第一篇　分析基础

1.1 收敛序列

（收敛序列的定义）

定义： 设$\{x_n\}$是实数序列，a是实数，如果对任意$\varepsilon>0$都存在自然数N，使得只要$n>N$，就有

$$|x_n-a|<\varepsilon$$

那么$\{x_n\}$收敛，且以a为极限，称为序列$\{x_n\}$收敛收敛于a，记为

$$\lim x_n=a\text{或者}x_n\to a(n\to+\infty)$$

定理 1： 如果序列$\{x_n\}$有极限，那么它的极限是唯一的。

定理 2（夹逼原理）： 设$\{x_n\}$，$\{y_n\}$和$\{z_n\}$都是实数序列，满足条件

$$x_n\le y_n\le z_n,\qquad \forall n\in N$$

如果$\lim x_n=\lim z_n=a$，那么$\{y_n\}$也是收敛序列，且有

$$\lim y_n=a$$

定理 3： 设$\{x_n\}$是实数序列，a是实数，则以下三陈述等价

（1）　序列$\{x_n\}$以a为极限；

（2）　$\{x_n-a\}$是无穷小序列；

（3）　存在无穷小序列$\{a_n\}$使得

$$x_n=a+a_n,\qquad n=1,2,\cdots.$$

（收敛序列性质）

定理 4： 收敛序列$\{x_n\}$是有界的。

定理 5：

（1）设$\lim x_n=a$，则$\lim|x_n|=|a|$。

（2）设$\lim x_n=a$，$\lim y_n=b$，则$\lim(x_n\pm y_n)=a\pm b$。

（3）设$\lim x_n=a$，$\lim y_n=b$，则$\lim(x_ny_n)=ab$。

（4）设 $x_n \neq 0$，$\lim x_n = a \neq 0$，则 $\lim \frac{1}{x_n} = \frac{1}{a}$。

（5）设 $x_n \neq 0$，$\lim x_n = a \neq 0$，$\lim y_n = b$，则 $\lim \frac{y_n}{x_n} = \frac{\lim y_n}{\lim x_n} = \frac{b}{a}$。

（收敛序列与不等式）

定理 6： 如果 $\lim x_n < \lim y_n$，那么存在 $N_0 \in N$，使得 $n > N_0$ 时有

$$x_n < y_n$$

定理 7： 如果 $\{x_n\}$ 和 $\{y_n\}$ 都是收敛序列，且满足

$$x_n \leq y_n, \qquad \forall n > N_0,$$

那么

$$\lim x_n \leq \lim y_n$$

1.2 收敛原理

（单调序列定义）

定义：（1）若实数序列$\{x_n\}$满足

$$x_n \le x_{n+1}, \quad \forall n \in N,$$

则称$\{x_n\}$是递增的或者单调上升的，记为

$$\{x_n\}\uparrow.$$

（2）若实数序列$\{y_n\}$满足

$$y_n \ge y_{n+1}, \quad \forall n \in N,$$

则称$\{y_n\}$是递减的或者单调下降的，记为

$$\{y_n\}\downarrow$$

（3）单调上升的序列和单调下降的序列统称为单调序列。

定理 1：递增序列$\{x_n\}$收敛的充分必要条件是它有上界，其上确界记为$\sup\{x_n\}$。

定理 1 推论：递减序列$\{y_n\}$收敛的充分必要条件是它有下界，其下确界记为$\inf\{x_n\}$。

扩展：因为一个序列的收敛性及其极限值都只与这序列的尾部（即从某一项之后的项）有关，所以定理 1 和它的推论中单调性条件可以虚弱为"从某一项之后单调"，即为

$$x_n \le x_{n+1}, \quad \forall n > N_0,$$

及

$$y_n \ge y_{n+1}, \quad \forall n > N_0,$$

（自然对数的底e）

自然对数的底e通过下面这个式子求得

$$e = \lim_{n\to+\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

我们先来证明序列$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$是收敛的。

（1）序列$x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$是单调上升的。

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})$$
$$+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$

$$x_{n+1}=\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n+1})+\frac{1}{3!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})$$
$$+\cdots+\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})$$
$$+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n-1}{n+1})$$
$$+\frac{1}{(n+1)!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{n}{n+1})$$

对比 x_n 和 x_{n+1} 的展开式， x_{n+1} 前面 $n+1$ 项的每一项都比 x_n 中相应项要大，即

$$\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n+1})(1-\frac{2}{n+1})\cdots(1-\frac{k-1}{n+1})>\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$$

除此之外 x_{n+1} 还比 x_n 在最后多一个正项。因此我们得出 x_n 是单调上升的，即

$$x_n<x_{n+1},\quad \forall n\in N,$$

（2）序列 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是有上界的。

$$x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=1+1+\frac{1}{2!}(1-\frac{1}{n})+\cdots+\frac{1}{n!}(1-\frac{1}{n})(1-\frac{2}{n})\cdots(1-\frac{n-1}{n})$$
$$<1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^n}$$
$$=1+\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}}<1+\frac{1}{1-\frac{1}{2}}=3$$

序列 $x_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 是单调上升且有上界，因此必是收敛的，此收敛值用 e 表示。通过计算机模拟，我们可以得到 e 的近似值，前几位是 2.718281828459045…

在数学中，以 e 为底的对数称为自然对数，e 称为自然对数的底，正实数 x 的自然对数通常记为 $\ln x$， $\log x$ 或者 $\log_e x$。

（闭区间套原理）

定理 2（闭区间套原理）： 如果实数序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$（或闭区间序列$\{[a_n,b_n]\}$）满足条件

（1）$[a_n,b_n]\subset[a_{n-1},b_{n-1}]$（或者$a_{n-1}\le a_n\le b_n\le b_{n-1}$， $\forall n>1$）

（2）$\lim(b_n-a_n)=0$

那么

（i）闭区间序列$\{[a_n,b_n]\}$形成一个闭区间套。

（ii）实数序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$收敛于相同的极限值c。

$$\lim a_n=\lim b_n=c$$

（iii）c是满足以下条件的唯一实数值。

$$a_n\le c\le b_n,\quad \forall n\in N$$

证明：

（ii）由条件（1）可得

$$a_{n-1}\le a_n\le b_n\le b_{n-1}\le\cdots\le b_1$$

我们可以看到$\{a_n\}$单调上升而有上界，$\{b_n\}$单调下降而有下界，因此$\{a_n\}$和$\{b_n\}$都是收敛序列。由条件（2）可得$\lim b_n-\lim a_n=\lim(b_n-a_n)=0$，因此实数序列$\{a_n\}$和$\{b_n\}$收敛于相同的极限值。

$$\lim a_n=\lim b_n=c$$

（iii）因为

$$c=\sup\{a_n\}=\inf\{b_n\}$$

所以显然有

$$a_n\le c\le b_n,\quad \forall n\in N$$

假如还有一个实数c'满足

$$a_n\le c'\le b_n,\quad \forall n\in N$$

由于

$$\lim a_n=\lim b_n=c$$

那么根据**夹逼准则**，有

$$c'=\lim c'=\lim a_n=\lim b_n=c$$

则证明了c是唯一的。

（Bolzano-Weierstrass 定理）

定义： 设 $\{x_n\}$ 是实数序列，而

$$n_1 < n_2 < n_3 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$$

是一串严格递增的自然数，则

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \cdots, x_{n_k}, x_{n_{k+1}}, \cdots$$

也形成一个实数序列。我们把序列 $\{x_{n_k}\}$ 叫做序列 $\{x_n\}$ 的子序列（或部分序列），要注意的是子序列 $\{x_{n_k}\}$ 的序号是 k。

定理 3： 设序列 $\{x_n\}$ 收敛于 a，则它的任何子序列 $\{x_{n_k}\}$ 也都收敛于同一极限 a。

证明： 对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_0 \in N$，使得只要 $n > N_0$，就有

$$|x_n - a| < \varepsilon$$

当 $k > N_0$ 时就有 $n_k \ge k > N_0$，因而此时有

$$|x_{n_k} - a| < \varepsilon$$

定理 4（Bolzano-Weierstrass）： 设 $\{x_n\}$ 是有界序列，则它具有收敛的子序列。

（柯西收敛原理）

柯西序列定义： 如果序列 $\{x_n\}$ 满足条件：对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $N_0 \in \mathrm{N}$，使得当 $m, n > N_0$ 时，就有

$$|x_m - x_n| < \varepsilon$$

则此序列为柯西序列，又称基本序列。

引理： 柯西序列 $\{x_n\}$ 是有界的。

证明： 对于任意 $\varepsilon = 1$，存在 $N_0 \in \mathrm{N}$，使得当 $m, n > N_0$ 时，就有

$$|x_m - x_n| < 1$$

于是对于 $n > N_0$，我们有

$$|x_n| \le |x_n - x_{N_0+1}| + |x_{N_0+1}| < 1 + |x_{N_0+1}|$$

若记

$$K=\max\left\{|x_1|,|x_2|,\cdots,|x_{N_0}|,1+|x_{N_0+1}|\right\}$$

则有

$$|x_n|\le K,\ \ \forall n\in N$$

定理 5（收敛原理）：序列$\{x_n\}$收敛的必要充分条件是：对任意$\varepsilon>0$，存在$N_0\in\mathrm{N}$，使得当$m,n>N_0$时，就有

$$|x_m-x_n|<\varepsilon$$

换句话说：

$$\text{序列}\{x_n\}\text{收敛}\Leftrightarrow\text{序列}\{x_n\}\text{是柯西序列}$$

1.3 无穷大

定义：（1）设$\{x_n\}$是实数序列，如果对任意正实数E，存在自然数N，使得当$n>N$时就有

$$x_n > E$$

那我们就说实数序列$\{x_n\}$发散于$+\infty$，记为

$$\lim x_n = +\infty$$

（2）设$\{y_n\}$是实数序列，如果对任意正实数E，存在自然数N，使得当$n>N$时就有

$$y_n < -E$$

那我们就说实数序列$\{y_n\}$发散于$-\infty$，记为

$$\lim y_n = -\infty$$

（3）设$\{z_n\}$是实数序列，如果序列$\{|z_n|\}$发散于$+\infty$，即$\lim |z_n| = +\infty$，那么我们就称$\{z_n\}$为无穷大序列，记为

$$\lim z_n = \infty$$

注记：（1）若集合$E \subset R$无上界，则记

$$\sup E = +\infty$$

（2）若集合$F \subset R$无下界，则记

$$\sup F = -\infty$$

定理 1：单调序列必定有（有穷的或无穷的）极限，具体而言是：

（1）递增序列$\{x_n\}$有极限，且

$$\lim x_n = \sup\{x_n\}$$

（2）递减序列$\{y_n\}$有极限，且

$$\lim y_n = \inf\{y_n\}$$

定理 2：设$\{x_n\}$和$\{y_n\}$是实数序列，满足条件

$$x_n \le y_n, \qquad \forall n \in N$$

则有：

（1）如果 $\lim x_n=+\infty$，那么 $\lim y_n=+\infty$；

（2）如果 $\lim y_n=-\infty$，那么 $\lim x_n=-\infty$。

定理 3： 如果 $\lim x_n=+\infty$（或 $-\infty$，或 ∞），那么对于 $\{x_n\}$ 的任意子序列 $\{x_{n_k}\}$ 也有

$$\lim x_{n_k}=+\infty \text{（或} -\infty\text{，或} \infty\text{）}$$

定理 4： 设 $x_n\neq 0,\forall n\in N$，则

$$\{x_n\}\text{是无穷大序列} \Leftrightarrow \left\{\frac{1}{x_n}\right\}\text{是无穷小序列}$$

扩充的实数系： $\overline{R}=R\cup\{-\infty,+\infty\}$

定理 5： 实数序列 $\{x_n\}$ 至多只能有一个极限。

扩充的实数系 $\overline{R}$ 中的运算：

（1）如果 $x\in R$，那么

$$x+(\pm\infty)=(\pm\infty)+x=\pm\infty$$

$$x-(\pm\infty)=\mp\infty$$

（2）如果 $x\in R$，$x>0$，那么

$$x\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot x=\pm\infty$$

如果 $y\in R$，$y<0$，那么

$$y\cdot(\pm\infty)=(\pm\infty)\cdot y=\mp\infty$$

（3）如果 $x\in R$，那么

$$\frac{x}{+\infty}=\frac{x}{-\infty}=0$$

（4）$(+\infty)+(+\infty)=+\infty$，$(+\infty)-(-\infty)=+\infty$

$(-\infty)+(-\infty)=-\infty$，$(-\infty)-(+\infty)=-\infty$

$(+\infty)\cdot(+\infty)=+\infty$，$(-\infty)\cdot(-\infty)=+\infty$

$(+\infty)\cdot(-\infty)=(-\infty)\cdot(+\infty)=-\infty$

（5）除此之外，其余都没有定义。

1.4 函数的极限

x_0 点的 η 领域：$U(x_0,\eta)=(x_0-\eta,x_0+\eta)=\{x\in R \,\|\, x-x_0|<\eta\}$，$\quad x_0,\eta\in R,\eta>0$

x_0 点的去心 η 领域：

$$\breve{U}(x_0,\eta)=(x_0-\eta,x_0+\eta)\setminus x_0=\{x\in R \mid 0<|x-x_0|<\eta\},\quad x_0,\eta\in R,\eta>0$$

$+\infty$ 的去心 H 领域：$\breve{U}(+\infty,H)=(H,+\infty)=\{x\in R \mid x>H\}$，$\quad H\in R,H>0$

$-\infty$ 的去心 H 领域：$\breve{U}(-\infty,H)=(-\infty,-H)=\{x\in R \mid x<-H\}$，$\quad H\in R,H>0$

统一叙述：对于 $a\in\overline{R}$，我们用 $\breve{U}(a)$ 表示 a 的某个去心邻域，当 a 为有穷实数时，$\breve{U}(a)$ 的形式为 $\breve{U}(a,\eta)$，当 $a=\pm\infty$ 时，$\breve{U}(a)$ 的形式为 $\breve{U}(\pm\infty,H)$。

函数极限的序列式定义：设 $a,A\in\overline{R}$（a 和 A 都可以是有穷实数或者 $\pm\infty$），并设函数 $f(x)$ 在 a 的某个去心邻域 $\breve{U}(a)$ 上有定义。如果对于任何满足条件 $x_n\to a$ 的序列 $\{x_n\}\subset\breve{U}(a)$，相应的函数值序列 $\{f(x)\}$ 都以 A 为极限，那么我们说当 $x\to a$ 时，函数 $f(x)$ 的极限为 A，记为

$$\lim_{x\to a}f(x)=A$$

简单例子如：$\lim\limits_{x\to a}\sin x=\sin a$；$\lim\limits_{x\to a}\cos x=\cos a$；$\lim\limits_{x\to a}|x|=|a|$；$\lim\limits_{x\to a}\sqrt{x}=\sqrt{a}$；$\lim\limits_{x\to 0}x\sin\dfrac{1}{x}=0$，因为 $|x\sin\dfrac{1}{x}|\le|x|$；$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$，因为 $\cos x<\dfrac{x}{\sin x}<1$；$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\sin x}{x}=0$，因为 $|\dfrac{\sin x}{x}|\le\dfrac{1}{|x|}$。

定理 1：函数极限 $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ 是唯一的。

定理 2（夹逼原理）：设 $f(x)$，$g(x)$ 和 $h(x)$ 在 a 的某个去心邻域 $\breve{U}(a)$ 上有定义，并且满足不等式

$$f(x)\le g(x)\le h(x),\quad \forall x\in\breve{U}(a)$$

如果

$$\lim_{x\to a}f(x)=\lim_{x\to a}h(x)=A$$

那么

$$\lim_{x\to a} g(x)=A$$

定理 3：关于函数的极限，有以下的运算法则：

$$\lim_{x\to a}(f(x)\pm g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\pm\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}(f(x)g(x))=\lim_{x\to a} f(x)\cdot\lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\frac{g(x)}{f(x)}=\frac{\lim\limits_{x\to a} g(x)}{\lim\limits_{x\to a} f(x)}$$

定理 4（复合函数求极限）：设函数 g 在 b 点的某个去心邻域 $\breve{U}(b)$ 上有定义，$\lim\limits_{y\to b} g(y)=c$。又设函数 f 在 a 点的某个去心邻域 $\breve{U}(a)$ 上有定义，f 把 $\breve{U}(a)$ 中的点映射到 $\breve{U}(b)$ 之中（用记号表示就是：$f(\breve{U}(a))\subset\breve{U}(b)$）并且 $\lim\limits_{x\to a} f(x)=b$，则有

$$\lim_{x\to a} g(f(x))=c$$

多项式函数与有理数分式函数求极限的法则如下：

（1）设 $P(x)$ 是任意多项式，$a\in R$，则

$$\lim_{x\to a} P(x)=P(a)$$

（2）设 $P(x)$ 是任意多项式，$Q(x)$ 是非零多项式 $a\in R$，$Q(a)$ 不都是 0，则

$$\lim_{x\to a}\frac{P(x)}{Q(x)}=\frac{P(a)}{Q(a)}$$

（3）设 $\begin{array}{l} P(x)=a_0x^m+a_1x^{m-1}+\ldots+a_m, \\ Q(x)=b_0x^n+b_1x^{n-1}+\ldots+b_n,\ \ a_0\neq 0, b_0\neq 0 \end{array}$，则

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\begin{cases}+\infty, & \text{如果 } m>n \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{如果 } m=n \\ 0, & \text{如果 } m<n\end{cases}$$

因为

$$\lim_{x\to\infty}\frac{P(x)}{Q(x)}=\lim_{x\to\infty}\left(x^{m-n}\frac{a_0+\dfrac{a_1}{x}+\cdots+\dfrac{a_m}{x^m}}{b_0+\dfrac{b_1}{x}+\cdots+\dfrac{b_n}{x^n}}\right)=\begin{cases}+\infty, & \text{如果 } m>n \\ \dfrac{a_0}{b_0}, & \text{如果 } m=n \\ 0, & \text{如果 } m<n\end{cases}$$

1.5 单侧极限

定义（序列方式）：设 $a\in R, A\in\overline{R}$，并设函数 $f(x)$ 在 $(a-\eta,a)$ 有定义。如果对任意满足条件 $x_n\to a$ 的序列 $\{x_n\}\subset(a-\eta,a)$，相应的函数值序列 $\{f(x_n)\}$ 都以 A 为极限，那么我们就说：$x\to a^-$ 时函数 $f(x)$ 的极限为 A，记为

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=A$$

定义（$\varepsilon-\delta$ 方式）：设 $a,A\in R$，并设函数 $f(x)$ 在 $(a-\eta,a)$ 有定义。如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$a-\delta<x<a$$

就有

$$|f(x)-A|<\varepsilon$$

那么我们就说：$x\to a^-$ 时函数 $f(x)$ 的极限为 A，记为

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=A$$

定义（$\varepsilon-\delta$ 方式，特殊的 $A\notin R, A=+\infty$）：设 $a\in R$，并设函数 $f(x)$ 在 $(a-\eta,a)$ 有定义。如果对任意 $E>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$a-\delta<x<a$$

就有

$$f(x)>E$$

那么我们就说：$x\to a^-$ 时函数 $f(x)$ 的极限为 $+\infty$，记为

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$

可用类似的方式来定义 $x\to a^+$ 的极限。

定理 1：设 $a\in R$，并设函数 $f(x)$ 在 a 点的去心邻域 $\breve{U}(a,\eta)$ 上有定义。则极限 $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ 存在的充分必要条件是两个单侧极限存在并且相等：

$$\lim_{x\to a^-} f(x)=\lim_{x\to a^+} f(x)=A$$

当这条件满足时，我们有

$$\lim_{x\to a} f(x)=A$$

单调函数定义：设函数 f 在集合 $S\subset R$ 上有定义。

（1）如果对任意 $x_1, x_2 \in S$， $x_1 < x_2$，都有

$$f(x_1) \le f(x_2)$$

那么我们就说函数 f 在集合 S 上是递增的或者单调上升的。

（2）如果对任意 $x_1, x_2 \in S$， $x_1 < x_2$，都有

$$f(x_1) \ge f(x_2)$$

那么我们就说函数 f 在集合 S 上是递减的或者单调下降的。

（3）单调上升函数与单调下降函数统称为单调函数。

1.6 连续与间断

定义 I： 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域 $U(x_0,\eta)$ 上有定义。如果对任何满足条件 $x_n \to x_0$ 的序列 $\{x_n\} \subset U(x_0,\eta)$，都有

$$\lim_{x_n \to x_0} f(x_n) = f(x_0)$$

那么我们就说函数 f 在 x_0 点连续，或者说 x_0 点事函数 f 的连续点。

定义 II： 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点的邻域 $U(x_0,\eta)$ 上有定义。如果对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $\delta > 0$，使得只要 $|x - x_0| < \delta$，就有

$$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

那么我们就说函数 f 在 x_0 点连续，或者说 x_0 点事函数 f 的连续点。

定理 1： 设函数 f 在 x_0 点连续，则存在 $\delta > 0$，使得函数 f 在 $U(x_0,\delta)$ 上有界。（证明过程参考函数极限）

定理 2： 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 点连续，则

（1） $f(x) \pm g(x)$ 在 x_0 点连续；

（2） $f(x) \cdot g(x)$ 在 x_0 点连续；

（3） $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ 在使得 $g(x_0) \neq 0$ 的 x_0 处连续；

（4） $cg(x)$ 在 x_0 点连续。

定理 3： 设函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，则函数 $|f(x)|$ 也在 x_0 点连续.

证明：$||f(x)| - |f(x_0)|| \le |f(x) - f(x_0)|$，余下易证。

定理 4： 设函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在 x_0 点连续。如果 $f(x_0) < g(x_0)$，那么存在 $\delta > 0$，使得对于 $x \in U(x_0,\delta)$ 有

$$f(x) < g(x)$$

定理 5（复合函数的连续性）：设函数 $f(x)$ 在 x_0 点连续，函数 $g(y)$ 在 $y_0 = f(x_0)$ 点连续，那么复合函数 $g(f(x))$ 在 x_0 点连续.

定义单侧连续：设函数 $f(x)$ 在 $(x_0-\eta, x_0]$ 上有定义，如果

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

那么我们就说函数 $f(x)$ 在 x_0 点左侧连续。类似的可以定义右侧连续。引入记号

$$f(x_0^-) = \lim_{x \to x_0^-} f(x), \quad f(x_0^+) = \lim_{x \to x_0^+} f(x)$$

我们知道极限存在的充分必要条件是两个单侧极限存在并且相等（这个相等值为极限值 A，不一定是该点的函数值 $f(x_0)$），可以写成

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = A$$

但是如果在 x_0 点左连续和右连续，则说明在 x_0 点两个单侧极限存在并且相等，且这个相等的值一定是该点的函数值 $f(x_0)$），可以写成

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

$f(x)$ 在 x_0 点左连续和右连续是 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充分必要条件。

简单的说就是：

$$f(x)\text{在}x_0\text{点连续} \Leftrightarrow f(x)\text{在}x_0\text{点左连续, 右连续}$$
$$f(x)\text{在}x_0\text{点连续} \Leftrightarrow f(x)\text{在}x_0\text{点两个单侧极限存在, 且值为}f(x_0)$$

定理 6：设函数 $f(x)$ 在 $U(x_0,\eta)$ 上有定义，则 $f(x)$ 在 x_0 点连续的充分必要条件是

$$f(x_0^-) = f(x_0^+) = f(x_0)$$

反过来说，如果 $f(x)$ 在 $U(x_0,\eta)$ 上有定义，但 $f(x)$ 在 x_0 点不连续，则称 x_0 为间断点。有情形 I 和情形 II，这两种情形下 x_0 点分别成为第一类间断点和第二类间断点。

情形 I（第一类间断点）：两个单侧极限都存在，但

$$f(x_0^-) \neq f(x_0^+)$$

或者

$$f(x_0^-)=f(x_0^+)\neq f(x_0)$$

情形 II（第二类间断点）：至少一个单侧极限不存在。

注意：单侧极限存在并不代表单侧连续，如果 $f(x)$ 在 x_0 点单侧极限存在，并且此极限值等于 $f(x)$ 在 x_0 点的函数值 $f(x_0)$，那么就说 $f(x)$ 在 x_0 点单侧连续。

简单的例子，例如函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$f(0^-)=f(0^+)\neq f(0)$，0 为第一类间断点。如果改成

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin x}{x}, & x\neq 0\\ 1, & x=0\end{cases}$$

$f(0^-)=f(0^+)=f(0)=1$，则 0 是连续点。

例如函数

$$f(x)=\begin{cases}\sin\dfrac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

左右侧不连续，故 0 是第二类间断点。

狄里克莱（Dirichlet）函数

$$D(x)=\begin{cases}1, & \text{如果}x\text{是有理数}\\ 0, & \text{如果}x\text{是无理数}\end{cases}$$

任何 $x\in R$ 都是函数 D 的第二类间断点。

黎曼（Riemann）函数

$$R(x)=\begin{cases}1/q, & \text{如果}x\text{是既约分数 } p/q, q>0\\ 0, & \text{如果}x\text{是无理数}\end{cases}$$

所有五里店都是黎曼函数的连续点；所有有利点都是第一类间断点。

1.7 闭区间上连续函数的重要性质

函数在闭区间上连续的定义：如果函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有定义，在每一点 $x\in(a,b)$ 连续，在 a 点右侧连续，在 b 点左侧连续，那么我们就说函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。

引理：设 $\{x_n\}\subset[a,b]$， $x_n\to x_0$，则 $x_0\in[a,b]$。

定理 1：设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。如果 $f(a)$ 与 $f(b)$ 异号，那么必定存在一点 $c\in(a,b)$，使得

$$f(c)=0$$

定理 2（介值定理）：设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续。如果闭区间的两端点的函数值 $f(a)=\alpha$ 与 $f(b)=\beta$ 不相等，那么在这两点之间函数 f 能够取得介于 α 与 β 之间的任意值 γ。这就是说，如果 $f(a)<\gamma<f(b)$，那么存在 $c\in(a,b)$，使得

$$f(c)=\gamma$$

定理 3：设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 f 在闭区间 $[a,b]$ 上有界。

定理 4（最大值与最小值定理）：设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，M，m 分别是函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上的最大值与最小值，记

$$M=\sup_{x\in[a,b]}f(x),\quad m=\inf_{x\in[a,b]}f(x)$$

则存在 $x',x''\in[a,b]$，使得

$$f(x')=M,\quad f(x'')=m$$

一致连续定义：设 E 是 R 的一个子集，函数 f 在 E 上有定义，如果对任意 $\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得只要

$$x_1,x_2\in E,\ \ |x_1-x_2|<\delta$$

就有

$$|f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

那么 j 我们就说函数 f 在 E 上是一致连续的。

定理 5（一致连续性定理）：如果函数 f 在闭区间 $I=[a,b]$ 连续，那么它在 I 上是一致连续的。

1.8 单调函数和反函数

引理： 集合 $J \subset R$ 是一个区间的充分必要条件为：对于任意两个实数 $\alpha, \beta \in J$，介于 α 和 β 之间的任何实数 γ 也一定属于 J。

定理 1： 如果函数 f 在区间 I 上连续，那么

$$J = f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$$

也是一个区间。

定理 2： 如果函数 f 在区间 I 上单调。则函数 f 在区间 I 上连续的充分必要条件为：$f(I)$ 也是一个区间。

反函数定义： 设函数 f 在区间 I 上连续，则 $J = f(I)$ 也是一个区间。如果函数 f 在区间 I 上严格单调，那么 f 是从 I 到 $J = f(I)$ 的一一对应。这时，对任意 $y \in J = f(I)$，恰好只有一个 $x \in I$ 能使得 $f(x) = y$。我们定义一个函数 g 如下：对任意的 $y \in J$，函数值 $g(y)$ 规定为由关系 $f(x) = y$ 所决定的唯一的 $x \in I$。这样定义的函数 g 称为是函数 f 的反函数，记为

$$g = f^{-1}$$

我们看到，函数 f 及其反函数 $g = f^{-1}$ 满足如下关系：

$$g(y) = f \Leftrightarrow f(x) = y$$

定理 3： 设函数 f 在区间 I 上严格单调并且连续，则它的反函数 $g = f^{-1}$ 在区间 $J = f(I)$ 上严格单调并且连续。

1.9 指数函数，对数函数和初等函数连续性小结

定理 1：设 $a \in R, a > 1$，则有

（1）$\lim\limits_{x \to \infty} a^x = +\infty$

（2）$\lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0$

定理 2：初等函数在其有定义的范围内是连续的。

1.10 无穷小量（无穷大量）的比较，几个重要的极限

无穷小量定义：设函数 $\alpha(x)$ 在 a 点的某个去心邻域 $\breve{U}(a)$ 上有定义，如果

$$\lim_{x\to a}\alpha(x)=0$$

那么我们就说 $\alpha(x)$ 是 $x\to a$ 时的无穷小量。

无穷大量定义：设函数 $A(x)$ 在 a 点的某个去心邻域 $\breve{U}(a)$ 上有定义，如果

$$\lim_{x\to a}A(x)=0$$

那么我们就说 $A(x)$ 是 $x\to a$ 时的无穷大量。

定义 3：设函数 $\varphi(x)$ 和 $\psi(x)$ 在 a 点的某个去心邻域 $\breve{U}(a)$ 上有定义，并设在 $\breve{U}(a)$ 上

$\varphi(x)\neq 0$。我们分别用记号 O，o 与 $\sim$ 表示比值 $\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ 在 a 点邻近的几种状况：

（1）$\psi(x)=O(\varphi(x))$ 表示 $\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ 是 $x\to a$ 时的有界变量，即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ 有界。

（2）$\psi(x)=o(\varphi(x))$ 表示 $\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}$ 是 $x\to a$ 时的无穷小量，即 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\psi(x)}{\varphi(x)}=0$。我们可以说

$\psi(x)$ 是比 $\varphi(x)$ 更高阶的无穷小（或者更低阶的无穷大）。

（3）$\psi(x)\sim\varphi(x)$ 表示

$$\lim_{x\to a}\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}=1$$

注意：O，o 与 $\sim$ 都是相对于一定的极限过程而言的，使用时一定要附加上记号 $x\to a$

例如：

$$\sin x=o(x)\qquad (x\to\infty)$$

$$\sin x\sim x\qquad (x\to 0)$$

特别的：记号

$$\psi(x)=O(1)$$

表示 $\psi(x)$ 在 a 点的某个去心邻域上有界；而记号

$$\psi(x)=o(1)$$

表示$\lim\limits_{x\to a}\psi(x)=0$。

定理 1：设函数$\varphi(x)$和$\psi(x)$在a点的某个去心邻域$\breve{U}(a)$上有定义，$\varphi(x)\neq 0$。则有

$$\psi(x)\sim\varphi(x)\Leftrightarrow\psi(x)=\varphi(x)+o(\varphi(x))$$

常见的极限：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$

（2）下面几个等价

$\lim\limits_{x\to\infty}(1+\dfrac{1}{x})^{x}=e$

$\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+x)}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\ln(1+x)}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_b(1+x)}{x}=\dfrac{1}{\ln b}$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x-1}{x}=1$

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^a-1}{x}=a$

定理 3：对于极限过程$x\to 0$，我们有

（1）$\sin x=x+o(x)$， $\tan x=x+o(x)$

（2）$\cos x=1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)$

（3）$e^x=1+x+o(x)$

（4）$\ln(1+x)=x+o(x)$

（5）$(1+x)^{\mu}=1+\mu x+o(x)$

上面的内容很有用，因为我们在求乘积或商的极限的时候，可以将任何一个因式用它的等价

因式来替换。

定理 4： 如果 $x \to a$ 时 $\psi(x) \sim \varphi(x)$，那么就有

（1）$\lim\limits_{x\to a}\psi(x)f(x)=\lim\limits_{x\to a}\varphi(x)f(x)$

（2）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\psi(x)f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\varphi(x)f(x)}{g(x)}$

（2）$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\psi(x)g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)g(x)}$

证明（1）：

$$\lim_{x\to a}\psi(x)f(x)=\lim_{x\to a}\left[\frac{\psi(x)}{\varphi(x)}\cdot(\varphi(x)f(x))\right]=\lim_{x\to a}\varphi(x)f(x)$$

一些简单的例子：

（1）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\beta x}{\sin\alpha x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta x+o(\beta x)}{\alpha x+o(\alpha x)}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\beta+\dfrac{o(\beta x)}{x}}{\alpha+\dfrac{o(\alpha x)}{x}}=\dfrac{\lim\limits_{x\to 0}\left(\beta+\dfrac{o(\beta x)}{x}\right)}{\lim\limits_{x\to 0}\left(\alpha+\dfrac{o(\alpha x)}{x}\right)}=\dfrac{\beta}{\alpha}$

（2）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(\tan x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan x}{x}=1$

（3）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x^2}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}-1}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(1+\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2))-1}{1-(1-\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2))}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{2}x^2+o(x^2)}{\dfrac{1}{2}x^2-o(x^2)}=1$

（4）$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln^2(1+x)}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(\ln(1+x))^2}{1-\cos x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2}{\dfrac{1}{2}x^2}=2$

第二篇　微积分的基本概念及应用

2.1 导数

导数的定义：设函数 $f(x)$ 在 x_0 点邻近有定义，如果存在有穷极限

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0},$$

那么我们就说函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，并且把上述极限值称之为函数 $f(x)$ 在 x_0 点的导数，记为 $f'(x_0)$，这是拉格朗日（Lagrange）记号。我们还习惯用 $\Delta x = x - x_0$ 表示自变量 x 的增量，Δx 可正可负，用符号 $\Delta y=\Delta f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 表示函数 $y=f(x)$ 的相应增量，则导数的定义可以写成

$$f'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

用莱布尼兹（Leibnitz）记号表示为

$$\frac{df(x_0)}{dx}\quad（或\frac{dy}{dx}）$$

后一记号提示我们导数是差商 $\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$（或 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$）的极限，人们把导数也叫微商。

通常人们习惯用增量方式来写导数，这样比较方便，如下面的

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$$

常见函数的导数：

（1）常值函数 $f(x)\equiv C$，$f'(x)=0$。

我们有 $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{C-C}{h}=0$

（2）设 $m\in N$，函数 $f(x)=x^m$，$f'(x)=mx^{m-1}$。

我们有 $\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=\frac{\sum_{k=0}^{m}C_m^k x^{m-k}h^k-x^m}{h}=(C_m^1x^{m-1}+C_m^2x^{m-2}h^1+\cdots+C_m^kx^{m-k}h^{k-1})$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^m-x^m}{h}=C_m^1x^{m-1}=mx^{m-1}$$

（2）设 $m\in N$，函数 $f(x)=x^{-m}(x\neq 0)$，$f'(x)=-mx^{-m-1}$。

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{1}{h}\left[\frac{1}{(x+h)^m}-\frac{1}{x^m}\right]=\frac{1}{h}\left(\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}\right)\left[\frac{1}{(x+h)^{m-1}}+\frac{1}{(x+h)^{m-2}x}+\cdots+\frac{1}{x^{m-1}}\right]$$

$$=-\frac{1}{(x+h)x}\left[\frac{1}{(x+h)^{m-1}}+\frac{1}{(x+h)^{m-2}x}+\cdots+\frac{1}{x^{m-1}}\right]$$

因而有

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{1}{(x+h)x}\left[\frac{1}{(x+h)^{m-1}}+\frac{1}{(x+h)^{m-2}x}+\cdots+\frac{1}{x^{m-1}}\right]$$

$$=-\frac{1}{x^2}\left[\frac{1}{x^{m-1}}+\frac{1}{x^{m-1}}+\cdots+\frac{1}{x^{m-1}}\right]$$

$$=-\frac{m}{x^{m+1}}$$

（4）幂函数 $f(x)=x^{\mu}(x>0,\mu\in R)$， $f'(x)=\mu x^{\mu-1}$。

（5）函数 $f(x)=\sin x$， $f'(x)=\cos x$。

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\frac{2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\cos x$$

（6）函数 $f(x)=\cos x$， $f'(x)=-\sin x$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}=-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=-\sin x$$

（7）函数 $f(x)=e^x$， $f'(x)=e^x$

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{e^{x+h}-e^x}{h}=e^x\,\dfrac{e^h-1}{h}$，已知 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{e^h-1}{h}=1$，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=e^x\lim_{h\to 0}\frac{e^h-1}{h}=e^x$$

（8）函数 $f(x)=a^x$， $f'(x)=a^x\ln a$

$\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{a^{x+h}-a^x}{h}=a^x\,\dfrac{a^h-1}{h}$，已知 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a^h-1}{h}=\ln a$，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=a^x\lim_{h\to 0}\frac{a^h-1}{h}=a^x\ln a$$

（9）函数 $f(x)=\ln x$， $f'(x)=\dfrac{1}{x}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\ln(x+h)-\ln x}{h}=\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{h}=\frac{1}{x}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}$$

已知 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$， $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{1}{x}$

（10）函数 $f(x)=\log_a x$， $f'(x)=\dfrac{1}{x\ln a}$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\frac{\log_a(x+h)-\log_a x}{h}=\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{h}=\frac{1}{x}\frac{\log_a(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}=\frac{1}{x\ln a}\frac{\ln(1+\frac{h}{x})}{\frac{h}{x}}$$

已知 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\ln(1+h)}{h}=1$， $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\dfrac{1}{x\ln a}$

定理 1： 设函数 f 和 g 在 x 点可导，$c\in R$，则 $f+g$ 和 cf 在 x 点可导，并且

$$(f(x)+g(x))'=f'(x)+g'(x)$$

$$(cf(x))'=cf'(x)$$

（单侧导数）

单侧导数定义： 设函数 f 在 $(x-\eta,x]$ 有定义，如果存在左侧极限

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

那么我们就说函数 f 在 x 左侧可导，并且称为左导数，记为

$$f'_-(x)=\lim_{h\to 0^-}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

同理可以得到右导数为

$$f'_+(x)=\lim_{h\to 0^+}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

定理 2： 设函数 f 在 x 点邻近有定义，则 f 在 x 点可导的充分必要条件是它在这点的两个单侧导数都存在并且相等，

$$f'_-(x)=f'_+(x)$$

当这个条件满足时就有

$$f'(x)=f'_{-}(x)=f'_{+}(x)$$

在一个点处可导的条件就是在则个点处从左边趋近和从右边趋近，斜率都是一样的。简单的例子：

（1）函数 $f(x)=|x|$ 在 $x=0$ 处不可导，因为 $f'_{-}(x)=-1$，而 $f'_{+}(x)=1$，所以在该点导数不存在。其实也可以这样理解，从左边趋近 0 的时候斜率是-1，从右边趋近 0 的时候斜率是 1，可导的

（可微性，微分）

定义：设函数 $f(x)$ 在 x 点邻近有定义，如果

$$f(x+h)-f(x)=Ah+o(h)$$

其中 A 与 h 无关，那么我们就说函数 $f(x)$ 在 x 点可微。

定理 3：函数 $f(x)$ 在 x 点可导的充分必要条件是它在这点可微。

注记：由于这个定理的缘故，人人们把“可导”和“可微”这两个术语当做同义词来使用。求导数的方法又称之为“微分法”。

定理 4：设函数 $f(x)$ 在 x_0 点可微（可导），那么它在这点连续。

当我们用式子定义一个量的时候，采用记号“：=”是很方便的，例如

$$f(x):=x^2+2$$

表示 $f(x)$ 用式子 x^2+2 来定义。记号“：=”读作“定义为”。

定义记号：设函数 $f(x)$ 在 x_0 点可微（可导），我们引入记号

$$dx:=\Delta x \quad （dx\text{定义为}\Delta x）$$

$$dy:=f'(x_0)dx=f'(x)\Delta x$$

并把 dy 叫做函数 $y=f(x)$ 在 x_0 点的微分。

微分的意义：

（1）从集合角度来看微分 $dy=f'(x)dx$ 正好是切线函数的增量。

（2）从代数的角度来看，微分 $dy=f'(x)dx$ 是增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 的线性主部，

dy 与 Δy 仅仅相差一个高阶无穷小量 $o(\Delta x)$

$$\Delta y = dy + o(\Delta x)$$

因而当 Δx 充分小的时候，可以用 dy 作为 Δy 的近似值，实际应用中经常这样做。

（3）之前我们引入 $\frac{dy}{dx}$ 作为导数的记号。有了微分的概念，我们可以把记号 $\frac{dy}{dx}$ 解释为 dy 与 dx 之商：

$$\frac{dy}{dx} = f'(x_0)$$

2.2 求导法则，高阶导数

定理 1： 设函数 u 和 v 在 x_0 点可导，则以下各式在 $x=x_0$ 处成立

（1）$(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x)$

（2）$(u(x)v(x))'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

（3）$\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)'=\dfrac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

证明：（1）记 $f(x)=u(x)+v(x)$，则有

$$f(x+h)-f(x)=u(x+h)-u(x)+v(x+h)-v(x)$$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}+\lim_{h\to0}\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$
$$=u'(x)+v'(x)$$

（2）记 $f(x)=u(x)v(x)$，则有

$$f(x+h)-f(x)=u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x)$$
$$=u(x+h)v(x+h)-u(x)v(x+h)+u(x)v(x+h)-u(x)v(x)$$
$$=(u(x+h)-u(x))v(x+h)+u(x)(v(x+h)-v(x))$$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{u(x+h)-u(x)}{h}v(x+h)+\lim_{h\to0}u(x)\frac{v(x+h)-v(x)}{h}$$
$$=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$$

（3）记 $f(x)=\dfrac{u(x)}{v(x)}$，则有

$$f(x+h)-f(x)=\frac{u(x+h)}{v(x+h)}-\frac{u(x)}{v(x)}$$
$$=\frac{(u(x+h)v(x)-u(x)v(x))-(u(x)v(x+h)-u(x)v(x))}{v(x+h)v(x)}$$
$$=\frac{(u(x+h)-u(x))v(x)}{v(x+h)v(x)}-\frac{u(x)(v(x+h)-v(x))}{v(x+h)v(x)}$$

$$f'(x)=\lim_{h\to0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim_{h\to0}\frac{\dfrac{(u(x+h)-u(x))}{h}v(x)}{v(x+h)v(x)}-\lim_{h\to0}\frac{u(x)\dfrac{(v(x+h)-v(x))}{h}}{v(x+h)v(x)}$$
$$=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$$

经常用到的式子如

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)' = -\frac{v'(x)}{(v(x))^2}$$

定理 1 等效的：设函数 u 和 v 在 x_0 点可微，则有

（1） $d(u(x)+v(x)) = du(x)+dv(x)$

（2） $d(u(x)v(x)) = v(x)du(x)+u(x)dv(x)$

（3） $d\left(\frac{u(x)}{v(x)}\right) = \frac{v(x)du(x)-u(x)dv(x)}{(dv(x))}$

简单的例子如

（1） $f(x)=e^x \sin x$，则

$f'(x)=(e^x\sin x)'=(e^x)'\sin x+e^x(\sin x)'=e^x(\sin x+\cos x)$

（2） $f(x)=\tan x$

$f'(x)=(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$

$=\frac{(\sin x)'\cos x-\sin x(\cos x)'}{\cos^2 x}=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}$

$=\frac{1}{\cos^2 x}(x\neq k\pi+\frac{\pi}{2})$

（3） $f(x)=e^{-x}$，则

$f'(x)=e^{-x}=\left(\frac{1}{e^x}\right)'=-\frac{e^x}{e^{2x}}=-e^{-x}$

（4）双曲正弦函数 $shx=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$

（5）双曲余弦函数 $chx=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$**，有**

$ch(-x)=chx$， $sh(-x)=sh(x)$

$ch(x+y)=chx\cdot chy+shx\cdot shy$

$sh(x+y)=shx\cdot chy+chx\cdot shy$

$ch^2x-sh^2x=1$，$ch2x=ch^2x+sh^2x$，$sh2x=2chx\cdot shx$

$(chx)'=shx$，$(shx)'=chx$

（复合函数的求导和微分表示的不变性）

定理 2：设函数 $f(x)$ 在 x_0 点可导，函数 $g(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 点可导，则复合函数

$\varphi(x)=g\circ f(x)=g(f(x))$ 也在 x_0 点可导，并且

$$\varphi'(x_0)=g'(f(x_0))f'(x_0)$$

证明：设辅助函数

$$\psi(y)=\begin{cases}\dfrac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)} & ,如果y\neq f(x_0)\\ g'(f(x_0)) & ,如果y=f(x_0)\end{cases}$$

明显函数 $\psi(y)$ 在 $y_0=f(x_0)$ 点连续。又由于

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\psi(y)\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

对于 $y\neq f(x_0)$，直接有

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\psi(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}\frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{y\to f(x_0)}\frac{g(y)-g(f(x_0))}{y-f(x_0)}\cdot\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=g'(f(x_0))f'(x_0)$$

对于 $y=f(x_0)$，有

$$\varphi'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\psi(f(x))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=\lim_{x\to x_0}g'(f(x_0))\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$
$$=g'(f(x_0))f'(x_0)$$

所以命题得证。

复合函数求导法则的另一表示法：将复合函数 $f(\varphi(t))$ 对 t 求导得：（$(f(\varphi(t)))'$，因为是用整个函数 $f(\varphi(t))$ 对 t 求导，$f'(\varphi(t))$ 是用整个函数对 $\varphi(t)$ 求导）

$$(f(\varphi(t)))' = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$$

或者

$$\frac{d(f(\varphi(t)))}{dt} = \frac{d(f(\varphi(t)))}{d\varphi(t)}\frac{d\varphi(t)}{dt}$$

两边乘以 dt 就得到

$$d(f(\varphi(t))) = f'(\varphi(t))d\varphi(t)$$

不论 x 是自变量，或者 $x=\varphi(t)$ 是另一变量 t 的函数，函数 $f(x)$ 的微分表示式都具有相同的形式

$$df(x) = f'(x)dx$$

这一结论叫做“**微分表示的不变性**”。

链式法则求导： 定理 2 中的复合函数求导法则又称链式法则，对于函数 $z=g(y)$ 与 $y=f(x)$ 的符合，链式法则可以形式地写成

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy}\cdot\frac{dy}{dx}$$

或者书写的格式通常是

$$(g(f(x)))' = g'(f(x))\cdot f'(x)$$

简单的例子：

（1）$(\sin ax)' = \cos ax\cdot(ax)' = a\cos ax$

（2）$(\tan bx)' = \frac{(bx)'}{\cos^2 bx} = \frac{b}{\cos^2 bx}$

（3）$(e^{cx})' = e^{cx}\cdot(cx)' = ce^{cx}$

（4）$(\sin x^2)' = \cos x^2\cdot(x^2)' = 2x\cos x^2$

（4）$\ln|x|\,(x\neq 0)$，当 $x>0$ 时，$(\ln|x|)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$。当 $x<0$ 时，

$(\ln|x|)'=(\ln(-x))'=\frac{1}{(-x)}(-x)'=\frac{1}{x}$。因此对于 $x>0$ 和 $x<0$ 着两种情况，我们都得到

$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x}$$

$$(\ln|x+c|)'=\frac{1}{x+c}$$

$$(\ln|\varphi(x)|)'=\frac{1}{\varphi(x)}\cdot\varphi'(x)$$

（5）$\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)'$，两种方法

方法 1：$\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)'=(\ln|x-a|-\ln|x+a|)'=\frac{1}{x-a}-\frac{1}{x+a}=\frac{2a}{x^2-a^2}$

方法 2：$\left(\ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)'=\left|\frac{x+a}{x-a}\right|\left(\left|\frac{x-a}{x+a}\right|\right)'$，讨论，如果 $\frac{x-a}{x+a}>0$，则原式

$=\frac{x+a}{x-a}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)'=\frac{2a}{x^2-a^2}$。如果 $\frac{x-a}{x+a}<0$，则原式 $=\frac{x+a}{x-a}\left(\frac{x-a}{x+a}\right)'=\frac{2a}{x^2-a^2}$。

（6）$(e^{\sin(x^2+c)})'$

$(e^{\sin(x^2+c)})'=e^{\sin(x^2+c)}(\sin(x^2+c))'$
$=e^{\sin(x^2+c)}\cdot\cos(x^2+c)\cdot(x^2+c)'=2xe^{\sin(x^2+c)}\cos(x^2+c)$

（7）$(\sqrt{x^2\pm a^2})'=((x^2\pm a^2)^{\frac{1}{2}})'=\frac{1}{2}(x^2\pm a^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(x^2\pm a^2)'=\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$

（8）$(\ln(x+\sqrt{x^2\pm a^2}))'=\frac{(x+\sqrt{x^2\pm a^2})'}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2\pm a^2}}}{x+\sqrt{x^2\pm a^2}}=\frac{1}{\sqrt{x^2\pm a^2}}$

（9）$((u(x))^{v(x)})'$

$(u(x)^{v(x)})'=(e^{\ln u(x)^{v(x)}})'=(e^{v(x)\ln u(x)})'$
$=e^{v(x)\ln u(x)}(v(x)\ln u(x))'$
$=e^{v(x)\ln u(x)}(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)})$
$=u(x)^{v(x)}(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)})$
$=u(x)^{v(x)}(\ln u(x))v'(x)+v(x)u(x)^{v(x)-1}u'(x)$

（反函数的求导法则）

从一个简单的例子入手，在OXY坐标系中，函数$y=\varphi(x)$的图像与其反函数$x=\psi(y)$的图像应该是同一条曲线，设在x_0处可导，在(x_0,y_0)作此图像的切线，该切线与OX轴夹角为α，与OY轴夹角为β，则$\beta=\frac{\pi}{2}-\alpha$，于是有

$$\tan\beta=\frac{1}{\tan\alpha}$$

即

$$\psi'(y_0)=\frac{1}{\varphi'(x_0)}$$

定理 3： 设函数$y=\varphi(x)$在包含x_0点的开区间I上严格单调且连续。如果这函数在x_0点可导并且导数$\varphi'(x_0)\neq 0$，那么反函数$x=\psi(y)$在y_0点可导，并且

$$\psi'(y_0)=\frac{1}{\varphi'(x_0)}=\frac{1}{\varphi'(\psi(y_0))}$$

证明：在所给的条件下，函数$x=\psi(y)$也严格单调并且连续，于是当$y\neq y_0, y\to y_0$时，应有$\psi(y)\neq\psi(y_0),\psi(y)\to\psi(y_0)$，因而

$$\lim_{y\to y_0}\frac{\psi(y)-\psi(y_0)}{y-y_0}=\lim_{y\to y_0}\frac{1}{\frac{y-y_0}{\psi(y)-\psi(y_0)}}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\frac{\varphi(x)-\varphi(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{\varphi'(x_0)}=\frac{1}{\varphi'(\psi(y_0))}$$

上式可以形式地写成

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

简单的例子：

（1） $y=\varphi(x)=e^x$和$x=\psi(y)=\ln y$互为反函数

$\varphi'(x)=e^x$，$\psi'(y)=\frac{1}{y}$，也可以由反函数求导法则得到$\psi'(y)=\frac{1}{\varphi'(\psi(y))}=\frac{1}{e^{\ln y}}=\frac{1}{y}$，

$$\varphi'(x)=\frac{1}{\psi'(y)}=\frac{1}{\psi'(\varphi(x))}=\frac{1}{\frac{1}{e^x}}=e^x$$

（2）$\psi(y)=\arccos y$，

$$\psi'(y)=\frac{1}{\varphi'(x)}=\frac{1}{\varphi'(\psi(y))}=\frac{1}{\varphi'(\arccos y)}=\frac{1}{-\sin(\arccos y)}=-\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

常见函数的导数：

$(C)'=0$， C 是常数

$(x^m)'=mx^{m-1}$， m 是自然数

$(x^{-m})'=-mx^{-m-1}$， m 是自然数

$(x^{\mu})'=\mu x^{\mu-1}$， μ 是实数

$(\sin x)'=\cos x$

$(\cos x)'=-\sin x$

$(\tan x)'=\dfrac{1}{\cos^2 x}$， $x\neq\dfrac{\pi}{2}+k\pi$

$(\cot x)'=-\dfrac{1}{\sin^2 x}$， $x\neq k\pi$

$(\arcsin x)'=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$， $|x|<1$

$(\arccos x)'=-\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$， $|x|<1$

$(\arctan x)'=\dfrac{1}{1+x^2}$

$(\operatorname{arc}\cot x)'=-\dfrac{1}{1+x^2}$

$(e^x)'=e^x$

$(a^x)'=a^x\ln a$， $a>0,a\neq1$

$(\ln|x|)'=\dfrac{1}{x}$， $x\neq0$

$(\log_a|x|)'=\dfrac{1}{x\ln a}$， $a>0,a\neq1,x\neq0$

$(\ln(x+\sqrt{x^2+a^2}))'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a^2}}$

$(\ln(x+\sqrt{x^2-a^2}))'=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-a^2}}$， $|x|>|a|$

（参数式函数的求导）

例如函数

$$y=\sqrt{a^2-x^2}\text{，}\quad -a\le x\le a$$

可以用参数表示为

$$x=a\cos t\text{，}\quad y=a\sin t\text{，}\quad 0\le t\le\pi$$

一般来说，设有参数表达式

$$x=\varphi(t)\text{，}\quad y=\psi(t)\text{，}\quad t\in J$$

其中函数φ在区间J上严格单调并且连续，函数ψ在区间J上连续（因为函数φ为自变量，必须单调连续，函数ψ为结果），我们可以把t表示成x的连续函数

$$t=\varphi^{-1}(x)\text{，}\quad x\in I=\varphi(J)$$

于是y表示成x的连续函数

$$y=\psi(\varphi^{-1}(x))\text{，}\quad x\in I$$

如果函数φ和ψ都在区间J上的t_0点处可导，并且$\varphi'(t_0)\ne 0$，那么复合函数$\psi\circ\varphi^{-1}$在在

$x_0=\varphi(t_0)$处可导，并且有

$$(\psi(\varphi^{-1}(x)))'_x=(\psi(t))'_x=\psi'(t)\cdot t'_x=\psi'(t)\cdot\frac{1}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

因此对于参数表示的函数

$$x=\varphi(t)\text{，}\quad y=\psi(t)$$

求导法则为

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}=\frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}},\varphi'(t)\ne 0$$

简单例子

（1）曲线方程为

$$x=\varphi(t)\text{，}\quad y=\psi(t)$$

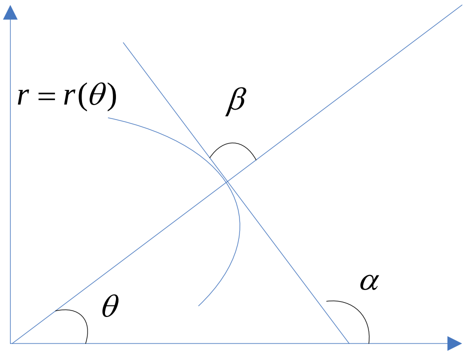
在$x_0=\varphi(t_0)$，$y_0=\psi(t_0)$处的切线斜率为

$$\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

切线方程为

$$\frac{Y-\psi(t_0)}{X-\varphi(t_0)}=\frac{\psi'(t_0)}{\varphi'(t_0)}$$

（2）极坐标方程给出的曲线



$$r=r(\theta)$$

极坐标参数方程为

$$x=r(\theta)\cos\theta,\quad y=r(\theta)\sin\theta$$

于是

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}}=\frac{(r(\theta)\sin\theta)'}{(r(\theta)\cos\theta)'}=\frac{r'(\theta)\sin\theta+r(\theta)\cos\theta}{r'(\theta)\cos\theta-r(\theta)\sin\theta}=\frac{\tan\theta+\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1-\tan\theta\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}$$

设切线方向与 x 轴夹角为 α，那么

$$\tan\alpha=\frac{\tan\theta+\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}{1-\tan\theta\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}}$$

于是有

$$\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}=\frac{\tan\alpha-\tan\theta}{1-\tan\alpha\tan\theta}=\tan(\alpha-\theta)=\tan\beta$$

因此极坐标上某一点的切线与极径的家教的正切应为

$$\tan\beta=\frac{r(\theta)}{r'(\theta)}$$

（隐函数的求导）

当变量 y 对变量 x 的函数关系通过一个方程来给出的时候，例如

$$x^2+y^2=1$$

对于每一个 $x\in[-1,1]$，有唯一的 $y\in[0,+\infty)$ 与之对应，于是方程 $x^2+y^2=1$ 确定了从集合 $D=[-1,1]$ 到集合 $E=[0,+\infty)$ 的一个函数，对一般情形，设 $D\subset R, E\subset R$，按照方程

$$F(x,y)=0$$

对每一个 $x\in D$ 恰好有唯一的 $y\in E$ 与之对应，那么我们就说：由条件

$$F(x,y)=0,\quad x\in D,\quad y\in E$$

确定了一个**隐函数**，当然，有时候隐函数可以显示的表示出来，也有时候无法显示的表示。**要注意的是：**要由方程确定一个隐函数，仅仅指出 x 的变化范围时不够的，还需要指出 y 的变化范围，以确定是一一对应的才能说是一个隐函数。

隐函数可以简化求导过程，而且表达的也更简洁一些。下面有一些例子

（1）求以下条件确定的隐函数 $y=y(x)$ 的倒数

$$x^2+y^2=1,\quad -1<x<1,\quad y>0$$

对恒等式 $x^2+y^2=1$ 两边求导得到

$$2x+2yy'=0$$

那么求得

$$y'=-\frac{x}{y}$$

（2）求函数 $y=u(x)^{v(x)}$，$u(x)>0$ 的导数。

对函数两边取对数得到

$$\ln y=v(x)\ln u(x)$$

按隐函数求导得

$$\frac{y'}{y}=v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}$$

得到

$$y'=y\left(v'(x)\ln u(x)+v(x)\frac{u'(x)}{u(x)}\right)$$

（高阶导数）

设函数 f 在开区间 I 上每一点可导，则一下对应关系定义了一个函数

$$x \to f'(x), \quad \forall x \in I$$

$f'(x)$ 称为函数 f 的导函数，记为 f'。对于导函数 f'，我们又可以讨论它的可到性和导数。

导函数 f' 在 x 点的导数称为函数 f 在在 x 点的二阶导数，记为

$$f''(x), \quad f^{(2)}(x), \quad \frac{d^2 y}{dx^2}$$

可以用同样的方式定义 n 阶导数，记为

$$f^{(n)}(x), \quad \frac{d^n y}{dx^n}$$

一些函数的高阶导数具有规律，下面是几个例子

（1） $y = x^\alpha$

$$y' = \alpha x^{\alpha-1}$$

$$y'' = \alpha(\alpha-1)x^{\alpha-2}$$

$$\cdots$$

$$y^{(n)} = \alpha(\alpha-1)\cdots[\alpha-(n-1)]x^{\alpha-n}$$

（2） $y = \ln(1+x)$

$$y' = \frac{1}{1+x} = (1+x)^{-1}$$

$$y'' = (-1)(1+x)^{-2}$$

$$y''' = (-1)(-2)(1+x)^{-3}$$

$$\cdots$$

$$y^{(n)} = (-1)(-2)\cdots[-(n-1)](1+x)^{-n} = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}$$

（3） $y = \sin x$

$$y' = \cos x = \sin(x+\frac{\pi}{2})$$

$$y'' = \cos(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(x+2\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$y''' = -\sin(x+\frac{\pi}{2}) = \sin(x+3\cdot\frac{\pi}{2})$$

$$\cdots$$

$$y^{(n)}=\sin(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

（4） $y=\cos x$

$$y^{(n)}=\cos(x+n\cdot\frac{\pi}{2})$$

定理 4（**Leibnitz 公式**）：设函数 u 和 v 在 x_0 点 n 阶可导，则这两个函数的乘积 uv 也在 x_0 点 n 阶可导，并且在这点有

$$(uv)^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}$$

其中

$$\binom{n}{k}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}，\quad (k=1,2,\cdots,n)$$

下面证明一下：

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\binom{n+1}{k}$$

$$\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!}+\frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)+1]}{(k-1)!}$$

$$=\frac{n(n-1)\cdots[n-(k-1)+1]}{(k-1)!}\left(1+\frac{n-k+1}{k}\right)=\frac{(n+1)n(n-1)\cdots[n-(k-1)+1]}{k!}$$

$$=\binom{n+1}{k}$$

归纳法证明：

$n=1$，明显成立

假设对于 $n\in N$ 成立，考虑 $n+1$ 的情况

$$(uv)^{(n+1)}=\left((uv)^{(n)}\right)'=\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k)}\right)'=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(u^{(n-k+1)}v^{(k)}+u^{(n-k)}v^{(k+1)})$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k+1)}v^{(k)}+\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k)}v^{(k+1)}\qquad (\text{后面一项中令}k=k_0-1,\text{那么}k_0=k+1)$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^{(n-k+1)}v^{(k)}+\sum_{k_0=1}^{n+1}\binom{n}{k_0-1}u^{(n-k_0+1)}v^{(k_0)}$$

$$=u^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\left(\binom{n}{k}+\binom{n}{k-1}\right)u^{(n-k+1)}v^{(k)}+v^{(n+1)}$$

$$=u^{(n+1)}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n+1}{k}u^{(n-k+1)}v^{(k)}+v^{(n+1)}=\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}u^{(n-k+1)}v^{(k)}$$

（参数函数的二阶导数）

已知

$$x=\varphi(t)，\quad y=\psi(t)$$

有

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

那么二阶导数为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right)=\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)=\frac{\dfrac{d\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)}{dt}}{\dfrac{dx}{dt}}=\frac{\left(\dfrac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)'}{\varphi'(t)}=\frac{\psi''(t)\varphi'(t)-\psi'(t)\varphi''(t)}{\left(\varphi'(t)\right)^3}$$

实际上 $\frac{d}{dx}\left(\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}\right)$ 又可以用参数函数求导方式求导。

2.3 无穷小增量公式和有限增量公式

（无穷小增量公式）

如果函数 f 在 x_0 点可导，那么就有

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0)$$

这个式子也可以写成

$$f(x_0+\Delta x)=f(x_0)+f'(x_0)\Delta x+o(\Delta x)$$

上面这些公式称为无穷小增量公式，他们反映了当 $\Delta x=x-x_0\to 0$ 时函数的变化情况。

定义：设 I 是一个区间，$x_0\in I$，如果存在 $\eta>0$，使得 $U(x_0,\eta)\subset I$，那么我们就说 x_0 是区间 I 的一个内点。区间 I 出去断点以外的所有点都是内点，它的全体内点的集合是一个开区间，记为 I^0。

定义：设函数 f 在区间 I 上有定义，$x_0\in I^0$。如果存在 x_0 的一个邻域 $U(x_0,\delta)\subset I$，使得对任何 $x_0\in U(x_0,\delta)$ 都有

$$f(x)\le f(x_0)\ （f(x)\ge f(x_0)）$$

那么我们就说函数 f 在 x_0 点取得极大值（极小值），这时如果对任何 $x_0\in \breve{U}(x_0,\delta)$ 都有

$$f(x)<f(x_0)\ （f(x)>f(x_0)）$$

那么我们就说函数 f 在 x_0 点取得严格的极大值（严格的极小值）。x_0 点称为极值点。

注意：极值是一个局部的概念，函数 f 在 x_0 点取得极大值（极小值），仅仅意味着：与邻近个点的函数值相比，这点的函数值 $f(x_0)$ 是较大的（较小的）。函数 f 在区间 I 上的最大值（最小值）则是一个整体的概念。

引理：设 $A\in R$，$A\neq 0$。如果

$$\varphi(h)=Ah+o(h),\qquad (h\to 0)$$

那么可以断定：对于充分小的 $h\neq 0$，$\varphi(h)$ 与 Ah 同号。

定理 1（费马 Fermat 定理）（极值的必要条件）：设函数 f 在区间 I 上有定义，在这区间内

的 x_0 点取得极值。如果 f 在 x_0 点可导，那么必有

$$f'(x_0)=0$$

证明： 由条件有 $f(x)\le f(x_0)$， x_0 为极值点。则有

$$f(x_0+\Delta x)\le f(x_0)$$

当 $\Delta x>0$ 时有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0$$

当 $\Delta x<0$ 时有

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0$$

根据函数 f 在 x_0 可导，则有

$$f'(x_0)=f_+'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^+}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\le 0$$

$$f'(x_0)=f_-'(x_0)=\lim_{\Delta x\to 0^-}\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x}\ge 0$$

所以只能是 $f'(x_0)=0$。

定义： 我们把使得 $f'(x_0)=0$ 的点 x_0 叫做函数 f 的**临界点**。

注意： 函数 f 在极值点出可以没有导数。例如 $f(x)=|x|$。

定理 2： 设函数 f 在 $[a,b]$ 连续，在 (a,b) 可导，如果方程 $f'(x)=0$ 在 (a,b) 中只有有限个根 $x_1,x_2,\cdots x_k$， 那么函数 f 在区间 $[a,b]$ 上的最大值 M 和最小值 m 分别为

$$M=\max\{f(a),f(x_1),\cdots,f(x_k),f(b)\}$$

和

$$m=\min\{f(a),f(x_1),\cdots,f(x_k),f(b)\}$$

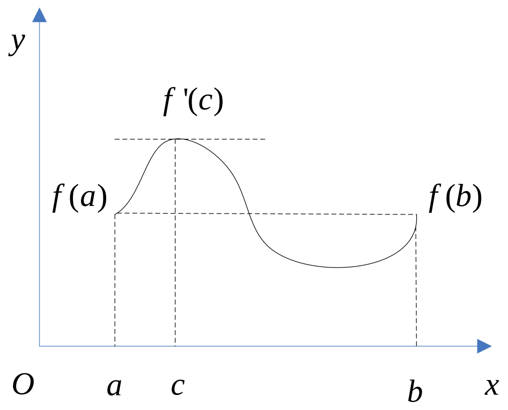
（有限增量公式）

定理 3（Rolle 罗尔定理）： 设函数 f 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，在开区间 (a,b) 上可导，并且满足

$$f(a)=f(b)$$

则存在$c \in (a,b)$，使得

$$f'(c)=0$$



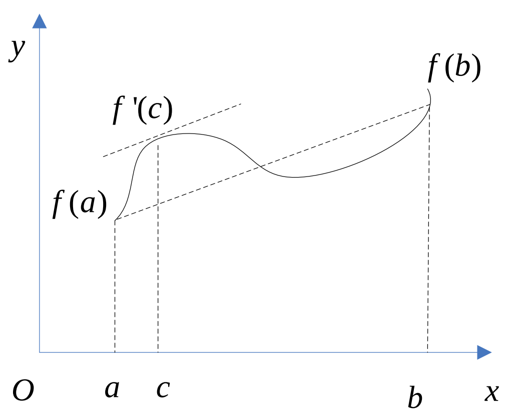
证明： 当$M=m$，则f是常值函数，对于$c \in (a,b)$，$f'(c)=0$成立。当$M \neq m$，那么至少有其中一个极值在点$c \in (a,b)$取得，根据费马定理，在这点就有$f'(c)=0$。

定理 4（Lagrange 拉格朗日定理、中值定理、均值定理）： 设函数f在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，则至少存在一点$c \in (a,b)$，使得

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

或写作

$$f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$$



证明： 构造辅助函数

$$L(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a)$$

容易知道

$$L(a)=L(b)=0$$

根据罗尔定理，存在$c\in(a,b)$，使得

$$L'(c)=f'(c)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

即

$$f'(c)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

设x是区间$[a,b]$上一点，$x+\Delta x$（$\Delta x>0$）是区间上另一点，在拉格朗日公式在区间$[x,x+\Delta x]\subset I$上成为

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(\xi)\Delta x$$

其中$\xi\in[x,x+\Delta x]$，设$\xi-x=\theta\cdot\Delta x$，$0<\theta<1$，则有

$$f(x+\Delta x)-f(x)=f'(x+\theta\cdot\Delta x)\Delta x,\quad 0<\theta<1$$

上式成为**有限增量公式**，这个公式中Δx不必限定为“无穷小量”，它可以使满足$(x+\Delta x)\in I$的任意有限量Δx。

定理 5： 设函数f在区间I上连续，在I^0可导，则

$$f\equiv c\Leftrightarrow f'(x)=0,\forall x\in I^0$$

用文字表达为：如果函数f在某个区间上导数恒为 0，那么f在区间I是一个常数。

推论： 函数f在区间I上连续，在I^0可导，如果存在

$$f'(x)=g'(x),\quad \forall x\in I^0$$

那么存在常数C，使得

$$f(x)=g(x)+C,\quad \forall x\in I$$

定理 6： 设函数f在区间I上连续，在I^0可导，则

如果$f'(x)\geq 0$，$\forall x\in I^0$，那么f在区间I上递增；

如果$f'(x)\leq 0$，$\forall x\in I^0$，那么f在区间I上递减；

2.4 泰勒展式

n阶泰勒展式为

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+\frac{f''(x_0)(x-x_0)^2}{2!}\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)(x-x_0)^n}{n!}+o[(x-x_0)^n]$$

取$x_0=0$，有

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{f''(0)x^2}{2!}\cdots+\frac{f^{(n)}(0)x^n}{n!}+o[x^n]$$

常见的展式：

$$f(x)=e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\cdots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

$$f(x)=\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\cdots+(-1)^{m-1}\frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!}+o(x^{2m-1})$$

$$f(x)=\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\cdots+(-1)^m\frac{x^{2m}}{(2m)!}+o(x^{2m})$$

$$f(x)=\ln(1+x)=x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+o(x^n)$$

$$f(x)=(1+x)^\alpha=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\cdots+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n+o(x^n)$$

2.5 原函数与不定积分

2.5.1 原函数与不定积分概念

定义： 设函数 f 在区间 I 上有定义，如果函数 F 在区间 I 上连续，在 I^0 可导，并且满足条件：

$$F'(x)=f(x),\quad \forall x\in I^0$$

或者

$$dF(x)=f(x)dx,\quad \forall x\in I^0$$

那么我们就说 F 是函数 f 的一个原函数，或者说 F 是微分形式 $f(x)dx$ 的一个原函数。

定理 1: 设函数 f 在区间 I 上有定义，如果 F 是函数 f 的一个原函数，那么对任意的 $C\in R$，函数

$$F(x)+C$$

也是函数 f 的一个原函数，并且 f 的任何原函数都可以写成这种形式。

定义： 设函数 f 在区间 I 上有定义，如果 F 是函数 f 的一个原函数，则函数簇

$$F(x)+C,\quad C\in R$$

表示 f 的一切原函数，我们把这函数簇叫做函数 f 的不定积分，或者叫微分形式 $f(x)dx$ 的不定积分，记为

$$\int f(x)dx=F(x)+C$$

在这里，$f(x)$ 称为被积函数，$f(x)dx$ 称为被积表示式，而 $\int$ 是表示不定积分的符号。

根据定义有：

$$\left(\int f(x)dx\right)'=f(x)$$

$$d\left(\int f(x)dx\right)=f(x)dx$$

和

$$\int F'(x)dx=F(x)+C$$

$$\int dF(x)=F(x)+C$$

定理 2： 如果 $F(x)$ 和 $G(x)$ 分别是函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的原函数，λ 是一个实数，那么 $F(x)+G(x)$ 是函数 $f(x)+g(x)$ 的原函数，$\lambda F(x)$ 是函数 $\lambda f(x)$ 的原函数。我们有以下运算法则：

$$\int(f(x)+g(x))dx=\int f(x)dx+\int g(x)dx$$

$$\int(\lambda f(x))dx=\lambda\int f(x)dx$$

常见积分表：

$$\int 0dx=C$$

$$\int 1dx=x+C$$

$$\int x^{\mu}dx=\frac{1}{\mu+1}x^{\mu+1}+C$$

$$\int x^{-1}dx=\int\frac{1}{x}dx=\ln|x|+C$$

$$\int\frac{1}{x-a}dx=\ln|x-a|+C$$

$$\int e^{x}dx=e^{x}+C$$

$$\int a^{x}dx=\frac{a^{x}}{\ln a}+C$$

$$\int\cos xdx=\sin x+C$$

$$\int\sin xdx=-\cos x+C$$

$$\int\frac{1}{\cos^{2}x}dx=\tan x+C$$

$$\int\frac{1}{\sin^{2}x}dx=-\cot x+C$$

$$\int\frac{1}{1+x^{2}}dx=\arctan x+C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{1-x^{2}}}dx=\arcsin x+C$$

$$\int\frac{1}{\sqrt{x^{2}+a^{2}}}dx=\ln|x+\sqrt{x^{2}+a^{2}}|+C$$

简单的例题：

（1） $\int \tan^2 x dx$

$$\int \tan^2 x dx = \int \frac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x} dx = \int \left(\frac{1}{\cos^2 x} - 1 \right) dx = \int \frac{1}{\cos^2 x} dx - \int 1 dx = \tan x - x + C$$

（2） $\int \frac{1}{\sin^2 2x} dx$

$$\int \frac{1}{\sin^2 2x} dx = \int \frac{1}{4\sin^2 x \cos^2 x} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1-\cos^2 x)\cos^2 x} dx$$

$$= \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{(1-\cos^2 x)} dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\cos^2 x} dx + \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sin^2 x} dx$$

$$= \frac{1}{4} (\tan x - \cot x) + C$$

（3） $\int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx$

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)(x-\beta)} dx = \frac{1}{\alpha-\beta} \int \left(\frac{1}{x-\alpha} - \frac{1}{x-\beta} \right) dx$$

$$= \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\ln|x-\alpha| - \ln|x-\beta| \right) + C = \frac{1}{\alpha-\beta} \ln\left| \frac{x-\alpha}{x-\beta} \right| + C$$

（4） $\int \frac{1}{x^2-a^2} dx$

$$\int \frac{1}{x^2-a^2} dx = \frac{1}{2a} \left(\int \frac{1}{x-a} dx - \int \frac{1}{x+a} dx \right) = \frac{1}{2a} \ln\left| \frac{x-a}{x+a} \right| + C$$

（5） $\int \frac{x^2}{1+x^2} dx$

$$\int \frac{x^2}{1+x^2} dx = \int \left(1 - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = x - \arctan x + C$$

（6） $\int \frac{1}{x^4-1} dx$

$$\int \frac{1}{x^4-1} dx = \int \frac{1}{(x^2-1)(x^2+1)} dx = \frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{x+1} \right) - \frac{1}{1+x^2} \right) dx = \frac{1}{4} \ln\left| \frac{x-1}{x+1} \right| - \frac{1}{2} \arctan x + C$$

（7） $\int \frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x+2} dx$

$$\int \frac{x^2+x-1}{x^3-2x^2+x-2} dx = \int \frac{(x^2+1)+(x-2)}{(x^2+1)(x-2)} dx = \int \frac{1}{x-2} dx + \int \frac{1}{1+x^2} dx = \ln|x-2| + \arctan x + C$$

2.5.2 换元积分法

引理：如果

$$dG(u)=g(u)du$$

那么把 u 换成可微函数 $u=u(v)$ 仍有

$$dG(u(v))=g(u(v))du(v)$$

这就是说，从

$$\int g(u)du=G(u)+C$$

可以得到

$$\int g(u(v))du(v)=G(u(v))+C$$

在不定积分的表示式中可以做换元替换。

第一换元法

写成如下形式

$$\int f(x)dx=\int g(u(x))du(x)=G(u(x))+C$$

常见例子

$$\int e^{3x}dx=\int\frac{1}{3}e^{3x}d(3x)=\frac{1}{3}\int e^{3x}d(3x)=\frac{1}{3}e^{3x}+C$$

$$\int e^{ax}dx=\int\frac{1}{a}e^{ax}d(ax)=\frac{1}{a}\int e^{ax}d(ax)=\frac{1}{a}e^{ax}+C$$

$$\int\frac{1}{\sin^2 2x}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{\sin^2 2x}d(2x)=-\frac{1}{2}\cot 2x+C$$

$$\int\frac{1}{\sin^2 ax}dx=\frac{1}{a}\int\frac{1}{\sin^2 ax}d(ax)=-\frac{1}{a}\cot ax+C$$

$$\int\cos(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int\cos(ax+b)d(ax+b)=\frac{1}{a}\sin(ax+b)+C$$

一般有公式： $\int g(ax+b)dx=\frac{1}{a}\int g(ax+b)d(ax+b)$

$$\int xe^{x^2}dx=\int\frac{1}{2}e^{x^2}d(x^2)=\frac{1}{2}e^{x^2}+C$$

$$\int\frac{x}{1+x^4}dx=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+(x^2)^2}d(x^2)=\frac{1}{2}\arctan x^2+C$$

$$\int\frac{x^2}{\cos^2 x^3}dx=\frac{1}{3}\int\frac{1}{\cos^2 x^3}d(x^3)=\frac{1}{3}\tan x^3+C$$

一般有公式： $\int g(x^k)x^{k-1}dx=\frac{1}{k}\int g(x^k)d(x^k)$

$$\int\frac{(\ln x)^k}{x}dx=\int(\ln x)^k\frac{1}{x}dx=\int(\ln x)^k d(\ln x)=\frac{(\ln x)^k}{k+1}+C$$

一般有公式： $\int\frac{g(\ln x)}{x}dx=\int g(\ln x)d(\ln x)$

$$\int\frac{e^x}{1+e^{2x}}dx=\int\frac{1}{1+(e^x)^2}d(e^x)=\arctan e^x+C$$

$$\int\sin^2 xdx=\int\frac{1}{2}(1-\cos 2x)dx=\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

$$\int\cos^2 xdx=\int\frac{1}{2}(1+\cos 2x)dx=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\sin 2x+C$$

$$\int\tan xdx=\int\frac{\sin x}{\cos x}dx=-\int\frac{1}{\cos x}d(\cos x)=-\ln|\cos x|+C$$

$$\int\cot xdx=\int\frac{\cos x}{\sin x}dx=\int\frac{1}{\sin x}d(\sin x)=\ln|\sin x|+C$$

$$\int\cos^3 xdx=\int\cos^2 xd(\sin x)=\int(1-\sin^2 x)d(\sin x)=\sin x-\frac{1}{3}\sin^3 x+C$$

$$\int\sin^3 xdx=-\int(1-\cos^2 x)d(\cos x)=-\cos x+\frac{1}{3}\cos^2 x+C$$

$$\int\frac{1}{\cos x}dx=\int\frac{\cos x}{\cos^2 x}dx=\int\frac{1}{1-\sin^2 x}d(\sin x)=-\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x-1}{\sin x+1}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin x+1}{\sin x-1}\right|+C$$

$$=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sin x+1)(\sin x+1)}{(\sin x-1)(\sin x+1)}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sin x+1)^2}{1-\sin^2 x}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sin x+1)^2}{\cos^2 x}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sin x+1)}{\cos x}\right|^2+C$$

$$=\ln\left|\frac{(\sin x+1)}{\cos x}\right|+C=\ln\left|\sec x+\tan x\right|+C$$

一般有公式： $\int\frac{du}{u^2-1}=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{u-1}{u+1}\right|+C$

$$\int\frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}}=\frac{1}{|a|}\int\frac{dx}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\frac{a}{|a|}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}}=\frac{a}{|a|}\arcsin\frac{x}{a}+C$$

$$\int\frac{dx}{a^2+x^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$$

求 $\int\frac{dx}{x^2+px+q}$

情形 1：$x^2+px+q=0$ 有两个不等的实根 α 和 β

$$x^2+px+q=(x-\alpha)(x-\beta) \qquad \alpha\neq\beta$$

则

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{(x-\alpha)(x-\beta)}=\frac{1}{\alpha-\beta}\ln\left|\frac{x-\alpha}{x-\beta}\right|+C$$

情形 2：$x^2+px+q=0$ 有重实根 γ

$$x^2+px+q=(x-\gamma)^2$$

则

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{(x-\gamma)^2}=-\frac{1}{x-\gamma}+C$$

情形 3：$x^2+px+q=0$ 有共轭复根 $\lambda\pm\mu i$

$$x^2+px+q=\left(x+\frac{p}{2}\right)^2+q-\frac{p^2}{4}=(x-\lambda)^2+\mu^2$$

则

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\int\frac{dx}{(x-\lambda)^2+\mu^2}=\frac{1}{\mu}\int\frac{d\left(\frac{x-\lambda}{\mu}\right)}{1+\left(\frac{x-\lambda}{\mu}\right)^2}=\frac{1}{\mu}\arctan\frac{x-\lambda}{\mu}+C$$

由于

$$\lambda=-\frac{p}{2},\quad \mu=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}$$

则

$$\int\frac{dx}{x^2+px+q}=\frac{1}{\mu}\arctan\frac{x-\lambda}{\mu}+C=\frac{1}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}\arctan\frac{x+\frac{p}{2}}{\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}}+C$$

第二换元法

这种方法中，需要作适当的换元 $x=\varphi(t)$，这里函数 $\varphi(t)$ 在区间 J 上严格单调并且连续，在这区间的内部可导，并且满足条件 $\varphi'(t)\neq0$，那么有

$$\int f(x)dx=\int f(\varphi(t))d(\varphi(t))=\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt=G(t)+C$$

在作替换$t=\varphi^{-1}(x)$，那么得到

$$\int f(x)dx = G(\varphi^{-1}(t))+C$$

简单例子：

（1）$\int \sqrt{a^2-x^2}dx \qquad (a>0)$

令$x=a\sin t,(-\frac{\pi}{2}\le t\le \frac{\pi}{2})$，那么

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\int \sqrt{a^2-(a\sin t)^2}d(a\sin t)=\int a^2\cos^2 tdt=a^2\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C$$

由于$t=\arcsin\frac{x}{a}$，$\sin 2t=2\sin t\cos t=2\sin t\sqrt{1-\sin^2 t}=2\frac{x}{a}\sqrt{1-\left(\frac{x}{a}\right)^2}$代入有

$$\int \sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{a^2t}{2}+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=\frac{1}{2}\left(a^2\arcsin\frac{x}{a}+x\sqrt{a^2-x^2}\right)+C$$

（2）$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}$

令$x=a\tan t$，那么

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\int \frac{d(a\tan t)}{\left((a\tan t)^2+a^2\right)^2}=\int \frac{\frac{a}{\cos^2 t}dt}{\left(\frac{a^2}{\cos^2 t}\right)^2}=\int \frac{\cos^2 t}{a^3}dt=\frac{1}{a^3}\int \frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{t}{2a^3}+\frac{\sin 2t}{4a^3}+C$$

由于$t=\arctan\frac{x}{a}$，那么$\sin 2t=2\sin t\cos t=\frac{2\sin t\cos t}{\sin^2 t+\cos^2 t}=\frac{2\tan t}{1+\tan^2 t}=\frac{2ax}{x^2+a^2}$，则

$$\int \frac{dx}{(x^2+a^2)^2}=\frac{t}{2a^3}+\frac{\sin 2t}{4a^3}+C=\frac{1}{2a^3}\arctan\frac{x}{a}+\frac{x}{2a^2(x^2+a^2)}+C$$

（3）$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$，$a>0$

令$x=a\tan t$，那么

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\int\frac{d(a\tan t)}{\sqrt{(a\tan t)^2+a^2}}=\int\frac{\frac{a}{\cos^2 t}dt}{\sqrt{\frac{a^2}{\cos^2 t}}}=\int\frac{dt}{\cos t}$$

$$=\int\frac{\cos t}{\cos^2 t}dt=\int\frac{d(\sin t)}{1-\sin^2 t}=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{\sin t+1}-\frac{1}{\sin t-1}\right)d(\sin t)=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{\sin t+1}{\sin t-1}\right|+C$$

$$==\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sin t+1)(\sin t+1)}{(\sin t-1)(\sin t+1)}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sin t+1)^2}{1-\sin^2 t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sin t+1)^2}{\cos^2 t}\right|+C=\frac{1}{2}\ln\left|\frac{(\sin t+1)}{\cos t}\right|^2+C$$

$$=\ln\left|\frac{(\sin t+1)}{\cos t}\right|+C=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C=\ln\left|\frac{\sqrt{x^2+a^2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C=\ln\left|\sqrt{x^2+a^2}+x\right|+C$$

（3）$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$， $a>0$

令 $x=a\sec t$，则

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{d(a\sec t)}{\sqrt{a^2\sec^2 t-a^2}}=\int\frac{\tan t\sec t}{\sqrt{\tan^2 t}}dt=\int\frac{\tan t}{|\tan t|}\cdot\frac{1}{\cos t}dt$$

分情况讨论：

$x>a$， $0<t<\pi/2$，

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\int\frac{1}{\cos t}dt=\ln\left|\sec t+\tan t\right|+C=\ln\left|\frac{x}{a}+\sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2-1}\right|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

$x<-a$， $-\pi/2<t<0$，令 $x=-u$，则 $u>a$，有

$$\int\frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}}=\ln\left|u+\sqrt{u^2-a^2}\right|+C$$，代入 $u=-x$ 有

$$\int\frac{-dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|-x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$ 那么

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=-\ln\left|-x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C=\ln\left|\frac{1}{-x+\sqrt{x^2-a^2}}\right|+C=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C$$

因此，统一有

$$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2-a^2}\right|+C，\quad x\neq a$$

2.5.3. 分部积分法

分部积分公式：

根据公式

$$d(u(x)v(x)) = du(x)v(x) + u(x)dv(x)$$

得到

$$u(x)dv(x) = d(u(x)v(x)) - v(x)du(x)$$

由此得到

$$\int u(x)dv(x) = u(x)v(x)) - \int v(x)du(x)$$

简单的例子

（1） $\int x\cos xdx$

$$\int x\cos xdx = \int xd(\sin x) = x\sin x - \int \sin xdx = x\sin x + \cos x + C$$

（2） $\int x\sin xdx$

$$\int x\sin xdx = -\int xd(\cos x) = -(x\cos x - \int \cos xdx) = -x\cos x + \sin x + C$$

（3） $\int xe^x dx$

$$\int xe^x dx = \int xd(e^x) = xe^x - \int e^x dx = (x-1)e^x + C$$

（4） $\int x^k \ln xdx$

$$\int x^k \ln xdx = \int \frac{\ln x}{k+1} d(x^{k+1}) = \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x - \int \frac{x^k}{k+1}dx = \frac{x^{k+1}}{k+1}\ln x - \frac{x^{k+1}}{(k+1)^2} + C$$

（5）上式中 $k=-1$， $\int \frac{\ln x}{x}dx$

$$\int \frac{\ln x}{x}dx = \int \ln xd(\ln x) = \frac{1}{2}(\ln x)^2 + C$$

（6） $\int x\arctan xdx$

$$\int x\arctan xdx = \int \arctan xd(\frac{1}{2}x^2) = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \int \frac{1}{2}x^2 d(\arctan x)$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \int \frac{x^2}{2(1+x^2)}dx = \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{2}x^2\arctan x - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\arctan x + C$$

（7） $\int x^2\cos xdx$

$$\int x^2\cos xdx=\int x^2d(\sin x)=x^2\sin x-2\int x\sin xdx=x^2\sin x+2\left(x\cos x-\int\cos xdx\right)$$
$$=x^2\sin x+2x\cos x-2\sin x+C$$

（8）$\int e^{ax}\cos bxdx$，$\int e^{ax}\sin bxdx$

$$\int e^{ax}\cos bxdx=\frac{1}{a}\int\cos bxd(e^{ax})=\frac{1}{a}e^{ax}\cos bx+\frac{b}{a}\int e^{ax}\sin bxdx$$
$$\int e^{ax}\sin bxdx=\frac{1}{a}\int\sin bxd(e^{ax})=\frac{1}{a}e^{ax}\sin bx-\frac{b}{a}\int e^{ax}\cos bxdx$$

联立上两式方程即可解得。

（9）$J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}$

$$J_n=\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}-\int xd\left(\frac{1}{(x^2+a^2)^n}\right)=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{x^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx$$
$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{(x^2+a^2)-a^2}{(x^2+a^2)^{n+1}}dx=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2n\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^n}-2na^2\int\frac{dx}{(x^2+a^2)^{n+1}}$$
$$=\frac{x}{(x^2+a^2)^n}+2nJ_n-2na^2J_{n+1}$$

因此有

$J_{n+1}=\frac{x}{2na^2(x^2+a^2)^n}+\frac{2n-1}{2na^2}J_n$，我们已知有

$J_1=\int\frac{dx}{x^2+a^2}=\frac{1}{a}\int\frac{d\left(\frac{x}{a}\right)}{1+\left(\frac{x}{a}\right)^2}=\frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a}+C$，由上面的递推公式我们可求得任意 J_n

2.5.4. 有理函数的积分

少数初等函数的原函数不再是初等函数，例如

$$\int e^{-x^2}dx\,,\quad \int \sin x^2 dx\,,\quad \int \cos x^2 dx$$

$$\int \frac{\sin x}{x}dx\,,\quad \int \frac{\cos x}{x}dx\,,\quad \int \frac{x}{\ln x}dx$$

一个不定积分不能用初等函数来表示，并不意味着这个不定积分不存在，相反的，任何连续函数 $f(x)$ 都具有原函数，也就是说任何连续函数的不定积分总是存在的，只是这不定积分不一定能表示成初等函数。但是有一些类型的函数，他们的不定积分总能够表示成初等函数，对这种情形，我们就说这类函数能积分为有限形式。

定理 1： 在实数范围内，一个多项式额不可约因式只可能是一次的或者二次的。有理式真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$，设 $Q(x)$ 的不可约因式分解如下：

$$Q(x)=(x-a_1)^{h_1}\cdots(x-a_r)^{h_r}\cdot(x^2+p_1x+q_1)^{k_1}\cdots(x^2+p_sx+q_s)^{k_s}$$

则真分式 $\frac{P(x)}{Q(x)}$ 可唯一的表示成以下简单分式之和：

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=\sum_{i=1}^{r}\left(\frac{A_i^{(1)}}{x-a_i}+\frac{A_i^{(2)}}{(x-a_i)^2}+\cdots+\frac{A_i^{(h_i)}}{(x-a_i)^{h_i}}\right)$$
$$+\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{M_j^{(1)}x+N_j^{(1)}}{x^2+p_jx+q_j}+\frac{M_j^{(2)}x+N_j^{(2)}}{(x^2+p_jx+q_j)^2}+\cdots+\frac{M_j^{(k_j)}x+N_j^{(k_j)}}{(x^2+p_jx+q_j)^{k_j}}\right)$$

简单例子：

（1）分式分解 $\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)^m(x^2+1)^n}$

由定理 1 可知

$$\frac{3x^4+2x^3+3x^2-1}{(x-2)^m(x^2+1)^n}=\sum_{i=1}^{m}\frac{A^{(i)}}{(x-2)^i}+\sum_{j=1}^{n}\frac{B^{(j)}x+C^{(j)}}{(x^2+1)^j}$$
$$=\frac{A^{(1)}}{(x-2)}+\cdots+\frac{A^{(m)}}{(x-2)^m}+\cdots+\frac{B^{(1)}x+C^{(1)}}{(x^2+1)}+\cdots+\frac{B^{(n)}x+C^{(n)}}{(x^2+1)^n}$$

2.6 定积分

2.6.1. 定积分的定义与初等性质

定积分概念的精确化，是黎曼（Riemann）的贡献。所以人们称定积分为“黎曼积分”。

闭区间$[a,b]$的分割：插入在a和b质检的有限个分点

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

这些分点把$[a,b]$分割成m个闭子区间

$$[x_0, x_1], [x_1, x_2], \cdots, [x_{m-1}, x_m],$$

其中第i个子闭区间的长度为

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$$

我们把

$$|P| = \max\{\Delta x_1, \Delta x_2, \cdots, \Delta x_m\}$$

叫做分割P的模。在分割P的每一个闭子区间上任意选取一点

$$\xi_i \in [x_{i-1}, x_i], \quad i = 1, 2, \cdots, m.$$

我们把这样m个点$\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_m$叫做相应于分割$P$的一组标志点，并约定用单独的一个字母$\xi$来表示它们。

设函数f在闭区间$[a,b]$上有定义，对于$[a,b]$的任意一个分割

$$P: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b$$

和相应于这分割的任意一组标志点ξ，可以作和数

$$\sigma(f, P, \xi) = \sum_{i=1}^{m} f(\xi_i)\Delta x_i$$

我们把这个和数称为函数f在闭区间$[a,b]$上的积分和（或者黎曼和）。如果闭区间$[a,b]$的分割的序列$\{P^{(n)}\}$满足条件

$$\lim_{n\to+\infty} |P^{(n)}| = 0$$

那么我们就说$\{P^{(n)}\}$是一个无穷细分割序列。

定义 I：设函数 f 在闭区间$[a,b]$上有定义，如果有存在实数I 使得对于任意无穷细分割序列$\{P^{(n)}\}$，不论相应于每个分割$P^{(n)}$的标志点组$\xi^{(n)}$怎么选择，都有

$$\lim_{n\to+\infty}\sigma(f,P,\xi)=I$$

我们就说函数 f 在闭区间$[a,b]$上可积，并把I 称为函数 f 在闭区间$[a,b]$上的定积分，记为

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{|P|\to 0}\sigma(f,P,\xi)=I$$

这里$\int$ 称为积分号，$f(x)dx$ 称为被积分表示式，a 和b 称为积分限。

常见例子

（1）常值函数 $f(x)\equiv C$ 在任何区间$[a,b]$上可积，并且

$$\int_a^b C=C(b-a)$$

事实上，对于$[a,b]$的任意分割P 和相应于这分割的任意标志点组ξ，都有

$$\sigma(C,P,\xi)=\sum_{i=1}^{m}C\Delta x_i=C(b-a)$$

定理 1（积分的线性性质）：设函数 f 和 g 在$[a,b]$上可积，$\lambda\in R$，则函数 $f+g$ 和函数λf 也都在$[a,b]$上可积，并且

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^b \lambda f(x)dx=\lambda\int_a^b f(x)dx$$

定理 2（积分的可加性）：设$a<b<c$，如果函数 f 在$[a,b]$和$[b,c]$上都可积，那么它在$[a,c]$上也可积，并且

$$\int_a^c f(x)dx=\int_a^b f(x)dx+\int_b^c f(x)dx$$

定理 3（积分的单调性）：设 $a<b$，函数 f 和 g 在$[a,b]$上可积并且满足

$$f(x)\le g(x)，\ \forall x\in[a,b]$$

则有

$$\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$$

证明：构造辅助函数$\varphi(x)=g(x)-f(x)$。

定理 4（积分的中值定理）：设$a<b$，函数f和g在$[a,b]$上可积，如果

$$m \le f(x) \le M，\quad \forall x \in [a,b]$$

那么

$$m(b-a) \le \int_a^b f(x)dx \le M(b-a)$$

特别的，如果f在$[a,b]$连续，那么存在$c\in[a,b]$，使得

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$ （用求面积来理解）

即有

$$f(c)=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx$$

性质 1： $a=b$，则$\int_a^b f(x)dx=0$；

性质 2： $a>b$，则$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$；

（定积分定义的应用）

$$\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to+\infty}\frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$ （可以反过来用）

2.6.2 牛顿-莱布尼兹公式

积分上限函数：设 f 在 $[a,b]$ 连续，并且设 x 为 $[a,b]$ 上的一点，现在我们来考察 $f(x)$ 在部分区间 $[a,x]$ 上的定积分

$$\int_a^x f(x)dx$$

这里 x 既表示积分上限，又表示积分变量，因为定积分与积分变量的记法无关，所以为了明确起见，可以吧积分变量改用其他符号，这里可以用 t 表示

$$\int_a^x f(t)dt$$

对于每一个取定制的 x，定积分有一个对应值，所以它在 $[a,x]$ 上定义了一个函数，记作 $\Phi(x)$：

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt\text{，}\quad (a\le x\le b)$$

定理 1：如果函数 f 在 $[a,b]$ 上连续，则积分上限的函数

$$\Phi(x)=\int_a^x f(t)dt$$

在 $[a,b]$ 上可导，并且他的导数即使函数 f 本身，即

$$\Phi'(x)=\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt=f(x),\quad a\le x\le b$$

证明：若 $x\in[a,b]$，设 x 获得增量 Δx，使得 $x+\Delta x\in[a,b]$，则 $\Phi(x)$ 在 $x+\Delta x$ 处的函数值为

$$\Phi(x+\Delta x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt$$

因此函数 $\Phi(x)$ 的增量

$$\Delta\Phi=\Phi(x+\Delta x)-\Phi(x)=\int_a^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt=\int_a^x f(t)dt+\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt-\int_a^x f(t)dt$$
$$=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt$$

在应用积分终止定理，即有等式

$$\Delta\Phi=\int_x^{x+\Delta x} f(t)dt=f(\xi)\Delta x\text{，}\quad \xi\in[x,x+\Delta x]$$

则得到

$$\frac{\Delta\Phi}{\Delta x}=f(\xi)$$

当$\Delta x \to 0$时，$\xi \to x$，因此有

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta\Phi}{\Delta x} = f(x)$$

因此有

$$\Phi'(x) = f(x)$$

定理 2：如果函数 f 在$[a,b]$上连续，则函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

就是 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数。

定理 3（牛顿-莱布尼兹公式）：如果$F(x)$是连续函数 $f(x)$ 在$[a,b]$上的一个原函数，则有

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

证明：根据定理 2，我们知道 $f(x)$ 的积分上限函数是 $f(x)$ 的一个原函数

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t)dt$$

由于$F(x)$也是函数 $f(x)$ 的一个原函数，于是这两个原函数之间相差为一个常数，即

$$F(x) - \Phi(x) = C，\quad x \in [a,b]$$

在上式中令$x = a$，由于$\Phi(a) = \int_a^a f(t)dt = 0$，因此有

$$F(a) = C$$

那么有

$$\Phi(x) = F(x) - C = F(x) - F(a)$$

令$x = b$，则

$$\Phi(b) = F(b) - C = F(b) - F(a)$$

也就是说

$$\Phi(b) = \int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

命题得证。

简单例子：

（1）$\int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{3}$

（2）$\int_a^b e^x dx = e^x\Big|_{x=a}^{x=b} = e^b - e^a$

（3）$\int_a^b \frac{dx}{x} = \ln|x|\Big|_{x=a}^{x=b} = \ln\left|\frac{b}{a}\right|$（这里必须是$b > a > 0$）

（4）$\int_0^{\pi} \sin x dx = (-\cos x)\Big|_{x=0}^{x=\pi} = 2$

（5）求极限

$$\lim\left(\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\right)=\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2$$

这里相当于$\Delta x=\frac{1}{n}$，相当于对$\frac{1}{1+x}$求积分。

（5）求极限

$$\lim\left(\frac{n}{n^2+1^2}+\frac{n}{n^2+2^2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n^2}\right)=\lim\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\left(\frac{k}{n}\right)^2}\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1\frac{1}{1+x^2}dx=\arctan x\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{\pi}{4}$$

（6）求极限

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{1^p+2^p+\cdots+n^p}{n^{p+1}}=\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^p\cdot\frac{1}{n}=\int_0^1 x^p dx=\frac{1}{p+1}x^{p+1}\Big|_{x=0}^{x=1}=\frac{1}{p+1}$$

（6）设函数$f(x)$在$[0,+\infty)$内连续且$f(x)>0$，证明函数

$$F(x)=\frac{\int_0^x tf(t)dx}{\int_0^x f(t)dx}$$

在$(0,+\infty)$内为单调增加函数。

证明：

$$\frac{d}{dx}\int_0^x tf(t)dt = xf(x)，\quad \frac{d}{dx}\int_0^x f(t)dt = f(x)$$

那么

$$F'(x)=\frac{xf(x)\int_0^x f(t)dx - f(x)\int_0^x tf(t)dx}{\left(\int_0^x f(t)dx\right)^2}$$

由于

$$xf(x)\int_0^x f(t)dx - f(x)\int_0^x tf(t)dx = f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dx$$

且由于

$$(x-t)f(t) > 0$$

那么

$$xf(x)\int_0^x f(t)dx - f(x)\int_0^x tf(t)dx = f(x)\int_0^x (x-t)f(t)dx > 0$$

命题得证。

（8）求$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2}$

容易知道这是一个$\dfrac{0}{0}$型的未定式，我们利用洛必达法则来计算，分子式可写成

$$-\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt$$

它是以$\cos x$为积分上限，作为x的函数可看成是以$u=\cos x$为中间变量的复合函数，

$$-\frac{d}{dt}\int_1^{\cos x} e^{-t^2}dt = -\frac{d}{d(\cos x)}f(\cos x) = -\frac{d}{du}f(u)\cdot\frac{du}{dt} = -\frac{d}{du}\int_1^u e^{-t^2}dt\cdot\frac{du}{dt}$$

$$= -e^{-u^2}\cdot u' = \sin x e^{-\cos^2 x}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\int_{\cos x}^{1} e^{-t^2}dt}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\sin x e^{-\cos^2 x}}{2x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{2e^{\cos^2 x}} = \frac{1}{2e}$$

2.6.3 定积分的换元法和分部积分法

（定积分的换元法）

定理 1： 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续，函数 $x=\varphi(t)$ 满足条件

（1） $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$;

（2） $\varphi(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 具有连续导数，且值域为 $[a,b]$，

则有

$$\int_a^b f(x)dx=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$$

几点注意：

（1）用 $x=\varphi(t)$ 把原来变量 x 代换成新变量时，积分限也要变换成相应于新变量 t 的积分限。

（2）直接用新变量 t 求最终的值就可以了。

简单的例子：

（1） $\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx \quad (a>0)$

$x=a\sin t$，由于 $0<a\sin t<a$，那么 $0<t<\dfrac{\pi}{2}$，

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{a^2-a^2\sin^2 t}\cdot a\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}a^2\cos^2 tdt=a^2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos 2t}{2}dt$$

$$=\frac{a^2}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_{t=0}^{t=\frac{\pi}{2}}=\pi a^2$$

（2）计算 $\int_0^4 \dfrac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx$

令 $t=\sqrt{2x+1}$， $x=\dfrac{t^2-1}{2}$。当 $x=0$， $t=1$；当 $x=4$， $t=3$。

$$\int_0^4 \frac{x+2}{\sqrt{2x+1}}dx=\int_1^3 \frac{\frac{t^2-1}{2}+2}{t}tdt=\int_1^3 \frac{t^2+3}{2}dt=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}t^3+3t\right)\Bigg|_{t=1}^{t=3}=\frac{22}{3}$$

定理 2：（奇偶函数积分）

（1）若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，则

$$\int_{-a}^a f(x)dx=2\int_0^a f(x)dx$$

（2）若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = 0$$

证明：$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx$，作 $t=-x$

那么

$$\int_{-a}^{0} f(x)dx = \int_{a}^{0} -f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-t)dt = \int_{0}^{a} f(-x)dx$$

故有

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{-a}^{0} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} f(x)dx + \int_{0}^{a} f(-x)dx$$
$$= \int_{0}^{a} \left(f(x) + f(-x) \right) dx$$

（1）如果 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为偶函数，则 $f(-x)=f(x)$，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} \left(f(x) + f(-x) \right) dx = 2\int_{0}^{a} f(x)dx$$

（2）若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续且为奇函数，则 $f(-x)=-f(x)$，则

$$\int_{-a}^{a} f(x)dx = \int_{0}^{a} \left(f(x) + f(-x) \right) dx = 0$$

（2）分部积分法

依据不定积分的分部积分法可得

$$\int_{a}^{b} u(x)v'(x)dx = \left(\int u(x)v'(x)dx \right)\Big|_{a}^{b} = \left(u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)dx \right)\Big|_{a}^{b}$$
$$= \left(u(x)v(x) \right)\Big|_{a}^{b} - \int_{a}^{b} v(x)u'(x)dx$$

这就是定积分的分部积分法

简单例子：

（1）$\int_{0}^{1} e^{\sqrt{x}} dx$

先用换元法，令 $t=\sqrt{x}$， $x=t^2$； $x=0$， $t=0$； $x=1$， $t=1$； $dx=2tdt$，原式变为

$$\int_{0}^{1} e^{\sqrt{x}} dx = \int_{0}^{1} 2te^{t}dt = \int_{0}^{1} 2td(e^{t}) = \left(2te^{t}\right)\Big|_{0}^{1} - \int_{0}^{1} 2e^{t}dt = 2e - \int_{0}^{1} 2d(e^{t}) = 2e - \left(2e^{t}\right)_{0}^{1}\Big| = 2$$

2.6.4 定积分的几何应用（微元法）

微元法：

（1）根据具体的情况，选取一个变量例如 x 作为积分变量，并确定它的变化区间 $[a,b]$；

（2）设想把区间 $[a,b]$ 分成 n 个小区间，选取其中任一小区间并记作 $[x,x+dx]$，求出相应于这个小区间的部分量 ΔU，将 ΔU 近似地表示成函数 $f(x)$ 在 x 处与 dx 的乘积，并记作

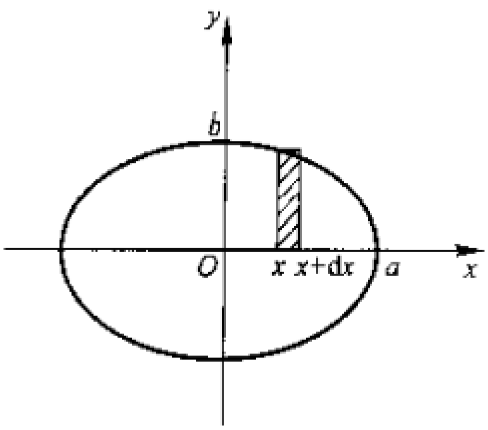
$$dU=f(x)dx$$

（3）对上式作定积分，得所求量为

$$U=\int_a^b dU=\int_a^b f(x)dx$$

（平面图形的面积）

（1）椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 的面积



椭圆在四个象限的面积是一样的，设第一象限的面积为 A，则

$$dA=ydx$$

那么有

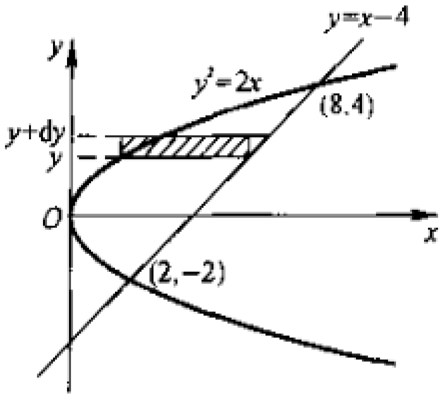
$$A=\int_0^a ydx=\int_0^a b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}dx$$

令 $x=a\sin t$，

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} b\sqrt{1-\frac{a^2\sin^2 t}{a^2}}a\cos tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\cos^2 tdt=\int_0^{\frac{\pi}{2}} ab\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{ab}{2}\left(t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi ab}{4}$$

则椭圆的面积为 $4A=\pi ab$

（2）求抛物线 $y^2=2x$ 与直线 $x-y=4$ 所围图形的面积。



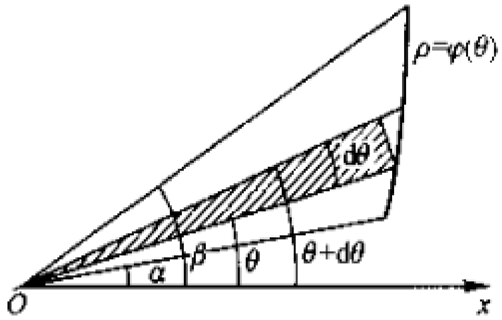
微元的面积为

$$dA=(x_2-x_1)dy=\left((y+4)-\frac{y^2}{2}\right)dy$$

y 值范围是 $[-2,4]$，那么面积是

$$A=\int_{-2}^{4}\left((y+4)-\frac{y^2}{2}\right)dy=\left(\frac{1}{2}y^2+4y-\frac{1}{6}y^3\right)\Bigg|_{-2}^{4}=18$$

（极坐标表示的曲线围成的面积）



曲线 $\rho=\varphi(\theta)$ 和射线 $\theta=\alpha$，$\theta=\beta$ 围成一面积。则积分变量是 θ，变化区间是 $[\alpha,\beta]$。

对于任意一小区间 $[\theta,\theta+d\theta]$，扫过的窄曲边扇形面积可以用半径为 $\varphi(\theta)$，夹角为 θ 的圆扇形表示，即

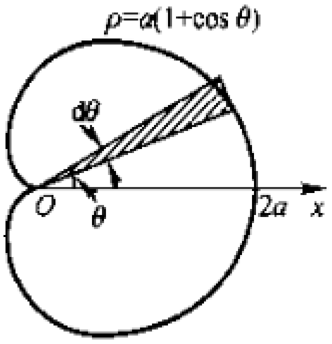
$$dA=\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^2\,d\theta$$

那么面积为：

$$A=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{2}[\varphi(\theta)]^{2}d\theta$$

简单例子

（1）计算简单心形线 $\rho=a(1+\cos\theta)$ 所围成图形的面积。



积分变量的区间为 $[0,2\pi]$，则微元为

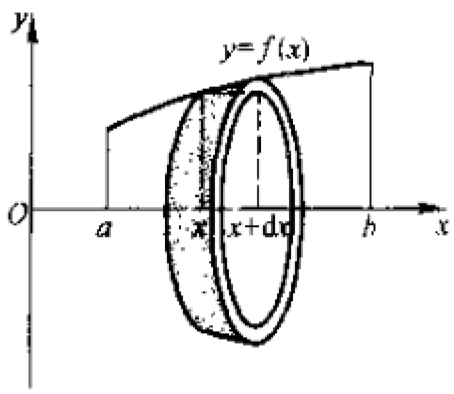
$$dA=\frac{1}{2}[a(1+\cos\theta)]^{2}d\theta$$

则所求面积为

$$A=\int_{0}^{2\pi}\frac{1}{2}[a(1+\cos\theta)]^{2}d\theta=\frac{a^{2}}{2}\left(\frac{3}{2}\theta+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta\right)\Bigg|_{0}^{2\pi}=\frac{3\pi a^{2}}{2}$$

（体积）

1．旋转体的体积



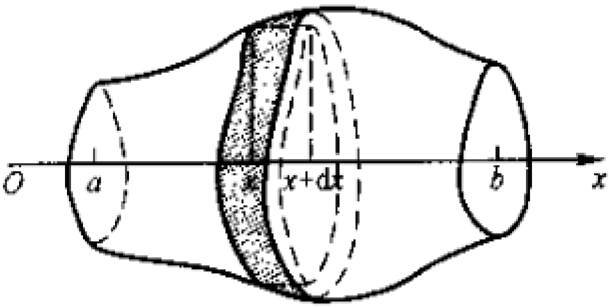
上述旋转体可以看作是由连续曲线 $y=f(x)$，直线 $x=a$ 和 $x=b$ 及 x 轴所围成的曲边梯形绕 x 轴旋转一周而成的立体，取 x 为积分变量，变化区间为 $[a,b]$，将此区间分割成很多分，没分区间对应于旋转体的一小片薄片，此薄片的体积近似于以 $f(x)$ 为底半径，高为 dx 的圆柱体，则体积微元为

$$dV = \pi[f(x)]^2 dx$$

所得旋转体的体积为

$$V = \int_a^b \pi[f(x)]^2 dx$$

上述方法可以推广至一般情况，如下图



立体在 $x \in [a,b]$ 处被垂直于 x 轴的屏幕所截得的截面积为 $S(x)$，将区间 $[a,b]$ 分割成很多分，在 x 处取其中长度为 dx 的一段区间，得到一份体积微元

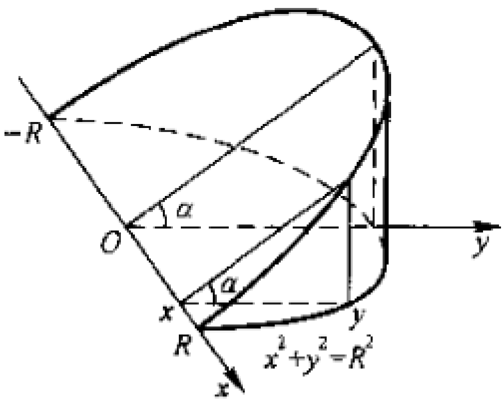
$$dV = S(x)dx$$

则在区间 $[a,b]$ 上该立体体积为

$$V = \int_a^b S(x)dx$$

简单例子：

求下图中立体体积



取 x 处的横截面积为

$$S(x) = \frac{1}{2} y \cdot y \tan\alpha = \frac{1}{2} y^2 \tan\alpha = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha$$

取长度为 dx 的一段区间，得到一份体积微元

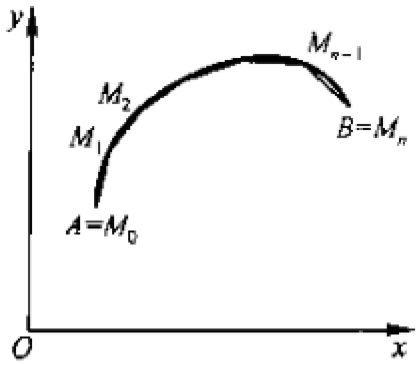
$$dV = S(x)dx = \frac{1}{2}(R^2 - x^2)\tan\alpha dx$$

那么所求体积为

$$V=\int_{-R}^{R}S(x)dx=\int_{-R}^{R}\frac{1}{2}(R^2-x^2)\tan\alpha dx=\frac{1}{2}\tan\alpha\left(R^2x-\frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_{-R}^{R}=\frac{2}{3}R^3\tan\alpha$$

（曲线的弧长）

1．参数方程



将弧线划分为很多个点$M_0,M_1,\cdots,M_n$，然后求每一段小弧线的长度，累加起来就是整个弧线的长度，只要分得够细，则一小段弧线近似等于直线距离。

设弧线参数方程

$$\begin{cases}x=\varphi(t)\\ y=\psi(t)\end{cases},\quad \alpha\le t\le\beta$$

其中$\varphi(t)$和$\psi(t)$在$[\alpha,\beta]$上具有连续的导数。以t作为积分变量，相应的取$[\alpha,\beta]$上任意一小段区间$[t,t+dt]$的小弧线，它的长度Δs近似等于直线长度，即

$\Delta s=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$，由于

$$\Delta x=\varphi(t+\Delta t)-\varphi(t)\approx\varphi'(t)dt$$

$$\Delta y=\psi(t+\Delta t)-\psi(t)\approx\psi'(t)dt$$

则弧长微元为

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(\varphi'(t))^2(dt)^2+(\psi'(t))^2(dt)^2}=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt$$

则所求弧长为

$$s=\int_{\alpha}^{\beta}\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}dt$$

（2）对于直角坐标方程

$y=f(x)$，$a\le x\le b$，相当于参数方程

$$\begin{cases} x = x \\ y = f(x) \end{cases}, \quad a \le x \le b$$

代入有弧长公式为

$$s = \int_a^b \sqrt{1+(f'(x))^2}dx = \int_a^b \sqrt{1+(y')^2}dx$$

（3）对于极坐标形式

直角坐标系与极坐标的转换关系为

$$\begin{cases} x = \rho(\theta)\cos\theta \\ y = \rho(\theta)\sin\theta \end{cases}, \quad \alpha \le \theta \le \beta$$

则弧长公式为

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2}d\theta$$

由于

$$x'(\theta) = \left(\rho(\theta)\cos\theta\right)' = \rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta$$

$$y'(\theta) = \left(\rho(\theta)\sin\theta\right)' = \rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta$$

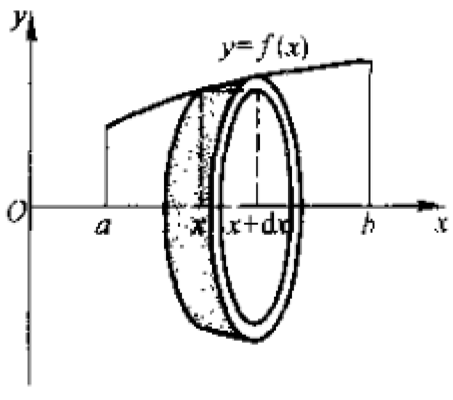
那么

$$\begin{aligned}(x'(\theta))^2 + (y'(\theta))^2 &= \left(\rho'(\theta)\cos\theta - \rho(\theta)\sin\theta\right)^2 + \left(\rho'(\theta)\sin\theta + \rho(\theta)\cos\theta\right)^2 \\ &= \left(\rho(\theta)\right)^2 + \left(\rho'(\theta)\right)^2\end{aligned}$$

故有弧长公式为

$$s = \int_\alpha^\beta \sqrt{(\rho(\theta))^2 + (\rho'(\theta))^2}d\theta$$

（旋转曲面的面积）



设曲线参数方程

$$\begin{cases} x = \varphi(t) \\ y = \psi(t) \end{cases}, \quad \alpha \le t \le \beta$$

曲线绕 x 轴旋转一周，求所扫过的面积。相应的取 $[\alpha,\beta]$ 上任意一小段区间 $[t,t+dt]$ 的小弧线，它的长度近似等于直线长度，弧长微元为

$$ds=\sqrt{(dx)^2+(dy)^2}=\sqrt{(\varphi'(t))^2(dt)^2+(\psi'(t))^2(dt)^2}=\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

这一段弧长扫过的面积可近似等于

$$dA=2\pi\cdot\psi(t)\cdot ds=2\pi\cdot\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

则，曲面扫过的面积为

$$A=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)\sqrt{(\varphi'(t))^2+(\psi'(t))^2}\,dt$$

对于直角坐标方程 $y=f(x)$，$a\le x\le b$，扫过的面积为

$$A=2\pi\int_a^b y\sqrt{1+(y')^2}\,dx$$

对于极坐标方程，直角坐标系与极坐标的转换关系为

$$\begin{cases}x=\rho(\theta)\cos\theta\\ y=\rho(\theta)\sin\theta\end{cases},\quad \alpha\le\theta\le\beta$$

则扫过的面积为

$$s=2\pi\int_{\alpha}^{\beta}\rho(\theta)\sin\theta\sqrt{(\rho(\theta))^2+(\rho'(\theta))^2}\,d\theta$$

2.6.5．定积分的物理应用（微元法）

（变力沿直线所做的功）

以前学过，，一个不变的力 F 作用在物体上，物体沿力的方向移动了距离 s，则力对物体做的功为

$$W = F \cdot s$$

一般来说，一个沿 x 方向的力 $F = f(x)$，在这个力的方向上物体从 a 点运动到 b 点，则取 x 处一小段距离 dx，则力在这段距离内所作的功微元为

$$dW = f(x)dx$$

则从 a 点运动到 b 点力所做的功为

$$W = \int_a^b f(x)dx$$

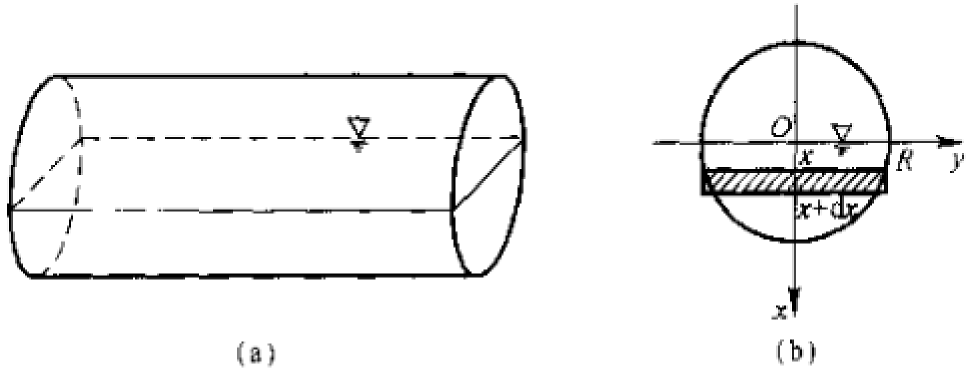
计算功的时候要考虑力的方向。

（水压力）

由高中物理知道，在水深 h 处的压强为 $p = \rho gh$，如果有一个面积为 A 的平板水平放在水深为 h 处，则平板一侧所受的压力为

$$P = p \cdot A$$

对于一个平板各处压强不均的平板，则用下面的方法求压力。



如图所示，左边有半桶水，水平放置，半径为 R，计算一端所受的压力。如右图分析，设深度为 x 处，取一小段深度计算此小块面积的压力微元

$$dF = 2\left(\rho gx \cdot \sqrt{R^2 - x^2} \cdot dx\right)$$

则总压力为

$$F = 2\rho g\int_0^R x\sqrt{R^2 - x^2}dx = -\rho g\int_0^R \sqrt{R^2 - x^2}d(R^2 - x^2) = -\frac{2}{3}\rho g(R^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}\Big|_0^R = \frac{2}{3}\rho gR^2$$

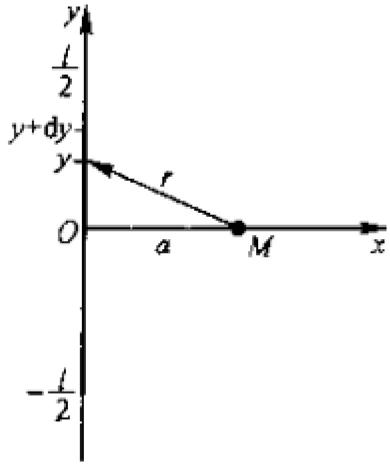
（万有引力）

由物理学知，质量为 m_1，m_2，相距为 r 的两质点之间的引力的大小为

$$F=G\frac{m_1m_2}{r^2}$$

其中G为引力常数，引力方向沿着两质点的连线方向。

例子：有一长度为l，线密度为μ的均匀细直棒，在其中垂线上距离a处有一质量为m的质点M，试计算该棒对质点M的引力。



建立如图的坐标系，取y处一小段长度dy细棒作为研究对象。其对质点的引力分解为沿x轴方向和沿y轴方向。沿x轴方向力大小为

$$dF_x=-G\frac{m(\mu dy)}{(a^2+y^2)}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+y^2}}=-G\frac{\mu ma}{(a^2+y^2)^{3/2}}dy$$

沿y轴方向力大小为

$$dF_y=G\frac{m(\mu dy)}{(a^2+y^2)}\cdot\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}=G\frac{\mu my}{(a^2+y^2)^{3/2}}dy$$

由于$-G\frac{\mu ma}{(a^2+y^2)^{3/2}}$为偶函数，则整根棒沿$x$轴方向力大小为

$$F_x=-\int_{-l/2}^{l/2}G\frac{\mu ma}{(a^2+y^2)^{3/2}}dy=-2\int_0^{l/2}G\frac{\mu ma}{(a^2+y^2)^{3/2}}dy$$

令$y=a\tan\theta$，则$y=0$，$\theta=0$；$y=l/2$，$\theta=\arctan\frac{l}{2a}$。

$$F_x=-2\int_0^{\arctan\frac{l}{2a}}G\frac{\mu ma}{\left(\frac{a^2}{\cos^2\theta}\right)^{3/2}}\cdot\frac{a}{\cos^2\theta}d\theta=\left(-\frac{2G\mu m}{a}\sin\theta\right)\Bigg|_0^{\arctan\frac{l}{2a}}=-\frac{2G\mu ml}{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{l^2+4a^2}}$$

由于$G\dfrac{\mu my}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}$为奇函数，因此

$$F_y=\int_{-l/2}^{l/2}G\frac{\mu my}{\left(a^2+y^2\right)^{3/2}}dy=0$$