

基本概念

1. 余子式 M_{ij} 和代数余子式 A_{ij} , $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, $M_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}$ 。
2. 对称矩阵: $A^T = A$ 。
3. 伴随矩阵 $A^* = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}$, 组成元素 A_{ij} , 书写格式: 行元素的代数余子式写在列。
4. 逆矩阵 $AB = BA = E$, 称 A 可逆。若 A 可逆, 则 $AA^{-1} = A^{-1}A = E$ 。
5. 分块对角阵 $A = \begin{pmatrix} A_1 & O \\ O & A_2 \end{pmatrix}$, $|A| = |A_1| \cdot |A_2|$, $A^{-1} = \begin{pmatrix} A_1^{-1} & O \\ O & A_2^{-1} \end{pmatrix}$ 。
6. 初等行(列)变换: ① 对换两行或两列; ② 某行或某列乘以非零常数 k ; ③ 某行(列)的 k 倍加到另一行(列)。
7. 等价矩阵: ① 初等变换得来的矩阵; ② 存在可逆矩阵 P, Q , 使得 $PAQ = B$ 。
8. 初等矩阵: 初等变换经过一次初等变换得来的矩阵, ① $E(i, j)$; ② $E(i(k))$; ③ $E(j, i(k))$ 。
9. 矩阵的秩: 最高阶非零子式的阶数。 $r(A) = k \Leftrightarrow \exists D_k \neq 0, \forall D_{k+1} = 0$ 。
10. 线性表示: 存在 k_1, k_2, \dots, k_n 使得 $\beta = k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n$, 等价于非齐次方程组 $Ax = \beta$ 有解 k_1, k_2, \dots, k_n 。
11. 线性相关: 存在不全为 0 的数 k_1, k_2, \dots, k_n , 使得 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = \bar{0}$, 等价于齐次方程组 $Ax = \bar{0}$ 有非零解。
12. 线性无关: $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_n\alpha_n = \bar{0}$ 成立 $\Rightarrow k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$, 等价于齐次方程组 $Ax = \bar{0}$ 仅有零解。
13. 极大无关组: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中 r 个向量 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 满足: ① 线性无关; ② $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中任意向量可由其表示或 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中任意 $r+1$ 个向量线性无关, 则称 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_r$ 为 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 的极大无关组。
14. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 可由向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 表示: $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 中任意一个向量可由 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 表示, 等价于 $BX = A$ 有解, $B = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m)$, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$ 。
15. 向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ 与向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 等价: 两个向量组能相互线性表示。

16. 齐次方程组 $Ax = \bar{0}$ 基础解系：第一种描述：设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$ 是方程组的解，且满足① 线性无关；② 任意一个解可由其表示。第二种描述： $n - r(A)$ 个线性无关的解。【其中 1 个线性无关的解 \Leftrightarrow 1 个非零解；2 个线性无关的解 \Leftrightarrow 2 个不成比例的解。】
17. 特征值和特征向量： $Ax = \lambda x, x \neq \bar{0}$ 。
18. 相似矩阵：存在可逆矩阵 P ，使得 $P^{-1}AP = B$ ，则称 A, B 相似。
19. 相似对角化：根据方阵 A ，找到可逆矩阵 P 和对角阵 Λ ，使得 $P^{-1}AP = \Lambda$ 。
20. 内积： $[\alpha, \beta] = \alpha^T \beta = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n$ 。
21. 正交： $[\alpha, \beta] = 0$ 。
22. 正交矩阵： $AA^T = E$ 或者 $A^T = A^{-1}$ 。特点： A 的列（行）为两两正交的单位向量。
23. 二次型： $f = x^T Ax$ ，其中 A 为对称阵。
24. 合同矩阵：存在可逆矩阵 C ，使得 $C^T AC = B$ ，则称 A, B 合同。
25. 标准型： $f = y^T \Lambda y = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ 。
26. 正负惯性指数：标准型中正负系数的个数。
27. 正定二次型： $\forall x \neq \bar{0}, f = x^T Ax > 0$ 。
28. 正定矩阵 A ：对称阵 A 使得 $f = x^T Ax$ 为正定二次型。

基本定理

- 行列式按行按列展开定理： $D = a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \dots + a_{in}A_{in} = a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \dots + a_{nj}A_{nj}$ 。
逆过程应用：已知 $D = |a_{ij}|_{n \times n}$ ，求 $b_1 A_{i1} + b_2 A_{i2} + \dots + b_n A_{in}$ 。将 D 中第 i 行元素换成对应的 b_1, b_2, \dots, b_n ，得到 D_1 ，则： $b_1 A_{i1} + b_2 A_{i2} + \dots + b_n A_{in} = D_1$ 。
- A_n 为可逆矩阵 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ ； A_n 为可逆矩阵 $\Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{|A|} A^* \Leftrightarrow A^* = |A| A^{-1}$ 。
推论：方阵 A, B 满足 $AB = E$ ，则：① $BA = E$ ；② A 可逆，且 $\Rightarrow A^{-1} = B$ 。
- 对矩阵 A 进行一次初等行（列）变换，等价于在矩阵 A 的左（右）边乘以一个与之对应的初等矩阵。
- 初等变换不改变矩阵的秩。

5. 非齐次方程组 $A_{m \times n}x = b$ 有解 $\Leftrightarrow b$ 可由 A 的列线性表示 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b)$; 唯一解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b) = n$; 无穷多解 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, b) < n$;
非齐次方程组 $A_{m \times n}x = b$ 无解 $\Leftrightarrow b$ 不能由 A 的列线性表示 $\Leftrightarrow r(A) \neq r(A, b)$
特别地: 当方程组的系数矩阵 A 为方阵时: 唯一解 $\Leftrightarrow |A| \neq 0$ 。
6. 齐次方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 仅有零解 $\Leftrightarrow A$ 的列向量组线性无关 $\Leftrightarrow r(A) = n$; 齐次方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 有非零解 $\Leftrightarrow A$ 的列向量组线性相关 $\Leftrightarrow r(A) < n$ 。
7. 矩阵方程 $AX = B$ 有解 $\Leftrightarrow B$ 的列可由 A 的列线性表示 $\Leftrightarrow r(A) = r(A, B)$; B 的列与 A 的列等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A, B)$ 。
8. 矩阵 A 通过初等行变换变成矩阵 B , 则 A, B 行向量组等价, 列向量组有相同的相关性。
9. 齐次线性方程组 $A_{m \times n}x = 0$ 系数矩阵的秩 $r(A) = r < n$, 则存在基础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$, 并且 $Ax = 0$ 的通解为 $\bar{x} = k_1\xi_1 + k_2\xi_2 + \dots + k_{n-r}\xi_{n-r}$, 其中 k_1, k_2, \dots, k_{n-r} 为任意常数。
10. 不同特征值对应的特征向量线性无关; 实对称阵不同特征值对应的特征向量正交。
11. 相似矩阵有相同的秩和相同的特征值。
12. 方阵可对角化 $\Leftrightarrow A$ 有 n 个线性无关的特征向量 $\Leftrightarrow k$ 重特征值 λ_i ,
 $r(A - \lambda_i E) = n - k$; 实对称阵一定可以对角化; A 有 n 个不同的特征值则 A 一定可以对角化。
13. 实对称阵一定可以对角化, 并且一定存在正交阵 Q , 使得 $Q^{-1}AQ = Q^T AQ = \Lambda$ 。
14. 任意二次型 $f = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_i x_j$ ($a_{ij} = a_{ji}$), 总有正交变换 $x = Qy$, 化 f 为标准形
 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$, 其中 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ 是 f 的矩阵 $A = (a_{ij})$ 的特征值。
15. 设二次型 $f = x^T A x$ 的秩为 r , 且二次型的标准型分别为 $f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_r y_r^2$ 和 $f = k_1 z_1^2 + k_2 z_2^2 + \dots + k_r z_r^2$, 则系数 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_r$ 和 k_1, k_2, \dots, k_r 中正负个数相等。
16. 对称阵 A 正定 \Leftrightarrow 二次型 $f = x^T A x$ 为正定二次型 \Leftrightarrow 二次型 $f = x^T A x$ 的规范型为 $y_1^2 + y_2^2 + \dots + y_n^2 \Leftrightarrow A$ 的特征值全为正 $\Leftrightarrow A$ 的各顺序主子式全大于 0。

基本性质

- 行列式运算性质：转置不变；对换取反；数乘可提；行列拆分；叠加不变。
- 矩阵乘法：① $AB=O \not\Rightarrow A=O$ 或 $B=O$ ；② $AB \neq BA$ ；③ $AB=AC \not\Rightarrow B=C$ 。
- 矩阵转置：① $(A^T)^T = A$ ② $(A+B)^T = A^T + B^T$
③ $(kA)^T = kA^T$ ④ $(AB)^T = B^T A^T$
- 方阵的行列式：① 方阵 A, B , $|AB| = |A| \cdot |B|$ ② $|kA| = k^n |A|$, A 为 n 阶方阵。
- 伴随矩阵：① $AA^* = A^*A = |A|E$ ； ② $|A^*| = |A|^{n-1}$ ； ③ $(kA)^* = k^{n-1}A^*$
- 逆矩阵：① $(A^{-1})^{-1} = A$ ； ② $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$ ；
③ $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ ； ④ $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, ⑤ $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ 。
- 初等矩阵： $E^{-1}(i, j) = E(i, j)$, $E^{-1}(i(k)) = E(i(\frac{1}{k}))$, $E^{-1}(i, j(k)) = E(i, j(-k))$ 。
- 初等变换与初等矩阵： A 可逆 $\Leftrightarrow A$ 等于有限个初等矩阵的乘积。
- 矩阵 A 左（右）边乘可逆矩阵 P 相当于对 A 进行初等行（列）变换。
- 行阶梯矩阵的秩等于其非零行的行数。
- 秩：① $r(A_{m \times n}) \leq \min\{m, n\}$ ； ② $r(AB) \leq \min\{r(A), r(B)\}$ ；
③ $r(A) \leq r(A, B) \leq r(A) + r(B)$ ； ④ $r(A \pm B) \leq r(A) + r(B)$ ；
⑤ $A_{m \times n} B_{n \times k} = O$, 则 $r(A) + r(B) \leq n$ ； ⑥ $r(A) = r(A^T)$ ；
⑦ $r(A^*) = \begin{cases} n \Leftrightarrow r(A) = n \\ 1 \Leftrightarrow r(A) = n-1 \\ 0 \Leftrightarrow r(A) < n-2 \end{cases}$
- $A = \alpha\beta^T$, α, β 为 n 维非零列向量, 则 $r(A) = 1$ 。
- 向量组 $A: \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性相关 \Leftrightarrow 向量组 A 中至少有一个向量能由其余 $m-1$ 个向量线性表示。
- 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 可由 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示,
即 $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} \\ c_{31} & c_{32} & c_{33} \end{pmatrix}$, 则 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 无关 $\Leftrightarrow |C| \neq 0$ 。
- 相关组添加向量仍相关, 无关组减少向量仍无关; 无关组添加分量仍无关, 相关组减少

分量仍相关。

16. 设向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性无关, 而 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m, \beta$ 线性相关, 则向量 β 必能由向量组 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ 线性表示, 且表示式是惟一的.
17. 向量组与它的极大无关组等价;
18. 矩阵的秩等于它的列向量组的秩, 也等于它的行向量组的秩.
19. 矩阵等价 \nleftrightarrow 矩阵行(列)向量组等价. 向量组等价 \nleftrightarrow 对应矩阵等价, 除非两个向量组中向量个数相等.
20. 矩阵 A, B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B)$ 且同型; 列向量组 A, B 等价 $\Leftrightarrow r(A) = r(B) = r(A, B)$.
21. 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-r}$ 是齐次方程组 $Ax = 0$ 的基础解系, η^* 是非齐次方程组 $Ax = b$ 的一个特解, 则 $Ax = b$ 的通解 $x = k_1 \xi_1 + k_2 \xi_2 + \dots + k_{n-r} \xi_{n-r} + \eta^*$, 其中 k_1, k_2, \dots, k_{n-r} 为任意常数.
22. 两个方程组 $Ax = 0, Bx = 0$ 同解 $\Leftrightarrow A, B$ 行向量组等价.
23. 设 A 的特征值为 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, 则: ① $\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$; ② $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \dots \cdot \lambda_n = |A|$.
24. A, B 同型且秩相等 $\Rightarrow A, B$ 等价; 方阵 A, B 可对角化, 且有相同特征值 $\Rightarrow A, B$ 相似; 对称阵 A, B 的特征值正负个数对应相等 $\Rightarrow A, B$ 合同.

25. 设 $Ax = \lambda x$, 则有以下表:

| | | | | | | | |
|------|-----------|-------------|--------------|----------------|---------------|-----------|------------|
| 矩阵 | A | A^2 | $f(A)$ | A^{-1} | A^* | A^T | $P^{-1}AP$ |
| 特征值 | λ | λ^2 | $f(\lambda)$ | λ^{-1} | $ A /\lambda$ | λ | λ |
| 特征向量 | x | x | x | x | x | / | $P^{-1}x$ |

基本方法

1. 求行列式: 方法一、利用行列式的性质化三角行列式; 方法二、利用性质尽可能多的化行列式的某行(列)元素为零, 然后依此行(列)用 Laplace 展开.
2. 求解矩阵方程: 方法: 通过矩阵运算将方程化为 $AX = B, XA = B, AXB = C$ 三种方式, 具体运算放最后一步, 注意左, 右乘.
3. 求矩阵的秩: A 具体时, 将 $A \xrightarrow{r} B$ (行阶梯矩阵), $r(A) = r(B) = B$ 中非零行的行

数; A 为抽象矩阵时, 利用秩的不等式证明 $r \leq r(A) \leq r$.

4. 讨论向量组的相关性: ① $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 具体时, 构造矩阵 $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s)$, 比较秩与个数的关系; ②. $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s$ 抽象时, 先设 $k_1\alpha_1 + k_2\alpha_2 + \dots + k_s\alpha_s = 0$, 通过恒等变形或乘法, 或重组, 得到 $k_1 = k_2 = \dots = k_s = 0$, 或者用秩的理论判断, $r(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) = s$.

5. 求极大无关组: 将向量组的各向量做为矩阵的列, $A = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_s) \xrightarrow{r} B$ 行阶梯矩阵, 向量组的秩等于矩阵 B 的秩, 每个阶梯上取一列(一般取阶梯竖线右边的第一列), 构成极大无关组。

6. 求基础解系和通解: 先求 $r(A)$, 得 $n - r(A)$, 通过矩阵的运算, 求出 $Ax = 0$ 的 $n - r(A)$ 各线性无关的解及 $Ax = b$ 的一个特解, 再利用解的结构得到通解。

7. 含参数方程组 $Ax = b$ 求解: ①. $(A|b) \xrightarrow{r}$ 行阶梯型, 讨论 $r(A) = r(A|b)? \Leftrightarrow b$ 可否由 A 的列线性表示; ②. 特别, 当 A 为方阵时, 求出 $|A| \neq 0$ 的条件, 即唯一解的条件, 再把 $|A| = 0$ 中的参数代入原方程组, 继续由 $r(A) = r(A|b)?$, 判断是表达式不唯一, 还是不能由其表示。

8. 方阵特征值, 特征向量求法: ① 解 $|A - \lambda E| = 0$, 得根 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, ② 解方程组 $(A - \lambda_i E)x = 0$, 得基础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$, 从而得到对应 λ_i 的特征向量为 $k_1\xi_1 + \dots + k_s\xi_s$, 其中 k_1, k_2, \dots, k_s 不全为 0。

9. 方阵对角化: ① $|A - \lambda E| = 0$ 求特征值; ② $(A - \lambda_i E)x = 0$ 得所有特征值的特征向量

$$\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n; \text{ ③ 令 } P = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n), \Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ 则 } P^{-1}AP = \Lambda.$$

10. 二次型正交变换下化标准形: ① 写出对称阵 A , ② 求 $|A - \lambda E| = 0$, 得特征值

$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, ③ 将每一个特征值代入 $(A - \lambda_i E)x = 0$, 得基础解系 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_s$, 正交单位化(一个向量时, 只要单位化), 最终得到所有特征值对应的(特征)向量 $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n$, ④ $Q = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$, 令 $x = Q$, 得二次型的标准形

$f = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \dots + \lambda_n y_n^2$ 。【其中②, ③, ④步也为对称阵通过正交矩阵 Q 对角化

的步骤。】