有限差计算与级数求和

郭锡伯

陕西科学技术出版社

YOUXIANCHA JISUAN YU JISHUQIUHE

有限差计算与级数求和

郭 锡 伯

陕西科学技术出版社

内 容 提 要

有限项级数求和法往往因题而异，针对性强。本书主要介绍级数求和的差分方法，这种方法以差分与和分为工具能解决不少类型的级数求和问题，适用面比较宽。

全书分五节：第一节介绍有限差分基本概念和性质；第二节介绍阶乘函数；第三节介绍有限和分的基本概念和性质；第四节介绍级数求和的差分方法；第五节讨论级数求和的应用。

本书是为中学生和大学低年级学生写的课外数学读物。

有限差计算与级数求和

郭 锡 伯

陕西科学技术出版社出版

（西安北大街131号）

陕西省新华书店发行　陕西省印刷厂印刷

开本787×1092　1/32　印张3.125　字数38,000

1984年10月第1版　1984年10月第1次印刷

印数1—5,600

统一书号：7202·81　定价：0.46元

前　言

函数的有限差分及其计算是计算数学中的一个基本工具，有限差分法也是一些工程问题的有效数值解法之一。本书介绍了有限差分的基本概念、性质和计算，并进而应用于有限项级数求和，这是一个有用而又有趣的题材。

级数求和的方法繁多，但往往要针对不同问题而采用不同的方法和技巧，这使初学者感到无所适从。本书所介绍的基本有限差分的方法，可以解决不少类型的级数求和问题。另一方面，本书所提供的定理和公式，与微积分中的相应内容在形状上有很多类似之处，并且两者还有一定联系。因而对读者来说，无论是否学过微积分，了解本书内容对进一步学习和巩固微积分的知识将会有一定的帮助，并将有助于读者提高解决问题的能力。

作者本着为中学生和大学低年级学生提供数学课外读物的想法编写本书，因而写得便于自学，特别是在每节主要内容之后配有一定数量的例题和习题，这些例、习题包含了我国古代数学在级数研究中所得的某些成果，书后还对部分习题附有答案或提示，这些都有助于读者学习本书。

本书的读者范围是比较广泛的，除中学生和大学低年级学生以外，中级以上各类学校（包括电大）的理工科师生以及具有高中文化水平的数学爱好者均可阅读。

西安交通大学数学系　游兆永

1982年国庆

目　　录

§1 有限差分

一、差分的概念

差分学主要研究当自变量之值改变时，其因变量（或函数）的值发生改变的情形，差分实际上是变量的微小改变。

设 $U=f(x)$，U为自变量x的函数，在所考虑的范围内取有限值，而不管其是否连续。自变量x也不必限制为连续的，可以取一个个特定值，特别是取整数值，如-2，-1，0，1，2，3……，等。

定义 设x的增量为Δx，当x自某值a变到另一值$a+\Delta x$时，U的增量为ΔU，称ΔU为U在$x=a$处的差分，而称Δx为x的差分。通常"差分"也称"阶差"、"有限差分"等。

在微分学中函数U的差分ΔU与自变量x的差分之比$\dfrac{\Delta U}{\Delta x}$称为差商，当$\Delta x\to 0$时，求这个比值的极限是微分学的问题。但在差分学中$\Delta x$为有限值，它是在所给定的$x$的变化范围内取某一定值的量。差分与差商分别与微分学中的微分与导数相对应，差分与差商是微分与导数的离散化形式，微分与导数则是差分与差商的极限。

现在我们规定$\Delta x=1$（即差分区间定为1）。这无妨一般性，因为当自变量的差分不是1时，我们可以通过自变量的线性变换使自变量的差分等于1。设有一个以t为自变

量的函数，其差分$\Delta t=h\neq 1$。此时我们令$t=hx$，则有$\Delta t=h\Delta x$，即$h=h\Delta x$，故仍有$\Delta x=1$。

习惯上记函数$U=f(x)$在x处的值为U_x，在$x=x+i$（i为整数）处的值为U_{x+i}，在$x=x$处差分记为ΔU_x，则

$$\Delta U_x=U_{x+1}-U_x \qquad (1-1)$$

称为U在x处一阶差分。一般省略"一阶"二字，简称差分。

例如，$U=x^2$，在x处的一阶差分为

$$\Delta U_x=U_{x+1}-U_x=(x+1)^2-x^2=2x+1;$$

$U=3^x$，在x处的一阶差分为

$$\Delta U_x=U_{x+1}-U_x=3^{x+1}-3^x=3^x(3-1)=2\cdot 3^x\text{等}.$$

由以上例子可以看出，ΔU_x一般还是x的函数，所以仍可以考虑ΔU_x的差分$\Delta(\Delta U_x)$，并以"Δ^2U_x"表示之，则

$$\begin{aligned}\Delta^2U_x&=\Delta(\Delta U_x)=\Delta(U_{x+1}-U_x)\\&=(U_{x+2}-U_{x+1})-(U_{x+1}-U_x)\\&=U_{x+2}-2U_{x+1}+U_x \qquad (1-2)\end{aligned}$$

称为U在x处的二阶差分，亦就是一阶差分的差分。类似地

$$\begin{aligned}\Delta^3U_x&=\Delta(\Delta^2U_x)=\Delta(U_{x+2}-2U_{x+1}+U_x)\\&=(U_{x+3}-2U_{x+2}+U_{x+1})-(U_{x+2}-2U_{x+1}+U_x)\\&=U_{x+3}-3U_{x+2}+3U_{x+1}-U_x \qquad (1-3)\end{aligned}$$

称为U在x处三阶差分。以此类推可以归纳出"n阶差分"的定义：

$$\begin{aligned}\Delta^nU_x&=\Delta(\Delta^{n-1}U_x)\\&=U_{x+n}-C_n^1U_{x+n-1}+C_n^2U_{x+n-2}-C_n^3U_{x+n-3}+\cdots\cdots\\&\quad+(-1)^{n-1}C_n^{n-1}U_{x+1}+(-1)^nU_x\end{aligned}$$

$$(1-4)$$

其中 C_n^r 是二项式系数

$$C_n^r=\frac{n!}{r!\ (n-r)\ !}=\frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-r+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdots r}$$

（1—5）

例如，当 $U=3^x$ 时，$\Delta U_x=2\cdot 3^x$，那末

$$\begin{aligned}\Delta^2 U_x&=\Delta\ (\Delta U_x)\\&=U_{x+2}-2U_{x+1}+U_x\\&=3^{x+2}-2\cdot 3^{x+1}+3^x=4\cdot 3^x=2^2\cdot 3^x\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Delta^3 U_x&=\Delta(\Delta^2 U_x)\\&=U_{x+3}-3U_{x+2}+3U_{x+1}-U_x\\&=3^{x+3}-3\cdot 3^{x+2}+3\cdot 3^{x+1}-3^x\\&=\ (27-27+9-1)\cdot 3^x\\&=8\cdot 3^x=2^3\cdot 3^x\end{aligned}$$

由归纳法可知函数 $U=3^x$ 的 n 阶差分为

$\Delta^n U_x=\Delta^n 3^x=2^n\cdot 3^x$。

二、数列的差分

当函数 $U=f(x)$ 中的自变量 x 只能取整数值时，我们称 $U=f(x)$ 为整标函数。将整标函数值依自变量增大的次序排列出来有

U_0，U_1，U_2，……，U_n，……，

这一串数叫做数列，简记为 $\{U_k\}$ （$k=0，1，2，\cdots$）

例如，$U=2^{-k}$ 是一整标函数，由此可得数列 $\{2^{-k}\}$：

$$1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2^2},\ \cdots\cdots,\ \frac{1}{2^n},\ \cdots\cdots$$

数列符号除用$\{U_k\}$表示外，还常用符号$\{G_k\}$，$\{R_k\}$等表示。若已经指明x取整数值，数列符号也可用$\{U_x\}$来表示。

定义 设数列$\{U_k\}$（$k=0$，1，2，$\cdots$），称

$$\Delta U_k = U_{k+1} - U_k \qquad (1-6)$$

为给定数列$\{U_k\}$的一阶差分。类似可定义数列的n阶差分$\Delta^n U_k$。

下面我们引进高阶等差级数的概念做为巩固差分概念的一个例子。

设有一数列

$$U_0,\ U_1,\ \cdots\cdots,\ U_n,\ \cdots \qquad (1-7)$$

如果接连地从它的后一项减去前一项，那末就得到原数列（1—7）的第一次差所构成的数列

$$U_1-U_0,\ U_2-U_1,\ \cdots\cdots,\ U_n-U_{n-1},\ \cdots \quad (1-8)$$

再接连地将（1—8）的后一项减去前一项又得到数列（1—7）的第二次差所构成的数列，依此类推，布列下表：

	U_0,		U_1,		U_2,		U_3,		U_4, $\cdots$
一次差		ΔU_0,		ΔU_1,		ΔU_2,		ΔU_3, $\cdots$	
二次差			$\Delta^2 U_0$,		$\Delta^2 U_1$,		$\Delta^2 U_2$, $\cdots$		
三次差				$\Delta^3 U_0$,		$\Delta^3 U_1$, $\cdots$			
四次差					$\Delta^4 U_0 \cdots$				

上表恰好构成一三角形表。从此三角形表中可以看出，由上面函数值开始往右下方一列数值中每个足数皆相同，我们将这些足数相同的各阶差分称为该函数值的领导差分。如ΔU_0，$\Delta^2 U_0$，$\Delta^3 U_0$等即为U_0的领导差分。

如果作了r次，数列（1—7）的每个第r次差都相等，

那末以后的各次差都等于零，则称数列（1—7）为r阶等差数列，与这样的数列相应的级数称为r阶等差级数。一阶等差级数就是通常的算术级数。

〔**例1**〕考虑数列$\{U_k\}=\{k^3\}$（$k=1，2，\cdots$）；

	1	8	27	64	125…
一次差	7	19	37	61…	
二次差		12	18	24…	
三次差			6	6	
四次差				0	

该数列的第三次差都相等（皆为6），故此数列为三阶等差数列。相应的级数为

$$1+8+27+64+125+\cdots$$

或

$$1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+\cdots$$

为三阶等差级数。函数值$U_1=1$的领导差分为

$$\Delta U_1=7，\Delta^2U_1=12，\Delta^3U_1=6，\cdots$$

我国古代关于高阶等差级数的研究到宋元时期取得了很大进展。北宋的沈括，南宋的杨辉，元朝朱世杰等都在高阶等差级数理论及高阶等差级数求和方面做了大量的工作，成就很大，在中国和世界数学史上有较高地位。

三、差分的性质

性质1　若C为常数，则$\Delta C=0$。

证明：$\Delta C=C-C=0$

只要C_x是一个以1为周期的函数；$C_{x+1}=C_x$就有ΔC_x

$= 0$。

性质2 设U_x、V_x为x的函数，α、β为常数，那末就有

$$\Delta^n(\alpha U_x+\beta V_x)=\alpha\Delta^n U_x+\beta\Delta^n V_x \qquad (1—9)$$

证明：

$$\Delta(\alpha U_x+\beta V_x)=(\alpha U_{x+1}+\beta V_{x+1})-(\alpha U_x+\beta V_x)$$
$$=\alpha(U_{x+1}-U_x)+\beta(V_{x+1}-V_x)$$
$$=\alpha\Delta U_x+\beta\Delta V_x$$

同理，不断使用差分的定义，我们有

$$\Delta^2(\alpha U_x+\beta V_x)=\Delta[\Delta(\alpha U_x+\beta V_x)]$$
$$=(\alpha U_{x+2}+\beta V_{x+2})-2(\alpha U_{x+1}+\beta V_{x+1})+(\alpha U_x+\beta V_x)$$
$$=\alpha(U_{x+2}-2U_{x+1}+U_x)+\beta(V_{x+2}-2V_{x+1}+V_x)$$
$$=\alpha\Delta^2 U_x+\beta\Delta^2 V_x$$

用归纳法可证

$$\Delta^n(\alpha U_x+\beta V_x)=\alpha\Delta^n U_x+\beta\Delta^n V_x(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

该性质称为有限差分的线性性质。

性质3 （乘积的差分）

$$\Delta(U_x\cdot V_x)=U_x\Delta V_x+V_{x+1}\Delta U_x \qquad (1-10)$$

或

$$\Delta(U_x\cdot V_x)=V_x\Delta U_x+U_{x+1}\Delta V_x \qquad (1—11)$$

证明： （只证（1—10））

$$\Delta(U_xV_x)=U_{x+1}V_{x+1}-U_xV_x$$
$$=U_{x+1}V_{x+1}-U_xV_{x+1}+U_xV_{x+1}-U_xV_x$$
$$=V_{x+1}(U_{x+1}-U_x)+U_x(V_{x+1}-V_x)$$
$$=V_{x+1}\Delta U_x+U_x\Delta V_x$$

性质 4　（分部性质）

$$\sum_{x=0}^{n} U_x \Delta V_x = U_{n+1}V_{n+1} - U_0V_0 - \sum_{x=0}^{n} V_{x+1}\Delta U_x \tag{1—12}$$

证明： 设有x的函数W_x，我们有

$$\sum_{x=0}^{n} \Delta W_x = \Delta W_0 + \Delta W_1 + \cdots + \Delta W^n$$

$$= (W_1 - W_0) + (W_2 - W_1) + \cdots$$

$$+ (W_n - W_{n-1}) + (W_{n+1} - W_n)$$

$$= W_{n+1} - W_0$$

令　$W_x = U_xV_x$，并运用性质 3

$$\sum_{x=0}^{n} \Delta (U_xV_x) = \sum_{x=0}^{n} (V_{x+1}\Delta U_x + U_x\Delta V_x)$$

$$= \sum_{x=0}^{n} V_{x+1}\Delta U_x + \sum_{x=0}^{n} U_x\Delta V_x$$

$$= (U_{n+1}V_{n+1}) - (U_0V_0)$$

从而有

$$\sum_{x=0}^{n} U_x\Delta V_x = U_{n+1}V_{n+1} - U_0V_0 - \sum_{x=0}^{n} V_{x+1}\Delta U_x$$

证毕。

特别地，在（1—12）中令$U_x = 1$，$\Delta U_x = 0$，得

$$\sum_{x=0}^{n} \Delta V_x = V_{n+1} - V_0 = V_x \Big|_0^{n+1} \tag{1—13}$$

性质5　（商的差分）

$$\Delta\left(\frac{U_x}{V_x}\right)=\frac{V_x\Delta U_x-U_x\Delta V_x}{V_x\cdot V_{x+1}} \qquad (1-14)$$

证明：由差分定义知

$$\Delta\left(\frac{U_x}{V_x}\right)=\frac{U_{x+1}}{V_{x+1}}-\frac{U_x}{V_x}$$

$$=\frac{V_xU_{x+1}-U_xV_{x+1}}{V_x\cdot V_{x+1}}$$

$$=\frac{(V_xU_{x+1}-U_xV_x)-(U_xV_{x+1}-U_xV_x)}{V_x\cdot V_{x+1}}$$

$$=\frac{V_x(U_{x+1}-U_x)-U_x(V_{x+1}-V_x)}{V_x\cdot V_{x+1}}$$

$$=\frac{V_x\Delta U_x-U_x\Delta_x}{V_x\cdot V_{x+1}}$$

证毕。

以上差分的五个性质是很有用处的，读者若有兴趣，还可以和下面五个微积分公式进行比较，从而探讨差分学与微积分的深刻联系。

$dc=0$；

$d(\alpha U_x+\beta V_x)=\alpha dU_x+\beta dV_x$；

$d(U_xV_x)=U_xdV+V_xdU_x$；

$\int U_xdV_x=U_xV_x-\int V_xdU_x$；

$$d\left(\frac{U_x}{V_x}\right)=\frac{V_xdU_x-U_xdV_x}{V_x^2}$$

四、差分公式

利用差分定义和差分性质可以推导下面的公式：

1．若a、b为常数，

$\Delta(a+bx)=b$；

2．$\Delta^n x^n=n!$；

3．$\Delta\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{-1}{x(x+1)}$；

4．$\Delta\left(\frac{1}{x^2}\right)=\frac{-(2x+1)}{x^2(x+1)^2}$；

5．若a、r为常数，

$\Delta(ar^x)=a(r-1)r^x$；

6．$\Delta \ln x=\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$；

7．$\Delta C_x^n=C_x^{n-1}$．

以上公式不难推导，我们仅举一例，其余公式的导出留给读者做为练习。

〔例2〕 推导公式7：$\Delta C_x^n=C_x^{n-1}$．

$$\Delta C_x^n=C_{x+1}^n-C_x^n=\frac{1}{n!}(x+1)\cdot x\cdots(x+1-n+1)$$

$$-\frac{1}{n!}x\cdot(x-1)\cdots(x-n+1)$$

$$=\frac{1}{n!}x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+2)(x+1-x+n-1)$$

$$=\frac{1}{n!}x(x-1)\cdots(x-n+2)\cdot n$$

$$=\frac{1}{(n-1)!}x(x-1)\cdots(x-n+2)$$

$$=C_x^{n-1}$$

8．三角函数的差分

利用差分的定义可以推出下面三角函数的差分公式，其中a、b皆为常数。

（1）　$\Delta\sin(a+bx)=2\sin\frac{b}{2}\cos(a+\frac{b}{2}+bx)$；

（2）　$\Delta\cos(a+bx)=-2\sin\frac{b}{2}\sin(a+\frac{b}{2}+bx)$；

（3）　$\Delta\mathrm{tg}(a+bx)=\dfrac{\sin b}{\cos(a+bx)\cos(a+b+bx)}$；

（4）　$\Delta\mathrm{ctg}(a+bx)=\dfrac{-\sin b}{\sin(a+bx)\cos(a+b+bx)}$；

（5）　$\Delta\mathrm{arctg}(a+bx)=$

$$\mathrm{arctg}\frac{b}{b^2x^2+(b^2+2ab)x+ab+a^2+1},$$

当$a=0$，$b=1$时；

（6）　$\Delta\mathrm{arctg}x=\mathrm{arctg}\dfrac{1}{x^2+x+1}$；

（7） $\Delta \operatorname{arcctg}(a+bx)=$

$$\operatorname{arcctg}\frac{b}{b^2x^2+(b^2+2ab)x+ab+a^2+1}-\frac{\pi}{2}$$，当$a=0$，$b=1$时；

（8） $$\Delta \operatorname{arcctg}x=\operatorname{arcctg}\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{\pi}{2}.$$

〔例3〕 推导公式（4）：

$$\Delta \operatorname{ctg}(a+bx)=\operatorname{ctg}[a+b(x+1)]-\operatorname{ctg}(a+bx)$$
$$=\operatorname{ctg}(a+b+bx)-\operatorname{ctg}(a+bx)$$
$$=\frac{\cos(a+b+bx)}{\sin(a+b+bx)}-\frac{\cos(a+bx)}{\sin(a+bx)}$$
$$=\frac{\cos(a+b+bx)\sin(a+bx)}{\sin(a+b+bx)\sin(a+bx)}$$
$$\frac{-\cos(a+bx)\sin(a+b+bx)}{}$$
$$=\frac{\sin(a+bx-a-b-bx)}{\sin(a+bx)\sin(a+b+bx)}$$
$$=\frac{-\sin b}{\sin(a+bx)\sin(a+b+bx)}$$

〔例4〕 推导公式（8）：

因为

$$\Delta \operatorname{arcctg}x=\operatorname{arcctg}(x+1)-\operatorname{arcctg}x$$
$$=\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}(x+1)-\left[\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}x\right]$$

$$=\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}(x+1)$$

设$x(x+1)>-1$，

$$\operatorname{arctg}x-\operatorname{arctg}(x+1)=\operatorname{arctg}\frac{x-(x+1)}{1+x(x+1)}$$

所以

$$\Delta\operatorname{arcctg}x=\operatorname{arctg}\frac{x-x-1}{x^2+x+1}=\operatorname{arctg}\frac{-1}{x^2+x+1}$$

$$=-\operatorname{arctg}\frac{1}{x^2+x+1}$$

由三角公式

$$-\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{x^2+x+1}=-\frac{\pi}{2}+\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x^2+x+1}$$

最后我们有

$$\triangle\operatorname{arc\,ctg}x=\operatorname{arc\,ctg}\frac{1}{x^2+x+1}-\frac{\pi}{2}$$

这就是公式（8）.

9. $(a+bx)^n$（$b\neq 0$）的差分公式

当$a=0$，$b=1$时，$(a+bx)^n=x^n$

$\because\ \triangle x^2=2x+1$；

$\triangle x^3=3x^2+3x+1$；

……，

由归纳法推知

$$\triangle x^n=c_n^1x^{n-1}+c_n^2x^{n-2}+\cdots+c_n^{n-1}x+1$$

x^n的一阶差分是个（$n-1$）次多项式，各项系数可用去掉杨辉三角形全为1的一个斜边来帮助记忆。（见表1）

（表 1）

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}
$$

……………………………

$c_n^1, c_n^2, \cdots\cdots c_n^{n-1} 1$

当$a \neq 0$，$b \neq 1$时

$\triangle(a+bx)=b$,

$$\triangle(a+bx)^2 = 2b(a+bx)+b^2 = b[2(a+bx) + \triangle(a+bx)] \quad (1-13)$$

$$\triangle(a+bx)^3 = b[3(a+bx)^2+3b(a+bx)+b^2] = b\{3(a+bx)^2+3(a+bx)\triangle(a+bx) + [\triangle(a+bx)]^2\} \quad (1-14)$$

……………………………

由归纳法能够推出

$$\triangle(a+bx)^n = b\{c_n^1(a+bx)^{n-1}+c_n^2(a+bx)^{n-2}\triangle(a+bx)+\cdots+c_n^{n-2}(a+bx)^2[\triangle(a+bx)]^{n-3}+c_n^{n-1}(a+bx)[\triangle(a+bx)]^{n-2}+[\triangle(a+bx)]^{n-1}\} \quad (1-15)$$

要记住（1—15）公式，需观察一下这个公式的特征：

大括号外面只有一个常数b，大括号内是$(a+bx)$的（$n-1$）次多项式，各项系数可由（表1）得知，每一项中$\triangle(a+bx)$指数按升幂排列，$(a+bx)$的指数按降幂排列，它们的指数和为（$n-1$），展开式的括号内共有n项。

〔**例5**〕 将函数$U=(a+bx)^2$表示为某一函数的差分。

解： 由公式（1—13）、（1—14），

$$\triangle(a+bx)^3-3b^2(a+bx)-b^3=3b(a+bx)^2\cdots\cdots \quad ①$$

$$3b^2(a+bx)=3b^2\triangle\frac{[(a+bx)^2-b(a+bx)]}{2b} \quad \cdots\cdots \quad ②$$

$$b^3=b^2\cdot b=b^2\triangle(a+bx) \quad \cdots\cdots \quad ③$$

将②和③代入①，

$$\begin{aligned}左&=\triangle\{(a+bx)^3-\frac{3}{2}b[(a+bx)^2-b(a+bx)]\\&\quad -b^2(a+bx)\}\\&=\triangle[(a+bx)^3-\frac{3}{2}b(a+bx)^2+\frac{b^2}{2}(a+bx)]\end{aligned}$$

所以函数$U=(a+bx)^2$可以写成下列函数的差分

$$(a+bx)^2=\triangle\left\{\frac{1}{3b}[(a+bx)^3-\frac{3}{2}b(a+bx)^2+\frac{b^2}{2}(a+bx)]\right\} \quad (1—16)$$

后面我们会看到，当求通项为$(a+bx)^2$的级数之和时，（1—16）是很有用的。

习 题 一

一、求下列各函数的一阶差分：

（1）$3x^4$；　　（2）$\operatorname{tg}x$；　　（3）a^x；

（4）$x(x-1)(x-2)(x-3)$　　（5）$\arcsin x$；

（6）$x(x+1)(x+2)(x+3)$；　　（7）$\ln\sin x$；

（8）$2^{-(x-1)}\operatorname{ctg}2^{-(x-1)}\theta$。

二、试证

（1）$\triangle^n x^n = n!$　，

（2）$\triangle^4 U_x = U_{x+4} - 4U_{x+3} + 6U_{x+2} - 4U_{x+1} + U_x$。

三、若U_x满足$\triangle U_x = U_x$，则U_x应为什么函数？

四、U_x分别为下列各函数，求$\triangle U_x$：

（1）$x(x-1)\cdot 3^x$；　（2）$[x(x+1)(x+2)]^{-1}$；

（3）$\operatorname{ctg} 2x$；　（4）ax^2+bx+c；

五、设$\triangle U_x$分别为下列各函数，则U_x应为什么函数？

（1）x；　（2）x^2；　（3）a^x；　（4）c^{a+bx}。

六、试证（1）$\triangle(-\operatorname{ctg}2^{x-1}\theta) = \csc 2^x\theta$；

（2）$\triangle \operatorname{arc\,tg} x = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{1}{x^2+x+1}$；

（3）$\triangle\dfrac{\sin(x-1)\theta\cos^x\theta}{\sin\theta} = \cos^x\theta\cos x\theta$；

（4）$\triangle\dfrac{\sin x\theta}{\sin\theta\cos^{x-1}\theta} = \cos x\theta\operatorname{ces}^x\theta$；

（5）$\triangle\dfrac{C^x(ax+b)}{x} = \dfrac{C^x(Ax^2+Bx+D)}{x(x+1)}$；

（其中$A=a(C-1)$，$D=-b$，$B=(a+b)(c-1)$）

七、判断下列级数是几阶等差级数？

(1) $1^2+2^2+3^3+\cdots+n^2$;

(2) $1+\frac{2.3}{2}+\frac{3.4}{2}+\cdots+\frac{n(n+1)}{2}$;

(3) $1+4+10+\cdots+\frac{1}{3!}(n+2)(n+1)n$.

§2 阶乘函数

一、阶乘函数的概念

定义 1 具有下列形式的函数

$$x^{(n)}=\frac{x!}{(x-n)!}\ (n=0, \pm 1, \pm 2, \cdots) \tag{2—1}$$

称为x的阶乘函数。

当$n=0$，± 1，± 2时，有

$$x^{(0)}=1, \ x^{(1)}=x, \ x^{(2)}=x(x-1), \ x^{(-1)}=\frac{1}{x+1},$$

$$x^{(-2)}=\frac{1}{(x+1)(x+2)};$$

$x=n$时，$n^{(n)}=n!$

定义 2 （第二种常用阶乘函数）

设a、b为常数，具有下列形式的函数

$$(a+bx)^{(n)}=\frac{(a+bx)!}{[a+b(x-n)]!}$$

$$(n=0, \pm 1, \pm 2\cdots) \tag{2—2}$$

也称为x的阶乘函数。其中

$$(a+bx)!=(a+bx)[a+b(x-1)]\cdots(a+b\cdot 2)(a+b)$$

当$n=0$，± 1，± 2时有

$(a+bx)^{(0)}=1$，$(a+bx)^{(1)}=a+bx$，

$(a+bx)^{(2)}=(a+bx)[a+b(x-1)]$，

$$(a+bx)^{(-1)}=\frac{1}{a+b(x+1)},$$

$$(a+bx)^{(-2)}=\frac{1}{[a+b(x+1)][a+b(x+2)]}$$

特别地，在定义2中令$a=0$，$b=1$，（2—2）变成（2—1）。

一般地，设U_x为x的函数，则形如

$U_x\cdot U_{x+1}\cdot U_{x+2}\cdots U_{x+n-1}$

$U_x\cdot U_{x-1}\cdot U_{x-2}\cdots U_{x-n+1}$

连乘积式，组成一新的x的函数，称为x的阶乘函数，各因式的足数成等差递增或递减，这一类函数在有限差计算中是很重要的。

二、阶乘函数的差分

下面我们推导定义1及定义2所给出的两种阶乘函数的差分公式。

1．$\triangle x^{(n)}=nx^{(n-1)}$　　　　$(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$

$\triangle^n x^{(n)}=n!$

这类似微分学中幂函数x^n的微分公式$dx^n=nx^{n-1}dx$。

2．$\triangle(a+bx)^{(n)}=bn(a+bx)^{(n-1)}$ $(n=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\cdots)$

$\triangle^n(a+bx)^{(n)}=b^n\cdot n!$

这类似微分学中复合函数$(a+bx)^n$的微分公式$d(a+bx)^n$

$=bn(a+bx)^{n-1}dx$。我们只证公式 2 。

证明：

$\because \triangle(a+bx)^{(n)}=[a+b(x+1)]^{(n)}-(a+bx)^{(n)}$

$$=\frac{[a+b(x+1)]!]}{[a+b(x-n+1)]!}-\frac{(a+bx)!}{[a+b(x-n)]!}$$

$$=\frac{(a+bx)![a+b(x+1)-a-b(x-n+1)]}{[a+b(x-n+1)]!}$$

$$=bn\frac{(a+bx)!}{a+b[x-(n-1)]!}$$

$$=bn(a+bx)^{(n-1)}\ (n=0,\pm1,\pm2,\cdots)$$

$$\triangle^2(a+bx)^{(n)}=\triangle[\triangle(a+bx)^{(n)}]$$
$$=\triangle[bn(a+bx)^{(n-1)}]$$

利用一阶差分的结果

$$\triangle^2(a+bx)^{(n)}=bn[b(n-1)](a+bx)^{(n-2)}$$
$$=b^2{}_n(n-)(a+bx)^{(n-2)}$$

…………

由归纳法能推出

$\triangle^n(a+bx)^{(n)}=b^n n!$

类似可证明公式 1 。

三、将多项式化为阶乘函数

阶乘函数$x^{(n)}$在差分学中的地位，类似幂函数在微分学中的地位。因此在许多应用问题中常将已知多项式用阶乘函数$x^{(n)}$表出，这种表示法叙述为下面的定理。

1.定理（牛顿定理）

若U_x为关于x的一个 n 次多项式，那末U_x可以写成下列

形式：

$$U_x=U_0+x^{(1)}\triangle U_0+\frac{x^{(2)}}{2!}\triangle^2U_0+\frac{x^{(3)}}{3!}\triangle^3U_0+\cdots$$

$$+\frac{x^{(n)}}{n!}\triangle^nU_0 \qquad (2-3)$$

证明：

因为$x^{(n)}=x(x-1)\cdots(x-n+1)$，这是一个$x$的$n$次多项式，因此我们可以设

$U_x=a_0+a_1x^{(1)}+a_2x^{(2)}+\cdots+a_nx^{(n)}$ ($a_0,a_1\cdots a_n$为待定系数）将U_x作n次差分运算，得

$\triangle U_x=a_1+2a_2x^{(1)}+3a_3x^{(2)}+\cdots+na_nx^{(n-1)}$

$\triangle^2U_x=2.1a_2+3.2.a_3x^{(1)}+\cdots+n(n-1)a_nx^{(n-2)}$

$\triangle^3U_x=3.2.1a_3+\cdots+n(n-1)(n-2)a_nx^{(n-3)}$

……

$\triangle^nU_x=n!a_n$

U_x及上面U_x的各阶差分表示式皆为恒等式，在U_x及其各阶差分中令$x=0$，得

$$a_0=U_0,\ a_1=\triangle U_0,\ a_2=\frac{\triangle^2U_0}{2!},\ \cdots a_n=\frac{\triangle^nU_0}{n!}$$

将各值代入U_x表达式的右端，则证得此定理.此定理类似微分学中马克劳林展开。现举例说明定理的应用.

〔**例 1**〕设某数列的一般项U_x为多项式，已知$U_0=1$，$U_1=4$，$U_2=10$，$U_3=20$，$U_4=35$，$U_5=56$等，试求此数列之第九项U_8.

解： 做一差分表

x	Ux	$\triangle Ux$	$\triangle^2 Ux$	$\triangle^3 Ux$	$\triangle^4 Ux$
0	1	3	3	1	0
1	4	6	4	1	0
2	10	10	5	1	
3	20	15	6		
4	35	21			
5	56				

U_0及U_0的领导差分为

$U_0 = 1$，$\triangle U_0 = 3$，$\triangle^2 U_0 = 3$，$\triangle^3 U_0 = 1$，$\triangle^4 U_0 = 0$。

由（2—3）式知

$$U_x = U_0 + x^{(1)} \triangle U_0 + \frac{x^{(2)}}{2!} \triangle^2 U_0 + \frac{x^{(3)}}{3!} \triangle^3 U_0$$

$\because x = 8$，

$$U_8 = 1 + 8 . 3 + \frac{8 \times 7}{2!} \cdot 3 + \frac{8 \times 7 \times 6}{3!} \cdot 1$$

$$= 1 + 24 + 84 + 56$$

$$= 165$$

该数列一般项U_x表示为

$$U_x = U_0 + x^{(1)}\triangle U_0 + \frac{x^{(2)}}{2!}\triangle^2 U_0 + \frac{x^{(3)}}{3!}\triangle^3 U_0$$

$$= 1 + 3x^{(1)} + \frac{x(x-1)}{2}\cdot 3 + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$= \frac{1}{6}(x^3 + 6x^2 + 11x + 6).$$

〔**例 2**〕 将$U_x = 2x^3 - 3x^2 + 3x - 10$以阶乘函数式表出。

x	Ux	$\triangle Ux$	$\triangle^2 Ux$	$\triangle^3 Ux$	$\triangle^4 Ux$
0	-10	2	6	12	0
1	-8	8	18	12	
2	0	26	30		
3	26	56			
4	82				

由公式（2—3）知

$$U_x = U_0 + x^{(1)}\triangle U_0 + \frac{x^{(2)}}{2!}\triangle^2 U_0 + \frac{x^{(3)}}{3!}\triangle^3 U_0$$

U_0及$\bar{U}_0$的领导差分值分别为

$U_0=-10$，$\triangle U_0=2$，$\triangle^2 U_0=6$，$\triangle^3 U_0=12$，代入上式我们就有

$$U_x=-10+2x^{(1)}+6\cdot\frac{1}{2!}x^{(2)}+12\cdot\frac{1}{3!}x^{(3)}$$

$$=2x^{(3)}+3x^{(2)}+2x^{(1)}-10$$

2.推论

下面我们用牛顿定理导出幂函数x^n的阶乘函数表达式，并求出系数的递推公式。

依定理知

$$U_x=\sum_{i=1}^{n}x^{(i)}\frac{\triangle^i U_0}{i!}=\sum_{i=1}^{n}x^{(i)}\left[\frac{\triangle^i U_x}{i!}\right]_{x=0}$$

令$U_x=x^n$，则有

$$x^n=\sum_{i=1}^{n}x^{(i)}\left[\frac{\triangle^i x^n}{i!}\right]_{x=0} \qquad (2-4)$$

这就是幂函数x^n的阶乘函数表达式。

设$x^{(i)}$的系数$\left[\frac{\triangle^i x^n}{i!}\right]_{x=0}=\delta_i^n$，该系数下指标与阶乘函数指数$i$相同，上指标与幂函数的指数$n$相同。这样

$$x^n=\delta_2^n\ x^{(1)}+\delta_2^n\ x^{(2)}+\cdots+\delta_n^n\ x^{(n)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^n\ x^{(i)} \qquad (2-5)$$

$$x^{n+1}=\delta_1^{n+1}x^{(1)}+\delta_2^{n+1}x^{(2)}+\cdots\delta_{n+1}^{n+1}x^{(n+1)}$$

$$=\sum_{i=1}^{n+1}\delta_i^{n+1}x^{(i)} \qquad (2-6)$$

另一方面由（2—5）知

$$x^{n+1}=x\cdot x^n=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^n\ x\cdot x^{(i)}$$

$\because x\cdot x^{(i)}=[(x-i)+i]\cdot x^{(i)}=x^{(i+1)}+ix^{(i)}$，代入上式得到

$$x^{n+1}=\sum_{i=1}^{n}\delta_i^n\ [x^{(i+1)}+ix^{(i)}] \qquad (2-7)$$

由（2—6），（2—7）知$x^{(i)}$相应系数应相等，在（2—6）中$x^{(i)}$的系数为δ_i^{n+1}，（2—7）中$x^{(i)}$的系数有两项，这两项是$\delta_{i-1}^n+i\delta_i^n$ 故有

$$\delta_i^{n+1}=\delta_{i-1}^n+i\delta_i^n \qquad (2-8)$$

这就是系数递推公式。δ_i^n 称为*Stirling*数。(2—8)式说明高阶的*Stirling*数能用较低阶的*Stirling*数表示出来。

很明显　$\delta_0^1=0$，$\delta_0^n=0$。又$\because x=x^{(1)}=\delta_1^1x^{(1)}$，

$\therefore\delta_1^1=1$。观察（2—5）由同次幂系数相等易知$\delta_n^n=1$。又当$x=1$时，左端为1，右端$x^{(1)}$的系数$\delta_1^n=1$（右端其余各项均为零）。再由递推公式（2—8）

知：　$\delta_1^2=\delta_0^1+1.\delta_1^1=1$ ；

$\delta_2^3=\delta_1^2+2\cdot\delta_2^2=1+2=3$ ；

因此，我们就得出$n=2$，3时幂函数的阶乘函数展开式：

$$x^2=\delta_1^2x^{(1)}+\delta_2^2x^{(2)}=x^{(1)}+x^{(2)}$$

$$x^3=\delta_1^3x^{(1)}+\delta_2^3x^{(2)}+\delta_3^3x^{(3)}=x^{(1)}+3x^{(2)}+x^{(3)}$$

依此类推，根据递推公式（2—8）我们制作下表，以供将幂函数化为阶乘函数表示时使用。

（表2）

δ_i^n \ n	δ_1^n	δ_2^n	δ_3^n	δ_4^n	δ_5^n	δ_6^n	δ_7^n	δ_8^n
1	1							
2	1	1						
3	1	3	1					
4	1	7	6	1				
5	1	15	25	10	1			
6	1	31	90	65	15	1		
7	1	63	301	350	140	21	1	
8	1	127	966	1701	1050	266	28	1

表中每一数皆由其正上方之数乘以该列的i值再加上其左上方之数而得出。例如，当$n=6$，$i=3$，（第三列）对应数为90，其正上方之数为25，左上方之数为15，故

$$90=25\times 3+15$$

同样可知$350=65\times 4+90$等等。

利用该表，当多项式次数不太高的情况下，可将多项式各项中x^n的阶乘表达式求出，然后分别代入多项式，合并同类项后，多项式阶乘函数表达式可以迅速得出。

〔例3〕试将多项式$x^2(n-x)^2$用阶乘函数表出。

解：

$$x^2(n-x)^2=n^2x^2-2nx^3+x^4$$

由（表2）知

$$x^2=x^{(1)}+x^{(2)}$$

$$x^3=x^{(1)}+3x^{(2)}+x^{(3)}$$

$$x^4=x^{(1)}+7x^{(2)}+6x^{(3)}+x^{(4)}$$

分别代入多项式合并同类项，有

$$x^2(n-x)^2=(n^2-2n+1)x^{(1)}+(n^2-6n+7)x^{(2)}+(6-2n)x^{(3)}+x^{(4)} \quad (2-9)$$

习 题 二

一、求一多项式U_x，使$U_0=3$，$U_1=14$，$U_2=40$，$U_3=86$，$U_4=157$，$U_5=258$。

二、设U_x是一个x的多项式，已知$U_0=0$，$U_1=8$，$U_2=22$，$U_3=48$，$U_4=92$，…

（1）求第十项；

（2）求一般项的表达式。

三、证明 $\Delta^n \sin(a+bx) = \left(2\sin\frac{b}{2}\right)^n$

$$\cdot \sin\left[a+bx+\frac{n(b+\pi)}{2}\right].$$

四、试证 $\Delta(2x^4-7x^3+14x^2-25x+7)=8x^{(3)}+15x^{(2)}+14x^{(1)}-16$。

五、证明（1）$\Delta x^{(n)}=nx^{(n-1)}$；

（2）$\Delta^n x^{(n)}=n!$.

六、利用（表 2）求出 $n=9$ 时的 *stirling* 数，并填入表中。

七、试用阶乘函数表达级数 $\sum_{x=1}^{n}(x^5-3x^3+x)$ 的一般项。

八、将 $f(x)=x^3-2x^2+x+5$ 用阶乘函数表示。

九、试证：$\Delta mC_x^n = C_x^{n-m}$ $(m<n)$

§3 有 限 和 分

一、差分的逆运算

已知x的函数U_x，我们的目的是求另一函数V_x，使V_x的一阶差分等于U_x。如同微积分学中引进微分和导数以后接着就引进不定积分一样，在引进有限差分概念之后，我们也引进它的逆运算——有限和分。

定义 1 设x的函数U_x，若有x的另一函数V_x，其差分等于U_x，即

$$\triangle V_x = U_x \qquad (3-1)$$

称V_x为函数U_x的和分，求V_x叫做求和分。

由（3—1）式看出U_x的和分定义出差分等于U_x的某个函数，和分与差分的关系相当于积分与微分的关系。

现在先回答两个问题。

第一个问题：若适合（3—1）式的函数V_x存在，一共有多少个？

我们首先设V_x是U_x的和分，则V_x与任意常数C的和V_x+C仍然适合（3—1）。这是因为

$$\triangle(V_x+C)=\triangle V_x+\triangle C=U_x$$

其次，若C_x是一个以1为周期的x的函数，由§1差分性质1，V_x+C_x也必定适合（3—1），这是因为

$$\triangle(V_x+C_x)=\triangle V_x+\triangle C_x=U_x$$

由此可知，V_x+C_x也是函数U_x的和分，由于函数C_x（任意常数C也可以认为是一个周期为1的函数）的不确定性，从而告诉我们U_x的和分有无穷多个，C_x仍可叫常数项。

第二个问题：V_x+C_x是否包含了所有U_x的和分呢？回答是肯定的，函数族V_x+C_x已经包含了U_x的所有和分。

事实上，设W_x和V_x皆为U_x的任意两个和分，那末差W_x-V_x的差分

$$\triangle(W_x-V_x)=\triangle W_x-\triangle V_x=U_x-U_x\equiv 0$$

由§差分性质1，知道差W_x-V_x是一个周期为1的函数，设该函数为C_x，则有

$$W_x-U_x=C_x \quad 或$$

$$W_x=U_x+C_x$$

从而说明V_x+C_x包含3U_x的所有和分。

定义 2 函数U_x的全体和分叫做U_x的不定和分，记作"$\int U_x\triangle x$"。即

$$\int U_x\triangle x=V_x+C_x \qquad (3-2)$$

其中V_x是U_x的一个和分，C_x是以1为周期的函数，它相当于积分学中不定积分中的常数。

应当注意的是，（3—2）中$\triangle x=1$，但在和分记号中$\triangle x$却不能省略。这是因为当比较（3—2）两边的因次或进行自变数的变换时，$\triangle x$的存在是必需的。由于C_x相当于常数项，（3—2）有时也记作

$$\int U_x\triangle x=V_x+C \qquad (3-3)$$

（3—2）或（3—3）有时简称"和分"或"有限和分"。

例如，

$$\triangle \frac{x^{(3)}}{3} = x^{(2)}$$

称$\frac{1}{3}x^{(3)}$是$x^{(2)}$的一个和分，其不定和分为

$$\int x^{(2)} \triangle x = \frac{x^{(3)}}{3} + C$$

$$\because \quad \triangle\left(\frac{1}{x}\right) = -\frac{1}{x(x+1)} \quad 或$$

$$\triangle\left(-\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x(x+1)}$$

$\left(-\frac{1}{x}\right)$是$\frac{1}{x(x+1)}$的一个和分，其不定和分为

$$\int \frac{\triangle x}{x(x+1)} = -\frac{1}{x} + C$$

$$\because \quad \triangle \ln x = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$$

$\ln x$是$\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)$的一个和分，其不定和分为

$$\int \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) \triangle x = \ln x + C$$

二、不定和分的性质

根据和分的定义，我们可以直接推得和分的第一个性

质。

性质 1 $$\Delta\int U_x\Delta x = U_x \qquad (3-4)$$

及

$$\int\Delta V_x + C \qquad (3-5)$$

这就是说，先进行和分运算后进行差分运算，两者的作用抵消；若先进行差分运算后进行和分运算，抵消后差一常数项。

证明留给读者。

性质 2 若U_x和V_x为x的两个函数，就有

$$\int (U_x \pm V_x)\Delta x = \int U_x\Delta x \pm \int V_x\Delta x \qquad (3-6)$$

函数和的不定和分等于函数不定和分的和。这个性质对有限个函数的情形也适用。

为了证明（3－6）的正确性，只要证明右边的差分等于左边的被求和的函数就行了。

事实上，因为函数代数和的差分，等于各函数差分的代数和，故有

$$\Delta\left(\int U_x\Delta x \pm \int V_x\Delta x\right) = \Delta\int U_x\Delta x \pm \Delta\int V_x\Delta x$$

由性质 1 知这就是$U_x \pm V_x$。

性质 3 若k为常数，则有

$$\int k\cdot U_x\Delta x = k\cdot\int U_x\Delta x \qquad (3-7)$$

常数因子可以提到和分符号外面。

证明从略。

性质 4 （分部性质）

$$\int U_x\Delta V_x = U_xV_x - \int V_{x+1}\Delta U_x \qquad (3-8)$$

证明：

由函数乘积的差分知

$$\Delta(U_xV_x) = U_x\Delta V_x + V_{x+1}\Delta U_x$$

移项

$$U_x\Delta V_x = \Delta(U_xV_x) - V_{x+1}\Delta U_x$$

对上式两边求和分，并利用不定和分性质1与2得

$$\int U_x\Delta V_x = U_xV_x - \int V_{x+1}\Delta U_x$$

这就是公式（3—8），称为分部和分公式。在具体问题里，若求和分$\int U_x\Delta V_x$有困难，而求$\int V_{x+1}\Delta U_x$比较容易，就可以利用（3—8）将和分$\int U_x\Delta V_x$的计算转化为$\int V_{x+1}\Delta U_x$的计算。

差分与和分既然互为逆运算，我们就能够根据差分公式得出相应的和分公式：

$$\Delta V_x = U_x \longleftrightarrow \int U_x\Delta x = V_x + C$$

$$\Delta x^{(3)} = 3x^{(2)} \longleftrightarrow \int x^{(2)}\Delta x = \frac{1}{3}x^{(3)} + C$$

$$\Delta 3^x = 2.3^x \longleftrightarrow \int 3^x\Delta x = \frac{1}{2}\cdot 3^x + C$$

从而所有的差分公式都可以相应地换为和分公式而列成一表。为减少篇幅各和分公式中应有的常数项均略而不写。

三、差、和分公式对照表

下面我们利用（表3）求已给函数的有限和分。

〔例 1〕 试求 $\int x(x+1)(x+2)\Delta x$

解：因为 $x(x+1)(x+2) = (x+2)^{(3)}$

依（表3）中公式9（$a=2$、$b=1$）有

$$\int x(x+1)(x+2)\Delta x = \int(2+x)^{(3)}\Delta x = \frac{1}{4}(2+x)^{(4)}$$

（表3）

	差分公式	和分公式
1	$\triangle(a+bx)=b$ （a，b皆为常数）	$\int b\triangle x=a+bx$
2	$\triangle(\frac{1}{x})=-\frac{1}{x(x+1)}$	$\int\frac{\triangle x}{x(x+1)}=-\frac{1}{x}$
3	$\triangle(\frac{1}{x^2})=-\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}$	$\int\frac{2x+1}{x^2(x+1)^2}\triangle x=-\frac{1}{x^2}$
4	$\triangle x^n=c_n^1x^{n-1}+c_n^2x^{n-2}+\cdots+c_n^{n-1}x+1$ $\triangle(a+bx)^n=b\{c_n^1(a+bx)^{n-1}+c_n^2(a+bx)^{n-2}\triangle(a+bx)$ $+\cdots+c_n^{n-1}(a+bx)[\triangle(a+bx)]^{n-2}+[\triangle(a+bx)]^{n-1}\}$	$\int(c_n^1x^{n-1}+c_n^2x^{n-2}+\cdots+c_n^{n-1}x+1)\triangle x=x^n$

5	$\triangle\left\{\frac{1}{3b}\left[(a+bx)^3-\frac{3}{2}b(a+bx)^2+\frac{b^2}{2}(a+bx)\right]\right\}=(a+bx)^2$	$\int(a+bx)^2\triangle x=\frac{1}{3b}\left[(a+bx)^3-\frac{3}{2}b(a+bx)^2+\frac{b^2}{2}(a+bx)\right]$
6	$\triangle x!=x\cdot x!$	$\int x\cdot x!\ \triangle x=x!$
7	$\triangle c_x^n=c_x^{n-1}$	$\int c_x^n\ \triangle x=c_x^{n+1}$
8	$\triangle x^{(n)}=nx^{(n-1)}$	$\int x^{(n)}\triangle x=\frac{x^{(n+1)}}{n+1}\quad(n\neq-1)$
9	$\triangle(a+bx)^{(n)}=nb(a+bx)^{(n-1)}$	$\int(a+bx)^{(n)}\triangle x=\frac{(a+bx)^{(n+1)}}{b(n+1)}\quad(\neq-1)$
10	$\triangle(ar^x)=a(r-1)r^x$	$\int ar^x\triangle x=\frac{ar^x}{r-1}\quad(r\neq1)$
11	$\triangle\ln x=\ln(1+\frac{1}{x})$	$\int\ln(+\frac{1}{x}\triangle x=\ln x$

12	$\triangle\sin(a+bx)=2\sin\frac{b}{2}\cos(a+\frac{b}{2}+bx)$	$\int\cos(a+\frac{b}{2}+bx)\triangle x=\frac{\sin(a+bx)}{2\sin b/2}$
13	$\triangle\cos(a+bx)=-2\sin\frac{b}{2}\sin(a+\frac{b}{2}+bx)$	$\int\sin(a+\frac{b}{2}+bx)\triangle x=-\frac{\cos(a+bx)}{2\sin b/2}$
14	$\triangle \mathrm{tg}(a+bx)=\frac{\sin b}{\cos(a+bx)\cos(a+b+bx)}$	$\int\sec(a+bx)\sec(a+b+bx)\triangle x=\frac{\mathrm{tg}(a+bx)}{\sin b}$
15	$\triangle \mathrm{ctg}(a+bx)=\frac{-\sin b}{\sin(a+bx)\cos(a+b+bx)}$	$\int\csc(a+bx)\sec(a+b+bx)\triangle x=-\frac{\mathrm{ctg}(a+bx)}{\sin b}$

16	$\triangle \operatorname{arctg}(a+bx) = \operatorname{arctg} \dfrac{b}{b^2x^2+(b^2+2ab)x+ab+a^2+1}$	$\int \operatorname{arctg} \dfrac{b}{b^2x^2+(b^2+2ab)x+ab+a^2+1} \triangle x = \operatorname{arctg}(a+bx)$
17	$\triangle \operatorname{arc\ ctg}(a+bx) = \operatorname{arc\ ctg} \dfrac{b}{b^2x^2+(b^2+2ab)x+ab+a^2+1} - \dfrac{\pi}{2}$	$\int \operatorname{arcctg}^{-1} \dfrac{b}{b^2x^2+(b^2+2ab)x+ab+a^2+1}$ $\triangle x = \dfrac{\pi}{2}x + \operatorname{arcctg}^{-1}(a+bx)$
18	$\triangle \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2+x+1}$	$\int \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2+n+1} \triangle x = \operatorname{arctg} x$
19	$\triangle \operatorname{arc\ ctg} x = \operatorname{arc\ ctg} \dfrac{1}{x^2+x+1} - \dfrac{\pi}{2}$	$\int \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x^2+x+1} \triangle x = \dfrac{\pi}{2} x + \operatorname{arcctg} x$
20	$\triangle \sec(a+bx) = \dfrac{2\sin\frac{b}{2}\ \sin(a+\frac{b}{2}+bx)}{\cos(a+bx)\cos(a+b+bx)}$	$\int \dfrac{\sin(a+\frac{b}{2}+bx)}{\cos(a+bx)\cos(a+b+bx)} \triangle x = \dfrac{\sec(a+bx)}{2\sin\frac{b}{2}}$

21	$\triangle \mathrm{cse}(a+bx)=\dfrac{-2\sin\frac{b}{2}\cos(a+\frac{b}{2}+bx)}{\sin(a+bx)\sin(a+b+bx)}$	$\int\dfrac{\cos(a+\frac{b}{2}+bx)}{\sin(a+bx)\sin(a+b+bx)}\triangle x=\dfrac{-\mathrm{cse}(a+bx)}{2\sin\frac{b}{2}}$
22	$\triangle(\alpha U_x\pm\beta V_x)=\alpha\Delta U_x\pm\beta\Delta V_x$ $\triangle^n(\alpha U_x\pm\beta V_x)=\alpha\Delta^n U_x\pm\beta\Delta^n V_x$	$\int(\alpha U_x\pm\beta V_x)\Delta x=$ $\alpha\int U_x\Delta\pm\beta\int V_x\Delta x$
23	$\triangle(U_xV_x)=U_x\Delta V_x+V_{x+1}\Delta U_x$ $\triangle(U_xV_x)=V_x\Delta_x U+U_{x+1}\Delta V_x$	$\int U_x\Delta V_x=U_xV_x-\int V_{x+1}\Delta U_x$
24	$\triangle\left(\dfrac{U_x}{V_x}\right)=\dfrac{V_x\Delta U_x-U_x\Delta V_x}{V_x\ V_{x+1}}$	$\int\dfrac{\Delta U_x}{V_{x+1}}-\int\dfrac{U_x}{V_xV_{x+1}}\Delta V_x=\dfrac{U_x}{V_x}$

注：22—24是运算规律的对照表

$$+C=\frac{1}{4}(x+2)(x+1)\cdot x(x-1)+C$$

〔**例 2**〕 试求有限和分 $\int(2x^3-3x^2+3x-10)\Delta x$。

解：利用阶乘函数表达式知

$$2x^3-3x^2+3x-10=2x^{(3)}+3x^{(2)}+2x^{(1)}-10$$

（见 § 2 例 2）从而有

$$\int(2x^3-3x^2+3x-10)\Delta x=\int(2x^{(3)}$$

$$+3x^{(2)}+2x^{(1)}-10)\Delta x$$

$$=\frac{1}{2}x^{(4)}+x^{(3)}+x^{(2)}-10x+C$$

$$=\frac{1}{2}x(x-1)(x-2)(x-3)+x(x-1)(x-2)+x(x-1)$$

$$-10x+C\cdot$$

〔**例 3**〕求有限和分 $\int x\cdot 3^x\Delta x$。

解：利用分部和分公式（(表 3)公式23)

设$U_x=x$，$\Delta V_x=3^x\Delta x$，

$$\Delta U_x=\Delta x,\ V_x=\frac{1}{2}\cdot 3_x,\ V_{x+1}=\frac{3}{2}\cdot 3^x，从而$$

$$\int x\cdot 3^x\Delta x=x\cdot\frac{1}{2}\cdot 3^x-\int\frac{3}{2}\cdot 3^x\Delta^x+C$$

$$=\frac{x}{2}\cdot 3^x-\frac{3}{4}\cdot 3^x+C$$

$$=\left(\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\cdot 3^x+C$$

〔**例 4**〕求和分 $\int arctg\frac{1}{2k^2}\Delta k\cdot$

解：利用（表 3 ）中公式16，选择a、b使等式

$$\frac{b}{b^2k^2+(b^2+2ab)k+ab+a^2+1}=\frac{1}{2k^2} \qquad (b\neq 0)$$

成立，因此还需有$b=2$。且有

$$\begin{cases} b^2+2ab=0 & ① \\ ab+a^2+1=0 & ② \end{cases}$$

$\because b\neq 0$，由①知 $b=-2a$，代入②得

$a^2=1$，$a=\pm 1$。因为$b=2$，故$a=-1$ （$a=1$ 舍去）

$\therefore a=-1$，$b=2$。

$$\int \operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}\Delta k=\operatorname{arctg}(2k-1)+C$$

〔**例 5**〕求有限和分$\int x^2(n-x)^2\Delta x$。

解：由 § 2 公式（2—9）知

$$x^2(n-x)^2=(n-1)^2x^{(1)}+(n^2-6n+7)x^{(2)}+(6-2n)x^{(3)}+x^{(4)}$$

所以

$$\begin{aligned}
&\int x^2(n-x)^2\Delta x \\
&=\int(n-1)^2x^{(1)}\Delta x+\int(n^2-6n+7)x^{(2)}\Delta x \\
&\qquad +\int(6-2n)x^{(3)}\Delta x+\int x^{(4)}\Delta x \\
&=\frac{1}{2}(n-1)^2x^{(2)}+\frac{1}{3}(n^2-6n+7)x^{(3)}+\frac{1}{4}\cdot \\
&\quad (6-2n)x^{(4)}+\frac{1}{5}x^{(5)}+C \\
&=\frac{1}{60}x(x-1)[30(n-1)^2+20(n^2-6n+7)(x-2)
\end{aligned}$$

$$+15(6-2n)(x-2)(x-3)+12(x-2)$$
$$(x-3)(x-4)+C$$

习 题 三

一、试求下列各有限和分：

（1） $\int x^3\Delta x$；

（2） $\int (x^3-2x+x+5)\ \Delta x$；

（3） $\int x(x+2)(x+3)\Delta x$。

二、求不定和分 $\int \dfrac{\Delta x}{(2x-1)(2x+1)(2x+3)}$。

三、求不定和分 $\int \dfrac{\Delta k}{1+2+3+\cdots+k}$。

四、求下列三角函数的和分：

（1） $\int \sin(2x+3)\Delta x$；

（2） $\int \sin^2(a+bx)\Delta x$；

（3） $\int \cos^2(a+bx)\Delta x$。

五、证明 $\int kU_x\Delta x = k\cdot\int U_x\Delta_x$。（$k$—常数）

六、证明：

（1） $\int 2^x\mathrm{tg}\,2^x\theta\Delta x = -2^x\mathrm{ctg}\,2^x\theta$；

（2） $\int \csc(a+bx)\sec(a+b+bx)\Delta x$

$$=-\frac{\mathrm{ctg}(a+bx)}{\sin b};$$

（3） $\int \sin kt\Delta k = \dfrac{\sin\dfrac{kt}{2}\sin\dfrac{k-1}{2}t}{\sin\dfrac{t}{2}}$

（以上（1）—（2）均略去和分常数C）

§4 级数求和的差分法

有限项级数求和问题是数学中极为生动和有趣的章节之一。由于级数通项的不同形式，级数分成许多种类，如代数级数，几何级数，倒数级数，混合级数，三角函数级数等；正因为种类的多样性，使各类级数求和没有也不可能有一个统一的方法。但是级数是由许多项按一定规律相加组成的，这种离散性质决定了可以运用差分的方法去解决求和问题。又因为这部分计算的基础是“有限差分”，故称这种求和方法为“级数求和的差分法”。

令V_x为x的函数，其差分为U_x，即

$\Delta V_x = U_x$

或写成不定和分形式

$$V_x + C_x = \int U_x \Delta x$$

一、基本定理

若能找到V_x使$\Delta V_x = U_x$，则有级数求和公式

$$\sum_{x=0}^{n} U_x = V_{n+1} - V_0 = V_x \Big|_0^{n+1} \qquad (4-1)$$

证明：

在差分分部性质中（§1公式（1—13）），我们有

$$\sum_{x=0}^{n} \Delta V_x = V_x \Big|_0^{n+1} = V_{x+1} - V_0$$

将$\Delta V_x = U_x$代入就有

$$\sum_{x=0}^{n} U_x = V_x \Big|_0^{n+1} = V_{n+1} - V0$$

也就是$U_0 + U_1 + U_2 + \cdots + U_n = V_x \Big|_0^{n+1} = V_{n+1} - V_0$

这就是（4—1） 证毕。

当x从a开始取值，$b = a + n$（n—正整数）则有更普遍表达式

$$\sum_{x=a}^{b-1} U_x = V_x \Big|_a^b = V_b - V_a \qquad （4—2）$$

二、级数求和与和分的关系

设V_x是U_x的和分，$\Delta V_x = U_x$，那末$V_x + C_x$也适合$\Delta V_x = U_x$，也就是

$$\int U_x \Delta x = V_x + C_x \qquad （4—3）$$

取$x = a$时，则有

$$\left[\int U_x \Delta x\right]_a = V_a + C_a$$

设n为正整数，$b = a + n\Delta x$（$\Delta x = 1$），取$x = b$则有

$$\left[\int U_x \Delta x\right]_b = V + C_b$$

我们用$\int_a^b U_x \Delta x$表示差$\left[\int U_x \Delta x\right]_b - \left[\int U_x \Delta_x\right]_a$，由于$C_x$是以1为周期的函数$C_a = C_b$，故

$$\int_a^b U_x \Delta x = V_b - V_a = Vx \Big|_a^b \qquad （4—4）$$

(4—4)类似微积分中牛顿—莱布尼兹公式，而表达式$\int_a^b U_x \Delta x$相当于积分学中定积分，我们称为"定和分"。a称为定和分下限，b称为定和分上限，基于对不定和分表达式讨论中同样理由，定和分表达式中Δx虽然等于1但却不能少。

由（4—2）和（4—4）知

$$\sum_{x=a}^{b-1} U_x = \int_a^b U_x \Delta x \qquad (4-5)$$

这是个非常重要的公式。从数量上确定了有限级数的和$\sum_{x=a}^{b-1} U_x$与定和分$\int_a^b U_x \Delta x$的关系，在以后考虑某级数求和问题时，常应用此公式将它化为定和分问题来解决，其步骤是，先将级数求和化为定和分表达式，然后求出U_x的一个和分V_x，最后把定和分的上下限代入求V_x的差。实用上用的较多的情况是$a=1$，$b=n+1$，此时公式（4—5）化为

$$\sum_{x=1}^{n} U_x = \int_1^{n+1} U_x \Delta x$$

例如$U_x = x^2$，那末

$$\sum_{x=1}^{n} x^2 = \int_1^{n+1} x^2 \Delta x\text{；}$$

当$a=0$　$b=n+1$时，，公式（4—5）化为

$$\sum_{x=0}^{n} U_x = \int_0^{n+1} U_x \Delta x$$

下面我们给定和分以几何说明。因为

$$\sum_{x=0}^{n} U_x = \sum_{x=0}^{n} \Delta V_x = \int_0^{n+1} U_x \Delta x = V_{n+1} - V.$$

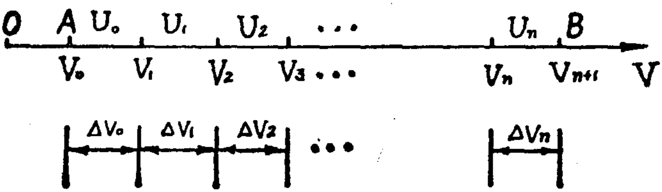

图 1　定和分的几何意义

如图 1，$\sum\limits_{x=0}^{n} U_x$表示从$A$到$B$的总长度，其值恰为差$V_{n+1}$—$V_\circ$，该差值即为和分$\int_0^{n+1} U_x \Delta x$。

三、级数求和的差分法

1、应用差、和分公式表

应用（表 3）我们再经过一些不多的初等变形，能求相当广泛一类级数的和。

〔**例 1**〕求级数　2 + 4 + 6 +…+ 2 n之和。

解： 设$U_k = 2k = 2k^{(1)}$，利用（表 3）公式 8 我们有

$$\sum_{k=1}^{n} U_k = \int_1^{n+1} 2k^{(1)} \Delta k = 2 \cdot \frac{k^{(2)}}{2} \Bigg|_1^{n+1}$$

$$= k(k-1)\Big|_{1}^{n+1} = (n+1)\cdot n$$

类似可求 $1+3+5+\cdots+(2n-1)$ 的和。

$\sum_{k=1}^{n} 2k$ 与 $\sum_{k=1}^{n}(2k-1)$ 等级数求和问题在我国清代就由数学家陈世仁（1676—1722）详细研究过，他分别称上面两个级数为“抽奇平尖”和“抽偶平尖”。他研究的其它更复杂的级数求和公式有

倍尖 $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^{n}-1$ （4—6）

方尖 $1^2+2^2+3^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ （4—7）

再乘尖 $1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3=[\frac{1}{2}n(n+1)]^2$ （4—8）

抽偶方尖 $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2$

$=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$ （4—9）

抽偶再乘尖 $1^3+3^3+5^3+\cdots+(2n-1)^3$

$=n^2(2n^2-1)$ （4—10）

等等。翻阅中国数学史，特别是这种“抽奇”“抽偶”后再进行级数求和是我国前代数学家所没有研究过的，包括宋元数学家也未曾讨论过，康熙以前传入的西方数学中也没有这方面的知识，陈世仁在级数求和的研究方面有他独到的见解，遗憾的是他的名字却很少为世人所知。

下面我们用差分方法验证公式（4—6）.

〔**例 2**〕验证 $1+2+4+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$.

设$U_k=2^k$，利用（表3）公式10

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = 1+2+4+\cdots+2^{n-1} = \int_0^n 2^k \Delta k = \frac{2^k}{2-1}\Bigg|_0^n$$

$$= 2^n - 1$$

这就是陈世仁的结果（4—6）。

〔**例3**〕求级数$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}$的和。

解：这是一个倒数级数，我们先将它的一般项用阶乘函数表示出来。

$$\because \{a+b(k-1)\}^{(-2)} = \frac{1}{(a+bk)[a+b(k+1)]}$$

令$a=1$，$b=2$

$$\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = [1+2(k-1)]^{(-2)} = (2k-1)^{(-2)}$$

由公式9知

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{(2k+1)(2k+3)} = \int_0^{n+1}(2k-1)^{(-2)}\Delta k$$

$$= \frac{(2k-1)^{(-1)}}{2(-2+1)}\Bigg|_0^{n+1}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{1}{2(k+1)-1}\Bigg|_0^{n+1} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+3}\right) = \frac{n+1}{2n+3}$$

〔**例4**〕求级数$I_n=\sum_{k=0}^{n} k\cdot k!$的和

解：直接在（表3）中查公式6，令$x=k$，

$$I_n=\sum_{k=0}^{n} k\cdot k\,!=\int_0^{n+1} k\cdot k\,!\Delta k=k\,!\Big|_0^{n+1}$$

$$=(n+1)\,!-1$$

〔例 5〕求三角级数$I_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\operatorname{arctg}\frac{1}{2k^2}$的和。

解：在§3例4中已经算出

$$\int \operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2k^2}\Delta k=\operatorname{arc\,tg}(2k-1)+C$$

所以

$$I_n=\int_1^{n+1}\operatorname{arc\,tg}\frac{1}{2k^2}\Delta k=\operatorname{arc\,tg}(2k-1)\Big|_1^{n+1}$$

$$=\operatorname{arc\,tg}(2n+1)-\frac{\pi}{4}$$

〔例 6〕求三角级数 $\sin t+\sin 2t+\sin 3t+\cdots+\sin nt$ 的和。

解：设 $I_n=\sin t+\sin 2t+\cdots+\sin nt=\sum\limits_{k=1}^{n}\sin kt$利用（表3）中公式13，$a=-\frac{t}{2}$，$b=t$，$x=k$。

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}\sin kt=\int_1^{n+1}\sin kt\Delta k$$

$$=-\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\Bigg|_1^{n+1}$$

$$= -\frac{\cos(n+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}} + \frac{\cos\frac{t}{2}}{2\sin\frac{t}{2}} = \frac{1}{2}\csc\frac{t}{2}$$

$$\left[\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t\right]$$

运用和差化积公式

$$\cos\frac{t}{2} - \cos(n+\frac{1}{2})t = -2\sin\frac{\frac{t}{2}+(n+\frac{1}{2})t}{2}$$

$$\sin\frac{\frac{t}{2}-(n+\frac{1}{2})t}{2} = 2\sin\frac{n+1}{2}t\ \sin\frac{n}{2}t$$

所以最后得出

$$I_n = \sum_{k=1}^{n}\sin kt = \frac{2\sin\frac{n+1}{2}t\sin\frac{n}{2}t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

$$= \csc\frac{t}{2}\ \sin\frac{n+1}{2}t\ \sin\frac{n}{2}t.$$

本题也可直接应用习题三中六题(3)的结果。类似可求$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt$之和。

〔例 7〕设一级数第k项为k^3+7k，试求此级数前n项

之和。

解：（1）首先将k^3+7k化为可以查表的形式。由于$k=k^{(1)}$；$k^3=k+3k^{(2)}+k^{(3)}$，多项式k^3+7k的每一项按要求都化成了阶乘函数表达式，从而有

$$
\begin{aligned}
k^3+7k &= \left(k^{(3)}+3k^{(2)}+k^{(1)}\right)+7k^{(1)} \\
&= k^{(3)}+3k^{(2)}+8k^{(1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\left(k^3+7k\right) &= \sum_{k=1}^{n}\left(k^{(3)}+3k^{(2)}+8k^{(1)}\right) \\
&= \int_{1}^{n+1}\left(k^{(3)}+3k^{(2)}+8k^{(1)}\right)\Delta k \\
&= \left[\frac{k^{(4)}}{4}+k^{(3)}+4k^{(2)}\right]_{1}^{n+1} \\
&= \frac{1}{4}(n+1)^{(4)}+(n+1)^{(3)}+4(n+1)^{(2)} \\
&= \frac{1}{4}n(n+1)\left(n^2+n+14\right)
\end{aligned}
$$

这道例题启发我们，级数之一般项为多项式时（次数不宜太高）就可以将多项式化为阶乘函数表达式，从而利用（表3）中有关公式迅速地求出级数之和。类似可求出$\sum\limits_{k=1}^{n-1}k^2(n-k)^2$之和。

2、应用分部性质

从差、和分公式表中公式23与定和分的概念可以得出下面的公式：

$$\int_{1}^{n+1} U_x \Delta V_x = U_x V_x \Big|_{1}^{n+1} - \int_{1}^{n+1} V_{x+1} \Delta U \tag{4—11}$$

当x从 0 开始取值时，公式中和分下限应换为 0。这个公式在级数求和的众方法中有特殊的作用。特别是当级数的一般项表示为不同种类的函数相乘积时，不妨试试用分部法。例如，级数$\sum a^k \sin kx$是由几何级数$\sum a^k$与三角级数$\sum \sin kx$的对应一般项相乘再相加所得到；级数$\sum \frac{k^2}{(2k-1)(2k+1)}$是由级数$\sum k^2$与倒数级数$\sum \frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$对应一般项相乘再相加所构成等等，这类级数一般称为混合级数。

〔**例 8**〕 求混合级数 $I_n = \sum_{k=1}^{n} k \sin kt$的和。

解：应用（表 3）中公式23：

设$U_k = k$，　　$\Delta V_k = \sin kt \Delta k$，

$$\Delta U_k = \Delta k \quad , \quad V_k = -\frac{\cos(k - \frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}},$$

$$V_{k+1} = \frac{-\cos(k + \frac{1}{2})t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

所以应用 4 —11

$$\mathrm{I}_n=\int_1^{n+1} k\sin kt\Delta k=-k\cdot\frac{\cos\left(k-\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\Bigg|_1^{n+1}$$

$$+\int_1^{n+1}\frac{\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\frac{t}{2}}\Delta k$$

所以

$$\mathrm{I}_n=\frac{1}{2\sin\frac{t}{2}}\left[\cos\frac{t}{2}-(n+1)\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right]$$

$$+\frac{1}{2}\csc\frac{t}{2}\int_1^{n+1}\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\quad t\Delta k$$

再应用公式12（其中$b=t$，$a=0$）知

$$\int_1^{n+1}\cos\left(kt+\frac{t}{2}\right)\Delta k=\frac{\sin kt}{2\sin\frac{t}{2}}\Bigg|_1^{n+1}$$

$$=\frac{\sin(n+1)t-\sin t}{2\sin\frac{t}{2}}$$

代入上式I_n中，经整理有

$$I_n=\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\left\{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}-2(n+1)\sin\frac{t}{2}\right.$$

$$\cos(n+\frac{1}{2})\ t\ \Big\}+\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\Big[\sin(n+1)t-\sin t\Big]$$

$$=\frac{1}{2\sin^2\frac{t}{2}}\Big\{\sin t-(n+1)\ [\sin(n+1)t-\sin nt]$$

$$+\sin(n+1)t-\sin t\Big\}$$

$$=\frac{1}{4\sin^2\frac{t}{2}}\Big[(n+1)\sin\ nt-n\ \sin(n+1)t\Big]$$

〔例 9〕 (算术—几何级数)

求级数$I_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a+bk)\ q^k$ (a、b、q为常数，$q\neq1$) 的和。

解： $I_n=\int_0^n (a+bk)\ q^k\Delta k$

设 $U_k=a+bk$，$\Delta V_k=q^k\Delta k$，

$$\Delta U_k=b\Delta k,\qquad V_k=\frac{q^k}{q-1},\qquad V_{k+1}=\frac{q^{k+1}}{q-1}$$

所以由（4—11）

$$I_n=(a+bk)\frac{q^k}{q-1}\Big|_0^n-\int_0^n\frac{q^{k+1}}{q-1}b\cdot\Delta k$$

$$=\frac{a+bn}{q-1}q^n-\frac{a}{q-1}-\frac{bq}{q-1}\int_0^n q^k\Delta k$$

$$=\frac{1}{q-1}(a+bn)\ q^n-\frac{a}{q-1}-\frac{bq}{(q-1)^2}q^k\Big|_o^n$$

$$=\frac{1}{q-1}\left[(a+bn)q^n-a\right]+\frac{1}{(q-1)^2}bq(1-q^n)$$

3、应用待定法

求函数U_x的和分若不便于使用前面两种方法时，可采用下面介绍的待定系数和待定函数两种方法，这两种方法统称“待定法”，这种方法的理论根据是差分所具有的特殊运算性质。原来差分运算Δ作用在函数上时，多项式仍为多项式，指数函数仍为指数函数，三角函数仍为三角函数。下面我们通过具体例子说明待定法在级数求和中的应用。

〔**例10**〕设有一级 数第x项为$\frac{x\cdot 2^x}{(x+2)!}$，试求其前$n$项之和。

解：欲求一函数V_x，使得下式成立：

$$\Delta V_x=U_x=\frac{x\cdot 2^x}{(x+2)!}$$

由于我们对差分运算的了解，可设

$$V_x=\frac{f(x)\cdot 2^x}{(x+1)!}$$

其中$f(x)$是x的一个特定有理整函数。因为

$$\triangle V_x=V_{x+1}-V_x=\frac{f(x+1)\cdot 2^{x+1}}{(x+2)!}-\frac{f(x)\cdot 2^x}{(x+1)!}$$

$$=\frac{x\cdot 2^x}{(x+2)!}$$

所以

$$2f(x+1)-(x+2)f(x)=x$$

此式右端是一次式，左端也必须是一次式，故f (x) 应为常数，设$f(x)=k$，$f(x+1)=k$，从而有

$$2k-(x+2)k=x$$

解出 $k=-1$，故 $V_x=-\dfrac{2^x}{(x+1)!}$

$$\sum_{x=1}^{n} U_x=\sum_{x=1}^{n}\frac{x\cdot 2^x}{(x+2)!}=\int_1^n\frac{x\cdot 2^x}{(x+2)!}\Delta x$$

$$=-\frac{2^x}{(x+1)!}\Bigg|_1^{n+1}=1-\frac{2^{n+1}}{(n+2)!}$$

〔**例11**〕 设有一级数的第x项为ax^2+bx+c，试求其前n项之和。

解：设所求函数V_x满足

$$\Delta V_x=U_x=ax^2+bx+c$$

由于多项式经过一次差分运算后次数降低一次，故设

$V_x=x(Ax^2+Bx+D)=Ax^3+Bx^2+Dx$ （其中A、B、D为待定系数）。该函数的一次差分

$$\begin{aligned}\Delta V_x&=A\Delta(x^3)+B\Delta(x)^2+D\Delta x\\&=A(3x^2+3x+1)+B(2x+1)+D\\&=3Ax^2+(3A+2B)x+(A+B+D)\end{aligned}$$

但已知

$$\Delta V_x=ax^2+bx+c$$

从而有

$$3Ax^2+(3A+2B)x+(A+B+D)=ax^2+bx+c$$

这是一个恒等式，由同次幂系数相等我们有

$$\begin{cases} 3A = a \\ 3A + 2B = b \\ A + B + D = c \end{cases}$$

解出 $A = \dfrac{a}{3}$， $B = \dfrac{b-a}{2}$， $D = c + \dfrac{a}{6} - \dfrac{b}{2}$

所以我们得到V_x的具体形式是

$$V_x = \frac{a}{3}x^3 + \frac{b-a}{2}x^2 + (c + \frac{a}{6} - \frac{b}{2})x$$

$$\sum_{x=0}^{n-1} (ax^2 + bx + c) = \int_0^n (ax^2 + bx + c)\triangle x$$

$$= \left[\frac{a}{3}x^3 + \frac{b-a}{2}x^2 + (c + \frac{a}{6} - \frac{b}{2})x\right]_0^n$$

$$= n(\frac{a}{3}n^2 + \frac{b-a}{2}n + c + \frac{a}{6} - \frac{b}{2})$$

4、应用基本定理

寻求级数求和的各种途径还可以回到基本定理，运用试验、猜测、修正的办法求出函数V_x，使它适合$\triangle V_x = U_x$。在数学中这种解决问题的思想方法也不乏其例，如分解多项式时先猜其某一个根，求非齐次线性微分方程的一个特解等，都是通过经验拼凑出所需要的结果。

〔**例12**〕 求级数 $\sum\limits_{k=0}^{n}(2k+1)^2$ 的和。

解： 若将$(2k+1)^2$化为阶乘函数表示，能够将此级数

的和求出，我们换一种方式，直接求V_k，使$\triangle V_k=(2k+1)^2$，从而可以使用基本定理。

如何求出$V_k=$？详细求解过程见公式（1—16)的 导出步骤，或见（表 3）中公式 5 .

$$(a+bk)^2=\Delta\left\{\frac{1}{36}\left[(a+bk)^3-\frac{3}{2}b(a+bk)^2+\frac{b^2}{2}(a+bk)\right]\right\}$$

此时，$(a+bk)^2$已经用一个函数的差分表示了出来，设

$a=1$，$b=2$，上式化为

$$(2k+1)^2=\Delta\left\{\frac{1}{6}\left[(2k+1)^3-3(2k+1)^2+2(2k+1)\right]\right\}$$

$$\sum_{k=0}^{n}(2k+1)^2=\int_0^{n+1}(2k+1)^2\Delta k$$

$$=\frac{1}{6}\left[(2k+1)^3-3(2k+1)^2+2(2k+1)\right]_0^{n+1}$$

$$=\frac{1}{6}\left[(2n+3)^3-3(2n+3)^2+2(2n+3)\right]$$

$$=\frac{1}{6}(2n+3)\left[4n^2+6n+2\right]$$

$$=\frac{1}{3}(n+1)(2n+1)(2n+3)$$

这个例子告诉我们，通过各种公式和原有知识去寻求一个新函数，使该函数的差分等于我们给出的已知函数，从而不断扩大差、和分的公式范围。

〔例13〕 求级数 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i^2-1}$ 的和。

解：

$$\frac{1}{4i^2-1}=\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}=\frac{1}{(2i-1)[2(i+1)-1]}$$

由（表3）中公式24商的差分公式，若设 $V_i=2i-1$，则

$$V_{i+1}=2(i+1)-1=2i+1;\quad \Delta V_i=2\Delta i$$

令待定函数 U_i 适合

$$\frac{1}{(2i-1)(2i+1)}=\Delta\left(\frac{U_i}{V_i}\right)=\frac{V_i\Delta U_i-U_i\Delta V_i}{V_iV_{i+1}}$$

$$=\frac{(2i-1)\Delta U_i-2U_i}{(2i-1)(2i+1)}$$

因此有等式

$$(2i-1)\Delta U_i-2U_i=1\qquad 或$$

$$(2i-1)(U_{i+1}-U_i)-2U_i=1$$

整理成下面等式

$$2i(U_{i+1}-U_i)-(U_{i+1}+U_i)=1$$

由此式可知 U_i 只能是一个常数，才能使右端成为 i 的零次多项式，故设 $U_i=k$（k—待定常数）$U_{i+1}=k$，代入上式知

$$-2k=1\qquad k=-\frac{1}{2}$$

所以 $U_i=-\frac{1}{2}$，从而 $\frac{U_i}{V_i}=\frac{-\frac{1}{2}}{2i-1}$

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i^2-1}=\int_1^{n+1}\frac{\Delta i}{(2i-1)(2i+1)}$$

$$=\int_1^{n+1}\Delta\left(\frac{U_i}{V_i}\right)=\int_1^{n+1}\Delta\left(\frac{-\frac{1}{2}}{2i-1}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{1}{2i-1}\Bigg|_1^{n+1}=-\frac{1}{2}\frac{1}{2(n+1)-1}+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)=\frac{n}{2n+1}$$

最后求出

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{4i^2-1}=\frac{n}{2n+1}.$$

类似可证出 $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{(3i-2)(3i+1)}=\frac{n}{3n+1}$成立．

四、关于基本定理的注记

1、关于差分方程$\Delta V_x=U_x$解的存在性问题

含有未知函数V_x差分的等式

$$\Delta V_x=U_x$$

称为差分方程。V_x不是在任何条件下都存在，只有对函数U_x加以条件限制，才能从该差分方程中解出V_x。例如，当U_x为多项式时，按照牛顿定理

$$U_x=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Delta^k U_0}{k!}x^{(k)}$$

$$\Delta V_x=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Delta^k U_0}{k!}x^{(k)}$$

$$V_x=\sum_{k=0}^{n}\int\frac{\Delta^k U_0}{k!}x^{(k)}\Delta k+c$$

$$=\sum_{k=0}^{n}\frac{\Delta^k U_0}{(k+1)!}x^{(k+1)}+c \qquad (4-12)$$

U_x为其它一些特殊函数也有类似情形。一般有以下的结论：

若U_x是x的连续函数，则方程$\Delta V_x=U_x$至少有一个解，并且这个解当$n\leqslant x<n+1$时有以下形式

$$V_x=S(x-n,\ n-1) \qquad (4-13)$$

其中$S(x,\ n)=U_x+U_{x+1}+\cdots\cdots+U_{x+n}$ (4—14)

显然，若U_x连续，以这样形式给出的函数V_x当然也是连续的。这里不再证明了，有兴趣的读者可以阅读$A\cdot O$盖尔芬德著《有限差计算》下卷第四章的有关内容。

2、$\Delta V_x=U_x$无解情况举例

即使我们知道$\Delta V_x=U_x$的解存在，我们仍然不能保证从$\Delta V_k=U_k$中解出V_x。通常情况下，遇到在初等函数范围内不能找到V_x时，我们求和分的步骤便要停止下来。例如

$\Delta V_x=\frac{1}{x}$，$\Delta=\frac{1}{x^2}$，$\Delta V_x=\ln x$等等在初等函数范围内便没有解，这与积分学中$\int\frac{\sin x}{x}dx$，$\int\frac{dx}{\ln x}$在初等函数范围内无法求出原函数是类似的。

习 题 四

一、求级数的和：

（1）$1^3+2^3+3^3+\cdots+n^3$；

（2）$1^4+2^4+3^4+\cdots+n^4$；

（3）$\sin\varphi+\sin(\varphi+\alpha)+\sin(\varphi+2\alpha)+\cdots+\sin(\varphi+n\alpha)$；

（4）$\cos\varphi+\cos(\varphi+\alpha)+\cos(\varphi+2\alpha)+\cdots+\cos(\varphi+n\alpha)$；

（5）$\cos x+\cos 3x+\cdots+\cos(2n-1)x$；

（6）$\dfrac{1}{1\cdot2\cdot4}+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot5}+\dfrac{1}{3\cdot4\cdot6}+\cdots+\dfrac{1}{n(n+1)(n+3)}$；

（7）$12+40+90+168+280+\cdots$ 至第 n 项

二、试证：

（1）$\sum\limits_{x=1}^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{n}x=\operatorname{ctg}\dfrac{\pi}{2n}$；

（2）$\sum\limits_{x=1}^{n}(x^2+1)\cdot x!=n(n+1)!$

（3）$\sum\limits_{x=1}^{n}\csc 2^x\theta=\operatorname{ctg}\theta-\operatorname{ctg}2^n\theta$；（$\theta$—常数）

（4）$\sum\limits_{x=1}^{n-1}x^2(n-x)^2=\dfrac{n^5-n}{30}$．

三、用各种方法求下列级数的和：

（1） $\sum\limits_{k=1}^{n} \cos \dfrac{2k\pi}{2n+1}$；

（2） $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(5k-2)(5k+3)}$；

（3） $\sum\limits_{x=1}^{n} \dfrac{x \cdot 2^{x}}{(x+1)(x+2)}$；

（4） $\sum\limits_{x=1}^{n} \dfrac{x^{2}+x-1}{(x+2)!}$；

（5） $\sum\limits_{i=1}^{n} \dfrac{1}{(3i-2)(3i+1)}$；

（6） $\dfrac{1}{2}+\sum\limits_{k=1}^{n} \cos kt$。

五、证明：

（1） （陈世仁“抽偶方尖”）

$$1^{2}+3^{2}+5^{2}+\cdots+(2n-1)^{2}$$

$$=\frac{n}{3}(4n^{2}-1)；$$

（2） （陈世仁“抽偶再乘尖”）

$$1^{3}+3^{3}+5^{3}+\cdots+(2n-1)^{3}=n^{2}(2n^{2}-1)。$$

§5 级数求和的应用

一、宋代沈括的“隙积术”

“隙积术”是我国北宋著名科学家沈括（1031—1095）创造的用以计算长方台形垛积的一种方法，这种方法开创了我国高阶等差级数研究的新方向。沈括指出：“‘隙积’者，谓积之有隙者，如累棋层坛及酒家积罂之类，虽似复斗四面皆杀，缘有刻缺及虚隙之处，用刍童法求之，常失于数少。”他这里讲的累棋就是一层层堆积的棋子，层坛就是一层层筑起来的土台（图2），积罂就是酒店里堆积起来的酒罈（图3），刍童的原意是草堆，《九章算术》用它来专门称呼上、下底面都是矩形的长方台（图4），按标出的尺寸《九章算术》给出了计算刍童体积公式：

$$V_{刍}=\frac{h}{6}\left[\ (2q+b)p+(2b+q)a\ \right] \qquad (5-1)$$

开始沈括也用（5—1）来计算垛积，经过试验，所得结果总比正确值小（“常失于数少”），他经过刻苦钻研反复实践，终于找出了求垛积的正确方法——“隙积术”．

沈括的计算是这样的：他假定酒罈，堆成长方垛底层宽有a个酒罈，长有b个，顶层宽为p个，长为q个，计有h层（见图3），求酒罈总数就构成下面一个高阶等差级数，设其和为

S，则有

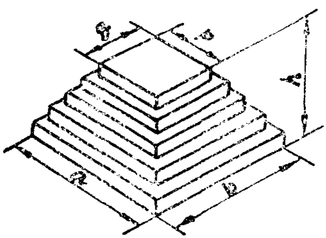

图 2　层坛

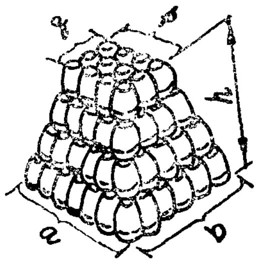

图 3　积罂

$$S = pq + (p+1)(q+1) + (p+2)(q+2) + \cdots + [p+(h-1)][q+(h-1)] \quad (5—2)$$

并得到该有限项级数求和公式

$$s = \frac{h}{6}[(2q+b)p + (2b+q)a + (b-q)] \quad (5—3)$$

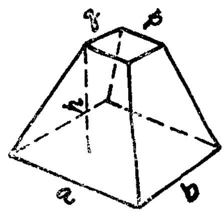

图 4　刍童

公式（5—3）是怎样得到的，沈括没有明说，后人也说法不一，考虑到中国古代数学传统中早就有着直观、应用、经验的特点，沈括可能是用经验归纳法来推导的。下面我们用和分公式直接验证公式（5—3）的正确性。

级数（5－2）可以写成

$$S = \sum_{k=0}^{h-1}(p+k)(q+k) = \int_{0}^{h}[pq + (p+q)$$

$$k+k^2\rbrack \triangle K \qquad (5-4)$$

由幂函数阶乘函数 表 达式：$k=k^{(1)}$，$k^2=k^{(1)}+k^{(2)}$，代入（5—4）

$$S=\int_0^h \lbrack pq+(p+q+1)k^{(1)}+k^{(2)}\rbrack \triangle k$$

$$=\lbrack pqk+(p+q+1)\frac{k^{(2)}}{2}+\frac{k^{(3)}}{3}\rbrack_o^h$$

$$=\frac{h}{6}\lbrack 6pq+3(p+q+1)(h-1)+2(h-1)$$

$$\cdot(h-2)\rbrack \qquad (5-5)$$

由熟知的一般等差级数求项数公式

$$l=a_1+(h-1)d$$

（l—末项，d—公差，a_1—首项，h—项数）从中解出h：

$$h=\frac{l-a_1+d}{d}$$

在我们的具体问题中，$d=1$，$a_1=P$，$l=a$，代 入 上 式得

$$h=a-p+1$$

另一方面，各层长也成一等差级数，末项$l=b$

$$h=b-q+1$$

将以上两个项数公式代入（5—5）得

$$S=\frac{h}{6}\lbrack 6pq+3p(b-q)+3q(a-p)+3(b-q)+$$
$$2(b-q)(a-p)-2(b-q)\rbrack$$
$$=\frac{h}{6}\lbrack bp+aq+2ab+2pq+(b-q)\rbrack$$

$$=\frac{h}{6}\left[(2q+b)p+(2b+q)a+(b-q)\right]$$ 从而有

$$S=\sum_{k=0}^{h-1}(p+k)(q+k)=\frac{h}{6}\left[(2q+b)p+(2b+q)a+(b-q)\right] \qquad (5-6)$$

这就导出了沈括公式（5—3），求出的总罈数s比按 公式（5—1）求出的长方台体积数多$\frac{h}{6}(b-q)$。

若在公式（5—6）中，令$p=q=1$，可推知$a=b=h$，分别代入公式（5—6）两端，

$$S=\sum_{k=0}^{h-1}(k+1)^2=\frac{h}{6}\left[(2+h)+(2h+1)h+(h-1)\right]$$

$$=\frac{h}{6}(h+1)(2h+1)$$

即有自然平方的求和公式：

$$1^2+2^2+\cdots+h^2=\frac{h}{6}(h+1)(2h+1)$$

这个公式是沈括公式的特例。

沈括之后，印度和欧洲的数学著作中才有了类似的研究，西洋书中的所谓“积弹”就是研究这方面问题。微积分的创始人之一，德国数学家莱布尼兹曾在他的工作中运用高阶等差级数计算立方数，这已比我国迟了近四百年。

二、元代朱世杰的“招差求”

招差求就是现代数学中所谓的逐差法。在中国谈到“招

差术”是和朱世杰的名字分不开的。朱世杰是我国元朝一位著名的数学家，他“周游湖海”二十余年传播数学知识，还是中国第一位名副其实的数学教育家。他在沈括和南宋杨辉等人研究的基础上，把宋元数学家高阶等差级数求和法向前推进一大步。朱世杰推进了郭守敬等人在“招差术”方面的工作，在中国数学史上第一次推出了和牛顿公式完全一样的招差公式，使招差术更加完备。他还十分注意数学与科学实践相结合，在他的数学著作《四元玉鉴》中，将招差术应用来计算天文、历法和垛积。在欧洲，英国天文学家格里高利最先对招差法作了说明，直到十七世纪，牛顿才在他的数学著作中出现了招差法的一般公式（贝§2牛顿定理），这充分说明朱世杰对数学科学的贡献之大。

如前所述，垛积问题亦就是高阶等差级数的求和问题。从朱世杰的级数求和工作中，可以总结出许多很有价值的公式，这些公式用现代数学符号来记写相当于

茭草积

$$1+2+3+\cdots+n=\sum_{k=1}^{n} k=\frac{1}{2!}n(n+1)$$

$$=\frac{1}{2!}(n+1)^{(2)}$$

三角垛

$$1+3+6+\cdots+\frac{1}{2!}n(n+1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2!}k(k+1)$$

$$=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)=\frac{1}{3!}(n+2)^{(3)}$$

撒星形垛

$$1+4+10+\cdots+\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3!}k(k+1)(k+2)$$

$$=\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$=\frac{1}{4!}(n+3)^{(4)}$$

三角撒星形垛

$$1+5+15+35+\cdots+\frac{1}{4!}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4!}k(k+1)(k+2)(k+3)$$

$$=\frac{1}{5!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$=\frac{1}{5!}(n+4)^{(5)}$$

三角撒星更落一形垛

$$1+6+21+56+\cdots+\frac{1}{5!}n$$

$$(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{5!}k(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)$$

$$=\frac{1}{6!}n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)$$

$$=\frac{1}{6!}(n+5)^{(6)}$$

以上这五个公式，又可以概括起来，成为下面更一般的形式

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p!}k(k+1)(k+2)\cdots(k+p-1)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)\cdots(n+p)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}(n+p)^{(p+1)} \qquad (5-7)$$

当其中的部分别等于1、2、3、4、5时，即可由（5—7）依次得出上述五个公式。公式（5—7）通过称之为“三角垛”公式。只要仔细观察一下上面的各个级数的一般项与和式表达式的特点，就会发现很有趣的现象，就是众“三角垛”公式中前面一个公式的求和结果，恰好是后面一个公式的一般项。换言之，后式中的一般项刚好是前式中的前儿项之和。下面用差分法验证（5—7）。

〔**例 1**〕求级数$I_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{p!}k(k+1)(k+2)\cdots(k+p-1)$的和。

解： $\frac{1}{p!}k(k+1)(k+2)\cdots(k+p-1)$

$$=\frac{1}{p!}(k+p-1)^{(p)}$$

利用公式 9 （见<表 3 >）

$$I_n=\int_1^{n+1}\frac{1}{p!}(k+p-1)^{(p)}\Delta k$$

$$=\frac{1}{p!}\left.\frac{(k+p-1)^{(p+1)}}{P+1}\right|_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}〔(k+p-1)(k+p-2)\cdots(k+1)k$$

$$(k-1)〕_1^{n+1}$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}n(n+1)(n+2)\cdots(n+p)$$

$$=\frac{1}{(p+1)!}(n+p)^{(p+1)}$$

这就是公式（5—7）

下面我们讨论高阶等差级数和几何级数的混合级数的求和问题，这比前例更复杂一些。

〔**例 2**〕求级数$S_p=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{p!}k(k+1)\cdots(k+p)x^{k-1}$

的和。

解：当$p=0$时，$p!=1$

$$S_0 = 1 + x + x^2 + \cdots + x^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1}$$

当$p = 1$、2、3时，分别有

$$S_1 = 1 + 2x + 3x^2 + \cdots + nx^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} k \cdot x^{k-1}$$

$$S_2 = 1 + 3x + 6x^2 + \cdots + \frac{1}{2!} n(n+1) x^{n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{2!} x^{k-1}$$

$$S_3 = 1 + 4x + 10x^2 + \cdots + \frac{1}{3!} n(n+1)(n+2) x^{n-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{k(k+1)}{3!} x^{k-1}$$

当$x = 1$，Sp就是“三角垛”公式。设$x \neq 1$。

下面我们求S_1，S_2的和，具体计算S_1，S_2的步骤如下：

$$S_1 = \sum_{k=1}^{n} kx^{n-1} = \int_1^{n+1} k \cdot x^{k-1} \Delta k = \frac{1}{x} \int_1^{n+1} k \cdot x^k \Delta k$$

类似§3例3的解法，应用分部和分公式

$$\int kx^k \Delta k = \frac{kx^k}{x-1} - \frac{x}{(x-1)^2} x^k + c$$

所以 $$\int_1^{n+1} k \cdot x^k \Delta k = \frac{kx^k}{x-1}\Bigg|_1^{n+1} - \frac{x}{(x-1)^2} x^k \Bigg|_1^{n+1}$$

$$= \frac{x}{x-1}\left[(n+1)x^n - 1\right] - \frac{x}{(x-1)^2}(x^{n+1} - x)$$

代入原式

$$S_1 = \frac{1}{x}\left\{\frac{x}{x-1}\left[(n+1)x^n - 1\right] - \frac{x}{(x-1)^2}(x^{n+1} - x)\right\}$$

$$\therefore \quad S_1 = \frac{1}{(x-1)^2}\left[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right] \quad (\text{当} |x| > 1) \text{ 或}$$

$$S_1 = \frac{1}{(1-x)^2}\left[nx^{n+1} - (n+1)x^n + 1\right] \quad (\text{当} |x| < 1)$$

再求S_2

$$S_2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2!} k(k+1) \; x^{k-1}$$

$$= \frac{1}{2x}\sum_{k=1}^{n} (k + k^2)x^k = \frac{1}{2x}\int_1^{n+1} k^2 x^k \; \Delta k + \frac{1}{2x} \cdot$$

$$\int_1^{n+1} k x^k \Delta k$$

$$\because k^2 = k + k^{(2)}$$

$$\therefore \quad S_2 = \frac{1}{2x}\int_1^{n+1} k x^k \Delta k + \frac{1}{2x}\int_1^{n+1} k \cdot x^k \Delta k + \frac{1}{2x} \cdot$$

$$\int_1^{n+1} k^{(2)} x^k \Delta k$$

$$= \frac{1}{x} I_1 + \frac{1}{2x} I_2 \text{ 其中}$$

$$I_1 = \int_1^{n+1} kx^k\Delta k \;;\; I_2 = \int_1^{n+1} k^{(2)}x^k\Delta k$$

由前面计算已知

$$I_1 = \frac{x}{x-1}[(n+1)x^n - 1] - \frac{x}{(x-1)^2}(x^{n+1} - x)$$

再求I_2.设$U_k = k^{(2)}$，$x^k\Delta k = \Delta V_k$

$$\Delta U_k = 2k^{(1)}\Delta k,\ V_k = \frac{x^k}{x-1},\ V_{k+1} = \frac{x\cdot x^k}{x-1}$$

$$\therefore I_2 = k^{(2)}\frac{x^k}{x-1}\Big|_1^{n+1} - \int_1^{n+1}\frac{x\cdot x^k}{x-1}2k\Delta k$$

$$= n(n+1)\frac{x^{n+1}}{x-1} - \frac{2x}{x-1}I_1$$

$$S_2 = \frac{1}{x}I_1 + \frac{1}{2x}\left[n(n+1)\frac{x^{n+1}}{x-1} - \frac{2x}{x-1}I_1\right]$$

$$= \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1}\right)I_1 + \frac{1}{2}n(n+1)\frac{x^n}{x-1}$$

$$= \frac{(-1)}{x(x-1)}\left\{\frac{x}{x-1}[(n+1)x^n - 1] - \frac{x}{(x-1)^2}\right.$$

$$\left.(x^{n+1} - x)\right\} + \frac{1}{2}n(n+1)\frac{x^n}{x-1}$$

$$= \frac{(-1)}{x-1}\left\{\frac{1}{(x-1)^2}[(nx^n + x^n - 1)(x-1) - x^{n+1}\right.$$

$$\left.+ x]\right\} + \frac{1}{2}n(n+1)\frac{x^n}{x-1}$$

$$= \frac{1}{(1-x)^3}\left[nx^{n+1}-(n+1)x^n+1\right]-\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$\frac{x^n}{1-x}\quad(|x|<1)$$

朱世杰将数学理论的研究紧密结合社会实践中的问题。如《四元玉鉴》中“如象招门”一栏共有五个实际问题，都与“招差术”有关。例如其中的招兵问题：“或问……依立方招兵，初招方面三尺，次招方面转多一尺，……今招十五日，每人日支钱二百五十文，问招兵及支钱各几何？”求招兵数就是求级数

$$3^3+4^3+\cdots+(3+n)^3$$

的和。更一般地考虑问题，当a、b是常数时，立方招兵问题是求级数

$$S_1=a^3+(a+1\cdot b)^3+(a+2b)^3+\cdots+[a+(n-1)b]^3 \tag{5—8}$$

的和，招兵支钱是求级数

$$S_2=na^3+(n-1)(a+b)^3+(n-2)(a+2b)^3+\cdots+1\cdot[a+(n-1)b]^3 \tag{5—9}$$

的和，我们仅讨论下面的例子。

〔**例 3**〕求级数$S_n=\sum\limits_{k=0}^{n-1}(a+kb)^3$的和。

解：

$$(a+kb)^3=a^3+3a^2bk+3ab^2k^2+b^3k^3.$$

利用列有stirling数的（表 1）

$$k=k^{(1)},\quad k^2=k^{(1)}+k^{(2)},\quad k^3=k^{(1)}+3k^{(2)}+k^{(3)}$$

代入上式

$$(a+kb)^3=[a^3+(3ab^2+3ab^2+b^3)k^{(1)}$$
$$+(3ab^2+3b^3)k^{(2)}+b^3k^{(3)}]$$

$$\therefore S_n=\sum_{k=0}^{n-1}(a+kb)^3$$

$$=\int_0^n[a^3+(3a^2b+3ab^2+b^3)k^{(1)}+(3ab^2+3b^3)$$
$$k^{(2)}+b^3k^{(3)}]\Delta k$$

$$=a^3k\Big|_0^n+(3a^2b+3ab^2+b^3)\frac{k^{(2)}}{2}\Big|_0^n+(3ab^2+3b^3)$$
$$\frac{k^{(3)}}{3}\Big|_0^n+\frac{b^3}{4}k^{(4)}\Big|_0^n$$

$$=a^3n+\frac{1}{2}n(n-1)\ (3a^2b+3ab^2+b^3)+\frac{1}{3}n(n-1)$$
$$(n-2)\ (3ab^2+3b^3)+\frac{b^3}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$=na^3+\frac{1}{2}(3a^2b+3ab^2+b^3)n(n-1)+(ab^2+b^3)$$
$$n(n-1)(n-2)+\frac{b^3}{4}n(n-1)(n-2)(n-3)$$

$$(5-10)$$

特别地，当$n=15$，$a=3$，$b=1$时

$$S_{15}=3^3+4^3+5^3+\cdots+16^3+17^3=15\left[3^3+\frac{1}{2}\times 37\right.$$

$$\left.\times 14+4\times 14\times 13+\frac{1}{4}\times 14\times 13\times 12\right]$$

$$=15[27+259+728+546]=23400(\text{人})。$$

这就是前面提到的朱世杰在《四元玉鉴》中按立方招兵十五日具体招兵总数。

除"三角垛"公式外，朱世杰还得到下面更复杂的级数求和公式：

$$\sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{1}{p!}k(k+1)\cdots(k+p-1)=\frac{1}{(p+2)!}n$$

$$(n+1)\cdots(n+p)[(p+1)n+1] \qquad (5-11)$$

即以项数乘以"三角垛"公式的一般项做为上述级数的一般项，他称之为"岚峰形垛"。这个求和公式仍然可以用差分法验证，详细步骤留给读者补充。

三、无穷级数求和

整个数学分析中，对于已给的数项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n=a_0+a_1+a_2+\cdots+a_n+\cdots$$

我们是在部分和的极限

$$A=\lim_{n\to\infty} A_n$$

（其中$A_n=a_0+a_1+\cdots+a_{n-1}$）存在并且有限（或者等于有确定符号的无穷大）的假设之下，用该极限作为无穷级数的和。问题是给出一个无穷级数，怎样去求它的部分和？讨论和研究无穷级数的部分和问题，无论在近似计算还是对级数理论本身都有基本的意义。下面我们通过具体例子来说明如何用差分方法去求无穷级数的部分和，然后再通过极限步骤求出无穷级数的和。

〔**例 4**〕求无穷级数$I=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}$的和。

解：其部分和的表达式为

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}=\int_1^{n+1}2^{-k}\operatorname{tg}2^{-k}x\Delta k$$

由于$\Delta 2^{-(k-1)}\operatorname{ctg}2^{-(k-)}x=2^{-k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}$（参看习题一第一题(8)）

$$\therefore\int_1^{n+1}2^{-k}\operatorname{tg}2^{-k}x\Delta k=2^{-(k-1)}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^{k-1}}\Bigg|_1^{n+1}$$

$$=2^{-n}\operatorname{ctg}\frac{x}{2^n}-\operatorname{ctg}x$$

$$=\frac{1}{2^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}}-\operatorname{ctg}x$$

回到无穷级数有

$$I=\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2^n\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}}-\operatorname{ctg}x\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{x}\left(\frac{x}{2^n}\right)}{\operatorname{tg}\frac{x}{2^n}}-\lim_{n\to\infty}\operatorname{ctg}x$$

$$=\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x\quad(x\neq n\pi)$$

故无穷级数的和为

$$I=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\operatorname{tg}\frac{x}{2^k}=\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}x(x\neq n\pi)$$

〔**例 5**〕求无穷级数$I=\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{2^k}$的和。

解：由比值审敛法容易判定该级数是收敛的。其部分和表达式为

$$I_n=\sum_{k=1}^{n}(2k-1)2^{-k}=\int_1^{n+1}(2k-1)2^{-k}\Delta k$$

设$U_k=2k-1\qquad \Delta V_k=2^{-k}\Delta k$

$\Delta U_k=2\Delta k\qquad V_k=-2^{-(k-1)}\qquad V_{k+1}=-2^{-k}$

$$\therefore I_n=-(2k-1)2^{-(k-1)}\Big|_1^{n+1}+2\int_1^{n+1}2^{-k}\Delta k$$

$$= -(2n+1)2^{-n} + 1 - 2\cdot 2^{-(k-1)} \Big|_{1}^{n+1}$$

$$= 1 - \frac{2n+1}{2^n} + 2\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$$

$$= 3 - \frac{2n+3}{2^n}$$

$$I = \lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty}\left(3 - \frac{2n+3}{2^n}\right) = 3$$

〔**例 6**〕求级 数$I = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2k-1}{2^k} x^{2k-2}$的和

$(|X| < \sqrt{2})$.

这个题是高等数学函数项级数求和题目中布置的一道习题，在那里级数求和要用到一致收敛的概念，并使用逐项积分的方法才能求出I之值。现在我们用和例 5 类似的步 骤 也容易求出该无穷级数之和。

解：

设 $\gamma = \frac{x^2}{2}$, $|\gamma| = \frac{|x|^2}{2} < 1$.

$$I_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)\frac{x^{2k-2}}{2^k} = \frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\left(\frac{x^2}{2}\right)^k$$

$$= \frac{1}{x^2}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)\gamma^k = \frac{1}{x^2}\int_1^{n+1}(2k-1)\gamma^k \Delta k$$

用和例5完全相同的方法知道

$$\int_1^{n+1}(2k-1)\gamma^k\Delta k=(2k-1)\frac{\gamma^k}{\gamma-1}\Big|_1^{n+1}-2\int_1^{n+1}\frac{\gamma^{k+1}}{\gamma-1}\Delta k$$

$$=(2n+1)\frac{\gamma^{n+1}}{\gamma-1}-\frac{\gamma}{\gamma-1}-\frac{2\gamma}{(\gamma-1)^2}\gamma^k\Big|_1^{n+1}$$

$$=(2n+1)\frac{\gamma^{n+1}}{\gamma-1}-\frac{\gamma}{\gamma-1}-\frac{2\gamma}{(\gamma-1)^2}(\gamma^{n+1}-\gamma)$$

$$=\frac{(2n+1)\gamma^{n+1}-\gamma}{\gamma-1}-\frac{2\gamma^2}{(\gamma-1)^2}(\gamma^n-1)$$

将 $\gamma=\frac{x^2}{2}$代入I_n

$$I_n=\frac{1}{x^2}\int_1^{n+1}(2k-1)(\frac{x^2}{2})\Delta^k k$$

$$=\frac{1}{x^2}\left\{\frac{(2n+1)(\frac{x^2}{2})^{n+1}-(\frac{x^2}{2})}{\frac{x^2-2}{2}}-\frac{\frac{x^4}{2}[(\frac{x^2}{2})^n-1]}{\frac{(x^2-2)^2}{4}}\right\}$$

$$\therefore I=\lim_{n\to\infty}I_n=\frac{1}{x^2}\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{2(2n+1)(\frac{x^2}{2})^{n+1}-x^2}{x^2-2}-\frac{2x^4[(\frac{x^2}{2})^n-1]}{(x^2-2)^2}\right\}$$

由于题设$\left|\dfrac{x^2}{2}\right|<1$，分别计算括号内两项当$n\to\infty$时的极限，有

$$I=\frac{1}{x^2}\left(\frac{2x^4}{(x^2-2)^2}-\frac{x^2}{x^2-2}\right)$$

$$=\frac{2x^2}{(x^2-2)^2}-\frac{1}{x^2-2}$$

$$\therefore I=\frac{x^2+2}{(x^2-2)^2}=\frac{x^2+2}{(2-x^2)^2}\qquad(|x|<\sqrt{2})$$

特别地，当$x=1$时（将$x=1$代入上式）

$$I\Big|_{x=1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2k-1}{2^k}=\frac{1^2+2}{(2-1^2)^2}=3$$

这就是〔例5〕中的结果。读者还可以从其它一些高等数学习题集中选些题目做为练习。

数学家华罗庚教授主张在学习微分以前学习一点差分，在学习微分方程以前学习一点差分方程，把后者视为前者的极限。用差分方法解决无穷级数求和问题表明，高等数学中某些需要较深知识的内容如何用更初等的办法去解决，这样做是符合培养学生学习能力的要求的。当然，差分方法和其它许多数学方法一样也有它的局限性，但是学好这部分内容有助于微积分知识的掌握则是肯定无疑的。

习　题　五

一、证明：

(1) $\sum\limits_{j=1}^{n} j(j+1)^2 = \frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)$;

(2) $\cos\frac{\pi}{2n+1} + \cos\frac{3\pi}{2n+1} + \cos\frac{5\pi}{2n+1} + \cdots$

$+ \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n+1} = \frac{1}{2}$;

(3) (朱世杰:《岚峰形垛》)

$$S_p = \sum_{k=1}^{n} k\cdot\frac{1}{p!}k(k+1)\cdots(k+p-1)$$

$$= \frac{1}{(p+2)!}n(n+1)\cdots(n+p)[(p+1)n+1].$$

(见公式 5—11)

二、求证:

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{4n^2-1} = \frac{1}{2}$;

(2) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}(|X|<1)$;

(3) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2!}k(k+1)x^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^3}(|X|<1)$;

（4）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$；

（5）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{4}$。

三、证明下列等式成立：

（1）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{4}$；

（2）$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{arc\,tg} \frac{1}{n^2+n+1} = \frac{1}{4}$。

附录 习题答案与提示

习 题 一

一、

（1）$12x^3+18x^2+12x+3$;

（2）$\dfrac{\sin 1}{\cos(x+1)\cos x}$;

（3）$a^x(a-1)$,

（4）$4x(x-1)(x-2)$,

（5）$\arcsin\left[(x+1)\sqrt{1-x^2}-x\sqrt{1-(x+1)^2}\right]$;

（6）$4(x+1)(x+2)(x+3)$,

（7）$\ln\dfrac{\sin(x+1)}{\sin x}$;

（8）$\Delta[2^{-(x-1)}\mathrm{ctg}2^{-(x-1)}\theta]$

$$=2^{-x}\,\mathrm{ctg}\frac{\theta}{2^x}-2^{-(x-1)}\mathrm{ctg}2^{-(x-1)}\theta$$

$$=\frac{2^{-x}}{\mathrm{tg}\frac{\theta}{2^x}}-\frac{2^{-x+1}}{\mathrm{tg}\frac{2\theta}{2^x}}$$

$$=\frac{1}{2^x\,\mathrm{tg}\frac{\theta}{2^x}}-\frac{2(1-\mathrm{tg}^2\frac{\theta}{2^x})}{2^x\cdot 2\cdot\mathrm{tg}\frac{\theta}{2^x}}$$

$$=\frac{1}{2^x\ \mathrm{tg}\frac{\theta}{2^x}}\left[1-1+\mathrm{tg}^2\ \frac{\theta}{2^x}\right]$$

$$=2^{-x}\ \mathrm{tg}\frac{\theta}{2^x}.$$

二、（1）$\Delta x^n=(x+1)^n-x^n$

$$=nx^{n-1}+\ C_n^2x^{n-2}+\cdots\ +\ C_n^{n-1}x+1$$

$$=nx^{n-1}+\text{次数低于}\ (n-1)\ \text{各项}$$

由上式看出，每作一次差分运算，多项式之次数必降低一次，但其最高次项的系数也增加一因数。呈现$n(n-1)(n-2)\cdots$之形式。如此作n次差分，次数降为零次而系数共含n个因数，即有$\Delta^n x^n=n!$。

（2）从略。

三、$U_x=2^x$。

四、

（1）$2x(x+2)\cdot 3^x$；

（2）$\dfrac{-3}{x(x+1)(x+2)(x+3)}$；

（3）$\dfrac{-\sin 2}{\sin 2x\ \sin(2x+2)}$；

（4）$2ax+(a+b)$。

五、

（1）$\dfrac{x(x-1)}{2}$；

（2）$\dfrac{x(x-1)}{2}+\dfrac{x(x-1)(x-2)}{3}=\dfrac{1}{6}x(x-1)(2x-1)$

（3）$\dfrac{a^x}{a-1}$；

（4）$\dfrac{e^{a+bx}}{e^b-1}$．

六、

（1）$\Delta(-\mathrm{ctg}2^{x-1}\theta)$

$$=-\mathrm{ctg}2^x\theta+\mathrm{ctg}2^{x-1}\theta.$$

$$=\mathrm{ctg}\,\frac{2^x\theta}{2}-\mathrm{ctg}2^x\theta.$$

$$=\frac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{2^x\theta}{2}}-\frac{1}{\mathrm{tg}2^x\theta}$$

$$=\frac{1}{\mathrm{tg}\dfrac{2^x\theta}{2}}-\frac{1-\mathrm{tg}^2\dfrac{2^x\theta}{2}}{2\mathrm{tg}\dfrac{2^x\theta}{2}}$$

$$=\frac{\sec^2\dfrac{2^x\theta}{2}}{2\mathrm{tg}\dfrac{2^x\theta}{2}}=\frac{1}{2\cdot\cos\dfrac{2^x\theta}{2}\sin\dfrac{2^x\theta}{2}}=\frac{1}{\sin2^x\theta}$$

$=\csc2^x\theta=$ 右．证毕

其余从略．

七、（1）二阶；

（2）二阶；

（3）三阶。

习 题 二

一、$U_x=\frac{1}{6}(18+31x+30x^2+5x^3)$。

二、$U_9=792$，$U_x=7x+x^3$。

三、四、五、（从略）

六、$n=9$时 *stirling*数为

$\delta_1^9=1$，$\delta_2^9=255$，$\delta_3^9=3025$，$\delta_4^9=7770$，$\delta_5^9=6951$，

$\delta_6^9=2646$，$\delta_7^9=462$，$\delta_8^9=36$，$\delta_9^9=1$。

七、$x^5-3x^3+x=-x^{(1)}+6x^{(2)}\propto 22x^{(3)}+10x^{(4)}$
$+x^{(5)}$。

八、$f(x)=5+x^{(2)}+x^{(3)}$。

九、提示：利用数学的归纳法（从略）

习 题 三

一、

（1）$x^3=x^{(1)}+3x^{(2)}+x^{(3)}$，

$$\int x^3\Delta x=\int(x^{(1)}+3x^{(2)}+x^{(3)})\Delta x=\frac{1}{2}x^{(2)}$$

$$+x^{(3)}+\frac{1}{4}x^{(4)}+c;$$

（2）$x^3-2x+x+5=5+x^{(2)}+x^{(3)}$，

$$\int(x^3-2x+x+5)\Delta x=\int[5+x^{(2)}+x^{(3)}]\Delta x$$

$$=5x+\frac{x^{(3)}}{3}+\frac{x^{(4)}}{4}+c;$$

（3） 令$x=[(x+1)-1]$,

$$x(x+2)(x+3)=(x+3)^{(3)}-(x+3)^{(2)},$$

$$\therefore \int x(x+2)(x+3)\Delta x=\int[(x+3)^{(3)}-(x+3)^{(2)}]\Delta x$$

$$\int=(x+3)^{(3)}\Delta x-\int(x+3)^{(2)}\Delta x=\frac{1}{4}(x+3)^{(4)}-$$

$$\frac{1}{3}(x+3)^{(3)}+c。$$

二、$\dfrac{1}{(2x-1)(2x+1)(2x+3)}=(2x-3)^{(-3)}$,

$$\int(2x-3)^{(-3)}\Delta x=-\frac{1}{4}(2x-3)^{(-2)}+c。$$

三、$1+2+\cdots+k=\dfrac{1}{2}k(k+1)$,

$\displaystyle\int\frac{\Delta k}{1+2+\cdots+k}=\int\frac{2\Delta k}{k(k+1)}=-\frac{2}{k}+c$（利用表 3 公式 2）。

四、（1） $\begin{cases}a+\dfrac{b}{2}=3\\ b=2\end{cases}$ $\quad a=2\quad$ 利用表 3 公式13

所以 $\displaystyle\int\sin(3+2x)\Delta x=-\frac{\cos(2+2x)}{2\sin1}+c$。

（2）因为$\sin^2(a+bx)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos(2a+2bx)$，

$$\int \sin^2(a+bx)\Delta x=\int \frac{1}{2}\Delta x-\frac{1}{2}\int \cos(2a+2bx)\Delta x$$

$$=\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}\ \frac{\sin(2a-b+2bx)}{2\sin b}+c$$

$$=\frac{x}{2}-\frac{1}{4}\ \frac{\sin(2a-b+2bx)}{\sin b}+c。$$

(利用公式12)

（3）$\cos^2(a+bx)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cos(2a+2bx)$类似(2)题

$$\int \cos(2a+2bx)\Delta x=\frac{\sin(2a-b+2bx)}{2\sin b}+c_1,$$

所以$\int \cos^2(a+bx)\Delta x=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}\ \frac{\sin(2a-b+2bx)}{\sin b}+c$。

$$(c=\frac{1}{2}c_1)$$

五、提示：类似§3不定和分性质2的证明方法。

六、（从略）

习　题　四

一、

（1）$\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$；

（2）提示：$n^4=n^{(1)}+7n^{(2)}+6n^{(3)}+n^{(4)}$，

$$\sum_{k=1}^{n}k^4=\int_1^{n+1}k^4\Delta k=\int_1^{n+1}(k^{(1)}+7k^{(2)}+6k^{(3)}+k^{(4)})\Delta k,$$

然后分别求四个定和分。

答：$\frac{1}{30}n(n+1)(2n+1)(3n^2+3n-1)$ 。

（3）$\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\sin(\varphi+\frac{n}{2}\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$

（4）$\dfrac{\sin\frac{n+1}{2}\alpha\cos(\varphi+\frac{n}{2}\alpha)}{\sin\frac{\alpha}{2}}$；

（5）$\dfrac{1}{2}\dfrac{\sin 2nx}{\sin x}$；

（6）提示：考虑

$$\frac{1}{k(k+1)(k+3)}=(k+2)\cdot(k-1)^{(-4)}$$

然后用分部法求和分

$$\int_1^{n+1}(k+2)(k-1)^{(-4)}\Delta k\text{（设}U_k=k+2,\ \Delta V_k=(k-1)^{(-4)}\Delta k\text{）}$$

（7）$U_k=12+28x^{(1)}+11\cdot x^{(2)}+x^{(3)}$

$$\sum_{x=0}^{n-1} U_x = \int_0^{n+1} U_x \Delta x = \int_0^{n+1} [12 + 28x^{(1)} + 11x^{(2)}$$

$$+ x^{(3)}]\Delta x$$

$$= 12(n+1) + 14(n+1)\cdot n + \frac{11}{3}(n+1)\cdot n(n-1) +$$

$$\frac{1}{4}(n+1)n(n-1)(n-2)$$

$$= (n+1)[12 + 14n + \frac{11}{3}n(n-1) + \frac{1}{4}n(n-1)$$

$$(n-2)]$$

二、（4）由§3〔例5〕知　使 $\Delta V_x = x^2(n-x)^2$ 成立的函数 V_x 应为

$$\frac{1}{60}x(x-1)[30(n-1)^2 + 20(n^2-6n+7)(x-2)$$

$$+ 15(6-2n)(x-2)(x-3) + 12(x-2)(x-3)$$

$$(x-4)]$$

从而

$$\sum_{k=1}^{n-1} x^2(n-x)^2 = \int_1^n x^2(n-x)^2 \Delta x = V_x \Big|_1^n = V_n - V_1$$

$$= \Big\{\frac{1}{60}x(x-1)[30(n-1)^2 + 20(n^2-6n+7)(x-2)$$

$$+ 15(6-2n)(x-2)(x-3) + 12(x-2)(x-3$$

$$(x-4)]\Big\}\Big|_1^n$$

$$=\frac{1}{60}n(n-1)[30n^2-60n+30+20n^3-160n^2+380n$$

$$-280-30n^3+390n^2-630n+540+12n^3-108n^2$$

$$+312n-288]$$

$$=\frac{1}{60}n(n-1)[2n^3+2n^2+2n+2]$$

$$=\frac{1}{30}n(n^4-1)$$

$=\frac{1}{30}(n^5-n)$，左＝右.证毕.

三、（1）用〈表3〉中公式.

答：$-\frac{1}{2}$.

（2）

用（表3）中公式.

因为$\frac{1}{(5k-2)(5k+3)}=(5k-7)^{(-2)}$

$$\sum_{k=1}^{n}(5k-2)^{(-2)}=\int_{1}^{n+1}(5k-7)^{(-2)}\Delta k$$

应用（表3）中公式9（$n=-2$，$a=-7$，$b=5$）

$$\int_{1}^{n+1}(5k-2)^{(-2)}\Delta k$$

$$=\frac{1}{(-5)}(5k-7)^{(-1)}\Big|_{1}^{n+1}=\frac{1}{(-5)}\quad\frac{1}{5k-2}\Big|_{1}^{n+1}$$

$$= -\frac{1}{5}\left(\frac{1}{5n+3}-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{5}\ \frac{-5n}{3(5n+3)}$$

$$= \frac{n}{3(5n+3)}.$$

（3）可 设$V_x = \frac{f(x)}{x+1}\cdot 2^x$（其中$f(x)$是一个$x$的待定有理整函数）而用待定法知

$$f(x) = k = 1,\quad V_x = \frac{2^x}{x+1}\quad (k\text{—常数})$$

所以 $$\sum_{x=1}^{n}\frac{x\cdot 2^x}{(x+1)(x+2)} = \int_1^{n+1}\frac{x\cdot 2^x}{(x+1)(x+2)}\Delta x$$

$$= \frac{2^x}{x+1}\Big|_1^{n+1}$$

$$= \frac{2^{n+1}}{n+2} - 1$$

（4） 可 设 $V_x = \frac{f(x)}{(x+1)!}$（$f(x)$ $-x$的待定有理整函数）

而用待定法知

$f(x) = kx + b$.（k.b.是待定常数）代入可定出：

$f(x) = -x + 0 = -x$

$$V_x = \frac{-x}{(x+1)!}$$

$$\therefore \sum_{x=1}^{n} \frac{x^2+x-1}{(x+2)!} = \int_1^{n+1} \frac{x^2+x-1}{(x+2)!}\Delta x = \frac{-x}{(x+1)!}\Bigg|_1^{n+1}$$

$$= \frac{-(n+1)}{(n+2)!} + \frac{1}{2!} = \frac{1}{2} - \frac{1}{(n+2)\cdot n!}$$

（5）提示：可用两种方法：

1°用阶乘函数表达式：

$$\frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = (3i-5)^{(-2)}$$

查（表3）公式9。

2°求函数$\frac{U_i}{V_i}$使 $\Delta\left(\frac{U_i}{V_i}\right) = \frac{1}{(3i-2)(3i+1)}$

（6）提示：直接应用公式12（表3）

答：$\frac{1}{2} + \frac{\cos\frac{n+1}{2}t\sin\frac{n}{2}t}{\sin\frac{t}{2}}$

五、（从略）

习 题 五

一、（1）因为$j(j+1)^2 = j(j+1)[(j+2)-1]$

$$= (j+2)^{(3)} - (j+1)^{(2)}$$

所以定和分 $\sum_{j=1}^{n} j(j+1)^2 = \int_1^{n+1} [(j+2)^{(3)} -$

$(j+1)^{(2)}]\Delta j$

$$=\frac{1}{4}(j+2)^{(4)}\Big|_{1}^{n+1}-\frac{1}{3}(j+1)^{(3)}\Big|_{1}^{n+1}$$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

$$=\frac{1}{12}n(n+1)(n+2)(3n+5)\ 左=右$$

证毕。

（2）从略

（3）令$k=(k+p)-p$.

$$k\cdot\frac{1}{p!}k(k+1)\cdots(k+p-1)=\frac{1}{p!}[(k+p)^{(p+1)}-p(k+p-1)^{(p)}]$$

$$=\frac{1}{p!}(k+p)^{(p+1)}-\frac{1}{(p-1)!}(k+p-1)^{(p)}$$

代入原和式分别计算两个和分。

二、三、（从略）。

封面设计：里 玉

统一书号：7202·81
定　　价：0.46 元