Chapter 2

随机变量及其分布

第二章上半部分（2019.04.08交）：

习题二2.2, 2.5, 2.7, 2.10, 2.13, 2.15, 2.18, 2.20, 2.21, 2.24, 2.26, 2.27(1,3), 2.28(2), 2.29, 2.33

2.2 一批零件中有9个合格品与3个废品，安装机器时从这批零件中任取1个。如果每次取出的废品不再放回去，求在取得合格品以已取出的废品数的概率分布。

解： 设随机变量X表示在取得合格品以前已取出的废品数，则X的可能值是$0, 1, 2, 3$。计算得

$$
\begin{aligned}
P\{X=0\} &= \frac{9}{12} = \frac{3}{4}, \\
P\{X=1\} &= \frac{3}{12}\cdot\frac{9}{11} = \frac{9}{44}, \\
P\{X=2\} &= \frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{9}{10} = \frac{9}{220}, \\
P\{X=3\} &= \frac{3}{12}\cdot\frac{2}{11}\cdot\frac{1}{10}\cdot\frac{9}{9} = \frac{1}{220}.
\end{aligned}
$$

所以X的概率分布表如下：

X	0	1	2	3
P	$\frac{3}{4}$	$\frac{9}{44}$	$\frac{9}{220}$	$\frac{1}{220}$

□

2.5 已知一批产品共20个，其中有4个次品。

(1) 不放回抽样，抽取6个产品，求样品中次品数的概率分布；

(2) 放回抽样，抽取6个产品，求样品中次品数的概率分布。

解：

(1) 设随机变量X表示不放回抽样抽取的6个产品中次品数，则X服从超几何分布$H(6,4,20)$，即有概率函数

$$P\{X=x\}=\frac{C_4^xC_{16}^{6-x}}{C_{20}^6},\quad x=0,1,2,3,4.$$

计算得

$$P(0)=\frac{C_4^0C_{16}^6}{C_{20}^6}\approx 0.2066,\qquad P(1)=\frac{C_4^1C_{16}^5}{C_{20}^6}\approx 0.4508,$$
$$P(2)=\frac{C_4^2C_{16}^4}{C_{20}^6}\approx 0.2817,\qquad P(3)=\frac{C_4^3C_{16}^3}{C_{20}^6}\approx 0.0578,$$
$$P(4)=\frac{C_4^4C_{16}^2}{C_{20}^6}\approx 0.0031.$$

所以，X的概率分布表如下：

X	0	1	2	3	4
P	0.2066	0.4508	0.2817	0.0578	0.0031

(2) 设随机变量Y表示放回抽样抽取的6个样品中次品数，则Y服从二项分布$B(6,0.2)$，即有概率函数

$$P\{Y=y\}=C_6^y(0.2)^y(0.8)^{6-y},\quad y=0,1,2,\cdots,6.$$

由此得

$$P(0)=C_6^0(0.2)^0(0.8)^6\approx 0.2621,\quad P(1)=C_6^1(0.2)^1(0.8)^5\approx 0.3932,$$
$$P(2)=C_6^2(0.2)^2(0.8)^4\approx 0.2458,\quad P(3)=C_6^3(0.2)^3(0.8)^3\approx 0.0819,$$
$$P(4)=C_6^4(0.2)^4(0.8)^2\approx 0.0154,\quad P(5)=C_6^5(0.2)^5(0.8)^1\approx 0.0015,$$
$$P(6)=C_6^6(0.2)^6(0.8)^0\approx 0.0001.$$

所以，Y的概率分布表如下：

Y	0	1	2	3	4	5	6
P	0.2621	0.3932	0.2458	0.0819	0.0154	0.0015	0.0001

□

2.7 进行8次独立射击，设每次射击击中目标的概率为0.3。

(1) 击中几次的可能性最大？并求相应的概率；

(2) 求至少击中2次的概率。

解： 设随机变量X表示击中目标的次数，则X服从二项分布$B(8, 0.3)$。

(1) 已知$n = 8, p = 0.3$，由此得

$$(n+1)p = 9 \times 0.3 = 2.7.$$

由题2.6的结论知，当$x_0 = [(n+1)p] = 2$时，概率$p(x; 8, 0.3)$取得最大值，即击中2次的可能性最大，对应的概率为

$$P\{X = 2\} = C_8^2 (0.3)^2 (0.7)^6 \approx 0.2965.$$

(2) 求至少击中2次的概率为：

$$\begin{aligned} P\{X \geq 2\} &= 1 - P\{X \leq 1) = 1 - \sum_{x=0}^{1} C_8^x (0.3)^x (0.7)^{8-x} \\ &= 1 - C_8^0 (0.3)^0 (0.7)^8 - C_8^1 (0.3)^1 (0.7)^7 \\ &\approx 1 - 0.05765 - 0.19765 = 0.7447. \end{aligned}$$

□

2.10 电话总机为300个电话用户服务。在一小时内每一电话用户使用电话的概率等于0.01，求在一小时内有4个用户使用电话的概率（先用二项分布计算，再用泊松分布近似计算，并求相对误差）。

解： 设随机变量X表示在一小时内使用电话的用户数，则X服从二项分布$B(300, 0.01)$，得所求概率为：

$$P\{X=4\}=C_{300}^{4}(0.01)^4(0.99)^{296}\approx 0.1689.$$

因为$n=300$充分大，而$p=0.01$较小，所以X近似服从泊松分布$P(\lambda)$，其中

$$\lambda = np = 300\times 0.01 = 3.$$

近似计算所求概率

$$P\{X=4\}\approx \frac{3^4}{4!}e^{-3}\approx 0.1680.$$

相对误差为

$$\frac{|0.1689-0.1680|}{0.1689}=\frac{0.0009}{0.1689}\approx 0.5\%.$$

□

2.13 （帕斯卡(Pascal)分布）设事件A在每次试验中发生的概率为p，进行重复独立试验，直到事件A发生r次时为止。求需要进行的试验总次数的概率分布。当$r=1$时，是什么分布？

解： 设随机变量X表示需要进行的试验总次数，则X的可能值$x=r, r+1, r+2, \cdots$。如果x是随机变量X的任一可能值，则事件$\{X=x\}$表示事件A在前$x-1$次试验中已发生了$r-1$次，并且在第x次试验中也发生了。因为试验是独立的，所以按二项概率公式得事件A在前$x-1$次试验中发生$r-1$次的概率为

$$p(r-1;x-1,p)=C_{x-1}^{r-1}p^{r-1}q^{(x-1)-(r-1)}=C_{x-1}^{r-1}p^{r-1}q^{x-r},$$

其中$q=1-p$。又事件A在第x次试验中发生的概率为p，于是随机变量X的概率函数

$$\begin{aligned}P\{X=x\}&=P_{x-1}(r-1)\cdot p\\&=C_{x-1}^{r-1}p^{r}q^{x-r},\quad x=r,r+1,r+2,\cdots.\end{aligned}$$

当$r=1$时，该分布为几何分布。

□

2.15 求习题2.2中取出的废品数的分布函数，并作出分布函数的图形。

解： 由习题2.2以求得的取出的废品数X的概率分布，有

1) 当$-\infty<x<0$时，$F(x)=0$；

2) 当$0\le x<1$时，

$$F(x)=P(0)=\frac{3}{4}=0.75;$$

3) 当$1\le x<2$时，

$$F(x)=P(0)+P(1)=\frac{3}{4}+\frac{9}{44}=\frac{21}{22}\approx 0.9545;$$

4) 当$2\le x<3$时，

$$F(x)=P(0)+P(1)+P(2)=\frac{3}{4}+\frac{9}{44}+\frac{9}{220}=\frac{219}{220}\approx 0.9955;$$

5) 当$3\le x<+\infty$时，$F(x)=1$。

所以，X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}0, & -\infty<x<0,\\ 0.75, & 0\le x<1,\\ 0.9545, & 1\le x<2,\\ 0.9955, & 2\le x<3,\\ 1, & 3\le x<+\infty.\end{cases}$$

分布函数的图形如图2-15所示。

□

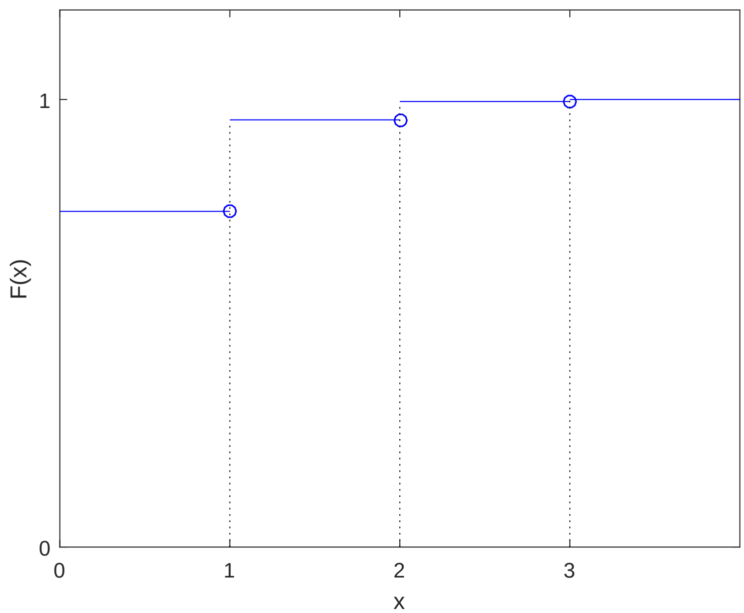

图2-15

2.18 （柯西(Cauchy)分布）设连续随机变量X的分布函数为

$$F(x) = A + B\arctan x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

求：

(1) 系数A及B；

(2) 随机变量X落在区间$(-1,1)$内的概率；

(3) 随机变量X的概率密度。

解：

(1) 利用分布函数的极限性质得方程组

$$\begin{cases} \lim\limits_{x\to-\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} A + B\arctan x = A - \dfrac{\pi}{2}B = 0, \\ \lim\limits_{x\to+\infty} F(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} A + B\arctan x = A + \dfrac{\pi}{2}B = 1. \end{cases}$$

由此解得

$$A = \frac{1}{2}, \quad B = \frac{1}{\pi}.$$

所以，有

$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x, \quad -\infty < x < +\infty.$$

(2) 所求概率为：

$$\begin{aligned} P(-1 < x < 1) &= F(1) - F(-1) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\right) - \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) = 0.5. \end{aligned}$$

(3) X的概率密度为：

$$f(x) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arctan x\right)' = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

□

2.20 设随机变量X的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{A}{\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

求：

(1) 系数A；

(2) 随机变量X落在区间$\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$内的概率；

(3) 随机变量X的分布函数。

解：

(1) 由密度函数的性质得

$$1 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = A\int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = A \cdot \pi,$$

由此得

$$A = \frac{1}{\pi}.$$

所以，有

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}}, & |x| < 1, \\ 0, & |x| \geq 1. \end{cases}$$

(2) 所求概率为：

$$P\left(-\frac{1}{2} < X < \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{\pi}\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{\pi}{3} = \frac{1}{3}.$$

(3) 记X的分布函数为$F(x)$，则有

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

当$x < -1$时，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0dt = 0;$$

当$-1 \leq x < 1$时，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi}\arcsin x;$$

当$x \geq 1$时，

$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0dt + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} + \int_{1}^{x} 0dt = 1.$$

所以，X的分布函数为

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < -1, \\ \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{\pi}\arcsin x, & -1 \leq x < 1, \\ 1, & x \geq 1. \end{cases}$$

□

2.21 （拉普拉斯(Laplace)分布）设随机变量X的概率密度为

$$f(x) = Ae^{-|x|}, \quad -\infty < x < +\infty.$$

求：

(1) 系数A；

(2) 随机变量X落在区间$(0,1)$内的概率；

(3) 随机变量X的分布函数。

解：

(1) 由密度函数的性质得

$$1=\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}Ae^{-|x|}dx=2A\int_{0}^{+\infty}e^{-x}dx=2A,$$

由此得

$$A=\frac{1}{2}.$$

所以，有

$$f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},\quad -\infty<x<+\infty.$$

(2) 所求概率为：

$$P(0<X<1)=\frac{1}{2}\int_{0}^{1}e^{-x}dx=\frac{1}{2}(1-e^{-1})\approx 0.316.$$

(3) 记X的分布函数为$F(x)$，则有

$$F(x)=\int_{-\infty}^{x}f(t)dt.$$

当$x<0$时，

$$F(x)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{x}e^{t}dt=\frac{1}{2}e^{x};$$

当$x\geq 0$时，

$$F(x)=\frac{1}{2}\left[\int_{-\infty}^{0}e^{t}dt+\int_{0}^{x}e^{-t}dt\right]=\frac{1}{2}\left[1+(1-e^{-x})\right]=1-\frac{1}{2}e^{-x}.$$

所以，X的分布函数为

$$F(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{x}, & x<0,\\ 1-\frac{1}{2}e^{-x}, & x\geq 0.\end{cases}$$

□

2.24 在四位数学用表中，小数点后第四位数字是根据“四舍五入”的原则得到的。由此而产生的随机误差X服从怎样的概率分布？

解： 设随机变量X表示根据“四舍五入”原则得到的小数点后第四位数字所产生的随机误差，则：

1） 当小数点后第五位及其以后的数字在$[0,\ 0.000\ 05)$内时，应当舍去，小数点后第四位数字不变，这时产生的随机误差$-0.000\ 05 < X \le 0$；

2） 当小数点后第五位及其以后的数字在$[0.000\ 05,\ 0.000\ 1)$ 内时，应当进入，小数点后第四位数字增加1，这时产生的随机误差$0 < X \le 0.000\ 05$.

因为所有情形是等可能的，所以随机变量X在区间$(-0.000\ 05,\ 0.000\ 05]$上服从均匀分布，即有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} 10000, & -0.000\ 05 < x \le 0.000\ 05, \\ 0, & x > 0.000\ 05 \text{ 或 } x \le -0.000\ 05. \end{cases}$$

□

2.26 (1) 设随机变量X服从指数分布$e(\lambda)$，证明：对任意非负实数s及t，有

$$P\{X \ge s + t | X \ge s\} = P\{X \ge t\}.$$

这个性质叫做指数分布的无记忆性。

(2) 设某电子仪器的使用年数X服从指数分布$e(0.1)$，某人买了一台旧电子仪器，求还能使用5年以上的概率。

解：

(1) 已知随机变量$X \sim e(\lambda)$，则对于任意非负实数s及t，依次有

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t},$$
$$P\{X \geq t\} = 1 - F(t) = 1 - (1 - e^{-\lambda t}) = e^{-\lambda t},$$

及

$$P\{X \geq s + t | X \geq s\} = \frac{P\{X \geq s + t\}}{P\{X \geq s\}} = \frac{e^{-\lambda(s+t)}}{e^{-\lambda s}} = e^{-\lambda t}.$$

由此可知无记忆性成立。

(2) 已知电子仪器的使用年数$X \sim e(0.1)$，则有概率密度

$$f(x) = \begin{cases} 0.1e^{-0.1x}, & x > 0, \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

设某人买的这台旧电子仪器已使用了s年，根据指数分布的无记忆性，这台电子仪器还能使用5年以上的概率为：

$$P\{X \geq s + 5 | X \geq s\} = P\{X \geq 5\} = \int_5^{+\infty} 0.1e^{-0.1x} dx = e^{-0.5} \approx 0.6065.$$

□

2.27 设随机变量X服从二项分布$B(3, 0.4)$，求下列随机变量函数的概率分布：

(1) $Y_1 = X^2$；

(3) $Y_3 = \dfrac{X(3 - X)}{2}$。

解： 已知$X \sim B(3, 0.4)$，则有概率函数

$$p(x) = C_3^x (0.4)^x (0.6)^{3-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3.$$

由此得到X的概率分布表：

X	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064

(1) 由对应关系可得$Y_1 = X^2$的概率分布表如下：

Y_1	0	1	4	9
P	0.216	0.432	0.288	0.064

(3) 在X的概率分布表上补充Y_3的取值：

X	0	1	2	3
P	0.216	0.432	0.288	0.064
Y_3	0	1	1	0

整理得Y_3的概率分布表为：

Y_3	0	1
P	0.28	0.72

□

2.28 设随机变量X的概率密度为

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \le x \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

求下列随机变量函数的概率密度：

(2) $Y_2 = 1 - X$。

解： 记随机变量X的分布函数为$F(x)$。

(2) 对于任意的实数y，有

$$F_{Y_2}(y) = P\{Y_2 \le y\} = P\{1-X \le y\} = P\{X \ge 1-y\} = 1-F(1-y).$$

求导得（注意到$F'(x) = f(x)$ a.e.）

$$f_{Y_2}(y) = f(1-y) = \begin{cases} 2(1-y), & 0 \le 1-y \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 2(1-y), & 0 \le y \le 1, \\ 0, & \text{其它}. \end{cases}$$

□

2.29 设随机变量X的概率密度为

$$f(y) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi(x^2+1)}, & x > 0, \\ 0, & x \le 0. \end{cases}$$

求随机变量函数$Y = \ln X$的概率密度。

解： 随机变量X的取值范围是$(0, +\infty)$，所以随机变量函数$Y = \ln X$的取值范围是$(-\infty, +\infty)$。对于任意的实数y，随机变量Y的分布函数

$$F_Y(y) = P\{Y \le y\} = P\{\ln X \le y\} = P\{X \le e^y\}$$
$$= \int_0^{e^y} \frac{2}{\pi(x^2+1)} dx = \frac{2}{\pi} \arctan e^y.$$

对y求导数，即得Y的概率密度

$$f_Y(y) = \frac{2e^y}{\pi(e^{2y}+1)}, \quad -\infty < y < +\infty.$$

□

2.33 点随机地落在中心在原点、半径为R的圆周上，并且对弧长是均匀分布的，求这点的横坐标的概率密度。

解： 如图2.33-1，设随机取的点为M，随机变量S表示弧$\overset{\frown}{AM}$（沿逆时

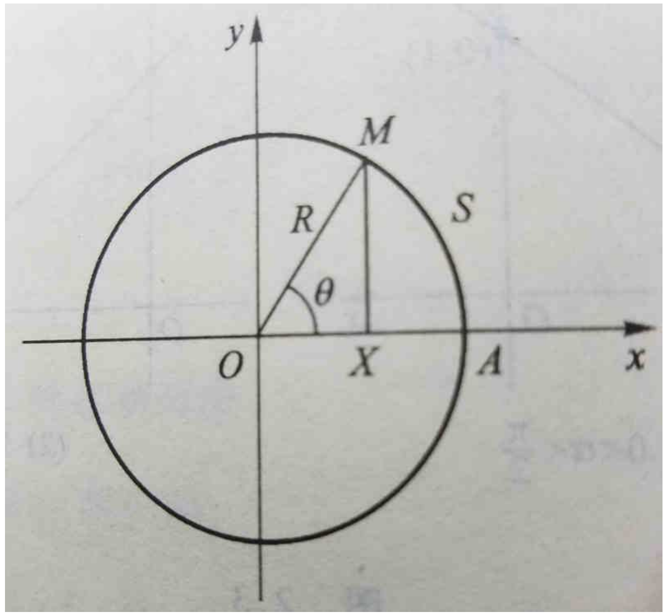

图2.33-1

针方向从A到M）的长度，其中点A的坐标为$(R,0)$。则S在区间$[0,2\pi R]$上服从均匀分布，有概率密度

$$f_S(s)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\pi R}, & 0\le s\le 2\pi R,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$$

又设随机变量X表示点M的横坐标，则

$$X=R\cos\theta=R\cos\frac{S}{R},$$

X的取值范围为$[-R,R]$，分布函数为：

$$F_X(x)=P\{X\le x\}=P\{R\cos\frac{S}{R}\le x\}.$$

分情况讨论如下：

i 当$x<-R$时，有$F_X(x)=0$；

ii 当$x>R$时，有$F_X(x)=1$；

iii 当$-R\le x\le R$时，如图2.33-2，有

$$F_X(x)=P\{\arccos\frac{x}{R}\le\frac{S}{R}\le 2\pi-\arccos\frac{x}{R}\}=\int_{s_1}^{s_2}\frac{1}{2\pi R}ds,$$

其中$s_1 = R\arccos\dfrac{x}{R}$，$s_2 = 2\pi R - R\arccos\dfrac{x}{R}$。由此得

$$F_X(x) = \frac{1}{2\pi R}(s_2 - s_1) = 1 - \frac{1}{\pi}\arccos\frac{x}{R}.$$

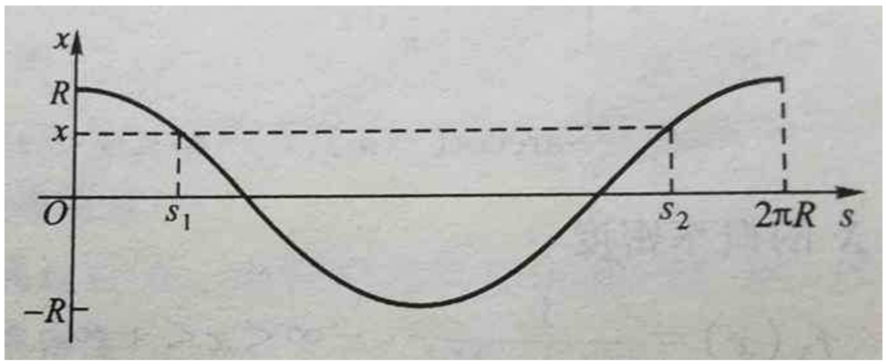

图2.33-2

所以随机变量X的分布函数为：

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x < -R, \\ 1 - \dfrac{1}{\pi}\arccos\dfrac{x}{R}, & -R \le x \le R, \\ 1, & x > R. \end{cases}$$

对x求导得X的概率密度

$$f_X(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{R^2 - x^2}}, & |x| \le R, \\ 0, & |x| > R. \end{cases}$$

□

作业完成情况：

1. 对于题目2.24：许多同学直接给出答案均匀分布，但没有完整的结题过程以及写出其概率密度函数，需注意。

2. 对于题目2.2,2.7（2）,2.20(3)以及2.29，较多同学存在计算错误，同学们须注意。

3. 本次作业其它题目完成情况很好，但有十一位同学没有交作业。