凸锥的一些性质（第一部分）

作者：程天任

凸锥是泛函分析中一个重要的话题，凸锥具有很多奇妙的性质。例如：

Normality,modulability,reproducing,solidity,sharpness 等等。Iusem 和 seeger 在他们的论文：normality and modulability indices,convex cones in normed spaces 中讨论了这些性质。这里，我们继续这个讨论。本文共有两部分。下面所述是第一部分：

性质 1：

定理：

对于一个赋范空间中的凸锥 K，有以下五个等价条件：

1. K 是 modulable 的
2. $0 \in \operatorname{int}\{u-v : u,v \in K, \|(u,v)\| \le 1\}$
3. $0 \in \operatorname{int}\{K \cap BX - K \cap BX\}$
4. $0 \in \operatorname{int}\{K \cap V - K \cap V\}, V \in NX(0)$
5. $0 \in \operatorname{int}\{K \cap V_1 - K \cap V_2\}, V_1, V_2 \in NX(0)$

主要结果：

1. $x = u - v$

2. $r\|x\|^{-1} x = u' - v'$

3. $\left\|(u^{'},v^{'})\right\|\le 1$

4. $x=\frac{\|x\|}{r}u^{'}-\frac{\|x\|}{r}v^{'}$

5. $r\|(u,v)\|=\|x\|\left\|(u^{'},v^{'})\right\|\le\|x\|$

推论：

设 a 是 Y 的内点，则存在 $r>0$ 使得

$U(a,r)=\{x\in X:\|x-a\|<r\}\subset Y$

设 x 是 X 的任一元素。若 $x\neq 0$，有：

$y=a+\frac{r}{\|x\|}x$，则

$\|y-a\|=\frac{r}{\|x\|}\|x\|\le r$ 。所以，

$y\in U(a,r)\subset Y$,有：

$y-a=\frac{r}{\|x\|}x=u^{'}-v^{'}$

$x=\frac{\|x\|}{r}u^{'}-\frac{\|x\|}{r}v^{'}=\frac{\|x\|}{r}(y-a)$

因为，

$y-a=u^{'}-v^{'}$

所以，

$x=u-v$

$y=a+u^{'}-v^{'}$

$$\pi(x)=\frac{y}{x}=\frac{a}{u-v}+\frac{u^{'}-v^{'}}{u-v}=\frac{a}{x}+\frac{r}{\|x\|}$$

因为，

$x=u-v$，所以：

$$\frac{x^{'}}{x}=\frac{u^{'}-v^{'}}{u-v}=\frac{r}{\|x\|}$$

解答：考虑在有限闭的条件下，成立等式：$\frac{x^{'}}{x}=\frac{u^{'}-v^{'}}{u-v}=\frac{r}{\|x\|}$。

根据这个关系，我们甚至可以得出$\|x^{'}\|=r$这个结论。考虑：

$\|(u^{'},v^{'})\|=\sqrt{\|u\|^2+\|v\|^2}$，我们可以得出$u\perp v$这个条件。

性质 2：

定理：

赋范空间中一个凸锥是 modulable 的如果且仅仅集合

$K^*=aco[K\bigcap BX]$是零点的临域。

主要结论：

1.$\|(u,v)\|_p=[\|u\|^p+\|v\|^p]^p(1\leq p<\infty)$

2.$V_p(K)=\{u-v:u,v\in K,\|(u,v)\|_p\leq 1\}$

3.$V_P(K)=\bigcup\{\alpha(K\bigcap BX-\beta(K\bigcap BX))\}$

$$\alpha^{P}+\beta^{P}\leq 1,(\alpha,\beta\geq 0)$$

推论：

$$\|u\|^{p}+\|v\|^{p}\leq 1$$

$$\int_{E}|u|dx+\int_{E}|v|dx\leq 1$$

根据 R-L 定理，如果$u\perp v$则可以设：

$$u(x)=X_{A}(x)\sin\lambda_{n}x$$

$$v(x)=X_{B}(x)\cos\lambda_{n}{'}x$$

X(x)表示特征，$\lambda_{n}x=\lambda_{n}{'}x$

其中，

$$A=\bigcup\alpha(K\bigcap BX)$$

$$B=\bigcup\beta(K\bigcap BX)$$

$$\int_{E}|u|dx+\int_{E}|v|dx=\int\left|X_{A}(x)\sin\lambda_{n}x+X_{B}(x)\cos\lambda_{n}{'}x\right|dx\leq 1$$

所以，

$$m\bigcup(K\bigcap BX)\int\ (\alpha\sin\lambda_{n}x+\beta\cos\lambda_{n}{'}x)\leq 1$$

$$\sqrt{\alpha^{2}+\beta^{2}}\sin\rho\leq\frac{1}{m\bigcup(K\bigcap BX)}$$

其中，$\rho=\lambda_{n}{'}x+\arctan\dfrac{\beta}{\alpha}$

或者，u与v满足另一种关系：

$$u(x)=X_{A}(x)\cos(\omega x+\theta)$$

$$v(x)=X_{B}(x)\cos(\omega x+\delta)$$

则，

$$\alpha\sin(\omega x+\theta)+\beta\sin(\omega x+\delta)=$$

$$\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos(\theta,\delta)}*\sin\frac{wx+\arcsin(\alpha\sin\theta+\beta\sin\delta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos(\theta,\delta)}}$$

$$\le\frac{1}{m\bigcup(K\bigcap BX)}$$

$$\sin\frac{wx+\arcsin(\alpha\sin\theta+\beta\sin\delta)}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos(\theta,\delta)}}\le\frac{1}{m\bigcup(K\bigcap BX)\sqrt{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\beta\cos(\theta,\delta)}}$$

其中，$\alpha=\bigcup\alpha_i\ \ \beta=\bigcup\beta_i$

$\|u\|=\|v\|=1$

解答：考虑到$\alpha^P+\beta^P\le1,(\alpha,\beta\ge0)$。在 $p=1,2,3.........$时，$\alpha=\bigcup\alpha_i\ \ \beta=\bigcup\beta_i$具有不变的测度。所以，我们引入特征 $X_A(x)$，$X_B(x)$。当$u\perp v$时，用第一个公式；否则，用第二个公式。对比两个公式，我们发现：在正交的情况下，

$\sin\rho<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$， $\rho<45^o$即ρ的上界大于 45 度。

但是，在不正交的情况下ρ的上界可以小于 45 度。

性质 3：

定理：

对于椭圆锥，有如下结论：

主要结果：

1. $\sqrt{\varepsilon^T A\varepsilon}=t$

2. $\|\varepsilon\|^2+t^2=1$

3. $r=\inf\|(0,0)-(\varepsilon,0)\|$

4. $r^2=\inf\|\varepsilon\|^2=[\sup\frac{\varepsilon^T(I+A)\varepsilon}{\|\varepsilon\|^2}]^{-1}$

5. $\varepsilon^T(I+A)\varepsilon=1$

推论：

设：

$\|\varepsilon\|^2=\sin^2\theta$，$t^2=\cos^2\theta$

因为，

$$\cos^2\theta=t^2=\varepsilon^T A\varepsilon$$

则存在正交阵 A 使得：

$$\varepsilon^T A\varepsilon=\prod a_i$$

$$\cos^2\theta=\prod a_i$$

$$r^2=\inf\|\varepsilon\|^2$$

$$r^2=\inf\sin^2\theta$$

如果，$\theta\in(0,\frac{\pi}{2})$

则，$\inf\sin^2\theta=\sup\cos^2\theta$

$$\prod a_i = \cos^2\theta \le r^2 = [\sup \frac{\varepsilon^T (I+A)\varepsilon}{\|\varepsilon\|^2}]^{-1}$$

因为，$\varepsilon^T (I+A)\varepsilon = 1$。所以，

$$\prod a_i \le [\sup \frac{1}{\|\varepsilon\|^2}]^{-1}$$

$$\prod a_i \le [\sup \frac{1}{\sin^2\theta}]^{-1}$$

$$\prod a_i \le \inf \sin^2\theta$$

即，

1. $\cos^2\theta \le \sin^2\theta$
2. $\prod a_i \le \|\varepsilon\|^2 = \sin^2\theta$

解答：由最后的矛盾：$\prod a_i \le \|\varepsilon\|^2 = \sin^2\theta$

我们得出：不则存在正交阵 A 使得：$\varepsilon^T A\varepsilon = \prod a_i$

即 A 不是实对称矩阵。同时，我们由另一个结果：

$\cos^2\theta \le \sin^2\theta$得出：$\theta > \frac{\pi}{4}$。这样，我们就得到了与例 2 类似的结果。

性质 4：

定理;

考 虑 向 量 空 间 中 的 有 界 范 数 $x:[a,b] \to R$ 以 及 范 数 :

$\|x\| = \sup_{a \le t \le b} |x(t)|$

有以下几个结果：

1. $x(t) = \max\{0, x(t)\} - \max\{0, -x(t)\}$

2. $\inf \|(u,v)\|_1 \le \|(x_+, x_-)\|_1 \le \|x_+\| + \|x_-\| \le 2\|x\|$

3. $\inf\ x(t)^* = -1, \sup x(t)^* = 1$

4. $\|(u,v)\|_1 \ge 2$

5. $u(t^*) - v(t^*) = x(t^*) = 1$

$u(t_*) - v(t_*) = x(t_*) = -1$

推论：

因为，

$x_+(t) = \max\{0, x(t)\}$

$x\_(t) = \max\{0, -x(t)\}$

如果，

$x(t)$是奇函数，则

$x\_(-t) = \max\{0, x(t)\}$

有：$x_+(t) - x\_(-t) = 0$

又有：

$x_+(t) + x\_(-t) = 2\max\{0, x(t)\}$

因为，

$\|x_+\| \le \|x\|, \|x_-\| \le \|x\|$

$2\|x\| \ge \|x_+\| + \|x_-\| \ge \|x_+ + x_-\| = 2\max\{0, x(t)\}$

$\|x\| \ge \max\{0, x(t)\}$

如果不取等号，$\|x_+\|$与$\|x_-\|$不在一条直线上的相反方向，则有：

$$x(t) < 0$$

反之，

当$x(t)$是奇函数，则

$$x_+(-t) = \max\{0, -x(t)\}$$

则

$$x\_(t) - x_+(-t) = 0$$

$$x_+(-t) + x_+(t) = 2\max\{0, -x(t)\}$$

$$\|x\| \geq \max\{0, -x(t)\}$$

同理：

$$x(t) > 0$$

下面，我们来考虑一类函数：

$$f(x) = \frac{t^A}{b-a}\sin\frac{\pi}{t^A} \qquad t \neq 0$$

$$= 0 \qquad t = 0$$

$$f'(x) = \frac{1}{b-a}[At^{A-1}\sin\frac{\pi}{t^A} - t^A \pi A \frac{1}{t^{A+1}}\cos\frac{\pi}{t^A}]$$

$$= \frac{1}{b-a}[At^{A-1}\sin\frac{\pi}{t^A} - \pi A \frac{1}{t^2}\cos\frac{\pi}{t^A}]$$

因为这个函数是奇函数。那么在什么条件下，有：

$$\frac{t^A}{b-a}\sin\frac{\pi}{t^A}>0$$

$$\frac{t^A}{b-a}\sin\frac{\pi}{t^A}<0 \qquad \text{A=1,2,3……}$$

解答：本例中举出一个特殊函数的例子，这个例子其实是函数$x\sin\frac{\pi}{x}$的变体。然后，我们引入凸锥。考虑到凸锥的性质：1.$t\in(0,1), tA+(1-t)A\subset A$

2. 当$tA\subset A, t>0, A+A\subset A$且$A\bigcap(-A)\subset 0$

那么，我们如何把凸锥与这个特殊的函数联系起来呢？

我们知道：$x\sin\frac{\pi}{x}$，这类函数具有特殊的性质：它是连续的，但不是绝对连续的。参考这个定理的证明，我们看到：

$$\varepsilon>\sum\left|f(\frac{2}{2i-1})-f(\frac{2}{2i+1})\right|=\sum(\frac{2}{2i-1}+\frac{2}{2i+1})>\sum\frac{1}{2i-1}>\varepsilon$$

根据凸锥的性质 1，我们得到：

$\frac{4t+4i-2}{4i^2-1}\in A,$我们取：$t=\frac{1}{2}$。得到：$\frac{4i}{4i^2-1}\in A$

根据性质 2，同样地，我们得到：$\frac{4i}{4i^2-1}\in A$

我们得到：对于$x=\frac{4i}{4i^2-1}$,无论i取什么整数，$\sin\frac{\pi}{x}$总是小于$\frac{\pi}{4}$。这样，我们第二次得到了例 2 中的角度。

但是$\sin\frac{\pi}{x}$有时大于零，有时小于零。这正是本例要做到的事。

性质 5：

定理：

X 是一个复希尔伯特空间且由内积生成。X 是 polite 的。

主要结果：

1.$\eta(x)=\left\|x+tz\right\|^2-1=t^2+2t<x,z>+r^2-1$

$$r=\beta-<x,z> \quad , \quad \beta=\sqrt{1-r^2+<x,z>^2}$$

2.$\varphi(x)=\left\|t(x+rz)-z\right\|^2-r^2=t^2-2t<x+rz,z>+1-r^2$

$$=t^2-2\beta t+1-r^2$$

推论：

因为：

$$\left\|x+tz\right\|^2=<x,x>+<x,tz>+<tx,z>+<tx,tz>$$

$$=\left\|x\right\|^2+t^2\left\|z\right\|^2+2\operatorname{Re}t^*<x,z>$$

如果，$x\perp z,$则：

$$2\operatorname{Re}t^*<x,z>=0$$

设$t=\dfrac{\beta-<x,z>}{\left\|z\right\|}$　　则，

$$t^2\left\|z\right\|^2=r^2$$

则$t^2+2t<x,z>=\frac{r^2}{\|z\|^2}+2t<x,z>$

$$t^2+2t<x,z>=t^2=\frac{r^2}{\|z\|^2}=\|x\|^2$$

$$\|x\|=\frac{r}{\|z\|}$$

又因为：

$$t\left\|x+(r-\frac{1}{t})z\right\|=t^2-2\beta t+1$$

所以：

$$\left\|x+(r-\frac{1}{t}z)\right\|=t-2\beta+\frac{1}{t}$$

令$k=r-\frac{1}{t}=r-\frac{\|z\|}{r}$

$$\left\|x+(r-\frac{1}{t})z\right\|=t-2\beta+\frac{1}{t}$$

$$\|x\|^2+(r-\frac{1}{t})^2\|z\|^2=t-2\beta+\frac{1}{t}$$

$$\frac{r^2}{\|z\|^2}+(r-\frac{1}{t})^2\|z\|^2=t-2\beta+\frac{1}{t}$$

因为，$\|z\|^2>0$

所以;

$t-2\beta+\frac{1}{t}>r(r-\frac{1}{t})$

如果$t>0$，则：

$t^2-(2\beta+r^2)t+1+r>0$

考虑这个方程的性质：

$\Delta=(2\beta+r^2)^2-4(1+r)$

$t_{1,2}=(2\beta+r^2)\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

$\|x\|^2-(2\beta+r^2)\|x\|+1+r>0$

$\|x\|=(2\beta+r^2)\pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

那么$x\perp z$时，对于x要作怎样的限制呢？

解答：考虑例 1 中的结果$\|x^{'}\|=r$，再结合本例最后的结论：

$\|x\|<(2\beta+r^2)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$。首先，我们考虑：$\frac{r^2}{\|z\|^2}=\|x\|^2$。令

$\sin^2\theta=\frac{\|z\|^2}{r^2}=\frac{1}{\|x\|^2}>\frac{1}{2}$，则$\|x\|^2<2$。我们把

$\|x\|<(2\beta+r^2)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}$代入，得到：$[(2\beta+r^2)+\frac{\sqrt{\Delta}}{2}]^2<2$

$(2\beta+r^2)^2+\frac{(2\beta+r^2)^2-4(1+r)}{4}+(2\beta+r^2)\sqrt{\Delta}<2$

则，$\Delta=\Delta_1+4(1+\frac{1}{4})(3+r)>0$，即存在$\rho$的上界大于 45 度的

情况（例 2）。

性质 6：

定理：

K 和 Q 是非平凡的凸锥，r 是正纯量，一个单位向量

$x\in X, x\notin \mathrm{int}(Q), x+r\,B\,X\in K$。则

$$\delta(K,Q)\geq\frac{r}{1+r}$$

主要结果：

1. $\left\|x^n-u^{k,n}\right\|\leq\theta_n+\frac{1}{k}$

2. $\lambda_{n,k}=1+\dfrac{r-\frac{1}{n}}{\theta_n+\frac{1}{k}}$

3. $v^{n,k}=u^{n,k}+\lambda(x^n-u^{n,k})$

4. $dist[v^{n,k},Q]\geq\lambda\theta_n$

5. $\left\|v^{n,k}-x\right\|\leq(\lambda-1)\left\|x^n-u^{n,k}\right\|+\frac{1}{n}$

6. $\left\|v^{n,k}-x\right\|\leq(\lambda-1)\,(\theta_n+\frac{1}{k})+\frac{1}{n}$

推论：

因为：

$$dist[v^{n,k},Q]\leq dist[v^{n,k},x^n]+dist[x^n,Q]$$

$$=dist[v^{n,k},x^n]+\theta_n$$

$$dist[v^{n,k},x^n]\geq(\lambda-1)\theta_n$$

$$dist[v^{n,k},x^n]\leq\left\|v^{n,k}-x^n\right\|\leq(\lambda-1)\left\|x^n-u^{n,k}\right\|$$

$$(\lambda-1)\left\|x^n-u^{n,k}\right\|\geq(\lambda-1)\theta_n$$

$$\left\|x^n-u^{n,k}\right\|\geq\theta_n$$

$$\left\|x^n-u^{n,k}\right\|\leq\theta_n+\frac{1}{k}$$

$$k\to\infty$$

$$\left\|x^n-u^{n,k}\right\|=\theta_n$$

因为,

$$v^{*n,k}=\frac{v^{n,k}}{\left\|v^{n,k}\right\|}$$

$$dist[v^{*n,k},Q]\geq\lambda\frac{\theta_n}{\left\|v^{n,k}\right\|}$$

$$dist[v^{*n,k},Q]\geq\lambda\frac{\left\|x^n-u^{n,k}\right\|}{\left\|v^{n,k}\right\|}$$

如果 $x\in bd\sigma$，则上式可以写成:

$$dist[v^{*n,k},Q]=\frac{dist[v^{n,k},Q]}{\left\|v^{n,k}\right\|}=\frac{\left\|v^{n,k}-x\right\|}{\left\|v^{n,k}\right\|}$$

$$\frac{\|v^{n,k}-x\|}{\|v^{n,k}\|}\geq\lambda\frac{\|x^n-u^{n,k}\|}{\|v^{n,k}\|}$$

$$(\lambda-1)\|x^n-u^{n,k}\|+\frac{1}{n}\geq\lambda\|x^n-u^{n,k}\|$$

$n\to\infty$

即$\lambda-1\geq\lambda$，矛盾。

解答：我们参考文中的条件：$x\in bd\sigma$。那么，我们能否根据本例中的矛盾来判断两个球是相切还是相离呢？从本例来看，似乎可以从$\frac{1}{k},\frac{1}{n}$与λ的大小关系来判断这个问题。

性质 7：

定理：

考虑下面这个凸锥中的问题：

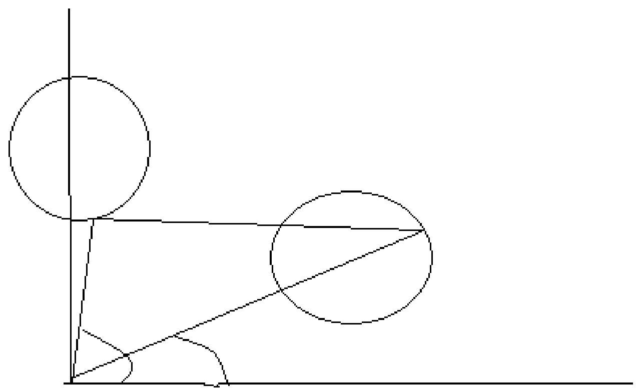
1. $M=\{x\in l,\|x\|\leq 1,x_1{}^2+x_2{}^2\geq\frac{1}{9}\}$

2. $x=\alpha(1,x_2,x_3,...)+\beta(-1,x_2,x_3,......)$

3. $M=\{x\in l,\|x\|\leq 1,(x_1-(1/2))^2+(x_2-(1/2))^2\geq\frac{1}{9}\}$

我们来考虑二维的情况，

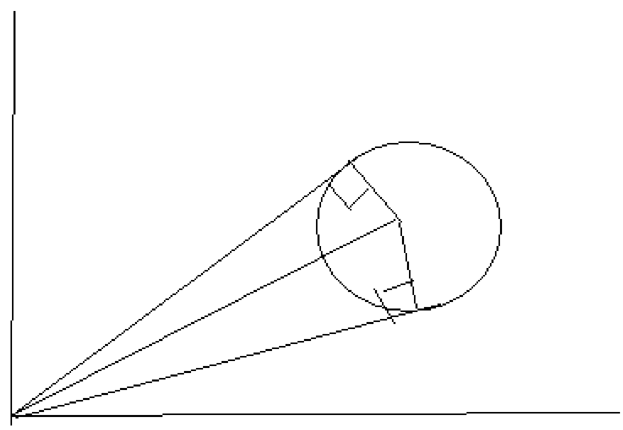
如图 1：



那么，我们能否用θ来表示α与β呢？

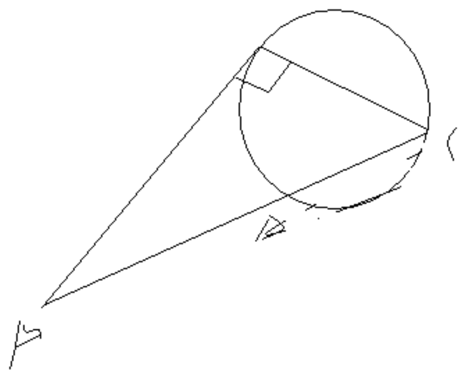
$$\theta=\theta_1-\theta_2=\arctan k1-\arctan k2$$

来看下面这个图：

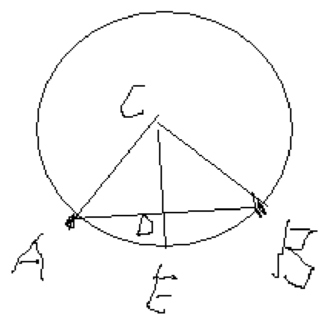


切线长$l^2=(\frac{1}{2})^2+(\frac{1}{2})^2-r^2$

看图 3：



由切割线定理：$l^2 = pc * (pc - \alpha)$



设 DE＝β, x 在 B 点上。A,B 与上图中两点一致。

下面建立坐标：

$$x = (\frac{1}{2} + r\cos\vartheta, \frac{1}{2} + r\sin\vartheta)$$

$$pc = \sqrt{(\frac{1}{2} + r\cos\vartheta)^2 + (\frac{1}{2} + r\sin\vartheta)^2}$$

因为，

$$l^2 = pc*(pc-\alpha)$$

$$r=1/3$$

所以，

由相交弦定理：

$$(\frac{\alpha}{2})^2 = \beta(1-\beta)$$

思路是由 x 的坐标求出 PC,再求出 α，然后求出 β。

注意到：

$$(\frac{\alpha}{2})^2 = \beta(1-\beta)$$

设 $l^2 = pc*(pc-\alpha) = (\frac{1}{2})^2 + (\frac{1}{2})^2 - r^2 = \frac{1}{t}$

则 $PC-\alpha = \frac{1}{t*pc}$

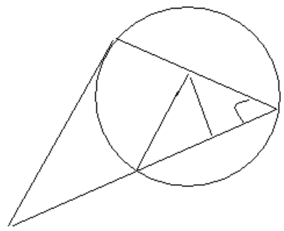
$$\alpha = PC - \frac{1}{tPC}$$

$$\alpha^2 = PC^2 + \frac{1}{t^2 PC^2} - \frac{2}{t}$$

$$\alpha^2 =$$

$$(\frac{1}{2}+r\cos\vartheta)^2 + (\frac{1}{2}+r\sin\vartheta)^2 + \frac{1}{t^2[(\frac{1}{2}+r\cos\vartheta)^2+(\frac{1}{2}+r\sin\vartheta)^2]}$$

$$-\frac{2}{t}$$



$$\alpha = 2r\cos\theta = 2r * \frac{r-\beta}{r} = 2(r-\beta)$$

$$\alpha^2 = 4(r-\beta)^2$$

$$= (\frac{1}{2} + r\cos\vartheta)^2 + (\frac{1}{2} + r\sin\vartheta)^2 + \frac{1}{t^2[(\frac{1}{2}+r\cos\vartheta)^2 + (\frac{1}{2}+r\sin\vartheta)^2]}$$

$$-\frac{2}{t}$$

也有：

$$\alpha^2 = PC^2 + \frac{1}{t^2 PC^2} - \frac{2}{t}$$

$$= 4(r-\beta)^2$$

再回到第一个图：

由两个圆上点的距离，有：

$$|AB| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$$

$$= \sqrt{[(\alpha_1 - \beta_1) \ -(\alpha_2 - \beta_2)]^2 + (x_2 - x_2^{'})^2}$$

$$\left|AB\right|^2 = pc^2 + pc'^2 - 2pc * pc' \cos\theta$$

$$[(\alpha_1 - \beta_1) \ -(\alpha_2 - \beta_2)]^2 + (x_2 - x_2')^2 =$$

$$pc^2 + pc'^2 - 2pc * pc' \cos\theta$$

$$[(\alpha_1 - \beta_1) \ -(\alpha_2 - \beta_2)]^2 = pc^2 + pc'^2 - 2pc * pc' \cos\theta -$$

$$(x_2 - x_2')^2$$

$$\alpha^2 = PC^2 + \frac{1}{t^2 PC^2} - \frac{2}{t}$$

解出α，β, PC然后：

$$[(\alpha_1 - \beta_1) \ -(\alpha_2 - \beta_2)]^2$$

$$= pc^2 + pc'^2 - 2pc * pc' \cos\theta - (x_2 - x_2')^2$$

$$= pc^2 + pc'^2 - 2pc * pc' \cos\theta - [\frac{1}{2} + r(\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2)]^2$$

由方程$\alpha^2 = 4(r-\beta)^2$

$$= (\frac{1}{2} + r\cos\vartheta)^2 + (\frac{1}{2} + r\sin\vartheta)^2 + \frac{1}{t^2[(\frac{1}{2} + r\cos\vartheta)^2 + (\frac{1}{2} + r\sin\vartheta)^2]}$$

$$-\frac{2}{t}$$

解出，得到方程：

$$\cos\vartheta_1 + \sin\vartheta_1 = A$$

$$\cos\vartheta_2 + \sin \ \vartheta_2 = B$$

$$\cos\vartheta_1 - \cos\vartheta_2 = A - B - (\sin\vartheta_1 - \sin\vartheta_2)$$

$$-2\sin[(\vartheta_1+\vartheta_2)/2]\sin[(\vartheta_1-\vartheta_2)/2]=$$

$$A-B-2\cos[(\vartheta_1+\vartheta_2)/2]\sin[(\vartheta_1-\vartheta_2)/2]$$

得到$\sin[(\vartheta_1+\vartheta_2)/2]$

$$\cos\vartheta_1+\cos\vartheta_2=A+B-(\sin\vartheta_1+\sin\vartheta_2)$$

进而，解出$\sin\vartheta_1-\sin\vartheta_2$

解答：因为$[(\alpha_1-\beta_1)\ -(\alpha_2-\beta_2)]^2=0$。所以，根据本例中最后的结果，我们得到了一个关于两球夹角θ与表示割弦在圆上位置的角度ϑ之间的关系式。

参考文献

Mormality and modulability indices. PART I:convex cones in normed spaces …………………………………………………..A.iusem,A.seeger

联系邮箱：pqrs008@126.com