广义相对论和微分几何*

陈省身

我是作为一个微分几何学者来谈谈广义相对论令人惊佩的结构．如我所理解，广义相对论属于物理学，它的基础是物理实验．几何学的目标应该是研究空间．几何学的研究是由传统和持续性所指导的，其评价标准是数学的创造性、简洁、深刻以及它们的良好的结合和协调．因此几何学有更大的自由并可略事沉醉于想象中的课题．但是在历史上，它也曾被突然惊醒，发现这些抽象的对象一贯和现实密切相关．微分几何和广义相对论的关系就提供了这样的一个事例．

广义相对论诞生于1915年．微分几何早期等同于微积分，导数和切线、积分和面积曾被看成是同样意义的对象．微分几何作为独立的学科诞生于1827年．这一年高斯发表了他的《曲面的一般研究》（*Disquisitiones circa superficies curvas*)，在其中，他以二次微分形式为基本工具，奠定了二维的局部微分几何的基础．即使高斯也没有能预见到，这理论的四维推广会成为引力论的基础．

一、爱因斯坦以前的微分几何

在1854年的一篇历史性的文章《论几何学的基础假设》中，黎曼将高斯的工作推广到高维，并打下了黎曼几何的基础．在文章中他首先引进n维流形的概念，其中的点用n个实数作为坐标来描述．这是从高斯以来的巨大的一步，因为高斯的弯曲曲面是放在三维欧氏空间中的，而不是内在的．爱因斯坦对数学的看法是纯正的，他难于接受黎曼这样的概念．从1908年狭义相对论到1915年广义相对论，花了他七年功夫，他举出下面的原因："为什么还需要七年才能建立广义相对论呢？主要原因在于不那么容易从坐标必须有一个直接的尺度意义这一概念中解脱出来．" [1]

黎曼几何中的基本问题是微分形式的问题：在两个不同坐标系$x^1,\cdots,x^n$与$x'^1,\cdots,x'^n$中给定两个二次微分形式：

$$\begin{aligned} ds^2&=\sum_{i,k} g_{ik}dx^i dx^k,\\ ds'^2&=\sum_{i,k} g_{ik}'dx'^i dx'^k,\end{aligned}\qquad 1\leqslant i,\ k\leqslant n,\qquad (1)$$

求存在坐标变换

$$x'^i=x'^i(x^1,\cdots,x^n),\qquad 1\leqslant i\leqslant n,\qquad (2)$$

将一个微分形式变到另一个的条件．这个问题于1869年由E．克里斯多菲尔及R．利普希茨解决了．克里斯多菲尔的解包含了以他的名字定名的记号及协变微分的概念．在此基础上，1887～1896年间黎契(Ricci)发展了张量分析，这在广义相对论中起了基本的作用．黎契和他的学生T．列维-齐维他，在历史性的研究报告《绝对微分法及其应用》（*Mathematische Annalen*, *1901*）中，对黎契计算法作了一个综述．克里斯多菲尔曾在苏黎世的高等工业学校任教（后来爱因斯坦是这里的学生)，因而对意大利的几何学者产生了影响．注意到今年是他的150周年生日，这或许是使人感兴趣的．

与这些发展同样重要的是，在世纪转折时期微分几何学的主要活动集中于欧氏空间的几何，这继承着欧拉与蒙日的传统．一个代表性的工作是达布的四卷《曲面论》，它过去是而且现在仍然是一部经典著作．要几何学者从一个绝对的围绕空间（通常是欧氏空间）中解放出来是困难的．

大约与克里斯多菲尔-利普希茨解决形式问题同时，F．克莱茵在1871年阐述了厄尔朗根纲领．这就是把几何学定义为研究有连续自同构群的空间，例如欧氏空间具有刚体运动群，射影空间具有射影直射变换群等．厄尔朗根纲领用群论统一了几何，在发表后的半个世纪内成为几何学的指导原理．在应用上，它可以从已知几何结果中导出新的、看上去没有关系的结果（作为群的同构的推论)．索福斯·李(Sophus Lie)的线性球变换是一个有名的例子．

克莱茵的厄尔朗根纲领与狭义相对论完美地相配合，狭义相对论中的一个原理是洛伦茨群下场方程的不变性，这导致了这位处于世纪转折时期最有影响的德国数学家克莱茵成为狭义相对论最早的支持者之一．洛伦茨结构在相对论中起了基本的作用．它还有几何学的解释．当我们研究空间中球的几何时，将球

* 本文是作者1979年3月在普林斯顿高级研究院爱因斯坦诞生一百周年纪念会上的演讲稿．译文经作者校阅过．

变为球的所有接触变换构成一个15参数的李群，而把平面变为平面的变换构成一个10参数的子群，后者与4个变量的洛伦茨群同构．所导致的几何学就是拉盖尔的球几何学[3]．

克莱茵的厄尔朗根纲领的伟大成功自然地引起了克莱茵空间或现在称之为齐性空间中的微分几何的研究．特别地，射影微分几何起始于1878年哈尔芬(Halphen)的学位论文，后来从1906年起为E．J．威耳津斯基(Wilczynski)的美国学派所发展，从1916年起为G．富比尼(Fubini)的意大利学派所发展．

二十世纪初，整体微分几何处于摇篮时期．1909年，马科帕迪阿亚(Mukhopadhyaya)阐述了四顶点定理．范戴克(van Dyck)在1888年从高斯-邦尼特公式导出拓扑的结论：一个闭的有向曲面的高斯曲率的积分等于$2\pi\chi$，这里χ是曲面的欧拉示性数．希尔伯特以独特的预见在1901年写了关于常数高斯曲率的曲面一文，在文中他给出了利普曼定理即具有常数高斯曲率的闭曲面必为球的一个新证明，还证明了定理(希尔伯特定理)：具负常数曲率的完备曲面不能到处正则．在希尔伯特的辅导下，佐尔(Zoll)在1903年发现，非球的旋转闭曲面的所有测地线都是闭的．在动力学的推动下，庞加莱与G．D．伯克霍夫(Birkhoff)证明了在凸曲面上存在闭测地线．

微分几何的最终目的是整体的结果．但是，局部微分几何不能减缩到最低限度，因为每个整体结果必须有一个局部的基础．为使整体微分几何有一个系统的发展，必须打下它的基础．这必须从拓扑中来．广义相对论供给了动力．

二、广义相对论的影响

爱因斯坦建立广义相对论时，有效的数学工具是以黎契计算法来论述黎曼几何学．爱因斯坦引进了有用的和式约定．对微分几何的影响是令人震动的．黎曼几何成为中心的课题．我们注意到斯高登(Schouten)，列维-齐维他，E．嘉当和艾森哈特(Eisenhart)等人关于黎曼几何的权威著作几乎都出现在1924～1926年期间．

这些发展立即得到推广．很快就清楚，在应用黎曼几何于相对论时，不是黎曼尺度本身而是列维-齐维他平行移动起着关键的作用．H．韦尔(Weyl)在他的名著《空间、时间、物质》(1918)中引进了仿射联络的概念．这是一个可用来定义平行移动和协变微分的结构，不必需是黎曼结构．韦尔的联络是对称的或无挠率的．

E．嘉当在他的主要论文《仿射联络的流形及广义相对论理论》(1923～1924)中给出仿射联络的权威性论述以及它向有挠率联络的推广．这篇文章当时并未受到理所应得的注意，原因很简单：因为它走在时间的前头．因为它比仿射联络论更丰富．它的思想可以容易地推广到任何李群的纤维丛的联络理论中去，对这理论，黎契计算法已不能适应了．文章还说明为什么爱因斯坦的理论是牛顿理论的直接推广．特别地，可以举出下列贡献：

(a)引进了结构方程，并将比安契(Bianchi)恒等式解释为对结构方程进行外微分后所得的结果．

(b)认识到曲率是一个张量值的二次外微分形式．

用几何的话来说，仿射联络是一族仿射空间(即纤维)，它们由一个空间(基空间)所参数化，使得这族仿射空间是局部平凡的，并且有一个把纤维沿着基空间的曲线"展开"的法则，使线性关系得以保持．类似地，我们可以把克莱茵空间当作纤维而以作用于克莱茵空间的李群来代替完全线性群，并且也有一个对应的展开法则．嘉当称这样的结构为一般空间(espace généralisé)．一般来说，这个联络是非和乐的(non-holonomic)，即展开依赖于基空间的曲线．换句话说，沿一条闭曲线作展开时，空间并不回到原来的位置，它的变差是由联络的曲率来度量的．显然，克莱茵空间本身是一个曲率恒等于0的一般空间．

在克莱茵制订厄尔朗根纲领时，已观察到黎曼几何并不包括在内，因为一个一般的黎曼空间除恒等变换外并不含有其他等长变换．从嘉当的观点来看，黎曼空间是一个以欧氏空间为纤维的空间，且具有列维-齐维他联络．这解决了微分几何中的一个基础的问题，因为这样就有了一个概念，它包括了克莱茵空间、黎曼空间以及这两种空间的推广．

几何结构往往以一个非直观的形式给出．通常它或是一个由积分所定义的尺度，或是由一组微分方程所定义的子流形族．两个最熟习的例子是黎曼尺度和由二阶常微分方程所定义的道路．在这样的空间定一个联络不是一个容易的问题．事实上，就是黎曼空间的列维-齐维他联络的定义也已相当不平凡了．如所期望，道路空间几何学(E．嘉当，O．维布伦，T．Y．托马斯)涉及到射影联络．

这些发展就是通常所说的非黎曼几何．广义相对论中也有平行的发展．狭义相对论用于电磁场，广义相对论用于引力场，统一场论是两者的结合，它的需要是清楚的．1918年，H．韦尔以他的规范场论走出了最初重要的一步．韦尔利用一个具有相似变换群的一般空间，但被发现它在物理上是站不住的．现在了解到，他的规范群不能是相似变换群所成的非紧致群，而是紧致的圆群．规范理论的最近发展将在第四节中讨论．

跟随韦尔之后，又提出了其他一些统一场理论，其中有卡卢扎（Kaluza）-克莱茵，爱因斯坦-梅耶（Mayer）(1931)和维布伦的相对论的射影理论（1933）．一个共同特征是为了电磁场而引进五维空间（维布伦的理论是四维的，但是切射影空间有五维的齐次坐标）．维布伦的射影理论在几何上是简单的，他的出发点是空间的路径，它们是带电粒子的轨线．

爱因斯坦本人在他的整个晚年从事研究统一场论，经常有合作者．在这方面，我想插进一点有关个人的补白．1943年，我从中国西南部的昆明到普林斯顿研究院，那是第二次世界大战激烈进行之时，他以非常的温暖和同情来欢迎我．我能够时常同他讨论各种课题，包括广义相对论在内，是最大的幸福．我立即看到他的问题的极端困难以及数学与物理之间的区别．数学中有名的问题通常是已经提得很明确的，但在物理上，问题的提法也是问题的一部分．

爱因斯坦对最后答案有一个严格的标准，他不满足于上面提到的建议，事实上也不满足于其他许多建议．他尝试各种可能为统一场论奠基的几何结构．在其中有：

1．非对称张量g_{ij}（见《相对论的意义》，第5版，1955，附录Ⅱ）；

2．具有埃尔米特结构的四维复空间；

3．比黎曼空间更一般的度量空间．

一般度量空间的几何为K.门杰（Menger）所建立与研究，对此，爱因斯坦的朋友K．哥德尔（Gödel）给出重要贡献．在情况1中，g_{ij}唯一地分解为对称与反对称的两部分．如果前者非退化，则结构等价于一个具有二次外微分形式的拟黎曼结构．按照g_{ij}的对称部分的符号是＋＋＋＋或＋＋＋－，这个拟黎曼结构是黎曼式的或是洛伦茨式的．情况2是密切地与复代数流形及多复变函数有关，在最近数十年中，它们是大大地发展着的数学领域．

三、正质量猜测，极小曲面，正数量曲率的流形

爱因斯坦之后的时代，广义相对论重视了整体理论（或大尺度时空），在这方面有很大的进展．来源是宇宙论，爱因斯坦本人在这方面很活跃，但是整体微分几何的发展所起的影响是毫无疑义的．宇宙被视为一个四维连通的洛伦茨流形，物理与几何比以往更缠结在一起了．不过，纯粹的几何问题通常较简单，其中的两个原因是：几何学为毕达哥拉斯式的几何或黎曼几何，几何学家可以用假定空间的紧致性来理想化．

很自然地，要把一给定瞬时的数据记录成“数据集”，数据集是一个超曲面Σ，其上到处有类时的法线（因而诱导尺度为黎曼尺度）．这样四维流形的超曲面理论（它是古典曲面论的直接推广）在广义相对论中起了一定的作用．Σ的局部的不变量由两个二次微分形式即第一、第二基本形式给出．第二基本形式系数的迹称为平均曲率，平均曲率为零是极大超曲面的特征．另一方面，Σ上的诱导尺度有一个数量曲率，所有这些量均由高斯-柯达齐（Codazzi）方程联系．由爱因斯坦场方程推出，质量密度μ及动量密度J^a是第一、二基本形式系数及其协变导数的组合．因为动量密度必须不超过质量密度，我们有

$$\mu \geqslant \left| \sum_{1 \leqslant \mu \leqslant 3} J^a J_a \right|^{\frac{1}{2}} \geqslant 0, \qquad (3)$$

在极大超曲面上，数量曲率是非负的．

如果对某些紧致集C，$\Sigma - C$包含有限个连通分支N_i，使得每个N_i微分同胚于R^3中一紧致集的余集，并且它的尺度渐近于尺度

$$ds^2 = \left(1 + \frac{M_i}{2r}\right)^4 \left(\sum_{1 \leqslant a \leqslant 3} (dx^a)^2\right), \qquad (4)$$

式中r是到原点的距离，那末相应的数据集称为渐近平坦的．在许瓦兹希尔德尺度的情况，M_i符合于许瓦兹希尔德质量，因而称为N_i的总质量．正质量猜测为：对于一个渐近平坦的数据集，每个连通分支N_i有总质量$M_i \geqslant 0$，并且如果一个$M_i = 0$，则这个数据集是平坦的（即诱导黎曼尺度是平坦的，且第二基本形式是0）．这个猜测在广义相对论中具有根本的重要性．由于物理上的理由，爱因斯坦假定它是正确的[4]．

在Σ是极大超曲面的假定下，1978年，R．舍恩（Schoen）与丘成桐[3]最一般地证明了它．这个工作的全部经过是相对论学家与微分几何学家接触与合作的一个完美的例子．1973年在斯坦福大学举行的美国数学会微分几何暑期研究会上，R．格罗赫（Geroch）被邀请作一系列广义相对论的报告．正质量猜测显然是未解决的问题之一．为使它的陈述简单化，格罗赫列出一些有引导性的猜测，其中一个如下：“在三维实数空间R^3中，考察一个在紧致集之外是平坦的黎曼尺度，如果数量曲率$\geqslant 0$，则这尺度是平坦的．”[5]将这紧致集围在一个大盒子中并把相对两面看作恒等，J．卡兹登（Kazdan）与F．沃纳（Warner）把猜测改写如下：“数量曲率$\geqslant 0$的三维环面上的黎曼尺度是平坦的．”格罗赫指出：“广泛地觉察到，证明了这些特殊情况中的几个，就可以推广到整个猜测的证明．”

格罗赫的这个猜测落到微分几何的王国中，舍恩与丘成桐首先证明了它，证明的思想是利用闭的极小曲面．事实上，从面积的第二变分的公式可见，在一个具正数量曲率的三维紧致定向黎曼流形中，一个具有

正亏格的闭极小曲面是不稳定的，就是说在微扰下它的面积还会变小．另一方面，三维环面有一个大的基本群(同构于Z⊕Z⊕Z)，并且它的第二个贝蒂数等于3．这些拓扑性质应导出在非零的闭曲面同伦类中存在一个具有最小面积的闭正则曲面．这是下述结果的推广：在紧致黎曼流形上，每个非零的闭曲线同伦类中有一条最短的光滑闭测地线．对于极小曲面，相应结果的证明当然更为微妙．舍恩与丘成桐接着就证明了极大超曲面的正质量猜测．稍后这个结果被推广到高维去．

这些发展接触到极小曲面和正数量曲率流形，这些课题对微分几何学者来说是很亲切的．

极小曲面的早期研究集中于普拉托(Plateau)问题：给定R^3中一闭曲线，要找出它所围成的面积最小的曲面．只是近年来，注意力才指向研究一个给定流形(例如n维欧氏空间E^n或n维单位球S^n)中的闭的或完备的极小曲面．这些研究推广了闭测地线的性质，它们在黎曼流形的几何学与拓扑学中已处于重要的地位[6]．闭的与完备的极小曲面，特别是正则曲面，必然是一个更丰富的甚至更有趣的对象．将极大超曲面取为数据集是很自然的．最近，J．萨克斯(Sachs)和K．乌伦贝克(Uhlenbeck)证明了：一个紧致单连通的黎曼流形中总可浸入一个极小的二维球．

正数量曲率流形的基本问题是：怎么样的紧致流形可以有一个具正数量曲率的黎曼尺度？对这个问题的兴趣的提高是由于维数$\geqslant 3$的紧致流形均可以具有负数量曲率的黎曼尺度．这个结果的证明可以分成两部分：第一，流形可以给定一个黎曼尺度，它的全数量曲率(即数量曲率的积分)$\leqslant 0$．第二，后者可以共形变形为具负常数的数量曲率．另一方面，由于研究调和旋量，A．利希尼罗威兹(Lichnerowicz)在1963年证明了，如果一个紧致旋量流形有一个数量曲率是正的黎曼尺度，则它的$\hat{A}$亏格等于零．舍恩-丘成桐的工作证明：三维环面不能有正数量曲率的黎曼尺度．对n维环面，也已被证明有同样的结论(M．格罗莫夫(Gromov)，B．劳森(Lawson)，R．舍恩，丘成桐)．在广义相对论的推动下，对能带有正数量曲率黎曼尺度的所有紧致流形，这些作者已接近于给出它们一个完全的拓扑的描述．

对于黎契曲率或截面曲率，也可提出同样的问题．S．迈尔斯(Myers)的一个经典的定理说：一个有正黎契曲率的完备黎曼流形必须是紧致的，因而必须有一个有限基本群．要求一黎曼流形具有正截面曲率的这一条件是更强些，预期这样的流形是很少的．秩1的紧致对称空间有这个性质，但是还有其他的一些分散的情况．对有正截面曲率的紧致黎曼流形的完全拓扑的描述看来是困难的．

四、规范场理论

1918年，H．韦尔在他的《引力和电》一文中提出了规范场理论．其思想是运用一个二次微分形式及一个线性微分形式来定义：

$$ds^2=\sum_{i,j} g_{ij}dx_i dx_j,\quad \varphi=\sum_i \varphi_i dx_i,\qquad 1\leqslant i,\ j\leqslant 4, \tag{5}$$

但是这两个形式还容许规范变换：

$$ds^2\longrightarrow \lambda ds^2,\quad \varphi\longrightarrow \varphi+d\lg\lambda, \tag{6}$$

这里φ是电磁势，它的外微分$d\varphi$是电磁场强度或法拉第(因为法拉第对电磁学的重要贡献，他的名字就用作电磁场强度)，这是统一场论最初的尝试．爱因斯坦反对ds^2的不定性，但对韦尔的建议的深刻与大胆表示了赞赏．

如果我们将韦尔的理论解释为基于洛伦茨流形上的圆丛的几何学[7]，则当时及其后的所有反对意见都会消失．于是容许规范变换的形式φ可以视为在圆丛上所定义的联络，并且ds^2保持不变，这就消除了爱因斯坦的反对意见．

规范场理论的数学基础在于向量丛及其上的联络．纤维丛或纤维空间的概念具有整体的特性，由拓扑而产生．最初它是寻找流形的新例子的一个尝试(H．霍特林(Hotelling)，1925，H．塞弗特(Seifert)，1932)．纤维空间是局部的乘积空间而不是整体的乘积空间，这种区别的存在是一个奥妙的数学事实．一直到发现了对纤维丛作出区别的不变量，甚至于证明了整体存在着非平凡的纤维丛时，纤维丛理论才得到发展．最早的这种不变量是H．惠特尼(Whitney)及E．施蒂费尔(Stiefel)在1935年引进的示性类．纤维丛的拓扑研究放弃了代数结构，但是在应用上，具有线性结构的向量丛却更为有用．粗糙地说，流形M上的一个向量丛π：$E\to M$是一族向量空间，它们由M所参数化，使得从局部来看它是一个乘积．对应于$x\in M$的向量空间$E_x=\pi^{-1}(x)$称为点x的纤维．例子是M的切丛以及联系在其上的所有的张量丛．一个更平凡的丛是乘积丛$M\times V$，其中V是一个固定的向量空间，而(x, V)，$x\in M$，是在x点的纤维．一个向量丛被称为实的或复的是按照纤维是实的或复的向量空间而定，它的维数就是纤维的维数．

重要的一点是，纤维上的线性结构保持着一种意义，使完全线性群对纤维的连接起着基本的作用，这个群称为结构群．如果纤维上已给一个内积，则一个实(或复)向量丛称为黎曼型(或埃尔米特型)的．在这种

情形，结构群化约为 $O(n)$（或 $U(n)$），n 是纤维的维数，这个丛称为 $O(n)$ 丛（或 $U(n)$ 丛），类似地，还有 $SU(n)$ 丛这个概念.

对于每点 $x\in M$，连续且光滑地附上纤维 E_x 的一点，称为丛 E 的一个截面．换言之，截面是一个连续映照 $s:M\to E$，使得 $\pi\circ s$ 是恒等映照．这个概念是向量值函数与切向量场的一个自然的推广．为了对 s 进行微分，我们需要在 E 上有一个"联络"．这样就能定义协变导数 $D_X s$（X 是 M 上的一个向量场），它是 E 上的一个新的截面．协变微分一般是不可交换的，即对 M 的两个向量场 X, Y, $D_X\circ D_Y\neq D_Y\circ D_X$．对这个不可交换性加以"度量"，给出了联络的曲率，这是第二节中所描述的非和乐的几何概念的一个解析的形态．根据E. 嘉当，将曲率当为矩阵值的二次外微分形式是重要的．它的迹是一个闭的2-形式．更一般的，它的所有 k 阶主子式之和是一个闭的 $2k$-形式，它被称为示性形式（按照丛是实的或复的分别是庞特里亚金（Pontrjagin）形式或陈省身形式）．根据德勒姆（de Rham）理论，$2k$ 次的示性形式决定一个维数为 $2k$ 的上同调类，因而称为示性类．示性形式依赖于联络，但是示性类只依赖于丛．它们是丛上最简单的整体不变量．向量丛的非平凡性需要通过协变微分来认识，它们的不可换性解释了最初的整体不变量，这一定是自然界的作用．示性类的这样的导出强调了它的局部性质，且示性形式比示性类包含更多的信息．当 M 是一个有定向的紧致流形时，最高维数的示性类（即其维数等于 M 的维数）的积分给出了示性数．当它是一个整数时，被称为一个拓扑的量子数.

人们发现，这些微分几何概念很可能是统一场论的数学基础．韦尔的规范理论处理圆丛或 $U(1)$ 丛，也就是一维的复埃尔米特丛.

在研究同位旋量时，杨振宁-米尔斯所用的本质上是 $SU(2)$ 丛的一个联络．这是非阿贝尔规范场理论的第一个实例．从联络可以定义"作用量"．四维欧氏空间 R^4 上的 $SU(2)$ 丛中使作用量取最小值的联络被称为瞬子．它的曲率有一个简单的表达式，称为自对偶关系．从而瞬子是杨-米尔斯方程的自对偶解．当空间 R^4 紧致化为四维球 S^4 时，$SU(2)$ 丛除一个同构外由一个拓扑量子数 k（k 是整数）决定．阿蒂亚、希钦和辛格证明[8]，对给定的 $k>0$, S^4 上曲率自对偶的联络的集合（称为模或参数空间）是一光滑流形，其维数为 $8k-3$．用物理术语来说，这就是拓扑量子数 $k>0$ 的瞬子空间的维数.

阿蒂亚和瓦德（Ward）注意到，自对偶的杨-米尔斯场可以很好地纳入彭罗斯（Penrose）的"挠量"方案．他们把求所有自对偶解的问题转化为代数几何的问题：在复三维射影空间中全纯向量丛的分类问题．这个问题已由K. 巴思（Barth）、G. 霍罗克斯（Horrocks）等人非常接近地研究过了，用了他们的结果，可以最终地找出所有自对偶解[9]．事实上，回到了物理，这些数学结果可以翻译成物理学家感到满意的显式公式[10].

瞬子通过以下的结果表明它和爱因斯坦的关系．群 $SO(4)$ 局部同构于 $SU(2)\times SU(2)$，所以四维黎曼流形 M 上的黎曼度量通过投影给出一个 $SU(2)$ 丛的联络．M 为爱因斯坦流形的充要条件是这些联络为自对偶或反自对偶（依投影的方法而区分）[8].

包括弱和强相互作用在内的一个令人满意的统一场论是否能通过非可换规范场论作出？这还有待研究．我们只须指出：丛和联络这两个几何概念是非常简洁的．我相信爱因斯坦会喜欢它们.

五、结束语

这个叙述还有许多明显的不完备之处．在彭罗斯和霍金（Hawking）的工作中集中地体现出来的关于奇点的重要研究这里并未涉及，这是一个最显然的不足之处.

最后，作为非本门的学者，我想表示我的希望：广义相对论将不局限于引力场．一个总体的统一场论，不论它将会是什么样的理论，一定会很接近于爱因斯坦的宏伟计划，现在已经有了更多的数学概念和工具可以利用.

（胡和生译）

[1] Einstein A., *Library of Living Philosophers*, vol. 1, 67

[2] Blaschke W., *Differential geometrie*, Bd. Ⅱ, Springer (1929)

[3] Schoen R., Yau S. T., *Proc. NAS, USA*, **75** (1978) 2567; *Comm. Math. Phys.*, **65** (1979) 45; *Proc. NAS, USA*, **76** (1979)

[4] Choquet-Bruhat Y., Fischer A. E., Marsden J. E., *Il Nuovo Cimento* (1978)

[5] Geroch R., *Proc. Symp. in Pure Math.*, **27**, Pt. 2 (1975) 401

[6] Klingenberg W., *Lectures on Closed Geodesics*, Springer (1978)

[7] Chern S., *Circle Bundles, Geometry and Topology*, Ⅲ *Latin Amer. School of Math.*, *Springer Lecture Notes*, 597 (1977) 114

[8] Atiyah M. F., Hitchin N. J., Singer I. M., *Proc. NAS, USA*, **74** (1977) 2662; *Proc. R. Soc. Lond.*, **A362** (1978) 425

[9] Atiyah M. F., Hitchin N. J., Drinfeld V. G., Manin Yu. I., *Phys. Lett.*, **65A** (1978) 185

[10] Christ N. H., Weinberg E. J., Stanton N. K., *Phys. Rev.*, **D18** (1978) 2013