- NE PAS DIFFUSER - DOT NOT DISTRIBUTE -

MOTIFS

par

Alexandre Grothendieck

Transcription d'un manuscrit (très préliminaire et de déchiffrement difficile) de Grothendieck consacré aux «fondements» de la théorie des motifs. Il semble que ce texte (y inclus ses révisions) ait été écrit durant la période 1965-1970. La transcription a été assurée par Ph. Elbaz-Vincent (pev@math.univ-montp2.fr) avec l'aide de J. Malgoire (malgoire@math.univ-montp2.fr). Pour tous renseignements complémentaires, contacter J. Malgoire.

Conventions du Transcripteur

Pour des raisons de lisibilité, les mots (simplement) soulignés dans le texte de Grothendieck ont été rendu en *soulignés*, les mots doublement soulignés ont été rendus en ***doublement soulignés***, cela dans un souci de rester aussi proche que possible du texte originel. Les mises en évidence de paragraphes par Grothendieck ont été rendu en *penché*. D'une manière générale nous avons conservés les abréviations. Dans le cas d'un passage trop difficile à lire à cause de trop nombreuses abbréviations, nous avons remplacé quelques abbréviations par leurs significations. Nous avons tentés d'être aussi proche du manuscrit de Grothendieck, en particulier notes dans la marge, rajout de remarques, «mise en page», notations, etc...

MOTIFS

ALEXANDRE GROTHENDIECK

Table des matières

1. La catégorie $\mathcal{M}^+(X)$

A tout préschéma noethérien (éventuellement de type fini sur un anneau noethérien) X est associé une *catégorie abélienne* $\mathcal{M}^+(X)$, dite catégorie des *motifs effectifs* sur X. C'est une $\mathbb{Q}$-catégorie abélienne, i.e., pour tout $M \in Ob(\mathcal{M}^+(X))$ et tout $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$, $n1_M$ est un isomorphisme de M. De plus $\mathcal{M}^+(X)$ est muni d'un produit tensoriel commutatif et unitaire, exact à droite, l'unité est notée $\mathbb{1}_X$ ou $\mathbb{Q}_X(0)$. On considère aussi la catégorie dérivée bornée $D^b(\mathcal{M}^+(X))$ de $\mathcal{M}^+(X)$. Le produit tensoriel est étendu en un bifoncteur $M \underline{\otimes} N$ en $M,N \in Ob(D^b(\mathcal{M}^+(X)))$.

On peut en termes des données construire des foncteurs $\bigwedge^i M$ etc...

Date: (de transcription): 30 juillet 2002.

2. Variances avec X

Soit $f : X \to Y$ un morphisme de préschémas noethériens, il lui est associé un *foncteur exact* $f^* : \mathcal{M}^+(Y) \to \mathcal{M}^+(X)$ compatible avec $\otimes$, d'où $\mathbf{L}f^* : D^b(\mathcal{M}^+(Y)) \to D^b(\mathcal{M}^+(X))$. On a transitivité.
Si f est de type fini, et propre *ou* Y excellent, on a même un foncteur $\mathbf{R}f_*$: $D^b(\mathcal{M}^+(X)) \to D^b(\mathcal{M}^+(Y))$ satisfaisant aux formules de transitivité, et la formule de projection

Considérer aussi la formule de dualité entre $\mathbf{R}f_*$, f^*, et les foncteurs $f^!$, $\mathbf{R}f_!$ et leurs relations [[..]], enfin le formulaire standard reliant tous ces foncteurs...

$$\mathbf{R}f_*(M \otimes \mathbf{L}f^*(N)) \simeq \mathbf{R}f_*(M) \otimes N\,.$$

3. Cas $X = \varprojlim X_i$

Supposons $X = \varprojlim X_i$, système projectif filtrant essentiellement affine. Alors pour les foncteurs images inverses, on a

$$\mathcal{M}^+(X) \simeq \varinjlim \mathcal{M}^+(X_i)\,.$$

En particulier, si X est de type fini sur $S = Spec(A)$, alors X est limite de préschémas X_i de type fini sur $\mathbb{Z}$, et la détermination de $\mathcal{M}^+(X_i)$ avec ses structures déjà envisagées est ramenée au cas des préschémas de type fini.
De même si (S_i) est un système projectif filtrant essentiellement affine, $S = \varprojlim S_i$, et si X, Y de type fini sur S sont définis par (X_i), (Y_i) de la façon habituelle, si on prend des $M_{i_0} \in Ob(D^b(\mathcal{M}^+(X_{i_0})))$, d'où M_i, M, on aura pour $f_{i_0} : X_{i_0} \to Y_{i_0}$ la relation

$$\mathbf{R}f_*(M) = \varinjlim v_i^*\big(\mathbf{R}f_{i*}(M_i)\big)\,,$$

où $v_i : Y \to Y_i$ est le morphisme canonique.

4. Foncteurs T_ℓ

Soit ℓ un nombre premier[1] tel que $\ell 1_X \in \Gamma(X,\mathcal{O}_X)$ soit inversible. Alors on a un foncteur

$$T_\ell = T_\ell^{(X)} : \mathcal{M}^+(X) \to \mathcal{M}_\ell^+(X)\,,$$

où $\mathcal{M}_\ell(X)$ est la catégorie formée des "$\mathbb{Q}_\ell$-modules constructibles sur X", i.e., la catégorie déduite de la catégorie des "systèmes ℓ-adiques de faisceaux de ℓ-torsion constructibles" en négligeant précisément les faisceaux de torsion. Le foncteur T_ℓ, est ***compatible avec*** $\otimes$ et ***unité***, ***exact*** et ***fidèle*** (mais non pleinement fidèle), ***compatible avec le changement de base*** f^*, ***et compatible également avec*** $\mathbf{R}f_*$. [**N.B.** T_ℓ s'étend évidemment en un foncteur $D^b(\mathcal{M}(X)) \to D^b(\mathcal{M}_\ell(X))$].
La détermination des T_ℓ est encore ramenée au cas où X est de type fini sur $\mathbb{Z}$.
N.B. Ceci exclu le choix limite $\mathcal{M}^+(X) = 0$ pour tout X, car il faudrait qu'on ait $\mathbf{R}^*f_*(\mathbb{Z}_\ell) = 0$ pour f,ℓ, ce qui n'est pas vrai en général...
Signalons aussi la compatibilité de T_ℓ avec l'isomorphisme de Künneth.

compatibilité avec $f^!$, $\mathbf{R}f_!$, avec hom résidu, etc...

1. **N.d.T (note du transcripteur)** : Grothendieck note l'ensemble des nombres premiers $\mathbb{P}$, que nous avons préféré éviter pour ne pas induire de confusions.

5. Les $\mathbb{Q}_\ell(-n)$

Pour tout X, on a un élément canonique $\mathbb{Q}_X(-1)$ [2] ou $\mathbb{1}_X(-1) \in Ob(\mathcal{M}^+(X))$, dont la formation est compatible avec les changements de base (il suffit donc de le considérer sur $Spec(\mathbb{Z})$), avec des isomorphismes,

$$T_\ell(\mathbb{Q}(-1)) \simeq \mathbb{Q}_\ell(-1) = \underbrace{T_\ell(\mathbb{G}_m)^{-1}}_{\text{Module de Tate inversé de } \mathbb{G}_m}$$

et le cas échéant (X sur $\mathbb{Q}$).
On peut définir $\mathbb{Q}(-1)$ comme $\mathbf{R}^2 f_*(1_{\mathbb{P}^1_X})$, où $f : \mathbb{P}^1_X \to X$ est la projection canonique. Posant

$$\mathbb{Q}(-n) = \mathbb{Q}(-1)^{\otimes n}, \quad \text{pour} \quad n \geqslant 0\,,$$

on peut prouver, à l'aide des axiomes déjà posés, que si $f : X \to S$ est lisse projectif à fibres géom. connexes non vides, partout de dimension relative d, alors

$$\mathbf{R}^{2d} f_*(\mathbb{1}_X) \simeq \mathbb{Z}_S(-d)\,,$$

et si on enlève l'hypothèse "f projectif" mais seulement f quasiprojectif, on trouve encore

$$\mathbf{R}^{2d} f_!(\mathbb{1}_X) \simeq \mathbb{Z}_S(-d)\,.$$

On veut de plus, si X/S est lisse et $Y \underset{i}{\hookrightarrow} X$ est lisse sur S, de codimension d dans X, l'isomorphisme

$$\mathbf{R}i^!(\mathbb{1}_X) \simeq \mathbb{Q}_Y(-d)\,,$$

compatible avec les isomorphismes déjà connus du point de vue ℓ-adique ...

6. La catégorie $\mathcal{M}(X)$

Le foncteur

$$M \rightsquigarrow M(-1) = M \otimes \mathbb{Q}(-1)\,,$$

de $\mathcal{M}^+(X)$ dans lui-même est *pleinement fidèle* mais pas une équivalence en général. Il y a donc une façon canonique d'élargir $\mathcal{M}^+(X)$ en $\mathcal{M}(X)$ de telle façon que $- \otimes \mathbb{Q}(-1)$ devienne une équivalence, en prenant la pseudo-limite inductive des

$$\mathcal{M}^+(X) \overset{-\otimes\mathbb{Q}(-1)}{\hookrightarrow} \mathcal{M}^+(X) \overset{-\otimes\mathbb{Q}(-1)}{\hookrightarrow} \mathcal{M}^+(X)\,.$$

$\mathcal{M}^+(X)$ est une *sous-catégorie abélienne épaisse* de $\mathcal{M}(X)$; l'appartenance à $\mathcal{M}^+(X)$ se vérifie fibre par fibre ...

On prolonge à $\mathcal{M}(X)$ la structure $\otimes$, alors $\mathbb{Q}(-1)$ devient inversible, soit $\mathbb{Q}(1)$ son inverse, et tout élément de $\mathcal{M}(X)$ peut s'écrire, pour n assez grand, sous la forme $M_n(n)$, avec $M_n \in Ob(\mathcal{M}^+(X))$. [Pour n fixé, M_n est bien déterminé par M à isomorphisme unique près, et

$$(M_n(n) \simeq M_{n+1}(n+1)) \Leftrightarrow (M_{n+1} \simeq M_n(-1))\,,$$

on retrouve la description de $\mathcal{M}(X)$ en termes de pseudo-limites inductives].
Les foncteurs T_ℓ s'étendent à $\mathcal{M}(X)$, de façon unique, de façon à rester compatibles avec $\otimes$.

2. **NdT** : Il semble que dans sa première mouture toute la théorie était sur $\mathbb{Z}$, puis après relecture(s), Grothendieck a changé plusieurs $\mathbb{Z}$ en $\mathbb{Q}$. Nous avons donc garder ce qui semble être l'ultime révision.

7. Les foncteurs *Hom* et **R***Hom*

Dans $\mathcal{M}(X)$, on a aussi des foncteurs $\underline{Hom}$, liés à $\otimes$ par la formule habituelle

$$\begin{aligned} Hom(P \otimes Q, R) &\simeq Hom(P, \underline{Hom}(Q,R))\,, \\ &\simeq Hom(Q, \underline{Hom}(P,R))\,, \end{aligned}$$

et qui s'étendent en $\mathbf{R}Hom(P,Q)$, $P,Q \in Ob\big(D^b(\mathcal{M}(X))\big)$, satisfaisant à la relation analogue relativement à $\underline{\otimes}$. ***La formation des $\underline{Hom}$ et $\mathbf{R}\underline{Hom}$ est compatible avec les T_ℓ.*** [**N.B.** On retrouve la formation des $f^!$ ...]

8. Motifs constants, tordus et polynômes caractéristiques

Soient ℓ, ℓ' des nombres premiers, premiers aux caractéristiques résiduelles de X. Soit $M \in Ob(\mathcal{M}^+(X))$. On veut que

$$\begin{array}{cl} T_\ell(M) & \text{faisceau constant tordu} \\ & \Updownarrow \\ T_{\ell'}(M) & \text{faisceau constant tordu} \end{array}$$

et que sous ces conditions, $T_\ell(M)$ et $T_{\ell'}(M)$ doivent avoir même rang en chaque point.
Pour vérifier l'égalité des rangs, on est ramené au cas où X est le spectre d'un corps (fini si on veut, ou clôture algébrique d'un tel). Plus généralement, si u est un endomorphisme de M (avec $X = Spec(k)$, k un corps), on en déduit

$$T_\ell(u) \in End(T_\ell(M))\,, \quad T_{\ell'}(u) \in End(T_{\ell'}(M))\,,$$

et je dis que l'on a

$$\boxed{\mathrm{Tr}(T_\ell(u)) = \mathrm{Tr}(T_{\ell'}(u)) \in \mathbb{Q},}$$

d'où, remplaçant u par $\Lambda^i(u)$, le fait

$$\boxed{P(T_\ell(u),t) = P(T_{\ell'}(u),t) \in \mathbb{Q}[t]\,.}$$

[ici il s'agit des polynômes caractéristiques].
Pour ceci, notons que

$$u \in Hom(\mathbb{1}_X, Hom(M,M^2)) = Hom(\mathbb{1}_X, \check{M} \otimes M)\,,$$

à inclure dans le formalisme tensoriel

et on a un *morphisme contraction*

$$\check{M} \otimes M \to \mathbb{1}_X\,,$$

d'où un $c(u) \in Hom(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_X)$, et

$$\mathrm{Tr}(T_\ell(u)) = T_\ell(c(u)) \in \mathbb{Q}_\ell\,,$$

et il suffit de savoir :

$$\boxed{X \quad \text{connexe} \quad \Rightarrow Hom(\mathbb{1}_X, \mathbb{1}_X) = \mathbb{Q}\, id_{\mathbb{1}_X}\,.}$$

9. Filtration de $\mathcal{M}^+(X)$ et $\mathcal{M}(X)$

9.1. **Filtration par le poids.**

$$\mathcal{M}^{+_0}(X) \subset \mathcal{M}^{+_1}(X) \subset \cdots \subset \mathcal{M}^{+_i}(X) \subset \cdots$$

filtration exhaustive de $\mathcal{M}(X)$,[L'appartenance à $\mathcal{M}^{+_i}(X)$ se vérifie fibre par fibre (géométrique si on veut), et dans le cas X de type fini sur $\mathbb{Z}$, il suffit de vérifier en les points fermés (pour ceux-ci, il y a un critère par Frobenius, cf. plus bas)], compatible avec f^*, et $M|_x \in Ob(\mathcal{M}^{+_i}(k(x))) \Rightarrow \exists U \ni x$ voisinage de $\overline{x}$, tel que $M|_U \in Ob\mathcal{M}^{+_i}(U))$. Soit $f : X \to Y$, alors

généraliser compatibilités avec $\varprojlim$ de préschémas

$$\mathbf{R}^j f_! : \mathcal{M}^{+_i}(X) \to \mathcal{M}^{+_j}(Y) ;$$

de plus, $\mathcal{M}^{+_i}(k)$ (k un corps algébriquement clos) est "engendré" par les sous-espaces $\mathbf{R}^j f_!(\mathbb{1}_X)$ pour X si on veut projectif lisse de dim $\leqslant j$ sur k.

indice en bas

[au sens que tout $M \in Ob(\mathcal{M}^i(k))$ a une filtration dont les facteurs sont isomorphes à de tels sous-espaces].

$$\begin{cases} \mathcal{M}^{+_i}(X) \otimes \mathcal{M}^{+_j}(X) \subset \mathcal{M}^{+_{i+j}}(X), \\ \mathbb{Z}(-1) \in Ob(\mathcal{M}^{+_2}(X)) \end{cases}$$

d'où

$$\mathcal{M}^{+_i}(X) \otimes \mathbb{Z}(-j) \subset \mathcal{M}^{+_{i+2j}}(X), \quad \text{pour} \quad j \geqslant 0 .$$

On a mieux :

$$M \in Ob(\mathcal{M}^{+_i}(X)) \Leftrightarrow M(-j) \in Ob(\mathcal{M}^{+_{i+2j}}(X)) .$$

De cette façon, la filtration de $\mathcal{M}^+(X)$ par les $\mathcal{M}^{+_i}(X)$ $(i \geqslant 0)$ peut se prolonger en une filtration de $\mathcal{M}(X)$ par des $\mathcal{M}^i(X)$ $(i \in \mathbb{Z})$ de telle façon que pour $i \geqslant 0$, ce soit la filtration déjà envisagée, et pour i quelconque, on définit

$$M \in Ob(\mathcal{M}^i(X)) \Leftrightarrow M(-j) \in Ob(\mathcal{M}^{i+2j}(X)) ,$$

où on prend j assez grand pour que $M(-j) \in Ob(\mathcal{M}^+(X))$. On notera que

indices en bas

$$\mathcal{M}^{+_i}(X) = \mathcal{M}^i(X) \cap \mathcal{M}^+(X) ,$$

si $i \geqslant 0$, et pour tout i si on définit $\mathcal{M}^{+_i}(X) = \{0\}$ si $i < 0$. On aura

$$\otimes\mathbb{Q}(-1) : \mathcal{M}^i(X) \overset{\text{équiv}}{\simeq} \mathcal{M}^{i+2}(X) ,$$

$$\otimes\mathbb{Q}(j) : \mathcal{M}^i(X) \overset{\text{équiv}}{\simeq} \mathcal{M}^{i+2j}(X) ,$$

mais on fait attention que l'inclusion

$$\mathbb{Q}(-1) \otimes \mathcal{M}^{+_i}(X) \hookrightarrow \mathcal{M}^{+_{i+2}}(X) ,$$

plus généralement

$$\mathbb{Q}(-j) \otimes \mathcal{M}^{+_i}(X) \hookrightarrow \mathcal{M}^{+_{i+2j}}(X) ,$$

est *stricte* en général, i.e., n'est pas une équivalence de catégories.

indices en bas

Noter que $\mathcal{M}^{+_i}(X)$ est *épaisse* dans $\mathcal{M}^{+_j}(X)$, et de même $\mathcal{M}^i(X)$ épaisse dans $\mathcal{M}^j(X)$ $(i \leqslant j)$.
Les quotients $G_i^+(X) = Gr_i(\mathcal{M}^+(X)) \simeq \mathcal{M}_i^+(X)/\mathcal{M}_{i-1}^+(X)$ et $G_i(X) = Gr_i(\mathcal{M}(X)) \simeq$

$\mathcal{M}_i(X)/\mathcal{M}_{i-1}(X)$ sont fort intéressants. Notons que les $G_i(X)$ sont tous équivalents par twisting $G_i(X) \overset{\mathbb{Z}(-j)}{\simeq} G_{i+2j}(X)$, en particulier tous équivalents canoniquement à $G_0(X)$. D'ailleurs

$$G_i^+(X) \underset{\sim}{\hookrightarrow} G_i(X) \overset{\approx}{\simeq} G_0(X)\,,$$

équivalent à une sous-catégorie pleine et *épaisse* de $G_i(X) \overset{\approx}{\simeq} G_0(X)$.

9.2. **Filtration par le "type dimensionnel".**
On pose pour $i \geqslant 0$,

$$D_i(\mathcal{M}^+(X)) = \begin{cases} \text{sous-catégorie pleine de } \mathcal{M}^+(X) \\ \text{formée des objets qui se dévissent loc. étale (du moins fibre par fibre)} \\ \text{en objets de la forme} \\ M(-j), \quad \text{avec } M \in Ob(\mathcal{M}^{+i}(X)), j \in \mathbb{Z}, j \geqslant 0 \end{cases}$$

i.e., on prend (du moins pour $X = Spec(K)$ d'un corps) la filtration minimum qui majore celle par le poids, qui soit stable par $\otimes\mathbb{Q}(-1)$, et *épaisse*.
Les $D_i(\mathcal{M}^+(X))$ sont stables par image inverse, et pour l'image directe on a

$$\mathbf{R}^j f_!(D_i(\mathcal{M}^+(X))) \subset D_{i+j}(\mathcal{M}^+(Y)),$$
$$\mathbf{R}^j f_*(D_i(\mathcal{M}^+(X))) \subset D_{i+j}(\mathcal{M}^+(Y)).$$

[On a seulement $\mathbf{R}^j f_*(\mathcal{M}^{+i}(X)) \subset \mathcal{M}^{+i+2j}(Y)$!?]

Cela distingue formellement les filtrations $D_i(\mathcal{M})$ et $\mathcal{M}_i$! toutes formulées en termes de la dim de X

Ici on a

$$M \in Ob(D_i(\mathcal{M}^+(X))) \Leftrightarrow M(-j) \in Ob(D_i(\mathcal{M}^+(X)))\,,$$

et la filtration de $\mathcal{M}^+(X)$ par les $D_i(\mathcal{M}^+(X))$ s'étend en une filtration des $\mathcal{M}(X)$ par des $D^i(\mathcal{M}(X))$ induisant la filtration donnée,

$$M \in Ob(D_i(\mathcal{M}(X))) \Leftrightarrow M(-j) \in Ob(D_i(\mathcal{M}(X))) \quad \text{pour } j \text{ grand.}$$

On a

$$D_i(\mathcal{M}(X)) \otimes D_j(\mathcal{M}(X)) \subset D_{i+j}(\mathcal{M}(X))\,,$$

mais $\mathbb{Z}(j) \in D_0(\mathcal{M}(X))$ pour tout j, et de même en mettant des $+$.
Enfin, on a

$$\underline{\mathcal{E}xt}^i(D_j(\mathcal{M}(X)), D_k(\mathcal{M}(X))) \subset D_{j+k}(\mathcal{M}(X)))\,.$$

(pas de formule aussi simple en termes des $\mathcal{M}_\alpha(X)$!).

10. Motifs constants tordus. Anneaux $\mathcal{M}^+(X)$ et $\mathcal{M}(X)$

Soit $\mathcal{M}^+(X)_{spec}$ la sous-catégorie des motifs effectifs *constants tordus.*[condition locale, qui se vérifie sur $T_\ell(M)$, cf. N^{o}8], et de même on définit $\mathcal{M}(X)_{spec}$. Ainsi

$$M \text{ ct tordu } \Leftrightarrow M(j) \text{ ct tordu}\,.$$

$\mathcal{M}^+(X)_{spec}$ et $\mathcal{M}(X)_{spec}$ sont des *sous-catégories abéliennes stables par extensions, dont tout objet est de longueur finie.* Elle est stable pour $\otimes$, sur cette catégorie les Ext^i $(i > 0)$ sont nuls, et la catégorie est aussi stable pour Hom (cas de $\mathcal{M}(X)_{spec}$). On a une "catégorie tensorielle sur $\mathbb{Q}$". Le λ-anneau défini par cette catégorie est noté $M^+(X)$ resp. $M(X)$. Noter que ξ(=classe de $\mathbb{Q}_X(-1)$) est un élément de $M^+(X)$, et on a

$$M(X) = M^+(X)_\xi = M^+(X)\left[\frac{1}{\xi}\right].$$

En fait, ξ est non diviseur de 0 :
$M^+(X)$ comme $\mathbb{Z}$-module admet comme base les classes d'*objets simples* de $\mathcal{M}^+(X)$, et $x \mapsto \xi.x$ dans $M^+(X)$ est défini par une application *injective* sur l'ensemble de ces objets simples.

[**N.B.** M simple dans $\mathcal{M}^+(X) \Leftrightarrow M$ simple dans $\mathcal{M}(X) \Leftrightarrow M(-1)$ simple, comme il résulte du fait que $\mathcal{M}^+(X)$ est épaisse dans $\mathcal{M}(X)$ et $\otimes\mathbb{Z}(-1)$ une auto-équivalence].

Si $\Sigma^+(X)$ =ensemble des classes d'objets simples de $\mathcal{M}^+(X)$,

$$\Sigma(X) = \varinjlim_{\substack{\text{pour}\\ e\mapsto\xi.e}} \Sigma^+(X),$$

on aura un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} M^+(X) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{Z}^{(\Sigma^+(X))} \\ \cap\big\downarrow & & \big\downarrow\cap \\ M(X) & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{Z}^{(\Sigma(X))} \end{array}$$

Alors $\mathcal{M}_i^+(X)$ est défini en termes d'une partie $\Sigma^+_{(i)}(X)$ de $\Sigma_i(X)$, d'où

$$M_i^+(X) = \mathbb{Z}^{\Sigma^+_{(i)}(X)},$$

ce qui donne une filtration croissante sur l'anneau $M^+(X)$, et une filtration analogue sur $M(X)$.
En fait, posant

$$\Sigma_i^+(X) = \Sigma^+_{(i)}(X) - \Sigma^+_{(i-1)}(X),$$

on aura même

$$\Sigma_i^+(X)\cdot\Sigma_j^+(X) \subset \mathbb{Z}^{\Sigma^+_{i+j}(X)},$$

donc $M^+(X)$ devient un *anneau gradué à degrés* $\geqslant 0$, et ξ est de degré 1. De cette façon $M(X)$ devient gradué [à degré de tous signes, ξ étant un élément *inversible* de degré 1]. Noter que

$$M_0(X) = \mathbb{Z}^{\Sigma_0(X)},$$

avec

$$\Sigma_0(X) = \varinjlim_{\substack{\text{pour}\\ x\mapsto x.\xi}} \Sigma_i^+(X),$$

et

$$M^{\text{pair}}(X) = \underbrace{M_0(X)}_{\substack{\text{de}\\ \text{degré } 0}}[\underbrace{\ \xi\ }_{\substack{\text{de}\\ \text{degré } 1}}],$$

$$M^{\text{impair}}(X) = M_1(X)\otimes_{M_0(X)} M_0(X)[\xi],$$

donc la structure d'anneau gradué de $M(X)$ est déterminé en termes de la structure d'anneau de $M_0(X)$, le module $M_1(X)$ sur $M_0(X)$, et l'application de multiplication $M_1(X) \otimes_{M_0(X)} M_1(X) \to M_0(X)$ défini par $u,v \rightsquigarrow \xi^{-1}uv$.
D'autre part, les objets de $D_i(\mathcal{M}^+(X))$ sont ceux dont la classe dans $M^+(X)$ sont dans $\mathbb{Z}^{D_i(\Sigma^+(X))}$, où

$$\left.\begin{aligned} D_i(\Sigma^+(X)) &= \coprod_{j\geqslant 0} \xi^j \Sigma^+_{(i)}(X)\,, \\ &= \coprod_{\substack{j\geqslant 0 \\ 0\leqslant k\leqslant i}} \xi^j \Sigma^+_k(X) \end{aligned}\right\} \Sigma^+_{[j]}(X)$$

Posons

éléments *primitifs* de poids i

$$\sigma_i(X) = \Sigma^+_i(X) - \cup_{\alpha\geqslant 0}\xi^\alpha \Sigma^+_{i-2\alpha}(X)\,,$$

alors on a une partition (au sens large)

$$\Sigma_i(X) = \sigma_i(X) \cup \xi\sigma_{i-2}(X) \cup \cdots \cup \begin{cases} \xi^{\frac{i}{2}}\sigma_0(X) \\ \xi^{\frac{i-1}{2}}\sigma_1(X) \end{cases} \quad \text{suivant la parité}$$

et on a donc

$$D_i(\Sigma^+(X)) \cap \Sigma^+_j(X) = \begin{cases} \Sigma^+_j(X) \text{ si } \ j\leqslant i, \\ \xi^{j-i}\sigma_i(X) \cup \xi^{j-i+1}\sigma_{i-1}(X) \cup \cdots \cup \xi^j\sigma_0(X) \text{ si } \ j>i. \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} D_i(M^+(X))/D_{i-1}(M^+(X)) &\simeq \mathbb{Z}^{D_i(\Sigma^+(X))-D_{i-1}(\Sigma^+(X))}, \\ &\simeq \mathbb{Z}^{\sigma_i(X)+\xi\sigma_{i-2}(X)+\xi^2\sigma_{i-4}(X)+\cdots}. \end{aligned}$$

N.B. Du point de vue de la structure additive des deux filtrations, et de l'opération $\xi\cdot$, $M^+(X)$ et $M(X)$ sont complétement déterminées par la connaissance de la famille $(\sigma_i(X))_{i\geqslant 0}$ des *ensembles* $\sigma_i(X)$.
Pour la structure multiplicative, il faut connaitre de plus les applications $u,v \rightsquigarrow uv$ défini par

$$\sigma_i(X) \times \sigma_j(X) \to \mathbb{Z}^{\left(\coprod_{k\leqslant i+j-2} \sigma_k(X)\right)}.$$

Nous allons expliciter plus bas la détermination de $\sigma^0(X)$ et $\sigma^1(X)$.
Il y a lieu également de préciser les opérations $\vee$ et λ^i. Pour la première, notons que

$$\mathbb{Q}(-i)[\mathcal{M}^+_i(X)]^\vee \subset \mathcal{M}^+_i(X)$$

d'où on conclut de proche en proche que $x \mapsto \check{x}\xi^i$ définit sur σ^i une involution. Mais en fait il résultera de la théorie projective que *cette dernière est l'identité*, i.e., *l'opération* $\vee$ *dans* $M_i(X)$ *n'est autre que* $x \mapsto \xi^{-i}x$. Quant aux opérations λ^i, leur détermination devrait se faire en termes de groupes finis d'opérateurs ([[..]] les $\mathfrak{S}_p$ ...).

11. Interprétation topologique des types dimensionnels (cas "géométrique")

Soit X non singulière sur k alg. clos. Considérons la filtration X par la codimension, et la suite spectrale

attention terme initial E_1 et non E_2 !!

$$H^*(X,\mathbb{Q}_\ell) \Leftarrow E_1^{p,q} = \coprod_{x\in X[p]} H^{q-p}(X,\mathbb{Q}_\ell)(-p)$$

où on pose

$$\begin{cases} X[p] = \{x \in X | dim(\mathcal{O}_{X,x}) = p\}, \\ \\ H^*(X,\mathbb{Z}_\ell(-p)) = \varinjlim\limits_{\substack{U\text{ouvert} \\ \neq\emptyset \text{ de } X}} H^*(U,\mathbb{Q}_\ell(-p)) \end{cases}$$

On veut que cette suite spectrale provienne d'une suite spectrale de motifs. [du moins à partir de $E_r^{p,q}$ avec $r \geqslant 2$, sinon il faudrait parler de ind-motifs, ou bien prendre une filtration *finie* convenable de X par des sous-schémas fermés].

Si X est ***projectif*** (hypothèse essentielle même si X de dim 1)

Le morceau en dim n de filtration $\geqslant p$ est visiblement de type dimensionnel $\leqslant n-2p$. On veut que ce soit *exactement* le morceaux de type dimensionnel $n-p$.

12. L'homomorphisme fondamental $L(K) \to M^+(K)$ et invariants birationnels fondamentaux

K est un corps. On désigne par $L(K)$ le groupe K engendré par des préschémas de type fini sur K, avec comme relations celles définies par découpage en morceaux. C'est un anneau pour $\otimes$. On définit un homomorphisme d'anneaux

$$\sigma : L(K) \to M^+(K)$$

par

$$cl(X) \mapsto \sum(-1)^i cl\big(H^i_!(X,\mathbb{Q}(0))\big),$$

où bien entendu $H^i_!(X,\mathbb{Z}(0))$ est défini comme motif sur K par $\mathbf{R}^i f(\mathbb{Q}(0))$, $f : X \to Spec(K)$ la projection. Prenant les composantes homogènes de $\sigma(cl(X))$, on a des $\sigma_i(cl(X))$ qui sont des "motifs virtuels", et permettent de définir des "nombres de Betti virtuels", ceux demandés par Serre.
Filtrons $L(K)$ par la dimension, on trouve

$$L_{(i)}(K) \to M^+_{(i)}(K) + \underbrace{\xi \underset{\substack{\cap \\ M^+_{(i+1)}(K)}}{M^+_{(i-1)}(K)} + \xi^2 \underset{\substack{\cap \\ M^+_{(i+2)}(K)}}{M^+_{(i-2)}(K)}}_{D'_i(M^+(K))} + \cdots$$

d'où un hom. naturel

$$gr_n(L(K)) \to \underbrace{gr'_n(M^+(K))}_{\substack{\text{filtration par} \\ \text{les } D'_i(M^+(K))}}$$

$$gr'_n(M^+(K)) \simeq \mathbb{Z}^{(\sigma_n \cup \xi\sigma_{n-1} \cup \xi^2\sigma_{n-2} \cup \cdots)}.$$

Donc, si X est un préschéma de type fini sur K, de dim $\leqslant n$, alors prenant $cl(X) \in L_n(K)$ et réduisant modulo $L_{n-1}(K)$, on trouve une image dans

$\mathbb{Z}^{(\sigma_n \cup \xi\sigma_{n-1} \cup \xi^2\sigma_{n-2} \cup \cdots)}$ donc un invariant de la forme $\gamma_n(X)+\xi\gamma_{n-1}(X)+\xi^2\gamma_{n-2}(X)+\cdots$ (poids n, $n+1$, $n+2$, ...),

où chaque

$$\gamma_j(X) \in \mathbb{Z}^{\sigma_j(X)} \qquad 0 \leqslant j \leqslant n.$$

Ils sont obtenus en prenant les $\beta_k(X)$ de Serre (composantes de poids purs dans $cl(X)$) pour $k \geqslant m$, et en notant que un tel $\beta_k(X)$ se met sous la forme
au signe près ! $\xi^{k-n}\beta'_{2n-k}(X)$, où $\beta'_{2n-k}(X) \in M^+_{2n-k}(X)$; alors $\gamma_{2m-n}(X)$ s'obtient en prenant les composantes *bipure* des $\beta'_{2n-k}(X)$ ...
Par construction même, les invariants ainsi obtenus sont des invariants n-birationnels de X. Si X est projectif lisse sur K, alors $\beta'_j(X)$ pour $0 \leqslant j \leqslant n$ n'est autre (par ***Lefschetz*** ...) que la classe dans $H^j(X,\mathbb{Q}(0))$. Donc notre construction consiste à prendre la composante j-bipure dans $H^j(X,\mathbb{Q}(0))$. Mais cela n'est autre aussi, d'après la section précédente, que l'image dans

$$\varinjlim_{\substack{U \text{ ouvert} \\ \text{dense}}} H^j(U,\mathbb{Q}(0))$$

de $H^j(X,\mathbb{Z}(0))$.
En fait, on constate (via dualité) que si X est lisse (sans doute inutile) de dim $\leqslant n$, et si $i \leqslant n$ alors pour tout ouvert dense U de X,

$$H^i(X) \to H^i(U)$$

est *injectif modulo* $D_{i-2}(\mathcal{M}^+(X))$ et *bijectif modulo* $D_{i-1}(\mathcal{M}^+(X))$, ce qui donne un invariant birationnel dans $D_i(\mathcal{M}^+(X))/D_{i-1}(\mathcal{M}^+(X))$, lequel est d'ailleurs dans l'image de $\mathcal{M}^+_{(i)}(X)$, donc définit un objet de

$$\mathcal{M}^+_{(i)}(X)/[\mathcal{M}^+_{(i-1)}(X)\,,\xi\mathcal{M}^+_{(i-2)}(X)],$$

donc un élément de $\mathbb{Z}^{\sigma_i(X)}$. C'est l'invariant birationnel $\gamma_i(X)$.
Sous la forme précédente, on voit que l'on a mieux que des invariants dans $M^+_i(X)$. En fait, on a des $\underline{\gamma}^i(X) \in Ob(\mathcal{M}^+_{i\,\text{bipur}}(K))$, objets semi-simples définis de la façon suivante (K parfait, ce qu'on peut supposer)

$$\gamma^i(X) \in \varinjlim_{\substack{U \text{ ouvert} \\ \text{dense}}} H^i(U,\mathbb{Z}(0)),$$

est le plus grand sous-motif *bipur* de type i. C'est un foncteur en X [ou en l'anneau des fonctions rat. sur X comme alg. sur K], de façon évidente.

[**N.B.** Si $X' \to X$ n'est pas dominant, X irréductible, alors $\gamma^i(X) \to \gamma^i(X')$ est nul]. Pour un homomorphisme *dominant*, $\gamma^i(X) \to \gamma^i(X')$ est *injectif.* En effet, on peut supposer (prenant des modèles convenables) que $X' \to X$ est propre, donc surjectif, X et X' lisses, alors $H^i(X) \to H^i(X')$ est *injectif* comme il est bien connu ...
Question Propriétés de "fidélité" du foncteur précédent ?? On aimerait que tout système d'homomorphisme $\underline{\gamma}_i(R) \to \underline{\gamma}_i(R')$ provienne d'un K-homomorphisme $R \hookrightarrow R'[\delta_1, \ldots, \delta_N]$ (R,R' extension de type fini de K), que l'isomorphisme du système $(\gamma_i(R))$ et du système des $\gamma_i(R')$ implique que R et R' sont "équivalents",

en le sens que chacun s'envoie dans une extension transcendante pure de l'autre...
Exemples

K alg. clos au besoin

(1) Soient C,C' deux courbes lisses complètes connexes sur K alg. clos, supposons que les jacobiennes soient telles qu'il existe un hom $J \to J'$ à noyau fini. Prouver qu'il existe une application rationnelle dominante $C'[t_1,\dots,t_N] \to C$??
(2) Si les $\underline{\gamma}^i(R)$ sont nuls pour $i > 0$, prouver que R est unirationnelle?? [En particulier, si la cohomologie de X var. proj. non sing. est entièrement algébriques??] Cas d'une surface?? [coh. alg. !]

Remarque Si nous négligeons les *variétés réglées* de dim n (i.e., les extensions L de K, de degré de transcendance n, de la forme $L_0[t]$, t une indéterminée), le seul invariant cohomologique qui reste est $\underline{\gamma}_n$. Trouvons-nous un isomorphisme entre $gr_nL(K)$ modulo le sous-groupe engendré [i.e., $Im\,(\xi gr_{n-1}L(K))$] avec $\mathbb{Z}^{\sigma_n(K)}$? En particulier, si $\underline{\gamma}_n(X) = 0$, est-il vrai que X est ***réglée***??

Exemple Pour une surface : Si la cohomologie H^2 est algébrique, la surface est-elle réglée?? *Non en car.* $p > 0$, produit $E \times E$ avec E d'invariant de Hasse nul.

X lisse de dim n partout

$$\begin{cases} H^i_!(X,\mathbb{Z}(0)) \in Ob(\mathcal{M}^+_i(K)) \text{ et } \in Ob(\mathcal{M}^+_n(K)), \quad \text{pour tout } i, \text{mieux :} \\ H^{n+k}_!(X,\mathbb{Z}(0)) \in Ob\left[\xi^k\mathcal{M}^+_{n-k}(K)\right] \end{cases}$$

$$H^i(X,\mathbb{Z}(0)) \in \underbrace{Ob(D_i(M^+(K))) \text{ et } \in Ob(D_n(M^+(K)))}_{\text{et même mieux}}, \quad \text{pour tout } i,$$

$$\begin{aligned} H^i(X,\mathbb{Z}(0)) &\in Ob\left[\mathcal{M}^+_i + \xi\mathcal{M}^+_{i-1} + \xi^2\mathcal{M}^+_{i-2} + \cdots\right] \quad \text{si } i \leqslant n \\ &\in Ob\,\xi^{i-n}\left[\mathcal{M}^+_{2n-i} + \xi\mathcal{M}^+_{2n-i-1} + \xi^2\mathcal{M}^+_{2n-i-2} + \cdots\right] \quad \text{si } i \geqslant n \end{aligned}$$

$$cl(H^i(X,\mathbb{Z}(0))) \in \sum_{1\leqslant\alpha\leqslant Inf(2i,2n)} Gr_i(M^+(K))$$

plus généralement si M pure de poids ρ

$$cl(H^i(X,M)) \in \sum_{\rho+1\leqslant\alpha\leqslant\rho+Inf(2i,2n)} Gr_i$$

13. Caractérisation galoisienne des filtrations

On peut définir le sous-groupe (en fait l'anneau) $M^+_\ell(X)$ du K (K des $\mathbb{Q}_\ell$-faisceaux constants tordus sur X) *provenant* des motifs, on a donc un hom surjectif

$$M^+(X) \to M^+_\ell(X).$$

Si X est de type fini sur $\mathbb{Z}$, cet hom est en fait *bijectif*, car il résulte des conjectures de Tate, plus précisément que si E et F sont des motifs constants tordus, *simples non isomorphe* sur X, alors $T_\ell(E)$ et $T_\ell(F)$ n'ont pas de facteurs simples isomorphes communs.
Par suite, la *graduation* de $M^+(X)$ (via une partition de $\Sigma^+(X)$) et la filtration de $M^+(X)$ (via une filtration de $\Sigma^+(X)$) peuvent se décrire en termes galoisiens.

On trouve pour $E \in Ob(\mathcal{M}(X))$:

"Conjecture de Weil/Riemann"

$$cl(E) \in M_i(X)$$
$$\Updownarrow$$

Pour tout point fermé $x \in X$, les vecteurs propres de Frobenius dans $T_\ell(E)(x)$ sont des valeurs absolues $N(x)^{i/2}$.

D'autres part, si $E \in Ob(\mathcal{M}(X))$, on trouve

"Conjecture de Tate"

$$cl(E) \in M^+(X)$$
$$\Updownarrow$$

Pour tout x point fermé de X, le polynôme caractéristique de $Frob_x^{-1}$ dans $T_\ell(E)(x)$ est à coefficients *entiers* (i.e., les vecteurs propres de Frobenius sont des *entiers* algébriques).

Par ailleurs, prenons E "monogène" de degré α, pour examiner si $E \in Ob(D_i(\mathcal{M}(X)))$, où $i \geqslant 0$.

(1) $i = 0$. Alors

$$E \in Ob(D_0(\mathcal{M}(X)))$$
$$\Updownarrow$$

E est de degré *pair* $\alpha = 2\beta$ et $E\zeta^{-\beta} = F$ (qui est de degré 0) $\in Ob(\mathcal{M}^+(X))$. i.e., si $\rho_i(x)$ sont les vecteurs propres de $Frob_x^{-1}$ dans $T_\ell(\mathcal{M}(X))$, alors les $\rho_i(x)/N(x)^\beta$ sont des entiers algébriques.

N.B. Ce sont alors des racines de l'unité [leur produit étant ± 1 !]

(2) $i \geqslant 1$. Alors il existe une plus grand puissance ζ^β de ζ telle que $E.\zeta^\beta = E(+\beta)$ soit de degré $i-1$ ou i (suivant la parité de α). On veut que les $E(?\beta)$ soit $\in Ob(\mathcal{M}^+(X))$ i.e., les $\rho_i(x)/N(?x)^\beta$ doivent être des entiers alg.[[voir p. 32 pour les ?]]

Le cas 1) signifie aussi que $T_\ell(E)(\beta)$ est tel que $\pi_1(X)$ y opère à travers un *quotient fini* [Mais cet énoncé ne se généralise que via filtration de π_1, comme on voit sur $X = Spec$ corps fini].

Supposons $E \in Ob\mathcal{M}^+$ *semi-simple*, donc $T_\ell(E)$ semi-simple. Soit E_i la composante de E de type dimensionnel i, comment caractériser $T_\ell(E_i) \subset T_\ell(E)$ du pt de vue Galoisien ? Lorsque $X = Spec$ corps fini, c'est purement cunutesque en termes de Frobenius. Le cas général s'en déduit par image inverse, si on connait *tous* les Frobenius $\in \pi_1$..

14. Invariants de Galois et théorèmes de commutation

X propre et lisse sur K de type fini. $H^{2i}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(i))$ est de poids 0, donc peut avoir des invariants non nuls sous Galois. La conjecture de Tate s'énonce en disant que

$$H^{2i}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(i))^\pi \xleftarrow{\sim} \mathcal{A}^i(X/K) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$$

On peut la préciser ainsi :

L'anneau des correspondances algébriques$/K$ opèrent en dim i, $\mathcal{U}^i(X/K)$ est un anneau semisimple [via Hodge] et on veut que $\mathcal{U}^i(X/K) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ soit le commutant de $\pi = Gal(\overline{K}/K)$ dans $End_{\mathbb{Q}_\ell}(H^i(X,\mathbb{Q}_\ell(0)))$, *et* l'algèbre enveloppante de π

dans $End_{\mathbb{Q}_\ell}(H^i(X,\mathbb{Q}_\ell(0)))$ doit être le commutant de $\mathcal{U}^i(X/K)$ [donc l'action de π est semisimple].
Le deuxième énoncé + injectivité de $\mathcal{U}^i(X/K) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \to End_{\mathbb{Q}_\ell}(H^i(X,\mathbb{Q}_\ell(0)))$ entraîne tout.

N.B.

a) Ceci ne caractérise pas les données algébriques elle-mêmes, mais seulement les $\mathbb{Q}_\ell$-espaces engendrés.
b) De même, on ne peut caractériser ainsi l'image de π, mais seulement l'algèbre enveloppante ...

Passant à la limite sur les extensions finies de K, on trouve

$$H^{2i}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(i))^{\mathcal{J}_\ell(\overline{K}/K)} \xleftarrow{\sim} \mathcal{A}^i(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell,$$

$\mathcal{U}^i(X) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell$ et l'algèbre enveloppante de $\mathcal{J}_\ell(\overline{K}/K)$ dans $End_{\mathbb{Q}_\ell}\big(H^i(X,\mathbb{Q}_\ell(0))\big)$ sont commutant l'un de l'autre.

Question Comment caractériser l'image de $\mathcal{J}_\ell(\overline{K}/K)$ dans $End_{\mathbb{Q}_\ell}\big(H^i(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(0))\big)$?? Cela doit être une sous-algèbre de Lie *réductive*, on peut la considérer comme plongée dans $H^{2n-i}(\overline{X}) \otimes H^i(\overline{X})(n)$.

Si M est un motif sur K, semi-simple pour simplifier, alors on a

$$\mathcal{J}_\ell(\overline{K}/K) \to End(M_\ell) \simeq \check{M}_\ell \otimes M_\ell$$

On pense que l'image provient d'un motif $\mathcal{J}_M \subset \check{M} \otimes M$, indépendant de ℓ, [qui est un motif en algèbre de Lie]. Pour M de plus en plus grand, on trouve un *promotif* (en algèbre de Lie) canonique, appelé *promotif fondamental*, qui peut aussi se construire de façon canonique en termes de la catégorie des motifs munie de ses structures tensorielles... Quelle est la partie "algébrique" de ce promotif? [Sur un corps fini, c'est tout - le promotif n'étant lui-même autre que $\mathbb{Z}(0)$! en tout autre cas, je pense qu'il est *nul* ...].

15. Cohomologie absolue

En plus des foncteurs cohomologiques des motifs $\mathbf{R}^*f$ [f morphisme de type fini] il y a lieu de considérer également des foncteurs "absolus"

$$H^*(X,M) = (H^i(X,M))_i$$

M motif variable sur X, qui doivent provenir d'un foncteur de catégories triagulées

$$\mathbf{R}\Gamma_X : D^b(\mathcal{M}(X)) \to D^b(Ab)$$

On veut que les $H^*(X,M)$ et $\mathbf{R}\Gamma(M_\bullet)$ aient les propriétés suivantes

1) Commutation aux $\varprojlim$ essentiellement affines de préschémas quasi-compact quasi-séparés. Cela nous ramène pratiquement au cas X de type fini sur $\mathbb{Z}$.
2) Transitivité : Si $f : X \to Y$ de type fini, on a

$$\mathbf{R}\Gamma_X = \mathbf{R}\Gamma_Y\ \mathbf{R}f$$

d'où des suites spectrales dans Ab,

$$H^*(X,M) \Leftarrow H^p(Y,\mathbf{R}^q f_*(M))$$

3) Bien entendu, on veut que $H^i(X,M) = 0$ si $i < 0$, donc $H^0(X,M)$ est exact à gauche. De plus, isomorphisme fonctoriel

$$H^0(X,M) = Hom(\mathbb{Q}_X(0),M)$$

N.B. Rien n'empèche d'introduire des hyper ext

$$\mathbb{E}xt^i(X;\, M,N) = \mathbb{H}^i(X, \mathbf{R}Hom(M,N))$$

Cela redonne bien, par le N^{o}7

$$Hom(M,N) \simeq \mathbb{E}xt^0(X;M,N)$$

et on espère que $\mathbb{E}xt^1(X;M,N)$ est bien l'ensemble des *classes d'extension* de M par N.[On aimerait pouvoir dire que $\mathbb{E}xt^0(X;M,N)$ est le Ext dans la 2-catégorie des motifs, i.e., un foncteur dérivé? Pourtant, je doute que les Ext ($i > 0$) soient effaçables [peut-être dans la catégorie des Ind-motifs???]].

Notons la suite spectrale

$$\mathbb{H}^*(X,M^\bullet) \Leftarrow H^p(X,H^q(M^\bullet))$$

d'où en particulier

$$\mathbb{E}xt^*(X;M,N) \Leftarrow H^p(X,\underline{Ext}^q(M,N))$$

4) On veut des hom de ∂-foncteurs

$$H^*(X,M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \to H^*(X,T_\ell(M))$$

d'où aussi

$$\mathbb{E}xt^*(X;M,N) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell \to \mathbb{E}xt^*(X;T_\ell(M),T_\ell(N))$$

qui, sous l'hypothèse que X est de *type fini sur* $\mathbb{Z}$ (assurant le fait que les seconds membres sont de t.f. sur $\mathbb{Q}_\ell$)soient des isomorphismes, avec le complément que *$H^*(X,M)$ est un $\mathbb{Q}$-module de type fini.*

En particulier, pour un corps algébriquement clos, on aura $H^i(K,M) = 0$ pour $i > 0$, pour tout motif M.

N.B. Si X est de type fini (même projectif lisse) sur un corps algébriquement clos K, on n'a plus de telles relations précises, comme on voit par calcul explicite (utilisant les conjectures de Tate) pour K clôture algébrique d'un corps fini....

Le théorème de Tate permet de reformuler et je précise en énonçant :

$$\mathcal{A}^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}^{\nearrow \text{pas } \mathbb{Q}_\ell} \simeq \Gamma_K\big(\mathbf{R}^i f_*(\mathbb{Q}_X(0))\big)$$

X étant projectif et lisse sur K alg. clos, morphisme structural $f : X \to Spec(K)$. Une autre façon est celle-ci

$$\boxed{\mathcal{A}^i(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq Im\big(H^{2i}(X,\mathbb{Q}(i)) \to H^{2i}(X,\mathbb{Q}_\ell(i))\big)}$$

N.B. Si K est la clôture algébrique de $\mathbb{F}_p$, on trouve pour X projectif lisse sur K

$$H^i(X, \underbrace{\mathbb{Q}(j)}_{pas\ \mathbb{Q}_\ell(i)\ !}) = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq 2j, 2j+1 \\ \mathcal{A}^j(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \text{si } i = 2j \text{ (canonique)} \\ \mathcal{A}^j(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} & \text{si } i = 2j+1 \text{ (\textit{pas} canonique)} \end{cases}$$

De plus, pour $i \neq 2j$, l'image de $H^i(X,\mathbb{Q}(j))$ dans $H^i(X,\mathbb{Q}_\ell(j))$ est nulle. C'est *un fait général*: si k alg. clos, alors (si X projectif lisse sur k) l'image de $H^j(X,\mathbb{Q}(i)) \to H^j(X,\mathbb{Q}_\ell(i))$ est *nulle* pour $j \neq 2i$ (question de poids), pour $j = 2i$ ce sont les cycles algébriques à coefficients rationnels.

Notons le *théorème de dualité absolue*:
Soient M et M^* deux complexes de motifs sur X (de type fini sur $\mathbb{Z}$), qui sont "duals" pour le complexe des motifs dualisant canoniques [**N.B.** Si X est régulier partout de dim n, alors c'est la dualité à valeurs dans $\mathbb{Q}(n)[2n+1]$.] alors: $\mathbf{R}\Gamma_X(M)$ et $\mathbf{R}_!\Gamma_X(M^*)$ (le ! est pour "support compact sur $Spec(\mathbb{Z})$") sont duals. Ici [comme les coefficients sont essentiellement $\mathbb{Q}$, donc il n'y a pas de Tor] ceci revient aussi à la formule (cas régulier)

$$\boxed{\begin{array}{l} H^i(X,M) \text{ dual de } Ext_!^{2n+1-i}(X;M,\mathbb{Q}(n)) \\ H_!^i(X,M) \text{ dual de } Ext^{2n+1-i}(X;M,\mathbb{Q}(n)) \end{array}}$$

Si X propre sur $Spec(\mathbb{Z})$, inutile de mettre des ! .
Moyennant le théorème de dualité *relative* pour motifs, cet énoncé revient au même énoncé pour $X = Spec(\mathbb{Z})$, et dans le cas géométrique, pour $X = Spec(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Dans ce dernier cas, on doit vérifier simplement la dualité entre

$$H^i(\mathbb{F}_p,M) \text{ et } H^{1-i}(\mathbb{F}_p,M^*)$$
$$(M^* = Hom(M,\mathbb{Q}(0)))$$

A développer sans doute pour le cup-produit en cohomologie "absolue" ...

à l'aide des "cup-produit" et de l'isomorphisme

$$H^1(\mathbb{F}_p,\mathbb{Q}(0)) \simeq \mathbb{Q}$$

et il suffit de faire la vérification ℓ-adiquement, en appliquant les foncteurs $\mathbb{T}_\ell$. Cela ramène à la vérification suivante [pour des vect. de dim finie sur $\mathbb{Q}_\ell$ sur lesquels $\pi = \mathbb{Z}$ opère] $H^i(\pi,V)$ et $H^{1-i}(\pi,V^*)$ en dualité $(V^* = Hom_{\mathbb{Q}_\ell}(V,\mathbb{Q}_\ell))$: c'est une trivialité.

X projective lisse géométriquement connexe sur k corps fini à q éléments. Par passage à la limite sur des coefficients finis, on trouve

$$0 \to H^{i-1}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(j))_\pi \to H^i(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) \to H^i(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(j))^\pi \to 0$$

d'où le résultat

$$\text{Si } i \neq 2j,2j+1,\ H^i(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) = 0$$
$$\text{Si } i = 2j,\ H^{2j}(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) = H^{2j}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(j))^\pi \overset{\text{Conj. de Tate}}{\simeq} \mathcal{A}^j(X/k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$$
$$\text{Si } i = 2j+1,$$
$$H^{2j+1}(X,\mathbb{Q}_\ell(j)) = H^{2j}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(j))_\pi \overset{\text{Tate+action semi-simple}}{\simeq} \mathcal{A}^j(X/k) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$$

Soit maintenant k_n l'extension de degré n de k dans $\overline{k}$, et étudions

$$\varinjlim_n H^i(X_{k_n},\mathbb{Q}_\ell(j)) .$$

On trouve 0 pour $i \neq 2j,2j+1$, pour $i = 2j$ on trouve $H^{2j}(\overline{X},\mathbb{Q}_\ell(j))^{\mathcal{G}} = \mathcal{A}^j(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$, enfin pour $i = 2j+1$, on trouve également $\mathcal{A}^j(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell$.

De même, on trouve

$$H^i(\overline{X},\mathbb{Q}(j)) = \varinjlim_n H^i(X_{k_n},\mathbb{Q}(j)) = \begin{cases} 0 \quad \text{si } i \neq 2j, 2j+1 \\ \mathcal{A}^j(\overline{X}) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \quad \text{si } i = 2j \\ \text{idem} \quad \text{si } i = 2j+1 \text{ mais pas } \textit{canoniquement} \\ \text{en termes de } \overline{X}, \overline{K}\,! \end{cases}$$

N.B. Remplacer k par k_n revient à multiplier l'isomorphisme obtenu par $\frac{1}{n}$ ...

S lisse de type fini sur $\mathbb{F}_p$, M motif constant tordu de poids ρ

$$? \quad H^*(S,M_\ell) \Leftarrow H^p(\mathbb{F}_p, \mathbf{R}^q f_*(M_\ell))$$

$$0 \to \underbrace{H^{i-1}(\overline{S},\overline{M}_\ell)_\pi}_{\text{poids entre } \rho+i-1 \text{ et } \rho+Inf(2i-2,2n)} \to H^i(S,M_\ell) \to \underbrace{H^i(\overline{S},\overline{M}_\ell)^\pi}_{\text{poids entre } \rho+i \text{ et } \rho+Inf(2i,2n)} \to 0$$

Donc $H^i(S,M_\ell) = 0$ sauf si on a

$$\begin{gathered} \rho+i-1 \leqslant 0 \leqslant \rho+2i-2 \quad \textit{ou} \quad \rho+i \leqslant 0 \leqslant \rho+2i \\ \text{i.e.,} \quad 2-2i \leqslant \rho \leqslant 1-i \quad \textit{ou} \quad -2i \leqslant \rho \leqslant -i \\ \text{i.e.,} \quad -2i \leqslant \rho \leqslant -i+1 \quad (\text{si } i \geqslant 2), \\ -2 \leqslant \rho \leqslant 1 \quad (\text{si } i = 1), \\ \rho = 0 \quad (\text{si } i = 0). \end{gathered}$$

16. Relations avec les points rationnels et la cohomologie des variétés abéliennes sur des schémas de type fini ...

Soit A_K VA sur corps K de *type fini* pour commencer. Alors K est le corps des fonctions d'un schéma S irréductible et régulier, de type fini sur $\mathbb{Z}$ et tel que A_K provient d'un schéma abélien sur S. De plus, on a

$$A_K(K) = A(S)$$

et on sait que c'est un *groupe de type fini* par Mordel-Weil-Néron-Lang.
Soit $f : A \to S$ la projection, et considérons le motif

$$\mathbf{R}^1 f^*(\mathbb{Q}_{A^*}(1)) \simeq T_{\text{motif}}(A)$$

[où A^* est le dual de A], qui est un motif constant tordu sur S pur de poids 1, qui redonne A_K à isogénie près (sur K ?) comme conséquence des conjectures de Tate.
On s'attend donc à pouvoir écrire $A(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ en termes de ce motif M. Or en effet, des raisons heuristiques convaincantes nous suggèrent

$$A(S) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \simeq H^1(S, T_{\text{mot}}(A))$$

[**N.B.** on doit avoir $H^0(S, T_{\text{mot}}(A)) = 0$, à cause de considérations de poids...].
Considérons [pour ℓ premier aux car. résiduelles de X],

$$0 \to {}_{\ell^\nu}\mathrm{A} \to A \to A \to 0$$

d'où

$$0 \to H^0(S,A)_{\ell^\nu} \to H^1(S, {}_{\ell^\nu}\mathrm{A}) \to {}_{\ell^\nu}\mathrm{H}^1(S,A) \to 0$$

et par passage à la limite et $\otimes_{\mathbb{Z}_\ell}\mathbb{Q}_\ell$

$$
\begin{array}{ccccccc}
0 \longrightarrow & \underbrace{H^0(S,A)}_{\text{de type fini sur } \mathbb{Z}} \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell & \longrightarrow & H^1(S, T_\ell(A))_{\mathbb{Q}_\ell} & \longrightarrow & T_\bullet(H^1(S,A))_{\mathbb{Q}_\ell} & \longrightarrow 0 \\
& & & \wr\Vert & & & \\
& & & H^1(S, T_{\mathrm{mot}}(A)) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}_\ell & & &
\end{array}
$$

et le résultat escompté ici équivaut moralement à celui-ci :

$$\boxed{H^1(S,A)(\ell) \text{ \textit{\textbf{fini}} si } \ell \text{ “premier à } S\text{” } (S \text{ de type fini sur } Spec(\mathbb{Z})).}$$

par ex. si $S = Spec(\mathbb{F}_q)$, alors c'est vrai par Lang !
Si S est de type fini sur $\mathbb{F}_p$, on aura (travaillant avec des *faisceaux étales*) si $f : S \to Spec(\mathbb{F}_p)$

$$
\begin{tikzcd}
& M \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \arrow[d, phantom, "\wr\Vert"] & & & \\
0 \arrow[r] & H^1(\mathbb{F}_p, \mathbf{R}^0 f_* A) \arrow[r] & H^1(S,A) \arrow[r] & H^0(\mathbb{F}_p, \mathbf{R}^1 f_* A) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\
& & & H^1(\overline{S},\overline{A})^\pi &
\end{tikzcd}
$$

Or on a, toujours par “Kummer”

$$0 \to H^0(\overline{S},\overline{A}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \to H^1(\overline{S}, {}_{\ell^\infty}\overline{\mathrm{A}}) \to H^1(\overline{S},\overline{A})(\ell) \to 0$$

d'où le fait que $H^1(\overline{S},\overline{A})(\ell)$ soit de poids $1 - 1 = 0$ Si par ex. S est projectif lisse sur $\mathbb{F}_p$, a priori rien ne s'oppose à ce qu'il y ait un gros module d'invariants.
D'autre part, on a

$$0 \to \underbrace{A^{fixe}}_{\text{point fixes de la V.A. } A \text{ sur } S} \to \mathbf{R}^0 f_*(A) \to \underbrace{M}_{\pi-\text{module, de type fini sur } \mathbb{Z}} \to 0$$

d'où

$$
\begin{array}{ccccccc}
H^1(\mathbb{F}_p, A^{fixe}) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{F}_p, \mathbf{R}^0 f_*(A)) & \longrightarrow & H^1(\mathbb{F}_p, M) & \longrightarrow & 0 \\
\Vert & & & & \Vert & & \\
\underbrace{0}_{\text{par Lang}} & & & & (M \otimes \mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\pi & &
\end{array}
$$

Si S est de type fini sur $\mathbb{F}_p$, on obtient le diagramme suivant

$$
\begin{tikzcd}
& M^\pi \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \arrow[d, phantom, "\wr\Vert"] & & & \\
0 \arrow[r] & H^0(S,A) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \arrow[r] \arrow[d] & H^1(S, {}_{\ell^\infty}A) \arrow[r] \arrow[d] & H^1(S,A)(\ell) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \left(H^0(\overline{S},\overline{A}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell\right)^\pi \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\Vert"] & H^1(\overline{S}, {}_{\ell^\infty}\overline{A})^\pi \arrow[r] & H^1(\overline{S},\overline{A})(\ell)^\pi \arrow[r] & 0 \\
& (M \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell)^\pi & & &
\end{tikzcd}
\tag{1}
$$

[où $M = H^0(\overline{S},\overline{A})/H^0(\overline{\mathbb{F}}_p,\overline{A}^{fixe})$, π est le groupe de Galois de $\overline{\mathbb{F}}_p$ sur $\mathbb{F}_p$]
Les déterminations $H^0(S,A) \simeq M^\pi$ et $H^0(\overline{S},\overline{A}) \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell \simeq M \otimes \mathbb{Q}_\ell/\mathbb{Z}_\ell$ sont standard ; on voit que la première flêche verticale estt un isomorphisme mod groupes finis. D'autre part, on trouve (suite spectrale de Leray de $f : S \to Spec(\mathbb{F}_p)$ pour la *top. étale*)

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & H^1(\mathbb{F}_p, \mathbf{R}^0 f_*(A)) \arrow[r] \arrow[d, phantom, "\wr\|"] & H^1(S,A) \arrow[r] & H^0(\mathbb{F}_p, \mathbf{R}^1 f_*(A)) \arrow[r] \arrow[d, equal] & 0 \\ & \text{groupe fini} & & H^1(\overline{S},\overline{A})^\pi & \end{tikzcd}$$

comme on voit utilisant

$$0 \to A^{fixe} \to \mathbf{R}^0 f_*(A) \to M \to 0,$$

et de ce fait $H^1(\mathbb{F}_p, A^{fixe}) = 0$ (Lang) et $H^1(\mathbb{F}_p, M)$ =fini [trivial, attention qu'il s'agit de la coh. *étale*, i.e., la coh. *galoisienne* de $\widehat{\mathbb{Z}}$!], donc la dernière flêche verticale du diagramme (1) est aussi bijective :

$$H^1(S,A)(\ell) \simeq H^1(\overline{S},\overline{A})^\pi(\ell)$$

surj. à noyau fini... Donc la *conjecture* précédente signifie aussi

$$\boxed{H^1(\overline{S},\overline{A})(\ell)^\pi = \text{groupe fini}}$$

C'est aussi $\pm$ équiv. (via des jacobiennes) à ceci : $X \to S$ morphisme propre [lisse de dim relative 1], S régulier de type fini sur $\mathbb{Z}$. Prouver que $H^2(S, \mathbb{G}_m) \to H^2(X, \mathbb{G}_m)$ est surjectif mod groupes finis??

Donc les seuls invariants qui restent sont H^0 et H^2 pour A, et H^1, H^2 pour $T_\ell(A)$

N.B. On devrait avoir $H^i(S,A)(\ell)$ fini aussi pour $\mathbf{i} \geqslant \mathbf{3}$, S de type fini sur $\mathbb{Z}$, ℓ premier aux car. résiduelles (N.B. Si $i \geqslant 2$, $T_\ell(H^i(S,A)(\ell)) \simeq H^i(S, T_\ell(A))$).
Noter que

$$H^1(S, T_\ell(A)) \simeq H^1(\overline{S}, T_\ell(\overline{A}))^\pi$$

Donc notre conjecture signifie essentiellement

$$\operatorname{rang}_{\mathbb{Q}_\ell}\left(H^1(\overline{S}, T_\ell(\overline{A}))^\pi\right) \simeq \operatorname{rang}_{\mathbb{Z}} A(K)$$

et sous cette forme est essentiellement équivalente à la *conjecture de Birch-Swinnerton-Dyer.*

[[Observation complémentaire]][3] $H^2(S,A)$ (dont le T_ℓ est $H^2(S,T_\ell(A))$) n'est pas nécessairement nul comme on voit si S est une courbe lisse projective géom. connexe sur $\mathbb{F}_p$, et $A = J \times S$, où J est la jacobienne de S. On a en tous cas

$$\begin{aligned} H^2(S, T_\ell(A)) &\simeq H^1(\overline{S}, T_\ell(\overline{A}))_\pi = [T_\ell(\overline{J}) \otimes T_\ell(\overline{J})]_\pi \\ &\simeq End(J) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \simeq (\text{Classe de correspondances divisorielles sur } C \times C) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q} \end{aligned}$$

qui est non nul...

C courbe lisse propre sur $\mathbb{F}_q$.

3. N.d.T : Il s'agit d'observations faites par Grothendieck et se trouvant au verso d'une page de cette section.

A schéma abélien sur C.
Des conjectures de Weil, résulte que

$$H^i(C,A) = 0 \text{ si } i \geqslant 2\,,$$

et sans doute, utilisant Tate, on doit avoir

$$H^1(C,A) = 0$$

Soit x un pt fermé de C, $\mathcal{U} = C - \{x\}$, alors on a

$$\begin{array}{ccccccc} H^1(C,A) & \longrightarrow & H^1(\mathcal{U},A) & \longrightarrow & H^2_x(C,A) & \longrightarrow & H^2(C,A) \\ \| & & & & & & \| \\ 0 & & & & & & 0 \end{array}$$

d'où

$$H^1\mathcal{U},A) \simeq H^2_x(C,A)$$

Or par Tate,

$$H^2_x(C,A) \overset{?}{=} H^1(K_x,A),$$

dual de $H^0(K_x,A^\times)$.
c'est donc ***essentiellement un p-groupe***, [[..]] groupe fini !
Peut se généraliser au cas où on prend X régulier auquel on enlève un diviseur régulier...
Calculs pour $T_\ell(\mathbb{G}_m) = \mathbb{Q}_\ell(1)$ et $\mathbb{G}_m$:
X de type fini sur $\mathbb{Z}$

$$\begin{aligned} &H^0(X,\mathbb{Q}_\ell(1)) = 0 \\ &H^1(X,\mathbb{Q}_\ell(1)) = H^0(X,\mathcal{O}_X^*) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}_\ell \\ &H^2(X,\mathbb{Q}_\ell(1)) = \begin{cases} \text{extension de } T_\ell(H^2(X,\mathbb{G}_m)) \ (\sim \textit{co-Brauer}) \\ \text{par } H^1(X,\mathcal{O}_X^*) \otimes \mathbb{Q}_\ell \end{cases} \\ &H^3(X,\mathbb{Q}_\ell(1)) \simeq T_\ell(H^3(X,\mathbb{G}_m)) \text{ est ce qu'il peut} \end{aligned}$$

[par.ex. $\mathbb{Z}_\ell$ si X modèle canonique d'un corps de fonctions d'une variable sur $\mathbb{F}_p$]

$$\begin{array}{c} H^i(X,\mathbb{Q}_\ell(1)) = 0 \quad \text{si } \ i \geqslant 4 \quad ?? \\ \| \\ T_\ell(H^i(X,\mathbb{G}_m)) \end{array}$$

On conjecture (Artin) que $H^2(X,\mathbb{G}_m)$ =groupe fini si X propre sur $\mathbb{Z}$. Vrai si X courbe projective lisse sur $\mathbb{F}_p$, mais faux quand on lui enlève des pts car le rang de H^2 augmente d'autant $H^3(X,\mathbb{Q}_\ell(1))$: quel que soit sa taille [il décroit en passant à un ouvert de X].

17. Formes positives

La théorie étant géométrique, nous nous plaçons sur un corps alg. clos K. Nous ne considérons que des motifs *semi-simples* sur K, purs de poids ρ. Soit M un tel motif, considérons les formes

$$M \times M \to \mathbb{Q}(-\rho)$$

i.e., les éléments de

$$\Gamma_K(\mathcal{H}om(M \otimes M,\mathbb{Q}(-\rho))) \simeq \Phi(M)$$

où le $\mathcal{H}om$ est bien de poids 0. Elles forment un vectoriel de dim finie sur $\mathbb{Q}$. On considère le sous-espace des formes *symétriques* si ρ est pair, *alternée* si ρ est impair. Cet espace sera noté $\Phi^s(M)$. Noter les hom. canoniques

$$\Phi^s(M) \otimes \Phi^s(N) \to \Phi^s(M \otimes N)$$

par produit tensoriel des formes [**N.B.** le produit tensoriel de deux formes de même type de symétrie est symétrique, de deux types opposés de symétrie est antisymétrique]. Bien entendu, ils ne sont pas en général bijectifs (mais du moins injectifs).

On a aussi

$$\Phi^s(M' \times M'') \simeq \Phi^s(M') \times \Phi^s(M'') \times \mathscr{B}(M',M'')$$

où $\mathscr{B}(M',M'') = Hom(M' \otimes M'',\mathbb{Q}(\rho))$.

Ceci posé, on a dans $\Phi^s(M)$ un cône convexe fermé $\Phi^+(M)$. On a les propriétés suivantes :

formes $\in \Phi^+(M)$ sont dites pseudo-amples, celle dans l'intérieur sont dites *amples*

(i) $\Phi^+(M)$ a un intérieur non vide.
(ii) Un élément de $\Phi^+(M)$ est dans l'int. de $\Phi^+(M)$, ssi il est non dégénéré.
(iii) Pour $M \to N$, $\Phi^+(N)$ s'envoie dans $\Phi^+(M)$.
(iv) Si $M \to N$ injectif, l'intérieur de $\Phi^+(N)$ s'envoie dans l'intérieur de $\Phi^+(M)$, formes amples $\to$ formes amples.
i.e., la forme induite sur M par une forme ample est non dégénérée, donc $N = M \oplus M^\perp$, et la forme sur N est la somme des formes induites sur M, $M^\perp$.
(v) La somme directe de deux formes pseudo-amples (amples) est itou.
(vi) Le produit tensoriel de deux formes amples est ample.
(vii) Si $\rho = 0$, de sorte que essentiellement M est défini par un vectoriel de dim finie sur $\mathbb{Q}$, alors les formes amples sont les formes *définies positives*.
(viii) Cas des $\mathbb{Q}(\rho)$: on a $\Phi^s(\mathbb{Q}(\rho)) \simeq \mathbb{Q}$ et on voit que les formes amples correspondent aux nombres *strictement positifs*.

De (vi) et (viii) résulte que pour tout motif M et entier n, l'isomorphisme

$$\Phi^s(M) \simeq \Phi^s(M(n))$$

est compatible avec les cônes amples.

De (iv) et (vi) résulte que si $\rho = 0$, une forme ample sur M induit une forme *définie positive*

$$\Gamma_K M \times \Gamma_K M \to \Gamma_K \mathbb{Q}(0) = \mathbb{Q}$$

Si on décompose M (de poids ρ) en composantes isotypiques M_α, il vient

$$\Phi^s(M) \simeq \bigoplus_\alpha \Phi^s(M_\alpha)$$

donc pour étudier les formes positives, il suffit de les étudier en principe sur les morceaux isotypiques, qui sont d'ailleurs de la forme

$$I \otimes_A V$$

où I est un motif simple, A son anneau des endomorphismes, qui est un corps, et V un *vectoriel* sur A

18. Dictionnaire : Fonctions L - Cohomologie à action galoisienne

Soit k un anneau, $\mathcal{C}$ la catégorie des modules de longueur finie sur $k[t]$ = modules projectifs de rang fini sur k munis d'un endomorphisme f = $k[\mathbb{N}]$-modules projectif de rang fini sur k.
Cette catégorie donne lieu à un λ-anneau, noté $R^{\bullet}(\mathbb{N},k)$, qui est aussi, si k est un corps, le groupe libre engendré par les classes de $k[\mathbb{N}]$-modules simples finis sur k, ou encore les $k[t]$-modules simples, ou encore les polynômes unitaires irréductibles $P \in k[t]$, en associant à P le module $k[t]/Pk[t]$. A tout tel P est associé un (V,f), dont le polynôme car. est précisément P,

k un corps ou non

$$P(t) = \det(t\, id_V - f)$$

[vrai pour tout P, irr. ou non !]. Il nous sera plus commode de remplacer $P(t)$ par

$$Q(t) = t^d P\left(\frac{1}{t}\right) = \det(1 - tf)$$

qui est un polynôme quelconque à coeff. cst. égal à 1.
Ainsi, on obtient via le pol. car. modifié un hom

$$(V,f) \rightsquigarrow \frac{1}{\det(id_V - ft)} = L(V,f)$$

$$R(\mathbb{N},k) \to 1 + k[[t]]^+$$

en fait, à valeurs dans les *fonctions rationnelles* de valeurs 1 en 0

qui, composé avec l'aut. "additif" $\varphi(t) \rightsquigarrow \dfrac{1}{\varphi(-t)}$ dans $1 + k[[t]]^+$, est un hom de λ-anneau. Lorsque k est un corps, l'hom précédent est injectif. En effet, la connaissance de la série formelle permet de reconstituer la fonction rationnelle L, donc [$k[t]$ étant factoriel] l'élément $\displaystyle\sum_{P\text{ pol. unitaire}} c_P(V_P,f_P)$ par $L = \displaystyle\prod_Q Q^{c_P}$

[Q et P associés de la façon précisée plus haut].
Notons qu'on a un homomorphisme naturel

$$1 + k[[t]]^+ \to k[[t]]$$

$$\varphi(t) \rightsquigarrow \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)}$$

qui correspond à

$$\Lambda(V,f)(t) = \frac{L(V,f)'(t)}{L(V,f)(t)} = [\log(L(V,f))]' = \frac{1}{t}\sum_1^{\infty}(Trf^n)t^n$$

Si k de car. 0, i.e., $k \supset \mathbb{Q}$, on peut inverser cet homomorphisme par $\exp(\int_0^{\cdots} \Lambda(V,f)(t))$.
Donc, si k est un corps de car. 0, $\Lambda : R(\mathbb{N},k) \to k[[t]]$ est alors injectif.
Si k n'est pas de car. 0, on ne peut en général aller en sens inverse, et $R(\mathbb{N},k) \xrightarrow{\Lambda} k[[t]]$ n'est pas injectif. [k corps de car. > 0]

On voit par la formule de Lefschetz-Weil-Grothendieck que la connaissance de la fonction L de X, compactifiable sur $\mathbb{F}_p$, à coeff. dans F, *équivaut* à celle de l'élément $\underline{\chi}(F) = \sum(-1)^i cl\, H^i_!(\overline{X},\overline{F})$ de $R(\mathbb{N},\mathbb{Q}_\ell)$ [car essentiellement cette fonction L est l'image de $\underline{\chi}(F)$ dans $1+\mathbb{Q}_\ell[[t]]^+]$. Lorsque on admet les conjectures de Weil, et F est un motif, $\underline{\chi}(F)$ se décompose suivant des poids en des $\sum(-1)^i\underline{h}^i(F)$, $\underline{h}^i(F)\in R(\mathbb{N},\mathbb{Q}_\ell)$, et la connaissance de $L(X,F)(t)$ *équivaut* à celle des $\underline{h}^i(F)$: les $\underline{h}^i(F)$ correspondent à la décomposition de $L(X,F)$ en groupant suivant les valeures absolues des zéros et pôles... Lorsque X est complète et lisse, et F constant tordu, de poids ρ, on a $\underline{h}^i(F) = H^{i-\rho}(\overline{X},\overline{F})$ comme $\mathbb{N}$-modules, dans ce cas la connaissance de $L(X,F)$ équivaut à celle des $H^i(\overline{X},\overline{F})$ et l'opération de Frobénius dedans.

Considérons d'autre part [pour X de dim n] les ouverts $\mathcal{U}$ de X tel que $X-\mathcal{U}$ de dim $<n$, et les $L(\mathcal{U},F|_\mathcal{U})$, qui ne différent (pour F pur de poids ρ) que par des fonctions rationnelles de poids $\leqslant 2n-2+\rho$. Donc, à priori la connaissance de l'invariant birationnel $L(X,F)$ mod. fonctions rat. de poids $\leqslant 2n-2+\rho$, *équivaut* à celles de $cl\, H_!^{2n}(X,F) - cl\, H_!^{2n-1}(X,F)$ mod. la même chose. On peut supposer X [affine et] lisse sur $\mathbb{F}_p$ variété de dim n, alors $H_!^{2n}(X,F)$ est dual de $H^0(X,\mathcal{H}om(F,\mathbb{Q}_\ell(n))) = H^0(X,\check{F})(n)$, donc de poids $2n$. D'autre part, $H_!^{2n-1}(X,F)$ est dual de $H^1(X,\mathcal{H}om(F,\mathbb{Q}_\ell(n)))$, et admet en général des poids $2n-1$ *et* des poids $2n-2$. Si $F=\mathbb{Q}_\ell(0)$, donc si on s'occupe des fonctions ζ habituelles, la connaissance "birationnelle grossière" de ζ est essentiellement équivalente à celle de $\pi_0(\overline{X})$ comme Frob-ensemble, et celles des Albanese de X sur $\mathbb{F}_p$ ... Une analyse plus serrée (plus le seul poids, mais en tuilisant aussi le niveau) permet de récupérer plus par la connaissance de $\zeta(X)$ (disons, en prenant $F=\mathbb{Q}_\ell$) modulo les $\zeta(Y)$ $(dim(Y)<n)$.

le poids ici n'est par la bonne filtration cf. N° 12

peut se raffiner en regardant une autre filatration que pa le poids, savoir le niveau...

modulo conjectures de Tate

Savoir les "invariants birationnels fondamentaux" relativement à $\mathbb{F}_p$, envisagés dans les notes sur les *motifs*.

Il semblerait opportun d'étudier le cas des coefficients F généraux et de voir si, pour un morphisme $f : X\to Y$ disons lisse propre, F ct. tordu sur X, la connaissance de $L(X,F)$ modulo $L(f^{-1}(Y'),F)$, pour Y' propre dans Y, permet de récupérer les invariants birationnels fondamentaux de $(X_K,F(X_K))/K$ [K corps des fonctions de Y]. Dans *quelle mesure faut-il faire les hypothèses f lisse propre, et F ct. tordu* pour obtenir des énoncés de cette nature??

19. Relation avec la théorie de Hodge

[[manque]] [4]

4. N.d.T: semble avoir été reconsidérer et traiter dans le document ...