  的指数(或零化数)等于  $E_{**}$  在  $r$  处的指数(或零化数)。

于是, 有限维流形  $B$  为无限维道路空间  $\text{Int}Q^c$  提供一个忠实可靠的模型。作为一个直接推论, 我们有下述基本结果。

**定理 16.3** 命  $M$  是一个完备的 Riemann 流形,  $p, q \in M$  是两点, 沿任何一条长度  $\leq \sqrt{a}$  的测地线彼此不共轭。于是,  $Q^a$  具有一个有限 CW 复形的同伦型: 对于  $Q^a$  中使得  $E_{**}$  具有指数  $\lambda$  的每条测地线, 这个复形有一个  $\lambda$  维胞腔。

(特别, 这个定理断定:  $Q^a$  只含有限有多条测地线。)

这个定理由 16.2 结合 3.5 推出。

**16.2 的证明** 由于屈折测地线  $\omega \in B$  光滑依赖于  $(k-1)$  元组

$$(\omega(t_1), \omega(t_2), \dots, \omega(t_{k-1})) \in M \times M \times \cdots \times M,$$

显然可见, 能量  $E'(\omega)$  也光滑依赖于这个  $(k-1)$  元组。事实

1) 同样,  $B$  本身也是  $\text{Int } Q^c$  的形变收缩核。——原注

上, 我们有明显的公式

$$E'(\omega) = \sum_{i=1}^k \rho(\omega(t_{i-1}), \omega(t_i))^2 / (t_i - t_{i-1}).$$

对于  $a < c$ , 集合  $B^a$  同胚于满足下述条件的所有  $(k-1)$  元组  $(p_1, \dots, p_{k-1}) \in S \times \dots \times S$  组成的集合:

$$\sum_{i=1}^k \rho(p_{i-1}, p_i)^2 / (t_i - t_{i-1}) \leq a,$$

这里, 自不待言,  $p_0 = p$ ,  $p_k = q$ . 这个集合作为紧致集的闭子集, 当然也是紧致的.

定义一个收缩映像  $r: \text{Int } Q^c \rightarrow B$  如下. 命  $r(\omega)$  表示  $B$  中那条唯一的屈折测地线, 使得每个  $r(\omega)|[t_{i-1}, t_i]$  是从  $\omega(t_{i-1})$  到  $\omega(t_i)$  的长度小于  $\varepsilon$  的测地线. 不等式

$$\rho(p, \omega(t))^2 \leq (L\omega)^2 \leq E\omega < c$$

蕴涵  $\omega[0,1] \subset S$ . 因此, 从不等式

$$\begin{aligned} &\rho(\omega(t_{i-1}), \omega(t_i))^2 \\ &\leq (t_i - t_{i-1}) (E_{t_{i-1}}^{t_i} \omega) < \frac{\varepsilon^2}{c} \cdot c = \varepsilon^2 \end{aligned}$$

可见,  $r(\omega)$  是可以这样定义的.

显然,  $E(r(\omega)) \leq E(\omega) < c$ . 这个收缩映像  $r$  又可以装配成一个单参数映像族

$$r_u: \text{Int } Q^c \rightarrow \text{Int } Q^c,$$

如下: 对于  $t_{i-1} \leq u \leq t_i$ , 命

$$\begin{cases} r_u(\omega)|[0, t_{i-1}] = r(\omega)|[0, t_{i-1}], \\ r_u(\omega)|[t_{i-1}, u] = \text{从 } \omega(t_{i-1}) \text{ 到 } \omega(u) \text{ 的极小测地线}, \\ r_u(\omega)|[u, 1] = \omega|[u, 1]. \end{cases}$$

于是,  $r_0$  是  $\text{Int } Q^c$  的恒同映像,  $r_1 = r$ . 容易验证,  $r_u(\omega)$  作为二元函数是连续的. 这就证明了  $B$  是  $\text{Int } Q^c$  的形变收缩核.

由于  $E(r_u(\omega)) \leq E(\omega)$ , 所以  $B^a$  显然也是  $Q^a$  的形变收缩核.

每一条测地线也是一条屈折测地线, 所以  $E$  在  $\text{Int } Q^c$  中的每

一个“临界点”显然自动属于子流形  $B$ . 利用第一变分公式(12.2), 显然可见,  $E'$  的临界点正好就是不折的测地线.

考虑流形  $B$  在测地线  $\gamma$  处的切空间  $TB_\gamma$ . 如 §15 所述, 这个空间恒同于沿  $\gamma$  的屈折 Jacobi 场组成的空间  $T\mathcal{Q}_\gamma(t_0, t_1, \dots, t_k)$ . 这个恒同关系可以阐明如下. 命

$$\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow B$$

是  $\gamma$  的任何一个由屈折测地线组成的变分, 于是沿  $\gamma$  的相应变分向量场  $\frac{\partial \alpha}{\partial u}(0, t)$  显然是屈折 Jacobi 场(见 14.3).

这样一来, 从引理 15.4 直接推出所要的结论:  $E_{**}$  在  $\gamma$  处的指数(或零化数)等于  $E'_{**}$  在  $\gamma$  处的指数(或零化数). 这就完全证明了 16.2.

**注** 作为这个定理的一个推论, 我们可以换一个方式来证明: 完备流形上存在联结两个已知点  $p, q$  的极小测地线. 因为, 若  $\mathcal{Q}^*(p, q)$  非空, 则相应的集合  $B^*$  是紧致且非空的, 所以连续函数  $E': B^* \rightarrow \mathbf{R}$  将在某点  $\gamma \in B^*$  处取其极小值. 这个  $\gamma$  就是所求的极小测地线.

## § 17. 全道路空间的拓扑结构

命  $M$  是一个 Riemann 流形, 其 Riemann 尺度为  $g$ ;  $\rho$  是导出的拓扑尺度. 命  $p$  和  $q$  是  $M$  上的两点(不必相异).

在同伦论里, 考虑从  $p$  到  $q$  的所有连续道路

$$\omega: [0, 1] \rightarrow M$$

组成的空间  $\mathcal{Q}^*$ , 具有紧致开拓扑. 这个拓扑结构也可以说成是由尺度

$$d^*(\omega, \omega') = \max_t \rho(\omega(t), \omega'(t))$$

导出的拓扑结构. 另一方面, 我们一直在研究从  $p$  到  $q$  的逐段  $C^\infty$  道路组成的空间  $\mathcal{Q}$ , 其尺度为

$$d(\omega, \omega') = d^*(\omega, \omega') + \left[ \int_0^1 \left( \frac{ds}{dt} - \frac{ds'}{dt} \right)^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}.$$

由于  $d \geq d^*$ , 所以自然映像

$$i: Q \rightarrow Q^*$$

是连续的.

**定理 17.1** 这个自然映像  $i$  是  $Q$  和  $Q^*$  之间的同伦等价.

**证** 我们先定义一个连续函数  $A: Q^* \rightarrow (0, 1]$ , 使得  $|t - t'| < 2A(\omega)$  蕴涵:  $\omega(t)$  和  $\omega(t')$  可以由唯一一条极小测地线联结起来, 这条测地线可微地依赖于它的两个端点.

命  $f: M \rightarrow [0, \infty)$  是一个连续函数, 使得对每个  $r \in [0, \infty)$ ,  $f^{-1}([0, r])$  是紧致集. 命  $\varepsilon_1(r) \leq \infty$  是满足下述条件的最大实数: 集合  $f^{-1}([0, r])$  中任何两点, 只要距离小于  $\varepsilon_1(r)$ , 就可由唯一一条极小测地线联结起来, 这条测地线可微地依赖于两个端点. 由于  $\varepsilon_1$  是单调减的正值函数, 所以可以选取连续函数

$$\varepsilon_2: [0, \infty) \rightarrow \mathbf{R},$$

使得

$$0 < \varepsilon_2(r) < \varepsilon_1(r).$$

现在定义

$$\varepsilon: Q^* \rightarrow \mathbf{R}$$

为

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_2(\max_t f(\omega(t))).$$

于是  $\varepsilon$  是连续函数, 并且  $\omega([0, 1])$  的任何两点, 只要距离小于或等于  $\varepsilon(\omega)$ , 就可由唯一一条极小测地线联结起来.

定义一个连续函数

$$F: Q^* \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}$$

为

$$F(\omega, \alpha) = (\alpha - 1)\varepsilon(\omega) + \max_{|t - t'| \leq \alpha} \rho(\omega(t), \omega(t')),$$

于是,  $F$  视为  $\omega$  的函数, 是严格单调的, 并且

$$F(\omega, 0) < 0 \leq F(\omega, 1),$$

因而对每个  $\omega \in Q^*$ , 存在唯一一个  $\alpha \in (0, 1]$ , 使得  $F(\omega, \alpha) = 0$ . 命  $\alpha = 2A(\omega)$ . 由于  $F$  是连续的, 通过直截了当的“ $\varepsilon, \delta$ ”论证, 可以证明, 函数  $A: Q^* \rightarrow (0, 1]$  是连续的. 如果  $|t - t'| \leq \alpha = 2A(\omega)$ , 则  $\rho(\omega(t), \omega(t')) \leq (1 - \alpha)\varepsilon(\omega) \leq \varepsilon(\omega)$ , 因而  $\omega(t)$  和  $\omega(t')$  可以由唯一一条极小测地线联结起来.

现在定义  $h: Q^* \rightarrow Q$  如下. 命  $h(\omega)$  是满足下列条件的唯一道路:

(1) 在  $t = 0, A(\omega), 2A(\omega), \dots, kA(\omega)$  以及在  $t = 1$  时,  $h(\omega)$  与  $\omega$  重合, 这里  $k$  是  $1/A(\omega)$  的整数部分;

(2)  $h(\omega)$  在每个中介区间中是一条测地线.

显然  $h$  是连续的. 和 §16 中的论证相仿, 可以证明: 复合映像

$$h \circ i: Q \rightarrow Q$$

同伦于  $Q$  的恒同映像. 同样, 复合映像

$$i \circ h: Q^* \rightarrow Q^*$$

也同伦于恒同映像. 这就完成了 17.1 的证明.

已知: 空间  $Q^*$  具有  $CW$  复形的同伦型 (见 Milnor, On spaces having the homotopy type of a  $CW$ -complex, Trans. Amer. Math. Soc., 90(1959), 272—280). 因此, 我们有

**推论 17.2**  $Q$  具有  $CW$  复形的同伦型.

这个论断可以加强如下:

**定理 17.3** (Morse 理论的基本定理) 命  $M$  是一个完备的 Riemann 流形,  $p, q \in M$  是两个点, 沿任何测地线不共轭. 于是  $Q(M; p, q)$  (或  $Q^*(M; p, q)$ ) 具有一个可数  $CW$  复形的同伦型: 对于从  $p$  到  $q$  每条指数为  $\lambda$  的测地线, 这个复形有一个  $\lambda$  维胞腔.

证明类似于 3.5 的证明. 选取一系列实数  $a_0 < a_1 < a_2 < \dots$ , 都不是能量函数  $E$  的临界值, 使得每个区间  $(a_{i-1}, a_i)$  正好含有

一个临界值。考虑序列

$$\Omega^{a_0} \subset \Omega^{a_1} \subset \Omega^{a_2} \subset \dots,$$

这里可以假定  $\Omega^{a_i}$  是空集。从 16.2 以及 3.3 和 3.7 可见，对于每个  $i$  而言， $\Omega^{a_i}$  的同伦型都和  $\Omega^{a_{i-1}}$  粘上有限多个胞腔后的同伦型相同：对于  $E^{-1}(a_{i-1}, a_i)$  中每一条指数为  $\lambda$  的测地线，要粘上一个  $\lambda$  维胞腔。现在，和 3.5 的证明一样，我们可以构造一系列 CW 复形  $K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots$ ，具有所要求的那种胞腔，以及构造一系列的同伦等价

$$\begin{array}{c} \Omega^{a_0} \subset \Omega^{a_1} \subset \Omega^{a_2} \subset \dots \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ K_0 \subset K_1 \subset K_2 \subset \dots \end{array}$$

命  $f: \Omega \rightarrow K$  是直接极限映像，显然可见， $f$  导出各维数同伦群的同构。由于已知  $\Omega$  具有 CW 复形的同伦型(17.2)，所以从 Whitehead 定理知， $f$  是一个同伦等价。证毕（不用 17.1 的另证见附录）。

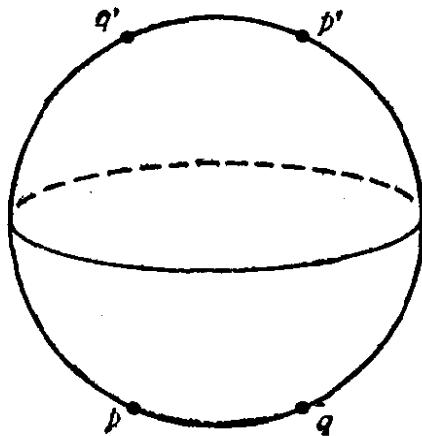


图 30

**例 球面  $S^n$  的道路空间。** 假设  $p$  和  $q$  是  $S^n$  上两个非共轭点，即是假设  $q \neq p, p'$ ，这里  $p'$  表示  $p$  的对径点。于是从  $p$  到  $q$  存在可数多条测地线  $r_0, r_1, r_2, \dots$  如下： $r_0$  表示从  $p$  到  $q$  的短大圆弧， $r_1$  表示长大圆弧  $pq'p'q$ ， $r_2$  表示  $pqp'q'pq$  这个大圆弧，等等， $r_k$  的下标  $k$  表示  $p$  或  $p'$  出现在其内部的次数。

指数<sup>1)</sup>  $\lambda(r_k)$  等于  $k(n-1)$ , 因为这个弧段内部的每个  $p$  或  $p'$  都与  $p$  共轭, 重数是  $n-1$ . 因此, 我们有

**推论 17.4** 道路空间<sup>2)</sup>  $\Omega(S^n)$  具有一个 CW 复形的同伦型: 对维数  $0, n-1, 2(n-1), 3(n-1), \dots$ , 这个复形恰好各有一个胞腔.

在  $n > 2$  时,  $\Omega(S^n)$  的同调群可以根据上述信息直接算出. 由于  $\Omega(S^n)$  在无限多个维数具有非零同调群, 所以可以断定

**推论 17.5** 命  $M$  具有  $S^n$  的同伦型,  $n > 2$ . 于是  $M$  上任何两个非共轭点都可由无限多条测地线联结起来.

这是因为  $\Omega^*(M)$  (因而  $\Omega(M)$ ) 的同伦型只依赖于  $M$  的同伦型, 从而  $\Omega(M)$  中必定至少有一条测地线具有指数 0, 至少有一条测地线具有指数  $n-1$ , 以及  $2(n-1), 3(n-1)$ , 等等.

**注** 更一般地, 若  $M$  是任何一个不缩为一点的完备流形, 则  $M$  的任何两个非共轭点都可由无限多条测地线联结起来. 见 J. P. Serre, Homologie singulière des espaces fibrés, *Annals of Math.*, **54**(1951), p.484.

作为 17.4 的另一个应用, 可以给出 Freudenthal 同纬映像定理的证明(见 §22.3).

## § 18. 非共轭点的存在性

只要点  $p$  和  $q$  沿任何测地线彼此不共轭, 则定理 17.3 对空间  $\Omega(M; p, q)$  给出了恰当的描写. 这一节将要指出, 这样的非共轭点总是存在的, 从而说明了上述结果有意义.

提醒一下, 两个同维数的流形之间的光滑映像  $f: N \rightarrow M$  在点  $x \in N$  处称为临界的, 如果切空间之间的导出映像

$$f_*: TN_x \rightarrow TM_{f(x)}$$

---

1) 原文是“指数  $\lambda(r_k) = \mu_1 + \dots + \mu_k$  等于  $k(n-1)$ ”, 这里的诸  $\mu_i$  无意义. ——译注

2) 原文是“闭路空间” (loop space). 与这里讨论的  $p \neq q$  的情况不符. ——译注

不是一一的。我们把这个定义用于指数映像

$$\exp = \exp_p: TM_p \rightarrow M.$$

(我们假设  $M$  是完备的, 所以  $\exp$  处处有定义。不过这个假设是容易取消的。)

**定理 18.1** 沿着从  $p$  到  $\exp(v)$  的测地线  $r_v$ , 点  $\exp(v)$  和  $p$  共轭的充要条件是: 映像  $\exp$  在  $v$  处是临界的。

**证** 设  $\exp$  在  $v \in TM_p$  处是临界的, 则存在某个非零的  $X \in T(TM_p)_v$  (这是视为流形的  $TM_p$  在  $v$  处的切空间), 使得  $\exp_*(X) = 0$ . 命  $u \mapsto v(u)$  是  $TM_p$  中的一条道路, 使得

$$v(0) = v, \quad \frac{dv}{du}(0) = X.$$

于是, 由  $\alpha(u, t) = \exp(tv(u))$  定义的映像  $\alpha$ , 乃是由  $t \mapsto \exp(tv)$  所定义的测地线  $r_v$  的测地线变分, 因而由

$$t \mapsto \frac{\partial}{\partial u} (\exp(tv(u)))|_{u=0}$$

给出的向量场  $W$  是沿  $r_v$  的 Jacobi 场。显然,  $W(0) = 0$ . 我们也有

$$\begin{aligned} W(1) &= \frac{\partial}{\partial u} (\exp(v(u)))|_{u=0} \\ &= \exp_* \frac{dv(u)}{du}(0) = \exp_* X = 0. \end{aligned}$$

但是, 这个场并不恒为零, 因为

$$\begin{aligned} \frac{DW}{dt}(0) &= \frac{D}{\partial u} \frac{\partial}{\partial t} (\exp(tv(u)))|_{(0,0)} \\ &= \frac{D}{\partial u} v(u)|_{u=0} \neq 0. \end{aligned}$$

因此, 沿着从  $p$  到  $\exp(v)$  的测地线  $r_v$ , 存在非零 Jacobi 场, 在这两个端点处为零, 从而  $p$  和  $\exp(v)$  沿  $r_v$  共轭。

今设  $\exp_*$  在  $v$  处非异。选取  $T(TM_p)_v$  中  $n$  个线性无关的向量  $X_1, \dots, X_n$ 。于是  $\exp_*(X_1), \dots, \exp_*(X_n)$  是线性无关的。在  $TM_p$  中选取道路  $u \mapsto v_1(u), \dots, u \mapsto v_n(u)$ , 使得

$$v_i(0) = v, \quad \frac{dv_i(u)}{du}(0) = X_i \quad (i = 1, \dots, n).$$

于是,象上面一样,作出变分  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , 就得到沿  $\gamma_v$  的  $n$  个 Jacobi 场  $W_1, \dots, W_n$ , 在  $p$  处均为零. 由于  $W_i(1) = \exp_*(X_i)$  是线性无关的, 所以诸  $W_i$  的任何非零线性组合都不能在  $\exp(v)$  处为零. 由于沿  $\gamma_v$  所有在  $p$  处为零的 Jacobi 场组成的空间具有维数  $n$ , 所以沿  $\gamma_v$  的任何非零 Jacobi 场显然不能在  $p$  和  $\exp(v)$  处同时为零. 证毕.

**推论 18.2** 命  $p \in M$ . 于是对于几乎一切  $q \in M$ ,  $p$  和  $q$  沿任何测地线彼此不共轭.

证 直接从 18.1 以及 Sard 定理(6.1)推出.

## § 19. 拓扑结构与曲率的某些关系

这一节要讨论“负曲率”流形或“正曲率”流形上的测地线的性质.

**引理 19.1** 假设: 对于每个  $p \in M$  和切空间  $TM_p$  中每一对向量  $A, B$  有  $\langle R(A, B)A, B \rangle \leq 0$ . 那么  $M$  的任何两点沿任何测地线都不共轭.

证 命  $\gamma$  是一条测地线, 其速度向量场为  $V; J$  是沿  $\gamma$  的一个 Jacobi 场. 于是

$$\frac{D^2J}{dt^2} + R(V, J)V = 0,$$

所以

$$\left\langle \frac{D^2J}{dt^2}, J \right\rangle = -\langle R(V, J)V, J \rangle \geq 0.$$

因此,

$$\frac{d}{dt} \left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle = \left\langle \frac{D^2J}{dt^2}, J \right\rangle + \left\| \frac{DJ}{dt} \right\|^2 \geq 0.$$

这样一来, 函数  $\left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle$  是单调增的, 并且在  $\frac{DJ}{dt} = 0$  时是严

格单调增的。

如果  $J$  在 0 和  $t_0 > 0$  处同时为零, 则函数  $\left\langle \frac{DJ}{dt}, J \right\rangle$  也在 0 和  $t_0$  处为零, 所以在整个区间  $[0, t_0]$  上必定恒为零。由此可见,

$$J(0) = \frac{DJ}{dt}(0) = 0,$$

所以  $J$  恒为零。证毕。

**注** 若  $A$  和  $B$  是在  $p$  处的正交单位向量, 则  $\langle R(A, B)A, B \rangle$  这个量称为由  $A$  和  $B$  确定的截面曲率, 它等于曲面

$$(u_1, u_2) \rightarrow \exp_p(u_1 A + u_2 B)$$

的 Gauss 曲率。这张曲面是由过  $p$  的测地线组成的, 这些测地线的速度向量属于由  $A$  和  $B$  张成的子空间 (例如, 见 Laugwitz, Differentialgeometrie, p.101)。

直观上说来, 一个流形的曲率可以借助于这个流形内部的“光学性质”描述如下。假设: 我们把测地线设想成光线的道路; 在点  $p$  处有一个观测者, 朝着单位向量  $U$  的方向进行观测, 这个单位向量指向点  $q = \exp(rU)$ 。在点  $q$  处长度为  $L$  的一个小线段, 其指向相当于单位向量  $W \in TM_p$  的方向, 在这个观测者看来, 它的长度就会是

$$L \left[ 1 + \frac{r^2}{6} \langle R(U, W)U, W \rangle + (\text{含有 } r \text{ 的高次幂的项}) \right].$$

于是, 如果截面曲率为负, 则任何目标看起来都比它实际上更短; 在  $q$  处半径为  $\epsilon$  的一个小球面, 看起来就会是一个椭球面, 其主半径分别是

$$\epsilon \left( 1 + \frac{r^2}{6} K_1 + \dots \right), \dots, \epsilon \left( 1 + \frac{r^2}{6} K_n + \dots \right),$$

这里  $K_1, \dots, K_n$  表示线性变换  $W \rightarrow R(U, W)U$  的特征值; 体积为  $v$  的任何小物体, 看起来就会具有体积

$$v \left( 1 + \frac{r^2}{6} (K_1 + K_2 + \dots + K_n) + (\text{高次项}) \right),$$

这里  $K_1 + \dots + K_n$  等于“Ricci 曲率” $K(U, U)$ , 这是本节后

面要定义的。

现在举出曲率小于或等于 0 的一些完备流形的熟例：

- (1) 欧氏空间, 曲率为 0.
- (2) 抛物面  $z = x^2 - y^2$ , 曲率  $< 0$ .
- (3) 旋转双曲面  $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ , 曲率  $< 0$ .
- (4) 螺旋面  $x \cos z + y \sin z = 0$ , 曲率  $< 0$ .

注 在所有这些例子里, 曲率全都取任意接近于零的值。现在还不知道, 三维空间中是否存在一个完备曲面, 曲率为负, 但上确界不是零。

有一个著名的例子, 说明流形可以处处具有负的截面曲率, 这就是假球面

$$z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} + \operatorname{sech}^{-1} \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z > 0,$$

其 Riemann 尺度由  $\mathbf{R}^3$  导出。这里, Gauss 曲率具有常值  $-1$ 。

在这张曲面上, 虽然两条测地线可以有一个以上的交点, 但任何一条测地线都没有共轭点。假球面给出一种非欧几何, 其中任何三角形的内角和都小于  $\pi$  弧度。这个流形不是完备的。事实上, Hilbert 有一个定理说: 任何常值负曲率的完备曲面都不能嵌入  $\mathbf{R}^3$ 。(例如, 见 Willmore, Differential Geometry, 137 页。)

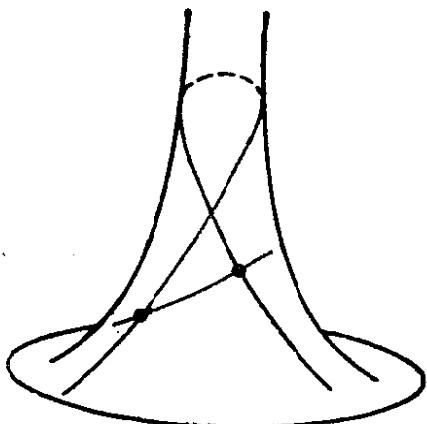


图 31

可是, 的确存在常值负曲率的完备 Riemann 流形(例如, 见 Laugwitz, Differentialgeometrie, 114—117 页)。这样一个流形甚至可以是紧致的, 例如, 环柄数大于或等于 2 的曲面即是。(见 Hilbert 和 Cohn-Vossen, Anschauliche Geometrie<sup>1)</sup>, 228 页。)

1) 中译本: 《直观几何》, 高等教育出版社。——译注

**定理 19.2 (Cartan<sup>1)</sup>)** 假设:  $M$  是单连通的完备 Riemann 流形, 截面曲率  $\langle R(A, B)A, B \rangle$  处处小于或等于 0. 于是,  $M$  的任何两点均可由唯一一条测地线联结起来. 此外,  $M$  微分同胚于欧氏空间  $\mathbb{R}^n$ .

既然不存在任何共轭点, 所以从指数定理可见, 从  $p$  到  $q$  的每一条测地线都具有指数  $\lambda = 0$ . 于是, 定理 17.3 断定: 道路空间  $\Omega(M; p, q)$  具有一个零维 CW 复形的同伦型, 相应于每条测地线, 这个复形有一个顶点.

$M$  的单连通性假设蕴涵  $\Omega(M; p, q)$  是连通的. 由于连通的零维 CW 复形必定是由单独一个点组成, 所以从  $p$  到  $q$  恰好有一条测地线.

因此, 指数映像  $\exp_p : TM_p \rightarrow M$  是一一映成的映像. 但是, 从 18.1 推出,  $\exp_p$  处处都是非临界映像, 所以  $\exp_p$  局部而言是一个微分同胚. 把这两个事实结合起来, 我们看出,  $\exp_p$  是一个整体微分同胚. 这就完全证明了 19.2.

更一般地, 假设:  $M$  不是单连通的, 但却是完备的, 并且截面曲率小于或等于 0 (例如,  $M$  可以是平滑的环面  $S^1 \times S^1$ , 或者是环柄数  $\geq 2$  的常值负曲率紧致曲面). 于是, 定理 19.2 适用于  $M$  的通用复叠空间  $\tilde{M}$ , 因为, 显然可见,  $\tilde{M}$  从  $M$  处继承了一个 Riemann 尺度, 成为测地完备流形, 并且截面曲率小于或等于零.

因此, 对于任何两点  $p, q \in M$ , 从  $p$  到  $q$  的每一个道路同伦类恰好含有一条测地线.

$\tilde{M}$  可缩为一点这个事实对  $M$  的拓扑结构加上很强的限制. 例如:

**推论 19.3** 若  $M$  是完备的, 且  $\langle R(A, B)A, B \rangle \leq 0$ , 则在  $i > 1$  时同伦群  $\pi_i(M)$  为零, 而  $\pi_1(M)$  不含任何有限阶的非单位元素.

**证** 显然,  $i > 1$  时  $\pi_i(M) = \pi_i(\tilde{M}) = 0$ . 由于  $\tilde{M}$  可缩为

---

1) 见 E.Cartan, *Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann*. Paris, 1926 及 1951. ——原注

一点，所以上同调群  $H^k(M)$  可以等同于群  $\pi_1(M)$  的上同调群  $H^k(\pi_1(M))$  (例如，见 S. T. Hu, Homotopy Theory, Academic Press, 1959, 200—202 页). 今设  $\pi_1(M)$  含有一个非零的有限循环子群  $G$ , 那么对于  $M$  的一个适当的覆盖空间  $\hat{M}$ , 我们有  $\pi_1(\hat{M}) = G$ , 所以

$$H^k(G) = H^k(\hat{M}) = 0, \quad k > n.$$

但是，一个有限循环群的上同调群，在任意高维数是非零的，这就得到一个矛盾. 证毕.

现在我们来考虑“正曲率”流形. 在这种情形，我们不考虑截面曲率而考虑 Ricci 张量(有时称为“平均曲率张量”), 从而得到更强的结果.

**定义** Riemann 流形  $M$  的一点  $p$  处的 Ricci 张量是一个双线性映像

$$K: TM_p \times TM_p \rightarrow \mathbb{R},$$

定义如下:  $K(U_1, U_2)$  是从  $TM_p$  到  $TM_p$  的线性变换

$$W \mapsto R(U, W)U_2$$

的迹数(古典的说法是: 张量  $K$  由  $R$  收缩而得). 从 9.3 容易推出  $K$  是对称的:  $K(U_1, U_2) = K(U_2, U_1)$ .

Ricci 张量与截面曲率的关系如下. 命  $U_1, U_2, \dots, U_n$  是切空间  $TM_p$  的标准正交基.

**结论**  $K(U_n, U_n)$  等于诸截面曲率  $\langle R(U_n, U_i)U_n, U_i \rangle$  ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) 之和.

**证** 按照定义,  $K(U_n, U_n)$  等于矩阵  $(\langle R(U_n, U_i)U_n, U_j \rangle)$  的迹数. 由于这个矩阵的第  $n$  个对角线项为零, 所以我们得到结论所述的  $n - 1$  个截面曲率之和.

**定理 19.4** (Myers<sup>1)</sup>). 假设: 对  $M$  的每一点处的每个单位向量  $U$ , Ricci 曲率  $K$  满足

$$K(U, U) \geq (n - 1)/r^2,$$

1) 见 S. B. Myers, Riemann manifolds with positive mean curvature, *Duke Math. Journal*, 8(1941), 401—404.—原注

其中  $r$  是一个正常数。那么  $M$  上每一条长度大于  $\pi r$  的测地线都含有共轭点，因而不是极小测地线。

**证** 命  $\gamma: [0, 1] \rightarrow M$  是一条长度为  $L$  的测地线。选取沿  $\gamma$  的平行向量场  $P_1, \dots, P_n$ ，它们在一点处标准正交，因而沿  $\gamma$  处处标准正交。我们可以假设： $P_n$  的指向沿着  $\gamma$ ，所以

$$V = \frac{d\gamma}{dt} = LP_n, \quad \frac{DP_i}{dt} = 0.$$

命  $W_i(t) = (\sin \pi t)P_i(t)$ 。于是

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} E_{**}(W_i, W_i) \\ &= - \int_0^1 \left\langle W_i, \frac{D^2 W_i}{dt^2} + R(V, W_i)V \right\rangle dt \\ &= \int_0^1 (\sin \pi t)^2 (\pi^2 - L^2 \langle R(P_n, P_i)P_n, P_i \rangle) dt. \end{aligned}$$

对  $i = 1, \dots, n-1$  求和，我们得到

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} E_{**}(W_i, W_i) \\ &= \int_0^1 (\sin \pi t)^2 [(n-1)\pi^2 - L^2 K(P_n, P_n)] dt. \end{aligned}$$

今若  $K(P_n, P_n) \geq (n-1)/r^2$  而  $L > \pi r$ ，则上面的那个表达式小于零，因而存在某个  $i$ ，使  $E_{**}(W_i, W_i) < 0$ 。这就蕴涵  $\gamma$  的指数是正的，因而据指数定理， $\gamma$  含有共轭点。

还可推出， $\gamma$  不是极小测地线。事实上，若  $\bar{\alpha}: (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \Omega$  是一个变分，其变分向量场为  $W_i$ ，则在  $u = 0$  时，

$$\frac{dE(\bar{\alpha}(u))}{du} = 0, \quad \frac{d^2E(\bar{\alpha}(u))}{du^2} < 0,$$

所以对充分小的  $u \neq 0$  有  $E(\bar{\alpha}(u)) < E(\gamma)$ 。证毕。

**例** 若  $M$  是半径为  $r$  的球面，则截面曲率处处等于  $1/r^2$ ，因而  $K(U, U)$  取常值  $(n-1)/r^2$ 。从 19.4 可见，每一条长度大于  $\pi r$  的测地线都含有共轭点，这是最好的结果。

**推论 19.5** 若  $M$  是完备的，并且对于所有的单位向量  $U$  有

$K(U, U) \geq (n - 1)/r^2 > 0$ , 则  $M$  是紧致的, 其直径小于或等于  $\pi r$ .

证 命  $p, q \in M$ ,  $\gamma$  是从  $p$  到  $q$  的极小测地线. 于是  $\gamma$  的长度必定  $\leq \pi r$ . 因此, 任何两点间的距离都小于或等于  $\pi r$ . 由于完备流形中的有界闭集是紧致的, 所以  $M$  本身是紧致的.

这个推论也适用于  $M$  的通用覆盖空间  $\tilde{M}$ . 由于  $\tilde{M}$  是紧致的, 所以基本群  $\pi_1(M)$  是有限的. 这个结论可以加强如下.

**定理 19.6** 若  $M$  是紧致流形, 并且  $M$  的 Ricci 张量  $K$  处处是正定的, 则道路空间  $\Omega(M; p, q)$  具有一个 CW 复形的同伦型, 这个复形在每个维数只有有限多个胞腔.

证 由于  $M$  上所有单位向量  $U$  组成的空间是紧致的, 所以连续函数  $K(U, U) > 0$  取极小值, 这个极小值可以记为  $(n - 1)/r^2 > 0$ . 于是, 每一条长度  $> \pi r$  的测地线  $\gamma \in \Omega(M; p, q)$  的指数  $\lambda$  都  $\geq 1$ .

更一般地, 考虑长度大于  $k\pi r$  的测地线  $\gamma$ . 这时, 可以同样证明:  $\gamma$  的指数  $\lambda \geq k$ . 事实上, 对每个  $i = 1, 2, \dots, k$ , 可以构造沿  $\gamma$  的向量场  $X_i$ , 在区间  $(\frac{i-1}{k}, \frac{i}{k})$  之外为零, 并且使得  $E_{**}(X_i, X_i) < 0$ . 显然,  $E_{**}(X_i, X_j) = 0 (i \neq j)$ , 所以  $X_1, \dots, X_k$  张成  $T\Omega_\gamma$  的一个  $k$  维子空间, 使得  $E_{**}$  在这个子空间上是负定的.

今设点  $p$  和  $q$  沿任何测地线不共轭. 于是, 按照 16.3, 从  $p$  到  $q$  长度小于或等于  $k\pi r$  的测地线只有有限多条, 因而指数  $< k$  的测地线只有有限多条, 再结合 17.3, 就完成了所要的证明.

注 我不知道, 在  $M$  可以是完备但非紧致的情形下, 这个定理是否仍然为真. 目前这个证明肯定是行不通的, 因为, 在抛物面  $z = x^2 + y^2$  这样的流形上, 曲率  $K(U, U)$  的下界就不会异于零.

怎样的流形可以引进一个尺度, 使得截面曲率处处为正? 弄清楚这个问题是有意思的. 两个球面的乘积  $S^m \times S^k, m, k \geq 2$ , 提供一个有启发的例子. 对这个流形说来, Ricci 张量处处是正

定的。可是，在某些方向（相应于平环  $S^1 \times S^1 \subset S^m \times S^k$ ）的截面曲率却是零。是否可以重新给  $S^m \times S^k$  一个尺度，使得截面曲率处处为正？这个问题也属未知。下述部分结果是已知的：如果存在这样的新尺度，那么在  $S^m \times S^k$  的对合变换  $(x, y) \rightarrow (-x, -y)$  下，这个尺度不可能是不变的。这是从 Synge 的一个定理推得的（见 J. L. Synge, On the connectivity of spaces of positive curvature, *Quarterly Journal of Math. (Oxford)*, 7(1936), 316—320）。

至于另外一些有关拓扑结构及曲率的定理，下列资料是有用的。

K. Yano and S. Bochner, Curvature and Betti Numbers, Annals studies, No. 32, Princeton, 1953.

S. S. Chern, On curvature and characteristic classes of a Riemann manifold, *Abh. Math. Sem., Hamburg*, 20 (1955), 117—126.

M. Berger, Sur certaines variétés Riemanniennes à courbure positive, *Comptes Rendus Acad. Sci., Paris*, 247(1958), 1165—1168.

S. I. Goldberg, Curvature and Homology, Academic Press, 1962.

## 第四章 对 Lie 群和对称空间的应用

### § 20. 对称空间

对称空间是一个连通的 Riemann 流形  $M$ , 使得对每个  $p \in M$ , 都存在一个同尺映像  $I_p: M \rightarrow M$ , 保持点  $p$  不动, 并且使过  $p$  的测地线反向, 即是, 若  $\gamma$  是测地线,  $\gamma(0)=p$ , 则  $I_p(\gamma(t))=\gamma(-t)$ .

**引理 20.1** 命  $\gamma$  是  $M$  中的测地线,  $p = \gamma(0), q = \gamma(c)$ . 于是  $I_q I_p(\gamma(t)) = \gamma(t+2c)$  (假定  $\gamma(t)$  和  $\gamma(t+2c)$  都有定义). 此外,  $I_q I_p$  保持沿  $\gamma$  的平行向量场.

**证** 命  $\gamma'(t) = \gamma(t+c)$ . 于是  $\gamma'$  是一条测地线,  $\gamma'(0)=q$ . 因此,  $I_q I_p(\gamma(t)) = I_q(\gamma(-t)) = I_q(\gamma'(-t-c)) = \gamma'(t+c) = \gamma(t+2c)$ .

如果  $V$  是沿  $\gamma$  的平行向量场, 则  $I_{p*}(V)$  也是平行向量场(因为  $I_p$  是同尺映像), 并且  $I_{p*}(V(0)) = -V(0)$ , 因而  $I_{p*}V(t) = -V(t)$ . 从而,  $I_{q*}I_{p*}(V(t)) = V(t+2c)$ .

**推论 20.2**  $M$  是完备的.

因为 20.1 表明: 测地线是可以任意延长的.

**推论 20.3**  $I_p$  是唯一的.

因为任何一点都可以用测地线和  $p$  相联.

**推论 20.4** 若  $U, V$  和  $W$  是沿  $\gamma$  的平行向量场, 则  $R(U, V)W$  也是沿  $\gamma$  的平行向量场.

**证** 若  $X$  表示第四个沿  $\gamma$  的平行向量场, 则  $\langle R(U, V)W, X \rangle$  这个量沿  $\gamma$  是常数. 事实上, 对于  $p = \gamma(0)$  和  $q = \gamma(c)$ , 考虑同尺映像  $T = I_{\gamma(c/2)}I_p$ , 这个映像把  $p$  变成  $q$ . 于是, 据 20.1 有

$$\langle R(U_q, V_q)W_q, X_q \rangle = \langle R(T_*U_p, T_*V_p)T_*W_p, T_*X_p \rangle.$$

由于  $T$  是同尺映像, 所以上面这个量也等于  $\langle R(U_p, V_p)W_p, X_p \rangle$ . 因此, 对于任何平行向量场  $X$  而言,  $\langle R(U, V)W, X \rangle$  是常数. 显然可见,  $R(U, V)W$  是平行向量场.

具有性质 20.4 的流形称为**局部对称流形**. (Cartan 的一个经典定理说; 局部对称的单连通完备流形实际上是对称空间.)

对于任何局部对称流形而言, Jacobi 微分方程具有简单的显式解. 命  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow M$  是局部对称流形上的测地线. 命  $V = \frac{d\gamma}{dt}(0)$  是  $p = \gamma(0)$  处的速度向量. 定义线性变换

$$K_V: TM_p \rightarrow TM_p$$

为  $K_V(W) = R(V, W)V$ .<sup>1)</sup> 命  $e_1, \dots, e_n$  表示  $K_V$  的特征值.

**定理 20.5** 点  $p$  沿  $\gamma$  的共轭点是  $\gamma(\pi k/\sqrt{e_i})$ , 其中  $k$  是任何非零整数,  $e_i$  是  $K_V$  的任何正的特征值.  $\gamma(t)$  作为共轭点的重数等于使得  $t$  成为  $\pi/\sqrt{e_i}$  的倍数的那些  $e_i$  的个数.

**证** 首先注意, 从对称关系

$$\langle R(V, W)V', W' \rangle = \langle R(V', W')V, W \rangle$$

直接推出,  $K_V$  是自伴线性变换:

$$\langle K_V(W), W' \rangle = \langle W, K_V(W') \rangle.$$

因此, 我们可以选取  $TM_p$  的标准正交基  $U_1, \dots, U_n$ ,<sup>2)</sup> 使得

$$K_V(U_i) = e_i U_i,$$

其中  $e_1, \dots, e_n$  是特征值. 用平行移动把诸  $U_i$  扩张为沿  $\gamma$  的向量场; 这时, 由于  $M$  是局部对称的, 所以条件

$$R(V, U_i)V = e_i U_i$$

仍然沿  $\gamma$  处处成立. 由于沿  $\gamma$  的任何向量场  $W$  均可唯一表为

$$W(t) = w_1(t)U_1(t) + \dots + w_n(t)U_n(t),$$

所以 Jacobi 方程  $\frac{D^2 W}{dt^2} + K_V(W) = 0$  取下述形式:

1) 不要把  $K_V$  和 §19 的 Ricci 张量相混. ——原注

2) 这里的  $TM_p$  原文作  $M_p$ . ——译注

$$\sum \frac{d^2 w_i}{dt^2} U_i + \sum e_i w_i U_i = 0.$$

既然诸  $U_i$  处处线性无关, 上述方程就等价于一组  $n$  个方程

$$\frac{d^2 w_i}{dt^2} + e_i w_i = 0.$$

我们关心的是在  $t = 0$  处为零的解. 如果  $e_i > 0$ , 则

$$w_i(t) = c_i \sin(\sqrt{e_i} t) (c_i \text{ 是某个常数}).$$

于是,  $w_i(t)$  的零点就是  $t = \pi/\sqrt{e_i}$  的倍数.

如果  $e_i = 0$ , 则  $w_i(t) = c_i t$ ; 如果  $e_i < 0$ , 则

$$w_i(t) = c_i \sinh(\sqrt{|e_i|} t),$$

$c_i$  是常数. 因此, 如果  $e_i \leq 0$ , 则  $w_i(t)$  仅在  $t = 0$  时为零.

20.5 证毕.

## § 21. Lie 群是对称空间

这一节里, 我们考虑 Lie 群  $G$ , 其 Riemann 尺度同时是左平移

$$L_\tau: G \rightarrow G, L_\tau(\sigma) = \tau\sigma$$

和右平移

$$R_\tau: G \rightarrow G, R_\tau(\sigma) = \sigma\tau$$

的不变量. 如果  $G$  是交换群, 这样的尺度肯定是存在的. 如果  $G$  是紧致的, 这样的尺度可以构造如下, 命  $\langle , \rangle$  是  $G$  上的任何 Riemann 尺度,  $\mu$  表示  $G$  上的 Haar 测度. 于是  $\mu$  是右不变量和左不变量. 在  $G$  上定义一个新内积  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ :

$$\langle V, W \rangle = \int_{G \times G} \langle L_{\sigma*} R_{\tau*}(V), L_{\sigma*} R_{\tau*}(W) \rangle d\mu(\sigma) d\mu(\tau).$$

于是,  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  是左不变量和右不变量.

**引理 21.1** 如果 Lie 群  $G$  的 Riemann 尺度是左不变且右不变的, 则  $G$  是对称空间. 在任何一点  $\tau \in G$  处的反射  $I_\tau$  由公式

$I_\tau(\sigma) = \tau\sigma^{-1}\tau$  给出.

证 按照假设,  $L_\tau$  和  $R_\tau$  都是同尺映像. 定义映像  $I_\epsilon: G \rightarrow G$  为

$$I_\epsilon(\sigma) = \sigma^{-1}.$$

于是  $L_{\epsilon*}: TG_e \rightarrow TG_e$  使  $e$  处的切空间反向, 所以肯定是这个切空间上的同尺映像. 因此, 恒等式

$$I_\epsilon = R_{\sigma^{-1}} I_\epsilon L_{\sigma^{-1}}$$

表明: 对任何  $\sigma \in G$ ,  $I_{\epsilon*}: TG_{\sigma^{-1}} \rightarrow TG_{\sigma^{-1}}$  都是同尺映像<sup>1)</sup>. 由于  $I_\epsilon$  使  $e$  处的切空间反向, 所以它使过  $e$  的测地线反向.

最后, 定义  $I_\tau(\sigma) = \tau\sigma^{-1}\tau$ , 恒等式  $I_\tau = R_\tau I_\epsilon R_{\tau^{-1}}$  表明<sup>2)</sup>: 每个  $I_\tau$  都是同尺映像, 使过  $\tau$  的测地线反向.

$G$  的单参数子群是把  $\mathbf{R}$  映入  $G$  的  $C^\infty$  同态映像. 已知:  $G$  的单参数子群由它在  $e$  处的切向量确定. (见 Chevalley, Theory of Lie Groups, Princeton, 1946.)

**引理 21.2**  $G$  上的测地线  $\gamma$ , 如果满足  $\gamma(0) = e$ , 正好就是  $G$  的单参数子群.

证 命  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow G$  是测地线, 满足  $\gamma(0) = e$ . 按照引理 20.1, 映像  $I_{\gamma(t)} I_\epsilon$  把  $\gamma(u)$  变成  $\gamma(u + 2t)$ . 既然

$$I_{\gamma(t)} I_\epsilon(\sigma) = \gamma(t)\sigma\gamma(t),$$

所以

$$\gamma(t)\gamma(u)\gamma(t) = \gamma(u + 2t).$$

由归纳法推出,  $\gamma(n) = \gamma(t)^n$ ,  $n$  是任何整数. 若  $t'/t''$  是有理数, 使得对某个  $t$  和某两个整数  $n'$  和  $n''$  有  $t' = n't$  和  $t'' = n''t$ , 则  $\gamma(t' + t'') = \gamma(t)^{n'+n''} = \gamma(t')\gamma(t'')$ . 按照连续性,  $\gamma$  是同态映像.

今命  $\gamma: \mathbf{R} \rightarrow G$  是单参数子群,  $\gamma'$  是过  $e$  的测地线, 使得  $\gamma'$  在  $e$  处的切向量就是  $\gamma$  在  $e$  处的切向量. 我们刚才已经证明,  $\gamma'$

1) 这里, 原文是  $I_{\epsilon*}: G_\sigma \rightarrow G_{\sigma^{-1}}$ . ——译注

2) 这里, 原文是  $I_\tau = R_\tau I_\epsilon R_{\tau^{-1}}$ . 尽管  $R_{\tau^{-1}} = R_{\tau^{-1}}$ , 但按理应记为  $R_{\tau^{-1}}$ . ——

译注

是单参数子群,所以  $\gamma' = \gamma$ . 证毕.

Lie 群  $G$  上的向量场  $X$  称为左不变的, 如果对于  $G$  中任何  $a$  和  $b$  都有  $(L_a)_*(X_b) = X_{a \cdot b}$ . 如果  $X$  和  $Y$  都是左不变的, 则  $[X, Y]$  亦然.  $G$  的 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  是所有左不变向量场组成的向量空间, 由于 Poisson 括号  $[ , ]$  的作用而成为一个代数.

$\mathfrak{g}$  的确是 Lie 代数, 因为 Jacobi 恒等式

$$[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$$

对所有向量场  $X, Y$  和  $Z$  (不必是左不变的)都成立.

**定理 21.3** 命  $G$  是 Lie 群, 具有左右不变的 Riemann 尺度. 若  $X, Y, Z$  和  $W$  是  $G$  上的左不变向量场, 则有

(a)  $\langle [X, Y], Z \rangle = \langle X, [Y, Z] \rangle,$

(b)  $R(X, Y)Z = \frac{1}{4} [[X, Y]Z],$

(c)  $\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \frac{1}{4} \langle [X, Y], [Z, W] \rangle.$

**证** 如 §8, 我们用记号  $X \triangleright Y$  表示  $Y$  在  $X$  方向上的协变导数. 对于任何左不变向量场  $X$ , 恒等式

$$X \triangleright X = 0$$

成立, 这是由于  $X$  的积分曲线是单参数子群的左平移, 因而是测地线.

于是

$$\begin{aligned} (X + Y) \triangleright (X + Y) &= (X \triangleright X) + (X \triangleright Y) \\ &\quad + (Y \triangleright X) + (Y \triangleright Y) \end{aligned}$$

是零, 因而

$$(X \triangleright Y) + (Y \triangleright X) = 0.$$

另一方面, 据 §8.5 有

$$(X \triangleright Y) - (Y \triangleright X) = [X, Y].$$

把上面两个等式加起来, 我们得到

(d)  $2(X \triangleright Y) = [X, Y].$

现在再来看恒等式

$$Y\langle X, Z \rangle = \langle Y[X], Z \rangle + \langle X, Y[Z] \rangle$$

(见 §8.4). 由于  $\langle X, Z \rangle$  是常数, 所以方程的左端为零. 把公式 (d) 代入这个方程, 我们得到

$$0 = \langle [Y, X], Z \rangle + \langle X, [Y, Z] \rangle.$$

最后, 由于  $[Y, X]$  的斜交换性, 我们得到所需的公式(a):<sup>1)</sup>

$$\langle [X, Y], Z \rangle = \langle X, [Y, Z] \rangle.$$

按照定义,  $R(X, Y)Z$  等于

$$-X[Y, Z] + Y[X, Z] + [X, Y]Z.$$

由于公式 (d), 这就变成

$$\begin{aligned} & -\frac{1}{4} [X, [Y, Z]] + \frac{1}{4} [Y, [X, Z]] \\ & + \frac{1}{2} [[X, Y], Z]. \end{aligned}$$

利用 Jacobi 恒等式, 就得到所需的公式(b):

$$R(X, Y)Z = \frac{1}{4} [[X, Y], Z].$$

公式(c) 则从 (a) 和 (b) 推出.

#### 推论 21.4 截面曲率

$$\langle R(X, Y)X, Y \rangle = \frac{1}{4} \langle [X, Y], [X, Y] \rangle$$

总是大于或等于零. 等式成立的充要条件是:  $[X, Y] = 0$ .

提醒一下, Lie 代数  $\mathfrak{g}$  的中心  $\mathfrak{c}$  定义为

$$\mathfrak{c} = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{对所有 } Y \in \mathfrak{g} \text{ 有 } [X, Y] = 0\}.$$

**推论 21.5** 若  $G$  具有左右不变尺度, 并且 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  具有平凡中心, 则  $G$  是紧致的, 具有有限的基本群.

**证** 这是 Meyer 定理(§19)的推论. 命  $X_1$  是  $\mathfrak{g}$  中任何单位

1) 由此可见, 三线性函数  $(X, Y, Z) \rightarrow \langle [X, Y], Z \rangle$  对所有三个变元都是斜对称的, 这就得到  $G$  上的一个左不变的 3 元微分形式, 代表 de Rham 上同调群  $H^3(G)$  的一个元素. 因此, Cartan 得以证明  $H^3(G) \neq 0$ , 其中  $G$  是非交换紧致连通 Lie 群. (见 E. Cartan, La Topologie des Espaces Représen-tatives des Groupes de Lie, Paris, Hermann, 1936.) ——原注

向量,由此扩张为一组标准正交基  $X_1, \dots, X_n$ . Ricci 曲率

$$K(X_1, X_1) = \sum_{i=1}^n \langle R(X_1, X_i)X_1, X_i \rangle$$

一定严格为正,因为对于某个  $i$  有  $[X_1, X_i] \neq 0$ . 此外,  $K(X_1, X_1)$  的下确界非零,因为  $\mathfrak{g}$  中的单位球面是紧致的,因此,据推论 19.5,流形  $G$  是紧致的.

这个结果可以稍微加强如下:

**推论 21.6** 单连通的 Lie 群  $G$ ,如果具有左右不变尺度,则可分解为拓扑积  $G' \times \mathbf{R}^k$ ,其中  $G'$  是紧致的,  $\mathbf{R}^k$  则表示某个欧氏空间的加法 Lie 群.此外,  $G'$  的 Lie 代数具有平凡中心.

反过来,任何这样的乘积  $G' \times \mathbf{R}^k$  显然具有左右不变尺度.

**证** 命  $\mathfrak{c}$  是 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  的中心,

$$\mathfrak{g}' = \{X \in \mathfrak{g} \mid \text{对所有 } C \in \mathfrak{c} \text{ 有 } \langle X, C \rangle = 0\}$$

是  $\mathfrak{c}$  的正交补.于是  $\mathfrak{g}'$  是 Lie 子代数,因为,若  $X, Y \in \mathfrak{g}'$  且  $C \in \mathfrak{c}$ ,则

$$\langle [X, Y], C \rangle = \langle X, [Y, C] \rangle = 0;$$

因而  $[X, Y] \in \mathfrak{g}'$ .可见,  $\mathfrak{g}$  可分解为 Lie 代数的直接和  $\mathfrak{g}' \oplus \mathfrak{c}$ ,因而  $G$  分解为拓扑积  $G' \times G''$ ,其中  $G'$  由于 21.5 是紧致的,  $G''$  是单连通的交换 Lie 群,因而同构于某个  $\mathbf{R}^k$  (见 Chevalley, Theory of Lie Groups). 证毕.

**定理 21.7** (Bott) 命  $G$  是紧致的单连通 Lie 群.于是,闭路空间  $\Omega(G)$  具有 CW 复形的同伦型:这个复形没有奇维胞腔,对于每个偶数值  $\lambda$ ,只有有限多个  $\lambda$  维胞腔.

因此,  $\Omega(G)$  的  $\lambda$  维同调群当  $\lambda$  是奇数时为零,当  $\lambda$  是偶数时是有限阶的自由交换群.

**注 1** 这个 CW 复形总是无限维复形.例如,若  $G$  是单位四元数群  $S^3$ ,我们已经知道,同调群  $H_i \Omega(S^3)$  对于  $i$  的所有偶数值是无限循环群.

**注 2** 这个定理甚至对非紧致群也对.事实上,任何连通 Lie 群都含有一个紧致子群作为形变收缩核.(见 K. Iwasawa,

On some types of topological groups, *Annals of Math.*, **50**(1949),  
定理 6.)

**21.7 的证明** 选取  $G$  中两点  $p$  和  $q$ , 沿任何测地线不共轭.  
据定理 17.3,  $\Omega(G; p, q)$  具有 CW 复形的同伦型: 对于从  $p$  到  
 $q$  每一条指数为  $\lambda$  的测地线, 这个复形有一个  $\lambda$  维胞腔. 据  
§19.4, 对于每个  $\lambda$ , 只有有限多个  $\lambda$  维胞腔, 所以只须证明: 测地  
线的指数  $\lambda$  总是偶数.

考虑一条测地线  $r$ , 从  $p$  出发, 速度向量为

$$V = \frac{dr}{dt}(0) \in TG_p \cong \mathfrak{g}.$$

按照 §20.5,  $p$  在  $r$  上的共轭点由线性变换

$$K_V: TG_p \rightarrow TG_p$$

的特征值确定, 这里  $K_V$  定义为

$$K_V(W) = R(V, W)V = \frac{1}{4}[[V, W], V].$$

定义相伴同态映像

$$Ad V: \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$$

为

$$Ad V(W) = [V, W],$$

我们有

$$K_V = -\frac{1}{4}(Ad V) \circ (Ad V).$$

线性变换  $Ad V$  是斜对称的, 即是

$$\langle Ad V(W), W' \rangle = -\langle W, Ad V(W') \rangle.$$

这个事实直接从恒等式 21.3a 推出. 因此, 我们可以选取  $G$  的标  
准正交基, 使得  $Ad V$  的矩阵具有下述形状

$$\begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \\ & & 0 & a_2 \\ & & -a_2 & 0 \\ & & & \ddots \end{bmatrix},$$

从而复合线性变换  $(Ad V) \circ (Ad V)$  具有矩阵

$$\begin{bmatrix} -a_1^2 & & & \\ & -a_1^2 & & \\ & & -a_2^2 & \\ & & & -a_2^2 \end{bmatrix}.$$

因此,

$$K_V = -\frac{1}{4} (Ad V)^2$$

的非零特征值是正的,并且成对出现.

从 20.5 推出,  $p$  沿  $\gamma$  的共轭点也是成对出现的. 换言之, 每个共轭点都具有偶数重数. 再结合指数定理, 这就推出: 从  $p$  到  $q$  的任何测地线的指数  $\lambda$  都是偶数. 证毕.

## § 22. 极小测地线组成的全流形

迄今为止, 我们用到的道路空间  $\Omega(M; p, q)$ , 它的两个基点  $p, q \in M$  总是处于“一般位置”. 可是, Bott 曾经指出, 考虑处于某个特殊位置上的点对  $(p, q)$  可以得到非常有用的结果. 例如, 命  $M$  是单位球面  $S^{n+1}$ ,  $p$  和  $q$  是对径点. 于是, 从  $p$  到  $q$  有无限多条极小测地线. 事实上, 极小测地线组成的空间  $\Omega^n$  构成  $n$  维

光滑流形, 可以和赤道  $S^n \subset S^{n+1}$  等同起来. 我们将会看到, 极小测地线组成的这个空间对于整个闭路空间  $\Omega(S^{n+1})$  提供了一个相当好的近似.

命  $M$  是完备 Riemann 流形,  $p, q \in M$  是两个点, 距离为

$$\rho(p, q) = \sqrt{d}.$$

图 32

**定理 22.1** 如果从  $p$  到  $q$  的极小测地线组成的空间  $\Omega^d$  是一个拓扑流形, 并且从  $p$  到  $q$  的任何

非极小测地线的指数都大于或等于  $\lambda_0$ , 那么对于  $0 \leq i < \lambda_0$ , 相对同伦群  $\pi_i(\Omega, \Omega^d)$  为零。

由此推出, 包含同态映像

$$\pi_i(\Omega^d) \rightarrow \pi_i(\Omega)$$

当  $i \leq \lambda_0 - 2$  时是一个同构映像。但是, 已经知道, 对于所有的  $i$ , 同伦群  $\pi_i(\Omega)$  同构于  $\pi_{i+1}(M)$ 。(见 §17.1 以及 S. T. Hu, Homotopy Theory, Academic Press, 1959, p.111.) 于是, 我们得到

**推论 22.2** 在同样的假设下, 对于  $0 \leq i \leq \lambda_0 - 2$ ,  $\pi_i(\Omega^d)$  同构于  $\pi_{i+1}(M)$ 。

让我们把这个推论用来考虑  $n + 1$  维球面上两个对径点的情形。当  $\lambda_0 = 2n$  时, 推论的假设显然是满足的, 因为, 任何非极小的测地线一定至少要绕  $S^{n+1}$  一圈半, 所以这条测地线的内部一定含有两个共轭点, 每一个都具有重数  $n$ 。这就证明了下面的

**推论 22.3** (Freudenthal 的同纬映像定理) 当  $i \leq 2n - 2$  时, 同伦群  $\pi_i(S^n)$  同构于  $\pi_{i+1}(S^{n+1})$ 。

定理 22.1 还蕴涵闭路空间  $\Omega$  的同调群同构于  $\Omega^d$  的同调群, 只要维数小于或等于  $\lambda_0 - 2$ 。这个事实来自 22.1 以及有关的 Hurewicz 定理(例如, 见 S. T. Hu, Homotopy Theory, p. 306; 亦见 J. H. C. Whitehead, Combinatorial homotopy I, Theorem 2, Bull. Amer. Math. Soc., 55(1949), 213—245)。

本节其余部分就用来证明定理 22.1。证明基于下述引理, 它断言: 当函数稍有变动时, “所有临界点的指数都大于或等于  $\lambda_0$ ”这个条件仍然成立。

命  $K$  是欧氏空间  $\mathbf{R}^n$  的紧致子集,  $U$  是  $K$  的邻域,

$$f: U \rightarrow \mathbf{R}$$

是光滑函数, 使得  $f$  在  $K$  中所有临界点的指数都大于或等于  $\lambda_0$ 。

**引理 22.4** 如果  $g: U \rightarrow \mathbf{R}$  是任何光滑函数, 与  $f$  “接近”, 即是说, 对于某个充分小的常数  $\varepsilon$ , 条件

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \varepsilon (i, j = 1, \dots, n)$$

在整个  $K$  中均匀成立，那么  $g$  在  $K$  中所有临界点的指数都大于或等于  $\lambda_0$ .

(注意， $f$  可以具有蜕化的临界点。但是，我们下面应用这个引理时， $g$  将是没有蜕化临界点的邻近函数。)

**22.4 的证明**  $g$  的各个一阶导数可以用  $U$  上的单独一个实值函数

$$k_g(x) = \sum_i \left| \frac{\partial g}{\partial x_i} \right| \geq 0$$

加以粗略的描述；这个函数刚好在  $g$  的各临界点处为零， $g$  的二阶导数可以用  $n$  个连续函数

$$e_g^1, \dots, e_g^n : U \rightarrow \mathbf{R}$$

粗略描述如下。命

$$e_g^1(x) \leq e_g^2(x) \leq \dots \leq e_g^n(x)$$

表示矩阵  $\left( \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} \right)$  的  $n$  个特征值。于是， $g$  的临界点  $x$  的指数大于或等于  $\lambda$  的充要条件是： $e_g^\lambda(x)$  这个数为负数。

函数  $e_g^\lambda$  的连续性从下述事实推出：对称矩阵的第  $\lambda$  个特征值连续依赖于这个矩阵<sup>1)</sup>。它也可以从这样一个事实推出，即多项式的根连续依赖于这个多项式。（见 K. Knopp, *Theory of Functions, Part II*, §14, Dover, USA, 1947.）

命  $m_g(x)$  表示  $k_g(x)$  和  $-e_g^{\lambda_0}(x)$  这两个数中较大的一个，同样， $m_f(x)$  表示  $k_f(x)$  和  $-e_f^{\lambda_0}(x)$  这两个数中较大的一个。 $f$  在  $K$  中所有临界点的指数都大于或等于  $\lambda_0$  这个假设蕴涵

$$-e_f^{\lambda_0}(x) > 0,$$

1) 这个断言可以加强如下。考虑两个  $n \times n$  对称矩阵，如果这两个矩阵的相应元素至多相差  $\varepsilon$ ，则相应的特征值至多相差  $n\varepsilon$ 。这个断言可以利用 Courant 关于第  $\lambda$  个特征值的极小极大定义来证明。（见 Courant, Über die Abhängigkeit der Schwingungszahlen einer Membran..., §1, Nachrichten, Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math. Phys. Klasse 1919, 255—264.）——原注

只要  $k_f(x) = 0$ . 换言之, 对于所有的  $x \in K$  有  $m_f(x) > 0$ .

命  $\delta > 0$  表示  $m_f$  在  $K$  上的极小值. 今设  $g$  与  $f$  接近, 使得对于所有的  $x \in K$  有

$$(*) |k_g(x) - k_f(x)| < \delta, |e_g^{\lambda_0}(x) - e_f^{\lambda_0}(x)| < \delta.$$

于是, 当  $x \in K$  时,  $m_g(x)$  为正, 因而  $g$  在  $K$  中的任何临界点的指数都大于或等于  $\lambda_0$ .

要完成 22.4 的证明, 只须证明: 如果对于充分小的  $\varepsilon$  有

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x_i} - \frac{\partial f}{\partial x_i} \right| < \varepsilon, \quad \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right| < \varepsilon,$$

则不等式 (\*) 成立. 请读者利用均匀连续性的论证 (或利用前面的脚注) 来完成这个证明.

其次, 我们要对流形上的实值函数来证明与定理 22.1 类似的结果.

命  $f: M \rightarrow \mathbf{R}$  是光滑实值函数, 极小值为零, 使得每个

$$M^c = f^{-1}[0, c]$$

都是紧致的.

**引理 22.5** 如果极小点的集合  $M^0$  是流形, 并且  $M - M^0$  中所有临界点的指数都大于或等于  $\lambda_0$ , 则当  $0 \leq r < \lambda_0$  时,  $\pi_r(M, M^0) = 0$ .

**证** 首先注意,  $M^0$  是某个邻域  $U \subset M$  的收缩核. 事实上, Hanner 已经证明: 任何流形  $M^0$  都是绝对邻域收缩核. (见 O. Hanner, Some theorems on absolute neighborhood retracts, Theorem 3.3, Arkiv för Matematik, 1(1950), 389—408.) 必要时把  $U$  换成一个更小的邻域, 我们可以假定:  $U$  的每个点都可以用唯一一条极小测地线和  $M^0$  的对应点联结起来. 于是,  $U$  可以在  $M$  中形变为  $M^0$ .

命  $I'$  表示维数  $r < \lambda_0$  的单位方体, 而

$$h: (I', I') \rightarrow (M, M^0)$$

是任何映像. 我们必须证明:  $h$  同伦于一个映像  $h'$ , 使得

$$h'(I') \subset M^0.$$

命  $c$  是  $f$  在  $h(I')$  上的极大值,  $3\delta > 0$  是  $f$  在集  $M - U$  上的极小值. (函数  $f$  在  $M - U$  上具有极小值, 这是因为每个子集  $\bar{M}^c - U$  都是紧致的<sup>1)</sup>.)

现在选取光滑函数

$$g: M^{c+2\delta} \rightarrow \mathbf{R},$$

与  $f$  充分接近, 但没有蜕化临界点; 由于 §6.8, 这是可以的. 更精确地说, 接近的程度应该是这样:

- (1) 对所有的  $x \in M^{c+2\delta}$  有  $|f(x) - g(x)| < \delta$ ;
- (2)  $g$  在紧致集  $f^{-1}[\delta, c + 2\delta]$  中每个临界点处的指数都大于或等于  $\lambda_0$ .

从引理 22.4 可见, 任何一个  $g$ , 如果与  $f$  充分接近, 并且一阶和二阶导数也都充分接近, 是会满足条件(2)的. 事实上, 紧致集  $f^{-1}[\delta, c + 2\delta]$  可以被有限多个紧致集  $K_i$  所覆盖, 而这些集合每一个都在一个坐标邻域内. 然后对每个  $K_i$  应用引理 22.4.

引理 22.5 的证明进行如下. 函数  $g$  在紧致域

$$g^{-1}[2\delta, c + \delta] \subset f^{-1}[\delta, c + 2\delta]$$

上是光滑的, 所有的临界点都是非蜕化的, 其指数大于或等于  $\lambda_0$ . 因此, 流形  $g^{-1}(-\infty, c + \delta]$  的同伦型与  $g^{-1}(-\infty, 2\delta]$  粘上维数大于或等于  $\lambda_0$  的某些胞腔后的同伦型相同.

现在考虑映像

$$h: (I', I') \rightarrow (M^c, M^0) \subset (g^{-1}(-\infty, c + \delta], M^0).$$

由于  $r < \lambda_0$ , 可见  $h$  在  $(g^{-1}(-\infty, c + \delta], M^0)$  中同伦于一个映像

$$h': (I', I') \rightarrow (g^{-1}(-\infty, 2\delta), M^0).$$

但是右端的空间偶含于  $(U, M^0)$ , 而  $U$  可以在  $M$  中形变为  $M^0$ , 所以  $h'$  在  $(M, M^0)$  中同伦于一个映像  $h'': (I', I') \rightarrow (M^0, M^0)$ .

22.5 证毕.

原来的定理 22.1 现在可以证明如下. 显然, 只须证明: 对于

1) 这里的  $\bar{M}^c - U$  原文作  $M^{\tilde{c}} - U$ . ——译注

任意大的  $c$  值有

$$\pi_i(\text{Int } \Omega^c, \Omega^d) = 0.$$

如 §16, 空间  $\text{Int } \Omega^c$  包含一个光滑流形  $\Omega^c(t_0, t_1, \dots, t_k)$  作为形变收缩核. 极小测地线组成的空间  $\Omega^d$  含于这个光滑流形内.

能量函数  $E: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  限制在  $\text{Int } \Omega^c(t_0, t_1, \dots, t_k)$  上时, 几乎满足 22.5 的假设. 唯一的困难是:  $E(\omega)$  的值分布在区间  $d \leq E < c$  上, 而不是分布在所要求的区间  $[0, \infty)$  上. 为了修正这一点, 命

$$F: [d, c) \rightarrow [0, \infty)$$

是任意微分同胚映像. 于是

$$F \circ E: \text{Int } \Omega^c(t_0, t_1, \dots, t_k) \rightarrow \mathbf{R}$$

满足 22.5 的假设, 因而当  $i < \lambda_0$  时,

$$\pi_i(\text{Int } \Omega^c(t_0, t_1, \dots, t_k), \Omega^d) \cong \pi_i(\text{Int } \Omega^c, \Omega^d)$$

为零. 证毕.

### § 23. Bott 关于酉群的周期性定理

首先复习一下关于酉群的一些已知事实. 命  $\mathbf{C}^n$  是复数  $n$  元组构成的空间, 具有通常的 Hermite 内积. 酉群  $U(n)$  定义为保持这个内积不变的所有线性变换  $S: \mathbf{C}^n \rightarrow \mathbf{C}^n$  组成的群. 利用矩阵表示,  $U(n)$  等价于满足条件  $SS^* = I$  的所有  $n \times n$  复矩阵  $S$  组成的群, 这里  $S^*$  表示  $S$  的共轭转置矩阵.

任何  $n \times n$  复矩阵  $A$  的指数矩阵定义为收敛的幂级数展式

$$\exp A = I + A + \frac{1}{2!} A^2 + \frac{1}{3!} A^3 + \dots$$

下面的性质是容易验证的:

$$(1) \exp(A^*) = (\exp A)^*; \exp(TAT^{-1}) = T(\exp A)T^{-1}.$$

(2) 若  $A$  与  $B$  可交换, 则

$$\exp(A + B) = (\exp A)(\exp B).$$

特别是

(3)  $(\exp A)(\exp -A) = I$ .

(4) 函数  $\exp$  把  $n \times n$  矩阵空间中 0 的邻域微分同胚地映成  $I$  的邻域.

如果  $A$  是斜 Hermite 矩阵(即是  $A + A^* = 0$ ), 则从(1)和(3)推出:  $\exp A$  是酉矩阵. 反之, 若  $\exp A$  是酉矩阵, 而  $A$  属于 0 的充分小的邻域, 则从(1),(3)和(4)推出:  $A + A^* = 0$ . 利用这些事实容易证明:

(5)  $\mathbf{U}(n)$  是  $n \times n$  矩阵空间的光滑子流形.

(6) 切空间  $T\mathbf{U}(n)_I$  可以和  $n \times n$  斜 Hermite 矩阵的空间等同起来.

因此,  $\mathbf{U}(n)$  的 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  也可以和斜 Hermite 矩阵的空间等同起来, 因为在  $I$  处的任何切向量可以唯一地扩张为  $\mathbf{U}(n)$  上的左不变向量场. 计算表明: 左不变向量场的 Poisson 括号相当于矩阵的乘积  $[A, B] = AB - BA$ .

由于  $\mathbf{U}(n)$  是紧致的, 所以它有左右不变的 Riemann 尺度. 注意, 由矩阵的乘幂定义的函数

$$\exp : T\mathbf{U}(n)_I \rightarrow \mathbf{U}(n)$$

与沿着所得到的 Riemann 流形上的测地线来定义(如 §10)的函数  $\exp$  是一致的. 事实上, 对于每个斜 Hermite 矩阵  $A$ , 对应关系

$$t \rightarrow \exp(tA)$$

定义  $\mathbf{U}(n)$  的一个单参数子群(据前面的断言(2)), 因而定义了一条测地线.

$\mathbf{U}(n)$  上可以定义一个特殊的 Riemann 尺度如下. 对于矩阵  $A, B \in \mathfrak{g}$ , 命  $\langle A, B \rangle$  表示复数

$$\text{trace}(AB^*) = \sum_{i,j} A_{ij}\bar{B}_{ij}$$

的实部. 这个内积在  $\mathfrak{g}$  上显然是正定的.

$\mathfrak{g}$  上的这个内积在  $\mathbf{U}(n)$  上确定唯一一个左不变的 Riemann 尺度. 为了验证所得到的尺度也是右不变的, 我们必须核实它对

$\mathbf{U}(n)$  在  $\mathfrak{g}$  上的伴随作用是不变的.

伴随作用的定义. 每个  $S \in \mathbf{U}(n)$  确定群  $\mathbf{U}(n)$  的一个内自同构

$$X \rightarrow SX S^{-1} = (L_S R_{S^{-1}})X.$$

导出的线性映像

$$(L_S R_{S^{-1}})_*: T\mathbf{U}(n)_I \rightarrow T\mathbf{U}(n)_I$$

记为  $Ad(S)$ . 于是,  $Ad(S)$  是  $\mathbf{U}(n)$  的 Lie 代数的自同构. 利用前面的断言(1), 我们得到明显的公式

$$Ad(S)A = SAS^{-1},$$

其中  $A \in \mathfrak{g}$ ,  $S \in \mathbf{U}(n)$ .

内积  $\langle A, B \rangle$  在任何这样的自同构  $Ad(S)$  下是不变的. 事实上, 若  $A_1 = Ad(S)A$ ,  $B_1 = Ad(S)B$ , 则恒等式

$$A_1 B_1^* = SAS^{-1} (SBS^{-1})^* = SAB^* S^{-1}$$

蕴涵

$$\text{trace}(A_1 B_1^*) = \text{trace}(SAB^* S^{-1}) = \text{trace}(AB^*),$$

因而

$$\langle A_1, B_1 \rangle = \langle A, B \rangle.$$

可见  $\mathbf{U}(n)$  上相应的左不变尺度也是右不变的.

对于  $A \in \mathfrak{g}$ , 由通常的矩阵理论知, 存在  $T \in \mathbf{U}(n)$ , 使得  $TAT^{-1}$  具有对角线形状

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} ia_1 & & & \\ & ia_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & ia_n \end{bmatrix},$$

其中诸  $a_i$  是实数. 其次, 对于任何  $S \in \mathbf{U}(n)$ , 存在  $T \in \mathbf{U}(n)$ , 使得

$$TST^{-1} = \begin{bmatrix} e^{ia_1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & e^{ia_n} & \end{bmatrix},$$

其中诸  $a_i$  仍为实数. 于是, 我们立即看出,  $\exp: \mathfrak{g} \rightarrow \mathbf{U}(n)$  是映成的映像,

我们可以用这个办法来处理特殊酉群  $SU(n)$ . 这个酉群定义为  $U(n)$  的子群, 由行列式为 1 的矩阵组成. 如果把  $\exp$  看成通常的矩阵指数映像, 则利用对角线形式容易证明

$$\det(\exp A) = e^{\text{trace}(A)}.$$

利用这个等式我们可以证明,  $SU(n)$  的 Lie 代数  $\mathfrak{g}'$  是所有满足下述条件的矩阵  $A$  的集合:  $A + A^* = 0$ ,  $\text{trace}(A) = 0$ .

为了应用 Morse 理论来研究  $U(n)$  和  $SU(n)$  的拓扑结构, 我们首先考虑  $U(n)$  中从  $I$  到  $-I$  的所有测地线的集合. 换言之, 我们要找出所有的  $A \in TU(n)_I = \mathfrak{g}$ , 使得  $\exp A = -I$ . 假设  $A$  是这样的矩阵; 如果它不是对角线形式, 则命  $T \in U(n)$  使得  $TAT^{-1}$  是对角线形式. 于是

$$\exp(TAT^{-1}) = T(\exp A)T^{-1} = T(-I)T^{-1} = -I,$$

所以我们也可以假定  $A$  已经是对角线形式了:

$$A = \begin{bmatrix} ia_1 & & \\ & \ddots & \\ & & ia_n \end{bmatrix}.$$

这样一来,

$$\exp A = \begin{bmatrix} e^{ia_1} & & \\ & \ddots & \\ & & e^{ia_n} \end{bmatrix},$$

从而  $\exp A = -I$  的充要条件是: 存在某些奇数  $k_1, \dots, k_n$ , 使得  $A$  具有形状

$$\begin{bmatrix} k_1 i\pi & & \\ & k_2 i\pi & \\ & & \ddots \\ & & & k_n i\pi \end{bmatrix}.$$

由于测地线  $t \rightarrow \exp(tA)$  从  $t = 0$  到  $t = 1$  的长度是

$$|A| = \sqrt{\text{trace}(AA^*)},$$

所以由  $A$  确定的测地线的长度是

$$\pi \sqrt{k_1^2 + \dots + k_n^2}.$$

因此,  $A$  确定一条极小测地线的充要条件是: 每个  $k_i$  都等于  $\pm 1$ ;

这时, 测地线的长度就是  $\pi\sqrt{n}$ . 现在, 把这样的  $A$  看成是把  $\mathbf{C}^n$  映入  $\mathbf{C}^n$  的线性映像, 容易看出,  $A$  由两个向量空间  $\text{Eigen}(i\pi)$  和  $\text{Eigen}(-i\pi)$  完全确定, 前者由所有满足  $Av = i\pi v$  的  $v \in \mathbf{C}^n$  组成, 后者由所有满足  $Av = -i\pi v$  的  $v \in \mathbf{C}^n$  组成. 由于  $\mathbf{C}^n$  分解为正交和  $\text{Eigen}(i\pi) \oplus \text{Eigen}(-i\pi)$ , 故矩阵  $A$  就由  $\text{Eigen}(i\pi)$  完全确定, 而后者可以是  $\mathbf{C}^n$  的任意的子空间. 因此,  $\mathbf{U}(n)$  中从  $I$  到  $-I$  的所有极小测地线组成的空间可以和  $\mathbf{C}^n$  的所有向量子空间组成的空间等同起来.

不幸的是, 这个空间用起来不大方便, 因为它的连通区的维数各不相同. 为了消除这个困难, 可以把  $\mathbf{U}(n)$  换成  $\mathbf{SU}(n)$ , 并令  $n = 2m$ . 这时, 上面的所有讨论仍然成立. 但是

$$a_1 + \cdots + a_{2m} = 0$$

且  $a_i = \pm\pi$  这个附加条件使  $\text{Eigen}(i\pi)$  只能是  $\mathbf{C}^{2m}$  的任意  $m$  维向量子空间. 这就证明了下面的

**引理 23.1** 在特殊酉群  $\mathbf{SU}(2m)$  中从  $I$  到  $-I$  的极小测地线组成的空间同胚于 Grassmann 复流形  $G_m(\mathbf{C}^{2m})$ , 即是由  $\mathbf{C}^{2m}$  的所有  $m$  维向量子空间组成的空间.

在本节末尾我们将证明下面的结果.

**引理 23.2**  $\mathbf{SU}(2m)$  中从  $I$  到  $-I$  的任何非极小测地线的指数都大于或等于  $2m+2$ .

把这两个引理和 §22 结合起来, 我们得到

**定理 23.3** (Bott) 包含映像  $G_m(\mathbf{C}^{2m}) \rightarrow \Omega(\mathbf{SU}(2m); I, -I)$  导出维数小于或等于  $2m$  的各同伦群的同构, 因而当  $i \leq 2m$  时

$$\pi_i G_m(\mathbf{C}^{2m}) \cong \pi_{i+1} \mathbf{SU}(2m).$$

另一方面, 使用同伦论的标准方法可以得到稍微不同的同构.

**引理 23.4** 当  $i \leq 2m$  时, 群  $\pi_i G_m(\mathbf{C}^{2m})$  同构于  $\pi_{i-1} \mathbf{U}(m)$ . 此外,  $i \leq 2m$  时,

$$\begin{aligned} \pi_{i-1} \mathbf{U}(m) &\cong \pi_{i-1} \mathbf{U}(m+1) \\ &\cong \pi_{i-1} \mathbf{U}(m+2) \cong \cdots, \end{aligned}$$

而  $i \neq 1$  时,

$$\pi_i \mathbf{U}(m) \cong \pi_i \mathbf{SU}(m).$$

证 首先注意,对于每个  $m$ ,存在纤维结构

$$\mathbf{U}(m) \rightarrow \mathbf{U}(m+1) \rightarrow S^{2m+1}.$$

从这个纤维结构的同伦正合序列

$$\dots \rightarrow \pi_i S^{2m+1} \rightarrow \pi_{i-1} \mathbf{U}(m) \rightarrow \pi_{i-1} \mathbf{U}(m+1) \rightarrow \pi_{i-1} S^{2m+1} \rightarrow \dots$$

我们看出

$$\text{当 } i \leq 2m \text{ 时, } \pi_{i-1} \mathbf{U}(m) \cong \pi_{i-1} \mathbf{U}(m+1).$$

(见 Steenrod, The Topology of Fibre Bundles, Princeton, 1951, 35 页及 90 页.) 可见,当  $i \leq 2m$  时,包含同态映像

$$\pi_{i-1} \mathbf{U}(m) \rightarrow \pi_{i-1} \mathbf{U}(m+1) \rightarrow \pi_{i-1} \mathbf{U}(m+2) \rightarrow \dots$$

全都是同构映像. 这些彼此同构的群就叫做酉群的第  $i-1$  个稳定同伦群,简写为  $\pi_{i-1} \mathbf{U}$ .

上面的正合序列也表明,当  $i = 2m+1$  时,同态映像

$$\pi_{2m} \mathbf{U}(m) \rightarrow \pi_{2m} \mathbf{U}(m+1) \cong \pi_{2m} \mathbf{U}$$

是映成的映像.

Stiefel 复流形定义为商空间  $\mathbf{U}(2m)/\mathbf{U}(m)$ . 从纤维结构

$$\mathbf{U}(m) \rightarrow \mathbf{U}(2m) \rightarrow \mathbf{U}(2m)/\mathbf{U}(m)$$

的正合序列可见,当  $i \leq 2m$  时,  $\pi_i [\mathbf{U}(2m)/\mathbf{U}(m)] = 0$ .

Grassmann 复流形  $G_m(\mathbf{C}^{2m})$  可以和商空间  $\mathbf{U}(2m)/\mathbf{U}(m) \times \mathbf{U}(m)$  等同起来(见 Steenrod, §7). 从纤维结构

$$\mathbf{U}(m) \rightarrow \mathbf{U}(2m)/\mathbf{U}(m) \rightarrow G_m(\mathbf{C}^{2m})$$

的正合序列可见,当  $i \leq 2m$  时,

$$\pi_i G_m(\mathbf{C}^{2m}) \xrightarrow{\cong} \pi_{i-1} \mathbf{U}(m).$$

最后,从纤维结构  $\mathbf{SU}(m) \rightarrow \mathbf{U}(m) \rightarrow S^1$  的正合序列可见,当  $i \neq 1$  时,  $\pi_i \mathbf{SU}(m) \cong \pi_i \mathbf{U}(m)$ . 引理 23.4 证毕.

把引理 23.4 和定理 23.3 结合起来,我们看出,当

$$1 \leq i \leq 2m$$

时,

$$\begin{aligned}\pi_{i-1}U &= \pi_{i-1}U(m) \cong \pi_i G_m(C^{2m}) \\ &\cong \pi_{i+1}SU(2m) \cong \pi_{i+1}U,\end{aligned}$$

所以我们得到

$$\text{周期性定理 } \pi_{i-1}U \cong \pi_{i+1}U, \quad i \geq 1.$$

为了计算这些群, 只须注意,  $U(1)$  是循环群, 所以

$$\pi_0 U = \pi_0 U(1) = 0,$$

$$\pi_1 U = \pi_1 U(1) \cong \mathbb{Z} \text{ (无限循环群).}$$

作为检验, 由于  $SU(2)$  是 3 维球面, 我们有

$$\pi_2 U = \pi_2 SU(2) = 0,$$

$$\pi_3 U = \pi_3 SU(2) \cong \mathbb{Z}.$$

这样一来, 我们已经证明了下面的结果:

**定理 23.5 (Bott)** 百群的稳定同伦群  $\pi_i U$  具有周期 2. 事实上, 群

$$\pi_0 U \cong \pi_2 U \cong \pi_4 U \cong \dots$$

是零群, 而群

$$\pi_1 U \cong \pi_3 U \cong \pi_5 U \cong \dots$$

是无限循环群。

本节剩下的部分就用来证明引理 23.2. 我们要计算  $SU(n)$  上从  $I$  到  $-I$  的任何非极小测地线的指数, 这里  $n$  是偶数。提醒一下, Lie 代数

$$\mathfrak{g}' = T(SU(n)),$$

由 trace 为零的所有  $n \times n$  斜 Hermite 矩阵组成。矩阵  $A \in \mathfrak{g}'$  相应于从  $I$  到  $-I$  的一条测地线的充要条件是:  $A$  的特征值具有形状  $i\pi k_1, \dots, i\pi k_n$ , 这里  $k_1, \dots, k_n$  都是奇数, 其和为零。

我们应该求出  $I$  沿测地线

$$t \rightarrow \exp(tA)$$

的共轭点。据定理 20.5, 这些共轭点由线性变换

$$K_A : \mathfrak{g}' \rightarrow \mathfrak{g}'$$

的正特征值确定, 这里

$$K_A(W) = R(A, W)A = \frac{1}{4} [[A, W], A].$$

(见 §21.7.)

我们可以假设,  $A$  是对角线矩阵

$$\begin{bmatrix} i\pi k_1 & & \\ & \ddots & \\ & & i\pi k_n \end{bmatrix},$$

其中  $k_1 \geq k_2 \geq \dots \geq k_n$ . 如果  $W = (w_{jl})$ , 经过简单计算可得

$$[A, W] = (i\pi(k_j - k_l)w_{jl}),$$

因而

$$[A[A, W]] = (-\pi^2(k_j - k_l)^2 w_{jl}),$$

$$K_A(W) = \left( \frac{\pi^2}{4} (k_j - k_l)^2 w_{jl} \right).$$

现在来找  $\mathfrak{g}'$  的一组基, 由  $K_A$  的特征向量组成:

(1) 对于每个  $j < l$ , 命矩阵  $E_{jl}$  在  $(j, l)$  位置处为  $+1$ , 在  $(l, j)$  位置处为  $-1$ , 在其余各处为  $0$ . 这个矩阵属于  $\mathfrak{g}'$ , 并且是相应于特征值  $\frac{\pi^2}{4} (k_j - k_l)^2$  的特征向量.

(2) 同样, 对于每个  $j < l$ , 命矩阵  $E'_{jl}$  在  $(j, l)$  位置处为  $+i$ , 在  $(l, j)$  位置处为  $+i$ .<sup>1)</sup> 这个矩阵是特征向量, 其特征值也是

$$\frac{\pi^2}{4} (k_j - k_l)^2.$$

(3)  $\mathfrak{g}'$  中的每个对角线矩阵都是特征向量, 其特征值为零.

于是,  $K_A$  的非零特征值就是

$$\frac{\pi^2}{4} (k_j - k_l)^2$$

这些数, 这里  $k_j > k_l$ , 每个特征值都应计算两次.

现在考虑测地线  $r(t) = \exp tA$ . 每个特征值

1) 在其余各处当然为 0. ——译注

$$e = \frac{\pi^2}{4} (k_i - k_l)^2 > 0$$

都产生  $\gamma$  上的一系列共轭点, 各与下列  $t$  值相应

$$t = \pi/\sqrt{e}, 2\pi/\sqrt{e}, 3\pi/\sqrt{e}, \dots$$

(见 §20.5). 将  $e$  的值代入上式则得

$$t = \frac{2}{k_i - k_l}, \frac{4}{k_i - k_l}, \frac{6}{k_i - k_l}, \dots,$$

这些  $t$  值中属于开区间  $(0, 1)$  的个数显然等于

$$\frac{k_i - k_l}{2} - 1.$$

现在让我们应用指数定理. 对于每对  $(i, l)$ ,  $k_i > k_l$ , 特征值  $\frac{\pi^2}{4} (k_i - k_l)^2$  应计算两次, 所以相应共轭点的个数是

$$2 \left( \frac{k_i - k_l}{2} - 1 \right),$$

对所有的  $i, l$  求和, 就得到测地线  $\gamma$  的指数公式

$$\lambda = \sum_{k_i > k_l} (k_i - k_l - 2).$$

例如, 若  $\gamma$  是极小测地线, 则所有的  $k_i$  都等于  $\pm 1$ , 因而不出所料,  $\lambda = 0$ .

现在考虑非极小测地线. 命  $n = 2m$ .

**情形 1:** 诸  $k_i$  中, 例如, 至少有  $m + 1$  个是负数<sup>1)</sup>. 这时, 正的  $k_i$  中至少有一个一定要  $\geq 3$ , 所以我们有

$$\lambda \geq \sum_1^{m+1} (3 - (-1) - 2) = 2(m + 1).$$

**情形 2:** 诸  $k_i$  中有  $m$  个是正的,  $m$  个是负的, 但不全为  $\pm 1$ . 这时诸  $k_i$  中有一个  $\geq 3$ , 也有一个  $\leq 3$ , 所以

$$\lambda \geq \sum_1^{m-1} (3 - (-1) - 2)$$

1) 至少有  $m + 1$  个是正数的情形仿此. ——译注

$$\begin{aligned}
& + \sum_1^{m-1} (1 - (-3) - 2) + (3 - (-3) - 2) \\
& = 4m \geq 2(m+1).
\end{aligned}$$

因此，在两种情况下我们都有  $\lambda \geq 2m + 2$ . 引理 23.2 证毕，因而也就证明了定理 23.3.

## § 24. 正交群的周期性定理

本节将对正交群的复迭闭路空间进行类似的研究，不过我们的处理相当粗略，许多细节都略去了。本节的观点是由 R. Bott 和 A. Shapiro 的文章 On Clifford modules (待发表<sup>1)</sup>) 启发而得的，这篇文章把周期性定理和某些 Clifford 代数的结构联系起来。

考虑向量空间  $\mathbf{R}^n$ ，具有通常的内积。正交群  $O(n)$  由所有保持这个内积不变的线性变换

$$T: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$$

组成。也可以说， $O(n)$  由满足  $TT^* = I$  的所有  $n \times n$  实矩阵  $T$  组成。这个群  $O(n)$  可以视为酉群  $U(n)$  的光滑子群，因而继承了酉群的左右不变的 Riemann 尺度。

现在假设  $n$  是偶数。

**定义**  $\mathbf{R}^n$  上的复结构是一个线性变换  $J: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ ，属于正交群  $O(n)$ ，满足恒等式  $J^2 = -I$ .  $\mathbf{R}^n$  上所有这样的复结构组成的空间记为  $\Omega_1(n)$ .

我们不久即将看到(引理 24.4)， $\Omega_1(n)$  是正交群  $O(n)$  的光滑子流形。

**注** 对于固定的  $J_1 \in \Omega_1(n)$ ，命  $U(n/2)$  是  $O(n)$  中与  $J_1$  交换的所有正交变换组成的子群。于是， $\Omega_1(n)$  可以和商空间  $O(n)/U(n/2)$  等同起来。

1) 见 Topology, Vol. 3(1964), Suppl.1, 3—38.—译注

**引理 24.1**  $O(n)$  上从  $I$  到  $-I$  的极小测地线组成的空间同胚于  $\mathbb{R}^n$  上所有复结构组成的空间  $\Omega_1(n)$ .

**证** 空间  $O(n)$  可以和  $n \times n$  正交矩阵组成的群等同起来, 它的切空间  $\mathfrak{g} = T\mathcal{O}(n)_I$  可以和  $n \times n$  斜对称矩阵组成的空间等同起来. 任何测地线  $\gamma$ , 如果满足  $\gamma(0) = I$ , 则可唯一地写成

$$\gamma(t) = \exp(\pi t A),$$

其中  $A \in \mathfrak{g}$ .

令  $n = 2m$ . 由于  $A$  是斜对称的, 所以存在元素  $T \in O(n)$ , 使得

$$TAT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 \\ -a_1 & 0 \\ & \ddots \\ & & 0 & a_m \\ & & -a_m & 0 \end{bmatrix},$$

其中  $a_1, a_2, \dots, a_m \geq 0$ . 通过简单计算得到

$$T(\exp(\pi A))T^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \pi a_1 & \sin \pi a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ -\sin \pi a_1 & \cos \pi a_1 & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & \cos \pi a_2 & \sin \pi a_2 & \cdots \\ 0 & 0 & -\sin \pi a_2 & \cos \pi a_2 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix},$$

因此,  $\exp(\pi A) = -I$  的充要条件是:  $a_1, a_2, \dots, a_m$  全是奇数.

容易看出, 内积  $\langle A, A \rangle = 2(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_m^2)$ . 因此, 从  $I$  到  $-I$  的测地线  $\gamma(t) = \exp(\pi t A)$  是极小测地线的充要条件是:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = 1.$$

若  $\gamma$  是极小测地线, 则

$$A^2 = T^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ -1 & 0 & & \\ & & 0 & 1 & \\ & & -1 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix}^2 T = -I,$$

所以  $A$  是一个复结构.

反之, 命  $J$  是任何一个复结构. 由于  $J$  是正交变换, 我们有

$$JJ^* = I,$$

这里  $J^*$  表示  $J$  的转置. 再结合恒等式  $JJ = -I$ , 这就得到

$$J^* = -J,$$

所以  $J$  是斜对称的, 从而存在  $a_1, a_2, \dots, a_m \geq 0$  和某个  $T$ , 使得

$$TJT^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & & \\ -a_1 & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \ddots \end{bmatrix}.$$

由于恒等式  $J^2 = -I$  蕴涵  $a_1 = \dots = a_m = 1$ , 所以有

$$\exp(\pi J) = -I.$$

证毕.

**引理 24.2**  $O(2m)$  中从  $I$  到  $-I$  的任何非极小测地线的指数都大于或等于  $2m - 2$ .

**证** 与 23.2 的证明相仿. 假设: 这条测地线具有形式  $t \rightarrow \exp(\pi t A)$ , 其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_1 & & \\ -a_1 & 0 & & \\ & & 0 & a_2 & \\ & & -a_2 & 0 & \\ & & & & \ddots \end{bmatrix},$$

而  $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_m > 0$  全都是奇数. 计算表明, 线性变换

$$K_A = -\frac{1}{4} (Ad A)^2$$

的非零特征值<sup>1)</sup>如下:

1) 这里的“特征值”原文为“特征向量”. ——译注.

(1) 对于每一对  $(i, j)$ ,  $i < j$ , 是  $(a_i + a_j)^2/4$ .

(2) 对于每一对  $(i, j)$ ,  $i < j$ ,  $a_i \neq a_j$ , 是  $(a_i - a_j)^2/4$ .

这些特征值中每一个都应计算两次,这就得到

$$\lambda = \sum_{i < j} (a_i + a_j - 2) + \sum_{a_i > a_j} (a_i - a_j - 2).$$

对于极小测地线我们有  $a_1 = a_2 = \dots = a_m = 1$ , 所以不出所料,  $\lambda = 0$ . 对于非极小测地线我们有  $a_1 \geq 3$ , 所以

$$\lambda \geq \sum_2^m (3 + 1 - 2) + 0 = 2m - 2.$$

证毕.

现在让我们应用定理 22.1. 由于  $\Omega_1(n)$  是流形,从上面那两个引理得到下面的定理.

**定理 24.3** (Bott) 包含映像  $\Omega_1(n) \rightarrow \Omega O(n)$  导出维数小于或等于  $(n - 4)$  的各同伦群的同构映像. 因此, 当  $i \leq n - 4$  时,

$$\pi_i \Omega_1(n) \cong \pi_{i+1} O(n).$$

现在我们来重复上述步骤,研究  $\Omega_1(n)$  中从  $J$  到  $-J$  的测地线组成的空间,等等. 假设:  $n$  被 2 的高次幂除尽.

命  $J_1, \dots, J_{k-1}$  是  $R^n$  上固定的复结构,彼此反交换<sup>1)</sup>,即是当  $r \neq s$  时,

$$J_r J_s + J_s J_r = 0.$$

假设至少存在另外一个复结构  $J$ , 和  $J_1, \dots, J_{k-1}$  反交换.

**定义** 命  $\Omega_k(n)$  表示  $R^n$  上与固定复结构  $J_1, \dots, J_{k-1}$  反交换的所有复结构  $J$  的集合.

于是,我们有

$$\Omega_k(n) \subset \Omega_{k-1}(n) \subset \dots \subset \Omega_1(n) \subset O(n).$$

显然,每个  $\Omega_k(n)$  都是紧致集. 为了使定义完备起见,自然要定义  $\Omega_0(n)$  就是  $O(n)$ .

1) 这些结构使  $R^n$  成为某个适当的 Clifford 代数上的模, 不过, 以下的叙述中 Clifford 代数将隐而不提. ——原注

**引理 24.4** 每个  $\Omega_k(n)$  都是  $O(n)$  的整体测地<sup>1)</sup>光滑子流形。 $\Omega_l(n)$  中从  $J_1$  到  $-J_1$  的极小测地线组成的空间同胚于  $\Omega_{l+1}(n)$ ，只要  $0 \leq l < k$ 。

从而  $\Omega_k(n)$  的每个连通区都是对称空间，因为  $O(n)$  在  $\Omega_k(n)$  的一点处的同尺反射映像自动地把  $\Omega_k(n)$  映入自身。

**24.4 的证明**  $O(n)$  中在么元附近的任何一点可以唯一表为  $\exp A$  的形状，这里  $A$  是“小的”斜对称矩阵，因而  $O(n)$  中在复结构  $J$  附近的任何一点可以唯一表为  $J \exp A$ ，这里  $A$  仍然是小的斜对称矩阵。

**断言 1**  $J \exp A$  是复结构的充要条件是： $A$  和  $J$  反交换。

**证** 若  $A$  和  $J$  反交换，则  $J^{-1}AJ = -A$ ，所以

$$I = \exp(J^{-1}AJ) \exp A = J^{-1}(\exp A) J \exp A.$$

因此， $(J \exp A)^2 = -I$ 。反之，若  $(J \exp A)^2 = -I$ ，则上面的计算表明

$$\exp(J^{-1}AJ) \exp A = I.$$

由于  $A$  是小矩阵，所以这就蕴涵

$$J^{-1}AJ = -A.$$

从而  $A$  和  $J$  反交换。

**断言 2**  $J \exp A$  和复结构  $J_1, \dots, J_{k-1}$  反交换的充要条件是： $A$  和  $J_1, \dots, J_{k-1}$  交换。

证明是类似的，而且直截了当。

注意，断言 1 和 2 都是对  $A$  提出的线性条件，所以  $J$  在  $\Omega_k(n)$  中的邻域就由所有的点  $J \exp A$  组成，这里  $A$  通过 Lie 代数  $\mathfrak{g}$  的某个线性子空间中的所有小矩阵。这显然蕴涵  $\Omega_k(n)$  是  $O(n)$  的整体测地子流形。

现在选取一个特殊的点  $J_k \in \Omega_k(n)$ ，并假设存在复结构  $J$ ，与  $J_1, \dots, J_k$  反交换。命  $J = J_k A$ ，容易看出， $A$  也是和  $J_k$  反交换的复结构。可是， $A$  和  $J_1, \dots, J_{k-1}$  交换，所以公式

1) Riemann 流形的子流形称为整体测地子流形，如果该子流形的每条测地线也是大流形上的测地线。——原注

$$t \rightarrow J_k \exp(\pi t A)$$

定义  $\Omega_k(n)$  中一条从  $J_k$  到  $-J_k$  的测地线。由于这条测地线是  $\mathbf{O}(n)$  中的极小测地线，所以它肯定是  $\Omega_k(n)$  中的极小测地线。

反之，命  $r$  是  $\Omega_k(n)$  中从  $J_k$  到  $-J_k$  的任何极小测地线，

$$r(t) = J_k \exp(\pi t A),$$

从 24.1 可见， $A$  是一个复结构；从断言 1 和 2 可见， $A$  和  $J_1, \dots, J_{k-1}$  交换，和  $J_k$  反交换。容易看出， $J_k A$  属于  $\Omega_{k+1}(n)$ 。24.4 证毕。

**注** 与已知测地线  $r$  相应的点  $J_k A \in \Omega_{k+1}(n)$  有一个非常简单的解释：它是这条测地线的中点  $r\left(\frac{1}{2}\right)$ 。

为了过渡到一种稳定的情况，注意  $\Omega_k(n)$  可以嵌入  $\Omega_k(n+n')$  如下。选取  $\mathbf{R}^{n'}$  上固定的反交换复结构  $J'_1, \dots, J'_k$ 。于是，每个  $J \in \Omega_k(n)$  都确定  $\mathbf{R}^n \oplus \mathbf{R}^{n'}$  上的一个复结构  $J \oplus J'_k$ ，与  $J_\alpha \oplus J'_\alpha$  反交换， $\alpha = 1, \dots, k-1$ 。

**定义** 命  $\Omega_k$  表示空间  $\Omega_k(n)$  当  $n \rightarrow \infty$  时的直接极限，具有直接极限拓扑结构（即是精细拓扑结构）。空间  $\mathbf{O} = \Omega_0$  称为无限正交群。

不难看出，包含映像  $\Omega_{k+1}(n) \rightarrow \Omega \Omega_k(n)$  在极限空间中产生包含映像  $\Omega_{k+1} \rightarrow \Omega \Omega_k$ 。

**定理 24.5** 对于每个  $k \geq 0$ ，这个极限映像  $\Omega_{k+1} \rightarrow \Omega \Omega_k$  是一个同伦等价，所以我们有同构关系

$$\pi_h \mathbf{O} \cong \pi_{h-1} \Omega_1 \cong \pi_{h-2} \Omega_2 \cong \cdots \cong \pi_1 \Omega_{h-1}.$$

证明稍后给出。

下面我们来逐一说明流形  $\Omega_k(n)$ ， $k = 0, 1, 2, \dots, 8$ 。

$\Omega_0(n)$  是正交群。

$\Omega_1(n)$  是  $\mathbf{R}^n$  上所有复结构的集合。

对于固定的复结构  $J_1$ ，我们可以把  $\mathbf{R}^n$  看成是复数域上的向量空间  $\mathbf{C}^{n/2}$ 。

$\Omega_1(n)$  可以视为复向量空间  $\mathbf{C}^{n/2}$  上的“四元数结构”的集

合。对于固定的  $J_2 \in \Omega_2(n)$ , 我们可以把  $\mathbf{C}^{n/2}$  看成是四元数域  $H$  上的向量空间  $H^{n/4}$ 。命  $Sp(n/4)$  是把这个向量空间映成自身的同尺映像组成的群。于是  $\Omega_2(n)$  可以和商空间  $U(n/2)/Sp(n/4)$  等同起来。

在进一步讨论之前, 为方便起见令  $n = 16r$ .

**引理 24.6-(3)** 空间  $\Omega_3(16r)$  可以和  $H^{4r}$  的所有四元数子空间组成的 Grassmann 四元数流形等同起来。

**证** 对于任何复结构  $J_3 \in \Omega_3(16r)$ , 我们可以确定一个分解式, 使  $H^{4r} = R^{16r}$  分解为两个彼此正交的子空间  $V_1$  和  $V_2$  如下。注意,  $J_1 J_2 J_3$  是正交变换, 它的平方

$$J_1 J_2 J_3 J_1 J_2 J_3 = +I,$$

所以  $J_1 J_2 J_3$  的特征值是  $\pm 1$ 。命  $V_1 \subset R^{16r}$  是使得  $J_1 J_2 J_3 = +I$  的子空间, 而  $V_2$  就是使得  $J_1 J_2 J_3 = -I$  的那个正交子空间。于是, 显然有  $R^{16r} = V_1 \oplus V_2$ 。由于  $J_1 J_2 J_3$  与  $J_1$  和  $J_2$  都可交换, 所以显然可见,  $V_1$  和  $V_2$  在  $J_1$  和  $J_2$  的作用下是封闭的。

反之, 如果我们有分解式  $H^{4r} = V_1 \oplus V_2$ ,<sup>1)</sup> 这里  $V_1, V_2$  是彼此正交的四元数子空间, 那么恒等式

$$\begin{cases} J_3 | V_1 = -J_1 J_2 | V_1, \\ J_3 | V_2 = J_1 J_2 | V_2 \end{cases}$$

将定义一个  $J_3 \in \Omega_3(16r)$ 。引理 24.6-(3) 证毕。

空间  $\Omega_3(16r)$  不好处理, 因为它的连通区的维数各不相同。比较方便的是, 只考虑具有最大维数的那个连通区, 即是  $H^{4r}$  的  $2r$  维四元数子空间组成的空间。以下, 我们将假设所选择的  $J_3$  使得  $\dim_H V_1 = \dim_H V_2 = 2r$ 。

**引理 24.6-(4)** 空间  $\Omega_4(16r)$  可以和从  $V_1$  到  $V_2$  的所有四元数同尺映像的集合等同起来, 所以  $\Omega_4(16r)$  微分同胚于辛群  $Sp(2r)$ 。

**证** 对于  $J_4 \in \Omega_4(16r)$ , 注意, 乘积  $J_3 J_4$  和  $J_1 J_2 J_3$  反交换,

1) 这里的  $H^{4r}$  原文是  $H^{4k}$ 。——译注

所以  $J_3J_4$  把  $V_1$  映入  $V_2$  (也把  $V_2$  映入  $V_1$ ). 由于  $J_3J_4$  与  $J_1$  及  $J_2$  均可交换, 我们看出

$$J_3J_4|V_1: V_1 \rightarrow V_2$$

是四元数同构映像. 反之, 对于任何这样的同构映像  $T: V_1 \rightarrow V_2$ , 容易看出,  $J_4$  可以由下面的恒等式唯一确定

$$\begin{cases} J_4|V_1 = J_3^{-1}T, \\ J_4|V_2 = -T^{-1}J_3. \end{cases}$$

这就证明了 24.6-(4).

**引理 24.6-(5)** 空间  $\Omega_5(16r)$  可以和满足下列条件的所有向量空间  $W \subset V_1$  的集合等同起来:

- (1)  $W$  在  $J_1$  的作用下是封闭的(即  $W$  是复向量空间),
- (2)  $V_1$  分解为正交和  $W \oplus J_2W$ .

**证** 对于  $J_5 \in \Omega_5(16r)$ , 注意, 变换  $J_1J_4J_5$  和  $J_1J_2J_3$  可交换, 并且它的平方是  $+I$ , 所以  $J_1J_4J_5$  把  $V_1$  映入自身, 并确定一个分解式, 把  $V_1$  分解为两个彼此正交的子空间. 命  $W \subset V_1$  是使得  $J_1J_4J_5$  在其上等于  $+I$  的子空间. 由于  $J_2$  与  $J_1J_4J_5$  反交换, 可见  $J_2W \subset V_1$  正好就是使得  $J_1J_4J_5$  等于  $-I$  的那个正交子空间. 显然,  $J_1W = W$ .

反之, 给了子空间  $W$ , 不难证明, 相应的  $J_5$  是唯一确定的.

**注** 若  $U(2r) \subset Sp(2r)$  表示  $V_1$  的四元数自同构映像中使  $W$  保持不动的映像组成的群, 则商空间  $Sp(2r)/U(2r)$  可以和  $\Omega_5(16r)$  等同起来.

**引理 24.6-(6)** 命  $X \subset W$  是实子空间, 使得  $W$  可以分解为正交和  $X \oplus J_1X$ . 于是, 空间  $\Omega_6(16r)$  可以和所有这样的实子空间  $X$  的集合等同起来.

**证** 对于  $J_6 \in \Omega_6(16r)$ , 注意, 变换  $J_2J_4J_6$  同时和  $J_1J_2J_3$  及  $J_1J_4J_5$  可交换, 所以  $J_2J_4J_6$  把  $W$  映入自身. 由于  $(J_2J_4J_6)^2 = I$ , 可见  $J_2J_4J_6$  确定一个分解式, 把  $W$  分解成两个彼此正交的子空间, 命  $X \subset W$  是使得  $J_2J_4J_6$  在其上等于  $+I$  的子空间. 于是  $J_1X$  就是使得  $J_2J_4J_6$  在其上等于  $-I$  的那个正交子空间.

反之,给了  $X \subset W$ , 不难看出,相应的  $J_6$  是唯一确定的.

**注** 考虑  $W$  的复自同构,使  $X$  保持不动,所有这些自同构组成的群记为  $\mathbf{O}(2r) \subset U(2r)$ . 于是,商空间  $U(2r)/\mathbf{O}(2r)$  可以和  $\Omega_6(16r)$  等同起来.

**引理 24.6-(7)** 空间  $\Omega_7(16r)$  可以和  $X \cong \mathbf{R}^{2r}$  的所有实子空间组成的实 Grassmann 流形等同起来.

**证**  $J_7 \in \Omega_7(16r)$  是和  $J_1, \dots, J_6$  反交换的,注意,  $J_1J_6J_7$  和  $J_1J_2J_3$ ,  $J_1J_4J_5$  以及  $J_2J_4J_6$  都是交换的,并且它的平方等于  $+I$ ,所以  $J_1J_6J_7$  确定一个分解式,把  $X$  分解为两个彼此正交的子空间:  $X_1$  (在其上  $J_1J_6J_7$  等于  $+I$ ) 和  $X_2$  (在其上  $J_1J_6J_7$  等于  $-I$ ). 反之,给了  $X_1 \subset X$ , 可以证明,相应的  $J_7$  是唯一确定的.

这个空间  $\Omega_7(16r)$ , 就象  $\Omega_3(16r)$  一样, 其连通区的维数各不相同, 我们仍然只考虑具有最大维数的那个连通区, 即是假定

$$\dim X_1 = \dim X_2 = r.$$

于是,我们得到

**断言**  $\Omega_7(16r)$  的最大连通区微分同胚于  $\mathbf{R}^{2r}$  的  $r$  维子空间组成的 Grassmann 流形.

**引理 24.6-(8)** 空间  $\Omega_8(16r)$  可以和从  $X_1$  到  $X_2$  的所有实同尺映像的集合等同起来.

**证** 如果  $J_8 \in \Omega_8(16r)$ , 则正交变换  $J_7J_8$  和  $J_1J_2J_3$ ,  $J_1J_4J_5$  以及  $J_2J_4J_6$  均可交换,但和  $J_1J_6J_7$  反交换, 所以  $J_7J_8$  把  $X_1$  同构地映成  $X_2$ . 显然,这个同构映像也使  $J_8$  唯一确定.

于是,我们看出,  $\Omega_8(16r)$  微分同胚于正交群  $\mathbf{O}(r)$ <sup>1)</sup>.

让我们考虑这个微分同胚映像  $\Omega_8(16r) \rightarrow \mathbf{O}(r)$  当  $r \rightarrow \infty$  时的极限情形, 这就推出  $\Omega_8$  同胚于无限正交群  $\mathbf{O}$ . 把这个事实和定理 24.5 结合起来, 我们得到下面的定理.

1) 当  $k > 8$  时,可以证明:  $\Omega_k(16r)$  微分同胚于  $\Omega_{k-8}(r)$ . 事实上,  $\mathbf{R}^{16r}$  上任何附加的复结构  $J_9, J_{10}, \dots, J_k$  都产生  $X_1$  上反交换的复结构  $J_8J_9, J_8J_{10}, J_8J_{11}, \dots, J_8J_k$ , 因而产生  $\Omega_{k-8}(r)$  的一个元素. 不过,就我们的目的而言,到  $k = 8$  停下来也就可以了. ——原注

**定理 24.7** (Bott) 无限正交群  $O$  和它自身的第 8 个闭路空间具有同样的同伦型。所以同伦群  $\pi_i O$  同构于  $\pi_{i+8} O$ ,  $i \geq 0$ .

如果  $Sp = Q$ , 表示无限辛群, 则上面的论证也表明:  $O$  具有 4 重闭路空间  $QQQQ Sp$  的同伦型, 而  $Sp$  具有 4 重闭路空间  $QQQQO$  的同伦型。这些同伦群实际上可以列表如下。

$i \bmod 8$	$\pi_i O$	$\pi_i Sp$
0	$\mathbb{Z}_2$	0
1	$\mathbb{Z}_2$	0
2	0	0
3	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
4	0	$\mathbb{Z}_2$
5	0	$\mathbb{Z}_2$
6	0	0
7	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

请读者自行验证这些群无误。(注意,  $Sp(1)$  是 3 维球面,  $SO(3)$  是 3 维投影空间。)

本节剩下的部分用来证明定理 24.5。首先必须证明一个代数引理。

考虑欧氏向量空间  $V$ , 具有反交换复结构  $J_1, \dots, J_k$ .

**定义**  $V$  称为  $(J_1, \dots, J_k)$  极小空间, 如果在  $J_1, \dots, J_k$  的作用下, 任何非零真子空间都不是封闭的。两个这样的极小向量空间称为同构的, 如果它们之间存在同尺映像, 与  $J_1, \dots, J_k$  的作用可交换。

**定理 24.8** (Bott, Shapiro) 如果  $k \not\equiv 3 \pmod{4}$ , 则任何两个  $(J_1, \dots, J_k)$  极小向量空间都是同构的。

24.8 的证明仿照 24.6 的证明进行。当  $k = 0, 1$  或  $2$  时, 极小空间不过就是实数域、复数域或四元数域上的一维向量空间。任何两个这样的空间显然是同构的。

当  $k = 3$  时, 极小空间仍然是四元数域上的一维向量空间。不过, 由于  $J_3$  可以等于  $+J_1 J_2$  或  $-J_1 J_2$ , 所以相应地也就有两种可

能性。这就给出两个不同构的极小空间，维数都等于 4，记作  $H$  和  $H'$ 。

当  $k = 4$  时，极小空间必定同构于  $H \oplus H'$ ，而  $J_3 J_4$  把  $H$  映入  $H'$ 。这时维数等于 8。

当  $k = 5, 6$  时，我们得到同样的极小向量空间  $H \oplus H'$ 。复结构  $J_5, J_6$  不过确定所要的复子空间或实子空间。当  $k = 7$  时，我们仍然得到同样的空间，但是有两种可能性，相应于  $J_7$  可以等于  $+J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 J_6$  或等于  $-J_1 J_2 J_3 J_4 J_5 J_6$ 。于是，这种情形有两个不同构的极小向量空间，记作  $L$  和  $L'$ 。

当  $k = 8$  时，极小向量空间必定同构于  $L \oplus L'$ ，而  $J_7 J_8$  把  $L$  映成  $L'$ ，这时维数等于 16。

当  $k > 8$  时，可以证明，情况多少是周期性地重复出现的。不过，就我们的目的而言，有了  $k \leq 8$  的各个情形也就够了。

命  $m_k$  表示  $(J_1, \dots, J_k)$  极小向量空间的维数。从上面的讨论看出：

$$\begin{aligned} m_0 &= 1, m_1 = 2, m_2 = m_3 = 4, \\ m_4 &= m_5 = m_6 = m_7 = 8, m_8 = 16. \end{aligned}$$

当  $k > 8$  时，可以证明， $m_k = 16m_{k-8}$ 。

**注**  $m_k$  这些数与构造球面上的线性无关向量场的问题密切相关。例如，假设  $J_1, \dots, J_k$  是  $rm_k$  维向量空间  $V$  上的反交换复结构，这里  $r$  可以是任何正整数。于是，对于每个单位向量  $u \in V$  而言， $J_1 u, J_2 u, \dots, J_k u$  这  $k$  个向量彼此垂直且都垂直于  $u$ ，所以我们得到  $(rm_k - 1)$  维球面上的  $k$  个线性无关向量场。例如，在  $(4r - 1)$  维球面上我们得到 3 个向量场， $(8r - 1)$  维球面上得到 7 个向量场， $(16r - 1)$  维球面上得到 8 个向量场，等等。这些结果属于 Hurwitz 和 Radon。（见 B. Echmann, Gruppen-theoretischer Beweis des Satzes von Hurwitz-Radon …, Commentarii Math. Helv., Vol. 15 (1943), 358—366.）J. F. Adams 最近证明：这些估值是最好的。

**当  $k \equiv 2 \pmod{4}$  时 24.5 的证明** 我们要研究  $\Omega_k(n)$  中

从  $J$  到  $-J$  的非极小测地线。提醒一下,  $\Omega_k(n)$  在  $J$  处的切空间由所有这样的矩阵  $JA$  组成:

- (1)  $A$  是斜对称的,
- (2)  $A$  和  $J$  反交换,
- (3)  $A$  和  $J_1, \dots, J_{k-1}$  交换。

命  $T$  表示所有这样的矩阵  $A$  组成的向量空间。 $A \in T$  相应于从  $J$  到  $-J$  的测地线  $t \rightarrow J \exp(\pi t A)$  的充要条件是: 它的特征值全都是  $i$  的奇倍数。

每个这样的  $A \in T$  确定一个自伴变换  $K_A: T \rightarrow T$ 。由于  $\Omega_k(n)$  是  $O(n)$  的整体测地子流形, 所以我们可以照以前那样用公式

$$K_A B = -\frac{1}{4} [A, [A, B]] = (-A^2 B + 2ABA - BA^2)/4$$

来计算  $K_A$ 。我们必须构造  $K_A$  的某些非零特征向量<sup>1)</sup>, 以便得到相应测地线

$$t \rightarrow J \exp(\pi t A)$$

的指数的下界。

把向量空间  $R^n$  分解为直接和  $M_1 \oplus M_2 \oplus \dots \oplus M_s$ , 其中诸  $M_h$  是彼此正交的子空间, 并且在  $J_1, \dots, J_{k-1}, J$  以及  $A$  的作用下是封闭的极小空间。于是,  $A$  在  $M_h$  上的特征值除了符号不计外全都相等<sup>2)</sup>, 否则  $M_h$  就可以分解为  $A$  的特征空间的和, 因而不不会是极小空间。命  $\pm ia_h$  是  $A|_{M_h}$  的两个特征值, 这里  $a_1, \dots, a_s$  都是正的奇数。

注意,  $J' = a_h^{-1} JA|_{M_h}$  是  $M_h$  上的复结构, 与  $J_1, \dots, J_{k-1}$  以及  $J$  反交换, 所以  $M_h$  是  $(J_1, \dots, J_{k-1}, J, J')$  极小空间, 因而  $M_h$  的维数是  $m_{k+1}$ 。由于  $k+1 \not\equiv 3 \pmod{4}$ , 我们看出,  $M_1, M_2, \dots, M_s$  彼此同构。

1) 这里的“特征向量”原文作“特征值”。——译注

2) 我们处理的是实的斜对称变换的复特征值, 所以这些特征值都是纯虚数, 两两共轭。——原注

对于每一对  $(h, i)$ ,  $h \neq i$ , 我们可构造线性变换  $K_A: T \rightarrow T$  的一个特征向量  $B: \mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$  如下. 命  $B|_{M_l} = 0$ ,  $l \neq h, i$ ;  $B|_{M_h}$  是把  $M_h$  映入  $M_i$  的同尺映像, 满足条件

$$B J_\alpha = J_\alpha B, \alpha = 1, \dots, k-1,$$

$$B J = -J B, B J' = +J' B.$$

换言之,  $B|_{M_h}$  是从  $M_h$  到  $\bar{M}_i$  的同构映像, 这里  $M_i$  上的一小横表示我们改变了  $J$  在  $M_i$  上的符号, 由于 24.8, 这样一个同构映像是存在的. 最后, 命  $B|_{M_i}$  是  $B|_{M_h}$  的负的相伴变换.

现在来证明  $B$  属于向量空间  $T$ . 由于

$$\langle Bv, w \rangle = \langle v, -Bw \rangle, v \in M_h, w \in M_i,$$

显然可见,  $B$  是斜对称的. 此外,  $B|_{M_h}$  显然和  $J_1, \dots, J_{k-1}$  交换而和  $J$  反交换. 容易看出,  $B|_{M_i}$  这个负的相伴变换也和  $J_1, \dots, J_{k-1}$  交换而和  $J$  反交换. 因此,  $B \in T$ .

我们说,  $B$  是  $K_A$  的一个特征向量, 相应的特征值是  $(a_h + a_i)^2 / 4$ .

4. 例如, 若  $v \in M_h$ , 则

$$(K_A B)v = \frac{1}{4} (-A^2 B + 2ABA - BA^2)v$$

$$= \frac{1}{4} (a_i^2 Bv + 2a_i B a_h v + B a_h^2 v)$$

$$= \frac{1}{4} (a_i + a_h)^2 Bv.$$

类似的计算也适用于  $v \in M_i$ .

现在让我们进行计算. 极小空间  $M_h \subset \mathbf{R}^n$  的个数是  $s = n/m_{k+1}$ , 因为  $a_h$  这些整数中至少有一个要大于或等于 3, 否则我们就会有一条极小测地线. 这就证明了下面的断言[总是假定  $k \equiv 2 \pmod{4}$ ].

断言  $K_A$  至少有  $s-1$  个特征值大于或等于  $(3+1)^2/4 = 4$ . 整数  $s = n/m_{k+1}$  随  $n$  趋向无穷.

现在考虑测地线  $t \rightarrow J \exp(\pi t A)$ . 据 20.5,  $K_A$  的每个特征值  $\epsilon^2$  都产生沿这条测地线的一系列共轭点, 相应于  $t = \epsilon^{-1}, 2\epsilon^{-1},$

$3e^{-1}, \dots$ , 所以, 若  $e^2 \geq 4$ , 则其中至少有一个内点。应用指数定理, 这就证明了下面的断言。

**断言**  $\Omega_k(n)$  中从  $J$  到  $-J$  的非极小测地线的指数大于或等于  $n/m_{k+1} - 1$ .

由此可见, 包含映像

$$\Omega_{k+1}(n) \rightarrow \Omega\Omega_k(n)$$

导出维数小于或等于  $n/m_{k+1} - 3$  的各同伦群的同构映像。由于  $n/m_{k+1} - 3$  随  $n$  趋向无穷, 所以当  $n \rightarrow \infty$  时取直接极限可见, 包含映像  $i: \Omega_{k+1} \rightarrow \Omega\Omega_k$  导出所有维数的各同伦群的同构映像。但是, 可以证明,  $\Omega_{k+1}$  和  $\Omega\Omega_k$  都具有 CW 复形的同伦型, 所以由 Whitehead 定理可见,  $i$  是一个同伦等价。这就完成了 24.5 当  $k \equiv 2(\text{mod } 4)$  时的证明。

**当  $k \equiv 2(\text{mod } 4)$  时 24.5 的证明** 这种情形的难点是由于  $\Omega_k(n)$  的基本群是无限循环群, 所以  $\Omega\Omega_k(n)$  具有无限多个连通区, 而近似的子空间  $\Omega_{k+1}(n)$  却只有有限多个连通区。

为了说明基本群  $\pi_1\Omega_k(n)$ , 我们构造一个映像

$$f: \Omega_k(n) \rightarrow S^1 \subset \mathbf{C}$$

如下。命  $J_1, \dots, J_{k-1}$  是  $\mathbf{R}^n$  上固定的反交换复结构; 定义

$$iv = J_1 J_2 \cdots J_{k-1} v, \quad v \in \mathbf{R}^n, \quad i = \sqrt{-1} \in \mathbf{C},$$

这就使  $\mathbf{R}^n$  变成  $n/2$  维复向量空间。条件  $k \equiv 2(\text{mod } 4)$  保证了  $i^2 = -1$ , 并且  $J_1, J_2, \dots, J_{k-1}$  和  $i$  反交换。

选取基点  $J \in \Omega_k(n)$ . 对于任何  $J' \in \Omega_k(n)$ , 注意, 复合变换  $J^{-1}J'$  和  $i$  可交换, 所以  $J^{-1}J'$  是一个复线性酉变换, 并且有一个完全确定的复行列式, 记为  $f(J')$ .

现在考虑  $\Omega_k(n)$  中从  $J$  到  $-J$  的测地线

$$t \rightarrow J \exp(\pi t A).$$

由于  $A$  和  $i = J_1 J_2 \cdots J_{k-1}$  (见 24.4 证明中的断言 2), 我们可以把  $A$  也看成是复线性变换。事实上,  $A$  是斜 Hermite 变换, 所以  $A$  的迹数是纯虚数。既然

$$f(J \exp(\pi t A)) = \exp(\pi t A) \text{ 的行列式} = e^{\pi t \text{trace} A},$$

所以  $f$  把这条测地线映成  $S^1$  上的一条闭路，由  $A$  的迹数完全确定。由此可见，这个迹数对这条测地线在道路空间  $\Omega(\Omega_k(n); J, -J)$  中的同伦作用是不变的。

这条测地线的指数  $\lambda$  可以估计如下。如前，把  $\mathbb{R}^n$  分解为正交和  $M_1 \oplus \cdots \oplus M_r$ ，这里每个  $M_h$  在  $J_1, \dots, J_{k-1}, J$  以及  $A$  的作用下是封闭的，并且是极小空间。因此，对于每个  $h$ ，复线性变换  $A|_{M_h}$  只能有一个特征值，比如是  $ia_h$ ，否则  $M_h$  就可以分解为特征空间。于是  $A|_{M_h} = a_h J_1 J_2 \cdots J_{k-1} |_{M_h}$ 。由于  $M_h$  在  $J_1, \dots, J_{k-1}$  以及  $J$  的作用下是极小空间，所以它的复维数是  $m_k/2$ 。因此， $\text{trace} A = i(a_1 + \cdots + a_r)m_k/2$ 。

于是，对于每一对  $(h, j)$ ， $h \neq j$ ，和前面大致一样，可以构造线性变换

$$B \rightarrow K_A B = (-A^2 B + 2ABA - BA^2)/4$$

的一个特征向量  $B$ 。由于  $M_h$  和  $M_j$  是  $(J_1, \dots, J_{k-1}, J)$  极小空间，所以从 24.8 推出，存在同尺映像

$$B|_{M_h}: M_h \rightarrow M_j,$$

与  $J_1, \dots, J_{k-1}$  交换而和  $J$  反交换。命  $B|_{M_j}$  是  $B|_{M_h}$  的负的相伴变换。当  $l \neq h, j$  时，则命  $B|_{M_l} = 0$ 。简单计算表明

$$K_A B = (a_h - a_j)^2 B/4.$$

于是，对每一对  $(a_h > a_j)$ ，我们得到  $K_A$  的特征值  $(a_h - a_j)^2/4$ 。由于每个这样的特征值都使指数  $\lambda$  取得  $[(a_h - a_j)/2] - 1$  的部分值，所以我们得到不等式

$$2\lambda \geq \sum_{a_h > a_j} (a_h - a_j - 2).$$

现在让我们只考虑  $\Omega\Omega_k(n)$  的某个固定的连通区，即是只考虑这样的矩阵  $A$ ，使得  $\text{trace} A = icm_k/2$ ，这里  $c$  是某个固定的整数。

于是，整数  $a_1, \dots, a_r$  满足

- (1)  $a_1 \equiv a_2 \equiv \cdots \equiv a_r \equiv 1 \pmod{2}$  [因为  $\exp(\pi A) = -I$ ]

$$(2) \quad a_1 + \cdots + a_r = c,$$

$$(3) \quad \max_h |a_h| \geq 3 \text{ (因为是非极小测地线).}$$

例如, 假设某个  $a_h = -3$ . 命  $p$  是那些正的  $a_h$  之和,  $-q$  是那些负的  $a_h$  之和. 于是

$$p - q = c, \quad p + q \geq r,$$

因而  $2p \geq r + c$ . 既然

$$2\lambda \geq \sum_{a_h > a_i} (a_h - a_i - 2) > \sum_{a_h > 0} (a_h - (-3) - 3) = p,$$

所以  $4\lambda \geq 2p \geq r + c$ , 这里  $r = n/m_k$  随  $n$  趋向无穷. 可见,  $\Omega\Omega_k(n)$  的这个连通区, 当  $n \rightarrow \infty$  时, 随着维数的增高, 越来越被  $\Omega_{k+1}(n)$  的相应连通区所逼近. 于是, 过渡到直接极限, 我们在每个连通区上得到一个同伦等价. 24.5 证毕.

## 附录 单调并的同伦型

这个附录的目的是要对定理 17.3 (Morse 理论的基本定理) 的证明中的最后一步给出另外一种证法。已知：道路空间  $\Omega = \Omega(M; p, q)$  的子集  $\Omega^{a_0} \subset \Omega^{a_1} \subset \Omega^{a_2} \subset \dots$ , 其中每个  $\Omega^{a_i}$  都具有 CW 复形的同伦型，我们希望证明：并集  $\Omega$  也具有 CW 复形的同伦型。

把问题一般化，考虑拓扑空间  $X$  和一序列的子空间  $X_0 \subset X_1 \subset X_2 \subset \dots$ 。我们问： $X$  的同伦型在多大程度上是由诸  $X_i$  的同伦型确定的？

为方便起见，让我们考虑无限并

$$X_\Sigma = X_0 \times [0, 1] \cup X_1 \times [1, 2] \cup X_2 \times [2, 3] \cup \dots,$$

这个集合作为  $X \times \mathbf{R}$  的子集而成为拓扑空间。

**定义** 我们说， $X$  是序列  $\{X_i\}$  的同伦直接极限，如果由  $p(x, \tau) = x$  定义的投影映像  $p: X_\Sigma \rightarrow X$  是一个同伦等价。

**例 1** 假设： $X$  的每个点都位于某个  $X_i$  的内部，并且  $X$  是仿紧空间。于是，利用单位分划可以构造一个映像

$$f: X \rightarrow \mathbf{R},$$

使得当  $x \in X_i$  时  $f(x) \geq i + 1$ ，而对所有的  $x$  有  $f(x) \geq 0$ 。于是，对应关系  $x \mapsto (x, f(x))$  把  $X$  同胚地映成  $X_\Sigma$  的一个子集，这个子集显然是一个形变收缩核。因此， $p$  是同伦等价，而  $X$  是同伦直接极限。

**例 2** 命  $X$  是 CW 复形，诸  $X_i$  是子复形，其并集为  $X$ 。由于  $p: X_\Sigma \rightarrow X$  导出各维数同伦群的同构，所以从 Whitehead 定理可见， $X$  是同伦直接极限。

**例 3** 单位区间  $[0, 1]$  不是闭子集序列  $\{[0] \cup [1/i, 1]\}$  的同伦直接极限。

这个附录的主要结果是下面的定理。

**定理 A** 假设:  $X$  是  $\{X_i\}$  的同伦直接极限,  $Y$  是  $\{Y_i\}$  的同伦直接极限。命  $f: X \rightarrow Y$  是一个映像, 对于每个  $i$ , 它是把  $X_i$  映入  $Y_i$  的同伦等价。于是,  $f$  本身是一个同伦等价。

有了定理 A 之后, 可以给出定理 17.3 的另一证明如下。提醒一下, 我们已经造出了同伦等价的交换图:

$$\begin{array}{ccccccc} Q^{a_0} & \subset & Q^{a_1} & \subset & Q^{a_2} & \subset & \cdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ K_0 & \subset & K_1 & \subset & K_2 & \subset & \cdots \end{array}$$

由于  $Q = \cup Q^{a_i}$  和  $K = \cup K_i$  都是同伦直接极限 (见前面的例 1 和例 2), 可见极限映像  $Q \rightarrow K$  也是同伦等价。

**定理 A 的证明** 定义  $f_\Sigma: X_\Sigma \rightarrow Y_\Sigma$  为  $f_\Sigma(x, t) = (f(x), t)$ 。显然只须证明  $f_\Sigma$  是同伦等价即可。

**情形 1** 假设  $X_i = Y_i$ , 并且 (限制  $f$  而得的) 每个映像  $f_i: X_i \rightarrow Y_i$  都同伦于恒同映像。我们必须证明:  $f_\Sigma$  是同伦等价。

**注** 在这些条件下, 自然会猜想  $f_\Sigma$  实际上一定会同伦于恒同映像, 但是可以给出反例。

现在来证明情形 1. 对于每个  $n$  命

$$h_u^n: X_n \rightarrow X_n$$

是单参数映像族,  $h_0^n = f_n$ ,  $h_1^n =$  恒同映像。定义同伦

$$h_u: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$$

如下(自不待言, 这时总是有  $0 \leq t \leq 1$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ )<sup>1)</sup>

$$h_u(x, n + t) = \begin{cases} (h_u^n(x), n + 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (h_{(3-4t)u}^n(x), n + 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq \frac{3}{4}, \\ (h_{(4t-3)u}^n(x), n + 1), & \frac{3}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

取  $u = 0$ , 得到映像  $h_0: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$ , 显然同伦于  $f_\Sigma$ 。另一方面, 映

1) 其中的  $h_{(4t-3)u}^n(x)$  原文作  $h_{(4-3t)u}^{n+1}(x)$ 。——译注

像  $h_1: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$  具有下述性质：

$$h_1(x, n + t) = (x, n + 2t), \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{2},$$

$$h_1(x, n + t) \in X_{n+1} \times [n + 1], \quad \frac{1}{2} \leq t \leq 1.$$

我们来证明：任何这样的映像都是同伦等价。事实上，可以定义一个同伦逆  $g: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$  为

$$g(x, n + t) = \begin{cases} (x, n + 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h_1\left(x, n + \frac{3}{2} - t\right), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

这是完全确定的，因为

$$h_1\left(x, n + \frac{1}{2}\right) = h_1(x, n + 1) = (x, n + 1).$$

现在来证明复合映像  $h_1 g$  同伦于  $X_\Sigma$  的恒同映像。注意，

$$h_1 g(x, n + t) = \begin{cases} (x, n + 4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ h_1(x, n + 2t), & \frac{1}{4} \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ h_1\left(x, n + \frac{3}{2} - t\right), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

定义同伦  $H_u: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$  如下。当

$$0 \leq u \leq \frac{1}{2}$$

时，命

$$H_u(x, n + t) = \begin{cases} h_1 g(x, n + t), & 0 \leq t \leq (1-u)/2 \text{ 及} \\ & \frac{1}{2} + u \leq t \leq 1, \\ h_1(x, n + 1 - u), & (1-u)/2 \leq t \leq \frac{1}{2} + u, \end{cases}$$

这是完全确定的，因为

$$h_1 g(x, n + (1 - u)/2) \\ = h_1 g\left(x, n + \frac{1}{2} + u\right) = h_1(x, n + 1 - u).$$

于是  $H_0 = h_1 g$ , 而  $H_{\frac{1}{2}}$  是

$$H_{\frac{1}{2}}(x, n + t) = \begin{cases} (x, n + 4t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{4}, \\ (x, n + 1), & \frac{1}{4} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

这个映像显然同伦于恒同映像。

这样一来,  $h_1 g$  同伦于恒同映像; 完全相仿的论证表明:  $g h_1$  也同伦于恒同映像。这就完成了情形 1 的证明。

**情形 2** 现在让  $X$  和  $Y$  是任意的空间。对于每个  $n$ , 命  $g_n: Y_n \rightarrow X_n$  是  $f_n$  的同伦逆。注意, 图表

$$\begin{array}{ccc} Y_n & \xrightarrow{g_n} & X_n \\ \downarrow j_n & & \downarrow i_n \\ Y_{n+1} & \xrightarrow{g_{n+1}} & X_{n+1} \end{array}$$

( $i_n, j_n$  表示包含映像)是同伦交换的。事实上,

$$i_n g_n \sim g_{n+1} f_{n+1} i_n g_n = g_{n+1} j_n f_n g_n \sim g_{n+1} j_n.$$

选取一个特殊的同伦  $h_n^n: Y_n \rightarrow X_{n+1}$ , 使得

$$h_0^n = i_n g_n, \quad h_1^n = g_{n+1} j_n;$$

定义  $G: Y_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$  为

$$G(y, n + t) = \begin{cases} (g_n(y), n + 2t), & 0 \leq t \leq \frac{1}{2}, \\ (h_{2t-1}^n(y), n + 1), & \frac{1}{2} \leq t \leq 1. \end{cases}$$

我们来证明: 复合映像  $Gf_\Sigma: X_\Sigma \rightarrow X_\Sigma$  是一个同伦等价。命  $X_\Sigma^n$  表示  $X_\Sigma$  的子集, 由所有满足  $\tau \leq n$  的配对  $(x, \tau)$  组成。(于是,  $X_\Sigma^n = X_0 \times [0, 1] \cup \cdots \cup X_{n-1} \times [n-1, n] \cup X_n \times [n]$ .) 复合映像  $Gf_\Sigma$  把  $X_\Sigma^n$  映入自身, 这个映像同伦于恒同映像。事实上,  $X_\Sigma^n$  包含  $X_n \times [n]$  作为形变收缩核, 映像  $Gf_\Sigma$  限制在  $X_n \times [n]$

上可以和  $g_n f_n$  等同起来, 所以同伦于恒同映像。因此, 我们可以把情形 1 应用于序列  $\{X_\Sigma^n\}$ , 断定  $Gf_\Sigma$  是同伦等价。

这就证明了  $f_\Sigma$  具有左同伦逆。相仿的论证表明:  $f_\Sigma G: Y_\Sigma \rightarrow Y_\Sigma$  也是同伦等价, 所以  $f_\Sigma$  也具有右同伦逆。这就证明了  $f_\Sigma$  是一个同伦等价(见引理 3.7 的证明中所附命题)。定理 A 证毕。

**推论** 假设  $X$  是  $\{X_i\}$  的同伦直接极限。如果每个  $X_i$  都具有 CW 复形的同伦型, 则  $X$  本身也具有 CW 复形的同伦型。

证明不难。

# 索引

(按汉语拼音排序, 数字表示页数)

## B

- 伴随作用 adjoint action 117  
闭路空间 loop space 108, 110  
变分 variation 64  
变分向量场 variation vector field 64, 70

## C

- 参数曲面 parametrized surface 47, 49  
参数曲线 parametrized curve 42  
测地完备流形 geodesically complete manifold 54, 59, 61  
测地线 geodesic 52, 53, 56, 61, 68, 86, 97, 102, 105  
测地线变分 variation through geodesics 76, 78  
尺度  $d$  metric  $d$  84  
尺度  $\rho$  metric  $\rho$  59, 84, 110  
尺度  $d^*$  metric  $d^*$  88  
重数 multiplicity 31, 33, 35, 37, 74, 79

## D

- 单参数微分同胚群 1-parameter group of diffeomorphisms 11  
单参数子群 1-parameter subgroup 105  
道路空间  $\Omega(M; p, q)$  path space  $\Omega(M; p, q)$  63, 66, 84, 90, 100  
第二变分公式 second variation formula 70  
第二基本形式 second fundamental form 32

第一变分公式 first variation formula 67

第一基本形式 first fundamental form 32

对称空间 symmetric space 102, 104  
对称联络 symmetric connection 46, 47

## F

- 仿射联络 affine connection 41  
非蜕化临界点 non-degenerate critical point 4, 6, 8, 15, 25, 37  
复结构 complex structure 124  
复投影空间 complex projective space 26

## G

- Grassmann 复流形 complex Grassmann manifold 119  
共轭点 conjugate points 74, 79, 99, 103  
共轭点的重数 multiplicity of conjugate points 74, 79, 103

## H

- Hesse 泛函 Hessian 4, 69  
猴鞍点 monkey saddle 9  
弧长 arc-length 52

## J

- Jacobi 场 Jacobi field 73, 76, 77  
极小空间 minimal space 133  
极小测地线 minimal geodesic 58, 73, 99, 110, 119

假球面 pseudo-sphere 96  
焦点 focal point 31, 32, 33, 35, 37  
截面曲率 sectional curvature 95,  
98, 107  
局部对称流形 locally symmetric  
manifold 103

## L

Lefschetz 定理 Lefschetz theorem 39  
Lie 代数的中心 center of a Lie algebra 107  
Lie 群 Lie group 104, 106  
联络 connection 41  
临界道路 critical path 65  
临界点 critical point 4, 13, 21, 29,  
32, 35, 68, 86, 112  
临界映像 critical map 92  
临界值 critical value 4  
零化数 nullity 5, 34, 35, 74, 81  
零化子空间 null-space 5, 74  
流形  $\Omega_i(n)$  manifold  $\Omega_i(n)$  124,  
127  
流形  $\Omega_k(n)$  manifold  $\Omega_k(n)$  127

## M

Morse 不等式 Morse inequalities 29, 30  
Morse 理论基本定理 fundamental theorem of Morse theory 90  
Morse 引理 lemma of Morse 6

## N

$n$  参数变分  $n$ -parameter variation 64  
能量 energy 65, 66, 70, 84

## P

平行向量场 parallel vector field 44, 102  
平移 parallel translation 45

## Q

切空间  $T\Omega_\omega$  tangent space  $T\Omega_\omega$  63  
球面  $S^n$  的道路空间 path space of  
the sphere  $S^n$  92  
屈折测地线组成的空间  $\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$   
space  $\Omega(t_0, t_1, \dots, t_k)$  of broken  
geodesics 85  
曲率张量 curvature tensor 48, 50,  
94, 100  
全道路空间  $\Omega^*$  full path space  $\Omega^*$  88, 90

## R

Ricci 张量 Ricci tensor 98, 100, 108  
Riemann 几何基本引理 fundamental theorem of Riemannian geometry 46  
Riemann 流形 Riemannian manifold 45, 50, 51, 88, 102

## S

速度向量 velocity vector 11  
速度向量场 velocity vector field 43

## T

特殊酉群  $SU(n)$  special unitary group  $SU(n)$  118, 119  
梯度 gradient 13  
同尺映像 isometry 102  
同伦直接极限 homotopy direct limit 140  
同纬映像定理 suspension theorem 111

## W

完备 Riemann 流形 complete Riemannian manifold 61, 66, 85, 90, 97, 102  
稳定同伦群 stable homotopy group 120

无限辛群  $S_p$ , infinite symplectic group

$S_p$  133

无限正交群  $O$ , infinite orthogonal

group  $O$  129, 133

## X

相容 compatibility of a connection  
with the Riemannian metric 45

协变导数 covariant derivative 41,  
43, 47

形变收缩核 deformation retract  
13, 18, 19, 86

## Y

酉群  $U(n)$ , unitary group  $U(n)$   
115, 121

右不变 Riemann 尺度 right invariant  
Riemannian metric 104, 106

沿  $\gamma$  的屈折 Jacobi 场组成的向量空间  
 $T\Omega_\gamma(t_0, \dots, t_k)$  vector space

$T\Omega_\gamma(t_0, \dots, t_k)$  of broken Jacobi  
fields along  $\gamma$  80, 81

沿曲面  $S$  的向量场 vector field along  
a surface  $S$  47

沿曲线  $c$  的向量场 vector field along

a curve  $c$  43

## Z

整体测地子流形 totally geodesic sub-  
manifold 128

整体性仿射联络 global affine connec-  
tion 41

正交群  $O(n)$ , orthogonal group  $O(n)$   
124, 133

指数 index 5, 6, 15, 21, 29, 37, 73, 79,  
81

指数对应点  $\exp(v)$  exponential  
 $\exp(v)$  54, 93

周期性定理 periodicity theorem  
121, 124, 133

主曲率 principal curvature 33

主曲率半径 principal radii of curva-  
ture 33

逐段光滑道路 piecewise smooth path  
63

左不变 Riemann 尺度 left invariant  
Riemannian metric 104, 106, 116

左不变向量场 left invariant vector  
field 106