§15.3　含参变量反常积分的分析性质

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 求极限 $\lim\limits_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\dfrac{n}{n+\sqrt{x}+nx^2}\mathrm{d}x$.

解: 参数和极限都是离散性的, 但是可以作为连续参数的特例. 记

$$f(x,t)=\frac{1}{1+t\sqrt{x}+x^2},\quad (x,t)\in[0,+\infty)\times[0,1].$$

则原积分号下的被积函数可以视为 $t=1/n$ 的特殊情形, 即

$$\frac{n}{n+\sqrt{x}+nx^2}=f\Big(x,\frac{1}{n}\Big).$$

注意到当 $(x,t)\in[0,+\infty)\times[0,1]$ 时

$$|f(x,t)|=\frac{1}{1+t\sqrt{x}+x^2}\le\frac{1}{1+x^2}.$$

而 $\dfrac{1}{1+x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上的积分是收敛的, 因此 $f(x,t)$ 具有收敛的优函数 $\dfrac{1}{1+x^2}$, 因此积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t\sqrt{x}+x^2}\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,1]$ 是一致收敛的, 故是参数 t 的连续函数, 即积分和极限可以交换顺序,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{n}{n+\sqrt{x}+nx^2}\mathrm{d}x &= \lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{x}}{n}+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{\sqrt{x}}{n}+x^2}\mathrm{d}x\\ &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}.\end{aligned}$$

□

例 2 求无穷限积分

$$A=\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\sin x\mathrm{d}x,\qquad b>a>0.$$

解: 首先可以将被积函数的一部分改写成积分的形式

$$\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y.$$

因此可以将原积分写成累次积分的形式, 通过交换积分顺序, 可以计算出:

$$\begin{aligned} A &= \int_0^{+\infty} \sin x \mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{e}^{-xy} \mathrm{d}y \\ &= \int_a^b \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

这里积分可以交换顺序是因为如果取控制函数为 $f(x) = \mathrm{e}^{-ax}$, 利用 M 判别法容易验证含参变量积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x \mathrm{d}x$$

在区间 $[a, b]$ 上是一致收敛的. 进一步根据分部积分法, 不难计算:

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x \mathrm{d}x &= -\mathrm{e}^{-xy} \cos x\Big|_0^{+\infty} - y \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \cos x \mathrm{d}x \\ &= 1 - y\Big[\mathrm{e}^{-xy} \sin x\Big|_0^{+\infty} + y \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x \mathrm{d}x\Big] \\ &= 1 - y^2 \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x \mathrm{d}x. \end{aligned}$$

即得

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x \mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2}.$$

故原积分容易算出为

$$A = \int_a^b \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin x \mathrm{d}x = \int_a^b \frac{1}{1+y^2} \mathrm{d}y = \arctan b - \arctan a.$$

□

例 3 用对参数求导的方法求下列无穷限积分.

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} \sin x \mathrm{d}x, \qquad (b > a > 0).$$

解: 令

$$A(t) = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-tx} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} \sin x \mathrm{d}x, \qquad a < t < b.$$

利用定理 **??**, 对 A 求导得,

$$\begin{aligned} A'(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\mathrm{e}^{-tx} - \mathrm{e}^{-bx}}{x} \sin x\Big) \mathrm{d}x \\ &= -\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-tx} \sin x \mathrm{d}x \\ &= -\frac{1}{1+t^2}. \qquad (\text{见例 } 2) \end{aligned}$$

这里之所以可以用定理 **??** 在积分号下求导, 是因为求导后所得到的积分在 $[a, b]$ 上是一致收敛的 (参见例题 2). 注意到 $A(b) = 0$, 将上式在区间 $[a, b]$ 上积分得到

$$A(a) = A(a) - A(b) = \int_b^a A'(t) dt = -\int_b^a \frac{1}{1+t^2} dt = \arctan b - \arctan a.$$

□

例 4 讨论由含参变量反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^t}\mathrm{d}x$ 所定义的函数 $\varphi(t)$ 的连续性和可微性.

解: 显然, 对于任意的 $t>1$ 在 $\varphi(t)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^t}\mathrm{d}x$ 是收敛的, 即收敛区间是 $J=(1,+\infty)$. 任意取定 $t_0\in J$, 选取 $\Delta>0$, 使得

$$[t_0-\Delta,t_0+\Delta]\subset J.$$

$f(x,t)=1/(1+x^t)$ 显然在 $[0,+\infty)\times[t_0-\Delta,t_0+\Delta]$ 上是连续的, 又当 $t\in[t_0-\Delta,t_0+\Delta]$ 时,

$$f(x,t)=\frac{1}{1+x^t}\le\frac{1}{1+x^{t_0-\Delta}},\qquad x\in[1,+\infty).$$

注意到 $t_0-\Delta>1$, 因此 $1/(1+x^{t_0-\Delta})$ 是可积的控制函数. 根据 M 判别法, 知 $\varphi(t)$ 关于 $t\in[t_0-\Delta,t_0+\Delta]$ 一致收敛, 再由定理 **??** 即知 $\varphi(t)$ 在 $[t_0-\Delta,t_0+\Delta]$ 上连续, 当然在点 t_0 连续, 又因为 $t_0\in J$ 是任意的, 即得 $\varphi(t)$, 整个区间 $J=(0,+\infty)$ 上连续.

类似地可以证明在 $\varphi(t)$, J 中是连续可微的, 且

$$\varphi'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{-x^t\ln x}{(1+x^t)^2}\mathrm{d}x,\qquad t\in J.$$

详细过程留给读者作为练习来完成. □

*

例 5 记 $R=[1,+\infty)\times[1,+\infty)$. 考虑 R 上的连续函数

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

则 $f(x,y)$ 在 R 上两个不同顺序的累次积分不相等.

证明. 容易知道, 当 $y\in[1,+\infty)$ 和 $x\in[1,+\infty)$ 时, 分别有

$$|f(x,y)|\le\frac{1}{x^2},\qquad |f(x,y)|\le\frac{1}{y^2}.$$

因此根据 M 判别法含参变量 x 的无穷限积分和含参变量 y 的无穷限积分

$$\varphi(x)=\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y,\qquad \psi(y)=\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x$$

分别关于 $x\in[1,+\infty)$ 一致收敛和关于 $y\in[1,+\infty)$ 一致收敛. 然而

$$\int_1^{+\infty}\varphi(x)\mathrm{d}x=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}x\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}y=-\frac{\pi}{4},$$
$$\int_1^{+\infty}\psi(y)\mathrm{d}y=\int_1^{+\infty}\mathrm{d}y\int_1^{+\infty}\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{4},$$

二者并不相等. ∎

思考题

1. 一致收敛性在保证含参变量反常积分与极限交换顺序的过程中起着至关重要的作用, 请问这个条件是否是必要的?

2. 含参变量无穷限积分 $I(t)=\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 在区间 J 上一致收敛, 能否得出 $I(t)$ 在区间 J 上是有界的?

3. 含参变量无穷限积分 $I(t)=\int_a^{+\infty}f(x,t)\mathrm{d}x$ 在区间 $[c,+\infty)$ 上一致收敛, 能否得出 $\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)$ 存在?

习题

1. 用交换累次积分的顺序和积分号下求导两种方法计算积分 (其中 $b>a>0$):

(1) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\mathrm{d}x$;

(2) $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos ax}{x^2}\mathrm{d}x$, (提示: 利用积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}t$.)

解: (1) 方法一:(交换累次积分的顺序)

首先可以将被积函数改写成积分的形式:

$$\frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-ax}}{x}=-\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y.$$

因此可以将原积分写成累次积分的形式, 通过交换积分顺序, 可以计算出:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\left(-\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\right)\\ &= -\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这里积分可以交换顺序是因为如果取控制函数为 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}$, 利用 M 判别法容易验证含参变量积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x$$

在区间 $[a,b]$ 上是一致收敛的.

进一步, 不难计算:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x=-\frac{1}{y}\mathrm{e}^{-xy}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{y},$$

故原积分容易算出为

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\mathrm{d}x &= -\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}x\\ &= -\int_a^b\frac{1}{y}\mathrm{d}y\\ &= -\ln y\Big|_a^b\\ &= \ln\frac{a}{b}.\end{aligned}$$

方法二:(积分号下求导)

令 $A(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\mathrm{d}x,\quad a\le t\le b$, 记 $f(x,t)=\dfrac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}$, 则 $f_t(x,t)=\mathrm{e}^{-tx}$,

$f(x,t)$ 与 $f_t(x,t)$ 在矩形区域 $R=(0,+\infty)\times[a,b]$ 上均连续, 且

(i) $A(t)=\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上收敛;

(ii) 由方法一可知, $\displaystyle\int_0^{+\infty}f_t(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

利用定理 15.3.3, 对 $A(t)$ 关于 t 求导, 得

$$A'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-tx}}{x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-tx}\mathrm{d}x=-\frac{1}{t}\mathrm{e}^{-tx}\Big|_0^{+\infty}=\frac{1}{t},$$

注意到 $A(b)=0$, 将上式在区间 $[a,b]$ 上积分, 得到

$$A(b)-A(a)=\int_a^b A'(t)\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{1}{t}\mathrm{d}t=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a},$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\mathrm{d}x=A(a)=\ln\frac{a}{b}.$$

(2) 方法一:(交换累次积分的顺序)

首先可以将被积函数的一部分改写成积分的形式:

$$\frac{\cos bx-\cos ax}{x}=-\int_a^b\sin(xy)\mathrm{d}y.$$

因此可以将原积分写成累次积分的形式, 通过交换积分顺序, 可以计算出:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos ax}{x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\frac{1}{x}\mathrm{d}x\left(-\int_a^b\sin(xy)\mathrm{d}y\right)\\ &= -\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这里积分可以交换顺序是因为:

对于反常积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x$, 记 $f(x,y)=\sin(xy), g(x,y)=\frac{1}{x},\quad a\le y\le b$, 满足:

(i) 存在正常数 $\dfrac{2}{a}$, 使得

$$\left|\int_0^t f(x,y)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_0^t\sin(xy)\mathrm{d}x\right|=\left|-\frac{1}{y}\cos(xy)\Big|_0^t\right|=\left|-\frac{1}{y}\cos(ty)+\frac{1}{y}\right|\le\frac{2}{y}\le\frac{2}{a},$$

对所有的 t 满足 $0<t<\infty$ 和 $t\in J$;

(ii) 函数 $g(x,y)$ 是 x 的单调函数;

(iii) 当 $x\to+\infty$ 时, $g(x,y)$ 关于 $y\in[a,b]$ 一致趋于 0,

故由一致收敛的 Dirichlet 判别法, 可知 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上是一致收敛的.

进一步, 利用积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xt)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}t$, 得:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}y,$$

故原积分容易算出为

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos ax}{x^2}\mathrm{d}x &= -\int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\frac{\sin(xy)}{x}\mathrm{d}x\\ &= -\int_a^b\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}y\mathrm{d}y\\ &= -\int_a^b\frac{\pi}{2}\mathrm{d}y\\ &= \frac{\pi}{2}(a-b).\end{aligned}$$

方法二:(积分号下求导)

令 $A(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos tx}{x^2}\mathrm{d}x,\quad a\le t\le b$, 记 $f(x,t)=\frac{\cos bx-\cos tx}{x^2}$, 则 $f_t(x,t)=\frac{\sin tx}{x}$, $f(x,t)$ 与 $f_t(x,t)$ 在矩形区域 $R=(0,+\infty)\times[a,b]$ 上均连续, 且

(i) $A(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\cos bx-\cos tx}{x^2}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上收敛;

(ii) 由方法一可知, $\int_0^{+\infty}f_t(x,t)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛.

利用定理 15.3.3, 对 $A(t)$ 关于 t 求导, 得

$$A'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\cos bx-\cos tx}{x^2}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\frac{\sin tx}{x}\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}y,$$

注意到 $A(b)=0$, 将上式在区间 $[a,b]$ 上积分, 得到

$$A(b)-A(a)=\int_a^b A'(t)\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}y\mathrm{d}t=\int_a^b\frac{\pi}{2}\mathrm{d}t=\frac{\pi}{2}(a-b),$$

故

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-bx}-\mathrm{e}^{-ax}}{x}\mathrm{d}x=A(a)=\frac{\pi}{2}(b-a).$$

□

2. 证明: $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos(mx)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\ln\frac{b^2+m^2}{a^2+m^2}$, ($b>a>0$).

证明. 首先可以将被积函数的一部分改写成积分的形式

$$\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}=\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y.$$

因此可以将原积分写成累次积分的形式, 通过交换积分顺序, 可以计算出:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos(mx)\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\cos(mx)\mathrm{d}x\int_a^b\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\cos(mx)\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

这里积分可以交换顺序是因为如果取控制函数为 $f(x)=\mathrm{e}^{-ax}$, 利用 M 判别法容易验证含参变量积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\cos(mx)\mathrm{d}x$$

在区间 $[a,b]$ 上是一致收敛的.

进一步根据分部积分法, 不难计算:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\cos(mx)\mathrm{d}x &= -\frac{1}{y}\cos(mx)\mathrm{e}^{-xy}\Big|_0^{+\infty}+\frac{1}{y}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}(\cos(mx))\\ &= \frac{1}{y}-\frac{m}{y}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin(mx)\mathrm{d}x\\ &= \frac{1}{y}+\frac{m}{y^2}\mathrm{e}^{-xy}\sin(mx)\Big|_0^{+\infty}-\frac{m}{y^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\mathrm{d}(\sin(mx))\\ &= \frac{1}{y}-\frac{m}{y^2}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\cos(mx)\mathrm{d}x,\end{aligned}$$

即得

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\cos(mx)\mathrm{d}x = \frac{y}{y^2+m^2},$$

故原积分容易算出为

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\cos(mx)\mathrm{d}x &= \int_a^b \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\cos(mx)\mathrm{d}x \\
&= \int_a^b \frac{y}{y^2+m^2}\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_a^b \frac{1}{y^2+m^2}\mathrm{d}(y^2+m^2) \\
&= \frac{1}{2}\ln(y^2+m^2)\Big|_a^b \\
&= \frac{1}{2}\ln\frac{b^2+m^2}{a^2+m^2}.
\end{aligned}$$

∎

3. 求积分: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2y^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x$.

解: 令 $t=y^2 \quad (t>0)$, 则原积分化为: $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t)}{1+x^2}\mathrm{d}x$, 首先可以将被积函数的一部分改写成积分的形式

$$\ln(1+x^2t) = \int_0^t \frac{x^2}{1+x^2s}\mathrm{d}s.$$

因此可以将上述积分写成累次积分的形式, 通过交换积分顺序, 可以计算出:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x \int_0^t \frac{x^2}{1+x^2s}\mathrm{d}s \\
&= \int_0^t \mathrm{d}s \int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(1+x^2s)}\mathrm{d}x.
\end{aligned}$$

这里积分可以交换顺序是因为:

$$\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(1+x^2s)}\mathrm{d}x = \frac{1}{s-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2s}\right)\mathrm{d}x$$

在区间 $[0,t]$ 上是一致收敛的.

进一步, 不难计算:

$$\begin{aligned}
\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)(1+x^2s)}\mathrm{d}x &= \frac{1}{s-1}\int_0^{+\infty}\left(\frac{1}{1+x^2}-\frac{1}{1+x^2s}\right)\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{s-1}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x - \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+(\sqrt{s}x)^2}\mathrm{d}(\sqrt{s}x) \\
&= \frac{1}{s-1}\arctan x\Big|_0^{+\infty} - \frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\arctan(\sqrt{s}x)\Big|_0^{+\infty} \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{s-1} - \frac{\pi}{2}\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)} \\
&= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{s-1}-\frac{1}{\sqrt{s}(s-1)}\right) \\
&= \frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)},
\end{aligned}$$

故原积分容易算出为

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2t)}{1+x^2}\mathrm{d}x &= \int_0^t\mathrm{d}s\int_0^{+\infty}\frac{x^2}{(1+x^2)(1+x^2s)}\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^t\frac{1}{\sqrt{s}(\sqrt{s}+1)}\mathrm{d}s\\ &= \frac{\pi}{2}\int_0^{|y|}\frac{1}{u(u+1)}\cdot 2u\mathrm{d}u\quad(\text{令}\sqrt{s}=u)\\ &= \pi\int_0^{|y|}\frac{1}{u+1}\mathrm{d}u\\ &= \pi\ln(1+u)\Big|_0^{|y|}\\ &= \pi\ln(1+|y|),\end{aligned}$$

即 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x^2y^2)}{1+x^2}\mathrm{d}x=\pi\ln(1+|y|)$. □