第六章 参数估计

刘 春 光

暨南大学数学系

2018年4月

目录

目录

基本概念

问题提出：为什么要进行参数估计？

在实际问题中，总体分布一般是未知的，我们常常事先假定总体分布的类型，再通过取样的方式估计分布中的未知参数。

基本概念

例：考察某随机试验中事件A发生的概率。一次试验中事件A发生的次数服从参数为p的0-1分布。这里p需要通过样本进行估计。

例：一般假定一个城市在单位时间内发生交通事故的次数服从泊松分布$P(\lambda)$，这里的参数λ需要通过观察取样来给出。

基本概念

例：假定某种电子元件的寿命服从参数为λ的指数分布，这里λ为待定参数。

例：假定某城市居民的收入服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，这里μ和σ^2的具体值都需要取样估计。

基本概念

例：假定中国20-30岁人群的身高、体重服从二元正态分布

$$N(\mu_1, \mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho),$$

分布中5个参数都需要通过抽取样本然后用统计量近似估计。

矩估计

矩估计是基于“替换”的思想建立起来的一种参数估计方法。最早由英国统计学家皮尔逊(K. Pearson) 提出。

其思想是：用同类、同阶的样本矩来估计总体矩。

矩估计

对总体X，其k阶原点矩为

$$\nu_k(X) = E(X^k).$$

当总体分布的所有参数已知时，$\nu_k(X)$为一个确定的数；当有参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$未知时，则

$$\nu_k(X) = E(X^k) = \nu_k(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m)$$

为未知参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$的函数。

矩估计

对样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$，其k阶样本原点矩为

$$V_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k = \frac{X_1^k + X_2^k + \cdots + X_n^k}{n}.$$

矩估计

矩估计的理论基础：因为$X_1, X_2, \cdots, X_n$是独立同分布的，故$X_1^k, X_2^k, \cdots, X_n^k$也是独立同分布的，且

$$E(X_1^k) = E(X_2^k) = \cdots = E(X_n^k) = \nu_k(X).$$

由大数定理知，当n趋于无穷时，

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i^k \xrightarrow{P} \nu_k(X).$$

矩估计

矩估计法：设总体分布中有m个待定参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m$，令总体的前$m$阶原点矩分别与同阶的样本原点矩相等，这样就得到了一个m元方程组

$$\begin{cases} \nu_1(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) = V_1, \\ \nu_2(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) = V_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \nu_m(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_m) = V_m. \end{cases}$$

矩估计

矩估计法（续）：解上述方程组，得

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1 = \hat{\theta}_1(X_1, X_2, \cdots, X_n), \\ \hat{\theta}_2 = \hat{\theta}_2(X_1, X_2, \cdots, X_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \hat{\theta}_m = \hat{\theta}_m(X_1, X_2, \cdots, X_n). \end{cases}$$

每个$\hat{\theta}_k$是参数θ_k的估计量，称为矩估计量。

矩估计

例：当总体中只有一个参数时，矩估计即是用样本平均值估计总体期望。

例1 设总体X在区间$[0,\theta]$上服从均匀分布，其中$\theta>0$是未知参数，抽取样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$，求θ的矩估计量。

矩估计

例：当总体中有两个或以上的参数时，总体期望与方差的矩估计分别为

$$\hat{\mu} = \overline{X}, \qquad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

例2 对正态总体$N(\mu, \sigma^2)$，两个参数的矩估计即为上式。

矩估计

练习：设总体X的分布律为

X	1	2	3
P	$\frac{\theta}{2}$	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$

其中$\theta \in (0,1)$。$X_1, X_2, \cdots, X_n$ 为X 的随机样本，求θ的矩估计。

矩估计

矩估计的优缺点

1. 优点：思路直观，简单易行；（对总体的均值和方差做估计时）不需要事先知道总体是什么分布。
2. 缺点：矩的选取比较随意，没有理论依据；在选取不同的组合时，得到的估计量也不同；有些情况下得到的估计量不符合实际情况；当总体的分布类型已知时，未充分利用分布所提供的信息。

最大似然估计

最大似然估计法是在总体的分布类型已知的前提下使用的一种参数估计法。

该方法很早已被高斯、拉普拉斯等数学家使用，其后英国统计学家费歇(R.A.Fisher)在1912-1922年正式提出该方法，并做分析研究及推广应用。

最大似然估计

基本思路：样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$经具体抽样所得的观察值$x_1, x_2, \cdots, x_n$应当是最可能出现的数值。

方法：在已知分布类型的情况下，求参数使得事件

$$\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$

对应的概率（离散型）或者概率密度（连续型）达到最大值。

最大似然估计

定义：设X为离散型随机变量，称函数

$$f(x) = P\{X = x\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

为X的概率质量函数(probability mass function, pmf)。

最大似然估计

若离散型随机变量X的分布律为

$$P\{X = y_i\} = p_i, \quad i = 1, 2, \cdots$$

则其概率质量函数为

$$f(x) = \begin{cases} p_i & x = y_i,\ i = 1, 2, \cdots \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

最大似然估计

设离散型总体X的概率质量函数为$f(x)$，则事件

$$\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$

对应的概率为

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n).$$

最大似然估计

设连续型总体X的概率密度函数为$f(x)$，则事件

$$\{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \cdots, X_n = x_n\}$$

对应的联合概率密度为

$$\prod_{i=1}^{n} f(x_i) = f(x_1)f(x_2)\cdots f(x_n).$$

最大似然估计

Definition (似然函数(likelihood function))

设连续型（离散型）总体X的概率密度函数（概率质量函数）为

$$f(x;\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k).$$

则样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$在观测值$x_1, x_2, \cdots, x_n$处的联合概率密度（概率）为

$$L(x_1, \cdots, x_n;\ \theta_1, \cdots, \theta_k) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i;\ \theta_1, \cdots, \theta_k).$$

此时$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$被看做固定但是未知的参数。

最大似然估计

Definition (似然函数(likelihood function)（续）)

如果将观测值$x_1, x_2, \cdots, x_n$看成固定的，将

$$L(x_1, \cdots, x_n;\ \theta_1, \cdots, \theta_k)$$

看做$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$的函数，则该函数被称为似然函数。

最大似然估计

参数的选择：哪一组参数值使得现有的样本观测值出现的可能性最大，哪一组参数就与观察结果最匹配的参数。

最大似然估计

Definition (最大似然估计(maximum likelihood estimators))

如果似然函数

$$L(x_1, x_2, \cdots, x_n;\ \theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k)$$

在

$$(\theta_1^*, \theta_2^*, \cdots, \theta_k^*)$$

处达到最大值，则称上述参数为未知参数的最大似然估计。

最大似然估计

求似然函数最大值点的方法：

1. 若函数可微，则其在最大值点处的导数（偏导数）为零；
2. 由于$\ln L$与L同时达到最大值，且在实际应用中常常比L更方便求导，故一般将问题化为求$\ln L$的最大值点。

最大似然估计

似然函数的最大值点

$$(\theta_1^*, \theta_2^*, \cdots, \theta_k^*)$$

是样本观测值$x_1, x_2, \cdots, x_n$的函数。得到函数表达式后，一般将其中的观测值$x_1, x_2, \cdots, x_n$对应换为$X_1, X_2, \cdots, X_n$，从而将$\theta_1^*, \theta_2^*, \cdots, \theta_k^*$写成统计量的形式。

最大似然估计

求最大似然估计的一般方法：

1. 写出似然函数L；
2. 求似然函数的对数$\ln L$；
3. 对$\ln L$求导（偏导）并令导数等于零，得到似然方程组；
4. 解方程组得到$\ln L$的驻点，判断该驻点是否最大值点；
5. 将最大值点表达式中的x_i换为X_i，就得到参数的最大似然估计。

最大似然估计

例3 设总体X服从泊松分布$P(\lambda)$，求参数λ的矩估计及最大似然估计。

结论：样本均值是泊松分布的参数的矩估计及最大似然估计。

最大似然估计

例4 设总体X服从参数为λ的指数分布，求λ的矩估计及最大似然估计。

结论：样本均值的倒数是指数分布的参数的矩估计及最大似然估计。

最大似然估计

例5 求正态总体$N(\mu,\sigma^2)$ 的参数μ 和σ^2的最大似然估计（注意我们把σ^2看作一个参数）。

结论：

$$\mu^* = \overline{X}, \qquad \sigma^{2^*} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

最大似然估计

练习：设总体X的分布律为

X	1	2	3
P	$\frac{\theta}{2}$	$\frac{\theta}{2}$	$1-\theta$

其中$\theta \in (0,1)$。现抽取4个样本观察得

$$x_1 = 2,\ x_2 = 1,\ x_3 = 2,\ x_4 = 3.$$

求θ的矩估计和最大似然估计。

最大似然估计

练习：设总体X的密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\theta x^{\theta-1}, & 0\le x\le 1,\\ 0, & \text{otherwise},\end{cases}$$

其中$\theta>0$。求θ的矩估计和最大似然估计。

最大似然估计

例7 设总体X服从$[a,b]$上的均匀分布，求a,b的矩估计及最大似然估计。

★补充：最大似然估计的性质

Theorem (最大似然估计的传递性)

设$\theta_1^*, \theta_2^*, \cdots, \theta_k^*$是参数$\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k$的最大似然估计，则对参数的函数

$$g(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_k),$$

其最大似然估计就是

$$g(\theta_1^*, \theta_2^*, \cdots, \theta_k^*).$$

★补充：最大似然估计的性质

在一些一般性的假设下，当样本容量足够大时，最大似然估计是

1. 近似无偏的；
2. 方差接近最小值。

因此，最大似然估计可以被近似视为最小方差无偏估计量。

目录

无偏性

Definition (无偏估计(unbiased estimator))

假设θ为总体分布的参数，设

$$\hat{\theta} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \cdots, X_n)$$

是θ的一个估计。如果对θ的一切可能取值，都有

$$E(\hat{\theta}) = \theta,$$

则称$\hat{\theta}$是θ的无偏估计。

无偏性

无偏性的说明：

1. 无偏性的意义：用估计量$\hat{\theta}$估计参数θ，虽然可能有偏差，但是总体平均起来等于θ。
2. 定义中要求$E(\hat{\theta})=\theta$"对θ的一切可能取值"成立，但我们在验证时一般并不需要特别讨论θ的具体取值范围。

无偏性

Theorem

设总体X的期望和方差分别为

$$E(X)=\mu, \qquad D(X)=\sigma^2.$$

从总体取一组样本$X_1, X_2, \cdots, X_n$，则样本平均数$\overline{X}$与样本方差S^2分别是μ和σ^2的无偏估计，即

$$E(\overline{X})=\mu, \qquad E(S^2)=\sigma^2.$$

无偏性

作为对比，估计量

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2.$$

不是总体方差的无偏估计。

无偏性

无偏估计量不是唯一的，如设$X_1, X_2, \cdots, X_n$为抽自均值为μ的总体的样本，以下三个估计量都是μ的无偏估计：

$$\hat{\mu}_1 = X_1,$$
$$\hat{\mu}_2 = \frac{X_1 + X_2}{2},$$
$$\hat{\mu}_3 = \frac{X_1 + X_2 + X_{n-1} + X_n}{4} \ (\text{当} n \geq 4\text{时}).$$

均方误差准则

Definition (均方误差(mean squared error))

设$\hat{\theta}$是参数θ的估计量，称

$$MSE(\hat{\theta}) := E[(\hat{\theta}-\theta)^2]$$

为$\hat{\theta}$的均方误差。

均方误差满足以下等式

$$MSE(\hat{\theta}) = D(\hat{\theta}) + [E(\hat{\theta})-\theta]^2.$$

均方误差准则

估计量的比较：在估计量的选取中，

1. 无偏估计量优于有偏估计量；
2. 在无偏估计量中，方差越小的越好。

Definition (最小方差无偏估计量(Minimum Variance unbiased estimator, MVUE))

如果在θ的所有无偏估计量中，$\hat{\theta}$的方差达到最小，则称$\hat{\theta}$是θ的最小方差无偏估计量。

★补充：有效性

Theorem (Cramér－Rao inequality)

设$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量，则有

$$D(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{I(\theta)},$$

其中

$$I(\theta) = \mathrm{E}\left[\left(\frac{\partial \ell(x;\theta)}{\partial \theta}\right)^2\right] = -\mathrm{E}\left[\frac{\partial^2 \ell(x;\theta)}{\partial \theta^2}\right],$$

$\ell(x;\theta) = \ln f(x;\theta)$。

★补充：有效性

Definition (有效估计量(Efficient estimator))

设$\hat{\theta}$为θ的无偏估计量，若有

$$D(\hat{\theta}) = \frac{1}{I(\theta)},$$

则称$\hat{\theta}$为θ的有效估计量。

有效估计量一定是最小方差无偏估计量，但反之未必成立。

一致性

Definition (一致估计)

如果当$n \to \infty$时，$\hat{\theta}$依概率收敛于θ，即对任意的$\varepsilon > 0$，有

$$\lim_{n\to\infty} P\{|\hat{\theta} - \theta| < \varepsilon\} = 1,$$

则称$\hat{\theta}$为参数θ的一致估计。

设总体X的均值与方差分别为μ和σ^2，则

1. 样本均值$\overline{X}$为总体均值μ的一致估计量，
2. 样本方差S^2是总体方差σ^2的一致估计量。

目录

置信区间

前面讨论的矩估计和最大似然估计都是点估计。点估计就是利用样本计算出的值（即实轴上的点）来估计未知参数。

点估计的优点是：可直接得出未知参数大致是多少。而缺点则是：点估计只能给出一个点，但事实上，未知参数的取值常常在某个范围内都是合理的。

置信区间

Definition (置信区间(confidence interval))

设θ为总体的待估参数，常数$\alpha \in (0,1)$，若有两个统计量$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$，使得

$$P\{\hat{\theta}_1 < \theta < \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha.$$

则称区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$为$\theta$的置信水平(confidence level)为$1-\alpha$的置信区间，$\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$分别称为置信下限和置信上限。

置信区间

判定置信区间优劣的两个指标

1. 可信度：置信水平，即待估参数落在给定区间的概率；
2. 精确度：由区间长度决定。区间越短则精度越高。

置信区间

可信度与精确度是一对矛盾，可信度的提高常常意味着精度的降低。因此我们一般先选定可以接受的置信水平，然后通过以下方式提高精度

1. 在相同置信水平的区间中，尽可能选取长度最短的；
2. 在实际操作的限制下，尽量多地抽取样本。

总体期望的区间估计

情况一：正态总体、方差已知

设$X_1,\cdots,X_n$是取自正态总体$N(\mu,\sigma^2)$的样本，其中σ^2已知。则总体期望μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times u_{\alpha/2},\ \overline{X}+\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\times u_{\alpha/2}\right),$$

其中u_α为标准正态分布的上α分位点，即若随机变量$X\sim N(0,1)$，则u_α使得$P\{X\geq u_\alpha\}=\alpha$。

总体期望的区间估计

例1 从一批零件中抽取9个零件，测得直径为（单位: 毫米）

19.7, 20.1, 19.8, 19.9, 20.2, 20.0, 19.9, 20.2, 20.3.

设零件直径服从正态分布$N(\mu, 0.21^2)$，求μ的置信水平为0.95及0.99的置信区间。

总体期望的区间估计

练习：已知某炼铁厂的铁水含碳量服从正态分布，其方差$\sigma^2 = 0.108^2$。现测定了9炉铁水，其平均含碳量为4.484。按此资料计算该厂铁水平均含碳量的置信区间，并要求95%的可靠性。

总体期望的区间估计

正态总体、方差已知的结论对以下情况同样适用：

1. 总体未知，方差已知，大样本；此时样本平均值近似服从正态分布；
2. 总体未知，方差未知，大样本；此时样本平均值近似服从正态分布，方差可用样本方差代替。

总体期望的区间估计

练习：某公司欲估计其生产的电池寿命。现从产品中随机抽取50只电池做寿命试验。这些电池的寿命的平均值和标准差分别为（单位：100小时）

$$\overline{X} = 2.266, \qquad S = 1.935.$$

求该公司生产的电池平均寿命的置信系数为95%的置信区间。

总体期望的区间估计

情况二：正态总体、方差未知

设$X_1, \cdots, X_n$是取自正态总体$N(\mu, \sigma^2)$的样本，其中σ^2未知。则总体期望μ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X} - \frac{S}{\sqrt{n}} \times t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right), \overline{X} + \frac{S}{\sqrt{n}} \times t_{n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right).$$

总体期望的区间估计

例2 从一批零件中抽取9个零件，测得直径为（单位: 毫米）

19.7, 20.1, 19.8, 19.9, 20.2, 20.0, 19.9, 20.2, 20.3.

设零件直径服从均值为μ的正态分布，求μ的置信水平为0.95的置信区间。

总体期望的区间估计

练习：假定初生男婴体重服从正态分布，随机抽取16名男婴测其体重，得样本平均值及样本标准差分别为（单位：克）

$$\overline{X} = 3057, \qquad S = 380.$$

试以0.95的置信度估计新生男婴的平均体重。

总体方差的区间估计

情况一：正态总体、均值已知

设$X_1,\cdots,X_n$是取自正态总体的样本，总体均值μ已知，则总体方差σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_n^2(\frac{\alpha}{2})}, \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2}{\chi_n^2(1-\frac{\alpha}{2})}\right).$$

总体方差的区间估计

情况二：正态总体、均值未知

设$X_1, \cdots, X_n$是取自正态总体的样本，总体均值μ未知，则总体方差σ^2的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(\frac{\alpha}{2})}, \frac{(n-1)S^2}{\chi^2_{n-1}(1-\frac{\alpha}{2})}\right).$$

总体期望的区间估计

例3 从一批零件中抽取9个零件，测得直径为（单位: 毫米）

19.7, 20.1, 19.8, 19.9, 20.2, 20.0, 19.9, 20.2, 20.3.

设零件直径服从正态分布，求方差σ^2的置信水平为0.95的置信区间，如果

1. 已知零件直径的均值$\mu = 20$;
2. 零件直径的均值μ未知。

总体方差的区间估计

练习：假定初生男婴体重服从正态分布，随机抽取16名男婴测其体重，得样本标准差为（单位：克）

$$S = 380.$$

试以0.95的置信度估计新生男婴体重的方差。

目录

两个正态总体的区间估计

在实际问题中，经常会遇到两个正态总体的比较问题。如考察新技术对提高产品的某项质量指标的作用，设实施新技术前的产品质量指标服从正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$，实施新技术后产品质量指标服从正态总体$N(\mu_2, \sigma_2^2)$。为比较前后阶段产品质量指标的差别，需要对$\mu_1 - \mu_2$进行估计。

两个正态总体的区间估计

在本节中，我们始终做如此假设：

$X_1, X_2, \cdots, X_m$是取自正态总体$N(\mu_1, \sigma_1^2)$的样本，$Y_1, Y_2, \cdots, Y_n$取自正态总体$N(\mu_2, \sigma_2^2)$，样本平均值分别为$\overline{X}$和$\overline{Y}$，样本方差分别为

$$S_1^2 := \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \overline{X})^2,$$

$$S_2^2 := \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2.$$

两个正态总体的期望之差的区间估计

在上述假设下，我们有

$$(1)\ \overline{X}-\overline{Y}\sim N\left(\mu_1-\mu_2,\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}\right).$$

若进一步假设$\sigma_1^2=\sigma_2^2$，则

$$(2)\ \frac{\overline{X}-\overline{Y}-(\mu_1-\mu_2)}{\sqrt{\frac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}}\sim t(m+n-2).$$

两个正态总体的期望之差的区间估计

情况一：两个正态总体，方差已知

设两个总体的方差σ_1^2与σ_2^2均已知，则总体期望的差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm\sqrt{\frac{\sigma_1^2}{m}+\frac{\sigma_2^2}{n}}\times u_{\alpha/2}\right).$$

两个正态总体的期望之差的区间估计

情况二：两个正态总体，方差未知，但相等

设两个总体的方差未知，但知道它们相等，则总体期望的差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\overline{X}-\overline{Y}\pm S\cdot\sqrt{\frac{1}{m}+\frac{1}{n}}\times t_{m+n-2}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right),$$

其中$S=\sqrt{\dfrac{(m-1)S_1^2+(n-1)S_2^2}{m+n-2}}$。

两个正态总体的期望之差的区间估计

例1 两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得直径如下（单位：毫米）：

甲机床：$15.0, 14.8, 15.2, 15.4, 14.9, 15.1, 15.2, 14.8;$

乙机床：$15.2, 15.0, 14.8, 15.1, 15.0, 14.6, 14.8, 15.1, 14.5.$

设两台机床生产的滚珠直径分别服从正态分布，求两类滚珠直径均值差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.90的置信区间，如果(1) 已知标准差$\sigma_1=0.18$，$\sigma_2=0.24$。

两个正态总体的期望之差的区间估计

例1 两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得直径如下（单位：毫米）：

甲机床：$15.0, 14.8, 15.2, 15.4, 14.9, 15.1, 15.2, 14.8;$

乙机床：$15.2, 15.0, 14.8, 15.1, 15.0, 14.6, 14.8, 15.1, 14.5.$

设两台机床生产的滚珠直径分别服从正态分布，求两类滚珠直径均值差$\mu_1-\mu_2$的置信水平为0.90的置信区间，如果(2) 两个标准差未知，但假设它们相等。

两个正态总体的方差比的区间估计

情况一：两个正态总体，均值已知

设两个总体的均值μ_1与μ_2均已知，则总体方差的比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2}\times\frac{1}{F_{m,n}(\frac{\alpha}{2})},\right.\\ \left.\frac{\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}(X_i-\mu_1)^2}{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(Y_j-\mu_2)^2}\times\frac{1}{F_{m,n}(1-\frac{\alpha}{2})}\right).$$

两个正态总体的方差比的区间估计

情况二：两个正态总体，均值未知

设两个总体的均值μ_1与μ_2均未知，则总体方差的比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为$1-\alpha$的置信区间为

$$\left(\frac{S_1^2}{S_2^2}\times\frac{1}{F_{m-1,n-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right)},\ \frac{S_1^2}{S_2^2}\times\frac{1}{F_{m-1,n-1}\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}\right).$$

两个正态总体的方差比的区间估计

例2 两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得直径如下（单位：毫米）：

甲机床：$15.0, 14.8, 15.2, 15.4, 14.9, 15.1, 15.2, 14.8;$

乙机床：$15.2, 15.0, 14.8, 15.1, 15.0, 14.6, 14.8, 15.1, 14.5.$

设两台机床生产的滚珠直径分别服从正态分布，求两类滚珠直径方差比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为0.90的置信区间，如果(1) $\mu_1 = 15.0$, $\mu_2 = 14.9$。

两个正态总体的方差比的区间估计

例2 两台机床生产同一个型号的滚珠，从甲机床生产的滚珠中抽取8个，从乙机床生产的滚珠中抽取9个，测得直径如下（单位：毫米）：

甲机床：$15.0, 14.8, 15.2, 15.4, 14.9, 15.1, 15.2, 14.8;$

乙机床：$15.2, 15.0, 14.8, 15.1, 15.0, 14.6, 14.8, 15.1, 14.5.$

设两台机床生产的滚珠直径分别服从正态分布，求两类滚珠直径方差比$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$的置信水平为0.90的置信区间，如果(2) μ_1与μ_2均未知。

目录

★非正态总体参数的区间估计

如果总体不服从正态分布，则样本函数的分布不易确定，做未知参数的区间估计比较困难。但是当样本容量足够大时，可以根据中心极限定理近似解决这个问题。

★非正态总体参数的区间估计

例如，若总体X的分布中有唯一的未知参数θ，则总体均值和方差都依赖于θ，记作

$$E(X) = \mu(\theta), \quad D(X) = \sigma^2(\theta).$$

当样本容量n充分大时，可以近似认为

$$\frac{\overline{X} - \mu(\theta)}{\sigma(\theta)/\sqrt{n}} \sim N(0, 1).$$

★非正态总体参数的区间估计

对给定的置信水平$1-\alpha$，有

$$P\left\{\frac{|\overline{X}-\mu(\theta)|}{\sigma(\theta)/\sqrt{n}}<u_{\alpha/2}\right\}\approx 1-\alpha.$$

故θ的置信水平为$1-\alpha$的置信区间可由以下不等式确定

$$\frac{|\overline{X}-\mu(\theta)|}{\sigma(\theta)/\sqrt{n}}<u_{\alpha/2}.$$

目录

单侧置信限

前面讨论的未知参数θ的置信区间$(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2)$称为双侧的。但在有些问题中，我们倾向于将置信区间写为

$$(\hat{\theta}_1, +\infty) \quad \text{或} \quad (-\infty, \hat{\theta}_2)$$

的形式，这里$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$称为参数$\theta$的单侧置信限。

单侧置信限

Definition (单侧置信下限(Lower confidence bound))

设θ为总体的待估参数，常数$\alpha \in (0,1)$，若有统计量$\hat{\theta}_1$，使得

$$P\{\theta > \hat{\theta}_1\} = 1 - \alpha,$$

则称$\hat{\theta}_1$为参数θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信下限。

单侧置信限

Definition (单侧置信上限(Upper confidence bound))

设θ为总体的待估参数，常数$\alpha \in (0,1)$，若有统计量$\hat{\theta}_2$，使得

$$P\{\theta < \hat{\theta}_2\} = 1 - \alpha,$$

则称$\hat{\theta}_2$为参数θ的置信水平为$1-\alpha$的单侧置信上限。

单侧置信限

例 从一批显像管中随机抽取6个测试其使用寿命（单位：千小时），得到样本观测值为

$$15.6,\ 14.9,\ 16.0,\ 14.8,\ 15.3,\ 15.5.$$

设显像管使用寿命X服从正态分布$N(\mu,\sigma^2)$，其中μ及σ^2都是未知参数，求

1. 使用寿命均值μ的置信水平为0.95的单侧置信下限；
2. 使用寿命方差σ^2的置信水平为0.90的单侧置信上限。