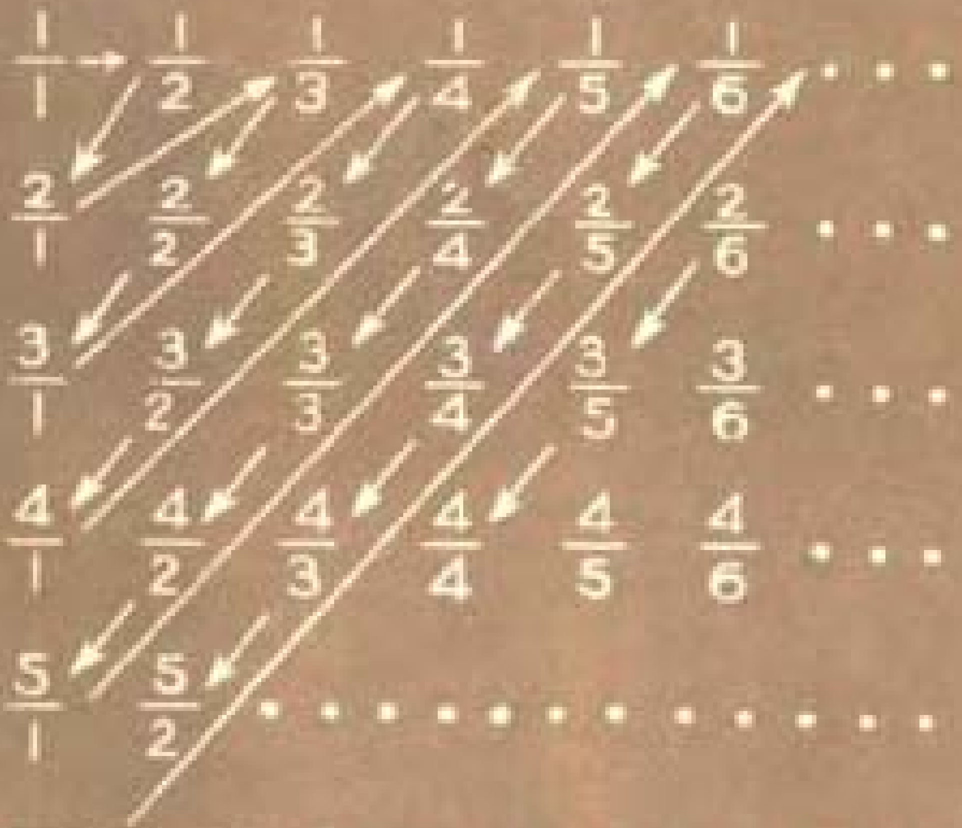
集合与数

张鸿顺 编著



科学出版社

统一书号：13031·1951
定　价：0.30 元

本社书号：2653·13-1

科技新书目：29-31

集合与数

张鸿顺 编著

科学出版社
1982

内 容 简 介

本书系统讲述有关集合论和数系的基本概念、基本理论和基本方法，以集合论为基础，逐步建立自然数、有理数、实数和复数系统，以及相应的运算法则。本书内容丰富、论述严谨、深入浅出、通俗易懂。本书包括相当数量的习题，书末附有习题解答。

本书是中学数学教师业务进修教材之一；也可供师范院校有关专业的教师和学生参考；并可供中学生数学爱好者阅读。

集 合 与 数

张鸿顺 编著

责任编辑 张鸿林

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1982年8月第一版 开本：787×1092 1/32

1982年8月第一次印刷 印张：6 3/3

印数：0001—28,700 字数：144,000

统一书号：13031·1953

本社书号：2653·13—1

定价： 0.80 元

编 者 的 话

本书的第一稿于1979年在北京电视台初等代数专题讲座中系统地讲授之后，许多同志敦促作者早日编辑成书，以满足广大读者的需要，并提出了许多宝贵的具体的建议.

在第二稿中，力图对自然数、有理数、实数以及复数等知识，从理论上给以严谨的阐述，指明学习、研究和讲授它们的一些方法，并提出一些与它们有关的问题以激发读者进一步学习数学的兴趣. 但是，由于作者水平有限，上述的想法很可能未能完满地体现出来，甚至难免出现一些缺点和错误，欢迎读者批评指正.

本书第三、四、五章中的附录，是作者本人对有关教材、教法的一些粗浅看法，仅供参考.

杨大淳、刘嘉琨、刘培娜等同志对本书的第一稿提出了许多改进意见，杨大淳同志对本书的第二稿又作了详细的审阅和修改，最后又由北京师范大学钟善基同志作了细致的审查.

在此谨向以上各位同志，特别是杨大淳同志、钟善基同志致以深切的谢意.

张鸿顺

81.2.25

目　　录

第一章 集 合

§1 集合的概念

所谓集合(或称集),是由许多"个体"组成的一个"整体",或者说是由某一种事物组成的一个"类". 通常把集合作为原始概念(基本概念),不再用另外的概念来规定它的定义. 在中学教科书里是这样描述集合的:"把具有某种属性的一些对象看作一个整体就构成一个集合". 例如,一个班里的学生、男生、女生等等都分别构成集合;又如在一个教室里的课桌、课椅、电灯等等也都分别构成集合. 对于集合,一般用大写字母 A, B, C, ···表示. 组成某一集合的每一个对象,都叫做这个集合的元素(简称元). 集合的元素一般用小写字母 a, b, c, ···表示.

如果 a 是集合 A 的元素,就说 a 属于 A,并用 $a \in A$ 表示;如果 a 不是集合 A 的元素,就说 a 不属于 A,并用 $a \notin A$ (或 $a \bar{\in} A$) 表示. 比如 A 是由 p, q, r 三个字母组成的集合,就有 $p \in A$, $m \notin A$.

值得注意的是,集合中的元素是确定的,即对于任何对象,可以判断出它是否属于这个集合. 比如"儿童商店里的玩具"能够构成一个集合,但是"好玩的玩具"则不能构成一个集合,因为"好玩"没有确定的标准,无法确定某件玩具是否属于所说的"集合".

表示集合的方法通常有两种.

把集合中所有的元素一一列出,写在花括号内,来表示这个集合;这种表示集合的方法叫做列举法.

例如，由 p，q，r 三个字母组成的集合为 $\{p, q, r\}$；

小于 4 的自然数的集合为 $\{1, 2, 3\}$；

一年中有 30 天的月份所组成的集合为 {4 月，6 月，9 月，11 月}；

与一个三角形三边等距离的点的集合为 $\{I\}$（I 是这个三角形的内心）.

这里要注意，$\{a\}$ 与 a 不同，$\{a\}$ 表示只含有一个元素 a 的集合，而 a 是集合 $\{a\}$ 的元素，二者的关系是 $a\in\{a\}$.

还要注意，我们这里只考虑由不同的元素所组成的集合，因此，一个集合里的元素应当是彼此不同的，而且不考虑这些元素的书写次序. 例如，$\{p,q,r\}$，$\{p,p,q,r\}$，$\{r,p,q\}$等都表示由 p,q,r 三个元素组成的同一个集合.

有些集合不能用列举法表示. 例如，对于小于 4 的正数的集合，就不能把它的元素一一列举出来. 对于这样的集合，我们可以采用集合的第二种表示法.

把对于集合中元素的公共属性或特性的描述写在花括号内来表示这个集合；这种表示集合的方法叫做**描述法**.

例如，所有等腰三角形的集合用{等腰三角形}表示；小于 4 的正数的集合用{小于 4 的正数}表示.

如果用 x 表示集合 A 中的任意元素，而用 $P(x)$ 来描述 x 的性质或特性，那么集合 A 可以表示为

$$\{x|P(x)\} \text{ 或 } \{x:P(x)\}.$$

这样，小于 4 的正数的集合可以表示为：$\{x:0<x<4\}$ 或 $\{x|0<x<4\}$；

在平面直角坐标系上，所有与原点距离等于 5 的点的集合为 $\{(x,y):x^2+y^2-25\}$.

在数学中对于一些数集常用以下的符号来表示，它们是

N：自然数集；

Z: 整数集(也有用"J"表示的);

Q: 有理数集;

R: 实数集;

C: 复数集.

§2 集合的包含与相等

定义 1 如果集合 A 的任一元素都是集合 B 的元素，就把集合 A 叫做集合 B 的子集,集合 B 叫做集合 A 的扩集,记作

$$A \subseteq B \quad 或 \quad B \supseteq A.$$

A 是 B 的子集也说成 A 包含于 B 或 B 包含 A.

由定义 1 显然可以证明 $A \subseteq A$. 也就是说，任何集合都是它自己的子集.

定义 2 如果 $A \subseteq B$，且 B 中至少有一个元素不属于 A，A 就叫做 B 的真子集，B 叫做 A 的真扩集，记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

如果某班一次考试成绩肯定有及格的,那么就有

$$\{及格的学生\} \subseteq \{某班的学生\};$$

$$\{不及格的学生\} \subset \{某班的学生\}.$$

也可能根本不存在不及格的，这时集合{不及格的学生}不包含任何元素.

定义 3 不包含任何元素的集合叫做空集，用符号 $\varnothing$ 表示.

在上述的问题中，有可能 {不及格的学生} $= \varnothing$. 那么{不及格的学生}$\subset${甲班的学生}是否还成立呢?

定理 空集是任一集合的子集;即

$$\varnothing \subseteq A.$$

证明：因为不属于 A 的元素一定不属于 $\varnothing$，所以 $\varnothing$ 是 A 的子集.

例 1. 设 $A=\{1, 2, 3\}$，试写出 A 的所有的子集。

解：A 的子集为 $\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{1, 2\}$，$\{2,3\}$，$\{1, 3\}$，$\{1, 2, 3\}$.

由例 1 可以看出：由 3 个元素组成的集合，它的子集共有 8 (即 2^3) 个.

例 2. 试证明：由 n 个元素组成的集合，它的子集共有 2^n 个.

证明： 空集是它的子集，可以看成是有 C_n^0 个这样的子集；由一个元素组成的子集有 C_n^1 个，由 2 个元素组成的子集有 C_n^2 个，…，所以所有子集的个数为

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n.$$

而

$$C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n=2^n.$$

所以由 n 个元素组成的集合的子集共有 2^n 个.

定义 4 设有两个集合 A 和 B，如果 A 包含 B，且 B 包含 A，就说 A 与 B 相等.

显然，如果两个集合的元素完全相同，那么这两个集合相等.

容易证明集合的包含与相等的关系有下列的传递性质：

(1) 如果 $A=B$，$B=C$，那么 $A=C$；

(2) 如果 $A\subset B$，$B\subset C$，那么 $A\subset C$；

(3) 如果 $A\subset B$，$B=C$，那么 $A\subset C$.

有时，在所讨论的问题中，一切集合都是某一特定集合的子集. 例如，在研究平面图形性质时，所有平面图形都是平面上所有点的集合这个特定集合的子集.

定义 5 在所讨论的问题中，如果一切集合都是某一特定集合的子集，就把这个特定的集合叫做全集，并用符号 I 表示.

我们通常用维恩（Venn）图来表示集合之间的关系，就是用一个矩形表示全集 I，矩形中的点表示元素，这样，每一个集合就用矩形中的一个区域(通常用圆)来表示．例如，图 1-1 表示集合 A；图 1-2 表示集合 B 是集合 A 的真子集，即 $A \supset B$．

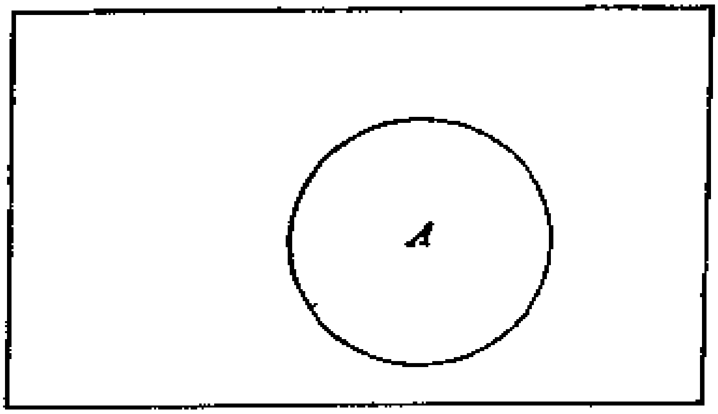


图 1-1

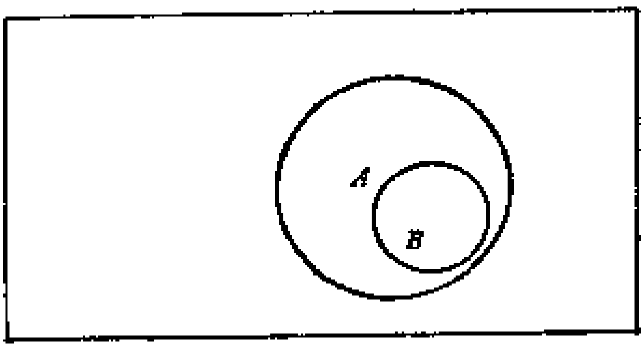


图 1-2

习 题 一

1．下列各题中哪些是集合，哪些不是集合？

(1) 某路公共汽车的所有的车站；

(2) 某城市里的较大的商店；

(3) 我国的直辖市；

(4) 高个子的人；

(5) 某学校的数学教师．

2．用列表法表示下列集合：

(1) $A = \{x | x$ 为整数且 $5 < x < 10\}$；

(2) $B=\{$小于 30 的 3 的正整倍数$\}$;

(3) $C=\{$在 0 与 1 之间分母为 2 的既约分数$\}$.

3.用描述法表示下列集合:

(1) 所有大于 1 的奇数的集合;

(2) 所有 5 的正整倍数的集合;

(3) 所有横、纵坐标乘积等于 6 的点的集合;

(4) 在闭区间 $[0, 1]$ 上所有实数的集合。

4.已知 $A=\{x|x$ 为大于 5 的整数$\}$,下列命题哪些正确,哪些不正确?

(1) $10\in A$; (2) $5\in A$; (3) $7.2\in A$;

(4) $\{10\}\in A$; (5) $\{1\}\in A$; (6) $\{12\}\subset A$;

(7) $\varnothing\in A$; (8) $1\notin A$.

5.已知 $A=\{x|x$ 为小于 8 的正整数$\}$,

$B=\{x|x$ 为大于 2 的整数$\}$,

$C=\{x|x$ 为所有英文字母$\}$,

$D=\{a, b, c, d, 1, 2, 3, 4\}$,

求出分别满足下列条件的所有的元素 y:

(1) $y\in A$ 同时 $y\in B$;

(2) $y\in A$ 同时 $y\in D$;

(3) $y\in A$ 但 $y\notin D$;

(4) $y\in C$ 同时 $y\in D$;

(5) $y\notin C$ 但 $y\in D$;

(6) $y\in A$ 同时 $y\in D$ 但 $y\notin B$.

6.在下列各题的____上,填以适当的符号($\subseteq$, $\subset$, $\in$, $\notin$),使命题正确:

(1) x ____$\{$所有英文字母$\}$;

(2) $\{x\}$____$\{$所有英文字母$\}$;

(3) 3____$\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$;

(4) $\{3,4\}$____$\{\{1,2\}, \{2,3\}, \{3,4\}\}$;

(5) $\{$某校教令超过 5 年的教师$\}$____$\{$该校的教师$\}$.

7.写出 $A=\{a,b,c,d\}$的所有的子集,并计算 $B=\{a,b,c,d,e,f\}$

的所有子集的个数.

8. 证明：如果 $A\subset B$, $B\subset C$, 那么 $A\subset C$.

9. 证明下列集合是相等的:

(1) {小于 10 的自然数}与{一位数的自然数};

(2) $\{3,6,9,12\}$ 与 $\{x|x$ 是小于 15 且能被 3 整除的正数$\}$;

(3) {等腰三角形}与{两内角相等的三角形};

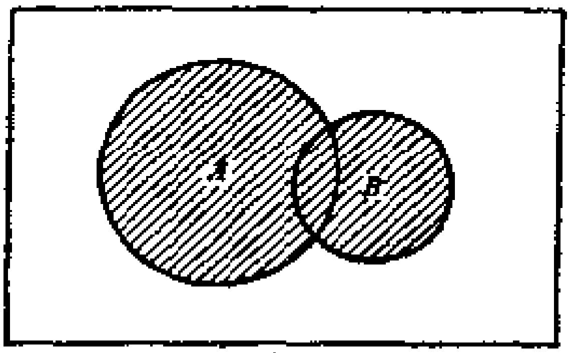
(4) $\{x|x\in R$ 且 $x^2+x+2=0\}$ 与 ϕ.

§3 集合的运算

定义 1 设有两个集合 A 与 B，由 A 与 B 所有的元素组成的集合叫做集合 A 与 B 的并集(也称和集)，记作 $A\cup B$.

A, B 所有的元素，就是属于 A 或者属于 B (至少属于二者之一，也可能同时属于二者)的元素. 因此有

$$A\cup B$$
$$=\{x|x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$
$$=\{x|x \text{ 至少属于 } A, B \text{ 中的一个}\}.$$



$A\cup B$

图 1-3

图 1-3 阴影部分表示 $A\cup B$.

例 1. 设 $A=$ {某班的男学生}，$B=$ {某班的女学生}，那么 $A\cup B=$ {某班的学生}.

例 2. 设 $A=\{1,2,3\}$, $B=\{2,3,4,5\}$. 那么

$$A \cup B = \{1,2,3,4,5\}.$$

关于并集显然有以下性质:

(1) $A \cup A = A$; (2) $A \cup \varnothing = A$;

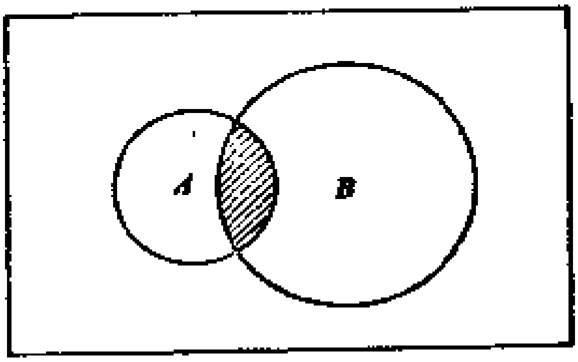
(3) $A \cup B \supseteq A$.

定义 2 由同时属于两集合 A 和 B 的所有元素组成的集合,叫做 A 与 B 的交集,记作 $A \cap B$.

同时属于 A 和 B 两集合的元素,就是 A 和 B 的公共元素,它既属于 A 又属于 B,或者说属于 A 且属于 B. 这样就有

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

图 1-4 中阴影部分表示 $A \cap B$.



$A \cap B$

图 1-4

例 3. 在例 2 中,

$$A \cap B = \{2,3\}.$$

例 4. 在例 1 中,

$$A \cap B = \varnothing.$$

例 5. 设 $A = \{$等腰三角形$\}$, $B = \{$直角三角形$\}$, 那么,

$$A \cap B = \{\text{等腰直角三角形}\}.$$

例 6. 设 $A = \{x \text{ 轴}\}$, $B = \{y \text{ 轴}\}$,

那么

$A \cup B = \{(x,y) \mid x = 0 \text{ 或 } y = 0\}$;

$A \cap B = \{(x,y) \mid x = 0 \text{ 且 } y = 0\} = \{(0,0)\} = \{\text{原点}\}$.

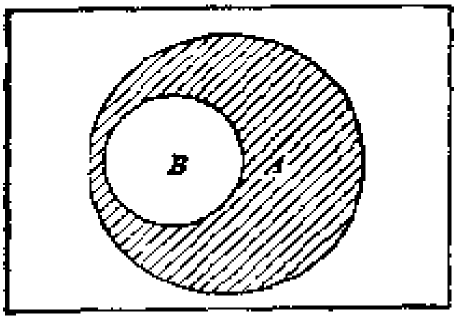
关于交集显然有以下性质：

$$(1)\ A\cap A=A;\ (2)\ A\cap\varnothing=\varnothing;$$

$$(3)\ A\cap B\subseteq A.$$

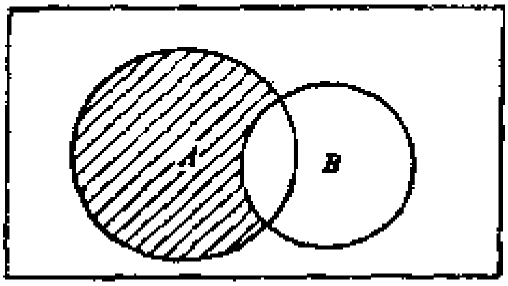
定义 3 由属于 A 但不属于 B 的所有元素组成的集合叫做集合 A 与集合 B 的差集，记作 $A\backslash B$，即

$$A\backslash B=\{x\,|\,x\in A,\ \text{但}\ x\notin B\}.$$



$A\backslash B$

图 1-5



$A\backslash B$

图 1-6

图 1-5，图 1-6 中阴影部分表示 $A\backslash B$，其中图 1-5 是 $A\supset B$ 的情况，图 1-6 是 $A\not\supset B$ 的情况。

例 7. 在例 2 中，$A\backslash B=\{1\}$；$B\backslash A=\{4,5\}$。

例 8. 在例 1 中，$A\backslash B=A$；$B\backslash A=B$；

$$(A\cup B)\backslash B=A;\ (A\cup B)\backslash A=B.$$

例 9. 在例 5 中，$A\backslash B=\{$等腰但不是直角的三角形$\}$；$B\backslash A=\{$直角但不等腰的三角形$\}$。

关于差集有以下性质：

$$(1)\ A\backslash A=\varnothing;\ (2)\ A\backslash\varnothing=A;$$

$$(3)\ \varnothing\backslash A=\varnothing;\ (4)\ A\backslash B\subseteq A;$$

(5) 如果 $A\subseteq B$，那么 $A\backslash B=\varnothing$。

下面我们证明 (5)。

由 $A\subseteq B$ 可知如果 $x\in A$，那么 $x\in B$，因而

$$A\backslash B=\varnothing.$$

定义 4 $I\setminus A$ 叫做 A 的补集(或余集),记作 $\overline{A}$. 也就是说,由属于全集而不属于集合 A 的所有元素组成的集合叫做 A 的补集,即

$$\overline{A}=\{x \mid x\in I \text{ 但 } x\notin A\}.$$

图 1-7 中阴影部分表示 $\overline{A}$.

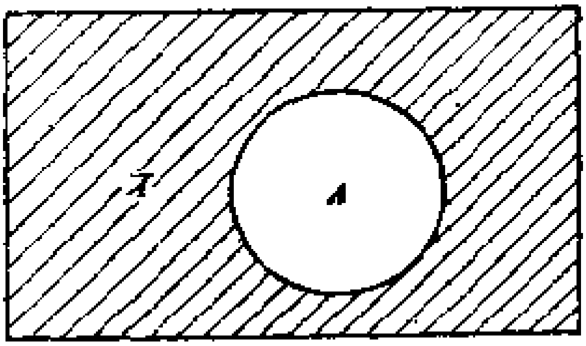


图 1-7

例 10. 如果 $I=\{$全班学生$\}$, $A=\{$全班男生$\}$,那么

$$\overline{A}=\{\text{全班女生}\}.$$

例 11. 如果 $I=N$, $A=\{$正偶数$\}$, 那么

$$\overline{A}=\{\text{正奇数}\}.$$

例 12. 如果 $I=\{$多边形$\}$, $A=\{$等腰三角形$\}$,那么

$\overline{A}=\{$不等腰的三角形和不是三角形的多边形$\}$.

关于补集有以下性质:

(1) $A\cup\overline{A}=I$; (2) $A\cap\overline{A}=\varnothing$;

(3) $\overline{I}=\varnothing$; (4) $\overline{\varnothing}=I$;

(5) $\overline{\overline{A}}=A$ ($\overline{\overline{A}}$ 为 $\overline{A}$ 的补集);

(6) 如果 $A\subseteq B$, 那么 $\overline{A}\supseteq\overline{B}$.

下面我们证明 (6).

设 $x\in\overline{B}$, 那么 $x\notin B$, 这时如果 $x\in A$, 由 $A\subseteq B$, 必有 $x\in B$, 与 $x\notin B$ 矛盾, 所以 $x\notin A$, 即 $x\in\overline{A}$. 所以 $\overline{A}\supseteq\overline{B}$.

§4 集合的运算律

定理 1 并的交换律成立，即

$$A\cup B=B\cup A.$$

定理 2 并的结合律成立，即

$$A\cup(B\cup C)=(A\cup B)\cup C.$$

因为 $A\cup(B\cup C)$ 是由 A,B,C 所有元素组成的集合，而 $(A\cup B)\cup C$ 也是由 A,B,C 所有元素组成的集合，所以它们相等.

定理 3 交的交换律成立，即

$$A\cap B=B\cap A.$$

定理 4 交的结合律成立，即

$$A\cap(B\cap C)=(A\cap B)\cap C.$$

由图 1-8 可以看出交的结合律成立.

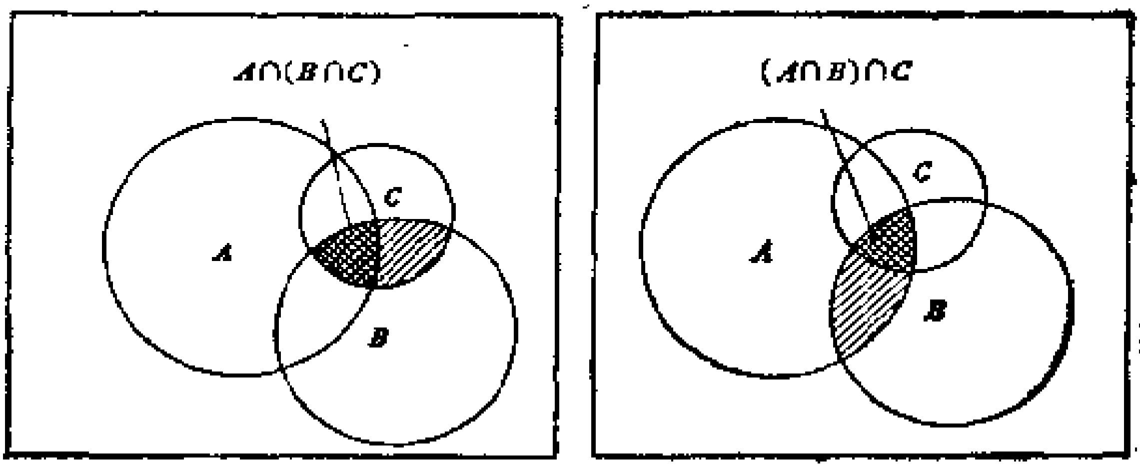


图 1-8

因为 $A\cap(B\cap C)$ 是由 A,B,C 的所有公共元素组成的集合，而 $(A\cap B)\cap C$ 也是由 A,B,C 的所有公共元素组成的集合，所以两集合相等.

定理 5 并对交的分配律成立，即

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

由图 1-9 中可以看出并对交的分配律成立.

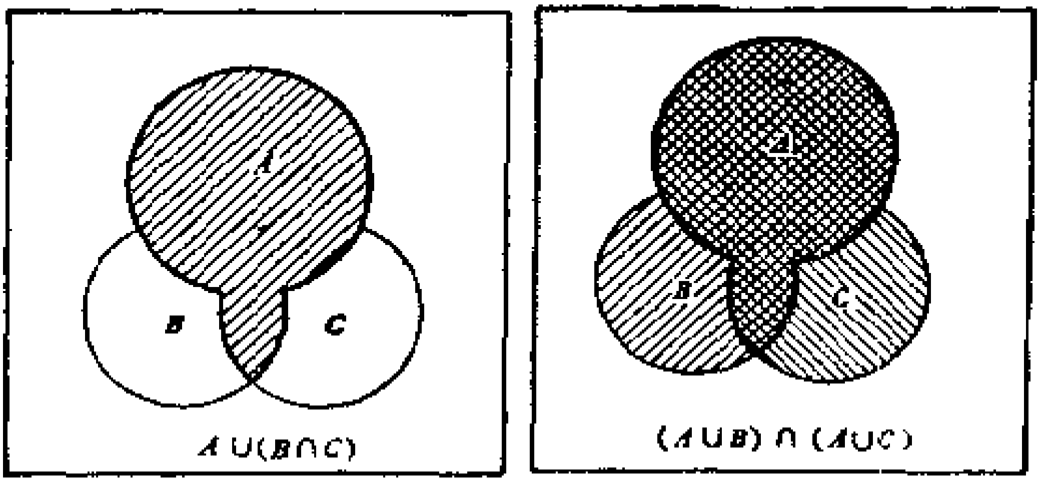


图 1-9

证明：设 $x\in A\cup(B\cap C)$，那么

$$x\in A \text{ 或 } x\in(B\cap C),$$

如果 $x\in A$，那么 $x\in(A\cup B)$，$x\in(A\cup C)$，所以

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

如果 $x\in(B\cap C)$，那么 $x\in B$，且 $x\in C$，所以 $x\in A\cup B$，且 $x\in A\cup C$，即

$$x\in(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

因此，有

$$A\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

再设 $x\in(A\cup B)\cap(A\cup C)$，那么

$$x\in A\cup B \text{，且 } x\in A\cup C.$$

如果 $x\notin A$，那么 $x\in B$，且 $x\in C$，即

$$x\in(B\cap C).$$

所以

$$x\in A\cup(B\cap C).$$

如果 $x\in A$，那么 $x\in A\cup(B\cap C)$.

因此，有

$$(A\cup B)\cap(A\cup C)\subseteq A\cup(B\cap C).$$

所以

$$A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C).$$

定理 6 交对并的分配律成立，即

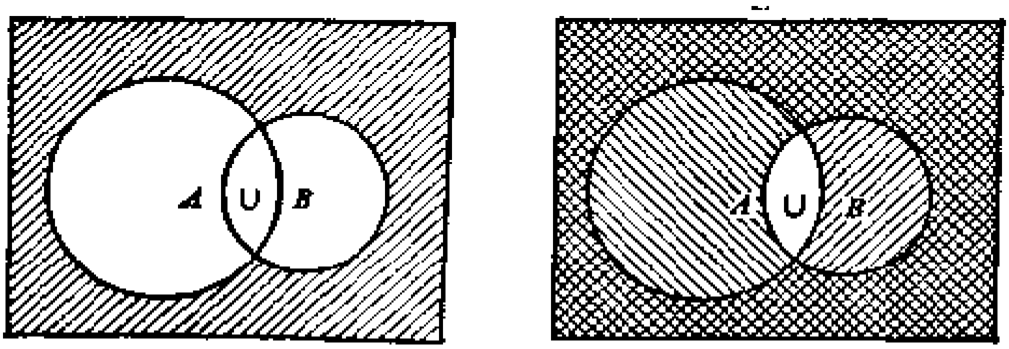
$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

定理 7（德·摩根律）

$$(1)\ \overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B};$$

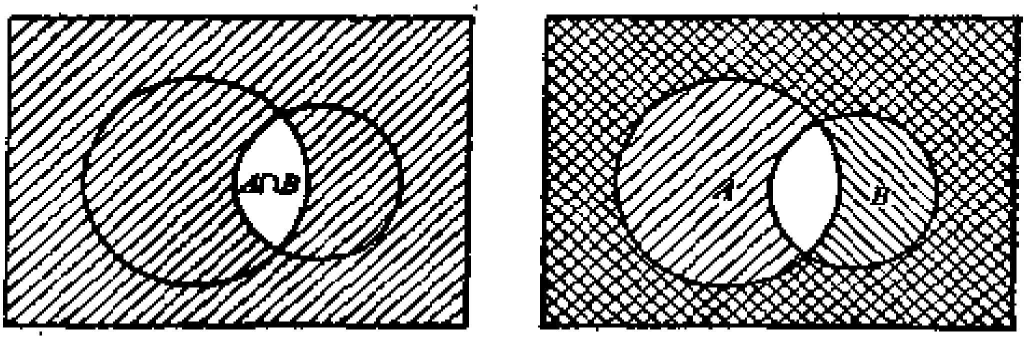
$$(2)\ \overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}.$$

由图 1-10，图 1-11 可以看出德·摩根律成立.



$\overline{A\cup B}$ 是带阴影部分　　$\bar{A}\cap\bar{B}$ 是带双重阴影部分

图 1-10



$\overline{A\cap B}$ 是带阴影部分　　$\bar{A}\cup\bar{B}$ 是带阴影（包括双重）部分

图 1-11

证明：(1) 设 $x\in\overline{A\cup B}$，那么 $x\notin A\cup B$. 这时，x 既不属于 A，又不属于 B，即 $x\in\bar{A}$ 且 $x\in\bar{B}$. 所以，

$$x \in \bar{A} \cap \bar{B}.$$

因此，得

$$\overline{A \cup B} \subseteq \bar{A} \cap \bar{B}.$$

再设 $x \in \bar{A} \cap \bar{B}$，那么，$x \in \bar{A}$ 且 $x \in \bar{B}$，

即

$$x \notin A \text{ 且 } x \notin B.$$

所以
$$x \notin A \cup B,$$

即

$$x \in \overline{A \cup B}.$$

因此，得

$$\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cup B}.$$

所以

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}.$$

(2) 由 (1) 可知

$$\overline{\bar{A} \cup \bar{B}} = \bar{\bar{A}} \cap \bar{\bar{B}} = A \cap B.$$

所以

$$\bar{A} \cup \bar{B} = \overline{A \cap B}.$$

习 题 二

1. 设

$$I = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\},$$
$$A = \{1,3,5,8,9\}, \quad B = \{2,4,6,8,9\},$$
$$C = \{5,6,8,10\},$$

求：

(1) $A \cup B$; (2) $A \cap B$; (3) $A \setminus B$;

(4) $\bar{C}$; (5) $\overline{A \cup C}$ 与 $\bar{A} \cap \bar{C}$;

(6) $\overline{B \cap C}$ 与 $\bar{B} \cup \bar{C}$;

(7) $A\cup(B\cap C)$ 与 $(A\cup B)\cap(A\cup C)$;

(8) $A\cap(B\cup C)$ 与 $(A\cap B)\cup(A\cap C)$;

(9) $(A\setminus C)\cup C$ 与 $A\cup C$;

(10) $(B\setminus C)\cap C$.

2.在下列各题中,恒真者在( )中记以 AT; 有时真者记为 ST; 恒不真者记为 NT:

(1) 如果 $a\in A$, 那么 $a\in A\cap B$; ( )

(2) 如果 $a\in A\cup B$, 那么 $a\in A$; ( )

(3) 如果 $a\in B$, 那么 $a\notin A\setminus B$; ( )

(4) 如果 $A\supseteq B$, 那么 $A\cap B=B$; ( )

(5) 如果 $a\notin A$, 那么 $a\in A\cap B$; ( )

(6) 如果 $a\in A\setminus B$, 那么 $a\in A\setminus(A\cap B)$; ( )

(7) $A\cap\varnothing=\varnothing\cup A$; ( )

(8) $A\cap\bar{B}=B\cap\bar{A}$, 且 $A\neq B$. ( )

3.用维恩图作出 $A\cap B$, $\bar{A}\cap B$, $A\cap\bar{B}$, $\bar{A}\cap\bar{B}$ 这四个集合，并求出这四个集合的并集.

4.证明: 如果 $A\setminus B=\varnothing$, 那么 $A\subseteq B$.

5.证明: 如果 $\bar{A}\supseteq\bar{B}$, 那么 $A\subseteq B$.

6.试证定理 6.

7.试证:

(1) 如果 $A\subseteq B$, 那么 $\bar{A}\cup B=I$;

(2) 如果 $\bar{A}\cup B=I$, 那么 $A\subseteq B$.

8.用德·摩根律证明

$$A\cap\overline{B\cap C}=\overline{\bar{A}\cup B}\cup\overline{\bar{A}\cup C},$$

并用维恩图加以验证.

9.试证:

(1) $\overline{A\cup B\cup C}=\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}$;

(2) $\overline{A\cap B\cap C}=\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}$.

§5 一一对应与集合的等价

定义1 设A和B是两个集合，如果A中的每一个元素，通过确定的对应法则f，在B中有一个唯一确定的元素与它对应，这个对应法则f就叫做A到B的一个单值对应（或映射），记作

$$f: A \to B \quad (\text{或 } A \xrightarrow{f} B).$$

为了说明在f之下$x \in A$与$y \in B$对应，就记作

$$f: x \to y.$$

这时y叫做x在f之下的像，记作$f(x)$，x叫做y的原像。

例1. 设$A = B = \{1,2,3\}$，

$$f: 1 \to 2,\ 2 \to 3,\ 3 \to 1,$$

f是A到B的单值对应。

例2. 设$A = \{1,2,3,4\}$，$B = \{3,4,5,6,7,8,9\}$，

$$f: x \to 2x+1,$$

那么

$$f: 1 \to 3,\ 2 \to 5,\ 3 \to 7,\ 4 \to 9,$$

所以f是A到B的单值对应。

例3. 设$A = \{-2,-1,0,1,2\}$，$B = \{0,1,2,3,4\}$，

$$f: x \to x^2.$$

那么

$$f: -2 \to 4, -1 \to 1, 0 \to 0, 1 \to 1, 2 \to 4,$$

所以f是A到B的单值对应。

例4. 设$A = B = R$，

$$f: x \to \sin x,$$

f是A到B的单值对应。

例5. 设$A = \{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$，$B = R$，

$$f: x \to \operatorname{Arc}\sin x$$

(这里的 $\operatorname{Arc}\sin x = n\pi + (-1)^n \arcsin x$)．$f$ 不是 A 到 B 的单值对应，因为 $\operatorname{Arc}\sin x$ 不能由 x 唯一确定．

例 6. 设 $A = B = N$，

$$g: x \to x - 1,$$

g 不是 A 到 B 的单值对应，因为 $1 \longrightarrow 0$，而 $0 \notin B$.

关于 A 到 B 的单值对应，应注意以下几点：

(1) A 和 B 可以是相同的集合(见例 1，例 4) 也可以是不同的集合 (见例 2，例 3)；

(2) 对于 A 中的每一个元素，在 B 中都要有一个唯一确定的元素和它对应(见例 5，例 6)；

(3) B 中的元素不一定都是 A 中元素的像 (见例 2，例 3，例 4)；

(4) A 中不同的元素的像可能相同(见例 3，例 4)．

针对注意中的第三点，我们给出：

定义 2 设 f 是 A 到 B 的一个单值对应，如果在 f 之下，B 中每一个元素都是 A 中某一元素的像，这时就说 f 是 A 到 B 的一个满射．

例 1 中的 f 是满射；而例 2，例 3，例 4 中的 f 不是满射．

针对注意中的第四点，我们给出：

定义 3 设 f 是 A 到 B 的一个单值对应，如果在 f 之下，A 中不同的元素在 B 中的像也不同，这时就说 f 是 A 到 B 的一个单射．

例 1，例 2 中的 f 都是单射；而例 3，例 4 中的 f 不是单射．

定义 4 设 f 是 A 到 B 的一个单值对应，如果它既是单射又是满射，就说 f 是 A 到 B 上的一个一一对应．

例 1 中的 f 是 A 到 B 上的一个一一对应，而例 2，例 3，

例 4 都不是.

例 7. 设 $A=\left\{x\left|-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right.\right\}$,

$$B=\{y\mid -1\leqslant y\leqslant 1\},$$

$$f: x\rightarrow y=\sin x,$$

f 是 A 到 B 上的一个一一对应.

例 8. 设 $N=\{1, 2, 3, \cdots\}$, $M=\{1, 3, 5, \cdots\}$,

$$f: n\rightarrow 2n-1,$$

f 是 N 到 M 上的一个一一对应.

定义 5 如果两集合 A 和 B 之间,存在一一对应 $f: A\rightarrow B$,就说 A 与 B 等价,记作 $A\sim B$.

在例 1, 例 7 中, $A\sim B$; 在例 8 中, $M\sim N$.

显然有 $A\sim A$ (自反性); 如果 $A\sim B$, 那么 $B\sim A$ (对称性).

定理 如果 $A\sim B$, $B\sim C$, 那么 $A\sim C$ (传递性).

证明: 因为 $A\sim B$, 所以存在一一对应 f_1 使得每一个 $x\in A$, 有 $x\rightarrow f_1(x)$, $f_1(x)$ 随着 x 的不同而不同,且充满了 B;

又因为 $B\sim C$, 所以存在一一对应 f_2, 使得每一个 $f_1(x)\in B$, 有 $f_1(x)\rightarrow f_2(f_1(x))$, $f_2(f_1(x))$ 随着 $f_1(x)$ 的不同而不同,且充满了 C.

令 $f: x\rightarrow f_2(f_1(x))$, 那么 f 是一一对应. 所以

$$A\sim C.$$

§6 有穷集与无穷集

定义 1

(1) 只含有一个元素的集合叫做有穷集合(或有限集合);

（2）在有穷集合中添加一个元素所构成的集合还叫做有穷集合．

这样，含有一个元素 a 的集合 $\{a\}$ 是有穷集合；在 $\{a\}$ 中添加一个元素 b，所构成的集合 $\{a, b\}$ 也是有穷集合；在 $\{a,b\}$ 中添加一个元素 c，所构成的集合 $\{a,b,c\}$ 也是有穷集合；……．也就是说，如果 A 是给定了的有穷集合，而且它不是只含有一个元素的集合，那么它一定是由另一有穷集合 B 添加一个元素 x 得到的．因此从 A 中去掉所添加的那个元素 x，就得到有穷集合 B，如果 B 也不是只含有一个元素的集合，那么从 B 中去掉一个元素，就得到有穷集合 C；…；最后一定可以得到只含有一个元素的有穷集合．

我们还规定空集也是有穷集合．

定义 2　如果集合 A 不是有穷集合，A 就叫做无穷集合（或无限集合）．

定理 1　有穷集的任何子集都是有穷集．

定理 2　无穷集的任何扩集都是无穷集．

证明：已知 A 是无穷集，且 $A\subset B$（$B=A$ 时，显然定理成立）．

如果 B 是有穷集，由定理 1，A 为有穷集，与已知矛盾，所以 B 为无穷集．

定理 3　有穷集不与它的任一真子集等价．

证明：假定有穷集与它的任一真子集等价，设有穷集合

$$M=\{a,b,c,\cdots,\alpha,\beta,\gamma,\cdots,\mu\},$$

它的真子集 $N=\{a,b,c,\cdots,\alpha\}$，且 $M\sim N$，于是必存在一个一一对应 f，使得 N 中的元素 $a,b,c,\cdots,\alpha$ 的原象分别是 $a',b',c',\cdots,\alpha'$，且 $\{a',b',c',\cdots,\alpha'\}=M$．但 $M\supset N$，所以 $a',b',c',\cdots,\alpha'$ 中至少有一个元素属于 N．设 α' 是 N 中的元素 a，由 M 和 N 中分别去掉这个公共元素 a，就得到有

穷集合 $M'=\{b,c,\cdots,\alpha,\beta,\cdots,\mu\}$ 与它的真子集

$$N'=\{b,c,\cdots,\alpha\}.$$

根据假定，那么必存在一个一一对应 f'，使得 N' 中的元素 b，$c,\cdots,\alpha$ 的原像分别是 $b'',c'',\cdots,\alpha''$，且

$$\{b'',c'',\cdots,\alpha''\}=M'.$$

但 $M'\supset N'$，所以 b''，c''，$\cdots$，α'' 中至少有一个元素属于 N'. 设 α'' 是 N' 中的元素 b，由 M' 和 N' 中分别去掉这个公共元素 b，就得到有穷集合 $M''=\{c,\cdots,\alpha,\beta,\cdots,\mu\}$ 与它的真子集 $N''=\{c,\cdots,\alpha\}$. 于是再根据假定，又有 $M''\sim N''$，继续上面去掉公共元素的做法，我们将得到

$$M^{(k)}=\{\alpha,\ \beta,\cdots,\ \mu\}$$

与它的真子集 $N^{(k)}=\{\alpha\}$. 根据假定应有 $M^{(k)}\sim N^{(k)}$，但是这是不可能的，因为 $M^{(k)}$ 与 $N^{(k)}$ 之间不可能建立一一对应. 所以开始的假定是错误的，因此，有穷集合不能与其任一真子集等价.

定理4 对于任意两个有穷集合 A 和 B 来说，或者两者等价；或者其中一个与另一个的真子集等价.

证明：设有穷集合 A，B 分别为

$$A=\{a,b,c,\cdots,\alpha,\beta,\cdots,\mu\},$$
$$B=\{a',b',c',\cdots,\alpha',\beta',\cdots,\mu\}.$$

在 A 和 B 中各取一个元素，如 a 与 a'，分别组成集合

$$A'=\{a\},\quad B'=\{a'\},$$

令 $f:a\to a'$，显然 f 是一一对应，那么 $A'\sim B'$；再在 A' 和 B' 中分别添加 A 与 B 中的元素 b 与 b'，得到

$$A''=\{a,b\},\quad B''=\{a',b'\}.$$

再令 $f':a\to a',\ b\to b'$，显然 f' 是一一对应，那么 $A''\sim B''$；这样继续添加下去，每次得到的两个集合都等价. 又因为 A 与 B 都是有穷集合，所以可能出现两种情况：(1) 添加元素，

恰好得到A与B，这时$A\sim B$；（2）添加元素，恰好得到A（或B），而B（或A）中还有元素未用上，只得到$B^{(k)}$（或$A^{(k)}$）．显然$B^{(k)}$（或$A^{(k)}$）是B（或A）的真子集，并且有$B^{(k)}\sim A$（或$A^{(k)}\sim B$）．所以定理4成立．

定理5　对于任意两个有穷集合A与B来说，以下三种情形有一种而且只有一种成立：

（1）A与B等价；

（2）A与B的真子集等价；

（3）B与A的真子集等价．

证明：　由定理4，只需证这三种情况不能有两种同时成立即可．

假定（1）与（2）同时成立，那么由（1）得$A\sim B$，由(2)得$A\sim B'(B'\subset B)$．由等价的对称性及传递性，得$B\sim B'$，与定理3矛盾(因为B为有穷集，B'为B的真子集)，所以(1)与(2)不能同时成立．

同理，(1)与(3)不能同时成立．

假定(2)与(3)同时成立，那么由(2)得$A\sim B'(B'\subset B)$，由(3)得$B\sim A'(A'\subset A)$．已知A与B为有穷集，由$A\sim B'$可得$A'\sim B''(B''\subset B')$，再由传递性可得$B\sim B''$，与定理3矛盾(因为$B''\subset B'$，$B'\subset B$，由传递性有$B''\subset B$，而$B$为有穷集)，因此(2)与(3)不能同时成立．

所以定理5成立．

定理6　如果A是无穷集合，那么A必含有与其等价的真子集A'．

证明：从A中任取出一元素a_1，再从剩余部分取一元素a_2，这样继续下去，因为A是无穷集合，所以不会取尽．设由取出的元素所组成的集合为A'，即$A'=\{a_1,a_2,a_3,\cdots\}$，那么$A'$为无穷集合，且为$A$的真子集．

令 $B = A\backslash A'$，那么A是由集合 A' 与集合B所有元素组成的.

再从A'中取出所有标号为奇数的元素组成集合C，即$C = \{a_1, a_3, a_5, \cdots, a_{2n-1}, \cdots\}$，于是$C$是$A'$的真子集. 所以由$C$与$B$所有元素组成的集合$A''$是$A$的真子集.

在A'与C之间建立一个对应法则$f: a_n \to a_{2n-1}$，由§5例8可知f是一一对应. 这样，在A''与A之间建立一个对应法则g：使A'与C之间的元素按照f对应，B中的元素与其自身对应，那么g也是一一对应，从而$A'' \sim A$. 定理得证.

按照我们通常的想法，一个集合A的真子集A'的元素应当比A的元素要少，似乎A'与A不可能等价. 但是定理6却证明了 $A \sim A'$，这就提醒我们在判断两个无穷集合是不是等价时，要根据定义(即两个集合之间是不是存在一个一一对应的法则)，或者根据等价定理，而不能凭通常的"想法".

例1. 已知两线段MN与 BC平行，且 $MN < BC$，如果 $S = \{BC$ 上所有的点$\}$，$T = \{MN$ 上所有的点$\}$，那么$S \sim T$（图1-12）

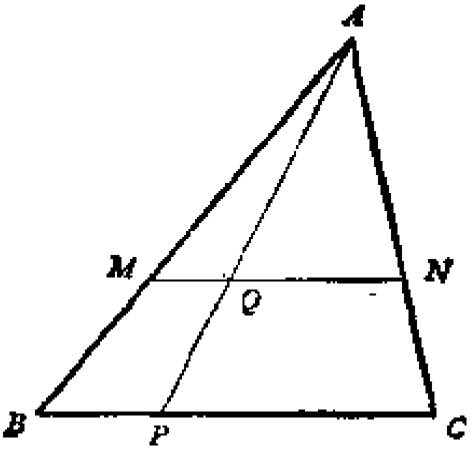


图 1-12

解：连 BM, CN，并延长相交于A（由已知条件可以保证)，在 BC 上任取一点P，连AP交MN于Q，令f：点$P \to$点Q，f就是S到T上的一一对应，所以$S \sim T$.

例2. 如果

$$A = \{x \mid x \in R,\ x < 0\},$$

$$B = \{x \mid x \in R, -1 < x < 0\},$$

那么 $A \sim B$.

解：令 $f: x \to \dfrac{x}{1-x}$，f 就是 A 到 B 上的一一对应，所以 $A \sim B$。

在例 2 中，显然 $A \supset B$，但仍有 $A \sim B$.

一个集合能不能与它的真子集等价，这正是无穷集合与有穷集合的本质区别，为此，可用它来规定无穷集与有穷集的定义.

定义 3 一个集合，如果能与它的至少一个真子集等价，这个集合就叫做**无穷集合**；如果不能与它的任一个真子集等价，这个集合就叫做**有穷集合**.

习 题 三

1. 判断下列的对应，哪些是单值对应，哪些不是？哪些是单射，哪些是满射，哪些是一一对应？

(1) 设 $A = B = N$，

① $f: x \to x^2 + 1$；

② $f: x \to x^2 - 1$；

③ $f: x \to 1$.

(2) 设 $A = B = R$，

① $f: x \to f(x)$，$f(x)$ 为 x 的平方根；

② $f: x \to e^x$；

③ $f: x \to \ln x$；

④ $f: x \to \cos x$.

(3) 设 $A = \{$一切半径为 1 的圆$\}$，$B = \{$平面上所有的点$\}$，

f：半径为 1 的圆 $\longrightarrow$ 该圆的圆心.

(4) 设 $A = \{$一切三角形$\}$，$B = \{$平面上所有的点$\}$，

f：三角形 $\longrightarrow$ 该三角形的重心.

(5) $f: N \to \{0, 1\}$，$f(x) = \begin{cases} 1 \ (x \text{ 为奇数}), \\ 0 \ (x \text{ 为偶数}). \end{cases}$

2. 写出一切可能从 $A=\{a, b, c\}$ 到 $B=\{0, 1\}$ 的单值对应，其中有没有单射或满射？如果 B 改为 $\{0, 1, 2\}$，有没有单射，它是不是一一对应？

3. 设 $A=\{$小于 5 的自然数$\}$，$B=\{$不大于 5 的自然数$\}$，

(1) 写出一个 $f: A\to B$，① 使 f 是单射；② 使 f 不是单射。

(2) A 到 B 的单值对应能否是满射？

(3) 写出一个 $g: B\to A$，且 g 是满射。

(4) B 到 A 的单值对应能否是单射？

4. 写出一个正实数集到负实数集上的一一对应。

5. 写出一个 R 到正实数集上的一一对应。

6. 如果 $A=\{1,2,3,4,5\}$，$B=\{a,b,c,d,e\}$，那么 $A\sim B$。

7. 如果 $A=\{$正偶数集$\}$，$B=\{$正奇数集$\}$，那么 $A\sim B$。

8. 如果 $M=\{x|x\in R, x>0\}$，$N=\{x|x\in R, 0<x<1\}$，那么 $M\sim N$。

9. 试证有穷集不与其任一真扩集等价。

10. 试证两个有穷集的并集还是有穷集。

11. 设 A 为无穷集，B 为有穷集，且 $B\subset A$，试证 $A\backslash B$ 是无穷集。

§7 可数集

定义 与自然数集 N 等价的集合，叫做可数集。

显然，可数集是无穷集。

例. 设 $A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$，那么 A 与 N 等价，所以 A 是可数集。

这就是说，一个无穷集的元素如果能用自然数编号，它就是一个可数集。

一个无穷集不是可数集，它就是不可数集。

定理 1 任何一个无穷集至少含有一个可数子集。

证明：设 A 是无穷集，那么 $A\neq\varnothing$，因此至少有一个元素 $a_1\in A$，即 $\{a_1\}\subset A$；这时，$A\backslash\{a_1\}$ 仍为无穷集，即

$$A \backslash \{a_1\} \neq \varnothing,$$

因此至少有一元素 $a_2 \in A\backslash\{a_1\}$，从而 $a_1 \neq a_2$，且 $\{a_1, a_2\} \subset A$；这时，$A\backslash\{a_1, a_2\}$ 为无穷集，它不是空集，因此至少有一元素 $a_3 \in A\backslash\{a_1, a_2\}$，从而 $a_1 \neq a_3$，$a_2 \neq a_3$，且 $\{a_1, a_2, a_3\} \subset A$；这样继续下去，可以作出一个集合

$$D = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\},$$

且 $D \subseteq A$，显然 D 是可数集.

定理 2 可数集的无穷子集还是一个可数集.

证明：设 A 为可数集，那么 A 可以表示为

$$A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

设 B 为 A 的无穷子集，那么 B 的元素都可以用 a 附以某一自然数的标号来表示. 如果把 B 的元素按标号的大小次序排列，得 $B = \{a_{\alpha_1}, a_{\alpha_2}, \cdots, a_{\alpha_n}, \cdots\}$. 令 $f: N \to B, n \to a_{\alpha_n}$. 那么 f 是 N 到 B 上的一一对应，所以 $N \sim B$，因此 B 为可数集.

定理 3 在可数集中增加或减少有限个元素，还是一个可数集.

证明：设可数集 $A = \{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$，在 A 中加入有限个元素分别为 $b_1, b_2, \cdots, b_m$，就得到集合

$$A' = \{b_1, b_2, \cdots, b_m, a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}.$$

令

$$f: N \to A', n \to \begin{cases} b_m (n = m), \\ a_k (n = m + k), \end{cases}$$

那么 f 是 N 到 A' 上的一一对应，所以 $N \sim A'$，因而 A' 为可数集.

同样可证，在可数集中减去有限个元素还是一个可数集.

定理 4 两个可数集的并集仍是一个可数集.

证明：设有两个可数集

$A=\{a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots\}$，$B=\{b_1, b_2, \cdots, b_n, \cdots\}$，

如果 $A\cap B=\varnothing$，那么

$$A\cup B=\{a_1, a_2, \cdots a_n, \cdots, b_1, b_2, \cdots, b_n \cdots\}，$$

令

$$f: N\to A\cup B,$$

$$n\to\begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}} & (n\text{ 为正奇数}), \\ b_{\frac{n}{2}} & (n\text{ 为正偶数}). \end{cases}$$

那么 f 是 N 到 $A\cup B$ 上的一个一一对应，所以 $A\cup B$ 与 N 等价，因而 $A\cup B$ 是可数集。

如果 $A\cap B$ 不是空集，即 A 和 B 有公共元素。设 B' 是由 B 中除去与 A 中相同的元素之后所剩下的元素组成的集合，那么 $A\cap B'=\varnothing$，且 $A\cup B=A\cup B'$。由前边的证明可知 $A\cup B'$ 为可数集，所以 $A\cup B$ 为可数集。

例 1. 由定理 3 可知 $A=\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 为可数集。因为 A 是在可数集 N 中加入一个元素 0 得到的。

例 2. 整数集 Z 为可数集。

因为 $\{0, 1, 2, \cdots, n, \cdots\}$ 与 $\{-1, -2, \cdots, -n, \cdots\}$ 都是可数集，由定理 4 可得整数集为可数集。

定理 5 可数的无限多个可数集的并集仍是可数集。

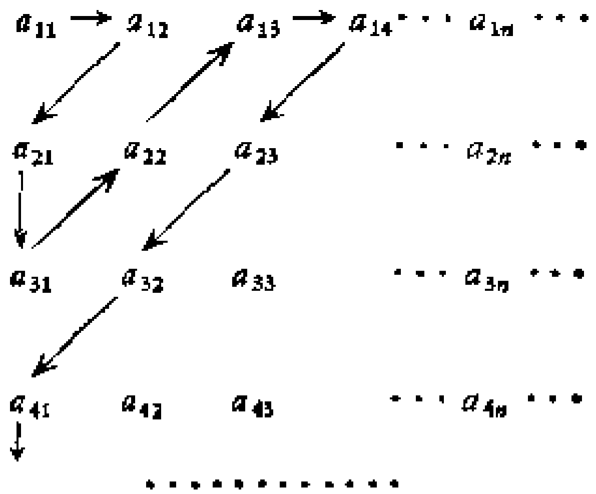
证明：设集合

$$A_1=\{a_{11}, a_{12}, \cdots, a_{1n}, \cdots\},$$
$$A_2=\{a_{21}, a_{22}, \cdots, a_{2n}, \cdots\},$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_n=\{a_{n1}, a_{n2}, \cdots, a_{nn}, \cdots\},$$
$$\cdots\cdots$$

且

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n \cup \cdots.$$

把A的元素按下表箭头的次序排列之，并按自然数编号：



如果编到 a_{ij}，它与前面已经编过号的元素相同时，就把 a_{ij} 略去．显然A与N等价，所以A是可数集．

§8 集合上的运算

定义1 对于非空的集合A，如果有一个确定的法则，通过它能使A中的任意两个按顺序取出的元素a和b，对应于A中的唯一确定的元素c，这个法则就叫做**集合A上的一个运算**．

如果用"$\circ$"表示集合A上的一个运算，a与b通过"$\circ$"与c对应，就记作

$$c = a \circ b.$$

例如，自然数的加法与乘法都是自然数集N上的运算；但是，自然数的减法与除法不是N上的运算．

定义2 如果存在一个集合A上的运算，就说集合A对这个运算是**封闭的**．

如自然数集N对于加法和乘法是封闭的，而对于减法和除法则不是封闭的．

定义3 设"$\circ$"是集合A上的一个运算，如果对于A中任意三个元素 a,b,c 都有

$$(a\circ b)\circ c = a\circ(b\circ c),$$
就说运算"∘"满足结合律.

例如，整数加法运算满足结合律. 整数减法运算是整数集上的运算，但是它不满足结合律，因为

$$(a-b)-c \neq a-(b-c).$$

定义 4 设"∘"是集合A上的运算，如果对于A中任意两个元素a和b，都有

$$a\circ b = b\circ a,$$

就说运算"∘"满足交换律.

例如，整数加法运算满足交换律，而整数减法运算不满足交换律，因为 $a-b\neq b-a$.

定义 5 设"∘"是集合A上的运算，如果对于A中任意两个元素a和b，在A中有唯一确定的x：

(1) 使 $x\circ a = b$，就说运算"∘"在A中有左逆运算；

(2) 使 $a\circ x = b$，就说运算"∘"在A中有右逆运算.

当左、右逆运算都存在且相等，即 $x\circ a = a\circ x = b$ 时，就说运算"∘"在A中有逆运算.

显然，如果"∘"满足交换律，就有 $x\circ a = a\circ x$. 这时，左、右逆运算统一，即"∘"有逆运算，这个逆运算不分左右而是唯一的.

例如，整数加法的逆运算存在(因加法满足交换律，不分左右)，而整数乘法的逆运算不存在，因为对于任意两个整数a和b，不一定存在整数x能使 $a\cdot x = b$.

又如，设 $a\circ b = a^b$, $a\in N$, $b\in N$，那么"∘"是N上的运算.

它的左逆运算应是对于任意 $a\in N$, $b\in N$，求 $x\in N$，使 $x\circ a = b$，即 $x^a = b$，也就是在N中求b的a次方根，显然它不一定存在，所以"∘"在N中没有左逆运算；

它的右逆运算应是对于任意 $a\in N$，$b\in N$，求 $x\in N$，使 $a\circ x=b$，即 $a^x=b$，也就是在N中求以 a 为底 b 的对数，显然不一定存在，所以"$\circ$"在N中也没有右逆运算。

习 题 四

1. 试证在可数集中减去有限个元素还是一个可数集。
2. 判断下列集合是不是可数集。

(1) $A=\{-1,-2,\cdots,-n,\cdots\}$；

(2) $B=\{1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots\}$；

(3) $C=\left\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\right\}$；

(4) $D=\{x|x<100$ 且 $x\in N\}$；

(5) $A\cup B\cup C$。

3. 证明：每个可数集都与它的某一个真子集等价。
4. 判断下列的运算是不是给定集合上的运算：

(1) 自然数集 N，$a\in N$，$b\in N$，$a\circ b=ab$；

(2) 有理数集 Q，$a\in Q$，$b\in Q$，$a\circ b=\frac{a}{b}$；

(3) $Q'=Q\backslash\{0\}$，$a\in Q'$，$b\in Q'$，$a\circ b=\frac{a}{b}$；

(4) 实数集 R，$a\in R$，$b\in R$，$a\circ b=\sqrt[b]{a}$；

5. 设 $A=\{0,1\}$，它的运算"$\circ$"规定为：

$$0\circ 0=0,\ 0\circ 1=1,\ 1\circ 0=1,\ 1\circ 1=0$$

如果用运算表表示这个运算就是：

$\circ$	0	1
0	0	1
1	1	0

试判断这个运算的交换律和结合律是不是成立，并判断它有没有

逆运算．如果有逆运算，作出逆运算表。

如果运算改为

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

又是怎样的结论？（其中$\otimes$表示运算）。

第二章　自　然　数

建立自然数的理论，就是要确定把哪些概念作为原始概念，把哪些论断作为公理，然后借助于它们引进其他的概念(定义)和论断(定理)，从而确立自然数的概念和性质。由于所选的原始概念和公理的不同，自然数的理论通常认为有两种，即基数理论和序数理论。

一、基 数 理 论

§1　自然数的概念

集合这一原始概念，是基数理论的基础。

我们把一切集合按等价关系进行分类，使所有等价的集合归为一类。这时，在同一类的集合里，有一种共同的特征。例如：

(1) {一头牛}，{一匹马}，{一个手指}，$\{a\}$ 等等，它们都是等价的集合，它们应归为一类，显然，牛、马、手指、字母不是它们共同的特征，而只有“1”是它们的共同特征；

(2) {5 只羊}，{5 棵树}，{5 个手指}，$\{a, b, c, d, e\}$，{|||||} 等等，它们都是等价的集合，它们应归为一类。显然，羊、树、手指、字母、|不是它们的共同特征，而只有“5”是它们的共同特征。

我们给同一类集合的共同特征的标志起一个名称：

定义 1　一切相互等价的集合（非空集合)的共同特征的标志叫做基数。

这样,(1) 中的基数是"1",(2) 中的基数是"5".

定义 2 有穷集的基数[1]叫做自然数.

只含一个元素的集合 $\{a\}$ 是有穷集,它的基数记作 1;

在 $\{a\}$ 中添加一个元素 b,得 $\{a, b\}$,也是有穷集,它的基数记作 2;

在 $\{a,b\}$ 中添加一个元素 c,得 $\{a, b, c\}$,也是有穷集,它的基数记作 3;

……………

从而得到自然数为

$$1, 2, 3, \cdots\cdots.$$

注意:我们曾规定空集也是有穷集,但是,根据定义 1,必须是非空集合才有基数,所以空集没有基数.如果补充规定空集也有基数,而且规定它的基数是零,这个零不是自然数,只能算是扩大自然数.

§2 自然数大小的比较

定义 如果两个有穷集 A 和 B 的基数分别是 a 和 b,

(1) 当 $A \sim B$ 时,就说 a 等于 b,记作 $a = b$;

(2) 当 $A' \subset A$, $A' \sim B$ 时,就说 a 大于 b, 记作 $a > b$;

(3) 当 $B' \subset B$, $A \sim B'$ 时,就说 a 小于 b, 记作 $a < b$.

我们已经知道,对于任意两个有穷集合 A 和 B 来说,在下列三种情形中,必定有一种而且只有一种存在:

(1) $A \sim B$;

(2) $A' \subset A, A' \sim B$;

1) 本书不研究无穷集的基数,下文出现的基数都是指有穷集的基数.

§3 自然数的运算

定义 1 设 $A\cap B=\varnothing$，$A\cup B=C$，如果有穷集合 A，B，C 的基数分别是 a，b，c，就把 c 叫做 a 与 b 的和，记作 $c=a+b$，a 和 b 叫做加数，求和的运算叫做加法[1]。

例如，设 $A=\{m,n,o\}$，$B=\{p,q,r,s\}$，那么 A 的基数为 3，B 的基数为 4，且 $A\cap B=\varnothing$，

$$A\cup B=C=\{m,n,o,p,q,r,s\},$$

C 的基数为 7，于是有 $3+4=7$。

因为在集合中关于并的运算满足交换律和结合律，所以自然数的加法运算也满足交换律和结合律．即

$$a+b=b+a;$$
$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

定义 2 设 a 和 b 为自然数，如果存在自然数 x，使得

$$b+x=a,$$

就把 x 叫做 a 减去 b 的差，记作 $x=a-b$，a 叫做被减数，b 叫做减数．求差的运算叫做减法。

因为自然数的加法满足交换律，所以它有唯一的逆运算．由定义 2 可以看出减法就是加法的逆运算，和就是被减数，已知的加数是减数。

因为当 $A\cap B=\varnothing$ 时，有 $A\cup B\supset A$，$A\cup B\supset B$，所以两个自然数的和大于任何一个加数，因此被减数要大于减数．不然的话，差是不存在的． 这就说明在自然数集中减法不是封闭的。

两个自然数的差的概念，也可以不借助于和的概念，而由差集直接给出。

---

1) 关于有理数、实数、复数只给出和的定义，不再解释加法、加数等概念，同样，对于它们的减法、乘法、除法的运算也只给出差、积、商的定义。

定义 2' 设 $B\subset A$，且 $A\setminus B=C$，如果 A,B,C 的基数分别是 a,b,c，c 就叫做 a 减去 b 的差，记作 $a-b=c$，a 叫被减数，b 叫减数，求两数的差的运算叫做减法.

由 $B\subset A$，且 $A\setminus B=C$，可以导出 $B\cap C=\varnothing$，且

$$B\cup C=A,$$

于是有 $b+c=a$，这正是定义 2.

定义 3 设 $A_1,A_2,\cdots,A_m$ 是 m 个彼此不相交（即其中任何两个集合的交集都是空集)的有穷集合，它们的基数都是 n，如果集合 P 是 A_1，$A_2,\cdots,A_m$ 的并集，且 P 的基数是 p，p 就叫做 n 乘以 m 的积，记作 $p=n\cdot m$(或 nm)，n 叫被乘数，m 叫乘数，求两数的积的运算叫做乘法.

A_1，$A_2,\cdots$，A_m 彼此不相交，说明它们没有相同的元素，它们的基数又都是 n，可设

$$A_1=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\},$$
$$A_2=\{b_1,b_2,\cdots,b_n\},$$
$$\cdots\cdots$$
$$A_m=\{t_1,t_2,\cdots,t_n\},$$

其中 $a_i\neq b_j\neq\cdots\neq t_k$ (i，j，k 都是由 1 到 n 的自然数)。它们的并集为

$$P=\{a_1,a_2,\cdots,a_n,b_1,b_2,\cdots,b_n,\cdots,t_1,t_2,\cdots,t_n\},$$

于是

$$p=\underbrace{n+n+\cdots+n}_{m个},$$

又 $p=n\cdot m$，所以有

$$nm=\overbrace{n+n+\cdots+n}^{m个}.$$

由此可知：求自然数 n 乘以 m 的积就是求 m 个相同加数 n 的和.

定理 1 自然数乘法的交换律成立，即

$$nm = mn.$$

证明：在上面的 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 中，我们已经求得它们的并集 P 的基数 $p = nm$。如果我们把 $A_1, A_2, \cdots, A_m$ 中的第一个元素放在一起组成集合 B_1，第二个元素放在一起组成集合 $B_2, \cdots$，第 n 个元素放在一起组成 B_n，就有

$$B_1 = \{a_1, b_1, \cdots, t_1\},$$
$$B_2 = \{a_2, b_2, \cdots, t_2\},$$
$$\cdots\cdots$$
$$B_n = \{a_n, b_n, \cdots, t_n\}.$$

这时 $B_1, B_2, \cdots, B_n$ 也是彼此不相交的，它们的基数都是 m，而且它们的并集仍是 P，所以 $p = mn$。于是有

$$nm = mn.$$

定理 2 自然数乘法对加法的分配律成立，即

$$(a + b)c = ac + bc.$$

证明：

$$(a + b)c = \overbrace{(a + b) + (a + b) + \cdots + (a + b)}^{c\text{个}} \quad \text{（定义推论）}$$

$$= (\underbrace{a + a + \cdots + a}_{c\text{个}})$$

$$+ (\underbrace{b + b + \cdots + b}_{c\text{个}}) \quad \text{（加法运算律）}$$

$$= ac + bc. \quad \text{（定义推论）}$$

推论 1 $c(a + b) = ca + cb.$

推论 2 $(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)b$
$$= a_1b + a_2b + \cdots + a_nb.$$

定理 3 自然数乘法的结合律成立，即

$$a(bc) = (ab)c.$$

证明：$a(bc)=a(\underbrace{b+b+\cdots+b}_{c个})$ （定义推论）

$=(\underbrace{ab+ab+\cdots+ab}_{c个})$ （推论 2）

$=(ab)c$. （定义推论）

定义 4 设 a 和 b 为自然数，如果存在自然数 x，使得 $bx=a$，就把 x 叫做 a 除以 b 所得的商，记作

$$x=a\div b\left(或\ x=\frac{a}{b}\right),$$

a 叫做被除数，b 叫做除数，求两个数的商的运算叫做除法.

因为自然数的乘法满足交换律，所以它有唯一的逆运算. 由定义 4 可以看出除法是乘法的逆运算，其中积是被除数，已知的乘数是除数.

显然，在自然数集中除法是不封闭的.

综合以上所述，我们用基数的概念规定了自然数和自然数的顺序以及自然数的四则运算的定义，并且证明了加法和乘法的运算律. 关于四则运算的其他一些性质，完全可以用逻辑推理的方法推出，因此，可以说自然数的理论（基数理论）已经建立起来了.

习 题 一

1. 试证：如果 $a<b$，那么 $b>a$.
2. 试证：不等的传递性.
3. 试证：如果 $a>b$，$b=c$，那么 $a>c$.
4. 试证：(1) $(a-b)+b=a$； (2) $(a+b)-b=a$；

   (3) $a+(b-c)=(a+b)-c$；

   (4) $a-(b-c)=(a-b)+c$；

   (5) $a-(b+c)=(a-b)-c$；

   (6) $(a-b)+(c-d)=(a+c)-(b+d)$.

（所给的差都是存在的.）

5.试证：$a(b_1+b_2+b_3)=ab_1+ab_2+ab_3$。

二、序 数 理 论

§4 自然数的概念

自然数序数理论的公理体系是通过两个原始概念：集合和后继，以及四条公理建立起来的。

定义 满足下列公理的任何一个非空集合N的元素叫做自然数：

(1) 存在一个元素，记作1，它不后继于任何元素（即$1\in N$，如果 $a\in N$，a 的后继元素用a'表示，那么$a'\neq 1$）；

(2) 对于任何元素 a，有而且仅有一个后继元素 a'（即如果 $a=b$，那么 $a'=b'$）；

(3) 任何一个元素最多是一个元素的后继元素（即如果 $a'=b'$，那么 $a=b$）；

(4) 如果N的任一子集M具有以下性质：

① $1\in M$；

② 每当 $k\in M$，就有 $k'\in M$，

那么，M就是N。

上述四条公理，叫做皮亚诺（Peano, 1858—1932）公理。公理（1）说明1是自然数，而且是最前边的数。公理（2），（3）说明任何元素都有唯一的后继元素，而且不同元素的后继元素也不同。这样，1的后继元素$1'$是自然数，用阿拉伯数码表示记作2（即$1'=2$）；2的后继元素$2'$是自然数，记作3（即$2'=3$）；继续下去，永无止境，把这些数一个接续一个地排列出来，就是自然数列

$$1,2,3,\cdots\cdots.$$

它是无穷的，说明自然数没有最后的元素．公理 4 通常叫做归纳法原理，由它可以证明数学归纳法的推理是正确的．即如果已经证明命题 P 对于数 1 是正确的，假定 P 对于数 k 是正确的，从而能够推出 P 对于 k 的后继数 k' 也是正确的，那么 P 对于所有的自然数都是正确的．

证明：设 M 是所有使 P 正确的自然数的集合，因为 1 使 P 正确，所以 $1\in M$；又设 $k\in M$，那么 k 使 P 正确，从而可以推出 k' 使 P 正确，所以 $k'\in M$． 由公理 4 可知 M 就是 N，即所有自然数都使 P 正确．

§5 自然数的运算

定义 1 在自然数集中，按下列条件规定的运算"+"，叫做自然数的加法：

(1) 对任何自然数 a，有 $a+1=a'$；

(2) 对任何自然数 a 和 b，有 $a+b'=(a+b)'$.

自然数相加的结果叫做和，其中每一个自然数叫做加数．

条件 (1) 说明任何自然数 a 加上 1 就得到它的后继数 a'，因为 1 是自然数，所以有

$$1+1=1'=2,$$
$$2+1=2'=3,$$
$$\cdots\cdots$$

这样，自然数就可以看成是从 1 开始依次加上 1 所得的数(在只含有一个元素的有穷集合中依次添加一个元素，得到所有的非空有穷集合，所以非空有穷集合含有元素的个数可以用自然数表示)．

条件 (2) 说明在一个数上加以另一个数的后继数，等于加上另一个数所得的和的后继数．因为除 1 以外的自然数都是某数的后继数，因此，条件 (2) 规定了某数加上除 1 以外的

自然数的意义，而条件(1)规定了某数加上1的意义，这两条合在一起就规定了任意两个自然数相加的意义．例如

$$2+3=2+2' \qquad \text{(后继数)}$$
$$=(2+2)'. \qquad \text{(条件(2))}$$

而

$$2+2=2+1' \qquad \text{(后继数)}$$
$$=(2+1)'. \qquad \text{(条件(2))}$$

又

$$2+1=2' \qquad \text{(条件(1))}$$
$$=3, \qquad \text{(后继数)}$$

所以

$$2+3=(2+2)'=((2+1)')'=(3')'=4'=5.$$

上述的自然数加法的定义，必须保证自然数的和是唯一存在的，下面我们证明这个事实．

定理 1 自然数的和是唯一存在的．

证明：我们用数学归纳法来证明这个定理．设 a 和 m 为任意两个自然数．

(1) 当 $m=1$ 时，$a+m=a+1=a'$ (定义 1(1))，由自然数公理可知 a' 是唯一存在的，所以当 $m=1$ 时，$a+m$ 唯一存在．

(2) 假设 $m=b$ 时，$a+m=a+b$ 唯一存在，于是 $(a+b)'$ 唯一存在．而 $a+b'=(a+b)'$ (定义 1(2))，所以 $a+b'$ 也唯一存在．

由数学归纳法可知当 m 为任何自然数时，$a+m$ 都唯一存在．

定理 2 加法结合律成立，即对于任意自然数 a,b,c，都有

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

证明：(1) 当 $c=1$ 时，

$$a+(b+1)=a+b' \qquad (定义1(1))$$
$$=(a+b)' \qquad (定义1(2))$$
$$=(a+b)+1. \qquad (定义1(1))$$

即当 $c=1$ 时，加法结合律成立。

(2) 假设 $c=k$ 时，加法结合律成立，即有

$$a+(b+k)=(a+b)+k.$$

而

$$a+(b+k')=a+(b+k)' \qquad (定义1(2))$$
$$=[a+(b+k)]' \qquad (定义1(2))$$
$$=[(a+b)+k]' \qquad (假设)$$
$$=(a+b)+k', \qquad (定义1(2))$$

即当 $c=k'$ 时，加法结合律也成立。

由数学归纳法可以知道，c 为任何自然数时，加法结合律都成立。

定理 3 加法交换律成立，即对于任意自然数 a 和 b，有

$$a+b=b+a.$$

证明：(1) 先证当 $b=1$ 时，加法交换律成立，即证

$$a+1=1+a.$$

① 当 $a=1$ 时，$a+1=1+1=1+a$；

② 假设当 $a=m$ 时，等式成立，即 $m+1=1+m$。

而

$$m'+1=(m+1)+1 \qquad (定义1(1))$$
$$=(1+m)+1 \qquad (假设)$$
$$=1+(m+1) \qquad (加法结合律)$$
$$=1+m' \qquad (定义1(1))$$

所以当 a 为任何自然数时，$a+1=1+a$ 都成立。

(2) 假设 $b=k$ 时，加法交换律成立，即

$$a+k=k+a.$$

而

$$\begin{aligned}
a+k' &= (a+k)' && (\text{定义 } 1(2))\\
&= (k+a)' && (\text{假设})\\
&= k+a' && (\text{定义 } 1(2))\\
&= k+(a+1) && (\text{定义 } 1(1))\\
&= k+(1+a) && (a+1=1+a)\\
&= (k+1)+a && (\text{加法结合律})\\
&= k'+a && (\text{定义 } 1(1))
\end{aligned}$$

所以当 b 为任何自然数时，$a+b=b+a$.

定义 2 在自然数集中，按下列条件规定的运算“·”，叫做自然数的乘法：

(1) 对任何自然数 a，有 $a\cdot 1=a$；

(2) 对任何自然数 a 和 b，有 $a\cdot b'=a\cdot b+a$.

自然数相乘的结果叫做积，其中每一个自然数叫做乘数.

条件 (1) 给出了乘以 1 的意义，说明任何自然数都可以看成是它自身与 1 的乘积.

条件 (2) 给出了乘以除 1 以外的自然数的意义，而且给出了自然数乘法与加法之间的关系．即 $a\cdot n$ 等于 n 个 a 相加的和．因为

$$\begin{aligned}
&a\cdot 1=a, && (\text{定义 } 2(1))\\
&a\cdot 2=a\cdot 1+a=a+a, && (\text{定义 } 2)
\end{aligned}$$

假设

$$a\cdot k=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{k\text{个}}.$$

那么

$$\begin{aligned}
a\cdot k' &= a\cdot k+a && (\text{定义 } 2(2))\\
&= \underbrace{a+a+\cdots+a}_{k\text{个}}+a && (\text{假设})
\end{aligned}$$

$$= \underbrace{a + a + \cdots + a}_{k' 个}. \qquad (定义 1 (1))$$

所以 $a \cdot n$ 等于 n 个 a 相加的和.

因为 n 个 a 的和唯一存在，所以积 $a \cdot n$ 也唯一存在.

$a \cdot n$ 的乘号"·"可以省略而写成 an.

定理 4 自然数乘法对加法的分配律成立，即对于任意自然数 a, b, c，有

$$(a + b)c = ac + bc.$$

应用上面证得的自然数乘法与加法的关系，本定理的证明与 § 3 定理 2 的证明相同. 也可用数学归纳法证明.

定理 5 乘法交换律成立，即对于任意自然数 a 和 b，有

$$ab = ba.$$

证明：(1) 先证当 $b = 1$ 时，乘法交换律成立，即证

$$a \cdot 1 = 1 \cdot a.$$

① 当 $a = 1$ 时，$a \cdot 1 = 1 \cdot 1 = 1 \cdot a$;

② 假设当 $a = m$ 时，等式成立，即 $m \cdot 1 = 1 \cdot m$. 而

$$\begin{aligned}
m' \cdot 1 &= m' && (定义 2 (1)) \\
&= m + 1 && (加法定义) \\
&= m \cdot 1 + 1 && (定义 2 (1)) \\
&= 1 \cdot m + 1 && (假设) \\
&= 1 \cdot m', && (定义 2 (2))
\end{aligned}$$

所以 a 为任何自然数时都有 $a \cdot 1 = 1 \cdot a$.

(2) 假设当 $b = k$ 时，乘法交换律成立，即 $ak = ka$，而

$$\begin{aligned}
ak' &= ak + a && (定义 2 (2)) \\
&= ka + a && (假设) \\
&= ka + a \cdot 1 && (定义 2 (1)) \\
&= ka + 1 \cdot a && (a \cdot 1 = a \cdot 1)
\end{aligned}$$

$$= (k+1)a \quad \text{（乘法对加法分配律）}$$
$$= k' \cdot a, \qquad \text{（加法定义）}$$

所以当 b 为任何自然数时，乘法交换律都成立。

由于乘法交换律成立，所以乘法对加法的另一分配律，即 $a(b+c)=ab+ac$ 也成立。

定理 6 乘法的结合律也成立，即对于任意自然数 a，b，c，有

$$a(bc)=(ab)c.$$

其证明与 §3 定理 3 的证明相同。也可用数学归纳法证明。

关于自然数的减法和除法仍分别规定为加法和乘法的逆运算。

§6 自然数的大小比较

定义 设 a 和 b 是自然数，如果存在一个自然数 m，使 $a=b+m$ 成立，就说 a 大于 b，记作 $a>b$，或者说 b 小于 a，记作 $b<a$。

定义本身说明了不等的对逆性成立。

下面我们证明不等的传递性，即

如果 $a>b$，$b>c$，那么 $a>c$。

证明：由 $a>b$，有 $a=b+m$，m 为自然数，

由 $b>c$，有 $b=c+n$，n 为自然数，

所以

$$a=(c+n)+m$$
$$=c+(n+m) \qquad \text{（加法结合律）}$$

而

$n+m$ 为自然数，所以

$$a>c. \qquad \text{（定义）}$$

下面我们再证明三歧性，即对于两个自然数 a 和 b 来说，下列三种情况中必有一种而且只有一种成立：

$$(1)\ a = b;\ (2)\ a > b;\ (3)\ a < b.$$

证明：我们先证三种情况中必有一种情形成立。

① 当 $b = 1$ 时，对 a 与 1 来说，或 $a = 1$，或 $a > 1$，即上述三种情况中必有一种成立。

② 设当 $b = k$ 时，a 与 k 在上述三种情况中必有一种成立，即 $a = k$，或 $a > k$，或 $a < k$。

如果 $a = k$，因为 $k' = k + 1$，所以 $k' = a + 1$ 那么 $a < k'$；

如果 $a < k$，因为 $k < k'$ 所以 $a < k'$；

如果 $a > k$，那么 $a = k + m$，这时，如果 $m = 1$，那么 $a = k + 1 = k'$，如果 $m > 1$，那么 $m = 1 + n$，于是 $a = k + 1 + n = k' + n$，则有 $a > k'$。

从而推出 a 与 k' 在上述三种情况中也必有一种成立。

所以当 b 为任何自然数时，a 和 b 在上述三种情况中必有一种成立。

下面进一步证明只有一种情况成立，即不能有两种情况同时成立。

① 如果 $a = b$，$a > b$ 同时成立。由 $a > b$，得

$$a = b + m,$$

又由 $a = b$，得 $b = b + m$。我们证明 $b = b + m$ 不成立。

i) 当 $b = 1$ 时，$1 + m = m + 1 = m'$，所以

$$1 = 1 + m$$

不成立。不然的话 $1 = m'$，1 是 m 的后继数，与公理矛盾。

ii) 假设当 $b = k$ 时，$k = k + m$ 不成立，那么

$$k' = k' + m$$

也不成立．不然的话 $k' = k' + m$ 成立，则有

$$k' = m + k' = (m + k)',$$

由公理应有 $k = m + k$，与假设它不成立矛盾． 所以说 b 为任何自然数时 $b = b + m$ 都不成立，即 $a = b$，$a > b$ 不能同时成立．

② 同样可证 $a = b$，$a < b$ 不能同时成立．

③ 如果 $a > b$，$a < b$ 同时成立．由 $a > b$，得 $b < a$（不等对逆性），再由 $a < b$，得 $b < b$（传递性），而 $b = b$，由 ② 可知 $b = b$ 与 $b < b$ 不能同时成立，所以 $a > b$，$a < b$ 不能同时成立．

这样，我们就证明了三歧性．

其他有关自然数的等与不等的性质以及有关运算的性质，都可以用逻辑推理的方法推导出来，因此，可以说自然数的理论已经建立起来了．

下面我们列举一些常用的有关自然数不等的性质．因为不等的对逆性成立，所以我们只考虑"$>$"的情况，关于"$<$"的情况也有相应的结论．另外，这里所出现的字母都是自然数，不再一一说明．

(1) 如果 $a > b$，那么 $a + c > b + c$．

证明：因为 $a > b$，

所以

$$a = b + k. \qquad \text{（定义）}$$

于是

$$\begin{aligned} a + c &= (b + k) + c \\ &= (b + c) + k, \qquad \text{（运算定律）} \end{aligned}$$

所以

$$a + c > b + c. \qquad \text{（定义）}$$

(2) 如果 $a > b$，$c > d$，那么 $a + c > b + d$．

(3) 如果 $a>b$，那么 $a-c>b-c$。

证明：因为 $a>b$，

所以

$$a=b+k. \qquad \text{(定义)}$$

于是

$$\begin{aligned} a-c &= (b+k)-c \\ &= (b-c)+k, \end{aligned}$$

(习题一第 4 题(3)：$(a+b)-c=(a-c)+b$)

所以

$$a-c>b-c. \qquad \text{(定义)}$$

(4) 如果 $a>b$，那么 $c-a<c-b$。

证明：由 $a>b$，有 $a=b+k$. (定义)

即

$$b=a-k. \qquad \text{(定义)}$$

于是

$$\begin{aligned} c-b &= c-(a-k) \\ &= (c-a)+k, \end{aligned}$$

(习题一第 4 题(4)：$a-(b-c)=(a-b)+c$)

所以

$$c-b>c-a,$$

即

$$c-a<c-b.$$

(5) 如果 $a>b$，那么 $ac>bc$。

证明：由 $a>b$，有 $a=b+k$. (定义)

于是

$$\begin{aligned} ac &= (b+k)c \\ &= bc+kc. \end{aligned} \qquad \text{(运算定律)}$$

而 kc 为自然数，所以

$$ac > bc.$$

(6) 如果 $a > b$，$c > d$，那么 $ac > bd$.

证明：由 $a > b$，得 $ac > bc$，　　　　(性质(5))

再由

$c > d$，得 $bc > bd$，　　　　(性质(5))

所以

$ac > bd$.　　　　(传递性)

我们知道，任意一个自然数都有两重意思，例如自然数5，既可以表示数量的多少，如5个单位，又可以表示位置的次序，如第5号．前者就是基数的含义，后者就是序数的含义．基数理论与序数理论正是从这两个不同的角度分别建立起来的自然数理论．

作为中小学教材，要考虑学生接受的能力，不能像上述那样建立比较严密的理论体系，但是应使学生明确这样三点：1）一个自然数有"基数"与"序数"这两重意义；2）四则运算是根据定义和运算定律进行的．例如：

$243+324=(200+40+3)+(300+20+4)$

$=(200+300)+(40+20)+(3+4)$

(加法结合、交换律)

$=500+60+7$　　　　(加法定义)

$=567$；

又如：

243×3

$=(200+40+3)\times 3$

$=200\times 3+40\times 3+3\times 3$ (乘法对加法的分配律)

$=600+120+9$　　　　(乘法定义)

$=729$；

3) $a > b$ 或 $b < a$，就是 $a = b + k$ (k是自然数)．

§7[1] 数"0"

在基数理论中，我们把空集的基数规定为零，并记作"0"。

把"0"添入自然数集之后，仍按自然数大小比较的定义来比较0与自然数的大小。因为空集是任何非空集合的真子集，所以任何自然数 a 大于0，或0小于 a。仍按由小到大的次序排列之，就得扩大自然数列

$$0, 1, 2, 3, \cdots\cdots.$$

关于加法和乘法的运算，我们规定：

$$a+0=0+a=a;$$
$$a\cdot 0=0\cdot a=0;$$
$$0\cdot 0=0.$$

减法和除法分别为加法和乘法的逆运算，显然有

$$a-0=a;\ a-a=0;\ 0-0=0;$$
$$0\div a=0.$$

把"0"添入自然数集之后，在新的数集里，原有的自然数集的性质大部分保留了，但也有一些需改变一下，例如：

$a+b>a$ 应改为 $a+b\geqslant a$；

如果 $a>b$，那么 $ac>bc$ 应改为如果 $a>b$，那么 $ac\geqslant bc$；等等。

在减法 $a-b=c$ 中，$a>b$ 的条件，应改为 $a\geqslant b$。

关于除法，这里再着重说明一下。根据定义，求 $a\div b$，就是求使 $b\cdot x=a$ 成立的 x。

如果 $b=0$，而 $a\neq 0$，那么使 $b\cdot x=a$ 成立的 x 不存在；

1) "0"不属于自然数这一章的内容，这一节是附加的。

如果 $b=0$，同时 $a=0$，x 取任何数时都使 $bx=a$ 成立，也就是 $a\div b$ 的结果不是唯一的。

所以在除法中要规定除数 b 不得为 0。

这个新的数集关于减法和除法仍旧不封闭。

在序数理论中，把 0 作为自然数 1 的前边的数(注意：0 不是自然数)，就是把 1 作为 0 的后继数，即 $0'=1$，这样，就得到扩大自然数列：

$$0,1,2,3,\cdots\cdots.$$

依旧是依次加 1 得到后继数，只不过是从 0 开始。在扩大自然数列里，0 是最前边的元素。

习　题　二

1. 根据自然数加法定义，试证：$3+4=7$。

2. 根据自然数乘法定义，试证：$2\cdot 3=6$。

3. 试用数学归纳法证明

$$(a+b)c=ac+bc. \qquad (a,b,c\text{ 都是自然数})$$

4. 已知自然数乘法对加法的分配律成立，试用数学归纳法证明

$$a(bc)=(ab)c. \qquad (a,b,c\text{ 都是自然数})$$

5. 已知 $(a_1+a_2)b=a_1b+a_2b$，试用数学归纳法证明：

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)b=a_1b+a_2b+\cdots+a_nb.$$

6. 试证：在扩大自然数列中的两个数的积如果是零，那么这两个数之中至少有一个是零。

7. 试证：如果 $a>b$，$c>d$，那么 $a+c>b+d$。

8. 设 $M=\{0\}\cup N$，$a\in M$，$b\in M$，$c\in M$，试证：

(1) $a+b\geqslant b$；

(2) 如果 $a<b$，那么 $ac\leqslant bc$。

9. 设 $M=\{0\}\cup N$，举例说明 M 对于减法和除法都不封闭。

第三章 有 理 数

一、分　　数

随着生产的发展，自然数已经满足不了解决分份和度量问题时的需要，例如，把3个苹果分给4个人，每人多少？用一米长的绳子为标准(单位)来量一丈长的距离，所得的量数是多少？这就需要引进新的数．另外，从数学本身来看，我们知道在自然数集中，除法不是永远可以进行的．也就是说，在自然数集中，方程 $ax=b$(a 和 b 都是自然数)不都是有解的．为了解决这个矛盾，也需要引进新的数．在引进新数——分数之后，对于所谓“等分”(分份)和“包含”(度量)的问题仍旧用除法来解决，那么上面提出的实际问题和数学本身的解方程 $ax=b$ 的问题，就可以统一解决了．与自然数的理论一样，从不同的角度出发都可以建立起分数的理论．下面我们介绍一种比较严谨的理论．

§1　分数的概念及其大小比较

定义1　符号 $\frac{m}{n}$(其中 m 和 n 都是自然数)叫做分数，m 叫做分数的分子，n 叫做分数的分母．

由定义1可以知道分子和分母都不为零．

定义1仅仅是从形式上把分数确定下来了，而没有揭示出分数概念的实质，因此我们还要补充以下一系列的定义．

定义 2　分数 $\frac{m_1}{n_1}$ 大于、等于、小于 $\frac{m_2}{n_2}$，分别取决于

$$m_1n_2 > m_2n_1,\quad m_1n_2 = m_2n_1,\quad m_1n_2 < m_2n_1,$$

并且分别记作：

$$\frac{m_1}{n_1} > \frac{m_2}{n_2},\quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2},\quad \frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}.$$

定义 2 具有两方面的意思，例如，如果 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$，那么 $ad > bc$；反过来，如果 $ad > bc$，那么 $\frac{a}{b} > \frac{c}{d}$.

定义 2 还说明了两个分数的大小的比较是由两个自然数(一个分数的分子与另一个分数的分母的积)的大小比较决定的．从而可以由自然数相等与不等的性质推出分数的相应的性质．

定理 1（三歧性）　对于任意两个分数 $\frac{m_1}{n_1}$ 和 $\frac{m_2}{n_2}$ 来说，在下列三种情形中，必定有一种而且只有一种存在：

$$(1)\ \frac{m_1}{n_1} > \frac{m_2}{n_2};\quad (2)\ \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2};\quad (3)\ \frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2}.$$

证明：由自然数相等与不等的三歧性可知

$$m_1n_2 > m_2n_1;\quad m_1n_2 = m_2n_1;\quad m_1n_2 < m_2n_1,$$

三种情形之中有一种而且只有一种成立．所以

$$\frac{m_1}{n_1} > \frac{m_2}{n_2};\quad \frac{m_1}{n_1} = \frac{m_2}{n_2};\quad \frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2},$$

三种情形之中有一种而且只有一种成立．

定理 2（分数基本性质）　分数的分子和分母分别乘以同一个自然数时，所得的新分数与原分数相等，即

$$\frac{m}{n} = \frac{mt}{nt}\qquad (t\text{ 为自然数}).$$

证明：因为 $mnt=mnt$，所以

$$m(nt)=n(mt).\qquad\text{(自然数乘法交换、结合律)}$$

因而

$$\frac{m}{n}=\frac{mt}{nt}.\qquad\text{(定义 2)}$$

定理 3（分数相等的对称性） 如果

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2},$$

那么

$$\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1}{n_1}.$$

定理 4（分数相等的传递性） 如果

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2},\quad \frac{m_2}{n_2}=\frac{m_3}{n_3},$$

那么

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_3}{n_3}.$$

定理 5（分数不等的对逆性） 如果

$$\frac{m_1}{n_1}>\frac{m_2}{n_2},$$

那么

$$\frac{m_2}{n_2}<\frac{m_1}{n_1};$$

如果

$$\frac{m_1}{n_1}<\frac{m_2}{n_2},$$

那么

$$\frac{m_2}{n_2}>\frac{m_1}{n_1}.$$

定理 6（分数不等的传递性） 如果

$$\frac{m_1}{n_1} > \frac{m_2}{n_2} \text{ 且 } \frac{m_2}{n_2} > \frac{m_3}{n_3},$$

那么

$$\frac{m_1}{n_1} > \frac{m_3}{n_3}.$$

证明：由已知条件，得

$$m_1n_2 > m_2n_1 \text{ 且 } m_2n_3 > m_3n_2,$$

所以

$$m_1n_2m_2n_3 > m_2n_1m_3n_2, \quad \text{（自然数不等的性质）}$$

即

$$m_1n_3(m_2n_2) > n_1m_3(m_2n_2). \quad \text{（自然数乘法交换、结合律）}$$

从而

$$m_1n_3 > n_1m_3, \quad \text{（自然数不等的性质）}$$

所以

$$\frac{m_1}{n_1} > \frac{m_3}{n_3}. \quad \text{（定义 2）}$$

由定理 2，可知 $\frac{m}{n} = \frac{mt}{nt}$，说明有些分数虽然它们的形式不同，但是可以有相同的值，即它们可以相等．这是分数与自然数的一个重要差别．再由定理 3，可知 $\frac{mt}{nt} = \frac{m}{n}$，说明分数的分子和分母有公因数 t 时，可以用这个公因数 t，分别去除分数的分子与分母，所得的新分数与原分数相等．

定义 3 分数的分子和分母分别除以它们的同一个公因数，这种变形叫做约分．

定义 4 如果一个分数的分子与分母除 1 以外没有公因数，这个分数叫做既约分数．

显然，任何一个分数都可以通过约分把它化为与它相等

的既约分数. 实际上，对于一个非既约分数只要约去分子与分母的最大公因数就得到既约分数. 可以证明任何一个分数约得的既约分数是唯一的.

定义 5 把几个分数化成分母相同的分数，而不改变每一个分数的大小，这种变形叫做通分.

§2 分数的运算

下面我们分别给出分数四则运算的定义.

定义 1 分数 $\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}$ 叫做分数 $\frac{m_1}{n_1}$ 与 $\frac{m_2}{n_2}$ 的和，记作

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}.$$

由定义 1 可知，如果两个分数的分母相同，那么它们的和是以原分母为分母，原分子的和为分子的分数. 因为

$$\begin{aligned}\frac{m_1}{n}+\frac{m_2}{n}&=\frac{m_1n+m_2n}{n\cdot n} && \text{（定义 1）}\\ &=\frac{(m_1+m_2)\cdot n}{n\cdot n} && \text{（自然数乘法对加法的分配律）}\\ &=\frac{m_1+m_2}{n}. && \text{（约分）}\end{aligned}$$

这样，$\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}$ 可以看成是分母相同的两个分数 $\frac{m_1n_2}{n_1n_2}$ 与 $\frac{m_2n_1}{n_1n_2}$ 的和，而 $\frac{m_1n_2}{n_1n_2}$ 与 $\frac{m_2n_1}{n_1n_2}$ 正是分数 $\frac{m_1}{n_1}$ 与 $\frac{m_2}{n_2}$ 通过通分变形使分母都为 n_1n_2 的结果. 为此，如果两个分数的分母不同，可以先通分变为分母相同的分数，然后再相加.

定理 1 分数加法的交换律成立.

定理 2 分数加法的结合律成立.

证明:

$$\left(\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}\right)+\frac{m_3}{n_3}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}+\frac{m_3}{n_3}\qquad(\text{定义 }1)$$

$$=\frac{(m_1n_2+m_2n_1)n_3+m_3n_1n_2}{n_1n_2n_3}\qquad(\text{定义 }1)$$

$$=\frac{m_1n_2n_3+m_2n_1n_3+m_3n_1n_2}{n_1n_2n_3},\qquad(\text{自然数运算律})$$

$$\frac{m_1}{n_1}+\left(\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_3}{n_3}\right)=\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2n_3+m_3n_2}{n_2n_3}\qquad(\text{定义 }1)$$

$$=\frac{m_1n_2n_3+(m_2n_3+m_3n_2)n_1}{n_1n_2n_3}\qquad(\text{定义 }1)$$

$$=\frac{m_1n_2n_3+m_2n_1n_3+m_3n_1n_2}{n_1n_2n_3},\qquad(\text{自然数运算律})$$

所以有

$$\left(\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}\right)+\frac{m_3}{n_3}=\frac{m_1}{n_1}+\left(\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_3}{n_3}\right).\quad(\S 1\text{ 定理 }4)$$

定义 2 分数 $\frac{m_1m_2}{n_1n_2}$ 叫做分数 $\frac{m_1}{n_1}$ 与 $\frac{m_2}{n_2}$ 的积,记作

$$\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1m_2}{n_1n_2}.$$

这个定义说明了分数乘法的法则是:两个分数相乘,分子的积为积的分子,分母的积为积的分母.

定理 3 分数乘法的交换律成立.

定理 4 分数乘法的结合律成立.

定理 5 分数乘法对加法的分配律成立.

证明:

$$\left(\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}\right)\cdot\frac{m_3}{n_3}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}\cdot\frac{m_3}{n_3}\qquad(\text{定义 }1)$$

$$= \frac{(m_1n_2 + m_2n_1)m_3}{n_1n_2n_3} \qquad \text{(定义 2)}$$

$$= \frac{m_1m_3n_2 + m_2m_3n_1}{n_1n_2n_3}, \qquad \text{(自然数运算律)}$$

$$\frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_3}{n_3} + \frac{m_2}{n_2} \cdot \frac{m_3}{n_3} = \frac{m_1m_3}{n_1n_3} + \frac{m_2m_3}{n_2n_3} \qquad \text{(定义 2)}$$

$$= \frac{m_1m_3n_2n_3 + m_2m_3n_1n_3}{n_1n_3n_2n_3} \qquad \text{(定义 1)}$$

$$= \frac{(m_1m_3n_2 + m_2m_3n_1) \cdot n_3}{n_1n_2n_3 \cdot n_3} \qquad \text{(自然数运算律)}$$

$$= \frac{m_1m_3n_2 + m_2m_3n_1}{n_1n_2n_3}, \qquad \text{(约分)}$$

所以有

$$\left(\frac{m_1}{n_1} + \frac{m_2}{n_2}\right) \cdot \frac{m_3}{n_3} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{m_3}{n_3} + \frac{m_2}{n_2} \cdot \frac{m_3}{n_3}. \qquad \text{(§1 定理 4)}$$

定义 3 如果 $\frac{m_2}{n_2} + \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}$，分数 $\frac{m}{n}$ 就叫做分数 $\frac{m_1}{n_1}$ 减去分数 $\frac{m_2}{n_2}$ 所得的差，记作

$$\frac{m_1}{n_1} - \frac{m_2}{n_2} = \frac{m}{n}.$$

这是用加法的逆运算来规定减法定义的.

定理 6 如果被减数 $\frac{m_1}{n_1}$ 小于减数 $\frac{m_2}{n_2}$，那么差不存在.

证明：假设差存在，且为 $\frac{m}{n}$，由定义 3，得

$$\frac{m_2}{n_2} + \frac{m}{n} = \frac{m_1}{n_1}.$$

已知

$$\frac{m_1}{n_1} < \frac{m_2}{n_2},$$

所以

$$\frac{m_2}{n_2} + \frac{m}{n} < \frac{m_2}{n_2},$$

即

$$\frac{m_2 n + m n_2}{n_2 n} < \frac{m_2}{n_2}.$$

于是

$$(m_2 n + m n_2) n_2 < m_2 n_2 n,$$

即

$$m_2 n_2 n + m n_2 n_2 < m_2 n_2 n.$$

这与自然数性质 $a + b > a$ 矛盾，所以差不存在。

定理 7 如果被减数 $\frac{m_1}{n_1}$ 大于减数 $\frac{m_2}{n_2}$，那么差存在，而且等于 $\frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{n_1 n_2}$。

证明：因为 $\frac{m_1}{n_1} > \frac{m_2}{n_2}$，所以 $m_1 n_2 > m_2 n_1$。可见 $m_1 n_2 - m_2 n_1$ 是自然数，因此 $\frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{n_1 n_2}$ 是分数。又

$$\begin{aligned}
&\frac{m_2}{n_2} + \frac{m_1 n_2 - m_2 n_1}{n_1 n_2} \\
&= \frac{m_2 n_1 n_2 + m_1 n_2 n_2 - m_2 n_1 n_2}{n_2 n_1 n_2} \\
&= \frac{m_1 n_2 n_2}{n_1 n_2 n_2} = \frac{m_1}{n_1},
\end{aligned}$$

所以

$$\frac{m_1}{n_1}-\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2-m_2n_1}{n_1n_2}.$$

定理 8 如果$\frac{m_1}{n_1}$减去$\frac{m_2}{n_2}$的差存在，那么它是唯一的.

证明：设$\frac{m_1}{n_1}$减去$\frac{m_2}{n_2}$的差除了是$\frac{m}{n}$之外还是$\frac{a}{b}$，那么

$$\frac{m}{n}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1}{n_1},\quad \frac{a}{b}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1}{n_1}.$$

由传递性，得

$$\frac{m}{n}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{a}{b}+\frac{m_2}{n_2},$$

即

$$\frac{mn_2+m_2n}{nn_2}=\frac{an_2+m_2b}{bn_2}.$$

于是

$$mn_2bn_2+m_2nbn_2=an_2nn_2+m_2bnn_2.$$

从而

$$mbn_2n_2=ann_2n_2,$$
$$mb=an.$$

所以

$$\frac{m}{n}=\frac{a}{b}.$$

这说明差是唯一的.

定义 4 如果$\frac{m_2}{n_2}\cdot\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n_1}$，分数$\frac{m}{n}$就叫做分数$\frac{m_1}{n_1}$除以分数$\frac{m_2}{n_2}$的**商**，记作

$$\frac{m_1}{n_1}\div\frac{m_2}{n_2}=\frac{m}{n},$$

这是用乘法的逆运算来规定除法定义的.

定理 9 分数 $\frac{m_1}{n_1}$ 除以 $\frac{m_2}{n_2}$ 的商唯一存在，并且等于 $\frac{m_1n_2}{m_2n_1}$.

证明：因为 $\frac{m_2}{n_2}\cdot\frac{m_1n_2}{m_2n_1}=\frac{m_2m_1n_2}{n_2m_2n_1}=\frac{m_1}{n_1}$，所以 $\frac{m_1n_2}{m_2n_1}$ 是 $\frac{m_1}{n_1}$ 除以 $\frac{m_2}{n_2}$ 所得的商. 又设

$$\frac{m_1}{n_1}\div\frac{m_2}{n_2}=\frac{m}{n},$$

那么

$$\frac{m_2}{n_2}\cdot\frac{m}{n}=\frac{m_1}{n_1},$$

即

$$\frac{m_2m}{n_2n}=\frac{m_1}{n_1}.$$

所以

$$m_2mn_1=m_1n_2n.$$

因而有

$$\frac{m}{n}=\frac{m_1n_2}{m_2n_1}.$$

这个定理说明了分数集关于除法是封闭的

定义 5 如果两个分数的乘积等于 $\frac{1}{1}$，就说这两个分数互为**倒数**.

因为 $\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{1}{1}$，所以 $\frac{a}{b}$ 的倒数是 $\frac{b}{a}$；$\frac{b}{a}$ 的倒数是 $\frac{a}{b}$，即一个分数的倒数就是把它的分子与分母颠倒位置所得的分数.

又因为 $\frac{m_1}{n_1} \div \frac{m_2}{n_2} = \frac{m_1 n_2}{n_1 m_2} = \frac{m_1}{n_1} \cdot \frac{n_2}{m_2}$，所以分数 $\frac{m_1}{n_1}$ 除以分数 $\frac{m_2}{n_2}$ 就等于乘以除数的倒数 $\frac{n_2}{m_2}$. 通常把这个结论做为分数除法的法则.

有关分数的其他一些性质，完全可以由上述的定义和定理推导出来，因此，我们说已经建立了分数理论.

§3 数集扩充原则

我们知道，因为自然数集不能满足实际的需要，所以才引入分数，而把自然数集扩充到分数集，那么在分数集中，既要仍能解决自然数集中所能解决的问题，还要能解决自然数集中不能解决的某些问题. 为此，把一个数集扩充到新的数集，应遵循以下的扩充原则:

（1）新数集是旧数集的真扩集;

（2）在新数集中，要能解决在旧数集中不能解决的某些问题;

（3）在新的数集里，对于某些关系和运算应重新给以定义，并且当把旧数集里的数看做新数时按照新定义所得的结论应与旧的结论一致.

下面我们研究分数集是否符合上述的扩充原则.

定义 分数 $\frac{m}{1}$ 就是自然数 m，即 $\frac{m}{1} = m$.

这样，自然数就是分母为 1 的分数，显然分数集是自然数集的真扩集，满足了扩充原则(1).

又设 m 和 n 为两个自然数，它们在自然数集中的等与不等的关系以及它们的和与积，与把它们看成是分数时，按照新的定义所得的结论是一致的. 例如:

如果 $m>n$，应有 $\frac{m}{1}>\frac{n}{1}$。

事实上，由 $m>n$，可知 $m\cdot1>n\cdot1$，再由分数不等的定义，可得 $\frac{m}{1}>\frac{n}{1}$。

同样，$m=n$ 时有 $\frac{m}{1}=\frac{n}{1}$；$m<n$ 时有 $\frac{m}{1}<\frac{n}{1}$。

又如 $\frac{m}{1}+\frac{n}{1}=\frac{m\cdot1+n\cdot1}{1\cdot1}=\frac{m+n}{1}=m+n$；

$$\frac{m}{1}\cdot\frac{n}{1}=\frac{m\cdot n}{1\cdot1}=\frac{mn}{1}=mn.$$

这就说明了满足扩充原则 (3)。

又因为 $m\div n=\frac{m}{1}\div\frac{n}{1}=\frac{m}{1}\cdot\frac{1}{n}=\frac{m\cdot1}{1\cdot n}=\frac{m}{n}$，说明在分数集中任意两个自然数相除，商总是存在的．从而解决了在自然数集中除法不是永远可行的矛盾，这就满足了扩充原则(2)。

从这里我们还可以看出，前面给出的分数的等与不等以及加法和乘法运算的定义，并不是随意规定的，而是要有所依据，这个依据就是要满足扩充原则．由于

$$\frac{1}{n}\cdot n=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{1}=1,$$

而

$$\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{个}}=\frac{\overbrace{1+1+\cdots+1}^{n\text{个}}}{n}=\frac{n}{n}=1,$$

所以

$$\frac{1}{n}\cdot n=\underbrace{\frac{1}{n}+\frac{1}{n}+\cdots+\frac{1}{n}}_{n\text{个}},$$

即一个数乘以 n 仍是 n 个这个数的和．同时，$\frac{1}{n}$ 就可以看成是把 1 分成 n 等份中的 1 份；$\frac{m}{n}$ 是把 1 分成 n 等份的 m 份．

这样，在这一章开始提出的问题就得到解决．如 3 个苹果 4 个人分，可以把每个苹果分成 4 等份，每份为 $\frac{1}{4}$ 个苹果，这样，每人分得苹果为 $\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$(个)． 这就是所谓等分问题．如果我们仍用除法，就有 $3\div 4=\frac{3}{4}$ (个)，这并不矛盾．又如一丈长的距离用一米为单位来量，所得的量数是多少呢？这是问 10 尺里含有多少个 3 尺，即 3 尺 $\cdot x=$ 10 尺，所以 x 可由 $10\div 3$ 求得，即 $x=\frac{10}{3}$，也就是所得的量数为 $\frac{10}{3}$．

我们已经知道分数集是自然数集的真扩集，这就是说有些分数是自然数，有些分数不是自然数，为了加以区别，我们把不是自然数的分数叫做**纯分数**．

如果我们把符号 $\frac{0}{n}$ (n 是自然数) 也叫做分数(**零分数**) 同时规定它等于 0，即 $\frac{0}{n}=0$． 并且规定它参与分数的运算和参与自然数的运算一致，那么要注意前面的某些定理的条件需要加以改变，如 § 2 定理 7 的“大于”要改为“不小于”；对于除法要增加除数不能为零的条件．

习　题　一

1. 试证分数相等的对称性.

2. 试证分数相等的传递性.

3. 试证分数加法的交换律.

4. 试证分数乘法的交换律.

5. 试证分数乘法的结合律.

6. 一个分数的分子、分母分别加上同一个自然数，所得新分数与原分数的大小关系如何?

7. 证明：（所有字母都不为零）

(1) $\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}-\frac{f}{e}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{f}{e}$;

(2) $\frac{a}{b}\div\left(\frac{c}{d}\div\frac{f}{e}\right)=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{f}{e}$;

(3) $\frac{a}{b}\div\left(\frac{c}{d}\times m\right)=\left(\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\right)\div m$;

(4) 如果 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a}{b}+\frac{f}{e}>\frac{c}{d}+\frac{f}{e}$;

(5) 如果 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，$\frac{f}{e}>\frac{g}{h}$，那么 $\frac{a}{b}+\frac{f}{e}>\frac{c}{d}+\frac{g}{h}$;

(6) 如果 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，那么 $\frac{a}{b}\cdot\frac{f}{e}>\frac{c}{d}\cdot\frac{f}{e}$;

(7) 如果 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，$\frac{f}{e}>\frac{g}{h}$，那么 $\frac{a}{b}\cdot\frac{f}{e}>\frac{c}{d}\cdot\frac{g}{h}$.

8. 定义了零分数之后，上题（如果分子的字母可为 0）的(4)，(5)，(6)，(7)的结论是不是正确? 如果不正确应该怎样改正?

§4　分数与小数的关系

定义 1　分母的形式是 10^n（n 是自然数）的分数，叫做**十进分数**.

定义 2 一个十进分数，如果不用分数形式，而是根据十进位制的位置原则把它表示出来，就叫做**有限小数**.

例如，十进分数 $\frac{11}{10}$，$\frac{9}{100}$ 表示为有限小数分别是 1.1，0.09.

小数点右边的数连同小数点叫做有限小数的小数部分；小数点左边的数叫做有限小数的整数部分.

显然，任何一个有限小数都可以把它改写成十进分数的形式，也就是说任何一个有限小数都可以化为分数形式．那么任意一个分数它能不能化为有限小数呢？我们有以下的结论.

定理 1 一个既约分数能化成有限小数的充要条件是这个分数的分母不含 2 和 5 以外的因数.

证明：先证充分性.

设 $\frac{m}{n}$ 是既约分数，且 $n=2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}$（$\alpha$ 和 β 为自然数）．于是

$$\begin{aligned}\frac{m}{n}=\frac{m}{2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}}&=\frac{m\cdot 2^{\beta}\cdot 5^{\alpha}}{2^{\alpha}\cdot 5^{\beta}\cdot 2^{\beta}\cdot 5^{\alpha}}\\&=\frac{m\cdot 2^{\beta}\cdot 5^{\alpha}}{2^{\alpha+\beta}\cdot 5^{\alpha+\beta}}\\&=\frac{m\cdot 2^{\beta}\cdot 5^{\alpha}}{10^{\alpha+\beta}}.\end{aligned}$$

所以 $\frac{m}{n}$ 是十进分数，它可以化为有限小数.

再证必要性.

设 $\frac{m}{n}$ 是既约分数，且 $\frac{m}{n}=\frac{a}{10^{k}}$（$k$ 为自然数）.

如果 n 含有 2 和 5 以外的质因数 p，设 $n=n'p$，那么

$$\frac{m}{n}=\frac{m}{n'p}=\frac{a}{10^k}.$$

所以

$$m\cdot 10^k=a\cdot n'p,$$

即

$$m\cdot 2^k\cdot 5^k=n'\cdot ap.$$

于是 $m\cdot 2^k\cdot 5^k$ 应该能被 p 整除.

但 $2^k\cdot 5^k$ 与 p 互质，所以 m 应该能被 p 整除，可见 m 和 n 都有 p 这个因数，这与 $\frac{m}{n}$ 为既约分数相矛盾，所以 n 不含有 2 和 5 以外的质因数.

由定理 1 可知 $\frac{3}{8}$，$\frac{7}{20}$，$\frac{9}{25}$，…等都能化成有限小数；$\frac{1}{3}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{8}{15}$，… 等不能化成有限小数.

我们知道 $\frac{2}{7}$ 就是 2 除以 7 所得的商，把 2 扩大 10^k 倍，得 2×10^k，无论 k 有多大，2×10^k 被 7 除，总有余数，也就是进行除法的过程永无止境. 这样就出现了位置原则仍是十进位制而小数位数无限的小数，比如

$$\frac{2}{7}=0.285714285714\cdots\cdots.$$

定义 3　位置原则是十进位制而小数位数无限的小数叫做无限小数.

有限小数与无限小数统称为小数，它们都是十进位的.

定义 4　一个无限小数的小数部分的各位数字，如果从某一位起，总是由一个或几个数字，依照一定的顺序，继续不断地重复出现，那么这个无限小数叫做循环小数(或无限循环小数). 循环小数中重复出现的一个或几个数字，叫做这个循

环小数的一个循环节.

例如 0.285714285714······的循环节是 285714；3.42666······的循环节是 6；2.3161616······的循环节为 16.

为了书写简便，我们只写出一个循环小数中不循环的部分和第一个循环节，而在这个循环节的最左和最右的数字上各记上一个点“·”，例如 $0.285714285714\cdots = 0.\dot{2}8571\dot{4}$；$3.4266\cdots\cdots = 3.42\dot{6}$；$2.31616\cdots\cdots = 2.3\dot{1}\dot{6}$.

由循环节的定义可知：同一个循环小数的循环节不是唯一的. 比如

$$3.42666\cdots\cdots = 3.42\dot{6} = 3.42\dot{6}\dot{6} = 3.42\dot{6}6\dot{6} = \cdots\cdots;$$

$$2.3\dot{1}\dot{6} = 2.3\dot{1}6\dot{1} = 2.3\dot{1}61\dot{6} = \cdots\cdots.$$

定理 2 如果一个既约分数不能化为有限小数，那么一定能化为无限循环小数.

证明：设 $\frac{a}{b}$ 是既约分数 $(b > a)$，且不能化为有限小数.

用 10 乘 a 再被 b 除，设所得的商为 q_1，余数为 r_1，即

$$10a = bq_1 + r_1. \quad (r_1 < b)$$

这里 $r_1 \neq 0$，且 q_1 为一位数(不排除 $q_1 = 0$，下同). 这是因为假如 $r_1 = 0$，则有 $10a = bq_1$，即 $\frac{a}{b} = \frac{q_1}{10}$. 这与 $\frac{a}{b}$ 不是有限小数矛盾；又 $\frac{a}{b} = \frac{q_1}{10} + \frac{r_1}{10b}$，而 $\frac{a}{b} < 1$，所以

$$\frac{q_1}{10} < 1,$$

即 $q_1 < 10$，q_1 是一位数.

再用 10 乘 r_1，然后被 b 除，设所得的商为 q_2，余数为 r_2，即

$$10r_1 = bq_2 + r_2.\ (r_2 < b)$$

这里 $r_2 \neq 0$，且 q_2 为一位数，

这是因为假如 $r_2 = 0$，则有 $10r_1 = bq_2$，$r_1 = \frac{bq_2}{10}$，于是

$$10a = bq_1 + \frac{bq_2}{10} = \frac{10bq_1 + bq_2}{10} = \frac{b(10q_1 + q_2)}{10},$$

即

$$\frac{a}{b} = \frac{10q_1 + q_2}{100},$$

仍与 $\frac{a}{b}$ 不能化为有限小数相矛盾；又 $\frac{r_1}{b} = \frac{q_2}{10} + \frac{r_2}{10b}$，而

$$\frac{r_1}{b} < 1,$$

所以 $\frac{q_2}{10} < 1$，即 $q_2 < 10$，q_2 是一位数.

继续下去，我们得到

$$10a = bq_1 + r_1,$$
$$10r_1 = bq_2 + r_2,$$
$$10r_2 = bq_3 + r_3,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$10r_k = bq_{k+1} + r_{k+1},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

这里的 q_i 都是一位数，其中必有 $q_i \neq 0$，$r_i \neq 0$ 且

$$r_i < b\ (i = 1, 2, \cdots).$$

由 $r_i \neq 0$，可知 $\frac{a}{b}$ 为无限小数. 又由 $r_i < b$，而小于 b 的数只有 $1, 2, \cdots, b-1$ 这 $(b-1)$ 个数，因此不同的余数不可能多于 $(b-1)$ 个，即 r_b 应与 $r_1, r_2, \cdots, r_{b-1}$ 中的一个相同.

下面再证当余数重复出现时，所得的商与余数也重复出现．即证如果

$$r_k = r_l,\ (l > k)$$

那么

$$r_{k+i} = r_{l+i};$$
$$q_{k+i} = q_{l+i}.\ (i = 1,2,\cdots)$$

由

$$r_k = r_l,$$

则有

$$10r_k = bq_{k+1} + r_{k+1};$$
$$10r_l = bq_{l+1} + r_{l+1}.$$

于是

$$bq_{k+1} + r_{k+1} = bq_{l+1} + r_{l+1}.$$

即

$$b(q_{k+1} - q_{l+1}) = r_{l+1} - r_{k+1}.$$

说明 b 能整除 $r_{l+1} - r_{k+1}$，但 r_{l+1} 与 r_{k+1} 都小于 b，所以

$$r_{l+1} - r_{k+1} = 0,$$

即 $r_{l+1} = r_{k+1}$. 于是有

$$b(q_{k+1} - q_{l+1}) = 0,$$

但 $b \neq 0$，所以 $q_{k+1} - q_{l+1} = 0$，即 $q_{k+1} = q_{l+1}$.

类似可以得出

$$r_{k+2} = r_{l+2},\ q_{k+2} = q_{l+2};$$
$$r_{k+3} = r_{l+3},\ q_{k+3} = q_{l+3};$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

从而得到 $r_{k+i} = r_{l+i},\ q_{k+i} = q_{l+i}.\qquad (i = 1, 2, 3, \cdots)$

这就说明 $\frac{a}{b}$ 必然化为循环小数.

这样，对于任意一个分数来说，或者化为有限小数，或者

化为无限循环小数.

另外,由无穷递缩等比数列的知识可以知道,任何一个无限循环小数都可以化为分数.

如果把自然数与有限小数都看成是以"0"为循环节的循环小数,即 $2=2.\dot{0}$; $3.86=3.86\dot{0}$,那么分数都可用无限循环小数表示,反过来,无限循环小数(包括有限小数)又可用分数表示.

习 题 二

1.判断下列分数哪些能化成有限小数,哪些不能?

$$\frac{15}{32};\ 1\frac{141}{250};\ \frac{16}{75};\ 2\frac{11}{48};\ \frac{1072}{3125}.$$

2.写出三个分母是两位数而能化成有限小数的既约分数.

3.写出所有的分母是一位数而不能化成有限小数的既约真分数(即分母大于分子的既约分数).

*4 如果 $\frac{a}{b}$ 是既约真分数,且 b 只含有 2 和 5 以外的质因数,当 $\frac{a}{b}$ 化为循环小数时循环节最少的位数是 m,那么 $a(10^m-1)$ 能被 b 整除.

*5 设 $\frac{a}{b}$ 是既约真分数,且 b 只含有 2 和 5 以外的质因数,试证 $\frac{a}{b}$ 化为小数时必定从小数第一位起开始循环.

二、有 理 数

§5 有理数的概念

我们知道在自然数集中减法不是永远能够进行的.当数集扩充到分数集之后,减法还不封闭,即 $x+a=b$ 不一定有解,为了解决这个矛盾,需要把数集进一步扩充.

定义 1

（1）自然数和纯分数叫做正有理数；

（2）对于每一个正有理数 a，有一个新数 $-a$（读做负 a）与它对应，所有这些新数叫做负有理数；

（3）相互对应的数 a 与 $-a$，叫做互为相反数；

（4）与自然数对应的负数叫做负整数，与纯分数对应的负数叫做负分数.

负有理数与正有理数是相对应的，因此把与负整数相对应的自然数叫正整数，把与负分数相对应的纯分数叫正分数.

由上述定义可知，数 0 既不是正数也不是负数，我们规定它的相反数就是它自身，记作 $-0=0$.

由上述定义还可以知道：正有理数包括正整数与正分数；负有理数包括负整数与负分数.

定义 2 正有理数和负有理数以及数 0，总称为有理数.

也就是说正、负整数和正、负分数以及数 0，总称为有理数，于是有

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\begin{cases}\text{正整数(自然数)}\\\text{正分数(纯分数)}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负有理数}\begin{cases}\text{负整数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

定义 3 正数的绝对值就是这个数本身；负数的绝对值就是这个数的相反数；零的绝对值还是零.

数 a 的绝对值用 $|a|$ 表示，为此，绝对值的定义可表示如下：

$$|a|=\begin{cases}a\ (\text{如果 } a \text{ 是正数});\\0\ (\text{如果 } a \text{ 是 } 0);\\-a\ (\text{如果 } a \text{ 是负数}).\end{cases}$$

显然，互为相反数的绝对值相等；绝对值相等的两数，或者相等，或者互为相反数．例如

$$|-3|=|3|=3.$$

§6 有理数的大小比较

定义 1 把规定了原点、方向和度量单位，并且用来表示数的直线叫做数轴．

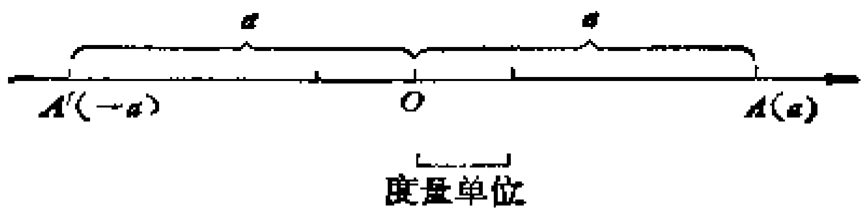


图 3-1

如图 3-1，在直线上取 O 点为原点，规定某一方向为正方向，并用箭头表示出来(通常对于水平放置的直线，规定从左到右的方向为正方向)，再取定线段为度量单位，就构成了数轴．这样，对于任意正数 a，就可以在数轴上原点的右方，取与原点距离为 a 个度量单位的 A 点，用点 A 表示数 a；对于任意负数 $-a$，在原点的左方，取与原点距离为 a 个度量单位的 A' 点，用点 A' 表示数 $-a$；对于数零，就用原点 O 来表示．也就是说，任何一个有理数都可以用数轴上唯一确定的点来表示．表示有理数的点叫有理点．

根据有理数绝对值的定义，可以推得如下的事实：一个有理数 a 的绝对值就表示这个数 a 在数轴上所对应的点 A 与原点的距离．

定义 2 设 a 和 b 为两个正有理数．

(1) 两个正数(有理数，下同)之间以及正数与零之间的

大小比较，仍保持原来的规定；

(2) 两个负数，如果它们的绝对值相等，就说这两个数相等，即 $|-a| = |-b|$ 就是 $-a = -b$；

(3) 每一个负数都小于 0，也小于任一正数，即 $-a < 0$，$-a < b$；

(4) 每一个正数和 0，都大于任一负数，即 $a > -b$，$0 > -b$；

(5) 两个负数之间比较大小，绝对值大的那个数较小，绝对值小的那个数较大，即如果 $a > b$，就有 $-a < -b$，$-b > -a$。

根据定义 2，我们可以证明有关有理数相等与不等的一些性质：

(1) 三歧性：对于任意两个有理数 a 和 b，在下列三种情形中，有一种而且只有一种成立：

$$①\ a > b;\ ②\ a = b;\ ③\ a < b.$$

(2) 不等的对逆性：如果 $a > b$，那么 $b < a$；如果 $a < b$，那么 $b > a$。

(3) 不等的传递性：如果 $a < b$，$b < c$，那么 $a < c$。

(4) 相等的自反性：$a = a$。

(5) 相等的对称性：如果 $a = b$，那么 $b = a$。

(6) 相等的传递性：如果 $a = b$，$b = c$，那么 $a = c$。

下面我们证明不等的传递性。

如果 a，b，c 中没有负数，由定义 2(1) 可知传递性成立。

如果 a，b，c 中有一个负数，这个数必定是 a（不然的话，如果是 b，由 $a < b$，有 a 也是负数，就出现了两个负数），由 $a < b$，b 或是零或是正数，再由 $b < c$，则 c 必为正数，由定义 2(3) 可知 $a < c$。

如果 a, b, c 中有两个负数，这两个数必定是 a 和 b（不然的话，就会出现三个数都是负数），这时 c 或是零或是正数，由定义 2（3）可知 $a<c$。

如果 a, b, c 都是负数，已知 $a<b$, $b<c$，由定义 2(5) 可知 $|a|>|b|$, $|b|>|c|$. 这时 $|a|$, $|b|$, $|c|$ 都为正数，传递性成立，所以有 $|a|>|c|$，再由定义 2(5)，可得 $a<c$。

因此，传递性得证．

我们也可以用已经推得的性质，证明其他一些性质．下面我们证明相等的对称性．即证如果 $a=b$，那么 $b=a$.

假若 $b\neq a$，由性质（1）可知或者 $b>a$，或者 $b<a$，这时由性质（2）就有 $a<b$ 或 $a>b$ 都与 $a=b$ 矛盾，所以 $b\neq a$ 不成立，因此 $b=a$。

有理数的大小比较反映在数轴上，有以下的结论．如果 $a>b$，那么 a 的对应点 A 必在 b 的对应点 B 的右边． 因为当 a 为正数时，不论 b 为正数、零、负数，A 点都在 B 点的右边；当 a 为零时，b 必为负数，则 A 点在 B 点的右边；当 a 为负数时，b 必为负数，且 $|a|<|b|$，A 点与原点的距离比 B 点与原点的距离小，且都在原点的左边，所以 A 点在 B 点的右边.

如果 $a=b$，那么 A 和 B 两点重合.

反之，如果 A 点在 B 点的右边，必有 $a>b$。

由于所有的正数都大于 0，而所有的负数都小于 0，所以用 $a>0$ 表示 a 为正数；$a<0$ 表示 a 为负数。

§7 有理数的运算

定义 1 （有理数加法的定义）

（1）同号两数相加，和的符号与加数的符号相同，和的绝对值等于两加数绝对值的和；

(2) 绝对值不等的异号两数相加，和的符号与绝对值较大的数的符号相同，和的绝对值等于两加数中较大的数的绝对值减去较小的数的绝对值所得的差；

(3) 两个互为相反数相加，和等于零；

(4) 一个数与零相加，和仍是这个数。

如果 a 和 b 为正数，上述定义就是：

(1) $(+a)+(+b)=(+b)+(+a)=+(a+b)$;

$(-a)+(-b)=(-b)+(-a)=-(a+b)$;

(2) $(+a)+(-b)=(-b)+(+a)$

$$=\begin{cases}+(a-b); & (\text{当 } a>b \text{ 时})\\ -(b-a); & (\text{当 } a<b \text{ 时})\end{cases}$$

(3) $(+a)+(-a)=(-a)+(+a)=0$;

(4) $a+0=0+a=a$;

$(-a)+0=0+(-a)=-a$;

$0+0=0$.

定义 1 中所规定的两个非负有理数的求和运算与在非负有理数集中的运算结果一致。这说明定义 1 符合扩充原则的要求。又在非负有理数集中，如果 $a+b=0$，那么

$$a=b=0.$$

这个性质在有理数集中不成立。事实上，在有理数集中如果 $a+b=0$，或者 $a=b=0$，或者 a 与 b 为相反数。

因为定义 1 中没有规定两个加数的先后次序，所以加法交换律显然成立。

定理 1 有理数加法交换律成立。

定理 2 有理数加法结合律成立。即如果 a，b，c 为有理数，那么

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

因为定义 1 是针对两个加数的各种不同情况分别予以定

义的，因此，要证明结合律成立，也应对 a, b, c 的所有各种不同情况，分别予以证明.

证明：(1) 如果 a, b, c 全为正数. 由定义 1 (1) 可知与正有理数的加法运算一致，因此加法结合律成立.

(2) 如果 a, b, c 至少有一个为零. 设 $a=0$，则有

$$a+(b+c)=0+(b+c)=b+c,$$

$$(a+b)+c=(0+b)+c=b+c.$$

类似地可以证明 $b=0$ 或 $c=0$ 时，都有

$$a+(b+c)=(a+b)+c.$$

(3) 如果 a, b, c 中有一个负数，两个正数，设

$$a<0,\ b>0,\ c>0,$$

这时又分三种情况：

① 当 $|a|>|b+c|$ 时，

$$a+(b+c)=-[|a|-(b+c)]=-(|a|-b-c),$$

$$\begin{aligned}(a+b)+c&=-(|a|-b)+c & (|a|>b)\\ &=-[(|a|-b)-c] & (||a|-b|>c)\\ &=-(|a|-b-c).\end{aligned}$$

② 当 $|a|=|b+c|$ 时，

$$a+(b+c)=0, \qquad (\text{定义 } 1(3))$$

$$\begin{aligned}(a+b)+c&=-[|a|-b]+c & (|a|>b)\\ &=0. & (||a|-b|=c)\end{aligned}$$

③ 当 $|a|<|b+c|$ 时，

$$a+(b+c)=(b+c)-|a|=b+c-|a|,$$

i) 当 $|a|>b$ 时，$(a+b)+c$

$$\begin{aligned}&=-(|a|-b)+c\\ &=c-(|a|-b) \qquad ((|a|-b)<c)\\ &=b+c-|a|;\ (\text{正有理数运算性质}).\end{aligned}$$

ii) 当 $|a|<b$ 时，$(a+b)+c$

$$= (b - |a|) + c = b + c - |a|;$$

iii) 当 $|a| = b$ 时，$(a + b) + c = c$

$$= c + b - |a| = b + c - |a|.$$

上述 ①，②，③ 三种情况中，加法结合律都成立．类似地，可以证明当 $a > 0$，$b < 0$，$c > 0$ 或 $a > 0$，$b > 0$，$c < 0$ 时，都有 $a + (b + c) = (a + b) + c$．

(4) 如果 a，b，c 中有两个负数，一个正数．设 $a > 0$，$b < 0$，$c < 0$，这时仍分三种情况．

① 当 $a > |b| + |c|$ 时，

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= a + [-(|b| + |c|)] \\ &= a - (|b| + |c|) \\ &= a - |b| - |c|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= (a - |b|) + c \\ &= (a - |b|) - |c| = a - |b| - |c|. \end{aligned}$$

② 当 $a = |b| + |c|$ 时，

$$a + (b + c) = a + [-(|b| + |c|)] = 0,$$

$$\begin{aligned} (a + b) + c &= (a - |b|) + c \qquad (a > |b|) \\ &= 0. \qquad (a - |b| = |c|) \end{aligned}$$

③ 当 $a < |b| + |c|$ 时，

$$\begin{aligned} a + (b + c) &= a + [-(|b| + |c|)] \\ &= -(|b| + |c| - a), \end{aligned}$$

i) 当 $a < |b|$ 时，$(a + b) + c = -(|b| - a) + c$

$$\begin{aligned} &= -[(|b| - a) + |c|] \\ &= -(|b| + |c| - a); \end{aligned}$$

ii) 当 $a > |b|$ 时，$(a + b) + c = (a - |b|) + c$

$$\begin{aligned} &= -[|c| - (a - |b|)] \\ &= -(|b| + |c| - a); \end{aligned}$$

iii) 当 $a = |b|$ 时，$(a + b) + c = 0 + c = c$

$$= -|c| = -(|b| + |c| - a).$$

上述 ①，②，③ 三种情况中，加法结合律都成立. 类似地，可以证明当 $a<0$，$b>0$，$c<0$ 以及 $a<0$，$b<0$，$c>0$ 时，都有 $a+(b+c)=(a+b)+c$.

综合 (1)，(2)，(3)，(4)，可知定理成立.

定义 2 （有理数减法定义）

如果数 x 满足 $x+b=a$，x 就叫做有理数 a 减去 b 的差，记作 $x=a-b$.

显然，有理数减法是有理数加法的逆运算.

定理 3 在有理数集中，两个数的差是唯一存在的.

证明：因为

$$[a+(-b)]+b=a+[(-b)+b]$$
$$=a+0=a,$$

所以

$$a-b=a+(-b),$$

即 $a+(-b)$ 是 a 减去 b 的差.

又如果差为 x，则有 $x+b=a$，于是

$$x+b+(-b)=a+(-b),$$
$$x+[b+(-b)]=a+(-b),$$
$$x=a+(-b).$$

即差只能是 $a+(-b)$.

由定理 3 可知

$$a-b=a+(-b).$$

即减去一个数等于加上这个数的相反数，通常把它作为有理数减法的法则. 例如

$$3-6=3+(-6);3-(-7)=3+(+7).$$

口述这个法则时，为了简化，常省略减数的"绝对值"，而说成"减正等于加负"，"减负等于加正".

有了减法的法则，就可以把减法转换为加法，求差就可以变为求和，因此有关减法的运算性质就可以不必单独研究了．同时，关于一系列加减运算都可以看成是求和，例如

$$a-b+c-d=a+(-b)+(+c)+(-d).$$

定义 3 表示依次进行一系列加减运算的式子叫做代数和．把代数和写成和的形式，和里的各项(加数)叫做代数和的项．

例如 $a-b+c-d$ 为代数和，把它写成和的形式，就是 $a+(-b)+(+c)+(-d)$，各项分别为 a，$-b$，$+c$，$-d$． 代数和中的各数(第一个字母除外)连同它们前面的运算符号"＋"，"－"，正好是代数和的各项，只不过这时的"＋"、"－"号已不是运算符号而是性质符号了．为此，有了代数和的概念，运算符号(加、减)与性质符号(正、负)就统一了，它们既可以看成是运算符号，又可以看成是性质符号，例如 $a-b+c-d$，既可以看成是 a 减 b 加 c 减 d，又可以看成是 a，$-b$，$+c$，$-d$ 的和．

由定理 3 可知有理数集关于减法是封闭的，这也是数集扩充原则所要求的．

定理 4 设 a 和 b 是有理数．

(1) 如果 $a>b$，那么 $a-b>0$；

(2) 如果 $a=b$，那么 $a-b=0$；

(3) 如果 $a<b$，那么 $a-b<0$．

证明：先证(1)，设 $a>0$，这时又分三种情况：

① 如果 $b>0$，由正有理数性质可得 $a-b>0$；

② 如果 $b=0$，那么 $a-b=a-0=a>0$；

③ 如果 $b<0$，那么 $-b>0$，

$$a-b=a+(-b)>0.$$

设 $a=0$，这时必有 $b<0$，所以 $-b>0$，

$$a-b=a+(-b)=0+(-b)>0.$$

设 $a<0$，这时必有 $b<0$，所以 $-b>0$，由 $a>b$ 可知 $|b|>|a|$. 因为 $|b|>0$, $|a|>0$, 所以有

$$|b|-|a|>0,$$

这样

$$a-b=a+(-b)=|b|-|a|>0.$$

综合以上所述，对于 a 与 b 所有可能的情况，(1) 都成立.

再证 (2):

$$\begin{aligned} a-b &= a+(-b) \\ &= 0. \qquad \text{(因为 } a=b\text{)} \end{aligned}$$

最后证 (3), 由 $a<b$ 可得 $b>a$，再由 (1) 得

$$b-a>0,$$

所以

$$a-b=-(b-a)<0.$$

定理得证.

用反证法容易证明:

定理 5 设 a 与 b 为有理数，

(1) 如果 $a-b>0$，那么 $a>b$;

(2) 如果 $a-b=0$，那么 $a=b$;

(3) 如果 $a-b<0$，那么 $a<b$.

定义 4 （有理数乘法定义）

(1) 同号两数相乘，积的符号为正，积的绝对值等于两个因数绝对值的积;

(2) 异号两数相乘，积的符号为负，积的绝对值等于两个因数绝对值的积;

(3) 零与任何数相乘，积为零.

定义 4 说明了两有理数相乘，积的绝对值等于两数绝对

值的积，即 $|a\cdot b|=|a|\cdot|b|$，而积的符号可由"同号相乘为正；异号相乘为负"来确定．

由定义 4 容易推得两个以上有理数相乘的法则：

几个不等于零的有理数相乘，如果负因数的个数是奇数，那么所得的积为负；如果负因数的个数是偶数，那么所得的积为正，而积的绝对值都等于各因数绝对值的积．

因数中只要有一个为零，积就是零．

定理 6 有理数乘法交换律成立．

因为定义 4 中并没有规定因数的先后次序，所以乘法交换律显然成立．

定理 7 有理数乘法结合律成立． 即如果 a，b，c 为有理数，那么

$$(ab)\cdot c=a(bc).$$

证明：如果 a，b，c 全不为零．

由 $(|a|\cdot|b|)\cdot|c|=|a|\cdot(|b|\cdot|c|)$，
可知 $(ab)c$ 与 $a(bc)$ 有相同的绝对值；

又 $(ab)c$ 与 $a(bc)$ 的符号，由 a，b，c 中负数的个数而定，如果有奇数个负数，那么 $(ab)c$ 与 $a(bc)$ 同为负数；如果有偶数个负数，那么 $(ab)c$ 与 $a(bc)$ 同为正数．所以

$$(ab)c=a(bc).$$

如果 a，b，c 中至少有一个为零，这时 $(ab)c=0$，

$$a(bc)=0.$$

所以仍有 $(ab)c=a(bc)$．

因此乘法结合律成立．

定理 8 有理数乘法对加法的分配律成立．即如果 a，b，c 为有理数，就有

$$(a+b)c=ac+bc.$$

证明：对于 c 来说，可分为 $c=0$ 与 $c\neq0$ 两种情况．

当 $c=0$ 时，

$$(a+b)\cdot c=(a+b)\cdot 0=0,$$
$$ac+bc=a\cdot 0+b\cdot 0=0+0=0,$$

所以

$$(a+b)c=ac+bc.$$

当 $c\neq 0$ 时，可对 a，b 分成以下两种情况来研究：一种情况是 a，b 中至少有一个为 0，不妨设 $a=0$，那么

$$(a+b)c=(0+b)c=bc,$$
$$ac+bc=0\cdot c+bc=0+bc=bc,$$

所以

$$(a+b)c=ac+bc.$$

另一种情况是 a，b 都不为 0，这时再分 $a+b=0$ 与 $a+b\neq 0$ 两种情况来研究：

(1) 当 $a+b=0$ 时，有 $(a+b)c=0\cdot c=0$，

由 $a+b=0$，可知 a 与 b 是相反数，因此 ac 与 bc 是相反数，

从而有 $$ac+bc=0,$$

所以

$$(a+b)c=ac+bc.$$

(2) 当 $a+b\neq 0$ 时，又可分为 a 与 b 同号或异号两种情况：

① 当 a 与 b 同号，且与 c 也同号时，$(a+b)$与 c 也同号，

$$\begin{aligned}(a+b)c&=|a+b|\cdot|c|\\&=(|a|+|b|)\cdot|c|\\&\qquad(\because a、b\text{ 同号},|a+b|=|a|+|b|)\\&=|a|\cdot|c|+|b|\cdot|c|,\end{aligned}$$
$$ac+bc=|a|\cdot|c|+|b|\cdot|c|,$$

所以

$$(a+b)c=ac+bc.$$

当 a 与 b 同号而与 c 异号时，$(a+b)$ 与 c 异号，

$$\begin{aligned}(a+b)c &= -|a+b|\cdot|c| \\ &= -(|a|+|b|)\cdot|c| \\ &= -(|a|\cdot|c|+|b|\cdot|c|),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}ac+bc &= (-|a|\cdot|c|)+(-|b|\cdot|c|) \\ &= -(|a|\cdot|c|+|b|\cdot|c|),\end{aligned}$$

所以

$$(a+b)c=ac+bc.$$

② 当 a 与 b 异号，且 $a+b$ 与 a 同号时，那么 $a+b$ 与 b 异号，$a+b$ 与 $-b$ 同号，于是有

$$[(a+b)+(-b)]c=(a+b)c+(-b)c, \quad (见①)$$

即

$$ac=(a+b)c-bc.$$

所以

$$(a+b)c=ac+bc.$$

当 a 与 b 异号，且 $a+b$ 与 b 同号时，那么 $a+b$ 与 $-a$ 同号，于是

$$[(a+b)+(-a)]c=(a+b)c+(-a)c, \quad (见①)$$

即

$$bc=(a+b)c-ac.$$

所以

$$(a+b)c=ac+bc.$$

综上所述，对于 a，b，c 所有可能的情况，乘法对加法的分配律都成立。

定义 5（有理数除法定义） 如果数 x 满足 $bx=a$，x 就叫做有理数 a 除以有理数 b 所得的商，记作 $x=\frac{a}{b}$.

显然，有理数除法是有理数乘法的逆运算.

定理 9 在有理数集中，两个有理数的商（除数不为零）存在而且唯一.

证明：设 a 和 b 为任意有理数，且 $b \neq 0$，如果 a 除以 b 的商存在，即有 $bx = a$、我们证明 x 是唯一的.

当 $a = 0$ 时，因为 $b \neq 0$，所以 $x = 0$；

当 $a \neq 0$ 时，因为 $|b| \cdot |x| = |a|$，而 $|b| \neq 0$，所以

$$|x| = \frac{|a|}{|b|}.$$

说明 x 的绝对值是唯一的. 又因为 $bx = a$，当 a, b 同号时，x 必为正数；当 a, b 异号时，x 必为负数. 说明 x 的符号是由 a, b 的符号唯一确定的. 可见 x 是唯一的.

再证明商存在. 上面求得的商 x 确实满足 $bx = a$.

先考虑绝对值：

$$|bx| = |b| \cdot |x| = |b| \cdot \frac{|a|}{|b|} = |a|;$$

再考虑符号：x 的符号正是以 $bx = a$ 成立为前提而选择的.

所以上面求得的 x 确实是 a 除以 b 的商.

定理 9 说明了在有理数集中，只要除数不为零，除法永远可以进行. 也可以说数集 $Q\backslash\{0\}$ 关于除法是封闭的.

由定理 9 还可以得到有理数除法的法则：两个不为零的有理数相除，其商的绝对值等于被除数的绝对值除以除数的绝对值，而商的符号是：同号相除为正；异号相除为负.

定义 6 1 除以一个不为零的有理数的商，叫做这个有理数的倒数.

即如果 $b\neq 0$，$\frac{1}{b}$ 是 b 的倒数．而 $1\div\left(\frac{1}{b}\right)=b$，所以 b 也是 $\frac{1}{b}$ 的倒数．因为 $b\cdot\frac{1}{b}=1$，所以倒数的定义也可以如下规定： 如果两个数的乘积为1，这两个数就叫做互为倒数．

又因为 $a\div b=\frac{a}{b}=a\cdot\frac{1}{b}\ (b\neq 0)$，这样，某数（$a$）除以一个数（$b$）等于某数（$a$）乘以这个数（$b$）的倒数 $\left(\frac{1}{b}\right)$．所以有理数除法可以转换为乘法来计算，这样，就可以不必再单独研究有理数除法的性质了．

习　题　三

1．求满足下列条件的有理数：

（1）相反数等于5；（2）绝对值等于5；

（3）相反数等于0；（4）绝对值等于0．

2．有理数可分为正有理数与负有理数两类，这种说法是否正确？

3．设 a 是有理数，下面的说法哪个对，哪个不对，为什么？

（1）$+a$ 一定是正数；（2）$-a$ 一定是负数；

（3）$|a|$ 一定是正数；（4）$-|a|$ 一定不是正数．

4．有没有这样的有理数：（1）小于它自身的绝对值；

（2）等于它自身的绝对值；

（3）大于它自身的绝对值．

5．设 a 与 b 都是有理数，下列命题是否成立？如果不成立，补充一定的条件，使之成立．

（1）$+a>-a$；（2）$|a|>a$；（3）$|a|=a$；

（4）如果 $|a|=|b|$，那么 $a=b$；

（5）如果 $|a|>|b|$，那么 $a>b$；

（6）如果 $a>b$，那么 $|a|>|b|$．

6. 试证：对于任意两个有理数 a 和 b，在下列三种情况中，有一种而且只有一种存在：

$$(1)\ a>b;\ (2)\ a=b;\ (3)\ a<b.$$

7. 试证有理数不等的对逆性。

8. 如果两个有理数 a 与 b 同号，试证 $|a+b|=|a|+|b|$。

9. 如果两个有理数 a 与 b 中至少有一个为零，试证

$$|a+b|=|a|+|b|.$$

10. 如果两个有理数 a 与 b 异号，试证 $|a+b|<|a|+|b|$。

11. 设 a, b, c 为有理数，试证：如果 $a>b$，那么

$$a+c>b+c.$$

12. 设 a, b, c 为有理数，试证：$(a-b)\cdot c=ac-bc$。

13. 设 a, b, c 为有理数，试证：

(1) 如果 $a<b$，且 $c>0$，那么 $ac<bc$；

(2) 如果 $a<b$，且 $c=0$，那么 $ac=bc$；

(3) 如果 $a<b$，且 $c<0$，那么 $ac>bc$。

14. 设 a 和 b 为有理数，试证：

如果 $a>b>0$，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$。

15. 试证：$-\frac{a}{b}=\frac{-a}{b}=\frac{a}{-b}$。

16. 设 a 和 b 为有理数，试证：

(1) $|a|-|b|\leqslant|a-b|$；

(2) $|a|-|b|\leqslant|a+b|$。

17. 设 a, b, c 为有理数，下列各题是否成立，如果不成立，补充一定的条件使之成立。

(1) 如果 $a\neq0$，$b\neq0$，那么 $a+b\neq0$；

(2) 如果 $|a|=|b|$，那么 $a-b=0$；

(3) 如果 $|a|=|b|$，那么 $\frac{a}{b}=1$；

(4) 如果 $ab=a$，那么 $b=1$；

(5) 如果 $|a|>|b|$，那么 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$；

(6) 如果 $ac>bc$，那么 $a>b$.

18. 试用反正法证明§7 定理5.

19. 设 a, b, c, d 为有理数，试证：

(1) 如果 $a>b$，且 $c>d$，那么 $a+c>b+d$；

(2) 如果 $a>b$，且 $c>d$，那么 $a-d>b-c$；

(3) 如果 $a>b$，$c>d$，且 $b>0$，$d>0$，那么 $ac>bd$.

§8 有理数集的性质

1. 有理数集关于四则运算(除数不为零)是封闭的.

2. 对于任意两个正有理数 p 和 q，必定存在自然数 n，使 $n \cdot p > q$ 成立.

证：设 $p=\frac{a}{b}$，$q=\frac{c}{d}$ (a, b, c, d 为自然数)，令 $n>bc$，则有

$$n \cdot p = n \cdot \frac{a}{b} > bc \cdot \frac{a}{b},$$

即

$$n \cdot p > ca.$$

而

$$ca \geqslant c, \quad c \geqslant \frac{c}{d},$$

所以

$$n \cdot p > \frac{c}{d},$$

即

$$n \cdot p > q.$$

这个性质说明，两个正有理数 p 和 q，无论 p 有多么小，q 有多么大，总能找到自然数 n，把 p n 倍起来而超过 q.

3. 任意两个有理数 a 与 b (设 $a<b$) 之间，存在着无穷多个有理数.

证明：我们先证 $\frac{a+b}{2}$ 在 a 与 b 之间，即证

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

因为

$$a - \frac{a+b}{2} = \frac{a-b}{2} < 0, \qquad (a-b<0)$$

所以

$$a < \frac{a+b}{2}.$$

又

$$\frac{a+b}{2} - b = \frac{a-b}{2} < 0,$$

所以

$$\frac{a+b}{2} < b.$$

因此

$$a < \frac{a+b}{2} < b.$$

说明在 a 与 b 之间至少存在一个有理数 $\frac{a+b}{2}$. 令

$$\frac{a+b}{2} = c,$$

那么在 a 与 c 之间至少存在一个有理数 $\frac{a+c}{2}$; 令

$$\frac{a+c}{2} = c_1,$$

那么在 a 与 c_1 之间至少存在一个有理数 $\frac{a+c_1}{2}$; 这样继续下去,永无止境,说明 a 与 b 之间存在着无穷多个有理数.

这个性质通常叫做有理数的稠密性，表示有理数是稠密的. 反映在数轴上，表示在任意两个有理点之间都存在着无穷多个有理点. 整数集就没有这样的性质，任意两个整数之间,或者没有整数,如任意相邻的两整数（有理数没有相邻的数);或者有有限个整数，如-3与1之间只有-2，-1，0这

三个整数．

4．有理数集是可数集

证明：任何有理数都可以用分数形式（包括零分数）表示．我们按以下的方法来排列所有的分数：

（1）0 排在最前边；

（2）对于正分数，按照它的分子与分母的和的大小排列，和较小的排在前边，和较大的排在后边，如果和相等时，分子大的排在前边；

（3）对于负分数，把它紧排在与它的绝对值相等的正分数的后边；

（4）分数值相等的分数，只保留最前边的一个．

这样就得到排列：

$$0,\ \frac{1}{1},\ -\frac{1}{1},\ \frac{2}{1},\ -\frac{2}{1},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2},\ \frac{3}{1},\ -\frac{3}{1},\ \frac{1}{3},\ -\frac{1}{3},\ \frac{4}{1},\ -\frac{4}{1},\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2},\ \frac{2}{3},\ -\frac{2}{3},\ \frac{1}{4},\ -\frac{1}{4},\ \frac{5}{1},\ -\frac{5}{1},\ \frac{1}{5},\ -\frac{1}{5},\ \cdots\cdots.$$

显然，在这个排列里每个有理数都有它固定的位置，可以与自然数列建立一一对应的关系，因此，有理数集是可数集．

我们也可以只排非负有理数，这样就证明了非负有理数集是可数集．然后再规定负有理数的排法，证明负有理数集也是可数集．最后，根据有穷个可数集的和仍是可数集，可以知道有理数集是可数集．

习　题　四

1．设 a 与 b 为有理数，且 $a<b$，试证 $\dfrac{2a+b}{3}$ 在 a 与 b 之间．

2．试证：在所有比给定的有理数 a 小的有理数中，没有最大的数．

3. 试证：在所有比给定的有理数 a 大的有理数中，没有最小的数。

4. 试证：正有理数集是可数集。

5. 试证：$\{x: 0<x<1, x\in Q\}$ 是可数集。

附录一

1. 负数引入的教学，应从客观世界存在着的意义相反的量出发，为了便于学生接受，最好选用学生所熟悉的知识，例如，气温的零上几度与零下几度；金钱的收入与付出等。就客观存在的零上5度与零下5度来说，显然用过去学过的数5不能区分它们，要想区分它们，一种方法就是用“零上”、“零下”等词句来描述，这样给书写和运算都会带来很大的困难；另一种方法就是引入新数，用旧数表示一方，而用新数表示相反的另一方。学生已经熟悉零上5度用 $+5$℃ 表示，零下5度用 -5℃ 表示。为此，我们在旧数前面加上一个“＋”号(还看成是旧数)用它表示一方，而在旧数前面加上一个“－”号，得到了新数，用它表示相反的另一方。如果收入10元用 $+10$ 元表示，那么付出10元就用 -10 元表示。

对于方向可以任意规定的问题，开始也要选用与平时的习惯一致的例子为好，例如从某地出发向东5里与向西5里，可规定向东为正，则向东5里用 $+5$(里)表示，向西5里用 -5(里)表示；也可规定向西为正，则向东5里用 -5(里)表示，向西5里用 $+5$(里)表示。不要选用规定上升为负、下降为正的例子。

2. 把在小学学过的自然数和纯分数的前边都添加一个符号“－”(读做负)之后，就得到新数，这些新数分别叫负整数和负分数。这时与它们相应的自然数和纯分数就分别叫正整数和正分数。在自然数和纯分数的前边也可以添加一个符号“＋”(读做正)，所得的数并不是新数，还是原来的自然数和纯分数，这只是为了与“－”相对应。这里的“＋”，“－”号不是运算符号，而是表示“正”、“负”的性质符号。有的书上为了与加减运算符号有所区别，而用另外的形式表示，例如把正、负号记在数的一个角上，$+5$ 记作 $^{+}5$，-5 记作 $^{-}5$；我国古代用算筹进行运算时，用红筹表示正数，用黑筹表示负数；目前在财会方面用蓝字表示正数，

用红字表示负数等等．我们引用与加减运算符号一致的“+”，“-”号作为正、负号，这是因为学习了有理数运算之后，两者就统一了，因此不但不会产生矛盾，而且要方便得多．

3．数0既不是正数，也不是负数，它是正负数的分界线，不能把它简单地理解为“没有”．可以用温度计来说明，比0℃高的温度是正多少度，比0℃低的温度是负多少度，显然0℃是正、负温度的分界线，而且它并不表示没有温度，它表示在标准大气压下使纯水结冰的一个确定的温度．

4．给出相反数的概念之后，应明确在数a前边添加一个“-”号就得到a的相反数$-a$，这样，就可以把添加一个“-”号看成是转变为相反数的符号，例如5前边添加一个“-”号就得5的相反数-5；-5前边添加一个“-”号就得-5的相反数5，即

$$-(-5)=5.$$

同样，

$$-[-(-5)]=-5.$$

这时，再说明支出-3元就是收入3元，因为$-(-3)=3$．下降-10度就是上升10度，因为$-(-10)=10$．

明确了添加一个符号“-”是表示原数的相反数，就容易理解$-a$不一定是负数，如果a是正数，$-a$是负数；如果a是负数，$-a$是正数；如果a是零，$-a$仍是零．

在一个数前边添加“+”号还是表示这个数．这样，$+a$也不一定是正数，如果a是正数，$+a$是正数；如果a是负数，$+a$就是负数；如果a是0，$+a$还是0．

关于$+a$是不是正数，$-a$是不是负数的问题，应多举具体数字的例子，使学生透彻理解，以便熟练掌握．并应使学生明确，学习了正、负数之后，用字母表示数时，要考虑这个字母所表示的数可能有正、负、零三种情况．

5．通过对有理数的分类，应使学生明确：正整数就是自然数；整数不仅包括自然数和0，还包括负整数；有理数不仅包括正有理数和负有理数，还包括0．分类要不重不漏．

有的课本对有理数如下分类：

$$\text{有理数}\begin{cases}\text{整数}\begin{cases}\text{正整数}\\\text{零}\\\text{负整数}\end{cases}\\\text{分数}\begin{cases}\text{正分数}\\\text{负分数}\end{cases}\end{cases}$$

这样分类要注意分数中应排除分母为 1 的分数，不然的话，分数就包含了整数(已给出了零分数的概念).

6．有的课本是用数轴来定义有理数的绝对值以及有理数的相等与不等，那么我们在 §5 和 §6 所给出的相应的定义，就需做为定理加以推证．例如

定义　一个数的绝对值，就是这个数在数轴上所对应的点与原点的距离.

那么，就需证明:

定理　正数的绝对值是它的自身；负数的绝对值是它的相反数；零的绝对值还是零.

证明：设 a 是正数，那么 a 在数轴上所对应的点 A 与原点的距离就是 a，所以 $|a|=a$；

设 a 是负数，它的相反数 a'（即 $-a$）是正数，a 在数轴上所对应的点 A' 与原点的距离为 a'，所以

$$|a|=-a;$$

设 a 是零，于是 a 在数轴上所对应的点就是原点，它与原点的距离显然为零，所以 $|a|=0$.

定义　在数轴上较右边的点所表示的有理数较大，较左边的点所表示的有理数较小.

就需证明以下的定理:

(1) 每一个负数都小于 0，也小于任一正数；

(2) 每一个正数都大于 0，也大于任一负数；

(3) 如果两个负数的绝对值相等，那么这两个负数相等；

(4) 如果两个负数的绝对值不等，那么绝对值较大的负数反而较小，绝对值较小的负数反而较大.

证明：因为任何负有理点都在原点的左边，正有理点都在原点的

右边，设 a 和 b 为任意两正数，那么就有：(1) $-a$ 所对应的点在原点左边，也在 b 所对应的点的左边，所以有 $-a<0$， $-a<b$；

(2) a 所对应的点在原点右边，也在 $-b$ 所对应的点的右边，所以有 $a>0$， $a>-b$；

(3) 如果 $|-a|=|-b|$，那么 $-a$ 与 $-b$ 所对应的点都在原点的左边而且与原点的距离都等于 $|-a|$，因此，这两点重合，所以

$$-a=-b;$$

(4) 如果 $|-a|\neq|-b|$，且 $|-a|>|-b|$，那么 $-a$ 与 $-b$ 所对应的点都在原点的左边，而且 $-a$ 所对应的点 A 与原点的距离大于 $-b$ 所对应的点 B 与原点的距离，因此，点 A 在点 B 的左边，所以 $-a<-b$。

同理可证如果 $|-a|<|-b|$，那么 $-a>-b$。

根据上述的定义来证明有理数相等与不等的一些性质，有时更为简便，例如证明三歧性。

设任意两个有理数 a 与 b 所对应的有理点分别为 A 与 B。因为，在数轴上的 A 与 B 两点或重合，或 A 在 B 的右边，或 B 在 A 的右边，三者必居其一，所以 $a=b$，$a>b$，$a<b$ 三者必居其一。

又如证明传递性。设 a，b，c 所对应的有理点分别为 A，B，C，且 $a>b$，$b>c$，则 A 在 B 的右边，B 在 C 的右边，从而 A 在 C 的右边，所以 $a>c$。

由以上的证明可以看出，利用数轴来规定有理数的绝对值的定义，以及有理数的相等与不等的定义，不仅推证其他一些性质比较简便，而且直观，便于学生接受，但是，必须指出，这样将借用许多有关几何的知识，因此从理论上讲是不够严密的。如果考虑到中学生的接受能力以及对中学教材的严密性不应作出过分的要求，那么，像上面的安排还是比较好的处理方法。

7．关于绝对值的概念，有的书上用去掉符号的数来定义的，这样的定义欠妥。例如，按照这样的定义，就可以得到 $|-a|=a$，显然当 a 为负数或是零时，这是错误的。

8．有理数中包括了负数，而负数是新引进的数，为此，对于有关负数的运算必须给以重新定义，而不能随意把旧数的运算定义应用于新数，这是必须使学生明确的。另外根据数集的扩充原则，在新数集中给

以运算定义时，对于新数集中所包括的旧数，按新数集中的运算定义计算，所得的结果与按旧数集中的运算定义计算，所得的结果应当一致，为此在规定有理数加法与乘法的定义时，首先规定了两数都是旧数时仍按旧的运算定义来计算。

9. 关于通过实例引入有理数四则运算法则问题，我们必须明确，有理数加法和乘法的法则是由定义直接给出的；有理数减法和除法的法则是由定义推得的，实例，只是说明定义的合理性，或者起直观作用，便于学生接受，但绝不能认为是对运算法则的证明。正因为这样，就应考虑哪些实例可用，哪些实例不可用，或不好用。

关于加法，用温度的上升、下降求和的实例，归纳出有理数求和的定义，比较直观，也符合学生的实际，效果会好一些。

如果用数轴与方向线段的和(即 $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OB}$) 来说明，也是比较好的，而且为今后的学习打下了基础。

关于乘法，由实际例子引入要比加法困难得多，而且不论用怎样的实际例子，实质上也都是借用了新的概念来参与解释的。例如有的书上用

$$距离=速度\times时间$$

作为实例，这就要规定这三者的正、负各是什么意思；有的书上用室内温度随着时间的变化而变化为实例，这就需要对室内温度的上升与下降，单位时间里温度是升高还是降低，时间是在指定某一时间的以前还是以后等等规定正负的意义，同时，这两个例子，教师讲起来很费力，学生听起来还是似懂非懂，难以起到预期的作用，这已被多年来的实践所证明。

有的课本采用以下的两种方法的一种，可能效果要好一些，这里提供给教师们参考。

(1) 在算术中，因为 $4\times2=4+4=8$，因此，规定

$$(-4)\times2=(-4)+(-4)=-8.$$

为了使乘法的交换律也能成立，因此，应规定

$$2\times(-4)=-8.$$

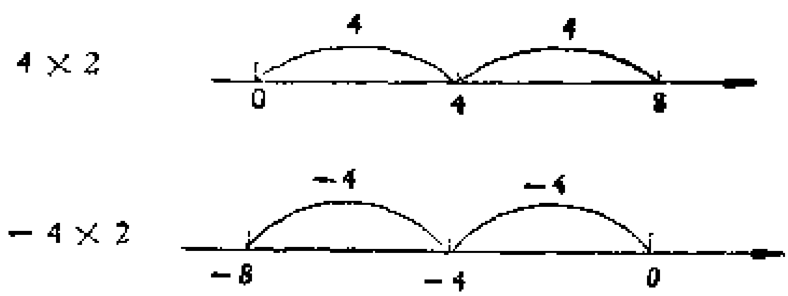
这样，乘以 -4 就可以看成是乘以 4，再改变符号。也就是说，乘以

负数可以看成是乘以这个数的相反数，再把积改变符号，于是就有

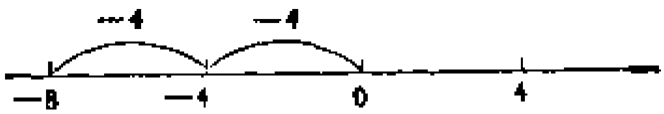
$$(-2)\times(-4)=-[(-2)\times4]=-(-8)=8.$$

最后再规定 0 与一个数相乘还是 0，从而归纳出乘法的定义。

(2) 用数轴来说明，规定某数乘以正数 (a)，表示将某数沿某数的方向延长或缩短 a 倍；某数乘以负数 ($-a$)，表示把某数先反向，然后再沿这个方向延长或缩短 a 倍。例如



4 ×(−2)，先把 4 反向，得 −4，再延长 2 倍。



− 4 ×(−2)，先把 − 4 反向，得 4，再延长 2 倍。

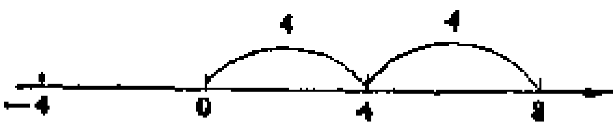


图 3-2

再规定与 0 相乘的定义，从而归纳出乘法的定义。

有些课本直接用有理数乘法的法则来定义乘法，而不用实例来说明，也是可以的。

不论怎样定义，最后都应要求学生熟练掌握有理数乘法法则，这是最根本的问题。

10. 有的教材在有理数加、减混合运算中，通过实例给出了去括号的法则，即括号前面是“+”号，可以把括号连同它前面的“+”去掉，括号内的各数都不改变符号；如果括号前面是“−”号，那么去掉括号连同它前面的“−”号，括号里的各数都要改变符号。即

$$(1)\ a+(b-c)=a+b-c;$$

$$(2)\ a-(b-c)=a-b+c.$$

根据学生的情况,也可以给出证明. 例如 (2) 的证明: 因为

$$\begin{aligned}
&(b-c)+(a-b+c)\\
&=[b+(-c)]+[a+(-b)+c] && \text{(代数和)}\\
&=[b+(-b)]+[(-c)+c]+a && \text{(加法运算律)}\\
&=0+0+a && \text{(加法定义)}\\
&=a. && \text{(加法定义)}
\end{aligned}$$

所以

$$a-(b-c)=a-b+c.$$

第四章　实　　数

§1　无理数的引入

我们知道有理数集对于加、减、乘、除(除数不为零)运算是封闭的，那么它对于开方运算是不是封闭呢？

例 1. 任何有理数的平方都不等于 2.

证明：假设存在一个有理数 x，它的平方等于 2，那么 x 可以写成既约分数 $\frac{m}{n}$(m 与 n 互质)的形式，于是有

$$2=\frac{m^2}{n^2},$$

即

$$2n^2=m^2,$$

所以 m 是偶数. 设 $m=2k$，那么

$$2n^2=(2k)^2=4k^2,$$

于是

$$n^2=2k^2,$$

所以 n 也是偶数，与 m，n 互质相矛盾，因此 x 不能是有理数，即任何有理数的平方都不等于 2.

这就说明有理数集不能满足开方运算的需要，为此，有必要引进新数，把有理数集予以扩充.

下面再从度量线段方面来说明有必要把有理数集进一步扩充.

我们知道度量线段的基础是：

阿基米德公理　对于任意两条线段 AB 和 CD，必定存在自然数 n，能使 $n\cdot CD>AB$.

这个公理说明了，不论 AB 多么长，CD 多么短，用 CD 量 AB，截若干次以后，总能超过 AB.

如果以 CD 作为度量单位线段 e，用它来量 AB 所得的量数是什么数呢？可能有两种情况，如果量 q 次之后，没有剩余，也就是说用 e 量尽了 AB，这时所得 AB 的量数为 q（如图 4-1）；如果量 q 次之后，还有剩余，如图 4-2，剩余的线段为 A_0B，当然它比 e 短，这时就用 $\frac{1}{10}e$ 来量 A_0B，又可能出

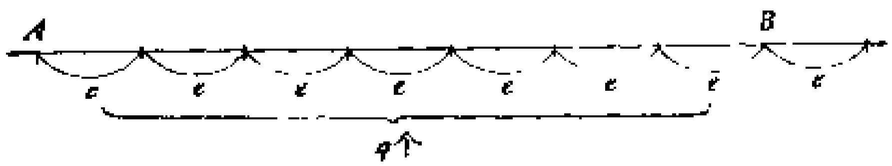


图 4-1

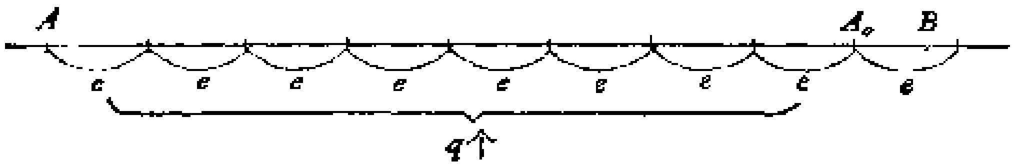


图 4-2

现两种情况，如果量 q_1 次之后，没有剩余，这时 AB 的量数为

$$q+\frac{q_1}{10}=q.q_1,$$

是有理数；如果仍有剩余，剩余的线段当然比 $\frac{1}{10}e$ 要短，我们再用 $\frac{1}{10^2}e$ 来量它，又有两种可能，或者量 q_2 次之后没有剩余，这时 AB 的量数为 $q+\frac{q_1}{10}+\frac{q_2}{10^2}=q.q_1q_2$，是有理数；或者量 q_2 次之后仍有剩余，就再用 $\frac{1}{10^3}e$ 来量，这样继续下去，

如果到用 $\frac{1}{10^n}e$（n 为自然数）来量时，没有剩余，就得 AB 的量数为有限小数 $q.q_1q_2\cdots q_n$，是有理数；如果不论 n 有多么大，也就是不论 $\frac{1}{10^n}e$ 有多么小，用 $\frac{1}{10^n}e$ 来量时，总有剩余，那么所得 AB 的量数为无限小数 $q.q_1q_2\cdots q_n\cdots$，这时如果是无限循环小数，当然是有理数；如果是无限不循环小数，它就不与任何有理数相同，它是什么数？

应该指出，在实践中，由于工具的限制，只能把单位线段分到一定的程度，而不可能无止境的分下去，但是，在理论上则是可能的，那么，量数为无限不循环的小数的情况是不是存在呢？下面将回答这个问题。

定义 1 对于线段 AB 和 CD，如果存在线段 PQ，使得 $AB=m\cdot PQ$，$CD=n\cdot PQ$（m，n 为自然数），就说 AB 和 CD 是可公度（或可通约）的，PQ 就是它们的一个公度。

也就是说，如果以 PQ 为度量单位，既能量尽 AB，又能量尽 CD，那么 PQ 就是 AB 与 CD 的公度；AB 与 CD 就是可通约的。

显然，如果用 CD 能量尽 AB，那么 CD 就是 AB 与 CD 的一个公度，于是，所有能量尽 CD 的线段都是 AB 与 CD 的公度。

定理 1 如果用 CD 量 AB，量 m 次之后，剩余线段为

$$MB(MB<CD),$$

那么，AB 与 CD 的公度和 CD 与 MB 的公度相同。（见图 4-3）

证明：由已知条件，得

$$AB=m\cdot CD+MB.$$

设 l 为 CD 与 MB 的公度，就有

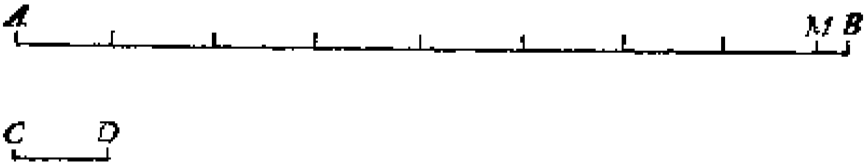


图 4-3

$$CD = a \cdot l,\ MB = b \cdot l,$$

其中 a 与 b 为自然数. 于是

$$AB = m \cdot (a \cdot l) + b \cdot l = (m \cdot a) \cdot l + b \cdot l$$
$$= (ma + b) \cdot l,$$

而 $ma + b$ 是自然数,说明 l 能量尽 AB,所以 l 也是 AB 与 CD 的公度.

设 l' 为 AB 与 CD 的公度,就有

$$AB = p \cdot l',\ CD = q \cdot l',$$

其中 p 和 q 为自然数. 于是

$$MB = AB - m \cdot CD$$
$$= p \cdot l' - m \cdot q \cdot l' = (p - mq) \cdot l'.$$

但 $AB > m \cdot CD$, 即 $pl' > m \cdot q \cdot l'$, $p > mq$, 所以 $p-mq$ 为自然数, 说明 l' 能量尽 MB, 所以 l' 也是 CD 与 MB 的公度.

因此定理 1 得证.

定理 2 以线段 l 作为长度单位度量线段 AB,它的量数可用分数表示的充要条件是 AB 与 l 可公度.

证明: 设 l 与 AB 有一公度为 PQ,那么

$$AB = m \cdot PQ, \tag{1}$$
$$l = n \cdot PQ, \tag{2}$$

其中 m 和 n 为自然数.

由 (2), 得 $PQ = \frac{1}{n} \cdot l$,代入 (1), 得

$$AB = m \cdot \left(\frac{1}{n} \cdot l\right) = \left(\frac{m}{n}\right) \cdot l,$$

即用 l 量 AB，所得的量数为 $\frac{m}{n}$.

反之，设以 l 度量 AB 所得的量数为 $\frac{p}{q}$（p 与 q 为自然数），那么

$$AB = \left(\frac{p}{q}\right) \cdot l,$$

即

$$AB = p \cdot \left(\frac{1}{q} \cdot l\right).$$

令 $\frac{1}{q} \cdot l = MN$，那么

$$l = q \cdot MN, \text{ 且 } AB = p \cdot MN$$

也就是 MN 为 l 与 AB 的公度，即 l 与 AB 可公度. 因此定理 2 得证.

由定理 2 可知，如果长度单位 e 与线段 AB 没有公度，那么 AB 的量数就是无限不循环小数.

现在的问题又转到无公度的线段是不是存在?

例 2. 正方形的一边与对角线无公度.

证明： 设正方形为 $ABCD$，对角线为 AC（如图 4-4）. 在 AC 上截 $AE = AB$，得 $AC = AB + EC$. 求 AB 与 AC 的公度就是求等腰直角三角形 ABC 的腰与斜边的公度. 由定理 1 可知，AB 与 AC 的公度就是 AB 与 EC 的公度，也就是 BC 与 EC 的公度. 过 E 作 $EF \perp AC$ 交 BC 于 F，因为 $\angle 3 = \angle 4$，所以 $\angle 1 = \angle 2$. 于是 $BF = EF$. 又 $\triangle EFC$ 为等腰直角三角形，所以 $EC = EF$. 于是有

$$BC = BF + FC = EC + FC.$$

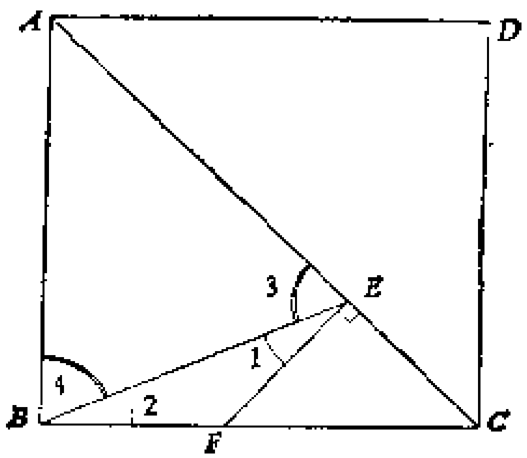


图 4-4

这样，BC 与 EC 的公度就是 EC 与 FC 的公度。这又是求等腰直角三角形腰与斜边的公度。显然，这样继续下去，永无止境，所以它们没有公度。

事实上，设以 AB 作为长度单位度量 AC 所得的量数为 x。以 AC 为一边作正方形 $ACEF$（图 4-5），由

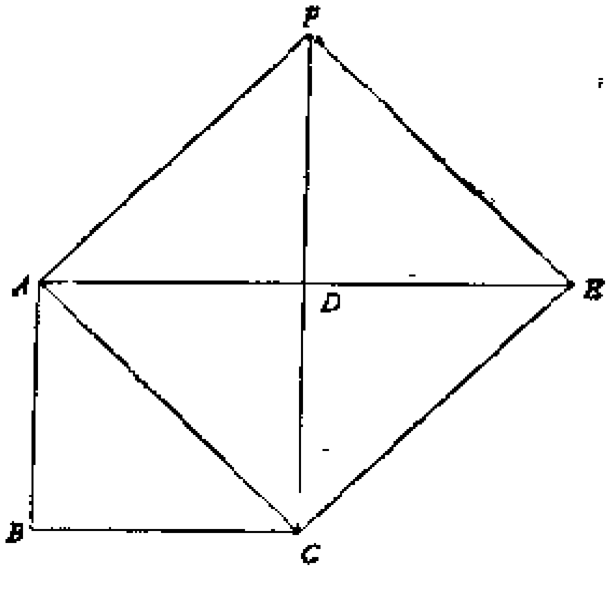


图 4-5

$$\triangle ABC \cong \triangle ADC \cong \triangle ADF \cong \triangle EDF \cong \triangle CDE,$$

以及 $ABCD$ 的面积为 1 个面积单位，可知，正方形 $ACEF$ 为

2 个面积单位． 这样就有 $x^2=2$，由例 1 可知 x 不是有理数，再由定理 2 得 AB 与 AC 无公度．

这就说明了无公度线段确实存在，也就是说无限不循环小数确实存在．

定义 2 无限不循环小数叫做无理数．

例如：$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt[3]{5}$，$\sqrt[4]{\frac{2}{3}}$，…都是以根式形式表示的无理数；π，e，0.1010010001…，…也都是无理数．

我们按照规定正、负有理数意义那样来规定正、负无理数，这样，上述的无理数都是正无理数，而 $-\sqrt{2}$，$-\sqrt[3]{5}$，$-\sqrt{10}$，$-0.121231234123451\cdots$ 等等都是负无理数．

§2 实数的概念及其大小比较

定义 1 有理数与无理数总称为实数．

根据定义 1，实数可作如下的分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{有理数}\begin{cases}\text{正有理数}\\\text{零}\\\text{负有理数}\end{cases}\\\text{无理数}\begin{cases}\text{正无理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

或

$$\text{实数}\begin{cases}\text{正实数}\begin{cases}\text{正有理数}\\\text{正无理数}\end{cases}\\\text{零}\\\text{负实数}\begin{cases}\text{负有理数}\\\text{负无理数}\end{cases}\end{cases}$$

因为有理数都可以用无限循环小数表示，而无理数是无限不循环小数，所以实数可定义为无限小数，即

$$\text{实数(无限小数)}\begin{cases}\text{有理数(无限循环小数)}\\\text{无理数(无限不循环小数)}\end{cases}$$

我们知道，两个正有限小数的大小比较，可以通过比较逐位数字的大小来进行，为了符合数集扩充原则的要求，我们仍采用这种比较方法来规定两个正实数的大小的定义.

定义 2　两个正实数写成无限小数以后，如果它们的整数部分不同，整数部分大的数较大；如果整数部分相同，而十分位上的数字不同，十分位上数字较大的数较大；如果十分位上的数字再相同，而百分位上的数字不同，百分位上数字较大的数较大；依次类推．如果它们的所有对应数位上的数字都相同，就说这两个数相等.

关于正、负实数和零的大小规定也与有理数的规定一致.

同样，如果数 α 大于数 β，就认为数 β 小于数 α.

根据定义 2，可以证明实数也具有在第二、第三章中所列的关于相等与不等的性质．例如，我们来证明三歧性成立.

设

$$\alpha = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$
$$\beta = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots.$$

如果 $a_i = b_i$，$i = 0, 1, 2, \cdots$，那么 $\alpha = \beta$.

如果 $a_j \neq b_j$，而 $a_l = b_l\ (l = 1, 2, \cdots, j-1)$，因为 a_j 与 b_j 满足三歧性，所以 $a_j > b_j$ 或 $a_j < b_j$，这时相应地有 $\alpha > \beta$ 或 $\alpha < \beta$.

所以在 $\alpha < \beta$，$\alpha = \beta$，$\alpha > \beta$ 中有一种而且只有一种情况成立.

定理 1（稠密性）　任意两个不相等的实数之间，存在着无穷多个有理数与无理数.

证明：设两个实数

$$\alpha = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots,$$

$$\beta = b_0.b_1b_2\cdots b_n\cdots,$$

其中 a_i 与 b_i $(i = 0, 1, 2, \cdots, n, \cdots)$ 都是数码，而且把整数和有限小数都看成是以 0 为循环节的循环小数.

因为 $\alpha \neq \beta$，所以

(1) 当 $0 \leqslant \alpha < \beta$ 时，必有 $a_k \neq b_k$，而

$$a_l = b_l (l = 1, 2, \cdots, k-1),$$

这时 $a_k < b_k$. 设有理数 $b = b_0.b_1b_2\cdots b_k$，那么

$$\alpha < b < \beta.$$

又，α 的数码 a_k 以后的数码 $a_{k+1}, a_{k+2}, \cdots$，不可能都是 9，否则与我们规定以 0 为循环节矛盾. 设 $a_{k+m} \neq 9$，令 a'_{k+m} 为大于 a_{k+m} 的数码，作有理数 a，使

$$a = a_0.a_1a_2\cdots a_ka_{k+1}\cdots a_{k+m-1}a'_{k+m},$$

那么

$$\alpha < a < b < \beta.$$

由有理数的稠密性可知在 a 与 b 之间有无穷多个有理数，再由不等的传递性可知在 α 与 β 之间有无穷多个有理数. 又，在 a 的数码 a'_{k+m} 之后可以任意添加数码组成无穷多个无理数，它们都在 a 与 b 之间，也都在 α 与 β 之间，所以 α 与 β 之间又有无穷多个无理数.

(2) 当 $\alpha < \beta \leqslant 0$ 时，则有 $0 \leqslant -\beta < -\alpha$，前已证明在 $-\beta$ 与 $-\alpha$ 之间有无穷多个实数 γ，即

$$-\beta < \gamma < -\alpha.$$

于是

$$\alpha < -\gamma < \beta.$$

所以在 α 与 β 之间有无穷多个实数 $-\gamma$.

(3) 当 $\alpha < 0 < \beta$ 时，因 α 与 0 之间以及 0 与 β 之间都有无穷多个实数，所以 α 与 β 之间有无穷多个实数.

定义 3 当无理数 α 表示为无限小数 $a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$ 时，

就把有理数 $a_0.a_1a_2\cdots a_n$ 叫做 α 的精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的不足近似值，并用 α_n^- 表示；而把 $a_0.a_1a_2\cdots\overline{(a_n+1)}$ 叫做 α 的精确到 $\frac{1}{10^n}$ 的过剩近似值（其中 $\overline{(a_n+1)}$ 表示比 a_n 多 1 的数码，特殊情况，如果 $a_n=9$，$\overline{(a_n+1)}$ 表示 10，即在这一位的数码为 0，前一位的数码加 1），并用 α_n^+ 表示．显然有

$$\alpha_n^- < \alpha < \alpha_n^+,$$

即

$$a_0.a_1a_2\cdots a_n < a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots < a_0.a_1a_2\cdots\overline{(a_n+1)}.$$

也就是说任一无理数都大于它的所有的不足近似值，而小于它的所有的过剩近似值．例如

$$\begin{aligned}
&\alpha=\pi=3.14159265\cdots,\\
&\alpha_1^-=3.1<\pi<3.2=\alpha_1^+,\\
&\alpha_2^-=3.14<\pi<3.15=\alpha_2^+,\\
&\alpha_3^-=3.141<\pi<3.142=\alpha_3^+,\\
&\alpha_4^-=3.1415<\pi<3.1416=\alpha_4^+,\\
&\cdots\cdots
\end{aligned}$$

3.1，3.14，3.141，3.1415，$\cdots$ 分别叫做 π 的精确到 $\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10^2}$，$\frac{1}{10^3}$，$\frac{1}{10^4}$，$\cdots$的不足近似值；而 3.2，3.15，3.142，3.1416，$\cdots$ 分别叫做 π 的精确到 $\frac{1}{10}$，$\frac{1}{10^2}$，$\frac{1}{10^3}$，$\frac{1}{10^4}$，$\cdots$ 的过剩近似值。

由上例可以看出：

（1）$\alpha_1^- \leqslant \alpha_2^- \leqslant \alpha_3^- \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n^- \leqslant \cdots,$

$\alpha_1^+ \geqslant \alpha_2^+ \geqslant \alpha_3^+ \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n^+ \geqslant \cdots;$

（2）$\alpha_n^- < \alpha_n^+;$

（3）当 n 越来越大时，差 $\alpha_n^+ - \alpha_n^-$ $\left(即 \frac{1}{10^n}\right)$ 就越来越

小，也就是说，对于事先给定的任意小的正数 ε，总能找到数 n，使得 $\alpha_n^+ - \alpha_n^- < \varepsilon$；

(4) π 属于下列的每一个闭区间：

$[\alpha_1^-, \alpha_1^+]$，$[\alpha_2^-, \alpha_2^+]$，$[\alpha_3^-, \alpha_3^+]$，$\cdots$，$[\alpha_n^-, \alpha_n^+]$，$\cdots$.

定义 4 如果两个有理数的序列[1)]

$$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots \tag{1}$$

$$b_1, b_2, b_3, \cdots, b_n, \cdots \tag{2}$$

满足下列条件：

① 序列 (1) 的项是不减的，即

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots,$$

序列(2)的项是不增的，即

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant \cdots;$$

② 序列(1)的每一项都小于序列(2)的任何一项，即

$$a_m < b_n;$$

③ 对于事先给定的任意小的正数 ε，总能找到数 n，使得

$$b_n - a_n < \varepsilon,$$

就把由 (1) 与 (2) 两个序列的对应项所构成的闭区间序列：

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \cdots, [a_n, b_n], \cdots$$

叫做退缩有理闭区间序列.

对于任意给定的无限小数 $a = a_0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$，由它的相同精确度的不足近似值与过剩近似值所组成的闭区间序列

$$[a_1^-, a_1^+], [a_2^-, a_2^+], \cdots, [a_n^-, a_n^+], \cdots, \tag{3}$$

就是一个退缩有理闭区间序列(如果 $a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots = 0$，那么闭区间序列 (3) 中，$[a_k^-, a_k^+]$ 以后的各项都是 $[a, a]$)，而且 a 属于(3)中的每一个闭区间.

---

1) 这里用"序列"，可以不受各项必须是数的限制.

这就说明，对于任一实数 a，总可以找到一个退缩有理闭区间序列，使得 a 属于每一个闭区间. 那么，反过来，对于任意一个退缩有理闭区间序列，是不是能确定唯一的实数呢？下面我们研究这个问题.

定义 5 如果存在一个数 M，它大于给定的不减序列

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \tag{1}$$

的任何一项，或者小于给定的不增序列

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant \cdots \tag{2}$$

的任何一项，序列(1)或(2)都叫做**有界序列**.

如果上述的 M 不存在，序列(1)和(2)都叫做**无界序列**.

例如，以 π 的精确到 $\frac{1}{10^n}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的不足近似值所组成的序列，是不减序列，而且各项都小于 π，所以它是有界序列；

以 $\sqrt{2}$ 的精确到 $\frac{1}{10^n}$ $(n=1, 2, \cdots)$ 的过剩近似值所组成的序列，是不增序列，而且各项都大于 $\sqrt{2}$，所以它是有界序列；

序列 $\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}, \frac{7}{8}, \cdots, \frac{2n-1}{2n}, \cdots$ 是有界序列；而自然数序列 $1, 2, 3, \cdots$ 是无界序列.

定理 2 对于任意不减的有界序列

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \tag{1}$$

必定存在一个不小于(1)中各项的最小的实数 α.

证明：如果从 $n=k$ 起，以后的各项都相等，即

$$a_k = a_{k+1} = a_{k+2} = \cdots,$$

那么 $\alpha = a_k$；

如果从 $n=k$ 起，以后的各项不都相等，那么，必定存在一个大于(1)中各项的最小的整数，否则(1)无界. 设这个最

小的整数为 q_0+1、那么(1)中必有大于 q_0 的项，否则 q_0+1 不是大于(1)中所有项的最小整数；在两个整数 q_0 与 q_0+1 之间，取含有一位小数的数：

$$q_0+\frac{1}{10},\quad q_0+\frac{2}{10},\cdots,q_0+\frac{9}{10},$$

于是必定存在一个大于(1)中所有项的最小的一位小数

$$q_0+\frac{q_1+1}{10}\,(q_1=0,1,2,\cdots,9),$$

并且(1)中有大于 $q_0+\frac{q_1}{10}$ 的项；再在两个一位小数 $q_0.q_1$ 与 $q_0.\overline{(q_1+1)}$ 之间，取含有两位小数的数：

$$q_0.q_1+\frac{1}{100},q_0.q_1+\frac{2}{100},\cdots,q_0.q_1+\frac{9}{100},$$

于是必定存在一个大于(1)中所有项的最小的两位小数

$$q_0.q_1+\frac{q_2+1}{100}\,(q_2=0,1,2,\cdots,9),$$

并且(1)中有大于 $q_0.q_1+\frac{q_2}{100}$ 的项；再在两个两位小数 $q_0.q_1q_2$ 与 $q_0.q_1\overline{(q_2+1)}$ 之间，取三位小数；继续作下去，必定存在一个大于(1)中各项的最小的实数

$$\alpha=q_0.q_1q_2\cdots q_n\cdots.$$

下面我们证明这样的实数 α 是唯一的．假设存在一个实数 α'，它不小于(1)中的任何一项，而且 $\alpha'<\alpha$．那么必有 α 的不足近似值大于 α'，当然这些不足近似值也大于(1)中的任何一项，这与 α 的不足近似值要小于(1)中的某些项相矛盾，所以 α' 不存在.

同理可证：

定理 3 对于任意不增的有界序列

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant b_3 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant \cdots \tag{2}$$

存在一个不大于(2)中的任何一项的最大的实数 β.

定理 4 对于每一个退缩有理闭区间序列

$$[a_1, b_1], [a_2, b_2], [a_3, b_3], \cdots$$

来说，存在唯一的实数 γ，它属于序列里每一个闭区间，即

$$a_n \leqslant \gamma \leqslant b_n,$$

其中 n 为任何自然数.

证明：因为 $a_1, a_2, \cdots, a_n, \cdots$ 是不减的有界序列，所以存在一个最小的实数 α，满足

$$a_1 \leqslant a_2 \leqslant \cdots \leqslant a_n \leqslant \cdots \leqslant \alpha,$$

又因为 $b_1, b_2, \cdots, b_n \cdots$ 是不增的有界序列，所以存在一个最大的实数 β，满足

$$b_1 \geqslant b_2 \geqslant \cdots \geqslant b_n \geqslant \cdots \geqslant \beta.$$

(1) 如果 $\alpha > \beta$，那么根据定理 1，必有

$$\beta < \delta < \alpha.$$

当 n 充分大时，有 $a_n > \delta$，否则 α 不是大于所有

$$a_i\ (i = 1, 2, \cdots)$$

的最小的数，同时还有 $b_n < \delta$，否则 β 不是小于所有 b_i 的最大的数．于是有

$$b_n < \delta < a_n$$

即 $b_n < a_n$，这与已知 $a_n < b_n$ 相矛盾，所以 $\alpha \ngtr \beta$.

(2) 如果 $\alpha < \beta$，那么根据定理 1，必有

$$\alpha < \gamma_1 < \gamma_2 < \beta.$$

于是

$$a_n < \gamma_1 < \gamma_2 < b_n,$$

从而

$$b_n - a_n > \gamma_2 - \gamma_1.$$

但是，当 n 充分大时，$b_n - a_n$ 可以任意小，当然可以小

于 r_2-r_1，与 $b_n-a_n>r_2-r_1$ 矛盾，所以 $\alpha \nless \beta$.

由 (1)，(2) 可知 $\alpha=\beta$.

这就说明存在唯一的实数 α，满足

$$a_n \leqslant \alpha \leqslant b_n.$$

这个定理说明了每一个退缩有理闭区间序列确定唯一的实数. 今后我们常用它来确定实数

§3 实数与数轴

对于数轴上任意一点 A，根据阿基米德公理，总可以求得线段 OA 的量数，如果 OA 与单位线段 e 有公度，那么量数为有理数；如果 OA 与 e 没有公度，那么量数为无理数（见§1）. 总之，数轴上任意一点都有唯一的实数与它对应.

反过来是否成立？即对于任意一个实数，是否在数轴上有唯一的点与它对应呢？这就需要引用康托公理.

康托公理. 在一直线上，由线段 A_1B_1，A_2B_2，$\cdots$，A_nB_n，$\cdots$ 组成的无穷序列，如果满足

(1) 后继的线段包含在前一线段之内；

(2) 对于任意给定的无论怎样小的一条线段 a，总存在自然数 n，使得线段 A_nB_n 小于 a，

那么，必定存在唯一的点 P，它属于这个序列中所有的线段.

这个公理说明：具有上述性质的线段序列，将退缩为唯一的一点，因此也把这个公理叫做退缩线段原理.

下面我们证明任意一个实数 α，在数轴上有唯一的一点与它对应.

假设实数 α 是由退缩有理闭区间序列

$$[\alpha_1^-, \alpha_1^+], [\alpha_2^-, \alpha_2^+], \cdots, [\alpha_n^-, \alpha_n^+], \cdots$$

所唯一确定的，我们把这个序列的每一个闭区间表示在数轴

上，如图 4-6.

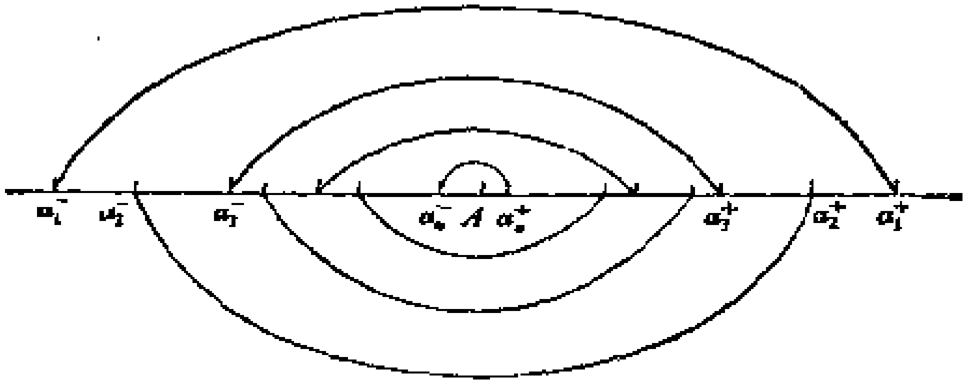


图 4-6

可以证明由线段

$$\alpha_1^-\alpha_1^+,\ \alpha_2^-\alpha_2^+,\ \alpha_3^-\alpha_3^+,\ \cdots,\ \alpha^-\alpha^+,\cdots$$

组成的无穷序列满足康托公理. 所以这些线段将退缩为唯一的点 A，这样，实数 α 就与数轴上唯一的点 A 对应.

根据以上的讨论，可知实数集与数轴上的点集建立了一一对应关系，这样，实数点就充满了数轴而无空隙. 实数集的这个性质，叫做**实数的连续性**. 有理数集就不具有连续性，因为有理点虽然密布在数轴上，但是并没有布满，还有无穷个空隙，而这无穷个空隙正是所有无理数所对应的点.

习　题　一

1. 试证 $\sqrt{3}$ 不是有理数.
2. 试证：顶角为 $108°$ 的等腰三角形的腰与底是无公度的线段.
3. 如果 α,β,γ 为实数，且 $\alpha<\beta$，$\beta<\gamma$，试证 $\alpha<\gamma$.
4. 已知 $e=2.718281\cdots\cdots$，写出 e 的精确到

   $\frac{1}{10^n}$ $(n=1, 2, 3, 4)$ 的不足与过剩近似值.
5. 试在 π 与 $\frac{22}{7}$ 之间找出 5 个有理数与 5 个无理数.

6. 证明 § 2 定理 3。

7. 在数轴上作出表示 $\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$ 的点。

8. 判断下列序列是不是退缩有理闭区间序列，如果是的话求出它所确定的实数。

(1) $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right]$, $\left[\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right]$, $\left[\frac{3}{4}, \frac{5}{4}\right]$, $\cdots$,

$$\left[\frac{n}{n+1}, \frac{n+2}{n+1}\right], \cdots ;$$

(2) $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, $\left[0, \frac{1}{3}\right]$, $\left[0, \frac{1}{4}\right]$, $\cdots$, $\left[0, \frac{1}{n+1}\right]$, $\cdots$;

(3) $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$, $\left[\frac{3}{4}, 1\right]$, $\left[\frac{5}{6}, 1\right]$, $\cdots$, $\left[\frac{2n-1}{2n}, 1\right]$, $\cdots$.

9. 判断下列序列是否有界，如果是不减有界序列，找出大于序列各项的最小实数；如果是不增有界序列，找出小于序列各项的最大实数。

(1) $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{6}$, $\cdots$, $\frac{1}{2n}$, $\cdots$;

(2) 1, $\frac{3}{2}$, $\frac{5}{3}$, $\cdots$, $\frac{2n-1}{n}$, $\cdots$;

(3) $1, 4, 9, \cdots, n^2, \cdots$.

10. 已知 α 为正实数，试证序列

$$\left[\frac{1}{\alpha_1^+}, \frac{1}{\alpha_1^-}\right], \left[\frac{1}{\alpha_2^+}, \frac{1}{\alpha_2^-}\right], \cdots, \left[\frac{1}{\alpha_n^+}, \frac{1}{\alpha_n^-}\right], \cdots$$

是退缩有理闭区间序列。

§ 4 实数的加法与减法

定义 1 如果一个实数 γ 大于（或等于）两个给定的正实数 α, β 的一切对应的不足近似值的和，而小于 α, β 的一切对应的过剩近似值的和，就把 γ 叫做 α 与 β 的和，记作

$$\gamma = \alpha + \beta.$$

这样规定两实数的和是不是唯一存在呢？这就需要证明序列 S：

$$[\alpha_1^- + \beta_1^-, \alpha_1^+ + \beta_1^+], [\alpha_2^- + \beta_2^-, \alpha_2^+ + \beta_2^+], \cdots,$$
$$[\alpha_n^- + \beta_n^-, \alpha_n^+ + \beta_n^+], \cdots$$

是一个退缩有理闭区间序列

(1) 因为

$$\alpha_1^- \leqslant \alpha_2^- \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n^- \leqslant \cdots,$$
$$\beta_1^- \leqslant \beta_2^- \leqslant \cdots \leqslant \beta_n^- \leqslant \cdots,$$

所以

$$\alpha_1^- + \beta_1^- \leqslant \alpha_2^- + \beta_2^- \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n^- + \beta_n^- \leqslant \cdots,$$

又

$$\alpha_1^+ \geqslant \alpha_2^+ \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n^+ \geqslant \cdots,$$
$$\beta_1^+ \geqslant \beta_2^- \geqslant \cdots \geqslant \beta_n^+ \geqslant \cdots,$$

所以

$$\alpha_1^+ + \beta_1^+ \geqslant \alpha_2^+ + \beta_2^+ \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n^+ + \beta_n^+ \geqslant \cdots.$$

(2) 因为

$$\alpha_n^- \leqslant \alpha_n^+, \ \beta_n^- \leqslant \beta_n^+,$$

所以 $$\alpha_n^- + \beta_n^- \leqslant \alpha_n^+ + \beta_n^+.$$

(3) 因为

$$(\alpha_n^+ + \beta_n^+) - (\alpha_n^- + \beta_n^-)$$
$$= (\alpha_n^+ - \alpha_n^-) + (\beta_n^+ - \beta_n^-)$$

而当 n 充分大时，$\alpha_n^+ - \alpha_n^- < \frac{\varepsilon}{2}$，$\beta_n^+ - \beta_n^- < \frac{\varepsilon}{2}$，其中 ε 为给定的任意小的正数，所以

$$(\alpha_n^+ + \beta_n^+) - (\alpha_n^- + \beta_n^-) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

由 (1)，(2)，(3) 可知序列 S 满足退缩有理闭区间序列的三个条件，所以 S 是退缩有理闭区间序列，它确定了唯一的实数，这个实数就是 $\gamma = \alpha + \beta$。

根据和的定义，不难证明加法的交换律与加法的结合律都是成立的.

定义 2 设 α 和 β 为正实数，且 $\alpha > \beta$，如果数 x 能使 $\beta + x = \alpha$ 成立，数 x 就叫做 α 减去 β 的差，记作

$$x = \alpha - \beta.$$

这样规定两个实数的差是不是唯一存在呢？下面我们证明这个问题.

(1) 显然有

$$\alpha_1^- - \beta_1^+ \leqslant \alpha_2^- - \beta_2^+ \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n^- - \beta_n^+ \leqslant \cdots,$$
$$\alpha_1^+ - \beta_1^- \geqslant \alpha_2^+ - \beta_2^- \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n^+ - \beta_n^- \geqslant \cdots.$$

(2) 因为

$$\alpha_n^- < \alpha_n^+,\ \beta_n^- < \beta_n^+,$$

所以

$$\alpha_n^- - \beta_n^+ < \alpha_n^+ - \beta_n^-.$$

(3)
$$\begin{aligned}&(\alpha_n^+ - \beta_n^-) - (\alpha_n^- - \beta_n^+)\\ =\ &(\alpha_n^+ - \alpha_n^-) + (\beta_n^+ - \beta_n^-)\\ <\ &\frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

由 (1), (2), (3) 可知序列

$$[\alpha_n^- - \beta_n^+,\ \alpha_n^+ - \beta_n^-]\ (n = 1, 2, \cdots)$$

是退缩有理闭区间序列，它确定了唯一的实数. 设这个实数为 x，由和的定义可知 $\beta + x$ 是由退缩有理闭区间序列

$$[\beta_n^- + (\alpha_n^- - \beta_n^+),\ \beta_n^+ + (\alpha_n^+ - \beta_n^-)]$$

所唯一确定的，但是

$$\beta_n^- + (\alpha_n^- - \beta_n^+) = \alpha_n^- - (\beta_n^+ - \beta_n^-) < \alpha_n^-,$$
$$\beta_n^+ + (\alpha_n^+ - \beta_n^-) = \alpha_n^+ + (\beta_n^+ - \beta_n^-) > \alpha_n^+,$$

所以序列 $[\beta_n^- + (\alpha_n^- - \beta_n^+),\ \beta_n^+ + (\alpha_n^+ - \beta_n^-)]$ 所确定的实数序列就是 $[\alpha_n^-,\ \alpha_n^+]$ 所确定的实数 α，于是有

$$\beta + x = \alpha,$$

即上面所设的 x 就是 α 减去 β 的差. 这说明了差存在.

下面再证明差是唯一的.

如果存在两个不同的实数 x 和 y 同时满足

$$\beta + x = \alpha,\ \beta + y = \alpha,$$

则有

$$\beta + x = \beta + y.$$

由和的定义有

$$\beta_n^- + x_n^- < \beta_n^+ + y_n^+,$$

所以

$$x_n^- - y_n^+ < \beta_n^+ - \beta_n^- < \varepsilon. \tag{1}$$

如果假定 $x > y$, 那么当 n 充分大时, $x_n^- - y_n^+$ 是一个正数,它不可能小于任意给定的小正数 ε, 于是与(1)式矛盾, 所以 $x \not> y$.

如果假定 $x < y$, 可由 $\beta_n^- + y_n^- < \beta_n^+ + x_n^+$, 同样能推出矛盾,所以 $x \not< y$.

因此

$$x = y.$$

有关负实数和零参与加法和减法的运算, 我们仍按照有理数中的规定来进行.

§5 实数的乘法与除法

定义 1 如果一个实数 γ 大于(或等于)两个给定的正实数 α, β 的一切对应的不足近似值的积,而小于 α, β 的一切对应的过剩近似值的积, 就把 γ 叫做实数 α 与 β 的积,记作

$$\gamma = \alpha \cdot \beta\ (\text{或 } \alpha\beta).$$

只要证明序列 $[\alpha_n^-\beta_n^-,\ \alpha_n^+\beta_n^+]$ $(n = 1, 2, \cdots)$ 是退缩有理闭区间序列,上面规定的积就是唯一存在的.

(1) 序列 $\alpha_n^-\beta_n^-(n=1,2,\cdots)$ 是不减的，

序列 $\alpha_n^+\beta_n^+(n=1,2,\cdots)$ 是不增的。

(2) $$\alpha_n^-\beta_n^-<\alpha_n^+\beta_n^+.$$

(3) $$\begin{aligned}&\alpha_n^+\beta_n^+-\alpha_n^-\beta_n^-\\&=\alpha_n^+\beta_n^+-\alpha_n^+\beta_n^-+(\alpha_n^+\beta_n^--\alpha_n^-\beta_n^-)\\&=\alpha_n^+(\beta_n^+-\beta_n^-)+\beta_n^-(\alpha_n^+-\alpha_n^-).\end{aligned}$$

取 $M>\alpha_n^+$，且 $M>\beta_n^-$，那么

$$\alpha_n^+\beta_n^+-\alpha_n^-\beta_n^-<M(\beta_n^+-\beta_n^-)+M(\alpha_n^+-\alpha_n^-).$$

而当 n 充分大时，

$$\beta_n^+-\beta_n^-<\frac{\varepsilon}{2M},\ \alpha_n^+-\alpha_n^-<\frac{\varepsilon}{2M},$$

所以

$$\begin{aligned}\alpha_n^+\beta_n^+-\alpha_n^-\beta_n^-&<M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}\\&=\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

由 (1), (2), (3) 可知序列 $[\alpha_n^-\beta_n^-,\alpha_n^+\beta_n^+](n=1,2,\cdots)$ 是退缩有理闭区间序列，它确定了唯一的实数 $\gamma=\alpha\beta$。

根据乘法的定义，可以证明乘法的交换律和乘法的结合律以及乘法对加法的分配律都是成立的。

定义 2 正实数 α 的倒数用 $\frac{1}{\alpha}$ 表示，它是由退缩有理闭区间序列 $\left[\frac{1}{\alpha_n^+},\frac{1}{\alpha_n^-}\right](n=1,2,\cdots)$ 所确定的实数。

由定义 1 可知

$$\alpha_n^-\cdot\frac{1}{\alpha_n^+}<\alpha\cdot\frac{1}{\alpha}<\alpha_n^+\cdot\frac{1}{\alpha_n^-},$$

当 n 充分大时，

$$\alpha_n^-\cdot\frac{1}{\alpha_n^+}=1,\ \alpha_n^+\cdot\frac{1}{\alpha_n^-}=1,$$

所以

$$\alpha \cdot \frac{1}{\alpha} = 1.$$

即互为倒数的两个数的积为1.

定义 3　设 α 和 β 为正实数，如果数 x 能使 $\beta x = \alpha$ 成立，就把数 x 叫做 α 除以 β 的商，记作 $x = \frac{\alpha}{\beta}$.

这样规定的商是唯一存在的.

设 $x = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$，那么

$$\beta x = \beta \cdot \left(\alpha \cdot \frac{1}{\beta}\right) = \left(\beta \cdot \frac{1}{\beta}\right) \cdot \alpha = 1 \cdot \alpha = \alpha,$$

即 $\alpha \cdot \frac{1}{\beta}$ 是 α 除以 β 的商.

又如果 y 也是 α 除以 β 的商，则有

$$\beta y = \alpha.$$

于是

$$\frac{1}{\beta} \cdot \beta y = \frac{1}{\beta} \cdot \alpha,$$

即

$$y = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}.$$

这说明

$$y = x.$$

有关负实数和零参与乘法和除法的运算，我们仍旧按照有理数中的规定来进行.

§6　实数的开方

定义 1　如果数 x 满足 $x^n = a$（n 是自然数），x 就叫做 a 的 n 次方根. 求一个数的 n 次方根的运算叫做开方.

下面我们研究在实数集中 a 的 n 次方根是不是存在?

当 $a<0$ 时,因为任何实数的偶次方都不会是负数,所以在实数集中负数的偶次方根不存在.

那么,当 $a\geqslant 0$ 时又是怎样呢?

定理 对于任意非负实数 a,存在唯一的非负实数 x,使 $x^n=a$.(n 是自然数)

证明:当 $a=0$ 时,$x=0$.

当 $a>0$ 时,总能找到 $k>a$ 且 $k>1$,于是

$$k^2>a,\ k^3>a,\cdots,\ k^n>a.$$

设 q_0+1 是使 $k^n>a$ 成立的最小整数,那么

$$q_0^n\leqslant a<(q_0+1)^n.$$

把 $[q_0, q_0+1]$ 分成十等份:

$$q_0,\ q_0+\frac{1}{10},\ q_0+\frac{2}{10},\cdots,\ q_0+1.$$

设 $q_0+\frac{q_1+1}{10}$ 是这些数中 n 次方大于 a 的最小数,那么

$$\left(q_0+\frac{q_1}{10}\right)^n\leqslant a<\left(q_0+\frac{q_1+1}{10}\right)^n.$$

再把 $[q_0.q_1, q_0.\overline{(q_1+1)}]$ 分成十等份:

$$q_0.q_1,\ q_0.q_1+\frac{1}{100},\ q_0.q_1+\frac{2}{100},\ \cdots,\ q_0.\overline{(q_1+1)}.$$

设 $q_0.q_1+\frac{q_2+1}{100}$ 是这些数中 n 次方大于 a 的最小数,那么

$$\left(q_0.q_1+\frac{q_2}{100}\right)^n\leqslant a<\left(q_0.q_1+\frac{q_2+1}{100}\right)^n.$$

这样继续作下去,就得

$$x=q_0.q_1q_2\cdots q_m\cdots.$$

它的不足与过剩近似值分别是

$$x_m^- = q_0.q_1q_2\cdots q_m,\ x_m^+ = q_0.q_1q_2\cdots\overline{(q_m+1)},$$

且

$$(x_m^-)^n \leqslant a < (x_m^+)^n. \tag{1}$$

由实数乘法运算，可知 x^n 是唯一的实数，

且

$$(x_m^-)^n \leqslant x^n \leqslant (x_m^+)^n. \tag{2}$$

比较 (1) 和 (2) 两式，因为 $[(x_m^-)^n, (x_m^+)^n]$ 确定唯一的实数，所以

$$x^n = a.$$

这就证明了 x 确实存在．下面再证明唯一性．

假设 $y^n = a$，且 $y \neq x$．那么，当 $y > x$ 时，$y^n > x^n$ 即 $y^n > a$；当 $y < x$ 时，$y^n < x^n$，即 $y^n < a$，都与 $y^n = a$ 矛盾，所以假设的 y 不存在．

在定理中，为什么要对 x 加以非负的限制呢？因为当 n 为偶数时，有 $(-x)^n = x^n$，因此，如果 x 是 a 的 n 次方根，那么 $-x$ 也是 a 的 n 次方根．可见 a 的偶次方根就不是唯一的．例如 4 的二次方根为 ± 2；81 的四次方根为 ± 3．

定义 2 如果 $a \geqslant 0$，且非负实数 x 满足 $x^n = a$（n 是自然数），就把 x 叫做 a 的 n 次算术根，记作 $x = \sqrt[n]{a}$．

例如，0 的 n 次算术根为 $\sqrt[n]{0} = 0$；27 的三次算术根为 $\sqrt[3]{27} = 3$；16 的四次算术根为 $\sqrt[4]{16} = 2$．

由定义 2 可知 $\sqrt[n]{a} \geqslant 0$，且 $a \geqslant 0$．因此 $\sqrt{4}$ 等于 2 而不等于 -2，所以 4 的二次方根应是 $\pm\sqrt{4} = \pm 2$；正数 a 的 $2n$ 次方根应是 $\pm\sqrt[2n]{a}$．

我们已经知道，当 $a < 0$ 时，a 的偶次方根不存在，那么 a 的奇次方根是不是存在呢？由 $a < 0$，得 $-a > 0$．设 n

为奇数，由定理可知存在唯一的正数 x，满足 $x^n=-a$，即 $x=\sqrt[n]{-a}$. 但是 $-x^n=(-x)^n$，而 $-x^n=a$，所以

$$(-x)^n=a,$$

由定义 1 可知 a 的 n 次方根为 $-x=-\sqrt[n]{-a}$，它是唯一的负数. 为此，我们可以规定，当 $a<0$ 且 n 为奇数时，a 的 n 次方根仍记作 $\sqrt[n]{a}$，这时，$\sqrt[n]{a}=-\sqrt[n]{-a}$. 如

$$\sqrt[3]{-8}=-\sqrt[3]{8}=-2;$$

$$\sqrt[5]{-243}=-\sqrt[5]{243}=-3.$$

这样就有以下结论：

(1) 当 n 为奇数时，$(\sqrt[n]{a})^n=a$;

(2) 当 n 为偶数，且 $a\geqslant 0$ 时，$(\sqrt[n]{a})^n=a$;

(3) 当 n 为奇数时，$\sqrt[n]{a^n}=a$;

(4) 当 n 为偶数时，$\sqrt[n]{a^n}=|a|=\begin{cases} a & (a\geqslant 0), \\ -a & (a<0). \end{cases}$

例如，$(\sqrt[5]{-2})^5=-2$; $\quad \sqrt[3]{(-2)^3}=-2$;

$\sqrt[4]{2^4}=2$; $\quad \sqrt[4]{(-2)^4}=|-2|=2$.

习　题　二

1. 证明实数加法的交换律成立.
2. 证明实数乘法的结合律成立.
3. 证明实数乘法对加法的分配律成立.
4. 举例说明任意两个无理数的和、差、积、商是否仍是无理数?
5. 证明一个有理数与一个无理数的和一定是无理数.
6. 证明一个非零的有理数与一个无理数的积是无理数.
7. 证明 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数.
8. 设 α 和 β 为正实数，试证序列

$$\left[\frac{\alpha_1^-}{\beta_1^+}, \frac{\alpha_1^+}{\beta_1^-}\right], \left[\frac{\alpha_2^-}{\beta_2^+}, \frac{\alpha_2^+}{\beta_2^-}\right], \cdots, \left[\frac{\alpha_n^-}{\beta_n^+}, \frac{\alpha_n^+}{\beta_n^-}\right]\cdots$$

是退缩有理闭区间序列，且它所确定的实数就是 α 除以 β 的商.

9. 如果自然数 a 不是某自然数的 n 次幂（n 是大于 1 的整数），那么 $\sqrt[n]{a}$ 是无理数。

10. 下面的矛盾是怎样产生的？

假设 $a \neq b$，则有

$$a^2 - 2ab + b^2 = b^2 - 2ba + a^2,$$

即

$$(a-b)^2 = (b-a)^2.$$

于是

$$\sqrt{(a-b)^2} = \sqrt{(b-a)^2}.$$

从而得

$$a - b = b - a,$$

即

$$2a = 2b.$$

因此 $a = b$。与假设矛盾。

§7 数环与数体

定义 1 如果非空数集 A 中的任意两个数的和、差、积仍属于 A，就说 A 是一个数环。

也就是说，如果 A 是非空数集，而且对于加、减、乘运算是封闭的，A 就是数环。

例 1. 整数集 Z 是数环。因为整数集对于加、减、乘运算是封闭的。

数环 Z 叫做整数环。

例 2. 自然数集 N 不是数环。因为 N 对于减法不封闭。

例 3. 偶数集构成一个数环。因为偶数集对于加、减、乘运算是封闭的。这个数环叫做偶数环。

例 4. 只由一个元素数 0 组成的集合，即 $\{0\}$ 是一个数环。因为 $0+0=0$，$0-0=0$，$0\cdot 0=0$。

$\{0\}$ 叫做零环。

因为对于任意的数环A来说，$a\in A$，$a-a=0\in A$，那么$A\supset\{0\}$，所以零环是最小的数环．

定义 2 如果P是至少含有一个不为零的数的数环，而且P中任意两个数的商（除数不为零）仍属于P，就说P是一个数体（或数域）．

也就是说，如果集合P至少含有两个数，而且对于加、减、乘、除（除数不为零）四种运算都是封闭的，P就是一个数体．

例 5. 有理数集Q是数体．因为Q对于加、减、乘、除（除数不为零）四种运算都是封闭的．这个数体叫做有理数体．

例 6. 整数集Z不是数体．因为Z对于除法运算不封闭．

例 7. 实数集R是数体． 因为R对于加、减、乘、除（除数不为零）四种运算都是封闭的．这个数体叫做实数体．

定理 任何数体都包含有理数体．

证明：设P是一个数体，那么P至少含有一个非零的数a，即$a\in P(a\neq 0)$．

因为P是数体，所以 $a\div a=1\in P$．

假设 $k\in P$，因为$1\in P$，所以 $k+1\in P$． 于是

$$\text{自然数集 } N\subset P.$$

又，$1-1=0\in P$，$b\in N$，$0-b=-b\in P$，所以

$$\text{整数集 } Z\subset P.$$

又，如果 $c\in Z(c\neq 0)$，$d\in Z$，那么

$$\frac{d}{c}\in P,$$

即

$$Q\subset P.$$

这个定理说明了有理数体是最小的数体．

例 8. 如果a和b是有理数，那么具有形式如$a+b\sqrt{2}$的数构成一个数体．这个数体通常用 $Q(\sqrt{2})$表示．

证明：因为$(a+b\sqrt{2})\pm(c+d\sqrt{2})$

$$=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2});$$

$$(a+b\sqrt{2})\cdot(c+d\sqrt{2})$$

$$=(ac+2bd)+(bc+ad)\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2});$$

当 c，d 不同时为零时，

$$\frac{a+b\sqrt{2}}{c+d\sqrt{2}}$$

$$=\frac{(a+b\sqrt{2})(c-d\sqrt{2})}{c^2-2d^2}$$

$$=\frac{ac-2bd}{c^2-2d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-2d^2}\sqrt{2}\in Q(\sqrt{2}).$$

所以 $Q(\sqrt{2})$ 是一个数体。

§8 实数集的性质

实数集具有以下的性质

1. 实数集是数体。

2. 实数体是有序数体。

下面我们给出有序集与有序数体的定义。

定义 1 如果集合 M 中的元素之间建立了顺序关系，"a 在 b 前面"，用 $a\prec b$ 表示，而且这种顺序关系满足三歧性和传递性，即满足

(1) 任意两个元素 a 和 b 之间，在 $a\prec b$，$a=b$，$b\prec a$ 三种情况之中，有一种而且只有一种成立；

(2) 对于任意三个元素 a，b，c，如果 $a\prec b$，$b\prec c$，那么 $a\prec c$。

集合M就叫做有序集。

定义 2 如果一个数体 P，其中规定的"大于"关系满足有序集的两个性质，而且满足加法与乘法的单调性，即满足

(1) 对于P中的任意两个数a和b，在$a>b$，$a=b$，$b>a$三种情况之中，有一种且只有一种成立；

(2) 对于P中的任意三个数a, b, c，如果$a>b$，$b>c$，那么$a>c$；

(3) 如果$a>b$，那么$a+c>b+c$；

(4) 如果$a>b$，$c>0$，那么$ac>bc$，数体P就叫做**有序数体**.

3. 实数体是阿基米德数体. 即在实数体中阿基米德公理成立.

证明：设α, β为任意二实数，且$\alpha<\beta$，那么总可以找到两个有理数a, b，使$a<\alpha$，$\beta<b$.

因为在有理数体中阿基米德公理成立，所以总可以找到自然数n，使$na>b$. 但

$$n\alpha>na, \qquad \text{(乘法单调性)}$$

所以

$$n\alpha>na>b>\beta,$$

即

$$n\alpha>\beta.$$

4. 实数体具有稠密性. 见§2定理1.

5. 实数体具有连续性. 见§2定理4. 把定理4中退缩有理闭区间序列中的有理数都改为实数，就组成退缩闭区间序列，它也确定唯一的实数.

6. 实数集为不可数集合.

证明：设$M=\{x|0<x<1\}$，那么M中的一切实数都可以用无限小数$0.a_1a_2\cdots a_n\cdots$表示，其中a_i是数码$0, 1, 2, \cdots, 9$，并且把有限小数看成是以0为循环节的无限小数.

假设M是可数集合，那么它的元素可以按自然数编号全

部排列如下：

$$\alpha_1 = 0.a_{11}a_{12}a_{13}\cdots a_{1n}\cdots,$$
$$\alpha_2 = 0.a_{21}a_{22}a_{23}\cdots a_{2n}\cdots,$$
$$\alpha_3 = 0.a_{31}a_{32}a_{33}\cdots a_{3n}\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$
$$\alpha_n = 0.a_{n1}a_{n2}a_{n3}\cdots a_{nn}\cdots,$$
$$\cdots\cdots$$

于是

$$M = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \cdots \alpha_n, \cdots\}.$$

我们再作一实数

$$\beta = 0.b_1b_2b_3\cdots b_n\cdots,$$

使 $b_i \neq a_{ii}\ (i = 1, 2, \cdots)$.

因为 $0 < \beta < 1$，所以 $\beta \in M$.

又，$b_1 \neq a_{11}$，　所以 $\beta \neq \alpha_1$;

$b_2 \neq a_{22}$，　所以 $\beta \neq \alpha_2$;

$\cdots$　　$\cdots$

$b_n \neq a_{nn}$，　所以 $\beta \neq \alpha_n$;

$\cdots$　　$\cdots$

所以 $\beta \notin M$，与 $\beta \in M$ 矛盾，因此 M 为不可数集合.

又，M 是实数集 R 的子集，所以 R 为不可数集合．不然的话，由可数集的子集仍为可数集，可以导出 M 为可数集.

习　题　三

1．奇数集是不是数环?

2．无理数集是不是数体？是数环吗?

3．如果 a 和 b 是有理数，试证由形式为 $a + b\sqrt{3}$ 的数所组成的数集是一个数体.

4．试证由 0 与 1 之间的所有无理数组成的集合为不可数集合.

§9 代数数与超越数

定义1 如果一个实数是一元 n 次整系数方程的根，这个实数就叫做代数数，不是代数数的实数叫做超越数[1]。

也就是说，如果实数 α，满足

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0 = 0$$

（其中 n 是自然数，$a_n \neq 0$，$a_i\,(i = 0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 为整数），α 就是代数数。

这样，实数又可作如下的分类：

$$\text{实数}\begin{cases}\text{代数数}\\ \text{超越数}\end{cases}$$

由定义可知一切有理数都是代数数，因为一切有理数都可以用 $\frac{q}{p}$（$p \neq 0$，p，q 为整数）表示，而 $\frac{q}{p}$ 是 $px - q = 0$ 的根。

这就说明了超越数必是无理数。但是无理数不一定是超越数，如 $\sqrt[n]{a}$ （n 是自然数）是 $x^n - a = 0$ 的根，所以只要 $\sqrt[n]{a}$ 有意义，它就是代数数。

利用倍角、半角公式，可以证明某些特殊角的三角函数值是代数数。如 $\sin\frac{\pi}{8}$ 是代数数，因为

$$\cos\frac{\pi}{4} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8},$$

即 $\frac{\sqrt{2}}{2} = 1 - 2\sin^2\frac{\pi}{8}$。令 $\sin\frac{\pi}{8} = x$，于是 $\sin\frac{\pi}{8}$ 满足方程

1) 这里指的是实数代数数与实数超越数。

$$\frac{\sqrt{2}}{2}=1-2x^2,$$

即满足方程

$$\frac{1}{2}=1-4x^2+4x^4,$$

即满足方程

$$8x^4-8x^2+1=0.$$

所以 $\sin\frac{\pi}{8}$ 是代数数.

又如,由三倍角公式:

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,$$
$$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha,$$

可以证明 $\sin\frac{\pi}{18}$ 是代数数. 因为

$$\sin\left(3\times\frac{\pi}{18}\right)=3\sin\frac{\pi}{18}-4\sin^3\frac{\pi}{18},$$

即

$$\frac{1}{2}=3\sin\frac{\pi}{18}-4\sin^3\frac{\pi}{18},$$

即

$$8\sin^3\frac{\pi}{18}-6\sin\frac{\pi}{18}+1=0.$$

令 $x=\sin\frac{\pi}{18}$, 于是 $\sin\frac{\pi}{18}$ 满足方程 $8x^3-6x+1=0$, 所以它是代数数.

那么超越数是否存在呢? 下面我们用集合的知识来证明超越数是存在的.

定义 2 如果一元 n 次方程为

$$a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0=0$$

($a_n \neq 0$，a_i 都是整数)，这个方程的高度 h 就是

$$h = (n-1) + |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|.$$

例如，方程 $3x^2 - 5x - 1 = 0$ 的高度为

$$(2-1) + 3 + |-5| + |-1| = 10.$$

由和的唯一性可知每一个一元方程只有一个高度。

对于同一个高度的一元方程不一定只有一个，例如方程 $x^2 = 0$，$2x = 0$，$x + 1 = 0$，$x - 1 = 0$，它们的高度都是 2. 但是我们可以证明，对于同一高度只能有有限个方程. 下面以 $h = 3$ 为例来说明这个问题.

由 $h = 3$，有

$$3 = (n-1) + |a_n| + |a_{n-1}| + \cdots + |a_1| + |a_0|.$$

因为 $a_n \neq 0$，所以 $|a_n| \geqslant 1$，

那么 $n - 1 \leqslant 2$，所以 n 只能为 3，2，1.

(1) 当 $n = 3$ 时，有

$$3 = (3-1) + |a_3| + |a_2| + |a_1| + |a_0|,$$

即

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| + |a_3| = 1.$$

而 $a_3 \neq 0$，$|a_3| \geqslant 1$，所以只有 $|a_3| = 1$，其余为零，这时方程为 $\pm x^3 = 0$，即 $x^3 = 0$.

(2) 当 $n = 2$ 时，有

$$3 = (2-1) + |a_2| + |a_1| + |a_0|,$$

即

$$|a_0| + |a_1| + |a_2| = 2.$$

而 $a_2 \neq 0$，$|a_2| \geqslant 1$，所以只有 $|a_2| = 2$，其余为 0；$|a_2| = 1$，$|a_1| = 1$，$|a_0| = 0$；$|a_2| = 1$，$|a_1| = 0$，$|a_0| = 1$ 有限种情况. 这时方程分别为

$$\pm 2x^2 = 0;\quad \pm x^2 \pm x = 0;\quad \pm x^2 \pm 1 = 0.$$

即

$$2x^2 = 0;\ x^2 \pm x = 0;\ x^2 \pm 1 = 0.$$

(3) 当 $n = 1$ 时，有

$$3 = |a_1| + |a_0|,$$

而 $a_1 \neq 0$，$|a_1| \geqslant 1$，所以只有 $|a_1| = 3$，$|a_0| = 0$；$|a_1| = 2$，$|a_0| = 1$；$|a_1| = 1$，$|a_0| = 2$ 有限种情况。这时方程分别为

$$3x = 0;\ 2x \pm 1 = 0;\ x \pm 2 = 0.$$

所以高度为 3 的方程有有限个，即以上的 11 个方程.

定理 1 由所有代数数组成的集合为可数集合.

证明：把所有的一元整系数方程，按高度的由小到大的次序列出，对于相同高度的方程，因为它的个数是有限的，就按次数的由小到大的次序排列，如果次数也相同，就按系数 $a_n, a_{n-1}, a_{n-2}, \cdots$ 由小到大的次序来排列，这样就把所有的一元整系数方程全部列出，并且有一定的次序，因此，由所有一元整系数方程组成的集合是可数集.

又因为 n 次方程只有 n 个根(在复数集)，所以这些方程的实数根也有限，即适合于每个方程的代数数是有限的. 对于每一个方程的代数数按由小到大的次序进行排列，为了避免重复，凡适合后边方程的代数数与前边相同者，只排前边的，这样就把所有的代数数全部排列出来，而且每一个代数数都有固定的位置，给它们编上号，显然它能与自然数集一一对应，可见代数数集是可数集.

定理 2 超越数必定存在，而且超越数集合为不可数集.

证明：因为超越数集与代数数集的并集是实数集. 而实数集为不可数集，代数数集为可数集，所以超越数必定存在，且超越数集为不可数集.

判断一个数是不是超越数是不容易的. 经过很长一段时间，于 1873 年才由法国数学家赫尔密特 (Hermite) 证明了 e

是超越数；于1882年才由德国数学家林德曼（Lindemann）证明了π是超越数．有关这方面的问题超出本书的范围．

下面我们利用于四十年代已被证明了的定理："如果α是不等于0和1的代数数，β是无理代数数，那么α^β是超越数"．（如$2^{\sqrt{2}}$，$3^{-1+\sqrt{5}}$等等都是超越数），证明$A=\lg N$（N为1与10之间的有理数，）是超越数．

先证A是无理数．

假如A为有理数．设$\lg N=\frac{a}{b}$（a与b互质），

于是

$$10^{\frac{a}{b}}=N,$$

所以

$$10^a=N^b.$$

但$N\in(1,10)$，所以N^b不能被10整除，而10^a能被10整除，这样就产生了矛盾．所以A是无理数．

再证A是超越数．

假如A是代数数，那么A是无理代数数．因此10^A为超越数（上述定理中令$\alpha=10$）．

但$10^A=10^{\lg N}=N$是有理数，即10^A为代数数．这样就产生了矛盾．

所以A是超越数．

在这一节的最后，我们谈一下关于几何学的三大问题，即能否仅用直尺和圆规解决

（1）立方倍积问题：求作一个正方体，使它的体积为已知正方体体积的2倍；

（2）三等分角问题：把已知任意的一个角三等分；

（3）化圆为方问题：求作一个正方形，使它的面积等于已知的圆面积．

这三个问题是著名的古典问题，两千多年以来，许多著名的学者致力于研究这三个问题，都未获得成功，直到十九世纪，利用代数数与超越数的理论，才证明了这三个问题都是不可能的问题，即只用直尺和圆规完不成每个问题所要求的作图。

现在简述一下它们的证明。

我们先给出 n 次代数数的概念：如果一个代数数，它所满足的整系数方程的最低次数为 n，这个代数数就叫 n 次代数数。

再给出一个重要的结论：仅用直尺和圆规所能作的线段，它的长度必须是 2^n 次代数数（n 是非负整数）。

（1）立方倍积问题． 设已知正方体的棱长为 1，所求作的正方体棱长为 x，按所要求的条件，应有

$$x^3 = 2 \cdot 1^3,$$

即

$$x^3 = 2.$$

所以

$$x = \sqrt[3]{2}.$$

而 $\sqrt[3]{2}$ 是三次代数数，不是 2^n 次代数数。

所以长度为 $\sqrt[3]{2}$ 的线段不能仅用直尺和圆规作出，即立方倍积问题是尺规作图不能问题。

（2）三等分角问题． 这个问题是三等分任意角的问题，而不是指某些特殊角，对于某些特殊角，如 $90°$ 角是可以只用直尺和圆规三等分的。

如果我们能够证明三等分某一个角是尺规作图不能问题，那么三等分任意角当然就是尺规作图不能问题。

现在我们研究把 $30°$ 角三等分的问题． 如图 4-7，已知 $\angle xOy$ 为 $30°$，以 O 为圆心，单位长度为半径作圆 O，分别交

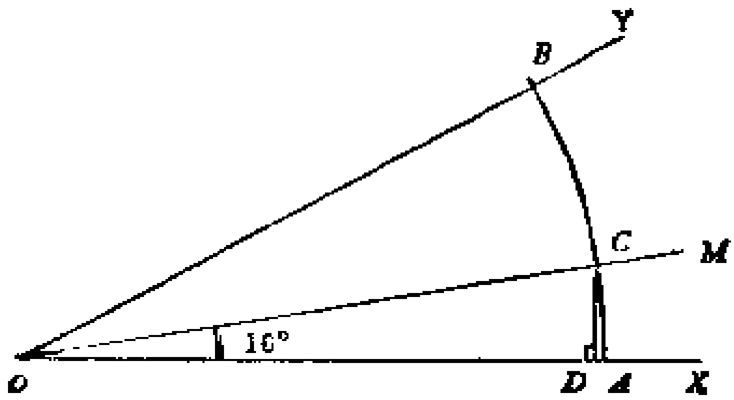


图 4-7

Ox 和 Oy 于 A 和 B.

设 OM 三等分 $\angle AOB$，且交圆 O 于 C，即

$$\angle AOC = 10°.$$

于是 C 到 OA 的距离 CD 必可作出．设 $CD = x$，则有

$$x = \sin 10°.$$

前已证明 $\sin 10°\left(即 \sin \frac{\pi}{18}\right)$ 是 3 次代数数，不是 2^n 次代数数，所以 x 不可作，即求不出 C 点．因此，三等分任意角为尺规作图不能问题．

(3) 化圆为方问题． 设已知圆的半径为 1，那么已知圆的面积为 $\pi \cdot 1^2 = \pi$． 设所求的正方形的边长为 x，按所要求的条件应有

$$x^2 = \pi,$$

即

$$x = \sqrt{\pi}.$$

而 π 是超越数，$\sqrt{\pi}$ 必然也是超越数，所以仅用尺规作不出长度为 $\sqrt{\pi}$ 的线段．因此，化圆为方问题为尺规作图不能问题．

这三大问题已从理论上证明了是尺规作图不能问题，如

果仍企图作出，只能是徒劳的.

习　题　四

1. 证明下列各数是代数数.

$$(1)\ \frac{1+\sqrt{5}}{2};\quad (2)\ \cos 20^\circ;$$

$$(3)\ \sin 15^\circ;\quad (4)\ \mathrm{tg}22.5^\circ.$$

2. 已知 π 是超越数，证明 $\pi+2$, 2π, π^2, $\sqrt{\pi}$ 都是超越数.

3. 求下列方程的高度.

(1) $x^3=0$; (2) $2x^3=0$; (3) $x^2+x+1=0$;

(4) $x^2-x-1=0$; (5) $4x^3+3x^2+2x+1=0$.

4. 写出高度为 2 的所有方程.

附录二

目前，在中学阶段，把有关实数的知识安排在初中学习，为了适应学生的接受能力，一般的教材中都不从无公度线段引入无理数. 有的教材在有理数一章里安排了开平方的方法，因此，可以利用不尽根来引入无理数. 有的教材在讲实数之前，没有安排开平方的方法，那么只能给出使学生确信的具体的无限不循环小数来引入无理数，如 0.1010010001…. 不论怎样引入无理数，事先都应使学生明确：有限小数或无限循环小数都是有理数，而且有理数只能化成有限小数或无限循环小数，只有这样，才能明确无限不循环小数不是有理数，把它定义为无理数，从而也就能明确把实数或者说成是有理数与无理数的总称；或者说成是有限小数与无限小数的总称. 如果把有限小数也看成是无限循环小数，那么实数就是无限小数.

给出实数概念之后，在学生已经知道 $\sqrt{2}$ 是无理数的基础上，应通过在数轴上找出表示 $\sqrt{2}$ 的点，直观地说明(不要求证明) 有理点虽然密密麻麻地分布在数轴上，但是还有很多空隙. 引入无理数之后，就填补了这些空隙，所有的实数就充满了数轴，为此把数轴叫实数轴.

不足近似值与过剩近似值是很重要的概念，对于无理数的研究往往是通过它的有理近似值来研究的，因此，应要求学生能够求出无理数

的给定精确度的近似值。

关于实数的四则运算，一般中学教材中都不给以严格的定义，只是要求学生知道实数的四则运算永远可行，它们是利用实数的有理近似值来进行计算的，并能按所要求的精确度求出运算结果就可以了。

关于实数的开方，应使学生明确在实数范围内负数的偶次方根不存在，因此，在实数范围内开方运算不是永远可以进行的；正数的偶次方根是两个值，它们互为相反数，为了区分它们，才给出了算术根的概念。

关于算术根的定义，不同的教材可能采用不同的说法，除了我们前边给出的定义之外，可能还有：(1) 正数的正的 n 次方根；(2) 正数的正的偶次方根。如果仍规定 $\sqrt[n]{a}$ $(a>0)$ 表示算术根时，那么，在这些教材中，肯定会指出当 $a=0$ 或当 n 是奇数时 $\sqrt[n]{a}$ 的意义。因此，教学时要注意所使用的教材是怎样定义算术根的。

算术根是一个重要的概念，对学生来说也是难以掌握的知识，教学时要予以充分重视。特别是二次算术根尤为重要。应使学生深刻认识 $\sqrt{a}$ 是非负的数(其中 $a\geqslant0$)，要求学生能够指出 $\sqrt{9}$ 与 9 的二次方根的异同。教学时，还要通过具体数字的例子和练习，使学生熟练掌握 $\sqrt{a^2}=|a|$。进一步要求能准确回答：

$$\sqrt{(a-b)^2}=\begin{cases}a-b & (a\geqslant b),\\ b-a & (a<b).\end{cases}$$

第五章 复 数

在很早以前，人们在解一元二次方程时，就遇到了负数开方的问题，限于当时的水平，只好认为判别式小于零的一元二次方程无解，从而避开了负数开偶次方的运算．直到十六世纪前半叶，意大利数学家G．卡尔达诺[1](Cardano)在研究一元三次方程的根式解法时，发现了对于确有三个实根的实系数一元三次方程，如果用公式表示这三个实根，必须用负数开平方的运算．这样，人们就不得不承认负数开平方仍是一个数，但它不是实数，那么它就是一种新数，而对这种新数又很不认识，就把这种新数叫做"虚假的数"、"虚幻的数"，这正是"虚数"一词的来源．到了十六世纪后半叶，由意大利数学家R．波贝利(Bombelli)给出了复数运算的正式论证，使复数在代数基本定理等纯数学领域中得到了应用，引起了人们的重视．但是，由于当时的生产和科学技术水平还很低，找不到复数的物理模型，不知道怎样在实践中应用复数，因而对复数的研究进展很慢．经过两个世纪之后，随着生产的发展，自然科学也有很大的进步，认识了复数的几何意义(例如当作平面上的点，或向量)，找到了复数的物理模型，使复数的研究得到迅速的发展．现在，复数已是自然科学、工程技术等许多部门中不可缺少的数学工具，它的理论已发展为内容十分丰富的数学分支，即复变函数论．

在这一章里与前几章一样，我们只研究复数的概念和运

1) 据 D. J. 斯特洛伊克 (Struik) 所著《数学简史》(科学出版社，1956)记载，卡尔达诺的解法来源于一个外号叫塔尔塔利亚 (Tartaglia) (意大利语为"口吃者")的威尼斯计算师，但现在习惯上都叫 Cardano 解法．

算.

§1　复数的概念

定义1　规定了次序的实数对(a, b)确定一个新数，叫做复数.

定义2　两个复数(a, b)和(c, d)相等，当且仅当

$$a=c,\ b=d.$$

即如果$(a,b)=(c,d)$，那么$a=c$，$b=d$；如果$a=c$，$b=d$，那么$(a,b)=(c,d)$.

定义1和2说明，如果$a\neq b$，那么(a, b)与(b, a)是两个复数，即$(a,b)\neq(b,a)$．例如$(1,2)\neq(2,1)$.

定义3　当$b=0$时，复数(a, b)就是实数a；当$b\neq 0$时，复数(a,b)叫做虚数；$a=0$的虚数叫纯虚数.

因为$(a,0)=a$，说明复数集是实数集的真扩集．又当$b\neq 0$时，(a,b)为虚数，所以复数可作以下的分类：

$$\text{复数 }(a,b)\begin{cases}\text{实数 }(a,0)\\ \text{虚数 }(a,b),\text{ 其中 } b\neq 0\end{cases}$$

§2　复数的运算

定义1　复数$(a+c,b+d)$叫做两个复数(a, b)与(c,d)的和.

因为$(a,0)+(b,0)=(a+b,0)$，对于相应的实数来说，有$a+b=a+b$，所以复数加法运算定义满足数集扩充的原则.

不难证明复数的加法交换律与结合律都成立.

定义2　复数$(ac-bd,ad+bc)$叫做两个复数(a,b)与(c,d)的积

因为$(a,0)\cdot(b, 0)=(ab-0\cdot 0, a\cdot 0+0\cdot b)=(ab, 0)$，对于相应的实数来说，有$a\cdot b=ab$，所以复数乘

法运算定义满足数集扩充的原则.

不难证明复数的乘法交换律与结合律成立. 复数的乘法对加法的分配律的证明如下:

设

$$\alpha=(a,b),\ \beta=(c,d),\ \gamma=(e,f),$$

那么

$$\begin{aligned}\alpha(\beta+\gamma)&=(a,b)((c,d)+(e,f))\\&=(a,b)(c+e,d+f)\\&=(a(c+e)-b(d+f),a(d+f)\\&\quad+b(c+e))\\&=(ac+ae-bd-bf,ad+af\\&\quad+bc+be),\end{aligned}$$

又

$$\begin{aligned}\alpha\beta+\alpha\gamma&=(a,b)(c,d)+(a,b)(e,f)\\&=(ac-bd,ad+bc)+(ae-bf,af+be)\\&=(ac+ae-bd-bf,ad+af+bc+be),\end{aligned}$$

所以

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

定义 3 如果复数 (x,y) 满足方程

$$(c,d)+(x,y)=(a,b),$$

就把 (x,y) 叫做复数 (a,b) 减去复数 (c,d) 的差.

显然,复数减法是复数加法的逆运算.

定理 1 复数 (a,b) 减去复数 (c,d) 的差是唯一存在的, 并且差为 $(a-c,b-d)$.

证明: 因为

$$\begin{aligned}&(a-c,b-d)+(c,d)\\&\quad=(a-c+c,b-d+d)=(a,b),\end{aligned}$$

所以 $(a-c,b-d)$ 是 (a,b) 减去 (c,d) 的差.

又，如果复数 (x,y) 是 (a,b) 减去 (c,d) 的差，那么

$$(c,\ d)+(x,\ y)=(a,\ b),$$

于是

$$(c+x,\ d+y)=(a,\ b),$$

由复数相等的定义，得

$$c+x=a\ ,d+y=b,$$

所以

$$x=a-c,\ y=b-d,$$

即差为 $(a-c,\ b-d)$. 说明 (a,b) 减去 (c,d) 的差是唯一的，而且是 $(a-c,b-d)$.

实数 a 的相反数为 $-a$，它们的和为 0，因此，我们规定复数 $\alpha=(a,b)$ 的相反数为 $-\alpha=-(a,\ b)$，它们的和为 $(0,0)$. 但是

$$(a,b)+(-a,-b)=(0,0),$$

所以有

$$-(a,b)=(-a,-b).$$

即 (a,b) 的相反数为 $(-a,-b)$.

因为 $(a,b)-(c,\ d)=(a-c,\ b-d)=(a,\ b)+(-c,-d)$,

所以，减去一个复数等于加上这个复数的相反数.

定义 4 如果当 $(c,d)\neq(0,0)$ 时，复数 (x,y) 满足方程

$$(c,d)(x,y)=(a,b),$$

就把 (x,y) 叫做复数 (a,b) 除以复数 (c,d) 所得的商.

显然，复数除法是复数乘法的逆运算.

定理 2 复数 $(a,\ b)$ 除以复数 $(c,d)\neq 0$ 的商是唯一存在的，并且商为

$$\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

证明：因为

$$(c,d)\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$$

$$=\left(\frac{ac^2+ad^2}{c^2+d^2},\ \frac{bc^2+bd^2}{c^2+d^2}\right)=(a,b),$$

所以$\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right)$是$(a,b)$除以$(c,d)$的商。

又，如果(a,b)除以(c,d)所得的商为(x,y)，那么

$$(c,d)(x,y)=(a,b),$$

即

$$(cx-dy,dx+cy)=(a,b).$$

由复数相等的定义，得方程组

$$\begin{cases}cx-dy=a,\\ dx+cy=b.\end{cases}$$

已知$(c,d)\neq 0$，所以$c^2+d^2\neq 0$。因此，解上面的方程组，得

$$\begin{cases}x=\dfrac{ac+bd}{c^2+d^2},\\ y=\dfrac{bc-ad}{c^2+d^2}.\end{cases}$$

所以(a,b)除以(c,d)的商唯一存在，它是

$$\left(\frac{ac+bd}{c^2+d^2},\ \frac{bc-ad}{c^2+d^2}\right).$$

综合以上所述，复数集对于加、减、乘、除(除数不为零)四种运算都是封闭的，它构成一个数体，我们把它叫做**复数体**，并用c表示。

§3 复数的代数形式

定义1 符号i表示复数$(0,1)$。

定理1 $i^2=-1$.

证明: $i^2=i\cdot i=(0,1)(0,1)=(-1,0)=-1$.

例1. 证明$\pm i$是方程 $x^2+1=0$ 的解。

解: 因为 $i^2=-1$, 所以 i 是方程 $x^2+1=0$ 的解。
又

$$-i=-(0,1)=(0,-1),$$

而

$$\begin{aligned}(-i)^2&=(-i)(-i)=(0,-1)(0,-1)\\&=(-1,0)=-1,\end{aligned}$$

所以 $-i$ 也是方程 $x^2+1=0$ 的解。

如果整数次方幂的意义仍按过去的规定，那么 i 的整数次方幂为

$$i^0=1,\ i^1=i,\ i^2=-1,\ i^3=-i,$$
$$i^4=1,\ i^5=i,\ i^6=-1,\ i^7=-i,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

又

$$\begin{aligned}i^{-1}&=\frac{1}{i}=(1,0)\div(0,1)=\left(\frac{0}{1},\ \frac{-1}{1}\right)\\&=(0,-1)=-i,\end{aligned}$$

$$i^{-2}=\frac{1}{i^2}=\frac{1}{-1}=-1,$$

$$i^{-3}=i^{-1}\cdot i^{-2}=(-i)\cdot(-1)=i,$$

$$i^{-4}=i^{-2}\cdot i^{-2}=(-1)\cdot(-1)=1,$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

所以有

$$i^{4n}=1,\ i^{4n+1}=i,\ i^{4n+2}=-1,\ i^{4n+3}=-i.$$

(其中 $n\in Z$)

定理2 任一复数 (a,b) 可以写成 $a+bi$ 的形式，其中

a 与 b 为实数.

证明：因为 $(a,b)=(a,0)+(0,b)$，而

$$(a,0)=a,$$
$$(0,b)=(b,0)(0,1)=bi,$$

所以

$$(a,b)=a+bi.$$

我们把 $a+bi$ 这种形式叫做复数的代数形式.

定义 2 对于复数 $a+bi$ 来说，a 叫做它的实部，bi 叫做它的虚部，i 叫做虚数单位. 形如 bi 的复数叫做纯虚数.

这样，关于复数的运算，由§2 定义 1 和定理 1 以及本节的定理 2 和定义 2，有

$$(a+bi)+(c+di)=(a+c)+(b+d)i,$$
$$(a+bi)-(c+di)=(a-c)+(b-d)i.$$

即两复数和(或差)的实部与虚部分别是这两个复数实部的和(或差)与虚部的和(或差).

又由§2 定义 2 和本节定理 2，有

$$(a+bi)(c+di)=(ac-bd)+(ad+bc)i,$$

这个结果相当于把复数看成是二项式，然后按照多项式乘法法则计算，遇到 i^2 换以 -1.

就是

$$(a+bi)(c+di)=ac+adi+bci+bdi^2$$
$$=(ac-bd)+(ad+bc)i.$$

对于除法，我们给出以下的定义和定理，然后再加以研究.

定义 3 复数 $a+bi$ 与复数 $a-bi$ 叫做互为共轭复数.

定理 3 复数与它的共轭复数的和或积都是实数.

证明：因为

$$(a+bi)+(a-bi)=2a,$$

$$(a+bi)(a-bi)=a^2-(bi)^2=a^2+b^2,$$

而 $2a$ 与 a^2+b^2 都是实数，所以定理得证。

由§2定理2和本节定理2，有

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

这个结果相当于用分母(即除数)的共轭复数分别去乘分子(即被除数)与分母，如

$$\frac{a+bi}{c+di}=\frac{(a+bi)(c-di)}{(c+di)(c-di)}$$

$$=\frac{(ac+bd)+(bc-ad)i}{c^2+d^2}$$

$$=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

例2.计算 $(2+3i)\div(3-2i)$。

解

$$\frac{2+3i}{3-2i}=\frac{(2+3i)(3+2i)}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{13i}{13}=i.$$

习　题　一

1. a 与 b 各是什么实数时，$a+\sqrt{b}$ 是

(1) 无理数；(2) 实数；(3) 虚数；(4) 纯虚数。

2. 求适合下列各方程的实数 x 和 y。

(1) $(1+2i)x+(3-10i)y=5-6i$;

(2) $2x^2-5x+2+(y^2-y-6)i=0$;

(3) $(x+y)-xyi=7-12i$;

(4) $(x^2-y^2)+2xyi=8+6i$。

3. 计算

(1) $[(x+y)^2-(x-y)^2 i]-[(x-y)^2$
$-(y^2-x^2)i]+[x^2-y^2+(x+y)^2 i]$;

(2) $(1+i^{-1})+(2+i^{-3})+(3+i^{-5})+(4+i^{-7})$;

(3) $(2\sqrt{5}-\sqrt{3}i)(-\sqrt{3}+4\sqrt{5}i)$;

(4) $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}i}{\sqrt{5}+\sqrt{3}i}$.

4. 如果 n 是整数，证明：

$$i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=0.$$

5. 如果复数 α 与 β 的共轭复数分别用 $\bar{\alpha}$ 与 $\bar{\beta}$ 表示，证明：

$$\bar{\alpha}+\bar{\beta},\ \bar{\alpha}-\bar{\beta},\ \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta},\ \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}\ (\beta\neq 0)$$

分别是 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\cdot\beta$, $\dfrac{\alpha}{\beta}$ 的共轭复数。

§4　复数的极坐标形式

如果把复数 $(a,\ b)$，即 $a+bi$，看成是平面直角坐标系中横坐标为 a，纵坐标为 b 的点，即 (a,b) 点，显然全体复数就与平面上所有的点建立了一一对应的关系。这样，复数就可以用平面上的点来表示。平面上的点被用来表示复数时，这个平面就叫做复平面。因为横轴上的点都是 $(a,0)$ 形式，即都是实数，所以把横轴叫做实轴；纵轴上的点都是 $(0,b)$ 形式，即都是纯虚数，所以把纵轴叫做虚轴。

平面上一点 $Z(a,\ b)$ 的位置也可以由这一点的极坐标 (r,θ) 来定，其中 r 表示原点 O 到 Z 的距离，θ 是横轴正方向（即 OX）为始边与 OZ 为终边所成的角，如图 5-1。

由直角坐标与极坐标的关系，有

$$a=r\cos\theta,$$
$$b=r\sin\theta,$$
$$r=\sqrt{a^2+b^2}.$$

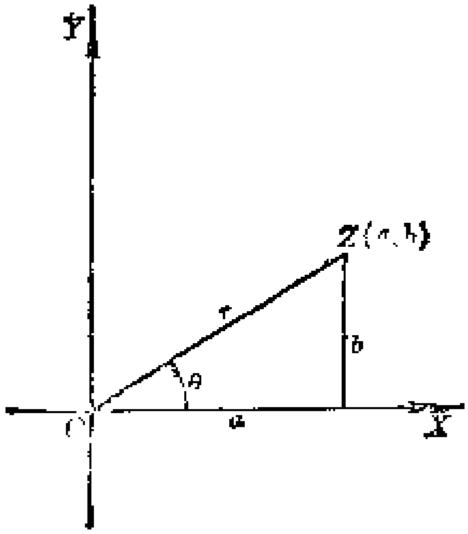


图 5-1

这样，复数 $a+bi$ 就可以写成 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 的形式.

定义 式子 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 叫做复数 $Z=a+bi$ 的极坐标式(或三角形式)，其中 $r=\sqrt{a^2+b^2}$，叫做Z的模或绝对值，记作 $|Z|$，θ 叫做Z的幅角，它是由 $a=r\cos\theta$ 及 $b=r\sin\theta$ 所确定的.

由定义可知，等于零的复数，它的模为0；反之，如果 $|Z|=0$，那么 $Z=0$.

不等于零的复数，它的模是唯一确定的正实数.

等于零的复数，它的幅角不确定，可以是任意值.

不等于零的复数，它的幅角不是唯一的，而是有无穷多个，它们之间相差 2π 的整数倍，即如果 θ 是复数Z的幅角，那么 $\theta+2k\pi\ (k\in J)$[1] 也是复数Z的幅角. 我们把在区间 $[0,2\pi)$ 内的幅角叫做幅角的主值，它是唯一的.

---

1) 为避免与复数Z相混，这里整数集用 J 表示.

如果两个复数相等，那么它们的绝对值相等，而幅角相差2π的整数倍。即

如果

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),$$
$$Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

且

$$Z_1 = Z_2,$$

那么

$$r_1 = r_2,\ \ \theta_1 = \theta_2 + 2k\pi(k \in J).$$

定理 1 两复数相乘，积的模等于各因数的模的积，而积的幅角等于各因数的幅角的和，即如果

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ \ Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

那么

$$Z_1Z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].$$

证明：
$$\begin{aligned}Z_1\cdot Z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\\ &= r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2)\\ &\quad + i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \sin\theta_2\cos\theta_1)]\\ &= r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)].\end{aligned}$$

定理 2 两复数相除，商的模等于被除数的模除以除数的模，商的幅角等于被除数的幅角减去除数的幅角的差。即如果

$$Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1),\ \ Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

那么

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

证明：

$$\frac{Z_1}{Z_2} = \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}{r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)\cdot(\cos\theta_2 - i\sin\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)\cdot[\cos(-\theta_2) + i\sin(-\theta_2)]}{r_2(\cos^2\theta_2 + \sin^2\theta_2)}$$

$$= \frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2)].$$

例. 计算

$$\frac{-1+i}{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{8} + i\sin\frac{\pi}{8}\right)\cdot\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right)},$$

解：因为

$$-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right),$$

$$\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4} = \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right),$$

所以

$$\text{原式} = \frac{\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)}{\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{8} - \frac{\pi}{4}\right)\right]}$$

$$= \cos\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{8}\right)$$

$$= \cos\frac{7\pi}{8} + i\sin\frac{7\pi}{8}.$$

§5 复数的乘方与开方

棣莫佛 (De Moivre)定理：复数 n 次幂（n 是自然数），

它的模等于原复数的模的 n 次幂，它的幅角等于原复数的幅角的 n 倍，即如果

$$Z=r(\cos\theta+i\sin\theta),$$

那么

$$Z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta).$$

证明：当 $n=1$ 时，定理成立。

假设 $n=k$ 时定理成立，即

$$Z^k=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta).$$

于是

$$\begin{aligned}Z^{k+1}&=Z^k\cdot Z\\&=r^k(\cos k\theta+i\sin k\theta)\cdot r(\cos\theta+i\sin\theta)\\&=r^{k+1}[\cos(k+1)\theta+i\sin(k+1)\theta],\end{aligned}$$

即 $n=k+1$ 时定理也成立。由数学归纳法可知 n 为任何自然数时定理都成立。

例1．求 $(1-i)^n$.

解．因为

$$1-i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right),$$

所以

$$(1-i)^n=2^{\frac{n}{2}}\left(\cos\frac{7n\pi}{4}+i\sin\frac{7n\pi}{4}\right).$$

定理 任何不等于零的复数，它的 n 次方根（n是自然数）是存在的，并且有 n 个不同的值，它们的模都等于这个复数的模的 n 次算术根，它们的幅角分别等于这个复数的幅角与 2π 的 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 倍之和的 n 分之一。

证明：设 $Z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ 是不等于零的复数，它的 n 次（n 为自然数）方根为

$$\omega=\rho(\cos\varphi+i\sin\varphi),$$

那么就有

$$Z = \omega^n,$$

即

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = [\rho(\cos\varphi + i\sin\varphi)]^n.$$

由棣莫佛定理，得

$$r(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi).$$

于是

$$\rho^n = r,\quad n\varphi = 2k\pi + \theta.\quad (k \in J)$$

即

$$\rho = \sqrt[n]{r},\qquad \varphi = \frac{\theta + 2k\pi}{n}.\ (k \in J)$$

因此，Z的 n 次方根应为

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right).\ (k \in J)$$

又

$$\begin{aligned}\omega_k^n &= \left[\sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right)\right]^n\\ &= (\sqrt[n]{r})^n[\cos(\theta + 2k\pi) + i\sin(\theta + 2k\pi)]\\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) = Z.\end{aligned}$$

所以Z的 n 次方根确实存在，而且就是 ω_k.

下面我们证明 ω_k 只有 n 个不同的值.

因为 $Z \neq 0$，当 k 取 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 时，$\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}$ 中任意两个的幅角的差都不是 2π 的整倍数，所以它们是 n 个不同的值.

当 k 取其他整数时，总可以找到整数 q 和 $t(0 \leqslant t < n)$，使得 $k = n\cdot q + t$ 成立．于是有

$$\frac{\theta + 2k\pi}{n} = \frac{\theta + 2(nq + t)\pi}{n}$$

$$=\frac{\theta+2t\pi}{n}+2q\pi.$$

即 ω_k 与 ω_t 的幅角相差 2π 的整数倍，可见 $\omega_k=\omega_t$。但是 t 在 $[0,n)$ 之间，因此 ω_k 必与 $\omega_0, \omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_{n-1}$ 中的某一个相等.

所以 ω_k 只有 n 个不同的值，这些值的模都是 $\sqrt[n]{r}$，这些值的幅角分别是 θ 与 2π 的 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 倍的和的 n 分之一.

例 2．求 i 的立方根.

解：因为

$$i=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2},$$

所以

$$\omega_k=\sqrt[3]{1}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{3}\right),\ (k=0, 1, 2)$$

于是 i 的立方根为：

$$\omega_0=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$$

$$\omega_1=\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i;$$

$$\omega_2=\cos\frac{9\pi}{6}+i\sin\frac{9\pi}{6}=-i.$$

下面我们研究，在复数体内，1 的 n 次方根(也叫做 n 次单位根)的性质.

假设 1 的 n 个不同的 n 次方根用 $\varepsilon_k\ (k=0, 1, 2, \cdots, n-1)$ 表示．因为 $1=1(\cos 0+i\sin 0)$，

所以

$$\varepsilon_k = 1 \cdot \left(\cos\frac{2k\pi}{n} + i\sin\frac{2k\pi}{n}\right).$$

于是

$$\varepsilon_0 = (\cos 0 + i\sin 0) = 1;$$

$$\varepsilon_1 = \cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n};$$

$$\varepsilon_2 = \cos\frac{4\pi}{n} + i\sin\frac{4\pi}{n}$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^2 = \varepsilon_1^2;$$

$$\varepsilon_3 = \cos\frac{6\pi}{n} + i\sin\frac{6\pi}{n}$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^3 = \varepsilon_1^3;$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$\varepsilon_{n-1} = \cos\frac{2(n-1)\pi}{n} + i\sin\frac{2(n-1)\pi}{n}$$

$$= \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^{n-1} = \varepsilon_1^{n-1}.$$

而

$$\varepsilon_0 = 1 = \left(\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n}\right)^n = \varepsilon_1^n,$$

所以，如果设 $\cos\frac{2\pi}{n} + i\sin\frac{2\pi}{n} = \varepsilon$，那么 1 的 n 个不同的 n 次方根为：

$$\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3, \cdots,\ \varepsilon^{n-1},\ \varepsilon^n = 1.$$

例如，1 的立方根为：

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i;$$

$$\varepsilon^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad \varepsilon^3 = 1.$$

1 的四次方根为:

$$\varepsilon = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = i;$$

$$\varepsilon^2 = -1; \quad \varepsilon^3 = -i; \quad \varepsilon^4 = 1.$$

如果 ω 是复数 Z 的一个 n 次方根，那么 ω 乘以 n 次单位根，就得到 Z 的 n 个不同的 n 次方根. 这是因为 $\omega^n = Z$，而

$$(\omega\varepsilon)^n = \omega^n \cdot \varepsilon^n = \omega^n = Z.$$

这样，在例 2 中，如果已经求得 $-i$ 是 i 的一个立方根，那么 $-i$ 乘以 1 的 3 次单位根，即乘以 $-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ 与 $-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$，分别得出 i 的另外两个立方根为

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ 与 } -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$$

例 3. 求 -16 的四次方根.

解: 因为

$$-16 = 16(\cos\pi + i\sin\pi),$$

所以

$$\omega_k = 2\left(\cos\frac{\pi + 2k\pi}{4} + i\sin\frac{\pi + 2k\pi}{4}\right). \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

于是 -16 的四次方根为:

$$\omega_0 = 2\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2} + \sqrt{2}i;$$

$$\omega_1 = 2\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} + \sqrt{2}i;$$

$$\omega_2 = 2\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2} - \sqrt{2}i;$$

$$\omega_3=2\left(\cos\frac{7\pi}{4}+i\sin\frac{7\pi}{4}\right)=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i.$$

或者，求出 $\omega_0=\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i$ 之后，分别乘以 1 的四次单位根，即

$$(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)\cdot(i)=-\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i;$$
$$(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)\cdot(-i)=\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i;$$
$$(\sqrt{2}+\sqrt{2}\,i)\cdot(-1)=-\sqrt{2}-\sqrt{2}\,i.$$

§6 复数运算的几何解释

在研究力学、物理学时，经常遇到力、速度、加速度、磁场强度等等一些量，对于这些量，除了要考虑它们数值的大小以外，还要考虑它们的方向．我们把这种既有数值的大小又有方向的量叫做**向量**．向量可以用有向线段来表示，线段的长度表示向量数值的大小，线段的方向表示向量的方向．线段 AB 所表示的向量用 $\overrightarrow{AB}$ 表示．方向相同，长度相等的有向线段，不管它们的起点在哪里，都认为是相等的向量，如在图 5-2 中，$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{OZ}$．这样，平面上所有的向量都可以通过平移，看成是以原点为起点的向量．

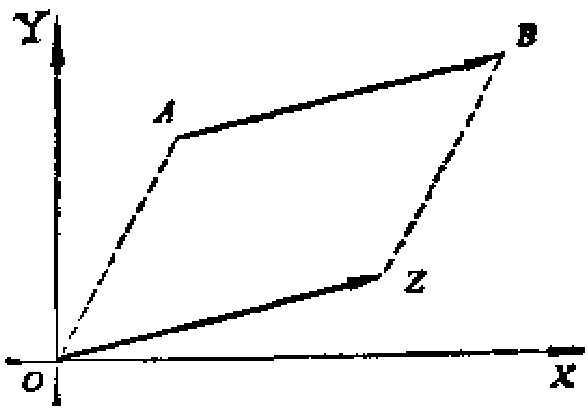


图 5-2

我们知道复数 $(Z=a+bi)$ 与复平面内的点 $Z(a,b)$

一一对应，而点 Z 与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应，因此，复数 $Z=a+bi$ 与向量 $\overrightarrow{OZ}$ 一一对应，向量 $\overrightarrow{OZ}$ 的数值大小就是复数的模，$\overrightarrow{OZ}$的方向与 x 轴正向所成的角(以 x 轴正向为始边，$\overrightarrow{OZ}$为终边，逆时针旋转所成的角)就是复数的幅角 θ，如图 5-3 所示。

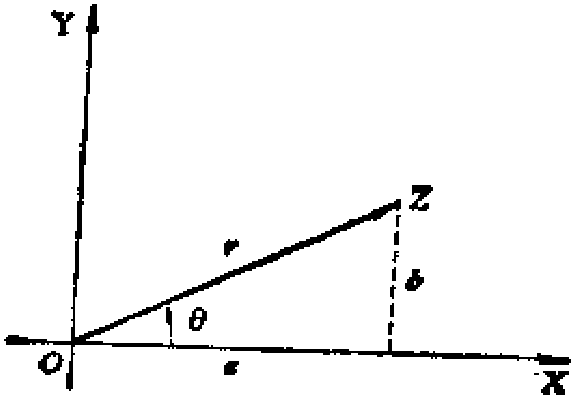


图 5-3

下面我们研究复数运算的几何解释.

(1) 复数加法的几何解释.

在物理学里，我们可以用平行四边形的法则求出 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 的和，它等于以 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 为邻边的平行四边形的对角线 $\overrightarrow{OZ}$，如图 5-4 所示. 即

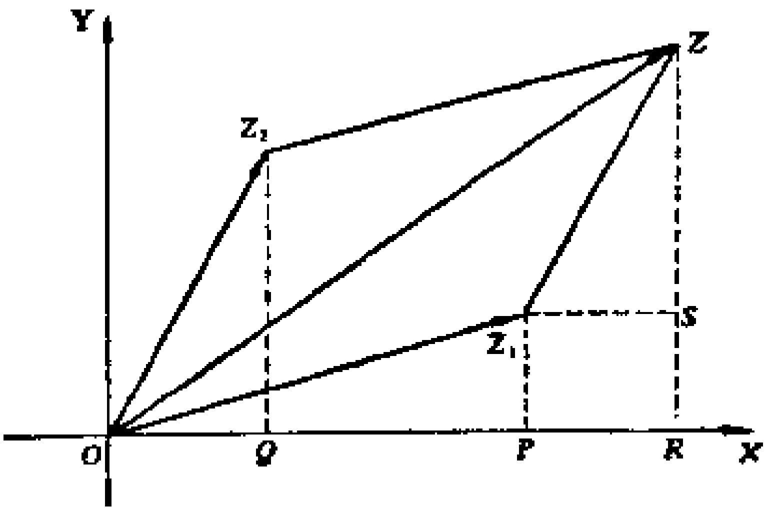


图 5-4

$$\overrightarrow{OZ}=\overrightarrow{OZ_1}+\overrightarrow{OZ_2}.$$

如果 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 所对应的复数分别是 $a+bi$ 与 $c+di$，那么 $\overrightarrow{OZ}$ 所对应的复数应当是 $(a+c)+(b+d)i$.

下面我们来证明.

作 Z_1P, Z_2Q, ZR 垂直于 x 轴，且分别交 x 轴于 P, Q, R，作 $Z_1S\perp ZR$，交 ZR 于 S. 那么 $OP=a$, $PZ_1=b$, $OQ=c$, $QZ_2=d$.

因为 $\triangle OQZ_2\cong\triangle Z_1SZ$; $PRSZ_1$ 为矩形，所以

$OR=OP+PR=OP+Z_1S=OP+OQ=a+c$;

$RZ=RS+SZ=PZ_1+QZ_2=b+d$.

于是，Z 点的坐标为 $(a+c,\ b+d)$，所以 $\overrightarrow{OZ}$ 所对应的复数是 $(a+c)+(b+d)i$.

这就是说，复数的加法与平面向量的加法是一致的. 于是求两个复数的和，可以通过它们所对应的向量，利用平行四边形法则求得；反之，求两个向量的和，也可以通过它们所对应的复数求得.

例 1. 作用于一点的两个力都等于 4 kg，并且成 120° 角，求它们的合力.

解：如图 5-5 建立坐标系，$\overrightarrow{OZ_1}$，$\overrightarrow{OZ_2}$ 所对应的复数分

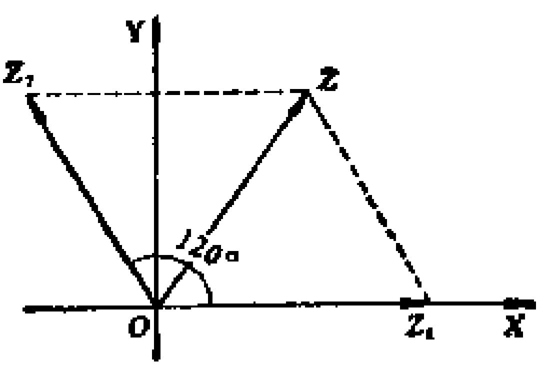


图 5-5

别为

$$Z_1 = 4(\cos 0^\circ + i\sin 0^\circ) = 4,$$
$$Z_2 = 4(\cos 120^\circ + i\sin 120^\circ) = -2 + 2\sqrt{3}\,i.$$

于是 $Z = Z_1 + Z_2 = 2 + 2\sqrt{3}\,i$，它所对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$ 就是所求的合力.

因为

$$|Z| = \sqrt{2^2 + (2\sqrt{3})^2} = 4,$$

$$\cos\theta = \frac{2}{4} = \frac{1}{2},\ \theta = 60^\circ,$$

所以，合力 $\overrightarrow{OZ}$ 为 4 kg，并且与 $\overrightarrow{OZ_1}$ 成 60° 角.

(2) 复数减法的几何解释.

由向量加法的平行四边形法则，可知

$\overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{OZ_2} = \overrightarrow{OZ_1}$（见图 5-6），所以

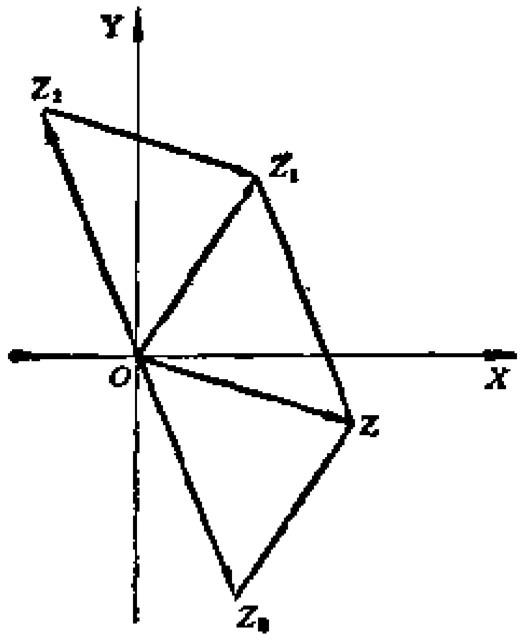


图 5-6

$$\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_2}.$$

如果 Z_1 点与 Z_2 点关于原点对称，那么 $\overrightarrow{OZ_3} = -\overrightarrow{OZ_2}$，因此，$\overrightarrow{OZ}$ 又可以看成是 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_3}$ 的和.

设 $\overrightarrow{OZ_1}$ 与 $\overrightarrow{OZ_2}$ 所对应的复数分别为

$$Z_1 = a + bi, \quad Z_2 = c + di,$$

那么 $\overrightarrow{OZ_3}$ 所对应的复数为 $Z_3 = -c - di$，所以 $\overrightarrow{OZ}$ 所对应的复数是 $(a-c)+(b-d)i$. 说明复数的减法与向量的减法一致.

又 $\overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{Z_2Z_1}$，所以有

$$\overrightarrow{Z_2Z_1} = \overrightarrow{OZ} = \overrightarrow{OZ_1} - \overrightarrow{OZ_2},$$

即向量 $\overrightarrow{Z_2Z_1}$ 所对应的复数是 $Z_1 - Z_2$. 也就是说把起点为 Z_2，终点为 Z_1 的向量，平移为以原点为起点的向量，就可以用复数 $Z_1 - Z_2$ 表示. 例如，起点为 -1，终点为 $1+2i$ 的向量，可用复数 $(1+2i)-(-1) = 2+2i$ 表示，如图 5-7 所示.

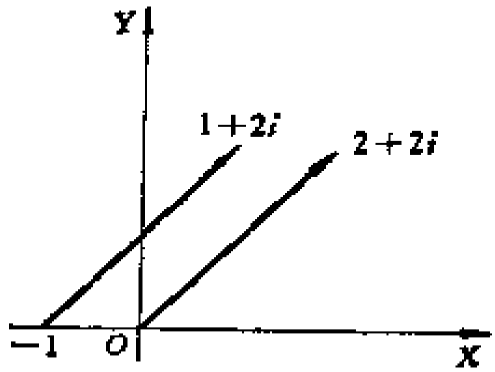


图 5-7

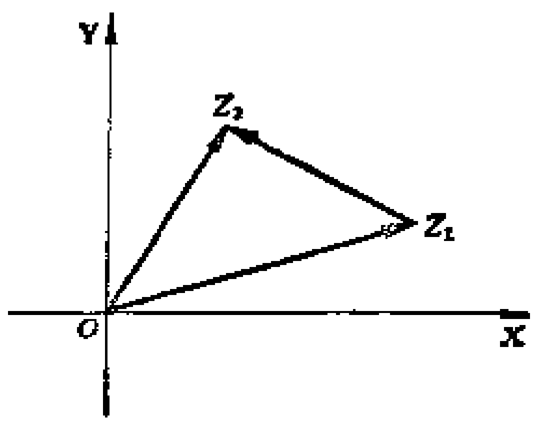


图 5-8

这样，我们可以得到用复数表示的两点距离的公式. 如图 5-8 所示，设 $Z_1 = x_1 + y_1 i$，$Z_2 = x_2 + y_2 i$，$\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 所对应的复数是 $Z_2 - Z_1$，它的长度就是 Z_1 与 Z_2 两点间的距离 d，

也就是复数 $Z_2 - Z_1$ 的模．所以有

$$d = |Z_2 - Z_1|.$$

这个公式较用坐标法导出的距离公式更简化一些，实际上二者是一致的．因为

$$\begin{aligned}|Z_2 - Z_1| &= |(x_2 + y_2 i) - (x_1 + y_1 i)| \\ &= |(x_2 - x_1) + (y_2 - y_1)i| \\ &= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.\end{aligned}$$

例 2．求以 $O' = a + bi$ 为圆心，以 r 为半径的圆的方程．

解：设 Z 为圆上任意一点（图 5-9），它所对应的复数为 $x + yi$，因为 $|O'Z| = r$，所以圆的方程为

$$|Z - O'| = r.$$

如果 O' 就是 O，那么圆的方程为 $|Z| = r$.

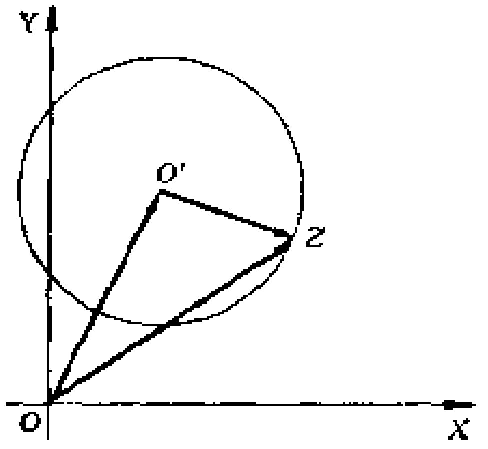


图 5-9

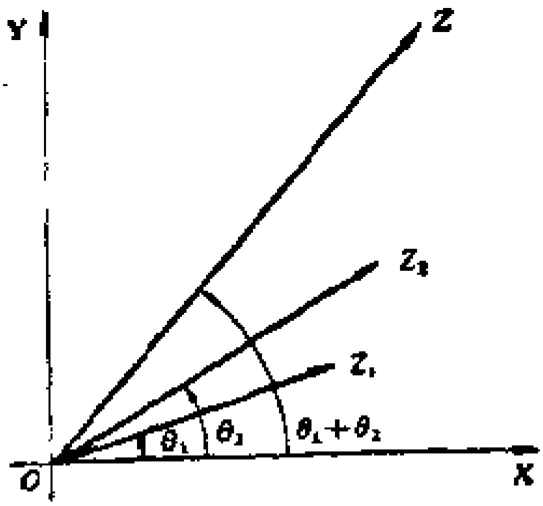


图 5-10

这些方程与直角坐标系中圆的方程是一致的．因为

$$|Z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r, \text{ 即 } x^2 + y^2 = r^2;$$

$$\begin{aligned}|Z - O'| &= |(x - a) + (y - b)i| \\ &= \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2} = r\end{aligned}$$

即 $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.

(3) 复数乘法的几何解释。

设复数 $Z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)$ 所对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1}$，复数 $Z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2)$ 所对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_2}$（图 5-10），因为

$$Z_1Z_2 = r_1r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)],$$

所以 Z_1Z_2 所对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$，就是把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按逆时针方向旋转角 θ_2，再把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 的长度 r_1 乘以 r_2。

例 3． 图 5-11 是并列的三个全等的正方形，利用复数证明 $\angle 1 + \angle 2 = \frac{\pi}{4}$。

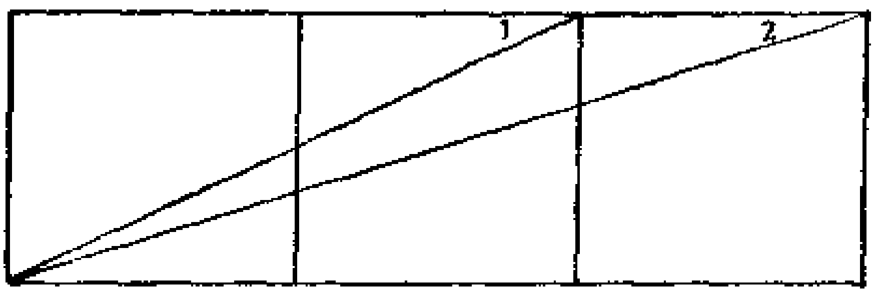


图 5-11

证明：如图 5-12 建立坐标系． 根据平行线的内错角相等，可知 $\angle 1$ 与 $\angle 2$ 分别是复数 $2+i$ 与 $3+i$ 的幅角主值。

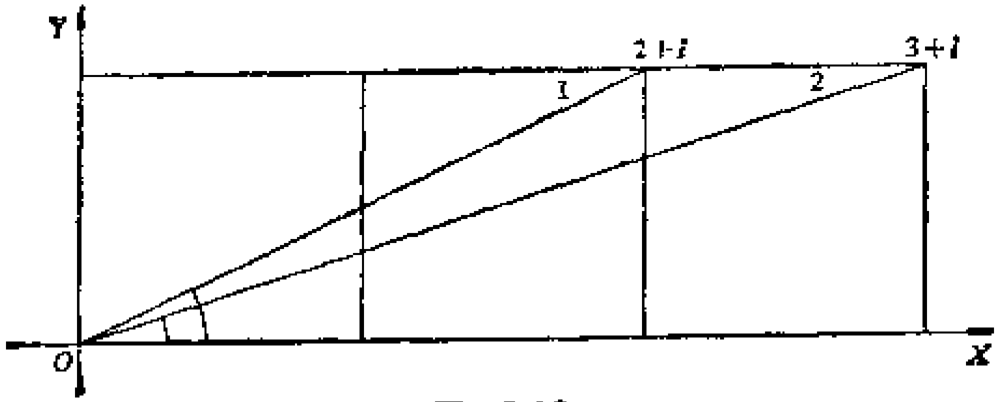


图 5-12

由复数乘法的几何解释，可知 $\angle 1 + \angle 2$ 是乘积 $(2+i)\cdot(3+i)$ 的幅角. 而

$$(2+i)(3+i)=5+5i,$$

它的幅角为 $\frac{\pi}{4}+2k\pi$，又，$\angle 1$ 与 $\angle 2$ 都小于 $\frac{\pi}{4}$，所以

$$\angle 1+\angle 2=\frac{\pi}{4}.$$

（4）复数除法的几何解释.

设复数 $Z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$ 所对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_1}$，复数 $Z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$ 所对应的向量为 $\overrightarrow{OZ_2}$（图 5-13），因为

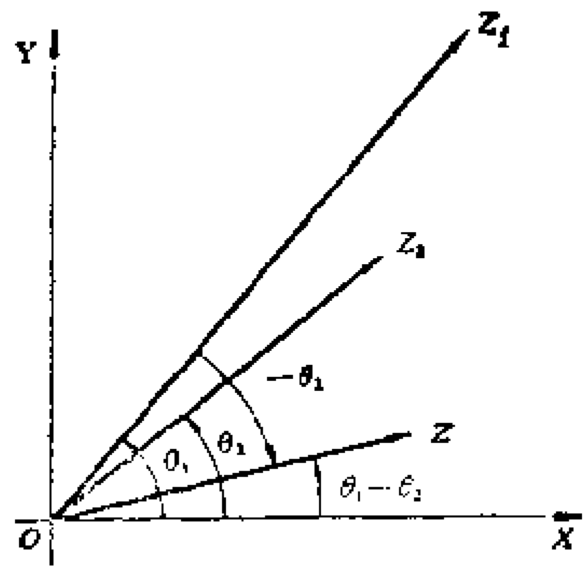


图 5-13

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{r_1}{r_2}[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)],$$

所以 $\frac{Z_1}{Z_2}$ 所对应的向量 $\overrightarrow{OZ}$，就是把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 按顺时针方向旋转角 θ_2，再把 $\overrightarrow{OZ_1}$ 的长度 r_1 除以 r_2.

因为 $\angle Z_2OZ_1=\angle XOZ=\theta_1-\theta_2$，所以复数 $\frac{Z_1}{Z_2}$ 的幅

角是以向量 $\overrightarrow{OZ_2}$ 为始边按逆时针方向旋转到 $\overrightarrow{OZ_1}$ 所成的角.

例 5. 求证三个复数 Z_1, Z_2, Z_3 是一个正三角形的三个顶点的充分必要条件是

$$Z_1^2+Z_2^2+Z_3^2=Z_1Z_2+Z_2Z_3+Z_3Z_1.$$

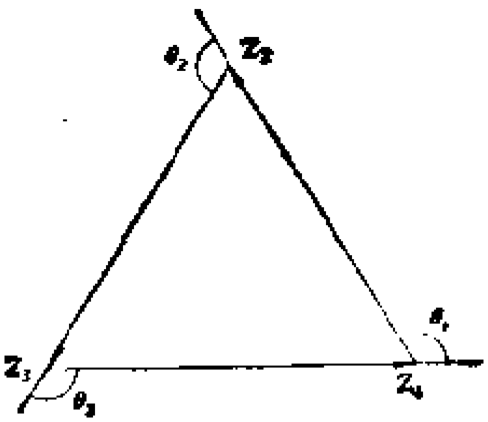


图 5-14

证明: 如果 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正三角形 (如图 5-14), 那么 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$, $\overrightarrow{Z_2Z_3}$, $\overrightarrow{Z_3Z_1}$ 等长, 而它们所对应的复数分别是 Z_2-Z_1, Z_3-Z_2, Z_1-Z_3, 所以

$$|Z_2-Z_1|=|Z_3-Z_2|=|Z_1-Z_3|. \qquad (1)$$

又

$$\theta_1=\theta_2=\theta_3=\frac{2\pi}{3},$$

而 θ_1, θ_2, θ_3 分别是 $\overrightarrow{Z_3Z_1}$ 与 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$, $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 与 $\overrightarrow{Z_2Z_3}$, $\overrightarrow{Z_2Z_3}$ 与 $\overrightarrow{Z_3Z_1}$ 以前者为始边, 后者为终边, 按逆时针方向旋转而成的角, 因此它们分别是复数 $\dfrac{Z_2-Z_1}{Z_1-Z_3}$, $\dfrac{Z_3-Z_2}{Z_2-Z_1}$, $\dfrac{Z_1-Z_3}{Z_3-Z_2}$ 的幅角. 由 (1) 已知这三个复数的绝对值也相等. 所以这三个复数相等, 因此有

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 - Z_3} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_2 - Z_1},$$

即

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1$$

这就证明了必要性.

反之,如果

$$Z_1^2 + Z_2^2 + Z_3^2 = Z_1Z_2 + Z_2Z_3 + Z_3Z_1,$$

就有

$$\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 - Z_3} = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_2 - Z_1} = \frac{Z_1 - Z_3}{Z_3 - Z_2}.$$

所以这三个复数的幅角相等,即 $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$, 因此 $\triangle Z_1Z_2Z_3$ 是正三角形.

这就证明了充分性.

(5) 复数开方的几何解释.

设非零复数 $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, 那么它的 n 次方根为

$$\omega_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)\right],$$

其中 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$. 也就是说这 n 个不同的 n 次方根的模都等于 $\sqrt[n]{r}$,而它们的幅角是从 $\frac{\theta}{n}$ 开始依次增加 $\frac{2\pi}{n}$. 因此,非零复数

$$Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

的 n 次方根的几何意义是：在复平面内，以原点为圆心，以 $\sqrt[n]{r}$ 为半径作圆 O, 再作幅角为 $\frac{\theta}{n}$ 的向量 $\overrightarrow{O\omega_0}$ 交圆 O 于 ω_0, 然后按逆时针方向把 $\overrightarrow{O\omega_0}$ 旋转 $\frac{2\pi}{n}$ 得 $\overrightarrow{O\omega_1}$, 再把 $\overrightarrow{O\omega_1}$ 旋转

$\frac{2\pi}{n}$ 得 $\overrightarrow{O\omega_2}$，依次作下去，就得到Z的 n 次方根所对应的 n 个向量．显然，ω_0，ω_1，ω_2，$\cdots$，ω_{n-1} 把圆 O n 等分．如图 5-15 中的 $\overrightarrow{O\omega_0}$，$\overrightarrow{O\omega_1}$，$\overrightarrow{O\omega_2}$，$\overrightarrow{O\omega_3}$，$\overrightarrow{O\omega_4}$ 表示Z的五次方根所对应的向量，ω_0，ω_1，ω_2，ω_3，ω_4 把圆 O 五等分．

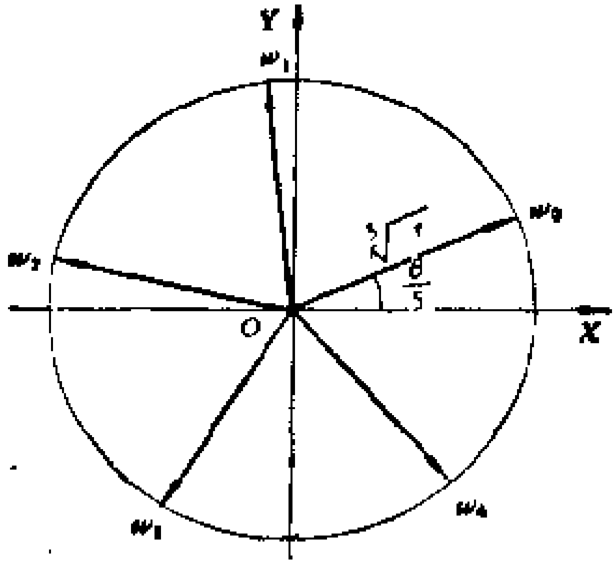


图 5-15

§7 复数的指数形式

把模为1，幅角为 θ（用弧度表示）的复数，用 $e^{i\theta}$（e 为自然对数的底）来表示，即

$$e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta. \tag{1}$$

公式（1）叫做欧拉公式．这个公式在复变函数论中是可以证明的，这里只作简单的介绍．首先承认

$$e^{\alpha}=1+\frac{\alpha}{1}+\frac{\alpha^2}{2!}+\cdots+\frac{\alpha^n}{n!}+\cdots;$$

$$\sin\theta=\theta-\frac{\theta^3}{3!}+\frac{\theta^5}{5!}-\cdots;$$

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots.$$

这样，

$$\begin{aligned}
e^{i\theta} &= 1 + \frac{i\theta}{1} + \frac{(i\theta)^2}{2!} + \cdots + \frac{(i\theta)^n}{n!} + \cdots \\
&= 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots + i\theta - \frac{i\theta^3}{3!} + \frac{i\theta^5}{5!} - \cdots \\
&= \left(1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \cdots\right) \\
&\quad + i\left(\theta - \frac{\theta^3}{3!} + \frac{\theta^5}{5!} - \cdots\right),
\end{aligned}$$

所以

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta.$$

因此，任一复数 $Z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 都可以表示为

$$Z = r \cdot e^{i\theta}.$$

复数的这种表示形式叫做复数的**指数形式**.

因为

$$\begin{aligned}
&(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1)(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\
&\quad = \cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2),
\end{aligned}$$

$$\frac{\cos\theta_1 + i\sin\theta_1}{\cos\theta_2 + i\sin\theta_2} = \cos(\theta_1 - \theta_2) + i\sin(\theta_1 - \theta_2),$$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos n\theta + i\sin n\theta,$$

所以有

$$e^{i\theta_1} \cdot e^{i\theta_2} = e^{i(\theta_1+\theta_2)},$$

$$\frac{e^{i\theta_1}}{e^{i\theta_2}} = e^{i(\theta_1-\theta_2)},$$

$$(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}.$$

说明把复数写成指数形式后，可以按照实数中的指数运

算法则进行乘、除、乘方等运算．对于 $e^{i\theta}$ 来说，我们仍把 e 叫做底，$i\theta$ 叫做指数，$e^{i\theta}$ 叫做幂．

例 1．把 $1+i$ 写成指数形式．

解：因为 $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$，

所以 $$1+i=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

当然，也可以是

$$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]$$
$$=\sqrt{2}\,e^{i\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)},\ (k\in J)$$

所以有

$$\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}}=\sqrt{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}+i2k\pi}.$$

由 $e^{z+2\pi i}=e^{z}\cdot e^{2\pi i}=e^{z}(\cos 2\pi+i\sin 2\pi)=e^{z}$，

如果把 e^{z} 看成是指数函数，那么它是以 $2\pi i$ 为周期的周期函数．

例 2．用 $e^{i\theta}$ 及 $e^{-i\theta}$ 表示 $\cos\theta$ 与 $\sin\theta$．

解：因为

$$\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}, \tag{1}$$
$$\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)=e^{-i\theta},$$

即

$$\cos\theta-i\sin\theta=e^{-i\theta}, \tag{2}$$

解由 (1) 和 (2) 组成的方程组，得

$$\cos\theta=\frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}, \tag{3}$$

$$\sin\theta=\frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}. \tag{4}$$

(3) 与 (4) 也叫做欧拉公式．

习　题　二

1. 把下列各复数写成三角形式和指数形式：

(1) 5；(2) $\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$；(3) $-1+\sqrt{3}i$；(4) $-1-i$.

2. 计算：

(1) $\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}\right)$；

(2) $\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}$.

3. 证明：$(\cos\theta-i\sin\theta)^n=\cos n\theta-i\sin n\theta$.

4. 用棣莫佛定理和复数相等的条件证明：

(1) $\cos 2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta$，$\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$；

(2) $\cos 3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta$，

$\sin 3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta$；

(3) $\cos n\theta=\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots$，

$\sin n\theta=C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta$

$+C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots$.

5. 证明：当 $n\geqslant 2$ 时，一切 n 次单位根的和等于零.

6. 设 α 是一个 n 次单位根，且 $\alpha\neq 1$，证明：

$$1+2\alpha+3\alpha^2+\cdots+n\alpha^{n-1}=-\frac{n}{1-\alpha}.$$

7. 在复平面内，点 Z 是复数 $Z=1+i$ 的对应点，用几何方法，求出下列复数的对应点：

(1) $Z+(2-3i)$；(2) $Z-(-3+4i)$.

8. 在复平面内，如果点 A 是复数 $1+\sqrt{3}i$ 的对应点，

(1) 把 OA 按逆时针方向旋转 $60°$ 得 OB，求点 B 所对应的复数；

(2) 把 OA 按顺时针方向旋转 $30°$ 得 OC，求点 C 所对应的复数；

(3) 把 OA 旋转 $180°$ 得 OA'，求点 A' 所对应的复数.

9. 求 $-i$ 的五次方根，并用复平面上的点表示它们.

10. 如果正三角形的两个顶点所对应的复数是 Z_1 和 Z_2，求第三个

顶点所对应的复数。

11. 如果从原点出发先沿 Ox 轴方向前进，每前进一个单位长度，就向左转 $30°$，求前进 6 个单位长度所到达之处与原点的距离。

附录三

1. 关于复数的概念. 目前，在中学课本中，还很少见到用有序实数对来规定复数定义的，一般是从解方程 $x^2+1=0$ 入手，规定 i 是 -1 的平方根，则有 $i^2=-1$. 并规定 i 与实数在一起可以按实数的运算律进行运算. 如 $-i$ 可以看成是 $(-1)i$，再由实数的乘积的幂的法则，有

$$(-i)^2=[(-1)i]^2=(-1)^2\cdot i^2=-1.$$

这样，$-i$ 也是 -1 的平方根，于是 $x^2+1=0$ 的解为 $\pm i$. i 与实数 b 相乘得 bi，再与实数 a 相加得 $a+bi$ 形式的数，从而定义 $a+bi$ 为复数.

这样安排的教材，严格来说是不够科学的，因为，引入新数以后，在新数集中还没有给出四则运算的定义，就先使用了运算符号和运算律. 但是，考虑到这样处理与以后所给出的运算定义并不发生矛盾，同时又便于学生接受，因此，作为中学教材还是可以的.

在给出 $a+bi$ 是复数之后，首先应使学生明确它是一个整体，表示一个数；其次应要求学生能够判断在什么条件下，它是实数、虚数、纯虚数，进而明确复数集包含实数集，虚数集包含纯虚数集.

两个复数相等的条件是经常要用到的，应使学生明确这是充要条件，即

如果 $a=c$，$b=d$，那么 $a+bi=c+di$；

反之，如果 $a+bi=c+di$，那么 $a=c$，$b=d$.

2. 复数不能比较大小. 如果复数体是有序数体，那么其中规定的"大于"关系应满足 (1) 三歧性；(2) 传递性；(3) 加法单调性；(4) 乘法单调性(见第四章 § 8). 就拿 i 与 0 来说，因为 $i\neq0$，根据三歧性应该有 $i>0$，或 $0>i$.

如果 $i>0$，由乘法单调性有 $i^2>0$，即 $-1>0$，再由乘法单调性有 $-i>0$，再由加法单调性有 $-i+i>0+i$，即 $0>i$，这样，由 $i>0$

导出了 $0>i$，与三歧性矛盾。

如果 $0>i$，由加法单调性有 $-i>0$，由乘法单调性有 $(-i)^2>0$，即 $-1>0$，再由乘法单调性有 $(-i)\cdot(-1)>0\cdot(-1)$，即 $i>0$ 也与三歧性矛盾。于是，$i=0$，$i>0$，$0>i$ 三者都不成立，可见复数体不是有序数体，两个复数之间不存在大小关系。

教学时，可不必这样严格地予以证明。仍以 i 与 0 为例进行比较，显然 $i\neq0$，如果说 $i>0$，当然就有 $i^2>0$，即 $-1>0$，与已知 $-1<0$ 矛盾；如果说 $i<0$，当然 $-i>0$，就有 $(-i)^2>0$，也得出荒谬的结论 $-1>0$。所以复数不能比较大小。

3．关于复数的绝对值． 学生往往发生 $|a+bi|=\sqrt{a^2+(bi)^2}$ 的错误。产生这种错误的原因，主要是不理解复数绝对值的概念。复数 Z 的绝对值(即模)的几何意义是 OZ 的距离（图 5-16)，这个距离是由 OM 的距离与 MZ 的距离，根据勾股定理求得的。表示距离的数(不考虑 0 的话)应当是正实数。在平面直角坐标系中，如果点 Z 的坐标为 (a, b)，OM 的距离不是 a，而是 $|a|$，MZ 的距离不是 b，而是 $|b|$，如 $(-2, 0)$ 点到纵轴的距离不是 -2 而是 $|-2|=2$。因此 OZ 的距离应当是 $\sqrt{|a|^2+|b|^2}$，但是，当 a 与 b 为实数时，因为

$$|a|^2=a^2,\quad |b|^2=b^2,$$

所以 OZ 的距离可用 $\sqrt{a^2+b^2}$ 来代替 $\sqrt{|a|^2+|b|^2}$。在复平面内，MZ 的距离应当是 $|bi|$，而 $|bi|=|b|$，这样就有

$$r=\sqrt{|a|^2+|bi|^2}=\sqrt{|a|^2+|b|^2}=\sqrt{a^2+b^2}.$$

4．关于复数的表示形式． 一般的中学课本中只给出复数的代数形

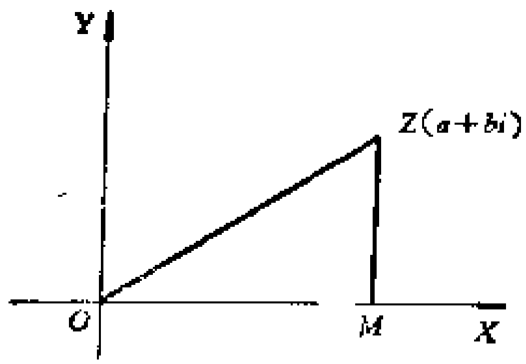


图 5-16

式与三角形式而不出现指数形式. 由于指数形式在一些科技书中特别是常在电工学中出现，因此，有的中学教材也介绍了指数形式. 但是由于对这部分知识的研究要涉及到复变函数的知识，所以教材中只能形式地给出复数的指数形式，而不能加以解释和深入地研究.

教学中应当要求学生能熟练地进行复数几种表示形式的互化.

当把代数形式化为三角形式时，因为幅角不是唯一的，所以所化成的三角形式也不是唯一的. 但是限定取幅角的主值时，那么化成的结果是唯一的. 如化 $\sqrt{3}+i$ 为三角形式，可为

$$\sqrt{3}+i=2\left[\cos\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+2k\pi\right)\right],\ (k\in J)$$

当限定取幅角的主值时，则为

$$\sqrt{3}+i=2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right).$$

教学时，要特别注意 $\cos\theta-i\sin\theta$ 的幅角并不是 θ，而是 $-\theta$. 即需把 $\cos\theta-i\sin\theta$ 变形为 $\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)$ 之后，才能求出幅角.

5. 关于复数的运算. 一般来说，复数的加减法用代数形式比较简便，复数的乘除法用三角形式或指数形式比较简便. 但是如果幅角不是特殊角，代数形式化为三角形式就比较困难，这时就不如用代数形式直接作乘除法. 如 $(2+3i)(3-4i)$，用代数形式直接计算，得出 $18+$

i，比化为三角形式再乘要简便得多.

因为在复数体内，一个数的 n 次方根应当有 n 个不同的值，如果仍

$$\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-b\pm\sqrt{-\Delta}i}{2a}.$$

但是，并没有解决 $\sqrt{-a}$ $(a>0)$ 表示什么，如果是 $\pm\sqrt{a}\ i$，就不是唯一的值．因此，还应规定：$\sqrt{-a}=\sqrt{a}i\ (a>0)$，

$$-\sqrt{-a}=-\sqrt{a}i\ (a>0).$$

这样，计算 $\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-6}$，应当得 $\sqrt{6}\ i\cdot\sqrt{6}\ i=6i^2=-6$．如果认为 $\sqrt{-6}\cdot\sqrt{-6}=\sqrt{(-6)(-6)}=\sqrt{36}=6$ 就错了．因为公式 $\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}$ 的条件是 $a\geqslant0$，$b\geqslant0$，现在根底数为 $-6<0$，这就不能使用这个公式。

同样，在使用实数集内成立的公式

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=\sqrt[n]{a^m}$$

时，也要注意它的条件限制：1）$a^m\geqslant0$（即 $a\geqslant0$，或 $a<0$，m 为偶数）；2）$a^m<0$（即 $a<0$，m 为奇数）时，n 与 p 必须都是奇数，这是因为

$$\sqrt[np]{a^{mp}}=-\sqrt[np]{(-a)^{mp}}=-\sqrt[n]{(-a)^m}=\sqrt[n]{a^m}.$$

因此 $\sqrt[6]{(-2)^2}\neq\sqrt[3]{-2}$ 和 $\sqrt[4]{(-2)^2}\neq\sqrt{-2}$，只能是

$$\sqrt[6]{(-2)^2}=\sqrt[6]{4}=\sqrt[6]{2^2}=\sqrt[3]{2}$$

和
$$\sqrt[4]{(-2)^2}=\sqrt[4]{4}=\sqrt{2}.$$

但是

$$\sqrt[9]{(-2)^3}=\sqrt[3]{-2}，因为\sqrt[9]{(-2)^3}=\sqrt[9]{-8}=-\sqrt[9]{8}$$
$$=-\sqrt[3]{2}=\sqrt[3]{-2}.$$

最后，还应使学生明确在复数体内，一元二次方程的求根公式，根与系数的关系等仍旧成立。

6．关于复数的几何解释．　有的教材是由向量引入虚数的，当然要先给出向量、向量的绝对值、向量的幅角以及向量相等的概念．然后通过实数与数轴上的点可以建立一一对应的关系，把实数看成是从原点出发的数轴上的向量，如图 5-17，实数 α 与向量 $\overrightarrow{OA}$ 对应，实数 $-\alpha$ 与向量 $\overrightarrow{OA'}$ 对应，它们的绝对值都是 $|\alpha|$，而它们的幅角主值分别是 $0°$ 与 $180°$．也就是说，$\overrightarrow{OA}$（或 $\overrightarrow{OA'}$）按逆时针方向旋转 $180°$ 得 $\overrightarrow{OA'}$（或

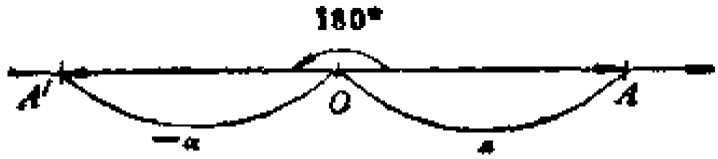


图 5-17

$\overrightarrow{OA'}$)，它们对应的实数是互为相反数。我们知道，实数 a 乘以 -1 就得到 a 的相反数，因此，对实数 a 用 -1 去乘，与对 a 所对应的向量按逆时针方向旋转 180° 所起的作用是一致的。而把一个向量旋转 180°，可以看成是旋转 90° 之后再转 90°，即(转 90°)^2。这样，定义某数 a 乘以 i 表示某数 a 所对应的向量按逆时针方向旋转 90° 所对应的数 ai，如图 5-18，再转 90°，就有 $ai\cdot i=ai^2=-a$，从而有 $i^2=-1$。这样就给出了 i 是新数，它所对应的向量的绝对值为 1，幅角为 90°。y 轴上所有的点都可以看成是 x 轴上的点旋转 90° 得到的，因此，y 轴上所有的数都是 bi 形式，把 x 轴叫实轴，y 轴叫虚轴，它是由所有纯虚数组成的，i 叫虚数单位。

再根据物理学中向量加法的平行四边形法则，对于任意实数 a 与纯虚数 bi 的和，它所对应的向量应为 $\overrightarrow{OP}$（图 5-19），这样，向量 $\overrightarrow{OP}$ 所对应的数为 $a+bi$，从而给出了复数 $a+bi$ 的形式，它与从原点出发的向量一一对应。

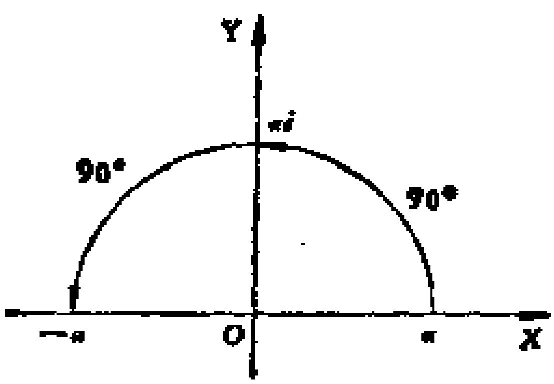


图 5-18

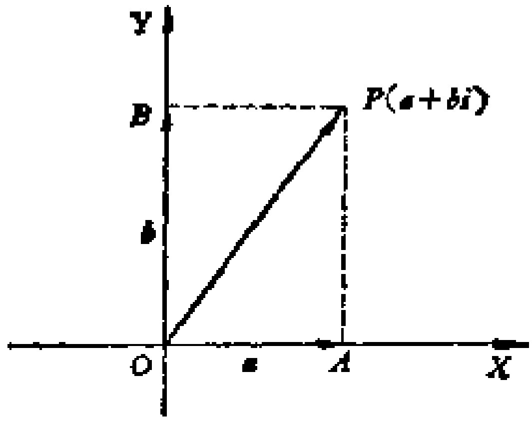


图 5-19

进一步再根据向量的加法法则，给出复数加法的定义。

关于复数的乘法，先由实数的乘法得出乘积所对应的向量的绝对值等于乘数所对应的向量的绝对值的积，为了满足数系扩充原则的要求，复数的乘法也应满足上述实数乘法所得的结论，即如果

$$\alpha = a + bi, \ \beta = c + di, \ \gamma = \alpha \cdot \beta,$$

那么

$$\begin{aligned} |\gamma| &= |\alpha| \cdot |\beta| = \sqrt{a^2 + b^2} \cdot \sqrt{c^2 + d^2} \\ &= \sqrt{(ac)^2 + (bd)^2 + (ad)^2 + (bc)^2} \\ &= \sqrt{(ac)^2 - 2(ac)(bd) + (bd)^2 + (ad)^2 + 2(ad)(bc) + (bc)^2} \\ &= \sqrt{(ac - bd)^2 + (ad + bc)^2}. \end{aligned}$$

因此，可定义

$$\gamma = (ac - bd) + (ad + bc)i.$$

如果定义 $\gamma = (ad + bc) + (ac - bd)i$，当 $b = 0, \ d = 0$ 时，

$$\gamma = aci \text{ 与 } \gamma = \alpha \cdot \beta = a \cdot c$$

矛盾.

又，在上式的推导过程中，也可得出

$$|\gamma| = \sqrt{(ac + bd)^2 + (ad - bc)^2}.$$

如果定义 $\gamma = (ac + bd) + (ad - bc)i$，当 $a = 0, \ c = 0$ 时，

$$\gamma = bd \text{ 与 } \gamma = \alpha \cdot \beta = bi \cdot di = bdi^2 = -bd$$

矛盾.

如果定义 $\gamma = (ad - bc) + (ac + bd)i$，当 $b=0, \ d=0$ 时，$\gamma = aci$，仍是矛盾的.

最后再由逆运算给出复数减法与除法的定义.

由向量引入复数能使学生确信复数是客观存在的，它的物理模型就是向量，而且可以进一步用多维向量来探求新数，有一定的优越性. 但是复数的运算与向量的运算并不一样，虽然复数的和、差与向量的和、差是一致的，而复数的积与向量的积则完全是两回事.

有些教材是通过复数与复平面上点的对应关系，对复数的运算给以几何解释(或叫几何意义)，这种说法比较贴切，也能起到给学生以复数的直观解释的作用.

× × ×

数的概念扩充到复数之后，能不能象由实数对 (a, b) 建立复数那

样，由三个实数组 (a, b, c)，四个实数组 (a, b, c, d)，… 建立新数，而把复数进一步扩充为超复数呢？这个问题从十九世纪的中叶就有许多数学家着手进行研究，并且到十九世纪末与二十世纪初研究了超复数的一般理论．但是任何一个超复数系都不能满足数体所要求的所有的条件，也就是说它不是数体．因此，新建立的超复数系必须放弃作为数体的要求的一个或几个条件．例如四元数就需放弃乘法交换律的要求．对于这些问题的讨论，已超出本书的范围，不再赘述．

习 题 解 答

第一章

习题一

1. (1) 是; (2) 不是; (3) 是; (4) 不是; (5) 是.

2. (1) $A=\{6,7,8,9\}$; (2) $B=\{27,24,21,18,15,12,9,6,3\}$;

(3) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$.

3. (1) $\{x|x=2n+1,\ n$ 为自然数$\}$;

(2) $\{x|x=5n,\ n$ 为自然数$\}$;

(3) $\{(x,y)|xy=6\}$;

(4) $\{x|0\leqslant x\leqslant 1\}$.

4. (1)正确; (2)不正确; (3)不正确; (4)不正确; (5)不正确; (6)正确; (7)不正确; (8)正确.

5. (1) 3, 4, 5, 6, 7; (2) 1, 2, 3, 4;

(3) 5, 6, 7; (4) a, b, c, d;

(5) 1, 2, 3, 4; (6) 1, 2.

6. (1) $\in$; (2) $\subset$; (3) $\notin$; (4) $\in$; (5) $\subseteq$.

7. A的子集为 ϕ, $\{a\}$, $\{b\}$, $\{c\}$, $\{d\}$, $\{a,b\}$, $\{a,c\}$, $\{a,d\}$, $\{b,c\}$, $\{b,d\}$, $\{c,d\}$, $\{a,b,c\}$, $\{a,b,d\}$, $\{a,c,d\}$, $\{b,c,d\}$, $\{a,b,c,d\}$.

B的所有子集的个数为 $2^6=64$.

8. 设 $x\in A$, 因为 $A\subset B$, 所以 $x\in B$, 且有 $y\notin A$, 而 $y\in B$. 又 $B\subset C$, 所以 $x\in C$, $y\in C$, 于是有 $A\subset C$.

9. (1) 因为{小于 10 的自然数}$=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$, 而{一位数的自然数}$=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$,所以二者相等.

(2) 因为 $\{x|x$ 是小于 15 且能被 3 整除的正数$\}=\{12,9,6,3\}$,所以二者相等.

(3) 设 $A=$\{等腰三角形\}, $B=$\{两内角相等的三角形\}. 设 x 为一三角形,且 $x\in A$, 那么 $x\in B$, 即 $A\subseteq B$; 又 $x\in B$, 则有 $x\in A$, 即 $A\supseteq B$, 所以 $A=B$.

(4) 因为 $x^2+x+2=0$ 在实数范围内无解,即

$$\{x|\ x\in R \text{ 且 } x^2+x+2=0\}$$

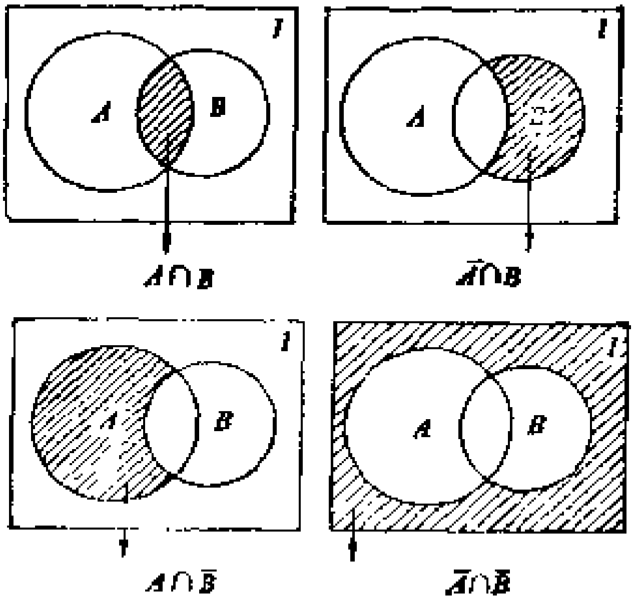
不含元素，所以它与$\varnothing$相等。

习题二

1.(1) $A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9\}$; (2) $A\cap B=\{8, 9\}$;
  (3) $A\setminus B=\{1, 3, 5\}$; (4) $\bar{C}=\{1, 2, 3, 4, 7, 9\}$;
  (5) $\overline{A\cup C}=\{2, 4, 7\}=\bar{A}\cap\bar{C}$;
  (6) $\overline{B\cap C}=\{1, 2, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}=\bar{B}\cup\bar{C}$;
  (7) $A\cup(B\cap C)=\{1, 3, 5, 6, 8, 9\}=(A\cup B)\cap(A\cup C)$;
  (8) $A\cap(B\cup C)=\{5, 8, 9\}=(A\cap B)\cup(A\cap C)$;
  (9) $(A\setminus C)\cup C=\{1, 3, 5, 6, 8, 9, 10\}=A\cup C$;
  (10) $(B\setminus C)\cap C=\varnothing$.

2. (1) ST; (2) ST; (3) AT; (4) AT; (5) NT;
  (6) AT; (7) AT; (8) NT.

3.



第 3 题

这四个集合的并集是全集 I.

4. 设 $A\nsubseteq B$, 则有 $x\in A$, 且 $x\notin B$, 因此 $A\setminus B$ 不空，与已知矛盾，所以 $A\subseteq B$.

5. 设 $x\in A$, 如果 $x\notin B$, 那么 $x\in\bar{B}$, 由已知 $\bar{A}\supseteq\bar{B}$, 可知 $x\in\bar{A}$, 即 $x\notin A$, 这与 $x\in A$ 相矛盾，所以 $x\in B$, 因此 $A\subseteq B$.

6. 设 $x\in A\cap(B\cup C)$, 那么 $x\in A$ 且 $x\in B\cup C$.

在 $x\in B\cup C$ 中，当 $x\in B$ 时，就有 $x\in A$, 且 $x\in B$, 所以 $x\in A\cap B$, 当

然 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$；当 $x\in C$ 时，就有 $x\in A$，且 $x\in C$，所以 $x\in A\cap C$，当然 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，于是

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

反之，设 $x\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，那么 $x\in A\cap B$ 或 $x\in A\cap C$，当 $x\in A\cap B$ 时，因为 $B\subseteq B\cup C$，所以 $x\in A\cap(B\cup C)$；当 $x\in A\cap C$ 时，因为 $C\subseteq B\cup C$，所以 $x\in A\cap(B\cup C)$，因而

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C),$$

因此，

$$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C).$$

7. (1) 如果 $x\in A$，因为 $A\subseteq B$，于是 $x\in B$，所以 $x\in\bar{A}\cup B$。又如果 $x\notin A$，那么 $x\in\bar{A}$，所以 $x\in\bar{A}\cup B$。于是 $\bar{A}\cup B=I$。

(2) 设 $x\in A$，因为 $\bar{A}\cup B=I$，所以 $x\in\bar{A}\cup B$，而 $x\notin\bar{A}$，所以 $x\in B$，因此 $A\subseteq B$。

8. 证明：

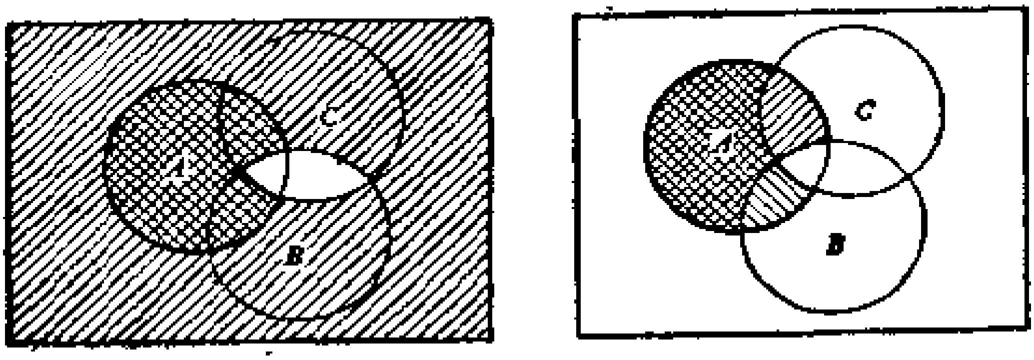
$A\cap\overline{B\cap C}$

$=\bar{\bar{A}}\cap\overline{B\cap C}$ $\quad(\bar{\bar{A}}=A)$

$=\overline{\bar{A}\cup(B\cap C)}$ $\quad$（德·摩根律）

$=\overline{(\bar{A}\cup B)\cap(\bar{A}\cup C)}$ $\quad$（并对交的分配律）

$=\overline{\bar{A}\cup B}\cup\overline{\bar{A}\cup C}.$ $\quad$（德·摩根律）



第8题

部分为 $\overline{B\cap C}$，

部分为 $A\cap\overline{B\cap C}$

部分为 $\overline{\bar{A}\cup B}$，

部分为 $\overline{\bar{A}\cup C}$。

9. (1) $\bar{A}\cap\bar{B}\cap\bar{C}=(\bar{A}\cap\bar{B})\cap\bar{C}=\overline{A\cup B}\cap\bar{C}$

$=\overline{(A\cup B)\cup C}=\overline{A\cup B\cup C}$；

(2) $\bar{A}\cup\bar{B}\cup\bar{C}=(\bar{A}\cup\bar{B})\cup\bar{C}=\overline{A\cap B}\cup\bar{C}$

$=\overline{(A\cap B)\cap C}=\overline{A\cap B\cap C}$。

习题三

1.(1) ①，③、(2) ②，④，(3)，(4)，(5) 都是单值对应；(1) ①，(2) ②，(3)，(4) 都是单射；(1) ③，(3)，(4)，(5) 都是满射；(3)，(4) 是一一对应。

2. f_1: $a\to 0$, $b\to 0$, $c\to 0$; f_2: $a\to 1$, $b\to 1$, $c\to 1$;

f_3: $a\to 1$, $b\to 0$, $c\to 0$; f_4: $a\to 0$, $b\to 1$, $c\to 0$;

f_5: $a\to 0$, $b\to 0$, $c\to 1$; f_6: $a\to 1$, $b\to 1$, $c\to 0$;

f_7: $a\to 1$, $b\to 0$, $c\to 1$; f_8: $a\to 0$, $b\to 1$, $c\to 1$.

$f_i(i=3, 4, \cdots, 8)$ 都是满射，但没有单射.

当 B 改为 $\{0, 1, 2\}$ 时，g_1: $a\to 0$, $b\to 1$, $c\to 2$; g_2: $a\to 0$, $b\to 2$, $c\to 1$; g_3: $a\to 1$, $b\to 2$, $c\to 0$; g_4: $a\to 1$, $b\to 0$, $c\to 2$; g_5: $a\to 2$, $b\to 0$, $c\to 1$; g_6: $a\to 2$, $b\to 1$, $c\to 0$, 都是单射、满射，所以 $g_i(i=1, 2, \cdots, 6)$ 都是一一对应.

3.(1)① $f: x\to x$; ② $f: x\to 1$; (2) 不能是满射；

(3) $g:\begin{cases} x\to x & (x<5), \\ x\to x-1 & (x=5); \end{cases}$

(4) 不能是单射.

4. $f: x\to -x$ $(x\in R$, 且 $x>0)$.

5. $f: x\to e^x$.

6. 令 $f: 1\to a$, $2\to b$, $3\to c$, $4\to d$, $5\to e$, 则 f 是一一对应，所以 $A\sim B$.

7. 令 $f: 2x\to 2x-1$, 其中 $x\in N$, 那么 f 是一一对应，所以 $A\sim B$.

8. 令 f: $x\to \dfrac{x}{1+x}$, 那么 f 是一一对应，所以 $M\sim N$.

9. 设 A 为有穷集，且 $A\subset B$. 如果 B 为有穷集，那么 B 与 A 不等价，因为有穷集不与它的真子集等价；如果 B 是无穷集，与它等价的真子集应为无穷集，而 A 为有穷集，所以 A 与 B 不等价.

10. 设 A, B 为两个有穷集，如果 A, B 之中有空集，或一个是另一个的子集，那么它们的并集显然是有穷集；如果 A, B 不空且 $A\not\supseteq B$，那么在 A 中添加一个属于 B 而不属于 A 的元素，所得的集合 A' 是有穷集；在 A' 中再添加一个这样的元素，所得的集合 A'' 仍是有穷集，这样继续下去，因为 B 是有穷集，所以添加 B 中的最后一个元素时，所得的集合 $A^{(k)}$ 就是 $A\cup B$，它仍是有穷集.

11. 设 $A\backslash B$ 不是无穷集，那么 $A\backslash B$ 是有穷集，而 $B\subset A$，所以有

$$(A\backslash B)\cup B=A.$$

又知 A 为无穷集，B 为有穷集，从而得到两个有穷集的并集为无穷集，与 10 题结论矛盾，所以 $A\backslash B$ 为无穷集.

习题四

1. 设 A 为可数集；从 A 中要减去的有限个元素组成集合 B，那么 B 为有穷

集. 于是 $A\setminus B$ 是无穷集，且 $(A\setminus B)\subset A$. 由定理 2 可知 $A\setminus B$ 是可数集.

2.(1)，(2)，(3)，(5) 都是可数集. (4)不是可数集.

3.设 $A=\{a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n, \cdots\}$ 是一个可数集，于是 $A\setminus\{a_1\}=A'$ 是 A 的真子集. 令 $f: A\to A'$, $a_n\to a_{n+1}$, 那么 f 是 A 到 A' 上的一一对应，所以 $A\sim A'$.

4.(1) 是；(2)不是；(3)是；(4)不是

5.交换律、结合律都成立. 有逆运算⊕，它的运算表为

⊕	0	1
0	0	1
1	1	0

对于运算⊗，交换律、结合律仍成立，但没有逆运算.

第二章

习题一

1.设 a, b 分别是有穷集合 A 与 B 的基数，由 $a<b$，得 $A\subset B$，所以 $B\supset A$，于是 $b>a$.

2.设有穷集合 A, B, C 的基数分别是 a，b，c，由 $a>b$，有 $A\supset B$，再由 $b>c$，有 $B\supset C$，所以 $A\supset C$，于是 $a>c$.

3.设 a, b, c 分别是有穷集合 A, B, C 的基数，由 $a>b$，$b=c$，有 $A\supset B$，$B=C$，所以 $A\supset C$，于是 $a>c$.

4.设 a, b 分别是有穷集合 A, B 的基数，

(1) 因为当 $A\supseteq B$ 时，$(A\setminus B)\cup B=A$，所以 $(a-b)+b=a$；

(2) 因为当 $A\cap B=\varnothing$ 时，$(A\cup B)\setminus B=A$，所以 $(a+b)-b=a$；

(3) $a+(b-c)=[a+(b-c)+c]-c$ （根据(2)题）

$=\{a+[(b-c)+c]\}-c$ （结合律）

$=(a+b)-c$； （根据(1)题）

(4) $(a-b)+c=\{[(a-b)+c]+(b-c)\}-(b-c)$ （根据(2)题）

$=\{(a-b)+[(b-c)+c]\}-(b-c)$

（结合、交换律）

$=[(a-b)+b]-(b-c)$ （根据(1)题）

$=a-(b-c)$； （根据(1)题）

(5) 因为 $[a-(b+c)]+c=a-[(b+c)-c]$ （根据(4)题）

$=a-b$， （根据(2)题）

所以

$$(a-b)-c=a-(b+c).$$

(6) 因为 $[(a-b)+(c-d)]+(b+d)$

$$\begin{aligned}
&=(a-b)+[(c-d)+(d+b)] && \text{(结合、交换律)}\\
&=(a-b)+\{[(c-d)+d]+b\} && \text{(结合律)}\\
&=(a-b)+(c+b) && \text{(根据(1)题)}\\
&=[(a-b)+b]+c && \text{(交换、结合律)}\\
&=a+c, && \text{(根据(1)题)}
\end{aligned}$$

所以

$$(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d).$$

5. $a(b_1+b_2+b_3)=(b_1+b_2+b_3)a$

$$\begin{aligned}
&=b_1a+b_2a+b_3a\\
&=ab_1+ab_2+ab_3.
\end{aligned}$$

习题二

1. $3+4=3+3'=(3+3)'$

$$\begin{aligned}
&=(3+2')'=((3+2)')'\\
&=((3+1')')'=(((3+1)')')'\\
&=((4')')'=(5')'=6'=7.
\end{aligned}$$

2. $2\cdot 3=2\cdot 2'=2\cdot 2+2$

$$=2\cdot 1'+2=2\cdot 1+2+2=2+2+2=6.$$

3. 当 $c=1$ 时，有 $(a+b)c=(a+b)\cdot 1=a+b,$

$$ac+bc=a\cdot 1+b\cdot 1=a+b,$$

所以，

$$(a+b)\cdot 1=a\cdot 1+b\cdot 1.$$

假设当 $c=k$ 时，等式成立，即有

$$(a+b)k=ak+bk.$$

这时，

$$\begin{aligned}
(a+b)k'&=(a+b)k+(a+b)\\
&=ak+bk+a+b\\
&=ak+a+bk+b\\
&=ak'+bk'.
\end{aligned}$$

所以 c 为任何自然数时，$(a+b)c=ac+bc$ 都成立.

4. 当 $c=1$ 时， 有 $a(bc)=a(b\cdot 1)=ab,\ (ab)c=(ab)\cdot 1=ab,$ 所以

$$a(b\cdot 1)=(ab)\cdot 1.$$

假设当 $c=k$ 时，等式成立，即有

$$a(bk)=(ab)k.$$

这时，

$$\begin{aligned} a(bk')&=a(bk+b)\\ &=a(bk)+ab=(ab)k+ab\\ &=(ab)k'. \end{aligned}$$

所以 c 为任何自然数时，$a(bc)=(ab)c$ 都成立。

5. 已知当 $n=2$ 时 $(a_1+a_2)b=a_1b+a_2b$ 成立，假设当 $n=k$ 时，等式成立，即有

$$(a_1+a_2+\cdots+a_k)b=a_1b+a_2b+\cdots+a_kb.$$

这时

$$\begin{aligned} &(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k'})b\\ =&[(a_1+a_2+\cdots+a_k)+a_{k'}]b\\ =&(a_1+a_2+\cdots+a_k)b+a_{k'}b\\ =&a_1b+a_2b+\cdots+a_kb+a_{k'}b. \end{aligned}$$

所以 n 为大于 1 的任何自然数时，

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)b=a_1b+a_2b+\cdots+a_nb$$

都成立。

6. 假设 $a\cdot b=0$，且 $a\neq0$，$b\neq0$，这时 a,b 为自然数，因此有

$$a\cdot b=\underbrace{a+a+\cdots+a}_{b\text{个}}\geqslant a$$

$$(\text{或 } a\cdot b=b\cdot a=\underbrace{b+b+\cdots+b}_{a\text{个}}\geqslant b),$$

于是有 $0\geqslant a$（或 $0\geqslant b$），这是不可能的，所以当 $a\cdot b=0$ 时，a,b 之中至少有一个为零。

7. 因为 $a>b$，$c>d$，所以有 $a=b+m$，$c=d+n$（m,n 为自然数）。于是

$$a+c=(b+m)+(d+n)=(b+d)+(m+n),$$

所以

$$a+c>b+d.$$

8. (1) 当 $a=0$ 时，有 $a+b=b$；当 $a\neq0$ 时，有 $a+b>b$，所以

$$a+b\geqslant b.$$

(2) 当 $c=0$ 时，有 $ac=0$，$bc=0$，所以 $ac=bc$；当 $c\neq0$ 时，那么 $c>0$，由 $a<b$ 有 $ac<bc$，所以当 $a<b$ 时，有 $ac\leqslant bc$。

9. $0\in M$，$1\in M$，但 $0-1\notin M$；$1\in M$，$2\in M$，但 $1\div2\notin M$。

第三章

习题一

1.由 $\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}$，得 $m_1n_2=m_2n_1$，即 $m_2n_1=m_1n_2$，从而有

$$\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1}{n_1}.$$

2.由 $\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2}{n_2}$ 及 $\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_3}{n_3}$，得

$$m_1n_2=m_2n_1 \text{ 及 } m_2n_3=m_3n_2,$$

所以

$$m_1n_2m_2n_3=m_2n_1m_3n_2,$$

即

$$m_1n_3(m_2n_2)=m_3n_1(m_2n_2),$$

所以

$$\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_3}{n_3}.$$

3.因为

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2},\quad \frac{m_2}{n_2}+\frac{m_1}{n_1}=\frac{m_2n_1+m_1n_2}{n_2n_1},$$

而

$$\frac{m_1n_2+m_2n_1}{n_1n_2}=\frac{m_2n_1+m_1n_2}{n_2n_1},$$

所以

$$\frac{m_1}{n_1}+\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_2}{n_2}+\frac{m_1}{n_1}.$$

4. $\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}=\frac{m_1m_2}{n_1n_2}=\frac{m_2m_1}{n_2n_1}=\frac{m_2}{n_2}\cdot\frac{m_1}{n_1}.$

5. $$\frac{m_1}{n_1}\left(\frac{m_2}{n_2}\cdot\frac{m_3}{n_3}\right)=\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2m_3}{n_2n_3}=\frac{m_1(m_2m_3)}{n_1(n_2n_3)}$$

$$=\frac{(m_1m_2)m_3}{(n_1n_2)n_3}=\frac{m_1m_2}{n_1n_2}\cdot\frac{m_3}{n_3}$$

$$=\left(\frac{m_1}{n_1}\cdot\frac{m_2}{n_2}\right)\cdot\frac{m_3}{n_3}.$$

6.当 $a=b$ 时，$\frac{a}{b}=\frac{a+k}{b+k}$；

当 $a>b$ 时，$\frac{a}{b}>\frac{a+k}{b+k}$；当 $a<b$ 时，$\frac{a}{b}<\frac{a+k}{b+k}$.

7.(1) $\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}-\frac{f}{e}\right)=\frac{a}{b}-\frac{ce-fd}{de}=\frac{ade-b(ce-fd)}{bde}$

$$=\frac{ade-bce+bfd}{bde},$$

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{f}{e}=\frac{ad-bc}{bd}+\frac{f}{e}=\frac{ade-bce+bdf}{bde},$$

所以

$$\frac{a}{b}-\left(\frac{c}{d}-\frac{f}{e}\right)=\frac{a}{b}-\frac{c}{d}+\frac{f}{e}.$$

(2)
$$\frac{a}{b}\div\left(\frac{c}{d}+\frac{f}{e}\right)=\frac{a}{b}\div\frac{ce}{df}=\frac{adf}{bce},$$

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{f}{e}=\frac{ad}{bc}\times\frac{f}{e}=\frac{adf}{bce},$$

所以

$$\frac{a}{b}\div\left(\frac{c}{d}\div\frac{f}{e}\right)=\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\times\frac{f}{e}.$$

(3)
$$\frac{a}{b}\div\left(\frac{c}{d}\times m\right)=\frac{a}{b}\div\frac{cm}{d}=\frac{ad}{bcm},$$

$$\left(\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\right)\div m=\frac{ad}{bc}\div m=\frac{ad}{bcm},$$

所以

$$\frac{a}{b}\div\left(\frac{c}{d}\times m\right)=\left(\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}\right)\div m.$$

(4) 因为 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，所以 $ad>bc$. 因而可以有 $adee>bcee$. 于是

$$adee+bfde>bcee+bfde,$$
$$(ae+bf)de>(ce+df)be,$$

即

$$\frac{ae+bf}{be}>\frac{ce+df}{de},$$

所以

$$\frac{a}{b}+\frac{f}{e}>\frac{c}{d}+\frac{f}{e}.$$

(5) 由 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，得

$$\frac{a}{b}+\frac{f}{e}>\frac{c}{d}+\frac{f}{e}.$$

又由 $\frac{f}{e}>\frac{g}{h}$，得

$$\frac{c}{d}+\frac{f}{e}>\frac{c}{d}+\frac{g}{h}.$$

所以

$$\frac{a}{b}+\frac{f}{e}>\frac{c}{d}+\frac{g}{h}.$$

(6) 由 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，得 $ad>bc$。 于是可以写 $adef>bcef$，即

$$(af)\cdot(de)>(cf)\cdot(be).$$

所以 $\frac{af}{be}>\frac{cf}{de}$，

即
$$\frac{a}{b}\cdot\frac{f}{e}>\frac{c}{d}\cdot\frac{f}{e}.$$

(7) 由 $\frac{a}{b}>\frac{c}{d}$，得 $\frac{a}{b}\cdot\frac{f}{e}>\frac{c}{d}\cdot\frac{f}{e}$，

由 $\frac{f}{e}>\frac{g}{h}$，得 $\frac{c}{d}\cdot\frac{f}{e}>\frac{c}{d}\cdot\frac{g}{h}$。

所以

$$\frac{a}{b}\cdot\frac{f}{e}>\frac{c}{d}\cdot\frac{g}{h}.$$

8. (4)，(5)，(7) 正确；(6) 改为 $\frac{a}{b}\cdot\frac{f}{e}\geqslant\frac{c}{d}\cdot\frac{f}{e}$。

习题二

1. $\frac{16}{75}$，$2\frac{11}{48}$ 不能，其余的都能。

2. $\frac{7}{10}$，$\frac{8}{25}$，$\frac{3}{50}$。

3. $\frac{1}{3}$，$\frac{2}{3}$，$\frac{1}{6}$，$\frac{5}{6}$，$\frac{1}{7}$，$\frac{2}{7}$，$\frac{3}{7}$，$\frac{4}{7}$，$\frac{5}{7}$，$\frac{6}{7}$，$\frac{1}{9}$，$\frac{2}{9}$，$\frac{4}{9}$，$\frac{5}{9}$，$\frac{7}{9}$，$\frac{8}{9}$。

4. 因为 $b>a$，设 $10a=b\cdot q_1+r_1$（不排除 $q_1=0$，下同），

$10r_1=bq_2+r_2$，$10r_2=bq_3+r_3$ $\cdots$，$10r_{n-1}=bq_n+r_n$。

则有

$$10^2a=10bq_1+10r_1=(10q_1+q_2)b+r_2,$$

$$10^3a=(10^2q_1+10q_2+q_3)b+r_3,$$

……

$$10^na=(10^{n-1}q_1+10^{n-2}q_2+\cdots+q_n)b+r_n. \qquad (1)$$

因为 $r_n=r_{n+m}$，而

$$10^{n+m}a=(10^{n+m-1}q_1+10^{n+m-2}q_2+\cdots+q_{n+m})b+r_{n+m}. \qquad (2)$$

于是 (2)−(1)，得

$$10^{n+m}a-10^na$$

$$=[(10^{n+m-1}-10^{n-1})q_1+(10^{n+m-2}-10^{n-2})q_2+\cdots+q_{n+m}]b.$$

所以 b 能整除 $10^n(10^m-1)a$。 但 b 不含 2,5 的因数，所以 b 与 10^n 互质，因此 b 能整除 $(10^m-1)a$。

5.设 $\frac{a}{b}$ 化为循环小数时，循环节最少的位数是 m，并且 10^ma 除以 b 所得的商为 q_m，余数为 r_m，则有

$$10^ma=q_mb+r_m. \ (r_m<b)$$

于是，有

$$10^ma-a=q_mb+r_m-a,$$

即

$$(10^m-1)a=q_mb+(r_m-a).$$

由第 4 题得知 $(10^m-1)a$ 能被 b 整除，而 q_mb 显然能被 b 整除，所以 r_m-a 能被 b 整除。 但 $r_m<b$，$a<b$，因此 $r_m-a=0$，即 $r_m=a$。这样，a 除以 b 与 r_m 除以 b 所得的商以及余数都分别相同，所以从小数第一位开始循环。

习题三

1. (1) -5; (2) 5 及 -5; (3) 0; (4) 0.

2.不正确，因为漏掉了零。

3.(1) 不对，因为当 a 为负或零时，$+a$ 为负或零；

(2) 不对，因为当 $a\leqslant 0$ 时，$-a\geqslant 0$；

(3) 不对，因为当 $a=0$ 时，$|a|=0$；

(4) 对。

4.(1) 有，$a<0$ 时，$-a<|a|$；(2) 有，$a=0$ 时，$a=|a|$；(3) 没有。

5.都不成立，各题应补充的条件：

(1) 当 $a>0$ 时；

(2) 当 $a<0$ 时；

(3) 当 $a\geqslant 0$ 时；

(4) 当 a,b 同号或同为零时；

(5) 当 $a>0$ 时；

(6) 当 a 为正数，且 $b>-a$ 时。

6. 如果 a,b 都是非负有理数，三岐性成立；

如果 $a<0$, $b\geq 0$, 显然有 $a<b$;

如果 $a\geq 0$, $b<0$, 显然有 $a>b$;

如果 $a<0$, $b<0$, 当 $|a|=|b|$ 时，$a=b$; 当 $|a|>|b|$ 时，有 $a<b$; 当 $|a|<|b|$ 时，有 $a>b$.

总之，a 与 b 之间或 $a>b$, 或 $a<b$, 或 $a=b$.

7. 设 $a>b$, 当 a,b 为非负有理数时，都有 $b<a$; 当 $a>0$, $b\leq 0$ 时，有 $b<a$; 当 $a=0$, $b<0$ 时，有 $b<a$; 当 $a<0$, $b<0$ 时，由 $a>b$, 有 $|a|<|b|$ 即 $|b|>|a|$, 所以 $b<a$.

即当 $a>b$ 时，对 a,b 所有可能的情况都有 $b<a$.

同样可以证明如果 $a<b$, 那么 $b>a$.

或用反证法证明，即如果 $b\not< a$, 由三岐性可知 $b=a$ 或 $b>a$. 如果 $b=a$ 就有 $a=b$ 与 $a>b$ 矛盾；如果 $b>a$, 已知 $a>b$, 由传递性，得 $a>a$, 与自反性矛盾.

8. 如果 a,b 同为正数，那么

$$|a+b|=a+b=|a|+|b|;$$

如果 a,b 同为负数，那么

$$|a+b|=-(a+b)=-a+(-b)=|a|+|b|.$$

9. 如果 $a=0$, 那么 $|a+b|=|b|=|a|+|b|$;

如果 $b=0$, 那么 $|a+b|=|a|=|a|+|b|$.

10. 不妨设 $a>0$, $b<0$. 当 $|a|>|b|$ 时，则有

$$|a+b|=|a|-|b|<|a|<|a|+|b|;$$

当 $|b|>|a|$ 时，则

$$|a+b|=|-(|b|-|a|)|=|b|-|a|<|b|<|a|+|b|;$$

当 $|a|=|b|$ 时，则

$$|a+b|=0<|a|+|b|.$$

11. $(a+c)-(b+c)=a-b>0$ (已知 $a>b$, 所以 $a-b>0$), 因此 $a+c>b+c$.

12. $(a-b)c=[a+(-b)]c=ac+(-bc)=ac-bc$.

13. (1) 由 $a<b$, 得 $a-b<0$, 又 $c>0$, 所以 $(a-b)c<0$, 即 $ac-bc<0$, 所以 $ac<bc$;

(2) 由 $c=0$, 那么 $(a-b)c=0$, 即 $ac-bc=0$, 所以 $ac=bc$;

(3) 由 $a<b$, 得 $a-b<0$, 又 $c<0$, 所以 $(a-b)c>0$, 即 $ac-bc>0$, 所以 $ac>bc$.

14. $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{b-a}{ab}$, 已知 $a>0$, $b>0$ 且 $a>b$, 所以 $ab>0$, $b-$

$a<0$，于是 $\frac{1}{a}-\frac{1}{b}<0$，即 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

15．$-\frac{a}{b}$，$\frac{-a}{b}$，$\frac{a}{b}$，三者的绝对值均为 $\frac{|a|}{|b|}$，当 a,b 同号时，三者均为负；当 a,b 异号时，三者均为正；当 $a=0$ 时，三者均为零．所以三者相等．

16.(1) 由 8，9，10 三题，得 $|a+b|\leqslant|a|+|b|$，所以有

$$|a-b|+|b|\geqslant|(a-b)+b|=|a|,$$

因此 $|a|-|b|\leqslant|a-b|$.

(2) 由 (1)，得 $|a|-|-b|\leqslant|a-(-b)|=|a+b|$，即

$$|a|-|b|\leqslant|a+b|.$$

17.各题都不成立，应补充的条件：

(1) a,b 不是相反数；(2) a,b 不是相反数（0除外）；(3) 同 (1)；(4) $a\neq0$；(5) $b>0$；(6) $c>0$.

18.(1) 当 $a-b>0$ 时，如果 $a\not>b$，那么 $a=b$ 或 $a<b$，但由 $a=b$，有 $a-b=0$；由 $a<b$，有 $a-b<0$ 都与 $a-b>0$ 矛盾，所以 $a>b$.(2)，(3) 可同样证明.

19. (1) $(a+c)-(b+d)=(a-b)+(c-d)$ 而 $a-b>0$，$c-d>0$，所以 $(a+c)-(b+d)>0$，因此 $a+c>b+d$.

(2) $(a-d)-(b-c)=(a-b)+(c-d)>0$，所以

$$a-d>b-c.$$

(3) 由 $c>d$，$d>0$，可知 $c>0$，又 $a>b$，$b>0$，于是 $ac>bc$，$bc>bd$，所以 $ac>bd$.

习题四

1.因为 $a-\frac{2a+b}{3}=\frac{a-b}{3}<0$（因为 $a-b<0$），所以 $a<\frac{2a+b}{3}$.又 $\frac{2a+b}{3}-b=\frac{2a-2b}{3}=\frac{2}{3}(a-b)<0$，所以 $\frac{2a+b}{3}<b$，于是

$$a<\frac{2a+b}{3}<b.$$

2.设 $M=\{x|x<a,\ x\in Q\}$，假设 $m\in M$ 且为最大的数，由

$$m<\frac{a+m}{2}<a,$$

而 $\frac{a+m}{2}$ 为有理数，所以 $\frac{a+m}{2}\in M$，但 $m<\frac{a+m}{2}$，与m 为最大矛盾.

3.可用反证法证明．与 2 题证法相似.

4.证法 1：任何正有理数都可用正分数形式表示，我们按以下方法来排列它

们:

(1) 按照分子与分母的和的大小，和较小的排在前边，和较大的排在后边，如果和相等时，分子大的排在前边；

(2) 分数值相等的分数，只保留最前边的一个．于是得到：

$\frac{1}{1}$, $\frac{2}{1}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{1}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{4}{1}$, $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{5}{1}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{6}{1}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{4}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{1}{6}$,…

显然，在这个排列里，每一个有理数都有它固定的位置，可以与自然数列建立一一对应关系，所以正有理数集为可数集．

证法 2. 因为有理数集为可数集，而正有理数集为有理数集的无穷子集，根据可数集的无穷子集仍是可数集的定理，可知正有理数集为可数集．

5. 设 $M=\{x:0<x<1,\ x\in Q\}$．而在 0 与 1 之间有无穷多个有理数，所以 M 是 Q 的无穷子集，但 Q 为可数集，所以 M 为可数集．

第四章

习题一

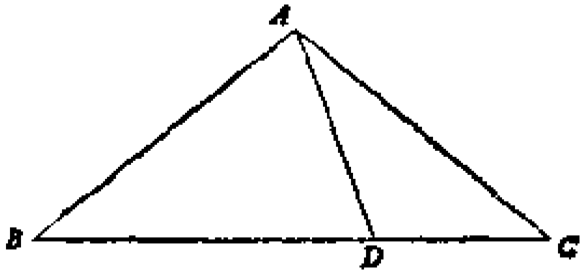
1. 设 $\sqrt{3}=\frac{n}{m}$ (m, n 互质)，那么 $3=\frac{n^2}{m^2}$，即 $3m^2=n^2$．于是 3 能整除 n，设 $n=3k$，那么 $3m^2=9k^2$，即 $m^2=3k^2$，由 m, n 互质，$n=3k$，可知 m，k 互质，所以 3 能整除 m． m，n 都能被 3 整除，与 m，n 互质矛盾，所以 $\sqrt{3}$ 不是有理数．

2. 如图，设 $\angle A=108°$，$AB=AC$，那么 $\angle B=\angle C=36°$． 在 BC 上截 $BD=AB$，连 AD，于是 $\angle BAD=\angle BDA=72°$，因之

$$\angle ADC=108°,\quad \angle DAC=36°,$$

$\triangle ADC$ 仍是顶角为 108° 的等腰三角形．

因为 $BC=BD+DC=AB+DC=AC+DC$，所以求原等腰三角形



第 2 题

(ABC) 腰 (AC) 与底 (BC) 的公度就是求新等腰三角形 (DAC) 腰 (DC) 与底 (AC) 的公度，继续下去，永远是求顶角为 $108°$ 的等腰三角形腰与底的公度，而无止境，所以它们无公度.

3. 设 $\alpha = a_0.a_1a_2\cdots$，$\beta = b_0.b_1b_2\cdots$，$\gamma = c_0.c_1c_2\cdots$. 因为 $\alpha < \beta$ 必有 $a_i < b_i$ 而 $a_j = b_j\ (j = 0, 1, 2, \cdots, i-1)$，同样 $\beta < \gamma$，

必有 $b_k < c_k$ 而 $b_l = c_l\ (l = 0, 1, 2, \cdots, k-1)$.

如果 $i = k$，那么 $a_i < c_k$ 且 $a_j = c_j$，所以 $\alpha < \gamma$；

如果 $i < k$，那么由 $a_i < b_i$，$b_i = c_i$，有 $a_i < c_i$ 且 $a_j = c_j$，所以 $\alpha < \gamma$；

如果 $i > k$，那么由 $a_k = b_k$，$b_k < c_k$，有 $a_k < c_k$，且 $a_l = c_l$，所以 $\alpha < \gamma$.

4. 不足近似值分别为 2.7，2.71，2.718，2.7182；过剩近似值分别为 2.8，2.72，2.719，2.7183.

5. $\pi = 3.14159265\cdots$，$\frac{22}{7} = 3.142857\cdots$，

它们之间的有理数可为：3.142；3.1425；3.1426；3.1427；3.1428. 它们之间的无理数可为 3.142114211142…；3.1420142001420001 42…；

3.142214222142…；3.142314241425142…；

3.142511425111425….

6. 如果从 $n = k$ 起，有 $b_k = b_{k+1} = b_{k+2}\cdots$，那么 $\beta = b_k$；

如果从 $n = k$ 起，以后各项不都相等，那么必定存在一个最大的整数，它小于 (2) 中所有的项，不然的话 (2) 就无界. 设这个最大的整数为 q_0，那么 (2) 中必有小于 $q_0 + 1$ 的项，不然的话 q_0 就不是小于 (2) 中所有项的最大的整数；在 q_0 与 $q_0 + 1$ 两个整数之间，取一位小数：

$$q_0 + \frac{1}{10},\ q_0 + \frac{2}{10}, \cdots,\ q_0 + \frac{9}{10},$$

于是必定存在一个最大的一位小数 $q_0 + \frac{q_1}{10}\ (q_1 = 0, 1, 2, \cdots, 9)$，它小于 (2) 中所有的项，而且 (2) 中有小于 $q_0 + \frac{q_1+1}{10}$ 的项；再在一位小数 $q_0.q_1$ 与 $q_0.\overline{(q_1+1)}$ 之间，取两位小数：

$$q_0.q_1 + \frac{1}{100},\ q_0.q_1 + \frac{2}{100}, \cdots,\ q_0.q_1 + \frac{9}{100},$$

于是必定存在一个最大的两位小数

$$q_0.q_1 + \frac{q_2}{100}\ (q_2 = 0, 1, 2, \cdots, 9),$$

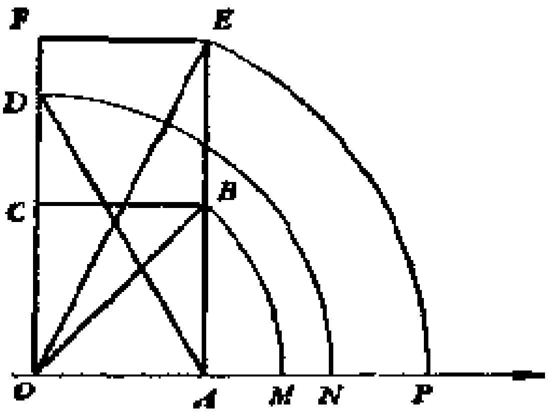
它小于(2)中所有的项，而且(2)中有小于 $q_0.q_1 + \frac{q_2+1}{100}$ 的项；

再在两位小数 $q_0.q_1q_2$ 与 $q_0.q_1(\overline{q_2+1})$ 之间取三位小数。如此继续作下去，必定存在一个最大的实数

$$\beta = q_0.q_1q_2\cdots q_n\cdots$$

它小于(2)中的任何一项。

7. 以单位线段 OA 为一边作正方形 $OABC$，在数轴上截 $OM=OB$，那么M点所对应的数为 $\sqrt{2}$；作直角 $\triangle OAD$，使 AD 等于2个单位，在数轴上截 $ON=OD$，那么N点所对应的数为 $\sqrt{3}$；作矩形 $OAEF$，使 AE 等于2个单位，在数轴上截 $OP=OE$，那么P点所对应的数为 $\sqrt{5}$。



第7题

8.(1) 是，确定的实数为1；(2)是，确定的实数为0；(3)是，确定的实数为1.

9.(1) 0；(2) 2；(3)无界。

10.因为

$$\alpha_1^- \leqslant \alpha_2^- \leqslant \alpha_3^- \leqslant \cdots \leqslant \alpha_n^- \leqslant \cdots,$$
$$\alpha_1^+ \geqslant \alpha_2^+ \geqslant \alpha_3^+ \geqslant \cdots \geqslant \alpha_n^+ \geqslant \cdots, \text{ 且 } \alpha>0,$$

所以

$$\frac{1}{\alpha_1^-} \geqslant \frac{1}{\alpha_2^-} \geqslant \frac{1}{\alpha_3^-} \geqslant \cdots \geqslant \frac{1}{\alpha_n^-} \geqslant \cdots,$$

$$\frac{1}{\alpha_1^+} \leqslant \frac{1}{\alpha_2^+} \leqslant \frac{1}{\alpha_3^+} \leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{\alpha_n^+} \leqslant \cdots.$$

又

$$\alpha_n^+ > \alpha_n^-,$$

所以

$$\frac{1}{\alpha_n^+}<\frac{1}{\alpha_n^-}.$$

而

$$\frac{1}{\alpha_n^-}-\frac{1}{\alpha_n^+}=\frac{\alpha_n^+-\alpha_n^-}{\alpha_n^-\alpha_n^+}<\varepsilon\quad(\because \alpha_n^+-\alpha_n^-<\alpha_n^-\alpha_n^+\cdot\varepsilon).$$

因此

$$\left[\frac{1}{\alpha_1^+},\ \frac{1}{\alpha_1^-}\right],\ \left[\frac{1}{\alpha_2^+},\ \frac{1}{\alpha_2^-}\right],\cdots\left[\frac{1}{\alpha_n^+},\ \frac{1}{\alpha_n^-}\right],\cdots$$

是退缩有理闭区间序列。

习题二

1．因为

$$[\alpha_n^-+\beta_n^-,\alpha_n^++\beta_n^+]=[\beta_n^-+\alpha_n^-,\beta_n^++\alpha_n^+],$$

所以

$$\alpha+\beta=\beta+\alpha.$$

2．因为

$$[\alpha_n^-(\beta_n^-\gamma_n^-),\ \alpha_n^+(\beta_n^+\gamma_n^+)]=[(\alpha_n^-\beta_n^-)\gamma_n^-,\ (\alpha_n^+\beta_n^+)\gamma_n^+],$$

所以

$$\alpha(\beta\gamma)=(\alpha\beta)\gamma.$$

3．因为

$$[\alpha_n^-(\beta_n^-+\gamma_n^-),\ \alpha_n^+(\beta_n^++\gamma_n^+)]=[\alpha_n^-\beta_n^-+\alpha_n^-\gamma_n^-,\ \alpha_n^+\beta_n^++\alpha_n^+\gamma_n^+],$$

所以

$$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma.$$

4．不是．例如 $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$；$\sqrt{2}-\sqrt{2}=0$；

$$\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=(\sqrt{2})^2=2;\quad \sqrt{2}\div\sqrt{2}=1.$$

5．用反证法．如果和不是无理数，那么就会有有理数与有理数的差为无理数，但有理数集对于减法是封闭的，所以一个有理数与一个无理数的和不可能是有理数，因而是无理数。

6．可仿上题证明。

7．因为 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2=5+2\sqrt{6}$，而 $5+2\sqrt{6}$ 是无理数，如果 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 为有理数，平方起来不会是无理数，所以 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ 是无理数。

8．由

$$\beta_1^-\leqslant\beta_2^-\leqslant\beta_3^-\leqslant\cdots\leqslant\beta_n^-\leqslant\cdots,$$
$$\beta_1^+\geqslant\beta_2^+\geqslant\beta_3^+\geqslant\cdots\geqslant\beta_n^+\geqslant\cdots,$$

得

$$\frac{1}{\beta_1^+}\leqslant\frac{1}{\beta_2^+}\leqslant\frac{1}{\beta_3^+}\leqslant\cdots\leqslant\frac{1}{\beta_n^+}\leqslant\cdots,$$

$$\frac{1}{\beta_1^-}\geqslant\frac{1}{\beta_2^-}\geqslant\frac{1}{\beta_3^-}\geqslant\cdots\geqslant\frac{1}{\beta_n^-}\geqslant\cdots.$$

由乘法定义，可知

$$\left[\alpha_1^-\cdot\frac{1}{\beta_1^+},\ \alpha_1^+\cdot\frac{1}{\beta_1^-}\right],\ \left[\alpha_2^-\cdot\frac{1}{\beta_2^+},\ \alpha_2^+\cdot\frac{1}{\beta_2^-}\right],\cdots$$

$$\cdots\left[\alpha_n^-\cdot\frac{1}{\beta_n^+},\ \alpha_n^+\cdot\frac{1}{\beta_n^-}\right],\cdots$$

是退缩有理闭区间序列，且确定唯一的实数 $\alpha\cdot\frac{1}{\beta}$，即 α 除以 β 的商。

9. 因为 $(\sqrt[n]{a})^n=a$，而 a 为自然数，所以由已知条件可知 $\sqrt[n]{a}$ 不是自然数。

假设 $\sqrt[n]{a}=\frac{q}{p}$ (p，q 互质，$p\neq1$)。那么

$$a=\frac{q^n}{p^n}.$$

说明 q^n 能被 p^n 整除，这与 $p\neq1$ 且 p,q 互质相矛盾，所以 $\sqrt[n]{a}$ 为无理数。

10. 因为当 $a>b$ 时 $\sqrt{(a-b)^2}=a-b$；

当 $a<b$ 时 $\sqrt{(a-b)^2}=b-a$。

所以由 $\sqrt{(a-b)^2}=\sqrt{(b-a)^2}$ 不能推出 $a-b=b-a$。事实上，当 $a>b$ 时，应为 $a-b=a-b$；当 $a<b$ 时应为 $b-a=b-a$。

习题三

1. 不是。因为两奇数之和或差都不是奇数。

2. 不是数体，也不是数环。因为无理数集，对于四则运算都不封闭。

3. 因为

$$(a+b\sqrt{3})\pm(c+d\sqrt{3})=(a\pm c)+(b\pm d)\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3});$$

$$(a+b\sqrt{3})(c+d\sqrt{3})=(ac+3bd)+(bc+ad)\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3});$$

$$\frac{a+b\sqrt{3}}{c+d\sqrt{3}}$$

$$=\frac{ac-3bd}{c^2-3d^2}+\frac{bc-ad}{c^2-3d^2}\sqrt{3}\in Q(\sqrt{3}).$$

(由 $c+d\sqrt{3}\neq 0$，可知 $c-d\sqrt{3}\neq 0$，所以 $c^2-3d^2\neq 0$.）所以 $Q(\sqrt{3})$ 是一个数体。

4.假设在 $[0,1]$ 中的无理数组成的集合是可数集，已知 $[0,1]$ 中的有理数组成的集合是可数集，这样就得到 $[0,1]$ 中的实数所组成的集合为可数集，但这是不可能的，因此问题得证。

习题四

1.(1) 设 $x=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，那么 x 满足方程 $2x-1=\sqrt{5}$，即满足方程

$$4x^2-4x-4=0,\ 即\ x^2-x-1=0,$$

所以 $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ 是代数数。

(2) 因为

$$\cos 60^\circ=\cos 3\times 20^\circ=4\cos^3 20^\circ-3\cos 20^\circ,$$

即

$$\frac{1}{2}=4\cos^3 20^\circ-3\cos 20^\circ,$$

即 $\cos 20^\circ$ 满足方程 $8x^3-6x-1=0$，所以 $\cos 20^\circ$ 是代数数。

(3) 因为

$$\sin 30^\circ=2\sin 15^\circ\cos 15^\circ=2\sin 15^\circ\sqrt{1-\sin^2 15^\circ},$$

即

$$\frac{1}{4}=4\sin^2 15^\circ(1-\sin^2 15^\circ),$$

$$16\sin^4 15^\circ-16\sin^2 15^\circ+1=0.$$

可见 $\sin 15^\circ$ 满足方程 $16x^4-16x^2+1=0$，所以 $\sin 15^\circ$ 是代数数。

(4) 因为 $\operatorname{tg}45^\circ=\operatorname{tg}2\times 22.5^\circ=\dfrac{2\operatorname{tg}22.5^\circ}{1-\operatorname{tg}^2 22.5^\circ}$，

即

$$1-\operatorname{tg}^2 22.5^\circ=2\operatorname{tg}22.5^\circ.$$

所以 $\operatorname{tg}22.5^\circ$ 满足方程 $x^2+2x-1=0$，它是代数数。

2.可用反证法证明。如证明 $\pi+2$ 是超越数，假设 $\pi+2$ 是代数数，那么 $\pi+2$ 满足方程

$$a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n=0,$$

即

$$a_0(\pi+2)^n+a_1(\pi+2)^{n-1}+\cdots+a_n=0.$$

将上式展开，合并同类项之后，得

$$b_0\pi^n + b_1\pi^{n-1} + \cdots + b_n = 0.$$

即 π 满足方程 $b_0x^n + b_1x^{n-1} + \cdots + b_n = 0$。那么 π 为代数数，这与已知 π 为超越数矛盾. 所以 $\pi+2$ 为超越数.

3.(1) $h=(3-1)+1=3$; (2) $h=(3-1)+2=4$;

(3) $h=(2-1)+1+1+1=4$;

(4) $h=(2-1)+1+1+1=4$;

(5) $h=(3-1)+4+3+2+1=12$.

4.因为 $2=(n-1)+|a_n|+|a_{n-1}|+\cdots+|a_0|$，

而 $a_n\neq0$，所以 $|a_n|\geqslant1$，

于是 $n-1\leqslant1$，即 $n\leqslant2$，所以 n 只有 1 和 2 两种可能.

当 $n=1$ 时，$2=(1-1)+|a_1|+|a_0|$，因为 $a_1\neq0$，所以有 $|a_1|=2$，$|a_0|=0$ 或 $|a_1|=|a_0|=1$，这时，方程为 $2x=0$; $x+1=0$;

$$x-1=0.$$

当 $n=2$ 时，$2=(2-1)+|a_2|+|a_1|+|a_0|$，因为 $a_2\neq0$，所以只有 $|a_2|=1$，$|a_1|=|a_0|=0$ 一种情况，这时，方程为 $x^2=0$。

第五章

习题一

1. (1) a 为无理数，$b\geqslant0$，且 $a\neq-\sqrt{b}$；或 a 为有理数，b 是正数但不是完全平方数；

(2) $b\geqslant0$;　(3) $b<0$;　(4) $a=0$, $b<0$.

2.(1) $(x+3y)+(2x-10y)i=5-6i$，所以，得

$\begin{cases}x+3y=5,\\2x-10y=-6.\end{cases}$ 解之，得 $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

(2) $\begin{cases}2x^2-5x+2=0,\\y^2-y-6=0,\end{cases}$ 解之，得

$$\begin{cases}x=2,\\y=-2;\end{cases}\quad\begin{cases}x=2,\\y=3;\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=-2;\end{cases}\quad\begin{cases}x=\dfrac{1}{2},\\y=3.\end{cases}$$

(3) $\begin{cases}x+y=7,\\xy=12,\end{cases}$ 解之，得 $\begin{cases}x=3,\\y=4;\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=3.\end{cases}$

(4) $\begin{cases}x^2-y^2=8,\\xy=3,\end{cases}$ 解之，得 $\begin{cases}x=3,\\y=1;\end{cases}$ $\begin{cases}x=-3,\\y=-1.\end{cases}$

3.(1) $[x^2+4xy-y^2, (y^2+4xy-x^2)i]$;

(2) 10;　(3) $2\sqrt{15}+43i$;　(4) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{\sqrt{15}}{4}i$.

4. $i^n+i^{n+1}+i^{n+2}+i^{n+3}=i^n(1+i+i^2+i^3)=i^n\cdot 0=0$.

5. 设 $\alpha=a+bi$, $\beta=c+di$, 那么 $\bar{\alpha}=a-bi$, $\bar{\beta}=c-di$.

$$\alpha+\beta=(a+c)+(b+d)i,\ \bar{\alpha}+\bar{\beta}=(a+c)-(b+d)i;$$

$$\alpha-\beta=(a-c)+(b-d)i,\ \bar{\alpha}-\bar{\beta}=(a-c)-(b-d)i;$$

$$\alpha\cdot\beta=(ac-bd)+(bc+ad)i,\ \bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}=(ac-bd)-(bc+ad)i;$$

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}+\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i,\ \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}=\frac{ac+bd}{c^2+d^2}-\frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$$

所以 $\bar{\alpha}+\bar{\beta}$, $\bar{\alpha}-\bar{\beta}$, $\bar{\alpha}\cdot\bar{\beta}$, $\frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$ 分别是 $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\cdot\beta$, $\frac{\alpha}{\beta}$ 的共轭复数.

习题二

1. (1) $5(\cos 0+i\sin 0)=5e^{i0}$; (2) $\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=e^{i\frac{5\pi}{3}}$;

(3) $2\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)=2e^{i\frac{2\pi}{3}}$;

(4) $\sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)=\sqrt{2}e^{i\frac{5\pi}{4}}$.

2. (1) $\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}$;

(2)
$$\frac{1+\cos\theta+i\sin\theta}{1+\cos\theta-i\sin\theta}=\frac{2\cos^2\frac{\theta}{2}+i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\cos^2\frac{\theta}{2}-i2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}$$
$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}}$$
$$=\cos\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}\right)$$
$$=\cos\theta+i\sin\theta.$$

3. 证: $(\cos\theta-i\sin\theta)^n=[\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)]^n$
$$=\cos(-n\theta)+i\sin(-n\theta)=\cos n\theta-i\sin n\theta.$$

4. (1) 因为
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos 2\theta+i\sin 2\theta,$$
又
$$(\cos\theta+i\sin\theta)^2=\cos^2\theta-\sin^2\theta+i2\sin\theta\cos\theta,$$

所以

$$\cos2\theta=\cos^2\theta-\sin^2\theta,\ \sin2\theta=2\sin\theta\cos\theta.$$

(2) 因为

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=\cos3\theta+i\sin3\theta,$$

又

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^3=(\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta)+i(3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta),$$

所以

$$\cos3\theta=\cos^3\theta-3\cos\theta\sin^2\theta,\ \sin3\theta=3\cos^2\theta\sin\theta-\sin^3\theta.$$

(3) $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta,$

又

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=(\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots)$$
$$+i(C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots)$$

所以

$$\cos n\theta=\cos^n\theta-C_n^2\cos^{n-2}\theta\sin^2\theta+C_n^4\cos^{n-4}\theta\sin^4\theta-\cdots$$
$$\sin n\theta=C_n^1\cos^{n-1}\theta\sin\theta-C_n^3\cos^{n-3}\theta\sin^3\theta+C_n^5\cos^{n-5}\theta\sin^5\theta-\cdots.$$

5. 设当 $n\geqslant2$ 时，n 次单位根为 $\varepsilon,\ \varepsilon^2,\ \varepsilon^3,\ \cdots,\ \varepsilon^n$，于是

$$S=\varepsilon+\varepsilon^2+\varepsilon^3+\cdots+\varepsilon^n=\varepsilon(1+\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}).$$

但 $\varepsilon^n=1$，所以

$$S=\varepsilon(\varepsilon+\varepsilon^2+\cdots+\varepsilon^{n-1}+\varepsilon^n)=\varepsilon\cdot S,$$

即 $(\varepsilon-1)S=0$． 但 $n\geqslant2$，所以 $\varepsilon\neq1$，因此 $S=0$．

6. 设

$$1+2\alpha+3\alpha^2+\cdots+n\alpha^{n-1}=P, \qquad (1)$$

(1)×α，得

$$\alpha+2\alpha^2+\cdots+(n-1)\alpha^{n-1}+n\alpha^n=\alpha\cdot P. \qquad (2)$$

(1)−(2)，得

$$1+\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^{n-1}-n\cdot\alpha^n=(1-\alpha)P.$$

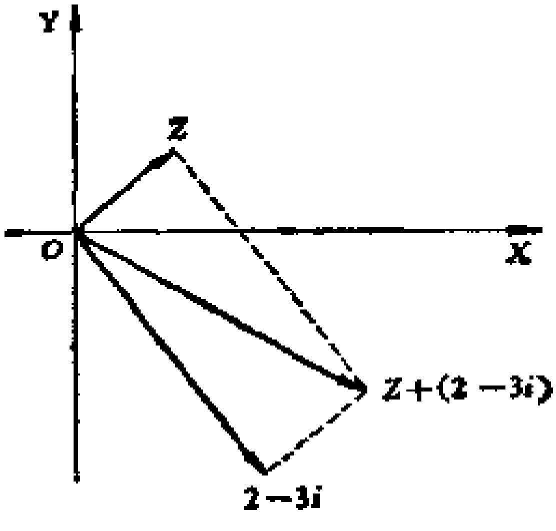
但 $\alpha^n=1$，

$$\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^n=0,$$

所以有

$$-n=(1-\alpha)P,$$

即 $$P=-\frac{n}{1-\alpha}.$$



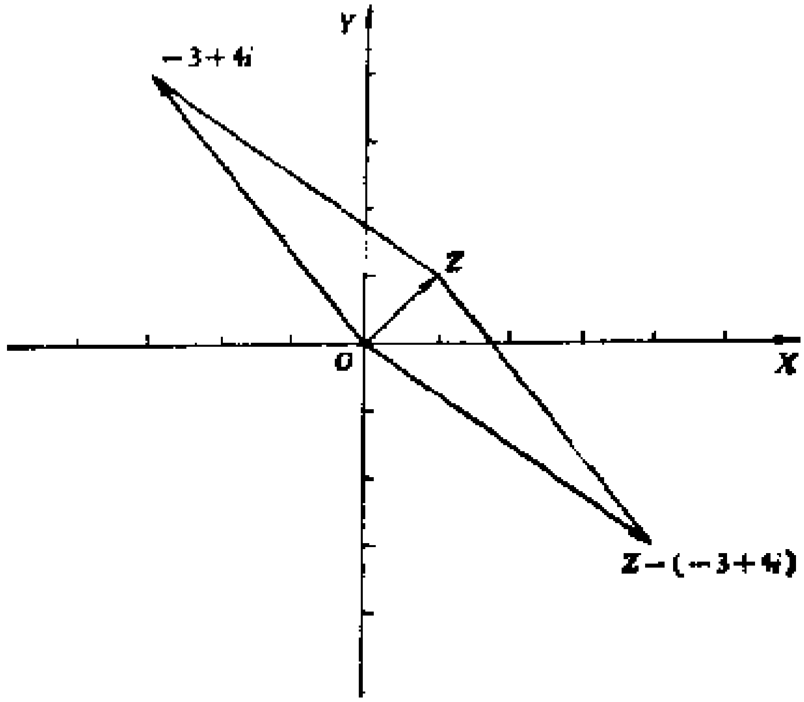
第 7 题 (1)

7.(1)

8. 复数 $1+\sqrt{3}i$ 的模为 2，幅角为 60°，

(1) B 点所对应的复数为

(2)



第 7 题 (2)

$$2[\cos(60^\circ+60^\circ)+i\sin(60^\circ+60^\circ)]$$

$$=2\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-1+\sqrt{3}i;$$

(2) C 点所对应的复数为

$$2[\cos(60^\circ-30^\circ)+i\sin(60^\circ-30^\circ)]$$

$$=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}\right)=\sqrt{3}+i.$$

(3) A' 点所对应的复数为 $-1-\sqrt{3}i$.

9. 因为 $-i=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}$, 所以 $-i$ 的五次方根为

$$\omega_0=\cos\frac{3\pi}{10}+i\sin\frac{3\pi}{10};$$

$$\omega_1=\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{2\pi}{5}\right)$$

$$=\cos\frac{7\pi}{10}+i\sin\frac{7\pi}{10};$$

$$\omega_2=\cos\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{4\pi}{5}\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{10}+\frac{4\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\frac{11\pi}{10} + i\sin\frac{11\pi}{10};$$

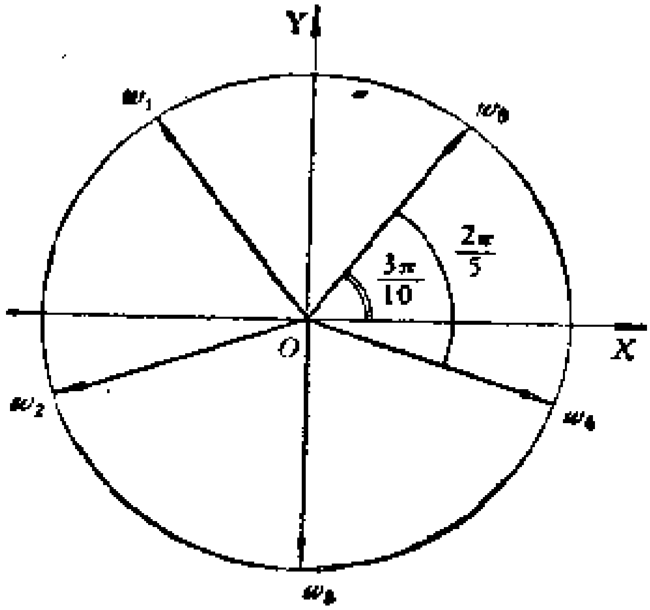
$$\omega_3 = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{6\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{6\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\frac{3\pi}{2} + i\sin\frac{3\pi}{2} = -i;$$

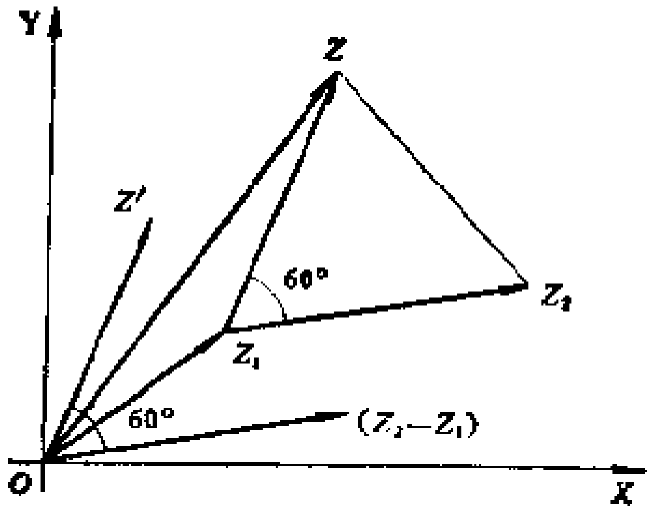
$$\omega_4 = \cos\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{8\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{10} + \frac{8\pi}{5}\right)$$

$$= \cos\frac{19\pi}{10} + i\sin\frac{19\pi}{10}.$$

如图所示。



第 9 题



第 10 题

10. 如图所示，设第三顶点为 Z，向量 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 所对应的复数为 Z_2-Z_1，它所对应的以原点为起点的向量为 $\overrightarrow{O(Z_2-Z_1)}$，把它按逆时针方向旋转60°得向量 $\overrightarrow{OZ'}$，Z' 所对应的复数为 $(Z_2-Z_1)(\cos60°+i\sin60°)$。又 $OZ'ZZ_1$ 为平行四边形，所以 Z 所对应的复数为 Z' 与 Z_1 所对应的复数的和，即为 $Z_1+(Z_2-Z_1)e^{i60°}$。

又，另一种情况是把 $\overrightarrow{Z_1Z_2}$ 按顺时针方向旋转60°得 $\overrightarrow{Z_1Z}$，这时 Z 所对应的复数为 $Z_1+(Z_2-Z_1)e^{i(-60°)}$。

11. 如图所示，Z_1 所对应的复数为1，Z_2 所对应的复数为

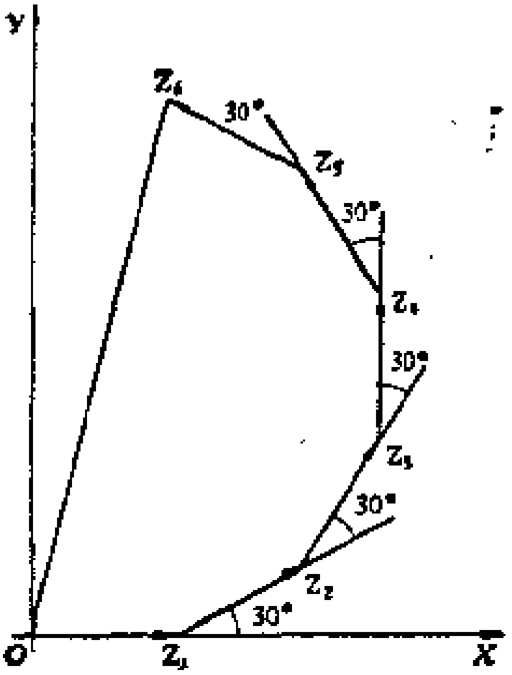
$$1+\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6},$$

即 $1+e^{i\frac{\pi}{6}}$，Z_3 所对应的复数为 $1+e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{\pi}{3}}$，…，所以 Z_6 所对应的复数为

$$1+e^{i\frac{\pi}{6}}+e^{i\frac{2\pi}{6}}+e^{i\frac{3\pi}{6}}+e^{i\frac{4\pi}{6}}+e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

$$=\frac{1-(e^{i\frac{\pi}{6}})^6}{1-e^{i\frac{\pi}{6}}}$$

$$=\frac{2}{1-\cos\frac{\pi}{6}-i\sin\frac{\pi}{6}}$$



第 11 题

$$=\frac{4}{(2-\sqrt{3})-i}=\frac{4[(2-\sqrt{3})+i]}{(2-\sqrt{3})^2+1}$$

$$=1+\frac{1}{2-\sqrt{3}}i=1+(2+\sqrt{3})i.$$

于是

$$|OZ_6|=\sqrt{1+(2+\sqrt{3})^2}=\sqrt{8+2\sqrt{12}}=\sqrt{2}+\sqrt{6}.$$