集合初步知识

JIHE CHU BU ZHISHI

天津科学技术出版社

第二章　集合的相等与包含

集合之间有各种关系，本章只研究集合的相等和包含两种关系．

一、集合的相等

定义 1　如果集合E的每一个元素都属于集合F，同时集合F的每一个元素都属于集合E，也就是说，集合E和集合F的元素完全相同，我们就说集合E与集合F相等．记为$E=F$．

用式子表示就是：对于一切x，均有

若　　　$x\in E$，则　$x\in F$；

并且若　$x\in F$，则　$x\in E$，

那么　　$E=F$．

例 1　集合$A=\{1,\ 2,\ 3\}$和集合$B=\{3,\ 2,\ 1\}$是相等的，写成$A=B$．

例 2　方程$x^2-3x+2=0$的解集合与集合$\{1,\ 2\}$是相等的，记为$\{x: x^2-3x+2\}=\{1,\ 2\}$．

二、集合的包含关系

定义 2　设两个集合E和F，如果F的所有元素都是E的元素，则称F被E包含．记为$F\subseteq E$．读作“F被E包含”或“F包含在E中”．

用式子表示就是，如果$x \in F$则有$x \in E$，那么$F \subseteq E$。这时，我们把F叫做E的子集，E叫做F的包括集（也叫母集）（图2-1）。

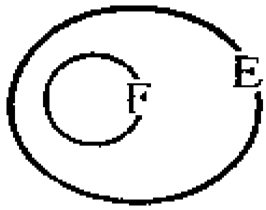


图2-1

如果集合$F \subseteq E$，且E中至少有一个元素不属于集合F，那么我们就说，集合E是集合F的真包含，或者说集合F是集合E的真子集，记为$F \subset E$（或$E \supset F$）。

记法$F \not\subset E$表示"F不包含在E中"。

记号$\subseteq$、$\subset$叫做包含记号，$\not\subset$叫做不包含记号，他们都是表示集合之间关系的记号。

例3　设A是小于7的自然数的集合，B是一位自然数的集合，试表示出A与B的关系。

〔解〕　用列举法把集合A和B表示出来，则

$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,

$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

$\because A$中的每一个元素都是B中的元素，但B中的7、8、9不是A中的元素，

$\therefore A \subset B$。

即A是B的真子集。

例4　设有集合$A = \{x: x$是偶数$\}$和$E = \{x: x$是整数$\}$，试表示出A与E的关系。

〔解〕　$\because$任何偶数都是整数，

即　若$x \in A$　则　$x \in E$,

$\therefore$　$A \subseteq E$。

但奇数是整数，故属于E，但却不属于A,

$\therefore A \subset E$。

即　E是A的真包含。

例 5　设有集合$A=\{$正方形$\}$和$E=\{$矩形$\}$，试表示出A与E的关系

〔解〕　∵任何正方形都是矩形，即　若$x\in A$，则$x\in E$，

∴　$A\subseteq E$。

但长和宽不等的矩形不是正方形，即其属于E而不属于A，

∴　$A\subset E$。

即　E是A的真包含。

例 6　设A是以 5 结尾的全体自然数集，而B是被 5 整除的全体自然数集，试表示出A与B的关系。

〔解〕　∵任何以 5 为结尾的自然数都能被 5 整除，即若$x\in A$，则$x\in B$，

∴$A\subset B$。

又因为以零为结尾的自然数能被 5 整除，故属于B，但不属于A。

∴　$A\subset B$。

例 7　设有线段AB，和这线段上异于A、B的两个点A'、B'（图2-2），AB的所有点组成集合E，$A'B'$的所有点组成集合F，

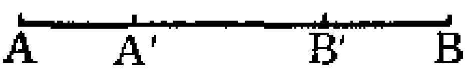


图2-2

则　$F\subset E$。

例 8　设集合：$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 6\}$，$B=\{1,\ 2\}$，$C=\{2,\ 3\}$，$D=\{6,\ 2,\ 4,\ 1\}$，$E=\phi$。

试表示出集合A与集合B、C、D、E的关系。

〔解〕 $B\subset A$, $C\not\subset A$, $D=A$（或$D\subseteq A$, $A\subseteq D$），$E\subset A$.

从例8可见：

（1）集合是它自身的子集：$A\subseteq A$；

（2）空集是任何集合的子集.

例9 列出集合{1，2，3}的所有子集.

〔解〕 {1，2，3}的所有子集为：ϕ，{1}，{2}，{3}，{1,2}，{1，3}，{2,3}，{1，2，3}.共有八个子集．其个数的求法是$C_3^3+C_3^2+C_3^1+C_3^0=8=2^3$.

以这八个子集为元素组成的集合，叫做{1，2，3}的子集簇.

一般地，n个元素组成的集合，其中有m个元素的子集有C_n^m个，所以，n个元素组成的集合的所有子集个数是

$$C_n^n+C_n^{n-1}+\cdots+C_n^2+C_n^1+C_n^0=2^n.①$$

一个集合A的所有的子集所组成的集合叫做A的**子集族**，用$T(A)$表示．$T(A)$是以集合为元素的集合.

三、集合的相等与包含的性质

若A、B、C为任意集合，则有下面的性质：

定理1 $A\subseteq B$且$B\subseteq A\Longleftrightarrow A=B$.

这个定理在直观上看是很显然的．我们从定义出发，用集合中所含元素的异同来证明.

证明 先证"$\Longrightarrow$"：

对于任意$a\in A$，由于$A\subseteq B$，故$a\in B$，即A的任意元素都

① 利用二项式公式 $2^n=(1+1)^n=C_n^n+C_n^{n-1}+\cdots+C_n^1+C_n^0$得到此式.

是B的元素；

同样，对于任意$b\in B$，由于$B\subseteq A$，故$b\in A$，即B的任意元素都是A的元素.

因此，A与B所含的元素完全相同. 所以$A=B$.

再证"$\Longleftarrow$"：

对于任意$a\in A$，由于$A=B$，则$a\in B$，因此$A\subseteq B$，同理可得$B\subseteq A$.

定理 2　若$A\subseteq B$　且$B\subseteq C$，则$A\subseteq C$.

这是集合包含的传递性.

定理 3　若$A=B$且$B=C$，则$A=C$.

这是集合相等的传递性.

定理 4　若$A\subseteq B$　且$B=C$，则$A\subseteq C$.

这是集合的包含与相等的传递性.

定理 5　任一集合A均是其自身的子集：$A\subseteq A$.

这叫集合的自身性.

定理 6　空集是任何集合的子集.

定理 2—6 都很显然. 直观上很容易看出，其理论证明与定理 1 的方法相同，读者可自行练习.

从以上几个定理可以看出，集合之间的"$=$"和"$\subseteq$"（或"$\subset$"）关系，跟数的"$=$""$\leqslant$"（或"$<$"）关系类似，也满足传递性.

这里要注意，集合之间的"包含"、"相等"的关系，绝对不是单纯地由两个集合的元素个数多少来决定的，而是还要看元素本身是否相同. 例如：$\{1, 2\}\subseteq\{1, 2, 3\}$，但$\{1, 2\}\not\subseteq\{2, 3, 4\}$.

习　题

8．判断下列各组集合是否存在"相等"、"包含"关系，用记号表示出来：

（1）$A=\{x:x^2-3x+2=0\}$，$B=\{x:x-2=0\}$；

（2）$P=\{x:x>-5\}$，$Q=\{x:x>1\}$；

（3）$M=$｛组成盐酸的元素｝，$G=$｛组成氯酸的元素｝；

（4）$E=$｛整数｝，$F=$｛正有理数｝；

（5）$C=\{x:x^2-25=0\}$，$D=$｛25的平方根｝．

9．如果$N\subseteq M$，那末M能否是N的子集？M能否是N的真子集？

10．在自然数中，设用3除得尽的数的集合为A，用6除得尽的数的集合为B，将A、B之间的关系用式子表示出来．

11．在某年级，设有哥哥的学生集合为A，哥哥、弟弟都有的学生集合为B，将A、B之间的关系用式子表示出来．

12．用证明定理1的方法，证明定理2—6．

13．A是由八个元素组成的集合，试求A的所有子集的个数．

14．设$B=\{a,b,c,d\}$，试用列举法表示出$T(B)$．

第三章　蕴涵和逻辑符号

一、蕴　　涵

设关于一个参照集E的元素的两个特性p和q，用$E(p$，来表示E的元素中具有特性p的那些元素的集合，并写成$P=E(p)$。同样，用$E(q)$来表示E的元素中具有特性q的那些元素的集合，记为$Q=E(q)$。

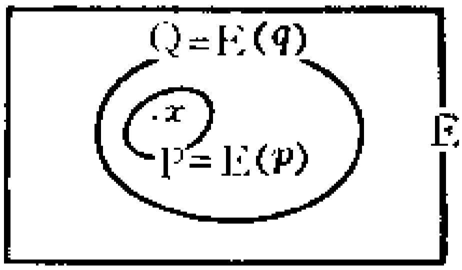


图3-1

如果P包含在Q中（图3-1），就可以说，具有特性p的元素x也具有特性q。换句话说，属于$E(p)$的元素x也属于$E(q)$，即$E(p)\subseteq E(q)$，那么就说，**特性p蕴涵特性q**。记为$p\Longrightarrow q$，读作：“p蕴涵q”。

当我们把第一个特性p看作是假设，第二个特性q看作是结论时，还可以说$p\Longrightarrow q$是一个推理。

例1　设参照集E为四边形的集合，性质p为E中图形对边互相平行，性质q为E中图形四个角都是直角，即$E(p)$为平行四边形的集合，$E(q)$为矩形的集合，因此有$E(p)\subset E(p)$。那么就说特性q蕴涵特性p，记为$q\Longrightarrow p$。

二、逆　蕴　涵

设有蕴涵$p\Longrightarrow q$，则蕴涵$q\Longrightarrow p$称为上述蕴涵的**逆蕴涵**。

要特别注意，当蕴涵$p \Longrightarrow q$是正确的，其逆蕴涵$q \Longrightarrow p$可能是正确的，也可能是不正确的．如例 1 的逆蕴涵就不正确．又如：

例 2　设A为平面上所有角的集合，α为一定角，性质a为与α构成对顶角，性质b为与α相等的角，那么

$$A = \{\text{所有的角}\},$$
$$A(a) = \{\alpha\text{的对顶角}\},$$
$$A(b) = \{\text{与}\alpha\text{相等的角}\}.$$

由于与α对顶的角必定与α相等，由此有$A(a) \subseteq A(b)$，即$a \Longrightarrow b$；但与α相等的角不一定都与α是对顶角，因此$b \Longrightarrow a$是不正确的．

下面我们举一个蕴涵是正确的，其逆蕴涵也是正确的例子：

例 3　设L是平面M上所有直线的集合，l_0是M上一固定直线，性质p为平面M上直线与l_0互相平行，性质q为平面M上直线与l_0斜率相等，那么

$$L = \{M\text{上所有的直线}\},$$
$$L(p) = \{M\text{上与}l_0\text{互相平行的直线}\},$$
$$L(q) = \{M\text{上与}l_0\text{斜率相等的直线}\}.$$

由于在同一平面内与l_0平行的直线必与l_0斜率相等，因此有$L(p) \subseteq L(q)$，即$p \Longrightarrow q$；反过来，由于在同一平面内与l_0斜率相等的直线必定与l_0互相平行，因此有$L(q) \subseteq L(p)$，即$q \Longrightarrow p$．

我们把蕴涵是正确的，且其逆蕴涵也是正确的，叫做**互为逆蕴涵**．

三、等 价 性

设关于一个参照集E里的元素的两个特性p和q，如果互为逆蕴涵，即

$$p \Longrightarrow q \qquad 和 \qquad q \Longrightarrow p$$

都是正确的，则称特性p和特性q是等价的。

记为
$$p \Longleftrightarrow q .$$
读作“p等价于q”。

因为$p \Longrightarrow q$，所以如果$x \in E(p)$，那么$x \in E(q)$；又因为$q \Longrightarrow p$，所以如果$x \in E(q)$，那么$x \in E(p)$。

于是
$$[p \Longleftrightarrow q] \Longleftrightarrow [E(p) = E(q)] .$$

在一般书中所说的充要条件，就是互为逆蕴涵，亦即是等价的。

四、普遍量词和存在量词

这里介绍两个常用的符号$\forall$和$\exists$。

设有一个参照集R和一个特性p。我们来研究R中具有特性p的元素的集合$E(p)$：

$$E(p) = \{x: \ x \in R 且 x 具有特性 p\}.$$

分两种情况来研究：

1. 当$E(p) = R$（图3-2）时，R的所有元素都具有特性p。那么就可以说：“对于R中任意的元素x，都具有特性p”，或者“对于一切x，特性p都是正确的①”。我们借助于符号

① 这里所说的x，自然是指$x \in R$。

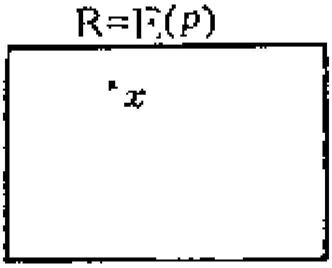


图3-2

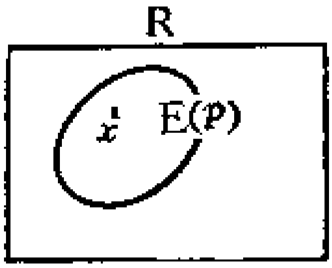


图3-3

“∀”来表示它，并写成

$$(\forall x)(x\text{具有特性}p),$$

或简写成：$(\forall x)(p)$.

符号∀读作“任意的”或者“对于一切”，我们把符号∀叫做普遍量词.

对于符号∀，我们有如下关系式：

$$(\forall x)(p)\Longleftrightarrow E(p)=R.$$

2.当集合$E(p)$是非空的（$E(p)\neq\phi$）时，R中至少有一个元素具有特性p（图3-3）．那么就说：“至少存在一个x，它具有特性p”．我们借助于符号“∃”来表示它，可写成

$$(\exists x)(x\text{具有特性}p),$$

或简记为$(\exists x)(p)$．

符号∃读作“至少存在一个”，我们把符号∃叫做存在量词.

对于符号∃，我们有如下关系式：

$$(\exists x)(p)\Longleftrightarrow E(p)\neq\phi.$$

这两个符号（∀、∃）在推理中经常要用到，我们把它们叫做逻辑符号.

习　　题

15．试表示下列各题的蕴涵关系，并说明其逆蕴涵是否正确．

（1）在四边形中，有特性p和q．其中p是四个边都相等，q是四个边都相等且四个角都是直角；

（2）在自然数中，性质p为可被3整除，性质q为可被6整除；

（3）在三角形中，有两个特性p和q．其中p为三角形两腰相等，q为三角形中三内角分别为$45°$，$90°$，$45°$；

（4）在代数式的集合E中，$E(e)$表示整式，$E(f)$表示多项式．

16．p、q、r、m分别表示我国的以下几个地区的人：p为北方人，q为南方人，r为东北人，m为广东人．试表示出他们的蕴涵关系．

17．下列关系是否是蕴涵关系？若是其逆蕴涵是否正确？

（1）在三角形中，性质p为三个内角均为锐角，性质q为一个内角是钝角；

（2）在四边形中，性质p为四个角都是直角，性质q为四条边都相等，性质r为四个角都是直角且四条边都相等．

18．用逻辑符号（$\forall$、$\exists$）表示下列叙述：

（1）过直线l外一点P，可以作一条直线l'与l平行；

（2）过任一点M可作一条直线l'与任给的直线l垂直；

（3）对于任一个三角形，其内角和都是$180°$．

19．说明下列记号的意义：

（1）$(\forall x)(m)$；　　（2）$(\exists x)(n)$；

（3）$(\forall x)(p$或$q)$；　　（4）$(\forall x)(p$或非$q)$；

（5）$(\exists x)(p$或$q)$；　　（6）$(\exists x)(p$或非$q)$；

（7）$(\forall x)(p$且$q)$；　　（8）$(\exists x)($非p且非$q)$．

第四章　集合的运算

一、集合的和

我们看下面的例子：

设A为小于 7 的自然数的集合，B为10以内的奇数的集合，用列举法表示出A、B如下：

$$A=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

$$B=\{1, 3, 5, 7, 9\}.$$

我们把集合A和集合B的所有元素（重复的只算一次）组成一个新的集合

$$S=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9\},$$

则称S为集合A与集合B的“和集”（如图4-1）．

这里A与B重复的元素 1,3,5在S里只算一次．

定义 1　由集合A与B中元素的全体（重复的元素只算一次）组成的集合S,称为集合A与B的**和集**（也叫**并**、**联**或**合集**等），简称为**和**．记为

$$S=A\cup B\text{（或}S=A\dotplus B,\ S=A+B\text{）}$$

读作A与B的和（或A与B的并）．

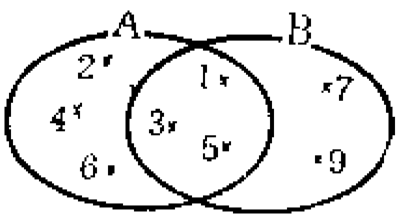


图4-1

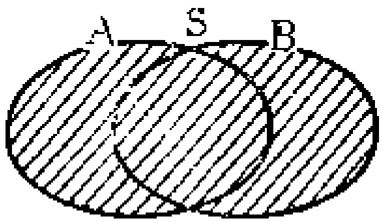


图4-2

用图形表示就是图4-2.

显然，这一定义可表为

$$x\in A\cup B\Longleftrightarrow x\in A\text{或}x\in B.$$

在此定义中应当注意，如果有既属于A又属于B的元素x，则x在$A\cup B$中只能算一个元素.

求集合的和集的运算，称为求和（并）运算或加法运算.

例1　设$A=\{1,\ 2,\ 3\}$，$B=\{3,\ 4,\ 5\}$，求$A\cup B$并用图表示出来.

〔解〕　$A\cup B=\{1,2,3\}\cup\{3,4,5\}=\{1,2,3,4,5\}$其图如图4-3.

这里3既属于A，又属于B，但在$A\cup B$中只能算一个元素，因此$A\cup B$只有五个元素.

例2　设$A=\{x:-2<x<2\}$,$B=\{x:0\leqslant x\leqslant 5\}$,求$A\cup B$.

〔解〕　
$$\begin{aligned}A\cup B&=\{x:\ -2<x<2\}\cup\{x:\ 0\leqslant x\leqslant 5\}\\&=\{x:\ x\in(-2,2)\cup[0,5]\}\\&=\{x:\ x\in(-2,5]\}=(-2,5]\text{①}.\end{aligned}$$

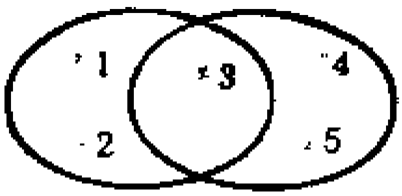


图4-3

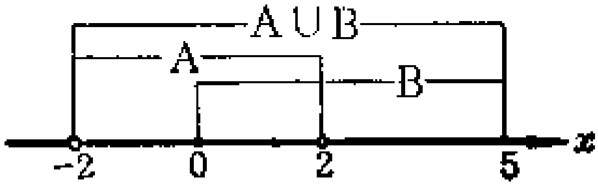


图4-4

① $(-2,\ 2)$，$[0,\ 5]$，$(-2,5]$都叫区间.其中$(-2,2)$表示$-2<x<2$，不包括端点-2、2，叫做开区间；$[0,\ 5]$表示$0\leqslant x\leqslant 5$，包括端点0、5，叫做闭区间；$(-2,\ 5]$表示$-2<x\leqslant 5$，不包括左端点-2，包括右端点，叫做半开半闭区间.类似地，$[-2,5)$也称半开半闭区间，它表示$-2\leqslant x<5$.

用数轴表示此结果，即为图4-4.

例 3　设A为奇数的集合，B为偶数的集合，I为整数的集合，求$A\cup B$，$A\cup I$，$B\cup I$.

〔解〕　由于奇数与偶数的全体，就是整数的全体，故$A\cup B=I$；

又由于$A\subset I$，因此，A与I的和并未使I增添任何新的元素，故$A\cup I=I$；

同理　$B\cup I=I$.

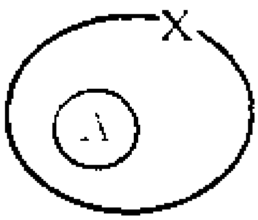


图4-5

这里A和B都是I的子集，由此结果的推广，可得以下结论：

定理 1　对于任意集合X，则A是X的子集的充要条件是A与X的和集仍是X（如图4-5），即

$$A\subseteq X\Longleftrightarrow A\cup X=X.$$

特别地，有$\phi\cup X=X$，$X\cup X=X$.

例 4　求方程$\cos^3 x=\cos x$的解集.

〔解〕　原方程可变为$\cos^3 x-\cos x=0$.

$$\cos x(\cos^2 x-1)=0.$$

由$\cos x=0$，得$x\in X_1=\left\{\left(K+\frac{1}{2}\right)\pi;K=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}$；

由$\cos^2 x-1=0$，得$x\in X_2=\{K\pi;\ K=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$.

故原方程的解集合X为

$$X=X_1\cup X_2=\left\{\frac{K\pi}{2};\ K=0,\pm1,\pm2,\cdots\right\}.$$

注意，集合的求和运算与数字的求和运算是有本质的区别的.通俗的说，前者是范围的合并（如图4-2），后者是

数值的求和.对于数值求和而言，有

$$a+x=x \Longleftrightarrow a=0 \text{成立.}$$

对集合求和而言，只有

$$A \cup X=X \Longleftarrow A=\phi$$

成立，却不能保证

$$A \cup X=X \Longrightarrow A=\phi$$

一定成立（如图4-5）.

二、集合的交

我们看第四章第一节所举的例子

$A=\{1,2,3,4,5,6\}$，$B=\{1,3,5,7,9\}$.

其中元素1、3、5既属于A，又属于B．我们把这样的元素组成的集合$J=\{1,3,5\}$称作A与B的交集（如图4-6）.

定义2 由集合A与集合B的公共元素的全体所组成的集合J，叫做集合A与B的交集（或通集），简称为交．记为

$$J=A \cap B \text{（或} J=AB\text{）},$$

读作A与B的交.

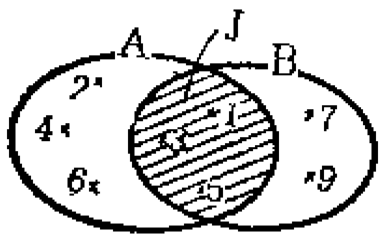


图4-6

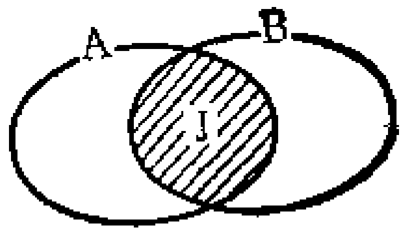


图4-7

用图形表示就是图4-7.

显然，这一定义可表为

$$x \in A \cap B \Longleftrightarrow x \in A \text{且} x \in B.$$

求集合的交集的运算，称为求交（积）运算或乘法。

例5　求例1中 A 与 B 的交集。

〔解〕　因为 A 与 B 的公共元素是3，故 $A \cap B = 3$。

例6　求例2中 A 与 B 的交集。

〔解〕　$A \cap B$ 是同时满足不等式 $-2 < x < 2$ 及 $0 \leqslant x \leqslant 5$ 的 x 的全体，即满足 $0 \leqslant x < 2$ 的 x 的全体，故

$$A \cap B = \{x : -2 < x < 2\} \cap \{x : 0 \leqslant x \leqslant 5\}$$
$$= \{x : 0 \leqslant x < 2\} = [0, 2).$$

例7　求例3中集合的交集 $A \cap B$，$A \cap I$，$B \cap I$。

〔解〕　由于 A 与 B 没有公共元素，故 $A \cap B = \phi$；

由于 $A \subset I$，因此 A 的一切元素都是 A 与 I 的公共元素，故 $A \cap I = A$；

同理　$B \cap I = B$。

由此结果的推广，可得以下结论：

定理2　对于任意集合 X，则 A 是 X 子集的充要条件是 A 与 X 的交集是 A（图4-8）。即

$$A \subseteq X \Longleftrightarrow A \cap X = A.$$

特别地，有 $\phi \cap X = \phi$，$X \cap X = X$。

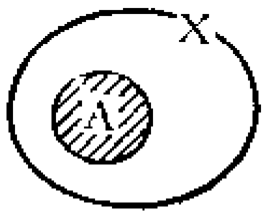


图4-8

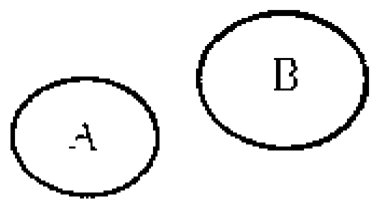


图4-9

若 A 与 B 的交集是空集，就称 A 与 B 不相交（如图4-9）。

注意，集合的求交（求积）运算与数字的求积运算有着本质的区别，通俗地说，前者是求范围的公共部分（如图4-7），后者是数值的倍数.对于数值求积而言，有

$$xy=0 \Longleftrightarrow x=0 \text{或} y=0$$

成立．对集合求交而言，却不能保证

$$A \cap B=\phi \Longrightarrow A=\phi \text{ 或 } B=\phi$$

一定成立（如图4-9）.

例8　求$x^2-x-6<0$的解集.

〔解〕　不等式可化为（$x+2$）（$x-3$）<0.

它的解集X是下面两个不等式组：

$$\begin{cases} x+2>0 \\ x-3<0 \end{cases} \text{（解集为}X_1\text{）与} \begin{cases} x+2<0 \\ x-3>0 \end{cases} \text{（解集为}X_2\text{）}$$

的解集的和，即$X=X_1 \cup X_2$.

对于前一不等式组，要求x同时适合$x+2>0$及$x-3<0$，故X_1是它们的解集的交，即

$$\begin{aligned} X_1 &= \{x: x+2>0\} \cap \{x: x-3<0\} \\ &= \{x: x>-2\} \cap \{x: x<3\} \\ &= \{x: -2<x<3\} = (-2,3)\text{；} \end{aligned}$$

同理可得

$$X_2=\{x: x+2<0\} \cap \{x: x-3>0\}=\phi.$$

于是$X=X_1 \cup X_2=(-2,3) \cup \phi=(-2,3)$.

三、集合的差

我们看第四章第一节所举的例子

$$A=\{1,2,3,4,5,6\},\ B=\{1,3,5,7,9\}.$$

其中元素2,4,6属于A，但不属于B.我们把这样的元素组成

的集合$D=\{2,4,6\}$称作A与B的差（如图4-10阴影部分）．

定义3　由属于集合A而不属于集合B的元素的全体组成的集合D，叫做集合A与B的差集，简称为差．记为

$$D=A-B\ （或D=A\setminus B）．$$

读作集合A与B的差（或集合A减B）．

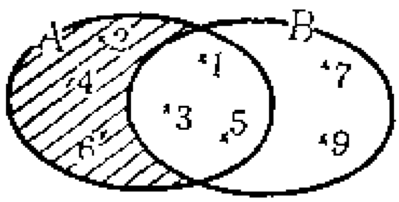


图4-10

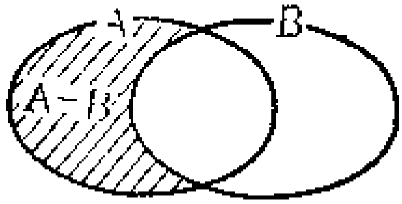


图4-11

用图形表示，就是图4-11．

显然，这一定义可表为

$$x\in A-B\Longleftrightarrow x\in A但x\bar{\in}B.$$

求集合的差集的运算，称为求差运算或减法．

例9　对于例1的集合A、B，求$A-B$，$B-A$．

〔解〕　由于属于A而不属于B的元素为1，2．

故　　$A-B=\{1,2\}$；

同理　　$B-A=\{4,5\}$．

由例9可见，$A-B$与$B-A$是不同的．为了叙述的方便，在$A-B$中，我们把集合A叫做被减集，B叫做减集．在求集合的差时，必须分清谁是被减集，谁是减集．

例10　对于例2的集合A、B，求$A-B$，$B-A$．

〔解〕　$A-B=\{x:-2<x<2\}-\{x:0\leqslant x\leqslant 5\}$

$=\{x:-2<x<0\}=(-2,0)$．

$B-A=\{x:0\leqslant x\leqslant 5\}-\{x:-2<x<2\}$

$=\{x;2\leqslant x\leqslant 5\}=[2,5]$.

例11　对于例3的集合A、B、I，求$A-B$，$B-A$，$A-I$，$B-I$，$I-A$，$I-B$。

〔解〕　由于A中没有B的元素，故$A-B=A$；

同理　　$B-A=B$；

由于A中的每一个元素都是I中的元素，故属于A而不属于I的元素是没有的，于是

$$A-I=\phi;$$

同理　　$B-I=\phi$；

由于$x\in I$（x是整数）且$x\bar{\in}A$（x不是奇数）$\Longleftrightarrow x\in B$（$x$是偶数），知$I-A=B$；

同理　　$I-B=A$。

定理3　对于任意集合A、B，$A-B=A-(A\cap B)$，$A=(A\cap B)\cup(A-B)$。

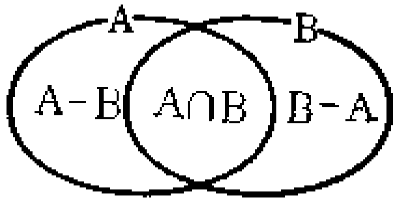


图4-12

读者可自行证明这个结论。我们用图4-12给出了定理3直观的描绘。

定理4　对于任意集合A、B、C，

$(A-B)\cap C=(A\cap C)-B=(A\cap C)-(B\cap C)$。

证明　我们用元素的所属关系来证明第一个等号。

(i) $\forall x\in(A-B)\cap C$，由定义2得$x\in A-B$且$x\in C$，又由定义3得$x\in A$但$x\bar{\in}B$且$x\in C$。因此，由定义2得$x\in A\cap C$但$x\bar{\in}B$，又由定义3得$x\in(A\cap C)-B$。这就说明集合$(A-B)\cap C$里的任意一个元素，都是集合$(A\cap C)-B$里的元素，所以$(A-B)\cap C\subseteq(A\cap C)-B$。

(ii) $\forall x\in(A\cap C)-B$，由定义3得$x\in A\cap C$但$x\bar{\in}B$，又

由定义2得$x\in A$且$x\in C$但$x\notin B$.因此，由定义3得$x\in A-B$且$x\in C$,又由定义2得$x\in(A-B)\cap C$.这就说明集合$(A\cap C)-B$里的任意一个元素，都是集合$(A-B)\cap C$里的元素，所以

$$(A\cap C)-B\subseteq(A-B)\cap C.$$

(iii)由(i)和(ii)的证明，又根据第二章第三节定理1得 $(A-B)\cap C=(A\cap C)-B$，第一个等号得证.

用完全相同的方法可以证明第二个等号，请读者自己练习.

本题证明中所用的方法，是集合间关系式的基本证明方法——从定义出发，用元素的所属关系来判定集合间的关系.

证明两个集合相等的依据是第二章第三节的定理1.即若证$A=B$，只须证$A\subseteq B$且$B\subseteq A$同时成立.而要证$A\subseteq B$（或$B\subseteq A$）只须证明A(或B)里的任意一个元素，都是B（或A）里的元素即可.今后我们将经常用到这种证题方法.

四、集合的补

我们看第四章第一节所举的例3

$A\subseteq I$，$B\subseteq I$，$A\cup B=\phi$且$A\cup B=I$，我们把B（或A）称为A（或B）关于I的补集（或余集）.一般地

定义4 若$A\subseteq S$，则称差集$S-A$为A关于S的补集（也叫余集或逆），简称为补．记为

$\overline{A}$（有的书中也记为C_SA或A^c或A'）.

用图形表示就是图4-13.

在不至于混淆的情况下，可简称为补集（或逆）.但我

们应注意这一概念总是对某一集合（参照集）而言的。

显然，这一定义可表为

$$A\subseteq S,\ x\in\overline{A}\Longleftrightarrow x\in S\text{且}x\overline{\in}A.$$

由此可知：$\forall x\in S$，必有$x\in A$或$x\in\overline{A}$（二者必居其一，且不可同时成立）。

例12　已知$S=\{1,2,3,4,5\}$，$A=\{2,4\}$，求$\overline{A}$。

〔解〕　$\overline{A}=S-A=\{1,2,3,4,5\}-\{2,4\}$

$=\{1,3,5\}$.

定理5　对于任何集合A、B，有

（1）$A\cup\overline{A}=S$（S为全集合即参照集），$A\cap\overline{A}=\Phi$；

（2）$\overline{(\overline{A})}=A$，$\overline{\Phi}=S$，$\overline{S}=\Phi$；

（3）$A\subseteq B$则$\overline{A}\supseteq\overline{B}$。

我们先从直观上来看这个结论的正确性。

借助于图4-13，来看（1）和（2）是很显然的。

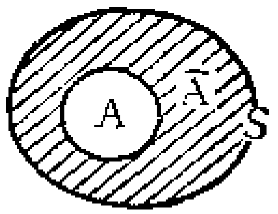


图4-13

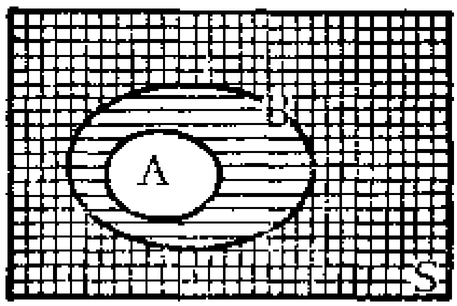


图4-14

借助于图4-14，不难看出（3）的正确（图中划横线处为$\overline{A}$，划竖线处$\overline{B}$）。

下面我们给以理论的证明。

证明　因为（1）、（2）是显然的，我们只证明（3）。仍用元素的所属关系来证。

$\forall x\in\overline{B}$，由定义4得$x\in S$但$x\bar{\in} B$，又由题设$A\subseteq B$，则$x\bar{\in} A$。即$x\in S$但$x\bar{\in} A$，再由定义4，得$x\in\overline{A}$。即$x\in\overline{B}$，则$x\in\overline{A}$，所以$\overline{B}\subseteq\overline{A}$。

五、集合的运算规律

若A、B、C为任意三个集合，则它们的运算有如下规律：

定理6（交换律）$A\cup B=B\cup A$，$A\cap B=B\cap A$。

证明　$A\cup B=\{x: x\in A$或$x\in B\}$，

而$B\cup A=\{x: x\in B$或$x\in A\}=\{x: x\in A$或$x\in B\}$，

由于两个结果是恒等的，所以$A\cup B=B\cup A$。

同理可得$A\cap B=B\cap A$。

定理7　（结合律）$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

证明　两个等式的证明方法是一样的，我们来证第二个等式：

$$(A\cap B)\cap C=\{x:\ x\in(A\cap B)\text{且}x\in C\}$$
$$=\{x:\ x\in A\text{且}x\in B\text{且}x\in C\},$$

而　$$A\cap(B\cap C)=\{x:\ x\in A\text{且}x\in(B\cap C)\}$$
$$=\{x:\ x\in A\text{且}x\in B\text{且}x\in C\},$$

由于两个结果是恒等的，所以$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$。

同理可证　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。

根据定理7，三个集合的并集、交集可直接写成$A\cup B\cup C$、$A\cap B\cap C$。

定理8　（分配律）$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cap C)$。

证明　我们证明第一个等式：

（i）$\forall x\in(A\cup B)\cap C$，根据交集的定义，必有$x\in A\cup B$且$x\in C$。由于$x\in A\cup B$，根据和集的定义，有$x\in A$或$x\in B$。又因为$x\in C$，则$x\in A\cap C$或$x\in B\cap C$。因此$x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$。故$(A\cup B)\cap C\subseteq(A\cap C)\cup(B\cap C)$。

（ii）$\forall x\in(A\cap C)\cup(B\cap C)$，根据和集的定义，有$x\in A\cap C$或$x\in B\cap C$。若$x\in A\cap C$，则$x\in A$且$x\in C$，因此$x\in A\cup B$且$x\in C$，即$x\in(A\cup B)\cap C$；若$x\in B\cap C$，则$x\in B$且$x\in C$，因此$x\in A\cup B$且$x\in C$，即$x\in(A\cup B)\cap C$。所以$(A\cap C)\cup(B\cap C)\subseteq(A\cup B)\cap C$。

（iii）由第二章第三节定理1，则有

$$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C).$$

同理可证第二个等式。

定理 9（吸收律）$(A\cup B)\cap A=A,(A\cap B)\cup A=A$。

这是很显然的，请读者自己证明。

定理10（摩根公式）若$A\subseteq S$，$B\subseteq S$，则关于S的补集$\overline{A}$，$\overline{B}$有

$$(\overline{A\cup B})=\overline{A}\cap\overline{B},\quad(\overline{A\cap B})=\overline{A}\cup\overline{B}.$$

证明 $(\overline{A\cup B})=\{x:x\in(\overline{A\cup B})\}$

$=\{x:x\in S,x\overline{\in}(A\cup B)\}$

$=\{x:x\in S,x\overline{\in}A$ 且 $x\overline{\in}B\}$

$=\{x:x\in\overline{A}$且$x\in\overline{B}\}$

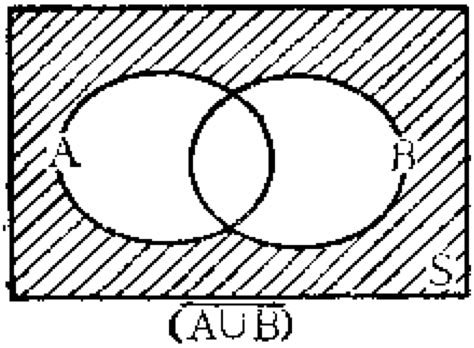
$=\{x:x\in\overline{A}\cap\overline{B}\}=\overline{A}\cap\overline{B}$；

$(\overline{A\cap B})=\{x:x\in(\overline{A\cap B})\}=\{x:x\in S,x\overline{\in}(A\cap B)\}$

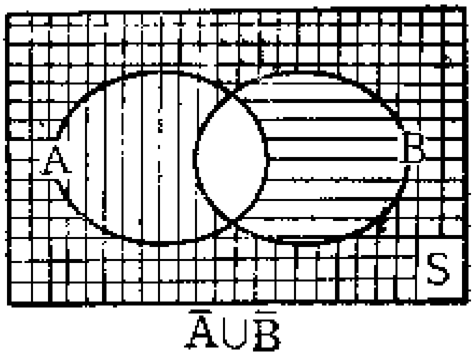
$=\{x:x\in S,x\overline{\in}A$或$x\overline{\in}B\}=\{x:x\in\overline{A}$或$x\in\overline{B}\}$

$=\{x:x\in\overline{A}\cup\overline{B}\}=\overline{A}\cup\overline{B}$。

这一公式用韦恩图表示更明显，如图4-15.



甲



乙

图4-15

其中矩形表示S，椭圆分别为A、B，在甲图中有斜线的部分就是$\overline{(A\cup B)}$，在乙图中有横线部分是$\overline{A}$，有竖线部分是$\overline{B}$，因而有方格部分是$\overline{A}\cap\overline{B}$.对比甲、乙两图，显然有第一个公式的结果.同样可以用图形表示第二个公式的结果.

定理 8 与定理10的证明方法是一样的，只是写法不同，在实际证明中，两种方法都可以使用.

六、和与交的推广

两个集合的和、交的概念，可以推广到有限或无限的情况.

定义1′ 由n个集合A_1，A_2，A_3，……A_n的元素的全体（重复的元素只算一次）组成的集合，称为这n个集合的和（或并）集.记为

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i \quad \left(\text{或}\sum_{i=1}^{n} A_i\right).$$

定义1″ 由一列集合A_1，A_2，A_3，…，A_n，…的元素

的全体（重复的元素只算一次）组成的集合，称为这一列集合的和（或并）集.记为

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\left(\text{或}\sum_{i=1}^{\infty} A_i\right).$$

例13　设$A_K=\{K\}$　$(K=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$，则

$$\bigcup_{K=1}^{n} A_K=\{1\}\cup\{2\}\cup\cdots\cup\{n\}=\{1,\ 2,3\cdots,n\},$$

$$\bigcup_{K=1}^{\infty} A_K=\{1\}\cup\{2\}\cup\cdots\cup\{n\}\cup\cdots=\{1,\ 2,\ 3\cdots,\ n\cdots\}$$

例14　设A_k为区间$[K-1,K]$（$K=1$、2，…），则

$$\bigcup_{K=1}^{n} A_k=[0,1]\cup[1,2]\cup\cdots\cup[n-1,n]=[0,n],$$

$$\bigcup_{K=1}^{\infty} A_k=[0,1]\cup[1,2]\cup\cdots\cup[n-1,n]\cup\cdots=[0,\ +\infty).$$

例15　设A_K为区间$\left[-1+\frac{1}{K},\ 1-\frac{1}{K}\right]$$(K=1,2,\cdots)$，则$A_1=\{0\}$，$A_2=\left[-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right]$，$A_3=\left[-\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right]$，$\cdots A_n=\left[-\frac{n-1}{n},\ \frac{n-1}{n}\right]$，…

故　$\bigcup_{K=1}^{n} A_k=\left[-\frac{n-1}{n},\ \frac{n-1}{n}\right]$，$\bigcup_{K=1}^{\infty} A_K=(-1,\ 1)$.

定义2′　同时属于n个集合A_1，A_2，…A_n的元素的全体组成的集合，称为这n个集合的交集.记为

$$\bigcap_{K=1}^{n} A_k\ \left(\text{或}\prod_{K=1}^{n} A_k\right).$$

定义2″　同时属于一列集合A_1，A_2，…A_n，…的元素

的全体组成的集合，称为这一列集合的交集。记为

$$\bigcap_{K=1}^{\infty} A_K \left(或 \prod_{K=1}^{\infty} A_K\right).$$

例16　对于例13的集合A_K，由于其中任何两个集合间都无公共元素，故

$$\bigcap_{K=1}^{n} A_K = \phi, \quad \bigcap_{K=1}^{\infty} A_K = \phi.$$

例17　对于例15，由于$A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \cdots \subset A_n \subset \cdots$，故它们共有的元素的全体是$A_1$，即

$$\bigcap_{K=1}^{\infty} A_K = A_1 = \{0\}.$$

定理11　对于任意集合S，A_1，A_2，$\cdots$，A_n，有

$$S - \bigcup_{K=1}^{n} A_K = \bigcap_{K=1}^{n} (S - A_K), \quad S - \bigcap_{K=1}^{n} A_K = \bigcap_{K=1}^{n} (S - A_K).$$

证明　$S - \bigcup_{K=1}^{n} A_K = \left\{x: x \in \left(S - \bigcup_{K=1}^{n} A_K\right)\right\}$

$$= \left\{x: x \in S 但 x \bar{\in} \bigcup_{K=1}^{n} A_K\right\}$$

$$= \{x: x \in S 但 x \bar{\in} A_1，且 x \bar{\in} A_2，\cdots，且 x \bar{\in} A_n\}$$

$$= \{x: x \in S - A_1 且 x \in S - A_2，\cdots 且 x \in S - A_n\}$$

$$= \left\{x: x \in \bigcap_{K=1}^{n} (S - A_K)\right\}$$

$$= \bigcap_{K=1}^{n} (S - A_K).$$

$$S - \bigcap_{K=1}^{n} A_K = \left\{x: x \in \left(S - \bigcap_{K=1}^{n} A_K\right)\right\}$$

$$= \left\{x : x \in S \text{但} x \bar{\in} \bigcap_{K=1}^{n} A_K \right\}$$

$$= \{x : x \in S \text{但} x \bar{\in} A_1 \text{或} x \bar{\in} A_2 \cdots \text{或} x \bar{\in} A_n\}$$

$$= \{x : x \in S - A_1 \text{或} x \in S - A_2 \cdots \text{或} x \in S - A_n\}$$

$$= \left\{x : x \in \bigcup_{K=1}^{n} (S - A_K)\right\} = \bigcup_{K=1}^{n} (S - A_K).$$

此定理当 n 为∞时也成立。

在上述的有限或无限的情形，集合A_K的下标K也是一个集合，这个集合或是自然数集合N（无限情形），或是N的前 n 个元素组成的子集（有限情形）。近代数学中还要用到更为广泛的下标的集合。设Λ是任一个集合（Λ可以是自然数集合，也可以是其他任意的集合），λ是Λ的一个元素，对于每一个$\lambda \in \Lambda$，相应地有一个以λ为下标的集合A_λ。这时，所有的集合A_λ组成一个集系：

$$u = \{A_\lambda : \lambda \in \Lambda\}$$

于是有如下并集、交集的定义：

定义 1‴ 由所有$A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$的元素的全体（重复的只算一次）组成的集合，称为所有$A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$的和集。记为

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \left(\text{或} \bigcup_{\lambda} A_\lambda,\ \sum_{\lambda} A_\lambda\right).$$

定义 2‴ 同时属于所有$A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$的元素的全体组成的集合，称为所有$A_\lambda(\lambda \in \Lambda)$的交集。记为

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \quad \left(\text{或} \bigcap_{\lambda} A_\lambda,\ \prod_{\lambda} A_\lambda\right).$$

注意，在上述记号中，$\cup$ 或 $\cap$ 的下部标明$\lambda \in \Lambda$或λ的意义都是指要求 λ 遍历Λ（即取遍Λ中所有的元素）。显然，本节以前关于和集、交集的定义，都是Λ 为自然数集合或其子集

的特殊情况。

例18　设Λ为区间$(0,+\infty)$，A_λ是区间$(-\lambda,\lambda)$，B_λ是区间$(0,\lambda)$，则

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=(-\infty,+\infty),\quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\{0\},$$

$$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda=(0,+\infty),\quad \bigcap_{\lambda\in\Lambda} B_\lambda=\phi.$$

例19　以(x,y)表示坐标平面上的点，λ为区间$[1,2]$；$A_\lambda=\{(x,y):x^2+y^2=\lambda^2\}$，则$\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$是坐标平面上以原点为心，内径为1，外经为2的圆环（包括边缘），如图4-16 $\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda=\phi$。

对于$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$及$\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$本章各有关定理仍然是正确的。

例如，$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\cap C=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cap C)$，

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)\cap C=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}(A_\lambda\cap C),$$

$$\overline{\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)}=\bigcap_{\lambda\in\Lambda}\overline{A}_\lambda,$$

$$\overline{\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)}=\bigcup_{\lambda\in\Lambda}\overline{A}_\lambda.$$

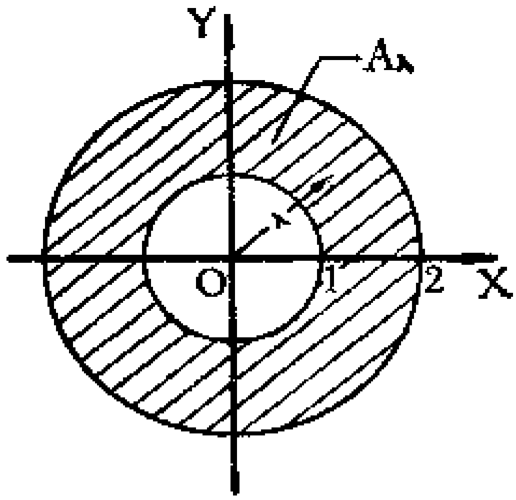


图4-16

七、对偶原理

在集合的运算中，我们发现有许多公式是成双成对的出现。这不是偶然的巧合，在集合论中这是一个规律，我们把它叫做**对偶原理**：

定理12 若有关集合的并、交及补集的某一关系式成立，（1）如果把式中的记号$\cup$、$\cap$、$\subset$、$\supset$分别换成$\cap$、$\cup$、$\supset$、$\subset$，等号保持不变；（2）把每一个集换成它的补集，由此所得到新的关系式也一定成立。

例如，由公式$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$成立，可得$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$成立，

$(\overline{A}\cup\overline{B})\cap\overline{C}=(\overline{A}\cap\overline{C})\cup(\overline{B}\cap\overline{C})$也成立。

习　　题

20.对于给定的两个集合A和B，试确定$A\cup B$，$B\cap A$和$A-B$。

（1）$A=\{a, c, d\}$，$B=\{b, e\}$；

（2）$A=\{a, c, e\}$，$B=\{a, c, e\}$；

（3）$A=\{b, c, d\}$，$B=\{b, d\}$；

（4）$A=\{a, c\}$，$B=\{a, b, c\}$；

（5）$A=\{b, d, f\}$，$B=\{b, c, e\}$。

21.对于下列集合

$A=\{a, b, c\}$，$B=\{b, c, d\}$，$C=\{c, d, e\}$，$D=\{d, e, f\}$。

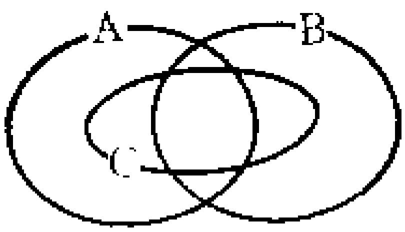
（1）求集合$A\cap B$，$B\cap C$，$A\cap C$；

（2）求集合$A\cap B\cap C$，$(A\cap B)\cap(C\cap D)$，$(A\cup B)\cap(C\cap D)$。

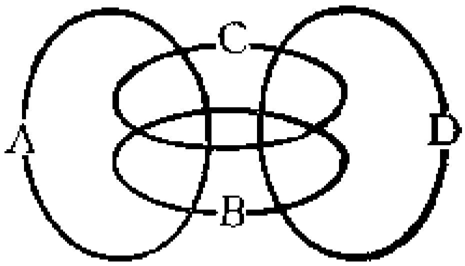
22.观察下页的韦恩图，复制6次，并把下列集合加线条：

（1）$A\cap B\cap C$，（2）$(A\cup B)\cap C$，

（3）$A\cup(B\cap C)$，（4）$A\cup B\cup C$，



（第22题）



（第23题）

（5）$(A-B)\cup C$，（6）$(A-B)\cap C$.

23.观察上边的韦恩图，复制4次，并把下列集合加线条：

（1）$A\cap B\cap C$，

（2）$(A\cup D)\cap(B\cap C)$，

（3）$[(A\cup B)-D]\cup C$，

（4）$(A\cap B\cap C)\cup(B\cap C\cap D)$.

24.设集合$E=\{1,2,3,4,5,6\}$和这集合的两个子集$A=\{1,4,5,6\}$，$B=\{2,4,6\}$.试确定$\overline{A}$，$\overline{B}$，$A\cap B$，$B\cup A$，$A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap B$，$\overline{A}\cup B$，$A\cup\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$.

25.设集合$E=\{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12\}$和它的两子集$A=\{1,3,5,7,9,11\}$和$B=\{2,4,6,8\}$.求集合$A\cap B$，$\overline{A}\cap B$，$A\cap\overline{B}$，$\overline{A}\cap\overline{B}$；

$A\cup B$，$\overline{A}\cup B$，$A\cup\overline{B}$，$\overline{A}\cup\overline{B}$.

26.设集合$E=\{a,b,c,d,e,f\}$和它的子集$A=\{a,c,d\}$、$B=\{b,c,f\}$.试计算：

（1）$A-\overline{A}$和$B-\overline{B}$；

（2）$\overline{(A\cap B)}$和$\overline{(A\cup B)}$；

（3）$\overline{(A\cap\overline{B})}\cup\overline{A}$；

（4）$\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})}$和$\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})}$；

（5）$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})$.

27.设集合$E=\{1,2,3,4,5,6\}$和它的子集

$A=\{1,2,4\}$，$B=\{2,4,5,6\}$，$C=\{1,2,4,5\}$，求$A-\overline{A}$，$B-\overline{B}$，$C-\overline{C}$并计算：

$\alpha=(A\cup B)\cap(A\cup B)\cup(A\cup B)$，

$\beta=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$，

$\gamma=(A\cup B)\cap(\overline{A}\cap B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$，

$\delta=(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$，

$\varepsilon=(A\cup B)\cap(A\cup\overline{B})\cap(\overline{A}\cup B)\cap(\overline{A}\cup\overline{B})$.

28．利用图形证明下列各式

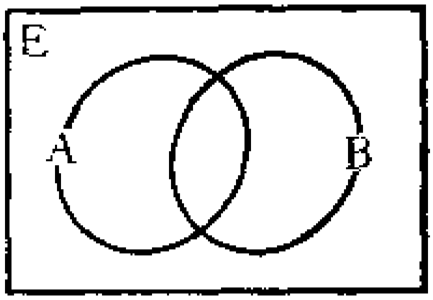
（1）$(A\cap B)\cup B=B$.

（2）$(A\cup B)\cap B=B$,

（3）$A\cap(A\cup B)=A$,

（4）$A\cap(\overline{A}\cup B)=A\cap B$.

（5）$A\cup(\overline{A}\cap B)=A\cup B$.



（第28题）

29．试求12与28的公因数和公倍数集合，从而确定其最大公因数和最小公倍数.

30．设A表示60的因数的集合，B表示60的质因数的集合，求$A\cap B$，$A\cup B$，$A-B$和$B-A$.

31．设$A=\{x: x\geqslant 0\}$，$B=\{x: x\leqslant 0\}$，求$A\cap B$，$A\cup B$，$A-B$和$B-A$.

32．设$S=\{x: x$是实数$\}$，$A=\{x: x$是正实数$\}$，求$\overline{A}$，$\overline{(\overline{A})}$，$A\cap\overline{A}$，$A\cup\overline{A}$，$\overline{S}$和$\overline{\Phi}$.

33．设$A=\{x: -3\leqslant x\leqslant 2\}$，$B\{x: x>0\}$，求$A\cap B$，$A\cup B$，$A-B$和$B-A$.

34．若$A\subseteq B$，求$A\cup B$和$A\cap B$.

35．（1）若$A\subseteq C$，$B\subseteq C$，证明$A\cup B\subseteq C$；

（2）若$A\subseteq C$，$B\subseteq C$，证明$A\cap B\subseteq C$.

36．$A\subseteq B\Longleftrightarrow\overline{B}\subseteq\overline{A}$.

37．设$A_1=\{0, 1\}$，$A_2=\left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$，

$$A_3=\left\{0,\frac{1}{4},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{4},\ 1\right\},$$

$$A_4=\left\{0,\frac{1}{8},\ \frac{1}{4},\ \frac{3}{8},\ \frac{1}{2},\ \frac{5}{8},\ \frac{3}{4},\ \frac{7}{8},1\right\},$$

……

$$A_n=\left\{0,\ \frac{1}{2^{n-1}},\ \frac{2}{2^{n-1}},\ \frac{3}{2^{n-1}},\ \cdots,\ \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}},\ 1\right\},$$

……

求 （1）$\bigcup\limits_{K=1}^{n} A_K$， $\bigcap\limits_{K=1}^{n} A_K$；

（2）$\bigcup\limits_{K=1}^{\infty} A_K$， $\bigcap\limits_{K=1}^{\infty} A_K$。

38．证明本章定理中未证明的各个等式。

39．设$A_n=\left\{x:\ x\text{为有理数},\ |x|<\frac{1}{n}\right\}$，$(n=1,2,\cdots)$，求所有集合$A_n$的交集与和集。

第五章　序 偶 集

一、序　　偶

我们在数学中，会遇到集合的元素不是单个的元素，而是由两个有顺序的元素组成一对作为一个元素的情形.

例如，坐标平面上的点集.它的元素用数表示出来，就是两个有顺序的数x、y组成的数对（x，y）.

下面我们对于由这样的元素组成的集合给予定义：

定义 1　由两个元素x、y组成的有顺序的元素对$z=(x,y)$，叫做序偶（也叫元偶、序对）.其中x是序偶的第一个元素（或第一个排列、第一个投影），y是序偶的第二个元素（或第二个排列、第二个投影）.记作$x=pr_1z$，$y=pr_2z$。

定义 2　两个序偶$z(x,y)$，$z'(x',y')$当且仅当$x=x'$，$y=y'$时，有$z=z'$.叫做序偶的相等.

例 1　坐标平面上的点$A=(1,2)$，$B=(2,1)$，$C=(2,3)$，$D=(4,5)$，$E=(2,1)$，他们的坐标是序偶.

又因为$(1,2)\neq(2,1)\neq(2,3)\neq(4,5)$，所以$A$、$B$、$C$、$D$表示不同的点.

而$(2,1)=(2,1)$，所以B、E表示相同的点.

定义 1 或定义 2 可以推广到三元组$u=(x,y,z)$或n元组$u=(x_1,x_2\cdots x_n)$.类似地，可以研究R^3和R^n的问题（R^n表示n维空间）.

一、序 偶 集

定义 3　以序偶为元素组成的集合，叫做**序偶集**（也叫**序对集**）．

例 2　平面上的点集，用坐标表示是序偶集．

事实上，平面上的点可用实数对 (x,y) 表示．而当 $x\neq y$ 时，(x,y) 和 (y,x) 表示不同的点，所以，平面的点用坐标表示是序偶．这样点的全体是 $\{(x,y): x\in R, y\in R\}$（$R$ 为实数集），为序偶集．

例 3　乘法九九表组成一个序偶集．

事实上，一一得一，一二得二，一三得三，…．就是由序偶 (1,1)，(1,2)，(1,3)，…得出的结果．这样的序偶共有 $9\times9=81$ 个，组成一个序偶集．列表如下：

积 乘数 / 被乘数	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)	(7,1)	(8,1)	(9,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)	(7,2)	(8,2)	(9,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)	(7,3)	(8,3)	(9,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)	(7,4)	(8,4)	(9,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)	(7,5)	(8,5)	(9,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)	(7,6)	(8,6)	(9,6)
7	(1,7)	(2,7)	(3,7)	(4,7)	(5,7)	(6,7)	(7,7)	(8,7)	(9,7)
8	(1,8)	(2,8)	(3,8)	(4,8)	(5,8)	(6,8)	(7,8)	(8,8)	(9,8)
9	(1,9)	(2,9)	(3,9)	(4,9)	(5,9)	(6,9)	(7,9)	(8,9)	(9,9)

三、直 积 集

在上节的例 3 中，我们把所有的乘数看作是一个集合，

被乘数看作是一个集合，那么积的集合就是序偶集．对这样的序偶集，我们给以下面的定义：

定义 4 设有两个集A与B，将A中每一元素x，与B中的每一元素y，配成所有的序偶(x,y)组成的序偶集，叫做A与B的直积集（也叫笛卡尔乘积）．记为$A\times B$，读作A叉乘B．用式子表示就是

$$A\times B=\{(x,y):x\in A,\ y\in B\}.$$

例 4 若$A=\{a,b,c\}$，$B=\{1,2\}$．则

$$\begin{aligned}A\times B&=\{(x,y):x\in A,\ y\in B\}\\&=\{(a,1),(a,2),(b,1),(b,2),\\&\quad(c,1),(c,2)\}.\end{aligned}$$

例 5 若$A=\{1,2,3,5\}$，$B=\{4,5,6\}$，则直积集合$A\times B$的元素如下：

$(1,4)$	$(2,4)$	$(3,4)$	$(5,4)$
$(1,5)$	$(2,5)$	$(3,5)$	$(5,5)$
$(1,6)$	$(2,6)$	$(3,6)$	$(5,6)$

又直积集合$B\times A$的元素如下：

$(4,1)$	$(5,1)$	$(6,1)$
$(4,2)$	$(5,2)$	$(6,2)$
$(4,3)$	$(5,3)$	$(6,3)$
$(4,5)$	$(5,5)$	$(6,5)$

由此可见，$A\times B$与$B\times A$所含的元素个数是一样的，但一般来说两个集合的元素并不相等，所以直积集$A\times B\neq B\times A$．

例 6 如A是全体实数组成的集合，则$A\times A$是坐标平面上所有点组成的点集．

定义4可以推广到$A\times B\times C$或$A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$,类似地，可以研究三维及n维空间的问题.

四、用图形表示直积集合

我们知道，当$x=a$，$y=b$时，在坐标平面上，可以用图5-1表示出点（a,b）.

类似地，两个集合A与B的直积$A\times B$，可以用图形直观地表示出来，如上节的例 4 ，可以用图5-2来表示.

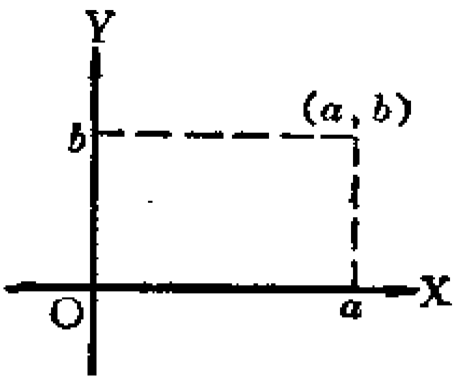


图5-1

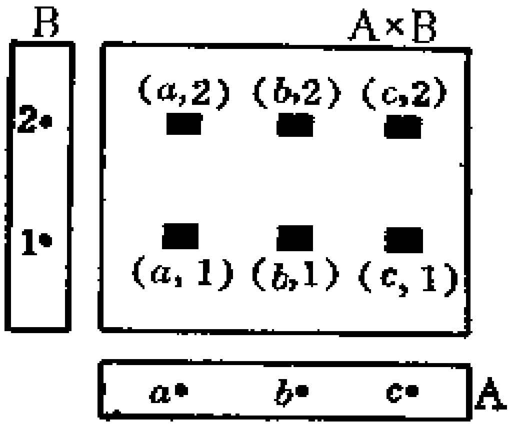


图5-2

一般地，两个集合E和F的直积$E\times F$，可以用图5-3 来表示.

例 7　设$E=[1,2]$，$F=(2,4)$，在坐标平面上作出$E\times F$.

作法　作直角坐标系xOy，分别以$x=1$，$x=2$作直线平行于y轴；以$y=2$，$y=4$作直线平行于x轴，四直线两两相交于A、B、C、D（如图5-4）则$ABCD$所围成的图形内部及AD、BC边线（不包括A、B、C、D四点）为$E\times F$的图形.

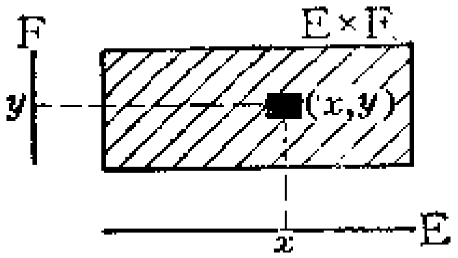


图5-3

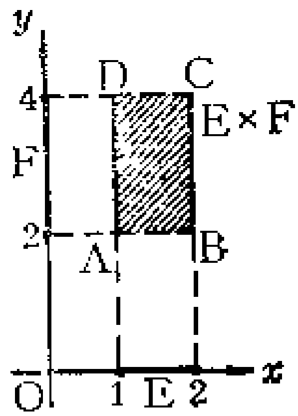


图5-4

习　　题

40. 设$A=\{1,3,5,7\}$，求$A\times A$。

41. 设$A=\{1,3,4,5\}$，$B=\{2,4,6\}$，求$A\times B$，$B\times A$。

42. 设$E=[2,3]$，$F=[1,5]$，试在坐标平面上作出$E\times F$。

43. 设$C=(2,5)$，$D=(1,4)$，试作出$C\times D$的图形。

44. 用图形说明以下等式的正确性。设A_1、$A_2\subseteq A$，而B_1、$B_2\subseteq B$，则

（1）$(A_1\times B_1)\cap(A_2\times B_2)=(A_1\cap A_2)\times(B_1\cap B_2)$；

（2）$(\overline{A_1\times B_1})=(\overline{A_1}\times B)\cup(A_1\times\overline{B_1})=(A\times\overline{B_1})\cup(\overline{A_1}\times B_1)$。

第六章　对　　应

一、对应的概念

我们看下面的例子

某校有数学、物理、化学、航模、生物等五个课外科技小组（称作集合B），我们考察一个有a、b、c、d四个同学组成的学习小组（称作集合A），每个同学都参加课外科技小组的活动有以下四种情况：

第一种情况，每一个同学只参加了一个课外科技小组的活动，并且没有本组的两个同学在一个课外科技小组里，如图6-1。

第二种情况，至少有一个同学参加了两个（或两个以上）课外科技小组，但是没有本组的两个同学在一个课外小组里，如图6-2。

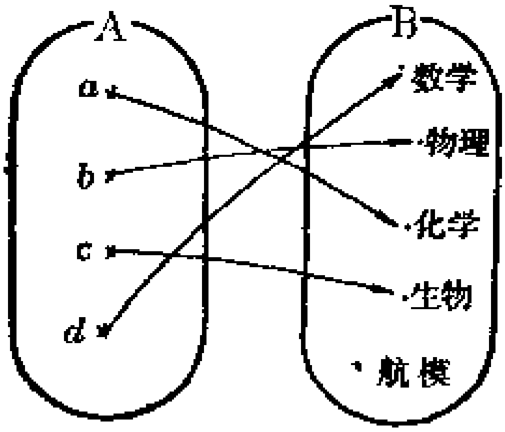


图6-1

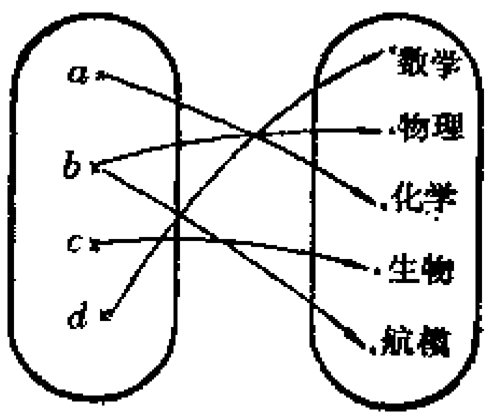


图6-2

第三种情况，至少有两个同学参加了一个课外科技小组，并且没有一个同学参加两个（或两个以上）课外科技小组，如图6-3.

第四种情况，既有两个（或两个以上）同学参加一个课外科技小组，又有一个同学参加两个（或两个以上）课外科技小组，如图6-4.

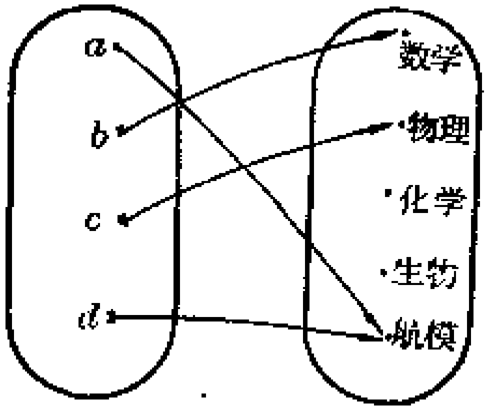


图6-3

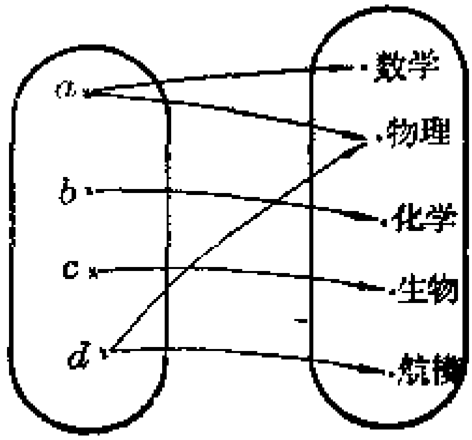


图6-4

这四种情况，都是两个集合中元素间的联系. 我们有如下的定义：

定义 1① 设有两个集合A和B，如果有法则f，把集合A与集合B的一个子集的元素联系起来，称f确定了集合A与B之间的一个对应.

记为 f：$x\in A\to f(x)\in T(B)$，($T(B)$为B的子集簇)

或者 f：$x\to f(x)$.

元素x称为原像（或像原、自变元），$f(x)$称为在对应f下的像.

① 对应和集合一样，是不定义概念，定义1只是用“法则”一词给它的一种描述。

A称为起始集，B称为终止集。

集合$A^* = \{x:\ x \in A$且$f(x) \neq \phi\}$称为定义域。因此，有$A^* \subseteq A$。

我们所研究的都是$A^* = A$的情况，也就是起始集即为定义域。

集合$B^* = \{y:\ y \in f(x)$且$x \subset A^*\}$称为值域。因此，有$B^* \subseteq B$。

也有 $B^* = \{f(x):\ x \in A^*\}$。

例 1 设集合$A = \{a,\ b,\ c,\ d\}$和集合$B = \{1,2,3\}$。一个对应f被确定为

$$
f: \quad \begin{aligned} a &\longrightarrow f(a) = 2, \\ b &\longrightarrow f(b) = \{2,3\}, \\ c &\longrightarrow f(c) = \{2,3\}. \end{aligned}
$$

则 起始集是 $A = \{a,b,c,d\}$，

定义域是 $A^* = \{a,b,c\}$，

终止集是 $B = \{1,2,3\}$，

值域是 $B^* = \{2,3\}$。

为了直观，我们可以借助于图形来表示对应。图 6-5 表示集合A的任何元素x与集合B的子集$f(x)$对应的图形。图6-1至图6-4都是这样的图形。

图6-6就是例 1 的对应f的图形。

当$x \in A^*$而$y \in f(x)$时，我们把序偶 (x,y) 的集合叫做对应的图象。

记为 $G = \{(x,y):\ x \in A^*,\ y \in f(x)\}$。

显然 $G \subseteq A^* \times B^* \subseteq A \times B$。

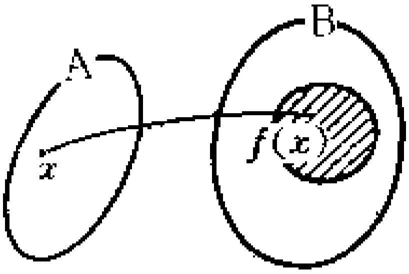


图6-5

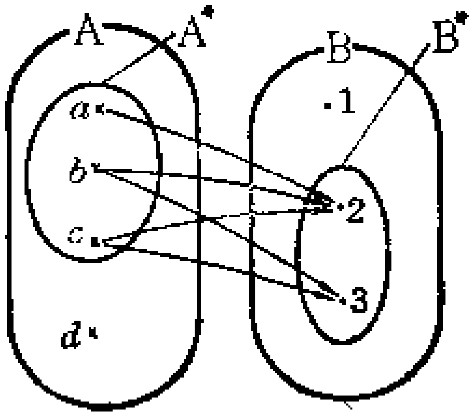


图6-6

二、四种对应

上节例子中的四种情况，都是对应，但这是四种不同的对应。

第一种情况是，对于集合A的任何一个元素，集合B都有唯一的元素和它对应，而且对于A的任何两个不同的元素，B都有两个不同的元素和它对应，我们把它叫做**一对一的对应**；

第二种情况是，对于集合A的任何一个元素，集合B都有确定的元素和它对应，而且对于A的任何两个不同的元素，所对应的B里的元素也不相同，同时，在A中至少有一个元素，与B中至少两个不同的元素相对应，这叫**一对多的对应**；

第三种情况是，对于集合A的任何一个元素，集合B都有唯一的元素和它对应，而且在A中至少有两个不同的元素与B中同一个元素相对应，这叫做**多对一的对应**；

第四种情况是，对于集合A的任何一个元素，集合B都有确定的元素和它对应，而且A中至少有两个不同的元素，对

应于B中同一个元素，同时，在A中至少有一个元素，对应于B中至少两个不同的元素，这叫做多对多的对应.

例2　若$A=\{a: a=1, 4, 9, 16\}$，$B=\{b: -4\leqslant b\leqslant 256, b$为整数$\}$.假定对应$f$是$b=a^2$，对应$g$是$b^2=a$.那么$f$是一对一的对应（图6-7）；$g$是一对多的对应（图6-8）.

此题的对应f、g也可写成f: $a^2\to b$，g: $a\to b^2$.

例3　设$X=\{-2, -1, 0, 1, 2\}$，$Y=\{0, 1, 2, 3, 4\}$，X的元素x按对应法则f: $x^2\to y$与Y的元

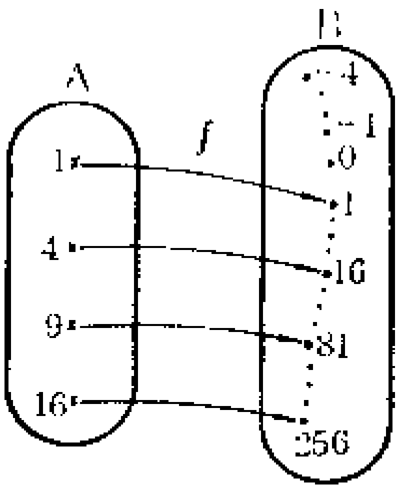


图6-7

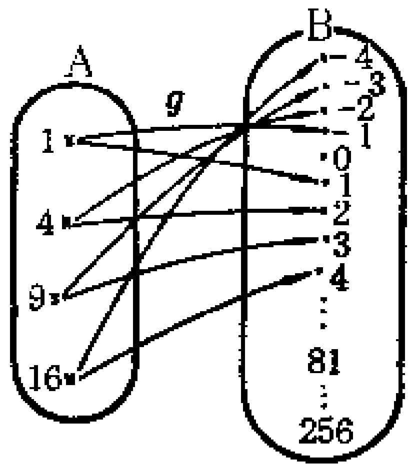


图6-8

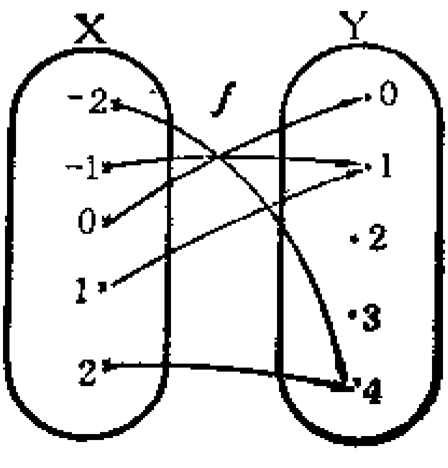


图6-9

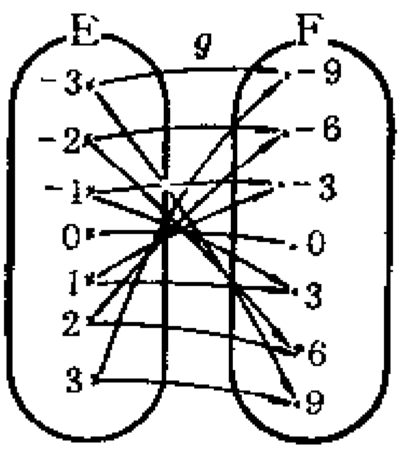


图6-10

素y相对应，那么f是多对一的对应（图6-9）。

例 4　设$E=\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$，$F=\{-9, -6, -3, 0, 3, 6, 9\}$。$E$的元素$x$按对应法则$g$：$x\to 9x^2$的平方根与$F$的元素相对应，那么$g$是多对多的对应（图6-10）。

两个集合的元素之间的对应共有四种情况，其中一对一的对应和多对一的对应叫做**单值对应**。而一对多的对应和多对多的对应叫做**多值对应**。下面我们着重研究单值对应的情况。

三、映　射

对于单值对应，我们还可以给以下面的定义：

定义 2　设有两个集合A和B，若有一对应关系（或法则）f存在，使得对A的**任何**一个元素x，在B中有**唯一**的一个元素y与之对应（如图6-11），那么这个对应关系f就叫做从A到B内的**映射**（或**映像**）。记为

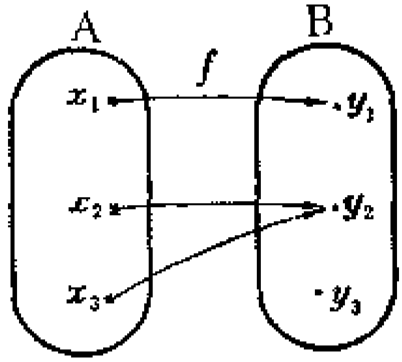


图6-11

$$f:\quad A\to B\quad（或 A\xrightarrow{f}B，f：x\to y）$$

这时，元素x经映射f与y对应，可写成$y=f(x)$，其中y称为x的像，x称为y的原像。A称为映射f的**定义域**，而像集合

$$f(A)=\{f(x): x\in A\}$$

称为映射的**值域**。

显然　　　　　　　$f(A)\subseteq B$.

在映射的概念中，应注意以下几点：

1.由定义2可知，单值对应和映射是同一个概念.定义2中的A、B不一定是数的集合，而是任意的集合.当A及B都限制在数的范围内，映射亦可称为函数.

2.在映射概念中，最主要的是由A通过什么方法(规则)得到y，也就是对应关系（法则、规律）f.至于这一对应关系能否用"解析式"或其它方法加以确定，都不是主要的.

3.定义2没有要求B就是值域，而是要求值域$f(A)$是B的子集.若$f(A)\subset B$（即为B的真子集），则定义2称为从A到B内的映射；若$f(A)=B$（即B为值域），则定义2称为从A到B上的映射（或完全映射）.

4.集合A和B可以相等，也可以不相等；两者之间可以有也可以没有包含关系.因为在我们研究的映射之下，像和原像不一定是同类量.如果值域是A的子集，则称为A到自己内的映射；如果值域$B=A$，则称为A到自己上的映射.

例5　讨论函数$y=x^2$的定义域、值域、对应关系.

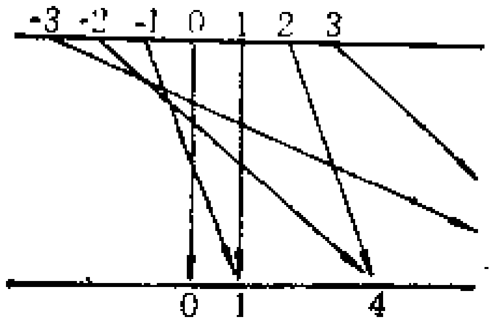


图6-12

〔解〕　定义域A为全体实数的集合，记为$(-\infty, +\infty)$；值域为全体非负实数的集合，记为$[0, +\infty)$；对应关系f是对A的元素进行平方运算，记为f：$x\to x^2$或$(\ \ )^2$.用图形表示，如图6-12.

此例的映射可写成

$(\ \ )^2$： $(-\infty, +\infty) \to [0, +\infty)$．

这是从 $(-\infty, +\infty)$ 到 $[0, +\infty)$ 上的映射（或单值对应）．

当然，也可写成

$(\ \ )^2$： $(-\infty, +\infty) \to (-\infty, +\infty)$．

这是从 $(-\infty, +\infty)$ 到 $(-\infty, +\infty)$ 内的映射．

这后一种写法只是扩大了终止集，但未扩大值域，这时在起始集中没有原像与终止集中 $(-\infty, 0)$ 部分的元素相对应．

例 6　讨论函数 $y=\sin x$ 的定义域、值域、对应关系．

〔解〕　定义域 $A=(-\infty, +\infty)$；值域 $B=[-1, +1]$；对应关系 f 是 A 的元素 x 和 x 的正弦值 $\sin x$ 的对应，记为

$$f: \quad x \longrightarrow \sin x,$$

或 $$f: \quad (-\infty, +\infty) \longrightarrow [-1, +1].$$

这是集合 A 到 B 上的映射（多一对应）．

例 7　讨论平面上的圆和它的面积的对应关系．

〔解〕　设平面上所有圆的集合为 M，实数的集合为 D．我们以 Cr 表示 M 中半径为 r 的圆，那么 Cr 的面积由公式 πr^2 来计算．因此 f：$Cr \to f(Cr)=\pi r^2$ 是平面上圆的集合 M 到实数集合 D 内的一个映射；定义域是

$$M=\{Cr:\ Cr\text{是半径为}r\text{的圆},\ r\geqslant 0\};$$

值域为

$$f(M)=\{f(Cr):\ f(Cr)=\pi r^2,\ r\geqslant 0\},$$

这是非负实数集合，亦可表示为 $f(M)=[0, +\infty)$．它是实数集合 D 的一个子集．

例 8　讨论迪里赫勒（Dirichlet）函数

$$D(x)=\begin{cases}1 & \text{当}x\text{是无理数时,}\\ 0 & \text{当}x\text{是有理数时}\end{cases}$$

的定义域、值域、对应关系。

〔解〕　定义域$A=(-\infty,\ +\infty)$；值域是只有两个元素组成的集合$B=\{0,\ 1\}$；对应关系是：判断原像是有理数还是无理数，如果是有理数，就与数 0 对应；如果是无理数，就与数 1 对应。

这是从$(-\infty,\ +\infty)$到$\{0,\ 1\}$上的映射。

这个函数是无法用“解析式”表达的，因为不可能找到一个“通用公式”来判断一个实数是有理数还是无理数，然而这并不妨碍我们把$D(x)$看成是一个函数。

例 9　讨论克罗涅凯（Kroneker）函数

$$\mathrm{Sgn}x=\begin{cases}1 & x>0,\\ 0 & x=0,\\ -1 & x<0\end{cases}$$

的定义域、值域、对应关系。

〔解〕　由题设已知，定义域A为一切实数，即$A=(-\infty,+\infty)$；值域$B=\{-1,\ 0,1\}$；对应法则f是Sgn，即根据实数的正、负或零而分别对应于$+1$，-1，0.因此克罗涅凯称这一函数为“x的符号”，并根据拉丁文$Sign$（符号）用Sgn来表示这种对应关系。

例10　用A表示$[a,b]$上的可导函数的全体.这时A是函数的集合，其元素是可导函数$f(x)$.用B表示定义在$[a,b]$上的一切函数的集合；则“求导”定义了从A到B中的一个映

射：

$$\frac{d}{dx}: \qquad A \longrightarrow B.$$

这一映射是由一个函数到一个函数的对应。

例如，
$$\frac{d}{dx}(x^2) = 2x,$$

$$\frac{d}{dx}(x^2 + c) = 2x \text{（}c\text{为常数）}.$$

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x,$$

$$\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x.$$

四、特殊对应

在单值对应中，我们常常会碰到这样的情况，即对定义域里的任何元素x（原像）都对应着值域中某个固定的元素y_0（x的像）例如，对任何实数x，$f(x)=c$（c为常数）。对此我们有如下的定义：

定义3 如果映射f：$A \to B$，对任何$x \in A$，都有$f(x)=y_0$（y_0为一固定的元），则称f为以y_0为值的常值对应（或常值映射，常值映象），

例11 设$M=\{x: x=(2k+\frac{1}{2})\pi, k=0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$，$N=\{y: y=\sin x, x \in M\}$，那么对应$f$：$x \to y$为何种对应？

〔解〕 $\forall x \in M$，则$x=(2k+\frac{1}{2})\pi$，因此

$y=\sin x=\sin\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi=1$. 所以$f$是从$M$到$N$上的常值对应。

在单值对应中，我们还会碰到定义域里的任何元素都与它本身相对应的情况，对此我们给出下面的定义：

定义 4 设f是从M到M上的映射，对于任何$x\in M$，有$f(x)=x$，那么就把f叫做M的恒等对应（或恒等映射）。

恒等对应常以I_M表示，即对所有$x\in M$，$I_M(x)=x$。

例12 设D为实数集合，那么映射f：$x\to f(x)=x$，是D上的恒等对应，即$f=I_D$。

对于两个对应，我们给出它们相等的概念。

定义 5 设f，g是从M到N内（上）的两个对应，如果对于M的所有元素x，都有$f(x)=g(x)$，那么我们就把f与g称做从M到N内（上）的相等的对应。记为$f=g$。

例13 设D为实数集合，那么对应f：$x\to f(x)=\sin^2x+\cos^2x$与对应$g$：$x\to g(x)=1$是从$D$到它自己内的映射，根据定义 5，$f$与$g$是相等的，即$f=g$。

从此例看出，不同形式的表达式所确定的映射可以相等，这在数学里是常见的。

习　题

45. 对于基本初等函数（幂函数（只考虑幂为正整数的情况）、指数函数、对数函数、三角函数、反三角函数），写出定义域、值域、对应法则。

46. 对下列情况举出两个映射的例子：

（1）使自然数对应自然数的映射；

（2）使自然数对应无理数的映射；

（3）使每一个自然数各自对应一个函数的映射；

（4）使函数对应实数的映射；

（5）使函数对应函数的映射；

（6）使有限个元素对应于有限于元素的映射。

47．试举出四个对应概念的例子，其中分别是一对一，一对多，多对一，多对多的对应。

48．一个正方形有一个确定的面积，试建立正方形集合与它的面积集合的对应规则，并写出它的定义域和值域。

49．设A是正整数集合，B是负整数集合，试建立两个从A到B内的映射，两个从B到A内的映射。

50．设M是正整数集合，对应f：$n \to f(n) = n+1$，其中$n \in M$，f是否是从M到它自己内的一个映射？又对应g：$n \to g(n) = n-1$，$n \in M$，是否是从M到它自己内的一个映射？若是，写出它的定义域和值域。

51．设D是实数集合，对应f：$x \to f(x) = |x|$，$x \in D$是否是从D到自己内的一个映射？是否是从D到非负实数集合里的一个映射？若是，写出它的定义域和值域。

52．设R是有理数集合，对应f：$x \to f(x) = \dfrac{1}{x^2+1}$是否是从$R$到它自己内的一个映射？是否是从$R$到非负有理数集合上的一个映射？若是，写出它的定义域和值域。

53．设D是实数集合，对应f：$x \to f(x) = x^2$，$x \in D$，是否是从D到它自己内的一个映射？是否是从D到它自己上的一个映射？是否是从D到非负实数集合上的一个映射？若是，写出它的定义域和值域。

54．设N是自然数集合，P是奇数集合，Q是偶数集合，试建立从N到P上的一个映射；从P到Q上的一个映射。

55．设I是整数集合，$M = \{$奇，偶$\}$，有对应f：$2x+1 \to$奇，$2x \to$偶，$x \in I$，f是否是从I到M上的一个映射？

56．设D是实数集合，对应f：$x \to f(x) = ax^2+bx+c$，$x \in D$，a，b，

c是已知实数，是否是从D到它自己内的一个映射？

57．设D_+是正实数集合，对应f：$x \to \frac{1}{x}$，$x \in D_+$，是否是D_+到它自己上的一个映射？若是，写出它的定义域和值域。

58．设M是非负实数集合，对应f：$x \to f(x)=\sqrt{x}$，$x \in M$，是否是从M到它自己上的一个映射？若是，写出它的定义域和值域。

59．设D是实数集合，对应f：$x \to f(x)=x^n$（n是自然数），是否是从D到它自己内的一个映射？若是，写出它的定义域和值域。

60．设D是实数集合，对应f：$x \to f(x)=\sin x$，是否是从D到它自己内的一个映射？若是，写出它的定义域和值域。

61．设D是实数集合，对应f：$x \to f(x)=\log_a x$，其中a是大于0且不等于1的实数，是否是从D_+到它自己内的一个映射？若是写出它的定义域和值域。

62．设D是实数集合，对应f：$x \to f(x)=a^x$，（a是大于0而不等于1的实数），是否是从D到它自己内的一个映射？若是，写出它的定义域和值域。

63．设D是实数集合，对应f：$x \to f(x)=\arcsin x$，是否是从D到它自己内的一个映射？

第七章　一一对应

一、一一对应

在第六章第二节的例 2 中，我们看到在对应 f 之下，集合 A 的任意两个不同的元素 a_1 和 a_2，在集合 B 中的像 b_1 和 b_2 也不同。对于这种对应，我们有

定义1　设 f 是从 A 到 B 上的一个映射，如果对于 A 的任意两个元素 x_1 和 x_2，当 $x_1 \neq x_2$ 时，$f(x_1) \neq f(x_2)$，换句话说，只有 $x_1 = x_2$ 时，才有 $f(x_1) = f(x_2)$，那么 f 叫做从 A 到 B 上的**一一对应**（或**一一映射**、**一一映象**、**一一映照**）。

要证明一个对应 f 是从集合 A 到集合 B 上的一一对应，必须证明：

1. 对应 f 是从 A 到 B 上的一个映射；
2. 对于 A 的任意两个不同元素 x_1 和 x_2，在 B 中的像 $f(x_1)$ 和 $f(x_2)$ 也不同。

例 1　设 $N = \{ x：x$ 是自然数 $\}$，

$Q = \{ f(x)：f(x) = 2x，x \in N \}$。对应 f：$x \to f(x) = 2x$，问 f 是何种对应。

〔解〕　显然，f 是从 N 到 Q 的单值对应，即映射。并且对于任何 x_1、$x_2 \in N$，当 $x_1 \neq x_2$ 时，$2x_1 \neq 2x_2$ 即 $f(x_1) \neq f(x_2)$。所以 f 是从 N 到 Q 上的一一对应。

在此例中，N 是自然数集，Q 是偶数集，显然 $Q \subset N$，即 Q 是 N 的真子集。可见有这样的集合存在，从它到自己内

的映射可以是一一的。

例2　设D是实数集，$F=\{y: y=ax^2+bx+c, x\in D, a、b、c$为已知实数$\}$，有法则$f: x\rightarrow y$，试讨论$f$的对应情况。

〔解〕　$\forall x\in D, y=ax^2+bx+c$是唯一的。所以$f$是从$D$到$F$上的单值对应（即映射）。

（1）当$a\neq 0$时，若$b^2-4ac>0$，取$x_1=\dfrac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$、$x_2=\dfrac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$，显然$x_1\neq x_2$，但$f(x_1)=f(x_2)=0$，所以$f$不是从$D$到$F$上的一一对应，而是多一对应；

（2）当$a=0$，$b\neq 0$时，$y=bx+c$，显然当$x_1\neq x_2$，则$y_1\neq y_2$。所以f是从D到F上的一一对应；

（3）当$a=0$，$b=0$时，$y=c$，不论x为何实数值，y都为c。所以f是从D到F上的多一对应。

例3　设D是实数集，$F=\{y: y=a^x, x\in D, a>0, a\neq 1\}$，有法则$f: x\rightarrow y$，试讨论$f$的对应情况。

〔解〕　$\forall x\in D, y=a^x$是唯一的，所以f是从D到F上的单值对应（即映射）。

又当$x_1\neq x_2$时，由于$a\neq 1$则$a>0$，显然$a^{x_1}\neq a^{x_2}$，所以f是从D到F上的一一对应。

例4　设D_+是正实数集，$F=\{y: y=\log_a x, x\in D_+, a>0, a\neq 1\}$，有法则$f: x\rightarrow y$，试讨论$f$的对应情况。

〔解〕　$\forall x\in D_+$，$\log_a x$是唯一确定的，所以f是从D到F上的映射。

又当$x_1 \neq x_2$时，由于$a \neq 1$，$a > 0$，显然$\log_a x_1 \neq \log_a x_2$，即$y_1 \neq y_2$.所以$f$是从$D_+$到$F$上的一一对应.

在此例中，定义域D_+是正实数集，而值域F是实数集，即$D_+ \subset F$.

例5　在坐标平面上的两个圆C_1：$x^2+y^2=r^2$，与C_2：$x^2+y^2=R^2$（$r<R$）之间，作相似变换.若$(x_1, y_1) \in C_1$，则令$x_2=\dfrac{R}{r}x_1$，$y_2=\dfrac{R}{r}y_1$.显然，这一相似变换就是一个从C_1到C_2上的一一对应.

很明显，解析几何中关于坐标系的平移变换与旋转变换都可以用来建立两条曲线的一一对应.

二、逆　映　射

我们知道，一一对应f：$A \to B$的任何像y只由一个原像产生.因此当$f(A)=B$时，对于任何$y \in B$，就有唯一的$x \in A$与之对应，$f(x)=y$.于是产生了一个由B到A的新的映射，这个映射也是一一的.对此，我们给予下面的定义

定义2　设f：$A \to B$是从A到B上的一一对应.对于$f(x)=y$（$x \in A, y \in B$），令$x=f^{-1}(y)$，于是得到一个映射f^{-1}：$B \to A$，称f^{-1}为f的逆映射（逆对应）.

显然逆映射也是一一对应.而且逆映射的逆，就是原来那个映射.因此，一个一一映射与其逆映射是互逆的.

如果集合A和B都是数的集合，那么逆映射就是逆函数（反函数）.

例6　若f：$x \to y=2x+1$是从实数集合D到实数集合D上的映射，显然这是一一对应.那么f^{-1}：$y \to x=$

$\frac{y}{2}-\frac{1}{2}$是 f 的逆映射。

此外，指数函数和对数函数、三角函数和反三角函数（在主值区间内）都是互为逆映射。

例 7　设 A 为 n 行 m 列的矩阵的全体，B 为 m 行 n 列的矩阵的全体。令 f：$A\to B$ 是把 A 的元素的行换成列，列换成行的置换：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2m} \\ \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nm} \end{pmatrix} \xrightarrow{f} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots & & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots a_{nm} \end{pmatrix}$$

显然，f 是一一对应。而其逆映射 f^{-1}：$B\to A$ 则是把 m 行 n 列的矩阵的行换成列，列换成行的置换：

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots a_{n2} \\ \cdots\cdots & & \\ a_{1m} & a_{2m} & \cdots a_{nm} \end{pmatrix} \xrightarrow{f^{-1}} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2m} \\ \cdots\cdots & & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nm} \end{pmatrix}$$

三、映射的复合

设 f 是由 A 到 B 的映射，g 是由 B 到 C 的映射（此处不要求 $f(A)=B$，$g(B)=C$）。于是对于任何 $a\in A$，就有唯一的 $f(a)=b\in B$，对此 b，又有唯一的 $g(b)=c\in C$。显然对于 a，有唯一的 $c=g(b)=g(f(a))$ 与之对应。这就表明 A 与 C 之间也确立了对应关系。对此，我们可以给出下面的定义：

定义3　设有映射 f：$A\to B$ 及 g：$B\to C$，由 $h(a)=g(f(a))$（$a\in A$）确立的映射 h：$A\to C$，称为 f 与 g 的复

合映射，也叫f与g的积。记为$h = g\circ f: A\to C$。

用图形表示就是图7-1。

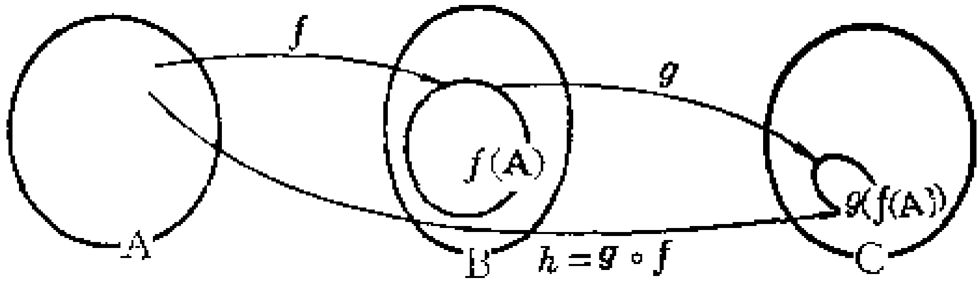


图7-1

注意：1. $h = g\circ f$中的f、g的前后次序不能颠倒。2.由定义可知$f(A)\subseteq B$，$f(B)\subseteq C$。故$h(A) = g(f(B))\subseteq C$。

例 8　求非负实数集合D_1上的函数$f(x)=\sqrt{x}$与实数集合D上的函数$g(x)=\sin x$的复合函数$g\circ f(x)$和$f\circ g(x)$。

〔解〕　$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sin\sqrt{x}$。

这是非负实数集合D_1上的函数，而

$f\circ g(x) = f(g(x)) = f(\sin x) = \sqrt{\sin x}$。

已不再是值域为D的子集合D_1上的函数了。因为当$x = \frac{3\pi}{2}$时，$f(g(x)) = \sqrt{\sin\frac{3\pi}{2}} = \sqrt{-1}$不是实数。

从此例看出，$g\circ f$有意义，还不能保证$f\circ g$有意义；即使两者都有意义，也不能保证$g\circ f = f\circ g$。

例 9　讨论函数$y=\log_a(x^2-3x+2)$　$(a>0, a\neq 1)$的复合过程。

〔解〕　如果引入中间变量$u = x^2-3x+2$，则

$u = f(x) = x^2-3x+2$；

$y = g(u) = \log_a u$。

$f(x)$通常的定义域是$(-\infty, +\infty)$由于$x^2-3x+2=\left(x-\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，最小值是$-\frac{1}{4}$，因此值域是$\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$

$g(u)$的定义域是$(0, +\infty)$，值域是$(-\infty, +\infty)$。

$f(x)$的值域$\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)$超出了$g(u)$的定义域$(0, +\infty)$，因此应限制$f(x)$的值域为

$$\left[-\frac{1}{4}, +\infty\right)\cap(0, +\infty)=(0, +\infty)$$

相应地应限制$f(x)$的定义域为

$(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)$ （不等式$x^2-3x+2>0$的解集）

综合上述讨论，函数$y=\log_a(x^2-3x+2)$是一个复合函数。

$g\circ f$：$(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)\to(-\infty, +\infty)$。

这里$f(x)=x^2-3x+2$：$(-\infty, 1)\cup(2, +\infty)\to(0, +\infty)$ $g(u)=\log_a u$：$(0, +\infty)\to(-\infty, +\infty)$。

不难看出，只有当f：$A\to B$与g：$f(A)\to g(f(A))$都是一一映射时，复合映射$g\circ f$：$A\to g(f(A))$才是一一映射。上面的两例是不满足这一要求的，因此不是一一映射。但对于例9的复合映射，如果把定义域分解成$(-\infty, 1)$与$(2, +\infty)$两个子集，则在每一个子集上，都是一一对应的。

关于映射的复合，还应指出下面两点：

1.若有f：$A\to B$，g：$B\to C$，h：$C\to D$，则由$h(g(f(a)))=d$ $(a\in A, d\in D)$定义了一个由A到D的映射，

记为

$h\circ(g\circ f)$： $A\to D$。

2.$h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$（结合律）

因此$h\circ(g\circ f)$就可写成$h\circ g\circ f$。依此类推，我们还可定义更多次的复合。

例10　讨论 $y=\sin(e^{\sqrt{x}})$ 的复合过程。

〔解〕　我们通过中间变量u、v来研究 y 的复合过程。

$u=f(x)=\sqrt{x}$，$x\in[0,+\infty)$，$u\in[0,+\infty)$；

$v=g(u)=e^u$，$u\in[0,+\infty)$，$v\in[1,+\infty)$；

$y=h(v)=\sin v$，$v\in[1,+\infty)$，$y\in[-1,+1]$。

$\therefore y=\sin(e^{\sqrt{x}})$ 的复合过程是

$$[0,+\infty)\xrightarrow{f}[0,+\infty)\xrightarrow{g}[1,+\infty)\xrightarrow{h}[-1,+1].$$

四、映射的拓广

我们看下面的例子：

函数 $y=x\sin\dfrac{1}{x}$ 的定义域是 $(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$，在 $x=0$ 处函数没有定义。显然，此函数在定义域内是连续的，图7-2是此函数的图象。

由于不等式

$$\left|x\sin\frac{1}{x}\right|\leqslant|x|.$$

所以，这一函数在 $x=0$ 处极限存在，且

$$\lim_{x\to0}x\sin\frac{1}{x}=0.$$

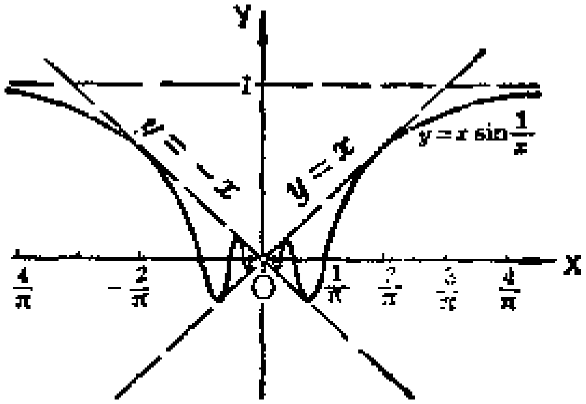


图7-2

为了研究的方便，我们很自然地考虑到应将这个极限值“补充”为函数的值.从而消除其不连续性.为此就应定义

$$y=f(x)=\begin{cases}x\sin\dfrac{1}{x}, & \text{当 } x\neq 0 \text{ 时,}\\ 0 & \text{. 当 } x=0 \text{ 时.}\end{cases}$$

这一新函数 $y=f(x)$ 与原来的函数 $y=x\sin\frac{1}{x}$ 在原定义域（$-\infty$, 0）∪（0，$+\infty$）内是完全一样的，因此它是以连续性为目标的函数的延拓.

将这种方法，应用于映射，有如下的定义：

定义4　设 $A_1\subseteq A$，并有映射 f: $A\to B$，g: $A_1\to B$，如果对于所有的 $a_1\in A_1$，有 $f(a_1)=g(a_1)$，则称 f 为 g 的拓广（或延拓、开拓、扩大），相对地来讲，称 g 为 f 的缩小.记为

$$g=f\mid A_1.$$

例11　设函数 $g(x)=x^2\sin\dfrac{1}{x}$，显然其定义域是$(-\infty$,

$0)\cup(0,+\infty)$．且它在定义域内可导：$g'(x)=2x\sin\frac{1}{x}-\cos\frac{1}{x}$．

$$若令f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$$

则$\lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{f(0+\Delta x)-f(0)}{\Delta x}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta x\cdot\sin\frac{1}{\Delta x}=0$．

因此，$f(x)$在$(-\infty,+\infty)$上可导，$f(x)$是$g(x)$的以可导为目标的拓广．

除了上述以连续性、可导性为目标的拓广外，还有各种不同目标的拓广，例如复变函数的解析开拓等．

习　题

64．试建立奇数集合与偶数集合间的一一对应．

65．试建立正整数集合与负整数集合间的一一对应．

66．试建立正方形对角线与边间的一一对应．

67．试举两个实际生活中的两个集合间成一一对应的实例．

68．设D是实数集合，对应f：$x\to f(x)=|x|$是否是从D到它自己内的一一对应？

69．有理数集合R与实数轴上的点集P之间能否建立一一对应？

70．设$M=\{x：x是自然数\}$，$N=\{f(x)：f(x)=4x^2+1,x\in M\}$，能否将$M$与$N$之间建立一一对应？若$x$是整数呢？

71．设AB，CD是不互相垂直的两线段，连结A，C与B，D的两直线相交于O，作过O且与线段AB相交的射线，让每一条射线与线段AB、CD的两交点互相对应．这样的对应是否是线段CD和AB上所

有点各组成集合间的一一对应？

72.试用一个具体例子说明，什么样的映射是常值映射和恒等映射？什么样的两个映射是相等映射。

73.设正实数集合D_+上的函数为$f(x)=\frac{1}{\sqrt{x}}$，实数集合D上的函数为$g(x)=a^x$（a是不为1的正数）。试求复合函数$g\circ f(x)$与$f\circ g(x)$。

74.试用一个具体例子说明什么样的映射有逆映射。

75.设D是实数集合，$N=\{y: y=ax+b, x\in D, a、b$是已知常数，$a\neq 0\}$，试建立从$D$到$N$上的一一对应$f$，$f$是否可逆？其逆是否一一对应？并求出它的逆映射。

76.设D_+是正实数集合，$y=\sqrt{x}$是D_+上的函数，试问y是否是D_+上的双边单值函数？若是，试求它的反函数，并指出它的值域是什么样的集合？

77.求下列映射的定义域、值域。如果不是一一对应，则将其定义域分解为互不相交的子集，使映射在每一子集上都是一一对应：

（1）$y=5-6x+x^2$；　　（2）$y=\sqrt{2x^2-x+1}$；

（3）$y=\log_a(x^2+x+1)$；　　（4）$y=\sin x+\cos x$。

78.试作出一个由$(0, 1)$到$(-\infty, +\infty)$的一一对应。

79.依例10讨论下列各映射的复合过程：

（1）$y=\cos\sqrt{x-1}$；　　（2）$y=\lg \mathrm{Arcsin}\, x$；

（3）$y=e^{\sin\frac{1}{x+1}}$；　　（4）$y=[\lg x]$。①

---

① $[x]$代表不大于x的最大整数。如$[3,2]=3$，$[-3,2]=-4$等。

第八章　可列集

一、对　　等

通常我们要知道两个集合的元素谁多谁少，总是通过“数数”的方法去解决．例如，一年级与二年级的学生（元素），谁多谁少？可以分年级逐名点数，最后根据累计数字（自然数）的大小去判断．这种方法对于集合中元素个数很多时就很麻烦．我们可以采用下面的简便方法：一年级学生与二年级学生各自列成一排，并要求这两排的学生一个对准一个，排尾多出的年级人数就较多，若排尾正好，则两个年级的人数一样多．

又如，要知道大厅中人数与椅子数哪个多？我们不必把大厅中所有的人和所有的椅子都数过来，而是只要让大厅中所有的人都去找一个椅子坐，如果有人无座位，则人数较椅子多，如果还有空位，则人数比椅子数少，如果正好坐满，则两数相等．

这后一种比较简便的方法叫**比较法**．它的特点就是在两个集合间设法建立一一对应．

定义 1　若在集合 A 与 B 之间能建立一个一一对应，则称 A 与 B **对等**（**等价**、**等势**）．

记为 $$A\sim B.$$

例 1　$A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{$红，黄，黑，白$\}$，$C=\{$东，西，南，北$\}$．虽然它们的元素的具体属性完全不同，但有

$A\sim B$、$B\sim C$、$A\sim C$。

显然，两个有限集合只有当他们的元素的个数是相同时，才是对等的。

关于对等，有如下性质：

定理 1 a) 自反性：$A\sim A$；

b) 对称性：$A\sim B\Longrightarrow B\sim A$；

c) 推移性：$A\sim B$，$B\sim C\Longrightarrow A\sim C$。

定理 2 设A_1、A_2、$A_3\cdots$及B_1、B_2、$B_3\cdots$为二系列的集合，若A_n各不相交，B_n亦各不相交，即

$$A_n\cap A_m=\phi,\ B_n\cap B_m=\phi\quad(n\neq m),$$

且 $$A_n\sim B_n\qquad(n=1,2,3,\cdots),$$

则 $$\bigcup_{k=1}^{\infty}A_k\sim\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k.$$

以上两定理可由定义 1 直接证出。请读者自己证明。

在对等概念中，应注意$B\subset A$与$B\sim A$可以同时成立。

例 2 $A=\{$自然数全体$\}$，$B=\{$正偶数全体$\}$，显然，$B\subset A$，但通过箭头可把A与B间建立一一对应：

$$\begin{array}{lccccc}
A: & 1, & 2, & 3, & \cdots n, & \cdots\\
 & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\
B: & 2, & 4, & 6, & \cdots 2n, & \cdots
\end{array}$$

所以 $B\sim A$

例 3 设$A=(-\infty,\ +\infty)$，$B=(0,\ +\infty)$，则$B\subset A$，且$y=\log_a x$（$a>0$，$a\neq1$）是B到A上的一一对应，因此$B\sim A$。

上二例都说明$B\subset A$与$B\sim A$可以同时成立。

现在我们规定用N_n表示最初n个自然数的集合，即

$$N_n = \{1,2,3,\cdots n\}.$$

利用对等的概念，我们就可以把平常的“有限”与“无限”这两个概念加以数学描述：

定义 2 若存在一个N_n与A对等，则称A为有限集；否则称A为无限集。

定理 3 任何有限集不能与其真子集对等。

证明 若A是任意的有限集，B为A的真子集。则有一个n，使$A \sim N_n$，同样有一个n'且$n' < n$使$B \sim N_{n'}$。要使A与B不对等，根据定理 1，只须证N_n与$N_{n'}$不对等即可。下面我们用数学归纳法来证明这一结论。

当$n = 2$时，N_2的真子集是N_1及ϕ，显然ϕ、N_1都不与N_2对等。

假设当$n = k$时，此结论成立（即N_k不与其真子集对等），我们来证明当$n = k + 1$时（即N_{k+1}）也是如此即可。

我们用反证法来证这一命题。假如有N'适合于

$$N' \subset N_{k+1} \text{和} N' \sim N_{k+1} \qquad (1)$$

那么N_{k+1}的元素$K + 1$必对等于N'的某一元素l，这个元素l不会是$K + 1$。因为假如l是$K + 1$，那么从N_{k+1}和N'中分别除去$K + 1$和l，面得N_k和N''，从（1）式必有

$$N'' \subset N_k \text{和} N_k \sim N'' \qquad (2)$$

然而由假设，N_k不和它的任何真子集对等，所以（2）式不能成立，这就是说：l不等于$K + 1$。这时，假如N'不含有$K + 1$，因此有

$$N' \subseteq N_k$$

我们从N_{k+1}中除去$K + 1$，从N'中除去l而得N''，又得到不可以同时成立的两个关系式（2）；这样说来，$K + 1$必属

于N'．N'中的$K+1$应对应于N_{k+1}中的某元素v．我们变更对应的情况如下：

使N_{k+1}中的$K+1$与N'中的$K+1$相对应，

使N_{k+1}中的v与N'中的l相对应，

其余诸元素间的对应关系如故．

这样仍不失N_{k+1}与N'的对应关系，但这样的一一对应是不可能实现的（因为假设N_k不与其真子集对等），所以（1）式不能成立．

二、可 列 集

我们看下面的集合

$$A=\{1,4,9,16,\cdots,n^2,\cdots\},$$

$$B=\{10,10^2,10^3,\cdots,10^n,\cdots\},$$

$$C=\{1,\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4},\cdots,\frac{1}{n},\cdots\},$$

$$D=\{\cos x,\sin x,\cos 2x,\sin 2x,\cdots\}.$$

这些集合都可以和自然数集合N建立一一对应，即与集合N对等，对此我们给出下面的定义：

定义3 凡与自然数集合N对等的集合都称为可列集（可数集）．

此时，也称集合具有势a．显然上面的集合A、B、C、D都是可列集，而任何可列集都是两两对等的．

定理4 集合A可列的充要条件是它的全体元素可排成一个无穷序列的形式：

$$A=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\} \qquad (1)$$

证明 若A具有（1）的形式，则将A的元素a_n与其下

标n对应，因而得A与N间的一一对应，所以A是可列集。

反之，若A可列，则存在一一对应f：$A \to N$。我们把与n对应的元素排在第n位（也就可记成a_n），就将A写成了（1）的形式。

这一定理告诉我们，可列集就是其元素是可以用自然数进行“计数”（编号）的集合。

定理 5 任何无限集必含有可列子集。

证明 设A是一个无限集，在A中任取一个元素a_1，因为A是无限集，所以$A-\{a_1\}$不是空集；再从$A-\{a_1\}$中任取一个元素a_2，则$A-\{a_1,a_2\}$也不是空集，所以又可以由$A-\{a_1,a_2\}$中任取一个元素a_3，得非空集$A-\{a_1,a_2,a_3\}$。如此继续取下去，不会终止。于是按取出的元素的前后次序得到可列集$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}$，显然有

$$\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}\subseteq A.$$

这一定理表明可列集是“最小”的无限集。

注意，如果舍弃a_1，则得可列集$\{a_2,a_3,\cdots a_n,\cdots\}$，显然它是$A$的一个真子集。因此，定理 5 的结论还可以加强：任何无限集有可列的真子集。

定理 6 可列集的任何无限子集是可列集。

证明 设A为可列集，由定理 4 知可把A的元素编号列成$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$。

若B是A的无限子集，则在上面序列中，从a_1起依照次序逐一看下去，不时会遇到B中的元素。若遇到的第一个元素的下标是n_1，第二个下标是n_2，……第K个下标是n_k，由于B是无限的，因此，这种下标也不会终止。于是

$$B=\{a_{n1},a_{n2},\cdots a_{nk},\cdots\}$$

由定理 4 可知B是可列集。

例 4　试证质数的全体是可列集。

证明　设P为质数的全体，显然有$P\subset N$。由定理 6 可知，只要证明P是无限集，则P就是可列集。为此，我们用反证法进行证明。

设P为有限集，即质数只有有限个，不妨假定全体质数是p_1，p_2，$\cdots p_n$。则$p_1p_2\cdots p_n+1$必非质数，而为一复合数，设其有质数约数p。显然p能整除$p_1p_2\cdots p_n+1$，且p不可能与质数p_1，p_2，$\cdots$，p_n中的任何一个相同，于是p是一个新的质数。这与假设矛盾，故P不是有限集。

定理 7　可列个可列集的和集是可列集。

证明　设A_1，A_2，$\cdots$，A_n，$\cdots$都是可列集，由定理 4，可将它们写成下面的形式：

$$A_1=\{a_1^{(1)},a_2^{(1)},a_3^{(1)},\cdots,a_n^{(1)},\cdots\}$$

$$A_2=\{a_1^{(2)},\ a_2^{(2)},\ a_3^{(2)},\cdots,a_n^{(2)},\cdots\}$$

$$\cdots\cdots$$

$$A_n=\{a_1^{(n)},\ a_2^{(n)},\ a_3^{(n)},\ \cdots,a_n^{(n)},\cdots\}$$

$$\cdots\cdots$$

其中每一个元素$a_q^{(p)}$（$p=1,2,\cdots$，$q=1,2,\cdots$）对应$p+q=h$，称为$a_q^{(p)}$的“高度”。若按“高度”来编排次序：首先把“高度”最小的元素排好，这时只有一个元素$a_1^{(1)}$；其次排“高度”是 3 的元素，这时有两个元素$a_2^{(1)}$，$a_1^{(2)}$；再排“高度”是 4 的元素，它们是$a_3^{(1)}$，$a_2^{(2)}$，$a_1^{(3)}$；照此进行下去，得到序列

$$a_1^{(1)},\ a_2^{(1)},\ a_1^{(2)},\ a_3^{(1)},\ a_2^{(2)},\ a_1^{(3)},\ \cdots\cdots$$

$$a_n^{(1)},\ a_{n-1}^{(2)},\ \cdots a_1^{(n)},\ \cdots. \qquad (2)$$

由定理 4，（2）是可列集．（2）式中可能有重复的元素，把重复者删去，即得到 $S=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$，由（2）式知$S$是可列集．

上述序列（2）是按“对角线的方法”得到的，即从左上方起按箭头所示的方向求得．

由定理 6 和定理 7 易证：

推论 1 可列个两两不相等的有限集的和集是可列的；

推论 2 有限个可列集的和集是可列的．

三、几个重要的可列集

定理 8 有理数集是可列集．

证明 设R是有理数集，R_+是正有理数集，R_-是负有理数集，则

$$R=R_++\{0\}+R_-.$$

R_+与R_-显然是对等的．因此，我们只要证明 R_+ 是可列集即可．

设 $A_i=\{\frac{1}{i},\ \frac{2}{i},\ \frac{3}{i},\ \cdots\frac{n}{i},\ \cdots\}\ (i=1,2,\cdots)$，则

$R_+=\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}A_i$．由于$A_i$是可列集，由定理 7 知$R_+$也是可列的．于是，由定理 7 的推论 2 可知，有理数的全体$R=R_+\cup\{0\}\cup R_-$也是可列的．

此定理还可用有理数直接编号来证．事实上，每一个有理数a 都可以写成既约分数的形式 $a=\frac{p}{q}$（p,q为整数 且$q>$

0），称$h=|p|+q$为有理数的"高度"．显然，"高度"为h的有理数只有有限个．例如$h=1$的，只有一个：$\frac{0}{1}=0$；$h=2$的只有两个：$\frac{1}{1}=1$，$\frac{-1}{1}=-1$；$h=3$的只有四个：$\frac{1}{2}$，$\frac{2}{1}=2$，$-\frac{1}{2}$，$-\frac{2}{1}=-2$．把一切有理数，按递增的"高度"编号，每一个有理数就得到了一个确定的号码（如下表），因而是可列集．

号码	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
有理数	0	1	-1	$\frac{1}{2}$	2	$-\frac{1}{2}$	-2	$\frac{1}{3}$	3	$-\frac{1}{3}$	-3
高度	1	2		3				4			

号码	12	13	14	15	16	17	18	19	……
有理数	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$	4	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{2}$	-4	…
高度	5								…

注意1：可列集的编号方法可以不同，即可列集与自然数集N间的一一对应可以有不止一个．对于有理数，读者可再找一个排法．

注意2：关于有理数，我们必须指出，它是不能按数的大小的次序进行编号的（为什么？）．

定理9 自然数偶的全体是可列集．

证明 设(p,q)是一个自然数偶，称$h=p+q$为其"高度"．我们也可以按"高度"对自然数偶进行编号，从而建立自然数偶与自然数之间的一一对应：

号码	1	2	3	4	5	6
数偶	(1,1)	(1,2)	(2,1)	(1,3)	(2,2)	(3,1)
高度	2	3		4		

号码	7	8	9	10	…
数偶	(1,4)	(2,3)	(3,2)	(4,1)	…
高度	5				…

注意：按“高度”编号，实质上都可用“对角线”法直观地建立与自然数的一一对应，下面是自然数偶与自然数的“对角线”表：

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & 2 & & 4 & & 7\ \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
3 & & 5 & & 8 & & \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & & \\
6 & & 9\ \cdots\cdots & & & & \\
& \swarrow & & & & & \\
10\ \cdots\cdots & & & & & & \\
\cdots\cdots & & & & & &
\end{array}$$

自然数对角线表

$$\begin{array}{ccccccc}
(1,1) & & (1,2) & & (1,3) & & (1,4)\ \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & \swarrow & \\
(2,1) & & (2,2) & & (2,3) & & (2,4)\ \cdots \\
& \swarrow & & \swarrow & & & \\
(3,1) & & (3,2) & & (3,3) & & (3,4)\ \cdots \\
& \swarrow & & & & & \\
(4,1) & & (4,2) & & (4,3) & & (4,4)\ \cdots \\
\cdots\cdots & & & & & &
\end{array}$$

数偶对角线表

定理10 代数数① 的全体是可列集.

证明 由代数数的定义可知，一个数为代数数，是指它是某一个整数系数多项式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \qquad (3)$$

的根，我们规定自然数

$$h = n + |a_0| + |a_1| + \cdots + |a_n|$$

为整系数多项式（3）的“高度”．显然“高度”为 h 的多项式只有有限个，而每个多项式的根又只有有限个，我们把高度为 h 的所有整系数方程的根的全体记为 A_h，则 A_h 是有限集．因

① 所谓代数数是指整系数多项式的根.

此，代数数的全体的集合A就是A_1，A_2，$A_3\cdots A_h,\cdots$的和集

$$A=\bigcup_{h=1}^{\infty}A_h$$

由定理7的推论1得A是可列集。

四、　无限集的特征

我们看下面几个可列集：

$$A=\{10,\ 10^2,\ 10^3,\ \cdots,10^n,\ \cdots\},$$
$$N=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\ ,\ \cdots\},$$
$$R=\{\text{全体有理数}\}.$$

我们知道，他们都是无限集，且都是可列集，经过某种法则都可以找到一一对应的关系，因此他们是对等的。如果按站队的方法来看，这三个队伍是“一样长”的。虽然A在数轴上分布得那样稀疏，而R则在数轴上分布得很稠密①，但从集合所包含的元素的“个数”来说，是一样多的。这就表明

$$A\subset N\subset R\text{与}A\sim N\sim R$$

可以同时成立。这一事实，对无限集来说是一个规律。

定理11　任何无限集必对等于它的一个真子集。

证明　由定理5知，在无限集A中，必存在一个可列真子集B。

$$B=\{a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n,\cdots\}\subset A.$$

令B_1、C、A_1分别表示下列集合

$$B_1=\{a_2,a_3,\cdots,a_{n+1},\cdots\}=B-\{a_1\},$$

① 读者可自行证明：不论是怎样相近的两个实数之间，都包含有无限个有理数。

$$C = A - B \text{（显然} C \neq \phi \text{ 且 } A = B \cup C\text{）},$$

$$A_1 = B_1 \cup C = \{a_2, a_3, \cdots, a_{n+1}, \cdots\} \cup C.$$

显然$A_1 \subseteq A$，并且可以按下面方法建立A_1与A之间的一一对应f：

对于A中属于B的元素a_n，使其与A_1中属于B_1的元素a_{n+1}对应；对于A中属于C的元素a，使其与自己对应（a也属于A_1中的C）。

于是$A \sim A_1$。

例5　试找出一个由（0，1）到[0，1]的一一对应。

〔解〕　在（0,1）中任意找出一个可列真子集，例如是

$$\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$$

作如下一一对应f：

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \frac{1}{4}, & \frac{1}{5}, & \cdots, & \frac{1}{n}, & \cdots, \\
\updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow & \\
0, & 1, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{3}, & \cdots & \frac{1}{n-2}, & \cdots.
\end{array}$$

而对$(0,1) - \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots, \frac{1}{n}, \cdots\right\}$中的元素，则令其与本身对应。因此，$f$满足本题的要求。

在第八章第一节的定理3，我们已指出“任何有限集不能与其真子集对等，”这与“全体的个数多于部分的个数”这一公理是一致的．本节的定理11却表明：对无限集来说，“全体多于部分”的公理不再成立．这就表明无限集与有限集有着本质上的不同．“个数”问题上从有限过渡到无限产生的本质不同，正是量变到质变的一个生动的例子．

因此我们有：

A是无限集$\Longleftrightarrow A$对等于它的一个真子集。

也可以用上面的结论定义无限集：

能与其真子集对等的集合，称为无限集。

习　　题

80．证明下列各结论：

(1) 若$A=\{$全体正整数$\}$，$B=\{$全体负整数$\}$，则$A\sim B$；

(2) 若$A=\{$全体奇数$\}$，$B=\{$全体偶数$\}$，则$A\sim B$；

(3) 若$A=(0,1)$，$B=(0,+\infty)$，则$A\sim B$；

(4) 若$A=(-1,1)$，$B=(-\infty,+\infty)$则$A\sim B$；

(5) 若$A=(a,b)$，$B=(-\infty,+\infty)$，则$A\sim B$；

(6) 若$A=(a,b)$，$B=(0,+\infty)$，则$A\sim B$；

(7) 坐标平面上的任意两个圆的圆周对等。

81．找出下列各集合元素间的一一对应方法：

(1) $(a,b]$与$[a,b)$，(2) $(a,b]$与$[a,b]$；

(3) $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(i-1,i)$与$[0,n]$；(4) $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(i-1,i)$与$(0,+\infty)$．

82．设A为可列集，试证A可表为两个不相交的可列集的和集。

83．找出一个使全体自然数集N成为可列个两两不相交的可列子集的和集的方法。

84．证明：(1) $A\sim A$；(2) $A\sim B\Longrightarrow B\sim A$；

(3) $A\sim B$且$B\sim C\Longrightarrow A\sim C$。

85．证明下列定理：

(1) 有限集与可列集的和集是可列的；

(2) 有限个可列集的和集是可列的；

(3) 可列个两两不相交的有限集的和集是可列的。

86．若A为有限集或可列集，B为无限集，试证$A\cup B\sim B$。

87. 若A为无限集，试证必存在$A_1 \subset A$，使得$A_1 \sim A$，且$A - A_1$可列，并对（0,1）举出一个这种真子集的例子。

88. 证明平面上坐标为有理数的点组成一个可列集。

89. 试证：若A是可列集，则A的有限子集全体是一个可列集。

90. 用归纳法证明n维欧氏空间中整点的全体是可列的。

91. 试证：数轴（$-\infty$，$+\infty$）上互不相交的开区间的全体组成的集合或是有限的，或是可列的。

92. 试证：递增函数的不连续点或是有限的，或是可列的。

第九章　集合的势

一、有限集元素的个数

为了方便，我们把集合 A 的元素的个数记为$\overline{A}$或$n(A)$。我们看下面的例子：

一个班有45名学生，班长统计外语和数学的考试成绩，说：

外语考100分的请举手	………8人
数学考100分的请举手	………12人
都没有考100分的请举手	………29人

一个粗心的学生叫起来："奇怪，45－29＝16，而外语、数学考100分的人加起来是8＋12＝20，怎么多4个人呢？"这个学生忘了外语和数学都考100分的人，他们举了两次手。如果外语考100分的人的集合为A，数学考100分的人的集合为B，那么

$$\overline{\overline{A\cup B}}=16,$$

而 $$\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}=8+12=20.$$

这个差数4正是 $\overline{\overline{A\cap B}}=4$.

对此，我们有如下关系式：

$$\overline{\overline{A\cup B}}=\overline{\overline{A}}+\overline{\overline{B}}-\overline{\overline{A\cap B}}. \qquad (1)$$

用韦恩图可以很容易验证上式（分（1）$A\cap B\neq\phi$，（2）$A\cap B=\phi$，（3）$A\supseteq B$（或$B\supseteq A$）证明）。

由（1）式又可以推出下式

$$\overline{A\cup B\cup C}=\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}-\overline{A\cap B}-\overline{A\cap C}-\overline{B\cap C}+$$
$$+\overline{A\cap B\cap C}. \qquad (2)$$

一般地，有

$$\overline{A_1\cup A_2\cdots\cup A_n}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\cdots+\overline{A_n}-\overline{A_1\cap A_2}-\cdots+$$
$$+\overline{A_1\cap A_2\cap A_3}+\cdots+(-1)^{n-1}\overline{A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n}. \qquad (3)$$

例1　某校先后举行数、理、化三科竞赛，学生中至少参加一科的：数学 807 人，物理739人，化学437人，至少参加两科的：数学、物理593人，数学、化学371人，物理、化学 267 人，三科都参加的有 213 人，试计算参加竞赛的学生总数。

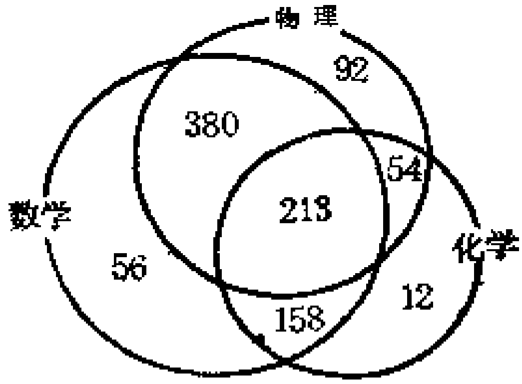


图9-1

我们用两种方法来解这个题。

〔解法 1〕　如图9-1，用三个圆分别代表数学、物理、化学各科竞赛的参加人数，那么

三圆的公共部分是三科都参加的人数 = 213，

只参加物理、化学竞赛的人数是267 − 213 = 54，

只参加数学、化学竞赛的人数是371 − 213 = 158，

只参加数学、物理竞赛的人数是593 − 213 = 380，

只参加化学竞赛的人数是437 − 213 − 54 − 158 = 12，

只参加物理竞赛的人数是739 − 213 − 54 − 380 = 92，

只参加数学竞赛的人数是807 − 213 − 158 − 380 = 56，

参加人总数是213 + 54 + 158 + 380 + 12 + 92 + 56 = 965。

〔解法 2〕　用本节所学的公式来解。

我们以A、B、C分别表示参加数学、物理、化学每一科竞赛的学生集合，根据题意

$\overline{\overline{A}} = 807$，　$\overline{\overline{B}} = 739$，　$\overline{\overline{C}} = 437$，

$\overline{\overline{A \cap B}} = 593$，　$\overline{\overline{A \cap C}} = 371$，　$\overline{\overline{B \cap C}} = 267$，

$\overline{\overline{A \cap B \cap C}} = 213$。

由本节公式（2），得

$$\overline{\overline{A \cup B \cup C}} = 807 + 739 + 437 - 593 - 371 - 267 + 213$$
$$= 965.$$

即参加竞赛的学生总数是965。

例 2　某年级四个班共有200名学生，在一次考试中，有90%的人数、理、化三科的成绩至少有一科在80分以上，

二、集合的势

对于有限集我们研究了它所包含的元素的个数问题，那么对于无限集它所包含的元素个数是多少呢？怎样表示呢？是否任何无限集所包含的元素都一样多呢？为此我们曾引进势的概念．本节我们将进一步研究集合的势．

集合论的创始人康脱曾经对于势的概念，有过一个相当模糊的定义．他说："所谓一个集A的势，乃表示A的一种一般性质，而该性质当离去A的元素而言，以及离去A的元素的次序而言，仍旧是保持的"．他用$\overline{\overline{A}}$表示A的势．我们对于康脱的定义不能认为满意，但是仍沿用他的记号$\overline{\overline{A}}$．我们给势下这样的定义：

定义 1　将所有的集分类，凡二集对等时且只有对等时，称为属于同一类．对于每一类予以一个记号．称此记号为该类中任一集的势．(有的书叫浓度、基数)．若A的势是a，则记为　$\overline{\overline{A}}=a$．（有的书中记为$n(A)=a$）．

于是，凡对等的集，其势相同．

定义 2　凡与自然数集N对等的一类集的势记为a．a称为可列集的势．

同样，凡与集合$A=\{a,\ b,\ c\}$对等的集，以记号"3"与之对应，那末，凡仅含三个元素的集，其势是3．所以无限集的势是有限集元素的个数的扩充．空集的势是0，单元素集的势是1．

对于可列集的势，我们有如下结论：

定理 1　设a是可列集的势，n是一个自然数，则

（1）$a-n=a$,　　　（2）$a+n=a$,

（3）$a+a+\cdots+a=na=a$.

事实上，若A是可列集，M是有限集，则$A-M$，$A\cup M$均为可列集，（1）、（2）式得证.

又由第八章第二节定理7的推论2得有限个可列集的和集为可列集，因此（3）式得证.

定理2　设a是可列集的势，n_i是自然数（$i=1,2,3\cdots$），则（1）$n_1+n_2+n_3+\cdots=a$.（2）$a+a+a+\cdots=aa=a$.

事实上，由第八章第二节定理7可得（2）式，由定理7的推论1可得（1）式.

三、连续集的势

由第八章第二节定理5可知，任何无限集必含有可列子集，但无限集本身却不一定是可列的．现举一个重要例子说明如下：

定理3　区间$U=[0、1]$是不可列的.

证明：如果U是可列的，那么U中一切点可写为：

$$x_1,\ x_2,\ x_3\cdots\cdots. \qquad (*)$$

于是，U中任一点必在（*）之中．用点$\frac{1}{3}$与$\frac{2}{3}$将U分成三部分：

$$\left[0,\ \frac{1}{3}\right],\ \left[\frac{1}{3},\ \frac{2}{3}\right],\ \left[\frac{2}{3},\ 1\right]. \qquad (1)$$

则显然其中至少有一个区间不含有点x_1．今以U_1表示不含点x_1的（1）中的一个区间（三个区间中可能有两个都不含有x_1，不失一般性，此时取U_1为其中任何一个，例如取较左的一个）.

现将U_1再三等分，取其中不含x_2的一个区间U_2。然后再将U_2三等分，取其中不含x_3的一个区间U_3，依此类推。如此不断地分下去，我们得到一系列的区间$\{U_i\}$，由其取法，知道

$$U \supset U_1 \supset U_2 \supset U_3 \supset \cdots\cdots,$$

且 $$x_n \in U_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

区间U_n的长是$\frac{1}{3^n}$。因为$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{3^n}=0$，由闭区间套定理，必有点去适合

$$\xi \in U_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots).$$

由于ξ是U的一个点，必然要在（＊）中出现。但是不论n取什么值，总有

$$x_n \in U_n,\ \xi \in U_n,$$

从而得到 $$\xi \neq x_n.$$

也就是说，ξ不能与（＊）中任一点相同，与假设矛盾，因此定理得证。

由于这个定理的事实，我们得到新的势。

定义 3 凡与[0, 1]对等的一类集的势记为c。c称为连续集（或连续统）的势。

定理 4 闭区间$[a,\ b]$，开区间$(a,\ b)$以及半闭区间$(a,\ b]$及$[a,\ b)$的势都是c。

证明 设 $A=[a,\ b]$，$U=[0,\ 1]$。

令 f： $y=a+(b-a)x$

则f是由U到A上的一一对应，所以A具有连续集的势。又由第八章第四节可知，从一个无限集除去一点或者两点，所得的集与原来的集是对等的，所以$(a,\ b)$，$(a,\ b]$，$[a,\ b)$

的势与$[a, b]$的势相同，都是c。

定理 5 两两不相交的有限个势为c的集的和集，其势为c。

证明 设 $$S=\sum_{k=1}^{n}E_k\ (E_k\cap E_{k'}=\phi, K\neq K'),$$ E_k的势都是c。将区间$[0, 1)$用分点

$$C_0=0<C_1<C_2<\cdots<C_{n-1}<C_n=1$$

分成n个区间

$$[C_{k-1}, C_k)\qquad (K=1,2,\cdots,n).$$

每一个区间的势是c，所以我们可以使E_k与$[C_{k-1}, C_k)$做成一对一的对应。因为

$$[0,1)=\sum_{k=1}^{n}[C_{k-1}, C_k),$$

所以S和$[0,1)$，成一对一的对应。于是定理得证。

此定理可表为$c+c+\cdots+c=nc=c$。

定理 6 两两不相交的可列个势为c的集的和集，其势是c。

证明 设 $$S=\sum_{k=1}^{\infty}E_k\ (E_k\cap E_{k'}=\phi, K\neq K'),$$

其中每一个E_k的势都是c。

于区间$[0,1)$中取一列单调增加的数列$\{C_n\}$：

$$C_0=0<C_1<C_2<\cdots\cdots,$$

且 $$\lim_{k\to\infty}C_k=1.$$

将E_k与$[C_k, C_{k+1})$做成一对一的对应，即得S与$[0,1)$

也是一一对应的。

此定理可表为$c+c+c+\cdots=ac=c$。

定理7 c个（c为连续集的势）势为c的集的和集，其势为c。

证明从略。

此定理可表为$cc=c$。

对于连续集的势，我们有以下几个例子：

1. 实数集Z的势是c；

2. 无理数集的势为c；

3. 平面上点的全体组成的集的势为c。

四、势的比较

本节我们将介绍势的大小的比较以及没有最大势的结论。

定义4 设二集A和B的势是α和β：

$$\overline{\overline{A}}=\alpha,\quad \overline{\overline{B}}=\beta.$$

如果A与B不对等且B中含有一个子集与A对等，那么我们说A的势小于B的势，或B的势大于A的势。记为$\alpha<\beta$或$\beta>\alpha$。

例3 $A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{32}\}$，$\overline{\overline{A}}=32$，

$B=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{49}\}$，$\overline{\overline{B}}=49$。

A不与B对等，但有B的子集

$$B^*=\{b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_{32}\},$$

使$A\sim B^*$，所以 $\overline{\overline{A}}<\overline{\overline{B}}$。

例4 任何一个自然数n小于N的势a。

事实上，若$A=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$，$N=\{1,2,3,\cdots\}$，则$A$不与$N$对等，但$N$有子集$N^*=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n\}$使

$A \sim N^*$. 所以 $n < a$.

例 5　证明N的势a小于[0,1]的势c.

证明　设$N = \{1, 2, 3, \cdots\}$, $\overline{\overline{N}} = a$

$$U = [0,1], \quad \overline{\overline{U}} = c.$$

则N不与U对等（本章的定理3），但U有子集

$$U^* = \{1, \tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{3}, \cdots\},$$

使$U^* \sim N$. 所以 $a < c$.

至于在a与c之间是否有势μ满足

$$a < \mu < c,$$

这是尚未解决的一个难题①.

可是我们容易找到势大于c的集.

定理8　设F是在[0,1]上定义的一切实函数，则F的势大于c.

证明　设$U = [0,1]$. 首先来证明F不与U对等，我们用反证法来证明.

假设$F \sim U$，那么存在一种对应法，可使F与U成一一对应. 假设[0,1]中的t，对应于F中之元素是$f_t(x)$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$. 记

$$F(t, x) = f_t(x)$$

那么，$F(t, x)$是在$0 \leqslant t \leqslant 1$, $0 \leqslant x \leqslant 1$中所定义的两个变数的函数.

函数　　$$\psi(x) = F(x, x) + 1$$

是集合F中的元素. 所以U中必有a，使其适合于$\psi(x) = f_a(x)$，或是

① 康脱予料没有这种μ，这是康脱的假设，人们往往称此假设为"连续集的假设".

$$F(x,x)+1=F(a,x).$$

但是取$x=a$，上式却不可能成立.所以F不与U对等.

我们可以在F中找到一个子集F^*使$F^*\sim U$.

为此，取 $$F^*=\{\sin x+b\}\qquad(0\leqslant b\leqslant 1)$$

使U中的数b与F^*中的函数$\sin x+b$做成对应，这是一一对应，所以$F^*\sim U$.

由定义4，F的势大于U的势c.

定义5 区间$[0,1]$上所定义的一切实函数所成之集，其势记为f.

显然，$f>c$.

是否有大于f的势呢？回答是肯定的.事实上，对于任何一个势，我们都可以造一个集，使其势大于所设的势.

定理9 设M是一集，$T(M)$是M的一切子集所成之集，那么 $\overline{\overline{T}}(M)>\overline{\overline{M}}$.

证明 $\because T(M)$含有M的一切子集，$\therefore T(M)$中有M本身，有空集，又有M中每一元素所成的单元素集.令T^*为M中每一元素所成的单元素集组成的集合，则$T^*\sim M$，$T^*\subset T(M)$.

下面只须证明$T(M)$不对等于M即可.

如果$T(M)\sim M$，设φ使$T(M)$与M组成一一对应，于是对于M中的m，$T(M)$中有唯一的$\varphi(m)$与之对应，而$T(M)$中每一个元素一定可以写为$\varphi(m)$，其中$m\in M$.

我们对M中的元素m进行分类，把满足$m\in\varphi(m)$的称为“好”的元素，否则称为“坏”的元素.那么与M本身对应的元素是“好”的，而与空集对应的元素就是“坏”的，于是M中的元素不是“好”的就是“坏”的.设M中所有“坏”的

元素组成的集合为S，则$S\in T(M)$. 而M中必有元素m_0适合

$$S=\varphi(m_0).$$

这个元素m_0按我们上面的分类是"好"的还是"坏"的呢？

如果m_0是"好"的，那么

$$m_0\in\varphi(m_0)=S.$$

但S中只含"坏"的元素，矛盾.

如果m_0是"坏"的，那么

$$m_0\overline{\in}\varphi(m_0)=S.$$

上式表示m_0不是S的元素，由S的定义可知m_0是"好"的，矛盾.

因此，得到m_0既不是"好"的又不是"坏"的，于是陷于矛盾.所以$T(M)$与M不能对等.

此定理告诉我们，不可能存在一个最大的势.

由第二章第二节我们已知道，由n个元素组成的集合的所有子集共有2^n个. 与这个结果联系起来，我们给出下面的定义.

定义6 若M的势是μ，而以它的一切子集所组成的集为$T(M)$，$T(M)$的势是τ，则定义

$$\tau=2^{\mu}.$$

定理9表示 $\quad 2^{\mu}>\mu.$

对于可列集的势和连续集的势，我们有如下关系：

$$c=2^{a}.$$

本书对于无限集合的势，只作如上的一般介绍. 对于有限集合元素的个数，我们给出如下习题.

习　题

93．今有a、b、c三个新电影，至少看过其中一个电影的有18人，看过a，b，c的分别为9人，8人，11人，同时看过a、b的有5人，看过b、c的3人，看过c、a的4人，问a、b、c全都看过的几人？

94．在某次数学竞赛中，据统计在60个考生中，解开第一题的有35人，解开第二题的有28人，两题都解开的是8人，问两题都没解开的是几人？

95．在65种食品中，研究其是否含有维生素A、B_1、C，情况如下：

含有A的38种，含有B_1的58种；

含有C的34种，含有A，B_1的37种；

含有A，C的22种，含有B_1，C的31种；

含有A，B_1，C的22种。

这时，仅含有A的和A，B_1，C全都不含的各有几种？

第十章　集合的应用

在本书的前言中，我们已经说过，集合论的概念和方法已经应用于近代数学的各个分支，成为数学领域中必不可少的基本概念．在初等数学中，渗透集合的概念和思想，也可以使一些概念和知识的讨论更加深刻和明确，在不同知识之间建立起有机的联系．在本章，我们将举出集合论应用于中学数学几个方面的例子．

一、方程与不等式的解集合

解方程是中学数学的重要方面之一．所谓方程即含有未知量的等式．方程中能使等式成立的未知量的值称为方程的解．一个方程可能有解，也可能没有解；可能有有限个解，也可能有无穷多个解．解方程即求出方程的全部的解．我们把方程的解的全体组成的集合称为方程的解集合．这样一来，解方程的过程实际是求出方程的解集合的过程，我们来看下面的例子：

例1　求一次方程$ax=b$（$a\neq 0$）的解集合．

〔解〕　无论是在实数范围内或在复数范围内，一次方程$ax=b$（$a\neq 0$）仅有一个解$x=\frac{b}{a}$．因此，该方程的解集合为单元素集合：$\left\{\frac{b}{a}\right\}$．

例 2　求分式方程$\frac{2x-1}{x-1}=\frac{1}{x-1}$的解集合.

解此分式方程可知，该方程无解，因此我们说方程的解集合是空集ϕ.

例 3　在复数范围内，讨论n次方程

$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_{n-1}x+a_n=0$，　$(a_0\neq 0)$

的解集合.

〔解〕　在复数范围内，n次方程必有n个根，因此，方程的解集合中至多含有n个元素. 即当所给n次方程无重根时，其解集合可表为：

$$\begin{aligned}M&=\{x_i:\ f(x_i)=0,\ i=1,\ 2\cdots,\ n\}\\&=\{x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n\},\end{aligned}$$

例 4　求三角方程$\sin x=\frac{1}{2}$的解集合.

〔解〕　$x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6}$，$n=0$，$\pm 1$，$\pm 2$，$\cdots$都是方程的解，因此方程的解集合是可列集：

$$N=\left\{x:\ x=n\pi+(-1)^n\frac{\pi}{6},\ n=0,\pm 1,\ \cdots\right\}.$$

应该注意，方程的解集合与方程的解是两个不同的概念.后者是前者中的一个元素.解方程时，必须准确的找出方程的解集合，即不增加也不减少解集合中的元素（不增根也不丢根）.

在方程的解集合为空集时，我们可以说方程无解（如例2）.在方程的解集合是有限集（例1，例3）或可列集(例4）时，我们也可以直接列出方程中的所有解（中学数学课

中，没给出集合概念以前，也只能这样作）．但是对解集合不可列的方程，则无法依次列出方程的全部解．也就是说，解这样的方程时，只能用解集合的概念而不宜直接说出方程的全部解．这时，只能用描述法表示方程的解集合．例如

例5　解方程$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$（$a>b>0$）．

〔解〕　这是一个二元方程，方程的每个解都是一个二元序偶（x，y）．与所有这些二元序偶对应的点，在平面直角坐标系内组成一个椭圆形，即方程的解集合为

$$\left\{(x,y):\ \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,\ (a>b>0)\right\}.$$

显然，此集合的势为c．此例中，我们就无法依次列出方程的解．由此看出，用方程的解集合概念去描述方程的所有解有其特有的方便之处．为了进一步说明这一优越性，我们再举一个有用的例子：

例6　解方程$\frac{[x]}{2}-1=3$．

〔解〕　原方程即$[x]=8$．

这时，x为正数，$[x]$是x的整数部分的值．由$[x]=8$知，x可以是$[8,\ 9)$中的任意值．故方程的解集合是$[8,\ 9)$．这个方程的解集合的势也是C，它的解也是无法一一列举的．我们可以说区间$[8,\ 9)$中的每一个值都是方程的解，但不能说方程的解是区间$[8,9)$，否则将使集合与集合中的元素混为一谈．

下面我们讨论方程组的解与解集合概念，以含有两个未知量和两个方程的方程组为例．

给定方程组

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0. \end{cases} \qquad (1)$$

能够使方程组成立的一个二元序偶 (x,y) 都称为方程组（1）的解．方程组的解的全体所成的序偶集

$$E=\{(x,y):\ f(x,y)=0,g(x,y)=0\}$$

称为（1）的解集合．

由例5，我们已经知道，二元方程 $f(x,y)=0$ 的解集合可表为序偶集

$$A=\{(x,y):\ f(x,y)=0\}.$$

二元方程 $g(x,y)=0$ 的解集合可表为序偶集

$$B=\{(x,y):\ g(x,y)=0\}.$$

则方程组

$$\begin{cases} f(x,y)=0, \\ g(x,y)=0 \end{cases}$$

的解集合可表为 A 与 B 的交集．即

$$E=A\cap B.$$

例7　求下列方程组的解集合：

$$(1)\quad \begin{cases} 4x^2+y^2=8, \\ y=2x; \end{cases}$$

$$(2)\quad \begin{cases} x^3+xy^2=2x, \\ x^2-xy=0. \end{cases}$$

〔解〕　（1）用代入法易得，方程组有两组解：

$$\begin{cases} x_1=1, \\ y_1=2; \end{cases} \qquad \begin{cases} x_2=-1, \\ y_2=-2. \end{cases}$$

即方程组的解集合为

$$\{(1,2),(-1,-2)\}.$$

（2）原方程组可化为

$$\begin{cases} x(x^2+y^2-2)=0, & \cdots\cdots(\mathrm{I}) \\ x(x-y)=0. & \cdots\cdots(\mathrm{II}) \end{cases}$$

其中（I）的解集合可表为

$$A=\{(x,y): x=0\}\cup\{(x,y): x^2+y^2=2\}$$
$$=C\cup D,$$

（II）的解集合可表为

$$B=\{(x,y): x=0\}\cup\{(x,y): x=$$
$$=y\}=C\cup E.$$

因为方程组（2）的解集合$F=A\cap B$，应用集合的运算法则可得

$$F=A\cap B=(C\cup D)\cap(C\cup E)$$
$$=(C\cap C)\cup(D\cap C)\cup(C\cap E)\cup(D\cap E)$$

而 $C\cap C=C$，$D\cap C\subseteq C$，$C\cap E\subseteq C$，

∴ $F=C\cup(D\cap E)$.

又 $C=\{(x,y): x=0\}$，

$$D\cap E=\{(x,y): x^2+y^2=2\text{ 且 }x=y\}$$
$$=\{(1,1),(-1,-1)\}$$

∴ 方程组（2）的解集合

$$F=\{(x,y): x=0\}\cup\{(1,1),(-1,-1)\}.$$

它是平面直角坐标系内的一条直线（y轴）上的点及两个特殊点组成的集合（图10-1）。

与方程的解与解集合概念类似，我们可以给出不等式的解与解集合的概念．即能够使不等式（或不等式组）成立的未知量的某值（或某序偶）称为不等式(或不等式组)的一个

解．不等式（或不等式组）的所有解组成的集合称为不等式（或不等式组）的解集合．解不等式（或不等式组）的过程，实际上是求出不等式（或不等式组）的解集合的过程，而且同样应该指出不等式（或不等式组）的解与解集合是两个不同的概念．在求解不等式的过程中，应予以严格区别．

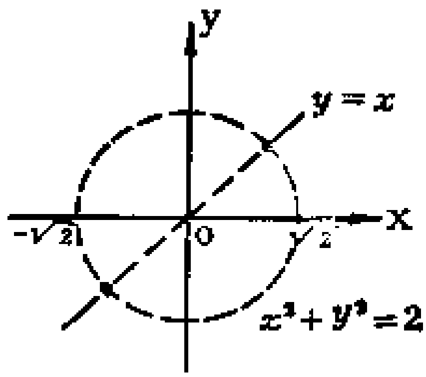


图10-1

例 8　解不等式$x^2-x-2\leqslant 0$．

〔解〕　解此不等式得到

$$-1\leqslant x\leqslant 2.$$

所以，不等式的解集合为

$$A=\{x: -1\leqslant x\leqslant 2\}.$$

在引入解集合概念以前，我们常说"上述不等式的解是$-1\leqslant x\leqslant 2$"，实际上，这种说法是不够准确的，因为不等式的解是某一数值而不是区间$[-1, 2]$．严格地说，若不用解集合概念，应回答为满足$-1\leqslant x\leqslant 2$的每个x值都是不等式的解．

例 9　解不等式$x^2+2x-3>0$．

〔解〕　解此不等式得到

$$x<-3,\quad x>1.$$

所以，不等式的解集合为

$$A=\{x: x<-3\}\cup\{x: x>1\}.$$

在回答例 9 的问题时，采用集合符号也带来了很大的方便．若不用集合的语言，往往将答案说成："不等式的解是

$x<-3$或$x>1$”或说成：“不等式的解是$x<-3$和$x>1$”．而且常常发生用“或”字还是用“和”字的争论．实际上，上述两种回答都是不够准确的．因为不等式的解是数值，因此应该说，不等式的解x满足$x<-3$或$x>1$．若使用集合语言，令$A=\{x: x<-3\}$，$B=\{x, x>1\}$，则可回答为不等式的解集合是A与B的和集（并集）．

下面，我们介绍一个求不等式组的解集合的问题，它是所谓线性规划问题的最简单情况：

例10　某工厂生产甲、乙两种产品．已知生产甲种产品一件需要用煤9吨，劳动力3个，生产乙种产品一件需用煤4吨，劳动力10个；又知甲种产品每件价值7万元，乙种产品每件价值12万元．但生产中每天用煤不得超过360吨，每天用劳动力不得多于300个．问甲乙两种产品各生产多少件，才能使产值最大？

〔解〕　设每天生产甲种产品x件，乙种产品y件．由已知条件可列出不等式组：

$$\begin{cases} 9x+4y\leqslant 360, \\ 3x+10y\leqslant 300, \\ x\geqslant 0, \\ y\geqslant 0. \end{cases}$$

而日产值为$7x+12y=s$（万）．

不等式组中，每个不等式的解集合是半个平面（包括直线本身）．而不等式组的解集合则是各不等式解集合的交集．即四条直线所围成的平面区域．图10-2中（1）—（4）画出的分别是各不等式的解集合，（5）画出的是不等式组的

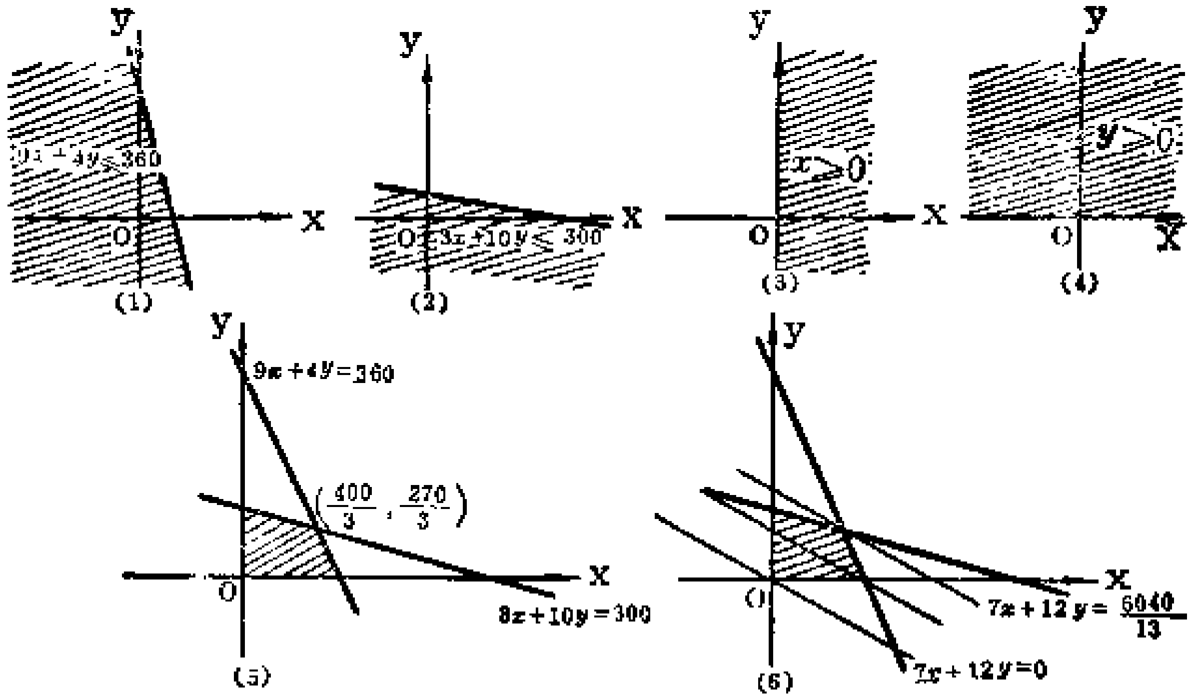


图10-2

解集合.

求 $s=7x+12y$ 的最大值问题，实际上就是在上述解集合中求出一点 (x_0, y_0)，使 $s=7x_0+12y_0$ 的值最大.

我们给 s 以不同的值，画出平行线束 $7x+12y=s$. 则可发现.线束中当直线经过两直线 $9x+4y=360$ 与 $3x+10y=$ $=300$ 的交点 $\left(\frac{400}{13}, \frac{270}{13}\right)$ 时，s 取最大值，如图10-2的（6）.且知

$$s=7\times\frac{400}{13}+12\times\frac{270}{13}=\frac{6040}{13}.$$

二、函数与集合

在第六章中，我们已经知道，集合知识为中学教学中函

数概念的研究带来很多方便．下面我们进一步讨论这一问题．

我们知道，函数的三个基本要素是定义域、值域和对应规律．应用集合概念，函数的定义域、值域则可以说成函数的定义域集合和值域集合，而对于单值函数而言，对应规律则是由定义域集合到值域集合的一个映射．对于这一问题，我们在第六章已经举出了较多的例题，这里不再重述，下面讨论如何将函数本身与集合联系起来：

如果我们把函数$y=f(x)$中，自变量x及与之对应的函数值$f(x)$组成序偶（x，$f(x)$），则这样的序偶的全体组成了一个新的（由序偶组成的）集合：

$$F=\{(x,f(x))\ :\ x\in A\},$$

这里x取遍函数$y=f(x)$的定义域集合A中的所有元素．这样，集合F则可以看成函数$y=f(x)$的一种新的表示法．例如函数$y=\lg x$则可以表示为序偶集

$$F=\{\ (x,y):\ x\in(0,\ +\infty),\ y=\lg x\}.$$

我们知道，在平面直角坐标系内的全体点组成的集合可以表示为

$$\{(x,y):\ x\in R,\ y\in R\}.$$

它恰是实数集合R与自身的直积集合$R\times R$．这样，表示函数的集合F便可以看成直积集合$R\times R$的某一子集，即$F\subset R\times R$．

一般说来，任给直积集合$R\times R$的某一子集

$$E=\{(x,y):\ x\subset A\subseteq R,y\in B\subseteq R\},$$

都可以（广义地）把它看成一个函数关系。这里既包含单值函数，也包含多值函数．其中x所取值的全体是函数的定义域集

合，y的全体是函数的值域集合.

如果仅限于考虑单值函数，则需要对直积 $R\times R$ 的子集作某些限制. 设序偶集

$$E=\{(x,y)\}\subset R\times R,$$

满足如下条件：

(1) 对于任一$x\in A\subset R$，必存在序偶$(x,y)\in E$；

(2) 若 $(x,y_1)\in E$，$(x,y_2)\in E$，则$y_1=y_2$.

此时E便定义了一个单值函数，其中A为函数的定义域集合.

例11 把函数$y=\sin x$表示成序偶集.

〔解〕 $E=\{(x,y):\ x\in(-\infty,+\infty),\ y=\sin x\}$

或 $E=\{(x,\sin x)\ :\ x\in(-\infty,+\infty)\}$.

例12 给定序偶集

$$E=\{(x,y):\ x\cdot y=1\},$$

说明它所表示的函数，函数的定义域集合和值域集合.

〔解〕 $\because E$中的每一序偶(x,y)满足$x\cdot y=1$，故由任意$x\in R$，$(x\neq 0)$ 可确定唯一的y值

$$y=\frac{1}{x}.$$

它便是E所表示的函数，其定义域集合为

$$A=\{x:\ x\in R,\ x\neq 0\},$$

值域集合为

$$B=\{y:\ y\in R,\ y\neq 0\}.$$

中学代数中的反函数概念，在把函数看成序偶集的情况下将得到很直观的解释.即用序偶集

$$E=\{(x,y)\}\subset R\times R$$

表示函数关系时，若将E 中的每个序偶反序，则可以得到一

个新的序偶集

$$E' = \{(y,x)\} \subset R \times R.$$

它表示是E的反函数.E'的定义域集合恰好是E 的值域集合，E'的值域集合，恰好是E的定义域集合.如例1中函数$y=\sin x$可表为序偶集

$$E = \{(x,y): x \in (-\infty, +\infty), y=\sin x\}.$$

若将每一个元素反序，得

$$E' = \{(y,x): x \in (-\infty, +\infty), y=\sin x\},$$

实际上就是集合

$$\{(y,x): y \in [-1,+1], x = \mathrm{Arcsin}\, y\}.$$

这是$y=\sin x$的反函数$x=\mathrm{Arcsin}\, y$.它是一个无穷多值的函数，即对任一$y \in [-1, +1]$,

$$x = n\pi + (-1)^n \arcsin y, n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\cdots$$

且在单值函数的序偶集$E=\{(x,y)\} \subset R \times R$中，$x$与$y$的对应是一一对应时，其反函数

$$E' = \{(y,x)\} \subset R \times R$$

也是单值函数.

三、集合与几何图形

集合概念同样可以应用于平面几何、立体几何和解析几何的研究.大家知道，几何学的主要研究对象是图形，平面几何(包括平面解析几何)是研究平面图形，而立体几何（包括空间解析几何）,则研究空间图形.

实际上，平面上每个图形都可以看成一个平面点集.它是直积集合$R \times R$的一个子集；反之，平面上点的全体$R \times R$的任一子集也可以看成一个平面图形.这样一来，研究某一

平面图形实际上就是研究$R\times R$的某一具有特定性质的子集。例如

平面上到定点O的距离等于R的点的集合可表为

$$E=\{P:\ |OP|=R\}.$$

它是以点O为圆心，半径为R的一个圆。

平面$R\times R$的子集有2^c个，即平面图形共有2^c个。它组成了一个新的图形集合。我们常常抽取此集的子集进行研究，如三角形集合、四边形集合等等。

同样，空间的任一图形也是三维空间的所有点所成集合的子集。三维空间的任一子集合就是一个空间图形。这里不再详述。下面仅就点集与图形的关系举几个例子：

例13　用集合表示下列几何图形：

(1) 平面M上以定点O为圆心，半径为R的圆面；

(2) 椭圆 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$的内部（$a>b>0$）；

(3) 以坐标原点为中心，半径为R的球体；

(4) 由直线$x=\pm1$，$y=\pm1$围成的正方形及其外部。

〔解〕　(1) $E=\{P:\ P\in M,\ |OP|\leqslant R\}$；

(2) $E=\left\{(x,y):\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}<1\right\}$；

(3) $E=\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2\leqslant R\}$；

(4) $E=\{(x,y):\ |x|\geqslant1,\ |y|\geqslant1\}$.

例14　指出下列集合所表示的几何图形：

(1) $A=\{P:\ PM^2+PN^2=MN^2,\ P、M、N\in$平面$S\}$；

(2) $B=\{(x,y):\ y=3x\}$；

(3) $C=\{(x,y):\ |x|<2\}$;

(4) $D=\{(x,y):\ x>0,\ y>0, x+y<1\}$;

(5) $E=\left\{(x,y,z):\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}+\dfrac{z^2}{c^2}\leqslant 1\right\}$;

〔解〕 (1) 集合A表示平面S内以线段MN为直径的圆周(图10-3(1));

(2) 集合B表示平面直角坐标系xOy内的直线$y=3x$(图10-3(2));

(3) 集合C表示平面xOy内的一个"带形"区域内部(图10-3(3));

(4) 集合D表示一个直角等腰三角形的内部(图10-4(4));

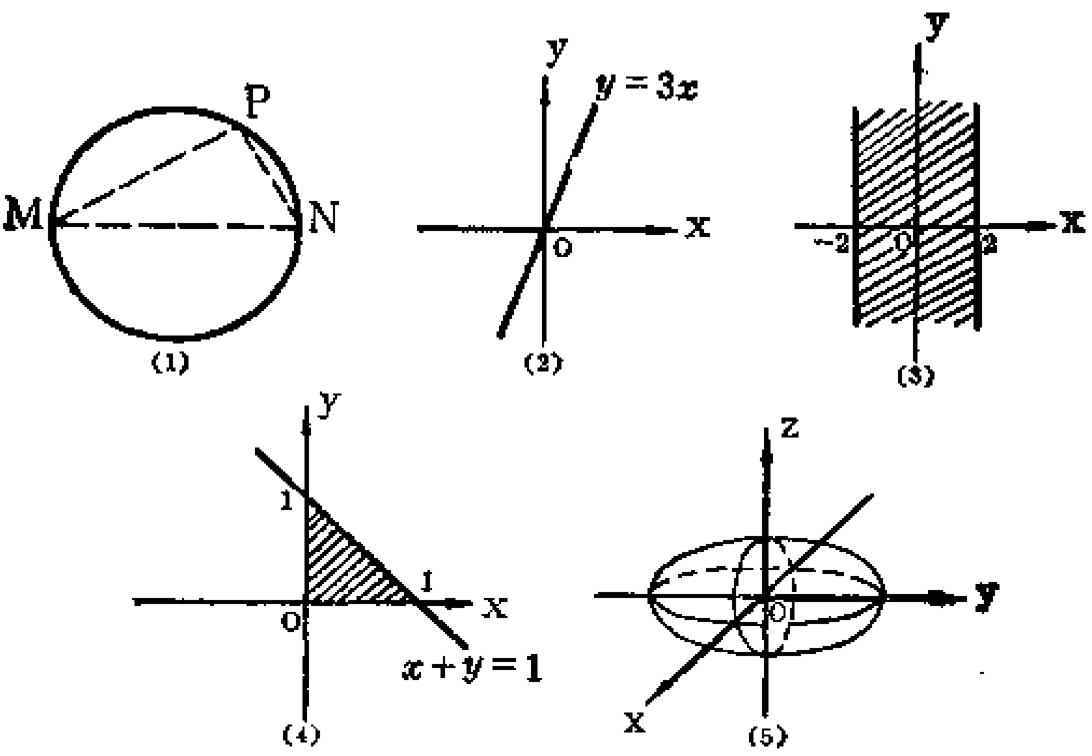


图10-3

(5) 集合E表示空间直角坐标系$oxyz$内的椭球体(椭球面及其内部)(图10-3(5)).

在第二节，我们已经把函数与集合统一起来，在本节，我们又把图形与集合统一起来；从而，广义地说，函数、图形(函数的图形)集合三者是能够统为一体的东西.

我们知道，研究具有某种特定性质的一类图形，即研究某个以图形为元素的集合.如前所述，每个图形又可以看成(平面或空间中)点的集合，因此，我们研究的一类图形实质上是平面或空间点集的部分子集(满足某一特定性质)所成的集合.请看下面的例子：

例15　在平面直角坐标系内，以直线$y=x$上每一点为圆心，以1为半径，可以作出一系列的圆(图10-4)试将这些圆用集合表示.

〔解〕　对于任意固定的实数k，点(k,k)在直线$y=x$上.方程

$$(x-k)^2+(y-k)^2=1$$

表示以点(k,k)为圆心，半径为1的圆.该圆可用集合表为

$$E_k=\{(x,y):(x-k)^2+(y-k)^2=1\}.$$

当k取尽$(-\infty,+\infty)$内所有数值时，我们得到一系列的圆(圆系).它们又可用集合表为

$$M=\{E_k:-\infty<k<+\infty\}.$$

例16　给定以点集为元素的集合

$$N=\{E_\theta:\ 0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$$

其中　$E_\theta=\{(x,y):(x-5\cos\theta)^2+(y-3\sin\theta)^2=1\}$

试说明N表示怎样的一些图形?

〔解〕　对于任意固定的θ值$(0\leqslant\theta\leqslant2\pi)$

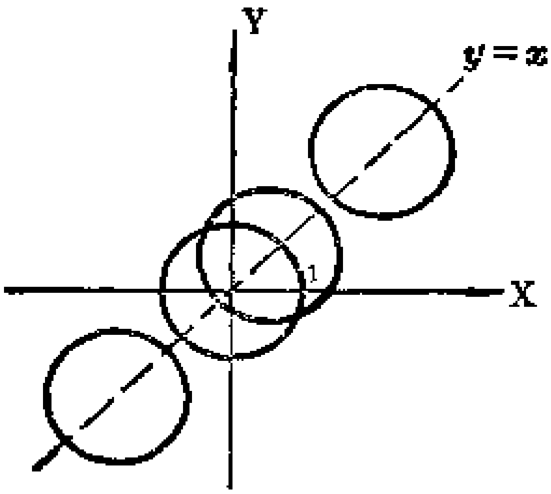


图10-4

$$E_\theta = \{(x,y):\ (x-5\cos\theta)^2+(y-3\sin\theta)^2=1\}$$

表示以（$5\cos\theta$，$3\sin\theta$）为圆心，半径为1的圆。而

$$N = \{E_\theta:\ 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi\}$$

是这些圆组成的集合。又因为各圆圆心的坐标满足

$$x=5\cos\theta,\quad y=3\sin\theta;\quad 0\leqslant\theta\leqslant 2\pi.$$

所以，这些圆的圆心又表示一个椭圆：

$$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1.$$

即集合N表示圆心在椭圆$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{9}=1$上，半径为1的各个圆（图10－5）。

我们已经知道了用集合表示图形的很多方便之处。然而在中学平面几何及解析几何中，用来表示图形（一般是平面或空间曲线）的却常常是点的轨迹概念。所谓轨迹，一般理解为平面或空间中的点，按一定规律运动所留下的痕迹。实际上，点的轨迹是一种特殊的点集合。一般只用它来表示平面或空间中的曲线，而不能表示平面或曲面，也不用来表

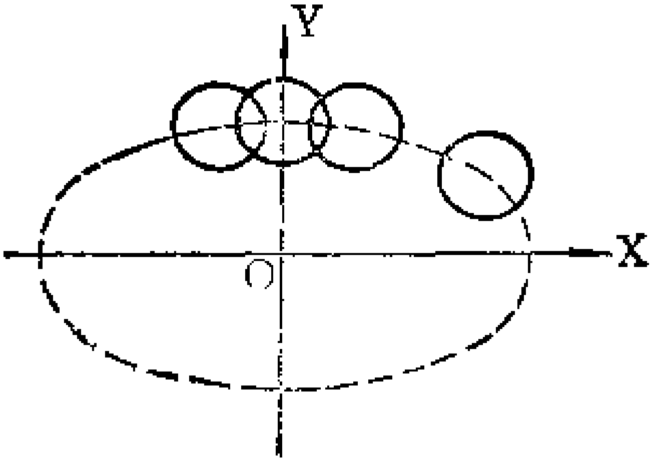


图10-5

示平面或空间的区域。因此轨迹概念比集合概念范围窄得多。凡能用轨迹定义的曲线都可用集合的语言来叙述。例如：

双曲线的定义：到两定点的距离之差的绝对值等于常数的点的轨迹（也可以说成点的集合）称为双曲线。

摆线的定义：平面内一圆沿定直线滚动，圆上一定点的运动轨迹（也可说成圆上一定点运动所经过的点所成之集合）称为摆线。

但是平面的某一部分（如圆面），空间的某一曲面（如球面）或某一几何体（如球体）却不便用轨迹来定义。因为轨迹作为点运动的痕迹，用以说明面或体时，已经失去了它"形象化"的作用。我们只能应用集合的概念才能给面或体下定义，这一点，我们在例1和例2中已经介绍过了。

这里还应指出，集合概念显然比轨迹概念更有一般性，而且可以代替轨迹概念成为讨论平面或空间图形的工具，但是，由于"轨迹"一词具有形象化与直观化的优点，在讨论平面或空间曲线时，我们仍然使用它。

四、初等概率中集合观点的应用

概率论是数学的一个重要分支，它研究的对象是随机事件的数量规律性．近代概率论中用集合的观点解释事件及其运算规律，使概率中的事件概念与集合概念统一起来．下面我们仅就事件与集合的关系作一简单介绍：

作一可以重复的试验E（我们称之为随机试验），它有各种可能的结果，我们把每一个可能的结果称为一个基本事件，记为ω，所有可能的结果（即基本事件）组成的集合$\Omega=\{\omega\}$称为基本事件空间．例如在标有1，2，3，4四个号码的杯子中任取1个（这是一个可以重复的试验），取到第i个杯子记为ω_i（$i=1.2.3.4$）是一个基本事件．这样基本事件空间为$\Omega=\{\omega_1,\ \omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4\}$．

以基本事件空间Ω为参照集，它的任一子集都可以看成一个事件．如上例中我们把取到杯子的号码是奇数，记为事件A．它是Ω的子集$A=\{\omega_1,\ \omega_3\}$．此例中，$\Omega$共有$2^4$个子集，即此实验共有$2^4$个不同的事件．一般地，空集和$\Omega$本身都是$\Omega$的子集，它们分别表示不可能事件和必然事件．而$\Omega$的任一非空真子集则表示一个随机事件．

例17　在1—9九个数码中任意抽取一个数码是一随机试验，试写出它的基本事件空间及表示下列事件的子集：

（1）事件A——抽取的数码是偶数；

（2）事件B——抽取的数码是3的倍数；

（3）事件C——抽取的数码不小于8．

〔解〕　设抽得第i个数码的基本事件为ω_i，（$i=1,2,\cdots,9$）则基本事件空间

$$\Omega=\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6, \omega_7, \omega_8, \omega_9\};$$
$$A=\{\omega_2, \omega_4, \omega_6, \omega_8\},$$
$$B=\{\omega_3, \omega_6, \omega_9\},$$
$$C=\{\omega_8, \omega_9\}.$$

例18 在例17的基本事件空间中，试指出子集 $E=\{\omega_1, \omega_2\}$；$F=\{\omega_1, \omega_3, \omega_5, \omega_7, \omega_9\}$所表示的事件。

〔解〕 事件E——抽取的数码不大于2；

事件F——抽取的数码是奇数。

把事件作为基本事件空间的子集，则可以使事件间的运算关系及其它关系归结为集合间的关系，现列表如下：

符 号	事件A、B	集合A、B
$A\subset B$	A是B的特款（即当事件A发生时，事件B一定会发生）。	A是B的子集
$A+B$	事件A与B的和（事件A、B之中至少有一个发生）	集A与B的并（$A\cup B$）
$A\cap B$	事件A与B的交（事件A、B同时发生）	集合A与B的交
$A-B$	事件A与B的差（事件A发生而B不发生）	集合A与B之差
$A\cap B=\phi$ $A+B=\Omega$	事件A与B互逆（事件A、B至少发生其一，但不同时发生	集合A与B互为补集

由此可知，事件的运算均可归结为集合的运算进行，它满足集合运算的一切相应运算规律。例如在例1中，若给定事件M为抽取的数码为不小于8的偶数。则M为事件A、C同时发生组成的新事件，即$M=A\cap C$。应用集合的运算可得

$$M = A\cap C = \{\omega_2,\ \omega_4,\ \omega_6,\ \omega_8\}\cap\{\omega_3,\ \omega_9\} = \{\omega_8\}.$$

若给定事件N为抽取数码是2或3的倍数．则N为事件A与B至少有一个发生组成的新事件，即$N = A\cup B$．应用集合的运算可得

$$N = A\cup B = \{\omega_2,\ \omega_4,\ \omega_6,\ \omega_8\}\cup\{\omega_3,\ \omega_6,\ \omega_9\}$$
$$= \{\omega_2,\ \omega_3,\ \omega_4,\ \omega_6,\ \omega_8,\ \omega_9\}.$$

中学数学课中所涉及的概率主要是古典型概率．所谓古典型是指随机试验E具有如下两条性质：

（1）基本事件空间中只有有限个不同的基本事件（Ω为有限集）；

（2）一切基本事件的发生都是等可能的．

我们以上所举的例子都属于古典型．对古典型随机试验E，设$\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \cdots,\ \omega_n\}$，且设事件$A$中含有$k$个不同的基本事件（$0\leqslant k\leqslant n$），则可定义

$$P(A) = \frac{k}{n}$$

为事件A的概率．如例1中

$$P(A) = \frac{4}{9},P(B) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3},P(C) = \frac{2}{9}.$$

且有下面结果：

不可能事件ϕ的概率为0，$P(\phi) = 0$，

必然事件Ω的概率为1，$P(\Omega) = 1$．

例19　已知在50个同学中有30个男生和20个女生．要选举两名同学担任值日生，问（1）选出的都是男生的概率，（2）选出的都是女生的概率，（3）选出男女生各一名的

概率.

〔解〕 由50名同学中选两名为一随机试验，共可能有C_{50}^2种不同的结果，即基本事件空间Ω中含有$C_{50}^2=1225$个基本事件.

（1）事件A：选出的都是男生，有C_{30}^2种不同的结果，即Ω的子集A含有$C_{30}^2=435$个基本事件.

$$\therefore P(A)=\frac{435}{1225}=\frac{87}{245},$$

同理可知

（2）事件B：选出都是女生的概率为

$$P(B)=\frac{C_{20}^2}{C_{50}^2}=\frac{190}{1225}=\frac{38}{245};$$

（3）事件C：选出的是一个男生一个女生的概率为

$$P(C)=\frac{C_{30}^1\cdot C_{20}^1}{C_{50}^2}=\frac{30\times 20}{1225}=\frac{24}{49}.$$

五、逻辑代数与集合

我们知道，逻辑代数是研究命题之间的逻辑关系及其运算的.一个正确的命题（真命题）我们用“1”表示，一个错误的命题，我们用“0”表示.这样“1”和“0”便成了逻辑代数中的两个对立的符号.它们没有任何数字意义，而仅仅表示命题的真伪.例如$A=1$表示命题A是真的（正确的），$B=0$表示命题B是假的（错的）.

逻辑代数中介绍了命题间的“或”（逻辑加）、“与”（逻辑乘）、“非”（逻辑非）三种主要运算关系.即

逻辑加运算：

$$A+B=\begin{cases}1, & \text{当}A\text{、}B\text{中至少有一个是 1 时,}\\0, & \text{当}A\text{、}B\text{均为 0 时;}\end{cases}$$

逻辑乘运算：

$$A\cdot B=\begin{cases}1, & \text{当}A\text{、}B\text{均为 1 时,}\\0, & \text{当}A\text{、}B\text{至少有一个为 0 时;}\end{cases}$$

逻辑非运算：

$$\overline{1}=0, \quad \overline{0}=1.$$

在第四节中，我们介绍了事件与集合的关系．而从事件的角度去理解，一个正确的命题可以看成必然事件，错误的命题看成一个不可能事件，它们分别对应于全空间Ω与空集ϕ．这样一来，逻辑代数中的两个符号 1 和 0 则可以看成Ω与ϕ的另一符号．对于集合Ω与ϕ的运算同样有（A、B表示Ω或ϕ）

集合的并（加法）：

$$A\cup B=\begin{cases}\Omega, & \text{当}A\text{、}B\text{之中至少有 1 个为}\Omega\text{时,}\\\phi, & \text{当}A\text{、}B\text{均为}\phi\text{时;}\end{cases}$$

集合的交（乘法）：

$$A\cap B=\begin{cases}\Omega, & \text{当}A\text{、}B\text{均为}\Omega\text{时,}\\\phi, & \text{当}A\text{、}B\text{中至少有 1 个是}\phi\text{时.}\end{cases}$$

集合的互补： $\overline{\Omega}=\phi$， $\overline{\phi}=\Omega$.

这样一来，任何一个逻辑运算式都可以看成集合的运算式．它必然满足集合运算的运算定律．例如，逻辑代数中的

1． 交换律：$A+B=B+A$，$AB=BA$.

2． 结合律：$A+(B+C)=(A+B)+C$，

$A(BC)=(A\cdot B)C$.

3． 分配律：$A+BC=(A+B)(A+C)$，

$A(B+C)=AB+AC$.

4. 对合律：$\overline{\overline{A}}=A$.

5. 等幂律：$A+A=A$，$A\cdot A=A$.

等均与集合运算的相应公式完全相同．而且逻辑运算中同样有

6. 吸收律：$A+AB=A$，$A(A+B)=A$.

7. 摩根律：$\overline{A+B}=\overline{A}\cdot\overline{B}$，　$\overline{A\cdot B}=\overline{A}+\overline{B}$.

逻辑代数中的下列性质

8. $A+\overline{A}=1$，　$A\cdot\overline{A}=0$，

9. $A+0=A$，　$A\cdot 1=A$，

10. $A+1=1$，　$A\cdot 0=0$.

分别对应于集合运算中的下列公式

8′. $A\cup\overline{A}=\Omega$，　$A\cap\overline{A}=\phi$，

9′. $A\cup\phi=A$，　$A\cap\Omega=A$，

10′. $A\cup\Omega=\Omega$，　$A\cap\phi=\phi$.

这里Ω是参照集．（表示全空间）

我们只要熟记有关集合的运算规律，则可以在逻辑式的证明与化简中完全应用集合的观点．读者可以选择中学教科书中逻辑式的有关习题进行练习．

习　题

96.求下列方程的解集合：

（1）$3x=27$；　（2）$x^2=25$；

（3）$|x|=x$；　（4）$x^2=-8$；

（5）$|x|=9$；　（6）$|x|=0$；

（7）$|x|=-7$；　（8）$|x|=1.5$；

（9）$5x+3(x-1)=6x+11$；　（10）$10.8:1.2=x:13.6$；

(11) $6\frac{1}{2}:\ 3\frac{1}{4}=y:2\frac{1}{3}$；　　(12) $\frac{5}{7}:1\frac{1}{14}=\frac{3}{8}:a$。

97.求下列方程的解集合：

(1) $\sqrt{x+5}=\sqrt{x}+\sqrt{x-3}$；

(2) $\dfrac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}=2-x$；

(3) $x+\dfrac{1}{x-1}=a+\dfrac{1}{a-1}$；($a$为常数且$a\neq1$)

(4) $\dfrac{a-x}{b+x}=5-\dfrac{4(b+x)}{a-x}$；　($a$、$b$为常数且$a+b\neq0$)

(5) $x^3+7x^2-21x-27=0$；

(6) $\dfrac{1}{2-x}-1=\dfrac{1}{x-2}+\dfrac{6-x}{3x^2-12}$；

(7) $m+\dfrac{2}{m}=\dfrac{m^2}{m-1}-2$；

(8) $\dfrac{3}{1+3x}\left(x-\dfrac{x}{1+x}\right)+\dfrac{x}{1+x}\left(1+\dfrac{1}{1+3x}\right)=1$；

(9) $\sqrt{2x+3}+\sqrt{3x+2}-\sqrt{2x+5}=\sqrt{3x}$；

(10) $\dfrac{1}{1-\sqrt{1-x^2}}+\dfrac{1}{1+\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{\sqrt{3}}{x^2}$；

(11) $\dfrac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}+\dfrac{1}{x-\sqrt{1+x^2}}+2=0$；

(12) $\sqrt[3]{x+1}+\sqrt[3]{x-1}=\sqrt[3]{5x}$

98.求下列方程的解集合：

(1) $\sin\left(2x-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$；　　(2) $\cos2x=-\dfrac{1}{2}$；

(3) $\mathrm{tg}(x+15^\circ)+1=0$；　　(4) $\mathrm{ctg}\left(\dfrac{8\pi}{3}+\dfrac{\pi}{6}\right)=1$；

99.求下列方程的解集合：

(1) $3[x]+4=10$；　　(2) $\frac{12}{[x]}+4=0$；

(3) $\frac{1}{2}-\frac{11}{[x]}=0$；　　(4) $3[x]=7-4[x]$；

(5) $0x=0$；　　(6) $0x=-4$。

100．求下列不等式的解集合：

(1) $|x|\leqslant 2$；　　(2) $|x|<5$；

(3) $|x|\geqslant 3$；　　(4) $|x|>10$；

101．从集合$M=\{-4,-3,-1,1,3,4\}$中找出一个子集，其中每一个数都是下列方程的根：

(1) $x^3-3x^2-x+3=0$；　　(2) $x^3+2x^2-11x=12$。

102．求下列不等式组的解集合：

(1) $\begin{cases}4x-8<x+1,\\3x+4<5x+8;\end{cases}$　　(2) $\begin{cases}\frac{2x}{3}-1\leqslant\frac{x-1}{2},\\7x-11<9x-4;\end{cases}$

(3) $\begin{cases}7-3x<2-5x,\\2x+11>3x+15;\end{cases}$　　(4) $2x+1\leqslant x+5<3x+4$；

(5) $\begin{cases}2x+3>x+2,\\3x>4x+2;\end{cases}$　　(6) $(x-1)(x+1)>1$；

(7) $\frac{x-5}{x^2-2x-3}<0$。

103．求下列方程组的解集合：

(1) $\begin{cases}2x+y=13,\\7x+9y=81;\end{cases}$　　(2) $11-x+y=3x-4y+17=2x+5y$；

(3) $\begin{cases}x^2-2xy-3y^2+2x-3y+14=0,\\x-3y-2=0;\end{cases}$

(4) $\begin{cases}\frac{4}{x-1}-\frac{5}{y+1}=1,\\\frac{3}{x+3}=\frac{2}{y};\end{cases}$　　(5) $\begin{cases}\sqrt{x}+\sqrt{y}=13,\\\sqrt{xy}-40=0;\end{cases}$

（6）$\begin{cases} x^2+y^2=5, \\ 2x^2-3xy-2y^2=0; \end{cases}$

（7）$\begin{cases} x^2+2xy+y^2=9, \\ (x-y)^2-3(x-y)+2=0. \end{cases}$

104.解下列不等式组，并作图.

（1）$\begin{cases} x+2y>4, \\ x-y+1>0; \end{cases}$　　（2）$\begin{cases} -2<2x-3y, \\ 2x-3y<4; \end{cases}$

（3）$\begin{cases} y\leqslant x+1, \\ x-2y\leqslant 0, \\ 2x+y\leqslant 7. \end{cases}$

105.用图形表示出下列不等式组的解集合，并用列举法写出它的整数解集合E

$$\begin{cases} 1\leqslant x\leqslant 6 & \cdots(1) \\ 1\leqslant y\leqslant 6 & \cdots(2) \\ 1\leqslant 9-(x+y)\leqslant 6 & \cdots(3) \end{cases}$$

106.已知$f(x)=x^2-6x+5$.问满足$f(x)+f(y)\leqslant 0$和$f(x)-f(y)\geqslant 0$的点(x, y)在平面上的什么范围？并作图.

107.用式$y=|x|-x$给出函数的定义域是$X=\{-30, -14, -8.5, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 8, 45\}$.求这个函数的值域.

108.求下列式子给出的函数的值域：

（1）$y=|x|-x$，其中$x\geqslant 0$；（2）$y=|x|-x$，其中$x<0$.

109.指出下列各式给出的函数的定义域：

（1）$y=\dfrac{7}{x^2-4}$；　　（2）$y=\dfrac{8}{x^2+4}$；

（3）$y=\dfrac{1}{|x|-x}$；　　（4）$y=\dfrac{1}{|x|+x}$.

110. 用下面的叙述定义一个函数："集合X中的每一个数和它的相反数对应"求这个函数的值域：

（1）$X=\{-7,-6,-5,-4,-3,-2\}$；

（2）$X=[-8,-3]$；　　　　（3）$X=[0,6]$；

（4）$x=[-6,6]$；　　　　（5）$X=(-\infty,+\infty)$。

111. 把下列函数表示成平面内的序偶集：

（1）$y=\lg x,\quad 0<x<+\infty$；

（2）$y=x^{\frac{2}{3}},\quad -\infty<x<+\infty$。

112. 求出下列序偶集所表示的函数：

（1）$A=\{(x,y):\quad 2x-3y=5\}$；

（2）$B=\{(x,y):\quad \frac{x^2}{9}-y^2=1\}$；

（3）$C=\{(x,y):\quad x=2\cos\theta,y=4\sin\theta,0\leqslant\theta\leqslant2\pi\}$；

（4）$D=\{(x,y):\quad x=2t,y=t+2,-\infty<t<+\infty\}$。

113. 用集合表示下列几何图形：

（1）以坐标原点为圆心，半径为3的圆周；

（2）抛物线$y=ax^2$的上部（$a>0$）；

（3）由直线$x=1$，$x=2$，$y=\pm3$围成的矩形及其内部；

（4）以点o为中心，半径为1、2的圆环及其内部；

（5）以$o(0,0)$，$A(3,0)$，$B(0,3)$为顶点的三角形及其内部。

114. 作出下列集合所表示的几何图形：

（1）$A=\{(x,y):\quad x^2=2y\}$；

（2）$B=\{(x,y):\quad |x|\leqslant|y|\}$；

（3）$C=\{(x,y):\quad x>0,x+y<1,x-y<1\}$；

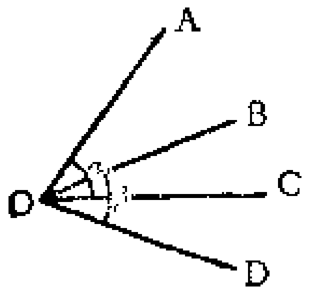
（4）$D=\{(x,y):\quad |x|>2,|y|<1\}$；

（5）$E=\{(x,y,z):x^2+y^2+z^2<4\}$。

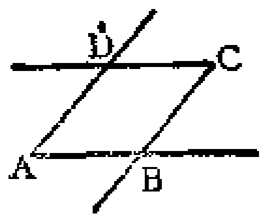
115. 从同一端点出发的两条射线为边界的平面图形叫做角。若把角看成点的集合，求

（1）图（1）中$\alpha\cup\beta$及$\alpha\cap\beta$；

（2）图（2）中$\angle A$和$\angle C$的交集。



（1）



（2）

116.把每一直线看成一个平面点集，试用集合表示两直线AB、CD的下列关系：

（1）AB与CD相交于点O；

（2）$AB\mathbin{/\mkern-5mu/}CD$；　　　　（3）$AB$与$CD$重合。

117.一条直线与x轴、y轴交于A、B两点，$\triangle OAB$的面积为3.试用集合表示满足以上条件的所有直线（直线系）。

118.给定集合

$N=\{E_b : b\neq 0\}$；

其中　　$E_b=\{(x,y):\quad \dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\}$

试说明N表示怎样一些图形？

119.试用“轨迹”一语给出下列图形的定义：

（1）定线段AB的垂直平分线；

（2）定角α的角平分线；

（3）平面上的抛物线；

（4）空间阿基米德螺旋线。

120.试用“集合”一词给出下列图形和定义：

（1）空间线段AB的垂直平分面；

（2）二面角$M—AB—N$的分角面；

（3）空间旋转抛物面$z=x^2+y^2$；

（4）以点A为球心，半径为R的实心球；

（5）满足$x^2+y^2\leqslant 1$，$|z|\leqslant 1$的柱体。

121.第119题中的图形可否用集合定义？第120题中的图形可否用轨迹定义？为什么？

122.有甲、乙、丙三个硬币，将它们掷一次其结果可用三元有序组记录，例如用（正，反，反）记甲出正面，乙出反面，丙出反面的情况，用（反，正，正）记甲出反面，乙出正面，丙出正面的情况。令此随机试验为E，写出E的基本事件空间Ω。

123.在第10题中找出表示下列事件的集合并求出此事件的概率

（1）甲出正面——事件A；

（2）甲、乙同时出反面——事件B，

（3）甲、乙、丙都出正面——事件C，

124.在第122题中指出Ω的下列子集所表示的事件；

（1）$A=\{$(正，反，反)，(正，正，反)$\}$；

（2）$B=\{(0,1,0);(1,0,1),(0,0,0),(1,1,1)\}$

（3）$C=\{(1,0,0),(0,1,0),(1,1,0),(0,0,0\}$。

125.由1，2，3，4，5，6，7，8，9中任意取出两个数码，构成一个随机试验。

（1）求此随机试验和基本事件空间Ω中含有多少个基本事件？

（2）事件A为取出的两数之和大于13，事件B为取出的两数之和是大于10的偶数。试用集合表示A，B，$A\cup B$，$A\cap B$。并求出这四个事件的概率。

126.由七个男孩和五个女孩组成的小队中，选取三人担任队长。

（1）共有多少种可能的选法？

（2）队长全是男孩的可能选法有多少种其概率是多少？

（3）队长中有两个男孩的选法有多少种其概率是多少？

127.用集合论的运算律推证下列逻辑式：

（1） $A(\overline{A}+B)+BC=B(A+C)$；

（2） $A(B+\overline{A})+B(A+\overline{B})=AB$；

（3） $AC+AD+BC+BD=(A+B)(C+D)$；

（4） $A+BCD=(A+B)(A+C)(A+D)$；

（5） $(A+C)(B+C)(C+C)=C$；

（6） $A+B+AC+BD=A+B$；

（7） $\overline{A+B}+\overline{A\,B}=\overline{A}+\overline{B}$；

（8） $\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{C}\,\overline{A}=\overline{ABC}$；

（9） $\overline{A+\overline{B}}+\overline{\overline{A}+B}=D$；

（10） $\overline{\overline{A}+\overline{\overline{A}+\overline{B}}}=A$。

128．化简下列逻辑式：

（1） $AB(A+B)$；　　（2） $A(A+B)+\overline{A}(\overline{A}+C)$；

（3） $\overline{\overline{A}\,\overline{B}+\overline{B}\,\overline{C}+\overline{C}\,\overline{A}}$；

（4） $A\,\overline{B+C}(\overline{A}+D)(B+C+\overline{D})$；

（5） $A+B+(\overline{A}+\overline{B})CD$；（6）$\overline{A+B}+AC+\overline{B+C}+\overline{B}\,\overline{C}D$。

习 题 答 案

1. （1）—（7）均能组成集合，

（8）、（9）不是集合，因为范围和对象不确定．

2. （1）3属于A；（2）4属于A；（3）8不属于A．

3. （1）$5\in A$；（2）$a\in M$；（3）$6\overline{\in} A$；（4）$b\overline{\in} M$．

4. （1）$\{6, 7, 8, 9\}$；（2）$\{1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19\}$；

（3）$\{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$；

（4）$\{1, 2\}$；

（5）$\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$；

（6）$\{1, 2, 3\}$；

（7）$\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29\}$；

（8）$\{2, 3, 5, 7, 11\}$．

5. （1）$\{x: x\leqslant 9, x\in N\}$；（2）$\{2x: x\leqslant 5, x\in N\}$

（3）{全体正整数}；（4）$\{x: x<3\}$．

6. （1）、（3）、（4）正确，（2）不正确．

7. 空集不能作为参照集，因为不符合参照集的定义；单元素集可以作为它本身和空集参照集．

8. （1）$B\subset A$；（2）$Q\subset P$；（3）$M\subset G$；

（4）E与F不存在相等与包含的关系；（5）$C=D$．

9. 当$M=N$时，M可以说成是N的子集，即$M\subseteq N$；但M不能是N的真子集．

10. $B\subset A$．

11. $B\subset A$．

13. $2^8=256$.

14. $T(B)=\{\Phi\ \{a\},\{b\},\{c\},\{d\},\{a,b\},\{a,c\},\{a,d\},\{b,c\},\{b,d\},\{c,d\},\{a,b,c\},\{a,b,d\},\{b,c,d\}\ \{a,c,d\},\{a,b,c,d\}\}$

15. （1）$q\Rightarrow p$.其逆蕴涵不正确；

（2）$q\Rightarrow p$. 其逆蕴涵不正确；

（3）$q\Rightarrow p$.其逆蕴涵不正确； （4）$f\Rightarrow e$.其逆蕴涵不正确.

16. $r\Rightarrow p$，$m\Rightarrow q$.

17. （1）否；（2）$r\Rightarrow p$，$r\Rightarrow q$.

18. （1）$\forall P\ (P\notin l)$，$\exists l'$使$P\in l'$且$l'\parallel l$；

（2）$\forall M,\forall l,\exists l'$使$M\in l'$且$l'\perp l$；

（3）$\forall\triangle ABC$，均有$\angle A+\angle B+\angle C=180°$.

19. （1）一切x都具有性质m.（或凡具有性质m的x）；

（2）（至少）存在一个具有性质n的x；

（3）一切x都具有性质p或q；

（4）凡x都具有性质p或不具有性质q；

（5）（至少）存在一个具有性质p或q的x；

（6）（至少）存在一个具有性质p或不具有性质q的x；

（7）一切x都具有性质p和q；

（8）（至少）存在一个既不具有性质p又不具有性质q的x.

20. （1）$A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$，$B\cap A=\Phi$，$A-B=\{a,c,d\}$；

（2）$A\cup B=\{a,c,e\}$，$B\cap A=\{a,c,e\}$，$A-B=\Phi$；

（3）$A\cup B=\{b,c,d\}$，$B\cap A=\{b,d\}$，$A-B=\{c\}$；

（4）$A\cup B=\{a,b,c\}$，$B\cap A=\{a,c\}$，$A-B=\Phi$；

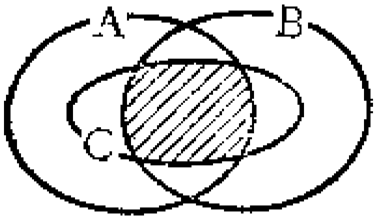
（5）$A\cup B=\{b,c,d,e,f\}$，$B\cap A=\{b\}$，$A-B=\{d,f\}$.

21. （1）$A\cap B=\{b,c\}$，$B\cap C=\{c,d\}$，$A\cap C=\{c\}$；

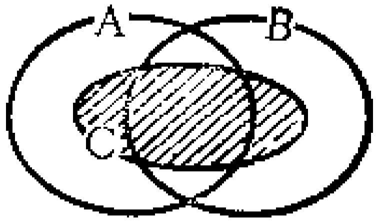
（2）$A\cap B\cap C=\{c\}$，$(A\cap B)\cap(C\cap D)=\Phi$，

$(A\cup B)\cap(C\cap D)=\{d\}$.

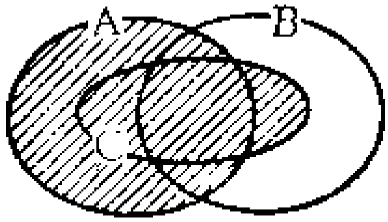
22. (1)



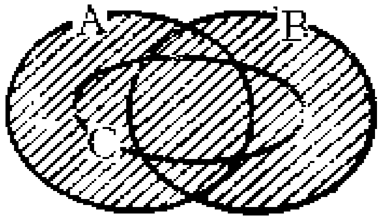
(2)



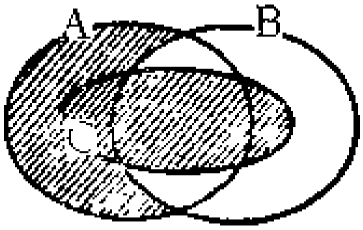
(3)



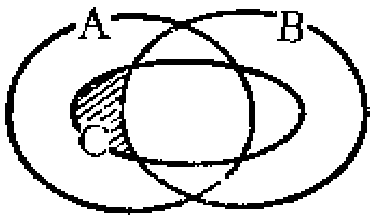
(4)



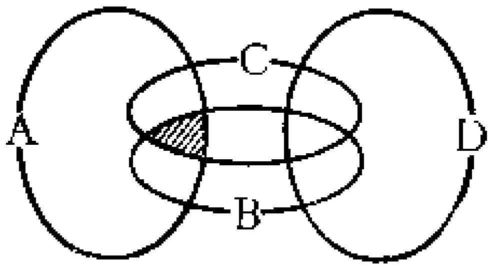
(5)



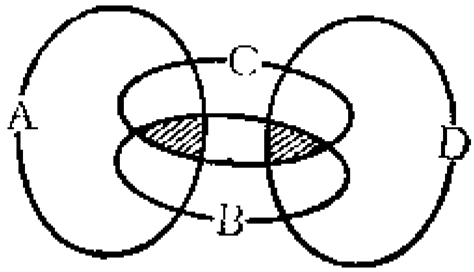
(6)



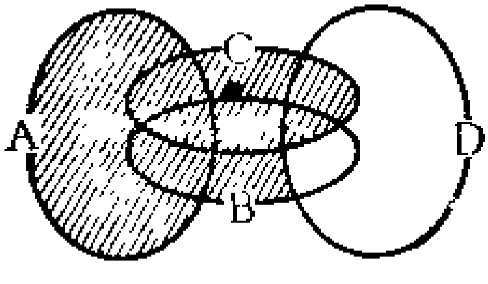
23. (1)



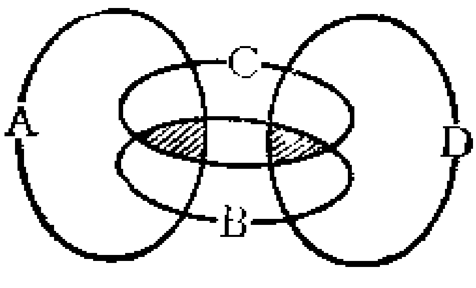
(2)



(3)



(4)



24. $\overline{A}=\{2,3\}$，$\overline{B}=\{1,3,5\}$，$A\cap B=\{4,6\}$，

$A\cup B=\{1, 2, 4, 5, 6\}$，

$A\cap\overline{B}=\{1,5\}$，$\overline{A}\cap B=\{2\}$，

$\overline{A}\cup B=\{2, 3, 4, 6\}$。$A\cup\overline{B}=\{1, 3, 4, 5, 6\}$，

$\overline{A}\cap\overline{B}=\{3\}$，$\overline{A}\cup\overline{B}=\{1, 2, 3, 5\}$.

25. $A\cap B=\phi$，$\overline{A}\cap B=\{2, 4, 6, 8\}$，

$A\cap\overline{B}=\{1, 3, 5, 7, 9, 11\}$，$\overline{A}\cap\overline{B}=\{10, 12\}$，

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11\}$，

$\overline{A}\cup B=\{2, 4, 6, 8, 10, 12\}$，

$A\cup\overline{B}=\{1, 3, 5, 7, 9, 10, 11, 12\}$，

$\overline{A}\cup\overline{B}=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$.

26. （1）$A-\overline{A}==\{a,c,d\}$，$B-\overline{B}=\{b,c,f\}$；

（2）$\overline{(A\cap B)}=\{a,b,d,e,f\}$，$\overline{(A\cup B)}=\{e\}$；

（3）$\overline{(A\cap B)}\cup\overline{A}=\{a,b,c,d,e,f\}$；

（4）$\overline{(\overline{A}\cap\overline{B})}=\{a,b,c,d,f\}$，$\overline{(\overline{A}\cup\overline{B})}=\{c\}$；

（5）$(A\cap B)\cup(\overline{A}\cap\overline{B})=\{c,e\}$.

27. $A-\overline{A}=\{1, 2, 4\}$，$B-\overline{B}=\{2, 4, 5, 6\}$，

$C-\overline{C}=\{1, 2, 4, 5\}$；$\alpha=\{1, 2, 4, 5, 6\}$；

$\beta=\{1\}$；$\gamma=\{5, 6\}$；$\delta=\{3\}$；$\varepsilon=\phi$.

29. 公因数集合$A=\{2, 4\}$，最大公因数是4；

公倍数集合$B=\{84, 84\times2, 84\times3, 84\times4, \cdots\}$，最小公倍数是84.

30. $A\cap B=\{2, 3, 5\}$，

$A\cup B=\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$，

$A-B=\{1, 4, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$，$B-A=\phi$.

〔此题若注意到$A\supset B$，则$A\cap B=B$，$A\cup B=A$，$B-A=\phi$〕

31. $A\cap B=\{0\}$，$A\cup B=(-\infty, +\infty)$，

$A-B=\{x: x>0\}$，$B-A=\{x: x<0\}$.

32. $\overline{A}=\{x: x$为非正实数$\}=\{x: x$为负实数或零$\}$，
$\overline{(\overline{A})}=\{x: x$为正实数$\}$，$A\cap\overline{A}=\Phi$，
$A\cup\overline{A}=S$，$\overline{S}=\Phi$，$\overline{\Phi}=S$.

33. $A\cap B=\{x: 0<x\leqslant 2\}$，$A\cup B=\{x: x\geqslant -3\}$，
$A-B=\{x: -3\leqslant x\leqslant 0\}$，$B-A=\{x: x>2\}$.

34. $A\cup B=B$，$A\cap B=A$.

35、36. 提示：用与定理4完全相同的方法，即从定义出发，用元素的所属关系来证.

37. （1）$\bigcup_{K=1}^{n} A_K=\left\{0, \frac{1}{2^{n-1}}, \frac{2}{2^{n-1}}, \frac{3}{2^{K-1}}, \cdots, \frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, 1\right\}$；$\bigcap_{K=1}^{n} A_K=\{0, 1\}$；

（2）$\bigcup_{K=1}^{\infty} A_K=\{x: x\in[0,1]$，$x$为有理数$\}$，

$\bigcap_{K=1}^{\infty} A_K=\{0, 1\}$.

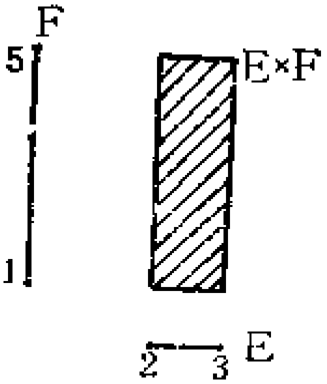
38. 与定理4证法相同.

39. $\bigcap_{K=1}^{\infty} A_K=\{0\}$，$\bigcup_{K=1}^{\infty} A_K=\{x: x\in(-1,1)$，$x$为有理数$\}$.

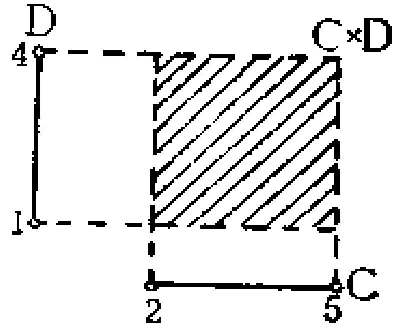
40. $A\times A=\{(1,1), (1,3), (1,5), (1,7), (3,1), (3,3), (3,5), (3,7), (5,1), (5,3), (5,5), (5,7), (7,1), (7,3), (7,5), (7,7)\}$

41. $A\times B=\{(1,2), (1,4), (1,6), (3,2), (3,4), (3,6), (4,2), (4,4), (4,6), (5,2), (5,4), (5,6)\}$，
$B\times A=\{(2,1), (4,1), (6,1), (2,3), (4,3), (6,3), (2,4), (4,4), (6,4), (2,5), (4,5), (6,5)\}$.

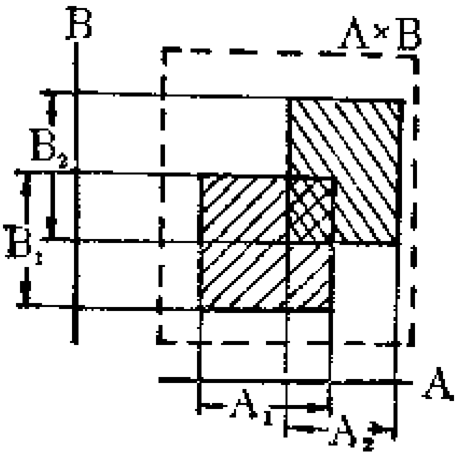
42.



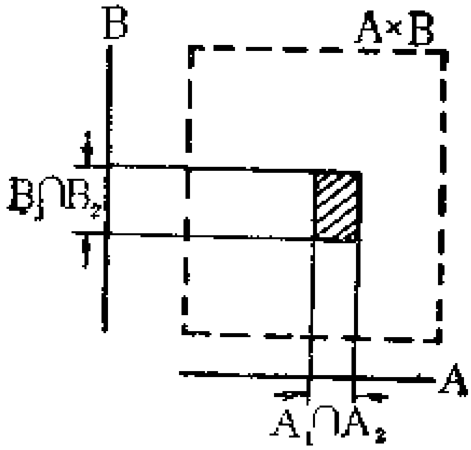
43.



44. (1)

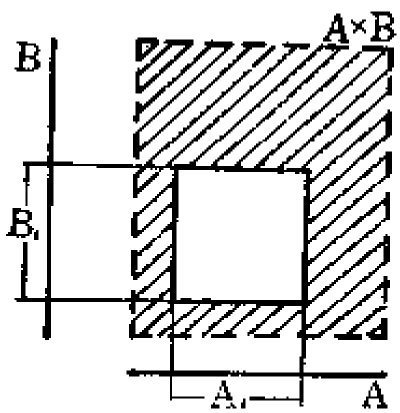


$(A_1 \times B_1) \cap (A_2 \times B_2)$

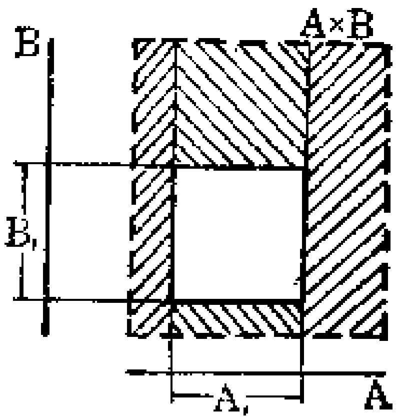


$(A_1 \cap A_2) \times (B_1 \cap B_2)$

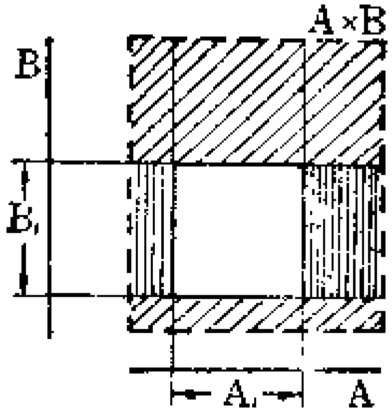
(2)



$\overline{(A_1 \times B_1)}$



$(\overline{A}_1 \times B) \cup (A_1 \times \overline{B}_1)$



$(A\times\overline{B}_1)\cup(\overline{A}_1\times B_1)$

45．我们列表如下：

函数名称		定 义 域	值 域	对应法则 f
幂函数		$(-\infty, +\infty)$	n为偶数时$(0, +\infty)$ n为奇数时$(-\infty, +\infty)$	$y=x^n$
指数函数		$(-\infty, +\infty)$	$(0, +\infty)$	$y=a^x$ $(a>0, a\neq 1)$
对数函数		$(0, +\infty)$	$(-\infty, +\infty)$	$y=\log_a x$ $a>0$, $a\neq 1$
三角函数	正 弦	$(\infty, +\infty)$	$[-1, +1]$	$y=\sin x$
	余 弦	$(-\infty, +\infty)$	$[-1, +1]$	$y=\cos x$
	正 切	$\{x: x\in(-\infty+\infty),$ $x\neq(K+\frac{1}{2})\pi$ $K=0, \pm1, \cdots\}$	$(-\infty, +\infty)$	$y=\operatorname{tg}x$
	余 切	$\{x: x\in(-\infty+\infty),$ $x\neq K\pi, K=0, \pm$ $1, \cdots\}$	$(\ \infty, +\infty)$	$y=\operatorname{ctg}x$

续表

反三角函数	反正弦	$[-1,\ +1]$	$(-\infty,\ +\infty)$	$y=\mathrm{Arcsin}x$
	反余弦	$[-1,\ +1]$	$(-\infty,\ +\infty)$	$y=\mathrm{Arccos}x$
	反正切	$(-\infty,\ +\infty)$	$\{x\mid x\in(-\infty,+\infty)$ $x\neq(K+\frac{1}{2})\pi$ $K=0,\pm1,\cdots\}$	$y=\mathrm{Arctg}x$
	反余切	$(-\infty,\ +\infty)$	$\{x\mid x\in(-\infty,+\infty)$ $x\neq K\pi,\ K=0,$ $\pm1,\cdots\}$	$y=\mathrm{Arcctg}x$

48. 设边长为a的正方形面积为S_a，则对应法则f为$S_a=a^2$。定义域为$(0,+\infty)$，值域为$(0,+\infty)$。

50. f是。定义域为M，值域为$M-\{1\}$；
g不是。∵当$n=1$时，$g(n)=n-1=0\notin M$。

51. f是从D到自己内的一个映射，也是从D到非负实数集合上的一个映射，定义域为D，值域为非负实数集合。

52. f是。定义域为R，值域为正有理数集合。但f不是从R到非负有理数集合上的一个映射。而是到非负有理数集合内的一个映射，因为非负有理数集合包括0，而$f(x)\neq0$。

53. f是从D到它自己内的一个映射，定义域为D，值域为非负实数集合。
f不是从D到它自己上的一个映射，而是从D到非负实数集合上的一个映射。定义域为D，值域为非负实数集合。

55. 不是。当$x=0$时，$x\in I$，但$2x+1=1\to$奇。同时，$2x=0\to$偶。即I中一个元素对应M中两个元素，这是一多对应，不是单值对应。因此也不是映射。

56. 是。

57. 是。定义域为D_+，值域为D_+。

58. 是。定义域和值域都是M。

59. 是。当n为奇数时，f是从D到自己上的一个映射，定义域＝值域＝D。当n为偶数时，f是从D到自己内的一个映射，定义域为D，值域为非负实数集合。

60. 是。定义域是D，值域是［－1，1］。

61. f是从D_+到D上的一个映射。而不是从D_+到它自己内的映射。

62. 是。定义域是D，值域是$D-\{0\}$。

63. 不是。

66. 从对角线上每一点向该正方形的边引垂线。

68. 不是。

69. 不能。

70. 能。x为整数时，不能建立一一对应。

71. 是。

73. $g\cdot f(x)=a^{\frac{1}{\sqrt{x}}}$，　　$f\cdot g(x)=\frac{1}{\sqrt{a^x}}$。

75. f：$x\to y=ax+b$，f是可逆的，其逆也是一一对应，f^{-1}：

$$y\to x=\frac{y-b}{a}.$$

76. 是。反函数为$x=y^2$，值域为D_+。

77. （1）定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[-4, +\infty)$，如将定义域分成$(-\infty, 3)$和$[3, +\infty)$则是一一对应。

（2）定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$\left(\sqrt{\frac{7}{8}}, +\infty\right)$。如将定义域分为$\left(-\infty, -\frac{1}{4}\right)$，$\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$则是一一对应。

（3）定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$\left(\log_a\frac{3}{4}, +\infty\right)$，如将定义域分为$\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$，$\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right)$则是一一对应。

（4）定义域为$(-\infty, +\infty)$，值域为$[-\sqrt{2}, +\sqrt{2}]$，

如果把定义域分为……$\left(-\pi-\frac{3\pi}{4},\ -\frac{3\pi}{4}\right]$,

$\left(-\frac{3\pi}{4},\ \frac{\pi}{4}\right)$, $\left[\frac{\pi}{4},\pi+\frac{\pi}{4}\right)$, $\left[\pi+\frac{\pi}{4},\right.$

$\left.2\pi+\frac{\pi}{4}\right)$, ……则为一一对应。

78. $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x}}-\frac{1}{\sqrt{x}}$.

79. (1) $u=f(x)=x-1$, $x\in(-\infty,\ +\infty)$, $u\in(-\infty,\ +\infty)$;

$v=g(u)=\sqrt{u}$, $u\in[0,\ +\infty)$, $v\in[0,\ +\infty)$;

$y=h(v)=\cos v$, $v\in[0,\ +\infty)$, $y\in[-1,\ +1)$.

$\therefore y=\cos\sqrt{x-1}$的复合过程是

$$(-\infty,\ +\infty)\xrightarrow{f}(-\infty,\ +\infty)\supset[0,+\infty)\xrightarrow{g}[0,+\infty)\xrightarrow{h}[-1,\ +1].$$

(2) $u=f(x)=\text{Arcsin}x, x\in[-1,+1]$, $u\in(-\infty,+\infty)$;

$v=g(u)=\lg u$, $u\in(0,\ +\infty)$, $v\in(-\infty,\ +\infty)$;

$\therefore y=\lg\ \text{Arcsin}x$的复合过程是

$$[-1,+1]\xrightarrow{f}(-\infty,+\infty)\supset(0,+\infty)\xrightarrow{g}(-\infty,\ +\infty).$$

(3) $u=f(x)=x+1, x\in(-\infty,\ +\infty), u\in(-\infty,\ +\infty)$;

$v=g(u)=\frac{1}{u}, u\in(-\infty,0)\cup(0,\ +\infty), v\in(-\infty,0)$
$\cup(0,+\infty)$; $w=h(v)=\sin v, v\in(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$,
$w\in[-1,\ +1]$; $y=m(w)=e^w$ $w\in[-1,\ +1]$,
$y\in[e^{-1},\ e]$.

$\therefore\ y=e^{\sin\frac{1}{x+1}}$的复合过程是

$$(-\infty,\ +\infty)\xrightarrow{f}(-\infty,\ +\infty)\supset(-\infty,\ 0)\cup(0,\ +\infty)\xrightarrow{g}$$

$(-\infty, 0)\cup(0, +\infty)\xrightarrow{h}[-1,+1]\xrightarrow{m}[e^{-1}, e]$.

（4）$u=f(x)=\lg x$，$x\in(0, +\infty)$，$u\in(-\infty, +\infty)$

$v=g(u)=[u]$　$u\in(-\infty, +\infty)$　$v\in\{$整数$\}$

∴　$y=[\lg x]$ 的复合过程是

$(0, +\infty)\xrightarrow{f}(-\infty, +\infty)\xrightarrow{g}\{$整数$\}$.

80.（1）$n\longleftrightarrow -n$.　（2）$n\longleftrightarrow n+1$,

（3）f：$y=\dfrac{x}{1-x}$ 则 $(0, 1)\xrightarrow{f}(0, +\infty)$ 是一一对应.

（4）f：$y=\dfrac{1}{\sqrt{1-x}}-\dfrac{1}{\sqrt{1+x}}$ 则 $(-1, 1)\xrightarrow{f}(-\infty, +\infty)$

是一一对应，

（5）f：$y=\dfrac{1}{\sqrt{b-x}}-\dfrac{1}{\sqrt{x-a}}$ 则

$(a, b)\xrightarrow{f}(-\infty, +\infty)$ 是一一对应的.

（6）由（5）知 $(a, b)\sim(-\infty, +\infty)$，又由例3知

$(-\infty, +\infty)\sim(0, +\infty)$，根据本章定理1，得

$(a, b)\sim(0, +\infty)$.

（7）将二椭圆的中心重合，以中心为顶点所作每一条射线与二椭圆周各交一点.令此二点对应，则为一一对应.

81.（1）$(a, b]$ 中的 b 与 $[a,b)$ 中的 a 对应，其余各元素均与本身对应；

（2）在 $(a,b]$ 中找一个真子集 b，$\dfrac{b-a}{2}$，$\dfrac{b-a}{3}$，$\dfrac{b-a}{4}$，……与 (a, b) 中的真子集 b，a，$\dfrac{b-a}{2}$，$\dfrac{b-a}{3}$，……组成如下对应：

$$\begin{array}{ccccc} b, & \dfrac{b-a}{2}, & \dfrac{b-a}{3}, & \dfrac{b-a}{4}, & \cdots\cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ b, & a, & \dfrac{b-a}{2}, & \dfrac{b-a}{3}, & \cdots\cdots \end{array}$$

而对 $(a,b)-\{b,\dfrac{b-a}{2},\ \dfrac{b-a}{3},\ \cdots\cdots\}$ 中的元素，则令其与本身对应。

（3）令 $\bigcup\limits_{i=1}^{n}(i-1,\ i)$ 中的 $(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 3)\cdots\cdots$，$(n-1,n)$ 分别与 $[0,n]$ 中的 $[0,1]$，$(1,2]$，$(2,3]$，……$(n-1,n]$ 对应，即

$$\begin{array}{ccccc} (0,\ 1) & (1,\ 2), & (2,\ 3) & \cdots & (n-1,n) \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & & \updownarrow \\ [0,1], & (1,2], & (2,3] & \cdots & (n-1,n] \end{array}$$

而每一区间间的对应由本题的（1）（2）已给出。

（4）$\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}(i-1,\ i)=(0,\ 1)\cup(1,\ 2)\cup(2,\ 3)\cup\cdots$

$(0,\ +\infty)=(0,\ 1)\cup[1,\ 2)\cup[2,\ 3)\cup[3,\ 4)\cup\cdots$

令

$$\begin{array}{cccc} (0,\ 1) & (1,\ 2) & (2,\ 3) & \cdots\cdots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \\ (0,\ 1) & [1,\ 2) & [2,\ 3) & \cdots\cdots \end{array}$$

而每一区间间的对应法则按（1）（2）题的办法。

82. ∵ A 可列，则 $A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ \cdots\cdots\}$。

令 $A_1=\{a_1,\ a_3,\ a_5,\ \cdots\cdots\}$，$A_2=\{a_2,\ a_4,\ a_6,\ \cdots\cdots\}$ 则有 $A_1\cap A_2=\Phi$，$A=A_1\cup A_2$。

83. $N_1=1,\ 2,\ 4,\ 7,\ 11,\ \cdots\cdots$

$N_2=3,\ 5,\ 8,\ 12,\ \cdots\cdots$

$N_3=6,\ 9,\ 13,\ \cdots\cdots$

$N_4=10,\ 14,\ \cdots\cdots$

$N_5=15,\ \cdots\cdots$

……

则 $N_i\cap N_j=\phi$，且 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty}N_i=N$。

85．（1）$A=\{a_1, a_2, \cdots a_n\}$，　$B=\{b_1, b_2, b_3\cdots\}$

把A中与b_i相同的元素去掉，重新排列，

得$A_1=\{a_1, a_2, \cdots a_k\}$，$(k\leqslant n)$　令

$S=\{a_1, a_2, \cdots a_k, b_1, b_2, \cdots\}$则$S$为可列集。

（2）若$A_1, A_2, \cdots A_n$可列　则

$A_1=\{a_{11}, a_{12}, a_{13}, \cdots\}$，

$A_2=\{a_{21}, a_{22}, a_{23}, \cdots\}$，

……

$A_n=\{a_{n1}, a_{n2}, a_{n3}\cdots\}$，

$S=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$

$=\{a_{11}, a_{21}\cdots a_{n1}, a_{21}, a_{22}, \cdots a_{n2}, \cdots\}$

把重复的元素去掉，仍为可列集。

（3）$A_k(K=1, 2, 3, \cdots)$是两两不相交的可列个有限集：

$A_1=\{a_1^{(1)}, a_2^{(1)}, \cdots a_n^{(1)}\}$，

$A_2=\{a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \cdots a_n^{(2)}\}$，

$A_3=\{a_1^{(3)}, a_2^{(3)}, \cdots a_n^{(3)}\}$

……

则$S=\{a_1^{(1)}, a_2^{(2)}, \cdots a_n^{(1)}, a_1^{(2)}, a_2^{(2)}, \cdots a_n^{(2)}, \cdots\}$是可列的。

86．由定理5，B含有可列子集M，设$B-M=P$，

则$B=P\cup M$，$B\cup A=P\cup M\cup A=P\cup(M\cup A)$。

由$P\sim P, M\cup A\sim M$，所以$B\sim B\cup A$。

87．因为A为无限集，由定理5必有可列集M，使$M\subset A$。

令$A_1=A-M$，则$A_1\sim A$且$A-A_1=M$可列。

对于$(0, 1)$，令$M=\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \cdots \frac{1}{n+1}, \cdots\}$则$M$

可列。

令$A_1 = A - M$则A_1为所求。

88.利用定理7.

89.A的有限子集可排成序列形式，故为可列集。

91.因每个区间都包含有理点，而有理点的全体是可列的，故这些区间至多可列。

92.因为函数是递增的,所以函数值与数轴上的点可组成对应，利用上题结论即可证得。

93. 2 人。

94. 5 人。

95.仅含有A的有 1 种，都不含的有 3 种。

96. (1) $\{9\}$； (2) $\{-5, +5\}$； (3) $[0, \infty)$；

(4) ϕ； (5) $\{-9, +9\}$； (6) $\{0\}$；

(7) ϕ； (8) $\{-1.5, +1.5\}$； (9) $\{7\}$；

(10) $\{122.4\}$； (11) $\{4\frac{2}{3}\}$； (12) $\{\frac{9}{16}\}$.

97. (1) $\{4\}$； (2) $\{1, \frac{5}{3}\}$；

(3) $\{a, \frac{a}{a-1}\}$； (4) $\{\frac{a-b}{2}, \frac{a-4b}{5}\}$；

(5) $\{3, -1, -9\}$； (6) $\{\frac{2}{3}, -3\}$；

(7) $\{-\sqrt{2}, +\sqrt{2}\}$； (8) $\{1\}$；

(9) $\{3\}$； (10) $\{-\sqrt{2}, \sqrt{2}\}$；

(11) $\{1\}$； (12) $\{0, -\frac{\sqrt{5}}{2}, +\frac{\sqrt{5}}{2}\}$,

98. (1) $\{x; x = K\pi + \frac{11\pi}{24}, K = 0, \pm 1, \cdots\}$,

(2) $\{x; x = K\pi \pm \frac{\pi}{3}, K = 0, \pm 1, \cdots\}$,

(3) $\{x; x = K \cdot 180° - 60°, K = 0, \pm 1, \cdots\}$,

(4) $\{x;\ x=\frac{3K\pi}{8}+\frac{\pi}{32},\ K=0,\ \pm1,\ \cdots\}$.

99. (1) $[2,\ 3)$;　　(2) $[-3,\ -2)$;

(3) $[22,\ 23)$;　　(4) $[1,\ 2)$;

(5) $(-\infty,\ +\infty)$;　　(6) ϕ.

100. (1) $[-2,\ 2]$;　　(2) $(-5,\ 5)$;

(3) $(-\infty,-3]\cup[3,\ +\infty)$;

(4) $(-\infty,\ -10)\cup(10,\ +\infty)$.

101. (1) $\{-1,\ 1,\ 3\}$;　　(2) $\{-4,\ -1,\ 3\}$

102. (1) $(-2,\ 3)$;　　(2) $(-3.5,\ 3)$;

(3) $(-\infty,\ -4)$;　　(4) $\left(-\frac{1}{2},\ 4\right)$;

(5) ϕ　　(6) $\{x:\ x\in(-\infty,\ -\sqrt{2})\cup(\sqrt{2},\ +\infty)\}$;

(7) $\{x:\ x\in(3,\ 5)\cup(-\infty,\ -1)\}$.

103. (1) $\{(3,\ 7)\}$;　　(2) $\{(1,\ 2)\}$;

(3) $\{(-4,\ -2)\}$;　　(4) $\{(3,\ 4),\ (-10,\ -\frac{14}{3})\}$;

(5) $\{(25,\ 64),\ (64,\ 25)\}$;

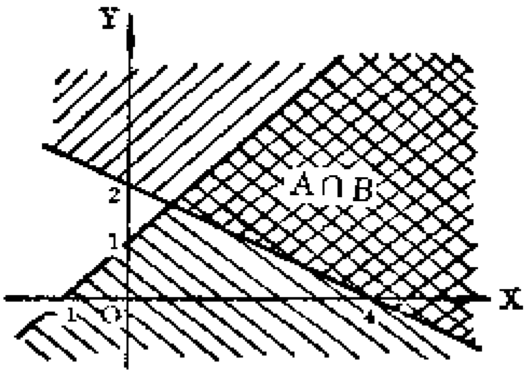
(6) $\{(1,\ -2),\ (-1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (-2,\ -1)\}$;

(7) $\left\{\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (2,\ 1),\left(-\frac{1}{2},\ -\frac{5}{2}\right),\right.$

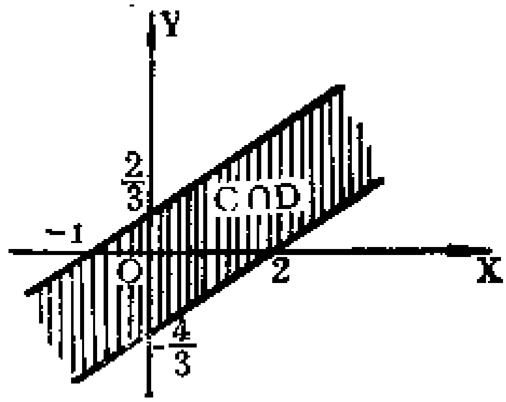
$\left.(-1,\ -2)\right\}$.

104. (1) $x+2y>4$ 的解集合为A，$x-y+1>0$的解集合为B，
则此不等式组的解集合为$\{(x,y):\ (x,\ y)\in A\cap B\}$.
用图形表示就是图中的双阴影部分。

(2) 令C为$-2<2x-3y$的解集合，D为$2x-3y<4$的解集合，
则此不等式组的解集合为
$\{(x,\ y):\ (x,\ y)\in C\cap D\}$，
用图形表示就是图中的阴影部分。

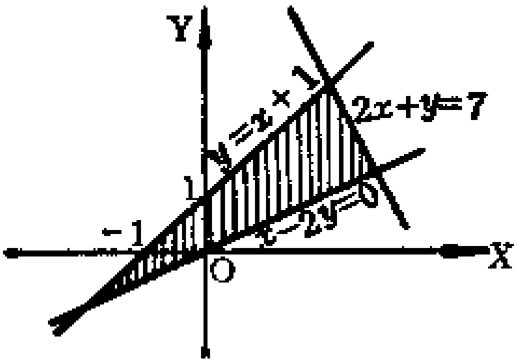


（1）



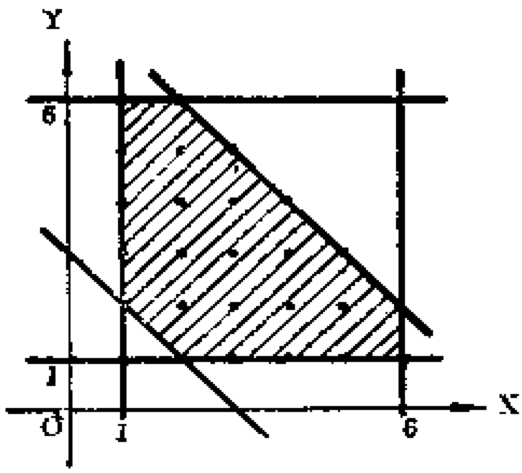
（104题）　　　（2）

（3）令E为$y \leqslant x+1$的解集合，F为$x-2y \leqslant 0$的解集合，G为$2x+y \leqslant 7$的解集合，则此不等式组的解集合为
$\{(x,\ y):\ (x,\ y) \in E \cap F \cap G\}$
用图形表示就是图中的阴影部分。



（3）

（104题）



（105题）

105. $E=\{(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (1,\ 5),\ (1,\ 6),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (2,\ 4),\ (2,\ 5),\ (2,\ 6),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2)\}$ 共由25个元素组成

106. $\because f(x)+f(y)=x^2+y^2-6x-6y+10=(x-3)^2+(y-3)^2-8$,

$\therefore$满足$f(x)+f(y)\leqslant 0$的点(x, y)在圆$(x-3)^2+(y-3)^2=8$内和圆周上。

又$\because$ $f(x)-f(y)=x^2-y^2-6x+6y=(x-y)(x+y-6)$,

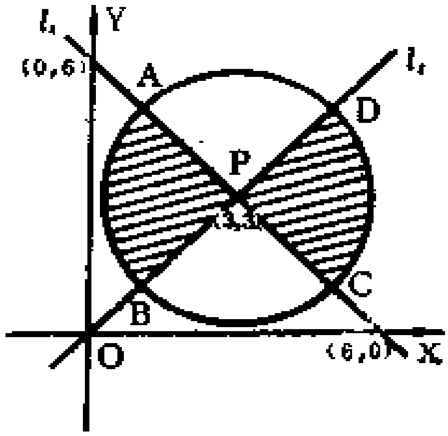
$\therefore f(x)-f(y)\leqslant 0$的解集合等于

$\begin{cases} x-y\geqslant 0 \\ x+y-6\geqslant 0 \end{cases}$ 的解集合与 $\begin{cases} x-y\leqslant 0 \\ x+y-6\leqslant 0 \end{cases}$ 的解集合的和集

$\begin{cases} \text{满足}x-y\geqslant 0\text{的点在直线}l_1\text{上及其右下方（如图）}, \\ \text{满足}x+y-6\geqslant 0\text{的点在直线}l_2\text{上及其右上方（如图）}; \end{cases}$

$\begin{cases} \text{满足}x-y\leqslant 0\text{的点在直线}l_1\text{上及其左上方}, \\ \text{满足}x+y-6\leqslant 0\text{的点在直线}l_2\text{上及其左下方}; \end{cases}$

$\therefore$满足$\begin{cases} f(x)+f(y)\leqslant 0 \\ f(x)-f(y)\geqslant 0 \end{cases}$的点在扇形$PAB$及其边界和扇形$PCD$及其边界上（如图中阴影部分）



（106题）

107. $\{0, 2, 4, 17, 28, 60\}$.

108. （1）$\{0\}$;

（2）$(0, +\infty)$.

109. （1）$(-\infty, -2)\cup(-2, 2)\cup(2, +\infty)$;

（2）$(-\infty, +\infty)$;　　（3）$(-\infty, 0)$;

（4）$(0, +\infty)$.

110. (1) $\{2, 3, 4, 5, 6, 7\}$;

(2) $[3, 8]$; (3) $[-6, 0]$;

(4) $[-6, 6]$; (5) $(-\infty, +\infty)$.

111. (1) $\{(x, y): y=\lg x, 0<x<+\infty\}$;

(2) $\{(x, y): y=x^{\frac{2}{3}}, -\infty<x<+\infty\}$.

112. (1) $y=\frac{2}{3}x-\frac{5}{3}$;

(2) $y=\pm\sqrt{\frac{x^2}{9}-1}$;

(3) $y=\pm 2\sqrt{4-x^2}$;

(4) $y=\frac{x^2}{4}+2$.

113. (1) $\{(x, y): x^2+y^2=9\}$;

(2) $\{(x, y): y>ax^2\}$;

(3) $\{(x, y): 1\leqslant x\leqslant 2, -3\leqslant y\leqslant 3\}$;

(4) $\{(x, y): 1\leqslant x^2+y^2\leqslant 4\}$;

(5) $\{(x, y): x\geqslant 0, y\geqslant 0; x+y\leqslant 3\}$.

115. (1) 图(1)中$\alpha\cup\beta=\angle AOD$, $\alpha\cap\beta=\angle BOC$;

(2) 图(2)中$\angle A\cap\angle C=$四边形$ABCD$.

116. (1) $AB\cap CD=\{O\}=$点O;

(2) $AB\cap CD=\phi$; (3) $AB=CD$.

117. $N=\{E_{ab}: |a\cdot b|=6\}$;

$E_{ab}=\{(x, y): \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1, |a\cdot b|=6\}$;

118. E_b表示一半轴为2,(在x轴上),另一半轴为$b(\neq 0)$的椭圆,而N则表示在y轴上的半轴取不同值的椭圆系.

122. $\Omega=\{$(正,反,反),(反,正,反),(正,正,反),(反,反,反),(正,反,正),(反,正,正),(正,正,正),(反,反,正)$\}$.

123. $A=\{$(正,反,反),(正,正,反),(正,反,正),(正,正,正)$\}$,

$B=\{$(反，反，正)，(反，反，反)$\}$，

$C=\{$(正，正，正)$\}$

$P(A)=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$， $P(B)=\frac{2}{8}=\frac{1}{4}$，$P(C)=\frac{1}{8}$。

124.（1）事件A为甲出正面而丙出反面；

（2）事件B为甲、丙出现的结果相同；

（3）事件C为丙出反面。

125.（1）45；

（2）$A=\{(5,9),(6,9),(7,9),(8,9),(6,8),(7,8)\}$，

$B=\{(3,9),(5,9),(7,9),(4,8),(6,8),(5,7)\}$，

$A\cup B=\{(3,9),(5,9),(6,9),(7,9),(8,9),(4,8),(6,8),(7,8),(5,7)\}$，

$A\cap B=\{(5,9),(7,9),(6,8)\}$，

$P(A)=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$，$P(B)=\frac{6}{45}=\frac{2}{15}$，

$P(A\cup B)=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$， $P(A\cap B)=\frac{3}{45}=\frac{1}{15}$。

126.（1）$C_{12}^3=220$；

（2）$C_7^3=35$， $P(A)=\frac{35}{220}=\frac{7}{44}$；

（3）$C_7^2\cdot C_5^1=105$， $P(B)=\frac{105}{220}=\frac{21}{44}$。

128.（1）AB； （2）1；

（3）$AB+BC+CA$； （4）0；

（5）$A+B+CD$； （6）$\overline{B}+AC$。