Chapter 1

随机事件及其概率

第一章作业（2019.3.18交）

1.1, 1.2(2,4,7,8), 1.5, 1.7(2), 1.8(3), 1.9(2,4), 1.12, 1.13, 1.16, 1.18, 1.20(1), 1.21, 1.26, 1.27, 1.29, 1.30, 1.32, 1.33, 1.34, 1.36, 1.37(2), 1.38

1.1 任意抛掷一颗骰子，观察出现的点数。设事件A表示“出现偶数点”，事件B表示“出现的点数能被3整除”。

(1) 写出试验的样本点及样本空间；

(2) 把事件A及B分别表示为样本点的集合；

(3) 下列事件：

$$\overline{A},\ \overline{B},\ A\cup B,\ AB,\ \overline{A\cup B}$$

分别表示什么事件？并把它们表示为样本点的集合。

解：

(1) 以出现的点数作为样本点，则样本空间

$$\Omega=\{1,2,3,4,5,6\}.$$

(2) 因为事件A表示“出现偶数点”，即“出现2点、4点或6点”，所以有

$$A=\{2,4,6\};$$

又因为事件B表示“出现点数能被3整除”，即“出现3点或6点”，所以有

$$B = \{3, 6\}.$$

(3) 因为事件$\overline{A}$是A的对立事件，所以它表示“出现奇数点”，即“出现1点、3点或5点”，于是有

$$\overline{A} = \{1, 3, 5\};$$

因为事件$\overline{B}$是B的对立事件，所以它表示“出现的点数不能被3整除”，即“出现1点、2点、4点或5点”，于是有

$$\overline{B} = \{1, 2, 4, 5\};$$

因为事件$A \cup B$是事件A与B的并，所以它表示“出现的点数为偶数或能被3整除”，于是有

$$A \cup B = \{2, 3, 4, 6\};$$

因为事件AB是事件A与B的交，所以它表示“出现的点数为偶数且能被3整除”，于是有

$$AB = \{6\};$$

因为事件$\overline{A \cup B}$是$A \cup B$的对立事件，所以它表示“出现的点数为奇数且不能被3整除”，于是有

$$\overline{A \cup B} = \{1, 5\}.$$

□

1.2 设A, B, C表示三个随机事件，试将下列事件用A, B, C表示出来：

(2) A, B, C都发生；

(4) A, B, C不都发生；

(7) A,B,C中恰有一事件发生；

(8) A,B,C中至少有二事件发生；

解：

(2) "A,B,C都发生"是三事件A,B,C的交，故记作ABC；

(4) "A,B,C不都发生"就是"A,B,C都发生"的对立事件，故记作$\overline{ABC}$，也可记作$\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}$；

(7) "A,B,C中恰有一事件发生"就是"仅A发生，仅B发生或仅C发生"，这是三个互不相容事件$A\overline{B}\ \overline{C},\overline{A}B\overline{C},\overline{A}\ \overline{B}C$的并，故记作

$$A\overline{B}\ \overline{C}+\overline{A}B\overline{C}+\overline{A}\ \overline{B}C;$$

(8) "A,B,C中至少有二事件发生"就是"AB,AC,BC中至少有一事件发生"，即AB,AC,BC的并，故记作

$$AB+AC+BC\ (=AB\overline{C}+\overline{A}BC+A\overline{B}C+ABC);$$

□

1.5 把10本书任意地放在书架上，求其中指定的3本书放在一起的概率。

解： 把10本书任意地放在书架上，共有$P_{10}^{10}=10!$种不同的排列法。故基本事件的总数$n(\Omega)=10!$。设事件A表示"10 本书中指定的3本书放在一起"，则可以把这3本书作为1个整体与其它7本书任意摆放，应有$P_8^8=8!$种不同的排列法；放在一起的这3本书有$P_3^3=3!$种不同的排列法，故共有$8!\times 3!$种不同的排列法。所以，事件A包含的基本事件数$n(A)=8!\times 3!$。于是所求概率为：

$$P(A)=\frac{8!\times 3!}{10!}=\frac{1}{15}\approx 0.0667.$$

□

1.7 在桥牌比赛中，把52张牌任意地分发给东、南、西、北四家（每家13张牌），求北家的13张牌中：

(2) 恰有大牌A,K,Q,J各1张，其余为小牌的概率。

解： 只需考虑从52张牌中任取13张分发给北家的情况，而不必再考虑其余39张牌分发给其他三家的情况。从52张牌中任取13张分发给北家，共有C_{52}^{13}种不同的分法。所以，基本事件的总数

$$n(\Omega) = C_{52}^{13}.$$

(2) 设事件B表示“北家的13张牌中恰有大牌A,K,Q,J各1张，其余为小牌”，则有

$$n(B) = (C_4^1)^4 C_{36}^9$$

种不同的分法。于是所求概率为：

$$P(B) = \frac{(C_4^1)^4 C_{36}^9}{C_{52}^{13}} \approx 0.03795.$$

□

1.8 将3个球随机地投入4个盒子中，求下列事件的概率：

(3) C——任意1个盒子中有2个球，其它任意1个盒子中有1个球。

解： 将每一个球随机地投入4个盒子中，有4种不同的投法；将3个球随机地投入4个盒子中，则共有4^3种不同的投法。所以基本事件的总数

$$n(\Omega) = 4^3 = 64.$$

(3) 先从4个盒子中任选1个盒子，从3个球中任选2个球投入选定的这个盒子中，有$C_4^1 C_3^2$种不同的投法；将最后1个球随机地投入其余3个盒子中的任1个盒子中，有3种不同的投法；从而共有$n(C) = C_4^1 C_3^2 \times 3$种不同的投法。于是所求概率为：

$$P(C) = \frac{36}{64} = \frac{9}{16} = 0.5625.$$

□

1.9 同时掷四个均匀的骰子，求下列事件的概率：

(2) B——恰有两个骰子的点数相同；

(4) D——恰有三个骰子的点数相同；

解： 掷一个骰子出现的点数有6种不同的情形；同时掷四个骰子，出现的点数共有6^4种不同的情形。所以基本事件的总数

$$n(\Omega) = 6^4 = 1296.$$

(2) 为了使恰有两个骰子的点数相同，不妨从四个骰子中任选两个骰子配成一对，有C_4^2种不同的选法；这对骰子的点数相同，但与其余两个骰子的点数各不相同，有$6 \times 5 \times 4$种不同的情形；从而共有$C_4^2 \times 6 \times 5 \times 4$种不同的情形。所以，事件$B$包含的基本事件数

$$n(B) = C_4^2 \times 6 \times 5 \times 4 = 720.$$

于是所求概率为：

$$P(B) = \frac{720}{1296} = \frac{5}{9} \approx 0.5556.$$

(4) 为了使恰有三个骰子的点数相同，不妨从四个骰子中任选三个骰子组成一组，有C_4^3种不同的选法；这组骰子的点数相同，但与其余一个骰子的点数不相同，有6×5种不同的情形；从而共有$C_4^3 \times 6 \times 5$种不同的情形。所以，事件D包含的基本事件数

$$n(D) = C_4^3 \times 6 \times 5 = 120.$$

于是所求概率为：

$$P(B) = \frac{120}{1296} = \frac{5}{54} \approx 0.0926.$$

□

1.12 甲乙两艘轮船驶向一个不能同时停泊两艘轮船的码头停泊，它们在一昼夜内到达的时刻是等可能的。如果甲船的停泊时间是1h，乙船的停泊时间是2h，求它们中的任何一艘船都不需等候码头空出的概率。

解： 设甲乙两艘轮船到码头的时刻分别是x及y，则按题意有

$$0 \le x \le 24, \quad 0 \le y \le 24.$$

把(x,y)看作平面上的一点的直角坐标，则样本空间$\Omega = [0,24]^2$。设事件A表示两艘船中的任何一艘都不需等待码头空出，则有下述两种可能的情形：

(1) 如果甲船先到达码头（即$x < y$），则应有$y \ge x+1$；

(2) 如果乙船先到达码头（即$y < x$），则应有$x \ge y+2$。

因此事件$A = \{(x,y)|\ x+1 \le y \le 24, 0 \le x \le 23\} \cup \{(x,y)|\ y+2 \le x \le 24, 0 \le y \le 22\}$。于是所求概率就等于事件$A$的面积$s$与样本空间的面积之比：

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)} = \frac{\frac{1}{2}\times 23^2 + \frac{1}{2}\times 22^2}{24^2} \approx 0.879.$$

□

1.13 某工厂生产的一批产品共100个，其中有5个次品，从这批产品中任取一半来检查，求发现次品不多于1个的概率.

解： 从这批产品中任取一半（即50个产品）来检查，基本事件的总数

$$n(\Omega) = C_{100}^{50}.$$

设事件A表示检查时发现次品不多于1个，则A可以分解为两个互不相容的事件的并：

$$A = A_0 + A_1,$$

其中事件A_0表示检查时未发现次品，事件A_1表示检查时发现1个次品。易知事件A_0, A_1包含的基本事件数分别是：

$$n(A_0) = C_5^0 C_{95}^{50}, \quad n(A_1) = C_5^1 C_{95}^{49}.$$

则事件A_0, A_1的概率分别是：

$$P(A_0) = \frac{C_5^0 C_{95}^{50}}{C_{100}^{50}} \approx 0.0281,$$
$$P(A_1) = \frac{C_5^1 C_{95}^{49}}{C_{100}^{50}} \approx 0.1529.$$

于是，按概率加法公式得所求概率

$$P(A) = P(A_0 + A_1) = P(A_0) + P(A_1) \approx 0.0281 + 0.1529 = 0.181.$$

□

1.16 一批产品共20件，其中一等品9件，二等品7件，三等品4 件。从这批产品中任取3件，求：

(1) 取出的3件产品中恰有2件等级相同的概率；

(2) 取出的3件产品中至少有2件等级相同的概率.

解： 从这批产品（共20件）中任取3件产品，基本事件的总数为

$$n(\Omega) = C_{20}^3 = 1140.$$

(1) 设事件A表示取出的3件产品中恰有2件等级相同，则A可以分解为三个互不相容事件的并：

$$A = A_1 + A_2 + A_3,$$

其中事件A_1, A_2, A_3分别表示取出的3件产品中恰有2件一等品，恰有2件二等品，恰有2件三等品.易知事件A_1, A_2, A_3包含的基本事件数

分别是：

$$n(A_1) = C_9^2 C_{11}^1 = 396,$$
$$n(A_2) = C_7^2 C_{13}^1 = 273,$$
$$n(A_3) = C_4^2 C_{16}^1 = 96.$$

于是，按概率加法公式得所求概率

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 + A_2 + A_3) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) \\ &= \frac{396}{1140} + \frac{273}{1140} + \frac{96}{1140} = \frac{765}{1140} \approx 0.671. \end{aligned}$$

(2) 设事件B表示取出的3件产品中至少有2件等级相同，考虑事件B的对立事件$\overline{B}$，即取出来的3件产品的等级各不相同，也就是取出的3件产品中恰有1件一等品、1件二等品、1 件三等品.易知事件$\overline{B}$包含的基本事件数

$$n(\overline{B}) = C_9^1 C_7^1 C_4^1 = 252,$$

则事件$\overline{B}$的概率为

$$P(\overline{B}) = \frac{252}{1140} \approx 0.221.$$

于是所求概率为

$$P(B) = 1 - P(\overline{B}) \approx 1 - 0.221 = 0.779.$$

□

1.18 已知$P(A) = 0.5, P(B) = 0.7$，则

(1) 在怎样的条件下，$P(AB)$取得最大值？最大值是多少？

(2) 在怎样的条件下，$P(AB)$取得最小值？最小值是多少？

解：

(1) 因为$AB \subseteq A$, $AB \subseteq B$，所以$P(AB) \le P(A)$, $P(AB) \le P(B)$，即有$P(AB) \le \min\{P(A), P(B)\} = 0.5$。注意到当$A \subseteq B$时，$P(AB) = P(A) = 0.5$，故最大值为0.5。

(2) 由加法公式，$P(A+B) = P(A)+P(B)-P(AB) = 1.2-P(AB)$，此即$P(AB) = 1.2-P(A+B)$。注意到

$$P(A+B) \le \min\{1, P(A)+P(B)\} = 1,$$

且$A+B = \Omega$时等式成立，故此时$P(AB)$取最小值0.2。

□

1.20 在习题1.7中，求北家分到的13张牌中：

(1) 至少缺一种花色的概率；

解：

(1) 设事件A_1, A_2, A_3, A_4分别代表北家分到的13张牌中缺黑桃，缺红心，缺方块，缺草花，则事件

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$$

表示北家分到的13张牌中至少缺一种花色.如果北家分到13张牌中缺某一种花色，则这13张牌只能从其余三种花色的牌（共39 张）任意选取，所以有

$$P(A_i) = \frac{C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}}, \quad i = 1, 2, 3, 4;$$

如果北家分到的13张牌中缺某两种花色，则这13张牌只能从其余两张花色的牌（共26张）中任意选取，所以有

$$P(A_iA_j) = \frac{C_{26}^{13}}{C_{52}^{13}}, \quad 1 \le i < j \le 4;$$

如果北家分到的13张牌中缺某三种花色，则这13张牌只能从第四种花色的牌（共13张）中取得，所以有

$$P(A_iA_jA_k) = \frac{C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}}, \quad 1 \le i < j < k \le 4;$$

又事件$A_1A_2A_3A_4$是不可能事件，所以有

$$P(A_1A_2A_3A_4) = 0.$$

于是，按概率的加法公式，当$n = 4$时，得所求概率

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) \\ &= \sum_{i=1}^{4} P(A_i) - \sum_{1 \le i < j \le 4} P(A_iA_j) \\ &\quad + \sum_{1 \le i < j < k \le 4} P(A_iA_jA_k) - P(A_1A_2A_3A_4) \\ &= 4 \times \frac{C_{39}^{13}}{C_{52}^{13}} - 6 \times \frac{C_{26}^{13}}{C_{52}^{13}} + 4 \times \frac{C_{13}^{13}}{C_{52}^{13}} - 0 \approx 0.0511. \end{aligned}$$

□

1.21 袋中有a个白球与b个黑球，每次从袋中任取一个球，取出的球不再放回去，求第二次取出的球与第一次取出的球颜色相同的概率。

解： 设事件A_i表示第i次取出的球是白球$(i = 1, 2)$，则事件$\overline{A}_i$表示第i次取出的球是黑球$(i = 1, 2)$.又设事件A表示第二次取出的球与第一次取出的球颜色相同，则有

$$A = A_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2.$$

因为第一次取出的球不再放回去，所以有

$$P(A_1) = \frac{a}{a+b}, \quad P(A_2|A_1) = \frac{a-1}{a+b-1};$$

$$P(\overline{A}_1) = \frac{b}{a+b}, \quad P(\overline{A}_2|\overline{A}_1) = \frac{b-1}{a+b-1}.$$

按概率乘法公式得

$$\begin{aligned} P(A_1A_2) &= P(A_1)P(A_2|A_1) \\ &= \frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1} = \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)}, \\ P(\overline{A}_1\ \overline{A}_2) &= P(\overline{A}_1)P(\overline{A}_2|\overline{A}_1) \\ &= \frac{b}{a+b}\cdot\frac{b-1}{a+b-1} = \frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}. \end{aligned}$$

于是，按概率加法公式得所求概率

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1A_2 + \overline{A}_1\overline{A}_2) \\ &= \frac{a(a-1)}{(a+b)(a+b-1)} + \frac{b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)} \\ &= \frac{a(a-1)+b(b-1)}{(a+b)(a+b-1)}. \end{aligned}$$

□

1.26 盒中放有12个乒乓球，其中9个是新的.第一次比赛时从其中任取3个来用，比赛后仍放回盒中.第二次比赛时再从盒中任取3 个，求第二次取出的球都是新球的概率。

解： 设事件A表示第二次比赛时取出的球都是新球，事件B_i表示第一次比赛时用了i个新球$(i=0,1,2,3)$，则事件A可以分解如下：

$$A = \sum_{i=0}^{3} AB_i.$$

易知

$$P(B_i) = \frac{C_9^iC_3^{3-i}}{C_{12}^3}, \quad i=0,1,2,3.$$

如果第一次比赛时用了i个新球，则盒中还有$9-i$个新球，所以有

$$P(A|B_i) = \frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3}, \quad i=0,1,2,3.$$

于是，按全概率公式得所求概率

$$
\begin{aligned}
P(A) &= \sum_{i=0}^{3} \frac{C_9^i C_3^{3-i}}{C_{12}^3} \cdot \frac{C_{9-i}^3}{C_{12}^3} \\
&= \frac{1}{(C_{12}^3)^2}(C_9^0 C_3^3 C_9^3 + C_9^1 C_3^2 C_8^3 + C_9^2 C_3^1 C_7^3 + C_9^3 C_3^0 C_6^3) \\
&= \frac{1}{(220)^2}(1 \times 1 \times 84 + 9 \times 3 \times 56 + 36 \times 3 \times 35 + 84 \times 1 \times 20) \\
&= \frac{7056}{48400} \approx 0.146.
\end{aligned}
$$

□

1.27 试卷中有一道选择题，共有4个答案可供选择，其中只有1个答案是正确的，任一考生如果会解这道题，则一定能选出正确答案；如果他不会解这道题，则不妨任选一个答案。设考生会解这道题的概率是0.8，求

(1) 考生选出正确答案的概率；

(2) 已知某考生所选答案是正确的，则他确实会解这道题的概率。

解： 设事件A表示考生选出正确答案，事件B表示考生会解这道题，则事件$\overline{B}$表示考生不会解这道题。

(1) 将事件A分解如下：

$$A = AB + A\overline{B}.$$

由题意知：

$$
\begin{aligned}
&P(B) = 0.8, && P(\overline{B}) = 1 - 0.8 = 0.2; \\
&P(A|B) = 1, && P(A|\overline{B}) = \frac{1}{4} = 0.25.
\end{aligned}
$$

于是，按全概率公式得所求概率

$$
\begin{aligned}
P(A) &= P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}) \\
&= 0.8 \times 1 + 0.2 \times 0.25 = 0.85.
\end{aligned}
$$

(2) 由(1)知$P(A)=0.85$，且由题意知$P(A|B)=1$。按贝叶斯公式得所求概率为：

$$P(B|A)=\frac{P(B)P(A|B)}{P(A)}=\frac{0.8\times 1}{0.85}\approx 0.941.$$

□

1.29 发报台分别以概率0.6及0.4发出信号“·”及“–”。由于通讯系统受到干扰，当发出信号“·”时，收报台以概率0.8及0.2收到信号“·”及“–”；又当发出信号“–”时，收报台以概率0.9 及0.1收到信号“–”及“·”。求

(1) 当收报台收到信号“·”时，发报台确系发出信号“·”的概率；

(2) 当收报台收到信号“–”时，发报台确系发出信号“–”的概率。

解： 设事件A表示收报台收到信号“·”，事件B表示发报台发出信号“·”。则事件$\overline{A}$表示收报台收到信号“–”，事件$\overline{B}$表示发报台发出信号“–”。依题意有：

$$\begin{aligned} &P(B)=0.6, &&P(\overline{B})=0.4;\\ &P(A|B)=0.8, &&P(\overline{A}|B)=0.2;\\ &P(A|\overline{B})=0.1, &&P(\overline{A}|\overline{B})=0.9. \end{aligned}$$

(1) 按贝叶斯公式得所求概率为：

$$\begin{aligned} P(B|A)&=\frac{P(B)P(A|B)}{P(B)P(A|B)+P(\overline{B})P(A|\overline{B})}\\ &=\frac{0.6\times 0.8}{0.6\times 0.8+0.4\times 0.1}=\frac{12}{13}\approx 0.923. \end{aligned}$$

(2) 按贝叶斯公式得所求概率为：

$$\begin{aligned} P(\overline{B}|\overline{A})&=\frac{P(\overline{B})P(\overline{A}|\overline{B})}{P(B)P(\overline{A}|B)+P(\overline{B})P(\overline{A}|\overline{B})}\\ &=\frac{0.4\times 0.9}{0.6\times 0.2+0.4\times 0.9}=\frac{3}{4}=0.75. \end{aligned}$$

□

1.30 证明：如果$P(A|B)=P(A|\overline{B})$，则事件A与B是独立的。

证明： 由条件概率的定义，条件$P(A|B)=P(A|\overline{B})$即是说

$$\frac{P(AB)}{P(B)}=\frac{P(A\overline{B})}{P(\overline{B})},$$

该等式等价于

$$P(AB)P(\overline{B})=P(A\overline{B})P(B).$$

将$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$及$P(\overline{B})=1-P(B)$代入上式并展开

$$P(AB)-P(AB)P(B)=P(A)P(B)-P(AB)P(B).$$

化简即得

$$P(AB)=P(A)P(B),$$

故事件A与B是相互独立的。 □

1.32 电路由电池a与两个并联的电池b及c串联而成。设电池a,b,c损坏的概率分别为$0.3,0.2,0.2$，求电路发生间断的概率。

解： 设事件A、B、C分别表示电池a、b、c损坏，事件D表示电路发生间断，则按题意知，

$$D=A+BC.$$

由题目条件，

$$P(A)=0.3,\quad P(B)=0.2,\quad P(C)=0.2,$$

且事件A、B、C是相互独立的，于是按概率加法公式及概率乘法公式得所求概率

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A+BC) = P(A) + P(BC) - P(ABC)\\ &= P(A) + P(B)P(C) - P(A)P(B)P(C)\\ &= 0.3 + 0.2\times 0.2 - 0.3\times 0.2\times 0.2\\ &= 0.328.\end{aligned}$$

□

1.33 如图1.4所示，设构成系统的每个电子元件的可靠性都等于$p(0<p<1)$，并且各个元件能否正常工作是相互独立的，求系统(1)和(2)的可靠性，并比较它们的大小.

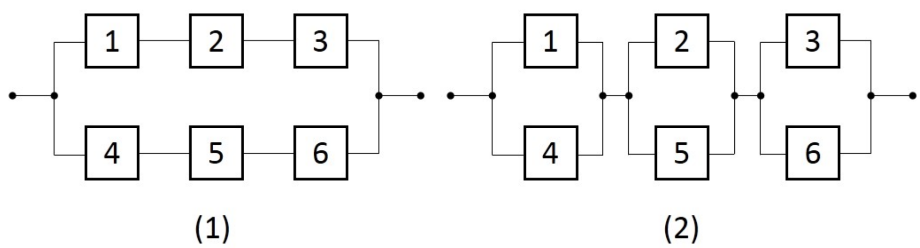

图1.4

解： 假设事件B_i表示第i个电子元件能正常工作$(i=1,2,3,4,5,6)$，则可知：

$$P(B_i) = p,\ i = 1,2,3,4,5,6.$$

假设事件A_1表示系统(1)能正常工作，则根据图1.4所示，A_1可以分解如下：

$$A_1 = (B_1B_2B_3)\bigcup(B_4B_5B_6).$$

注意到事件$B_1, B_2, \ldots, B_6$是相互独立的，于是可得系统(1)的可靠性：

$$\begin{aligned}
P(A_1) &= P(B_1B_2B_3) + P(B_4B_5B_6) - P(B_1B_2\cdots B_6)\\
&= P(B_1)P(B_2)P(B_3) + P(B_4)P(B_5)P(B_6) - P(B_1)P(B_2)\cdots P(B_6)\\
&= 2p^3 - p^6 = p^3(2-p^3).
\end{aligned}$$

假设事件A_2表示系统(2)能正常工作，则根据图1.4所示，A_2可以分解如下：

$$A_2 = (B_1\bigcup B_4)(B_3\bigcup B_5)(B_3\bigcup B_6).$$

同理可得系统(2)的可靠性：

$$\begin{aligned}
P(A_2) &= P(B_1\bigcup B_4)P(B_3\bigcup B_5)P(B_3\bigcup B_6)\\
&= [P(B_1)+P(B_4)-P(B_1)P(B_4)]\cdots[P(B_3)+P(B_6)-P(B_3)P(B_6)]\\
&= (2p-p^2)^3 = p^3(2-p)^3.
\end{aligned}$$

因为

$$\begin{aligned}
P(A_2)-P(A_1) &= p^3(2-p)^3 - p^3(2-p^3)\\
&= 6P^3(1-P)^2 > 0.
\end{aligned}$$

所以系统(2)可靠性较大。 □

1.34 甲乙丙三人向同一飞机射击，设击中的概率分别是0.4, 0.5, 0.7。如果只有一人击中，则飞机被击落的概率是0.2；如果有二人击中，则飞机被击落的概率是0.6；如果三人都击中，则飞机一定被击落。求飞机被击落的概率。

解： 设事件A, B, C分别表示甲击中飞机、乙击中飞机、丙击中飞机，事件D_i表示有i个人击中飞机($i=1,2,3$)，则事件D_1, D_2, D_3可以分解如

下：

$$\begin{aligned}D_1 &= A\overline{B}\ \overline{C} + \overline{A}B\overline{C} + \overline{A}\ \overline{B}C,\\ D_2 &= AB\overline{C} + A\overline{B}C + \overline{A}BC,\\ D_3 &= ABC.\end{aligned}$$

因为事件A, B, C是相互独立的，按概率加法公式及概率乘法公式得

$$\begin{aligned}P(D_1) &= P(A\overline{B}\ \overline{C}) + P(\overline{A}B\overline{C}) + P(\overline{A}\ \overline{B}C)\\ &= P(A)P(\overline{B})P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(B)P(\overline{C}) + P(\overline{A})P(\overline{B})P(C)\\ &= 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.3 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7\\ &= 0.36,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(D_2) &= P(AB\overline{C}) + P(A\overline{B}C) + P(\overline{A}BC)\\ &= P(A)P(B)P(\overline{C}) + P(A)P(\overline{B})P(C) + P(\overline{A})P(B)P(C)\\ &= 0.4 \times 0.5 \times 0.3 + 0.4 \times 0.5 \times 0.7 + 0.6 \times 0.5 \times 0.7\\ &= 0.41,\end{aligned}$$

$$P(D_3) = P(ABC) = P(A)P(B)P(C) = 0.4 \times 0.5 \times 0.7 = 0.14.$$

设事件E表示飞机被击落，则E可以分解为：

$$E = D_1E + D_2E + D_3E.$$

按全概率公式得所求概率为：

$$\begin{aligned}P(E) &= \sum_{i=1}^{3} P(D_i)P(E|D_i)\\ &= 0.36 \times 0.2 \times +0.41 \times 0.6 + 0.14 \times 1\\ &= 0.458.\end{aligned}$$

□

1.36 电灯泡的使用时数在1000h以上的概率为0.2，求三个灯泡在使用1000h以后最多只有一个坏了的概率。

解： 设事件A表示电灯泡的使用时数在1000h以上，则事件$\overline{A}$表示电灯泡的使用时数在1000h以下，则有

$$P(A) = 0.2, \quad P(\overline{A}) = 0.8.$$

设事件B_i表示三个灯泡使用1000h以后恰有i个坏了$(i = 0, 1, 2, 3)$，则“三个灯泡使用1000h以后最多只有一个坏了”这一事件可以表示为B_0+B_1.按二项概率公式得

$$P(B_0) = C_3^0(0.8)^0(0.2)^3 = 0.008,$$

$$P(B_1) = C_3^1(0.8)^1(0.2)^2 = 0.096.$$

于是，按概率加法公式得所求概率为：

$$P(B_0 + B_1) = P(B_0) + P(B_1) = 0.008 + 0.096 = 0.104.$$

□

1.37 甲乙两个篮球运动员的投篮命中率分别为0.7及0.6。每人投篮三次，求：

(2) 甲比乙进球数多的概率。

解： 设事件A_i表示甲在3次投篮中投进i个球$(i = 0, 1, 2, 3)$，事件B_j表示乙在3次投篮中投进j个球$(j = 0, 1, 2, 3)$，则按二项概率公式得

$$P(A_0) = C_3^0(0.7)^0(0.3)^3 = 0.027, \quad P(A_1) = C_3^1(0.7)^1(0.3)^2 = 0.189,$$

$$P(A_2) = C_3^2(0.7)^2(0.3)^1 = 0.441, \quad P(A_3) = C_3^3(0.7)^3(0.3)^0 = 0.343,$$

$$P(B_0) = C_3^0(0.6)^0(0.4)^3 = 0.064, \quad P(B_1) = C_3^1(0.6)^1(0.4)^2 = 0.288,$$

$$P(B_2) = C_3^2(0.6)^2(0.4)^1 = 0.432, \quad P(B_3) = C_3^3(0.6)^3(0.4)^0 = 0.216.$$

(2) 设事件D表示甲比乙进球数多，则可以分解为：

$$D = A_1B_0 + A_2(B_0 + B_1) + A_3(B_0 + B_1 + B_2).$$

得所求概率为：

$$\begin{aligned}P(D) &= P(A_1B_0) + P[A_2(B_0 + B_1)] + P[A_3(B_0 + B_1 + B_2)]\\ &= P(A_1)P(B_0) + P(A_2)[P(B_0) + P(B_1)]\\ &\quad + P(A_3)[P(B_0) + P(B_1) + P(B_2)]\\ &= 0.189 \times 0.064 + 0.441 \times (0.064 + 0.288)\\ &\quad + 0.343 \times (0.064 + 0.288 + 0.432)\\ &\approx 0.436.\end{aligned}$$

□

1.38 射击运动中，一次射击最多能得10环。设某运动员在一次射击中得10环的概率为0.4，得9环的概率为0.3，得8 环的概率为0.2，求该运动员在5次独立射击中得到不少于48 环的概率。

解：　设事件A表示该运动员在5次独立射击中得到不少于48环，则A可以分解为下列事件的并：

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4,$$

其中

A_1——5次都得到10环，共得50环；

A_2——5次中有4次得到10环，1次得到9环，共得49环；

A_3——5次中有4次得到10环，1次得到8环，共得48环；

A_4——5次中有3次得到10环，2次得到9环，共得48环。

由已知条件，每次射击得10环、9环、8环的概率分别是

$$P_{10} = 0.4, \quad P_9 = 0.3, \quad P_8 = 0.2,$$

则按概率乘法公式及概率加法定理得

$$\begin{aligned} P(A_1) &= (0.4)^5 = 0.01024, \\ P(A_2) &= C_5^4(0.4)^4(0.3)^1 = 0.0384, \\ P(A_3) &= C_5^4(0.4)^4(0.2)^1 = 0.0256, \\ P(A_4) &= C_5^3(0.4)^3(0.3)^2 = 0.0576. \end{aligned}$$

于是，按概率加法公式得所求概率

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A_1) + P(A_2) + P(A_3) + P(A_4) \\ &= 0.01024 + 0.0384 + 0.0256 + 0.0576 \\ &= 0.13184 \ (\approx 0.132). \end{aligned}$$

$\square$

作业情况：

1 本次作业完成情况良好，但比较多同学没有解题分析，直接列出式子进行解答，缺少步骤。

2 对于1.7,1.13,1.20这些有组合数计算的题目，很多同学没有进行化简计算最后的概率值。

3 对于1.18的第2小题，许多同学没有详细严谨地解释$P(AB)_{min} = 0.2$的原因。