《概率与统计》内容总结与习题：随机变量

课本例题、习题分类：

1. 离散随机变量（含几何分布、超几何分布）：§2.2例1；习题二2.1-2.5(1)
2. 二项分布：习题二2.5(2)-2.7, 2.13
3. 泊松分布：习题二2.8-2.12, 2.14
4. 分布函数：§2.5图2.6；习题二2.15, 2.16
5. 连续随机变量：§2.5例1，§2.6例1-3；习题二2.17-2.22
6. 均匀分布：§2.7例1；习题二2.23, 2.24
7. 指数分布：§2.7例2-3；习题二2.25, 2.26
8. 随机变量函数的分布：§2.8例1-6；习题二2.27-2.33
9. 二维随机变量（联合分布、边缘分布、条件分布、独立性）：§2.9例1-4，§2.10例1-4，§2.11例1-4，§2.12例1-2；习题二2.36-2.42
10. 二维随机变量的函数的分布：§2.13例1-6；习题二2.43-2.48

以下课本上没有详细讲、课堂上补充的内容也属于本课程的考察范围：

例：利用概率的公理化定义证明分布函数$F(x)$的右连续性：$F(x) = \lim_{t\to x^+} F(t)$。

证明： 由函数极限的归结原则，只需证明，对任意单减收敛于x的序列$\{t_n\}_{n\geq 1}$，有

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F(t_n).$$

定义事件

$$A_0 = \{X \leq x\}, \quad A_n = \{t_{k+1} < X \leq t_k\},\ k = 1, 2, \cdots .$$

则

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} A_k = \{X \le t_1\}.$$

由概率的可数可加性知

$$\sum_{k=0}^{\infty} P(A_k) = P\{X \le t_1\},$$

即

$$F(x) + \sum_{k=1}^{\infty} [F(t_k) - F(t_{k+1})] = P\{X \le t_1\},$$

从而上式中的级数收敛。由级数收敛的性质（余项性质）知，对任意$\varepsilon > 0$，都存在$N > 0$，使得对任意$n > N$，都有

$$\sum_{k=n}^{\infty} [F(t_k) - F(t_{k+1})] < \varepsilon,$$

再由概率的可数可加性知，上式左端即为$F(t_n) - F(x)$。故$\lim_{n\to\infty} F(t_n) = F(x)$。证毕。

□

补充习题（本部分习题未涵盖本章的全部主要内容，仅为课本例题、习题的补充）：

1. 判断以下论述正确与否：

   (1) 连续随机变量的密度函数必然连续；（　　）

   (2) 连续随机变量的分布函数必然连续；（　　）

   (3) 任何随机变量都是以下三种情况之一：离散型、连续型、离散与连续的混合型；（　　）

   (4) 若随机向量(X, Y)的边缘分布已知，则联合分布必可唯一确定；（　　）

2. 选择题

(1) 函数$f(x)=-\sin x, x\in I$可以做某随机变量的密度函数，若区间I为

(A) $\left[-\frac{\pi}{2},0\right]$ (B) $\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ (C) $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ (D) $\left[\frac{\pi}{2},\frac{3\pi}{2}\right]$

(2) 任意随机变量X的分布函数定义为$F(x)=P\{X\le x\}$，则下列函数可以作为某随机变量的分布函数的是

(A) $F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0.3, & 0<x\le 1,\\ 0.5, & 1<x\le 2,\\ 1, & x>2.\end{cases}$ (B) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.3, & 0\le x<2,\\ 0.2, & 2\le x<3,\\ 1, & x\ge 3.\end{cases}$

(C) $F(x)=\begin{cases}0.1, & x<1,\\ 0.4, & 1\le x<2,\\ 0.7, & 2\le x<4,\\ 1, & x\ge 4.\end{cases}$ (D) $F(x)=\begin{cases}0, & x<0,\\ 0.1, & 0\le x<5,\\ 0.4, & 5\le x<6,\\ 1, & x\ge 6.\end{cases}$

(3) 下列命题中正确的是

(A) 设$f(x)$是某随机变量的密度，则$0\le f(x)\le 1$;

(B) 连续型随机变量取任何给定值的概率等于零;

(C) 随机变量不是连续型就是离散型的;

(D) 两个连续型随机变量的和一定是连续型的.

(4) 设$F_1(x)$和$F_2(x)$分别为两随机变量的分布函数，则$F(x)=\alpha F_1(x)-\beta F_2(x)$也是某一随机变量的分布函数，如果

(A) $\alpha=-\frac{1}{2},\beta=\frac{3}{2}$; (B) $\alpha=\frac{1}{2},\beta=-\frac{3}{2}$;

(C) $\alpha=\frac{3}{5},\beta=-\frac{2}{5}$; (D) $\alpha=\frac{2}{3},\beta=\frac{1}{3}$.

(5) 设$F_1(x), F_2(x)$为随机变量的分布函数，$f_1(x), f_2(x)$为对应的概率密度，则

(A) $F_1(x)+F_2(x)$是分布函数; (B) $F_1(x)F_2(x)$是分布函数;

(C) $f_1(x)+f_2(x)$是密度函数; (D) $f_1(x)f_2(x)$是密度函数.

(6) 设随机变量X和Y有相同的概率分布：

	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

且满足$P\{XY=0\}=1$，则$P\{X=Y\}=$

(A) 0; (B) 0.25; (C) 0.5; (D) 1.

(7) 设随机变量X和Y相互独立，且有相同的概率分布：

	0	1
P	0.5	0.5

则$P\{X=Y\}=$

(A) 0; (B) 0.25; (C) 0.5; (D) 1.

(8) 设二维随机变量(X,Y)服从圆盘D：$x^2+y^2\le 4$上的均匀分布，则

(A) X服从均匀分布; (B) $X+Y$服从均匀分布;

(C) Y服从均匀分布; (D) Y关于$X=1$的条件分布是均匀分布.

(9) 设随机变量X和Y相互独立，且有相同的概率分布：

	0	$\frac{\pi}{2}$
P	0.5	0.5

令$U=\sin X,\ V=\cos Y$，则

(A) $P\{U=V\}=0$; (B) $P\{U=V\}=1$;

(C) $P\{U=V\}=0.5$; (D) $P\{U\neq V\}=0.25$.

(10) 设随机变量X和Y有相同的概率分布：

	-1	0	1
P	0.25	0.5	0.25

且满足$P\{XY=0\}=1$，则$P\{X^2=Y^2\}=$

(A) 0; (B) 0.25; (C) 0.5; (D) 1.

(11) 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=ae^{-\frac{|x-1|}{2}},\quad x\in\mathbb{R},$$

则未知常数$a=$

(A) 1; (B) $\dfrac{1}{4}$; (C) $\dfrac{1}{2}$; (D) 2.

(12) 设随机变量X的概率密度为

$$f(x)=\frac{c}{4+(x-1)^2},\quad x\in\mathbb{R},$$

则未知常数$c=$

(A) $\dfrac{1}{\pi}$; (B) $\dfrac{2}{\pi}$; (C) $\dfrac{1}{2\pi}$; (D) 2.

(13) 设随机变量X和Y相互独立，且都服从区间$[-1,1]$上的均匀分布，则以下随机变量服从均匀分布的是

(A) $X-Y$; (B) $X+Y$; (C) X^2; (D) $2X$.

(14) 设某试验中事件A成功的概率为p，将该试验独立重复直到事件A第r次成功为止，以X表示所需试验的次数，则对任意$n\geq r$，$P\{X=n\}=$

(A) $C_n^r p^r(1-p)^{n-r}$; (B) $C_{n-1}^{r-1}p^r(1-p)^{n-r}$;

(C) $p^r(1-p)^{n-r}$; (D) $C_{n-1}^{r-1}p^{r-1}(1-p)^{n-r}$.

(15) 设随机变量X服从柯西分布，其概率密度为柯西分布的概率密度为

$$f(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}\quad(x\in\mathbb{R}),$$

则随机变量$2X$的概率密度为

(A) $\dfrac{1}{\pi(1+x^2)}$; (B) $\dfrac{1}{\pi(1+x^2/4)}$;

(C) $\dfrac{2}{\pi(4+x^2)}$; (D) $\dfrac{1}{\pi(1+4x^2)}$.

3. 利用概率的公理化定义证明分布函数$F(x)$的以下性质：

(a) 右连续性：$F(x)=\lim\limits_{t\to x^+}F(t)$；

(b) 规范性：值域为$[0,1]$，且

$$F(-\infty)=\lim_{x\to-\infty}F(x)=0,$$
$$F(+\infty)=\lim_{x\to+\infty}F(x)=1.$$