17.4

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 设 S 为上半单位球面 $z=\sqrt{1-(x^2+y^2)}$, 取下侧, 求

$$I=\iint\limits_{S} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

解: 用直角坐标系计算,

$$I=\iint\limits_{S} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{S}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{S} z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2+I_3.$$

先计算 $I_1=\iint\limits_{S} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 由于 $S=S_1\cup S_2$, 其中

$$\begin{cases} S_1: x=\sqrt{1-y^2-z^2}, \\ S_2: x=-\sqrt{1-y^2-z^2}, \end{cases} \quad (y,z)\in D_{yz}=\{y^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\},$$

它们在 yz 平面上的投影区域都是上半单位圆. 依题意, 积分在 S_1 的后侧和 S_2 的前侧进行. 由 (**??**),

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}y dz+\iint\limits_{S_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= -\iint\limits_{D_{yz}}\sqrt{1-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z+\iint\limits_{D_{yz}}-\sqrt{1-y^2-z^2}\,\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= -2\int_0^{\pi} d\varphi\int_0^1\sqrt{1-r^2}\,r\mathrm{d}r \\ &= -2\pi\Big[-\frac{1}{3}(1-r^2)^{3/2}\Big]_0^1=-\frac{2\pi}{3}. \end{aligned}$$

下面计算 $I_2=\iint\limits_{S}\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 由于 $S=S_3\cup S_4$, 其中

$$\begin{cases} S_3: y=\sqrt{1-x^2-z^2}, \\ S_4: x=-\sqrt{1-x^2-z^2}, \end{cases} \quad (z,x)\in D_{zx}=\{x^2+z^2\le 1,\ z\ge 0\},$$

它们在 xz 平面上的投影区域也都是上半单位圆. 依题意, 积分在 S_3 的左侧和 S_4 的右侧进行. 由 (**??**),

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_{S_3}\mathrm{d}x\mathrm{d}x+\iint\limits_{S_4}\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &= -\iint\limits_{D_{zx}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x+\iint\limits_{D_{yz}}\mathrm{d}z\mathrm{d}x=0. \end{aligned}$$

又由 (**??**),

$$\begin{aligned} I_3 &= \iint\limits_S z^2 \mathrm{d}x dy \\ &= -\iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (1-x^2-y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= -\int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 (1-r^2)\, r\mathrm{d}r = -\frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

最后得到 $I = -\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{2} = -\frac{7\pi}{6}$. □

例 2 *用公式 (17.4.6) 计算例1.*

解: 用参数方程

$$S : x = \sin\varphi\cos\theta,\ y = \sin\varphi\sin\theta, z = \cos\varphi,$$

$$0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \theta \le 2\pi,$$

计算行列式

$$A = \frac{\partial(y,z)}{\partial(\varphi,\theta)} = \sin^2\varphi\cos\theta, B = \frac{\partial(z,x)}{\partial(\varphi,\theta)} = \sin^2\varphi\sin\theta, C = \frac{\partial(x,y)}{\partial(\varphi,\theta)} = \sin\varphi\cos\varphi.$$

因为 $C > 0$, 则 (A, B, C) 的方向与上半球面 S 内侧的法线方向相反, 故积分号前取 "$-$" 号, 得

$$\begin{aligned} I &= -\iint\limits_S (\sin^2\varphi\cos\theta + \sin^2\varphi\sin\theta + \sin\varphi\cos\varphi) d\varphi d\theta \\ &= -\int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\pi} [\sin^2\varphi(\cos\theta + \sin\theta) + \sin\varphi\cos\varphi] d\theta \\ &= -2\pi \int_0^{\pi/2} \sin\varphi\cos\varphi d\varphi = -\pi. \end{aligned}$$

□

例 3 *求*

$$I = \iint\limits_S xyz(y^2z^2 + z^2x^2 + x^2y^2) dS,$$

其中 S 为第一卦限中的球面 $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ $(x \ge 0, y \ge 0, z \ge 0)$.

解: 如图 **??** 所示, 不论用参数式或直角坐标式, 直接计算均相当复杂, 取 S 的上侧为正侧, 则球面上 (x, y, z) 处的单位法向量为 $(\frac{x}{a}, \frac{y}{a}, \frac{z}{a})$, 利用公式 (17.4.10),

$$\begin{aligned} I &= a\iint\limits_S (y^3z^3\frac{x}{a} + z^3x^3\frac{y}{a} + x^3y^3\frac{z}{a}) dS \\ &= a\iint\limits_S y^3z^3 \mathrm{d}y\mathrm{d}z + z^3x^3 \mathrm{d}z\mathrm{d}x + x^3y^3 \mathrm{d}x dy \\ &= 3a\iint\limits_S x^3y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 3a\iint\limits_{D_{xy}} x^3y^3 \mathrm{d}x\mathrm{d}y, \end{aligned}$$

其中 $D_{xy}=\{x^2+y^2\le a^2, x\ge 0, y\ge 0\}$, 作极坐标变换得

$$\begin{aligned} I &= 3a\int_0^{\pi/2}d\theta\int_0^a r^7\sin^3\theta\cos^3\theta dr \\ &= \frac{3}{64}a^9\int_0^{\pi/2}\sin^3 2\theta d\theta=\frac{1}{32}a^9. \end{aligned}$$

□

思考题

1. 怎样定义曲面的侧? 什么样的曲面称为双侧曲面?

解: 课本第 207 页. □

2. 将第二型曲面积分化为重积分计算时, 曲面的侧起什么作用?

解: 课本定理 17.4.1 若曲面 S 的法线方向与 z 轴正向成锐角的侧为正侧, 曲面 S 的正侧上, 我们有

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

若曲面 S 的法线方向与 z 轴正向成钝角的侧为负侧, 曲面 S 的负侧上, 我们有

$$\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

□

3. 第 16 章学过的二重积分属于第一型曲面积分还是第二型曲面积分? 或者都不是?

解: 不是. □

习题

1. 计算第二型曲面积分:

(1) $\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 其中 S 是正方体 $[0,1]^3$ 的表面外侧;

(2) $\iint\limits_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是平面 $x+y+z=1$ 与坐标平面所围立体表面外侧;

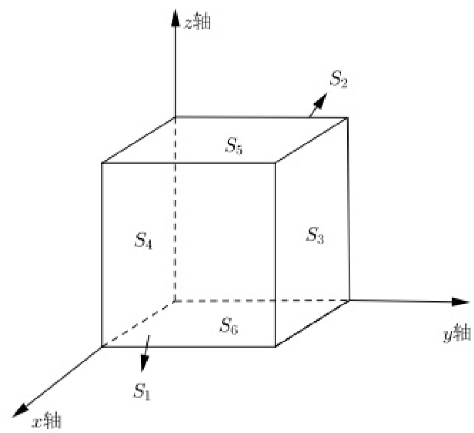
(3) $\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是圆柱面 $x^2+y^2=1$ 被平面 $z=0$ 及 $z=3$ 所截出部分的外侧;

(4) $\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z+y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x+z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 其中 S 是球面 $(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=R^2$ 外侧.

解: **(1)** 设

$$\iint\limits_S (x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z=I_1+I_2.$$

先计算 $I_1=(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$,



,

图 1: 正方体 $[0,1]^3$

由于 $S=\cup_{i=1}^6 S_i$, 如图1所示, 其中

$$\begin{aligned}
&S_1: x=1, \quad (y,z)\in D_1=\{(y,z)|\ 0\le y\le 1, 0\le z\le 1\},\\
&S_2: x=0, \quad (y,z)\in D_1,\\
&S_3: y=1, \quad (x,z)\in D_2=\{(x,z)|\ 0\le x\le 1, 0\le z\le 1\},\\
&S_4: y=0, \quad (x,z)\in D_2,\\
&S_5: x=1, \quad (x,y)\in D_3=\{(x,y)|\ 0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}\\
&S_6: x=0, \quad (x,y)\in D_3;
\end{aligned}$$

注意到 S_1,S_2,S_3,S_4 在 xy 面上的投影面积为零, 故

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint\limits_{S_5}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{S_6}(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iint\limits_{D_3}(x+y+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_3}(x+y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iint\limits_{D_3}1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1 1\mathrm{d}x\\
&= 1.
\end{aligned}$$

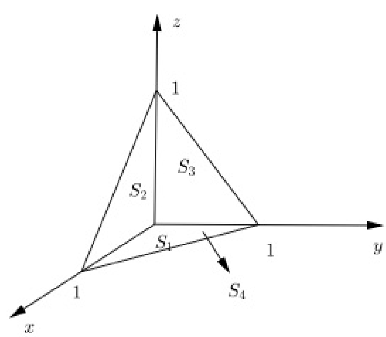
再计算 $I_2 = (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 注意到 S_3, S_4, S_5, S_6 在 yz 面上的投影面积为零, 故

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint\limits_{S_1}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{S_2}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{D_1}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{D_1}(y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}zy \\ &= 0. \end{aligned}$$

综上所述, $\iint\limits_S(x+y+z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y + (y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z = 1$.

(2) 设

$$\iint\limits_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 + I_2 + I_3.$$



,

图 2: 平面 $x+y+z=1$ 与坐标平面所围立体

先计算 $I_1 = \iint\limits_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 由于 $S = \cup_{i=1}^4 S_i$, 如图2所示, 其中

$$\begin{aligned} &S_1 : x=0, \quad (y,z) \in D_1 = \{(y,z)|\ 1-y \le z \le 1, 0 \le y \le 1\}, \\ &S_2 : y=0, \quad (x,z) \in D_2 = \{(x,z)|\ 1-x \le z \le 1, 0 \le x \le 1\}, \\ &S_3 : z=0, \quad (x,y) \in D_3 = \{(x,y)|\ 1-x \le y \le 1, 0 \le x \le 1\}, \\ &S_4 : \{(x,y,z)|\ x+y+z=1, x,y,z > 0\}; \end{aligned}$$

注意到 S_2, S_3 在 yz 面上的投影面积为零, 在 S_1 上 $x=0$, 且有 S_4 在 yz 平面上的投影 $D_{yz} = D_1$,

故

$$
\begin{aligned}
I_1 &= \iint\limits_{S_4} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{D_1} y(1-y-z)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_0^{1-y} \left(y - y^2 - yz\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(y(1-y)z - \frac{yz^2}{2}\right)\Big|_0^{1-y} \\
&= \int_0^1 \frac{y(1-y^2)}{2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{2y^3}{3} + \frac{y^4}{4}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

再计算 $I_2 = \iint\limits_{S} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 注意到 S_1, S_3 在 yz 面上的投影面积为零, 在 S_2 上 $y = 0$, 且有 S_4 在 xz 平面上的投影 $D_{xz} = D_2$, 故

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \iint\limits_{S_4} yz\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{D_2} z(1-x-z)\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \left(z - z^2 - xz\right)\mathrm{d}z \\
&= \int_0^1 \left(x(1-x)z - \frac{xz^2}{2}\right)\Big|_0^{1-x} \\
&= \int_0^1 \frac{x(1-x^2)}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\Big|_0^1 \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}
$$

最后计算 $I_3 = \iint\limits_{S} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 注意到 S_1, S_2 在 xy 面上的投影面积为零, 在 S_3 上 $z = 0$, 且有 S_4 在

xy 平面上的投影 $D_{xz} = D_3$, 故

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint\limits_{S_4} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D_3} x(1-x-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_0^{1-x} \left(x - x^2 - xy\right)\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \left(x(1-x)y - \frac{xy^2}{2}\right)\bigg|_0^{1-x} \\
&= \int_0^1 \frac{x(1-x^2)}{2}\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{2} - \frac{2x^3}{3} + \frac{x^4}{4}\right)\bigg|_0^1 \\
&= \frac{1}{24}.
\end{aligned}$$

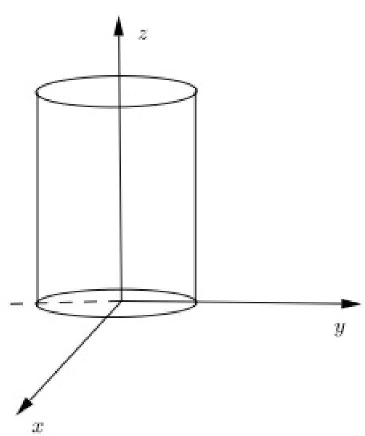
综上所述,

$$\iint\limits_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{8}.$$

(3) 设

$$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 + I_2 + I_3.$$

先计算 $I_1 = \iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 由于 $S = S_1 \cup S_2$, 如图3所示其中



,

图 3: 圆柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 被平面 $z = 0$ 及 $z = 3$ 所截出部分

$$S_1 : x = \sqrt{1-y^2}, \quad (y,z) \in D_1 = \{(y,z)|\ 0 \le z \le 3, -1 \le y \le 1\},$$
$$S_2 : x = -\sqrt{1-y^2}, \quad (y,z) \in D_1;$$

故有

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{S_1} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{S_2} x\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{D_1} \sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{D_1} -\sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= 2\iint\limits_{D_1} \sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^3 \mathrm{d}z \int_{-1}^1 \sqrt{1-y^2}\mathrm{d}y \\ &= 2\cdot 3\cdot \frac{1}{2}(y\sqrt{1-y^2}+\arcsin y)\Big|_{-1}^1 \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

同理, 再计算 $I_2 = \iint\limits_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, 由于 $S = S_3 \cup S_4$, 其中

$$S_3 : y = \sqrt{1-x^2}, \quad (x,z) \in D_2 = \{(x,z)|\ 0 \le z \le 3, -1 \le x \le 1\},$$
$$S_2 : y = -\sqrt{1-x^2}, \quad (x,z) \in D_2;$$

故有

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint\limits_S y\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{S_3} y\mathrm{d}x\mathrm{d}z + \iint\limits_{S_4} y\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{D_2} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z - \iint\limits_{D_2} -\sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= 2\iint\limits_{D_2} \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}z \\ &= \int_0^3 \mathrm{d}z \int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\mathrm{d}x \\ &= 2\cdot 3\cdot \frac{1}{2}(x\sqrt{1-x^2}+\arcsin x)\Big|_{-1}^1 \\ &= 3\pi. \end{aligned}$$

最后由于曲面 $x^2+y^2=1$ 上的任一点的法向量都与 z 轴垂直, 故有

$$I_3 = \iint\limits_S z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.$$

综上所述,

$$\iint\limits_S x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 6\pi.$$

(4) 设

$$\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 + I_2 + I_3.$$

先计算 $I_1 = \iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 由于 $S = S_1 \cup S_2$, 其中

$$\begin{aligned} S_1 &: x = a + \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}, \quad (y,z) \in D_{yz} = \{(y,z)|\ (y-b)^2 + (z-c)^2 = R^2\}, \\ S_2 &: x = a - \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}, \quad (y,z) \in D_{yz}; \end{aligned}$$

利用极坐标变换 $\begin{cases} y = r\cos\theta + b, \\ z = r\sin\theta + c \end{cases}$ 则 D_{yz} 与 $\triangle = \{(r,\theta)|0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi\}$ 一一对应, 故有

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{S_1} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{S_2} x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{D_{yz}} \left(a + \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\right)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{D_{yz}} -\left(a - \sqrt{R^2 - y^2 - z^2}\right)^2 \mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{\triangle} r\left(a + \sqrt{R^2 - r^2}\right)^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta - \iint\limits_{\triangle} r\left(a - \sqrt{R^2 - r^2}\right)^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\theta \\ &= 4a\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^R \left(\sqrt{R^2 - r^2}\right)\mathrm{d}r \\ &= \frac{8}{3}\pi Ra. \end{aligned}$$

同理, 再计算 $I_2 = \iint\limits_S y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}z$, 由于 $S = S_3 \cup S_4$, 其中

$$\begin{aligned} S_3 &: y = b + \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}, \quad (x,z) \in D_{xz} = \{(y,z)|\ (x-a)^2 + (z-c)^2 = R^2\}, \\ S_4 &: y = b - \sqrt{R^2 - x^2 - z^2}, \quad (x,z) \in D_{xz}; \end{aligned}$$

利用极坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\phi + a, \\ z = r\sin\phi + c \end{cases}$ 则 D_{xz} 与 $\triangle = \{(r,\phi)|0 \leqslant r \leqslant R, 0 \leqslant \phi \leqslant 2\pi\}$ 一一对应, 故

有

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \iint\limits_S y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{S_3} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z + \iint\limits_{S_4} y^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{D_{xz}} \left(b+\sqrt{R^2-x^2-z^2}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z - \iint\limits_{D_{xz}} -\left(b-\sqrt{R^2-x^2-z^2}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{\triangle} r\left(b+\sqrt{R^2-r^2}\right)^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\phi - \iint\limits_{\triangle} r\left(b-\sqrt{R^2-r^2}\right)^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\phi \\
&= 4b\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\phi \int_0^R \left(\sqrt{R^2-r^2}\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{8}{3}\pi Rb.
\end{aligned}
$$

同理, 计算 $I_3 = \iint\limits_S z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 由于 $S = S_5 \cup S_6$, 其中

$$
\begin{aligned}
&S_5 : z = c+\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \quad (x,z)\in D_{xy} = \{(y,z)|\ (x-a)^2+(y-b)^2 = R^2\}, \\
&S_6 : z = c-\sqrt{R^2-x^2-y^2}, \quad (x,z)\in D_{xy};
\end{aligned}
$$

利用极坐标变换 $\begin{cases} x = r\cos\psi + a, \\ y = r\sin\psi + b \end{cases}$ 则 D_{xz} 与 $\triangle = \{(r,\psi)|0\leqslant r\leqslant R, 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi\}$ 一一对应, 故有

$$
\begin{aligned}
I_2 &= \iint\limits_S z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}z \\
&= \iint\limits_{S_5} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y + \iint\limits_{S_6} z^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D_{xy}} \left(c+\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y - \iint\limits_{D_{xy}} -\left(c-\sqrt{R^2-x^2-y^2}\right)^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{\triangle} r\left(c+\sqrt{R^2-r^2}\right)^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\psi - \iint\limits_{\triangle} r\left(c-\sqrt{R^2-r^2}\right)^2 \mathrm{d}r\mathrm{d}\psi \\
&= 4c\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\psi \int_0^R \left(\sqrt{R^2-r^2}\right)\mathrm{d}r \\
&= \frac{8}{3}\pi Rc.
\end{aligned}
$$

综上所述,

$$
\iint\limits_S x^2\mathrm{d}y\mathrm{d}z + y^2\mathrm{d}z\mathrm{d}x + z^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{8}{3}\pi R(a+b+c).
$$

□

2. 设某流体流速 $\boldsymbol{v} = (xy, yz, xz)$, 求单位时间内从内到外流过球面 $x^2+y^2+z^2 = 1$ 在第一卦限部分的流量.

解: 设球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 在第一卦限部分的流量为 E, 于是有

$$E=\iint\limits_{S} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z+yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x+xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y=I_1+I_2+I_3.$$

先计算 $I_1=\iint\limits_{S} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 由于 S 在 yz 平面上的投影为 $D_{yz}=\{(y,z)|\ y^2+z^2=1,y>0,z>0\}$ 利用极坐标变换 $\begin{cases} y=r\cos\theta, \\ z=r\sin\theta \end{cases}$ 则 D_{yz} 与 $\triangle=\{(r,\theta)|0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$ 一一对应, 故有

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_{S} xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{D_{yz}} y\sqrt{1-y^2-z^2}\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 r\cdot r\cos\theta\cdot\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi}\cos\theta\mathrm{d}\theta\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi}\cos\theta\,\frac{1}{8}\left[r(2r^2-1)\sqrt{1-r^2}+\arcsin r\right]\Big|_0^1\mathrm{d}\theta \\ &= 1\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

再计算 $I_2=\iint\limits_{S} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 由于 S 在 xz 平面上的投影为 $D_{yz}=\{(y,z)|\ x^2+z^2=1,x>0,z>0\}$ 利用极坐标变换 $\begin{cases} x=r\cos\phi, \\ z=r\sin\phi \end{cases}$ 则 D_{xz} 与 $\triangle=\{(r,\phi)|0\leqslant r\leqslant 1,0\leqslant\phi\leqslant 2\pi\}$ 一一对应, 故有

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint\limits_{S} yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &= \iint\limits_{D_{xz}} z\sqrt{1-x^2-z^2}\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\phi\int_0^1 r\cdot r\cos\phi\cdot\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi}\cos\phi\mathrm{d}\phi\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r \\ &= \int_0^{2\pi}\cos\phi\,\frac{1}{8}\left[r(2r^2-1)\sqrt{1-r^2}+\arcsin r\right]\Big|_0^1\mathrm{d}\phi \\ &= 1\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

最后计算 $I_3=\iint\limits_{S} xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$

由于 S 在 xy 平面上的投影为 $D_{xy} = \{(y,z)|\ x^2+y^2=1, x>0, y>0\}$ 利用极坐标变换 $\begin{cases} y = r\cos\psi, \\ z = r\sin\psi \end{cases}$ 则 D_{xy} 与 $\triangle = \{(r,\psi)|0\leqslant r\leqslant 1, 0\leqslant\psi\leqslant 2\pi\}$ 一一对应, 故有

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint\limits_S xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \iint\limits_{D_{xy}} x\sqrt{1-x^2-y^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\psi\int_0^1 r\cdot r\cos\psi\cdot\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}\cos\psi\mathrm{d}\psi\int_0^1 r^2\sqrt{1-r^2}\mathrm{d}r \\
&= \int_0^{2\pi}\cos\psi\,\frac{1}{8}\left[r(2r^2-1)\sqrt{1-r^2}+\arcsin r\right]\Big|_0^1\mathrm{d}\psi \\
&= 1\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{16}.
\end{aligned}$$

综上所述,

$$\iint\limits_S xy\mathrm{d}y\mathrm{d}z + yz\mathrm{d}z\mathrm{d}x + xz\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{3\pi}{16}.$$

□

---

3. 计算第二型曲面积分:

$$I = \iint_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

其中 S 是平行六面体 $(0\le x\le a, 0\le y\le b, 0\le z\le c)$ 的表面外侧, $f(x), g(y), h(z)$ 为 S 上的连续函数.

解: 设

$$\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = I_1 + I_2 + I_3.$$

由于 $S = \cup_{i=1}^6 S_i$, 如图**??**所示, 其中

$$\begin{aligned}
&S_1: x = a, \quad (y,z)\in D_1 = \{(y,z)|\ 0\le y\le b, 0\le z\le c\}, \\
&S_2: x = 0, \quad (y,z)\in D_1, \\
&S_3: y = b, \quad (x,z)\in D_2 = \{(x,z)|\ 0\le x\le a, 0\le z\le c\}, \\
&S_4: y = 0, \quad (x,z)\in D_2, \\
&S_5: z = c, \quad (x,y)\in D_3 = \{(x,y)|\ 0\le x\le a, 0\le y\le b\} \\
&S_6: z = 0, \quad (x,y)\in D_3;
\end{aligned}$$

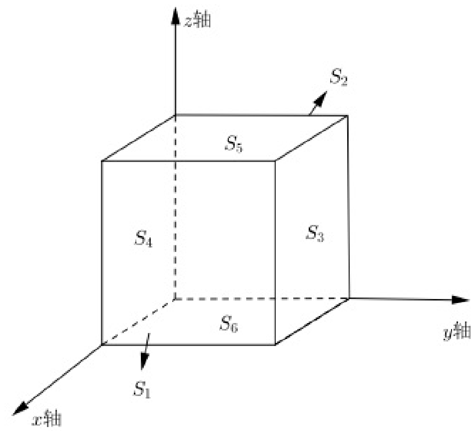


图 4: 平行六面体 $(0 \le x \le a, 0 \le y \le b, 0 \le z \le c)$

先计算 $I_1 = \iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z$, 注意到 S_3, S_4, S_5, S_6 在 yz 面上的投影面积为零, 故

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint\limits_{S_5} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z + \iint\limits_{S_6} f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{D_3} f(a)\mathrm{d}y\mathrm{d}z - \iint\limits_{D_3} f(0)\mathrm{d}y\mathrm{d}z \\ &= \iint\limits_{D_3} (f(a) - f(0))\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\ &= (f(a) - f(0))bc. \end{aligned}$$

再计算 $I_2 = \iint\limits_S g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x$, 注意到 S_1, S_2, S_5, S_6 在 xz 面上的投影面积为零, 故

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint\limits_{S_3} g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x + \iint\limits_{S_4} g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &= \iint\limits_{D_2} g(b)\mathrm{d}z\mathrm{d}x - \iint\limits_{D_2} g(0)\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &= \iint\limits_{D_2} (g(b) - g(0))\mathrm{d}z\mathrm{d}x \\ &= (g(b) - g(0))ac. \end{aligned}$$

最后计算 $I_3=\iint\limits_S h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$, 注意到 S_1,S_2,S_3,S_4 在 xy 面上的投影面积为零, 故

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iint\limits_{S_5} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{S_6} h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iint\limits_{D_3} h(c)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint\limits_{D_4} h(0)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iint\limits_{D_3}(h(z))-h(0))\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= (h(c)-h(0))ab.
\end{aligned}$$

综上所述,

$$\iint\limits_S f(x)\mathrm{d}y\mathrm{d}z+g(y)\mathrm{d}z\mathrm{d}x+h(z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=(f(a)-f(0))bc+(g(b)-g(0))ac+(h(c)-h(0))ab.$$

□

4. 利用公式 (17.4.6) 证明公式 (17.4.1).

解: 因为曲面 $z=z(x,y)$ 可用下面的参数方程表示:

$$S:\begin{cases} x=x,\\ y=y, & (x,y)\in D,\\ z=z(x,y),\end{cases}$$

则在公式 (17.4.6) 中, $u=x,\quad v=y$, 于是有

$$C=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(x,y)}=1,$$

所以

$$\begin{aligned}
\iint\limits_S R(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\cdot 1\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\
&= \iint\limits_{D_{xy}} R(x,y,z(x,y))\mathrm{d}x\mathrm{d}y.
\end{aligned}$$

于是公式 (17.4.1) 得证. □