第一章 随机事件及其概率

刘 春 光

暨南大学数学系

2018年2月

目录

目录

随机试验

Definition (试验)

产生观测结果的行为或过程称为试验。

Definition (随机试验(random experiment))

进行一次试验，如果其所得结果不能完全预言，但其全体可能结果是已知的，则称该试验为随机试验。

在本课程中，我们一般用试验代指随机试验。

随机试验

随机试验的例子：

1. 掷一颗骰子，观察所掷的点数是几；
2. 观察某城市某个月内交通事故发生的次数；
3. 观察某产品的使用寿命；
4. 观察某产品的使用寿命是否小于T小时。

随机事件

Definition (随机事件)

随机试验中对结果的描述称为事件，常用大写字母A, B, C等表示。事件可分为以下两类：

1. 在一定条件下必然出现（不出现）的事件，称为必然事件（不可能事件）；
2. 在一定条件下可能出现也可能不出现的事件，称为随机事件。

随机事件

Example (产品抽样)

一批产品共100个，其中95个正品、5个次品。现从中任意抽取10个，则以下事件均为随机事件：

- A：“没有次品”；
- B：“恰有一件次品”；
- C：“有两个或三个次品”。

而“次品数不多于五个”为必然事件。

事件的频率

Definition (频率(frequemcy))

设在n次试验中，事件A发生了m次，则称

$$f_n(A) := \frac{m}{n}$$

为事件A发生的频率。

频率的性质：

1. $0 \le f_n(A) \le 1$;
2. 必然事件的频率为1，不可能事件的频率为0。

事件的频率

历史上的掷硬币试验:

试验者	投掷次数	正面次数	频率
Buffon	4040	2048	0.5069
Kerrich	10000	5067	0.5067
Pearson	12000	6019	0.5016
Pearson	24000	12012	0.5005

概率的统计定义

Definition (概率的统计定义)

在相同条件下重复进行的试验中，若试验次数n趋向于无穷时，事件A发生的频率趋向于某一常数p，即

$$\lim_{n\to\infty} f_n(A) = p$$

则称p为事件A的概率，记作$P(A)$。

概率的统计定义

概率的性质：

1. $0 \leq P(A) \leq 1$;
2. 必然事件的概率为1，不可能事件的概率为0。

统计定义的意义：实际应用中常将大量重复试验中事件的频率作为概率的近似估计。

概率的统计定义

Dewey G. 统计了约438023个英语单词中各字母出现的频率, 结果如下:

A: 0.0788	B: 0.0156	C: 0.0268	D: 0.0389	E: 0.1268
F: 0.0256	G: 0.0187	H: 0.0573	I: 0.0707	J: 0.0010
K: 0.0060	L: 0.0394	M: 0.0244	N: 0.0706	O: 0.0776
P: 0.0186	Q: 0.0009	R: 0.0594	S: 0.0634	T: 0.0987
U: 0.0280	V: 0.0102	W: 0.0214	X: 0.0016	Y: 0.0202
Z: 0.0006				

概率的统计定义

(June 6, 2013) As Chinese president Xi Jinping travels to the United States to meet with President Obama, 55% of Americans view China as either an ally (11%) or a nation friendly to the U.S. (44%), while 40% say it is either unfriendly (26%) or an enemy (14%).

概率的统计定义

Survey Methods

Results for this Gallup poll are based on telephone interviews conducted June 1-4, 2013, with a random sample of 1,529 adults, aged 18 and older, living in all 50 U.S. states and the District of Columbia.

目录

样本空间

Definition (样本空间(sample space))

随机试验的每个可能结果称为一个<u>样本点</u>，全体样本点组成的集合称为<u>样本空间</u>。

习惯上分别用ω和Ω表示样本点与样本空间。

样本空间

Example (掷硬币试验)

任意抛掷一枚硬币，观察哪个面向上，则样本空间为

$$\Omega = \{\text{正，反}\}.$$

样本空间

Example (掷骰子试验)

任意抛掷一个骰子，观察其向上的点数，则样本空间为

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

样本空间

Example (摸球试验1)

袋中装有五个球，分别标记为1-5号。从袋中任取两个球，观察它们的号码，则样本空间为

$$\Omega = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\},$$

其中共有$C_5^2 = 10$个样本点。

样本空间

Example (摸球试验2)

袋中装有三个白球（记为1,2,3号）与两个黑球（记为4,5号），从袋中任取两个球，观察它们的颜色，则样本空间为

$$\Omega = \{12, 13, 14, 15, 23, 24, 25, 34, 35, 45\},$$

其中共有$C_5^2 = 10$个样本点。

样本空间

Example (摸球试验3)

袋中装有三个白球与两个黑球，从袋中任取两个球，观察它们的颜色，则样本空间中共有$C_5^2 = 10$个样本点。

Example (摸球试验4)

袋中装有三个白球与两个黑球，从袋中依次取两个球，观察它们的颜色，则样本空间中共有$P_5^2 = 20$个样本点。

样本空间

Example (可数无穷多个样本点的情况)

观察放射性物质在一段时间内放射的粒子数，则样本空间为

$$\Omega = \{0, 1, 2, \cdots\}.$$

Example (连续的样本点的情况)

设某车床所加工零件的长度始终在$[a, b]$内取值，现任取一零件测量其长度，则样本空间即为区间$[a, b]$。

事件与样本空间

在随机试验中，

- 任一随机事件都是样本空间的一个子集。当该子集中的一个样本点出现时，称该事件发生(this event occurs)。
- 必然事件即为整个样本空间。
- 不可能事件为空集$\varnothing$。

事件与样本空间

随机事件的分类：

- 只含一个样本点的事件称为基本事件 (elementary event, simple event)；
- 含有多于一个样本点的事件称为复合事件。

目录

事件的关系

Definition (事件的包含关系)

若事件A发生时，事件B一定发生。则称事件A包含于事件B（或事件B包含A），记作

$$A \subset B \ (\text{或} B \supset A).$$

注1：事件的包含关系与事件作为集合的包含关系一致。

注2：对任意事件A，有$\varnothing \subset A \subset \Omega$。

事件的关系

Definition (事件的相等关系)

若$A \subset B$，且$B \subset A$，则称事件A与B相等，记作$A = B$。

事件的运算

Definition (事件的并(union))

以下事件

$$\text{“事件}A\text{、}B\text{至少有一个发生”}$$

称为事件A与B的和或并，记作

$$A+B\ (\text{或}A\cup B).$$

注：事件的并与事件作为集合的并一致，即

$$A\cup B=\{\omega|\omega\in A\ \text{or}\ \omega\in B\}.$$

事件的运算

事件的并可以推广到多个的情形：如n个事件的并

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = \text{“事件}A_1,\cdots,A_n\text{至少有一个发生”};$$

可数个事件的并

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件}A_1,A_2,\cdots\text{至少有一个发生”。}$$

事件的运算

Definition (事件的交(intersection))

以下事件

$$\text{“事件}A\text{、}B\text{同时发生”}$$

称为事件A与B的积或交，记作

$$AB\ (\text{或}A\cap B).$$

注：事件的交与事件作为集合的交一致，即，

$$A\cap B=\{\omega|\omega\in A \text{ and } \omega\in B\}.$$

事件的运算

事件的交可以推广到多个的情形：如n个事件的交

$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = \text{“事件}A_1, \cdots, A_n\text{全都发生”}$$

可数个事件的交

$$\bigcap_{i=1}^{\infty} A_i = \text{“事件}A_1, A_2, \cdots\text{全都发生”}$$

事件的关系

Definition (事件的互斥、不相容(mutually exclusive)关系)

若$AB = \varnothing$，则称A与B互斥或不相容。

注：两个事件互斥意味着这两个事件不可能同时发生。

事件的运算

Definition (事件的差)

以下事件

“事件A发生，但B不发生”

称为事件A与B的差，记作

$$A - B.$$

从集合的观点来看，

$$A - B = \{\omega | \omega \in A \text{ and } \omega \notin B\}.$$

事件的运算

Definition (对立事件、事件的补(complement))

称$\Omega - A$为事件A的对立事件（或称A的补），记为$\overline{A}$。

注：两个事件对立意味着这两个事件必有一个且仅有一个发生。

事件的运算

事件的补的性质：

1. 事件A、B互补当且仅当

$$AB = \varnothing, \text{ 且} A + B = \Omega\text{。}$$

2. $A - B = A\overline{B}$。

事件的运算

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

1. 交换律：

$$A+B=B+A,\quad AB=BA;$$

2. 结合律：

$$(A+B)+C=A+(B+C),\quad (AB)C=A(BC);$$

事件的运算

集合运算的所有规律都适用于事件计算：

3. 分配律：

$$A(B+C) = AB + AC,$$

$$A + BC = (A+B)(A+C);$$

4. 摩根律：

$$\overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}, \quad \overline{AB} = \overline{A} + \overline{B}.$$

完备事件组

Definition (完备事件组)

设Ω为某试验的样本空间，$B_1, B_2, \cdots$为一组事件。如果以下条件成立：

1. $B_1, B_2, \cdots$两两互斥；
2. $\bigcup\limits_i B_i = \Omega$,

则称$B_1, B_2, \cdots$为样本空间Ω的一个划分（分割），或称$B_1, B_2, \cdots$ 为一个完备事件组。

完备事件组

Example

事件A与其对立事件$\overline{A}$构成一个完备事件组。

Example

设A,B为两个事件，则样本空间可分解为以下四个两两互斥的事件的并：

$$AB,\ A\overline{B},\ \overline{A}B,\ \overline{A}\ \overline{B}.$$

事件的运算

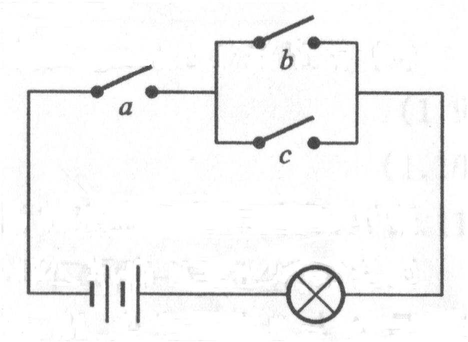
例1 从一批产品中任意抽取5件样品进行检查，用A_i表示“发现i件次品”（$i = 0, 1, \cdots, 5$），用$A_0, A_1, \cdots, A_5$表示以下事件：

- B：“发现两件或三件次品”；
- C：“至多发现两件次品”；
- D：“至少发现一件次品”。

事件的运算

例2 如图所示的电路中，设事件A, B, C分别表示开关a, b, c闭合，事件D表示指示灯亮，则有

$$D = AB + AC, \quad \overline{D} = \overline{A} + \overline{B}\,\overline{C}.$$



目录

古典概率模型

对某些特殊的随机试验，在确定事件发生的概率时，并不需要作重复试验，而是根据人类长期积累的关于“对称性”的实际经验，直接假设地位均等的事件具有等可能性，从而相应的定义概率。这类定义概率的模型称为等可能概率模型或古典概率模型。

古典概率模型

Definition (古典概率)

如果一个随机试验具有以下特点：

1. 样本空间只含有限多个样本点；
2. 各样本点出现的可能性相等，

则称此随机试验是古典型的。此时对每个事件$A \subset \Omega$，定义其概率为

$$P(A) = \frac{\text{事件}A\text{的样本点数}}{\text{样本点总数}} = \frac{n(A)}{n(\Omega)},$$

称之为事件A的古典概率。

古典概率模型

例1 从$0, 1, 2, \cdots, 9$十个数字中任取一个数字，求取得奇数数字的概率。

例2 袋内有三个白球与两个黑球。从中任取两个球，求取出的两个球都是白球的概率。

例3 在一批N个产品中有M个次品。从这批产品中任取n个，求其中恰有m个次品的概率。

古典概率模型

例4 袋内有a个白球与b个黑球。依次从袋中一个一个取球，取出的球不再放回。求事件W_k：“第k次取得白球”的概率$(k \leq a+b)$。

抽签的公平性：

$$P(W_k) \equiv \frac{a}{a+b}, \quad \forall k = 1, 2, \cdots, a+b.$$

古典概率模型

古典概率的性质：

1. 对任意事件A，$0 \le P(A) \le 1$；
2. $P(\varnothing) = 0$，$P(\Omega) = 1$。

几何概型

我们现在讨论当样本点为无穷多个时的“等可能性”。

例：在区间$[0,1]$内任取一点ξ，则$\xi \in [0,\frac{1}{2}]$的概率是多少？

例：在盛有1升水的容器中有一个任意游动的细菌。现从容器的任意位置用吸管吸出10毫升的水，问吸出的水中含有细菌的概率。

几何概型

Definition (几何概型)

设样本空间Ω满足条件

$$0 < m(\Omega) < +\infty,$$

这里$m(\cdot)$是Ω上的测度（长度、面积、体积等）。对Ω的任意可测子集A，称

$$P(A) = \frac{m(A)}{m(\Omega)}$$

为事件A的几何概率。

几何概型

例5 甲乙两人相约在某一段时间T内在预定地点会面。先到的人应等候另一人，经过时间$t\ (0 < t < T)$后方可离开。求甲乙两人成功会面的概率，假定他们在时间T内的任一时刻到达预定地点是等可能的。

几何概型

练习：在区间$[-1,3]$内任取一点ξ，则

“方程$x^2-2\xi x+4=0$有实数根”

的概率是多少？

几何概型

练习：在区间$[0,1]$内任取两个数，试求

1. 两数之和小于1.2的概率；
2. 两数之差的绝对值大于0.2的概率；
3. 以上两要求全满足的概率。

等可能思维方式

Example (亚伯拉罕·瓦尔德与失踪的弹孔1)

第二次世界大战中，数学家亚伯拉罕·瓦尔德(Abraham Wald)在哥伦比亚大学的统计研究小组（SRG）中工作。该小组是一个秘密计划的产物，它的任务是组织美国的统计学家为战争服务。

军方曾向瓦尔德咨询过一个问题：如何为战机合理配置装甲？

等可能思维方式

Example (亚伯拉罕·瓦尔德与失踪的弹孔2)

军方为统计研究小组提供了一些可能用得上的数据。美军飞机在欧洲上空与敌机交火后返回基地时，飞机上会留有弹孔。但是，这些弹孔分布得并不均匀，如下表所示（弹孔密度的单位：个/平方英尺）：

飞机部位	引擎	机身	油料系统	其余部位
弹孔密度	1.11	1.73	1.55	1.80

等可能思维方式

Example (亚伯拉罕·瓦尔德与失踪的弹孔3)

军方认为，受弹少的部位在战斗中不易受到伤害，飞机的装甲应当集中于受弹密度高的部位，因此他们提出问题只是想让数学家建模计算各部位装甲的厚度。但瓦尔德却给出了相反的思路。

等可能思维方式

Example (亚伯拉罕·瓦尔德与失踪的弹孔4)

瓦尔德认为：飞机各部位受到损坏的概率应该符合等可能模型，但是引擎罩上的弹孔却比其余部位少，那些失踪的弹孔在哪儿呢？瓦尔德深信，这些弹孔应该都在那些未能返航的飞机上。因此需要加装装甲的地方应该是弹孔密度少的地方，也就是飞机的引擎。

题外话：幸存者偏差

说明：对于数学家而言，导致弹孔问题的是一种叫作“幸存者偏差”（survivorship bias）的现象：在对问题进行分析时，如果只注意“幸存者”的数据，常常会得到错误的结论，如以下例子所示：

1. 共同基金(mutual fund)收益率问题；
2. “旧时代的建筑总是比现在的更加美观、牢固”、“现在的产品总是不如以前耐用”；
3. 名人传记中常常强调“挑战不可能”的重要性。

目录

概率的可加性

Theorem

若两个事件A, B互不相容，则

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Corollary

若n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$两两互斥，则

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i).$$

概率的可加性

Corollary

对立事件的概率之和为一，即

$$P(A)+P(\overline{A})=1.$$

例1 一批产品共有50个，其中45个是合格品，5个是次品，从这批产品中任取3个，求其中有次品的概率。

概率的可加性

Theorem

对任意两个事件A, B，有

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

例2 在所有两位数中任取一数，求取到的整数能被2或3整除的概率。

概率的可加性

Corollary (多个事件概率的可加性)

对任意n个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k+1} \sum_{1\le i_1\le\cdots\le i_k\le n} P(A_{i_1}\cdots A_{i_k})\right].$$

概率的可加性：两人同生日问题

练习1：n个球随机地放入$N(N \geq n)$个盒子中，若盒子的容量无限制，求事件

$$A = \text{“每个盒子中至多有一球”}$$

的概率。

练习2：设每个人在一年（按365天计）内每一天出生的可能性都相同，现随机选取$n(n \leq 365)$个人，试求事件“至少有两人同生日”的概率。

概率的可加性：两人同生日问题

n个人中，“至少有两人同生日”的概率：

n	20	21	22	23	24
p	0.411	0.444	0.476	0.507	0.538

n	30	40	50	60
p	0.706	0.891	0.970	0.994

等可能思维方式

习题一1.14：袋内放有2个伍分的硬币，3个贰分的硬币，5个壹分的硬币。任取其中5个，求总数超过一角的概率。

思考题：有$2n+1$枚均匀硬币，甲抛$n+1$个、乙抛n个，求甲所得正面比乙多的概率。

目录

条件概率

在实际问题中，除了要考虑某事件A的概率$P(A)$外，有时还要考虑在“事件B已经发生”的条件下，事件A发生的概率。

一般情况下，后者的概率与前者的概率不同，为了有所区别，常把后者的概率称为条件概率，记为$P(A|B)$。

有时为了强调区别，也称$P(A)$为无条件概率。

条件概率

例：掷一枚均匀的骰子，定义事件

$$A = \text{“小点”}, \ B = \text{“奇数点”}。$$

求$P(A)$及$P(A|B)$。

分析：在求$P(A)$时，样本空间

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}.$$

条件概率

例：掷一枚均匀的骰子，定义事件

$$A = \text{“小点”}，B = \text{“奇数点”}。$$

求$P(A)$及$P(A|B)$。

分析：但在求$P(A|B)$时，由于事件B已经发生，故B外的样本点全部变为不可能事件，这样原样本空间Ω收缩为B，而事件A收缩为AB。

条件概率

Definition

设$P(B)>0$，称

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}$$

为在**事件B发生条件下，事件A的条件概率**。

在古典概率模型中，

$$P(A|B) = \frac{\text{事件}AB\text{包含的样本点数}}{\text{事件}B\text{包含的样本点数}} = \frac{n(AB)}{n(B)}.$$

条件概率

Definition

Let A and B be events in an arbitrary sample space S with $P(B)>0$. We define the conditional probability of A given B by

$$P(A|B) := \frac{P(AB)}{P(B)}.$$

乘法公式

由条件概率的定义，如果$P(B)>0$，则

$$P(AB)=P(B)P(A|B)$$

类似地，如果$P(A)>0$，则有

$$P(AB)=P(A)P(B|A)$$

以上等式称为乘法公式(Product Rule)。

乘法公式

细节辨析：作为乘法公式

$$P(AB) = P(B)P(A|B) = P(A)P(B|A)$$

的比较，公式

$$P(AB) = P(A)P(B)\text{不一定成立！！！}$$

乘法公式

Theorem (n个事件的乘法公式)

如果$P(A_1A_2\cdots A_{n-1}) > 0$，则

$$P(A_1A_2\cdots A_n)$$

$$=P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1A_2)\cdots P(A_n|A_1A_2\cdots A_{n-1}).$$

乘法公式

例1 一批灯泡共100只，其中10只是次品，其余为正品，作不放回抽取，每次取一只，求第三次才取到正品的概率。

例2 在例1中，如果取得一个正品后就不再继续取，求在三次内取得正品的概率。

目录

全概率公式

例：一批螺丝钉由编号为I、II、III的三台机器共同生产，各台机器生产的螺丝钉所占比例分别为35%、40%和25%，次品率分别为3%、2%和1%。求整批螺丝钉的次品率。

全概率公式

Theorem (全概率公式)
如果$B_1, B_2, \cdots$ 构成一个完备事件组，且都有正概率，则对任意事件A有

$$P(A) = \sum_i P(B_i)P(A|B_i).$$

特殊情况：如果事件B满足$0 < P(B) < 1$，则对事件A，有

$$P(A) = P(B)P(A|B) + P(\overline{B})P(A|\overline{B}).$$

全概率公式

例1 有10个袋子，各袋中装球的情况如下：

1. 2个袋子中各装有2个白球与4个黑球；
2. 3个袋子中各装有3个白球与3个黑球；
3. 5个袋子中各装有4个白球与2个黑球。

任选一个袋子，从中任取两个球，求取出的球都是白球的概率。

全概率公式

例2 某工厂的产品以100个为一批。抽样检查时只从每批中抽检10个产品，如发现其中有次品，则认为这批产品不合格。假定每批产品中次品最多不超过4个,且恰有i $(i = 0, 1, 2, 3, 4)$ 个次品的概率如下：

次品数	0	1	2	3	4
概率	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

求各批产品通过检查的概率。

全概率公式

练习：临床诊断记录表明，利用某种试验检查癌症具有如下的效果：对癌症患者进行试验结果呈阳性反应者占95%，对非癌症患者进行试验结果呈阴性反应者占96%。现在用这种试验对某市居民进行癌症普查，如果该市癌症患者数占居民总数的4‰，现在有一个人去进行检查，求被检验为癌症的概率为多少？

全概率公式

练习：有三个箱子，分别编号为1,2,3，

1号箱装有1个红球4个白球，

2号箱装有2个红球3个白球，

3号箱装有3个红球。

某人从三箱中任取一箱，然后从中任意摸出一球，求取得红球的概率。

全概率公式

Example (抽签的公平性1)
袋中有r个红球与b个黑球，现任意不放回地一一摸出，记

$$R_k = \{第k次摸出红球\},$$

证明：

$$P(R_k) \equiv \frac{r}{r+b}, \quad \forall k.$$

全概率公式

Example (抽签的公平性2)

袋中有r个红球与b个黑球，每次从袋中取球，观察颜色后放回s $(s \geq 0)$个同色球，记

$$R_k = \{第k次摸出红球\},$$

证明：

$$P(R_k) \equiv \frac{r}{r+b}, \quad \forall k.$$

全概率公式

Example (输光原则)

甲、乙两人进行公平的赌博（即每次赌局中各自获胜的概率均为0.5），甲有赌注a元，乙有赌注b元，每次赌注为1元，两人持续对局，直到一人输光赌注为止。证明：甲胜的概率为

$$\frac{a}{a+b}.$$

全概率公式的应用

Example (敏感问题的社会调查1)

在问卷调查中，有些问题可能会使被调查者感到尴尬而不愿做真实的回答。一般针对这种情况，调查设计者会采用“随机化回答(Randomized response)”的方法进行访问。

比如要对研究生论文抄袭现象进行社会调查，我们设计两个具有相同答案的问题：

1. 你的生日是否在7月1日以前？
2. 你做论文时是否有过抄袭行为？

全概率公式的应用

Example (敏感问题的社会调查2)

同时调查人员提供给受访者一个放有等量红球和白球的袋子，受访者在不被观察的情况下从袋子中随机取一个球观察颜色后放回。如果是红球回答第一个问题，白球回答第二个问题。

假定被调查者有150人，统计出共有60个回答“是”。问：有抄袭行为的比率大概是多少？

Bayes公式

例：一批螺丝钉由编号为I、II、III的三台机器共同生产，各台机器生产的螺丝钉所占比例分别为35%、40%和25%，次品率分别为3%、2%和1%。现从该批螺丝钉中抽到一颗次品。求这颗螺丝钉由I, II, III号机器生产的概率各为多少？

Bayes公式

Theorem (Bayes定理)

如果$B_1, B_2, \cdots$ 构成一个完备事件组，且都有正概率，则对任意正概率的事件A有

$$P(B_i|A) = \frac{P(B_i)P(A|B_i)}{\sum_j P(B_j)P(A|B_j)}, \quad i = 1, 2, \cdots$$

该公式于1763年由贝叶斯(Bayes)给出。它是在观察到事件A已发生的条件下，寻找导致A 发生的每个原因B_i的概率。

Bayes公式

在贝叶斯公式中，$P(B_i)$和$P(B_i|A)$分别称为原因B_i的先验概率和后验概率。

先验概率常常根据等可能的假设或者以往的数据积累来确定。是在没有进一步信息（不知道事件A是否发生）的情况下，人们对诸事件发生可能性大小的认识。

而在得到进一步的信息之后（知道事件A已经发生），我们得以对各个可能原因发生的概率重新加以修正。

Bayes公式

例3 接例2，求通过检查的各批产品中恰有i个次品的概率。

次品数	0	1	2	3	4
概率	0.1	0.2	0.4	0.2	0.1

Bayes公式

例4 临床诊断记录表明，利用某种试验检查癌症具有如下的效果：对癌症患者进行试验结果呈阳性反应者占95%，对非癌症患者进行试验结果呈阴性反应者占96%。现在用这种试验对某市居民进行癌症普查，如果该市癌症患者数占居民总数的4‰，求：

1. 试验结果呈阳性反应者确实患有癌症的概率；
2. 试验结果呈阴性反应者确实未患癌症的概率。

Bayes公式

练习：8支步枪中有5支已校准过，3支未校准。一名射手用校准过的枪射击时，中靶概率为0.8；用未校准的枪射击时，中靶概率为0.3。现从8支枪中任取一支用于射击，结果中靶。求所用的枪是校准过的概率。

Bayes公式

练习：甲、乙、丙三门炮同时射击一个目标，已知其发射炮弹之比为$1:6:3$，各炮命中率分别为0.4，0.5，0.6。试问：当目标被击中时，此弹是来自哪门炮的可能性最大？

Bayes公式

练习：有三个箱子，分别编号为1,2,3，

1号箱装有1个红球4个白球，

2号箱装有2个红球3个白球，

3号箱装有3个红球。

某人从三箱中任取一箱，然后从中任意摸出一球发现是红球，求该球取自1号箱的概率。

全概率公式与Bayes公式

练习：两个口袋，甲袋中有三个白球，两个黑球，乙袋中两个白球，一个黑球。

1. 由甲袋中任取一个球放入乙袋，再从乙袋中取出一个球，求取到白球的概率。
2. 在①中，若发现乙袋中取出的球是白球，问从甲袋中取出的球是白球的概率？

目录

两个事件的独立性

例：袋中有5个球（3白2黑），从袋中依次取两球，令

$$A = \text{“第二次取得白球”},$$
$$B = \text{“第一次取得白球”}。$$

试分析在以下两种情形下，事件B发生与否对事件A发生概率的影响：

1. 每次取球后放回；
2. 每次取球后不放回。

两个事件的独立性

设A, B均为正概率事件，如果事件B的发生不影响事件A的概率，即

$$P(A|B) = P(A),$$

则称事件A对事件B是独立的，否则称是不独立的。

两个事件的独立性

设A, B均为正概率事件，则以下式子相互等价：

1. $P(A|B) = P(A)$；
2. $P(AB) = P(A)P(B)$；
3. $P(A|\overline{B}) = P(A)$；
4. $P(B|A) = P(B)$；
5. $P(B|\overline{A}) = P(B)$。

两个事件的独立性

Definition

若两事件A、B满足

$$P(AB) = P(A)P(B),$$

则称<u>事件A、B相互独立</u>(independent)。

性质：若事件A与B相互独立，则

$$\overline{A}\text{与}B\text{、}A\text{与}\overline{B}\text{、}\overline{A}\text{与}\overline{B}$$

也是相互独立的。

两个事件的独立性

例：从一副标准52张扑克牌中任取一张，记$A=\{$抽到$K\}$，$B=\{$抽到黑色的牌$\}$。问事件A,B是否独立？

例：甲乙两射手独立地射击同一目标，他们击中目标的概率分别为0.9和0.8。求每人射击一次后，目标被击中的概率。

两个事件的独立性

练习：设随机事件A与B相互独立，

且$P(B)=0.5$，$P(A-B)=0.3$，则$P(B-A)=$

$(A)\ 0.1$ $(B)\ 0.2$ $(C)\ 0.3$ $(D)\ 0.4$

多个事件的独立性

Definition

称$n(n \geq 2)$个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立，如果对任意一组指标

$$1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_k \leq n \quad (k \geq 2)$$

都有

$$P(A_{i_1}A_{i_2}\cdots A_{i_k}) = P(A_{i_1})P(A_{i_2})\cdots P(A_{i_k}).$$

多个事件的独立性

Example

三个事件A, B, C相互独立的条件是

$$\text{两两独立：}\begin{cases} ① \ P(AB) = P(A)P(B) \\ ② \ P(AC) = P(A)P(C) \\ ③ \ P(BC) = P(B)P(C) \end{cases}$$

$$④ \ P(ABC) = P(A)P(B)P(C)$$

注：上述四个式子缺一不可。

多个事件的独立性

性质：设$n(n \geq 2)$个事件$A_1, A_2, \cdots, A_n$相互独立，则

1. 其中任意$k(k \geq 2)$个事件也是相互独立的；
2. 将若干个A_i用$\overline{A}_i$替换后，得到的新事件集也相互独立。特别地，我们有

$$P(A_1 + \cdots + A_n) = 1 - P(\overline{A}_1) \cdots P(\overline{A}_n).$$

独立性的应用

在实际应用中，往往根据问题的实际情况去假设事件间的独立性。如

- 投掷硬币（或骰子），我们相信每次的结果都不受以前结果的影响；
- 在相同条件下做实验，一般假定每次的实验误差相互独立；
- 一般假定生产中不同的流程（机器、人）也是相互独立的。

独立性的应用

例1 一批产品共有N个，其中有M个是次品。对该批产品进行有放回抽样，连续取样n 次。求n次都取得合格品的概率。

例2 加工一零件经过三道工序，设第一、二、三道工序的次品率分别为$2\%, 3\%, 5\%$，假设各工序互不影响，求加工出来的零件的次品率。

独立性的应用

例3（系统可靠性） 一个电子元件能正常工作的概率叫做这个元件的可靠性；由若干个电子元件构成的系统能正常工作的概率叫做这个系统的可靠性。系统的可靠性除了与构成系统的各个元件的可靠性有关外，还与各元件之间的联结方式有关。

设一个系统由n个元件组成，第i个元件的可靠性为p_i $(i = 1, 2, \cdots, n)$，且各元件独立运转，试讨论以下两种情况中系统的可靠性：

1. 系统由这n个元件串联而成；
2. 系统由这n个元件并联而成。

独立性的应用

练习：三人独立地去破译一份密码, 已知每个人能译出的概率分别为1/5，1/3，1/4。问三人中至少有一人能将密码译出的概率是多少？

独立性的应用

练习：甲、乙、丙三部机床独立工作，在一小时内，三台机床正常工作的概率分别为$0.9, 0.8, 0.85$。求在一个小时内，

1. 有机床发生故障的概率；
2. 至少两台机床发生故障的概率。

目录

n重Bernoulli试验

Definition (Bernoulli试验(Bernoulli trial))

只有“成功”、“失败”两种可能结果的试验称为Bernoulli试验。将一Bernoulli试验独立重复n次称为n重Bernoulli试验。

n重Bernoulli试验

例 若某射手每次射击命中十环的概率均为p，现进行4次独立射击，求{恰有k次命中十环}的概率。

解：用X表示4次射击命中十环的次数，则

X=0	xxxx					
X=1	oxxx	xoxx	xxox	xxxo		
X=2	ooxx	oxox	oxxo	xoox	xoxo	xxoo
X=3	xooo	oxoo	ooxo	ooox		
X=4	oooo					

Figure: 其中“×”表示未中，“○”表示命中。

n重Bernoulli试验

Theorem (Bernoulli定理)

设一次试验中事件A发生的概率为p $(0<p<1)$，则n重*Bernoulli*试验中，事件A恰好发生k次的概率为$(0\leq k\leq n)$

$$b(k;n,p):=C_n^k\,p^k(1-p)^{n-k}.$$

例1 某批产品中有20%的次品，对该批产品进行5次有放回的抽样，求取得的次品数等于$0,1,2,3,4,5$的概率。

n重Bernoulli试验

例2 甲、乙两个乒乓球运动员进行乒乓球单打比赛，已知每一局甲胜的概率为0.6，乙胜的概率为0.4。比赛时可以采用三局二胜制或者五局三胜制，问在哪一种比赛制度下，甲获胜的可能性较大？

n重Bernoulli试验

例3 一个工人负责维修10台同类型的机床，在一段时间内每台机床发生故障需要维修的概率为0.3。求：

1. 在这段时间内有$2 \sim 4$台机床需要维修的概率；
2. 在这段时间内至少有2台机床需要维修的概率。

n重Bernoulli试验

例4 已知每枚地对空导弹击中来犯敌机的概率为0.96，问需要发射多少枚导弹才能保证至少有一枚导弹击中敌机的概率大于0.999？

n重Bernoulli试验

练习：若干人独立地向一移动目标射击,每人击中目标的概率都是0.6。求至少需要多少人,才能以0.99以上的概率击中目标？

目录

概率的公理化定义

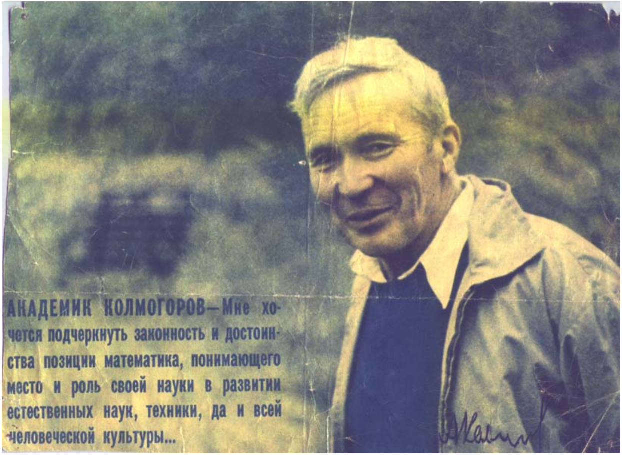


Figure: 1933年，前苏联数学家柯尔莫哥洛夫(Kolmogorov) 给出了概率的公理化定义。

事件σ代数

Definition (事件σ代数)

由样本空间Ω的某些子集组成的集族$\mathscr{F}$，如果满足：

1. $\Omega \in \mathscr{F}$；
2. 对逆封闭：若$A \in \mathscr{F}$，则$\overline{A} \in \mathscr{F}$；
3. 对可列并封闭：对任意集列$\{A_n \in \mathscr{F}\}_{n\geq 1}$，有$\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathscr{F}$，

则称$\mathscr{F}$为Ω上的事件σ代数，$\mathscr{F}$中的集合称为随机事件，简称事件。

事件σ代数

Theorem (事件σ代数的性质)

若$\mathscr{F}$为事件σ代数，则有

4. $\varnothing \in \mathscr{F}$；
5. 若$A_1, \cdots, A_n \in \mathscr{F}$，则$\cup_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$；
6. 对任意集列$\{A_k \in \mathscr{F}\}_{k \geq 1}$，有$\cap_{k=1}^{n} A_k \in \mathscr{F}$及$\cap_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathscr{F}$；
7. 若$A, B \in \mathscr{F}$，则$A - B \in \mathscr{F}$；

事件σ代数

Definition (Borel运算)

集合的以下运算统称Borel运算：

1. 求逆运算；
2. 至多可列个集合的并；
3. 至多可列个集合的交。

Corollary

事件σ代数对所有*Borel*运算封闭。

概率的公理化定义

Definition (概率的公理化定义)

设$\mathscr{F}$是样本空间Ω上的事件σ代数。若函数$P:\mathscr{F}\to\mathbb{R}$满足以下条件

1. 非负性：对任意$A\in\mathscr{F}$，均有$P(A)\geq 0$;
2. 规范性：$P(\Omega)=1$;
3. 可列可加性：若事件序列$\{A_n\}_{n\geq 1}$两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right)=\sum_{n=1}^{\infty}P(A_n),$$

则称$P(\cdot)$为$\mathscr{F}$上的概率测度，$P(A)$称为事件A的概率。

概率的公理化定义

Definition (概率空间Probability space)

以下三部分

1. 样本空间Ω;
2. Ω上的事件σ代数$\mathscr{F}$;
3. $\mathscr{F}$上的概率测度$P(\cdot)$

组成的三元组$(\Omega, \mathscr{F}, P)$称为概率空间。

概率的公理化定义

概率测度的性质：

1. $P(\varnothing)=0$;
2. 有限可加性：若事件序列$A_1, A_2, \cdots, A_k$两两互斥，则
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{k} A_n\right)=\sum_{n=1}^{k} P(A_n);$$
3. 对任意$A \in \mathscr{F}$，均有$0 \leq P(A) \leq 1$。

条件概率

条件概率的性质：设$P(B) > 0$，则

1. 对任意事件A，均有$P(A|B) \geq 0$;
2. $P(\Omega|B) = 1$;
3. 若事件序列$\{A_n\}_{n\geq 1}$两两互斥，则

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \middle| B\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n|B)$$

故条件概率也是概率。我们已经得到和即将证明的有关概率的一切性质，也都适用于条件概率。