18.1 Green 公式

钟柳强

华南师范大学数学科学学院, 广东广州 510631

课本例题

例 1 设 Γ 为抛物线 $2x=\pi y^2$ 从 $(0,0)$ 到 $\left(\frac{\pi}{2},1\right)$ 的弧段, 求

$$I=\int_{\Gamma}(2xy^3-y^2\cos x)\mathrm{d}x+(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y.$$

解: 令 $P(x,y)=2xy^3-y^2\cos x, Q(x,y)=1-2y\sin x+3x^2y^2$, 则

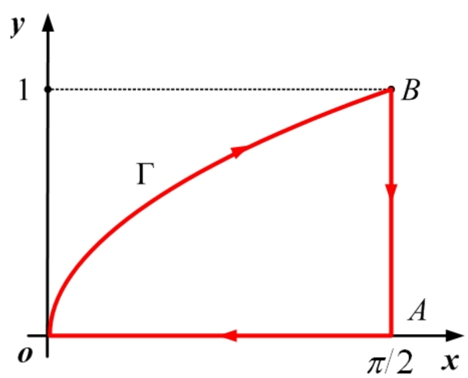


图 1:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=0.$$

为了利用格林公式, 添加辅助线 (如图 1), 则

$$I=\Big(\int_{\Gamma}+\int_{\widehat{BA}}+\int_{\widehat{AO}}+\int_{\widehat{AB}}+\int_{\widehat{OA}}\Big)P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

前三项用格林公式后积分为零. 因此

$$\begin{aligned}I&=\Big(\int_{\widehat{AB}}+\int_{\widehat{OA}}\Big)P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y\\&=\int_{\widehat{AB}}(1-2y\sin x+3x^2y^2)\mathrm{d}y\\&=\int_0^1(1-2y+\frac{3}{4}\pi^2y^2)\mathrm{d}y=\frac{\pi^2}{4}.\end{aligned}$$

□

注 1 在格林公式中取 $P(x,y)=0, Q(x,y)=x$, 则区域 D 的面积

$$A_D=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\oint_\Gamma x\mathrm{d}y. \tag{1}$$

取 $P(x,y)=-y, Q(x,y)=0$, 则

$$A_D=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-\oint_\Gamma y\mathrm{d}x. \tag{2}$$

又若取 $P(x,y)=-y, Q(x,y)=x$, 或 (1) 与 (2) 相加, 则得到

$$A_D=\iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\oint_\Gamma x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x. \tag{3}$$

虽然 (3) 看起来比 (1) 和 (2) 复杂一点, 但它具有的对称性有时可以给计算带来方便. 下面的例子可以说明这一点.

例 2 求星形线 $x=a\cos^3 t$, $y=a\sin^3 t$ 所围图形的面积 (如图 2).

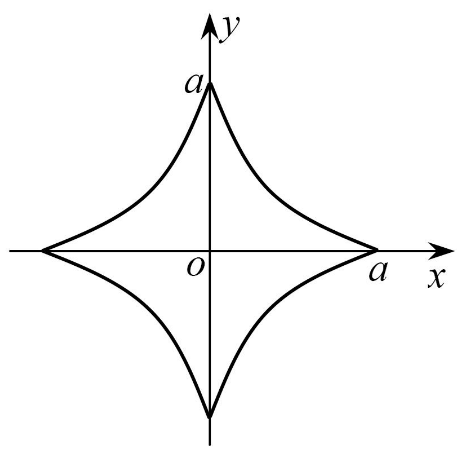


图 2:

解: 应用公式 (3), 由于

$$\mathrm{d}x=-3a\cos^2 t\sin t\mathrm{d}t, \mathrm{d}y=3a\sin^2 t\cos t\mathrm{d}t,$$

因此

$$\begin{aligned} x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x &= 3a^2\sin^2 t\cos^4 t\mathrm{d}t+3a^2\cos^2 t\sin^4 t\mathrm{d}t \\ &= 3a^2\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t, \end{aligned}$$

于是所求的面积

$$\begin{aligned} A_D &= \frac{1}{2}\oint_\Gamma x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x \\ &= \frac{3}{2}a^2\int_0^{2\pi}\sin^2 t\cos^2 t\mathrm{d}t=\frac{3}{8}\pi a^2. \end{aligned}$$

□

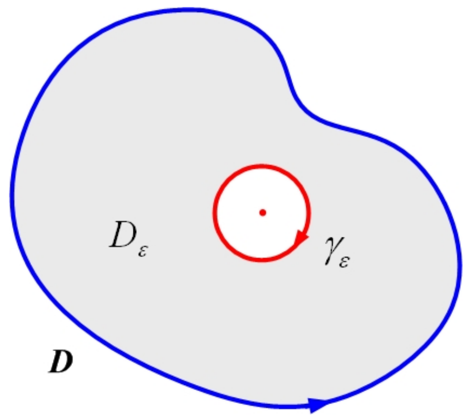
例 3 计算 $I=\oint_\Gamma \frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2}$, 其中 Γ 是任一分段光滑的简单闭曲线, 逆时针方向为正向.

(1) 原点在 Γ 外;

(2) 原点在 Γ 内.

解: 由于被积函数的分母在原点为零, 因此原点和 Γ 的位置关系, 在利用格林公式计算时有重要的影响.

(1) 记 $P(x,y)=\frac{-y}{x^2+y^2}$, $Q(x,y)=\frac{x}{x^2+y^2}$, 则



$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}.$$

设 D 是 Γ 围成的区域, 利用格林公式,

$$I=\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\iint_D\Big(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0.$$

(2) 当原点在 D 内时, 由于 $P(x,y)$ 和 $Q(x,y)$ 都不在 D 上连续可微, 因此需要作一点技术性的处理, 才能应用 Green 公式. 具体作法是在区域 D 内挖掉一个以原点为心, ε 为半径的圆 b_ε. 记 b_ε 的边界为 γ_ε, 它的定向是顺时针方向 (见图 18.6).

$$I=\oint_\Gamma P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y=\Big(\oint_\Gamma+\oint_{\gamma_\varepsilon}-\oint_{\gamma_\varepsilon}\Big)P\mathrm{d}x+Q\mathrm{d}y,$$

对前两项在 $D_\varepsilon=D\backslash B_\varepsilon$ 上用格林公式知积分为零, 于是

$$I=-\oint_{\gamma_\varepsilon}\frac{x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x}{x^2+y^2},$$

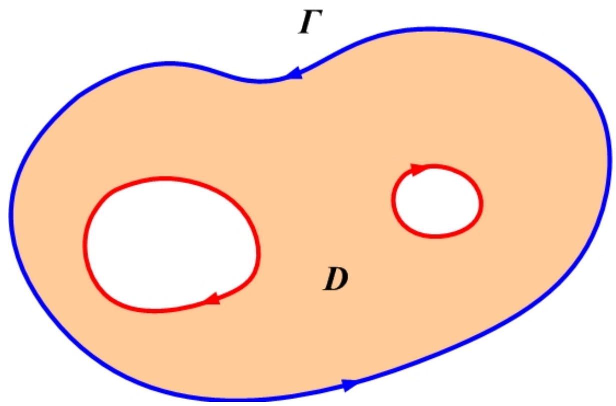
$-\gamma_\varepsilon$ 的参数方程是 $x=\varepsilon\cos\varphi, y=\varepsilon\sin\varphi, 0\le\varphi\le 2\pi$, 因此

$$I=\int_0^{2\pi}\frac{\varepsilon^2\cos^2\varphi+\varepsilon^2\sin^2\varphi}{\varepsilon^2}d\varphi=2\pi.$$

□

思考题

1. 在一条平面闭曲线上求第二型曲线积分, 如果没有特别指明它的方向, 它的方向如何确定?



,

解: 平面上区域的边界曲线 Γ 正方向的规定: 当人沿边界 Γ 的正向行走时, 区域 D 总在他的左边 (见图). 注意, 外边界的正向是逆时针方向. 如果区域有 "洞", 则内边界的正向是顺时针方向. 与上述方向相反的边界曲线记为 $-\Gamma$.

□

2. 如何利用 Green 公式求平面图形的面积?

解: 设有界闭区域 $D \subset \mathbb{R}^2$ 由分段光滑的闭曲线 Γ 围成, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D (连同 Γ) 上有一阶连续偏导数, 则

$$\iint\limits_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y, \tag{4}$$

其中 Γ 为 D 的边界曲线, 取正向.

在格林公式 (4) 中取 $P(x,y) = 0, Q(x,y) = x$, 则区域 D 的面积

$$A_D = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \oint_\Gamma x\mathrm{d}y.$$

取 $P(x,y) = -y, Q(x,y) = 0$, 则

$$A_D = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = -\oint_\Gamma y\mathrm{d}x.$$

又若取 $P(x,y) = -y, Q(x,y) = x$, 或 (1) 与 (2) 相加, 则得到

$$A_D = \iint\limits_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y = \frac{1}{2}\oint_\Gamma x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x.$$

□

习题

1. 利用 Green 公式求下列积分.

(1) 在 $\oint_\Gamma (x^2 + xy)\mathrm{d}x + (x^2 + y^2)\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是正方形 $[-1,1]^2$ 的边界, 取正向;

(2) 在 $\oint_\Gamma (x+y)\mathrm{d}x - (x-y)\mathrm{d}y$, 其中 Γ 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 取正向.

解: (1) 记 $P(x,y)=x^2+xy, Q(x,y)=x^2+y^2$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=2x, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=x,$$

由于 Γ 是分段光滑的闭曲线, 且函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在正方形区域 $D:=[-1,1]^2$ 上有一阶连续偏导数, 故由 Green 公式, 得

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma (x^2+xy)\mathrm{d}x+(x^2+y^2)\mathrm{d}y &= \iint_D (2x-x)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \iint_D x\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= \int_{-1}^1 x\mathrm{d}x\cdot\int_{-1}^1 \mathrm{d}y\\ &= 0\times 2=0.\end{aligned}$$

(2) 记 $P(x,y)=x+y, Q(x,y)=-(x-y)$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=-1, \qquad \frac{\partial P}{\partial y}=1,$$

由于 Γ 是分段光滑的闭曲线, 且函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在区域 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\le 1$ 上有一阶连续偏导数, 故由 Green 公式, 得

$$\begin{aligned}\oint_\Gamma (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y &= \iint_D (-1-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\\ &= -2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y,\end{aligned}$$

其中 $\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y$ 表示椭圆 $\Gamma:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 所围图形的面积. 设 Γ 的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos\theta,\\ y=b\sin\theta,\end{cases} \quad \theta\in\Big[0,2\pi\Big],$$

则

$$\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\int_\Gamma x\mathrm{d}y-y\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(ab\cos^2\theta+ab\sin^2\theta)\mathrm{d}\theta=\frac{ab}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta=\pi ab,$$

因此, $\oint_\Gamma (x+y)\mathrm{d}x-(x-y)\mathrm{d}y=-2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=-2\pi ab.$

□

2. 计算下列曲线所围成的平面图形的面积.
(1) 双纽线 $(x^2+y^2)^2=a^2(x^2-y^2)$ (提示: 令 $y=x\tan\varphi$);
(2) 笛卡儿叶形线 $x^3+y^3=3axy, (a>0)$.

解: (1) 将双纽线的直角坐标方程化为参数方程:

令

$$\begin{cases} x = r\cos\theta, \\ y = r\sin\theta, \end{cases}$$

带入方程 $(x^2+y^2)^2 = a^2(x^2-y^2)$, 得 $r = a\sqrt{\cos 2\theta}$, 进而可得双纽线的参数方程为:

$$L := \begin{cases} x = a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta, \\ y = a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta, \end{cases} \quad \theta \in \Big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big] \cup [\frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}\Big],$$

记 $\theta \in \Big[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\Big]$ 的一部分曲线为 L_1, 另一部分为 L_2, 因为 L_1 与 L_2 是对称性, 且 L_1 与 L_2 都是封闭的, 则由公式 (18.1.4) 得

$$\begin{aligned}
S_D &= 2\cdot\frac{1}{2}\oint_{L_1} x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \\
&= \int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \Big(a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta\cdot\Big(a\sqrt{\cos 2\theta}\cos\theta - \frac{2a\sin 2\theta\sin\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\Big) \\
&- a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta\cdot\Big(-a\sqrt{\cos 2\theta}\sin\theta - \frac{2a\sin 2\theta\cos\theta}{\sqrt{\cos 2\theta}}\Big)\Big)\mathrm{d}\theta \\
&= a^2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \cos 2\theta\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{a^2}{2}\sin 2\theta\Big|_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \\
&= a^2.
\end{aligned}$$

(2) 将笛卡儿叶形线的直角坐标方程化为参数方程:

令 $t = \frac{y}{x}$, 带入方程 $x^3+y^3 = 3axy$, 得笛卡儿叶形线的参数方程为:

$$L := \begin{cases} x = \dfrac{3at}{1+t^3}, \\ y = \dfrac{3at^2}{1+t^3}, \end{cases} \quad t \in \Big[0, \infty\Big]$$

由公式 (18.1.4) 得

$$\begin{aligned}
S_D &= \frac{1}{2}\oint_L x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \frac{3at}{1+t^3}\mathrm{d}\left(\frac{3at^2}{1+t^3}\right) - \frac{3at^2}{1+t^3}\mathrm{d}\left(\frac{3at}{1+t^3}\right) \\
&= \frac{1}{2}\int_0^{\infty} \left(\frac{3at}{1+t^3}\cdot\frac{3at(2-t^3)}{(1+t^3)^2} - \frac{3at^2}{1+t^3}\cdot\frac{3a(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{9}{2}a^2\int_0^{\infty} \frac{t^2}{(1+t^3)^2}\mathrm{d}t \\
&= \frac{9}{2}a^2\cdot(-\frac{1}{3})\cdot\frac{1}{(1+t^3)^2}\Big|_0^{\infty} \\
&= -\frac{3a^2}{2}\cdot\frac{1}{(1+t^3)^2}\Big|_0^{\infty} \\
&= \frac{3a^2}{2}.
\end{aligned}$$

□

3. 设 Γ 为平面上分段光滑的简单闭曲线在 $\boldsymbol{l}$ 为给定方向, 证明

$$\oint_\Gamma \cos(\boldsymbol{l}, n)\mathrm{d}s = 0,$$

其中 $\boldsymbol{n}$ 为 Γ 上单位外法向量.

证明. 不妨设 $\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l}$ 都是单位向量, 记 $\boldsymbol{l} = (l_1, l_2)$, 其中 l_1, l_2 都是常数, $\boldsymbol{n} = (\cos(\boldsymbol{n}, x), \cos(\boldsymbol{n}, y))$. 用 D 表示由 Γ 为围成的平面. 由于

$$\boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n} = |\boldsymbol{l}| \cdot |\boldsymbol{n}| \cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}) = \cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}),$$

因此

$$\cos(\boldsymbol{l}, \boldsymbol{n}) = \boldsymbol{l} \cdot \boldsymbol{n} = l_1 \cos(\boldsymbol{n}, x) + l_2 \cos(\boldsymbol{n}, y).$$

设沿 Γ 正方向的单位切方向为 $\boldsymbol{t}$, 则有

$$\cos(\boldsymbol{n}, x) = \cos(\boldsymbol{t}, y), \quad \cos(\boldsymbol{n}, y) = \cos(\boldsymbol{t}, x)$$

由 Green 公式,

$$\begin{aligned}
\oint_\Gamma \cos(\boldsymbol{n}, \boldsymbol{l})\mathrm{d}s &= \oint_\Gamma \Big[l_1 \cos(\boldsymbol{n}, x) + l_2 \cos(\boldsymbol{n}, y)\Big]\mathrm{d}s \\
&= \oint_\Gamma \Big[l_1 \cos(\boldsymbol{t}, y) - l_2 \cos(\boldsymbol{t}, x)\Big]\mathrm{d}s \\
&= \oint_\Gamma l_1 \mathrm{d}y - l_2 \mathrm{d}x \\
&= \iint_D 0 \ \mathrm{d}x\mathrm{d}y = 0.
\end{aligned}$$

∎

4. 设 Γ 是单位圆周 $x^2 + y^2 = 1$, 正向为逆时针方向, 求积分

$$\oint_\Gamma \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y}{x^2 + 4y^2}.$$

解: 记 $P(x, y) = \dfrac{x-y}{x^2+4y^2}, Q(x, y) = \dfrac{x+4y}{x^2+4y^2}$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{4y^2 - 8xy - x^2}{(x^2+4y^2)^2} = \frac{\partial P}{\partial y},$$

记 Γ 围成的区域为 D, 由于原点在 D 内, $P(x, y)$ 和 $Q(x, y)$ 都不在 D 上连续可微, 故需要在区域 D 内挖掉一个以原点为心, 的椭圆 $D_1 : x^2 + 4y^2 = 1$, 则 $D_1 \subset D$. 记 D_1 的边界为 γ_1, 它的定向是顺时针方向.

$$I = \oint_\Gamma \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2} = \oint_\Gamma P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y = \Big(\oint_\Gamma + \oint_{\gamma_1} - \oint_{\gamma_1}\Big)P\mathrm{d}x + Q\mathrm{d}y,$$

对前两项在 $D \backslash D_1$ 上用格林公式知积分为零, 于是

$$I = -\oint_{\gamma_1} \frac{(x-y)\mathrm{d}x + (x+4y)\mathrm{d}y}{x^2+4y^2},$$

$-\gamma_1$ 的参数方程是 $x = \cos t, y = \dfrac{1}{2}\sin t, 0 \le t \le 2\pi$, 因此

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{\left(\cos t - \dfrac{1}{2}\sin t\right) \cdot (-\sin t) + (\cos t + 2\sin t) \cdot \dfrac{1}{2}\cos t}{\cos^2 t + \sin^2} \mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \mathrm{d}t = \pi.$$

$\square$