目　　录

第0章 导 论

假设 $\Phi: \mathfrak{D}\to \boldsymbol{R}$ 是在非空集合 $\mathfrak{D}\subset \boldsymbol{R}^{k+2}$ $(k\in \boldsymbol{N})$ 中定义的一个实函数．那么

$$(*) \qquad \Phi(x, y, y', \cdots, y^{(k)})=0$$

就表示一个常微分方程．更确切些说，这意味着要找出由一切在区间 $i\subset \boldsymbol{R}$ 中确定，而且对全部的 $x\in i$ 满足

$$(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(k)}(x))\in \mathfrak{D}$$

及

$$\Phi(x, y(x), y'(x), \cdots, y^{(k)}(x))=0$$

的 k 次可微函数 $y: i\to \boldsymbol{R}$ 所组成的集合 $\mathscr{L}$；此处及在下文中若不另作明确的说明，我们总是把 $\boldsymbol{R}$ 的每个非空而且不只包含一个点的连通子集叫做区间．集合 $\mathscr{L}$ 称为微分方程的解集而每个 $y\in\mathscr{L}$ 叫做一个解，或者用从前的名称叫做微分方程的一个积分．

如果 $\Phi(t_1, t_2, \cdots, t_{k+2})$ 在 $\mathfrak{D}$ 内有效地依赖于第 $(k+2)$ 个变元——关于这一点的准确叙述留给读者——则称 k 为微分方程 $(*)$ 的阶数．

假若 $(*)$ 可改写成

$$y^{(k)}=\varphi(x, y, y', \cdots, y^{(k-1)})$$

的形式，那么它的阶数必定是 k，而且这种已就最高阶导数解出的微分方程叫做显式微分方程，否则称为隐式微分方程．

上面称 $(*)$ 为常微分方程是为了强调待求函数是单变元的函数．与此相反，关于多变元函数的类似的微分方程则称为偏微分方程．

我们还可以讨论比 $(*)$ 更一般的，由在同一定义区间上的多个

待求函数的几个微分方程所组成的常微分方程组.

如果用 C, C^{k+2} 分别代替前面的 R, R^{k+2}, 取 $\mathscr{D}$ 为 C^{k+2} 中的区域, 代替区间 i 我们考虑域 $\Omega \subset C$, 同时取代上面的 k 次可微性现在我们要求全纯性. 那么代替前面讨论的实微分方程, 我们将得到一个复域中的(常)微分方程问题. 同样的考虑对于微分方程组也有效.

正如上面已较精确地说明过的, 一个微分方程或者微分方程组的符号就表示一个关于解的集合的问题. 这就明显地决定了出现于微分方程理论中的问题的类型. 即我们总是力图以某种方式去"说明"解的集合——描述它的特征, 观察它的结构——, 去"构造"解, "计算"解.

我们大致将限于研究具有某些特殊性质的解 (例如满足初值条件或边界条件等附加条件的解), 由此特别产生了关于解的存在性、唯一性以及对参数的"依赖性"等问题.

在这种意义之下, 我们将在下面对实域和复域中的常微分方程及常微分方程组的理论基础给出一个概要.

第 1 章讲述一些初等的积分方法并较多地带有导引的性质. 第 2 章以很大的普遍性在实域和复域中给出基本的存在性、唯一性及依赖性的定理. 第 3 章中发展实域线性微分方程的理论, 而第 4 章则进而讨论复域内的线性微分方程.

除了理论知识之外, 实际分析的技能当然也不应当有所欠缺. 因此, 按照理论性各章的顺序我们补充编排了一个包括练习作业和提示的附录, 其中将多次地引入更深入的方法并导出附加的结果.

第1章 初等积分法

在本章中我们将——不企求完备性——讨论一阶微分方程中的几个简单类型，对于它们可以用"初等的"方法求解，亦即通过求原函数和求解比较正常的(隐函数)方程而顺利地得到解．讨论是在实域中进行的．但它们可以广泛地移植到复数域中去，而且在复域中讨论甚至更简单一些．

1.1 具分离变量的微分方程

我们考虑如下形式的微分方程

$$y' = \frac{f(x)}{g(y)}. \tag{1.1.1}$$

这里我们假设 i_1 及 i_2 都是区间而且

$$f: \mathrm{i}_1 \longrightarrow \boldsymbol{R} \quad 连续,$$

$$g: \mathrm{i}_2 \longrightarrow \boldsymbol{R} \quad 连续,$$

此外假设当 $y \in \mathrm{i}_2$ 时恒有 $g(y) \neq 0$.

我们现在希望当 $\xi \in \mathrm{i}_1$ 及 $\eta \in \mathrm{i}$ 已给定时，找出在某个满足 $\xi \in \mathrm{i} \subset \mathrm{i}_1$ 的区间 i 上确定的解 y，使之满足

$$y(\xi) = \eta. \tag{1.1.2}$$

从而通过让 ξ 及 η 变更，显然就获得了一切的解.

对于这些 ξ 及 η，我们分别定义

$$F: \mathrm{i}_1 \longrightarrow \boldsymbol{R},$$

$$G: \mathrm{i}_2 \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

为 f 及 g 的分别在 ξ 和 η 处为零的原函数．由于连续性假设我们

有

$$F(x)=\int_{\xi}^{x} f(t)\,dt \quad (x\in \mathrm{i}_1),$$

$$G(u)=\int_{\eta}^{u} g(t)\,dt \quad (u\in \mathrm{i}_2).$$

于是对一个在区间 $\mathrm{i}\subset \mathrm{i}_1$ 上有定义并且满足条件 $y(\mathrm{i})\subset \mathrm{i}_2$ 的可微函数 y 而言，(1.1.1)显然等价于

$$\frac{d}{dx}G(y(x))=\frac{d}{dx}F(x), \quad (x\in \mathrm{i})$$

同时(1.1.1)联同(1.1.2)就等价于

$$G(y(x))=F(x) \quad (x\in \mathrm{i}), \tag{1.1.3}$$

只要注意到 $F(\xi)=0$ 和

$$G(u)=0 \Longleftrightarrow u=\eta$$

那么由 $g(t)\neq 0(t\in \mathrm{i}_2)$ 即得 G 的严格单调性.

更加强一些，根据关于反函数的初等定理，G 甚至具有一个有相同增减性的严格单调的连续可微的反函数 G^{-1}，其定义区间为 $\mathrm{i}_3=G(\mathrm{i}_2)$.

因此可以把(1.1.3)改记为如下形式

$$y(x)=G^{-1}(F(x)) \quad (x\in \mathrm{i}). \tag{1.1.4}$$

现在如果

$$F(\mathrm{i})\subset \mathrm{i}_3,$$

则(1.1.4)左端即定义出一个连续可微的函数，而且据上面所说它就是(1.1.1)(1.1.2)的解.

这显然表明(1.1.1)(1.1.2)的解的极大存在区间 i_0 恰好就是

$$F^{-1}(\mathrm{i}_3),$$

的含有 ξ 的那个连通分量.

我们加以总结：

$y_0:=G^{-1}\circ(F|_{\mathrm{i}_0})$ 是(1.1.1)和(1.1.2)的解. 而(1.1.1)及(1.1.2)

的每一个其他的解

$$y: \mathrm{i} \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

可以由此通过在(子区间) i 上的限制得出.

我们用三个例子来结束讨论.

例 1　我们考虑

$$y' = -\frac{x}{y} \tag{1.1.5}$$

连同 $\mathrm{i}_1 := \boldsymbol{R}$ 和 $\mathrm{i}_2 := (0, \infty)$.

这个微分方程可以"几何地"解释为一个方向场的描述，此方向场在满足 $y \neq 0$ 的各点 (x, y) 处标上一个与此点和 $(0, 0)$ 点的联线相正交的方向. 而它的解，亦即处处切于方向场之方向的曲线 $(x, y(x))$，大家知道就是"半圆".

事实上，前面的讨论指出它们的确是解：

对于满足 $\eta > 0$ 的 (ξ, η) 我们置

$$r := (\xi^2 + \eta^2)^{1/2},$$

则显然

$$\mathrm{i}_0 = (-r, r)$$

而且

$$y_0(x) = (r^2 - x^2)^{1/2} \quad (x \in (-r, r))$$

就是(1.1.5)的经过 (ξ, η) 并具有极大存在区间的解.

例 2　我们考虑

$$y' = |y|^{1/2}. \tag{1.1.6}$$

a) 我们首先选取

$$\mathrm{i}_1 := \boldsymbol{R}, \quad \mathrm{i}_2 := (0, \infty).$$

于是当 (ξ, η) 满足 $\eta > 0$ 时

$$F(x) = x - \xi \quad (x \in \boldsymbol{R}),$$

$$G(y) = 2(y^{1/2} - \eta^{1/2}) \quad (y \in (0, \infty)).$$

因此
$$\mathrm{i}_3=(-2\eta^{1/2},\infty),$$
$$\mathrm{i}_0=(-2\eta^{1/2}+\xi,\infty)$$

而据上面理论
$$y_0(x)=\frac{1}{4}(x-(\xi-2\eta^{1/2}))^2\quad(x\in\mathrm{i}_0)$$

即是(1.1.6)过(ξ,η)并具有极大存在区间的解.

b) 相仿地我们可取
$$\mathrm{i}_1:=\boldsymbol{R},\quad \mathrm{i}_2:=(-\infty,0)$$

作为讨论的基础. 对于满足 $\eta<0$ 的(ξ,η)我们得出
$$\mathrm{i}_0=(-\infty,\xi+2|\eta|^{1/2})$$

而且据上面的理论
$$y_0(x)=-\frac{1}{4}(x-(\xi+2|\eta|^{1/2}))^2\quad(x\in\mathrm{i}_0)$$

即是(1.1.6)经过(ξ,η)且具有极大存在区间的解.

c) 现在因为$|y|^{1/2}$当 $y=0$ 时也有定义, 因此可以在 $\boldsymbol{R}^2$ 内考察我们的微分方程(1.1.6).

这时上面的理论在 $y=0$ 附近, 特别是当 $\eta=0$ 时当然是失灵的.

现在我们立即可知
$$y(x)=0\quad(x\in\boldsymbol{R})$$

是一个解.

另一方面可以看出, 在情形 *a*) 及 *b*) 中 $y_0(x)$和 $y_0'(x)$ 分别当 $x\searrow(\xi-2\eta^{1/2})$ 和 $x\nearrow(\xi+2|\eta|^{1/2})$时趋于零.

因此, 当 $-\infty\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\infty$ 时由
$$y(x):=\begin{cases}-\frac{1}{4}(x-\alpha)^2 & (x\leqslant\alpha)\\ 0 & (\alpha\leqslant x\leqslant\beta)\\ \frac{1}{4}(x-\beta)^2 & (x\geqslant\beta)\end{cases}\quad(x\in\boldsymbol{R})$$

定义的函数都是(1.1.6)的解.

我们的考虑表明,可以通过在子区间上的限制,由刚刚已给的解得出(1.1.6)在 R^2 内的全部的解.

这特别表明,在每一个区间 $\mathrm{i}\ni\xi$ 中都存在(1.1.6) 的经过$(\xi, 0)$的无穷多个解. 它们都位于过$(\xi,0)$的"极大"解

$$y_{\max}(x):=\begin{cases}0 & (x\leqslant\xi),\\ \frac{1}{4}(x-\xi)^2 & (x\geqslant\xi)\end{cases}$$

和过$(\xi,0)$的"极小"解

$$y_{\min}(x):=\begin{cases}-\frac{1}{4}(x-\xi)^2 & (x\leqslant\xi),\\ 0 & (x\geqslant\xi).\end{cases}$$

的中间.

所以在 $\boldsymbol{R}^2$ 内——与以上理论适用范围相反—— 不存在唯一性,在$(\xi, 0)$周围甚至初值问题的局部唯一性也不具备.

例 3 我们考虑

(1.1.7) $$y'=1+y^2$$

而且

$$\mathrm{i}_1:=\boldsymbol{R},\quad \mathrm{i}_2:=\boldsymbol{R}.$$

对于$(\xi,\eta)\in\boldsymbol{R}^2$ 显然有

$$F(x)=x-\xi \quad (x\in\boldsymbol{R}),$$

$$G(y)=\operatorname{arctg}(y)-\operatorname{arctg}(\eta) \quad (y\in\boldsymbol{R}).$$

因此,如果令

$$\gamma:=\xi-\operatorname{arctg}(\eta)$$

则

$$\mathrm{i}_0=\left(\gamma-\frac{\pi}{2},\ \gamma+\frac{\pi}{2}\right)$$

且

$$y_0(x)=\operatorname{tg}(x-\gamma)\quad(x\in \mathfrak{i}_0)$$

就是(1.1.7)经过(ξ,η)并具有极大存在区间的解.

注意，在这里尽管微分方程是用 $\boldsymbol{R}\times\boldsymbol{R}$ 中很规则的函数构成的，各个解自身的极大存在区间 $\mathfrak{i}_0\subsetneqq\boldsymbol{R}=\mathfrak{i}_1$.

1.2 $y'=f\left(\dfrac{p_1x+q_1y+r_1}{p_2x+q_2y+r_2}\right)$型的微分方程

此处为了排除平凡的情形，对于实的常数 $p_k, q_k, r_k\ (k=1,2)$ 我们假定

$$(q_1,q_2)\neq(0,0),\quad \operatorname{rg}\begin{pmatrix}p_1 & q_1 & r_1\\ p_2 & q_2 & r_2\end{pmatrix}=2①$$

且假设 f 为在某区间 $\mathfrak{j}$ 上定义的实连续函数.

我们在下面用(1.2.1)记上面的微分方程，并且通过化成如下两种特殊情形来求解

(1.2.2) $$y'=f(\lambda x+y)$$

以及

(1.2.3) $$y'=f\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right),$$

因此下面先处理这两种情形

对于(1.2.2)：方程右端在带形

$$\mathfrak{S}:=\{(x,y):\lambda x+y\in\mathfrak{j}\}$$

中连续.

这里显然

$$y:\mathfrak{i}\longrightarrow\boldsymbol{R}$$

当且仅当对于由一一对应的变换

$$u(x)=\lambda x+y(x)\quad(x\in\mathfrak{i})$$

---

① rg是Rang(秩)的简写符号.

与 y 相联系的函数

$$u: \mathrm{i} \longrightarrow \mathbf{R}$$

下列条件成立时才是解:

u 可微，在 j 中取值，且满足

$$u' = \lambda + f(u).$$

这是一个(1.1.1)型的微分方程.

对于(1.2.3)：方程右端在角形区域

$$\mathfrak{B} := \left\{ (x, y) : x \neq x_0 \wedge \frac{y - y_0}{x - x_0} \in \mathrm{j} \right\}$$

内连续.

因此若 i 是一个满足 $x_0 \in \mathrm{i}$ 的区间，则

$$y: \mathrm{i} \longrightarrow \mathbf{R}$$

当且仅当下列条件成立时才是解，即对于由

$$y(x) - y_0 = (x - x_0) u(x) \quad (x \in \mathrm{i})$$

而与 y 一一对应地联系着的函数

$$u: \mathrm{i} \longrightarrow \mathbf{R}$$

有：u 是可微的，取值于 j 且满足

$$u' = \frac{1}{x - x_0} (f(u) - u).$$

这又是一个(1.1.1)型的微分方程.

(1.2.1)的简化：如果

$$\mathrm{rg} \begin{pmatrix} p_1 & q_1 \\ p_2 & q_2 \end{pmatrix} = 1,$$

则必存在一个 $\lambda \in \mathbf{R}$ 满足

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix};$$

故可理解为

$$f\left(\frac{p_1x+q_1y+r_1}{p_2x+q_2y+r_2}\right)=f\left(\frac{q_1(\lambda x+y)+r_1}{q_2(\lambda x+y)+r_2}\right)=:\hat{f}(\lambda x+y)$$

我们得到了情形(1.2.2).

反过来,如果

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{pmatrix}=2,$$

则必存在唯一的$(x_0, y_0)\in\boldsymbol{R}^2$满足

$$\begin{pmatrix}p_1 & q_1\\ p_2 & q_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_0\\ y_0\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}r_1\\ r_2\end{pmatrix}.$$

所以可以理解为

$$f\left(\frac{p_1x+q_1y+r_1}{p_2x+q_2y+r_2}\right)=f\left(\frac{p_1(x-x_0)+q_1(y-y_0)}{p_2(x-x_0)+q_2(y-y_0)}\right)$$

而当 $x\neq x_0$ 时又可看作

$$\hat{f}\left(\frac{y-y_0}{x-x_0}\right).$$

我们得到了情形(1.2.3).

在每一种情况下都可以化归(1.1.1).

1.3 一阶线性微分方程

我们研究一阶线性——对 y 和 y'(非齐次的)——微分方程

(1.3.1) $$y'=f(x)y+g(x)$$

f,g 为在一共同区间 $\mathfrak{i}$ 中连续的实函数.

这里我们不难看出

(1.3.2) $$y_0(x):=\exp\left(\int_\xi^x f(t)\,dt\right)\qquad (x\in\mathfrak{i})$$

当 $\xi\in\mathfrak{i}$ 固定时表达齐次线性微分方程

(1.3.3) $$y'=f(x)y$$

的一个在 $\mathfrak{i}$ 上有定义而且满足

(1.3.4) $$y_0(x)\neq 0 \quad (x\in \mathrm{i})$$
的解. 这也可以利用 1.1 中的方法推导出来。

对于一个子区间
$$\mathrm{i}_0\subset \mathrm{i},$$
函数
$$y:\mathrm{i}_0\longrightarrow \boldsymbol{R}$$
是(1.3.1)的解的充要条件为: 通过关系式

(*) $$y(x)=c(x)y_0(x) \quad (x\in \mathrm{i}_0)$$
与 y 一一对应地联系着的函数
$$c: \mathrm{i}_0\longrightarrow \boldsymbol{R},$$
是如下微分方程的解
$$c'(x)=g(x)y_0(x)^{-1}.$$

这就证明了:

(1.3.5) $$y(x):=y_0(x)\left(\int_{\xi}^{x} g(t)y_0(t)^{-1}dt+\gamma\right) \quad (x\in \mathrm{i})$$
对于每一个 $\gamma\in\boldsymbol{R}$ 均给出 (1.3.1) 的一个解. 人们可以通过在子区间上的限制由此得出全部的解.

特别对于齐次的微分方程我们有在 i 中的解:

(1.3.6) $$y(x):=\gamma y_0(x) \quad (x\in \mathrm{i}).$$
如果 $\gamma\neq 0$, 则 $y(x)\neq 0(x\in \mathrm{i})$, 因此每一个这样的 y 都可用来在(1.3.5)中代替 y_0.

在上面对 y_0 的特殊选取的情况下, 显然(1.3.5)恰好表示(1.3.1)在 i 中满足
$$y(\xi)=\gamma$$
的唯一确定的解. 所以对于初值问题而言存在性定理和唯一性定

理仍成立.

此外(1.3.5)表明——这从(1.3.1)的代数结构也是明显的:

(1.3.1)的解集合可由一个特解加上(1.3.3)的一维的解空间(Lösungsraumes)得出.

(*)和(1.3.6)启示把所用的方法称为常数变易.

我们还作一个注:

(1.3.7)如果

$$y_\nu: \mathrm{i} \longrightarrow \boldsymbol{R} \quad (\nu=1,2,3)$$

同时假设 y_1, y_2 是(1.3.1)的解而且

$$y_1 \neq y_2,$$

则当且仅当对某个 $\gamma \in \boldsymbol{R}$ 使

$$\frac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}=\gamma \qquad (x \in \mathrm{i})$$

成立时 y_3 才是(1.3.1)的解.

这是因为 y_2-y_1 是(1.3.3)的解且 $\neq 0$. 另一方面, y_3 当且仅当 y_3-y_1 是(1.3.3)的解时, 因而对某个 $\gamma \in \boldsymbol{R}$ 有

$$y_3-y_1=\gamma(y_2-y_1)$$

时才是(1.3.1)的解.

作为关于(1.3.5)的另一个注记, 我们注意:

(1.3.8)如果

$$u: \mathrm{i} \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

连续可微, 而且我们有

$$u'(x) \leqslant f(x)u(x)+g(x) \quad (x \in \mathrm{i}),$$
$$u(\xi)=\gamma,$$

则对于由(1.3.5)给出的 y 必有

$$u(x)\begin{Bmatrix}\leqq\\ \geqq\end{Bmatrix}y(x) \qquad \left(x \in \mathrm{i},\ x\begin{Bmatrix}\geqq\\ \leqq\end{Bmatrix}\xi\right).$$

为了证明，我们置

$$z := y - u$$

及

$$h := z' - fz;$$

于是

$$h : \mathrm{i} \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

必连续且满足

$$h(x) \geqq 0 \quad (x \in \mathrm{i}).$$

我们把(1.3.5)用于

$$z' = f(x)z + h(x), \quad z(\xi) = 0,$$

则得

$$z(x) = y_0(x)\int_{\xi}^{x} h(t)y_0(t)^{-1}dt.$$

由此即得结论. □

由注记(1.3.8) 立即可以对满足一个线性积分方程的函数得出一个估计式:

(1.3.9) 设 f, g, y 都是在 i 中定义的实连续函数；假设当 $x \in \mathrm{i}$ 时 $f(x) \geqq 0$；对于 $\xi \in \mathrm{i}$ 当 $\xi \leqq x \in \mathrm{i}$ 时成立

$$(+) \qquad y(x) \leqq g(x) + \int_{\xi}^{x} f(t)y(t)dt;$$

其次设 y_1 是

$$y_1' = f(x)y_1 + f(x)g(x),$$
$$y_1(\xi) = 0$$

的一个解，则当 $\xi \leqq x \in \mathrm{i}$ 时必有

$$y(x) \leqq g(x) + y_1(x).$$

对于

$$u(x) := \int_{\xi}^{x} f(t)y(t)dt \quad (x \in \mathrm{i})$$

我们由(+)和$f(x)\geqq 0$立刻得出

$$u'(x)\leqq f(x)u(x)+f(x)g(x) \quad (\xi\leqq x\in \mathrm{i}),$$

所以根据(1.3.8)

$$u(x)\leqq y_1(x) \quad (\xi\leqq x\in \mathrm{i})$$

由此再利用(+)即得结论. □

(1.3.9)有时称为Bellman(贝尔曼)引理.

1.4 Bernoulli(贝努里)微分方程

这种方程可记为

(1.4.1) $$y'=f(x)y+g(x)y^{\alpha}.$$

这里我们假设f和g是在一共同区间i上连续的实函数. 其次设$\alpha\in \boldsymbol{R}\setminus\{0,1\}$. 因此我们只考察解

$$y:\mathrm{i}_0\longrightarrow \boldsymbol{R},$$

其中$\mathrm{i}_0\subset \mathrm{i}$而且

$$y(x)>0 \quad (x\in \mathrm{i}_0).$$

此时一一对应的变换

$$u(x)=y(x)^{1-\alpha}$$

$$y(x)=u(x)^{1/(1-\alpha)} \quad (x\in \mathrm{i}_0)$$

表明, 当且仅当

$$u:i_0\longrightarrow \boldsymbol{R}$$

是线性微分方程

(1.4.2) $$u'=(1-\alpha)f(x)u+(1-\alpha)g(x)$$

的解并且

$$u(x)>0 \quad (x\in \mathrm{i}_0)$$

成立时, y才是原方程的解.

于是就回溯到1.3.

对于特殊的α我们也可以允许$y(x)\leqq 0$. 如果定义$0^{\alpha}=0$, 则

当然 $y=0$ 也是解.

1.5 Riccati(黎卡提)微分方程

Riccati 微分方程是

$$y'=f(x)y^2+g(x)y+h(x). \tag{1.5.1}$$

这里及在下面都假设 f, g, 和 h 是在某个共同的区间中定义的实连续函数;并且为了不出现线性微分方程,我们附加假设

$$f\neq 0.$$

可以证明(1.5.1)一般不是"初等可积的". [1]但是另一方面,如果已经知道了它的一个解却又能用初等的方法找出其余的一切解(参阅第 1.5.2 节). 这一点以及相联系的其他关系说明为什么把(1.5.1)放在第 1 章的范围中讨论.

Riccati 微分方程不同于线性微分方程(1.3.1)之处是还多含一项 $f(x)y^2$. 但这就大大地改变了解的性质: 如同已说过的, 初等可积性丧失了;而且正如第 1.1 节例 3 所已表明的, 现在和(1.3.1)不一样——参看 (1.3.5)——各个解可能具有各自不同的极大存在区间.

1.5.1 与二阶齐次线性微分方程的联系

现在我们要对前面的一般假定加以补充,即假设

$$f\quad \text{连续可微},$$
$$f(x)\neq 0\quad (x\in \mathfrak{i}).$$

我们先施行一个适当的变换把微分方程 (1.5.1) 化为正规形式(Normalform).

假设 $\mathfrak{i}_0\subset\mathfrak{i}$ 而且

---

① 可参考 G. N. Watson: "A Treatise on the Theory of Bessel Functions," Cambridge 1944, § 4. 7——译者注.

$$y: \mathrm{i}_0 \longrightarrow \boldsymbol{R}.$$

这时根据我们的假设,

$$z(x) = -f(x)y(x) \qquad (x \in \mathrm{i}_0)$$

就给出关于 y 和 z 之间的一个一一对应关系:

$$z: \mathrm{i}_0 \longrightarrow \boldsymbol{R},$$

而且(连续)可微的 y 正好对应于(连续)可微的 z. 由

$$f'y + fy' = f^2y^2 + (fg + f')y + fh$$

的等价性及(1. 5. 1)得出: 当而且仅当 z 是

(1. 5. 2) $$z' = -z^2 - g_1(x)z - h_1(x)$$

的解时, y 才是(1. 5. 1)的解. 这里

$$g_1 := -\frac{1}{f}(fg + f'),$$

$$h_1 := fh,$$

g_1 及 h_1 也在 i 中连续.

现在我们进一步考察(1. 5. 2). 假设 $\mathrm{i}_0 \subset \mathrm{i}$ 并且

$$z: \mathrm{i}_0 \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

为(1. 5. 2)的解. 于是当 $0 \neq \gamma \in \boldsymbol{R}$, $\xi \in \mathrm{i}_0$ 时

(1. 5. 3) $$u(x) := \gamma \exp\left(\int_\xi^x z(t)dt\right) \qquad (x \in \mathrm{i}_0)$$

显然是一个满足条件

(1. 5. 4) $$u(x) \neq 0 \qquad (x \in \mathrm{i}_0)$$

的两次连续可微的函数

$$u: \mathrm{i}_0 \longrightarrow \boldsymbol{R},$$

又因为

$$u' = uz,$$

$$u'' = u'z + uz' = u(z^2 + z'),$$

它必满足微分方程

(1. 5. 5) $$u'' + g_1(x)u' + h_1(x)u = 0.$$

反过来，若我们已有(1.5.5)满足(1.5.4)的一个在i_0中(两次连续可微)的解，那么经相同的讨论并令

$$z(x):=\frac{u'(x)}{u(x)}\qquad(x\in\mathrm{i}_0), \tag{1.5.6}$$

就得出(1.5.2)在i_0内的一个解z.

(1.5.5)和(1.5.2)之间的这种联系在如下问题中会自然而然地产生：即把(1.5.5)在一个子区间$\mathrm{i}_0\subset\mathrm{i}$中进行“因式分解”

$$u''+g_1(x)u'+h_1(x)u=\left(\frac{d}{dx}-\rho(x)\right)\left(\frac{d}{dx}-\omega(x)\right)u$$

此处ρ在i_0中连续而ω在i_0中连续可微.

显然可见的一个必要条件是：

$$u_0'=\omega(x)u_0$$

的每个解u_0都两次连续可微而且也满足(1.5.5).

我们选取$u_0\neq0$，因而$u_0(x)\neq0\,(x\in\mathrm{i}_0)$，

所以

$$\omega(x)=\frac{u_0'(x)}{u_0(x)}$$

也如此，从而据刚才所述知：ω是(1.5.2)的解.

反过来，如果ω是(1.5.2)在i中的解，那么依照(1.5.3)定义的u_0必给出(1.5.5)和(1.5.4)的一个解.

作变换

$$u(x)=u_0(x)v(x)\qquad(x\in\mathrm{i}_0),$$

利用$u_0'=\omega u_0$即得

$$\begin{aligned}u''+g_1u'+h_1u&=u_0v''+(g_1u_0+2u_0')v'\\&=\left(\frac{d}{dx}+(g_1+\omega)\right)u_0v'\\&=\left(\frac{d}{dx}+(g_1+\omega)\right)\left(\frac{d}{dx}-\omega\right)u.\end{aligned}$$

所以取$\rho:=-g_1-\omega$即得所要的因式分解.

1.5.2 在已知一个特解情况下的初等积分法

我们从以下定理出发

(1.5.7) **定理:** 设 $\mathrm{i}_0\subset\mathrm{i}$,

$$y_0:\mathrm{i}_0\longrightarrow \boldsymbol{R}\quad 为(1.5.1)的一个解,$$

$$y:\mathrm{i}_0\longrightarrow \boldsymbol{R},$$

$$u:\mathrm{i}_0\longrightarrow \boldsymbol{R}$$

而且

$$u(x)(y(x)-y_0(x))=1\quad (x\in\mathrm{i}_0),$$

则当且仅当 u 是线性微分方程

(1.5.8) $$u'=-(2f(x)y_0(x)+g(x))u-f(x)$$

的解时, y 才是(1.5.1)的解.

利用关于y_0的微分方程和

$$z:=y-y_0=\frac{1}{u}$$

即得出

$$y'-fy^2-gy-h=z'-(2fy_0+g)z-fz^2$$
$$=-z^2(u'+(2fy_0+g)u+f).\ \square$$

一个简单的推论是

(1.5.9)**定理:** (唯一性定理)

设若 y 及y_0是(1.5.1)在某一共同区间$\mathrm{i}_0\subset\mathrm{i}$上的解, 则或者 $y=y_0$或者对一切的 $x\in\mathrm{i}_0$ 都有 $y(x)\neq y_0(x)$.

不然的话, 我们不失普遍性(只要把i_0缩减)可假定, 在某端点 $\alpha\in\mathrm{i}_0$ 处成立 $y(\alpha)=y_0(\alpha)$而当 $x\in\mathring{\mathrm{i}}_0$时恒有 $y(x)\neq y_0(x)$. ① 于是我们在 $\mathring{\mathrm{i}}_0$ 中构作 $u=1/(y-y_0)$, 那么 u 在 i_0 内必满足(1.5.8). 但是因为(1.5.8)的系数在i_0中是连续的, 故 u 可以连续延拓到i_0

---

① $\mathring{\mathrm{i}}_0$ 表 i_0 中一切内点的集合——译者注.

上(见1.3).

但是于

$$u(x)(y(x)-y_0(x))=1$$

中令 $x\to\alpha$ 时就得到了所要的矛盾. □

由上面的叙述,我们就可以在一个特解 y_0 的定义区间 i_0 的子区间 i_1 内. 对 Riccati 微分方程 (1.5.1) 的全部解的总体作一概括.

(1.5.10) **定理**: 假设 $i_0\subset i$,

$$y_0:i_0\longrightarrow \boldsymbol{R} \quad 是(1.5.1)的解,$$

$$u_0:i_0\longrightarrow \boldsymbol{R} \quad 是(1.5.8)的解$$

并且

$$v_0:i_0\longrightarrow \boldsymbol{R}$$

是下列方程的满足 $v_0\neq 0$ 的解

$$v_0'=-(2f(x)y_0(x)+g(x))v_0$$

那么对于 $i_1\subset i_0$, 函数

$$y:i_1\longrightarrow \boldsymbol{R}$$

当且仅当或者

$$y=y_0|_{i_1}$$

成立或者对某个 $\gamma\in\boldsymbol{R}$

$$y=\left(y_0+\frac{1}{u_0+\gamma v_0}\right)\Big|_{i_1}$$

成立时,才是(1.5.1)的解,这里对一切 $x\in i_1$ 总有 $u_0(x)+\gamma v_0(x)\neq 0$.

这个定理可以直接由定理(1.5.9)和定理(1.5.7), 并结合按照 1.3 得出的(1.5.8)的通解的相应结构得出. □

假如我们由对于参数 γ 的非齐次形式过渡到一个相应的齐次的形式,那么两种情况的区分没有了,我们恒有

(1.5.11) $$y=\left(\frac{\gamma_1 u_1+\gamma_2 v_1}{\gamma_1 u_0+\gamma_2 v_0}\right)\Bigg|_{i_1}$$ 其中$R^2\ni(\gamma_1,\gamma_2)\neq(0,0)$

上式中应代入

$$u_1:=1+u_0 y_0,$$

(1.5.12)

$$v_1:=v_0 y_0$$

我们断定 u_0, u_1, v_0, v_1 在 $f|_{i_0}\neq 0$的情况下必具有如下性质:

(1) $u_\nu, v_\nu: i_0 \longrightarrow R$ 连续可微 $(\nu=0,1)$,

(2) u_0, v_0 线性无关,

(3) 对一切 $x\in i_0$

$$\begin{vmatrix} u_1(x) & v_1(x) \\ u_0(x) & v_0(x) \end{vmatrix}\neq 0.$$

(1)是直接给出了的,(2)由$f|_{i_0}\neq 0$ 即得,而据(1.5.12) 知(3)中的行列式恰好是 $v_0(x)\neq 0$.

这里成立一个逆命题:

(1.5.13) **定理**: 如果函数 u_0, u_1, v_0, v_1 具有性质(1),(2),(3). 那么必在i_0上一意地存在这样的函数 f, g, h, 使得Riccati 微分方程

$$y'=f(x)y^2+g(x)y+h(x)$$

的通解由

$$y=\left(\frac{\gamma_1 u_1+\gamma_2 v_1}{\gamma_1 u_0+\gamma_2 v_0}\right)\Bigg|_{i_1}$$

给出,其中$(0,0)\neq(\gamma_1,\gamma_2)\in R^2$, $i_1\subset i_0$ 而且当 $x\in i$ 时 $\gamma_1 u_0(x)+\gamma_2 v_0(x)\neq 0$成立.

为了证明我们首先考察一个这样的 y. 于是由于(1), y 是连续可微的. 现在我们就可以在i_1中写出

$$\gamma_1(yu_0-u_1)+\gamma_2(yv_0-v_1)=0$$

因此又有

$$\gamma_1(yu_0-u_1)'+\gamma_2(yv_0-v_1)'=0$$

利用$(\gamma_1,\gamma_2)\neq(0,0)$就得出这个齐次方程组的系数行列式为零. 于是就导致

$$\begin{aligned} y'(u_0v_1-u_1v_0)+y^2(u_0v_0'-u_0'v_0) \\ +y(u_1'v_0+u_0'v_1-u_0v_1'-u_1v_0') \\ +(u_1v_1'-u_1'v_1)=0. \end{aligned}$$

现在根据(3)就可以构造

$$f=-\frac{u_0v_0'-u_0'v_0}{u_0v_1-u_1v_0},$$

$$g=-\frac{u_1'v_0+u_0'v_1-u_0v_1'-u_1v_0'}{u_0v_1-u_1v_0},$$

$$h=-\frac{u_1v_1'-u_1'v_1}{u_0v_1-u_1v_0}.$$

这些函数都在i_0中连续. 由于(2)此处$f\neq0$成立.

所以全部被考察的y都是用上面已给出的f,g,h构造的Riccati微分方程的解. 它们就是通解, 因为对于一个$\xi\in\mathrm{i}$及$\eta\in\boldsymbol{R}$, 例如

$$\gamma_1u_1(\xi)+\gamma_2v_1(\xi)=\eta$$

$$\gamma_1u_0(\xi)+\gamma_2v_0(\xi)=1$$

根据(3), 可解得$(0,0)\neq(\gamma_1,\gamma_2)\in\boldsymbol{R}^2$(参看定理(1.5.9)).

f,g,h是由解族一意地决定的, 因为对于其他这样的一组三个函数(f_1,g_1,h_1)与每一个$\xi\in\mathrm{i}_0$和$\eta\in\boldsymbol{R}$, 根据刚才的考虑必有

$$f(\xi)\eta^2+g(\xi)\eta+h(\xi)=f_1(\xi)\eta^2+g_1(\xi)\eta+h_1(\xi)$$

成立, 从这里就得出$f_1=f$, $g_1=g$, 和$h_1=h$. □

更加详尽的但必须用到第2章中的存在性命题的研究表明, 对每个Riccati微分方程都可以依照定理(1.5.13)(用i代替i_0)写出它在整个区间i上的通解, 而不是象我们在定理(1.5.10)和(1.5.11)中那样, 仅仅在一个特解的定义区间内才可以办到.①

① 但这并不意味着黎卡提微分方程一定初等可积——译者注.

1.5.3 固定的交比

定理(1.5.7)和关于线性微分方程的三个解的比的论断(1.3.7)，使我们容易得出关于一个 Riccati 微分方程的四个解之交比的对应命题.

(1.5.14) **定理**：假设 i_0 是(1.5.1)的连续性区间 i 的子区间，

$$y_\nu: i_0 \longrightarrow \mathbf{R} \qquad (\nu=0,1,2,3),$$

这里

$$y_\nu \text{是(1.5.1)的解} \qquad (\nu=0,1,2)$$

且设对一切 $x\in i_0$ 恒有

$$y_\nu(x)\neq y_\mu(x) \quad (\nu\neq\mu;\nu,\mu\in\{0,1,2,3\}).$$

则当且仅当对某个 $\gamma\in\mathbf{R}$

$$\frac{y_3(x)-y_1(x)}{y_2(x)-y_1(x)}:\frac{y_3(x)-y_0(x)}{y_2(x)-y_0(x)}=\gamma \quad (x\in i_0)$$

成立的时候，y_3 才是(1.5.1)的解.

为了证明，我们引入

$$u_\nu=\frac{1}{y_\nu-y_0} \qquad (\nu=1,2,3)$$

现在根据定理(1.5.7)对于这些函数及线性微分方程

$$u'=-(2f(x)y_0(x)+g(x))u-f(x)$$

可以应用注记(1.3.7)：u_1 和 u_2 是这个微分方程的不相同的解而且在这种情况下，当且仅当

$$\frac{u_3(x)-u_1(x)}{u_2(x)-u_1(x)}=\gamma\in\mathbf{R} \quad (x\in i_0)$$

成立时 u_3 才是解.

另一方面恒等式

$$\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}:\frac{y_3-y_0}{y_2-y_0}=\frac{u_3-u_1}{u_2-u_1}.$$

成立．再利用定理(1.5.7)就得出结论．□

当然我们也可以利用定理(1.5.10)及交比在分式线性变换之下的不变性进行证明．

1.6 恰当微分方程，积分乘子

设 $\mathfrak{G}$ 是 R^2 中的一个域，而函数

$$f_\nu: \mathfrak{G} \longrightarrow R \ \text{连续}(\nu=1,2),$$

如果存在一个（(f_1, f_2) 在 $\mathfrak{G}$ 内的原函数）

$$F: \mathfrak{G} \longrightarrow R \quad \text{连续可微}$$

满足

$$F_x = f_1, \quad F_y = f_2,$$

那么我们称微分方程

(1.6.1) $$f_1(x, y) + f_2(x, y)y' = 0$$

在 $\mathfrak{G}$ 中是恰当的．

如果 f_1 和 f_2 甚至还是连续可微的，那么恰当性的一个周知的必要条件是

$$f_{1y} = f_{2x}$$

(Schwarz 的定理：可积性条件)．

充分条件是周知的：

$$\mathfrak{G} \quad \text{单连通},$$

$$f_1, f_2 \quad \text{连续可微},$$

$$f_{1y} = f_{2x}.$$

在这种情况下当 $(x_0, y_0) \in \mathfrak{G}$ 固定时，对于 $(x, y) \in \mathfrak{G}$ 我们就可以借助于一条位于 $\mathfrak{G}$ 内由 (x_0, y_0) 延展至 (x, y) 的连续的可求长曲线 $\mathfrak{c}$，确定出

$$F(x, y) := {}_{\mathfrak{c}}\!\int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} (f_1(\xi, \eta)d\xi + f_2(\xi, \eta)d\eta)$$

而且F不依赖于c的特殊选法．在局部范围内可以如下进行计算

$$F(x,y):=\int_{x_0}^{x}f_1(\xi,y_0)d\xi+\int_{y_0}^{y}f_2(x,\eta)d\eta$$

这对于F的实际确定在大多数情况下已经够用．

恰当的微分方程(有时也称为全微分方程)的特殊意义由如下注记指出，即一个在$x\in\mathfrak{i}$时满足$(x,y(x))\in\mathfrak{G}$的可微函数

$$y:\mathfrak{i}\longrightarrow\boldsymbol{R},$$

当而且仅当它对某个$\gamma\in\boldsymbol{R}$使得

$$F(x,y(x))=\gamma\qquad(x\in\mathfrak{i})$$

成立时才是(1.6.1)的解．

这一点由下式直接可以得出

$$\frac{d}{dx}F(x,y(x))=f_1(x,y(x))+f_2(x,y(x))y'(x).$$

因此现在我们就可以局部地根据关于隐函数的定理来确定解，假若在某点$(\xi,\eta)\in\mathfrak{G}$处

$$F_y(\xi,\eta)=f_2(\xi,\eta)\neq0$$

成立的话．而这正好意味着方程(1.6.1)在(ξ,η)的一个邻域内等价于一个显式的微分方程．

由此得出

(1.6.2)定理： 假设(1.6.1)在$\mathfrak{G}$内是恰当的，$(\xi,\eta)\in\mathfrak{G}$且$f_2(\xi,\eta)\neq0$．则(1.6.1)必有这样一个在某个含$\xi$于其内的开区间$\mathfrak{i}$上确定的解$y$，满足

$$y(\xi)=\eta,$$

且使得对于每一个满足$\xi\in\mathfrak{i}_1$及$y_1(\xi)=\eta$的其他解

$$y_1:\mathfrak{i}_1\longrightarrow\boldsymbol{R}$$

都有

$$y(x)=y_1(x)\qquad(x\in\mathfrak{i}\cap\mathfrak{i}_1).$$

根据隐函数定理，在(ξ, η)邻近

$$F(x, y)=F(\xi, \eta)$$

必有唯一的局部解．于是由前面的注记就得出了结论．□

我们再指出，在 1.1 中讨论过的具分离变量的微分方程显然等价于一个平凡的恰当方程．

如果(1.6.1)不是恰当的，则我们可以试求这样一个满足

$$\mu(x, y) \neq 0 \qquad ((x, y) \in \mathfrak{G})$$

的函数

$$\mu: \mathfrak{G} \longrightarrow \boldsymbol{R} \quad \text{连续},$$

使得(等价的微分方程!)

$$\mu(x, y) f_1(x, y)+\mu(x, y) f_2(x, y) y'=0 \tag{1.6.3}$$

在$\mathfrak{G}$中成为恰当的．这时我们把μ叫做 (1.6.1) 在$\mathfrak{G}$内的积分乘子．

若补充假设

$$\mathfrak{G} \quad \text{单连通},$$

$$f_1, f_2 \text{及 } \mu \quad \text{连续可微},$$

则为了使得(1.6.3)成为恰当的，必需且只需$(\mu f_1, \mu f_2)$具备可积性条件．这一条件现在可写成偏微分方程：

$$f_2(x, y) \mu_x-f_1(x, y) \mu_y=(f_{1y}(x, y)-f_{2x}(x, y)) \mu \tag{1.6.4}$$

由这里我们可以很容易地得出“不含y的”积分乘子存在的必要且充分的条件．

为此，假设$\mathfrak{i}$是$\mathfrak{G}$的x-射影，亦即

$$\mathfrak{i}=\{x \in \boldsymbol{R}: \exists y \in \boldsymbol{R}\,(x, y) \in \mathfrak{G}\}.$$

于是显然必需存在一个连续函数

$$\varphi: \mathfrak{i} \longrightarrow \boldsymbol{R}$$

使当$(x, y) \in \mathfrak{G}$时满足

$$f_{1y}(x, y)-f_{2x}(x, y)=f_2(x, y) \varphi(x).$$

为此我们只需这样来确定一个

$$\mu_0 : \mathrm{i} \longrightarrow \boldsymbol{R} \quad \text{连续可微,}$$

它满足 $\mu_0 \neq 0$ 并且是

$$\mu_0' = \varphi(x)\mu_0$$

的解, 并置

$$\mu(x, y) := \mu_0(x) \qquad ((x, y) \in \mathfrak{G})$$

就可以了.

相仿的结果对于不含 x 的积分乘子也成立.

我们还可以对形如

$$\mu_0(x+y)$$

或者

$$\mu_0(x \cdot y)$$

的乘子获得简单的条件.

在一个开区间 i 内的一阶线性微分方程提供了一个比较简单的类型的例子, 这时我们在

$$\mathfrak{G} = \mathrm{i} \times \boldsymbol{R}$$

中考察如下形状的方程

$$-(f(x)y + g(x)) + 1 \cdot y' = 0.$$

不难知道 ($\xi \in \mathrm{i}$)

$$\mu(x, y) := \exp\left(-\int_\xi^x f(t)dt\right)$$

是一个积分乘子. 由上面定理(1.6.2)中的方法自然地得出在1.3中已知的解的公式.

1.7 Clairaut(克莱洛)微分方程

Clairaut 微分方程是指

(1.7.1) $$y = xy' - g(y').$$

首先此处自然地有:

对于 g 的定义域内的每一个 γ，由

(1.7.2) $$y=\gamma x-g(\gamma) \quad (x\in \boldsymbol{R})$$

定义的函数

$$y:\boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R},$$

都是(1.7.1)的解.

我们称这些解或其限制为"线性解".

我们将在下列假设之下，对(1.7.1)给出一个完备的理论:

假设 g 是在具正的长度的致密区间 j' 上定义的可微函数．并假定 g' 严格单调.

作为直接而重要的有用的推论，我们指出:

根据 Darboux(达布)定理 g' 必取每一个中间的值，因此如果 g' 是单调的，则必然也是连续的．所以 g' 把区间 j' 严格单调且连续地，拓扑地映到一个具正长度的致密区间 j 上:

$$g':\mathrm{j}'\twoheadrightarrow\mathrm{j}.$$

因此必存在(具有相同增减性的)连续逆函数

(1.7.3) $$\varphi:=g'^{-1}:\mathrm{j}\twoheadrightarrow\mathrm{j}'.$$

现在我们首先指出一个非线性的"奇解"的存在性.

(1.7.4) **定理**: 假定

$$h:\mathrm{j}\longrightarrow\boldsymbol{R}$$

是利用(1.7.3)通过

$$h(x):=x\varphi(x)-g(\varphi(x)) \quad (x\in\mathrm{j})$$

定义的．则 h 必连续可微并满足

$$h'=\varphi,$$

因此是(1.7.1)的解.

为了证明我们首先假定 $x_\nu\in\mathrm{j}\,(\nu=1,2)$ 满足 $x_1\neq x_2$．根据 g' 和 φ 的性质必存在一个 $\xi\in(x_1,x_2)$ 满足

$$\frac{g(\varphi(x_2))-g(\varphi(x_1))}{\varphi(x_2)-\varphi(x_1)}=g'(\varphi(\xi))=\xi.$$

利用 h 的定义得出

$$\frac{h(x_2)-h(x_1)}{x_2-x_1}=\varphi(x_2)+\frac{\xi-x_1}{x_2-x_1}(\varphi(x_1)-\varphi(x_2))\in(\varphi(x_1),\varphi(x_2)).$$

但由此据 φ 的连续性即得 h 的可微性和 $h'=\varphi$, 从而得出定理的断言. □

以下假设 i 是第 0 章意义下的任意区间, 并且可微函数 $y: \mathrm{i}\to\boldsymbol{R}$ 是(1. 7. 1)的解.

首先我们指出

(1. 7. 5)引理: 如果 $x_\nu\in\mathrm{i}\,(\nu=1, 2)$, $x_1<x_2$ 而且

$$y'(x_1)=y'(x_2)=:t,$$

成立, 则必有

$$y(x)=xt-g(t)\quad (x\in[x_1, x_2]).$$

证明: 我们考虑由

$$d(x):=y(x)-xt+g(t)$$

定义的可微函数

$$d:[x_1, x_2]\longrightarrow\boldsymbol{R}.$$

由于(1. 7. 1)我们有

$$d(x_1)=d(x_2)=0.$$

要证 $d=0$. 设若相反, 存在某个 $\xi\in(x_1, x_2)$ 使得 $d(\xi)\neq0$, 我们用 (α, β) 表示开集 $d^{-1}(\mathbf{R}\setminus\{0\})$ 的含 ξ 的连通分支. 于是我们当然应有 α, $\beta\in[x_1, x_2]$以及 $d(\alpha)=d(\beta)=0$. 根据 Rolle(罗尔)定理这时必存在一个 $\zeta\in(\alpha, \beta)$ 满足 $d'(\zeta)=0$. 这也就是说 $y'(\zeta)=t$, 因此利用微分方程(1. 7. 1)即可得出与(α, β)的构成相矛盾的 $d(\zeta)=0$. □

由此又可以得出

(1.7.6)引理: y' 是单调的因而也是连续的.

证明: 我们仍对 y' 应用 Darboux 的介值定理. 据此如果y'不是单调的, 则在 i 内必存在

$$x_1<x_{12}<x_2$$

满足

$$y'(x_1)=y'(x_2)\neq y'(x_{12}).$$

但根据引理(1.7.5)这是不可能的. 再利用 Darboux 的定理即由单调性得出连续性. □

现在对于 y 我们进一步指出:

(1.7.7)引理: 当 $x\in i$ 时或者

$$x-g'(y'(x))=0$$

成立, 或者

y 对 x 两次可微而且满足 $y''(x)=0$.

证明: 当 $x, x+h\in i$ 时, 由微分方程(1.7.1)得出

$$y(x+h)-y(x)=hy'(x)+(x+h)(y'(x+h)-y'(x))-$$
$$-g(y'(x+h))+g(y'(x)).$$

由于 g 的可微性及 y' 的单调性和连续性, 我们就可以借助于一个 $0<\theta(h)<1$ 把上式写成

$$y(x+h)-y(x)-hy'(x)=[x+h-g'(y'(x+\theta(h)h))]\times$$
$$\times(y'(x+h)-y'(x)).$$

上式左端当 $h\to0$ 时是 $o(h)$. 方括弧具有极限 $x-g'(y'(x))$. 如果此极限 $\neq0$, 则 $y'(x+h)-y'(x)=o(h)$ 成立, 而由此即得结论. □

因为 $k:=\mathrm{id}_i-g'\circ y'$ 是连续的,[①] 而且根据引理 (1.7.7)y' 在 $k^{-1}(\boldsymbol{R}\setminus\{0\})$的连通分支内为常量, 故 k 在那里是可微的而且$k'(x)$

① 这里 id_i 为由 i 到 i 上的恒等映像, 而 $g'\circ y'$表示 g' 和 y'的合成(Komposition)——译者注.

$=1$, 另一方面因为 $x-g'(y'(x))=0$ 刚好表示 $y'(x)=\varphi(x)$, 而连同原微分方程就意味 $y(x)=h(x)$, 于是容易得出

(1.7.8) **定理**: 我们任意选取

$$\zeta_\nu \in \mathfrak{j}\ (\nu=1,2), \quad \zeta_1 \leq \zeta_2$$

并通过

$$y_{\zeta_1,\zeta_2}(x):=\begin{cases} x\varphi(\zeta_1)-g(\varphi(\zeta_1)) & (-\infty<x\leqslant\zeta_1), \\ h(x) & (x\in[\zeta_1,\zeta_2]), \\ x\varphi(\zeta_2)-g(\varphi(\zeta_2)) & (\zeta_2\leqq x<+\infty) \end{cases}$$

定义

$$y_{\zeta_1,\zeta_2}: \boldsymbol{R}\longrightarrow\boldsymbol{R},$$

则 y_{ζ_1,ζ_2} 是(1.7.1)的解. 由这些解我们可以通过在 $\boldsymbol{R}$ 的子区间上的限制得出(1.7.1)的全部解.

这显然表明, 全部解是由线性解和奇解的限制组成的. 这里线性解表示奇解的切线族.

以下我们将用比定理(1.7.4)更精确一些的分析以结束Clairaut 方程中的函数 h 与奇解之间的联系的讨论.

为此, 我们首先用 $\mathscr{F}$ 表示这样的一切实函数的集合, 它们都在 $\boldsymbol{R}$ 内的具有正长度的 (各自不同的) 致密区间上有定义而且可微, 并且在其中具有严格单调的导函数. 我们把在定理 (1.7.4) 中所给出的对应(Zuordnung) $g\longmapsto h$ 简记为 $h=:Ag$, 那么这个定理就指出:

$$A:\mathscr{F}\longrightarrow\mathscr{F}.$$

现在我们指出:

(1.7.9) **定理**: A 是对合(Involution): $A^2=\mathrm{id}_{\mathscr{F}}$.

证明: 设 $g\in\mathscr{F}$ 且

$$g:\mathfrak{j}'\longrightarrow\boldsymbol{R}.$$

则
$$Ag=h$$

就意味

$$h: \mathrm{j} \longrightarrow \mathbf{R}$$

是

$$(*) \qquad h(x)=x\varphi(x)-g(\varphi(x)) \quad (x\in \mathrm{j}),$$

其中

$$\mathrm{j}=g'(\mathrm{j}'), \quad \varphi=g'^{-1}.$$

于是有(定理(1.7.4))

$$(**) \qquad h'=\varphi.$$

现在我们置

$$(***) \qquad \varphi^{-1}=:\psi,$$

于是利用 $x=\psi(t)$ 由(*)得出

$$g(t)=t\psi(t)-h(\psi(t)) \quad (t\in \mathrm{j}').$$

因为(**)，(***)刚好意味着

$$h'^{-1}=\psi,$$

这就表明

$$g=Ah.$$

这就是结论. □

定理(1.7.9)也可这样说：当且仅当 g 是用 h 构成的 Clairaut 微分方程的奇解时，h 才是用 g 构成的 Clairaut 微分方程的奇解.

1.8 D'Alembert(达朗倍尔)微分方程

D'Alembert 微分方程可记作

$$(1.8.1) \qquad y=f(y')x+g(y').$$

对这个方程的一个完备的理论，比起上面我们对它的特殊情形 Clairaut 方程已给出过的，内容更丰富得多. 那里用过的方法基本上在此处也可用. 这里我们限于若干较特殊的问题的讨论.

直接可以看出，对于 f 及 g 的共同定义域中的一个合乎 $f(\gamma)$

$=\gamma$ 的 γ，由

$$y(x)=x\gamma+g(\gamma)\quad(x\in\boldsymbol{R})$$

定义的函数就提供一个直线型的解.

在下面我们排除了上述直线型的解，并作出更强的假设：

$$\begin{aligned}&\text{区间 } \mathrm{i}'\subset\boldsymbol{R},\\ (1.8.2)\qquad &f,g:\mathrm{i}'\longrightarrow\boldsymbol{R}\quad\text{连续可微},\\ &f(t)\neq t\qquad(t\in\mathrm{i}').\end{aligned}$$

然后我们求全体两次可微的解.

首先，假定在区间 i 内有定义的 y 就是(1.8.1)的一个这样的解，微分原方程得出

$$(*)\qquad (f(y'(x))-y'(x))+(f'(y'(x))x+g'(y'(x)))y''(x)=0$$

因为 $f(t)\neq t$，上式中第一个括号 $\neq 0$，从而第二个括号也不等于零，所以由 y 两次可微立即可知在区间 i 内必有 $y''(x)\neq 0$.

因此

$$y':\mathrm{i}\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\mathrm{i}'_0\subset\mathrm{i}'$$

具有一个连续可微的逆函数

$$y'^{-1}=:\psi:\mathrm{i}'_0\longrightarrow\!\!\!\!\rightarrow\mathrm{i},$$

对它有

$$\psi'(t)=\frac{1}{y''(\psi(t))}\neq 0\qquad(t\in\mathrm{i}'_0).$$

于是显然(*)即可改写为

$$(1.8.3)\qquad \psi'(t)+\frac{f'(t)}{f(t)-t}\psi(t)+\frac{g'(t)}{f(t)-t}=0\quad(t\in\mathrm{i}'_0).$$

这是个一阶线性微分方程(参阅1.3).

反之如果 i'_0 是 i' 的一个子区间且 ψ 为(1.8.3)的一个在 i'_0 上确定而且满足

$$\psi'(t)\neq 0\quad(t\in\mathrm{i}'_0)$$

的解，那么若记 $\psi(\mathrm{i}'_0)=:\mathrm{i}$，则

$$\psi:\mathrm{i}'_0\twoheadrightarrow\mathrm{i}\subset\boldsymbol{R}$$

必有一连续可微的逆函数

$$\psi^{-1}:\mathrm{i}\twoheadrightarrow\mathrm{i}'_0.$$

于是若我们定义

(1.8.4) $\qquad y(x):=f(\psi^{-1}(x))x+g(\psi^{-1}(x))\quad(x\in\mathrm{i})$，

则首先 y 是连续可微的，而且可算出

$$y'(x)=f(\psi^{-1}(x))+(f'(\psi^{-1}(x))x+g'(\psi^{-1}(x)))\psi^{-1\prime}(x).$$

所以

$$y'\circ\psi=f+(f'\psi+g')\frac{1}{\psi'}.$$

但由(1.8.3)此即

$$y'\circ\psi=f-(f-\mathrm{id}_{\mathrm{i}'_0})=\mathrm{id}_{\mathrm{i}'_0}.$$

由此得

$$y'=\psi^{-1}.$$

这表明 y 是两次连续可微解.

用这种方式即可确定满足(1.8.2)的(1.8.1)的全部两次可微(因而两次连续可微)的解，只要我们解出(1.8.3)并且寻找满足 $\psi'(t)\neq0$ 的解区间.

第2章 存在性、唯一性和依赖性定理

在第1章中我们感兴趣的是几种极特殊的一个实函数的一阶微分方程和它们的解的具体确定方法，而在下面关于常微分方程理论的中心章节中将要讨论初值问题的一般的存在性定理及唯一性定理，以及依赖性定理，例如解对初值和“参数”的依赖性定理。

所有这些定理都是对显式微分方程给出的(参看第0章导论)。这里我们指出——正如以下将更确切地阐明的那样——显式的微分方程或方程组都可容易地改写成一阶显式微分方程组，而且只要在记号方法上运用一点技巧，则我们又可更进一步把它们理解为在 $\boldsymbol{R}^n$ 或者 $\boldsymbol{C}^n$ $(n\in N)$ 内取值的一个函数的显式微分方程。

由于引进了现代分析(“泛函分析”)的符号和方法，定理的证明将是简单而且明了的。显然既勿需坐标函数而且大多数情况下也不要求维数的有限性，并且代替 $\boldsymbol{R}^n$ 及 $\boldsymbol{C}^n$，只要具备 Banach 空间的性质就够用了。

我们用以获得存在性定理 (以及大多数其他进一步的命题的基本思想在于：把在Banach 空间中取值的函数的显式微分方程初值问题的解，看成是某个确定的映象的不动点，并且引用具有相应广泛性的不动点定理；这里特别引进了关于(广义)压缩的不动点定理及 Schauder(邵德尔)的不动点定理。

出自这一思想，我们将首先在 2.1 中安排关于(广义)压缩的不动点定理，而后在 2.2—2.11 的各节内提供那些可归结到这些不动点定理的应用范围内的理论。我们将先在(2.2—2.7)中对实域中的微分方程——一般困难得多——的情形进行讨论，然后再

在(2.8—2.11) 内指出相应的方法和结果——大都作了简化——怎样移植到复域中的微分方程上去. 对这种移植我们将限于明显指出那些在推理中需要用到复变函数理论中的专门方法的结果. 其余的结果(特别是 2.4 和 2.6 中的结果)的移植可用明显的方式得出.

第 2.12 节再次专门讨论在有限维 Banach 空间中取值的函数的微分方程. 对于这些方程, 我们将利用事先已引证的Schauder不动点定理——在相应地减弱了的假设下——证明一个关于初值问题的存在性定理. 当然这时并不能同时得出一个唯一性命题. 最后, 第 2.13 节中处理了与 2.12 相联系而有兴趣的唯一性问题. 由于已经有第 2.10 节的结果, 第 2.12 及 2.13 节中所进行的讨论对复域微分方程的移植就不需要了.

2.1 (广义)压缩的不动点定理

我们先适当交待一些有关映象的一般注记.

假设 $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2$ 都是非空集合, 如果 T 是 $\mathfrak{M}_1\times\mathfrak{M}_2$ 中的一个图象(Graph), 亦即如果 $T\subset\mathfrak{M}_1\times\mathfrak{M}_2$ 而且具有性质: 由 $(x, y_1)\in T$ 及 $(x, y_2)\in T$ 恒可得 $y_1=y_2$, 则我们称 T 为由 $\mathfrak{M}_1$ 到 $\mathfrak{M}_2$ 内的映象. 这里我们认为 $T=\varnothing$ 是允许的.

代替 $(x, y)\in T$ 我们也可以记成 $y=Tx$.

T 在 $\mathfrak{M}_1$ 及 $\mathfrak{M}_2$ 上的射影 (Projektionen) 分别表作 $\mathfrak{D}_T$(定义域)和 $\mathfrak{R}_T$(象域:值域). 显然当且仅当 $\mathfrak{D}_T=\varnothing$ 以及 $\mathfrak{R}_T=\varnothing$ 时 $T=\varnothing$.

我们有时也写成

$$T:\mathfrak{D}_T\longrightarrow\mathfrak{M}_2$$

及

$$T:\mathfrak{D}_T\twoheadrightarrow\mathfrak{R}_T.$$

假设$\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3$为非空集合，而且

T 是由$\mathfrak{M}_2$内到$\mathfrak{M}_3$内的映象，

S 是由$\mathfrak{M}_1$内到$\mathfrak{M}_2$内的映象。

则我们定义 $TS=T\circ S$ 为关系积，亦即

$$TS=\{(x, z)\in\mathfrak{M}_1\times\mathfrak{M}_3: \exists y\in\mathfrak{M}_2\,(x, y)\in S\wedge(y, z)\in T\}$$

显然 TS 也是一个映象而且满足

$$\mathfrak{D}_{TS}=\{x\in\mathfrak{M}_1: x\in\mathfrak{D}_S\wedge Sx\in\mathfrak{D}_T\}$$

和

$$(TS)x=T(Sx)\qquad(x\in\mathfrak{D}_{TS}).$$

易证这个合成(Komposition)是结合的(assoziativ)。

现在假设$(\mathfrak{M}_1, \delta_1)$和$(\mathfrak{M}_2, \delta_2)$是度量空间而$T$是由$\mathfrak{M}_1$内到$\mathfrak{M}_2$内的映象，则我们定义$\|T\|\in[0, \infty]$为满足

$$(x, y)\in\mathfrak{D}_T^2\Longrightarrow\delta_2(Tx, Ty)\leqslant\alpha\delta_1(x, y)$$

的$\alpha\in[0, \infty)$的集合的下确界，假定此集合非空的话．否则就定义$\|T\|$为∞．

若$\|T\|<\infty$，则称T是有界的．显然在这种情况下下确界就是极小值，故有

$$\delta_2(Tx, Ty)\leqslant\|T\|\delta_1(x, y).$$

由有界性直接得出一致连续性．

显然$\|T\|=0$当而且仅当$\mathfrak{R}_T$至多包含一点时才成立。

现在我们需要

(2.1.1)引理：假设$(\mathfrak{M}_\nu, \delta_\nu)$是度量空间$(\nu=1, 2, 3)$，

T 是由$\mathfrak{M}_2$内到$\mathfrak{M}_3$内的映象，

S 是由$\mathfrak{M}_1$内到$\mathfrak{M}_2$内的映象。

那么恒有

$$\|TS\|\leqslant\|T\|\cdot\|S\|,$$

这里应作这样的理解：当$0<\alpha\leqslant\infty$时

$$a\cdot\infty=\infty\cdot a=\infty \quad 而 \quad 0\cdot\infty=\infty\cdot 0=0.$$

如果$\|T\|=0$或者$\|S\|=0$,则显然 $\mathfrak{R}_{TS}$ 至多含有一个点,所以$\|TS\|=0$, 即此时定理的结论成立. 在其他使得右边为∞的情形中,结论平凡地成立. 故只需考察

$$0<\|T\|<\infty, \quad 0<\|S\|<\infty.$$

的情形就行了. 对于$x, y\in\mathfrak{D}_{TS}$, 我们计算得

$$\delta_3((TS)x, (TS)y)\leqslant\|T\|\delta_2(Sx, Sy)\leqslant\|T\|\|S\|\delta_1(x, y)$$

于是据$\|TS\|$的定义即得定理的结论. □

其次我们证明

(2.1.2) 引理: 假设$(\mathfrak{M}, \delta)$为度量空间而T是由 $\mathfrak{M}$ 内到 $\mathfrak{M}$ 内的映象,则当且仅当$\|T\|<\infty$成立并且存在一个 $m\in N$ 满足 $\|T^m\|<1$ 时,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|<\infty$$

才成立.

我们称满足上面引理中条件的这样一个映象为一个(广义)压缩映象.

T^0及T^n的意思是明显的:

$$T^0=\mathrm{id}_{\mathfrak{M}}, \quad T^n=TT^{n-1} \quad (n\in N)$$

如果级数和是有限的,则上列命题的成立是平凡的. 为了证明逆命题,对于$n\in N$ 我们选一个 $k\in N$ 使之满足

$$n\leq km-1$$

并利用

$$\nu=km+\mu \quad (k\in N_0; \mu\in\{0, 1, \cdots, m-1\})$$

进行计算,应用结合律及引理(2.1.1)得出

$$\sum_{\nu=0}^{n}\|T^\nu\|\leqslant\sum_{\nu=0}^{km-1}\|T^\nu\|=\sum_{\kappa=0}^{k-1}\left(\sum_{\mu=0}^{m-1}\|T^{\kappa m+\mu}\|\right)$$

$$\leqslant \sum_{\kappa=0}^{k-1}\left(\sum_{\rho=0}^{m-1}\|T^m\|^\kappa \|T\|^\rho\right)$$

$$\leqslant \left(\sum_{\kappa=0}^{\infty}\|T^m\|^\kappa\right)\left(\sum_{\rho=0}^{m-1}\|T\|^\rho\right)$$

$$<\infty. \quad \square$$

至此我们已有可能以比较适宜的方式叙述并证明关于(广义)压缩的不动点定理了。

(2.1.3) 定理:

假设: 如果

$(\mathfrak{M}, \delta)$ 是完备度量空间,

T 是由$\mathfrak{M}$内到$\mathfrak{M}$内的映象,

$\mathfrak{D}_T$ 是闭的,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\|T^n\|<\infty,$$

而且

$$(*) \qquad \bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{D}_{T^n}\neq\varnothing.$$

结论: 必恰好存在一个 $\hat{x}\in\mathfrak{D}_T$ 满足

$$T\hat{x}=\hat{x};$$

而且对于每一个

$$y_0\in\bigcap_{n=1}^{\infty}\mathfrak{D}_{T^n}$$

都有

$$T^n y_0\longrightarrow\hat{x} \qquad (n\to\infty).$$

附注: 若下列条件有一成立, 则(*)必满足:

(a) $\mathfrak{D}_T=\mathfrak{M}$;

(b) 存在 $x_0\in\mathfrak{M}$ 及 $r: 0<r<\infty$, 满足

$$\{x: \delta(x, x_0)\leqslant r\}\subset\mathfrak{D}_T,$$

以及

$$\delta(x_0, Tx_0)\cdot\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|\leqslant r.$$

定理的证明：据(*)可以假定

$$x_0\in\bigcap_{n=0}^{\infty}\mathfrak{D}_{T^n}$$

于是我们置

$$x_n := T^n x_0 \qquad (n\in \boldsymbol{N})$$

并首先证明:

(α) 存在一个 $\hat{x}\in\mathfrak{D}_T$ 满足 $x_n\to\hat{x}$.

为此我们对 $n<m$ 作估计得

$$\begin{aligned}\delta(x_n, x_m)&\leqslant\delta(x_n, x_{n+1})+\delta(x_{n+1}, x_{n+2})+\cdots+\delta(x_{m-1}, x_m)\\&=\delta(T^n x_0, T^n x_1)+\delta(T^{n+1}x_0, T^{n+1}x_1)\\&\quad+\cdots+\delta(T^{m-1}x_0, T^{m-1}x_1)\\&\leqslant\sum_{\nu=n}^{m-1}\|T^\nu\|\cdot\delta(x_0, x_1)\end{aligned}$$

由此知$\{x_n\}$是一Cauchy(柯西)序列. 因为$(\mathfrak{M}, \delta)$为完备空间, 在 $\mathfrak{M}$ 内必存在极限 $\hat{x}$. 又由 $\mathfrak{D}_T$ 的闭性, 此极限必属于 $\mathfrak{D}_T$.

现在我们容易证明

(β) $T\hat{x}=\hat{x}$.

我们注意到, 一方面因$\{Tx_n\}=\{x_{n+1}\}$作为子序列必定以 $\hat{x}$ 为其极限, 而另方面由于$\|T\|<\infty$, 依T的连续性又知它应以$T\hat{x}$为极限.

我们再证明

(γ) $T\hat{y}=\hat{y}\in\mathfrak{D}_T\Longrightarrow\hat{y}=\hat{x}$.

如果选取 m 使满足 $\|T^m\|<1$, 则由 $T^m\hat{y}=\hat{y}, T^m\hat{x}=\hat{x}$ 即可根据

$$\delta(\hat{x}, \hat{y}) \leqslant \|T^m\| \delta(\hat{x}, \hat{y})$$

而得证.

由于选取 $x_0 \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathfrak{D}_{T^n}$ 的任意性及(γ), 即得出定理中全部的结论.

附注的证明: 情形 (a) 是平凡的. 对于(b), 我们用归纳法证明

$$x_0 \in \mathfrak{D}_{T^n} \qquad (n \in N).$$

此关系式当 $n=1$ 显然成立. 若对某个 $k \in N$ 已有

$$x_0 \in \mathfrak{D}_{T^k}$$

则进行估计得出

$$\delta(x_0, T^k x_0) \leqslant \delta(x_0, Tx_0) + \delta(Tx_0, T^2 x_0) + \cdots + \delta(T^{k-1}x_0, T^k x_0)$$

$$\leqslant \sum_{\kappa=0}^{k-1} \|T^\kappa\| \cdot \delta(x_0, Tx_0) \leqslant r.$$

从而有 $T^k x_0 \in \mathfrak{D}_T$, 所以

$$x_0 \in \mathfrak{D}_{T^{k+1}}.$$

2.2 取值于 Banach (巴拿赫)空间的连续函数

为了讨论在Banach 空间中取值的函数之常微分方程作准备, 我们在下面先记述一些有关在 Banach 空间内取值的单实变元函数的基本事项. 有关的定义和证明将认为是已熟知的.

首先假设 $\mathfrak{i}$ 为 R 内的一个具有正长度的区间, 而 $\mathfrak{R}$ 是 R 或 C 之上的一个 Banach 空间. 其次我们用 $\mathscr{C}_0(\mathfrak{i}, \mathfrak{R})$ 表示一切在 $\mathfrak{i}$ 上定义且取值于 $\mathfrak{R}$ 的连续函数的集合, 并相应地用 $\mathscr{C}_1(\mathfrak{i}, \mathfrak{R})$ 表示一切 $\mathfrak{R}$-值连续可微函数的集合.

对于 $y \in \mathscr{C}_0(\mathfrak{i}, \mathfrak{R})$ 及 $\alpha \in \mathfrak{i}, \beta \in \mathfrak{i}$, 假若积分

$$\int_\alpha^\beta y(x)dx \in \mathfrak{R}$$

象通常对规则函数(Regelfunktionen)的积分一样地加以定义(保持关于相等积分限和交换积分限的通常约定)．那么除了对 y 的线性性质外，我们还有积分估计式

(2.2.1) $$\left|\int_\alpha^\beta y(x)dx\right| \leqslant \left|\int_\alpha^\beta |y(x)|dx\right| \leqslant \max_{x\in[\alpha,\beta]} |y(x)|\cdot|\beta-\alpha|.$$

积分和微分之间的基本关系由以下定理提供

(2.2.2) **定理：** 设 $\mathfrak{i}$ 为 $\boldsymbol{R}$ 中的一个区间，$g\in\mathscr{C}_0(\mathfrak{i},\mathfrak{R})$，$b\in\mathfrak{R}$，$a\in\mathfrak{i}$，而 h 是在 $\mathfrak{i}$ 上定义的 $\mathfrak{R}$-值函数，则下列二命题等价：

(1) 当 $x\in\mathfrak{i}$ 时有 $h(x)=b+\int_a^x g(t)dt$,

(2) 存在 $h\in\mathscr{C}_1(\mathfrak{i},\mathfrak{R})$ 使得：$h'=g$, $h(a)=b$.

从现在起下面总假定 $\mathfrak{i}$ 是 $\boldsymbol{R}$ 内的一个致密区间，于是我们就能象通常那样用逐点的方式在 $\mathscr{C}_0(\mathfrak{i},\mathfrak{R})$ 内定义"+"运算及数乘(Multiplikation mit Skalaren)，并且对于 $y\in\mathscr{C}_0(\mathfrak{i},\mathfrak{R})$ 规定

(2.2.3) $$|y|:=\max_{x\in\mathfrak{i}}|y(x)|,$$

于是即有：

(2.2.4) **定理：** $(\mathscr{C}_0(\mathfrak{i},\mathfrak{R}),+,\cdot,|\,|)$ 是Banach 空间．

对此我们提醒一下，在这里完备性刚好对应于周知的关于连续函数之一致极限的 Weierstrass(外尔斯特拉斯)定理．

如果令

$$\delta(y,z):=|y-z|=\max_{x\in\mathfrak{i}}|y(x)-z(x)|,$$

那么

$$(\mathscr{C}_0(\mathfrak{i},\mathfrak{R}),\delta)$$

就是一个完备的度量空间．

2.3 Banach 空间中的实微分方程

下面将 2.1 节中准备好的(广义)压缩的不动点定理，应用于按照 2.2 节中记法给出的微分方程初值问题

$$y'=f(x,y),\quad y(a)=b.$$

显然这里 f 应当在 $\mathbf{R}\times\mathfrak{R}$ 内部适当地确定并且取值于 $\mathfrak{R}$.

下面主要定理的假设是这样选定的，首先是使得我们能够借助于定理(2.2.2)将此初值问题改写成积分形式，并且当把后者看成不动点方程时，使得定理(2.1.3)中诸条件都成立.

(2.3.1)**主要定理:**

[假设]:

(0) 设 $\mathfrak{R}$ 为 Banach 空间，$\mathfrak{i}$ 为 $\mathbf{R}$ 中一致密区间，$a\in\mathfrak{i}$，

$$A:=\max_{x\in\mathfrak{i}}|x-a|\ (>0),\ b\in\mathfrak{R},\ g\in\mathscr{C}_0(\mathfrak{i},\mathfrak{R}),\ 0<B\leqslant\infty,$$

并且我们记

$$R:=\{(x,y)\in\mathbf{R}\times\mathfrak{R}:x\in\mathfrak{i},\ |y-g(x)|\leqslant B\}.$$

(1) 设 f 是由 R 到 $\mathfrak{R}$ 内的连续映象，并记

$$M:=\sup_{(x,y)\in R}|f(x,y)|.$$

(2) 存在非负实数 N，使当 $(x,y_1)\in R$，$(x,y_2)\in R$ 时恒有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant N|y_1-y_2|$$

(3) 或者

(3a) $$AM+\max_{x\in\mathfrak{i}}|g(x)-b|\leqslant B,$$

或者

(3b) $$\max_{x\in\mathfrak{i}}\left|b+\int_a^x f(t,g(t))\,dt-g(x)\right|\cdot\exp(NA)\leqslant B.$$

[结论]: 刚好存在一个 $y\in\mathscr{C}_1(\mathfrak{i},\mathfrak{R})$ 满足

$$
\begin{aligned}
&y(a)=b,\\
&(x, y(x))\in R, \quad (x\in\mathrm{i})\\
&y'(x)=f(x, y(x)).
\end{aligned}
$$

证明：根据对f的连续性假设，本定理的结论依照定理(2.2.2)等价于满足下面两式的$y\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \mathfrak{R})$的唯一存在性：

$$
\left.\begin{aligned}
&(x, y(x))\in R\\
&y(x)=b+\int_a^x f(t, y(t))\,dt
\end{aligned}\right\} \quad (x\in\mathrm{i})
$$

为了能够应用不动点定理 (2.1.3)，我们把下面二空间等同起来

$$(\mathfrak{M}, \delta)=(\mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \mathfrak{R}), \delta)$$

根据 2.2 节，这是个完备度量空间．其次我们选取

$$\mathfrak{D}_T=\{y\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \mathfrak{R}):\delta(y, g)\leqslant B\};$$

于是$y\in\mathfrak{D}_T$恰好意味着当$x\in\mathrm{i}$时$(x, y(x))\in R$．显然$\mathfrak{D}_T$是$(\mathfrak{M}, \delta)$中的非空闭子集．

现在对于$y\in\mathfrak{D}_T$，我们定义Ty为

$$(Ty)(x):=b+\int_a^x f(t, y(t))\,dt \qquad (x\in\mathrm{i}).$$

这是可行的，因为被积式由于$(t, y(t))\in R$是有意义的而且基于f和$y(t\in\mathrm{i})$的连续性它也是连续的．根据定理(2.2.2)即应有

$$Ty\in\mathscr{C}_1(\mathrm{i}, \mathfrak{R})\subset\mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \mathfrak{R}).$$

故得

$$T:\mathfrak{D}_T\longrightarrow\mathfrak{M}.$$

现在显然还需要一个对于$\|T^n\|(n\in N)$的估计．为此我们首先用对$n\in N_0$的归纳推理证明下列中间结论：

对于$y_1, y_2\in\mathfrak{D}_{T^n}$，当$x\in\mathrm{i}$时有

$$|(T^n y_1)(x)-(T^n y_2)(x)|\leqslant\frac{N^n|x-a|^n}{n!}\delta(y_1, y_2).$$

此式在 $n=0$ 时成立. 为了把结论由 n 推到 $n+1$, 我们利用 $T^{n+1}=TT^n$ 对 $y_1, y_2\in\mathfrak{D}_{T^{n+1}}$ 进行计算

$$\begin{aligned}&|(TT^n y_1)(x)-(TT^n y_2)(x)|\\=&\left|\int_a^x (f(t,(T^n y_1)(t))-f(t,(T^n y_2)(t)))dt\right|\\&\leqslant\left|\int_a^x |f(t,(T^n y_1)(t))-f(t,(T^n y_2)(t))|dt\right|.\end{aligned}$$

现在利用假设条件(2)及归纳假设继续加以估计:

$$\begin{aligned}&\leqslant N\left|\int_a^x |(T^n y_1)(t)-(T^n y_2)(t)|dt\right|\leqslant\\&\leqslant N^{n+1}\left|\int_a^x \frac{|t-a|^n}{n!}dt\right|\cdot\delta(y_1,y_2)\leqslant\\&\leqslant\frac{N^{n+1}|x-a|^{n+1}}{(n+1)!}\delta(y_1,y_2),\end{aligned}$$

这就是要证的中间结论.

我们在中间结论中对 $x\in i$ 取极大值得

$$\delta(T^n y_1, T^n y_2)\leqslant\frac{(NA)^n}{n!}\delta(y_1,y_2)\qquad(y_1,y_2\in\mathfrak{D}_{T^n})$$

而由此即得

$$\|T^n\|\leqslant\frac{(NA)^n}{n!}$$

从而

$$(\times)\qquad\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|\leqslant\exp(NA)<\infty.$$

即压缩(不动点)定理中又一个条件被满足.

剩下的是定理(2.1.3)中假设条件(*)的证明, 对它我们分别就假定(3a)或(3b)加以证明.

在情形(3a)中, 对 $y\in\mathfrak{D}_T$ 可得估计:

$$|(Ty)(x)-g(x)|\leqslant\left|\int_a^x f(t,y(t))dt\right|+|g(x)-b|\leqslant$$

$$\leqslant M|x-a|+|g(x)-b|$$
$$\leqslant MA+\max_{x\in i}|g(x)-b|\leqslant B,$$

即 $T\mathfrak{D}_T\subset\mathfrak{D}_T$，故得

$$\mathfrak{D}_{T^n}=\mathfrak{D}_T\quad(n\in N).$$

对于情形(3b)，我们验证定理(2.1.3)的附注中保证(*)成立之充分条件(b)．命 $g=x_0$，$B=r$，因为(3b)可改写为如下形式

$$\delta(g,Tg)\exp(NA)\leqslant B,$$

利用(×)式刚好得出所指的条件(b)．

2.4 高阶微分方程及微分方程组

以下为了使主要定理(2.3.1)的意义更加具体化，我们首先由 Banach 空间倒退回到 R^n 的情形中去，并且对于一阶的实微分方程组

$$\eta'_\nu=f_\nu(x,\eta_1,\cdots,\eta_n)\qquad(\nu=1,\cdots,n)$$

详细地记述主要定理的一个特别情形．

为此我们选取特别情形

$$g(x):=b\qquad(x\in i)$$

和条件(3a)．

对于 R^n，假定模(Norm)规定为

$$|(\alpha_\nu)_{\nu=1}^n|:=\max_{\nu=1}^n|\alpha_\nu|$$

模的这种选择自然是任意的．但我们提醒一下，在 R^n 内一切的模都是等价的．另外的模仅仅导致不同的估计式和存在性区间．

我们的定理此时可叙述为

(2.4.1) **定理：**

[假设]：

(0) 设 i 为 $\boldsymbol{R}$ 中一致密区间，

$a\in\mathrm{i}, A:=\max\limits_{x\in\mathrm{i}}|x-a|\,(>0)$,

$\beta_\nu\in\boldsymbol{R}\,(\nu=1,2,\cdots,n)$, $0<B\leqslant\infty$

且

$$R:=\{z=(\zeta_\nu)_{\nu=0}^{n}\in\boldsymbol{R}^{n+1}:\zeta_0\in\mathrm{i},\max_{\nu=1}^{n}|\zeta_\nu-\beta_\nu|\leqslant B\}.$$

(1) 当 $\nu=1,2,\cdots,n$, 设 f_ν 是在 R 中定义的连续实函数；并记

$$M_\nu:=\sup_{z\in R}|f_\nu(z)|.$$

(2) 当 $\nu=1,2,\cdots,n$ 时存在满足 $0\leqslant N_\nu<\infty$ 的 N_ν, 使当 $(x,\zeta_1^{(1)},\cdots,\zeta_n^{(1)})\in R$ 和 $(x,\zeta_1^{(2)},\cdots,\zeta_n^{(2)})\in R$ 时恒有

$$|f_\nu(x,\zeta_1^{(1)},\cdots,\zeta_n^{(1)})-f_\nu(x,\zeta_1^{(2)},\cdots,\zeta_n^{(2)})|$$
$$\leqslant N_\nu\max_{\mu=1}^{n}|\zeta_\mu^{(1)}-\zeta_\mu^{(2)}|.$$

(3) 对 $M=\max\limits_{\nu=1}^{n}M_\nu$ 有

$$AM\leqslant B.$$

[结论]：一意地存在 n 个在 i 上确定的连续可微函数 $\eta_\nu(\nu=1,2,\cdots,n)$ 满足

$$\eta_\nu(a)=\beta_\nu,$$

$$\left.\begin{array}{l}|\eta_\nu(x)-\beta_\nu|\leqslant B,\\ \eta_\nu'(x)=f_\nu(x,\eta_1(x),\cdots,\eta_n(x))\end{array}\right\}(x\in\mathrm{i})\qquad(\nu=1,2,\cdots,n)$$

现在我们进一步指出，怎样才能把一个关于一个实函数的 n 阶显式微分方程理解成 $\boldsymbol{R}^n$ 中的 1 阶显式方程组。

若我们有微分方程

$$\eta^{(n)}=\varphi(x,\eta,\eta',\cdots,\eta^{(n-1)}),$$

那么借助于

$$\eta_\nu=\eta^{(\nu-1)}\qquad(\nu=1,2,\cdots,n)$$

它就等价于微分方程组

$$\eta_1' = \eta_2,$$
$$\eta_2' = \eta_3,$$
$$\vdots$$
$$\eta_{n-1}' = \eta_n,$$
$$\eta_n' = \varphi(x, \eta_1, \cdots, \eta_n).$$

此时直接可以看出，对于 φ 应该作什么样的假设以保证定理(2.4.1)中假设被满足.

我们除(0)外还要求 φ 是 R 中的一个实连续函数，并且令

$$M_\nu = |\beta_{\nu+1}| + B \quad (\nu = 1, 2, \cdots, n-1),$$
$$M_n = \sup_{z \in R} |\varphi(z)|.$$

于是对相应的 f. 假设(1)是已给的. 关于(2)则应满足一个对应的要求

$$|\varphi(x, \zeta_1^{(1)}, \cdots, \zeta_n^{(1)}) - \varphi(x, \zeta_1^{(2)}, \cdots, \zeta_n^{(2)})|$$
$$\leqslant N_n \max_{\nu=1}^{n} |\zeta_\nu^{(1)} - \zeta_\nu^{(2)}|,$$

这里 $0 \leqslant N_n < \infty$. 当 $\nu = 1, 2, \cdots, n-1$ 时可选

$$N_\nu = 1.$$

最后并要求满足(3).

至于主要定理(2.4.1)的结论对于 n 阶微分方程意味着什么，是直接可以看出的.

高阶显式微分方程组也可以完全相同地处理，从而化归1阶的方程组. 我们用下例来说明这一点

$$u'' = \varphi(x, u, u', v, v', v''),$$
$$v''' = \psi(x, u, u', v, v', v'').$$

此方程组借助于

$$\eta_1 = u,$$
$$\eta_2 = u',$$

$$\eta_3 = v,$$
$$\eta_4 = v',$$
$$\eta_5 = v'',$$

就等价于

$$\begin{aligned}
\eta_1' &= \eta_2 &&,\\
\eta_2' &= \varphi(x, \eta_1, \cdots, \eta_5),\\
\eta_3' &= \eta_4 &&,\\
\eta_4' &= \eta_5 &&,\\
\eta_5' &= \psi(x, \eta_1, \cdots, \eta_5).
\end{aligned}$$

因而此处自然的初值问题是在一点 a 处事先给定 u, u', v, v', v'' 的值.

我们用相仿的方法可以处理更普遍的关于在 Banach 空间内取值的函数的高阶微分方程,以及在不同的Banach 空间中取值的函数的高阶微分方程组, 并把它们化归 1 阶的组. 我们由过渡到积-Banach 空间(Produkt-(B)-Raum)的方法, 即可得出对应于主要定理的结论.

2.5 关于 Lipschitz(李普西兹)条件

尽管主要定理 (2.3.1) 中一切其他的假设在大多数情况下易于验证或者在适当程度上被满足, 但其中的 Lipschitz 条件(2)则多少是有点疑问的.

下面我们将对于(2)的成立,给出一个在许多情形下可用的充分条件.

(2.5.1)引理: 设已给主要定理(2.3.1)中的假设(0).

其次设 f 在 R 内对第二个变元 y 有偏导数而且偏导数在 R 中有界:

$$|f_y(x, y)| \leqslant N < \infty \quad ((x, y) \in R).$$

则 Lipschitz 条件(2)成立.

我们注意,这里f_y是一个在R中有定义的映象,取值于由$\mathfrak{R}$到其自身内的有界线性映象之中;对上面的模也应作相应的理解.

为了证明,我们注意对每个$x \in \mathfrak{i}$

$$\{y: |y-g(x)| \leqslant B\}$$

都是凸的. 所以对于此集内的y_1及y_2, 显然在它们的连结线段上必存在一个y_{12}满足

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)| \leqslant |f_y(x, y_{12})| \, |y_1-y_2|.$$

由此即得结论. □

如果$\mathfrak{R}$是一个有限维空间,$B<\infty$而且f_y在R中连续,这个引理是特别方便有用的. 这时因R是致密的,所以f_y在R中有界.

2.6 误差估计,亏量估计,依赖性定理

下面我们继续第2.3节中的讨论,并恒假定主要定理中的假设(0),(1), (2)和(3b)是已给的. 我们的目标是推导误差估计及有关的特殊命题.

这个推导以如下两个简单注记为依据:

1. 当缩小$\mathfrak{i} \ni a$因而R也缩小时,假设(0),(1), (2)及(3b)都保持成立, 但是A, M和N可能会缩小.

2. 如果我们把 (3b) 的左端选作 (尽可能缩小的) B则假设(0),(1),(2),(3b)保持有效. 这时至多是R, M, N可能会缩小.

现在假设$x \in \mathfrak{i}$.

然后考察包含a及x的最小致密区间$[a, x]=[x, a]$, 并依据注记2行事.

由此直接得出估计式

(2.6.1) $$|y(x)-g(x)| \leqslant \max_{t \in [a, x]} |g(t)-b$$

$$-\int_a^t f(\tau, g(\tau))d\tau|.\exp(N|x-a|). \qquad (x\in \mathrm{i})$$

在 g 近似地满足和初值问题等价的积分方程的情况下，我们可以把这个式子理解为误差估计(Fehlerabschätzung)，它指出了精确解 y 对 g 的偏离.

我们对 $g\in\mathscr{C}_1(\mathrm{i},\mathfrak{R})$ 成立的特殊情况，就此公式作更进一步的说明. 在这种情况下我们必有

$$g'(x)=f(x,g(x))+d_1(x) \quad (x\in \mathrm{i}),$$
$$g(a)=b+d_2$$

其中 $d_1\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i},\mathfrak{R})$，$d_2\in\mathfrak{R}$ 是已确定的. 我们可以把它们叫做 g 对于初值问题的亏量(Defekte). 于是从 (2.6.1) 直接可得亏量估计

(2.6.2) $$|y(x)-g(x)|\leqslant\max_{t\in[a,x]}|d_2+\int_a^t d_1(\tau)d\tau|.\exp(N|x-a|) \quad (x\in \mathrm{i})$$

如果把 g 理解为一个"邻近的"微分方程在"邻近的"初值条件下的解，我们还可以作出更进一步的解释.

为此我们记

$$G:=\{(x,g(x)): x\in \mathrm{i}\};$$

它是 R 的一个致密子集. 然后我们附加假设

(2.6.3) $$f_1: G\longrightarrow\mathfrak{R} \text{ 连续}$$
$$a_1\in \mathrm{i}, \quad b_1\in\mathfrak{R}.$$

这里我们有

(2.6.4) $$g'(x)=f_1(x,g(x)) \quad (x\in \mathrm{i})$$
$$g(a_1)=b_1.$$

我们利用

$$P:=\max_{z\in G}|f(z)|,$$

$$(2.6.5)\qquad P_1 := \max_{z\in G} |f_1(z)|,$$

$$Q := \max_{z\in G} |f(z)-f_1(z)|,$$

就可借助于

$$d_1(x)=f_1(x,g(x))-f(x,g(x)) \qquad (x\in i)$$

及

$$d_2=b_1-b+\int_{a_1}^{a} f_1(t,g(t))\,dt$$

对(2.6.2)右端也作出估计．我们得出

$$(2.6.6)\qquad |y(x)-g(x)|\leqslant(|b_1-b|+P_1|a_1-a|+Q|x-a|)\exp(N|x-a|) \qquad (x\in i).$$

这里还可以用

$$(2.6.7)\qquad P_1\leqslant P+Q$$

使之更粗略一些．

我们可以把公式(2.6.6)看作关于解对初值以及引起由 f_1 到 f 的改变的——“参数”的依赖性的命题．

最后对于

$$f_1=f|_G$$

的特殊情形即假定 g 是同一微分方程在其他初值下的解．则(2.6.6)导致

$$(2.6.8)\qquad |y(x)-g(x)|\leqslant(|b_1-b|+P|a_1-a|)\exp(N|x-a|) \qquad (x\in i).$$

我们指出关于这方面还成立

$$(2.6.9)\qquad P\leqslant M\leqslant P+NB.$$

2.7 大范围中的解

下面我们假设：

$\mathfrak{R}$ 为 Banach 空间，

$\mathfrak{G}$ 为 $\mathbf{R}\times\mathfrak{R}$ 中的域;

f 是由 $\mathfrak{G}$ 到 $\mathfrak{R}$ 内的连续映象

且满足一个"局部 Lip 条件".

这最后一个条件的意义是:

对每一个点 $(a, b)\in\mathfrak{G}$, 必存在这样一些满足

$$0<A<\infty, 0<B<\infty,\ 0\leqslant N<\infty$$

的常数 A, B, N, 使得只要

$$R:=\{x: |x-a|\leqslant A\}\times\{y: |y-b|\leqslant B\}\subset\mathfrak{G}$$

则对变动的 $(x, y_\nu)\in R\ (\nu=1, 2)$ 总有

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant N|y_1-y_2|.$$

我们的目的是"在大范围内"讨论微分方程

(2.7.1) $$y'=f(x, y)$$

的解, 亦即获得并研究极大存在性区间.

为此我们首先记述几个简单的预备事项.

(2.7.2) f在它满足局部 Lip 条件的每个矩形上必有界.

设若 $(a, b)\in\mathfrak{G}$ 且 A, B, N 是按照局部 Lip 条件选取的. 那么如果令

$$P:=\max\{|f(x, b)|: |x-a|\leqslant A\},$$

则由(2.6.9)我们有: 当 $|x-a|\leqslant A$ 及 $|y-b|\leqslant B$ 时

$$|f(x, y)|\leqslant P+NB<\infty.\ \square$$

(2.7.3) 对于初值问题的局部存在性及唯一性成立.

由(2.7.2), 即可假设——有时需要把 A 缩小——, 对于 $(a, b)\in\mathfrak{G}$ 和所属的 A, B, N, 主要定理的全部假设(0), (1), (2), (3a), 可借助于 $g(x)=b\ (x\in\mathfrak{i})$ 及 $\mathfrak{i}:=[a-A, a+A]$, 以及 f 在相应矩形上的限制而满足. $\square$

下面的考虑是为了把局部 Lip 条件推广到全局.

(2.7.4) 假定

致密区间 $\mathfrak{i}\subset\boldsymbol{R}$,

$g\in\mathscr{C}_0(\mathfrak{i},\mathfrak{R})$,

$(x,g(x))\in\mathfrak{G}$ 当 $x\in\mathfrak{i}$,

则必存在这样的 B 和 N 满足

$$0<B<\infty,\quad 0\leqslant N<\infty$$

并使得

(i) $R:=\{(x,y):x\in\mathfrak{i},\ |y-g(x)|\leqslant B\}\subset\mathfrak{G}$

及

(ii) 当 $(x,y_\nu)\in R\ (\nu=1,\ 2)$ 时总有

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant N|y_1-y_2|.$$

证明：对于每一个 $x\in\mathfrak{i}$ 我们对 $(x,\ g(x))\in\mathfrak{G}$ 依照局部 Lip 条件选取常数 A_x, B_x, N_x, 并附带地要求 A_x 是如此地小, 使得

$$|g(t)-g(x)|\leqslant\frac{1}{2}B_x\quad(t\in\mathfrak{i},\ |t-x|\leqslant A_x)$$

成立；由于 g 的连续性这是可以办到的.

因为

$$\mathfrak{i}\subset\bigcup_{x\in\mathfrak{i}}(x-A_x,x+A_x)$$

故必存在 $x_1,x_2,\cdots,x_n\in\mathfrak{i}$ 满足

$$\mathfrak{i}\subset\bigcup_{\nu=1}^{n}(x_\nu-A_{x_\nu},\ x_\nu+A_{x_\nu}).$$

我们证明这时

$$B:=\frac{1}{2}\min_{\nu=1}^{n}B_{x_\nu},$$

$$N:=\max_{\nu=1}^{n}N_{x_\nu}.$$

就具有所希望的性质. 首先设 $(x,\ y)\in R$. 那么必存在一个 $\nu\in\{1,2,\cdots,n\}$ 满足

$$|x-x_\nu|<A_{x_\nu}.$$

于是我们有

$$|y-g(x)|\leqslant\frac{1}{2}B_{x_\nu}$$

及

$$|g(x)-g(x_\nu)|\leqslant\frac{1}{2}B_{x_\nu},$$

所以

$$|y-g(x_\nu)|\leqslant B_{x_\nu}.$$

因此(x,y)位于对$(x_\nu,g(x_\nu))$的局部 Lip 条件的"矩形"中，因而位于$\mathfrak{G}$之内．这就是(i)．关于(ii)，对于$x\in\mathfrak{i}$我们考察如上的两个y_1,y_2并且对$(x_\nu,g(x_\nu))$应用局部 Lip 条件，它给出

$$|f(x,y_1)-f(x,y_2)|\leqslant N_{x_\nu}|y_1-y_2|\leqslant N|y_1-y_2|.$$

故(ii)也成立．□

(2.7.4)显然说明，在上述的R内除了(3)之外主要定理的一切假设都是满足的．

现在我们再经历一次在(2.6.8)中进行过的讨论，就可以得出关于对初值的全局依赖性的下述命题．

(2.7.5) 假定

致密区间$\mathfrak{i}\subset\boldsymbol{R}$, $a_1\in\mathfrak{i}$, $b_1\in\mathfrak{R}$,

$g:\mathfrak{i}\to\mathfrak{R}$是(2.7.1)满足 $g(a_1)=b_1$ 的解，

且B,N是按照(2.7.4)对g选定的．其次设

$$P:=\max_{x\in\mathfrak{i}}|f(x,g(x))|.$$

并设$a\in\mathfrak{i}$, $b\in\mathfrak{R}$且我们有

$$(|b-b_1|+P|a-a_1|)\exp(N\max_{x\in\mathfrak{i}}|x-a|)\leqslant B,$$

则(2.7.1)必有唯一的满足 $y(a)=b$ 的解

$$y:\mathfrak{i}\longrightarrow\mathfrak{R}.$$

对于它(2.6.8)成立.

现在我们转向原来的目标，即得出并研究带有极大存在性区间的解.

设$(a,b)\in\mathfrak{G}$.

我们用$\mathfrak{K}=\mathfrak{K}(a,b)$表示一切这样的开区间$\mathrm{j}\subset\boldsymbol{R}$的集合，即$a\in\mathrm{j}$成立并且(2.7.1)有一个满足

$$y(a)=b.$$

的解

$$y:\mathrm{j}\longrightarrow\mathfrak{R}$$

由(2.7.3)得

(α) $$\mathfrak{K}(a,b)\neq\varnothing.$$

现在我们首先证明

(β) 设$\mathrm{j}_1,\mathrm{j}_2\in\mathfrak{K}(a,b)$且$y_1$, y_2是所属的解，则必有

$$y_1(x)=y_2(x)\quad(x\in\mathrm{j}_1\cap\mathrm{j}_2).$$

不然的话，设若集合

$$\{x\in\mathrm{j}_1\cap\mathrm{j}_2:y_1(x)=y_2(x)\}$$

是$\mathrm{j}_1\cap\mathrm{j}_2$的一个真闭子集合，则它必在$\mathrm{j}_1\cap\mathrm{j}_2$内有一边界点. 我们把(2.7.3)中的局部唯一性命题用于此边界点，即得出一个矛盾. □

由(β)自然立即得出了解y在每个$\mathrm{j}\in\mathfrak{K}$上的唯一性.

现在我们来证明

(γ) $$\mathrm{j}_0(a,b):=\bigcup_{\mathrm{j}\in\mathfrak{K}(a,b)}\mathrm{j}\in\mathfrak{K}(a,b).$$

首先j_0必是开集. 其次j_0是一个含a的区间；因为如果$x\in\mathrm{j}_0$，则存在一个$\mathrm{j}\in\mathfrak{K}$满足$a\in\mathrm{j}$, $x\in\mathrm{j}$，使得$[a,x]\subset\mathrm{j}\subset\mathrm{j}_0$成立. 最后可在$\mathrm{j}_0$上定义出初值问题的一个解$y_0$. 这是因为若$x\in\mathrm{j}_0$，我们可选取$\mathrm{j}\in\mathfrak{K}$使之满足$x\in\mathrm{j}$，并选取$\mathrm{j}$所对应的解$y$，然后置

$$y_0(x):=y(x).$$

由于(β)，这一定义和 j 及 y 的选取是无关的，因而显然提供一个解. □

因此我们可以总结出：

(2.7.6) **定理**：对于$(a, b)\in\mathfrak{G}$，(2.7.1)必恰好有一个在某个满足$a\in \mathrm{j}_0$的开区间j_0上确定并且满足 $y_0(a)=b$ 的解，使得(2.7.1)的每一个其他的在满足 $a\in\mathrm{j}$ 的开区间 j 上有定义，而且满足$y(a)=b$ 的解 y，都是 y_0 的限制(Einschränkung)：

$$\mathrm{j}\subset \mathrm{j}_0,$$

$$y(x)=y_0(x) \qquad (x\in \mathrm{j}).$$

最后我们更确切地谈谈关于经过$(a, b)\in\mathfrak{G}$并具有极大存在性区间j_0的解的边界性态.

(2.7.7) **定理**：设 $\mathrm{j}_0=(\alpha, \beta)$. 如果 $\beta<\infty$ 或 $\alpha>-\infty$ 并且有 $x_n\in \mathrm{j}_0(n\in N)$分别满足 $x_n\to\beta$ 或 $x_n\to\alpha$ 以及

$$y_0(x_n)\to c\in\mathfrak{R} \qquad (n\to\infty),$$

则(β, c)或(α, c)必是 $\mathfrak{G}$ 的边界点.

我们就第一种情形进行证明. 显然只需证明

$$(\beta, c)\notin\mathfrak{G}$$

就够了. 设若$(\beta, c)\in\mathfrak{G}$，则依照(2.7.3)知(2.7.1)必有一个经过(β, c)并且在一个以β为内点的致密区间 j_1 上确定的解 y_1. 对于 y_1 及 j_1 我们又可按照(2.7.4)来选取 B, N和R. 因为

$$(x_n, y_0(x_n))\longrightarrow(\beta, c) \quad (n\to\infty),$$

必有一个 $n\in N$ 满足

$$(|y_0(x_n)-c|+P|x_n-\beta|)\exp(N\max_{x\in \mathrm{j}_1}|x-x_n|)\leqslant B$$

及

$$P:=\max_{x\in \mathrm{j}_1}|f(x, y_1(x))|.$$

这时根据(2.7.5)，(2.7.1)必有经过$(x_n, y_0(x_n))$且在整个 $\mathfrak{j}_1$ 上定义的一个解．但是对于初值$(x_n, y_0(x_n))$的极大存在性区间显然是 $\mathfrak{j}_0$，定理(2.7.6)连同$\mathring{\mathfrak{j}}_1 \subset \mathfrak{j}_0$就给出矛盾$\beta \in \mathfrak{j}_0$．□

以上定理特别指明，这样的极大存在性区间在左、或右两侧都不能是闭的．所以 2.7.1 的每一个在任意的区间上定义的，经过(a, b)的解，都可以通过对极大的解 y_0 的限制而得到．①

我们可粗略地说：极大的解在$\mathfrak{G}$内由边界延展到边界．

2.8 在 Banach 空间中取值的全纯函数

以下我们的目标是把主要定理(2.3.1)向复域中移植，亦即移置于关于在某个$\boldsymbol{C}$上的 Banach 空间中取值的单复变元全纯函数的微分方程的情形．为此这里我们首先对这种函数预先指出一些与 2.2 节相似的基本事实．我们假定经典的单复变函数理论是已知的．

首先和经典的情形中完全相仿，我们将称取值于$\boldsymbol{C}$上的一个 Banach 空间，且在某个域$\Omega \subset \mathbf{C}$中定义的函数 y 是全纯的，假若 y 在每一个点 $x_0 \in \Omega$ 处都复-可微的话，亦即如果下面的极限恒存在：

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ x \in \Omega}} \frac{1}{x - x_0}(y(x) - y(x_0)) = y'(x_0) \in \mathfrak{R}.$$

对于这样的 $\mathfrak{R}$-值全纯函数与在经典情形中相同的那些定理仍广泛地有效．为此当然首先应移植曲线积分的概念．

设 c 是一条在$\mathbf{C}$中延伸着的连续且可求长的曲线，而且另一方面假设 y 是一个至少在曲线的负载集合(Trägermenge) (c) 上

---

① 此处的极大的解是指具有极大存在性区间的解，而不是 Perron 意义下的极大解——译者注．

有定义并取值于复 Banach 空间 $\mathfrak{R}$的连续函数．于是借助于 c 的任意的参数表达式

$$\varphi:[\alpha,\beta]\longrightarrow \boldsymbol{C}$$

我们就能够定义

$$\int_{c} y(x)dx:=\int_{\alpha}^{\beta} y(\varphi(t))d\varphi(t)\in\mathfrak{R}$$

其中右方的 Stieltjes 积分和通常一样应理解为规则函数（Regelfunktionen)的积分．由此我们立即得出积分估计

$$\left|\int_{c} y(x)dx\right|\leqslant\int_{\alpha}^{\beta} |y(\varphi(t))|dv(t)\leqslant\max_{x\in(c)}|y(x)|\cdot\lambda(c), \tag{2.8.1}$$

其中

$$v(t):=\int_{\alpha}^{t}|d\varphi(\tau)|\quad (t\in[\alpha,\beta])$$

为全变差(totale Variation)而

$$\lambda(c):=v(\beta)$$

表示弧长(Bogenlänge)．

这时如下的 Cauchy(柯西)积分定理(这是我们后面需要的形式)有效:

(2.8.2) **定理**: 设 Ω 为 C 中的一个单连通域，而 y 为在 Ω 中全纯并取值于复Banach 空间 $\mathfrak{R}$ 的一个函数，又设 c 为 Ω 内的一条连续可求长封闭曲线．则必有

$$\int_{c} y(x)dx=0.$$

象通常一样由此即得 Cauchy 的积分公式．

(2.8.3) **定理**: 设 Ω 为 C 内一单连通域，y 为取值于一个复 Banach 空间 $\mathfrak{R}$ 且在 Ω 内全纯的函数，$x_0\in\Omega$ 且 c 是在 $\Omega\setminus\{x_0\}$ 内部的一条连续可求长封闭曲线，它对于 x_0 的转数(Umlaufszahl)为 1．则必有

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c}\frac{1}{x-x_0}y(x)dx=y(x_0).$$

由此我们就得出 y 在 Ω 内的任意多次复-可微性以及关于导数的积分公式的相应结果:

(2.8.4) $$\frac{k!}{2\pi i}\int_c\frac{1}{(x-x_0)^{k+1}}y(x)dx=y^{(k)}(x_0),$$

以及进一步的展开成幂级数或 Laurent(劳伦)级数的可能性.

与此有关的一个类似于定理(2.2.2)的结果是:

(2.8.5) **定理:** 设 Ω 为 $\mathbf{C}$ 中一个域, g 是取值于复Banach 空间 $\mathfrak{R}$ 的一个在 Ω 内定义的连续函数, 且 h 是在 Ω 中确定的 $\mathfrak{R}$-值函数, $b\in\mathfrak{R}$ 而 $a\in\Omega$. 则以下二命题(1), (2)是等价的:

(1) 对于 $x\in\Omega$ 及每一条在 Ω 内由 a 延伸至 x 的连续的可求长曲线 c 必有

$$h(x)=b+{}_c\int_a^x g(t)dt.$$

(2) h 在 Ω 内全纯并满足

$$h'=g,\quad h(a)=b.$$

证明是明显的.

因为根据前面的注记在情形(2)中 g 也是全纯的, 故而Morera(莫列拉)定理是含于(1)⇒(2)之内的命题.

象通常一样由Morera 的那些定理还可得出, 一个在 Ω 内(局部) 一致收敛的 $\mathfrak{R}$-值全纯函数序列的极限函数仍然是一个 $\mathfrak{R}$-值全纯函数(Weierstrass 定理).

下面我们假设 Ω 是 $\mathbf{C}$ 中的一个有界域, 从而 $\overline{\Omega}$ 是致密的, 这时我们用

$$\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R})$$

表示一切在 $\overline{\Omega}$ 内有定义, 连续, 而且在 Ω 中全纯并取值于复 Banach 空间 $\mathfrak{R}$ 的函数的集合.

我们以逐点的方式定义加法"+"及与 $\mathbf{C}$ 中的数的数乘"·", 并

且对于 $y\in\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R})$ 定义

$$|y|:=\max_{x\in\overline{\Omega}}|y(x)|.$$

于是成立着:

(2.8.6) **定理**: $(\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R}),+,\cdot,|\,|)$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的一个 Banach 空间.

证明中感兴趣的只有完备性(Vollständigkeit). 它可以利用——类似于定理(2.2.4)——关于连续函数的 Weierstrass 定理并利用上面已提到过的 Weierstrass 关于 $\mathfrak{R}$-值全纯函数的定理得出. □

鉴于后面处理微分方程的需要,我们先叙述下列的想法.

假设 $\mathfrak{S}$ 及 $\mathfrak{R}$ 是复 Banach 空间而 f 是由 $\mathfrak{S}$ 内到 $\mathfrak{R}$ 内的映象. 如果 $x_0\in\mathfrak{D}_f$, 而且存在一个由 $\mathfrak{S}$ 到 $\mathfrak{R}$ 内的复-线性有界映象 A, 使得当 $\mathfrak{D}_f\ni x\to x_0$ 时

$$f(x)=f(x_0)+A(x-x_0)+o(|x-x_0|)$$

成立,则我们称映象 f 在 x_0 处复-可微. 于是对于 $\mathfrak{D}_f$ 的内点 x_0 而言, A 当然是唯一确定的:

$$A=:f'(x_0).$$

对应的链形规则(Kettenregel)成立:

(2.8.7) **定理**: 设 $\mathfrak{S},\mathfrak{R}$ 为复 Banach 空间, $\varnothing\neq\mathfrak{D}_f\subset\mathfrak{S}$, 而且

$$f:\mathfrak{D}_f\longrightarrow\mathfrak{R}$$

在 $\mathfrak{D}_f$ 的一切点都复-可微.

于是如果 Ω 为 $\boldsymbol{C}$ 中的域,

$$y:\Omega\longrightarrow\mathfrak{S}\quad 全纯,$$
$$y(\Omega)\subset\mathfrak{D}_f,$$

则

$$f\circ y:\Omega\longrightarrow\mathfrak{R}$$

必是全纯的.

若Ω是C^n内的有界域，与上面相仿我们可定义$\mathscr{H}(\Omega, \mathfrak{R})$为一切在$\Omega$的点复-可微(只要复偏可微就够了)，并且在$\overline{\Omega}$中连续的$\mathfrak{R}$-值函数的集合．在这里定理(2.8.6)相应地成立．

2.9 Banach 空间中的复微分方程

根据上面的叙述我们已经有可能把 2.3 节中的讨论转移到复域中来了．我们立刻可以叙述出和定理(2.3.1)相似的结果．

(2.9.1) **主要定理:**

[假设]:

(0) $\mathfrak{R}$ 是$\mathbf{C}$上的Banach 空间，$a\in\mathbf{C}$，

Ω是$\mathbf{C}$内关于a的一个有界星形域，

$A:=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}|x-a|\ (>0)$, $b\in\mathfrak{R}$, $g\in\mathscr{H}(\Omega, \mathfrak{R})$, $0<B\leqslant\infty$

又记

$$R:=\{(x, y)\in\mathbf{C}\times\mathfrak{R}: x\in\overline{\Omega}, |y-g(x)|\leqslant B\}.$$

(1) f 是由 R 到$\mathfrak{R}$内的连续映象且它在 R 的内点处复-可微；记

$$M:=\sup_{(x,y)\in R}|f(x, y)|.$$

(2) 存在这样一个非负实数N，使得当$(x, y_1)\in R$及$(x, y_2)\in R$时恒有

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant N|y_1-y_2|.$$

(3) 或者

(3a) $AM+\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}|g(x)-b|\leqslant B$,

或者

(3b) $\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}\left|b+\int_a^x f(t, g(t))dt-g(x)\right|\exp(NA)\leqslant B$.

[结论]：必刚好存在一个$y\in\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R})$满足

$$y(a)=b,$$

$$(x,y(x))\in R \qquad (x\in\overline{\Omega}),$$

$$y'(x)=f(x,y(x)) \qquad (x\in\Omega).$$

证明：我们完全仿照第 2.3 节进行证明.

首先证明此定理的结论等价于属于$\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R})$并且满足

$$(x,y(x))\in R \qquad (x\in\overline{\Omega}),$$

$$y(x)=b+\int_a^x f(t,y(t))dt \quad (x\in\Omega),$$

的 y 的唯一存在性，其中积分已选为在直线段$\overline{ax}$上的积分.

为此，我们考虑由

$$y\in\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R}),\ (x,y(x))\in R \ \ (x\in\overline{\Omega})$$

$$u(x):=f(x,y(x)) \qquad (x\in\overline{\Omega})$$

给出的函数u，对它应有

$$(*) \qquad u\in\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R}).$$

为了证实$(*)$，对于 $n\in N$ 我们构作

$$z_n=y-\frac{1}{n}(y-g)\in\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R})$$

于是对于 $x\in\Omega$ 可得 $(x,\ z_n(x))\in\mathring{R}$，因而由假设 (1) 并根据定理 (2.8.7)对于

$$u_n(x):=f(x,z_n(x)) \quad (x\in\overline{\Omega})$$

必有

$$u_n\in\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R}).$$

又据假设(2)得出

$$|u_n(x)-u(x)|\leqslant N|z_n(x)-y(x)| \quad (x\in\overline{\Omega}),$$

所以当 $n\to\infty$ 时，由于 $z_n\to y$(在$\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R})$中)，有

$$u_n(x)\longrightarrow u(x) \quad \text{在}\overline{\Omega}\text{上一致成立}$$

由此即得(*)。

因为星形域Ω是单连通的，因而由(*)可以对u应用定理(2.8.2)及定理(2.8.5)，从而得出前面所说的等价性。

为了应用不动点定理(2.1.3)，我们命

$$(\mathfrak{M}, \delta) = (\mathscr{H}(\Omega, \mathfrak{R}), \delta),$$

其中右边的δ表示由模产生的度量(Metrik)。

其次我们置

$$\mathfrak{D}_T := \{y \in \mathscr{H}(\Omega, \mathfrak{R}) : \delta(y, g) \leqslant B\};$$

于是$y \in \mathfrak{D}_T$就刚好意味着当$x \in \overline{\Omega}$时$(x, y(x)) \in R$. $\mathfrak{D}_T$仍是$(\mathfrak{M}, \delta)$中的非空闭子集. 现在我们对于$y \in \mathfrak{D}_T$用

$$(Ty)(x) := b + \int_a^x f(t, y(t))\, dt \qquad (x \in \overline{\Omega})$$

定义Ty，其中右边的积分已选取为在线段$\overline{ax}$上的积分。

我们再注意，正如上面已指出过的，由

$$u(t) := f(t, y(t)) \quad (t \in \overline{\Omega})$$

定义的函数u必属于$\mathscr{H}(\Omega, \mathfrak{R})$. 因此由定理(2.8.5)即知$Ty$在$\Omega$内全纯. 另一方面，$u$在致密集$\overline{\Omega}$中一致连续，由此立即得到$Ty$在$\overline{\Omega}$内的连续性。

所以我们有

$$T : \mathfrak{D}_T \longrightarrow \mathfrak{M}.$$

为了获得关于$\|T^n\|$ $(n \in N)$的估计，我们可以将主要定理(2.3.1)证明中的相应讨论逐字逐句地照抄过来. 这时我们只需把全部的积分都选成在连接线段上的积分，并引用积分估计式(2.8.1)即可.

此时我们仍然得出

$$\|T^n\| \leqslant \frac{(NA)^n}{n!},$$

及

$$\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|\leqslant\exp(NA)<\infty.$$

由(3a)或(3b)出发对压缩映象定理中假设(*)的验证，完全类似于实域中主要定理的证明.

2.10 关于复域中的 Lipschitz 条件

第 2.5 节中的讨论在复域中当然也全部都对应地成立. 不过此处我们还可以证明多得多的事项.

当$(x, y)\in\mathring{R}$亦即当$(x, y)\in\Omega\times\mathfrak{R}$而且满足 $|y-g(x)|<B$ 时，从主要定理(2.9.1)的假设(0)及(1)可以得出：作为由$\mathfrak{R}$到$\mathfrak{R}$内的有界复-线性映象的偏导数

$$f_y(x, y)$$

是唯一存在的.

我们首先证明：

(2.10.1) **引理**：在主要定理(2.9.1)的假设(0)及(1)之下，如果对于一切$(x, y)\in\Omega\times\mathfrak{R}$, $|y-g(x)|<B$, 对某个 $0\leqslant N<\infty$有

$$|f_y(x, y)|\leqslant N,$$

则 Lip 条件(2)成立.

为了证明，我们注意开球形

$$\{y: |y-g(x)|<B\}\subset\mathfrak{R}$$

是凸的，由此就和 2.5 节一样可得出对 $x\in\Omega$, $|y_\nu-g(x)|<B(\nu=1, 2)$的 Lip 估计式(2)，从而由向边界取极限即得完整的命题(2).

但是下面的引理则本质上依赖于复分析的方法.

(2.10.2) **引理**：设主要定理(2.9.1)中的假设(0)，(1)满足，而且

$$M<\infty.$$

于是如果

$$0<\rho<B\leqslant\infty,$$

则当$(x, y_\nu)\in\overline{\Omega}\times\mathfrak{R}$, $|y_\nu-g(x)|\leqslant B-\rho(\nu=1, 2)$时必恒有

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant N(\rho)|y_1-y_2|,$$

其中

$$N(\rho):=\frac{M}{\rho}.$$

在证明时只要指出，当 $x\in\Omega$ 及 $|y-g(x)|<B-\rho$ 时

$$(+)\qquad |f_y(x, y)|\leqslant N(\rho)$$

成立就行了(参阅引理(2.10.1)). 为此假定$(x,\ y)$就是所考虑的这样一对，且选取 $h\in\mathfrak{R}$ 满足$|h|=1$. 那么由

$$t(\lambda):=f(x, y+\lambda h)$$

定义的函数 t 对于满足$|\lambda|\leqslant\rho$ 的 $\lambda\in\boldsymbol{C}$ 是全纯的. 由积分公式(2.8.4)得出

$$f_y(x, y)h=t'(0)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{|\lambda|=\rho}\frac{1}{\lambda^2}t(\lambda)d\lambda.$$

我们可据(2.8.1)加以估计:

$$|f_y(x, y)h|\leqslant\frac{M}{\rho}=N(\rho).$$

因为此式对一切满足$|h|=1$的 $h\in\mathfrak{R}$ 都成立，故得(+). □

最后我们指出，当 $B=\infty$ 时 Lip 条件在复域中只能对线性微分方程的情形成立. 更确切些，我们可说出:

(2.10.3) **引理:** 设主要定理(2.9.1)的假设(0)对于 $B=\infty$——从而也是对$\overline{R}=\Omega\times\mathfrak{R}$——成立. 则映象

$$f: R\longrightarrow\mathfrak{R}$$

当且仅当以下条件被满足时才满足主要定理(2.9.1)中的假设(1)和(2)，即如果存在一个

$$F:\overline{\Omega}\longrightarrow\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$$

满足

(a) $F|_\Omega$ 全纯,

(b) 对每一个 $y\in\mathfrak{R}$, 函数 $\overline{\Omega}\ni x\longmapsto F(x)y\in\mathfrak{R}$ 连续.

又存在一个

$$h\in\mathscr{H}(\Omega, \mathfrak{R})$$

使得对一切 $(x, y)\in R$ 都有

$$f(x, y)=F(x)y+h(x).$$

此处我们用 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ 表示由 $\mathfrak{R}$ 映入其自身的有界线性映象的复 Banach 代数.

我们在这里不引进证明, 而仅仅提到在证明中要在适当的形式下用到 Cauchy 积分公式和泛函分析中的一致有界定理 (uniform-boundedness-theorem).

2.11 全纯的参数依赖性

我们指出在主要定理 (2.9.1) 中包含着关于全纯的参数依赖性的——仅仅外表上更为一般的——如下命题.

(2.11.1) **定理:**

[假设]:

(0) $\mathfrak{S}$ 为复 Banach 空间, $a\in C$,

Ω 为 C 中关于 a 的一个有界星形域,

$A:=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}|x-a|(>0)$, Λ 为 C 内一有界域,

$b\in\mathscr{H}(\Lambda, \mathfrak{S})$, $\gamma\in\mathscr{H}(\Omega\times\Lambda, \mathfrak{S})$, $0<B\leqslant\infty$.

且记

$$S:=\{(x, \lambda, u)\in C\times C\times\mathfrak{S}: x\in\overline{\Omega},\ \lambda\in\overline{\Lambda}, |u-\gamma(x, \lambda)|\leqslant B\}.$$

(1) φ 是由 S 到 $\mathfrak{S}$ 内的连续映象且在 S 的内点处恒复-可微; 记

$$M:=\sup_{z\in S}|\varphi(z)|.$$

(2) 存在一个非负实数N，使得对$(x,\lambda,u_1)\in S$和$(x,\lambda,u_2)\in S$恒有

$$|\varphi(x,\lambda,u_1)-\varphi(x,\lambda,u_2)|\leqslant N|u_1-u_2|.$$

(3) 或者

(3a) $$AM+\max_{(x,\lambda)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Lambda}}|\gamma(x,\lambda)-b(\lambda)|\leqslant B$$

或者

(3b) $$\max_{(x,\lambda)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Lambda}}\left|b(\lambda)+\int_a^x\varphi(t,\lambda,\gamma(t,\lambda))dt-\gamma(x,\lambda)\right|\cdot\exp(NA)\leqslant B.$$

[结论]：恰好存在一个$\eta\in\mathscr{C}(\Omega\times\Lambda,\mathfrak{S})$满足

$$\eta(a,\lambda)=b(\lambda)\qquad(\lambda\in\overline{\Lambda})$$

$$(x,\lambda,\eta(x,\lambda))\in S\qquad((x,\lambda)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Lambda})$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda,\eta(x,\lambda))\qquad((x,\lambda)\in\Omega\times\Lambda).$$

为了达到化归主要定理(2.9.1)这个目的，我们令

$$\mathfrak{R}:=\mathscr{C}(\Lambda,\mathfrak{S}).$$

于是易证可将下式两边等同起来

$$\mathscr{C}(\Omega,\mathfrak{R})=\mathscr{C}(\Omega\times\Lambda,\mathfrak{S}).$$

这是因为利用

(*) $$z(x)(\lambda)=\zeta(x,\lambda)\qquad((x,\lambda)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Lambda})$$

就可以建立起对应关系

$$\mathscr{C}(\Omega,\mathfrak{R})\ni z\longleftrightarrow\zeta\in\mathscr{C}(\Omega\times\Lambda,\mathfrak{S}).$$

此外，我们立即可以验证

$$z'(x)(\lambda)=\frac{\partial\zeta}{\partial x}(x,\lambda)\qquad(x\in\Omega,\ \lambda\in\overline{\Lambda})$$

成立.

利用通过 γ 按照(*)决定的 $g\in\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R})$，现在我们构造

$$R:=\{(x,y):x\in\overline{\Omega},\ y\in\mathfrak{R},\ |y-g(x)|\leqslant B\}$$

并且对于 $(x,y)\in R$ 定义

$$f(x,y)(\lambda):=\varphi(x,\lambda,y(\lambda))\qquad(\lambda\in\overline{\Lambda});$$

因为当 $\lambda\in\overline{\Lambda}$ 时 $(x,\lambda,y(\lambda))\in S$ 成立，这个定义是可行的.

现在我们要证 f 是由 R 映入 $\mathfrak{R}$ 内的连续映象.

为此首先据 φ 的连续性，我们可把 f 理解为

$$f:R\longrightarrow\mathscr{C}_0(\overline{\Lambda},\mathfrak{S})$$

然后我们再证明，(a) f 的连续性，(b) $f(\mathring{R})\subset\mathfrak{R}$ 并且由于 $\mathfrak{R}$ 作为 $\mathscr{C}_0(\overline{\Lambda}\mathfrak{S})$ 的子空间的闭性，就获得了所要的结果.

(a)：对于 $(x,y)\in R$，$(x_0,y_0)\in R$ 及 $\lambda\in\overline{\Lambda}$，利用假设(2)可得估计

$$|f(x,y)(\lambda)-f(x_0,y_0)(\lambda)|\leqslant N|y(\lambda)-y_0(\lambda)|+$$
$$+|\varphi(x,\lambda,y_0(\lambda))-\varphi(x_0,\lambda,y_0(\lambda))|$$

由此利用

$$\overline{\Omega}\times\overline{\Lambda}\ni(x,y)\longmapsto\varphi(x,\lambda,y_0(\lambda))\in S,$$

的一致连续性即得，当 $(x,y)\to(x_0,y_0)$（在 $\mathbf{C}\times\mathfrak{R}$ 内的收敛性）时

$$f(x,y)\longrightarrow f(x_0,y_0)$$

（$\mathscr{C}_0(\overline{\Lambda},\mathfrak{S})$ 内的收敛性）成立. 这就是 f 的连续性.

(b)：当 $(x,y)\in\mathring{R}$ 及 $\lambda\in\Lambda$ 时有

$$z(\lambda):=(x,\lambda,y(\lambda))\in\mathring{S}.$$

因此由定理(2.8.7)得到

$$f(x,y)=\varphi\circ z\in\mathscr{H}(\Lambda,\mathfrak{S})$$

现在我们再证明 f 在 R 的内点处恒复-可微.

为此对于固定的 $(x,y)\in\mathring{R}$，我们考虑一个满足

$$\mathfrak{U}_\rho:=\{(x_1,y_1):|x_1-x|\leqslant\rho,\ |y_1-y|\leqslant\rho\}\subset\mathring{R}$$

和

$$M_\rho := \sup\{|f(x_1, y_1)| : (x_1, y_1) \in \mathfrak{A}_\rho\} < \infty$$

的$0<\rho<\infty$；上面最后一式由于f对(x, y)的连续性是可以实现的．现在假设

$$(h, k) \in \mathbf{C} \times \mathfrak{R}$$

满足

$$0 < |(h, k)| = \max(|h|, |k|) < \rho.$$

我们将简记

$$\rho_1 := \frac{\rho}{|(h, k)|} (>1).$$

利用这些，我们可以证实

$$f(x+h, y+k) = f(x, y) + I_1(h, k) + I_2(h, k)$$

其中

$$I_1(h, k) := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\tau|=\rho_1} \frac{1}{\tau^2} f(x+\tau h, y+\tau k) d\tau,$$

$$I_2(h, k) := \frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|\tau|=\rho_1} \frac{1}{\tau^2(\tau-1)} f(x+\tau h, y+\tau k) d\tau,$$

为此我们考察$\lambda \in \Lambda$时的值，由

$$\tau \longmapsto \varphi(x+\tau h, \lambda, y(\lambda)+\tau k(\lambda))$$

的全纯性及

$$\frac{1}{\tau-1} = \frac{1}{\tau} + \frac{1}{\tau^2} + \frac{1}{\tau^2(\tau-1)}$$

即得出相应的公式．当$\lambda \in \Lambda$时我们还有

$$I_1(h, k)(\lambda) = \varphi_x(x, \lambda, y(\lambda))h + \varphi_y(x, \lambda, y(\lambda))k(\lambda),$$

由此得出 I_1 对于$(h, k) \in \mathbf{C} \times \mathfrak{R}$的线性性质．此外我们立刻可估计出

$$\left|I_1(h, k)\right| \leqslant \frac{M_\rho}{\rho_1} = \frac{M_\rho}{\rho} |(h, k)|,$$

$$\left|I_2(h,\ k)\right| \leqslant \frac{M_\rho}{\rho(\rho-|(h,\ k)|)}|(h,\ k)|^2.$$

所以 I_1 是由 $\mathbf{C}\times\mathfrak{R}$ 到 $\mathfrak{R}$ 内的有界线性映象，而且当 $(h, k)\to 0$ 时 $I_2(h, k)=o(|(h, k)|)$. 这就是所希望的可微性.

因此主要定理(2.9.1)中假设(0)和(1)至此已验证完毕. 假设(2)及(3)是直接移植过来的. 于是把(2.9.1)中结论翻译过来就给出定理(2.11.1)的结论.

2.12 Peano(皮亚诺)存在定理

以下我们再次讨论实域中的微分方程，这时我们基本上将使用主要定理(2.3.1)在有限维情形下由定理(2.4.1)表述的特殊形式. 我们要证明如果取消 *Lip* 条件(2)，存在性命题仍然保持成立，但唯一性却并不如此(参阅第1.1节的例2). 这就是 Peano 存在定理的内容.

Peano 定理的证明可以用初等的方式给出. 我们可参考 Coddington-Levinson (科丁顿-列文逊)[1]中的叙述. 然而在这里我们却宁肯依赖本来已熟知的简单的分析原则，用很少几行字给出一个证明. 为此我们将再次引用把初值问题的解视为不动点的思想，但是由于现在唯一性已被排除，从而第2.1节的压缩定理原则上不再适用，我们将利用 Schauder(邵德尔)的不动点定理.

首先引述这个定理:

(2.12.1) **定理**: (Schauder)

设 $\mathfrak{M}$ 为某个 Banach 空间 $\mathfrak{B}$ 中的一个非空的致密凸子集，而 T 是由 $\mathfrak{M}$ 到其自身内的一个连续映象. 则在 $\mathfrak{M}$ 内必存在一个关于 T 的不动点 $\hat{x}$: $T\hat{x}=\hat{x}$.

这个定理的一个用到代数拓扑中 Brouwer(布劳埃尔)不动点定理及初等泛函分析的证明，可在例如 Schauder 的原文[2]中找

到①.

和上面提到的初等证法一样，在对初值问题应用 Schauder 不动点定理时，也必须专门去证明某个连续函数集合的致密性. 这里我们引入 Arzela-Ascoli (阿尔柴拉-阿斯科里) 定理的特殊形式如下:

我们从致密度量空间 $(\mathfrak{K}, \delta_1)$ 及度量空间 $(\mathfrak{N}, \delta_2)$ 出发，以 $\mathscr{C}_0(\mathfrak{K}, \mathfrak{N})$ 表示取值于 $\mathfrak{N}$ 的在 $\mathfrak{K}$ 上有定义的全体连续函数, 并借助于由

$$\delta(f, g) := \max_{x \in \mathfrak{K}} \delta_2(f(x), g(x)) \quad (f, g \in \mathscr{C}_0(\mathfrak{K}, \mathfrak{N}))$$

定义的度量, 显然又可构造出一个度量空间.

对此成立

(2.12.2) **定理**: (Arzela-Ascoli)

假设 $\varnothing \neq \mathfrak{M} \subset \mathscr{C}_0(\mathfrak{K}, \mathfrak{N})$, 则下列二命题等价:

(1) $\mathfrak{M}$ 是致密的.

(2) $\begin{cases} \mathfrak{M}\text{是闭的}, \\ \text{对每一个 } c \in \mathfrak{K}, \overline{\{g(c) : g \in \mathfrak{M}\}} \text{ 是致密的}, \\ \mathfrak{M}\text{是等度连续的}. \end{cases}$

这里(2)中最后一个要求也意味着一致-等度连续性 (gleichmäßig-gleichgradige Stetigkeit): 对于每一个 $\varepsilon > 0$, 存在这样一个 $\eta > 0$, 使得对于一切的 $x_1, x_2 \in \mathfrak{K}$ 及一切的 $g \in \mathfrak{M}$, 由 $\delta_1(x_1, x_2) < \eta$ 恒可导出 $\delta_2(g(x_1), g(x_2)) < \varepsilon$.

现在我们来叙述并证明定理.

(2.12.3) **定理**: (Peano)

假设:

---

① 参考涅梅茨基:《分析中的不动点方法》, 数学译丛, 1966 年第 3 期, 43—58 页(杨恩浩译)——译者注.

(0) $\mathfrak{R}$ 为有限维 Banach 空间，i 是 R 中的致密区间， $a\in \mathrm{i}$,

$A:=\max\limits_{x\in \mathrm{i}}|x-a|(>0)$, $b\in\mathfrak{R}$, $0<B<\infty$. 记

$$R=\{(x,y):x\in \mathrm{i},\ y\in\mathfrak{R},\ |y-b|\leqslant B\}.$$

(1) f 是由 R 到 $\mathfrak{R}$ 内的连续映象；并记（R 是致密的!）

$$M:=\max_{z\in R}|f(z)|.$$

(2) $AM\leqslant B$ 成立.

结论：必存在一个 $y\in\mathscr{C}_1(\mathrm{i},\mathfrak{R})$ 满足

$$\left.\begin{aligned}&y(a)=b,\\&(x,y(x))\in R,\\&y'(x)=f(x,y(x))\end{aligned}\right.\quad(x\in \mathrm{i}).$$

证明：和通常一样，这里的结论等价于：存在一个 $y\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i},\mathfrak{R})$ 满足 $(x,y(x))\in R$ 及

$$y(x)=b+\int_a^x f(t,y(t))dt\qquad(\text{当 } x\in \mathrm{i}).$$

现在我们利用 Schauder 定理进行证明．为此置

$$\mathfrak{B}=\mathscr{C}_0(\mathrm{i},\mathfrak{R})$$

其次设 $\mathfrak{M}$ 为满足 $g(a)=b$ 及

(*) $$|g(x_1)-g(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|\qquad(x_1,x_2\in \mathrm{i})$$

的 $g\in\mathfrak{B}$ 的集合.

于是显然 $\mathfrak{M}$ 是非空的. $\mathfrak{M}$ 是凸的；因为对于 $g_1,g_2\in\mathfrak{M}$ 和 $\tau\in[0,1]$ 借助于

$$g:=(1-\tau)g_1+\tau g_2$$

就首先有 $g(a)=b$, 且对 $x_1,x_2\in \mathrm{i}$ 又有

$$\begin{aligned}|g(x_1)-g(x_2)|&\leqslant(1-\tau)|g_1(x_1)-g_1(x_2)|\\&\quad+\tau|g_2(x_1)-g_2(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2|.\end{aligned}$$

最后根据定理(2.12.2) $\mathfrak{M}$ 是致密的；因为显然 $\mathfrak{M}$ 是闭的，此外按照要求(*)又是等度连续的；又因为 $c\in \mathrm{i}$ 时，集合 $\{g(c):g\in\mathfrak{M}\}$ 包

含于$\{z\in\mathfrak{N}: |z-b|\leqslant M|c-a|\}$之内，所以是有界的，而由于$\mathfrak{N}$依假定是有限维的，就得出了闭包的致密性.

由(2)，当$g\in\mathfrak{M}$时显然总有$(x, g(x))\in R(x\in \mathrm{i})$. 所以我们对于$g\in\mathfrak{M}$可以通过

$$(Tg)(x) := b+\int_a^x f(t, g(t))dt \quad (x\in \mathrm{i})$$

来定义Tg. 我们得出$(Tg)(a)=b$，并借助于(1)估计积分，得出

$$|(Tg)(x_1)-(Tg)(x_2)|\leqslant M|x_1-x_2| \quad (x_1, x_2\in \mathrm{i}),$$

亦即

$$T: \mathfrak{M}\longrightarrow \mathfrak{M}.$$

最后T是(一致)连续的. 为证明这点，我们利用f在R上的一致连续性：对每个$\varepsilon>0$，存在这样一个$\eta>0$，使得对于$|x_1-x_2|<\eta$和$|y_1-y_2|<\eta$总有

$$|f(x_1, y_1)-f(x_2, y_2)|<\varepsilon.$$

于是若$g_1, g_2\in\mathfrak{M}$满足$\delta(g_1, g_2)<\eta$，则我们可估计出：

$$|(Tg_1)(x)-(Tg_2)(x)|\leqslant\left|\int_a^x |f(t, g_1(t)) - f(t, g_2(t))|dt\right|\leqslant\varepsilon|x-a| \quad (x\in \mathrm{i}),$$

从而得

$$\delta(Tg_1, Tg_2)\leqslant\varepsilon A.$$

至此定理(2.12.1)的假设已验证完毕，于是象我们在前面已指出的，由定理(2.12.1)的结论就给出了定理(2.12.3)的结论.

2.13 唯一性定理

在第2.12节表明存在性命题可以在不同时具备唯一性情况下成立之后，有兴趣的是获得除Lip条件之外的其他尽可能普遍地保证唯一性的条件. 对此我们将在第2.13.1节内展示一个非

常普遍而在文献中尚未给出过的唯一性定理，并且在第 2.13.2, 2.13.3 及 2.13.4各节中由它推导出一些有关的特殊的（著名）定理。

这里我们将把唯一性问题限制在一个致密区间 $\mathfrak{i}=[0, c]$ $(c>0)$上并且初值问题是在 0 处提出的. 显然一切别的情形均可通过平移和反射化为所论的情形.

2.13.1 一个普遍的唯一性定理

以下设 $c>0$ 为已选定的实数且记

$$Q:=(0, c]\times \boldsymbol{R}^{+}\subset \boldsymbol{R}^{2}$$

我们考察一切具有性质

$$E\begin{cases}\forall e>0\,\exists\mu>0\,\forall\delta>0\,\exists\gamma\in(0,\min(\delta, c))\,\exists z:[\gamma, c]\to\boldsymbol{R}\\ \text{可微}\\ \forall x\in[\gamma, c]\begin{cases}\mu\gamma<z(x)<e,\\ z'(x)>g(x, z(x))\end{cases}\end{cases}$$

的函数 $g:Q\to\boldsymbol{R}^{+}$的集合 $\mathscr{G}$. 这里为了使上面比较复杂的条件容易看清楚起见我们使用了周知的逻辑量词(Quantoren).

现在我们证明

(2.13.1) **定理:**

[假设]:

(1) $\mathfrak{R}$ 为 Banach 空间, $\varnothing\neq\mathfrak{D}\subset\boldsymbol{R}\times\mathfrak{R}$,

f 是由 $\mathfrak{D}$ 到 $\mathfrak{R}$ 内的映象.

(2) 存在这样一个 $g\in\mathscr{G}$, 使得对于一切满足 $x\in(0, c]$的(x, w_1), $(x, w_2)\in\mathfrak{D}$ 总有

$$|f(x, w_1)-f(x, w_2)|\leqslant g(x, |w_1-w_2|).$$

(3) 对于 $\nu=1, 2$, 假设

$$y_\nu:[0, c]\longrightarrow\mathfrak{R}\ \text{可微}$$

满足

$$(x, y_\nu(x))\in\mathfrak{D} \quad y'_\nu(x)=f(x, y_\nu(x)) \qquad (x\in[0, c]);$$

且有

$$y_1(0)=y_2(0).$$

[结论]: $y_1=y_2$ 成立.

证明: 我们用

$$\varphi(x):=|y_1(x)-y_2(x)|$$

定义

$$\varphi:[0, c]\longrightarrow \boldsymbol{R}^+.$$

φ 是连续的; 且有 $\varphi(0)=0$.

对于 $x\in[0, c]$及 $x+h\in[0, c]$, $h\neq 0$, 我们象通常一样作估计得出

$$\left|\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h}\right|\leqslant\left|\frac{1}{h}(y_1(x+h)-y_1(x)) - \frac{1}{h}(y_2(x+h)-y_2(x))\right|.$$

当 $x\in[0, c)$时我们记

$$D_r\varphi(x):=\liminf_{h\searrow 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h},$$

$$D^r\varphi(x):=\limsup_{h\searrow 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h},$$

而当 $x\in(0, c]$时记

$$D_l\varphi(x):=\liminf_{h\nearrow 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h},$$

$$D^l\varphi(x):=\limsup_{h\nearrow 0}\frac{\varphi(x+h)-\varphi(x)}{h},$$

那么由上面的估计式, 对于全部四个"导数"的值我们得到

(*) $$|D\varphi(x)|\leqslant|y'_1(x)-y'_2(x)|$$

$$= |f(x, y_1(x)) - f(x, y_2(x))|.$$

这时因为 $y_1(0)=y_2(0)$，首先得出命题 $D^r\varphi(0)=D_r\varphi(0)=0$，从而又得出 φ 在 0 处的可微性和 $\varphi'(0)=0$. 其次，利用(2)由(*)得

$$(**) \qquad |D\varphi(x)| \leqslant g(x, \varphi(x)) \qquad (x\in(0, c)).$$

现在设 $e>0$ 已预先给定. 我们要证明

$$(***) \qquad \varphi(x) < e \qquad (x\in[0, c])$$

为此设 μ 是根据 g 的性质 E 选定的. 考虑到 $\varphi(0)=\varphi'(0)=0$，对于 μ 我们能确定一个 $\delta\in(0, c)$ 使得

$$\varphi(x) \leqslant \mu x \quad (x\in[0, \delta])$$

成立. 又据 E 存在对应的 γ 和 z.

首先，显然成立

$$(+) \qquad \varphi(x) \leqslant \mu x \leqslant \mu\gamma < z(\gamma) < e \qquad (x\in[0, \gamma]).$$

其次，我们来证明

$$(++) \qquad \varphi(x) < z(x) \qquad (x\in[\gamma, c]).$$

根据(+)此式首先对于 $x=\gamma$ 是成立的. 因此若(++)不实现，则必存在一个极小的 $\xi\in(\gamma, c]$ 满足

$$\varphi(\xi)=z(\xi).$$

于是我们有

$$\varphi(x) < z(x) \qquad (x\in[\gamma, \xi))$$

因而显然

$$D_l\varphi(\xi) \geqslant z'(\xi).$$

因为根据 E $z'(\xi) > g(\xi, z(\xi))$ 必成立，这导致与(**)的矛盾.

最后由 $z(x) < e(x\in[\gamma, c])$ 连同(++)及(+)，就得出结论(***).

因为 $e>0$ 是预先任意给定的，故 $\varphi=0$，即 $y_1=y_2$ 已得证. □

2.13.2 W. Walter (瓦尔特)型的唯一性定理

代替集合 $\mathscr{E}$, W. Walter(瓦尔特)[3]考虑满足下面性质 E_W 的一切函数

$$g: Q \longrightarrow \mathbf{R}^+$$

的集合 $\mathscr{E}_W$.

E_W:(a) 当 $x\in(0, c]$ 时 $g(x, z)$ 对 z 单调不降.

(b) 对每一个 $\varepsilon>0$, 存在一个

$$\hat{z}: (0, c] \longrightarrow \mathbf{R} \text{ 可微}$$

满足

$$\begin{aligned} &0<\hat{z}(x)<\varepsilon, && \\ &\hat{z}'(x)\geqslant g(x, \hat{z}(x)) && (x\in(0, c]), \\ &\hat{z}(x)\neq 0(x) && (x\to 0). \end{aligned}$$

于是基本上是要证明定理(2.13.1), 只不过把 $\mathscr{E}$ 换成 $\mathscr{E}_W$.

我们指出这个变动了的定理已被包含在定理 (2.13.1) 之中, 为此我们证实:

(2.13.2) **定理**: $\mathscr{E}_W\subset\mathscr{E}$ 成立.

所以我们假设 $g\in\mathscr{E}_W$, 并证明 g 具有性质 E.

为此设已给 $\varepsilon>0$. 然后我们按照 E_W 的部分要求 (b) 来选取 $\hat{z}$. 因为 $\hat{z}(x)\neq o(x)(x\to 0)$ 故必存在一个 $\mu>0$, 使得对每个 $\delta>0$ 都存在一个 $\gamma\in(0, \min(\delta, c))$, 满足

$$\hat{z}(\gamma)>\mu\gamma.$$

我们命

$$\eta: =\frac{1}{2}(\hat{z}(\gamma)-\mu\gamma)$$

并通过

$$z(x): =\hat{z}(x)-\eta\frac{c-x}{c-\gamma} \quad (x\in[\gamma, c]).$$

来定义

$$z:[\gamma, c]\longrightarrow \mathbf{R}.$$

那么 z 是可微的；由于 z 的单调性，在$[\gamma, c]$中我们显然有

$$\mu\gamma<z(x)<e.$$

最后因为

$$z(x)\leqslant \hat{z}(x),$$

和

$$z'(x)=\hat{z}'(x)+\frac{\eta}{c-\gamma}>\hat{z}'(x)$$

借助于 E_W 的部分要求(α)得出

$$z'(x)>g(x, z(x))\quad (x\in[\gamma, c]).$$

故 z 具有所要求的性质.

这些总括起来即是 E，从而 $g\in\mathscr{E}$ 得证.

2.13.3 E. Kamke（卡姆克）型的唯一性定理

E. Kamke [4] 本质上证明了这样的一个唯一性定理，它对应于在定理(2.13.1) 中用函数集合 $\mathscr{E}_K$ 来代替 $\mathscr{E}$. 集合 $\mathscr{E}_K$是具有下述性质 E_K 的函数

$$g:Q\longrightarrow \mathbf{R}^+$$

的全体.

E_K: (α)　$g(x, 0)=0\qquad (x\in(0, c])$.

(β)　g 连续.

(γ)　若　$\hat{z}:(0, c]\longrightarrow \mathbf{R}$ 是

$$\hat{z}'=g(x, \hat{z})$$

的满足

$$\hat{z}(x)=o(x)\qquad (x\rightarrow 0),$$

的解，则 $\hat{z}=0$ 成立.

我们指出这个用到 $\mathscr{E}_K$ 的唯一性定理也包含在定理 (2.13.1) 之内，即我们可证实:

(2.13.3) **定理:** $\mathscr{E}_K\subset\mathscr{E}$ 成立.

设 $g\in\mathscr{E}_K$, 我们证明 g 具有性质 E. 为此任意预先给定 $\varepsilon>0$.

我们构造一个连续函数序列 $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$

$$z_n:(0, c]\longrightarrow \boldsymbol{R}^+,$$

使它具有性质: 总存在一个满足 $0\leqslant c_n<c$ 的 c_n, 使得

$$z_n(c)=\frac{1}{2}\varepsilon,$$

$$z_n(x)>0,$$

$$(x\in(0, c], x>c_n)$$

$$z_n'(x)=g(x, z_n(x))+\frac{1}{n}$$

而且

$$z_n(x)=0\qquad (x\in(0, c], x\leqslant c_n).$$

首先我们必需指明这是可能的. 为此我们引用 Peano存在性定理(2.12.3).

根据这个定理必存在一个 $c_n'\in[0, c)$ 及一个函数

$$\tilde{z}_n:(c_n', c]\longrightarrow \boldsymbol{R}\ \text{可微}$$

满足

$$\left.\begin{aligned}&\tilde{z}_n(c)=\frac{1}{2}\varepsilon,\\&\tilde{z}_n(x)>0,\\&\tilde{z}_n'(x)=g(x, \tilde{z}_n(x))+\frac{1}{n}.\end{aligned}\right\}\quad (x\in(c_n', c]).$$

因为

$$\tilde{z}_n'(x)>0\qquad (x\in(c_n', c])$$

必存在右侧极限值.

$$\tilde{z}_n(c_n'+0)\geqslant 0.$$

若此值以及 c_n' 都为正，则可以重新应用定理(2.12.3)：从而得到 $\tilde{z}_n$ 一个向 c'_n 外的延拓. 故我们可以假设 $c'_n=c_n$ 是极小的. 但这即是说或者 $c_n=0$ 或者 $\tilde{z}_n(c_n+0)=0$. 这就提供了所希望的 z_n的构造.

对于序列$\{z_n\}$我们首先证明

$$(*)\qquad z_n(x)\leqslant z_{n+1}(x)\qquad (x\in(0,c]).$$

这是因为设若对某个 $\xi\in(0,c)$

$$z_n(\xi)>z_{n+1}(\xi),$$

那么必存在一个极小的 $\zeta\in(\xi,c]$满足

$$z_n(\zeta)=z_{n+1}(\zeta).$$

但这时我们就有

$$z_n(x)>z_{n+1}(x)\qquad (x\in(\xi,\zeta)),$$

这和由微分方程得到的不等式

$$z'_n(\zeta)>z'_{n+1}(\zeta)$$

相矛盾.

由(*)当然还得出

$$(**)\qquad c_{n+1}\leqslant c_n.$$

由(*)以及

$$0\leqslant z_n(x)\leqslant\frac{1}{2}e\qquad (n\in N,\ x\in(0,c])$$

下面极限存在

$$\hat{z}(x):=\lim_{n\to\infty} z_n(x)\qquad (x\in(0,c]).$$

我们证明:

$$\hat{z}:(0,c]\longrightarrow R^+$$

连续可微并且满足

$$(+)\qquad \hat{z}'(x)=g(x,\hat{z}(x))\qquad (x\in(0,c]).$$

为此我们注意，对于每一个 $c'\in(0,c]$，如果记

$$M(c'):=\max\{g(x,z):(x,z)\in[c',c]\times[0,\frac{1}{2}\varepsilon]\},$$

那么对 $n\in N$ 必有

$$(***)\qquad \left|\frac{z_n(x_1)-z_n(x_2)}{x_1-x_2}\right|\leqslant M(c')+1$$

$$(x_1,x_2\in[c',c];x_1\neq x_2).$$

由此立刻得出 $\hat{z}$ 的连续性.

至于微分方程的证明，可以用各种不同的方法得出．我们可以应用 Dini（狄尼）定理或用 Arzela-Ascoli 定理（2.12.2）加上（***），也可以应用 Lebesgue（勒贝格）收敛性定理．现在我们采用最后一种方法．为此，我们从

$$z_n(x)=0\qquad (x\in(0,c],x\leqslant c_n)$$

和

$$z_n(x)=\frac{1}{2}\varepsilon-\int_x^c\left[g(t,z_n(t))+\frac{1}{n}\right]dt,$$

$$(x\in(0,c],x>c_n)$$

出发．假若

$$x\in(0,c],\quad x>\inf c_n,$$

那么当 $t\in[x,c]$ 时必有

$$0\leqslant\left[g(t,z_n(t))+\frac{1}{n}\right]\leqslant M(x)+1\quad(n\in N)$$

以及

$$\left[g(t,z_n(t))+\frac{1}{n}\right]\longrightarrow g(t,\hat{z}(t))\qquad(n\to\infty),$$

故得

$$(++)\qquad \hat{z}(x)=\frac{1}{2}\varepsilon-\int_x^c g(t,\hat{z}(t))dt.$$

当 $x\in(0,c]$, $x\leqslant\inf c_n$ 时（++）也成立，这可由 $\hat{z}(x)=0$ 及 E_K 中的（α）得出

和通常一样当 $x\in(0,c]$ 时，$(++)$ 就给出中间结论 $(+)$ 和 $\hat{z}(c)=\frac{1}{2}c$.

现在我们应用(γ). 它给出

$$\hat{z}(x)\neq o(x) \qquad (x\to 0).$$

所以存在这样一个 $\mu>0$, 使得对每个 $\delta>0$ 都存在一个 $\gamma\in(0,\min(\delta,c))$满足

$$\hat{z}(\gamma)>\mu\gamma.$$

由于

$$z_n(\gamma)\nearrow\hat{z}(\gamma)$$

故存在一个 $n_0\in N$ 满足

$$z_{n_0}(\gamma)>\mu\gamma.$$

于是我们选取

$$z(x):=z_{n_0}(x) \qquad (x\in[\gamma,c]),$$

则它显然具有 E 中所要求的性质.

因此 E 及 $g\in\mathscr{E}$ 已证毕.

2.13.4 特殊的唯一性定理

我们在这里指出一些简单而特殊的函数

$$g\in\mathscr{E}.$$

(2.13.4) **定理**: 假设

$$p:\boldsymbol{R}^+\longrightarrow\boldsymbol{R}^+$$

满足

$$p(x)>0 \qquad (x>0),$$

$$(*) \qquad p(\alpha x)\leqslant\alpha p(x) \qquad (x\in\boldsymbol{R}^+,\ 0\leqslant\alpha\leqslant 1),$$

又设

$$0\leqslant\beta\leqslant 1.$$

则由

$$g(x,z):=\beta\frac{p(z)}{p(x)}\qquad((x,z)\in Q)$$

定义的函数必属于 $\mathscr{G}$.

此处我们证明 $g\in\mathscr{G}_w$.

为此利用(*)知 E_w, (a)是满足的; 而利用

$$0<\alpha<\min\left(1,\frac{e}{c}\right)$$

和

$$\hat{z}(x):=\alpha x\qquad(x\in(0,c])$$

可知 (b) 亦已具备. (b) 的前两个性质直接可看出. 最后利用(*)由

$$\alpha\geqslant\beta\frac{p(\alpha x)}{p(x)}.$$

即得微分不等式. □

在用这样的 g 按照定理(2.13.1)作出的唯一性定理中, 包含了相当于

$$p(x)=x,\quad\beta=1$$

的 Nagumo(南云道夫)定理[5]和相当于

$$p(x)=x,\quad 0<\beta<1$$

的 Rosenblatt(洛生勃拉特)定理[6]作为特例.

(2.13.5) **定理:** 如果

$$k:(0,c]\longrightarrow\boldsymbol{R}^+\ \text{连续}$$

满足

$$(+)\qquad\int_0^c k(x)dx=:K<\infty$$

且若

$$w:\boldsymbol{R}^+\longrightarrow\boldsymbol{R}\ \text{连续}$$

并满足

$$w(x)>0 \quad (x>0),$$

$$(\times) \qquad \int_0^1 \frac{dx}{w(x)}=\infty.$$

则由

$$g(x, z):=k(x)w(z) \qquad ((x, z)\in Q)$$

定义的函数属于 $\mathscr{E}$.

这里我们证明 $g\in\mathscr{E}_K$.

对此，首先由于从(×)中得出的性质

$$w(0)=0$$

$E_K(\alpha)$是已给了的．又由 k 及 w 的连续性直接可看出(β)成立.

为了证明(γ)，假定

$$\hat{z}:(0, c]\longrightarrow R$$

是方程

$$\hat{z}'(x)=k(x)w(\hat{z}(x))$$

的解并且 $\hat{z}\neq 0$．于是只需证明 $\hat{z}(x)\neq o(x)$．对此我们应用第1.1节中的讨论．即设

$$\xi=c, \quad \hat{z}(c)=\eta>0.$$

则根据第 1.1 节

$$\mathrm{i}_1=(0, c],$$

$$\mathrm{i}_2=(0, \infty)$$

且由于(×)

$$\mathrm{i}_3=(-\infty, W),$$

其中

$$0<\int_\eta^\infty \frac{dx}{w(x)}=:W\leqslant\infty.$$

故由(+)有

$$F(\mathrm{i}_1)=(-K, 0] \quad \text{或} \quad =[-K, 0].$$

现在因为G把区间i_2一一对应且单调增加地映到i_3上，我们就得出$\mathrm{i}_0=\mathrm{i}_1$以及$\hat{z}(\mathrm{i}_0)=G^{-1}\circ F\ (\mathrm{i}_0)$被从0隔开的性质. 因而必存在一个$\widetilde{K}>0$，满足

$$\hat{z}(x)>\widetilde{K} \qquad (x\in(0,c])$$

所以，当然$z(x)\neq o(x)$. □

应用定理(2.13.1)对于这样的一个g就给出Osgood(奥斯古德)的唯一性定理[7].

特殊情形$k(x)=N$, $0\leqslant N<\infty$和$w(z)=z$导出在Lip条件成立的情况下的唯一性定理.

[译者注]: 微分方程解的唯一性问题是微分方程理论中的根本性理论课题之一，至今仍然不断地有新的研究工作发表，有兴趣的读者可进一步参考以下文献:

1. Lakshmikantham, V.: *Uniqueness theorems for ordinary and hyperbolic differential equations*. Michigan Math. J. 9(1962)161—166.
2. 沈信耀:《关于微分方程的解的唯一性问题的一点注记》. 数学进展, 1963年6卷3期267—271.
3. Wend D. V.: *Existence and uniqueness of solutions of ordinary differential equations*. Proc. Amer. Math. Soc. 23(1969)27—33
4. 杨恩浩:《关于微分方程解的唯一性的注记》. 数学进展, 1965年8卷2期183—186, *MR*37#3079.
5. Driver, R. D. and Norris, M. J.: *Note on uniqueness for a one-dimensional two-body problem of classical electrodynamics*. Ann. Physics, 42 (1967) 347—351.
6. Bownds, J. M. and Diaz, J. B.: *On restricted uniqueness for systems of ordinary differential equations*. Proc.

Amer. Math. Soc. 37(1973)100—104.

7. Rogers, T. : *On Nagumo's condition.* Canad. Math. Bull. 15(1972)609—611.

8. Witte Jürgen: *Ein Eindeutigkeitssatz für die Differentialgleichungen $y'=f(x, y)$.* Math. Zeit. (140)N3 (1974) 281—287

9. Travis, S. P. : *A one-dimensional two-body problem of classical electrodynamics.* SIAM. J. Appl. Math. 28(1975) 611—632.

上面[4]中定理1已在下列文章中获得了进一步的推广

10. Györi, I. : *A generalization of Bellman's inequality for Stieltjes integrals and a uniqueness theorem.* Studia Sci. Math. Hungar. 6 (1971) 137—145. MR48*6510.

此外在小松勇作著:《常微分方程式论》(日文, 廣川書店, 1964)一书内,讲述了岡村(Okamura)对 R^2 中一阶微分方程解唯一性的充分必要条件(§10).

第 3 章 实域中的线性微分方程

在本章中我们紧接着第 2 章中的一般性结果之后，讨论对于待求函数及其导函数为非齐次的显式线性常微分方程和方程组．线性代数中深刻的定理和方法在这里自然是重要的．观察一下第 2.4 节内的讨论就可明白，在把高阶微分方程和方程组化归一阶微分方程组时线性性质仍然保持．因此我们的兴趣首先在于一阶微分方程组．在这里按照第 2 章的说明，关于在 Banach 空间中取值的函数的显式线性微分方程的一般讨论将处于重要的地位．但是所得结果对于高阶微分方程和方程组的具体结论，我们也放在适当的地位上加以记述．

这里我们首先在实域中建立理论的基础．然后在第 4 章中把其中许多结果迅速直接地移植到复域理论中去．此外在第 4 章中我们还要对复域线性微分方程阐述特别重要的进一步的理论．

3.1 存在性定理及唯一性定理

以下假设 $\mathfrak{R}$ 是 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ 或 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ 上的一个 Banach 空间．我们用

$$\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$$

表示由 $\mathfrak{R}$ 映到其自身内的有界(连续) $\boldsymbol{K}$-线性映象的全体．如所周知它对于$+$，用 $\boldsymbol{K}$ 中的数的乘法，合成和算子模组成一个具有单位元素 E(＝恒等映象)的 $\boldsymbol{K}$ 上的 Banach 代数．

与第 0 章一样，我们仍设 i 是 $\boldsymbol{R}$ 中的一个区间(即非空并且不只含一个点的连通子集)．

然后我们记下:

(3.1.1) 定理: 假设

$$F: \mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{A} \text{ 连续},$$

$$g: \mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{R} \text{ 连续},$$

$$a \in \mathfrak{i}, \quad b \in \mathfrak{R}.$$

则刚好存在一个

$$y: \mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{R} \text{ 连续可微},$$

它满足

$$y(a) = b,$$

$$y'(x) = F(x)y(x) + g(x) \quad (x \in \mathfrak{i}).$$

对于致密的i,这个定理包含在一般的存在及唯一性定理 (2.3.1)之中——只须取 $M = B = \infty$ 和

$$N = \max_{x \in \mathfrak{i}} |F(x)|$$

对于非致密的i,我们可以把 i 考虑为含 a 的致密子区间的并集(Vereinigung),通过惯用的方法立即得到定理.

3.2 代数学的结论

我们和第 3.1 节一样考察 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}$, i及 F, 并且分别用$\mathscr{C}_0(\mathfrak{i}, \mathfrak{R})$和$\mathscr{C}_1(\mathfrak{i}, \mathfrak{R})$表示在 i 上连续及在 i 上连续可微的 $\mathfrak{R}$-值函数的(K 上的)线性空间.

于是显然

$$(Lz)(x) = z'(x) - F(x)z(x) \quad (x \in \mathfrak{i})$$

定义出一个 K-线性映象:

$$L: \mathscr{C}_1(\mathfrak{i}, \mathfrak{R}) \longrightarrow \mathscr{C}_0(\mathfrak{i}, \mathfrak{R}).$$

因此我们——特别利用定理 (3.1.1) ——即得如下简单的线性代数的论断:

(3.2.1) L的零空间(Nullraum)(核)$\mathfrak{N}_L$作为$\mathbf{K}$-线性空间是与$\mathfrak{R}$同构的. 同构是借助于(任意的)$a\in \mathrm{i}$,通过

$$\mathfrak{N}_L \ni y \longleftrightarrow y(a) \in \mathfrak{R}$$

给出的.

为此我们对于$g=0$应用定理(3.1.1),则对于固定的$a\in \mathrm{i}$,得知线性映象

$$\mathfrak{N}_L \ni y \longmapsto y(a) \in \mathfrak{R}$$

是上射的(surjektiv)(存在性)及入射的(injektiv)(唯一性).

(3.2.2) 对于L的象空间有

$$L\mathscr{C}_1(\mathrm{i}, \mathfrak{R}) = \mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \mathfrak{R});$$

所以L是上射的(surjektiv).

这是因为根据定理(3.1.1)对于每一个$g\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \mathfrak{R})$, $Ly=g$都可解. 于是对于通解(Lösungsgesamtheit)明显地有:

(3.2.3) 设$g\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \mathfrak{R})$, $y_0\in\mathscr{C}_1(\mathrm{i}, \mathfrak{R})$并且

$$Ly_0 = g.$$

则必有

$$L^{-1}g = y_0 + \mathfrak{N}_L.$$

综合起来,定理(3.1.1)表明

(3.2.4) 对固定的$a\in \mathrm{i}$,由

$$\mathscr{C}_1(\mathrm{i}, \mathfrak{R}) \ni y \longmapsto (Ly, y(a)) \in \mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \mathfrak{R}) \times \mathfrak{R}$$

定义的映象是所提到的空间之间的一个同构.

3.3 齐次线性微分方程

对于我们初步的讨论,更一般地从任意一个具有单位元素E的$\mathbf{K}$上Banach代数$\mathfrak{A}$出发就够了. 我们以$\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$表示$\mathfrak{A}$内可逆元素的乘法群(multiplikative Gruppe).

设 i 仍为$\boldsymbol{R}$中的一个区间而且

$$F: \mathrm{i} \longrightarrow \mathfrak{A} \quad \text{连续.}$$

我们研究 $\mathfrak{A}$ 中的齐次线性微分方程

(3.3.1) $$Y' = F(x)Y.$$

对它我们证明

(3.3.2) **定理**: 假定

$$Y: \mathrm{i} \longrightarrow \mathfrak{A} \quad \text{是(3.3.1)的解.}$$

如果对某个 $a \in \mathrm{i}$ 成立

$$Y(a) \in \mathfrak{J}(\mathfrak{A}),$$

则对一切 $x \in \mathrm{i}$ 都有

$$Y(x) \in \mathfrak{J}(\mathfrak{A}).$$

证明: 我们把对应(Zuordnung)

$$\mathfrak{A} \ni B \longmapsto -BF(x) \in \mathfrak{A}$$

看作映 Banach 空间 $\mathfrak{A}$ 到它自身内的有界 K-线性映象, 那么定理(3.1.1)就保证存在唯一的

$$Z: \mathrm{i} \longrightarrow \mathfrak{A} \quad \text{连续可微}$$

满足

$$Z(a) = Y(a)^{-1},$$

$$Z'(x) = -Z(x)F(x) \quad (x \in \mathrm{i}).$$

现在我们要证

$$Z(x)Y(x) = Y(x)Z(x) = E \quad (x \in \mathrm{i})$$

因而 $Y(x) \in \mathfrak{J}(\mathfrak{A})$, $Z(x) = Y(x)^{-1}(x \in \mathrm{i})$.

首先算出

$$(ZY)' = Z'Y + ZY' = -(ZF)Y + Z(FY) = 0$$

利用定理(2.2.2)得

$$Z(x)Y(x) = Z(a)Y(a) = E \quad (x \in \mathrm{i}).$$

另一方面我们注意

$$(YZ)' = Y'Z + YZ' = (FY)Z - Y(ZF).$$

因此$U:=YZ$是齐次线性微分方程

$$U'=F(x)U-UF(x)$$

满足 $U(a)=E$ 的解.

但$V(x):=E(x\in\mathrm{i})$也是上列初值问题的解，故由定理(3.1.1)中的唯一性命题得出

$$Y(x)Z(x)=E \quad (x\in\mathrm{i}).$$

这就是要证的结果. □

这里我们是通过$Y(x)^{-1}$的构造给出比较代数化的证明的.我们也可以给出比较解析化的证明，这时我们注意$\Im(\mathfrak{A})$在$\mathfrak{A}$内是开的并且是乘法群. 因此应用定理(3.1.1)即可表明,满足$Y(x)\in\Im(\mathfrak{A})$的$x\in\mathrm{i}$的集合在i内是既开又闭的.

我们把按照(3.3.2)使$Y(x)$恒可逆的Y称为(3.3.1)的基本解.

基本解的意义由下面定理指出.

(3.3.3) **定理:** 如果

$$Y:\mathrm{i}\longrightarrow\mathfrak{A} \text{ 是(3.3.1)的基本解,}$$

则

$$Z:\mathrm{i}\longrightarrow\mathfrak{A}$$

当且仅当

$$Z(x)=Y(x)C \quad (x\in\mathrm{i})$$

对某个(与$a\in\mathrm{i}$无关的)$C:=Y(a)^{-1}Z(a)\in\mathfrak{A}$成立时,才是(3.3.1)的解. 此外,当且仅当$C\in\Im(\mathfrak{A})$成立时,$Z$才是基本解.

在证明时只要注意——对任意的$a\in\mathrm{i}$——

$$U(x):=Y(x)Y(a)^{-1}Z(a) \quad (x\in\mathrm{i})$$

都是(3.3.1)满足$U(a)=Z(a)$的一个解，并应用唯一性定理就行了. □

现在我们再次以K上的一个Banach空间$\mathfrak{R}$作为讨论的基础,

和在第3.1节中一样我们记 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$ 并考察 $\mathfrak{R}$ 中的齐次线性微分方程

(3.3.4) $$y'=F(x)y.$$

象刚才一样我们得到

(3.3.5) **定理:** 假如

$$Y:\mathrm{i}\longrightarrow\mathfrak{A}\ \text{是(3.3.1)的基本解,}$$

$$a\in\mathrm{i},\quad b\in\mathfrak{R},$$

则

$$y:\mathrm{i}\longrightarrow\mathfrak{R}$$

当且仅当

$$y(x)=Y(x)(Y(a)^{-1}b)\quad(x\in\mathrm{i})$$

成立时，才是(3.3.4)的满足 $y(a)=b$ 的解.

我们看到，(3.2.1)中提及的同构在此处是直接表达出来的.

下面我们考察所得结果对于一阶线性微分方程组及高阶微分方程的具体结论，以及与此有关的补充结果.

对于 $K=R$ 或 $K=C$ 及 $n\in N$，我们把 $\mathfrak{R}=K^n$ 看做 K 上满足 $\dim\mathfrak{R}=n$ 的 Banach 空间. 这时我们就可以把 $\mathfrak{A}$ 解释为元素取自 K 内的 (n,n)-矩阵的全体，并且把 $e_1,e_2,\cdots,e_n$

$$e_1=\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix},\quad e_2=\begin{pmatrix}0\\1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}\cdots,\quad e_n=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}$$

称为 $\mathfrak{R}$ 的标准基底(kanonische Basis).

$$F:\mathrm{i}\longrightarrow\mathfrak{A}\ \text{连续,}$$

及

$$Y:\mathrm{i}\longrightarrow\mathfrak{A}\ \text{连续可微,}$$

也可以分别理解为由K-值的连续或连续可微的函数 $\varphi_{\nu\mu}$ 及 $\eta_{\nu\mu}$ 组成的(n, n)-矩阵.

我们立刻可以看出，当且仅当Y的各列(Spalten)

$$y_\nu(x)=Y(x)e_\nu \quad (x\in \mathrm{i}; \nu=1, 2, \cdots, n),$$

满足

$$y'_\nu(x)=F(x)y_\nu(x) \quad (x\in \mathrm{i}; \nu=1, 2, \cdots, n)$$

的时候，才有

$$Y'(x)=F(x)Y(x) \quad (x\in \mathrm{i}).$$

(3.3.1)中的基本解Y，在这里也叫做基本矩阵. 它的列y_ν($\nu=1, 2, \cdots, n$)组成(3.3.4)的一个基本解组.

我们看出，当且仅当 $y_\nu(x)$($\nu=1, 2, \cdots, n$)在 i 内某点且因而在每一点 $x\in \mathrm{i}$ 都(在K上)线性无关时，Y才是一个基本解. 根据(3.2.1)此时 y_ν($\nu=1, 2, \cdots, n$)恰好构成 L 的零空间 $\mathfrak{N}_L$ 的基底.

若 $Y: \mathrm{i}\longrightarrow \mathfrak{A}$ 为(3.3.1)的任意矩阵-解，亦即Y的列 y_ν

$$y_\nu(x)=Y(x)e_\nu \quad (x\in \mathrm{i}; \nu=1, 2, \cdots, n)$$

是(3.3.4)的任意解，则我们把由

$$w(x):=\det Y(x)=\det(y_1(x), \cdots, y_n(x)) \quad (x\in \mathrm{i}),$$

定义的 $w: \mathrm{i}\longrightarrow K$ 叫做矩阵-解Y或者解组 y_ν($\nu=1, 2, \cdots, n$)的Wronski(朗斯基)行列式. 于是定理(3.3.2)显然表明，或者$w=0$或者对一切 $x\in \mathrm{i}$ 有$w(x)\neq 0$; 只是在后一种情况下Y才是一个基本解组.

这一点也可以通过关于w的一个1阶线性齐次微分方程的建立加以证实(Liouville 公式)

(3.3.6) $$w'(x)=\operatorname{spur} F(x)w(x) \quad (x\in \mathrm{i}).$$

在证明中 $w=0$ 的情形是平凡的. 只需考虑 $w(x)\neq 0$($x\in \mathrm{i}$)，即假定Y的各列 y_ν 组成一个基本组. 由于行列式的多重线性性质及 y_ν 的可微性知道w也可微并且

$$w'(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\det(y_1(x),\cdots,y_{\nu-1}(x),y'_\nu(x),y_{\nu+1}(x),\cdots,y_n(x))$$

$$(x\in\mathrm{i}).$$

我们将 $F(x)y_\nu(x)$在基底y_ν中表示出来

$$F(x)y_\nu(x)=\sum_{\mu=1}^{n}\tilde{\varphi}_{\nu\mu}(x)y_\mu(x)\quad(\nu=1,2,\cdots,n),$$

所以在作代换 $y'_\nu(x)=F(x)y_\nu(x)$之后显然有

$$w'(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\tilde{\varphi}_{\nu\nu}(x)w(x).$$

而$\sum\limits_{\nu=1}^{n}\tilde{\varphi}_{\nu\nu}(x)$刚好就是 spur$F(x)$($F(x)$ 的迹) 在基底y_ν中的表达式. □

最后我们还要指出这个结果对于下列n阶齐次线性微分方程的结论

(3.3.7) $$\eta^{(n)}+f_1(x)\eta^{(n-1)}+\cdots+f_n(x)\eta=0$$

这里

$$f_\nu:\mathrm{i}\longrightarrow K\quad \text{连续}(\nu=1,2,\cdots,n).$$

第 2.4 节中的变换

(3.3.8) $$y=\begin{pmatrix}\eta\\ \eta'\\ \vdots\\ \eta^{(n-1)}\end{pmatrix}$$

在此处给出(3.3.7)的等价微分方程组

$$y'=F(x)y,$$

其中

(3.3.9)

$$F(x)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & 0 & & & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & 1 \\ -f_n(x) & -f_{n-1}(x) & -f_{n-2}(x) & & -f_2(x) & -f_1(x) \end{pmatrix}.$$

用微分方程(3.3.7)的 n 个解 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 构成的矩阵

(3.3.10)
$$Y=\begin{pmatrix} \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \\ \eta_1' & \eta_2' & \cdots & \eta_n' \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \eta_1^{(n-1)} & \eta_2^{(n-1)} & \cdots & \eta_n^{(n-1)} \end{pmatrix}$$

称为 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 的Wronski矩阵. 如果这里的 Y 是基本矩阵, 则我们称 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 为(3.3.7)的一个基本解组.

我们注意, (3.3.7)的 n 个解 $\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n$ 当且仅当它们线性无关时才构成一个基本解组. 这是因为用(3.3.7)左端给定的由 $\mathscr{C}_n(\mathrm{i}, \mathbf{K})$ 映到 $\mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \mathbf{K})$ 内的线性映象 Λ 的零空间, 在所用的变换之下同构于由上面得到的 F 按照第 3.2 节定义的映象 L 的零空间 $\mathfrak{N}_L$. 而且紧接在定理(3.3.5)之后我们已经指出过, 只有基本矩阵的诸列才构成 $\mathfrak{N}_L$ 的基底.

最后我们还要指出, 由于此处 spur $F(x)=-f_1(x)$, 故关于 Wronski 行列式

$$w(x)=\det Y(x)$$

的 Liouville(刘维尔)公式恰好是

$$w'(x)=-f_1(x)w(x) \quad (x\in\mathrm{i}).$$

3.4 变 换

我们在第 3.1 节的假定之下考察

(3.4.1) $$y' = F(x)y + g(x)$$

并记述在变换

(3.4.2) $$y(x) = T(x)z(x),$$

之下的结果，这里假设

$$T: \mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{I}(\mathfrak{A})\text{连续可微.}$$

简单的计算表明：

(3.4.3) 当且仅当 z 是微分方程

$$z' = \tilde{F}(x)z + \tilde{g}(x)$$

其中

$$\tilde{F}(x) := T(x)^{-1}(F(x)T(x) - T'(x))$$

$$\tilde{g}(x) := T(x)^{-1} \cdot g(x)$$

的解时，y 才是(3.4.1)的解.

对此我们只需指出

$$x \longmapsto T(x)^{-1}$$

也是连续可微的．这是因为如所周知对应

$$\mathfrak{I}(\mathfrak{A}) \ni A \longmapsto A^{-1} =: i(A) \in \mathfrak{I}(\mathfrak{A})$$

是连续可微的；它的导数由下式给出

$$i'(A)H = -A^{-1}HA^{-1} \quad (H \in \mathfrak{A}).$$

所以由链形规则得出

$$(i \circ T)'(x) = -T(x)^{-1}T'(x)T(x)^{-1}.$$

我们再指出关于 n 阶线性微分方程

(3.4.4) $$\eta^{(n)} + f_1(x)\eta^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)\eta = \gamma(x)$$

(这里 f_ν 及 γ 都是 $\mathfrak{i}$ 上的 K-值连续函数) 的一个对应的变换．这里我们作变换

(3.4.5) $$\eta(x) = t(x)\zeta(x),$$

其中

$$t: \mathfrak{i} \longrightarrow K \quad n\text{ 次连续可微且 } t(x) \neq 0 \quad (x \in \mathfrak{i}).$$

直接可以证实，变换后仍得到 ζ 的一个 n 阶微分方程，其系数 $\tilde{f}_\nu$ 及非齐次项 $\tilde{\gamma}$ 可以明显地确定：

$$\tilde{f}_{n-\mu}(x)=\frac{1}{t(x)}\sum_{\nu=\mu}^{n}\binom{\nu}{\mu}f_{n-\nu}(x)t^{(\nu-\mu)}(x)$$

$$(\mu=0,\cdots,n-1),$$

(3.4.6) $$(x\in\mathrm{i}).$$

$$\tilde{\gamma}(x)=\frac{1}{t(x)}\gamma(x)$$

其中当然已置 $f_0(x)=1(x\in\mathrm{i})$.

由于前面讲的在把(3.4.4)写成 $\mathbf{K}^n$ 中的 1 阶线性微分方程组的情况下，变换(3.4.5)相当于变换矩阵

(3.4.7) $$T(x)=(t_{\nu\mu}(x))_{(n,n)}\quad(x\in\mathrm{i}),$$

其中

$$t_{\nu\mu}(x):=\begin{cases}0 & (\nu<\mu)\\ \binom{\nu-1}{\mu-1}t^{(\nu-\mu)}(x) & (\nu\geqslant\mu)\end{cases}\qquad(x\in\mathrm{i}).$$

(ν 表示行指标，μ 表示列指标). T 显然是连续可微的，而且由于 $\det T(x)=t(x)^n$ 它总是可逆的. T 具有重要的性质：它把形如(3.3.8)的函数 $y:\mathrm{i}\longrightarrow\mathbf{K}^n$ 的集合一一对应地映到其自身上. 因而把 F 仍映成形如(3.3.9)的 $\tilde{F}$. 当然对应的 $\tilde{f}_\nu$ 就是上面所已指出过的. 对于非齐次项我们可证实——因为此处 T 不改变方程的特殊形式——由 $g=\gamma e_n$ 也得到 $\tilde{g}=\tilde{\gamma}e_n$.

3.5 简　化

下面以 Banach 空间 $\mathfrak{R}$ 作为讨论的基础，而 $\mathfrak{R}$ 又是 Banach 空间 $\mathfrak{R}_1$ 和 $\mathfrak{R}_2$ 的笛卡儿积(kartesisches Produkt)

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2.$$

我们把 $\mathfrak{R}$ 的元素写成列

$$z=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix},\quad z_\nu\in\mathfrak{R}_\nu\qquad(\nu=1,2).$$

对于把 $\mathfrak{R}$ 映到其自身内的有界线性映象，在下面我们将使用一个方便的矩阵表达式．我们对此先简单解释一下．

如果 $A\in\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$，那么我们可以把

$$A\begin{pmatrix}z_1\\z_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}$$

表示为如下形状

$$w_1=A_{11}z_1+A_{12}z_2,$$
$$w_2=A_{21}z_1+A_{22}z_2,$$

这里

$$A_{\nu\mu}\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_\mu,\mathfrak{R}_\nu)\qquad(\nu,\mu=1,2).$$

是由 A 确定的某些有界线性算子．例如在 A 已给定的情况下，A_{12} 是由三个有界线性映象的组合给出的

$$z_2\longmapsto\begin{pmatrix}0\\z_2\end{pmatrix}\overset{A}{\longmapsto}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}\longmapsto w_1.$$

我们简写为

$$A=\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}.$$

这种表示法对于乘积的计算是特别方便的，我们可验证，和简单情形 $\mathfrak{R}=\boldsymbol{K}\times\boldsymbol{K}$ 中一样：

$$\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}B_{11}&B_{12}\\B_{21}&B_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A_{11}B_{11}+A_{12}B_{12}&A_{11}B_{12}+A_{12}B_{22}\\A_{21}B_{11}+A_{22}B_{21}&A_{21}B_{12}+A_{22}B_{22}\end{pmatrix}.$$

现在我们在 3.1 节的假设之下，考察 $\mathfrak{R}=\mathfrak{R}_1\times\mathfrak{R}_2$ 中的齐次线性微分方程

(3.5.1) $$y'=F(x)y.$$

此外，假设已给

$$T:\mathfrak{i}\longrightarrow\mathfrak{J}(\mathfrak{A})\text{ 连续可微,}$$

它具有性质，对于每一个 $z_1\in\mathfrak{R}_1$ 及 $0\in\mathfrak{R}_2$

$$T(x)\begin{pmatrix}z_1\\0\end{pmatrix}\quad(x\in\mathfrak{i})$$

都给出(3.5.1)的一个解.

我们利用T按照3.4节所述来变换(3.5.1)，因此根据(3.4.3)作出

$$\tilde{F}(x)=T(x)^{-1}(F(x)T(x)-T'(x)),$$

于是对一切的 $z_1\in\mathfrak{R}_1$ 及 $0\in\mathfrak{R}_2$ 必定有

$$0=\begin{pmatrix}z_1\\0\end{pmatrix}'=\tilde{F}(x)\begin{pmatrix}z_1\\0\end{pmatrix}\quad(x\in\mathfrak{i}).$$

所以$\tilde{F}$有矩阵表达式

$$\tilde{F}(x)=\begin{pmatrix}0_{11}&\tilde{F}_{12}\\0_{21}&\tilde{F}_{22}\end{pmatrix}\quad(x\in\mathfrak{i}),$$

它的第一列总是零映象.

现在我们构造一个连续可微的映象

$$Y:\mathfrak{i}\longrightarrow\mathfrak{A},$$

它满足

(3.5.2) $$Y(x)=T(x)Z(x),$$

而

(3.5.3) $$Z(x)=\begin{pmatrix}E_{11}&Z_{12}(x)\\0_{21}&Z_{22}(x)\end{pmatrix},$$

其中 E_{11} 是 $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_1,\mathfrak{R}_1)$的单位元素，$0_{21}$ 仍是对应的零映象而

(3.5.4) $$Z_{\nu 2}:\mathfrak{i}\longrightarrow\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_2,\mathfrak{R}_\nu)\quad(\nu=1,2)$$

是连续可微的．则当且仅当 Z_{22} 及 Z_{12} 分别是

(3.5.5) $$Z_{22}'=\tilde{F}_{22}(x)Z_{22}$$

和

(3.5.6) $$Z'_{12}=\widetilde{F}_{12}(x)Z_{22}$$

的解时，Y 才是 $Y'=F(x)Y$ 的解.

所以只要有(3.5.5)的解并依下式定出 $Z_{12}(x)$ 就够了

(3.5.7) $$Z_{12}(x)=\int_a^x \widetilde{F}_{12}(t)Z_{22}(t)dt+Z_{12}(a) \qquad (x\in\mathrm{i}).$$

我们立刻看出，当且仅当 Z 是 $Z'=\widetilde{F}(x)Z$ 的基本解时，亦即当且仅当 Z_{22} 是(3.5.5)的基本解时，Y 才是(3.5.1)的基本解.

关于 T 的假设意味着已知 (3.5.1) 的某个解空间和 $\mathfrak{R}_1$ 同构. 我们的结果说明，要完全确定整个的解空间，只要仅仅确定出 $\mathfrak{R}_2$ 中的一个微分方程的解就够了.

如果我们细看对于在空间

$$K^n=K^r\times K^s \qquad (r+s=n)$$

内的方程组的解释，这点就显得特别地清楚. 这时对 $T(x)$ 的假定刚好表明 T 的前 r 列是(3.5.1)的线性无关解，而后 s 列则是由任意的连续可微函数组成的，但已选得使 $T(x)$ 恒可逆. 这时(3.5.5)是 K^s 内的一个微分方程组. 为了确定(3.5.1)的一个基本解组，我们可以先求(3.5.5)的一个基本解组然后按 (3.5.7) 进行积分，并利用 (3.5.3) 构作(3.5.2). 这样得出的 $Y(x)$ 中的前 r 列显然刚好就是曾在 $T(x)$ 中用到的(3.5.1)的 r 个解.

如果已知一满足 $\eta_1(x)\neq 0$ $(x\in\mathrm{i})$ 的解 η_1，则 n 阶微分方程

$$\eta^{(n)}+f_1(x)\eta^{(n-1)}+\cdots+f_n(x)\eta=0$$

的简化就很简单. 显然利用 $t=\eta_1$ 变换 (3.4.5)就把原方程变成关于 ζ' 的一个 $(n-1)$ 阶的齐次线性微分方程，因为这时恰好 $\tilde{f}_n=0$.

利用与上述简化过程对应的特殊变换矩阵(3.4.7)可知：如果 $n-1$ 个函数 $\zeta_2',\zeta_3',\cdots,\zeta_n'$ 是以 $\tilde{f}_1,\cdots,\tilde{f}_{n-1}$ 为系数的 $n-1$ 阶齐次线

性微分方程的线性无关的解，则经过求积定出 $\zeta_2, \cdots, \zeta_n$ 之后，我们就得到原来的 n 阶齐次线性微分方程的 n 个线性无关解：

$$\eta_1, \eta_1\zeta_2, \cdots, \eta_1\zeta_n.$$

3.6 非齐次线性微分方程

现在我们在3.1节的假设之下讨论微分方程

$$y' = F(x)y + g(x) \tag{3.6.1}$$

我们将表明第1.3节内的方法(常数变易)相应地在此处也可用，即如果已知

$$Y' = F(x)Y \tag{3.6.2}$$

的一个基本解，我们就可以借助求积得出(3.6.1)的解.

我们利用(3.6.2)的一个基本解 Y，依照第 3.4 节作变换

$$y(x) = Y(x)c(x) \qquad (x \in \mathrm{i}),$$

则当且仅当 c 连续可微并满足

$$c'(x) = Y(x)^{-1}g(x) \qquad (x \in \mathrm{i})$$

时才得出 $\widetilde{F} = 0$，从而 y 是(3.6.1)的解.

(3.6.1)满足 $y(a) = b$ 的解由下式表出

$$y(x) = Y(x)\left(Y(a)^{-1}b + \int_a^x Y(t)^{-1}g(t)dt\right). \tag{3.6.3}$$

显然这个公式明显地给出了在(3.2.4)中所提到的同构的逆映象.

(3.6.3)对于一个 n 阶微分方程

$$\eta^{(n)} + f_1(x)\eta^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)\eta = \gamma(x)$$

的结论是立刻可以看出的，如果我们注意 (3.3.10) 和 $g(x) = \gamma(x)e_n$，利用周知的由行列式及代数余子式表达逆矩阵的公式，而且在(3.6.3)中只写出第一个元素.

关于满足 $\eta(a) = \eta'(a) = \cdots = \eta^{(n-1)}(a) = 0$ 的解，我们特别给出

$$(3.6.4)\qquad \eta(x)=\sum_{\nu=1}^{n}\eta_\nu(x)\int_a^x \gamma(t)\,\frac{w_\nu(t)}{w(t)}dt \qquad (x\in \mathrm{i}),$$

其中 $w_\nu(t)$是 $\eta_\nu^{(n-1)}(t)$ 在已知基本矩阵 Y 中的代数余子式，而 $w(t)=\det Y(t)$.

3.7 Banach 代数中的指数函数

假设 $\mathfrak{A}$ 是在 $K=R$ 或 $K=C$ 上的一个具有单位元素 E 的 Banach 代数．对于每一个 $A\in\mathfrak{A}$, 由于

$$|A^n|\leqslant|A|^n \quad (n\in N),$$

级数

$$E+\frac{1}{1!}A+\frac{1}{2!}A^2+\cdots+\frac{1}{n!}A^n+\cdots$$

而具有强级数

$$|E|+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|A|^n}{n!},$$

所以是收敛的, 从而在 $\mathfrak{A}$ 中具有级数和．我们定义

$$(3.7.1)\qquad \exp(A):=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n!}A^n,$$

与通常一样其中已置 $A^0=E$.

我们容易明白

(3.7.2) 如果 $\mathfrak{A}_1$ 是 $\mathfrak{A}$ 的满足 $E\in\mathfrak{A}_1$的Banach 子代数 (Unter-algebra), 那么

$$\exp(\mathfrak{A}_1)\subset\mathfrak{A}_1.$$

(3.7.3) 当 $A\in\mathfrak{A}$ 及 $B\in\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$时有

$$\exp(B^{-1}AB)=B^{-1}\exp(A)B.$$

(3.7.4) 如果 $P\in\mathfrak{A}$ 满足 $P^2=P$[即 P 是幂等的(idempotent)]并

且 $\lambda\in\mathbf{K}$ 时有

$$\exp(\lambda P)=(E-P)+\exp(\lambda)P.$$

(3.7.5) 当 $A\in\mathfrak{A}$ 时有

$$|\exp(A)|\leqslant\exp(|A|)+|E|-1.$$

不完全这样简单地又可得出

(3.7.6) 对于满足 $AB=BA$ 的 $A, B\in\mathfrak{A}$, 下列函数等式成立:

$$\exp(A+B)=\exp(A)\exp(B).$$

为了证明, 我们作估计:

$$\left|\sum_{\mu=0}^{2m}\frac{1}{\mu!}(A+B)^{\mu}-\sum_{\rho=0}^{m}\frac{1}{\rho!}A^{\rho}\sum_{\kappa=0}^{m}\frac{1}{\kappa!}B^{\kappa}\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{\mu=m+1}^{2m}\frac{1}{\mu!}(|A|+|B|)^{\mu}\longrightarrow 0,\quad (m\to\infty)\quad\square.$$

(3.7.6)的直接推论是:

(3.7.7) 当 $A\in\mathfrak{A}$ 时必有 $\exp(A)\in\mathfrak{G}(\mathfrak{A})$ 以及

$$\exp(A)^{-1}=\exp(-A).$$

我们再证明:

(3.7.8) 如果 $\mathfrak{A}$ 是可交换的, 那么映象

$$\exp:\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{A}$$

是可微的且其导数由下式给出

$$\exp'(A)H=\exp(A)H\qquad(H\in\mathfrak{A})$$

(上式左边是线性映象而右边是乘积).

证明可利用(3.7.6)和下式给出

$$\exp(A+H)-\exp(A)-\exp(A)H=\exp(A)(\exp(H)-E-H)$$
$$=O(|H|^2).\quad\square$$

上面的定理指明了对于线性微分方程的重要意义.

(3.7.9) **定理:** 设 i 是 $\boldsymbol{R}$ 中的区间, $a\in\mathrm{i}$ 而且

$$F: \mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{A} \text{ 连续,}$$

并设当 $x_1, x_2 \in \mathfrak{i}$ 总有

$$F(x_1)F(x_2) = F(x_2)F(x_1).$$

最后假设

$$Y(x) := \exp\left(\int_a^x F(t)\,dt\right) \qquad (x \in \mathfrak{i}).$$

那么

$$Y: \mathfrak{i} \longrightarrow \mathfrak{A}$$

必是 $Y' = F(x)Y$ 的基本解.

在证明中我们首先构造 $\mathfrak{A}$ 的一个满足 $F(\mathfrak{i}) \subset \mathfrak{A}_1$ 和 $E \in \mathfrak{A}_1$ 的可交换的 Banach 子代数 $\mathfrak{A}_1$. 这样的一个子代数, 显然刚好是最小的, 是乘积

$$\prod_{\rho=1}^{r} F(x_\rho) \qquad (x_\rho \in \mathfrak{i},\ r \in \mathbf{N}_0)$$

(其中空的乘积应代以 E)的一切(在 $\mathbf{K}$ 上的)有限线性组合的闭包. 现在我们可以假定 $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_1$. 于是由于 (3.7.8) 根据链形规则得出

$$Y'(x) = \exp\left(\int_a^x F(t)\,dt\right)F(x) = F(x)Y(x),$$

这就是所要证明的. □

一个推论是

(3.7.10) 定理: 设 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathbf{K}$ 上的有限维 Banach 空间, 而 $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}(\mathfrak{N}, \mathfrak{N})$, 那么当 $A \in \mathfrak{A}$ 时有

$$\det(\exp(A)) = \exp(\operatorname{spur} A).$$

在证明时我们注意, 根据定理 (3.7.9)

$$Y(x) := \exp(xA) \qquad (x \in \boldsymbol{R})$$

给出

$$Y' = AY, \quad Y(0) = E$$

的解. 对于

$$w(x):=\det Y(x) \qquad (x\in\boldsymbol{R}),$$

根据(3.3.6)有

$$w'(x)=\operatorname{spur} Aw(x), w(0)=1,$$

所以

$$w(x)=\exp(x\operatorname{spur} A) \qquad (x\in\boldsymbol{R}).$$

取 $x=1$ 就得出结论. □

以下我们又以 $\boldsymbol{K}$ 上的一个具有单位元素 E 的任意 Banach 代数作为讨论的基础. 我们设法把一个 $A\in\mathfrak{A}$——由于(3.7.7)自然必须假定是可逆的——借助某个 $B\in\mathfrak{A}$ 表示成如下形式

$$A=\exp(B).$$

我们由简单的部分结果开始.

(3.7.11) 设 $P\in\mathfrak{A}$ 满足 $P^2=P$ 且 $\lambda\in\boldsymbol{K}$ 在 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ 时满足 $\lambda\neq0$, 而在 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ 时满足 $\lambda>0$. 那么对 $Q:=E-P$ 有

$$\exp(\log(\lambda)P)=Q+\lambda P.$$

这由(3.7.4)立刻可得出.

(3.7.12)假设 $C\in\mathfrak{A}$ 满足

(*) $$E+tC\in\mathfrak{J}(\mathfrak{A}) \qquad (t\in[0,1]).$$

那么必存在

$$B:=C\int_0^1(E+tC)^{-1}dt,$$

并有

$$\exp(B)=E+C.$$

对于(*)的成立,

(**) $$\limsup_{n\to\infty}|C^n|^{1/n}<1$$

是充分的条件; 而且当(**)成立时我们有

$$B=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}C^n.$$

在证明时我们由

$$F(x):=C(E+xC)^{-1}\qquad(x\in[0,1])$$

出发是适当的．由于(*)F是有定义而且连续的（参阅(3.4.2)的证明）．现在我们考虑初值问题

$$Y'=F(x)Y,\quad Y(0)=E.$$

对于它的唯一确定的解Y有

$$Y(x)=\begin{cases}E+xC\\ \exp\left(C\int_0^x(E+tC)^{-1}dt\right)\end{cases}\qquad(x\in[0,1]),$$

其中第一个表达式立即可以证实而第二个表达式由定理（3.7.9）得出．在两式中令$x=1$即得出结论$\exp(B)=E+C$.

因为当$\rho:=(\limsup\limits_{n\to\infty}|C^n|^{1/n})^{-1}>0$时，对$t\in(-\rho,\rho)$总有

$$(E+tC)^{-1}=\sum_{n=0}^{\infty}(-t)^nC^n,$$

所以由(**)立刻得到(*)．根据级数在[0,1]上的一致收敛性，通过逐项积分即得B的级数表达式．□

以下注记当然是平凡的

(3.7.13)　对于$\kappa=1,2,\cdots,k$，假设$A_\kappa\in\mathfrak{A}$可利用$B_\kappa\in\mathfrak{A}$表示成

$$A_\kappa=\exp(B_\kappa).$$

此外假设B_κ两两可交换，

$$B_\kappa B_\mu=B_\mu B_\kappa\qquad(\kappa\neq\mu),$$

则

$$A:=A_1A_2\cdots A_k$$

必可借助于

$$B:=B_1+B_2+\cdots+B_k$$

表示为

$$A=\exp(B).$$

这个注记可由(3.7.6)直接导出.

由(3.7.11)及(3.7.12)利用(3.7.13)得出

(3.7.14) **定理**: 若 $A\in\mathfrak{A}$ 具有表达式

$$A=\sum_{\kappa=1}^{k}\lambda_\kappa P_\kappa+N,$$

其中 $k\in\mathbf{N}$, $\lambda_\kappa\in\mathbf{K}(\kappa=1,2,\cdots,k)$, $0\neq P_\kappa\in\mathfrak{A}(\kappa=1,2,\cdots,k)$ 且 $N\in\mathfrak{A}$; 此外假设成立

(α) $P_\kappa P_\mu=P_\mu P_\kappa=\delta_{\kappa\mu}P_\kappa(\kappa,\mu=1,2,\cdots,k)$, $\sum_{\kappa=1}^{k}P_\kappa=E$;

(β) N 是幂零的 $(\exists r\in\mathbf{N}: N^r=0)$;

(γ) $P_\kappa N=NP_\kappa$ $(\kappa=1,2,\cdots,k)$;

(δ) 当 $\mathbf{K}=\mathbf{C}$ 时 $\lambda_\kappa\neq 0$ $(\kappa=1,2,\cdots,k)$

当 $\mathbf{K}=\mathbf{R}$ 时 $\lambda_\kappa>0$ $(\kappa=1,2,\cdots,k)$.

则利用

$$B:=\sum_{\kappa=1}^{k}\log(\lambda_\kappa)P_\kappa+\tilde{N}$$

可把 A 表作

$$A=\exp(B),$$

这里

$$\tilde{N}:=\sum_{\kappa=1}^{k}P_\kappa\left(\sum_{m=1}^{r-1}(-1)^{m-1}\frac{1}{m}\lambda_\kappa^{-m}N^m\right)$$

也是幂零的 $(\tilde{N}^r=0)$ 并且和一切 P_κ 都可交换.

为了证明, 我们令

$$Q_\kappa:=E-P_\kappa\qquad(\kappa=1,2,\cdots,k)$$

及

$$N_0:=\sum_{\kappa=1}^{k}\frac{1}{\lambda_\kappa}P_\kappa N.$$

于是我们直接可证实 $N_0^l=0$ 和

$$A=(Q_1+\lambda_1P_1)\cdots(Q_k+\lambda_kP_k)(E+N_0),$$

以及全部出现的元素是两两可交换的. 我们应用(3.7.11) k 次并应用 (3.7.12) 一次, 根据 (3.7.13) 即得出由上面的 B 给出的 $\exp(B)=A$. □

定理(3.7.14)的重要意义在于, 当 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$ 中的 $\mathfrak{R}$ 是 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ 上的有限维 Banach 空间时, 每一个可逆的 $A\in\mathfrak{A}$ 都可以这样表示(约当法式). 更一般些, 在 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ 而不要求(δ)的情况下, (3.7.14) 中的表达式当且仅当 A 所产生的子代数是有限维的时候也成立.

3.8 常系数齐次线性微分方程

当 $\mathfrak{A}$ 是 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ 或者 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ 上具有单位元素 E 的 Banach 代数的情况下, $\mathfrak{A}$ 中的齐次线性微分方程

(3.8.1) $$Y'=AY$$

(其中 $A\in\mathfrak{A}$ 为常量)的解原则上已由定理(3.7.9)及定理 (3.3.3) 给出. 引用定理(3.3.5), 相应的结果对于 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{C}$ 或 $\boldsymbol{K}=\boldsymbol{R}$ 上的一个 Banach 空间 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$ 及 $\mathfrak{R}$ 中的齐次线性微分方程

(3.8.2) $$y'=Ay$$

也有效.

此时

(3.8.3) $$Y(x):=\exp(xA)\qquad(x\in\boldsymbol{R})$$

提供了一个满足 $Y(0)=E$ 的基本解. 我们分别借助于常量的 $C\in\mathfrak{A}$ 和 $c\in\mathfrak{R}$, 即可用如下形式表出(3.8.1)及(3.8.2)的全部解:

$$Z(x)=Y(x)C,$$

及

$$z(x)=Y(x)c.$$

以下研究的对象是关于 (3.8.1) 及 (3.8.2) 的解的更精确的结构命题，它们产生于对A的结构的更精确的了解．此外将把它们特别用于 $\mathfrak{R}=\boldsymbol{K}^n$ 的情形，以获得解的一个比(3.8.3)更实用的封闭形式．

首先对于 $\boldsymbol{K}$ 上的具有单位元素 E 的 Banach 代数 $\mathfrak{A}$，我们记述：

(3.8.4) **定理**：设A具有表达式

$$A=\sum_{\kappa=1}^{k}\lambda_\kappa P_\kappa+N,$$

它满足定理(3.7.14)中的性质(α), (β), (γ)．那么 (3.8.3) 即可写作

$$Y(x)=\left(\sum_{\kappa=1}^{k}\ \exp(x\lambda_\kappa)P_\kappa\right)\left(\sum_{n=0}^{r-1}\frac{1}{n!}x^nN^n\right),$$

而且利用

$$N_\kappa:=P_\kappa N\quad(\kappa=1,2,\cdots,k)$$

又可记为

$$Y(x)=\sum_{\kappa=1}^{k}\exp(x\lambda_\kappa)P_\kappa\sum_{n=0}^{r_\kappa-1}\frac{1}{n!}x^nN_\kappa^n,$$

其中 r_κ 已选定为$\mathbf{N}$中满足 $N_\kappa^{r_\kappa}=0$ 的最小数．

在证明中只需用到 exp 的简单性质．□

这个定理的意义在于，得出了由数值的指数函数和多项式给定的解的表达式．

我们指出，所假定的关于A的表达式意味着 $\mathfrak{A}$ 作为 Banach

空间可分解为子代数

$$\mathfrak{A}_{\kappa\mu} := P_\kappa \mathfrak{A} P_\mu \quad (\kappa, \mu = 1, 2, \cdots, k)$$

的直和(direkte Summe)并且满足

$$AC_{\kappa\mu} = (\lambda_\kappa E + N_\kappa) C_{\kappa\mu} \quad (C_{\kappa\mu} \in \mathfrak{A}_{\kappa\mu}).$$

(3.8.1) 的在 $a=0$ 时具有初值 $C_{\kappa\mu} \in \mathfrak{A}_{\kappa\mu}$ 的解由

$$\exp(x\lambda_\kappa) \sum_{n=0}^{r_\kappa - 1} \frac{1}{n!} x^n N_\kappa^n C_{\kappa\mu} \quad (x \in \mathbf{R})$$

给出；它的值全部在 $\mathfrak{A}_{\kappa\mu}$ 内.

对于$\boldsymbol{K}$上的一个 Banach 空间 $\mathfrak{R}$ 及 $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$，我们相仿得出

(3.8.5)**定理**: 假设 $b \in \mathfrak{R}$ 是 $A \in \mathfrak{A}$ 的特征值 $\lambda \in \boldsymbol{K}$ 的$r \in \boldsymbol{N}$ 阶的主向量(Hauptvektor):

$$(A - \lambda E)^r b = 0, \quad (A - \lambda E)^{r-1} b \neq 0.$$

那么

$$y_\rho(x) = \exp(x\lambda) \sum_{n=0}^{\rho - 1} \frac{1}{n!} x^n (A - \lambda E)^{r - \rho + n} b$$

$$(x \in \mathbf{R};\ \rho = 1, 2, \cdots, r)$$

就给出(3.8.2)的满足

$$y_\rho(0) = (A - \lambda E)^{r-\rho} b$$

的 r 个线性无关解.

证明由利用

$\exp(xA)(A - \lambda E)^{r-\rho} b = \exp(x\lambda) \exp(x(A - \lambda E))(A - \lambda E)^{r-\rho} b$, 并且注意

$$(A - \lambda E)^{r-\rho} b \quad (\rho = 1, 2, \cdots, r)$$

作为ρ阶的主向量必线性无关即得. □

定理(3.8.4)及(3.8.5)是以这种方式联系起来的：在 $\mathfrak{R}$ 为$\boldsymbol{K}$上的 Banach 空间和 $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$ 的情形中定理(3.8.4)内对 A 所

要求的表达式刚好意味着每一个 $b\in P_\kappa\mathfrak{R}\setminus\{0\}$ 都是对于 A 的特征值 λ_κ 的一个阶数 $\leqslant r_\kappa$ 的主向量，而且 $\mathfrak{R}$ 本身可以表为主向量的子空间 $P_\kappa\mathfrak{R}$ 的直和.

现在设 $\mathfrak{R}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的有限维 Banach 空间.

这时必存在由主向量构成的一个基底(约当标准型)，并且可以这样来选取它们，使它们分裂成上面所讨论过的类型的族(Scharen)(对应于 Jordan 标准型中的块(Kästchen))．这些连同定理(3.8.5)就给出(3.8.2)的基本解组的表达式.

我们不把这种表达式明显地写出来了，因为它只不过是个单纯的记号练习而已.

如果我们讨论比较特殊的 $\mathfrak{R}=\boldsymbol{C}^n$ 及 A 是一个实矩阵的情形，那么我们可以假定对应于实特征值的主向量是实的．而且对应于复共轭特征值的主向量也可以选成是复共轭的．显然此时将所得解分解成实部和虚部就提供了一个在 $\boldsymbol{R}^n$ 内取值的基本解组．此时对于 $\lambda_\kappa=\alpha_\kappa+i\beta_\kappa(\alpha_\kappa,\beta_\kappa\in\boldsymbol{R})$ 显然出现

$$\exp(x\lambda_\kappa)=\exp(x\alpha_\kappa)(\cos(x\beta_\kappa)+i\sin(x\beta_\kappa)).$$

3.9 具有常系数和特殊非齐次项的线性微分方程

假定 $\mathfrak{R}$ 是 K 上的 Banach 空间且 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$．我们在这里讨论特殊的非齐次微分方程

(3.9.1) $$y'=Ay+x^s\exp(x\alpha)c,$$

其中

$$A\in\mathfrak{A},\quad \alpha\in\boldsymbol{K},\quad s\in\boldsymbol{N}_0,\quad c\in\mathfrak{R}\setminus\{0\},$$

并对两种简单的情形给出一个解.

(3.9.2) 假设存在一个 $d\in\mathfrak{R}$ 满足

$$(A-\alpha E)^{s+1}d=-s!c.$$

那么

$$y(x)=\exp(x\alpha)\sum_{n=0}^{s}\frac{x^n}{n!}(A-\alpha E)^n d$$

就是(3.9.1)的一个(特)解.

这可由以下计算证明:

$$y'(x)=\alpha y(x)+\exp(x\alpha)\sum_{n=1}^{s}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}(A-\alpha E)^n d$$

$$=\alpha y(x)+(A-\alpha E)y(x)-\exp(x\alpha)\frac{x^s}{s!}(A-\alpha E)^{s+1}d$$

$$=Ay(x)+\exp(x\alpha)x^s c. \quad \square$$

(3.9.3) 假设存在一个 $r\in N$ 满足

$$(A-\alpha E)^r c=0.$$

那么

$$y(x)=s!\exp(x\alpha)\sum_{n=0}^{r-1}\frac{x^{n+s+1}}{(n+s+1)!}(A-\alpha E)^n c$$

就是(3.9.1)的一个(特)解.

此处我们算出

$$y'(x)=\alpha y(x)+s!\exp(x\alpha)\sum_{n=0}^{r-1}\frac{x^{n+s}}{(n+s)!}(A-\alpha E)^n c$$

$$=\alpha y(x)+(A-\alpha E)y(x)+\exp(x\alpha)x^s c. \quad \square$$

在 $\mathfrak{R}$ 是K上的一个有限维 Banach 空间的情形中，上面两个注记已完全够用. 如果 α 不是特征值, 则得出情形(3.9.2). 如果 α 是特征值, 则我们可将 $\mathfrak{R}$ 表作 A-不变的子空间的直和

$$\mathfrak{R}=\mathfrak{H}_\alpha\dotplus\mathfrak{U}_\alpha$$

其中 $\mathfrak{H}_\alpha$ 是关于 α 的主空间 (Hauptraum) 而且 $(A-\alpha E)|\mathfrak{U}_\alpha$ 把 $\mathfrak{U}_\alpha$ 一一对应地映到它自身之上. 于是我们相应地分解

$$c=h+u \qquad (h\in\mathfrak{H}_\alpha, u\in\mathfrak{U}_\alpha),$$

那么对于非齐次项 $\exp(x\alpha)\,x^s u$ 及 $\exp(x\alpha)\,x^s h$ 就可以分别应用(3.9.2)及(3.9.3)；对应的解之和就给出对于原来希望的非齐次项 $\exp(x\alpha)x^s c$ 情形下的一个解.

最后我们指出，通过对于单项式情形中的对应解求和，我们就能得出在形式更一般的非齐次项

$$\sum_{\kappa=1}^{k}\exp(x\alpha_\kappa)p_\kappa(x)$$

的情形下的解，这里 p_κ 是系数在 $\mathfrak{R}$ 内的多项式.

3.10 常系数高阶线性微分方程

下面我们首先考虑具有常系数

$$\gamma_\nu\in\mathbf{C} \quad (\nu=1,2,\cdots,n)$$

的 n 阶齐次线性微分方程

(3.10.1) $$\eta^{(n)}+\gamma_1\eta^{(n-1)}+\cdots+\gamma_n\eta=0.$$

此处对应的多项式

(3.10.2) $$\varphi(t)=t^n+\gamma_1 t^{n-1}+\cdots+\gamma_n$$

起决定性的作用.

把(3.10.1)化成1阶齐次线性微分方程组

$$y'=Ay$$

就按照(3.3.9)得出矩阵

(3.10.3) $$A=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & & & 0\\ \vdots & \vdots & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & & 0 & 1\\ -\gamma_n & -\gamma_{n-1} & \cdots & & -\gamma_2 & -\gamma_1\end{pmatrix}.$$

为了对这种情形解释第3.8节中的一般结果，我们需要代数的

定理:

(3.10.4)**定理**:

1) $\det(tE-A)=\varphi(t)$ 成立.

2) 如果 $\lambda\in C$ 是 φ 的(准确的) r 阶零点,则由

$$v(t)=\begin{pmatrix}1\\t\\\vdots\\t^{n-1}\end{pmatrix}\qquad(t\in C)$$

定义的 $v:C\longrightarrow C^n$ 连同

$$b_\rho:=\frac{1}{(\rho-1)!}v^{(\rho-1)}(\lambda)\qquad(\rho=1,2,\cdots,r)$$

就给出对于 A 的特征值 λ 的 r 个主向量所成的组,且对此组有

$$(A-\lambda E)b_\rho=\begin{cases}0 & (\rho=1),\\ b_{\rho-1} & (\rho=2,3,\cdots,r).\end{cases}$$

在证明时我们从恒等式

$$(A-tE)v(t)=-\varphi(t)e_n$$

出发,微分 ρ 次得出

$$(A-tE)v^{(\rho)}(t)=\rho v^{(\rho-1)}(t)-\varphi^{(\rho)}(t)e_n.$$

对于 $\rho=0,1,\cdots,r-1$ 以 $t=\lambda$ 代入并利用 $\varphi^{(\rho)}(\lambda)=0$, 即知此 r 个线性无关的向量 b_ρ 就是对于 A 的特征值 λ 的主向量. 此就是命题 2). 因为 φ 之零点的阶数之和恰为 n, 所以所得的全部主向量合在一起构成一约当基底. 又因为 λ 作为 A 的特征值的代数阶数(主空间的维数), 同时也就是 λ 作为 A 的特征多项式的零点的阶数. 因此即得出命题 1). □

现在对应 φ 的一个 r 阶零点 λ, 定理(3.8.5)连同定理(3.10.4)就刚好给出微分方程组

$$y'=Ay$$

的 r 个线性无关解

$$(3.10.5)\quad y_\rho(x)=\exp(x\lambda)\left(b_\rho+\frac{x}{1!}b_{\rho-1}+\cdots+\frac{x^{\rho-1}}{(\rho-1)!}b_1\right)$$
$$(\rho=1,2,\cdots,r).$$

我们转向第一个分量就得出(3.10.1)的对应解

$$(3.10.6)\quad \eta_\rho(x)=\exp(x\lambda)\frac{x^{\rho-1}}{(\rho-1)!}\quad(\rho=1,2,\cdots,r).$$

对于 φ 的每个零点 λ 都写出这样的解组，总起来就得出提供一个基本解组的 n 个函数.

当然解(3.10.6)也可以很容易地直接加以验证，这时我们用(3.10.1)左端定义微分算子 Λ，注意

$$\Lambda(\exp(xt))=\varphi(t)\exp(xt)\quad(t\in\boldsymbol{C}),$$

对 t 微分 ρ 次得到

$$(3.10.7)\quad \Lambda(x^\rho\exp(xt))=\sum_{n=0}^{\rho}\binom{\rho}{n}\varphi^{(n)}(t)x^{\rho-n}\exp(xt).$$

由这个想法也可导致关于特殊的 n 阶非齐次线性微分方程

$$(3.10.8)\quad \eta^{(n)}+\gamma_1\eta^{(n-1)}+\cdots+\gamma_n\eta=x^s\exp(x\alpha)$$

特解的一个初等的求法，这里

$$\gamma_\nu\in\boldsymbol{C}(\nu=1,2,\cdots,n),\quad \alpha\in\boldsymbol{C},\quad s\in\boldsymbol{N}_0.$$

此方程当然也可按照第 3.9 节加以处理.

为此，我们进行因式分解

$$\varphi(t)=(t-\alpha)^r\psi(t),\quad r\in\boldsymbol{N}_0,\quad \psi(\alpha)\neq 0.$$

根据前面所述有

$$\Lambda\left(\frac{1}{\psi(t)}\exp(tx)\right)=(t-\alpha)^r\exp(tx)\quad(t\in\boldsymbol{C},\ \psi(t)\neq 0).$$

我们(在 α 附近)对 t 微分 $(r+s)$ 次并以 $t=\alpha$ 代入则得

$$(3.10.9)\quad \Lambda\left(\frac{\partial^{r+s}}{\partial t^{r+s}}\left(\frac{1}{\psi(t)}\exp(tx)\right)\bigg|_{t=\alpha}\right)$$

$$=\frac{(r+s)!}{s!}x^s\exp(\alpha x).$$

3.11 周期的齐次线性微分方程

我们仍由 $K=R$ 或 $K=C$ 上的一个任意的具有单位元素的 Banach 代数 $\mathfrak{A}$ 出发.

今假设

$$F:R\to\mathfrak{A}\quad 连续$$

并且以 1 为周期

(3.11.1) $$F(x+1)=F(x)\qquad(x\in R).$$

我们研究齐次线性微分方程

(3.11.2) $$Y'=F(x)Y.$$

我们的目标是由周期性质(3.11.1)导出关于解的结构的命题.

出发点是从(3.11.1)立刻可以看出的注记：(3.11.3) 当而且仅当用

$$\tilde{Y}(x):=Y(x+1)\qquad(x\in R)$$

定义的 $\tilde{Y}$ 是(3.11.2)的解或基本解时，Y 才分别是(3.11.2)的解或基本解.

由此并利用定理(3.3.3)即得：

(3.11.4) 对于(3.11.2)的每一个基本解 Y，必存在唯一的

$$B_Y\in\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$$

满足

$$Y(x+1)=Y(x)B_Y\quad(x\in R).$$

有时我们把 B_Y 叫做对于 Y 的周期性矩阵.

关于周期性矩阵与各个不同的基本解间的联系，我们立刻可得到

(3.11.5) 假设 Y 和 Z 都是 (3.11.2) 的基本解，那么依据定理

(3.3.3)对某个 $C\in\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$有

$$Z(x)=Y(x)C \quad (x\in\mathbf{R}),$$

因此我们必有

$$B_Z=C^{-1}B_YC.$$

现在和(3.11.4)联系起来就得出如下结构性命题:

(3.11.6) 设Y是具有周期性矩阵B_Y的基本矩阵，并设B_Y可借助于一个$L\in\mathfrak{A}$表示成

$$B_Y=\exp(L)$$

则必存在一个

$$H:\mathbf{R}\longrightarrow\mathfrak{J}(\mathfrak{A}) \qquad \text{连续可微}$$

满足

$$H(x+1)=H(x) \qquad (x\in\mathbf{R})$$

及

$$Y(x)=H(x)\exp(xL).$$

为了证明，利用(3.7.7)我们来考察

$$H(x)=Y(x)\exp(-xL)$$

并验证其连续可微性以及

$$\begin{aligned}H(x+1)&=Y(x+1)\exp(-L-xL)\\&=Y(x)B_YB_Y^{-1}\exp(-xL)=H(x). \quad \square\end{aligned}$$

此外我们再指出:

如果已有依照(3.11.6)的Y的一个表达式，而要转移到对应于(3.11.5)的另一个基本解Z，则令

$$\widetilde{L}=C^{-1}LC,$$

(3.11.7)

$$\widetilde{H}(x)=H(x)C$$

由(3.7.3)就得出

$$B_Z=\exp(\widetilde{L}).$$

所以根据(3.11.6)或直接地得到

(3.11.8) $$Z(x)=\widetilde{H}(x)\exp(x\widetilde{L}).$$

现在我们把(3.11.6)和定理(3.7.14)结合起来：

(3.11.9) **定理**：假设 Y 是(3.11.2)的基本解，且它的周期性矩阵具有一个满足定理(3.7.14)中性质的表达式

$$B_Y=\sum_{\kappa=1}^{k}\lambda_\kappa P_\kappa+N.$$

利用定理(3.7.14)中的幂零并且和一切 P_κ 都可交换的 $\widetilde{N}$，我们置

$$L:=\sum_{\kappa=1}^{k}\log(\lambda_\kappa)P_\kappa+\widetilde{N},$$

则必存在一个

$$H:R\to\mathfrak{J}(\mathfrak{A})\ \text{连续可微}$$

满足

$$H(x+1)=H(x)\qquad(x\in R),$$

使得 Y 可以表示成

$$Y(x)=H(x)\exp(xL)\qquad(x\in\mathbf{R}).$$

若利用

$$H_\kappa(x):=H(x)P_\kappa\qquad(x\in\mathbf{R})$$

$$\widetilde{N}_\kappa:=\widetilde{N}P_\kappa\qquad(\kappa=1,2,\cdots,k)$$

又可把它记为

$$Y(x)=\sum_{\kappa=1}^{k}\exp(x\log(\lambda_\kappa))H_\kappa(x)\sum_{n=0}^{r_\kappa-1}\frac{1}{n!}x^n\widetilde{N}_\kappa^n.$$

其中 r_κ 已取为满足 $\widetilde{N}_\kappa^{r_\kappa}=0$ 的最小数.

以下又假设 $\mathfrak{R}$ 是 $\mathbf{K}$ 上的 Banach 空间而且 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$. 于是我们由(3.11.4)和定理(3.3.5)就得到关于 $\mathfrak{R}$ 中的微分方程

$$(3.11.10) \qquad y' = F(x)y$$

的解的如下命题：

(3.11.11) 设 Y 是(3.11.2)的基本解并且假设它的周期性矩阵 B_Y 对于特征值 $\lambda \in K$

具有 r 阶的主向量 $b \in \mathfrak{N}$,

$$(B_Y - \lambda E)^r b = 0, \quad (B_Y - \lambda E)^{r-1} b \neq 0.$$

则

$$y_\rho(x) := Y(x)(B_Y - \lambda E)^{r-\rho} b \quad (x \in R;\ \rho = 1, \cdots, r)$$

即给出(3.11.10)的具有性质

$$y_\rho(x+1) = \begin{cases} \lambda y_\rho(x) + y_{\rho-1}(x) & (\rho = 2, 3, \cdots, r), \\ \lambda y_\rho(x) & (\rho = 1). \end{cases}$$

的 r 个线性无关解.

还有更敏锐的

(3.11.12) 定理：假设 Y 是(3.11.2)的基本解而且它的周期性矩阵 B_Y 对于特征值 $\lambda = \exp(\tau)$, $\tau \in K$, 具有一个 $r \in N$ 阶的主向量 $b \in \mathfrak{N}$,

$$(B_Y - \lambda E)^r b = 0, \quad (B_Y - \lambda E)^{r-1} b \neq 0,$$

则对于 $\rho = 1, \cdots, r$ 必存在

$$p_\rho : R \longrightarrow \mathfrak{N} \text{ 连续可微}$$

满足

$$p_\rho(x+1) = p_\rho(x) \qquad (x \in R)$$

并且使得

$$y_\rho(x) = \exp(x\tau) \sum_{n=0}^{\rho-1} \frac{1}{n!} x^n p_{\rho-n}(x),$$

$$(x \in R;\ \rho = 1, \cdots, r)$$

给出(3.11.10)的 r 个线性无关解.

证明时我们考察 $\mathfrak{N}$ 的由 r 个线性无关的向量 $(B_Y - \lambda E)^{r-\rho} b$

$(\rho=1,\cdots,r)$所张成的子空间 $\mathfrak{R}_\lambda$. 显然定理(3.7.14)对于

$$B_Y|_{\mathfrak{R}_\lambda}:\mathfrak{R}_\lambda\longrightarrow\mathfrak{R}_\lambda$$

是可应用的. 故必存在一个满足$\tilde{N}^r=0$ 的 $\tilde{N}\in\mathfrak{L}(\mathfrak{R}_\lambda,\mathfrak{R}_\lambda)$使得表示式

$$B_Y|_{\mathfrak{R}_\lambda}=\exp(\tau)\exp(\tilde{N})$$

成立现在我们定义

$$p_\rho(x):=\exp(-x\tau)Y(x)\exp(-x\tilde{N})\tilde{N}^{r-\rho}b$$
$$(x\in\boldsymbol{R};\ \rho=1,\cdots,r).$$

这些函数即具备前面所要求的性质. 所以当 $\rho=1,\cdots,r$ 时有

$$Y(x)\tilde{N}^{r-\rho}b=\exp(x\tau)(\exp(-x\tau)Y(x)\exp(-x\tilde{N}))\cdot$$
$$\cdot\left(\sum_{n=0}^{\rho-1}\frac{1}{n!}x^n\tilde{N}^{r-\rho+n}b\right)=$$
$$=\exp(x\tau)\sum_{n=0}^{\rho-1}\frac{1}{n!}x^n p_{\rho-n}(x)=y_\rho(x).$$

因为$\tilde{N}^{r-\rho}b(\rho=1,\cdots,r)$显然也构成 $\mathfrak{R}_\lambda$ 的一个基底, 所以诸解 y_ρ 是线性无关的. □

值得注意的是,解 y_ρ 是由数值的指数函数, 乘幂和周期的 $\mathfrak{R}$-值函数 p_ρ 构造的.

当然定理(3.11.9)和(3.11.12)也是互相联系着的, 即在(3.11.9)内 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$的情况下每一个 $b\in P_\kappa\mathfrak{R}\backslash\{0\}$作为对 B_Y 的特征值 λ_κ 的一个阶数$\leqslant r_\kappa$ 的主向量, 也是对于 L 的特征值$\log(\lambda_\kappa)$的这样一个主向量.

现在设 $\mathfrak{R}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 上的有限维Banach 空间而且 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$. 于是定理(3.11.9)恒可用, 并且连同定理(3.11.12)给出(3.11.10)的一个基本解组,它是由对应于 B_Y 或 L 的约当标准型中的各块的形如(3.11.12)的解族构成的.

在这种情况下我们利用(依模(mod) 1 确定的)$\nu_\kappa \in C$ 规定

$$\lambda_\kappa = \exp(2\pi i \nu_k)$$

是适宜的，这些ν_κ称为(3.11.2)或(3.11.10)的特征指数(charakteristische Exponenten). 此外我们指出由于(3.11.7), (3.11.8), 我们不仅仅是从 λ_κ 及 ν_κ 得出了一个特殊的基本解 Y 的性质，而且是得出了微分方程的不变量.

根据定理(3.11.12), 对于所计算的B_Y的特征值$\lambda = \exp(2\pi i\nu)$而言，必定对应地存在与其重数一样多的形如

$$y(x) = \exp(2\pi i \nu x) p(x) \qquad (x \in R)$$

的线性无关解 y, 其中 p 是以 1 为周期的 $\mathfrak{R}$-值函数. 这就是经典的 Floquet(弗罗凯)定理的内容. 我们也把这样的解简称为 Floquet 解.

对于系数为具有周期 1 并在 R 上连续的 K-值函数 f_ν

$$f_\nu(x+1) = f_\nu(x) \qquad (x \in R; \nu = 1, 2, \cdots, n),$$

的 n 阶微分方程

$$\eta^{(n)} + f_1(x)\eta^{(n-1)} + \cdots + f_n(x)\eta = 0,$$

我们可以由惯用的方法从对于相应的方程组的上述结果中得出相应的命题.

最后我们指出，通过变元变换

$$\xi = \frac{x}{\omega}$$

即可将别的周期 $\omega \in R \backslash \{0\}$ 化归周期 1.

第 4 章　复域线性微分方程

4.1　存在性定理和唯一性定理

在这里作为基础的是

(4.1.1)定理： 假设 $\mathfrak{N}$ 是 $\mathbf{C}$ 上的 Banach 空间，$\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{N},\mathfrak{N})$，$\Omega$ 是 $\mathbf{C}$ 中的域，$a\in\Omega$，$b\in\mathfrak{N}$，

$$g:\Omega\longrightarrow\mathfrak{N}\ \text{全纯};$$

且

$$F:\Omega\longrightarrow\mathfrak{A}\quad\text{全纯};$$

$\mathfrak{K}_a$ 表示 Ω 中以 a 为中心的最大开圆域．则刚好存在一个函数元素

$$y:\mathfrak{K}_a\to\mathfrak{N}\ \text{全纯}$$

满足

$$y(a)=b,$$

$$y'(x)=F(x)y(x)+g(x)\quad(x\in\mathfrak{K}_a).$$

证明时我们把 $\mathfrak{K}_a$ 表成以 a 为中心且满足 $\overline{\mathfrak{K}}\subset\Omega$ 的有界开圆域 $\mathfrak{K}$ 的并集(Vereinigung)，然后直接应用定理(2.9.1)．□

我们选取 $a\neq a_1\in\mathfrak{K}_a$，$b_1=y(a_1)$，并考虑相应的圆域 $\mathfrak{K}_{a_1}$，则定理再次可用．它给出唯一的

$$y_1:\mathfrak{K}_{a_1}\longrightarrow\mathfrak{N}\ \text{全纯}$$

满足

$$y_1(a_1)=b_1,$$

$$y_1'(x)=F(x)y_1(x)+g(x)\quad(x\in\mathfrak{K}_{a_1}).$$

现在因为 $\mathfrak{K}_a\cap\mathfrak{K}_{a_1}$ 是对于 a_1 的星形域，它和上面一样也可以理解

为有界域的并集，故由定理(2.9.1)的唯一性命题就得出

$$y_1(x)=y(x) \quad (x\in\mathfrak{K}_a\cap\mathfrak{K}_{a_1}).$$

所以 y_1 是 y 的一个直接的解析延拓。

因此得出

(4.1.2)**定理**：在定理(4.1.1)的假设和记号之下，y 可以沿着Ω中每一条以 a 为起点的连续曲线 c 作解析延拓，这样得到的函数元素仍是微分方程的解。

附带地我们考虑：

(4.1.3)**定理**：如果连续曲线c_1和c_2都是由 a 至 a'，而且可以在Ω内由连续的变形互相转化(即同伦)，则 y 沿这二曲线进行解析延拓所得的函数元素在a'附近必恒等。

证明可用通常的方法化归 c_1 及 c_2 都位于Ω内的一个圆域中的平凡情形。

因此特别得出

(4.1.4)**定理**：设已给定理(4.1.1)的假设，并且再假设

Ω是单连通的。

则必存在唯一的

$$y:\Omega\longrightarrow\mathfrak{R} \text{ 全纯}$$

满足

$$y(a)=b,$$

$$y'(x)=F(x)y(x)+g(x) \quad (x\in\Omega).$$

4.2 第3章中结果的移植

现在代替定理(3.1.1)我们引用定理(4.1.4)，那么显然就可以把在第3.2至3.10节内对于实域线性微分方程作出的全部讨论和结论都移植到复域中去，这时我们分别把区间 $i\subset\boldsymbol{R},\boldsymbol{R},\boldsymbol{K}$用单连通域$\Omega\subset\boldsymbol{C},\boldsymbol{C},\boldsymbol{C}$代替，并将“连续”或“连续可微”都用“全纯”

代换. 在第3.2节中的$\mathscr{C}_0(\mathrm{i},\mathfrak{R})$及$\mathscr{C}_1(\mathrm{i},\mathfrak{R})$也相应地用在$\Omega$内全纯的$\mathfrak{R}$-值函数的集合代替.

为了实现第3.11节的移植,我们应假设

$$F:\Omega\longrightarrow\mathfrak{A}\ \text{全纯},$$

Ω为平行于实轴的一个带形域,并假定

$$F(x+1)=F(x)\quad(x\in\Omega).$$

4.3 齐次线性微分方程基本解的转动性态

设$\mathfrak{A}$是$\mathbf{C}$上具有单位元素E的Banach代数, Ω为$\mathbf{C}$内一个任意的域,而且

$$F:\Omega\longrightarrow\mathfrak{A}\ \text{全纯}.$$

在这里我们要对

$$Y'=F(x)Y \tag{4.3.1}$$

的局部解作更精确的研究.特别是当$a\in\Omega$固定的情况下,从函数元素

$$Y:\mathfrak{K}_a\longrightarrow\mathfrak{A}$$

(Y表示(4.3.1)在彼处的基本解)出发,讨论它沿着一条延展在Ω之内且在a封口的连续曲线c的解析延拓.

首先,根据和定理(3.3.2)相似的结果及定理(4.1.2)中的讨论,这样得出的函数元素显然也是基本解.

又由定理(4.1.3)知Y沿c延拓的结果只依赖于c的同伦类(Homotopieklasse)Φ. 因此我们考察一切位于Ω内并在a处封口的连续曲线的同伦类的集合$\mathfrak{F}$.

对于$\Phi,\Psi\in\mathfrak{F}$,我们可这样定义它们的合成$\Psi\cdot\Phi\in\mathfrak{F}$,即在两类中各选取一个代表$c_1\in\Phi$, $c_2\in\Psi$,并考虑先沿c_1而后再沿c_2运行所形成的闭曲线,$\Psi\cdot\Phi$即定义为由这条曲线代表的同伦类. 这是可能的,因为同伦的曲线的组合仍是同伦的曲线. 这就表明$(\mathfrak{F},\cdot)$

是一个——一般不可交换的——群;即Ω(在a处)的基本群(Fundamentalgruppe). 这个群的单位元素$\mathfrak{E}$当然刚好就是只有负载点$\{a\}$的曲线的同伦类. 容易看出不同的$a\in\Omega$给出彼此同构的群;因此省去"在a处"的附加说明也是有意义的.

现在对于$\Phi\in\mathfrak{F}$, 我们把Y沿曲线$c\in\Phi$延拓而得的函数元素记为

$$Y_{\Phi}:\mathfrak{K}_a\longrightarrow\mathfrak{A}$$

根据和定理(3.3.3)相仿的结果, 必存在唯一确定的$C_Y(\Phi)\in\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$使得

$$(4.3.2)\qquad Y_{\Phi}(x)=Y(x)C_Y(\Phi)\qquad(x\in\mathfrak{K}_a).$$

于是当$\Phi,\Psi\in\mathfrak{F}$时自然得到

$$(4.3.3)\quad Y_{\Psi\Phi}(x)=(Y_{\Phi})_{\Psi}(x)=Y(x)C_Y(\Psi)C_Y(\Phi)\quad(x\in\mathfrak{K}_a),$$

故

$$(4.3.4)\qquad C_Y(\Psi\cdot\Phi)=C_Y(\Psi)C_Y(\Phi).$$

所以

$$(4.3.5)\qquad C_Y:\mathfrak{F}\longrightarrow\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$$

即表示由$\mathfrak{F}$到具有$C_Y(\mathfrak{E})=E$的乘法群$\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$内的一个同态映象(Homomorphismus). 我们把象子群(Bilduntergruppe)

$$\{C_Y(\Phi):\Phi\in\mathfrak{F}\}$$

称为Y的转动群(Umlaufsgruppe).

如果代替Y, 我们从另一个基本解函数元素

$$Z:\mathfrak{K}_a\to\mathfrak{A}$$

出发, 则当然可借助于一个唯一确定的$D\in\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$得出

$$Z(x)=Y(x)D\qquad(x\in\mathfrak{K}_a)$$

从而当$\Phi\in\mathfrak{F}$时有

$$Z_{\Phi}(x)=Y_{\Phi}(x)D=Z(x)D^{-1}C_Y(\Phi)D\quad(x\in\mathfrak{K}_a);$$

由此得

$$C_Z(\Phi)=D^{-1}C_Y(\Phi)D.$$

所以在 a 邻近的不同的基本解之转动群以上述方式彼此共轭.

相仿可证在不同点处的、互为解析延拓的基本解函数元素具有相同的转动群.

4.4 圆环域中的齐次线性微分方程

紧接着第 4.3 节，我们在这里特别专门讨论以 0 点为中心的圆环域(此处$0\leqslant\xi_1<\xi_2\leqslant\infty$)

(4.4.1) $\quad \Omega:=\{x\in\mathbf{C}:\xi_1<|x|<\xi_2\}.$

以别的点 x_0 为中心的圆环域均可用变元变换 $x-x_0\to x$ 化成这种情形.

我们命

$$-\infty\leqslant\Theta_\nu:=-\frac{1}{2\pi}\log(\xi_\nu)\leqslant+\infty \qquad (\nu=1,2)$$

并且除Ω外再考虑复 t-平面中平行于实轴的带形

(4.4.2) $\quad \Omega':=\{t\in\mathbf{C}:\Theta_2<\mathrm{Im}\,t<\Theta_1\}$

以及全纯映象

(4.4.3) $\quad \Omega'\ni t\longmapsto\exp(2\pi i t)=x\in\Omega.$

这是个上射(surjektive)映象而且对于 t_1，$t_2\in\Omega'$ 当且仅当 $t_1=t_2\ (\mathrm{mod}\ 1)$成立时才有

$$\exp(2\pi i t_1)=\exp(2\pi i t_2).$$

利用映象(4.4.3)，我们容易决定出Ω的基本群. 对于这一点我们从下列事实出发研究，即当 $a\in\Omega$ 时一条位于Ω内并在 a 点封口的连续曲线，在固定了满足 $\exp(2\pi i t_a)=a$ 的$t_a\in\Omega'$ 的情况下，当而且仅当它可以表示成一条在 Ω' 内部由 t_a 延伸到 t_a+k 的连续曲线在(4.4.3)之下的象时，才对于 0 具有转数(Umlaufszahl)$k\in\mathbf{Z}$. 现在因为Ω' 是单连通的；所以任意两条由 t_a 延伸至

t_a+k 的这样的曲线必定是同伦的．而且在 (4.4.3) 作用下此同伦也移植到了象上面．因此一切在 Ω 内部并在 a 点闭合的具有相等的转数的连续曲线永远是同伦的（而且当然反过来也成立）．但这也就是说：使每一个（在 a 处）的同伦类均对应于它的转数的映象

$$U:\mathfrak{F}\to\mathbf{Z}$$

——显然这是一个群同态 (Gruppenhomomorphismus)——是一一对应的．所以我们得出群同构(Gruppenisomorphie)

$$(\mathfrak{F},\cdot)\cong(\mathbf{Z},+).$$

即 $\mathfrak{F}$ 是由具有转数 1 的曲线 Φ_1 的类所产生的无穷阶循环群 (zyklische Gruppe)．

现在我们根据第 4.3 节来讨论齐次线性微分方程

(4.4.4) $$Y'=F(x)Y.$$

在这里变元变换(4.4.3)将导致重大的简化．为此我们令

(4.4.5) $$G(t):=2\pi i\exp(2\pi i t)F(\exp(2\pi i t))\qquad(t\in\Omega'),$$

即得出

$$G:\Omega'\longrightarrow\mathfrak{A}\quad 全纯$$

并满足

(4.4.6) $$G(t+1)=G(t)\quad(t\in\Omega').$$

然后我们又由一个固定的 $a\in\Omega$ 出发，固定一个满足 $\exp(2\pi i t_a)=a$ 的 $t_a\in\Omega'$，并用

$$\varphi_{t_a}:\mathfrak{K}_a\longrightarrow\mathbf{C}$$

表示 $\frac{1}{2\pi i}\log x$ 的满足 $\varphi_{t_a}(a)=t_a$ 的分支．显然 φ_{t_a} 在 $\mathfrak{K}_a$ 内表达出(4.4.3)的全纯的局部逆映象．

现在设 $Y:\mathfrak{K}_a\longrightarrow\mathfrak{A}$ 是在 a 附近(4.4.4)的一个解函数元素，则由

$$(4.4.7)\qquad Z(t):=Y(\exp(2\pi i t))\qquad (t\in\varphi_{t_a}(\mathfrak{K}_a))$$

即得方程

$$(4.4.8)\qquad Z'=G(t)Z.$$

的一个解

反之若

$$Z:\varphi_{t_a}(\mathfrak{K}_a)\longrightarrow\mathfrak{A}$$

是(4.4.8)的一个解，则

$$(4.4.9)\qquad Y(x):=Z(\varphi_{t_a}(x))\qquad (x\in\mathfrak{K}_a)$$

就给出(4.4.4)在a附近的一个解函数元素.

于是我们显然能够假定——从(4.4.4)在a附近的一个固定的解函数元素出发——由(4.4.7)给出的(4.4.8)的解Z已在整个Ω'上有定义. 于是对于不同的$\bar{a}\in\Omega$和相应的$t_{\bar{a}}\in\Omega'$ (4.4.9)刚好提供出这样的解函数元素，它是Y依第4.3节的解析延拓. 特别得出

$$(4.4.10)\qquad Y_{\Phi_1}(x)=Z(\varphi_{t_a}(x)+1)\qquad (x\in\mathfrak{K}_a)$$

正好是转数是1的曲线的同伦类Φ_1所对应的Y的延拓. 对此有时我们也选用有启发性的流行记法:

$$(4.4.11)\qquad Y(x\exp(2\pi i)):=Y_{\Phi_1}(x).$$

现在我们可对满足(4.4.6)的(4.4.8)，应用将第3.11节移植到复域所得的结果，并按照上面的叙述变换回去.

在这方面(3.11.3)，(3.11.4)及(3.11.5)在4.3节中已经更一般地讲述过了.

这里由(3.11.6)得出

(4.4.12) 如果Y是(4.4.4)在a附近的满足

$$Y(x\exp(2\pi i))=Y(x)C_Y,$$

的基本解函数元素，则C_Y产生Y的转动群. 如果能用一个$L\in\mathfrak{A}$将C_Y表成

$$C_Y=\exp(2\pi i L),$$

则必存在一个

$$H:\Omega\longrightarrow\Im(\mathfrak{A})\ \text{全纯},$$

使得对于一个相应的 $t_0\in\Omega'$

$$Y(x)=H(x)\exp(2\pi i\varphi_{t_0}(x)L)\qquad(x\in\mathfrak{K}_a).$$

成立，而 Y 的解析延拓将通过 φ_{t_0} 在 Ω 中的解析延拓得出.

在这种意义下我们简短地写成

(4.4.13) $$Y(x)=H(x)\exp(\log(x)L)$$

或者

(4.4.14) $$Y(x)=H(x)x^L.$$

定理(3.11.9)在此处变为

(4.4.15)**定理**：假设 Y 是(4.4.4)在 $a\in\Omega$ 的附近的满足

$$Y(x\exp(2\pi i))=Y(x)C_Y,$$

的基本解函数元素，而且 C_Y 具有一个满足定理(3.7.14)中性质的表达式

$$C_Y=\sum_{\kappa=1}^{k}\lambda_\kappa P_\kappa+N,$$

则我们可借助于

$$\exp(2\pi i\nu_\kappa)=\lambda_\kappa\quad(\kappa=1,\cdots,k)$$

来确定 $\nu_\kappa\in C(\kappa=1,\cdots,k)$ 及一个幂零而且和一切 P_κ 均可交换的 $\bar{N}\in\mathfrak{A}$，使得对于

$$L:=\sum_{\kappa=1}^{k}\nu_\kappa P_\kappa+\bar{N}$$

及某个

$$H:\Omega\to\Im(\mathfrak{A})\quad\text{全纯}$$

上面精确描述过的下列等式成立

$$Y(x)=H(x)x^L.$$

它借助于

$$H_\kappa(x):=H(x)P_\kappa \quad (x\in\Omega) \quad (\kappa=1,\cdots,k)$$

$$\bar{N}_\kappa:=\bar{N}P_\kappa$$

又可写成

$$Y(x)=\sum_{\kappa=1}^{k}x^{\nu_\kappa}H_\kappa(x)\sum_{n=0}^{r_\kappa-1}\frac{1}{n!}\log(x)^n\bar{N}_\kappa^n,$$

其中 r_κ 已选为 N 中满足 $\bar{N}_\kappa^{r_\kappa}=0$ 的最小数.

今假设 $\mathfrak{R}$ 为 C 上的 Banach 空间, $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$, 并考察 $\mathfrak{R}$ 内的齐次线性微分方程

(4.4.16) $$y'=F(x)y.$$

对应于定理(3.11.12)在这里有

(4.4.17)定理: 假设 Y 是(4.4.4)在 $a\in\Omega$ 附近的满足

$$Y(x\exp(2\pi i))=Y(x)C_Y$$

的基本解函数元素. 设 C_Y 对于特征值 $\lambda=\exp(2\pi i\nu)$, $\nu\in C$, 具有 $r\in N$ 阶的主向量 $c\in\mathfrak{R}$,

$$(C_Y-\lambda E)^r c=0,\ (C_Y-\lambda E)^{r-1}c\neq 0,$$

则对 $\rho=1,\cdots,r$ 必存在

$$h_\rho:\Omega\longrightarrow\mathfrak{R} \quad \text{全纯},$$

使得

$$y_\rho(x)=x^\nu\sum_{n=0}^{\rho-1}\frac{1}{n!}\log(x)^n h_{\rho-n}(x) \quad (\rho=1,\cdots,r)$$

给出(4.4.16)的 r 个线性无关解.

以上命题在这里仍应更精确地理解为: 如果在 $\mathfrak{R}_a$ 上我们使用 $\log(x)$的一个分支, 即得出在 $a\in\Omega$ 附近的解函数元素; 这时解析延拓将通过 $\log(x)$在 Ω 上的解析延拓得出.

特别得出

$$y_1(x)=x^\nu h_1(x)$$

就是满足

$$y_1(x\exp(2\pi i))=\exp(2\pi i\nu)y_1(x)$$

的一个非平凡解．我们说：y_1是关于特征指数ν的 Floquet 解．

我们用下列注记结束本节的讨论，即当且仅当

$$F(x)=\frac{1}{x}R \quad (x\in\Omega)$$

对一个常量的 $R\in\mathfrak{A}$ 成立时，在(4.4.8)中依照(4.4.5)给出的G才是常量．所以在这种情况(即“Euler 微分方程”)之下，可以把第3.8节中的结果相应地移植过来．当然在这里应当选取 $\Omega=\mathbf{C}\setminus\{0\}$及 $\Omega'=\mathbf{C}$，而相应的基本解元素从下式获得

$$Y(x)=x^R:=\exp(\log(x)R).$$

4.5 孤立奇点

假设域 $\Omega\subset\mathbf{C}$ 并且

$$F:\Omega\longrightarrow\mathfrak{A} \quad 全纯.$$

这时一点 $a\in\mathbf{C}\setminus\Omega$ 当且仅当它在通行的函数论的意义之下是F的孤立奇点时（可去奇点除外），才分别把a称为具有单位元素的 Banach 代数$\mathfrak{A}$内的微分方程

(4.5.1) $$Y'=F(x)Y$$

或者具有 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$ 的Banach 空间$\mathfrak{R}$内的微分方程

(4.5.2) $$y'=F(x)y$$

的孤立奇点．我们也相应地区分极点和本性奇点．F的可去奇点$a\in\mathbf{C}\setminus\Omega$将和一点$a\in\Omega$一样，称为微分方程(4.5.1)或(4.5.2)的正则点(reguläre Stelle)．

我们预先对微分方程(4.5.2)和点$a=0$——这不会限制一般性——叙述一个关于解的增长估计

(4.5.3) **定理：** 假设

$$\{x\in\mathbb{C}: 0<|x|<\rho\}\subset\Omega$$

且 y 是(4.5.2) 在扇形

$$\{r\exp(i\varphi):0<r<\rho, \alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\}$$

内的一个全纯解. 当 $0<r<\rho$ 时我们记

$$f(r):=\max\{|F(x)|:x\in\mathbb{C}, |x|=r\},$$

$$m(r):=\max\{|y(r\exp(i\varphi))|:\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta\},$$

则当 $0<r\leqslant r_0<\rho$ 时必有

$$m(r)\leqslant m(r_0)\exp\left(\int_r^{r_0} f(\tau)d\tau\right).$$

在证明中, 当 $0<r\leqslant r_0<\rho$ 和 $\alpha\leqslant\varphi\leqslant\beta$ 时我们利用 $x=r\exp(i\varphi)$, $x_0=r_0\exp(i\varphi)$ 把公式

$$y(x)=y(x_0)+\int_{x_0}^{x} F(t)y(t)dt$$

写成如下的形式

$$y(r\exp(i\varphi))=y(r_0\exp(i\varphi))$$

$$+\exp(i\varphi)\int_{r_0}^{r} F(\tau\exp(i\varphi))y(\tau\exp(i\varphi))d\tau.$$

由此估计出

$$m(r)\leqslant m(r_0)+\int_r^{r_0} f(\tau)m(\tau)d\tau.$$

依(1.3.9)即得结论. □

F 在 a 点具有一个 1 阶极点的情形, 是特别重要的: 在这种情况下我们称 a 为有关的微分方程的简单奇点 (einfache singularität).

这时在定理(4.5.3)的假设下存在一个 $\gamma=\gamma(r_0)>0$, 使得当 $0<r\leqslant r_0<\rho$ 时有:

(4.5.4) $$m(r)r^{\gamma}\leqslant m(r_0)r_0^{\gamma}.$$

利用这一估计——或用第 4.7 节内的研究也行——在适当的

假设之下(这种假设当$\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$且$\mathfrak{R}$是有限维 Banach 空间的情况下永远是满足的),我们推知在简单奇点a的邻近必存在如下形式的基本解

$$Y(x)=H(x)(x-a)^{L},$$

其中H在a全纯. 这时我们说a是一个确定性奇点(singulären Stelle der Bestimmtheit).

值得注意的还有F在a点具有一个$(\mu+1)$阶($\mu\in\boldsymbol{N}$)极点的情形，这时在定理(4.5.3)的假设下必存在这样的一个$\gamma=\gamma(r_0)>0$,使得当$0<r\leqslant r_0<\rho$时成立

(4.5.5) $$m(r)\exp(-\gamma r^{-\mu})\leqslant m(r_0)\exp(-\gamma r_0^{-\mu}).$$

设$\Omega\cup\{\infty\}$是∞的邻域,则对于某个$\rho>0$必有

$$\left\{x\in\boldsymbol{C}:\frac{1}{\rho}<|x|\right\}\subset\Omega,$$

因此为了研究微分方程(4.5.1)或(4.5.2)的解在∞处的性态，进行下列的变换是适宜的

(4.5.6) $$z=\frac{1}{x},\quad \widetilde{Y}(z)=Y(x)\qquad 或\quad \tilde{y}(z)=y(x).$$

这时所得出的在$\mathfrak{A}$或者$\mathfrak{R}$内的微分方程是

(4.5.7) $$\widetilde{Y}'=\widetilde{F}(z)\widetilde{Y}\quad 或\quad \tilde{y}'=\widetilde{F}(z)\tilde{y}$$

其中

(4.5.8) $$\widetilde{F}(z)=-\frac{1}{z^2}F\left(\frac{1}{z}\right)\qquad\left(\frac{1}{z}\in\Omega\backslash\{0\}\right).$$

0点显然是$\widetilde{F}$的孤立奇点. 因此容易理解假若0是$\widetilde{F}$的可去奇点(hebbare Singularität)，我们即把∞称为(4.5.1)或(4.5.2)的一个正则点,否则就称之为这些方程的一个孤立奇点,而且此时也相应地区分为简单奇点,$(\mu+1)$阶($\mu\in\boldsymbol{N}$)极点和本性奇点.

明显可见，关于微分方程(4.5.1)或(4.5.2)的∞点的性质的判定，不是象通常那样由F决定而是由$\widetilde{F}$判定的.

特别由(4.5.8)知，当且仅当F在∞是正则的和具有一阶零点时，∞才是简单奇点.

当而且仅当对于(不同的)$x_1, \cdots, x_l \in \mathbf{C}$

$$\Omega = \mathbf{C} \backslash \{x_1, \cdots, x_l\}$$

成立并且$l+1$个点$x_1, \cdots, x_l, \infty$都是微分方程(4.5.1)及(4.5.2)的正则点或简单奇点时，我们称(4.5.1)及(4.5.2)为Fuchs(福克斯)微分方程.

借助于Liouville的定理我们立刻可以确定出F的结构：

(4.5.9)**定理**：当而且仅当可以利用$R_\nu \in \mathfrak{A} (\nu=1, \cdots, l)$把$F$表成

$$F(x) = \sum_{\nu=1}^{l} \frac{1}{x-x_\nu} R_\nu \qquad (x \in \Omega)$$

的时候，才得到Fuchs微分方程. 此外，当而且仅当$\sum_{\nu=1}^{l} R_\nu = 0$时，$\infty$才是方程的正则点.

4.6 简单奇点——全纯解

下面我们详细研究具有一个简单奇点的情形. 不失一般性，此时我们可认为0是简单奇点，并且因为只讨论解在奇点邻近的局部性态，可以假定对某个$0<\rho<\infty$有

(4.6.1) $\qquad \Omega := \{x \in \mathbf{C} : 0 < |x| < \rho\}$,

并且可以要求利用$R \in \mathfrak{A}, R \neq 0$及

(4.6.2) $$G \in \mathscr{H}(\Omega_0, \mathfrak{A})$$

(其中$\Omega_0 := \Omega \cup \{0\}$)

把F表示成

(4.6.3) $$F(x) = \frac{1}{x} R + G(x) \qquad (x \in \Omega).$$

首先我们假定 $\mathfrak{R}$ 为 C 上的 Banach 空间而且 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$ 并证明

(4.6.4) **定理**：如果对于每一个 $n\in N$ 都有

$$nE-R\in\mathfrak{F}(\mathfrak{A}),$$

则对每个满足 $Rc=0$ 的 $c\in\mathfrak{R}$，必恰好存在一个

$$y\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})$$

满足

$$y(0)=c$$

及

$$y'(x)=F(x)y(x) \qquad (x\in\Omega).$$

我们利用两个引理进行证明.

(4.6.5) **引理**：假设 $n\in N$ 满足

$$\frac{1}{n}|R|+\frac{\rho}{n+1}|G|<1.$$

则对每一个

$$g\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R}),$$

必恰好存在一个

$$h\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R}),$$

使得由

$$u(x)=x^n h(x) \qquad (x\in\Omega_0)$$

定义的函数 $u\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})$ 满足

$$u'(x)=F(x)u(x)+x^{n-1}g(x) \qquad (x\in\Omega).$$

证明和通常一样可化为确立满足

$$h(x)=\frac{1}{x^n}\int_0^x(F(t)t^n h(t)+t^{n-1}g(t))dt \qquad (x\in\overline{\Omega}_0)$$

的 $h\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})$ 的唯一存在性．当 $h\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})$ 时由

(*) $\qquad (Th)(x):=\dfrac{1}{x^n}\displaystyle\int_0^x(F(t)t^n h(t)+t^{n-1}g(t))dt \quad (x\in\overline{\Omega}_0)$

显然又给出 $Th\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})$. 因为当 $h_1,h_2\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})$时我们可得估计

$$|(Th_1)(x)-(Th_2)(x)|\leqslant\frac{1}{|x|^n}\int_0^{|x|}(\tau^{n-1}|R|+\tau^n|G|)d\tau\,|h_1-h_2|$$
$$(0<|x|\leqslant\rho),$$

所以

$$|Th_1-Th_2|\leqslant\left(\frac{1}{n}|R|+\frac{\rho}{n+1}|G|\right)|h_1-h_2|.$$

就是说根据所作的假设，由(*)给出的由 $\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})$映到 $\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})$内的非齐次线性映象的确是压缩的. 故由不动点定理 (2.1.3) 即得结论. □

(4.6.6) 引理: 假设

$$c\in\mathfrak{R}\quad 满足\ Rc=0,$$

且当 $n\in N$ 时有

$$nE-R\in\mathfrak{I}(\mathfrak{A}).$$

则对每一个 $n\in N$, 必刚好存在一个系数在 $\mathfrak{R}$ 内的最多$(n-1)$次的多项式 p_{n-1}, 满足

$$p_{n-1}(0)=c,$$

及一个

$$g_n\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R}),$$

使下式成立

$$p'_{n-1}(x)=F(x)p_{n-1}(x)-x^{n-1}g_n(x)\qquad(x\in\Omega).$$

我们用归纳法证明. 当 $n=1$ 时由于 $p_0(x)=q_0=c$ 及 $g_1(x)=G(x)c$ 结论是显然成立的. 现在假设命题对某个 $n\geqslant1$ 已获证. 那么我们考虑

$$(x^nq_n)'=F(x)x^nq_n+x^{n-1}(nE-R)q_n-x^nG(x)q_n.$$

其中 $q_n\in\mathfrak{R}$ 由假设知在这里

$$(nE-R)q_n=g_n(0)$$

是唯一可解的．借助于这样的 q_n 我们就有唯一的

$$p_n(x)=p_{n-1}(x)+x^n q_n$$

以及

$$g_{n+1}(x)=\frac{1}{x}(g_n(x)-g_n(0))+G(x)q_n.$$

于是对 $n+1$ 的命题已得到，引理证毕．□

现在我们转到

定理（4.6.4）的证明：首先我们按照引理（4.6.5）选取一个 $n\in N$．

为证明存在性我们按照引理(4.6.6)来选取 p_{n-1} 和g_n．然后我们在引理(4.6.5) 中令 $g=g_n$ 并确定相应的 u．那么结论对于

$$y=p_{n-1}+u$$

必成立．

反过来如果 y 是满足结论的解，则我们把它作一意的分解

$$y=p_{n-1}+x^n h,$$

其中多项式 p_{n-1} 的次数$\leqslant n-1$ 而且 $h\in\mathscr{H}(\Omega_0, \mathfrak{R})$．于是对于 $u=x^n h$ 及一个 $g_n\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})$即有

$$u'(x)=F(x)u(x)+x^{n-1}g_n(x),$$

因此

$$p'_{n-1}(x)=F(x)p_{n-1}(x)-x^{n-1}g_n(x),$$
$$p_{n-1}(0)=c.$$

从引理(4.6.6)及(4.6.5)中的唯一性陈述即得 p_{n-1}，g_n 及 u 的唯一性，从而得出 y 的唯一性．

4.7 简单奇点——基本解的结构

现在假设 $\mathfrak{A}$ 为 C 上具有单位元素 E 的任一 Banach 代数，Ω_0 是以 0 为中心的开圆域，$\Omega=\Omega_0\setminus\{0\}$，

$$F:\Omega\longrightarrow\mathfrak{A}\quad \text{全纯}$$

而且 0 是微分方程

(4.7.1) $$Y'=F(x)Y$$

的简单奇点，因此借助于

$$0\neq R\in\mathfrak{A}$$

及(不失一般性)

$$G\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{A})$$

即恰好有

(4.7.2) $$F(x)=\frac{1}{x}R+G(x)\qquad (x\in\Omega).$$

除 $\mathfrak{A}$ 之外我们同时考虑由 $\mathfrak{A}$(这时视为 Banach 空间)映到自身内的有界 C-线性映象构成的一个 C 上的 Banach 代数 $\widehat{\mathfrak{A}}:=\mathfrak{L}(\mathfrak{A},\mathfrak{A})$；它的元素我们用符号$\widehat{\ }$来标示.

下面关于 R 的算子交换子(Kommutator-Operator)$\hat{R}$具有重大的意义

(4.7.3) $$\hat{R}A:=RA-AR\qquad (A\in\mathfrak{A}).$$

显然我们有 $\hat{R}\in\hat{\mathfrak{A}}$ 以及

(4.7.4) $$|\hat{R}|\leqslant 2|R|.$$

我们首先证明重要的

(4.7.5) **定理**：如果对每一个 $n\in N$

$$n\hat{E}-\hat{R}\in\mathfrak{J}(\hat{\mathfrak{A}})$$

都成立($\hat{E}$ 为 $\widehat{\mathfrak{A}}$ 的单位元素). 则必恰好存在一个满足 $H(0)=E$ 的

$$H\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{A})$$

使得

$$Y(x)=H(x)x^R$$

是(4.7.1)在第 4.4 节的意义之下的基本解.

证明：显然当且仅当

$$(4.7.6)\qquad H'(x)=\frac{1}{x}(RH(x)-H(x)R)+G(x)H(x)\quad(x\in\Omega)$$

成立时，函数元素 $H(x)x^R$ 才是(4.7.1)的解元素．所以应当证明存在唯一的

$$H\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{A})$$

满足 $H(0)=E$ 及(4.7.6)．利用(4.7.3)和由

$$\hat{G}(x)A:=G(x)A\qquad(x\in\bar{\Omega}_0)$$

规定的符号

$$\hat{G}\in\mathscr{H}(\Omega_0,\hat{\mathfrak{A}}),$$

我们可将(4.7.6)写成如下的形式

$$(4.7.7)\qquad H'(x)=\left(\frac{1}{x}\hat{R}+\hat{G}(x)\right)H(x)\qquad(x\in\Omega).$$

于是当把下列各对事物等同起来时

$$\mathfrak{A}\longrightarrow\mathfrak{R},\ \hat{\mathfrak{A}}\longrightarrow\mathfrak{A},\ E\longrightarrow c,\ \text{等等},$$

就可以直接应用定理(4.6.4)，它就提供了我们的定理的结论．□

至此我们只需指出，对于 $R\in\mathfrak{A}$ 要加上何种条件就可以获得所要求的性质

$$n\hat{E}-\hat{R}\in\mathfrak{J}(\hat{\mathfrak{A}})\qquad(n\in N).$$

这里我们证明

(4.7.8)**定理**：假设已给具有定理(3.7.14)中性质(α)，(β)，(γ)的表达式

$$R=\sum_{\kappa=1}^{k}\nu_\kappa P_\kappa+N.$$

此外设对 $\nu_\kappa\in C$ 有

$$\nu_\kappa-\nu_\lambda\notin Z\backslash\{0\}\qquad(\kappa,\lambda=1,\cdots,k).$$

则必有

$$n\hat{E}-\hat{R}\in\mathfrak{J}(\hat{\mathfrak{A}})\quad(n\in\mathbf{N}).$$

为了证明，我们验证表达式

$$\hat{R}=\sum_{\kappa=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{k}(\nu_\kappa-\nu_\lambda)\hat{P}_{\kappa\lambda}+\hat{N}$$

其中算子

$$\hat{P}_{\kappa\lambda}A:=P_\kappa AP_\lambda\quad(\kappa,\lambda=1,\cdots,k)$$
$$\hat{N}A:=NA-AN\qquad(A\in\mathfrak{A}).$$

我们看出，$\hat{P}_{\kappa\lambda}$ 是幂等的(idempotent)，乘积不会是 $\hat{0}$，且

$$\sum_{\kappa=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{k}\hat{P}_{\kappa\lambda}=\hat{E},$$

并且由于

$$\hat{N}^{2m}A=N^{2m}A-AN^{2m}\quad(m\in\mathbf{N}_0;A\in\mathfrak{A}),$$

$\hat{N}$ 是幂零的且显然是和 $\hat{P}_{\kappa\lambda}$ 可交换的．于是

$$(n\hat{E}-\hat{R})=\sum_{\kappa=1}^{k}\sum_{\lambda=1}^{k}(n-\nu_\kappa+\nu_\lambda)\hat{P}_{\kappa\lambda}-\hat{N},$$

其中根据假设有

$$n-\nu_\kappa+\nu_\lambda\neq0\quad(n\in\mathbf{N};\kappa,\lambda=1,2,\cdots,k).$$

所以我们可以或者应用定理(3.7.14)和(3.7.7)或者直接借助于一个中断的几何级数，得出 $n\hat{E}-\hat{R}(n\in\mathbf{N})$ 的可逆性．□

这里我们再指出一个更普遍的结果：

如所周知当 $A\in\mathfrak{A}$ 时，谱由下式定义

$$\sigma(A):=\{t\in\mathbf{C}:(tE-A)\notin\mathfrak{J}(\mathfrak{A})\}$$

在这里对于任意的 $R\in\mathfrak{A}$ 以及相应的依(4.7.3)定义的算子交换子 $\hat{R}$ 必有

$$\sigma(\hat{R})\subset\{t_1-t_2:t_\nu\in\sigma(R)\quad(\nu=1,2)\}$$

(参阅[8]). 显然我们在定理(4.7.8)中的假设恰好导致

$$\sigma(R)=\{\nu_\kappa:\kappa\in\{1,\cdots,k\}\}.$$

对于一个有限维的 Banach 空间 $\mathfrak{R}$ 及 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$, 定理(4.7.8)中对 R 的要求仅仅是: R 的不同的特征值之间的差别不应当是整数. 在这种情况下定理 (4.7.5) 就给出一个具有所述结构基本解组.

如果定理(4.7.8)的假设不满足, 这时我们可尝试通过一个变换使之能满足. 下面的引理就是为此服务的.

(4.7.9) 引理: 假设已给 $P\in\mathfrak{A}$ 和 $D\in\mathfrak{A}$, 它们满足

$$P=P^2,\ PR=RP,\ D\in P\mathfrak{A}(E-P).$$

我们利用

$$Y(x)=[(E-P)+x(P+D)]Z(x)$$

变换微分方程(4.7.1), (4.7.2)的解 Y, 则对于 Z 我们得出微分方程

$$Z'=\widetilde{F}(x)Z,$$

其中

$$\widetilde{F}(x)=\frac{1}{x}\widetilde{R}+\widetilde{G}(x)\qquad(x\in\Omega),$$

这里

$$\widetilde{G}\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{A}),$$

$$\widetilde{R}=(R-P)+(R-P)D-D(R-P)+PG(0)(E-P).$$

我们取 $Q:=E-P$ 就得出

$$[(E-P)+x(P+D)]=(Q+xP)(E+D),$$

所以当 $x\in\mathbf{C}\backslash\{0\}$时有

$$[(E-P)+x(P+D)]^{-1}=(E-D)\left(Q+\frac{1}{x}P\right).$$

故据第3.4 节当 $x\in\Omega$ 时得出

$$\widetilde{F}(x)=\left(\frac{1}{x}P+Q-D\right)\left[\left(\frac{1}{x}R+G(x)\right)\right.$$
$$\left.(Q+xP+xD)-(P+D)\right],$$
由此经过简单的计算就可以验证定理中的结论成立. □

(4.7.10)引理: 假设 R 具有一个满足定理 (3.7.14) 中性质 (α), (β), (γ) 的表达式

$$R=\sum_{\kappa=1}^{k}\nu_\kappa P_\kappa+N,$$

而且不失一般性可以假定

(*) $$\nu_\kappa\neq\nu_\lambda\quad(\kappa,\lambda\in\{1,2,\cdots,k\};\ \kappa\neq\lambda).$$

假设

$$\sigma\in\{1,2,\cdots,k\}.$$

情形 1: 对一切的 $\kappa\in\{1,\cdots,k\}$, $\nu_\sigma-1\neq\nu_\kappa$.

则必恰好有一个这样的

$$D\in P_\sigma\mathfrak{A}(E-P_\sigma)$$

使得在引理(4.7.9)中令 $P=P_\sigma$ 时有:

$$\widetilde{R}=R-P_\sigma=\sum_{\substack{\kappa=1\\ \kappa\neq\sigma}}^{k}\nu_\kappa P_\kappa+(\nu_\sigma-1)P_\sigma+N.$$

情形 2: 对某个 $\rho\in\{1,\cdots,k\}$ 有 $\nu_\sigma-1=\nu_\rho$.

则必刚好存在一个这样的

$$D\in P_\sigma\mathfrak{A}(E-P_\sigma-P_\rho)\subset P_\sigma\mathfrak{A}(E-P_\sigma),$$

使得在引理(4.7.9)中令 $P=P_\sigma$ 时有:

$$\widetilde{R}=R-P_\sigma+P_\sigma G(0)P_\rho=\sum_{\substack{\kappa=1\\ \kappa\neq\sigma,\kappa\neq\rho}}^{k}\nu_\kappa P_\kappa+\nu_\rho(P_\sigma+P_\rho)+\widetilde{N}.$$

此处

$$\widetilde{N}=N+P_\sigma G(0)P_\rho$$

是幂零的并且和$(k-1)$个射影(Projektoren)P_κ及$P_\sigma+P_\rho(\kappa\neq\sigma,\kappa\neq\rho)$都是可交换的.

证明：仍记$Q_\sigma=E-P_\sigma$.

情形1：设$D\in P_\sigma\mathfrak{A}Q_\sigma$这样来确定，使得

$$(R-P_\sigma)D-D(R-P_\sigma)=-P_\sigma G(0)Q_\sigma.$$

此外我们限制在子代数

$$P_\sigma\mathfrak{A}Q_\sigma$$

之上来考察$R-P_\sigma$所对应的算子交换子，它将此子代数映到其自身内．今据定理(4.7.8)的证明可知，这一限制等于把

$$\sum_{\kappa\neq\sigma}(\nu_\sigma-1-\nu_\kappa)\hat{P}_{\sigma\kappa}+\hat{N}$$

限制在$P_\sigma\mathfrak{A}Q_\sigma$上，其中对于

$$\sum_{\kappa\neq\sigma}\hat{P}_{\sigma\kappa}$$

的相应限制即给出对应的单位元素．因而同前面一样，由此即得出可逆性．

情形2：我们这样来确定$D\in P_\sigma\mathfrak{A}(E-P_\sigma-P_\rho)$使得

$$(R-P_\sigma)D-D(R-P_\sigma)=-P_\sigma G(0)(E-P_\sigma-P_\rho).$$

同上面一样地进行讨论，不过这时我们应用对于算子交换子不变的子代数

$$P_\sigma\mathfrak{A}(E-P_\sigma-P_\rho)$$

和

$$\nu_\sigma-1-\nu_\kappa\neq0\qquad(\kappa\neq\rho).$$

关于$\tilde{N}$的命题只要利用

$$\tilde{N}^m-N^m\in P_\sigma\mathfrak{A}P_\rho\qquad(m\in N)$$

就立刻可以得到证实．□

对于R的一个特征值ν_σ，如果对它存在一个特征值ν_λ使得

$\nu_\kappa - \nu_\lambda \in N$ 成立，那么我们可以应用引理(4.7.10)中的变换，并不断地重复所指出的简化步骤，直到得出一个特征值中不再出现差为整数值的$\widetilde{R}$时为止。

所以我们得到

(4.7.11) **定理**：假设已给满足定理(3.7.14)中性质(α),(β),(γ)的

$$R=\sum_{\kappa=1}^{k}\nu_\kappa P_\kappa+N.$$

不失一般性可设对$\nu_\kappa\in C$有

$$\nu_\kappa\neq\nu_\lambda \qquad (\kappa,\lambda\in\{1,\cdots,k\};\ \kappa\neq\lambda).$$

则必存在这样的一个系数在$\mathfrak{A}$内的多项式S，它具有性质

$$S(x)\in\mathfrak{J}(\mathfrak{A}) \qquad (x\in C\setminus\{0\}),$$

$$S(0)=\widetilde{Q}:=\Sigma\{P_\kappa:\kappa\in\{1,\cdots,k\}\wedge\nu_\kappa-\nu_\lambda\notin N$$

$$(\lambda=1,\cdots,k)\},$$

$$\widetilde{Q}S(x)=\widetilde{Q}\quad(x\in C),$$

并使得变换

$$Y(x)=S(x)Z(x)$$

把微分方程(4.7.1)，(4.7.2)变为

$$Z'=\widetilde{F}(x)Z,$$

这里

$$\widetilde{F}(x)=\frac{1}{x}\widetilde{R}+\widetilde{G}(x)\qquad(x\in\Omega),$$

其中

$$\widetilde{G}\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{A})$$

并且

$$\widetilde{R}=\sum_{\kappa=1}^{\widetilde{k}}\widetilde{\nu}_\kappa\widetilde{P}_\kappa+\widetilde{N}\in\mathfrak{A}$$

内中

$$\{\tilde{\nu}_\kappa:\kappa\in\{1,\cdots,\tilde{k}\}\}=\{\nu_\kappa:\kappa\in\{1,\cdots,k\}\wedge\nu_\kappa-\nu_\tau\notin\mathbf{N}$$
$$(\tau=1,\cdots,k)\},$$

$$\tilde{P}_\kappa=\Sigma\{P_\tau:\tau\in\{1,\cdots,k\}\wedge\nu_\tau-\tilde{\nu}_\kappa\in\mathbf{N}_0\}$$

就是一个特征值无整数差值的，满足定理(3.7.14)(α), (β), (γ)的表达式.

因此微分方程(4.7.1), (4.7.2)必有一个基本解

$$Y(x)=S(x)\tilde{H}(x)x^{\tilde{R}},$$

其中

$$\tilde{H}\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{A}),\ \tilde{H}(0)=E.$$

在证明时只需注意，在每一个个别的化简步骤中我们都可以证实

$$(E-P)[(E-P)+x(P+D)]=E-P$$

而且所有出现的 $E-P$ 的乘积就给出所指的 $\tilde{Q}$. □

下面我们对定理 (4.7.11) 中结果给出几个补充的结构性命题. 首先是比较浅显的.

(4.7.12)　**定理**: 设已给定理(4.7.11)中的假设及符号. 又对某个满足$P^2=P$ 的 $P\in\mathfrak{A}$ 和一个 $\tau\in\{1,\cdots,\tilde{k}\}$有

$$P\tilde{P}_\tau=\tilde{P}_\tau P=P,\quad \tilde{N}P=P\tilde{N}P,$$

因而

$$\tilde{R}P=\tilde{\nu}_\tau P+N'\quad 其中\ N'=P\tilde{N}P.$$

于是如果 $m\in\mathbf{N}_0$ 并且这样来决定满足 $\tilde{H}_0(0)\neq0$的

$$\tilde{H}_0\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{A}),$$

使得

$$S(x)\tilde{H}(x)P=x^m\tilde{H}_0(x)\qquad(x\in\Omega_0)$$

成立，则必刚好存在一个 $\sigma\in\{1,2,\cdots,k\}$满足

$$\tilde{\nu}_\tau+m=\nu_\sigma.$$

此外对 $Q_\sigma := E - P_\sigma$ 有

$$Q_\sigma \widetilde{H}_0(0) = 0.$$

证明：通过对微分方程作代换

$$Y(x)P = S(x)\widetilde{H}(x)x^{\widetilde{R}}P = x^{\widetilde{\nu}_\tau} S(x)\widetilde{H}(x)Px^{N'}$$

$$= x^{\widetilde{\nu}_\tau + m}\widetilde{H}_0(x)x^{N'}$$

我们就得出

$$(R - (\widetilde{\nu}_\tau + m)E)\widetilde{H}_0(0) = \widetilde{H}_0(0)N'.$$

所以一定有

$$(\times) \quad (R - (\widetilde{\nu}_\tau + m)E)\widetilde{H}_0(0)N'^{\alpha} = \widetilde{H}_0(0)N'^{(\alpha+1)} \quad (\alpha \in \mathbf{N}_0).$$

现在我们选取 $\beta \in \mathbf{N}_0$，使它满足

$$\widetilde{H}_0(0)N'^{(\beta+1)} = 0, \quad \widetilde{H}_0(0)N'^{\beta} \neq 0$$

——因为 $N'^{\alpha} = P\widetilde{N}^{\alpha}P (\alpha \in \mathbf{N})$ 及 $\widetilde{H}_0(0) \neq 0$，这是可能的——，那么对于 $\alpha = \beta$ 由 $(\times)$ 就得出

$$(R - (\widetilde{\nu}_\tau + m)E)\widetilde{H}_0(0)N'^{\beta} = 0.$$

于是凭借 R 的表达式即可证实满足 $\widetilde{\nu}_\tau + m = \nu_\sigma$ 以及

$$Q_\sigma \widetilde{H}_0(0)N'^{\beta} = 0$$

的一个 $\sigma \in \{1, 2, \cdots, k\}$ 的存在性．因为 $Q_\sigma R = RQ_\sigma$ 我们由此对于 $\alpha = \beta - 1, \cdots, 0$ 利用 $(\times)$ 相继得出

$$(R - \nu_\sigma E)Q_\sigma \widetilde{H}_0(0)N'^{\alpha} = 0,$$

所以同刚才一样

$$Q_\sigma \widetilde{H}_0(0)N'^{\alpha} = 0. \quad \Box$$

下面关于对应特征值 ν_σ 的射影 P_σ 的更精确的结构性命题要稍为深一些，这时设 $\nu_\sigma + n (n \in \mathbf{N})$ 都不是 R 的特征值．我们证明

(4.7.13) **定理**：设已给定理(4.7.11)中的假设和记号．如果对于

$$\tau \in \{1, \cdots, \widetilde{k}\}$$

我们(一意地)确定

$$\sigma \in \{1, \cdots, k\},\ m \in \mathbf{N}_0$$

使满足

$$m = \nu_\sigma - \tilde{\nu}_\tau = \max\{\nu_\kappa - \tilde{\nu}_\tau : \kappa \in \{1, 2, \cdots, k\} \wedge \nu_\kappa - \tilde{\nu}_\tau \in \mathbf{N}_0\}.$$

则必有:

(a) $\tilde{P}_\tau P_\sigma = P_\sigma \tilde{P}_\tau = P_\sigma$, $\tilde{N} P_\sigma = N P_\sigma = P_\sigma N$.

(b) 存在一个满足 $\tilde{H}_\sigma(0) = P_\sigma$ 的

$$\tilde{H}_\sigma \in \mathscr{H}(\Omega_0, \mathfrak{A})$$

使得下式成立

$$S(x)\tilde{H}(x)P_\sigma = x^m \tilde{H}_\sigma(x) \qquad (x \in \Omega_0).$$

(c) 利用(b)中的 $\tilde{H}_\sigma$ 可得

$$Y(x)P_\sigma = \tilde{H}_\sigma(x) x^{\nu_\sigma} x^{NP_\sigma}.$$

证明: 关于(a): 根据 $\tilde{P}_\tau$, P_σ 的定义这个命题中的第一式是明显的.

对于第二式我们指出,在所有的化简步骤中仅仅是引理(4.7.10)的情形 2 中的 N 改变了. 而且仅出现这样的 P_ρ, 对它们有

$$P_\rho P_\sigma = P_\sigma P_\rho = 0.$$

关于(b): 我们通过对 $m \in \mathbf{N}_0$ 的归纳推理加以证明.

当 $m = 0$ 时命题是正确的, 因为 $\tilde{H}(0) = E$ 和 $S(0) = \tilde{Q}$ 成立并且在这种情况下 $\tilde{Q}P_\sigma = P_\sigma$.

现在设 $m \in \mathbf{N}$ 而且命题对于 $m-1$ 已获证. 于是我们作分解

$$S(x) = S_1(x)[(E - P_\sigma) + x(P_\sigma + D_\sigma)]S_2(x).$$

对于

$$S_2(x)\tilde{H}(x)x^{\tilde{R}}$$

就出现相对于 $\nu_\sigma - 1$ 的 $m-1$ 的情形. 利用相应的射影算子 P'_σ, 对它当然有

$$P'_\sigma P_\sigma = P_\sigma P'_\sigma = P_\sigma,$$

故据归纳假设必有

$$S_2(x)\widetilde{H}(x)P'_\sigma = x^{m-1}\overline{H}_\sigma(x),$$
$$\overline{H}_\sigma \in \mathscr{H}(\Omega_0, \mathfrak{A}), \overline{H}_\sigma(0) = P'_\sigma.$$

所以

$$S_2(x)\widetilde{H}(x)P_\sigma = x^{m-1}\overline{H}_\sigma(x)P_\sigma, \overline{H}_\sigma(0)P_\sigma = P_\sigma.$$

现在我们考察由下式给定的 Y_1

$$Y(x) \doteq S_1(x)Y_1(x).$$

由于(a)我们可对它应用定理（4.7.12）——于其中令 $P=P_\sigma$: 利用 $Q_\sigma = E - P_\sigma$ 并注意 $Q_\sigma P_\sigma = 0$ 和 $Q_\sigma^2 = Q_\sigma$ 即得

$$\begin{aligned}[Q_\sigma + x(P_\sigma + D_\sigma)]S_2(x)\widetilde{H}(x)P_\sigma &= x^{m-1}[Q_\sigma + x(P_\sigma + D_\sigma)]\overline{H}_\sigma(x)P_\sigma \\ &= x^m(P_\sigma + Q_\sigma \overline{H}'_\sigma(0)P_\sigma) \\ &\quad + x^{m+1}(\cdots) + \cdots = x^m P_\sigma \\ &\quad + x^{m+1}(\cdots) + \cdots.\end{aligned}$$

我们现在还要考察 $S_1(0)P_\sigma$. 因为 ν_σ 事先已经是不能减少的了，故在 $S_1(x)$ 中只会出现这样的因子

$$[(E-P)+x(P+D)],$$

对于它有 $PP_\sigma = P_\sigma P = 0$, 从而$(E-P)P_\sigma = P_\sigma$. 但因此又有

$$S_1(0)P_\sigma = P_\sigma,$$

于是我们的结论已得证.

关于(c): 这个结论由定理(4.7.12)的证明中的计算即得. □

我们指出，也可以紧接在定理（4.6.4）之后就获得这里按照(c), (b)得出的解的唯一存在性. 但是在这里我们是直接由解的结构性讨论做到这一点的.

上面的全部结果对于$\mathfrak{R}$是 $\boldsymbol{C}$ 上的有限维的 Banach 空间且$\mathfrak{A} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$的情形，也都是没有限制地适用的: 因为这时正如以前常常指出的那样, R 永远具有一个满足定理(3.7.14)(α), (β), (γ) 的表达式.

我们首先对这种情形解释定理(4.7.13). 这个定理说明，对

于每一个 $c\in P_\sigma\mathfrak{R}\backslash\{0\}$，因而对于$R$的一个特征值 ν_σ 的每一个主向量，当 $\nu_\sigma+n(n\in N)$不是特征值时，都存在方程

$$y'=F(x)y$$

的一个形如

$$y(x)=x^{\nu_\sigma}\sum_{\mu=0}^{\alpha-1}\frac{1}{\mu!}\log(x)^\mu h_\mu(x)$$

的解，其中

$$h_\mu\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R}),h_\mu(0)=N^\mu c\quad(\mu=0,\cdots,\alpha-1)$$

而且

$$\alpha\in N\quad \text{满足 } N^\alpha c=0, N^{\alpha-1}c\neq 0.$$

于是如果我们让 c 遍历 $P_\sigma\mathfrak{R}$ 的一个基底，我们就得出相应的许多线性无关解．特别是在R的不同的特征值之差不是整数的情形中，因而上面的 $\tilde{R}=R$ 时，我们由此就可以得到关于 $y'=F(x)y$ 的基本解组的结构的一个完整的概貌．

相仿地可以解释定理(4.7.12)．特别是对于 $\tilde{R}$ 的一个特征值 $\tilde{\nu}_\tau$ 所对应的每一个特征向量 c，都可得出一个如下形式的解(Floquet 解)

$$y(x)=Y(x)c=x^{\nu_\lambda}h(x)$$

其中

$$h\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R}),h(0)\neq 0,$$

ν_λ 是R的满足

$$\nu_\lambda-\tilde{\nu}_\tau\in N_0$$

的特征值而 $h(0)$是对应的特征向量．

4.8 高阶线性微分方程的孤立奇点

设域 $\Omega\subset C$ 且

$$f_\kappa:\Omega\to C\quad \text{全纯}\quad(\kappa=1,2,\cdots,n).$$

一点 $a\in C\backslash\Omega$ 当且仅当它在函数理论的意义下，分别是对一切函数 f_κ 的可去孤立奇点或者至少对一个 f_κ 是不可去的孤立奇点时，a 才分别地叫做微分方程

$$\eta^{(n)}+f_1(x)\eta^{(n-1)}+\cdots+f_n(x)\eta=0 \tag{4.8.1}$$

的正则点或者孤立奇点。

假若变换

$$z=\frac{1}{x},\ \tilde{\eta}(z)=\eta(x),\qquad (x\in\Omega\backslash\{0\})$$

将(4.8.1)化为一个对于 $\tilde{\eta}$ 的微分方程，它分别以 0 为正则点或孤立奇点，则我们称∞为(4.8.1)的正则点或孤立奇点。

以下我们限于讨论 0 点并且假定(不失一般性)此处对于某个 $0<\rho<\infty$

$$\Omega=\{x\in C:0<|x|<\rho\},\ \ \Omega_0:=\Omega\cup\{0\}.$$

我们记

$$\delta:=x\frac{d}{dx},$$

即可利用唯一确定的

$$\hat{f}_\kappa:\Omega\to C\quad \text{全纯}\quad (\kappa=1,2,\cdots,n),$$

把(4.8.1)写成如下的形式

$$\delta^n\eta+\hat{f}_1(x)\delta^{n-1}\eta+\cdots+\hat{f}_n(x)\eta=0. \tag{4.8.2}$$

为此我们只需注意，对于某些常系数 $\alpha_{m\mu},\beta_{m\mu}\in N$ 成立

$$\delta^m=\sum_{\mu=0}^{m}\alpha_{m\mu}x^\mu\ \ \frac{d^\mu}{dx^\mu},\ \ x^m\frac{d^m}{dx^m}=\sum_{\mu=0}^{m}\beta_{m\mu}\delta^\mu,\ (m\in N_0).$$

显然(4.8.2)借助

$$y=\begin{pmatrix}\eta\\ \delta\eta\\ \vdots\\ \delta^{n-1}\eta\end{pmatrix} \tag{4.8.3}$$

就等价于

$$(4.8.4)\qquad y' = F(x)y,$$

此处

$$F(x)=\frac{1}{x}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & 1 \\ -\hat{f}_n(x) & -\hat{f}_{n-1}(x) & \cdots & & -\hat{f}_1(x) \end{pmatrix}.$$

如果 0 是(4.8.1)的孤立奇点，那么当 0 是(4.8.4)依照第4.5节规定的简单奇点时，我们就把 0 叫做(4.8.1)的简单奇点，这将表明是合适的.

当且仅当 n 个函数 $\hat{f}_\nu$ 都在 0 处具有可去奇点(故可不失一般性假定在 0 点全纯)时，0 才至多是方程(4.8.1)的简单奇点——亦即是正则点或简单奇点. 这时必恰好有

$$(4.8.5)\qquad F(x)=\frac{1}{x}R+G(x),$$

其中

$$(4.8.6)\qquad R=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \\ 0 & 0 & & & 1 \\ -\hat{f}_n(0) & -\hat{f}_{n-1}(0) & \cdots & & -\hat{f}_1(0) \end{pmatrix}$$

且不失一般性可认为

$$(4.8.7)\qquad G\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{A}),\quad \mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathbf{C}^n,\mathbf{C}^n).$$

我们又记——参阅定理(3.10.4)——

$$(4.8.8)\qquad \det(tE-R)=t^n+\hat{f}_1(0)t^{n-1}+\cdots+\hat{f}_n(0)=:\varphi(t)$$

并证明

(4.8.9) **定理**: 当而且仅当对于

$$a_\kappa \in \mathscr{H}(\Omega_0, \mathbf{C}) \quad (\kappa=1,2,\cdots,n)$$

有

$$f_\kappa(x)=x^{-\kappa}a_\kappa(x) \quad (x\in\Omega)$$

的时候，0 才至多是(4.8.1)的简单奇点．而且此时有

$$\varphi(t)=n!\binom{t}{n}+\sum_{\kappa=1}^{n}(n-\kappa)!\binom{t}{n-\kappa}a_\kappa(0).$$

在证明时我们从微分算子的恒等式

$$x^n\left(\frac{d}{dx}\right)^n+(xf_1(x))x^{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1}+\cdots+(x^nf_n(x))\left(\frac{d}{dx}\right)^0$$
$$=\delta^n+\hat{f}_1(x)\delta^{n-1}+\cdots+\hat{f}_n(x)\delta^0$$

出发，并将它用于 $x^t(t\in\mathbf{C})$．由此利用 $f_0(x)=\hat{f}_0(x)=1$ 就得到恒等式

$$\sum_{\kappa=0}^{n}(n-\kappa)!\binom{t}{n-\kappa}(x^\kappa f_\kappa(x))=\sum_{\mu=0}^{n}t^{n-\mu}\hat{f}_\mu(x)$$
$$((x,t)\in\Omega\times\mathbf{C}).$$

但因 $t^{n-\mu}(\mu=0,1,\cdots,n)$ 以及 $\binom{t}{n-\kappa}(\kappa=0,1,\cdots,n)$ 均构成在 $\mathbf{C}$ 上的次数 $\leqslant n$ 的复值多项式组成的 $(n+1)$ 维空间的基底，即得结论；特别取 $x\to0$，即得末了的等式．□

多项式 φ 称为微分方程(4.8.1) 对于至多是简单奇点的 0 点的特征多项式(charakteristisches Polynom)，而方程 $\varphi(t)=0$ 称为指标方程(Indexgleichung)或者(在过去的文献中)称为判定基本方程(determinierende Fundamentalgleichung)．它的根又叫做指标(Indizes)．

若作为至多是简单奇点的 0 是一个正则点，则必需成立

(α_1) $\qquad a_\kappa(0)=0 \qquad (\kappa=1,2,\cdots,n)$

或等价地

(α_2) $$\varphi(t)=t(t-1)\cdots(t-n+1).$$

显然能表明正则点的特征的是下列更强的要求

(β) $$\alpha_\kappa^{(\rho)}(0)=0,\quad (\kappa=1,2,\cdots,n;\ \rho=0,1,\cdots,\kappa-1).$$

与(α_1)中有 n 个条件相反，这里有$\frac{1}{2}n(n+1)$ 个条件，因而多$\frac{1}{2}n(n-1)$个.

另一方面对于一个正则点 0，如下的基本解组的存在性也是能表明其特征的:

$$\eta_\kappa\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathbf{C})\qquad(\kappa=1,2,\cdots,n)$$

满足

$$\eta_\kappa^{(\rho-1)}(0)\begin{cases}=0 & (\rho<\kappa)\\ \neq 0 & (\rho=\kappa)\end{cases}\qquad(\kappa=1,2,\cdots,n).$$

根据对于初值问题的存在性定理(4.1.1)它是必要的. 另一方面，因为相应的 Wronski 矩阵

$$Y(x)=(\eta_\kappa^{(\rho-1)}(x))_{(n,n)}$$

在 0 是可逆的，因而

$$Y'(x)Y(x)^{-1}=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\ \cdots & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ \vdots & \vdots & & \\ 0 & 0 & & 1\\ -f_n(x) & -f_{n-1}(x) & \cdots & -f_1(x)\end{pmatrix}$$

在 0 是全纯的，所以它也是充分的.

现在转到简单奇点的情形. 此处我们由这样一点出发，即正如我们已经见到过的那样，在按阶数来计算诸指标时它们正好是依(4.8.6) 给出的相应矩阵 R 的特征值. 因为对应的主向量由定理(3.10.4)是已知的，故我们从第 4.7 节中的一般的结构性命题很容易获得关于微分方程(4.8.1)之基本解组的结构的特别命题.

特别如果 ν 是指标方程的 r 阶根而且 $\nu+n(n\in N)$ 都不是指标，则根据定理(4.7.11)，定理(4.7.13)必存在相应的一组如下形式的 r 个线性无关的解

$$\eta_1(x)=x^\nu\zeta_1(x),$$
$$\eta_2(x)=x^\nu(\zeta_2(x)+\log(x)\zeta_1(x)),$$
$$\vdots$$
$$\eta_r(x)=x^\nu\sum_{\rho=0}^{r-1}\frac{\log(x)^\rho}{\rho!}\zeta_{r-\rho}(x),$$

这里

$$\zeta_\rho\in\mathscr{H}(\Omega_0,C),$$
$$\zeta_1(0)\neq 0,\ \zeta_\rho(0)=0\qquad(\rho=2,3,\cdots,r).$$

如果不同的指标之差不为整数，则将全部上面给出的解群合起来就得出一个基本解组.

在指标中出现具有整数差的情况下，我们可以先按照定理(4.7.11)定理(4.7.12)加以处理并将所得的结果类似上面讲的加以解释.

但是我们也可以由对应于指标 ν 的一个解

$$\eta_1(x)=x^\nu\zeta_1(x)$$

出发，这里 $\nu+n(n\in N)$ 不是指标，而且不失一般性可设

$$\zeta_1,\ \frac{1}{\zeta_1}\in\mathscr{H}(\Omega_0,C),$$

并施行第 3.5 节的约简步骤. 为此我们最好利用

$$\eta=\eta_1\xi$$

及

$$\delta^m(\eta_1\xi)=\sum_{\mu=0}^{m}\binom{m}{\mu}\delta^{m-\mu}\eta_1\delta^\mu\xi$$

来换算(4.8.2)，从而得出

$$(4.8.10)\qquad \delta^n\xi+\hat f_1(x)\delta^{n-1}\xi+\cdots+\hat f_n(x)\xi=0,$$

其中

$$(4.8.11)\qquad \hat f_{n-\mu}=\frac{1}{\eta_1}\sum_{m=\mu}^{n}\binom{m}{\mu}\hat f_{n-m}\delta^{m-\mu}\eta_1\qquad(\mu=0,\cdots,n-1).$$

这里当然已令 $\hat f_0=1$. 因为 η_1 满足微分方程(4.8.2), 故 $\hat f_n=0$. 所以(4.8.10)是对于 $\delta\xi$ 的一个$(n-1)$阶的线性齐次微分方程, 又由

$$\frac{1}{\eta_1}\delta^{m-\mu}\eta_1\in\mathscr{H}(\Omega_0,C)$$

及(4.8.11)可知(4.8.10)在0点至多有一个简单奇点.

我们从算子恒等式

$$(\delta^n+\hat f_1\delta^{n-1}+\cdots+\hat f_n\delta^0)\eta_1\cdot=\eta_1\cdot(\delta^{n-1}+\hat f_1\delta^{n-2}+\cdots+\hat f_{n-1}\delta^0)\delta$$

出发, 并把它用于 $x^{t-\nu}(t\in C)$, 通过比较 x^t 的系数, 利用 $\zeta_1(0)\neq0$ 则我们对于原来的微分方程的特征多项式 φ 和化简后的$(n-1)$阶微分方程的特征多项式 ψ, 恰好得出关系式

$$\varphi(t)=(t-\nu)\psi(t-\nu).$$

由此就立刻得出所希望的关于指标的命题.

如果对于简化后的$(n-1)$阶微分方程, 我们已得到一个如下形式的基本解组

$$\delta\xi_2,\delta\xi_3,\cdots,\delta\xi_n,$$

$$\delta\xi_\mu=x^{\nu_\mu-\nu}\sum_{\rho=0}^{r\mu-1}\frac{\log(x)^\rho}{\rho!}\zeta_{\mu\rho}(x),$$

那么我们可以乘以 x^{-1} 并求积分以确定 $\xi_2,\xi_3,\cdots,\xi_n$, 并由

$$\eta_1,\eta_1\xi_2,\cdots,\eta_1\xi_n$$

得出(4.8.1)的一个有相应结构的基本解组. 在积分时仅仅在

$$\nu-\nu_\mu\in N_0$$

的情况下可能产生出一个附加的因子 $\log(x)$.

上面施行的简化也可以用来导出下述定理的证明.

(4.8.12) **定理**: 假设 0 点是微分方程(4.8.1)的确定性奇点, 也就是说: 假设形如下式的一个基本解组存在

$$\eta_\mu(x)=x^{\nu_\mu}\sum_{\rho=0}^{r_\mu-1}\frac{1}{\rho!}\log(x)^\rho\zeta_{\mu\rho}(x)\quad(\mu=1,\cdots,n),$$

其中

$$\nu_\mu\in C,\quad r_\mu\in N,$$

$$\zeta_{\mu\rho}\in\mathscr{H}(\Omega_0,C)\quad(\rho=0,\cdots,r_\mu-1).$$

那么 0 点至多是(4.8.1)的简单奇点.

证明: 首先我们注意, 对于一个满足 $r_\mu\geqslant 2$ 和 $\zeta_{\mu r_\mu-1}\neq 0$ 的 η_μ 而言

$$\exp(-2\pi i\nu_\mu)\eta_\mu(x\exp(2\pi i))-\eta_\mu(x)$$

$$=x^{\nu_\mu}\sum_{\rho=0}^{r_\mu-1}\frac{1}{\rho!}[(\log(x)+2\pi i)^\rho-\log(x)^\rho]\zeta_{\mu\rho}(x)$$

也提供同一结构的一个解, 而它现在却只含有 $\log(x)^\rho(\rho=0,\cdots,r_\mu-2)$ 形的项了, 并且它显然不是平凡解. 因此不失一般性我们可以假设(通过交换), 这些解已出现于所考察的基本解组 $\eta_1,\cdots,\eta_n$ 之内. 重复这一考虑最后我们可望得出一个基本解组, 对它不失一般性有

$$\eta_1(x)=x^{\nu_1}\zeta_{10}(x),\quad\zeta_{10}(0)\neq 0.$$

因为在一适当的邻域中 $\zeta_{10}(x)\neq 0$ 成立, 我们可以相应地把 (4.8.10), (4.8.11) 加以简化. 对于简化后的 $(n-1)$ 阶微分方程我们利用

$$\delta\frac{\eta_2}{\eta_1},\ \delta\frac{\eta_3}{\eta_1},\ \cdots,\ \delta\frac{\eta_n}{\eta_1}$$

即可得出一结构相同的基本解组. 所以 0 是方程(4.8.10)的一个确定性奇点. 因此现在归纳法证明是可行的. 当 $n=1$ 时 命题

由定理(4.8.12)是明显的．如果它对于 $n-1$ 已获证，则 $\tilde{f}_\mu$ 在0都是全纯的，因而通过对 $\mu=n-1, n-2, \cdots, 0$ 递推地应用 (4.8.11) 知道 $\hat{f}_\mu$ 也如此．但这就是要证的结论．□

现在我们再简短地考察一下具有一个任意的孤立奇点 $a\in C\backslash\Omega$ 以及孤立奇点∞的情形．如果变换

$$z=x-a,\quad \tilde{\eta}(z)=\eta(x)$$

或相应地

$$z=\frac{1}{x}, \tilde{\eta}(z)=\eta(x)$$

把微分方程(4.8.1)变为 $\tilde{\eta}$ 的一个以0为简单奇点的微分方程，则我们常常分别把 a 及∞称为(4.8.1) 的简单奇点．于是很自然地把变换后的微分方程对于0的相应的特征多项式，指标方程，等等，分别叫做关于 a 或∞的特征多项式，指标方程等等．

定理(4.8.9)可直接移植于 $a\in C\backslash\Omega$ 的情形．对于∞ 情形的换算最好依据(4.8.2)进行．于是因为

$$\delta'=z\frac{d}{dz}=-x\frac{d}{dx}=-\delta,$$

故对于 $\tilde{\eta}(z)=\eta(x)$，$z=\frac{1}{x}$ 得到:

$$\begin{aligned}&[\delta^n+\hat{f}_1(x)\delta^{n-1}+\cdots+\hat{f}_n(x)\delta^0]\eta\\&=\left[(-\delta')^n+\hat{f}_1\left(\frac{1}{z}\right)(-\delta')^{n-1}+\cdots+\hat{f}_n\left(\frac{1}{z}\right)(-\delta')^0\right]\tilde{\eta}.\end{aligned}$$

由此可知当且仅当 $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \cdots, \hat{f}_n$ 在∞全纯时，∞才至多是(4.8.1)的一个简单奇点．

定理(4.8.9)的换算给出

(4.8.13) **定理**：当并且仅当可以借助于在∞全纯的函数 $a_\kappa(\kappa=1, \cdots, n)$ 使得

$$a_\kappa(x)=x^\kappa f_\kappa(x)\qquad(x\in\Omega)$$

成立时，∞才至多是(4.8.1)的简单奇点.

这时对于∞的特征多项式是

$$\varphi(t)=t^n-\hat{f}_1(\infty)t^{n-1}+\cdots+(-1)^n\hat{f}_n(\infty).$$

对应于定理(4.8.9)我们立刻可证实

(4.8.14) $$\varphi(t)=(-1)^n\sum_{\kappa=0}^{n}(n-\kappa)!\binom{-t}{n-\kappa}a_\kappa(\infty),$$

其中 $a_0(\infty)=1$.

当而且仅当利用(不同的)$x_1, x_2, \cdots, x_l\in C$ 可使

$$\Omega=\mathbf{C}\backslash\{x_1, \cdots, x_l\}$$

成立而且全部的点$x_\kappa(\kappa=1, \cdots, l)$及点$\infty$都至多是(4.8.1)的简单奇点时，我们把微分方程(4.8.1)叫做Fuchs(福克斯)微分方程.

显然对于 x_κ 的条件当且仅当对于 $\mu=1, \cdots, n$ 可借助整函数 g_μ 使得

(4.8.15) $$f_\mu(x)=g_\mu(x)\prod_{\kappa=1}^{l}(x-x_\kappa)^{-\mu}\quad(\mu=1, 2, \cdots, n)$$

成立时才满足.

关于∞的条件恰好表明$x^\mu f_\mu(x)$在∞必需是全纯的，也就是当 $\mu=1, 2, \cdots, n$ 时

(4.8.16) g_μ 是次数$\leqslant(l-1)\mu$ 的多项式.

当 $l=0$ 时显然出现微分方程

$$\eta^{(n)}=0$$

而当 $l=1, x_1=0$ 时出现具有常数 $\gamma_\mu\in\mathbf{C}(\mu=1, 2, \cdots, n)$ 的 Euler(欧拉)微分方程

$$x^n\eta^{(n)}+\gamma_1x^{n-1}\eta^{(n-1)}+\cdots+\gamma_n\eta=0.$$

4.9 n 阶齐次线性微分方程的变换定理

我们首先记述

(4.9.1) 假定域 $\Omega\subset C$ 而且

$$\alpha:\Omega\longrightarrow C \quad 全纯, \quad \alpha(x)\neq 0 \quad (x\in\Omega).$$

又假设对于 $\kappa=1,2,\cdots,n$,

$$f_\kappa:\Omega\longrightarrow C \quad 全纯$$

则对于在 Ω 内局部全纯且满足

$$\eta(x)=\alpha(x)\tilde{\eta}(x)$$

的函数 $\eta,\tilde{\eta}$, 以下恒等式成立

$$\eta^{(n)}+f_1\eta^{(n-1)}+\cdots+f_n\eta=\alpha\cdot(\tilde{\eta}^{(n)}+\tilde{f}_1\tilde{\eta}^{(n-1)}+\cdots+\tilde{f}_n\tilde{\eta}),$$

其中

$$\tilde{f}_{n-\rho}(x)=\frac{1}{\alpha(x)}\sum_{\kappa=\rho}^{n}f_{n-\kappa}(x)\binom{\kappa}{\rho}\alpha^{(\kappa-\rho)}(x) \quad (\rho=0,\cdots,n-1)$$

是在 Ω 中全纯的函数而且 $f_0(x)=1$.

由此我们得出

(4.9.2) 假定 $a\in(C\cup\{\infty\})\backslash\Omega$ 是 α 的可去奇点且 $\alpha(a)\neq 0$. 于是如果微分方程

$$(*) \qquad \eta^{(n)}+f_1(x)\eta^{(n-1)}+\cdots+f_n(x)\eta=0$$

在 a 处有一正则点或简单奇点, 则微分方程

$$(**) \qquad \tilde{\eta}^{(n)}+\tilde{f}_1(x)\tilde{\eta}^{(n-1)}+\cdots+\tilde{f}_n(x)\tilde{\eta}=0$$

也相应地在 a 有一个正则点或简单奇点. 并且所对应的特征多项式是一致的.

当 $a\neq\infty$ 时我们可以直接由(4.9.1)中 $\tilde{f}_{n-\rho}$ 的表达式推出对于可去奇点的命题. 在 $a\neq\infty$ 是简单奇点的情形中, 我们将此公式改写成

$$(x-a)^{n-\rho}\tilde{f}_{n-\rho}(x)=\frac{1}{\alpha(x)}\sum_{\kappa=\rho}^{n}(x-a)^{\kappa-\rho}[(x-a)^{n-\kappa}f_{n-\kappa}(x)]\cdot\binom{\kappa}{\rho}\alpha^{(\kappa-\rho)}(x).$$

于是，由于函数

$$(x-a)^{n-\kappa}f_{n-\kappa}(x)$$

在 a 处全纯，我们立刻得出函数

$$(x-a)^{n-\kappa}\tilde{f}_{n-\kappa}(x)$$

也在 a 全纯而且在那里具有相同的值．这时至少必有某个 $\tilde{f}_{n-\kappa}$ 在 a 没有可去奇点，因为否则可以把上面的讨论返回头推理到 $f_{n-\kappa}$ 上去．情形 $a=\infty$ 可借助于 $x=\dfrac{1}{z}$ 化归 $a=0$ 的情形．□

利用(4.9.1)又得出：

(4.9.3) 若 $a\in C\backslash\Omega$ 至多是微分方程(*)的简单奇点，且设我们局部地利用 $\alpha(x)=(x-a)^{\nu}(\nu\in C)$ 按照(4.9.1)作变换，那么 $\tilde{f}_{\kappa}$ 都在 Ω 内单值全纯而且微分方程(**)在 a 至多有一个简单奇点．对于相应的特征多项式必有

$$\varphi_{**}(t)=\varphi_{*}(t+\nu).$$

对此我们首先在(4.9.1)中导出

$$(x-a)^{n-\rho}\tilde{f}_{n-\rho}(x)=\sum_{\kappa=\rho}^{n}(x-a)^{n-\kappa}f_{n-\kappa}(x)\binom{\kappa}{\rho}\binom{\nu}{\kappa-\rho}(\kappa-\rho)!$$

此式给出了第一个结论．关于第二个结论，我们在(4.9.1)的恒等式中局部地代入 $\tilde{\eta}=(x-a)^{t}$．这时由比较 $(x-a)^{\nu+t-n}$ 的系数就刚好得出关于特征多项式的命题．□

我们用以下结果结束这些讨论

(4.9.4) 若 ∞ 至多是微分方程(*)的简单奇点而且我们利用 $a\in C\backslash\Omega$，$\alpha(x)=(x-a)^{\nu}$，$\nu\in C$ 局部地按照(4.9.1)作变换，则 $\tilde{f}_{\kappa}$ 都在 Ω 内单值全纯并且微分方程(**)在 ∞ 至多有一个简单奇点．对于相应的特征多项式必有

$$\varphi_{**}(t)=\varphi_{*}(t-\nu).$$

我们仿照(4.9.3)进行证明．只不过现在我们须指出，由于

$$x^{n-\rho}f_{n-\rho}(x) \qquad (\rho=0,1,2,\cdots,n-1)$$

在∞全纯，

$$(x-a)^{n-\rho}f_{n-\rho}(x)$$

也在∞全纯，而据前面已指明的公式即知

$$(x-a)^{n-\rho}\tilde{f}_{n-\rho}(x)$$

从而

$$x^{n-\rho}\tilde{f}_{n-\rho}(x)$$

都在∞全纯、然后我们引用(4.8.13)．对于第二个命题，我们仍在 (4.9.1) 的恒等式中局部地代入$\tilde{\eta}=(x-a)^t$并且在于∞附近依 $(x-a)$ 的幂的展开式中比较 $(x-a)^{t+\nu-n}$ 的系数．这里应注意(4.8.14)．□

现在我们研究自变元的变换．

我们首先叙述

(4.9.5) 假设Ω和Ω'是C中的域．θ把Ω一一对应而且(双向)全纯地映到Ω'上．设θ的反函数是$\chi=\theta^{-1}$．此外假设

$$f_\kappa:\Omega\longrightarrow C \quad 全纯 \quad (\kappa=1,2,\cdots,n).$$

则必一意地存在

$$g_\kappa:\Omega'\longrightarrow C \quad 全纯 \quad (\kappa=1,2,\cdots,n)$$

使得对于每一个在Ω内局部全纯的函数η和它在 Ω'内局部地依

$$\eta(x)=\xi(\theta(x)),\ \xi(z)=\eta(\chi(z))$$

照给定的变换ξ，下面恒等式对于 $z=\theta(x)$成立：

$$\eta^{(n)}(x)+f_1(x)\eta^{(n-1)}(x)+\cdots+f_n(x)\eta(x)$$
$$=\chi'(z)^{-n}[\xi^{(n)}(z)+g_1(z)\xi^{(n-1)}(z)+\cdots+g_n(z)\xi(z)].$$

在证明时显然只需要注意

$$\frac{d}{dx}=\chi'(z)^{-1}\frac{d}{dz},\ \chi'(z)\neq 0 \qquad (z\in\Omega')$$

就行了．□

现在我们证明

(4.9.6) 设 $a\in(C\cup\{\infty\})\setminus\Omega$ 是 θ 的孤立奇点，则 a 或者是 θ 的可去奇点或者是 θ 的极点．我们相应地命 $\theta(a)=a'\in C$ 或 $\theta(a)=a'=\infty$，则 $a'\in(C\cup\{\infty\})\setminus\Omega'$ 是 χ 的孤立奇点．现在如果 a 是

$$(+)\qquad \eta^{(n)}+f_1(x)\eta^{(n-1)}+\cdots+f_n(x)\eta=0$$

的正则点或简单奇点，则 a' 必相应地是

$$(++)\qquad \xi^{(n)}+g_1(z)\xi^{(n-1)}+\cdots+g_n(z)\xi=0$$

的正则点或简单奇点，而且所对应的特征多项式是相同的．

证明：首先，通过先引入一个变换 $x=x'+a$ 或者 $x=\frac{1}{x'}$，我们就可以不失一般性地假定 $a=0$. 因为 θ 在 Ω 内对于 Ω' 中每个值只取一次，故 0 或是简单(单重)的 a'-点($a'\in C$)或是简单的极点．这时我们又可以接着用一个变换 $z=z'+a'$ 或 $z=\frac{1}{z'}$，不失一般性地假设 $a'=0$．在简化后所得的 $a=a'=0$ 的情形中，由(4.9.5)即可得出对于可去奇点的命题，只要我们代替 Ω，Ω' 而考虑 $\Omega\cup\{0\}$，$\Omega'\cup\{0\}$．对于 $a=a'=0$ 而且是简单奇点的情形，我们借助于一个在 0 全纯并且满足 $\omega(0)=1$ 的 ω 得出

$$\delta_x=x\frac{d}{dx}=\left(\frac{z\chi'(z)}{\chi(z)}\right)^{-1}z\frac{d}{dz}=\omega(z)\delta_z.$$

由此换算出

$$\begin{aligned}&\delta_x^n\eta+\hat f_1(x)\delta_x^{n-1}\eta+\cdots+\hat f_n(x)\eta\\&=\omega(z)^n[\delta_z^n\xi+\hat g_1(z)\delta_z^{n-1}\xi+\cdots+\hat g_n(z)\xi].\end{aligned}$$

此外由于 $\omega(z)\neq0\,(z\in\Omega)$ $\hat g_\kappa$ 也同 $\hat f_\kappa$ 一样在 0 全纯 ($\kappa=1,2,\cdots,n$)．因为根据前段的讨论(返回去应用) 知 0 不能是(++) 的可去奇点，所以也是个简单奇点．更确切些我们注意

$$(\omega(z)\delta_z)^\rho=\sum_{\kappa=1}^{\rho}\tau_{\rho\kappa}(z)\delta_z^\kappa\quad(\rho=1,2,\cdots,n),$$

其中

$$\tau_{\rho\rho}(z)=\omega(z)^{\rho}$$

且 $\tau_{\rho\kappa}(\kappa=1,2,\cdots,\rho-1)$ 全纯并在0处成为零．这可以由归纳法立刻看出．由此利用 $\omega(0)=1$ 得

$$\hat{g}_{\kappa}(0)=\hat{f}_{\kappa}(0)\qquad(\kappa=1,2,\cdots,n),$$

最终即得出了关于特征多项式恒等的命题．□

4.10 2阶 Fuchs (福克斯)微分方程

下面我们将考察2阶的 Fuchs 微分方程

(4.10.1) $$\eta''+f_1(x)\eta'+f_2(x)\eta=0$$

并假定它除了以 l 个有限点

$$a_1, a_2, \cdots, a_l$$

及∞为至多是简单奇点外不具备其他的奇点．此外不失一般性我们要求

$$l\geqslant 2.$$

根据(4.8.15)，(4.8.16)，只要我们用分母 $(x-a_1)\cdots(x-a_l)$ 进行带余式的除法和部分分式分解就可得出这里显示特征的系数表达式

(4.10.2) $$f_1(x)=\sum_{\kappa=1}^{l}\frac{\alpha_\kappa}{x-a_\kappa},$$

(4.10.3) $$f_2(x)=\prod_{\kappa=1}^{l}(x-a_\kappa)^{-1}\left(\sum_{\kappa=1}^{l}\frac{\beta_\kappa}{x-a_\kappa}+q(x)\right),$$

其中

(4.10.4) q 是次数 $\leqslant l-2$ 的多项式．

因为由变换 $z=\dfrac{1}{x}$，$\tilde{\eta}(z)=\eta(x)$ 得出微分方程

$$\tilde{\eta}''(z)+\frac{1}{z}\left(2-\frac{1}{z}f_1\left(\frac{1}{z}\right)\right)\tilde{\eta}'(z)+\frac{1}{z^2}\left(\frac{1}{z^2}f_2\left(\frac{1}{z}\right)\right)\tilde{\eta}=0,$$

所以∞点当而且仅当附加要求

(4.10.5) $$\sum_{\kappa=1}^{l}\alpha_\kappa=2,\quad q\text{ 的次数}\leqslant l-4,$$

并且在 $l=2$ 的情形还加上

(4.10.6) $$\sum_{\kappa=1}^{l}\beta_\kappa=0$$

成立时，才是正则点.

按照定理(4.8.9)，在 $a_\kappa(\kappa=1,2,\cdots,l)$处的指标方程是

(4.10.7) $$t(t-1)+\alpha_\kappa t+\beta_\kappa\prod_{\substack{\rho=1\\ \rho\neq\kappa}}^{l}(a_\kappa-a_\rho)^{-1}=0.$$

根据定理(4.8.14)在∞的指标方程是

(4.10.8) $$t(t-1)-\sum_{\kappa=1}^{l}\alpha_\kappa t+\gamma=0$$

这里的 γ 是 q 内 x^{l-2} 的系数.

我们把点 $a_\kappa(\kappa=1,2,\cdots,l)$处的指标记为 ν_κ,ν'_κ 并把在 ∞处的指标记为 ν_{l+1},ν'_{l+1}，则我们作比较得：

(4.10.9) $$\begin{cases}\nu_\kappa+\nu'_\kappa=1-\alpha_\kappa & (\kappa=1,2,\cdots,l)\\ \nu_\kappa\cdot\nu'_\kappa=\beta_\kappa\prod\limits_{\substack{\rho=1\\ \rho\neq\kappa}}^{l}(a_\kappa-a_\rho)^{-1}\end{cases}$$

以及

(4.10.10) $$\begin{cases}\nu_{l+1}+\nu'_{l+1}=\sum\limits_{\kappa=1}^{l}\alpha_\kappa-1,\\ \nu_{l+1}\cdot\nu'_{l+1}=\gamma.\end{cases}$$

所以在每一种情况下我们都得出

(4.10.11) $$\sum_{\kappa=1}^{l+1}(\nu_\kappa+\nu'_\kappa)=l-1.$$

因此现在已有可能以精确的形式记述在$\boldsymbol{C}\cup\{\infty\}$内具有$k(\geqslant 3)$个至多是简单奇点的Fuchs微分方程．设这些至多是简单奇点的点是$a_1, a_2, \cdots, a_k$ 此外如果出现∞则记$a_k=\infty$．假定仍然用$\nu_\kappa, \nu'_\kappa\ (\kappa=1,2,\cdots,k)$表示相应的指标．

我们得出，如果$a_1, a_2, \cdots, a_k\in\boldsymbol{C}$则

$$\text{(4.10.12)}\qquad \begin{aligned}&\eta''+\left(\sum_{\kappa=1}^{k}\frac{1-\nu_\kappa-\nu'_\kappa}{x-a_\kappa}\right)\eta'+\prod_{\kappa=1}^{k}(x-a_\kappa)^{-1}\\&\cdot\left(\sum_{\kappa=1}^{k}\frac{\nu_\kappa\cdot\nu'_\kappa}{x-a_\kappa}\prod_{\substack{\rho=1\\ \rho\neq\kappa}}^{k}(a_\kappa-a_\rho)+p(x)\right)\eta=0,\end{aligned}$$

而且假若$a_k=\infty$，则

$$\text{(4.10.13)}\qquad \begin{aligned}&\eta''+\left(\sum_{\kappa=1}^{k-1}\frac{1-\nu_\kappa-\nu'_\kappa}{x-a_\kappa}\right)\eta'+\prod_{\kappa=1}^{k}(x-a_\kappa)^{-1}\\&\cdot\left(\sum_{\kappa=1}^{k-1}\frac{\nu_\kappa\cdot\nu'_\kappa}{x-a_\kappa}\prod_{\substack{\rho=1\\ \rho\neq\kappa}}^{k-1}(a_\kappa-a_\rho)+\nu_k\cdot\nu'_k x^{k-3}+p(x)\right)\eta=0.\end{aligned}$$

这时在每一种情形中

(4.10.14)　　p 是次数 $\leqslant k-4$ 的多项式

并且

$$\text{(4.10.15)}\qquad \sum_{\kappa=1}^{k}(\nu_\kappa+\nu'_\kappa)=k-2.$$

在$k\geqslant 4$的情形中出现的不能由$a_\kappa, \nu_\kappa, \nu'_\kappa$确定的$p$的$k-3$个系数，将看做附加的参数(akzessorische Parameter).

因为在$k=3$的情形中p不出现，故具有3个至多为简单奇点$a_\kappa\ (\kappa=1,2,3)$的2阶Fuchs微分方程，可利用对应的6个满足条件

$$\sum_{\kappa=1}^{3}(\nu_\kappa+\nu'_\kappa)=1$$

的指标 ν_κ, ν'_κ $(\kappa=1,2,3)$ 一意地确定.

为了表明这一特性我们依照 Riemann(黎曼)采用符号

$$P\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & x \\ \nu'_1 & \nu'_2 & \nu'_3 & \end{bmatrix}. \tag{4.10.16}$$

现在对于由(4.10.16) 给出的 Fuchs 微分方程应用第 4.9节中的变换是特别有趣的.

首先我们应用由

$$z=\Theta(x)=\frac{\Theta_1 x+\Theta_2}{\Theta_3 x+\Theta_4}, \quad \Theta_\kappa\in C \tag{4.10.17}$$

$$(\kappa=1,2,3,4), \quad \Theta_1\Theta_4-\Theta_2\Theta_3\neq 0$$

给出的变换，如所周知它表示由 $C\cup\{\infty\}$ 映到它自身上的唯一的一一对应的全纯映象，于是论断(4.9.5)，(4.9.6)在这里就给出

$$P\begin{bmatrix} \Theta(a_1) & \Theta(a_2) & \Theta(a_3) & \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & \Theta(x) \\ \nu'_1 & \nu'_2 & \nu'_3 & \end{bmatrix} \tag{4.10.18}$$

$$=P\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & x \\ \nu'_1 & \nu'_2 & \nu'_3 & \end{bmatrix}.$$

此式要这样解释：具有 $a_\kappa, \nu_\kappa, \nu'_\kappa$, $(\kappa=1,2,3)$的 Fuchs 微分方程的每一个解 η 经过

$$\tilde{\eta}(z)=\eta(x), z=\Theta(x)$$

就变换为具有 $\Theta(a_\kappa), \nu_\kappa, \nu'_\kappa$ $(\kappa=1,2,3)$ 的 Fuchs 微分方程的一个解 $\tilde{\eta}$，而且反过来也成立.

现在我们考察变换

$$\eta(x)=\alpha(x)\tilde{\eta}(x),$$

这里的函数 α 不产生新的奇点. 显然只有下列两种情形需要考虑，这里我们把情形 $a_3=\infty$ 和 $a_1, a_2, a_3\in C$ 区分开：

我们可利用 λ, $\mu\in\mathbf{C}$ 把 $\alpha(x)$ 选取为

$$(4.10.19)\qquad \alpha(x)=\left(\frac{x-a_1}{x-a_3}\right)^{\lambda}\left(\frac{x-a_2}{x-a_3}\right)^{\mu}\quad (a_1,a_2,a_3\in\mathbf{C}),$$

或者

$$(4.10.20)\qquad \alpha(x)=(x-a_1)^{\lambda}(x-a_2)^{\mu}\quad (a_3=\infty),$$

并根据(4.9.2),(4.9.3),(4.9.4)得出

$$(4.10.21)\qquad \alpha(x)\cdot P\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \nu_1-\lambda & \nu_2-\mu & \nu_3+\lambda+\mu & x \\ \nu_1'-\lambda & \nu_2'-\mu & \nu_3'+\lambda+\mu & \end{bmatrix}$$

$$=P\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \\ \nu_1 & \nu_2 & \nu_3 & x \\ \nu_1' & \nu_2' & \nu_3' & \end{bmatrix}.$$

上式也应这样解释：具有右边的 P- 符号的 Fuchs 微分方程的每个解 η 利用

$$\eta(x)=\alpha(x)\tilde{\eta}(x)$$

即转变为具有左边的 P-符号的 Fuchs 微分方程的一个解 $\tilde{\eta}$, 反过来的命题也成立.

因为我们显然可一意地将任意给定的三个不同的点a_κ通过变换(4.10.17)恰好依次变成任给的三个不同的点a'_κ($\kappa=1,2,3$), 而且另方面由于(4.10.21)刚好在两个点 a'_κ 处能够产生一个已给定的指标, 所以我们总可以达到作为标准形式的

$$P\begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & x \\ \alpha & \beta & b & \end{bmatrix}$$

内中 $\alpha+\beta+a+b=1$. 如我们将会看到的, 我们命 $\alpha=1-c$ 从而 $\beta=c-a-b$ 是方便的.

符号

$$(4.10.22)\qquad P\begin{bmatrix} 0 & 1 & \infty & \\ 0 & 0 & a & x \\ 1-c & c-a-b & b & \end{bmatrix}$$

属于微分方程

$$(4.10.23)\qquad x(1-x)\eta''+(c-(a+b+1)x)\eta'-ab\eta=0.$$

这是所谓的超几何微分方程(hypergeometrische Dgl). 它可以看作具有三个至多是简单奇点的 2 阶 Fuchs 微分方程的标准形式.

如果

$$c\neq 0,-1,-2,\cdots,$$

则根据第 4.8 节可知, 超几何微分方程刚好具有一个在 0 全纯且满足

$$F(a,b;c;0)=1$$

的解 $F(a,b;c;x)$. 为了确定此解的(至少当$|x|<1$时收敛的)在 0 邻近的幂级数, 我们利用

$$\delta=x\frac{d}{dx}$$

把(4.10.23)写为如下形式

$$(4.10.24)\qquad [\delta(\delta+c-1)-x(\delta+a)(\delta+b)]\eta=0.$$

对于

$$F(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\gamma_n x^n\qquad(|x|<1)$$

经过比较 x^{n+1} 的系数此式给出两项递推公式

$$(n+1)(n+c)\gamma_{n+1}=(n+a)(n+b)\gamma_n,$$

所以利用 $\gamma_0=1$ 及缩写记号

$$(\alpha)_0=1,\ (\alpha)_n=\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)$$

恰好就得出超几何级数

$$(4.10.25)\quad F(a,b;c;x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a)_n(b)_n}{(c)_n n!}x^n \quad (|x|<1).$$

在用上面所作的变换将一个任意的具有三个点的 2 阶 Fuchs 微分方程变成一个超几何微分方程的时候，由于我们可以任意选取这三个点的顺序，故得到 $3!=6$ 种可能性. 此外我们在 (4.10.21)中还可以选取 $\lambda=\nu_1$ 或 $\lambda=\nu_1'$ 同时可以取 $\mu=\nu_2$ 或 $\mu=\nu_2'$，于是一般又得出 4 种可能性. 所以我们总共有 24 种可能的变换 使之变为一个超几何微分方程.

特别是此时我们也有 24 个变换把超几何微分方程(4.10.23)变成其他的超几何微分方程. 这些变换首先是Kummer(库默尔)给出的.

这 24 个变换对应着解由超几何级数表示的 24 个表达式. 其中和同一个奇点有关的各有 8 个. 在一般情况，亦即当指标差没有是整数的情况下，其中各有 4 对表达出一个基本解组中的两个解.

显然在超几何微分方程的变换中，恰好出现对应于 $0, 1, \infty$ 的 6 种排列的 6 个分式线性函数:

$$x,\ 1-x,\ \frac{1}{x},\ \frac{x}{x-1},\ \frac{x-1}{x},\ \frac{1}{1-x}.$$

关于更精确的论述和进一步的结果可参考有关的专门文献.

附录：练　　习

下面的练习主要是熟练性作业，它们使读者有机会利用例子来直接检查自己对所学材料的理解．但有一部分练习也带来对于理论的补充，并且将——除了其它作用外——激励读者继续去学习．

练习都是依相应的理论的段落安排和编号的．对于比较困难的问题我们都附了提示．

第 1 章的练习

1.1 (a) 在 $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2: 0<y<1\}$ 中求解初值问题

$$y'=\exp(-x)y(1-y)^{1/3},\quad y(\xi)=\eta.$$

(b) 确定下列微分方程的全部解

$$y'=y^2+y-2,$$

并讨论解的极大存在区间对于初值 $(\xi,\eta)\in\boldsymbol{R}^2$ 的依赖性．

1.2 (a) 求出 $y'=(x+y-1)^2$ 的一切解．

(b) 在 $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2: x>0, y>0\}$ 中求下列方程的全部解

$$y'=\frac{y^3+3x^2y}{2x^3}.$$

1.3 (a) 当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时求下列方程的一切解

$$y'=(2x+1)y+(1+\operatorname{tg}(x)^2)\exp(x^2+x+1).$$

(b) 证明：如果 $n\in\boldsymbol{N}_0$，p 是一个 n 次的实多项式，则必恰好存在一个在 $\boldsymbol{R}$ 上定义的连续可微的实函数 y 及一个 $n-1$ 次的实多项式 q，使得

$$y'(x)=2xy(x)+p(x)\qquad(x\in\boldsymbol{R}),$$

$$|y(x)-q(x)|=O\left(\frac{1}{x}\right)\qquad(x\to+\infty)$$

成立．（首先以适当方式把问题化归 $n=0$ 的情形）．

1.4 (a) 确定下列微分方程的全部解

$$y'=-\frac{y(y+x)}{1+x^2}.$$

对怎样的 $\eta\in\boldsymbol{R}$, 方程连同 $y(0)=\eta$ 的初值问题具有在整个 $\boldsymbol{R}$ 上存在的解?

(b) 在 $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2: x>0, y>0\}$ 中确定下面微分方程的全部解

$$y'=-\frac{2}{x}y+\frac{1}{x}y^{1/2}$$

1.5 (a) 将练习 1.1(b) 当作 Riccati 微分方程处理并且把它的通解表成(1.5.11)的形式.

(b) 猜测下列方程的一个特解

$$y'=y^2+\left(2x+\frac{1}{x}\right)y+x^2,\quad \{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2: x>0\}$$

然后依照第 1.5.2 节确定它的全部的解.

(c) $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$. 在 $\{(x,y)\in\boldsymbol{R}^2: x>0\}$ 中确定

$$y'=y^2-\frac{(1+\alpha+\beta)}{x}y+\frac{\alpha\beta}{x^2}$$

的通解并把它表成(1.5.11)的形式.

(d) 试利用定理(1.5.10)和交比对于分式线性变换的不变性证明定理(1.5.14). (当 $x\in\mathrm{i}_0$ 固定时, 我们考察用定理(1.5.10) 内的 u_0, v_0 及(1.5.12)中的 u_1, v_1 给出的分式线性变换

$$\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}\ni\gamma\longmapsto l_x(\gamma)=\frac{v_1(x)\gamma+u_1(x)}{v_0(x)\gamma+u_0(x)}\in\boldsymbol{R}\cup\{\infty\}).$$

1.6 (a) 证明

$$(y^2-4xy+3x^2+1)+2x(y-x)y'=0$$

在 $\boldsymbol{R}^2$ 内是恰当的, 并确定它的全部解.

(b) 试在 $\boldsymbol{R}^2$ 中求出微分方程

$$(x+y)(1-xy)+(x+2y)y'=0$$

的一个积分乘子并确定它的全部解. 此外特别研究一下满足 $y(0)=\eta$ 的解的极大存在区间对于 $\eta\in\boldsymbol{R}$ 的依赖性.

(c) 设 i_1 和 i_2 是 $\boldsymbol{R}$ 内的开区间, $f_1:\mathrm{i}_1\times\mathrm{i}_2\to\boldsymbol{R}$ 连续, $f_2:\mathrm{i}_1\to\boldsymbol{R}$ 连续而且当 $x\in\mathrm{i}_1$ 时 $f_2(x)\neq0$ 成立. 试对 f_1 及 f_2 给出必要而且充分的条件, 使微分方程

$$f_1(x,y)+f_2(x)y'=0$$

在 $\mathrm{i}_1\times\mathrm{i}_2$ 中是恰当方程.

1.7 (a) 确定 $y=xy'+y'^2$ 的一切解.

(b) 确定 $y=xy'-\cosh(y')$ 的一切解.

(c) 给出奇解是 $h(x)=\cosh(x)\,(x\in\boldsymbol{R})$ 的克莱洛 (Clairaut) 微分方程.

1.8 (a) 确定下列微分方程的一切两次可微解

$$y=xy'^2+y'^3.$$

(b) 求出 $y=x(1+y')+y'^2$ 的全部解.(通过应用 Darboux 关于导数的介值定理解出 y',来证明在开区间上的一切解都可微分任意多次.)

(c) 若已作假设(1.8.2), 试证(1.8.1)的每一个满足

$$f'(y'(x))x+g'(y'(x))\neq 0$$

的解 $y: i\to\boldsymbol{R}$, 当 $x\in i$ 时都两次连续可微.(以适当的方式对 $h(x,t)=f(t)x+g(t)-y(x)$ 应用隐函数定理.)

第 2 章的练习

2.1 (a) 试在定理 (2.1.3) 的假设之下证明: 对于 T 的不动点 $\hat{x}$ 及任意的 $y_0\in\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}\mathfrak{D}_{T^n}$ 都有

$$\delta(\hat{x},T^ny_0)\leqslant\delta(y_0,Ty_0)\sum_{\nu=n}^{\infty}\|T^\nu\|\qquad(n\in\boldsymbol{N}_0).$$

(b) 若定理(2.1.3)中的假设对 $\mathfrak{D}_T=\mathfrak{M}$ 满足, 试证对于 $\mathfrak{M}$ 中的每一个序列 $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ 都有

$$\limsup_{n\to\infty}\delta(\hat{x},z_n)\leqslant\Big(\sum_{n=0}^{\infty}\|T^n\|\Big)\limsup_{k\to\infty}\delta(z_{k+1},Tz_k).$$

(这里应当注意, 当 $k\in\boldsymbol{N}_0$ 时有

$$\limsup_{n\to\infty}\delta(\hat{x},z_n)=\limsup_{n\to\infty}\delta(T^nz_k,z_{k+n}).).$$

(c) 设 f,g 及 y 都是在致密区间$[\alpha,\beta]$中定义的实连续函数, 且对它们 $f(x)\geqslant 0\,(x\in[\alpha,\beta])$ 以及

$$y(x)\leqslant g(x)+\int_\alpha^x f(t)y(t)dt\qquad(x\in[\alpha,\beta])$$

成立. 试利用定理(2.1.3)证明, 恰好存在一个定义于$[\alpha,\beta]$的实连续函数 u 满足

$$u(x)=g(x)+\int_\alpha^x f(t)u(t)dt\qquad(x\in[\alpha,\beta])$$

且对它 $y(x)\leqslant u(x)\,(x\in[\alpha,\beta])$ 成立. 试由此推出(1.3.9)

2.2 (*a*) 试证明定理(2.2.2)。

(*b*) 证明定理(2.2.4)。

(*c*) 设 i 为 $\boldsymbol{R}$ 内的任一区间而 j 是 $\boldsymbol{R}$ 中的致密区间. 对于一个 Banach 空间 $\mathfrak{S}$, $\mathfrak{R}$ 表示 Banach 空间($\mathscr{C}_0$(j, $\mathfrak{S}$), +, ·, ||)——参阅定理(2.2.4)——且 $\mathscr{C}_0(\mathrm{i}\times \mathrm{j}, \mathfrak{S})$表示在 $\mathrm{i}\times\mathrm{j}\subset \boldsymbol{R}^2$ 上定义的连续 $\mathfrak{S}$-值函数的集合. 试证: 当 $y\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \mathfrak{R})$时由 $\eta(x, t):=y(x)(t)\ ((x, t)\in \mathrm{i}\times\mathrm{j})$ 定义的映象是 $\mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \mathfrak{R})$和 $\mathscr{C}_0(\mathrm{i}\times\mathrm{j}, \mathfrak{S})$间的一一对应(Bijektion).

2.3, 2.4, 2.5

(*a*) 试对 $a=b=0\in\boldsymbol{R}$ 及

$$f(x, y)=x^2+y^2 \qquad ((x, y)\in\boldsymbol{R}^2)$$

确定常数 A, B 和 N, 使得此处主要定理(2.3.1)中的假设对 $\mathrm{i}=[-A, A]$及 $g(x)=b\,(x\in i)$被满足. 并把这里的 A 选得尽可能地大.

(*b*) 对于 $a=0\in\boldsymbol{R}$, $b=(1, 1)\in\boldsymbol{R}^2$ 以及

$$f(x, y_1, y_2)=(y_2+xy_1^2, y_1+xy_2^2) \qquad ((x, y_1, y_2)\in\boldsymbol{R}^3)$$

研究和练习(*a*) 相应的问题. 这时我们在 $\mathfrak{R}=\boldsymbol{R}^2$ 中采取极大值-模 (Maximum-Norm).

(*c*) 利用 Picard 叠代法解初值问题

$$y'=2x(1+y), \quad y(0)=0.$$

这一叠代法可由不动点定理(2.1.3)并回顾主要定理(2.3.1)的证明得出.

(*d*) 设i为 $\boldsymbol{R}$ 中的致密区间; $a\in\mathrm{i}$; b_1, $b_2\in\boldsymbol{R}$; $g\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \boldsymbol{R})$. 证明: 当 $x\in\mathrm{i}$ 时由 $y_0(x)=0$ 及

$$y_{n+1}(x)=b_1+(x-a)b_2+\int_a^x(x-t)g(t)y_n(t)dt \qquad (n\in\boldsymbol{N}_0)$$

定义的序列$\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$一致收敛于下列初值问题的唯一确定的解 $y\in\mathscr{C}_2(i, \boldsymbol{R})$:

$$y''-g(x)y=0, \quad y(a)=b_1, \quad y'(a)=b_2.$$

(依第 2.4 节把此方程化归微分方程组, 然后写出其 Picard 叠代程序; 参阅练习(*c*).)

(*e*) 对于在 Banach 空间 $\mathfrak{R}_\kappa\ (\kappa=1, \cdots, k)$中取值的 n_κ 次连续可微函数 y_κ, 将微分方程组

$$y_\kappa^{(n_\kappa)}=f_\kappa(x, y_1, \cdots, y_1^{(n_1-1)}, \cdots, y_\kappa, \cdots, y_\kappa^{(n_\kappa-1)}, \cdots, y_k, \cdots, y_k^{(n_k-1)})$$

变换成 1 阶微分方程组并就此方程组指出主要定理(2.3.1)的特殊的叙述.

(*f*) 借助主要定理(2.3.1)讨论下面的关于积分-微分方程的初值

问题. 假定: $\mathrm{i}\subset\boldsymbol{R}$ 是致密区间; $a\in\mathrm{i}$; $\alpha,\beta\in\boldsymbol{R}$, $\alpha<\beta$; $b\in\mathscr{C}_0([\alpha,\beta],\boldsymbol{R})$; $k\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i}\times[\alpha,\beta]\times[\alpha,\beta],\boldsymbol{R})$; $h\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i}\times[\alpha,\beta],\boldsymbol{R})$. 则必恰好存在一个 $y\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i}\times[\alpha,\beta],\boldsymbol{R})$, 当 $t\in[\alpha,\beta]$时满足 $y(\cdot,t)\in\mathscr{C}_1(\mathrm{i},\boldsymbol{R})$, 使得 $y(a,t)=b(t)\,(t\in[\alpha,\beta])$ 和下式都成立

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,t)=\int_\alpha^\beta k(x,t,\tau)y(x,\tau)d\tau+h(x,t)$$
$$((x,t)\in\mathrm{i}\times[\alpha,\beta]).$$

(注意练习 2.2(c).)

(g) 利用主要定理 (2.3.1) 讨论一个特殊双曲偏微分方程的如下的"特征"初值问题. 假定: i 及 $\mathrm{j}\subset\boldsymbol{R}$ 是致密区间; $x_0\in\mathrm{i}$, $t_0\in\mathrm{j}$; $u_0\in\mathscr{C}_1(\mathrm{i},\boldsymbol{R})$, $v_0\in\mathscr{C}_1(\mathrm{j},\boldsymbol{R})$, $u_0(x_0)=v_0(t_0)$; $\varphi\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i}\times\mathrm{j}\times\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$; 此外并假定存在一个 $N_0\,(0\leqslant N_0<\infty)$ 使得当 $(x,t,\eta^1),(x,t,\eta^2)\in\mathrm{i}\times\mathrm{j}\times\boldsymbol{R}$ 时有

$$|\varphi(x,t,\eta^1)-\varphi(x,t,\eta^2)|\leqslant N_0|\eta^1-\eta^2|.$$

则必恰好存在一个 $\eta\in\mathscr{C}_1(\mathrm{i}\times\mathrm{j},\boldsymbol{R})$ 满足 $\eta_x(x,\cdot)\in\mathscr{C}_1(\mathrm{j},\boldsymbol{R})$ $(x\in\mathrm{i})$ 及 $\eta_t(\cdot,t)\in\mathscr{C}_1(\mathrm{i},\boldsymbol{R})$ $(t\in\mathrm{j})$, 使得

$$\eta(\cdot,t_0)=u_0,\quad \eta(x_0,\cdot)=v_0,$$
$$\eta_{xt}(x,t)=\varphi(x,t,\eta(x,t))\qquad((x,t)\in\mathrm{i}\times\mathrm{j}).$$

(例如我们可选取 $\mathfrak{N}=\mathscr{C}_0(\mathrm{j},\boldsymbol{R})$, $a=x_0$, $b=v_0'$, 并在 $(x,y)\in\mathrm{i}\times\mathfrak{N}$ 时用

$$f(x,y)(t):=\varphi\left(x,t,u_0(x)+\int_{t_0}^t y(\tau)d\tau\right)\qquad(t\in\mathrm{j}).$$

来定义 $f:\mathrm{i}\times\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}$, 考察相应的初值问题.)

2.6 (a) 在区间$\left[0,\frac{2}{3}\right]$中给出

$$y'=\sin(xy),\quad y(0)=1,$$

及

$$y'=xy,\ y\left(\frac{1}{10}\right)=\frac{201}{200},$$

的解之差的一个估计式.

(b) 证明:

$$y'=y^2+y+(1+x^2),\quad y(0)=0,$$

和

$$y'=y+1,\quad y(0)=0,$$

的解在$x=\frac{1}{10}$处的差小于$\frac{1}{1000}$. (利用(2.6.2)并注意$\left|\int_a^x d_1(\tau)d\tau\right|$的尽可能精

密的估计式.)

2.7 (a) 若第 2.7 节中的假设对 $\mathfrak{R}=\boldsymbol{R}^n$, $\mathfrak{G}=\mathrm{i}\times\boldsymbol{R}^n$, 开区间 $\mathrm{i}\subset\boldsymbol{R}$ 满足. 设 $y\in\mathscr{C}_1((\alpha,\beta),\boldsymbol{R}^n)$ 是 $y'=f(x,y)$ 依定理(2.7.6)的一个有极大存在区间的解. 证明: 在 $\alpha\in\mathrm{i}$ 的情况下当 $(\alpha,\beta)\ni x\to\alpha$ 时, 以及在 $\beta\in\mathrm{i}$ 的情况下当 $(\alpha,\beta)\ni x\to\beta$ 时, 恒有 $|y(x)|\to\infty$. 在 $n=1$ 的情况下甚至有更精确的 $y(x)\to+\infty$ 或 $y(x)\to-\infty$.

(b) 假设开区间 $\mathrm{i}\subset\boldsymbol{R}$, $\mathfrak{G}=\mathrm{i}\times\boldsymbol{R}^2$, $(a,b_0,b_1)\in\mathfrak{G}$; 设 φ 是由 $\mathfrak{G}$ 映到 $\boldsymbol{R}$ 内的一个连续映象并且对后面的两个变元满足一个"局部 Lip 条件". 若 $y\in\mathscr{C}_2((\alpha,\beta),\boldsymbol{R})$ 是

$$y''=\varphi(x,y,y'),\quad y(a)=b_0,\quad y'(a)=b_1,$$

依照定理 (2.7.6) 的一个具有极大存在区间的解. 求证: 如果 $\alpha\in\mathrm{i}$ 且 y 在 $(\alpha,a]$ 上有界, 则极限值 $\lim\limits_{x\to\alpha}y(x)=:c\in\boldsymbol{R}$ 存在. 此外当 $(\alpha,\beta)\ni x\to\alpha$ 时 $y'(x)\to+\infty$ 或 $y'(x)\to-\infty$ 必有一成立. 因而 $y(x)\to c$ 的收敛性最后必定是单调的. 对应的事实对 β 也成立.

(c) 设第 2.7 节中的一般假设被满足. 当 $(a,b)\in\mathfrak{G}$ 时, $y_{(a,b)}$ 表示 $y'=f(x,y)$, $y(a)=b$ 的依定理(2.7.6)具有极大(开)存在区间 $\mathrm{j}_{(a,b)}$ 的唯一确定的解. 对于 $\nu=1,2$, 我们考察

$$\theta_\nu:=\{b:(a_\nu,b)\in\mathfrak{G},\,a_\mu\in\mathrm{j}_{(a_\nu,b)}\quad(\mu\neq\nu)\}$$

其中 $a_\mu\in\boldsymbol{R}$, 且当 $b\in\theta_1$ 时定义

$$\tau(b):=y_{(a_1,b)}(a_2).$$

证明: θ_1, θ_2 都是$\mathfrak{R}$的开子集; $\tau:\theta_1\to\theta_2$ 是拓扑映象(亦即它是一一对应的而且连同其逆映象都是连续的.)

(d) 设第 2.7 节的一般假设对 $\mathfrak{R}=\boldsymbol{R}$, $\mathfrak{G}=\boldsymbol{R}^2$ 被满足. 又设对于 $c_1,c_2\in\boldsymbol{R}(c_1<c_2)$ 当 $x\in\boldsymbol{R}$ 时 $f(x,c_1)>0$, $f(x,c_2)<0$ 成立. 试首先证明: 如果 $y\in\mathscr{C}_1((\alpha,\beta),\boldsymbol{R})$ 是 $y'=f(x,y)$ 依(2.7.6)的一个具有极大存在区间的解, 而且对某个 $a\in(\alpha,\beta)$ 有 $y(a)\in[c_1,c_2]$成立, 则 $\beta=+\infty$ 而且当 $x\in(a,+\infty)$时 $y(x)\in(c_1,c_2)$. 然后应用练习(c)证明: 对任意的 $a_1,a_2\in\boldsymbol{R}$, $a_1<a_2$, 微分方程 $y'=f(x,y)$必有一解 $y\in\mathscr{C}_1([a_1,a_2],\boldsymbol{R})$满足

$$y(a_1)=y(a_2)\in(c_1,c_2).$$

(e) 利用练习(d)证明微分方程

$$y'=-y^3-\sin(x)y^2+\cos(x)y+1$$

必有一个以 2π 为周期的解 $y\in\mathscr{C}_1(\boldsymbol{R},\boldsymbol{R})$ 而且对它 $|y(x)|<2\ (x\in\boldsymbol{R})$ 成立.

2.8 (a) 证明定理(2.8.5).

(b) 证明定理(2.8.6).

(c) 假定 Ω 及 $\Lambda\subset\boldsymbol{C}$ 为有界域. 设 $\mathfrak{S}$ 为一复 Banach 空间, $\mathfrak{R}$ 代表复 Banach 空间 $(\mathscr{H}(\Lambda,\mathfrak{S}),+,\cdot,\|\ \|)$——参阅定理 (2.8.6)——. 证明: 当 $y\in\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R})$ 时由

$$\eta(x,t):=y(x)(t)\qquad((x,t)\in\overline{\Omega}\times\overline{\Lambda})$$

定义的映象是 $\mathscr{H}(\Omega,\mathfrak{R})$ 和 $\mathscr{H}(\Omega\times\Lambda,\mathfrak{S})$ 之间的一一对应映象, 而且

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}(x,t)=y'(x)(t)\qquad((x,t)\in\Omega\times\Lambda)$$

成立.

2.9, 2.10

(a) 给出初值问题 $(\nu\in\boldsymbol{C})$

$(1-x^2)y''-2xy'+\nu(\nu+1)y=0,\ y(0)=1,\ y'(0)=0$ 的解在 $a=0$ 邻近的幂级数, 并确定其收敛半径.

(b) 假设 $g,h:\boldsymbol{C}\longrightarrow\boldsymbol{C}$ 全纯. 试证

$$y'=-y^2-g(x)y-h(x)$$

的每一个解均可延拓成 $\boldsymbol{C}$ 上的一个半纯函数(meromorphe Funktion); 而且它们至多具有残数(Residuum) 为 1 的一阶极点. (依第 1.5.1 节把它变换成一个 2 阶微分方程.)

(c) 设 $f:\boldsymbol{C}^3\longrightarrow\boldsymbol{C}^3$ 定义为

$$f(y_1,y_2,y_3)=(y_2y_3,\ -y_3y_1,\ -k^2y_1y_2),$$

其中 $k\in\boldsymbol{R}\ (0<k<1)$. 证明: α) 如果 $a\in\boldsymbol{C}$, $\mathfrak{B}_a=\left\{z\in\boldsymbol{C}:|z-a|<\frac{1}{4}\right\}$, $b\in\boldsymbol{C}^3$ 满足 $|b|=\max\limits_{\nu=1}^{3}|b_\nu|\leqslant1$, 则微分方程 $y'=f(y)$ 必恰好有一个解 $y\in\mathscr{H}(\mathfrak{B}_a,\boldsymbol{C}^3)$ 满足 $y(a)=b$. β) 如果 $\Omega=\left\{z\in\boldsymbol{C}:\ |\mathrm{Im}\,z|<\frac{1}{4}\right\}$, 则方程 $y'=f(y)$ 必刚好有一个解 $y\in\mathscr{H}(\Omega,\ \boldsymbol{C}^3)$ 满足 $y(0)=(0,1,1)$. 它的坐标函数(——它们显然正好是对于 mod$k$ 的 Jacobi 椭圆函数 sn, cn, dn——) 满足

$$y_1(x)^2+y_2(x)^2=1\ \text{及}\ k^2y_1(x)^2+y_3(x)^2=1\quad(x\in\Omega).$$

(在证明 β) 时我们应注意当 $x\in\boldsymbol{R}$ 时解 y 的值位于 $\boldsymbol{R}^3$ 内, 因而当 $x\in\boldsymbol{R}$ 时

$$|y(x)|=\max_{\nu=1}^{3}|y_\nu(x)|\leqslant1.)$$

(*d*) 证明引理(2.10.3). (如得出假设(1)和(2)中 f 的详细表达式,我们首先证明,对于固定的 $(x, y)\in\Omega\times\boldsymbol{R}$ 由

$$\varphi(\lambda):=f(x, \lambda y) \qquad (\lambda\in\boldsymbol{C})$$

定义的函数是一个至多为一次的多项式. 当证明 F 在 Ω 内全纯时我们应用 Cauchy 积分公式. 而为了对所给的 f 的表达式验证假设(1)和(2),我们利用泛函分析中的一致有界性定理.)

(*e*) 设主要定理(2.9.1)中假设(0),(1),(2)及(3*b*)都成立. 证明:对相应的解 y 当 $x\in\overline{\Omega}$ 时有

$$|y(x)-g(x)|\leqslant$$

$$\max_{\substack{t\in\overline{\Omega}\\|t-a|\leqslant|x-a|}}\left|b+\int_a^t f(\tau, g(\tau))d\tau-g(t)\right|\exp(|x-a|N).$$

如果 $B=\infty$ 而且对于一个符合引理(2.10.3)的 F 我们定义 $f(x, y)=F(x)y$ $((x, y)\in\overline{\Omega}\times\mathfrak{R})$, 则当 $x\in\overline{\Omega}$ 时必有

$$|y(x)|\leqslant|b|\exp(|x-a|\cdot\max_{\substack{t\in\overline{\Omega}\\|t-a|\leqslant|x-a|}}|F(t)|).$$

(注意(2.6.1)的证明.)

2.11 (*a*) 试在不假定"Λ 有界"的情况下,对全纯的参数依赖性说出并证明一个与定理(2.11.1)相应的定理.

(*b*) 设 $\mathfrak{S}$ 为复 Banach 空间; $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{S}, \mathfrak{S})$ 表示由 $\mathfrak{S}$ 映到其自身内的有界线性映象所成的复 Banach 代数; $a\in\boldsymbol{C}$, 设 Ω 是 $\boldsymbol{C}$ 中关于 a 的有界星形域. $A:=\max\limits_{x\in\overline{\Omega}}|x-a|$; 设 Λ 为 $\boldsymbol{C}$ 内的一个域,且 $b:\Lambda\to\mathfrak{S}$ 全纯. F 是由 $\overline{\Omega}\times\Lambda$ 到 $\mathfrak{A}$ 内的连续映象且它在 $\Omega\times\Lambda$ 上复-可微. 证明: 恰好存在一个连续映象 $\eta:\overline{\Omega}\times\Lambda\to\mathfrak{S}$, 它在 $\Omega\times\Lambda$ 上复-可微并且满足初值问题

$$\eta(a, \lambda)=b(\lambda) \quad (\lambda\in\Lambda),$$

$$\frac{\partial\eta}{\partial x}(x, \lambda)=F(x, \lambda)\eta(x, \lambda) \quad ((x, \lambda)\in\Omega\times\Lambda).$$

且当 $(x, \lambda)\in\overline{\Omega}\times\Lambda$ 时有

$$|\eta(x, \lambda)|\leqslant|b(\lambda)|\exp(|x-a|\max_{t\in\overline{\Omega}}|F(t, \lambda)|).$$

(*c*) 假设: $n\in\boldsymbol{N}$; $a\in\boldsymbol{C}$, Ω 是 $\boldsymbol{C}$ 中对于 a 的有界星形域,

$$A:=\max_{x\in\overline{\Omega}}|x-a|; b_1, \cdots, b_n\in\boldsymbol{C}.$$

对于 $\nu=1,\cdots,n$, 设 $k_\nu\in N_0$, $a_{\nu\kappa}\in\mathscr{C}(\Omega,C)$ $(\kappa=0,\cdots,k)$ 而且

$$a_\nu(x,\lambda)=\sum_{\kappa=0}^{k_\nu}a_{\nu\kappa}(x)\lambda^\kappa\quad((x,\lambda)\in\overline{\Omega}\times C).$$

证明: 刚好存在一个连续函数 $\zeta:\overline{\Omega}\times C\longrightarrow C$, 它在 $\Omega\times C$ 上复-可微且满足初值问题

$$\frac{\partial^\nu\zeta}{\partial x^\nu}(a,\lambda)=b_{\nu+1}\quad(\lambda\in C)\quad(\nu=0,\cdots,n-1)$$

$$\frac{\partial^n\zeta}{\partial x^n}(x,\lambda)+a_1(x,\lambda)\frac{\partial^{n-1}\zeta}{\partial x^{n-1}}(x,\lambda)+\cdots+a_n(x,\lambda)\zeta(x,\lambda)=0,$$

$$((x,\lambda)\in\Omega\times C).$$

若记 $k:=\max\limits_{\nu=1}^{n}k_\nu/\nu$, 则 ζ 作为 λ 的整函数其增长阶数 $\leqslant k$. (为了得出阶数的估计, 我们命 $t(\lambda)=\lambda^k(\lambda\in C)$ 并利用

$$\eta=\left(t^{n-1}\zeta,\ t^{n-2}\frac{\partial\zeta}{\partial x},\cdots,t\frac{\partial^{n-2}\zeta}{\partial x^{n-2}},\frac{\partial^{n-1}\zeta}{\partial x^{n-1}}\right)$$

变换为微分方程组. 然后以适当的方式应用练习(*b*).)

2.12 (*a*) 设 Peano 存在定理(2.12.3)的假设(0)和(1)成立. 对于一连续函数 $\varphi:[0,\infty)\longrightarrow[0,\infty)$ 当 $(x,y)\in R$ 时有

$$|f(x,y)|\leqslant\frac{1}{\varphi(|y-b|)},$$

及

$$\int_0^B\varphi(t)dt\geqslant A.$$

证明此时必存在一个 $y\in\mathscr{C}_1(\mathrm{i},\mathfrak{R})$ 满足 $y(a)=b$, 且当 $x\in\mathrm{i}$ 时有 $(x,y(x))\in R$ 和 $y'(x)=f(x,y(x))$. (当 $(x,y)\in\mathrm{i}\times\mathfrak{R}$ 时我们置

$$f_1(x,y):=\begin{cases}f(x,y) & (|y-b|\leqslant B),\\ f\left(x,\ b+B\dfrac{y-b}{|y-b|}\right) & (|y-b|>B).\end{cases}$$

则定理(2.12.3)即给出与 f_1 相应的初值问题的一个满足 $|y_1(x)-b|\leqslant AM$ 的解 y_1. 要证的是: $|y_1(x)-b|\leqslant B$.)

(*b*) 假设: $a\in R$, $0<A<\infty$, $\mathrm{i}:=[a,a+A]$; $z_1,z_2\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i},R)$ 当 $x\in\mathrm{i}$ 时满足 $z_1(x)\leqslant z_2(x)$; $S:=\{(x,y):x\in\mathrm{i},z_1(x)\leqslant y\leqslant z_2(x)\}$; $f:S\to R$ 连续. 使用第 2.13 节的符号, 假定当 $x\in\mathrm{i}$, $x>a$ 时 $D_lz_1(x)\leqslant f(x,z_1(x))$ 及

$$D^lz_2(x)\geqslant f(x,z_2(x))$$

成立. 证明: 对于每个 $b\in[z_1(a), z_2(a)]$ 都存在一个 $y\in\mathscr{C}_1(\mathrm{i}, R)$ 满足

$$y(a)=b,\quad (x, y(x))\in R,$$

且当 $x\in\mathrm{i}$ 时 $y'=f(x, y(x))$. (当 $(x, y)\in\mathrm{i}\times\boldsymbol{R}$ 时我们置

$$f_1(x, y)=\begin{cases}f(x, z_2(x)) & (z_2(x)<y),\\ f(x, y) & (z_1(x)\leqslant y\leqslant z_2(x)),\\ f(x, z_1(x)) & (y<z_1(x)).\end{cases}$$

首先考察与 f_1 相应的初值问题; 然后证明: 如果 $u\in\mathscr{C}_0(\mathrm{i}, \boldsymbol{R})$ 而且当 $x\in\mathrm{i}$, $x>a$ 时 $D^lu(x)\geqslant 0$ 成立, 则 u 是单调不减的.)

(c) 假设: $a\in\boldsymbol{R}$, $0<A<\infty$, $\mathrm{i}:=[a, a+A]$; $b\in\boldsymbol{R}$, $0<B<\infty$, $R:=\mathrm{i}\times\{y\in\boldsymbol{R}: |y-b|\leqslant B\}$; $f: R\to\boldsymbol{R}$ 连续, $M:=\max\limits_{z\in R}|f(z)|$; $0<\delta<\infty$, $A(M+\delta)\leqslant B$. 证明:

(i) 对满足 $|\varepsilon|\leqslant\delta$ 的一切 $\varepsilon\in\boldsymbol{R}$, 都存在一个 $y_\varepsilon\in\mathscr{C}_1(i, \boldsymbol{R})$ 满足 $y_\varepsilon(a)=b$, 且当 $x\in i$ 时 $(x, y_\varepsilon(x))\in R$, $y_\varepsilon'(x)=f(x, y_\varepsilon(x))+\varepsilon$.

(ii) 对一切满足 $-\delta\leqslant\varepsilon_1<\varepsilon_2\leqslant\delta$ 的 $\varepsilon_1, \varepsilon_2\in\boldsymbol{R}$, 当 $x\in i$, $x>a$ 时 $y_{\varepsilon_1}(x)<y_{\varepsilon_2}(x)$ 成立.

(iii) 存在 $y_+, y_-\in\mathscr{C}_1(i, \boldsymbol{R})$ 满足 $y_\pm(a)=b$ 及 $(x, y_\pm(x))\in R$, 及 $x\in\mathrm{i}$ 时 $y_\pm'(x)=f(x, y_\pm(x))$, 使得当 $(0, \delta]\ni\varepsilon\to 0$ 时 $y_\varepsilon\to y_+$ 而当 $[-\delta, 0)\ni\varepsilon\to 0$ 时 $y_\varepsilon\to y_-$. 又

$$y_-(x)\leqslant y_0(x)\leqslant y_+(x)\quad (x\in i)$$

成立. (在证明(iii)时可应用定理(2.12.2).)

2.13 (a) 假设 $0<c<\infty$, $0\leqslant M<\infty$, $-1<\alpha<\infty$, 当 $(x, z)\in(0, c]\times\boldsymbol{R}^+$ 时定义

$$g(x, z):=\begin{cases}0 & (z=0),\\ Mx^\alpha z\log\left(\dfrac{1}{z}\right) & \left(0<z<\dfrac{1}{e}\right),\\ \dfrac{M}{e}x^\alpha & \left(\dfrac{1}{e}\leqslant z\right).\end{cases}$$

证明: $g\in\mathfrak{s}_K$.

(b) 设 $0<c<\infty$, $1<\beta<\infty$, 当 $(x, z)\in(0, c]\times\boldsymbol{R}^+$ 时定义

$$g(x, z):=\beta\frac{z}{x}.$$

试构造一个连续函数 $f:[0, c]\times\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$, 它满足

$$|f(x, y_1)-f(x, y_2)|\leqslant g(x, |y_1-y_2|),$$

$$((x, y_1), (x, y_2) \in (0, c] \times \boldsymbol{R}),$$

使得相应的初值问题

$$y' = f(x, y), \quad y(0) = 0$$

在$[0, 1]$上具有多个解.（我们这样来定义 f, 使得 $y_1 = 0$ 和 $y_2 = x^\beta$ 都是解.）

(c) 假设 $0 < c < \infty$, $\mathfrak{R}$为有限维 Banach 空间, $b \in \mathfrak{R}$, $0 < B < \infty$, $\mathfrak{D} := [0, c] \times \{y \in \mathfrak{R} : |y - b| \leqslant B\}$, 而且 $f: \mathfrak{D} \to \mathfrak{R}$ 连续. f 对于一个 $g \in \mathfrak{g}_W$ 或者 $g \in \mathfrak{g}_K$ 满足定理(2.13.1)中的估计式(2).

求证：若分别定义

$$g_0(x, z) := \max\{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| :$$
$$|y_\nu - b| \leqslant B (\nu = 1, 2), |y_1 - y_2| \leqslant z\},$$

和

$$g_0(x, z) := \max\{|f(x, y_1) - f(x, y_2)| :$$
$$|y_\nu - b| \leqslant B (\nu = 1, 2), |y_1 - y_2| = z\}$$

则在对 $z > 2B$ 作适当延拓之后必或有 $g_0 \in \mathfrak{g}_W$, 它甚至是连续的, 或有 $g_0 \in \mathfrak{g}_K$（并且(γ)可以得到大的改进).

第 3 章的练习

3.3 (a) 试对定理(3.3.2)给出这样的一个证明, 即证明对于(3.3.1)的每一个解 $Y \in \mathscr{C}_1(\mathfrak{i}, \mathfrak{A})$, $\mathfrak{M} := \{x \in \mathfrak{i} : Y(x) \in \mathfrak{J}(\mathfrak{A})\}$ 是 $\mathfrak{i}$ 中的一个相对开集而且又是个相对闭集, 从而或者 $\mathfrak{M} = \mathfrak{i}$ 或者$\mathfrak{M} = \varnothing$.（在证明$\mathfrak{M}$的闭性时, 我们利用(3.3.1)的一个适当的解 $Z \in \mathscr{C}_1(\mathfrak{i}, \mathfrak{A})$ 和一个 $C \in \mathfrak{A}$ 把 $Y(x)$表示成: $Y(x) = Z(x)C$.）

(b) 设已给 3.3 节中诸假定. 证明对于 (3.3.1) 的每一个解 $Y \in \mathscr{C}_1(\mathfrak{i}, \mathfrak{A})$及每一个 $a \in \mathfrak{i}$ 都有

$$|Y(x) - Y(a)| \leqslant |Y(a)| \left(\exp\left(\left| \int_a^x |F(t)| dt \right| \right) - 1 \right) \quad (x \in \mathfrak{i}).$$

(利用(1.3.9).)

(c) 对 $n \in \boldsymbol{N}$ 记 $\mathfrak{R} = \boldsymbol{C}^n$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}, \mathfrak{R})$. 假设 $F \in \mathscr{C}_0(\boldsymbol{R}^+, \mathfrak{A})$满足

$$\limsup_{x \to +\infty} \operatorname{Re} \int_0^x \operatorname{spur} F(t) dt > -\infty.$$

设对于 $Y' = F(x)Y$ 的一个基本解 $Y \in \mathscr{C}_1(\boldsymbol{R}^+, \mathfrak{A})$有$|Y(x)| \leqslant \gamma < \infty (x \in \boldsymbol{R}^+)$. 证明: $y' = F(x)y$ 的每任何满足 $y(x) \to 0 (x \to \infty)$的解 $y \in \mathscr{C}_1(\boldsymbol{R}^+, \mathfrak{R})$, 必正

好是平凡解 $y=0$.

(d) 假设：区间 i 在 $\boldsymbol{R}$ 内；$f,g,h\in\mathscr{C}_0(i,\boldsymbol{C})$；$y_{\nu\mu}\in\mathscr{C}_1(i,\boldsymbol{C})$ $(\nu,\mu\in\{1,2\})$. 当 $x\in i$ 时记：

$$F(x):=\begin{pmatrix} f(x) & \dfrac{g(x)}{2} \\ \dfrac{g(x)}{2} & h(x)\end{pmatrix},$$

$$P:=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0\end{pmatrix},\qquad Y(x):=\begin{pmatrix} y_{11}(x) & y_{12}(x) \\ y_{21}(x) & y_{22}(x)\end{pmatrix}.$$

设 Y 是 $PY'=F(x)Y$ 的一个基本解. 证明：对每个在某区间 $\mathrm{i}_0\subset\mathrm{i}$ 上定义的函数 $y:\mathrm{i}_0\to\boldsymbol{C}$, 当而且仅当存在 $(\lambda_1,\lambda_2)\in\boldsymbol{C}^2$ 使得

$$\lambda_1y_{21}(x)+\lambda_2y_{22}(x)\neq 0\quad(x\in\mathrm{i}_0)$$

且

$$y(x)=\frac{\lambda_1y_{11}(x)+\lambda_2y_{12}(x)}{\lambda_1y_{21}(x)+\lambda_2y_{22}(x)}\quad(x\in\mathrm{i}_0)$$

成立时，y 才是下列 Riccati 微分方程的解

$$y'=f(x)y^2+g(x)y+h(x).$$

(证明 $Y(x)^tPY(x)$ 在 i 上为常量；这里 $Y(x)^t$ 表示转置矩阵.)

3.4, 3.5, 3.6

(a) 设 $x\in\mathrm{i}:=(0,+\infty)$ 时

$$F(x):=\begin{pmatrix} 1+\dfrac{1}{x}-x\exp(x) & -\exp(x) & x\exp(x) \\ -1 & x-\dfrac{1}{x} & 1-\exp(-x) \\ -x\exp(x) & (x+x^2)\exp(x) & x(\exp(x)-1)\end{pmatrix}.$$

试确定微分方程组 $y'=F(x)y$ 的一个基本解组. (直接可看出此微分方程组有一解是 $y(x):=(\exp(x),1/x,\exp(x))$.)

(b) 当 $x\in\mathrm{i}:=(0,+\infty)$ 时设

$$F(x):=\begin{pmatrix} -x^2 & 1 \\ 2x-x^4-\dfrac{x}{\log(x)} & x^2+\dfrac{1}{x\log(x)}\end{pmatrix},$$

$$g(x):=\begin{pmatrix} \dfrac{1}{x}\log(x) \\ x\log(x)+\dfrac{1}{x^2}\log(x)\end{pmatrix}.$$

求出 $y'=F(x)y+g(x)$ 的一切解.（直接可看出对应的齐次微分方程组有解 $y(x):=(1,x^2)$.）

（c）求下列方程的一切的解

$$y''-\left(1+\frac{5}{x}\right)y'+\frac{2}{x}y+8=0.$$

（对应的齐次微分方程有一个解是多项式.）

3.7 （a）假设 $\mathfrak{A}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上的一个具有单位元素 E 的 Banach 代数，$A\in\mathfrak{A}$ 且 $r:=\limsup_{n\to\infty}|A^n|^{1/n}$. 试证：若 $r<\rho<\infty$ 而且 C 是用

$$[0,1]\ni\tau\longmapsto\rho\exp(2\pi i\tau)$$

给定的连续的可求长曲线，则当 $x\in\boldsymbol{C}$ 时有

$$\exp(xA)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C\exp(tx)(tE-A)^{-1}dt.$$

（将被积函数在 $t_0=\infty$ 邻近展为 Laurent 级数；参看第 2.8 节.）

（b）当 $x\in\boldsymbol{R}$ 时，设

$$F(x)=\begin{pmatrix}4+2x+3x^2 & 4+8x\\ -1-2x & -6x+3x^2\end{pmatrix}.$$

利用定理(3.7.9) 确定 $Y'=F(x)Y$ 的满足 $Y(0)=E$ 的基本矩阵. 明显地指出 $Y(x)$ 的诸矩阵元素.（也参看定理(3.8.4).）

3.8, 3.9

（a）确定下面方程的一切解

$$y'=\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 4 & 3 & -4\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix}y+\exp(x)\begin{pmatrix}1+x^2\\ 8+4x\\ 4+x+x^2\end{pmatrix}.$$

（b）确定下列方程的一个实的基本解组

$$y'=\begin{pmatrix}4 & 5 & 8\\ -1 & -5 & -7\\ -2 & 1 & 0\end{pmatrix}y.$$

（c）求如下方程的全部的解

$$y'=\begin{pmatrix}2i & i\\ 2 & 2\end{pmatrix}y+\exp(x)\cos(x)\begin{pmatrix}0\\ 2\end{pmatrix}+x\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}.$$

（d）设 $\mathfrak{A}$ 为 $\boldsymbol{C}$ 上的一个具有单位元素的 Banach 代数，$A\in\mathfrak{A}$，且 $a\in\boldsymbol{R}$. 又设

$$\{t\in C:\mathrm{Re}\,t\geqslant\alpha\}\subset\{t\in C:(tE-A)\in\mathfrak{J}(\mathfrak{A})\}$$

成立. 试证对于 $Y'=AY$ 的每一个基本解 $Y\in\mathscr{C}_1(R,\mathfrak{A})$, 都可借助于一个常数 $K(0<K<\infty)$ 在 $x\in R, x\geqslant 0$ 时作出估计

$$|Y(x)|\leqslant K\exp(\alpha x).$$

(将问题3.7(a)内的连续的可求长曲线 c 作适当的变形; 并应用定理(2.8.2)及(2.8.1).)

3.10 (a) 求出下列方程的一切解

$$y^{(6)}-3y^{(4)}-3y^{(2)}+y=(1-x)\exp(x).$$

(b) 设 $\omega\in R$. 求下列方程的一个实的特解

$$y^{(4)}-4y^{(3)}+6y^{(2)}-4y^{(1)}+(1-\omega^4)y=\cos(\omega x)\exp(x),$$

并确定相应齐次微分方程的一个实基本解组.

3.11 (a) 假设 $\mathfrak{R}$ 是 $K(=R$ 或 $=C)$ 上的 Banach 空间且 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{R},\mathfrak{R})$. 又设 $F\in\mathscr{C}_0(R,\mathfrak{A})$ 满足(3.11.1)而 $Y\in\mathscr{C}_1(R,\mathfrak{A})$ 是(3.11.2)的一个具有周期性矩阵 B_Y 的基本解. 证明: 如果 $B_Y-E\in\mathfrak{J}(\mathfrak{R})$, 则对于每一个满足 $g(x+1)=g(x)(x\in R)$ 的 $g\in\mathscr{C}_0(R,\mathfrak{R})$, $y'=F(x)y+g(x)$ 都恰好有一个解 $y\in\mathscr{C}_1(R,\mathfrak{R})$ 满足

$$y(x+1)=y(x)\quad(x\in R).$$

(b) 假设 $g\in\mathscr{C}_0(R,C)$ 满足 $g(x+1)=g(x)$ 及

$$g(x)=g(-x)\quad(x\in R).$$

我们用 $\eta_1,\eta_2\in\mathscr{C}_1(R,C)$ 表示 Hill 微分方程 $\eta''-g(x)\eta=0$ 的满足 $\eta_1(0)=\eta_2'(0)=1$ 和 $\eta_1'(0)=\eta_2(0)=0$ 的解. 证明:

$$\eta_1(1)=\eta_2'(1)=1+2\eta_1'\left(\frac{1}{2}\right)\eta_2\left(\frac{1}{2}\right)=-1+2\eta_1\left(\frac{1}{2}\right)\eta_2'\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\eta_1'(1)=2\eta_1\left(\frac{1}{2}\right)\eta_1'\left(\frac{1}{2}\right),$$

$$\eta_2(1)=2\eta_2\left(\frac{1}{2}\right)\eta_2'\left(\frac{1}{2}\right).$$

(我们令

$$Y(x):=\begin{pmatrix}\eta_1(x) & \eta_2(x)\\ \eta_1'(x) & \eta_2'(x)\end{pmatrix},\quad F(x):=\begin{pmatrix}0 & 1\\ g(x) & 0\end{pmatrix},$$

$$Q:=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

并首先对 $Y'=F(x)Y$ 证明当 $x\in R$ 时 $\det Y(x)=1$, $Y(x+1)=Y(x)Y(1)$,

$QY(-x)=Y(x)Q$. 由此得出相应的周期性矩阵

$$B_Y=Y(1)=QY\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}QY\left(\frac{1}{2}\right).)$$

(c) 假设A为$K(=R$ 或$=C)$ 上具有单位元素的 Banach 代数. 又设 $F\in\mathscr{C}_0(R,A)$满足(3.11.1) 和$\int_0^1|F(t)|dt<\log(4)$. 证明: 存在一个 $H\in\mathscr{C}_1(R,A)$满足

$$H(x+1)=H(x) \quad (x\in R)$$

及一个 $L\in A$, 使得

$$Y(x)=H(x)\exp(xL) \quad (x\in R)$$

定义出(3.11.2)的一个基本解. (我们由 (3.11.2) 的满足 $Y(0)=E$ 的基本解Y出发. 首先利用练习 3.3(b)证明存在一个 $\xi\in(0,1)$使得$|Y(\xi)-E|<1$ 及$|Y(\xi-1)-E|<1$ 成立. 然后再利用 (3.7.12) 证明相应的周期性矩阵 $B_Y=Y(\xi-1)^{-1}Y(\xi)$可借助于一个 $L\in A$ 表示成 $B_Y=\exp(L)$.)

第 4 章的练习

4.3 (a) 假设已给第 4.3 节中的诸假设. 证明: (4.3.1) 的两个基本解函数元素, 若彼此互为解析延拓, 必具有相同的转动群.

4.5 (a) 假定第 4.5 节中的假设成立且 $\mathfrak{N}=C^n$, $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{L},\mathfrak{N})$. 设 0 是微分方程(4.5.2) 的一个孤立奇点而且是确定性奇点. 证明: 此时 0 不可能是F的本质奇点.

(b) 假定第 4.5 节中假设成立, 且 $\mathfrak{N}=C^n$ 及 $\mathfrak{A}=\mathfrak{L}(\mathfrak{N},\mathfrak{N})$. 并设 0 是微分方程(4.5.2)的一个简单奇点. 试利用第 4.4 节及 (4.5.4) 证明, 此时 0 是确定性奇点.

(c) 举例证明, 当 $n\geq2$ 时在练习(a)中不一定有一个简单奇点. 因此练习(b)中的命题不是可逆的. (但是请参阅对于n 阶微分方程的定理(4.8.12).)

4.6 (a) 除了第4.6节中的一般假设之外, 又假设给定$\nu\in C$ 及$c\in\mathfrak{N}$满足 $Rc=\nu c$. 对于一切 $n\in N$假设有$((n+\nu)E-R)\in\mathfrak{J}(\mathfrak{A})$成立. 证明: 刚好存在一个 $h\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{N})$满足 $h(0)=c$, 使得用 $y(x)=x^\nu h(x)$ 给定的函数是 $y'=F(x)y$ 的解函数元素.

(b) 若已给假设条件(4.6.1), (4.6.2), (4.6.3). 又设 $n\in N$ 满足

$n>|R|$ 且 $g\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})$. 这时通过

$$(Th)(x)=\frac{1}{x^n}\int_0^x(F(t)t^n h(t)+t^{n-1}g(t))dt \quad (x\in\overline{\Omega_0})$$

来定义 $T:\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})\to\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})$. 证明:

$$\sum_{\kappa=1}^{\infty}\|T^\kappa\|\leqslant\frac{n}{n-|R|}\exp(\rho|G|).$$

然后再利用定理(2.1.3), 对唯一确定的不动点 $h=Th\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{R})$ 导出估计式:

$$|h|\leqslant\frac{1}{n-|R|}\exp(\rho|G|)|g|.$$

(参考练习 2.1(a).)

(c) 假设已给引理(4.6.6)中的假设和符号. 试证:

$$|g_n|\leqslant|c||G|\prod_{m=1}^{n-1}\left(\frac{3}{\rho}+|G||(mE-R)^{-1}|\right),$$

$$|p_{n-1}|\leqslant|c|+\sum_{m=1}^{n-1}\rho^m|(mE-R)^{-1}||g_m|.$$

然后结合练习(b)对于定理(4.6.4)中的解 y 给出一个估计.

(d) 设 $\mathfrak{R}$, $\mathfrak{A}$, Ω, Ω_0 和 R 已象第 4.6 节中一样给定. 且设对于 R, 借助于一个 $c\in\mathfrak{R}$ 使定理(4.6.4)的假设被满足. 最后设 $k\in N_0$ 而且当 $\kappa=0,1,\cdots,k$ 时设 $G_\kappa\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathfrak{A})$. 证明: 此时恰好存在一个定义于 $\overline{\Omega_0}\times C$ 内的连续 $\mathfrak{R}$-值函数 y, 它在 $\Omega_0\times C$ 中是复-可微的并且满足

$$y(0,\lambda)=c\,(\lambda\in C),$$

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x,\lambda)=\left(\frac{1}{x}R+\sum_{\kappa=0}^{k}\lambda^\kappa G_\kappa(x)\right)y(x,\lambda)$$

$$((x,\lambda)\in\Omega\times C);$$

y 作为对于 λ 的整函数, 其增长阶数 $\leqslant k$. (我们把引理(4.6.4)及(4.6.5)的证明作一些改动. 为了得出关于增长阶数的命题, 我们可应用练习(b)及(c).)

4.7 (a) 假设已给

$$R=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}-2&3&0\\-6&7&0\\0&0&2\end{pmatrix},\quad G=(g_{\nu\mu})_{(3,3)}$$

其中 $g_{\nu\mu}\in\mathbf{C}(\nu,\mu=1,2,3)$. 考虑 $Y'=\left(\frac{1}{x}R+G\right)Y$ 并依定理 (4.7.11) 加以简化. 确定 S 及 $\tilde{R}$. 由此导出当且只当 $g_{23}=g_{13}$ 时 $\tilde{R}$ 才是由特征向量组成的一个基底, 因此在这时微分方程有一个由 Floquet 解组成的基本组.

(b) 假设: Ω_0 是以 0 为中心的有界开圆域, $\Omega=\Omega_0\setminus\{0\}$, $n\in\mathbf{N}$, $\varphi_{\nu\mu}\in\mathscr{H}(\Omega_0,\mathbf{C})(\nu,\mu=1,\cdots,n)$, $s_\nu\in\{0,1\}(\nu=1,\cdots,n)$ 且 $s=\sum_{\nu=1}^{n}s_\nu$. 证明: 微分方程组

$$x^{s_\nu}\eta'_\nu=\sum_{\mu=1}^{n}\varphi_{\nu\mu}(x)\eta_\mu\quad(\nu=1,\cdots,n)$$

至少具有 $n-s$ 个在 0 处全纯的线性无关解. (注意引理 (4.7.9) 及 (4.7.10).)

4.8 (a) 确定并讨论如下球体微分方程在 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 中的孤立奇点

$$((1-x^2)y')'+\left(\lambda+\gamma^2(1-x^2)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y=0$$

这里参数 $\lambda,\gamma,\mu\in\mathbf{C}$, 确定奇点的指标.

(b) 确定并讨论下列合流超几何微分方程 (konfluenten hypergeometrischen Dgl) 在 $\mathbf{C}\cup\{\infty\}$ 中的孤立奇点,

$$xy''+(c-x)y'-ay=0,$$

其中参数 $a,c\in\mathbf{C}$. 确定奇点的指标.

(c) 考虑微分方程

$$x^2y''-(2\nu+x)xy'+(\nu(\nu+1)+\lambda x)y=0,$$

参数 $\nu,\lambda\in\mathbf{C}$. 证明: 0 至多是简单奇点. 试确定其指标, 并指出在什么条件下恰好存在一个不含对数的基本解组.

4.10 (a) 证明下列 Legendre (勒让德) 微分方程是一个至多有三个孤立奇点的 Fuchs 微分方程

$$((1-x^2)y')'+\left(\nu(\nu+1)-\frac{\mu^2}{1-x^2}\right)y=0.$$

这里参数 $\nu,\mu\in\mathbf{C}$. 写出对应的 Riemann P-符号. 试用变换把它化成超几何微分方程, 在指标差不为整数的情形中利用超几何级数给出在一切奇点邻近基本组的表达式.

(b) 假设 $a,b,c\in\mathbf{C}$, $c\neq0,-1,-2,\cdots$. 证明在 $\mathrm{Re}(c-a-b)\geqslant0$ 的情况下, 当 $z\in\mathbf{C}$, $|z|<1$ 时极限值 $\lim\limits_{z\to1}F(a,b;c;z)\in\mathbf{C}$ 存在.

(c) 假设 $\omega\in\mathbf{C}\setminus\{0, 1\}$. 讨论何印(Heun)微分方程

$$y''+\left(\frac{c}{x}+\frac{d}{x-1}+\frac{1+a+b-c-d}{x-\omega}\right)y'+\frac{abx+p}{x(x-1)(x-\omega)}y=0,$$

其中参数 $a, b, c, d, p\in\mathbf{C}$. 试证: 它是一个至多具有 4 个孤立奇点的 Fuchs 微分方程, 定出相应的奇点的指标. 再证明: 此方程恒有一个在 0 处全纯的解. 试把此解展开成幂级数, 并导出其展开系数的一个三项的递推公式.

参考文献

[1] Coddington, E. A. and Levinson, N.: Theory of Ordinary Differential Equations; MacGraw-Hill, New York (1955), S. 6 ff.

[2] Schauder, J.: Der Fixpunktsatz in Funktionalräumen; Studia Math. 2, (1930), S. 171—180.

[3] Walter, W.: Eindeutigkeitssätze für gewöhnliche, parabolische und hyperbolische Differentialgleichungen; Math. Zeitsch. 74, (1960), S. 191—208.

[4] Kamke, E.: Differentialgleichungen reeller Funktionen; 2. Auflage, Leipzig 1945, S. 139.

[5] Nagumo, M.: Eine hinreichende Bedingung für die Unität der Lösung von Differentialgleichungen erster Ordnung; Japan. J. Math. 3, (1926), S. 107—112.

[6] Rosenblatt, A.: Über die Existenz von Integralen gewöhnlicher Differentialgleichungen; Ark. Mat. Astr. Fys. 5 Nr. 2, (1909).

[7] Osgood, W. F.: Beweis der Existenz einer Lösung der Differentialgleichung $\frac{dy}{dx}=f(x,y)$ ohne Hinzunahme der Cauchy-Lipschitzschen Bedingung; Monatshefte Math. Phys. 9, (1898), S. 331—345.

[8] Hille, E.: Lectures on Ordinary Differential Equations; Addison-Wesley Publ. Comp., Reading, Mass. (1969), S. 130 ff.

缩 写，符 号

Dgl	微分方程
DglSystem	微分方程组
o. B. d. A.	不限制一般性
$\wedge$	及，和
$\Longrightarrow$	得出(隐含)
$\Longleftrightarrow$	当而且仅当
$\forall$	对一切的
$\exists$	存在
$\in$ 及 $\notin$	属于及不属于
$\subset$	被含于～(～的子集)
$\cap$	交集
$\cup$	并集
$\mathfrak{M}_1\backslash\mathfrak{M}_2$	$\mathfrak{M}_2$ 在 $\mathfrak{M}_1$ 中的补集
$\varnothing$	空集
$\mathfrak{M}_1\times\mathfrak{M}_2\times\cdots\times\mathfrak{M}_n$	集$\mathfrak{M}_1$, …, $\mathfrak{M}_n$ 的笛卡儿积(kartesisches Produkt)
$\mathfrak{M}^n$	集 $\mathfrak{M}$的 n 重笛卡儿积
$\mathfrak{D}_f(\subset\mathfrak{M}_1)$ 及 $\mathfrak{R}_f(\subset\mathfrak{M}_2)$	由$\mathfrak{M}_1$内到$\mathfrak{M}_2$内的映象(函数)的定义域及象域
$f:\mathfrak{M}_1\to\mathfrak{M}_2$	由$\mathfrak{M}_1(\mathfrak{D}_f=\mathfrak{M}_1)$到$\mathfrak{M}_2$内的映象(函数)
$f:\mathfrak{M}_1\twoheadrightarrow\mathfrak{M}_2$	由$\mathfrak{M}_1(\mathfrak{D}_f=\mathfrak{M}_1)$到$\mathfrak{M}_2(\mathfrak{R}_f=\mathfrak{M}_2)$上的映象(函数)
$f\circ g$	映象(函数) f 及 g 的合成
$f(\mathfrak{M})$	集$\mathfrak{M}$ 在 f 之下的象
$f^{-1}(\mathfrak{M})$	集$\mathfrak{M}$ 在 f 之下的原象

$f^{-1}(y)$	点 y 在 f 之下的原象
$f\|_{\mathfrak{M}}$	f 在 $\mathfrak{M}$ 上的限制
$\mathrm{id}_{\mathfrak{M}}$	由 $\mathfrak{M}$ 到 $\mathfrak{M}$ 的恒等映象
$\overline{\mathfrak{M}}$	$\mathfrak{M}$ 的闭包
$\mathring{\mathfrak{M}}$	$\mathfrak{M}$ 的内部(内点集)
$\boldsymbol{N}$	自然数集合
$\boldsymbol{N}_0$	$\boldsymbol{N}\cup\{0\}$
$\boldsymbol{Z}$	整数集合
$\boldsymbol{R}$	实数集合
$\boldsymbol{R}^+$	非负实数集合
$\boldsymbol{C}$	复数集合
$\boldsymbol{K}$	实数或复数域(体)
$\left.\begin{array}{l}[\alpha,\beta]=[\beta,\alpha]\\ [\alpha,\beta)=(\beta,\alpha]\\ (\alpha,\beta)=(\beta,\alpha)\end{array}\right\}$	$\boldsymbol{R}$ 中的区间
min, max	极小，极大
inf, sup	下确界，上确界
lim, lim inf, limsup	极限，下极限，上极限
$\frac{dy}{dx}$, y'	y 的导数
$\frac{\partial y}{\partial x}$	y 对 x 的偏导数
$\mathscr{C}_0(\mathfrak{M},\ \mathfrak{N})$	在 $\mathfrak{M}$ 上定义的连续 $\mathfrak{N}$-值函数的集合
$\mathscr{C}_n(\mathfrak{M},\ \mathfrak{N})$	在 $\mathfrak{M}$ 上定义的 n 次连续可微的 $\mathfrak{N}$-值函数的集合
$\mathscr{H}(\Omega,\ \mathfrak{N})$	在 $\overline{\Omega}$ 上确定且连续并在 Ω 内全纯的 $\mathfrak{N}$-值函数的集合
$\mathfrak{L}(\mathfrak{N},\ \mathfrak{S})$	由 $\mathfrak{N}$ 映到 $\mathfrak{S}$ 内的线性有界映象的集合
$\mathfrak{I}(\mathfrak{A})$	$\mathfrak{A}$ 中可逆元素的集合
$e_1,\ \cdots,\ e_n$	$\boldsymbol{K}^n$ 的标准基底
det	行列式

rg	秩(矩阵)
spur	迹(矩阵)
mod	模(modulo)
Re 及 Im	实部及虚部
O 及 o	Landau(兰道)符号

德中名词对照表

Abhängigkeitssätze	依赖性定理	49
akzessorische Parameter	附加参数	165
Anfangswerte	初值	51
—, Abhängigkeit von	对初值的依赖性	53
—, global Abhängigkeit von	对初值的全局依赖性	54
Anfangswertproblem	初值问题	55
—für reelle Dgln	对于实微分方程的初值问题	42
—für komplexe Dgln	对于复微分方程的初值问题	61
—für Dgln und DglSysteme höherer Ordnung	对于高阶微分方程及方程组的初值问题	45
—für eine spezielle hyperbolische partielle Dgl	对于一个特殊双曲偏微分方程的初值问题	174
—für eine lineare Integro-Dgl	对于一个线性积分-微分方程的初值问题	173
Arzela	阿尔柴拉	71
Ascoli	阿斯科里	71
Satz von Arzela-Ascoli	阿尔柴拉-阿斯科里定理	71
Bellmansches Lemma	贝尔曼引理	14
Bernoullische Dgl	贝努里微分方程	14
Cauchysche Integralformel	柯西积分公式	58
———für die Ableitungen	对于导数的柯西积分公式	59
Cauchyscher Integralsatz	柯西积分定理	58
charakteristischer Exponent	特征指数	121
charakteristisches Polynom	特征多项式	152
Clairautsche Dgl	克莱洛微分方程	26
Coddington, E.A.	科丁顿	70