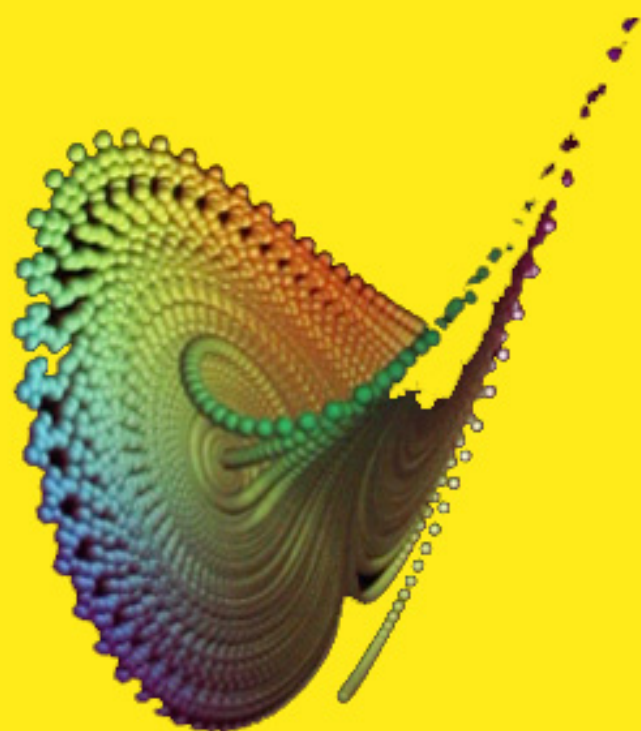


差分方程及其应用

葛渭高 李翠哲 王宏洲 著



科学出版社
www.sciencep.com

第一章 导论

迄今为止,我们所研究的变量基本上是属于连续变化的类型。但在经济管理或其它实际问题中,大多数变量是以定义在整数集上的数列形式变化的,银行中的定期存款按所设定的时间等间隔计息,国家财政预算按年制定等等,通常称这类变量为**离散型变量**。对这类变量,我们可以得到在不同取值点上的各离散变量之间的关系,如递推关系等。描述各离散变量之间关系的数学模型称为离散型模型,求解这类模型就可以得到各离散型变量的运行规律。本节将介绍在经济学和管理科学中最常见的一种离散型数学模型—**差分方程**。

内容分布图示

★ 引言	★ 差分的概念	★ 例 1-5
★ 差分方程的概念	★ 例 6	★ 例 7
★ 一阶常系数线性齐次差分方程		
★ 一阶常系数线性非齐次差分方程		
★ 例 9-14	★ 例 15	★ 例 16
★ 二阶常系数线性差分方程		
★ 二阶常系数线性齐次差分方程的通解		
★ 例 17	★ 例 18	★ 例 19
★ 二阶常系数线性非齐次差分方程的特解		★ 例 20-23
差分方程在经济学中的应用		
★ 模型 1	★ 模型 2	★ 模型 3
★ 内容小结	★ 课堂练习	
★ 习题 8-9	★ 返回	

内容要点:

一、 差分的概念与性质

一般地,在连续变化的时间范围内,变量 y 关于时间 t 的变化率是用 $\frac{dy}{dt}$ 来刻画的;

对离散型的变量 y , 我们常取在规定的区间上的差商 $\frac{\Delta y}{\Delta t}$ 来刻画变量 y 的变化率. 如果选择 $\Delta t = 1$, 则

$$\Delta y = y(t+1) - y(t)$$

可以近似表示变量 y 的变化率. 由此我们给出差分的定义.

定义 1 设函数 $y_t = y(t)$. 称改变量 $y_{t+1} - y_t$ 为函数 y_t 的**差分**, 也称为函数 y_t 的**一阶差分**, 记为 Δy_t , 即

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t \quad \text{或} \quad \Delta y(t) = y(t+1) - y(t).$$

一阶差分的差分称为**二阶差分** $\Delta^2 y_t$, 即

$$\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t$$

$$= (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t.$$

类似可定义三阶差分, 四阶差分, ……

$$\Delta^3 y_t = \Delta(\Delta^2 y_t), \quad \Delta^4 y_t = \Delta(\Delta^3 y_t), \quad \dots\dots$$

一般地, 函数 y_t 的 $n-1$ 阶差分的差分称为 **n 阶差分**, 记为 $\Delta^n y_t$, 即

$$\Delta^n y_t = \Delta^{n-1} y_{t+1} - \Delta^{n-1} y_t = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i y_{t+n-i}$$

二阶及二阶以上的差分统称为**高阶差分**.

差分的性质:

$$(1) \quad \Delta(Cy_t) = C\Delta y_t \quad (C \text{ 为常数});$$

$$(2) \quad \Delta(y_t \pm z_t) = \Delta y_t \pm \Delta z_t;$$

$$(3) \quad \Delta(y_t \cdot z_t) = z_t \Delta y_t + y_{t+1} \Delta z_t;$$

$$(4) \quad \Delta \left(\frac{y_t}{z_t} \right) = \frac{z_t \Delta y_t - y_t \Delta z_t}{z_{t+1} \cdot z_t} \quad (z_t \neq 0).$$

二、差分方程的概念

定义 2 含有未知函数 y_t 的差分的方程为**差分方程**.

差分方程的一般形式:

$$F(t, y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t, \dots, \Delta^n y_t) = 0$$

或

$$G(t, y_t, y_{t+1}, y_{t+2}, \dots, y_{t+n}) = 0.$$

差分方程中所含未知函数差分的最高阶数称为该**差分方程的阶**. 差分方程的不同形式可以互相转化.

定义 3 满足差分方程的函数称为该**差分方程的解**.

如果差分方程的解中含有相互独立的任意常数的个数恰好等于方程的阶数, 则称这个解为该差分方程的**通解**.

我们往往要根据系统在初始时刻所处的状态对差分方程附加一定的条件, 这种附加条件称为**初始条件**, 满足初始条件的解称为**特解**.

定义 4 若差分方程中所含未知函数及未知函数的各阶差分均为一次的, 则称该差分方程为**线性差分方程**.

线性差分方程的一般形式是

$$y_{t+n} + a_1(t)y_{t+n-1} + \dots + a_{n-1}(t)y_{t+1} + a_n(t)y_t = f(t)$$

其特点是 $y_{t+n}, y_{t+n+1}, \dots, y_t$ 都是一次的.

三、一阶常系数线性差分方程

一阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1} - Py_t = f(t) \quad (9.1)$$

其中, P 为非零常数, $f(t)$ 为已知函数. 如果 $f(t) = 0$, 则方程变为

$$y_{t+1} - Py_t = 0 \quad (9.2)$$

方程(9.2)称为一阶常系数线性齐次差分方程, 相应地, 方程(9.1)称为一阶常系数线性非齐次差分方程.

一阶常系数线性齐次差分方程的通解

一阶常系数线性非齐次差分方程

定理 1 设 \bar{y}_t 为方程(9.2)的通解, y_t^* 为方程(9.1)的一个特解, 则 $y_t = \bar{y}_t + y_t^*$ 为方程(9.1)的通解.

(1) $f(t) = C$ (C 为非零常数)

(2) $f(t) = Cb^t$ (C, b 为非零常数且 $b \neq 1$)

四、二阶常系数线性差分方程

二阶常系数线性差分方程的一般形式:

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = f(t) \quad (9.9)$$

其中 a, b 均为常数, 且 $b \neq 0$, $f(x)$ 是已知函数. 当 $f(x) = 0$ 时, 方程(9.9)变为

$$y_{t+2} + ay_{t+1} + by_t = 0 \quad (9.10)$$

方程(9.10)称为二阶常系数线性齐次差分方程, 相应地, 方程(9.9)称为二阶常系数线性非齐次差分方程.

定理 2 设 \bar{y}_t 为方程(9.10)的通解, y_t^* 为方程(9.9)的一个特解, 则 $y_t = \bar{y}_t + y_t^*$ 为方程(9.9)的通解.

二阶常系数线性齐次差分方程的通解

特征方程 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (9.11)$

二阶常系数线性非齐次差分方程的特解和通解

仅考虑方程(9.9)中的 $f(x)$ 取某些特殊形式的函数时的情形.

(1) $f(x) = P_m(t)$ (其中 $P_m(t)$ 是 t 的 m 次多项式), 方程(9.9)具有形如 $y_t^* = t^k R_m(t)$ 的特解,

其中 $R_m(t)$ 为 t 的 m 次待定多项式.

五、差分方程在经济学中的应用

采用与微分方程完全类似方法, 我们可以建立在经济学中的差分方程模型, 下面举例说明其应用.

1. “筹措教育经费”模型

某家庭从现在开始着手,从每月工资中拿出一部分资金存入银行,用于投资子女的教育,并计算 20 年后开始从投资账户中每月支取 1 000 元,直到 10 年后子女大学毕业并用完全部资金. 要实现这个投资目标, 20 年内要总共筹措多少资金? 每月要在银行存入多少钱? 假设投资的月利率为 0.5%, 为此, 设第 t 个月, 投资账户资金为 a_t , 每月存资金为 b 元, 于是 20 年后, 关于 a_t 的差分方程模型为

$$a_{t+1} = (1.005)a_t - 1000 \quad (9.11)$$

且 $a_{120} = 0, a_0 = x$.

二、价格与库存模型

本模型考虑库存与价格之间的关系

设 $P(t)$ 为第 t 个时段某类产品的价格, $L(t)$ 为第 t 个时段的库存量. \bar{L} 为该产品的合理库存量. 一般情况下, 如果库存量超过合理库存, 则该产品的售价要下跌, 如果库存量低于合理库存, 则该产品售价要上涨, 于是有方程

$$P_{t+1} - P_t = k(\bar{L} - L_t) \quad (9.13)$$

其中 k 为比例常数.

三、国民收入的稳定分析模型

本模型主要讨论国民收入与消费和积累之间的关系问题.

设第 t 期内的国民收入 y_t 主要用于该期内的消费 G_t , 再生产投资 I_t 和政府用于公共设施的开支 G (定为常数), 即有

$$y_t = C_t + I_t + G \quad (9.17)$$

又设第 t 期的消费水平与前一期的国民收入水平有关, 即

$$C_t = Ay_{t-1} \quad (0 < A < 1) \quad (9.18)$$

第 t 期的生产投资应取决于消费水平的变化, 即有

$$I_t = B(C_t - C_{t-1}) \quad (9.19)$$

由方程(9.17), (9.18), (9.19)合并整理得

$$y_t - A(1+B)y_{t-1} + BAy_{t-2} = G \quad (9.20)$$

于是, 对应 A, B, G 以及 y_0, y , 可求解方程, 并讨论国民收入的变化趋势和稳定性.

例题选讲:

差分的概念与性质

例 1 (讲义例 1) 设 $y_t = t^2$, 求 $\Delta(y_t), \Delta^2(y_t), \Delta^3(y_t)$.

例 2 (讲义例 2) 设 $t^{(n)} = t(t-1)(t-2)\cdots(t-n+1), t^{(0)} = 1$. 求 $\Delta t^{(n)}$.

例 3 (讲义例 3) 求 $y_t = t^2 \cdot 3^t$ 的差分.

例 4 设 $y = t^2 + 2t$, 求 $\Delta y_t, \Delta^2 y_t, \Delta^3 y_t$.

例 5 试改变差分方程 $\Delta^3 y_t + \Delta^2 y_t = 0$ 的形式.

差分方程的概念

例 6 (讲义例 4) 试确定下列差分方程的阶.

$$(1) y_{t+3} - y_{t-2} + y_{t-4} = 0; \quad (2) 5y_{t+5} + 3y_{t+1} = 7.$$

例 7 (讲义例 5) 指出下列等式哪一个是差分方程, 若是, 进一步指出是否为线性方程.

$$(1) -3\Delta y_t = 3y_t + a^t; \quad (2) y_{t+2} - 2y_{t+1} + 3y_t = 4.$$

一阶常系数线性差分方程

例 8 (讲义例 6) 求差分方程 $y_{t+1} - 3y_t = 0$ 的通解.

例 9 (讲义例 7) 求差分方程 $y_{t+1} - 3y_t = -2$ 的通解.

例 10 (讲义例 8) 求差分方程 $y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = 3\left(\frac{3}{2}\right)^t$ 在初始条件 $y_0 = 5$ 时的特解.

例 11 (讲义例 9) 求差分方程 $y_{t+1} - 4y_t = 3t^2$ 的通解.

例 12 求差分方程 $y_{t+1} + 4y_t = 3\sin \pi t$ 的通解.

例 13 求差分方程 $y_{t+1} - y_t = 3 + 2t$ 满足初始条件 $y_0 = 5$ 的特解.

例 14 (讲义例 10) 求差分方程 $y_{t+1} + 2y_t = t^2 + 4^t$ 的通解.

例 15 设某产品在时期 t 的价格, 供给量与需求量分别为 P_t, S_t 与 $D_t (t = 0, 1, 2, \dots)$. 1 当

1° $S_t = 2P_t + 1$, 2° $D_t = -4P_{t-1} + 5$, 3° $S_t = D_t$ 时, 求证

(1) 由 1°, 2°, 3° 推出差分方程 $P_{t+1} + 2P_t = 2$.

(2) 已知 P_0 , 求上述差分方程的解.

例 16 (讲义例 11) 在农业生产中, 种植先于产出及产品出售一个适当的时期, t 时期该产品的价格 P_t 决定着生产者在下一时期愿意提供市场的产量 S_{t+1} , P_t 还决定着本期该产品的需求量 Q_t , 因此有

$$Q_t = a - bP_t, \quad S_t = -c + dP_{t-1} \quad (a, b, c, d \text{ 均为正的常数})$$

求价格随时间变动的规律.

二阶常系数线性差分方程

例 17 (讲义例 12) 求差分方程 $y_{t+2} - 3y_{t+1} - 4y_t = 0$ 的通解.

例 18 (讲义例 13) 求差分方程 $y_{t+2} + 4y_{t+1} + 4y_t = 0$ 的通解.

例 19 (讲义例 14) 求差分方程 $y_{t+2} - 2y_{t+1} + 4y_t = 0$ 的通解.

例 20 求差分方程 $y_{t+2} + y_{t+1} - 2y_t = 12$ 的通解及 $y_0 = 0, y_1 = 0$ 的特解.

例 21 (讲义例 15) 求差分方程 $y_{t+2} + 3y_{t+1} - 4y_t = t$ 的通解.

例 22 (讲义例 16) 求差分方程 $y_{t+2} + 2y_{t+1} + y_t = 3 \cdot 2^t$ 的通解.

例 23 求差分方程 $y_{t+2} + y_{t+1} + \frac{1}{4}y_t = \left(-\frac{1}{2}\right)^t$ 的通解.

差分方程在经济学中的应用

课堂练习

1. 求差分方程 $y_{t+1} - y_t = t^2$ 的通解.

2. 求差分方程 $y_{t+2} + 3y_{t+1} - 4y_t = t$ 的通解.

3. 求差分方程 $y_{t+2} + y_{t+1} - 6y_t = 7 \times 5^t$ 的通解.

第二章 差分方程及其应用

在经济与管理及其它实际问题中,许多数据都是以等间隔时间周期统计的。例如,银行中的定期存款是按所设定的时间等间隔计息,外贸出口额按月统计,国民收入按年统计,产品的产量按月统计等等。这些量是变量,通常称这类变量为离散型变量。描述离散型变量之间的关系的数学模型成为离散型模型。对取值是离散化的经济变量,差分方程是研究他们之间变化规律的有效方法。

本章介绍差分方程的基本概念、解的基本定理及其解法,与微分方程的基本概念、解的基本定理及其解法非常类似,可对照微分方程的知识学习本章内容。

§1 基本概念 线性差分方程解的基本定理

一、基本概念

1、函数的差分

对离散型变量,差分是一个重要概念。下面给出差分的定义。

设自变量 t 取离散的等间隔整数: $t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, y_t 是 t 的函数,记作 $y_t = f(t)$ 。

显然, y_t 的取值是一个序列。当自变量由 t 改变到 $t+1$ 时,相应的函数值之差称为函数

$y_t = f(t)$ 在 t 的一阶差分,记作 Δy_t ,即

$$\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = f(t+1) - f(t)。$$

由于函数 $y_t = f(t)$ 的函数值是一个序列,按一阶差分的定义,差分就是序列的相邻值之差。当函数 $y_t = f(t)$ 的一阶差分为正值时,表明序列是增加的,而且其值越大,表明序列增加得越快;当一阶差分为负值时,表明序列是减少的。

例如:设某公司经营一种商品,第 t 月初的库存量是 $R(t)$,第 t 月调进和销出这种商品的数量分别是 $P(t)$ 和 $Q(t)$,则下月月初,即第 $t+1$ 月月初的库存量 $R(t+1)$ 应是

$$R(t+1) = R(t) + P(t) - Q(t),$$

若将上式写作

$$R(t+1) - R(t) = P(t) - Q(t),$$

则等式两端就是相邻两月库存量的改变量。若记

$$\Delta R(t) = R(t+1) - R(t),$$

并将理解为库存量 $R(t)$ 是时间 t 的函数,则称上式为库存量函数 $R(t)$ 在 t 时刻(此处 t 以月为单位)的差分。

按一阶差分的定义方式,我们可以定义函数的高阶差分。函数 $y_t = f(t)$ 在 t 的一阶差

分的差分为函数在 t 的二阶差分, 记作 $\Delta^2 y_t$, 即

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_t &= \Delta(\Delta y_t) = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = (y_{t+2} - y_{t+1}) - (y_{t+1} - y_t) \\ &= y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t.\end{aligned}$$

依次定义函数 $y_t = f(t)$ 在 t 的三阶差分为

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_t &= \Delta(\Delta^2 y_t) = \Delta^2 y_{t+1} - \Delta^2 y_t = \Delta y_{t+2} - 2\Delta y_{t+1} + \Delta y_t \\ &= y_{t+3} - 3y_{t+2} + 3y_{t+1} - y_t.\end{aligned}$$

一般地, 函数 $y_t = f(t)$ 在 t 的 n 阶差分定义为

$$\begin{aligned}\Delta^n y_t &= \Delta(\Delta^{n-1} y_t) = \Delta^{n-1} y_{t+1} - \Delta^{n-1} y_t \\ &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} y_{t+n-k}.\end{aligned}$$

上式表明, 函数 $y_t = f(t)$ 在 t 的 n 阶差分是该函数的 n 个函数值, $y_{t+n}, y_{t+n-1}, \cdots, y_t$ 的线性组合。

例 1 设 $y_t = t^2 + 2t - 3$, 求 $\Delta y_t, \Delta^2 y_t$ 。

解 $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t = [(t+1)^2 + 2(t+1) - 3] - (t^2 + 2t - 3) = 2t + 3$ 。

$$\begin{aligned}\Delta^2 y_t &= \Delta(\Delta y_t) = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t \\ &= [(t+2)^2 + 2(t+2) - 3] - 2[(t+1)^2 + 2(t+1) - 3] + t^2 + 2t - 3 = 2.\end{aligned}$$

2、差分方程的基本概念

先看例题。

设 A_0 是初始存款 ($t=0$ 时的存款), 年利率 $r(0 < r < 1)$, 如以复利计息, 试确定 t 年末的本利和 A_t 。

在该问题中, 如将时间 t (t 以年为单位) 看作自变量, 则本利和 A_t 可看作是 t 的函数:

$A_t = f(t)$ 。这个函数是要求的未知函数。虽然不能立即写出函数关系 $A_t = f(t)$, 但可以写出相邻两个函数值之间的关系式

$$A_{t+1} = A_t + rA_t, \quad (r = 0, 1, 2, \cdots), \quad (1-1)$$

如写作函数 $A_t = f(t)$ 在 t 的差分 $\Delta A_t = A_{t+1} - A_t$ 的形式, 则上式为

$$\Delta A_t = rA_t, \quad (r = 0, 1, 2, \dots), \quad (1-2)$$

由(1-1)式可算出 t 年末的本利和为

$$A_t = (1+r)^t A_0, \quad (r = 0, 1, 2, \dots)。 \quad (1-3)$$

在(1-1)式和(1-2)式中,因含有未知函数 $A_t = f(t)$,所以这是一个函数方程;又由于在方程(1-1)中含有两个未知函数的函数值 A_t 和 A_{t+1} ,在方程(1-2)中含有未知函数的差分 ΔA_t ,像这样的函数方程称为差分方程。在方程(1-2)中,仅含未知函数的函数值 $A_t = f(t)$ 的一阶差分,在方程(1-1)中,未知函数的下标最大差数是1,即 $(t+1)-t=1$,故方程(1-1)或方程(1-2)称为一阶差分方程。

(1-3)式是 A_t 在 t 之间的函数关系式,就是要求的未知函数,它满足差分方程(1-1)或(1-2),这个函数称为差分方程的解。

由上例题分析,差分方程的基本概念如下:

含有自变量,未知函数以及未知函数差分的函数方程,称为差分方程。

由于差分方程中必须含有未知函数的差分(自变量、未知函数可以不显含),因此差分方程也可称为含有未知函数差分的函数方程。

例如 $\Delta^2 y_t - 3\Delta y_t - 3y_t - t = 0$ 就是一个差分方程,按函数差分定义,任意阶的差分都可以表示为函数 $y_t = f(t)$ 在不同点的函数值的线性组合,因此上差分方程又可分别表示为 $y_{t+2} - 5y_{t+1} + y_t - t = 0$ 。正因如此,差分方程又可定义为

含有自变量和多个点的未知函数值的函数方程称为差分方程。差分方程中实际所含差分的最高阶数,称为差分方程的阶数。或者说,差分方程中未知函数下标的最大差数,称为差分方程的阶数。上方程为二阶差分方程。

n 阶差分方程的一般形式可表示为

$$\Phi(t, y_t, \Delta y_t, \Delta^2 y_t, \dots, \Delta^n y_t) = 0, \quad (1-4)$$

$$\text{或 } F(t, y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+n}) = 0, \quad (1-5)$$

由于经济学中经常遇到是形如(1-5)式的差分方程,所以以后我们只讨论由(1-5)式的差分方程。

若把一个函数 $y_t = \varphi(t)$ 代入差分方程中,使其成为恒等式,则称 $y_t = \varphi(t)$ 为差分方程的解。含有任意常数的个数等于差分方程的阶数的解,称为差分方程得通解;给任意常数以确定值的解,称为差分方程得特解。用以确定通解中任意常数的条件称为初始条件。

一阶差分方程的初始条件为一个,一般是 $y_0 = a_0$ (a_0 是常数);二阶差分方程的初始

条件为两个，一般是 $y_0 = a_0$ ， $y_1 = a_1$ (a_0, a_1 是常数)；依次类推。

二、线性差分方程解的基本定理

现在我们来讨论线性差分方程解的基本定理，将以二阶线性差分方程为例，任意阶线性差分方程都有类似结论。

二阶线性差分方程的一般形式

$$y_{t+2} + a(t)y_{t+1} + b(t)y_t = f(t), \quad (1-6)$$

其中 $a(t)$ ， $b(t)$ 和 $f(t)$ 均为 t 的已知函数，且 $b(t) \neq 0$ 。若 $f(t) \neq 0$ ，则 (1-6) 式称为二阶非齐次线性差分方程；若 $f(t) \equiv 0$ ，则 (1-6) 式称为

$$y_{t+2} + a(t)y_{t+1} + b(t)y_t = 0, \quad (1-7)$$

定理 1 若函数 $y_1(t)$ ， $y_2(t)$ 是二阶齐次线性差分方程 (1-7) 的解，则

$$y(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t),$$

也该方程的解，其中 C_1 、 C_2 是任意常数。

定理 2(齐次线性差分方程解的结构定理) 若函数 $y_1(t)$ ， $y_2(t)$ 是二阶齐次线性差分方程 (1-7) 的线性无关特解，则 $y_C(t) = C_1 y_1(t) + C_2 y_2(t)$ 是该方程的通解，其中 C_1 、 C_2 是任意常数。

定理 3(非齐次线性差分方程解的结构定理) 若 $y^*(t)$ 是二阶非齐次线性差分方程 (1-6) 的一个特解， $y_C(t)$ 是齐次线性差分方程 (1-7) 的通解，则差分方程 (1-6) 的通解为

$$y_t = y_C(t) + y^*(t)。$$

定理 4 (解的叠加原理) 若函数 $y_1^*(t)$ ， $y_2^*(t)$ 分别是二阶非齐次线性差分方程

$$y_{t+2} + a(t)y_{t+1} + b(t)y_t = f_1(t) \text{ 与 } y_{t+2} + a(t)y_{t+1} + b(t)y_t = f_2(t)$$

的特解，则 $y_1^*(t) + y_2^*(t)$ 是差分方程 $y_{t+2} + a(t)y_{t+1} + b(t)y_t = f_1(t) + f_2(t)$ 的特解。

§ 2 一阶常系数线性差分方程的迭代解法

一阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1} + ay_t = f(t), \quad (2-1)$$

其中常数 $a \neq 0$ ， $f(t)$ 为 t 的已知函数，当 $f(t)$ 不恒为零时，(2-1) 式称为一阶非齐次差分

方程; 当 $f(t) \equiv 0$ 时, 差分方程

$$y_{t+1} + ay_t = 0. \quad (2-2)$$

称为与一阶非齐次线性差分方程对应的一阶齐次差分方程。

下面给出差分方程 (2-2) 的迭代解法。

一、求齐次差分方程的通解

把方程 (2-2) 写作 $y_{t+1} = (-a)y_t$, 假设在初始时刻, 即 $t = 0$ 时, 函数 y_t 取任意常数

C 。分别以 $t = 0, 1, 2, \dots$ 代入上式, 得

$$y_1 = (-a)y_0 = C(-a),$$

$$y_2 = (-a)y_1 = C(-a)^2,$$

.....

$$y_t = (-a)^t y_0 = C(-a)^t, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

最后一式就是齐次差分方程 (2-2) 的通解。特别地, 当 $a = -1$ 时, 齐次差分方程 (2-2) 的通解为

$$y_t = C, \quad t = 0, 1, 2, \dots。$$

二、求齐次线性差分方程的通解

1、设 $f(t) = b$ 为常数

此时, 非齐次差分方程 (2-1) 可写作

$$y_{t+1} = (-a)y_t + b。$$

分别以 $t = 0, 1, 2, \dots$ 代入上式, 得

$$y_1 = (-a)y_0 + b$$

$$y_2 = (-a)y_1 + b = (-a)^2 y_0 + b[1 + (-a)]$$

$$y_3 = (-a)y_2 + b = (-a)^3 y_0 + b[1 + (-a) + (-a)^2]。 \quad (2-3)$$

.....

$$y_t = (-a)^t y_0 + b[1 + (-a) + (-a)^2 + \dots + (-a)^{t-1}]$$

若 $-a \neq 1$, 则由 (2-3) 式用等比级数求和公式, 得

$$y_t = (-a)^t y_0 + b \frac{1 - (-a)^t}{1 + a}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

或

$$y_t = (-a)^t (y_0 - \frac{b}{1+a}) + \frac{b}{1+a} = C(-a)^t + \frac{b}{1+a}, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $C = y_0 - \frac{b}{1+a}$ 为任意常数。

若 $-a=1$ ，则由 (2-3) 式，得

$$y_t = y_0 + bt = C + bt, \quad t = 0, 1, 2, \dots,$$

其中 $C = y_0$ 为任意常数。

综上所述，差分方程 $y_{t+1} + ay_t = b$ 的通解为

$$y = \begin{cases} C(-a)^t + \frac{b}{1+a}, & a \neq -1, \\ C + bt, & a = -1. \end{cases} \quad (2-4)$$

上述通解的表达式是两项之和，其中第一项是齐次差分方程 (2-2) 的通解，第二项是非齐次差分方程 (2-1) 的一个特解。

这里，当 $a \neq -1$ 时，由上式所确定的解序列 $y_t (t = 1, 2, \dots)$ 的特性作两点说明：

例 1 求解差分方程 $y_{t+1} - \frac{2}{3}y_t = \frac{1}{5}$ 。

解：由于 $a = -\frac{2}{3}$ ， $b = \frac{1}{5}$ ， $\frac{b}{1+a} = \frac{3}{5}$ 。由通解公式 (2-4)，差分方程的通解为

$$y_t = C\left(\frac{2}{3}\right)^t + \frac{3}{5}, \quad (C \text{ 为任意常数})。$$

2、 $f(t)$ 为一般情况

此时，非齐次差分方程可写作

$$y_{t+1} = (-a)y_t + f(t)。$$

分别以 $t = 0, 1, 2, \dots$ 代入上式，得

$$\begin{aligned} y_1 &= (-a)y_0 + f(0), \\ y_2 &= (-a)y_1 + f(1) = (-a)^2 y_0 + (-a)f(0) + f(1), \\ y_3 &= (-a)y_2 + f(2) = (-a)^3 y_0 + (-a)^2 f(0) + (-a)f(1) + f(2), \\ &\dots\dots\dots \\ y_t &= (-a)^t y_0 + (-a)^{t-1} f(0) + (-a)^{t-2} f(1) + \dots + (-a)f(t-2) + f(t-1) \\ &= C(-a)^t + \sum_{k=0}^{t-1} (-a)^k f(t-k-1)。 \end{aligned} \quad (2-5)$$

其中 $C = y_0$ 是任意常数。(2-5) 式就是非齐次差分方程 (2-1) 的通解。其中第一项是齐次差分方程 (2-2) 的通解，第二项是非齐次线性差分方程 (2-1) 的一个特解。

例 1 求差分方程 $y_{t+1} + y_t = 2^t$ 的通解。

解 由于 $a = 1$, $f(t) = 2^t$ 。由通解式 (2-5) 得非齐次线性差分方程的特解

$$y^*(t) = \sum_{k=0}^{t-1} (-1)^k 2^{t-k-1} = 2^{t-1} \sum_{k=0}^{t-1} \left(-\frac{1}{2}\right)^k = 2^{t-1} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^t}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{1}{3} 2^t - \frac{1}{3} (-1)^t,$$

于是, 所求通解为

$$y_t = C_1 (-1)^t + \frac{1}{3} 2^t - \frac{1}{3} (-1)^t = C (-1)^t + \frac{1}{3} 2^t。$$

其中 $C = C_1 - \frac{1}{3}$ 为任意常数。

§ 3 常系数线性差分方程

一、一阶常系数线性差分方程的解法

一阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1} + ay_t = f(t), \quad (3-1)$$

与一阶非齐次线性差分方程对应的一阶齐次差分方程为

$$y_{t+1} + ay_t = 0。 \quad (3-2)$$

1、求齐次线性差分方程的通解

为了求出一阶齐次差分方程 (3-2) 的通解, 由上节定理 2, 只要求出其非零的特解即可。注意到方程 (3-2) 的特点, y_{t+1} 是 y_t 的常数倍, 而函数 $\lambda^{t+1} = \lambda \cdot \lambda^t$ 恰满足这个特点。不妨设方程有形如下式的特解

$$y_t = \lambda^t,$$

其中 λ 是非零待定常数。将其代入方程 (3-2) 中, 有

$$\lambda^{t+1} + a\lambda^t = 0,$$

即

$$\lambda^t (\lambda + a) = 0。$$

由于 $\lambda^t \neq 0$, 因此 $y_t = \lambda^t$ 是方程 (3-2) 的解的充要条件是 $\lambda + a = 0$ 。所以 $\lambda = -a$ 时, 一阶齐次差分方程 (2) 的非零特解为

$$y_t = (-a)^t。$$

从而差分方程 (3-2) 通解为

$$y_c = C(-a)^t \quad (C \text{ 为任意常数})。$$

称一次代数方程 $\lambda + a = 0$ 为差分方程 (3-1) 或 (3-2) 的特征方程；特征方程的根为特征根或特征值。

由上述分析，为求出一阶齐次差分方程 (2) 的通解，应先写出其特征方程，进而求出特征根，写出其特解；最后写出其通解。

2、求非齐次线性差分方程的特解和通解

下面仅就函数 $f(t)$ 为几种常见形式用待定系数法求非齐次线性差分方程 (3-1) 的特解。

根据 $f(t)$ 的形式，按表 1 确定特解的形式，比较方程两端的系数，可得到特解 $y^*(t)$ 。

表 1:

$f(t)$ 的形式	确定待定特解的条件	待定特解的形式	
$\rho^t P_m(t)$ ($\rho > 0$) $P_m(t)$ 是 m 次多项式	ρ 不是特征根	$\rho^t P_m(t)$	$Q_m(t)$ 是 m 次多项式
	ρ 是特征根	$\rho^t t P_m(t)$	
$\rho^t (a \cos \theta t + b \sin \theta t)$ ($\alpha > 0$)	令 $\delta = \rho(\cos \theta t + i \sin \theta t)$	δ 不是特征根	$\rho^t (A \cos \theta t + B \sin \theta t)$
		δ 是特征根	$\rho^t t (A \cos \theta t + B \sin \theta t)$

说明：当 $f(t) = \rho^t (a \cos \theta t + b \sin \theta t)$ 时，因 ρ 和 θ 为已知，令 $\delta = \rho(\cos \theta t + i \sin \theta t)$ ，则可计算出 δ 。

例 1 求差分方程 $y_{t+1} + y_t = 2^t$ 的通解。

解：特征方程为 $\lambda + 1 = 0$ ，特征根 $\lambda = -1$ 。齐次差分方程的通解为

$$y_C = C(-1)^t。$$

由于 $f(t) = 2^t = \rho^t P_0(t)$ ， $\rho = 2$ 不是特征根。因此设非齐次差分方程特解形式为

$$y^*(t) = B2^t。$$

将其代入已知方程，有

$$B2^{t+1} + B2^t = 2^t，$$

解得 $B = \frac{1}{3}$ ，所以 $y^*(t) = \frac{1}{3}2^t$ 。于是，所求通解为

$$y_t = y_C + y^*(t) = C(-1)^t + \frac{1}{3}2^t，(C \text{ 为任意常数})。$$

例 2 求差分方程 $y_{t+1} + y_t = 3 + 2t$ 的通解。

解：特征方程为 $\lambda - 1 = 0$ ，特征根 $\lambda = 1$ 。齐次差分方程的通解为

$$y_C = C。$$

由于 $f(t) = 3 + 2t = \rho^t P_1(t)$, $\rho = 1$ 是特征根。因此非齐次差分方程的特解为

$$y^*(t) = t(B_0 + B_1 t)。$$

将其代入已知差分方程得

$$B_0 + B_1 + 2B_1 t = 3 + 2t，$$

比较该方程的两端关于 t 的同次幂的系数，可解得 $B_0 = 2$, $B_1 = 1$ 。故 $y^*(t) = 2t + t^2$ 。

于是，所求通解为

$$y_t = y_C + y^* = C + 2t + t^2, (C \text{ 为任意常数})。$$

例 3 求差分方程 $3y_t - 3y_{t-1} = t3^t + 1$ 的通解。

解：已知方程改写为 $3y_{t+1} - 3y_t = (t+1)3^{t+1} + 1$ ，即 $y_{t+1} - y_t = (t+1)3^t + \frac{1}{3}$ 。求解如下两个方程

$$y_{t+1} - y_t = 3^t(t+1), \quad (3-3)$$

$$y_{t+1} - y_t = \frac{1}{3}, \quad (3-4)$$

对方程 (3-3)：特征根 $\lambda = 1$, $f(t) = 3^t(t+1) = \rho^t P_1(t)$, $\rho = 3$ 不是特征根，设特解为 $y_1^*(t) = 3^t(B_0 + B_1 t)$ ，将其代入方程 (3-3) 有

$$3^{t+1}[B_0 + B_1(t+1)] - 3^t(B_0 + B_1 t) = 3^t(t+1),$$

可解得 $B_0 = -\frac{1}{4}$, $B_1 = \frac{1}{2}$ 。故 $y_1^*(t) = 3^t(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2}t)$ 。

对方程 (3-4)：特征根 $\lambda = 1$, $f(t) = \frac{1}{3} = \rho^t P_0(t)$, $\rho = 1$ 是特征根，设特解为 $y_2^*(t) = Bt$ 。

将其代入方程 (3-4) 解得 $B = \frac{1}{3}$ 。于是， $y_2^*(t) = \frac{1}{3}t$ 。

因此，齐次差分方程的通解为 $y_C(t) = C$ 。所求通解为

$$y_t = y_C + y_1^* + y_2^* = C + 3^t(\frac{1}{2}t - \frac{1}{4}) + \frac{1}{3}t, (C \text{ 为任意常数})。$$

例 4 求差分方程 $y_{t+1} - 3y_t = \sin \frac{\pi}{2}t$ 的通解。

解：因特征根 $\lambda = 3$ ，齐次差分方程的通解 $y_C = C3^t$ 。

$$f(t) = \sin \frac{\pi}{2} t = \rho^t (a \cos \theta + b \sin \theta), \quad a = 0, \quad b = 1, \quad \rho = 1, \quad \theta = \frac{\pi}{2}. \quad \text{令}$$

$$\delta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta) = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2} = i.$$

因为 $\delta = i$ 不是特征根, 设特解 $y^*(t) = A \cos \frac{\pi}{2} t + B \sin \frac{\pi}{2} t$ 。将其代入原方程有

$$A \cos \frac{\pi}{2} (t+1) + B \sin \frac{\pi}{2} (t+1) - 3(A \cos \frac{\pi}{2} t + B \sin \frac{\pi}{2} t) = \sin \frac{\pi}{2} t. \quad (3-5)$$

因为 $\cos \frac{\pi}{2} (t+1) = -\sin \frac{\pi}{2} t$, $\sin \frac{\pi}{2} (t+1) = \cos \frac{\pi}{2} t$, 将其代入 (3-5) 式, 并整理得

$$(B - 3A) \cos \frac{\pi}{2} t - (A + 3B) \sin \frac{\pi}{2} t = \sin \frac{\pi}{2} t.$$

比较上式两端的系数, 解得 $A = -\frac{1}{10}$, $B = -\frac{3}{10}$ 。故非齐次差分方程的特解

$$y^*(t) = -\frac{1}{10} \cos \frac{\pi}{2} t - \frac{3}{10} \sin \frac{\pi}{2} t.$$

于是, 所求通解为

$$y_t = y_C + y^* = C 3^t - \frac{1}{10} \cos \frac{\pi}{2} t - \frac{3}{10} \sin \frac{\pi}{2} t, \quad (C \text{ 为任意常数}).$$

二、二阶常系数线性差分方程的解法

二阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+2} + a y_{t+1} + b y_t = f(t), \quad (3-6)$$

其中 a, b 为已知常数, 且 $b \neq 0$, $f(t)$ 为已知函数。与方程 (7) 相对应的二阶齐次线性差分方程为

$$y_{t+2} + a y_{t+1} + b y_t = 0. \quad (3-7)$$

1、求齐次线性差分方程的通解

为了求出二阶齐次差分方程 (3-7) 的通解, 首先要求出两个线性无关的特解。与一阶齐次差分方程同样分析, 设方程 (3-7) 有特解

$$y_t = \lambda^t,$$

其中 λ 是非零待定常数。将其代入方程 (3-7) 式有

$$\lambda^t (\lambda^2 + a\lambda + b) = 0.$$

因为 $\lambda^t \neq 0$, 所以 $y_t = \lambda^t$ 是方程 (3-7) 的解的充要条件是

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0. \quad (3-8)$$

称二次代数方程 (3-8) 为差分方程 (3-7) 或 (3-8) 的特征方程, 对应的根称为特征根。

(1)、特征方程有相异实根 λ_1 与 λ_2

此时, 齐次差分方程 (3-7) 有两个特解 $y_1(t) = \lambda_1^t$ 和 $y_2(t) = \lambda_2^t$, 且它们线性无关。
于是, 其通解为

$$y_C(t) = C_1 \lambda_1^t + C_2 \lambda_2^t, \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

(2)、特征方程有同根 $\lambda_1 = \lambda_2$

这时, $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}a$, 齐次差分方程 (3-7) 有一个特解

$$y_1(t) = \left(-\frac{1}{2}a\right)^t,$$

直接验证可知 $y_2(t) = t\left(-\frac{1}{2}a\right)^t$ 也是齐次差分方程 (3-7) 的特解。显然, $y_1(t)$ 与 $y_2(t)$ 线性无关。于是, 齐次差分方程 (8) 的通解为

$$y_C(t) = (C_1 + C_2 t)\left(-\frac{1}{2}a\right)^t, \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

(3)、特征方程有共轭复根 $\alpha \pm i\beta$

此时, 直接验证可知, 齐次差分方程 (3-7) 有两个线性无关的特解

$$y_1(t) = r^t \cos \omega t, \quad y_2(t) = r^t \sin \omega t,$$

其中 $r = \sqrt{b} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$, ω 由 $\tan \omega = -\frac{1}{a}\sqrt{4b-a^2} \frac{\beta}{\alpha}$ 确定, $\omega \in (0, \pi)$ 。于是, 齐次差分方程 (3-7) 的通解为

$$y_C(t) = r^t (C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t), \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

例 5 求差分方程 $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 0$ 的通解。

解: 特征方程是 $\lambda^2 - 6\lambda + 9 = 0$, 特征根为二重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$, 于是, 所求通解为

$$y_C(t) = (C_1 + C_2 t)3^t, \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数}).$$

例 6 求差分方程 $y_{t+2} - 4y_{t+1} + 16y_t = 0$ 满足初值条件 $y_0 = 1, y_1 = 2 + 2\sqrt{3}$ 的特解。

解: 特征方程为 $\lambda^2 - 4\lambda + 16 = 0$, 它有一对共轭复根 $\lambda_{1,2} = 2 \pm 2\sqrt{3}i$ 。令

$r = \sqrt{16} = 4$, 由 $\tan \omega = -\frac{1}{a}\sqrt{4b-a^2} \frac{\beta}{\alpha}$, 得 $\omega = \frac{\pi}{3}$ 。于是原方程的通解为

$$y_C(t) = 4^t (C_1 \cos \frac{\pi}{3} t + C_2 \sin \frac{\pi}{3} t)。$$

将初值条件 $y_0 = 1, y_1 = 2 + 2\sqrt{3}$ 代入上式解得 $C_1 = 1, C_2 = 1$ 。于是所求特解为

$$y(t) = 4^t (\cos \frac{\pi}{3} t + \sin \frac{\pi}{3} t)。$$

2、求非齐次线性差分方程的特解和通解

利用待定系数法可求出 $f(t)$ 的几种常见形式的非齐次差分方程 (3-6) 的特解。如表 3

表 3

$f(t)$ 的形式	确定待定特解的条件	待定特解的形式	
$\rho^t P_m(t)$ ($\rho > 0$) $P_m(t)$ 是 m 次多项式	ρ 不是特征根	$\rho^t P_m(t)$	$Q_m(t)$ 是 m 次多项式
	ρ 是单特征根	$\rho^t t P_m(t)$	
	ρ 是 2 重特征根	$\rho^t t^2 P_m(t)$	
$\rho^t (a \cos \theta t + b \sin \theta t)$ ($\rho > 0$)	令 $\delta = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$	δ 不是特征根	$\rho^t (A \cos \theta t + B \sin \theta t)$
		δ 是单特征根	$\rho^t (A \cos \theta t + B \sin \theta t)$
		δ 是 2 重特征根	$\rho^t t^2 (A \cos \theta t + B \sin \theta t)$

例 7 求差分方程 $y_{t+2} - y_{t+1} - 6y_t = 3^t(2t+1)$ 的通解。

解：特征根为 $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 3$ 。

$f(t) = 3^t(2t+1) = \rho^t P_1(t)$, 其中 $m=1$, $\rho=3$ 。因 $\rho=3$ 是单根, 故设特解为

$$y^*(t) = 3^t t(B_0 + B_1 t)。$$

将其代入差分方程得

$$3^{t+2}(t+2)[B_0 + B_1(t+2)] - 3^{t+1}(t+1)[B_0 + B_1(t+1)] - 6 \cdot 3^t t(B_0 + B_1 t) = 3^t(2t+1),$$

$$\text{即 } (30B_1 t + 15B_0 + 33B_1)3^t = 3^t(2t+1)。$$

解得 $B_0 = -\frac{2}{25}$, $B_1 = \frac{1}{15}$, 因此特解为 $y^*(t) = 3^t t(\frac{1}{15}t - \frac{2}{25})$ 。所求通解为

$$y_t = y_C + y^* = C_1(-2)^t + C_2 3^t + 3^t t(\frac{1}{15}t - \frac{2}{25}), \quad (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})。$$

例 8 求差分方程 $y_{t+2} - 6y_{t+1} + 9y_t = 3^t$ 的通解。

解：特征根为 $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$ 。

$f(t) = 3^t = \rho^t P_0(t)$, 其中 $m=0$, $\rho=3$ 。因 $\rho=3$ 为二重根, 应设特解为

$$y^*(t) = Bt^2 3^t。$$

将其代入差分方程得 $B(t+2)^2 3^{t+2} - 6B(t+1)^2 3^{t+1} + 9Bt^2 3^t = 3^t$ ，解得 $B = \frac{1}{18}$ ，特解为

$$y^*(t) = \frac{1}{18} t^2 3^t。通解为$$

$$y_t = y_C + y^* = (C_1 + C_2 t) 3^t + \frac{1}{15} t^2 3^t, (C_1, C_2 \text{ 为任意常数})。$$

例 9 求差分方程 $y_{t+2} - 3y_{t+1} + 3y_t = 5$ 满足初值条件 $y_0 = 5, y_1 = 8$ 的特解。

解：特征根为 $\lambda_{1,2} = \frac{3}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2} i$ 。因为 $r = \sqrt{3}$ ，由 $\tan \omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$ ，得 $\omega = \frac{\pi}{3}$ 。所以齐次

差分方程的通解为

$$y_C(t) = (\sqrt{3})^t (C_1 \cos \frac{\pi}{6} t + C_2 \sin \frac{\pi}{6} t)。$$

$f(t) = 5 = \rho^t P_0(t)$ ，其中 $m = 0, \rho = 1$ 。因 $\rho = 1$ 不是特征根，故设特解 $y^*(t) = B$ 。将

其代入差分方程得 $B - 3B + 3B = 5$ ，从而 $B = 5$ 。于是所求特解 $y^*(t) = 5$ 。因此原方程通解为

$$y(t) = (\sqrt{3})^t (C_1 \cos \frac{\pi}{6} t + C_2 \sin \frac{\pi}{6} t) + 5。$$

将 $y_0 = 5, y_1 = 8$ 分别代入上式，解得 $C_1 = 0, C_2 = 2\sqrt{3}$ 。故所求特解为

$$y^*(t) = 2(\sqrt{3})^{t+1} \sin \frac{\pi}{6} t + 5。$$

§ 4 差分方程在经济学中的应用

一、筹措教育经费模型

某家庭从现在着手从每月工资中拿出一部分资金存入银行，用于投资子女的教育。并计划 20 年后开始从投资帐户中每月支取 1000 元，直到 10 年后子女大学毕业用完全部资金。要实现这个投资目标，20 年内共要筹措多少资金？每月要向银行存入多少钱？假设投资的月利率为 0.5%。

设第 n 个月投资帐户资金为 S_n 元，每月存入资金为 a 元。于是，20 年后关于 S_n 的差分方程模型为

$$S_{n+1} = 1.005 S_n - 1\,000。 \quad (4-1)$$

并且 $S_{120} = 0, S_0 = x$ 。

解方程 (4-1)，得通解

$$S_n = 1.005^n C - \frac{1000}{1-1.005} = 1.005^n C + 200\,000，$$

以及

$$\begin{aligned} S_{120} &= 1.005^{120} C + 200\,000 = 0, \\ S_0 &= C + 200\,000 = x, \end{aligned}$$

从而有

$$x = 200\,000 - \frac{200\,000}{1.005^{120}} = 90\,073.45。$$

从现在到 20 年内， S_n 满足的差分方程为

$$S_{n+1} = 1.005S_n + a, \quad (4-2)$$

且 $S_0 = 0, S_{240} = 90\,073.45$ 。

解方程 (4-2)，得通解

$$S_n = 1.005^n C + \frac{a}{1-1.005} = 1.005^n C - 200a,$$

以及

$$\begin{aligned} S_{240} &= 1.005^{240} C - 200a = 90\,073.45, \\ S_0 &= C - 200a = 0, \end{aligned}$$

从而有

$$a = 194.95。$$

即要达到投资目标，20 年内要筹措资金 90 073.45 元，平均每月要存入银行 194.95 元。

二、价格与库存模型

设 P_t 为第 t 个时段某类产品的价格， L_t 为第 t 个时产品的库存量， \bar{L} 为该产品的合理库存量。一般情况下，如果库存量超过合理库存，则该产品的价格下跌，如果库存量低于合理库存，则该产品的价格上涨，于是有方程

$$P_{t+1} - P_t = c(\bar{L} - L_t), \quad (4-3)$$

其中 c 为比例常数。由 (4-3) 式变形可得

$$P_{t+2} - 2P_{t+1} + P_t = -c(L_{t+1} - L_t)。 \quad (4-4)$$

又设库存量 L_t 的改变与产品销售状态有关，且在第 $t+1$ 时段库存增加量等于该时段的供求之差，即

$$L_{t+1} - L_t = S_{t+1} - D_{t+1}, \quad (4-5)$$

若设供给函数和需求函数分别为

$$S = a(P - \alpha), D = -b(P - \alpha) + \beta,$$

代入到 (4-5) 式得

$$L_{t+1} - L_t = (a+b)P_{t+1} - a\alpha - b\alpha,$$

再由 (4-4) 式得方程

$$P_{t+2} + [c(a+b) - 2]P_{t+1} + P_t = (a+b)\alpha. \quad (4-6)$$

设方程 (4-6) 的特解为 $P_t^* = A$ ，代入方程得 $A = \alpha$ ，方程 (4-6) 对应的齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 + [c(a+b) - 2]\lambda + 1 = 0,$$

解得 $\lambda_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - 1}$ ， $r = \frac{1}{2}[c(a+b) - 2]$ ，于是

若 $|r| < 1$ ，并设 $r = \cos \theta$ ，则方程 (4-6) 的通解为

$$P_t = B_1 \cos n\theta + B_2 \sin n\theta + \alpha.$$

若 $|r| > 1$ ，则 λ_1, λ_2 为两个实根，方程 (4-6) 的通解为

$$P_t = A_1 \lambda_1^n + A_2 \lambda_2^n + \alpha.$$

由于 $\lambda_2 = -r - \sqrt{r^2 - 1} < -r < -1$ ，则当 $t \rightarrow +\infty$ 时， λ_2^n 将迅速变化，方程无稳定解。

因此，当 $-1 < r < 1$ ，即 $0 < r + 1 < 2$ ，亦即 $0 < c < \frac{4}{a+b}$ 时，价格相对稳定。其中 a, b, c 为正常数。

三、动态经济系统的蛛网模型

在自由市场上你一定注意过这样的现象：一个时期由于猪肉的上市量远大于需求量时，销售不畅会导致价格下跌，农民觉得养猪赔钱，于是转而经营其它农副产品。过一段时间猪肉上市量减少，供不应求导致价格上涨，原来的饲养户觉得有利可图，又重操旧业，这样下一个时期会重新出现供大于求价格下跌的局面。在没有外界干预的条件下，这种现象将一直循环下去，在完全自由竞争的市场体系中，这种现象是永远不可避免的。由于商品的价格主要由需求关系来决定的，商品数量越多，意味需求量减少，因而价格越低。而下一个时期商品的数量是由生产者的供求关系决定，商品价格越低，生产的数量就越少。当商品数量少到一定程度时，价格又出现反弹。这样的需求和供给关系决定了市场经济中价格和数量必然是振荡的。有的商品这种振荡的振幅越来越小，最后趋于平稳，有的商品的振幅越来越大，最后导致经济崩溃。

现以猪肉价格的变化与需求和供给关系来研究上述振荡现象。

设第 n 个时期（长度假定为一年）猪肉的产量为 Q_n^s ，价格为 P_n ，产量与价格的关系为 $P_n = f(Q_n^s)$ ，本时期的价格又决定下一时期的产量，因此， $Q_{n+1}^d = g(P_n)$ 。这种产销关系可用下述过程来描述：

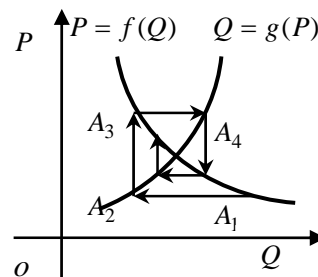


图 1：蛛网模型图

$$Q_1^s \rightarrow P_1 \rightarrow Q_2^s \rightarrow P_2 \rightarrow Q_3^s \rightarrow P_3 \rightarrow \cdots \rightarrow Q_n^s \rightarrow P_n \rightarrow \cdots,$$

设 $A_1 = (Q_1^s, P_1), A_2 = (Q_2^s, P_1), A_3 = (Q_2^s, P_2), A_4 = (Q_3^s, P_2) \cdots,$

$A_{2k-1} = (Q_k^s, P_k), A_{2k} = (Q_{k+1}^s, P_k)$ 。以产量 Q 和价格 P 分别作为坐标系的横轴和纵轴，绘出图 1。这种关系很象一个蜘蛛网，故称为蛛网模型。

对于蛛网模型，假定商品本期的需求量 Q_t^d 决定于本期的价格 P_t ，即需求函数为 $Q_t^d = f(P_t)$ ，商品本期产量 Q_t^s 决定于前一期的价格 P_{t-1} ，即供给函数为 $Q_t^s = g(P_{t-1})$ 。根据上述假设，蛛网模型可以用下述联立方程式来表示

$$\begin{cases} Q_t^d = \alpha - \beta P_t \\ Q_t^s = \lambda + \mu P_{t-1} \\ Q_t^d = Q_t^s \end{cases}$$

其中， $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ 均为常数且均大于零。

蛛网模型分析了商品的产量和价格波动的三种情况。现在只讨论一种情形：供给曲线斜率的绝对值大于需求曲线斜率的绝对值。即当市场由于受到干扰偏离原有的均衡状态以后，实际价格和实际产量会围绕均衡水平上下波动，但波动的幅度越来越小，最后会回复到原来的均衡点。

假设，在第一期由于某种外在原因的干扰，如恶劣的气候条件，实际产量由均衡水平 Q_e 减少为 Q_1 。根据需求曲线，消费者愿意支付 P_1 的价格购买全部的产量 Q_1 ，于是，实际价格上升为 P_1 。根据第一期较高的价格水平 P_1 ，按照供给曲线，生产者将第二期的产量增加为 Q_2 ；在第二期，生产者为了出售全部的

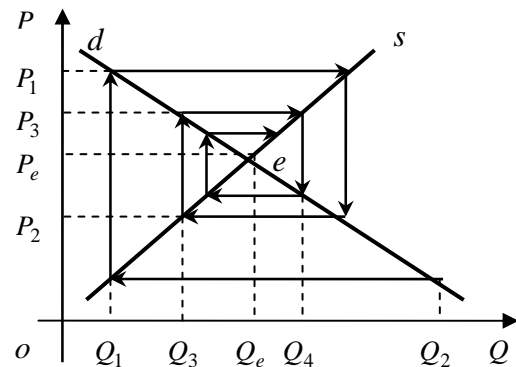


图 2：收敛型蛛网

产量 Q_2 ，接受消费者所愿意支付的价格 P_2 ，于是，实际价格下降为 P_2 。根据第二期的较低的价格水平 P_2 ，生产者将第三期的产量减少为 Q_3 ；在第三期，消费者愿意支付 P_3 的价格购买全部的产量 Q_3 ，于是，实际价格又上升为 P_3 。根据第三期较高的价格水平 P_3 ，生产者又将第四期的产量增加为 Q_4 。如此循环下去（如图 2 所示），实际产量和实际价格的波动幅度越来越小，最后恢复到均衡点 e 所代表的水平。

由此可见，图 2 中的均衡点 e 所代表的平衡状态是稳定的。也就是说，由于外在的原因，当价格和产量偏离平衡点 (P_e, Q_e) 后，经济制度中存在着自发的因素，能使价格和产

量自动地恢复均衡状态。产量和价格的变化轨迹形成了一个蜘蛛网似的图形，这就是蛛网模型名称的由来。

下面给出具体实例：

据统计，某城市 2001 年的猪肉产量为 30 万吨，价格为 6.00 元/公斤。2002 年生产猪肉 25 万吨，价格为 8.00 元/公斤。已知 2003 年的猪肉产量为 25 万吨，若维持目前的消费水平与生产方式，并假定猪肉产量与价格之间是线性关系。问若干年以后的产量与价格是否会趋于稳定？若稳定请求出稳定的产量和价格。

设 2001 年猪肉的产量为 x_1 ，猪肉的价格为 y_1 ，2002 年猪肉的产量为 x_2 ，猪肉的价格为 y_2 ，依此类推。根据线性假设，需求函数 $y = f(x)$ 是一条直线，且 $A_1(30,6)$ 和 $A_3(25,8)$ 在直线上，因此得需求函数为

$$y_n = 18 - \frac{2}{5}x_n \quad (n=1,2,3,\cdots), \quad (4-7)$$

供给函数 $x = g(y)$ 也是一条直线，且 $A_2(25,6)$ 和 $A_3(28,8)$ 在直线上，因此得供给函数为

$$x_{n+1} = 16 + \frac{3}{2}y_n \quad (n=1,2,3,\cdots), \quad (4-8)$$

将 (4-7) 式代入到 (4-8) 式得关于 x_n 的差分方程

$$x_{n+1} = 43 - \frac{3}{5}x_n. \quad (4-9)$$

利用迭代法解方程 (4-9)。于是有

$$x_{k+1} - x_k = \left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1}(x_2 - x_1),$$

所以

$$x_{n+1} - x_1 = \sum_{k=1}^n (x_{k+1} - x_k) = (x_2 - x_1) \sum_{k=1}^n \left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1},$$

从而

$$x_{n+1} = x_1 + (x_2 - x_1) \sum_{k=1}^n \left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1} = 30 - 5 \sum_{k=1}^n \left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1},$$

于是， $\lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = 30 - 5 \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{215}{8} = 26.875$ （万吨）。

类似于上述推导过程，得到关于 y_n 的表达式

$$y_{n+1} = y_1 + (y_2 - y_1) \sum_{k=1}^n \left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1} = 6 + 2 \sum_{k=1}^n \left(-\frac{3}{5}\right)^{k-1},$$

于是， $\lim_{n \rightarrow \infty} y_{n+1} = 6 + 2 \frac{1}{1 + \frac{3}{5}} = \frac{58}{8} = 7.25$ （元/公斤）。

若干年以后的产量与价格都会趋于稳定，其稳定的产量为 26.875（万吨），稳定的价格为 7.25（元/公斤）。

第三章 一阶常系数线性差分方程

一阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{t+1} + ay_t = f(t) \quad (11-2-1)$$

和

$$y_{t+1} + ay_t = 0, \quad (11-2-2)$$

其中 $f(t)$ 为 t 的已知函数, $a \neq 0$ 为常数.

我们称方程(11-2-1)为一阶常系数非齐次线性差分方程, (11-2-2)称为其对应的齐次差分方程.

一、齐次差分方程的通解

将方程(11-2-2)改写为:

$$y_{t+1} = -ay_t, \quad t=0, 1, 2, \dots$$

假定在初始时刻(即 $t=0$)时, 函数 y_t 取任意值 A , 那么由上式逐次迭代, 算得

$$\begin{aligned} y_1 &= -ay_0 = -aA, \\ y_2 &= -ay_1 = (-a)^2 A, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

由数学归纳法易知, 方程(11-2-2)的通解为

$$y_t = A(-a)^t, \quad t=0, 1, 2, \dots$$

如果给定初始条件 $t=0$ 时 $y_t = y_0$, 则 $A = y_0$, 此时特解为:

$$y_t = y_0(-a)^t. \quad (11-2-3)$$

二、非齐次方程的通解与特解

求非齐次方程(11-2-1)的通解的常用方法有迭代法、常数变易法, 求非齐次方程(11-2-1)的特解的常用方法为待定系数法.

1. 迭代法求通解

将方程(11-2-1)改写为

$$y_{t+1} = (-a)y_t + f(t), \quad t=0, 1, 2, \dots$$

逐步迭代, 则有

$$\begin{aligned} y_1 &= (-a)y_0 + f(0), \\ y^2 &= (-a)^2 y_0 + (-a)f(0) + f(1), \\ y^3 &= (-a)^3 y_0 + (-a)^2 f(0) + (-a)f(1) + f(2), \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

由数学归纳法, 可得

$$y_t = (-a)^t y_0 + (-a)^{t-1} f(0) + (-a)^{t-2} f(1) + \dots + f(t-1) = (-a)^t y_0 + \bar{y}_t, \quad (t=0, 1, 2, \dots), \quad (11-2-4)$$

其中

$$\bar{y}_t = (-a)^{t-1} f(0) + (-a)^{t-2} f(1) + \dots + f(t-1) = \sum_{i=0}^{t-1} (-a)^i \cdot f(t-i-1) \quad (11-2-5)$$

为方程(11-2-1)的特解. 而 $y_A(t) = (-a)^t y_0$ 为(11-2-1)对应的齐次方程(11-2-2)的通解. 这里 $y_0 = A$ 为任意常数. 因此, (11-2-4)式为非齐次方程(11-2-1)的通解.

与一阶非齐次线性微分方程相类似, 方程(11-2-1)的通解(11-24-)也可以由齐次方程(11-2-2)的通解(11-2-3)经由常数变易法求得, 这里不予赘述.

例 1 求差分方程 $y_{t+1} - \frac{1}{2}y_t = 2^t$ 的通解.

解 方程为一阶非齐次线性差分方程. 其中 $a = -\frac{1}{2}$, $f(t) = 2^t$. 于是由非齐次方程的特解公式(11-2-5)有

$$\begin{aligned}\bar{y}_t &= \sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot 2^{t-i-1} = 2^{t-1} \cdot \sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{1}{2}\right)^i \cdot 2^{-i} \\ &= 2^{t-1} \sum_{i=0}^{t-1} \left(\frac{1}{4}\right)^i = 2^{t-1} \cdot \frac{1 - \left(\frac{1}{4}\right)^t}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} (2^{2t} - 1).\end{aligned}$$

由(11-2-4)式, 得所给方程的通解

$$y_t = A \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}\right)^{t-1} (2^{2t} - 1) = \bar{A} \left(\frac{1}{2}\right)^t + \frac{1}{3} \cdot 2^{t+1},$$

这里 $\bar{A} = A - \frac{2}{3}$ 为任意常数.

2. 待定系数法求特解

迭代法虽然可直接推导出非齐次方程(11-2-1)的通解公式(11-2-4), 但是在实际应用中经常用公式(11-2-5)直接去求方程(11-1-1)的特解很不方便; 因此, 我们有必要去探寻求方程(11-2-1)的特解的别的方法. 与常微分方程相类似, 对于一些特殊类型的 $f(t)$, 常采用待定系数法去求方程(11-2-1)的特解, 而不是直接利用公式(11-2-5)求特解.

下面介绍经济学中常见的几类特殊 $f(t)$ 的形式及求其特解的待定系数法.

情形 I $f(t)$ 为常数.

这时, 方程(11-2-1)变为

$$y_{t+1} + ay_t = b, \quad (11-2-6)$$

这里 a, b 均为非零常数.

试以 $\bar{y}_t = \mu$ (μ 为待定常数)形式的特解代入方程(11-2-6), 得

$$\mu + a\mu = (1+a)\mu = b.$$

当 $a \neq -1$ 时, 可求得特解

$$\bar{y}_t = \frac{b}{1+a} \quad (a \neq -1),$$

当 $a = -1$ 时, 这时改设特解 $\bar{y}_t = \mu t$ (μ 为待定系数), 将其代入方程(11-2-6), 得

$$\mu(t+1) + a\mu t = (1+a)\mu t + \mu = b,$$

因 $a = -1$, 故求得特解

$$\bar{y}_t = bt \quad (a = -1).$$

综上所述, 方程(11-2-6)的通解为

$$y_t = y_A(t) + \bar{y}_t = \begin{cases} A(-a)^t + \frac{b}{1+a}, & a \neq -1, \\ A + bt, & a = -1, \end{cases} \quad (11-2-7)$$

其中 A 为任意常数.

例 2 求差分方程 $y_{t+1}-2y_t=5$ 的通解.

解 因 $a=-2 \neq -1, b=5$, 故由通解公式(11-2-7), 得原方程的通解为

$$y_t = A \cdot 2^t - 5, \quad A \text{ 为任意常数.}$$

例 3 求差分方程 $y_{t+1}-y_t=-5$ 满足初始条件 $y_0=1$ 的通解.

解 因 $a=-1, b=-5$, 则由通解公式(11-2-7), 得原方程的通解为

$$y_t = A - 5t,$$

以 $t=0, y_0=1$ 代入通解之中, 求得 $A=1$. 于是, 所求方程的特解为

$$y_t = 1 - 5t.$$

情形 II $f(t)$ 为 t 的多项式.

为讨论简便起见, 不妨设 $f(t)=b_0+b_1t$ (t 的一次多项式), 即考虑差分方程

$$y_{t+1}+ay_t=b_0+b_1t, \quad t=1, 2, \cdots, \quad (11-2-8)$$

其中 a, b_0, b_1 均为常数, 且 $a \neq 0, b_1 \neq 0$.

试以特解 $\bar{y}_t = \alpha + \beta t$ (α, β 为待定系数) 代入方程(11-2-8), 得

$$\alpha + \beta(t+1) + a(\alpha + \beta t) = b_0 + b_1t,$$

上式对一切 t 值均成立, 其充分必要条件是:

$$\begin{cases} (1+a)\alpha + \beta = b_0, \\ (1+a)\beta = b_1. \end{cases}$$

当 $1+a \neq 0$ 时, 即 $a \neq -1$ 时,

$$\alpha = \frac{b_0}{1+a} - \frac{b_1}{(1+a)^2}, \quad \beta = \frac{b_1}{1+a},$$

于是, 方程(11-2-8)的特解为

$$\bar{y} = \frac{b_0}{1+a} - \frac{b_1}{(1+a)^2} + \frac{b_1}{1+a}t \quad (a \neq -1);$$

当 $a=-1$ 时, 改设特解

$$\bar{y}_t = (\alpha + \beta t)t = \alpha t + \beta t^2,$$

将其代入方程(11-2-8), 并注意 $a=-1$, 可求得特解

$$\bar{y}_t = (b_0 - \frac{1}{2}b_1)t + \frac{1}{2}b_1t^2 \quad (a=-1).$$

综上所述, 方程(11-2-10)的通解为

$$y_t = \begin{cases} A(-a)^t + \frac{b_0}{1+a} - \frac{b_1}{(1+a)^2} + \frac{b_1}{1+a}t, & a \neq -1, \\ A + (b_0 - \frac{1}{2}b_1)t + \frac{1}{2}b_1t^2, & a = -1. \end{cases} \quad (11-2-9)$$

例 4 求差分方程 $y_{t+1}-3y_t=2t$ 满足 $y_0=\frac{1}{2}$ 的特解.

解 因 $a=-3 \neq -1, b_0=0, b_1=2$, 故由通解公式(11-2-9)得所给方程的通解为.

$$y_t = A \cdot 3^t - \frac{1}{2} - t,$$

A 为任意常数.

以 $t=0, y_0=\frac{1}{2}$ 代入上式, 求得 $A=1$, 于是所求方程的特解为

$$y_t = 3^t - \frac{1}{2} - t.$$

例 5 求差分方程 $y_{t+1} - y_t = 3 + 2t$ 的通解.

解 因 $a=-1, b_0=3, b_1=2$, 故由通解公式(11-2-9)得所给方程的通解为

$$y_t = A + 2t + t^2, A \text{ 为任意常数.}$$

情形 III $f(t)$ 为指数函数.

不妨设 $f(t) = b \cdot d^t$, 这里 b, d 均为非零常数, 于是方程(11-2-1)变为

$$y_{t+1} + ay_t = b \cdot d^t, t=0, 1, 2, \dots \quad (11-2-10)$$

当 $a+d \neq 0$ 时, 设方程(11-2-10)有特解 $\bar{y}_t = \mu d^t$, 这里 μ 为待定系数. 将其代入方程(11-2-10), 得

$$\mu d^{t+1} + a\mu d^t = b \cdot d^t,$$

求得特解

$$\bar{y}_t = \frac{b}{a+d} \cdot d^t \quad (a+d \neq 0);$$

当 $a+d=0$ 时, 改设(11-2-10)的特解 $\bar{y}_t = \mu t d^t$, μ 为待定系数, 将其代入方程(11-2-10), 注意 $a+d=0$, 可求得特解

$$\bar{y}_t = b t d^t \quad (a+d=0).$$

综合上述, 方程(11-2-10)的通解为

$$y_t = y_A(t) + \bar{y}_t = \begin{cases} A(-a)^t + \frac{b}{a+d} \cdot d^t, & a+d \neq 0, \\ A(-a)^t + b t d^t, & a+d = 0. \end{cases} \quad (11-2-11)$$

例 6 求差分方程 $y_{t+1} - y_t = 2^t$ 的通解.

解 因 $a=-1, b=1, d=2$, 故 $a+d=1 \neq 0$. 由通解公式(11-2-11)得原方程的通解

$$y_t = A + 2^t,$$

A 为任意常数.

例 7 求差分方程 $2y_{t+1} - y_t = 3 \cdot (\frac{1}{2})^t$ 的通解.

解 因 $a=-\frac{1}{2}, b=\frac{3}{2}, d=\frac{1}{2}$, 故 $a+d=0$. 由通解公式(11-2-11), 得原方程的通解

$$y_t = (A+3t) \cdot (\frac{1}{2})^t,$$

A 为任意常数.

情形 IV $f(t)$ 为正弦、余弦型三角函数.

设 $f(t) = b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t$, 其中 b_1, b_2, ω 均为常数, 且 $\omega \neq 0$, b_1 与 b_2 不同时为零. 于是非齐次方程(11-2-1)变为

$$y_{t+1} + ay_t = b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t, \quad a \neq 0, t=0, 1, 2, \dots \quad (11-2-12)$$

设方程(11-2-12)有特解

$$\bar{y}_t = a \cos \omega t + \beta \sin \omega t,$$

这里 α, β 均为待定系数. 将其代入方程(11-2-12)得

$$a \cos \omega(t+1) + \beta \sin \omega(t+1) + a \cos \omega t + \beta \sin \omega t = b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t,$$

利用三角恒等式, 经整理得

$$(a \cos \omega + \beta \sin \omega + a) \cos \omega t + (-a \sin \omega + \beta \cos \omega + \beta) \sin \omega t = b_1 \cos \omega t + b_2 \sin \omega t,$$

上式对 $t=0, 1, 2, \dots$ 恒成立的充分必要条件是

$$\begin{cases} (a + \cos \omega) \alpha + \sin \omega \cdot \beta = b_1, \\ -\sin \omega \cdot \alpha + (a + \cos \omega) \beta = b_2. \end{cases}$$

这是关于 α, β 为未知量的线性方程组, 其系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a + \cos \omega & \sin \omega \\ -\sin \omega & a + \cos \omega \end{vmatrix} = (a + \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega,$$

当 $D \neq 0$ 时, 则可求得解

$$\begin{cases} \alpha = \frac{1}{D} [b_1(a + \cos \omega) - b_2 \sin \omega], \\ \beta = \frac{1}{D} [b_2(a + \cos \omega) + b_1 \sin \omega]; \end{cases} \quad (11-2-13)$$

当 $D = (a + \cos \omega)^2 + \sin^2 \omega = 0$ 时, 则有

$$\begin{cases} \omega = 2k\pi, & \text{或} \\ a = -1. & \end{cases} \begin{cases} \omega = (2k+1)\pi, \\ a = 1. \end{cases} \quad (k \text{ 为整数}). \quad (11-2-13)'$$

这时, 我们改设特解

$$\bar{y}_t = t(\bar{\alpha} \cos \omega t + \bar{\beta} \sin \omega t),$$

$\bar{\alpha}, \bar{\beta}$ 为待定系数. 将其代入(11-2-12), 并利用条件(11-2-13)', 经整理可得

$$\begin{cases} \bar{\alpha} = b_1, \\ \bar{\beta} = b_2 \end{cases} \quad \text{或} \quad \begin{cases} \bar{\alpha} = -b_1, \\ \bar{\alpha} = -b_2. \end{cases},$$

结合上述, 方程(11-2-12)的通解为

$$\bar{y}_t = \begin{cases} A(-a)^t + \alpha \cos \omega t + \beta \sin \omega t, & D \neq 0, \alpha, \beta \text{ 见 } (11-2-13), \\ A + t(b_1 \cos 2k\pi t + b_2 \sin 2k\pi t), & \omega = 2k\pi, a = -1, \\ A(-1)^t - t[b_1 \cos(2k+1)\pi t + b_2 \sin(2k+1)\pi t], & \\ \omega = (2k+1)\pi, & a = 1. \end{cases} \quad (11-2-14)$$

值得注意的是: 若 $f(t) = b_1 \cos \omega t$ 或 $f(t) = b_2 \sin \omega t$ 时, 方程(11-2-12)所应设的特解仍取为

$$\bar{y}_t = a \cos \omega t + \beta \sin \omega t \quad \text{或} \quad \bar{y}_t = t(\bar{\alpha} \cos \omega t + \bar{\beta} \sin \omega t)$$

的形式, 不能省略其中任何一项.

例 8 求差分方程 $y_{t+1}-2y_t=\cos t$ 的通解.

解 对应齐次方程的通解为

$$y_A(t)=A \cdot 2^t.$$

设非齐次方程的特解为

$$\bar{y}_t = \alpha \cos t + \beta \sin t,$$

其中 α, β 为待定系数. 将其代入原方程, 并利用三角函数的和角公式, 得

$$\begin{cases} \alpha(\cos 1 - 2) + \beta \sin 1 = 1, \\ -\alpha \sin 1 + \beta(\cos 1 - 2) = 0. \end{cases}$$

由此求得

$$\alpha = \frac{\cos 1 - 2}{5 - 4 \cos 1}, \beta = \frac{\sin 1}{5 - 4 \cos 1}.$$

于是, 所给方程的通解为

$$y_t = A \cdot 2^t - \frac{2 - \cos 1}{5 - 4 \cos 1} \cos t + \frac{\sin 1}{5 - 4 \cos 1} \sin t,$$

其中 A 为任意常数.

上述 $f(t)$ 的四种类型, 已基本包含了经济学应用中常见的函数类型. 实际中, 若遇到这几种类型的线性组合形式的 $f(t)$, 则可设试解函数为同类型特解的线性组合. 例如, 对于函数 $f(t) = t + 3e^t + 2 \sin t$ 时, 我们可设试解函数为

$$\bar{y} = (B_0 + B_1 t) + B_2 e^t + B_3 \cos t + B_4 \sin t,$$

这里 B_0, B_1, B_2, B_3, B_4 均为待定常数.

习题 11-2

1. 验证 $y_1(t) = 1, y_2(t) = \frac{1}{t+1}$ 是方程 $y_{t+2} - 2 \frac{t+2}{t+3} y_{t+1} + \frac{t+1}{t+3} y_t = 0$ 的解, 并求该差分方程的通解.

2. 已知 $y_1(t) = 2^t, y_2(t) = 2^t - 3t$ 是差分方程 $y_{t+1} + a(t)y_t = f(t)$ 的两个特解, 求 $a(t)$ 及 $f(t)$.

3. 设 $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ 分别是差分方程: $y_{t+1} + ay_t = f_1(t); y_{t+1} + ay_t = f_2(t); y_{t+1} + ay_t = f_3(t)$ 的解, 求证: $z(t) = y_1(t) + y_2(t) + y_3(t)$ 是差分方程 $y_{t+1} + ay_t = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t)$ 的解.

4. 求下列差分方程的通解:

(1) $3y_{t+1} + y_t = 4;$

(2) $2y_{t+1} + y_t = 3 + t;$

(3) $y_{t+1} + y_t = 2^t;$

(4) $y_{t+1} - y_t = 2^t \cdot \cos \pi t.$

[提示: 设特解 $\bar{y}_t = 2^t(B_1 \cos \pi t + B_2 \sin \pi t), B_1, B_2$ 为待定系数]

5. 求下列差分方程的特解:

(1) $16y_{t+1} - 6y_t = 1, y_0 = 0.2;$

(2) $2y_{t+1} - y_t = 2 + t, y_0 = 4;$

(3) $y_{t+1} - y_t = 2^t - 1, y_0 = 5;$

(4) $y_{t+1} + 4y_t = 3 \sin \pi t, y_0 = 1.$

6. 设 a, b 为非零常数, 且 $1+a \neq 0$. 试证: 通过变换 $u_t = y_t - \frac{b}{1+a}$, 可将非齐次方程 $y_{t+1} + ay_t = b$ 变换为 u_t 的齐次方程, 并由此求出 y_t 的通解.

7. 已知差分方程 $(a+by_t)y_{t+1} = cy_t, t=0, 1, 2, \dots$, 其中 a, b, c 为正常数, y_0 为正的已知初始条件.

(1) 试证: $y_t > 0, t=1, 2, 3, \dots$; (提示: 用迭代法证)

(2) 试证: 变换 $u_t = \frac{1}{y_t}$ 将原方程可化为 u_t 的线性方程, 并由此求出 y_t 的通解;

(3) 求方程 $(2+3y_t)y_{t+1}=4y_t$ 满足初始条件 $y_0=\frac{1}{2}$ 的特解.

第四章 二阶常系数线性差分方程

§ 4.1 差分与差分方程的概念

常系数线性差分方程解的结构

教学目的与要求: 了解差分与差分方程, 差分方程的阶与解(通解、特解)等概念。

教学重点(难点): 常系数线性齐次差分方程解的结构。

一、差分的概念

定义 设 $y = y(x)$ 是一个函数, 自变量从 x 变化到 $x+1$, 这时函数的增量记为

$\Delta y_x = y(x+1) - y(x)$, 我们称这个量为 $y(x)$ 在点 x 步长为 1 的一阶差分, 简称为 $y(x)$ 的一阶差分。为了方便我们也记 $y_{x+1} = y(x+1)$, $y_x = y(x)$, 即

$$\Delta y_x = y_{x+1} - y_x.$$

称 $\Delta(\Delta y_x) = (y_{x+2} - y_{x+1}) - (y_{x+1} - y_x) = y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x$ 为 $y(x)$ 二阶差分, 简记为 $\Delta^2 y_x$.

同样记 $\Delta(\Delta^2 y_x)$ 为 $\Delta^3 y_x$, 并称为三阶差分。

一般记 $\Delta^n y_x = \Delta(\Delta^{n-1} y_x)$, 称为 n 阶差分. 且有 $\Delta^n y_x = \sum_{i=0}^n C_n^i (-1)^i y_{x+n-i}$.

性质: 当 a, b, C 是常数, y_x 和 z_x 是函数时,

- (1) $\Delta(C) = 0$;
- (2) $\Delta(Cy_x) = C\Delta(y_x)$;
- (3) $\Delta(ay_x + bz_x) = a\Delta y_x + b\Delta z_x$;
- (4) $\Delta(y_x z_x) = z_{x+1}\Delta y_x + y_x \Delta z_x = y_{x+1}\Delta z_x + z_x \Delta y_x$;
- (5) $\Delta\left(\frac{y_x}{z_x}\right) = \frac{z_x \Delta y_x - y_x \Delta z_x}{z_x z_{x+1}} = \frac{z_{x+1} \Delta y_x - y_{x+1} \Delta z_x}{z_x z_{x+1}}$.

例 已知 $y_x = x^\alpha (x \neq 0)$, 求 $\Delta(y_x)$.

解 $\Delta(y_x) = (x+1)^\alpha - x^\alpha$.

特别, 当 n 为正整数时, $\Delta(y_x) = \sum_{i=1}^n C_n^i x^{n-i}$, 阶数降了一阶.

推论 若 m, n 为正整数时, $m > n$ $P(x)$ 为 n 次多项式, 则 $\Delta^m P(x) = 0$.

例 已知 $y_x = a^x (0 < a \neq 1)$, 求 $\Delta(y_x)$.

解 $\Delta(y_x) = a^{x+1} - a^x = a^x(a-1)$.

二、差分方程的概念

定义 设是含有未知函数差分的等式, 称为差分方程。

它的一般形式为 $F(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n}) = 0$ 或 $G(x, y_x, \Delta y_x, \dots, \Delta^n y_x) = 0$,

其中 F, G 是表达式, x 是自变量. 使等式成立自变量的取值范围称为该方程的定义域. 的

$F(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+n}) = 0$ 的方程, 也称为 n 阶差分方程. n 为方程的阶. 形如

$$a_0(x)y_{x+n} + a_1(x)y_{x+n-1} + \dots + a_n(x)y_x = f(x) \quad (10-1)$$

称为 n 阶线性差分方程. $f(x) = 0$ 时为齐次的. $f(x) \neq 0$ 为非齐次的.

差分方程是含有未知函数及其导数的方程, 满足该方程的函数称为**差分方程的解**. 对于一阶差分方程来说, 它的含有一个任意常数的解, 称为此微分方程的**通解**. 一般来说, 对于 n 阶差分方程, 其含有 n 个互相独立的任意常数的解称为**差分方程的通解**. 不含有任意常数的解称为**差分方程的特解**.

同微分方程一样也有初值问题. 初值条件也有如下情形:

一阶的如: $y_x|_{x=x_0} = y_0$. 二阶的如: $y_x|_{x=x_0} = y_0, \Delta y_x|_{x=x_0} = \Delta y_0$ 等等.

对于线性差分方程的解的结构有如下结论:

定理 如果 $y = y_1(x)$ 和 $y = y_2(x)$ 都是方程 (10-1) 的解, 则对任意常数 C_1, C_2 , $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 也是方程 (10-1) 的解.

定理 设 $a_0(x) \neq 0$, $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \dots, y_x^{(n)}$ 是

$$a_0(x)y_{x+n} + a_1(x)y_{x+n-1} + \dots + a_n(x)y_x = 0$$

的 n 个线性无关的特解, 则 $y_x = C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)} + \dots + C_n y_x^{(n)}$ 是它的通解.

定理 设 $a_0(x) \neq 0$, $y_x^{(1)}, y_x^{(2)}, \dots, y_x^{(n)}$ 是齐次方程

$$a_0(x)y_{x+n} + a_1(x)y_{x+n-1} + \dots + a_n(x)y_x = 0$$

的 n 个线性无关的特解, y_x^* 是非齐次方程

$$a_0(x)y_{x+n} + a_1(x)y_{x+n-1} + \dots + a_n(x)y_x = f(x)$$

的一个特解, 则 $y_x = C_1 y_x^{(1)} + C_2 y_x^{(2)} + \dots + C_n y_x^{(n)} + y_x^*$ 是非齐次方程的通解.

定理 设, $y_x^{(1)}$ 是方程 $a_0(x)y_{x+n} + a_1(x)y_{x+n-1} + \dots + a_n(x)y_x = f_1(x)$ 的解,

$y_x^{(2)}$ 是方程 $a_0(x)y_{x+n} + a_1(x)y_{x+n-1} + \dots + a_n(x)y_x = f_2(x)$ 的解, 则 $y_x = y_x^{(1)} + y_x^{(2)}$ 是方程

$$a_0(x)y_{x+n} + a_1(x)y_{x+n-1} + \dots + a_n(x)y_x = f_1(x) + f_2(x) \text{ 的解.}$$

§ 4.2 一阶常系数线性差分方程

教学目的与要求: 掌握一阶常系数线性齐次差分方程的解法。了解一阶常系数线性非齐次差分方程的通解的结构。会求某些特殊的一阶常系数线性非齐次差分方程的特解与通解。

教学重点 (难点): 一阶常系数线性齐次差分方程的解法。

一、一阶常系数的差分方程

一阶常系数的差分方程是 $y_{x+1} - py_x = f(x)$ (常数 $p \neq 0$).

二、一阶常系数齐次的差分方程

当 $f(x) = 0$, 设 $y_x = r^x$ 是其齐次方程的解, 即 $r^{x+1} - pr^x = 0$,

所以 $r=p$. 那么 $r^{x+1} - pr^x = 0$ 有通解 $y_x = Cp^x$ (C 为任意常数)

例 求差分方程 $3y_{x+1} - 2y_x = 0$ 的通解.

解 事实上原方程是 $y_{x+1} - \frac{2}{3}y_x = 0$ 所以其通解为 $y_x = C\left(\frac{2}{3}\right)^x$ (C 为任意常数)..

三、一阶常系数非齐次的差分方程

当 $f(x) \neq 0$, 用**待定系数法**求其特解.

(i) 如果 $f(x) = P_n(x)$ (n 次多项式), 则非齐次方程为 $y_{x+1} - py_x = P_n(x)$.

若 $p=1$, 即 $y_{x+1} - y_x = P_n(x)$, 那么 y_x 可以是 $n+1$ 次多项式, 相减时常数项和最高次数相被消去, 所以可以设 $y_x = x[b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n]$, 代入方程后, 比较系数确定 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 便得到一个特解.

若 $p \neq 1$, 最高次数相不可能被消去, 所以可以设有特解

$y_x = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$, 同样代入方程后, 比较系数确定 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 便得到一个特解..

(ii) 如果 $f(x) = \lambda^x P_n(x)$ ($P_n(x)$ 是 n 次多项式, λ 是常数), 则非齐次方程为

$$y_{x+1} - py_x = \lambda^x P_n(x).$$

为了求之一个特解, 分两步: 第一步, 令 $y_x = \lambda^x z_x$, 代入方程得

$$\lambda^{x+1} z_{x+1} - p\lambda^x z_x = \lambda^x P_n(x),$$

它等价于 $\lambda z_{x+1} - pz_x = P_n(x)$.

第二步, 用(i)的方法.

总之, 对这种情况, 可以直接设其特解为 $y_x = \lambda^x x^s (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n)$, 其中当 $p \neq$

λ 时, $s=0$, 当 $p=\lambda$ 时, $s=1$.

例 求差分方程 $y_{x+1} - 3y_x = 7 \cdot 2^x$ 的通解.

解 显然其齐次方程的通解为 $y_x = C \cdot 3^x$ (C 为任意常数).

设其特解为 $y_x = b \cdot 2^x$, 所以有 $b \cdot 2^{x+1} - 3b \cdot 2^x = 7 \cdot 2^x$, 从而得 $b=-7$.

因此,原方程的通解为 $y_x = C \cdot 3^x - 7 \cdot 2^x$.

§ 4.3 二阶常系数线性差分方程

教学目的与要求: 掌握二阶常系数线性齐次差分方程的解法。了解二阶常系数线性非齐次差分方程的通解的结构。

教学重点(难点): 二阶常系数线性齐次差分方程的解法。

这里讨论的是这样的方程: $y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = f(x)$ (p, q 是常数). 先给结论.

定理 $y_x = r^x$ 是方程 $y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = 0$ (10-2)

的解的充分必要条件 r 为方程 $r^2 + pr + q = 0$ (10-3)

的根 (自己证明).

(10-3)称为原方程的特征方程. 下面分步讨论.

(a) 当 $f(x) = 0$,

如果 $p^2 - 4q > 0$, 即其特征方程有两个不同实根, 记为 r_1, r_2 . 注意到 r_1^x, r_2^x 是线性无关的, 所以(10-2)有通解 $y_x = C_1 r_1^x + C_2 r_2^x$, (C_1, C_2 是任意常数).

如果 $p^2 - 4q = 0$, 即其特征方程有两个相同实根, 记为 $r_1 = r_2 = -\frac{p}{2}$, 可以验证 $\left(-\frac{p}{2}\right)^x, x\left(-\frac{p}{2}\right)^x$ 是(10-2)的线性无关的特解. 所以 $y_x = (C_1 + C_2 x)\left(-\frac{p}{2}\right)^x$ (C_1, C_2 是任意常数)是(10-2)的通解.

如果 $p^2 - 4q < 0$, 因 p, q 是实数, 即其特征方程有两互为共轭的复根, 记为 $-\frac{p}{2} \pm \frac{i}{2}\sqrt{4q - p^2}$, 记为 $\alpha \pm i\beta = \lambda(\cos\theta \pm i\sin\theta), \lambda > 0$. 可以验证 $\lambda^x \cos(\theta x), \lambda^x \sin(\theta x)$ 是 (10-2) 的线性无关的特解. 所以 $y_x = \lambda^x (C_1 \cos(\theta x) + C_2 \sin(\theta x))$ (C_1, C_2 是任意常数)是(10-2)的通解.

例 求 $y_{x+2} + 4y_{x+1} + 3y_x = 0$ 的通解.

解 其特征方程 $r^2 + 4r + 3 = 0$, 有根 $-1, -3$. 原方程有通解

$$y_x = C_1(-1)^x + C_2(-3)^x \quad (C_1, C_2 \text{ 是任意常数})$$

例 求 $y_{x+2} + 4y_x = 0$ 的通解.

解 其特征方程 $r^2 + 4 = 0$, 有根 $-2i, 2i$. 原方程有通解

$$y_x = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x), \quad (C_1, C_2 \text{ 是任意常数}).$$

(b) 当 $f(x) \neq 0$, 同一阶相似, 只要求其一个特解即可.

(i) 如果 $f(x) = P_n(x)$ (n 次多项式), 注意到 $y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = f(x)$ 可以写成

$$\Delta^2 y_x + (p+2)\Delta y_{x+1} + (1+p+q)y_x = f(x).$$

若 $1+p+q \neq 0$, 令特解为 $y_x = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$.

若 $1+p+q = 0$, $2+p \neq 0$, 令特解为

$$y_x = x\{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n\}.$$

若 $1+p+q = 0$, $2+p = 0$, 令特解为

$$y_x = x^2\{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n\}.$$

将特解代入原方程,再比较系数确定 $b_0, b_1, b_2, \cdots, b_n$ 便得到一个特解..

例 求 $y_{x+2} + 4y_x = 2$ 的通解.

解 前例已知其齐次的通解,故只需求一个特解.

令 $y_x = b_0$, 代入的 $b_0 = \frac{1}{2}$, 所以它的通解为

$$y_x = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) + \frac{1}{2}, (C_1, C_2 \text{ 是任意常数}).$$

(ii) 如果 $f(x) = \lambda^x P_n(x)$ ($P_n(x)$ 是 n 次多项式, λ 是常数), 则非齐次方程为

$$y_{x+2} + py_{x+1} + qy_x = \lambda^x P_n(x).$$

可以直接设其特解为 $y_x = \lambda^x x^s (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n)$, 其中当 λ 不是其特征方程的根时, $s=0$; 当 λ 是其特征方程的单根时, $s=1$; 当 λ 是其特征方程的重根时, $s=2$.

例 求 $y_{x+2} + 4y_x = 2^x$ 的通解.

解 令 $y = b2^x$, $b2^{x+2} + 4b2^x = 2^x$, 所以 $b = \frac{1}{8}$, 所以其通解

$$y_x = C_1 \sin(2x) + C_2 \cos(2x) + \frac{2^x}{8}, (C_1, C_2 \text{ 是任意常数}).$$

第五章 差分方程模型（上）

引言

1、差分方程：差分方程反映的是关于离散变量的取值与变化规律。通过建立一个或几个离散变量取值所满足的平衡关系，从而建立差分方程。

差分方程就是针对要解决的目标，引入系统或过程中的离散变量，根据实际背景的规律、性质、平衡关系，建立离散变量所满足的平衡关系等式，从而建立差分方程。通过求出和分析方程的解，或者分析得到方程解的特别性质（平衡性、稳定性、渐近性、振动性、周期性等），从而把握这个离散变量的变化过程的规律，进一步再结合其他分析，得到原问题的解。

2、应用：差分方程模型有着广泛的应用。实际上，连续变量可以用离散变量来近似和逼近，从而微分方程模型就可以近似于某个差分方程模型。差分方程模型有着非常广泛的实际背景。在经济金融保险领域、生物种群的数量结构规律分析、疾病和病虫害的控制与防治、遗传规律的研究等许许多多的方面都有着非常重要的作用。可以这样讲，只要牵涉到关于变量的规律、性质，就可以适当地用差分方程模型来表现与分析求解。

3、差分方程建模：在实际建立差分方程模型时，往往要将变化过程进行划分，划分成若干时段，根据要解决问题的目标，对每个时段引入相应的变量或向量，然后通过适当假设，根据事物系统的实际变化规律和数量相互关系，建立每两个相邻时段或几个相邻时段或者相隔某几个时段的量之间的变化规律和运算关系（即用相应设定的变量进行四则运算或基本初等函数运算或取最运算等）等式（可以多个并且应当充分全面反映所有可能的关系），从而建立起差分方程。或者对事物系统进行划分，划分成若干子系统，在每个子系统中引入恰当的变量或向量，然后分析建立起子过程间的这种量的关系等式，从而建立起差分方程。在这里，过程时段或子系统的划分方式是非常非常重要的，应当结合已有的信息和分析条件，从多种可选方式中挑选易于分析、针对性强的划分，同时，对划分后的时段或子过程，引入哪些变量或向量都是至关重要的，要仔细分析、选择，尽量扩大对过程

或系统的数量感知范围，包括对已有的、已知的若干量进行结合运算、取最运算等处理方式，目的是建立起简洁、深刻、易于求解分析的差分方程。在后面我们所举的实际例子中，这方面的内容应当重点体会。

差分方程模型作为一种重要的数学模型，对它的应用也应当遵从一般的数学建模的理论与方法原则。同时注意与其它数学模型方法结合起来使用，因为一方面建立差分方程模型所用的数量、等式关系的建立都需要其他的数学分析方式来进行；另一方面，由差分方程获得的结果有可以进一步进行优化分析、满意度分析、分类分析、相关分析等等。

第一节 差分方程的基本知识

一、基本概念

1、差分算子

设数列 $\{x_n\}$ ，定义差分算子 $\Delta: \Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ 为 x_n 在 n 处的向前差分。

而 $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$ 为 x_n 在 n 处的向后差分。

以后我们都是指向前差分。

可见 Δx_n 是 n 的函数。从而可以进一步定义 Δx_n 的差分：

$$\Delta(\Delta x_n) = \Delta^2 x_n$$

称之为在 n 处的二阶差分，它反映的是的增量的增量。

类似可定义在 n 处的 k 阶差分为：

$$\Delta^k x_n = \Delta(\Delta^{k-1}(x_n))$$

2、差分算子、不变算子、平移算子

记 $E x_n = x_{n+1}$, $I x_n = x_n$ ，称 E 为平移算子， I 为不变算子。

则有： $\Delta x_n = E x_n - I x_n = (E - I) x_n$

$$\therefore \Delta = E - I$$

由上述关系可得：

$$\Delta^k x_n = (E - I)^k x_n = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i E^i x_n = \sum_{i=0}^k (-1)^{k-i} C_k^i x_{n+i} \quad (1)$$

这表明 x_n 在 n 处的 k 阶差分由 x_n 在 $n, n+1, \dots, n+k$ ，处的取值所线性决定。

反之，

由 $\Delta x_n = x_{n+1} - x_n$ 得 $x_{n+1} = x_n + \Delta x_n$ ：

$$\Delta^2 x_n = x_{n+2} - 2x_{n+1} + x_n, \text{ 得: } x_{n+2} = -2x_{n+1} + x_n + \Delta^2 x_n,$$

这个关系表明：第 $n+2$ 项可以用前两项以及相邻三项增量的增量来表现和计算。即一个数列的任意一项都可以用其前面的 k 项和包括这项在内的 $k+1$ 项增量的增量的增量.....第 k 层增量所构成。

.....

$$\Delta^k x_n = \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} C_k^i x_{n+i} + x_{n+k}, \text{ 得:}$$

$$x_{n+k} = -\sum_{i=0}^{k-1} (-1)^{k-i} C_k^i x_{n+i} + \Delta^k x_n \quad (2)$$

可以看出：

x_{n+k} 可以由 $x_n, \Delta x_n, \dots, \Delta^k x_n$ 的线性组合表示出来

3、差分方程

由 x_n 以及它的差分所构成的方程

$$\Delta^k x_n = f(n, x_n, \Delta x_n, \dots, \Delta^{k-1} x_n) \quad (3)$$

称之为 k 阶差分方程。

由 (1) 式可知 (3) 式可化为

$$x_{n+k} = F(n, x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k-1}) \quad (4)$$

故 (4) 也称为 k 阶差分方程（反映的是未知数列 x_n 任意一项与其前，前面 k 项之间的关系）。

由 (1) 和 (2) 可知，(3) 和 (4) 是等价的。

我们经常用的差分方程的形式是 (4) 式。

4、差分方程的解与有关概念

(1) 如果 x_n 使 k 阶差分方程 (4) 对所有的 n 成立，则称 x_n 为方程 (4) 的解。

(2) 如果 $x_n = \bar{x}$ (\bar{x} 为常数) 是 (4) 的解，即

$$\bar{x} = F(n, \bar{x}, \dots, \bar{x})$$

则称 $x_n = \bar{x}$ 为 (4) 的平衡解或叫平衡点。平衡解可能不只一个。平衡解的基本意义是：设 x_n 是 (4) 的解，考虑 x_n 的变化性态，其中之一是极限状况，如果 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$ ，

则方程 (4) 两边取极限 (\bar{x} 就存在在这里面)，应当有

$$\bar{x} = F(n, \bar{x}, \dots, \bar{x})$$

(3) 如果 (4) 的解 x_n 使得 $x_n - \bar{x}$ 既不是最终正的, 也不是最终负的, 则称 x_n 为关于平衡点 \bar{x} 是振动解。

(4) 如果令: $y_n = x_n - \bar{x}$, 则方程 (4) 会变成

$$y_{n+k} = G(n, y_n, \dots, y_{n+k-1}) \quad (5)$$

则 $y=0$ 成为 (5) 的平衡点。

(5) 如果 (5) 的所有解是关于 $y=0$ 振动的, 则称 k 阶差分方程 (5) 是振动方程。如果 (5) 的所有解是关于 $y=0$ 非振动的, 则称 k 阶差分方程 (5) 是非振动方程。

(6) 如果 (5) 有解 y_n , 使得对任意大的 N_y 有 $\sup_{n \geq N_y} |y_n| > 0$

则称 y_n 为正则解。(即不会从某项后全为零)

(7) 如果方程 (4) 的解 x_n 使得 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$, 则称 x_n 为稳定解。

5、差分算子的若干性质

$$(1) \Delta(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha \Delta(x_n) + \beta \Delta y_n$$

$$(2) \Delta\left(\frac{x_n}{y_n}\right) = \frac{1}{y_{n+1}y_n}(y_n \Delta x_n - x_n \Delta y_n)$$

$$(3) \Delta(x_n y_n) = y_{n+1} \Delta x_n + x_n \Delta y_n$$

$$(4) \sum_{k=a}^b y_{k+1} \Delta x_k = x_{b+1} y_{b+1} - x_a y_a + \sum_{k=a}^b x_k \Delta y_k$$

$$(5) x_n = E^n x_0 = (\Delta + I)^n x_0 = \sum_{i=0}^n C_n^i \Delta^i x_0$$

6、Z 变换

定义: 对于数列 x_n , 定义复数级数

$$X(z) = Z(x_n) = \sum_{k=0}^{\infty} x_k z^{-k} \quad (6)$$

这是关于 z 洛朗级数。它的收敛域是: $R_1 < |z| < R_2$, 其中 R_2 可以为 ∞ , R_1 可以为 0。称 $Z(x_n)$ 为 x_n 的 z -变换。

由复变函数展开成洛朗级数的唯一性可知: z 变换是一一对应的, 从而有逆变换, 记为:

$$x_n = Z^{-1}(X(z)) \quad (7)$$

z 变换是研究数列的有效工具。

z 变换的若干重要性质:

(1) 线性性 $Z(\alpha x_n + \beta y_n) = \alpha Z(x_n) + \beta Z(y_n)$

(2) 平移性质 $Z(x_{n+N}) = z^N [X(z) - \sum_{k=0}^{N-1} x_k z^{-k}]$

z 变换举例:

(1) $\delta(n) = \begin{cases} \infty, n=0 \\ 0, n \neq 0 \end{cases}$, 则 $Z(\delta(n)) = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k) z^{-k} = (1 \times z^{-k})|_{k=0} = 1$

(2) $u(n) = \begin{cases} 1, k \geq 0 \\ 0, k < 0 \end{cases}$, 则 $Z(u(n)) = \sum_{k=0}^{\infty} u(k) z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} z^{-k} = \frac{z}{z-1}, |z| > 1$,

(3) 设 $f(n) = a^n$, 则 $Z(a^n) = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{z}{z-a}, |z| > a, a > 0$,

(4) 设 $f(n) = \frac{1}{n!}$, 则 $Z(\frac{1}{n!}) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^{-k} = e^{\frac{1}{z}}, |z| > 0$

第二节 差分方程常用解法与性质分析

1、常系数线性差分方程的解

方程 $a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_k x_n = b(n)$ (8)

其中 a_0, a_1, \dots, a_k 为常数, 称方程 (8) 为常系数线性方程。

又称方程 $a_0 x_{n+k} + a_1 x_{n+k-1} + \dots + a_k x_n = 0$ (9)

为方程 (8) 对应的齐次方程。

如果 (9) 有形如 $x_n = \lambda^n$ 的解, 带入方程中可得:

$$a_0 \lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \dots + a_{k-1} \lambda + a_k = 0 \quad (10)$$

称方程 (10) 为方程 (8)、(9) 的特征方程。

显然, 如果能求出 (10) 的根, 则可以得到 (9) 的解。

基本结果如下:

(1) 若 (10) 有 k 个不同的实根, 则 (9) 有通解:

$$x_n = c_1 \lambda_1^n + c_2 \lambda_2^n + \dots + c_k \lambda_k^n,$$

(2) 若 (10) 有 m 重根 λ , 则通解中有构成项:

$$(c_1 + c_2 n + \dots + c_m n^{m-1}) \lambda^n$$

(3) 若 (10) 有一对单复根 $\lambda = \alpha \pm i\beta$, 令: $\lambda = \rho e^{\pm i\varphi}$,

$\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}, \varphi = \arctan \frac{\beta}{\alpha}$, 则 (9) 的通解中有构成项:

$$c_1 \rho^n \cos \varphi n + c_2 \rho^n \sin \varphi n$$

(4) 若有 m 重复根: $\lambda = \alpha \pm i\beta$, $\lambda = \rho e^{\pm i\varphi}$, 则 (9) 的通项中有构成项:

$$(c_1 + c_2 n + \dots + c_m n^{m-1}) \rho^n \cos \varphi n + (c_{m+1} + c_{m+2} n + \dots + c_{2m} n^{m-1}) \rho^n \sin \varphi n$$

综上所述, 由于方程 (10) 恰有 k 个根, 从而构成方程

(9) 的通解中必有 k 个独立的任意常数。通解可记为: x_n

如果能得到方程 (8) 的一个特解: x_n^* , 则 (8) 必有通解:

$$x_n = x_n + x_n^* \quad (11)$$

(8) 的特解可通过待定系数法来确定。

例如: 如果 $b(n) = b^n p_m(n)$, $p_m(n)$ 为 n 的多项式, 则当 b 不是特征根时, 可设成形如 $b^n q_m(n)$ 形式的特解, 其中 $q_m(n)$ 为 m 次多项式; 如果 b 是 r 重根时, 可设特解: $b^n n^r q_m(n)$, 将其代入 (8) 中确定出系数即可。

2、差分方程的 z 变换解法

对差分方程两边关于 x_n 取 Z 变换, 利用 x_n 的 Z 变换 $F(z)$ 来表示出 x_{n+k} 的 Z 变换, 然后通过解代数方程求出 $F(z)$, 并把 $F(z)$ 在 $z=0$ 的解析圆环域中展开成洛朗级数, 其系数就是所要求的 x_n

例1 设差分方程 $x_{n+2} + 3x_{n+1} + 2x_n = 0, x_0 = 0, x_1 = 1$, 求 x_n

解: 解法 1: 特征方程为 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, 有根: $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$

故: $x_n = c_1(-1)^n + c_2(-2)^n$ 为方程的解。

由条件 $x_0 = 0, x_1 = 1$ 得: $x_n = (-1)^n - (-2)^n$

解法 2: 设 $F(z) = Z(x_n)$, 方程两边取变换可得:

$$z^2(F(z) - x_0 - x_1 \cdot \frac{1}{z}) + 3z(F(z) - x_0) + 2F(z) = 0$$

$$\text{由条件 } x_0 = 0, x_1 = 1 \text{ 得 } F(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2}$$

由 $F(z)$ 在 $|z| > 2$ 中解析, 有

$$F(z) = z\left(\frac{1}{z+1} - \frac{1}{z+2}\right) = \frac{1}{1+\frac{1}{z}} - \frac{1}{1+\frac{2}{z}} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{z^k} - \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{2^k}{z^k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k (1-2^k) z^{-k}$$

$$\text{所以, } x_n = (-1)^n - (-2)^n$$

3、二阶线性差分方程组

设 $z(n) = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, 形成向量方程组

$$z(n+1) = Az(n) \quad (12)$$

$$\text{则 } z(n+1) = A^n z(1) \quad (13)$$

(13) 即为 (12) 的解。

为了具体求出解 (13), 需要求出 A^n , 这可以用高等代数的方法计算。常用的方法有:

(1) 如果 A 为正规矩阵, 则 A 必可相似于对角矩阵, 对角线上的元素就是 A 的特征值, 相似变换矩阵由 A 的特征向量构成:

$$A = p^{-1} \Lambda p, A^n = p^{-1} \Lambda^n p, \therefore z(n+1) = (p^{-1} \Lambda^n p) z(1)。$$

(2) 将 A 分解成 $A = \xi \eta'$, ξ, η 为列向量, 则有

$$A^n = (\xi \eta')^n = \xi \eta' \cdot \xi \eta' \dots \xi \eta' = (\xi' \eta)^{n-1} \cdot A$$

$$\text{从而, } z(n+1) = A^n z(1) = (\xi' \eta)^{n-1} \cdot A z(1)$$

(3) 或者将 A 相似于约旦标准形的形式, 通过讨论 A 的特征值的性态, 找出 A^n 的内在构造规律, 进而分析解 $z(n)$ 的变化规律, 获得它的基本性质。

4、关于差分方程稳定性的几个结果

(1) k 阶常系数线性差分方程 (8) 的解稳定的充分必要条件是它对应的特征方程 (10) 所有的特征根 $\lambda_i, i=1, 2, \dots, k$ 满足 $|\lambda_i| < 1$

(2) 一阶非线性差分方程

$$x_{n+1} = f(x_n) \quad (14)$$

(14) 的平衡点 \bar{x} 由方程 $\bar{x} = f(\bar{x})$ 决定,

将 $f(x_n)$ 在点 \bar{x} 处展开为泰勒形式:

$$f(x_n) = f'(\bar{x})(x_n - \bar{x}) + f(\bar{x}) \quad (15)$$

故有: $\left| f'(\bar{x}) \right| < 1$ 时, (14) 的解 \bar{x} 是稳定的,

$\left| f'(\bar{x}) \right| > 1$ 时, 方程 (14) 的平衡点 \bar{x} 是不稳定的。

第三节 差分方程建模举例

差分方程建模方法的思想与与一般数学建模的思想是一致的, 也需要经历 背景分析、确定目标、预想结果、引入必要的数值表示 (变量、常量、函数、积分、导数、差分、取最等) 概念和记号、几何形式 (事物形状、过程轨迹、坐标系统等), 也就是说要把事物的性态、结构、过程、成分等用数学概念、原理、方法来表现、分析、求解。当然, 由于差分方程的特殊性, 首先应当把系统或过程进行特别分解, 形成表现整个系统的各个部分的离散取值形式, 或形成变化运动过程的时间或距离的分化而得到离散变量。然后通过内在的机理分析, 找出变量所能满足的平衡关系、增量或减量关系及规律, 从而得到差分方程。另外, 有时有可能 通过多个离散变量的关系得到我们关心的变量的关系, 这实际上建立的是离散向量方程, 它有着非常重要的意义。有时还需要找出决定变量的初始条件。有时还需要将问题适当分成几个子部分, 分别求解。

模型 1 种群生态学中的虫口模型:

在种群生态学中, 考虑像蚕、蝉这种类型的昆虫数目的变化, 他的变化规律是: 每年夏季这种昆虫成虫产卵后全部死亡, 第二年春天每个虫卵孵化成一个虫子。建立数学模型来表现虫子数目的变化规律。

模型假设与模型建立: 假设第 n 年的虫口数目为 P_n , 每年一个成虫平均产卵 c 个 (这个假设有点粗糙, 应当考虑更具体的产卵分布状况), 则有: $P_{n+1} = cP_n$, 这是一种简单模型;

如果进一步分析, 由于成虫之间会有争斗以及传染病、天敌等的威胁, 第 $n+1$ 年的成虫数会减少, 如果考虑减少的主要

原因是虫子之间的两两争斗，由于虫子配对数为

$\frac{1}{2}p_n(p_n-1) \approx \frac{1}{2}p_n^2$ ，故减少数应当与它成正比，从而有：

$$P_{n+1} = cP_n - bP_n^2$$

这个模型可化成： $x_{n+1} = \lambda x_n(1-x_n)$ ，这是一阶非线性差分方程。

这个模型的解的稳定性可以用相应一阶差分方程的判断方法，即（14）式来获得。

如果还考虑其它的影响成虫孵卵及成活的因素的定量关系，这个模型在此基础上仍可进一步改进，更加符合实际情形。这种关系一方面可以通过机理分析，确定减少量与影响因素的定量关系，另一方面也可以用统计的方法来线性估计影响程度。或者还可以用影响曲线的方法来直观表现影响的比例关系、周期关系、增量关系等等。

模型 2 具周期性的运动过程的差分方程模型

建立差分方程描述振动台上的乒乓球垂直运动的方程，即把运动过程中的某些离散变化取值的变量的变化规律表现出来。

假设：乒乓球与振动台之间的振动恢复系数为 $\alpha, \alpha \leq 1$

振动台台面的上下位移是 $-\beta \sin \tilde{\omega} t$ ，乒乓球初始时刻在离台面垂直距离为 H 处为自由落体运动 $\beta \ll H$ 。又假设 t_j 为第 j 次碰撞时刻，第 j 次碰撞前的速度为 $-u(t_j)$ ，碰撞后的速度为 $v(t_j)$ 。假设 $u(t_{j+1}) = v(t_j)$ 。振动台台面的运动速度为

$$\omega(t) = \frac{d}{dt}(-\beta \sin \tilde{\omega} t) = -\beta \cos \tilde{\omega} t; \text{ 又记 } \phi = \tilde{\omega} t, v = \frac{2\tilde{\omega}\beta}{g}, \text{ 则有:}$$

$$t_{j+1} - t_j = \frac{2v(t_{j+1})}{g}, \quad \therefore \tilde{\omega}(t_{j+1} - t_j) = \frac{2\tilde{\omega}v_j}{g},$$

$$\therefore \phi_{j+1} - \phi_j = v_j \quad (3.1)$$

另外，由碰撞规律分析可知：

$$v_{j+1} - \omega(t_{j+1}) = \alpha(-u_{j+1} + \omega(t_{j+1}))$$

该式经简化处理后可得：

$$v_{j+1} = \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j) \quad (3.2)$$

由（1）和（2）式联立可得二阶差分非线性方程组

$$\begin{aligned}\phi_{j+1} - \phi_j &= v_j \\ v_{j+1} &= \alpha v_j - \gamma \cos(\phi_j + v_j)\end{aligned}$$

模型 3 蛛网模型

- (1) 经济背景与问题：在自由市场经济中，有些商品的生产、销售呈现明显的周期性。农业产品往往如此，在工业生产中，许多商品的生产销售是有周期性的，表现在：商品的投资、销售价格、产量、销售量在一定时期内是稳定的，因而整个某个较长的时期内这些经济数据表现为离散变量的形式。在这些因素中，我们更关心的是商品的销售价格与生产产量这两个指标，它们是整个经营过程中的核心因素，要想搞好经营，取得良好的经济效益，就必须把握好这两个因素的规律，作好计划。试分析市场经济中经营者根据市场经济的规律，如何建立数学模型来表现和分析市场趋势的。

- (2) 模型假设与模型建立

将市场演变模式划分为若干段，用自然数 n 来表示；
 设第 n 个时段商品的数量为 x_n ，价格为 y_n ， $n=1,2,\dots$ ；
 由于价格与产量紧密相关，因此可以用一个确定的关系来表现：即设有 $y_n = f(x_n)$ (3.3)

这就是需求函数， f 是单调减少的对应关系；

又假设下一期的产量 x_{n+1} 是决策者根据这期的价格决定的，即：设 $x_{n+1} = h(y_n)$ ， h 是单调增加的对应关系，

从而，有关系： $y_n = g(x_{n+1})$ (3.4)
 g 也是单调增加的对应关系。

因此可以建立差分方程： $x_{n+1} = h[f(x_n)]$ (3.5)

$y_{n+1} = f[h(y_n)]$ (3.6)

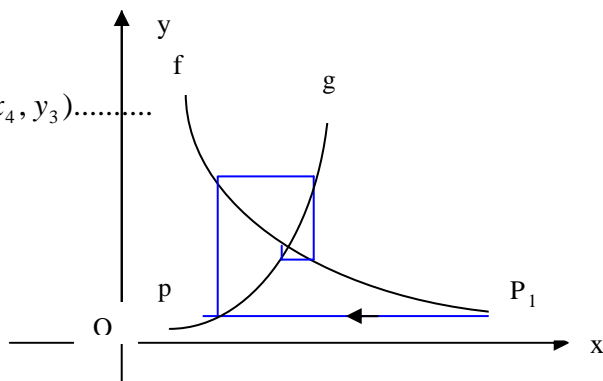
这就是两个差分方程。属一阶非线性差分方程。

(3) 模型的几何表现与分析。

为了表现出两个变量 x_n 和 y_n 的变化过程，我们可以借助已有的函数 f 和 g ，通过对对应关系的几何表现把点列 (x_n, y_n) ，和 (x_{n+1}, y_n) 在坐标系中描绘出来，进而分析它们的变化规律、趋势、找稳定点等等。其中 $(x_n, y_n) = (x_n, f(x_n))$, $(x_{n+1}, y_n) = (x_{n+1}, g(x_{n+1}))$

将点列 $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_1), p_3(x_3, y_3), p_4(x_4, y_3) \dots$ 连接起来，就会形成象蛛网一样的折线，这个图形被称作为蛛网模型。可以设想，这种形式可作为差分方程分析与求解的重要手段，它的主要数学技术是：图形的描绘，曲线上点列的描绘（设法由前一个点的一个坐标分量来算出下一个点的一个坐标分量，并确认它在哪条曲线上，就可以画出这个点；有时或者可由前两个点决定下一个点的一个坐标分量），也就是通过直观、几何形式，把我们关心的变量的所有可能取值表示出来。这里采用的方法是，引入两条曲线，因为在曲线上如果知道了一个分量，就可以作出另一个分量。可见几何形式表示有关系的变量是既方便又有意义的。

易见：如果点列 $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_1), p_3(x_3, y_3), p_4(x_4, y_3) \dots$ 最后收敛于点 p_0 ，则 $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$ ，并且 p_0 就是两条曲线的交点，从而稳定的。这也表明，市场在长期运行之后会保持一种稳定的状态，说明市场处于饱和状态。要想进一步发展就必须打破这种平衡，在决策机制和方法上有所改进。



几何上的进一步分析表明，如果曲线 $y = f(x)$ ，和 $y = g(x)$ 在交点 p_0 处切线的斜率的绝对值记为： k_f, k_g ，则

当 $k_f < k_g$ 时， p_0 是稳定的；

当 $k_f > k_g$ 时， p_0 是不稳定的。

(4) 模型的差分方程分析

设点 $p_0(x_0, y_0)$ 满足： $y_0 = f(x_0), x_0 = h(y_0)$ ，

在 p_0 点附近取函数 $f(x), h(x)$ 的一阶近似：

$$y_n = y_0 - \alpha(x_n - x_0), \alpha > 0, \dots \dots \dots (3.7)$$

$$x_{n+1} = x_0 + \beta(y_n - y_0), \beta > 0, \dots \dots \dots (3.8)$$

合并两式可得： $x_{n+1} = -\alpha\beta x_n + (1 + \alpha\beta)x_0, n = 1, 2, \dots$(3.9)

这是关于 x_n 的一阶线性差分方程。当然它是原来方程的近似模型。作为数学模型，本来就是客观实际问题的近似模拟，现在为了处理方便，适当取用其近似形式是合理的。

其中， $-\alpha$ 为 f 在 p_0 点处的切线斜率； $\frac{1}{\beta}$ 为 $g(x)$ 在 p_0 点处切线的斜率。

方程 (3.9) 递推可得：

$$x_{n+1} = (-\alpha\beta)^n x_1 + [1 - (-\alpha\beta)^n]x_0 \dots \dots \dots (3.10)$$

所以， p_0 点稳定的充要条件是： $|\alpha\beta| < 1$, 即： $\alpha < \frac{1}{\beta}$

这个结论与蛛网模型的分析结果是一致的。

(4) 模型推广

如果决策时考虑到 x_{n+1} 与 y_n, y_{n+1} 都有关系，则可假设

$$x_{n+1} = g\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right) \dots \dots \dots (3.11)$$

这时数学模型为： $y_n = f(x_n)$

$$x_{n+1} = g\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right).$$

对此模型仍用线性近似关系可得：首先求出平衡点，即解方程

$$y_0 = f(x_0)$$

$$x_0 = g\left(\frac{y_0 + y_0}{2}\right) = g(y_0)$$

$$x_{n+1} = g(y_0) + \frac{\beta}{2}(y_n + y_{n+1} - 2y_0)$$

则有：

$$\therefore x_{n+1} - x_0 = \frac{\beta}{2}(y_n + y_{n+1} - 2y_0)$$

再结合 (3.7) 可得：

$$x_{n+1} - x_0 = \frac{\beta}{2}(y_0 - \alpha(x_n - x_0) + y_0 - \alpha(x_{n-1} - x_0) - 2y_0)$$

$$\therefore 2x_{n+1} + \alpha\beta x_{n-1} + \alpha\beta x_{n-1} = (1 + \alpha\beta)x_0$$

$$\text{即：} \quad 2x_{n+2} + \alpha\beta x_{n+1} + \alpha\beta x_n = (1 + \alpha\beta)x_0 \dots \dots \dots (3.12)$$

特征方程为： $2\lambda^2 + \alpha\beta\lambda + \alpha\beta = 0$

$$\text{特征根为：} \lambda_{1,2} = \frac{-\alpha\beta \pm \sqrt{(\alpha\beta)^2 - 8\alpha\beta}}{4}$$

所以： $\alpha\beta > 8$ 时， $\lambda_2 < \frac{-\alpha\beta}{4} < -2$ ， 此时解不稳定。

$\alpha\beta < 8$ 时， $|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}$ ， 则 $\alpha\beta < 2$ 时， $|\lambda_{1,2}| < 1$

从而解是稳定的。

这个条件比原来的模型解的稳定性条件放宽了。说明决策水平提高了。

进一步来看，对这个模型还可以进行进一步的分析：考虑下一年的产量时，还可以近三年的价格来决定，例如：设

$x_{n+1} = h(\frac{y_n + y_{n-1} + y_{n-2}}{3})$ ，；另外还可以考虑引入投资额 z_n ，并建立有关的离散方程关系。

模型 4 人口的控制与预测模型

背景分析：人口数量的发展变化规律及特性可以用偏微分方程的理论形式来表现和模拟。但在实际应用中不是很方便，需要建立离散化的模型，以便于分析、应用。人口数量的变化取决于诸多因素，比如：女性生育率、死亡率、性别比、人口基数等。试建立离散数学模型来表现人口数量的变化规律。

模型假设：以年为时间单位记录人口数量，年龄取周岁。

(1) 设这个地区最大年龄为 m 岁

(2) 第 t 年为 i 岁的人数为 $x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m$; $t = 0, 1, 2, \dots$ ，

这个数量指标是整个问题分析、表现的目标和载体，我们的目的就是找出这些变量的变化规律、内在的普遍联系。

(3) 设第 t 年为 i 岁的人口平均死亡率为 $d_i(t)$ ，即这一年中 i 岁人

口中死亡数与基数之比： $d_i(t) = \frac{x_i(t) - x_{i+1}(t+1)}{x_i(t)}$

即： $x_{i+1}(t+1) = (1 - d_i(t))x_i(t)$, $i = 1, 2, \dots, m-1$; $t = 0, 1, 2, \dots$

(4) 设第 t 年 i 岁女性的生育率：即每位女性平均生育婴儿数为 $b_i(t)$ ， $[i_1, i_2]$ 为生育区间。 $k_i(t)$ 为第 t 年 i 岁人口的女性比（占全部 i 岁人口数）

由此可知：第 t 年出生的人数为：

$$f(t) = \sum_{i=i_1}^{i_2} b_i(t)k_i(t)x_i(t)$$

(6) 设 $h_i(t) = \frac{b_i(t)}{\sum_{i=i_1}^{i_2} b_i(t)} = \frac{b_i(t)}{\beta(t)}$, 它表示 i 岁女性总生育率,

$$\begin{aligned}\beta(t) &= b_{i_1}(t) + b_{i_1+1}(t) + \dots + b_{i_2}(t) \\ &= b_{i_1}(t) + b_{i_1+1}(t+1) + \dots + b_{i_2}(t+i_2-i_1)\end{aligned}$$

模型建立：根据上面的假设

[illegible]

令 $x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]'$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0... & 0 & 0 \\ 1-d_1(t) & 0 & 0... & 0 & 0 \\ 0 & 1-d_2(t) & 0... & 0 & 0 \\ & & & & ... \\ 0 & 0 & ... & 1-d_{m-1}(t) & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & b_{i_1}(t) & \dots & b_{i_n}(t) & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}_{m \times n}$$

则此向量 $x(t)$ 满足方程：

$$x(t+1) = A(t)x(t) + \beta(t)B(t)x(t)$$

$$\text{即： } x(t+1) = (A(t) + \beta(t)B(t))x(t) \dots \dots \dots (3.13)$$

这是一阶差分方程

其中 $\beta(t)$ 是可控变量， $x(t)$ 是状态变量，并且关于 $\beta(t)$ 和 $x(t)$ 都是线性的，故称其为双线性方程。

模型分析：

在稳定的社会环境下，死亡率、生育模式、女性比例、婴儿存活率是可以假设为不变的，故 $A(t) = A, B(t) = B$ 为常数矩阵。从而，

$$x(t+1) = (A + \beta(t).B)x(t) \dots \dots \dots (3.14)$$

只要总生育率 $\beta(t)$ 确定下来，则人口的变化规律就可以确定下来。为了更全面地反映人口的有关信息，下面再引入一些重要的指标：

(1) 人口总数： $N(t) = \sum_{i=0}^m x_i(t)$

(2) 人口平均年龄： $R(t) = \frac{1}{N(t)} \sum_{i=0}^m i.x_i(t)$

(3) 平均寿命： $S(t) = \sum_{j=0}^m \exp[-\sum_{i=0}^j d_i(t)]$ ，这里假定从第 t 年分析，如果以后每年的死亡率是不变的，即： $d_i(t) = d_{i+1}(t+1) = \dots$

则 $\sum_{i=0}^j d_i(t)$ 表示 t 年出生的人活到第 $j+1$ 年期间的死亡率，这

也表明其寿命为 j 岁， $j=1,2,\dots,m$ 。而 $\exp(-\sum_{i=0}^j d_i(t))$ 表示寿命。

通过求出 $x(t)$ 的变化规律，就可以对上面引入的 3 个指标进行更具体的分析，从而对人口的分布状况、变化趋势、总体特征等有科学的认识 and 把握。具体求解分析这里不再进行。

模型 5 线性时间离散弥漫网络模型

引言：一个国家在一定时间段内的财富依赖于许多因素，不同国家的相互交流是重要的方面。建立数学模型，表现国家财富的变化与国家间财富的流动之间的关系。

模型假设：设有 n 个国家，用 $u_i^{(t)}$ 表示在时期 $t \in \{0,1,2,\dots\}$ 的财富。假设只考虑这些国家之间仅仅两两国家之间有交流关系。并且假设财富流动的系数是 γ 。

模型的建立：国家间的财富关系应当满足

$$u_1^{(t+1)} - u_1^{(t)} = \gamma(u_2^{(t)} - u_1^{(t)}) + \gamma(u_n^{(t)} - u_1^{(t)})$$

$$u_2^{(t+1)} - u_2^{(t)} = \gamma(u_1^{(t)} - u_2^{(t)}) + \gamma(u_3^{(t)} - u_2^{(t)})$$

.....

$$u_{n-1}^{(t+1)} - u_{n-1}^{(t)} = \gamma(u_{n-2}^{(t)} - u_{n-1}^{(t)}) + \gamma(u_n^{(t)} - u_{n-1}^{(t)})$$

$$u_n^{(t+1)} - u_n^{(t)} = \gamma(u_1^{(t)} - u_n^{(t)}) + \gamma(u_{n-1}^{(t)} - u_n^{(t)})$$

用矩阵形式表示：

令 $u^{(t)} = (u_1^{(t)}, u_2^{(t)}, \dots, u_n^{(t)})'$ 表示时期 t 各个国家的财富状态；

$$\text{令 } A_n = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdot & \cdot & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & \cdot & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

则有： $u^{(t+1)} = (I - \gamma A_n) u^{(t)}$ (3.10)

$$\text{记 } \tilde{A}_n = I - \gamma A_n, \text{ 则 } u^{(t)} = \tilde{A}_n^t u^{(0)} \dots\dots\dots (3.11)$$

模型计算与分析:

计算可知 A_n 的特征值为; $\lambda^{(k)} = 4 \sin^2 \frac{k\pi}{n}, 1 \leq k \leq n,$

\tilde{A}_n 的特征值为 $1 - \gamma \lambda^{(k)} = 1 - 4\gamma \sin^2 \frac{k\pi}{n}$

对应的特征向量为 $v^{(k)} = (v_1^{(k)}, \dots, v_n^{(k)})', \dots\dots 1 \leq k \leq n$

其中 $v_m^{(k)} = \frac{1}{\sqrt{n}} (\cos \frac{2km\pi}{n} + \sin \frac{2km\pi}{n})$

为讨论方便起见, 引入如下记号:

$$\lambda^{(n)} = 0, v^{(n)} = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, 1, \dots, 1)'$$

$$\lambda^{(0)} = \lambda^{(n)}, v^{(0)} = \frac{1}{\sqrt{n}} (1, 1, \dots, 1)',$$

则有: n 为偶数时:

$$0 = \lambda^{(0)} = \lambda^{(n)} < \dots < \lambda^{(k)} = \lambda^{(n-k)} < \dots < \lambda^{(\frac{n}{2}-1)} = \lambda^{(\frac{n}{2}+1)} < \dots < \lambda^{(\frac{n}{2})} = \lambda^{(n-\frac{n}{2})} = 4,$$

n 为奇数时:

$$0 = \lambda^{(0)} = \lambda^{(n)} < \dots < \lambda^{(k)} = \lambda^{(n-k)} < \dots < \lambda^{(\frac{n-1}{2})} = \lambda^{(\frac{n+1}{2})} < 4$$

记: V_k 为由 $v^{(k)}, v^{(n-k)}$ 张成的子空间,

$$\text{则: } u^{(0)} = \sum_{k=0}^{n-1} \langle v^{(k)}, u^{(0)} \rangle v^{(k)}$$

$$u^{(t)} = \tilde{A}_n^t u^{(0)} = \sum_{k=0}^{n-1} \langle v^{(k)}, u^{(0)} \rangle \tilde{A}_n^t v^{(k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{n-1} (1 - \lambda^{(k)} \gamma)^t \langle v^{(k)}, u^{(0)} \rangle v^{(k)}$$

$$= \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \sum_{\omega \in V_k} (1 - \lambda^{(k)} \gamma)^t \langle \omega, u^{(0)} \rangle \omega$$

由此式进一步分析可以获得: 当 $t \rightarrow \infty$ 时, $u_n^{(t)}$ 的渐进变化状态规律(略)。

模型 6 金融问题的差分方程模型

- 1、设现有一笔 p 万元的商业贷款，如果贷款期是 n 年，年利率是 r_1 ，今采用月还款的方式逐月偿还，建立数学模型计算每月的还款数是多少？

模型分析：在整个还款过程中，每月还款数是固定的，而待还款数是变化的，找出这个变量的变化规律是解决问题的关键。

模型假设：设贷款后第 k 个月后的欠款数是 A_k 元，月还款为 m 元，月贷款利息为 $r = \frac{r_1}{12}$ 。

模型建立：关于离散变量 A_k ，考虑差分关系有：

$$A_k + rA_k = A_{k+1} + m,$$

$$\text{即： } A_{k+1} = (1+r)A_k - m \quad (3.15)$$

这里已知有： $A_0 = 100000, A_{24} = 0$

模型求解：令 $B_k = A_k - A_{k-1}$ ，则 $B_k = B_{k-1}(1+r) = B_1(1+r)^{k-1}$

$$\begin{aligned} \therefore A_k &= A_0 + B_1 + B_2 + \dots + B_k \\ &= A_0 + B_1[1 + (1+r) + \dots + (1+r)^{k-1}] \\ &= A_0(1+r)^k - \frac{m}{r}[(1+r)^k - 1], k = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

这就是差分方程 (3.15) 的解。把已知数据 A_0, r 代入 $A_{12n} = 0$ 中，可以求出月还款额 m 。例如：

$A_0 = 100000, r = 0.0052125, n = 2$ 时，可以求出： $m = 444.356$ 元。

模型的进一步拓广分析：拓广分析包括条件的改变、目标的改变、某些特殊结果等。如果令 $A_k = A$ ，则 $A = \frac{m}{r}$ ，并且

当 $A_0 = \frac{m}{r}$ 时，总有 $A_k = \frac{m}{r}$ ，即表明：每月只还上了利息。只有当 $A_0 < \frac{m}{r}$ 时，欠款余额逐步减少，并最终还上贷款。

2、养老保险模型

问题：养老保险是保险中的一种重要险种，保险公司将提供不同的保险方案供以选择，分析保险品种的实际投资价值。也就是说，分析如果已知所交保费和保险收入，按年或按月计

算实际的利率是多少？也就是说，保险公司需要用你的保费实际获得至少多少利润才能保证兑现你的保险收益？

模型举例分析：假设每月交费 200 元至 60 岁开始领取养老金，男子若 25 岁起投保，届时养老金每月 2282 元；如 35 岁起保，届时月养老金 1056 元；试求出保险公司为了兑现保险责任，每月至少应有多少投资收益率？这也就是投保人的实际收益率。

模型假设：这应当是一个过程分析模型问题。过程的结果在条件一定时是确定的。整个过程可以按月进行划分，因为交费是按月进行的。假设投保人到第 k 月止所交保费及收益的累计总额为 F_k ，每月收益率为 r ，用 p 、 q 分别表示 60 岁之前和之后每月交费数和领取数， N 表示停交保险费的月份， M 表示停领养老金的月份。

模型建立：在整个过程中，离散变量 F_k 的变化规律满足：

$$\begin{cases} F_{k+1} = F_k(1+r) + p, k = 0, 1, \dots, N-1 \\ F_{k+1} = F_k(1+r) - q, k = N, \dots, M \end{cases},$$

在这里 F_k 实际上表示从保险人开始交纳保险费以后，保险人帐户上的资金数值，我们关心的是，在第 M 个月时， F_M 能否为非负数？如果为正，则表明保险公司获得收益；如为负数，则表明保险公司出现亏损。当为零时，表明保险公司最后一无所剩，表明所有的收益全归保险人，把它作为保险人的实际收益。从这个分析来看，引入变量 F_k ，很好地刻画了整个过程中资金的变化关系，特别是引入收益率 r ，虽然它不是我们所求的保险人的收益率，但是从问题系统环境中来看，必然要考虑引入另一对象：保险公司的经营效益，以此作为整个过程中各种量变化的表现基础。

模型计算：以 25 岁起保为例。假设男性平均寿命为 75 岁，则有 $p = 20, q = 2282; N = 420, M = 600$ ，初始值为 $F_0 = 0$ ，我们可以

$$F_k = F_0(1+r)^k + \frac{p}{r}[(1+r)^k - 1], k = 0, 1, 2, \dots, N$$

得到：

$$F_k = F_N(1+r)^{k-N} - \frac{q}{r}[(1+r)^{k-N} - 1], k = N+1, \dots, M$$

在上面两式中，分别取 $k = N$ 和 $k = M$ 并利用 $F_M = 0$ 可以求出：

$$(1+r)^M - (1+\frac{q}{p})(1+r)^{M-N} + \frac{q}{p} = 0$$

利用数学软件或利用牛顿法通过变成求出方程的跟为：

$$r = 0.00485$$

同样方法可以求出：35岁和45岁起保所获得的月利率分别为

$$r = 0.00461, r = 0.00413$$

练习题：

1、金融公司支付基金的流动模型：某金融机构设立一笔总额为 \$540 万的基金，分开放置位于 A 城和 B 城的两个公司，基金在平时可以使用，但每周末结算时必须确保总额仍为 \$540 万。经过一段时间运行，每过一周，A 城公司有 10% 的基金流动到 B 城公司，而 B 城公司则有 12% 的基金流动到 A 城公司。开始时，A 城公司基金额为 \$260 万，B 城公司为 \$280 万。试建立差分方程模型分析：两公司的基金数额变化趋势如何？进一步要求，如果金融专家认为每个公司的支付基金不能少于 \$220 万，那么是否需要在什么时间将基金做专门调动来避免这种情况？

2、某保险公司推出与养老结合的人寿保险计划，其中介绍的例子为：如果 40 岁的男性投保人每年交保险费 1540 元，交费期 20 岁至 60 岁，则在他生存期间，45 岁时（投保满 5 年）可获返还补贴 4000 元，50 岁时（投保满 10 年）可获返还补贴 5000 元，其后每隔 5 年可获增幅为 1000 元的返还补贴。另外，在投保人去世或残废时，其受益人可获保险金 20000 元。试建立差分方程模型分析：若该投保人的寿命为 76 岁，其交保险费所获得的实际年利率是多少？而寿命若为 74 岁时，实际年利率又是多少？

3、Leslie 种群年龄结构的差分方程模型

已知一种昆虫每两周产卵一次，六周以后死亡（给除了变化过程的基本规律）。孵化后的幼虫 2 周后成熟，平均产卵 100 个，四周龄的成虫平均产卵 150 个。假设每个卵发育成 2 周龄成虫的概率为 0.09，（称为成活率），2 周龄成虫发育成 4 周龄成虫的概率为 0.2。

- (1) 假设开始时，0~2, 2~4, 4~6 周龄的昆虫数目相同，计算 2 周、4 周、6 周后各种周龄的昆虫数目；
- (2) 讨论这种昆虫各种周龄的昆虫数目的演变趋势：各周龄的昆虫比例是否有一个稳定值？昆虫是无限地增长还是趋于灭亡？
- (3) 假设使用了除虫剂，已知使用了除虫剂后各周龄的成活率减半，问这种除虫剂是否有效？

4、按年龄分组的种群增长一般模型及灵敏性分析

对在问题 3 中的模型做进一步的拓广。对于某种群建立数学模型分析其数量变化规律，。这里分析的对象是特定的种群，变化过程可以按相等间隔的时段末来记录。为了精确表现种群的变化，自然需要将种群进行分类，不妨按与时间段长度相同的年龄进行分组。为了简化模型，对每一时段的种群取相同的最大年龄，这里相当于认为很大年龄的那部分视作为相同年龄，在下一个时段全部消失。考虑每一时段中不同年龄组种群数量构成的向量、不同年龄组的繁殖率 b_i 和存活率 s_i ，（1）建立差分方程分析种群的变化规律；（2）进行种群数量的稳定性分析，即时间充分长以后种群年龄结构及数量变化；（3）对 b_i 和 s_i 关于种群的增减进行灵敏性分析（提示：考虑由 b_i 和 s_i 所构作的新参数 $R = b_1 + b_2s_1 + \dots + b_ns_1\dots s_{n-1}$ ，解释这个参数的实际意义，并利用它进行灵敏性分析）

补充知识：矩阵 $P = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 & F_2 & \cdots & F_{n-1} & F_n \\ P_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & P_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & P_{n-1} & 0 \end{bmatrix}$ ，其中 $F_j \geq 0, j = 0, 1, \dots, n;$
 $P_i > 0, i = 0, 1, \dots, n-1$

称矩阵 P 为 **Leslie 矩阵**。

基本概念： 设矩阵的特征值为 $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$ ，将它们的模按从大到小的顺序排列（不妨设为）： $|\lambda_0| \geq |\lambda_1| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ ，则称 λ_0 为矩阵的主特征值，如果 $|\lambda_0| > |\lambda_1|$ ，则称 λ_0 为严格主特征值。

Leslie 矩阵 P 的几个基本性质：

（1）特征多项式为：

$$p_n(\lambda) = \lambda^{n+1} - F_0\lambda - (P_0F_1)\lambda^{n-1} - (P_0P_1F_2)\lambda^{n-2} - \dots - (P_0P_1\dots P_{n-1}F_n)$$

它有唯一一个正的单特征值 λ_0 （重数为 1），且为主特征值。

（2）如果 λ 为 L 矩阵 P 的一个非零特征值，则

$$\alpha_\lambda = (1, \frac{P_0}{\lambda}, \frac{P_0P_1}{\lambda^2}, \dots, \frac{P_0P_1\dots P_{n-1}}{\lambda^n})^T \text{ 为与 } \lambda \text{ 对应的一个特征向量。}$$

（3）若 L 矩阵第一行有两个相临元素非零，则它的唯一正特征根 λ_0 为严格主特征值。

- (4) 若 k_1, k_2, \dots, k_m 是 L 矩阵中第一列中非零元素所处的列数, 且 k_1, k_2, \dots, k_m 互素, 则 λ_0 为严格主特征值。

参考书:

- [1] 姜启源 数学模型 (第二版) 北京: 高等教育出版社, 1993
- [2] 乐经良主编 数学实验 北京: 高等教育出版社 1999
- [3] 张广 差分方程解的稳定性
- [4] 杨启帆 方道元 数学建模 杭州: 浙江大学出版社, 1999
- [5] 司守奎主编 数学建模 烟台 海军航空工程学院 2001 (未出版)

第六章 差分方程模型（下）

离散状态转移模型涉及的范围很广，可以用到各种不同的数学工具。下面我们对差分方程作一简单的介绍，下一章我们将介绍马氏链模型。

§1 差分方程

1.1 差分方程简介

规定 t 只取非负整数。记 y_t 为变量 y 在 t 点的取值，则称 $\Delta y_t = y_{t+1} - y_t$ 为 y_t 的一阶向前差分，简称差分，称 $\Delta^2 y_t = \Delta(\Delta y_t) = \Delta y_{t+1} - \Delta y_t = y_{t+2} - 2y_{t+1} + y_t$ 为 y_t 的二阶差分。类似地，可以定义 y_t 的 n 阶差分 $\Delta^n y_t$ 。

由 t 、 y_t 及 y_t 的差分给出的方程称为 y_t 的差分方程，其中含 y_t 的最高阶差分的阶数称为该差分方程的阶。差分方程也可以写成不显含差分的形式。例如，二阶差分方程 $\Delta^2 y_t + \Delta y_t + y_t = 0$ 也可改写成 $y_{t+2} - y_{t+1} + y_t = 0$ 。

满足一差分方程的序列 y_t 称为差分方程的解。类似于微分方程情况，若解中含有的独立常数的个数等于差分方程的阶数时，称此解为该差分方程的通解。若解中不含任意常数，则称此解为满足某些初值条件的特解。

称如下形式的差分方程

$$a_0 y_{n+t} + a_1 y_{n+t-1} + \cdots + a_n y_t = b(t) \quad (1)$$

为 n 阶常系数线性差分方程，其中 a_0, a_1, \cdots, a_n 是常数， $a_0 \neq 0$ 。其对应的齐次方程为

$$a_0 y_{n+t} + a_1 y_{n+t-1} + \cdots + a_n y_t = 0 \quad (2)$$

容易证明，若序列 $y_t^{(1)}$ 与 $y_t^{(2)}$ 均为 (2) 的解，则 $y_t = c_1 y_t^{(1)} + c_2 y_t^{(2)}$ 也是方程 (2) 的解，其中 c_1, c_2 为任意常数。若 $y_t^{(1)}$ 是方程 (2) 的解， $y_t^{(2)}$ 是方程 (1) 的解，则 $y_t = y_t^{(1)} + y_t^{(2)}$ 也是方程 (1) 的解。

方程 (1) 可用如下的代数方法求其通解：

(I) 先求解对应的特征方程

$$a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \cdots + a_n = 0 \quad (3)$$

(II) 根据特征根的不同情况，求齐次方程 (2) 的通解。

(i) 若特征方程 (3) 有 n 个互不相同的实根 $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ ，则齐次方程 (2) 的通解为

$$c_1 \lambda_1^t + \cdots + c_n \lambda_n^t \quad (c_1, \cdots, c_n \text{ 为任意常数})$$

(ii) 若 λ 是特征方程 (3) 的 k 重根，通解中对应于 λ 的项为 $(\bar{c}_1 + \cdots + \bar{c}_k t^{k-1}) \lambda^t$ ， $\bar{c}_i (i=1, \cdots, k)$ 为任意常数。

(iii) 若特征方程 (3) 有单重复根 $\lambda = \alpha \pm \beta i$ ，通解中对应它们的项为 $\bar{c}_1 \rho^t \cos \varphi + \bar{c}_2 \rho^t \sin \varphi$ ，其中 $\rho = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ 为 λ 的模， $\varphi = \arctg \frac{\beta}{\alpha}$ 为 λ 的幅角。

(iv) 若 $\lambda = \alpha \pm \beta i$ 是特征方程 (3) 的 k 重复根，则通解对应于它们的项为

$$(\bar{c}_1 + \cdots + \bar{c}_k t^{k-1}) \rho^t \cos \varphi + (\bar{c}_{k+1} + \cdots + \bar{c}_{2k} t^{k-1}) \rho^t \sin \varphi$$

$\bar{c}_i (i=1, \dots, 2k)$ 为任意常数。

(III) 求非齐次方程 (1) 的一个特解 \bar{y}_t 。若 y_t 为方程 (2) 的通解, 则非齐次方程 (1) 的通解为 $\bar{y}_t + y_t$ 。

求非齐次方程 (1) 的特解一般要用到常数变易法, 计算较繁。对特殊形式的 $b(t)$ 也可使用待定系数法。例如, 当 $b(t) = b^t p_k(t)$, $p_k(t)$ 为 t 的 k 次多项式时可以证明: 若 b 不是特征根, 则非齐次方程 (1) 有形如 $b^t q_k(t)$ 的特解, $q_k(t)$ 也是 t 的 k 次多项式; 若 b 是 r 重特征根, 则方程 (1) 有形如 $b^t t^r q_k(t)$ 的特解。进而可利用待定系数法求出 $q_k(t)$, 从而得到方程 (1) 的一个特解 \bar{y}_t 。

例 1 求解两阶差分方程 $y_{t+2} + y_t = t$ 。

解 对应齐次方程的特征方程为 $\lambda^2 + 1 = 0$, 其特征根为 $\lambda_{1,2} = \pm i$, 对应齐次方程的通解为

$$y_t = c_1 \cos \frac{\pi}{2} t + c_2 \sin \frac{\pi}{2} t$$

原方程有形如 $at + b$ 的特解。代入原方程求得 $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{1}{2}$, 故原方程的通解为

$$c_1 \cos \frac{\pi}{2} t + c_2 \sin \frac{\pi}{2} t + \frac{1}{2} t - \frac{1}{2}$$

例 2 在信道上传输仅用三个字母 a, b, c 且长度为 n 的词, 规定有两个 a 连续出现的词不能传输, 试确定这个信道容许传输的词个数。

解 令 $h(n)$ 表示容许传输且长度为 n 的词的个数, $n = 1, 2, \dots$, 通过简单计算可求得: $h(1) = 3$, $h(2) = 8$ 。当 $n \geq 3$ 时, 若词的第一个字母是 b 或 c , 则词可按 $h(n-1)$ 种方式完成; 若词的第一个字母是 a , 则第二个字母是 b 或 c , 该词剩下的部分可按 $h(n-2)$ 种方式完成。于是, 得差分方程

$$h(n) = 2h(n-1) + h(n-2), \quad (n = 3, 4, \dots)$$

其特征方程为

$$\lambda^2 - 2\lambda - 2 = 0$$

特征根

$$\lambda_1 = 1 + \sqrt{3}, \quad \lambda_2 = 1 - \sqrt{3}$$

则通解为

$$h(n) = c_1 (1 + \sqrt{3})^n + c_2 (1 - \sqrt{3})^n, \quad (n = 3, 4, \dots)$$

利用条件 $h(1) = 3$, $h(2) = 8$, 求得

$$h(n) = \frac{2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} (1 + \sqrt{3})^n + \frac{-2 + \sqrt{3}}{2\sqrt{3}} (1 - \sqrt{3})^n, \quad (n = 1, 2, \dots)$$

在应用差分方程研究问题时, 我们常常需要讨论解的稳定性。对常系数非齐次线性差分方程 (1), 若不论其对应齐次方程的通解中任意常数 c_1, \dots, c_n 如何取值, 在 $t \rightarrow +\infty$ 时总有 $y_t \rightarrow 0$, 则称方程 (1) 的解是稳定的。根据通解的结构不难看出, 非

齐次方程 (1) 稳定的充要条件为其所有特征根的模均小于 1。

1.2 常系数线性差分方程的 Z 变换解法

常系数线性差分方程采用解析解法比较容易, 而且对其解的意义也容易理解, 但采用这种解法求解常系数线性非齐次差分方程比较繁琐, 通常是采用 Z 变换, 将差分方程变换为代数方程去求解。

设有离散序列 $x(k)$, ($k=0,1,2,\dots$), 则 $x(k)$ 的 Z 变换定义为

$$X(z) = Z[x(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} x(k)z^{-k} \quad (4)$$

其中 z 是复变量。显然上式右端的级数收敛域是某个圆的外部。

$X(z)$ 的 Z 反变换记作

$$x(k) = Z^{-1}[X(z)]$$

1.2.1 几个常用离散函数的 Z 变换

(i) 单位冲激函数 $\delta(k)$ 的 Z 变换

$$Z[\delta(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} \delta(k)z^{-k} = [1 \times z^{-k}]_{k=0} = 1$$

即单位冲激函数的 Z 变换为 1。

(ii) 单位阶跃函数 $U(k)$ 的 Z 变换

$$Z[U(k)] = \sum_{k=0}^{\infty} U(k)z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \times z^{-k},$$

即

$$Z[U(k)] = \frac{z}{z-1} \quad (|z| > 1)$$

(iii) 单边指数函数 $f(k) = a^k$ 的 Z 变换 (a 为不等于 1 的正常数)

$$Z[a^k] = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \frac{z}{z-a} \quad (|z| > a)$$

1.2.2 Z 变换的性质

(i) 线性性质

设 $Z[f_1(k)] = F_1(z)$, $Z[f_2(k)] = F_2(z)$, 则

$$Z[af_1(k) + bf_2(k)] = aF_1(z) + bF_2(z)$$

其中 a, b 为常数。收敛域为 $F_1(z)$ 和 $F_2(z)$ 的公共区域。

(ii) 平移性

设 $Z[f(k)] = F(z)$, 则

$$Z[f(k+1)] = z[F(z) - f(0)],$$

$$Z[f(k+N)] = z^N [F(z) - \sum_{k=0}^{N-1} f(k)z^{-k}],$$

$$Z[f(k-1)] = z^{-1}[F(z) + f(-1)z],$$

$$Z[f(k-N)] = z^{-N}[F(z) + \sum_{k=1}^{N-1} f(-k)z^k]$$

例3 求齐次差分方程

$$x(k+2)+3x(k+1)+2x(k)=0, \quad x(0)=0, \quad x(1)=1$$

的解。

解 令 $Z[x(k)] = X(z)$ ，对差分方程取 Z 变换，得

$$z^2 X(z) - z + 3zX(z) + 2X(z) = 0,$$

$$X(z) = \frac{z}{z^2 + 3z + 2} = \frac{z}{z+1} - \frac{z}{z+2},$$

对上式取 z 反变换，便得差分方程的解为

$$x(k) = (-1)^k - (-2)^k.$$

§2 蛛网模型

2.1 问题提出

在自由竞争的社会中，很多领域会出现循环波动的现象。在经济领域中，可以从自由集市上某种商品的价格变化看到如下现象：在某一时期，商品的上市量大于需求，引起价格下跌，生产者觉得该商品无利可图，转而经营其它商品；一段时间之后，随着产量的下降，带来的供不应求又会导致价格上升，又有很多生产商会进行该商品的生产；随之而来的，又会出现商品过剩，价格下降。在没有外界干扰的情况下，这种现象将会反复出现。

如何从数学的角度来描述上述现象呢？

2.2 模型假设

(i) 设 k 时段商品数量为 x_k ，其价格为 y_k 。这里，把时间离散化为时段，一个时期相当于商品的一个生产周期。

(ii) 同一时段的商品的价格取决于该时段商品的数量，把

$$y_k = f(x_k) \quad (5)$$

称之为需求函数。出于对自由经济的理解，商品的数量越多，其价格就越低，故可以假设：需求函数为一个单调下降函数。

(iii) 下一时段商品数量由上一个时段的商品的价格决定，把

$$x_{k+1} = g(y_k) \quad (6)$$

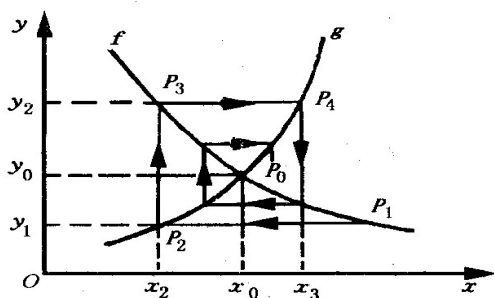
称之为供应函数。由于价格越高可以导致产量越大，故可假设供应函数是一个单调上升的函数。

2.3 模型求解

在同一个坐标系中做出需求函数与供应函数的图形，设两条曲线相交于 $P_0(x_0, y_0)$ ，则 P_0 为平衡点。因为此时 $x_0 = g(y_0)$ ， $y_0 = f(x_0)$ ，若某个 k ，有 $x_k = x_0$ ，则可推出

$$y_l = y_0, \quad x_l = x_0, \quad (l = k, k+1, \dots)$$

即商品的数量保持在 x_0 ，价格保持在 y_0 ，不妨设 $x_1 \neq x_0$ ，下面考虑 x_k, y_k 在图上的变化 ($k=1, 2, \dots$)。如下图所示，当 x_1 给定后，价格 y_1 由 f 上的 P_1

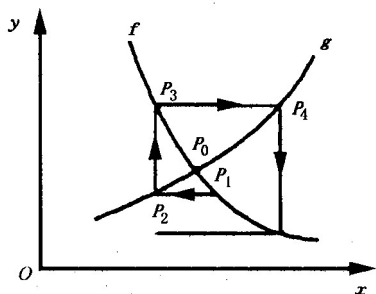


点决定,下一时段的数量 x_2 由 g 上的 P_2 点决定, y_2 又可由 f 上的 P_3 点决定。依此类推,可得一系列的点 $P_1(x_1, y_1)$, $P_2(x_2, y_1)$, $P_3(x_2, y_2)$, $P_4(x_3, y_2)$, 图上的箭头表示求出 P_k 的次序, 由图知:

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} P_k(x, y) = P_0(x_0, y_0),$$

即市场经济将趋于稳定。

并不是所有的需求函数和供应函数都趋于稳定, 若给定的 f 与 g 的图形如下图所示, 得出的 P_1, P_2, \dots 就不趋于 P_0 , 此时, 市场经济趋向不稳定。



上两图中的折线 $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \dots$ 形似蛛网, 故把这种模型称为蛛网模型。在进行市场经济分析中, f 取决于消费者对某种商品的需要程度及其消费水平, g 取决于生产者的生产、管理等能力。

当已经知道需求函数和供应函数之后, 可以根据 f 和 g 的性质判断平衡点 P_0 的稳定性。利用结论: 当 $|x_1 - x_0|$ 较小时, P_0 点的稳定性取决于 f 与 g 在 P_0 点的斜率, 即当

$$|f'(x_0)| < |g'(y_0)| \quad (7)$$

时, P_0 点稳定, 当

$$|f'(x_0)| > |g'(y_0)| \quad (8)$$

时, P_0 点不稳定。

这一结论的直观解释是: 需求曲线越平, 供应曲线越陡, 越有利于经济稳定。

设 $\alpha = |f'(x_0)|$, $\frac{1}{\beta} = |g'(y_0)|$, 在 P_0 点附近取 f 与 g 的线性近似, 由

(5), (6) 式得

$$y_k - y_0 = -\alpha(x_k - x_0) \quad (9)$$

$$x_{k+1} - x_0 = \beta(y_k - y_0) \quad (10)$$

上两式中消去 y_k ，得

$$x_{k+1} = -\alpha\beta x_k + (1 + \alpha\beta)x_0 \quad (11)$$

(11) 式对 $k=1,2,\dots$ 均成立，有

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= -\alpha\beta x_k + (1 + \alpha\beta)x_0 \\ (-\alpha\beta)x_k &= (-\alpha\beta)^2 x_{k-1} + (-\alpha\beta)(1 + \alpha\beta)x_0 \\ (-\alpha\beta)^2 x_{k-1} &= (-\alpha\beta)^3 x_{k-2} + (-\alpha\beta)^2 (1 + \alpha\beta)x_0 \\ &\dots\dots\dots \\ (-\alpha\beta)^{k-2} x_3 &= (-\alpha\beta)^{k-1} x_2 + (-\alpha\beta)^{k-2} (1 + \alpha\beta)x_0 \\ (-\alpha\beta)^{k-1} x_2 &= (-\alpha\beta)^k x_1 + (-\alpha\beta)^{k-1} (1 + \alpha\beta)x_0 \end{aligned}$$

以上 k 个式子相加，有

$$\begin{aligned} x_k &= (-\alpha\beta)^k x_1 + (1 + \alpha\beta)x_0 [1 + (-\alpha\beta) + \dots + (-\alpha\beta)^{k-1}] \\ &= (-\alpha\beta)^k x_1 + [1 - (-\alpha\beta)^k]x_0 \end{aligned} \quad (12)$$

此为 (11) 式的解。

若 P_0 是稳定点，则应有：

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = x_0$$

结合 (12) 式考虑， P_0 点稳定的条件是

$$\alpha\beta < 1 \quad (13)$$

即

$$\alpha < \frac{1}{\beta}$$

同理， P_0 点不稳定的条件是

$$\alpha\beta > 1 \quad (14)$$

即

$$\alpha > \frac{1}{\beta}$$

此时， $\lim_{k \rightarrow +\infty} x_{k+1} = \infty$ 。这与 (7)，(8) 式是一致的。

2.4 模型的修正

在上面模型假设的第 (iii) 点中引进了供应函数，并且知道 g 取决于管理者的生产、管理水平。如果生产者的管理水平更高一些，他们在决定该商品生产数量 x_{k+1} 时，不仅考虑了前一时期的价格 y_k ，而且也考虑了价格 y_{k-1} 。为了简化起见，不妨设 x_{k+1} 由 $\frac{1}{2}(y_k + y_{k-1})$ 决定，则供应函数可写成

$$x_{k+1} = g\left[\frac{1}{2}(y_k + y_{k-1})\right]$$

在 P_0 附近取线性近似, 则有

$$x_{k+1} - x_0 = \frac{\beta}{2}(y_k + y_{k-1} - 2y_0) \quad (15)$$

由 (9) 式有

$$\begin{aligned} y_k &= y_0 - \alpha(x_k - x_0) \\ y_{k-1} &= y_0 - \alpha(x_{k-1} - x_0) \end{aligned}$$

将上两式代入 (15) 式, 整理得

$$2x_{k+1} + \alpha\beta x_k + \alpha\beta x_{k-1} = (1 + \alpha\beta)x_0, \quad (k = 2, 3, \dots)$$

这是一个二阶线性差分方程, 其特征方程为

$$2\lambda^2 + \alpha\beta\lambda + \alpha\beta = 0$$

经计算, 可得其特征根

$$\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha\beta \pm \sqrt{(\alpha\beta)^2 - 8\alpha\beta}}{4} \quad (16)$$

结论: 若方程的特征根均在单位圆内, 即 $|\lambda_1| < 1$, $|\lambda_2| < 1$, 则 P_0 为稳定点。

当 $\alpha\beta > 8$ 时, (16) 式有两个实根, 因

$$\lambda_2 = \frac{-\alpha\beta + \sqrt{(\alpha\beta)^2 - 8\alpha\beta}}{4} < -\frac{\alpha\beta}{4},$$

则有 $|\lambda_2| > 2$, 故此时 P_0 不是稳定点。

当 $\alpha\beta < 8$ 时, (16) 式有两个共轭复根, 此时

$$|\lambda_{1,2}| = \left[\left(\frac{\alpha\beta}{4} \right)^2 + \left(\frac{1}{4} \sqrt{8\alpha\beta - (\alpha\beta)^2} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{\alpha\beta}{2}}$$

要使 P_0 为稳定点, 只需

$$\alpha\beta < 2$$

与 (13) 式相比, α 与 β 的范围扩大了。这是由于经营者经营管理水平的提高带来的结果。

§3 商品销售量预测

在利用差分方程建模研究实际问题时, 常常需要根据统计数据并用最小二乘法来拟合出差分方程的系数。其系统稳定性讨论要用到代数方程的求根。对问题的进一步研究又常需考虑到随机因素的影响, 从而用到相应的概率统计知识。

例4 某商品前 5 年的销售量见表。现希望根据前 5 年的统计数据预测第 6 年起该商品在各季度中的销售量。

年份 季度	第一年	第二年	第三年	第四年	第五年
1	11	12	13	15	16
2	16	18	20	24	25
3	25	26	27	30	32
4	12	14	15	15	17

从表中可以看出，该商品在前 5 年相同季节里的销售量呈增长趋势，而在同一年中销售量先增后减，第一季度的销售量最小而第三季度的销售量最大。预测该商品以后的销售情况，根据本例中数据的特征，可以用回归分析方法按季度建立四个经验公式，分别用来预测以后各年同一季度的销售量。例如，如认为第一季度的销售量大体按线性增长，可设销售量 $y_t^{(1)} = at + b$ ，由

$x = [1:5]'$, $\text{ones}(5,1)$; $y = [11 \ 12 \ 13 \ 15 \ 16]'$; $z = x \backslash y$
求得 $a = z(1) = 1.3$, $b = z(2) = 9.5$ 。

根据 $y_t^{(1)} = 1.3t + 9.5$ ，预测第六年起第一季度的销售量为 $y_6^{(1)} = 17.3$, $y_7^{(1)} = 18.6$, ...。由于数据少，用回归分析效果不一定好。

如认为销售量并非逐年等量增长而是按前一年或前几年同期销售量的一定比例增长的，则可建立相应的差分方程模型。仍以第一季度为例，为简单起见不再引入上标，以 y_t 表示第 t 年第一季度的销售量，建立形式如下的差分公式：

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2$$

或

$$y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3$$

等等。

上述差分方程中的系数不一定能使所有统计数据吻合，较为合理的办法是用最小二乘法求一组总体吻合较好的数据。以建立二阶差分方程 $y_t = a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3$ 为例，选取 a_1, a_2, a_3 使

$$\sum_{t=3}^5 [y_t - (a_1 y_{t-1} + a_2 y_{t-2} + a_3)]^2$$

最小。编写 Matlab 程序如下：

```
y0=[11 12 13 15 16]';
y=y0(3:5); x=[y0(2:4), y0(1:3), ones(3,1)];
z=x\y
```

求得 $a_1 = z(1) = -1$, $a_2 = z(2) = 3$, $a_3 = z(3) = -8$ 。即所求二阶差分方程为 $y_t = -y_{t-1} + 3y_{t-2} - 8$ 。

虽然这一差分方程恰好使所有统计数据吻合，但这只是一个巧合。根据这一方程，可选代求出以后各年第一季度销售量的预测值 $y_6 = 21$, $y_7 = 19$, ...等。

上述为预测各年第一季度销售量而建立的二阶差分方程，虽然其系数与前 5 年第一季度的统计数据完全吻合，但用于预测时预测值与事实不符。凭直觉，第六年估计值明显偏高，第七年销售量预测值甚至小于第六年。稍作分析，不难看出，如分别对每一季度建立一差分方程，则根据统计数据拟合出的系数可能会相差甚大，但对同一种商

品，这种差异应当是微小的，故应根据统计数据建立一个共用于各个季度的差分方程。为此，将季度编号为 $t=1,2,\cdots,20$ ，令 $y_t = a_1 y_{t-4} + a_2$ 或 $y_t = a_1 y_{t-4} + a_2 y_{t-8} + a_3$ 等，利用全体数据来拟合，求拟合得最好的系数。以二阶差分方程为例，为求 a_1, a_2, a_3 使得

$$Q(a_1, a_2, a_3) = \sum_{t=9}^{20} [y_t - (a_1 y_{t-4} + a_2 y_{t-8} + a_3)]^2$$

最小，编写 Matlab 程序如下：

```
y0=[11 16 25 12 12 18 26 14 13 20 27 15 15 24 30 15 16 25 32
17]';
y=y0(9:20);
x=[y0(5:16), y0(1:12), ones(12,1)];
z=x\y
```

求得 $a_1 = z(1) = 0.8737$ ， $a_2 = z(2) = 0.1941$ ， $a_3 = z(3) = 0.6957$ ，故求得二阶差分方程

$$y_t = 0.8737 y_{t-4} + 0.1941 y_{t-8} + 0.6957, \quad (t \geq 21)$$

根据此式迭代，可求得第六年和第七年第一季度销售量的预测值为

$$y_{21} = 17.5869, \quad y_{25} = 19.1676$$

还是较为可信的。

§4 遗传模型

随着人类的进化，人们为了揭示生命的奥妙，越来越重视遗传学的研究，特别是遗传特征的逐代传播，引起人们更多的注意。无论是人，还是动植物都会将本身的特征遗传给下一代，这主要是因为后代继承了双亲的基因，形成自己的基因对，基因对将确定后代所表现的特征。下面，我们来研究两种类型的遗传：常染色体遗传和 x -链遗传。根据亲体基因遗传给后代的方式，建立模型，利用这些模型可以逐代研究一个总体基因型的分布。

4.1 常染色体遗传模型

常染色体遗传中，后代从每个亲体的基因对中各继承一个基因，形成自己的基因对，基因对也称为基因型。如果我们所考虑的遗传特征是由两个基因 A 和 a 控制的，那么就有三种基因对，记为 AA, Aa, aa 。例如，金鱼草由两个遗传基因决定花的颜色，基因型是 AA 的金鱼草开红花， Aa 型的开粉红色花，而 aa 型的开白花。又如人类眼睛的颜色也是通过常染色体遗传控制的。基因型是 AA 或 Aa 的人，眼睛为棕色，基因型是 aa 的人，眼睛为蓝色。这里因为 AA 和 Aa 都表示了同一外部特征，我们认为基因 A 支配基因 a ，也可以认为基因 a 对于 A 来说是隐性的。当一个亲体的基因型为 Aa ，而另一个亲体的基因型是 aa 时，那么后代可以从 aa 型中得到基因 a ，从 Aa 型中或得到基因 A ，或得到基因 a 。这样，后代基因型为 Aa 或 aa 的可能性相等。下面给出双亲体基因型的所有可能的结合，以及其后代形成每种基因型的概率，如下表所示。

		父体—母体的基因型					
		$AA-AA$	$AA-Aa$	$AA-aa$	$Aa-Aa$	$Aa-aa$	$aa-aa$
后代 基因 型	AA	1	1/2	0	1/4	0	0
	Aa	0	1/2	1	1/2	1/2	0
	aa	0	0	0	1/4	1/2	1

例5 农场的植物园中某种植物的基因型为 AA , Aa 和 aa 。农场计划采用 AA 型的植物与每种基因型植物相结合的方案培育植物后代。那么经过若干年后, 这种植物的任一代的三种基因型分布如何?

(a) 假设

令 $n = 0, 1, 2, \dots$ 。

(i) 设 a_n, b_n 和 c_n 分别表示第 n 代植物中, 基因型为 AA, Aa 和 aa 的植物占植物总数的百分率。令 $x^{(n)}$ 为第 n 代植物的基因型分布:

$$x^{(n)} = [a_n \quad b_n \quad c_n]^T$$

当 $n = 0$ 时

$$x^{(0)} = [a_0 \quad b_0 \quad c_0]^T$$

表示植物基因的初始分布 (即培育开始时的分布), 显然有

$$a_0 + b_0 + c_0 = 1$$

(ii) 第 n 代的分布与第 $n-1$ 代的分布之间的关系是通过上面的表格确定的。

(b) 建模

根据假设 (ii), 先考虑第 n 代中的 AA 型。由于第 $n-1$ 代的 AA 型与 AA 型结合, 后代全部是 AA 型; 第 $n-1$ 代的 Aa 型与 AA 型结合, 后代是 AA 型的可能性为 $\frac{1}{2}$; 而第 $n-1$ 代的 aa 型与 AA 型结合, 后代不可能是 AA 型。因此当 $n = 1, 2, \dots$ 时

$$a_n = 1 \cdot a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1} + 0 \cdot c_{n-1}$$

即

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1} \quad (17)$$

类似可推出

$$b_n = \frac{1}{2} b_{n-1} + c_{n-1} \quad (18)$$

$$c_n = 0 \quad (19)$$

将 (17), (18), (19) 式相加, 得

$$a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$$

根据假设 (i), 有

$$a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0 = 1$$

对于 (17), (18), (19) 式, 我们采用矩阵形式简记为

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (20)$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由 (20) 式递推, 得

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)} = M^2x^{(n-2)} = \dots = M^n x^{(0)} \quad (21)$$

(21) 式给出第 n 代基因型的分布与初始分布的关系。

编写如下 Matlab 程序:

```
syms n a0 b0 c0
M=sym(' [1,1/2,0;0,1/2,1;0,0,0] ');
[p,lamda]=eig(M);
x=p*lamda.^n*p.^(-1)*[a0;b0;c0];
x=simple(x)
```

求得

$$\begin{cases} a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} c_0 \\ c_n = 0 \end{cases} \quad (22)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $\left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0$, 所以从 (22) 式得到

$$a_n \rightarrow 1, \quad b_n \rightarrow 0, \quad c_n = 0$$

即在极限的情况下, 培育的植物都是 AA 型。

(c) 模型的讨论

若在上述问题中, 不选用基因 AA 型的植物与每一植物结合, 而是将具有相同基因型植物相结合, 那么后代具有三种基因型的概率如下表所示。

		父体—母体的基因型		
		$AA-AA$	$Aa-Aa$	$aa-aa$
后代 基因 型	AA	1	1/4	0
	Aa	0	1/2	0
	aa	0	1/4	1

并且 $x^{(n)} = M^n x^{(0)}$, 其中

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

编写如下 Matlab 程序:

```
syms n a0 b0 c0
M=sym(' [1,1/4,0;0,1/2,0;0,1/4,1] ');
[p,lamda]=eig(M);
x=p*lamda.^n*p.^(-1)*[a0;b0;c0];
x=simple(x)
```

求得

$$\begin{cases} a_n = a_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] b_0 \\ b_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n b_0 \\ c_n = c_0 + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^{n+1} \right] b_0 \end{cases} \quad (23)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \rightarrow a_0 + \frac{1}{2}b_0$, $b_n \rightarrow 0$, $c_n \rightarrow c_0 + \frac{1}{2}b_0$ 。因此, 如果用基因型相同的植物培育后代, 在极限情况下, 后代仅具有基因 AA 和 aa 。

4.2 常染色体隐性病模型

现在世界上已经发现的遗传病有将近 4000 种。在一般情况下, 遗传病与特殊的种族、部落及群体有关。例如, 遗传病库利氏贫血症的患者以居住在地中海沿岸为多, 镰状网性贫血症一般流行在黑人中, 家族黑蒙性白痴症则流行在东欧犹太人中间。患者经常未到成年就痛苦地死去, 而他们的父母则是疾病的病源。假若我们能识别这些疾病的隐性患者, 并且规定两个隐性患者不能结合 (因为两个隐性患者结合, 他们的后代就可能成为显性患者), 那么未来的儿童, 虽然有可能是隐性患者, 但决不会出现显性特征, 不会受到疾病的折磨。现在, 我们考虑在控制结合的情况下, 如何确定后代中隐性患者的概率。

(a) 假设

(i) 常染色体遗传的正常基因记为 A , 不正常基因记为 a , 并以 AA, Aa, aa 分别表示正常人, 隐性患者, 显性患者的基因型。

(ii) 设 a_n, b_n 分别表示第 n 代中基因型为 AA, Aa 的人占总人数的百分比, 记

$$x^{(n)} = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \dots$$

(iii) 为使每个儿童至少有一个正常的父亲或母亲, 因此隐性患者必须与正常人结合, 其后代的基因型概率由下表给出:

		父母的基因型	
		$AA-AA$	$AA-Aa$
后代 基因型	AA	1	1/2
	Aa	0	1/2

(b) 建模

由假设 (iii)，从第 $n-1$ 代到第 n 代基因型分布的变化取决于方程

$$a_n = a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1}$$

$$b_n = 0 \cdot a_{n-1} + \frac{1}{2} b_{n-1}$$

所以 $x^{(n)} = Mx^{(n-1)}$, $n = 1, 2, \dots$, 其中

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

如果初始分布 $x^{(0)}$ 已知，那么第 n 代基因型分布为 $x^{(n)} = M^n x^{(0)}$, $n = 1, 2, \dots$ 。
易知

$$\begin{cases} a_n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \\ b_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n b_0 \end{cases} \quad n = 1, 2, \dots \quad (24)$$

当 $n \rightarrow \infty$ 时, $a_n \rightarrow 1$, $b_n \rightarrow 0$, 隐性患者逐渐消失。从 (24) 式中可知

$$b_n = \frac{1}{2} b_{n-1}$$

这说明每代隐性患者的概率是前一代隐性概率患者的 $\frac{1}{2}$ 。

(c) 模型讨论

研究在随机结合的情况下，隐性患者的变化是很有意思的，但随机结合导致了非线性化问题，超出了本章范围，然而用其它技巧，在随机结合的情况下可以把 (24) 式改写为

$$b_n = \frac{b_{n-1}}{1 + \frac{1}{2} b_{n-1}} \quad (25)$$

下面给出数值的例子：

某地区有 10% 的黑人是镰状网性贫血症隐性患者，如果控制结合，根据 (24) 式可知下一代（大约 27 年）的隐性患者将减少到 5%；如果随机结合，根据 (25) 式，可以预言下一代人中有 9.5% 是隐性患者，并且可计算出大约每出生 400 个黑人孩子，其中有一个是显性患者。

4.3 X -链遗传模型

X -链遗传是指雄性具有一个基因 A 或 a ，雌性具有两个基因 AA ，或 Aa ，或 aa 。其遗传规律是雄性后代以相等概率得到母体两个基因中的一个，雌性后代从父体中得到一个基因，并从母体的两个基因中等可能地得到一个。下面，研究与 X -链遗传有关的近亲繁殖过程。

(a) 假设

(i) 从一对雌雄结合开始，在它们的后代中，任选雌雄各一个成配偶，然后在它们产生的后代中任选两个结成配偶。如此继续下去。

(ii) 父体与母体的基因型组成同胞对，同胞对的形式有 (A, AA) ， (A, Aa) ， (A, aa) ， (a, AA) ， (a, Aa) ， (a, aa) 六种。初始一对雌雄的同胞对，是这六种类型中的任一种，其后代的基因型如下表所示。

		父体—母体的基因型					
		(A, AA)	(A, Aa)	(A, aa)	(a, AA)	(a, Aa)	(a, aa)
后代基因型	A	1	1/2	0	1	1/2	0
	a	0	1/2	1	0	1/2	1
	AA	1	1/2	0	0	0	0
	Aa	0	1/2	1	1	1/2	0
	aa	0	0	0	0	1/2	1

(iii) 在每一代中，配偶的同胞对也是六种类型之一，并有确定的概率。为计算这些概率，设 $a_n, b_n, c_n, d_n, e_n, f_n$ 分别是第 n 代中配偶的同胞对为 (A, AA) ， (A, Aa) ， (A, aa) ， (a, AA) ， (a, Aa) ， (a, aa) 型的概率， $n = 0, 1, \dots$ 。令

$$x^{(n)} = [a_n \quad b_n \quad c_n \quad d_n \quad e_n \quad f_n]^T, \quad n = 0, 1, \dots$$

(iv) 如果第 $n-1$ 代配偶的同胞对是 (A, Aa) 型，那么它们的雄性后代将等可能地得到基因 A 和 a ，它们的雌性后代的基因型将等可能地是 AA 或 Aa 。又由于第 n 代雌雄结合是随机的，那么第 n 代配偶的同胞对将等可能地为四种类型 (A, AA) ， (A, Aa) ， (a, AA) ， (a, Aa) 之一。对于其它类型的同胞对，我们可以进行同样分析，因此有

$$x^{(n)} = Mx^{(n-1)}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (26)$$

其中

$$M = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 1 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 1 & 0 & \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}$$

从 (26) 式中易得

$$x^{(n)} = M^n x^{(0)}, \quad n=1,2,\dots$$

编写如下 Matlab 程序:

```
syms n a0 b0 c0 d0 e0 f0
M=[1 1/4 0 0 0 0;0 1/4 0 1 1/4 0;0 0 0 0 1/4 0;
  0 1/4 0 0 0 0;0 1/4 1 0 1/4 0;0 0 0 0 1/4 1];
M=sym(M);
[p,lamda]=eig(M);
x=p*lamda.^n*p.^(-1)*[a0;b0;c0;d0;e0;f0];
x=simple(x)
```

由上述程序计算结果可以看出

$$\text{当 } n \rightarrow \infty \text{ 时, } x^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} a_0 + \frac{2}{3}b_0 + \frac{1}{3}c_0 + \frac{2}{3}d_0 + \frac{1}{3}e_0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{3}b_0 + \frac{2}{3}c_0 + \frac{1}{3}d_0 + \frac{2}{3}e_0 + f_0 \end{bmatrix},$$

因此, 在极限情况下所有同胞对或者是 (A, AA) 型, 或者是 (a, aa) 型。如果初始的父
母体同胞对是 (A, Aa) 型, 即 $b_0=1$, 而 $a_0=c_0=d_0=e_0=f_0=0$, 于是, 当
 $n \rightarrow \infty$ 时

$$x^{(n)} \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}^T$$

即同胞对是 (A, AA) 型的概率是 $\frac{2}{3}$, 是 (a, aa) 型的概率是 $\frac{1}{3}$ 。

习 题 三

1. (汉诺塔问题) n 个大小不同的圆盘依其半径大小依次套在桩 A 上, 大的在下, 小的在上。现要将此 n 个盘移到空桩 B 或 C 上, 但要求一次只能移动一个盘且移动过程中, 始终保持大盘在下, 小盘在上。移动过程中桩 A 也可利用。设移动 n 个盘的次数为 a_n , 试建立关于 a_n 的差分方程, 并求 a_n 的通项公式。

2. 设第一月初有雌雄各一的一对小兔。假定两月后长成成兔, 同时 (即第三月) 开始每月初产雌雄各一的一对小兔, 新增小兔也按此规律繁殖。设第 n 月末共有 F_n 对兔子, 试建立关于 F_n 的差分方程, 并求 F_n 的通项公式。

3. 在常染色体遗传的问题中, 假设植物总是和基因型是 Aa 的植物结合。求在第 n 代中, 基因型为 AA , Aa 和 aa 的植物的百分率, 并求当 n 趋于无穷大时, 基因型分布的极限。

第七章 总结

§1 引言

本讲义将常微分方程的解法进行移植, 用来解决差分方程的求解问题。

在差分方程中, 自变量通常用 n 表示, 这是因为在差分方程中, 所有出现的函数(包括未知函数, 变系数, 非齐次右端函数等) $f(n)$ 只要求在 $n \in \{0, 1, 2, 3, \dots\}$ 上有定义, 所以函数又常写成数列的形式 $f_n, n = 0, 1, 2, \dots$

为了便于与微分方程做类比, 本讲义中自变量不用 n , 仍然采用 x , 因而函数或数列都写成 $f(x)$ 或 $f_x, x = 1, 2, 3, \dots$

注: 每个函数都有两个写法, 一般的写法 $f(x)$ 或下标的写法 f_x , 但是假如有两个函数 $f_1(x), f_2(x)$, 则下标的写法就不太方便了: f_{1x}, f_{2x} , 这时我们就只采用一般写法。

定义 $\Delta f(x) = f(x+1) - f(x)$ 或 $\Delta f_x = f_{x+1} - f_x$ 称为 f 的一阶差分。

定义 $\Delta^2 f(x) = \Delta f(x+1) - \Delta f(x) = f(x+2) - 2f(x+1) + f(x)$ 或 $\Delta^2 f_x = \Delta f_{x+1} - \Delta f_x = f_{x+2} - 2f_{x+1} + f_x$ 称为 f 的二阶差分。

定义 $\Delta^k f(x) = \Delta^{k-1} f(x+1) - \Delta^{k-1} f(x)$ 或 $\Delta^k f_x = \Delta^{k-1} f_{x+1} - \Delta^{k-1} f_x$ 称为 f 的 k 阶差分。

定义 含有未知函数以及未知函数差分的方程称为差分方程, 方程中出现的未知函数的差分的最高阶数称为方程的阶数。

k 阶差分方程的一般形式为:

$$F(x, y_x, \Delta y_x, \dots, \Delta^k y_x) = 0, x = 0, 1, \dots$$

将差分用差分定义式代入, k 阶差分方程还可以写成:

$$G(x, y_x, y_{x+1}, \dots, y_{x+k}) = 0, x = 0, 1, \dots$$

差分方程经常以这后一种形式出现，也就是通常的递推形式。以后写方程时，我们将忽略方程的成立范围： $x = 0, 1, \dots$ 。

当方程关于未知函数 $y_x (= y(x))$ 及其各阶差分为线性函数时，方程称为线性差分方程：

$$y(x+k) + a_{k-1}(x)y(x+k-1) + \dots + a_1(x)y(x+1) + a_0(x)y(x) = f(x)$$

$a_i(x), i = k-1, k-2, \dots, 1, 0$ 称为线性方程的(变)系数， $f(x)$ 称为线性方程的非齐次右端项。

当 $f(x) = 0$ 时，称为线性齐次方程。当 $a_i(x), i = k-1, k-2, \dots, 1, 0$ 都是不依赖 x 的常数时，称为线性常系数方程。

§2 一阶线性常系数方程

考察一阶线性常系数方程：

$$y_{x+1} + ay_x = f_x$$

其中 a 是已知常数， f_x 是已知函数。

将方程看成递推式，显然只要知道了 y_0 的值， $y_x, x = 1, 2, \dots$ 的值就都确定了。所以方程的通解 $y = y(x; y_0)$ 是一个单参数函数族。这说明方程的通解只能含一个任意常数。

§2.1 齐次方程

$$y_{x+1} + ay_x = 0$$

显然 $a = 0$ 时， $y_x \equiv 0, x = 1, 2, \dots$ 。下面假设 $a \neq 0$ 。

解的结构I齐次方程的线性组合仍是齐次方程的解。

解的结构II齐次方程的解组成的函数空间，其维数为1。

证明 只证明任意两个解 $y_1(x), y_2(x)$ 必线性相关。

如果 $y_1(0) = 0$ ，则 $y_1(x) \equiv 0$ ，显然 $y_1(x), y_2(x)$ 线性相关。

如果 $y_1(0) \neq 0$ ，则 $y_3(x) = y_2(x) - \frac{y_2(0)}{y_1(0)}y_1(x)$ 也是解，且 $y_3(0) = 0$ ，所以 $y_3(x) \equiv 0$ ，即 $y_1(x), y_2(x)$ 线性相关。

解的结构III若 $y_1(x)$ 是齐次方程的任意一个非零解, 则 $y(x) = Cy_1(x)$ 就是齐次方程的所有解, 即通解, 其中 C 是任意常数。

尝试求一个形如 $y_1(x) = r^x$ 的非零解, 代入方程:

$$r^{x+1} + ar^x = 0$$

所以

$$r + a = 0$$

上式称为特征方程, $r = -a$ 称为特征值。所以齐次方程的通解为:

$$y = C(-a)^x$$

§2.2 非齐次方程

$$y_{x+1} + ay_x = f_x$$

解的结构I非齐次方程的任意两个解的差是齐次方程的解。

解的结构II非齐次方程的任意一个解与齐次方程的任意一个解的和是非齐次方程的解。

解的结构II设 $y_0(x)$ 是非齐次方程的任意一个解, 则非齐次方程的通解为:

$$y(x) = C(-a)^x + y_0(x)$$

下面用两种办法来求特解 $y_0(x)$: 常数变易法和待定系数法。

常数变易法: 齐次方程的通解是: $C(-a)^x$, 所以设非齐次方程的一个特解为 $y_0(x) = u(x)(-a)^x$, 代入方程得:

$$\begin{aligned} u(x+1)(-a)^{x+1} + au(x)(-a)^x &= f(x) \\ u(x+1) - u(x) &= \frac{f(x)}{(-a)^{x+1}} \end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned} (u(x+1) - u(x)) + (u(x) - u(x-1)) + \cdots + (u(1) - u(0)) &= \sum_{k=0}^x \frac{f(k)}{(-a)^{k+1}} \\ u(x+1) &= u(0) + \sum_{k=0}^x \frac{f(k)}{(-a)^{k+1}} \end{aligned}$$

假如取 $u(0) = 0$ 就可以得到一个特解 $u(x)(-a)^x$, 假如取 $u(0) = C$ 为任意常数, 则得到通解:

$$y(x) = \left(C + \sum_{k=0}^{x-1} \frac{f(k)}{(-a)^{k+1}}\right)(-a)^x$$

待定系数法: 待定系数法只能用于特殊的非齐次右端项。

若 $f(x) = P_m(x)r_*^x$, $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式, 则:

(1) 当 $r_* \neq -a$ 不是特征值时, 设 $y_0(x) = Q_m(x)r_*^x$;

(2) 当 $r_* = -a$ 是特征值时, 设 $y_0(x) = xQ_m(x)r_*^x$.

其中 $Q_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式, 其系数由方程待定。

若 $f(x) = (P_m^1(x) \cos(x\theta_*) + P_m^2(x) \sin(x\theta_*))r_*^x$, $P_m^i(x)$, $i = 1, 2$ 为两个 x 的 m 次多项式, 设

$$y_0(x) = (Q_m^1(x) \cos(x\theta_*) + Q_m^2(x) \sin(x\theta_*))r_*^x$$

其中 $Q_m^i(x)$, $i = 1, 2$ 为两个 x 的 m 次多项式, 其系数由方程待定。

§3 二阶线性常系数方程

考察二阶线性常系数方程:

$$y_{x+2} + ay_{x+1} + by_x = f_x$$

其中 a, b 是已知常数, f_x 是已知函数。

将方程看成递推式, 显然只要知道了 y_0, y_1 的值, $y_x, x = 2, 3, \dots$ 的值就都确定了。所以方程的通解 $y = y(x; y_0, y_1)$ 是一个双参数函数族。这说明方程的通解只能含两个任意常数。

§3.1 齐次方程

$$y_{x+2} + ay_{x+1} + by_x = 0$$

解的结构I齐次方程的线性组合仍是齐次方程的解。

解的结构II齐次方程的解组成的函数空间, 其维数为2.

证明 只证明任意三个解 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 必线性相关。

三个2维向量 $(y_1(0), y_1(1))$, $(y_2(0), y_2(1))$, $(y_3(0), y_3(1))$ 必相关, 所以存在 $\lambda_i, i = 1, 2, 3$ 不全为零, 使得:

$$\lambda_1(y_1(0), y_1(1)) + \lambda_2(y_2(0), y_2(1)) + \lambda_3(y_3(0), y_3(1)) = (0, 0)$$

记 $y_4(x) = \lambda_1 y_1(x) + \lambda_2 y_2(x) + \lambda_3 y_3(x)$, 则 $y_4(x)$ 也是齐次方程的解, 且 $y_4(0) = y_4(1) = 0$, 将方程看成递推式可知: $y_4(x) \equiv 0$.

所以 $y_1(x), y_2(x), y_3(x)$ 线性相关。

解的结构III若 $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程的任意两个线性无关的解, 则 $y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$ 就是齐次方程的所有的解, 即通解, 其中 C_1, C_2 是两个任意常数。

尝试求齐次方程的形如 r^x 的解, 代入方程:

$$r^{x+2} + ar^{x+1} + br^x = 0$$

所以

$$r^2 + ar + b = 0$$

上式称为特征方程, 其解称为特征值。根据特征值的不同情况, 我们可以得到齐次方程的两个线性独立的解, 进而得到齐次方程的通解:

(1)特征方程有两个不同的实根: $r = r_1, r_2, r_1 \neq r_2$, 则通解为:

$$y(x) = C_1 r_1^x + C_2 r_2^x$$

(2)特征方程有两个相同的实根: $r = r_1, r_2, r_1 = r_2$, 则通解为:

$$y(x) = (C_1 + C_2 x) r_1^x$$

(2)特征方程有两个共轭复根: $r = r_1, r_2, r_1, r_2 = r_0(\cos \theta_0 \pm i \sin \theta_0), (\sin \theta_0 \neq 0)$ 则通解为:

$$y(x) = r_0^x (C_1 \cos(x\theta_0) + C_2 \sin(x\theta_0))$$

§3.2 非齐次方程

$$y_{x+2} + ay_{x+1} + by_x = f_x$$

解的结构I非齐次方程的任意两个解的差是齐次方程的解。

解的结构II非齐次方程的任意一个解与齐次方程的任意一个解的和是非齐次方程的解。

解的结构II设 $y_0(x)$ 是非齐次方程的任意一个解, $y_1(x), y_2(x)$ 是齐次方程的任意两个线性独立的解, 则非齐次方程的通解为:

$$y(x) = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) + y_0(x)$$

下面用两种办法来求特解 $y_0(x)$: 常数变易法和待定系数法。

常数变易法: 齐次方程的通解是: $C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x)$, 所以设非齐次方程的一个特解为 $y_0(x) = u_1(x)y_1(x) + u_2(x)y_2(x)$.

$$y_0(x+1) = u_1(x+1)y_1(x+1) + u_2(x+1)y_2(x+1)$$

$$= u_1(x)y_1(x+1) + u_2(x)y_2(x+1) + (u_1(x+1) - u_1(x))y_1(x+1) + (u_2(x+1) - u_2(x))y_2(x+1)$$

因为我们只要找到一个特解就行, 所以我们令:

$$(u_1(x+1) - u_1(x))y_1(x+1) + (u_2(x+1) - u_2(x))y_2(x+1) = 0$$

因而

$$y_0(x+1) = u_1(x)y_1(x+1) + u_2(x)y_2(x+1)$$

$$y_0(x+2) = u_1(x+1)y_1(x+2) + u_2(x+1)y_2(x+2)$$

$$= u_1(x)y_1(x+2) + u_2(x)y_2(x+2) + (u_1(x+1) - u_1(x))y_1(x+2) + (u_2(x+1) - u_2(x))y_2(x+2)$$

代入方程得:

$$(u_1(x+1) - u_1(x))y_1(x+2) + (u_2(x+1) - u_2(x))y_2(x+2) = f(x)$$

所以, u_1, u_2 满足方程组:

$$(u_1(x+1) - u_1(x))y_1(x+1) + (u_2(x+1) - u_2(x))y_2(x+1) = 0$$

$$(u_1(x+1) - u_1(x))y_1(x+2) + (u_2(x+1) - u_2(x))y_2(x+2) = f(x)$$

所以

$$\begin{pmatrix} u_1(x+1) - u_1(x) \\ u_2(x+1) - u_2(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(x+1) & y_2(x+1) \\ y_1(x+2) & y_2(x+2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} u_1(x+1) \\ u_2(x+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1(0) \\ u_2(0) \end{pmatrix} + \sum_{k=0}^x \begin{pmatrix} y_1(k+1) & y_2(k+1) \\ y_1(k+2) & y_2(k+2) \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ f(k) \end{pmatrix}$$

假如取 $u_1(0) = u_2(0) = 0$ 就可以得到一个特解, 假如取 $u_1(0) = C_1, u_2(0) = C_2$ 为两个任意常数, 则得到通解。

待定系数法: 待定系数法只能用于特殊的非齐次右端项。

若 $f(x) = P_m(x)r_*^x$, $P_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式, 则:

(1) 当 $r_* \neq r_1, r_2$ 不是实特征值时, 设 $y_0(x) = Q_m(x)r_*^x$;

(2) 当 r_* 是单重实特征值时, 设 $y_0(x) = xQ_m(x)r_*^x$.

(3) 当 r_* 是双重实特征值时, 设 $y_0(x) = x^2Q_m(x)r_*^x$.

其中 $Q_m(x)$ 为 x 的 m 次多项式, 其系数由方程待定。

若 $f(x) = (P_m^1(x) \cos(x\theta_*) + P_m^2(x) \sin(x\theta_*))r_*^x$, $P_m^i(x), i = 1, 2$ 为两个 x 的 m 次多项式, 则:

(1) 当 $r_*(\cos \theta_* \pm i \sin \theta_*)$ 不是共轭特征值:

$$y_0(x) = (Q_m^1(x) \cos(x\theta_*) + Q_m^2(x) \sin(x\theta_*))r_*^x$$

(2) 当 $r_*(\cos \theta_* \pm i \sin \theta_*)$ 是共轭特征值:

$$y_0(x) = x(Q_m^1(x) \cos(x\theta_*) + Q_m^2(x) \sin(x\theta_*))r_*^x$$

其中 $Q_m^i(x), i = 1, 2$ 为两个 x 的 m 次多项式, 其系数由方程待定。

§4 待定系数法的一些例子

例4.1 $y_{x+1} + y_x = 1$

解: 特征方程为:

$$r + 1 = 0, \quad r = -1$$

设 $y_0(x) = a$ 代入方程得:

$$2a = 1, \quad a = \frac{1}{2}$$

通解为:

$$y_x = \frac{1}{2} + C(-1)^x$$

例4.2 $y_{x+1} - y_x = 1$

解：特征方程为：

$$r - 1 = 0, \quad r = 1$$

设 $y_0(x) = ax$ 代入方程得：

$$a(x+1) - ax = 1, \quad a = 1$$

通解为：

$$y_x = x + C$$

例4.3 $y_{x+2} + 2y_{x+1} + y_x = 1$

解：特征方程为：

$$r^2 + 2r + 1 = 0, \quad r_{1,2} = -1, -1$$

设 $y_0(x) = ax$ 代入方程得：

$$4a = 1, \quad a = \frac{1}{4}$$

通解为：

$$y_x = \frac{1}{4} + (C_1 + C_2x)(-1)^x$$

例4.4 $y_{x+2} - 2y_{x+1} + y_x = 1$

解：特征方程为：

$$r^2 - 2r + 1 = 0, \quad r_{1,2} = 1, 1$$

设 $y_0(x) = ax^2$ 代入方程得：

$$a(x+2)^2 - 2a(x+1)^2 + ax^2 = 1, \quad a = \frac{1}{2}$$

通解为：

$$y_x = \frac{1}{2}x^2 + C_1 + C_2x$$

例4.5 $y_{x+2} + y_x = \cos x + \cos \frac{\pi x}{2}$

解：特征方程为：

$$r^2 + 1 = 0, \quad r_{1,2} = \pm i = \cos \frac{\pi}{2} \pm i \sin \frac{\pi}{2}$$

设 $y_0(x) = a \cos x + b \sin x + (c \cos \frac{\pi x}{2} + d \sin \frac{\pi x}{2})x$ 代入方程得:

$$\begin{cases} a \cos 2 + b \sin 2 + a = 1 \\ -a \sin 2 + b \cos 2 + b = 0 \\ -2c = 1 \\ -2d = 0 \end{cases}$$

通解为:

$$y_x = C_1 \cos \frac{\pi x}{2} + C_2 \sin \frac{\pi x}{2} + a \cos x + b \sin x + (c \cos \frac{\pi x}{2} + d \sin \frac{\pi x}{2})x$$

§5 线性变系数方程初步

§5.1 一阶线性变系数方程

这里将微分方程里的积分因子法或全微分法移植过来, 称为求和因子法或全差分法, 也可以称为共轭方程法。

考察变系数一阶方程:

$$y_{x+1} + a_x y_x = f_x$$

设 $a_x \neq 0$. 若 b_x 是下面方程的非零解:

$$b_{x+1} + \frac{1}{a_x} b_x = 0$$

则 b_{x+1} 就是 y_x 的方程的求和因子, y_x 的方程的两边乘上 b_{x+1} 得:

$$b_{x+1} y_{x+1} - b_x y_x = b_{x+1} f_x$$

上面方程的右边是 $b_x y_x$ 的差分, 称为全差分方程。将全差分方程从 $x = 0, 1, \dots, x$ 求和得:

$$b_{x+1} y_{x+1} - b_0 y_0 = \sum_{k=0}^x b_{k+1} f_k$$

所以

$$y_{x+1} = \frac{1}{b_{x+1}} (b_0 y_0 + \sum_{k=0}^x b_{k+1} f_k)$$

§5.2 二阶线性变系数方程

假如知道二阶线性变系数齐次方程的一个非零解，用常数变易法，可以将二阶线性变系数方程化成一阶线性变系数方程。

考察非齐次二阶线性变系数方程

$$y_{x+2} + a_x y_{x+1} + b_x y_x = f_x$$

设 $y_1(x)$ 非零且满足齐次方程：

$$y_1(x+2) + a(x)y_1(x+1) + b(x)y_1(x) = f(x)$$

令 $y(x) = u(x)y_1(x)$ ，代入方程得：

$$(u(x+2) - u(x))y_1(x+2) + a(x)(u(x+1) - u(x))y_1(x+1) = f(x)$$

再令 $v(x) = u(x+1) - u(x)$ ，则

$$\begin{aligned} (v(x+1) - v(x))y_1(x+2) + a(x)v(x)y_1(x+1) &= f(x) \\ v(x+1) + \frac{a(x)y_1(x+1) - y_1(x+2)}{y_1(x+2)}v(x) &= \frac{f(x)}{y_1(x+2)} \end{aligned}$$

再用一阶方程的求和因子法或叫做全差分法求出 $v(x)$ 。

§6 高阶方程

高阶方程可以类似地讨论。

§7 注意事项

从上面的讨论可以看出，差分法的解法与常微分方程的解法是完全相同的思路。

但是要注意特征值的细微差别，常微分方程是求形如 $e^{\lambda x}$ 的解时，得到关于 λ 的特征方程；差分方程是求形如 r^x 的解时，得到关于 r 的特征方程。假如令 $e^{\lambda x} = r^x$ ，则 $e^\lambda = r$ 。这尤其在复的特征值时引起的特解的写法上有较大的区别。

第 10 章

差分方程

迄今为止, 我们研究的变量基本上是属于连续变化的类型. 但在经济与管理或其他实际问题中, 大多数变量是以定义在整数集上的数列形式变化的, 例如, 银行中的定期存款按所设定的时间等间隔计息. 国家的财政预算按年制定等. 通常称这类变量为离散型变量. 根据客观事物的运行机理和规律, 我们可以得到在不同取值点上的各离散变量之间的关系, 如递推关系. 描述各离散变量之间关系的数学模型称为离散型模型, 求解这类模型可以得知各个离散型变量的运行规律.

本章将简单介绍在经济学和管理科学中最常见的一种以整数列为自变量的函数以及相关的离散型数学模型——差分方程.

§ 10.1 差分方程的基本概念

一、差分概念

离散型数学模型研究的对象是定义在整数集上的函数, 一般记为 $y_n = f(n)$, $n = \cdots, -2, -1, 0, 1, 2, \cdots$.

函数 $y_n = f(n)$ 在 n 时刻的一阶差分定义为

$$\Delta y_n = y_{n+1} - y_n = f(n+1) - f(n)$$

函数 $y_n = f(n)$ 在 n 时的二阶差分定义为二阶差分的差分, 即

$$\Delta^2 y_n = \Delta y_{n+1} - \Delta y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n$$

例 1 设 $y_n = n^2 - 3n$ 求 Δy_n , $\Delta^2 y_n$

解 $\Delta y_n = (n+1)^2 - 3(n+1) - (n^2 - 3n) = 2n - 2$

$\Delta^2 y_n = \Delta(\Delta y_n) = 2(n+1) - 2 - (2n - 2) = 2$

例 2 设 $y_n = f(n)$ 表示某辆汽车外出在第 n 小时汽车里程表显示的公里数, 且前 6 个读出数为 $\{f(n)\} = \{1\,425, 1\,455, 1\,510, 1\,554, 1\,595, 1\,630\}$, 其中 $f(1)$ 表示开车时里程表的读数, $f(2)$ 表示行驶 1 小时后里程表的读数, 以此类

推, 可将 $y_n, \Delta y_n, \Delta^2 y_n$ 各值列表显示, 并为函数 y_n 的差分表.

表 10-1 中, Δy_n 表示汽车在第 n 小时走过的路程, 也可看作汽车在第 n 小时行驶的平均速度, 而 $\Delta^2 y_n$ 表示第 $n+1$ 小时与第 n 小时平均速度之差, 可看作在第 n 小时的平均加速度.

表 10-1

n	y_n	Δy_n	$\Delta^2 y_n$
1	1425	30	15
2	1455	55	11
3	1510	44	-4
4	1554	41	6
5	1595	35	
6	1630		

从例 2 可以看到, 函数 y_n 的一阶和二阶差分反映了 y_n 的变化特征. 一般来说, 当 $\Delta y_n > 0$ 时, 说明 y_n 在逐渐增加; 当 $\Delta y_n < 0$ 时, 说明 y_n 在逐渐减少. 又当 $\Delta^2 y_n > 0$ 时, 说明 y_n 的变化速度在增大; 当 $\Delta^2 y_n < 0$ 时, 说明 y_n 的变化速度在减小. 还可以证明, 若 $\Delta y_n \equiv C$, 则 y_n 为 n 的一次多项式; $\Delta^2 y_n = C$, 则 y_n 为二次多项式.

类似二阶差分的概念, 将二阶差分的差分定义为三阶差分, 即

$$\begin{aligned}\Delta^3 y_n &= \Delta^2 y_{n+1} - \Delta^2 y_n = \Delta y_{n+2} - 2\Delta y_{n+1} + \Delta y_n \\ &= y_{n+3} - 3y_{n+2} + 3y_{n+1} - y_n\end{aligned}$$

一般地, k 阶差分定义为

$$\begin{aligned}\Delta^k y_n &= \Delta(\Delta^{k-1} y_n) = \Delta^{k-1} y_{n+1} - \Delta^{k-1} y_n \\ &= \sum_{i=0}^k (-1)^i C_k^i y_{n+k-i} \quad k = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

其中 $C_k^i = \frac{k!}{i!(k-i)!}$

高阶差分在决定函数 y_n 是否为 n 的多项式, 以及多项式的次数是有用的.

二、差分方程

在第二章 § 2.1 节中, 我们曾提到数列 $\{a_n\}$ 是定义在自然数集 N 上的函数, 而最常见的数列是等差数列和等比数列.

例如: 公差为 $\frac{1}{2}$ 的等差数列满足

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{2} \quad n = 1, 2, \dots \quad (10-1)$$

公比为 -3 的等比数列满足

$$a_{n+1} = -3a_n \quad n = 1, 2, \dots \quad (10-2)$$

且由 (10-1) 我们知道

$$a_n = a_1 + \frac{1}{2}(n-1) \quad n = 1, 2, \dots \quad (10-3)$$

由 (10-2) 我们知道

$$a_n = a_1(-3)^{n-1} \quad n = 1, 2, \dots \quad (10-4)$$

方程(10-1), (10-2)就是差分方程, (10-3), (10-4)就分别是它们的解. 差分方程可具体定义如下:

定义 10.1 含有自变量 n , 未知函数 y_n , 以及 y_n 的差分 $\Delta y_n, \Delta^2 y_n, \dots$ 的函数方程, 称为常差分方程, 简称为差分方程, 出现在差分方程中的差分的最高阶数, 称为差分方程的阶.

k 阶差分方程的一般形式为

$$F(n, y_n, \Delta y_n, \dots, \Delta^k y_n) = 0 \quad (10-5)$$

其中 $F(n, y_n, \Delta y_n, \dots, \Delta^k y_n)$ 为 $n, y_n, \Delta y_n, \dots, \Delta^k y_n$ 的已知函数, 且至少 $\Delta^k y_n$ 要在式中出现.

利用差分公式, 差分方程(10-5)可转化为函数 y_n 在不同时刻的取值的关系式, 于是差分方程可以定义为

定义 10.2 含有自变量 n 和两个或两个以上函数值 y_n, y_{n+1}, \dots 的函数方程, 称为(常)差分方程. 出现在差分方程中未知函数下标的最大差, 称为差分方程的阶.

由定义 10.2, k 阶差分方程的一般形式为

$$F(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}) = 0 \quad (10-6)$$

其中 $F(n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k})$ 是 $n, y_n, y_{n+1}, \dots, y_{n+k}$ 的已知函数, 且 y_n 和 y_{n+k} 一定要出现.

例如, 根据定义 10.1, 方程

$$\Delta^2 y_n + n^2 y_n = 5, \Delta^2 y_n + \Delta y_n = 0$$

$$\Delta^2 y_n + 2\Delta y_n + y_n = 0, \Delta^2 y_n = n$$

均为二阶差分方程, 而由定义 10.2, 方程

$$y_{n+2} + y_{n+1} + y_n = 2, y_{n+3} + 3y_{n+1} = n^2 + 1$$

$$y_{n+2} + 2y_{n+1} + y_n = 0, y_{n+4} + 2^n y_{n+2} = 4n$$

也同为二阶差分方程, 而关系式

$$\Delta^2 y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n, y_n = 2^{n+1}$$

按定义都不是差分方程.

需要说明的是, 差分方程的两个定义不是完全等价的, 例如方程

$$\Delta^2 y_n - y_n = 0$$

按照定义 10.1, 为二阶差分方程, 若改写为

$$\Delta^2 y_n - y_n = y_{n+2} - 2y_{n+1} + y_n - y_n$$

$$= y_{n+2} - 2y_{n+1} = 0$$

按照定义 10.2, 则应为一阶差分方程.

在经济学和管理科学中遇到的通常是形如 (10-6) 的方程, 例如, 在考虑某商品供给量 S_n 与价格 P_n 的函数关系时, 由于商品供应方从掌握价格信息到提供商品之间需要一个生产周期, 因此, 有函数关系

$$S_n = a + bP_{n-1} \quad (10-7)$$

S_n 也可看作上期价格的后滞效应 (两个时点的差, 称为时滞). 而商品需求量 D_n 是消费者对同期价格 P_n 的反应, 因此需求函数可表为

$$D_n = a_1 + b_1 P_n \quad (10-8)$$

在供求平衡条件下, 可得到动态均衡模型的差分方程

$$P_n - \frac{b}{b_1} P_{n-1} = \frac{a - a_1}{b_1} \quad (10-9)$$

又如在讨论宏观经济模型中的消费函数 C_{n+k} 时, 通常将其看作前 k 个时期国内收入 $y_n, y_{n-1}, \dots, y_{n-k+1}$ 的滞后效应, 于是有差分方程

$$C_{n+k} = b_1 y_n + b_2 y_{n+1} + \dots + b_k y_{n+k-1} \quad (10-10)$$

本章将只按照定义 10.2 来讨论对应形式的差分方程.

形如

$$y_{n+k} + a_1(n)y_{n+k-1} + \dots + a_{k-1}(n)y_{n+1} + a_k(n)y_n = f(n) \quad (10-11)$$

的差分方程, 称为 k 阶线性差分方程, 其中 $a_1(n), \dots, a_k(n)$ 和 $f(n)$ 均为已知函数, 且 $a_k(n) \neq 0$. 如果 $f(n) \neq 0$, 则 (10-11) 又称为 k 阶非齐次线性差分方程, 如果 $f(n) \equiv 0$, 则 (10-11) 变为

$$y_{n+k} + a_1(n)y_{n+k-1} + \dots + a_{k-1}(n)y_{n+1} + a_k(n)y_n = 0 \quad (10-12)$$

称之为 k 阶齐次线性差分方程. 有时也称 (10-12) 为 (10-11) 的对应齐次方程.

例如方程 $ny_{n+3} - 3y_{n+1} = n^2 + 1$ 是二阶非齐次线性差分方程. $ny_{n+3} - 3y_{n+1} = 0$ 是对应的齐次方程.

三、差分方程的解

定义 10.3 如果将已知函数 $y_n = \varphi(n)$ 代入方程 (10-11), 使其对 $n = 0, 1, 2, \dots$ 成为恒等式, 则称 $y_n = \varphi(n)$ 为方程 (10-11) 的解. 如果方程 (10-11) 的解中含有 k 个独立的任意常数, 则称这样的解为方程 (10-11) 的通解, 而通解中给任意常数以确定值的解, 称为方程 (10-11) 的特解.

例 3 设差分方程 $y_{n+1} - 3y_n = 3^n$, 验证 $y_n = C3^n + \frac{n}{3} \cdot 3^n$ 是否为差分方程的通解, 并求满足条件 $y_0 = 5$ 的特解.

解 将 $y_n = C3^n + \frac{n}{3} \cdot 3^n$ 代入方程

$$\text{左边} = C3^{n+1} + \frac{1}{3}(n+1)3^{n+1} - 3(C3^n + \frac{n}{3} \cdot 3^n)$$

$$= 3^n = \text{右边}$$

所以, $y_n = C3^n + \frac{n}{3} \cdot 3^n$ 是方程的解, 且含任意常数 C , 故为方程的通解.

将 $y_0 = 5$ 代入得 $C = 5$, 于是所求特解为 $y = 5 \cdot 3^n + \frac{1}{3} n 3^n$

从例 3 看到, 已知通解求特解时, 需要给出确定通解中常数取值的条件, 称为定解条件. 对 k 阶差分方程, 要确定 k 个任意常数的值, 应有 k 个条件, 常见的定解条件是初始条件:

$$y_0 = a_0, y_1 = a_1, \dots, y_k = a_k$$

如果将例 3 中的方程改为 $y_{n+3} - 3y_{n+2} = 3^{n+2}$, 可以验证 $y_n = C3^n + \frac{1}{3} n 3^n$ 仍为变形后的方程的解. 这是因为方程在变形过程中各项之间的时间差没有改变, 也即差分方程的时滞结构没有变化. 一般情况下, 在不改变差分方程时滞结构的条件下, 将 n 的计算时间向前或向后移动一个相同时间间隔, 所得到的方程与原方程等价. 利用这个结论, 求解差分方程时, 可以将方程作适当整理. 且讨论解的表达式时, 只考虑 $n = 0, 1, 2, \dots$ 的情况.

在前面的讨论中可以看到, 关于差分方程和差分方程解的概念与微分方程十分相似, 事实上, 微分与差分都是描述变量变化的状态, 只是前者描述的是连续变化过程, 后者描述的是离散变化过程. 在取单位时间为 1, 且单位时间间隔很小的情况下, $\Delta y = f(x+1) - f(x) \approx dy = \frac{dy}{dx} \Delta x = \frac{dy}{dx}$, 即差分可看作连续变化的一种近似. 因此, 差分方程和微分方程无论在方程结构、解的结构, 还是在求解方法上有很多相似的地方. 下面, 我们就仿照 n 阶线性微分方程, 给出 k 阶线性差分方程 (10-11) 解的结构定理.

定理 10.1 如果函数 $y_1(n), y_2(n), \dots, y_m(n)$ 均为 k 阶齐次线性差分方程 (10-12) 的解, 则

$$y(n) = C_1 y_1(n) + C_2 y_2(n) + \dots + C_m y_m(n)$$

也是方程 (10-12) 的解, 其中 C_1, C_2, \dots, C_m 是任意常数.

定理 10.2 如果函数 $y_1(n), y_2(n), \dots, y_k(n)$ 是 k 阶齐次线性差分方程的 k 个线性无关的特解, 则

$$y(n) = C_1 y_1(n) + C_2 y_2(n) + \dots + C_k y_k(n)$$

是方程 (10-12) 的通解, 其中 C_1, C_2, \dots, C_k 是任意常数.

定理 10.3 如果 $y^*(n)$ 是 k 阶非齐次差分方程 (10-11) 的一个特解, y 是对应齐次方程 (10-12) 的通解, 则

$$y(n) = y + y^*(n)$$

是方程 (10-11) 的通解

定理 10.4 如果 $y_1^*(n), y_2^*(n)$ 分别是 k 阶非齐次差分方程

$$y_{n+k} + a_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + a_{k-1}(n)y_{n+1} + a_k(n)y_n = f_1(n)$$

$$y_{n+k} + a_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + a_{k-1}(n)y_{n+1} + a_k(n)y_n = f_2(n)$$

的两个特解, y 是对应齐次方程(10-12)的通解, 则

$$y(n) = y + y_1^*(n) + y_2^*(n)$$

是方程

$$y_{n+k} + a_1(n)y_{n+k-1} + \cdots + a_{k-1}(n)y_{n+1} + a_k(n)y_n = f_1(n) + f_2(n)$$

的通解.

上述定理证明从略.

根据线性差分方程解的结构定理, 要求解 k 阶齐次线性差分方程的通解, 只要找出 k 个线性无关的特解, 再用 k 个任意常数线性组合而成. 要求 k 阶非齐次线性差分方程的通解, 在求出对应齐次方程的通解基础上, 只要再找到所给非齐次方程的一个特解, 然后将已求对应齐次方程的通解与特解相加而成.

例 4 求方程 $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 1 - 2n$ 的通解

解 对应齐次方程为

$$y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$$

可以验证 $y_1(n) = 2^n$ 和 $y_2(n) = 1$ 是其两个线性无关解, 所以通解为

$$y = C_1 + C_2 2^n$$

同样可以验证, $y_{(n)}^* = n^2$ 是所给非齐次方程的特解, 于是所给非齐次方程的通解为

$$y(n) = y + y_{(n)}^* = C_1 + C_2 2^n + n^2$$

其中 C_1, C_2 是任意常数.

利用线性差分方程解的结构特点, 本章将重点介绍一阶和二阶常系数线性差分方程的解法.

§ 10.2 一阶常系数线性差分方程

一阶常系数线性差分方程一般形式为

$$y_{n+1} + ay_n = f(n) \quad n = 0, 1, 2, \cdots, \quad (10-13)$$

其中 a 为非零常数, $f(n)$ 为已知函数, 方程 (10-13) 对应齐次方程为

$$y_{n+1} + ay_n = 0 \quad n = 0, 1, 2, \cdots \quad (10-14)$$

下面分别讨论求解齐次方程 (10-14) 的通解和非齐次方程 (10-13) 特解和通解的方法.

一、齐次方程的通解

方程(10-14)变形后改写为

$$y_{n+1} = -ay_n \quad n = 0, 1, \dots$$

这是等比数列所满足的关系式,由等比数列通项公式可以得到

$$y_n = (-a)^n y_0 \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

从而得到方程(10-14)的通解

$$y = C(-a)^n \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10-15)$$

其中 C 为任意常数.

二、非齐次方程的特解与通解

求解方程(10-13)的特解,常用的方法是待定系数法,其基本做法与微分方程的待定系数法相同,即先设一个与非齐次项 $f(n)$ 形式相同的但含待定系数的函数 $y^*(n)$ 为特解(又称试解函数),代入方程后再解出待定系数,从而确定所求特解,现就函数 $f(n)$ 在经济学和管理科学中常见类型,分别介绍特解的求解方法.

1. $f(n) = P_m(n)$, $P_m(n)$ 为 m 次多项式,则方程(10-13)为

$$y_{n+1} + ay_n = P_m(n) \quad (10-16)$$

根据 $f(n)$ 的形式,可设 $y^*(n) = Q(n)$ 为特解, $Q(n)$ 为多项式,代入方程(10-16)有

$$Q(n+1) + aQ(n) = P_m(n)$$

于是,若 $a \neq -1$,要使方程恒等,则应设

$$y^*(n) = a_0 n^m + a_1 n^{m-1} + \dots + a_{k-1} n + a_k$$

其中 a_0, a_1, \dots, a_k 为待定系数,代入方程后,比较同幂次系数,可以解代数方程确定待定系数,

若 $a = -1$ 时,要使方程恒等,则应设

$$y^*(n) = nQ_m(n) = a_0 n^{m+1} + a_1 n^m + \dots + a_{k-1} n^2 + a_k n$$

代入方程,比较同幂次系数,可以解出式中的待定系数 a_0, a_1, \dots, a_k

例1 求差分方程 $y_{n+1} - y_n = n + 3$ 的通解

解 因 $a = -1$, 对应齐次方程的通解为

$$y = C \cdot 1^n = C$$

设 $y^*(n) = a_0 n^2 + a_1 n$ 代入原方程,有

$$a_0(n+1)^2 + a_1(n+1) - a_0 n^2 - a_1 n = n + 3$$

比较系数得 $a_0 = \frac{1}{2}, a_1 = \frac{11}{4}$, 所以 $y^*(n) = \frac{1}{2}n^2 + \frac{11}{4}n$, 所给方程通解为

$$y(n) = C + \frac{1}{2}n^2 + \frac{11}{4}n$$

C 为任意常数

例 2 求差分方程 $y_{n+1} - 2y_n = 2n^2 - 1$ 的通解

解 因 $a = -2$, 对应齐次方程的通解为

$$y = C(2)^n = C2^n$$

设 $y^* = a_0n^2 + a_1n + a_2$ 代入原方程, 有

$$-a_0n^2 + (2a_0 - a_1)n + (a_0 + a_1 - a_2) = 2n^2 - 1$$

比较系数得 $a_0 = -2$, $a_1 = -4$, $a_2 = -5$, 所以得 $y^*(n) = -2n^2 - 4n - 5$, 从而所给方程的通解为

$$y = C2^n - 2n^2 - 4n - 5$$

其中 C 为任意常数

2. $f(n) = bd^n$, 即 $f(n)$ 为指数函数, 这时方程 (10-13) 为

$$y_{n+1} + ay_n = bd^n \quad (10-17)$$

其中 a, b 为非零常数.

根据 $f(n)$ 的形式, 可设 $y_n^* = An^k d^n$, A 为待定数, 代入方程有

$$(n+1)^k Ad + n^k Aa = b$$

于是, 当 $a \neq -d$ 时, 要等式恒成立, 应取 $k = 0$, 从而得到

$$y^*(n) = Ad^n$$

代入方程, 解得 $A = \frac{b}{a+d}$, 于是方程 (10-17) 的特解为

$$y^* = \frac{b}{a+d} d^n$$

当 $a = -d$ 时, 要使等式恒成立, 应取 $k = 1$, 从而得到

$$y^* = And^n$$

代入方程 (10-17) 可得 $A = \frac{b}{d}$, 于是方程 (10-17) 的特解为

$$y^* = \frac{b}{d} nd^n$$

综上所述, 方程 (10-17) 的通解可表示为:

$$y_n = \begin{cases} C(-a)^n + \frac{b}{a+d} d^n & a \neq -d \\ (C + \frac{b}{d}n) d^n & a = -d \end{cases}$$

例 3 求方程 $y_{n+1} + 2y_n = 32^n$ 满足初始条件 $y_0 = 4$ 的特解

解 对应齐次方程的通解为

$$y = C(-2)^n$$

又设 $y_n^* = A2^n$, 代入方程, 有

$$A2^{n+1} + 2A2^n = 32^n$$

从而解得 $A = \frac{3}{4}$, $y_n^* = \frac{3}{4}2^n$. 所给方程的通解为

$$y_n = C(-2)^n + \frac{3}{4}2^n$$

由 $y_0 = 4$, 得 $C = 3\frac{1}{4}$, 于是所给方程满足条件的特解为

$$y_n = \frac{13}{4}(-2)^n - \frac{3}{4}2^n = \frac{1}{4}[3 + (-1)^n \cdot 13]2^n$$

3. $f(n) = b_1 \cos \beta n + b_2 \sin \beta n$, 其中 b_1, b_2, β 为给定常数, 且 $\beta \neq 0$, b_1, b_2 不同时为零, 这时方程 (10-13) 为

$$y_{n+1} + ay_n = b_1 \cos \beta n + b_2 \sin \beta n \quad (10-18)$$

根据 $f(n)$ 的形式, 可设 $y_n^* = n^k(B_1 \cos \beta n + B_2 \sin \beta n)$ 其中 B_1, B_2 为待定系数, 将 y_n^* 代入方程 (10-18), 利用三角恒等式

$$\begin{cases} \cos(\beta n + \beta) = \cos \beta n \cos \beta - \sin \beta n \sin \beta \\ \sin(\beta n + \beta) = \sin \beta n \cos \beta + \cos \beta n \sin \beta \end{cases}$$

得到等式

$$\begin{aligned} & \{B_1[(n+1)^k \cos \beta + n^k a] + B_2(n+1)^k \sin \beta\} \cos \beta n + \\ & \{ - B_1[(n+1)^k \sin \beta] + B_2[(n+1)^k \cos \beta + an^k] \} \sin \beta n \\ & = b_1 \cos \beta n + b_2 \sin \beta n \end{aligned}$$

于是有

$$\begin{aligned} B_1[(n+1)^k \cos \beta + n^k a] + B_2(n+1)^k \sin \beta &= b_1 \\ - B_1(n+1)^k \sin \beta + B_2[(n+1)^k \cos \beta + n^k a] &= b_2 \end{aligned} \quad (10-19)$$

若取 $k=0$, 则方程组 (10-19) 的系数行列式为

$$D = \begin{vmatrix} \cos \beta + a & \sin \beta \\ -\sin \beta & \cos \beta + a \end{vmatrix} = (\cos \beta + a)^2 + \sin^2 \beta$$

因此, 当 $D \neq 0$ 时, 方程组 (10-19) 有唯一解

$$\begin{aligned} B_1 &= \frac{1}{D} [b_1(\cos \beta + a) - b_2 \sin \beta] \\ B_2 &= \frac{1}{D} [b_2(\cos \beta + a) + b_1 \sin \beta] \end{aligned} \quad (10-20)$$

从而得到方程 (10-18) 的特解 $y^*(n) = B_1 \cos \beta n + B_2 \sin \beta n$, 其中 B_1, B_2 由 (10-20) 给出

当 $D \neq 0$ 时, 即 $\beta = 2m\pi, a = -1$ 或 $\beta = (2m+1)\pi, a = 1$ 时, 方程组 (10-19) 不能确定有解, 其中 m 为整数, 若记 $r = \cos \beta + i \sin \beta$, 则可以看作 r 满足方程 $\lambda + a = 0$ 时, 不能确定方程有解, 这时, 应改取 $k=1$, 代入方程组 (10-20), 可解得 $B_1 = b_1, B_2 = b_2$, 或 $B_1 = -b_1, B_2 = -b_2$, 从而解得

$$y^*(n) = \begin{cases} n[b_1 \cos 2m\pi n + b_2 \sin 2m\pi n] & a = -1 \\ -n[b_1 \cos (2m+1)\pi n + b_2 \sin (2m+1)\pi n] & a = 1 \end{cases}$$

综上所述,方程(10-18)通解为

$$y_n = \begin{cases} C(-a)^n + B_1 \cos \beta n + B_2 \sin \beta n & D \neq 0 \\ C + n[b_1 \cos 2m\pi n + b_2 \sin 2m\pi n] & \beta = 2m\pi, a = -1 \\ C - n[b_1 \cos (2m-1)\pi n + b_2 \sin (2m-1)\pi n] & \beta = (2m+1)\pi, a = 1 \end{cases}$$

其中 C 为任意常数, B_1, B_2 由(10-20)给出, m 为整数.

注意 若 $f(n) = b_1 \cos \beta n$ 或 $b_2 \sin \beta n$ 时, 试解函数仍应取

$$y^*(n) = B_1 \cos \beta n + B_2 \sin \beta n \quad r + a \neq 0 \text{ 时}$$

或 $y^*(n) = n[B_1 \cos \beta n + B_2 \sin \beta n] \quad r + a = 0 \text{ 时}$

其中 $r = \cos \beta + i \sin \beta$

例 4 求方程 $y_{n+1} - 2y_n = -\cos 2n$ 的通解

解 对应齐次方程的通解为

$$y = C2^n$$

设非齐次方程的特解为 $y^* = B_1 \cos 2n + B_2 \sin 2n$

代入方程, 利用三角公式得

$$\begin{cases} B_1(\cos 2 - 2) + B_2 \sin 2 = -1 \\ B_1 \sin 2 + B_2(\cos 2 - 2) = 0 \end{cases}$$

解得

$$B_1 = \frac{2 - \cos 2}{5 - 4\cos 2}, B_2 = \frac{-\sin 2}{5 - 4\cos 2}$$

于是, 所给方程的通解为

$$y_n = C2^n + \frac{2 - \cos 2}{5 - 4\cos 2} \cos 2n - \frac{\sin 2}{5 - 4\cos 2} \sin 2n$$

以上讨论的针对 $f(n)$ 的 3 种类型, 求方程 (10-13) 的特解的方法, 即待定系数法, 也同样适用于二阶或更高阶的常系数非齐次线性方程, 讨论中看到, 在设定试解函数时, 除设有与 $f(n)$ 形式相似、但含有待定系数的函数外, 还乘上辅助项 n^k , k 的取值可以从推导的公式给出, 但一般不便记忆, 具体解题时, 可以依次取 $k = 0, 1, 2, \dots$, 代入, 直到能解出待定系数, 确定特解为止.

另外, 如果 $f(n)$ 是由两个结构形式的函数 $f_1(n)$ 与 $f_2(n)$ 的和组成, 则可根据定理 10.4, 分别设定各自对应的试解函数 $y_1^*(n)$ 与 $y_2^*(n)$ 代入分别. 求出特解, 从而得整个方程的特解 $y^* = y_1^*(n) + y_2^*(n)$ 和通解 $y(n) = y + y_1^* + y_2^*$.

例 5 求方程 $y_{n+1} + 2y_n = 2n - 1 + e^n$ 的通解

解 对应齐次方程的通解为

$$y = C(-2)^n$$

设 $y_1^*(n) = a_0 n + a_1, y_2^*(n) = Ae^n$, 于是 $y_n^* = a_0 + a_1 n + Ae^n$ 代入方程有

$$3a_0 n + a_0 + 3a_1 + (Ae + 2A)e^n = 2n - 1 + e^n$$

比较系数, 得 $a_0 = \frac{2}{3}, a_1 = -\frac{5}{9}, A = \frac{1}{e+2}$, 从而有

$$y_n^* = \frac{2}{3}n - \frac{5}{9} + \frac{1}{e+2}e^n$$

所给方程的通解为

$$y_n = C(-2)^n + \frac{2}{3}n - \frac{5}{9} + \frac{1}{e+2}e^n$$

其中 C 为任意常数.

求解非齐次线性方程 (10-13) 的通解, 除了利用线性方程解的结构定理, 通过分别求出对应齐次方程通解和非齐次方程一个特解的方法实现外, 还可以直接用迭代法计算, 这时将方程 (10-13) 改写成迭代方程形式

$$y_{n+1} = -ay_n + f(n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10-21)$$

则有

$$y_1 = -ay_0 + f(0)$$

$$y_2 = -ay_1 + f(1) = (-a)^2 y_0 + (-a)f(0) + f(1)$$

$$y_3 = -ay_2 + f(2) = (-a)^3 y_0 + (-a)^2 f(0) + (-a)f(1) + f(2)$$

.....

一般地, 由数学归纳法可证

$$y_n = (-a)^n y_0 + (-a)^{n-1} f(0) + (-a)^{n-2} f(1) + \dots + (-a)f(n-2) + f(n-1)$$

其中 $y_n^* = (-a)^{n-1} f(0) + (-a)^{n-2} f(1) + \dots + (-a)f(n-2) + f(n-1)$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} (-a)^i f(n-i-1) \quad (10-22)$$

为方程 (10-13) 的特解, $(-a)^n y_0$ 为对应齐次方程的特解, y_0 为任意常数, 可记作 $C = y_0$

例 6 求方程 $y_{n+1} - \frac{1}{3}y_n = 2^n$ 的通解

解 将 $a = -\frac{1}{3}, f(n) = 2^n$ 代入公式 (10-22) 有

$$\begin{aligned} y_n^* &= \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{3}\right)^i 2^{n-i-1} = 2^{n-1} \sum_{i=0}^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right)^i \\ &= 2^{n-1} \frac{1 - \left(\frac{1}{6}\right)^n}{1 - \frac{1}{6}} = \frac{1}{5} [6 \cdot 2^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}] \end{aligned}$$

所以, 所给方程的通解为

$$\begin{aligned} y_n &= C \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{5} [6 \cdot 2^{n-1} - \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}] \\ &= \tilde{C} \left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{6}{5} 2^{n-1} \end{aligned}$$

其中 $\tilde{C} = C - \frac{3}{5}$ 为任意常数.

§ 10.3 二阶常系数线性差分方程

二阶常系数线性差分方程的一般形式为

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = f(n) \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (10-23)$$

其中 a, b 为已知常数, 且 $b \neq 0$, $f(n)$ 为已知函数, 方程 (10-23) 的对应齐次方程为

$$y_{n+2} + ay_{n+1} + by_n = 0 \quad (10-24)$$

下面讨论方程 (10-23) 的解法.

一、齐次方程的通解

根据线性差分方程解的结构定理 10.2, 只要找出二阶齐次线性方程 (10-24) 的两个线性无关的特解, 就可以用两个相互独立的任意常数, 将他们线性组合成方程 (10-24) 的通解, 考虑到方程的系数均为常数, 于是只要找到一类函数, 使得 y_{n+2} 与 y_{n+1} 均为 y_n 的常数倍即可解决求特解问题, 显然幂函数 λ^n 符合这类函数特征, 因此, 我们不妨设 $y_n = \lambda^n$ 为方程 (10-24) 的特解, 其中 λ 为非零待定常数, 代入方程后, 有

$$\lambda^n(\lambda^2 + a\lambda + b) = 0$$

因 $\lambda^n \neq 0$, 故函数 $y_n = \lambda^n$ 是方程 (10-24) 的特解充分必要条件是 λ 满足方程

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0 \quad (10-25)$$

方程 (10-25) 称为方程 (10-23) 或 (10-24) 的特征方程, 特征方程的解称为特征根或特征值. 根据二次代数方程 (10-25) 解的 3 种情况, 可以仿照二阶常系数齐次线性微分方程, 分别给出方程 (10-23) 的通解.

1. 特征方程有两个相异实根

即当判别式 $\Delta = a^2 - 4b > 0$ 时, 方程 (10-25) 有两个相异实根

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a - \sqrt{\Delta}), \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a + \sqrt{\Delta}) \quad (10-26)$$

于是方程 (10-24) 有两个特解

$$y_1(n) = \lambda_1^n, y_2(n) = \lambda_2^n$$

且由

$$\frac{y_1(n)}{y_2(n)} = \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\right)^n \neq \text{常数}$$

知 $y_1(n)$ 与 $y_2(n)$ 线性无关, 从而得到方程 (10-24) 的通解

$$y_n = C_1 \lambda_1^n + C_2 \lambda_2^n$$

其中 λ_1, λ_2 由(10-24)给出, C_1, C_2 为任意常数.

例1 求差分方程 $y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = 0$ 的通解

解 特征方程为

$$\lambda^2 + 4\lambda - 5 = 0$$

解得两个相异实根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -5$, 于是, 所给方程的通解为

$$y(n) = C_1 + C_2(-5)^n$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

2. 特征方程有一个重根

即当判别式 $\Delta = a^2 - 4b = 0$ 时, 方程(10-25)有二重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -\frac{1}{2}a$, 于是方程(10-24)有一个特解

$$y_1(n) = \left(-\frac{1}{2}a\right)^n$$

可以验证方程(10-24)有另一特解

$$y_2(n) = n\left(-\frac{1}{2}a\right)^n$$

且由

$$\frac{y_1(n)}{y_2(n)} = \frac{1}{n} \neq \text{常数}$$

知 $y_1(n)$ 与 $y_2(n)$ 线性无关, 从而得到方程(10-24)的通解

$$y_n = (C_1 + C_2 n)\left(-\frac{1}{2}a\right)^n$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例2 求方程 $y_{n+2} - 10y_{n+1} + 25y_n = 0$ 的通解

解 特征方程为

$$\lambda^2 - 10\lambda + 25 = 0$$

解得特征根 $\lambda = 5$ (二重), 于是, 所给方程的通解为

$$y_n = (C_1 + C_2 n)\left(-\frac{5}{2}\right)^n$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

3. 特征方程有两个共轭复根

即当判别式 $\Delta = a^2 - 4b < 0$ 时, 方程(10-25)有两个共轭复根.

$$\lambda_1 = \frac{1}{2}(-a + i\sqrt{-\Delta}), \lambda_2 = \frac{1}{2}(-a - i\sqrt{-\Delta})$$

通过直接验证可知, 方程(10-24)有两个特解:

$$y_1(n) = r^n \cos \beta n, y_2(n) = r^n \sin \beta n$$

$$\text{其中 } r = \sqrt{\left(-\frac{a}{2}\right)^2 + (-\sqrt{-\Delta})^2} = \sqrt{b}, \tan \beta = -\frac{1}{a} \sqrt{4b - a^2}, \beta \in (0, \pi) \quad (10-27)$$

r 又称为复特征根的模, β 为复特征根的辐角.

又因

$$\frac{y_1(n)}{y_2(n)} = \cot \beta n \neq \text{常数}$$

知 $y_1(n), y_2(n)$ 线性无关, 所给方程 (10-24) 的通解可表为

$$y(n) = r^n (C_1 \cos \beta n + C_2 \sin \beta n)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数

例 3 求方程 $y_{n+2} - 2y_{n+1} + 5y_n = 0$ 的通解

解 特征方程为

$$\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$$

解得特征根 $\lambda_1 = 1 + 2i, \lambda_2 = 1 - 2i$, 因此, 所给方程的通解为

$$y(n) = \sqrt{5} (C_1 \cos \beta n + C_2 \sin \beta n)$$

其中 $r = \sqrt{5}, \beta = \arctan 2, C_1, C_2$ 为任意常数.

二、非齐次方程的特解和通解

求解常系数非齐次线性差分方程 (10-23) 的特解, 常用方法是与求解一阶常系数非齐次线性差分方程和二阶常系数非齐次微分方程类似的待定系数法

对应非齐次项 $f(n)$ 的几种常见类型, 方程 (10-23) 的特解试解的设定方法可具体如表 10-2 所列.

从表中可以看到试解 y_n^* 是与 $f(n)$ 有相似的形式同时为了保证能确定待定系数, 还应乘上辅助因子 n^k , 一般情况下, k 的取值与特征根相关, 由于不便记忆, 实际解题时, 可以依次取 $k = 0, 1, 2$ 代入, 直到能确定待定系数为止.

例 4 求方程 $y_{n+2} + 4y_{n+1} - 5y_n = 2n - 3$ 的通解

解 由例 1, 对应齐次方程的通解为

$$y = C_1 + C_2(-5)^n$$

设 $y_n^* = n(a_0 n + a_1) = a_0 n^2 + a_1 n$, 代入方程, 有

$$(12a_0 - 4a_1)n + (8a_0 + 2a_1) = 2n - 3$$

比较系数, 解得 $a_0 = -\frac{1}{7}, a_1 = -\frac{13}{14}$, 所以, 所给方程的特解为

$$y_n^* = -\frac{1}{7}n^2 - \frac{13}{14}n$$

从而得到所给方程的通解为

$$y_n = C_1 + C_2(-5)^n - \frac{1}{7}n^2 - \frac{13}{14}n$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

表 10-2

$f(n)$ 的形式	试解 $y^*(n)$ 的形式	取试解的条件
$f(n) = P_m(n)$ $P_m(n)$ 为 m 次多项式	$y_n^* = Q_m(n) = a_0n^m + a_1n^{m-1} + \cdots + a_m$ a_0, a_1, \cdots, a_m 为待定系数	$a + b + 1 \neq 0$
	$y_n^* = nQ(n) = a_0n^{m+1} + a_1n^m + \cdots + a_mn$ a_0, a_1, \cdots, a_m 为待定系数	$a + b + 1 = 0$
	$y_n^* = n^2Q(n) = a_0n^{m+2} + a_1n^{m+1} + \cdots + a_mn^2$ a_0, a_1, \cdots, a_m 为待定系数	$\exists a \neq -2$
		$a = -2,$ $b = 1$
$f(n) = cd^n$	$y_n^* = Ad^n$ A 为待定系数	d 不是特征根
	$y_n^* = An^2d^n$ A 为待定系数	d 是单特征根
	$y_n^* = An^2d^n$ A 为待定系数	d 是二重特征根
$f(n) = b_1\cos\beta n + b_2\sin\beta n$ 或 $= b_1\cos\beta n$ 或 $= b_2\sin\beta n$	$y_n^* = A\cos\beta n + B\sin\beta n$ A, B 为待定系数	$r = \cos\beta + i\sin\beta$ 不是特征根
	$y_n^* = n(A\cos\beta n + B\sin\beta n)$ A, B 为待定系数	$r = \cos\beta + i\sin\beta$ 是单特征根
	$y_n^* = n^2(A\cos\beta n + B\sin\beta n)$ A, B 为待定系数	$r = \cos\beta + i\sin\beta$ 是二重特征根

例 5 求方程 $y_{n+2} - 10y_{n+1} + 25y_n = 3^n$

解 由例 2, 对应齐次方程的通解为

$$y = (C_1 + C_2n)\left(-\frac{5}{2}\right)^n$$

设所给非齐次方程的特解 $y_n^* = A3^n$, 代入方程后, 得

$$4A = 1$$

解得 $A = \frac{1}{4}$, 所以 $y^* = \frac{1}{4}3^n$, 从而得到所给方程的通解

$$y_n = (C_1 + C_2n)\left(-\frac{5}{2}\right)^n + \frac{1}{4}3^n$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

例 6 求方程 $y_{n+2} - y_n = 2\cos 2k\pi n - \sin 2k\pi n$ 的通解

解 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 - 1 = 0$$

解得 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1$, 所以对应齐次方程的通解为

$$y = C_1 + C_2(-1)^n$$

设所给方程特解为 $y^* = n(A\cos 2k\pi n + B\sin 2k\pi n)$ 代入方程得

$$2A\cos 2k\pi n + 2B\sin 2k\pi n = 2\cos k\pi n - \sin 2k\pi n$$

比较 $\cos 2k\pi n$ 和 $\sin 2k\pi n$ 前的系数, 得 $A = 1, B = -\frac{1}{2}$

所以 $y^* = n\left(\cos 2k\pi n - \frac{1}{2}\sin 2k\pi n\right)$, 从而得到所给方程的通解

$$y_n = C_1 + C_2(-1)^n + n\left(\cos 2k\pi n - \frac{1}{2}\sin 2k\pi n\right)$$

其中 C_1, C_2 为任意常数.

三、 n 阶常系数线性差分方程

通过前两节对常系数线性差分方程求解方法的讨论, 尤其是本节对二阶常系数方程求解方法的讨论, 我们可以仿照解决形如

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \cdots + a_{k-1} y_{n+1} + a_k y_n = f(n) \quad (10-28)$$

的 n 阶常系数线性差分方程的求解问题, 其中 a_1, a_2, \cdots, a_k 为已知常数, 且 $a_k \neq 0$. 方程 (10-28) 对应的齐次方程为

$$y_{n+k} + a_1 y_{n+k-1} + \cdots + a_{k-1} y_{n+1} + a_k y_n = 0 \quad (10-29)$$

求解非齐次方程 (10-28) 的通解, 按照线性方程通解的结构, 一般分两步进行.

对于对应齐次方程 (10-29), 可以从它们的特征方程

$$\lambda^k + a_1 \lambda^{k-1} + \cdots + a_{k-1} \lambda + a_k = 0 \quad (10-30)$$

出发, 解出方程的 k 个特征根, 其中包括重根和共轭复根. 按照类似第九章表 9-1 所列的关于 k 阶常系数线性微分方程的定解方法, 从而给出每个特征根对应的方程的特解, 将所得的 k 个线性无关的特解线性组合, 就可以得到方程 (10-29) 的通解.

寻求非齐次方程 (10-28) 的特解, 常用方法仍为待定系数法, 其中的关键问题是要根据 $f(n)$ 的形式特点设定试解函数 y_n^* , 由于将试解代入方程可能出现无法确定待定系数的情况, 因此, 设定试解时, 在试解中要添加辅助因子 n^k , k 的取值可仿照表 10-2 的方法设定, 或依次取 $k = 0, 1, 2, \cdots$ 试解的方法求解, 直到能求解定值为止.

在求出方程 (10-29) 的通解 y 和方程 (10-28) 的一个特解 y_n^* 后, 就可以得到所求方程 (10-28) 的通解, 下面举例说明.

例 7 求方程 $y_{n+3} - 4y_{n+2} + 9y_{n+1} - 10y_n = 1 - 2^n$ 的通解

解 对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 9\lambda - 10 = (\lambda - 2)(\lambda^2 - 2\lambda + 5) = 0$$

解得 $\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 1 - 2i, \lambda_3 = 1 + 2i$, 于是对应齐次方程的通解为

$$y = C_1 2^n + \sqrt{5}(C_2 \cos \beta n + C_3 \sin \beta n)$$

其中 $\beta = \arctan 2$, C_1, C_2, C_3 为任意常数.

设所给方程的特解为 $y_n^* = a + An^2$, 代入方程, 有

$$-4a + 10A^2 = 1 - 2^n$$

比较系数, 得 $a = -\frac{1}{4}$, $A = \frac{1}{10}$, 于是所得方程的特解为

$$y_n^* = -\frac{1}{4} - \frac{1}{10}n^2$$

从而解得所给方程的通解为

$$y_n = C_1 2^n + \sqrt{5}(C_2 \cos \beta n + C_3 \sin \beta n)$$

其中 $\beta = \arctan 2$, C_1, C_2, C_3 为任意常数.

§ 10.4 差分方程在经济学中的简单应用

采用与微分方程完全类似的方法可以建立经济学的差分方程的模型, 下面举例说明它的应用

一、“筹措教育经费”模型

某家庭从现在着手, 从每月工资中拿出一部分资金存入银行, 用于投资子女的教育, 并计划 20 年后开始从投资账户中每月支取 1 000 元, 直到 10 年后子女大学毕业并用完全部资金. 要实现这个投资目标, 20 年内要总共筹措多少资金? 每月要在银行存入多少钱? 假设投资的月利率为 0.5%. 为此, 设第 n 个月, 投资账户资金为 a_n , 每月存入资金为 b 元, 于是 20 年后, 关于 a_n 的差分方程模型为

$$a_{n+1} = (1.005)a_n - 1\,000 \quad (10-31)$$

且 $a_{120} = 0, a_0 = x$

解方程(10-31)得通解

$$a_n = (1.005)^n C - \frac{1\,000}{1 - 1.005} = (1.005)^n C + 200\,000$$

以及 $a_{120} = (1.005)^{120} C + 200\,000 = 0$

$$a_0 = C + 200\,000 = x$$

从而有 $x = 200\,000 - \frac{200\,000}{(1.005)^{120}} = 90\,073.45$

从现在到 20 年内, a_n 满足方程为

$$a_{n+1} = (1.005)a_n + b \quad (10-32)$$

且 $a_0 = 0, a_{240} = 90\,073.45$

解方程(10-32)得通解

$$a_n = (1.005)^n C + \frac{b}{1 - 1.005} = (1.005)^n C - 200b$$

以及

$$a_{240} = (1.005)^{240} C - 200b = 90\,073.45$$

$$a_0 = C - 200b = 0$$

从而有

$$b = 194.95$$

即要达到投资目标, 20 年内要筹措资金 90 073.45 元, 平均每月要存入 194.95 元.

二、价格与库存模型

本模型考虑库存与价格之间的关系

设 $P(n)$ 为第 n 个时段某类产品的价格, $L(n)$ 为第 n 个时段的库存量. \bar{L} 为该产品的合理库存量. 一般情况下, 如果库存量超过合理库存, 则该产品的售价要下跌, 如果库存量低于合理库存, 则该产品售价要上涨, 于是有方程

$$P_{n+1} - P_n = c(\bar{L} - L_n) \quad (10-33)$$

其中 C 为比例常数. 由(10-33)变形可得

$$P_{n+2} - 2P_{n+1} + P_n = -c(L_{n+1} - L_n) \quad (10-34)$$

又设库存量 $L(n)$ 的改变与产品的生产销售状态有关, 且在第 $n+1$ 时段库存增加量等于该时段的供求之差, 即

$$L_{n+1} - L_n = S_{n+1} - D_{n+1} \quad (10-35)$$

若设供给函数和需求函数分别为

$$S = a(P - \alpha) + \beta, D = -b(P - \alpha) + \beta$$

代入(10-35)后, 有

$$L_{n+1} - L_n = (a + b)P_{n+1} - a\alpha - b\alpha$$

再由(10-34), 有方程

$$P_{n+2} + [c(a + b) - 2]P_{n+1} + P_n = (a + b)\alpha \quad (10-36)$$

方程(10-36)的特解试解为 $P_n^* = A$, 代入方程得

$$A = \alpha$$

方程(10-36)对应齐次方程的特征方程为

$$\lambda^2 + [c(a + b) - 2]\lambda + 1 = 0$$

解得 $\lambda_{1,2} = -r \pm \sqrt{r^2 - 1}$, $r = \frac{1}{2}[c(a + b) - 2]$, 于是

若 $|r| < 1$, 并设 $r = \cos \theta$, 则方程(10-36)的通解为

$$P_n = B_1 \cos(n\theta) + B_2 \sin(n\theta) + \alpha$$

即第 n 个时段价格将围绕稳定值 α 循环变化.

若 $|r| > 1$, 则 λ_1, λ_2 为两个实根, 方程 (10-36) 的通解为

$$P_n = A_1 \lambda_1^n + A_2 \lambda_2^n + \alpha$$

这时由于 $\lambda_2 = -r - \sqrt{r^2 - 1} < -r < -1$, 则当 $n \rightarrow +\infty$ 时, λ_2^n 将迅速变化, 方程无稳定解.

因此, 当 $1 > r > -1$, 即 $0 < r + 1 < 2$, 也即 $0 < c < \frac{4}{a+b}$ 时, 价格相对稳定, 其中 a, b, c 为正常数.

三、国民收入的稳定分析模型

本模型主要讨论国民收入与消费和积累之间的关系问题.

设第 n 期内的国民收入 y_n 主要用于该期内的消费 C_n , 再生产投资 I_n 和政府用于公共设施的开支 G (定为常数), 即有

$$y_n = C_n + I_n + G \quad (10-37)$$

又设第 n 期的消费水平与前一期的国民收入水平有关, 即

$$C_n = A y_{n-1} \quad (0 < A < 1) \quad (10-38)$$

第 n 期的生产投资应取决于消费水平的变化, 即有

$$I_n = B (C_n - C_{n-1}) \quad (10-39)$$

由方程 (10-37), (10-38), (10-39) 合并整理得

$$y_n - A(1+B)y_{n-1} + BAy_{n-2} = G \quad (10-40)$$

于是, 对应 A, B, G 以及 y_0, y_1 , 可求解方程, 并讨论国民收入的变化趋势和稳定性.

例如, 若 $A = \frac{1}{2}, B = 1, G = 1, y_0 = 2, y_1 = 3$, 则方程 (10-40) 满足条件的特解为

$$y_n = \sqrt{2} \sin \frac{\pi}{4} n + 2$$

结果表明, 在上述条件下, 国民收入将在 2 个单位上下波动, 且上下幅度为 $\sqrt{2}$.

习 题 十

1. 计算下列各题的差分:

(1) $y_n = n^2 - 2n$, 求 $\Delta^2 y_n$

(2) $y_n = 3^n$, 求 $\Delta^2 y_n$

(3) $y_n = (n+3)^3 + 3$, 求 $\Delta^3 y_n$

(4) $y_n = \ln(n+1)$, 求 $\Delta^2 y_n$

2. 按定义 10.2 改写下列差分方程, 并指出方程的阶数:

(1) $\Delta^2 y_n - 3\Delta y_n = 5$ (2) $\Delta^3 y_{n-1} - n\Delta y_n = 2^n$

(3) $\Delta^3 y_n - 3\Delta y_n - 4y_n = 3$

(4) $\Delta^2 y_n + 2\Delta y_n + 3y_n = n^2$

(5) $\Delta^3 y_n - 2\Delta^2 y_n - 3y_n = -2(n+1)$

(6) $\Delta^3 y_n + 5\Delta y_n = y_n$

3. 试证下列函数是所给方程的解(题中 C_1, C_2, C_3, C_4 是任意常数)

(1) $y_n = \frac{C}{1+Cn}, (1+y_n)y_{n+1} = y_n$

(2) $y_n = C_1 + C_2 2^n - n, y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 1$

(3) $y_n = C_1 + C_2 n + C_3 n^2 + C_4 n^4, y_{n+4} - 4y_{n+3} + 6y_{n+2} - 4y_{n+1} + y_n = 0$

(4) $y_n = C3^n - 0.3\sin\frac{\pi}{2}n - 0.1\cos\frac{\pi}{6}n, y_{n+1} - 3y_n = \sin\frac{\pi}{2}n$

4. 已知 $y_n = C_1 + C_2 a^n$ 是方程 $y_{n+2} - 3y_{n+1} + 2y_n = 0$ 的通解, 求满足条件的常数 a .

5. 试证函数 $y_1(n) = (-2)^n$ 和 $y_2(n) = n(-2)^n$ 是方程

$$y_{n+2} + \Delta y_{n+1} + \Delta y_n = 0$$

的两个线性无关的特解, 并求该方程的通解.

6. 求下列差分方程的通解:

(1) $y_{n+1} - y_n = 3n^2$ (2) $6y_{n+1} + 2y_n = 8$

(3) $2y_{n+1} + y_n = 3 + n$ (4) $y_{n+1} - 2y_n = 2^n$

(5) $y_{n+1} - 2y_n = e^{\beta n}, \alpha, \beta$ 为常数, $\alpha \neq 0$

(6) $y_{n+1} + y_n = \cos \pi n$

7. 求下列差分方程满足给定条件的特解

(1) $8y_{n+1} + 4y_n = 3, y_0 = \frac{1}{2}$

(2) $y_{n+1} + y_n = 2^n, y_0 = \frac{4}{3}$

(3) $3y_{n+1} - y_n = 1.2, y_0 = 0.4$

(4) $2y_{n+1} - y_n = 2 + n, y_0 = 4$

(5) $2y_{n+1} - y_n = 2 + n^2, y_0 = 4$

(6) $y_{n+1} + 4y_n = 3\sin \pi n, y_0 = 1$

8. 设 a, b 为非零常数, 且 $1+a \neq 0$, 试证: 通过变换 $u_n = y_n - \frac{b}{1+a}$, 可将非齐次方程

$$y_{n+1} + ay_n = b$$

变换为 u_n 的齐次方程, 并由此求出 y_n 的通解.

9. 已知差分方程 $\frac{a+by_n}{c+dy_{n+1}} = \frac{y_n}{y_{n+1}}$, 其中 a, b, c, d 均为正常数, 试证经代换 $Z_n = \frac{1}{y_n}$, 可将方程化为关于 Z_n 的线性差分方程, 并由此找出原方程的通解.

10. 求下列二阶齐次线性差分方程的通解:

$$(1) y_{n+2} - 2y_{n+1} + 12y_n = 0$$

$$(2) y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = 0$$

$$(3) y_{n+2} - y_{n+1} + y_n = 0$$

$$(4) y_{n+2} - 6y_{n+1} + 9y_n = 0$$

$$(5) y_{n+2} + 4y_n = 0$$

$$(6) y_{n+2} + 2y_{n+1} + 3y_n = 0$$

$$(7) y_{n+2} - 3.9y_{n+1} + 3.78y_n = 0$$

$$(8) y_{n+2} - 4(a+1)y_{n+1} + 4a^2y_n = 0, a \text{ 为常数}, 1+2a>0$$

11. 求下列二阶非齐次线性差分方程的通解:

$$(1) y_{n+2} + \frac{1}{9}y_n = 1$$

$$(2) y_{n+2} - 4y_{n+1} + 4y_n = 2^n$$

$$(3) y_{n+2} + 4y_{n+1} + 4y_n = 4$$

$$(4) y_{n+2} + 2\cos \alpha y_{n+1} + y_n = 1, \alpha \text{ 为常数.}$$

$$(5) y_{n+2} - 2y_{n+1} + 2y_n = a + bn, a, b \text{ 为常数.}$$

$$(6) y_{n+2} + 3y_{n+1} + 2y_n = 20 + 4n + 6n^2$$

$$(7) y_{n+2} - 3y_{n+1} + 3y_n = 3 \cdot 5^n$$

$$(8) 3y_{n+2} - 2y_{n+1} - y_n = 10\sin \frac{\pi}{2}n$$

$$(9) y_{n+2} + 4y_n = 2^n \sin \pi n$$

$$(10) y_{n+2} - y_{n+1} - 6y_n = 3^n(2n+1)$$

$$(11) y_{n+2} + \frac{1}{2}y_{n+1} - \frac{1}{2}y_n = 3n + 2^n$$

$$(12) y_{n+2} - (a+b)y_{n+1} + aby_n = (1+g)^n, a, b, g \text{ 为正常数.}$$

12. 已知 $y_1 = 4n^3, y_2 = 3n^2, y_3 = n$ 是方程 $y_{n+2} + a_1(n)y_{n+1} + a_2(n)y_n = f(n)$ 的一个特解, 问它们能否组合构造出所给方程的通解, 如可以, 给出方程的通解.

13. 求下列高阶线性差分方程的通解:

$$(1) y_{n+3} - 0.5y_{n+2} - y_{n+1} + 0.5y_n = 1$$

$$(2) y_{n+4} - 3y_{n+3} + 2y_{n+1} = 3 \cdot 2^n$$

$$(3) y_{n+4} + 2y_{n+2} + y_n = 8$$

$$(4) y_{n+3} + y_{n+2} - y_{n+1} - 12y_n = 15 - 18n$$

14. 已知某人欠有债务 25 000 元, 月利率为 1%, 计划在 12 个月内用分期付款的方法还清债务, 每月要付出多少钱? 设 a_n 为付款 n 次后还剩欠款数, 求每月付款 P 元使 $a_{12} = 0$ 的差分方程.

15. 在讨论供求关系时, 某商品的需求量、供给量和价格均看作时间 n 的函数, n 取整数离散值. 传统的基本动态供需均衡模型为

$$\begin{cases} D_n = a + bP_n \\ S_n = a_1 + b_1P_{n-1} \\ D_n = S_n \end{cases}$$

模型表明, 现期需求依赖于同期价格, 现期供给依赖前期价格, 试求 P_n 满足的动态供求均衡模型的差分方程, 求解差分方程, 讨论价格相对时间 n 的稳定性.

浅谈差分方程的应用

杨清霞

(中央民族大学预科部,北京 100081)

摘要: 本文给出了差分方程的三个实际问题模型,并对模型做了简单的讨论.

关键词: 线性;差分方程;模型

中图分类号: G642 **文献标识码:** A **文章编号:** 1005-8036(2006)03-0282-04

随着信息技术的日益普及和发展,离散数学的应用越来越广泛.数列的差分 and 差分方程这部分内容,有很强的应用价值,可以看作是连续函数的导数和微分方程的离散化.并且在实际问题中,许多变量的变化都是通过差分来分析的.

差分的应用十分广泛,但是许多大学并没有把它列入基础课的内容,甚至数学系的学生也很少学到,因此,本文想就一阶线性差分方程、一阶线性差分方程组以及一阶非线性差分方程三方面的问题,分别举出生活中的实例,希望能对学生在领会差分方程的应用上有所帮助.

1 一阶线性差分方程的应用—减肥模型

1.1 模型引入

随着人们生活水平的提高,减肥健美之风日益盛行,正确地了解减肥机理对普通人来讲是一件有意义的事情;另外,为了在市场紧缺时能及时提供合格的肉类,有关部门必须考虑如何在较短的时间内使饲养牲畜达到增肥的目的.这些貌似不同的问题,其实在一定简化基础上的数学模型是相同的,下面我们就来讨论减肥问题的数学建模^[1].

1.2 建立模型

生物学和医学告诉我们,影响人体体重的主要因素有每天进食产生的热量、人体活动(特别是锻炼)消耗的热量以及维持人体新陈代谢所消耗的热量.我们从以上三方面入手定量进行数学建模的分析,当然,下面的模型不适用于遗传性肥胖的人.

用 w_n (单位:公斤)来表示某人在第 n 天的体重,对于一个成年人来说,体重主要由骨骼、水和脂肪三部分重量组成.而骨骼和水大体上可以认为是不变的(是一常数),因而,可以把 w_n 理解为第 n 天脂肪的重量.

先做如下假设:

假设人体活动消耗的热量和体重 w_n 成正比,记为 Bw_n ($B > 0$),假设新陈代谢消耗的热量和体重 w_n 也成正比,记为 Cw_n ($C > 0$),假设每天的进食热量都是一样的,为常数 A ,并且已知完全消耗(“燃烧”)一公斤脂肪会转化成约 $D = 10000$ 大卡的热量.

收稿日期:2006-02-18

作者简介:杨清霞(1977-),女(汉族),山东梁山人,中央民族大学预科部讲师,硕士.

由于我们把 w_n 理解为第 n 天脂肪的重量,而人体脂肪不可能全都转化成热量,所以有

$$0 < B + C < D = 10000.$$

根据上述条件和热量守恒定律,建立体重 w_n 和它的差分 Δw_n 满足的差分方程.

一个人从第 n 天到第 $n+1$ 天,体重的变化为 $\Delta w_n = w_{n+1} - w_n$,体内热量的变化为 $D\Delta w_n$,而体内热量的变化为进入人体的热量减去消耗的热量,所以有

$$D\Delta w_n = A - (B + C)w_n$$

这样,我们就得到了用差分方程来描述的“减肥”的数学模型.

1.3 模型的解

整理上述方程为:

$$\Delta w_n = \frac{A}{D} - \frac{B+C}{D}w_n,$$

记

$$a = \frac{A}{D}, b = \frac{B+C}{D},$$

则有

$$w_{n+1} = a + (1-b)w_n$$

此差分方程的通解为:

$$w_n = \frac{a}{b} + (1-b)^{n-1} \left(w_1 - \frac{a}{b} \right)$$

1.4 模型分析

因为 $0 < B + C < D$, 所以 $0 < b = \frac{B+C}{D} < 1$.

则随着时间 n 的增加,当 n 趋向于无穷大时, $(1-b)^{n-1}$ 趋向于 0, 这样 w_n 趋向于 $\frac{a}{b} = \frac{A}{B+C}$. (我们把它称为理想体重).

对方程解的简单分析:

(1) 从理论上讲,当人的体重 $w_1 > \frac{a}{b}$ 时,要想达到理想体重就需要减肥.

(2) 人的理想体重为 $\frac{A}{B+C}$, 所以每天进食的热量 A 越少,每天消耗的热量 $B+C$ 越多,体重的理想值就越小. 而且通过控制 A 和 B ,可以使人的体重达到任意理想的值.

(3) 不进食的节食减肥法是很危险的. 因为若 $A = 0$, 则 w_n 趋向于 0, 体重都“没有”了,哪还能活命! 媒体也报道过好多例子,由于产生厌食症从而抵抗力减弱,导致并发症而死亡.

最后需要说明的是,本模型是实际问题的简化,因此与实际有很大的差距. 要想得到更好的模型还需要考虑更多的因素,做更加细致的分析.

2 一阶线性差分方程组的应用—生态模型

2.1 模型引入

在某个生态环境中,兔子以草为食,狐狸靠吃兔子生存. 因此,兔子数量增加,狐狸数量也会增加. 狐狸数量的增加,又会使兔子的数量减少. 而兔子数量减少,由于食物缺乏狐狸的数量还会相应地减少. 显然,它们的数量关系是相互制约的.

为了更好的研究此生态系统中兔子和狐狸的相互制约关系,下面考虑一个简化的“兔子—狐狸生态模型”.

2.2 建立模型

如果没有狐狸,假设兔子每年增长 10%. 但是,狐狸的出现使兔子减少,假设兔子减少的数量和狐狸数量成正比,比例系数为 0.15.

另一方面,在没有兔子的情况下,假定狐狸数量每年减少 15%,但是兔子的出现使狐狸数量增长,假设狐狸增加的数量和兔子数量成正比,比例系数为 0.1.

设 x_n 表示第 n 年兔子的数量, y_n 表示第 n 年狐狸的数量.

则有:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1.1x_n - 0.15y_n \\ y_{n+1} = 0.1x_n + 0.85y_n \end{cases}$$

这是含有两个未知数列 $\{x_n\}$ 、 $\{y_n\}$ 的一阶线性差分方程组.

2.3 模型的解

假如给定初始值, $x_1 = 100$, $y_1 = 30$, 用迭代法求差分方程组的解. 把 $x_1 = 100$, $y_1 = 30$, 代入方程组

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1.1x_n - 0.15y_n \\ y_{n+1} = 0.85y_n + 0.1x_n \end{cases}$$

得

$$x_2 = 105.5, y_2 = 35.5.$$

把 $x_2 = 105.5$, $y_2 = 35.5$ 代入方程组,

得

$$x_3 = 110.725, y_3 = 40.725.$$

再把 $x_3 = 110.725$, $y_3 = 40.725$ 代入方程组,

解得 x_4, y_4 , 依次进行下去, $x_{100} = 209.35$, $y_{100} = 139.35$;

$$x_{101} = 209.9944, y_{101} = 139.9944;$$

$$x_{102} = 209.9947, y_{102} = 139.9947, \dots$$

2.4 模型分析

不难看出, 当 n 越来越大并趋向于无穷时, 也就是当经过充分长的时间之后, 兔子和狐狸的数量将达到一个稳定的值: $x_n \rightarrow 210$, $y_n \rightarrow 140$, 生态系统趋于平衡状态.

如果条件改变, 结果也会不同. 即当 n 趋向于无穷时, 方程组的解会有不同情形, 同学们还可自行分析, 在什么条件下当时间经过充分长之后, 兔子和狐狸会灭绝.

3 一阶非线性差分方程的应用—传染病模型

3.1 模型引入

随着人类卫生设施的改善、医疗水平的提高, 诸如霍乱、天花等曾经肆虐全球的传染性疾病已经得到有效控制. 但是, 在世界的某些地区, 特别是一些贫穷的发展中国家, 还不断地出现传染病流行的情况.

建立传染病的数学模型来描述传染病的传染过程, 分析感染人数的变化规律, 预报传染病高潮的到来等问题, 一直备受关注^[2].

3.2 建立模型

为简单起见, 假设在疾病传播期内所考察的总人数不变, 既不考虑生死, 也不考虑迁移, 并且时间以天为单位.

假设人的总数为 N , 每个病人每天接触的人数为常数 λ , 第 n 天健康人的百分比为 x_n , 病人的百分比为 y_n .

由假设 $x_n + y_n = 1$, 并且第 n 天的每个病人接触了 λx_n 个健康人, 也就是每个病人把 λx_n 个健康人

传染成病人. 若第 n 天有 Ny_n 个病人, 则健康人变成病人的人数为 $Ny_n\lambda x_n = \lambda Ny_n(1 - y_n)$. 因此, 第 n 天到第 $n+1$ 天病人增加的人数为

$$N(y_{n+1} - y_n) = \lambda Ny_n(1 - y_n)$$

即

$$\Delta y_n = \lambda y_n(1 - y_n)$$

整理得

$$y_{n+1} = (1 + \lambda)y_n \left(1 - \frac{\lambda}{1 + \lambda}y_n\right)$$

记 $\frac{\lambda}{1 + \lambda}y_n = u_n$, 上式两边同时乘 $\frac{\lambda}{1 + \lambda}$ 得

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda}y_{n+1} = (1 + \lambda) \frac{\lambda}{1 + \lambda}y_n \left(1 - \frac{\lambda}{1 + \lambda}y_n\right)$$

即

$$u_{n+1} = (1 + \lambda)u_n(1 - u_n)$$

由此得到一个一阶非线性差分方程, 我们把它叫做 logistic 模型^[3].

3.3 模型的简单分析

logistic 方程的解是一个开始增加较快、后来增加变慢的数列, 由于疾病传播的速度(即病人在每个时刻所占的百分比)满足 logistic 方程, 说明一开始疾病传播的较快, 经过一段时间后, 传播的速度就会慢下来. 事实上, 如果 1 个人接触 10 个人, 其中 4 个病人 6 个健康人, 则一下子有 6 个人被传染. 但随着病人的增多, 接触的人中健康的人越来越少, 因此到了一定程度疾病传播的速度必然会慢下来.

可以用差分方程讨论的问题还有很多. 例如大陆上的物种向某岛屿上迁移, 令 x_n 表示第 n 年岛屿上的物种数, 我们可以在一定的条件下, 建立一个 x_n 满足的一阶差分方程; 一种新的产品投入市场, 记第 n 天的销售量为 x_n , 假设在某个时段, 销售量下降的速度和 x_n 成正比(比例系数设为 λ), 加入广告宣传后, 销售量的增加和广告费用 α 成正比(比例系数设为 c). 我们可以建立产品销售量 x_n 和它的差分 Δx_n 满足的差分方程等等.

差分 and 差分方程在数学的应用中占有很大的比重, 在物理、化学、生物、环境、经济等领域以及科学技术的方方面面也常常用到这种思想, 随着信息技术的发展, 其重要性将愈发显现出来.

参考文献:

- [1] 叶其孝. 大学生数学建模竞赛辅导教材[M]. 长沙: 湖南教育出版社, 1997.
- [2] 姜启源. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
- [3] 张顺燕. 数学的源与流[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.

Discussion about the Applications of Difference Equation

YANG Qing-xia

(Central University for Nationalities, Beijing 100081, China)

Abstract: This paper gives out three practical questions models about the applications of difference equation and simply discusses the models.

Key words: linear; difference equation; model

[责任编辑: 杨 玉]

浅谈差分方程在概率计算中的应用

肖文华

(娄底职业技术学院, 湖南 娄底 417000)

摘要: 本文介绍了差分方程和全概率公式的概念, 讨论了差分方程在概率论中的应用.

关键词: 差分方程; 全概率公式; 概率

中图分类号: O211 **文献标识码:** A **文章编号:** 1673-260X(2008)03A-0018-02

1 引言

随着科学技术的发展, 差分方程在各个领域得到越来越多的应用, 本文将介绍差分方程的一个简单的应用, 即利用差分方程求概率问题. 全概率公式是概率中一个最基本、最常用、最重要的公式. 利用全概率公式列出差分方程, 然后通过解差分方程求得概率, 从而简化了应用全概率公式求解某些问题的复杂繁琐性.

2 基本概念

2.1 全概率公式

定理 若事件组 A_1, A_2, \dots, A_n 满足下面条件:

(1) A_1, A_2, \dots, A_n 是两两互不相容的事件, 且 $P(A_i) > 0 (i=1, 2, \dots, n)$

(2) $\sum_{i=1}^n P(A_i) = \Omega$ (必然事件)

则对任一事件 B , 有 $P(B) = \sum P(A_i)P(B/A_i)$

2.2 差分方程

定义 含有自变量 t 和两个或两个以上的函数值 y_t, y_{t+1}, \dots 的函数方程称为差分方程.

定义 n 阶差分方程的一般形式为: $F(t, y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+n}) = 0$. 其中 $F(t, y_t, y_{t+1}, \dots, y_{t+n})$ 为已知函数.

形如 $y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \dots + a_n y_t = f(t)$ 称为 n 阶常系数

非齐次线性差分方程.

形如方程 $y_{t+n} + a_1 y_{t+n-1} + \dots + a_n y_t = 0$ 称为 n 阶常系数齐次线性差分方程.

特别地, 一阶差分方程递推公式:

$$P_n = cP_{n-1} + d = c(cP_{n-2} + d) + d = c^2P_{n-2} + (c+1)d = \dots = c^{n-1}P_1 + (1-c^{n-1})d/(1-c)$$

3 实际应用

例 1 投掷硬币 n 次, 第一次出现正面的概率为 C , 第二次后每次出现与前一次相同的表面的概率为 P , 求第 n 次出现正面的概率.

解 设 $A_n = \{\text{第 } n \text{ 次出现正面}\}$, 记 $P(A_n) = p_n$, 则由全概率公式可得:

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P(A_{n+1}/A_n) + P(\bar{A}_n)P(A_{n+1}/\bar{A}_n) \\ = p_n \cdot p + (1-p_n)p$$

$$\text{即: } P_{n+1} = (2p-1)P_n + (1-p)$$

由上述差分方程及初始条件 $P_1 = C$ 可以得到.

$$\text{当 } p \neq 1 \text{ 时, 有 } P_n = [1 - (2p-1)^{n-1}]/2 + C(2p-1)^{n-1} \\ = 1/2 - (2p-1)^{n-1}/2 + C(2p-1)^{n-1} \\ = (C-1/2)(2p-1)^{n-1} + 1/2$$

当 $p=1$ 时, 有 $P_n \equiv C$

例 2 r 个人相互传球, 每传一次时, 传球者等可能地传给其余 $r-1$ 人中之, 试求第 n 次传球时, 此球由最初发球者传出的概率 P_n (发球那一次

算作第 0 次).

解 由全概率公式得: $P_n = P_{n-1} \cdot 0 + (1 - P_{n-1}) / (r-1)$

$$P_n = -P_{n-1} / (r-1) + 1 / (r-1), n \geq 1, P_0 = 1$$

代入差分方程得: $P_n = [-1 / (r-1)]^n (1 - 1/r) + 1/r$

$$= [1 - 1 / (r-1)]^n / r, n \geq 1$$

例 3 在每一次试验中,事件 A 出现的概率为 P, 试问 n 次独立试验中 A 出现偶次的概率是多少?

$$\text{解 } P_n = p + (1-2p)P_{n-1} \quad (1)$$

$$(1-2p)P_{n-1} = p(1-2p) + (1-2p)^2 P_{n-2} \quad (2)$$

$$(1-2p)^2 P_{n-2} = p(1-2p)^2 + (1-2p)^3 P_{n-3} \quad (3)$$

.....

$$(1-2p)^{n-2} P_2 = p(1-2p)^{n-2} + (1-2p)^{n-1} P_1 \quad (n-1)$$

$$(1-2p)^{n-1} P_1 = p(1-2p)^{n-1} + (1-2p)^n P_0 \quad (n)$$

其中, $P_0 = 1$, 且上述表示对原方程组进行如下步骤: 在(2)式两边同乘以 $(1-2p)$, 在(3)式两边同乘以 $(1-2p)^2$, ..., 在(n)式两边同乘以 $(1-2p)^{n-1}$, 将上述 n 个方程两边相加, 约去含 P_1 至 P_{n-1} 的各项, 得到:

$$P_n = p + (1-2p)p + (1-2p)^2 p + \cdots + p(1-2p)^{n-1} + p(1-2p)^n$$

$$= p[1 - (1-2p)^n] / [1 - (1-2p)] + (1-2p)^n$$

$$= p[1 - (1-2p)^n] / 2p + (1-2p)^n$$

$$= [1 + (1-2p)^n] / 2$$

例 4 袋中有黑白球各一次, 每次从袋中任取一球取出的球不放回, 但再放进一只白球, 求第 n 次取到白球的概率.

解 设 $A_i = \{\text{第 } i \text{ 次取到的是白球}\}$

$$(i=1, 2, \dots, n)$$

$$\text{则 } P_1 = P(A_1) = 1/2$$

由全概率公式得:

$$P(A_n) = P(A_{n-1}) \cdot P(A_n / A_{n-1}) + P(\bar{A}_{n-1}) \cdot P(A_n / \bar{A}_{n-1})$$

$$\text{即 } P_n = 1 - 0.5P_{n-1}$$

设非齐次方程的特解为 K, 代入①, 得: $K = 2/3$

则方程①的通解为 $P_n = t(-0.5)^n + 2/3$

将 $P_1 = 0.5$, 代入通解中, 得: $t = 1/3$

$$\text{则方程①的解 } P_n = (-0.5)^n / 3 + 2/3$$

4 结束语

在解决概率中的一些问题时, 虽然可以利用传统的递推法, 归纳法或已知的公式等方法求解. 但是利用差分方程通过求解方程的解更巧妙地解决这类问题, 而且把概率中的知识通过微分方程的知识来解决, 使学科之间的联系更加紧密, 从而提高了综合分析问题和解决问题的能力.

参考文献:

- [1] 李贤平. 概率论与数理统计[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2003.
- [2] 谢国瑞. 概率论与数理统计[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.
- [3] 孙福杰. 差分方程在概率计算中的应用[J]. 长春师范学院学报(自然科学版), 2005, (10).
- [4] 唐燕玉. 差分方程与概率计算[J]. 安定师范学院学报(自然科学版), 2006, (11).

差分方程在数学建模中的几个应用实例

张功盛, 康光清

(江西电力职业技术学院, 江西 南昌 330032)

摘 要:结合几个实际背景建立差分方程, 并利用所得结果去解决几个实际问题。

关键词:差分方程; 数学模型; 应用实例

中图分类号:O241.3

文献标识码:B

文章编号:1673-0097(2009)01-0075-03

0 引言

设有未知序列 $\{x_n\}$, 称

$F(n; x_n, x_{n+1}, \dots, x_{n+k}) = 0$ 为 k 阶差分方程。

差分方程是描述客观事物的数量关系的一种重要的数学模型。在科学研究和生产实际中, 经常碰到处理对象涉及的变量(如时间)是连续的, 但是从建模的目的考虑, 把连续变量离散化更为合适, 将连续变量作离散化处理, 从而将连续模型(微分方程)化为离散型(差分方程)问题。下面以月、年、季为周期, 介绍几个生活中常见的差分方程在数学建模中的应用实例。

1 金融问题中的一个差分方程模型

问题:养老保险是保险中的一种重要险种, 保险公司将提供不同的保险方案以供选择, 分析保险产品品种的实际投资价值。即分析如果已知所交保费和保险收入, 按年或按月计算实际的利率是多少, 也就是说, 保险公司需要用你的保费实际获得至少多少利润才能保证兑现你的保险收益。

模型举例分析:假设每月交费 p 元至60岁开始领取养老金, 男子若25岁起投保, 届时养老金每月2282元; 如35岁起保, 届时月养老金1056元; 试求出保险公司为了兑现保险责任, 每月至少应有多少投资收益率, 这也就是投保人的实际收益率。

模型假设:整个过程可以按月进行划分, 因为交费是按月进行的。

(1) 设投保人到第 k 月止所交保费及收益的累计总额为 F_k ,

(2) 设 r 为每月收益率,

(3) 记 p, q 分别为60岁之前每月交费数和60岁之后每月领取数,

(4) 记 N 为停交保险费的月份, M 为停领养老金的月份。

模型建立:在整个过程中, 离散变量 F_k 的变化规律满足:

$$\begin{cases} F_{k+1} = F_k(1+r) + p, & k = 0, 1, \dots, N-1 \\ F_{k+1} = F_k(1+r) - q, & k = N, \dots, M \end{cases}$$

在这里 F_k 实际上表示从保险人开始交纳保险费以后, 保险人帐户上的资金数值。我们关心的是, 在第 M 个月时, F_M 能否为非负数。如果为正数, 则表明保险公司获得收益; 如为负数, 则表明保险公司出现亏损; 当为零时, 表明保险公司最后一无所获, 所有的收益全归投保人, 把它作为投保人的实际收益。引入变量 F_k , 很好地反映了整个过程中资金的变化关系。

2 人口的控制与预测模型

背景分析:人口数量的发展变化规律及特性可以用微分方程的理论形式来表现和模拟。在实际应

用中常见的有马尔萨 (Malthus) 模型、洛杰斯克 (Logistic) 模型, 这两个模型优点是简单方便, 给出的结果也比较合理, 但是它们仅给出了人口总数的信息, 无法反映一些重要信息, 如学龄人数、老年人口数、劳动人口数等。综合常微分方程模型和偏微分方程理论, 需要建立离散化的模型, 以便于分析、应用。人口数量的变化取决于诸多因素, 比如: 女性生育率、死亡率、性别比、人口基数等。试建立离散数学模型来表现人口数量的变化规律。

模型假设: 以年为时间单位记录人口数量, 年龄取周岁。

(1) 设这个地区最大年龄为 m 岁

(2) 第 t 年为 i 岁的人数为 $x_i(t)$, $i=1, 2, \dots, m$,

$t=0, 1, 2, \dots$

(3) 设第 t 年为 i 岁的人口平均死亡率为 $d_i(t) = \frac{x_i(t) - x_{i+1}(t+1)}{x_i(t)}$, 则有

$$x_{i+1}(t+1) = [1 - d_i(t)] x_i(t),$$

$$i=1, 2, \dots, m-1, t=0, 1, 2, \dots$$

(4) 设第 t 年为 i 岁女性的生育率, 即每位女性平均生育婴儿数为 $b_i(t)$, $[i_1, i_2]$ 为生育区间。

(5) 设 $\beta(t)$ 为每位妇女一生中平均生育的婴儿数, 则 $\beta(t) = \sum_{i=i_1}^{i_2} b_i(t)$ 。若女性出生率保持不变, 则

$$\beta(t) = \sum_{i=i_1}^{i_2} b_i(t) = \sum_{i=i_1}^{i_2} b_i(t + i_2 - i)$$

模型建立: 根据上面的假设, 可得

$$x_1(t+1) = \beta(t) \sum_{i=i_1}^{i_2} b_i'(t) x_i(t)$$

$$x_2(t+1) = (1 - d_1(t)) x_1(t)$$

.....

$$x_m(t+1) = (1 - d_{m-1}(t)) x_{m-1}(t)$$

$$\text{令 } x(t) = [x_1(t), x_2(t), \dots, x_m(t)]'$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 1-d_1(t) & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1-d_2(t) & 0 \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1-d_{m-1}(t) & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

$$B(t) = \begin{bmatrix} 0 \cdots & 0 & b_{i_1}'(t) & b_{i_2}'(t) & 0 \cdots & 0 \\ 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \\ 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 & 0 \cdots & 0 \end{bmatrix}_{m \times m}$$

则 $x(t)$ 满足方程: $x(t+1) = A(t)x(t) + \beta(t)B(t)x(t)$

由此得到全面系统地反映一个时期内人口数量的状况的差分方程:

$$x(t+1) = [A(t) + \beta(t)B(t)]x(t) \quad (2.1)$$

模型分析:

在稳定的社会环境下, 死亡率、生育模式、女性比例、婴儿存活率可以设为常数, 故 $A(t) = A$, $B(t) = B$ 为常数矩阵。从而,

$$x(t+1) = [A + \beta(t)B]x(t) \quad (2.2)$$

为了更全面地反映人口的有关信息, 我们还可以

引入一些其它的重要指标如人口总数 $N(t) = \sum_{i=0}^m x_i(t)$,

人口平均年龄 $R(t) = \frac{1}{N(t)} \sum_{i=0}^m i x_i(t)$, 平均寿命 $S(t) =$

$\sum_{j=0}^m \exp[-\sum_{i=0}^j d_i(t)]$ 等, 通过求出 $x(t)$ 的变化规律, 就可

以对这些指标进行更具体的分析, 从而对人口的分布状况、变化趋势、总体特征等有科学的认识和把握。

3 蛛网模型

经济背景与问题: 在自由竞争的市场经济中, 商品的价格是由市场上该商品的供应量决定的, 供应量越大, 价格就越低。另一方面, 生产者提供的商品数量又是由该商品的价格决定的, 价格上升将刺激生产者的生产积极性, 导致商品生产量增加; 反之, 价格降低会影响生产者的积极性, 导致商品生产量下降。经营者要取得良好的经济效益, 就必须把握好这两个因素的规律, 避免市场供求出现混乱。

模型假设与模型建立:

(1) 将市场演变模式划分为若干销售时段, 用自然数 n 来表示;

(2) 设第 n 个时段商品的数量为 x_n , 价格为 y_n , $n=1, 2, \dots$;

(3) 价格与产量的关系为: $y_n = f(x_n)$;

(4) 假设下一时段的产量 x_{n+1} 是决策者根据这期的价格决定的, 设 $x_{n+1} = h(y_n)$, 从而有 $y_n = g(x_{n+1})$

由此建立差分方程:

$$x_{n+1} = h[f(x_n)] \quad (3.1)$$

$$y_{n+1} = f[h(y_n)] \quad (3.2)$$

模型的几何分析: 两个变量 x_n 和 y_n 的变化过程, 可以借助已有的函数 f 和 g 用几何方式表现出来。把点列 (x_n, y_n) 和 (x_{n+1}, y_n) 在坐标系中描绘出来, 其中

$(x_n, y_n) = (x_n, f(x_n))$, $(x_{n+1}, y_n) = (x_{n+1}, g(x_{n+1}))$, 将点列 $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_1), p_3(x_3, y_3), p_4(x_4, y_3), \dots$ 连接起来, 就会形成象蛛网一样的折线。这个图形被称作蛛网模型(见图1)。

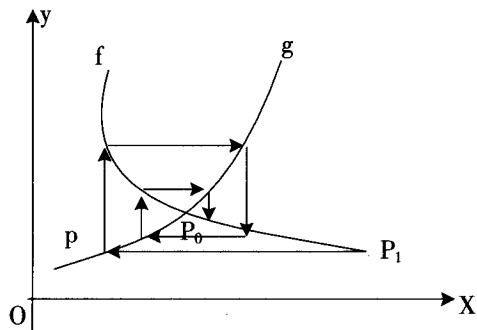


图1 蛛网模型

易见:如果点列 $p_1(x_1, y_1), p_2(x_2, y_1), p_3(x_3, y_3), p_4(x_4, y_3), \dots$ 最后收敛于点 $p_0(x_0, y_0)$, 则 $x_n \rightarrow x_0, y_n \rightarrow y_0$, 且 p_0 就是两条曲线的交点, 从而达到稳定状态, 反之是不稳定的。

几何上的进一步分析表明, 如果曲线 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 在交点 p_0 处切线的斜率记为 k_f, k_g , 则可知

当 $|k_f| < |k_g|$ 时, p_0 是稳定的;

当 $|k_f| > |k_g|$ 时, p_0 是不稳定的。

模型的差分方程分析:

设点 $p_0(x_0, y_0)$ 满足: $y_0 = f(x_0), x_0 = h(y_0)$, 在 p_0 点附近取函数 $f(x), h(x)$ 的一阶近似:

$$y_n = y_0 - \alpha(x_n - x_0), \alpha > 0, \quad (3.3)$$

$$x_{n+1} = x_0 + \beta(y_n - y_0), \beta > 0, \quad (3.4)$$

合并两式可得:

$$x_{n+1} = -\alpha\beta x_n + (1 + \alpha\beta)x_0, n = 1, 2, \dots \quad (3.5)$$

其中, $-\alpha$ 为 f 在 p_0 点处的切线斜率; $\frac{1}{\beta}$ 为 $g(x)$ 在 p_0 点处切线的斜率。

方程(3.5)递推可得

$$x_{n+1} = (-\alpha\beta)^n x_1 + [1 - (-\alpha\beta)^n] x_0 \quad (3.6)$$

所以, p_0 点稳定的充要条件是: $|\alpha\beta| < 1$, 即 $\alpha < \frac{1}{\beta}$

这个结论与蛛网模型的几何分析结果是一致的。

(5)模型推广

如果决策时考虑到 x_{n+1} 与 y_n, y_{n+1} 都有关系, 则可假设

$$x_{n+1} = g\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$$

这时数学模型为: $y_n = f(x_n) \quad x_{n+1} = g\left(\frac{y_n + y_{n+1}}{2}\right)$

对此模型仍用线性近似关系可得:

$$x_{n+1} = g(y_0) + \frac{\beta}{2}(y_n + y_{n+1} - 2y_0),$$

$$\text{即 } x_{n+1} - x_0 = \frac{\beta}{2}(y_n + y_{n+1} - 2y_0)$$

再结合(3.3)可得:

$$2x_{n+2} + \alpha\beta x_{n+1} + \alpha\beta x_n = (1 + \alpha\beta)x_0$$

由方程的特征根为: $\lambda_{1,2} = \frac{-\alpha\beta \pm \sqrt{(\alpha\beta)^2 - 8\alpha\beta}}{4}$,

可知当 $\alpha\beta < 2$ 时, $|\lambda_{1,2}| < 1$, 解是稳定的。这个条件比原来的模型解的稳定性条件放宽了, 说明决策水平提高了。

4 结束语

差分方程模型有着广泛的应用。实际上, 连续变量可以用离散变量来近似和逼近, 从而微分方程模型就可以近似于某个差分方程模型。差分方程模型有着非常广泛的实际应用背景。经过分析可知, 常、偏微分方程除非在极其特殊的情况下, 否则一般不存在解析解, 所以讨论起来非常麻烦, 比如最基本的平衡点的稳定性, 往往只能得到局部稳定性, 全局稳定性很难得到, 而差分方程模型可以达到全局的效果, 另外, 由差分方程获得的结果又可以进一步进行优化分析、满意度分析、分类分析、相关分析等等。

参考文献:

- [1] 姜启源. 数学模型[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.
- [2] 乐经良. 数学实验[M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [3] 杨启帆. 方道元, 等. 数学建模[M]. 杭州: 浙江大学出版社, 1999.

[责任编辑 杜 琴]

应用篇

还贷款问题的一阶线性差分方程模型*

顾培中 (南通纺织职业技术学院信息系 江苏南通 226007)

摘要 利用一阶线性差分方程讨论在还贷款中如何计算还款额的问题得到在两种还案方案下的计算公式.**关键词** 还款 差分方程 计算 中图分类号 O175.7

随着我国社会经济的发展,人们的收入、支付能力和消费需求的水平不断提高,用明天的钱买今天的享受的观念越来越被更多的老百姓所接受,贷款购买住房、汽车、教育乃至旅游已是相当普遍的社会消费现象.通过一阶线性差分方程的方法,为广大贷款的消费者提供,根据自己的收入情况及其变化,选择贷款的数量、决定首期付款、还款期限及逐步增加或减少金额的方法,同时了解自己目前欠银行款的数学方法,正确运作及时调整、完善投资策略.

假设 M_0 表示起初贷款总额, N 表示还款总期数, p 表示贷款月利率, $M_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 表示经过 i 次还款后还欠银行的款额, m 表示每月还款额. 为讨论方便起见,每期且以每月计.

1. 每月还款额相同情形:

假设每月还款额相同为 m 元,第 i 个月还欠银行的金额 M_i ,那么1个月后的本息之和为 $M_i(1+p)$,第 $i+1$ 个月欠银行的金额为:

$$M_{i+1} = M_i(1+p) - m (i = 0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (1)$$

这是一个一阶线性差分方程. 于是

$$\begin{aligned} \frac{M_{i+1}}{(1+p)^{i+1}} - \frac{M_i}{(1+p)^i} &= -\frac{m}{(1+p)^{i+1}} \Leftrightarrow \frac{M_n}{(1+p)^n} = \sum_{i=0}^{n-1} \left[\frac{M_{i+1}}{(1+p)^{i+1}} - \frac{M_i}{(1+p)^i} \right] + M_0 = \\ &= -m \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{(1+p)^{i+1}} + M_0 \Leftrightarrow M_n = M_0(1+p)^n - m \frac{(1+p)^n - 1}{p} \end{aligned}$$

一般地,有

$$M_i = (M_0 - \frac{m}{p})(1+p)^i + \frac{m}{p} (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2)$$

$$\text{当 } M_N = 0 \text{ 得} \quad m = \frac{-pM_0(1+p)^{N-1}}{1 - (1+p)^{N-1}} = \frac{pM_0(1+p)^N}{(1+p)^N - 1} \quad (3)$$

公式(2)、(3)表示在等额还款条件下, N 期还完,每月应还 m 元,第 i 个月还欠银行金额 M_i 与起初贷款 M_0 及月利息 p 间的关系.

例1 某人购买商品需资金45万元,采用首期付款30%,每月等额还款,分10年还清,贷款月利率为 p ,试求每月的还款额.

解 $M_0 = 45 - 45 \times 0.3 = 45 - 13.5 = 31.5$ (万元)

$N = 120$ (次) $p = 0.0051$

$$\text{每月应还金额为 } m = \frac{pM_0(1+p)^{120}}{(1+p)^{120} - 1} = \frac{0.0051 \times 315000 \times (1+0.0051)^{120}}{(1+0.0051)^{120} - 1} = 3516.16 \text{ (元)}$$

2. 每期还款额均匀增加(减少)情形:

若每隔一年增加还款 x 元,共还款3年($N = 36$ 个月),首次还款额为 m 元,由1的讨论可知:

在第一年内欠银行金额 $M_{i+1} = M_i(1+p) - m, 0 \leq i \leq 11$

在第二年内欠银行金额 $M_{i+1} = M_i(1+p) - (m+x), 12 \leq i \leq 23$

在第三年内欠银行金额 $M_{i+1} = M_i(1+p) - (m+2x), 24 \leq i \leq 35$

即得第 $i+1$ 个月欠银行金额为:

$$\begin{cases} M_{i+1} = M_i(1+p) - m & 0 \leq i \leq 11 \\ M_{i+1} = M_i(1+p) - (m+x) & 12 \leq i \leq 23 \\ M_{i+1} = M_i(1+p) - (m+2x) & 24 \leq i \leq 35 \\ M_{36} = 0 & i = 36 \end{cases} \quad (4)$$

(4)

(5)

(6)

(7)

这是一个分段的一阶线性差分方程.

$$\text{方程(4)的解为: } M_i = (M_0 - \frac{m}{p})(1+p)^i + \frac{m}{p} \quad 0 \leq i \leq 12 \quad (8)$$

由方程5得:

$$M_{13} = M_{12}(1+p) - (m+x)$$

$$M_{14} = M_{13}(1+p) - (m+x) = M_{12}(1+p)^2 - (m+x)[(1+p) + 1]$$

.....

$$M_i = M_{12}(1+p)^{i-12} - (m+x)[(1+p)^{i-13} + (1+p)^{i-14} + \cdots + (1+p) + 1] =$$

$$M_{12}(1+p)^{i-12} - \frac{(m+x)[1 - (1+p)^{i-12}]}{1 - (1+p)} =$$

$$M_{12}(1+p)^{i-12} - \frac{m+x}{p}(1+p)^{i-12} + \frac{m+x}{p}$$

由(8)可知: $M_{12} = (M_0 - \frac{m}{p})(1+p)^{12} + \frac{m}{p}$. 将其代入上式得

$$M_i = [(M_0 - \frac{m}{p})(1+p)^{12} + \frac{m}{p}](1+p)^{i-12} - \frac{m+x}{p}(1+p)^{i-12} + \frac{m+x}{p} =$$

$$[M_0 - \frac{m}{p} - \frac{x}{p(1+p)^{12}}](1+p)^i + \frac{m+x}{p} \quad 13 \leq i \leq 24$$

同理可得方程(6)的解. 其归纳为

$$\begin{cases} M_i = (M_0 - \frac{m}{p})(1+p)^i + \frac{m}{p} & 0 \leq i \leq 12 \\ M_i = (M_0 - \frac{m}{p} - \frac{x}{p(1+p)^{12}})(1+p)^i + \frac{m+x}{p} & 13 \leq i \leq 24 \\ M_i = (M_0 - \frac{m}{p} - \frac{x}{p(1+p)^{12}} - \frac{x}{p(1+p)^{24}})(1+p)^i + \frac{m+2x}{p} & 25 \leq i \leq 36 \end{cases}$$

由此可推出一般情形, 还期为 X 年 ($N = 12X$ 个月). 第 i 个月欠款为:

$$\begin{cases} M_i = (M_0 - \frac{m}{p} - \frac{x}{p(1+p)^{12}} - \frac{x}{p(1+p)^{24}} - \frac{x}{p(1+p)^{36}} - \cdots - \frac{x}{p(1+p)^{12n}})(1+p)^i + \frac{m+nx}{p} \\ 12n+1 \leq i \leq 12(n+1) \quad (n=0,1,2,\cdots,X-1) \end{cases} \quad (9)$$

还可以进一步得到

$$m = \frac{M_0 p (1+p)^{12X} - x (1+p)^{12X} \frac{(1+p)^{-12}(1-(1+p)^{-12(X-1)})}{1-(1+p)^{-12}} + (X-1)x}{(1+p)^{12X} - 1} \quad (10)$$

(下转封3)

ξ	m	$m+1$	$m+2$	\cdots	$m+k$	\cdots
p	p^m	$c_m^1 q p^m$	$c_{m+1}^2 q^2 p^m$	\cdots	$c_{m+k-1}^k q^k p^m$	\cdots

则 $E\xi = mp^m + (m+1) \cdot c_m^1 qp^m + \cdots + (m+k) \cdot c_{m+k-1}^k q^k p^m + \cdots$

由引理 1, 当 $-1 < x < 1$, m 为正整数时, 幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (m+n) \cdot c_{m+n-1}^n \cdot x^n$ 是收敛的, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty} (m+n) \cdot c_{m+n-1}^n \cdot q^n \cdot p^m$ 也是收敛的, 又 $\sum_{k=0}^{\infty} (m+k) \cdot c_{m+k-1}^k \cdot q^k \cdot p^m = mp^m + (m+1) \cdot c_m^1 qp^m + \cdots + (m+k) \cdot c_{m+k-1}^k q^k p^m + \cdots = E\xi$, 故 $E\xi$ 存在. 为了求出 $E\xi$ 的值, 令 $A = \sum_{k=0}^{\infty} (m+k) \cdot c_{m+k-1}^k \cdot q^k$, 则

$$A = m + (m+1) \cdot c_m^1 q + \cdots + (m+k) \cdot c_{m+k-1}^k q^k + \cdots, \quad (1)$$

$$qA = mq + (m+1) \cdot c_m^1 q^2 + \cdots + (m+k) \cdot c_{m+k-1}^k q^{k+1} + \cdots \quad (2)$$

将(1)式减去(2)式得: $(1-q)A =$

$$m + m^2 q + [(m+2)c_{m+1}^2 - (m+1) \cdot c_m^1] q^2 + \cdots + [(m+k) \cdot c_{m+k-1}^k - (m+k-1) \cdot c_{m+k-2}^{k-1}] q^k + \cdots =$$

$$m[1 + c_m^1 q + c_{m+1}^2 q^2 + \cdots + c_{m+k-1}^k q^k + \cdots] = m \cdot \sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k-1}^k q^k, \text{ 由引理 2 知当 } -1 < q < 1, m \text{ 为}$$

正整数时, 有 $\sum_{k=0}^{\infty} c_{m+k-1}^k q^k = \frac{1}{(1-q)^m}$, 从而 $(1-q)A = \frac{m}{(1-q)^m}$, 即 $A = \frac{m}{(1-q)^{m+1}} = \frac{m}{p^{m+1}}$, 又 $E\xi = p^m A$, 所以 $E\xi = \frac{m}{p}$.

参考文献

[1] 徐卫明, 赵成平. 一道概率题的探索与引伸[J]. 数学通讯, 2006, 3

[2] 占德胜, 刘志高. 应用数学基础[M]. 北京: 清华大学出版社, 2005, 9(P125)

(上接第 63 页) 例 2 某人购买商品需资金 45 万元, 采用首期付款 30%, 考虑到刚刚买房, 拟采用每期还款额均匀增加的方案还款, 即第二年每月还款的金额在第一年每月还款的基础上增加 600 元. 如此类推. 分 10 年还清, 贷款月利率 5.10‰, 试求第十年每月的还款额.

解 将 $M_0 = 315000$, $p = 0.0051$, $x = 600$, $X = 10$ 代入公式(10), 可以求得

$$m = \frac{M_0 p (1+p)^{12X} - x(1+p)^{12X} \frac{(1+p) - 12(1 - (1+p)^{-12(X-1)})}{1 - (1+p)^{-12}} + (X-1)x}{(1+p)^{12X} - 1} = 1116.76$$

即他第一年的每月只要还款 1116.76 元. 第十年的每月金额为: $1116.76 + 5400 = 6516.76$ 元.

参考文献

[1] 谢绍义. 等额还贷的多种方式. [J] 数学通报. 2003 年第四期

数学奖

印裔美国数学家 Varadhan 荣获 2007 阿贝尔奖

挪威科学与文学院宣布, 将 2007 年度阿贝尔奖授予印度裔美国数学家纽约大学柯朗研究所 Srinivase S. R. Varadhan 教授. 该项奖金为 6 000 000 克郎 (约为 975 000 美元). 他是由于“对概率理论特别是对创建统一的大偏差理论的基本贡献”, 而获此殊荣. 此前, 历届的该奖获得者分别为, 2003 年度: Jean-Pierre Serre; 2004 年度: Sir Michael Francis Atiyah and M. Singer; 2005 年度: Peter D. Lax; 2006 年度: Leannart Carleson. (据阿贝尔奖官方网站)

基于差分方程的人口预测模型

摘要

本文针对我国人口增长中出现的新特点，建立了两个符合实际情况的预测模型。

模型一：基于 Logistic 模型，建立了含市、镇、乡人口相互流动关系的微分方程模型，求得全国总人口数在短期内将持续增长，到 2010 年、2020 年分别为 13.59 亿和 14.44 亿，具有较好的中短期预测效果。

模型二：从年龄转移与总和生育率出发，建立了离散型人口发展模型。

1. 针对性别比例，引入女性比例转移矩阵，利用计算机进行随机模拟，建立起动态的女性比例转移矩阵；
2. 针对人口迁移，引入人口迁移率矩阵，将迁移率标准化后利用平均迁移率实现了对迁移人数的预测；
3. 针对死亡率，利用分段加权法估计其随时间的变化，得到了较好的预测结果；
4. 针对老龄化和出生高峰，将其转化为育龄妇女占总人口的比例，实现了量化预测。

综合考虑上述因素，利用 MATLAB 编程求解，全国总人口将呈现短期增加、中期平稳、长期缓慢下降的趋势。其中总人口在 2010 年、2020 年将分别达到 13.63 亿和 14.57 亿人；在 2039 年将达到人口高峰 14.65 亿人，性别比逐步逼近 46.7%，69 岁以上人口将超过 4 亿人，占总人口的 27.48%。

模型一需要的原始数据少，操作简单，适合于中短期预测，但长期预测效果不佳；模型二综合考虑了各因素，对中短期和长期均有较好的预测效果，但所需数据量大，操作较为复杂。

关键字 Logistic 模型 人口发展模型 转移矩阵 计算机模拟 迁移率

1. 问题重述

人口预测是国家工作中的重点，关系着国家的发展方向和命运。我国是一个人口大国，人口问题始终是制约我国发展的关键因素之一。根据已有数据，运用数学建模的方法，对我国人口做出分析和预测是一个重要问题。

近年来我国的人口发展出现了一些新的特点，例如，老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高，以及乡村人口城镇化等因素，这些都影响着我国人口的增长。2007 年初发布的《国家人口发展战略研究报告》对此做出了进一步的分析。

从我国的实际情况和人口增长的上述特点出发，参考相关数据，建立我国人口增长的数学模型，并由此对我国人口增长的中短期和长期趋势做出预测；特别注意指出模型中的优点与不足之处。

2. 问题分析

一个社会（国家、省市、地区）人口的变化和随时间的发展过程，是由很多因素决定的，社会制度、自然环境、生活水平、科学文化水平、战争、自然灾害和移民等等，都能严重地影响社会人口的发展过程。然而，婴儿的出生、人口的死亡、居民的迁移却是决定该社会人口变化的直接原因，近年来我国人口发展出现的一些新特点，如老龄化进程加速、出生人口性别比持续升高，以及乡村人口城镇化等因素，都直接或间接地通过这三个现象表现出来。综合考虑这些因素成为构建符合我国国情的人口增长模型关键。

建立模型对人口发展过程进行定量预测，就是根据现有的人口统计资料和原始数据，从当前实际的人口状况出发，并对未来的人口发展过程，提出合理的控制要求和假定，应用科学的方法，预测出未来几年、几十年甚至上百年的人口发展趋势，包括人口总数、人口的性别、年龄和城乡结构，人口出生、死亡和自然增长率的变化以及在未来的人口构成中劳力和抚养水平及老化水平等。

3. 模型假设

针对本问题，建立如下合理的假设：

1. 题中所给数据能反映我国人口变化的基本情况；
2. 一些重大事件，如战争、自然灾害等对人口预测的影响暂不考虑；
3. 所给数据都是年末数据，也即下一年年初数据，如 2001 年总人口实质上也表示 2002 年初的总人口；
4. 今年所统计的 i 岁的人口在下一年年初均为 $i+1$ 岁；
5. 生育模式不随时间变化。

4. 符号说明

符号	说明	单位
$N(t)$	在 t 年初的总人口数	万人
N_m	最大人口容量	万人
r	人口固有增长率	\
l	各地区间人口迁移系数	\
$x_i(t)$	第 t 年年初有 i 岁的人口数	万人
$m_i(t)$	第 t 年 i 岁人的死亡率	\
$g_i(t)$	第 t 年 i 岁人口的迁入量	万人
$k_i(t)$	第 t 年女性人口在 i 岁人口中所占比例	\
$h_i(t)$	第 t 年生育模式	\
$b(t)$	第 t 年总和生育率	\
$[a1, a2]$	育龄期范围, $a1 = 15, a2 = 49$	岁
$h_i(t)$	第 t 年 i 岁人的后向死亡率	\
$m_i(t)$	第 t 年 i 岁人的前向死亡率	\
$s_i(t)$	第 t 年 i 岁人的迁移率	\

5. 模型建立与求解

5.1. 数据预处理

题中所给 5 年我国人口 1% 调查数据是对人口的抽样调查数据, 由于数据的不完备性, 并不能由它来估计当时的全国总人口数。但基于抽样调查的等概率性, 可以认为它所反应的市、镇、乡三个地区的人口比例及男女比例是与实际较为接近的。从《中国人口统计年鉴 2006》^[1]可以得到 2001~2005 年具体的全国总人口数。进而可以得到各部分人口数。所得数据见表 1。

例: 2001 年市实际男性总人口 = 2001 年全国总人口 $\times \frac{\text{当年抽样调查中市男性总人口}}{\text{当年抽样调查总人口}}$

表 1 5 年间各部分人口数

年份	2001	2002	2003	2004	2005
城市男	15466	16803	16779	16677	18149
城市女	15420	16804	16843	16889	18092
镇男	8394	8213	9961	10060	11276
镇女	8154	7904	9705	9901	11117
乡男	41271	40566	39222	39360	36661
乡女	38923	38164	36718	37100	35461
总人口	127627	128453	129227	129988	130756

5.2. 模型一：基于人口迁移的 Logistic 阻滞增长模型

5.2.1. 模型建立：

考虑单一地区只受自然资源和环境条件限制的 Logistic 阻滞增长模型^[2]：

$$\frac{dN(t)}{dt} = rN(t)\left(1 - \frac{N(t)}{N_m}\right)$$

其中 r 为固有增长率。 $N(t)$, N_m 分别表示第 t 年的人口数和此条件限制下的最大人口容量。因子 $rN(t)$ 体现了人口自身的增长趋势, 因子 $(1 - N(t)/N_m)$ 则体现了资源和环境对人口增长的阻滞作用, 人口增长是两个因子共同作用的结果。

现在考虑市、镇、乡三个地区的总人口变化规律, 假定在一段时期内, 这三个地区各自均处于稳定状态, 出生率和死亡率都没有太大变化。然而居民在三个地区间的迁移会对总人口产生一定的影响。对原 Logistic 模型进行修改, 得到多地区条件下的改进模型：

$$\begin{cases} \frac{dN_1(t)}{dt} = r_1 N_1(t) \left(1 - \frac{N_1(t)}{N_{1m}} + I_{21} \frac{N_2(t)}{N_{2m}} + I_{31} \frac{N_3(t)}{N_{3m}}\right) \\ \frac{dN_2(t)}{dt} = r_2 N_2(t) \left(1 - \frac{N_2(t)}{N_{2m}} + I_{12} \frac{N_1(t)}{N_{1m}} + I_{32} \frac{N_3(t)}{N_{3m}}\right) \\ \frac{dN_3(t)}{dt} = r_3 N_3(t) \left(1 - \frac{N_3(t)}{N_{3m}} + I_{13} \frac{N_1(t)}{N_{1m}} + I_{23} \frac{N_2(t)}{N_{2m}}\right) \end{cases}$$

其中 $p, q = 1, 2, 3$. 分别表示市、镇、乡这三个地区, I_{qp} 是迁移系数, 正数时表示迁入, 负数时表示迁出。 I_{qp} / N_m 体现了居民从地区 q 迁到地区 p 时对地区 p 人口增长的影响。

为求解此方程, 不失一般性的取 $\Delta t = 1$, 则原微分方程组化为差分方程组：

$$\begin{cases} N_1(t+1) - N_1(t) = r_1 N_1(t) \left(1 - \frac{N_1(t)}{N_{1m}} + I_{21} \frac{N_2(t)}{N_{2m}} + I_{31} \frac{N_3(t)}{N_{3m}}\right) \\ N_2(t+1) - N_2(t) = r_2 N_2(t) \left(1 - \frac{N_2(t)}{N_{2m}} + I_{12} \frac{N_1(t)}{N_{1m}} + I_{32} \frac{N_3(t)}{N_{3m}}\right) \\ N_3(t+1) - N_3(t) = r_3 N_3(t) \left(1 - \frac{N_3(t)}{N_{3m}} + I_{13} \frac{N_1(t)}{N_{1m}} + I_{23} \frac{N_2(t)}{N_{2m}}\right) \end{cases}$$

5.2.2. 模型求解：

1. 求解 r

考虑到育龄妇女生育率信息的残缺, 用年龄为 i 的育龄期妇女占总人口的比例 $p_i(t)$ 与对应每个年龄生育率的乘积和来表示年 t 的出生率。

$$r = \sum_{i=a1}^{a2} p_i(t) b_i(t)$$

取 $t = 2001$, 可得到市、镇、乡的固有增长率： $r_1 = 0.00907$, $r_2 = 0.0107$, $r_3 = 0.01233$

2. 求解 N_m

由经验公式 $N_m = N(t)/(1-r/r_0)$,其中 $r_0 = 0.029$,为世界人口固有增长率 ,可得 2001 年各地区最大人口容量 (单位 : 万人) : $N_1 = 139488$, $N_2 = 26228$, $N_3 = 44944$ 。

3. 求解 I

为求解 I ,把 2002 年和 2001 年的数据都带入阻滞增长模型 ,联合以下三个迁入迁出方程可解迁移系数 I 。(见表 2)

$$\begin{cases} \frac{r_1 I_{21}}{N_{2m}} = \frac{r_2 I_{12}}{N_{1m}} \\ \frac{r_2 I_{32}}{N_{3m}} = \frac{r_3 I_{23}}{N_{2m}} \\ \frac{r_3 I_{13}}{N_{1m}} = \frac{r_1 I_{31}}{N_{3m}} \end{cases}$$

表 2 迁移系数 I

	市 $p=1$	镇 $p=2$	乡 $p=3$
市 $q=1$	0	21.13720	-0.1108025
镇 $q=2$	14.55182	0	3.735552
乡 $q=3$	-0.4674880	22.89316	0

4. 求解 $N_p(t+1)$

由所求得的系数 r, N_m, I ,把 2001 年作为初始年 ,用 MATLAB 求解可得以后各年全国总人口数 :

表 3 模型一对全国总人口数的预测

年代	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011	2012
预测人数 (亿人)	12.94	13.03	13.12	13.22	13.32	13.41	13.50	13.59	13.68	13.77
实际人数 (亿人)	12.92	13.00	13.08	——	——	——	——	——	——	——
误差 (%)	0.13	0.26	0.39	——	——	——	——	——	——	——
年代	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019	2020	2021	2022
预测人数 (亿人)	13.86	13.94	14.03	14.11	14.19	14.28	14.26	14.44	14.52	14.61
年代	2023	2024	2025	2026	2027	2028	2030	2035	2040	2045
预测人数 (亿人)	14.69	14.78	14.86	14.95	15.04	15.12	15.30	15.76	16.24	16.82

5.2.3. 模型分析 :

1. 结果分析

由表 3 可以看出 ,我国人口在短时间内仍会继续增长 ,增长水平为每年 1000 万人左右 ,到 2010 年和 2020 年 ,全国总人口将达 13.59 亿人与 14.44 亿人。

2. 敏感性分析

由模型的建立原理可知： $N(t) \propto r(1-r/N_m) \propto r(1-r)$ ，故 $N(t)$ 将随 r 的增加成二次幂增长，而 $r = \sum \text{女性比例} \times \text{生育模式}$ ，女性比例变化不大的情况下，可认为 r 正比于生育模式，又因为生育模式正比于总和生育率，故 $N(t)$ 与总和生育率成二次正相关，即整个模型对总和出生率十分敏感。

3. 模型优点

基于传统的 Logistic 模型，建立起市、镇、乡人口间的相互流动关系，综合考虑了出生率、死亡率与迁入迁出对人口增长的影响，对 Logistic 原模型做了合理的扩充，使其更符合实际情况，预测效果良好。同时根据实际情况，对难以求解的微分方程采用差分方程代替，降低了解题难度，使模型易于实现。

4. 模型缺点

- i. 由于采用了差分方程的近似代替，整个预测结果均随着时间的增长而增大，这是不符合生物学规律的，故此模型对人口的中短期预测较好，长期预测则难以让人信服。
- ii. 没有考虑性别比对年龄结构的影响，且只能对总人口数进行预测，无法对性别比和年龄结构做出相应的预测。

5. 改进方向：

- i. 采用先进的工具软件对微分方程求解，得到模型预测的准确结果。
- ii. 分段对模型进行调整和改进，减少累加误差。

5.3. 模型二：离散人口发展方程模型

5.3.1. 模型建立分析

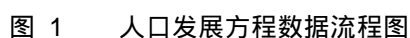
由于模型一的局限性，需要进一步分析各因素对全国人口总数的影响。考虑一个地区第 $t+1$ 年初的人口，它有三类主要来源：

- i. 本地区第 t 年存活下来的人；
- ii. 本地区第 t 年出生并存活下来的人；
- iii. 外部地区第 t 年迁入或迁出本地区的人。

为定量描述这些因素对人口数的影响，建立如下人口发展模型^[3]：

5.3.2. 模型建立

针对一个地区 p ，若第 t 年年初有 i 岁人口数 $x_i(t)$ 人，则由假设 4 第 $(t+1)$ 年年初这些人为 $(i+1)$ 岁。若 $m_i(t)$ 为这批人在一年内的死亡率， $g_i(t)$ 为迁移进来的人口数，则 $(t+1)$ 年年初 $(i+1)$ 岁的人口数为 $x_i(t)(1-m_i(t)) + g_i(t)$ 。0 岁人口数 $x_0(t)$ 需通过妇女生育情况另行计算，人口发展方程数据流程图如图 1 所示：


$$\begin{aligned} \mathbf{f}(t) &= \mathbf{b}(t) \sum_{i=a1}^{a2} k_i(t) h_i(t) x_i(t); \\ x_0(t) &= (1 - \mathbf{m}_{b0}(t)) \mathbf{f}(t); \\ x_1(t+1) &= (1 - \mathbf{m}_0(t)) x_0(t) + g_0(t); \\ x_2(t+1) &= (1 - \mathbf{m}_1(t)) x_1(t) + g_1(t); \\ &\dots\dots\dots \\ x_m(t+1) &= (1 - \mathbf{m}_{m-1}(t)) x_{m-1}(t) + g_{m-1}(t); \end{aligned}$$
$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_m(t) \end{bmatrix}, \quad \mathbf{g}(t) = \begin{bmatrix} g_0(t) \\ \vdots \\ g_{m-1}(t) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{H}(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 - \mathbf{m}_1(t) & 0 & & \vdots \\ & 1 - \mathbf{m}_2(t) & & \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 \cdots & & & 1 - \mathbf{m}_{m-1}(t) & 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} 0 \cdots 0 & b_{a_1}(t) \cdots b_{a_1}(t) & 0 \cdots 0 \\ & 0 & \end{bmatrix}$$

则差分方程组可以写成向量形式：

$$\mathbf{x}(t+1) = \mathbf{H}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{b}(t)\mathbf{B}(t)\mathbf{x}(t) + \mathbf{g}(t)$$

式中矩阵 $\mathbf{H}(t)$ 为从 t 到 $t+1$ 年的人口状态转移矩阵， $\mathbf{B}(t)$ 为生育矩阵， $\mathbf{g}(t)$ 为人口迁移数。

5.3.3. 参数预测

1. 状态转移矩阵 $\mathbf{H}(t)$

由模型要求，可对 $\mathbf{H}(t)$ 做如下估计：

- i. 由于表中所给的死亡率 $h_i(t)$ 是后向死亡率，需要将其转换成前向死亡率 $m_i(t)$ 才能用于人口发展方程模型，转换方程为： $1 - m_i(t) = 1 / (1 + h_i(t))$ ；
- ii. 考虑数据误差和生物生存规律，对人口按 0, 1~4, 5~9, 10~14,85~89, 90 分为 20 组；分别计算组内死亡率，同组内死亡率取相同值，以得到较为稳定的分布规律，
- iii. 其中，年龄 i 的组内死亡率 $h_i(t) = \frac{\sum(\text{男性比例} \times \text{死亡率} + \text{女性比例} \times \text{死亡率})}{\sum(\text{男性比例} + \text{女性比例})}$
- iv. 以上计算得到从 t 到 $t+1$ 年的人口状态转移阵 $\mathbf{H}(t)$ ，考虑到随着生活水平的提高，人们的死亡率会逐渐降低，而儿童和老年人的死亡率受此影响较大，中年人较小，故可由下式预测各年龄段的死亡率

$$m_i(t+1) = \begin{cases} (1 - 1/100)m_i(t) & 0 \leq i \leq 14 \\ (1 - 1/1000)m_i(t) & 15 \leq i \leq 59 \\ (1 - 1/100)m_i(t) & 60 \leq i \end{cases}$$

表 4 各年龄组的死亡率(1: 1000)

年龄	0	1~4	5~9	10~14	15~19	20~24	25~30	31~34	35~39	40~44
2001	5.58	0.70	0.64	0.41	0.41	0.66	0.45	0.91	1.13	1.79
2002	11.59	0.24	0.49	0.31	0.36	0.26	0.58	0.71	1.01	1.65
2003	5.17	0.19	0.21	0.21	0.12	0.21	0.45	0.89	1.24	1.75
2004	2.56	0.40	0.15	0.31	0.20	0.59	0.55	0.67	0.82	1.31
2005	6.24	0.47	0.27	0.22	0.33	0.37	0.43	0.62	0.93	1.45
年龄	45~49	50~54	55~59	60~64	65~69	70~74	75~79	80~84	85~90	90~
2001	2.08	4.84	4.79	10.93	16.94	30.52	46.67	80.43	123.71	269.14
2002	2.37	2.84	5.89	9.34	16.34	28.20	49.01	73.24	104.56	155.55
2003	2.48	2.64	6.25	8.84	16.69	28.40	43.82	82.37	131.69	252.08
2004	2.36	4.24	5.95	9.06	14.77	23.96	42.49	65.48	120.17	219.25
2005	2.49	3.50	5.24	8.92	15.18	24.60	41.71	69.24	116.42	275.67

2. 生育矩阵 $\mathbf{B}(t)$

生育阵 $\mathbf{B}(t)$ 受婴儿出生死亡率阵 $m_{00}(t)$,0 岁人口死亡率阵 $m_0(t)$,生育模式阵 $\mathbf{h}(t)$ 和女性在该年龄组中的比例阵 $\mathbf{k}(t)$ 四个方面的影响 , 可以表示为 :
 $\mathbf{B}(t) = (1 - m_{00}(t))(1 - m_0(t))\mathbf{k}(t)\mathbf{h}(t)$ 。 $m_{00}(t)$ $m_0(t)$ 数据已知 , 下面分别建立对 $\mathbf{h}(t)$ 和 $\mathbf{k}(t)$ 的预测模型。

i. 生育模式阵 $\mathbf{h}(t)$

生育模式 , 实际是指育龄妇女在总体平均意义下单位时间内 (通常指一年) , 每个育龄妇女平均活产婴儿数具体在每个年龄上生育的分布形式。在社会稳定的情况下 , 可以认为它大体服从一个稳定的分布。本文用标准化后的均值来估计生育模式。

以某一地区为例 , 首先将各年的妇女生育率累加 , 得到总和生育率 , 再取各年龄生育率与总和生育率的比值 , 得到标准化后该年的生育模式 , 最后对 5 年生育模式取平均 , 得到生育模式的估计值。其中 2003 年的数据由于统计错误 , 暂不考虑。

$$b(t) = \sum_{i=1}^{a-2} b_i(t), \quad h_i(t) = \frac{1}{4} \sum_{t=2001, t \neq 2003}^{2005} \frac{b_i(t)}{b(t)}$$

利用表中数据可得生育模式为 :

表 5 生育模式

年龄	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
生育模式	0.01	0.32	0.40	1.67	5.29	18.99	40.41	59.37	86.82	107.10	113.35	115.39
年龄	27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38
生育模式	101.11	83.15	69.17	51.96	35.69	29.84	18.58	18.28	11.82	8.73	6.48	4.86
年龄	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	
生育模式	3.24	2.27	1.40	0.87	0.54	0.67	0.47	0.33	0.17	0.27	0.45	

ii. 女性比例矩阵 $\mathbf{k}(t)$

$$\mathbf{k}(t) = \begin{bmatrix} k_1(t) & & & 0 \\ & k_2(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_n(t) \end{bmatrix}$$

$\mathbf{k}(t)$ 是一个对角阵 , 下一年女性比例矩阵可以近似为 :

$$\mathbf{k}(t+1) = \begin{bmatrix} k_0(t) & & & 0 \\ & k_1(t) & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & k_{n-1}(t) \end{bmatrix}$$

其中 $k_0(t)$ 为上一年出生的女婴所占的比例,根据近年统计资料可知出生女性比例一直在较低的水平进行波动,又因为出生女性比例为随机值,因此可以利用计算机进行为持在低水平的随机模拟方法给出 $k_0(t)$ 。

例如,由表中数据,可取市的模拟区间为 $[0.4604,0.4638]$,而对于乡,则是一个较低的水平 $[0.45,0.4527]$,以后各年初生儿的女性比例都可以在相应地区的模拟区间上随机取值。这样既保证了女性比例的波动性,又保证了它的地区差异性。

3. 总和生育率 $b(t)$

总和生育率是一定期限(如某一年)各年龄组妇女生育率的合计数,说明每名妇女按照某一年的各年龄组生育率度过育龄期,平均可能生育的子女数,是衡量生育水平最常用的指标之一。

受国家政策的影响,在不同的时期, $b(t)$ 有不同的取值。由题中所给数据可知,不同地区的总和生育率有较大差距,近些年来,国家生育政策有所放宽。由此,可以预测未来的一段时间内,各地区总和生育率将趋于平衡,在更长的一段时间内,我国将达到总和生育率为 2.1 的人口稳定状态。又根据国家有关部门预测,全国总和生育率在未来 30 年应保持在 1.8 左右,过高或过低都不利于人口与经济社会的协调发展。故可取 $t=2030$ 年时市镇乡的总和生育率都达到 1.8,当 $t=2050$ 年时达到稳定的总和生育率 2.1,取各时间段间 $b(t)$ 为线性变化。以市为例,可以给出如下的总和生育率 $b(t)$ 的分段函数:

$$\begin{cases} \frac{1.8-b(t)}{2030-t} = \frac{b(t)-1.0}{t-2001} & 2001 \leq t \leq 2030; \\ \frac{2.1-b(t)}{2050-t} = \frac{b(t)-1.8}{t-2030} & 2030 \leq t \leq 2050; \end{cases}$$

4. 人口迁移数 $g(t)$

考虑多个地区时,对 $g(t)$ 的预测采用按年龄有比例迁移的方法。对某一年龄 i ,求出第 $(t+1)$ 年相对于第 t 年的迁移比例 $(x_i(t+1)-x_i(t))/x_i(t)$,并将其标准化,正数表示迁入,负数表示迁出。分别取 2001、2002 与 2004、2005 两组数据的均值,可得迁移率 $s_i(t)$ 。

在社会稳定的状态下,可认为 $s_i(t)$ 不会随时间有太大变化。根据现有资料,由《国家人口发展战略研究报告》,可设各地区每年有 1% 的人口按此比例迁移,则 $g(t)$ 的表达式为:

$$g(t) = 1\% \times s(t)x(t)$$

5. 人口出生高峰

我国人口在 1984~1990 年出现了的三次人口出生高峰,这将导致 2005 年后的十几年中,育龄妇女占总人口的比例增加,进而引起出生人口和总人口的增加。由于出生高

峰与大约 20 年后的育龄妇女比例有直接关系，为了解出生高峰对总人口的影响，我们采用对大约 20 年后育龄妇女比例进行加权预测。由《国家人口发展战略研究报告》中提供的出生高峰图，可以估计所加权值 p 在 1.2 左右。

5.3.4. 模型求解

将上面所得各参数代入人口发展方程，用 MATLAB 求解^[4]可得出以下数据：

1. 市镇乡及全国人口总数

表 6 市镇乡及全国人口预测（万人）

年代	2005	2010	2015	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
市	31337	32112	32708	32936	32635	32210	31877	31415	30575	29481
镇	16907	17531	18195	18634	18698	18657	18672	18685	18512	18191
乡	82471	86638	91200	94219	94864	95057	95641	96425	96360	95517
总人口	130715	136282	142103	145789	146197	145924	146191	146525	145447	143189

2. 各年龄段人数

表 7 不同年龄段人口数预测

年代	2005	2010	2015	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
儿童（0～14 岁）	22658	23512	27375	28557	24982	20877	19953	22024	23297	22265
中年（15～59）	91480	92979	90423	89911	87767	85885	83517	81290	78055	73886
老年（60～）	16576	19790	24305	27321	33449	39161	42721	43210	44095	47039

3. 女性在总人口中的比例

表 8 女性人口百分比预测

年代	2005	2010	2015	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
女性人数	63466	65774	68205	69673	69637	69267	69132	69000	68205	66885
总人数	130715	136282	142103	145789	146197	145924	146191	146525	145447	143189
女性比例	48.55	48.26	48.00	47.79	47.63	47.47	47.29	47.09	46.89	46.71

5.3.5. 结果分析与检验

1. 由表 6 可得，全国人口在 2010 年、2020 年的人口将达 13.63、14.57 亿人，同《国家人口发展战略研究报告》中的预测值高度一致，且由图 2 看出，全国人口将呈现在短期内增长、中期平稳过渡、长期缓慢下降的趋势，在 2039 年达到峰值 14.65 亿人，这符合我国的人口政策。

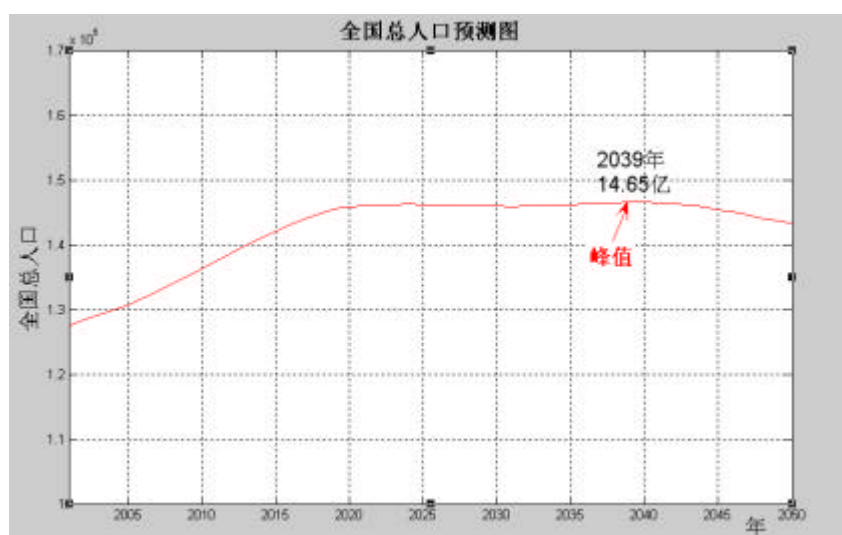


图 2 全国人口预测曲线图

- 由表 7 看出，随着时间的推移，老年人所占人口比例越来越大，并在 2031 年突破 4 亿大关，占总人口的 27.48%，老龄化问题应当引起足够重视！

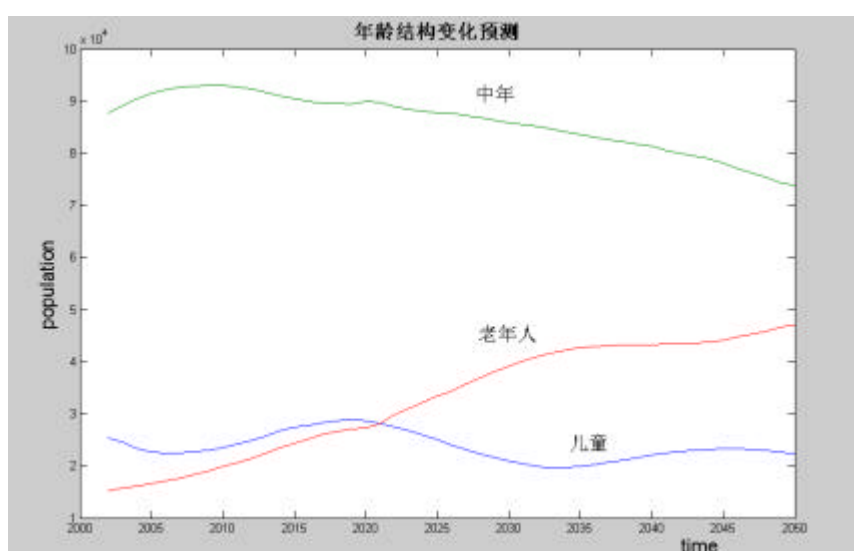


图 3 年龄结构变化预测图

- 由表 8 看出，我国人口的另一个特点是男女比例失调，若按目前出生人口的性别比持续下去，到 2015 年后，性别比将低于正常水平 48%，新进入婚育年龄人口男性明显多于女性，婚姻挤压问题凸现，可能导致的社会秩序混乱将成为影响社会稳定的严重隐患。
- 由图 2 可以看出，1984~1990 年间的人口出生高峰期，直接导致了 2005~2015 年的婴儿出生高峰，并间接引起了 2030~2045 间的人口总数波动，且在 2039 年出现了人口总数峰值，说明人口出生高峰将产生不止一代的影响，应尽量避免高峰期的产生。

5.3.6. 敏感性分析

1. 总和生育率 b

由模型的构建过程可知 ,总和生育率对预测结果有着重大影响 ,此点可由图 4 说明 :

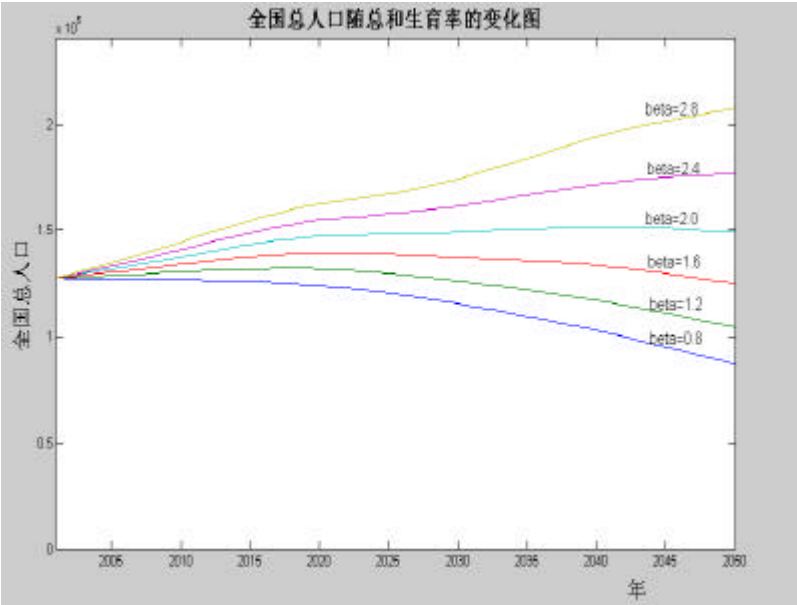


图 4 全国总人口随总和生育率的变化图

由图 4 可知 ,随着 b 的增大 ,总人口数和其变化趋势都将产生较大变化 ,若要维持人口的长期稳定 , b 应在 2.0 左右 ,与 2.1 的更替水平相接近 ;若要控制现阶段人口的过快增长 ,则 b 值应适当低于 2.0。 $b = 1.8$ 的效果可参照图 2 ;可知模型对 b 非常敏感。

2. 迁移率

随着计划生育国策的进一步推广 ,城镇和乡村的总和生育率将趋于一致 ,在此前提下 ,分别取迁移率为 1/100 , 1/80 , 1/50 ,可以得到如下结果 :

表 9 迁移率对总人口的影响

迁移率	2010	2015	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
1/100	136282	142103	145789	146197	145924	146191	146525	145447	143189
1/80	135950	141530	144998	145225	144759	144795	144880	143583	141150
1/50	135895	141407	144818	145043	144594	144651	144741	143435	141000

表中数据说明随着迁移率的增加 ,总人口数将降低 ,这同城市的低生育率、低死亡率相符合 ,同时表中总人口数目变化不大 ,也说明模型对迁移率的敏感性不高。

3. 老龄化和出生高峰

老龄化和出生高峰都将对年龄结构产生影响 ,它们主要通过影响某一时段育龄妇女占总人口的比例来引起人口的总数的变化 ,因而我们可以通过研究育龄妇女的比例来对

老龄化和出生高峰的影响进行预测，表 10 是预测结果：

表 10 不同权值下育龄妇女比例对总人口的影响

加权因子	2010	2015	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
p=1.1	135145	139845	142679	142922	142332	141927	141392	139639	137026
p=1.2	136282	142103	145789	146197	145924	146191	146525	145447	143189
p=1.3	136820	143334	147478	147720	147410	147933	148685	147879	145647

由表 10 中的数据可知，随着育龄妇女加权因子的减小，也及老年化突出程度增加和出生高峰严重程度的减少，总人口数将减少，说明模型对老龄化和出生高峰的处理符合实际情况。同时可以看出，它们对总人口的影响是比较大的，因而模型对老龄化和出生高峰比较敏感。

4. 性别比例

联合观察表 6 和表 8 中的数据可以对性别比例对总人口的影响做大致了解，从表 11 可以看出，总人口随着女性比例的降低而降低，符合生物学规律。

表 11 总人口与女性比例（%）关系表

	2010	2015	2020	2025	2030	2035	2040	2045	2050
女性比例	48.26	48.00	47.79	47.63	47.47	47.29	47.09	46.89	46.71
总人口	136282	142103	145789	146197	145924	146191	146525	145447	143189

5.3.7. 模型优缺点

模型优点：

1. 充分考虑现阶段的人口增长特点，引入性别比例转移矩阵，利用计算机模拟未来出生人口的性别比例，动态地对人口性别变化做出预测。
2. 对死亡率做出合理的假设，分年龄段地计算各年龄的死亡率，既简化了模型，也较准确地符合实际。
3. 结合我国当今大量人口迁入城市以及城镇化进程快速，将人口迁移率引入模型，得到各年市、镇、乡的各年人口数。
4. 八十年代的出生高峰期会使最近几年的总和生育率提高，模型通过引入权重，使模型更贴近实际。

模型缺点：

1. 总和生育率是一个随时间变化的量，本文没有对其变化的因素充分考虑，只是按照国家统计局的数据和国家的政策对其变化规律做了线性近似。
2. 生育模式在社会稳定时，一般不会变化，但对于长期的人口预测，生育模式应该变化。
3. 死亡率是一个随机变量，本模型没有对其随机性进行展开讨论。
4. 没有考虑女性平均寿命比男性高对老年人中女性比例的影响。

6. 两个模型的比较

6.1. 复杂程度

模型一基于传统的 logistic 模型，所需数据少，具有简洁易行等特点，且由于用差分方程代替了微分方程，使求解难度大大降低。而模型二构造复杂，所需数据种类多，量大，求解也较复杂，需要用到专门的数学软件。

6.2. 预测精度

由模型得到的数据可以看出，对于中短期的预测，两模型均有较高的准确度，但随着时间的增加，模型一的精确度逐步下降，而模型二则很好的维持了高精度。

6.3. 应用范围

由以上分析可知，两个模型各具优点，若拥有的数据量有限，且只需进行短期预测，首选模型一；若拥有足够的数据量，且需对人口进行长期预测，则可以考虑模型二。

7. 对政府的一些建议

人口数量和素质与国家的发展息息相关，根据合理的预测方案采取正确的人口措施，对于国家政府至关重要，这里我们基于以上两个模型提出一些建议：

1. 从模型的灵敏度出发，总和生育率对人口的增长有很大影响，因此应严格控制总和生育率，有关部门要及时搜集精确数据，对总和生育率做出准确判断，采取相应措施。
2. 由模型知，男女比例对人口总数也有一定的影响，且有可能导致社会秩序混乱是影响社会稳定的严重隐患，应引起足够重视。
3. 出生高峰将导致某段时间内人口总数的快速增长，对本已稳定的社会关系造成冲击，且将对后几代产生持续影响，因此在人口政策中应避免出现出生高峰。

8. 参考文献

- [1] 国家统计局编委会，中国人口统计年鉴 2006，北京：中国统计出版社，2006。
- [2] 姜启源 谢金星，数学模型，北京：高等教育出版社，2003。
- [3] 宋健 于景元，人口控制论，北京：科学出版社，1985。
- [4] 苏金明 张莲花 刘波等，MATLAB 工具箱应用，北京：电子工业出版社，2004。

人口控制预测差分方程模型

王五生

(河池学院数学系 广西 宜州 546300)

【摘要】本文建立了预测和控制人口增长的矩阵形式的差分方程模型,此模型的特点是考虑了育龄妇女各年龄的生育率。利用《中国人口统计年鉴》上收集到的部分数据和数学软件 Matlab,按照不同的生育率,对我国的人口发展进行了预测。得出生育率控制在 1.8 附近时,前 30 年左右人口增长缓慢增长到 14 亿,然后人口开始逐渐下降,既防止了人口增长过快,又能很好地控制人口老龄化。

【关键词】差分方程模型;人口控制;人口预测

Modeling of difference equation for controlling and forecasting population

Wang Wusheng

(Department of Mathematics, Hechi College, Guangxi, Yizhou 546300, P. R. China)

【Abstract】This paper discusses a modeling of difference equation for controlling and forecasting population, in which we consider the rate of reproduction of women in different age. By the part data in 《China yearbook of population》, we use the Matlab tool and forecast the population of state. We conclude the optimum rate of reproduction.

【Key words】Modeling of difference equation; Controlling population, Forecasting population

中国是一个人口大国,人口问题始终是制约我国发展的关键因素之一。根据已有数据,运用数学建模的方法,对中国人口做出分析和预测是一个重要问题。

一、模型建立

我们假定在和平年代男女各年龄的死亡率是固定的,假定育龄妇女年龄为 15 到 49 岁,各年龄育龄妇女的生育率不变。记 $v_i(n), i=1, 2, \dots, 89, n=0, 1, 2, \dots$ 为第 n 年的时候年龄为 i 的女性人口数量, $v_i(90)$ 表示 90 岁及其以上年龄女性人口的数量。如果知道了第 n 年的时候各年龄的女性人口数量,各年龄女性的生育及死亡状况,就可以根据人口发展变化的规律推得第 $n+1$ 年的时候各年龄组的女性人口数量。

首先引入两个概念, i 岁妇女人口的年死亡率和 i 岁妇女的年生育率。这两个概念的具体定义如下:

i 岁女性人口的年死亡率 d_i = 一年内 i 岁女性人口的死亡人数/该年度 i 岁女性人口总数, i 岁女性的年生育率 b_i = 一年内 i 岁妇女生育的婴儿数/该年度 i 岁妇女总数。

显然,第 $n+1$ 年的时候 $i+1$ 岁的女性人口数,就是第 n 年 i 岁的妇女人口数扣除它在该年度的死亡人数,即有: $v_{i+1}(n+1) = (1-d_i)v_i(n), i=0, 1, 2, \dots, 89$, 记 $p_i = 1-d_i$ 为 i 岁女性人口的存活率,则各年龄组女性人口数量随时间的变化规律可用下面的递推公式:

$$v_{i+1}(n+1) = p_i v_i(n), i=0, 1, 2, \dots, 89, \quad (1)$$

来表示。再考虑到零岁的人口数量就是 15 到 49 岁各年龄组妇女所生育的婴儿数总和,考虑到女婴和男婴的自然比大约是 100:107,故

$$v_0(n+1) = \frac{100}{207} \sum_{k=15}^{49} b_k v_k(n) \quad (2)$$

其中 b_k 是 k 岁妇女的生育率。

用 $m_i(n)$ 表示第 n 年的时候年龄为 i 的男性人口数量, $i=1, 2, \dots, 90, n=0, 1, 2, \dots$ 为。记 q_i 为 i 岁男性人口的存活率。同上各年龄组男性人口数量随时间的变化规律可用下面的递推公式:

$$m_{i+1}(n+1) = q_i m_i(n), \quad (3)$$

$$m_0(n+1) = \frac{107}{207} \sum_{k=15}^{49} b_k v_k(n) \quad (4)$$

表示。令 $X(n) = (v_0(n), v_1(n), v_2(n), \dots, v_{89}(n), m_1(n), m_2(n), \dots, m_{90}(n))^T$

其中前 91 个分量分别表示女性第 n 年从 0 岁到 90 岁的人口数量,后 91 个分量分别表示男性第 n 年从 0 岁到 90 岁的人口数量。用 b_i 表示 i 岁妇女的生育率, p_i 表示 i 岁女性存活率, q_i 表示 i 岁男性存活率,由妇女生育率 b_i 、女性存活率 p_i 和男性存活率 q_i 构成的矩阵

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{15} & \dots & \alpha_{49} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ p_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \beta_{15} & \dots & \beta_{49} & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ q_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

其中 $\alpha = \frac{100c}{207 \sum_{j=15}^{49} b_j}, \beta = \frac{107c}{207 \sum_{j=15}^{49} b_j}, c$ 是生育控制系数。

公式(1)、(2)、(3)和(4)可以写成

$$X(n+1) = LX(n), n=0, 1, 2, \dots \quad (5)$$

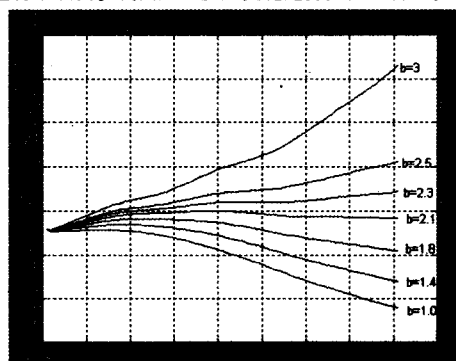
当矩阵 L 和按年龄的初始分布向量 $X(0)$ 已知,可以预测第 n 年女性与男性按年龄的分布为

$$X(n) = L^n \cdot X(0), n=1, 2, \dots \quad (6)$$

有了 $x(n)$ 当然不难算出第 n 年人口的总数和抚养比。

二、模型求解

根据《中国人口统计年鉴》上收集到的部分数据,用加权平均的方法分别给出女性与男性各年龄的存活率和男性比例、女性比例及育龄妇女的生育率,使用数学软件 Matlab,按照不同的生育率,对我国的人口发展进行了预测。我国人口发展变化趋势如图一所示:



图一 总体妇女生育率对人口发展的影响 (下转第 6 页)

强化培训试点,增加了第一学期的公共英语课时。通过强化培训,2006 级学生在参加全国大学生英语四级考试中,现通过率已达到 51.5%,较 2005 级同期增加了一倍。为我校双语教学的顺利实施提供了有力的保障。

2.3 教材问题

双语教学应尽可能选用英文原版医学教材,因为英文原版医学教材的编写符合英语的语言习惯,实用性强且更新快,融入了最新的医学研究成果^[4]。但由于原版教材的价格昂贵,对它的普及造成了一定的影响。对此,学校图书馆可有计划地引进一些英文原版医学教材,教师可选择一本合适的原版教材,节选其中的章节,复印后分发给同学,这可能是目前比较理想的过渡手段。对于部分经济条件较好的学生,应尽量购买英文原版教材使用。我校教师也自编和参编了部分双语教材,这部分教材的使用,也很好促进了双语教学的开展。

3. 我校医学双语教学模式探讨的新思路

近年来,我校在不断推进双语教学工作的过程中,结合我校教与学的实际,对医学双语教学模式作了一些有益的探索和思考,提出了一些新的思路。即将医学双语教学按难易划分为五级,教师根据自身和学生水平选择最佳双语适配比例进行双语教学,力争在专业知识学习不受影响的条件下,实现五年全程医学双语教育,可望创建医学双语教育的新模式。目前,我校正在部分专业中进行五级划分双语教学模式的试点。医学双语教学其实是一个循序渐进的过程,根据学生英语水平的高低和师资力量强弱,采取灵活的双语教学方法,使五年的医学教育过程实现双语教学不断线,让每名同学都能得到提高,这才是我们的目的所在。

总之,医学院校开展医学双语教学是培养符合新世纪要求的高素质

医学人才的重要举措,也是一个循序渐进的、需要不断改进和提高的过程。双语教学的顺利实施,有赖于医学教育模式的进一步完善,有赖于医学院校师生整体外语水平的进一步提高,更需要我们全体同仁的不懈努力^[5]。相信通过我们在实践中的不断地总结和摸索,一定会探索出一种符合我校实际的双语教学模式,为我国医疗卫生事业培养出更多的人才。科

【参考文献】

- [1]彭伟莲,唐晓鸿,关于医学双语教学的思考[J].中国现代医学杂志,2003,13(13):151-152.
- [2]王瑞婷,郝希俊,杜玉凤,如何在普通高等医学院校实施双语教学[J].承德医学院学报,2002,4(19):335-337.
- [3]秦鸿雁,韩骅,衡恩良,医学专业“双语教学”对教师素质的要求[J].山西医科大学学报(基础医学教育版),2004,6(3):269-271.
- [4]张杏泉,王少东,范清宇,马保安,医学双语教学初探[J].中华医学丛刊,2003,3(10):98-99.
- [5]孙文平,卢延旭,刘媛,双语教学在普通高等医学院校本科教育中的应用前景展望[J].西北医学教育,2004,12(2):123-124,封 3.

作者简介:杨玥娜(1980—),女,云南个旧市人,学士,助教,主要从事化学教学和医学教育管理工作。

于建云,博士,教授。

※本研究获昆明医学院“十一五”教改教改重点项目资助。

[责任编辑:韩铭]

(上接第 9 页)

总体妇女生育率对抚养比的影响

年度	2000	2005	2010	2015	2020	2025	2030
生育率							
b=1.0	0.41	0.33	0.35	0.51	0.40	0.68	0.91
b=1.6	0.41	0.36	0.44	0.55	0.69	0.67	0.68
b=1.8	0.41	0.37	0.47	0.57	0.68	0.64	0.65

由图和表可以看出生育率过高会导致人口增长过快,生育率过低会导致抚养比加大,生育控制常数在 2.1 时人口增长基本保持稳定,在 1.8 附近波动时,前 30 年左右人口增长缓慢增长到 14 亿,然后人口开始逐渐下降,既防止了人口增长过快,又能很好地控制人口老龄化,有利于国家的发展和进步,因此在未来的 30 年内我国应控制总和生育率在 1.8 左右。

三、模型优缺点分析

模型的优点是:建立模型时运用了矩阵和向量使得模型简单明了,我们能够通过控制出生率,模拟预测人口总数的变化规律,我们采

用的初值是根据人口普查数据推出的,因此真实可靠,我们的参数出生率和死亡率是通过加权平均得到的,故误差较小。

模型缺点是:我们没有考虑出生率,死亡率随科学技术的发展而变化,没有考虑人口流动对模型的影响,没有考虑男性与女性比例的变化。科

【参考文献】

- [1]姜启源,谢金星,数学模型[M].北京:高等教育出版社,2003(第三版).
- [2]梁国业,廖健平,数学建模[M].北京:冶金工业出版社,2004.
- [3]http://news.sohu.com/35/19/news144431935.shtml,2001-3-28.

作者简介:王五生,男,1960,沁县人,博士,河池学院数学系教授,主要研究数学建模和微分方程与动力系统。

※基金项目:1.广西新世纪教改工程“十一五”第三批资助项目(桂高教 2007(109 号)61);

2.河池学院应用数学重点学科资助项目(院科研[2007]2 号);

3.河池学院重点数学建模重点课程。

[责任编辑:韩铭]

(上接第 18 页)当人出去时,CC4518 的 U12B 输出高电平,这一端接 CPD,所以减计数。CC40192 还有进位和借位,前门个位计数的进位借位接在前门十位计数的进位借位上,前门的十位计数的进位借位接在前门的百位计数的进位借位上。前后门的个、十、百位分别通过加法器 CC14560 相加,使前后门都可以同时用来进出。加法器的输出又经 BCD-锁存/7 段译码/驱动器 CC14543 进行锁存、译码、驱动 LED 来显示,由此我们可以通过显示器看到图书馆中现有的人数。如图 2 所示:

4. 小结

本文在介绍 CW7812、LM324、CC4518、CC40192、CC14560、CC14543 等集成块性能及原理的基础上,利用触发器、计数器、译码器、显示器等的结合,实现了光电发射电路,接收电路,计数译码显示电路装置的功能,从而达到我们设计的目的,同时我们也希望它能真

正的投入实践应用中,为我们学生带来更多的方便。科

【参考文献】

- [1]赵保全.中国集成电路大全.北京:国防工业出版社出版发行 1996.
- [2]张洪润.电子线路及应用.北京:科学出版社出版发行 2003.
- [3]许泽鹏.电子技术.北京:邮电出版社出版发行 2004.
- [4]龙忠琪.模拟集成电路.北京:科学出版社出版发行 2004.
- [5]林玉江.模拟电子技术基础.哈尔滨:哈尔滨工业大学出版社出版发行 1998.
- [6]叶飞童.实用电子电路手册.科学技术文献出版社 1993.
- [7]童诗白等.现代电子学及应用.高等教育出版社 1994.
- [8]张著等.数字设计—电路与系统.北京理工大学出版 2001.

[责任编辑:程成梁]



用差分方程模型模拟北京 2003 年 SARS 疫情

刘 双¹ 李海龙^{1,2}

(1 鞍山师范学院 数学系, 辽宁 鞍山 114005; 2 中国地质大学(武汉) 环境学院, 湖北 武汉 430074)

摘 要: 根据北京 2003 年 SARS 疫情发展的实际情况, 利用差分方程建立模拟北京疫情发展过程(2003 年 3 月 20 日至 7 月 14 日)的数学模型. 建立主要由模拟值与实际统计值之差的平方和构成的目标函数. 最后利用 Gauss-Newton 最优化方法, 对模型中参数进行估计.

关键词: SARS; 差分方程; 数学模型; Gauss-Newton 最优化方法; 反问题; 参数估计

中图分类号: O175.7; O242.1 **MR 分类号:** 92B05; 34M50 **文献标识码:** A

文章编号: 1001-9626(2006)01-0021-07

0 引 言

SARS 是近几年来人类所遇到的涉及范围最广的传染病, 2003 年发生在北京市的 SARS 疫情病例数在其总病例数中占有很高的比例, 因此研究其发展过程有重要的意义. 文 [1] 中, 利用时滞常微分方程建立了描述 SARS 传染和发展的数学模型, 通过对模型的讨论得出在无任何预防和隔离措施的情况下, 当疫情自生自灭后, 感染 SARS 的总人数占人口的比例主要取决于基本传染数, 其缺陷是未将人类抗击 SARS 的措施考虑进去. 文 [2] 以传统的微分方程为理论基础, 建立了控制前和控制后的传播模型, 重点分析了控制后模型, 在控制后模型中参数的取值为相关数据的平均值, 没有考虑由传染病潜伏期存在性和预防措施生效性而引起的时滞现象. 上述模型都为连续型模型, 连续型模型只有在传染病人较多的情况下成立, 不能把传染病传播过程中的各种人为因素有效地考虑进去, 有一定的局限性, 因此, 都未能满意地再现 2003 年北京 SARS 疫情的发展过程. 本文利用差分方程建立数学模型, 取消了对传染病人数的限制, 且较为方便地考虑了疫情传播过程中的各种人为因素, 从而使建立的模型更加符合实际.

由 [3] 知北京 SARS 病例不是原发性病例, 而是输入性病例, 也即外地的病人到北京来求医, 结果在北京诊断为 SARS 病例. 北京市 2003 年 SARS 详细数据参见表 1.

根据表 1 中北京 2003 年 SARS 数据我们可以把北京整个 SARS 疫情的发展过程分为以下三个时期: 第一时期, 疫情的初始发展期(3 月 20 日至 4 月 20 日, 共计 32 天); 第二时期, 疫情的高发平台期(4 月 21 日至 5 月 8 日, 共计 18 天); 第三时期, 疫情的衰退期(5 月 9 日至 7 月 14 日, 共计 67 天).

收稿日期: 2003-12-20

基金项目: 国家自然科学基金资助项目(40372111)

作者简介: 刘双(1978-), 男, 辽宁沈阳人, 硕士.

表 1 北京市 2003 年 SARS 数据^[3]
Table 1 Data of SARS in Beijing in 2003

时间 日 / 月	新确诊 总人数	新确诊 医务人数	累计确 诊人数	累计出院和 死亡人数之和	时间 日 / 月	新确诊 总人数	新确诊 医务人数	累计确 诊人数	累计出院 和死亡人数之和
20/3	8		8		31/5	1	1	2521	1243
20-31/3	4		12		1/6	1	0	2522	1280
1-6/4	7		19		2/6	0	0	2522	1313
7-9/4	3		22		3/6	2	0	2522	1345
10-15/4	15		37		4/6	0	0	2522	1419
16-18/4	302		339		5/6	0	0	2522	1477
19-21/4	143		482		6/6	0	0	2522	1561
22/4	106		588	3	7/6	1	0	2523	1604
23/4	105		693	10	8/6	0	0	2522	1702
24/4	89		774	14	9/6	0	0	2522	1812
25/4	103	17	877	90	10/6	0	0	2522	1908
26/4	113	7	988	99	11/6	1	0	2523	1982
27/4	126	20	1114	109	12/6	0	0	2523	2038
28/4	96	20	1199	112	13/6	0	0	2522	2106
29/4	152	50	1347	124	14/6	0	0	2522	2158
30/4	101	18	1440	140	15/6	0	0	2522	2179
1/5	122	20	1553	157	16/6	0	0	2521	2218
2/5	96	15	1636	175	17/6	0	0	2521	2385
3/5	114	20	1741	186	18/6	0	0	2521	2320
4/5	69	8	1803	193	19/6	0	0	2521	2337
5/5	98	9	1897	199	20/6	0	0	2521	2355
6/5	70	14	1960	216	21/6	0	0	2521	2379
7/5	97	12	2049	226	22/6	0	0	2521	2423
8/5	94	12	2136	239	23/6	0	0	2521	2443
9/5	48	3	2177	257	24/6	0	0	2521	2446
10/5	54	4	2227	266	25/6	0	0	2521	2450
11/5	42	4	2265	281	26/6	0	0	2521	2455
12/5	48	5	2304	307	27/6	0	0	2521	2455
13/5	48	3	2347	353	28/6	0	0	2521	2459
14/5	39	3	2370	366	29/6	0	0	2521	2459
15/5	27	2	2388	372	30/6	0	0	2521	2459
16/5	28	2	2405	389	1/7	0	0	2521	2462
17/5	19	2	2420	427	2/7	0	0	2521	2462
18/5	17	1	2434	454	3/7	0	0	2521	2462
19/5	7	2	2437	474	4/7	0	0	2521	2463
20/5	12	1	2444	524	5/7	0	0	2521	2466
21/5	8	0	2444	578	6/7	0	0	2521	2466
22/5	15	1	2456	661	7/7	0	0	2521	2466
23/5	15	1	2465	717	8/7	0	0	2521	2468
24/5	26	1	2490	805	9/7	0	0	2521	2468
25/5	13	1	2499	846	10/7	0	0	2521	2470
26/5	5	1	2504	890	11/7	0	0	2521	2470
27/5	9	1	2512	975	12/7	0	0	2521	2471
28/5	3	0	2514	1016	13/7	0	0	2521	2473
29/5	3	0	2517	1079	14/7	0	0	2521	2473
30/5	6	0	2520	1158					

由于从 4 月中下旬开始北京市政府采取了各种预防 SARS 的措施,新闻媒体加强了对 SARS 疫情宣传力度,使人们提高了对 SARS 传染病的预防意识,减少了健康个体被传染的可能性。但上述行为从落实到生效,要经过一个滞后期,再加上 SARS 传染病具有潜伏期,所以我们假

定: 在医院外的传染率在 4 月 20 日至 4 月 25 日之间的某一天之前为一较大的常数, 而在该日之后为一较小的常数. 在医院内的传染率在 4 月 25 日至 4 月 30 日间的某一天之前为一较大的常数, 而在该日之后为一较小的常数.

1 数学模型

1.1 基本假设

通过上述对北京疫情的分析, 并依据一些医学观察和研究结果^[4,5], 我们做如下假设:

假设 1: 北京为输入性疫区.

假设 2: 因为社会上未经医院治疗的自我康复者和在医院外患 SARS 而死亡的病人数难以统计且数量很少, 所以模型忽略这一因素, 假设所有患者能被医院收治.

假设 3: 处于潜伏期的 SARS 患者无传染性, 且无发病症状, 故无被医院收治可能性; 潜伏期后症状发作且具有传染性, 这时就有被医院收治的可能性.

假设 4: 忽略不同的个体被传染 SARS 的差异性.

假设 5: 忽略不同个体潜伏期的差异性, 设所有 SARS 患者的潜伏期均为常数, 且取为 5 天.

假设 6: 忽略不同个体传染期 (从发病到康复或从发病到死亡的天数) 的差异性, 设所有 SARS 患者的传染期均为常数. 从表 1 中可以看出病人从入院到康复出院或从入院到死亡要经历 37 天 (住院时间) 左右. 但是由于病人未必一发病就马上入院, 所以我们假设病人的传染期为 40 天.

假设 7: 由于疑似病人在确诊前已和外界隔离, 故其传染性比在社会上要小. 模型中, 将确诊前已收入医院的疑似病例仍和社会上的 SARS 病人视为同一类.

1.2 模型的建立和说明

把与 SARS 传染病传播密切相关的人群分为以下四类: 处于潜伏期的病人, 处于传染期的病人、被医院收治的病人、每天康复出院和死亡的病人. 我们引入如下记号:

L_k : 表示第 k 天新增的处于潜伏期的病人数, 此时病人无发病症状且无传染性.

I_k : 表示第 k 天新增的具有传染性的病人数, 即从潜伏期转为传染期的病人数, 此时病人有发病症状且有传染性.

H_k : 表示第 k 天医院新收治的病人数.

R_k : 表示第 k 天康复出院与死亡人数之和.

根据以上假设, 我们很自然地引入与这四类人密切相关的重要参数:

a_k : 第 k 天时, 在医院外的每个病人平均每天传染的人数.

b_k : 第 k 天时, 被收治在医院内的每个病人平均每天传染的人数.

根据我们所考察的四类人的关系以及所引进相关的参数, 可以建立如下四个差分方程, 并根据上述假设给出相应的四个初值条件, 组成数学模型.

$$L_{k+1} = a_{k+1} \left(\sum_{j=0}^{k+1} I_{k+1-j} - \sum_{j=0}^{k+1} H_{k+1-j} \right) + b_{k+1} \left(\sum_{j=0}^{k+1} H_{k+1-j} - \sum_{j=0}^{k+1} R_{k+1-j} \right) \quad k = 0, 1, 2, \dots, 116 \quad (1)$$

$$I_{k+1} = L_{k+1-\tau} \quad k = 0, 1, 2, \dots, 116 \quad (2)$$

$$H_{k+1} = \sum_{j=1}^{\sigma} c_j I_{k+2-j} \quad k = 0, 1, 2 \cdots 116 \quad (3)$$

$$R_{k+1} = I_{k+1-\sigma} \quad k = 0, 1, 2 \cdots 116 \quad (4)$$

其中 k 从 0 开始取值 (对应于 2003 年 3 月 20 日), 依次类推, 直到 2003 年 7 月 14 日 SARS 疫情结束为止, 共计 117 天.

(2) 式中的 τ 为病人所处的潜伏期天数 (取为整数). 由假设 5 有: $\tau = 5$.

(3) 式中的 c_j ($j = 1, 2, \cdots, \sigma$) 为已经处于传染期的病人在发病第 j 天被收治的概率, σ 为传染期天数, 即病人从潜伏期结束传染病发作到康复或死亡的天数 (取为整数). 由于传染期为 σ 天, 由假设 2, 故病人在 σ 天内必被医院收治. 于是 c_j 应满足 $0 \leq c_j \leq 1$, ($j = 1, 2, \cdots, \sigma$) 且 $\sum_{j=1}^{\sigma} c_j = 1$.

根据上述对疫情的分析以及假设可将上述变量 L_k 、 I_k 、 H_k 、 R_k 的初值条件设为:

$$L_k = 0 \quad k = 0, -1, -2 \cdots \quad (5)$$

$$I_k = \begin{cases} I^0 & k = 0 \\ 0 & k = -1, -2, \cdots \end{cases} \quad (6)$$

$$H_k = 0 \quad k = 0, -1, -2 \cdots \quad (7)$$

$$R_k = 0 \quad k = 0, -1, -2 \cdots \quad (8)$$

2 参数估计

2.1 参数分析

由上述对北京疫情的分析可知, 可设在 4 月 20 日至 4 月 25 日之间的某一天之前参数 a_k 等于常数 α_1 , 之后等于常数 α_2 . 在 4 月 25 日至 4 月 30 日之间的某一天之前参数 b_k 等于常数 β_1 , 之后等于常数 β_2 . 参数 c_j ($j = 1, 2, \cdots, \sigma$) 表示处于传染期的病人在发病第 j 天被医院收治的概率. 为了简单起见, 我们假设 $c_j = 0.2$, $j = 1, 2, \cdots, 5$; $c_j = 0$, $j = 6, 7, \cdots, \sigma$. 即对单个病人来说, 其在潜伏期结束后五天内会被医院收治, 在第 j 天收治的可能性是 20%, $j = 1, 2, \cdots, 5$.

通过上述分析简化, 模型 (1)-(8) 中原有的待优化参数缩减成了如下五个参数: α_1 、 α_2 、 β_1 、 β_2 和 I^0 .

2.2 参数估计用的目标函数

因实际统计数据 (见表 1) 中只有被收治在医院内的病人人数、康复和死亡的人数. 故我们结合数学模型 (1)-(8) 建立如下目标函数:

$$J(P) = \sum_{i=1}^5 \lambda_i^2 (p_i - p_i^0)^2 + \sum_{i=1}^7 (H_i^{sum}(P) - H_i^{sum*})^2 + \sum_{i=8}^{91} (H_i(P) - H_i^*)^2 + \sum_{i=8}^{91} (R_i(P) - R_i^*)^2 \quad (9)$$

其中向量 $P = (p_1, p_2, \cdots, p_5)^T = (\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, I^0)^T$ 为参数向量, 向量 $P^0 = (p_1^0, p_2^0, \cdots, p_5^0)^T$ 为参数向量 P 的初始估计值. λ_i^2 ($i = 1, 2, \cdots, 5$) 为正则项的系数, 其值都大于或等于零.

H_i^{sum*} ($i = 1, 2, \dots, 7$) 为从 2003 年 3 月 20 日到 4 月 21 日间的 7 个阶段内 (各阶段天数从 3 天至 11 天不等) 医院收治的阶段累计病人数 (由表 1 可以算出), $H_i^{sum}(P)$ 为用模型 (1)-(8) 模拟的相应阶段内的病人数. H_i^* ($i = 8, 9, \dots, 91$) 为从 2003 年 4 月 22 日到 7 月 14 日医院每天新收治的病人数 (见表 1), $H_i(P)$ 为用模型 (1)-(8) 模拟的相应模拟值. R_i^* ($i = 8, 9, \dots, 91$) 为从 2003 年 4 月 22 日到 7 月 14 日每天康复出院与死亡的病人数之和 (见表 1), $R_i(P)$ 为用模型 (1)-(8) 模拟的相应模拟值.

2.3 参数估计结果

(1) 参数估计结果.

编制 Fortran 程序, 利用 Gauss-Newton 最优化方法, 对目标函数 (9) 中的参数进行估计. 参数估计结果如表 2.

表 2 参数估计结果
Table 2 The Result of Parameters Estimation

	α_1	α_2	β_1	β_2	I^0	$J(P)$
初始值	1.0	0.25	0.2	0.01	3.0	1.0×10^8
最终优化值	0.8823	0.2665	0.0431	0.0	7.4475	1.26×10^6

(2) 参数估计结果分析

参数估计的结果显示有 β_1 、 β_2 都小于 α_1 、 α_2 ; 而且对于参数 α_1 、 α_2 、 β_1 和 β_2 , 其估计结果显示 $\alpha_1 > \alpha_2$ 、 $\beta_1 > \beta_2$, 这与我们先前对疫情的分析是相符合的; 参数 I^0 的估计结果 $I^0 = 7.45$, 与实际情况 (截止 3 月 20 日, 北京接受输入型病例 8 例) 相比, 由于我们假设处于传染期的病人初值都集中在模拟计算开始的前一天 (2003 年 3 月 19 日), 所以可以认为 $I^0 \approx 7$ 也符合实际情况. 由参数估计结果可知, 北京地区每个 SARS 患者的基本传染数 $R = 0.88 \times 2.5 + 0.04 \times 37.5 = 3.7$, 与文 [6]、[7] 所研究的香港地区的每个 SARS 患者的基本传染数 R 为 2.2-3.6 相对比, 由于香港地区的预防措施较好, 所以可以认为我们得到的北京地区的基本传染数 $R = 3.7$ 也符合疫情实际情况.

3 模拟结果介绍和进一步讨论

3.1 模拟结果介绍

利用模拟 (1)-(8) 及参数的估计结果, 对实际统计的北京 SARS 从 2003 年 4 月 22 日到 7 月 14 日期间内每天新收治的病人数和累计病人数进行模拟. 其主要结果分别讨论如下.

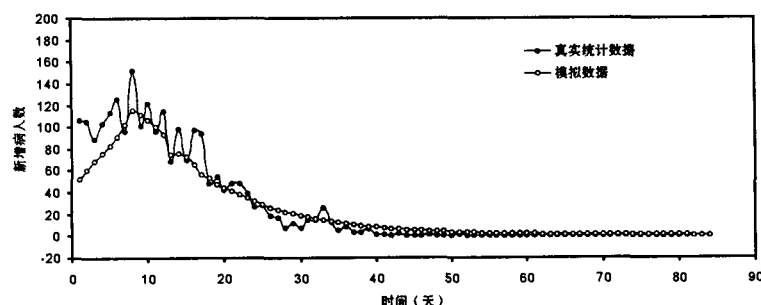


图 1 每天新增病人数模拟值和实际统计数据

从 2003 年 4 月 22 日到 7 月 14 日, 起始时间为 4 月 22 日 10 时

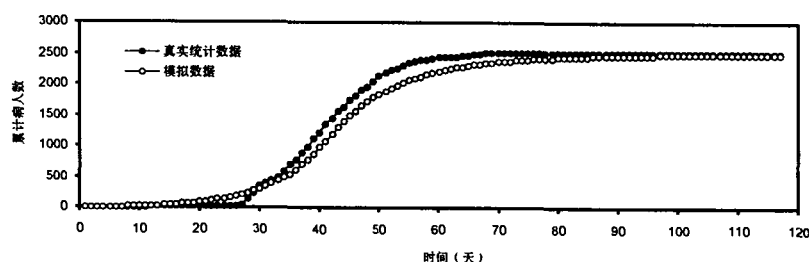


图 2 累计病人人数模拟值和实际统计数据

从 2003 年 3 月 20 日到 7 月 14 日, 起始时间为 3 月 20 日 10 时

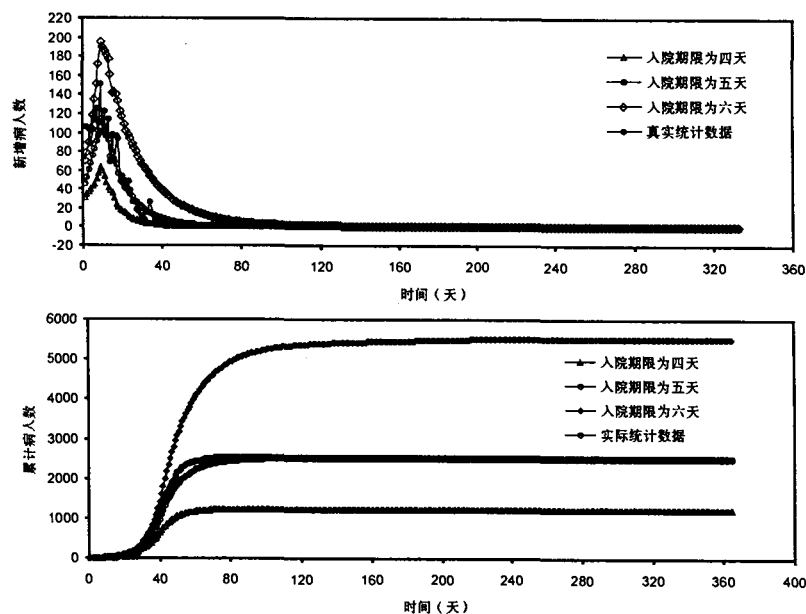


图 3 改变收治速度后的 SARS 疫情的假想发展状况

a: 每日新增病人数的模拟值和实际统计值的对比, 起始时间为 2003 年 4 月 22 日 10 时

b: 累计病人人数的模拟值和实际统计值的对比, 起始时间为 2003 年 3 月 20 日 10 时

利用模型 (1)-(8) 对北京市从 2003 年 3 月 20 日到 7 月 14 日累计确诊 SARS 病例数的模拟值约为 2506 例, 而实际所统计的病例数为 2521 例, 即模拟值与实际统计值的相对误差为 0.6%; 对累计出院与死亡病人数的模拟值约为 2434 例, 而实际所统计的人数为 2473 例, 即模拟值与实际统计值的相对误差为 1.58%. 更进一步说明了我们所建立的模型的合理性, 参数估计结果具有参考价值.

3.2 进一步讨论

对于处于传染期病人的入院情况, 我们假设每个病人在发病 5 天之内必被医院收治, 如果我们把病人的入院期限缩短或延长, 应用我们所估计的参数及模型 (1)-(8), 对北京疫情发展过程进行假想模拟.

图 3 给出了当改变收治速度时, 对北京 SARS 疫情发展状况的假想模拟. 从 (a) 中可以看

出, 当提高患者被收治的速度, 使之在进入传染期后 4 天内就被医院收治时给出了, 北京市每天新增病人最多时才达到 60 人左右, 从 (b) 中可以看出, 累计病人数为 1225 人左右, 经过 80 多天疫情就能被控制住; 当降低患者被收治的速度, 使之在进入传染期后 6 天内才被医院收治时, 北京市每天新增病人最多时能达到 195 人左右. 从 (b) 中可以看出, 累计病人数为 5506 人左右, 而且要经过 220 多天疫情才能被控制住.

通过上述对北京 SARS 疫情发展状况的假想模拟的分析, 可以看出病人的收治速度的快慢对疫情发展趋势有很大的影响: 收治速度快时, 疫情将很快被控制住; 收治速度稍有怠慢时, 疫情就会迅速蔓延. 这充分说明了党中央、国务院、北京市政府所采取的措施是积极有效的.

4 结 论

从我们所估计的参数结果可以看出, 我们估计的结果符合疫情实际发展情况 (见图 1-2), 对累计确诊的病人数以及累计出院与死亡人数之和模拟的相对误差都小于 2%. 说明所建的模型的讨论是合理的, 对北京的疫情发展过程的模拟与疫情实际发展过程吻合的较好.

通过对北京疫情的假想发展状况的模拟 (见图 3), 说明了党中央、国务院、北京市政府所采取的措施是积极有效的.

参 考 文 献

- [1] 李海龙, 任筱钰, 刘双. 用数学模型分析非典型肺炎预防和隔离措施的有效性 [J]. 生物数学学报, 2004, 19(1):72-76.
- [2] 王议锋, 田一, 杨倩. 非典数学模型的建立与分析 [J]. 工程数学学报, 2003, 20(7):45-62.
- [3] 中华人民共和国卫生部 <http://www.moh.gov.cn/index.htm>.
- [4] 杨婷婷, 施强. 全球 SARS 病因学研究的重大进展 [J]. 海峡预防医学杂志, 2003, 9(3):28-30.
- [5] 北京市疾病预防控制中心 / 生活健康专栏 / 非典型肺炎专题 [Http://www. Bjcdc.org/jkzl/fdpop/27.asp](http://www.bjcdc.org/jkzl/fdpop/27.asp).
- [6] Transmission dynamic and control of sever acute respiratory syndrome. Scieencxpre/WWW. sciencexpres. org/23 May 2003/, 1-5.
- [7] Transmission dynamic of the etiological agent of SARS in Hong Kong: Impact of Public Health Interventions Scieencxpress/WWW.sciencexpress.org/23 May 2003/, 1-5.

Simulation of SARS Epidemic in Beijing in 2003 by Difference Equation

LIU Shuang¹ LI Hai-long^{1,2}

(1 Department of Mathematics, Anshan Normal University, Anshan Liaoning 114005 China)

(2 School of Environmental Studies, China University of Geosciences, Wuhan Hubei 430074 China)

Abstract: This thesis analysed the observed statistical data of SARS in Beijing in 2003. Then a mathematical model was established to simulate the SARS development in Beijing by difference equations, and an objective function was also established which mainly consists of the sum of squares of the differences between the simulated and observed statistical data of SARS in Beijing. At last, the parameters were estimated by Gallss-Newton optimization method.

Key words: Sever acute respiratory syndrome ; Difference equation ; Mathematics model ; Gauss-Newton optimization method ; Inverse problem ; Parameter estimation

环境科学

基于差分方程的河流污染估算动态模型研究

林徐勋

(上海交通大学安泰经济与管理学院, 上海, 200052)

摘要 采用“分区”的思想来计算河水的污染浓度, 建立河流污染估算差分方程动态模型, 并用该方法来估算采取不同污染标准时的不同的污染限额; 估算河流污染到达稳定状态时所需的时间。最后用模型对黄浦江作了数值计算。

关键词 河流污染 分区 差分方程 稳定解

中图法分类号 X522; **文献标识码** A

随着社会经济的不断发展, 人民生活水平正逐渐提高, 但是生存环境却受到严重破坏。许多地方政府为了追求 GDP 增长, 不惜破坏环境。特别是水资源, 几乎所有地方的水资源都遭到一定程度的污染。主要原因是工厂将大量的工业废水不断排入河道, 造成河水水质急剧变坏, 而人们生活所需的饮用水大部分来自于天然的湖泊和河流, 因此湖泊河水的污染会对人们的生活带来很多健康隐患。上海市区日均废污水排放量达 550 万吨, 年均高达 20 亿吨, 比全年平均降水产生的水量还多, 而经过污水处理厂处理排入江河的仅占 10% 左右, 从而导致黄浦江及其支流的水质逐年下降。近年来人们所排放的污染已经渐渐超过了河流的污染承受能力^[1,2]。而政府则是通过制定一系列的污染浓度限额来在一定程度上减少河流的污染。王军等人曾用“分区”的方法计算高速公路上的交通流^[3], 现采用“分区”的方法来对河流污染浓度进行计算; 主要根据污染的排放量和时间的长短来估算污染浓度级别, 并且估算当浓度达到稳定状态时所花的时间。

2008 年 5 月 27 日收到

作者简介: 林徐勋 (1984—), 男, 浙江温州人, 上海交通大学安泰经济与管理学院硕士研究生, 研究方向: 管理科学与决策科学。E-mail: linxun2002@hotmail.com。

1 理论综述

1.1 模型建立的目的

模型建立的目的有以下几点。

(1) 本文用河流内污染物的浓度大小来表示污染的严重程度。

(2) 根据河水的蓄水量、水流速度、污染物的排放速度 估算不同时期的河道的污染程度,

一般可以根据污染浓度来区分河流污染的严重程度, 我国通常分为以下几个级别^[4]:

①没有污染: 污染浓度接近 0%; ②轻度污染: 污染浓度大于 0% 小于 3%; ③中度污染: 污染浓度大于 5% 小于 8%; ④重度污染: 污染浓度在 10% 以上。

(3) 可以根据污染的排放量和时间来大致推算出河流污染达到稳态时的浓度。

(4) 采取措施限制污染时, 可以估算出河流达到洁净状态时所需要的时间。

(5) 在确定的污染限制级别下, 估算工厂的排污限量。

1.2 模型建立的思路

如图 1 所示, 图中的两条水平直线表示河流, 水平方向箭头表示河流的流向 (从左至右), 垂直向下的箭头表示河道旁各种形式的污染排放, 由

于整个河流有一定的长度, 首先将河道分为若干个分区, 而每个分区有各自不同的污染浓度, 根据各分区污染浓度相互之间的关系来建立模型。

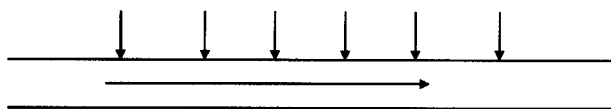


图1 河流及污染源示意图

如图2所示, 垂直向下的箭头表示污染进入, 一个方块表示一个分区, 水平箭头表示河流水流方向。通过这个模型来估算每一个方块也就是分区内污染浓度的变化情况。

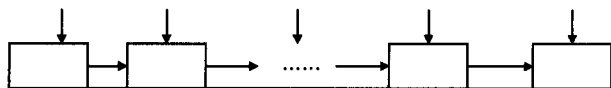


图2 河流及污染源示意图

1.3 模型假设条件:

根据实际情况作如下假设。

(1) 假设每个分区内的总蓄水量不变 (不考虑季节、天气的影响, 不考虑降雨对河流水流量的影响, 不考虑河流支流带来的蓄水量的变化)。

(2) 每个分区在单位时间内由上一个分区流入该分区的水量不变。

(3) 每个分区在单位时间内流入下一个分区的水量不变。

(4) 每一个分区河道旁都只有一个工厂排放污染, 遇到实际问题时将所有污染源看成一个总的污染源, 考虑污染排放总量。

(5) 工厂排污率为一个确定值, 不随时间变化而变化。

(6) 污染物随水流进入分区水域之后能够迅速扩散, 使得每个分区内污染浓度发生变化。

(7) 不考虑污染物之间的化学反应 (污染物混合以后不会产生新的污染物)。

1.4 模型中的参数

在模型中假设以下参数: k 表示沿水流方向分区的依次编号次序 $k=1, 2, \dots, n$; C_k 表示的是第 k 个分区内的总蓄水量; f 表示的是单位时间内

从一个分区流向下一个分区的水流量, 定是一个稳定的数值; P_k 表示第 k 分区的排污量; X_k 表示第 k 分区的污染浓度。

根据以上假设, 可以得到模型示意图, 如图3。

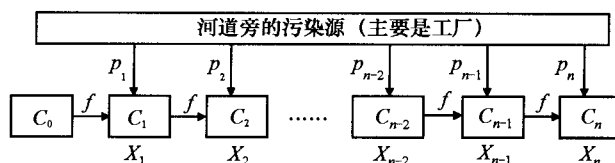


图3 模型示意图

图3中垂直向下的箭头表示100%浓度的污染物进入, 由于工厂排出的大部分是污染物, 而排出的水流量与分区内河水的蓄水量相比微不足道, 所以只考虑排出的污染物, 而不考虑排出的水量对河道蓄水量的影响。左边第一个水平箭头表示的是没有受到污染的水流, 而其余的水平箭头则表示带有污染物的水流。

考虑第 k 个分区内的污染物的来源, 当 $k=1$ 时, 也就是河道受到污染的最上游, 此时污染物只来自于河道旁边工厂的排污, 所以在第一个分区内, $t+1$ 时刻的污染总量 $C_1 X_1(t+1)$ 等于 t 时刻的污染总量 $C_1 X_1(t)$ 减去单位时间内随水流流向下一个分区的污染物 $f X_1(t)$, 加上河道旁工厂的排污 P_1 , 表达式为: $C_1 X_1(t+1) = (C_1 - f) X_1(t) + P_1$

当 $k \in [2, n]$ 时 (一共有 $n-1$ 个分区) 第 k 个分区内的污染物不仅来自于河道旁的排污, 还来自于上一个分区内的水流带来的污染物, 所以在第 k 个分区内, $t+1$ 时刻的污染物总量 $C_k X_k(t+1)$ 等于 t 时刻的污染总量 $C_k X_k(t)$ 减去单位时间内随水流流向下一个分区的污染物 $f X_k(t)$, 加上单位时间内来自上一个分区的污染物 $f X_{k-1}(t)$, 加上河道旁工厂的排污 P_k , 所以表达式为:

$$C_k X_k(t+1) = f X_{k-1}(t) + (C_k - f) X_k(t) + P_k$$

这样, 就可以写出 k 从1到 n 的全部表达式:

$$C_1 X_1(t+1) = (C_1 - f) X_1(t) + P_1$$

$$C_2 X_2(t+1) = f X_1(t) + (C_2 - f) X_2(t) + P_2$$

$$C_3 X_3(t+1) = f X_2(t) + (C_3 - f) X_3(t) + P_3$$

... ..

$$C_{n-1} X_{n-1}(t+1) = f X_{n-2}(t) + (C_{n-1} - f) X_{n-1}(t)$$

+ P_{n-1}

$$C_n X_n(t+1) = f X_{n-1}(t) + (C_n - f) X_n(t) + P_n$$

$$\text{令 } a_k = \frac{f}{C_k}; b_k = \frac{(C_k - f)}{C_k}; h_k = \frac{P_k}{C_k}$$

将模型表达式写成矩阵形式:

$$X_k(t+1) = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & & a_n & b_n \end{bmatrix} X_k(t) + \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix}$$

$$\text{设矩阵 } A = \begin{bmatrix} b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ & & \dots & & \\ 0 & 0 & & a_n & b_n \end{bmatrix}, \text{ 矩阵 } B = \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \\ \dots \\ h_n \end{bmatrix}$$

等式化简为 $X_k(t+1) = AX_k(t) + B$ 。当 $k=1$ 时, $0 < b_1 < 1$; 当 $k \geq 2$ 时, $a_k + b_k = 1$, 所以矩阵 A 的特征根介于 0 和 1 之间, 所以理论上, 这个方程能够达到稳定状态^[5-6], 设最后的稳定解为 S , 则 $S = (I - A)^{-1}B$ 。

2 实际案例

先讨论一个最简单的例子: 假设有一条大河, 考虑的污染区域总距离为 160 km, 将整条河流分成 4 个分区, 每个分区为 40 km, 差不多是流经一个县的长度。假设河的宽度为 40 m, 平均深度为 20 m, 以天为时间单位, 下面先来估算河流每日的流量, 假设该河中心水面的水流速度为 3 m/s, 越靠近河岸速度越小, 深度越大流速也越小^[7], 根据对称性原则, 只需要考虑河水的一半, 然后乘以 2, 如图 4 所示。xy 平面表示河道横截面 (显示一半), zy 平面表示河岸, xz 平面表示河底 (显示

一半)

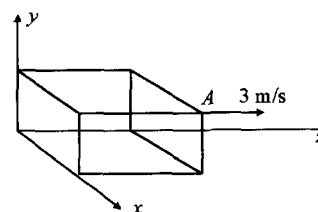


图 4 河道计算区域示意图

设河面中心点为 A 点, 流速为 3 m/s, 河流速度分布通常为二次方程, 即 xy 截面上任意一点坐标为 (x, y) 的速度 $V = 3x^2y^2/(20^2 \times 20^2)$; 所以河水每秒流量 $Q = \iint_C 3x^2y^2/(20^2 \times 20^2) dx dy$ 其中 C 表示 $0 \leq x \leq 20, 0 \leq y \leq 20$ 所围成的一个正方形区域。计算得 $S = 400/3$ (m^3/s)。所以平均流量应该是 $800/3$ (m^3/s)。所以每天的流量为 $800/3 \times 3600 \times 24 = 2.304 \times 10^7$ (m^3), 而每个分区的蓄水量为 $40 \times 1000 \times 20 \times 40$ (m^3), 所以可以得到矩阵 A 为

$$\begin{pmatrix} 0.28 & 0 & 0 & 0 \\ 0.72 & 0.28 & 0 & 0 \\ 0 & 0.72 & 0.28 & 0 \\ 0 & 0 & 0.72 & 0.28 \end{pmatrix}$$

设每家工厂每天排入河道内的各种污染物总重为 10 万吨, 每 10 km 处有一家工厂, 那么每一个分区内每日排入河流内的总污染重量为 $4 \times 2 \times 100\,000$ 吨, 所以 B 矩阵表达式为 $[0.025 \ 0.025 \ 0.025 \ 0.025]^T$ 求出最后的稳定解为

$$[0.0347225 \ 0.069445 \ 0.1041675 \ 0.138891]^T$$

所以, 可以看出, 每一个分区达到稳定后的污染浓度分别是 3.47%、6.94%、10.41%、13.89% 也就是第一分区轻度污染, 第二分区中度污染, 第三、四分污染较为严重。

可以利用这个结果来控制污染浓度, 假设政府现在要采取措施来控制污染, 要使整条河流都至少在中度污染以内, 也就是稳定状态时污染浓度上限为 5%, 可以计算出每家工厂的排污限量, 也就是 $5\% \times 32\,000\,000 / (4 \times 1.3889 \times 8) =$

35 999.712吨接近 3.6 万吨,也就是说平均每个工厂每天总共最多只能排污 3.6 万吨,从而能够迫使工厂寻找更加高效率的生产方式。

下面以黄浦江为例:黄浦江全长 120km,深度 5—18m,宽度 100m—500m,平均宽度 350m。流速 1.2m/s—1.8m/s,每 1km 每日的排污量约为 3 万吨。把整条江分为 4 个分区,每个分区 30km 左右(差不多是流经一个行政区的距离)。那么每个分区每日的排污量约为 90 万吨。用第一个例子中的模型来估算分区间的河水流量(见图 4),用平均宽度和平均深度来计算,流速采用 1.5m/s,得到每天每个分区流向下一个分区的流量为 $1.5 \times 10 \times 350 \times 3\,600 \times 24/9 = 5.04 \times 10^7 \text{ m}^3$,而每个分区的蓄水量为 $30\,000 \times 350 \times 10 = 1.05 \times 10^8 \text{ m}^3$,得到矩阵 A 等于

$$\begin{pmatrix} 0.52 & 0 & 0 & 0 \\ 0.48 & 0.52 & 0 & 0 \\ 0 & 0.48 & 0.52 & 0 \\ 0 & 0 & 0.48 & 0.52 \end{pmatrix}^{\circ}$$

求出稳定解为 $[0.0178 \quad 0.0357 \quad 0.0535 \quad 0.0714]^T$

所以只有第三、四区间的水污染是中度污染,这与实际有一定的差别,因为实际上黄浦江流经工业区,那里的污染应该是最严重的,因为污染物中含有许多沉淀物,这些沉淀物堆积在河道底部,不易被水冲走,而前面的假设前提是污染物能够迅速扩散溶解在水中,所以与实际有一定的差别。这也是模型待改进的方面。假设要在一个月內使黄浦江污染浓度全部达到轻度污染即污染浓度不超过 3%,可以计算出每个分区每天的排污上限为 378 006 吨,而总的排放量上限为 1 512 024 吨。而上海市区目前日均废污水排放量达 550 万吨,经过污水处理厂处理排入江河的仅占 10% 左右,每日约有 495 万吨的污水不作处理直接排入河道内,因此势必会造成目前的污染浓度大大超过 3%,因此强烈建议有关部门制定措施限制污水的排放量。

下面计算从工厂刚开始排污到整条河流各分区

污染浓度达到稳定时所需要的时间,由于污染刚开始的时候,河流是清洁的,没有污染物,所以 $X_0 = 0$ (表示一个 4 阶向量,向量的元素全为 0)。这时有

$$X_1 = B, X_2 = AB + B, X_3 = (A^2 + A + E)B, \dots\dots\dots,$$

$$X_k = (A^{k-1} + A^{k-2} + A^{k-3} \dots A + E)B = B \times (A^k - E)/(A - E)。$$

求达到稳态时候所需时间的思路是每求出一个 X_k , 让它与稳态解相减,当两者的值在某一误差范围之外时,继续求 X_{k+1} ,直到与稳态解的差值小于模型起初设定的误差范围 φ 。令模型的误差范围 φ 为 $[0.1\%, 0.1\%, 0.1\%, 0.1\%]$,得到以下的计算结果表 1。

表 1 随天数增长各分区污染浓度变化表 (单位 %)

时间/d	分区 1	分区 2	分区 3	分区 4
1	0.854	0.854	0.854	0.854
2	1.30	1.71	1.71	1.71
3	1.53	2.37	2.56	2.56
4	1.65	2.82	3.32	3.42
5	1.71	3.11	3.93	4.22
6	1.74	3.29	4.39	4.94
.....				
14	1.78	3.56	5.32	7.03

表 1 所显示的是随着天数的增长每个分区污染浓度的变化,可以看到 $k = 14$ 时候循环结束,可以认为时间大致为 14 天,也就是所求得达到污染稳态浓度的时间约为 2 周。

最后,还要对模型在实际应用方面用做一点改进,模型最开始的假设是每一个分区内的污染全部均匀,然而现实中,对于长度为 30 km 的分区来说,这明显是不可能的。可以认为模型所求得的污染浓度是分区中心位置处的浓度,然后假设污染浓度是沿河水流动方向随着河道的长度呈线性变化,因此可以根据每一个分区的中心点的污染浓度来估算整条河道各处的不同的污染浓度,下面简单来证明这种方法的可行性。

如图 5 所示,横轴代表的是整个河流的蓄水量

C_T ，而纵轴代表的是污染物的浓度 X ，所以图 5 中 4 个方形分别代表的是 4 个分区的污染物总量，现在将每个分区的中点用直线连接，得到以下的图形。

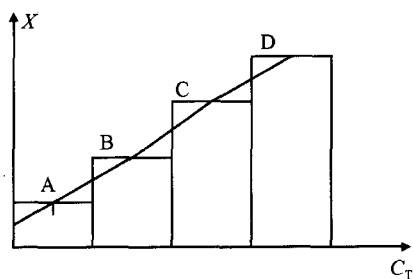


图 5 不同分区污染

很明显，由多边曲线构成的多边体的体积与 4 个方形体积一样大，而且每一个分区内对应的面积和原来的对应的长方形面积也都一样，也就是说每一分区内总的污染物含量没有发生变化，模型只是改变了区间内污染浓度的分布，而这种改进后的浓度分布显然要比原开的分布合理。因此在进行计算的时候可以假设每一个分区内的污染浓度均匀，然后将计算出的结果作为分区内最中心位置的污染浓度然后可以采用上面的线性分布方法来估算每一点的污染浓度。

3 总结

利将计算高速公路交通流采用的“分区”方法运用到河流污染估算问题中，将河流分成不同的区域，考虑河水流动的特点，通过差分方程建立相邻分区之间的污染物浓度关系，通过求得模型的稳定解来估算污染达到稳定状态时候的污染浓度及相应的污染限额。以黄浦江为例大致估算了在政府采取不同污染浓度指标条件下的工厂总排污限额，估算出河流污染达到稳定状态时所需要的时间。

参 考 文 献

- 1 田 雨，周婷玉. 2006 年水污染物排放远超环境容量. 中国化工报, 2007; (6): 1—15
- 2 康建成, 等. 上海海域水污染源的变化趋势. 中国人口·环境与资源, 2008; 18 (3): 181—184
- 3 王 军, 等. 基于 BP 神经网络的高速公路动态交通流预测. 公路交通技术, 2007; 2 (1) 151—153
- 4 李玉文, 周 玮. 浅谈城市水污染现状及防治对策. 科技创新导报, 2008; 9: 96
- 5 苏育才, 等. 矩阵理论. 北京: 科学出版社, 2006
- 6 吴冲锋. 社会经济动态系统导论. 上海: 上海科技出版社, 1998
- 7 闻建龙. 河道整治设计流速的确定. 南昌水专学报, 1994; 6 (2): 67—69

Dynamic Estimation Model of River Pollution Based on Differential Equations

LIN Xu-xun

(Antai College of Economics and Management, Shanghai Jiao Tong University, Shanghai 200052, P. R. China)

[Abstract] A “division” method is used to estimate the pollution of rivers, established the dynamic estimation model of river pollution based on differential equations. The method was used to estimate the different pollution standards at the different pollution limits; estimate river pollution stable condition and the time required. Finally, numerical calculations are made for the Huangpu River as an example.

[Key words] water pollution division differential equations stable solution

利用的代际公平的原则。推行年租制后,如果政府在任期内经济发展措施得当,城市建设日新月异,使土地级差地租升值,自己收取的租金也能相应增多,这就从经济机制上去激励政府大力进行城市建设,开发利用城市存量建设用地,改善城市环境^[5]。实行年租制的土地没有转让、抵押等权利,应该按用途有区别的推行,对于商业经营等无需产权运作的用地比较适用,对于房地产等需要完全产权的土地暂时还不太适合。

4. 完善地租体系。首先,应尽快将存量土地中的划拨用地纳入有偿使用的轨道,并严格划定划拨用地的适用范围,逐步减少以划拨方式供地比例,使国有土地所有权以地租的形式得以充分体现,以加强国家对土地一级市场的垄断,从而避免土地市场的失控。其次,调整土地出让方式失衡的状态,加大出让用地中招标和拍卖所占的比重,尽可能减少人

为因素对地租量的影响,使地租能够准确地反映土地市场的供求状况,便于政府及时掌握和分析土地市场的有关信息,引导土地市场健康、有序的发展。

参考文献:

- [1]朱顺贤.进一步完善我国分税制的思考[J].经济师,2005(6):203-204.
- [2]靳东晓.严格控制土地问题与趋势[J].城市规划,2006(2):34-38.
- [3]陈芳.经营城市竟刮“卖地风”[J].中外房地产导报,2003(14):24-25.
- [4]林庶民、杨希廉.我国土地税制改革的思考[J].乡镇经济,2006(3):58-61.
- [5]黄中文.完善我国财政分权体制的五大政策建议[J].改革与战略,2006(1):86-89.

(责任编辑:李志文)

含一个生产者的生产与消费相互关系的数学模型

孟波

(山东省煤炭工业局,山东 济南 250031)

摘要:在经济学研究中,生产者和消费者的行为是市场分析的重要内容,从整体上看,消费者行为可以决定生产者的状态,另外方程解的稳定性和实际系统稳定性也是两回事。采用差分方程建立一类生产者消费者相互作用的模型,给出解以及解的性质,以分析生产者稳定的条件。

关键词:差分方程;生产者;消费者

中图分类号:F224.0 **文献标识码:**A **文章编号:**1008-3154(2007)50-0028-04

一、引言

生产者行为与消费者行为的关系是经济学研究的重要内容,其关系也是错综复杂。本文通过差分方程建立了一种生产者和消费者相互关系的模型。通过分析模型解的性质给出了模型稳定的条件。

二、模型的建立与数学分析

实际市场中,消费者可以分成两类,即可能购买某种商品的消费者和不可能购买某种商品的消费

者。本文在区别两类消费者的基础上建立以下模型,为了简便起见只考虑一个生产者的情况:

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t - b_{t+1}ky_{t+1} + a_{t+1} \\ y_{t+1} = y_t - k_{t+1}y_{t+1} + l_{t+1}z_{t+1} \\ z_{t+1} = z_t + k_{t+1}y_{t+1} - l_{t+1}z_{t+1} \\ u_{t+1} = u_t + q_{t+1}bky_{t+1} - p_{t+1}a_{t+1} \end{cases} \quad (2-1)$$

(2-1)包含了以下内容:当消费者购买了X后就变成不可能购买X的经济单位。变量含义为:

收稿日期:2007-06-07

作者简介:孟波(1964-),男,江苏人,研究方向为数理经济。

x_t 表示 t 时刻 X 的量; p_t 表示 t 时刻的生产成本; q_t 表示 t 时刻的商品价格, a_t 表示 t 时刻商品生产量;

y_t 表示 t 时刻可能购买产品 X 的消费者数量, z_t 表示 t 时刻不可能购买产品 X 的消费者数量;

u_t 表示 t 时刻生产者资金的数量; b_t 表示 t 时刻消费者的平均购买量;

k_t 表示 t 时刻购买 X 的消费者在 y_t 中的比例, l_t 表示 t 时刻 z_t 变成 y_t 在 z_t 中的比例, $0 < k_t, l_t < 1$;

模型(2-1)描述了一类生产者和消费者的相互作用关系。如果把(2-1)中的 $a_t, b_t, k_t, l_t, p_t, q_t$ 看成常数,再化成标准形式,则(2-1)变成以下(2-2)

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t - bk(1+l)Ny_t - bklNz_t + a \\ y_{t+1} = (1+l)Ny_t + lNz_t \\ z_{t+1} = (1+k)Nz_t + kNy_t \\ u_{t+1} = u_t + qbk(1+l)Ny_t + qbklNz_t - pa \end{cases} \quad (2-2)$$

其中 $N = 1/(1+k+l)$ 。从(2-2)可以得到 $y_{t+1} + z_{t+1} = y_t + z_t$, 以下分析模型(2-2)。其对应的齐次方程组为

$$\begin{cases} x_{t+1} = x_t - bk(1+l)Ny_t - bklNz_t + a \\ y_{t+1} = (1+l)Ny_t + lNz_t \\ z_{t+1} = (1+k)Nz_t + kNy_t \\ u_{t+1} = u_t + qbk(1+l)Ny_t + qbklNz_t \end{cases} \quad (2-3)$$

(2-3)对应的系数矩阵为:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -bk(1+l)N & -bklN & 0 \\ 0 & (1+l)N & lN & 0 \\ 0 & kN & (1+k)N & 0 \\ 0 & qbk(1+l)N & qbklN & 1 \end{bmatrix}$$

相应的特征方程为

$$|\lambda I - A| =$$

$$\begin{vmatrix} \lambda - 1 & bk(1+l)N & bklN & 0 \\ 0 & \lambda - (1+l)N & -lN & 0 \\ 0 & -kN & \lambda - (1+k)N & 0 \\ 0 & -qbkl(1+l)N & -qbklN & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3(\lambda - N)$$

于是(2-3)的特征值为: $\lambda_{1,2,3} = 1, \lambda_4 = N$ 。 λ_4 对应 N^4 形式的解。

先求三重根对应的特解。其对应的特解具有以下形式:

$$x_t = B_{10} + B_{11}t + B_{12}t^2 \quad y_t = B_{20} + B_{21}t + B_{22}t^2 \quad z_t =$$

$$B_{30} + B_{31}t + B_{32}t^2 \quad u_t = B_{40} + B_{41}t + B_{42}t^2$$

代入(2-3)得到:

$$\begin{aligned} & B_{10} + B_{11}(t+1) + B_{12}(t+1)^2 \\ & = B_{10} + B_{11}t + B_{12}t^2 - \\ & bk(1+l)N(B_{20} + B_{21}t + B_{22}t^2) \\ & - bklN(B_{30} + B_{31}t + B_{32}t^2) \end{aligned} \quad (A-1)$$

$$\begin{aligned} & B_{20} + B_{21}(t+1) + B_{22}(t+1)^2 \\ & = (1+l)N(B_{20} + B_{21}t + B_{22}t^2) + \\ & lN(B_{30} + B_{31}t + B_{32}t^2) \end{aligned} \quad (A-2)$$

$$\begin{aligned} & B_{30} + B_{31}(t+1) + B_{32}(t+1)^2 \\ & = (1+k)N(B_{30} + B_{31}t + B_{32}t^2) + \\ & kN(B_{20} + B_{21}t + B_{22}t^2) \end{aligned} \quad (A-3)$$

$$\begin{aligned} & B_{40} + B_{41}(t+1) + B_{42}(t+1)^2 \\ & = B_{40} + B_{41}t + B_{42}t^2 + \\ & qbk(1+l)N(B_{20} + B_{21}t + B_{22}t^2) \\ & + qbklN(B_{30} + B_{31}t + B_{32}t^2) \end{aligned} \quad (A-4)$$

由(A-1), (A-2), (A-3), (A-4)分别得到以下等式:

$$B_{11} + B_{12} = -bk(1+l)NB_{20} - bklNB_{30} \quad (1)$$

$$2B_{12} = -bk(1+l)NB_{21} - bklNB_{31} \quad (2)$$

$$-bk(1+l)NB_{22} - bklNB_{32} = 0 \quad (3)$$

$$B_{20} + B_{21} + B_{22} = (1+l)NB_{20} + lNB_{30} \quad (4)$$

$$B_{21} + 2B_{22} = (1+l)NB_{21} + lNB_{31} \quad (5)$$

$$B_{22} = (1+l)NB_{22} + lNB_{32} \quad (6)$$

$$B_{30} + B_{31} + B_{32} = (1+k)NB_{30} + kNB_{20} \quad (7)$$

$$B_{31} + 2B_{32} = (1+k)NB_{31} + kNB_{21} \quad (8)$$

$$B_{32} = (1+k)NB_{32} + kNB_{22} \quad (9)$$

$$B_{41} + B_{42} = qbk(1+l)NB_{20} + qbklNB_{30} \quad (10)$$

$$2B_{42} = qbk(1+l)NB_{21} + qbklNB_{31} \quad (11)$$

$$qbkl(1+l)NB_{22} + qbklNB_{32} = 0 \quad (12)$$

$$\text{由(3)、(12)知: } (1+l)B_{22} + kB_{32} = 0 \quad (C-1)$$

$$\text{由(6)、(9)知: } kB_{22} = lB_{32} \quad (C-2)$$

$$\text{由(C-1)和(C-2)知 } B_{22} = B_{32} = 0。$$

$$\text{由(5)、(8)知: } kB_{21} = lB_{31} \quad (C-3)$$

$$\text{由(4)知: } -kNB_{20} + lNB_{30} = B_{21} \quad (C-4)$$

$$\text{由(7)知: } kNB_{20} - lNB_{30} = B_{31} \quad (C-5)$$

$$\text{从(C-3)、(C-4)和(C-5)得到:}$$

$$B_{21} = B_{31} = 0。$$

$$\text{由(C-4)和(C-5)得到: } kB_{20} = lB_{30} \quad (C-6)$$

代入(2)、(11)知: $B_{12}=0, B_{42}=0$ (C-7)

由(1)知: $B_{11} = -bk(1+l)NB_{20} - bklNB_{30}$ (C-8)

由(11)知: $B_{41} = qbk(1+l)NB_{20} + qbkNB_{30}$ (C-9)

根据(C-1)~(C-9)得到(2-3)三组线性无关的解。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ u_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -bkl \\ 1 \\ k \\ qbk \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_3 \\ y_3 \\ z_3 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

下面求解 λ_4 对应的解, 设 λ_4 对应的特征向量为 $s = (s_1, s_2, s_3, s_4)$ 。于是 λ_4 和 s 应满足以下方程:

$$\begin{cases} (N-1)s_1 + bk(1+l)Ns_2 + bklNs_3 = 0 \\ [N-(1+l)N]s_2 - lNs_3 = 0 \\ -kNs_2 + [N-(1+k)N]s_3 = 0 \\ -qbkl(1+l)Ns_2 - qbkNs_3 + (N-1)s_4 = 0 \end{cases} \quad (2-4)$$

从(2-4)的第二式和第三式得到 $s_2 + s_3 = 0$, 取 $s_3 = -1, s_2 = 1$ 。代入(2-4)第一式和第四式得到:

$$s_1 = bkW, s_4 = -qbklW$$

其中: $W = 1/(k+1)$ 。以下求(2-2)的特解, 设(2-2)有以下形式的特解:

$$x_t = m_1 t, y_t = m_2, z_t = m_3, u_t = m_4 t$$

代入(2-2)得到以下形式的特解: $m_2 = m_3 = 0$,

$$m_1 = a, m_4 = -pa$$

这样可以得到模型(2-2)的解为:

$$\begin{bmatrix} x_t \\ y_t \\ z_t \\ u_t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 - C_2 bkl \\ C_2 l \\ C_2 k \\ C_3 + C_2 qbk \end{bmatrix} + C_4 \begin{bmatrix} bkW \\ 1 \\ -1 \\ -qbklW \end{bmatrix} N^t + \begin{bmatrix} at \\ 0 \\ 0 \\ -pat \end{bmatrix} \quad (2-5)$$

如果满足初始条件 $x(0) = x_0, y(0) = y_0, z(0) = z_0, u(0) = u_0$, 代入(2-5)得到个系数的表达式:

$$C_2 = \frac{y_0 + z_0}{1+k} \quad C_4 = \frac{ky_0 - lz_0}{1+k}$$

$$C_1 = x_0 - bk \frac{ky_0 - lz_0}{(1+k)^2} \quad C_3 = u_0 + qbk \frac{ky_0 - lz_0}{(1+k)^2}$$

这样(2-2)解为:

$$\begin{cases} x_t = x_0 - bk \frac{ky_0 - lz_0}{(1+k)^2} + bk \frac{ky_0 - lz_0}{(1+k)^2} N^t + (a - bkl \frac{y_0 + z_0}{1+k}) t \\ y_t = l \frac{y_0 + z_0}{1+k} + \frac{ky_0 - lz_0}{1+k} N^t \\ z_t = k \frac{y_0 + z_0}{1+k} - \frac{ky_0 - lz_0}{1+k} N^t \\ u_t = u_0 + qbk \frac{ky_0 - lz_0}{(1+k)^2} - qbk \frac{ky_0 - lz_0}{(1+k)^2} N^t + (qbkl \frac{y_0 + z_0}{1+k} - pa) t \end{cases} \quad (2-6)$$

从(2-6)可以得出以下结论:

(一) 当 $ky_0 - lz_0 = 0$ 时, $y_t = l(y_0 + z_0)/(1+k)$; 若 $ky_0 - lz_0 \neq 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, y_t 趋向于 $l(y_0 + z_0)/(1+k)$, 其中当 $ky_0 - lz_0 > 0$, y_t 从上方接近 $l(y_0 + z_0)/(1+k)$, 若 $ky_0 - lz_0 < 0$, y_t 从下方接近 $l(y_0 + z_0)/(1+k)$;

(二) 当 $ky_0 - lz_0 = 0$ 时, $z_t = k(y_0 + z_0)/(1+k)$; 若 $ky_0 - lz_0 \neq 0$, 当 $t \rightarrow \infty$ 时, z_t 趋向于 $k(y_0 + z_0)/(1+k)$, 其中当 $ky_0 - lz_0 > 0$, z_t 从下方接近 $k(y_0 + z_0)/(1+k)$, 若 $ky_0 - lz_0 < 0$ 时, z_t 从上方接近 $k(y_0 + z_0)/(1+k)$ 。

从(1)、(2)的分析可以知道, y_t, z_t 会自然等于或者趋向常数。这表明, 消费者数量会等于或者逐渐趋向一个固定的数值。

(三) 模型(2-2)对应的齐次方程的特征根不是都小于1, 故模型(2-2)的解在数学上不稳定。

三、模型的进一步分析

模型在数学上不稳定, 不代表系统不稳定。以下给出这方面的分析。当(2-6)第一个表达式最后一项不为零, 则表达式的值会趋向于正的或者负的无限大, 那么(2-6)中第一式的最后一项应该为零, 即满足

$$bkl(y_0 + z_0) = a(1+k) \quad (3-1)$$

(3-1)说明了生产者应该采用的生产量, 这时(2-6)中的第一式变成:

$$x_t = x_0 - bk \frac{ky_0 - lz_0}{(1+k)^2} + bk \frac{ky_0 - lz_0}{(1+k)^2} N^t \quad (3-2)$$

则当 $t \rightarrow \infty$ 时, x_t 趋向极限值。用 x_∞ 表示 x_t 的极限值, 则

$$x_{\infty} = x_0 - bk \frac{ky_0 - lz_0}{(1+k)^2} \quad (3-3)$$

同时当 $ky_0 - lz_0 = 0$ 时, x_t 是一个常值, 当 $ky_0 - lz_0 > 0$ 时, x_t 是递减的, 从上方逼近 x_{∞} , 当 $ky_0 - lz_0 < 0$ 时, x_t 是递增的, 从下方逼近 x_{∞} 。

再看 u_t 的情况。把(3-1)代入(2-6)中的第四式得到

$$u_t = u_0 + qbk \frac{ky_0 - lz_0}{(1+k)^2} - qbk \frac{ky_0 - lz_0}{(1+k)^2} N^t + (q-p)at \quad (3-4)$$

当 $q < p$ 时, u_t 趋向于负无限大, 企业将趋于破产。因此只讨论 $q \geq p$ 的情况。首先讨论 $q > p$ 的情况。

(一) 如果 $ky_0 - lz_0 = 0$, 有 $x_t = x_0$,

$$u_t = u_0 + (q-p)bk \frac{y_0 + z_0}{1+k} t$$

$$= u_0 + (q-p)at$$

这是最常见的资金变化模式。

(二) 如果 $ky_0 - lz_0 > 0$, 则 x_t 是递减的, u_t 是递增的。

(三) 如果 $ky_0 - lz_0 < 0$, 则 x_t 是递增的, 对于 u_t 有

$$u_{t+1} - u_t = qbk \frac{ky_0 - lz_0}{(1+k)^2} (N^t - N^{t+1}) + (q-p)a$$

显然存在一个临界值 t^* , 满足 N^{t^*}

$$= \frac{(q-p)a(1+k)^2}{(1-N)qbk(lz_0 - ky_0)}$$

当 $t > t^*$ 时 u_t 是递增的, 当 $t < t^*$ 时, u_t 是递减的。

当 $p = q$ 时, 表明生产者成本与实际价格一致, 生产者资金的变化仅跟消费者的数量有关。 u_t 趋向极限值。也分成上述三种情况加以讨论:

(一) 如果 $ky_0 - lz_0 = 0$, 有 $x_t = x_0$, $u_t = u_0$ 。

(二) 如果 $ky_0 - lz_0 > 0$, 则 x_t 是递减的, u_t 是递增的,

(三) 如果 $ky_0 - lz_0 < 0$, 则 x_t 是递增的, u_t 是递减的。

四、结束语

本文采用差分方程建立了一种生产者和消费者相互作用关系的模型, 给出了模型解的结构、分析了模型解的稳定性。给出了模型系统稳定性的定义以及条件。本文特别指出系统稳定性和解的稳定性存在含义上的不同。对实际的经济系统, 建立具体的稳定性条件是非常必要的。

参考文献:

[1] 张金水. 经济控制论—动态经济系统分析方法与应用[M]. 北京: 清华大学出版社, 1999 年。

[2] 阮炯. 差分方程和常微分方程[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2002 年。

(责任编辑: 李志文)

“公有地悲剧”与国有企业改革

王建青

(青岛市城阳区劳动与社会保障局, 青岛 266109)

摘 要:“公有地悲剧”理论首先由哈丁提出, 他认为产生的根本原因在于产权模糊。目前, 公有地的范围已经从自然资源扩展到企业界, “公有地悲剧”的存在严重影响了我国国有企业的发展。我国国有企业的“公有地悲剧”主要表现在企业无形与有形资产的流失。其产生的原因在于行政权代替产权, 企业法人产权界定不清, 所有权归属不明, 企业资源配置效率低下。同时, 根据我国目前国有企业的现状提出了解决我国国有企业中“公有地悲剧”现象的途径, 即进一步推进企业的股份制改造, 完善经营者的激励机制等途径。

关键词: 公有地悲剧; 国有企业改革; 产权; 股份制

中图分类号: F270 **文献标识码:** A **文章编号:** 1008 - 3154(2007)S0 - 0031 - 05

关于动态市场供需模型的研究

鲁翠仙

(临沧教育学院数理系, 云南 临沧 677000)

摘 要: 运用经济学观点, 建立了动态市场供需模型, 通过对其平衡点稳定性的讨论, 得到了市场经济稳定的条件。

关键词: 差分方程; 蛛网模型; 时间轨线

一、问题的提出

在日常的消费购物活动中, 我们都会遇到如下情形: 当某一时期某种商品的上市量过于充沛而大于需求时, 就会因销售不畅导致价格下降, 甚至收不回成本。在安排第二期生产时, 许多生产者就会因此转向其他品种改从他业。但如此一来, 此种商品的生产量大减又会造成供不应求, 从而使其身价大增, 使生产者收入颇丰。在这种效应刺激下, 下期又会有许多人来从事此种商品的生产, 这样生产量的激增又会使供过于求, 价格下降的局面重现。

二、主要结果

在供需图形中, 当需求曲线越平缓, 供应曲线越陡峭, 才越有利于经济稳定, 此时, 实际价格和实际产量围绕均衡水平上下波动的幅度会越来越小, 最后回复到原来的均衡点。

三、基本假设

1、假定市场为完全自由竞争市场, 即:

- ①市场上有无数的买者和卖者;
- ②同一行业中的每个厂商生产的产品是完全无差别的;
- ③厂商进入或退出一个行业是完全自由的;
- ④市场中的每一个买者和卖者都掌握与自己的经济决策有关的商品和市场的全部信息;

2、设第 t 期商品的价格为 p_t

3、设第 t 期商品的需求量为 Q_d

4、设第 t 期商品的供给量为 Q_s

四、分析与建立模型

商品的价格是由消费者的需求关系来决定的。商品数量越多, 价格越低, 需求量增加; 而下一期商品的数量是由生产者的供应关系决定, 商品的价格越低, 生产数量就越少, 供给量减少。

* 收稿日期: 2005-09-23

作者简介: 鲁翠仙(1980-), 女, 云南凤庆人, 临沧教育学院数理系教师。

需求函数: $Q_{dt} = f(p_t)$ 单减

当需求函数为一元一次的线性函数时, 相应的需求曲线为直线型; 表达式为: $Q_{dt} = c + bp_t$, [c 表示需求曲线在横轴上的截距, b 表示需求曲线的斜率, 即: $b = \lim_{\Delta p_t \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_{dt}}{\Delta p_t} = \frac{dQ}{dP}$]. 因此,

该表达式还可写为: $Q_{dt} = \alpha - \beta p_t$ (见图 1)

同样可以得出下期商品的供给函数: $Q_{st} = g + hp_{t-1}$

[g 是供给曲线 (严格地说, 是供给曲线的延长线) 在横轴上的截距, 它表示商品价格为零时的供给量, 只要价格低于成本, 厂商就不会再生产了, $g + hp_{t-1} > 0 \rightarrow p_{t-1} > -\frac{g}{h}$, 它意味着: 能使生产者提供产量的价格必定是 $p_{t-1} > -\frac{g}{h}$, h 表示供给曲线的斜率, 即

$h = \lim_{\Delta p_{t-1} \rightarrow 0} \frac{\Delta Q_{st}}{\Delta p_{t-1}}$, 因此, 该表达式也可写为: $Q_{st} = -\delta + \gamma p_{t-1}$ (见图 2)]

在此引入经济学中的蛛网模型:

蛛网模型的基本假定是: 商品的本期产量 Q_{st} 决定于前一期的价格 P_{t-1} , 即供给函数为 $Q_{st} = f(P_{t-1})$ 商品本期的需求量 Q_{dt} 决定于本期的价格 p_t , 即需求函数为 $Q_{dt} = f(p_t)$.

根据以上的假设条件, 蛛网模型可以用以下三个联立方程式来表示:

$$\begin{cases} Q_{dt} = c + bp_t & (1) \\ Q_{st} = g + hp_{t-1} & (2) \\ Q_{dt} = Q_{st} & (3) \end{cases}$$

化为一阶线性差分方程的通式: $p_t = \frac{h}{b} p_{t-1} + \frac{g-c}{b}$

在正常供求条件下, $b < 0$, $h > 0$, 故 $\frac{h}{b} \neq 1$

1、引入一阶线性差分方程的通式,

设一阶线性差分方程为 $y_t = by_{t-1} + a$,

a 和 b 为常数, 求按照的一般公式为:

$$y_t = (y_0 - \frac{a}{1-b})b^t + \frac{a}{1-b} \quad (b \neq 1) \quad (1)$$

或 $y_t = y_0 + at \quad (b=1)$

$$\text{利用 (1) 式得: } p_t = (p_0 - \frac{g-c}{1-\frac{h}{b}})(\frac{h}{b})^t + \frac{g-c}{1-\frac{h}{b}} = (p_0 - \frac{g-c}{b-h})(\frac{h}{b})^t + \frac{g-c}{b-h} \quad (2)$$

当模型处于均衡, $p_t = p_{t-1}$, 用 p_e 代换 p 和 p_{t-1} 求得:

$$p_e = \frac{g-c}{b-h} \quad (3)$$

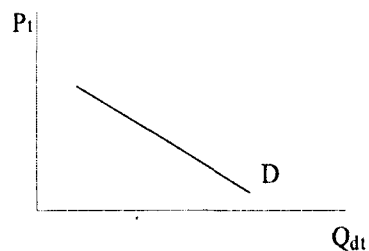


图 1

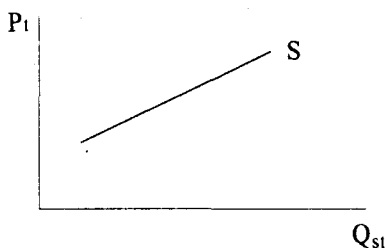


图 2

于是有 $p_t = (p_0 - p_e) \left(\frac{h}{b} \right)^t + p_e$

由 $b < 0, h > 0$, 得到 $\frac{h}{b} < 0$, 故时间轨线为振荡

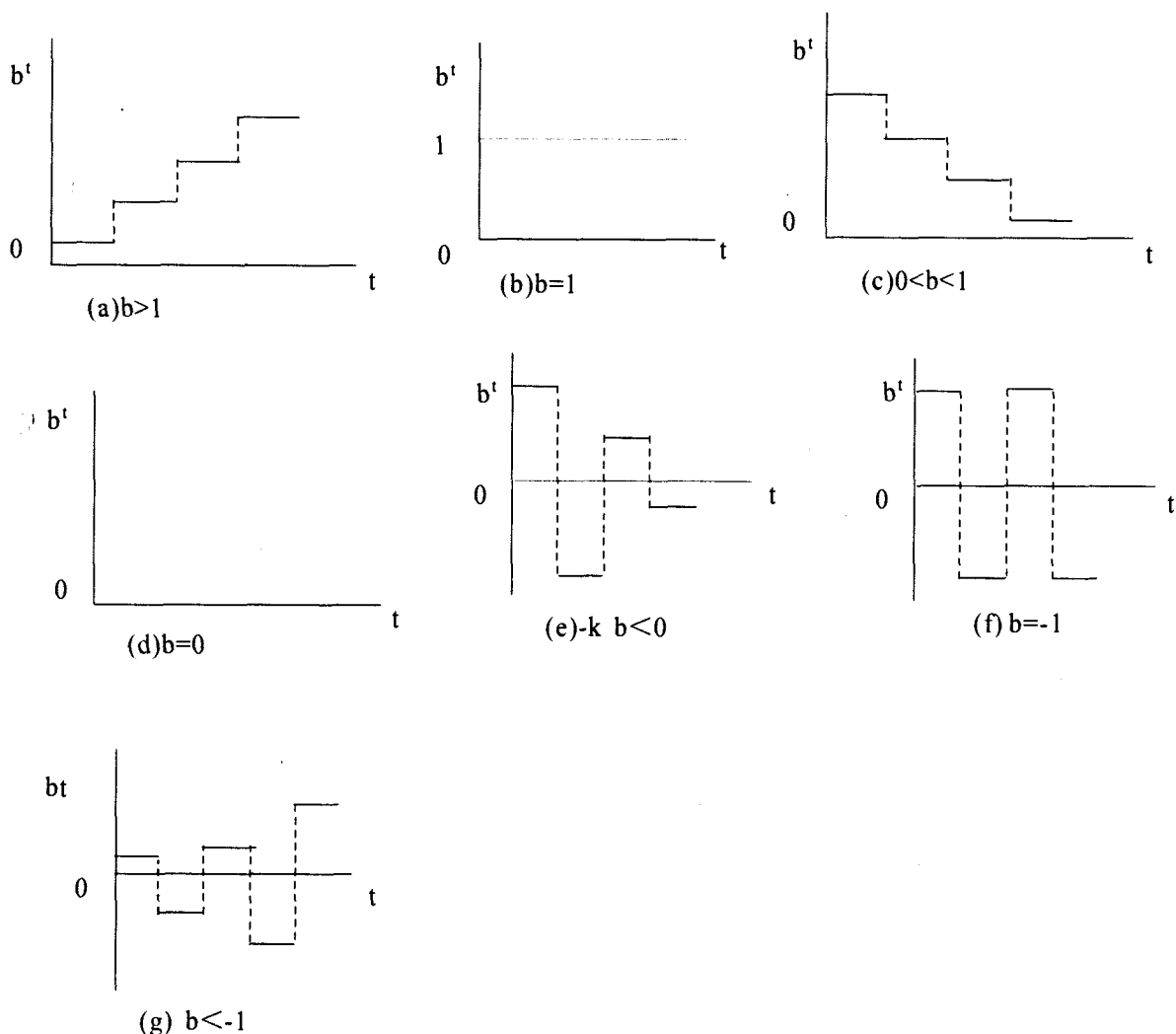
2、引入稳定条件:

在 (1) 中, 若令 $A = p_0 - \frac{a}{1-b}$ $c = \frac{a}{1-b}$

则 (1) 可写为: $y_t = A \cdot b^t + c$ (1')

Ab^t 为余函数, c 为特解, 特解表明 y 的瞬间均衡水平, 余函数表明均衡的偏差, 当 $t \rightarrow \infty$, 若余函数 $Ab^t \rightarrow 0$, 则 (1') 就取得动态稳定, 这取决于指数的底 b 。

假定 $A=1, c=0$, 指数式 b^t 因 b 的取值不同而形成七种不同的时间轨线:



①若 $|h| > |b|$, $\left| \frac{h}{b} \right| > 1$, 时间轨线为发散. 见图 (a, g)。

②若 $|h| = |b|$, $\frac{h}{b} = -1$, 时间轨线的振荡形态相同, 见图 (f)。

③若 $|h| < |b|$, $\left|\frac{h}{b}\right| < 1$, 时间轨线收敛, P_t 趋近 p_0 。见图 (c, e)

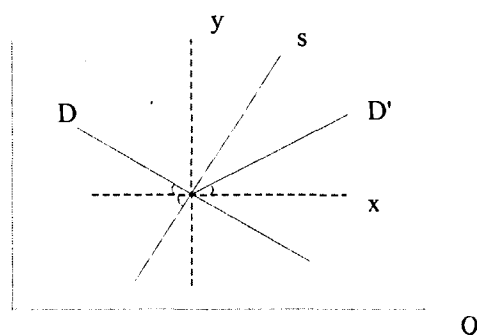
由于 h 是供应曲线的斜率, 为正值, 设供应曲线的斜率为 $K_1 > 0$ 。而 b 是需求曲线的斜率, 且为负值, 设需求曲线的斜率为 $K_2 < 0$ 。

则, $|k_1| < |k_2|$, 由于 $\tan x$ 在它的一个周期上为增函数。设在 $(0, \frac{\pi}{2})$ 上的图像

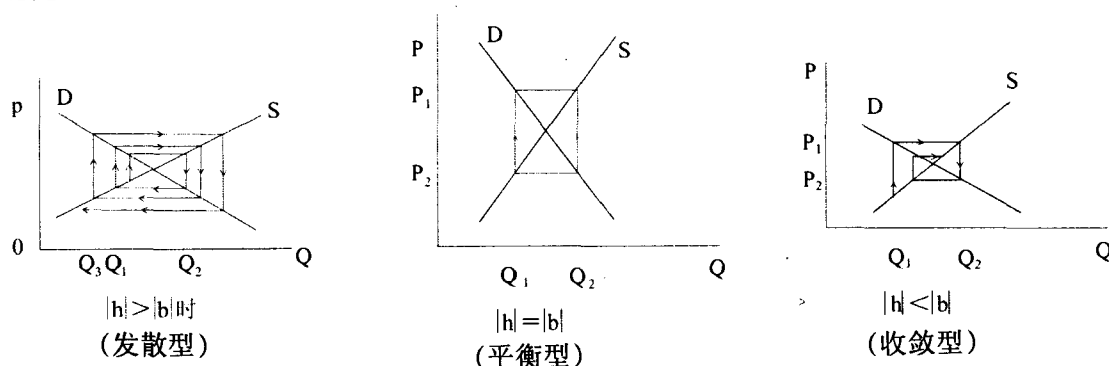
(见图 3)

故可得结论:

供应曲线的斜率大于需求曲线的斜率, 即当需求曲线越平缓, 供应曲线越陡峭, 越有利于经济稳定。



(图3)



参考文献:

- [1]白其峥. 数学建模案例分析[M]. 北京: 海洋出版社, 2000.
- [2][美]托·道林. 数学在经济中的应用[M]. 福建: 福建科学技术出版社, 1983.
- [3][英]R·W 昆西·F·尼尔. 数学在经济中的应用[M]. 上海: 商务印书馆, 1982.
- [4]高鸿业. 西方经济学[M]. 北京: 中国经济出版社, 1997.

Research on Dynamic Supplying and Demanding Model in Market

LU Cui-xian

(Maths Depart. of Lincang Education College, Lincang 677000 China)

Abstract : To establish a Dynamic model for supplying and demanding in market based on economics theory, we can obtain a prerequisite to keep a balance and stability in the economic stability.

Key Words : Difference Equation; Spider-Net Model; Time Trajectory

长江水质的评价与预测模型^{*}

邢红卫, 程抒曼, 余小艳

(内江师范学院 数学系, 四川 内江 641112)

摘 要:讨论了长江水质的评价与预测问题,分析过去10年主要统计数据,分别用指数法,优化模型,二阶线性差分方程模型,对长江水质进行了评价与预测.同时也就长江水质污染问题提出了可行的建议与意见,最后对预测结果进行了误差分析,并对模型进行了评价与推广.

关键词:长江;水质;评价与预测;指数法;优化模型;差分方程

中图分类号:O224 **文献标识码:**A **文章编号:**1671-1785(2006)06-0032-03

1 问题背景

长江污染日趋严重已引起广泛的注意和高度重视,拯救长江的行动也在进行当中.通常认为水质污染主要来自于本地区的排污和上游的污水.江河之中的污染物在水环境中通过物理降解、化学降解、生物降解等方式可使自身浓度降低,这种能力称为自然净化^[1],反映这种能力的指标为降解系数.主要污染物高锰酸盐和氨氮的降解系数介于0.1~0.5之间(单位1/天).要求解决的问题如下^[2]:

问题一:对长江近两年多的水质情况做出定量的综合评价,并分析各地区水质的污染状况.

问题二:研究分析长江干流一年多主要污染物高锰酸盐和氨氮的污染源主要在哪些地区.

问题三:若不采取有效治理措施,依照过去10年的主要统计数据预测未来10年水质污染的发展趋势.

问题四:根据上一问题的预测分析,要求未来10年内长江干流的Ⅳ类和Ⅴ类水的比例每年控制在20%以内,且没有劣Ⅴ类水,每年需要处理多少污水.

问题五:对解决长江水质污染问题提出切实可行的建议和意见.

2 模型假设

(1)一个地区的水质污染主要来自本地区的排污和上游的污水;(2)长江干流的净化能力近似均匀,河流中各污染物的浓度在某一河段内是均匀分布的;(3)污染物以最快的速度与河水均匀混合,即污染状况与任何局部水体在河水中的位置无关;(4)污染物除流出,降解外,不因其它任何方式消失;(5)水流在每个时刻经过某一断面的速度不变;(6)降解系数只与水流速度,水流量,污染物浓度,水温有关^[3];(7)降解系数为0.2;(8)在第三个问题中不采取治理措施;(9)不发生任何突发状况,如装载某些化学物质的船只倾覆,造成氨氮,高锰酸盐等污染物的泄漏.

3 模型建立

3.1 解决问题1

由附件3中的数据^[2],设 a_{ijk} 表示第 i 个地区第 j 个月第 k 项检测指标的检测值,分别算出同一地区每个月各检测项目的平均值 c_{ijk} ,每个月不同地区各检测项目的平均值 c_{ijk}^* ,将此平均值比附表中的标准限值 d_{ijk} ,即得到问题分析中提到的“污染指数” b_{ijk} ,观察每一个项目中数据点的分布变化情况,并与“1”相比较(因为当比值为1时检测项目的平均值可达到标准限值^[4]).模型建立如下:

$$c_{ijk} = \frac{\sum_{l=1}^{17} a_{ljk}}{17} \quad (i=1, \dots, 28; k=1, \dots, 4) \quad (1)$$

$$c_{ijk}^* = \frac{\sum_{l=1}^{28} a_{ljk}}{28} \quad (j=1, \dots, 17; k=1, \dots, 4) \quad (2)$$

收稿日期:2006-03-08

作者简介:邢红卫(1984-),男,山西大同人,内江师范学院2003级学生.

^{*} 本文获2005年全国大学生数学建模竞赛四川赛区三等奖.指导老师:王凡彬.

$$b_{ijk}^* = \frac{c_{ijk}}{d_{ijk}} (i=1, \dots, 28; j=1, \dots, 17; k=1, \dots, 4) \quad (3)$$

$$b_{ijk}^* = \frac{c_{ijk}^*}{d_{ijk}^*} (i=1, \dots, 28; j=1, \dots, 17; k=1, \dots, 4) \quad (4)$$

3.2 解决问题2

干流的主要污染物高锰酸盐和氨氮的主要来源是支流,支流的污染物汇集于干流,造成了干流的污染(不排除干流自身是污染源)。通过统计附件3中2004年9月至2005年9月的数据^[2],发现主要污染指标栏中支流产生污染物的可能性远远大于干流。其中江西南昌16次,九江河段23次,四川乐山河段6次,泸州河段2次,湖南长沙河段4次,岳阳河段3次,湖北武汉出现1次。仅高锰酸盐和氨氮(不考虑溶解氧),江西南昌和九江河段各出现了12次、3次氨氮与高锰酸盐高浓度污染,四川乐山和泸州各出现了5次、2次,湖南长沙和岳阳各出现5次、4次。由此可以看出,2004年9月至2005年9月长江干流的主要污染物氨氮和高锰酸盐的污染源在江西南昌、四川乐山、湖南长沙。

3.3 解决问题3

在处理附表4的数据时^[2],以时间为自变量,各类水的百分比为因变量进行拟合,对水文年的全流域、干流、支流每一类水的百分比依次拟合得到相应的函数关系,以此预测未来10年每一类水的百分比情况。原表给出了枯水期、丰水期、水文年各类水的河长及百分比。由于水文年是一年内所有检测数据的平均值,所以采用水文年的相关数据进行预测,即预测未来10年每年每一类水的平均百分比。通过对数据初步观察,各组数据都呈递增或递减的变化规律,所以考虑用线性或指数函数进行拟合^[5]。由于评价河长属于随机变量,各类水所占河长并不能反映其在整个水系中所占的比例,所以在取用河长和百分比这两类数据时选择百分比。

3.4 解决问题4

3.4.1 模型:

本模型在假设污水均匀排放的前提下,以处理污水的总量最少为目标函数,建立了线性优化模型。 s_i 表示第 $i-1$ 个和第 i 个观测站点之间的距离, x_i 表示第 i 个观测站点附近处理的污水量, y_i 表示第 i 个观测站点的污水量, M^* 表示一个周期(水流从第一个观测站流经最后一个,即第七个观测站所需的时间)的排污量, L 表示全程河长, v_i 表示第 i 个观测站点的水流量, v_i^* 表示第 $i-1$ 个和第 i 个观测站点之间的水流平均速度, d_i 表示第 l 种($l=1,2,3$)项目(DO,CODMn,NH₃-N)在污水中的比例, K 表示第 IV 类和第 V 类水所占的比例, A 表示没有劣 V 类水时,DO的最低标准, B 表示没有劣 V 类水时,CODMn的最低标准, C 表示没有劣 V 类水时,NH₃-N的最低标准。结合自净方程 $\frac{dx}{dt} = -\lambda x$ (x 为污水浓度, t 为时间, λ 为降解系数,此处取0.2),将连续性的降解过程离散化,求出每年需要处理的污水量。模型建立如下:

$$\begin{aligned} \text{目标函数: } \min &= \sum_{i=1}^7 x_i \\ s.t. & \begin{cases} y_i = -x_i + s_i \frac{M^*}{L} + y_{i-1} e^{-\lambda \frac{s_i-1}{v_{i-1}^*}} \\ \frac{y_i}{v_i} d_1 \geq A \\ \frac{y_i}{v_i} d_2 \geq B \\ \frac{y_i}{v_i} d_3 \geq C \\ x_i \geq 0 \\ y_i \geq 0 \\ K \left(M^* - \sum_{i=1}^7 x_i \right) \sum_{i=1}^7 e^{-\lambda \frac{s_i-1}{v_{i-1}^*}} \leq 20\% M^* \\ \sum_{i=1}^7 x_i \leq M^* \end{cases} \quad (i=1, \dots, 7) \end{aligned}$$

3.4.2 模型

本模型建立了关于某个等分点污水量的二阶线性差分方程。其中 a_i 表示第 i 个等分点的污水量, M 表示一年的污水排放量, w_i 表示第 i 个等分点的污水量百分比,以第 $i-1$ 个等分点和第 i 个等分点的污水量建立差分方程^[6]:

$$a_i = a_{i-1}b + k \quad (5)$$

$$a_{i-1} = a_{i-2}b + k \quad (6)$$

上两式相减得到

$$a_i - (1+b)a_{i-1} + ba_{i-2} = 0 \quad (7)$$

$$\text{其中 } b = e^{-0.2 \frac{v_i}{v_i}} (i=1, \dots, 7) \quad (8)$$

$$k = \frac{M}{L} \quad (9)$$

差分方程的特征方程为

$$x^2 - (1+b)x + b = 0 \quad (10)$$

这里只进行7个观测站的计算, 即 $i=7$.

w_i 表示第 i 个站点的污水量百分比为:

$$w_i = \frac{a_i}{24 \times 3600 \times v_i} \quad (11)$$

3.5 针对第5个问题提出的建议

根据各个排放源不同的地理位置、技术水平、排污量和污染治理承受能力, 优化协调分担削减污染物的责任, 以排污许可证的形式限定允许排放污染物指标及削减量, 最终实现水环境质量目标^[7]. 在区域范围内, 应对河道进行清淤疏浚, 增加河水流速及流量, 提高河流水体的自净能力, 扩大水环境容量, 同时通过清除河底污泥, 可消除河底污泥中的沉积物对水体的二次污染. 同时疏浚、开挖部分河道, 建设污水入江通道, 使污水处理厂的尾水改道排放.

4 模型的评价与推广

本文解决问题3用拟合方法构造函数, 较为迅速地找出各数据间的关系, 清晰直观地反映出未来10年各类水百分比的发展变化趋势, 但误差难以避免. 对于问题4建立了优化模型将问题简化, 与自净方程结合起来考虑也是比较合理的. 不足在于其将化学物质降解过程的连续性离散化, 可能会与连续性产生的结果有一定误差. 同时建立了差分方程模型与之相对比, 能够在干流上任意一点进行检测, 并且考虑流速对污水降解的影响.

本文的模型可推广至其它江河的水质评价与预测, 以及煤气管道^[8], 石油管道中某些指标的评价与预测.

参考文献:

- [1] 姜启源. 数学模型 [M]. 北京: 高等教育出版社, 1999.
- [2] 2005 高教社杯全国大学生数学建模竞赛题目 (甲组 A 题) [EB/OL]. <http://mcm.edu.cn/mcm05/problems2005c.acp>.
- [3] 宁宣熙. 运筹学实用教程 [M]. 北京: 科学出版社, 2002.
- [4] 沈继红, 施久玉, 高振滨, 张晓威. 数学建模 [M]. 哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社, 1998.
- [5] 谭永基. 数学模型 [M]. 上海: 复旦大学出版社, 1999.
- [6] 赵静, 但琦. 数学建模与数学实验 (2版) [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [7] 徐全智, 杨晋浩. 数学建模 [M]. 北京: 高等教育出版社, 2003.
- [8] 汪国全. 数学建模优秀案例选编 [M]. 广州: 华南理工大学出版社, 2001.

Appraisal and Forecast Models of Water Quality of Yangtze River

XING Hong-wei, CHENG Shu-man, YU Xiao-yan

(Department of Mathematics, Neijiang Teachers College, Neijiang, Sichuan 641112, China)

Abstract: The appraisal and forecast problem of water quality of Yangtze River are discussed. The main statistical data of the past decade was analyzed. The exponential method, optimal model, two order linear difference equation model were utilized, and the appraisal and forecast to the water quality of Yangtze River were carried out. Some feasible proposal and opinions about the water pollution problem Yangtze River were put forward. Finally the error analysis of the forecast results, some appraisals and promotion of the model were carried on.

Key words: Yangtze River appraisal and forecast models of water quality; exponential method; optimize model; difference equation.

(责任编辑: 胡 蓉)